

**INFLUÊNCIA DA INÉRCIA DE ROTAÇÃO E DA FORÇA
CORTANTE NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E NA
RESPOSTA DINÂMICA DE ESTRUTURAS DE BARRAS**

Jaime Florencio Martins

Tese apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São
Paulo, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em
Engenharia de Estruturas

ORIENTADOR: Prof. Tit. José Elias Laier

São Carlos

1998



Class.	
PHA	
Tombo	

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

M386i Martins, Jaime Florencio
Influência da inércia de rotação e da força
cortante nas frequências naturais e na resposta
dinâmica de estruturas de barras / Jaime Florencio
Martins. -- São Carlos, 1998.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São
Carlos-Universidade de São Paulo, 1998.

Área: Engenharia de Estruturas.

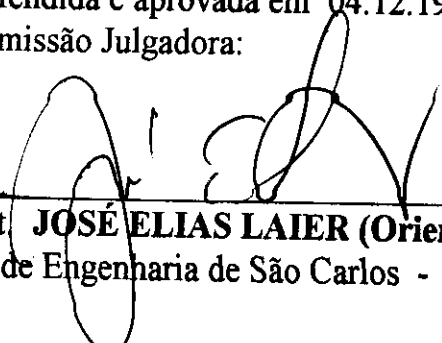
Orientador: Prof. Dr. José Elias Laier.

1. Vibração livre e forçada. 2. Frequência natural.
3. Inércia de rotação. 4. Teoria de viga de
Timoshenko. 5. Fundação elástica. I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidato: Engenheiro **JAIME FLORENCIO MARTINS**

Tese defendida e aprovada em 04.12.1998
pela Comissão Julgadora:



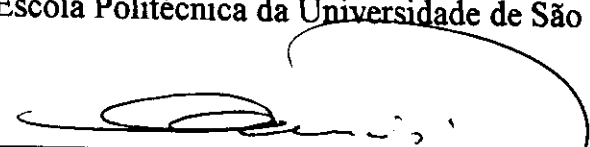
Prof. Tit. **JOSÉ ELIAS LAIER (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



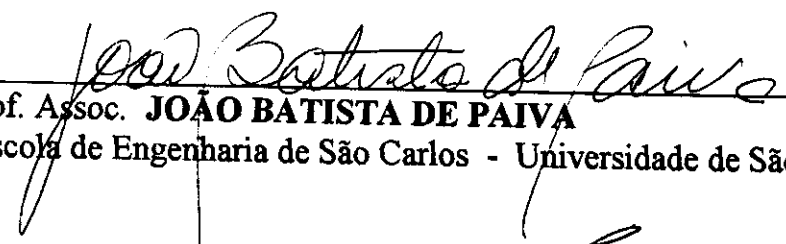
Prof. Tit. **FERNANDO VENÂNCIO FILHO**
(COPPE/UFRJ)



Prof. Dr. **CARLOS ALBERTO NUNES DIAS**
(Escola Politécnica da Universidade de São Paulo)



Prof. Dr. **MÁRIO FRANCISCO MUCHERONI**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Assoc. **JOÃO BATISTA DE PAIVA**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Titular **CARLITO CÁLIL JUNIOR**
Coordenador da Área de Engenharia de Estruturas



JOSÉ CARLOS A. CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

AGRADECIMENTOS

Ao Professor José Elias Laier, pela orientação a esta tese e pela minha formação profissional.

À Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, pelo meu afastamento das atividades docentes para a realização deste sonho.

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil (DECIV-EM-UFOP), pela colaboração.

À professora Eneida D'Ávila Figueiredo, pela correção gramatical deste trabalho.

Às bibliotecárias Elena Luzia Palloni Gonçalves e Maria Nadir Minatel, pela preciosa ajuda na pesquisa bibliográfica.

Aos meus pais e irmãos, pelo apoio e incentivo.

À Neusa Maria da Costa, pelo incentivo e presença constante.

Ao Criador, por tudo.

Aos meus pais Geraldo e Olinda,

irmãos, Tio Tuca,

Cirene e Neusa

Tenha fé em Deus, tenha fé na vida...

Raul Seixas

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS	i
RESUMO.....	.iv
<i>ABSTRACT</i>	v
1 INTRODUÇÃO	1
2 TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO	9
2.1 Introdução	9
2.2 Modelo de Euler-Bernoulli	10
2.2.1 Ortogonalidade	15
2.2.2 Vibração forçada com amortecimento.....	17
2.3 Modelo de Euler-Bernoulli com inércia de rotação	20
2.3.1 Ortogonalidade	23
2.3.2 Vibração forçada com amortecimento.....	25
2.4 Modelo de Euler-Bernoulli com força cortante	26
2.4.1 Ortogonalidade	28
2.4.2 Vibração forçada com amortecimento.....	30
2.5 Teoria de viga de Timoshenko	32
2.5.1 Ortogonalidade	35
2.5.2 Vibração forçada com amortecimento.....	36
2.6 Ortogonalidade de vigas contínuas.....	38

2.7 Exemplos	39
3 MATRIZ DE RIGIDEZ DINÂMICA	45
3.1 Introdução	45
3.2 Modelo de Euler-Bernoulli	46
3.3 Modelo de Euler-Bernoulli com inércia de rotação	49
3.4 Teoria de viga de Timoshenko	51
3.5 Pórticos planos.	59
3.5.1 Matriz de rigidez dinâmica para forças axiais (1ª ordem).	59
3.5.2 Transformação de coordenadas	63
3.5.3 Ortogonalidade dos modos normais de vibração longitudinal	66
3.5.4 Vibração forçada longitudinal com amortecimento	68
3.5.5 Ortogonalidade dos modos normais de vibração de pórticos planos	69
3.5.6 Vibração forçada amortecida de pórticos planos	72
3.6 Grelhas	72
3.6.1 Matriz de rigidez dinâmica para momento de torção.	73
3.6.2 Transformação de coordenadas	76
3.6.3 Ortogonalidade dos modos normais de vibração torcional	77
3.6.4 Vibração forçada torcional com amortecimento	79
3.6.5 Ortogonalidade dos modos normais de vibração de grelhas	80
3.6.6 Vibração forçada com amortecimento de grelhas	83
3.7 Exemplos.	83
3.8 Considerações finais	101
4 VIGAS SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA	104
4.1 Introdução	104
4.2 Fundação elástica de Winkler	105
4.3 Fundação elástica de Pasternak	107

4.4 Ortogonalidade	108
4.5 Vibração forçada amortecida de vigas sobre fundação elástica	111
4.6 Vigas sobre apoios elásticos pontuais	113
4.7 Exemplos	114
5 SEGUNDO ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS	132
5.1 Introdução	132
5.2 Exemplos	134
5.3 Considerações adicionais sobre o segundo espectro de frequências.	146
6 CONCLUSÕES ..	148
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	154

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área
a,b,c,d	Constantes
c	Coefficiente de amortecimento viscoso
C_1, C_2	Velocidades de onda
C_i, D_i, C_i^*, D_i^*	Constantes da função de forma
D	Constante
E	Módulo de elasticidade
F	Função de forma do modelo de Euler-Bernoulli
F*	Função de forma do modelo elementar com inércia de rotação
G	Módulo de elasticidade transversal
g_j	Relação entre D_j e C_j
I	Momento de inércia
I_m	Momento de inércia de massa
I_p	Momento de inércia polar
K	Módulo da fundação de Winkler
K_1	Módulo cortante da fundação de Pasternak
k_1, k_3	Constantes
k_{ij}	Coefficientes da matriz de rigidez dinâmica
L	Comprimento

M	Momento fletor
M_H	Momento fletor das forças de inércia horizontais
m	Massa por unidade de comprimento
N	Força normal
$N(x,t)$	Força normal distribuída
P	Força concentrada
$p(x,t)$	Força distribuída
q	Coordenadas generalizadas, reação da base elástica sobre a viga
r	Raio de giração
r,s	Como índices, modos de vibração
T	Período, momento de torção
T	Como expoente, transposta da matriz base
$T(x,t)$	Momento de torção distribuído
t	Tempo
U	Função de forma
u	Componente horizontal do deslocamento
$u(x,t)$	Momento fletor distribuído
\ddot{u}	Componente horizontal da aceleração
V	Força cortante
v	Deflexão total
v_b	Contribuição do momento fletor para a deflexão
v_s	Contribuição da força cortante para a deflexão
\ddot{v}	Segunda derivada de v em relação ao tempo (aceleração)
α	Rotação produzida pelo momento fletor
α_1, α_2	Constantes
β	Ângulo, constante

γ	Distorção
δ_1, δ_3	Constantes
ε	Deformação específica
$\dot{\varepsilon}$	Velocidade da deformação específica
η, Ω	Constantes
Θ	Função de forma dos modos de vibração torcional
θ	Ângulo de fase, inclinação de uma barra com o eixo x
κ	Fator numérico referente à tensão de cisalhamento
λ	Símbolo para $\sqrt[4]{m\omega^2 / EI}$
ν	Coeficiente de Poisson
ρ	Densidade
σ	Tensão normal
τ	Tensão de cisalhamento
ϕ, φ	Funções de forma
ω	Frequência natural angular, frequência de vibração forçada
$\{f\}$	Vetor dos esforços nodais
$[k]$	Matriz de rigidez dinâmica
$[S_i]$	Matrizes
$[T]$	Matriz de transformação
$\{\Delta\}$	Vetor dos deslocamentos nodais

RESUMO

MARTINS, J. F. *Influência da inércia de rotação e da força cortante nas frequências naturais e na resposta dinâmica de estruturas de barras*. São Carlos, 1998. 159 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

A clássica teoria de Euler-Bernoulli para vibrações transversais de vigas elásticas é sabido não ser adequada para vibrações de altas frequências, como é o caso de vibração de vigas curtas. Esta teoria assume que a deflexão deve-se somente ao momento fletor, uma vez que os efeitos da inércia de rotação e da força cortante são negligenciados. Lord Rayleigh complementou a teoria clássica demonstrando a contribuição da inércia de rotação e Timoshenko estendeu a teoria ao incluir os efeitos da força cortante. A equação resultante é conhecida como sendo a que caracteriza a chamada teoria de viga de Timoshenko. Usando-se a matriz de rigidez dinâmica, as frequências naturais e a resposta dinâmica de estruturas de barras são determinadas e comparadas de acordo com resultados de quatro modelos de vibração. São estudados o problema de vibração flexional de vigas, pórticos e grelhas, bem como o problema de fundação elástica segundo o modelo de Winkler e também a versão mais avançada que é o modelo de Pasternak.

Palavras-chave: vibração livre e forçada; frequência natural; inércia de rotação; teoria de viga de Timoshenko; fundação elástica

ABSTRACT

MARTINS, J. F. *Influence of rotary inertia and shear deformation in the natural frequencies and dynamic response of framed structures*. São Carlos, 1998. 159 p. Tese (Doutorado) - Escola de engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Classical Euler-Bernoulli theory for transverse vibrations of elastic beams is known to be inadequate to consider high frequency modes which occur for short beams, for example. This theory is derived under the assumption that the deflection is only due to bending. The effects of rotary inertia and shear deformation are ignored. Lord Rayleigh improved the classical theory by considering the effect of rotary inertia. Timoshenko extended the theory to include the effects of shear deformation. The resulting equation is known as Timoshenko beam theory. The natural frequencies and dynamic response of framed structures are determined by using the dynamic stiffness matrix and compared according to these theories. The flexional vibration problems of beams, plane frames and grids are analysed, as well problems of elastic foundation according the well known Winkler model and also the more general Pasternak model.

Keywords: free and forced vibration; natural frequency; rotary inertia; Timoshenko beam theory; elastic foundation

1 INTRODUÇÃO

Conhecer as leis da natureza é de fundamental importância para a evolução humana. O homem preocupa-se essencialmente com a melhoria da qualidade de vida e, para isto, há também uma constante evolução tecnológica. O principal bem do homem é a sua própria vida e, decorre daí, que a segurança na construção de edifícios, pontes, aviões e outras estruturas é imprescindível para a preservação da vida. Para se construir com segurança é necessário conhecer o comportamento da estrutura quando solicitada por cargas de natureza tanto estáticas quanto dinâmicas. A dinâmica, ciência que estuda o movimento dos corpos, ocupa um lugar importante na constante evolução das máquinas e estruturas.

A primeira contribuição significativa para a dinâmica como hoje é conhecida foi feita por Galileo Galilei (1564 - 1642). Com base em seus experimentos, Galileo publicou, em 1590, o famoso tratado "De Motu Gravium" que representa o início da dinâmica como conhecemos. Com essa publicação, Galileo estabelece os fundamentos da dinâmica e modifica a compreensão dos fenômenos naturais observados, que foram explicados de forma não tanto correta por Aristóteles (384 - 322 A.C.). As experiências de Galileo sobre corpos uniformemente acelerados permitiram, por exemplo, Isaac Newton (1642 - 1727) formular as leis fundamentais do movimento.

De acordo com TIMOSHENKO (1953), o estudo da vibração de vigas teve início no século XVIII com trabalhos de membros da família Bernoulli e Leonard Euler (1707 - 1783). Em 1744, Euler publicou o livro "Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes". Nesse livro, Euler demonstra a solução da equação diferencial do movimento transversal da vibração de vigas prismáticas, bem como as frequências naturais e os modos de vibração de vigas em balanço, simplesmente apoiada, bi-engastada e de extremidades livres. O modelo de vibração de Euler-Bernoulli é conhecido como teoria elementar por considerar apenas a contribuição da deformação por momento fletor na equação do movimento. O efeito da inércia de rotação foi considerado por Lord Rayleigh [John William Strutt (1842 - 1919)] no livro "The Theory of Sound" publicado no ano de 1877. O efeito da força cortante na vibração de vigas foi incluído por TIMOSHENKO (1921). O modelo de vibração de vigas que leva em consideração os efeitos do momento fletor, inércia de rotação e força cortante é conhecido como teoria de viga de Timoshenko.

A análise dinâmica de vigas isostáticas torna-se mais precisa quando se usa a teoria de viga de Timoshenko. COWPER (1966) apresenta, nesse sentido, uma nova fórmula para o coeficiente κ da teoria de viga de Timoshenko. O autor demonstra valores numéricos desta constante para várias formas de seção transversal. THOMAS & ABBAS (1975) apresentam, pela primeira vez, um modelo de elemento finito que satisfaz todas as condições de contorno da viga de Timoshenko. CHEN (1987) apresenta uma formulação da matriz de rigidez dinâmica para vibrações transversais e longitudinais. Os efeitos do momento fletor, inércia de rotação, deformação por força cortante, amortecimento estrutural, força

axial e base elástica de Winkler estão incluídos na formulação. MUKHOPAHYAY (1988) apresenta uma matriz de flexibilidade aproximada para determinar as frequências naturais de vigas com extremidades livres considerando-se a contribuição da inércia de rotação e do momento fletor. Vigas de extremidades livres são modelos comumente usados nas estruturas de navios e aeronaves. BANK & KAO (1989) aplicam a teoria de vigas de Timoshenko na investigação das frequências naturais de vigas compostas de paredes finas. CHANDRASHEKHARA & KRISHNAMURTHY (1990) apresentam resultados para demonstrar os efeitos da inércia de rotação, força cortante e condições de contorno nas frequências naturais de vigas compostas. YOKOYAMA (1990) investiga a influência da força da gravidade, deformação por força cortante e inércia de rotação na vibrações transversais de vigas em balanço suspensas. Esse autor apresenta a equação diferencial do movimento para vibrações livres da viga de Timoshenko. Os valores das frequências naturais e os modos de vibração são confrontados com o modelo elementar de Euler-Bernoulli. MAURIZI & BELLÉS (1991) apresentam uma comparação entre as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko aplicadas na determinação da frequência fundamental de vigas simplesmente apoiadas com massa concentrada. GUTIERREZ et al. (1991) determinam a frequência fundamental da viga de Timoshenko sobre dois apoios com seção transversal variável. ABRAMOVICH & HAMBURGER (1991) investigam a influência da inércia de rotação e da força cortante nas frequências naturais de vigas em balanço com massa concentrada no extremo livre. Esse é um modelo básico para estruturas de torres, mastros e braços mecânicos. ABRAMOVICH (1992) mostra os efeitos da força cortante e da inércia de rotação na vibração de vigas compostas laminadas. ABBAS & IRRETIER (1989) apresentam um estudo

teórico/experimental do efeito do engaste elástico nas frequências naturais de vigas em balanço.

A teoria de viga de Timoshenko também é usada na vibração de vigas sobre base elástica. TIMOSHENKO & YOUNG (1960) mostram a solução analítica dos valores das frequências naturais de vigas sobre dois apoios do modelo de Euler-Bernoulli sobre fundação de Winkler. WANG & STEPHENS (1977) apresentam um estudo teórico das vibrações naturais da viga de Timoshenko sobre o modelo de fundação elástica de Pasternak. Os autores mostram a solução analítica de uma viga sobre dois apoios e os efeitos da inércia de rotação e da força cortante nas frequências naturais. WANG & GAGNON (1978) estudam os valores das frequências naturais de uma viga contínua com três vãos iguais sobre fundação elástica de Pasternak. Os efeitos da força cortante e da constante da fundação são analisados quando se calculam as frequências naturais. LAI et al. (1992) mostram a aplicação do método dos elementos finitos na análise dinâmica de vigas sobre base elástica. Os autores consideram o modelo de Euler-Bernoulli para a viga e a fundação elástica de Pasternak para a base. FRANCIOSI & MASI (1993) usam o método dos elementos finitos para a análise de vibração livre do modelo de Euler-Bernoulli sobre fundação elástica segundo o modelo de Pasternak. GUDIÉL et al. (1994) usam o método dos elementos finitos na determinação das frequências naturais do modelo de Euler-Bernoulli sobre fundação elástica de Winkler.

Os efeitos da inércia de rotação e da força cortante são importantes também na análise dinâmica de placas. AKSU (1990) aplica a técnica das diferenças finitas para determinar as frequências naturais e os modos de vibração

de placas. A deformação por força cortante e a inércia de rotação são levadas em consideração. LEE et al. (1992) apresentam um método numérico, baseado no princípio de Rayleigh, que pode ser usado para determinarem-se as frequências naturais de placas com um buraco retangular. CHEN & SHABANA (1993) analisam o efeito da inércia de rotação na dinâmica de placas com curvatura inicial e grandes deslocamentos. LEE & LIM (1993) apresentam um método numérico baseado no método de Rayleigh para calcular as frequências naturais de placas retangulares com uma fenda central. Os efeitos da força cortante e inércia de rotação estão incluídos pela aplicação da equivalência dinâmica da teoria simplificada de Reissner. XIA & LUKASIEWICZ (1994) discutem as vibrações livres, não-lineares de placas sanduíche. A deformação por força cortante e a inércia de rotação de cada camada estão incluídas nas equações.

A teoria de vigas de Timoshenko é usada pela Biomecânica para análise de ossos e de ossos fraturados cicatrizados. LAURA et al. (1990) modelam ossos fraturados cicatrizados usando o método dos elementos finitos. O modelo tem seção transversal variável e os efeitos da inércia de rotação e da força cortante são levados em consideração. THOMSEN (1990) descreve uma análise teórico/experimental das vibrações livres em uma tíbia humana amputada. KAUFMAN et al. (1990) propõem um método para estimar a resistência de ossos fraturados cicatrizados. A resposta das vibrações transversais é obtida usando-se a teoria de vigas de Timoshenko.

Os objetivos do presente trabalho são, em primeiro lugar, analisar de modo abrangente os efeitos da inércia de rotação e da força cortante nas frequências naturais e na resposta dinâmica de estruturas de barras; bem como a interação

com fundação elástica bi-paramétrica. Para se levar a bom termo tal análise, utiliza-se a via analítica propiciada pela matriz de rigidez dinâmica, desenvolvida por CHEN (1987) mediante quatro modelações do problema de vibração de barras, com requintamento crescente.

No capítulo dois desenvolvem-se as equações do movimento da vibração transversal de vigas segundo os quatro modelos, que sejam: Euler-Bernoulli, Euler-Bernoulli com inércia de rotação, Euler-Bernoulli com força cortante e finalmente a teoria de viga de Timoshenko. O clássico modelo de Euler-Bernoulli leva em conta apenas os efeitos do momento fletor na equação diferencial da vibração de barras, enquanto a teoria de vigas de Timoshenko considera os efeitos do momento fletor, inércia de rotação e da força cortante. Neste capítulo, demonstra-se que os modos normais de vibração de todos os modelos atendem condições de ortogonalidade (quando ocorre vibração livre em uma das frequências naturais da estrutura, o deslocamento que se verifica em todos os pontos movimentam-se em uma mesma fase e, essa configuração, é chamada modo normal de vibração). A equação que mostra a ortogonalidade é usada para transformar o sistema de equações diferenciais acopladas em um sistema de equações diferenciais desacopladas, isto é, independentes. A vibração forçada também é apresentada e expressa em função dos modos normais de vibração. A resposta dinâmica da vibração forçada é a soma da solução das equações modais independentes multiplicadas pelo produto das cargas atuantes e os deslocamentos correspondentes (superposição modal). Um exemplo de cálculo do deslocamento para o caso de vibração forçada é apresentado nesse capítulo. Os resultados dos deslocamentos da vibração forçada são colocados em um gráfico, mostrando-se a variação do deslocamento ao longo do tempo.

No capítulo três obtêm-se os coeficientes da matriz de rigidez dinâmica para três dos modelos de vibração de vigas. Nesse capítulo são apresentados vários exemplos de cálculo de frequências naturais de estruturas de barras. Os resultados são confrontados com os obtidos com o método dos elementos finitos e também com os do método dos elementos de contorno. Os efeitos da força cortante e da inércia de rotação no cálculo das frequências naturais são apresentados em forma de tabelas. A ortogonalidade dos modos normais de vibração de pórticos planos e de grelhas é demonstrada nesse capítulo, e também exemplos de vibração forçada dessas estruturas são apresentados. Quando possível, os resultados são comparados com os de outros métodos numéricos ou soluções analíticas, em casos elementares.

Frequência natural é a propriedade física que mais caracteriza uma estrutura e é básica em alguns modelos de dano. As frequências naturais de uma estrutura precisam ser conhecidas, cabe frisar, até para se evitarem os efeitos de proximidade da ressonância, como é bem sabido.

No capítulo quatro apresentam-se as equações da vibração de vigas sobre fundação elástica. Consideram-se os modelos de fundação elástica de Winkler e também o de Pasternak. O modelo de Winkler considera que existe uma relação linear entre a pressão de contato e a deflexão verificada em um ponto. O modelo de fundação elástica de Pasternak adiciona no modelo de Winkler uma camada hipotética de solo que se deforma solidariamente e somente devido à força cortante. Alguns exemplos de cálculo de frequências naturais de vigas sobre base elástica são apresentados. Neste capítulo, também é mostrado que a equação da ortogonalidade entre os modos de vibração é idêntica em seu aspecto formal para as vigas sem base elástica e com base elástica. Neste capítulo, também é

mostrado um artifício para serem calculadas as frequências naturais e a resposta da vibração forçada de vigas de extremidades livres. Um exemplo de cálculo de frequências naturais de grelha sobre base elástica é mostrado neste capítulo. Os modelos considerados são os de Euler-Bernoulli e a teoria de viga de Timoshenko. A matriz de rigidez dinâmica de vigas sobre apoios elásticos é apresentada neste capítulo, bem como um exemplo de vibração forçada de uma viga de extremidades livres.

No capítulo cinco faz-se um breve histórico da bastante polêmica existência do segundo espectro de frequências da teoria de vigas de Timoshenko. No presente trabalho, o segundo espectro é apresentado como sendo a segunda frequência de um mesmo modo de vibração transversal (há um segundo movimento acoplado envolvido). O segundo espectro de frequências ocorre apenas quando se consideram os efeitos do momento fletor, inércia de rotação e da força cortante, ou seja, o segundo espectro somente aparece na teoria de viga de Timoshenko. Neste capítulo, são mostrados exemplos numéricos de frequências naturais do segundo espectro de vigas sobre dois apoios, de vigas sobre base elástica e de vigas contínuas com vãos iguais. Demonstra-se, também, que o segundo espectro de frequências somente ocorre nas vigas sobre dois apoios ou para modos similares de vigas contínuas. No artigo publicado por TIMOSHENKO (1921) o autor não faz nenhuma referência ao segundo espectro de frequências (talvez até por achar, já em suas reflexões pioneiras, tema um tanto controverso).

No capítulo seis apresentam-se as conclusões da tese, bem como os comentários pertinentes na finalização mais apropriada para um tema dessa natureza.

2 TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO

2.1 Introdução

A equação diferencial do movimento transversal da vibração de vigas, baseada no modelo de Euler-Bernoulli, é deduzida assumindo-se que a deflexão deve-se somente ao momento fletor, sendo que os efeitos da inércia de rotação e a deformação por força cortante são negligenciados. WARBURTON (1976) mostra que para vigas isostáticas o modelo de Euler-Bernoulli deixa a desejar tanto para vigas curtas como para as altas frequências. Lord Rayleigh considerou o efeito da inércia de rotação e Timoshenko acrescentou o efeito da deformação por força cortante.

Frequência natural é um dos parâmetros mais importantes quando se determinam as características dinâmicas de um sistema. A consideração da inércia de rotação e da contribuição da força cortante na equação do movimento transversal contribui para o aperfeiçoamento do cálculo das frequências naturais, por exemplo, pois conduz a resultados mais apurados.

Neste capítulo, obtêm-se as equações da vibração de vigas de acordo com quatro modelos: modelo de Euler-Bernoulli, modelo de Euler-Bernoulli com inércia de rotação, modelo de Euler-Bernoulli com força cortante e teoria de viga de Timoshenko. Os três primeiros modelos podem ser considerados casos particulares da teoria de viga de Timoshenko, que é o modelo mais abrangente.

2.2 Modelo de Euler-Bernoulli

Neste modelo somente deslocamentos produzidos por flexão pura são considerados. Os deslocamentos produzidos por força cortante e as forças inerciais originadas pela rotação da seção transversal (inércia de rotação) são desprezados. Este modelo, conhecido também como teoria elementar, aplica-se somente em vigas esbeltas e para baixas frequências. O material das vigas é considerado elástico, linear, homogêneo e isotrópico. Admite-se a validade da lei de Hooke e despreza-se, inicialmente, o amortecimento.

A figura 2.1(a) representa o eixo BC de uma viga uniforme durante vibração livre. O deslocamento vertical em uma seção transversal de abscissa x em um tempo t é representado por v . A figura 2.1(b) mostra as forças e momentos que atuam em um diferencial de viga de comprimento dx . A força de inércia no elemento é dada por $-m dx \ddot{v}$, onde $m = \rho A$, sendo ρ a densidade do material e A a área da seção transversal (vide figura 2.1(b)).

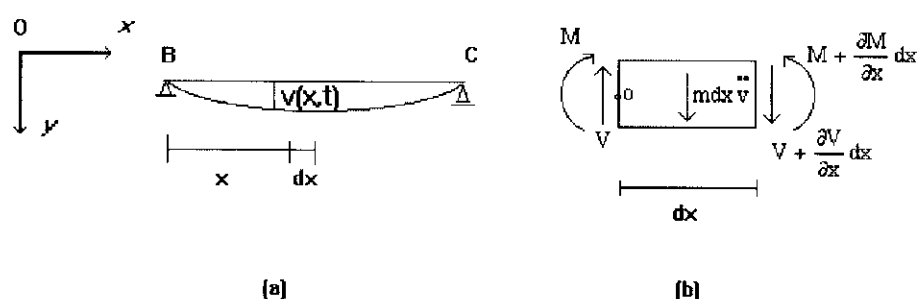


FIGURA 2.1 - Vibração livre

O equilíbrio de momentos fletores em relação ao ponto “o” (figura 2.1(b)) fornece a expressão:

$$M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) + \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) dx + m dx v \frac{dx}{2} = 0$$

onde M representa o momento fletor, V a força cortante e \ddot{v} a componente vertical da aceleração, segundo a clássica notação de derivada no tempo. A expressão acima, se forem desprezados os termos que contêm o produto de dois diferenciais (termos de ordem mais elevada), resulta em:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V \quad (2.1)$$

relação que se mantém, formalmente, como na teoria elementar.

De acordo com a segunda lei de Newton, tem-se:

$$\Sigma F_y = m dx \ddot{v}$$

e, então:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = m \ddot{v} \quad (2.2)$$

que consiste na equação do movimento de viga.

A relação aproximada entre momento fletor e curvatura, preconizada pela teoria linear, é expressa por:

$$M = -EIv'' \quad (2.3)$$

onde E representa o módulo de elasticidade e I o momento de inércia da seção transversal e v'' a curvatura da viga, onde se emprega a notação de derivadas no espaço com números romanos como expoente.

Combinando-se as equações (2.1), (2.2) e (2.3) encontra-se a expressão:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(-EIv''') = m \ddot{v}$$

de onde, suposto que a viga tenha EI constante em todo o seu comprimento, pode-se escrever:

$$EIv^{IV} + m \ddot{v} = 0 \quad (2.4)$$

A expressão (2.3) é particularizada para pequenas curvaturas (linearidade geométrica); portanto, a equação do movimento acima somente pode ser usada para pequenas amplitudes.

Tomando-se por base a existência de modos de vibrar (existência de movimentos em fase), a solução da equação (2.4) pode ser admitida como o produto de uma função da posição no espaço (F) por uma função do tempo (q), ou seja:

$$v = F(x)q(t) \quad (2.5)$$

que consiste na conhecida técnica de interação por separação de variáveis.

Tendo-se em conta as equações (2.5) e (2.4), pode-se escrever:

$$EIF^{IV}q + mF\ddot{q} = 0$$

de onde:

$$\frac{EI}{m} \frac{F^{IV}}{F} = -\frac{\ddot{q}}{q}$$

sendo que o termo do lado esquerdo depende apenas de x , enquanto o termo do lado direito depende apenas do tempo. Estes termos têm, pois, que ser iguais a uma mesma constante, chamada constante de separação, de modo que:

$$\frac{EI}{m} \frac{F^{IV}}{F} = \omega^2 \quad (2.6)$$

$$-\frac{\ddot{q}}{q} = \omega^2 \quad (2.7)$$

onde ω , que é a constante de separação, representa a frequência natural angular e deve ser positiva para que a solução represente vibrações de sistemas auto-excitados.

A equação (2.6) pode ser reescrita como segue:

$$F^{IV} - \frac{m\omega^2}{EI} F = 0 \quad (2.8)$$

cuja solução admite a seguinte forma:

$$F = C \cdot e^{\lambda \cdot x} \quad (2.9)$$

Substituindo-se a equação (2.9) em (2.8), obtém-se a expressão de λ_0 :

$$\lambda_0^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$$

cujas raízes são:

$$\lambda_0 = \pm i\lambda$$

$$\lambda_0 = \pm \lambda$$

com i representando a unidade imaginária, e:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EI}}$$

Com as raízes de λ_0 a solução (2.9) fica da forma:

$$F = C_1^i e^{i\lambda x} + C_2^i e^{-i\lambda x} + C_3^i e^{\lambda x} + C_4^i e^{-\lambda x}$$

onde C_i^i são constantes imaginárias. Por outro lado, lembrando-se das relações de

Euler:

$$e^{\pm i\lambda x} = \cos \lambda x \pm i \operatorname{sen} \lambda x$$

$$e^{\pm \lambda x} = \cosh \lambda x \pm \operatorname{senh} \lambda x$$

tem-se finalmente:

$$F = C_1 \operatorname{sen} \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \operatorname{senh} \lambda x + C_4 \cosh \lambda x \quad (2.10)$$

onde C_i são constantes reais. A equação (2.7), por sua vez, pode ser colocada na

forma:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

A solução desta equação é dada por:

$$q = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$$

ou, em uma forma mais conveniente:

$$q = C \cdot \cos(\omega t - \theta) \quad (2.11)$$

onde:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A}{B}$$

Finalmente, a equação (2.5) pode ser, então, colocada na forma:

$$v = F \cos(\omega t - \theta) \quad (2.12)$$

onde a constante C da equação (2.11) foi absorvida pelas constantes da equação (2.10).

2.2.1 Ortogonalidade

Os modos normais de vibração do modelo de Euler-Bernoulli são ortogonais. Para se demonstrar tal propriedade, considere-se a equação (2.4) e a sua solução (2.12) pertencendo a um modo de vibração r , ou seja, para um dado valor da constante de separação ω . Colocando-se a equação (2.12) na equação (2.4), tem-se:

$$EI F_r^{IV} \cos(\omega_r t - \theta_r) - m F_r \cos(\omega_r t - \theta_r) \omega_r^2 = 0$$

ou:

$$EI F_r^{IV} = m F_r \omega_r^2 \quad (2.13)$$

Multiplicando-se a equação acima por $F_s dx$, onde F_s é um outro modo de vibração, e integrando no comprimento, tem-se:

$$EI \int_0^L F_r^{IV} F_s dx = \omega_r^2 \int_0^L m F_r F_s dx$$

Integrando-se o lado esquerdo por partes duas vezes, tem-se:

$$\omega_r^2 \int_0^L m F_r F_s dx = \left[EI F_r^{III} F_s - EI F_r^{II} F_s' \right]_0^L + EI \int_0^L F_r^{II} F_s'' dx$$

Lembrando-se que: $EI F_r^{II} = -M$ e $EI F_r^{III} = -V$, a expressão acima assume a forma:

$$\omega_r^2 \int_0^L m F_r F_s dx = \left[-V_r F_s + M_r F_s' \right]_0^L + EI \int_0^L F_r^{II} F_s'' dx$$

Nas extremidades engastadas ($F_s' = F_s = 0$), bi-apoiadas ($M_r = F_s = 0$) e com extremidades livres ($M_r = V_r = 0$) os termos entre colchetes se anulam. Portanto, para as vigas com estas condições simples de extremidades, pode-se escrever:

$$\omega_r^2 \int_0^L m F_r F_s dx = EI \int_0^L F_r'' F_s'' dx \quad (2.14)$$

Considere a equação (2.13) para um modo de vibração genérico s .
Multiplicando-se essa equação por $F_r dx$ e integrando-se no comprimento, tem-se:

$$EI \int_0^L F_s^{IV} F_r dx = \omega_s^2 \int_0^L m F_s F_r dx \quad (2.15)$$

Integrando-se o lado esquerdo por partes duas vezes, tem-se:

$$\omega_s^2 \int_0^L m F_s F_r dx = \left[E I F_s''' F_r - E I F_s'' F_r' \right]_0^L + EI \int_0^L F_r'' F_s'' dx$$

ou:

$$\omega_s^2 \int_0^L m F_s F_r dx = \left[-V_s F_r + M_s F_r' \right]_0^L + EI \int_0^L F_r'' F_s'' dx$$

Eliminado-se os termos que se anulam nas vigas com condições de extremidades simples, tem-se:

$$\omega_s^2 \int_0^L m F_s F_r dx = EI \int_0^L F_s'' F_r'' dx \quad (2.16)$$

Procedendo a subtração (2.14) menos (2.16), tem-se:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L m F_r F_s dx = 0$$

Para $r \neq s$ (modos distintos $\omega_r \neq \omega_s$), tem-se, pois:

$$\int_0^L m F_r F_s dx = 0 \quad (2.17)$$

A expressão acima mostra que o produto interno das componentes verticais de dois modos de vibração é nulo, portanto, estes modos são ortogonais (ortogonais segundo a massa distribuída m).

Com as equações (2.15) e (2.17) conclui-se, também, que:

$$\int_0^L F_s^{IV} F_r dx = 0 \quad (2.18a)$$

e que:

$$EI \int_0^L F_s^{IV} F_s dx = \omega_s^2 \int_0^L m F_s^2 dx \quad (2.18b)$$

encerrando-se a questão em apreço.

2.2.2 Vibração forçada com amortecimento

Para a inclusão de amortecimento opta-se, como usual, pela consideração de materiais viscoelásticos segundo o modelo de Kelvin. A relação entre a tensão e a deformação, para o modelo em questão, é a seguinte WARBURTON (1976):

$$\sigma_x = E(\epsilon_x + c \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t})$$

onde c é o coeficiente de amortecimento viscoso, σ_x a tensão normal e ϵ_x a deformação correspondente.

Da Resistência dos Materiais sabe-se que:

$$\epsilon_x = -y \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$M = \int_A \sigma_x y dA$$

onde y é a ordenada na seção, com origem no centro de gravidade.

Colocando-se as expressões de σ_x e de ε_x na expressão de M , tem-se:

$$M = \int_A E(-yv^I - cy\dot{v}^I) y dA$$

como, por definição: $\int_A y^2 dA = I$, então:

$$M = -EIv^{II} - cEI\dot{v}^{II} \quad (2.19)$$

Para os materiais viscoelásticos, tem-se também a relação similar entre a tensão de cisalhamento (τ), ou seja:

$$\tau = G\left(\gamma + c \frac{\partial \gamma}{\partial t}\right)$$

Uma vez que a força cortante é dada por: $V = \int_A \tau dA$, tem-se de modo análogo:

$$V = \kappa AG\left(\gamma + c \frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) \quad (2.20)$$

onde κ é um fator numérico que, segundo COWPER (1966), depende da forma da seção transversal e do coeficiente de Poisson.

A equação (2.2) assume, então, a forma:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p(x, t) = m \ddot{v} \quad (2.21)$$

no caso em que o elemento está solicitado por uma força distribuída $p(x, t)$.

Combinando-se as equações (2.1), (2.19) e (2.21), resulta a expressão:

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} (-EIv'' - cEI\dot{v}') = m\ddot{v} - p(x, t)$$

de onde:

$$EIv^{IV} + cEI\dot{v}^{IV} + m\ddot{v} = p(x, t) \quad (2.22)$$

cuja solução, usando-se o método da superposição modal, é da forma:

$$v = \sum_r F_r(x) \cdot q_r(t)$$

Substituindo-se a expressão acima na equação (2.22), tem-se:

$$EI \sum_r F_r^{IV} q_r + cEI \sum_r F_r^{IV} \dot{q}_r + m \sum_r F_r \ddot{q}_r = p(x, t)$$

Multiplicando-se a expressão acima por $F_s dx$ e integrando no comprimento, tem-se:

$$\int_0^L F_s \left[EI \sum_r F_r^{IV} q_r + cEI \sum_r F_r^{IV} \dot{q}_r + m \sum_r F_r \ddot{q}_r \right] dx = \int_0^L p(x, t) F_s dx$$

Com as equações (2.17) e (2.18), a equação acima fica da seguinte forma:

$$\omega_s^2 q_s \int_0^L m F_s^2 dx + c\omega_s^2 \dot{q}_s \int_0^L m F_s^2 dx + \ddot{q}_s \int_0^L m F_s^2 dx = \int_0^L p(x, t) F_s dx$$

ou:

$$\ddot{q}_s + c\omega_s^2 \dot{q}_s + \omega_s^2 q_s = \frac{\int_0^L p(x, t) F_s dx}{\int_0^L m F_s^2 dx} \quad (2.23)$$

onde q_s são coordenadas independentes, também conhecidas como coordenadas generalizadas.

2.3 Modelo de Euler-Bernoulli com inércia de rotação

Considere-se o elemento diferencial da figura 2.2 referente a uma viga solicitada à flexão. A seção transversal cd está girada de um ângulo $d\phi$ em relação à seção transversal ab , considerada fixa (de referência). Da figura 2.2 tem-se a relação:

$$\operatorname{tg}d\phi = \frac{u}{y} \quad (2.24)$$

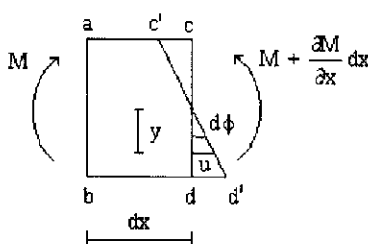


FIGURA 2.2 - Elemento infinitesimal

Considerando-se que as seções planas permaneçam planas e perpendiculares ao eixo da viga, o ângulo $d\phi$ também representa a inclinação da tangente à linha elástica. Então, pode-se escrever:

$$\operatorname{tg}d\phi = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.25)$$

Decorre de (2.24) e (2.25) a seguinte relação:

$$\frac{u}{y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

de onde:

$$u = yv'$$

Um elemento de área dA possui força de inércia horizontal dada por:

$$df_x = \rho dA dx \ddot{u}$$

ou:

$$df_x = \rho dA dx y \ddot{v}^j$$

Estas forças elementares, quando multiplicadas pela distância y até a linha neutra correspondem ao momento fletor elementar dM_{fi} . O somatório de todos os dM_{fi} fornece o momento fletor referente à inércia de rotação M_{fi} :

$$M_{fi} = \int_A \rho dA dx y \ddot{v}^j y \quad (2.26)$$

Por outro lado, como por definição:

$$I = \int_A y^2 dA$$

então, para materiais homogêneos, pode-se fazer:

$$M_{fi} = \rho I dx \ddot{v}^j$$

Lembrando-se que:

$$m = \rho A$$

a expressão de M_{fi} (2.26) resulta em:

$$M_{fi} = \frac{m}{A} I dx \ddot{v}^j$$

mas, por definição:

$$r^2 = \frac{I}{A}$$

onde r é chamado raio de giração. Então, finalmente, tem-se:

$$M_{fi} = m r^2 dx \ddot{v}^j \quad (2.27)$$

O equilíbrio de momentos do elemento da figura 2.1b em relação ao ponto "o", quando se considera o momento das forças inerciais horizontais (2.27), é dado por:

$$M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) + \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) dx + m dx \ddot{v} \frac{dx}{2} - m r^2 dx \ddot{v}^j = 0$$

Desprezando-se os termos que contêm o produto de dois diferenciais (ordem mais elevada), a expressão acima resulta em:

$$-\frac{\partial M}{\partial x} dx + V dx - mr^2 dx \ddot{v} = 0$$

ou:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V - mr^2 \ddot{v} \quad (2.28)$$

Combinando-se as equações (2.2), (2.3) e (2.28), encontra-se:

$$EIv^{IV} + m \ddot{v} - mr^2 \ddot{v} = 0 \quad (2.29)$$

De modo análogo ao item anterior, a solução da equação (2.29) pode ser colocada na forma:

$$v = Ce^{\beta x} \cos(\omega t - \theta) \quad (2.30)$$

Substituindo-se a solução (2.30) na equação (2.29), tem-se depois de algumas manipulações algébricas:

$$\beta^4 + r^2 \lambda^4 \beta^2 - \lambda^4 = 0 \quad (2.31)$$

onde:

$$\lambda^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$$

A equação (2.31) também possui quatro raízes do tipo: $\pm ik_1$ e $\pm k_2$. Assim sendo, a expressão $Ce^{\beta x}$ pode ser colocada na forma:

$$F^* = C_1^* \sin k_1 x + C_2^* \cos k_1 x + C_3^* \sinh k_2 x + C_4^* \cosh k_2 x \quad (2.32)$$

e assim, a equação (2.30) assume a forma:

$$v = F^* \cos(\omega t - \theta) \quad (2.33)$$

mais cômoda de se manipular.

As constantes k_1 e k_2 são determinadas usando-se a expressão (2.31),

ou seja:

$$k_1 = \sqrt{\frac{r^2 \lambda^4 + \sqrt{r^4 \lambda^8 + 4\lambda^4}}{2}}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{-r^2 \lambda^4 + \sqrt{r^4 \lambda^8 + 4\lambda^4}}{2}}$$

encerrando-se, assim, o caso em apreço.

2.3.1 Ortogonalidade

Os modos normais de vibração do modelo de Euler-Bernoulli com inércia de rotação também são ortogonais. Considere-se para tanto a equação (2.29) e sua solução (2.33) correspondente a um modo de vibração r . Substituindo-se (2.33) na equação (2.29), tem-se:

$$EI F_r^{*IV} \cos(\omega_r t - \theta_r) - m F_r^* \cos(\omega_r t - \theta_r) \omega_r^2 + m r^2 F_r^{*II} \cos(\omega_r t - \theta_r) \omega_r^2 = 0$$

ou:

$$EI F_r^{*IV} + m r^2 F_r^{*II} \omega_r^2 = m F_r^* \omega_r^2 \quad (2.34)$$

Multiplicando-se a expressão acima por $F_s^* dx$ e integrando-se, tem-se:

$$EI \int_0^L F_r^{*IV} F_s^* dx + \omega_r^2 \int_0^L m r^2 F_r^{*II} F_s^* dx = \omega_r^2 \int_0^L m F_r^* F_s^* dx$$

Integrando-se o primeiro termo do lado esquerdo duas vezes por partes e o segundo uma vez, tem-se:

$$\left[E I F_r^{*||} F_s^* + \omega_r^2 m r^2 F_s^* F_r^{*||} - E I F_r^{*||} F_s^* \right]_0^L + E I \int_0^L F_r^{*||} F_s^* dx - \omega_r^2 \int_0^L m r^2 F_r^{*||} F_s^* dx = \omega_r^2 \int_0^L m F_r^* F_s^* dx \quad (2.35)$$

Para o modelo de vibração em tela, a força cortante é expressa de forma diferente daquela mostrada no item anterior. Substituindo-se a solução (2.33) na expressão (2.28) e simplificando-se o termo comum $\cos(\omega t - \theta)$, uma vez que os esforços solicitantes momento fletor e força cortante também variam harmonicamente na vibração livre, resulta a expressão:

$$\frac{\partial(-E I F^{*||})}{\partial x} = V + m r^2 \omega^2 F^{*||}$$

ou:

$$V = -E I F^{*||} - m r^2 \omega^2 F^{*||} \quad (2.36)$$

Com o auxílio da expressão (2.36), a equação (2.35) é colocada na forma:

$$\left[-V_r F_s^* + M_r F_s^* \right]_0^L + E I \int_0^L F_r^{*||} F_s^* dx - \omega_r^2 \int_0^L m r^2 F_r^{*||} F_s^* dx = \omega_r^2 \int_0^L m F_r^* F_s^* dx$$

Conforme já mostrado no item 2.2.1 os termos entre colchetes se anulam na vigas com condições simples de extremidades. Assim sendo, a expressão acima assume a forma simplificada:

$$\omega_r^2 \int_0^L m F_r^* F_s^* dx = E I \int_0^L F_r^{*||} F_s^* dx - \omega_r^2 \int_0^L m r^2 F_r^{*||} F_s^* dx \quad (2.37)$$

Considere-se, agora, a equação (2.34) relativa a um modo de vibração genérico s . Multiplicando-se esta equação $F_r^* dx$ e integrando-se, tem-se:

$$EI \int_0^L F_s^{*IV} F_r^* dx + \omega_s^2 \int_0^L m r^2 F_s^{*II} F_r^* dx = \omega_s^2 \int_0^L m F_s^* F_r^* dx$$

Integrando-se o primeiro termo do lado esquerdo duas vezes por partes e o segundo uma vez, tem-se:

$$\left[E I F_s^{*III} F_r^* + \omega_s^2 m r^2 F_r^* F_s^{*II} - E I F_s^{*II} F_r^{*II} \right]_0^L + E I \int_0^L F_r^{*II} F_s^{*II} dx - \omega_s^2 \int_0^L m r^2 F_r^* F_s^{*II} dx = \omega_s^2 \int_0^L m F_r^* F_s^* dx$$

ou:

$$\left[-V_s F_r^* + M_s F_r^{*II} \right]_0^L + E I \int_0^L F_r^{*II} F_s^{*II} dx - \omega_s^2 \int_0^L m r^2 F_r^* F_s^{*II} dx = \omega_s^2 \int_0^L m F_r^* F_s^* dx$$

Eliminado-se os termos que se anulam nas vigas de extremidades simples:

$$\omega_s^2 \int_0^L m F_r^* F_s^* dx = E I \int_0^L F_s^{*II} F_r^{*II} dx - \omega_s^2 \int_0^L m r^2 F_s^{*II} F_r^* dx \quad (2.38)$$

Fazendo-se (2.37) menos (2.38), tem-se:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \left(\int_0^L m F_r^* F_s^* + m r^2 F_r^* F_s^{*II} \right) dx = 0 \quad (2.39)$$

que consiste na relação básica da ortogonalidade em questão.

2.3.2 Vibração forçada com amortecimento

Combinado-se as equações (2.19), (2.21) e (2.28) resulta em:

$$E I v^{IV} + c E I \dot{v}^{IV} + m \ddot{v} - m r^2 \ddot{v}^I = p(x, t) \quad (2.40)$$

A solução da equação acima pode ser da forma:

$$v = \sum_r F_r^*(x)q_r(t)$$

Colocando-se a expressão acima na equação (2.40), multiplicando-se por $F_s^* dx$ e integrando-se no comprimento, obtém-se:

$$\int_0^L \left[EI \sum_r F_r^{*IV} q_r + cEI \sum_r F_r^{*IV} \dot{q}_r + m \sum_r F_r^* \ddot{q}_r - mr^2 \sum_r F_r^{*II} \ddot{q}_r \right] F_s^* dx = \int_0^L p(x,t) F_s^* dx \quad (2.41)$$

Fazendo-se a integral $\int_0^L F_r^{*II} F_s^* dx$ por partes, tem-se:

$$\int_0^L F_r^{*II} F_s^* dx = \left[F_s^* F_r^{*II} \right]_0^L - \int_0^L F_s^{*II} F_r^* dx \quad (2.42)$$

Para vigas com condições de apoios simples, o termo entre colchetes se anula. Com as equações (2.34) e (2.42), a equação (2.41) pode ser reescrita como segue:

$$\int_0^L \sum_r \left[\left(\ddot{q}_r + c \dot{q}_r \omega_r^2 + q_r \omega_r^2 \right) \left(m F_r^* F_s^* + mr^2 F_s^{*II} F_r^* \right) \right] dx = \int_0^L p(x,t) F_s^* dx$$

Com a condição de ortogonalidade (2.39) pode-se fazer:

$$\ddot{q}_s + c \omega_s^2 \dot{q}_s + \omega_s^2 q_s = \frac{\int_0^L p(x,t) F_s^* dx}{\int_0^L \left(m F_s^{*2} + mr^2 (F_s^{*II})^2 \right) dx} \quad (2.43)$$

completando-se o tema.

2.4 Modelo de Euler-Bernoulli com força cortante

A força cortante dá origem a uma deformação chamada distorção. Esta deformação faz com que, nos engastes, por exemplo, a inclinação da tangente à

linha elástica deixe de ser nula e não haja continuidade da curva nos apoios intermediários de vigas contínuas. Tal descontinuidade sugere separar-se a deformação produzida pela força cortante da deformação produzida pelo momento fletor. Chamando-se de α a rotação produzida pelo momento fletor, pode-se escrever:

$$M = -EI\alpha' \quad (2.44)$$

$$V = \kappa AG\gamma \quad (2.45)$$

Chamando-se de v_b a contribuição do momento fletor para deflexão, de v_s a contribuição da força cortante e de v a deflexão total, de modo que:

$$v = v_b + v_s$$

Derivando-se a expressão acima em relação a x , obtém-se:

$$v' = \alpha + \gamma \quad (2.46)$$

Colocando-se as expressões (2.45) e (2.46) na equação (2.2), encontra-se que:

$$m \ddot{v} - \kappa AG(v'' - \alpha') = 0 \quad (2.47)$$

Da mesma forma, substituindo-se as expressões (2.44), (2.45) e (2.46) na equação (2.1), resulta em:

$$EI\alpha'' + \kappa AG(v' - \alpha) = 0 \quad (2.48)$$

A solução das equações (2.47) e (2.48) pode ser levada a efeito por separação de variáveis, ou seja:

$$v = \phi e^{i\omega t}$$

e

$$\alpha = \varphi e^{i\omega t}$$

onde se emprega a notação complexa, sendo que ϕ e φ são funções apenas de x e representam a amplitude.

Substituindo-se as expressões de v e α nas equações (2.47) e (2.48):

$$\begin{aligned} \kappa AG(\phi^{\parallel} - \phi^{\perp}) + m\omega^2\phi &= 0 \\ EI\phi^{\parallel} + \kappa AG(\phi^{\parallel} - \phi) &= 0 \end{aligned} \tag{2.49}$$

onde o acoplamento se destaca.

2.4.1 Ortogonalidade

Os modos normais de vibração do modelo de Euler-Bernoulli com força cortante também são ortogonais. Considerem-se, para tanto, as equações (2.49) relativas a um modo de vibração r . Multiplicando-se a primeira equação por $\phi_s dx$ e a segunda por $\phi_r dx$, onde s é um outro modo de vibração, e integrando-se no comprimento, têm-se:

$$\begin{aligned} \int_0^L m\omega_r^2 \phi_r \phi_s dx + \int_0^L \kappa AG(\phi_r^{\parallel} \phi_s - \phi_r^{\perp} \phi_s) dx &= 0 \\ \int_0^L (EI\phi_r^{\perp} \phi_s + \kappa AG\phi_r^{\parallel} \phi_s - \kappa AG\phi_r \phi_s) dx &= 0 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Integrando-se as equações acima por partes, têm-se:

$$\begin{aligned} \kappa AG \int_0^L \phi_r^{\parallel} \phi_s dx &= \kappa AG \left(\phi_s \phi_r^{\parallel} \Big|_0^L - \int_0^L \phi_r^{\parallel} \phi_s' dx \right) \\ \kappa AG \int_0^L \phi_r^{\perp} \phi_s dx &= \kappa AG \left(\phi_s \phi_r^{\perp} \Big|_0^L - \int_0^L \phi_r^{\perp} \phi_s' dx \right) \\ EI \int_0^L \phi_r^{\perp} \phi_s dx &= EI \left(\phi_s \phi_r^{\perp} \Big|_0^L - \int_0^L \phi_r^{\perp} \phi_s' dx \right) \\ \kappa AG \int_0^L \phi_r^{\perp} \phi_s dx &= \kappa AG \left(\phi_r \phi_s \Big|_0^L - \int_0^L \phi_r \phi_s' dx \right) \end{aligned} \tag{2.51}$$

Somando-se as equações (2.50), depois de serem feitas as integrais (2.51), resulta a expressão:

$$-\omega_r^2 \int_0^L m \phi_r \phi_s dx = \int_0^L \kappa AG (-\phi_r' \phi_s' + \phi_r \phi_s'' - \phi_r' \phi_s' - \phi_r \phi_s'') dx - \int_0^L EI \phi_r' \phi_s' dx + \kappa AG [\phi_s \phi_r' - \phi_s' \phi_r + \phi_r \phi_s]_0^L + EI \phi_s \phi_r' |_0^L \quad (2.52)$$

Sejam as equações (2.49) no caso de um modo genérico de vibrar s . Multiplicando-se a primeira equação por $\phi_r dx$, a segunda por $\phi_r dx$ e integrando-se no comprimento, resulta em:

$$\int_0^L m \omega_s^2 \phi_r \phi_s dx + \int_0^L \kappa AG (\phi_s'' \phi_r - \phi_s' \phi_r') dx = 0$$

$$\int_0^L (EI \phi_s'' \phi_r + \kappa AG \phi_s' \phi_r - \kappa AG \phi_r \phi_s') dx = 0$$

Integrando-se os termos: $\int_0^L EI \phi_s'' \phi_r dx$ e $\int_0^L \kappa AG \phi_s' \phi_r dx$ uma vez por partes

e somando-se as equação acima, obtêm-se:

$$-\omega_s^2 \int_0^L m \phi_s \phi_r dx = \int_0^L \kappa AG (-\phi_s' \phi_r' - \phi_s' \phi_r' + \phi_s'' \phi_r - \phi_s \phi_r'') dx - \int_0^L EI \phi_s' \phi_r' dx + [\kappa AG \phi_r \phi_s' + EI \phi_r \phi_s']_0^L \quad (2.53)$$

Fazendo-se (2.53) menos (2.52), resulta em:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L m \phi_r \phi_s dx = [\kappa AG (\phi_r \phi_s' - \phi_s \phi_r' + \phi_s \phi_r'' - \phi_r \phi_s'') + EI (\phi_r \phi_s' - \phi_s \phi_r')]_0^L \quad (2.54)$$

A expressão entre colchetes acima pode ser colocada em função dos esforços solicitantes e dos deslocamentos, conforme demonstração a seguir. Substituindo-se a expressão de γ (equação (2.46)) na expressão da força cortante (2.45):

$$V = \kappa AG(v' - \alpha) \quad (2.55)$$

Colocando-se as funções de forma de v e α (ϕ e φ , respectivamente) nas expressões do momento fletor (2.44) e da força cortante (2.55), obtém-se:

$$M = -EI\varphi' \quad (2.56)$$

$$V = \kappa AG(\phi' - \varphi) \quad (2.57)$$

Com as expressões (2.56) e (2.57), a expressão (2.54) fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L m \phi_r \phi_s dx = & \left[\phi_r (V_s + \kappa AG \varphi_s) - \kappa AG \phi_s \phi_r' + \right. \\ & \left. \phi_s (-V_r + \kappa AG \phi_r') - \kappa AG \phi_r \varphi_s - M_s \varphi_r + M_r \varphi_s \right]_0^L \end{aligned}$$

Simplificando-se a expressão acima, encontra-se:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L m \phi_r \phi_s dx = \left[\phi_r V_s - \phi_s V_r + M_r \varphi_s - M_s \varphi_r \right]_0^L$$

As condições de contorno nos engastes são as seguintes: $\phi_r = \phi_s = \varphi_r = \varphi_s = 0$; nos apoios do segundo gênero: $\phi_r = \phi_s = M_r = M_s = 0$ e nas extremidades livres: $V_s = V_r = M_r = M_s = 0$. Portanto, nas vigas com estas condições de extremidade simples, a expressão acima é tal que:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L m \phi_r \phi_s dx = 0 \quad (2.58)$$

ficando clara, então a ortogonalidade.

2.4.2 Vibração forçada com amortecimento

Combinando-se as equações (2.20), (2.21) e (2.46), obtém-se a expressão:

$$m \ddot{v} - \kappa AG \left[v^{|} - \alpha^{|} + c(\dot{v}^{|} - \dot{\alpha}^{|}) \right] = p(x, t) \quad (2.59)$$

Colocando-se as equações (2.19), (2.20) e (2.46) na equação (2.1), resulta em:

$$EI \alpha^{|} + cEI \dot{\alpha}^{|} + \kappa AG \left[v^{|} - \alpha^{|} + c(\dot{v}^{|} - \dot{\alpha}^{|}) \right] = 0 \quad (2.60)$$

A deflexão $v(x, t)$ e a inclinação de flexão $\alpha(x, t)$ podem ser expressas em função de coordenadas generalizadas:

$$v = \sum_r q_r(t) \phi_r(x) \quad (2.61)$$

$$\alpha = \sum_r q_r(t) \varphi_r(x)$$

Colocando-se as somas (2.61) nas equações (2.59) e (2.60), têm-se, respectivamente:

$$m \sum_r \ddot{q}_r \phi_r - \kappa AG \sum_r \left[q_r (\phi_r^{|} - \varphi_r^{|}) + c \dot{q}_r (\phi_r^{|} - \varphi_r^{|}) \right] = p(x, t) \quad (2.62)$$

$$c \sum_r \dot{q}_r (EI \varphi_r^{|} + \kappa AG \phi_r^{|} - \kappa AG \varphi_r) = \sum_r q_r (-EI \varphi_r^{|} - \kappa AG \phi_r^{|} + \kappa AG \varphi_r)$$

Comparando-se as equações (2.62) com as equações (2.49), tem-se:

$$m \sum_r \ddot{q}_r \phi_r + \sum_r q_r (m \omega_r^2 \phi_r) + c \sum_r \dot{q}_r (m \omega_r^2 \phi_r) = p(x, t) \quad (2.63)$$

Multiplicando-se expressão (2.63) por $\phi_s dx$ e integrando-se ao longo da barra:

$$\sum_r \ddot{q}_r \int_0^L m \phi_r \phi_s dx + c \sum_r \dot{q}_r \omega_r^2 \int_0^L m \phi_r \phi_s dx + \sum_r q_r \omega_r^2 \int_0^L m \phi_r \phi_s dx = \int_0^L p(x, t) \phi_s dx \quad (2.64)$$

A equação da ortogonalidade (2.58) mostra que quando $r \neq s$ o lado esquerdo da expressão (2.64) se anula. Então:

$$\ddot{q}_s + c\omega_s^2 \dot{q}_s + \omega_s^2 q_s = \frac{\int_0^L p(x,t)\phi_s dx}{\int_0^L m\phi_s^2 dx} \quad (2.65)$$

finalizando-se, assim, o assunto.

2.5 Teoria de viga de Timoshenko

A teoria de viga de Timoshenko considera os efeitos do momento fletor, da inércia de rotação e da força cortante. Chamando-se de α a rotação produzida pelo momento fletor (incluindo-se o momento fletor devido à inércia de rotação), a equação (2.28) assume a forma:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V - mr^2 \ddot{\alpha} \quad (2.66)$$

Colocando-se as expressões (2.44), (2.45) e (2.46) na equação (2.66), tem-se:

$$EI\alpha'' + \kappa AG(v' - \alpha) - mr^2 \ddot{\alpha} = 0 \quad (2.67)$$

Da mesma forma que nos modelos anteriores, a solução das equações (2.47) e (2.67) pode ser expressa por separação de variáveis, ou seja:

$$\begin{aligned} v &= \phi e^{i\omega t} \\ \alpha &= \varphi e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Substituindo-se as expressões de v e α nas equações (2.47) e (2.67), têm-se:

$$\phi'' + c\phi - \phi' = 0 \quad (2.69)$$

$$EI\varphi'' + (mr^2\omega^2 - \kappa AG)\varphi + \kappa AG\phi' = 0 \quad (2.70)$$

onde:

$$c = \frac{m\omega^2}{\kappa AG}$$

Eliminando-se φ' da equação (2.69) e ϕ' da equação (2.70), resulta:

$$\phi^{IV} + a\phi'' + b\phi = 0 \quad (2.71)$$

$$\varphi^{IV} + a\varphi'' + b\varphi = 0 \quad (2.72)$$

onde:

$$a = c + \frac{mr^2\omega^2}{EI}$$

$$b = \frac{(mr^2\omega^2 - \kappa AG)c}{EI}$$

As amplitudes ϕ e φ podem ser assumidas como sendo da seguinte forma:

$$\phi = Ce^{\beta x} \quad (2.73)$$

$$\varphi = De^{\beta x}$$

A expressão de β pode ser determinada colocando-se a expressão de ϕ na equação (2.71) ou φ na equação (2.72):

$$\beta^4 + a\beta^2 + b = 0$$

de onde:

$$\beta_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}$$

$$\beta_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}$$

Sendo assim, ϕ e φ assumem as formas:

$$\phi = \sum_{j=1}^4 C_j e^{\beta_j x} \quad (2.74)$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^4 D_j e^{\beta_j x} \quad (2.75)$$

Substituindo-se as equações (2.74) e (2.75) na equação (2.69) têm-se a relação entre C_j e D_j :

$$D_j = g_j C_j \quad (2.76)$$

onde:

$$g_j = \beta_j \left(1 + \frac{c}{\beta_j^2} \right) \quad (2.77)$$

Das expressões de $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ e β_4 e equação (2.77) conclui-se que:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= -\beta_1 \\ \beta_4 &= -\beta_3 \\ g_2 &= -g_1 \\ g_4 &= -g_3 \end{aligned}$$

As equações demonstradas no capítulo serão empregadas no próximo capítulo para a formulação das matrizes de rigidez dinâmica.

2.5.1 Ortogonalidade

Os modos normais de vibração da viga de Timoshenko também são ortogonais. Para demonstrar esta propriedade considerem-se as equações (2.69) e (2.70) no caso de um modo de vibração r . Multiplicando-se a primeira equação por $\phi_s dx$ e a segunda por $\varphi_s dx$, onde s é um outro modo de vibração e integrando-se no comprimento L :

$$-\int_0^L m\omega_r^2 \phi_r \phi_s dx = \int_0^L \kappa AG (\phi_r'' \phi_s - \phi_r' \phi_s') dx \quad (2.78)$$

$$-\int_0^L mr^2 \omega_r^2 \varphi_r \varphi_s dx = \int_0^L (EI \varphi_r'' \varphi_s + \kappa AG \phi_r' \varphi_s - \kappa AG \varphi_r \phi_s') dx \quad (2.79)$$

Integrando-se o lado direito das equações acima por partes uma vez e somando as equações, fica-se como segue:

$$\begin{aligned} -\omega_r^2 \int_0^L (m\phi_r \phi_s + mr^2 \varphi_r \varphi_s) dx &= \int_0^L \kappa AG (-\phi_r' \phi_s' + \varphi_r \phi_s') dx - \int_0^L EI \varphi_r' \varphi_s' dx + \\ &+ \int_0^L \kappa AG (-\phi_r \varphi_s' - \varphi_r \phi_s') dx + \kappa AG [\phi_s \phi_r' - \phi_s \varphi_r + \phi_r \varphi_s]_0^L + [EI \varphi_s \varphi_r']_0^L \end{aligned} \quad (2.80)$$

Considere-se, agora, as equações (2.69) e (2.70) como referentes ao modo genérico de vibração s . Multiplicando-se a primeira equação por $\phi_r dx$, a segunda por $\varphi_r dx$ e integrando-se no comprimento, fica-se com:

$$-\int_0^L m\omega_s^2 \phi_r \phi_s dx = \int_0^L \kappa AG (\phi_s'' \phi_r - \phi_s' \phi_r') dx$$

$$-\int_0^L mr^2 \omega_s^2 \varphi_r \varphi_s dx = \int_0^L (EI \varphi_s'' \varphi_r + \kappa AG \phi_s' \varphi_r - \kappa AG \varphi_s \phi_r') dx$$

Fazendo-se uma vez por partes a integral dos termos: $\int_0^L \kappa AG \phi_s'' \phi_r dx$ e $\int_0^L EI \varphi_s'' \varphi_r dx$ e somando-se as equações acima, encontra-se a expressão:

$$\begin{aligned}
-\omega_s \int_0^L (m\phi_r \phi_s dx + mr^2 \varphi_r \varphi_s dx) &= \int_0^L \kappa AG (-\phi_s' \phi_r' - \phi_s' \phi_r + \phi_s' \varphi_r - \varphi_s \varphi_r') dx \\
&- \int_0^L EI \varphi_s' \varphi_r' dx + \left[\kappa AG \phi_r \phi_s' + EI \varphi_s' \varphi_r \right]_0^L
\end{aligned} \quad (2.81)$$

Procedendo-se a subtração (2.81) menos (2.80):

$$\begin{aligned}
(\omega_r^2 - \omega_s^2) \left(\int_0^L m \phi_r \phi_s dx + \int_0^L mr^2 \varphi_r \varphi_s dx \right) &= \left[\kappa AG (\phi_r \phi_s' - \phi_s \phi_r' + \phi_s \varphi_r - \phi_r \varphi_s') + \right. \\
&\left. EI (\varphi_s' \varphi_r - \varphi_s \varphi_r') \right]_0^L
\end{aligned} \quad (2.82)$$

Conforme demonstração no item 2.4.1, a expressão (2.82) pode ser colocada na forma:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \left(\int_0^L m \phi_r \phi_s dx + \int_0^L mr^2 \varphi_r \varphi_s dx \right) = [\phi_r V_s - \phi_s V_r + M_r \varphi_s - M_s \varphi_r]_0^L \quad (2.83)$$

Nas vigas com condições de extremidades simples os termos entre colchetes são nulos, então:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \left(\int_0^L m \phi_r \phi_s dx + \int_0^L mr^2 \varphi_r \varphi_s dx \right) = 0 \quad (2.84)$$

A expressão acima mostra que os modos normais de vibração da viga de Timoshenko são ortogonais, porém envolvendo uma combinação ponderada dos modos ϕ e φ (uma espécie de acoplamento).

2.5.2 Vibração forçada com amortecimento

Na vibração forçada a estrutura pode ficar solicitada, além da força distribuída $p(x,t)$, por um momento distribuído $u(x,t)$. Para este caso, a equação de equilíbrio (2.66) assume a forma:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V - mr^2 \ddot{\alpha} + u(x, t) \quad (2.85)$$

Substituindo-se as equações (2.19), (2.20) e (2.46) na equação (2.85), resulta a expressão:

$$EI\alpha'' + cEI\dot{\alpha}'' + \kappa AG \left[v' - \alpha + c(\dot{v}' - \dot{\alpha}) \right] - mr^2 \ddot{\alpha} = -u(x, t) \quad (2.86)$$

A solução das equações (2.59) e (2.86) pode ser expressa em função de coordenadas generalizadas:

$$v = \sum_r q_r(t) \phi_r(x) \quad (2.87)$$

$$\alpha = \sum_r q_r(t) \varphi_r(x)$$

Levando-se as somas acima nas equações (2.59) e (2.86), têm-se, respectivamente:

$$m \sum_r \ddot{q}_r \phi_r - \kappa AG \sum_r \left[q_r (\phi_r'' - \phi_r') + c \dot{q}_r (\phi_r'' - \phi_r') \right] = p(x, t) \quad (2.88)$$

$$c \sum_r \dot{q}_r (EI\phi_r'' + \kappa AG\phi_r' - \kappa AG\varphi_r) = \sum_r q_r (-EI\phi_r'' - \kappa AG\phi_r' + \kappa AG\varphi_r) + mr^2 \sum_r \ddot{q}_r \varphi_r - u(x, t)$$

Colocando-se as equações (2.88) em uma forma mais apropriada:

$$m \sum_r \ddot{q}_r \phi_r = \kappa AG \sum_r (q_r + c \dot{q}_r) (\phi_r'' - \phi_r') + p(x, t) \quad (2.89)$$

$$mr^2 \sum_r \ddot{q}_r \varphi_r = \sum_r (q_r + c \dot{q}_r) (EI\phi_r'' + \kappa AG\phi_r' - \kappa AG\varphi_r) + u(x, t)$$

Comparando-se as equações (2.89) com as equações (2.69) e (2.70), tem-se:

$$m \sum_r \ddot{q}_r \phi_r = - \sum_r (q_r + c \dot{q}_r) (m \omega_r^2 \phi_r) + p(x, t) \quad (2.90)$$

$$mr^2 \sum_r \ddot{q}_r \varphi_r = - \sum_r (q_r + c \dot{q}_r) (mr^2 \omega_r^2 \varphi_r) + u(x, t)$$

Multiplicando-se a primeira expressão (2.90) por $\phi_s dx$, a segunda por $\varphi_s dx$, somando e integrando, obtêm-se:

$$\sum_r \int_0^L (\ddot{q}_r + c \dot{q}_r \omega_r^2 + q_r \omega_r^2) (mr^2 \varphi_r \varphi_s + m \phi_r \phi_s) dx = \int_0^L p(x, t) \phi_s dx + \int_0^L u(x, t) \varphi_s dx$$

A equação da ortogonalidade (2.84) mostra que quando $r \neq s$ o lado esquerdo da expressão acima se anula. Então:

$$\ddot{q}_s + c \omega_s^2 \dot{q}_s + \omega_s^2 q_s = \frac{\int_0^L p(x, t) \phi_s dx + \int_0^L u(x, t) \varphi_s dx}{\int_0^L (mr^2 \varphi_s^2 + m \phi_s^2) dx} \quad (2.91)$$

o que completa o assunto.

2.6 Ortogonalidade de vigas contínuas

Para que os modos normais de vibração de uma viga contínua sejam ortogonais e, por conseqüência, seja válida a superposição modal, o segundo membro da expressão (2.83):

$$[\phi_r V_s - \phi_s V_r + M_r \varphi_s - M_s \varphi_r]_0^L$$

deve ser nulo.

Seja a viga contínua da figura 2.3. Os termos que contêm a expressão de ϕ anulam-se nos apoios B, C, D e E. Para os outros termos, a expressão da condição de extremidade assume a forma:

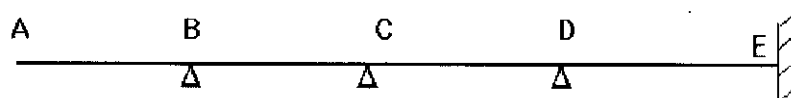


FIGURA 2.3 - Viga contínua

$$\begin{aligned}
 &M_r(B)\phi_s(B) - M_s(B)\phi_r(B) - \phi_r(A)V_s(A) + \phi_s(A)V_r(A) - M_r(A)\phi_s(A) + M_s(A)\phi_r(A) + \\
 &M_r(C)\phi_s(C) - M_s(C)\phi_r(C) - M_r(B)\phi_s(B) + M_s(B)\phi_r(B) + \\
 &M_r(D)\phi_s(D) - M_s(D)\phi_r(D) - M_r(C)\phi_s(C) + M_s(C)\phi_r(C) + \\
 &M_r(E)\phi_s(E) - M_s(E)\phi_r(E) - M_r(D)\phi_s(D) + M_s(D)\phi_r(D)
 \end{aligned}$$

Uma vez que o momento fletor e a força cortante no apoio A e a inclinação da tangente à linha elástica produzida pelo momento fletor no apoio E são nulos, a expressão acima é nula e os modos normais de vibração da viga contínua da figura 2.3 são ortogonais.

2.7 Exemplos

Como primeiro exemplo é oportuno analisar os efeitos da força cortante e da inércia de rotação nos períodos de vibração de uma viga em balanço. Considerar os três primeiros modos e dois valores para o comprimento: $L_1 = 11,547$ m e $L_2 = 20$ m. Dados: $E = 210$ GPa; $\nu = 0,33$; $A = 0,3$ m²; $I = 0,025$ m⁴; $r = 0,2887$ m; $\kappa = 0,85$; $\rho = 7850$ kg/m³.

A tabela 2.1 arrola os resultados de maior interesse para o confronto das várias técnicas. Verifica-se que quando são considerados os efeitos da inércia de rotação e da força cortante o valor do período aumenta. Estes efeitos são mais consideráveis nas vigas curtas e nas frequências altas. De um modo geral o efeito da força cortante é mais significativo do que o efeito da inércia de rotação.

TABELA 2.1 - Períodos de vibração de uma viga em balanço

Modelos	Comprimentos (m)	1° modo		2° modo		3° modo	
		Período (s)	% de exatidão	Período (s)	% de exatidão	Período (s)	% de exatidão
Teoria de viga de Timoshenko	20	0,4797	100	0,0775	100	0,0282	100
	11,547	0,1605	100	0,0265	100	0,0099	100
Euler-Bernoulli + inércia de rotação	20	0,4790	99,85	0,0767	98,97	0,0275	97,52
	11,547	0,1598	99,56	0,0257	96,98	0,0093	93,94
Euler-Bernoulli	20	0,4786	99,77	0,0764	98,58	0,0273	96,81
	11,547	0,1596	99,44	0,0255	96,23	0,0091	91,92

O segundo exemplo consiste-se em determinar a componente do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga $p(x,t)$ do tipo Dirac (carga concentrada), no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$, onde T é o período do primeiro modo de vibração. Considerar o modelo de Euler-Bernoulli e a teoria de viga de Timoshenko. Dados: $L = 11,547$ m; $I = 0,025$ m⁴; $A = 0,3$ m²; $\kappa = 0,85$; $E = 210$ GPa; $\nu = 0,33$; $\rho = 7850$ kg/m³.

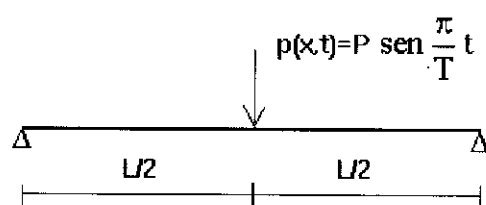


FIGURA 2.4 - Vibração forçada

Os cinco primeiros modos de vibração são considerados na superposição modal. Entretanto, os modos pares não são excitados pela força aplicada no meio do vão, uma vez que estes modos são antissimétricos. Dessa forma, o deslocamento vertical do ponto de aplicação da força é dado por:

$$v = \sum_1^5 q_1 \cdot v_1(x/2)$$

Impondo-se as condições de contorno, têm-se as expressões de ϕ e φ para a viga de Timoshenko (uma abordagem mais detalhada encontra-se no capítulo três):

$$\begin{aligned}\phi &= C_1 \text{sen } k_1 x \\ \varphi &= -\frac{c - k_1^2}{k_1} C_1 \cos k_1 x\end{aligned}$$

onde:

$$k_1 = \frac{n\pi}{L}$$

com $n = 1, 2, \dots, 5$.

Para se usar a equação (2.91), precisam-se das seguintes integrais:

$$\int_0^L \phi^2 dx = \int_0^L C_1^2 \text{sen}^2 k_1 x = C_1^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L \varphi^2 dx = \left(\frac{c - k_1^2}{k_1} \right)^2 C_1^2 \frac{L}{2}$$

Precisa-se, também, do produto da força P pelo deslocamento correspondente ao modo de vibração, ou seja:

$$P\phi(L/2) = P \text{sen} \frac{\pi}{T} t \cdot C_1 \text{sen} \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{L}{2}$$

Com n , na expressão acima, representando o número em seqüência do modo em análise. Sendo assim, para o modelo de Euler-Bernoulli e o modo número 1, tem-se:

$$\ddot{q}_1 + q_1 \omega_1^2 = \frac{2P \text{sen} \frac{\pi}{T} t \cdot (1)}{mC_1 L}$$

Onde $\omega_1 = 110,521$ rad./s. Raciocínio análogo deve ser feito para os modos 3 e 5.

Considere-se, agora, o modelo de viga de Timoshenko. Para o modo fundamental, a equação (2.91) assume a forma:

$$\ddot{q}_1 + q_1(109,146)^2 = \frac{2P \operatorname{sen} \frac{\pi}{T} t \cdot (1)}{mC_1L(1,0059)}$$

Da mesma forma que o modelo anterior, para este modelo a equação acima deve ser escrita para os modos 3 e 5. Considerando-se que a viga partiu do repouso, decorre: $q(x,0)=0$ e $\dot{q}(x,0) = 0$, e a solução da equação acima é dada por:

$$q = \frac{C}{\omega_1^2 - \omega^2} \left(-\frac{\omega}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t + \operatorname{sen} \omega t \right)$$

onde:

$$\omega = \frac{\pi}{T} \quad \text{e} \quad C = \frac{2P}{1,0059 \cdot mC_1L}$$

Na tabela 2.2 estão os valores dos deslocamentos do ponto central para o tempo t variando de zero a T . Nessa tabela e o intervalo considerado é a décima parte de T . Desta tabela conclui-se que a teoria de viga de Timoshenko fornece valores maiores do que aqueles fornecidos pela teoria elementar de Euler-Bernoulli, como era de se esperar (menor rigidez). A diferença entre as duas teorias aumenta nas altas freqüências, não sendo prudente negligenciar as contribuições da inércia de rotação e da deformação por força cortante.

TABELA 2.2 Deslocamento do ponto central da viga da fig. 2.4

tempo	Deslocamentos segundo o modelo de Euler-Bernoulli $\times PL^3/EI$		
	$\omega_1 = 110,52 \text{ rad./s}$	$\omega_3 = 994,69 \text{ rad./s}$	$\omega_5 = 2763,03 \text{ rad./s}$
0,1T	$0,414 \times 10^{-3}$	$0,855 \times 10^{-4}$	$0,102 \times 10^{-4}$
0,2T	$0,307 \times 10^{-2}$	$0,160 \times 10^{-3}$	$0,194 \times 10^{-4}$
0,3T	$0,913 \times 10^{-2}$	$0,216 \times 10^{-3}$	$0,267 \times 10^{-4}$
0,4T	$0,180 \times 10^{-1}$	$0,246 \times 10^{-3}$	$0,314 \times 10^{-4}$
0,5T	$0,274 \times 10^{-1}$	$0,250 \times 10^{-3}$	$0,330 \times 10^{-4}$
0,6T	$0,341 \times 10^{-1}$	$0,230 \times 10^{-3}$	$0,314 \times 10^{-4}$
0,7T	$0,352 \times 10^{-1}$	$0,189 \times 10^{-3}$	$0,267 \times 10^{-4}$
0,8T	$0,291 \times 10^{-1}$	$0,134 \times 10^{-3}$	$0,194 \times 10^{-4}$
0,9T	$0,165 \times 10^{-1}$	$0,690 \times 10^{-4}$	$0,102 \times 10^{-4}$
1,0T	$0,478 \times 10^{-8}$	$0,439 \times 10^{-10}$	$0,577 \times 10^{-11}$

TABELA 2.3 - Deslocamento do ponto central da viga da fig. 2.4

tempo	Deslocamentos segundo a teoria de Timoshenko $\times PL^3/EI$		
	$\omega_1 = 109,15 \text{ rad./s}$	$\omega_3 = 900,05 \text{ rad./s}$	$\omega_5 = 2191,2 \text{ rad./s}$
0,1T	$0,427 \times 10^{-3}$	$0,109 \times 10^{-3}$	$0,151 \times 10^{-4}$
0,2T	$0,307 \times 10^{-2}$	$0,189 \times 10^{-3}$	$0,288 \times 10^{-4}$
0,3T	$0,910 \times 10^{-2}$	$0,235 \times 10^{-3}$	$0,397 \times 10^{-4}$
0,4T	$0,180 \times 10^{-1}$	$0,266 \times 10^{-3}$	$0,467 \times 10^{-4}$
0,5T	$0,275 \times 10^{-1}$	$0,290 \times 10^{-3}$	$0,492 \times 10^{-4}$
0,6T	$0,345 \times 10^{-1}$	$0,296 \times 10^{-3}$	$0,470 \times 10^{-4}$
0,7T	$0,360 \times 10^{-1}$	$0,259 \times 10^{-3}$	$0,402 \times 10^{-4}$
0,8T	$0,303 \times 10^{-1}$	$0,177 \times 10^{-3}$	$0,295 \times 10^{-4}$
0,9T	$0,179 \times 10^{-1}$	$0,761 \times 10^{-4}$	$0,160 \times 10^{-4}$
1,0T	$0,124 \times 10^{-2}$	$0,144 \times 10^{-4}$	$0,109 \times 10^{-5}$

A figura 2.5 mostra o gráfico da variação do deslocamento com o tempo de acordo com os dois modelos. Neste gráfico estão somados os modos 1, 3 e 5 (superposição dos cinco primeiros modos).

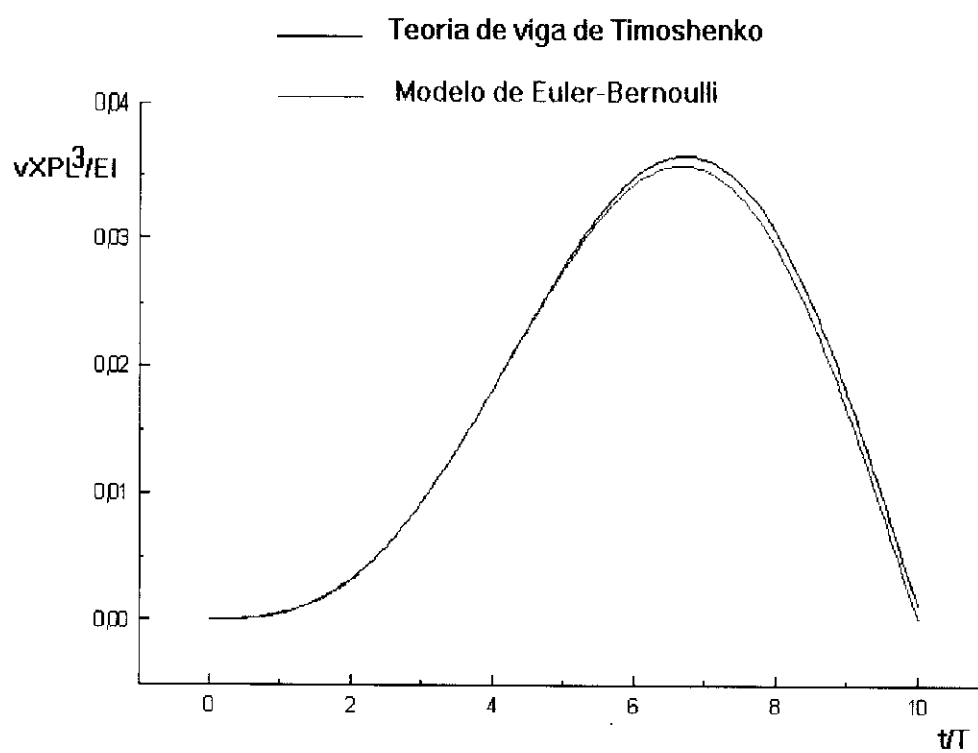


FIGURA 2.5 - Variação do deslocamento do ponto central com o tempo

3 MATRIZ DE RIGIDEZ DINÂMICA

3.1 Introdução

O método dos elementos finitos pode ser usado para se determinar as frequências naturais e a resposta dinâmica de sistemas estruturais. Existem dois procedimentos para o uso desse método no caso de estruturas de barras: um aproximado e outro, analítico. No procedimento aproximado, calculam-se os coeficientes da matriz de rigidez de um segmento de viga considerando-se apenas suas características estáticas, descritas por um polinômio cúbico. A essa matriz de rigidez somam-se de maneira aproximada os efeitos dinâmicos produzidos pelas forças inerciais. Dois métodos aproximados são usados para levar em consideração as forças inerciais do segmento de viga: 1) a massa distribuída é substituída simplesmente por massa concentrada nos nós, sendo que, deste procedimento, resulta em uma matriz de massa diagonal e é chamado *matriz de massa concentrada (diagonal)*; 2) a formulação variacional que resulta na chamada *matriz de massa consistente*, que consiste em uma matriz cheia e simétrica.

O procedimento a ser usado no presente trabalho é uma variante analítica e baseada no trabalho apresentado por CHEN (1987). No método analítico, considera-se que a estrutura possui massa e elasticidade são representadas por

uma função contínua e, por conseqüência, um infinito número de graus de liberdade está envolvido.

A seguir obtêm-se os coeficientes da matriz de rigidez dinâmica dos três modelos apresentados no capítulo anterior.

3.2 Modelo de Euler-Bernoulli

Seja o elemento de viga mostrado na figura 3.1. Admitindo-se movimento livre, impõe-se que os deslocamentos, rotações, forças e momentos fletores são proporcionais a $\cos(\omega t - \theta)$. Entretanto, para simplificar, este termo comum é omitido em todas as equações. Com as equações (2.10) e (2.12) e omitindo-se o termo citado, têm-se as expressões dos deslocamentos e da rotação nos pontos A e B, com notação já empregada no capítulo anterior:

$$v(0) = v_A = C_2 + C_4$$

$$v'(0) = \phi_A = C_1\lambda + C_3\lambda$$

$$v(L) = v_B = C_1 \sin \lambda L + C_2 \cos \lambda L + C_3 \sinh \lambda L + C_4 \cosh \lambda L$$

$$v'(L) = \phi_B = C_1\lambda \cos \lambda L - C_2\lambda \sin \lambda L + C_3\lambda \cosh \lambda L + C_4\lambda \sinh \lambda L$$

Colocando-se as expressões acima na forma matricial explícita:



FIGURA 3.1 - Elemento de viga

$$\begin{Bmatrix} v_A \\ \phi_A \\ v_B \\ \phi_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ \text{sen } \lambda L & \text{cos } \lambda L & \text{senh } \lambda L & \text{cosh } \lambda L \\ \lambda \text{ cos } \lambda L & -\lambda \text{ sen } \lambda L & \lambda \text{ cosh } \lambda L & \lambda \text{ senh } \lambda L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}$$

ou na forma matricial abreviada:

$$\{v\} = [B_1] \cdot \{C\} \quad (3.1)$$

Analogamente, pode-se escrever as expressões da força cortante e do momento fletor nos pontos A e B, ou seja:

$$V_A = EIv'''(0) = EI\lambda^3(-C_1 + C_3)$$

$$M_A = -EIv''(0) = -EI\lambda^2(-C_2 + C_4)$$

$$V_B = -EIv'''(L) = -EI\lambda^3(-C_1 \text{ cos } \lambda L + C_2 \text{ sen } \lambda L + C_3 \text{ cosh } \lambda L + C_4 \text{ senh } \lambda L)$$

$$M_B = EIv''(L) = EI\lambda^2(-C_1 \text{ sen } \lambda L - C_2 \text{ cos } \lambda L + C_3 \text{ senh } \lambda L + C_4 \text{ cosh } \lambda L)$$

ou:

$$\begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \\ V_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -EI\lambda^3 & 0 & EI\lambda^3 & 0 \\ 0 & EI\lambda^2 & 0 & -EI\lambda^2 \\ EI\lambda^3 \text{ cos } \lambda L & -EI\lambda^3 \text{ sen } \lambda L & -EI\lambda^3 \text{ cosh } \lambda L & -EI\lambda^3 \text{ senh } \lambda L \\ -EI\lambda^2 \text{ sen } \lambda L & -EI\lambda^2 \text{ cos } \lambda L & EI\lambda^2 \text{ senh } \lambda L & EI\lambda^2 \text{ cosh } \lambda L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}$$

ou, ainda, na forma matricial abreviada:

$$\{f\} = [B_2] \cdot \{C\} \quad (3.2)$$

Usando-se a expressão da matriz dos deslocamentos (3.1) pode-se fazer:

$$\{C\} = [B_1]^{-1} \cdot \{v\} \quad (3.3)$$

Colocando-se a expressão (3.3) em (3.2) resulta que:

$$\{f\} = [B_2] \cdot [B_1]^{-1} \cdot \{v\} \quad (3.4)$$

A expressão matricial (3.4) relaciona esforços nodais com deslocamentos nodais.

Por definição, o produto matricial:

$$[B_2] \cdot [B_1]^{-1}$$

resulta a matriz de rigidez de um segmento de viga.

$$[k] = [B_2] \cdot [B_1]^{-1}$$

ou seja:

$$[k] = D \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

onde:

$$D = \frac{EI}{1 - \cos \lambda L \cosh \lambda L}$$

$$k_{11} = k_{33} = \lambda^3 (\sin \lambda L \cosh \lambda L + \cos \lambda L \sinh \lambda L)$$

$$k_{12} = k_{21} = -k_{34} = -k_{43} = \lambda^2 \sin \lambda L \sinh \lambda L$$

$$k_{22} = k_{44} = \lambda (\sin \lambda L \cosh \lambda L - \cos \lambda L \sinh \lambda L)$$

$$k_{13} = k_{31} = -\lambda^3 (\sin \lambda L + \sinh \lambda L)$$

$$k_{23} = k_{32} = -k_{14} = -k_{41} = \lambda^2 (\cos \lambda L - \cosh \lambda L)$$

$$k_{24} = k_{42} = -\lambda (\sin \lambda L - \sinh \lambda L)$$

Os elementos acima somente existirão se:

$$1 - \cos \lambda L \cosh \lambda L \neq 0$$

evitando-se, pois, situação de singularidade.

A matriz de rigidez dinâmica da estrutura é formada somando-se a contribuição de cada elemento, resultando:

$$\{F\} = [K] \cdot \{V\}$$

Na vibração livre, o vetor de forças nodais é nulo e nem todos os deslocamentos são nulos (problema de auto-valor). Então:

$$\det[K] = 0 \quad (3.5)$$

e assim, determinam-se as frequências naturais de uma estrutura, por exemplo, usando-se a técnica iterativa de procura de autovalores. Para cada auto-valor, por sua vez, determinam-se os auto-vetores correspondentes.

3.3 Modelo de Euler-Bernoulli com inércia de rotação

Fazendo-se um raciocínio análogo ao exposto no item 3.2, pode-se conseguir a matriz de rigidez dinâmica para o modelo de Euler-Bernoulli com inércia de rotação. Com as equações (2.32) e (2.33) e novamente omitindo-se o termo comum $\cos(\omega t - \theta)$, podem ser obtidas as expressões dos deslocamentos e da rotação nos nós A e B da viga mostrada na figura 3.1:

$$v(0) = v_A = C_2^* + C_4^*$$

$$v'(0) = \phi_A = C_1^* k_1 + C_3^* k_2$$

$$v(L) = v_B = C_1^* \sin k_1 L + C_2^* \cos k_1 L + C_3^* \sinh k_2 L + C_4^* \cosh k_2 L$$

$$v'(L) = \phi_B = C_1^* k_1 \cos k_1 L - C_2^* k_1 \sin k_1 L + C_3^* k_2 \cosh k_2 L + C_4^* k_2 \sinh k_2 L$$

Colocando-se na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} V_A \\ \phi_A \\ V_B \\ \phi_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ \text{sen } k_1 L & \text{cos } k_1 L & \text{sinh } k_2 L & \text{cosh } k_2 L \\ k_1 \text{cos } k_1 L & -k_1 \text{sen } k_1 L & k_2 \text{cosh } k_2 L & k_2 \text{sinh } k_2 L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ C_3^* \\ C_4^* \end{Bmatrix}$$

ou:

$$\{v^*\} = [B_1^*] \cdot \{C^*\}$$

As expressões da força cortante e do momento fletor assumem a forma:

$$V_A = EIv'''(0) = EI(-C_1^* k_1^3 + C_3^* k_2^3)$$

$$M_A = -EIv''(0) = -EI(-C_2^* k_1^2 + C_4^* k_2^2)$$

$$V_B = -EIv'''(L) = -EI(-C_1^* k_1^3 \text{cos } k_1 L + C_2^* k_1^3 \text{sen } k_1 L + C_3^* k_2^3 \text{cosh } k_2 L + C_4^* k_2^3 \text{sinh } k_2 L)$$

$$M_B = EIv''(L) = EI(-C_1^* k_1^2 \text{sen } k_1 L - C_2^* k_1^2 \text{cos } k_1 L + C_3^* k_2^2 \text{sinh } k_2 L + C_4^* k_2^2 \text{cosh } k_2 L)$$

ou em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \\ V_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -EI k_1^3 & 0 & EI k_2^3 & 0 \\ 0 & EI k_1^2 & 0 & -EI k_2^2 \\ EI k_1^3 \text{cos } k_1 L & -EI k_1^3 \text{sen } k_1 L & -EI k_2^3 \text{cosh } k_2 L & -EI k_2^3 \text{sinh } k_2 L \\ -EI k_1^2 \text{sen } k_1 L & -EI k_1^2 \text{cos } k_1 L & EI k_2^2 \text{sinh } k_2 L & EI k_2^2 \text{cosh } k_2 L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ C_3^* \\ C_4^* \end{Bmatrix}$$

Em notação matricial, tem-se:

$$\{f^*\} = [B_2^*] \cdot \{C^*\}$$

A matriz de rigidez dinâmica é dada por:

$$[k] = [B_2^*] \cdot [B_1^*]^{-1}$$

Fazendo o produto, têm-se:

$$D = \frac{EI}{2k_1k_2 - 2k_1k_2 \cos k_1L \cosh k_2L + (k_2^2 - k_1^2) \sin k_1L \sinh k_2L}$$

$$k_{11} = k_{33} = (k_1^3k_2 + k_2^3k_1)(k_1 \sin k_1L \cosh k_2L + k_2 \cos k_1L \sinh k_2L)$$

$$k_{12} = k_{21} = -k_{34} = -k_{43} = -k_1k_2(k_1^2 - k_2^2)(1 - \cos k_1L \cosh k_2L) + (k_1^4 + k_2^4) \sin k_1L \sinh k_2L$$

$$k_{22} = k_{44} = (k_1^2 + k_2^2)(k_2 \sin k_1L \cosh k_2L - k_1 \cos k_1L \sinh k_2L)$$

$$k_{13} = k_{31} = -(k_1^3k_2 + k_2^3k_1)(k_1 \sin k_1L + k_2 \sinh k_2L)$$

$$k_{23} = k_{32} = -k_{14} = -k_{41} = (k_1^3k_2 + k_2^3k_1)(\cos k_1L - \cosh k_2L)$$

$$k_{24} = k_{42} = -(k_1^2 + k_2^2)(k_2 \sin k_1L - k_1 \sinh k_2L)$$

Os elementos acima somente existirão se:

$$2k_1k_2 - 2k_1k_2 \cos k_1L \cosh k_2L + (k_2^2 - k_1^2) \sin k_1L \sinh k_2L \neq 0$$

evitando-se, assim, situação de singularidade.

3.4 Teoria de viga de Timoshenko

Com as equações (2.68), (2.74), (2.75) e (2.76) têm-se as expressões dos deslocamentos e das rotações dos nós A e B do segmento de viga da Fig. 3.1 :

$$\begin{Bmatrix} v_A \\ \alpha_A \\ v_B \\ \alpha_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ g_1 & -g_1 & g_3 & -g_3 \\ e^{\beta_1 L} & e^{-\beta_1 L} & e^{\beta_3 L} & e^{-\beta_3 L} \\ g_1 e^{\beta_1 L} & -g_1 e^{-\beta_1 L} & g_3 e^{\beta_3 L} & -g_3 e^{-\beta_3 L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}$$

ou em uma forma abreviada:

$$\{\Delta\} = [B_1^{**}] \{C\} \quad (3.6)$$

Com as equações (2.44), (2.68), (2.76) e (2.57), têm-se as expressões da força cortante e do momento fletor nos pontos A e B:

$$\begin{aligned} V_A &= \kappa AG(\phi'(0) - \varphi(0)) \\ M_A &= -EI\alpha'(0) = -EI\varphi'(0) \\ V_B &= -\kappa AG(\phi'(L) - \varphi(L)) \\ M_B &= EI\alpha'(L) = EI\varphi'(L) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Colocando-se na forma matricial, têm-se:

$$\begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \\ V_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa AG(\beta_1 - g_1) & -\kappa AG(\beta_1 - g_1) & \kappa AG(\beta_3 - g_3) & -\kappa AG(\beta_3 - g_3) \\ -g_1\beta_1 EI & -g_1\beta_1 EI & -g_3\beta_3 EI & -g_3\beta_3 EI \\ -\kappa AG e^{\beta_1 L}(\beta_1 - g_1) & \kappa AG e^{-\beta_1 L}(\beta_1 - g_1) & -\kappa AG e^{\beta_3 L}(\beta_3 - g_3) & \kappa AG e^{-\beta_3 L}(\beta_3 - g_3) \\ g_1\beta_1 e^{\beta_1 L} EI & g_1\beta_1 e^{-\beta_1 L} EI & g_3\beta_3 e^{\beta_3 L} EI & g_3\beta_3 e^{-\beta_3 L} EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

ou:

$$\{f\} = [B_2^{**}] \{C\} \quad (3.9)$$

Com as equações (3.6) e (3.9) pode-se escrever:

$$\{f\} = [B_2^{**}] \cdot [B_1^{**}]^{-1} \cdot \{\Delta\}$$

Por definição, a matriz de rigidez dinâmica é dada por:

$$[k] = [B_2^{**}] \cdot [B_1^{**}]^{-1}$$

Fazendo o produto, têm-se:

$$D = \frac{EI}{(g_1 - g_3)^2 [e^{(\beta_1 + \beta_3)L} + e^{-(\beta_1 + \beta_3)L}] - (g_1 + g_3)^2 [e^{-(\beta_1 - \beta_3)L} + e^{(\beta_1 - \beta_3)L}] + 8g_1g_3}$$

$$k_{11} = k_{33} = g_1g_3(\beta_1^2 - \beta_3^2) \left\{ (g_1 - g_3) [e^{(\beta_1 + \beta_3)L} - e^{-(\beta_1 + \beta_3)L}] + (g_1 + g_3) [e^{(\beta_1 - \beta_3)L} - e^{-(\beta_1 - \beta_3)L}] \right\}$$

$$k_{12} = k_{21} = -k_{34} = -k_{43} = g_1g_3 \left\{ -4(\beta_1g_1 + \beta_3g_3) + (\beta_1 - \beta_3)(g_1 - g_3) [e^{(\beta_1 + \beta_3)L} + e^{-(\beta_1 + \beta_3)L}] + (\beta_1 + \beta_3)(g_1 + g_3) [e^{(\beta_1 - \beta_3)L} + e^{-(\beta_1 - \beta_3)L}] \right\}$$

$$k_{22} = k_{44} = (\beta_1g_1 - \beta_3g_3) \left\{ (g_1 - g_3) [e^{(\beta_1 + \beta_3)L} - e^{-(\beta_1 + \beta_3)L}] + (g_1 + g_3) [e^{-(\beta_1 - \beta_3)L} - e^{(\beta_1 - \beta_3)L}] \right\}$$

$$k_{13} = k_{31} = -2g_1g_3(\beta_1^2 - \beta_3^2) [g_1(e^{\beta_1L} - e^{-\beta_1L}) - g_3(e^{\beta_3L} - e^{-\beta_3L})]$$

$$k_{23} = k_{32} = -k_{14} = -k_{41} = -2g_1g_3(\beta_1g_1 - \beta_3g_3) [(e^{\beta_1L} + e^{-\beta_1L}) - (e^{\beta_3L} + e^{-\beta_3L})]$$

$$k_{24} = k_{42} = 2(\beta_1g_1 - \beta_3g_3) [g_3(e^{\beta_1L} - e^{-\beta_1L}) - g_1(e^{\beta_3L} - e^{-\beta_3L})]$$

O elementos acima somente existirão se:

$$(g_1 - g_3)^2 [e^{(\beta_1 + \beta_3)L} + e^{-(\beta_1 + \beta_3)L}] - (g_1 + g_3)^2 [e^{-(\beta_1 - \beta_3)L} + e^{(\beta_1 - \beta_3)L}] + 8g_1g_3 \neq 0$$

evitando-se situação de singularidade.

Na expressão de β_1 e β_3 o termo $a^2 - 4b$ é sempre maior que zero, portanto, têm-se duas raízes reais. No cálculo de β_1 e β_3 três casos podem

ocorrer:

1º caso: $\sqrt{a^2 - 4b} > a$

Neste caso, β_1 é imaginário e β_3 é real. Então:

$$\beta_1 = ik_1$$

$$\beta_3 = k_3$$

onde:

$$k_1 = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}$$

Assim sendo, g_1 e g_3 assumem a forma:

$$g_1 = i\delta_1$$

$$g_3 = \delta_3$$

onde:

$$\delta_1 = k_1 \left(1 - \frac{c}{k_1^2} \right)$$

$$\delta_3 = k_3 \left(1 + \frac{c}{k_3^2} \right)$$

As amplitudes ϕ (equação (2.74)) e φ (equação (2.75)) assumem, assim, a forma:

$$\phi = C_1^* \operatorname{sen} k_1 x + C_2^* \cos k_1 x + C_3^* \operatorname{senh} k_3 x + C_4^* \cosh k_3 x$$

$$\varphi = D_1^* \cos k_1 x + D_2^* \operatorname{sen} k_1 x + D_3^* \cosh k_3 x + D_4^* \operatorname{senh} k_3 x$$

onde as constantes C_j^* e D_j^* são todas reais e determinadas usando-se as quatro condições de contorno.

Colocando-se as expressões de ϕ e φ na equação (2.69) determinam-se as relações entre D_j^* e C_j^* para o primeiro caso:

$$\begin{aligned} & -C_1^* k_1^2 \operatorname{sen} k_1 x - C_2^* k_1^2 \cos k_1 x + C_3^* k_3^2 \operatorname{senh} k_3 x + C_4^* k_3^2 \operatorname{cosh} k_3 x + \\ & \quad c(C_1^* \operatorname{sen} k_1 x + C_2^* \cos k_1 x + C_3^* \operatorname{senh} k_3 x + C_4^* \operatorname{cosh} k_3 x) - \\ & (-D_1^* k_1 \operatorname{sen} k_1 x + D_2^* k_1 \cos k_1 x + D_3^* k_3 \operatorname{senh} k_3 x + D_4^* k_3 \operatorname{cosh} k_3 x) = 0 \end{aligned}$$

Agrupando-se a expressão acima, tem-se:

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen} k_1 x (-C_1^* k_1^2 + c C_1^* + D_1^* k_1) + \cos k_1 x (-C_2^* k_1^2 + c C_2^* - D_2^* k_1) + \\ & \quad \operatorname{senh} k_3 x (C_3^* k_3^2 + c C_3^* - D_3^* k_3) + \operatorname{cosh} k_3 x (C_4^* k_3^2 + c C_4^* - D_4^* k_3) = 0 \end{aligned}$$

Da expressão acima têm-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} D_1^* &= -\frac{c - k_1^2}{k_1} C_1^* & D_2^* &= \frac{c - k_1^2}{k_1} C_2^* \\ D_3^* &= \frac{c + k_3^2}{k_3} C_3^* & D_4^* &= \frac{c + k_3^2}{k_3} C_4^* \end{aligned} \quad (3.10)$$

Os elementos da matriz de rigidez dinâmica são, finalmente, dados por:

$$\begin{aligned} D &= \frac{EI}{(-\delta_1^2 + \delta_3^2) \operatorname{sen}(k_1 L) \operatorname{senh}(k_3 L) - 2\delta_1 \delta_3 \cos(k_1 L) \operatorname{cosh}(k_3 L) + 2\delta_1 \delta_3} \\ k_{11} &= k_{33} = \delta_1 \delta_3 (k_1^2 + k_3^2) [\delta_1 \operatorname{sen}(k_1 L) \operatorname{cosh}(k_3 L) + \delta_3 \cos(k_1 L) \operatorname{senh}(k_3 L)] \\ k_{12} &= k_{21} = -k_{34} = -k_{43} = \delta_1 \delta_3 \{ (k_1 \delta_1 - k_3 \delta_3) [1 - \cos(k_1 L) \operatorname{cosh}(k_3 L)] + \\ & \quad (k_1 \delta_3 + k_3 \delta_1) \operatorname{sen}(k_1 L) \operatorname{senh}(k_3 L) \} \end{aligned}$$

$$k_{22} = k_{44} = -(k_1\delta_1 + k_3\delta_3)[\delta_1 \cos(k_1L) \sinh(k_3L) - \delta_3 \sin(k_1L) \cosh(k_3L)]$$

$$k_{13} = k_{31} = -\delta_1\delta_3(k_1^2 + k_3^2)[\delta_1 \sin(k_1L) + \delta_3 \sinh(k_3L)]$$

$$k_{23} = k_{32} = -k_{14} = -k_{41} = \delta_1\delta_3(k_1\delta_1 + k_3\delta_3)[\cos(k_1L) - \cosh(k_3L)]$$

$$k_{24} = k_{42} = -(k_1\delta_1 + k_3\delta_3)[\delta_3 \sin(k_1L) - \delta_1 \sinh(k_3L)]$$

2º caso: $\sqrt{a^2 - 4b} < a$

Neste caso, β_1 e β_3 são imaginários. Então:

$$\beta_1 = ik_1$$

$$\beta_3 = ik_3$$

onde:

$$k_1 = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}$$

Portanto, g_1 e g_3 são dados por:

$$g_1 = i\delta_1$$

$$g_3 = i\delta_3$$

onde:

$$\delta_1 = k_1 \left(1 - \frac{c}{k_1^2} \right)$$

$$\delta_3 = k_3 \left(1 - \frac{c}{k_3^2} \right)$$

As amplitudes ϕ e φ assumem a forma:

$$\phi = C_1^* \text{sen } k_1 x + C_2^* \text{cos } k_1 x + C_3^* \text{sen } k_3 x + C_4^* \text{cos } k_3 x$$

$$\varphi = D_1^* \text{cos } k_1 x + D_2^* \text{sen } k_1 x + D_3^* \text{cos } k_3 x + D_4^* \text{sen } k_3 x$$

Da mesma forma que no primeiro caso, colocando-se as expressões de ϕ e φ na equação 2.69 determinam-se as relações entre D_j^* e C_j^* para o segundo caso:

$$\begin{aligned} & -C_1^* k_1^2 \text{sen } k_1 x - C_2^* k_1^2 \text{cos } k_1 x - C_3^* k_3^2 \text{sen } k_3 x - C_4^* k_3^2 \text{cos } k_3 x + \\ & c(C_1^* \text{sen } k_1 x + C_2^* \text{cos } k_1 x + C_3^* \text{sen } k_3 x + C_4^* \text{cos } k_3 x) - \\ & (-D_1^* k_1 \text{sen } k_1 x + D_2^* k_1 \text{cos } k_1 x - D_3^* k_3 \text{sen } k_3 x + D_4^* k_3 \text{cos } k_3 x) = 0 \end{aligned}$$

Agrupando, tem-se:

$$\begin{aligned} & \text{sen } k_1 x (-C_1^* k_1^2 + c C_1^* + D_1^* k_1) + \text{cos } k_1 x (-C_2^* k_1^2 + c C_2^* - D_2^* k_1) + \\ & \text{sen } k_3 x (-C_3^* k_3^2 + c C_3^* + D_3^* k_3) + \text{cos } k_3 x (-C_4^* k_3^2 + c C_4^* - D_4^* k_3) = 0 \end{aligned}$$

Da expressão acima têm-se as relações:

$$\begin{aligned} D_1^* &= -\frac{c - k_1^2}{k_1} C_1^* & D_2^* &= \frac{c - k_1^2}{k_1} C_2^* \\ D_3^* &= -\frac{c - k_3^2}{k_3} C_3^* & D_4^* &= \frac{c - k_3^2}{k_3} C_4^* \end{aligned} \tag{3.11}$$

Os elementos da matriz de rigidez dinâmica são, pois, dados por:

$$D = \frac{EI}{(\delta_1^2 + \delta_3^2) \text{sen}(k_1 L) \text{sen}(k_3 L) + 2\delta_1 \delta_3 [\cos(k_1 L) \cos(k_3 L) - 1]}$$

$$k_{11} = k_{33} = \delta_1 \delta_3 (k_1^2 - k_3^2) [-\delta_1 \text{sen}(k_1 L) \cos(k_3 L) + \delta_3 \cos(k_1 L) \text{sen}(k_3 L)]$$

$$k_{12} = k_{21} = -k_{34} = -k_{43} = -\delta_1 \delta_3 \left\{ (k_1 \delta_1 + k_3 \delta_3) [1 - \cos(k_1 L) \cos(k_3 L)] - \right.$$

$$\left. (k_1 \delta_3 + k_3 \delta_1) \text{sen}(k_1 L) \text{sen}(k_3 L) \right\}$$

$$k_{22} = k_{44} = (k_1 \delta_1 - k_3 \delta_3) [\delta_1 \cos(k_1 L) \text{sen}(k_3 L) - \delta_3 \text{sen}(k_1 L) \cos(k_3 L)]$$

$$k_{13} = k_{31} = \delta_1 \delta_3 (k_1^2 - k_3^2) [\delta_1 \text{sen}(k_1 L) - \delta_3 \text{sen}(k_3 L)]$$

$$k_{23} = k_{32} = -k_{14} = -k_{41} = -\delta_1 \delta_3 (k_1 \delta_1 - k_3 \delta_3) [\cos(k_1 L) - \cos(k_3 L)]$$

$$k_{24} = k_{42} = (k_1 \delta_1 - k_3 \delta_3) [\delta_3 \text{sen}(k_1 L) - \delta_1 \text{sen}(k_3 L)]$$

3º caso: $\sqrt{a^2 - 4b} = a$

Este caso é abordado por O'REILLY & TURCOTTE (1996). Evidentemente, para ocorrer este caso, b tem que ser nulo. E, para que b seja nulo, deve-se satisfazer a relação:

$$mr^2 \omega^2 = \kappa AG$$

Sendo b nulo, tem-se:

$$\beta_1 = ik_1$$

$$\beta_3 = 0$$

onde:

$$k_1 = \pm \sqrt{a}$$

As expressões de ϕ e φ são dadas por:

$$\phi = C_1^* \operatorname{sen} k_1 x + C_2^* \cos k_1 x + C_3^*$$

$$\phi = D_1^* \cos k_1 x + D_2^* \operatorname{sen} k_1 x + D_3^* x + D_4^*$$

Colocando-se as expressões acima na equação (2.69), tem-se:

$$\begin{aligned} -C_1^* k_1^2 \operatorname{sen} k_1 x - C_2^* k_1^2 \cos k_1 x + c(C_1^* \operatorname{sen} k_1 x + C_2^* \cos k_1 x + C_3^*) - \\ (-D_1^* k_1 \operatorname{sen} k_1 x + D_2^* k_1 \cos k_1 x - D_3^*) = 0 \end{aligned}$$

Agrupando, tem-se:

$$\operatorname{sen} k_1 x (-C_1^* k_1^2 + cC_1^* + D_1^* k_1) + \cos k_1 x (-C_2^* k_1^2 + cC_2^* - D_2^* k_1) + cC_3^* - D_3^* = 0$$

de onde:

$$D_1^* = -\frac{c - k_1^2}{k_1} C_1^* \quad D_2^* = \frac{c - k_1^2}{k_1} C_2^* \quad D_3^* = cC_3^*$$

com a matriz de rigidez dinâmica podendo ser, nesta situação particular, dada por qualquer uma das formulações anteriores.

3.5 Pórticos planos

A análise de pórticos requer também a inclusão de efeitos axiais na matriz de rigidez dinâmica, bem como eventual transformação de coordenadas locais para um sistema de coordenadas globais.

3.5.1 Matriz de rigidez dinâmica para forças axiais (1ª ordem)

Nas vibrações longitudinais de barras somente a componente do deslocamento horizontal u é de interesse e é uma função de x e t .

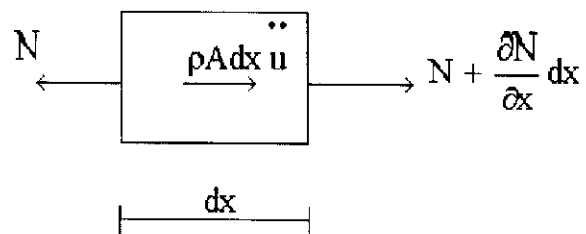


FIGURA 3.2 - Elemento infinitesimal

Seja o elemento da figura 3.2 retirado de uma barra sujeita à vibração longitudinal. Da lei de Hooke, tem-se:

$$\sigma_x = E\epsilon_x$$

ou:

$$N = EAu' \quad (3.12)$$

Da segunda lei de Newton tem-se a equação:

$$N + \frac{\partial N}{\partial x} dx - N = \rho A dx \ddot{u}$$

de onde:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \ddot{u} \quad (3.13)$$

Substituindo-se (3.12) na equação (3.13):

$$EAu'' = \rho A \ddot{u}$$

ou:

$$C_1^2 u'' = \ddot{u} \quad (3.14)$$

onde $C_1^2 = E / \rho$ e representa a velocidade de propagação de ondas longitudinais em uma barra. Da observação de modos longitudinais de vibração, a solução da equação (3.14) pode ser da forma:

$$u = U \cos(\omega t - \theta) \quad (3.15)$$

onde U é função apenas de x . Substituindo-se a expressão (3.15) em (3.14), tem-se:

$$C_1^2 U'' + \omega^2 U = 0 \quad (3.16)$$

A solução geral da equação (3.16) é da forma:

$$U = B_1 \operatorname{sen} \frac{\omega x}{C_1} + B_2 \cos \frac{\omega x}{C_1} \quad (3.17)$$

A figura 3.3 mostra os sentidos positivos dos deslocamentos e das forças aplicadas nos pontos A e B de uma barra uniforme. Usando-se a equação (3.17), têm-se as expressões de U_A e U_B :

$$\begin{Bmatrix} U_A \\ U_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

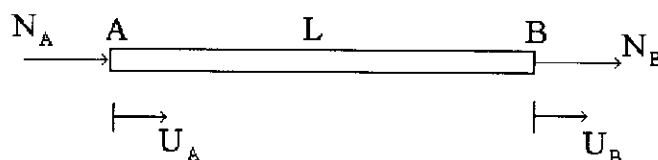


FIGURA 3.3 - Forças axiais em uma barra

onde $b = \omega L / C_1$. A matriz (3.18) pode ser colocada em uma forma matricial:

$$\{U\} = [S_1]\{B\} \quad (3.19)$$

Usando-se a expressão (3.12), têm-se as expressões de N_A e N_B :

$$\begin{Bmatrix} N_A \\ N_B \end{Bmatrix} = \frac{EA\omega}{C_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \cos b & -\text{sen } b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix}$$

ou:

$$\{N\} = [S_2]\{B\} \quad (3.20)$$

Com a ajuda da equação (3.19) pode-se fazer:

$$\{N\} = [S_2][S_1]^{-1}\{U\}$$

Por definição, o produto:

$$[S_2][S_1]^{-1}$$

representa a matriz de rigidez dinâmica para forças axiais.

$$[k] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

onde:

$$\alpha_1 = \frac{EA\omega \cos b}{C_1 \text{sen } b}$$

$$\alpha_2 = -\frac{EA\omega}{C_1 \text{sen } b} \quad (3.21)$$

3.5.2 Transformação de coordenadas

A matriz de rigidez dinâmica, correspondente às coordenadas locais do segmento de viga mostrado na figura 3.4, é obtida combinando-se as matrizes flexional e axial, ou seja:

$$[k] = D \begin{bmatrix} \alpha_1 / D & 0 & 0 & \alpha_2 / D & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & k_{12} & 0 & k_{13} & k_{14} \\ 0 & k_{21} & k_{22} & 0 & k_{23} & k_{24} \\ \alpha_2 / D & 0 & 0 & \alpha_1 / D & 0 & 0 \\ 0 & k_{31} & k_{32} & 0 & k_{33} & k_{34} \\ 0 & k_{41} & k_{42} & 0 & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

onde se considera a ordenação indicada na figura 3.4.



FIGURA 3.4 - Coordenadas locais de um segmento de viga

A matriz de rigidez (3.22) precisa ser transformada de coordenadas locais para um sistema de referência global. Esta transformação é necessária para que as matrizes de todos os elementos tenham como referência o mesmo grupo de coordenadas e, por conseqüência, as matrizes tornam-se compatíveis para a montagem da matriz de rigidez do sistema (conforme já sabido da análise matricial de estruturas).

A figura 3.5 mostra um elemento de viga com forças nodais F_1, F_2, \dots, F_6 referidas a um sistema local e $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_6$ referidas a um sistema global de referência. Da figura (3.5) têm-se as relações:

$$F_1 = \bar{F}_1 \cos \theta + \bar{F}_2 \sin \theta$$

$$F_2 = -\bar{F}_1 \sin \theta + \bar{F}_2 \cos \theta$$

$$F_3 = \bar{F}_3$$

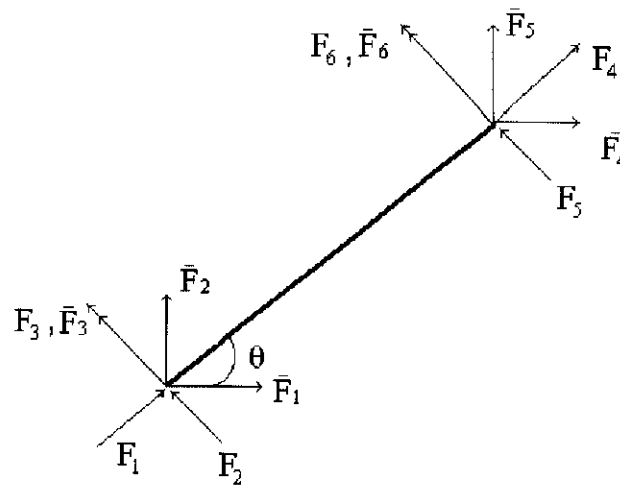


FIGURA 3.5 - Elemento de barra para pórtico plano

Analogamente, as forças nodais F_4 , F_5 e F_6 podem ser colocadas em função de \bar{F}_4 , \bar{F}_5 , \bar{F}_6 e o ângulo θ . Colocando-se na forma matricial têm-se:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 \\ \bar{F}_5 \\ \bar{F}_6 \end{Bmatrix}$$

ou:

$$\{F\} = [T]\{\bar{F}\} \quad (3.23)$$

onde $[T]$ é a matriz de transformação. Da mesma forma, obtêm-se a relação entre deslocamentos nodais em coordenadas locais (v_1, v_2, \dots, v_6) e deslocamentos em coordenadas globais ($\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_6$):

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{v}_4 \\ \bar{v}_5 \\ \bar{v}_6 \end{Bmatrix}$$

ou:

$$\{v\} = [T]\{\bar{v}\} \quad (3.24)$$

Colocando-se as expressões (3.23) e (3.24) na expressão $\{F\} = [K]\{v\}$, obtém-se:

$$[T]\{\bar{F}\} = [K][T]\{\bar{v}\}$$

ou:

$$\{\bar{F}\} = [T]^{-1}[K][T]\{\bar{v}\}$$

Uma das propriedades das matrizes de transformação é que a inversa é igual à matriz transposta [vide PAZ (1991)], então:

$$\{F\} = [T]^T [K] [T] \{\bar{v}\}$$

ou, em notação mais conveniente:

$$\{\dot{F}\} = [\bar{K}] \{\dot{v}\}$$

onde:

$$[\bar{K}] = [T]^T [K] [T] \quad (3.25)$$

encerrando-se o tema em questão.

3.5.3 Ortogonalidade dos modos normais de vibração longitudinal

Os modos normais de vibração longitudinal obedecem relações de ortogonalidade. Para demonstrar esta propriedade considere-se que a equação (3.16) represente o movimento longitudinal do modo normal de vibração r , ou seja:

$$EAU_r'' + \omega_r^2 mU_r = 0 \quad (3.26)$$

Multiplicando-se a equação (3.26) por $U_s dx$, onde U_s é um outro modo de vibrar, e integrando-se no comprimento, obtém-se:

$$EA \int_0^L U_r'' U_s dx + \omega_r^2 \int_0^L m U_r U_s dx = 0 \quad (3.27)$$

Integrando-se o primeiro termo por partes, resulta que:

$$EA \int_0^L U_r'' U_s dx = EA \left[U_r' U_s \Big|_0^L - \int_0^L U_r' U_s' dx \right] \quad (3.28)$$

Com a expressão (3.28), a equação (3.27) fica da forma seguinte:

$$\omega_r^2 \int_0^L m U_r U_s dx = \int_0^L EA U_r' U_s' dx - EA U_r' U_s \Big|_0^L \quad (3.29)$$

Considere-se, agora, que a equação (3.26) corresponda ao modo de vibrar s . Multiplicando-se esta equação por $U_r dx$ e integrando-se no comprimento, tem-se:

$$EA \int_0^L U_s^I U_r dx + \omega_s^2 \int_0^L m U_s U_r dx = 0$$

Integrando-se o primeiro termo por partes e passando-se o resultado para o segundo membro, fica-se da forma:

$$\omega_s^2 \int_0^L m U_r U_s dx = \int_0^L EA U_r^I U_s^I dx - EA U_s^I U_r \Big|_0^L \quad (3.30)$$

Procedendo-se a subtração (3.29) menos (3.30), tem-se:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L m U_r U_s dx = [EA U_s^I U_r - EA U_r^I U_s]_0^L \quad (3.31)$$

Lembrando-se que a força normal é dada por: $N=EAU^I$, a equação (3.31) pode ser reescrita como segue:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L m U_r U_s dx = [N_s U_r - N_r U_s]_0^L \quad (3.32)$$

Nas vigas com extremidades livres: $N_s = N_r = 0$ e nas vigas vinculadas: $U_r = U_s = 0$, portanto, para as vigas com estas condições de extremidades, a expressão (3.32) assume a forma:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L m U_s U_r = 0 \quad (3.33)$$

Para $\omega_r \neq \omega_s$, resulta que:

$$\int_0^L m U_s U_r = 0 \quad (3.34)$$

A expressão (3.34) mostra que os modos normais de vibração longitudinal são, pois, ortogonais, em relação à massa distribuída.

3.5.4 Vibração forçada longitudinal com amortecimento

Considere-se a barra da figura 3.6 solicitada por uma força normal $N(x,t)$.

Da segunda lei de Newton, tem-se a equação para o elemento da figura 3.6(b):

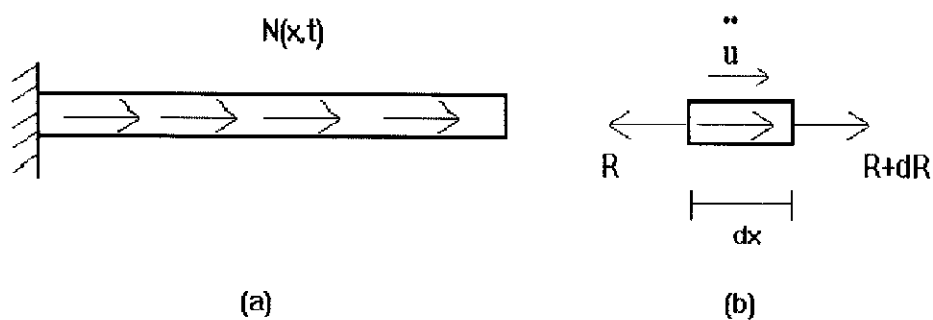


FIGURA 3.6 - Vibração forçada longitudinal

$$R + dR + N(x,t)dx - R = m dx \ddot{u}$$

de onde:

$$\frac{dR}{dx} - m \ddot{u} = -N(x,t)$$

Substituindo-se na expressão acima a relação $R = \sigma_x A$; e o amortecimento segundo a relação tensão x deformação de Kelvin, tem-se:

$$\frac{d}{dx} \left[EA(\epsilon_x + c \dot{\epsilon}_x) \right] - m \ddot{u} = -N(x,t) \quad (3.35)$$

Lembrando-se que $\epsilon_x = \partial u / \partial x$, a equação (3.35) é colocada na forma:

$$\frac{d}{dx} \left[EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \right] - m \ddot{u} = -N(x,t)$$

de onde, finalmente, tem-se:

$$EAu'' + cEA\dot{u}' - m\ddot{u} = -N(x,t) \quad (3.36)$$

A solução da equação (3.36) pode ser formulada por superposição modal:

$$u = \sum_r U_r(x)q_r(t) \quad (3.37)$$

Substituindo-as a equação (3.37) na equação (3.36):

$$EA \sum_r U_r^l q_r + cEA \sum_r U_r^l \dot{q}_r - m \sum_r U_r^l \ddot{q}_r = -N(x, t) \quad (3.38)$$

Multiplicando-se a expressão (3.38) por $U_s dx$ e integrando no comprimento:

$$\int_0^L \left[EA \sum_r U_r^l q_r + cEA \sum_r U_r^l \dot{q}_r - m \sum_r U_r^l \ddot{q}_r \right] U_s dx = - \int_0^L N(x, t) U_s dx \quad (3.39)$$

Com o auxílio da equação (3.30) a expressão (3.39) pode ser colocada na forma:

$$\int_0^L \left[- \sum_r \omega_r^2 m U_r U_s q_r - c \sum_r \omega_r^2 m U_r U_s \dot{q}_r - m \sum_r U_r U_s \ddot{q}_r \right] dx = - \int_0^L N(x, t) U_s dx \quad (3.40)$$

Com a condição de ortogonalidade (3.34), a expressão (3.40) assume a forma:

$$\int_0^L \left[\omega_s^2 m U_s^2 q_s + c \omega_s^2 m U_s^2 \dot{q}_s + m U_s^2 \ddot{q}_s \right] dx = \int_0^L N(x, t) U_s dx$$

ou:

$$\ddot{q}_s + c \omega_s^2 \dot{q}_s + \omega_s^2 q_s = \frac{\int_0^L N(x, t) U_s dx}{\int_0^L m U_s^2 dx} \quad (3.41)$$

encerrando-se, assim, a presente formulação.

3.5.5 Ortogonalidade dos modos normais de vibração de pórticos planos

Dentro da teoria de primeira ordem, a equação da ortogonalidade dos modos normais de vibração de pórticos planos é uma combinação adequada da equação de ortogonalidade de cada viga de Timoshenko que compõe a estrutura (equação (2.84)), e a equação (3.33):

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \left(\int_0^L m \phi_r \phi_s dx + \int_0^L m r^2 \varphi_r \varphi_s dx + \int_0^L m U_r U_s dx \right) = 0 \quad (3.42)$$

Somando-se os termos que se anulam nas condições de extremidades simples da viga de Timoshenko (segundo membro da equação (2.83)) e os termos que se anulam da vibração longitudinal (segundo membro da equação (3.32)), obtém-se a condição para que os modos normais de vibração de pórticos sejam ortogonais:

$$\left[\phi_s V_r - M_r \phi_s - \phi_r V_s + M_s \phi_r + N_r U_s - N_s U_r \right]_0^L = 0 \quad (3.43)$$

Seja o trecho estrutural da figura 3.7(a) retirado de um pórtico plano na região de um nó. Os esforços externos do nó estão representados por R^x , R^y e M .

Do equilíbrio do nó da figura 3.7(c), têm-se as seguintes equações:

$$\sum F_x = -N^2 \cos \alpha - V^2 \sin \alpha + N^1 \cos \beta + V^1 \sin \beta + R^x = 0 \quad (3.44)$$

$$\sum F_y = N^2 \sin \alpha - V^2 \cos \alpha - N^1 \sin \beta + V^1 \cos \beta + R^y = 0$$

$$\sum M = M^2 - M^1 + M = 0$$

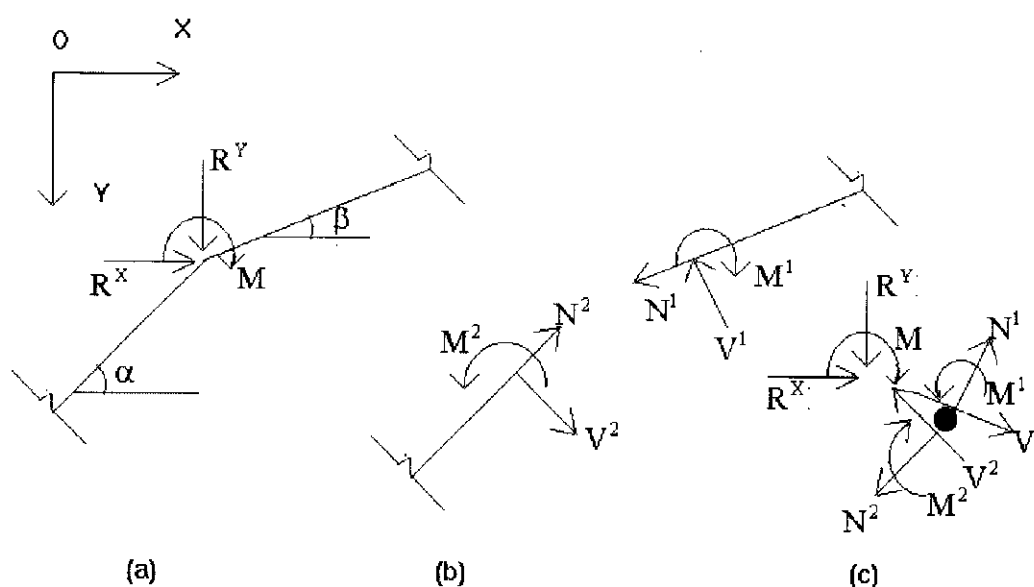


FIGURA 3.7-(a) Elemento de pórtico plano (b) Ações nas barras (c) Ações nos nós

Chamando-se de u, ϕ e φ as componentes das deformações nas coordenadas globais XOY, têm-se as componentes $\bar{u}, \bar{\phi}$ e $\bar{\varphi}$ das barras inclinadas:

$$\begin{Bmatrix} u \\ \phi \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\phi} \\ \bar{\varphi} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

onde θ é o ângulo que a barra forma com o eixo OX.

Para que os modos normais de vibração sejam ortogonais, a equação (3.43) deve ser nula, então:

$$\begin{aligned} & V_r^2(\bar{u}_s \sin \alpha + \bar{\phi}_s \cos \alpha) - M_r^2 \bar{\varphi}_s^2 - V_s^2(\bar{u}_r \sin \alpha + \bar{\phi}_r \cos \alpha) + M_s^2 \bar{\varphi}_r^2 + \\ & N_r^2(\bar{u}_s \cos \alpha - \bar{\phi}_s \sin \alpha) - N_s^2(\bar{u}_r \cos \alpha - \bar{\phi}_r \sin \alpha) - \left[V_r^1(\bar{u}_s \sin \beta + \bar{\phi}_s \cos \beta) - M_r^1 \bar{\varphi}_s^1 \right. \\ & \left. - V_s^1(\bar{u}_r \sin \beta + \bar{\phi}_r \cos \beta) + M_s^1 \bar{\varphi}_r^1 + N_r^1(\bar{u}_s \cos \beta - \bar{\phi}_s \sin \beta) - N_s^1(\bar{u}_r \cos \beta - \bar{\phi}_r \sin \beta) \right] = 0 \end{aligned}$$

Agrupando-se os termos, tem-se a equação:

$$\begin{aligned} & u_s(V_r^2 \sin \alpha + N_r^2 \cos \alpha - V_r^1 \sin \beta - N_r^1 \cos \beta) + \phi_s(V_r^2 \cos \alpha - N_r^2 \sin \alpha - \\ & V_r^1 \cos \beta + N_r^1 \sin \beta) + \bar{\varphi}_s(-M_r^2 + M_r^1) + \bar{u}_r(-V_s^2 \sin \alpha - N_s^2 \cos \alpha + V_s^1 \sin \beta + N_s^1 \cos \beta) + \\ & \bar{\phi}_r(-V_s^2 \cos \alpha + N_s^2 \sin \alpha + V_s^1 \cos \beta - N_s^1 \sin \beta) + \bar{\varphi}_r(M_s^2 - M_s^1) = 0 \quad (3.46) \end{aligned}$$

Substituindo-se na equação (3.46) as expressões de R^X , R^Y e M dadas pelas equações (3.44), tem-se:

$$\bar{u}_s(R^X) + \bar{\phi}_s(R^Y) + \bar{\varphi}_s(M) + \bar{u}_r(-R^X) + \bar{\phi}_r(-R^Y) + \bar{\varphi}_r(-M) = 0 \quad (3.47)$$

Para um pórtico plano com n nós a equação (3.47) deve ser somada como segue:

$$\sum_{i=1}^{n\text{nos}} \left(\bar{u}_s^i R_i^X - \bar{u}_r^i R_i^X + \bar{\phi}_s^i R_i^Y - \bar{\phi}_r^i R_i^Y + \bar{\varphi}_s^i M_i - \bar{\varphi}_r^i M_i \right) = 0$$

Na vibração livre não há esforço externo, ou seja:

$$R_i^X = R_i^Y = M_i = 0$$

Portanto, a equação (3.43) se verifica identicamente e os modos normais de vibração de pórticos planos são, pois, ortogonais.

3.5.6 Vibração forçada amortecida de pórticos planos

A equação da vibração forçada para pórticos planos é a combinação das equações da vibração forçada da viga de Timoshenko (2.91) e a equação forçada longitudinal (3.41):

$$\ddot{q}_s + c\omega_s^2 \dot{q}_s + \omega_s^2 q_s = \frac{\int_0^L [p(x,t)\phi_s + u(x,t)\varphi_s + N(x,t)U_s] dx}{\int_0^L (mr^2\varphi_s^2 + m\phi_s^2 + mU_s^2) dx} \quad (3.48)$$

Para uma estrutura com n barras a equação acima assume a forma:

$$\ddot{q}_s + c\omega_s^2 \dot{q}_s + \omega_s^2 q_s = \frac{\sum_{\text{barras}} \int_0^L [p(x,t)\phi_s + u(x,t)\varphi_s + N(x,t)U_s] dx}{\sum_{\text{barras}} \int_0^L (mr^2\varphi_s^2 + m\phi_s^2 + mU_s^2) dx} \quad (3.49)$$

finalizando-se a questão em apreço.

3.6 Grelhas

Quando uma estrutura plana de barras está sujeita a cargas aplicadas perpendicularmente ao seu plano, ela é denominada grelha. Na análise de grelhas necessitam-se a inclusão de efeitos provenientes da torção livre (ou de Saint-Venant) e a eventual transformação de coordenadas locais para um sistema de coordenadas globais.

3.6.1 Matriz de rigidez dinâmica para momento de torção

Para se aplicar a segunda lei de Newton na torção, deve-se introduzir o conceito de momento de inércia de massa (I_m), ou seja:

$$I_m = \int_A r^2 dm$$

onde r é a distância do centro de massa a um elemento genérico diferencial de massa dm .

Uma vez que o diferencial de massa $dm = \rho dA dx$, pode-se escrever:

$$I_m = \int_A r^2 \rho dA dx$$

Por definição:

$$I_p = \int_A r^2 dA$$

onde I_p é o momento de inércia polar. Então:

$$I_m = \rho I_p dx$$

Considerando-se o equilíbrio dinâmico de um elemento infinitesimal de comprimento dx retirado de uma barra vibrando devido à torção livre, encontra-se a expressão:

$$\left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) - T = \rho I_p dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

onde T é o momento de torção. Simplificando-se a expressão acima, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (3.50)$$

Da Resistência dos Materiais sabe-se que:

$$T = kGI_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3.51)$$

onde k é um fator numérico que depende da forma e das dimensões da seção transversal. Para seções transversais circulares $k=1$ e para seções retangulares, TIMOSHENKO & GOODIER (1980) mostram, por exemplo, o valor de k para várias relações entre a base e a altura.

Colocando-se a expressão de T na equação (3.50):

$$kGI_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

ou:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = C_2^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.52)$$

onde:

$$C_2 = \sqrt{\frac{kG}{\rho}}$$

Sendo C_2 a velocidade de propagação de ondas torcionais na barra.

Da consideração de modos torcionais de vibração, a solução da equação (3.52) pode ser da forma:

$$\theta(x, t) = \Theta(x) \cos(\omega t - \beta) \quad (3.53)$$

Substituindo-se a expressão (3.53) na equação (3.52), tem-se:

$$C_2^2 \Theta'' + \omega^2 \Theta = 0 \quad (3.54)$$

A solução da equação (3.54) é da seguinte forma:

$$\Theta(x) = B_1 \operatorname{sen} \frac{\omega x}{C_2} + B_2 \cos \frac{\omega x}{C_2} \quad (3.55)$$

Seja a barra da figura 3.8 solicitada pelos momentos de torção T_A e T_B . Com o auxílio da equação (3.55), têm-se as expressões de Θ para os pontos A e B:

$$\begin{Bmatrix} \Theta_A \\ \Theta_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \operatorname{sen} \omega L / C_2 & \cos \omega L / C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix}$$

Em uma forma matricial:

$$\{\Theta\} = [S_3]\{B\}$$

ou:

$$\{B\} = [S_3]^{-1}\{\Theta\} \quad (3.56)$$

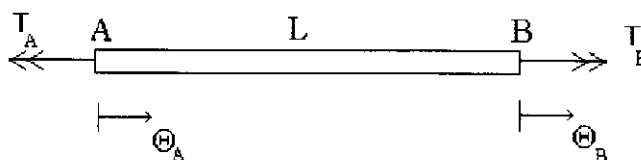


FIGURA 3.8 - Torção pura

Com a equação (3.51) podem-se escrever as expressões de T_A e T_B :

$$\begin{Bmatrix} T_A \\ T_B \end{Bmatrix} = \frac{kGI_p \omega}{C_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \cos \omega L / C_2 & -\operatorname{sen} \omega L / C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix}$$

ou:

$$\{T\} = [S_4]\{B\} \quad (3.57)$$

Colocando-se a expressão (3.56) na equação (3.57), tem-se:

$$\{T\} = [S_4][S_3]^{-1}\{\Theta\}$$

Por definição, o produto: $[S_4][S_3]^{-1}$ representa a matriz de rigidez dinâmica da torção, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} T_A \\ T_B \end{Bmatrix} = \frac{kGI_p \omega}{C_2 \operatorname{sen}(\omega L / C_2)} \begin{bmatrix} \cos(\omega L / C_2) & -1 \\ -1 & \cos(\omega L / C_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

encerrando-se a questão.

3.6.2 Transformação de coordenadas

No caso de grelhas, com o sistema local de referência mostrado na figura 3.9, a matriz de rigidez dinâmica tem a seguinte redação:

$$[K] = D \begin{bmatrix} \alpha_1 / D & 0 & 0 & \alpha_2 / D & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{21} & 0 & k_{24} & k_{23} \\ 0 & k_{12} & k_{11} & 0 & k_{14} & k_{13} \\ \alpha_2 / D & 0 & 0 & \alpha_1 / D & 0 & 0 \\ 0 & k_{42} & k_{41} & 0 & k_{44} & k_{43} \\ 0 & k_{32} & k_{31} & 0 & k_{34} & k_{33} \end{bmatrix}$$

onde:

$$\alpha_1 = \frac{kGI_p \omega \cos(\omega L / C_2)}{C_2 \operatorname{sen}(\omega L / C_2)}$$

$$\alpha_2 = -\frac{kGI_p \omega}{C_2 \operatorname{sen}(\omega L / C_2)}$$

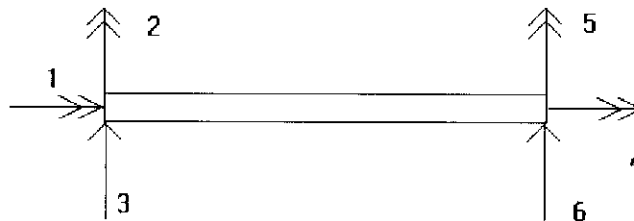


FIGURA 3.9 - Sistema de referência local para grelhas

A transformação de coordenadas locais para um sistema global de coordenadas é análoga ao caso de pórticos, com redação mostrada no item 3.5.3, deste capítulo.

3.6.3 Ortogonalidade dos modos normais de vibração torcional

Considere-se que a equação (3.54) represente o movimento torcional o modo genérico de vibrar r:

$$C_2^2 \Theta_r'' + \omega_r^2 \Theta_r = 0 \quad (3.59)$$

Multiplicando-se a equação (3.59) por $\Theta_s dx$, onde Θ_s é um outro modo de vibrar, e integrando-se no comprimento, tem-se:

$$C_2^2 \int_0^L \Theta_r'' \Theta_s dx + \omega_r^2 \int_0^L \Theta_r \Theta_s dx = 0 \quad (3.60)$$

Integrando-se o primeiro termo uma vez por partes e passando-se o resultado para o segundo membro, encontra-se a expressão:

$$\omega_r^2 \int_0^L \Theta_r \Theta_s dx = C_2^2 \int_0^L \Theta_r' \Theta_s' dx - C_2^2 \Theta_r' \Theta_s \Big|_0^L \quad (3.61)$$

Considere-se que a equação (3.59) corresponda ao modo de vibrar s. Multiplicando-se esta equação por $\Theta_r dx$ e integrando no comprimento, acha-se a expressão:

$$C_2^2 \int_0^L \Theta_s'' \Theta_r dx + \omega_s^2 \int_0^L \Theta_s \Theta_r dx = 0$$

Integrando-se o primeiro termo por partes:

$$\omega_s^2 \int_0^L \Theta_r \Theta_s dx = C_2^2 \int_0^L \Theta_r' \Theta_s' dx - C_2^2 \Theta_s' \Theta_r \Big|_0^L \quad (3.62)$$

Procedendo-se a subtração (3.61) menos (3.62), encontra-se:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \int_0^L \Theta_r \Theta_s dx = C_2^2 \left[\Theta_s' \Theta_r - \Theta_r' \Theta_s \right]_0^L \quad (3.63)$$

Colocando-se a expressão de C_2^2 na equação (3.63), tem-se:

$$\left(\omega_r^2 - \omega_s^2\right) \int_0^L \Theta_r \Theta_s dx = \frac{\kappa G}{\rho} \left[\Theta_s' \Theta_r - \Theta_r' \Theta_s \right]_0^L \quad (3.64)$$

No caso em que o momento de torção e a resposta Θ variam harmonicamente, a equação (3.51) fica da seguinte forma, depois de simplificado o termo comum $\cos(\omega t - \beta)$:

$$T = \kappa G I_p \Theta' \quad (3.65)$$

Com a ajuda da equação (3.65), a equação (3.64) pode ser reescrita como segue:

$$\left(\omega_r^2 - \omega_s^2\right) \int_0^L \Theta_r \Theta_s dx = \left[\frac{T_s \Theta_r}{\rho I_p} - \frac{T_r \Theta_s}{\rho I_p} \right]_0^L$$

ou:

$$\left(\omega_r^2 - \omega_s^2\right) \int_0^L \rho I_p \Theta_r \Theta_s dx = \left[T_s \Theta_r - T_r \Theta_s \right]_0^L$$

A condição imposta pelos engaste é que $\Theta_r = \Theta_s = 0$; nos apoios simples e nas extremidades livres $T_s = T_r = 0$, portanto, nas vigas com estas condições de extremidades pode-se fazer:

$$\left(\omega_r^2 - \omega_s^2\right) \int_0^L \rho I_p \Theta_r \Theta_s dx = 0$$

Para dois modos distintos de vibração: $\omega_r \neq \omega_s$, tem-se:

$$\int_0^L \rho I_p \Theta_r \Theta_s dx = 0 \quad (3.66)$$

A expressão acima mostra que os modos normais de vibração torcional são, pois, ortogonais.

3.6.4 Vibração forçada torcional com amortecimento

Considere-se uma barra solicitada por um momento de torção distribuído $T(x,t)$ (figura 3.10). Da segunda lei de Newton, tem-se a equação de equilíbrio dinâmico para o elemento da figura (3.10b):

$$T + dT + T(x,t)dx - T = \rho I_p dx \ddot{\Theta}$$

ou:

$$\frac{dT}{dx} - \rho I_p \ddot{\Theta} = -T(x,t) \quad (3.67)$$

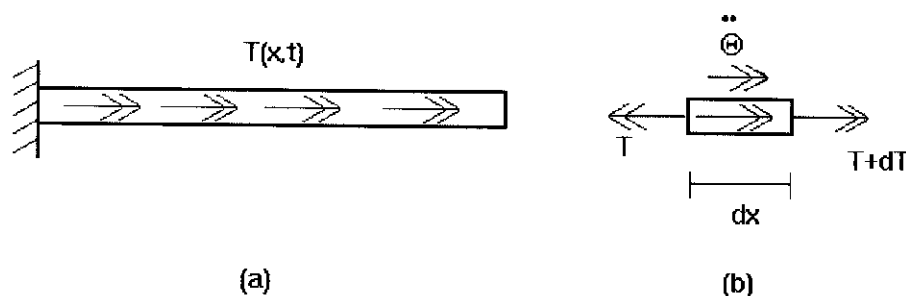


FIGURA 3.10 - Vibração forçada torcional

Para se incluir o amortecimento a equação (3.65) é reescrita na forma:

$$T = kGI_p (\dot{\Theta} + c\ddot{\Theta}) \quad (3.68)$$

Colocando-se a equação (3.68) na equação (3.67), tem-se:

$$kGI_p (\dot{\Theta} + c\ddot{\Theta}) - \rho I_p \ddot{\Theta} = -T(x,t) \quad (3.69)$$

A solução da equação (3.69) é do tipo:

$$\Theta = \sum_r \Theta_r(x) q_r(t) \quad (3.70)$$

Substituindo-se a expressão (3.70) em (3.69), tem-se:

$$kGI_p \sum_r \Theta_r'' q_r + ckGI_p \sum_r \dot{\Theta}_r q_r - \rho I_p \sum_r \ddot{\Theta}_r q_r = -T(x,t) \quad (3.71)$$

Multiplicando a expressão (3.71) por $\Theta_s dx$ e integrando-se no domínio da barra:

$$\int_0^L \Theta_s \left[kGI_p \sum_r \Theta_r q_r + ckGI_p \sum_r \Theta_r \dot{q}_r - \rho I_p \sum_r \Theta_r \ddot{q}_r \right] dx = - \int_0^L T(x, t) \Theta_s dx \quad (3.72)$$

Com o auxílio da equação (3.60), a equação (3.72) é reescrita na seguinte forma:

$$\int_0^L \left[\omega_r^2 \rho I_p \sum_r q_r \Theta_r \Theta_s + \omega_r^2 c \rho I_p \sum_r \dot{q}_r \Theta_r \Theta_s + \rho I_p \sum_r \ddot{q}_r \Theta_r \Theta_s \right] dx = - \int_0^L T(x, t) \Theta_s dx \quad (3.73)$$

Com a equação de ortogonalidade (3.66) a equação (3.73) fica na forma:

$$\ddot{q}_s + \omega_s^2 c q_s + \omega_s^2 q_s = \frac{\int_0^L T(x, t) \Theta_s dx}{\int_0^L \rho I_p \Theta_s^2 dx} \quad (3.74)$$

o que encerra o tema.

3.6.5 Ortogonalidade dos modos normais de vibração de grelhas

A equação que mostra a ortogonalidade dos modos normais de vibração de grelhas é uma combinação das equações (2.84) e (3.66), ou seja:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \left(\int_0^L m \phi_r \phi_s dx + \int_0^L m r^2 \varphi_r \varphi_s dx + \int_0^L \rho I_p \Theta_r \Theta_s dx \right) = 0 \quad (3.75)$$

Somando-se os termos que se anulam nas condições de extremidades simples da viga de Timoshenko (item 2.5.1) e os termos que se anulam na vibração torcional (item 3.6.3), encontra-se a expressão:

$$\left[\phi_s V_r - M_r \phi_s - \phi_r V_s + M_s \phi_r + T_r \Theta_s - T_s \Theta_r \right]_0^L = 0 \quad (3.76)$$

A equação (3.76) deve ser satisfeita para os modos normais de vibração de grelhas sejam ortogonais.

Considere-se o elemento estrutural da figura 3.11(a) retirado de uma grelha. Os esforços externos estão representados por M^x , M^y e P . Das condições de equilíbrio, têm-se as seguintes equações:

$$\sum F = V^2 - V^1 + P = 0$$

$$\sum M_x = T^2 \cos \alpha - M^2 \sin \alpha - T^1 \cos \beta + M^1 \sin \beta + M^x = 0 \quad (3.77)$$

$$\sum M_y = -T^2 \sin \alpha - M^2 \cos \alpha + T^1 \sin \beta + M^1 \cos \beta + M^y = 0$$

Chamando-se de $\bar{\Theta}$, $\bar{\varphi}$ e $\bar{\phi}$ as componentes das deformações nas coordenadas globais XOY , têm-se as componentes Θ , φ e ϕ das barras inclinadas:

$$\begin{Bmatrix} \Theta \\ \varphi \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Theta} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{\phi} \end{Bmatrix}$$

onde θ é o ângulo que a barra forma com o eixo OX .

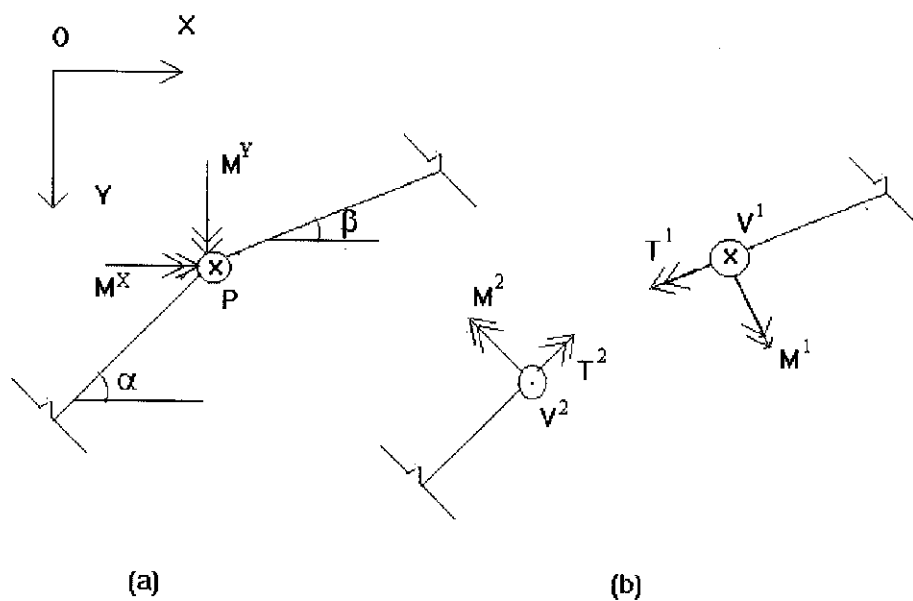


FIGURA 3.11 - (a) Elemento de grelha (b) Ações nas barras

A equação (3.76) deve ser satisfeita para que os modos normais de vibração sejam ortogonais. Então:

$$\begin{aligned} & \phi_s^2 V_r^2 - M_r^2 (\bar{\Theta}_s \sin \alpha + \bar{\varphi}_s \cos \alpha) - \phi_r^2 V_s^2 + M_s^2 (\bar{\Theta}_r \sin \alpha + \bar{\varphi}_r \cos \alpha) + \\ & T_r^2 (\bar{\Theta}_s \cos \alpha - \bar{\varphi}_s \sin \alpha) - T_s^2 (\bar{\Theta}_r \cos \alpha - \bar{\varphi}_r \sin \alpha) - \left[\phi_s^1 V_r^1 - M_r^1 (\bar{\Theta}_s \sin \beta + \bar{\varphi}_s \cos \beta) - \right. \\ & \left. \phi_r^1 V_s^1 + M_s^1 (\bar{\Theta}_r \sin \beta + \bar{\varphi}_r \cos \beta) + T_r^1 (\bar{\Theta}_s \cos \beta - \bar{\varphi}_s \sin \beta) - T_s^1 (\bar{\Theta}_r \cos \beta - \bar{\varphi}_r \sin \beta) \right] = 0 \end{aligned}$$

Agrupando-se os termos:

$$\begin{aligned} & \bar{\phi}_s (V_r^2 - V_r^1) + \bar{\Theta}_s (-M_r^2 \sin \alpha + T_r^2 \cos \alpha + M_r^1 \sin \beta - T_r^1 \cos \beta) + \bar{\varphi}_s (-M_r^2 \cos \alpha - T_r^2 \sin \alpha \\ & + M_r^1 \cos \beta + T_r^1 \sin \beta) + \bar{\phi}_r (-V_s^2 + V_s^1) + \bar{\Theta}_r (M_s^2 \sin \alpha - T_s^2 \cos \alpha - M_s^1 \sin \beta + T_s^1 \cos \beta) + \\ & \bar{\varphi}_r (M_s^2 \cos \alpha + T_s^2 \sin \alpha - M_s^1 \cos \beta - T_s^1 \sin \beta) = 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Substituindo-se na equação (3.78) as expressões de M^X , M^Y e P dadas em (3.77), tem-se:

$$\bar{\phi}_s (-P) + \bar{\Theta}_s (-M^X) + \bar{\varphi}_s (-M^Y) + \bar{\phi}_r (P) + \bar{\Theta}_r (M^X) + \bar{\varphi}_r (M^Y) = 0 \quad (3.79)$$

Para uma grelha com n nós a equação (3.79) deve ser arranjada como segue:

$$\sum_{i=1}^{n\text{nos}} \left(\bar{\phi}_r^i P_i - \bar{\phi}_s^i P_i + \bar{\Theta}_r^i M_i^X - \bar{\Theta}_s^i M_i^X + \bar{\varphi}_r^i M_i^Y - \bar{\varphi}_s^i M_i^Y \right) = 0$$

Na vibração livre não há esforço externo, ou seja:

$$M_i^X = M_i^Y = P_i = 0$$

Portanto, a equação (3.76) é atendida e os modos normais de vibração de grelhas são ortogonais.

3.6.6 Vibração forçada com amortecimento de grelhas

A equação da vibração forçada de grelhas é a soma das equações (2.91) e (3.74):

$$\ddot{q}_s + \omega_s^2 c q_s + \omega_s^2 q_s = \frac{\int_0^L p(x, t) \phi_s dx + \int_0^L u(x, t) \varphi_s dx + \int_0^L T(x, t) \Theta_s dx}{\int_0^L m r^2 \varphi_s^2 dx + \int_0^L m \phi_s^2 dx + \int_0^L \rho I_p \Theta_s^2 dx} \quad (3.80)$$

Para grelhas formadas com n barras, a equação acima fica da seguinte forma:

$$\ddot{q}_s + \omega_s^2 c q_s + \omega_s^2 q_s = \frac{\sum_{\text{barras}} \left(\int_0^L p(x, t) \phi_s dx + \int_0^L u(x, t) \varphi_s dx + \int_0^L T(x, t) \Theta_s dx \right)}{\sum_{\text{barras}} \left(\int_0^L m r^2 \varphi_s^2 dx + \int_0^L m \phi_s^2 dx + \int_0^L \rho I_p \Theta_s^2 dx \right)} \quad (3.81)$$

encerrando-se, assim, a formulação de interesse.

3.7 Exemplos

Seja calcular as cinco primeiras freqüências naturais da viga da figura 3.12, considerando-se os modelos de Euler-Bernoulli, Euler-Bernoulli com inércia de rotação e a teoria de vigas de Timoshenko. Dados: $E=210$ GPa, $\nu=0,33$, $A=0,3$ m², $I=0,025$ m⁴, $\kappa=0,85$, $\rho= 7850$ kg/m³, $L=11,547$ m.



FIGURA 3.12 - Viga engastada-apoiada

Os resultados de maior interesse acham-se arrolados na tabela 3.1. Um exame dos resultados mostra que já para o quinto modo as diferenças entre o modelo elementar e o de Timoshenko são apreciáveis.

TABELA 3.1 - Freqüências naturais de uma viga engastada-apoiada

Freqüência (rad./s)	Modelo de Euler- Bernoulli	Euler-Bernoulli + inércia rotação	Teoria de viga de Timoshenko
1	172,66	172,04	167,68
2	559,51	552,16	518,71
3	1167,38	1134,51	1018,97
4	1996,29	1900,71	1627,90
5	3046,24	2828,68	2312,86

Seja novamente a viga do exemplo anterior. Calcular as cinco primeiras freqüências naturais considerando-a bi-engastada. Os resultados encontram-se lançados na tabela 3.2; valendo-se, ainda, os mesmos comentários do exemplo anterior.

TABELA 3.2 - Freqüências naturais de uma viga bi-engastada

Freqüência (rad./s)	Modelo de Euler- Bernoulli	Euler-Bernoulli + inércia rotação	Teoria de viga de Timoshenko
1	250,54	249,58	238,45
2	690,62	680,89	620,47
3	1353,89	1313,87	1137,95
4	2238,05	2126,86	1750,59
5	3343,27	3097,39	2430,34

Como terceiro exemplo seja calcular as quinze primeiras frequências naturais do pórtico da figura 3.13. Esta estrutura foi analisada por MESQUITA NETO et al. (1998). Neste trabalho os autores consideram apenas o modelo de Euler-Bernoulli. Dados: $E=78$ GPa, $\nu=0,33$, $A=0,04$ m², $I=1,3333 \times 10^{-4}$ m⁴, $\kappa=0,85$, $\rho=2500$ kg/m³.

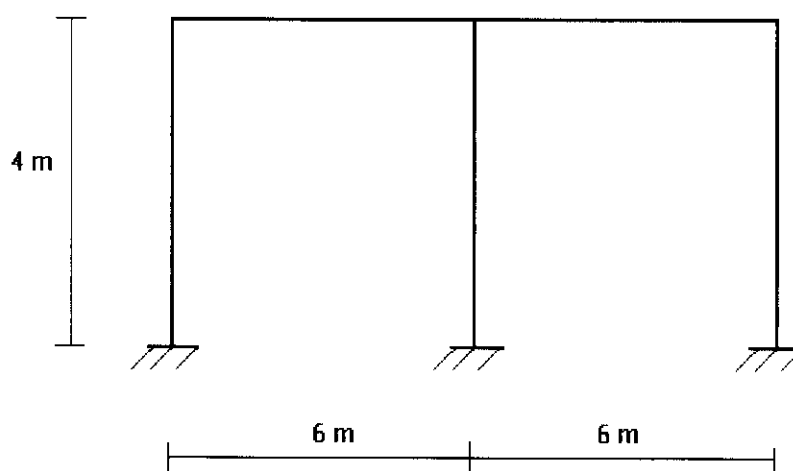


FIGURA 3.13 - Pórtico plano

Neste exemplo de pórtico, os valores das frequências naturais calculadas pelo método dos elementos de contorno são idênticos àqueles fornecidos pelo método da rigidez dinâmica. É interessante observar que no caso de pórticos a inércia de rotação e a força cortante influenciam muito pouco nos valores das frequências naturais, mesmo nas altas frequências. Pode-se dizer que, nestas estruturas, estes fenômenos se mostram desprezíveis, com os dados em apreço.

TABELA 3.3 - Freqüências naturais do pórtico plano da Fig. 3.13

Frequência (rad./s)	MESQUITA NETO et al. (1998)		Presente trabalho com 5 elementos		
	FEM com 176 elementos	BEM com 5 elementos	Modelo de Euler-Bernoulli	Euler-Bernoulli + inércia rot.	Teoria de viga de Timoshenko
1	49,418	49,424	49,424	49,419	49,272
2	129,109	129,123	129,123	129,058	128,543
3	163,874	163,892	163,893	163,803	162,943
4	340,486	340,525	340,525	339,984	337,572
5	359,658	359,697	359,697	359,241	355,646
6	397,034	397,078	397,078	396,577	391,687
7	506,263	506,319	506,319	505,436	498,147
8	511,715	511,770	511,769	510,840	503,723
9	859,332	859,425	859,425	855,979	842,710
10	923,138	923,229	923,229	919,765	903,158
11	1087,462	1087,545	1087,546	1084,032	1059,743
12	1133,199	1133,320	1133,320	1127,805	1099,946
13	1183,505	1183,630	1183,630	1178,314	1143,795
14	1424,524	1424,521	1424,521	1420,971	1407,093
15	1506,379	1506,443	1506,443	1500,530	1471,628

Como quarto exemplo de aplicação seja o pórtico plano da figura 3.14. Determinar as cinco primeiras freqüências naturais e os três primeiros modos de vibração. Dados: $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,33$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $A = 0,03 \text{ m}^2$, $I = 0,000225 \text{ m}^4$, $m = 235,5 \text{ kg/m}$, $r = 0,0866 \text{ m}$.

Os resultados estão apresentados na tabela 3.4.

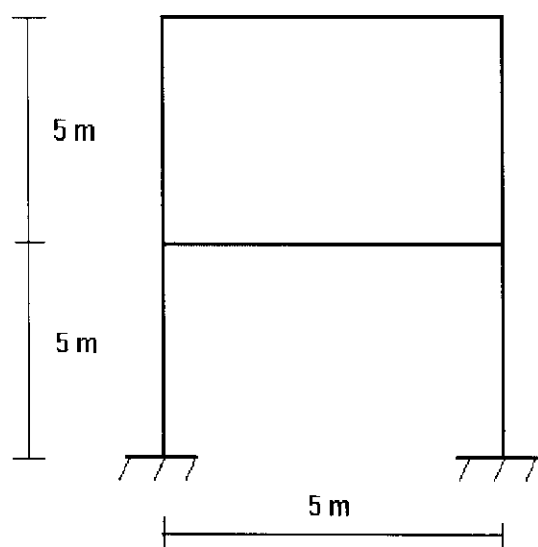


Figura 3.14 - Pórtico plano

TABELA 3.4 - Frequências naturais do pórtico da figura 3.14

ω (rad./s)	ANSYS COM 12 EL.	ANSYS COM 24 EL.	PRESENTE TRABALHO COM SEIS ELEMENTOS			
			Modelo de Euler-Bernoulli	Modelo de Euler-Bern. + inércia rot.	Viga de Timoshenko - inércia rot.	Teoria de viga de Timoshenko
1	26,770	26,769	26,771	26,769	26,633	26,631
2	87,990	87,946	87,983	87,942	87,525	87,485
3	193,57	192,72	192,948	192,661	191,742	191,462
4	269,89	267,69	267,936	267,531	264,769	264,385
5	305,31	302,66	303,062	302,446	299,229	298,648

Da mesma forma que no pórtico do exemplo anterior, a inércia de rotação e a força cortante pouco influenciam nos valores das frequências naturais. A precisão dos resultados do programa ANSYS depende, como sabido, do número de elementos em que a estrutura é dividida. Os três primeiros modos de vibração estão mostrados nas figuras 3.15, 3.16 e 3.17.

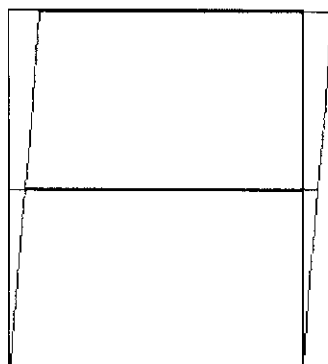


FIGURA 3.15 - Primeiro modo de vibração

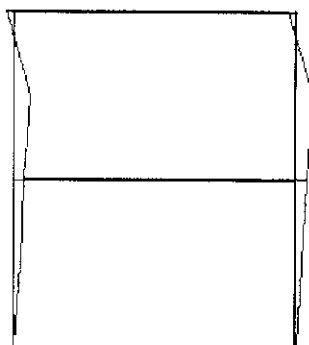


FIGURA 3.16 - Segundo modo de vibração

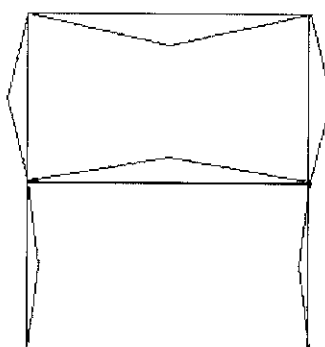


FIGURA 3.17 - Terceiro modo de vibração

Seja, agora, a grelha da figura 3.18. Determinar os valores das frequências naturais de acordo com os quatro modelos apresentados. A grelha tem seção transversal circular com 0,1 m de diâmetro. Dados: $A = 0,00785 \text{ m}^2$; $I = 4,9087 \times 10^{-6} \text{ m}^4$; $I_p = 9,8175 \times 10^{-6} \text{ m}^4$; $E = 210 \text{ GPa}$; $\nu = 0,33$; $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$; $\kappa = 0,89$.

Os resultados de maior interesse estão indicados na tabela 3.5.

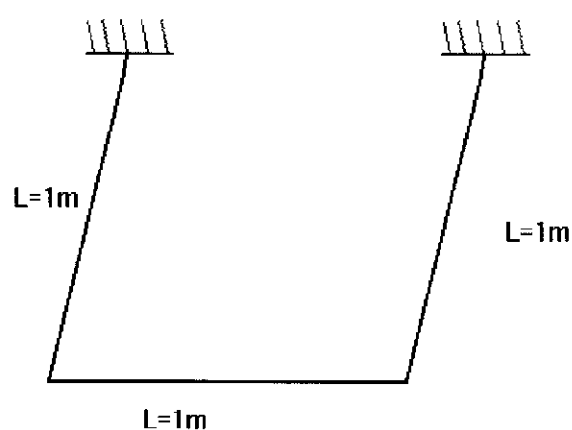


FIGURA 3.18 - Grelha com seção transversal circular

TABELA 3.5 - Valores das frequências naturais da grelha da figura 3.18

ω (rad./s)	(A)	(B)	(C)	(D)
1	258,18	258,06	257,33	257,21
2	546,28	545,14	543,53	542,42
3	1760,67	1754,38	1729,96	1724,22
4	2590,75	2574,78	2519,07	2504,81
5	2896,88	2864,12	2837,31	2807,02
6	5750,58	5675,29	5522,71	5460,97
7	6488,73	6407,00	6207,77	6136,94
8	7736,92	7588,64	7363,08	7236,18
9	8957,29	8915,66	8849,43	8806,38
10	9477,58	9413,09	9147,36	9102,61

Na tabela 3.5 empregam-se as seguintes correspondências:

- (A) : Modelo de Euler-Bernoulli
- (B): Modelo de Euler-Bernoulli com inércia de rotação
- (C): Modelo de Euler-Bernoulli com força cortante
- (D): Teoria de viga de Timoshenko

A tabela 3.5 mostra os valores das frequências naturais segundo os quatro modelos. Mesmo para altas frequências a força cortante e a inércia de rotação pouco influenciam no cálculo dos valores das frequências naturais, com os dados considerados.

Seja como sexto exemplo o pórtico plano da figura 3.19. Determinar a componente horizontal do deslocamento do ponto de aplicação da força $P(x,t) = P \sin \omega t$, onde $\omega = \pi / T$ sendo T igual ao período do primeiro modo de vibração. Considerar os modelos de Euler-Bernoulli e a teoria de viga de Timoshenko. Dados: $E = 210 \text{ GPa}$; $\kappa = 0,85$; $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$; $\nu = 0,33$; $A = 0,036 \text{ m}^2$; $I = 0,00027 \text{ m}^4$; $r = 0,0866 \text{ m}$; $m = 282,6 \text{ kg/m}$. Considerar os somente os três primeiro modos de vibração e o amortecimento. Dado: $\gamma_{1^\circ \text{ modo}} = 0,01$ e condições iniciais de repouso.

Para se usar a teoria de viga de Timoshenko precisam-se determinar os valores das constantes C_j^* e D_j^* (vide equações (3.10), demonstradas no item 3.4). Estas constantes são determinadas para cada barra usando-se as quatro condições de contorno e a relação de equilíbrio entre elas. As condições de contorno para uma barra isolada e em seu sistema local de referência são dadas por:

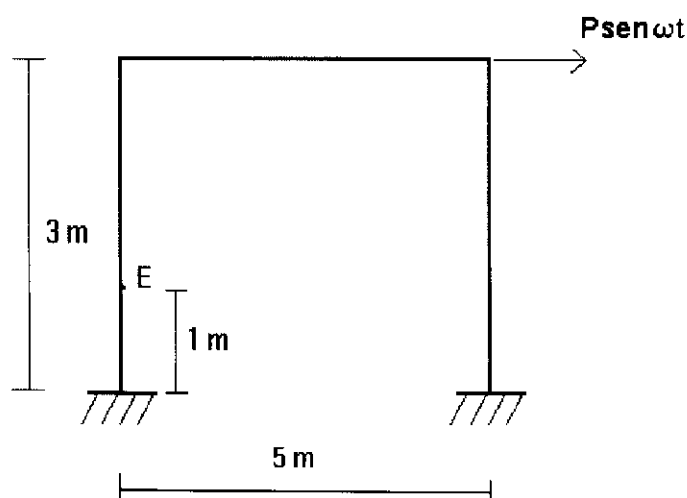


FIGURA 3.19 - Pórtico plano

$$\phi(0) = C_2^* + C_4^*$$

$$\varphi(0) = D_1^* + D_3^*$$

$$\phi(L) = C_1^* \operatorname{sen} k_1 L + C_2^* \cos k_1 L + C_3^* \operatorname{senh} k_3 L + C_4^* \operatorname{cosh} k_3 L$$

$$\varphi(L) = D_1^* \cos k_1 L + D_2^* \operatorname{sen} k_1 L + D_3^* \operatorname{cosh} k_3 L + D_4^* \operatorname{senh} k_3 L$$

Colocando-se na forma matricial e substituindo-se as relações entre C_j^* e D_j^* ,

demonstradas para o primeiro caso no item 3.4, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{c - k_1^2}{k_1} & 0 & \frac{c + k_3^2}{k_3} & 0 \\ \operatorname{sen} k_1 L & \cos k_1 L & \operatorname{senh} k_3 L & \operatorname{cosh} k_3 L \\ -\frac{c - k_1^2}{k_1} \cos k_1 L & \frac{c - k_1^2}{k_1} \operatorname{sen} k_1 L & \frac{c + k_3^2}{k_3} \operatorname{cosh} k_3 L & \frac{c + k_3^2}{k_3} \operatorname{senh} k_3 L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ C_3^* \\ C_4^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi(0) \\ \varphi(0) \\ \phi(L) \\ \varphi(L) \end{Bmatrix} \quad (3.82)$$

Os valores de $\phi(0)$, $\varphi(0)$, $\phi(L)$ e $\varphi(L)$ são decorrentes da solução do problema de vibração livre, no qual é imposto deslocamento unitário (ou rotação unitária) em um nó da estrutura. No presente trabalho, impõe-se deslocamento horizontal unitário do nó E (Fig. 3.19), para o três modos de vibração considerados. Os valores de C_j^* podem ser calculados segundo uma rotina bastante simples de implementação em computador.

O sistema de equações (3.82) pode ser usado para o modelo elementar de Euler-Bernoulli com as seguintes considerações:

$$\begin{aligned} c &= 0 \\ k_1 &= k_3 = \lambda \end{aligned}$$

o que não implica em cuidados adicionais (eventual singularidade)

WARBURTON (1976) define a constante de amortecimento viscoso c da seguinte forma:

$$c = \frac{2\gamma_s}{\omega_s}$$

onde:

$$\gamma_s = \frac{\gamma_1 \omega_s}{\omega_1}$$

Para o pórtico do exemplo, a equação (2.91) resulta em:

$$\ddot{q}_s + \alpha_1 \dot{q}_s + \alpha_2 q_s = \alpha_3 \sin \omega t \quad (3.83)$$

Considerando-se que a viga partiu do repouso, o que implica em $q(x,0)=0$ e $\dot{q}(x,0) = 0$, a solução da equação (3.83) é, então, dada por:

$$q = e^{-\frac{\alpha_1 t}{2}} (A_1 \cos gt + A_2 \sin gt) + \frac{\alpha_3 (\alpha_2 - \omega^2)}{(\alpha_2 - \omega^2)^2 + (\alpha_1 \omega)^2} \sin \omega t - \frac{\alpha_1 \alpha_3 \omega}{(\alpha_2 - \omega^2)^2 + (\alpha_1 \omega)^2} \cos \omega t \quad (3.84)$$

onde:

$$A_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_3 \omega}{(\alpha_2 - \omega^2)^2 + (\alpha_1 \omega)^2}$$

$$A_2 = \frac{\alpha_1^2 \alpha_3 \omega - 2\omega \alpha_3 (\alpha_2 - \omega^2)}{\sqrt{4\alpha_2 - \alpha_1^2} [(\alpha_2 - \omega^2)^2 + (\alpha_1 \omega)^2]}$$

$$g = \frac{1}{2} \sqrt{4\alpha_2 - \alpha_1^2}$$

Nas expressões acima α_1 , α_2 e α_3 , para a teoria de viga de Timoshenko, são dados por:

$$\alpha_1 = 2\gamma_s \omega_s$$

$$\alpha_2 = \omega_s^2 \quad (3.85)$$

$$\alpha_3 = \frac{P \cdot \phi_s}{\int_0^L (m r^2 \varphi_s^2 + m \phi_s^2 + m U_s^2) dx}$$

Para o modelo elementar, a expressão de α_3 é alterada para:

$$\alpha_3 = \frac{P \cdot \phi_s}{\int_0^L (m \phi_s^2 + m U_s^2) dx}$$

A seguir apresentam-se as expressões das integrais para se calcular o valor de α_3 .

$$\int_0^L m \phi^2 dx = \int_0^L m (C_1^* \sin k_1 x + C_2^* \cos k_1 x + C_3^* \sinh k_3 x + C_4^* \cosh k_3 x)^2 dx$$

Elevando-se ao quadrado, tem-se:

$$\int_0^L m \phi^2 dx = \int_0^L m (C_1^{*2} \sin^2 k_1 x + 2C_1^* C_2^* \sin k_1 x \cos k_1 x + 2C_1^* C_3^* \sin k_1 x \sinh k_3 x +$$

$$2C_1^* C_4^* \sin k_1 x \cosh k_3 x + C_2^{*2} \cos^2 k_1 x + 2C_2^* C_3^* \cos k_1 x \sinh k_3 x + 2C_2^* C_4^* \cos k_1 x \cosh k_3 x$$

$$+ C_3^{*2} \sinh^2 k_3 x + 2C_3^* C_4^* \sinh k_3 x \cosh k_3 x + C_4^{*2} \cosh^2 k_3 x) dx$$

Fazendo-se as integrais, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\int_0^L m\phi^2 dx = & mC_1^{*2} \left(\frac{L}{2} - \frac{\text{sen } 2k_1 L}{4k_1} \right) + 2mC_1^* C_2^* \left(\frac{\text{sen}^2 k_1 L}{2k_1} \right) + \\
& 2mC_1^* C_3^* \left(\frac{k_3 \cosh k_3 L \text{sen } k_1 L - k_1 \sinh k_3 L \cos k_1 L}{k_1^2 + k_3^2} \right) + \\
& 2mC_1^* C_4^* \left(\frac{k_3 \sinh k_3 L \text{sen } k_1 L - k_1 \cosh k_3 L \cos k_1 L + k_1}{k_1^2 + k_3^2} \right) + mC_2^{*2} \left(\frac{L}{2} + \frac{\text{sen } k_1 L}{4k_1} \right) \\
& + 2mC_2^* C_3^* \left(\frac{k_3 \cosh k_3 L \cos k_1 L + k_1 \sinh k_3 L \text{sen } k_1 L - k_3}{k_1^2 + k_3^2} \right) + \\
& 2mC_2^* C_4^* \left(\frac{k_3 \sinh k_3 L \cos k_1 L + k_1 \cosh k_3 L \text{sen } k_1 L}{k_1^2 + k_3^2} \right) + mC_3^{*2} \left(\frac{\sinh k_3 L \cosh k_3 L}{2k_3} - \frac{L}{2} \right) + \\
& 2mC_3^* C_4^* \left(\frac{\sinh^2 k_3 L}{2k_3} \right) + mC_4^{*2} \left(\frac{L}{2} + \frac{\sinh k_3 L \cosh k_3 L}{2k_3} \right)
\end{aligned}$$

Para a expressão do deslocamento axial e chamando-se de $a = \omega / C_1$:

$$\int_0^L mU^2 dx = \int_0^L m(B_1 \text{sen } ax + B_2 \cos ax)^2 dx$$

de onde:

$$\int_0^L mU^2 dx = \int_0^L m(B_1^2 \text{sen}^2 ax + 2B_1 B_2 \text{sen } ax \cos ax + B_2^2 \cos^2 ax) dx$$

Fazendo-se as integrais, têm-se:

$$\int_0^L mU^2 dx = mB_1^2 \left(\frac{L}{2} - \frac{\text{sen } 2aL}{4a} \right) + 2B_1 B_2 \left(\frac{\text{sen}^2 aL}{2a} \right) + B_2^2 \left(\frac{L}{2} + \frac{\text{sen } 2aL}{4a} \right)$$

finalizando-se a avaliação dos termos.

Nas duas tabelas seguintes apresentam-se os valores das constantes de interesse referentes à determinação do deslocamento do nó de aplicação da força $P(x,t)$.

TABELA 3.6 - Valores das constante para a teoria de viga de Timoshenko

$\omega(\text{rad/s})$	C_1^*		C_2^*		C_3^*		C_4^*		B_1		B_2	
	AB	BC	AB	BC	AB	BC	AB	BC	AB	BC	AB	BC
124,19	35,7	2,2	-24,8	-8,6	-35,4	-10,0	24,8	8,6	0,6	9,9	0,0	16,5
275,71	-9,8	27,4	7,2	-11,5	9,6	-11,5	-7,2	12,0	2,7	0,79	0,0	-0,11
721,20	-4,1	6,0	3,9	-0,4	3,9	-0,8	-3,9	0,7	0,8	-0,3	0,0	-0,85

TABELA 3.7 - Valores das constante para o modelo de Euler-Bernoulli

$\omega(\text{rad/s})$	C_1		C_2		C_3		C_4		B_1		B_2	
	AB	BC	AB	BC	AB	BC	AB	BC	AB	BC	AB	BC
125,63	37,5	2,3	-26,4	-9,1	-37,5	-10,5	26,4	9,1	0,6	10,4	0,0	17,2
280,46	-10,4	29,3	7,9	-12,5	10,4	-12,5	-7,9	13,0	2,9	0,85	0,0	-0,12
742,74	-4,3	6,5	4,3	-0,5	4,3	-0,9	-4,3	0,9	0,9	-0,3	0,0	-0,92

Nas tabelas 3.8 e 3.9 estão os valores das integrais dos modos de vibração de acordo com os dois modelos.

TABELA 3.8 - Valores das integrais para a viga de Timoshenko

ω (rad./s)	ϕ_s	$\int_0^L m\phi^2 dx$		$\int_0^L mr^2\phi^2 dx$		$\int_0^L mU^2 dx$		Soma dos três elementos
		AB/CD	BC	AB/CD	BC	AB/CD	BC	
124,19	16,52	106593,9	2774,6	256,7	35,82	87,3	232172,9	448859,7
275,71	0,10	12522,0	713169,4	133,9	2014,8	356,1	193,3	744932,8
721,2	-0,85	14681,1	27118,3	102,24	257,95	193,3	683,9	58013,4

TABELA 3.9 - Valores da integrais para o modelo de Euler-Bernoulli

ω (rad./s)	ϕ_s	$\int_0^L m\phi^2 dx$		$\int_0^L mU^2 dx$		Soma dos três elementos
		AB/CD	BC	AB/CD	BC	
125,63	17,16	115594,7	3136,9	97,8	250556,0	485077,9
280,46	0,11	14290,8	812842,4	2354,1	414,0	846546,1
742,74	-0,92	16475,58	32499,0	251,23	805,4	66758,0

As tabelas 3.10 e 3.11 mostram o deslocamento do ponto de aplicação da força $P(x,t)$ nos três primeiros modos de vibração com o tempo T dividido em dez partes, de acordo com os dois modelos de vibração.

TABELA 3.10 - Deslocamento segundo o modelo de Euler-Bernoulli x P/EI

Tempo	$\omega_1 = 125,63 \text{ rad./s}$	$\omega_2 = 280,46 \text{ rad./s}$	$\omega_3 = 742,74 \text{ rad./s}$	soma
0,1T	$0,438 \times 10^{-1}$	$0,942 \times 10^{-6}$	$0,431 \times 10^{-3}$	0,044
0,2T	0,325	$0,543 \times 10^{-5}$	$0,698 \times 10^{-3}$	0,325
0,3T	0,961	$0,106 \times 10^{-4}$	$0,111 \times 10^{-2}$	0,963
0,4T	$0,189 \times 10^1$	$0,117 \times 10^{-4}$	$0,120 \times 10^{-2}$	1,89
0,5T	$0,287 \times 10^1$	$0,954 \times 10^{-5}$	$0,132 \times 10^{-2}$	2,87
0,6T	$0,357 \times 10^1$	$0,860 \times 10^{-5}$	$0,125 \times 10^{-2}$	3,57
0,7T	$0,369 \times 10^1$	$0,950 \times 10^{-5}$	$0,105 \times 10^{-2}$	3,69
0,8T	$0,307 \times 10^1$	$0,833 \times 10^{-5}$	$0,798 \times 10^{-3}$	3,07
0,9T	$0,177 \times 10^1$	$0,344 \times 10^{-5}$	$0,402 \times 10^{-3}$	1,77
1,0T	0,076	$-0,164 \times 10^{-5}$	$0,215 \times 10^{-4}$	0,076

As tabelas 3.10 e 3.11 mostram que, também no caso de pórticos, a teoria de Timoshenko fornece valores maiores do que aqueles fornecidos pela teoria elementar. A maior diferença é de 7,41% e ocorre para $t = 0,9 T$.

TABELA 3.11 - Deslocamento segundo a teoria de viga de Timoshenko x P/EI

Tempo	$\omega_1 = 124,19 \text{ rad./s}$	$\omega_2 = 275,71 \text{ rad./s}$	$\omega_3 = 721,20 \text{ rad./s}$	soma
0,1T	$0,440 \times 10^{-1}$	$0,891 \times 10^{-6}$	$0,450 \times 10^{-3}$	0,044
0,2T	0,326	$0,519 \times 10^{-5}$	$0,749 \times 10^{-3}$	0,327
0,3T	0,968	$0,103 \times 10^{-4}$	$0,118 \times 10^{-2}$	0,969
0,4T	$0,191 \times 10^1$	$0,116 \times 10^{-4}$	$0,127 \times 10^{-2}$	1,91
0,5T	$0,292 \times 10^1$	$0,948 \times 10^{-5}$	$0,143 \times 10^{-2}$	2,92
0,6T	$0,365 \times 10^1$	$0,823 \times 10^{-5}$	$0,131 \times 10^{-2}$	3,65
0,7T	$0,380 \times 10^1$	$0,898 \times 10^{-5}$	$0,113 \times 10^{-2}$	3,81
0,8T	$0,321 \times 10^1$	$0,821 \times 10^{-5}$	$0,839 \times 10^{-3}$	3,21
0,9T	$0,192 \times 10^1$	$0,375 \times 10^{-5}$	$0,429 \times 10^{-3}$	1,92
1,0T	0,182	$-0,153 \times 10^{-5}$	$0,289 \times 10^{-4}$	1,82

Com sétimo exemplo de aplicação seja a grelha da figura 3.20(a) solicitada por uma força, que atua perpendicularmente ao plano da figura, $P(x,t) = P \sin \omega t$, onde $\omega = \pi/T$, sendo T o período do primeiro modo de vibração. Determinar o deslocamento do ponto de aplicação da força. Dados: $L = 6\text{m}$; $A = 0,08 \text{ m}^2$; $\nu = 0,33$; $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$; $I_p = 0,00133 \text{ m}^4$; $I = 0,00107 \text{ m}^4$; $E = 210 \text{ GPa}$; $\kappa = 0,85$; $k = 0,229$.

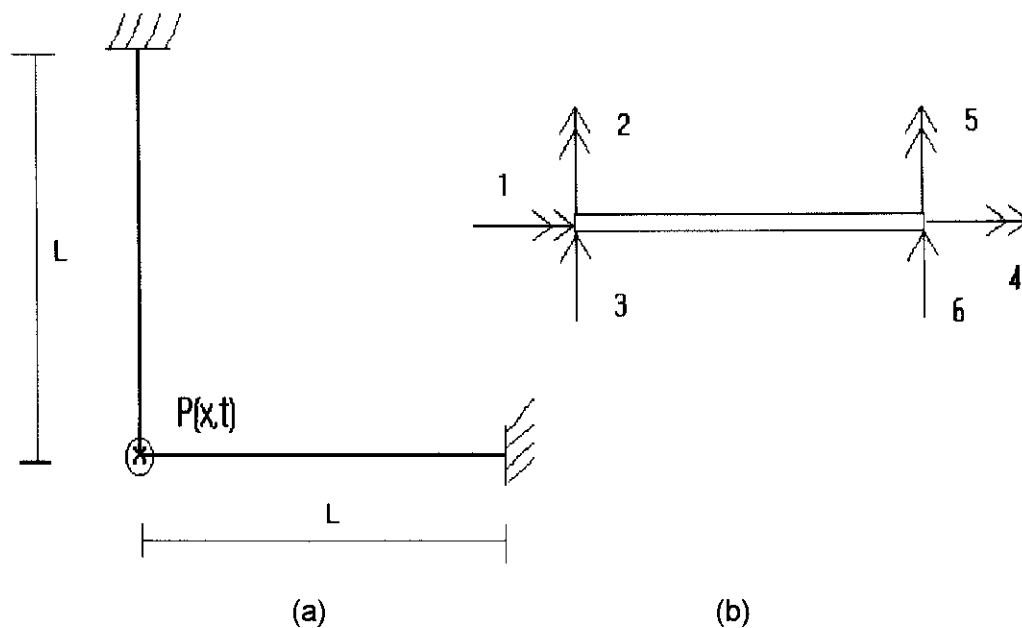


FIGURA 3.20 - (a) Grelha solicitada por carga dinâmica

(b) Sistema de referência para grelhas

Cabe observar que o trabalho computacional é similar ao de pórtico, uma vez que basta considerar no lugar de parâmetros axiais os correspondentes torcionais, como já sabido.

A tabela 3.12 mostra os valores de v_s e o denominador do segundo membro da equação (3.80) para a grelha da figura 3.20. Na coluna soma das integrais, consta a soma dos dois elementos da grelha. É interessante observar que o segundo modo de vibração não é excitado pela força P .

TABELA 3.12 - Constantes da grelha da figura 3.20

Modo	Modelo de Euler-Bernoulli			Teoria de viga de Timoshenko		
	ω (rad./s)	v_s	soma das integrais	ω (rad./s)	v_s	soma das integrais
1	70,43	1,0	2064,42	70,38	1,0	1970,7
2	266,5	0		265,94	0	
3	371,46	1,0	1976,5	369,63	1,0	1845,78

O gráfico da figura 3.21 mostra a soma dos modos de vibração 1 e 3. Da mesma forma que nos casos anteriores, a teoria de viga de Timoshenko fornece valores maiores para os deslocamentos do que aqueles fornecidos pelo modelo elementar.

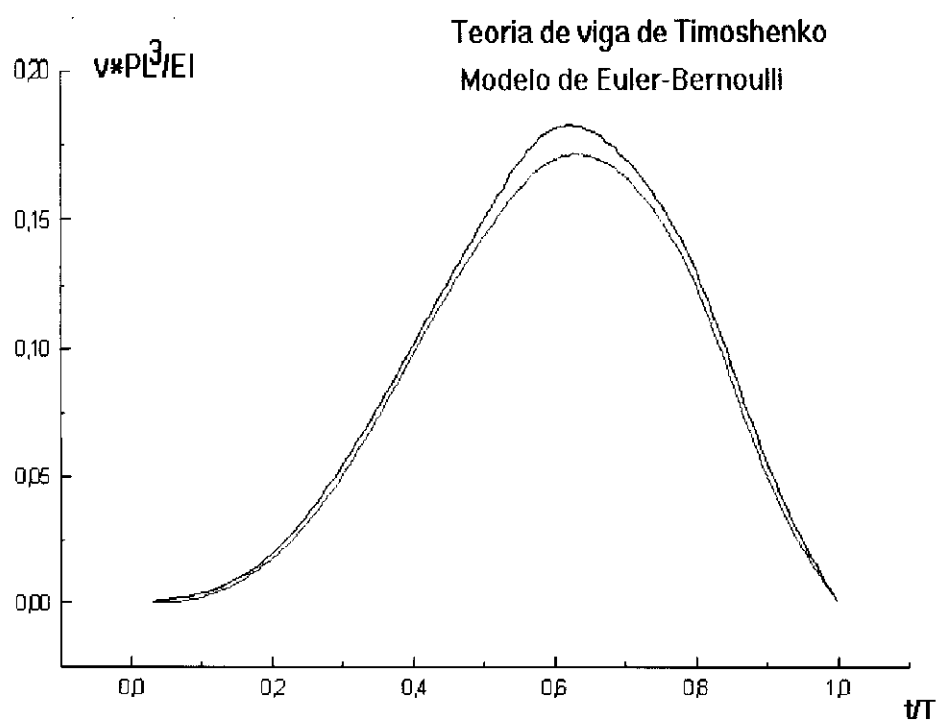


FIGURA 3.21 - Gráfico do deslocamento do ponto de aplicação da força $P(x,t)$

O último exemplo deste capítulo é dedicado a determinar a resposta permanente da viga da figura 3.22. Dados: $L = 6\text{m}$, $E = 210\text{ GPa}$; $\omega = \omega_1/2$; $\kappa = 0,85$; $\nu = 0,33$; $\rho = 7850\text{ kg/m}^3$; $I = 0,00107\text{ m}^4$; $A = 0,08\text{ m}^2$; $r = 0,1155\text{ m}$; $P = 10000\text{N}$.

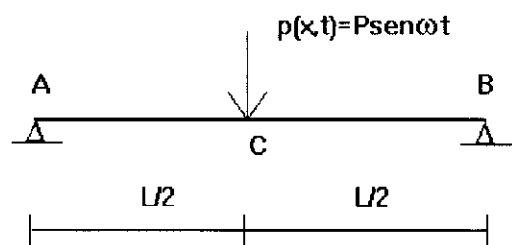


FIGURA 3.22 - Viga sobre dois apoios

Na resposta permanente, isto é, para tempo t suficientemente grande, quando a estrutura passa a vibrar na frequência do carregamento (visto que a parcela homogênea reduz-se exponencialmente), pode-se fazer:

$$\{F\} \text{sen } \omega t = [K]_{\omega} \{d\} \text{sen } \omega t$$

Dividindo-se a viga em dois elementos, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} P/2 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ P/2 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K]_{\omega} \begin{Bmatrix} v_A \\ \theta_A \\ v_B \\ \theta_B \\ v_C \\ \theta_C \end{Bmatrix}$$

ou:

$$\begin{Bmatrix} v_A \\ \theta_A \\ v_B \\ \theta_B \\ v_C \\ \theta_C \end{Bmatrix} = [K]_{\omega}^{-1} \begin{Bmatrix} P/2 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ P/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Na tabela 3.8 estão os valores do deslocamento do ponto de aplicação da força P e os valores das rotações nos apoios A e C de acordo com os quatro modelos; esses valores estão calculados para $\omega = 82 \text{ rad./s}$.

TABELA 3.8 - Valores de rotações e deslocamentos

Modelo	θ_A (rad.)	v_B (m)	θ_C (rad.)
Euler-Bernoulli	$1,346 \times 10^{-4}$	$2,661 \times 10^{-4}$	$-1,346 \times 10^{-4}$
Euler-Bernoulli + I.R.	$1,347 \times 10^{-4}$	$2,662 \times 10^{-4}$	$-1,347 \times 10^{-4}$
Euler-Bernoulli + F.C.	$1,351 \times 10^{-4}$	$2,706 \times 10^{-4}$	$-1,351 \times 10^{-4}$
T. V. Timoshenko	$1,353 \times 10^{-4}$	$2,710 \times 10^{-4}$	$-1,353 \times 10^{-4}$

O gráfico da figura 3.23 mostra a variação de v_B com a frequência ω da carga P aplicada no meio do vão, até próximo da primeira frequência natural ($\omega = 163,99$ rad./s).

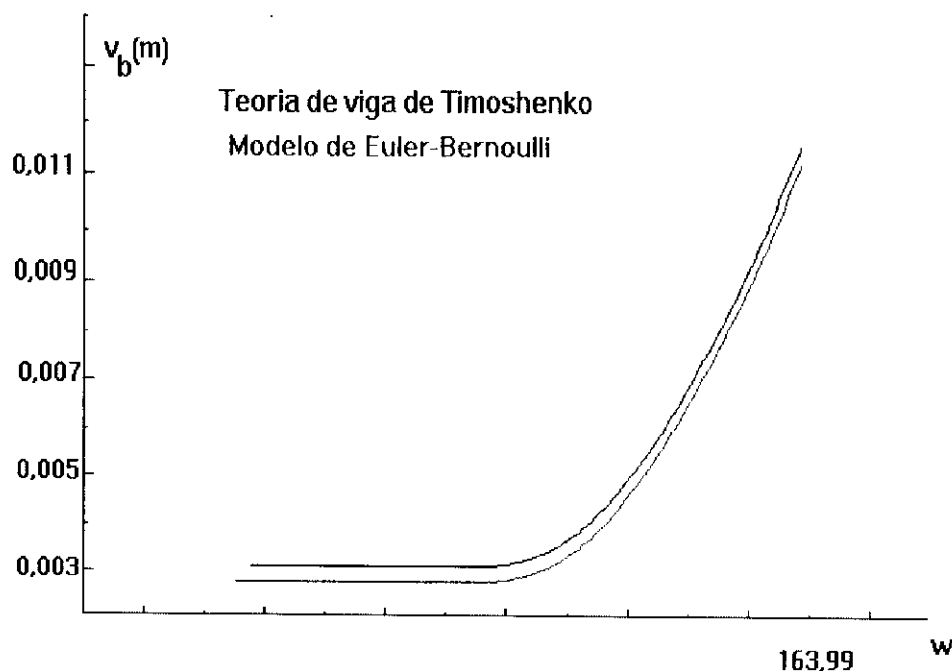


FIGURA 3.23 - Variação de v_B com a frequência

Da mesma forma que a resposta transitória, a resposta permanente fornecida pela teoria de viga de Timoshenko é também de maior magnitude do que a resposta fornecida pela teoria elementar.

3.8 Considerações finais

A condição para calcular as frequências naturais imposta pela equação (3.5) tem algumas limitações. Se um modo de vibração não possui deslocamento em pelo menos um de seus graus de liberdade considerado, este modo não é descoberto na análise. Por exemplo, os modos de vibração pares (2, 4, 6, . . .) não são descobertos se se considerarem apenas dois elementos (três nós) na viga



da figura 3.24. Se, entretanto, a viga for dividida em três ou mais elementos, todas as frequências naturais são calculadas e esta restrição deixa de acontecer.

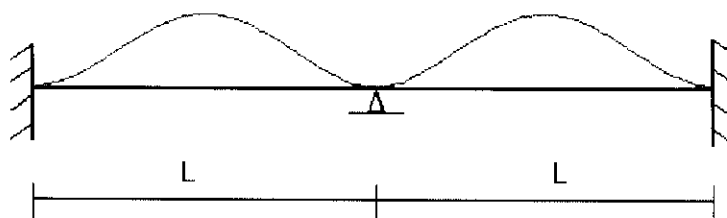


FIGURA 3.24 - Segundo modo de vibração

As frequências naturais são aqui determinadas por tentativas iterativas. A técnica consiste em arbitrar um pequeno valor para ω (no presente trabalho: 0,1) e calcular o determinante da matriz de rigidez dinâmica. Se o determinante for nulo, tem-se uma frequência natural da estrutura. Se o determinante for diferente de zero, soma-se ao valor arbitrado o incremento 0,1 e calcula-se novamente o determinante da matriz. Este procedimento persiste até calcular todas as frequências desejadas. Entretanto, determinante nulo é uma condição muito difícil de acontecer. A figura 3.25 mostra que existe uma frequência natural entre os valores ω_1 e ω_2 espaçados de 0,1. Usando-se a técnica da interpolação linear, o valor de ω é dado por:

$$\omega = \omega_1 + \frac{0,1 \cdot |\text{Det}_1|}{|\text{Det}_1| + |\text{Det}_2|}$$

Os valores das frequências naturais calculadas pelo procedimento descrito são iguais àqueles fornecidos pela solução analítica.

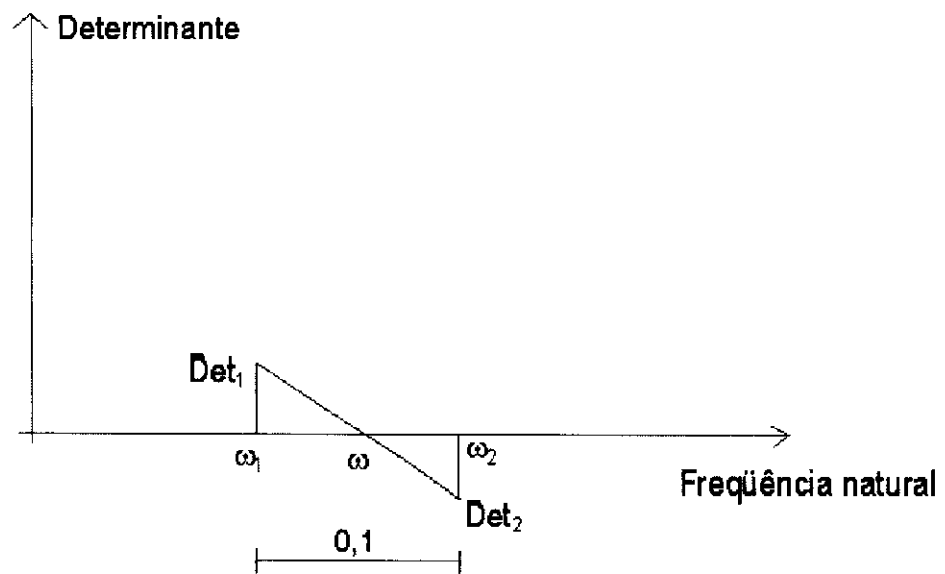


FIGURA 3.25 - Interpolação linear

4 VIGAS SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA

4.1 Introdução

Vigas sobre fundação elástica ocupam um lugar importante na engenharia de estruturas e fundações. O caso estático tem sido estudado extensivamente e é amplamente abordado, por exemplo, no clássico livro de HETÉNYI (1967). Para problemas dinâmicos encontram-se vários artigos com o modelo elementar de Euler-Bernoulli sobre fundação elástica.

A primeira tentativa para representar a resposta do solo foi publicada por E. Winkler no ano de 1867. De acordo com o modelo de Winkler a força reativa do solo em um ponto da viga é proporcional à deflexão daquele ponto, ou seja, existe uma relação linear entre a pressão de contato por unidade de comprimento e a correspondente deflexão do meio elástico HETÉNYI (1967). Uma tentativa de aperfeiçoamento do problema de fundação elástica deve-se a Pasternak, publicada em 1954 FRANCIOSI & MASSI (1993). O modelo de Pasternak constitui-se em adicionar ao modelo de Winkler uma camada hipotética de solo que se deforma somente devido à força cortante. Portanto, o modelo de Pasternak envolve a definição de dois parâmetros de comportamento para o solo.

Um campo de aplicação da teoria de vigas sobre base elástica é o do problema de vibração de cascas cilíndricas HETÉNYI (1967). Existe uma analogia

entre o problema da vibração de cascas cilíndricas e a vibração de vigas retas sobre fundação elástica. THAMBIRATNAM & THEVENDRAN (1992) usam dessa analogia e da técnica dos elementos finitos para análise de vibração livre de cascas cilíndricas. O procedimento é baseado na analogia com uma viga sobre base elástica, onde o módulo da fundação e a rigidez flexional da viga são substituídos por parâmetros próprios da casca cilíndrica. BECHTOLD & RILEY (1991) aplicam a teoria de vigas sobre fundação elástica na análise paramétrica de sistemas de implantes intramedulares (biomecânica). ROORDA (1994) mostra a analogia entre uma viga sobre fundação elástica de Winkler e a micro flexão que surge na cobertura de fibras óticas.

Neste capítulo aborda-se a viga de Timoshenko sobre fundação elástica. As frequências naturais são calculadas e confrontadas de acordo com os modelos de Winkler e Pasternak.

4.2 Fundação elástica de Winkler

Considere-se a viga indicada na figura 4.1 sob movimento de vibração livre. A ação da base elástica sobre a viga está representada na figura 4.1b pela notação q . De acordo com a segunda lei de Newton, o movimento transversal é expresso por:

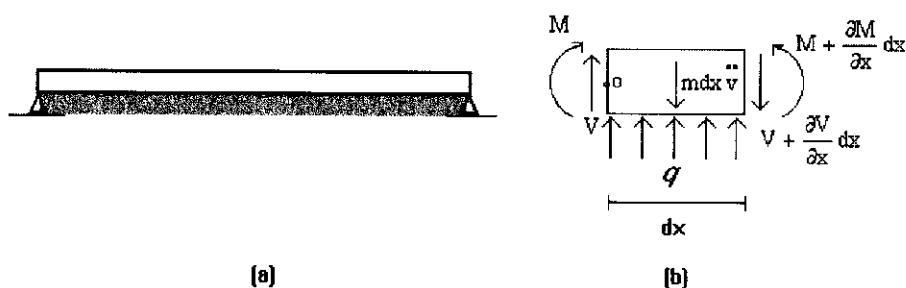


FIGURA 4.1 - Viga sobre fundação elástica de Winkler

$$\frac{\partial V}{\partial x} - q = m \ddot{v} \quad (4.1)$$

Substituindo-se as expressões (2.45) e (2.46) na equação (4.1), encontra-se:

$$m \ddot{v} - \kappa AG(v'' - \alpha') + q = 0 \quad (4.2)$$

De acordo com o modelo de Winkler a reação q é proporcional ao afundamento v ; então:

$$m \ddot{v} - \kappa AG(v'' - \alpha') + Kv = 0 \quad (4.3)$$

onde K é chamado módulo da fundação de Winkler.

A equação que representa o equilíbrio de momentos fletores do elemento da figura 4.1b não é formalmente alterada pela presença da reação q , uma vez que o momento desta reação constitui-se em um diferencial de segunda ordem. Sendo assim, a equação (2.67) não é alterada em sua redação.

A solução da equação (4.3) pode ser da forma:

$$\begin{aligned} v &= \phi e^{i\omega t} \\ \alpha &= \varphi e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Levando-se as expressões (4.4) na equação (4.3), tem-se, depois de algumas manipulações algébricas:

$$\phi'' + c\phi - d\varphi = 0 \quad (4.5)$$

onde:

$$c = \frac{m\omega^2 - K}{\kappa AG}$$

$$d = 1$$

Eliminado-se ϕ' da equação (4.5) e ϕ'' da equação (2.67), têm-se:

$$\phi^{IV} + a\phi'' + b\phi = 0$$

$$\phi^{IV} + a\phi'' + b\phi = 0$$

onde:

$$a = c + \frac{mr^2\omega^2 + \kappa AG(d - 1)}{EI}$$

$$b = \frac{(mr^2\omega^2 - \kappa AG)c}{EI}$$

que são formas modificadas de parâmetros já referidos anteriormente.

4.3 Fundação elástica de Pasternak

O modelo simples de fundação elástica de Winkler não tem abrangência para representar adequadamente as características de muitas fundações reais. Assim, surgiram vários modelos de fundação com dois parâmetros que são mais requintados que o modelo de Winkler. Como exemplo de modelos de fundação com dois parâmetros de solo podem-se citar os modelos de Vlasov, Hetényi e Pasternak. No modelo de Pasternak assume-se a existência de uma camada de solo e que se deforma apenas por força cortante. Este modelo está representado na figura 4.2. A reação q deste modelo como está demonstrada no trabalho de KERR (1964) é dada por:

$$q = Kv - K_1 v'$$

onde K_1 é o módulo cortante da fundação. Portanto, para uma fundação Pasternak a expressão (4.2) assume a forma:

$$m \ddot{v} - \kappa AG(v'' - \alpha v') + Kv - K_1 v' = 0 \quad (4.6)$$

Procedendo de um modo análogo ao item anterior, têm-se as novas expressões modificadas de c e d para o modelo de fundação de Pasternak, ou seja:

$$c = \frac{m\omega^2 - K}{\kappa AG + K_1}$$

$$d = \frac{\kappa AG}{\kappa AG + K_1}$$

completando-se, assim, a formulação.

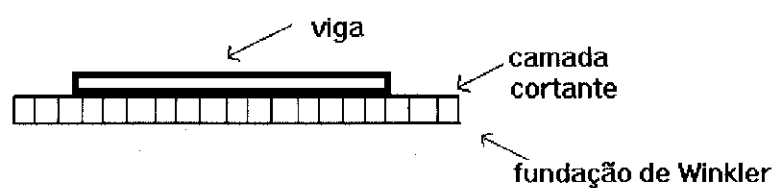


FIGURA 4.2 - Modelo de fundação elástica de Pasternak

4.4 Ortogonalidade

Para se demonstrar que os modos de vibração de vigas sobre base elástica de Pasternak são ortogonais, considerem-se as equações (4.5) e (2.70), referentes a um modo de vibração r :

$$\begin{aligned}
 (\kappa AG + K_1)\phi_r^{\parallel} + (m\omega_r^2 - K)\phi_r - \kappa AG\phi_r^{\perp} &= 0 \\
 EI\phi_r^{\parallel} + (mr^2\omega_r^2 - \kappa AG)\phi_r + \kappa AG\phi_r^{\perp} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Multiplicando-se a primeira equação por $\phi_s dx$, a segunda por $\phi_s dx$ e integrando ao longo do comprimento, encontram-se as equações:

$$\begin{aligned}
 -(m\omega_r^2 - K)\int_0^L \phi_r \phi_s dx &= \kappa AG \int_0^L (\phi_r^{\parallel} - \phi_r^{\perp}) \phi_s dx + K_1 \int_0^L \phi_r^{\parallel} \phi_s dx \\
 -mr^2\omega_r^2 \int_0^L \phi_r \phi_s dx &= EI \int_0^L \phi_r^{\parallel} \phi_s dx - \kappa AG \int_0^L \phi_r \phi_s dx + \kappa AG \int_0^L \phi_r^{\perp} \phi_s dx
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Integrando-se uma vez por partes os termos das equações (4.8) que contêm derivadas e somando-se os resultados, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 -(m\omega_r^2 - K)\int_0^L \phi_r \phi_s dx - mr^2\omega_r^2 \int_0^L \phi_r \phi_s dx &= \kappa AG \int_0^L (-\phi_r^{\perp} \phi_s^{\perp} + \phi_r \phi_s^{\perp} - \phi_r \phi_s - \phi_r \phi_s^{\parallel}) dx - \\
 K_1 \int_0^L \phi_r^{\perp} \phi_s^{\perp} dx - EI \int_0^L \phi_r^{\perp} \phi_s^{\perp} dx &+ [\kappa AG(\phi_s \phi_r^{\perp} - \phi_s^{\perp} \phi_r + \phi_s \phi_r) + K_1 \phi_s \phi_r^{\perp} + EI \phi_s \phi_r^{\parallel}]_0^L
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

De forma análoga, considerem-se que as equações (4.7) no caso de um modo de vibração s . Multiplicando-se a primeira equação por $\phi_r dx$, a segunda por $\phi_r dx$ e integrando, têm-se respectivamente:

$$\begin{aligned}
 -(m\omega_s^2 - K)\int_0^L \phi_s \phi_r dx &= \kappa AG \int_0^L (\phi_s^{\parallel} - \phi_s^{\perp}) \phi_r dx + K_1 \int_0^L \phi_s^{\parallel} \phi_r dx \\
 -mr^2\omega_s^2 \int_0^L \phi_s \phi_r dx &= EI \int_0^L \phi_s^{\parallel} \phi_r dx - \kappa AG \int_0^L \phi_s \phi_r dx + \kappa AG \int_0^L \phi_s^{\perp} \phi_r dx
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Integrando-se os termos que são funções de derivadas (menos os termos

$-\kappa AG \int_0^L \phi_s^{\perp} \phi_r dx$ e $\kappa AG \int_0^L \phi_s^{\perp} \phi_r dx$) e somando, resulta:

$$-(m\omega_s^2 - K) \int_0^L \phi_r \phi_s dx - mr^2 \omega_s^2 \int_0^L \varphi_r \varphi_s dx = \kappa AG \int_0^L (-\phi_r' \phi_s' - \phi_r \varphi_s' - \varphi_r \phi_s' - \varphi_r \varphi_s - \phi_s \varphi_r') dx - K_1 \int_0^L \phi_r' \phi_s' dx - EI \int_0^L \varphi_r' \varphi_s' dx + [\kappa AG \phi_s \phi_r' + K_1 \phi_r \phi_s' + EI \varphi_r \varphi_s']_0^L \quad (4.11)$$

Fazendo-se (4.11) menos (4.9), tem-se:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \left(\int_0^L m \phi_r \phi_s dx + \int_0^L mr^2 \varphi_r \varphi_s dx \right) = [\kappa AG (\phi_r \phi_s' - \phi_s \phi_r' + \phi_s \varphi_r - \varphi_s \phi_r) + K_1 (\phi_r \phi_s' - \phi_s \phi_r') + EI (\varphi_r \varphi_s' - \varphi_s \varphi_r')]_0^L \quad (4.12)$$

Substituindo-se na equação (4.12) as expressões do momento fletor e da força cortante (ver item 2.4.1), tem-se:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \left(\int_0^L m \phi_r \phi_s dx + \int_0^L mr^2 \varphi_r \varphi_s dx \right) = [\phi_r (V_s + \kappa AG \varphi_s) - \kappa AG \phi_s \phi_r' + \phi_s (-V_r + \kappa AG \phi_r') - \kappa AG \varphi_s \phi_r + K_1 (\phi_r \phi_s' - \phi_s \phi_r') + \varphi_s M_r - \varphi_r M_s]_0^L \quad (4.13)$$

Simplificando-se a expressão (4.13), encontra-se:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \left(\int_0^L m \phi_r \phi_s dx + \int_0^L mr^2 \varphi_r \varphi_s dx \right) = [\phi_r V_s - \phi_s V_r + K_1 (\phi_r \phi_s' - \phi_s \phi_r') + \varphi_s M_r - \varphi_r M_s]_0^L \quad (4.14)$$

A força cortante total no modelo de fundação de Pasternak (Q^*) conforme demonstrada no trabalho de KERR (1964), é dada por:

$$Q^* = V^* + V_1^* \quad (4.15)$$

onde Q^* é a soma da cortante na viga e da cortante na "viga" da fundação Pasternak, V^* é dado pela equação (2.55) e V_1^* é a parcela referente à camada de solo que se deforma apenas por força cortante:

$$V_1^* = K_1 v^l \quad (4.16)$$

No caso de vibração livre, a força cortante total é dada por:

$$Q = \kappa AG(\phi' - \varphi) + K_1\phi' \quad (4.17)$$

Com o auxílio da equação (2.57), a expressão (4.17) fica da forma:

$$Q = V + K_1\phi' \quad (4.18)$$

Com o auxílio da expressão (4.18), a equação (4.14) pode ser reescrita na forma:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \left(\int_0^L m\phi_r\phi_s dx + \int_0^L mr^2\varphi_r\varphi_s dx \right) = [\phi_r Q_s - \phi_s Q_r + \varphi_s M_r - \varphi_r M_s]_0^L \quad (4.19)$$

Os termos do segundo membro anulam-se nos engastes ($\phi_r = \phi_s = \varphi_r = \varphi_s = 0$), apoios simples ($\phi_r = \phi_s = M_r = M_s = 0$) e nas extremidades livres ($Q_s = Q_r = M_r = M_s = 0$). Portanto, para vigas com estas extremidades, pode-se fazer:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \left(\int_0^L m\phi_r\phi_s dx + \int_0^L mr^2\varphi_r\varphi_s dx \right) = 0 \quad (4.20)$$

A equação (4.20) mostra a condição de ortogonalidade de vigas sobre base elástica do modelo Pasternak e de Winkler (que é um caso particular).

Por último, cumpre notar que a matriz de rigidez dinâmica considerando-se o modelo de Pasternak pode ser obtida sem grande esforço adicional tendo-se em vista que a matriz $[B_1^{**}]$ (equação (3.6)) não se altera e a modificação em $[B_2^{**}]$ é de pequena monta, pois:

$$Q_A = (\kappa AG + K_1)\phi'(0) - \kappa AG\varphi(0)$$

$$Q_B = (\kappa AG + K_1)\phi'(L) - \kappa AG\varphi(L)$$

4.5 Vibração forçada amortecida de vigas sobre fundação elástica

Para se formular o problema da vibração forçada de vigas sobre base elástica, modelo de Pasternak, considere-se uma solução geral do tipo:

$$v = \phi e^{i\omega t} \quad (4.21)$$

$$\alpha = \varphi e^{i\omega t}$$

para a equação da vibração livre (4.6) do conjunto. Substituindo-se a solução (4.21) na referida equação e simplificando o termo comum $e^{i\omega t}$, tem-se:

$$-\omega^2 m\phi - \kappa AG(\phi^{\parallel} - \phi^{\perp}) + K\phi - K_1\phi^{\parallel} = 0 \quad (4.22)$$

Considerando-se, agora, que a viga esteja solicitada por uma carga $p(x,t)$, a equação (4.6) assume a forma no caso de conter amortecimento:

$$m \ddot{v} - \kappa AG \left[v^{\parallel} - \alpha^{\perp} + c(\dot{v}^{\parallel} - \dot{\alpha}^{\perp}) \right] + Kv - K_1 v^{\parallel} = p(x, t) \quad (4.23)$$

A equação (2.86) não é alterada formalmente pela presença da base elástica, uma vez que o momento fletor da reação q é um diferencial de segunda ordem.

Colocando-se as soluções da vibração forçada na forma:

$$v = \sum_r q_r(t) \phi_r(x) \quad (4.24)$$

$$\alpha = \sum_r q_r(t) \varphi_r(x)$$

nas equações (4.23) e (2.86), encontram-se:

$$m \sum_r \ddot{q}_r \phi_r = \sum_r q_r (\kappa AG \phi_r^{\parallel} - \kappa AG \varphi_r^{\perp} - K\phi_r + K_1 \phi_r^{\parallel}) + c \sum_r \dot{q}_r \kappa AG (\phi_r^{\parallel} - \varphi_r^{\perp}) + p(x, t) \quad (4.25)$$

$$mr^2 \sum_r \ddot{q}_r \varphi_r = \sum_r (q_r + c\dot{q}_r) (EI\varphi_r^{\parallel} + \kappa AG \phi_r^{\perp} - \kappa AG \varphi_r) + u(x, t)$$

Comparando-se a primeira equação (4.25) com (4.22) e com (2.69) e a segunda com (2.70), têm-se:

$$m \sum_r \ddot{q}_r \phi_r = - \sum_r q_r (\omega_r^2 m \phi_r) - c \sum_r \dot{q}_r m \omega_r^2 \phi_r + p(x, t) \quad (4.26)$$

$$mr^2 \sum_r \ddot{q}_r \varphi_r = - \sum_r (q_r + c\dot{q}_r) (mr^2 \omega_r^2 \varphi_r) + u(x, t)$$

Multiplicando-se a primeira equação por $\phi_s dx$, a segunda por $\phi_s dx$, somando, integrando-se ao longo do comprimento e tendo-se em conta a condição de ortogonalidade (equação (4.20)), tem-se:

$$\ddot{q}_s + c\dot{q}_s\omega_s^2 + q_s\omega_s^2 = \frac{\int_0^L p(x,t)\phi_s dx + \int_0^L u(x,t)\phi_s dx}{\int_0^L (mr^2\phi_s^2 + m\phi_s^2)dx} \quad (4.27)$$

completando-se o tema em apreço.

4.6 Vigas sobre apoios elásticos pontuais

Considere-se o segmento de viga sobre dois apoios elásticos ilustrado na figura 4.3. Supondo-se que as molas A e B obedecem à lei de Hooke, as ações nestes apoios são dadas por:

$$F_A = Cm_A v_A \quad (4.28)$$

$$F_B = Cm_B v_B$$



FIGURA 4.3 - Segmento de viga sobre apoios elásticos

onde v_A e v_B são as componentes verticais do deslocamento dos pontos A e B e Cm_A e Cm_B são as constantes elásticas dos apoios, respectivamente. Assim sendo, a matriz de rigidez dinâmica assume a forma modificada:

$$[k] = D \begin{bmatrix} k_{11} + (Cm_A / D) & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} + (Cm_B / D) & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Um apoio elástico pode também oferecer resistência à rotação; surge, então, uma reação momento M neste apoio. Este tipo de apoio é chamado engaste elástico. Sendo também válida a lei de Hooke, tem-se a relação:

$$M = K\beta \quad (4.30)$$

onde K é a constante de mola e β a rotação no apoio. Para um segmento de viga apoiado em engastes elásticos, a matriz de rigidez dinâmica assume a forma modificada:

$$[k] = D \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} + (K_A / D) & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} + (K_B / D) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

o que complementa esse tema de base elástica pontual.

4.7 Exemplos

Seja determinar as cinco primeiras freqüências naturais da viga da figura abaixo, considerando-se o modelo de Euler-Bernoulli para a viga e o modelo de Winkler para a fundação elástica. Determinar os três primeiros modos de vibração da viga sobre base elástica. Este problema é abordado por LAI et al. (1992) e GUDIEL et al. (1994). TIMOSHENKO & YOUNG (1960) apresentam a solução analítica. Dados: $L = 6,1$ m; $A = 0,305$ m x $0,61$ m; $E = 2,483 \times 10^{10}$ N/m²; $I = 0,00144$ m⁴; $K = 16,554 \times 10^6$ N/m²; $\kappa = 0,85$; $\rho = 2397$ kg/m³; $\nu = 0,25$.

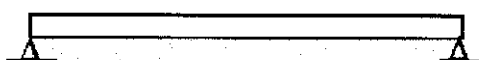


FIGURA 4.4 - Viga sobre fundação elástica

TABELA 4.1 - Freqüências naturais da viga sobre fundação elástica da viga da figura 4.4

Freqüência (rad./s)	Solução analítica TIMOSHENKO & YOUNG (1960)	LAI et al. (1992) (com 10 elementos)	GUDIÉL et al. (1994) (com 10 elementos)	Presente trabalho com 1 elemento
1	206,79	206,75	206,81	206,79
2	356,89	357,02	356,95	356,89
3	702,85	703,55	703,26	702,86
4	1217,01			1217,01
5	1887,45			1887,45

Os trabalhos de LAI et al. (1992) e GUDIÉL et al. (1994), com os resultados arrolados na tabela 4.1, mostram boa concordância. Os resultados do presente trabalho são iguais àqueles fornecidos pela solução analítica, como era de se esperar. Os modos de vibração das vigas sobre base elástica têm a mesma forma dos modos de vigas sem base elástica e estão exibidos nas figuras 4.5 a 4.7.

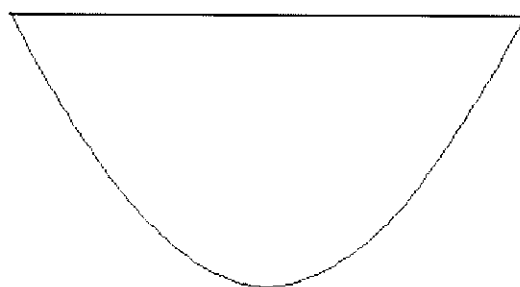


FIGURA 4.5 - Primeiro modo de vibração

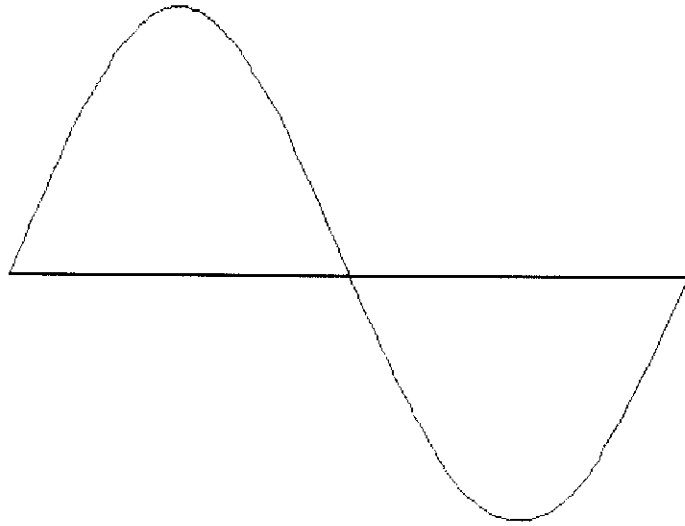


FIGURA 4.6- Segundo modo de vibração

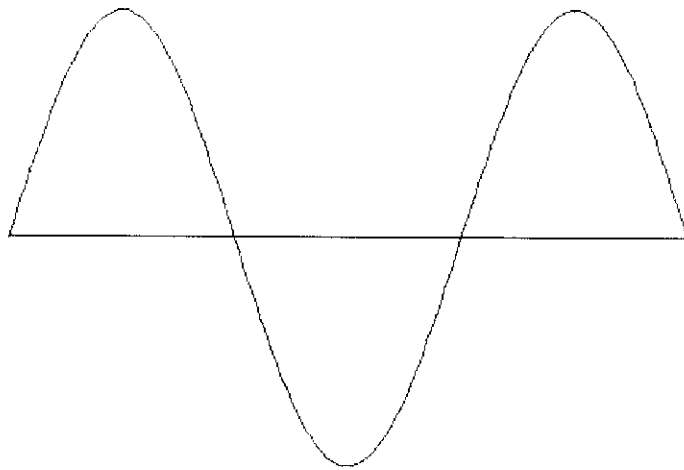


FIGURA 4.7- Terceiro modo de vibração

Como segundo exemplo seja, para a viga do exemplo anterior, calcular as frequências naturais, considerando-se a teoria de vigas de Timoshenko. Para a fundação considerar os modelos de Winkler e o de Pasternak. Dado: $K_1 = 4 \times 10^6 \text{ N}$.

TABELA 4.2 - Freqüências naturais da viga sobre fundação elástica da viga da fig. 4.4

Freqüência (rad./s)	Viga de Timoshenko sobre base elástica de Winkler	Viga de Timoshenko sobre base elástica de Pasternak
1	206,49	212,17
2	352,51	365,66
3	680,26	695,56
4	1147,94	1163,96
5	1727,34	1743,83

Os valores das freqüências naturais das vigas sobre base elástica, como estão mostrando os resultados da tabela 4.2, diminuem quando se considera a teoria de Timoshenko. A base elástica de Pasternak aumenta os valores das freqüências naturais quando comparados com os resultados da base elástica de Winkler, nesse caso computando-se como uma rigidez adicional (e não compartilhada).

O terceiro exemplo consiste em se calcular as três primeiras freqüências naturais da viga contínua sobre fundação elástica da viga da figura abaixo. Considerar os modelos de Winkler, Pasternak e sem fundação elástica. Dados: $\kappa = 0,85$; $\nu = 0,33$; $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$; $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $A = 0,2 \text{ m} \times 0,025 \text{ m}$; $I = 16,667 \times 10^{-6} \text{ m}^4$; $K = 3236500 \text{ N/m}^2$; $K_1 = 1298540 \text{ N}$.

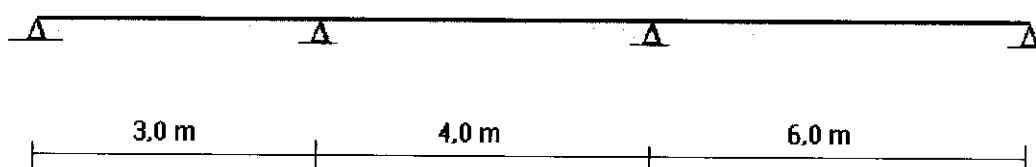


FIGURA 4.8 - Viga contínua sobre fundação elástica

TABELA 4.3 - Frequências naturais da viga sobre fundação elástica da viga da
figura 4.8

Frequência (rad./s)	Viga de Timoshenko sem fundação elástica	Viga de Timoshenko sobre fundação elástica de Winkler	Viga de Timoshenko sobre fundação elástica de Pasternak
1	102,18	304,66	320,25
2	251,38	381,38	412,49
3	370,50	468,43	507,11
4	447,21	531,19	565,33
5	753,57	806,03	855,02

Da mesma forma, para a viga hiperestática da figura 4.8, os valores das frequências naturais da base elástica de Pasternak arroladas na tabela 4.8 são maiores do que aqueles da base elástica de Winkler.

Como quarto exemplo de aplicação, seja determinar as cinco frequências mais baixas de uma viga livre-livre e os três primeiros modos de vibração. Os dados são os mesmos da viga do exemplo 1 do capítulo 3.

Para se determinar as frequências naturais de vigas livre-livre é necessário, na implementação desenvolvida, criar dois apoios elásticos imaginários. A figura 4.9 mostra uma viga sobre apoios elásticos com constante de mola $k = 1 \text{ N/m}$. Uma vez que estes apoios têm pequena rigidez relativa, quando comparadas com a viga, eles podem ser considerados imaginários e a viga ser considerada livre-livre.



FIGURA 4.9 - Artificio para modelar vigas livre-livre

TABELA 4.4 - Freqüências naturais de uma viga livre-livre

Freqüência (rad./s)	Modelo de Euler- Bernoulli	Euler-Bernoulli + inércia rotação	Teoria de viga de Timoshenko
1	250,54	246,75	244,00
2	690,62	668,21	642,81
3	1353,89	1281,04	1188,95
4	2238,05	2061,94	1838,79
5	3343,27	2988,55	2559,76

Os efeitos da inércia de rotação e da força cortante aumentam nas altas freqüências naturais de vigas livre-livre, como os resultados da tabela 4.4 estão mostrando. Os modos de vibração estão apresentados nas figuras de 4.10 a 4.12.



FIGURA 4.10 - Primeiro modo de vibração

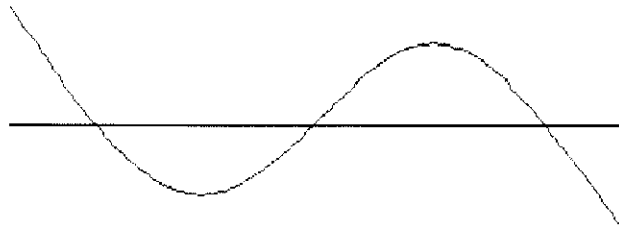


FIGURA 4.11 - Segundo modo de vibração

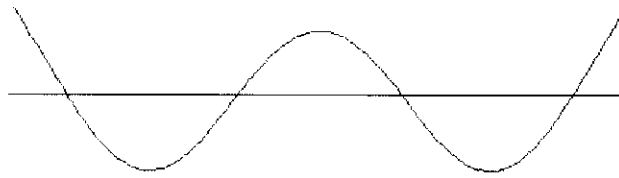


FIGURA 4.12 - Terceiro modo de vibração

Como quinto exemplo, seja determinar o deslocamento do ponto de aplicação da carga $P(x,t)$ no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$, onde T é o período do primeiro modo de vibração. Considerar o modelo de Euler-Bernoulli, a teoria de viga de Timoshenko e os modelos de base elástica de Winkler e Pasternak. Dados: $L=11,547$ m; $I = 0,025$ m⁴; $A=0,3$ m²; $\kappa=0,85$; $\nu=0,33$; $\rho=7850$ kg/m³; $E=210$ GPa; $K=16,554 \times 10^6$ N/m²; $K_1= 5 \times 10^6$ N.

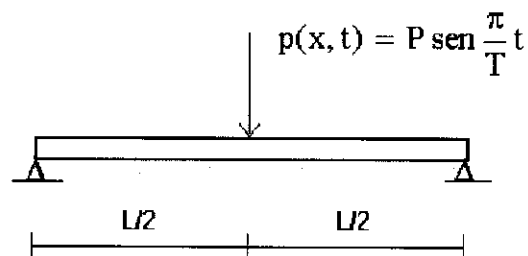


FIGURA 4.13 - Vibração forçada de viga sobre base elástica

Impondo-se as condições de contorno desse caso têm-se as seguintes expressões de ϕ e φ (essas expressões estão demonstradas no segundo exemplo do capítulo dois):

$$\phi = C_1 \text{sen } k_1 x \quad (4.32)$$

$$\varphi = -\frac{c - k_1^2}{k_1} \text{sen } k_1 x$$

onde:

$$k_1 = \frac{n\pi}{L} \quad (4.33)$$

Para se usar a expressão (4.27) precisam-se das seguintes relações (também estão demonstradas na capítulo 2):

$$\int_0^L \phi^2 dx = C_1^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L \varphi^2 dx = \left(\frac{c - k_1^2}{k_1} \right)^2 C_1^2 \frac{L}{2} \quad (4.34)$$

$$P\phi(L/2) = P \text{sen} \frac{\pi}{T} C_1 \text{sen} \frac{n\pi}{2}$$

Para o modelo de Euler-Bernoulli e o primeiro modo de vibração, tem-se:

$$\ddot{q}_1 + q_1 \omega_1^2 = \frac{2P \text{sen} \frac{\pi}{T} t(1)}{mC_1 L} \quad (4.35)$$

TABELA 4.5 - Valores das frequências naturais segundo vários modelos

ω (rad./s)	Modelo de Euler-Bernoulli		Teoria de viga de Timoshenko	
	Winkler	Pasternak	Winkler	Pasternak
1	138,72	138,76	137,48	138,05
2	449,96	450,17	429,57	430,28
3	998,22	998,68	903,79	904,54
4	1770,33	1771,17	1504,49	1505,28
5	2764,30	2765,62	2192,70	2193,54

A tabela 4.5 mostra os valores das frequências naturais da viga da figura 4.13, de acordo com vários modelos. A tabela 4.6 mostra o deslocamento do nó de aplicação da força P segundo o modelo de Euler-Bernoulli e a fundação de Winkler. A tabela 4.7 fornece os deslocamentos de acordo com a viga de Timoshenko.

TABELA 4.6 - Variação do deslocamento com o tempo segundo o modelo de Euler-Bernoulli e fundação de Winkler

Tempo	DESLOCAMENTO $\times PL^3/EI$		
	1° modo	3° modo	5° modo
0,1T	0,263E-03	0,942E-04	0,102E-04
0,2T	0,195E-02	0,141E-03	0,194E-04
0,3T	0,560E-02	0,188E-03	0,267E-04
0,4T	0,114E-01	0,250E-03	0,314E-04
0,5T	0,174E-01	0,260E-03	0,331E-04
0,6T	0,216E-01	0,222E-03	0,315E-04
0,7T	0,223E-01	0,198E-03	0,269E-04
0,8T	0,185E-01	0,164E-03	0,197E-04
0,9T	0,105E-01	0,751E-04	0,106E-04
1,0T	0,304E-08	0,164E-04	0,484E-06

TABELA 4.7 - Variação do deslocamento com o tempo segundo a teoria de viga de Timoshenko e base de Winkler e de Pasternak

tempo	DESLOCAMENTO $\times PL^3/EI$					
	1º modo		3º modo		5º modo	
	WINKLER	PASTERNAK	WINKLER	PASTERNAK	WINKLER	PASTERNAK
0,1T	0,261E-03	0,266E-03	0,115E-03	0,110E-03	0,163E-04	0,157E-04
0,2T	0,193E-02	0,195E-02	0,159E-03	0,153E-03	0,283E-04	0,272E-04
0,3T	0,577E-02	0,578E-02	0,256E-03	0,246E-03	0,423E-04	0,408E-04
0,4T	0,114E-01	0,114E-01	0,308E-03	0,296E-03	0,465E-04	0,448E-04
0,5T	0,174E-01	0,174E-01	0,284E-03	0,273E-03	0,513E-04	0,495E-04
0,6T	0,218E-01	0,217E-01	0,305E-03	0,293E-03	0,477E-04	0,460E-04
0,7T	0,227E-01	0,225E-01	0,258E-03	0,248E-03	0,402E-04	0,387E-04
0,8T	0,190E-01	0,187E-01	0,158E-03	0,152E-03	0,308E-04	0,297E-04
0,9T	0,111E-01	0,108E-01	0,113E-03	0,108E-03	0,140E-04	0,135E-04
1,0T	0,561E-03	0,276E-03	0,297E-05	0,285E-05	0,151E-05	0,146E-05

Quando se emprega o modelo de viga de Timoshenko, a fundação de Winkler continua a fornecer valores maiores para os deslocamentos do que aqueles fornecidos para a fundação de Pasternak. O gráfico da figura 4.14 mostra a variação do deslocamento do ponto de aplicação da força P , refinando-se o tempo com malha dividida em dez partes. Os modelos considerados naquele gráfico são o modelo de Euler-Bernoulli e o da teoria de viga de Timoshenko, com fundação de Pasternak. Naquele gráfico, está a superposição modal dada pela soma dos modos de vibração 1, 3 e 5.

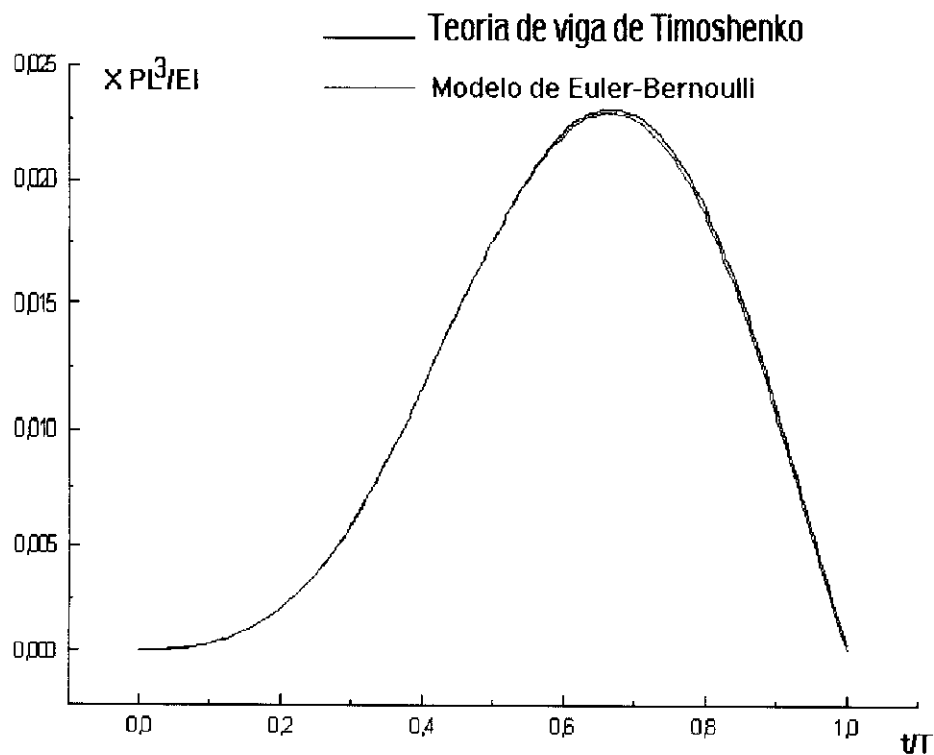


FIGURA 4.14 - Gráfico deslocamento x tempo

Considere-se agora, calcular as cinco primeiras freqüências naturais de uma viga bi-apoiada sobre base elástica. Considerar os modelos de Winkler e o de Pasternak. Dados: $E = 210$ GPa; $L = 0,8$ m; $\nu = 0,25$; $\rho = 7850$ kg/m³; $A = 9,77 \times 10^{-4}$ m²; $I = 1 \times 10^{-6}$ m⁴; $\kappa = 0,667$; $K = 12817382,8$ N/m; $K_1 = 8203125,0$ N.

Este problema com base elástica de Pasternak é abordado por WANG & STEPHENS (1977). A tabela 4.8 mostra os valores das freqüências naturais segundo o presente trabalho, confrontados com resultados de outros autores. No modelo de fundação elástica de Winkler não há nenhuma diferença e no modelo de Pasternak há uma pequena diferença entre os dois métodos. Os resultados da tabela 4.8 mostram que a base elástica de Pasternak aumenta os valores das freqüências naturais em relação àqueles fornecidos pela base elástica de Winkler, enquanto a força cortante e a inércia de rotação diminuem estes valores.

Para a tabela 4.8 cabe assinalar que empregam-se as seguintes correspondências:

(A): Resultados do presente trabalho para o modelo de Euler-Bernoulli sem inércia de rotação e base elástica de Winkler

(B): TIMOSHENKO & YOUNG (1960) para o modelo (A)

(C): Resultados do presente trabalho para a teoria de viga de Timoshenko sem inércia de rotação e base elástica de Pasternak

(D): Resultados do presente trabalho para a teoria de viga de Timoshenko com inércia de rotação e base elástica de Pasternak

(E): WANG & STEPHENS (1977) para o modelo (D)

TABELA 4.8 - Freqüências naturais de viga sobre base elástica

ω (rad./s)	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	Desvio (%) entre (D) e (E)
1	2860,479	2860,480	4930,70	4896,25	4894,21	0,04
2	10288,386	10288,386	12324,03	12073,25	12037,74	0,29
3	23001,767	23001,767	22232,19	21560,55	21415,08	0,67
4	40847,860	40847,860	33494,33	32346,17	32007,56	1,05
5	63805,908	63805,908	45338,43	43784,20	43202,46	1,33

Seja a grelha sobre base elástica da figura 4.15. Calcular as freqüências naturais considerando-se os diversos modelos de vigas e de base elástica. Dados: $E = 210 \text{ GPa}$; $A = 0,3 \text{ m} \times 0,1 \text{ m}$; $I_p = 0,00025 \text{ m}^4$; $I_z = 0,000225 \text{ m}^4$; $k = 0,263$; $K = 3236500 \text{ N/m}^2$; $K_1 = 1298540$; $\kappa = 0,85$; $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$; $\nu = 0,33$

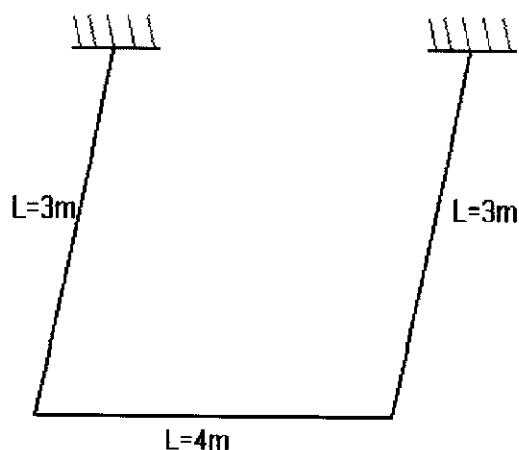


FIGURA 4.15 - Grelha sobre base elástica

A tabela 4.9 mostra os resultados indicando-se que a base elástica aumenta os valores das freqüências naturais. Entretanto, este aumento, vale ressaltar é significativo apenas nas três primeiras freqüências.

TABELA 4.9 - Valores das freqüências naturais da grelha da figura 4.15

ω (rad./s)	Sem base elástica		Base elástica de Winkler		Base elástica Pasternak	
	Euler-Bernoulli	Teoria de Timoshenko	Euler-Bernoulli	Teoria de Timoshenko	Euler - Bernoulli	Teoria de Timoshenko
1	17,55	17,54	118,44	118,42	119,68	119,52
2	53,57	53,46	128,38	128,10	139,63	138,55
3	132,72	131,75	176,55	175,63	189,63	186,37
4	420,70	415,08	434,97	429,47	439,83	438,10
5	774,38	765,59	776,73	768,40	779,36	770,69

Seja a viga livre-livre da figura 4.9. Considerando-se que esta viga está solicitada por uma força concentrada no meio do vão $P(x,t) = P\sin\omega t$, onde

$\omega = \pi / T$, sendo T o período do primeiro modo de vibração, calcular o deslocamento do ponto de aplicação desta força, considerando-se os modelos de Euler-Bernoulli e a teoria de viga de Timoshenko.

Os modos de vibração pares não são excitados pela força aplicada no meio do vão. Os valores de $v_s(L/2)$, $\phi_s(L/2)$ e do denominador das equações (2.23) e (2.91) são calculados impondo-se deslocamento unitário nos extremos da viga. Estes valores e as frequências naturais estão mostrados na tabela 4.10.

TABELA 4.10 - Constantes da viga livre-livre

Modo	Modelo de Euler-Bernoulli			Teoria de viga de Timoshenko		
	F (rad./s)	v_s	$\int_0^L m F_s^2 dx$	F (rad./s)	ϕ_s	$\int_0^L m(r^2 \phi_s^2 + \phi_s^2) dx$
1	250,54	-0,6018	6995,4	244,0	-0,612	6935,5
3	1353,89	0,7112	7360,5	1188,9	0,763	7465,3
5	3343,27	-0,7602	8489,3	2559,8	-0,811	8593,4
7	6216,82	0,8106	9896,1	4125,7	0,882	10067,4
9	9974,54	-0,8712	12006,8	5767,4	-0,969	12173,0

Nas tabelas 4.11 e 4.12 estão os deslocamentos do ponto de aplicação da força P referentes aos modos 1, 3, 5, 7 e 9 e também a soma dos cinco primeiros modos ímpares. O tempo T está dividido em dez partes. Da mesma forma que nas estruturas anteriores a viga de Timoshenko fornece valores maiores do que o modelo de Euler-Bernoulli. A diferença entre os dois modelos aumenta nas frequências mais altas.

TABELA 4.11 - Deslocamento do ponto central x PL³/EI segundo o modelo de Euler-Bernoulli

Tempo	1 ^o modo	3 ^o modo	5 ^o modo	7 ^o modo	9 ^o modo	SOMA
0,1T	0,57x10 ⁻⁴	0,43x10 ⁻⁴	0,58x10 ⁻⁵	0,18x10 ⁻⁵	0,67x10 ⁻⁵	0,11x10 ⁻³
0,2T	0,42x10 ⁻³	0,70x10 ⁻⁴	0,13x10 ⁻⁴	0,35x10 ⁻⁵	0,13x10 ⁻⁵	0,51x10 ⁻³
0,3T	0,13x10 ⁻²	0,11x10 ⁻³	0,17x10 ⁻⁴	0,47x10 ⁻⁵	0,18x10 ⁻⁵	0,14x10 ⁻²
0,4T	0,25x10 ⁻²	0,12x10 ⁻³	0,19x10 ⁻⁴	0,56x10 ⁻⁵	0,21x10 ⁻⁵	0,26x10 ⁻²
0,5T	0,37x10 ⁻²	0,14x10 ⁻³	0,21x10 ⁻⁴	0,58x10 ⁻⁵	0,22x10 ⁻⁵	0,39x10 ⁻²
0,6T	0,47x10 ⁻²	0,11x10 ⁻³	0,19x10 ⁻⁴	0,56x10 ⁻⁵	0,21x10 ⁻⁵	0,48x10 ⁻²
0,7T	0,48x10 ⁻²	0,12x10 ⁻³	0,16x10 ⁻⁴	0,46x10 ⁻⁵	0,18x10 ⁻⁵	0,50x10 ⁻²
0,8T	0,40x10 ⁻²	0,65x10 ⁻⁴	0,13x10 ⁻⁴	0,35x10 ⁻⁵	0,13x10 ⁻⁵	0,41x10 ⁻²
0,9T	0,23x10 ⁻²	0,49x10 ⁻⁴	0,64x10 ⁻⁵	0,17x10 ⁻⁵	0,69x10 ⁻⁶	0,23x10 ⁻²
1,0T	-0,66x10 ⁻⁹	-0,68x10 ⁻⁵	-0,65x10 ⁻⁶	0,11x10 ⁻⁶	0,25x10 ⁻⁷	-0,73x10 ⁻⁵

TABELA 4.12 - Deslocamento do ponto central x PL³/EI segundo a teoria de viga de Timoshenko

Tempo	1 ^o modo	3 ^o modo	5 ^o modo	7 ^o modo	9 ^o modo	SOMA
0,1T	0,57x10 ⁻⁴	0,50x10 ⁻⁴	0,10x10 ⁻⁴	0,43x10 ⁻⁵	0,19x10 ⁻⁵	0,13x10 ⁻³
0,2T	0,43x10 ⁻³	0,11x10 ⁻³	0,20x10 ⁻⁴	0,71x10 ⁻⁵	0,39x10 ⁻⁵	0,57x10 ⁻³
0,3T	0,13x10 ⁻²	0,13x10 ⁻³	0,27x10 ⁻⁴	0,10x10 ⁻⁴	0,54x10 ⁻⁵	0,15x10 ⁻²
0,4T	0,25x10 ⁻²	0,17x10 ⁻³	0,32x10 ⁻⁴	0,12x10 ⁻⁴	0,61x10 ⁻⁵	0,28x10 ⁻²
0,5T	0,39x10 ⁻²	0,16x10 ⁻³	0,33x10 ⁻⁴	0,12x10 ⁻⁴	0,65x10 ⁻⁵	0,41x10 ⁻²
0,6T	0,49x10 ⁻²	0,18x10 ⁻³	0,31x10 ⁻⁴	0,12x10 ⁻⁴	0,63x10 ⁻⁵	0,52x10 ⁻²
0,7T	0,52x10 ⁻²	0,12x10 ⁻³	0,26x10 ⁻⁴	0,10x10 ⁻⁴	0,52x10 ⁻⁵	0,54x10 ⁻²
0,8T	0,45x10 ⁻²	0,11x10 ⁻³	0,19x10 ⁻⁴	0,72x10 ⁻⁵	0,38x10 ⁻⁵	0,46x10 ⁻²
0,9T	0,27x10 ⁻²	0,35x10 ⁻⁴	0,90x10 ⁻⁵	0,43x10 ⁻⁵	0,22x10 ⁻⁵	0,28x10 ⁻²
1,0T	0,34x10 ⁻³	0,18x10 ⁻⁴	-0,16x10 ⁻⁵	-0,80x10 ⁻⁵	-0,16x10 ⁻⁷	0,36x10 ⁻³

Seja a viga em balanço com engaste elástico representada na figura 4.16. ABBAS & IRRETIER (1989) apresentam resultados experimentais e usando o método dos elementos finitos para as freqüências naturais. Este problema também pode ser resolvido usando-se o método da rigidez dinâmica. Os resultados estão mostrados na tabela 4.13. Dados: $L = 0,0794$ m; $K_1 = 3,431 \times 10^9$ N/m; $K_2 = 120027,0$ N.m; $E = 210$ GPa; $\kappa = 0,85$; $\rho = 7840$ kg/m³; $\nu = 0,3$; $A = 2,75 \times 10^{-4}$ m²; $I = 2,733 \times 10^{-9}$ m⁴.

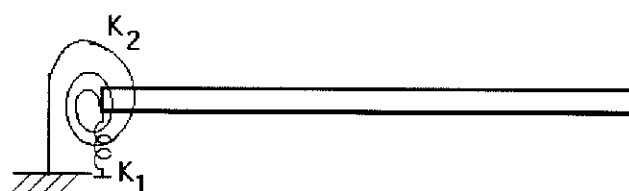


FIGURA 4.16 - Modelo teórico

TABELA 4.13 - Valores das freqüências naturais da viga da figura 4.16

F (rad./s)	ABBAS & IRRETIER (1989)		Presente trabalho			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	8168,1	8111,6	8211,6	8183,6	8136,4	8109,7
2	48677,1	47935,7	52396,4	51162,5	49398,4	48401,7

Para a tabela (4.13), cumpre sinalizar que, empregam-se as seguintes correspondências:

- (1) Valores experimentais
- (2) Método dos elementos finitos com quatro elementos
- (3) Modelo de Euler-Bernoulli
- (4) Modelo de Euler-Bernoulli com inércia de rotação
- (5) Modelo de Euler-Bernoulli com força cortante
- (6) Teoria de viga de Timoshenko

A teoria de viga de Timoshenko apresenta resultados muito próximos dos resultados das frequências naturais, quando comparados com os valores experimentais.

Finalmente, como último exemplo deste capítulo considere-se a viga sobre base elástica com extremidades livres, mostrada na figura 4.17. Determinar as cinco primeiras frequências naturais considerando-se os modelos de Euler-Bernoulli e a teoria de viga de Timoshenko para a viga. Para a base elástica considerar os modelos de Winkler e o de Pasternak. São dados: $L = 11,547$ m; $E = 210$ GPa; $\nu = 0,33$; $\rho = 7850$ kg/m³; $A = 0,3$ m²; $I = 0,025$ m⁴; $\kappa = 0,85$; $K = 3236500$ N/m²; $K_1 = 1298540$ N.

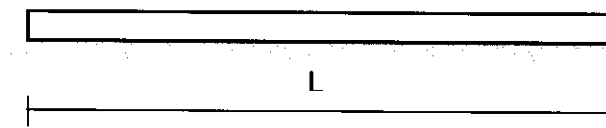


FIGURA 4.17 - Viga com extremidades livres sobre base elástica

A tabela 4.14 apresenta os resultados das frequências naturais considerando-se os diferentes modelos de vibração de vigas sobre base elástica. Desses resultados conclui-se que a base elástica também aumenta os valores das frequências naturais de vigas com extremidades livres. Entretanto, neste exemplo, com os dados do problema, este aumento é de pequena monta e de pouca importância para as considerações práticas.

TABELA 4.14 - Valores de ω para a viga da figura 4.17 de acordo com vários modelos de vibração de vigas sobre base elástica

ω (rad./s)	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
1	246,75	249,52	244,00	246,72	247,12
2	668,21	669,24	642,81	643,83	644,15
3	1281,04	1281,58	1188,95	1189,48	1189,77
4	2061,94	2062,27	1838,79	1839,13	1839,40
5	2988,55	2988,78	2559,76	2560,00	2560,27

Para a leitura da tabela 4.14 cumpre mencionar que empregam-se as seguintes correspondências:

- (A) Modelo de Euler-Bernoulli com inércia de rotação e sem fundação elástica
- (B) Modelo de Euler-Bernoulli com inércia de rotação e fundação elástica de Winkler
- (C) Teoria de viga de Timoshenko sem base elástica
- (D) Teoria de viga de Timoshenko e base elástica de Winkler
- (E) Teoria de viga de Timoshenko e base elástica de Pasternak

5 SEGUNDO ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS

5.1 Introdução

Depois da publicação do clássico artigo de TIMOSHENKO (1921), no qual o autor demonstra a contribuição da deformação por força cortante na equação diferencial do movimento transversal da vibração de vigas, surge um grande número de artigos na busca do melhor coeficiente de correção κ e na investigação do chamado segundo espectro de frequências naturais. A equação diferencial da teoria de vigas de Timoshenko apresenta soluções que se dividem em dois grupos: para baixas frequências a solução depende de funções hiperbólicas e trigonométricas e para altas frequências, apenas funções trigonométricas. Traiel-Nash e Collar, em 1953, interpretam a mudança no modo de vibração como sendo a introdução de um segundo espectro de frequências e “confirmaram” sua existência com resultados numéricos para vigas simplesmente apoiadas e vigas de extremidades livres. Esta é a primeira informação a respeito do segundo espectro de frequências de acordo com BHASHYAM & PRATHAP (1981).

ABBAS & THOMAS (1977) definem o primeiro espectro de frequências como sendo a combinação do modelo de Euler-Bernoulli com deformação por força cortante e o segundo espectro como sendo a soma da inércia de rotação e a deformação por força cortante. Os autores acabam por afirmar que não há segundo espectro de frequências, exceto para vigas simplesmente apoiadas.

Entretanto, na conclusão do artigo, estranhamente e sem explicação, eles afirmam que o conceito de segundo espectro de freqüências deve ser abandonado e considerado como resultado da combinação entre modos independentes de vibração.

BHASHYAM & PRATHAP (1981), usando a técnica dos elementos finitos, detectaram o segundo espectro de freqüências para vigas de extremidades livres, simplesmente apoiadas, engastada-rotulada e engastada-livre. Entretanto, dois anos depois, o próprio PRATHAP (1983) afirma que o segundo espectro precisa ser abandonado de considerações futuras. LEVINSON & COOKE (1982) afirmam que não existe o segundo espectro de freqüências em nenhum caso de vinculação. OLIVETO (1992), usando a técnica da matriz de rigidez dinâmica, apresenta o segundo espectro de freqüências para vários casos de vinculação.

No trabalho original apresentado por TIMOSHENKO (1921), o autor não faz nenhuma referência ao segundo espectro de freqüências. Em publicações posteriores de outros autores começa surgir controvérsia a respeito de sua existência. No presente trabalho, baseando-se na matriz de rigidez dinâmica apresentada por CHEN (1987), o segundo espectro de freqüências é apresentado como sendo a segunda freqüência correspondente a manutenção de uma componente do modo de vibração. O segundo espectro é encontrado somente na viga de Timoshenko e determinado por tentativas analisando-se o modo de vibração de cada freqüência natural. Como é visto a seguir nos exemplos, as componentes flexionais de vibração podem ter duas freqüências diferentes a elas associadas. O segundo espectro ocorre nas altas freqüências, quando $\sqrt{a^2 - 4b} < a$, onde a e b estão definidos no capítulo 2.

5.2 Exemplos

Como primeiro exemplo de aplicação, considere-se que a viga bi-apoiada da figura 5.1 esteja em um estado de vibração livre. Estes são os dados da viga: $E = 210 \text{ GPa}$, $I = 0,025 \text{ m}^4$, $A = 0,3 \text{ m}^2$, $\nu = 0,33$, $r = 0,2887 \text{ m}$, $L = 11,547 \text{ m}$, $m = 2355 \text{ kg/m}$, $\kappa = 0,85$.

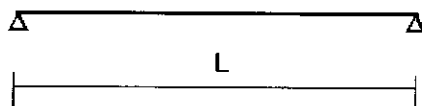


FIGURA 5.1 - Viga sobre dois apoios

As equações do deslocamento (ϕ), e da inclinação da tangente à linha elástica referente ao momento fletor (φ), estão tratadas no capítulo três. Para o **primeiro caso**, ou seja, quando $\sqrt{a^2 - 4b} > a$, têm-se:

$$\phi(x) = C_1^* \sin k_1 x + C_2^* \cos k_1 x + C_3^* \sinh k_3 x + C_4^* \cosh k_3 x$$

$$\varphi(x) = -\frac{c - k_1^2}{k_1} C_1^* \cos k_1 x + \frac{c - k_1^2}{k_1} C_2^* \sin k_1 x + \frac{c + k_3^2}{k_3} C_3^* \cosh k_3 x + \frac{c + k_3^2}{k_3} C_4^* \sinh k_3 x$$

Impondo-se as condições de contorno para vigas bi-apoiadas, encontram-se:

$$\phi(0) = 0 = C_2^* + C_4^*$$

$$\varphi'(0) = 0 = (c - k_1^2)C_2^* + (c + k_3^2)C_4^*$$

Portanto:

$$C_2^* = C_4^* = 0$$

Para $x=L$, têm-se as seguintes equações de ϕ e φ' :

$$\phi(L) = 0 = C_1^* \sin k_1 L + C_3^* \sinh k_3 L$$

$$\phi'(L) = 0 = (c - k_1^2) C_1^* \sin k_1 L + (c + k_3^2) C_3^* \sinh k_3 L \quad (5.1)$$

Colocando-se na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sin k_1 L & \sinh k_3 L \\ (c - k_1^2) \sin k_1 L & (c + k_3^2) \sinh k_3 L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^* \\ C_3^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se C_1^* e C_3^* forem simultaneamente iguais a zero, não existe deformação. Esta solução, chamada trivial, não corresponde ao problema físico de interesse, uma vez que durante a vibração livre existem deformações ϕ e φ . Portanto, o determinante da matriz dos coeficientes tem que ser nulo:

$$\sin k_1 L (c + k_3^2) \sinh k_3 L - (c - k_1^2) \sin k_1 L \sinh k_3 L = 0$$

Uma vez que k_3 é diferente de zero (portanto: $\sinh k_3 L \neq 0$), a equação acima será satisfeita somente se:

$$\sin(k_1 L) = 0 \quad (5.2)$$

Da equação (5.2) e as equações (5.1) conclui-se que:

$$C_3^* = 0$$

Então, as expressões de ϕ e φ são as seguintes:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= C_1^* \sin k_1 x \\ \varphi(x) &= -\frac{c - k_1^2}{k_1} C_1^* \cos k_1 x \end{aligned} \quad (5.3)$$

Para o **segundo caso** têm-se as expressões de ϕ e φ demonstradas no capítulo

três:

$$\phi(x) = C_1^* \operatorname{sen} k_1 x + C_2^* \cos k_1 x + C_3^* \operatorname{sen} k_3 x + C_4^* \cos k_3 x$$

$$\varphi(x) = -\frac{c-k_1^2}{k_1} C_1^* \cos k_1 x + \frac{c-k_1^2}{k_1} C_2^* \operatorname{sen} k_1 x - \frac{c-k_3^2}{k_3} C_3^* \cos k_3 x + \frac{c-k_3^2}{k_3} C_4^* \operatorname{sen} k_3 x$$

Impondo-se as condições de contorno, têm-se:

$$\phi(0) = 0 = C_2^* + C_4^*$$

$$\varphi'(0) = 0 = (c-k_1^2)C_2^* + (c-k_3^2)C_4^*$$

donde:

$$C_2^* = C_4^* = 0$$

Para $x=L$, têm-se as seguintes equações:

$$\phi(L) = 0 = C_1^* \operatorname{sen} k_1 L + C_3^* \operatorname{sen} k_3 L$$

$$\varphi'(L) = 0 = (c-k_1^2)C_1^* \operatorname{sen} k_1 L + (c-k_3^2)C_3^* \operatorname{sen} k_3 L$$

(5.4)

Colocando-se na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen} k_1 L & \operatorname{sen} k_3 L \\ (c-k_1^2)\operatorname{sen} k_1 L & (c-k_3^2)\operatorname{sen} k_3 L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^* \\ C_3^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Impondo-se a condição de determinante nulo, encontra-se a equação:

$$\operatorname{sen} k_1 L (c-k_3^2) \operatorname{sen} k_3 L - (c-k_1^2) \operatorname{sen} k_1 L \operatorname{sen} k_3 L = 0$$

A equação acima será satisfeita em duas situações:

Primeira situação:

$$\text{sen}(k_1L) = 0 \quad (5.5)$$

Com a equação (5.5) e as equações (5.4) conclui-se que:

$$C_3^* = 0$$

Então, nesta situação as expressões de ϕ e φ são as seguintes:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= C_1^* \text{sen } k_1 x \\ \varphi(x) &= -\frac{c - k_1^2}{k_1} C_1^* \cos k_1 x \end{aligned} \quad (5.6)$$

Segunda situação:

$$\text{sen}(k_3L) = 0 \quad (5.7)$$

Com a equação (5.7) e as equações (5.4) conclui-se que:

$$C_1^* = 0$$

Para esta situação as expressões de ϕ e φ são as seguintes:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= C_3^* \text{sen } k_3 x \\ \varphi(x) &= -\frac{c - k_3^2}{k_3} C_3^* \cos k_3 x \end{aligned} \quad (5.8)$$

As equações (5.6), correspondentes à primeira situação, são iguais as expressões (5.3) do primeiro caso. Portanto, as equações (5.6) são uma continuação das expressões (5.3) e correspondem ao primeiro espectro de freqüências.

Calculando-se os valores de k_1 para o primeiro caso e os valores de k_3 para o segundo caso, constata-se que estes valores são iguais. O gráfico mostrando a variação de k_1 e k_3 com a freqüência ω da viga da figura 5.1 está apresentado

na figura 5.2. Uma vez que k_3 assume os mesmos valores de k_1 , as expressões de ϕ dadas pelas equações (5.3) e (5.8) são iguais, o que implica em um mesmo modo de vibração flexional (mas diferente modo rotacional). Portanto, as frequências calculadas pela condição (5.7) correspondem ao segundo espectro de frequências. Entretanto, a inclinação ϕ não é a mesma para os dois casos, uma vez que nestas expressões tem a constante c :

$$c = \frac{m\omega^2}{\kappa AG}$$

Para o segundo caso o valor de ω é muito maior que no primeiro caso. Portanto, o valor de ϕ da equação (5.8) é muito maior do que o valor de ϕ da equação (5.3).

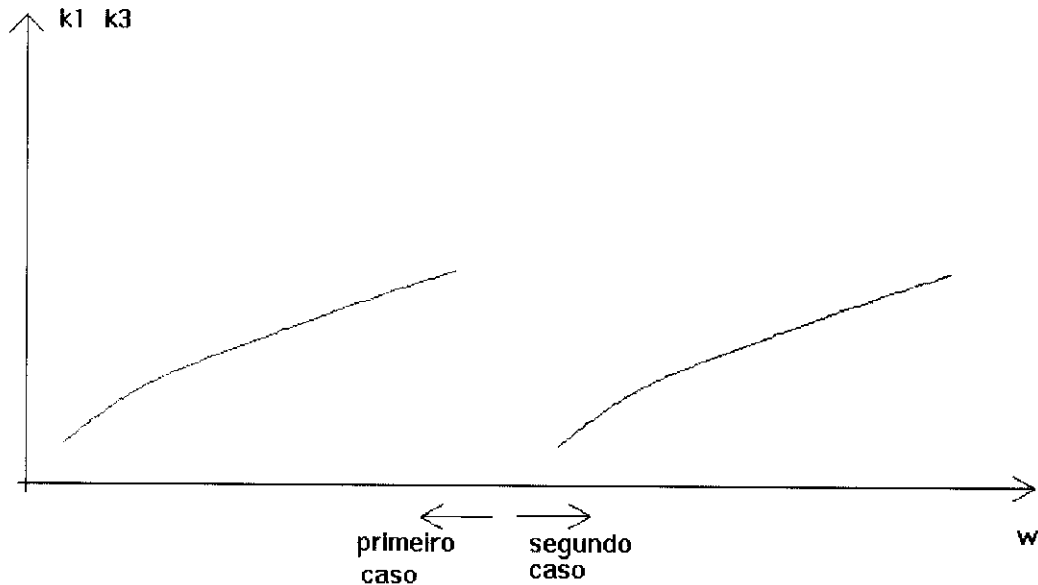


FIGURA 5.2 - Variação de k_1 e k_3 com a frequência

Com a condição (5.2) determinam-se as frequências naturais para o primeiro caso como segue:

$$k_1 L = n\pi \quad (5.9)$$

Elevando-se a expressão (5.9) ao quadrado e colocando-se a expressão de k_1 , demonstrada no capítulo três, tem-se:

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (5.10)$$

Substituindo-se na expressão (5.10) as equações de "a" e "b" tem-se depois de algumas manipulações algébricas:

$$\eta \Omega^2 - \left[(\eta + 1) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right] \Omega + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 = 0 \quad (5.11)$$

onde:

$$\eta = \frac{E}{\kappa G} \quad \text{e} \quad \Omega = \frac{m\omega^2}{EA}$$

Colocando-se dos dados da viga, tem-se:

$$3,129\Omega^2 - (0,306n^2 + 11,998)\Omega + 0,0055n^4 = 0$$

Para o segundo caso as frequências são calculadas através da equação (5.11) (a expressão de k_1 é a mesma para o primeiro e o segundo casos) e da seguinte condição:

$$k_3 L = n\pi \quad (5.12)$$

Elevando-se a expressão (5.12) ao quadrado e colocando-se a expressão de k_3 do segundo caso, demonstrada no capítulo três, obtém-se:

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (5.13)$$

Substituindo-se na expressão (5.13) as equações de "a" e "b" tem-se depois de algumas manipulações algébricas:

$$\eta\Omega^2 - \left[(\eta+1)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \right] \Omega + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 = 0 \quad (5.14)$$

A condição (5.14) é igual a equação (5.11). Estas equações fornecem duas raízes: a menor raiz corresponde ao primeiro espectro de freqüências e atende a condição: $\sqrt{a^2 - 4b} > a$, e a maior raiz corresponde ao segundo espectro e satisfaz a condição: $\sqrt{a^2 - 4b} < a$.

Na tabela 5.1 estão as cinco primeiras freqüências naturais do primeiro e do segundo espectro da viga bi-apoiada da figura 5.1. Estas freqüências foram calculadas analisando-se os modos de vibração de número 1 até o de número 23.

TABELA 5.1 - Freqüências naturais do 1° e do 2° espectro da viga da Fig. 5.1

Freqüência	Teoria de vigas de Timoshenko (rad./s) - 1° espectro	Teoria de vigas de Timoshenko (rad./s) - 2° espectro
1	109,15	10254,97
2	421,48	10622,45
3	900,05	11192,29
4	1502,28	11920,95
5	2191,21	12770,21

Nas figuras 5.3 a 5.7 estão representados os cinco primeiros modos de vibração do primeiro e do segundo espectro. Nas figuras 5.8 a 5.12 estão representados a inclinação da tangente à linha elástica referente ao momento fletor. Destas figuras, conclui-se que a inclinação referente ao segundo espectro muda de sinal e é muito maior do que a inclinação referente ao primeiro espectro.

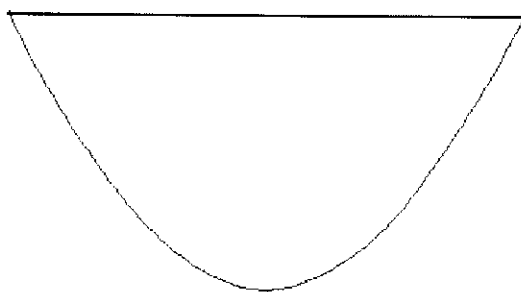


FIGURA 5.3 - Diagrama de ϕ ($\omega=109,15$ e $\omega= 10254,97$ rad./s)

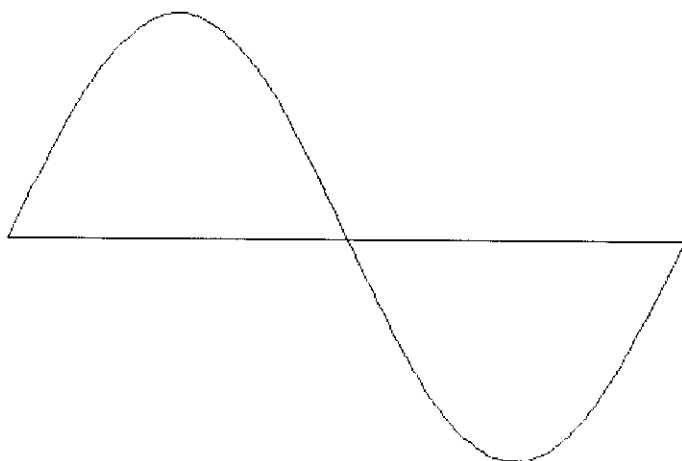


FIGURA 5.4 - Diagrama de ϕ ($\omega= 421,48$ e $\omega= 10622,45$ rad./s)

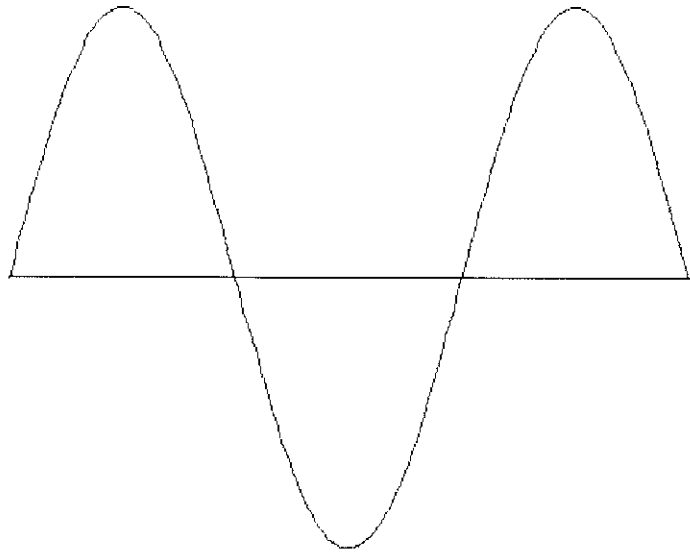


FIGURA 5.5 - Diagrama de ϕ ($\omega = 900,05$ e $\omega = 11192,29$ rad./s)

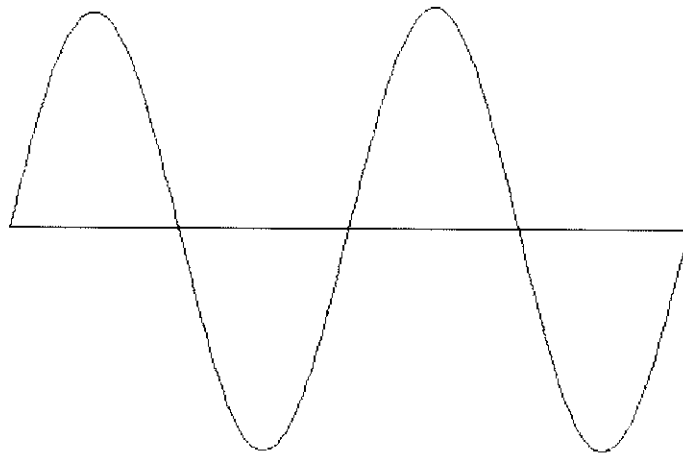


FIGURA 5.6 - Diagrama de ϕ ($\omega = 1502,28$ rad./s e $\omega = 11920,95$ rad./s)

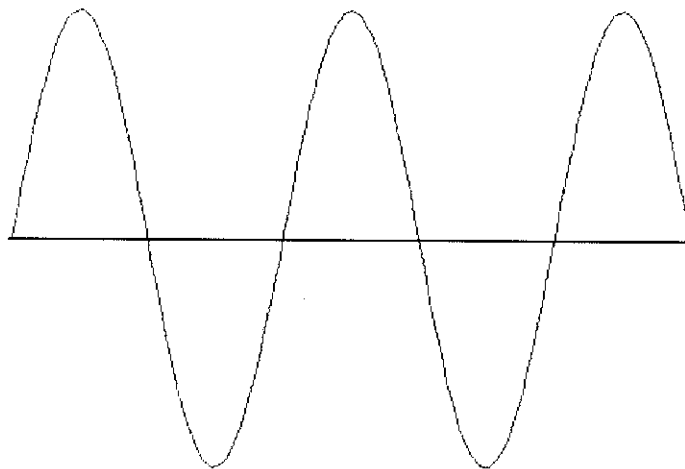


FIGURA 5.7 - Diagrama de ϕ ($\omega = 2191,21$ rad./s e $\omega = 12770,21$ rad./s)

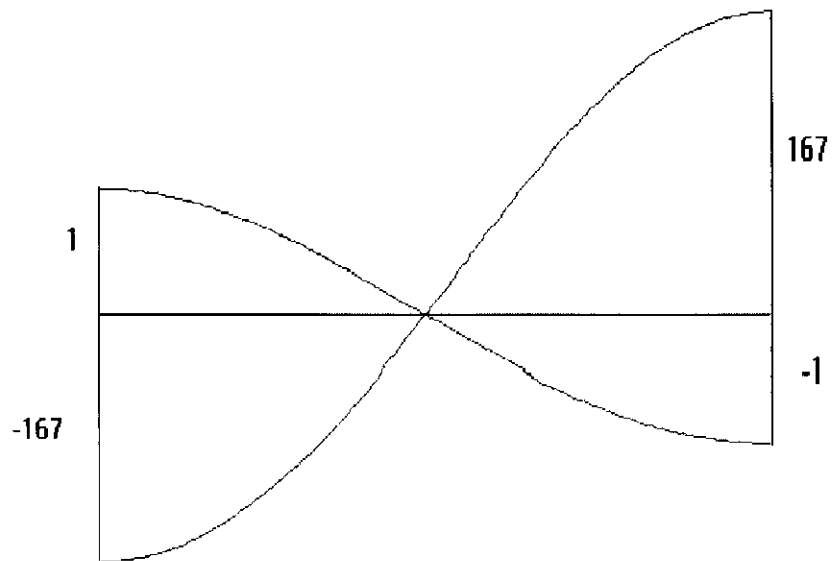


FIGURA 5.8 - ϕ referente ao 1^o modo ($\omega = 109,15 \text{ rad./s}$ e $\omega = 10254,97 \text{ rad./s}$)

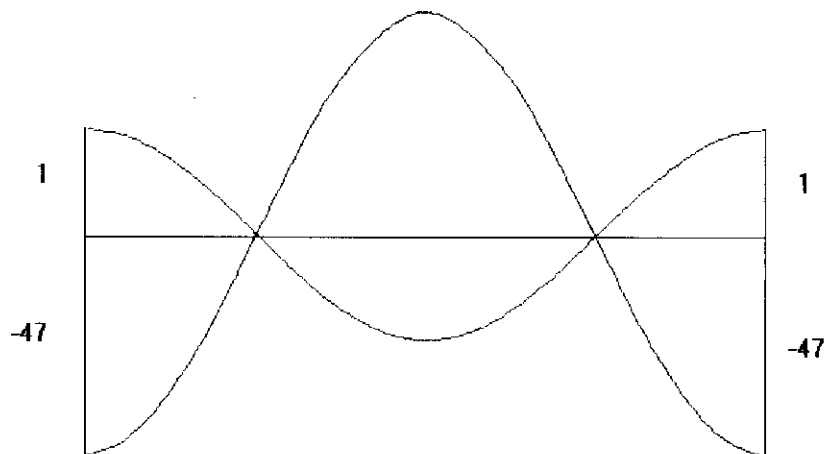


FIGURA 5.9 - ϕ referente ao 2^o modo ($\omega = 421,48 \text{ rad./s}$ e $\omega = 10622,45 \text{ rad./s}$)

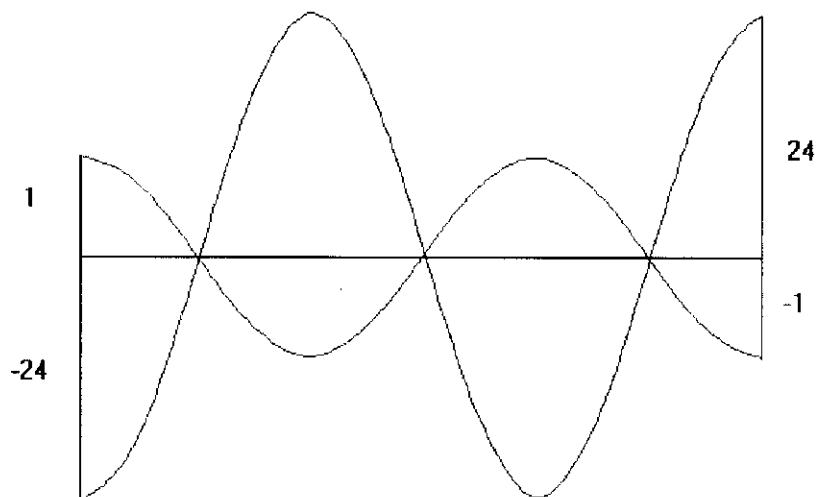


FIGURA 5.10 - ϕ referente ao 3^o modo ($\omega = 900,05 \text{ rad./s}$ e $\omega = 11192,29 \text{ rad./s}$)

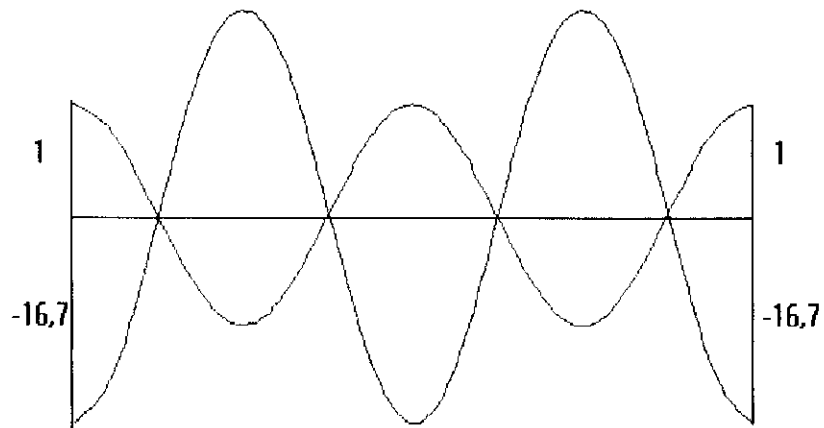


FIGURA 5.11 - ϕ referente ao 4^o modo ($\omega = 1502,28$ rad./s e $\omega = 11920,95$ rad./s)

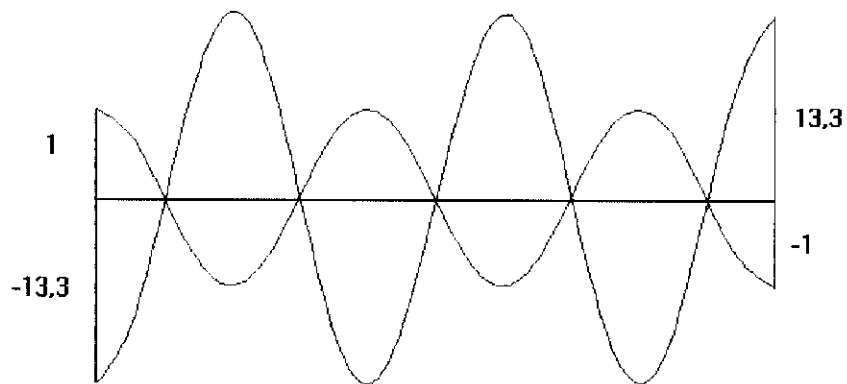


FIGURA 5.12 - ϕ referente ao 5^o modo ($\omega = 2191,21$ rad./s e $\omega = 12770,21$ rad./s)

Com os mesmos dados do exemplo anterior, procura-se para a viga sobre três apoios da figura 5.13 encontrar as cinco frequências do segundo espectro, quando se analisam as frequências de número 1 até 45. A tabela 5.2 contempla os resultados de maior interesse.

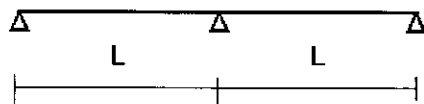


FIGURA 5.13 - Viga sobre três apoios

As frequências naturais da viga sobre três apoios (figura 5.13) são calculadas somando-se as frequências de vigas simplesmente apoiadas e engastadas-apoiadas. Para as frequências correspondentes a vigas simplesmente apoiadas têm-se o correspondente segundo espectro de frequências, no outro caso não.

TABELA 5.2 - Frequências naturais do 1° e do 2° espectro da viga da Fig. 5.13

Frequência	Teoria de viga de Timoshenko (rad./s) 1° espectro	Teoria de viga de Timoshenko (rad./s) 2° espectro
1	109,15	10254,96
2	167,68	
3	421,48	10622,45
4	518,71	
5	900,05	11192,29
6	1018,97	
7	1502,28	11920,95
8	1627,90	
9	2191,21	12770,21

Como terceiro exemplo, seja a viga sobre base elástica do exemplo 1 do Capítulo 4. Analisando-se as frequências naturais de números 1 até 33 encontram-se cinco frequências do segundo espectro conforme mostra a tabela 5.3. Curiosamente, se se considerar a base elástica como sendo modelo de Winkler ou de Pasternak as frequências do segundo espectro têm os mesmos valores.

TABELA 5.3 - Freqüências naturais do 1° e do 2° espectro de uma viga sobre fundação elástica

Freqüência (rad./s)	Viga de Timoshenko sobre base elástica (1° espectro)		Viga de Timoshenko sobre base elástica (2° espectro)
	Winkler	Pasternak	Winkler/Pasternak
1	206,49	212,17	21409,25
2	352,51	365,66	21663,67
3	680,26	695,56	22076,60
4	1147,94	1163,96	22633,64
5	1727,34	1743,83	23318,15

5.3 Considerações adicionais sobre o segundo espectro de freqüências

Nas vigas apoiadas-engastadas (figura 5.14) não se encontram freqüências do segundo espectro conforme constatação apresentada a seguir. Para o primeiro caso, tem-se (vide equações de ϕ e φ demonstradas no item 3.4):

$$C_2^* = C_4^* = 0$$

$$\phi(L) = 0 = C_1^* \sin k_1 L + C_3^* \sinh k_3 L$$

$$\varphi(L) = 0 = -\frac{c - k_1^2}{k_1} C_1^* \cos k_1 L + \frac{c + k_3^2}{k_3} C_3^* \cosh k_3 L$$



FIGURA 5.14 - Viga uma vez hiperestática

Colocando-se na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen} k_1 L & \operatorname{senh} k_3 L \\ -\frac{c - k_1^2}{k_1} \cos k_1 L & \frac{c + k_3^2}{k_3} \cosh k_3 L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^* \\ C_3^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Anulando-se o determinante resulta que:

$$\frac{c + k_3^2}{k_3} \operatorname{sen} k_1 L \cosh k_3 L + \frac{c - k_1^2}{k_1} \cos k_1 L \operatorname{senh} k_3 L = 0$$

ou:

$$\frac{c - k_1^2}{k_1} \frac{\cos k_1 L}{\operatorname{sen} k_1 L} + \frac{c + k_3^2}{k_3} \frac{\cosh k_3 L}{\operatorname{senh} k_3 L} = 0 \quad (5.12)$$

e, para o **segundo caso**, tem-se a matriz:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen} k_1 L & \operatorname{sen} k_3 L \\ -\frac{c - k_1^2}{k_1} \cos k_1 L & -\frac{c - k_3^2}{k_3} \cos k_3 L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^* \\ C_3^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cuja equação característica é dada por:

$$-\frac{c - k_3^2}{k_3} \operatorname{sen} k_1 L \cos k_3 L + \frac{c - k_1^2}{k_1} \cos k_1 L \operatorname{sen} k_3 L = 0$$

ou:

$$\frac{c - k_1^2}{k_1} \frac{\cos k_1 L}{\operatorname{sen} k_1 L} - \frac{c - k_3^2}{k_3} \frac{\cos k_3 L}{\operatorname{sen} k_3 L} = 0 \quad (5.13)$$

Uma vez que se tem apenas uma expressão para cada caso, não há como existir o segundo espectro de freqüências nas vigas apoiadas-engastadas dentro da visão de haver repetição de um mesmo modo para a componente flexional.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, as frequências naturais e a resposta dinâmica de estruturas de barras são calculadas de acordo com quatro modelos de vibração: modelo de Euler-Bernoulli, Euler-Bernoulli com inércia de rotação, Euler-Bernoulli com força cortante e a teoria de viga de Timoshenko. Usando-se a matriz de rigidez dinâmica e a técnica iterativa de procura de autovalores, calculam-se as frequências naturais. Os valores resultantes são confrontados com a solução analítica e, quando possível, com resultados obtidos com o programa ANSYS, com o método dos elementos finitos e até com o método dos elementos de contorno. O modelo elementar de Euler-Bernoulli considera apenas a contribuição do momento fletor na equação diferencial do movimento transversal da vibração de vigas. A teoria de viga de Timoshenko considera os efeitos do momento fletor, da força cortante e da inércia de rotação. A precisão dos valores das frequências naturais calculadas, quando obtidas usando-se a matriz de rigidez dinâmica, independe do número de elementos em que a estrutura é dividida, por ser tratar de uma abordagem analítica.

As frequências naturais, os modos de vibração e a resposta dinâmica de vigas de extremidades livres podem ser determinados, segundo a implementação efetuada, criando-se dois apoios elásticos pontuais imaginários nos extremos das vigas. Esses apoios devem ter constantes elásticas relativamente pequenas

quando comparadas com a rigidez da viga. No presente trabalho adota-se o valor $k = 1,0 \text{ N/m}$. A solução analítica fornece os mesmos resultados para as frequências naturais quando se usa o modelo de Euler-Bernoulli e o artifício acima descrito. As frequências naturais das vigas de extremidades livres diminuem de valor quando são incluídos os efeitos da inércia de rotação e da força cortante. Em um dos exemplos, a inércia de rotação reduz em 1,39% o valor da primeira frequência e em 10,61% o valor da quinta frequência. Quando se considera também o efeito da força cortante estas discrepâncias se alteram para, respectivamente, 2,49% e 23,43%.

A deformação por força cortante e a inércia de rotação diminuem os valores das frequências naturais. Esta diminuição deve-se ao fato de que essas considerações aumentam os valores das deflexões, portanto, pode-se dizer que diminui o número de vezes em que a viga passa em um determinado ponto na unidade de tempo; isto é, a frequência.

Os efeitos da inércia de rotação e da força cortante aumentam o período de vibração, sendo o efeito da força cortante mais pronunciado. O aumento do período de vibração deve-se ao fato que esses efeitos aumentam os deslocamentos e, por conseqüência, o período de cada vibração.

A resposta dinâmica referente à teoria de viga de Timoshenko é sempre maior do que aquela referente ao modelo de Euler-Bernoulli. Em uma viga isostática, a maior diferença verificada é da ordem de 1,2% no primeiro modo de vibração. Esta diferença aumenta nos modos mais altos, chegando-se a 37% no terceiro modo e de 50,6% no quinto. No exemplo de viga bi-apoiada sobre base

elástica de Winkler a diferença é da ordem de 1,8% no primeiro modo e de 43,9% no quinto. Na viga de extremidades livres, o deslocamento resultante da teoria de viga de Timoshenko é por volta de 13% maior do que o modelo de Euler-Bernoulli. Essa diferença dá-se quando são somados os deslocamentos referentes aos cinco primeiros modos de vibração.

Nas vigas bi-apoiadas e nos modos similares de vigas contínuas, a teoria de viga de Timoshenko fornece dois valores diferentes de frequência natural para um mesmo modo flexional de vibração transversal. A frequência natural menor é conhecida como primeiro espectro de frequências e, a maior frequência, segundo espectro de frequências. No trabalho original apresentado por Timoshenko, em 1921, o autor não faz nenhuma referência ao segundo espectro de frequências. O segundo espectro ocorre somente nas vigas bi-apoiadas porque, para altas frequências, existem duas soluções acopladas para as frequências. Uma dessas soluções apresenta o mesmo modo flexional de vibração de uma outra frequência mais baixa. O modo flexional de vibrar do segundo espectro tem a mesma forma do primeiro, entretanto, a inclinação da tangente à linha elástica (modo rotacional) são diferentes, sendo que a do segundo espectro é muito maior do que a que corresponde ao primeiro. Nas vigas bi-apoiadas sobre base elástica também encontra-se o segundo espectro de frequências. Os valores destas frequências são iguais quando se consideram os modelos de fundação elástica de Winkler e o de Pasternak.

Nas vigas analisadas, a inércia de rotação e a força cortante diminuem os valores das frequências naturais, quando comparadas com o modelo elementar de Euler-Bernoulli. Em uma viga bi-engastada, a frequência natural calculada pela

teoria de viga de Timoshenko diminui o valor em 4,86% para a frequência fundamental e este valor aumenta nas frequências mais altas, sendo que na quinta o valor é diminuído em até 27%.

As frequências naturais calculadas no presente trabalho são obtidas por tentativas. Adota-se o valor 0,1 para ω e calcula-se o determinante da matriz. Se o determinante for nulo, tem-se uma frequência natural da estrutura. Se o determinante for diferente de zero, soma-se ao valor arbitrado o incremento 0,1 e calcula-se novamente o determinante. Esse procedimento persiste até serem calculadas todas as frequências desejadas. Com este método direto de cálculo determinam-se os mesmos resultados que aqueles obtidos pela solução analítica. A precisão dos resultados independe do número de elementos em que a estrutura é dividida. A condição de determinante nulo deve-se ao fato que durante a vibração livre nem todos os deslocamentos são nulos, ou seja, não se pode admitir a solução trivial o que corresponde em vetor deslocamento nulo. Portanto, o determinante da matriz de rigidez é nulo quando o valor arbitrado para ω for uma das frequências naturais da estrutura.

Na resposta permanente de uma viga sobre dois apoios a inércia de rotação aumenta em até 0,04% o valor do deslocamento, enquanto a força cortante aumenta em até 1,69%. Quando se consideram os dois efeitos simultaneamente o acréscimo já é da ordem de 1,84%.

Nas frequências naturais de dois pórticos e de duas grelhas que são mostradas neste trabalho, a inércia de rotação e a força cortante pouco

influenciam no cálculo das freqüência naturais, mesmo nas altas freqüências estes efeitos podem ser considerados pouco significativos.

O método dos elementos de contorno MESQUITA NETO et al. (1998) fornece os mesmos resultados para as freqüências naturais que o presente trabalho, quando se adota o modelo elementar de Euler-Bernoulli.

O presente trabalho apresenta os mesmos resultados para as freqüências naturais no caso do modelo de viga de Euler-Bernoulli, sobre fundação elástica de Winkler, quando comparados com a solução analítica apresentada por TIMOSHENKO & YOUNG (1960), como era de se esperar.

Os valores das freqüências naturais de uma viga sobre fundação elástica de Pasternak são maiores do que aqueles fornecidos pela fundação de Winkler. Este aumento nos valores das freqüências naturais deve-se ao fato de que a viga cortante hipotética de Pasternak aumenta de modo mais eficiente a rigidez da viga e, por conseqüência, o valor das freqüências. Este acréscimo na rigidez faz com que os valores dos deslocamentos fornecidos pela fundação de Pasternak sejam menores do que aqueles fornecidos pela fundação de Winkler.

Os modos normais de vibração dos quatro modelos estudados neste trabalho são ortogonais, e este fato ficou explicitado. Também são ortogonais os modos normais de vibração das vigas contínuas, pórticos planos e grelhas que são representados pelos quatro modelos abordados (nesses casos a ortogonalidade decorre do equilíbrio também dos nós da estrutura, como ficou mostrado).

A consideração da deformação por força cortante e inércia de rotação pela via da matriz de rigidez dinâmica só é possível, em tese, para o caso de barras. Todavia, como já anunciado na Introdução, muitos são os trabalhos em que tais efeitos são estendidos para estruturas de placas e cascas, mediante formulação aproximada de elementos finitos. Como sabido, a solução por elementos finitos esbarra em outros problemas, como o shear-lock, por exemplo, que ainda estão a exigir estudos mais apurados.

A continuidade do tema envolve, naturalmente, uma implementação mais elaborada do programa computacional, para abordagem mais efetiva dos diversos sistemas estruturais de barras.

A modificação de pequena monta a ser considerada na matriz de rigidez dinâmica no caso do modelo de Pasternak é também uma contribuição um tanto pioneira do presente trabalho, embora apenas se constitua em um requinte de natureza analítica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABBAS, B.A.H; IRRETIER, H. (1989). Experimental and theoretical investigations of the effect of root flexibility on the vibration characteristics of cantilever beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 130, n. 3, p. 353-362.
- ABBAS, B.A.H.; THOMAS, J. (1977). The second frequency spectrum of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 51, n. 1, p. 123-137.
- ABRAMOVICH, H. (1992). Shear deformation and rotary inertia effects of vibrating composite beams. *Composite structures*, v. 20, n. 3, p. 165-173.
- ABRAMOVICH, H.; HAMBURGER, O. (1991). Vibration of a cantilever Timoshenko beam with a tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, v. 148, n. 1, p. 162-170.
- AKSU, G. (1990). Effect of transverse shear and rotary inertia on vibration of stepped thickness plates. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, v.112,n.1,p40-44, Jan.
- BANK, L. C.; KAO, C. H. (1989). The influence of geometric and material design variables on the free vibration of thin-walled composite material beams. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, v.111, n.3, p.290-297, Jul.

- BECHTOLD, J.E.; RILEY, D.R. (1991). Application of beams on elastic foundation and b-spline solution methodologies parametric analysis of intramedullary implant systems. *Technical note/ Journal of biomechanics*, v. 24, n. 6, p. 441-448.
- BHASHYAM, G.R.; PRATHAP, G. (1981). The second frequency spectrum of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 76, n. 3, p. 407-420.
- CHANDRASHEKHARA, K.; KRISHNAMURTHY, K. (1990). Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation. *Composite structures*, v. 14, n. 4, p. 269-279.
- CHEN, D. C.; SHABANA, A. A. (1993). Rotary inertia effect in the large reference displacement analysis of initially curved plates. *Journal of Sound and Vibration*, v.162,n.1,p.97-121, Mar.
- CHEN, Y. H. (1987). General Dynamic-stiffness matrix of a Timoshenko beam for transverse Vibration. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*,v.15, p.391-402.
- COWPER, G.R. (1966). The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, p. 335-340, Jun.
- FRANCIOSI C.; MASI, A. (1993). Free vibrations of foundation beams on two-parameter elastic soil. *Computers & Structures*, v. 47, n. 3, p. 419-426.
- GUDIÉL, L.A.D.; SAHLIT, C.L.; PARTRIDGE, P.W. (1994). Análise dinâmica de estruturas reticuladas sobre base elástica. *VX Congresso ibero latino-americano sobre métodos computacionais para engenharia*, p. 1214-1223, nov-dez.

GUTIERREZ, R.H.; LAURA, P.A.A.; ROSSI, R.E. (1991). Fundamental frequency of vibration of a Timoshenko beam of non-uniform thickness. *Journal of Sound and Vibration*, v. 145, n. 2, p. 341-344.

HETÉNYI, M. (1967). *Beams on elastic foundation*. 8. ed. Michigan. The University Press.

KAUFMAN, J. J. et al. (1990). Bone fracture healing assessment using a neural network. *International Joint Conference on Neural Networks*, p.53-58, Jun.

KERR, A.D. (1964). Elastic and viscoelastic foundation models. *Journal of Applied Mechanics*, p. 491-498, Sept.

LAI, Y.C. et al. (1992). Dynamic response of beams elastic foundation. *Journal of Structural Engineering*, v.118, n.3, p.853-858, Mar.

LAURA, P. A. A.; ROSSI, R. E.; MAURIZI, M. J. (1990). Dynamic analysis of a simplified bone model during the process of fracture healing. *Journal of Biomedical Engineering*, v.12,n.2,p.157-160, Mar.

LEE, H. P.; LIM, S. P. (1993). Vibration of cracked rectangular plates including transverse shear deformation and rotary inertia. *Computers and Structures*, v.49, n.4,p.715-718, Nov.

LEE, H. P.; LIM, S. P.; CHOW, S. T. (1992). Effect of transverse shear deformation and rotary inertia on the natural frequencies of rectangular plates with cutouts. *International Journal of Solids and Structures*, v.29,n.11,p.1351-1359.

- LEVINSON, M.; COOKE, D.W. (1982). On the two frequency spectra of Timoshenko Beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 84, n. 3, p. 319-326.
- MESQUITA NETO, E.; BARRETO, E.; PAVANELLO, S.F.A. (1998). Dynamic behavior of framed structures by boundary integral procedures. *Engineering Analysis with Boundary Element Method*. / no prelo/
- MAURIZI, M. J.; BELLÉS, P. M. (1991). Natural frequencies of the beam-mass system: comparison of the two fundamental theories of beam vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, v.150,n.2,p.330-334.
- MUKHOPAHYAY, M.(1988). Free vibration of a free-free beam with rotary inertia effect - a flexibility matrix approach /Letter/. *Journal of Sound and Vibration*, v.125,n.3, p.565-569.
- OLIVETO, G. (1992). Dynamic stiffness and flexibility functions for axially strained Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 154, n. 1, p. 1-23.
- O'REILLY, O. M. & TURCOTTE, J. S. (1996). Another mode of vibration in a Timoshenko beam /Letter/. *Journal of Sound and Vibration*, v.198,n.4, p.517-521.
- PAZ, M. (1991). *Structural dynamics - Theory an computation*. 3. ed. New York. Van Nostrand Reinhold.
- PRATHAP G. (1983). The two frequency spectra of Timoshenko beams - A re-assessment. /Letter/. *Journal of Sound and Vibration*, v. 90, n. 3, p. 443-446.
- ROORDA, J. (1994). Amplified microbending in coated optical fibbers. *Journal of Engineering Mechanics*, v.120,n.4,p.917-921, Apr.

- THAMBIRATNAM, D.P.; THEVENDRAN, V. (1992). Axisymmetric free vibration analysis of cylindrical shell structures using BEF analogy. *Computers & Structures*, v. 43, n. 1, p. 145-150.
- THOMAS, J.; ABBAS, B.A.H. (1975). Finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, v.41, n.3, p.291-299.
- THOMSEN, J. J. (1990). Modelling human tibia structural vibration. *Journal of Biomechanics*, v.23, n.3, p.215-228.
- TIMOSHENKO, S.P. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, v. XLI, p. 288-290.
- TIMOSHENKO, S. P. (1953). *History of strength of materials*. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc.
- TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. (1980). *Teoria da elasticidade*. 3. ed. Guanabara dois.
- TIMOSHENKO, S. P.; YOUNG, D. H. (1960). *Problemas de vibración en ingeniería*. 3.ed. México, DF, Compañia Editorial Continental S.A.
- UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Escola de Engenharia de São Carlos. Serviço de Biblioteca (1996). *Diretrizes para elaboração de dissertações e teses na EESC-USP*. 2.ed. São Carlos.
- XIA, Z.Q.; LUKASIEWICZ, S. (1994). Non-linear, free, damped vibrations of sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, v. 175, n. 2, p. 219-232.