

**"UM ESTUDO DA FORMULAÇÃO DE MODELOS
CONSTITUTIVOS VISCOELÁSTICOS E ELASTO-
VISCOPLÁSTICOS E DO EMPREGO DE ALGORITMOS
IMPLÍCITOS E EXPLÍCITOS PARA A SUA
INTEGRAÇÃO NUMÉRICA"**

JORGE MUNAIAR NETO

*Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos,
da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para
a obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Estruturas.*

ORIENTADOR: Prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença

São Carlos

1998

Aos meus pais e à minha esposa,

apoio e presença sempre constantes na elaboração desse trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Sérgio Persival Baroncini Proença pela ótima orientação e pelo constante companheirismo durante a elaboração desse trabalho.

À minha família e minha esposa, pelo apoio sempre presente durante a elaboração desse trabalho.

À secretária Rosi Ap. Jordão Rodrigues e à bibliotecária Maria Nadir Mitanel, pela constante atenção e serviços prestados.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela bolsa de estudo concedida.

Aos integrantes da Comissão de Informática e a todos os demais professores, colegas e funcionários desse departamento, pelo apoio e pela amizade.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	<i>i</i>
LISTA DE TABELAS	<i>ii</i>
LISTA DE SÍMBOLOS	<i>iii</i>
RESUMO	<i>iv</i>
ABSTRACT	<i>v</i>
1 INTRODUÇÃO AO TRABALHO - OBJETIVOS GERAIS	<i>01</i>
2 A PLASTICIDADE COM BASE NA MICROESTRUTURA DOS	
MATERIAIS - UMA BREVE ABORDAGEM	<i>06</i>
2.1 Metais ou ligas	<i>07</i>
2.1.1 Mecanismos de deformação	<i>08</i>
2.1.2 Mecanismos de Ruptura	<i>09</i>
2.2 O concreto - uma breve abordagem	<i>10</i>
3 OS PRINCÍPIOS GERAIS DA TERMODINÂMICA E O MÉTODO DO	
ESTADO LOCAL	<i>11</i>
3.1 Primeira lei da termodinâmica - balanço de energia	<i>12</i>
3.2 Segunda lei da termodinâmica e inequação de Clausius-Duhem	<i>14</i>
3.3 O método do estado local: variáveis de estado, potenciais de energia livre, de dissipação, leis de estado e leis de fluxo	<i>16</i>
3.3.1 Variáveis de estado - observáveis e internas	<i>17</i>
3.3.2 Potencial termodinâmico e leis de estado	<i>17</i>
3.3.3 Potencial dissipativo e leis complementares	<i>19</i>

4	MODELOS DE COMPORTAMENTO ELÁSTICO: A ELASTICIDADE	
	<i>LINEAR E A VISCOELASTICIDADE</i>	22
4.1	Elasticidade linear	22
4.1.1	Domínio de validade e aplicabilidade	22
4.1.2	Formulação termodinâmica	23
4.2	Viscoelasticidade linear	26
4.2.1	Modelo de Kelvin-Voigt - formulação termodinâmica	26
4.2.2	Modelo de Maxwell - formulação termodinâmica	29
5	MODELOS DE COMPORTAMENTO PLÁSTICO - PERFEITO E	
	<i>COM ENCRUAMENTOS ISÓTROPO E CINEMÁTICO</i>	32
5.1	Domínio de validade e sua aplicabilidade	32
5.2	Elementos da teoria da plasticidade	33
5.2.1	Características do modelo uniaxial	33
5.2.2	Crêterios de plastificação	36
5.3	Leis constitutivas via potenciais termodinâmico e dissipativo	39
5.3.1	Potencial termodinâmico - escolha das variáveis	39
5.3.2	Potencial de dissipação	41
6	MODELOS DE COMPORTAMENTO VISCOPLÁSTICO - PERFEITO E	
	<i>COM ENCRUAMENTOS ISÓTROPO E CINEMÁTICO</i>	43
6.1	Domínio de validade e aplicabilidade	43
6.2	Relações constitutivas para a viscoplasticidade via potenciais	
	termodinâmico e dissipativo	44
6.2.1	Formulação multiaxial para viscoplasticidade com encruamento	
	do tipo isótropo	44

6.2.2	Formulação multiaxial para viscoplasticidade com encruamento do tipo cinemático linear.....	49
6.2.3	Formulação multiaxial para viscoplasticidade com encruamento combinado isotrópico/cinemático.....	50
7	<i>DETERMINAÇÃO DE POTENCIAIS TERMODINÂMICO E DISSIPATIVO PARA O MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO</i>	53
7.1	Análise conjunta - trechos elástico e viscoelástico com determinação dos potenciais termodinâmicos e dissipativos	54
7.2	Análise isolada do trecho viscoplástico - determinação dos potenciais termodinâmico e dissipativo	60
7.3	Análise do modelo completo - obtenção dos potenciais termodinâmico e dissipativo e das leis de fluxo	69
8	<i>ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO EM ANÁLISE UNIDIMENSIONAL PARA MODELOS CONSTITUTIVOS VISCOELÁSTICO E ELASTO-VISCOPLÁSTICO</i>	73
8.1	O modelo elasto-viscoplástico com encruamento	73
8.1.1	Integração numérica - Expressões em passo finito	77
8.1.2	Procedimento de previsão e correção para a determinação das expressões de interesse em $n+1$	78
8.1.3	Determinação das expressões de tensão e deformação em $n+1$ com base no estado auxiliar de tensões	80
8.2	Forma incremental de um modelo estendido com encruamento do tipo isotrópico	82

9 UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA	
ANÁLISE DE ESTRUTURAS EM CAMPO UNIDIMENSIONAL	89
9.1 O problema de valor de contorno	89
9.2 O emprego do Método dos Elementos Finitos em problemas de	
valores de contorno	92
9.3 Procedimento para a determinação da expressão do módulo	
algorítmico tangente C_{n+1}	95
9.4 Algoritmo do modelo elasto-viscoplástico com encruamento isótropo	
para a implementação em códigos de cálculo para estruturas de barras	98
9.5 Implementação do algoritmo em código de cálculo de barras e	
análise da resposta numérica	100
10 ESTUDO DA RESPOSTA NUMÉRICA EM REGIMES	
VISCOELÁSTICO E ELASTO-VISCOPLÁSTICO	107
11 PLASTICIDADE E VISCOPLASTICIDADE: UMA GENERALIZAÇÃO	
À ANÁLISE MULTIAXIAL	119
11.1 Expressões da plasticidade clássica (J_2) para análises tridimensional e	
plana de deformação (EPD)	121
11.1.1 Critério de Von Mises (J_2) para plasticidade perfeita	121
11.1.2 Critério de Von Mises (J_2) para plasticidade com encruamento combinado	
isótropo/cinemático	123
11.2 Uma extensão à viscoplasticidade perfeita para o critério de Von Mises (J_2)	125
12 ALGORITMOS VIA PROCEDIMENTO IMPLÍCITO DE INTEGRAÇÃO	
PARA MODELOS DE COMPORTAMENTOS ELÁSTICO,	
VISCOELÁSTICO, PLÁSTICO E VISCOPLÁSTICO	126

12.1 Plasticidade via Mises (J_2) para encruamento combinado: 3-D e EPD	126
12.2 Uma extensão à viscoplasticidade por Von Mises (J_2) para encruamento combinado isotropo/cinemático	133
12.3 O modelo elasto-viscoplástico completo - uma extensão ao comportamento viscoelástico	139
12.4 Expressões gerais para a deformação viscoelástica (expressões de fluxo e na forma incremental)	144
13 ALGORITMO DO MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO COMPLETO: IMPLEMENTAÇÃO EM CÓDIGO DE CÁLCULO E ANÁLISE DA RESPOSTA NUMÉRICA	151
14 CONCLUSÕES FINAIS DO TRABALHO	167
ANEXO 1: COEFICIENTES UTILIZADOS PARA DETERMINAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES VISCOELÁSTICAS VIA LEMAITRE	172
ANEXO 2: COEFICIENTES UTILIZADOS PARA DETERMINAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES VISCOELÁSTICAS VIA SOBOTKA	175
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	179
APÊNDICE 1: SUBROTINAS UTILIZADAS NOS CÓDIGOS DE CÁLCULO PARA ESTRUTURAS DE BARRAS - SIMAB.FOR E SIMAT.FOR	188
APÊNDICE 2: SUBROTINAS UTILIZADAS NO CÓDIGO DE CÁLCULO PARA ANÁLISES PLANAS SIMAP.FOR	191
APÊNDICE 3: DETERMINAÇÃO DA EXPRESSÃO GERAL DO MULTIPLICADOR PLÁSTICO "λ"	196

<i>APÊNDICE 4: DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS " λ e C^p " PARA PLASTICIDADE PERFEITA VIA VON MISES</i>	<i>199</i>
<i>APÊNDICE 5: DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS " λ e C^p " PARA PLASTICIDADE COM ENCRUAMENTO COMBINADO VIA CRITÉRIO DE VON MISES</i>	<i>202</i>
<i>APÊNDICE 6: EXPRESSÕES PARA A TENSÃO E SUA PARCELA DESVIADORA (3-D)- PROCEDIMENTO ALTERNATIVO</i>	<i>208</i>
<i>APÊNDICE 7: DETERMINAÇÃO DAS EXPRESSÕES DE INTERESSE PARA A OBTENÇÃO DO MÓDULO ALGORÍTMICO TANGENTE</i>	<i>212</i>

LISTA DE FIGURAS

i

FIGURA 2.1 - Esquematização do Fenômeno da Discordância	08
FIGURA 5.1 - Representação Gráfica do Critério de Mises	38
FIGURA 5.2 - Representação Gráfica do Critério de Tresca	38
FIGURA 5.3 - Representação Gráfica (3-D) do Encruamento Isótropo	40
FIGURA 5.4 - Representação Gráfica (3-D) do Encruamento Cinemático.....	40
FIGURA 6.1 - Leis Aditiva e Multiplicativa para o Creep	48
FIGURA 7.1 - Modelo Elasto-viscoplástico Completo	53
FIGURA 7.2 - Combinação dos Trechos Elástico e Viscoelástico	55
FIGURA 7.3 - Trecho Viscoplástico - Variáveis Internas	61
FIGURA 7.4 - Creep e Encruamentos Isótropo	63
FIGURA 8.1 - Modelo Reológico Elasto-viscoplástico	74
FIGURA 8.2 - Representação Gráfica (1-D) do Encruamento Isótropo	75
FIGURA 8.3 - Representação Gráfica (1-D) do Encruamento Cinemático.....	76
FIGURA 8.4 - Projeção do Estado Auxiliar de Tensões para o Contorno	79
FIGURA 8.5 - Modelo Elasto-viscoplástico Completo	83
FIGURA 9.1 - Discretização e Elemento de Barra	90
FIGURA 9.2 - Elemento de Barra Tracionado	101
FIGURA 9.3 - Análise dos Esforços na Barra Tracionada	104
FIGURA 9.4 - Treliça Plana composta por 5 barra	104
FIGURA 10.1 - Deformação V-el x Tempo - Viscoelástica (Barra / 1 inc).....	109
FIGURA 10.2 - Deformação V-el x Tempo - Viscoelástica (Barra / 1 inc).....	110
FIGURA 10.3 - Deformação V-el x Tempo - Viscoelástica (Barra / 2 inc).....	111

FIGURA 10.4 - Deformação V-pl x Tempo - Viscoplastica (Barra / 1 inc).....	112
FIGURA 10.5 - Deformação V-pl x Tempo - Viscoelástica (Treliza / 1 inc).....	114
FIGURA 10.6 - Deformação V-pl x Tempo - Viscoelástica (Treliza / 2 inc).....	115
FIGURA 10.7 - Tensão x Deformação Total - Análise Viscoelástica	116
FIGURA 10.8 - Tensão x Deformação Total - Análise Viscoplastica	117
FIGURA 12.1 - Projção Radial - Encruamento Isótropo	127
FIGURA 12.2 - Projção Radial - Encruamento Cinemático	127
FIGURA 13.1 - Cilindro Submetido à Pressão Interna P - An. Viscoplastica	155
FIGURA 13.2 - Cilindro Submetido à Pressão Interna P - An. Viscoelástica	158
FIGURA 13.3a - Deslocamento da Parede Interna do Cilindro	160
FIGURA 13.3b - Deslocamento da Parede Externa do Cilindro	160
FIGURA 13.4 - Ensaio em Corpo de Prova de Concreto - An. Viscoelástica	161
FIGURA 13.5 - Deslocamento Vertical do nó 45 do Corpo de Prova	163
FIGURA 13.6 - Chapa Tracionada - Análise Combinada	164
FIGURA 13.7 - Deformação na Chapa para $\sigma = 120$ bar	166

LISTA DE TABELAS

ii

TABELA 4.1 - Propriedades Elásticas de Alguns Materiais.....	25
TABELA 5.1 - Características Plásticas.....	35
TABELA 9.1 - Resultados da Barra Tracionada - Análise Viscoplastica	102
TABELA 9.2 - Resultados da Barra Tracionada - Análise Viscoelástica	102
TABELA 9.3 - Resultados da Barra Tracionada - Análise Combinada 1	103
TABELA 9.4 - Resultados da Barra Tracionada - Análise Combinada 2	103
TABELA 9.5 - Resultados da Treliza plana - Análise Viscoplastica	105
TABELA 9.6 - Resultados da Treliza plana - Análise Viscoelástica	105
TABELA 9.7 - Resultados da Treliza plana - Análise Combinada 1	106
TABELA 9.8 - Resultados da Treliza plana - Análise Combinada 2	106
TABELA 10.1 - Estudo do Passo de Tempo - Análise Viscoelástica (Barra)	108
TABELA 10.2 - Estudo do Passo de Tempo - Análise Viscoplastica (Barra)	111
TABELA 10.3 - Estudo do Passo de Tempo - Análise Viscoelástica (Treliza)	113
TABELA 13.1 - Deslocamentos da Parede Interna do Cilindro (V-pl)	156
TABELA 13.2 - Deslocamentos do Cilindro (V-el / Proc. Explícito)	159
TABELA 13.3 - Deslocamentos do Cilindro (V-el / Proc. Implícito)	159
TABELA 13.4a - Deslocamentos Vertical do nó 45 (V-el / Proc. Explícito)	162
TABELA 13.4b - Deslocamentos Vertical do nó 45 (V-el / Proc. Implícito)	163
TABELA 13.5a - Deformação na Chapa (Combinada / Proc. Explícito)	165
TABELA 13.5b - Deformação na Chapa (Combinada / Proc. Implícito)	165

LISTA DE SÍMBOLOS

iii

- V : volume representativo de um meio material qualquer de interesse.
- ∂V : contorno que limita o volume de um meio qualquer.
- E, e : energia interna total e energia interna específica por unidade de massa, respectivamente.
- K_c, Q : energia cinética e quantidade calor recebido na região V .
- $r, -q$: densidade volumétrica de calor induzido em um volume V por irradiação e fluxo de calor recebido por condução (de fora para dentro), com relação à uma direção normal ao contorno ∂V .
- P_c, P_i e P_a : potência das carga externas, potência virtual das forças internas e taxa de energia cinemática.
- D_*, ρ : tensor taxa de deformação e massa específica do material.
- S, s : entropia total do sistema e entropia específica por unidade de volume.
- ψ, φ, φ^* : energia específica livre ou potencial termodinâmico e potencial de dissipação e potencial de dissipação na forma dualizada.
- $T, \text{grad}(T)$...: temperatura e seu gradiente.
- $\epsilon, \epsilon^e, \epsilon^p, \epsilon^v$...: deformações total, elástica, plástica e viscosa, nas formas de escalares para análise unidimensional e como tensor para análises multiaxiais.
- $\epsilon^{ve}, \epsilon^{vp}$: deformações viscoelástica e viscoplástica, na forma de escalares para análise unidimensional e como tensores para análises multiaxiais.
- V_k, A_k : forma geral para a representação das variáveis de estado internas e de suas respectivas forças termodinâmicas associadas.
- Φ_1, Φ_2 : parcelas de dissipação intrínseca e dissipação térmica, respectivamente.

$\sigma, \sigma_v, \sigma_e$ tensões total e parcelas viscosa e elástica, na forma de escalares para análise unidimensional e na forma de tensores, para análise multiaxial.

$\epsilon_I, \epsilon_{II}$ primeiro e segundo invariantes do tensor de deformação, respectivamente.

λ, μ, k_b constantes elásticas de Lamé e módulo de compressibilidade volumétrica.

E, G, ν módulos de elasticidade longitudinal e transversal, e coeficiente de Poisson.

I, II tensores identidade de 2a e 4a ordens, respectivamente.

$\text{tr}(\sigma), \text{tr}(\epsilon)$ traço dos tensores de tensão e de deformação, respectivamente.

$\theta_\lambda, \theta_\mu$ coeficientes representativos da viscosidade do material.

η, γ coeficientes de viscosidade e de fluidez, respectivamente.

τ_1^*, τ_2^* coeficientes de calibração, representativos da viscosidade do material.

δ_{ij} delta de Kronecker.

σ_y ou k tensão de escoamento (ou limite elástico) do material.

M_y, K_y expoente de endurecimento e coeficiente de resistência plástica.

M_z, K_z coeficientes de calibração, obtidos de ajuste experimental.

$f(\sigma), \sigma_{eq}$ critério de plastificação e tensão equivalente de Von Mises.

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ tensões principais.

$\sigma_{II}, \sigma_{III}$ invariantes do tensor de tensões.

s_{II}, s_{III} invariantes da parcela desviadora do tensor de tensões.

p deformação plástica (ou viscoplástica) acumulada.

r, α^* variáveis representativas dos encruamentos isótropo (no caso, deformação plástica acumulada) e cinemático, respectivamente.

R, X forças termodinâmicas associadas aos encruamentos isótropo e cinemático.

λ multiplicador plástico (ou viscoplástico), na forma de escalar.

K, H módulo plástico e módulo de encruamento cinemático.

J_2, J_3 : invariantes da parcela desviadora do tensor de tensão.

σ' : parcela desviadora do tensor de tensão.

K_a, K_b, K_c ..: coeficientes experimentais de calibração (para potencial termodinâmico).

N_a, N_b, N_c ..: coeficientes experimentais de calibração (para potencial termodinâmico).

Q_1, Q_2, C, b : coeficientes experimentais de calibração (para potencial termodinâmico).

E_1, E_2 : módulos de elasticidade longitudinal para os trechos elástico e viscoelástico.

η_{ve} ou η_1 : coeficientes de viscosidade para o trecho viscoelástico.

η_{vp} ou η_2 : coeficientes de viscosidade para o trecho viscoplástico.

γ_{ve} ou γ_1 ..: coeficientes de fluidez para o trecho viscoelástico.

γ_{vp} ou γ_2 ..: coeficientes de fluidez para o trecho viscoplástico.

λ_1, μ_1, ν_1: constantes de Lamé e coeficiente de Poisson para o trecho elástico.

λ_2, μ_2, ν_2: constantes de Lamé e coeficiente de Poisson para o trecho viscoelástico.

ψ^*_{e}, ψ^*_{vp}: potencial termodinâmico referente aos trechos elástico e viscoplástico.

φ^*_{ve} : potencial de dissipação referente ao trecho viscoelástico.

φ^*_{vp} : potencial de dissipação referente ao trecho viscoplástico.

φ^*_{evp} : potencial de dissipação referente ao modelo estendido.

σ_{ex} : tensão extra (diferença entre a tensão total e de escoamento).

α : variável representativa do encruamento isótropo (no caso, a deformação plástica ou viscoplástica acumulada), na forma escalar.

q, ξ : tensão de retorno e tensão relativa (ambas para encruamento cinemático), na forma de escalares para análise unidimensional e na forma de tensores para análise multiaxial.

$t_n, \Delta t, t_{n+1}$: tempo atual, passo de tempo e tempo futuro.

$\sin(\cdot)$: equivalente ao sinal de uma variável qualquer de interesse.

α^{ve}, α^{vp} ...: deformações acumuladas viscoelástica e viscoplástica.

B_*, B_e ...: domínio e sub-domínio de interesse.

n_e : número total de elementos, correspondente ao sub-domínio B_e .

$u, \Delta u$...: deslocamento total e seu respectivo incremento.

δW_i : trabalho virtual das forças internas.

δW_e : trabalho virtual das forças externas.

N_1^e, N_2^e ...: funções de forma para um elemento de interesse.

F_i, F_{ext} ...: vetores globais dos esforços internos e forças externas aplicadas

K_{n+1}^e : matriz de rigidez do elemento.

K_{n+1} : matriz de rigidez global da estrutura.

C_{n+1} : módulo algorítmico tangente elasto-viscoplástico em um instante de tempo $n+1$, para análise unidimensional.

C_∞ : módulo algorítmico tangente elasto-viscoplástico para um tempo infinito, em análise unidimensional.

VMT : parâmetro de avaliação, em porcentagem, da diferença entre os valores do módulo tangente em um instante de tempo $n+1$ e no infinito.

$Erro$: parâmetro de avaliação, em porcentagem, da diferença entre as deformações numérica e teórica.

C_{n+1}^{ep} : módulo algorítmico tangente elastoplástico em um instante de tempo $n+1$, para análise multiaxial.

C_{n+1}^{vp} : módulo algorítmico tangente elastoviscoplástico em um instante de tempo $n+1$, para análise multiaxial.

$C_{(n+1)}^{emp}$...: módulo algorítmico tangente elastoviscoplástico em um instante de tempo $n+1$, para análise multiaxial, com relação ao elemento mais plastificado.

- $C_{(n+1)}^{ep}$: módulo algorítmico tangente elastoviscoplastico em um instante de tempo $n+1$, para análise multiaxial, com relação a todos os elementos plastificados.
- C_{n+1}^{glb}: módulo algorítmico tangente elastoviscoplastico em um instante de tempo $n+1$, para análise multiaxial, com relação a todos os elementos (global).
- C, D: tensor das constantes elásticas (ou tensor elástico) e matriz dos módulos plásticos de encruamento.
- n_{n+1} : vetor unitário, normal à superfície de plastificação
- q'_{n+1}, q'_n ..: parcelas desviadoras do tensor da tensão de retorno (análise multiaxial), em instantes de tempo $n+1$ e n .
- e, e^{ve}, e^{vp} ..: parcelas desviadoras dos tensores de deformações total, viscoelástica e viscoplastica, para análise multiaxial.
- η_1^*, ν_2^* ..: coeficiente de viscosidade tangencial e coeficiente de Poisson viscoso.
- τ_{n+1} : tensão de cisalhamento.
- $(.)^{aux}$: todas as variáveis com indice superior "aux", relacionadas ao estado auxiliar de tensão (mecanismo de previsão e correção).

RESUMO

iv

MUNAIAR NETO, J. (1998) Um estudo da formulação de modelos constitutivos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos e do emprego de algoritmos implícitos e explícitos para a sua integração numérica. São Carlos, 1998, 214p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O presente trabalho trata da formulação de modelos constitutivos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos nos aspectos relativos à verificação da consistência termodinâmica, pela aplicação do Método do Estado Local, e de verificação da resposta numérica decorrente da utilização de um procedimento implícito de integração.

No contexto da verificação da consistência termodinâmica, são revistos alguns arranjos unidimensionais de elementos reológicos básicos, analisando-se, com maior destaque, um arranjo misto denominado modelo elasto-viscoplástico completo. Nas análises numéricas em campo unidimensional e multiaxial, realiza-se um confronto entre as respostas obtidas com procedimentos de integração Explícito e Implícito, bem como um estudo para a definição do passo de tempo, de modo a garantir precisão nas respostas.

Palavras-chave: Elasticidade; Viscoelasticidade - análise estrutural;

Plasticidade; Viscoplasticidade - análise estrutural.

ABSTRACT

v

MUNAIAR NETO, J. (1998) A study of viscoelastics and elastoviscoplastic constitutive modelling and the use of implicit and explicit numerical integration algorithms. São Carlos, 1998. 214p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

The present work treats of the formulation of viscoelastics and elastoviscoplastic constitutive models, on the aspects related to verification of the thermodynamic consistency, by the Method of Local State, and of numerical responses of a implicit integration scheme.

In the context of thermodynamic consistency, some unidimensional arrangements of basic rheological elements are reviewed, where a named elasto-viscoplastic extended model is enhanced. On what concerns to unidimensional and multiaxial numerical analysis, confront is showed between the results obtained from the explicit and implicit integration algorithms, and a study for time step definition aiming a good precision of the responses is presented as well.

Keywords: Elasticity; Viscoelasticity - structural analysis;

Plasticity; Viscoplasticity - structural analysis.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO E OBJETIVOS GERAIS

O presente trabalho relaciona-se à formulação e implementação numérica de modelos constitutivos com dependência no tempo, associando-se comportamentos dos tipos *elástico, viscoplástico perfeito ou com encruamentos isótropo, cinemático e o isótropo/cinemático combinado*, dando continuidade aos estudos iniciados na dissertação de mestrado do autor, *MUNAIAR NETO (1994)*.

Naquele trabalho, foi apresentado um modelo reológico, que teve como ponto de partida um outro modelo, apresentado em *OWEN & HINTON (1980)*, objetivando-se a simulação do comportamento elasto-viscoplástico de estruturas reticulares (de barras) e estados planos.

A expressão da relação constitutiva foi deduzida segundo um procedimento usual, baseado nas propriedades dos arranjos reológicos *em série e em paralelo*, e a determinação das expressões do modelo na forma incremental foi feita utilizando-se de um procedimento puramente explícito de integração numérica.

No presente texto, inicialmente aborda-se a questão da consistência termodinâmica dos modelos formulados via reologia e em particular daquele sugerido em *MUNAIAR NETO (1994)*. Esta consistência está diretamente relacionada à capacidade dos modelos, representados por funções matemáticas e dependentes de coeficientes determinados através de observações experimentais, de simularem de forma

coerente fenômenos físicos. Para fins da verificação em questão faz-se uma breve revisão das formulações dos modelos constitutivos empregando-se leis de conservação e princípios gerais da termodinâmica, com base no "*Método do Estado Local*".

Aquele método postula a existência de potenciais termodinâmicos e dissipativos, cujas derivadas dão origem às leis de estado e de fluxo, que compõem o modelo constitutivo. É da particularização desse modelo ao caso unidimensional, que se verifica se as relações deduzidas via reologia são recuperadas, o que confere à elas a chamada "consistência termodinâmica".

Um outro aspecto abordado no presente trabalho refere-se à utilização de procedimentos implícitos de integração, os quais constituem-se em ferramenta adicional para a análise não-linear física. Sua eficiência é avaliada por uma comparação direta dos seus resultados com os obtidos via integração explícita. Tal comparação é de interesse uma vez que os algoritmos implícitos sendo "*incondicionalmente estáveis*" possuem, á priori, uma grande vantagem em relação aos algoritmos explícitos, que são "*condicionalmente estáveis*".

Em linhas gerais, deduzem-se as formas implícitas das expressões do modelo em incrementos finitos, primeiramente para fins de análise unidimensional e, em seguida, faz-se a extensão dessas aos casos multiaxiais.

Como motivação para a formulação de modelos matemáticos abordam-se, no *Capítulo 2*, alguns mecanismos físicos de deformação, porém, dentro do contexto da microestrutura dos materiais. O objetivo é enfatizar alguns fenômenos que ocorrem a nível de microestrutura, colocando-se em destaque o *defeito de linha ou discordância*, de grande interesse nos estudos das deformações irreversíveis dos metais.

Introduz-se no *Capítulo 3*, o Método do Estado Local, cujo postulado básico menciona que o estado local de um material qualquer, num dado instante de tempo, pode ser definido por um conjunto finito de variáveis. Adicionalmente, o mesmo método admite a existência de potenciais (termodinâmico e de dissipação), os quais são escritos em função das mencionadas variáveis. Como o Método do Estado Local relaciona-se diretamente com a termodinâmica dos meios contínuos, apresentam-se também nesse capítulo a lei de balanço de energia e a inequação de Clausius-Duhem.

Com base nos conceitos abordados nos capítulos 2 e 3, apresentam-se no **Capítulo 4**, formulações do modelo *elástico linear* e *viscoelástico linear* (Kelvin e Maxwell), destacando-se as expressões representativas de potenciais termodinâmicos para os modelos em questão.

Analogamente, nos **Capítulos 5 e 6**, apresentam-se potenciais termodinâmico e de dissipação, agora para modelos de comportamentos *plásticos e viscoplásticos*, respectivamente. Deve-se ressaltar que as expressões dos modelos constitutivos resultantes, quando particularizadas à análise unidimensional, coincidem com aquelas determinadas pela reologia dos materiais.

Uma vez que o modelo estendido apresentado em **MUNAIAR NETO (1994)** consiste basicamente de uma associação em série de modelos elástico, viscoelástico e viscoplástico, a partir das verificações apresentadas nos capítulos 4, 5 e 6, apresenta-se, no **Capítulo 7**, expressões para os potenciais termodinâmico e de dissipação para o referido modelo estendido.

No **Capítulo 8**, determinam-se as expressões gerais na forma incremental do modelo estendido, com base em uma formulação para modelos elasto-plásticos e elasto-viscoplásticos proposta por **SIMO & HUGHES (1988)**.

Para tanto, utiliza-se um procedimento implícito de integração numérica na determinação das expressões de interesse, combinado com uma estratégia de "*previsão e correção*" para as tensões o qual, como será visto no referido capítulo, tem por objetivo a implementação dessas expressões em códigos de cálculo. Deve-se ressaltar que as expressões referentes à viscoelasticidade, não sugeridas em **SIMO & HUGHES (1988)** e desenvolvidas no presente trabalho, seguem os mesmos moldes das formulações (plástica ou viscoplástica) apresentadas naquela referência.

No **Capítulo 9**, apresenta-se o *Método dos Elementos Finitos* para a obtenção dos deslocamentos nodais na análise de estruturas em campo unidimensional. Apresentam-se também, nesse mesmo capítulo, a determinação do módulo algóritmico tangente (correspondente à associação dos três trechos), com o objetivo de compor a rigidez global da estrutura.

Finalmente, reunindo-se as expressões obtidas nos capítulos 8 e 9, sugere-se um

algoritmo para implementação em códigos de cálculo, com referência ao modelo elasto-viscoplástico. Esse algoritmo foi implementado em códigos de cálculo denominados *Simab.for* (análise unidimensional) e *Simat.for* (treliças planas), cuja eficiência é verificada com base em exemplos de aplicação retirados de *MUNAIAR NETO (1994)*. Nos mesmos exemplos realiza-se uma comparação dos resultados via procedimento implícito com resultados da formulação explícita, apresentados naquela referência.

No *Capítulo 10*, desenvolve-se um estudo da precisão da resposta numérica, a qual está diretamente relacionada com o tamanho do passo de tempo adotado. Estuda-se a "dependência" entre resultados numéricos e a variação do módulo algorítmico tangente, cuja expressão é determinada no capítulo 9. A variação da penalização da rigidez é "sugerida" como critério para a escolha do tamanho adequado do passo de tempo.

No *Capítulo 11*, faz-se uma generalização aos casos multiaxiais dos modelos elasto-plástico e elasto-viscoplástico apresentados nos capítulos 8 e 9, também de acordo com a proposta de *SIMO & HUGHES (1988)*. Em especial, são estudados os casos plano de deformação e o tridimensional.

Tomando-se como referência as informações do capítulo 11 são apresentadas, no *Capítulo 12*, expressões para a viscoplasticidade perfeita e com encruamento combinado, particularizadas para o critério de Mises. Para o equacionamento referente à viscoelasticidade, são adotadas expressões de fluxo com base nos modelos abordados no capítulo 4 (expressões via Lemaitre) e em *SOBOTKA (1984)*, objetivando uma comparação direta entre ambas. Para a determinação das expressões viscoelásticas na forma incremental, também utiliza-se um procedimento implícito de integração. Novamente, deduz-se a expressão para a penalização da rigidez global da estrutura.

No *Capítulo 13*, as expressões determinadas no capítulo 12 são reunidas em um algoritmo para o modelo elasto-viscoplástico, o qual é implementado em um código de cálculo denominado *Simap.for*. Novamente, avalia-se a resposta numérica com base em exemplos de aplicação retirados de *MUNAIAR NETO (1994)*, confrontando-se procedimentos explícito e implícito de integração, através de tabelas e gráficos, para comportamentos viscoplástico, viscoelástico e o combinado.

Finalmente, no *Capítulo 14*, as conclusões finais do trabalho, onde são comentados os principais aspectos observados com referência às expressões teóricas, para análises unidimensional e multiaxial, bem como os resultados obtidos com a implementação dessas em códigos de cálculo.

CAPÍTULO 2

A PLASTICIDADE COM BASE NA MICROESTRUTURA DOS MATERIAIS - UMA BREVE ABORDAGEM

Os estudos a serem desenvolvidos nos capítulos que seguem, objetivam dar continuidade àqueles já apresentados em *MUNAIAR NETO (1994)*, onde foram abordados os principais conceitos sobre a Reologia dos Materiais, bem como suas relações constitutivas.

Dentro do campo da plasticidade, abordaram-se naquela referência diferentes modelos, como por exemplo, o *elasto-plástico perfeito* onde, uma vez atingido o limite elástico, um dado material não mais admite, localmente, acréscimos de tensão.

Estudou-se também um modelo de encruamento do tipo *isótropo*. Adicionalmente, foi introduzida a variável *tempo* nos fenômenos de plastificação, dando início ao estudo da *viscoplasticidade*. Analogamente, estendeu-se os referidos estudos à *viscoelasticidade*, de interesse para materiais como polímeros, borrachas, metais submetidos à altas temperaturas, madeiras, etc. Tais estudos, no entanto, foram realizados apenas no âmbito *macroscópico*, sem qualquer referência aos mecanismos físicos de deformação e de ruptura que justificam o modelo.

Nesse sentido, reúne-se neste capítulo, uma revisão sucinta dos mecanismos físicos microscópicos responsáveis pelas respostas macroscópicas elástica e

elastoplástica, por exemplo. A revisão restringe-se basicamente a dois materiais bastante utilizados na engenharia civil: **OS METAIS E O CONCRETO**.

2.1-) METAIS OU LIGAS

Os metais ou ligas são materiais cujo arranjo cristalino é construído a partir de um conjunto de átomos unidos através de forças eletromagnéticas. A configuração atômica é estável obedecendo a um critério de mínima energia.

Uma hipótese do tipo "*cristal perfeito*" permite explicar os fenômenos de *deformação puramente elástica e ruptura do tipo frágil ('brittle fracture')*, onde a perda de coesão ocorre sem a presença de grandes deformações. Por outro lado, admitindo-se a existência de pequenos defeitos no arranjo cristalino, **LEMAITRE & CHABOCHE (1990)**, torna-se possível explicar outros fenômenos como a plastificação e a ruptura dúctil. Esses defeitos denominados de "defeitos nos Cristais", são os seguintes:

- **Defeitos Puntuais (localizados):** inserção ou substituição de um átomo em um ponto qualquer do cristal;
- **Defeitos de Superfície:** separação de superfície entre cristais que possuem orientação ou natureza diferentes;
- **Defeitos de Coesão:** defeitos de superfície que dão origem à microfissuras;
- **Defeitos de Linha (ou discordância):** defeito geométrico no arranjo atômico podendo se apresentar ao longo de um ou mais alinhamentos.

Dos defeitos anteriormente apresentados, o **Defeito de Linha** é o de maior interesse no presente trabalho, pois caracteriza-se como o principal responsável pela ocorrência da plasticidade nos metais. Para um melhor entendimento deste defeito, imagina-se uma estrutura atômica regular, como ilustrado na figura 2.1a.

Quando as forças eletromagnéticas são superadas pelo efeito de forças externas de cisalhamento, pode ocorrer um escorregamento entre blocos de cristal, gerando uma nova configuração atômica estável, porém irregular que apresenta um defeito de linha.

A figura 2.1b ilustra o fenômeno da discordância.

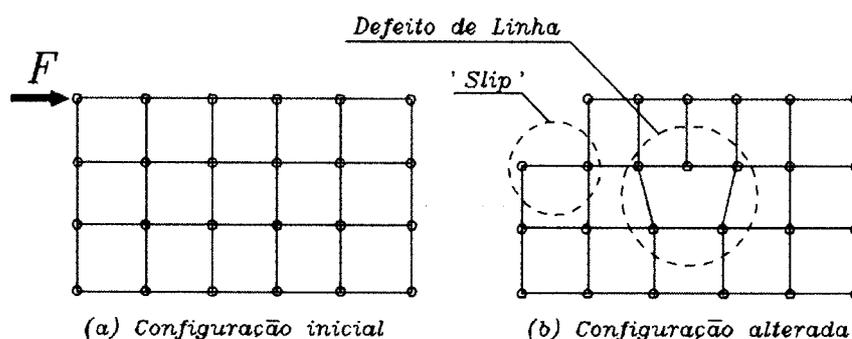


Figura 2.1 - Esquematização do Fenômeno da Discordância

Apesar da figura 2.1b apresentar a formação de apenas um alinhamento defeituoso de átomos, é perfeitamente possível a ocorrência de vários alinhamentos defeituosos em toda uma estrutura de cristais. Ainda, uma vez ocorrido o fenômeno da discordância, a configuração atômica inicial não será mais recuperada, o que caracteriza um mecanismo de movimento atômico irreversível, responsável pelos processos macroscópicos de deformação plástica ou permanente.

2.1.1-) Mecanismos de Deformação

A movimentação relativa dos átomos decorrente de uma solicitação aplicada permite caracterizar os tipos de deformação para uma dada tensão aplicada:

- **Deformação Elástica:** Decorre do movimento reversível de átomos. Uma vez retirado o carregamento aplicado recupera-se a configuração atômica inicial. Admite-se ainda a existência de um limite elástico, abaixo do qual toda e qualquer variação nos níveis de tensão provocará apenas variações nas deformações elásticas. Este limite elástico, a partir de uma configuração inicial, é caracterizado pela tensão de escoamento σ_y , determinando uma fronteira entre a elasticidade e a plasticidade;

● **Deformação Plástica (ou Viscoplastica):** O fenômeno responsável ocorre ao nível de movimentação do arranjo cristalino. Decorre do movimento irreversível de linhas de discordâncias, sendo evidenciado quando do descarregamento.

Ressalta-se ainda o caso da plastificação com encruamento, caracterizada pelo aumento da densidade de discordâncias. Esse aumento de densidade é causado pela presença de um outro tipo de defeito, formando barreiras que impedem a livre movimentação de linhas de discordâncias.

2.1.2-) Mecanismos de Ruptura (ou fratura)

Diferentemente do que ocorre com as deformações elásticas (nível atômico) e plásticas (nível cristalino), quando a coesão do material permanece inalterada, no mecanismo de fraturamento a coesão por definição é totalmente destruída, criando-se superfícies de descontinuidade dentro do material. O fraturamento pode ser definido basicamente por:

● **Ruptura Frágil ('Brittle Fracture'):** Ocorrência de ruptura imediata com quebra das ligações interatômicas, sem plastificação. Este fenômeno é influenciado pela presença de defeitos na estrutura atômica do material ou imperfeições acidentais na geometria da estrutura (vazios), que resultam em concentração de tensões responsável pelo início do processo. Esse tipo de ruptura se dá com pequenas deformações.

● **Ruptura Dúctil ('Ductile Fracture'):** Ao contrário da anterior, a ruptura dúctil vem acompanhada de grandes deformações, em geral, tendo origem também em defeitos no arranjo cristalino.

Deve-se ressaltar que, dependendo da densidade desses defeitos, as grandes deformações (geralmente plásticas) podem ser ou não significativas. Em outras palavras é possível admitir, para um dado material em um instante qualquer, que a ruptura se dá por uma combinação dos tipos básicos de ruptura: *frágil e dúctil*.

2.2-) O CONCRETO - UMA BREVE ABORDAGEM

● Composição Básica do Material e Mecanismos de Deformação e Ruptura

O concreto, diferente dos metais e ligas, é um material granular cuja composição resulta de uma mistura de cimento, água e agregados.

As microfissuras iniciais no concreto, que ocorrem em consequência dos processos de hidratação e cura, por exemplo, antes mesmo da aplicação de qualquer carregamento externo, proporcionam uma concentração de tensões, e sua consequente propagação, quando de uma situação de carregamento, leva à ruptura do material.

Na grande maioria das vezes, o crescimento ou propagação dessas microfissuras ocorre rapidamente em função do tipo ou magnitude do carregamento aplicado, podendo-se então admitir a ocorrência da superposição de mecanismos de deformação plástica ou permanente e ruptura brusca.

Para carregamentos que superam o limite elástico do material, as microfissuras crescem ao longo da superfície de contato entre o agregado graúdo e a pasta. À medida que o carregamento aumenta de intensidade, essas fissuras abandonam o perímetro dos agregados e propagam-se na pasta podendo ocorrer o escorregamento entre agregados ou mesmo entre cristais dentro dos agregados (escorregamento intragranular). Ambos os fatores contribuem para o aparecimento de deformações irreversíveis ou plásticas.

Deve-se ressaltar, no entanto, que apesar da deformação plástica constituir um fator importante na análise e simulação de ruptura do concreto, o fenômeno preponderante é a perda de coesão com evolução gradual do processo de microfissuração interna no material. Nesse caso, em lugar de se aplicar a teoria da plasticidade, pode-se modelar o fenômeno em questão utilizando-se a *Mecânica do Dano*.

CAPÍTULO 3

OS PRINCÍPIOS GERAIS DA TERMODINÂMICA E O MÉTODO DO ESTADO LOCAL

O estudo desenvolvido no *capítulo 2* indica que os modelos constitutivos para análise macroscópica devem levar em conta fenômenos que ocorrem na microestrutura. Em algumas situações diferentes fenômenos apresentam diferentes graus de acoplamento que podem estar considerados nos modelos de acordo com o tipo de análise.

Um procedimento geral para a formulação consistente de modelos constitutivos, de modo a incluir fenômenos de interesse, deriva da aplicação do *Método do Estado Local*, dentro da termodinâmica dos meios contínuos.

Segundo aquele método, o estado do material é definido, num certo instante, por um conjunto finito de variáveis, divididas entre observáveis e internas. O método postula a existência de dois potenciais: *um termodinâmico e um dissipativo*.

Pelo potencial termodinâmico, obtém-se as leis de estado que permitem definir as variáveis associadas às variáveis de estado. Por outro lado, do potencial dissipativo obtém-se as leis complementares ou de evolução das variáveis internas, associadas a processos *irreversíveis*, como por exemplo, a evolução das deformações plásticas.

Nos ítems que seguem, apresentam-se a primeira e segunda leis da termodinâmica (balanço de energia e entropia, respectivamente), a inequação de Clausius-Duhem e alguns fundamentos do Método do Estado Local.

3.1-) PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA - BALANÇO DE ENERGIA

Considere-se num instante t um domínio de volume V e de contorno ∂V , ocupado por um material qualquer. A primeira lei exprime a seguinte relação de balanço:

$$\frac{d}{dt} (E + K_c) = P_e + Q \rightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} v \cdot v \right) dV = \int_V (f \cdot v + r) dV + \int_{\partial V} (t \cdot v - q \cdot n) dS$$

sendo que

$$E = \int_V \rho e dV \quad K_c = \frac{1}{2} \int_V \rho v \cdot v dV \quad (3.1a, b)$$

$$Q = \int_V r dV - \int_{\partial V} q \cdot n dS \quad (3.1c)$$

onde e é a energia interna específica por unidade de massa, r é a densidade volumétrica de calor induzido em V por irradiação e $-q$ o fluxo de calor recebido por condução (de fora p/ dentro).

Com vistas à uma forma local da primeira lei, reescreve-se a expressão da potência das cargas externas, na forma $P_e = P_a - P_i$ (axioma do equilíbrio), **LEMAITRE & CHABOCHE (1990)**, onde P_a é a taxa de energia cinemática e P_i a potência virtual das forças internas. Com referência à P_a e P_i , escrevem-se:

$$P_a = \int_V \rho a \cdot v dV = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_V \rho v \cdot v dV = \frac{dK_c}{dt} \quad P_i = - \int_V \sigma \cdot D dV$$

onde D_* é o tensor taxa de deformação. Portanto, reescreve-se a primeira lei, tal que

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dK_c}{dt} - \frac{dK_c}{dt} - P_i + Q \rightarrow \frac{dE}{dt} = Q - P_i \quad (3.2a)$$

Ainda, pelo teorema da divergência

$$Q = \int_V r \, dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V r \, dV - \int_V \operatorname{div}(\mathbf{q}) \, dV \quad (3.2b)$$

e com a substituição de 3.2b em 3.2a, chega-se a

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e \, dV = \int_V \sigma \cdot D_* \, dV + \int_V r \, dV - \int_V \operatorname{div}(\mathbf{q}) \, dV$$

Assim, escreve-se a primeira lei da termodinâmica, na forma local:

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma \cdot D_* + r - \operatorname{div}(\mathbf{q}) \quad (3.3a)$$

ou admitindo-se pequenas deformações

$$\rho \dot{e} = \sigma \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r - \operatorname{div}(\mathbf{q}) \quad (3.3b)$$

A expressão 3.3b, refere-se a uma "*interconvertibilidade entre trabalho e calor*". No entanto, essa igualdade não impõe restrições sobre o sentido da troca, ou seja, é possível admitir para uma mesma variação de energia total, trabalho produzindo calor e vice-versa. A segunda lei da termodinâmica, apresentada a seguir, impõe uma restrição para o sentido desta troca.

3.2-) SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA (ENTROPIA) E INEQUAÇÃO DE CLAUSIUS-DUHEM

Inicialmente, introduzem-se duas novas variáveis: a temperatura T , representada por um campo escalar de valores positivos e definidos a cada instante t em V , e a entropia S do sistema, definida por:

$$S = \int_V \rho s \, dV \quad (3.4a)$$

onde s é a entropia específica por unidade de massa.

A segunda lei exprime que a taxa de produção interna de entropia é sempre igual ou maior à taxa de entropia associada à transmissão de calor. Expressa-se o segundo princípio na forma:

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_V \frac{r}{T} \, dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} \, dS \quad (3.4b)$$

Na expressão anterior, a igualdade vale para processos reversíveis e a desigualdade para processos irreversíveis. Para a obtenção da forma local da segunda lei, aplica-se primeiramente o teorema da divergência, permitindo-se passar, em (3.4b), da integral de superfície à integral de volume:

$$\int_{\partial V} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} \, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{g} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) \, dV \quad (3.4c)$$

Substituindo-se 3.4a e 3.4c em 3.4b, obtém-se

$$\int_V \left[\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{g} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{r}{T} \right] \, dV \geq 0 \quad (3.5)$$

A inequação apresentada em 3.5 é válida para qualquer região V do meio material, de modo que sua forma local, resulta expressa por

$$\rho s^{\circ} + \operatorname{div} \mathbf{g} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{r}{T} \geq 0 \quad (3.6)$$

No entanto, é possível obter uma inequação mais abrangente, que contenha ao mesmo tempo o primeiro e o segundo princípios. Para tanto, objetivando eliminar a variável r , isola-se essa em 3.3a e substitui-se em 3.6, obtendo-se:

$$\rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{g} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{1}{T} \left(\rho \frac{de}{dt} - \sigma \cdot D_t + \operatorname{div} \mathbf{g}(\mathbf{q}) \right) \geq 0 \quad (3.7)$$

Multiplicando-se 3.7 por $T(>0)$ e considerando-se, da mecânica do contínuo, que

$$\operatorname{div} \mathbf{g} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \operatorname{div} \mathbf{g}(\mathbf{q}T^{-1}) = \frac{\operatorname{div} \mathbf{g}(\mathbf{q})}{T} - \frac{\mathbf{q} \operatorname{grad}(T)}{T^2}$$

chega-se a

$$\rho \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + \sigma \cdot D_t - \mathbf{q} \frac{\operatorname{grad}(T)}{T} \geq 0 \quad (3.8)$$

A inequação 3.8 representa a combinação das duas primeiras leis da termodinâmica. Introduce-se então uma nova quantidade, a energia específica livre ψ , na forma:

$$\psi = e - Ts \quad (3.9)$$

sendo representativa da quantidade de energia que pode ser transformada em trabalho mecânico. Considerando-se a variação no tempo da energia livre, escreve-se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi - \frac{de}{dt} - T \frac{ds}{dt} - s \frac{dT}{dt} \rightarrow T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} = - \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right)$$

a expressão 3.8, passa a ser expressa na forma

$$-\rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) + \sigma \cdot D - q \frac{grad(T)}{T} \geq 0 \quad (3.10a)$$

A expressão 3.10a é denominada *Inequação de Clausius-Duhem*, e representa uma condição para que todo e qualquer processo seja termodinamicamente admissível. Pode-se ainda, no caso de pequenas deformações, reescrever 3.10a na forma:

$$\sigma \cdot \dot{\epsilon} - \rho (\dot{\psi} + s \dot{T}) - q \frac{grad(T)}{T} \geq 0 \quad (3.10b)$$

3.3-) MÉTODO DO ESTADO LOCAL: VARIÁVEIS DE ESTADO, POTENCIAIS DE ENERGIA LIVRE, DE DISSIPACÃO, LEIS DE ESTADO E LEIS DE FLUXO

O método do estado local postula que o estado termodinâmico pode ser completamente definido (ou conhecido), para um ponto qualquer de interesse em um instante qualquer, desde que sejam conhecidos os valores de um certo número finito de variáveis. Essas variáveis, denominadas de variáveis de estado ou termodinâmicas, são subdivididas em variáveis observáveis e variáveis internas.

3.3.1-) Variáveis de Estado - Observáveis e Internas

As *variáveis observáveis* podem ser entendidas como sendo aquelas cujas medições são possíveis e diretas, como por exemplo, a temperatura T (com o uso de termômetros) e a deformação total ϵ (com o uso de extensômetros). Deve-se ressaltar que:

- a-) as variáveis T e ϵ estão sempre presentes nos fenômenos de comportamento elástico, viscoelástico, plástico, viscoplástico, de dano e fratura;
- b-) Para fenômenos reversíveis, o estado depende unicamente daquelas variáveis.

Por outro lado, no caso de fenômenos dissipativos, o estado depende também de outras variáveis, chamadas *variáveis internas*, que representam os processos irreversíveis, como por exemplo, a plasticidade ou a viscoplasticidade que impõem o aparecimento de ϵ^p ou ainda de ϵ^{vp} , parcelas de deformação plástica e viscoplástica, respectivamente. Existem ainda outros fenômenos irreversíveis de interesse tais como o encruamento, o dano e a fratura.

Para esses, faz-se necessária a introdução de novas variáveis internas que representem o estado do material e cujas medições não podem ser feitas por observações diretas. Para os estudos aqui realizados, essas variáveis são representadas pela notação V_1, V_2, \dots, V_k .

3.3.2-) Potencial Termodinâmico e Leis de Estado

Admite-se a existência de um potencial termodinâmico, função de variáveis de estado, a partir do qual as leis de estado podem ser obtidas. Normalmente, adota-se para potencial termodinâmico o potencial de energia específica livre, expresso na forma:

$$\psi = \psi (\epsilon, T, \epsilon^e, \epsilon^p, V_k) \quad (3.11)$$

Para o caso da plasticidade ou viscoplasticidade, a energia livre é escrita somente em função da parcela elástica de deformação; a parcela plástica aparece indiretamente em função da decomposição aditiva $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \rightarrow \varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p$. Assim, reescreve-se 3.11 como:

$$\psi = \psi [(\varepsilon - \varepsilon^p), T, V_k] \rightarrow \psi = \psi (\varepsilon^e, T, V_k) \quad (3.12)$$

Admitindo-se uma variação no tempo da expressão 3.12, obtém-se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \dot{V}_k \quad (3.13)$$

Substituindo-se 3.13 na desigualdade de Clausius-Duhem, e agrupando-se os termos em comum, chega-se finalmente à expressão geral que condiciona os processos como termodinamicamente consistentes:

$$\left(\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \right) \cdot \dot{\varepsilon}^e + \sigma \cdot \dot{\varepsilon}^p - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - q \frac{\text{grad}(T)}{T} \geq 0 \quad (3.14)$$

Algumas particularidades com relação à 3.14 podem ser abordadas:

a-) Admitindo-se uma situação em que a temperatura é constante ($\partial T / \partial t = 0$), uniforme ($\text{grad}[T] = 0$) e sem ocorrência de deformações plásticas e variáveis internas, obtém-se

$$\left(\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \right) \cdot \dot{\varepsilon}^e \geq 0 \rightarrow \sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} = 0 \rightarrow \sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \quad (3.15)$$

b-) Numa outra variante possível, admitindo-se um processo com ocorrência apenas de variações térmicas, resulta

$$\rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} \geq 0 \rightarrow s + \frac{\partial \psi}{\partial T} = 0 \rightarrow s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (3.16)$$

As expressões 3.15 e 3.16 definem as leis termodinâmicas de estado, onde σ e s são variáveis associadas às variáveis observáveis ε^e e T , respectivamente. Cabe ressaltar ainda que:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^p}$$

e portanto σ é também associado às deformações total e plástica. Analogamente, definem-se forças termodinâmicas associadas às variáveis internas V_k , tais que

$$A_k = \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \quad (3.17)$$

3.3.3-) *Potencial Dissipativo e as Leis Complementares*

Como apresentado anteriormente, o potencial termodinâmico permite relacionar variáveis observáveis e internas com variáveis associadas, utilizando-se as leis de estado. No entanto, o modelo constitutivo se completa somente com as leis complementares e de evolução das variáveis internas, relacionadas à descrição de processos dissipativos.

Para tanto, admite-se a existência de um outro potencial, agora dissipativo, que procura relacionar a evolução das variáveis internas ε^p (ou ε^{vp}) e V_k com suas associadas $-\sigma$ e A_k .

Este potencial deve ser escrito de modo a garantir que todo processo dissipativo seja necessariamente positivo, conforme exprime a inequação de Clausius-Duhem. Admitindo-se independência entre processos dissipativos térmico e mecânico, a dissipação pode ser expressa na forma:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (3.18a)$$

$$\Phi_1 = \sigma \cdot \varepsilon^{\circ p} - \mathbf{A}_k \dot{V}_k^{\circ} \quad \Phi_2 = -g \frac{q}{T} = -\frac{q}{T} \text{grad}(T) \quad (3.18b, c)$$

onde Φ_1 é denominada dissipação intrínseca (ou mecânica), decomposta em uma parcela plástica e outra associada à evolução das variáveis internas. A variável Φ_2 é denominada dissipação térmica, relacionada à transmissão de calor.

A condição de não-negatividade do processo dissipativo é mantida, postulando-se a existência de um potencial φ , função de variáveis de fluxo, positivo, convexo e de valor nulo na origem, representado por:

$$\varphi = \varphi \left(\varepsilon^{\circ p}, \dot{V}_k^{\circ}, \frac{q}{T} \right) \quad (3.19)$$

e as leis complementares são dadas por

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon^{\circ p}} \quad \mathbf{A}_k = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{V}_k^{\circ}} \quad g = \frac{\partial \varphi}{\partial \left(\frac{q}{T} \right)} \quad (3.20a, b, c)$$

Entretanto é mais conveniente obter diretamente as leis de evolução das variáveis de fluxo (na forma de taxas) como função de suas variáveis duais. O potencial dual que permite a obtenção direta dessas leis resulta da aplicação da transformada de Legendre-Fenchel, a qual é expressa matematicamente na forma:

$$\varphi^* (\sigma, \mathbf{A}_k, g) = \underset{(\varepsilon^{\circ p}, \dot{V}_k^{\circ}, \frac{q}{T})}{\text{SUPR}} \left[\left(\sigma \cdot \varepsilon^{\circ p} - \mathbf{A}_k \dot{V}_k^{\circ} - g \frac{q}{T} \right) - \varphi \left(\varepsilon^{\circ p}, \dot{V}_k^{\circ}, \frac{q}{T} \right) \right] \quad (3.20d)$$

O termo *SUPR* (supremo), apresentado por *LEMAITRE & CHABOCHE (1990)*, objetiva determinar a maior diferença entre as expressões internas aos seus parênteses. As leis de fluxo, resultam:

$$\varepsilon^p = \frac{\partial \phi^*}{\partial \sigma} \quad \dot{V}_k = - \frac{\partial \phi^*}{\partial A_k} \quad \frac{q}{T} = - \frac{\partial \phi^*}{\partial g} \quad (3.21a, b, c)$$

Para a expressão 3.21a, nos estudos a serem abordados nos capítulos que seguem, são admitidas como hipóteses válidas o fluxo de deformação plástica obedecendo uma direção *normal* à superfície de plastificação (contorno que define o limite elástico do material), bem como uma *correspondência direta* do potencial dissipativo com o critério de plastificação a ser adotado. Ambas as hipóteses são denominadas, dentro do contexto da plasticidade clássica, como *regra de normalidade e lei associativa*, respectivamente.

CAPÍTULO 4

MODELOS DE COMPORTAMENTO ELÁSTICO: A ELASTICIDADE LINEAR E A VISCOELASTICIDADE.

Neste capítulo ilustra-se a aplicação do Método do Estado Local à formulação de modelos em elasticidade e viscoelasticidade. Em uma primeira etapa, é abordada a formulação termodinâmica da *elasticidade linear*, a qual está diretamente relacionada à inexistência de parcelas residuais, apresentando somente deformações imediatas e reversíveis, conforme o estudo da microestrutura desenvolvido no capítulo 2.

Em uma segunda etapa, apresenta-se a formulação termodinâmica da *viscoelasticidade*, mostrando que é possível recuperar resultados originais obtidos no âmbito da reologia dos materiais. No estudo aqui desenvolvido, será considerada apenas a viscoelasticidade linear.

4.1-) ELASTICIDADE LINEAR

4.1.1-) Domínio de Validade e Aplicabilidade

Fisicamente as deformações elásticas resultam de movimentos reversíveis de átomos, moléculas ou cristais. Nesse caso, a hipótese de pequenas deformações

permanece válida e a dissipação de energia é admitida como nula.

No caso dos metais, o "limite elástico" é usualmente identificado pela tensão de escoamento do material e depende basicamente de dois fatores:

a-) A temperatura, cujo aumento provoca uma diminuição nesse limite, podendo chegar a zero quando próximo da temperatura de fusão do material.

b-) O próprio carregamento que, ao contrário da temperatura, provoca um aumento ou variações consideráveis no domínio, devido a fatores bastante conhecidos como os encruamentos isótropo e cinemático.

4.1.2-) Formulação Termodinâmica

Para a aplicação do Método do Estado Local, a temperatura T e a deformação total ϵ são as variáveis de estado consideradas na formulação termodinâmica.

Para o caso de deformações isotérmicas, a temperatura funciona apenas como parâmetro do qual o módulo de elasticidade é dependente. Nesse caso, apenas a deformação elástica (igual à deformação total) permanece como variável de estado.

Para a obtenção de leis de estado que definem as variáveis associadas para o caso da elasticidade isotrópica linear, parte-se de um potencial termodinâmico ψ . Esse é definido como um invariante quadrático do tensor de deformações, expresso em função de uma combinação linear do quadrado do primeiro invariante ϵ_I e do segundo invariante ϵ_{II} , tal que:

$$\psi = \psi(\epsilon) = \frac{1}{2\rho} (\lambda \epsilon_I^2 + 4\mu \epsilon_{II}) \quad (4.1a)$$

onde ϵ é o tensor das deformações (de 2ª ordem), ρ é a massa específica do material, $\epsilon_I = \text{tr}(\epsilon) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$, $\epsilon_{II} = [\text{tr}(\epsilon^2)]/2$ e " λ e μ " as constantes de Lamé. A variável associada, nesse caso, é o tensor de tensões obtido derivando-se o potencial em 4.1a, tal que:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) I + 2\mu \varepsilon \quad (4.1b)$$

onde σ é o tensor de tensão de segunda ordem e I um tensor identidade de segunda ordem.

A relação inversa que exprime ε em função de σ pode ser obtida utilizando-se a correspondência existente entre $\operatorname{tr}(\varepsilon)$ e $\operatorname{tr}(\sigma)$, expressa na forma

$$\operatorname{tr}(\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (\lambda + 2\mu) \operatorname{tr}(\varepsilon) + 2\lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) = (3\lambda + 2\mu) \operatorname{tr}(\varepsilon)$$

e portanto

$$\operatorname{tr}(\varepsilon) = \frac{\operatorname{tr}(\sigma)}{3\lambda + 2\mu} = \frac{1-2\nu}{E} \operatorname{tr}(\sigma) \quad (4.2)$$

Com base na expressão 4.2 reescreve-se 4.1b na forma $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$, tal que

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \operatorname{tr}(\sigma) I \quad (4.3a)$$

De outro modo, pode-se substituir as constantes de Lamé pelas formas

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (4.3b,c)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, G é o módulo de elasticidade transversal e ν o coeficiente de Poisson. Finalmente, substituindo-se as expressões 4.3b,c em 4.3a, escreve-se a relação constitutiva na forma

$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr}(\sigma) I \quad (4.4a)$

Pode-se também obter a expressão 4.4a, derivando-se um potencial dual $\psi^*(\sigma)$, de modo que $\varepsilon = \rho(\partial\psi^*)/\partial\sigma$. Para tanto, faz-se necessária a relação entre $\text{tr}(\varepsilon^2)$ e $\text{tr}(\sigma^2)$, a qual é expressa em função de E e ν , na forma

$$\text{tr}(\varepsilon^2) = \frac{(1+\nu)^2}{E^2} \text{tr}(\sigma^2) - \frac{\nu(2-\nu)}{E^2} [\text{tr}(\sigma)]^2 \quad (4.4b)$$

Assim, de 4.1a, resulta

$$\psi^*(\sigma) = \frac{1}{2\rho} \left\{ \frac{(1+\nu)}{E} \text{tr}(\sigma^2) - \frac{\nu}{E} [\text{tr}(\sigma)]^2 \right\} \quad (4.4c)$$

A tabela 4.1, retirada de *LEMAITRE & CHABOCHE (1990)*, apresenta ordem de grandeza das propriedades básicas mencionadas anteriormente para alguns dos materiais mais utilizados na engenharia civil:

<i>TABELA 4.1 - Propriedades Elásticas para Alguns Materiais</i>			
<i>Material</i>	<i>Temp (°C)</i>	<i>E (MPa)</i>	<i>Poisson(ν)</i>
<i>Aço Carbono XC10</i>	20	216.000	0,290
	200	205.000	0,300
	600	170.000	0,315
<i>Concreto</i>	20	30.000	0,200
<i>Granito</i>	20	60.000	0,270
<i>Borracha</i>	20	2	0,500
<i>Pinho (dir. longit.)</i>	20	17.000	0,450
<i>Pinho (dir. transv.)</i>	20	1.000	0,790

4.2-) VISCOELASTICIDADE LINEAR

Modelos viscoelásticos podem ser usados para representar a comportamento de sólidos em função do tempo e são em geral aplicados a materiais como aços (submetidos à altas temperaturas), polímeros diversos, madeira e mesmo o concreto.

Admitindo-se apenas o comportamento viscoelástico isotérmico têm-se, ao contrário da termoelasticidade, apenas dissipação intrínseca, enquanto que a térmica é nula.

Apresenta-se neste item a formulação termodinâmica dos modelos viscoelásticos de *Kelvin-Voigt e Maxwell*, colocando-se em destaque os potenciais termodinâmico e dissipativo. São obtidas também as leis de estado e as leis complementares. Deve-se observar, no entanto, que as formulações aqui desenvolvidas são válidas apenas para materiais estáveis para os quais não é levado em conta fenômeno como o envelhecimento.

4.2.1-) Modelo de Kelvin-Voigt - Formulação Termodinâmica

O modelo de Kelvin-Voigt é composto por um arranjo reológico formado por uma mola de rigidez E , associada em paralelo com um amortecedor de viscosidade η , como ilustrado em *MUNAIAR NETO (1994)*.

Na sua formulação elástica a associação caracteriza-se por apresentar uma mesma deformação em cada um de seus elementos, enquanto que a tensão é composta por uma parcela elástica, correspondente à mola, e outra viscoelástica correspondente ao amortecedor.

Na formulação termodinâmica considera-se que a parcela elástica de tensão é associada à variável de estado *deformação*, através do potencial termodinâmico. Já a parcela viscoelástica é associada ao *fluxo de deformação* via potencial de dissipação.

Para o potencial termodinâmico adota-se o mesmo utilizado na elasticidade linear (item 4.1), expresso por:

$$\psi = \psi(\varepsilon) = \frac{1}{2\rho} (\lambda \varepsilon_I^2 + 4\mu \varepsilon_{II}) \quad (4.5a)$$

enquanto que, para o potencial de dissipação adota-se uma na forma quadrática positiva, tal que:

$$\phi = \phi(\varepsilon) = \frac{1}{2} (\lambda \theta_\lambda \dot{\varepsilon}_I^2 + 4\mu \theta_\mu \dot{\varepsilon}_{II}) \quad (4.5b)$$

onde θ_λ e θ_μ são coeficientes representativos da viscosidade.

Pelo método do estado local, a lei de estado e a variável associada ao processo dissipativo são obtidas pela derivação dos potenciais, obtendo-se:

$$\sigma_e = \rho \frac{\partial \psi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \lambda \text{tr}(\varepsilon) I + 2\mu \varepsilon \quad (4.6a)$$

$$\sigma_v = \frac{\partial \phi(\varepsilon)}{\partial \dot{\varepsilon}} = \lambda \theta_\lambda \text{tr}(\dot{\varepsilon}) I + 2\mu \theta_\mu \dot{\varepsilon} \quad (4.6b)$$

Uma composição aditiva de ambas as parcelas de tensão, permite representar o modelo constitutivo completo de Kelvin pela expressão:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v = \lambda [\text{tr}(\varepsilon) + \theta_\lambda \text{tr}(\dot{\varepsilon})] I + 2\mu (\varepsilon + \theta_\mu \dot{\varepsilon}) \quad (4.7a)$$

ou na forma indicial

$$\sigma_{IJ} = \lambda (\varepsilon_{kk} + \theta_\lambda \dot{\varepsilon}_{kk}) \delta_{IJ} + 2\mu (\varepsilon_{IJ} + \theta_\mu \dot{\varepsilon}_{IJ}) \quad (4.7b)$$

Os parâmetros envolvidos podem ser medidos experimentalmente em ensaios de tração uniaxial e torção, ambos em tubos metálicos circulares. Para o ensaio de torção, faz-se a representação do mesmo com base em 4.7b, pela expressão:

$$\sigma_{12} = 2\mu (\varepsilon_{12} + \theta_{\mu} \dot{\varepsilon}_{12}) \quad (4.8a)$$

de modo que, para um ensaio de fluência (ou "creep") onde $\sigma_{12} = \text{cte}$ e admitindo que $\varepsilon(t=0) = 0$, a equação diferencial 4.8a tem como solução

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \left[1 - e^{-\frac{t}{\theta_{\mu}}} \right] \quad (4.8b)$$

A expressão 4.8b permite a identificação dos parâmetros μ e θ_{μ} . Por outro lado, o ensaio de tração é também governado pela expressão obtida de 4.7b, tal que:

$$\sigma_{11} = [\lambda(1-2\nu) + 2\mu] \varepsilon_{11} + [\lambda(1-2\nu)\theta_{\lambda} + 2\mu\theta_{\mu}] \dot{\varepsilon}_{11} \quad (4.8c)$$

Para esse ensaio, sabe-se que

$$\lambda(1-2\nu) + 2\mu = E \quad \lambda(1-2\nu)\theta_{\lambda} + 2\mu\theta_{\mu} = \eta \quad (4.8d, e)$$

onde E é o Módulo de elasticidade longitudinal e η o coeficiente de viscosidade do material. Assim, reescreve-se 4.8c na forma

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} + \eta \dot{\varepsilon}_{11} \quad (4.9a)$$

e portanto, para $\sigma_{11} = \text{cte}$ e $\varepsilon(t=0) = 0$, obtém-se

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} \left[1 - e^{-\frac{Et}{\eta}} \right] \quad (4.9b)$$

Da expressão 4.9b, uma vez determinadas as variáveis μ e θ_{μ} , é possível determinar experimentalmente E e η , e conseqüentemente λ e θ_{λ} , sendo que ν pode ser obtido a partir da relação $\varepsilon_{22} = -\nu \varepsilon_{11}$.

4.2.2-) Modelo de Maxwell - Formulação Termodinâmica

O modelo de Maxwell é formado pelos mesmos elementos reológicos utilizados no modelo de Kelvin (mola e amortecedor), porém a associação de ambos é, nesse caso, em série.

Novamente, a variável de estado escolhida permanece sendo a deformação total (observável) e sua variável associada é a tensão. A decomposição aditiva em parcelas elástica e viscosa é feita agora em termos de deformação, tal que $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^v \rightarrow \epsilon^e = \epsilon - \epsilon^v$, sendo que a parcela viscosa pode ser entendida como uma variável interna. Analogamente ao modelo de Kelvin, a decomposição da deformação total é também utilizada na determinação de um potencial termodinâmico, o qual é escrito na forma

$$\psi = \psi(\epsilon^e) = \psi(\epsilon - \epsilon^v) \quad (4.10a)$$

sendo que a partir de sua derivação, obtém-se

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e} \quad (4.10b)$$

Como a decomposição aditiva é feita com referência à deformação, fica mais conveniente trabalhar diretamente com o potencial dualizado ψ^* , expresso por:

$$\psi^*(\sigma) = \frac{1}{2\rho} \left\{ \frac{1+\nu}{E} \text{tr}(\sigma^2) - \frac{\nu}{E} [\text{tr}(\sigma)]^2 \right\} \quad (4.11a)$$

cuja derivação determina

$$\epsilon^e = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \sigma} = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) I \quad (4.11b)$$

Analogamente, adota-se um potencial dissipativo $\varphi = \varphi(\sigma)$, também na forma quadrática definida positiva, onde são adicionadas as variáveis τ_1^* e τ_2^* :

$$\varphi = \varphi(\sigma) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\nu}{E\tau_1^*} \text{tr}(\sigma^2) - \frac{\nu}{E\tau_2^*} [\text{tr}(\sigma)]^2 \right) \quad (4.12)$$

cuja derivada resulta em

$$\dot{\varepsilon}^{\sigma} = \rho \frac{\partial \varphi(\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{1+\nu}{E\tau_1^*} \sigma - \frac{\nu}{E\tau_2^*} \text{tr}(\sigma) I \quad (4.13)$$

onde τ_1^* e τ_2^* são variáveis que também caracterizam a viscosidade do material.

Finalmente, obtém-se a relação constitutiva do modelo de Maxwell superpondo-se as parcelas de deformações elástica (expressão 4.11b) em taxas e viscosa (expressão 4.13):

$$\dot{\varepsilon}^{\sigma} = \dot{\varepsilon}^{\sigma e} + \dot{\varepsilon}^{\sigma v} = \frac{1+\nu}{E} \left(\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_1^*} \right) - \frac{\nu}{E} \left(\text{tr}(\dot{\sigma}) + \frac{\text{tr}(\sigma)}{\tau_2^*} \right) I \quad (4.14a)$$

ou na forma indicial

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\sigma} = \frac{1+\nu}{E} \left(\dot{\sigma}_{ij} + \frac{\sigma_{ij}}{\tau_1^*} \right) - \frac{\nu}{E} \left(\dot{\sigma}_{kk} + \frac{\sigma_{kk}}{\tau_2^*} \right) \delta_{ij} \quad (4.14b)$$

Uma particularização de 4.14a (ou 4.14b) ao caso da tração uniaxial, permite reescreve-la na forma:

$$\dot{\varepsilon}^{\sigma} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \left(\frac{1+\nu}{E\tau_1^*} - \frac{\nu}{E\tau_2^*} \right) \sigma \quad (4.15a)$$

No entanto, como mencionado em *LEMAITRE & CHABOCHE (1990)*, o termo dentro do parenteses da expressão 4.15a é admitido igual a $1/\eta$. Nesse caso, reescreve-se essa mesma expressão na forma

$$\varepsilon^o = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (4.15b)$$

Para o ensaio de creep, onde a tensão aplicada é constante, e admitindo-se que $\varepsilon(t=0) = \sigma/E$, chega-se uma relação constitutiva final, expressa por:

$$\varepsilon (t) = \frac{\sigma}{\eta} t + \frac{\sigma}{E} \quad (4.15c)$$

É possível notar que as expressões 4.15a,b,c representam o comportamento de um modelo denominado "*fluido*", para o qual uma situação de equilíbrio jamais ocorrerá, pois apesar da deformação da mola ser finita, o amortecedor se deformará indefinidamente.

CAPÍTULO 5

MODELOS DE COMPORTAMENTO PLÁSTICO - PERFEITO E COM ENCRUAMENTOS ISÓTROPO E CINEMÁTICO

A teoria da plasticidade procura reproduzir matematicamente a existência de deformações irreversíveis, partindo de modelos tais como o *rígido plástico*, o *elasto-plástico perfeito* e o *elasto-plástico com encruamento*.

Quanto aos processos de encruamento, apesar de quase sempre gerarem anisotropia, podem ser admitidos modelos isotrópicos com boa aproximação nos casos de carregamentos proporcionais.

Neste capítulo demonstra-se como os modelos clássicos em elastoplasticidade podem ser recuperados via Método do Estado Local.

5.1-) DOMÍNIO DE VALIDADE E SUA APLICABILIDADE

Como já mencionado, a teoria da plasticidade procura simular matematicamente as deformações irreversíveis imediatas. Aplica-se de modo direto aos metais quando os mecanismos de deformação estão relacionados com os movimentos de discordâncias, sem influência da viscosidade. Seu domínio de validade deve ser limitado pelas seguintes condições:

- a-) consideração de baixas temperaturas (limitada a 1/4 da temperatura de fusão);*
b-) carregamentos sem danificação.

Para outros materiais como os polímeros e madeira, as deformações irreversíveis são modeladas de forma mais adequada pela viscoplasticidade, objeto de estudo no próximo capítulo. Deve-se observar que a viscoplasticidade pode também ser aplicada aos metais, quando esses estão sujeitos à altas temperaturas.

Para o concreto, as deformações irreversíveis estão diretamente relacionadas à propagação das microfissuras e cavidades inerentes do processo de hidratação. Como já mencionado anteriormente, esse material pode ser representado por modelos matemáticos mais coerentes que admitem o acoplamento entre *elasticidade e mecânica do dano*.

5.2-) ELEMENTOS DA TEORIA DA PLASTICIDADE

5.2.1-) Características do Modelo Uniaxial

O modelo uniaxial contém dois aspectos básicos do fenômeno em questão: os regimes elástico e plástico (com ou sem encruamento).

O regime elástico é caracterizado por um certo intervalo de tensões; havendo evolução das deformações permanentes, as tensões existentes para um certo nível de carregamento encontram-se nos limites daquele intervalo.

Outra hipótese importante é sobre o desacoplamento entre efeitos elástico e plástico, de modo que a deformação total pode ser dividida em parcelas elástica ou reversível (ϵ^e) e plástica ou irreversível (ϵ^p). Portanto, escreve-se:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (5.1)$$

O fluxo plástico, $\partial \varepsilon / \partial t$, pode ocorrer *sem encruamento*, isto é, tensão constante sem alteração dos limites do regime elástico ou *com encruamento*, onde a tensão de escoamento e o limite elástico são variáveis.

Ressalta-se que o fenômeno de encruamento está fisicamente relacionado com o aumento da densidade de discordâncias, motivado por alguns defeitos a nível da microestrutura cristalina. Como consequência desse processo, novos incrementos nas deformações só podem ocorrer às custas de incrementos nos níveis atuais de tensões.

Justificada por observações experimentais, uma lei de encruamento que fornece os novos limites do regime elástico, pode ser expressa na forma:

$$\sigma_s = \sigma_y + K_y \varepsilon^P \left(\frac{1}{M_y} \right) \quad (5.2)$$

de onde resulta, (imediatamente):

$$\varepsilon^P = \left\langle \frac{\sigma_s - \sigma_y}{K_y} \right\rangle^{M_y} \quad (5.3)$$

onde σ_y é o limite elástico inicial, K_y é o coeficiente de resistência plástica e M_y é o expoente de endurecimento, todos determinados em ensaios experimentais. O símbolo $\langle \rangle$ relaciona-se à condição de positividade, isto é: $\langle x \rangle = x$, se $x > 0$ e $\langle x \rangle = 0$, se $x < 0$. Portanto, é possível afirmar que:

a-) Para sólido *elasto-plástico perfeito*, onde o contorno $\sigma_s = \sigma_y$, tanto para o caso de tração quanto para compressão, a relação constitutiva é expressa por:

$$\text{se: } |\sigma| < \sigma_s = \sigma_y \rightarrow \varepsilon = \varepsilon^e = \sigma/E$$

$$\text{se: } |\sigma| = \sigma_s = \sigma_y \rightarrow \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^P$$

b-) Para os sólidos *elasto-plásticos com encruamento apenas isotropo*, a relação passa a ser a seguinte:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (5.4)$$

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad \varepsilon^p = \left(\frac{|\sigma| - \sigma_y}{K_y} \right)^{M_y} \sin(\sigma) \quad (5.5 \text{ e } 5.6)$$

c-) Para os sólidos rígido-plásticos com encruamento, as deformações elásticas são desconsideradas, reduzindo-se o modelo em questão à relação:

$$\varepsilon = \varepsilon^p = \left(\frac{|\sigma|}{K_z} \right)^{M_z} \sin(\sigma) \quad (5.7)$$

onde K_z e M_z são coeficientes também determinados com base em um ajuste entre modelo teórico e resultados experimentais.

Apresenta-se a seguir, uma tabela retirada de **LEMAITRE & CHABOCHE (1990)**, contendo valores dos parâmetros envolvidos nas expressões 5.3, 5.6 e 5.7, para alguns materiais:

<i>Tabela 5.1 - Características Plásticas dos Materiais</i>						
<i>Material e Temperatura</i>		<i>Carregamento Monotônico</i>				
<i>Tipo do Material</i>	<i>T (°C)</i>	<i>σ_y (MPa)</i>	<i>M_z</i>	<i>K_z</i>	<i>M_y</i>	<i>K_y</i>
<i>Aço 35 NCD 16</i>	20	1200	10.5	2990	3.1	3340
<i>Liga IN 100</i>	20	650	33.0	960	5.6	655
<i>Liga IN 100</i>	700	600	18.0	1150	6.8	354
<i>Liga TA 6 V</i>	350	300	10.2	940	4.3	884
<i>Liga INCO 718</i>	550	500	12.2	1657	5.2	1658

5.2.2-) Critérios de Plastificação

Diferentemente da análise uniaxial, onde o domínio elástico é determinado pela tensão de escoamento e um contorno plástico (ou limite elástico), na análise multiaxial esse domínio passa a ser determinado por critérios, os quais dão origem à superfícies de plastificação. Dentro da região limitada por essa superfície, toda e qualquer variação nos níveis de tensão provocará apenas variação na deformação elástica.

Os critérios podem ser escritos em função das componentes dos tensores de tensões e das variáveis de encruamento, na forma de variáveis escalares (σ_s). Deste modo, um critério pode ser expresso por:

$$f(\sigma_{IJ}, \sigma_s) = 0 \quad (5.8a)$$

ou ainda, como função dos invariantes de tensão

$$f = f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \sigma_s) = 0 \quad (5.8b)$$

Nos metais, observa-se a ocorrência da deformação plástica sem variação volumétrica, bem como o limite de escoamento independente das tensões hidrostáticas. Para esses materiais, é possível considerar apenas a contribuição da parte desviadora do tensor de tensões, e portanto, em termos dos invariantes de σ' , representados pelas variáveis s_{II} e s_{III} , reescreve-se 5.8b na forma

$$f(s_{II}, s_{III}, \sigma_s) = 0 \quad (5.8c)$$

$$s_{II} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma'^2) \quad s_{III} = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma'^3) \quad (5.8d, e)$$

No que segue, apresentam-se de forma bastante sucinta, dois critérios bastante utilizados no estudo da plasticidade.

● **Cr terio de Von Mises**

Para Mises, o critério da plastifica o está baseado na "Energia Cisalhante Elástica" ou de "Distor o". O critério   expresso na forma

$$f(s_{II}, \sigma_s) = s_{II} - \frac{1}{3}\sigma_s^2 = 0 \quad (5.9a)$$

ou ainda, sabendo que $\sigma_{eq} = [(3/2) \sigma' \cdot \sigma']^{0.5}$, reescreve-se

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_s = 0 \quad (5.9b)$$

A expressão geral do critério de Von Mises pode ser explicitada na forma

$$\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)] - \sigma_s^2 = 0 \quad (5.9c)$$

ou, no espaço das tensões principais

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} - \sigma_s = 0 \quad (5.9d)$$

O critério de Mises, no espaço das tensões principais,   representado geometricamente por um cilindro de eixo igualmente inclinado com rela o ao sistema de referência $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e raio $R = (2/3)^{0.5} \sigma_s$, como ilustrado na figura 5.1.

● **Cr terio de Tresca**

No critério de Tresca, a plastifica o está associada   máxima tensão de cisalhamento. O critério  , nesse caso, expresso por:

$$f = f(\sigma) = \frac{1}{2} \text{MÁX}_{i \neq j} (|\sigma_i - \sigma_j|) \quad (5.10a)$$

e em termos dos invariantes s_{II} e s_{III} , reescreve-se

$$f(s_{II}, s_{III}) = 4s_{II}^2 - 27s_{III}^2 - 9\sigma_s^2 s_{II}^2 + 6\sigma_s^4 s_{II} - \sigma_s^6 = 0 \quad (5.10b)$$

O critério de Tresca, no espaço das tensões principais, é representado geometricamente por um prisma de base hexagonal regular e seu eixo também é igualmente inclinado com relação ao seu sistema de referência, como ilustrado na figura 5.2a. Na figura 5.2b, ilustra-se uma superposição das projeções de ambos os critérios, mostrando que o prisma está inscrito no cilindro, o que permite caracterizar o critério de Mises como uma regularização do de Tresca.

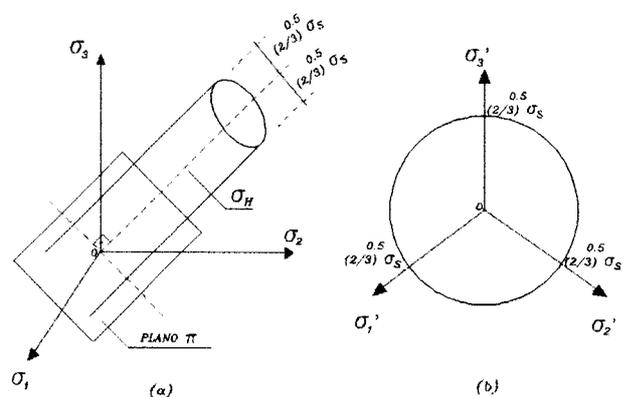


Figura 5.1 - Representação Geométrica do Crit. de Mises
(a): Tridimensional e (b): Plano Desviador (ou Π)

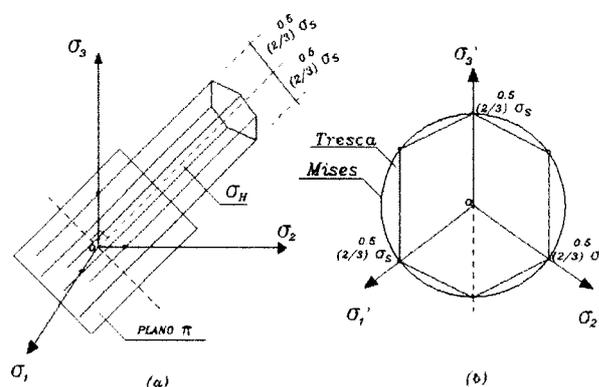


Figura 5.2 - Representação Geométrica do Crit. de Tresca
(a): Tridimensional e (b): Plano Desviador (ou Π)

5.3-) LEIS CONSTITUTIVAS VIA POTENCIAIS TERMODINÂMICO E DISSIPATIVO

A elaboração das leis constitutivas baseia-se novamente na decomposição aditiva em parcelas elástica e plástica, bem como na consideração de pequenas deformações. Desse modo, a deformação plástica pode ser escrita na forma:

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e$$

5.3.1-) Potencial Termodinâmico - Escolha das variáveis

Analogamente à elasticidade, escolhem-se aqui " ε e T " como variáveis observáveis e ε^p e V_k como internas, o que permite escrever o potencial termodinâmico na forma:

$$\psi = \psi(\varepsilon^e, T, V_k) = \psi(\varepsilon - \varepsilon^p, T, V_k) \quad (5.11a)$$

do qual obtém-se o tensor de tensões e a entropia específica pelas leis de estado

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \quad s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (5.11b, c)$$

A inequação de Clausius-Duhem, passa a ser reescrita na forma

$$\sigma \cdot \dot{\varepsilon}^p - \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial V_k} \right) \dot{V}_k - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}(T) \geq 0 \quad (5.11d)$$

A representação do encruamento do material é feita por meio das variáveis internas do conjunto V_k , podendo ser adotada para o encruamento isótropo, a forma:

$$p = \int_0^{\epsilon} \left[\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^{op}(\sigma) \cdot \dot{\epsilon}^{op}(\sigma) \right]^{\frac{1}{2}} d\sigma \quad (5.12)$$

onde p é a deformação plástica total ou acumulada. A figura 5.3 ilustra graficamente o encruamento isótropo, cuja característica principal é a expansão do domínio elástico sem mudança na origem do sistema de referência.

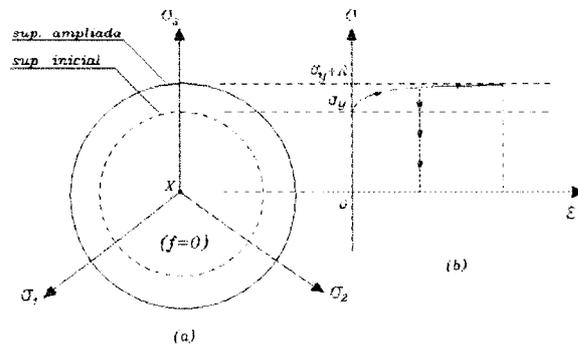


Figura 5.3 - Representação Gráfica do Encr. Isótropo
[LEMAITRE & CHABOCHE (1990)]

Adiciona-se a p a variável interna α_* representativa do encruamento cinemático, que apresenta uma translação do domínio elástico sem expansão desse, como ilustrado na figura 5.4.

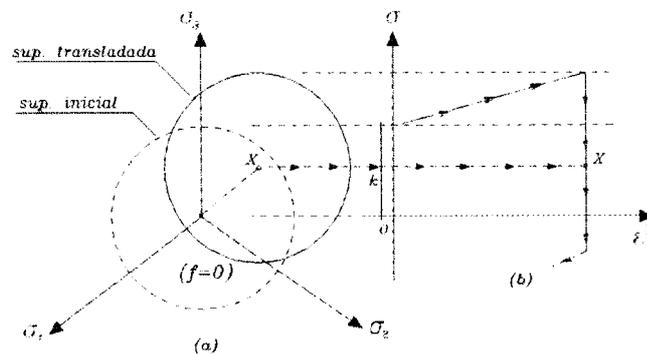


Figura 5.4 - Representação Gráfica do Encr. Cinemático
[LEMAITRE & CHABOCHE (1990)]

Uma vez que a resposta elástica (rigidez observada no descarregamento) não é afetada diretamente pela plastificação, é possível desacoplar o potencial em uma parcela elástica e uma parcela plástica, na forma:

$$\psi = \psi_e(\varepsilon^e, T) + \psi_p(\mathbf{p}, \alpha, T) \quad (5.13a)$$

$$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} \quad X = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \quad (5.13b, c)$$

onde, R (vide figura 5.3) é a variável associada ao encruamento isótropo, representativa do 'tamanho' do domínio elástico no espaço das tensões e X (vide figura 5.4) é a variável associada ao encruamento cinemático, representativa da posição do centro daquele domínio no mesmo espaço.

Por outro lado, imaginando-se que $\partial \varepsilon / \partial t$, $\partial \mathbf{p} / \partial t$ e $\partial \alpha / \partial t$ são independentes de $\text{grad}(T)$, a dissipação também pode ser separada em uma parcela referente à energia dissipada em função da plastificação e em uma parcela de dissipação térmica. Nesse caso, a inequação de Clausius-Duhem passa a ser reescrita em parcelas intrínseca e térmica, nas formas:

$$\phi_p^i - \sigma \cdot \dot{\varepsilon}^p - R \cdot \dot{\mathbf{p}} - X \cdot \dot{\alpha} \geq 0 \quad \phi_p^t - \left(\frac{1}{T}\right) \mathbf{q} \cdot \text{grad}(T) \geq 0$$

5.3.2-) Potencial de Dissipação

O potencial de dissipação permite obter as leis constitutivas ou de fluxo, das variáveis internas adotadas. Este potencial pode ser escrito em função das variáveis associadas e representado por:

$$\phi^* = \phi^*(\sigma, R, X; T) \quad (5.14a)$$

Em uma primeira análise, visando a identificação da lei de fluxo para a deformação plástica admite-se válida uma regra de associatividade, ou seja, toma-se para o potencial de dissipação φ^* uma dada função f representativa de um critério de plastificação. A lei de fluxo resulta coerente com uma regra de normalidade, isto é, o fluxo de deformação tem direção normal à superfície de plastificação. Nesse caso, escreve-se:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (5.15a)$$

A expressão 5.15a consiste em uma forma clássica da plasticidade. Nessa, aparece o parâmetro λ , denominado multiplicador plástico. Em carácter complementar, as variáveis representativas dos encruamentos isótropo e cinemático, resultam escritas, respectivamente, nas formas

$$\dot{p} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} \quad \dot{\alpha}_i = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial X} \quad (5.15b, c)$$

Nos capítulos 8 e 12, com base em *SIMO & HUGHES (1988)*, onde serão estudadas expressões de fluxo para implementação em códigos de cálculo, faz-se a determinação tanto da expressão geral para λ (na forma de taxa), quanto para $\partial f / \partial \sigma$, porém, utilizando-se uma notação mais conveniente para o desenvolvimento das expressões de interesse.

CAPÍTULO 6

MODELOS DE COMPORTAMENTO VISCOPLÁSTICO:PERFEITO E COM ENCRUAMENTOS ISÓTROPO E CINEMÁTICO

Como uma extensão da plasticidade, a viscoplasticidade considera que a evolução das deformações irreversíveis se dá não de forma imediata, mas ao longo do tempo. Dentre as diversas maneiras de se estudar fenômenos dependentes do tempo, podem ser citados o ensaio de "*Fluência*", caracterizado por deformações crescentes à tensão constante e o ensaio de "*Relaxação*", caracterizado por tensões decrescentes à deformação constante.

Neste capítulo, num regime de pequenas deformações, são apresentados potenciais termodinâmico e dissipativo, bem como a determinação das leis de estado e leis complementares, com vistas aos modelos viscoplásticos.

6.1-) DOMÍNIO DE VALIDADE E APLICABILIDADE

Como já mencionado, a viscoplasticidade permite simular fenômenos dependentes do tempo os quais, nos metais, são dependentes da temperatura, quando a mesma atinge valores da ordem de *1/3 da temperatura de fusão* do material. Ressalta-se, no entanto, o caso de algumas ligas metálicas cuja temperatura de fusão é da ordem de *1127°C* e que apresentam comportamento viscoso mesmo para temperaturas

ambiente da ordem de 27°C . Outros materiais como polímeros e madeiras, podem ser modelados com base na viscoplasticidade, independentemente de eventuais variações térmicas.

6.2-) RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA VISCOPLASTICIDADE VIA POTENCIAIS TERMODINÂMICO E DISSIPATIVO

Apresentam-se a seguir as leis gerais para os casos da viscoplasticidade com encruamento isótropo, com encruamento cinemático e o combinado isótropo/cinemático. Em cada caso, apresentam-se a formulação constitutiva do modelo e uma particularização à análise unidimensional.

6.2.1-) Formulação Multiaxial para Viscoplasticidade com Encruamento do Tipo Isótropo

O potencial termodinâmico, representado pela energia livre, pode ser expresso em função de variáveis " ε^e e T " e da variável interna " r ", representativa do encruamento isótropo:

$$\Psi = \Psi(\varepsilon^e, T, r) = \Psi_e(\varepsilon^e, T) + \Psi_{vP}(r, T) \quad (6.1a)$$

Para o potencial de dissipação na forma dualizada, onde T e r são parâmetros, escreve-se a função:

$$\varphi^* = \varphi^*(\sigma, R; T, r)$$

Admitindo novamente a plasticidade incompressível e isotropia do material, é possível reescrever o potencial dissipativo em termos dos invariantes J_2 e J_3 , tal que:

$$\Phi' = \Phi' [J_2(\sigma), J_3(\sigma), R; T, r] \quad (6.1b)$$

cuja particularização para o critério de Mises, resulta em

$$\Phi' = \Phi'(\sigma_{eq}, R; T, r) \quad (6.1c)$$

Admitindo-se ainda a existência de um limite elástico inicial representado por k , o potencial viscoplástico representa-se na forma:

$$\Phi' = \Omega = \Omega(\sigma_{eq} - R - k; T, r) \quad (6.1d)$$

Portanto, são válidas as equações de fluxo:

$$\dot{\varepsilon}^{ovp} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} = \frac{3}{2} \dot{p}^o \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} \quad (6.2a)$$

$$\dot{r}^o = \frac{\partial \Omega}{\partial R} = \dot{p}^o \quad (6.2b)$$

onde, da viscoplasticidade clássica, a deformação viscoplástica acumulada (ou equivalente) é escrita por

$$\dot{p}^o = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^{ovp} \cdot \dot{\varepsilon}^{ovp} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.2c)$$

Em *LEMAITRE & CHABOCHE (1990)*, propõem-se expressões para os potenciais ψ e Ω , as quais derivam de observações experimentais:

$$\Omega = \Omega_{vp} = \frac{K_a}{N_a + 1} \left(\frac{\sigma_{eq} - R - k}{K_a} \right)^{N_a + 1} \quad (6.3a)$$

$$\psi = \psi_{vp} = \frac{1}{2\rho} \left\{ Q_1 p^2 + 2Q_2 \left[p + \frac{e^{(-bp)} - 1}{b} \right] \right\} \quad (6.3b)$$

onde k , K_a , N_a , Q_1 , Q_2 e b , são coeficientes experimentais de calibração, diretamente dependentes da temperatura.

Derivando-se parcialmente a expressão 6.3a com relação a σ , obtém-se a expressão de fluxo viscoplástico:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^{\sigma vp} &= \frac{\partial \dot{\Omega}_{vp}}{\partial \sigma} = \frac{K_a}{N_a + 1} (N_a + 1) \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k}{K_a} \right\rangle^{N_a} \frac{1}{K_a} \frac{3}{2} \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} \\ \therefore \dot{\varepsilon}^{\sigma vp} &= \frac{3}{2} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k}{K_a} \right\rangle^{N_a} \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} = \frac{3}{2} p^{\frac{1}{3}} \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} \end{aligned} \quad (6.3c)$$

Quanto à variável do encruamento isótropo, com base em 6.3c, escreve-se

$$\dot{R} - \dot{p} = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^{\sigma vp} \cdot \dot{\varepsilon}^{\sigma vp} \right)^{\frac{1}{2}} = \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k}{K_a} \right\rangle^{N_a} \quad (6.3d)$$

Uma expressão para R , obtida a partir da derivada parcial de 6.3b com relação a p , é formada por um termo linear e um exponencial, tal que:

$$R = \rho \frac{\partial \psi_{vp}}{\partial p} = Q_1 p + Q_2 [1 - e^{-bp}] \quad (6.3e)$$

Fazendo uma particularização de 6.3c à análise uniaxial, onde $\sigma_{eq} = J_2 = \sigma$, $p = \varepsilon^{vp}$ e $\sigma' = 2\sigma/3$, obtém-se:

$$\dot{\varepsilon}^{\sigma vp} = \left\langle \frac{\sigma - R(\varepsilon^{vp}) - k}{K_a} \right\rangle^{N_a} \quad (6.4a)$$

ou ainda, com o devido rearranjo:

$$\sigma = [k + R(\varepsilon^{vp})] + [K_a \varepsilon^{vp} (\frac{1}{N_a})] \quad (6.4b)$$

A tensão σ é composta por uma parcela de encruamento e uma parcela usualmente denominada de tensão viscosa. A lei assim obtida é do tipo aditiva. Finalmente, 6.3e pode ser escrita na forma particularizada:

$$R(\varepsilon^{vp}) = Q_1 \varepsilon^{vp} + Q_2 [1 - e^{-(b\varepsilon^{vp})}] \quad (6.4c)$$

A dissipação intrínseca (ou mecânica) pode ser representada na forma:

$$\Phi_1 = \sigma \cdot \dot{\varepsilon}^{vp} - R\dot{p} \quad (6.5a)$$

podendo se explicitada, com base em 6.2a e b, obtendo-se:

$$\Phi_1 = \sigma \cdot \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} - R\dot{p} = \frac{3}{2} \frac{\sigma' \sigma'}{\sigma_{eq}} \dot{p} - R\dot{p} = \dot{p} (\sigma_{eq} - R)$$

$$\therefore \Phi_1 = \dot{p} (\sigma_{eq} - R - k) + k\dot{p} \quad (6.5b)$$

Garante-se que $\Phi_1 \geq 0$, pois admitindo-se que $\sigma_{eq} - R - k < 0$, têm-se que $\partial p / \partial t = 0$ e, portanto, $\Phi_1 = 0$. Por outro lado, se $\sigma_{eq} - R - k > 0$, têm-se que $\partial p / \partial t > 0$ e, portanto, $\Phi_1 > 0$, uma vez que k é sempre positivo.

• DOMÍNIO DE VALIDADE

Em *LEMAITRE & CHABOCHE (1990)*, são também propostos potenciais dos quais derivam leis constitutivas do tipo multiplicativa. É possível afirmar que ambas

(aditiva e multiplicativa) possibilitam ajustar satisfatoriamente os resultados obtidos em ensaios de laboratório para encruamento isótropo.

Como ilustração, a figura 6.2 retirada daquela referência, apresenta uma comparação dessas leis (aditiva e multiplicativa) com relação aos resultados experimentais de ensaios de fluência, para uma *liga IN 100* submetida à uma temperatura de 1000°C .

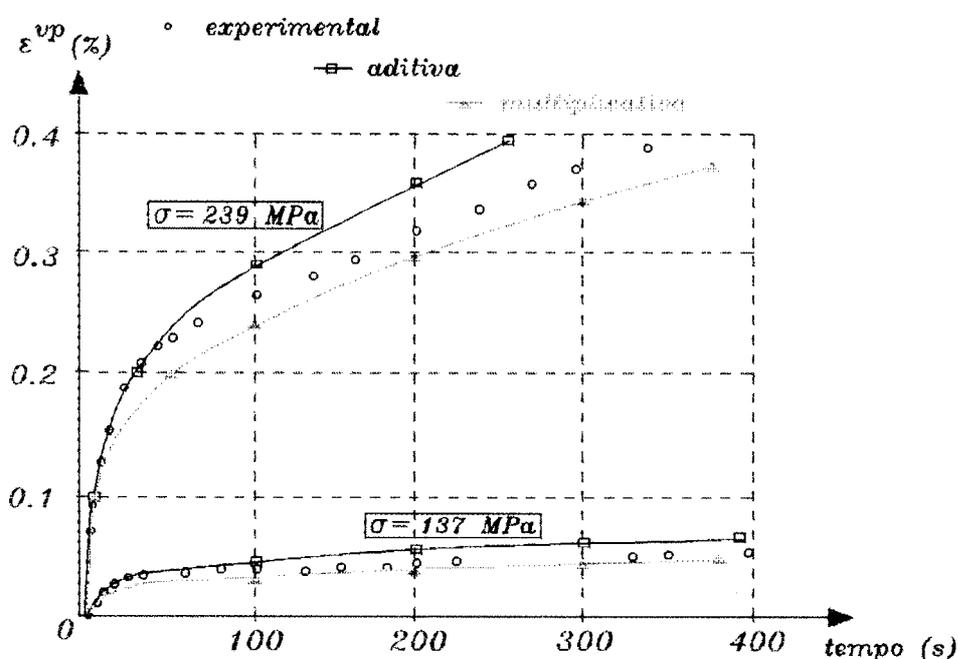


Figura 6.1 - Leis Aditiva e Multiplicativa para o Creep

Vale ressaltar que para $R(\varepsilon^{vp})$, admitido como saturado ($Q_1=0$ e $\varepsilon^{vp} \rightarrow \infty$), o modelo representativo da lei aditiva permite uma descrição satisfatória do creep secundário, pela equação:

$$R(\varepsilon^{vp}) = Q_1 \varepsilon^{vp} + Q_2 [1 - e^{-(b\varepsilon^{vp})}] \approx Q_2 \rightarrow \varepsilon^{vp} = \left(\frac{\sigma - Q_2 - k}{K_a} \right)^{N_a}$$

**6.2.2-) Formulação Multiaxial para Viscoplasticidade com Encruamento
do Tipo Cinemático Linear**

Correspondente a uma translação do domínio elástico no espaço das tensões (para ocorrência de um fluxo viscoplástico), esse encruamento é representado pela variável interna (tensorial) α_* , cuja força termodinâmica associada é X .

Os potenciais termodinâmico e dissipativo, escritos como função do invariante J_2 (novamente a influência de J_3 é negligenciada), escrevem-se nas formas:

$$\Psi = \Psi_e + \Psi_{vp} = \Psi_e + \frac{2C}{9\rho} J_2^2(\alpha_*) = \Psi_e + \frac{1}{3\rho} C \alpha_* \cdot \alpha_* \quad (6.6a)$$

$$\Omega = \Omega \left[J_2(\sigma - X) - k; T \right] = \frac{K_b}{N_b + 1} \left(\frac{J_2(\sigma - X) - k}{K_b} \right)^{N_b + 1} \quad (6.6b)$$

onde os coeficientes k , K_b , N_b e C , são também diretamente dependentes da temperatura.

Ainda, define-se

$$J_2(\sigma - X) = \left[\frac{3}{2} (\sigma' - X') \cdot (\sigma' - X') \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.6c)$$

Por um procedimento análogo ao utilizado no encruamento isótropo são determinadas as taxas de deformação viscoplástica e da variável de encruamento, nas formas finais

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} \frac{\sigma' - X'}{J_2(\sigma' - X')} = \frac{3}{2} \dot{\rho} \frac{\sigma' - X'}{J_2(\sigma' - X')} \quad (6.7a)$$

$$\dot{\alpha}_* = - \frac{\partial \Omega}{\partial X} = \dot{\varepsilon}^{vp} \quad (6.7b)$$

$$X = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} = \rho \left(\frac{1}{3\rho} 2C\alpha_i \right) = \frac{2}{3} C\alpha_i \rightarrow X' = \frac{2}{3} C\alpha_i \quad (6.7c)$$

6.2.3-) *Formulação Multiaxial para Viscoplasticidade com Encruamento Combinado Isótropo/Cinemático*

Permite simular os fenômenos de "*expansão e translação*" do domínio elástico, simultaneamente. A inclusão dos conceitos de encruamento *isótropo* nas expressões referentes ao *cinemático linear*, é observada incluindo-se a variável p nas expressões dos potenciais. Desse modo, escreve-se

$$\Psi = \Psi_e + \frac{1}{3\rho} C\alpha_i \cdot \alpha_i + \frac{1}{\rho} h(p) \quad (6.8a)$$

$$\Omega = \frac{K_c}{N_c+1} \left\langle \frac{J_2(\sigma-X) - R - k}{K_c} \right\rangle^{N_c+1} \quad (6.8b)$$

onde, novamente, k , N_c , K_c e C , são coeficientes de calibração também diretamente dependentes da temperatura. Define-se ainda

$$h(p) = \frac{1}{2} \left\{ Q_1 p^2 + 2Q_2 \left[p + \frac{e^{(-bp)} - 1}{b} \right] \right\}$$

de modo que as expressões de fluxo são escritas nas formas finais

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{3}{2} P^{\dot{\varepsilon}} \frac{\sigma' - X'}{J_2(\sigma - X)} \quad (6.9a)$$

$$\alpha_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial X} = \varepsilon^{\sigma v p} \quad (6.9b)$$

$$r^p = p^p = -\frac{\partial \Omega}{\partial R} = \left(\frac{2}{3} \varepsilon^{\sigma v p} \cdot \varepsilon^{\sigma v p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.9c)$$

e as forças termodinâmicas

$$X = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} = \frac{2}{3} c \alpha_i, \quad R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial p} = h'(p) \quad (6.9d, e)$$

● ANÁLISE DISSIPATIVA

Para Ω , admite-se uma função convexa, positiva e que passa pela origem. Nesse caso, escreve-se:

$$\Omega = \frac{K_c}{N_c + 1} \left\langle \frac{J_2(\sigma - X) - R - k}{K_c} \right\rangle^{N_c + 1} \quad (6.10a)$$

Em uma primeira análise, observa-se que quando $\sigma = X = 0$ e $R = 0$ (admitindo que k seja necessariamente positivo), o valor obtido dentro de $\langle \cdot \rangle$ é negativo. Nesse caso, $\Omega = 0$, garantindo que a função passa pela origem.

Uma outra análise faz-se com referência à potência mecânica dissipada (neste caso intrínseca), na forma:

$$\Phi_1 = \sigma \cdot \varepsilon^{\sigma v p} - X \cdot \alpha_i - R p^p \quad (6.10b)$$

No referente à dissipação mecânica, uma vez conhecido o potencial, reescreve-se 6.10b, tal que:

$$\Phi_1 = (\sigma - X) \cdot \frac{3}{2} p^{\circ} \frac{\sigma' - X'}{J_2(\sigma - X)} - R p^{\circ} \quad (6.10c)$$

ou ainda

$$\Phi_1 = \Phi_1^A \cdot \Phi_1^B = \left[J_2(\sigma - X) - R - k \right] p^{\circ} + [k] p^{\circ} \quad (6.10d)$$

Uma análise cuidadosa da 6.10d possibilita verificar que ambas as parcelas são necessariamente positivas:

a-) Para $J_2(\sigma - X) - R - k \leq 0$, sabe-se que $\partial p / \partial t = 0$. Por outro lado, se $J_2(\sigma - X) - R - k > 0$, tem-se que $\partial p / \partial t > 0$. Ambas as considerações permitem afirmar que $\Phi_1^A \geq 0$;

b-) Para k positivo, tem-se que $\Phi_1^B \geq 0$;

As expressões de fluxo obtidas por meio dos potenciais apresentados serão utilizadas, nos capítulos 11 e 12, para a elaboração de um algoritmo de integração via procedimento implícito de integração numérica. Como esses algoritmos serão baseados nos estudos de *SIMO & HUGHES (1988)*, será necessária a utilização de uma notação mais apropriada para as variáveis de interesse, objetivando apenas uma forma mais conveniente de trabalho.

CAPÍTULO 7

DETERMINAÇÃO DOS POTENCIAIS TERMODINÂMICO E DISSIPATIVO PARA UM MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO

Nesse capítulo, faz-se a verificação da consistência termodinâmica do modelo elasto-viscoplástico estudado em *MUNAIAR NETO (1994)*, a qual está diretamente relacionada à capacidade desse modelo de simular fenômenos físicos ou mecânicos através de funções matemáticas dependentes de coeficientes determinados através de observações experimentais. Deve-se ressaltar que o modelo em questão, ilustrado na figura 7.1, é composto de três trechos distintos: elástico, viscoelástico e viscoplástico.

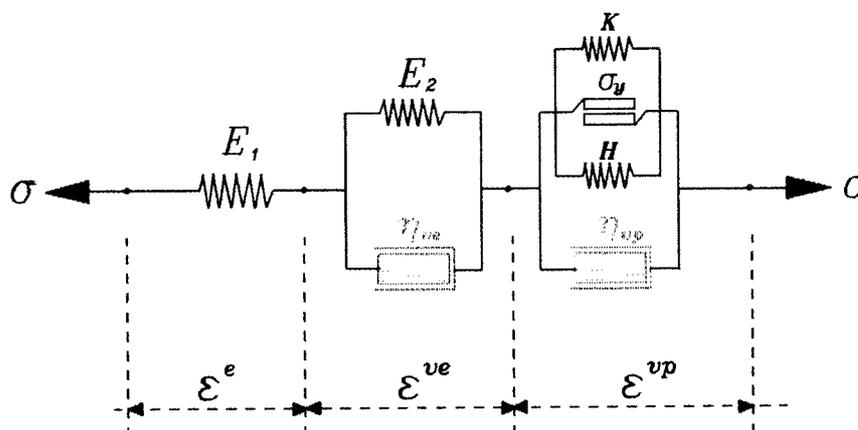


Figura 7.1 - Modelo Elasto-viscoplástico

Parte-se, para tanto, dos potenciais termodinâmicos e dissipativos apresentados no capítulos 4 para modelos elástico e viscoelástico, e no capítulo 6 para modelo viscoplástico, objetivando a determinação de um potencial único e representativo do modelo elasto-viscoplástico em questão.

Derivando-se esse potencial, obtém-se leis de fluxo que devem, quando particularizadas aos casos unidimensionais, recuperar os resultados obtidos via Reologia dos Materiais.

Nos itens que seguem, apresentam-se os potenciais termodinâmicos e dissipativos, primeiramente para uma análise conjunta dos trechos elástico e viscoelástico (modelo de Kelvin-Voight). Posteriormente, uma análise apenas para o trecho viscoplástico e, finalmente, para o modelo completo. Para os três trechos, faz-se uma particularização à análise unidimensional.

7.1-) ANÁLISE CONJUNTA - TRECHOS ELÁSTICO E VISCOELÁSTICO COM DETERMINAÇÃO DOS POTENCIAIS TERMODINÂMICOS E DISSIPATIVOS

Admitindo-se válidos os conceitos da elasticidade e viscoelasticidade apresentados no capítulo 4, bem como os respectivos potenciais termodinâmico e dissipativo, é possível obter uma única expressão para o potencial dissipativo, na forma dual φ^* , cuja a derivada dá origem à lei de fluxo, neste caso viscoelástica, representativa do trecho em estudo.

Ressalta-se que, pela reologia dos materiais, a expressão geral da taxa de deformação total para o caso unidimensional, já conhecida, é escrita usualmente na forma:

$$\dot{\varepsilon}^o = \dot{\varepsilon}^{oe} + \dot{\varepsilon}^{ove} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \gamma_{ve} (\sigma - E_2 \varepsilon^{ve}) \quad (7.1)$$

O trecho em tela é composto da associação dos mesmos elementos reológicos básicos (mola e amortecedor). Porém, como ilustrado na figura 7.2, os parâmetros atribuídos à cada elemento são: Para a mola 1, são atribuídas as constantes de Lamé λ_1 e μ_1 , para a mola 2 as constantes de Lamé λ_2 e μ_2 e para o amortecedor as constantes representativas da viscosidade do material, $\theta_{\lambda 2}$ e $\theta_{\mu 2}$.

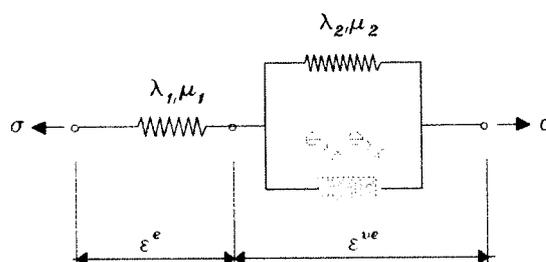


Figura 7.2 - trechos ELÁSTICO e VISCOELÁSTICO

Um estudo separado para cada sub-trecho, permite escrever suas respectivas relações constitutivas, tal que:

• **Para o sub-trecho elástico:** valem as expressões

$$\psi = \psi(\epsilon) = \frac{1}{2\rho} [\lambda_1 \text{tr}(\epsilon)^2 + 2\mu_1 \text{tr}(\epsilon^2)] \quad (7.2a)$$

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} = \lambda_1 \text{tr}(\epsilon) I + 2\mu_1 \epsilon \quad (7.2b)$$

onde σ e ϵ são, respectivamente, os tensores de tensão e de deformação e I o tensor identidade de segunda ordem.

No caso, em função do arranjo em série, interessa mais uma relação inversa. Assim, utilizando a relação entre $\text{tr}(\epsilon)$ e $\text{tr}(\sigma)$ e a relação entre $\text{tr}(\epsilon^2)$ e $\text{tr}(\sigma^2)$, bem como as expressões das constantes λ e μ , todas já devidamente deduzidas e apresentadas no

capítulo 4, obtém-se com base em 7.2a a expressão do potencial termodinâmico dual, na forma:

$$\psi'_e(\sigma) = \frac{1}{2\rho} \left[\frac{1 + \nu_1}{E_1} \text{tr}(\sigma^2) - \frac{\nu_1}{E_1} \text{tr}(\sigma)^2 \right] \quad (7.3a)$$

e portanto

$$\varepsilon^e = \rho \frac{\partial \psi'_e}{\partial \sigma} = \frac{1 + \nu_1}{E_1} \sigma - \frac{\nu_1}{E_1} \text{tr}(\sigma) I \quad (7.3b)$$

$$\varepsilon^{\circ e} = \frac{1 + \nu_1}{E_1} \sigma - \frac{\nu_1}{E_1} \text{tr}(\sigma) I \quad (7.3c)$$

onde E_1 é o módulo de elasticidade e ν_1 o coeficiente de Poisson, ambos referentes à mola 1.

• **Para o sub-trecho viscoelástico (Kelvin):** valem as expressões

$$\psi = \psi(\varepsilon) = \frac{1}{2\rho} [\lambda_2 \text{tr}(\varepsilon)^2 + 2\mu_2 \text{tr}(\varepsilon^2)] \quad (7.4a)$$

$$\varphi = \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2} (\lambda_2 \theta_{\lambda_2} \varepsilon_I^{\circ 2} + 4\mu_2 \theta_{\mu_2} \varepsilon_{II}^{\circ}) \quad (7.4b)$$

$$\sigma_e = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = \lambda_2 \text{tr}(\varepsilon) I + 2\mu_2 \varepsilon \quad (7.4c)$$

$$\sigma_v = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varepsilon}^e} = \lambda_2 \theta_{\lambda_2} \text{tr}(\dot{\varepsilon}^e) I + 2\mu_2 \theta_{\mu_2} \dot{\varepsilon}^e \quad (7.4d)$$

onde θ_{λ_2} e θ_{μ_2} são coeficientes representativos da viscosidade do material.

Sabe-se, no entanto, que o arranjo desse trecho tem como característica importante a igualdade entre as deformações da mola, do amortecedor e do conjunto, ou seja: $\varepsilon^e = \varepsilon^v = \varepsilon^{ve}$. Outra característica é a superposição das tensões: $\sigma_{ve} = \sigma = \sigma_e + \sigma_v$. Sendo válidas tais considerações e reescrevendo as expressões 7.4a,b na forma dual, obtém-se os potenciais termodinâmico e dissipativo, respectivamente :

$$\psi_e^* = \frac{1}{2\rho} \left[\frac{1+\nu_2}{E_2} \text{tr}(\sigma_e^2) - \frac{\nu_2}{E_2} \text{tr}(\sigma_e)^2 \right] + \frac{1}{2\rho} \left[\frac{1+\nu_2}{E_2} \text{tr}[(\sigma - \sigma_v)^2] - \frac{\nu_2}{E_2} \text{tr}(\sigma - \sigma_v)^2 \right] \quad (7.5a)$$

$$\varphi^* = \frac{1}{2} \left[\frac{1+\nu_2}{E_2 \tau_1^*} \text{tr}(\sigma_v^2) - \frac{\nu_2}{E_2 \tau_2^*} \text{tr}(\sigma_v)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1+\nu_2}{E_2 \tau_1^*} \text{tr}[(\sigma - \sigma_e)^2] - \frac{\nu_2}{E_2 \tau_2^*} \text{tr}(\sigma - \sigma_e)^2 \right] \quad (7.5b)$$

onde τ_1^* e τ_2^* são também coeficientes representativos da viscosidade. Deste modo:

$$\varepsilon_e^e = \rho \frac{\partial \psi_e^*(\sigma_e)}{\partial \sigma} = \rho \frac{\partial \psi_e^*(\sigma - \sigma_v)}{\partial \sigma} \quad (7.5c)$$

$$\varepsilon_v^v = \frac{\partial \varphi^*(\sigma_v)}{\partial \sigma} = \frac{\partial \varphi^*(\sigma - \sigma_e)}{\partial \sigma} \quad (7.5d)$$

Como anteriormente mencionado, para o trecho viscoelástico de Kelvin, as deformações em ambos os elementos são as mesmas. É possível admitir, portanto, que a determinação de uma expressão geral para todo o trecho considerados pode ser feita somando-se a expressão 7.3c à expressão 7.5c ou à expressão 7.5d.

Ambas as composições permitem obter um potencial geral, representativo do modelo da figura 7.2, por meio de dois procedimentos distintos:

● **SUPERPOSIÇÃO 1: utilizando as expressões 7.3C e 7.5d**

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v \rightarrow \varepsilon^o = \varepsilon^e + \varepsilon^v = \rho \frac{\partial \psi_e^*(\sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\rho}{\rho} \frac{\partial \varphi^*(\sigma - \sigma_e)}{\partial \sigma} = \rho \frac{\partial \varphi_{ve1}}{\partial \sigma} \quad (7.6a)$$

$$\varphi_{ve1} = \frac{1}{2\rho} \left[\frac{1+\nu_1}{E_1} \text{tr}(\sigma^2) - \frac{\nu_1}{E_1} \text{tr}(\sigma)^2 + \frac{1+\nu_2}{E_2 \tau_1^*} \text{tr}[(\sigma - \sigma_e)^2] - \frac{\nu_2}{E_2 \tau_2^*} \text{tr}(\sigma - \sigma_e)^2 \right] \quad (7.6b)$$

resultando em

$$\varepsilon^o = \frac{1+\nu_1}{E_1} \sigma - \frac{\nu_1}{E_1} \text{tr}(\sigma) I + \frac{1+\nu_2}{E_2 \tau_1^*} (\sigma - \sigma_e) - \frac{\nu_2}{E_2 \tau_2^*} \text{tr}(\sigma - \sigma_e) I \quad (7.6c)$$

● **SUPERPOSIÇÃO 2: utilizando as expressões 7.3c e 7.5c**

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v = \rho \frac{\partial \psi_e^*(\sigma)}{\partial \sigma} + \rho \frac{\partial \psi_e^*(\sigma - \sigma_v)}{\partial \sigma} = \rho \frac{\partial \varphi_{ve2}}{\partial \sigma} \quad (7.7a)$$

$$\varphi_{ve2} = \frac{1}{2\rho} \left[\frac{1+\nu_1}{E_1} \text{tr}(\sigma^2) - \frac{\nu_1}{E_1} \text{tr}(\sigma)^2 + \frac{1+\nu_2}{E_2} \text{tr}[(\sigma - \sigma_v)^2] - \frac{\nu_2}{E_2} \text{tr}(\sigma - \sigma_v)^2 \right] \quad (7.7b)$$

resultando em

$$\varepsilon = \frac{1+\nu_1}{E_1} \sigma - \frac{\nu_1}{E_1} \text{tr}(\sigma) I + \frac{1+\nu_2}{E_2} (\sigma - \sigma_v) - \frac{\nu_2}{E_2} \text{tr}(\sigma - \sigma_v) I \quad (7.7c)$$

Ambas as superposições, como demonstrado, conduzem à determinação da relação constitutiva do modelo viscoelástico ilustrado na figura 7.2.

No sentido de verificação da validade das mesmas, faz-se a seguir uma particularização das expressões 7.6c e 7.7c à análise unidimensional:

● *Particularização da expressão 7.6c*

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{\circ} &= \varepsilon^{\circ} = \frac{1+\nu_1}{E_1} \sigma + \frac{1+\nu_2}{E_2 \tau'_1} (\sigma - \sigma_e) = \left[\frac{\nu_1}{E_1} \sigma + \frac{\nu_2}{E_2 \tau'_2} \sigma - \frac{\nu_2}{E_2 \tau'_2} \sigma_e \right] \\ \varepsilon^{\circ} &= \left[\frac{1+\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_1}{E_1} \right] \sigma + \left[\frac{1+\nu_2}{E_2 \tau'_1} - \frac{\nu_2}{E_2 \tau'_2} \right] \sigma - \left[\frac{1+\nu_2}{E_2 \tau'_1} - \frac{\nu_2}{E_2 \tau'_2} \right] \sigma_e\end{aligned}$$

onde, com as mesmas considerações admitidas no capítulo 4 com referência ao termos entre colchetes, bem como sabendo que na análise unidimensional $\sigma_e = E_2 \varepsilon^{ve}$, chega-se em:

$$\varepsilon^{\circ} = \left[\frac{1}{E_1} + \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_1}{E_1} \right] \sigma + \frac{1}{\eta_{ve}} \sigma - \frac{1}{\eta_{ve}} \sigma_e = \frac{\sigma}{E_1} + \frac{1}{\eta_{ve}} (\sigma - \sigma_e)$$

$$\therefore \varepsilon^{\circ} = \frac{\sigma}{E_1} + \gamma_{ve} (\sigma - E_2 \varepsilon^{ve}) \quad (7.8a)$$

● *Particularização da expressão 7.7d*

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon = \left[\frac{(1+\nu_1)(E_1+E_2)}{E_1 E_2} - \frac{(E_1+E_2)\nu_1}{E_1 E_2} \right] \sigma + \left[\frac{\nu_2}{E_2} - \frac{1+\nu_2}{E_2} \right] \sigma_v = \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} \sigma - \frac{\sigma_v}{E_2}$$

mas sabe-se que na análise unidimensional $\sigma_v = \eta (\partial \varepsilon^{ve} / \partial t)$ e, portanto, obtém-se

$$\varepsilon = \frac{E_1+E_2}{E_1 E_2} \sigma - \frac{\eta_{ve} \varepsilon^{ve}}{E_2} \rightarrow \varepsilon^{ve} = \frac{1}{\eta_{ve}} \left[\frac{E_1+E_2}{E_1} \sigma - E_2 \varepsilon \right] = \varepsilon^{\circ} - \varepsilon^{oe}$$

$$\dot{\varepsilon}^o = \dot{\varepsilon}^{oe} + \gamma_{ve} \left[\frac{E_1}{E_1} \sigma + \frac{E_2}{E_1} \sigma - E_2 (\varepsilon^e + \varepsilon^{ve}) \right] = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \gamma_{ve} [\sigma + E_2 (\varepsilon^e - \varepsilon^e - \varepsilon^{ve})]$$

$$\therefore \dot{\varepsilon}^o = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \gamma_{ve} (\sigma - E_2 \varepsilon^{ve}) \quad (7.8b)$$

As particularizações apresentadas mostram-se idênticas entre si e à relação constitutiva 7.1, obtida a partir da reologia dos materiais.

7.2-) ANÁLISE ISOLADA DO TRECHO VISCOPLÁSTICO - DETERMINAÇÃO DOS POTENCIAIS TERMODINÂMICO E DISSIPATIVO

Utiliza-se aqui um procedimento análogo ao do item 7.1, onde aplicam-se os potenciais (termodinâmico e dissipativo) apresentados no capítulo 6.

A relação obtida será particularizada para o caso unidimensional, objetivando-se recuperar aquela deduzida via reologia dos materiais, expressa por:

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \gamma_{vp} [\sigma - (\sigma_y + (H+K) \varepsilon^{vp})] \quad (7.9)$$

onde H é o módulo de encruamento cinemático e K é o módulo plástico (referente ao encruamento isótropo) e γ_{vp} o coeficiente de fluidez do material.

Para a obtenção dos potenciais termodinâmico e dissipativo e, conseqüentemente, das leis de fluxo, parte-se de um modelo composto também por uma associação em paralelo de amortecedor e sólido com encruamento combinado, como ilustrado na figura 7.3.

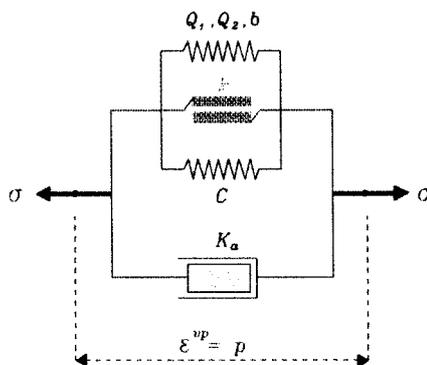


Figura 7.3 - Trecho Viscoplastico

Ao conjunto sólido com encruamento atribuem-se os seguintes parâmetros: uma constante k representativa da tensão de escoamento inicial, os coeficientes Q_1, Q_2 e b referentes ao encruamento isótropo e o coeficiente C , relativo ao encruamento cinemático. Para o amortecedor, atribui-se a constante K_a , representativa da viscosidade do material. São conhecidas as relações

$$\epsilon = \epsilon^s + \epsilon^v + \epsilon^{vp} \quad \sigma = \sigma_s + \sigma_v$$

$$\sigma_s = k + R(Q_1, Q_2, b) \epsilon^{vp} + X(C, \epsilon^{vp}) \quad \sigma_v = K_a \frac{\partial \epsilon^{vp}}{\partial t}$$

Admitindo-se primeiramente a ocorrência apenas do encruamento isótropo ($C=0$), é possível obter as leis de fluxo para o modelo em questão, com base na lei aditiva de encruamento viscoso apresentada no capítulo 6. Os potenciais termodinâmico e dissipativo são expressos, respectivamente, nas formas:

$$\psi = \psi_{vp} = \frac{1}{2\rho} \left[\rho_1 p^2 + 2\rho_2 \left(p + \frac{e^{-bp}-1}{b} \right) \right] \quad (7.10a)$$

$$\Phi^{*-\Omega_{VP}} = \frac{K_a}{N_a+1} \left\langle \frac{J_2(\sigma) - R - k}{K_a} \right\rangle^{N_a+1} = \frac{K_a}{N_a+1} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k}{K_a} \right\rangle^{N_a+1} \quad (7.10b)$$

onde p representa a deformação viscoplástica acumulada. Nesse sentido, obtém-se:

$$\varepsilon^{o_{VP}} = \frac{\partial \Omega_{VP}}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k}{K_a} \right\rangle^{N_a} \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} \quad (7.11a)$$

$$r^p = -\frac{\partial \Omega_{VP}}{\partial R} = \frac{K_a}{N_a+1} (N_a+1) \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k}{K_a} \right\rangle^{N_a} \frac{1}{K_a} \left(-\frac{\partial R}{\partial R} \right) = \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k}{K_a} \right\rangle^{N_a} \quad (7.11b)$$

$$p^o = r^p = \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k}{K_a} \right\rangle^{N_a} \quad (7.11c)$$

Ainda, com referência ao potencial termodinâmico, utiliza-se uma função para o encruamento isótropo na forma:

$$R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p} = \frac{1}{2} \left[2Q_1 p + 2Q_2 (1 - e^{-bp}) \right] = Q_1 p + Q_2 (1 - e^{-bp}) \quad (7.11d)$$

A expressão 7.11d, com base em seus termos $Q_1 p$ e $Q_2(1 - e^{-bp})$, possibilita uma representação completa do ensaio de creep, em suas etapas primária e secundária.

Deve-se, no entanto, levar em conta, com base na figura 7.4a e em capítulos anteriores, as seguintes considerações:

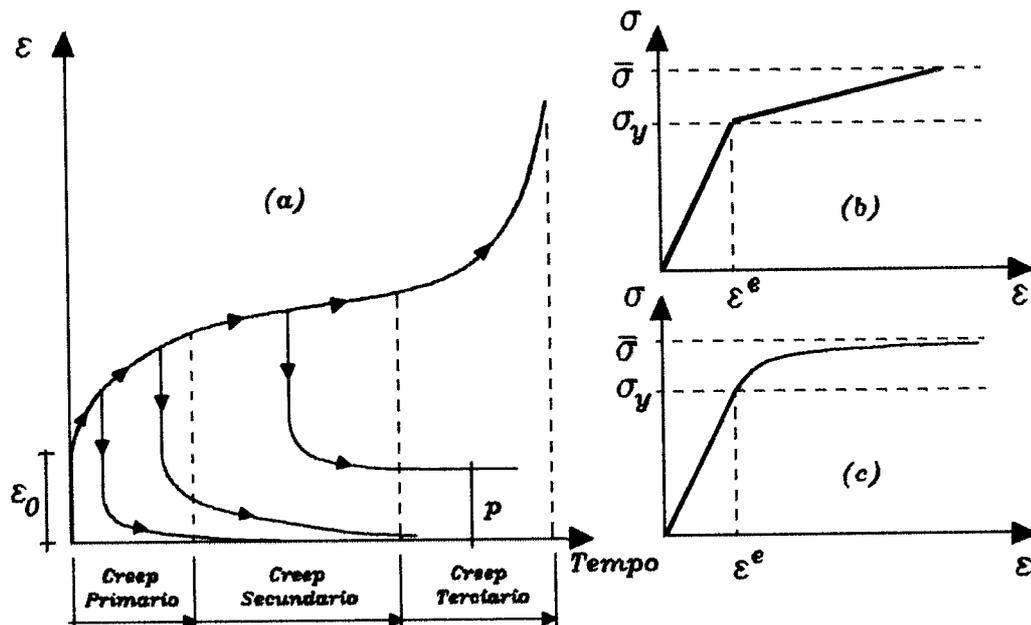


Figura 7.4 - Creep e Encruamentos Isótopos

a-) Dentro da etapa do creep primário, toda deformação ocorrida é praticamente recuperada quando do descarregamento e, portanto, é possível afirmar que a existência de deformações viscoplásticas acumuladas é praticamente nula ($p=0$). Deste modo, uma análise sobre a expressão 11.11d permite admitir que $e^{-bp} = e^0 = 1$, e assim:

$$R = Q_1 p + Q_2 (1-1) \approx Q_1 p \quad (7.12a)$$

sendo esta relação responsável pela linearidade do diagrama tensão x deformação, após atingida a tensão de escoamento (ver figura 7.4b)

b-) Ao longo do creep secundário, a deformação viscoplástica é significativa e não pode mais ser desconsiderada. No entanto, apesar da variável p crescer indefinidamente, deve-se admitir um crescimento assintótico de R (ver figura 7.4c), o que só é possível quando $Q_1 p = 0$.

Tal situação é denominada de "*condição de encruamento saturado*", pois para grandes valores de p , admite-se que $e^{-bp} \rightarrow 0$. Sabe-se ainda que, durante o creep secundário, a razão ou taxa de deformação é praticamente constante e, portanto, um crescimento linear no tempo. Essas considerações permitem escrever:

$$R = 0 + Q_2(1-0) = Q_2 \quad (7.12b)$$

c-) Fica claro que na interface entre o creep primário e o secundário, bem como para o início do creep secundário, vale a expressão 7.11d completa pois nesta etapa a deformação plástica acumulada não é pequena o bastante para ser negligenciada (situação a) e nem grande o bastante para atingir um valor constante para o encruamento (situação b).

Ressalta-se ainda que, como mencionado em *MUNAIAR NETO (1994)*, o modelo elasto-viscoplástico estudado naquela referência dá maior ênfase à representação do creep primário.

No sentido de se obter uma comparação mais adequada entre os resultados obtidos via relações da reologia dos materiais e via formulação termodinâmica, será adotada para os cálculos que seguem a expressão 7.12a para a representação do processo de encruamento isótropo.

Assim, particularizando-se a 7.11a para o caso unidimensional e fazendo $\sigma_{eq} = \sigma$, $\sigma' = 2\sigma/3$ e $p = \epsilon^{vp}$, obtém-se:

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma - Q_1 \epsilon^{vp} - k}{K_a} \right)^{N_a} \frac{2}{3} \frac{\sigma}{\sigma} = \left(\frac{\sigma - Q_1 \epsilon^{vp} - k}{K_a} \right)^{N_a} \quad (7.12c)$$

Operando-se uma troca de símbolos onde substituem-se k pela tensão de escoamento σ_y , Q_1 pelo módulo plástico K e K_a pelo coeficiente de viscosidade η_{vp} , chega-se na expressão 7.12c em:

$$\dot{\varepsilon}^{\text{ovp}} = \left[\frac{\sigma - (\sigma_y + K\varepsilon^{\text{vp}})}{\eta_{\text{vp}}} \right]^{N_a} \quad (7.12d)$$

Um arranjo da expressão 7.12d, objetivando uma identificação mais clara das parcelas das tensões, leva a:

$$\sigma - (\sigma_y + K\varepsilon^{\text{vp}}) = \eta_{\text{vp}} (\dot{\varepsilon}^{\text{ovp}})^{\frac{1}{N_a}} \rightarrow \sigma = (\sigma_y + K\varepsilon^{\text{vp}}) + \eta_{\text{vp}} (\dot{\varepsilon}^{\text{ovp}})^{\frac{1}{N_a}}$$

onde a primeira parcela refere-se à tensão no sólido com encruamento e a segunda parcela à tensão no amortecedor, representada por uma relação que caracteriza uma não-proporcionalidade entre tensão e razão de deformação viscoplástica. Ressalta-se que tal relação em *MUNAIAR NETO (1994)* foi admitida proporcional, o que possibilita afirmar que para a expressão 7.12d, $1/N_a=1 \rightarrow N_a=1$. Portanto:

$$\dot{\varepsilon}^{\text{ovp}} = \frac{1}{\eta_{\text{vp}}} [\sigma - (\sigma_y + K\varepsilon^{\text{vp}})] = \gamma_{\text{vp}} [\sigma - (\sigma_y + K\varepsilon^{\text{vp}})] \quad (7.13a)$$

Assim, 7.13a resulta idêntica à 7.9 e o modelo viscoplástico para o encruamento apenas isotrópico é termodinamicamente consistente e admissível. Cabe ressaltar ainda que, para $N_a=1$, a expressão 7.10b pode ser reescrita na forma:

$$\Omega_{\text{vp}} = \frac{1}{2} \left\{ K_a \left(\frac{\sigma_{\text{eq}} - R - k}{K_a} \right)^2 \right\} \quad (7.13b)$$

Considerando-se agora a ocorrência também do encruamento cinemático ($C \neq 0$), vale então o modelo completo ilustrado anteriormente na figura 7.3. Obtém-se assim as leis de fluxo com base em potenciais, idênticos aos anteriormente apresentados para o

encruamento isótopo, porém acrescidos das variáveis C e X, referentes ao encruamento cinemático. São os seguintes:

$$\psi_{vp} = \frac{1}{3\rho} C \alpha_i \cdot \alpha_i + \frac{1}{2\rho} \left[\varrho_1 p^2 + 2\varrho_2 \left(p + \frac{e^{-bp}-1}{b} \right) \right] \quad (7.14a)$$

$$\Omega_{vp} = \frac{K_b}{N_b+1} \left(\frac{J_2(\sigma-X) - R - k}{K_b} \right)^{N_b+1} \quad (7.14b)$$

As novas leis de fluxo resultam nas formas:

$$\varepsilon_{vp}^o = \frac{\partial \Omega_{vp}}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \left(\frac{J_2(\sigma-X) - R - k}{K_b} \right)^{N_b} \frac{\sigma' - X'}{J_2(\sigma-X)} \quad (7.15a)$$

$$p^o = \dot{p} = - \frac{\partial \Omega_{vp}}{\partial R} = \left(\frac{J_2(\sigma-X) - R - k}{K_b} \right)^{N_b} \quad (7.15b)$$

$$R = \rho \frac{\partial \psi_{vp}}{\partial p} = \varrho_1 p + \varrho_2 (1 - e^{-bp}) \quad (7.15c)$$

$$X = \rho \frac{\partial \psi_{vp}}{\partial \alpha_i} = \frac{2}{3} C \alpha_i \quad (7.15d)$$

Por outro lado, das relações apresentadas nos capítulos 5 e 6, sabe-se que:

$$\alpha_i = - \frac{\partial \Omega_{vp}}{\partial X} = - \left(\frac{3}{2} \left(\frac{J_2(\sigma-X) - R - k}{K_b} \right)^{N_b} \frac{\sigma' - X'}{J_2(\sigma-X)} \right) = \varepsilon_{vp}^o \quad (7.16a)$$

deste modo, reescreve-se 7.15d

$$X = \frac{2}{3} C \alpha, \rightarrow X^o = \frac{2}{3} C \alpha, = \frac{2}{3} C \varepsilon^{vp} \quad (7.16b, c)$$

Novamente, faz-se uma particularização à análise unidimensional da lei de fluxo obtida. Deve-se ressaltar, no entanto, que neste caso para um ensaio de tração ou compressão, os tensores de tensão são escritos na forma:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \sigma' = \sigma - \frac{\text{tr}(\sigma)}{3} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{3} \end{bmatrix} \quad (7.17a, b)$$

$$X = X' = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}X & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{X}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{X}{3} \end{bmatrix} \quad \sigma' - X' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(\sigma - X) & 0 & 0 \\ 0 & -(\sigma - X) & 0 \\ 0 & 0 & -(\sigma - X) \end{bmatrix} \quad (7.17c, d)$$

Novamente faz-se a mesma substituição de variáveis adotada para o encruamento isótropo.

Com base nos termos σ_{11} , σ'_{11} , X_{11} e $(\sigma' - X')_{11}$ dos tensores de tensão anteriormente apresentados, sabe-se que $J_2(\sigma - X) = \sigma - X$, $\sigma' - X' = 2(\sigma - X)/3$ e $p = \varepsilon^{vp}$, permitindo reescrever a expressão 7.15a, na forma:

$$\varepsilon^{vp} = \frac{3}{2} \left\langle \frac{(\sigma - X) - R - k}{K_b} \right\rangle^{N_b} \frac{2}{3} \frac{\sigma - X}{\sigma - X} = \left\langle \frac{\sigma - (X + R + k)}{K_b} \right\rangle^{N_b} \quad (7.18)$$

Novamente, operando-se a mesma substituição de variáveis adotada para o encruamento isótropo, onde fez-se $k = \sigma_y$, $Q_1 = K$ e $K_b = \eta_{vp}$, no sentido de priorizar a representação do creep primário, obtém-se:

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left\langle \frac{\sigma - (\sigma_y + X + K\varepsilon^{vp})}{\eta_{vp}} \right\rangle^{N_b} \quad (7.19a)$$

Com referência ao expoente N_b , permanece também válida a hipótese de proporcionalidade entre tensão e taxa de deformação viscoplástica. Pode-se admitir $N_b=1$, o que confere à expressão 7.14b uma forma quadrática

$$\Omega_{vp} = \frac{1}{2} \left\{ K_b \left\langle \frac{J_2(\sigma - X) - R - k}{K_b} \right\rangle^2 \right\} \quad (7.19b)$$

Agora, uma análise com referência ao termo X_{II} do tensor X , é possível demonstrar que, da expressão 7.16c, resulta uma lei para o encruamento cinemático (em análise unidimensional) na forma $\dot{X} = \dot{X}' = 2/3 \dot{X}$. Portanto:

$$\frac{2}{3} \dot{X} = \frac{2}{3} C \dot{\varepsilon}^{vp} \rightarrow \dot{X} = C \dot{\varepsilon}^{vp} \quad (7.19c)$$

Substituindo então a expressão 7.19c em 7.19a e impondo-se $N_b=1$ e $C=H$, onde H é o módulo de encruamento cinemático, obtém-se finalmente a relação constitutiva:

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta_{vp}} \left[\sigma - (\sigma_y + H\varepsilon^{vp} + K\varepsilon^{vp}) \right] = \gamma_{vp} \left[\sigma - (\sigma_y + (H+K)\varepsilon^{vp}) \right] \quad (7.20)$$

Novamente, agora para o encruamento combinado, nota-se a igualdade entre as expressões 7.9 e 7.20, demonstrando a consistência termodinâmica do modelo em questão.

7.3-) ANÁLISE DO MODELO COMPLETO - OBTENÇÃO DOS POTENCIAIS TERMODINÂMICO E DISSIPATIVO E DAS LEIS DE FLUXO

Nos itens 7.1 e 7.2 anteriormente apresentados, foram estudados os potenciais termodinâmicos e dissipativos para os trechos *elástico/viscoelástico e viscoplástico*, respectivamente.

Em ambos os casos, foram obtidas as leis de fluxo pela derivação dos mencionados potenciais, bem como a particularização à análise unidimensional no sentido de uma comparação direta com os resultados obtidos nos estudos desenvolvidos em *MUNAIAR NETO (1994)*, com referência ao modelo elasto-viscoplástico.

Tais particularizações permitiram recuperar os resultados determinados naquela referência, o que sugere uma consistência termodinâmica do modelo em questão.

A partir de agora, o objetivo é a superposição dos resultados obtidos nos itens 7.1 e 7.2, no sentido de formular potenciais gerais termodinâmico e dissipativo, únicos e representativos do modelo completo da figura 7.1.

Nesse sentido, reúnem-se, a seguir, as expressões de interesse para os trechos elástico, viscoelástico e viscoplástico. São as seguintes:

● **Sub-Trecho Elástico (ε^e):**

$$\psi_e^*(\sigma) = \frac{1}{2\rho} \left[\frac{1+\nu_1}{E_1} \text{tr}(\sigma^2) - \frac{\nu_1}{E_1} \text{tr}(\sigma)^2 \right] \quad (7.21a)$$

$$\varepsilon^e = \rho \frac{\partial \psi_e^*(\sigma)}{\partial \sigma} \rightarrow \dot{\varepsilon}^e = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \psi_e^*(\sigma)}{\partial \sigma} \right] \quad (7.21b)$$

● **Sub-Trecho Viscoelástico de Kelvin-Voigt (ε^{ve}):**

$$\varphi_{ve}^* = \varphi^*(\sigma - \sigma_e) = \frac{1}{2} \left[\frac{1+\nu_2}{E_2 \tau_1} \text{tr}[(\sigma - \sigma_e)^2] - \frac{\nu_2}{E_2 \tau_2} \text{tr}(\sigma - \sigma_e)^2 \right] \quad (7.22a)$$

$$\varepsilon^{\circ ve} = \frac{\partial \varphi_{ve}^* (\sigma - \sigma_e)}{\partial \sigma} \quad (7.22b)$$

● **Sub-Trecho Viscoplastico com Encl. Combinado (ε^{vp}):**

$$\varphi_{vp}^* = \frac{1}{2} \left\{ K_b \left\langle \frac{J_2 (\sigma - X) - R - k^2}{K_b} \right\rangle \right\} \quad (7.23a)$$

$$\varepsilon^{\circ vp} = \frac{\partial \varphi_{vp}^* (\sigma - X)}{\partial \sigma} \quad (7.23b)$$

Das expressões apresentadas obtém-se um potencial dissipativo geral somando-se 7.21a, 7.22a e 7.23a e, conseqüentemente, uma relação constitutiva geral para o modelo completo, que busca relacionar taxa de deformação e tensão real. O potencial dissipativo, aqui denominado de "**Potencial Dissipativo Elasto-viscoplastico**", φ_{evp}^* , bem como a mencionada relação constitutiva, são escritos nas formas:

$$\begin{aligned} \varphi_{evp}^* = \frac{1}{2\rho} \left[\frac{1+\nu_1}{E_1} \text{tr}(\mathcal{D}^2) - \frac{\nu_1}{E_1} \text{tr}(\mathcal{D})^2 + \frac{1+\nu_2}{E_2 \tau_1'} \text{tr}[(\sigma - \sigma_e)^2] \right. \\ \left. - \frac{\nu_2}{E_2 \tau_2'} \text{tr}(\sigma - \sigma_e)^2 + K_b \left\langle \frac{J_2 (\sigma - X) - R - k^2}{K_b} \right\rangle \right] \\ \varepsilon^{\circ} = \varepsilon^{\circ e} + \varepsilon^{\circ ve} + \varepsilon^{\circ vp} = \rho \frac{\partial \varphi_{evp}^*}{\partial \sigma} = \rho \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial \psi_e^*}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \varphi_{ve}^* + \frac{1}{\rho} \varphi_{vp}^* \right] \quad (7.24a) \end{aligned}$$

sendo que 7.24a pode ser reescrita na sua forma explícita

$$\begin{aligned} \varepsilon^o &= \frac{1+\nu_1}{E_1} \sigma - \frac{\nu_1}{E_1} \text{tr}(\sigma) I + \frac{1+\nu_2}{E_2 \tau_1'} (\sigma - \sigma_e) - \frac{\nu_2}{E_2 \tau_2'} [\text{tr}(\sigma) - \text{tr}(\sigma_e)] I + \\ &\quad \frac{3}{2} \gamma_{vp} [J_2(\sigma - X) - (\sigma_y + Kp)] \frac{\sigma' - X'}{J_2(\sigma - X)} \sin(\sigma - X) \end{aligned} \quad (7.24b)$$

onde:

$$p = [(2/3)\varepsilon^{vp} \cdot \varepsilon^{vp}]^{0.5}; \quad J_2(\sigma - X) = [(3/2)(\sigma' - X') \cdot (\sigma' - X')]^{0.5}; \quad \sigma' = \sigma - [\text{tr}(\sigma)/3]I$$

Para os potenciais termodinâmicos, valem para cada trecho as seguintes expressões:

• **Tensão no Trecho Elástico (σ_e):**

$$\psi_e(\varepsilon) = \frac{1}{2\rho} [\lambda_1 \text{tr}(\varepsilon)^2 + 2\mu_1 \text{tr}(\varepsilon^2)] \quad (7.25a)$$

$$\sigma_e = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \varepsilon} = \lambda_1 \text{tr}(\varepsilon) I + 2\mu_1 \varepsilon \quad (7.25b)$$

$$\lambda_1 = \frac{\nu E_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu_1 = G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu)} \quad (7.24c, d)$$

• **Tensão no Trecho Viscoelástico (σ_{ve}):**

$$\psi_m(\varepsilon^{ve}) = \frac{1}{2\rho} [\lambda_2 \text{tr}(\varepsilon^{ve})^2 + 2\mu_2 \text{tr}(\varepsilon^{ve^2})] \quad (7.26a)$$

$$\phi_v(\varepsilon^{ve}) = \frac{1}{2} [\lambda_2 \theta_{\lambda_2} \text{tr}(\dot{\varepsilon}^{ve})^2 + 2\mu_2 \theta_{\mu_2} \text{tr}(\dot{\varepsilon}^{ve})^2] \quad (7.26b)$$

$$\sigma_m = \rho \frac{\partial \psi_m}{\partial \varepsilon} = \lambda_2 \text{tr}(\varepsilon^{ve}) I + 2\mu_2 \varepsilon^{ve} \quad (7.26c)$$

$$\sigma_v = \frac{\partial \phi_v}{\partial \dot{\varepsilon}} = \lambda_2 \theta_{\lambda_2} \text{tr}(\dot{\varepsilon}^{ve}) I + 2\mu_2 \theta_{\mu_2} \dot{\varepsilon}^{ve} \quad (7.26d)$$

$$\sigma_{ve} = \lambda_2 [\text{tr}(\varepsilon^{ve}) + \theta_{\lambda_2} \text{tr}(\dot{\varepsilon}^{ve})] I + 2\mu_2 [\varepsilon^{ve} + \theta_{\mu_2} \dot{\varepsilon}^{ve}] \quad (7.26e)$$

$$\lambda_2 = \frac{\nu E_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu_2 = G_2 = \frac{E_2}{2(1+\nu)} \quad (7.26f, g)$$

• **Tensão no Trecho Viscoplastico (σ_{vp}):**

$$\psi_{vp} = \frac{1}{3\rho} C\alpha_i \cdot \alpha_i + \frac{1}{2\rho} \left[Q_1 p^2 + 2Q_2 \left(p + \frac{e^{-bp}-1}{b} \right) \right] \quad (7.27a)$$

$$R = \rho \frac{\partial \psi_{vp}}{\partial p} = [Q_1 p + Q_2 (1 - e^{-bp})] \Big|_{p \rightarrow 0} = Q_1 p + Kp \quad (7.27b)$$

$$X = \rho \frac{\partial \psi_{vp}}{\partial \alpha_i} = \frac{2}{3} C\alpha_i = \frac{2}{3} H \varepsilon^{vp} \quad (7.27c)$$

$$\sigma = (\sigma_y + Kp) I + \frac{2}{3} H \varepsilon^{vp} + \eta_{vp} \dot{\varepsilon}^{vp} \quad (7.27d)$$

CAPÍTULO 8

ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO PARA MODELOS CONSTITUTIVOS VISCOELÁSTICO E ELASTO-VISCOPLÁSTICO EM ANÁLISE UNIDIMENSIONAL

Este capítulo trata da integração numérica dos modelos apresentados anteriormente, baseando-se na formulação proposta por *SIMO & HUGHES (1988)*. Toma-se como ponto de partida as expressões referentes aos modelos elasto-plástico e elasto-viscoplástico, apresentadas naquela referência.

8.1-) O MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO COM ENCRUAMENTO

O modelo elasto-viscoplástico para encruamento combinado, ilustrado na figura 8.1, tem por base o arranjo de uma "*mola*" de rigidez E , em série com um conjunto em paralelo "*sólido/amortecedor*", aos quais atribuem-se a tensão de escoamento $Y = \sigma_y$ e o coeficiente de viscosidade η , respectivamente.

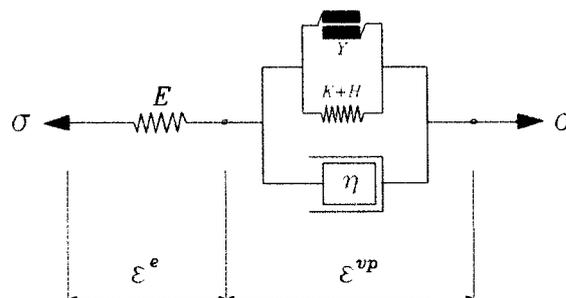


Figura 8.1 - Modelo Reológico Elasto-viscoplástico

sendo que para esse modelo, valem as expressões:

$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^{vp} \rightarrow \sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^{vp}) \quad (8.1a, b)$$

Vale lembrar, com referência à figura 8.1, que K é o módulo plástico (representativo do encruamento isótropo) e H é o módulo de encruamento cinemático.

Em uma primeira análise, considera-se o caso da viscoplasticidade perfeita (K=H=0), onde a tensão no amortecedor denominada "*tensão extra*" (σ_{ex}) resulta, nesse caso, da diferença entre a tensão total aplicada σ e a tensão de escoamento σ_y .

Desse modo, fazendo-se uso do operador que define o sinal da tensão aplicada, $\sin(\sigma)$, escreve-se:

$$\sigma_{ex} = (|\sigma| - \sigma_y) \sin(\sigma) = f(\sigma) \sin(\sigma) = \eta \dot{\varepsilon}^{vp} \quad (8.2)$$

Rearranjando-se 8.2 e considerando-se que $(\partial f / \partial \sigma) = f'_\sigma = \sin(\sigma)$, obtém-se a expressão da taxa de deformação viscoplástica

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta} \sigma_{ex} = \frac{1}{\eta} (|\sigma| - \sigma_y) \sin(\sigma) = \frac{1}{\eta} \langle f(\sigma) \rangle \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma}$$

$$\dot{\epsilon}^{ovp} = \gamma \langle f(\sigma) \rangle \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \sin(\sigma) \quad (8.3)$$

onde $\gamma = 1/\eta$ é o coeficiente de fluidez do material, $f = f(\sigma)$ o critério de plastificação ou escoamento e $\dot{\lambda}$ o multiplicador viscoplástico.

Para o modelo com $K > 0$, as tensões superam a tensão inicial de escoamento. Possui como principal característica, já mencionada no capítulo 6, uma expansão simétrica com relação à origem do intervalo inicial $(-\sigma_y, \sigma_y)$, como ilustrado na figura 8.2.

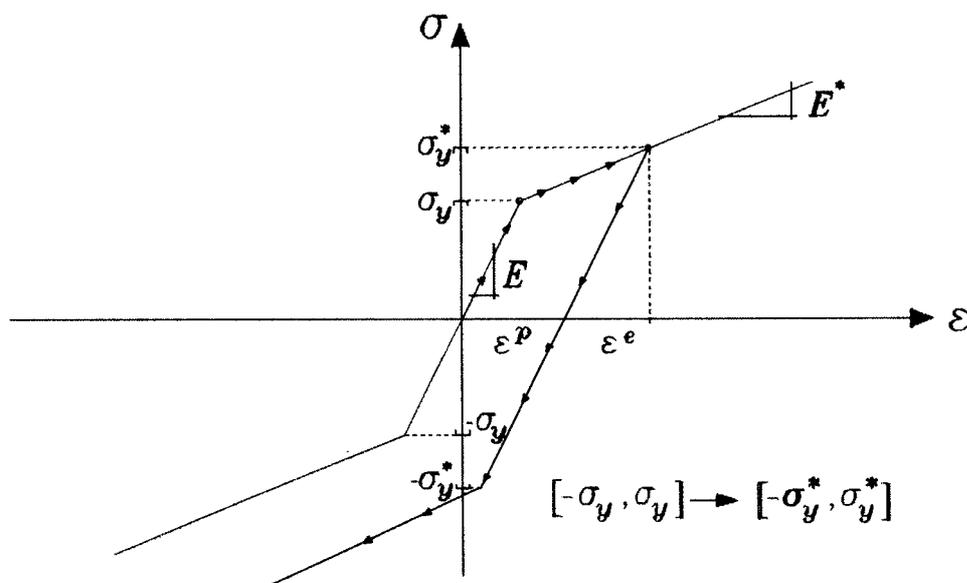


Figura 8.2 - Representação Gráfica do Encr. Isótopo

A mesma figura sugere que uma medida do encruamento isotrópico seja proporcional à quantidade de deformação plástica tomada em módulo, que se acumula ao longo do processo.

Nesse caso, a função representativa do critério de plastificação passa a ser acrescida do parâmetro K e de um novo parâmetro α , representativo da deformação

viscoplástica acumulada. O critério é escrito na forma:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + K\alpha) \quad (8.4a)$$

onde, como apresentado em *SIMO & HUGHES (1988)*

$$\alpha = |\varepsilon^{vp}| \geq 0 \quad (8.4b)$$

ou ainda, de 8.3

$$\alpha = |\varepsilon^{vp}| = |\lambda^\circ \sin(\sigma)| = \lambda^\circ \quad (8.4c)$$

No encruamento cinemático o intervalo inicial se mantém constante deslocando-se sua origem no sentido da deformação viscoplástica, conforme ilustrado na figura 8.3. O valor q da translação da origem é denominado *Tensão de Retorno*.

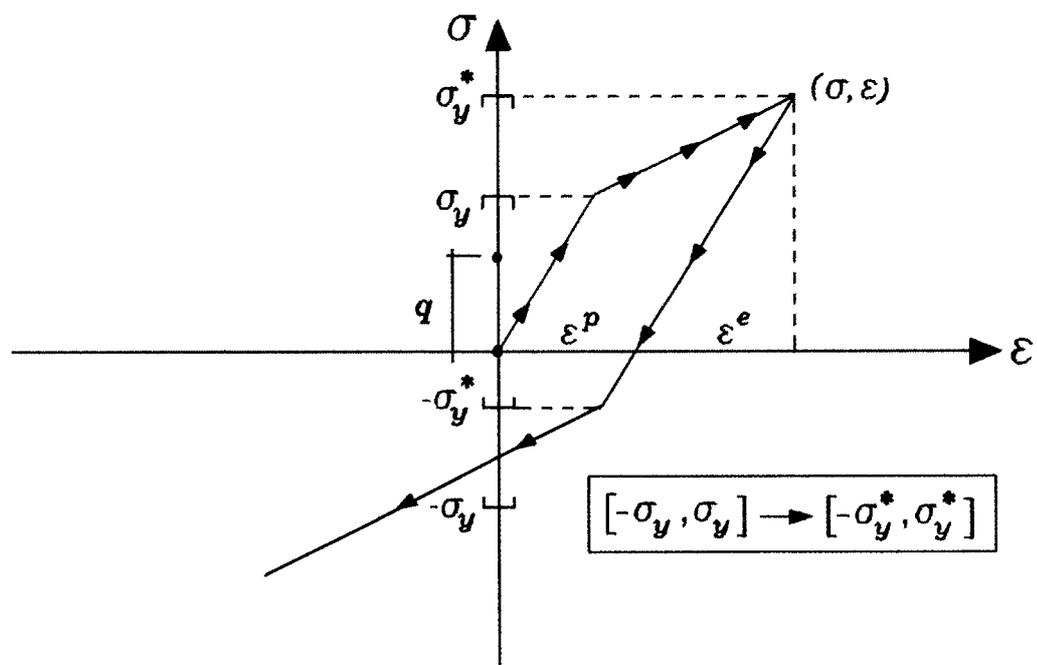


Figura 8.3 - Representação Gráfica do Encr. Cinemático

No entanto, no presente item, ao invés de desenvolver apenas as expressões referentes ao encruamento cinemático, optou-se por apresentar um modelo misto, resultante da superposição direta do encruamento cinemático e do encruamento isótropo. A expressão para o critério de plastificação escreve-se, então, admitindo ambos os encruamentos, na forma:

$$f = f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - (\sigma_y + K\alpha) \leq 0 \quad (8.5a)$$

As expressões de fluxo para a deformação viscoplástica e para as variáveis de encruamentos isótropo e cinemático, escrevem-se:

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\lambda} \sin(\sigma - q) \quad (8.5b)$$

$$\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}^{vp}| - \dot{\lambda} \quad (8.5c)$$

$$\dot{q} = H \dot{\varepsilon}^{vp} \quad (8.5d)$$

onde H, como já mencionado, é o módulo de encruamento cinemático.

8.1.1-) Integração Numérica: Expressões em Passo Finito

Como se nota, as expressões resultantes do modelo em questão são apresentadas na forma de taxas. Para fins de aplicações numéricas, interessa as formas em incrementos finitos as quais dependem do tipo de procedimento de integração adotado.

Partindo-se de um instante de tempo $t_n \rightarrow n$ para um instante futuro $t_{n+1} \rightarrow n+1$, os procedimentos bastante empregados na integração numérica são:

- **PROCEDIMENTO EXPLÍCITO (ou Diferenças Ascendentes)**
- **PROCEDIMENTO SEMI-IMPLÍCITO (ou Diferenças Centrais)**
- **PROCEDIMENTO IMPLÍCITO (ou Diferenças Descendentes)**

Dos procedimentos citados, opta-se, para os estudos a serem realizados no presente trabalho, pela utilização do *procedimento implícito*. Assim, sendo x a representação de uma dada variável de interesse, a partir de um passo de tempo finito qualquer Δt , escreve-se a expressão geral na forma:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta t \dot{x}(t_{i+1})$$

8.1.2-) Procedimento de "Previsão e Correção" para a Determinação das Expressões de Interesse em $n+1$

A determinação do valor da variável de interesse envolvida na aplicação do procedimento implícito decorre de um procedimento de previsão e correção.

Na etapa de previsão, cria-se um "*estado auxiliar de tensões (aux)*", cuja hipótese consiste em admitir que no instante $n+1$, para um dado carregamento, o comportamento é puramente elástico linear. Admitindo-se o caso de encruamento isótropo, escrevem-se:

$$\sigma_{n+1}^{aux} = E (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{VP}) \equiv \sigma_n + E \Delta \varepsilon_n \quad (8.7a)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{VP, aux} = \varepsilon_n^{VP} \quad \alpha_{n+1}^{aux} = \alpha_n \quad (8.7b, c)$$

$$f_{n+1}^{aux} = |\sigma_{n+1}^{aux}| - (\sigma_y + K \alpha_n) \quad (8.7d)$$

onde o índice superior "*aux*", indica um estado auxiliar ou admitido.

Cabe ressaltar que o estado admitido (ou auxiliar) de fato se verificará no caso de situações de descarregamento elástico ou de recarregamento que não produza incrementos na parcela de deformação viscoplástica. Se fôr o caso, $f_{n+1}^{aux} \leq 0$, e portanto:

$$f_{n+1} - f_{n+1}^{aux} \leq 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \Delta\lambda = 0$$

$$\varepsilon_{n+1}^{vp} = \varepsilon_n^{vp} \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n \quad \sigma_{n+1} = \sigma_n$$

Neste caso, não ocorre a necessidade de uma segunda etapa, a de "correção". Por outro lado, considerando $f_{n+1}^{aux} > 0$, é possível demonstrar que o estado auxiliar passa a não mais coincidir com o estado real de tensões. Portanto, há ocorrência de incrementos de deformação viscoplástica. A figura 8.4 ilustra o procedimento a ser utilizado para $f_{n+1}^{aux} > 0$.

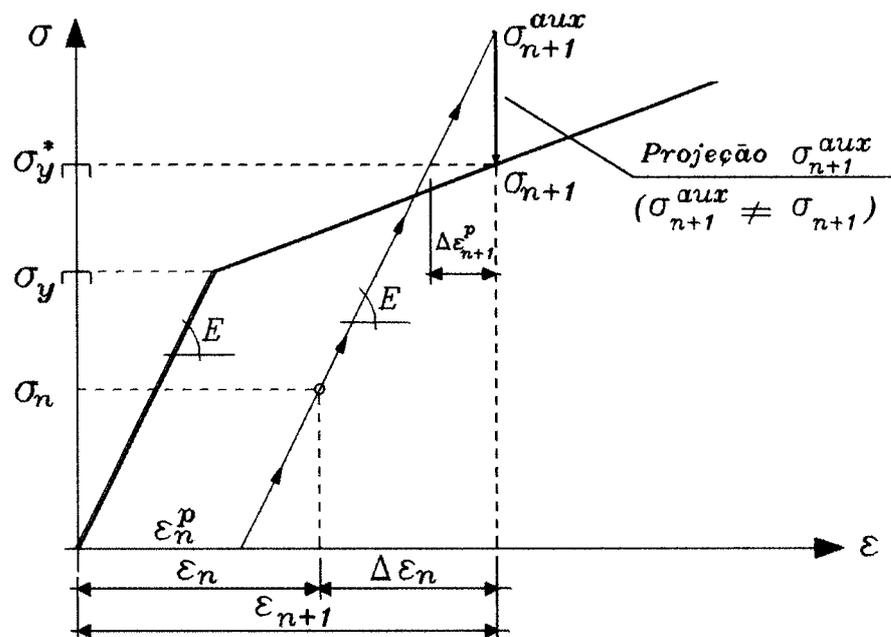


Figura 8.4 - Projeção do Estado Auxiliar

Uma análise da figura 8.4 mostra que, uma vez superado o limite elástico, deve-se proceder a uma projeção de σ_{n+1}^{aux} sobre a região de encruamento do diagrama σ ε .

Essa projeção caracteriza-se como uma etapa de "correção" dos níveis admitidos de tensões, garantindo que σ_{n+1} não viole os níveis reais compatíveis com o encruamento do material. Assim, com relação ao estado auxiliar é possível afirmar que:

$$\text{se } f_{n+1}^{aux} \leq 0 \rightarrow \text{Comportamento Elástico} \dots \rightarrow \Delta \lambda = 0$$

$$\text{se } f_{n+1}^{aux} > 0 \rightarrow \text{Comportamento Viscoplastico} \dots \rightarrow \Delta \lambda > 0$$

Supondo que haja também encruamento cinemático, é possível complementar o conjunto das expressões 8.7, considerando-se como válidas as novas expressões

$$q_{n+1}^{aux} = q_n \quad (8.8a)$$

$$\xi_{n+1}^{aux} = \sigma_{n+1}^{aux} - q_{n+1}^{aux} = \sigma_{n+1}^{aux} - q_n \quad (8.8b)$$

onde q_{n+1}^{aux} e ξ_{n+1}^{aux} são respectivamente as tensões de *retorno e relativa*, para o estado auxiliar. Reescreve-se, portanto, a expressão para o critério na forma

$$f_{n+1}^{aux} = |\sigma_{n+1}^{aux} - q_n| - (\sigma_y + K\alpha_n) = |\xi_{n+1}^{aux}| - (\sigma_y + K\alpha_n) \quad (8.8c)$$

8.1.3-) Determinação das Expressões de Tensão e Deformação em t_{n+1} com Base no Estado Auxiliar de Tensões

Nesta etapa, o objetivo passa a ser a obtenção das expressões básicas das variáveis ϵ_{n+1}^{vp} , q_{n+1} , α_{n+1} , σ_{n+1} , $\Delta \lambda$, em função do estado auxiliar de tensões.

Para tanto, considera-se um caso geral de encruamento combinado, tomando-se como ponto de partida a expressão de σ_{n+1} , cujo rearranjo em termos de σ_{n+1}^{aux} e $\Delta \lambda$, conduz à:

$$\sigma_{n+1} = E(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{vp}) = E(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{vp}) + \epsilon_n^{vp} - \epsilon_n^{vp} + q_{n+1} - q_{n+1}$$

$$\sigma_{n+1} - q_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{VP}) - q_n - H\Delta\varepsilon_{n+1}^{VP} - E(\varepsilon_{n+1}^{VP} - \varepsilon_n^{VP}) = (\sigma_{n+1}^{aux} - q_n) - (E+H)\Delta\varepsilon_{n+1}^{VP}$$

$$\therefore \xi_{n+1} = \xi_{n+1}^{aux} - \Delta\lambda(E+H) \sin(\xi_{n+1}) \quad (8.9a)$$

Fazendo-se uso do operador $\sin(\cdot)$, sinal da variável, obtém-se

$$|\xi_{n+1}| \sin(\xi_{n+1}) = |\xi_{n+1}^{aux}| \sin(\xi_{n+1}^{aux}) - \Delta\lambda(E+H) \sin(\xi_{n+1})$$

$$[|\xi_{n+1}| + \Delta\lambda(E+H)] \sin(\xi_{n+1}) = |\xi_{n+1}^{aux}| \sin(\xi_{n+1}^{aux}) \quad (8.9b)$$

Como $\Delta\lambda > 0$, $E > 0$ e $H > 0$, o termo interno aos colchetes em 8.9b, é necessariamente positivo. Portanto, é possível afirmar que

$$\sin(\xi_{n+1}) = \sin(\xi_{n+1}^{aux}) \quad (8.10a)$$

$$|\xi_{n+1}| + \Delta\lambda(E+H) = |\xi_{n+1}^{aux}| \quad (8.10b)$$

Em uma última etapa, faz-se a determinação do multiplicador viscoplástico. Para tanto, determina-se primeiramente a expressão para o multiplicador plástico, substituindo-se 8.10b em 8.8c e usando $\alpha_{n+1} + \alpha_n = \Delta\lambda$, tal que:

$$f_{n+1} = |\xi_{n+1}^{aux}| - \Delta\lambda^P(E+H) - (\sigma_y + K\alpha_{n+1})$$

$$f_{n+1} = |\xi_{n+1}^{aux}| - \Delta\lambda^P(E+H) - \sigma_y - K\alpha_{n+1} + K\alpha_n - K\alpha_n$$

$$f_{n+1} = |\xi_{n+1}^{aux}| - (\sigma_y + K\alpha_n) - \Delta\lambda^P(E+H) - \Delta\lambda^PK = f_{n+1}^{aux} - \Delta\lambda^P(E+H+K)$$

$$\Delta\lambda^P > 0 \rightarrow f_{n+1} = 0 \rightarrow \Delta\lambda^P = f_{n+1}^{aux} / (E+H+K) \quad (8.10c)$$

Como sugerido em *SIMO & HUGHES (1988)*, uma extensão à viscoplasticidade consiste basicamente em multiplicar o resultado de 8.10c por um coeficiente, função da viscosidade e do tempo, tal que:

$$\Delta\lambda^{VP} = \left[\frac{1}{1 + \frac{\eta}{(E+H+K)\Delta t}} \right] \Delta\lambda^P = \frac{f_{n+1}^{aux}}{(E+H+K) + \frac{\eta}{\Delta t}} \quad (8.10d)$$

Com base em 8.10a,c e admitindo-se como conhecidos os valores das variáveis de interesse em um instante de tempo n , é possível escrever as expressões finais para o modelo elasto-viscoplástico com encruamento combinado, nas formas:

$$\sigma_{n+1}^{aux} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{VP}) \quad \xi_{n+1}^{aux} = \sigma_{n+1}^{aux} - \alpha_n \quad f_{n+1}^{aux} = |\xi_{n+1}^{aux}| - (\sigma_y + K\alpha_n)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{VP} = \varepsilon_n^{VP} + \Delta\lambda^{VP} \sin(\xi_{n+1}^{aux}) \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\lambda^{VP}$$

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{VP}) \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\lambda^{VP} H \sin(\xi_{n+1}^{aux})$$

8.2-) FORMA INCREMENTAL DE UM MODELO ESTENDIDO COM ENCRUAMENTO APENAS DO TIPO ISÓTROPICO

Neste item, aplica-se o procedimento anterior para a obtenção da forma incremental do modelo estendido, discutido no capítulo 7. Vale observar novamente que a idéia dessa nova associação em série é gerar um conjunto de relações que incluam como casos particulares as respostas viscoelástica e viscoplástica. Como consequência, um mesmo código de cálculo a ser gerado permitirá realizar análises nos dois regimes simultaneamente.

Apresenta-se na figura 8.5 o esquema do novo modelo reológico, com seus novos parâmetros E_2 e η_1 .

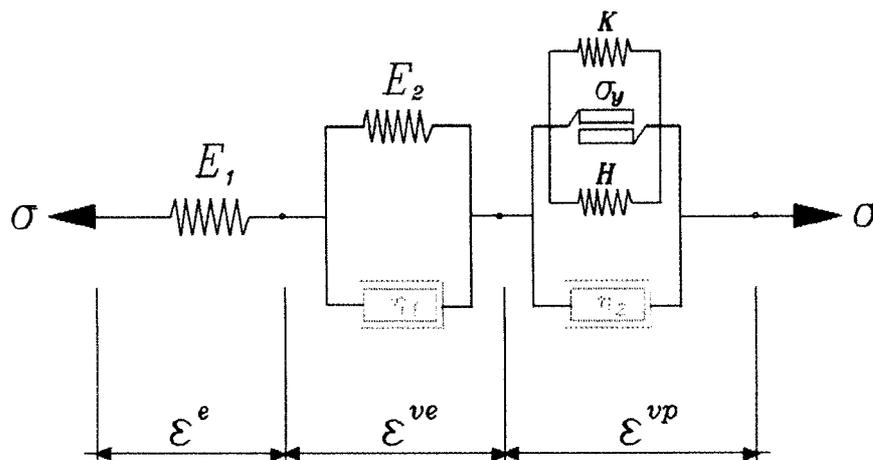


Figura 8.5 - Modelo Elasto-viscoplástico Completo

Pelas características do arranjo mostrado na figura 8.5, pode-se afirmar que:

a-) A deformação total é a soma das parcelas elástica ε^e , viscoelástica ε^{ve} e viscoplástica ε^{vp} .

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{ve} + \varepsilon^{vp} \rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^{ve} + \dot{\varepsilon}^{vp}$$

b-) A tensão é a mesma em cada um dos trechos e igual a σ . Portanto, escreve-se

$$\sigma^e = \sigma^{ve} = \sigma^{vp} = \sigma$$

A expressão da taxa de deformação total apresentada no sub-item a, apenas para o "encruamento isótropo ($H=0$)", é escrita na forma:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} (\sigma - E_2 \varepsilon^{ve}) + \frac{1}{\eta_2} [\sigma - (\sigma_y + K \varepsilon^{vp})] \quad (8.11)$$

Em uma primeira análise com referência ao terceiro termo do lado direito da igualdade, é possível reescreve-lo em função de $\sin(\sigma)$ e da deformação viscoplástica

acumulada α^{vp} (hipótese para encruamento isótropo), na forma:

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta_2} [\sigma - (\sigma_y + K\alpha^{vp}) \sin(\sigma)] \quad (8.12)$$

Com considerações análogas, para a taxa de deformação viscoelástica introduz-se uma nova variável α^{ve} , aqui denominada de deformação viscoelástica acumulada. Ressalta-se que, nesse caso em particular, a hipótese para o intercâmbio entre ε^{ve} e α^{ve} só é válida para os casos de carregamento sem inversão de sinal. Nesse sentido:

$$\dot{\varepsilon}^{ve} = \frac{1}{\eta_1} [\sigma - E_2\alpha^{ve} \sin(\sigma)] \quad (8.13)$$

Finalmente, com uma substituição de 8.12 e 8.13 em 8.11, escreve-se convenientemente a expressão de interesse do modelo em questão na forma

$$\dot{\varepsilon}^o = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} [\sigma - E_2\alpha^{ve} \sin(\sigma)] + \frac{1}{\eta_2} [\sigma - (\sigma_y + K\alpha^{vp}) \sin(\sigma)] \quad (8.14a)$$

ou de um modo inverso

$$\dot{\sigma} = E_1 \dot{\varepsilon}^o - \frac{E_1}{\eta_1} [\sigma - E_2\alpha^{ve} \sin(\sigma)] - \frac{E_1}{\eta_2} [\sigma - (\sigma_y + K\alpha^{vp}) \sin(\sigma)] \quad (8.14b)$$

A expressão 8.14b é de fundamental importância para a obtenção da expressão final da tensão em um instante $n+1$, segundo um modelo implícito, onde

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \dot{\sigma}_{n+1} \Delta t \quad (8.15a)$$

Basicamente, parte-se de uma substituição da expressão 8.14b em 8.15a, obtendo-se

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + E_1 \varepsilon_n \Delta t - \frac{E_1 \Delta t}{\eta_1} \left[\sigma - E_2 \alpha^{ve} \sin(\sigma) \right] - \frac{E_1 \Delta t}{\eta_2} \left[\sigma - (\sigma_y + K \alpha^{vp}) \sin(\sigma) \right]$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + E_1 \Delta \varepsilon_n - \left(\frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_1}{\eta_2} \right) \Delta t \sigma_{n+1} + \left(\frac{E_1 \Delta t}{\eta_2} \right) \sigma_y \sin(\sigma_{n+1}) + \left[\left(\frac{E_1 E_2}{\eta_1} \right) \alpha_{n+1}^{ve} + \left(\frac{E_1 K}{\eta_2} \right) \alpha_{n+1}^{vp} \right] \Delta t \sin(\sigma_{n+1})$$

Definindo-se coeficientes A_i^* associados aos parâmetros do material, reescreve-se a expressão anterior na forma

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + E_1 \Delta \varepsilon_n - A_1^* \sigma_{n+1} + A_2^* \sigma_y \sin(\sigma_{n+1}) + \left[A_3^* \alpha_{n+1}^{ve} + A_4^* \alpha_{n+1}^{vp} \right] \Delta t \sin(\sigma_{n+1})$$

onde

$$A_1^* = \left[\frac{E_1}{\eta_1} + \frac{E_1}{\eta_2} \right] \Delta t \quad A_2^* = \frac{E_1 \Delta t}{\eta_2} \quad A_3^* = \frac{E_1 E_2}{\eta_1} \quad A_4^* = \frac{E_1 K}{\eta_2}$$

Finalmente, resulta

$$\sigma_{n+1} [1 + A_1^*] = \sigma_n + E_1 \Delta \varepsilon_n + A_2^* \sigma_y \sin(\sigma_{n+1}) + \left[A_3^* \alpha_{n+1}^{ve} + A_4^* \alpha_{n+1}^{vp} \right] \Delta t \sin(\sigma_{n+1}) \quad (8.15b)$$

Nota-se que a 8.15b depende diretamente dos valores de α_{n+1}^{ve} e α_{n+1}^{vp} , os quais, por sua vez, dependem diretamente do valor de σ_{n+1} . Essa inter-dependência de variáveis também será observada com referência as expressões de ε_{n+1}^{ve} e ε_{n+1}^{vp} , cujo desenvolvimento faz-se mais adiante.

Objetivando eliminar a mencionada inter-dependência, adota-se um procedimento que consiste em escrever as expressões das variáveis α (em t_{n+1}), em função de seus próprios valores em t_n . Para tanto, linearizando-as e utilizando as expressões 8.12 e 8.13, resultam

$$\alpha_{n+1}^{ve} = \alpha_n^{ve} + \alpha_{n+1}^{ve} \Delta t = \alpha_n^{ve} + |\varepsilon_{n+1}^{ve}| \Delta t = \alpha_n^{ve} + \frac{\Delta t}{\eta_1} (|\sigma_{n+1}| - E_2 \alpha_{n+1}^{ve})$$

$$\alpha_{n+1}^{ve} \left(1 + \frac{\Delta t E_2}{\eta_1} \right) = \alpha_n^{ve} + \frac{\Delta t}{\eta_1} |\sigma_{n+1}|$$

escrevendo-se, finalmente

$$\therefore \alpha_{n+1}^{ve} = \frac{\alpha_n^{ve} + \frac{\Delta t}{\eta_1} |\sigma_{n+1}|}{1 + \frac{\Delta t E_2}{\eta_1}} \quad (8.16a)$$

De modo analogo, para a parcela viscoplástica, obtém-se

$$\alpha_{n+1}^{vp} = \alpha_n^{vp} + \alpha_{n+1}^{vp} \Delta t = \alpha_n^{vp} + |\dot{\epsilon}_{n+1}^{vp}| \Delta t = \alpha_n^{vp} + \frac{\Delta t}{\eta_2} (|\sigma_{n+1}| - \sigma_y - K \alpha_{n+1}^{vp})$$

$$\alpha_{n+1}^{vp} \left(1 + \frac{\Delta t K}{\eta_2} \right) = \alpha_n^{vp} + \frac{\Delta t}{\eta_2} (|\sigma_{n+1}| - \sigma_y)$$

$$\therefore \alpha_{n+1}^{vp} = \frac{\alpha_n^{vp} + \frac{\Delta t}{\eta_2} (|\sigma_{n+1}| - \sigma_y)}{1 + \frac{\Delta t K}{\eta_2}} \quad (8.16b)$$

As expressões 8.16a,b quando substituídas diretamente na terceira parcela do lado direito da igualdade 8.15b, permitem determinar

$$\left[A_3' \frac{\alpha_n^{ve} + \frac{\Delta t}{\eta_1} |\sigma_{n+1}|}{1 + \frac{\Delta t E_2}{\eta_1}} + A_4' \frac{\alpha_n^{vp} + \frac{\Delta t}{\eta_2} (|\sigma_{n+1}| - \sigma_y)}{1 + \frac{\Delta t K}{\eta_2}} \right] \Delta t \sin(\sigma_{n+1})$$

$$- A_5^* \Delta t \sin(\sigma_{n+1}) + A_6^* \Delta t \sin(\sigma_{n+1}) - A_7^* + A_8^*$$

Resolvendo para A_7^* e A_8^* separadamente, obtém-se

$$A_5^* = \frac{E_1 E_2 \Delta t}{\eta_1 + \Delta t E_2} \alpha_n^{ve} \sin(\sigma_{n+1}) + \frac{E_1 E_2 \Delta t^2}{\eta_1^2 + \Delta t E_2 \eta_1} \sigma_{n+1}$$

$$A_6^* = \frac{E_1 K \Delta t}{\eta_2 + \Delta t K} \alpha_n^{vp} \sin(\sigma_{n+1}) + \frac{E_1 K \Delta t^2}{\eta_2^2 + \Delta t K \eta_2} [\sigma_{n+1} - \sigma_y \sin(\sigma_{n+1})]$$

Fazendo $A_7^* + A_8^*$ e substituindo em 8.15b, obtém-se

$$\sigma_{n+1} \left(1 + \frac{E_1 \Delta t}{\eta_1} + \frac{E_1 \Delta t}{\eta_2} - \frac{E_1 E_2 \Delta t^2}{\eta_1^2 + \Delta t E_2 \eta_1} - \frac{E_1 K \Delta t^2}{\eta_2^2 + \Delta t K \eta_2} \right) = \sigma_{n+1}^{aux} + \left[\left(\frac{E_1 \Delta t}{\eta_2} - \frac{E_1 K \Delta t^2}{\eta_2^2 + \Delta t K \eta_2} \right) \sigma_y + \left(\frac{E_1 E_2 \Delta t}{\eta_1 + \Delta t E_2} \alpha_n^{ve} + \frac{E_1 K \Delta t}{\eta_2 + \Delta t K} \alpha_n^{vp} \right) \right] \sin(\sigma_{n+1}) \quad (8.17)$$

Com alguns rearranjos nas parcelas internas aos parênteses e admitindo (com base em 8.10a) como verdadeira a igualdade $\sin(\sigma_{n+1}) = \sin(\sigma_{n+1}^{aux})$, é possível reescrever 8.17, na forma final:

$$\sigma_{n+1} = \frac{\sigma_{n+1}^{aux} \left(\frac{E_1 \Delta t}{\eta_2 + \Delta t K} \right) \sigma_y \sin(\sigma_{n+1}^{aux}) + \left(\frac{E_1 E_2 \Delta t}{\eta_1 + \Delta t E_2} \alpha_n^{ve} + \frac{E_1 K \Delta t}{\eta_2 + \Delta t K} \alpha_n^{vp} \right) \sin(\sigma_{n+1}^{aux})}{1 + \left(\frac{1}{\eta_1 + \Delta t E_2} + \frac{1}{\eta_2 + \Delta t K} \right) E_1 \Delta t} \quad (8.18)$$

Nota-se que 8.18 é função apenas de variáveis no instante n , variáveis correspondentes ao estado auxiliar de previsão e parâmetros do material. Uma vez

conhecido o valor de σ_{n+1} , passa a ser possível a determinação dos valores de α_{n+1}^{ve} e α_{n+1}^{vp} , através de 8.16a e 8.16b. Finalmente, levando-se em conta 8.13a,b, escrevem-se as expressões incrementais para as parcelas de deformação, nas formas

$$\varepsilon_{n+1}^{ve} = \varepsilon_n^{ve} + \varepsilon_{n+1}^{ove} \Delta t = \varepsilon_n^{ve} + \frac{\Delta t}{\eta_1} \left[\sigma_{n+1} - E_2 \alpha_{n+1}^{ve} \sin(\sigma_{n+1}) \right] \quad (8.19)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{vp} = \varepsilon_n^{vp} + \varepsilon_{n+1}^{ovp} \Delta t = \varepsilon_n^{vp} + \frac{\Delta t}{\eta_2} \left[\sigma_{n+1} - (\sigma_y + K \alpha_{n+1}^{vp}) \sin(\sigma_{n+1}) \right] \quad (8.20)$$

CAPÍTULO 9

UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS EM CAMPO UNIDIMENSIONAL

Neste capítulo, são apresentadas as expressões de interesse para a determinação dos deslocamentos nodais (ou seus incrementos finitos) de estruturas compostas por barras, com referência às expressões desenvolvidas no capítulo 8, utilizado-se o *Método dos Elementos Finitos*, o qual permite obter, no caso do processo dos deslocamentos, uma correspondência direta entre forças e deslocamentos, através da rigidez estrutural. Em seguida, faz-se a determinação da expressão geral do *Módulo Algorítmico Tangente* para o modelo elasto-viscoplástico.

Finalmente, são reunidas as expressões aqui determinadas àquelas obtidas no capítulo 8. O resultado é um algoritmo geral do modelo, o qual é implementado em códigos de cálculo para análise unidimensional e para treliças planas, cuja eficiência é testada em exemplos de aplicação com análise da resposta numérica.

9.1-) O PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

Admita-se que a estrutura ocupe um domínio $B_*=[0,L]$ discretizado por um número n_e de elementos. Cada elemento ocupa um sub-domínio $B_e=[0,L_e]$, como

ilustrado na figura 9.1. Nos nós de extremidade, 1 e 2, discretizam-se as forças e os graus de liberdade em deslocamentos:

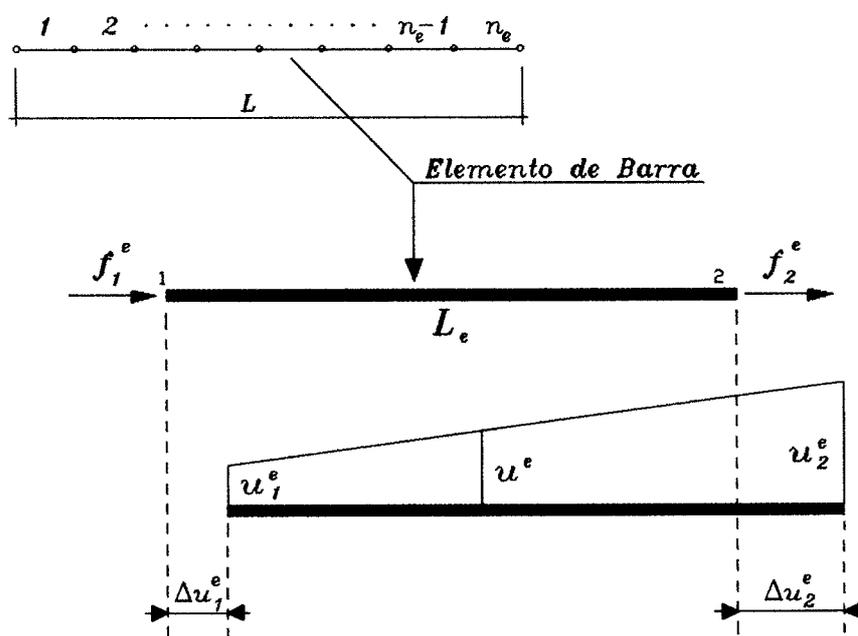


Figura 9.1 - Elemento de Barra

Com relação ao elemento de barra ilustrado na figura 9.1, devem ser considerados, para o equacionamento que segue, os seguintes parâmetros: o módulo de elasticidade longitudinal do material E , a área da seção transversal S , o comprimento total da barra L , o vetor de forças nodais $\{f_1^e, f_2^e\}$ e os incrementos de deslocamentos dos nós 1 e 2 (Δu_1^e e Δu_2^e). Obtém-se então:

$$u_{1(n+1)}^e = u_{1(n)}^e + \Delta u_1^e \quad u_{2(n+1)}^e = u_{2(n)}^e + \Delta u_2^e \quad (9.1a, b)$$

$$\Delta \varepsilon_{(n)} = \frac{(\Delta u_2^e - \Delta u_1^e)}{L^e} \rightarrow \varepsilon_{(n+1)} = \varepsilon_{(n)} + \Delta \varepsilon_{(n)} \quad (9.1c, d)$$

Deve-se ressaltar que, como observado através da figura 9.1, o aparecimento de incrementos de deslocamentos é resultado direto da aplicação de f . Nesse sentido, o equilíbrio local pode ser verificado a cada instante pela expressão representativa do equilíbrio local

$$\operatorname{div} \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f} = \rho \mathbf{a} \quad (9.2a)$$

onde $\operatorname{div} \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma})$ é o divergente do tensor de tensões, f_* as forças externas aplicadas, ρ a massa específica do material e a a aceleração. Admitindo deslocamentos infinitesimais (δu) e equilíbrio estático ($a=0$), reescreve-se para um corpo de volume V , pela Mecânica do Contínuo, a expressão do Trabalho Virtual, sob a forma

$$\left[\int_S \langle t, \delta u \rangle dS + \int_V \langle f_*, \delta u \rangle dV \right] - \int_V \langle \boldsymbol{\sigma}, \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle dV - \delta W_e - \delta W_i = 0 \quad (9.2b)$$

onde δW_e o trabalho das forças externas e δW_i o trabalhos das forças internas.

Uma forma alternativa para a representação matemática da expressão 9.2b, consiste em reescreve-la com base em integral de superfície. Para tanto, admite-se como hipóteses básicas barras de inércia constante onde sabe-se que $\int_S dS = S$, bem como válido o intervalo $B_e = [0, L_e]$. Nesse sentido, é possível reescrever:

$$\int_{B_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dx - \int_{B_e} \rho b \cdot \delta u dx - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta u - \delta W_i + \delta W_e = 0 \quad (9.2c)$$

onde b é a força por unidade de massa e o termo não integrado representa a possibilidade de admitir tensões iniciais.

9.2-) O EMPREGO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO

Uma análise novamente com referência à figura 9.1, permite admitir que a função deslocamento pode ser obtida através de uma interpolação entre os valores de deslocamentos nodais. Assim, para o elemento, procede-se:

$$\frac{x - x_1}{u^e - u_1^e} = \frac{x_2 - x}{u_2^e - u^e} \rightarrow (u^e - u_1^e)(x_2 - x) = (x - x_1)(u_2^e - u^e)$$

$$\therefore u^e = u^e(x) = \frac{x_2 - x}{L} u_1^e + \frac{x - x_1}{L} u_2^e = N_1^e u_1^e + N_2^e u_2^e = \sum_{i=1}^2 N_i^e(x) u_i^e \quad (9.3a)$$

onde N_1^e e N_2^e são denominadas funções de forma e o índice superior e indica uma análise com referência a um elemento de interesse. Assim, escreve-se

$$\delta u^e = \frac{x_2 - x}{L} \delta u_1^e + \frac{x - x_1}{L} \delta u_2^e = N_1^e \delta u_1^e + N_2^e \delta u_2^e = \sum_{i=1}^2 N_i^e(x) \delta u_i^e \quad (9.3b)$$

para a deformação; sabendo que $\epsilon = \text{grad}[u]$ (gradiente dos deslocamentos) e com base nas informações obtidas em 9.3a e 9.3b, procede-se

$$\epsilon_e = \text{grad}(u^e) \rightarrow \delta \epsilon_e = \text{grad}(\delta u^e) = \frac{\partial \delta u^e}{\partial x} = \frac{\partial N_1^e \delta u_1^e}{\partial x} + \frac{\partial N_2^e \delta u_2^e}{\partial x}$$

$$\therefore \delta \epsilon_e = \left\{ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\} \begin{Bmatrix} \delta u_1^e \\ \delta u_2^e \end{Bmatrix} = B \delta u^e \quad (9.3c)$$

Finalmente, com as informações observadas com referência às expressões 9.3, é possível reescrever a expressão 9.2c, admitindo-se a contribuição de todos os elementos, na forma

$$[\delta u]^T [F_i(\sigma) - F_{ext}] = 0 \quad (9.4a)$$

onde $F_i(\sigma)$ e F_{ext} são respectivamente os vetores globais dos esforços internos e forças externas aplicadas, cuja forma intrínseca é:

$$F_i(\sigma) = \sum_{e=1}^{nel} A_e f_i^e(\sigma) \quad F_{ext} = \sum_{e=1}^{nel} A_e f_{ext}^e$$

onde $f_i^e(\sigma) = \int_{Be} (B^t \sigma^e) dx$ é o vetor das forças internas do elemento, f_{ext}^e é o vetor das forças externas do elemento e A_e , como apresentado em *SIMO & HUGHES (1988)* e *PROENÇA (1989)*, é um operador que realiza o mapeamento dos graus de liberdade locais para os globais, garantindo a contribuição de cada elemento no comportamento global da estrutura.

Deve-se observar que a expressão 9.4a, quando escrita com referência a um deslocamento δu arbitrário, admissível e não nulo, assume a forma

$$F_i(\sigma) - F_{ext} = 0 \quad (9.4b)$$

O procedimento para a obtenção dos incrementos de deslocamentos Δu_1^e e Δu_2^e (na figura 9.1), dá-se a partir de uma linearização da equação de equilíbrio 9.4b de uma iteração k à sua subsequente $k+1$. Desse modo:

$$F_i(\sigma_{n+1}^{k+1}) - F_{n+1}^{ext} = F_i(\sigma_{n+1}^k) + \frac{\partial F_i(\sigma_{n+1}^k)}{\partial u_{n+1}^k} \Delta u_{n+1}^{k+1} - F_{n+1}^{ext} = 0$$

Com o devido rearranjo, escreve-se

$$\frac{\partial F_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k)}{\partial u_{n+1}^k} \Delta u_{n+1}^{k+1} = - [F_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k) - F_{n+1}^{\text{ext}}] \quad (9.5a)$$

De 9.5a, a derivada parcial apresentada, desenvolve-se pelo procedimento

$$\frac{\partial F_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k)}{\partial u_{n+1}^k} \Delta u_{n+1}^{k+1} = \mathbf{A}_{\mathbf{I}} \left[\int_{B_e} \left(\frac{\partial f_{\mathbf{I}}^{e^k}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{e^k}} \right) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{e^k}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e^k}} \right) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e^k}}{\partial u_{n+1}^{e^k}} \right) dx \right] \Delta u_{n+1}^{k+1}$$

onde

$$\frac{\partial f_{\mathbf{I}}^{e^k}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{e^k}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{e^k}} (\mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{e^k}) = \mathbf{B}_e^T \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e^k}}{\partial u_{n+1}^{e^k}} = \mathbf{B}_e$$

de modo que

$$\frac{\partial F_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k)}{\partial u_{n+1}^k} \Delta u_{n+1}^{k+1} = \left[\mathbf{A}_{\mathbf{I}} \int_{B_e} \mathbf{B}_e^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{e^k}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e^k}} \right) \mathbf{B}_e dx \right] \Delta u_{n+1}^{k+1} = \left[\mathbf{A}_{\mathbf{I}} \mathbf{K}_{n+1}^{e^k} \right] \Delta u_{n+1}^{k+1}$$

$$\therefore \frac{\partial F_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k)}{\partial u_{n+1}^k} \Delta u_{n+1}^{k+1} = \mathbf{K}_{n+1}^k \Delta u_{n+1}^{k+1} \quad (9.5b)$$

onde \mathbf{K}_{n+1}^e é a Matriz de Rigidez Tangente do elemento e \mathbf{K}_{n+1}^k a Matriz de Rigidez Tangente Global. Uma substituição de 9.5b em 9.5a, resulta na expressão final para a determinação dos incrementos de deslocamentos nodais, na forma:

$$\Delta u_{n+1} = - [\mathbf{K}_{\mathbf{I}+1}^k]^{-1} (F_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k) - F_{n+1}^{\text{ext}}) \quad (9.6)$$

Deve-se ressaltar ainda que, com referência à expressão de \mathbf{K}_{n+1}^e , essa pode ser

reescrita na forma:

$$\int_{B_e} B_e^T \left(\frac{\partial \sigma_{n+1}^e}{\partial \varepsilon_{n+1}^e} \right) B_e dx = \int_{B_e} B_e^T C_{n+1}^k B_e dx$$

onde C_{n+1}^k é denominado *Módulo Algorítmico de Rigidez Tangente*, cuja determinação da expressão final para a implementação em códigos de cálculo será apresentada nos itens que seguem.

9.3-) PROCEDIMENTO PARA A DETERMINAÇÃO DA EXPRESSÃO DO MÓDULO ALGORÍTMICO TANGENTE C_{n+1}

Objetivando complementar as expressões apresentadas no capítulo 8, mostra-se a seguir o desenvolvimento para a obtenção da expressão do Módulo Algorítmico Tangente C_{n+1} . Primeiramente, com base na expressão da tensão apresentada no item 8.1.3 do capítulo 8. Admitindo $f_{n+1}^{aux} \leq 0$, tem-se que:

$$C_{n+1} = \frac{\partial \sigma_{n+1}^e}{\partial \varepsilon_{n+1}^e} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}^e} [\sigma_{n+1}^{e, aux} - E \lambda_{n+1} \sin(\xi_{n+1}^{e, aux})] = \frac{\partial \sigma_{n+1}^{e, aux}}{\partial \varepsilon_{n+1}^e} - \frac{\partial \xi_{n+1}^{e, aux}}{\partial \varepsilon_{n+1}^e} \cdot E \quad (9.7)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal do material. No entanto, para $f_{n+1}^{aux} > 0$, a expressão de C_{n+1} assume outra forma. Para sua determinação, faz-se um rearranjo na expressão de σ_{n+1} , pelo procedimento:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{aux} - \Delta \lambda E \sin(\xi_{n+1}^{aux}) + \alpha_n - \alpha_n = (\sigma_{n+1}^{aux} - \alpha_n) + \alpha_n - \Delta \lambda E \sin(\xi_{n+1}^{aux})$$

$$\sigma_{n+1} = \alpha_n + \xi_{n+1}^{aux} - \Delta \lambda E \frac{\xi_{n+1}^{aux}}{|\xi_{n+1}^{aux}|} = \alpha_n + \left[1 - \frac{\Delta \lambda E}{|\xi_{n+1}^{aux}|} \right] \xi_{n+1}^{aux} \quad (9.8)$$

Faz-se ainda, a partir de $\Delta \lambda = (f_{n+1}^{aux}) / (E+H+K+\eta/\Delta t)$, a elaboração de uma segunda expressão a ser posteriormente utilizada para a obtenção do módulo tangente, tal que:

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{(E + H + K + \frac{\eta}{\Delta t})} \frac{\partial |f_{n+1}^{aux}|}{\partial \varepsilon_{n+1}} \frac{\partial \varepsilon_{n+1}^{aux}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{E}{(E + H + K + \frac{\eta}{\Delta t})} \sin(\xi_{n+1}^{aux}) \quad (9.9)$$

A determinação do módulo tangente surge da variação da expressão 9.8, bem como uma subsequente substituição de 9.9 nessa, obtendo-se para o caso do encruamento isótropo/cinemático:

$$C_{n+1} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = E - E \sin(\xi_{n+1}^{aux}) \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \varepsilon_{n+1}} = E - E \sin(\xi_{n+1}^{aux}) \frac{E}{E+H+K+\frac{\eta}{\Delta t}} \sin(\xi_{n+1}^{aux})$$

Finalmente, escreve-se na forma:

$$C_{n+1} = E - \frac{E^2}{E + H + K + \eta/\Delta t} = \frac{E (H + K + \eta/\Delta t)}{(E + H + K + \eta/\Delta t)} \quad (9.10a)$$

particularizando-se para $H = 0$ e $\Delta t \rightarrow \infty$, obtém-se:

$$C_{n+1} = E - \frac{E^2}{E + K} = \frac{E K}{(E + K)} \quad (9.10b)$$

Uma análise simplificada com referência à 9.10a, permite afirmar que

- se, $f_{n+1}^{aux} \leq 0 \rightarrow C_{n+1} = E$
- se, $f_{n+1}^{aux} > 0 \rightarrow C_{n+1} = E(H+K+\eta/\Delta t)/(E+H+K+\eta/\Delta t)$

Com as atenções direcionadas agora para a expressão geral da tensão apresentada no item 8.2 do capítulo 8, determina-se a expressão do módulo algorítmico

tangente para o modelo elasto-viscoplástico completo, o qual objetiva atualizar a rigidez global da estrutura. Sua determinação, para cada incremento de tempo, faz-se com base na variação da tensão aplicada com relação à deformação total, ambas em t_{n+1} . O procedimento para a sua determinação segue as seguintes etapas:

$$C_{n+1} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\eta_1 + \Delta t E_2} + \frac{1}{\eta_2 + \Delta t K} \right) E_1 \Delta t} \frac{\partial \sigma_{n+1}^{aux}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$$

mas é possível demonstrar que

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^{aux}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} [E_1 (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{vp})] = E_1 \frac{\partial \varepsilon_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = E_1$$

ainda, considerando a relação $\gamma=1/\eta$, onde γ é o coeficiente de fluidez do material, escreve-se finalmente

$$C_{n+1} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{E_1}{1 + \left(\frac{\gamma_1}{1 + \gamma_1 E_2 \Delta t} + \frac{\gamma_2}{1 + \gamma_2 K \Delta t} \right) E_1 \Delta t} \quad (9.11)$$

Uma verificação de 9.11 consiste em particularizá-la para uma análise elasto-plástica, ou seja, desconsiderando-se o trecho viscoelástico ($E_2 = \gamma_1 = 0$) e a fluidez do trecho viscoplástico ($\gamma_2 = 1$ e $\Delta t \rightarrow \infty$). Deste modo:

$$C_{n+1} = \frac{E_1}{1 + \left(\frac{E_1 \Delta t}{1 + K \Delta t} \right)} = \frac{E_1}{\Delta t \left(\frac{1}{\Delta t} + K \right)} = \frac{E_1}{1 + \frac{E_1}{K}}$$

$$\therefore C_{n+1} = \frac{\frac{E_1}{E_1 + K}}{\frac{E_1}{E_1 + K} + \frac{K}{E_1 + K}} \quad (9.12)$$

Observa-se, portanto, uma igualdade entre as expressões 9.10b e 9.12, referentes à formulação apresentada via *SIMO & HUGHES (1988)* e para o modelo elasto-viscoplástico, via *MUNAIAR NETO (1994)*, respectivamente.

9.4-) ALGORITMO DO MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO COM ENCRUAMENTO ISÓTROPICO PARA IMPLEMENTAÇÃO EM CÓDIGOS DE CÁLCULO PARA ESTRUTURAS DE BARRAS

O algoritmo apresentado a seguir, objetiva reunir em uma sequência conveniente para implementação em códigos de cálculo, as expressões determinadas no item 8.2 do capítulo 8, juntamente com às obtidas nesse capítulo. As etapas são as seguintes:

● **ETAPA 1:** Em um instante t_n são conhecidas as variáveis

$$u_n, \varepsilon_n, \varepsilon_n^{ve}, \varepsilon_n^{vp}, \sigma_n, \alpha_n^{ve}, \alpha_n^{vp}, \sigma_n^{aux}, f_n^{aux}$$

● **ETAPA 2:** Para um passo de tempo Δt , obtém-se os incrementos de deslocamentos e , conseqüentemente, de deformação

$$\Delta u_{n+1}^{k+1} = -[K_{n+1}^k]^{-1} (F_f(\sigma_{n+1}^k) - F_e^{n+1}) \quad \Delta \varepsilon_{n+1} = \frac{[(\Delta u_{n+1}^{k+1})_{nf} - (\Delta u_{n+1}^{k+1})_{nf}]}{L}$$

onde:

$$K_{n+1}^k = \frac{nel}{e-1} \int_{B_e} B^T C_{n+1} B dx = \frac{nel}{e-1} \int_0^L \left\{ \frac{1}{L} \quad -\frac{1}{L} \right\} C_{n+1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} \end{array} \right\} dx$$

$$C_{n+1} = E_1 \left[1 + \left(\frac{Y_1}{1 + Y_1 E_2 \Delta t} + \frac{Y_2}{1 + Y_2 K \Delta t} \right) E_1 \Delta t \right]^{-1}$$

● **ETAPA 3:** Obtenção das variáveis do estado auxiliar de tensões e verificação de uma possível ocorrência de plastificação

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta \varepsilon_{n+1} \quad \sigma_{n+1}^{aux} = E (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{ve} - \varepsilon_n^{vp})$$

$$f_{n+1}^{aux} = |\sigma_{n+1}^{aux}| - (\sigma_y + K\alpha_n)$$

onde, com base nos coeficientes de viscosidade η_1 e η_2 , referentes aos trechos viscoelástico e viscoplástico, respectivamente, valem as considerações

se $\eta_1=0$ e $\eta_2=0$ → regime elástico: final ou novo incr. de carga

se $\eta_1>0$ e $\eta_2=0$ → regime viscoelástico: ETAPAS 4, 5 e 7

se $\eta_1=0$, $\eta_2>0$ e $f_{n+1}^{aux} \leq 0$ → regime elástico: final ou novo incr. de carga

$f_{n+1}^{aux} > 0$ → regime viscoplástico: ETAPAS 4, 6 e 7

se $\eta_1>0$, $\eta_2>0$ e $f_{n+1}^{aux} \leq 0$ → regime viscoelástico: ETAPAS 4, 5 e 7

$f_{n+1}^{aux} > 0$ → regime combinado....: ETAPAS 4, 5, 6 e 7

● **ETAPA 4:** Nessa etapa, determina-se o valor da tensão total em n+1, através da expressão geral.

$$\sigma_{n+1} = \frac{\sigma_{n+1}^{aux} + \left(\frac{E_1 \Delta t}{\eta_2 + \Delta t K} \right) \sigma_y \sin(\sigma_{n+1}^{aux}) + \left(\frac{E_1 E_2 \Delta t}{\eta_1 + \Delta t E_2} \alpha_n^{ve} + \frac{E_1 K \Delta t}{\eta_2 + \Delta t K} \alpha_n^{vp} \right) \sin(\sigma_{n+1}^{aux})}{1 + \left(\frac{1}{\eta_1 + \Delta t E_2} + \frac{1}{\eta_2 + \Delta t K} \right) E_1 \Delta t}$$

- **ETAPA 5:** Determinam-se os valores das deformações viscoelásticas atual e acumulada, em $n+1$.

$$\alpha_{n+1}^{ve} = \frac{\alpha_n^{ve} + \frac{\Delta t}{\eta_1} |\sigma_{n+1}|}{1 + \frac{\Delta t E_2}{\eta_1}} \rightarrow \varepsilon_{n+1}^{ve} = \varepsilon_n^{ve} + \frac{\Delta t}{\eta_1} \left[\sigma_{n+1} - E_2 \alpha_{n+1}^{ve} \sin(\sigma_{n+1}) \right]$$

- **ETAPA 6:** Determinam-se os valores das deformações viscoplásticas atual e acumulada, em $n+1$.

$$\alpha_{n+1}^{vp} = \frac{\alpha_n^{vp} + \frac{\Delta t}{\eta_2} (|\sigma_{n+1}| - \sigma_y)}{1 + \frac{\Delta t K}{\eta_2}} \rightarrow \varepsilon_{n+1}^{vp} = \varepsilon_n^{vp} + \frac{\Delta t}{\eta_2} \left[\sigma_{n+1} - (\sigma_y + K \alpha_{n+1}^{vp}) \sin(\sigma_{n+1}) \right]$$

- **ETAPA 7:** Faz-se o cálculo do resíduo, $\Psi = F_{int} - F_{ext} \neq 0$. Caso exista, esse será aplicado em uma próxima iteração na forma de incremento de carga, refazendo-se em seguida as etapas 2 e 3. Esse procedimento será respeitado até que ocorra o equilíbrio entre as forças aplicadas e os esforços internos, ou seja, zerar o resíduo de cargas ou leva-lo à uma tolerância previamente estabelecida.

9.5-) IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORÍTMO EM CÓDIGOS DE CÁLCULO DE BARRAS E ANÁLISE DA RESPOSTA NUMÉRICA

Em uma primeira fase, implementou-se o algoritmo apresentado no item 9.4, em um código de cálculo de estruturas de barras para análise unidimensional, denominado "**SIMAB.FOR**". Em uma segunda fase, implementou-se o mesmo algoritmo em um código de cálculo para o casos das treliças planas, denominado "**SIMAT.FOR**".

Ambos os códigos, em linguagem FORTRAN, utilizam o Método dos Elementos Finitos para a discretização e obtenção dos deslocamentos nodais. Nos exemplos que

seguem, os resultados obtidos com o algoritmo via procedimento implícito foram diretamente confrontados com os resultados do algoritmo via procedimento explícito, apresentados em *MUNAIAR NETO (1994)*.

1o EXEMPLO DE APLICAÇÃO: ELEMENTO DE BARRA (TRACIONADO)

A barra ilustrada na figura 9.2, tem área constante e está submetida a uma força axial aplicada através de dois incrementos (0.50+0.50) em uma de suas extremidades. Adotaram-se $\Delta t = 0.025$ e tolerância para convergência de 0.001 , com referência aos incrementos de deformações viscoplástica e viscoelástica.

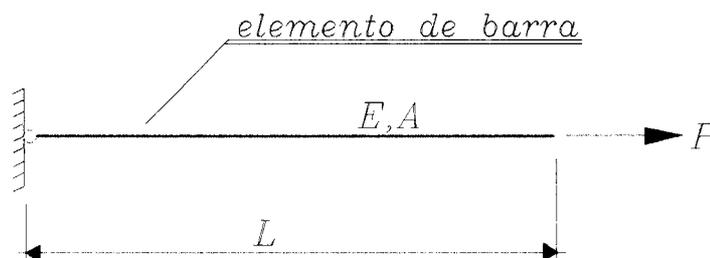


Figura 9.2 - Elemento de Barra Tracionado

• Os Dados iniciais são:

$$P=15 \text{ kN} \quad A=1 \text{ cm}^2 \quad E_1=10.000 \text{ kN/cm}^2 \quad E_2=9.500 \text{ kN/cm}^2 \quad L=10 \text{ cm}$$

$$\sigma_y=10 \text{ kN/cm}^2 \quad K=5.000 \text{ kN/cm}^2 \quad \gamma_1=1/\eta_1=0,0009 \quad \gamma_2=1/\eta_2=0,001 \quad H=0$$

Os resultados finais do confronto entre procedimentos explícito e implícito, estão apresentados nas tabelas 9.1, 9.2, 9.3 e 9.4, para as quais valem as seguintes observações:

a-) C_{∞} , pela expressão 9.11, é o valor do módulo tangente para $t \rightarrow \infty$;

b-) a primeira linha de cada tabela refere-se a uma análise via procedimento implícito com atualização da rigidez;

c-) a segunda linha de cada tabela refere-se a uma análise via procedimento implícito sem atualização da rigidez;

d-) a terceira linha de cada tabela refere-se a uma análise via procedimento explícito sem atualização da rigidez;

e-) na tabela 9.3, são apresentados os resultados referentes à uma análise combinada ($\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$), "com" evolução de ϵ^{ve} após o início da plastificação;

f-) na tabela 9.4, são apresentados os resultados referentes à uma análise combinada ($\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$), "sem" evolução de ϵ^{ve} após o início da plastificação.

a-) *Análise apenas viscoplástica:* $C_\infty = 3.333,33 \text{ kN/cm}^2$

<i>Tabela 9.1: VISCOPLÁSTICA - ($\gamma_1 = 0,0$; $\gamma_2 = 0,0010$)</i>							
<i>Proc</i>	<i>Tempo</i> (unid)	<i>Iter</i>	C_{n+1} kN/cm ²	σ_{n+1} kN/cm ²	ϵ (x10 ⁻³)	ϵ^{ve} (x10 ⁻³)	ϵ^{vp} (x10 ⁻³)
<i>IMP</i>	1,725	70	8.182	15,0	2,49978	0,00000	0,99980
	1,775	72	10.000	15,0	2,49974	0,00000	0,99977
<i>EXP</i>	0,883	22	10.000	15,0	2,50000	0,00000	1,00000

b-) *Análise apenas viscoelástica:* $C_\infty = 4.871,79 \text{ kN/cm}^2$

<i>Tabela 9.2: VISCOELÁSTICA - ($\gamma_1 = 0,0009$; $\gamma_2 = 0,0$)</i>							
<i>Proc</i>	<i>Tempo</i> (unid)	<i>Iter</i>	C_{n+1} kN/cm ²	σ_{n+1} kN/cm ²	ϵ (x10 ⁻³)	ϵ^{ve} (x10 ⁻³)	ϵ^{vp} (x10 ⁻³)
<i>IMP</i>	2,075	83	8.436	15,0000	3,07874	1,57880	0,0000
	2,150	86	10.000	15,0000	3,07872	1,57876	0,0000
<i>EXP</i>	0,947	36	10.000	15,0000	3,09910	1,57910	0,0000

c-) *Análise combinada, com ε^{ve} após plastificação: $C_{\infty} = 2.467,53 \text{ kN/cm}^2$*

<i>Tabela 9.3: COMBINADA $\rightarrow (\gamma_1 = 0,0009 ; \gamma_2 = 0,0010)$</i>							
<i>Proc</i>	<i>Tempo</i> <i>(unid)</i>	<i>Iter</i>	C_{n+1} <i>kN/cm²</i>	σ_{n+1} <i>kN/cm²</i>	ε <i>(x10⁻³)</i>	ε^{ve} <i>(x10⁻³)</i>	ε^{vp} <i>(x10⁻³)</i>
<i>IMP</i>	2,7500	110	7.104	15,0000	4,07894	1,57910	0,99985
	2,9750	119	10.000	15,0000	4,07879	1,57893	0,99987
<i>EXP</i>	1,2476	38	10.000	15,0000	4,08250	1,58030	1,00000

d-) *Análise combinada, sem ε^{ve} após plastificação: $C_{\infty} = 2.467,53 \text{ kN/cm}^2$*

<i>Tabela 9.4: COMBINADA $\rightarrow (\gamma_1 = 0,0009 ; \gamma_2 = 0,0010)$</i>							
<i>Proc</i>	<i>Tempo</i> <i>(unid)</i>	<i>Iter</i>	C_{n+1} <i>kN/cm²</i>	σ_{n+1} <i>kN/cm²</i>	ε <i>(x10⁻³)</i>	ε^{ve} <i>(x10⁻³)</i>	ε^{vp} <i>(x10⁻³)</i>
<i>IMP</i>	2,6750	107	7.104	15,0000	3,28903	0,78930	0,99975
	2,8500	114	10.000	15,0000	3,28902	0,78928	0,99977
<i>EXP</i>	-	-	-	-	-	-	-

Uma análise sobre os resultados dos esforços apresentados nas tabelas 9.1, 9.2 e 9.3, permite admitir como satisfatório o confronto entre procedimentos explícito e implícito. No entanto, observa-se pouca proximidade com referência ao parâmetro tempo.

Os resultados apresentados na tabela 9.4, quando comparados aos da tabela 9.3, objetiva apenas proporcionar ao leitor uma discussão com referência à escolha de uma forma mais adequada de simular fenômenos do tipo combinado, uma vez que o código de cálculo possibilita ambas as análises.

Objetivando ilustrar o mecanismo de convergência do código de cálculo, apresentam-se na figura 9.3 as evoluções da tensão (em kN/cm²) e das deformações, com base nos dados da tabela 9.3.

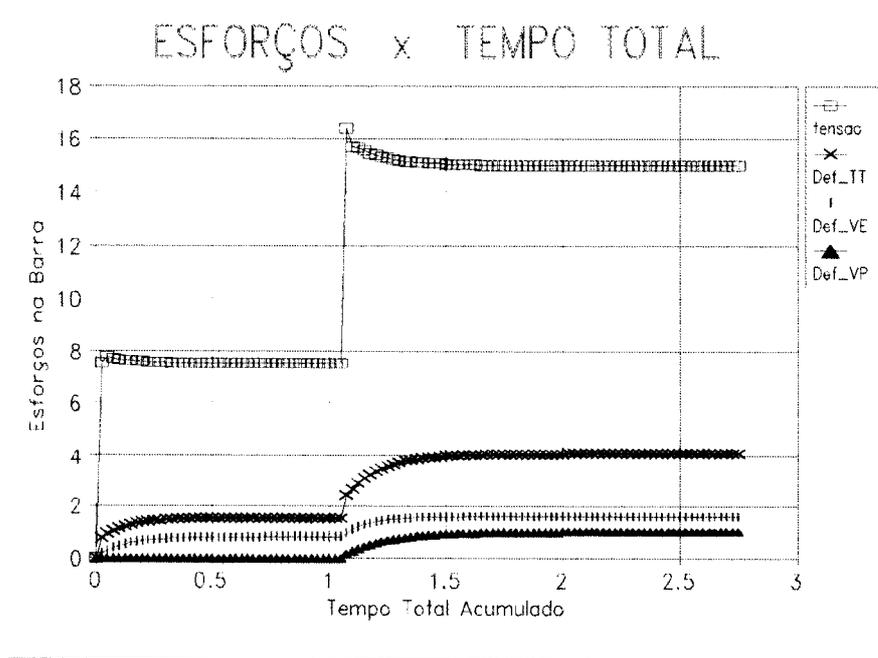


Figura 9.3 - Evolução dos esforços na barra

2o EXEMPLO DE APLICAÇÃO: TRELIÇAS PLANAS

Sistema composto por 5 barras de mesma área, ilustrada na figura 9.4, com carga no nó 1 aplicada em dois incrementos consecutivos (0.60+0.40). Adotaram-se $\Delta t=0.025$ e tolerância para convergência de 0.0001 , com referência aos incrementos de deformações viscoelástica e viscoplástica.

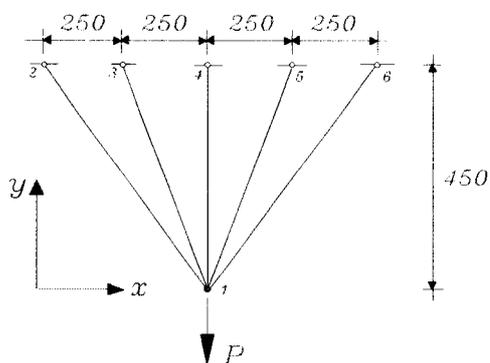


Figura 9.4 - Sistema de 5 Barras de Inércia Constante

● *Dados iniciais do exemplo:*

$$P=180 \text{ kN} \quad A=10 \text{ cm}^2 \quad E_1=E_2=2.000 \text{ kN/cm}^2 \quad L = \text{variável} \quad H=0$$

$$\sigma_y=4 \text{ kN/cm}^2 \quad K=250 \text{ kN/cm}^2 \quad \gamma_1=1/\eta_1=0,0015 \quad \gamma_2=1/\eta_2=0.002$$

Apresentam-se os resultados para a barra 1-4, do confronto entre procedimentos explícito e implícito, nas tabelas 9.5, 9.6, 9.7 e 9.8, devendo-se ressaltar que permanecem aqui válidas as observações mencionadas no primeiro exemplo.

a-) *Análise apenas viscoplástica: $C_\infty = 222 \text{ kN/cm}^2$*

<i>Tabela 9.5: VISCOPLÁSTICA → ($\gamma_1 = 0,0$; $\gamma_2 = 0,0020$)</i>							
<i>Proc</i>	<i>Tempo</i> (unid)	<i>Iter</i>	C_{n+1} kN/cm ²	σ_{n+1} kN/cm ²	ε (x10 ⁻³)	ε^{ve} (x10 ⁻³)	ε^{vp} (x10 ⁻³)
<i>IMP</i>	18,00	721	1.820	4,7383	5,3221	0,00000	2,95295
	18,10	725	2.000	4,7383	5,3221	0,00000	2,95293
<i>EXP</i>	6,839	34	2.000	4,7428	5,3465	0,00000	2,97504

b-) *Análise apenas viscoelástica: $C_\infty = 1.000 \text{ kN/cm}^2$*

<i>Tabela 9.6: VISCOELÁSTICA → ($\gamma_1 = 0,0015$; $\gamma_2 = 0,0$)</i>							
<i>Proc</i>	<i>Tempo</i> (unid)	<i>Iter</i>	C_{n+1} kN/cm ²	σ_{n+1} kN/cm ²	ε (x10 ⁻³)	ε^{ve} (x10 ⁻³)	ε^{vp} (x10 ⁻³)
<i>IMP</i>	6,825	273	1.870	6,1334	6,13334	3,06662	0,0000
	6,850	274	2.000	6,1334	6,13335	3,06662	0,0000
<i>EXP</i>	2.948	41	2.000	6,1335	6,13400	3,06730	0,0000

c-) Análise combinada, com ε^{ve} após plastificação: $C_{\infty} = 200 \text{ kN/cm}^2$

Tabela 9.7: COMBINADA $\rightarrow (\gamma_1 = 0,0015 ; \gamma_2 = 0,0020)$							
Proc	Tempo (unid)	Iter	C_{n+1} kN/cm^2	σ_{n+1} kN/cm^2	ε $(\times 10^{-3})$	ε^{ve} $(\times 10^{-3})$	ε^{vp} $(\times 10^{-3})$
IMP	13,675	547	1.712	4,9271	8,63342	2,46442	3,70578
	13,950	558	2.000	4,9271	8,63368	2,46431	3,70610
EXP	6,7083	53	2.000	4,8956	8,69750	2,64630	3,06030

d-) Análise combinada, sem ε^{ve} após plastificação: $C_{\infty} = 200 \text{ kN/cm}^2$

Tabela 9.8: COMBINADA $\rightarrow (\gamma_1 = 0,0015 ; \gamma_2 = 0,002)$							
Proc	Tempo (unid)	Iter	C_{n+1} kN/cm^2	σ_{n+1} kN/cm^2	ε $(\times 10^{-3})$	ε^{ve} $(\times 10^{-3})$	ε^{vp} $(\times 10^{-3})$
IMP	14,52	581	1.712	4,9722	8,21469	1,83988	3,88866
	14,77	591	2.000	4,9722	8,21471	1,83987	3,88869
EXP	-	-	-	-	-	-	-

Os resultados dos esforços apresentados nas tabelas 9.5, 9.6 e 9.7 também demonstram uma proximidade satisfatória entre procedimentos explícito e implícito. No entanto, novamente no referente à variável tempo, uma desigualdade é verificada.

A não-proximidade do parâmetro tempo, observada em ambos os exemplos de aplicação, sugere a necessidade de um estudo mais detalhado, objetivando conferir ao modelo proposto uma maior confiabilidade.

No capítulo seguinte, serão realizados estudos com referência ao tempo, mais especificamente ao tamanho do passo de tempo, no sentido de garantir um ajuste entre resultados teóricos obtidos com base nas expressões exatas da Reologia dos Materiais, em correspondência aos resultados numéricos, obtidos via códigos de cálculo *Simab.for* e *Simat.for*.

CAPÍTULO 10

ESTUDO DA RESPOSTA NUMÉRICA EM REGIMES VISCOELÁSTICO E ELASTO-VISCOPLÁSTICO

Foram apresentadas no capítulo 9, expressões do modelo completo obtidas via procedimento implícito, bem como um algoritmo de integração o qual foi implementado em códigos de cálculo para estruturas compostas por barras.

Juntamente, foram apresentados resultados referentes à resposta numérica e comparados com resultados obtidos via procedimento explícito. Naquele capítulo, observou-se pouca proximidade para o tempo total, quando do confronto de ambos os procedimentos.

Ressalta-se, portanto, uma questão sempre presente a nível numérico: a precisão dos resultados obtidos, principalmente quando o objetivo é o de avaliar a evolução dos deslocamentos e deformações ao longo do tempo. Na integração em passo finito, o intervalo de tempo e o tipo de procedimento escolhidos tem influência direta sobre a precisão da resposta.

Evidencia-se assim a necessidade de um estudo com referência a um tamanho do passo de tempo que garanta uma convergência estável, bem como um ajuste satisfatório entre resultados numéricos e exatos com referência às deformações onde, como apresentado em *MUNAIAR NETO (1994)*, para os trechos viscoelástico e viscoplástico, valem as seguintes expressões:

$$\varepsilon^{ve} = \frac{\sigma}{E_2} [1 - e^{-E_2 Y_1 t}] \quad \varepsilon^{vp} = \frac{(\sigma - \sigma_y)}{K+H} [1 - e^{-KY_2 t}]$$

Para um estudo detalhado da escolha do passo de tempo adequado, toma-se como ponto de partida o exemplo da barra tracionada (figura 9.2, do capítulo 9). Primeiramente, para uma análise viscoelástica e a carga P aplicada num único incremento, adotaram-se diferentes passos de tempo.

Os resultados obtidos estão reunidos na tabela 10.1, onde vale a relação $\text{Erro} = [(\varepsilon_{\text{teo}} - \varepsilon_{\text{num}}) / \varepsilon_{\text{teo}}] \times 100$, sendo C_{n+1} (expressão 9.11 do capítulo 9) o módulo tangente em correspondência a uma situação equilibrada e estável, para o Δt escolhido.

<i>Tabela 10.1 - Análise Viscoelástica: $C_{\infty} = 4.871,79 \text{ kN/cm}^2$ /</i>						
Δt	it	TT	C_{n+1} (kN/cm^2)	$\varepsilon^{ve}_{\text{num}}$ ($\times 10^{-3}$)	$\varepsilon^{ve}_{\text{teo}}$ ($\times 10^{-3}$)	<i>Erro</i> (%)
1	3	3,00	5.148,25	1,772	1,579	-12,22
0,5	3	1,50	5.396,42	1,805	1,579	-14,29
0,2	12	2,40	6.008,87	1,579	1,579	0,00
0,1	16	1,60	6.733,21	1,579	1,579	0,00
0,05	25	1,25	7.603,20	1,579	1,579	0,00
0,01	91	0,91	9.234,37	1,578	1,578	0,00
0,005	172	0,86	9.586,30	1,578	1,578	0,00
0,001	819	0,82	9.911,55	1,577	1,577	0,00

sendo que C_{∞} (também determinado pela expressão 9.11 do capítulo 9) é o valor do módulo tangente para $t \rightarrow \infty$. Ainda, são definidos Δt , it e TT como o passo de tempo testado, o número de iterações, e o tempo total para a convergência, respectivamente.

Uma análise cuidadosa com referência à tabela 10.1, permite constatar a igualdade dos resultados numéricos de deformação para $\Delta t \leq 0,20$. Para valores

maiores, verifica-se um acréscimo no valor final da deformação viscoelástica, como consequência de uma redução excessiva da rigidez estrutural quando da reaplicação do residual de cargas. Observa-se também uma variação de C_{n+1} com relação ao seu valor em um tempo infinito, determinada pela relação $VMT = [(C_{n+1} - C_{\infty}) / C_{\infty}] \times 100\%$.

Objetivando uma escolha adequada do passo de tempo, faz-se um estudo dos resultados da referida tabela na forma de diagrama *Deformação viscoelástica x Tempo*, adotando VMT como um critério para a determinação do Δt correspondente ao melhor ajuste. Primeiramente, plotando-se os valores da tabela 10.1 para $\Delta t = 0,20$, obtém-se:

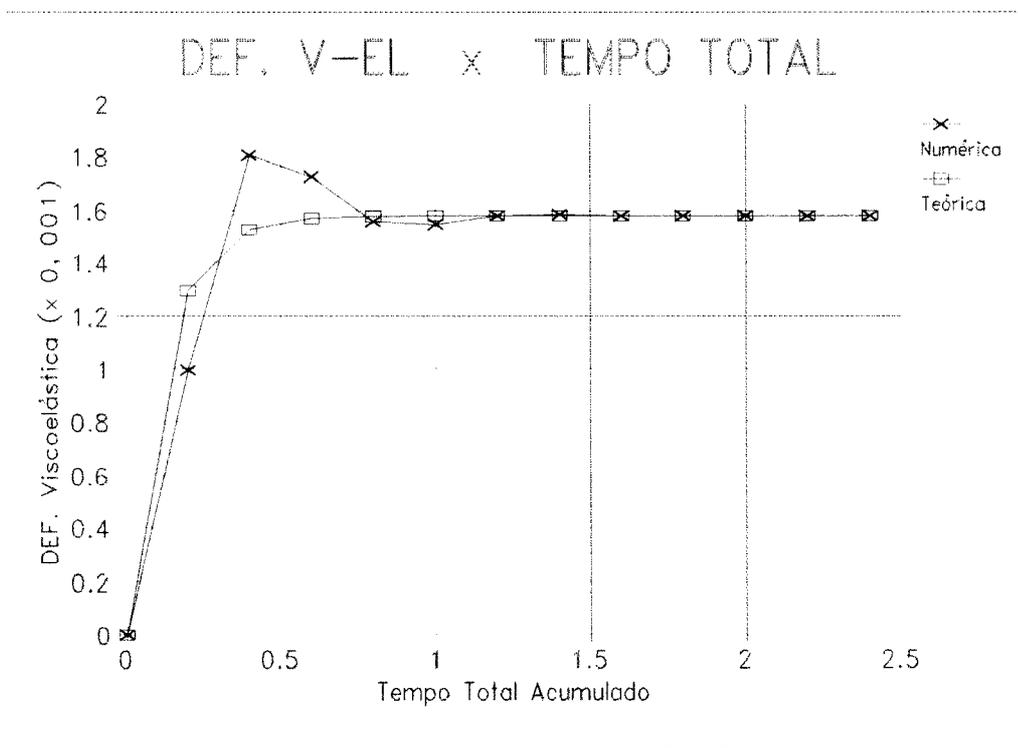


Figura 10.1 - An. Viscoelástica / 1 increm. / $\Delta t = 0,20$

Observa-se, pela figura 10.1, um ajuste inadequado para um intervalo de tempo entre 0 e 1. Plotando-se os esforços para os demais passos de tempo, constatou-se que um ajuste numérico-teórico satisfatório foi obtido para $\Delta t = 0,05$ com $VMT = 56,1\%$, bem como um erro de $0,0\%$, como ilustrado na figura 10.2.

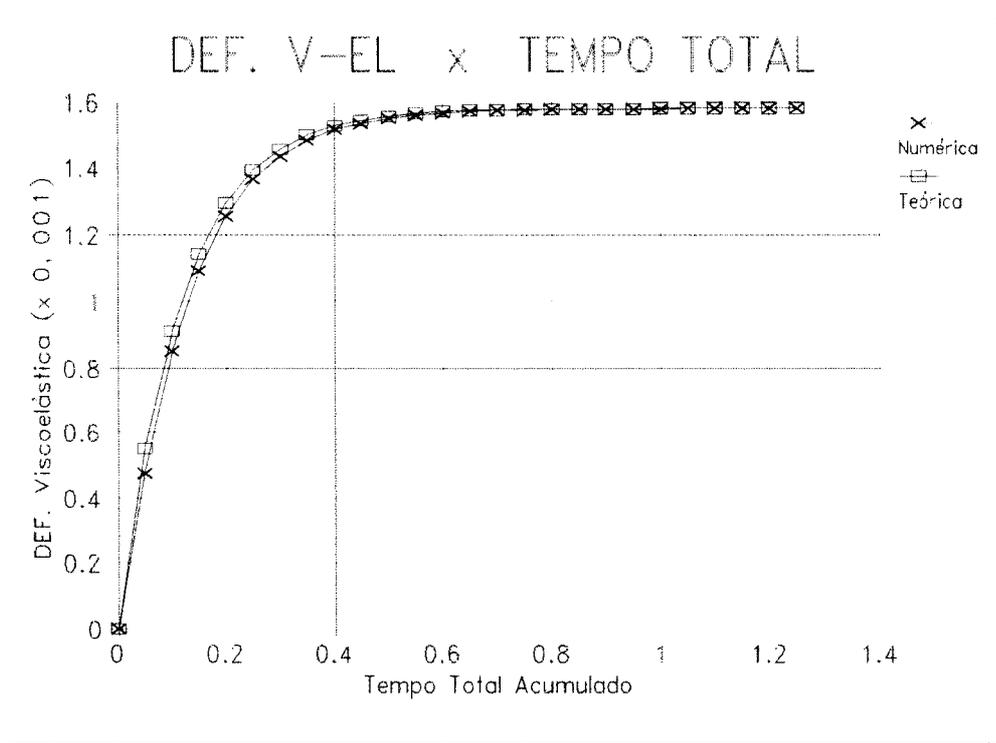


Figura 10.2 - An. Viscoelástica / 1 increm. / $\Delta t=0.05$

Observou-se ainda que, para passos de tempo menores, o ajuste numérico-teórico tende a uma pouca melhora, porém, às custas de um número excessivo de iterações. Ressalta-se que para $\Delta t=0,10$ e $\Delta t=0,01$, são observados ajustes também aceitáveis onde são obtidos VMT=38% e VMT=90%, respectivamente. Nesse caso, é possível sugerir como critério para a escolha do passo de tempo um intervalo para valores de VMT.

Para 2 incrementos de carga foram realizados testes comparativos, obtendo-se um ajuste satisfatório para $\Delta t=0.05$, com variação de C_{n+1} de 56,1% com relação a C_{∞} e um erro de 0.0%, como ilustrado na figura 10.3.

Deve-se ressaltar que para um número de incrementos de carga igual ou maior que 3, os ajustes ocorreram de forma análoga ao apresentado na figura 10.3.

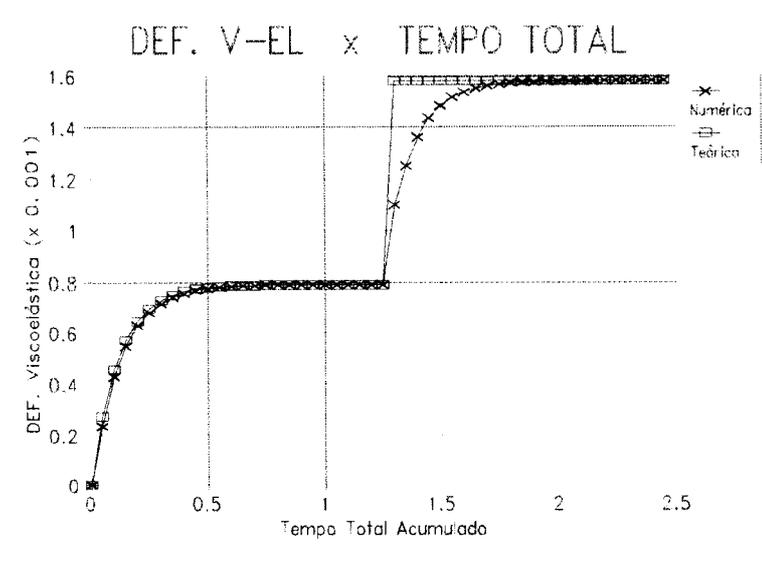


Figura 10.3 - An. Viscoelástica / 2 increm. / $\Delta t=0.05$

Para a análise viscoplástica, objetivando um estudo análogo ao anterior, utiliza-se o mesmo exemplo da barra tracionada (figura 9.2 do capítulo 9) com a carga P aplicada novamente em um único incremento. Realizaram-se testes comparativos para os mesmos passos de tempo da tabela 10.1, cujos resultados apresentam-se na tabela 10.2.

<i>Tabela 10.2 - Análise.Viscoplástica: $C_{\infty}=3.333,33 \text{ kN/cm}^2$</i>						
Δt	it	TT	C_{n+1} (kN/cm^2)	$\epsilon^{vp}_{n\acute{u}m}$ ($\times 10^{-3}$)	$\epsilon^{vp}_{te\acute{o}}$ ($\times 10^{-3}$)	<i>Erro</i> (%)
1	10	10,00	3.750,00	8,3333	1,0000	-733
0,5	10	5,00	4.117,65	4,5782	1,0000	-357
0,2	10	2,00	5.000,00	1,3750	1,0000	37
0,1	25	2,50	6.000,00	1,0000	1,0000	0,00
0,05	40	2,00	7.142,86	0,9999	0,9999	0,00
0,01	153	1,53	9.130,43	0,9995	0,9995	0,00
0,005	291	1,45	9.534,88	0,9993	0,9993	0,00
0,001	1397	1,397	9.901,48	0,9991	0,9991	0,00

A tabela 10.2 mostra a igualdade dos resultados numéricos de deformação viscoplástica para $\Delta t \leq 0,10$. Para valores maiores, verifica-se novamente um acréscimo no valor final da mesma, também como consequência de uma redução excessiva da rigidez estrutural quando da reaplicação do residual de cargas. Novamente, ocorre uma variação de C_{n+1} com relação ao seu valor em um tempo infinito.

Utilizando o mesmo critério adotado na análise viscoelástica para a determinação do Δt adequado, plotaram-se os resultados da tabela 10.2 na forma de diagrama "*Deformação viscoplástica x Tempo*". Novamente, adotou-se VMT como critério para a determinação do Δt adequado. Verificou-se que um ajuste satisfatório entre resultados numérico e teórico foi obtido para valores de $\Delta t=0,10$, correspondente à VMT= 80% com erro 0,00%, como ilustra a figura 10.4.

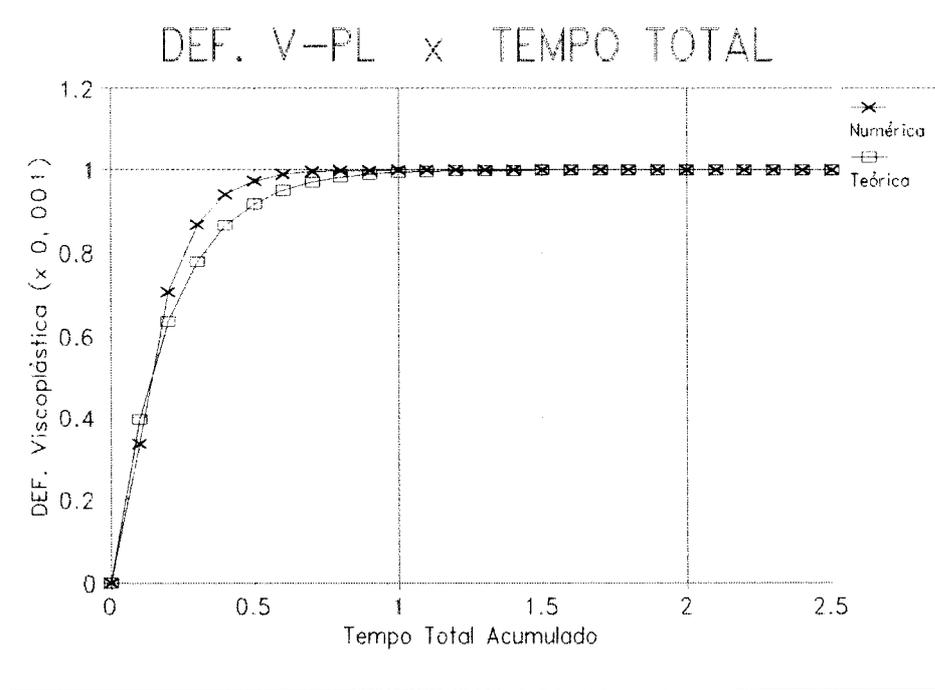


Figura 10.4 - An. Viscoplástica / 1 increm. / $\Delta t=0,10$

Observou-se novamente, que para passos de tempo menores o ajuste numérico-teórico tende a uma pouca melhora, às custas de um número excessivo de iterações. Para $\Delta t=0,20$ e $\Delta t=0,05$, também foram observados ajustes aceitáveis, obtendo-se

VMT=50% e VMT=114%, respectivamente.

Para estudos referentes a dois ou mais incrementos de carga, os quais não serão aqui apresentados, os resultados obtidos foram similares aos verificados pela análise viscoelástica.

No que segue, faz-se um estudo análogo aos apresentados para a barra tracionada, agora direcionado aos casos da treliças planas, tomando como referência aquela apresentada na figura 9.3 do capítulo 9.

Deve-se ressaltar que, em função da hiperstaticidade da referida estrutura, será apresentado apenas o estudo para o comportamento viscoelástico das cinco barras (simultaneamente), uma vez que sabe-se que nesse caso fica garantida uma tensão constante à cada iteração. Tal fato permite a comparação entre resultados numérico e teórico, uma vez que as relações constitutivas exatas, já apresentadas, são escritas em termos de tensão constante ao longo do tempo.

Realizando-se os mencionados testes comparativos para a treliça, admitindo a carga P aplicada inicialmente em um único incremento obtém-se, para a barra 1-4, como apresentado na tabela 10.3, os seguintes resultados:

<i>Tabela 10.3 - Análise Viscoelástica: $C_m=1.000,00 \text{ kN/cm}^2$</i>						
Δt	it	TT	C_{n+1} (kN/cm^2)	$\varepsilon^{ve}_{n\acute{u}m}$ ($\times 10^{-3}$)	$\varepsilon^{ve}_{te\acute{o}}$ ($\times 10^{-3}$)	<i>Erro</i> (%)
5	3	15,00	1.032,26	3,081	3,067	-0,45
1,0	12	12,00	1.142,86	3,067	3,067	0,00
0,5	16	8,00	1.250,00	3,067	3,067	0,00
0,1	43	4,30	1.625,00	3,067	3,067	0,00
0,05	75	3,75	1.769,23	3,066	3,067	0,00
0,01	321	3,21	1.943,40	3,066	3,067	0,00
0,005	628	3,14	1.970,87	3,066	3,067	0,00
0,001	3088	3,09	1.994,04	3,066	3,066	0,00

Nesse caso, verificou-se um ajuste numérico-teórico satisfatório para $\Delta t=0.05$ correspondente à uma variação de C_{n+1} de **76,9%** com relação a C_{∞} , para um erro de **0.00%**, como ilustrado na figura 10.5. Para passos de tempo menores o ajuste numérico-teórico resulta em pouca melhora, novamente às custas de um número excessivo de iterações.

Para 2 incrementos de carga, foram realizados testes comparativos obtendo-se um ajuste satisfatório também para $\Delta t=0.05$, com variação de C_{n+1} de **56,1%** com relação a C_{∞} e um erro de **0.0%**, como ilustrado na figura 10.6. Novamente, para $\Delta t=0,10$ e $\Delta t=0,01$, observou-se ajustes aceitáveis.

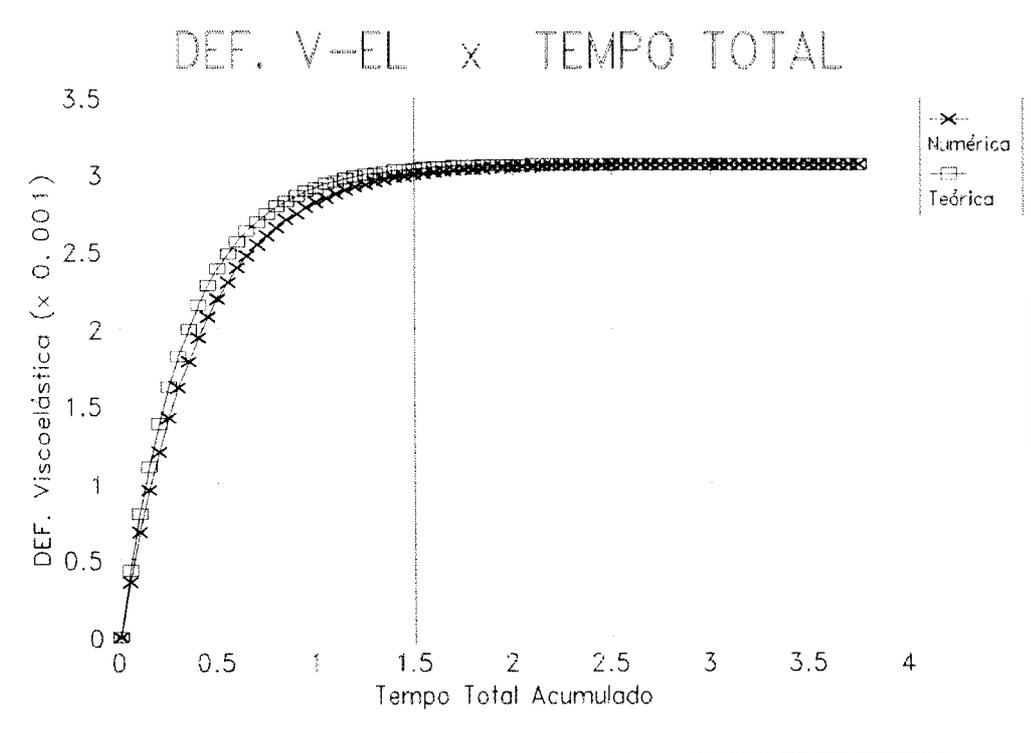


Figura 10.5 - An. Viscoelástica / 1 increm. / $\Delta t=0.05$

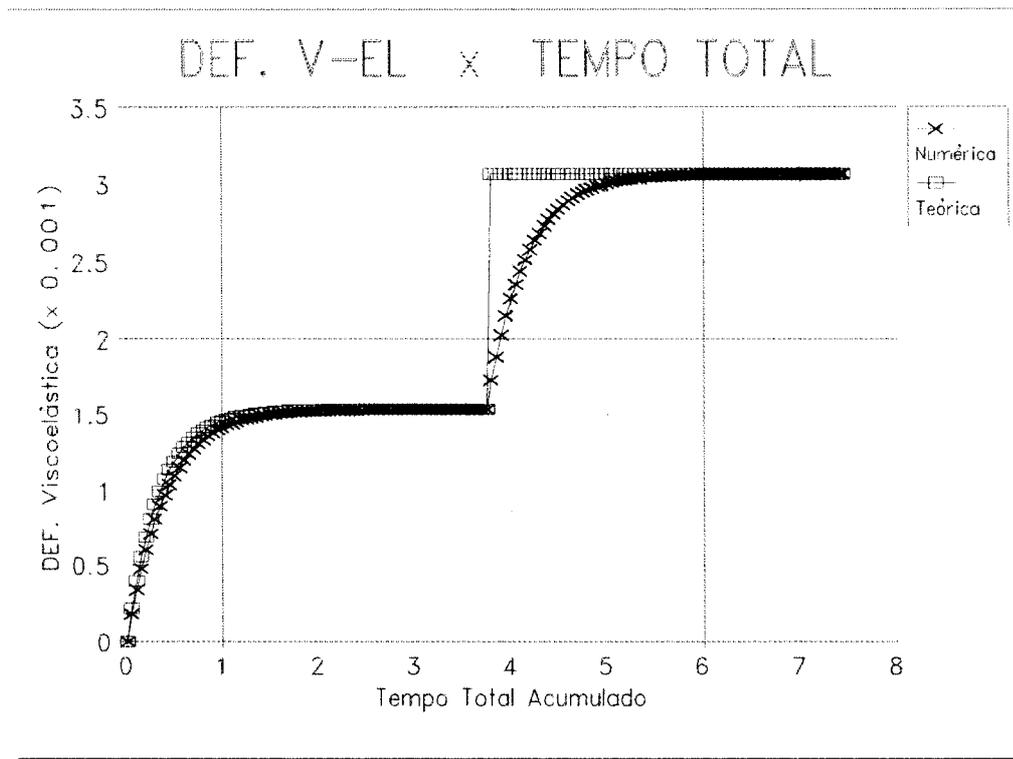


Figura 10.6 - An. Viscoelástica / 2 increm. / $\Delta t=0.05$

Os resultados apresentados e as considerações abordadas, permitem sugerir um intervalo para valores de VMT, para as análises viscoelástica e viscoplástica, objetivando escolher o tamanho do passo de tempo correspondente a um ajuste satisfatório (ou pelo menos aceitável) entre resultados numérico e teórico. Fica, como proposta, a utilização do critério da variação do módulo tangente com o Δt quando da extensão aos casos multiaxiais.

Finalmente, com uma análise complementar sobre os diagrama "Tensão x Deformação" para o caso viscoplástico, por exemplo, é possível constatar a não-violação do critério de plastificação, garantindo uma evolução dos esforços em correspondência à uma rigidez igual a $E_1K/(E_1+K)$. O mesmo fato também é observado quando da análise viscoelástica, onde os esforços evoluem diretamente proporcionais à uma rigidez igual a $E_1E_2/(E_1+E_2)$.

Em uma primeira análise, para o comportamento viscoelástico, novamente para

a barra tracionada (figura 9.2 do capítulo 9) com seus respectivos parâmetros iniciais, plota-se o diagrama "Tensão x Deformação", como ilustrado na figura 10.7, para 3 incrementos de carga (0,35 + 0,35 + 0,30) e $\Delta t=0,05$.

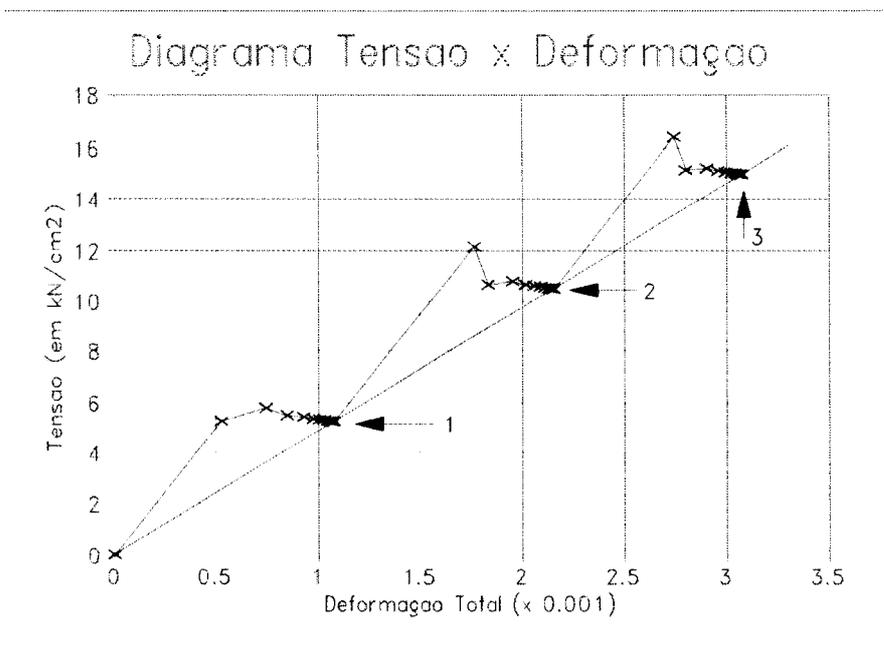


Figura 10.7 - Tensão x Deformação / An. Viscoelástica

Nota-se, com referência à figura 10.7, um alinhamento entre a origem do sistema de coordenadas com os pontos 1, 2 e 3, correspondentes às situações equilibradas para o primeiro, segundo e terceiro incrementos respectivamente.

A inclinação da reta que passa por esses pontos pode ser obtida, através das coordenadas dos mesmos. Tais coordenadas são obtidas com uma pesquisa sobre arquivos auxiliares de saída dos resultados do código de cálculo. São as seguintes:

ponto 1: com coordenadas (1,08 ; 5,25)

ponto 2: com coordenadas (2,16 ; 10,5)

ponto 3: com coordenadas (3,08 ; 15,0).

Assim, determina-se a inclinação da referida reta, tomando-se como valores de

referência as coordenadas dos pontos 1 e 3, tal que:

$$C_{n+1} = \frac{15 - 5.25}{(3.08 - 1.08) \cdot 10^{-3}} = 4875 \text{ kN/cm}^2$$

e portanto, coincidente com o valor de C_{∞} , apresentado na tabela 10.1.

Em uma segunda análise, agora para o comportamento viscoplástico, para a mesma barra, plota-se o diagrama "Tensão x Deformação", ilustrado na figura 10.8, para 3 incrementos de carga (0,70 + 0,15 + 0,15) e $\Delta t=0.10$.

Com referência à figura 10.8, observa-se um comportamento elástico inicial e um comportamento viscoplástico, definido pela reta que passa pelos pontos 1, 2 e 3, correspondentes às situações equilibradas para o primeiro, segundo e terceiro incrementos, respectivamente.

A inclinação da reta que passa por esses pontos também é obtida com base nas coordenadas dos mesmos, determinadas com uma pesquisa sobre arquivos auxiliares de saída dos resultados do código de cálculo. São as seguintes:

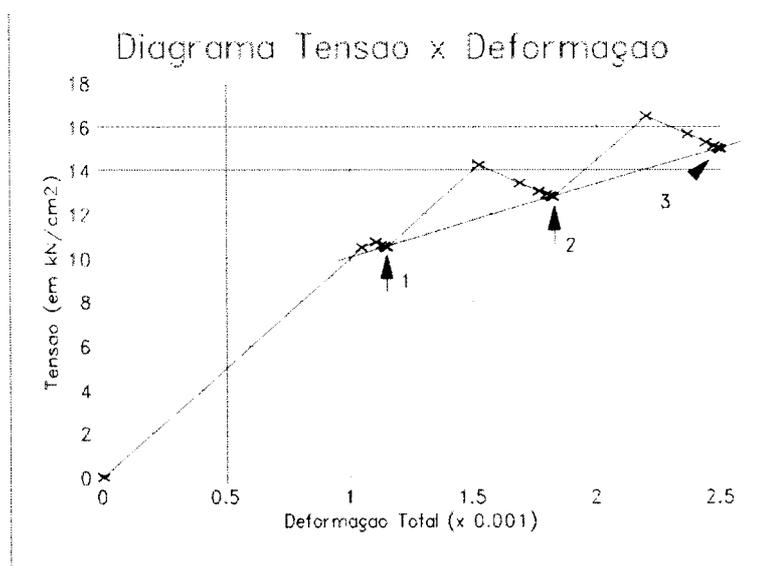


Figura 10.8 - Tensão x Deformação / An. Viscoplastica

ponto 1: com coordenadas (1,15 ; 10,5)

ponto 2: com coordenadas (1,82 ; 12,75)

ponto 3: com coordenadas (2,5 ; 15,0)

Assim, a inclinação da referida reta, tomando-se o valor das coordenadas dos pontos 1 e 3, resulta em:

$$C_{n+1} = \frac{15.0 - 10.5}{(2.50 - 1.15) \cdot 10^{-3}} = 3333.33 \text{ kN/cm}^2$$

e portanto, coincidente com o valor de C_{∞} , apresentado na tabela 10.2.

Os resultados obtidos para o modelo elasto-viscoplástico, demonstram a possibilidade de ajustes satisfatórios entre resultados numérico e teórico, bem como a garantia da correspondência entre tensão e deformação.

CAPÍTULO 11

PLASTICIDADE E VISCOPLASTICIDADE: UMA GENERALIZAÇÃO À ANÁLISE MULTIAXIAL

Uma generalização das expressões estudadas nos capítulos anteriores aos casos multiaxiais leva, em uma primeira análise, à transformação das variáveis escalares tensão e deformação em tensores σ e ε , respectivamente.

Adicionalmente, é possível admitir o desenvolvimento dessas expressões no espaço das deformações. Nesse caso, o tensor de deformação total para o modelo elasto-plástico, passa a ser representado pela decomposição aditiva:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \rightarrow \varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p \quad (11.1a)$$

sendo que para o tensor das tensões, vale a expressão

$$\sigma = C\varepsilon^e = C(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (11.1b)$$

$$C = \lambda(I \otimes I) + 2\mu II = k_b(I \otimes I) + 2\mu \left[II - \frac{1}{3}(I \otimes I) \right] \quad (11.1c)$$

lembrando que C é o tensor elástico, λ e μ são as constantes de Lamé e k_b o módulo de compressibilidade volumétrica ($k_b = \lambda + 2\mu/3$). Ainda, I e II são os tensores identidade de 2a e 4a ordens, respectivamente.

Analogamente à análise unidimensional, as expressões para o fluxo de deformação plástica, taxas das variáveis internas de encruamento, bem como as condições de "complementaridade" e de "consistência", escrevem-se nas formas:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} r(\sigma, q) \quad \dot{q} = -\dot{\lambda} h(\sigma, q) \quad (11.2a, b)$$

$$\dot{\lambda} f = 0 \quad \dot{\lambda} \dot{f} = 0 \quad (11.2c, d)$$

onde λ , como na análise unidimensional, permanece como uma grandeza escalar positiva. Aparecem duas novas variáveis: r como a variável tensorial que determina a direção em que ocorre o fluxo plástico e h a variável vetorial representativa do tipo de encruamento corrente. A expressão geral para λ , na forma de taxa é escrita com base no desenvolvimento apresentado no "apêndice 3", na forma:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_{\sigma} \cdot C \dot{\varepsilon}}{f_{\sigma} \cdot Cr + f_q \cdot h} \quad (11.3a)$$

Deve-se ressaltar que a expressão acima é válida desde que $(f_{\sigma} \cdot Cr + f_q \cdot h) > 0$ para qualquer conjunto $(\sigma, q) \in E_0$. Ainda, no caso de $f(\sigma, q) = 0$ e $\partial f(\sigma, q) / \partial t = 0$, obtém-se:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \rightarrow f_{\sigma} \cdot C \dot{\varepsilon} - \partial_{\sigma} f \cdot C \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad (11.3b)$$

Com a substituição de 11.2a e 11.3a na expressão 11.1b, obtém-se a expressão final do módulo algóritmico tangente C^{ep} , pelo procedimento:

$$\sigma = C(\varepsilon - \varepsilon^p) \rightarrow \delta = C(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = C(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} r(\sigma, q))$$

$$\delta = C \left[\dot{\varepsilon} - \frac{f_{\sigma} \cdot C \dot{\varepsilon}}{f_{\sigma} \cdot Cr + f_q \cdot h} r \right] = \left[C - \frac{Cr \otimes Cf_{\sigma}}{f_{\sigma} \cdot Cr + \partial_q f \cdot h} \right] \dot{\varepsilon} = C^{ep} \dot{\varepsilon} \quad (11.4)$$

Com relação à 11.4 cabem duas observações de grande interesse:

a-) no caso de $\lambda = 0 \rightarrow C^{cp} = C$

b-) para (σ, q) arbitrário, o módulo tangente é geralmente não-simétrico, exceto para o caso da plasticidade associativa, onde admite-se que $r(\sigma, q) = f_{\sigma}(\sigma, q)$. Assim, escreve-se:

$$\dot{\varepsilon}^{cp} = \dot{\lambda} f_{\sigma}(\sigma, q) - \dot{\lambda} \partial_{\sigma} f(\sigma, q) \quad (11.5)$$

$$\dot{q} = -\dot{\lambda} D f_q(\sigma, q) - \dot{\lambda} D \partial_q f(\sigma, q) \quad (11.6)$$

onde D é denominada *Matriz dos Módulos Plásticos*.

11.1-) EXPRESSÕES DA PLASTICIDADE CLÁSSICA (J_2) PARA ANÁLISES TRIDIMENSIONAL E PLANA DE DEFORMAÇÃO (E.P.D)

Apresenta-se, no que segue, o modelo clássico de Von Mises (J_2) bastante usado nos estudos de plasticidade em metais e aqui dirigido particularmente às análises *tridimensional e E.P.D*.

11.1.1-) Critério de Von Mises (J_2) para Plasticidade Perfeita

As expressões no caso da plasticidade perfeita, baseiam-se nas hipóteses de comportamento elástico linear, não ocorrência de qualquer tipo de encruamento ($h=0$) e plasticidade associativa ($r=\partial_{\sigma}f$). A função de plastificação, neste caso, é expressa na forma:

$$f(\sigma) = \sqrt{\|\sigma\|^2 - \frac{1}{3}(\text{tr}[\sigma])^2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y \quad (11.7a)$$

$$\text{tr}[\sigma] = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (11.7b)$$

onde σ é o tensor de tensões e σ_y é a tensão de escoamento do material. Aplicando-se a hipótese de plasticidade associativa, obtém-se a expressão do fluxo plástico.

Primeiramente, determina-se:

$$r = \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \frac{2(\sigma - \frac{1}{3} \text{tr}[\sigma] I)}{\sqrt{\|\sigma\|^2 - \frac{1}{3} (\text{tr}[\sigma])^2}} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\sigma - \frac{1}{3} \text{tr}[\sigma] I)$$

$$r = \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} = [(II - \frac{1}{3} I \otimes I)] \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|} = (II - \frac{1}{3} I \otimes I) n = n$$

onde $\sigma' = \sigma - (1/3)\text{tr}[\sigma]I$ é a parcela anti-esférica do tensor de tensões. Finalmente, de 11.2a ou 11.5, escreve-se:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} r(\sigma) = \dot{\lambda} f_{\sigma} = \dot{\lambda} \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|} = \dot{\lambda} n \quad (11.8)$$

A obtenção dos parâmetros λ e C^p , faz-se através da aplicação de 11.3a e 11.4, respectivamente. Conforme desenvolvimento apresentado passo a passo no "apêndice 4" desse trabalho, ambas as expressões de interesse resultam em

$$\dot{\lambda} = \frac{2\mu f_{\sigma} \cdot \dot{\varepsilon}}{2\mu} = f_{\sigma} \cdot \dot{\varepsilon} = n \cdot \dot{\varepsilon} \quad (11.9a)$$

$$\therefore C^{ep} = k_p I \otimes I + 2\mu (II - \frac{1}{3} I \otimes I - n \otimes n) \quad (11.9b)$$

11.1.2-) Critério de Von Mises (J_2) para Plasticidade com Encruamento Combinado Isótropo/Cinemático.

Os encruamentos isótropo e cinemático são, nesse caso, representados respectivamente pelas variáveis α (deformação plástica equivalente) no espaço das deformações e \mathbf{q} (tensão de retorno) no espaço das tensões. Nesse caso, escreve-se a expressão para o critério de plastificação, na forma:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \|\boldsymbol{\eta}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} K(\alpha) = \|\boldsymbol{\eta}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + K\alpha) \quad (11.10a)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{q}' \quad (11.10b)$$

lembrando que $\boldsymbol{\sigma}'$ é a parcela desviadora do tensor de tensões, K é o módulo plástico (referente ao encruamento isótropo) e \mathbf{q}' a parcela desviadora do tensor das tensões de retorno (referente ao encruamento cinemático). Pode-se ainda reescrever a expressão para o critério, em sua forma explicitada:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}') = \left[(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{I}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{I}) \right]^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y - \sqrt{\frac{2}{3}} K\alpha \quad (11.10c)$$

A determinação da lei de fluxo para a deformação plástica, faz-se com base na expressão 11.5. Nesse sentido

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} \frac{2[\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{q}']}{\|\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{q}'\|} \left[\left(\mathbf{I} \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \right] = \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{q}'}{\|\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{q}'\|}$$

finalmente

$$\dot{\varepsilon}^{\circ p} = \dot{\lambda}^{\circ} \frac{\sigma' - q'}{\|\sigma' - q'\|} = \dot{\lambda}^{\circ} \frac{\eta}{\|\eta\|} = \dot{\lambda}^{\circ} n \quad (11.11)$$

Para as leis de fluxo das variáveis internas referentes aos encruamentos dos tipos isótropo e cinemático valem, conforme o desenvolvimento apresentado no "apêndice 5" desse trabalho, as expressões nas formas finais

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda}^{\circ} \quad (11.12)$$

$$q' = \frac{2}{3} H \dot{\lambda}^{\circ} \frac{\eta}{\|\eta\|} = \frac{2}{3} H \dot{\lambda}^{\circ} n \quad (11.13)$$

Finalmente, faz-se a determinação das expressões finais de λ e C^{ep} , por um procedimento análogo àquele utilizado no caso da plasticidade perfeita. Ambas as expressões, novamente com base no "apêndice 5", são escritas nas formas:

$$\dot{\lambda}^{\circ} = \frac{n \cdot \dot{\varepsilon}^{\circ}}{1 + \frac{1}{2\mu} \partial_q f.h(\sigma, q)} = \left(1 + \frac{K+H}{3\mu} \right)^{-1} n \cdot \dot{\varepsilon}^{\circ} \quad (11.14a)$$

$$C^{\text{ep}} = k_b I \otimes I + 2\mu \left[II - \frac{1}{3} I \otimes I - \frac{n \otimes n}{1 + \left(\frac{H+K}{3\mu} \right)} \right] \quad (11.14b)$$

11.2-) UMA EXTENSÃO À VISCOPLASTICIDADE PERFEITA

Este modelo utiliza uma formulação alternativa, proposta por *Duvaut-Lions* e parte, em uma primeira análise, da viscoplasticidade perfeita com base no critério de *Von Mises* (J_2). Admite, para tanto, $f=f(\sigma)$ como um critério de plastificação na forma:

$$f(\sigma) = \|\sigma'\| - \sqrt{\frac{2}{3}\sigma_y} - (\sigma' \cdot \sigma')^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}\sigma_y} \leq 0 \quad (11.15a)$$

$$\sigma' = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) I = \sigma - \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) I = \sigma - \sigma_m I \quad (11.15b)$$

Desse modo, procede-se

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} 2 \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|} \left[\left(I I - \frac{1}{3} I \otimes I \right) \right] = \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|}$$

obtendo-se, portanto

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta} \langle f(\sigma) \rangle \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|} = \frac{1}{\eta} \langle f(\sigma) \rangle n \quad (11.16a)$$

$$C = k_p I \otimes I + 2\mu \left[I I - \frac{1}{3} I \otimes I \right] \quad (11.16b)$$

lembrando que η é o coeficiente de viscosidade do material.

No capítulo que segue, serão apresentados algoritmos para implementação em códigos de cálculo dos modelos até aqui estudados, através de um procedimento puramente implícito de integração. Ressalta-se que serão abordadas também as extensões à *viscoelasticidade e viscoplasticidade* (com encruamentos isótropo e o cinemático).

CAPÍTULO 12

ALGORITMOS VIA PROCEDIMENTO IMPLÍCITO DE INTEGRAÇÃO PARA MODELOS DE COMPORTAMENTOS ELÁSTICO, VISCOELÁSTICO, PLÁSTICO E VISCOPLÁSTICO

Com a utilização de um procedimento incremental-iterativo juntamente com uma verificação do equilíbrio estrutural, elaboram-se algoritmos de integração numérica tomando como referência às expressões apresentadas no capítulo 11.

Através das condições iniciais do problema, determinam-se incrementos de deformação e, conseqüentemente, os valores atualizados das variáveis de interesse da análise estrutural, com a utilização de um procedimento implícito de integração numérica, o qual também será utilizado nesse mesmo capítulo para a determinação de expressões referentes à viscoelasticidade.

12.1-) PLASTICIDADE DE VON MISES (J_2) PARA ENCRUAMENTO COMBINADO EM "3-D" E "E.P.D".

O critério de Von Mises é representado por uma *Hiperesfera* no espaço desviador. A projeção do estado auxiliar sobre a superfície da hiperesfera, ocorre na

direção do centro da circunferência (radialmente). Essa projeção é denominada *Método da Projeção Radial* e está graficamente ilustrada nas figuras 12.1 e 12.2, retiradas de *SIMO & HUGHES (1988)*, para os encruamentos isótropo e combinado isótropo/cinemático, respectivamente

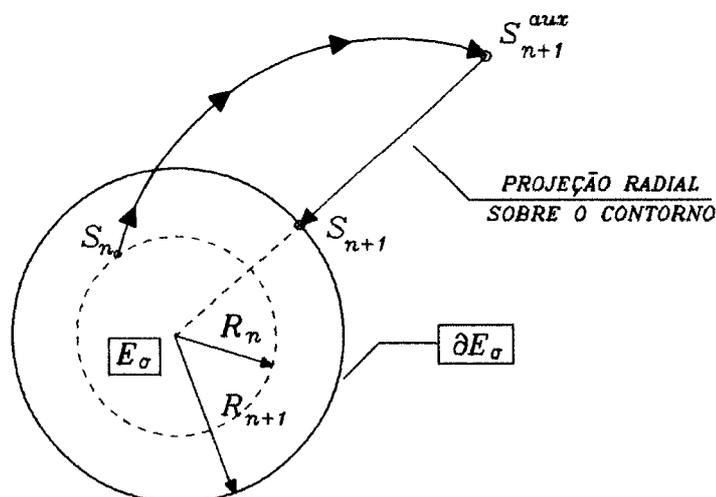


Figura 12.1 - Projeção Radial - Encruamento Isótropo

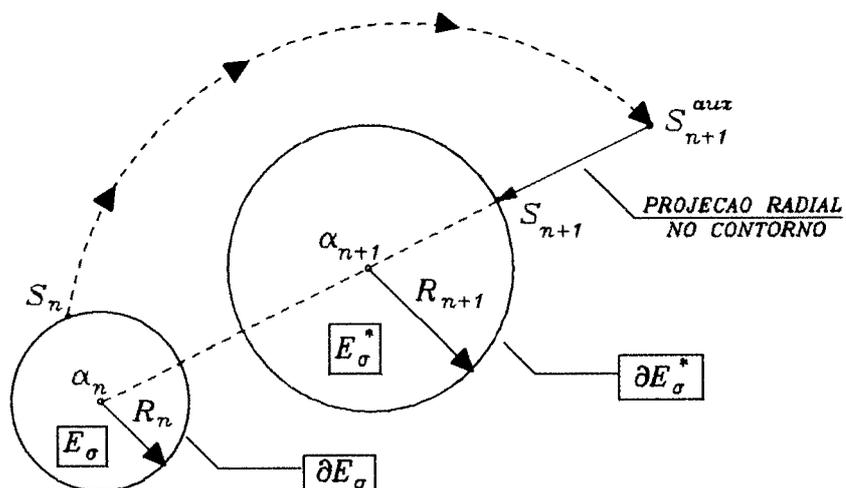


Figura 12.2 - Projeção Radial - Encruamento Combinado

Como já mencionado, $q^k(\alpha, q)$ é o vetor das variáveis plásticas internas, $\eta = \sigma - q$ é a tensão relativa e $n = \eta / \|\eta\|$ o vetor unitário normal à superfície de escoamento de Mises. Considerando-se um intervalo de tempo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ e utilizando um procedimento implícito, escrevem-se

$$\varepsilon_{n+1}^P = \varepsilon_n^P + \dot{\varepsilon}_{n+1}^P \Delta t = \varepsilon_n^P + (\dot{\lambda}_{n+1}^o \Delta t) n_{n+1} = \varepsilon_n^P + \lambda_{n+1} n_{n+1} \quad (12.1)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \dot{\alpha}_{n+1} \Delta t = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\lambda}_{n+1}^o \Delta t} = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3} \lambda_{n+1}} \quad (12.2)$$

$$q'_{n+1} = q'_n + \dot{q}'_{n+1} \Delta t = q'_n + \dot{\lambda}^o \Delta t \frac{2}{3} H n_{n+1} = q'_n + \frac{2}{3} H \lambda_{n+1} n_{n+1} \quad (12.3)$$

e, para as tensões e o critério, no espaço desviador

$$\sigma_{n+1} = C(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^P) \quad \sigma'_{n+1} = \sigma_{n+1} - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma_{n+1}) I \quad (12.4a, b)$$

$$\eta_{n+1} = \sigma'_{n+1} - q'_{n+1} \quad f_{n+1} = \|\eta_{n+1}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + K \alpha_{n+1}) \quad (12.4c, d)$$

lembrando que $C = k_b(I \otimes I) + 2\mu[II - 1/3(I \otimes I)]$ e σ' e q' são parcelas desviadoras dos tensores de tensões total e de retorno. No referente ao estado auxiliar de tensões, as expressões gerais apresentam-se na forma

$$\sigma_{n+1}^{aux} = C(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^P) \equiv \sigma_n + C \Delta \varepsilon_n \quad (12.5a)$$

$$\xi_{n+1}^{aux} = \sigma_{n+1}^{aux} - q'_n \quad (12.5b)$$

reescrevendo-as no espaço desviador, assumem as formas

$$\sigma'_{n+1}{}^{aux} = \sigma_{n+1}{}^{aux} - \frac{1}{3} tr(\sigma_{n+1}{}^{aux}) I \quad (12.5c)$$

$$\eta_{n+1}{}^{aux} = \sigma'_{n+1}{}^{aux} - q'_n \rightarrow f_{n+1}{}^{aux} = \|\eta_{n+1}{}^{aux}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + K\alpha_n) \quad (12.5d,e)$$

Ressalta-se ainda que as expressões de tensão e suas parcelas desviadoras, tanto no estado real como no auxiliar, podem ser reescritas em formas alternativas. Como desenvolvido no "apêndice 6", reescrevem-se as expressões referentes à tensão e sua parcela desviadora, ambas para o estado auxiliar e com base nas parcelas desviadoras dos tensores de deformações total e plástica, nas formas finais

$$\sigma_{n+1}{}^{aux} = 2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^P) + k_b tr(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) I \quad (12.6a)$$

$$\sigma'_{n+1}{}^{aux} = 2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^P) = 2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^P) \quad (12.6b)$$

Através de um procedimento análogo, também apresentado no "apêndice 6", é possível obter as expressões no estado real, escritas em formas alternativas:

$$\sigma_{n+1} = k tr(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) I + \sigma'_{n+1}{}^{aux} - 2\mu \lambda_{n+1} n_{n+1} \quad (12.6c)$$

$$\sigma'_{n+1} = 2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^P) - 2\mu \lambda_{n+1} n_{n+1} = \sigma'_{n+1}{}^{aux} - 2\mu \lambda_{n+1} n_{n+1} \quad (12.6d)$$

Outras relações de interesse para os desenvolvimento que seguem nesse item, referem-se ao vetor unitário $n_{n+1} = \eta_{n+1} / \|\eta_{n+1}\|$. Em uma primeira etapa, apresenta-se no "apêndice 6", a relação:

$$\| \eta_{n+1}^{aux} \| \cdot n_{n+1} = \eta_{n+1}^{aux} \rightarrow n_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}^{aux}}{\| \eta_{n+1}^{aux} \|} \quad (12.6e)$$

demonstra-se no mesmo apêndice, da relação $n_{n+1} = \| \eta_{n+1} \| n_{n+1}$, que

$$\| \eta_{n+1} \| = \eta_{n+1} \cdot n_{n+1} \quad (12.6f)$$

As relações 12.6, anteriormente apresentadas serão utilizadas na determinação da variável λ_{n+1} . Para tanto, da expressão referente ao critério juntamente com a relação 12.6f, bem como admitindo-se a ocorrência de plastificação, escreve-se:

$$f_{n+1} = \| \eta_{n+1} \| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + K\alpha_{n+1}) = \eta_{n+1} \cdot n_{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + K\alpha_{n+1}) = 0$$

considerando-se, de 12.6d, a relação $\eta_{n+1} = \eta_{n+1}^{aux} - (2\mu + 2H/3)\lambda_{n+1}n_{n+1}$ e admitindo 12.6f também válida para o estado auxiliar de tensões, procede-se

$$[\eta_{n+1}^{aux} - (2\mu + \frac{2}{3}H)\lambda_{n+1}n_{n+1}] \cdot n_{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + K\alpha_{n+1}) = 0$$

$$\| \eta_{n+1}^{aux} \| \cdot n_{n+1} \cdot n_{n+1} - (2\mu + \frac{2}{3}H)\lambda_{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + K\alpha_{n+1}) = 0$$

$$\| \eta_{n+1}^{aux} \| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + K\alpha_{n+1}) - (2\mu + \frac{2}{3}H)\lambda_{n+1} = 0 \quad (12.7a)$$

usando as expressões 12.2 e 12.5e, em 12.7a

$$\| \eta_{n+1}^{aux} \| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + K\alpha_n) - \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_{n+1} K - (2\mu + \frac{2}{3}H)\lambda_{n+1} = 0$$

$$f_{n+1}^{aux} - \left(\frac{2}{3}K + 2\mu + \frac{2}{3}H \right) \lambda_{n+1} = 0$$

btendo-se finalmente:

$$\lambda_{n+1} = \frac{f_{n+1}^{aux}}{2\mu - \frac{2}{3}K - \frac{2}{3}H} = \frac{f_{n+1}^{aux}}{2\mu \left(1 + \frac{K+H}{3\mu} \right)} \quad (12.7b)$$

Uma vez conhecida a expressão final de λ_{n+1} , para ambos os encruamentos admitidos como lineares, ficam determinadas as demais expressões, viabilizando a obtenção das variáveis ϵ_{n+1} , α_{n+1} , σ_{n+1} e q_{n+1} .

Uma outra expressão a ser determinada, objetivando a elaboração de um algoritmo de implementação, é a do módulo algorítmico tangente, que pode ser obtida a partir da relação $C_{n+1}^{sp} = (\partial\sigma/\partial\epsilon)_{n+1}$. A determinação dessa toma como ponto de partida a expressão 12.4a, para a qual procede-se:

$$\sigma_{n+1} = C(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^P) = C\epsilon_{n+1} - C\epsilon_n^P - \lambda_{n+1} Cn_{n+1}$$

sabendo-se que $\text{tr}(n_{n+1})=0$, é possível demonstrar com referência à última parcela da expressão da tensão que

$$\lambda_{n+1} Cn_{n+1} = \lambda_{n+1} [k_b I \otimes I + 2\mu (II - \frac{1}{3} I \otimes I)]_{n_{n+1}}$$

$$\lambda_{n+1} Cn_{n+1} = \lambda_{n+1} [k_b \text{tr}(n) I + 2\mu n - \frac{1}{3} \text{tr}(n) I] = 2\mu \lambda_{n+1} n_{n+1}$$

desse modo, escreve-se

$$C_{n+1}^{ep} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = C \frac{\partial \varepsilon_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} - C \frac{\partial \varepsilon_n^p}{\partial \varepsilon_{n+1}} - 2\mu \frac{\partial (\lambda_{n+1} n_{n+1})}{\partial \varepsilon_{n+1}} = C - 2\mu \frac{\partial (\lambda_{n+1} n_{n+1})}{\partial \varepsilon_{n+1}}$$

$$C_{n+1}^{ep} = C - 2\mu \left[n_{n+1} \otimes \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} + \lambda_{n+1} \frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right] \quad (12.8a)$$

A expressão 12.8a é representativa do módulo tangente algorítmico escrito em sua forma intrínseca. A solução desse, dá-se pelo desenvolvimento em separado das parcelas internas ao colchete, conforme apresentado no "apêndice 7", obtendo-se:

$$\frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{2\mu \left(1 + \frac{K+H}{3\mu}\right)} 2\mu n_{n+1} = \left[1 + \frac{K+H}{3\mu}\right]^{-1} n_{n+1} \quad (12.8b)$$

$$\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{2\mu}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} \left(II - \frac{1}{3}I \otimes I\right) - \frac{1}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} \frac{\eta_{n+1}^{aux}}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} \otimes 2\mu n_{n+1}$$

ou ainda, com o devido rearranjo e de 12.6c

$$\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{2\mu}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} \left(II - \frac{1}{3}I \otimes I - n_{n+1} \otimes n_{n+1}\right) \quad (12.8c)$$

Com a substituição das relações parciais 12.8b,c na expressão 12.8a, determina-se a expressão final do módulo algorítmico tangente elásto-plástico, na forma:

$$C_{n+1}^{ep} = C - 2\mu \left[\left(1 + \frac{K+H}{3\mu}\right)^{-1} n_{n+1} \otimes n_{n+1} + \frac{2\mu \lambda_{n+1}}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} \left(II - \frac{1}{3}I \otimes I - n_{n+1} \otimes n_{n+1}\right) \right]$$

ou ainda, usando $C = k_b(I \otimes I) + 2\mu[II - (1/3)I \otimes I]$ e com alguns rearranjos

$$C_{n+1}^{ep} = k_b I \otimes I + 2\mu [\theta_{n+1}^{ep}] (II - \frac{1}{3} I \otimes I) - 2\mu [\bar{\theta}_{n+1}^{ep}] n_{n+1} \otimes n_{n+1} \quad (12.9a)$$

onde

$$\theta_{n+1}^{ep} = 1 - \frac{2\mu\lambda_{n+1}}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} \quad (12.9b)$$

$$\bar{\theta}_{n+1}^{ep} = \left(1 + \frac{K+H}{3\mu}\right)^{-1} - \frac{2\mu\lambda_{n+1}}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} = \left(1 + \frac{K+H}{3\mu}\right)^{-1} - 1 + \theta_{n+1}^{ep} \quad (12.9b)$$

12.2-) UMA EXTENSÃO À VISCOPLASTICIDADE DE VON MISES(J₂) PARA ENCRUAMENTO COMBINADO ISÓTROPO/CINEMÁTICO

A viscoplasticidade aqui estudada consiste basicamente em uma extensão do algoritmo apresentado no item 12.1, tendo como principal novidade modificações na expressão do parâmetro $\lambda = \lambda_{n+1}$. Sua equação na forma de taxa, bem como a do critério de plastificação, passam a ser expressas nas formas:

$$\dot{\lambda}_{n+1}^{\circ} = \frac{1}{\eta} \langle f(\sigma, q) \rangle \quad (12.10a)$$

$$f(\sigma, q) = \|\eta_{n+1}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + K\alpha_{n+1}) \quad (12.10b)$$

e o fluxo de deformação viscoplástica, tal que

$$\dot{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = \dot{\lambda}_{n+1}^{\circ} \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial \sigma} = \frac{1}{\eta} \langle f(\sigma, q) \rangle \frac{\eta_{n+1}}{\|\eta_{n+1}\|} = \frac{1}{\eta} \langle f(\sigma, q) \rangle n_{n+1} \quad (12.10c)$$

Utilizando um procedimento puramente implícito e admitindo $f_{n+1}^{aux} > 0$ (ocorrência de um processo de plastificação), obtém-se as expressões para a viscoplasticidade, as quais assumem as formas:

$$\varepsilon_{n+1}^{vp} = \varepsilon_n^{vp} + \dot{\varepsilon}_{n+1}^{vp} \Delta t = \varepsilon_n^{vp} + \frac{\Delta t}{\eta} f_{n+1} n_{n+1} \quad (12.11a)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_{n+1} = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta t}{\eta} f_{n+1} \quad (12.11b)$$

$$q_{n+1} = q_n + \frac{2}{3} H \lambda_{n+1} n_{n+1} = q_n + \frac{2H\Delta t}{3\eta} f_{n+1} n_{n+1} \quad (12.11c)$$

onde, como já apresentado no item 12.1

$$n_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}}{\|\eta_{n+1}\|} \equiv \frac{\eta_{n+1}^{aux}}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|}$$

O procedimento para a determinação do parâmetro λ_{n+1} , o qual encontra-se novamente presente nas expressões anteriormente apresentadas, consiste em tomar como referência a expressão 8.3.6f que relaciona η_{n+1} e η_{n+1}^{aux} . Dessa, é possível obter uma relação entre $\|\eta_{n+1}\|$ e $\|\eta_{n+1}^{aux}\|$ através do seguinte procedimento:

$$\eta_{n+1} = \eta_{n+1}^{aux} - (2\mu + \frac{2}{3}H) \lambda_{n+1} n_{n+1} = \eta_{n+1}^{aux} - \frac{2f_{n+1}}{\eta} \Delta t (\mu + \frac{H}{3}) n_{n+1}$$

$$\eta_{n+1} = \eta_{n+1}^{aux} - \frac{2\mu\Delta t}{\eta} f_{n+1} (1 + \frac{H}{3\mu}) n_{n+1}$$

Por um procedimento análogo ao utilizado no *apêndice 6* (utilizado para a determinação da expressão 2c), obtém-se finalmente

$$\|\eta_{n+1}\| = \|\eta_{n+1}^{aux}\| - \frac{2\mu\Delta t}{\eta} \left(1 + \frac{H}{3\mu}\right) f_{n+1} \quad (12.12)$$

Com base na relação apresentada em 12.12, é possível determinar a expressão final do multiplicador viscoplástico. O procedimento consiste basicamente em considerar, da expressão do critério de plastificação, que $\|\eta_{n+1}\| = f_{n+1} + \sqrt{(2/3)K\alpha_{n+1}}$ e $\|\eta_{n+1}^{aux}\| = f_{n+1}^{aux} + \sqrt{(2/3)K\alpha_n}$. Desse modo, pelo algebrismo que segue:

$$f_{n+1} + \sqrt{\frac{2}{3}K(\alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}\lambda_{n+1}})} = f_{n+1}^{aux} + \sqrt{\frac{2}{3}K\alpha_n} - \frac{2\mu\Delta t}{\eta} \left(1 + \frac{H}{3\mu}\right) f_{n+1}$$

$$f_{n+1} = -\sqrt{\frac{2}{3}K\alpha_n} - \frac{2}{3}K\lambda_{n+1} + f_{n+1}^{aux} + \sqrt{\frac{2}{3}K\alpha_n} - 2\mu \left[\frac{1}{\eta} f_{n+1} \Delta t \right] \left(1 + \frac{H}{3\mu}\right)$$

$$f_{n+1} = -\frac{2}{3}K\lambda_{n+1} + f_{n+1}^{aux} - \lambda_{n+1} \left(2\mu + \frac{2}{3}H\right)$$

multiplicando e dividindo o lado esquerdo da última igualdade pela relação $\eta/\Delta t$

$$\left[\frac{1}{\eta} f_{n+1} \Delta t \right] \frac{\eta}{\Delta t} = \lambda_{n+1} \frac{\eta}{\Delta t} = -\frac{2}{3}K\lambda_{n+1} + f_{n+1}^{aux} - \lambda_{n+1} \left(2\mu + \frac{2}{3}H\right)$$

$$\left(\frac{\eta}{\Delta t} + \frac{2}{3}K + 2\mu + \frac{2}{3}H \right) \lambda_{n+1} = f_{n+1}^{aux}$$

finalmente, obtém-se:

$$\lambda_{n+1} = \frac{f_{n+1}^{aux}}{\frac{\eta}{\Delta t} + \frac{2}{3}K + 2\mu + \frac{2}{3}H} = \frac{f_{n+1}^{aux}}{2\mu \left[1 + \frac{\eta}{2\mu\Delta t} + \frac{(K+H)}{3\mu} \right]} \quad (12.13)$$

Novamente, como demonstrado anteriormente na plasticidade, a expressão final de λ_{n+1} para ambos os encruamentos admitidos como lineares permite determinar as variáveis ε_{n+1} , α_{n+1} , σ_{n+1} e q_{n+1} .

A outra expressão a ser determinada, o módulo algorítmico tangente, pode ser obtido analogamente ao desenvolvido no item 12.1, da relação $C_{n+1}^{vp} = (\partial\sigma/\partial\varepsilon)_{n+1}$. Como já demonstrado naquele item:

$$C_{n+1}^{vp} = C - 2\mu \left[n_{n+1} \otimes \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial\varepsilon_{n+1}} + \lambda_{n+1} \frac{\partial n_{n+1}}{\partial\varepsilon_{n+1}} \right] \quad (12.14a)$$

Desenvolvendo separadamente as parcelas internas aos colchetes, é possível concluir que a única diferença é obtida na derivada parcial com referência à λ_{n+1} , enquanto que o resultado obtido com a derivada de n_{n+1} permanece idêntico ao obtido no item 12.1, para o qual admite-se válida a relação

$$\frac{\partial n_{n+1}}{\partial\varepsilon_{n+1}} = \frac{2\mu}{\| \eta_{n+1}^{aux} \|} \left(II - \frac{1}{3}I \otimes I - n_{n+1} \otimes n_{n+1} \right) \quad (12.14b)$$

devendo-se desenvolver apenas a seguinte derivada

$$\frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{2\mu \left[1 + \frac{\eta}{2\mu\Delta t} + \frac{(K+H)}{3\mu} \right]} \left(\frac{\partial \|\eta_{n+1}^{aux}\|}{\partial \sigma'_{n+1}{}^{aux}} \right) \left(\frac{\partial \sigma'_{n+1}{}^{aux}}{\partial \mathbf{e}_{n+1}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right)$$

para os termos entre parênteses:

$$\frac{\partial \|\eta_{n+1}^{aux}\|}{\partial \sigma'_{n+1}{}^{aux}} = \frac{\partial \|\sigma'_{n+1}{}^{aux} - \mathbf{q}'\|}{\partial \sigma'_{n+1}{}^{aux}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma'_{n+1}{}^{aux} - \mathbf{q}'}{\|\sigma'_{n+1}{}^{aux} - \mathbf{q}'\|} = \frac{\eta_{n+1}^{aux}}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} = n_{n+1}$$

$$\frac{\partial \sigma'_{n+1}{}^{aux}}{\partial \mathbf{e}_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}_{n+1}} [2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^p)] = 2\mu$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left[\varepsilon_{n+1} \frac{1}{3} \text{tr}(\varepsilon_{n+1}) \mathbf{I} \right] = \mathbf{I} \mathbf{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})$$

com substituições convenientes, obtém-se

$$\frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \left[1 + \frac{\eta}{2\mu\Delta t} + \frac{(K+H)}{3\mu} \right]^{-1} n_{n+1} \quad (12.14c)$$

Substituindo-se as relações 12.14b,c na expressão 12.14a, determina-se a expressão final do Módulo Algorítmico Tangente Elásto-viscoplástico, para implementação em códigos de cálculo, na forma:

$$C_{n+1}^{VP} = C - 2\mu \left[\left(1 + \frac{\eta}{2\mu\Delta t} + \frac{(K+H)}{3\mu} \right)^{-1} n_{n+1} \otimes n_{n+1} + \frac{2\mu\lambda_{n+1}}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} \left(II - \frac{1}{3} I \otimes I - n_{n+1} \otimes n_{n+1} \right) \right]$$

Como já mencionado anteriormente, sabe-se que $C = k_b(I \otimes I) + 2\mu[II - (1/3)I \otimes I]$.

Assim, com alguns rearranjos, escreve-se:

$$C_{n+1}^{VP} = k_b I \otimes I + 2\mu [\theta_{n+1}^{VP}] \left(II - \frac{1}{3} I \otimes I \right) - 2\mu [\bar{\theta}_{n+1}^{VP}] n_{n+1} \otimes n_{n+1} \quad (12.15a)$$

onde

$$\theta_{n+1}^{VP} = 1 - \frac{2\mu\lambda_{n+1}}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} \quad (12.15b)$$

$$\bar{\theta}_{n+1}^{VP} = \left[1 + \frac{\eta}{2\mu\Delta t} + \frac{(K+H)}{3\mu} \right]^{-1} - 1 + \theta_{n+1}^{VP} \quad (12.15c)$$

12.3-) O MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO COMPLETO - UMA EXTENSÃO AO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO

Neste item, complementam-se os estudos apresentados no item 12.2 com referência à viscoplasticidade via Mises (J_2). Tal complemento consiste em inserir expressões referentes ao *modelo viscoelástico de Kelvin* (associação em paralelo de mola e amortecedor) em conjunto com as obtidas para o viscoplástico. Deve-se ressaltar que a associação de ambos os modelos será admitida em série.

O objetivo principal é a determinação de expressões gerais para procedimento "puramente implícito de integração", representativas do modelo elasto-viscoplástico apresentado em *MUNAIAR NETO (1994)*. Ressalta-se que, naquela referência, as expressões gerais foram obtidas a partir de um procedimento explícito.

Essa proposta viabiliza não só a determinação de um modelo mais completo, mas permite também um confronto direto entre resultados "explícito" e "implícito".

Inicialmente, admite-se como válida a decomposição aditiva do tensor de deformações totais, à qual é adicionada uma parcela de deformação viscoelástica. Assim, escreve-se:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^e + \varepsilon_{n+1}^{ve} + \varepsilon_{n+1}^{vp} \rightarrow \varepsilon_{n+1}^e = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{ve} - \varepsilon_{n+1}^{vp} \quad (12.16)$$

sendo que para o estado auxiliar de tensões, como já demonstrado, valem as expressões

$$\varepsilon_{n+1}^{e\ aux} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{ve} - \varepsilon_n^{vp} \quad (12.17a)$$

$$\sigma_{n+1}^{aux} = C (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{ve} - \varepsilon_n^{vp}) \quad (12.17b)$$

O desenvolvimento algébrico da 12.17b, sabendo-se que o tensor elástico é $C = k_{b1}(I \otimes I) + 2\mu_1[II - 1/3(I \otimes I)]$, resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}^{aux} = & k_{b_1} (I \otimes I) \varepsilon_{n+1} + 2\mu_1 I I \varepsilon_{n+1} - \frac{2\mu_1}{3} (I \otimes I) \varepsilon_{n+1} - k_{b_1} (I \otimes I) \varepsilon_n^{ve} - 2\mu_1 I I \varepsilon_n^{ve} + \\ & \frac{2\mu_1}{3} (I \otimes I) \varepsilon_n^{ve} - k_{b_1} (I \otimes I) \varepsilon_n^{vp} - 2\mu_1 I I \varepsilon_n^{vp} + \frac{2\mu_1}{3} (I \otimes I) \varepsilon_n^{vp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}^{aux} = & 2\mu_1 \left[\varepsilon_{n+1} - \frac{1}{3} \text{tr}(\varepsilon_{n+1}) I - \varepsilon_n^{ve} + \frac{1}{3} \text{tr}(\varepsilon_n^{ve}) I - \varepsilon_n^{vp} + \frac{1}{3} \text{tr}(\varepsilon_n^{vp}) I \right] + \\ & k_{b_1} \text{tr}(\varepsilon_{n+1}) I - k_{b_1} \text{tr}(\varepsilon_n^{ve}) I - k_{b_1} \text{tr}(\varepsilon_n^{vp}) I \end{aligned}$$

A última relação pode ser escrita na forma

$$\sigma_{n+1}^{aux} = k_{b_1} \text{tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{ve} - \varepsilon_n^{vp}) I + 2\mu_1 (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^{ve} - \mathbf{e}_n^{vp}) \quad (12.18a)$$

onde $k_{b_1} = \lambda_1 + 2\mu_1/3$ é o módulo de compressibilidade volumétrica e lembrando que "e" é a parcela desviadora do tensor de deformações. Ainda, sendo $\text{tr}(\varepsilon^{vp})=0$

$$\sigma_{n+1}^{aux} = k_{b_1} \text{tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{ve}) I + 2\mu_1 (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^{ve} - \varepsilon_n^{vp}) \quad (12.18b)$$

Considerações análogas devem ser feitas com relação à parcela desviadora do tensor de tensões, $\sigma'_{n+1}{}^{aux}$. Partindo-se de sua expressão na forma básica

$$\sigma'_{n+1}{}^{aux} = \sigma_{n+1}^{aux} - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma_{n+1}^{aux}) I$$

substituindo-se a 12.18a, e levando em conta a relação $\text{tr}(\sigma_{n+1}{}^{aux}) = 3k_1 \text{tr}(\mathbf{e}_{n+1})$, resulta

$$\sigma'_{n+1}{}^{aux} = 2\mu_1 (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^{ve} - \mathbf{e}_n^{vp}) - k_{b_1} \text{tr}(\varepsilon_n^{ve} - \varepsilon_n^{vp}) I \quad (12.19a)$$

ou ainda, como $\text{tr}(\epsilon^{vp})=0$

$$\sigma'_{n+1}{}^{aux} = 2\mu_1 (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^{ve} - \epsilon_n^{vp}) - k_{b_1} \text{tr}(\epsilon_n^{ve}) I \quad (12.19b)$$

A expressão de $\sigma'_{n+1}{}^{aux}$, objetivando sua implementação em códigos de cálculo, deve ser expressa com referência às direções x,y,e z, nas formas:

$$\begin{aligned} \sigma'_{x(n+1)}{}^{aux} &= 2\mu_1 \left[e_{x(n+1)} - (\epsilon_x^{ve} + \epsilon_x^{vp})_{(n)} + \frac{(\epsilon_x^{ve} + \epsilon_y^{ve} + \epsilon_z^{ve} + \epsilon_x^{vp} + \epsilon_y^{vp} + \epsilon_z^{vp})_n}{3} \right] \\ &\quad - k_{b_1} (\epsilon_x^{ve} + \epsilon_y^{ve} + \epsilon_z^{ve} + \epsilon_x^{vp} + \epsilon_y^{vp} + \epsilon_z^{vp})_n \end{aligned} \quad (12.20a)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{y(n+1)}{}^{aux} &= 2\mu_1 \left[e_{y(n+1)} - (\epsilon_y^{ve} + \epsilon_y^{vp})_{(n)} + \frac{(\epsilon_x^{ve} + \epsilon_y^{ve} + \epsilon_z^{ve} + \epsilon_x^{vp} + \epsilon_y^{vp} + \epsilon_z^{vp})_n}{3} \right] \\ &\quad - k_{b_1} (\epsilon_x^{ve} + \epsilon_y^{ve} + \epsilon_z^{ve} + \epsilon_x^{vp} + \epsilon_y^{vp} + \epsilon_z^{vp})_n \end{aligned} \quad (12.20b)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{z(n+1)}{}^{aux} &= 2\mu_1 \left[e_{z(n+1)} - (\epsilon_z^{ve} + \epsilon_z^{vp})_{(n)} + \frac{(\epsilon_x^{ve} + \epsilon_y^{ve} + \epsilon_z^{ve} + \epsilon_x^{vp} + \epsilon_y^{vp} + \epsilon_z^{vp})_n}{3} \right] \\ &\quad - k_{b_1} (\epsilon_x^{ve} + \epsilon_y^{ve} + \epsilon_z^{ve} + \epsilon_x^{vp} + \epsilon_y^{vp} + \epsilon_z^{vp})_n \end{aligned} \quad (12.20c)$$

$$\sigma'_{xy(n+1)}{}^{aux} = 2\mu_1 [e_{xy(n+1)} - (\epsilon_{xy}^{ve} + \epsilon_{xy}^{vp})_{(n)}] \quad (12.20d)$$

$$\sigma'_{xz(n+1)}{}^{aux} = 2\mu_1 [e_{xz(n+1)} - (\epsilon_{xz}^{ve} + \epsilon_{xz}^{vp})_{(n)}] \quad (12.20e)$$

$$\sigma'_{yz(n+1)}{}^{aux} = 2\mu_1 [e_{yz(n+1)} - (\epsilon_{yz}^{ve} + \epsilon_{yz}^{vp})_{(n)}] \quad (12.20f)$$

Devem ser consideradas também as alterações necessárias com referência às tensões, uma vez que a determinação das expressões gerais dessa é diretamente

dependente da decomposição aditiva do tensor deformação total. Por um procedimento análogo ao utilizado em σ_{n+1}^{aux} , procede-se:

$$\sigma_{n+1} = C (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{ve} - \varepsilon_{n+1}^{vp})$$

novamente, de $C = k_{b1}(I \otimes I) + 2\mu_1[\Pi - 1/3(I \otimes I)]$, obtém-se a expressão final para a tensão, em um instante $n+1$, na forma

$$\sigma_{n+1} = k_{b1} \text{tr} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{ve} - \varepsilon_{n+1}^{vp}) I + 2\mu_1 (e_{n+1} - e_{n+1}^{ve} - e_{n+1}^{vp}) \quad (12.21a)$$

para $\text{tr}(e^{vp})=0$

$$\sigma_{n+1} = k_{b1} \text{tr} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{ve}) I + 2\mu_1 (e_{n+1} - e_{n+1}^{ve} - \varepsilon_{n+1}^{vp}) \quad (12.21b)$$

Pode-se reescrever 12.20a para as parcelas de deformações viscoelástica e viscoplástica, nas formas incrementais:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} = k_{b1} \text{tr} (\varepsilon_{n+1} - \Delta \varepsilon_{n+1}^{ve} - \Delta \varepsilon_{n+1}^{vp}) I + \sigma'_{n+1}{}^{aux} - 2\mu_1 [\Delta \varepsilon_{n+1}^{ve} + \Delta \varepsilon_{n+1}^{vp} \\ - \frac{1}{3} \text{tr} (\Delta \varepsilon_{n+1}^{ve} + \Delta \varepsilon_{n+1}^{vp}) I] \end{aligned} \quad (12.22a)$$

sendo que para $\sigma'_{n+1}{}^{aux}$, vale a expressão 12.19a. Para $\text{tr}(e^{vp})=0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} = k_{b1} \text{tr} (\varepsilon_{n+1} - \Delta \varepsilon_{n+1}^{ve}) I + \sigma'_{n+1}{}^{aux} - 2\mu_1 [\Delta \varepsilon_{n+1}^{ve} + \Delta \varepsilon_{n+1}^{vp} \\ - \frac{1}{3} \text{tr} (\Delta \varepsilon_{n+1}^{ve}) I] \end{aligned} \quad (12.22b)$$

onde para $\sigma'_{n+1}{}^{aux}$, vale a expressão 12.19b.

Ressalta-se que a inserção da viscoelasticidade provoca alterações necessárias apenas nas expressões σ_{n+1}^{aux} , σ'_{n+1}^{aux} e σ_{n+1} . As demais permanecem inalteradas.

Adotando-se a expressão 12.22a para implementação em código de cálculo é possível, com o devido algebrismo e da relação $\lambda_1 = k_{b1} - 2\mu_1/3$, reescreve-la na forma

$$\sigma_{n+1} = k_{b1} tr(\varepsilon_{n+1}) I + \sigma'_{n+1}^{aux} - 2\mu_1 [\Delta\varepsilon_{n+1}^{ve} + \Delta\varepsilon_{n+1}^{vp}] - \lambda_1 tr(\Delta\varepsilon_{n+1}^{ve} + \Delta\varepsilon_{n+1}^{vp}) I$$

sendo que para cada parcela do tensor de tensões, valem as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \sigma_{x(n+1)} &= k_{b1} tr(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)_{(n+1)} + \sigma'_{x(n+1)}^{aux} - 2\mu_1 (\Delta\varepsilon_x^{ve} + \Delta\varepsilon_x^{vp})_{(n+1)} \\ &\quad - \lambda_1 (\Delta\varepsilon_x^{ve} + \Delta\varepsilon_y^{ve} + \Delta\varepsilon_z^{ve} + \Delta\varepsilon_x^{vp} + \Delta\varepsilon_y^{vp} + \Delta\varepsilon_z^{vp}) \end{aligned} \quad (12.23a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y(n+1)} &= k_{b1} tr(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)_{(n+1)} + \sigma'_{y(n+1)}^{aux} - 2\mu_1 (\Delta\varepsilon_y^{ve} + \Delta\varepsilon_y^{vp})_{(n+1)} \\ &\quad - \lambda_1 (\Delta\varepsilon_x^{ve} + \Delta\varepsilon_y^{ve} + \Delta\varepsilon_z^{ve} + \Delta\varepsilon_x^{vp} + \Delta\varepsilon_y^{vp} + \Delta\varepsilon_z^{vp}) \end{aligned} \quad (12.23b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z(n+1)} &= k_{b1} tr(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)_{(n+1)} + \sigma'_{z(n+1)}^{aux} - 2\mu_1 (\Delta\varepsilon_z^{ve} + \Delta\varepsilon_z^{vp})_{(n+1)} \\ &\quad - \lambda_1 (\Delta\varepsilon_x^{ve} + \Delta\varepsilon_y^{ve} + \Delta\varepsilon_z^{ve} + \Delta\varepsilon_x^{vp} + \Delta\varepsilon_y^{vp} + \Delta\varepsilon_z^{vp}) \end{aligned} \quad (12.23c)$$

$$\sigma_{xy(n+1)} = \sigma'_{xy(n+1)}^{aux} - 2\mu_1 (\Delta\varepsilon_{xy}^{ve} + \Delta\varepsilon_{xy}^{vp})_{(n+1)} \quad (12.23d)$$

$$\sigma_{xz(n+1)} = \sigma'_{xz(n+1)}^{aux} - 2\mu_1 (\Delta\varepsilon_{xz}^{ve} + \Delta\varepsilon_{xz}^{vp})_{(n+1)} \quad (12.23e)$$

$$\sigma_{yz(n+1)} = \sigma'_{yz(n+1)}^{aux} - 2\mu_1 (\Delta\varepsilon_{yz}^{ve} + \Delta\varepsilon_{yz}^{vp})_{(n+1)} \quad (12.23f)$$

Uma vez introduzidas naquele algoritmo, viabilizam a implementação desse em códigos de cálculo. No item seguinte, elaboram-se expressões viscoelásticas nas formas

incrementais, objetivando uma complementação daquele conjunto de expressões.

12.4-) EXPRESSÕES GERAIS PARA A DEFORMAÇÃO VISCOELÁSTICA (EXPRESSÕES DE FLUXO E NA FORMA INCREMENTAL)

Nesse item, o objetivo é a determinação das expressões gerais para o trecho viscoelástico, com base em expressões de fluxo apresentadas em *LEMAITRE & CHABOCHE (1990)* e *SOBOTKA (1984)*, as quais são linearizadas e, com o devido algebrismo, convertidas para a forma incremental. O objetivo nesse item consiste não só da determinação de expressões gerais de fluxo para o trecho em questão, mas também de uma comparação direta entre ambas as formulações, uma vez que os parâmetros envolvidos nessas são diferentes entre si.

Em uma primeira etapa, adota-se a parcela de interesse (viscoelástica) da expressão 7.6c apresentada no capítulo 7, que teve como base os estudos desenvolvidos a partir de *LEMAITRE & CHABOCHE (1990)*. Ela é escrita na forma:

$$\dot{\varepsilon}_{n+1}^{ve} = \frac{1+\nu_2}{E_2 \tau_1^*} (\sigma - \sigma^e) - \frac{\nu_2}{E_2 \tau_2^*} \text{tr}(\sigma - \sigma^e) I$$

onde agora, E_2 é o módulo de elasticidade longitudinal e ν_2 o coeficiente de Poisson, ambos para o trecho viscoelástico. Vale lembrar que τ_1^* e τ_2^* são parâmetros representativos da viscosidade do material, σ o tensor de tensões totais e σ^e o tensor de tensões referentes à mola, para o qual valem as relações:

$$\sigma_{x(n+1)}^e = \frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} [(1-\nu_2) \varepsilon_x^{ve} + \nu_2 (\varepsilon_y^{ve} + \varepsilon_z^{ve})]_{(n+1)} \quad (12.24a)$$

$$\sigma_{y(n+1)}^e = \frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} [(1-\nu_2) \varepsilon_y^{ve} + \nu_2 (\varepsilon_x^{ve} + \varepsilon_z^{ve})]_{(n+1)} \quad (12.24b)$$

$$\sigma_{z(n+1)}^e = \frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} [(1-\nu_2) \varepsilon_z^{ve} + \nu_2 (\varepsilon_x^{ve} + \varepsilon_y^{ve})]_{(n+1)} \quad (12.24c)$$

$$\tau_{xy(n+1)}^e = \frac{E_2}{1+\nu_2} \varepsilon_{xy(n+1)}^{ve} \quad (12.24d)$$

Parte-se da expressão de fluxo adotada, para a qual admite-se um passo de tempo finito qualquer. Nessas, através da substituição das expressões 12.23 e 12.24, bem como de um algebrismo adequado, obtém-se as expressões gerais na forma incremental para a parcela viscoelástica:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x(n+1)}^{ve} = & Q_1 + Q_2 \varepsilon_{x(n)}^{ve} + Q_3 (\varepsilon_y^{ve} + \varepsilon_z^{ve})_{(n)} + Q_4 \Delta \varepsilon_{x(n+1)}^{VP} + Q_5 (\Delta \varepsilon_y^{VP} + \Delta \varepsilon_z^{VP})_{(n+1)} \\ & + Q_6 \sigma'_{x(n+1)}{}^{aux} + Q_7 (\sigma'_y{}^{aux} + \sigma'_z{}^{aux})_{(n+1)} \end{aligned} \quad (12.25a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y(n+1)}^{ve} = & R_1 + R_2 \varepsilon_{x(n)}^{ve} + R_3 \varepsilon_y^{ve} + R_4 \varepsilon_z^{ve} + R_5 \Delta \varepsilon_{x(n+1)}^{VP} + R_6 \Delta \varepsilon_y^{VP} \\ & + R_7 \Delta \varepsilon_z^{VP} + R_8 \sigma'_{x(n+1)}{}^{aux} + R_9 \sigma'_y{}^{aux} + R_{10} \sigma'_z{}^{aux} \end{aligned} \quad (12.25b)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z(n+1)}^{ve} = & R_1 + R_2 \varepsilon_{x(n)}^{ve} + R_4 \varepsilon_y^{ve} + R_3 \varepsilon_z^{ve} + R_5 \Delta \varepsilon_{x(n+1)}^{VP} + R_7 \Delta \varepsilon_y^{VP} \\ & + R_6 \Delta \varepsilon_z^{VP} + R_8 \sigma'_{x(n+1)}{}^{aux} + R_{10} \sigma'_y{}^{aux} + R_9 \sigma'_z{}^{aux} \end{aligned} \quad (12.25c)$$

$$\varepsilon_{xy(n+1)}^{ve} = R_{11} \varepsilon_{xy(n)}^{ve} + R_{12} (\sigma'_{xy(n+1)}{}^{aux} - 2\mu_1 \Delta \varepsilon_{xy(n+1)}^{VP}) \quad (12.25d)$$

as quais podem ser ainda reunidas, quando escritas na forma matricial, tal que

$$\varepsilon_{n+1}^{ve} = M_1 + M_2 \varepsilon_n^{ve} + M_3 \Delta \varepsilon_{n+1}^{vp} + M_4 \sigma'_{n+1}{}^{aux} \quad (12.26)$$

onde os esforços são dispostos em matrizes-coluna, escritas nas formas

$$\varepsilon_{n+1}^{ve} = \left\{ \varepsilon_x^{ve} \ \varepsilon_y^{ve} \ \varepsilon_z^{ve} \ \varepsilon_{xy}^{ve} \right\}_{n+1}^t \quad \varepsilon_n^{ve} = \left\{ \varepsilon_x^{ve} \ \varepsilon_y^{ve} \ \varepsilon_z^{ve} \ \varepsilon_{xy}^{ve} \right\}_n^t \quad (12.27a, b)$$

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^{vp} = \left\{ \Delta \varepsilon_x^{vp} \ \Delta \varepsilon_y^{vp} \ \Delta \varepsilon_z^{vp} \ \Delta \varepsilon_{xy}^{vp} \right\}_{n+1}^t \quad (12.27c)$$

$$\sigma'_{n+1}{}^{aux} = \left\{ \sigma'_x{}^{aux} \ \sigma'_y{}^{aux} \ \sigma'_z{}^{aux} \ \sigma'_{xy}{}^{aux} \right\}_{(n+1)}^t \quad (12.27d)$$

e para as matrizes M_1 , M_2 , M_3 e M_4 , escrevem-se

$$M_1 = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ R_1 \\ R_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} Q_2 & Q_3 & Q_3 & 0 \\ R_2 & R_3 & R_4 & 0 \\ R_2 & R_4 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{11} \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} Q_4 & Q_5 & Q_5 & 0 \\ R_5 & R_6 & R_7 & 0 \\ R_5 & R_7 & R_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\mu_1 R_{12} \end{bmatrix} \quad M_4 = \begin{bmatrix} Q_6 & Q_7 & Q_7 & 0 \\ R_8 & R_9 & R_{10} & 0 \\ R_8 & R_{10} & R_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{12} \end{bmatrix}$$

onde os coeficientes Q_i e R_i , são definidos com referência a outros coeficientes A_p , B_p , C_p , D_p , G_p , H_i e P_i , os quais estão devidamente apresentados no *ANEXO 1*, do presente trabalho.

Através de um procedimento análogo ao utilizado para a determinação das expressões por *LEMAITRE & CHABOCHE (1990)*, faz-se em uma segunda etapa, a determinação daquelas, agora por *SOBOTKA (1984)*. Parte-se, portanto, das expressões gerais de tensões, escritas naquela referência, nas formas:

$$\sigma_x = 2G_2 \left[\varepsilon_x^{ve} + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} (\varepsilon_x^{ve} + \varepsilon_y^{ve} + \varepsilon_z^{ve}) \right] + \frac{\eta_1}{1+\nu_2^*} \left[\dot{\varepsilon}_x^{ove} + \frac{\nu_2^*}{1-2\nu_2^*} (\dot{\varepsilon}_x^{ove} + \dot{\varepsilon}_y^{ove} + \dot{\varepsilon}_z^{ove}) \right]$$

$$\sigma_y = 2G_2 \left[\varepsilon_y^{ve} + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} (\varepsilon_x^{ve} + \varepsilon_y^{ve} + \varepsilon_z^{ve}) \right] + \frac{\eta_1}{1+\nu_2^*} \left[\dot{\varepsilon}_y^{ove} + \frac{\nu_2^*}{1-2\nu_2^*} (\dot{\varepsilon}_x^{ove} + \dot{\varepsilon}_y^{ove} + \dot{\varepsilon}_z^{ove}) \right]$$

$$\sigma_z = 2G_2 \left[\varepsilon_z^{ve} + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} (\varepsilon_x^{ve} + \varepsilon_y^{ve} + \varepsilon_z^{ve}) \right] + \frac{\eta_1}{1+\nu_2^*} \left[\dot{\varepsilon}_z^{ove} + \frac{\nu_2^*}{1-2\nu_2^*} (\dot{\varepsilon}_x^{ove} + \dot{\varepsilon}_y^{ove} + \dot{\varepsilon}_z^{ove}) \right]$$

$$\tau_{xy} = G_2 \varepsilon_{xy}^{ve} + \eta_1^* \dot{\varepsilon}_{xy}^{ove}$$

como definido em *SOBOTKA (1984)*, G_2 é o módulo de elasticidade transversal, ν_2 e ν_2^* (adotado como igual a ν_2) os coeficientes de Poisson normal e viscoso e η_1 e η_1^* (sugerido como igual a $\eta_1/3$) os coeficientes de viscosidade normal e tangencial.

Em uma primeira etapa, a partir de um algebrismo com referência às expressões das tensões, isolam-se as taxas de deformações viscoelásticas nas direções x,y,z e xy, respectivamente. Com a inserção de novos coeficientes A_i , o procedimento proposto, resulta em:

$$\dot{\varepsilon}_x^{ove} = \frac{\sigma_x}{A_3} - \frac{A_1}{A_3} \varepsilon_x^{ve} - \frac{A_2}{A_3} (\varepsilon_y^{ve} + \varepsilon_z^{ve}) - \frac{A_4}{A_3} (\dot{\varepsilon}_y^{ove} + \dot{\varepsilon}_z^{ove}) \quad (12.28a)$$

$$\dot{\varepsilon}_y^{ove} = \frac{\sigma_y}{A_3} - \frac{A_1}{A_3} \varepsilon_y^{ve} - \frac{A_2}{A_3} (\varepsilon_x^{ve} + \varepsilon_z^{ve}) - \frac{A_4}{A_3} (\dot{\varepsilon}_x^{ove} + \dot{\varepsilon}_z^{ove}) \quad (12.28b)$$

$$\varepsilon_z^{ve} = \frac{\sigma_z}{A_3} - \frac{A_1}{A_3} \varepsilon_z^{ve} - \frac{A_2}{A_3} (\varepsilon_x^{ve} + \varepsilon_y^{ve}) - \frac{A_4}{A_3} (\sigma_x^{ve} + \sigma_y^{ve}) \quad (12.28c)$$

$$\varepsilon_{xy}^{ve} = \frac{1}{\eta_1'} (\tau_{xy}^{ve} - G_2 \varepsilon_{xy}^{ve}) \quad (12.28d)$$

Em uma segunda etapa, aplica-se às expressões 12.28 um procedimento implícito para um passo de tempo finito qualquer. Faz-se, em seguida, uma substituição das expressões 12.23, obtendo-se as expressões:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{ve} = & \varrho_1 + \varrho_2 \varepsilon_x^{ve} - \varrho_3 (\varepsilon_y^{ve} + \varepsilon_z^{ve}) + \varrho_4 \sigma_x^{aux} - \varrho_5 (\sigma_y^{aux} + \sigma_z^{aux}) \\ & - \varrho_6 \Delta \varepsilon_x^{VP} - \varrho_7 (\Delta \varepsilon_y^{VP} + \Delta \varepsilon_z^{VP}) \end{aligned} \quad (12.29a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{ve} = & R_1 + R_2 \varepsilon_x^{ve} + R_3 \varepsilon_y^{ve} + R_4 \varepsilon_z^{ve} + R_5 \sigma_x^{aux} + R_6 \sigma_y^{aux} \\ & - R_7 \sigma_z^{aux} + R_8 \Delta \varepsilon_x^{VP} + R_9 \Delta \varepsilon_y^{VP} + R_{10} \Delta \varepsilon_z^{VP} \end{aligned} \quad (12.29b)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_z^{ve} = & R_1 + R_2 \varepsilon_x^{ve} + R_4 \varepsilon_y^{ve} + R_3 \varepsilon_z^{ve} + R_5 \sigma_x^{aux} - R_7 \sigma_y^{aux} \\ & + R_6 \sigma_z^{aux} + R_8 \Delta \varepsilon_x^{VP} + R_{10} \Delta \varepsilon_y^{VP} + R_9 \Delta \varepsilon_z^{VP} \end{aligned} \quad (12.29c)$$

$$\varepsilon_{xy}^{ve} = R_{11} \varepsilon_{xy}^{ve} + R_{12} (\sigma_{xy}^{aux} - 2\mu_1 \Delta \varepsilon_{xy}^{VP}) \quad (12.29d)$$

ou ainda, escritas na forma matricial

$$\varepsilon_{n+1}^{ve} = M_5 + M_6 \varepsilon_n^{ve} + M_7 \sigma_{n+1}^{aux} + M_8 \Delta \varepsilon_{n+1}^{VP} \quad (12.30)$$

sendo que em 12.30, para os esforços, permanecem válidas as expressões 12.27b,c,d,e.

Para as matrizes M_5 , M_6 , M_7 e M_8 , escrevem-se

$$M_5 = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ R_1 \\ R_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad M_6 = \begin{bmatrix} Q_2 & -Q_3 & -Q_3 & 0 \\ R_2 & R_3 & R_4 & 0 \\ R_2 & R_4 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{11} \end{bmatrix} \quad M_7 = \begin{bmatrix} Q_4 & -Q_5 & -Q_5 & 0 \\ R_5 & R_6 & -R_7 & 0 \\ R_5 & -R_7 & R_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{12} \end{bmatrix} \quad M_8 = \begin{bmatrix} -Q_6 & -Q_7 & -Q_7 & 0 \\ R_8 & R_9 & R_{10} & 0 \\ R_8 & R_{10} & R_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2R_{11}R_{12} \end{bmatrix}$$

onde agora os coeficientes Q_i e R_i (diferentes daqueles apresentados para Lemaitre), pertencem às matrizes M_5 , M_6 , M_7 e M_8 e são definidos novamente com referência a outros coeficientes A_p , B_p , C_p , D_p , G_i e H_i , apresentados no *ANEXO 2* do presente trabalho.

Finalmente, uma vez conhecidas as expressões gerais de deformações viscoelásticas, tanto para uma formulação por *LEMAITRE & CHABOCHE (1994)* como para uma formulação por *SOBOTKA (1984)*, é possível uma determinação da expressão do Módulo Algorítmico Tangente, com referência ao modelo elasto-viscoplástico completo.

Basicamente, consiste em tomar como ponto de partida a expressão geral da tensão $\sigma_{n+1} = C(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{vp} - \epsilon_{n+1}^{ve})$, cuja variação com referência à deformação total em um instante de tempo $n+1$, resulta em

$$\bar{C}_{n+1} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1}} = C - \frac{\partial \epsilon_{n+1}^{vp}}{\partial \epsilon_{n+1}} - \frac{\partial \epsilon_{n+1}^{ve}}{\partial \epsilon_{n+1}} = C_{n+1} - C_{n+1}^{ve}$$

sendo que C_{n+1} é a expressão do módulo algorítmico tangente apresentada no item 12.2, para o modelo viscoplástico. Nesse caso, para a determinação do módulo tangente para o modelo completo, basta apenas determinar C_{n+1}^{ve} , tal que:

- **ATRAVÉS DA EXPRESSÃO GERAL 12.26 (por LEMAITRE):**

$$\varepsilon_{n+1}^{ve} = M_1 + M_2 \varepsilon_n^{ve} + M_3 \Delta \varepsilon_{n+1}^{vp} + M_4 \sigma'_{n+1}{}^{aux}$$

$$C_{n+1}^{ve} = \frac{\partial \varepsilon_{n+1}^{ve}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = C M_3 \frac{\partial \Delta \varepsilon_{n+1}^{vp}}{\partial \varepsilon_{n+1}} + C M_4 \frac{\partial \sigma'_{n+1}{}^{aux}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (12.31)$$

- **ATRAVÉS DA EXPRESSÃO GERAL 12.30 (por SOBOTKA):**

$$\varepsilon_{n+1}^{ve} = M_5 + M_6 \varepsilon_n^{ve} + M_7 \sigma'_{n+1}{}^{aux} + M_8 \Delta \varepsilon_{n+1}^{vp}$$

$$C_{n+1}^{ve} = \frac{\partial \varepsilon_{n+1}^{ve}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = C M_7 \frac{\partial \sigma'_{n+1}{}^{aux}}{\partial \varepsilon_{n+1}} + C M_8 \frac{\partial \Delta \varepsilon_{n+1}^{vp}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (12.32)$$

Deve-se ressaltar que as expressões 12.31 e 12.32 não serão desenvolvidas no presente trabalho. O desenvolvimento dessas e uma consequente implementação em códigos de cálculo fica como sugestão para pesquisadores, cujo interesse é coincidente com o contexto aqui abordado.

Apresentam-se, no capítulo que segue, um algoritmo geral onde são reunidas as expressões desenvolvidas nesse capítulo, bem como exemplos de aplicação para análise da resposta numérica.

CAPÍTULO 13

ALGORITMO DO MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO COMPLETO: IMPLEMENTAÇÃO EM CÓDIGO DE CÁLCULO E ANÁLISE DA RESPOSTA NUMÉRICA

Uma reunião das expressões gerais apresentadas no capítulo 12, permitem elaborar um algoritmo geral com referência ao modelo elasto-viscoplástico completo, para implementação em códigos de cálculo. As etapas que compõem o algoritmo são as seguintes:

● **ETAPA 1 - Situação em um instante de tempo t_n :** São conhecidas em um instante $t=t_n$, todas as variáveis de interesse, como por exemplo: ϵ_n , ϵ_n^{ve} , ϵ_n^{vp} , σ_n e q'_n

● **ETAPA 2 - Situação em um instante de tempo t_{n+1} :** Para um instante de tempo seguinte e com o Método dos Elementos Finitos, são determinados os incrementos de deslocamentos $\Delta \mathbf{u}_{n+1}$ (de modo análogo ao do algoritmo do capítulo 9), e conseqüentemente os incrementos de deformação total $\Delta \epsilon_{n+1} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_{n+1}$. Ainda, faz-se:

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta \epsilon_{n+1}$$

bem como a atualização da rigidez global da estrutura, pelas expressões

$$C_{n+1} = C_{n+1}^{evp} = k_b I \otimes I + 2\mu [\Theta_{n+1}^{evp}] (II - \frac{1}{3} I \otimes I) - 2\mu [\bar{\Theta}_{n+1}^{evp}] n_{n+1} \otimes n_{n+1}$$

$$\Theta_{n+1}^{evp} = 1 - \frac{2\mu\lambda_{n+1}}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} \quad \bar{\Theta}_{n+1}^{evp} = \left[1 + \frac{\eta_2}{2\mu\Delta t} + \frac{(K+H)}{3\mu} \right]^{-1} = 1 + \Theta_{n+1}^{evp}$$

● **ETAPA 3 - Obtenção do estado auxiliar:** Nessa etapa são calculadas as variáveis referentes ao estado auxiliar ou puramente elástico:

$$e_{n+1} = \varepsilon_{n+1} - \frac{1}{3} tr(\varepsilon_{n+1}) I$$

$$\sigma'_{n+1}{}^{aux} = 2\mu_1 (e_{n+1} - e_n^{ve} - e_n^{vp}) = 2\mu_1 (e_{n+1} - e_n^{ve} - \varepsilon_n^{vp})$$

$$\eta_{n+1}^{aux} = \sigma'_{n+1}{}^{aux} - q'_n \rightarrow f_{n+1}{}^{aux} = \|\eta_{n+1}^{aux}\| = \sqrt{\frac{2}{3} K(\alpha_n)}$$

onde, com base nos coeficientes de viscosidade η_1 e η_2 , referentes aos trechos viscoelástico e viscoplástico, respectivamente, valem as considerações

se $\eta_1=0$ e $\eta_2=0$ → regime elástico: final ou novo incr. de carga

se $\eta_1>0$ e $\eta_2=0$ → regime viscoelástico: ETAPAS 4, 6 e 7

se $\eta_1=0$, $\eta_2>0$ e $f_{n+1}{}^{aux} \leq 0$ → regime elástico: final ou novo incr. de carga

$f_{n+1}{}^{aux} > 0$ → regime viscoplástico: ETAPAS 5, 6 e 7

se $\eta_1>0$, $\eta_2>0$ e $f_{n+1}{}^{aux} \leq 0$ → regime viscoelástico: ETAPAS 4, 6 e 7

$f_{n+1}{}^{aux} > 0$ → regime combinado...: ETAPAS 4, 5, 6 e 7

• **ETAPA 4** - Cálculo dos valores de deformações viscoelásticas em $n+1$, por **LEMAITRE** ou por **SOBOTKA**, pelas expressões

$$\varepsilon_{n+1}^{ve} = M_1 + M_2 \varepsilon_n^{ve} + M_3 \Delta \varepsilon_{n+1}^{vp} + M_4 \sigma'_{n+1}{}^{aux} \quad (\text{por Lemaitre})$$

$$\varepsilon_{n+1}^{ve} = M_5 + M_6 \varepsilon_n^{ve} + M_7 \sigma'_{n+1}{}^{aux} + M_8 \Delta \varepsilon_{n+1}^{vp} \quad (\text{por Sobotka})$$

onde $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$ e M_8 são matrizes já definidas no capítulo 12.

• **ETAPA 5** - São determinados o vetor unitário e o escalar multiplicador viscoplástico, bem como a atualização das variáveis de interesse, para o instante de tempo $n+1$:

$$n_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}^{aux}}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} \quad \rightarrow \quad \lambda_{n+1} = \frac{f_{n+1}^{aux}}{2\mu \left[1 + \frac{\eta_2}{2\mu \Delta t} + \frac{(K+H)}{3\mu} \right]}$$

$$\varepsilon_{n+1}^{vp} = \varepsilon_n^{vp} + \lambda_{n+1} n_{n+1} \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_{n+1}$$

$$q'_{n+1} = q'_n + \frac{2}{3} H \lambda_{n+1} n_{n+1}$$

• **ETAPA 6** - Faz-se a determinação do valor da tensão total, com base nos valores dos incrementos de deformações viscoelástica e/ou viscoplástica.

$$\sigma_{n+1} = k_{b_1} \text{tr}(\varepsilon_{n+1}) I + \sigma'_{n+1}{}^{aux} - 2\mu_1 [\Delta \varepsilon_{n+1}^{ve} + \Delta \varepsilon_{n+1}^{vp}] - \lambda_1 \text{tr}(\Delta \varepsilon_{n+1}^{ve} + \Delta \varepsilon_{n+1}^{vp}) I$$

● **ETAPA 7 - Verificação do Equilíbrio:** Com base na tensão obtida, faz-se o cálculo do resíduo pela relação $\Psi = F_{int} - F_{ext} \neq 0$. Caso exista, esse será reaplicado em uma próxima iteração na forma de incremento de carga, refazendo-se em seguida as etapas 2 e 3.

Implementou-se o algoritmo em um código de cálculo para análises planas de tensão e deformação, denominado "*SIMAP.FOR*", codificado em linguagem FORTRAN e elaborado a partir do código de cálculo *VEPLAS.FOR*, sendo esse último desenvolvido com base em um procedimento explícito e apresentado em *MUNAIAR NETO (1994)*.

Nesse sentido, fica claro que o código de cálculo *SIMAP.FOR*, por incorporar ambos os procedimentos, viabiliza análises viscoelástica e viscoplástica tanto para procedimento explícito (com passo de tempo variável ou constante), quanto para procedimento implícito (para passo de tempo constante).

Nos exemplos que seguem, os resultados apresentados para o confronto entre procedimentos explícito e implícito, serão obtidos a partir de *SIMAP.FOR*. Ressalta-se ainda, que os exemplos 1, 2 e 4, apresentados a seguir, foram simulados em *MUNAIAR NETO (1994)* para um procedimento puramente explícito.

Naquela referência, os resultados numéricos foram comparados com os de origem, obtendo-se confrontos satisfatórios. Nesse sentido, tais considerações viabilizam uma comparação daqueles resultados com os obtidos, no que segue, via procedimento implícito.

1o EXEMPLO DE APLICAÇÃO: CILÍNDRIO SUBMETIDO À PRESSÃO INTERNA (ANÁLISE VISCOPLÁSTICA)

Objetivando testar a eficiência do algoritmo, tomou-se como um primeiro exemplo um cilindro de parede espessa, originalmente proposto por *OWEN & HINTON (1980)*, submetido à uma pressão interna "*P*", como ilustrado na figura 13.1.

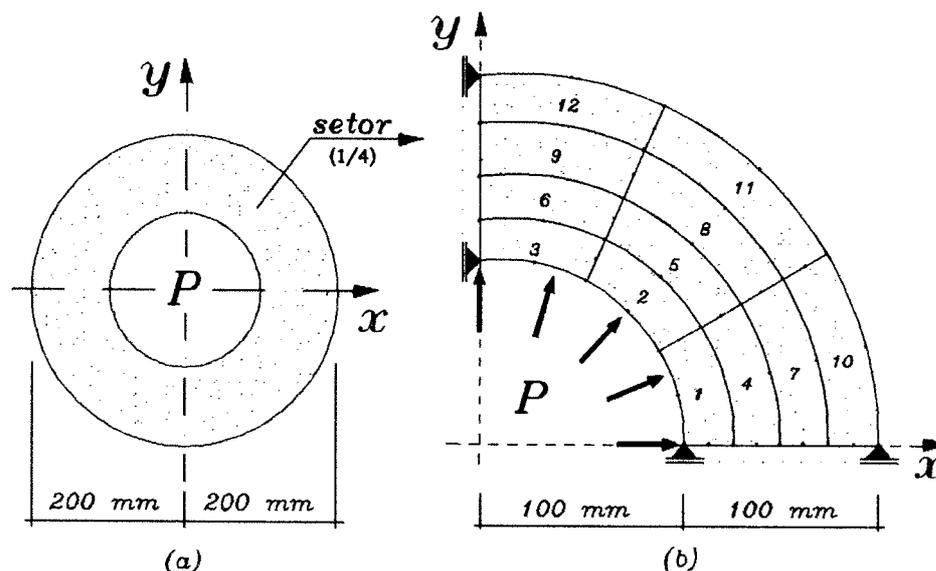


Figura 13.1 - Cilindro submetido à pressão interna P

O carregamento, com base em $0,70xP$, foi aplicado em duas etapas ($0.60+0.10$) e adotou-se uma tolerância para convergência com referência à deformação viscoplástica de $0,00001$. Os dados iniciais são:

$$P=14,0 \text{ dN/mm}^2 \quad E_1=21.000 \text{ dN/mm}^2 \quad E_2=0 \quad \sigma_y=24,0 \text{ dN/mm}^2$$

$$\gamma_1=0,0 \quad \gamma_2=0,001 \text{ (dN.dia/mm}^2\text{)}^{-1} \quad K=H=0,0 \quad \nu=0,30$$

Critério adotado: VON MISES Estado Plano de Deformação

Discretização (fig 13.1b): 12 elementos de 8 nós (51 nós)

Os resultados obtidos encontram-se na tabela 13.1 e referem-se ao deslocamento da parede interna do cilindro u_{pi} , para procedimentos explícito e implícito, respectivamente.

Foram testados diferentes passos de tempo para ambos os procedimentos, devendo-se ressaltar que para o implícito foi admitida a atualização da rigidez estrutural e que em *OWEN & HINTON (1980)*, apresentam-se como resultados finais um

deslocamento da ordem de **0.140 mm** após aproximadamente **9 dias**.

<i>Tabela 13.1 - Deslocamento da Parede Interna do Cilindro</i>						
Δt (dias)	<i>Proc. Explícito</i>			<i>Proc. Implícito</i>		
	<i>iter</i>	<i>T(dias)</i>	u_{pi} (mm)	<i>iter</i>	<i>T(dias)</i>	u_{pi} (mm)
50	-	-	-	9	450	0,14677
20	6	80	0,19788	9	180	0,14670
10	5	30	0,18143	9	90	0,14658
5	4	10	0,14605	9	45	0,14635
1	11	9	0,13921	9	9	0,14490

Uma análise com referência à tabela 13.1, mostra uma proximidade satisfatória com relação aos valores dos deslocamentos finais, para os passos de tempo iguais ou menores que 5. Em especial, observa-se uma igualdade no valor do tempo total, para $\Delta t=1.0$.

Nesse caso, adotando-se a variação do módulo tangente (VMT) como critério para a escolha do Δt , toma-se como referência para a penalização da rigidez, os seguintes valores:

a-) $VMT_{(emp)} = 2,53\%$: rigidez equivalente (ou normalizada) do elemento mais plastificado, com relação ao seu valor em um tempo infinito. Basicamente, o cálculo se faz pela expressão:

$$c_{n+1}^{emp(i)} = \sqrt{(c_{n+1}^1)^2 + (c_{n+1}^2)^2 + (c_{n+1}^3)^2 + \dots + (c_{n+1}^{npg})^2}$$

onde o super-índice "**emp**" refere-se ao elemento mais plastificado, "**i**" o i-ésimo elemento e "**1,2,...,npg**" uma referência aos pontos de Gauss.

b-) $VMT_{(ep)} = 0,52\%$: rigidez equivalente (ou normalizada) dos elementos plastificados, com relação ao valor em um tempo infinito. O cálculo faz-se pela expressão:

$$C_{n+1}^{ep1} = \sqrt{(C_{n+1}^{ep(1)})^2 + (C_{n+1}^{ep(2)})^2 + (C_{n+1}^{ep(3)})^2 + \dots + (C_{n+1}^{ep(j)})^2}$$

onde o super-índice "**pl**" refere-se aos elementos plastificados, "**ep(j)**" ao j-ésimo elemento plastificado, onde "**j**" é o número total de elementos plastificados.

c-) $VMT_{(glb)} = 0,21\%$: rigidez equivalente (ou normalizada) para todos os elementos, com relação ao valor em um tempo infinito. O cálculo faz-se pela expressão geral:

$$C_{n+1}^{glb} = \sqrt{(C_{n+1}^{(1)})^2 + (C_{n+1}^{(2)})^2 + (C_{n+1}^{(3)})^2 + \dots + (C_{n+1}^{(k)})^2}$$

onde o super-índice "**glb**" refere-se a uma rigidez equivalente global e "**(k)**" ao número total de elementos.

Deve-se mencionar, como observado pela tabela 13.1, que com referência ao procedimento explícito, para $\Delta t > 20$ não ocorre convergência, enquanto que para o implícito, a convergência ocorre sempre.

2o EXEMPLO DE APLICAÇÃO: CILÍNDRIO SUBMETIDO À PRESSÃO INTERNA (ANÁLISE VISCOELÁSTICA)

Esse exemplo, originalmente proposto por *CHEN et al. (1993)*, trata de um cilindro de parede espessa, submetido à pressão interna "**P**" e discretizado em 1/4 de sua seção transversal devido à dupla simetria, como ilustrado na figura 13.2.

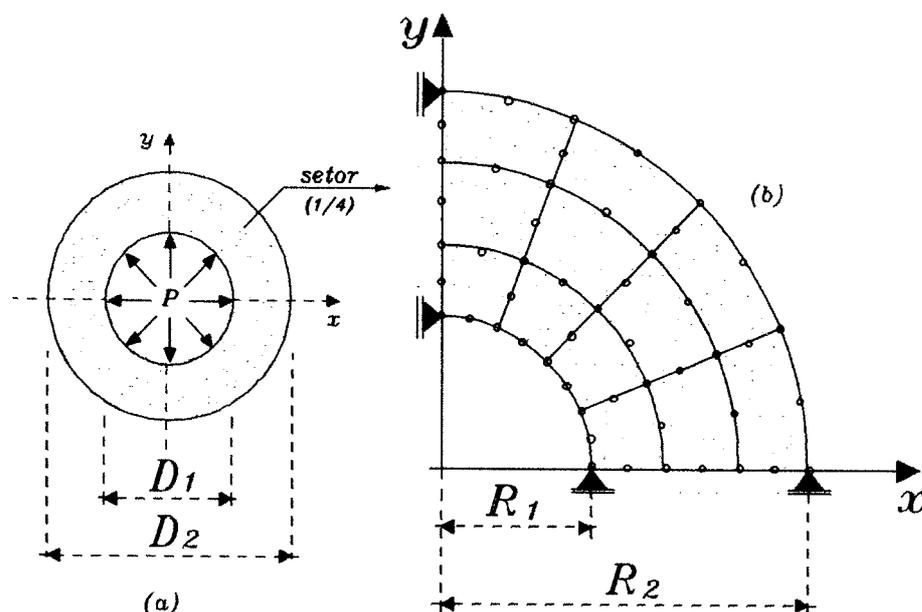


Figura 13.2 - Cilindro de Parede espessa submetido à P

O carregamento, com base em P , foi aplicado em um único incremento e adotou-se uma tolerância para convergência com referência às deformações viscoelásticas de $0,01$. Os dados utilizados para calibração do modelo, diferem um pouco daqueles adotados em *MUNAIAR NETO (1994)* objetivando um melhor ajuste. São os seguintes:

$$R_1=25,40 \text{ cm} \quad R_2=50,80 \text{ cm} \quad P=7,031 \text{ kgf/cm}^2 \quad E_1=90 \text{ kgf/cm}^2$$

$$E_2=35 \text{ kgf/cm}^2 \quad \nu=0,40 \quad \gamma_1=0,01(\text{kgf.dia/cm}^2)^{-1} \quad \gamma_2=0,0$$

Estado Plano de Deformação

Discretização (fig 13.2b): 12 elementos de 8 nós (51 nós)

Os resultados obtidos em *SIMAP.FOR* estão apresentados nas tabelas 13.2 e 13.3, com relação aos deslocamentos das paredes *interna* (u_i) e *externa* (u_e) do cilindro. A tabela 13.2 apresenta resultados para procedimento explícito para $\Delta t \leq 0,50$, pois com passos de tempo maiores observou-se uma não convergência do programa e uma imprecisão dos resultados.

<i>Tabela 13.2 - Deslocamentos u_i e u_e: "Proc. Explícito"</i>				
Δt	<i>iter</i>	<i>Tempo(dias)</i>	u_i (cm)	u_e (cm)
0,5	182	90,50	14,827	7,547
0,1	919	91,80	14,788	7,561

A tabela 13.3 apresenta resultados para procedimento implícito, com formulações por *Lemaitre ("FIVL")* e por *Sobotka ("FIVS")*, sem a consideração da penalização da rigidez.

<i>Tabela 13.3 - Deslocamentos u_i e u_e: "Proc. Implícito"</i>								
Δt	<i>por Lemaitre (FIVL)</i>				<i>por Sobotka (FIVS)</i>			
	<i>it</i>	<i>T</i> (dias)	u_i (cm)	u_e (cm)	<i>it</i>	<i>T</i> (dias)	u_i (cm)	u_e (cm)
5	31	155	13,893	7,940	39	195	18,975	12,505
1	93	93	13,891	7,938	205	205	18,960	12,479
0,5	181	91	13,891	7,938	395	198	18,953	12,459
0,1	850	85	13,891	7,938	1896	190	18,941	12,436

Em *CHEN et al.(1993)*, são apresentados $u_i \approx 13,88\text{cm}$ e $u_e \approx 7,41\text{cm}$ para apenas um tempo decorrido de aproximadamente **30 dias**.

Ressalta-se as tabelas 13.2 e 13.3 foram elaboradas a partir de valores de arquivos de dados, onde foi possível constatar que a partir um período de aproximadamente **40 dias**, os valores dos deslocamentos permanecem praticamente inalterados, como ilustrado através da figura 13.3a e 13.3b, para passo de tempo igual a 1,0.

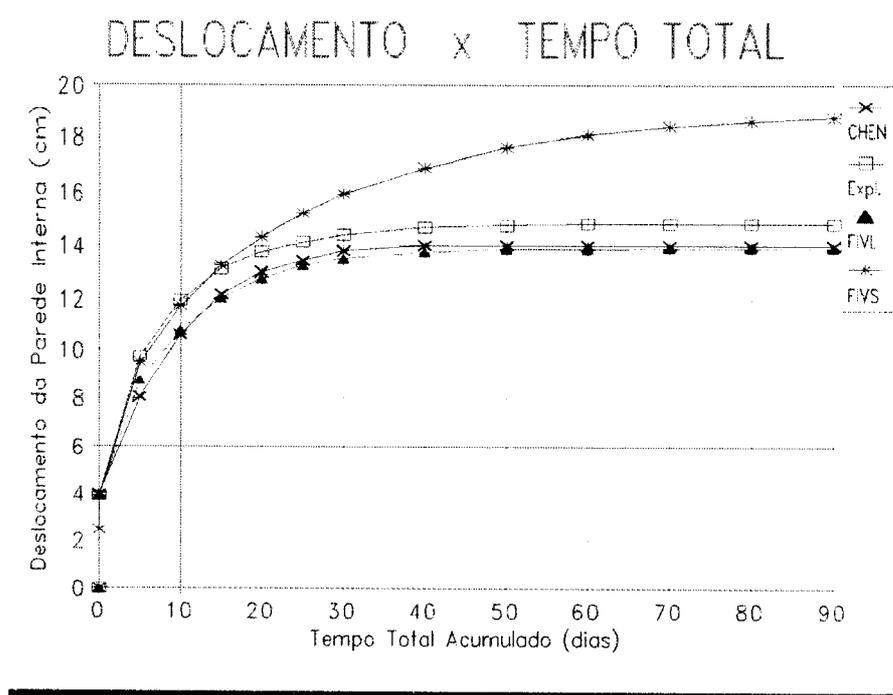


Figura 13.3a - Deslocamento da Parede Interna

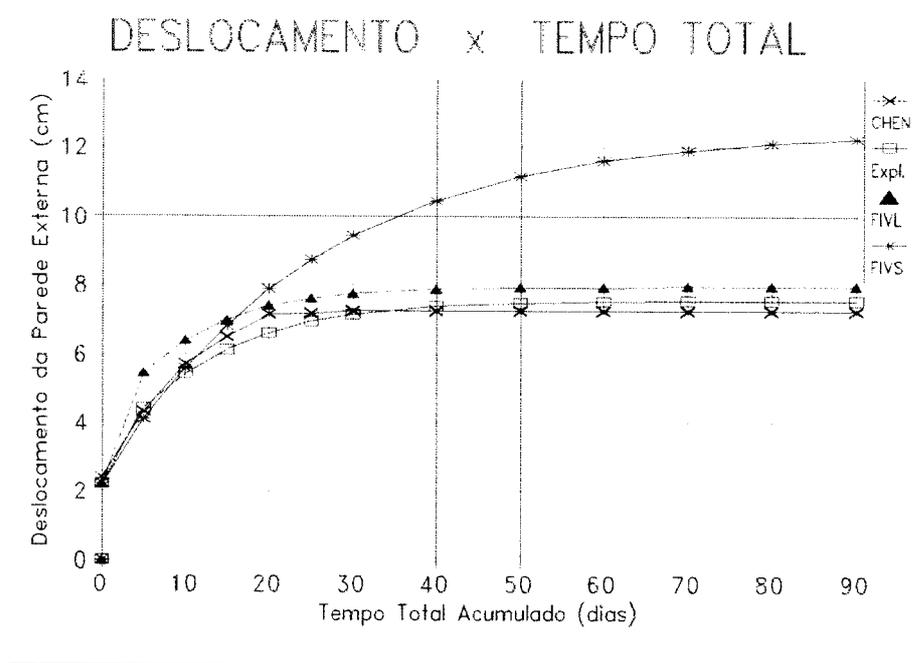


Figura 13.3b - Deslocamento da Parede Externa

Uma análise com relação às tabelas 13.2 e 13.3 e às figuras 13.3a,b, permite admitir que os resultados para procedimentos explícito e implícito por Lemaitre conseguem ajustar-se satisfatoriamente aos resultados da referência de origem. Os resultados por Sobotka resultam em pouca proximidade.

Os resultados por Lemaitre foram calibrados para $\tau_1^* = 9.5$, valor para o qual foi observado o melhor ajuste. Para τ_2^* vale a relação:

$$\tau_2^* = (\nu_2 \tau_1^*) / (1 + \nu_2 - E_2 \tau_1^* \gamma_1)$$

3o EXEMPLO DE APLICAÇÃO: ENSAIO EM CORPO DE PROVA DE CONCRETO (ANÁLISE VISCOELÁSTICA)

Retirado de *FAIRBAIN et al. (1995)*, esse exemplo consiste basicamente de um corpo de prova de concreto, de seção transversal quadrada, submetido aos 28 dias após sua concretagem, a um ensaio de compressão simples solicitado por uma sobrecarga "p". A figura 13.4a ilustra o esquema experimental da corpo de prova e a figura 13.4b, a discretização utilizada na análise numérica.

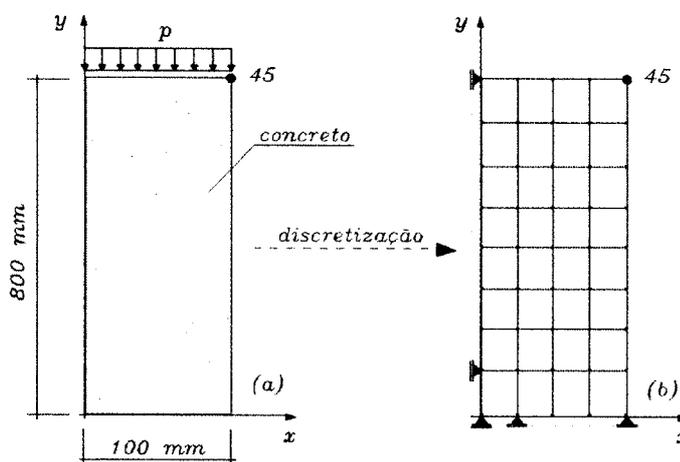


Figura 13.4 - Ensaio em Corpo de Prova de Concreto

Aplicou-se "*p*" em um único incremento e adotou-se uma tolerância para convergência com referência às deformações viscoelásticas de *0,01*. Os dados utilizados para calibração do modelo objetivando um melhor ajuste são:

$$P=0,50 \text{ kN/cm}^2 \quad E_1=2.257,57 \text{ kN/cm}^2 \quad E_2=1.100,00 \text{ kN/cm}^2$$

$$v=0,30 \quad \gamma_1=0,000020 \text{ (kN.dia/cm}^2\text{)}^{-1} \quad \gamma_2=0,0$$

Estado Plano de Tensão

Discretização (fig 13.2b): 12 elementos de 8 nós (51 nós)

Os resultados de *SIMAP.FOR* apresentam-se nas tabelas 13.4a,b, e referem-se ao deslocamento vertical do *nó 45* (v_{45}), indicado na figura 13.4.

A tabela 13.4a apresenta resultados para procedimento explícito, devendo-se ressaltar que foi observado durante os testes, uma não convergência para qualquer passo de tempo adotado. Os resultados, porém, mostraram-se assintóticos a partir dos períodos de tempo indicados na referida tabela.

<i>Tabela 13.4a - Deslocamento do nó 45: "Proc. Explícito"</i>			
Δt	<i>it.</i>	<i>Tempo(dias)</i>	v_{45} (mm)
<i>10</i>	-	450	0,5192
<i>5</i>	-	448	0,5187
<i>1</i>	-	445	0,5184
<i>0,5</i>	-	440	0,5184

A tabela 13.4b apresenta resultados para procedimento implícito, com formulações por *Lemaitre* ("*FIVL*") e por *Sobotka* ("*FIVS*"), ressaltando-se novamente a não consideração da redução da rigidez.

<i>Tabela 13.4b - Deslocamento do nó 45: "Proc. Implícito"</i>						
Δt	<i>por Lemaitre (FIVL)</i>			<i>por Sobotka (FIVS)</i>		
	<i>iter</i>	<i>T(dias)</i>	<i>v₄₅(mm)</i>	<i>iter</i>	<i>T(dias)</i>	<i>v₄₅(mm)</i>
10	49	490	0,5408	53	530	0,4314
5	96	480	0,5408	104	525	0,4314
1	458	458	0,5408	495	495	0,4313
0,5	908	454	0,5408	982	491	0,4313

Em *FAIRBAM et al. (1995)*, é indicado $V_{45} \approx 0.52 \text{ mm}$ para um tempo decorrido de **267 dias**. Ressalta-se novamente que, nos arquivos de dados, foi possível constatar que a partir um período de aproximadamente 280 dias, os valores dos deslocamentos permanecem praticamente inalterados, como ilustrado através da figura 13.5, para passo de tempo igual a 1,0.

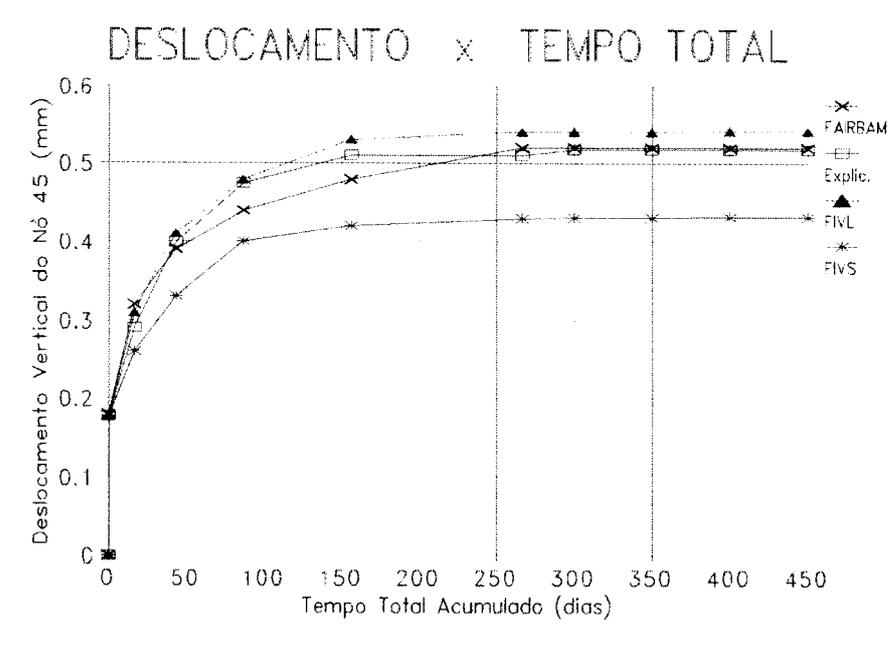


Figura 13.5 - Deslocamento Vertical do nó 45

Das tabelas 13.4a,b e da figura 13.5, nota-se novamente que os resultados para procedimentos explícito e implícito por Lemaitre conseguem ajustar-se satisfatoriamente aos resultados da referência de origem. O resultado para procedimento implícito por Sobotka novamente demonstra pouca proximidade.

Os resultados por Lemaitre foram calibrados para $\tau_1^* = 50$, valor para o qual foi observado o melhor ajuste. Para τ_2^* , vale a mesma relação sugerida no exemplo 2.

4o EXEMPLO DE APLICAÇÃO: CALIBRAÇÃO DO MODELO COMPLETO (ANÁLISE COMBINADA: V-EL + V-PL)

O exemplo em questão, originalmente de *OWEN & HINTON (1980)*, refere-se à uma chapa solicitada por um esforço de tração na extremidade livre, a qual é composta por dois materiais diferentes: um de comportamento viscoelástico e outro de comportamento viscoplástico.

O objetivo principal consiste em calibrar o modelo completo, com base nos resultados experimentais apresentados naquela referência, a partir de um único material que admite ambos os comportamentos. O esquema da chapa tracionada, composta de um único material, está ilustrada na figura 13.6.

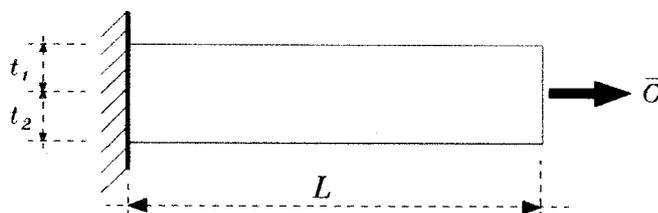


Figura 13.6 - Chapa Tracionada

Aplicou-se " σ " em um único incremento e adotou-se uma tolerância para convergência com referência aos incrementos de deformações viscoelástica e viscoplástica de 0.001. Os dados adotados para calibração do modelo são:

$$L = 10,00 \text{ cm} \quad t_1 = t_2 = 0,50 \text{ cm} \quad \nu = 0,24 \quad \sigma_y = 110 \text{ bar} \quad E_1 = 10.500 \text{ bar}$$

$$E_2 = 29.000 \text{ bar} \quad K = 5.500 \text{ bar} \quad H = 0,0 \quad \gamma_{ve} = \gamma_1 = 8.10^{-6} (\text{bar.dia})^{-1}$$

$$\gamma_{vp} = \gamma_2 = 8.10^{-4} (\text{bar.dia})^{-1} \quad \text{Discretização: 8 elementos de 8 nós (37 nós)}$$

Os resultados da análise combinada "*V-el + V-pl*", apresentam-se nas tabelas 13.5a e 13.5b e referem-se à deformação da chapa ao longo do tempo, na direção da tensão aplicada, de *120 bar*, para ambos os procedimentos, desconsiderando-se a penalização da rigidez.

Apresentam-se, na tabela 13.5a, resultados para procedimento explícito, sem convergência para qualquer passo de tempo adotado, porém, com resultados assintóticos. A tabela 13.5b apresenta resultados para procedimento implícito, para *FIVL e FIVS*, sem penalização da rigidez.

<i>Tabela 13.5a - Deformação na chapa: "Proc. Explícito"</i>			
Δt	<i>iter</i>	<i>Tempo(dias)</i>	$\epsilon_{120}(\%)$
<i>2,5</i>	-	60	1,7834
<i>1,0</i>	-	61	1,7020
<i>0,5</i>	-	59	1,7015
<i>0,1</i>	-	59	1,7012

<i>Tabela 13.5b - Deformação na chapa: "Proc. Implícito"</i>						
Δt	<i>por Lemaitre (FIVL)</i>			<i>por Sobotka (FIVS)</i>		
	<i>iter</i>	<i>T(dias)</i>	$\epsilon_{120}(\%)$	<i>iter</i>	<i>T(dias)</i>	$\epsilon_{120}(\%)$
<i>2,5</i>	151	378	1,7965	79	198	1,685
<i>1,0</i>	348	348	1,7745	186	186	1,637
<i>0,5</i>	665	333	1,7547	363	182	1,604
<i>0,1</i>	3131	313	1,7428	1771	177	1,533

Em *OWEN & HINTON (1980)*, é apresentados $\varepsilon_{(120)} \approx 1,70\%$ para um tempo decorrido de ≈ 60 dias. Nos arquivos de dados, foi possível constatar que a partir do mesmo tempo, os valores de deformação permanecem praticamente inalterados, como ilustrado através da figura 13.7, para passo de tempo igual a 0.5.

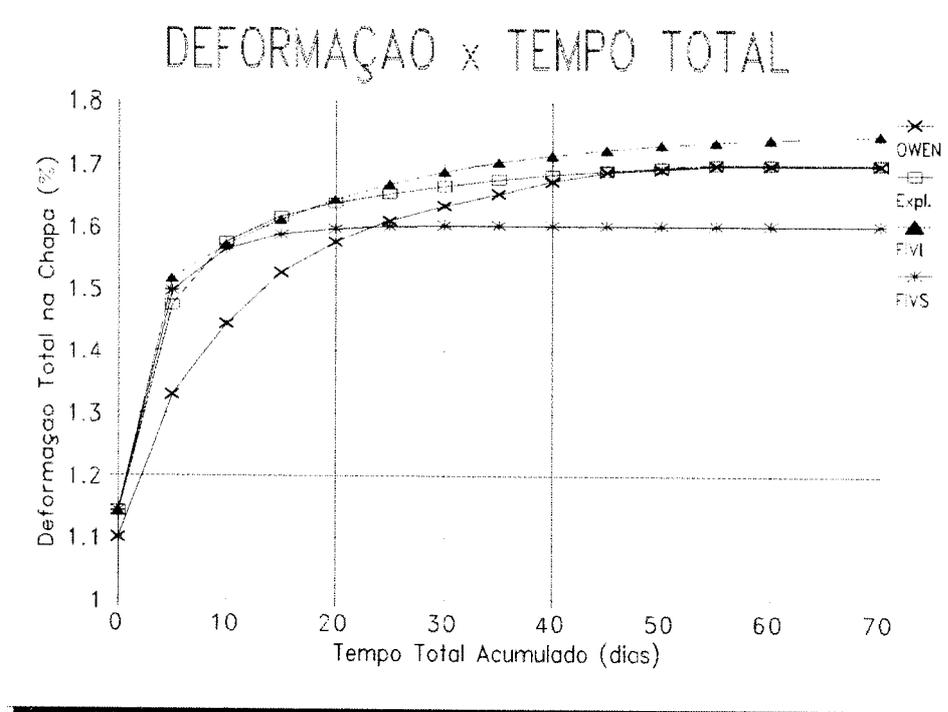


Figura 13.7 - Deformação na Chapa para $\sigma = 120$ bar

Uma análise com relação às tabelas 13.5a,b e figura 13.7, permitem admitir que os resultados para procedimentos explícito e implícito por Lemaitre, ajustam-se satisfatoriamente aos resultados da referência de origem.

Os resultados para procedimento implícito por Sobotka demonstram alguma proximidade no período inicial e proximidade pouco razoável para os valores finais. Para formulação por Lemaitre, foi utilizado $\tau_1^* = 35$ sendo que para τ_2^* , vale a mesma relação sugerida no exemplo 2.

CAPÍTULO 14

CONCLUSÕES FINAIS DO TRABALHO

Os modelos constitutivos viscoelásticos e viscoplásticos são de grande importância em muitos problemas práticos na engenharia civil (escavação de túneis, por exemplo), onde a previsão da resposta estrutural ao longo do tempo é de fundamental importância no referente a execução do projeto. Tais modelos constituem-se, desse modo, em uma forma bastante adequada para o tratamento de problemas que levam em conta a deformação ao longo do tempo, viabilizando a elaboração de projetos mais econômicos e seguros.

Nesse sentido, o presente trabalho objetivou um estudo mais aprofundado com referência aos processos de plastificação do material, bem como aspectos relacionados à formulação e análise da resposta numérica, tomando-se como ponto de partida o modelo elasto-viscoplástico estudado em *MUNAIAR NETO (1994)*, sendo que naquela referência empregaram-se procedimentos explícitos de integração numérica.

Assim, abordaram-se os *Princípios Gerais da Termodinâmica* em conjunto com o *Método do Estado Local*, onde foram pesquisados potenciais termodinâmicos e dissipativos para modelos de comportamentos elástico, viscoelástico e viscoplástico, escritos em função de um número finitos de variáveis e consistentes termodinamicamente. Através

desses potenciais, recuperaram-se os resultados obtidos via reologia dos materiais quando de uma particularização à análise unidimensional.

Com base em uma reunião dos potenciais de cada modelo (elástico, viscoelástico e viscoplástico), foi sugerida uma expressão para o potencial de dissipação do modelo elasto-viscoplástico apresentado em *MUNAIAR NETO (1994)*. Uma vez que a consistência termodinâmica para cada modelo individualizado foi verificada, fica garantida, conseqüentemente, a consistência termodinâmica para o modelo completo.

Uma vez verificada a consistência termodinâmica, direcionou-se os estudos do presente trabalho para a utilização de procedimentos implícitos de integração numérica, primeiramente em análise unidimensional, tomando-se como ponto de partida expressões apresentadas em *SIMO & HUGHES (1988)*, para um modelo de comportamento elasto-viscoplástico. Foram também elaboradas, nos mesmos moldes daquela referência, expressões para um modelo de comportamento viscoelástico.

O acoplamento de ambos os modelos viabilizou a elaboração de um algoritmo para o modelo estendido, o qual foi implementado em códigos de cálculo para estruturas de barras, *Simab.for* e *Simat.for*. Os testes numéricos realizados com os códigos de cálculo, recuperaram com bastante precisão os resultados obtidos via procedimento explícito apresentado em *MUNAIAR NETO (1994)*, no referente aos esforços.

O mesmo não foi verificado com relação à variável tempo. Nesse sentido, estudou-se a correspondência direta entre o tamanho do passo de tempo adotado e o ajuste entre resultados "*numérico*" e "*teórico*". Os resultados desse estudo para diferentes valores de Δt , apresentados na forma de tabelas e gráficos, demonstraram a existência de um intervalo adequado para o passo de tempo, dentro do qual é possível obter um ajuste (numérico x teórico) satisfatório sem o preço de um número elevado de iterações.

Identificou-se também, para cada passo de tempo testado, uma variação no valor do módulo algorítmico tangente ("VMT"). Basicamente, observou-se que:

● **Barra tracionada em regime viscoelástico:** Para $\Delta t=0.05$, uma correspondente $VMT=56\%$. Passos de tempo menores que 0.05 podem ser adotados, porém, o ganho no

referente ao ajuste é muito pequeno quando comparado ao número elevado de iterações. Ressalta-se, por exemplo, que para um passo de tempo igual a 0.0001 o ajuste é praticamente igual ao obtido para 0.05 , porém às custas de 8099 iterações;

● **Barra tracionada em regime viscoplástico:** Para $\Delta t=0.10$, uma correspondente $VMT=80\%$. Passos de tempo menores que 0.10 podem ser adotados, permanecendo válidas as considerações do regime viscoelástico, onde observou-se que para um passo de tempo igual a 0.0001 o ajuste foi satisfatório, porém, às custas de 13733 iterações;

● **Treliça Plana em regime viscoelástico:** Para $\Delta t=0.05$, uma correspondente $VMT=77\%$. Passos de tempo menores que 0.05 podem ser adotados, permanecendo válidas as considerações já mencionadas para a barra tracionada, onde observou-se que para um passo de tempo igual a 0.0001 o ajuste é praticamente igual ao obtido para passo de tempo de 0.05 , porém, às custas de 29163 iterações.

Os resultados obtidos para a barra tracionada e para a treliça plana, evidenciaram uma correspondência entre o tamanho do passo de tempo e a VMT, objetivando uma relação "custo-benefício" satisfatória entre o ajuste e o número de iterações. Nesse sentido, fica como sugestão do autor do presente trabalho adotar a variação do módulo tangente como critério para a escolha do passo de tempo adequado. Com base nos resultados obtidos, admite-se como satisfatório o intervalo $60\% \leq VMT \leq 80\%$, para análises em regime viscoelástico e viscoplástico.

Os conhecimentos adquiridos através dos estudos realizados para a análise unidimensional, contribuíram de forma direta para a extensão do algoritmo elasto-viscoplástico à análise multiaxial, onde foram abordados aos casos planos de tensão e de deformação.

Novamente, tomou-se como ponto de partida as expressões para a elasto-viscoplasticidade apresentadas em *SIMO & HUGHES (1988)*. Dentro dos mesmos moldes daquela referência, foram elaboradas expressões para a viscoelasticidade, com base em formulações por *LEMAITRE & CHABOCHE (1990)* e por *SOBOTKA (1984)*.

Como consequência, obteve-se um novo algoritmo, o qual também foi implementado em um código de cálculo, *Simap.for*. A análise da resposta numérica, com base nos mesmos exemplos de aplicação sugeridos em *MUNAIAR NETO (1994)*, foi apresentada na forma de tabelas e gráficos, onde foram confrontados resultados via procedimentos explícito e de origem, com resultados via procedimento implícito. Os testes efetuados mostraram que os resultados via procedimento implícito recuperam satisfatoriamente os resultados explícito e de origem.

Para o cilindro em regime viscoplástico (primeiro exemplo de aplicação), foram sugeridos diferentes caminhos para a determinação da *VMT*, onde adotou-se o procedimento via "elemento mais plastificado" como o mais seguro, uma vez que os demais podem sofrer significativas alterações, dependendo do nível de carregamento.

Nesse exemplo, identificou-se como satisfatório o intervalo $2.5\% \leq VMT \leq 4.0\%$, para o qual foi possível recuperar os resultados dos esforços e do tempo total decorrido. Ressalta-se que esse intervalo fica novamente como sugestão do autor, para um possível critério quando da escolha do passo de tempo adequado.

Para os demais exemplos, representativos dos regimes viscoelástico e combinado (viscoelástico + viscoplástico), onde não foi admitida a penalização da rigidez estrutural, observou-se novamente um ajuste satisfatório quando confrontados os resultados "explícitos e de origem" com o "implícito por Lemaitre (FIVL)". Os resultados "implícitos por Sobotka (FIVS)" resultaram, na maioria das vezes, em um ajuste pouco satisfatório.

De um modo geral, os resultados com referência aos estudos aqui realizados resultaram bastante satisfatórios. No entanto, outros aspectos de fundamental importância para a complementação dos estudos para o presente trabalho não foram abordados e devem ficar como proposta de continuidade para pesquisadores que tenham interesse direto nos assuntos aqui pesquisados. Para tanto, ficam como sugestões:

- *Identificação dos parâmetros do modelo Elasto-viscoplástico através de ensaios de caracterização paramétrica do material em laboratório. Consequentemente, uma validação do modelo;*

- *Incorporação da Mecânica do Dano, objetivando uma simulação mais adequada de estruturas de concreto, onde existe a influência da microfissuração do material;*
- *Incorporação do efeito da temperatura, objetivando um estudo mais preciso de estruturas compostas por barras metálicas (treliças planas ou tridimensionais).*

Coefficientes Utilizados para a Determinação das Deformações Viscoelásticas obtidas por "LEMAITRE"

Apresentam-se a seguir, os coeficientes A_i , B_i , C_i , D_i , G_i , H_i e P_i , utilizados na determinação de Q_i e R_i , pertencentes às matrizes M_1 , M_2 , M_3 e M_4 , apresentadas no capítulo 12, com referência à formulação viscoelástica via *LEMAITRE*.

No que segue, ressalta-se que para as constantes elásticas e de Lamé, os sub-índices "1 e 2", referem-se às molas dos trechos "*elástico e viscoelástico*" (do modelo completo), respectivamente. Em uma sequência lógica de cálculo, os coeficientes são escritos nas formas:

● ***Determinação dos coeficientes A_i :***

$$A_1 = \left(\frac{1+\nu_2}{E_2 \tau_1^*} - \frac{\nu_2}{E_2 \tau_2^*} \right) \Delta t \quad A_2 = \frac{\nu_2 \Delta t}{E_2 \tau_2^*} \quad A_3 = k_{b_1} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)_{(n+1)}$$

$$A_4 = (A_1 - 2A_2) A_3 \quad A_5 = (2\mu_1 + \lambda_1) A_1 - 2\lambda_1 A_2 \quad A_6 = \lambda_1 A_1 - (2\mu_1 + \lambda_1) A_2 - \lambda_1 A_3$$

● ***Determinação dos coeficientes B_i :***

$$B_1 = (1+A_5)^2 - (A_6)^2 \quad B_2 = (1+A_5-A_6) A_4 \quad B_3 = (A_6-A_5-1) A_6$$

$$B_4 = (A_6)^2 - (1+A_5) A_5 \quad B_5 = -A_6 \quad B_6 = (1+A_5-A_6) A_2$$

$$B_7 = (1+A_5) A_1 + A_2 A_6 \quad B_8 = (1+A_5) A_2 + A_1 A_6 \quad B_9 = 1 + A_5 + (2A_6 B_3) / B_1$$

● **Determinação dos coeficientes C_i :**

$$C_1 = \frac{[A_4 - (2A_6B_2) / B_1]}{B_9} \quad C_2 = \frac{[A_5 + (2A_6B_3) / B_1]}{B_9} \quad C_3 = \frac{[1 + (B_4 + B_5) / B_1] A_6}{B_9}$$

$$C_4 = \frac{[A_1 + (2A_6B_6) / B_1]}{B_9} \quad C_5 = \frac{[A_2 + (B_7 - B_8) A_6 / B_1]}{B_9}$$

● **Determinação dos coeficientes D_i :**

$$D_1 = (B_2 + B_3 C_1) / B_1 \quad D_2 = (1 - C_2) B_3 / B_1 \quad D_3 = (B_4 - B_3 C_3) / B_1$$

$$D_4 = (B_5 + B_3 C_3) / B_1 \quad D_5 = (B_6 - B_3 C_4) / B_1 \quad D_6 = (B_7 - B_3 C_5) / B_1$$

$$D_7 = (B_8 + B_3 C_5) / B_1$$

● **Determinação dos coeficientes G_i :**

$$G_1 = \frac{E_2 (1 - \nu_2)}{(1 + \nu_2) (1 - 2\nu_2)} \quad G_2 = \frac{\nu_2 E_2}{(1 + \nu_2) (1 - 2\nu_2)}$$

● **Determinação dos coeficientes H_i :**

$$H_1 = 2C_5 G_2 - C_4 G_1 \quad H_2 = (G_1 + G_2) C_5 - C_4 G_2 \quad H_3 = D_5 G_1 + (D_7 - D_6) G_2$$

$$H_4 = (D_5 + D_7) G_2 - D_6 G_1 \quad H_5 = (D_5 - D_6) G_2 + D_7 G_1$$

● **Determinação dos coeficientes P_i :**

$$P_1 = 1 - H_4 - H_5^2 / (1 - H_4) \quad P_2 = H_5 / (1 - H_4) \quad P_3 = D_2 (1 + P_2) \quad P_4 = D_3 + D_4 P_2$$

$$P_5 = D_4 + D_3 P_2 \quad P_6 = H_3 (1 + P_2) \quad P_7 = D_5 (1 + P_2) \quad P_8 = D_6 - D_7 P_2 \quad P_9 = D_7 - D_6 P_2$$

• **Determinação dos coeficientes Q_i :**

$$Q_1 = \frac{P_1 C_1 + 2D_1 (1 + P_2) H_2}{P_1 (1 - H_1) - 2P_6 H_2} \quad Q_2 = \frac{P_1}{P_1 (1 - H_1) - 2P_6 H_2} \quad Q_3 = \frac{(1 + P_2) H_2}{P_1 (1 - H_1) - 2P_6 H_2}$$

$$Q_4 = \frac{2P_3 H_2 - P_1 C_2}{P_1 (1 - H_1) - 2P_6 H_2} \quad Q_5 = \frac{(P_4 + P_5) H_2 - P_1 C_3}{P_1 (1 - H_1) - 2P_6 H_2} \quad Q_6 = \frac{C_4 P_1 - 2P_7 H_2}{P_1 (1 - H_1) - 2P_6 H_2}$$

$$Q_7 = \frac{(P_8 - P_9) H_2 - P_1 C_5}{P_1 (1 - H_1) - 2P_6 H_2}$$

• **Determinação dos coeficientes R_i :**

$$R_1 = [(1 + P_2) D_1 + P_6 Q_1] / P_1 \quad R_2 = [P_6 Q_2] / P_1 \quad R_3 = [1 + P_6 Q_3] / P_1$$

$$R_4 = [P_2 + P_6 Q_3] / P_1 \quad R_5 = [P_3 + P_6 Q_4] / P_1 \quad R_6 = [P_4 + P_6 Q_5] / P_1$$

$$R_7 = [P_5 + P_6 Q_5] / P_1 \quad R_8 = [P_6 Q_6 - P_7] / P_1 \quad R_9 = [P_6 Q_7 + P_8] / P_1$$

$$R_{10} = [P_6 Q_7 - P_9] / P_1 \quad R_{11} = \frac{1}{1 + \frac{E_2}{2\mu_1 (1 + \nu_2) + E_2 \tau_1' / \Delta t}} \quad R_{12} = \frac{R_{11} (1 + \nu_2)}{2\mu_1 (1 + \nu_2) + E_2 \tau_1' / \Delta t}$$

Ressalta-se que o procedimento utilizado para a determinação dos coeficientes apresentados, por resultar em um número bastante grande de substituições e rearranjos nas expressões de interesse, não será aqui apresentado.

ANEXO 2

Coefficientes Utilizados para a Determinação das Deformações Viscoelásticas obtidas por "SOBOTKA"

Apresentam-se a seguir, os coeficientes A_i , B_i , C_i , D_i , G_i e H_i , utilizados na determinação de Q_i e R_i , pertencentes às matrizes M_5 , M_6 , M_7 e M_8 , apresentadas no capítulo 12, com referência à formulação viscoelástica via **SOBOTKA**.

Assim como no anexo A, ressalta-se que para as constantes elásticas e de Lamé, os sub-índices "1 e 2", referem-se novamente às molas dos trechos "elástico e viscoelástico" (do modelo completo), respectivamente. Em uma sequência lógica de cálculo, os mencionados coeficientes são escritos nas formas:

● **Determinação dos coeficientes A_i :**

$$A_1 = \frac{E_2 (1-\nu_2)}{(1+\nu_2) (1-2\nu_2)} \quad A_2 = \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2) (1-2\nu_2)} \quad A_3 = \frac{\eta_1 (1-\nu_2^*)}{(1+\nu_2^*) (1-2\nu_2^*)}$$

$$A_4 = \frac{\eta_1 \nu_2^*}{(1+\nu_2^*) (1-2\nu_2^*)}$$

● **Determinação dos coeficientes B_i :**

$$B_1 = A_3 + (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t - \frac{(\lambda_1 \Delta t + A_4)^2}{A_3 + (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t} \quad B_2 = \left(1 - \frac{\lambda_1 \Delta t + A_4}{A_3 + (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t} \right) A_5 \Delta t$$

$$B_3 = \frac{(\lambda_1 \Delta t + A_4) \Delta t}{A_3 + (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t} \quad B_4 = \frac{(\lambda_1 \Delta t + A_4)^2}{A_3 + (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t} - \lambda_1 \Delta t - A_4$$

$$B_5 = \left(\frac{\lambda_1 \Delta t + A_4}{A_3 + (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t} - 1 \right) \lambda_1 \Delta t \quad B_6 = \frac{(\lambda_1 \Delta t + A_4) \lambda_1 \Delta t}{A_3 + (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t} - (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t$$

$$B_7 = \frac{(\lambda_1 \Delta t + A_4) (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t}{A_3 + (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t} - \lambda_1 \Delta t \quad B_8 = \left(\frac{\lambda_1 \Delta t + A_4}{A_3 + (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t} - 1 \right) A_2 \Delta t$$

$$B_9 = \frac{(\lambda_1 \Delta t + A_4) A_2 \Delta t}{A_3 + (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t} - A_1 \Delta t \quad B_{10} = \frac{(\lambda_1 \Delta t + A_4) A_1 \Delta t}{A_3 + (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t} - A_2 \Delta t$$

• *Determinação dos coeficientes C_i :*

$$C_1 = A_3 + (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t + \frac{2(\lambda_1 \Delta t + A_4) B_4}{B_1} \quad C_2 = A_5 \Delta t - \frac{2(\lambda_1 \Delta t + A_4) B_2}{B_1}$$

$$C_3 = \frac{(\lambda_1 \Delta t + A_4) (\Delta t - B_3)}{B_1} \quad C_4 = \frac{2(\lambda_1 \Delta t + A_4) B_5}{B_1} + (2\mu_1 + \lambda_1) \Delta t$$

$$C_5 = \frac{(\lambda_1 \Delta t + A_4) (B_6 + B_7)}{B_1} + \lambda_1 \Delta t \quad C_6 = \frac{2(\lambda_1 \Delta t + A_4) B_8}{B_1} + A_1 \Delta t$$

$$C_7 = \frac{(\lambda_1 \Delta t + A_4) (B_9 + B_{10})}{B_1} + A_2 \Delta t$$

• *Determinação dos coeficientes D_i :*

$$D_1 = \frac{B_2 C_1 + B_4 C_2}{B_1 C_1} \quad D_2 = \frac{B_4 \Delta t}{B_1 C_1} \quad D_3 = \frac{\Delta t C_1 - B_4 C_3}{B_1 C_1} \quad D_4 = \frac{B_3 C_1 + B_4 C_3}{B_1 C_1}$$

$$D_5 = \frac{B_5 C_1 - B_4 C_4}{B_1 C_1} \quad D_6 = \frac{B_6 C_1 - B_4 C_5}{B_1 C_1} \quad D_7 = \frac{B_7 C_1 - B_4 C_5}{B_1 C_1}$$

$$D_8 = \frac{B_8 C_1 - B_4 C_6}{B_1 C_1} \quad D_9 = \frac{B_9 C_1 - B_4 C_7}{B_1 C_1} \quad D_{10} = \frac{B_{10} C_1 - B_4 C_7}{B_1 C_1}$$

• **Determinação dos coeficientes G_i :**

$$G_1 = 1 - D_9 - \frac{D_{10}^2}{1 - D_9} \quad G_2 = \frac{D_{10}}{1 - D_9} \quad G_3 = D_1 (1 + G_2) \quad G_4 = D_2 (1 + G_2)$$

$$G_5 = D_3 - D_4 G_2 \quad G_6 = D_4 - D_3 G_2 \quad G_7 = D_5 (1 + G_2) \quad G_8 = D_6 + D_7 G_2$$

$$G_9 = D_7 + D_6 G_2 \quad G_{10} = D_8 (1 + G_2)$$

• **Determinação dos coeficientes H_i :**

$$H_1 = \frac{C_2 G_1 - 2 C_7 G_3}{C_1 G_1} \quad H_2 = \frac{(1 + G_2) C_7}{C_1 G_1} \quad H_3 = \frac{\Delta t G_1 - 2 C_7 G_4}{C_1 G_1}$$

$$H_4 = \frac{C_3 G_1 + (G_5 - G_6) C_7}{C_1 G_1} \quad H_5 = \frac{C_4 G_1 + 2 C_7 G_7}{C_1 G_1} \quad H_6 = \frac{C_5 G_1 + (G_8 + G_9) C_7}{C_1 G_1}$$

$$H_7 = 1 + \frac{C_6 G_1 + 2 C_7 G_{10}}{C_1 G_1}$$

• **Determinação dos coeficientes Q_i :**

$$Q_1 = \frac{H_1}{H_7} \quad Q_2 = \frac{1}{H_7} \quad Q_3 = \frac{H_2}{H_7} \quad Q_4 = \frac{H_3}{H_7} \quad Q_5 = \frac{H_4}{H_7} \quad Q_6 = \frac{H_5}{H_7} \quad Q_7 = \frac{H_6}{H_7}$$

• **Determinação dos coeficientes R_i :**

$$R_1 = \frac{G_3 + G_{10}Q_1}{G_1} \quad R_2 = \frac{G_{10}Q_2}{G_1} \quad R_3 = \frac{1 - G_{10}Q_3}{G_1} \quad R_4 = \frac{G_2 - G_{10}Q_3}{G_1}$$

$$R_5 = \frac{G_4 + G_{10}Q_4}{G_1} \quad R_6 = \frac{G_5 - G_{10}Q_5}{G_1} \quad R_7 = \frac{G_6 + G_{10}Q_5}{G_1} \quad R_8 = \frac{G_7 - G_{10}Q_6}{G_1}$$

$$R_9 = \frac{G_8 - G_{10}Q_7}{G_1} \quad R_{10} = \frac{G_9 - G_{10}Q_7}{G_1}$$

$$R_{11} = \frac{1}{1 + \frac{E_2}{2(1+\nu_2)(2\mu_1 + \eta_1^*/\Delta t)}} \quad R_{12} = \frac{R_{11}}{(2\mu_1 + \eta_1^*/\Delta t)}$$

Analogamente ao *anexo 1*, o procedimento utilizado para a determinação dos coeficientes aqui apresentados, por resultar em um número bastante grande de substituições e rearranjos nas expressões de interesse, não será aqui apresentado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARGON, A.S. (1975). *Constitutive equations in plasticity*. M.I.T. Press, Cambridge, Mass.
- ATKINSON, C.; BOURBE, J.P. (1989). *Stress Singularities in Viscoelastic Media*. Department of Mathematics, Imperial College, London, Oxford University Press, J. Mech. Appl. Mathematics, Vol.42, Pt.3.
- BENALLAL, A. (1989). *Thermoviscoplasticité et endommagement des structures*. Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan, Paris.
- CADEC, U. (1988). *Creep in Metallic Materials* - Academia, Prague.
- CELESTINO, T.B. (1982). *Projeto de Revestimento de Túneis em Concreto Projetado*. 1o. Encontro Técnico do Comitê Brasileiro de Túneis.
- CHABOCHE, J.L. (1988). *Continuum Damage Mechanics. Part I - General Concepts, Part II - Damage Growth, Crack Initiation and Crack Growth*, J. Appl. Mech., 55(3), pp.59-64 and 65-72.
- CHABOCHE, J.L.; ROUSSELIER, G. (1983a). *On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations - Part I: Rules developed with internal variable concepts*, Joun. Press. Ves. Technol., 105(3), pp.153-158.
- CHABOCHE, J.L.; ROUSSELIER, G. (1983b). *On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations - Part II: Applications of internal variable concept to the stainless steel*, Joun. Press. Ves. Technol., 105(3), pp.159-164.

- CHEN, W.H.; CHANG, C.M.; YEH, J.T. (1993). *An Incremental Relaxation Finite Element Analysis of Viscoelastic Problems with Contact and Friction*. Comp.Meth. in Appl.Mech. and Eng, v.109, p.315-319.
- CLEJA-TIGOIU, S.; SOOS, E. (1990). *Elastoviscoplasticity Models with Relaxed Configurations and Internal State Variables* - Appl. Mech. Rev., vol.43, pp.131-151.
- COCKS, A.C.F.; LECKIE, F.A. (1987). *Creep Constitutive Equations for Damaged Materials* - Ad. in Applied Mech., Vol.25, pp.183-238. Academic Press, N.W.
- CRISFIELD, M.A. (1980). *Incremental/Iterative Solution Procedures for Nonlinear structural analysis*. in Numerical Methods for Nonlinear Problems, Pineridge Press, Swansea.
- ENGEL, L.; KLINGELE, H. (1981). *An Atlas of Metal Damage*. Wolf Science Books, New York.
- ERINGEN, A.C. (1967). *Mechanics of Continua*. J. Wiley, New York.
- FAIRBAIM, M.R.; SYDENSTRICKER, R.M.; COUTINHO, A.L.G.A. (1995). *Modelo da Cadeia de Maxwell para Materiais Viscoelásticos com Envelhecimento*- XVI CILAMCE, pp.168-176, Curitiba, PR.
- FINDLEY, W.N.; LAI, J.S.; ONARAM, K. (1976). *Creep and relaxation of non linear visco-elastic materials*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- FRIEDEL, J. (1964). *Dislocations*. Pergamon, London.
- HILL, R. (1971). *The mathematical theory of plasticity*. The Clarendon Press, Oxford.

- HUGHES, T.J.R. (1987). *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Stanford University, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- HULL, D. (1975). *Introduction to dislocation*. Pergamon, London.
- HULT, J.; LEMAITRE, J. (1981). *Physical non-linearities in structural analysis*. I.U.T.A.M. Symposium Springer-Verlag, Berlin.
- KACHANOV, L.M. (1971). *Foundations of the theory of plasticity*. North-Holland Publication Company, Amsterdam.
- KACHANOV, KACHANOV, L.M. (1971). *Foundations of the theory of plasticity*. North-Holland Publication Company, Amsterdam. L.M. (1986). *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Martinus Nijhoff, Dordrecht.
- KESTIN, J.; RICE, J.R. (1970). *A critical review of thermodynamics*. Stuart Ed, Mono book.
- KRAJCINOVIC, D.; LEMAITRE, J. (1987). *Continuum Damage Mechanics - Theory and Application*. CISM course. Springer-Verlag, Berlin.
- LEE, S.H. (1988). *Generalized Viscoelastic Model for Creep Analysis Coupled with Plastic Deformation*. Int.J.Num.Meth. in Eng, v.26, p.153-165.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.L. (1990). *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press.

- LOVEDAY, M.S.; DAY, M. F.; DYNSON, B. F. (1982). *Measurement of High Temperature Mechanical Properties of Material*. National Physical Laboratory. Her Majesty's Stationery Office, London.
- LUBLINER, J. (1972). *On The Thermodynamic Foundations of Non-Linear Solid Mechanics* - Int. J. Non-Linear Mech., Vol.7, pp.237-254, Pergamon Press, Great Britain.
- LUBLINER, J. (1990). *Plasticity Theory* - Macmillan Publishing Company, New York.
- LUBLINER, J.; OLIVER, J.; OLLER, S.; OÑATE, E. (1989). *A Plastic-Damage Model for Concrete* - Int. J. of Solid and Struct., Vol.25, N.3, pp.299-326.
- MANDEL, J. (1973). *Thermodynamics and Plasticity in Foundations of Thermodynamics* - ed J.J.D.Domingos, M.N.R. Ninas, and J.H. Whitelaw, N.W., pp.283-304.
- McCLINTOCK, F.; ARGON, A.S. (1966). *Mechanical Behavior of Materials*. Addison-Wesley, Reading (Mass).
- MESCHKE, G.; KROPIK, C.; MANG, H.A. (1996). *Numerical Analyses of Tunnel Linings by Means of a Viscoplastic Material Model for Shotcrete*. International Journal for Numerical Methods in Eng., v.39, p.3145-3162.
- MUNAIAR NETO, J. (1994). *Modelos de Comportamentos Viscoelástico e Viscoplastico na Análise de Estruturas Planas*. São Carlos, São Paulo, Brasil, Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- NEVILLE, A. M. (1973). *Properties of Concrete*. J. wiley, New York.

- ODQVIST, F.K.G. (1974). *Mathematical theory of creep and creep rupture*. Clarendon Press, Oxford.
- ORTIZ, M.; SIMO, J.C. (1986). *An Analysis of a New Class of Integration Algorithm for Elasto-plastic Constitutive Relations*. Int.J.Num.Meth.Eng., v.23, p.353-366.
- OWEN, D.R.J.; HINTON, E. (1980). *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Pineridge Press Limited. Swansea, U.K., Cap.1, p.3-11; Cap.2, p.13-31; Cap.3, p.33-94; Cap.4, p.95-119; Cap.6, p.157-214; Cap.7, p.215-268; Cap.8, p.271-317.
- PADMANABHAM, K.A.; DAVIES G.J. (1980). *Superplasticity*. Springer-Verlag, Berlim.
- PHILLIPS, D.V.; ZIENKIEWICZ, O.C. (1976). *Finite Element Non-linear Analysis of Concrete Structures*. Proc.Inst.Civ.Eng., pt.2, v.61,p.59-88.
- PIMENTA, P.M.; YOJO, T. (1989). *Treliças espaciais de madeira em regime viscoelástico sob não-linearidade geométrica*. Boletim Técnico do Departamento de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica de São Paulo.
- PROENÇA, S.P.B. (1986). *Noções Básicas de Reologia*. Publicações, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1986.
- PROENÇA, S.P.B. (1989). *Notas Sobre Análise Não-Linear Física de Estruturas*. Setor de Publicações, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- RABOTNOV, Y.N. (1969). *Creep problems in structural members*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- RUBERT, J.B. (1993). *Estudo do Desempenho de Algoritmos Numéricos na Solução de Sistemas Não-Lineares de Estruturas Formadas por Barras de Treliças*. São Carlos, São Paulo, Brasil, Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SALENÇON, J. (1983). *Viscoélasticité*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- SAKURAI, S. (1978). *Approximate Time-Dependent Analysis of Tunnel Support Structure Considering Progress of Tunnel Face*. Int.J.Num. and Anal.Meth. in Geom, v.2.
- SAWCZUK, A.; BIANCHI, G. (1985). *Plasticity Today*. (Conf. c.i.s.m. Udine). Elsevier Applied Science Publisher.
- SIMO, J.C.; HUGHES, T.J.R. (1988). *Elastoplasticity and Viscoplasticity - Computational Aspects, Cap.1, p.1-46; Cap.2, p.52-95; Cap.3, p.98-134*.
- SIMO, J.C.; TAYLOR, R.L. (1985). *Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity*. Comp.Meth. in Appl.Mech. and Eng, v.48.
- SINGH, R.B.; SHARMA, K.G.; VARADARAJAN, A. (1988). *Elasto-Plastic Analysis of Tunnel Excavation in Layered Rock Medium by Coupled FEBEM*. Num.Meth in Geom, p.941-950.

- SKRZYPER J.J. (1993). *Plasticity and Creep - Theory, Examples and Problems*. Krakow University of Technology - Krakow - Poland, C.R.C. Press, Inc., N.W. Boca Raton.
- SOBOTKA, Z. (1984). *Rheology of Materials and Engineering Structures*. Elsevier Science Publishers, Prague, Czechoslovakia.
- SOLOMON, L. (1966). *Elasticité Linéaire*. Masson, Paris.
- SRIVASTAVA, R.K.; SHARMA, K.G.; VARADARAJAN, A. (1986). *Finite Element Analysis of Tunnels using Different Yield Criteria*. Int.Sym. on Num.Mod. in Geom, p.381-389.
- SWOBODA, G.; MERTZ, W.; BEER, G. (1987). *Rheological Analysis of Tunnel Excavations by Means of Coupled Finite Element (FEM) - Boundary Element (BEM) Analysis*. Int.J.Num. and Anal.Meth. in Geom, v.11, p.115-129.
- VALLIAPPAN, S. (1981). *Continuum Mechanics Fundamentals*. D.A. Balkema / Rotterdam.
- TAYLOR, R.L.; SIMO, J.C. (1986). *A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elasto-plasticity*. Int.J.Num.Mech.Eng., v.22, p.649-670.
- TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. (1982). *Elastic/Viscoplastic Problems Using Boundary Elements*. Int.J.Mech.Sci, v.24, p.605-618.
- TEMAM, R. (1988). *Mathematical Problems in Plasticity*, Gauthier-Villars, Paris.
- TRUESDELL, C. (1980). *The elements of continuum mechanics*. Springer Verlag, Berlin.

- VINOGRADOV, G.V.; Malkin, A. Ya. (1980). *Rheology of polimers*, Mir Publishers, Moscow.
- WARD, I. M. (1971). *Mechanical Properties of Solid Polymers*. Wiley Interscience, New York.
- ZIEGLER, H. (1986). *An Introduction to Thermomechanics*, North-Holland, Amsterdam.
- ZIENKIEWICZ, O.C. (1971). *Incremental Displacement in Non-linear Analysis*. Int.J.Num.Meth.Eng., v.3, p.587-592.
- ZIENKIEWICZ, O.C. (1977). *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw Hill, New York, 1st edn (1967) - 3rd edn (1977).
- ZIENKIEWICZ, O.C.; CORMEAU, I.C. (1974). *Viscoplasticity - Plasticity and Creep in Elastic Solids - A Unified Numerical Solution Approach*. Int.J.Num.Meth. in Eng, v.8, p.821-845.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; MRÓZ, Z. (1984). *Generalized Plasticity Formulation and Applications to Geomechanics*. in Mechanics of Engineering Materials, Cap.33, p.655-680, Wiley, Chichester.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. (1991). *The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems*. 4.ed. MacGraw-Hill, v.1.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. (1991). *The Finite Element Method: Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity*. 4.ed. MacGraw-Hill, v.2, Cap.7, p.211-271.

ZYCKOWSKI, M. (1981). *Combined Loading in the Theory of Plasticity*. Polish Scientific Publisher, Varsovie.

ZYSSET, P.K.; CURNIER, A. (1996). *An Implicit Projection Algorithm for Simultaneous Flow of Plasticity And Damage in Standard Generalized Materials*. International Journal for Numerical Methods in Eng., v.39, p.3065-3082.

APÊNDICE 1

SUBROTINAS UTILIZADAS NOS CÓDIGOS DE CÁLCULO PARA ESTRUTURAS DE BARRAS: SIMAB.FOR E SIMAT.FOR

Os códigos de cálculo *SIMAB.FOR* e *SIMAT.FOR*, para estruturas compostas por barras (análise unidimensional e treliças planas, respectivamente), foram elaborados por meio de um procedimento implícito de integração numérica.

Na elaboração desses, foram tomados como pontos de partida os códigos de cálculo *UNIVEP.FOR* e *BIVEP.FOR*, para procedimento explícito de integração, ambos apresentados em *MUNAIAR NETO (1990)*, cujas subrotinas referem-se, essencialmente, à montagem das matrizes de rigidez global e do vetor de cargas, além de subrotinas que incorporam as expressões gerais do modelo constitutivo.

Apresentam-se, a seguir, as subrotinas referentes aos códigos de cálculo *SIMAB.FOR* e *SIMAT.FOR*, bem como suas respectivas funções, numa ordem associada à sequência de operações realizadas dentro dos mesmos:

- ***SUBROTINA DADOS:*** É através dessa subrotina que se faz a leitura dos dados de entrada do programa, como por exemplo, dados de controle, parâmetros do material ou materiais, coordenadas dos nós, incidência das barras, carregamentos externos, etc. Para tanto, usa-se um arquivo previamente elaborado pelo usuário: "*Dados-BA*" e "*Dados-TA*", para *simab.for* e *simat.for*, respectivamente.

- ***SUBROTINA INICIAL:*** Essa subrotina tem a função de zerar as variáveis acumulativas utilizadas nos programas, como tensões, deformações, deslocamentos, reações, etc.

● **SUBROTINA CARGAS:** Através dos arquivos de entrada, faz-se a leitura dos dados referentes aos incrementos de carga, número total de iterações por incremento e o valor da tolerância para a convergência dos resultados.

● **SUBROTINA ALGORIT:** Através dessa subrotina, atualiza-se ou não a rigidez global da estrutura. Em caso de uma atualização da rigidez, selecionam-se as etapas em que ela será considerada durante o processo incremental-iterativo.

● **SUBROTINA MONTAGE:** Utiliza os dados das matrizes de rigidez de cada elemento para a montagem da matriz de rigidez global da estrutura e montagem do vetor global de forças nodais equivalentes. Faz ainda o cálculo do módulo algorítmico tangente, por barra, para instantes de tempo $n+1$ e no infinito.

● **SUBROTINAS GREDEC, RESOLVE BAKSUB:** Resolvem o sistema de equações $\{F\}=[K]\{\delta\}$, fornecendo os valores de deslocamentos parcial e total dos nós da treliça, após cada iteração.

● **SUBROTINA INCVP:** Nessa subrotina, faz-se o cálculo dos valores de tensão, da deformação total e das deformações viscoelástica e viscoplástica, todos em $n+1$. Define também o residual de forças e verifica a ocorrência ou não da convergência, com base na minimização dos incrementos de deformações viscoelástica e viscoplástica.

● **SUBROTINA RESULT:** É através dela que se obtém a saída dos resultados globais do código de cálculo, como dos deslocamentos dos nós, da tensão total e das deformações total, viscoelástica e viscoplástica. Todos esses valores são apresentados ao usuário através de arquivos de saída denominados "*Saída-BA*" e "*Saída-TA*", para *simab.for* e *simat.for*, respectivamente.

Para ambos os códigos de cálculo, valem as seguintes limitações:

- *Número máximo de elementos permitidos.....: 100*
- *Número máximo de nós permitidos.....: 200*
- *Número máximo de nós restritos permitidos.....: 80*
- *Número máximo de materiais diferentes.....: 10*
- *O tamanho do passo de tempo é sempre constante*

APÊNDICE 2

***SUBROTINAS UTILIZADAS NO CÓDIGO DE CÁLCULO
PARA ANÁLISES PLANAS "SIMAP.FOR"***

O código de cálculo *SIMAP.FOR*, para análises planas de tensão e deformação, foi elaborado com base em um procedimento implícito de integração numérica.

Na sua elaboração, tomou-se como ponto de partida o código de cálculo *VEPLAS.FOR*, apresentado em *MUNAIAR NETO (1990)*, o qual foi elaborado a partir de um procedimento explícito de integração. Nesse, foram inseridas as formulações via procedimento implícito.

Desse modo, *SIMAP.FOR* define-se como um código de cálculo que incorpora ambos os procedimentos, explícito e implícito. Permite também ao usuário uma escolha entre passos de tempo constante ou variável (apenas para explícito).

Apresentam-se, a seguir, as subrotinas referentes ao código de cálculo *SIMAP.FOR*, as quais estão dispostas em uma sequência lógica de cálculo, dentro de 8 (oito) sub-programas ou blocos, como apresentados no que segue.

● ***SUB-PROGRAMA 1 ⇒ DATAG.FOR - Incorpora as Subrotinas:***

● ***SUBROTINA INPUT:*** É por essa subrotina que se faz a leitura dos dados de entrada do programa, como por exemplo, dados de controle, parâmetros do material ou materiais, coordenadas dos nós, incidência das barras, carregamentos externos, etc. Para tanto, usa-se um arquivo "*Dados-AP*", previamente elaborado pelo usuário, cuja consistência é verificada pelas subrotinas descritas a seguir, nesse bloco.

● ***SUBROTINA CHECK1:*** Essa subrotina faz a checagem dos dados de controle do programa, fornecidos em "*DADOS-AP*" e informa sobre os possíveis erros detectados.

- **SUBROTINA CHECK2:** Essa subrotina faz a checagem dos demais dados de entrada do programa, referentes às vinculações, propriedades dos materiais, dos elementos, coordenadas dos nós, etc.

- **SUBROTINA NODEXY:** É através dessa subrotina que se faz uma interpolação para obter os nós intermediários para elementos de 4 nós (generalizado para 8 nós) ou centrais para elementos de 8 nós (generalizado para 9 nós).

- **SUBROTINA GAUSSQ:** É através dessa subrotina que se determina os pontos de integração de Gauss com os respectivos parâmetros peso para cada elemento da malha.

- **SUBROTINA DIMEN:** Inicializa os parâmetros associados ao dimensionamento dinâmico, com valores de indexação previamente definidos pelo usuário, como por exemplo, número máximo de elementos permitidos, número máximo de nós, largura de banda máxima, etc.

- **SUB-PROGRAMA 2 ⇒ CARGAS.FOR - Incorpora as Subrotinas:**

- **SUBROTINA SFR2:** Essa subrotina calcula as funções de forma e suas respectivas derivadas, para elementos retangulares de 4, 8 e 9 nós.

- **SUBROTINA JACOB2:** Essa subrotina gera os elementos da matriz Jacobiana e as derivadas cartesianas.

- **SUBROTINA LOADG:** Essa subrotina monta o vetor de forças, para o qual admite-se cargas concentradas nos nós dos elementos, cargas gravimétricas (peso próprio) e cargas distribuídas nos lados dos elementos.

- **SUB-PROGRAMA 3 ⇒ ALGINC.FOR - Incorpora as Subrotinas:**

- **SUBROTINA ZERO:** Essa subrotina inicializa com zero, algumas variáveis de interesse do programa, referentes às cargas, reações nos apoios, deslocamentos nos nós, tensões e deformações nos elementos.

- **SUBROTINA INCREM:** Faz o controle dos incrementos de carga (concentradas, gravimétricas ou distribuídas), aplicadas à estrutura.

● **SUBROTINA ALGOR:** Seleciona a forma como será atualizada (ou não) a matriz de rigidez global da estrutura, através de quatro opções definidas pelo usuário.

● **SUB-PROGRAMA 4 ⇒ SOLSIS.FOR - Incorpora as Subrotinas:**

● **SUBROTINA MDELA:** Calcula os elementos da matriz elástica D, para comportamento puramente elástico, sem penalização de rigidez, para os casos planos e o axissimétrico.

● **SUBROTINA MDTAN:** Calcula os elementos da matriz tangente D(t), apenas para um comportamento viscoplástico (viscoelástico não implementado), apenas para os casos planos de tensão e deformação.

● **SUBROTINA BMATPS:** Essa subrotina monta a matriz dos operadores B, que garante uma correlação deslocamento/deformação.

● **SUBROTINA DBE:** Faz o produto entre as matrizes D e B.

● **SUBROTINA SOLSIS:** Realiza a solução do sistema de equações, através do Método de Gauss.

● **SUB-PROGRAMA 5 ⇒ VISCO1.FOR - Incorpora Subrotinas utilizadas apenas para procedimento explícito**

● **SUBROTINA INVAR:** Calcula os invariantes de tensão e o valor corrente da função de escoamento, com base no critério de plastificação adotado pelo usuário.

● **SUBROTINA TENEXP:** Calcula os incrementos de tensão e deformação total, para uma análise puramente elástica.

● **SUBROTINA VEPEXP:** Essa subrotina faz o cálculo do vetor de fluxo viscoplástico, com base no critério de plastificação.

● **SUBROTINA FLUEXP:** Determina as taxas e os incrementos de deformações viscoelástica e viscoplástica.

● **SUBROTINA PROEXP:** Faz a chamada de todas as subrotinas apresentadas nesse bloco, bem como a determinação do passo de tempo seguinte e do residual de forças, para a próxima iteração.

● ***SUB-PROGRAMA 6 ⇒ VISCO2.FOR - Incorpora Subrotinas utilizadas apenas para procedimento implícito***

● ***SUBROTINA TENIMP:*** Calcula os incrementos de tensão, de deformação total e da parcela desviadora do tensor de tensões, primeiramente para uma análise puramente elástica.

● ***SUBROTINA VARAUX:*** Essa subrotina faz o cálculo das variáveis referentes ao estado auxiliar de tensões (ou puramente elástico), para verificação de uma possível ocorrência de plastificação.

● ***SUBROTINA FLUIMP:*** Determina as taxas e os incrementos de deformações viscoelástica e viscoplástica, bem como da viscoplástica acumulada. Calcula também as tensões reais e de retorno.

● ***SUBROTINA PROIMP:*** Faz a chamada de todas as subrotinas apresentadas nesse bloco, bem como a determinação do passo de tempo seguinte e do residual de forças, para a próxima iteração.

● ***SUB-PROGRAMA 7 ⇒ CONVEP.FOR - Incorpora as Subrotinas***

● ***SUBROTINA CONVER:*** Verifica a convergência do programa, através da minimização dos incrementos de deformações viscoelástica e/ou viscoplástica.

● ***SUBROTINA RESGLO:*** Monta o arquivo de saída dos resultados globais do programa, denominado "*Saída-AP*".

● ***SUB-PROGRAMA 8 ⇒ SIMAP.FOR (programa principal):*** Faz a chamada de algumas das subrotinas apresentadas, bem como o controle dos loops referentes aos incrementos de carga e do número máximo de iterações. As subrotinas são chamadas na seguinte ordem de cálculo: *DIMEN*, *INPUT*, *LOADG*, *ZERO*, *INCREM*, *ALGOR*, *MATRIG*, *SOLSIS*, *PROEXP (explícito)* ou *PROIMP (implícito)*, *CONVER* e *RESGLO*.

Valem as seguintes limitações:

- *Número máximo de elementos permitidos.....: 300*
- *Número máximo de nós permitidos.....: 500*
- *Número máximo de nós restritos permitidos.....: 50*
- *Número máximo de materiais diferentes.....: 8*
- *Passo de tempo constante ou variável para procedimento explícito*
- *Passo de tempo apenas constante para procedimento implícito*

APÊNDICE 3

DETERMINAÇÃO DA EXPRESSÃO GERAL DO MULTIPLICADOR PLÁSTICO " λ " (apresentado no capítulo 11)

Com referência à uma situação de Carga/Descarga (condição de complementaridade) e para um conjunto (σ, q) , tal que $f(\sigma, q) < 0$, é possível admitir que:

$$\lambda^{\circ} f(\sigma, q) = 0 \Rightarrow \lambda^{\circ} = 0 \Rightarrow \varepsilon^{\circ p} = 0$$

$$\therefore \sigma = C(\varepsilon^{\circ} - \varepsilon^{\circ p}) = C\varepsilon^{\circ} = C\varepsilon^e$$

Por outro lado, é possível admitir um conjunto (σ, q) onde $f(\sigma, q) = 0$. Nesse caso, são possíveis diferentes análises:

$$\lambda^{\circ} = 0 \text{ e } f^{\circ}(\sigma, q) < 0, (\lambda^{\circ} f^{\circ} = 0) : \varepsilon^{\circ p} = 0 \text{ e } \dot{q} = 0$$

$$\lambda^{\circ} > 0 \text{ e } f^{\circ}(\sigma, q) = 0, (\lambda^{\circ} f^{\circ} = 0) : \varepsilon^{\circ p} \neq 0 \text{ e } \dot{q} \neq 0$$

Uma reunião das informações anteriormente apresentadas com relação à condição de complementaridade e suas diferentes situações para qualquer $(\sigma, q) \in E_{\sigma}$, permite concluir:

I-) Para (σ, q) , tal que $f(\sigma, q) < 0 \rightarrow \partial\lambda/\partial t = 0$ (Carregamento elástico)

II-) Para (σ, q) , tal que $f(\sigma, q) = 0 \rightarrow \partial\lambda/\partial t \geq 0$ e $\partial f/\partial t \leq 0$

se $\partial f/\partial t < 0 \rightarrow \partial\lambda/\partial t = 0$ (Descarregamento plástico)

se $\partial f/\partial t = 0 \rightarrow \partial\lambda/\partial t = 0$ (Carregamento neutro)

∨ $\partial\lambda/\partial t > 0$ (Carregamento plástico)

Aplicando-se à condição de consistência (expressão 11.2d, do capítulo 11) para $\lambda > 0$, a regra da cadeia, bem como a substituição de 11.2a e b do referido capítulo, procede-se:

$$\dot{f} = \dot{f}(\sigma, q) = \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} = f_{\sigma} \cdot \dot{\sigma} + f_q \cdot \dot{q} = 0$$

$$\dot{f} = f_{\sigma} \cdot C(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) + f_q \cdot \dot{q} = f_{\sigma} \cdot C\dot{\varepsilon} - \lambda(f_{\sigma} \cdot Cr + f_q \cdot h) = 0$$

e, portanto, escreve-se a expressão geral na forma

$$\therefore \dot{\lambda} = \frac{f_{\sigma} \cdot C \dot{\varepsilon}}{f_{\sigma} \cdot Cr + f_q \cdot h} \quad (1)$$

Deve-se ressaltar que a expressão acima é válida desde que $(f_{\sigma} Cr + f_q h) > 0$ para qualquer conjunto $(\sigma, q) \in E_0$. Ainda, no caso de $f(\sigma, q) = 0$ e $\partial f(\sigma, q)/\partial t = 0$, obtém-se:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \rightarrow f_{\sigma} \cdot C\dot{\varepsilon} - \partial_{\sigma} f \cdot C\dot{\varepsilon} \geq 0 \quad (2)$$

Uma verificação simples, consiste em particularizar as expressões até aqui estudadas para o caso de estruturas compostas por barras, admitindo-se a ocorrência dos encruamentos isótropo e cinemático, aqui representados por um vetor de variáveis internas q_1 e q_2 , respectivamente. Desse modo, escreve-se

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

O critério de plastificação $f=f(\sigma, q)$, pode ser escrito com base nas variáveis de encruamento, na forma:

$$f = f(\sigma, q) = |\sigma - q_2| - q_1 - \sigma_y \leq 0$$

a partir do qual, obtém-se:

$$r(\sigma, q) = \partial_\sigma f(\sigma, q) = \text{sign}(\sigma - q_2) \quad (3a)$$

$$h(\sigma, q) = D \partial_q f = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \text{sign}(\sigma - q_2) \end{pmatrix} \quad (3b)$$

Sabe-se que na análise unidimensional de barras, C iguala-se ao módulo de elasticidade E. Uma substituição das expressões 3a,b na expressão 1, permite determinar

$$\lambda^\circ = \frac{\text{sign}(\sigma - q_2) E \dot{\varepsilon}}{E [\text{sign}(\sigma - q_2)]^2 + K + H [\text{sign}(\sigma - q_2)]^2} = \frac{\text{sign}(\sigma - q_2) E \dot{\varepsilon}}{E + K + H}$$

e portanto

$$\sigma = E [\varepsilon - \lambda^\circ \text{sign}(\sigma - q_2)] = \frac{E(K+H)}{E+K+H} \dot{\varepsilon} = E^{\text{ep}} \dot{\varepsilon}$$

ambas idênticas àquelas apresentadas em *SIMO & HUGHES (1988)*, com referência aos algoritmos unidimensionais. De um modo geral, as expressões de fluxo para as variáveis internas dos encruamentos isótropo e cinemático, são:

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = -\lambda^\circ D \partial_q f = -\lambda^\circ \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{q_1} f \\ \partial_{q_2} f \end{pmatrix} \quad (4a)$$

ou ainda, na forma explicitada

$$\dot{q}_1 = -\lambda^\circ K \frac{\partial f}{\partial q_1} \quad \dot{q}_2 = -\lambda^\circ H \frac{\partial f}{\partial q_2} \quad (4b, c)$$

APÊNDICE 4

DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS " λ e C^p " PARA PLASTICIDADE PERFEITA VIA CRITÉRIO DE VON MISES (J_2)

Em um primeiro passo, determina-se a expressão para o multiplicador plástico, com base na expressão 11.3a do capítulo 11, para $h=0$, pelo procedimento:

$$\lambda^{\circ} = \frac{f_{\sigma} \cdot C \dot{\epsilon}^{\circ}}{f_{\sigma} \cdot C f_{\sigma} + f_{\sigma} \cdot h} = \frac{\frac{\sigma'}{\|\sigma'\}}{\frac{\sigma'}{\|\sigma'\}} \cdot C \dot{\epsilon}^{\circ}}{\frac{\sigma'}{\|\sigma'\}} \cdot C \frac{\sigma'}{\|\sigma'\}}$$

lembrando-se que $C = k_b (I \otimes I) + 2\mu [II - \frac{1}{3}(I \otimes I)]$. Resolvendo-se por etapas:

a-) desenvolvendo-se primeiramente o numerador

$$\begin{aligned} f_{\sigma} \cdot C \dot{\epsilon}^{\circ} &= f_{\sigma} \cdot \left\{ k_b (I \otimes I) + 2\mu \left[II - \frac{1}{3} (I \otimes I) \right] \right\} \dot{\epsilon}^{\circ} \\ &= f_{\sigma} \cdot \left\{ k_b (I \otimes I) \dot{\epsilon}^{\circ} + 2\mu II \dot{\epsilon}^{\circ} - \frac{2\mu}{3} (I \otimes I) \dot{\epsilon}^{\circ} \right\} \\ &= k_b (\dot{\epsilon}^{\circ} \cdot I) f_{\sigma} \cdot I + 2\mu f_{\sigma} \cdot II \dot{\epsilon}^{\circ} - \frac{2\mu}{3} (\dot{\epsilon}^{\circ} \cdot I) f_{\sigma} \cdot I \end{aligned}$$

porém, é possível demonstrar que $f_{\sigma} \cdot I = \text{tr}(f_{\sigma}) = 0$. Portanto:

$$f_{\sigma} \cdot C \dot{\epsilon}^{\circ} = 2\mu f_{\sigma} \cdot \dot{\epsilon}^{\circ} \quad (1a)$$

b-) desenvolvendo-se agora o denominador

$$f_{\sigma} \cdot Cf_{\sigma} = f_{\sigma} \cdot \left\{ k_b (I \otimes I) + 2\mu \left[II - \frac{1}{3} (I \otimes I) \right] \right\} f_{\sigma}$$

$$f_{\sigma} \cdot Cf_{\sigma} = f_{\sigma} \cdot \left\{ k_b (f_{\sigma} \cdot I) I + 2\mu II f_{\sigma} - \frac{2\mu}{3} (f_{\sigma} \cdot I) I \right\} = f_{\sigma} \cdot (0 + 2\mu f_{\sigma} - 0)$$

$$f_{\sigma} \cdot Cf_{\sigma} = 2\mu f_{\sigma} \cdot f_{\sigma} = 2\mu \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|} \cdot \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|} = 2\mu \quad (1b)$$

$$\frac{\sigma'}{\|\sigma'\|} \cdot \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|} = 1$$

Com uma substituição direta das expressões 1a,b na expressão da taxa de λ , obtém-se:

$$\dot{\lambda} = \frac{2\mu f_{\sigma} \cdot \dot{\varepsilon}^{\circ}}{2\mu} = f_{\sigma} \cdot \dot{\varepsilon}^{\circ} = n \cdot \dot{\varepsilon}^{\circ} \quad (2)$$

A determinação do Módulo Tangente Elasto-plástico, agora com base na expressão 11.4 do capítulo 11, faz-se pelo procedimento

$$C^{ep} = C - \frac{Cf_{\sigma} \otimes Cf_{\sigma}}{f_{\sigma} \cdot Cf_{\sigma} + f_q \cdot h} = k_b I \otimes I + 2\mu \left(II - \frac{1}{3} I \otimes I \right) - \frac{Cf_{\sigma} \otimes Cf_{\sigma}}{f_{\sigma} \cdot Cf_{\sigma}}$$

Como já deduzido para o multiplicador plástico, $Cf_{\sigma} = 2\mu f_{\sigma} = 2\mu n$. Dessa informação, escreve-se:

$$Cf_{\sigma} \otimes Cf_{\sigma} = 4\mu^2 n \otimes n \quad (3a)$$

portanto, determina-se

$$C^{ep} = k_b I \otimes I + 2\mu \left(II - \frac{1}{3} I \otimes I \right) - \frac{4\mu^2 n \otimes n}{2\mu} = k_b I \otimes I + 2\mu \left(II - \frac{1}{3} I \otimes I \right) - 2\mu n \otimes n$$

$$\therefore C^{ep} = k_b I \otimes I + 2\mu \left(II - \frac{1}{3} I \otimes I - n \otimes n \right) \quad (3b)$$

APÊNDICE 5

DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS " λ e C^p " PARA PLASTICIDADE COM ENCRUAMENTO COMBINADO VIA CRITÉRIO DE VON MISES (J_2)

A determinação da lei de fluxo para a variável interna referente ao encruamento isótropo, toma como ponto de partida, analogamente à análise unidimensional, a relação

$$\alpha = \|\dot{\varepsilon}^{vp}\| \quad (1a)$$

a qual, juntamente com 11.11 do capítulo 11, permite determinar

$$\alpha = \|\dot{\varepsilon}^{vp}\| = \sqrt{\dot{\lambda} \frac{\eta}{\|\eta\|} \cdot \dot{\lambda} \frac{\eta}{\|\eta\|}} = \sqrt{\dot{\lambda}^2} = \dot{\lambda} \quad (1b)$$

Analogamente, determina-se a lei de fluxo para a variável interna referente ao encruamento cinemático, onde associa-se q_2 (variável e respectiva expressão, apresentada no apêndice 3 do presente trabalho) à q' , tal que:

$$\dot{q}_2 = \dot{q}' = -\dot{\lambda}_H \frac{\partial f}{\partial q'} = -\dot{\lambda}_H \frac{1}{2} \frac{2(\sigma - \frac{1}{3} \text{tr}[\sigma] - q')}{[(\sigma - \frac{1}{3} \text{tr}[\sigma] - q') \cdot (\sigma - \frac{1}{3} \text{tr}[\sigma] - q')]^{\frac{1}{2}}} \quad (-1)$$

finalmente

$$\dot{q}' = \dot{\lambda}_H \frac{\sigma' - q'}{\|\sigma' - q'\|} = \dot{\lambda}_H \frac{\eta}{\|\eta\|} = \dot{\lambda}_H n \quad (1c)$$

onde H é módulo de encruamento cinemático.

Ressalta-se, no entanto, que as expressões de fluxo para a variável deformação plástica (apresentada no capítulo 11) e variáveis de encruamento, apesar de terem sido deduzidas de forma correta podem, quando estudadas com referência a uma solitação uniaxial, não apresentarem correspondência com o caso unidimensional.

Fica claro que, a particularização à uma situação de solitação uniaxial, permite reescrever as expressões do referido capítulo, pelo procedimento:

$$\eta = \sigma' - \alpha' = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(\sigma - \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}(\sigma - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(\sigma - \alpha) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}(\sigma - \alpha) \\ -\frac{1}{3}(\sigma - \alpha) \\ -\frac{1}{3}(\sigma - \alpha) \end{Bmatrix}$$

resultando em:

$$\|\eta\| = \sqrt{\eta \cdot \eta} = \sqrt{\frac{4}{9}(\sigma - \alpha)^2 + \frac{1}{9}(\sigma - \alpha)^2 + \frac{1}{9}(\sigma - \alpha)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}|\sigma - \alpha|$$

de modo que, reescreve-se o critério apresentado no item 11.1.2 do capítulo 11 na forma

$$f(\sigma, \alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}}|\sigma - \alpha| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + K\alpha) \leq 0 \quad (2a)$$

Nota-se que 2a é multiplicada por uma constante extra, $\sqrt{2/3}$, quando comparada à expressão 8.5a, apresentada no capítulo 8. Nesse sentido, faz-se necessária uma verificação análoga com referência às expressões de fluxo, as quais devem recuperar a expressão do critério particularizado. Assim, procede-se:

a-) Para a taxa de deformação plástica (apresentada no item 11.1.2, capítulo 11):

$$\dot{\varepsilon}^{\circ P} = \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_1^{\circ P} \\ \dot{\varepsilon}_2^{\circ P} \\ \dot{\varepsilon}_3^{\circ P} \end{Bmatrix} = \dot{\lambda}^{\circ} \frac{\eta}{\|\eta\|} = \dot{\lambda}^{\circ} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}|\sigma-q|}} \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}(\sigma-q) \\ -\frac{1}{3}(\sigma-q) \\ -\frac{1}{3}(\sigma-q) \end{Bmatrix} = \dot{\lambda}^{\circ} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{Bmatrix} \sin(\sigma-q) \\ -\frac{1}{2}\sin(\sigma-q) \\ -\frac{1}{2}\sin(\sigma-q) \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \dot{\varepsilon}_1^{\circ P} = \dot{\varepsilon}^{\circ P} = \dot{\lambda}^{\circ} \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\sigma-q)$$

porém, da expressão do critério, é possível demonstrar que $f_{\sigma} = (2/3)^{0.5} \sin(\sigma-q)$. Desse modo:

$$\dot{\varepsilon}_1^{\circ P} = \dot{\varepsilon}^{\circ P} = \dot{\lambda}^{\circ} \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\sigma-q) = \dot{\lambda}^{\circ} f_{\sigma} \quad (2b)$$

Uma análise com referência à expressão 2b, permite observar uma correspondência direta com a análise unidimensional.

b-) Para a variável de encruamento isótropo (apresentada no item 11.1.2):

$$\alpha = \|\dot{\varepsilon}^{\circ P}\| = \sqrt{\dot{\varepsilon}_1^{\circ P} \cdot \dot{\varepsilon}_1^{\circ P}} = \sqrt{\left\{ \dot{\varepsilon}_1^{\circ P} \quad -\frac{\dot{\varepsilon}_1^{\circ P}}{2} \quad -\frac{\dot{\varepsilon}_1^{\circ P}}{2} \right\} \cdot \left\{ \dot{\varepsilon}_1^{\circ P} \quad -\frac{\dot{\varepsilon}_1^{\circ P}}{2} \quad -\frac{\dot{\varepsilon}_1^{\circ P}}{2} \right\}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\varepsilon}_1^{\circ P}$$

Uma análise com referência à essa expressão, permite afirmar que para garantir uma correspondência direta com a análise unidimensional, basta que a expressão 1b seja multiplicada por $\sqrt{(2/3)}$.

c-) Para a variável de encr. cinemático (apresentada no item 11.1.2, capítulo 11):

Tomando-se como base a expressão 1c, proposta como lei de evolução para o encruamento cinemático, demonstra-se que para o caso unidimensional tal lei deve se reduzir a forma

$$\dot{q} = H \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\sigma - q) \quad (2c)$$

No entanto, para o caso de sollicitação uniaxial, obtém-se

$$\dot{q}' = \begin{Bmatrix} \dot{q}'_1 \\ \dot{q}'_2 \\ \dot{q}'_3 \end{Bmatrix} = \dot{\lambda} H \frac{\eta}{\|\eta\|} = H \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{Bmatrix} \sin(\sigma - q) \\ -\frac{1}{2} \sin(\sigma - q) \\ -\frac{1}{2} \sin(\sigma - q) \end{Bmatrix}$$

$$\dot{q}'_1 = \dot{q} = H \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\sigma - q) \quad (2d)$$

Com referência às expressões 2c e 2d, uma vez iguais, nota-se que para garantir uma correspondência direta com a análise unidimensional, basta que 1c seja multiplicada por 2/3, para garantir admissível a parcela $2q/3$, usada em $\eta = \sigma' - q'$, quando da determinação da expressão 2a. Portanto, das considerações abordadas, escrevem-se as expressões finais de fluxo para o modelo em questão, nas formas:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\eta}{\|\eta\|} = \dot{\lambda} n \quad (3a)$$

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda} \quad (3b)$$

$$\mathbf{q}' = \frac{2}{3} H \lambda^{\circ} \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} = \frac{2}{3} H \lambda^{\circ} \mathbf{n} \quad (3c)$$

Com referência a uma determinação das expressões finais de λ e C^p , parte-se de um procedimento análogo àquele utilizado no caso da plasticidade perfeita. Para o multiplicador plástico, têm-se:

$$\lambda^{\circ} = \frac{\langle \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \cdot C \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\circ} \rangle}{\frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \cdot C \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} + \partial_{\mathbf{q}} f \cdot h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})} = \frac{2\mu \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\circ}}{2\mu + \partial_{\mathbf{q}} f \cdot h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})} = \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\circ}}{1 + \frac{1}{2\mu} \partial_{\mathbf{q}} f \cdot D \partial_{\mathbf{q}} f}$$

resolve-se o denominador da expressão apresentada, pelo procedimento

$$\partial_{\mathbf{q}} f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial K \alpha} \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\mathbf{n} \end{Bmatrix}$$

e portanto

$$\partial_{\mathbf{q}} f \cdot D \partial_{\mathbf{q}} f = \left\{ -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad -\mathbf{n} \right\}^T \cdot \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\mathbf{n} \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} (K+H)$$

obtendo-se, finalmente

$$\lambda^{\circ} = \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\circ}}{1 + \frac{1}{2\mu} \partial_{\mathbf{q}} f \cdot h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})} = \left(1 + \frac{K+H}{3\mu} \right)^{-1} \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\circ} \quad (4a)$$

Para a determinação da expressão final do Módulo tangente Elasto-plástico, procede-se:

$$C^{ep} = C - \frac{C \cdot f_{\sigma} \otimes C \cdot f_{\sigma}}{\partial_{\sigma} f \cdot C f_{\sigma} + \partial_q f \cdot h} = k_b I \otimes I + 2\mu \left(II - \frac{1}{3} I \otimes I \right) - \frac{4\mu^2 n \otimes n}{2\mu + \frac{2}{3}(K+H)}$$

Finalmente, com um rearranjo conveniente, escreve-se

$$C^{ep} = k_b I \otimes I + 2\mu \left[II - \frac{1}{3} I \otimes I - \frac{n \otimes n}{1 + \left(\frac{H + K}{3\mu} \right)} \right] \quad (4b)$$

APÊNDICE 6

EXPRESSÕES PARA A TENSÃO E SUA PARCELA DESVIADORA (EM 3-D): PROCEDIMENTO ALTERNATIVO

As expressões de tensão e sua parcela desviadora, tanto no estado real como no auxiliar, apresentadas no capítulo 12, podem ser reescritas em formas alternativas. Primeiramente, para o estado auxiliar:

$$\sigma_{n+1}^{aux} = C(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^P) = [k_b(I \otimes I) + 2\mu(I I - \frac{1}{3}I \otimes I)](\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^P)$$

$$\sigma_{n+1}^{aux} = 2\mu\varepsilon_{n+1} - 2\mu\varepsilon_n^P + k_b \text{tr}(\varepsilon_{n+1}) I - k_b \text{tr}(\varepsilon_n^P) I - \frac{2\mu}{3} \text{tr}(\varepsilon_{n+1}) I + \frac{2\mu}{3} \text{tr}(\varepsilon_n^P) I$$

mas sabe-se que $\text{tr}(\varepsilon^P) = 0$. Desse modo

$$\sigma_{n+1}^{aux} = 2\mu \left[\left(\varepsilon_{n+1} - \frac{1}{3} \text{tr}(\varepsilon_{n+1}) I \right) - \left(\varepsilon_n^P - \frac{1}{3} \text{tr}(\varepsilon_n^P) I \right) \right] + k_b \text{tr}(\varepsilon_{n+1}) I$$

$$\sigma_{n+1}^{aux} = 2\mu(\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^P) + k_b \text{tr}(\varepsilon_{n+1}) I \quad (1a)$$

Ainda, no referente à parcela desviadora, sabendo-se que vale da elasticidade linear a relação $\text{tr}(\sigma_{n+1}) = [3\lambda + 2\mu]\text{tr}(\varepsilon_{n+1}) = [3k_b]\text{tr}(\varepsilon_{n+1})$, procede-se

$$\sigma_{n+1}^{aux} = \sigma_{n+1}^{aux} - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma_{n+1}^{aux}) I = 2\mu(\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^P) + k_b \text{tr}(\varepsilon_{n+1}) I - \frac{1}{3} [3k_b] \text{tr}(\varepsilon_{n+1}) I$$

$$\sigma'_{n+1}{}^{aux} = 2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^P) = 2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^P) \quad (1b)$$

Através de um procedimento análogo, é possível obter as expressões no estado real, escritas em formas alternativas. Desse modo, vale para a tensão:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = k_b \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) I + 2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^P) = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) I + 2\mu (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^P) \quad (1c)$$

ou ainda, numa outra variante, escreve-se

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = k_b \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) I + 2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^P) = k_b \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) I + 2\mu \left[\mathbf{e}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^P + \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^P) I \right]$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = k_b \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) I + 2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^P - \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}) = k_b \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) I + 2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^P) - 2\mu \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}$$

da relação 1b, escreve-se finalmente

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = k_b \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) I + \sigma'_{n+1}{}^{aux} - 2\mu \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1} \quad (1d)$$

No referente à parcela desviadora do tensor de tensões, também com base na relação 1b, procede-se

$$\sigma'_{n+1} = 2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^P) = 2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^P - \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1})$$

$$\sigma'_{n+1} = 2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^P) - 2\mu \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1} = \sigma'_{n+1}{}^{aux} - 2\mu \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1} \quad (1e)$$

Outras relações de interesse para os desenvolvimento do capítulo 12, referem-se ao vetor unitário $\mathbf{n}_{n+1} = \boldsymbol{\eta}_{n+1} / \|\boldsymbol{\eta}_{n+1}\|$. Em uma primeira etapa desenvolve-se, com base na

expressão 12.3, a seguinte relação:

$$\eta_{n+1} = \sigma'_{n+1} - \mathbf{q}'_{n+1} = \sigma'_{n+1}{}^{aux} - 2\mu\lambda_{n+1}n_{n+1} - \mathbf{q}'_{n+1} = \eta_{n+1}{}^{aux} + \mathbf{q}'_n - 2\mu\lambda_{n+1}n_{n+1} - \mathbf{q}'_{n+1}$$

$$\eta_{n+1} = \eta_{n+1}{}^{aux} - 2\mu\lambda_{n+1}n_{n+1} - (\mathbf{q}'_{n+1} - \mathbf{q}'_n) = \eta_{n+1}{}^{aux} - 2\mu\lambda_{n+1}n_{n+1} - \frac{2}{3}H\lambda_{n+1}n_{n+1}$$

e portanto

$$\eta_{n+1} = \eta_{n+1}{}^{aux} - (2\mu + \frac{2}{3}H)\lambda_{n+1}n_{n+1} \quad (2a)$$

da relação $\mathbf{n}_{n+1} = \eta_{n+1}/\|\eta_{n+1}\|$, faz-se $\eta_{n+1} = \|\eta_{n+1}\|\mathbf{n}_{n+1}$. Desse modo:

$$\|\eta_{n+1}\| n_{n+1} = \eta_{n+1}{}^{aux} - (2\mu + \frac{2}{3}H)\lambda_{n+1}n_{n+1} \rightarrow \|\eta_{n+1}\| n_{n+1} + (2\mu + \frac{2}{3}H)\lambda_{n+1}n_{n+1} = \eta_{n+1}{}^{aux}$$

$$[\|\eta_{n+1}\| + (2\mu + \frac{2}{3}H)\lambda_{n+1}] n_{n+1} = \eta_{n+1}{}^{aux} \quad (2b)$$

mas, de 2a, é possível demonstrar que

$$\eta_{n+1} = \eta_{n+1}{}^{aux} - (2\mu + \frac{2}{3}H)\lambda_{n+1}n_{n+1} \rightarrow \eta_{n+1}{}^{aux} = \eta_{n+1} + (2\mu + \frac{2}{3}H)\lambda_{n+1}n_{n+1}$$

$$\|\eta_{n+1}{}^{aux}\| = \|\eta_{n+1}\| + \|(2\mu + \frac{2}{3}H)\lambda_{n+1}n_{n+1}\| = \|\eta_{n+1}\| + (2\mu + \frac{2}{3}H)\lambda_{n+1}\|n_{n+1}\|$$

$$\therefore \|\eta_{n+1}{}^{aux}\| = \|\eta_{n+1}\| + (2\mu + \frac{2}{3}H)\lambda_{n+1} \quad (2c)$$

com uma substituição de 2c em 2b, resulta que

$$\| \eta_{n+1}^{aux} \| \cdot n_{n+1} = \eta_{n+1}^{aux} \rightarrow n_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}^{aux}}{\| \eta_{n+1}^{aux} \|} \quad (2d)$$

demonstra-se ainda, da relação $\eta_{n+1} = \| \eta_{n+1} \| \mathbf{n}_{n+1}$, que

$$\| \eta_{n+1} \| \cdot n_{n+1} = \eta_{n+1} \rightarrow \| \eta_{n+1} \| \cdot n_{n+1} \cdot n_{n+1} = \eta_{n+1} \cdot n_{n+1}$$

$$\| \eta_{n+1} \| = \eta_{n+1} \cdot n_{n+1} \quad (2e)$$

APÊNDICE 7

DETERMINAÇÃO DAS EXPRESSÕES DE INTERESSE PARA A OBTENÇÃO DO MÓDULO ALGORÍTMICO TANGENTE

A expressão 1, apresentada no capítulo 12, é representativa do módulo algorítmico tangente elasto-viscoplástico, escrito em sua forma intrínseca.

$$C_{n+1}^{ep} = C - 2\mu \left[n_{n+1} \otimes \frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} + \lambda_{n+1} \frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right] \quad (1)$$

A solução dessa expressão consiste basicamente no desenvolvimento separado das parcelas internas aos colchetes. Nesse sentido, procede-se:

a-) Solução individual da parcela $\partial \lambda / \partial \varepsilon$:

$$\frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{2\mu \left(1 + \frac{K+H}{3\mu} \right)} \frac{\partial f_{n+1}^{aux}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{2\mu \left(1 + \frac{K+H}{3\mu} \right)} \left(\frac{\partial \|\eta_{n+1}^{aux}\|}{\partial \sigma'_{n+1}^{aux}} \right) \left(\frac{\partial \sigma'_{n+1}^{aux}}{\partial e_{n+1}} \right) \left(\frac{\partial e_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right)$$

no referente aos termos entre parênteses, chega-se em:

$$\frac{\partial \|\eta_{n+1}^{aux}\|}{\partial \sigma'_{n+1}^{aux}} = \frac{\partial \|\sigma'_{n+1}^{aux} - \mathbf{q}'\|}{\partial \sigma'_{n+1}^{aux}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma'_{n+1}^{aux} - \mathbf{q}'}{\|\sigma'_{n+1}^{aux} - \mathbf{q}'\|} = \frac{\eta_{n+1}^{aux}}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} = n_{n+1}$$

$$\frac{\partial \sigma'_{n+1}{}^{aux}}{\partial \mathbf{e}_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}_{n+1}} [2\mu (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^P)] = 2\mu$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left[\varepsilon_{n+1} - \frac{1}{3} \text{tr}(\varepsilon_{n+1}) I \right] = \frac{\partial \varepsilon_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left[II - \frac{1}{3} (I \otimes I) \right] = II - \frac{1}{3} (I \otimes I)$$

portanto, obtém-se finalmente

$$\frac{\partial \lambda_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{2\mu \left(1 + \frac{K+H}{3\mu}\right)} 2\mu n_{n+1} = \left[1 + \frac{K+H}{3\mu}\right]^{-1} n_{n+1} \quad (2)$$

b-) Solução individual da parcela $\partial n / \partial \varepsilon$:

$$\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} (\|\eta_{n+1}^{aux}\|^{-1} \eta_{n+1}^{aux}) = \|\eta_{n+1}^{aux}\|^{-1} \frac{\partial \eta_{n+1}^{aux}}{\partial \varepsilon_{n+1}} + (-1) \|\eta_{n+1}^{aux}\|^{-2} \eta_{n+1}^{aux} \otimes \frac{\partial \|\eta_{n+1}^{aux}\|}{\partial \varepsilon_{n+1}}$$

$$\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} \frac{\partial \eta_{n+1}^{aux}}{\partial \varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|^2} \eta_{n+1}^{aux} \otimes \frac{\partial \|\eta_{n+1}^{aux}\|}{\partial \varepsilon_{n+1}}$$

com procedimento análogo ao do item a, obtém-se

$$\frac{\partial \eta_{n+1}^{aux}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left[2\mu \left(\varepsilon_{n+1} - \frac{1}{3} \text{tr}(\varepsilon_{n+1}) I - \mathbf{e}_n^P \right) - \mathbf{q}'_n \right] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left[2\mu \left(II - \frac{1}{3} I \otimes I \right) \varepsilon_{n+1} \right]$$

$$\therefore \frac{\partial \eta_{n+1}^{aux}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = 2\mu \left(II - \frac{1}{3} I \otimes I \right)$$

$$\frac{\partial \|\eta_{n+1}^{aux}\|}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial \|\sigma'_{n+1}{}^{aux} - q'\|}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{2} 2 \frac{\sigma'_{n+1}{}^{aux} - q'}{\|\sigma'_{n+1}{}^{aux} - q'\|} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} [2\mu (e_{n+1} - e_n^p)]$$

$$\therefore \frac{\partial \|\eta_{n+1}^{aux}\|}{\partial \varepsilon_{n+1}} = n_{n+1} [2\mu (II - \frac{1}{3} I \otimes I)] \frac{\partial \varepsilon_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = [2\mu (II - \frac{1}{3} I \otimes I)] n_{n+1} = 2\mu n_{n+1}$$

finalmente

$$\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{2\mu}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} (II - \frac{1}{3} I \otimes I) = \frac{1}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} \frac{\eta_{n+1}^{aux}}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} \otimes 2\mu n_{n+1}$$

ou ainda

$$\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{2\mu}{\|\eta_{n+1}^{aux}\|} (II - \frac{1}{3} I \otimes I - n_{n+1} \otimes n_{n+1}) \quad (3)$$

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

*DOCUMENTAÇÃO ELABORADA PARA A UTILIZAÇÃO DOS CÓDIGOS DE
CÁLCULO SIMAB.FOR, SIMAT.FOR E SIMAP.FOR, REFERENTES
À TESE DE DOUTORADO:*

**UM ESTUDO DA FORMULAÇÃO DE MODELOS
CONSTITUTIVOS VISCOELÁSTICOS E
ELASTOVISCOPLÁSTICOS E DO EMPREGO DE ALGORITMOS
IMPLÍCITOS E EXPLÍCITOS PARA A SUA INTEGRAÇÃO
NUMÉRICA.**

**Autor: Jorge Munaiar Neto
Orientador: Sérgio Persival Baroncini Proença**

Julho de 1998

SUMÁRIO

1-) COMENTÁRIOS PRELIMINARES.....	01
2-) FERRAMENTAS UTILIZADAS NA ELABORAÇÃO DOS CÓDIGOS DE CÁLCULO	01
3-) CÓDIGOS DE CÁLCULO SIMAB.FOR E SIMAT.FOR - SUBROTINAS UTILIZADAS E ARQUIVOS DE DADOS DE ENTRADA	02
3.1-) <i>Subrotinas Utilizadas e Aspectos de interesse</i>	02
3.2-) <i>Arquivos dos Dados de Entrada</i>	04
4-) CÓDIGO DE CÁLCULO SIMAP.FOR - SUBROTINAS UTILIZADAS E ARQUIVOS DE DADOS DE ENTRADA	08
4.1-) <i>Subrotinas Utilizadas e Aspectos de interesse</i>	08
4.2-) <i>Arquivos dos Dados de Entrada</i>	12

1-) Comentários Preliminares

Em algumas obras da engenharia civil, uma avaliação da evolução dos esforços ao longo do tempo é de fundamental importância na elaboração de projetos mais seguros e econômicos.

Pode-se citar o caso de *escavação de túneis em solos ou rochas*, por exemplo, onde uma pesquisa com referência à evolução das deformações com o tempo permite determinar a quantidade de deformações que o maço pode sofrer sem que ocorra uma eventual ruptura do material que o constitui. Consequentemente, permite determinar o instante de tempo após a escavação em que revestimentos nas formas de concreto projetado (revestimento provisório ou definitivo) ou cambotas metálicas (revestimento definitivo), sejam aplicados à estrutura.

O estudo da evolução dos esforços ao longo do tempo também pode ser direcionados a sistemas estruturais ou elementos estruturais (ou mecânicos), compostos por materiais como *concreto* (deformações viscoelásticas), *polímeros e madeiras* (deformações viscoplásticas), *metais ou ligas* submetidos à altas temperaturas (deformações viscoplásticas), *borrachas ou similares*, etc.

2-) Ferramentas Utilizadas na Elaboração dos códigos de cálculo

Com o interesse de simular numericamente fenômenos dependentes do tempo, foram estudados modelos constitutivos viscoelásticos e viscoplásticos, a partir da Reologia dos Materiais, onde foram associados elementos reológicos básicos *mola, sólido e amortecedor*, objetivando a determinação de expressões de fluxo (na forma taxa), com referência às deformações em regimes viscoelástico e viscoplástico.

Utilizando-se de um procedimento implícito de integração numérica para um passo de tempo arbitrário, as expressões de fluxo para as deformações dos regimes mencionados, resultaram em expressões na forma incremental.

Finalmente, adotando-se como ponto de partida códigos de cálculo que utilizam um mecanismo incremental-iterativo para a busca das sucessivas situações de equilíbrio,

tais expressões foram, nesses mesmos códigos, implementadas. Como resultado final, foram elaborados:

SIMAB.FOR: código de cálculo, em linguagem Fortran, para o estudo de ***barras*** em regimes *elástico, viscoelástico ou viscoplástico*. Combinações entre os três regimes em questão podem ser consideradas.

SIMAT.FOR: código de cálculo, em linguagem Fortran, para o estudo de ***treliças planas*** em regimes *elástico, viscoelástico ou viscoplástico*. Combinações entre os três regimes em questão podem ser consideradas.

SIMAP.FOR: código de cálculo, em linguagem Fortran, para o estudo de ***sistemas estruturais*** em análises planas, para os regimes *elástico, viscoelástico ou viscoplástico*. Combinações entre os três regimes em questão podem ser consideradas.

Em todos os códigos de cálculo anteriormente mencionados, foi utilizado o Método dos Elementos Finitos, objetivando a determinação dos deslocamentos nodais ou de seus incrementos.

No caso do código ***Simab.for***, utilizou-se elementos de barra com um grau de liberdade por nó. Para o código de cálculo ***Simat.for***, utilizou-se elementos de barra com dois graus de liberdade por nó. Finalmente, para o código de cálculo ***Simap.for***, foram utilizados elementos retangulares de 4, 8 ou 9 nós por elemento.

3-) Códigos de cálculo Simab.for e Simat.for - subrotinas utilizadas e arquivo de dados de entrada

3.1-) Subrotinas Utilizadas e Aspectos de Interesse

Apresentam-se, a seguir, as subrotinas referentes aos códigos de cálculo SIMAB.FOR e SIMAT.FOR, bem como suas respectivas funções, numa ordem

associada à sequência de operações realizadas dentro dos mesmos:

- **SUBROTINA DADOS:** É através dessa subrotina que se faz a leitura dos dados de entrada do programa, como por exemplo, dados de controle, parâmetros do material ou materiais, coordenadas dos nós, incidência das barras, carregamentos externos, etc. Para tanto, usa-se um arquivo previamente elaborado pelo usuário: "*Dados-BA*" e "*Dados-TA*", para simab.for e simat.for, respectivamente.

- **SUBROTINA INICIAL:** Essa subrotina tem a função de zerar as variáveis acumulativas utilizadas nos programas, como tensões, deformações, deslocamentos, reações, etc.

- **SUBROTINA CARGAS:** Através dos arquivos de entrada, faz-se a leitura dos dados aos incrementos de carga, número total de iterações por incremento e o valor da tolerância para a convergência dos resultados.

- **SUBROTINA ALGORIT:** Através dessa subrotina, atualiza-se ou não a rigidez global da estrutura. Em caso de uma atualização da rigidez, selecionam-se as etapas em que ela será considerada durante o processo incremental-iterativo.

- **SUBROTINA MONTAGE:** Utiliza os dados das matrizes de rigidez de cada elemento para a montagem da matriz de rigidez global da estrutura e montagem do vetor global de forças nodais equivalentes. Faz ainda o cálculo do módulo algorítmico tangente, por barra, para instantes de tempo $n+1$ e no infinito.

- **SUBROTINAS GREDEC, RESOLV E BAKSUB:** Resolvem o sistema de equações $\{F\}=[K]\{\delta\}$, fornecendo os valores de deslocamentos parcial e total dos nós da treliça, após cada iteração.

- **SUBROTINA INCVP:** Nessa subrotina, faz-se o cálculo dos valores de tensão, da deformação total e das deformações viscoelástica e viscoplástica, todos em $n+1$. Define também o residual de forças e verifica a ocorrência ou não da convergência, com base

na minimização dos incrementos de deformações viscoelástica e viscoplástica.

● **SUBROTINA RESULT:** É através dela que se obtém a saída dos resultados globais do código de cálculo, como dos deslocamentos dos nós, da tensão total e das deformações total, viscoelástica e viscoplástica. Todos esses valores são apresentados ao usuário através de arquivos de saída denominados "*Saída-ba*" e "*Saída-ta*", para *simab.for* e *simat.for*, respectivamente.

Deve-se ressaltar, com relação aos códigos de cálculos *Simab.for* e *Simat.for*, os seguintes aspectos numéricos:

a-) No código de cálculo *Simab.for*, as análises de barras podem ser feitas apenas por meio de um procedimento implícito de integração, com as seguintes limitações:

Número máximo de elementos permitidos = 50

Número máximo de nós permitidos = 100

Número máximo de nós restritos = 80

Número máximo de materiais diferentes = 10

b-) No código de cálculo *Simat.for*, as análises de treliças planas podem ser feitas apenas por meio de um procedimento implícito de integração, com as seguintes limitações:

Número máximo de elementos permitidos = 100

Número máximo de nós permitidos = 200

Número máximo de nós restritos = 80

Número máximo de materiais diferentes = 10

3.2-) Arquivos dos Dados de entrada

Os arquivos dos códigos de cálculo *Simab.for* e *Simat.for*, são elaborados de modo formatado, ou seja, os comandos de leitura devem respeitar posições previamente estabelecidas para os valores de coordenadas nodais, incidências dos elementos, vinculações, etc. Para o programa *Simab.for*, é utilizado o arquivo *Dados-ba*, na forma:

EXEMPLO: BARRA TRACIONADA - 4 ELEM - ANÁLISE DO MODELO COMPLETO

DADOS DE CONTROLE DO PROGRAMA:

NNO NEL NNR NMD NPR NPE INC ALG GLN OPC NPL NEC
 5 4 1 1 8 2 2 1 1 1 1 1

M ELASTIC.1 AREA ESCOAM. M.CINEM(H) M.PLAST(K) GAMAVP
 ELASTIC.2 GAMAVE
 1 10000.0000 1.0000 10.0000 0.0000 5000.0000 0.001000
 9500.0000 0.000900

INCIDENCIA DOS ELEMENTOS

EL NOi NOf MAT
 1 1 2 1
 2 2 3 1
 3 3 4 1
 4 4 5 1

COORDENADAS DOS NOS

NO COORDENADA
 1 0.00000
 2 2.50000
 3 5.00000
 4 7.50000
 5 10.00000

NOS COM RESTRICAO AO DESLOCAMENTO

NO COD VALOR PR
 1 1 0.00000

CARREGAMENTOS nos NOS DOS ELEMENTOS

EL CARGA NOi CARGA NOf
 4 0.00000 15.00000
 0.10000 1.00000 linha 1
 90000 1 0.50000 0.001000000000 linha 2
 90000 1 0.50000 0.001000000000 linha 3

onde valem:

NNO, NEL e NNR : número total de nós, número total de elementos e número de nós restritos.

NMD, NPR e NPE : número total de materiais diferentes, número máximo de propriedades por material (8) e número de nós por elemento.

INC, ALG e GLN : número de incrementos de carga, tipo de atualização de rigidez estrutural (1-cte ou 3-variável, a cada iteração) e número de graus de liberdade por nó.

OPC: (1) - consideração de def. viscoelásticas após início das def. viscoplásticas.

(2) - desconsideração de def. viscoelásticas após início das def. viscoplásticas

NPL : elemento a ser monitorado em particular, caso a barra tenha sido discretizada em mais de um elemento. Os resultados são apresentados em arquivos de dados complementares: Plan1.ba, Plan2-ba e Plan3-ba.

NEC : número de elementos carregados.

ELASTIC.1, ELASTIC.2: mód. de elasticidade para regimes elástico e v_elástico.

AREA, ESCOAM : área da barra e tensão de escoamento do material.

H, K : módulos de encruamento cinemático e plástico, respectivamente.

GAMAVE, GAMAVP: coeficientes de fluidez para regimes v_elástico e v_plástico.

EL, Noi, Nof, MAT: elemento, nó inicial, nó final e tipo de material.

NO, COORDENADA: nó e sua respectiva coordenada global em (direção x).

NO, COD, VALOR PR: nó, código de restrição (0-livre e 1-restrito) e seu valor de restrição ao deslocamento.

EL, CARGA Noi, CARGA Nof: elemento carregado, carga no nó inicial e carga no nó final.

linha 1: passo de tempo e multiplicador do passo de tempo.

linha 2 e 3: número de iterações, código de saída dos resultados (1-deslocamentos, 2-deslocamentos e reações e 3-deslocamentos, reações e esforços), incremento de carga e tolerância para a convergência.

Para o programa Simat.for, é utilizado o arquivo Dados-ta, análogo ao arquivo Dados-ba, sendo que as diferenças básicas referem-se a inclusão da direção y para as

coordenadas, restrições aos deslocamentos (vínculos) e carregamentos nos nós dos elementos:

EXEMPLO: TRELICA PLANA / ANÁLISE ELASTO-VISCOPLASTICA

DADOS DE CONTROLE DO PROGRAMA:

NNO NEL NEC NNR NMD NPR NPE INC ALG GLN OPC PLN

6 5 1 5 1 8 2 1 1 2 1 3

M ELASTIC.1 AREA ESCOAM. M.CINEM(H) M. PLAST GAMAVP

ELASTIC.2 GAMAVE

1 2000.0000 10.0000 4.0000 0.0000 250.0000 0.002000
2000.0000 0.001500

INCIDENCIA DOS ELEMENTOS

EL NOi NOf MAT

1 1 2 1

.

.

.

5 1 6 1

COORDENADAS DOS NOS NAS DIRECOES X E Y

NO COORDENADA

1 500.00000 0.00000

.

.

.

6 1000.00000 450.00000

NOS COM RESTRICAO AO DESLOCAMENTO(X,Y)

NO COD VALOR PR

2 1 0.00000 1 0.00000

.

.

.

6 1 0.00000 1 0.00000

CARREGAMENTOS nos NOS DOS ELEMENTOS NAS DIRECOES X E Y

EL	FX-NOi	FY-NOi	FX-NOF	FY-NOF	
3	0.0000	-180.0000	0.0000	0.0000	
0.05000	1.00000			linha 1
90000	1	1.00000	0.00010000000	linha 2
90000	1	0.50000	0.00010000000	linha 3

4-) Códigos de cálculo Simap.for - subrotinas utilizadas e arquivo de dados de entrada

4.1-) Subrotinas Utilizadas e Aspectos de Interesse

Apresentam-se, a seguir, as subrotinas referentes ao código de cálculo Simap.for, bem como suas respectivas funções, numa ordem associada à sequência de operações realizadas dentro de 8 (oito) sub-programas ou blocos, como apresentados no que segue.

● ***SUB-PROGRAMA 1 ⇒ DATAG.FOR - Incorpora as Subrotinas:***

● ***SUBROTINA INPUT:*** É por essa subrotina que se faz a leitura dos dados de entrada do programa, como por exemplo, dados de controle, parâmetros do material ou materiais, coordenadas dos nós, incidência das barras, carregamentos externos, etc. Para tanto, usa-se um arquivo "***Dados-ap***", previamente elaborado pelo usuário, cuja consistência é verificada pelas subrotinas descritas a seguir, nesse bloco.

● ***SUBROTINA CHECK1:*** Essa subrotina faz a checagem dos dados de controle do programa, fornecidos em "***Dados-ap***" e informa sobre os possíveis erros detectados.

● ***SUBROTINA CHECK2:*** Essa subrotina faz a checagem dos demais dados de entrada do programa, referentes às vinculações, propriedades dos materiais, dos elementos, coordenadas dos nós, etc.

● ***SUBROTINA NODEXY:*** É através dessa subrotina que se faz uma interpolação para obter os nós intermediários para elementos de 4 nós (generalizado para 8 nós) ou centrais para elementos de 8 nós (generalizado para 9 nós).

- ***SUBROTINA GAUSSQ:*** É através dessa subrotina que se determina os pontos de integração de Gauss com os respectivos parâmetros peso para cada elemento da malha.

- ***SUBROTINA DIMEN:*** Inicializa os parâmetros associados ao dimensionamento dinâmico, com valores de indexação previamente definidos pelo usuário, como por exemplo, número máximo de elementos permitidos, número máximo de nós, largura de banda máxima, etc.

- ***SUB-PROGRAMA 2 ⇒ CARGAS.FOR - Incorpora as Subrotinas:***

- ***SUBROTINA SFR2:*** Essa subrotina calcula as funções de forma e suas respectivas derivadas, para elementos retangulares de 4, 8 e 9 nós.

- ***SUBROTINA JACOB2:*** Essa subrotina gera os elementos da matriz Jacobiana e as derivadas cartesianas.

- ***SUBROTINA LOADG:*** Essa subrotina monta o vetor de forças, para o qual admite-se cargas concentradas nos nós dos elementos, cargas gravimétricas (peso próprio) e cargas distribuídas nos lados dos elementos.

- ***SUB-PROGRAMA 3 ⇒ ALGINC.FOR - Incorpora as Subrotinas:***

- ***SUBROTINA ZERO:*** Essa subrotina inicializa com zero, algumas variáveis de interesse do programa, referentes às cargas, reações nos apoios, deslocamentos nos nós, tensões e deformações nos elementos.

- ***SUBROTINA INCREM:*** Faz o controle dos incrementos de carga (concentradas, gravimétricas ou distribuídas), aplicadas à estrutura.

- ***SUBROTINA ALGOR:*** Seleciona a forma como será atualizada (ou não) a matriz de rigidez global da estrutura, através de quatro opções definidas pelo usuário.

- ***SUB-PROGRAMA 4 ⇒ SOLSIS.FOR - Incorpora as Subrotinas:***

- ***SUBROTINA MDELA:*** Calcula os elementos da matriz elástica D, para comportamento puramente elástico, sem penalização de rigidez, para os casos planos e o axissimétrico.

- ***SUBROTINA MDTAN:*** Calcula os elementos da matriz tangente D(t),

apenas para um comportamento viscoplástico (viscoelástico não implementado), apenas para os casos planos de tensão e deformação.

- ***SUBROTINA BMATPS***: Essa subrotina monta a matriz dos operadores B, que garante uma correlação deslocamento/deformação.

- ***SUBROTINA DBE***: Faz o produto entre as matrizes D e B.

- ***SUBROTINA SOLSIS***: Realiza a solução do sistema de equações, através do Método de Gauss.

- ***SUB-PROGRAMA 5 ⇒ VISCO1.FOR - Incorpora Subrotinas utilizadas apenas para procedimento explícito***

- ***SUBROTINA INVAR***: Calcula os invariantes de tensão e o valor corrente da função de escoamento, com base no critério de plastificação adotado pelo usuário.

- ***SUBROTINA TENEXP***: Calcula os incrementos de tensão e deformação total, para uma análise puramente elástica.

- ***SUBROTINA VEPEXP***: Essa subrotina faz o cálculo do vetor de fluxo viscoplástico, com base no critério de plastificação.

- ***SUBROTINA FLUEXP***: Determina as taxas e os incrementos de deformações viscoelástica e viscoplástica.

- ***SUBROTINA PROEXP***: Faz a chamada de todas as subrotinas apresentadas nesse bloco, bem como a determinação do passo de tempo seguinte e do residual de forças, para a próxima iteração.

- ***SUB-PROGRAMA 6 ⇒ VISCO2.FOR - Incorpora Subrotinas utilizadas apenas para procedimento implícito***

- ***SUBROTINA TENIMP***: Calcula os incrementos de tensão, de deformação total e da parcela desviadora do tensor de tensões, primeiramente para uma análise puramente elástica.

- ***SUBROTINA VARAUX***: Essa subrotina faz o cálculo das variáveis referentes ao estado auxiliar de tensões (ou puramente elástico), para verificação de uma possível ocorrência de plastificação.

- ***SUBROTINA FLUIMP***: Determina as taxas e os incrementos de

deformações viscoelástica e viscoplástica, bem como da viscoplástica acumulada. Calcula também as tensões reais e de retorno.

- **SUBROTINA PROIMP:** Faz a chamada de todas as subrotinas apresentadas nesse bloco, bem como a determinação do passo de tempo seguinte e do residual de forças, para a próxima iteração.

- **SUB-PROGRAMA 7 ⇒ CONVEP.FOR - Incorpora as Subrotinas**

- **SUBROTINA CONVER:** Verifica a convergência do programa, através da minimização dos incrementos de deformações viscoelástica e/ou viscoplástica.

- **SUBROTINA RESGLO:** Monta o arquivo de saída dos resultados globais do programa, denominado "*Saída-AP*".

- **SUB-PROGRAMA 8 ⇒ SIMAP.FOR (programa principal):** Faz a chamada de algumas das subrotinas apresentadas, bem como o controle dos loops referentes aos incrementos de carga e do número máximo de iterações. As subrotinas são chamadas na seguinte ordem de cálculo: *DIMEN*, *INPUT*, *LOADG*, *ZERO*, *INCREM*, *ALGOR*, *MATRIG*, *SOLSIS*, *PROEXP* (*explícito*) ou *PROIMP* (*implícito*), *CONVER* e *RESGLO*.

No código de cálculo *Simap.for*, as análises planas podem ser feitas por meio de um procedimento explícito de integração (são admitidos os critérios de Tresca, Von Mises, Mohr Coulomb ou Drucker-Prager) ou implícito de integração (é admitido apenas o critério de Von Mises), com as seguintes limitações:

Número máximo de elementos permitidos= 500

Número máximo de nós permitidos= 2500

Número máximo de nós restritos= 100

Número máximo de materiais diferentes= 20

Procedimento explícito permite análises do tipo= EPT, EPD ou Axiss, com passo de tempo constante ou variável.

Procedimento implícito permite análises do tipo= EPT e EPD, apenas para
passo de tempo constante

4.2-) Arquivo dos Dados de entrada

O arquivo do códigos de cálculo Simap.for, também foi elaborado de modo formatado, ou seja, os comandos de leitura devem respeitar posições previamente estabelecidas para os valores de coordenadas, incidências, vinculações, etc. Para o programa Simap.for, é utilizado o arquivo Dados-ap, na forma:

EXEMPLO 4 : CHAPA TRACIONADA / P (bars) / 2 CAMADAS / V_el e V_pl

Npoin Nelem Nvfix Ntype Nnode Nmats Ngaus Nalgo Ncrit Nincs Nstre

37 8 5 1 8 1 2 1 2 1 3

EI Mat No1 No2 No3 No4 No5 No6 No7 No8 No9

1 1 1 6 9 10 11 7 3 2

.

.

.

8 1 27 31 35 36 37 32 29 28

Nó Coordenada-X Coordenada-Y

1 0.0000 0.0000

2 0.0000 0.2500

3 0.0000 0.5000

.

.

.

37 10.0000 1.0000

N<-V Tipo DELTA-X DELTA-Y(TIPO: 10-X, 01-Y ou 11-XY)

1 11 0.0000 0.0000

2 11 0.0000 0.0000

3 11 0.0000 0.0000

4 11 0.0000 0.0000

5 11 0.0000 0.0000

```

MAT
MODULO E1  POISSON  ESPESS  PESO ESP  ESCOAM  MÓD_K
ANGL ATRI  GAMA VP  MÓD_H  FLUX @  MODULO E2  GAMA VE
1
10500.000  0.2400  1.0000  0.0000  110.0000  5500.0000
0.0000  0.0008000  0.0000  1.0000  29000.000  0.0000080

***** TIPOS DE CARREGAMENTOS - 0: NAO EXISTE / 1: EXISTE *****
***** CARGAS nos NOS GRAVIMETRICO LADOS CARREGADOS *****
0 0 1
1-) CARREGAMENTOS nos NOS DA ESTRUTURA.....: (NNOCA/NOCA,FX,FY)
_____
_____
_____
2-) CONSTANTES GRAVIMETRICAS.....: (THETA,GRAVY)
_____
_____
_____
3-) CARREGAMENTOS nos LADOS DO ELEMENTO.....: (NELCA/ELCA,PT1,PT2,PT3/FX,FY)
_____
_____
_____
2
7 33 34 35
-120.000 0.000 -120.000 0.000 -120.000 0.000
8 35 36 37
-120.000 0.000 -120.000 0.000 -120.000 0.000

KPROC KPASS FATEM THAU1 .....(KPROC: 0-EXP / 1-IMP)
1 1 1.0000 35.000

FACTO PTEMP TOLER MITER NTP1 NTP2 NTP3 NTP4
1.00000 0.50000 0.00100 5000 1 3 0 1

```

Com referência ao arquivo de dados, apresentam-se as finalidades das suas variáveis, tais que:

Npoin, *Nelem*, *Nofix* : número total de nós, número total de elementos e número de nós com deslocamentos restritos.

Ntype, Nnode, Nmats : Tipo de análise (1- EPT, 2-EPD e 3-Axissimétrica), número total de nós por elemento (4, 8 ou 9 nós) e número total de materiais diferentes a serem considerados.

Ngaus, Nalgo, Ncrit : número de pontos de integração de Gauss por elemento (onde valem apenas $N_{gaus}=2$: implica em 4 pontos de Gauss e $N_{gaus}=3$: implica em 9 pontos de Gauss), tipo de atualização da rigidez estrutural (1:cte ou 2:variável, a cada iteração) e tipo de critério de plastificação (1:Tresca, 2: Von Mises, 3: Mohr-Coulomb e 4: Drucker-Prager).

Nincs, Nstre : número total de incrementos de carga e variável adicional para o tipo de análise plana ($N_{stre}=3$: EPT ou EPD e $N_{stre}=4$: axissimétrica).

El, Mat, Nói: elemento, material correspondente ao elemento e nós correspondentes também ao elemento, informados percorrendo-se o sentido anti-horário do contorno do elemento.

Nó, Coordenada-X, Coordenada-Y: nó e suas respectivas coordenadas globais nas direções x e y (sistema de referência xy).

Nó-V, Tipo, Delta-X, Delta-Y: nó, tipo de vinculação do referido nó (10: na direção x, 01: na direção y e 11: nas direções x e y) e limitações para as restrições, em ambas as direções.

MODULO E1, MODULO E2: mód. de elasticidade para regimes elástico e v_elástico.

ESPESS, PESO ESP, ESCOAM : espessura do elemento, peso específico do material e tensão de escoamento do material.

POISSON, ANGL ATRI, FLUX@: coeficiente de Poisson, valor do ângulo de atrito para materiais granulares e variável de fluxo para a plasticidade (sempre igual a 1).

MÓD_H, MÓD_K : módulos de encruamento cinemático e plástico, respectivamente.

GAMA VE, GAMA VP: coeficientes de fluidez para regimes v_elástico e v_plástico.

CARREGAMENTOS: nos nós do elemento, gravimétrico (consideração do peso próprio) e nos lados do elemento. Se 0: inexistente e se 1: existe o carregamento.

NNOCA, NOCA, FX, FY: número de nós carregados, nó carregado, valor da carga na direção x, valor da carga na direção y, cujo sinal da carga é

definido com relação ao sistema de referência.

THETA, GRAVY: ângulo do vetor peso que atua no centro de gravidade do elemento com relação à vertical e valor da aceleração da gravidade local.

NELCA: número de elementos carregados (para carregamento distribuído).

ELCA, PT1, PT2, PT3: elemento carregado, nós referentes ao lado (do elemento) que recebe o carregamento distribuído.

Fx, Fy: carga distribuída nas direções x e y, respectivamente. O sinal da carga é positivo para carga convergindo para o elemento e negativo para carga divergindo do elemento.

KPROC: 0- procedimento explícito ou 1-procedimento implícito.

KPASS :0 - passo de tempo variável ou 1- passo de tempo constante.

FATEM, THAU1: multiplicador do passo de tempo e variável representativa da viscosidade do material, onde:

THAU1=0 : seleciona formulação viscoelástica por Sobotka (ver capítulo 12 da Tese)

THAU1>0 : seleciona formulação viscoelástica por Lemaitre (ver capítulo 12 da Tese)

FACTO: fator de incremento de carga (de 0 a 1)

PTEMP, TOLER, MITER: tamanho do passo de tempo, tolerância para convergência e número total de iterações, todos esses relacionados ao incremento de carga.

NTP1, NTP2: variáveis de controle de saída dos resultados na primeira iteração de cada incremento de carga e para a última iteração de cada incremento de carga (1-deslocamentos, 2-deslocamentos e reações, 3-deslocamentos, reações e esforços, 4-deslocamentos, reações, esforços e tensões principais e suas direções).

NTP3: variável de controle para informações das iterações intermediárias para cada incremento de carga, referente ao arquivo de saída dos resultados:

NTP3 ≠ 1 - não apresenta informações das iterações intermediárias.

NTP3 = 1 - apresenta informações das iterações intermediárias.

NTP4: variável de controle para informações das iterações intermediárias para cada incremento de carga, referente aos resultados mostrados no tela (video):

NTP4 ≠ 1 - não apresenta informações das iterações intermediárias.

NTP4 = 1 - apresenta informações das iterações intermediárias.

Vale ressaltar finalmente que:

a-) informações adicionais podem ser encontradas na tese (ver título na capa desse manual) referente aos códigos de cálculo até aqui apresentados

b-) para todos os códigos de cálculo apresentados nesse manual, são possíveis as seguintes análises estruturais:

se, $GAMAVE=0$ e $GMAVP=0$: material com comportamento elástico.

se, $GAMAVE>0$ e $GMAVP=0$: material com comportamento viscoelástico.

se, $GAMAVE=0$ e $GMAVP>0$: material com comportamento viscoplástico.

ou $GMAVP=1$: material com comportamento plástico.

se, $GAMAVE>0$ e $GMAVP>0$: material com ambos os comportamentos.