

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS (EESC)
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**CONTRIBUIÇÃO À FORMULAÇÃO MATEMÁTICA
DE MODELOS CONSTITUTIVOS PARA
MATERIAIS COM DANO CONTÍNUO.**

ANTONIO ROBERTO BALBO

Tese apresentada à escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Dr. SÉRGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA.

São Carlos
1998

*À Maria Tereza e Júlia, razão do meu viver.
A meus pais Ladi e Avelino, fontes da minha vida.
A Deus, senhor de todas as fontes.*

Agradecimentos.

Em memória do amigo Valdemir Antonio Zafalon.

Ao Prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença, pela orientação segura, por sua presteza em todos os momentos em que necessitei de seu auxílio, pelo incentivo, pela confiança e pela amizade sincera.

Aos professores, João Augusto de Lima Rocha, Dr. Ênio Pontes de Deus, Dr. Wilson Sérgio Venturini e Dr. Ahmed Benallal, pelo incentivo e auxílio teórico.

Aos amigos do Depto. de Estruturas que me deram auxílio computacional e àqueles que me incentivaram nessa trajetória.

À secretária de Pós-graduação Rosi Aparecida Jordão Rodrigues e aos funcionários da secretaria pelo atendimento prestativo.

À bibliotecária Maria Nadir Minatel pelo auxílio na busca de referências bibliográficas.

Ao projetista Francisco Carlos Guete de Brito pela confecção das figuras.

Aos professores Doutores, Geraldo Nunes Silva, Marcos Nereu Arenales, Nestor Alberto Zouain Pereira e Sandra Augusta Santos, pela participação na Comissão Julgadora e pelas sugestões dadas.

À CAPES, pelo suporte financeiro do trabalho.

Ao Depto. de Matemática da UNESP de Bauru, pela concessão do afastamento das atividades para a elaboração desse.

Ao Depto. de Estruturas da EESC-USP, por permitir a realização desse trabalho.

A meus irmãos João José, Fátima Aparecida e Hermínia Maria pelo auxílio e amizade no decorrer de minha vida e em especial nos momentos de desânimo na realização dessa obra.

RESUMO

BALBO, A. R. (1998). Contribuição à formulação matemática de modelos constitutivos para materiais com dano contínuo.

A Mecânica do Dano Contínuo é atualmente uma poderosa ferramenta para se modelar o comportamento não-linear de vários materiais decorrente da evolução de um processo de microfissuração. A perda de rigidez causada pelo processo físico tem sido considerada em modelos constitutivos através de variáveis de dano escalar, vetorial ou tensorial. Quando o carregamento é proporcionalmente crescente as deformações residuais podem ser ignoradas e relações constitutivas simples podem ser obtidas, onde os efeitos do dano aparecem por uma penalização direta das propriedades elásticas. Por outro lado, efeitos de dano podem ser acoplados com deformações residuais levando a relações constitutivas mais gerais.

Esse trabalho está relacionado a esses tipos de modelos assumindo que o meio ideal apresenta um comportamento elástico linear com danificação ou elastoplástico com danificação. Um dos principais aspectos discutido relaciona-se à formulação variacional, a qual está baseada em conceitos de Análise Convexa e Não-Convexa.

Explorando o fato que a evolução do dano tem correspondência com a idealização de regime de encruamento negativo, a teoria de localização de deformação é abordada e um estudo da condição necessária de singularidade ou perda da condição de elipticidade é realizado. Na sequência, uma proposta preliminar para uma análise de pós-singularidade, baseada na Teoria de Bifurcação, é feita no sentido de caracterizar pontos limite ou pontos de bifurcação de solução, em sistemas conservativos.

Palavras-chave: Mecânica do Dano Contínuo, Modelos com dano, Localização de deformação.

ABSTRACT

BALBO, A. R (1998). Contribution to mathematic formulation of continuum damage materials constitutive models.

Continuum Damage Mechanics is nowadays a powerful tool to model the non-linear behaviour of several materials due to evolution of a microcracking process. The lost of rigidity caused by such physical process has been accounted in the constitutive models through a scalar, vectorial or tensorial damage variables. When proportional loading is considered the residuals strains can be ignored and simple constitutive relations can be obtained in which damage effects appear by direct penalization of the elastic properties. On the other hand, damage effects can be coupled with residual strains leading to more general constitutive relations.

This work is related to such kind of models assuming that the ideal medium presents a linear elastic-damage or an elastoplastic-damage behaviour. One of the main topics discussed is related to the variational formulation which is based on Convex and Non-Convex Analysis concepts.

Exploring the fact that damage evolution has correspondence with a softening idealised regime, the strain localization theory is treated and a study of a necessary condition for singularity or ellipticity lose condition is developed. In the sequence, a introductory pos-critical analysis is proposed, based in the bifurcation theory and aiming to detect if the singularity corresponds to a limit or a bifurcation point solution, in conservative systems.

Keywords: Continuum Damage Mechanics, Damage Models, Strain Localization.

LISTA DE VARIÁVEIS

Espaços vetoriais.

- B** - volume de um corpo no espaço puntual euclideano;
 Γ - Contorno do corpo;
 Γ_u - Região do contorno com deslocamentos distribuídos por unidade de superfície;
 Γ_s - Região do contorno com forças distribuídas por unidade de superfície;
W, D - Espaços vetoriais de deformações;
 W^* , D^* - Espaços vetoriais de tensões ou forças internas;
U, V - Espaços vetoriais de deslocamentos;
 U^* , V^* - Espaços vetoriais de forças externas;

Nos espaços vetoriais definidos acima o símbolo “ $*$ ” representa o espaço dual.

Tensores de 4^a ordem:

- E** - Tensor dos módulos de rigidez elástico; ($E = [E_{ijkl}]$)
H - Tensor de rigidez tangente de dano ou elastoplástico com dano; ($H = [H_{ijkl}]$);

No texto, qualquer expressão na forma “**X**” denota um tensor de ordem superior a dois.

Tensores de 2^a ordem:

- σ** (\mathcal{C}) - Tensor de tensões de Cauchy; ($\sigma = [\sigma_{ij}]$)
 σ^e (\mathcal{C}^e) - Tensor de tensões relativo ao modelo elástico;
 σ^p (\mathcal{C}^p) - Tensor de tensões relativo ao modelo plástico perfeito ou com encruamento positivo;
 σ^d (\mathcal{C}^d) - Tensor de tensões relativo ao modelo elástico com dano;
 σ^{pd} (\mathcal{C}^{pd}) - Tensor de tensões relativo ao modelo elastoplástico com dano;
 ε (\mathcal{E}) - Tensor de deformações; ($\varepsilon = [\varepsilon_{ij}]$)
 ε^e (\mathcal{E}^e) - Tensor de deformações relativo ao modelo elástico;
 ε^p (\mathcal{E}^p) - Tensor de deformações relativo ao modelo plástico perfeito ou com encruamento positivo;
 ε^d (\mathcal{E}^d) - Tensor de deformações relativo ao modelo elástico com dano;
 ε^{pd} (\mathcal{E}^{pd}) - Tensor de deformações relativo ao modelo elastoplástico com dano;
 Q^w - Tensor acústico elástico com dano ou elastoplástico com dano;
 f_ε - tensor gradiente da função de fluência em relação a ε
 f_σ - tensor gradiente da função de fluência em relação a σ ;
 f_ε e **f_σ** são tensores de 2^a ordem se **f** é uma função escalar de fluência ou de 3^a ordem se **f** é uma função vetorial;

Nas variáveis vistas, o ponto sobre a letra indica variação em taxa dos tensores.

No texto, $Q^w = \eta \cdot H(w) \cdot \eta$ onde η é um tensor de 1^a ordem.

Vetores (tensores de 1^a ordem)

- \mathbf{u} ou \mathbf{v} - vetor taxa de deslocamento ou de velocidade;
- \mathbf{a} - vetor de aceleração;
- \mathbf{v} - vetor taxa de velocidade;
- \mathbf{f}, \mathbf{f}^e - vetores taxa de forças externas;
- λ_j (\mathcal{K}_j) - componente do vetor dos módulos plástico;

Escalares.

- w (\mathcal{W}) - representa a variável de energia de dissipação;
- w^d (\mathcal{W}^d) - variável energia de dissipação do modelo elástico com dano;
- w^{pd} (\mathcal{W}^{pd}) - variável energia de dissipação do modelo elastoplástico com dano;
- \bar{w} - representa um limite máximo para a energia dissipada;
- α (\mathcal{A}) - variável de folga complementar que indica se existe energia a ser dissipada;
- λ (\mathcal{K}) - multiplicador (módulo) de dano para os modelos com dano;
- G - Módulo ou parâmetro de encruamento para os modelos com dano;

Notações.

- \langle , \rangle - representa o produto interno entre grandezas duais;
- \otimes - representa o produto tensorial;
- “ . ” - representa uma contração do produto tensorial sobre um índice (simples), dois índices (dupla) ou índices variáveis, além do produto escalar usual.

O quadro abaixo mostra através de alguns exemplos as relações equivalentes a serem utilizadas.

Representação matricial	Operação	Equivalência de notação	Notação Indicial
$\mathbf{x} = (x_i); \mathbf{y} = (y_i), c \in \mathcal{R}$	produto escalar	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = c$	$x_i y_i = c$
$\mathbf{A} = (a_{ij}); \mathbf{x} = (x_j); \mathbf{b} = (b_i)$	contração simples	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$	$a_{ij} x_j = b_i$
$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}); \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})$	contração dupla	$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}$	$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$
$\mathbf{E} = (E_{ijkl}); \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{kl})$	contração dupla	$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}$	$H_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ij}$
$\mathbf{K} = (K_{ijk}); \mathbf{T} = (T_{jk})$	contração variável	$\mathbf{K} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{y}$	$K_{ijk} T_{jk} = y_i$
$\mathbf{x} = (x_i); \mathbf{y} = (y_i)$	produto tensorial	$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \mathbf{A}$	$x_i y_j = a_{ij}$

Utilizando-se o quadro acima, tem-se a equivalência da relação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon},$$

a ser utilizada no texto.

Observação: Alguns autores utilizam as notações “ : ” para representar a contração dupla e “ \cdot ” para representar a contração variável.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I - EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA O MODELO ESTRUTURAL	1
I.1 - Propriedades da intersecção de conjuntos convexos.....	1
I.2 - O modelo estrutural.....	9
I.3 - Existência de solução	13
I.4 - Análise estrutural para elastoplasticidade perfeita.....	18
I.4.1- Teoremas de colapso plástico	18
I.4.2- Análise da elastoplasticidade perfeita em taxas	19
I.4.3- Condições de existência	21
I.5 - Introdução à análise da elastoplasticidade perfeita relacionada à função convexa de plastificação.....	23
I.6 - Unicidade de solução	25
CAPÍTULO II - MODELOS CONSTITUTIVOS ELASTOPLÁSTICOS	26
II.1 - Relações constitutivas em taxas para materiais elastoplásticos.....	26
II.2 - Formulação variacional das relações constitutivas elastoplásticas.....	28
II.2.1 - Determinação dos potenciais plásticos em taxas de tensão e deformação	31
II.3- Relações constitutivas em incrementos finitos de tensão e deformação	34
II.4 - Formulação variacional cinemática das relações constitutivas	36
II.4.1 - Formulação variacional cinemática incremental.....	37
CAPÍTULO III - FORMULAÇÃO DE MODELOS CONSTITUTIVOS PARA MEIOS, ELÁSTICO E ELASTOPLÁSTICO COM DANO.....	39
III.1 - Modelo constitutivo para um meio elástico com dano	39
III.1.1 - Leis constitutivas pontuais.....	40
III.1.2 - Formulação variacional em taxas	43
III.1.3 - Relação constitutiva incremental	44
III.1.4 - Exemplo de aplicação numérica.....	45
III.1.5 - Sobre uma correção do passo de deformação.....	48
III.2 - Modelo constitutivo para um meio elastoplástico com dano	49
III.2.1 - Relação constitutiva em taxa para material elastoplástico com dano	50
III.2.2 - Formulação variacional em taxa.....	52
III.2.3 - Formulação variacional incremental	53
III.2.4 - Simplificação do modelo elastoplástico com dano.....	54
III.3 - Generalização do modelo	55
CAPÍTULO IV - POTENCIAIS : CONVEXO REGULARIZADOR E NÃO-CONVEXO PARA OS MODELOS COM DANO.....	56
IV.1 - Hipóteses adicionais.....	56
IV.2 - Definição do potencial convexo resolvente	58
IV.3 - Existência do funcional conjugado (dual) ϕ^* para ϕ em $\mathfrak{E} \in W$	61
IV.4 - Forma variacional incremental.....	62
IV.5 - Sobre um potencial não-convexo para os modelos com dano	64
IV.6 - O problema da análise estrutural elastoplástica com dano.....	70
IV.6.1 - Formulação variacional em taxas	71

IV.6.2 - Existência do potencial resolvente convexo	72
IV.6.3 - Equações variacionais em incrementos finitos.....	72
IV.6.4 - Existência do potencial não-convexo	73
CAPÍTULO V - INTRODUÇÃO À ANÁLISE DE LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÃO.....	74
V.1 - Análise da condição necessária crítica de perda da estabilidade para um meio homogêneo e infinito	76
V.2 - Interpretação mecânica - Perda de elipticidade e Localização da deformação	82
V.3 - Interpretação geométrica da perda da elipticidade	82
V.4 - Análise espectral do tensor acústico de dano	86
V.4.1 - Análise espectral para o problema generalizado	86
V.4.2 - Análise dos autovalores de Q^w para materiais isótopos	89
V.4.3 - Análise espectral do tensor simétrico Q_s^w	91
V.4.4 - Determinação de autovalores e autovetores de Q^w para materiais isótopos....	93
CAPÍTULO VI - INTRODUÇÃO À ANÁLISE PÓS-BIFURCAÇÃO RELATIVA À INSTABILIDADE DE SOLUÇÃO	97
VI.1 - A definição de estabilidade e instabilidade de solução.....	97
VI.2 - Classificação geral da instabilidade de solução	104
VI.3 - Classificação da instabilidade para os modelos explorando os autovalores do tensor acústico.....	105
VI.3.1 - Classificação para modelos isótopos, associativos e conservativos.....	106
VI.3.2 - Classificação para modelos isótopos, não - associativos e não - conservativos	107
VI.3.3 - Classificação para modelos gerais, não-isótopos, não-associativos e não-conservativos	107
VI.4 - Condição de existência de pontos singulares	108
VI.5 - Análise pós-singularidade envolvendo propriedades físicas do material	111
VI.5.1 - Condição de ponto limite simples	112
VI.5.2 - Condição de ponto de bifurcação	113
VI.5.3 - Determinação dos coeficientes de Δ	115
VI.6 - Análise pós-singularidade envolvendo propriedades geométricas da estrutura.....	116
VI.6.1 - Condição de ponto limite	117
VI.6.2 - Condição de ponto de bifurcação	118
VI.6.3 - Determinação dos coeficientes de $\tilde{\Delta}$	119
CONCLUSÕES.....	121
APÊNDICE A - REVISÃO DE ANÁLISE FUNCIONAL	124
A1- Funcionais lineares	124
A2- Funcionais próprios, funcionais coercivos e semicontinuidade de funcionais.....	129
A3- Alinhamentos e complementos ortogonais.....	131
A4- Problemas na norma mínimo	131
A5- Hiperplanos e funcionais lineares.....	133

APÊNDICE B - REVISÃO DE CONCEITOS DA ANÁLISE CONVEXA.....	134
B1- Hiperplanos e conjuntos convexos	134
B2- Dualidade em problema de norma-mínimo	139
B3- Otimização de funcionais.....	142
B4- Funcionais convexos conjugados	147
B5- Relação entre funcional conjugado e hiperplanos separadores	148
B6- Funcionais côncavos conjugados.....	149
B7- Problemas de otimização dual	150
B.8- Relação entre subgradientes e transformada de Legendre.....	151
B.9- Caracterização de extremos para funcionais diferenciáveis	154
B10- Problemas primais e duais	155
B11- Lagrangeanos e pontos de sela	156
APÊNDICE C - ALGUNS CONCEITOS SOBRE ANÁLISE NÃO-CONVEXA.....	159
C1 - Funções Lipschitzianas	159
C2 - A derivada direcional generalizada	159
C3 - O gradiente generalizado	161
C4 - Propriedades geométricas: cones normais e tangentes	165
C5 - Caracterização algébrica do cone tangente.....	166
C6 - Consistência entre tangência e derivada direcional generalizada.....	168
C7 - Funções Não-Lipschitz	170
APÊNDICE D - TRANSFORMAÇÕES LINEARES, ADJUNTAS E ALGUNS CONCEITOS DE ANÁLISE TENSORIAL.....	171
D1 - Transformação linear	171
D2 - Operadores adjuntos	172
D3 - O problema espectral.....	174
D3.1 - Análise espectral para modificação de posto 1 de um tensor	175
D3.2 - Análise espectral para modificação de posto 2 de um tensor	176
D4 - A fórmula de Sherman e Morrison para inversão de um tensor.....	177
D5 - Alguns resultados da Análise Tensorial	178
D5.1 Álgebra tensorial.....	178
D5.2 - A regra do produto	182
D5.3 - Definição e propriedades envolvendo Divergente e Gradiente	182
APÊNDICE E - ALGUNS RESULTADOS SOBRE PONTOS LIMITE E PONTOS DE BIFURCAÇÃO.....	186
E1 - Problemas com um parâmetro.....	186
E1.1 - Equação algébrica de bifurcação simples (ABE_s).....	188
E1.2 - Equação algébrica de ponto limite simples ($LPBE_s$).....	189
E1.3 - Pontos limites	189
E1.4 - Pontos de bifurcação.....	190
E2 - Problemas com dois parâmetros	191
E2.1 - Caracterização de pontos regulares para o sistema estendido	192
E2.2 - A superfície S em relação à dobra	193
E2.3 - Pontos limites simples para o sistema estendido	194
E2.4 - Bifurcações, perturbada e em ilha	197
E3 - Bifurcação múltipla e bifurcação em ponto limite.....	202

<i>E3.1 - Equação de bifurcação (ABE)</i>	203
<i>E3.2 - Equação de bifurcação em ponto limite (LPBE)</i>	207
<i>E3.3 - Resolução de ABE e LPBE através de sistemas estendidos</i>	209
<i>E3.4 - A condição de convergência dos métodos de continuação</i>	211
APÊNDICE F - RAMIFICAÇÃO DE SOLUÇÃO ASSOCIADA AO PROBLEMA FÍSICO	214
F1- Condição de convergência para ABE_s	215
F2- Condição de convergência para $LPBE_s$	216
F3 - Métodos de continuação para sistemas estendidos	216
BIBLIOGRAFIA	218

INTRODUÇÃO.

A formulação de modelos do comportamento não-linear de estruturas, em seus aspectos gerais, exige um equacionamento matemático consistente de modo a se poder garantir a existência de solução, pelo menos sob determinadas condições e possibilitar a geração de soluções aproximadas suficientemente precisas.

Em campo linear, físico e geométrico, a chamada forma variacional fraca se constitui num tratamento que permite satisfazer as condições acima descritas, como no caso da formulação via método da energia. Em campo não-linear, a consistência matemática depende de certas características do problema a ser estudado, como condições de contorno e relação constitutiva, por exemplo.

Ainda assim, a formulação variacional é aquela que permite colocar de modo mais consistente o modelo matemático, seja através da imposição das condições de equilíbrio, mediante o princípio dos trabalhos virtuais, seja pela caracterização de modelos constitutivos que vinculam tensões e deformações, ou deslocamentos e reações, a partir da diferenciabilidade de potenciais.

Nesse trabalho desenvolve-se um estudo em campo teórico, da formulação matemática de modelos constitutivos para materiais em regimes elastoplástico, elástico com danificação e elastoplástico com danificação. Em particular, estuda-se a questão de unicidade de solução em relações constitutivas com encruamento negativo através de uma análise da teoria de localização de deformações. Objetiva-se dar uma contribuição que envolva aspectos do modelo mecânico em si, que devido a sua complexidade e extensão foi desenvolvido apenas em campo teórico, mas mostra a viabilidade da aplicação de algoritmos de otimização para a integração do modelo constitutivo e da verificação do equilíbrio, associada ao Método dos Elementos Finitos (M.E.F.), empregado como gerador de soluções aproximadas.

Na formulação dos modelos constitutivos, uma atenção maior é dada àqueles que acoplam danificação. A verificação de um critério definido no espaço das deformações condiciona a evolução do dano. A resposta do modelo em regime de encruamento negativo é assumida como linear e dependente da variação do trabalho de fratura ou da energia dissipada, admitida limitada superiormente. Os modelos são apresentados nas formulações em taxas e em incrementos finitos. Discute-se inicialmente, um modelo para material elástico com danificação e em seguida, quando se consideram deformações residuais acopladas à danificação, um modelo linear elastoplástico com dano é proposto, como uma extensão do primeiro.

Na formulação faz-se uso de potenciais escritos em função de variáveis de estado, de tensões ou de deformações e variáveis internas, do qual derivam as relações constitutivas.

Com relação aos modelos de danificação, são definidos dois potenciais, um em particular é denominado potencial convexo regularizador e o outro mais geral é não-convexo e está de acordo com o modelo linear de danificação.

Será demonstrado, no decorrer do trabalho, que para os modelos elástico e elastoplástico com encruamento positivo (“hardening”) a serem analisados nos capítulos I e II, a existência de solução é caracterizada em função de hipóteses de convexidade dos

potenciais e a unicidade de solução provém da condição de convexidade estrita dos mesmos. Enquanto que, para os modelos com danificação, em virtude da presença de encruamento negativo (“softening”), perde-se a hipótese de convexidade dos potenciais, que nesse regime são côncavos, com conseqüente perda de unicidade de solução em deformação para os mesmos.

Em virtude desse fato, aborda-se a teoria de localização de deformações, que estuda as condições necessárias de perda de unicidade de solução em deformação, denominada também de condição de perda de elipticidade ou condição de bifurcação. Em seguida, dentro da teoria da instabilidade, desenvolve-se uma abordagem preliminar sobre a suficiência da condição de singularidade e sobre a caracterização da singularidade como um ponto de bifurcação ou um ponto limite.

É importante ressaltar que a proposta de caracterização da instabilidade ao nível constitutivo, aqui desenvolvida, restringe-se ao âmbito matemático, não sendo ainda possível, no atual estágio de desenvolvimento, especular sobre o significado físico dos resultados obtidos.

Para se fazer o desenvolvimento dos tópicos mencionados, foi necessário um amplo estudo de conceitos encontrados dentro da Análise Funcional, Análise Convexa, Análise Não-Convexa e Teoria de Bifurcação, os quais encontram-se reunidos nos Apêndices do trabalho.

A seguir, apresenta-se a divisão do corpo do trabalho em seus capítulos e apêndices, destacando-se os autores mais diretamente referenciados e as principais contribuições encontradas, relacionadas aos capítulos III, IV, V e VI.

No capítulo I, inicia-se o estudo da existência de solução para o problema da análise estrutural estática em regimes elástico e elastoplástico perfeito, baseando-se em [Romano e Rosatti, 1990] e em [Panagiotopoulos, 1985].

O modelo estrutural que explora a elastoplasticidade com encruamento positivo é analisado no capítulo II e baseia-se em [Feijó e Zouain, 1990].

O capítulo III, seguindo estudos encontrados em [Proença, 1989], é dedicado à análise dos modelos elástico com danificação e elastoplástico com danificação. A principal contribuição encontrada nesse capítulo é relativa a uma nova formulação matematicamente consistente dos modelos mencionados. Será mostrado que a fórmula incremental possibilita uma resolução numérica do problema, ilustrada por um exemplo simples, mas não evita um problema que já ocorria na formulação encontrada em [Proença, 1989]: o aparecimento de rigidez negativa após atingir o limite máximo de energia dissipada. Então, uma correção do modelo é proposta, consistindo de uma alteração do passo de deslocamento próximo da situação limite, conseguindo-se assim evitar o problema mencionado. Basicamente essas são as contribuições desse capítulo.

No capítulo IV, a contribuição dada diz respeito às definições de potenciais que regem os modelos com dano, baseando-se na Teoria de Análise Convexa ([Ekeland e Temam, 1976] e [Kubrusly, 1985]) e da Análise Não-Convexa ([Clarke, 1983]). Inicialmente será proposto um particular potencial convexo associado aos modelos com danificação, denominado de regularizador convexo, relacionado às variáveis de deformação (elástica e elastoplástica com

dano) e à variável de dano, do qual deriva a relação constitutiva completa, incluindo-se as condições de complementaridade e consistência. Em seguida será proposto um potencial não-convexo dependente apenas da variável de deformação, associado ao modelo de encruamento negativo linear e de acordo com o potencial geral que rege os modelos com danificação que é não-convexo.

No capítulo V, em virtude dos modelos com danificação perderem a unicidade de solução no regime de encruamento negativo, faz-se um estudo de soluções localizadas em deformação baseando-se na Teoria de Localização de Deformação encontrada em [Rizzi, 1995], [Hachich, 1994], [Benallal, 1992] e [Billardon, 1989], entre outros. Analisando-se as equações de equilíbrio local estático e dinâmico, a contribuição desse capítulo está na proposta de uma solução em deslocamento que caracteriza a localização de deformação e permite ligá-la ao problema de estacionariedade de ondas de aceleração, no campo de propagação de ondas.

No capítulo VI são analisadas condições suficientes de perda de unicidade de solução em deformação, dentro da Teoria de Instabilidade de Solução e da Teoria de Bifurcação abordadas por autores como [Zagottis, 1980], [Loula e Galeão, 1983], [Decker e Keller, 1980], [Jepson e Spence, 1985a] e [Jepson e Decker, 1986]. No caso do modelo de dano isotrópico, associativo e conservativo, será mostrado que é possível caracterizar matematicamente a solução em dois casos excludentes: ponto limite ou ponto de bifurcação de solução. A caracterização do tipo de solução para esse modelo é a contribuição desse capítulo.

Os estudos efetuados sobre Análise Funcional, Análise Convexa, Análise Não-Convexa, Análise Tensorial e Teoria de Bifurcação, nas quais se apoiam os capítulos citados, são reunidos respectivamente nos Apêndices A, B, C, D e E. Esses estudos se baseiam em autores como [Luenberger, 1969], [Taylor, 1958], [Brézys, 1983], [Ekeland e Temam, 1976], [Kubrusly, 1985], [Jepson e Decker, 1986] entre vários outros.

Finalmente, deve-se ressaltar a interessante união proporcionada pelos temas estudados entre áreas aparentemente distintas mas que juntas podem contribuir para o estudo do modelo estrutural: a Análise Funcional, Convexa e Não-Convexa para o entendimento dos Modelos de Danificação e a Teoria de Bifurcação na Análise de Localização de Deformação e de Pós-Singularidade.

CAPÍTULO I - Existência de Solução para o Modelo Estrutural.

Nesse capítulo analisa-se uma teoria geral do modelo estrutural, que faz uso de relações não-lineares entre pares duais de variáveis de estado governadas por potenciais convexos. Aplicam-se no seu desenvolvimento conceitos e métodos da Análise Funcional e Análise Convexa (reunidos nos Apêndices A e B), propriedades de operadores lineares e adjuntos (Apêndice D) e as propriedades de intersecção de conjuntos convexos.

Todos os resultados a serem vistos nesse capítulo, relativos à existência de solução para o modelo estrutural, se baseiam naqueles encontrados em [Romano e Rosati, 1990].

É possível mostrar que a existência de soluções depende das propriedades de intersecção e estão ligadas diretamente com os conjuntos de admissibilidade das variáveis de estado, bem como à análise limite do problema, a serem vistas nas seções I.2 e I.3, respectivamente.

Na seção I.4, uma extensão da teoria geral é exemplificada para o caso da análise limite em problemas estruturais convexos não-lineares para modelos elastoplásticos perfeitos, definidos em termos de taxas de tensão e deformação e também para o caso de problemas de contato unilateral, definidos em termos de taxas de forças externas e taxas de deslocamentos.

Na seção I.5, a análise de elastoplasticidade perfeita é feita de maneira análoga àquela vista na seção anterior, explorando-se funções convexas de fluência plástica, de acordo com [Panagiotopoulos, 1985].

I.1- Propriedades de intersecção de conjuntos convexos.

Sejam, $C \subset X$ um conjunto convexo fechado em um espaço vetorial linear X e X^* espaço dual de X (definição A1.4).

Se o envoltório (“hull”) afim de $C \subset X$ (definição B1.3), definido como a intersecção de todos os conjuntos afins contendo C , não é o próprio espaço vetorial linear X , todo ponto do envoltório é um ponto do contorno de C , podendo não ser do seu contorno relativo.

Na definição B1.6, vista no Apêndice B, o conceito de contorno e contorno relativo é genérica e não explora as propriedades geométricas envolvendo o conjunto C e hiperplanos suportes a pontos do contorno. Será visto que o problema de diferenciar contorno e contorno relativo ocorre numa situação particular em que o conjunto C esteja contido no hiperplano suporte ou em seu envoltório afim.

É preciso diferenciar então, o conceito de contorno e contorno relativo dando uma definição mais rigorosa que explora as propriedades geométricas citadas.

Antes de fazer-se a diferenciação desejada, considere as notações a serem adotadas e as definições a serem utilizadas para se definir contorno e contorno relativo de um conjunto convexo.

Notações a serem adotadas:

bnd C - contorno de C

int C - interior de C

relbnd C - contorno relativo de C

relint C - interior relativo de C

Definição I.1.1: *Conjunto convexo de variações de C e seu ortogonal.*

Denotando por \mathbf{Q}_C , o conjunto convexo de variações de C:

$$\mathbf{Q}_C = \{ \mathbf{z} \in \mathbf{X}: \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \text{ tal que } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C \}. \quad (I.1)$$

O conjunto ortogonal a \mathbf{Q}_C é:

$$\mathbf{Q}_C^\perp = \{ \mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^*: \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{z} \rangle = 0, \mathbf{z} \in \mathbf{Q}_C \}. \quad (I.2)$$

Definição I.1.2: *Cone normal externo a um conjunto convexo.*

O cone normal externo $\mathbf{N}_C(\mathbf{x})$ para o conjunto convexo C em $\mathbf{x} \in C$ é definido por:

$$\mathbf{N}_C(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^* \text{ tal que } \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \leq 0, \forall \mathbf{y} \in C \} \quad (I.3)$$

e admitido vazio se $\mathbf{x} \notin C$.

Alguns exemplos ilustrando (I.3) são vistos no Apêndice B, definição B9.1.

Com as definições dadas, pode-se agora ser definido contorno e contorno relativo de C:

Definição I.1.3:

$$\mathbf{bnd} C = \{ \mathbf{x} \in C, \mathbf{N}_C(\mathbf{x}) \neq \{0\} \}; \quad (I.4)$$

$$\mathbf{relbnd} C = \{ \mathbf{x} \in C, \mathbf{N}_C(\mathbf{x}) \neq \mathbf{Q}_C^\perp \}. \quad (I.5)$$

A figura I.1, dá exemplos de conjuntos convexos com os respectivos hiperplanos suportes a um ponto $\bar{\mathbf{x}}$ do contorno e a partir destes ilustra a diferença entre pontos do contorno e pontos do contorno relativo.

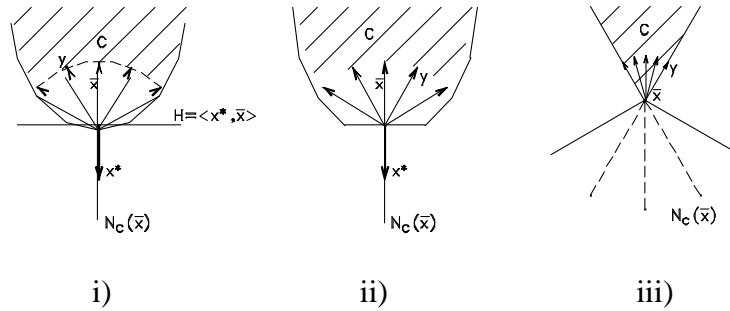


Figura I.1- i) e ii) hiperplano suporte único a um ponto do contorno.

iii) infinitos hiperplanos suportes a um ponto do contorno.

Observe que, para todos os conjuntos acima, $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{relbnd} C$ pois $\mathbf{N}_C(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{Q}_C^\perp$ apesar de $\mathbf{Q}_C^\perp \neq \emptyset$ em ii) e iii).

Na figura I.2 seguinte, $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{bnd} C \Rightarrow \bar{\mathbf{x}} \notin \mathbf{relbnd} C$ pois $\mathbf{N}_C(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{Q}_C^\perp$.



Figura I.2 - $\bar{\mathbf{x}} \notin \mathbf{relbnd} C$ se $C \subset \mathbf{X} = \mathfrak{R}$.

A figura I.2 ilustra a existência de um hiperplano contendo o conjunto convexo C.

Observação: o problema de diferenciar contorno e contorno relativo ocorre sempre que existe um hiperplano suporte ou um conjunto afim que contém o conjunto C .

Os conceitos a serem vistos nas próximas definições serão utilizados no decorrer do capítulo.

Definição I.1.4: *Indicatriz de um conjunto convexo.*

A função Indicatriz $\Gamma_C: \mathbf{X} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ de um conjunto convexo C , é uma função convexa de penalização de pontos que não pertencem ao conjunto C , definida da seguinte maneira:

$$\Gamma_P(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} \in C \\ +\infty & \text{se } \mathbf{x} \notin C \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

Para mais detalhes da definição I.1.4, ver Apêndice B, definições B3.3 e B4.2. As relações entre (I.3) e (I.6) podem ser vistas nas proposições B9.3 e B9.4.

Definição I.1.5: *Conjunto diferença.*

Considere os conjuntos convexos $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, então, o conjunto diferença de A por B é definido por:

$$A - B = \{ \mathbf{z} \in \mathbf{X}: \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B \}. \quad (\text{I.7})$$

Baseado nessa definição vale o seguinte lema:

Lema I.1.1:

Se A e B são conjuntos convexos em \mathbf{X} , a seguinte propriedade se verifica:

$$\mathbf{Q}_{A-B}^\perp = \mathbf{Q}_A^\perp \cap \mathbf{Q}_B^\perp.$$

Justificativa:

(\Rightarrow)

Notando que $\mathbf{z}^* \in \mathbf{Q}_{A-B}^\perp \Leftrightarrow \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{z} \rangle = 0$, $\forall \mathbf{z} \in \mathbf{Q}_{A-B}$, e que $\forall \mathbf{y}_A, \mathbf{x}_A \in A$, $\mathbf{y}_B, \mathbf{x}_B \in B$, pode-se escrever:

$$\langle \mathbf{z}^*, (\mathbf{y}_A - \mathbf{x}_B) - (\mathbf{x}_A - \mathbf{y}_B) \rangle = 0, \text{ pois } \mathbf{z} = (\mathbf{y}_A - \mathbf{x}_B) - (\mathbf{x}_A - \mathbf{y}_B) \in \mathbf{Q}_{A-B}; \quad (\text{I.8a})$$

$$\langle \mathbf{z}^*, (\mathbf{y}_A - \mathbf{y}_B) - (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \rangle = 0, \text{ pois } \mathbf{z} = (\mathbf{y}_A - \mathbf{y}_B) - (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \in \mathbf{Q}_{A-B}; \quad (\text{I.8b})$$

$$\langle \mathbf{z}^*, (\mathbf{x}_A - \mathbf{y}_B) - (\mathbf{y}_A - \mathbf{x}_B) \rangle = 0, \text{ pois } \mathbf{z} = (\mathbf{x}_A - \mathbf{y}_B) - (\mathbf{y}_A - \mathbf{x}_B) \in \mathbf{Q}_{A-B}; \quad (\text{I.8c})$$

então:

somando-se (I.8a) e (I.8b) tem-se que $\langle \mathbf{z}^*, \mathbf{y}_B - \mathbf{x}_B \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{z}^* \in \mathbf{Q}_B^\perp$,

somando-se (I.8a) e (I.8c) tem-se que $\langle \mathbf{z}^*, \mathbf{y}_A - \mathbf{x}_A \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{z}^* \in \mathbf{Q}_A^\perp$.

Portanto $\mathbf{z}^* \in \mathbf{Q}_A^\perp \cap \mathbf{Q}_B^\perp$.

(\Leftarrow) Desde que,

$$\mathbf{z}^* \in \mathbf{Q}_A^\perp \Rightarrow \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{y}_A - \mathbf{x}_A \rangle = 0; \quad (\text{I.9})$$

$$\mathbf{z}^* \in \mathbf{Q}_B^\perp \Rightarrow \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{y}_B - \mathbf{x}_B \rangle = 0 \quad (\text{I.10})$$

então, subtraindo-se (I.9) de (I.10) tem-se que $\mathbf{z}^* \in \mathbf{Q}_{A-B}^\perp$.

Portanto, $\mathbf{Q}_{A-B}^\perp = \mathbf{Q}_A^\perp \cap \mathbf{Q}_B^\perp$. □

Propriedades envolvendo pontos do contorno e do contorno relativo.

Pontos, pontos do contorno e pontos do contorno relativo de conjuntos convexos são definidos pelas seguintes propriedades (teoremas).

Teorema I.1.1:

- pontos do convexo fechado C são caracterizados pela propriedade variacional:

$$\mathbf{x}_0 \in C \Leftrightarrow \sup_{\mathbf{x} \in C} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle \geq \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_0 \rangle, \forall \mathbf{x}^* \in N_C(\mathbf{x}_0). \quad (I.11)$$

Justificativa:

Esse resultado é consequência direta da definição B2.1, vista no Apêndice B e é ilustrado pela figura B.9. \square

- Pontos do contorno de C pela propriedade adicional:

$$\mathbf{x}_0 \in \text{bnd } C \Leftrightarrow N_C(\mathbf{x}_0) \neq \{0\} \Leftrightarrow \quad (I.12a)$$

$$\Leftrightarrow \exists \mathbf{x}_0^* \in N_C(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0^* \neq 0 \Leftrightarrow \quad (I.12b)$$

$$\Leftrightarrow \exists \mathbf{x}_0^* \neq 0: \sup_{\mathbf{x} \in C} \langle \mathbf{x}_0^*, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}_0^*, \mathbf{x}_0 \rangle; \quad (I.12c)$$

que estabelece que, o cone normal para C em \mathbf{x}_0 , não se degenera sobre o cone nulo, ou equivalentemente, que existe um hiperplano suporte para C em \mathbf{x}_0 .

Justificativa:

- se $\mathbf{x}_0 \in \text{bnd } C \Rightarrow$ pelos teoremas A5.1 (Hahn-Banach) e B1.2, existe um hiperplano suporte (Definição B1.7) $H = \langle \mathbf{x}_0^*, \mathbf{x}_0 \rangle$ para C em \mathbf{x}_0 tal que:

$$\langle \mathbf{x}_0^*, \mathbf{x}_0 \rangle \geq \langle \mathbf{x}_0^*, \mathbf{x} \rangle, \forall \mathbf{x} \in C \Rightarrow \sup_{\mathbf{x} \in C} \langle \mathbf{x}_0^*, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}_0^*, \mathbf{x}_0 \rangle. \quad \square$$

A figura I.3 a seguir ilustra a propriedade (I.12).

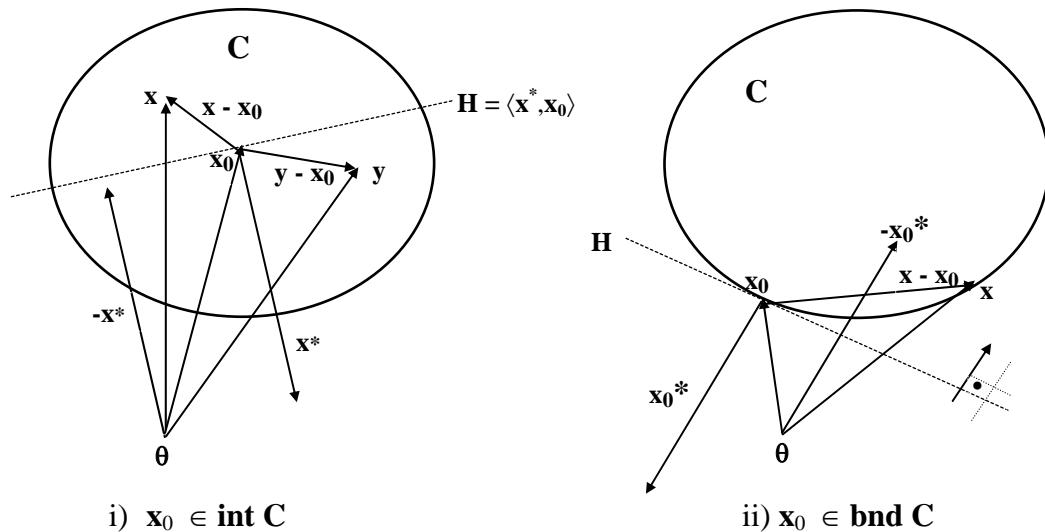


Figura I.3 - Existência de um hiperplano suporte para C em \mathbf{x}_0 .
Da figura I.3, vê-se ainda que:

- se $\mathbf{x}_0 \in \text{int } C \Rightarrow$ existem, $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^*$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ tais que, $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \leq 0$ e $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y} - \mathbf{x}_0 \rangle \geq 0$ e então $\mathbf{x}^* \in \mathbf{N}_C(\mathbf{x}_0) \Leftrightarrow \mathbf{x}^* = 0$, ou seja, o cone normal externo se degenera no cone nulo.

- Pontos pertencentes para o contorno relativo de C estão caracterizados pela propriedade mais estrita:

$$\mathbf{x}_0 \in \text{relbnd } C \Leftrightarrow \mathbf{N}_C(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{Q}_C^\perp \Leftrightarrow \quad (\text{I.13a})$$

$$\Leftrightarrow \exists \mathbf{x}_0^* \notin \mathbf{Q}_C^\perp; \mathbf{x}_0^* \in \mathbf{N}_C(\mathbf{x}_0) \Leftrightarrow \quad (\text{I.13b})$$

$$\Leftrightarrow \exists \mathbf{x}_0^* \notin \mathbf{Q}_C^\perp: \sup_{\mathbf{x} \in C} \langle \mathbf{x}_0^*, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}_0^*, \mathbf{x}_0 \rangle. \quad (\text{I.13c})$$

Desde que, para qualquer ponto $\mathbf{x} \in C$, tem-se $\mathbf{N}_C(\mathbf{x}) \supseteq \mathbf{Q}_C^\perp$, a última equação define condições para que a inclusão seja estrita, isto é, que o cone para C em \mathbf{x}_0 não deve se degenerar sobre o sub-espaco ortogonal para \mathbf{Q}_C .

Esta propriedade indica também a existência de um hiperplano suporte próprio para C em \mathbf{x}_0 , isto é, um hiperplano suporte não contendo C .

Veja a figura I.4.

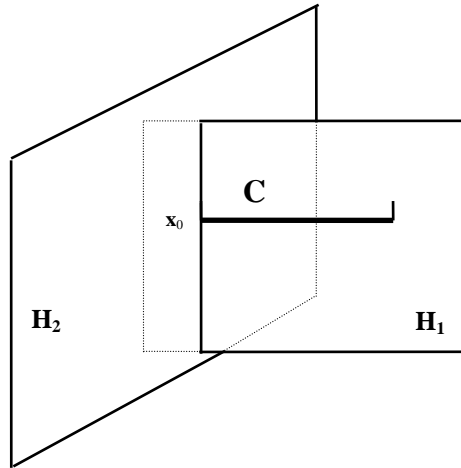


Figura I.4 - O conjunto $C \subset \mathbf{X} \equiv \mathfrak{R}^3$, um hiperplano suporte próprio (\mathbf{H}_2) e um impróprio (\mathbf{H}_1).

No Apêndice B, as figuras B.4, B.5, B.6 e B.7 ilustram hiperplanos suportes próprios e impróprios para conjuntos convexos.

Teoremas fundamentais sobre intersecção de conjuntos convexos.

Teorema I.1.2:

A intersecção de dois conjuntos convexos A e B em \mathbf{X} é caracterizada pelas seguintes propriedades equivalentes:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow 0 \in \mathbf{A} - \mathbf{B} \Leftrightarrow \sup_{\mathbf{x} \in A} \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{x} \rangle \geq \inf_{\mathbf{y} \in B} \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{z}^* \in \mathbf{N}_A(\mathbf{x}) \cap -\mathbf{N}_B(\mathbf{y}). \quad (\text{I.14})$$

Justificativa:

A primeira equivalência é trivial, enquanto que a segunda segue da primeira e do teorema I.1.1 tomando-se $\mathbf{x}_0 = 0$ e $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$. □

Observando-se a figura I.5, pode-se justificar a segunda equivalência da seguinte forma: considere, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$, $\mathbf{z}^* \in \mathbf{N}_A(\mathbf{x}_0) \cap -\mathbf{N}_B(\mathbf{y}_0)$, tal que $\mathbf{H}_A = \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{x}_0 \rangle$ é um hiperplano suporte em \mathbf{A} para $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ e $\mathbf{H}_B = \langle -\mathbf{z}^*, \mathbf{y}_0 \rangle$ é um hiperplano suporte em \mathbf{B} para $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$. Então, tem-se que:

$$\text{em } \mathbf{A}, \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{A} \text{ (ou } \mathbf{x} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \Leftrightarrow \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}} \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{x}_0 \rangle,$$

$$\text{em } \mathbf{B}, \langle -\mathbf{z}^*, \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \rangle \leq 0, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{B} \text{ (ou } \mathbf{y} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \Leftrightarrow \sup_{\mathbf{y} \in \mathbf{B}} \langle -\mathbf{z}^*, \mathbf{y} \rangle = \langle -\mathbf{z}^*, \mathbf{y}_0 \rangle = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{B}} \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{y} \rangle;$$

$$\text{Então, } \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}, \text{ tem-se: } \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}} \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{x}_0 \rangle \geq \langle -\mathbf{z}^*, \mathbf{y}_0 \rangle = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{B}} \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{y} \rangle.$$

$$\text{Portanto, } \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}} \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{x} \rangle \geq \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{B}} \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{y} \rangle.$$

A figura I.5 a seguir ilustra os resultados vistos sobre a intersecção de conjuntos convexos.

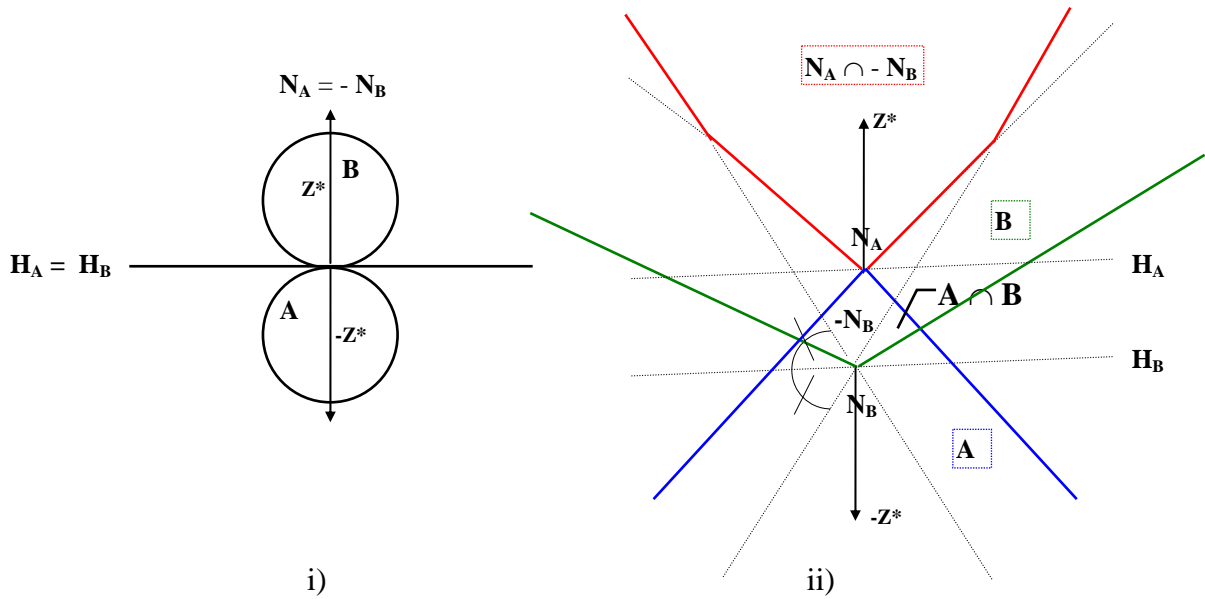


Figura I.5 - Intersecção de conjuntos convexos \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Na figura I.5 vê-se que:

$$\forall \mathbf{z}^* \in \mathbf{N}_A \cap -\mathbf{N}_B: \text{ em i) } \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}} \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{x} \rangle = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{B}} \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{y} \rangle; \text{ em ii) } \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}} \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{x} \rangle > \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{B}} \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{y} \rangle$$

Os resultados vistos a seguir serão importantes para o entendimento do modelo estrutural.

Lema I.1.2:

Se $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$, então:

$$\mathbf{N}_{\mathbf{A}-\mathbf{B}}(\mathbf{0}) = \mathbf{N}_A(\mathbf{z}_0) \cap -\mathbf{N}_B(\mathbf{z}_0), \forall \mathbf{z}_0 \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}. \tag{I.15}$$

Justificativa:

Tem-se que, $\mathbf{z}_0^* \in \mathbf{N}_{\mathbf{A}-\mathbf{B}}(0) \Leftrightarrow \langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{z} \rangle \leq 0, \forall \mathbf{z} \in \mathbf{A} - \mathbf{B}$.

Tomando-se $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, segue que:

$$\langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{y} \rangle, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{B}.$$

Ou equivalentemente:

$$\langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{x} - \mathbf{z}_0 \rangle \leq \langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{y} - \mathbf{z}_0 \rangle, \forall \mathbf{z}_0 \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}, (\text{logo, } \mathbf{z}_0 \in \mathbf{A}-\mathbf{B})$$

Fazendo-se $\mathbf{x} = \mathbf{z}_0$ tem-se:

$$\langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{y} - \mathbf{z}_0 \rangle \geq 0, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{z}_0 \in -\mathbf{N}_{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0).$$

Fazendo-se $\mathbf{y} = \mathbf{z}_0$, tem-se:

$$\langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{x} - \mathbf{z}_0 \rangle \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{z}_0 \in \mathbf{N}_{\mathbf{A}}(\mathbf{z}_0) \quad \square$$

Pode-se agora estabelecer dois resultados fundamentais sobre intersecção de conjuntos convexos.

Um hiperplano é dito separar dois conjuntos convexos \mathbf{A} e \mathbf{B} , se \mathbf{A} está contido em um dos semi-espacos fechados associado com ele e \mathbf{B} pertence ao semi-espaco fechado oposto, (para mais detalhes ver apêndice B, seção B.1). Condições necessárias e suficientes são dadas pelo seguinte teorema:

Teorema I.1.3:

Se $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$, então, existe um hiperplano separando os dois conjuntos convexos se e somente se as seguintes propriedades são verdadeiras:

$$0 \in \mathbf{bnd}(\mathbf{A}-\mathbf{B}); \tag{I.16a}$$

$$\mathbf{N}_{\mathbf{A}-\mathbf{B}}(0) \neq \{0\}; \tag{I.16b}$$

$$\exists \mathbf{z}_0^* \neq 0, \mathbf{z}_0^* \in \mathbf{N}_{\mathbf{A}}(\mathbf{z}_0) \cap -\mathbf{N}_{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0), \forall \mathbf{z}_0 \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}; \tag{I.16c}$$

$$\exists \mathbf{z}_0^* \neq 0, \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}} \langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{x} \rangle = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{B}} \langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{z}_0 \rangle, \forall \mathbf{z}_0 \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}. \right. \tag{I.16d}$$

Justificativa:

A propriedade (I.16a) é equivalente à propriedade (I.16b) devido à definição I.1.3.

A equivalência entre (I.16b) e (I.16c) segue do lema I.1.2.

A terceira condição (I.16c) pode também ser escrita por:

$$\langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{z}_0 \rangle \leq \langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{y} \rangle, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{B}, \forall \mathbf{z}_0 \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B},$$

e então, é equivalente a quarta proposição (I.16d) que expressa a existência de um hiperplano separador entre \mathbf{A} e \mathbf{B} . □

Um hiperplano é dito separar propriamente dois conjuntos convexos \mathbf{A} e \mathbf{B} quando ele não contém ambos os conjuntos. Isto ocorre se e somente se a intersecção de \mathbf{A} e \mathbf{B} consiste somente de pontos do contorno relativo para ao menos um dos dois conjuntos. As condições para este caso são caracterizadas pelo teorema seguinte.

Teorema I.1.4:

Se $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$, então, existe um hiperplano separando propriamente os dois conjuntos fechados se e somente se as seguintes propriedades equivalentes são verdadeiras:

$$0 \in \text{relbnd}(\mathbf{A}-\mathbf{B}); \quad (\text{I.17})$$

$$\mathbf{N}_{\mathbf{A}-\mathbf{B}}(0) \neq \mathbf{Q}_{\mathbf{A}-\mathbf{B}}^\perp; \quad (\text{I.18})$$

$$\exists \mathbf{z}_0^* \notin \mathbf{Q}_{\mathbf{A}-\mathbf{B}}^\perp, \mathbf{z}_0^* \in \mathbf{N}_{\mathbf{A}}(\mathbf{z}_0) \cap -\mathbf{N}_{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0), \forall \mathbf{z}_0 \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}; \quad (\text{I.19})$$

$$\exists \mathbf{z}_0^* \notin \mathbf{Q}_{\mathbf{A}-\mathbf{B}}^\perp : \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}} \langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{x} \rangle = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{B}} \langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{z}_0 \rangle, \forall \mathbf{z}_0 \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}; \right. \quad (\text{I.20})$$

$$\emptyset \neq \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \text{relbnd } \mathbf{A} \cap \text{bnd } \mathbf{B} = \text{relbnd } \mathbf{B} \cap \text{bnd } \mathbf{A} = \text{relbnd } \mathbf{A} \cap \text{relbnd } \mathbf{B}; \quad (\text{I.21})$$

$$\emptyset \neq \mathbf{A} \cap \mathbf{B}; \text{relint } \mathbf{A} \cap \text{relint } \mathbf{B} = \emptyset. \quad (\text{I.22})$$

Justificativa:

A afirmação (I.17) é equivalente à (I.18) devido à definição I.1.3.

A afirmação (I.18) é equivalente à (I.19) devido ao lema I.1.2.

A afirmação (I.19) pode ser escrita por:

$$\langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{z}_0 \rangle \leq \langle \mathbf{z}_0^*, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{B}, \forall \mathbf{z}_0 \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}; \quad (\text{I.23})$$

e (I.23) é equivalente à afirmação (I.20), que se relaciona à existência de um hiperplano separando propriamente \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Finalmente, dos lemas I.1.1 e I.1.2, a afirmação (I.18) pode ser expressa por,

$$\exists \mathbf{z}_0^* \neq 0, \mathbf{z}_0^* \in \mathbf{N}_{\mathbf{A}}(\mathbf{z}_0) \cap -\mathbf{N}_{\mathbf{B}}(\mathbf{z}_0), \forall \mathbf{z}_0 \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B},$$

e então uma das equações se verifica: $\mathbf{z}_0^* \notin \mathbf{Q}_{\mathbf{A}}^\perp$ ou $\mathbf{z}_0^* \notin \mathbf{Q}_{\mathbf{B}}^\perp$.

Isto implica na afirmação (I.21). □

A próxima seção desse capítulo, trata propriamente da existência de solução para o modelo estrutural e explora os resultados vistos nessa seção.

I.2- O modelo estrutural.

Nessa seção será dada a definição geral do modelo estrutural e os resultados aqui obtidos são uma aplicação direta daqueles vistos na seção anterior, relacionados à teoria geral de análise convexa.

O modelo estrutural formal é definido pelos seguintes elementos:

Definição I.2.1: *Variáveis de estado e espaços vetoriais correspondentes.*

$$\text{Variáveis externas: } \begin{cases} \mathbf{u} \in \mathbf{V} \\ \mathbf{p} \in \mathbf{V}^* \end{cases}; \quad (\text{I.24})$$

onde \mathbf{u} é um vetor de deslocamentos e \mathbf{p} um vetor de forças externas.

$$\text{Variáveis internas: } \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{D}^* \end{cases}; \quad (\text{I.25})$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ represente o tensor de pequenas deformações, $\boldsymbol{\sigma}$ representa o tensor de tensões e os espaços:

$$\begin{cases} \mathbf{V}, \mathbf{V}^* \\ \mathbf{D}, \mathbf{D}^* \end{cases}; \text{ são pares duais de espaços vetoriais lineares.} \quad (\text{I.26})$$

Definição I.2.2: *Equações de Campo.*

Dadas as equações:

$$\begin{cases} \mathbf{T}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{T}^*\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p} \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

onde, a primeira equação é dita de compatibilidade cinemática e a segunda é de equilíbrio estático definidas nos espaços $\mathbf{V}, \mathbf{V}^*, \mathbf{D}$ e \mathbf{D}^* da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{D} \\ \mathbf{T}^* : \mathbf{D}^* \rightarrow \mathbf{V}^* \end{cases}; \quad (\text{I.28})$$

sendo ainda \mathbf{T} e \mathbf{T}^* um par de operadores lineares, ou seja, $\mathbf{T} \in \mathbf{Lin}(\mathbf{V}, \mathbf{D})$, $\mathbf{T}^* \in \mathbf{Lin}(\mathbf{D}^*, \mathbf{V}^*)$ e adjuntos, isto é, satisfazendo:

$$\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{T}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{T}^*\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{D}^*, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (\text{I.29})$$

(para mais detalhes da equação em (I.29) ver apêndice D, seção D2).

Definição I.2.3: *Relações de Restrições.*

Considerando-se o potencial convexo $\boldsymbol{\varphi}$ de restrições internas e o potencial côncavo $\boldsymbol{\xi}$ de restrições externas, então, o par $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$ e (\mathbf{p}, \mathbf{u}) devem satisfazer:

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} \in \partial\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\sigma}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\sigma}) = \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle; \quad (\text{I.30})$$

$$\mathbf{u} \in \partial\boldsymbol{\xi}^*(\mathbf{p}) \Leftrightarrow \mathbf{p} \in \partial\boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\xi}^*(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle; \quad (\text{I.31})$$

o que significa que $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$ é um par conjugado para $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\varphi}^*$ se satisfaz (I.30) e (\mathbf{p}, \mathbf{u}) é um par conjugado para $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\xi}^*$, se satisfaz (I.31) (ver a seção B8).

Exemplos:

i) pode-se considerar o potencial total P_T associado a um corpo que ocupa um volume V sujeito a deslocamentos \mathbf{u} , deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$, forças externas \mathbf{p} definidas, em um sistema conservativo, por unidade de volume de corpo ∂V e forças internas $\boldsymbol{\sigma}$, tal que:

$$P_T = \int_V \left(\frac{1}{2}\right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{\partial V} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dV.$$

A P_T pode-se associar: $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$; $\xi(\mathbf{u}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}$,

tal que, φ é um potencial convexo e ξ é um potencial côncavo, sobre os conjuntos \mathbf{V} e \mathbf{D} respectivamente. Se a figura I.6 abaixo descreve as relações $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$ e (\mathbf{p}, \mathbf{u}) para um determinado corpo:

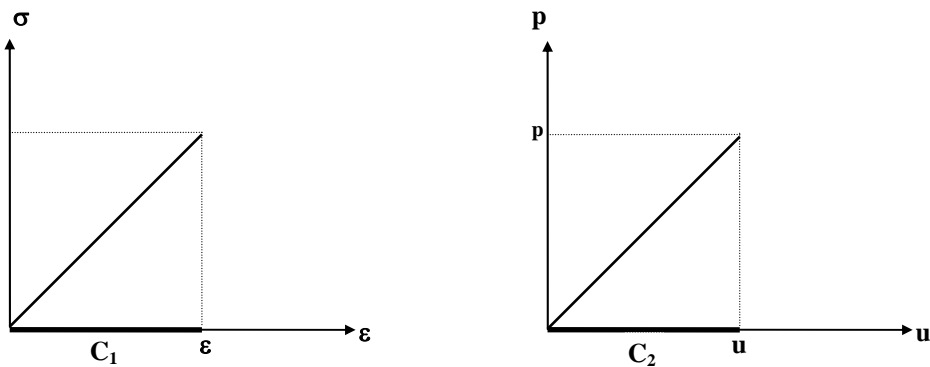


Figura I.6 - Relação $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$ e (\mathbf{p}, \mathbf{u}) .

então, considerando-se essas relações, pode-se traçar as curvas φ e ξ , de tal forma que $\boldsymbol{\sigma} \in \partial\varphi(\boldsymbol{\varepsilon})$ e $\mathbf{p} \in \partial\xi(\mathbf{u})$, de acordo com a figura I.7:

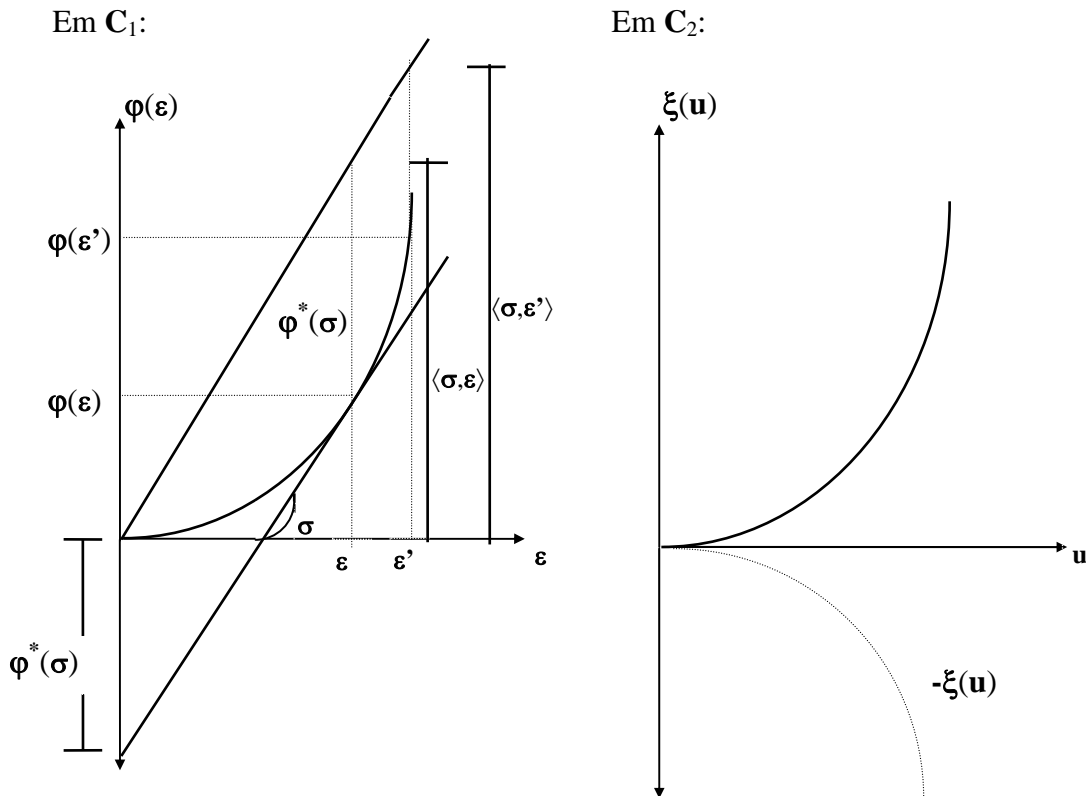


Figura I.7 - Relação $\boldsymbol{\sigma} \in \partial\varphi(\boldsymbol{\varepsilon})$ e $\mathbf{p} \in \partial\xi(\mathbf{u})$.

Analisando-se apenas o primeiro gráfico, observa-se que:

$$\forall \boldsymbol{\varepsilon}', \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\sigma}) \geq \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}');$$

com a igualdade ocorrendo em $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\sigma}) = \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon})$. Então, em $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$.

Analogamente, da análise do potencial conjugado $\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\sigma})$ tem-se $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$.

Pode-se tirar relações análogas entre \mathbf{u} e \mathbf{p} considerando-se a figura I.7.

ii) um outro exemplo que representa diretamente a equação (I.30) é dado.

Uma classe de materiais normalmente considerada nas aplicações em engenharia, analogamente ao exemplo i), é a chamada classe de materiais padrão, do tipo hiper-elástico.

A existência de potenciais $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon})$ e $\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\sigma})$ é postulada. Eles são duais no sentido da transformada de Legendre (ver seção B8), isto é, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}$.

Esta relação escalar define a lei energética do material. O potencial $\boldsymbol{\varphi}$ representa a energia de deformação e $\boldsymbol{\varphi}^*$ representa uma energia complementar que neste caso é o potencial conjugado de $\boldsymbol{\varphi}$.

A afirmação acima é verdadeira pois, considerando-se:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}): \text{ função potencial energia de deformação,}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma}) : \text{ função potencial de energia complementar,}$$

onde \mathbf{E} é o operador simétrico positivo definido de rigidez elástica, então, $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\varphi}^*$ são duais no sentido de Legendre pois $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\varphi}^*$ são diferenciáveis e diferenciando-se, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, em relação a $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$, respectivamente, obtém-se a lei do material em uma forma vetorial:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \text{ e } \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}},$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma},$$

As relações dadas nos exemplos i) e ii) acima sempre são possíveis se os vetores $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{p} e \mathbf{u} pertencem aos conjuntos convexos admissíveis definidos abaixo.

$$\mathbf{V} \supset \mathbf{U} = \mathbf{dom} \boldsymbol{\xi} : \text{conjunto de deslocamento admissíveis;} \quad (\text{I.32})$$

$$\mathbf{V}^* \supset \mathbf{U}^* = \mathbf{dom} \boldsymbol{\xi}^* : \text{conjunto de forças externas admissíveis;} \quad (\text{I.33})$$

$$\mathbf{D} \supset \mathbf{W} = \mathbf{dom} \boldsymbol{\varphi} : \text{conjunto de deformações admissíveis;} \quad (\text{I.34})$$

$$\mathbf{D}^* \supset \mathbf{W}^* = \mathbf{dom} \boldsymbol{\varphi}^* : \text{conjunto de forças internas admissíveis.} \quad (\text{I.35})$$

A seguir apresentam-se dois exemplos explorando os elementos dos conjuntos admissíveis definidos acima, para os quais mostra-se a dualidade entre as variáveis de estado, tensão e deformação, forças e deslocamentos. Será visto também a correspondência entre deformação e deslocamento através do operador linear \mathbf{T} , bem como a correspondência entre tensão e força, através do operador adjunto \mathbf{T}^* .

A figura I.8, mostra em um plano as posições indeformada e deformada de uma região na vizinhança de um ponto, admitindo pequenos deslocamentos e deformações.

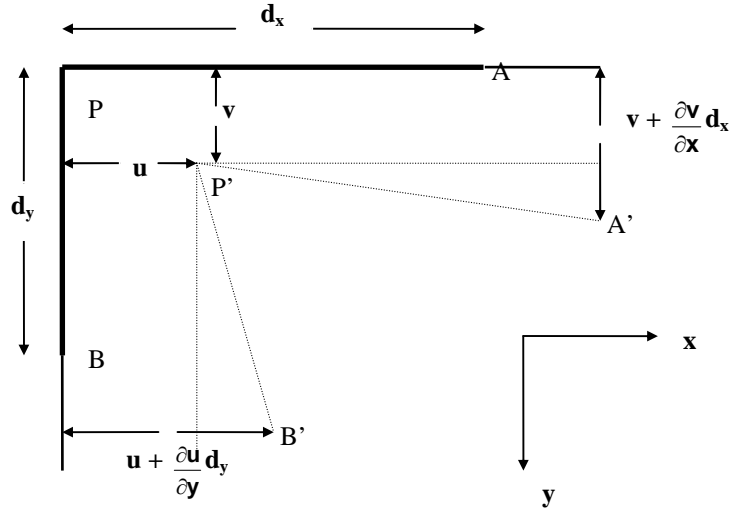


Figura I.8 - Cinemática da deformação: situação indeformada e deformada.

De acordo com a hipótese cinemática de Timoshenko um elemento do conjunto de deslocamentos admissíveis seria dado por:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y) = (-u, v) = -u \mathbf{i} + v \mathbf{j}, \quad (u, v) \in \mathbf{U}, \quad \text{onde: } \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

As relações de compatibilidade permitem caracterizar o elemento do conjunto de deformações admissíveis $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{W}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{y}}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{y}}. \end{aligned}$$

As relações acima podem ser escritas matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \end{pmatrix}.$$

A Lei de Hooke relaciona elementos de \mathbf{W} com elementos do conjunto \mathbf{W}^* :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \frac{1}{E} (\boldsymbol{\sigma}_x + \nu \boldsymbol{\sigma}_y); \quad \boldsymbol{\varepsilon}_y = \frac{1}{E} (\boldsymbol{\sigma}_y - \nu \boldsymbol{\sigma}_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \boldsymbol{\tau}_{xy} \quad \text{em } \mathbf{W} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\boldsymbol{\varepsilon}_x + \nu \boldsymbol{\varepsilon}_y); \quad \boldsymbol{\sigma}_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\boldsymbol{\varepsilon}_y + \nu \boldsymbol{\varepsilon}_x); \quad \boldsymbol{\tau}_{xy} = G \gamma_{xy} \quad \text{em } \mathbf{W}^*.$$

onde ν denota o coeficiente de Poisson.

A figura I.9 mostra um elemento infinitesimal de lados d_x e d_y sujeito ao estado plano de tensão $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}^*$, cujas componentes estão representadas em cada face do elemento. A força por unidade de volume $\mathbf{f} \in \mathbf{U}^*$ apresenta componentes \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 , respectivamente nas direções x e y .

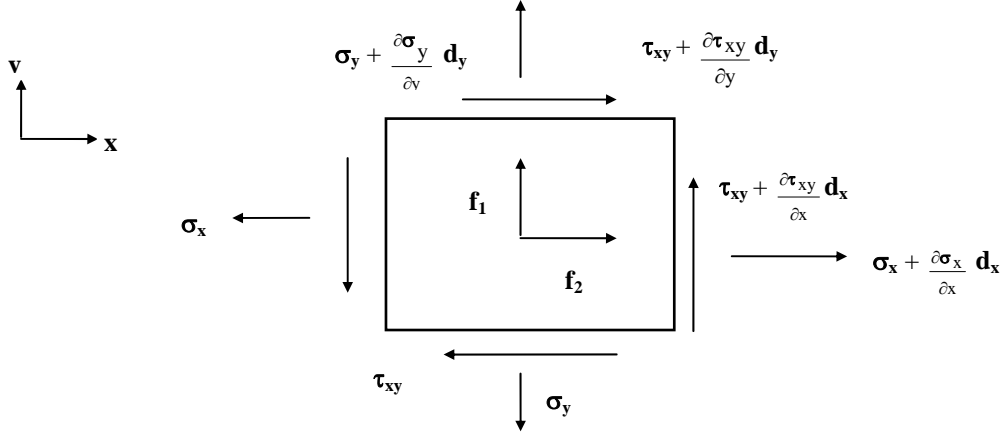


Figura I.9 - Diferenciais de tensão em equilíbrio.

Para o caso ilustrado na figura I.9 tem-se das relações de equilíbrio que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \mathbf{f}_1 &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \mathbf{f}_2 &= 0; \end{aligned}$$

Essas relações podem ser escritas matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{f}_1 \\ -\mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}^* = \mathbf{T}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Os dois exemplos vistos acima servem também para ilustrar os resultados sobre existência de solução do modelo estrutural vistos a seguir.

I.3-Existência de solução.

Condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução do conjunto de equações de campo e das relações de restrições admissíveis são dadas pelo seguinte conjunto teórico de condições de consistência (a reciprocidade é válida devido ao teorema I.1.2):

$$i) \mathbf{TU} \cap \mathbf{W} \neq \emptyset \Leftrightarrow 0 \in \mathbf{TU} - \mathbf{W}; \quad (\text{I.36})$$

expressa em termos mecânicos como segue: se existe a intersecção, existe no mínimo uma deformação admissível que é cinematicamente consistente com um deslocamento admissível.

Condições sobre os conjuntos $\mathbf{T}^* \mathbf{W}^*$ e \mathbf{U}^* são expressas da seguinte forma:

$$\text{ii) } \mathbf{T}^* \mathbf{W}^* \cap \mathbf{U}^* \neq \emptyset \Leftrightarrow 0 \in \mathbf{T}^* \mathbf{W}^* - \mathbf{U}^*; \quad (\text{I.37})$$

o que é equivalente a dizer que, mecanicamente existe ao menos uma força externa admissível que está em equilíbrio com uma força interna admissível.

Pelo teorema I.1.2, estas condições podem ser escritas na seguinte forma variacional equivalente:

$$\text{i) } \sup_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{W}} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \geq \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}\mathbf{u} \rangle, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{N}_{\mathbf{W}}(\boldsymbol{\varepsilon}): \mathbf{T}^* \boldsymbol{\sigma} \in -\mathbf{N}_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}). \quad (\text{I.38})$$

Justificativa:

Devido a (I.36), $\exists \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{W}$ tal que $\mathbf{T}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}$ para $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \Rightarrow$ pelo teorema I.1.2 e pela equação (I.29) tem-se

$$\sup_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{W}} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \geq \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}\mathbf{u} \rangle = \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \langle \mathbf{T}^* \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u} \rangle. \quad \square$$

$$\text{ii) } \inf_{\mathbf{p} \in \mathbf{U}^*} \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle \leq \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}^*} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}\mathbf{u} \rangle, \quad \forall \mathbf{u} \in -\mathbf{N}_{\mathbf{U}^*}(\mathbf{p}) : \mathbf{T}\mathbf{u} \in \mathbf{N}_{\mathbf{W}^*}(\boldsymbol{\sigma}); \quad (\text{I.39})$$

onde:

$$\mathbf{N}_{\mathbf{W}} : \text{cone de reações bloqueadas internas}; \quad (\text{I.40})$$

$$-\mathbf{N}_{\mathbf{U}} : \text{cone de reações bloqueadas externas}; \quad (\text{I.41})$$

$$-\mathbf{N}_{\mathbf{U}^*} : \text{cone de deslocamentos livres}; \quad (\text{I.42})$$

$$\mathbf{N}_{\mathbf{W}^*} : \text{cone de deformações livres}. \quad (\text{I.43})$$

Justificativa:

devido a (I.37), $\exists \mathbf{p} \in \mathbf{U}^*$ tal que $\mathbf{T}^* \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p}$ para $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}^* \Rightarrow$ pelo teorema I.1.2 tem-se $\inf_{\mathbf{p} \in \mathbf{U}^*} \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle \leq \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}^*} \langle \mathbf{T}^* \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u} \rangle = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}^*} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}\mathbf{u} \rangle$, devido a equação (I.29). \square

As condições variacionais de consistência podem ser expressas em termos mecânicos como segue:

i) Qualquer escolha significativa de uma força interna e da correspondente força externa equilibrada deve ser tal que, o trabalho virtual interno máximo não é menor que o trabalho virtual externo mínimo.

ii) Qualquer escolha significativa de um campo de deslocamento e da correspondente deformação compatível deve ser tal que o trabalho virtual externo mínimo não é maior que o trabalho virtual interno máximo.

O máximo e o mínimo acima são avaliados permitindo-se aos respectivos conjuntos duais variarem em seus conjuntos admissíveis.

Uma escolha significativa é aquela para qual estes extremos são finitos, ou seja, para os potenciais operando em seu domínios efetivo, (ver definição A2.3).

Sobre as considerações vistas, a validade das equações (I.36) e (I.37) (que se referem a existência de soluções), expressam condições necessárias para a existência de uma solução do problema estrutural.

A prova da suficiência pode ser obtida assumindo-se convenientes condições de regularidade sobre potenciais convexos, isto é, hipótese de continuidade em suas derivadas de ordem superior.

Em problemas de mecânica de estruturas esta regularidade pode ser assumida sem qualquer perda significativa de generalidade. Por exemplo, será visto na seção I.4 que, na plasticidade perfeita este potencial é representado pela função indicatriz (ver a definição I.1.4), a qual pode ser aproximada por funcionais contínuos e diferenciáveis (ver proposição B3.11) para fins de definição da taxa de deformação plástica, ou seja, regularizada.

Pode-se então concluir que, a existência de uma solução para um problema estrutural não depende somente dos potenciais de restrições por si só, mas também dos seus domínios de definição.

Análise Limite:

O estudo das propriedades de intersecção de conjuntos convexos vistos na seção I.1 pode ser aplicado para caracterizar-se a existência de estados limites envolvendo condições de equilíbrio e compatibilidade em problemas estruturais.

Considera-se em detalhes a análise limite para problemas de equilíbrio.

Definição I.3.1 - Estado Limite Estático.

Um estado limite estático é atingido quando é possível encontrar um deslocamento não trivial tal que qualquer incremento adicional realizando um trabalho virtual positivo irá fazer o problema de equilíbrio não admitir solução.

Do ponto de vista geométrico, esta definição é equivalente a assumir a existência de um hiperplano separando dois conjuntos convexos $\mathbf{T}^*\mathbf{W}^*$ e \mathbf{U}^* , tal que, pelo teorema I.1.3, pode-se estabelecer um teorema sobre o estado limite estático.

Teorema I.3.1:

Um par $\{\mathbf{p}_0, \boldsymbol{\sigma}_0\}$ está em um estado limite estático se e somente se:
 $\mathbf{T}^*\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbf{W}^*, \mathbf{p}_0 \in \mathbf{U}^*$ e $\exists \mathbf{u}_0 \neq 0, \boldsymbol{\varepsilon}_0 \in \mathbf{W}$ com $\mathbf{T}\mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0$, satisfazendo:

$$\begin{cases} -\mathbf{u}_0 \in N_{\mathbf{U}^*}(\mathbf{p}_0), \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0 \in N_{\mathbf{W}^*}(\boldsymbol{\sigma}_0) \end{cases};$$

ou equivalentemente:

$$\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{u}_0 \rangle = \inf_{\mathbf{p} \in \mathbf{U}^*} \langle \mathbf{p}, \mathbf{u}_0 \rangle = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}^*} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle. \quad (\text{I.44})$$

Nessas condições qualquer incremento adicional $\boldsymbol{\delta}$, tal que $\langle \boldsymbol{\delta}, \mathbf{u}_0 \rangle > 0$, irá tornar impossível o equilíbrio pois, se o conjunto admissível de forças externas muda para $\mathbf{U}^* + \boldsymbol{\delta}$, a equação (I.44) se torna:

$$\inf_{\mathbf{p} \in \mathbf{U}^* + \boldsymbol{\delta}} \langle \mathbf{p}, \mathbf{u}_0 \rangle = \inf_{\mathbf{p} \in \mathbf{U}^*} \langle \mathbf{p}, \mathbf{u}_0 \rangle + \langle \boldsymbol{\delta}, \mathbf{u}_0 \rangle > \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}^*} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle; \quad (\text{I.45})$$

e então, a condição de existência (I.37) é violada.

Observação:

No teorema I.1.3 aparece um elemento \mathbf{z}_0^* que pertence à intersecção dos cones dos conjuntos \mathbf{A} e \mathbf{B} em um elemento $\mathbf{z}_0 \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$. Aqui, a aplicação é mais geral no sentido de

que toma-se um elemento $\mathbf{p} \in \mathbf{N}_U(\mathbf{u}_0)$ e um outro $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{N}_W(\boldsymbol{\varepsilon}_0)$, os quais estão relacionados por \mathbf{T}^* e \mathbf{T} : $\langle \mathbf{p}, \mathbf{u}_0 \rangle = \langle \mathbf{T}^* \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}_0 \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T} \mathbf{u}_0 \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle$.

Estado Limite Estático Impróprio.

Existem problemas estruturais, para os quais qualquer estado de equilíbrio resulta em um estado limite. Isto ocorre quando o envoltório linear de $\mathbf{T}^* \mathbf{W}^*$ e \mathbf{U}^* é um sub-espaço estritamente contido em \mathbf{V}^* .

Nesse caso, para qualquer intersecção de dois conjuntos convexos, existe ao menos um hiperplano separador contendo seu envoltório linear, isto é:

$$\exists \mathbf{u}_0 \in \mathbf{Q}_{\mathbf{T}^* \mathbf{W}^* - \mathbf{U}^*}^\perp, \mathbf{u}_0 \neq 0 \text{ ou equivalentemente: } \exists \mathbf{u}_0 \neq 0, \mathbf{u}_0 \in \mathbf{Q}_{\mathbf{U}^*}^\perp, \mathbf{T} \mathbf{u}_0 \in \mathbf{Q}_{\mathbf{W}^*}^\perp.$$

Justificativa:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 \in \mathbf{Q}_{\mathbf{T}^* \mathbf{W}^* - \mathbf{U}^*}^\perp &\Leftrightarrow \text{pelo lema I.1.1, } \mathbf{u}_0 \in \mathbf{Q}_{\mathbf{U}^*}^\perp \text{ e } \mathbf{u}_0 \in \mathbf{Q}_{\mathbf{T}^* \mathbf{W}^*}^\perp \Rightarrow \\ \mathbf{u}_0 \in \mathbf{Q}_{\mathbf{T}^* \mathbf{W}^*}^\perp &\Leftrightarrow \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{T}^*(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0) \rangle = 0, \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbf{W}^* \Leftrightarrow \langle \mathbf{T} \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow \\ \mathbf{T} \mathbf{u}_0 &\in \mathbf{Q}_{\mathbf{W}^*}^\perp \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_0 \in \mathbf{Q}_{\mathbf{W}^*}^\perp. \end{aligned} \quad (\text{I.46})$$

E o resultado segue. \square

Do ponto de vista mecânico esta evidência não é pouco comum de ocorrer.

De fato, em qualquer problema estático no qual exista um deslocamento rígido não trivial, o envoltório linear do conjunto convexo $\mathbf{T}^* \mathbf{W}^*$ é um subespaço estritamente contido no Espaço \mathbf{V}^* .

A figura I.10 ilustra essa afirmação.

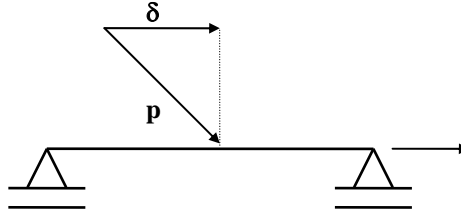


Figura I.10 - Configuração em que existe um deslocamento rígido não trivial.

Isto segue da relação:

$$\mathbf{T}^* \mathbf{W}^* \subset \mathbf{Im}(\mathbf{T}^*) = \mathbf{N}(\mathbf{T})^\perp \subset \mathbf{V}^*; \quad (\text{I.47})$$

o que mostra que para $\mathbf{f} \in \mathbf{N}(\mathbf{T})^\perp \subset \mathbf{V}^*$, onde :

$$\mathbf{N}(\mathbf{T})^\perp = \{ \mathbf{p} \in \mathbf{U}^* \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle = 0, \mathbf{u} \in \mathbf{N}(\mathbf{T}) \}; \quad (\text{I.48})$$

então, qualquer deslocamento $\mathbf{u} \in \mathbf{N}(\mathbf{T})$ está relacionado com deformação nula, pois,

$$\mathbf{N}(\mathbf{T}) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{U} \mid \mathbf{T} \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \}. \quad (\text{I.49})$$

Além disso, o conjunto convexo \mathbf{U}^* é usualmente especificado como, a soma de um incremento $\boldsymbol{\delta}$ aplicado e de um conjunto convexo \mathbf{R} de reações de restrição e desde que, neste caso, o envoltório afim de \mathbf{R} é estritamente contido no espaço completo \mathbf{V}^* , o mesmo ocorre para $\mathbf{U}^* = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{R}$ tal que $\langle \boldsymbol{\delta}, \mathbf{u} \rangle = 0$.

Qualquer estado de equilíbrio será então chamado um estado limite estático impróprio e a separação dos dois conjuntos convexos pode então ser obtida por meio de qualquer

incremento adicional não pertencente ao seu envoltório linear, isto é, tal que: $\langle \delta, \mathbf{u}_0 \rangle \neq 0$ para ao menos um \mathbf{u}_0 satisfazendo as condições previstas em (I.46).

A figura I.11 ilustra essa configuração.

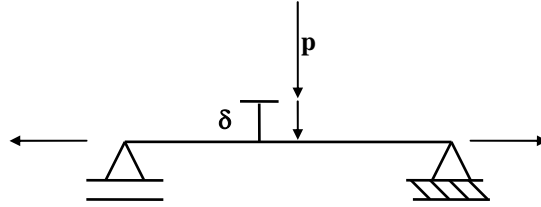


Figura I.11 - incremento adicional não pertencente ao envoltório linear de \mathbf{V}^* .

Dessa forma é conveniente definir um estado limite mais estrito denominado estado limite estático próprio, que é mais significante.

Definição I.3.2- Estado Limite Estático Próprio.

Diz-se que, um estado limite estático próprio é obtido, quando é possível encontrar um deslocamento não ortogonal ao envoltório linear de $\mathbf{T}^*\mathbf{W}^*$ e \mathbf{U}^* , tal que, qualquer incremento adicional realizando um trabalho virtual positivo irá fazer o problema de equilíbrio não admitir solução.

Do ponto de vista geométrico isto ocorre quando existe um hiperplano separando propriamente os dois conjuntos convexos $\mathbf{T}^*\mathbf{W}^*$ e \mathbf{U}^* .

Em virtude do teorema I.1.4, um estado limite estático próprio pode ser caracterizado como segue:

Teorema I.3.2: Estado limite estático próprio.

Um par $\{\mathbf{p}_0, \boldsymbol{\sigma}_0\}$ está em um estado limite estático próprio se e somente se: $\mathbf{T}^*\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbf{W}^*, \mathbf{p}_0 \in \mathbf{U}^*$ e $\exists \mathbf{u}_0 \neq 0, \mathbf{u}_0 \in \mathbf{U}, \boldsymbol{\varepsilon}_0 \in \mathbf{W}$ com $\mathbf{T}\mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0$, satisfazendo:

$$\begin{cases} -\mathbf{u}_0 \in N_{\mathbf{U}^*}(\mathbf{p}_0), \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0 \in N_{\mathbf{W}^*}(\boldsymbol{\sigma}_0) \end{cases};$$

tal que ao menos uma das condições é verificada:

$$\mathbf{u}_0 \notin Q_{\mathbf{U}^*}^\perp; \tag{I.50}$$

ou

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 \notin Q_{\mathbf{W}^*}^\perp; \tag{I.51}$$

onde a condição (I.50) indica um estado limite próprio externo e (I.51) um estado limite próprio interno. Dependendo de uma ou outra condição se verificar, diz-se que um estado limite estático próprio externo ou interno ocorrerá.

Uma discussão análoga pode ser tirada para análise limite cinemática, investigando propriedades de intersecção dos dois conjuntos convexos $\mathbf{T}\mathbf{U}$ e \mathbf{W} .

I.4- Análise Estrutural para Elastoplasticidade Perfeita.

I.4.1- Teoremas de colapso plástico.

Com relação ao teorema estático de colapso plástico, todas as condições estabelecidas até aqui pelo teorema I.3.2 sobre estados limites estáticos próprios podem ser estendidas diretamente para a teoria das estruturas em regime elastoplástico perfeito com regra associada de fluxo plástico. As definições do estado de colapso e do correspondente mecanismo plástico coincidem com as condições vistas na seção anterior. Assim, se um estado limite estático próprio é obtido para estruturas neste regime, pode-se afirmar a iminência de um colapso plástico para tal estrutura.

Esta é essencialmente a condição do teorema estático de colapso plástico.

O teorema cinemático de colapso plástico, contrariamente ao teorema estático, não necessita nenhuma condição sobre a regra de fluxo plástico e determina um limite superior para a análise do colapso plástico. Estabelece assim um resultado geral de não existência de solução para o modelo em regime elastoplástico perfeito quando é violada a condição variacional de existência para o problema de equilíbrio. O que é dado pelo seguinte teorema.

Teorema I.4.1.1- *teorema cinemático generalizado.*

O equilíbrio é impossível se existe um mecanismo tal que a potência virtual externa mínima é maior que a potência virtual interna máxima.

Este teorema pode ser estendido para a análise de estruturas em regime elastoplástico perfeito com regra de fluxo plástico associado entendendo-se o termo potência virtual externa mínima como a potência associada às cargas externas adicionada à taxa de dissipação plástica das reações em correspondência ao incremento dado e o termo potência virtual interna máxima por taxa de dissipação plástica, resultando no seguinte teorema.

Teorema I.4.1.2- *teorema cinemático clássico.*

Um determinado incremento não pode ser suportado pela estrutura se existe um mecanismo plástico tal que a soma da potência externa associada ao incremento dado é maior que a taxa de dissipação plástica interna.

Considerando-se a análise limite, para os materiais plásticos que obedecem a regra da normalidade, a dissipação plástica interna tem uma propriedade de maximalidade e a dissipação plástica externa tem uma propriedade de minimalidade regidas por potenciais convexos e côncavos respectivamente.

Este comportamento tem muitas vezes induzido para a enganosa conclusão que o resultado de não existência de solução estabelecido no teorema cinemático envolvendo estes potenciais, seria válido somente com referência ao colapso plástico de materiais padrão, nos quais o modelo constitutivo pode derivar da existência de um potencial. Ao contrário, a discussão vista permite concluir que o teorema cinemático trata com considerações de equilíbrio puro e portanto não requer qualquer condição constitutiva do material.

I.4.2- Análise da elastoplasticidade perfeita em taxas.

A análise limite em termos de taxas de tensão e de deformação, analogamente ao modelo estrutural visto nas seções I.2 e I.3, é regida por funcionais convexos elásticos, funcionais convexos plásticos e seus correspondentes funcionais conjugados, decompostos em uma soma aditiva cujas variáveis de estado são as taxas de tensão e deformação citadas, para as quais existe uma relação recíproca, como será visto a seguir.

Esta afirmação é válida pois, em regime elastoplástico perfeito (ver figura I.12) com regra de fluxo plástico associada pode-se afirmar a independência entre a taxa de dissipação plástica e a taxa de dissipação elástica.

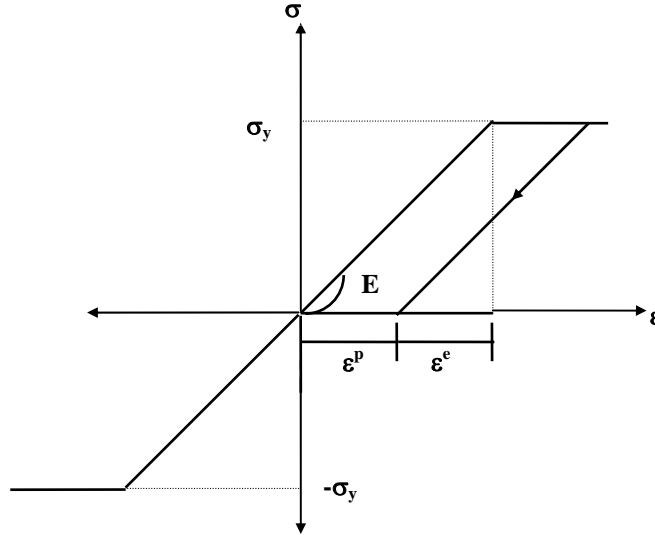


Figura I.12 - Relação tensão-deformação uni-axial para Elastoplasticidade perfeita.

Assim, considerando-se a taxa de deformação total $\dot{\epsilon}$ e a taxa de tensão total $\dot{\sigma}$, tem-se que estas podem ser decompostas aditivamente em:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p; \quad (I.52)$$

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^e - \dot{\sigma}^p; \quad (I.53)$$

onde $\dot{\epsilon}^e$ é a taxa de deformação elástica, $\dot{\epsilon}^p$ é a taxa de deformação plástica, $\dot{\sigma}^e$ é a taxa de tensão elástica e $\dot{\sigma}^p$ é a taxa de tensão plástica.

Considerando-se estas decomposições, é possível definir-se o problema em questão através de potenciais convexos correlacionados com potenciais convexos conjugados, decompostos em taxas elásticas e plásticas da seguinte maneira:

i) o potencial convexo das taxas de deformação elástica e seu conjugado são definidos pelas formas quadráticas

$$\phi(\dot{\epsilon}^e) = \frac{1}{2} \|\dot{\epsilon}^e\|_E^2 = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}^e \cdot {}^T E \cdot \dot{\epsilon}^e \quad \text{e} \quad \phi^*(\dot{\sigma}^e) = \frac{1}{2} \|\dot{\sigma}^e\|_{E^{-1}}^2 = \frac{1}{2} \dot{\sigma}^e \cdot {}^T E^{-1} \cdot \dot{\sigma}^e; \quad (I.54)$$

onde E é o operador simétrico definido positivo, reunindo os módulos elásticos de rigidez.

ii) o potencial convexo das taxas de deformação plástica e seu conjugado, são definidos pelos funcionais convexos de penalidade perfeita:

$$\xi(\mathcal{E}^p) = \Gamma_{N_{W^*}(\sigma)}(\mathcal{E}^p) \text{ e } \xi^*(\mathcal{E}) = \Gamma_{N_W(\varepsilon)}(\mathcal{E}); \quad (\text{I.55})$$

onde $N_{W^*}(\sigma)$ representa o cone normal externo ao domínio de tensões admissíveis W^* no ponto $\sigma \in W^*$ e $N_W(\varepsilon)$ representa o cone normal externo ao domínio de deformações livres W no ponto $\varepsilon \in W$, para o qual o passo incremental está sendo executado e $\Gamma_{N_{W^*}(\sigma)}$ e $\Gamma_{N_W(\varepsilon)}$ são definidos analogamente à definição I.1.4.

Fazendo-se uso das equações (I.54) e (I.55), pode-se definir o funcional convexo das taxas de deformação e seu respectivo funcional convexo conjugado das taxas de tensão, os quais são aditivamente decompostos na soma de dois potenciais convexos e de dois potenciais convexos conjugados dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} \psi(\mathcal{E}) &= \inf_{\mathcal{E}^e, \mathcal{E}^p} \{ \phi(\mathcal{E}^e) + \xi(\mathcal{E}^p) \text{ tal que } \mathcal{E} = \mathcal{E}^e + \mathcal{E}^p \} = \\ &= \{ \phi(\mathcal{E}^e) + \inf_{\mathcal{E}^p} (\xi(\mathcal{E}^p)) \text{ tal que } \mathcal{E} = \mathcal{E}^e + \mathcal{E}^p \}; \end{aligned}$$

que é equivalente a:

$$\psi(\mathcal{E}) = \phi(\mathcal{E}^e(\mathcal{E})) + \xi(\mathcal{E}^p(\mathcal{E})); \quad (\text{I.56})$$

Analogamente,

$$\psi^*(\mathcal{E}) = \phi^*(\mathcal{E}^e(\mathcal{E})) + \xi^*(\mathcal{E}^p(\mathcal{E})); \quad (\text{I.57})$$

onde $\mathcal{E} = \mathcal{E}^e(\mathcal{E}) + \mathcal{E}^p(\mathcal{E})$ tal que:

$$\begin{cases} \mathcal{E}^e(\mathcal{E}) = \nabla \phi^*(\mathcal{E}^e); \\ \mathcal{E}^p(\mathcal{E}) \in \partial \xi^*(\mathcal{E}^p); \end{cases} \quad (\text{I.58})$$

e $\mathcal{E} = \mathcal{E}^e(\mathcal{E}) - \mathcal{E}^p(\mathcal{E})$ é tal que:

$$\begin{cases} \mathcal{E}^e(\mathcal{E}) = \nabla \phi(\mathcal{E}^e); \\ \mathcal{E}^p(\mathcal{E}) = -\nabla \xi(\mathcal{E}^p). \end{cases} \quad (\text{I.59})$$

Desde que, $\mathcal{E} \in N_W(\varepsilon)$, é unicamente determinado $\forall \mathcal{E} \in N_{W^*}(\sigma)$, e a recíproca não é verdadeira pois \mathcal{E}^p não é único considerando-se plasticidade perfeita, então as equações (I.56), (I.57), (I.58) e (I.59) estão bem definidas pois, os potenciais ϕ e ϕ^* são estritamente convexos, inferiormente semicontínuos (i.s.c.), diferenciáveis e coercivos (ver apêndice A, seção A2, teorema B3.2 e definição B3.3), além disso, o potencial ξ é convexo, i.s.c., coercivo e diferenciável, pois seu subdiferencial contém um único \mathcal{E}^p . O potencial ξ^* é convexo, coercivo mas não se pode afirmar a sua diferenciabilidade, já que \mathcal{E}^p não é único no caso de plasticidade perfeita, logo, o seu subdiferencial pode conter mais de um ponto. Assim, ϕ , ϕ^* e ξ^* se relacionam respectivamente a uma única taxa de tensão elástica \mathcal{E}^e , a uma única taxa de deformação elástica \mathcal{E}^e e a uma única taxa de tensão plástica \mathcal{E}^p .

De acordo com as definições de ϕ , ϕ^* , ξ e ξ^* os potenciais ψ e ψ^* podem ser definidos explicitamente por:

$$\psi(\mathcal{E}) = \inf_{\mathcal{E}^e, \mathcal{E}^p} \{ \frac{1}{2} \|\mathcal{E} - \mathcal{E}^p\|_E^2 + \Gamma_{N_{W^*}(\sigma)}(\mathcal{E}^p) \}; \quad (\text{I.60})$$

$$\psi^*(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \|\mathcal{E} + \mathcal{E}^p\|_{E^{-1}}^2 + \Gamma_{N_W(\varepsilon)}(\mathcal{E}^p). \quad (\text{I.61})$$

Utilizando-se a inter-relação entre o potencial convexo ψ e seu conjugado ψ^* , definidos em (I.60) e (I.61), tem-se que as variáveis de restrições internas podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \xi \in \partial\psi^*(\sigma) \\ \xi = \nabla\psi(\sigma) \end{cases}, \quad (I.62)$$

ou seja, ξ, σ é um par conjugado com respeito a ψ e ψ^* .

Observação:

Da maneira como foi definido, o potencial convexo ψ é conhecido como potencial “*inf-convolution*” e denotado por $\psi = (\phi \nabla \xi)$.

Analogamente aos resultados obtidos envolvendo as variáveis de restrições internas, pode-se analisar o modelo elastoplástico em taxas de reações externas e deslocamentos considerando-se:

$$\mathbf{p} = \mathbf{r} + \delta, \quad (I.63)$$

como taxas de reações de restrições, onde \mathbf{p} é a taxa reação de restrição total, definida pela soma da taxa de restrição externa \mathbf{r} com o incremento em taxa de restrição δ .

Os potenciais côncavos e respectivos potenciais conjugados são definidos então por:

$$j(\mathbf{u}) = \gamma(\mathbf{u}) + \langle \delta, \mathbf{u} \rangle; \quad (I.64)$$

$$j^*(\mathbf{p}) = \gamma^*(\mathbf{r}); \quad (I.65)$$

tal que,

$$\gamma(\mathbf{u}) = \Gamma_{\mathbf{N}_R(\mathbf{r})}(\mathbf{u}) \text{ e } \gamma^*(\mathbf{r}) = \Gamma_{-\mathbf{N}_U(\mathbf{u})}(\mathbf{r});$$

onde $\mathbf{N}_R(\mathbf{r})$ denota o cone normal externo para o domínio de reações admissíveis \mathbf{R} e $\mathbf{N}_U(\mathbf{u})$ denota o cone normal externo para o domínio de deslocamentos livres \mathbf{U} , para o qual o passo incremental está sendo executado. Ressalta-se ainda que, $\Gamma_{\mathbf{N}_R(\mathbf{r})}$ e $\Gamma_{-\mathbf{N}_U(\mathbf{u})}$ tem definições análogas à definição I.1.4. Assim, as relações de restrições externas podem então ser escritas por:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in \partial\Gamma_{\mathbf{N}_U(\mathbf{u})}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{r} \in \partial\Gamma_{-\mathbf{N}_R(\mathbf{r})}(\mathbf{u}) \end{cases}; \quad (I.66)$$

se a condição de existência I.4.3 ii) dada a seguir está satisfeita.

I.4.3- Condições de existência.

Antes de determinar as condições de existência serão definidos os conjuntos admissíveis para as variáveis de estado do problema:

$$\mathcal{U} = \text{dom } j = -\mathbf{N}_R(\mathbf{r}) \subset \mathbf{U}; \quad (I.68)$$

$$\mathcal{U}^* = \text{dom } j^* = \delta + \mathbf{R} = \delta + \mathbf{N}_U(\mathbf{u}) \subset \mathbf{U}^*; \quad (I.69)$$

$$\mathcal{W} = \text{dom } \psi = \mathbf{N}_{W^*}(\sigma) \subset \mathbf{W}; \quad (I.70)$$

$$\mathbf{W}^* = \text{dom } \psi^* = \mathbf{N}_W(\boldsymbol{\varepsilon}) \subset \mathbf{W}^*. \quad (\text{I.71})$$

As condições de existência.

i) A primeira condição de existência $\mathbf{T}\mathcal{U} \cap \mathbf{W}^* \neq \emptyset$ é trivialmente verificada pois $\mathbf{0} \in \mathbf{T}\mathcal{U} - \mathbf{W}^*$.

ii) A segunda condição de existência $\mathbf{T}^*\mathbf{W}^* \cap \mathcal{U}^* \neq \emptyset$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} 0 \in \mathbf{T}^* \mathbf{N}_W(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\delta}^* - \mathbf{N}_U(\mathbf{u}) &\Leftrightarrow \\ \boldsymbol{\delta}^* \in \mathbf{T}^* \mathbf{N}_W(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{N}_U(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (\text{I.72})$$

Portanto, o problema elastoplástico incremental em taxa de reação externa e em taxa de deslocamento livre admite ao menos uma solução se e somente se, para o passo incremental $\boldsymbol{\delta}^*$ é válido:

$$\langle \boldsymbol{\delta}^*, \mathbf{u} \rangle \leq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in -\mathbf{N}_R(\mathbf{r}); \quad \mathbf{T}\mathbf{u} \in \mathbf{N}_{W^*}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (\text{I.73})$$

A interpretação geométrica de I.4.3ii) é que se esta condição se verifica então a velocidade relativa à taxa incremental $\boldsymbol{\delta}^*$ de \mathcal{U}^* com respeito a $\mathbf{T}^*\mathbf{W}^*$ é tal que os dois conjuntos não tendem a separar-se. Note que neste caso a seguinte condição de equilíbrio está satisfeita:

$$\inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{U}^*} \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle \leq \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}^*} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}^* \rangle \text{ se } \langle \boldsymbol{\delta}^*, \mathbf{u} \rangle \leq 0. \quad (\text{I.74})$$

Esta não é verificada se e somente se o passo elastoplástico incremental está sendo executado iniciando de um estado limite estático, descrito a seguir.

Na análise elastoplástica em taxas, um cuidado que deve-se ter é quando:

$$\langle \boldsymbol{\delta}^*, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in -\mathbf{N}_R(\mathbf{r}); \quad \mathbf{T}\mathbf{u} \in \mathbf{N}_{W^*}(\boldsymbol{\sigma});$$

que é o caso em que $\exists \mathbf{u} \in \mathbf{Q}_{\mathbf{T}^*\mathbf{W}^* - \mathcal{U}^*}^\perp$, $\mathbf{u} \neq 0$ tal que $\mathbf{u} \in \mathbf{Q}_{\mathcal{U}^*}^\perp$ e $\mathbf{T}\mathbf{u} \in \mathbf{Q}_{\mathbf{W}^*}^\perp$ e então,

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{U}^*}^\perp = -\mathbf{N}_R(\mathbf{r}) \text{ e } \mathbf{Q}_{\mathbf{W}^*}^\perp = \mathbf{N}_{W^*}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (\text{I.75})$$

A interpretação geométrica deste caso é que $\mathbf{u} \neq 0$ gera um hiperplano separador para os conjuntos $\mathbf{T}^*\mathbf{W}^*$ e \mathcal{U}^* que contém ambos os conjuntos e então um estado limite estático impróprio em taxas está ocorrendo. Assim, para qualquer incremento $\boldsymbol{\delta}^*$ tal que $\langle \boldsymbol{\delta}^*, \mathbf{u} \rangle \neq 0$ tem-se a consequente separação dos conjuntos $\mathbf{T}^*\mathbf{W}^*$ e \mathcal{U}^* .

Logo, a análise do problema somente estará bem definida se para qualquer passo incremental dado a nova situação satisfaz as condições do teorema I.3.2 (teorema do estado limite estático próprio), que exclui o caso citado em (I.75).

I.5- Introdução à análise da elastoplasticidade perfeita relacionada à função convexa de plastificação.

Formulação no espaço das tensões.

Em [Panagiotopoulos,1985] é visto que, para materiais elastoplásticos perfeitos em regime de pequenas deformações é possível definir um subconjunto convexo fechado em \mathfrak{R}^6 ,

$$\mathbf{K}_\sigma = \{ \sigma \in \mathbf{N}_W(\epsilon) / \mathbf{F}(\sigma) \leq 0 \}, \tag{I.76}$$

tal que $\mathbf{0} \in \mathbf{K}_\sigma$, onde $\mathbf{F}: \mathfrak{R}^6 \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma função continuamente diferenciável chamada função de plastificação para o modelo, dentre as quais pode-se citar a função escalar de Von-Mises e a função vetorial de Tresca, entre outras.

Desde que é válida a relação:

$$\xi = \xi^e(\xi) + \xi^p(\xi) \in \partial \psi^*(\xi) = \partial(\frac{1}{2} S_{ijkl} \xi_{hk} \xi_{ij} + \Gamma_{N_W(\epsilon)}(\xi)); \tag{I.77}$$

onde $\mathbf{S} = \mathbf{E}^{-1}$; tal que, $\xi_{ij}^e \in \partial(\frac{1}{2} S_{ijkl} \xi_{hk} \xi_{ij})$ e $\xi^p(\xi) \in \partial(\Gamma_{N_W(\epsilon)}(\xi))$, a qual é equivalente a:

$$\xi_{ij}^e = S_{ijkl} \xi_{hk} \text{ e } \xi_{ij}^p = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda_1 \geq 0, \mathbf{F}(\sigma) \leq 0, \lambda_1 \cdot \mathbf{F}(\sigma) = 0; \tag{I.78}$$

onde $\lambda_1 \in \mathfrak{R}$ é conhecido como taxa de multiplicador plástico.

Logo,

$$\xi = \xi^e(\xi) + \xi^p(\xi) \in \mathbf{S} \xi + \partial(\Gamma_{N_W(\epsilon)}(\xi)), \text{ onde } \mathbf{S} \xi = [S_{ijkl} \xi_{hk}].$$

Portanto, nas hipóteses de convexidade e regularidade dos funcionais pode-se escrever:

$$\xi_{ij}^e = S_{ijkl} \xi_{hk} \text{ e } \xi_{ij}^p = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda_1 \geq 0, \mathbf{F}(\sigma) \leq 0, \lambda_1 \cdot \mathbf{F}(\sigma) = 0. \tag{I.79}$$

Logo, $\xi_{ij}^p = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \in \frac{\partial \xi}{\partial \sigma_{ij}}$ e portanto ξ_{ij}^p deriva de um potencial convexo em σ .

A interpretação geométrica de ξ^p com relação a \mathbf{F} e \mathbf{F}_k é vista na figura I.13, que mostra também a relação elastoplástica perfeita para as variáveis ϵ^p e σ .

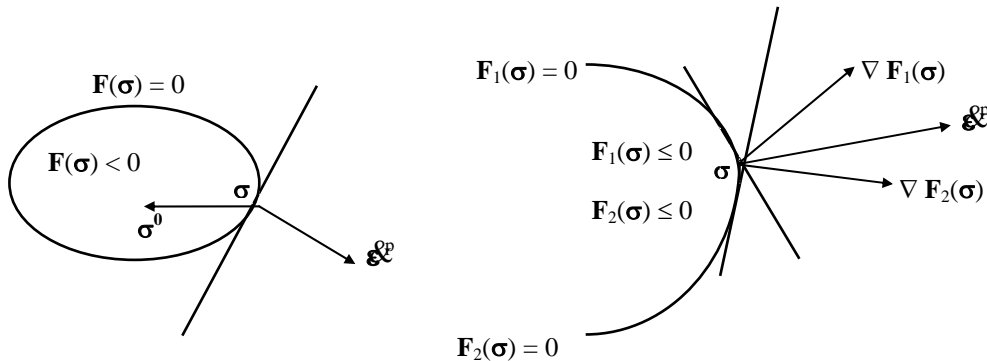


Figura I.13 - interpretação geométrica de \mathfrak{E}^p com relação a \mathbf{F} e \mathbf{F}_k .

Assim, obteve-se as relações constitutivas para materiais elastoplásticos perfeitos em regime de pequenas deformações, onde $\mathfrak{E} \in \mathfrak{R}^6$ é um elemento do cone normal externo para \mathbf{K}_σ no ponto $\sigma \in \mathbf{K}_\sigma$, o que é equivalente a:

$$\mathfrak{E}_{ij}^p (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \leq 0, \quad \forall \sigma^* \in \mathbf{K}_\sigma, \quad (\text{I.80})$$

que é o conhecido postulado de estabilidade de *Drucker* ou “o princípio do máximo trabalho plástico de *Hill*”.

Se o contorno de \mathbf{K}_σ possui vértices, isto é, se

$$\mathbf{K}_\sigma = \{\sigma \in \mathbf{N}_W(\varepsilon) / \mathbf{F}_k(\sigma) \leq 0\}; \quad (\text{I.81})$$

onde $k = 1, \dots, m$ e cada \mathbf{F}_k é uma função regular (pode-se citar por exemplo a função de Tresca), então para o vértice pode-se escrever:

$$\mathfrak{E}_{ij} = \mathfrak{E}_{ij}^e + \mathfrak{E}_{ij}^p = S_{ijhk} \mathfrak{E}_{hk} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda_k \geq 0, \quad \mathbf{F}_k(\sigma) \leq 0, \quad \lambda_k \cdot \mathbf{F}_k(\sigma) = 0; \quad (\text{I.82})$$

para $k = 1, \dots, m$.

Até aqui, somente o caso de carregamento foi considerado. Para incluir o caso de descarregamento, basta considerar-se:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 0 \text{ se } \mathbf{F}_k(\sigma) < 0 \text{ ou se } \mathbf{F}_k(\sigma) = 0 \text{ e } \dot{\mathbf{F}}_k(\sigma) \leq 0; \\ &\text{e } \lambda_k \geq 0, \text{ se } \mathbf{F}_k(\sigma) = 0 \text{ e } \dot{\mathbf{F}}_k(\sigma) = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.83})$$

Dessa forma, pode-se escrever a lei do material elastoplástico perfeito na forma (I.80), onde:

$$\begin{aligned} \text{para } \sigma \text{ tal que } \mathbf{F}(\sigma) \leq 0, \quad \mathfrak{E}_{ij} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \leq 0, \quad \forall \sigma^* \in \mathbf{K}_\sigma; \\ \text{e para } \sigma \text{ tal que } \mathbf{F}(\sigma) = 0, \quad \mathfrak{E}_{ij} \mathfrak{E}_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.84})$$

Formulação no espaço das deformações.

É feito de maneira análoga ao efetuado para o espaço das tensões, considerando-se de (I.76) o conjunto $\mathbf{K}_\varepsilon = \{\varepsilon \in \mathbf{N}_W^*(\sigma) / \mathbf{F}(\varepsilon) \leq 0\}$.

Nesse caso, mostra-se também relações análogas a (I.78) e (I.79):

$$\mathfrak{E}_{ij}^e = E_{ijhk} \mathfrak{E}_{hk} \text{ e } \mathfrak{E}_{ij}^p = \lambda_i \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad \lambda_i \geq 0, \quad \mathbf{F}(\varepsilon) \leq 0, \quad \lambda_i \cdot \mathbf{F}(\varepsilon) = 0; \quad (\text{I.85})$$

$$\mathfrak{E}_{ij} = \mathfrak{E}_{ij}^e + \mathfrak{E}_{ij}^p = E_{ijhk} \mathfrak{E}_{hk} + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varepsilon_{ij}} \in E_{ijhk} \mathfrak{E}_{hk} + \frac{\partial \xi^*}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (\text{I.86})$$

Logo, $\mathfrak{E}_{ij}^p = \lambda_i \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varepsilon_{ij}} \in \frac{\partial \xi^*}{\partial \varepsilon_{ij}}$ e portanto \mathfrak{E}_{ij}^p deriva de um potencial convexo em ε .

O postulado de *Drucker* visto em (I.80) também é válido nesse caso, $\mathfrak{E} \in \mathfrak{R}^6$ é um elemento do cone normal externo para \mathbf{K}_ε no ponto $\varepsilon \in \mathbf{K}_\varepsilon$, o que é equivalente a:

$$\mathfrak{E}_{ij}^p (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) \leq 0, \quad \forall \varepsilon^* \in \mathbf{K}_\varepsilon;$$

As mesmas conclusões tiradas anteriormente seriam válidas aqui se o contorno de \mathbf{K}_ε possuir vértices, como em (I.81), isto é, se o conjunto \mathbf{K}_ε fosse tal que

$$\mathbf{K}_\varepsilon = \{ \varepsilon \in \mathbf{N}_{\mathbf{W}^*}(\sigma) / \mathbf{F}_{\mathbf{K}}(\varepsilon) \leq 0 \} \quad (\text{I.87})$$

e relações análogas a (I.82), (I.83) e (I.84) podem ser tiradas.

A interpretação geométrica de \mathcal{E}^p com relação a ξ^* é vista na figura I.14, que mostra também a relação elastoplástica perfeita para as variáveis σ e ε^p .

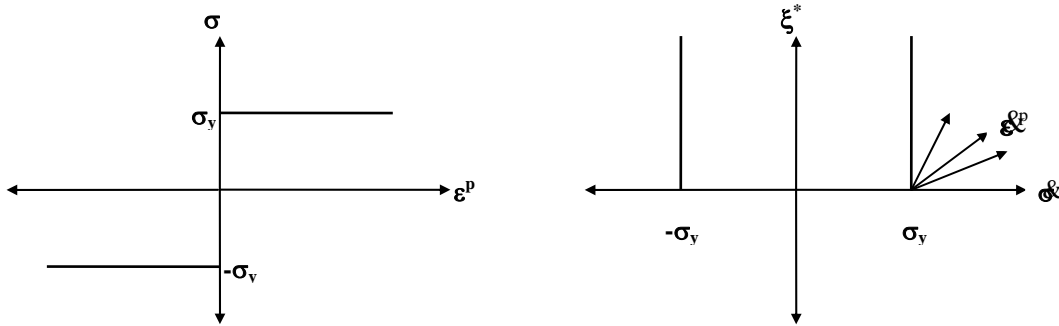


Figura I.14 - interpretação geométrica de \mathcal{E}^p com relação a ξ^* .

Não se considerou até o momento para a superfície de plastificação o efeito de encruamento positivo, que é o regime para o qual a superfície de plastificação pode mudar o comportamento durante o processo de deformação, gerando deformações residuais. Isto será feito com maiores detalhes no capítulo seguinte, baseado no trabalho feito por [Feijó e Zouain, 1990].

I.6- Unicidade de solução.

Até aqui discutiu-se a questão da existência de solução para os modelos propostos, sem se preocupar em afirmar a unicidade ou não da solução obtida.

Para se tratar a questão de unicidade de solução é preciso que se tenha informações sobre o tipo de convexidade dos potenciais, que determinam a relação não-linear entre os pares duais de variáveis de estado.

A convexidade dos potenciais garante a existência de solução para os modelos. A unicidade de solução pode ser afirmada se garantir-se a convexidade estrita dos potenciais em questão, o que pode ser visto nos teoremas B3.1 e B3.2, pois os potenciais ϕ e ξ eram estritamente convexos para $\sigma \in \mathbf{W}^*$.

Na seção I.4 foi visto que o tensor taxa de tensão $\mathcal{E} \in \mathbf{N}_{\mathbf{W}}(\varepsilon)$, é sempre unicamente determinado $\forall \mathcal{E} \in \mathbf{N}_{\mathbf{W}^*}(\sigma)$ e a recíproca não era verdadeira pois \mathcal{E}^p não era unicamente determinado em plasticidade perfeita, já que nesse regime ξ^* era convexo (não estritamente) em $\varepsilon \in \mathbf{E}$, não se garantindo a condição de unicidade nesse caso.

No capítulo II, será definido um potencial, baseado em [Feijó e Zouain, 1989] que é estritamente convexo para o caso de encruamento positivo, o que garantirá a unicidade de solução para \mathcal{E} e \mathcal{E} , ou uma relação recíproca de unicidade entre estas taxas.

No capítulo III, quando se admite o regime de encruamento negativo para os modelos estudados, o potencial que rege os modelos é não-convexo o que implica em não se garantir a unicidade de solução para esses, nesse regime.

Obviamente que no regime elástico sempre se tem unicidade de solução e foi visto que os potenciais elásticos eram estritamente convexos, coercivos e diferenciáveis.

CAPÍTULO II - Modelos Constitutivos Elastoplásticos.

Todos os resultados a serem vistos no decorrer desse capítulo são originais em [Feijóo e Zouain, 1990] e também explorados em [Proença, 1989].

Após ser definido o modelo proposto em [Maier,1976], que analisa os modelos elastoplásticos através de funções de plastificação (analogamente ao feito na seção I.5) conjuntamente com as condições de consistência satisfeitas por essas, um modelo constitutivo elastoplástico é apresentado em suas formas em taxas e incremental, baseado em noções da Análise Convexa vistas no Apêndice B. Serão revistos potenciais elastoplásticos, formulados em taxas e em incrementos finitos, dos quais derivam, respectivamente, taxas e incrementos finitos de tensão e deformação, como elementos dos respectivos subdiferenciais, bem como a relação de dualidade entre essas variáveis. A diferença desse capítulo para o anterior é que os potenciais a serem obtidos podem ser aplicados não só a materiais elastoplásticos perfeitos mas também a materiais elastoplásticos com encruamento positivo que satisfazem as regras de normalidade e associatividade, de acordo com [Feijóo e Zouain, 1990] e àqueles que não são associativos, seguindo o modelo de [Proença, 1989].

A definição do modelo será feita no espaço das tensões, ao contrário dos próximos capítulos, e utilizará uma variável relacionada à plastificação, cuja função é detectar se ocorreu ou não o aparecimento de deformações plásticas ou residuais.

Nesse capítulo a função de plastificação a ser utilizada é do tipo vetorial, relacionada à função de Tresca. Nos capítulos III e IV, os modelos idealizados se basearão na função escalar de Von-Mises. Em ambos os casos, as funções são (não estritamente) convexas.

II.1- Relações constitutivas em taxas para materiais elastoplásticos.

De acordo com o proposto em [Maier, 1976], um modelo elastoplástico para o comportamento de uma grande classe de materiais, pode ser estabelecido como segue:

i) *critério de plastificação*:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \lambda) \leq 0; \quad (\text{II.1})$$

onde \mathbf{f} é a função de plastificação e $\mathbf{f} \in \mathfrak{R}^m$, ou seja, \mathbf{f} é uma função vetorial com m componentes \mathbf{f}_j , chamadas modos plásticos, que são funções regulares de tensão $\boldsymbol{\sigma}$ e do multiplicador plástico $\lambda \in \mathfrak{R}^m$ representando a história das deformações plásticas.

A desigualdade (II.1) é verificada para cada componente e os modos plásticos \mathbf{f}_j são admitidos convexos (definição B3.1) com respeito a $\boldsymbol{\sigma}$.

ii) *Decomposição aditiva da taxa de deformação total* $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$:

Sobre a hipótese de pequenas deformações, a decomposição aditiva de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ é dada por

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p. \quad (\text{II.2})$$

A figura II.1 a ser vista, descreve o comportamento uniaxial para o concreto em tração e compressão simples mostrando a decomposição aditiva da deformação ε sem considerar taxas.

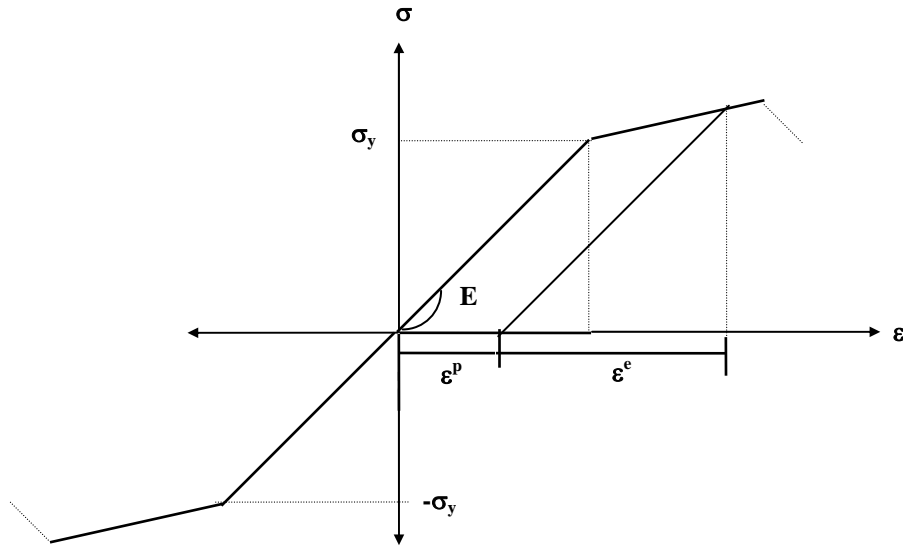


Figura II.1- Análise tensão-deformação do concreto em tração e compressão simples.

iii) *Relação constitutiva elástica:*

$$\dot{\varepsilon}^e = \nabla \phi^*(\boldsymbol{\varepsilon}); \quad (\text{II.3})$$

onde $\phi^*(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ é um potencial diferenciável, coercivo e estritamente convexo com relação a $\boldsymbol{\varepsilon}$ (apêndice A2, definição B3.1 e teorema B3.1).

iv) *Leis de fluxo plástico associadas ao encruamento do material:*

O tensor taxa de deformação plástico $\dot{\varepsilon}^p$ é dado para materiais padrão com regra de fluxo plástico associada por

$$\dot{\varepsilon}^p = \mathbf{f}_\sigma \dot{\lambda}; \quad (\text{II.4})$$

onde \mathbf{f}_σ é um tensor de terceira ordem, denotando o gradiente de \mathbf{f} com respeito a $\boldsymbol{\sigma}$ e $\dot{\lambda} \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor taxa de multiplicador plástico.

v) *Condições de complementaridade e consistência:*

$$\mathbf{f} \cdot \dot{\lambda} = 0 \text{ e } \mathbf{f} \leq 0, \dot{\lambda} \geq 0; \quad (\text{II.5})$$

$$\text{se } \mathbf{f}_j = 0 \text{ então } \dot{\lambda}_j \dot{\lambda}_j = 0, \dot{\lambda}_j \leq 0, \dot{\lambda}_j \geq 0; \quad (\text{II.6})$$

as equações (II.5) e (II.6) implicam respectivamente em que cada componente $\dot{\lambda}_j$ de $\dot{\lambda}$ está relacionada ao correspondente modo plástico \mathbf{f}_j de \mathbf{f} e que somente modos plásticos ativos ($\mathbf{f}_j = 0$) podem contribuir para a taxa de deformação plástica com $\dot{\lambda}_j \neq 0$. A condição (II.6) é consequência de (II.5) obtida derivando-se $\mathbf{f}_j \dot{\lambda}_j = 0$, que se verifica a qualquer instante e

impõe que contribuições em taxas de deformação plásticas nulas, isto é, $\dot{\boldsymbol{\kappa}}_j = 0$, corresponde para um modo plástico que sofreu descarregamento elástico local, ou seja, $\dot{\boldsymbol{\kappa}}_j < 0$. Desta forma a não negatividade monotônica de $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{R}^m$ é escolhida para representar a história da plasticidade.

vi) *Derivada total no tempo:*

A derivada total no tempo de \mathbf{f} é dada por

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}; \quad (\text{II.7})$$

onde $\mathbf{f}_{\boldsymbol{\lambda}}$ denota o gradiente da função de plastificação \mathbf{f} com respeito ao vetor multiplicador plástico $\boldsymbol{\lambda}$. Este gradiente está relacionado às características de encruamento do material e é admitido simétrico negativo semi-definido, excluindo então regime de deformação em encruamento negativo (amolecimento) mas não plasticidade perfeita.

II.2- Formulação variacional das relações constitutivas elastoplásticas.

Nesta seção, as equações constitutivas elastoplásticas (II.1 - II.6) são escritas em uma forma variacional global diferentemente das relações estabelecidas no capítulo I que eram pontuais. Para isso, as seguintes definições são consideradas.

Definição II.2.1:

Considere \mathbf{B} a região ocupada pelo corpo material.

Sejam \mathbf{W}^* e \mathbf{W} de acordo respectivamente com as definições (I.35) e (I.34) do capítulo I, espaços duais aos quais pertencem respectivamente os tensores taxa de tensão e taxa de deformação. Esses espaços vetoriais são dotados com normas e produto dualidade como segue:

$$\| \dot{\boldsymbol{\sigma}} \|_{\mathbf{W}} = \left(\int_{\mathbf{B}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\mathbf{B} \right)^{1/2}; \quad \| \dot{\boldsymbol{\kappa}} \|_{\mathbf{W}^*} = \left(\int_{\mathbf{B}} \dot{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} d\mathbf{B} \right)^{1/2}; \quad (\text{II.8})$$

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}} \rangle_{\mathbf{W} \times \mathbf{W}^*} = \int_{\mathbf{B}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} d\mathbf{B}. \quad (\text{II.9})$$

Os tensores taxa de tensão e deformação são obtidos por:

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}^e = \nabla \Phi_e^*(\dot{\boldsymbol{\sigma}}); \quad (\text{II.10})$$

onde $\Phi_e^*(\boldsymbol{\sigma})$ é a energia elástica total para taxas de tensão,

$$\Phi_e^*(\boldsymbol{\sigma}) = \int_{\mathbf{B}} \phi^*(\boldsymbol{\sigma}) d\mathbf{B}; \quad (\text{II.11})$$

que é um funcional estritamente convexo, diferenciável e coercivo em \mathbf{W}^* .

A energia elástica total para taxas de deformação Φ_e é definida como o funcional conjugado de Φ_e^* em \mathbf{W} :

$$\Phi_e(\dot{\boldsymbol{\kappa}}) = \sup_{\dot{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathbf{W}^*} [\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\kappa}} \rangle - \Phi_e^*(\dot{\boldsymbol{\sigma}})], \quad (\text{II.12})$$

logo Φ_e é também um funcional estritamente convexo, diferenciável e coercivo.

Da dualidade entre Φ_e e Φ_e^* ou sendo estes funcionais conjugados (ver seção B4), tem-se que:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \nabla \Phi_e(\dot{\boldsymbol{\kappa}}) \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\kappa}}^e = \nabla \Phi_e^*(\dot{\boldsymbol{\sigma}}). \quad (\text{II.13})$$

Definição II.2.2:

Taxas de multiplicadores plásticos $\dot{\lambda}$ (ou $\dot{\lambda}$) e a função de plastificação \mathbf{f} são definidas nos espaços duais Λ , Λ^* em \mathbf{B} , respectivamente, tal que a norma e o produto dualidade são definidos como segue:

$$\| \dot{\lambda} \|_{\Lambda} = \left(\int_{\mathbf{B}} \dot{\lambda} \cdot \dot{\lambda} \, d\mathbf{B} \right)^{1/2} ; \quad \| \mathbf{f} \|_{\Lambda^*} = \left(\int_{\mathbf{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} \, d\mathbf{B} \right)^{1/2} ; \quad (\text{II.14})$$

$$\langle \mathbf{f}, \dot{\lambda} \rangle_{\Lambda \times \Lambda^*} = \int_{\mathbf{B}} \mathbf{f} \cdot \dot{\lambda} \, d\mathbf{B}. \quad (\text{II.15})$$

Definição II.2.3:

Para um dado campo vectorial \mathbf{f} , tal que $\mathbf{f} \leq 0$ em \mathbf{B} , os seguintes conjuntos são introduzidos:

$$\Lambda^+ = \{ \dot{\lambda} \in \Lambda \text{ tal que } \dot{\lambda} \geq 0 \text{ em } \mathbf{B} \}; \quad (\text{II.16})$$

$$\Lambda_{\mathbf{f}} = \{ \dot{\lambda} \in \Lambda \text{ tal que } \forall j, f_j \dot{\lambda}_j = 0 \text{ em } \mathbf{B} \}; \quad (\text{II.17})$$

$$\Lambda_{\mathbf{f}}^+ = \{ \dot{\lambda} \in \Lambda^+ \text{ tal que } \forall j, \mathbf{f} \cdot \dot{\lambda} = 0 \text{ em } \mathbf{B} \}. \quad (\text{II.18})$$

São resumidas agora as hipóteses envolvendo a função de plastificação \mathbf{f} :

- i) $f_j = f_j(\boldsymbol{\sigma}, \lambda)$ é uma função regular dos campos $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}^*$ e $\lambda \in \Lambda$ e (não estritamente) convexa com respeito a $\boldsymbol{\sigma}$ (ver figura II.2).

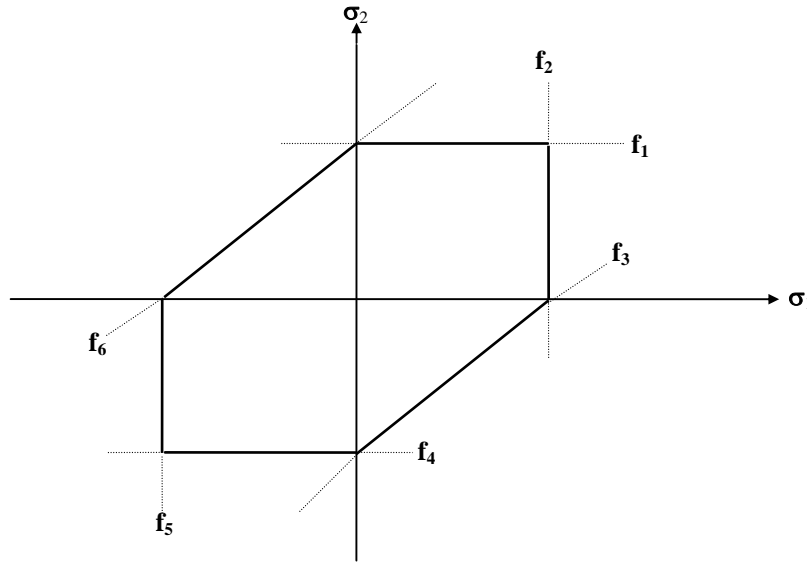


figura II.2- superfície de plastificação linearizada.

- ii) $\mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, \lambda)$ é um operador linear de Λ para \mathbf{W} , admitido como:

- ii.1) limitado inferiormente em $\Lambda_{\mathbf{f}}$, isto é, para alguma constante $c_0 > 0$,

$$\| \mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda} \| \geq c_0 \| \dot{\lambda} \|_{\Lambda}, \quad \forall \dot{\lambda} \in \Lambda_{\mathbf{f}}. \quad (\text{II.19})$$

Esta propriedade garante que somente taxas de deformação plástica diferentes de zero são consideradas combinando-se contribuições dos modos plásticos ativos.

Note na figura II.2 que em um vértice, $\lambda_i, \lambda_j > 0$ e que a combinação linear de $f_{\sigma_i} \lambda_i + f_{\sigma_j} \lambda_j \neq 0$ ou seja, $\mathcal{E}^p = \mathbf{f}_{\sigma} \lambda \neq 0$. Além disso, (II.19) também garante que existe somente um $\lambda \in \Lambda_f$ tal que $\mathbf{f}_{\sigma} \lambda$ é igual a um \mathcal{E}^p prescrito.

ii.2) $\mathbf{f}_{\sigma} \lambda$ é continuamente dependente de $\mathcal{E} \in \mathbf{W}^*$, isto é, para $c_1 > 0$,

$$|\langle \mathcal{E}, \mathbf{f}_{\sigma} \lambda \rangle| \leq c_1 \| \mathcal{E} \|_{\mathbf{W}^*} \| \lambda \|_{\Lambda}, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad \forall \mathcal{E} \in \mathbf{W}^*; \quad (\text{II.20})$$

A propriedade (II.20) garante que, dado um $\mathcal{E} \in \mathbf{W}^*$ tal que $\exists \lambda \in \Lambda$, ou seja, o carregamento provoque deformação plástica, a dependência contínua expressa em (II.20) implica em que a taxa de dissipação de energia $\langle \mathcal{E}, \mathbf{f}_{\sigma} \lambda \rangle$ seja finita. Isto quer dizer que, os níveis de tensão \mathcal{E} considerados não provocam colapso no corpo material analisado, ou seja, a nova superfície de plastificação é limitada (o encruamento é positivo).

iii) $\mathbf{f}_{\lambda}^T = \mathbf{f}_{\lambda}^T(\sigma, \lambda)$ é um operador linear de Λ em Λ^* admitido simétrico e negativo semi-definido (definição B3.1), isto é,

$$\langle \mathbf{f}_{\lambda} \lambda, \lambda \rangle \leq 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda_f. \quad (\text{II.21})$$

A propriedade (II.21) é justificada através da condição de plasticidade: $\mathbf{f} = 0, \lambda > 0$ e $\mathcal{E} = \mathbf{f}_{\sigma}^T \mathcal{E} + \mathbf{f}_{\lambda}^T \lambda = 0$. Então, tem-se $\mathbf{f}_{\lambda}^T \lambda = -\mathbf{f}_{\sigma}^T \mathcal{E}$, a qual implica:

- no caso de plasticidade perfeita, em $\mathcal{E} = 0$, implicando em $\mathbf{f}_{\lambda}^T \lambda = 0$ e então $\mathbf{f}_{\lambda} \equiv 0$ (pois $\lambda > 0$) tal que $\langle \mathbf{f}_{\lambda} \lambda, \lambda \rangle = 0$;
- no caso de encruamento positivo, em $\mathbf{f}_{\sigma}^T \mathcal{E} > 0$ implicando em $\mathbf{f}_{\lambda}^T \lambda < 0$ e então em \mathbf{f}_{λ} ser definida negativa tal que $\langle \mathbf{f}_{\lambda} \lambda, \lambda \rangle < 0$. Essa propriedade é equivalente em qualquer processo plástico, para algum $h_0 > 0$, à seguinte condição:

$$\langle \mathbf{f}_{\lambda} \lambda, \lambda \rangle \leq -h_0 \| \lambda \|_{\Lambda}^2, \quad \forall \lambda \in \Lambda_f. \quad (\text{II.22})$$

Note que, muitos materiais não são perfeitamente plásticos mas não apresentam encruamento positivo em todo processo plástico. Ver a figura II.3.

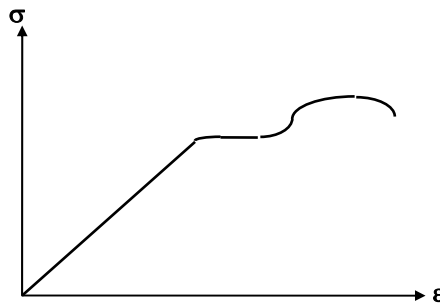


Figura II.3 - Modelo uniaxial do aço classe A em tração simples.

As definições II.2.1, II.2.2 e II.2.3 vistas até aqui serão importantes para a definição dos potenciais plásticos, dados a seguir.

II.2.1- Determinação dos potenciais plásticos em taxas de tensão e deformação.

Considere a condição (II.6) dada, que determina \mathcal{K} para qualquer processo em taxa (plastificação ou descarregamento elástico local). Esta é equivalente à seguinte inequação variacional:

$$\mathcal{K} \in \Lambda_f^+; \quad (II.23)$$

$$\langle \mathbf{f}, \mathcal{K}^* - \mathcal{K} \rangle \leq 0, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+. \quad (II.24)$$

A equivalência é verdadeira pois:

- se $\mathcal{K}^* = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{f}, -\mathcal{K} \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle \mathbf{f}, \mathcal{K} \rangle \geq 0$;
Mas $\langle \mathbf{f}, \mathcal{K} \rangle \leq 0$ pela definição de \mathbf{f}, \mathcal{K} e então $\langle \mathbf{f}, \mathcal{K} \rangle = 0$;
- se $\mathcal{K}^* = 2\mathcal{K} \Rightarrow \langle \mathbf{f}, \mathcal{K} \rangle \leq 0$.

Logo, (II.23) e (II.24) são equivalentes a (II.6).

De (II.7), essas condições podem ser então escritas:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\in \Lambda_f^+; \\ \langle \mathbf{f}_\sigma^T \mathcal{K} + \mathbf{f}_\lambda^T \mathcal{K}, \mathcal{K}^* - \mathcal{K} \rangle &\leq 0, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+; \end{aligned} \quad (II.25)$$

que são as condições de otimalidade necessárias do seguinte problema de otimização:

$$\xi_p^*(\mathcal{K}) = \sup_{\mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+} [\langle \mathcal{K}, \mathbf{f}_\sigma \mathcal{K}^* \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}_\lambda \mathcal{K}^*, \mathcal{K}^* \rangle], \quad (II.26)$$

devido a \mathbf{f}_λ ser semi-definida negativa.

A condição (II.26) mostra que, quando \mathcal{K} é finito, este é determinado para algum \mathcal{K}^* que satisfaz as condições de otimalidade (II.23) e (II.25). Reciprocamente, se estas condições se verificam para algum \mathcal{K}^* então o supremo é finito e obtido ao menos para este particular \mathcal{K}^* .

A seguir é dada uma proposição que especifica as propriedades do potencial ξ_p^* dado em (II.26) e cuja demonstração é encontrada em [Feijóo e Zouain, 1990].

Proposição II.2.1.1:

O funcional ξ_p^* é um potencial generalizado da taxa de deformação plástica $\mathfrak{E}^p = \mathbf{f}_\sigma \mathfrak{K}$, no sentido especificado abaixo, onde \mathfrak{K} identifica a verdadeira taxa de multiplicador plástico, relacionada com \mathfrak{E} através das equações constitutivas (II.23), (II.25) e (II.26):

- i) ξ_p^* é um funcional próprio, inferiormente semicontínuo (i.s.c.) e convexo;
- ii) ξ_p^* é não negativo e se $\xi_p^* < \infty$, então,

$$\xi_p^*(\mathfrak{E}) = \frac{1}{2} \langle \mathfrak{E}, \mathbf{f}_\sigma \mathfrak{K} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{f}_\lambda \mathfrak{K}, \mathfrak{K} \rangle \geq 0. \quad (\text{II.27})$$

Além disso, no caso de plasticidade ideal ($\mathbf{f}_\lambda = 0$), tem-se:

$$\xi_p^*(\mathfrak{E}) = \Gamma_P(\mathfrak{E}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathfrak{E} \in P \\ +\infty & \text{se } \mathfrak{E} \notin P \end{cases}; \quad (\text{II.28})$$

onde Γ_P é a função indicatriz de P , onde P é o cone convexo de taxas de tensões plásticas admissíveis \mathfrak{E} definido para $\mathfrak{K} \in \Lambda_f^+$, como segue:

$$P = \{ \mathfrak{E} \in \mathbf{W}^* \text{ tal que } \langle \mathfrak{E}, \mathbf{f}_\sigma \mathfrak{K} \rangle \leq 0, \forall \mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+ \}. \quad (\text{II.29})$$

- iii) \mathfrak{E}^p é um subgradiente de ξ_p^* , isto é para qualquer $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}^*$ tal que $\xi_p^* < \infty$,

$$\mathfrak{E}^p = \mathbf{f}_\sigma \mathfrak{K} \in \partial \xi_p^*(\mathfrak{E}); \quad (\text{II.30})$$

onde $\partial \xi_p^*(\mathfrak{E})$ é o subdiferencial de $\xi_p^*(\mathfrak{E})$ em \mathfrak{E} , isto é,

$$\partial \xi_p^*(\mathfrak{E}) = \{ \mathfrak{E}^p \in \mathbf{W} \text{ tal que } \xi_p^*(\mathfrak{E}^*) - \xi_p^*(\mathfrak{E}) \geq \langle \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E}, \mathfrak{E}^p \rangle, \forall \mathfrak{E}^* \in \mathbf{W}^* \}. \quad (\text{II.31})$$

A proposição II.2.1.1 é a base para a seguinte derivação formal das relações elasto-plásticas:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}^e + \mathfrak{E}^p; \\ \mathfrak{E}^e &= \nabla \Phi_e^*(\mathfrak{E}); \\ \mathfrak{E}^p &\in \partial \xi_p^*(\mathfrak{E}). \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Aplicando-se agora o resultado, que o subdiferencial da soma de dois funcionais convexos, i.s.c., coincide com a soma dos subdiferenciais de cada um, se um deles é contínuo ou diferenciável (proposição B9.2), então, $\forall \mathfrak{E}^* \in \mathbf{W}^*$ tal que $\xi_p^* < \infty$:

$$\mathfrak{E} \in \partial \Psi_{ep}^*(\mathfrak{E}), \quad (\text{II.33})$$

tal que

$$\Psi_{ep}^*(\mathfrak{E}) = \Phi_e^*(\mathfrak{E}) + \xi_p^*(\mathfrak{E}) = \sup_{\mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+} [\Phi_e^*(\mathfrak{E}) + \langle \mathfrak{E}, \mathbf{f}_\sigma \mathfrak{K}^* \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}_\lambda \mathfrak{K}^*, \mathfrak{K}^* \rangle], \quad (\text{II.34})$$

que é um funcional convexo i.s.c., pois ambos os funcionais Φ_e^* e ξ_p^* são convexos e i.s.c..

Além disso, Φ_e^* é estritamente convexo, i.s.c., coercivo e diferenciável. Note que, no caso de plasticidade ideal, Ψ_{ep}^* será não diferenciável.

A relação constitutiva inversa é derivada a seguir usando o funcional $\Psi_{ep}(\mathfrak{E})$ definido como o conjugado de $\Psi_{ep}^*(\mathfrak{E})$:

$$\Psi_{ep}(\mathfrak{E}) = \sup_{\mathfrak{E}^* \in \mathbf{W}^*} [\langle \mathfrak{E}^*, \mathfrak{E} \rangle - \Psi_{ep}^*(\mathfrak{E}^*)]. \quad (\text{II.35})$$

Logo, devido às propriedades de funcionais conjugados (seção B.4) tem-se que para $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}^*$, tal que $\xi_p^* < \infty$:

$$\mathfrak{E} \in \partial\Psi_{ep}(\mathfrak{E}) \Leftrightarrow \mathfrak{E} \in \partial\Psi_{ep}^*(\mathfrak{E}), \quad (\text{II.36})$$

e o supremo em (II.35) somente é determinado para σ satisfazendo (II.36), que é finito para qualquer $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$ e determinado para um único $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}^*$ pois Ψ_{ep} é estritamente convexa e coerciva. Assim, o subdiferencial de Ψ_{ep} contém um único \mathfrak{E} , $\forall \mathfrak{E} \in \mathbf{W}$ então Ψ_{ep} é sempre diferenciável e a relação (II.36) passa a ser:

$$\mathfrak{E} = \nabla\Psi_{ep}(\mathfrak{E}) \Leftrightarrow \mathfrak{E} \in \partial\Psi_{ep}^*(\mathfrak{E}). \quad (\text{II.37})$$

Além disso, no caso de encruamento positivo tem-se da convexidade estrita, coercividade e diferenciabilidade de ξ_p^* que:

$$\mathfrak{E}^p = \mathbf{f}_\sigma \mathfrak{K}^* = \nabla\xi_p^*(\mathfrak{E}). \quad (\text{II.38})$$

Nestas condições, $\mathfrak{E}^* \in \mathbf{W}^*$ é finito para qualquer $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$, e é único, tal como $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$ é finito para qualquer $\mathfrak{E}^* \in \mathbf{W}^*$ e é unicamente determinado. Esta afirmação vem do fato dos potenciais (II.34) e (II.35), no caso de encruamento positivo, serem potenciais próprios, estritamente convexos i.s.c. e diferenciáveis, assim, pode-se garantir a unicidade de solução para os modelos propostos e também a relação de dualidade:

$$\mathfrak{E} = \nabla\Psi_{ep}(\mathfrak{E}) \Leftrightarrow \mathfrak{E} = \nabla\Psi_{ep}^*(\mathfrak{E}^*); \quad (\text{II.39})$$

e naturalmente isto só é válido considerando também que $\xi_p^*(\mathfrak{E}) < \infty$.

Nesse caso, a unicidade de solução garante a propriedade de convexidade estrita e elipticidade para os potenciais dados. Consequentemente, a perda de unicidade de solução relativa ao regime de encruamento negativo implica em perda de convexidade e de elipticidade do modelo, como é o caso dos modelos com dano a serem analisados no capítulo III. Isso possibilita uma análise mais complexa dos mesmos, a análise de localização de deformação, que será discutida no capítulo V e a análise de bifurcação de solução, discutida no capítulo VI.

Finalmente, obtem-se uma expressão conveniente para o funcional Ψ_{ep} , substituindo (II.34) em (II.35) vem:

$$\Psi_{ep}(\mathfrak{E}) = \sup_{\mathfrak{E}^* \in \mathbf{W}^*} \inf_{\mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+} [\langle \mathfrak{E}^*, \mathfrak{E} - \mathbf{f}_\sigma \mathfrak{K}^* \rangle - \Phi_e^*(\mathfrak{E}^*) - \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}_\lambda \mathfrak{K}^*, \mathfrak{K}^* \rangle]. \quad (\text{II.40})$$

Desde que a função:

$$L(\mathfrak{K}^*, \mathfrak{E}) = \langle \mathfrak{E}^*, \mathfrak{E} - \mathbf{f}_\sigma \mathfrak{K}^* \rangle - \Phi_e^*(\mathfrak{E}^*) - \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}_\lambda \mathfrak{K}^*, \mathfrak{K}^* \rangle;$$

satisfaz as condições da proposição B11.8, ou seja:

- i) $\forall \mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+$, é própria, côncava superiormente semicontínua (s.s.c.) na variável $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}^*$;
- ii) $\forall \mathfrak{E} \in \mathbf{W}^*$, é própria, convexa i.s.c. na variável $\mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+$;
- iii) \mathbf{W}^* e Λ_f^+ são conjuntos fechados não-vazios;
- iv) $\forall \mathfrak{E}_0 \in \mathbf{P}$, tem-se:

$$\lim_{\substack{\mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+ \\ \|\mathfrak{K}^*\| \rightarrow +\infty}} L(\mathfrak{K}^*, \mathfrak{E}_0) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{\mathfrak{E} \in \mathbf{W}^* \\ \|\mathfrak{E}\| \rightarrow +\infty}} L(\mathfrak{K}^*, \mathfrak{E}) = -\infty.$$

Então, existe um ponto de sela $(\mathcal{K}_0^*, \mathcal{E}_0)$ para L e o problema minmax primal (II.40) é equivalente ao seguinte problema minmax dual:

$$\Psi_{ep}(\mathcal{E}) = \inf_{\mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+} \sup_{\mathcal{E}^* \in W^*} [\langle \mathcal{E}^*, \mathcal{E} - \mathbf{f}_\sigma \mathcal{K}^* \rangle - \Phi_e^*(\mathcal{E}^*) - \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}_\lambda \mathcal{K}^*, \mathcal{K}^* \rangle] \quad (\text{II.41})$$

e o supremo em (II.41) pode ser calculado levando-se em conta que $\Phi_e^*(\mathcal{E}^*)$ e $\Phi_e(\mathcal{E})$ são funcionais conjugados, então:

$$\Psi_{ep}(\mathcal{E}) = \inf_{\mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+} [\Phi_e(\mathcal{E} - \mathbf{f}_\sigma \mathcal{K}^*) - \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}_\lambda \mathcal{K}^*, \mathcal{K}^* \rangle]. \quad (\text{II.42})$$

As correspondentes condições de otimalidade para este problema recaem em:

$$\mathcal{E} = \nabla \Phi_e(\mathcal{E} - \mathbf{f}_\sigma \mathcal{K}^*); \quad (\text{II.43})$$

$$\mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+; \quad (\text{II.44})$$

$$\langle \mathbf{f}_\sigma^T \mathcal{E} + \mathbf{f}_\lambda^T \mathcal{K}^*, \mathcal{K}^* - \mathcal{K} \rangle \leq 0, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+. \quad (\text{II.45})$$

Na próxima seção a condição de $\mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+$ é relaxada possibilitando determinar as relações constitutivas em incrementos finitos de tensão e deformação.

II.3- Relações constitutivas em incrementos finitos de tensão e deformação.

Nessa seção, o problema de elastoplasticidade é colocado em termos de incrementos finitos de tensão e deformação, já que a formulação vista na seção anterior não contribui para resolver-se o problema adicional de encontrar convenientes incrementos finitos, uma vez que taxas exatas tenham sido calculadas.

O desenvolvimento de princípios em termos de incrementos finitos, que serão definidos em uma formulação incremental, é completo no sentido que em nenhum procedimento posterior será necessário fazer cálculos para verificar a admissibilidade plástica de tensões ou descarregamentos elásticos locais, como ocorre nos métodos previso-res-corretores explícitos.

É importante observar que, mesmo que a condição de complementaridade imponha que taxas de multiplicadores plásticos seja zero ($\dot{\mathcal{K}} = 0$) para modos plásticos ativos ($\dot{\mathcal{K}} < 0$), indicando que o regime é elástico no estado inicial, essa condição poderá algumas vezes ser relaxada para que incrementos finitos de multiplicadores plásticos possam ser produzidos dentro do passo considerado. De fato, esse modo plástico em taxa pode ser ativo no passo de tempo considerado, mas produzir um incremento de multiplicador plástico diferente de zero.

A relaxação da condição acima mencionada é equivalente à substituição do conjunto Λ_f^+ por Λ^+ de acordo com a seguinte função indicatriz (definição I.1.4):

$$\Gamma_{\Lambda_f^+}(\mathcal{K}^*) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+ \\ +\infty & \text{se } \mathcal{K}^* \in \Lambda^+ - \Lambda_f^+ \end{cases}, \quad (\text{II.46})$$

e é obtida de (II.26) por

$$\xi_p^*(\mathcal{E}) = \sup_{\mathcal{K}^* \in \Lambda^+} [\langle \mathcal{E}, \mathbf{f}_\sigma \mathcal{K}^* \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}_\lambda \mathcal{K}^*, \mathcal{K}^* \rangle - \Gamma_{\Lambda_f^+}(\mathcal{K}^*)]. \quad (\text{II.47})$$

Uma aproximação assintótica pode ser derivada pela substituição de Γ_{Λ^+} , por $(-1/\delta) \langle \mathbf{f}, \mathbf{\lambda}^* \rangle$, para $\delta \rightarrow 0^+$, pois esta penalidade é zero se $\mathbf{\lambda}^* \in \Lambda^+$ e positiva quando $\mathbf{\lambda}^* \in \Lambda^+$. Assim:

$$\xi_{\delta p}^*(\mathfrak{E}) = \sup_{\mathbf{\lambda}^* \in \Lambda^+} [\langle \mathfrak{E}, \mathbf{f}_\sigma \mathbf{\lambda}^* \rangle + 1/2 \langle \mathbf{f}_\lambda \mathbf{\lambda}^*, \mathbf{\lambda}^* \rangle + (1/\delta) \langle \mathbf{f}, \mathbf{\lambda}^* \rangle] \quad (\text{II.48})$$

e se espera que $\mathfrak{E}_\delta^p \in \partial \xi_{\delta p}^*(\mathfrak{E})$ reproduza $\mathfrak{E}^p \in \partial \xi_p^*(\mathfrak{E})$ para $\delta \rightarrow 0^+$.

Note que, a função indicatriz definida em (II.46) é descontínua, assim a aproximação assintótica dada para $\delta \rightarrow 0^+$ por $(-1/\delta) \langle \mathbf{f}, \mathbf{\lambda}^* \rangle$ é uma maneira de regularizá-la e torná-la diferenciável (ver proposição B3.11).

O processo de convergência considerando $\delta \rightarrow 0^+$ é de difícil implementação pois depende de taxas exatas em lugar de boas aproximações incrementais. Então, no lugar do processo limite, utiliza-se aproximações de Euler, procedendo-se em termos de incrementos finitos de tensão, deformação e multiplicadores plásticos, expressos por:

$$\mathfrak{E} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta t}; \quad \mathfrak{E} = \frac{\Delta \epsilon}{\Delta t}; \quad \mathbf{\lambda}^* = \frac{\Delta \lambda}{\Delta t}; \quad (\text{II.49})$$

para o instante t definido no intervalo [t, t + Δt].

Substituindo-se (II.49) em (II.48) obtém-se:

$$\tilde{\xi}_p^*(\Delta \sigma) = \sup_{\Delta \lambda \in \Lambda^+} [\langle \frac{\Delta \sigma}{\Delta t}, \mathbf{f}_\sigma \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \rangle + 1/2 \langle \mathbf{f}_\lambda \frac{\Delta \lambda}{\Delta t}, \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \rangle + (1/\delta) \langle \mathbf{f}, \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \rangle]. \quad (\text{II.50})$$

Fazendo-se $\delta = \Delta t$ em (II.50), chega-se no seguinte funcional estendido:

$$\tilde{\xi}_p^*(\Delta \sigma) = \sup_{\Delta \lambda \in \Lambda^+} [\langle \Delta \sigma, \mathbf{f}_\sigma \Delta \lambda \rangle + 1/2 \langle \mathbf{f}_\lambda \Delta \lambda, \Delta \lambda \rangle + \langle \mathbf{f}, \Delta \lambda \rangle]; \quad (\text{II.51})$$

onde \mathbf{f} , \mathbf{f}_σ , e \mathbf{f}_λ correspondem a valores conhecidos de σ e λ no instante t.

Assim, o incremento de multiplicador plástico $\Delta \lambda$ correspondente para $\Delta \sigma$, verifica as seguintes condições de otimalidade: $\frac{\mathbf{T}}{\sigma}$

$$\Delta \lambda \in \Lambda^+; \quad (\text{II.52})$$

$$\langle \mathbf{f} + \mathbf{f}_\sigma^T \Delta \sigma + \mathbf{f}_\lambda^T \Delta \lambda, \Delta \lambda^* - \Delta \lambda \rangle \leq 0, \quad \forall \Delta \lambda^* \in \Lambda^+; \quad (\text{II.53})$$

que é equivalente a:

$$(\mathbf{f} + \mathbf{f}_\sigma^T \Delta \sigma + \mathbf{f}_\lambda^T \Delta \lambda) \cdot \Delta \lambda = 0 \text{ em } \mathbf{B}; \quad (\text{II.54})$$

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}_\sigma^T \Delta \sigma + \mathbf{f}_\lambda^T \Delta \lambda \leq 0 \text{ em } \mathbf{B}. \quad (\text{II.55})$$

Além disso, a relação constitutiva incremental aproximada será:

$$\Delta \epsilon^p = \mathbf{f}_\sigma \Delta \lambda \in \partial \tilde{\xi}_p^*(\Delta \sigma); \quad (\text{II.56})$$

para $\Delta \lambda$ satisfazendo (II.51) ou (II.52) e (II.53).

Portanto, tomando-se $\delta = \Delta t$, \mathbf{f} linear por partes de tal forma que \mathbf{f}_σ e \mathbf{f}_λ são constantes em relação a σ e λ então, são válidas as afirmações:

i) as expressões (II.54) e (II.55) correspondem ao valor exato de \mathbf{f} no instante $t + \Delta t$, isto é,

$$[\mathbf{f}(\sigma + \Delta\sigma, \lambda + \Delta\lambda)] \cdot \Delta\lambda = 0 \text{ em } \mathbf{B}; \quad (\text{II.57})$$

$$\mathbf{f}(\sigma + \Delta\sigma, \lambda + \Delta\lambda) \leq 0, \Delta\lambda \geq 0 \text{ em } \mathbf{B}. \quad (\text{II.58})$$

ii) o estado de tensões ao final do incremento é plasticamente admissível e incrementos exatos são obtidos quando o processo verdadeiro produz descarregamento elástico local ou sequência de deformações puramente elásticas seguidas pelo processo de plastificação. Isto quer dizer que o incremento exato é diferente do incremento aproximado quando o processo envolve plastificação seguida por descarregamento elástico local do mesmo modo plástico.

II.4- Formulação variacional cinemática das relações constitutivas.

Seguindo o procedimento encontrado em [Proença, 1989], a formulação variacional feita para o modelo nas seções II.2 e II.3, pode ser colocada de uma outra maneira, tanto para o modelo em taxas como para o modelo incremental e que é válida também para modelos não-associativos redefinindo-se a equação (II.4) para:

$$\mathfrak{E}^p = \mathbf{g}_\sigma \mathfrak{K}; \quad (\text{II.59})$$

onde \mathbf{g}_σ é o gradiente em σ de um potencial plástico $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\sigma, \lambda)$.

Dessa forma, as relações (II.1), (II.2), (II.3), (II.5), (II.6) e (II.59) podem ser satisfeitas em qualquer ponto do corpo através da inequação variacional:

para $\mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+$;

$$\langle \mathfrak{F}, \mathfrak{K}^* - \mathfrak{K} \rangle = \int_{\mathbf{B}} \mathfrak{F} \cdot (\mathfrak{K}^* - \mathfrak{K}) d\mathbf{B} \leq 0, \forall \mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+. \quad (\text{II.60})$$

Sabendo-se que \mathfrak{F} e \mathfrak{E} podem ser explícitas por:

$$\mathfrak{F} = \mathbf{f}_\sigma^T \mathfrak{E} + \mathbf{f}_\lambda^T \mathfrak{K};$$

$$\mathfrak{E} = \nabla \Phi_\epsilon(\mathfrak{E}) = \mathbf{E}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^p) = \mathbf{E}(\mathfrak{E} - \mathbf{g}_\sigma \mathfrak{K}); \quad (\text{II.61})$$

então (II.60) se torna:

$$\int_{\mathbf{B}} [\mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathfrak{E} - \mathbf{g}_\sigma \mathfrak{K}) + \mathbf{f}_\lambda^T \mathfrak{K}] \cdot (\mathfrak{K}^* - \mathfrak{K}) d\mathbf{B} \leq 0, \forall \mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+. \quad (\text{II.62})$$

No caso associativo em que $\mathbf{g}_\sigma = \mathbf{f}_\sigma$, a equação (II.62) é condição de otimalidade para o seguinte problema de minimização:

$$\inf_{\mathfrak{K} \in \Lambda_f^+} \left\{ \int_{\mathbf{B}} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{f}_\sigma - \mathbf{f}_\lambda^T) \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K} - (\mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{K} \right] d\mathbf{B} \right\}; \quad (\text{II.63})$$

onde $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$.

A relaxação de $\mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+$ é feita analogamente às equações (II.46) e (II.47) adicionando-se a indicatriz $\Gamma_{\Lambda_f^+}(\mathfrak{K})$ em (II.62), resultando para $\mathfrak{K} \in \Lambda^+$;

$$\int_{\mathbf{B}} [\mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathfrak{E} - \mathbf{g}_\sigma \mathfrak{K}) + \mathbf{f}_\lambda^T \mathfrak{K} + \Gamma_{\Lambda_f^+}(\mathfrak{K})] \cdot (\mathfrak{K}^* - \mathfrak{K}) d\mathbf{B} \leq 0, \forall \mathfrak{K}^* \in \Lambda^+. \quad (\text{II.64})$$

A regularização de $\Gamma_{\Lambda_f^+}$ é feita analogamente a (II.49) considerando-se a função diferenciável;

$$\left(-\frac{1}{\delta}\right) \langle \mathbf{f}, \mathcal{K} \rangle = \left(-\frac{1}{\delta}\right) \int_{\mathbf{B}} \mathbf{f} \cdot \mathcal{K} \, d\mathbf{B}; \quad (\text{II.65})$$

para $\delta \rightarrow 0^+$, cujo valor é zero se $\mathcal{K} \in \Lambda_f^+$ e positiva quando $\mathcal{K} \in \Lambda^+$.

Nestas condições, (II.64) passa a ser escrito para $\mathcal{K}_\delta \in \Lambda^+$ por:

$$\int_{\mathbf{B}} [(-\frac{1}{\delta} \mathbf{f} - \mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot \mathcal{E}) + (\mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{g}_\sigma - \mathbf{f}_\lambda^\top) \mathcal{K}_\delta] \cdot (\mathcal{K}^* - \mathcal{K}_\delta) \, d\mathbf{B} \geq 0, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \Lambda^+; \quad (\text{II.66})$$

que em caso de lei associativa é condição de otimalidade de:

$$\inf_{\mathcal{K} \in \Lambda^+} \left\{ \int_{\mathbf{B}} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{f}_\sigma - \mathbf{f}_\lambda^\top) \mathcal{K} \cdot \mathcal{K} - (\mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot \mathcal{E}) \cdot \mathcal{K} - \frac{1}{\delta} \mathbf{f} \cdot \mathcal{K} \right] \, d\mathbf{B} \right\}. \quad (\text{II.67})$$

II.4.1- Formulação variacional cinemática incremental.

A formulação variacional incremental das relações constitutivas elastoplásticas é feita utilizando-se a definição dada em (II.50). Considerando-se $\delta = \Delta t$, a equação (II.65) se transforma em:

$$\int_{\mathbf{B}} [(\mathbf{f} + \mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{g}_\sigma \Delta \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{f}_\lambda^\top \Delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\Delta \boldsymbol{\lambda}^* - \Delta \boldsymbol{\lambda})] \, d\mathbf{B} \leq 0, \quad \forall \Delta \boldsymbol{\lambda}^* \in \Lambda^+; \quad (\text{II.68})$$

que em caso de lei associativa é solução do problema:

$$\inf_{\Delta \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda^+} \left\{ \int_{\mathbf{B}} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{f}_\sigma - \mathbf{f}_\lambda^\top) \Delta \boldsymbol{\lambda} \cdot \Delta \boldsymbol{\lambda} - (\mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \Delta \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{f} \cdot \Delta \boldsymbol{\lambda} \right] \, d\mathbf{B} \right\}. \quad (\text{II.69})$$

Para a equação (II.68) são válidas as mesmas relações dadas em (II.52), (II.53), (II.54), (II.55) e (II.56), quando \mathbf{f} e \mathbf{g} são lineares por partes e as mesmas conclusões tiradas no final da seção II.3 podem ser feitas aqui.

Observação: A formulação cinemática feita em (II.66), pode ser reformulada em termos de velocidades \mathbf{v} (ou $\mathcal{U} \in \mathbf{U}$) e velocidades de multiplicadores plásticos \mathcal{K} , tais que:

- i) \mathbf{v} é um campo cinematicamente admissível com restrições de contorno bilaterais homogêneas na parte $\partial \mathbf{B}_v$ do contorno do corpo, ou seja, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_B = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{U} : \mathbf{v} = 0 \text{ em } \partial \mathbf{B}_v \}$, onde \mathbf{U} está definido em (I.32);
- ii) a velocidade de deformação $\mathcal{E} = D\mathbf{v}$ e \mathcal{K} estão relacionadas através da relação constitutiva plástica;
- iii) a velocidade de tensão \mathcal{E} , relacionada a \mathbf{v} e \mathcal{K} através da equação constitutiva elastoplástica, deve estar em equilíbrio com a velocidade de carga.

Esse problema em sua forma variacional é expresso por:

para $\delta \rightarrow 0^+$, encontrar o limite de \mathbf{v}_δ e λ_δ satisfazendo:

- $\mathbf{v}_\delta \in \mathbf{V}_\delta \subset \mathbf{V}_B$ e $\mathcal{K}_\delta \in \Lambda^+$ tal que,

$$\int_{\mathbf{B}} [(-\frac{1}{\delta} \mathbf{f} - \mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot D\mathbf{v}) + (\mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{g}_\sigma - \mathbf{f}_\lambda^\top) \mathcal{K}_\delta] \cdot (\mathcal{K}^* - \mathcal{K}_\delta) \, d\mathbf{B} \geq 0, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \Lambda^+;$$
- $\int_{\mathbf{B}} (\mathbf{E} D\mathbf{v} - \mathbf{g}_\sigma \mathcal{K}_\delta) \cdot D\mathbf{v}^* \, d\mathbf{B} = \mathbf{L}(\mathbf{v}^*), \quad \forall \mathbf{v}^* \in \mathbf{V}_\delta.$

Essas expressões, no caso particular de lei associativa, são condições necessárias de otimalidade para o seguinte princípio de mínimo:

para $\delta \rightarrow 0^+$, encontrar $\mathbf{v}_\delta \in \mathbf{V}_\delta$ e $\mathfrak{K}_\delta \in \Lambda^+$ soluções de,

$$\inf_{\mathbf{v}, \mathfrak{K}} \left\{ \int_{\mathbf{B}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{E} D\mathbf{v} \cdot D\mathbf{v} + \frac{1}{2} (\mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{f}_\sigma - \mathbf{f}_\lambda^T) \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K} - (\mathbf{f}_\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot D\mathbf{v}) \cdot \mathfrak{K} - \frac{1}{\delta} \mathbf{f} \cdot \mathfrak{K} \right] d\mathbf{B} - \mathbf{L}(\mathbf{v}) \right\};$$

onde $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\delta$ e $\mathfrak{K} \in \Lambda^+$.

É possível também definir o problema cinemático em termos de velocidades na forma incremental, de uma maneira análoga àquela feita em (II.67) e (II.68), o que não será feito.

Até aqui, estudou-se modelos elastoplásticos, perfeito e com encruamento positivo, formulando-os nas formas em taxas e incrementos finitos, gerando potenciais convexos e seus conjugados, que garantiram uma relação de dualidade entre as variáveis de tensão e deformação.

No próximo capítulo, estudam-se modelos de dano, em suas formas, em taxa e incremento finito, que estendem a teoria vista até aqui, admitindo que no modelo possa ocorrer o regime de encruamento negativo. Nesse caso, perde-se a convexidade dos potenciais que regem o modelo, mas ainda assim, será visto no capítulo IV que existe um potencial convexo resolvente que resgata a relação recíproca entre as variáveis, quando o modelo é linearizado e a ramificação gerada pelo encruamento negativo é pré-fixada.

CAPÍTULO III - Formulação de Modelos Constitutivos para Meios, Elástico e Elastoplástico com Dano.

Até aqui foram analisados os modelos elastoplástico perfeito e elastoplástico com encruamento positivo. Nesse capítulo, apresenta-se uma proposta de estudo sobre a formulação variacional de modelos constitutivos para materiais com danificação. O tema é relacionado sobretudo à Mecânica Computacional, explorando-se, particularmente, as questões de consistência matemática do equacionamento.

O estudo se baseia em um trabalho originalmente desenvolvido em [Proença, 1989].

A diferença do que foi desenvolvido naquele trabalho para o que se apresenta em seguida está, basicamente, no formalismo matemático. Porém alguns aspectos complementares não abordados foram introduzidos, como a correção do passo de deformação na existência de rigidez residual negativa, bem como a existência de um potencial convexo resolvente e de um potencial não-convexo, particulares, que regem o modelo, a serem vistos no capítulo IV. Por uma questão de conveniência, desenvolve-se a formulação para dois casos de resposta do material os quais apresentam características distintas. Num primeiro caso considera-se que o meio é representado por material ideal de comportamento elástico. Admite-se que o dano induz somente redução de rigidez, não apresentando deformações permanentes ou residuais em um processo de descarga total. Portanto as propriedades elásticas variam com a evolução do processo de danificação distribuída. O modelo constitutivo é apresentado em suas formas em taxas e incremental, ilustrando-se a resposta numérica que pode ser obtida através de um exemplo simples. Em particular, mostra-se que se o encruamento negativo é linear e o incremento de deslocamento não viola o limite máximo de energia dissipada, o modelo é integrado em forma exata. Caso contrário uma rigidez residual pode aparecer, o que leva à discussão de um procedimento de correção sobre o passo de deslocamento.

Num segundo caso, o modelo é estendido para a consideração de deformações residuais, apresentando o meio plastificação e dano contínuo. Analogamente ao caso anterior, o modelo proposto é desenvolvido em suas formas em taxa e incremental.

A extensão dos modelos para o caso multi-axial é feita no final desse capítulo.

O desenvolvimento dos modelos aqui propostos é feito no espaço das deformações, ao contrário do capítulo anterior, onde se trabalhava no espaço das tensões e se baseia em função escalar de dano (por exemplo, a de Von-Mises).

III.1 - Modelo constitutivo para um meio elástico com dano.

No que segue, admite-se que o corpo em estudo ocupa um volume \mathbf{B} do espaço pontual euclidiano, sendo Γ_u e Γ_s as regiões complementares do contorno onde deslocamentos e forças distribuídas por unidade de superfície são, respectivamente, prescritos. O material se deforma dentro de um regime de pequenas deformações apresentando uma resposta elástica linear com dano progressivo.

Localmente o dano afeta as propriedades elásticas, de modo que a relação constitutiva em forma secante é expressa na forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\mathbf{w}^d) \boldsymbol{\varepsilon}; \quad (\text{III.1})$$

onde σ é o tensor das tensões, ϵ é o tensor das deformações e E é o tensor constitutivo de rigidez elástica de 4ª ordem, em função da energia w^d dissipada no processo de danificação.

A figura III.1 apresenta a motivação para o modelo em campo unidimensional.

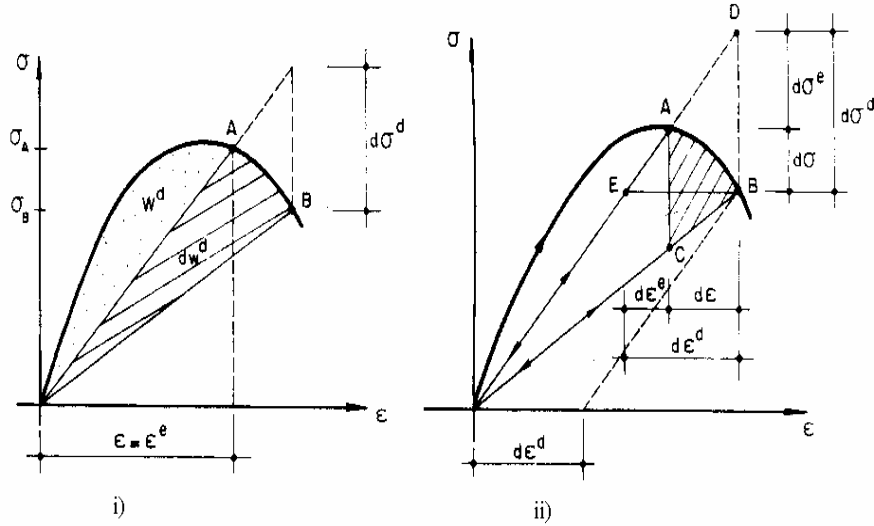


Figura III.1 - Resposta elástica com dano :
 i) energia dissipada no processo de danificação
 ii) redução de rigidez e componentes dos incrementos de tensão e deformação

III.1.1 - Leis constitutivas puntuais.

De modo a considerar um processo evolutivo, a relação constitutiva válida para qualquer ponto $x \in B$ pode ser expressa em taxas na forma :

$$\dot{\epsilon} = E(w^d) \dot{\epsilon} + \dot{E}(w^d) \epsilon = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^d ; \quad (III.2)$$

$$f(\epsilon, w^d) \leq 0; \quad (III.3)$$

$$w^d - \bar{w}^d \leq 0; \quad (III.4)$$

$$\dot{\epsilon}^d = - \dot{\lambda} h(\epsilon, w^d) ; \quad (III.5)$$

$$\dot{w}^d = - \dot{\lambda} r(\epsilon, w^d) ; \quad (III.6)$$

$$f \leq 0, \dot{\lambda} \geq 0, \dot{\lambda} \cdot f = 0; \quad (III.7)$$

$$\text{se } f = 0 \text{ então } \dot{\lambda} \cdot \dot{f} = 0, \dot{f} \leq 0. \quad (III.8)$$

Em particular, a relação (III.3), uma função de valor escalar, define um critério para caracterizar a evolução do dano e a desigualdade (III.4) impõe uma limitação para a energia

dissipada, além da qual o material perde completamente a resistência. O vetor $\mathbf{h}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{w}^d) \geq 0$ define uma direção para $\boldsymbol{\mathcal{D}}^d$, normal, por exemplo, à superfície representativa de um potencial de dissipação. Por sua vez, $r(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{w}^d) \leq 0$ é uma função de valor escalar que contém, através de \mathbf{w}^d um registro da história prévia de danificação. As condições de complementaridade e de consistência (III.7) e (III.8) são relacionadas às possibilidades de carregamento e de descarregamento, respectivamente, permitindo-se levar em conta, portanto, a irreversibilidade do processo.

Alternativamente, a desigualdade expressa em (III.4) pode ser imposta através de uma outra condição de complementaridade. De fato, introduzindo-se uma variável escalar $\alpha \geq 0$ uma nova função $\mathbf{g}(\alpha, \mathbf{w}^d)$ pode ser definida tal que:

$$\mathbf{g}(\alpha, \mathbf{w}^d) = -\alpha - (\mathbf{w}^d - \bar{\mathbf{w}}^d) \leq 0. \quad (\text{III.9})$$

Então, uma condição complementar adicional resulta :

$$\mathbf{g} \cdot \alpha = 0 \text{ com } \mathbf{g} \leq 0 \text{ e } \alpha \geq 0. \quad (\text{III.10})$$

Essa condição implica que:

$$\text{se } \mathbf{g} < 0 \Rightarrow \mathbf{w}^d > \bar{\mathbf{w}}^d \text{ e } \alpha = 0;$$

$$\text{se } \mathbf{g} = 0 \Rightarrow \mathbf{w}^d \leq \bar{\mathbf{w}}^d \text{ e } \alpha = \bar{\mathbf{w}}^d - \mathbf{w}^d > 0.$$

Adicionalmente, como $\mathbf{g} = -\alpha - \mathbf{w}^d$ e $\mathbf{g} \leq 0$ então $-\mathbf{w}^d \leq \alpha \leq 0$. Em particular, se $\mathbf{g} = 0$ então $\alpha = -\mathbf{w}^d$.

Seguindo-se um caminho padrão no sentido de se obter uma forma tangente do modelo constitutivo a partir das relações anteriores, em primeiro lugar o multiplicador λ , que aparece nas relações (III.5) a (III.8), pode ser determinado aplicando-se a condição de consistência. Nesse sentido, tomando-se a derivada total de \mathbf{f} resulta :

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{f}_{\mathbf{w}^d} \dot{\mathbf{w}}^d. \quad (\text{III.11})$$

Impondo-se, então, $\dot{\mathbf{f}} = 0$ e considerando-se a (III.6) segue que

$$\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \lambda \mathbf{f}_{\mathbf{w}^d} r(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{w}^d) = 0, \quad (\text{III.12})$$

ou ainda

$$\lambda = \frac{(\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\mathbf{f}_{\mathbf{w}^d} r(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{w}^d)} = \frac{(\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{G} \text{ com } G = \mathbf{f}_{\mathbf{w}^d} r > 0. \quad (\text{III.13})$$

Na última relação é suposto que $\mathbf{f}_{\mathbf{w}^d} r(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{w}^d) > 0$, com $\mathbf{f}_{\mathbf{w}^d} < 0$. Então, o módulo ou parâmetro de encruamento G pode assumir somente valores positivos. Além disso, $\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0$ indica que a evolução do dano ocorre quando a taxa de deformação aponta para fora do domínio elástico.

Pela substituição de (III.13) em (III.5) a relação para $\boldsymbol{\mathcal{D}}^d$ se torna:

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}^d = - \left(\frac{\mathbf{h} \otimes \mathbf{f}_\varepsilon}{G} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (\text{III.14})$$

Como pode ser observado, no caso geral, $\boldsymbol{\mathcal{D}}^d$ é não simétrico. A simetria pode ser recuperada assumindo a associatividade entre \mathbf{h} e \mathbf{f}_ε . Nesse caso:

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}^d = - \left(\frac{\mathbf{f}_\varepsilon \otimes \mathbf{f}_\varepsilon}{G} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (\text{III.15})$$

Pela combinação de (III.2) e (III.14) a relação constitutiva pode ser expressa, no caso não associativo como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{H}(\mathbf{w}^d) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\mathbf{E}(\mathbf{w}^d) - (\frac{\mathbf{h} \otimes \mathbf{f}_\varepsilon}{G})] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \text{ se } \dot{\lambda} > 0, \quad (\text{III.16})$$

ou no caso associativo como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{H}(\mathbf{w}^d) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\mathbf{E}(\mathbf{w}^d) - (\frac{\mathbf{f}_\varepsilon \otimes \mathbf{f}_\varepsilon}{G})] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \text{ se } \dot{\lambda} > 0. \quad (\text{III.17})$$

Usando as relações (III.6) e (III.13), a lei de evolução da energia dissipada pode ser expressa por:

$$\dot{\mathbf{w}}^d = - \frac{(\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{G} \mathbf{r} \text{ ou } \dot{\mathbf{w}}^d = - \frac{(\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\mathbf{f}_{\mathbf{w}^d}}. \quad (\text{III.18})$$

Na ocorrência de $\dot{\mathbf{g}} = 0$, então $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = - \dot{\mathbf{w}}^d = \frac{(\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\mathbf{f}_{\mathbf{w}^d}}$.

Além do mais, considerando-se (III.18) e (III.13) a relação entre $\dot{\lambda}$ com $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ pode ser expressa por:

$$\dot{\lambda} = \boldsymbol{\psi} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}; \quad (\text{III.19})$$

com

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{r}^{-1} \leq 0. \quad (\text{III.20})$$

Portanto, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq 0$ e $\dot{\lambda} \geq 0$.

Por outro lado, algumas vezes, ao invés de se usar a função escalar $\mathbf{r}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{w}^d)$ ou \mathbf{w}^d é mais conveniente tratar diretamente com o tensor de rigidez elástico com dano. Nesse caso, considerando-se que,

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{w}^d) = \mathbf{E}_{\mathbf{w}^d} \dot{\mathbf{w}}^d \quad (\text{III.21})$$

e levando-se em conta (III.6), a (III.21) pode ser escrita por:

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{w}^d) = -\dot{\lambda} \mathbf{E}_{\mathbf{w}^d} \mathbf{r} = -\dot{\lambda} \mathbf{T}; \quad (\text{III.22})$$

onde $\mathbf{T} = \mathbf{E}_{\mathbf{w}^d} \mathbf{r}$, é um tensor de quarta ordem que dá uma direção para $\dot{\mathbf{E}}$.

Então, considerando-se (III.13), tem-se:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{(\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{G} \mathbf{T}. \quad (\text{III.23})$$

Da relação (III.2), a taxa em tensão com dano pode ser expressa como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d = \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{w}^d) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{III.24})$$

ou usando (III.23) por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d = - \frac{(\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{G} \mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon} = (- \frac{\mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \mathbf{f}_\varepsilon}{G}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (\text{III.25})$$

Combinando-se (III.5), (III.22) e (III.24) obtém-se:

$$\mathbf{h} = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\text{III.26})$$

que indica que, no caso associativo, a simetria para $\boldsymbol{\varepsilon}^d$ pode ser recuperada. Nesse caso, o tensor \mathbf{T} assume uma forma particular $\overline{\mathbf{T}}$.

Finalmente, uma expressão para o escalar ψ resulta de sua definição (III.20), combinada com (III.5), (III.6) e (III.24):

$$\psi = \frac{(\mathbf{h} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{w}^d}}{\|\mathbf{h}\|^2} \leq 0, \quad (\text{III.27a})$$

que para o caso associativo torna-se:

$$\psi = \frac{(\mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{w}^d}}{\|\mathbf{h}\|^2}. \quad (\text{III.27b})$$

III.1.2 - Formulação variacional em taxa.

Um tratamento matemático alternativo para a representação do modelo constitutivo, resulta da introdução de uma forma variacional que inclui as condições de consistência e de complementaridade.

Nesse sentido, considerem-se, inicialmente, os seguintes conjuntos :

$$\Lambda_f^+ = \{ \lambda_f \geq 0 / \mathbf{f} \cdot \lambda_f = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{B} \}; \quad (\text{III.28})$$

$$\Lambda_f = \{ \lambda_f \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{B} \}; \quad (\text{III.29})$$

$$\Lambda_g = \{ \lambda_g \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{B} \}. \quad (\text{III.30})$$

Então, para $\lambda_f \in \Lambda_f^+$ as condições de complementaridade e consistência (III.7) e (III.8) podem ser expressas de modo equivalente por

$$\int_{\mathbf{B}} \mathbf{f} \cdot (\lambda_f^* - \lambda_f) d\mathbf{B} \leq 0; \quad \forall \lambda_f^* \in \Lambda_f^+. \quad (\text{III.31})$$

A equivalência com as condições (III.7) e (III.8) pode ser facilmente verificada adotando-se para λ_f^* sucessivamente os valores $2\lambda_f$ e 0, analogamente à (II.24).

Pela substituição da (III.12), a relação anterior resulta

$$\int_{\mathbf{B}} [\mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \lambda_f \mathbf{f}_{\mathbf{w}^d} \cdot \mathbf{r}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{w}^d)] (\lambda_f^* - \lambda_f) \cdot d\mathbf{B} \leq 0; \quad \forall \lambda_f^* \in \Lambda_f^+, \quad (\text{III.32})$$

ou então por meio do módulo de encruamento G :

$$\int_{\mathbf{B}} [\mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \lambda_f G] \cdot (\lambda_f^* - \lambda_f) d\mathbf{B} \leq 0, \quad \forall \lambda_f^* \in \Lambda_f^+. \quad (\text{III.33})$$

Entretanto, a condição $\lambda_f \in \Lambda_f^+$ é ainda bastante restritiva e pode ser relaxada considerando-se uma função indicatriz dada por :

$$\mathbf{I}_{\Lambda_f^+} = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda_f \in \Lambda_f^+ \\ +\infty & \text{se } \lambda_f \in \Lambda_f - \Lambda_f^+ \end{cases}. \quad (\text{III.34})$$

A função indicatriz pode ser introduzida na formulação, de modo mais conveniente, através de sua forma regularizada ou *aproximação assintótica* :

$$\mathbf{I}_{\Lambda_f^+} = \left(-\frac{1}{\delta}\right) \int_{\mathbf{B}} \mathbf{f} \cdot \mathcal{K} d\mathbf{B} \text{ com } \delta \rightarrow 0^+. \quad (\text{III.35})$$

Portanto, a relação (III.32), agora para $\mathcal{K} \in \Lambda_f$, torna-se:

$$\int_{\mathbf{B}} \left[\frac{\mathbf{f}}{\delta} + \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} - \mathcal{K} \mathbf{f}_{w^d} \mathbf{r}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \mathbf{w}^d) \right] \cdot (\mathcal{K}^* - \mathcal{K}) d\mathbf{B} \leq 0, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \Lambda_f \text{ and } \delta \rightarrow 0^+. \quad (\text{III.36})$$

Finalmente pela substituição de $\mathcal{K} = \psi \underline{\underline{\alpha}}$ em (III.36) chega-se em:

$$\int_{\mathbf{B}} \left[\frac{\mathbf{f}}{\delta} + \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} - \mathbf{f}_{w^d} \underline{\underline{\alpha}} \right] \cdot (\psi \underline{\underline{\alpha}}^* - \psi \underline{\underline{\alpha}}) d\mathbf{B} \leq 0, \quad \forall \underline{\underline{\alpha}}^* \in \Lambda_g, \quad (\text{III.37})$$

notando que $\mathcal{K} \in \Lambda_f$ implica em $\underline{\underline{\alpha}} \in \Lambda_g$.

Por outro lado, é interessante observar que a condição (III.4), que impõe um limite para a energia dissipada, coincide com a condição de otimalidade do seguinte problema de maximização :

$$\max_{\underline{\underline{\alpha}}^* \in \Lambda_\alpha} \int_{\mathbf{B}} \left[-\frac{1}{2} (\underline{\underline{\alpha}}^*)^2 - (\mathbf{w}^d - \bar{\mathbf{w}}^d) \underline{\underline{\alpha}}^* \right] d\mathbf{B}; \quad (\text{III.38})$$

onde $\Lambda_\alpha = \{ \underline{\underline{\alpha}}^* : \underline{\underline{\alpha}}^*(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{B} \}$.

A condição de otimalidade de (III.38) é então dada por:

$$\int_{\mathbf{B}} [-\underline{\underline{\alpha}} - (\mathbf{w}^d - \bar{\mathbf{w}}^d)] (\underline{\underline{\alpha}}^* - \underline{\underline{\alpha}}) d\mathbf{B} \leq 0; \quad (\text{III.39})$$

$$\text{ou } \int_{\mathbf{B}} \mathbf{g} (\underline{\underline{\alpha}}^* - \underline{\underline{\alpha}}) d\mathbf{B} \leq 0; \quad (\text{III.40})$$

a qual é equivalente a (III.10).

III.1.3 - Relação constitutiva incremental.

Uma forma variacional incremental, de maior interesse para as aplicações numéricas porque permite tratar o problema em passo finito, resulta de uma discretização no tempo usando-se aproximações de Euler do tipo

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}} \Delta t; \quad \Delta \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\alpha}} \Delta t; \quad (\text{III.41})$$

onde $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ e $\Delta \underline{\underline{\alpha}}$ são incrementos no intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$.

Pela substituição da (III.41) na (III.37), com $\Delta \underline{\underline{\alpha}} \in \Lambda_g$, resulta a seguinte forma incremental :

$$\int_{\mathbf{B}} \left[\Delta t \frac{\mathbf{f}}{\delta} + \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \mathbf{f}_{w^d} \Delta \underline{\underline{\alpha}} \right] \cdot (\psi \Delta \underline{\underline{\alpha}}^* - \psi \Delta \underline{\underline{\alpha}}) d\mathbf{B} \leq 0, \quad \forall \Delta \underline{\underline{\alpha}}^* \in \Lambda_g. \quad (\text{III.42})$$

Uma forma ainda mais apropriada obtém-se com a condição $\delta = \Delta t$. Então :

$$\int_{\mathbf{B}} [\mathbf{f} + \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \mathbf{f}_{w^d} \Delta \underline{\underline{\alpha}}] \cdot (\psi \Delta \underline{\underline{\alpha}}^* - \psi \Delta \underline{\underline{\alpha}}) d\mathbf{B} \leq 0, \quad \forall \Delta \underline{\underline{\alpha}}^* \in \Lambda_g. \quad (\text{III.43})$$

Localmente a relação (III.43) corresponde a :

$$[\mathbf{f} + \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \Delta\varepsilon - \mathbf{f}_{w^d} \Delta\alpha] \leq 0, \forall \Delta\alpha \in \Lambda_g ; \quad (\text{III.44})$$

$$[\mathbf{f} + \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \Delta\varepsilon - \mathbf{f}_{w^d} \Delta\alpha] \cdot \psi\Delta\alpha = 0, \forall \Delta\alpha \in \Lambda_g . \quad (\text{III.45})$$

Nota-se que a forma local é expressa por um problema de complementaridade, o qual pode ser resolvido com o emprego de algoritmos de programação matemática. Em particular, se \mathbf{f} for linear por partes, a solução da (III.45) contém incrementos exatos $\Delta\alpha$ que verificam $\mathbf{f} = 0$ no passo $t + \Delta t$. Como consequência, a relação constitutiva é representada de modo exato para qualquer Δt que implique somente em crescimento do dano ou então em um passo puro de descarregamento.

III.1.4 - Exemplo de aplicação numérica.

A resposta numérica do modelo proposto pode ser avaliada por uma aplicação simples em campo unidimensional. As características do elemento estrutural estudado estão ilustradas na figura III.2 .

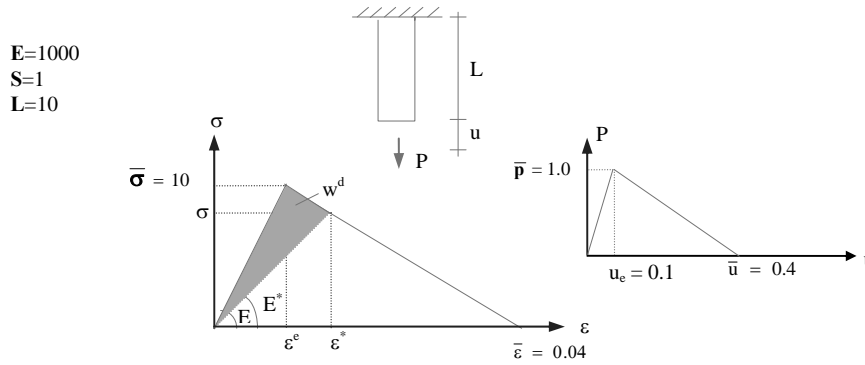


Figura III.2 - Elemento de barra submetido a tração uniaxial.

No caso uniaxial pode-se escrever uma expressão para \mathbf{E}^* e as relações gerais do modelo passam a ser dadas por:

$$\alpha - (w^d - \bar{w}^d) \leq 0; \quad (\text{III.46})$$

$$[-\alpha - (w^d - \bar{w}^d)] \alpha = 0, \alpha \geq 0; \quad (\text{III.47})$$

$$w^d = \frac{\bar{\sigma} \bar{\varepsilon} (\varepsilon^* - \varepsilon^e)}{2(\bar{\varepsilon} - \varepsilon^e)}; \quad (\text{III.48})$$

$$\mathbf{f} = \varepsilon - \varepsilon^* = \varepsilon - \left[\left(\frac{2w^d(\bar{\varepsilon} - \varepsilon^e)}{\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}} \right) + \varepsilon^e \right]; \quad (\text{III.49})$$

$$\mathbf{f}_\varepsilon = 1; \quad \mathbf{f}_{w^d} = -\frac{2(\bar{\varepsilon} - \varepsilon^e)}{\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}}; \quad (\text{III.50})$$

$$\mathbf{E}^* = \left(1 - \frac{2w^d}{\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}^e\boldsymbol{\varepsilon}^*} \right) \mathbf{E}; \quad (\text{III.51})$$

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{\left(\mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^* \right) \cdot \mathbf{E}_{w^d}}{\|\mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2}, \quad \boldsymbol{\psi} \leq 0; \quad (\text{III.52})$$

$$[\mathbf{f} + \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{f}_{w^d} \Delta\alpha] \cdot \boldsymbol{\psi} \Delta\alpha = 0, \quad \forall \Delta\alpha \in \Lambda;_{\mathbf{g}} \quad (\text{III.53})$$

$$[\mathbf{f} + \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{f}_{w^d} \Delta\alpha] \leq 0; \quad (\text{III.54})$$

$$\Delta w^d = -\Delta\alpha; \quad (\text{III.55})$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^* \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\psi} \Delta\alpha; \quad (\text{III.56})$$

Para este exemplo é possível escrever diretamente expressões para os incrementos de deslocamento $\Delta\mathbf{u}$ e de carga $\Delta\mathbf{P}$:

$$[\mathbf{u} - \mathbf{u}^* + \Delta\mathbf{u} - \mathbf{L} \mathbf{f}_{w^d} \Delta\alpha] \leq 0; \quad (\text{III.57})$$

onde

$$\mathbf{f} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^*; \quad (\text{III.58})$$

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{E}^* \frac{\Delta\mathbf{u}}{L} - \boldsymbol{\psi} \Delta\alpha. \quad (\text{III.59})$$

Também para esse caso particular foi adotado:

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{-2\boldsymbol{\varepsilon}^*}{(0.15w^d + 0.01)^2}. \quad (\text{III.60})$$

Os principais resultados numéricos estão ilustrados na figura III.3:

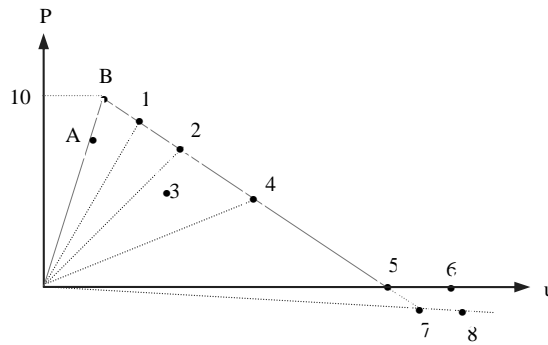


Figura III.3 - Resposta numérica.

Na figura, apresenta-se uma história de deslocamento imposto que inclui um descarregamento, indicado pelo ponto **3**, entre os passos **2** e **4** e duas possibilidades de carregamento a partir do passo **4**. Na primeira possibilidade, o incremento de deslocamento leva a uma deformação, representada pelo ponto **5**, correspondente ao limite exato para a energia dissipada \bar{w}^d prescrita. Além desse ponto a rigidez obtida é nula para qualquer incremento adicional, como por exemplo, o indicado pelo ponto **6**. Na segunda possibilidade, o incremento de deslocamento imposto leva a uma deformação que ultrapassa àquela correspondente ao limite de energia dissipada. Em consequência o modelo determina uma rigidez residual representada na figura por uma linha tracejada passando pelos pontos **7** e **8**.

Os principais resultados numéricos obtidos estão reunidos na tabela III.1.

Points	Δu	$\Delta \alpha$	ψ	ΔP	u^*	ε^*	w^d	E^*	f
A	0.08	0	0	8	0.1	0.01	0	1000	-.02
1	0.05	-0.02	-200	1	0.13	0.013	0.02	692.30	0
2	0.09	-0.06	-153.85	-3	0.22	0.022	0.08	272.73	0
3	-0.03	0	*	-0.82	0.19	0.019	0.08	272.73	-.03
4	0.09	-0.04	-90.91	-1.182	0.28	0.028	0.12	142.85	0
5	0.12	-0.08	-71.43	-4	0.4	0.04	0.2	0	0
6	0.03	0	-71.43	0	0.4	0.04	0.2	0	0
7	0.15	-0.1	-71.43	-5	0.43	0.043	0.22	-23.25	0
8	0.03	0	-46.51	-0.07	0.46	0.046	0.22	-23.25	0

Tabela III.1: Principais resultados numéricos.

(*) - Valor indeterminado para ψ .

III.1.5 - Sobre uma correção do passo de deformação.

O inconveniente representado pela rigidez residual tem origem na própria condição de limitação para a energia dissipada. De fato, a definição proposta para a variável $\alpha \geq 0$ não elimina o caso onde :

$$\alpha = 0 \text{ e } \mathbf{w}^d - \bar{\mathbf{w}}^d > 0. \quad (\text{III.61})$$

Tal caso implica em uma violação da seguinte condição:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \leq \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (\text{III.62})$$

No sentido de estabelecer uma correção para aquela possibilidade, considere-se uma função de relaxação definida por :

$$\mathbf{j}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varepsilon}) = -\boldsymbol{\beta} - (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}) \leq 0 \text{ com } \boldsymbol{\beta} \geq 0. \quad (\text{III.63})$$

Então, um problema de complementaridade resulta:

$$\begin{cases} \text{se } \mathbf{j} < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\beta} = 0 \text{ e } \boldsymbol{\varepsilon} < \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \text{se } \mathbf{j} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} \geq \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0 \end{cases}; \quad (\text{III.64})$$

onde a condição $\mathbf{j} < 0$ e, portanto, $\boldsymbol{\beta} = 0$ implica que (III.62) é satisfeita, enquanto $\mathbf{j} = 0$ e $\boldsymbol{\beta} \geq 0$ representa uma violação da condição.

É então possível estabelecer uma relação de complementaridade entre α e $\boldsymbol{\beta}$:

$$\alpha \boldsymbol{\beta} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \bar{\mathbf{w}}^d - \mathbf{w}^d \geq 0 ; \boldsymbol{\beta} = 0 \text{ e } \boldsymbol{\varepsilon} \leq \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \alpha = 0 ; \bar{\mathbf{w}}^d \leq \mathbf{w}^d \text{ e } \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0 \end{cases}; \quad (\text{III.65})$$

onde a condição ($\alpha \geq 0$ e $\boldsymbol{\beta} = 0$)significa que (III.10) e (III.62) são satisfeitas, enquanto que $\alpha = 0$ e $\boldsymbol{\beta} > 0$ representam uma violação para ela.

Finalmente, tendo-se em vista (III.65), uma correção para a deformação total no passo resulta de :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^* \text{ se } \alpha \geq 0 \text{ e } \boldsymbol{\beta} = 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\beta} \text{ se } \alpha = 0 \text{ e } \boldsymbol{\beta} > 0 \end{cases}; \quad (\text{III.66})$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ é a atual deformação total imposta. Com o valor corrigido de $\boldsymbol{\varepsilon}$ é possível determinar a variável associada à energia dissipada por danificação \mathbf{w}^d e o módulo de rigidez elástico com dano \mathbf{E} .

Aplicando-se a correção sugerida em (III.66) ao exemplo desenvolvido, obtém-se a resposta ilustrada na figura III.4 . Deve-se destacar que :

- i) os pontos **A**, **1**, **2**, **3** e **4** apresentam $\alpha \geq 0$ e $\boldsymbol{\beta} = 0$, ou $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^*$;
- ii) impondo-se um deslocamento $\Delta \mathbf{u} = 0.15$ a partir do ponto **4**, o processo de correção leva a $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0.003$ e $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\beta} = 0.043 - 0.003 = 0.04$. Com esses valores, as equações (III.48) e (III.51) fornecem $\mathbf{w}^d = 0.2$ e $\mathbf{E}^* = 0$ (ponto **7**).

iii) para qualquer deslocamento adicional a partir do ponto 4, no ponto 8, resulta $\alpha = 0$, $w^d = 0.2$ e $E^* = 0$.

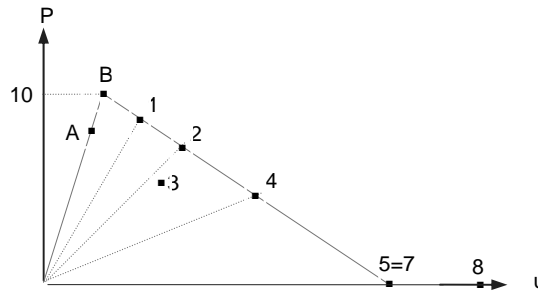


Figura III.4 - Resposta numérica corrigida.

III.2 - Modelo constitutivo para um meio elastoplástico com dano

A formulação apresentada para o caso elástico com dano é agora estendida para o caso elastoplástico com dano, de forma a incorporar os efeitos de plastificação do material idealizado, cuja resposta uniaxial é ilustrada na figura III.5.

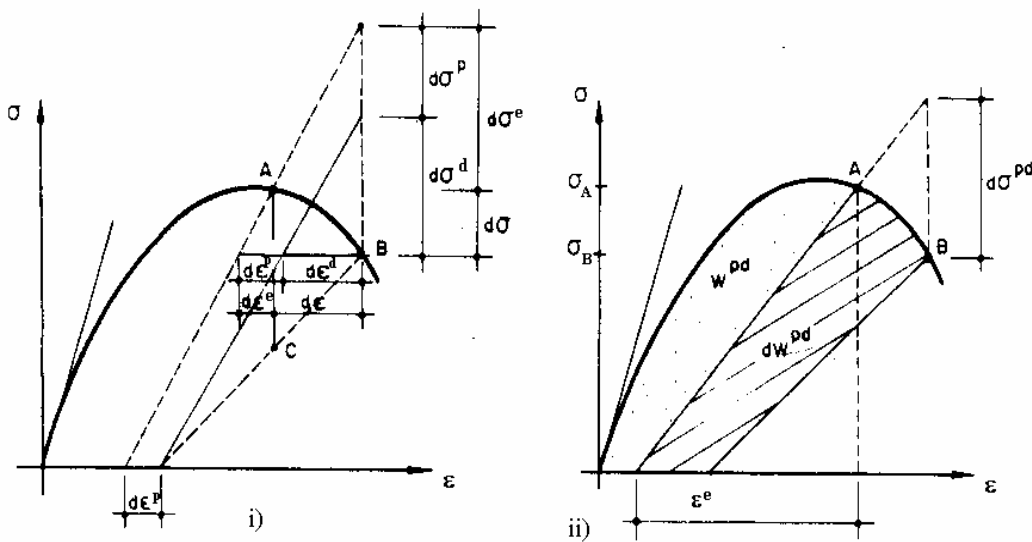


Figura III.5 - Resposta elastoplástica com dano:

- i) redução de rigidez e componentes dos incrementos de tensão e deformação
- ii) energia dissipada no processo de danificação e plastificação

Uma quantidade de energia w^{pd} é assumida ser dissipada em correspondência aos processos de dano e plastificação.

Em sua forma secante, a tensão total está relacionada ao tensor de deformação elástica por meio do tensor dos módulos secante de rigidez elástica:

$$\sigma = E(w^{pd}) \epsilon^e; \quad (III.67)$$

onde a rigidez elástica E é uma função da energia dissipada w^{pd} , considerada no passo atual.

A figura III.6 seguinte, ilustra essa relação para o caso uniaxial.

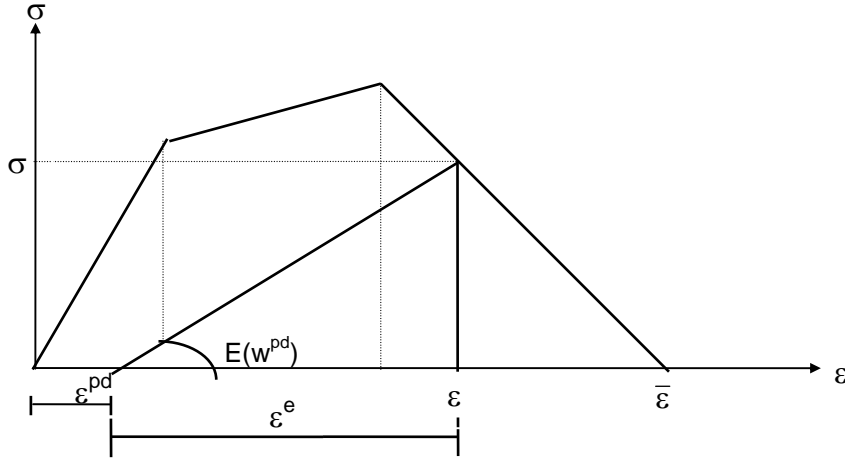


Figura III.6 - relação secante uni-axial para o caso elastoplástico com dano.

III.2.1 - Relação constitutiva em taxas para material elastoplástico com dano.

A relação constitutiva válida para qualquer ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$, no caso elastoplástico com dano, pode ser expressa localmente em taxas na forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}(\mathbf{w}^{pd}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{E}^{\&}(\mathbf{w}^{pd}) \boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pd}; \quad (\text{III.68})$$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pd}, \mathbf{w}^{pd}) \leq 0; \quad (\text{III.69})$$

$$\mathbf{w}^{pd} - \bar{\mathbf{w}}^{pd} \leq 0; \quad (\text{III.70})$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pd} = - \boldsymbol{\lambda}^{\&} \mathbf{h}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pd}, \mathbf{w}^{pd}); \quad (\text{III.71})$$

$$\dot{\mathbf{w}}^{pd} = - \boldsymbol{\lambda}^{\&} \mathbf{r}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pd}, \mathbf{w}^{pd}); \quad (\text{III.72})$$

$$\mathbf{f} \leq 0, \boldsymbol{\lambda}^{\&} \geq 0 \quad \boldsymbol{\lambda}^{\&} \cdot \mathbf{f} = 0; \quad (\text{III.73})$$

$$\text{se } \mathbf{f} = 0 \text{ então } \boldsymbol{\lambda}^{\&} \cdot \dot{\mathbf{f}} = 0, \dot{\mathbf{f}} \leq 0. \quad (\text{III.74})$$

Nas relações anteriores, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pd}$ é a parcela de relaxação de tensão devido a evolução do processo de danificação e plastificação, \mathbf{w}^{pd} é a energia dissipada no mesmo processo, limitada superiormente como indica a (III.70). Em particular o tensor $\mathbf{h}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pd}, \mathbf{w}^{pd}) \geq 0$ é considerado normal à superfície representativa de um ‘potencial elastoplástico com dano’ e $\mathbf{r}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pd}, \mathbf{w}^{pd}) \leq 0$ é uma função de valor escalar que contém as informações da história da plastificação e dano previstas. As condições de complementaridade e consistência (III.73) e (III.74) são análogas àquelas vistas para o caso elástico com dano, onde a função \mathbf{f} constitui-se em critério de plastificação e dano.

Em particular, aparece também a variável $\boldsymbol{\varepsilon}^{pd}$ que reúne a parcela de deformação residual $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ e a parcela associada à redução de rigidez $\boldsymbol{\varepsilon}^d$.

Analogamente ao caso anterior, a desigualdade expressa em (III.70) pode ser imposta através de uma outra condição de complementaridade. Assim, introduzindo-se a variável escalar $\alpha \geq 0$ uma nova função $\mathbf{g}(\alpha, \mathbf{w}^{pd})$ pode ser definida tal que:

$$\mathbf{g}(\alpha, \mathbf{w}^{pd}) = -\alpha - (\mathbf{w}^{pd} - \bar{\mathbf{w}}^{pd}) \leq 0. \quad (\text{III.75})$$

Então, a seguinte condição de complementaridade pode ser estabelecida em analogia com (III.10):

$$\mathbf{g} \cdot \alpha = 0 \text{ com } \mathbf{g} \leq 0 \text{ and } \alpha \geq 0. \quad (\text{III.76})$$

Além disso, como $\mathbf{g} = -\alpha - \mathbf{w}^{pd}$ e $\mathbf{g} \leq 0$ então $-\mathbf{w}^{pd} \leq \alpha \leq 0$, destacando-se ainda que, para $\mathbf{g} = 0$ vale $\alpha = -\mathbf{w}^{pd}$.

Com o objetivo de se obter uma forma tangente do modelo constitutivo a partir das relações anteriores, procede-se inicialmente à determinação do multiplicador $\lambda > 0$, aplicando-se a condição de consistência. Nesse sentido, tomando-se a derivada total de \mathbf{f} resulta:

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{f}_{\varepsilon^{pd}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pd} + \mathbf{f}_{\mathbf{w}^{pd}} \dot{\mathbf{w}}^{pd}. \quad (\text{III.77})$$

Então, utilizando-se a relação $\boldsymbol{\varepsilon}^{pd} = -\mathbf{E}(\mathbf{w}^{pd}) \boldsymbol{\varepsilon}^{pd}$ e, portanto, que

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pd} = -\mathbf{E}^{-1}(\mathbf{w}^{pd}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{pd} \quad (\text{III.78})$$

e substituindo-se a (III.78) em (III.77), em uma situação em que $\dot{\mathbf{f}} = 0$ segue que:

$$\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \lambda \mathbf{f}_{\varepsilon^{pd}} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{f}_\varepsilon - \lambda \mathbf{f}_{\mathbf{w}^{pd}} \mathbf{r} = 0, \quad (\text{III.79})$$

ou ainda,

$$\lambda = \frac{(\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{-\mathbf{f}_{\varepsilon^{pd}} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{f}_\varepsilon + \mathbf{f}_{\mathbf{w}^{pd}} \mathbf{r}} = \frac{\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{G}. \quad (\text{III.80})$$

Nessa última relação supõe-se que $G = -\mathbf{f}_{\varepsilon^{pd}} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{f}_\varepsilon + \mathbf{f}_{\mathbf{w}^{pd}} \mathbf{r} > 0$ é o módulo de encruamento elastoplástico com dano, com $\mathbf{f}_{\mathbf{w}^{pd}} < 0$. Então, o parâmetro de encruamento G pode assumir somente valores positivos. Além disso, $\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0$ indica que a evolução do dano ocorre quando a taxa de deformação aponta para o lado externo ao domínio elástico.

Considerando agora (III.71) e (III.80), a relação para $\boldsymbol{\varepsilon}^{pd}$, no caso não-associativo, é expressa por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{pd} = -\left(\frac{\mathbf{h} \otimes \mathbf{f}_\varepsilon}{G}\right) \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (\text{III.81})$$

Então, a relação constitutiva tangente resulta como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{H}(\mathbf{w}^{pd}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[\mathbf{E}(\mathbf{w}^{pd}) - \left(\frac{\mathbf{h} \otimes \mathbf{f}_\varepsilon}{G}\right)\right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \text{ se } \lambda \geq 0. \quad (\text{III.82})$$

No caso associativo a relação (III.82) é equivalente a:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}(\mathbf{w}^{pd}) \boldsymbol{\varepsilon} = [E(\mathbf{w}^{pd}) - \frac{\mathbf{f}_\varepsilon \otimes \mathbf{f}_\varepsilon}{G}] \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ se } \lambda \geq 0. \quad (\text{III.83})$$

Analogamente ao modelo visto na seção III.1, usando-se as relações (III.72) e (III.80), obtém-se:

$$\mathbf{w}^{pd} = - \frac{(\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varepsilon})}{G} \mathbf{r}. \quad (\text{III.84})$$

Além disso, a relação entre $\boldsymbol{\sigma}$ e λ pode ser dada por:

$$\lambda = \psi \boldsymbol{\sigma}; \quad (\text{III.85})$$

com

$$\psi = \mathbf{r}^{-1} \leq 0; \quad (\text{III.86})$$

onde, ψ é determinado em analogia a (III.27a) e (III.27b), com $\mathbf{E}_{\mathbf{w}^d}$ substituído por $\mathbf{E}_{\mathbf{w}^{pd}}$ naquelas relações.

Para determinar-se separadamente as partes, plástica e com dano, do tensor $\boldsymbol{\sigma}^{pd}$ é conveniente considerar as seguintes relações:

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \mathbf{E}(\mathbf{w}^{pd}) \boldsymbol{\varepsilon}^e; \quad (\text{III.87})$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{pd} = \mathbf{h} \mathbf{r}^{-1} \mathbf{w}^{pd} = \mathbf{h} \psi \mathbf{w}^{pd}; \quad (\text{III.88})$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{pd} = \boldsymbol{\sigma}^p + \boldsymbol{\sigma}^d; \quad (\text{III.89})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{w}^{pd}) = \mathbf{E}_{\mathbf{w}^{pd}} \mathbf{w}^{pd}. \quad (\text{III.90})$$

Então, combinando-se tais relações obtém-se:

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \mathbf{w}^{pd} \mathbf{E}_{\mathbf{w}^{pd}} \boldsymbol{\varepsilon}^e \text{ e } \boldsymbol{\sigma}^p = \mathbf{w}^{pd} (-\mathbf{E}_{\mathbf{w}^{pd}} \boldsymbol{\varepsilon}^e + \psi \mathbf{f}_\varepsilon); \quad (\text{III.91})$$

onde é admitido que $|\mathbf{r}^{-1} \mathbf{f}_\varepsilon| > |\mathbf{E}_{\mathbf{w}^{pd}} \boldsymbol{\varepsilon}^e|$. Um inconveniente das relações vistas em (III.91) e (III.67) é que essas são expressas em função de $\boldsymbol{\varepsilon}^e$. Mas, deve ser enfatizado que $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ pode ser determinado em função de $\boldsymbol{\varepsilon}$ e \mathbf{w}^{pd} ou seja:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^e(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{w}^{pd}).$$

III.2.2 - Formulação variacional em taxa.

Considerando-se os conjuntos (III.28), (III.29) e (III.30) e procedendo-se como anteriormente, para $\lambda \in \Lambda_f^+$ tem-se que:

$$\int_{\mathbf{B}} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{\kappa}^* - \mathbf{\kappa}) d\mathbf{B} \leq \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{\kappa}^* \in \Lambda_f^+ . \quad (\text{III.92})$$

Utilizando-se (III.77), a (III.92) é equivalente a:

$$\int_{\mathbf{B}} [\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \varepsilon + \dot{\lambda} \mathbf{f}_{\varepsilon^{pd}} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{f}_\varepsilon - \mathbf{\kappa} \mathbf{f}_{w^{pd}} \cdot \mathbf{r}] \cdot (\mathbf{\kappa}^* - \mathbf{\kappa}) d\mathbf{B} \leq 0, \quad \forall \mathbf{\kappa}^* \in \Lambda_f^+ . \quad (\text{III.93})$$

A última inequação é equivalente às condições de complementaridade e consistência (III.73) (III.74).

Utilizando-se o parâmetro de encruamento determinado em (III.80), a relação (III.92) pode ser escrita também por:

$$\int_{\mathbf{B}} [\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \varepsilon - \mathbf{\kappa} \mathbf{G}] \cdot (\mathbf{\kappa}^* - \mathbf{\kappa}) d\mathbf{B} \leq 0, \quad \forall \mathbf{\kappa}^* \in \Lambda_f^+ . \quad (\text{III.94})$$

A condição restritiva $\mathbf{\kappa} \in \Lambda_f^+$ pode ser relaxada, considerando a função indicatriz $\mathbf{I}_{\Lambda_f^+}$ definida em (III.34) e introduzida no modelo por meio de uma aproximação assintótica de acordo com (III.35).

Portanto, utilizando-se a relação assintótica (III.35), para $\mathbf{\kappa} \in \Lambda_f$, a (III.94) se torna:

$$\int_{\mathbf{B}} \left[\frac{\mathbf{f}}{\delta} + \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \varepsilon - \mathbf{\kappa} \mathbf{G} \right] \cdot (\mathbf{\kappa}^* - \mathbf{\kappa}) d\mathbf{B} \leq 0, \quad \forall \mathbf{\kappa}^* \in \Lambda_f \text{ and } \delta \rightarrow 0^+ . \quad (\text{III.95})$$

Finalmente, pela substituição de $\mathbf{\kappa} = \psi \alpha$, chega-se em:

$$\int_{\mathbf{B}} \left[\frac{\mathbf{f}}{\delta} + \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \varepsilon - \mathbf{G} \psi \alpha \right] \cdot (\psi \alpha^* - \psi \alpha) d\mathbf{B} \leq 0, \quad \forall \alpha^* \in \Lambda_g, \quad (\text{III.96})$$

notando que $\mathbf{\kappa} \in \Lambda_f$ implica em $\alpha \in \Lambda_g$.

A condição (III.70) que impõe um limite para a energia dissipada, coincide com a condição de otimalidade do problema de maximização (III.38).

A condição de otimalidade é agora dada por:

$$\int_{\mathbf{B}} [-\alpha - (\mathbf{w}^{pd} - \bar{\mathbf{w}}^{pd})] (\alpha^* - \alpha) d\mathbf{B} \leq 0, \quad (\text{III.97})$$

equivalente a (III.39) e (III.40), a qual é equivalente à relação (III.10).

III.2.3 - Formulação variacional incremental.

Uma forma variacional incremental resulta de uma discretização no tempo, utilizando-se (III.41).

Pela substituição de (III.41) em (III.96), com $\Delta \alpha \in \Lambda_g$, a seguinte forma incremental resulta:

$$\int_{\mathbf{B}} \left[\Delta t \frac{\mathbf{f}}{\delta} + \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \Delta \varepsilon - \psi \mathbf{G} \Delta \alpha \right] \cdot (\psi \Delta \alpha^* - \psi \Delta \alpha) d\mathbf{B} \leq 0, \quad \forall \Delta \alpha^* \in \Lambda_g. \quad (\text{III.98})$$

Em particular, fazendo-se $\delta = \Delta t$, um funcional estendido resulta:

$$\int_{\mathbf{B}} [\mathbf{f} + \mathbf{f}_{\varepsilon} \cdot \Delta \varepsilon - \psi \mathbf{G} \Delta \alpha] \cdot (\psi \Delta \alpha^* - \psi \Delta \alpha) d\mathbf{B} \leq 0, \quad \forall \Delta \alpha^* \in \Lambda_{\mathbf{g}}. \quad (\text{III.99})$$

Localmente a última relação corresponde a:

$$[\mathbf{f} + \mathbf{f}_{\varepsilon} \cdot \Delta \varepsilon - \psi \mathbf{G} \Delta \alpha] \leq 0, \quad \forall \Delta \alpha \in \Lambda_{\mathbf{g}}; \quad (\text{III.100})$$

$$[\mathbf{f} + \mathbf{f}_{\varepsilon} \cdot \Delta \varepsilon - \psi \mathbf{G} \Delta \alpha] \cdot \psi \Delta \alpha = 0; \quad (\text{III.101})$$

$$\forall \Delta \alpha \in \Lambda_{\mathbf{g}}. \quad (\text{III.102})$$

As relações locais (III.100), (III.101) e (III.102) são equivalentes a um problema de complementaridade linear, o qual pode ser resolvido por métodos de programação matemática e as mesmas conclusões tiradas no final da seção III.1.3 podem ser feitas aqui.

III.2.4 - Simplificação do modelo elastoplástico com dano.

O modelo elastoplástico com dano pode ser simplificado, considerando-se a redefinição das equações (III.69), (III.71) e (III.72) para:

$$\mathbf{f}(\varepsilon, \mathbf{w}^{pd}) \leq 0; \quad (\text{III.103})$$

$$\mathbf{e}^{pd} = - \lambda^{\&} \mathbf{h}(\varepsilon, \mathbf{w}^{pd}); \quad (\text{III.104})$$

$$\mathbf{w}^{pd} = - \lambda^{\&} \mathbf{r}(\varepsilon, \mathbf{w}^{pd}). \quad (\text{III.105})$$

Aplicando-se a condição de consistência e tomando-se a derivada total de \mathbf{f} resulta :

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_{\varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon} + \mathbf{f}_{\mathbf{w}^{pd}} \dot{\mathbf{w}}^{pd}. \quad (\text{III.106})$$

Então, utilizando-se a relação (III.105) em uma situação em que $\dot{\mathbf{f}} = 0$ segue que:

$$\mathbf{f}_{\varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon} - \lambda^{\&} \mathbf{f}_{\mathbf{w}^{pd}} \mathbf{r} = 0. \quad (\text{III.107})$$

A determinação do multiplicador $\lambda^{\&} > 0$, a partir de (III.107) é dada por:

$$\lambda^{\&} = \frac{(\mathbf{f}_{\varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon})}{\mathbf{f}_{\mathbf{w}^{pd}} \mathbf{r}} = \frac{(\mathbf{f}_{\varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon})}{G}. \quad (\text{III.108})$$

Nessa última relação considera-se $G = \mathbf{f}_{\mathbf{w}^{pd}} \mathbf{r} > 0$, o módulo de encruamento elastoplástico com dano, com $\mathbf{f}_{\mathbf{w}^{pd}} < 0$. Então, o parâmetro de encruamento G pode assumir somente valores positivos.

As demais relações são determinadas analogamente àquelas vistas nas seções anteriores (III.2.1), (III.2.2) e (III.2.3).

III.3 - Generalização do modelo.

A generalização do modelo para o caso multi-axial é feita de maneira análoga ao procedimento efetuado até aqui.

Considerando-se a redefinição das variáveis e parâmetros envolvidos para o caso multiaxial tem-se que:

- $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{W}$ e $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}^*$, onde \mathbf{W} e \mathbf{W}^* são respectivamente os conjuntos de deformações e tensões admissíveis, são assumidos como tensores de 2^a ordem nas variáveis $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ e $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$;
- O tensor dos módulos elásticos \mathbf{E} é assumido como um tensor de 4^a ordem nas variáveis E_{ijkl} ;
- f é uma função escalar dependente do tensor de 2^a ordem $\boldsymbol{\varepsilon}$ e do escalar energia de dissipação w^{pd} o que implica em $f_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ser um tensor de 2^a ordem e em $f_{w^{pd}}$ ser um escalar;
- \mathbf{g}^{pd} é um tensor de 2^a ordem dependente do escalar taxa de multiplicador elastoplástico com dano \mathcal{K} e do tensor de 2^a ordem $f_{\boldsymbol{\varepsilon}}$, no caso associativo ou do tensor de 2^a ordem normal à superfície de dano \mathbf{h} , que representa a regra de fluxo não-associativa;
- r é uma função escalar dependente do tensor de 2^a ordem $\boldsymbol{\varepsilon}$ e do escalar energia de dissipação w^{pd} , que contém a história da plasticidade associada ao dano prevista.

Desde que, a definição das equações vistas nas seções anteriores foram feitas levando-se em consideração a natureza das variáveis no caso multi-axial, então, para o caso multi-axial, a definição das variáveis envolvidas são feitas de maneira análoga àquela vista nas seções anteriores.

Vale ressaltar que, da maneira como foram elaborados os modelos, esses são versáteis no sentido de que, se o modelo considerado é o modelo elastoplástico com dano, desde que $w \neq 0$ pode ser particionado em w^p e w^d , a partição implica em encruamento positivo quando $w^d = 0$ e em elasticidade acoplada ao dano quando $w^p = 0$.

CAPÍTULO IV - Potenciais: Convexo Regularizador e Não-Convexo para os Modelos com Dano.

A contribuição desse capítulo se encontra na definição de potenciais particulares, sendo um convexo e outro não-convexo, que regem os modelos lineares de dano vistos no capítulo anterior.

Será mostrado que o potencial convexo se relacionará diretamente ao modelo elastoplástico com dano, mas particularmente é válido também para o modelo elástico com dano desde que não se considere deformações residuais. Porisso esse potencial será denominado de potencial convexo regularizador ou convexo resolvente dos modelos com dano. Esse nome está baseado no fato que, após determinar-se o multiplicador em taxa de dano, a definição do potencial acopla a diferença entre um potencial estritamente convexo (potencial elástico) e um potencial convexo escrito em função da variável multiplicador de dano, gerando um particular potencial convexo, como será visto. Esse potencial está relacionado ao modelo corrigido, ou seja, onde os pontos gerados através da derivação desse, estão localizados exatamente na curva de encruamento. A sua definição tem analogia ao estudo encontrado em [Feijó e Zouain, 1990] e explora resultados reunidos no Apêndice B.

A definição do potencial não-convexo é vista com maiores detalhes na seção IV.5 e explora resultados reunidos no Apêndice C.

IV.1 - Hipóteses adicionais.

As hipóteses adicionais consideradas são análogas àquelas encontradas em [Feijó e Zouain, 1990], as quais são observadas, obtidas e comprovadas na prática.

Considere \mathbf{B} a região ocupada pelo corpo material. No corpo \mathbf{B} as hipóteses adicionais que seguem são consideradas.

i) sejam \mathbf{W}^* e \mathbf{W} subespaços duais em \mathbf{B} , não vazios, aos quais pertencem respectivamente os tensores taxa de tensão e taxa de deformação. Estes espaços vetoriais são dotados com normas e produto dualidade como segue:

$$\| \mathfrak{E} \|_{\mathbf{W}} = \left(\int_{\mathbf{B}} \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E} \, d\mathbf{B} \right)^{1/2} ; \quad \| \mathfrak{E} \|_{\mathbf{W}^*} = \left(\int_{\mathbf{B}} \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E} \, d\mathbf{B} \right)^{1/2} ; \quad (\text{IV.1})$$

$$\langle \mathfrak{E}, \mathfrak{E} \rangle_{\mathbf{W} \times \mathbf{W}^*} = \int_{\mathbf{B}} \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E} \, d\mathbf{B} . \quad (\text{IV.2})$$

ii) taxas de multiplicadores plásticos \mathfrak{K} (ou λ) e a função de plastificação e dano \mathbf{f} são definidos nos espaços duais Λ , Λ^* em \mathbf{B} , respectivamente, tais que as normas e o produto dualidade são definidos como segue:

$$\| \mathfrak{K} \|_{\Lambda} = \left(\int_{\mathbf{B}} \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K} \, d\mathbf{B} \right)^{1/2} ; \quad \| \mathbf{f} \|_{\Lambda^*} = \left(\int_{\mathbf{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} \, d\mathbf{B} \right)^{1/2} ; \quad (\text{IV.3})$$

$$\langle \mathbf{f}, \mathfrak{K} \rangle_{\Lambda \times \Lambda^*} = \int_{\mathbf{B}} \mathbf{f} \cdot \mathfrak{K} \, d\mathbf{B} . \quad (\text{IV.4})$$

iii) para um dado campo vetorial \mathbf{f} , tal que $\mathbf{f} \leq 0$ em \mathbf{B} , os conjuntos Λ_f^+ , Λ_f e Λ_g definidos respectivamente em (III.28), (III.29) e (III.30) também são considerados aqui;

iv) são resumidas agora as hipóteses envolvendo a função de plastificação e dano f e a função gradiente f_ε :

iv.1) $f = f(\varepsilon, \varepsilon^{pd}, \mathbf{w}^{pd})$ é uma função regular em campo escalar do campo tensorial $\varepsilon \in \mathbf{W}$, do campo escalar $\lambda \in \Lambda$ e convexa com respeito a ε (ver figura IV.1).

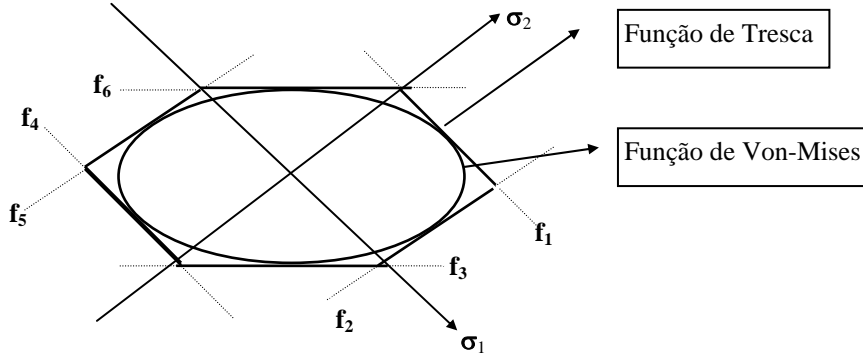


Figura IV.1 - função de plastificação e dano de Tresca e Von-Mises.

iv.2) $f_\varepsilon = f_\varepsilon(\varepsilon, \lambda)$ é um operador linear de 2^a ordem definido de $\mathbf{W} \times \Lambda$ em $\mathbf{W}^* \times \Lambda$, admitido como:

iv.2.1) limitado inferiormente e superiormente em Λ_f , isto é, para alguma constante $h_0 > 0$ e $h_0' > 0$, tem-se,

$$h_0 \| \mathcal{K} \|_\Lambda \geq \| f_\varepsilon \mathcal{K} \| \geq h_0' \| \mathcal{K} \|_\Lambda, \quad \forall \mathcal{K} \in \Lambda_f. \quad (IV.5)$$

Essa propriedade garante que somente taxas de tensão plásticas com dano diferentes de zero são consideradas pela contribuição dos modos plásticos ativos \mathcal{K} , ou seja, $\varepsilon^{pd} = - \mathcal{K} f_\varepsilon \neq 0$ e que somente estão considerados valores finitos para ε^{pd} . Além disso, (IV.5) também garante que existe somente um $\mathcal{K} \in \Lambda_f$ tal que $\mathcal{K} f_\varepsilon$ é igual a um ε^{pd} prescrito.

iv.2.2) $\mathcal{K} f_\varepsilon$ é continuamente dependente de $\mathcal{E} \in \mathbf{W}$, isto é, para $h_1 > 0$,

$$| \langle \mathcal{E}, \mathcal{K} f_\varepsilon \rangle | \leq h_1 \| \mathcal{E} \|_{\mathbf{W}} \| \mathcal{K} \|_\Lambda, \quad \forall \mathcal{K} \in \Lambda_f, \quad \forall \mathcal{E} \in \mathbf{W}. \quad (IV.6)$$

A propriedade (IV.8) garante que, dado um $\mathcal{E} \in \mathbf{W}^*$ tal que $\exists \mathcal{K} \in \Lambda_f$, ou seja, o carregamento provoque deformação plástica associada ao dano, a taxa de dissipação de energia $\langle \mathcal{E}, \mathcal{K} f_\varepsilon \rangle$ é finita. Isto quer dizer que, os níveis de tensão \mathcal{E} considerados provocam um dano contínuo e limitado no corpo material analisado, levando-o continuamente ao colapso total, ou seja, a nova superfície de plastificação e dano é limitada.

v) O tensor dos módulos elásticos \mathbf{E} é simétrico e definido positivo, tal que para $h_2 \geq 0$ e $h_3 \geq \| \mathbf{E} \|$,

$$h_2 \| \mathcal{E} \|^2 \leq \langle \mathbf{E} \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle \leq h_3 \| \mathcal{E} \|^2, \quad \forall \mathcal{E} \in \mathbf{W}. \quad (IV.7)$$

vi) O módulo de plastificação e dano G é tal que, para $h_4 \geq 0$ e $h_5 \geq G$,

$$h_4 \| \mathcal{K} \|^2 \leq \langle G \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle \leq h_5 \| \mathcal{K} \|^2, \quad \forall \mathcal{K} \in \Lambda_f. \quad (IV.8)$$

Desde que, \mathcal{K} pode ser particionado em \mathcal{K}^p e \mathcal{K}^d , a propriedade (IV.10) implica em encruamento plástico positivo quando $\langle G \mathcal{K}^d, \mathcal{K}^d \rangle = 0$ e em dano acoplado à elasticidade quando $\langle G \mathcal{K}^p, \mathcal{K}^p \rangle = 0$, se $\langle G \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle \neq 0$.

IV.2 - Definição do potencial convexo regularizador.

Inicialmente, considere o seguinte potencial, $\phi_1 : \mathbf{W} \times \Lambda \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, tal que:

$$\phi_1(\mathcal{E}, \mathcal{K}) = \left\{ \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle + \langle -\mathcal{K} \mathbf{f}_\varepsilon, \mathcal{E} \rangle + \frac{1}{2} \langle G \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle \right\}. \quad (\text{IV.9})$$

Para esse potencial, são válidas as seguintes propriedades:

P1) ϕ_1 é convexo nas variáveis $\mathcal{E} \in \mathbf{W}$ e $\mathcal{K} \in \Lambda_f^+$.

Justificativa:

Tal fato se confirma diretamente de (IV.7) e (IV.8), já que o operador \mathbf{E} é simétrico definido positivo e o parâmetro G é positivo, ou ainda porque, ϕ_1 é definido como a soma de um potencial quadrático com um potencial linear em qualquer das variáveis. \square

P2) ϕ_1 é contínuo nas variáveis $\mathcal{E} \in \mathbf{W}$ e $\mathcal{K} \in \Lambda_f^+$.

Justificativa:

ϕ_1 é contínuo na variável $\mathcal{E} \in \mathbf{W}$ pois, $\forall \mathcal{E}^*$ e $\mathcal{E} \in \mathbf{W}$, para $\mathcal{K} \in \Lambda_f^+$ fixo, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left| \phi_1(\mathcal{E}^*, \mathcal{K}) - \phi_1(\mathcal{E}, \mathcal{K}) \right| = \\ & \left| \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \mathcal{E}^*, \mathcal{E}^* \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle - \langle \mathcal{K} \mathbf{f}_\varepsilon, \mathcal{E}^* \rangle + \langle \mathcal{K} \mathbf{f}_\varepsilon, \mathcal{E} \rangle + \frac{1}{2} \langle G \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle - \frac{1}{2} \langle G \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} (\mathcal{E}^* + \mathcal{E}), \mathcal{E}^* - \mathcal{E} \rangle + \langle \mathcal{K} \mathbf{f}_\varepsilon, \mathcal{E} - \mathcal{E}^* \rangle \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{E}\| \|\mathcal{E}^* + \mathcal{E}\| \|\mathcal{E}^* - \mathcal{E}\| + \|\mathcal{K} \mathbf{f}_\varepsilon\| \|\mathcal{E} - \mathcal{E}^*\| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} h_5 \|\mathcal{E}^* - \mathcal{E}\| \|\mathcal{E}^* + \mathcal{E}\| + h_0 \|\mathcal{K}\| \|\mathcal{E}^* - \mathcal{E}\| \\ & \leq K \|\mathcal{E}^* - \mathcal{E}\|; \end{aligned}$$

onde, $K = \frac{1}{2} h_5 \|\mathcal{E}^* + \mathcal{E}\| + h_0 \|\mathcal{K}\|$

Logo, ϕ_1 é limitada em \mathcal{E} , e então, ϕ_1 é contínua em \mathcal{E} .

Analogamente, se prova que ϕ_1 é contínua em $\mathcal{K} \in \Lambda_f^+$. \square

P3) ϕ_1 é coerciva nas variáveis $\mathcal{E} \in \mathbf{W}$ e $\mathcal{K} \in \Lambda_f^+$.

Justificativa:

Para $\mathcal{E} \in \mathbf{W}$ e $\mathcal{K} \in \Lambda_f^+$ fixo,

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathcal{E}, \mathcal{K}) &= \left\{ \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle + \langle -\mathcal{K} \mathbf{f}_\varepsilon, \mathcal{E} \rangle + \frac{1}{2} \langle G \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle \right\} \geq \\ & \frac{1}{2} h_2 \|\mathcal{E}\|^2 - |\langle \mathcal{E}, \mathcal{K} \mathbf{f}_\varepsilon \rangle| + \frac{1}{2} \langle G \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle \geq \frac{1}{2} h_2 \|\mathcal{E}\|^2 - |\langle \mathcal{E}, \mathcal{K} \mathbf{f}_\varepsilon \rangle| \geq \\ & \geq \frac{1}{2} h_2 \|\mathcal{E}\|^2 - h_1 \|\mathcal{E}\| \|\mathcal{K}\| = \left(\frac{1}{2} h_2 \|\mathcal{E}\| - h_1 \|\mathcal{K}\| \right) \|\mathcal{E}\| \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{\|\mathcal{E}\| \rightarrow +\infty} \phi_1(\mathcal{E}, \mathcal{K}) = +\infty$.

Portanto, ϕ_1 é coerciva.

Analogamente, prova-se que ϕ_1 é coerciva em $\mathcal{K} \in \Lambda_f^+$. \square

Proposição IV.1:

Considerando-se agora o seguinte potencial, $\phi: \mathbf{W} \times \Lambda \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$\phi(\mathfrak{E}, \mathfrak{K}^*) = \inf_{\mathfrak{K}^*, \mathfrak{E}} \phi_1(\mathfrak{E}, \mathfrak{K}^*), \text{ ou seja,}$$

$$\phi(\mathfrak{E}, \mathfrak{K}^*) = \inf_{\mathfrak{K}^*, \mathfrak{E}} \left\{ \frac{1}{2} \langle E \mathfrak{E}, \mathfrak{E} \rangle + \langle -\mathfrak{K}^* \mathbf{f}_\varepsilon, \mathfrak{E} \rangle + \frac{1}{2} \langle G \mathfrak{K}^*, \mathfrak{K}^* \rangle \right\}, \quad (\text{IV.10})$$

$\forall \mathfrak{E} \in \mathbf{W}$ e $\mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+$, então, desde que \mathbf{W} e Λ_f^+ são conjuntos convexos, fechados e não-vazios, ϕ possui ínfimo em \mathbf{W} e Λ_f^+ .

Justificativa:

Devido ao fato de ϕ_1 ser convexa, contínua e coerciva nas variáveis $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$ e $\mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+$, com \mathbf{W} e Λ_f^+ conjuntos convexos, fechados e não-vazios, então, ϕ_1 é fracamente inferiormente semi-contínuo e apresenta a propriedade do crescimento (ver proposições B3.9, B3.10). Em consequência disso, tem-se que ϕ é limitada inferiormente nas variáveis $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$ e $\mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+$ e possui ínfimo em \mathbf{W} e Λ_f^+ . \square

Proposição IV.2:

Se ϕ possui ínfimo em \mathbf{W} e Λ_f^+ então ϕ é inferiormente semi-contínuo (i.s.c) em \mathbf{W} e Λ_f^+ .

Justificativa:

Sejam $\mathfrak{E}^* \in \mathbf{W}$ e $\mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+$, admitidos como ínfimos para ϕ , nesses conjuntos.

ϕ é i.s.c. em $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$, pois para $n \rightarrow \infty$;

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathfrak{E}^n \rightarrow \mathfrak{E}^*} \inf_{\mathfrak{K}^n} \left(\inf_{\mathfrak{K}^n} \left\{ \frac{1}{2} \langle E \mathfrak{E}^n, \mathfrak{E}^n \rangle + \langle -\mathfrak{K}^n \mathbf{f}_\varepsilon, \mathfrak{E}^n \rangle + \frac{1}{2} \langle G \mathfrak{K}^n, \mathfrak{K}^n \rangle \right\} \right) \geq \\ & \geq \lim_{\mathfrak{E}^n \rightarrow \mathfrak{E}^*} \inf_{\mathfrak{K}^n} \left(\inf_{\mathfrak{K}^n} \left\{ \frac{1}{2} \langle E \mathfrak{E}^n, \mathfrak{E}^n \rangle + \langle -\mathfrak{K}^* \mathbf{f}_\varepsilon, \mathfrak{E}^n \rangle + \frac{1}{2} \langle G \mathfrak{K}^*, \mathfrak{K}^* \rangle \right\} \right) \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \langle E \mathfrak{E}^*, \mathfrak{E}^* \rangle + \langle -\mathfrak{K}^* \mathbf{f}_\varepsilon, \mathfrak{E}^* \rangle + \frac{1}{2} \langle G \mathfrak{K}^*, \mathfrak{K}^* \rangle = \phi(\mathfrak{E}^*, \mathfrak{K}^*) \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{\mathfrak{E}^n \rightarrow \mathfrak{E}^*} \phi(\mathfrak{E}^n, \mathfrak{K}^*) \geq \phi(\mathfrak{E}^*, \mathfrak{K}^*)$ e de acordo com a definição A2.4 do

Apêndice A, ϕ é inferiormente semicontínuo (i.s.c.).

Analogamente, prova-se que ϕ é i.s.c. em $\mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+$. \square

Proposição IV.3:

ϕ é própria nas variáveis $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$ e $\mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+$.

Justificativa:

ϕ é própria nas variáveis $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$ pois:

$\phi(\mathfrak{E}, 0) = \frac{1}{2} \langle E \mathfrak{E}, \mathfrak{E} \rangle \geq 0$ e é um valor finito na hipótese de pequenos deslocamentos e deformações.

Além disso, $\phi(\mathfrak{E}, \mathfrak{K}^*) > -\infty$ pois para $\mathfrak{E}^* \in \mathbf{W}$ admitido como ínfimo para ϕ em \mathbf{W} e $\mathfrak{K}^* \in \Lambda_f^+$, fixo tem-se:

$$\begin{aligned} \phi(\mathfrak{E}, \mathfrak{K}^*) &\geq \frac{1}{2} \langle E \mathfrak{E}^*, \mathfrak{E}^* \rangle + \langle -f_\varepsilon \mathfrak{K}^*, \mathfrak{E}^* \rangle + \frac{1}{2} \langle G \mathfrak{K}^*, \mathfrak{K}^* \rangle \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \langle E \mathfrak{E}^*, \mathfrak{E}^* \rangle + \langle -f_\varepsilon \mathfrak{K}^*, \mathfrak{E}^* \rangle \geq \frac{1}{2} \langle E \mathfrak{E}^*, \mathfrak{E}^* \rangle - |\langle f_\varepsilon \mathfrak{K}^*, \mathfrak{E}^* \rangle| > -\infty \end{aligned}$$

pois, $\frac{1}{2} \langle E \mathfrak{E}^*, \mathfrak{E}^* \rangle \geq 0$ e $-|\langle f_\varepsilon \mathfrak{K}^*, \mathfrak{E}^* \rangle| \geq -h_1 \| \mathfrak{E}^* \| \| \mathfrak{K}^* \| > -\infty$.

Portanto, ϕ é própria na variável $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$.

Analogamente, prova-se que ϕ é própria em $\mathfrak{K} \in \Lambda_f^+$. □

Proposição IV.4:

ϕ é diferenciável nas variáveis $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$ e $\mathfrak{K} \in \Lambda_f^+$.

Justificativa:

Para se provar que ϕ_1 é diferenciável nessas variáveis utilizará-se a diferencial total com relação às variáveis $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$ e $\mathfrak{K} \in \Lambda_f^+$. Assim:

$$\begin{aligned} &|\phi_1(\mathfrak{E}^*, \mathfrak{K}^*) - \phi_1(\mathfrak{E}, \mathfrak{K}) - \langle E \mathfrak{E}, \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E} \rangle - \langle \mathfrak{K} f_\varepsilon, \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E} \rangle - \langle (\mathfrak{K}^* - \mathfrak{K}) f_\varepsilon, \mathfrak{E} \rangle - \langle G \mathfrak{K}, \mathfrak{K}^* - \mathfrak{K} \rangle| = \\ &= | \{ \frac{1}{2} \langle E \mathfrak{E}^*, \mathfrak{E}^* \rangle + \langle -\mathfrak{K}^* f_\varepsilon, \mathfrak{E}^* \rangle + \frac{1}{2} \langle G \mathfrak{K}^*, \mathfrak{K}^* \rangle \} - \{ \frac{1}{2} \langle E \mathfrak{E}, \mathfrak{E} \rangle + \langle -f_\varepsilon \mathfrak{K}, \mathfrak{E} \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \langle G \mathfrak{K}, \mathfrak{K} \rangle \} - \langle E \mathfrak{E}, \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E} \rangle + \langle \mathfrak{K} f_\varepsilon, \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E} \rangle + \langle (\mathfrak{K}^* - \mathfrak{K}) f_\varepsilon, \mathfrak{E} \rangle - \langle G \mathfrak{K}, \mathfrak{K}^* - \mathfrak{K} \rangle | \\ &= | \frac{1}{2} \langle E (\mathfrak{E}^* - \mathfrak{E}), \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E} \rangle + \frac{1}{2} \langle G (\mathfrak{K}^* - \mathfrak{K}), \mathfrak{K}^* - \mathfrak{K} \rangle + \langle -(\mathfrak{K}^* - \mathfrak{K}) f_\varepsilon, \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E} \rangle | \leq \\ &\leq | \frac{1}{2} \langle E (\mathfrak{E}^* - \mathfrak{E}), \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E} \rangle | + | \frac{1}{2} \langle G (\mathfrak{K}^* - \mathfrak{K}), \mathfrak{K}^* - \mathfrak{K} \rangle | + | \langle -(\mathfrak{K}^* - \mathfrak{K}) f_\varepsilon, \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E} \rangle | \\ &\leq \frac{1}{2} h_2 \| \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E} \|^2 + h_1 \| \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E} \| \| \mathfrak{K}^* - \mathfrak{K} \| + \frac{1}{2} h_5 \| \mathfrak{K}^* - \mathfrak{K} \|^2 \end{aligned}$$

Essa última condição implica que ϕ_1 é diferenciável para $\mathfrak{E}^* \rightarrow \mathfrak{E}$ e $\mathfrak{K}^* \rightarrow \mathfrak{K}$.

Portanto, ϕ é diferenciável nas variáveis $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$ e $\mathfrak{K} \in \Lambda_f^+$. □

Proposição IV.5

As condições de consistência para o modelo elastoplástico com dano estão satisfeitas.

Justificativa:

Desde que ϕ é convexa, i.s.c., própria e diferenciável em $\mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+$, então $\exists \mathcal{K} \in \Lambda_f^+$ admitido como ínfimo de ϕ em Λ_f^+ satisfazendo as seguintes condições de otimalidade:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_\lambda \phi(\mathcal{E}, \mathcal{K}^*), \mathcal{K}^* - \mathcal{K} \rangle &\geq 0, \forall \mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+ \Leftrightarrow \\ \langle -\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \mathcal{E} + G \mathcal{K}^*, \mathcal{K}^* - \mathcal{K} \rangle &\geq 0, \forall \mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+ \Leftrightarrow \\ \langle \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \mathcal{E} - G \mathcal{K}^*, \mathcal{K}^* - \mathcal{K} \rangle &\leq 0, \forall \mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+; \end{aligned}$$

a qual é equivalente às condições de consistência para o modelo elastoplástico com dano. \square

IV.3 - Existência do funcional conjugado (dual) ϕ^* para ϕ em $\mathcal{E} \in \mathbf{W}$.

Desde que ϕ , escrito na variável $\mathcal{E} \in \mathbf{W}$, para $\mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+$ fixo, é um funcional convexo, i.s.c., próprio, se definido em um subconjunto fechado não vazio \mathbf{W} , então, na hipótese de \mathbf{W}^* ser fechado e não-vazio, existe o potencial $\phi^*: \mathbf{W}^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ com relação a ϕ em $\mathcal{E} \in \mathbf{W}$, definido por:

$$\phi^*(\mathcal{G}, \mathcal{K}^*) = \sup_{\mathcal{E} \in \mathbf{W}} \{ \langle \mathcal{G}, \mathcal{E} \rangle - \phi(\mathcal{E}, \mathcal{K}^*) \}; \forall \mathcal{G} \in \mathbf{W}^* \quad (\text{IV.11})$$

e para $\phi^*(\mathcal{G}, \mathcal{K}^*) < \infty$, existem os conjuntos de subdiferenciais $\partial_\varepsilon \phi(\mathcal{E}, \mathcal{K}^*)$ e $\partial_\sigma \phi^*(\mathcal{G}, \mathcal{K}^*)$, fechados e não-vazios, tais que a seguinte relação de dualidade pode ser estabelecida:

$$\mathcal{G} \in \partial_\varepsilon \phi(\mathcal{E}, \mathcal{K}^*) \Leftrightarrow \mathcal{E} \in \partial_\sigma \phi^*(\mathcal{G}, \mathcal{K}^*); \quad (\text{IV.12})$$

onde,

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon \phi(\mathcal{E}, \mathcal{K}^*) = \{ \gamma^* \in \mathbf{W}^* \text{ tal que } \forall \mathcal{E}^* \in \mathbf{W}, \phi(\mathcal{E}^*, \mathcal{K}^*) - \phi(\mathcal{E}, \mathcal{K}^*) \geq \\ \geq \langle \mathcal{E}^* - \mathcal{E}, \gamma^* \rangle, \text{ para } \mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+ \} \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

e de maneira análoga se define $\partial_\sigma \phi^*(\mathcal{G}, \mathcal{K}^*)$.

Desde que ϕ é diferenciável em $\mathcal{E} \in \mathbf{W}$, então \mathcal{G} é univocamente determinado em $\partial_\varepsilon \phi(\mathcal{E}, \mathcal{K}^*)$ definido em (IV.13), ou seja, $\mathcal{G} = \nabla_\varepsilon \phi(\mathcal{E}, \mathcal{K}^*)$.

Assim,

$$\mathcal{G} = \nabla_\varepsilon \phi(\mathcal{E}, \mathcal{K}^*) = E \mathcal{E} - \mathcal{K}^* \mathbf{f}_\varepsilon = \mathcal{G}^e + \mathcal{G}^{\text{pd}}. \quad (\text{IV.14})$$

Portanto, a relação dualidade seguinte é válida:

$$\mathcal{G} = \partial_\varepsilon \phi(\mathcal{E}, \mathcal{K}^*) \Leftrightarrow \mathcal{E} \in \partial_\sigma \phi^*(\mathcal{G}, \mathcal{K}^*). \quad (\text{IV.15})$$

A relação $\mathcal{E} = \partial_\sigma \phi^*(\mathcal{G}, \mathcal{K}^*)$ não é válida para todo $\mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+$, pois podem existir \mathcal{E}^1 e \mathcal{E}^2 em $\partial_\sigma \phi^*(\mathcal{G}, \mathcal{K}^*)$ correlacionados a um único $\mathcal{G} \in \mathbf{W}^*$.

Logo, ϕ^* nem sempre é diferenciável em $\mathcal{G} \in \mathbf{W}^*$.

Até aqui, se conclui que, ϕ é um potencial convexo, i.s.c., próprio e diferenciável nas variáveis $\mathcal{E} \in \mathbf{W}$ e $\mathcal{K}^* \in \Lambda_f^+$, que verifica as seguintes condições de otimalidade:

$\exists \boldsymbol{\varepsilon}^* \in \mathbf{W}$ e $\boldsymbol{\kappa} \in \Lambda_f^+$, tais que,

$$\langle \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - G \boldsymbol{\kappa}^*, \boldsymbol{\kappa}^* - \boldsymbol{\kappa} \rangle \leq 0, \forall \boldsymbol{\kappa}^* \in \Lambda_f^+;$$

além disso,

$$\boldsymbol{\sigma} = \nabla_\varepsilon \phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}^*) = E \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\kappa}^* \mathbf{f}_\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{\sigma}^{pd};$$

o que mostra que as condições, constitutivas e de consistência estão satisfeitas com relação ao modelo elastoplástico com dano e existe o potencial conjugado ou dual ϕ^* relativo a ϕ .

Extensão para $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_g$.

Vale ressaltar que, os resultados vistos e demonstrados até aqui continuam sendo válidos se considerar-se $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{r}^{-1} \leq 0$, de acordo com a (III.19) e (III.20), com $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_g$, onde, $\boldsymbol{\psi}$ é expressa, analogamente a (III.27b), para o caso associativo elastoplástico com dano, por:

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{(\mathbf{f}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot E_{wpd}}{\|\mathbf{h}\|^2}. \quad (IV.16)$$

Nesse caso é possível definir um potencial convexo resolvente equivalente ao potencial ϕ visto em (IV.10), da seguinte maneira:

$$\phi_2(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) = \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}} \left\{ \frac{1}{2} \langle E \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \langle -\boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{f}_\varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \frac{1}{2} \langle G \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\alpha} \rangle \right\}, \quad (IV.17)$$

que satisfaz as mesmas propriedades do potencial ϕ , ou seja, é convexo, l.s.c., próprio na variável $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_g$ e desse potencial derivam as condições constitutivas e de consistência para os modelos com dano. A existência e definição do potencial dual ϕ_2^* também pode ser dada, analogamente a (IV.11) por:

$$\phi_2^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = \sup_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{W}} \{ \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \phi_2(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) \}; \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}^*. \quad (IV.18)$$

No que segue, já pensando em fazer-se um tratamento numérico do modelo são estendidos os resultados anteriores para incrementos finitos.

IV.4- Forma variacional incremental.

A condição restritiva $\boldsymbol{\kappa} \in \Lambda_f^+$ definida em (III.28) pode ser relaxada, considerando a função indicatriz $\mathbf{I}_{\Lambda_f^+}$ definida em (III.34) e introduzida no potencial definido em (IV.10) através da aproximação assintótica vista em (III.35).

Utilizando-se aquela aproximação assintótica, o potencial definido em (IV.10), para $\boldsymbol{\kappa} \in \Lambda_f$ e $\forall \boldsymbol{\kappa}^* \in \Lambda_f$, se torna:

$$\phi_\delta(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}^*) = \inf_{\boldsymbol{\kappa}^*, \boldsymbol{\varepsilon}} \left\{ \frac{1}{2} \langle E \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \langle \boldsymbol{\kappa}^* \mathbf{f}_\varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \frac{1}{2} \langle G \boldsymbol{\kappa}^*, \boldsymbol{\kappa}^* \rangle + \left\langle \frac{\mathbf{f}}{\delta}, \boldsymbol{\kappa}^* \right\rangle \right\}; \quad (IV.19)$$

com $\delta \rightarrow 0^+$ e se espera que $\boldsymbol{\sigma}_\delta \in \partial_\varepsilon \phi_\delta(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}^*)$ seja convergente para $\boldsymbol{\sigma} \in \partial_\varepsilon \phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}^*)$, quando $\delta \rightarrow 0^+$.

A substituição de $\mathcal{K} = \psi \alpha$, leva (IV.19) para o potencial equivalente:

$$\phi_{\delta}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}^*) = \inf_{\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\varepsilon}} \left\{ \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \langle \psi \boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{G} \psi \boldsymbol{\alpha}^*, \psi \boldsymbol{\alpha}^* \rangle + \left\langle \frac{\mathbf{f}}{\delta}, \psi \boldsymbol{\alpha}^* \right\rangle \right\}; \quad (\text{IV.20})$$

$\forall \boldsymbol{\alpha}^* \in \Lambda_{\mathbf{g}}$ com $\delta \rightarrow 0^+$, notando que $\mathcal{K} \in \Lambda_{\mathbf{f}}$ implica em $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_{\mathbf{g}}$.

Uma forma variacional incremental resulta de uma discretização de Euler, definida na variável $t \in [t, t + \Delta t]$, dada por,

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \Delta t; \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \Delta t; \quad \Delta \boldsymbol{\lambda} = \mathcal{K} \Delta t. \quad (\text{IV.21})$$

Pela substituição de (IV.21) em (IV.19), com $\Delta \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{\mathbf{f}}$, resulta o seguinte potencial:

$$\tilde{\phi}_{\delta}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\lambda}^*) = \inf_{\Delta \boldsymbol{\lambda}^*, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \left\{ \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \langle \Delta \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{G} \Delta \boldsymbol{\lambda}^*, \Delta \boldsymbol{\lambda}^* \rangle + \left\langle \Delta t \frac{\mathbf{f}}{\delta}, \Delta \boldsymbol{\lambda}^* \right\rangle \right\}. \quad (\text{IV.22})$$

Em particular, fazendo-se $\delta = \Delta t$, um funcional estendido resulta:

$$\tilde{\phi}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\lambda}^*) = \inf_{\Delta \boldsymbol{\lambda}^*, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \left\{ \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \langle \Delta \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{G} \Delta \boldsymbol{\lambda}^*, \Delta \boldsymbol{\lambda}^* \rangle + \langle \mathbf{f}, \Delta \boldsymbol{\lambda}^* \rangle \right\} \quad (\text{IV.23})$$

e espera-se que $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{\delta} \in \partial_{\varepsilon} \tilde{\phi}_{\delta}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\lambda}^*)$ seja convergente para $\Delta \boldsymbol{\sigma} \in \partial_{\varepsilon} \tilde{\phi}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\lambda}^*)$, quando $\delta \rightarrow 0^+$.

Localmente, $\forall \Delta \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{\mathbf{f}}$ ou $\forall \Delta \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_{\mathbf{g}}$, a relação (IV.23) corresponde a:

$$[\mathbf{f} + \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{G} \Delta \boldsymbol{\lambda}] = [\mathbf{f} + \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \psi \mathbf{G} \Delta \boldsymbol{\alpha}] \leq 0; \quad (\text{IV.24})$$

$$[\mathbf{f} + \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{G} \Delta \boldsymbol{\lambda}] \cdot \Delta \boldsymbol{\lambda} = [\mathbf{f} + \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \psi \mathbf{G} \Delta \boldsymbol{\alpha}] \cdot \psi \Delta \boldsymbol{\alpha} = 0. \quad (\text{IV.25})$$

As relações locais (IV.24) e (IV.25) são equivalentes a um problema de complementaridade linear o qual pode ser resolvido por métodos de programação matemática.

Em particular, se \mathbf{f} é linear por partes, um algoritmo capaz de resolver (IV.25) produz incrementos exatos $\Delta \boldsymbol{\lambda}$ ou $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ os quais verificam $\mathbf{f} = 0$ no passo $t + \Delta t$.

Como consequência, a relação constitutiva é representada em uma forma exata para qualquer Δt que não implique dano seguido de descarregamento.

Extensão para o caso não-associativo.

Os potenciais ϕ e ϕ_2 vistos respectivamente em (IV.10) e (IV.17) também podem ser definidos de modo a contemplar o caso não associativo, ou seja, considerando nas leis vistas a função $\mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ substituída pelo potencial normal à superfície de dano \mathbf{h} , visto em (III.71) com $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pd}}$ definido por $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pd}} = - \mathcal{K}^* \mathbf{h}$, de acordo com (III.71). Também nesse caso, as mesmas relações vistas podem ser estendidas para a não associatividade.

A seguir, utilizando-se alguns conceitos de Análise Não-Convexa reunidos no Apêndice C, será proposto um potencial não-convexo que rege o modelo linearizado elastoplástico com dano.

IV.5 - Sobre um potencial não-convexo para os modelos com dano.

Foi visto na seção IV.2 que a convexidade do potencial proposto somente é válida para aquele modelo particular de elastoplasticidade e dano, por isso aquele potencial foi dito resolvente convexo do modelo. Essa questão é importante, pois é sabido que se existir um potencial geral que rege modelos que acoplam elastoplasticidade e dano, esse potencial é não-convexo. Na verdade, se o modelo considerado é o linearizado, então, o potencial correspondente é resultado da diferença de potenciais convexos (relativo aos regimes de elasticidade e de encruamento positivo) determinando um potencial convexo, com um potencial côncavo, do regime de encruamento negativo.

O potencial não-convexo a ser proposto aqui, explora mais diretamente o modelo de elastoplasticidade e dano linearizado, mas particularmente é válido também para o modelo elástico com dano, como será visto. A figura IV.2, ilustra-o no caso uni-axial.

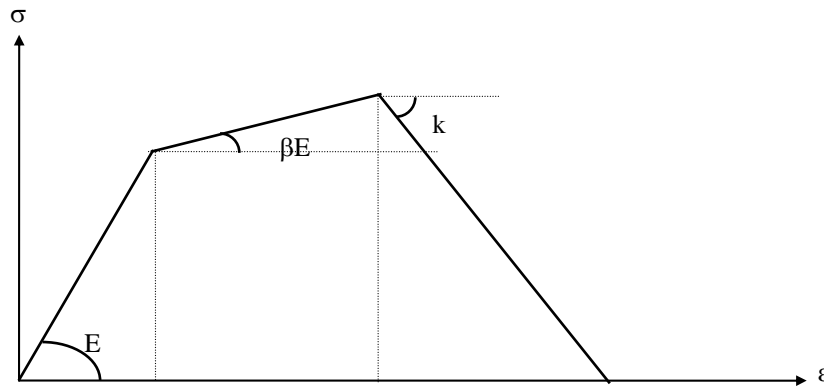


Figura IV.2 - Modelo elastoplástico com dano linearizado.

Analisando-se a figura IV.2, vê-se que é possível definir potenciais, $\xi_1: \mathbf{W} \rightarrow \overline{\mathcal{R}}$, $\xi_2: \mathbf{W} \rightarrow \overline{\mathcal{R}}$, $\xi_3: \mathbf{W} \rightarrow \overline{\mathcal{R}}$, tais que,

$$\xi_1(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle; \quad \xi_2(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \langle (\beta \mathbf{E}) \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle; \quad \xi_3(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{K} \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle; \quad (\text{IV.26})$$

onde,

$$0 \leq \langle (\beta \mathbf{E}) \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle \leq \langle \mathbf{E} \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle \text{ e } \langle \mathbf{K} \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle \leq 0; \quad (\text{IV.27})$$

tal que, β e \mathbf{K} são sequencialmente tensores de 4^a ordem, podendo se reduzir a um escalar se a variação de perda de rigidez provocada pelo dano for a mesma em todas as direções, quando do carregamento efetuado.

A partir desses potenciais é possível definir um outro potencial mais geral, não-convexo, da seguinte forma:

$$\gamma_1: \mathbf{W} \rightarrow \overline{\mathcal{R}}, \text{ tal que } \gamma_1 = \xi_1 - \xi_2 + \xi_3:$$

$$\gamma_1(\mathcal{E}) = \left\{ \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle - \frac{1}{2} \langle (\beta \mathbf{E}) \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{K} \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle \right\}. \quad (\text{IV.28})$$

Considerando-se a validade de (IV.27), justifica-se a não convexidade de γ_1 definido em (IV.28) por esse ser definido pelo acoplamento de dois potenciais convexos (ξ_1 e ξ_2) gerando o potencial convexo $\xi_1 - \xi_2$, somado com um potencial côncavo (ξ_3).

A figura IV.3, vista a seguir ilustra os potenciais ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 definidos em (IV.26) que se relacionam diretamente às relações entre ε e σ vistas na figura IV.2

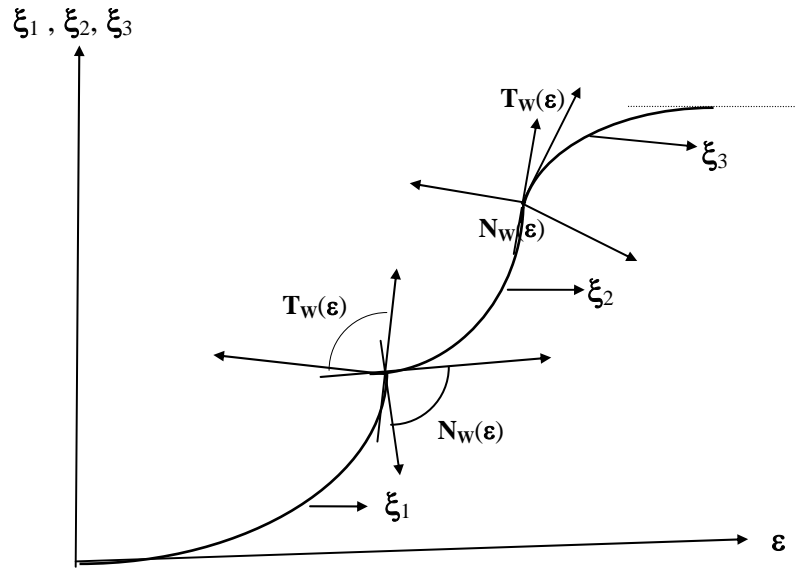


Figura IV.3 - Os potenciais ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 .

Para os potenciais ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 existem os potenciais conjugados ξ_1^* , ξ_2^* e ξ_3^* que podem ser gerados através da relação linearizada $\varepsilon(\sigma)$. Em campo unidimensional a figura IV.4 ilustra a relação $\varepsilon(\sigma)$ e os potenciais conjugados ξ_1^* , ξ_2^* e ξ_3^* .

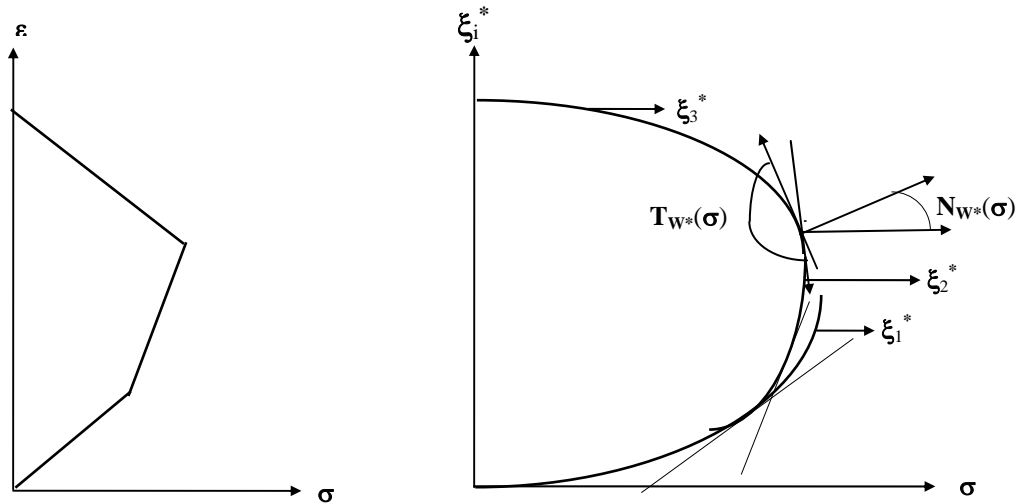


Figura IV.4 - A relação uniaxial $\varepsilon(\sigma)$ e os potenciais conjugados ξ_1^* , ξ_2^* e ξ_3^* .

O potencial γ_1 pode ser escrito de maneira equivalente por:

$$\gamma_1(\mathcal{E}) = \left\{ \frac{1}{2} \langle [E + K - (\beta E)] \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle \right\}. \quad (IV.29)$$

Definindo-se $T = K - (\beta E)$, então tem-se o seguinte comportamento para γ_1 :

$$\gamma_1(\mathcal{E}) = \begin{cases} \text{convexa} & \text{se } \langle (E + T) \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle \geq 0 \\ \text{côncava} & \text{se } \langle (E + T) \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle < 0 \end{cases} \quad (IV.30)$$

obviamente que γ_1 é convexa se $\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}$, ou seja, se o regime é puramente elástico ou se $\mathbf{K} \equiv \mathbf{0}$ e $\beta > 0$, caracterizando o regime elastoplástico com encruamento positivo (ver seção III.2).

Vale ressaltar que, particularmente, se $\beta \equiv 0$ e $\mathbf{K} < \mathbf{0}$, então o potencial definido em (IV.29) está relacionado ao modelo elástico com dano, visto na seção III.1.

A maioria dos resultados a serem utilizados aqui, são encontrados na análise não-convexa reproduzida no Apêndice C. Já os resultados apresentados no Apêndice C exploram o fato do funcional ser lipschitziano. Então, para se utilizar desses resultados no modelo em questão é necessário introduzir a proposição a seguir.

Proposição IV. 6.

O potencial γ_1 é Lipschitziano, se o regime considerado é o de pequenas deformações.

Justificativa:

$$\begin{aligned} |\gamma_1(\mathfrak{E}^*) - \gamma_1(\mathfrak{E})| &= \left| \frac{1}{2} \langle [\mathbf{E} + \mathbf{T}] \mathfrak{E}^*, \mathfrak{E}^* \rangle - \frac{1}{2} \langle [\mathbf{E} + \mathbf{T}] \mathfrak{E}, \mathfrak{E} \rangle \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2} \langle [\mathbf{E} + \mathbf{T}] (\mathfrak{E}^* + \mathfrak{E}), (\mathfrak{E}^* - \mathfrak{E}) \rangle \right| \leq \left| \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} (\mathfrak{E}^* + \mathfrak{E}), (\mathfrak{E}^* - \mathfrak{E}) \rangle \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{E}\| \|\mathfrak{E}^* + \mathfrak{E}\| \|\mathfrak{E}^* - \mathfrak{E}\| \leq C \|\mathfrak{E}^* - \mathfrak{E}\| \end{aligned}$$

onde, $C = \frac{1}{2} h_3 \|\mathfrak{E}^* + \mathfrak{E}\|$.

Portanto, γ_1 é Lipschitziana (o que é óbvio pois γ_1 é composta da soma de potenciais convexos com côncavos) e diz-se que γ_1 é Lipschitziano de rank C em uma vizinhança de $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$ (definição C.1). □

Considere-se agora o seguinte potencial definido a partir de (IV.29):

$$\gamma(\mathfrak{E}) = \begin{cases} \inf_{\mathfrak{E}} \gamma_1(\mathfrak{E}) & \text{se } \langle (\mathbf{E} + \mathbf{T}) \mathfrak{E}, \mathfrak{E} \rangle \geq 0 \\ \sup_{\mathfrak{E}} \gamma_1(\mathfrak{E}) & \text{se } \langle (\mathbf{E} + \mathbf{T}) \mathfrak{E}, \mathfrak{E} \rangle < 0 \end{cases}; \quad (IV.31)$$

então, γ é Lipschitziano de rank C em uma vizinhança de $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$. Além disso, de acordo com a definição C.3, $\exists \gamma^0(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E}), \forall \mathfrak{E}^* \in \mathbf{W}$, expresso de acordo com a definição C.2 por:

$$\gamma^0(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E}) = \limsup_{\substack{\tilde{\mathfrak{E}} \rightarrow \mathfrak{E} \\ t \rightarrow 0_+}} \frac{\gamma(\tilde{\mathfrak{E}} + t(\mathfrak{E}^* - \mathfrak{E})) - \gamma(\tilde{\mathfrak{E}})}{t}; \quad (IV.32)$$

pois pela proposição C.1, γ^0 é finito, positivo homogêneo, sub-aditivo e satisfaz:

$$|\gamma^0(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E})| \leq C_1 \|\mathfrak{E}^* - \mathfrak{E}\|; \quad (IV.33a)$$

$$\gamma^0(\mathfrak{E}, -(\mathfrak{E}^* - \mathfrak{E})) = -\gamma^0(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E}). \quad (IV.33b)$$

Com esses resultados é possível definir o conjunto de gradientes generalizados de γ para $\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$, dado de acordo com a definição C.3, por:

$$\bar{\partial}_\varepsilon \gamma(\mathfrak{E}) = \{ \mathfrak{G}^* \in \mathbf{W}^* \text{ tal que } \gamma^0(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E}) \geq \langle \mathfrak{G}^*, \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E} \rangle, \forall \mathfrak{E}^* \in \mathbf{W} \}, \quad (IV.34a)$$

o qual é um conjunto não-vazio e tal que:

$$\gamma^0(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E}) = \text{máximo} \{ \langle \mathfrak{E}^*, \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E} \rangle \text{ tal que } \mathfrak{E}^* \in \bar{\partial}_\varepsilon \gamma(\mathfrak{E}) \}. \quad (\text{IV.34b})$$

Obviamente, a definição (IV.34b) é equivalente à (IV.32).

Desde que da definição dada em (IV.31), γ é convexa ou côncava, então, da proposição C.3iii),

$$0 \in \bar{\partial}_\varepsilon \gamma(\mathfrak{E}), \quad (\text{IV.35})$$

condição necessária de mínimo (ou máximo) para γ se $\langle [E + T] \mathfrak{E}, \mathfrak{E} \rangle \geq 0$ (< 0).

Nesse caso particular, γ é diferenciável pois γ_1 é definida como a soma de potenciais quadráticos e se caracteriza em uma regularização do modelo linear de encruamento, o qual reúne encruamento linear positivo e negativo, o que pode ser provado analogamente à proposição IV.4.

A figura IV.5 ilustra o potencial γ .

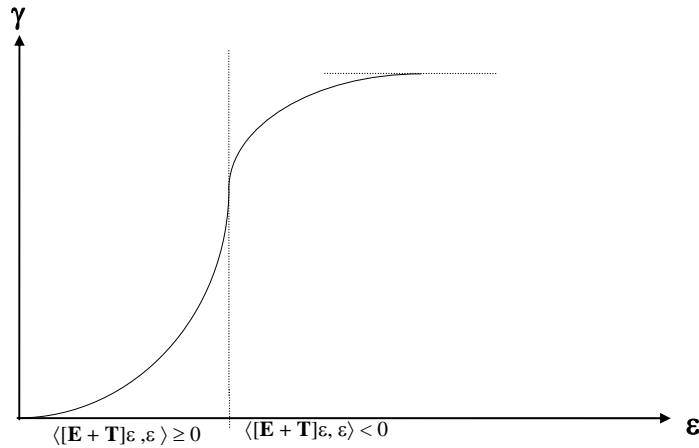


Figura IV.5 - O potencial γ .

Existência do potencial conjugado γ^ .*

Por demonstração análoga àquelas feitas nas proposições vistas na seção IV.2 e utilizando-se, da proposição C.7, que convexidade implica em regularidade, é possível mostrar que:

- se $\langle [E + T] \mathfrak{E}, \mathfrak{E} \rangle \geq 0$, então γ é um potencial convexo, próprio, i.s.c. e regular; analogamente,
 - se $\langle [E + T] \mathfrak{E}, \mathfrak{E} \rangle < 0$, então γ é um potencial côncavo, próprio, s.s.c. e regular;
- logo, para esse γ particular, existe o potencial conjugado $\gamma^*: \mathbf{W}^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, tal que

$$\gamma^*(\mathfrak{E}^*) = \begin{cases} \sup_{\mathfrak{E}} \{ \langle \mathfrak{E}^*, \mathfrak{E} \rangle - \gamma(\mathfrak{E}) \} & \text{se } \langle (E + T) \mathfrak{E}, \mathfrak{E} \rangle \geq 0 \\ \inf_{\mathfrak{E}} \{ \langle \mathfrak{E}^*, \mathfrak{E} \rangle - \gamma(\mathfrak{E}) \} & \text{se } \langle (E + T) \mathfrak{E}, \mathfrak{E} \rangle < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.36})$$

Nesse caso, utilizando-se das definições B4.1 e B6.1, conjuntamente com o corolário C.3 do teorema C.2, é válida a seguinte relação dualidade:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{G}, -1) \in N_{[\gamma, W]}(\mathfrak{X}, \gamma(\mathfrak{X})) &\Leftrightarrow \mathfrak{G} \in \bar{\partial}_\varepsilon \gamma(\mathfrak{X}) \Leftrightarrow \mathfrak{X} \in \bar{\partial}_\sigma \gamma^*(\mathfrak{G}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{X}, -1) \in N_{[\gamma^*, W^*]}(\mathfrak{G}, \gamma^*(\mathfrak{G})); \end{aligned} \quad (IV.37)$$

tal que, $[\gamma, W]$ denota o epígrafo de γ definido pelo conjunto de pontos sobre e acima o gráfico de γ e $N_{[\gamma, W]}(\mathfrak{X}, \gamma(\mathfrak{X}))$ é o cone normal externo relativo ao ponto $(\mathfrak{X}, \gamma(\mathfrak{X}))$ pertencente ao gráfico de γ . O cone normal externo $N_{[\gamma, W]}(\mathfrak{X}, \gamma(\mathfrak{X}))$ pode ser definido de acordo com as equações (C.27) e (C.28), por:

$$\begin{aligned} N_{[\gamma, W]}(\mathfrak{X}, \gamma(\mathfrak{X})) = \{ (\mathfrak{G}^*, -1) \in W^* \times \mathcal{R} \text{ tal que } \langle (\mathfrak{G}^*, -1), (\mathfrak{X}^* - \mathfrak{X}, r) \rangle \leq 0, \\ \forall \mathfrak{X}^* \in T_{[\gamma, W]}(\mathfrak{X}, \gamma(\mathfrak{X})) \}; \end{aligned} \quad (IV.38)$$

onde, o cone tangente gerado no epígrafo de γ no ponto $(\mathfrak{X}, \gamma(\mathfrak{X}))$, denotado por $T_{[\gamma, W]}$ é tal que:

$$\begin{aligned} T_{[\gamma, W]}(\mathfrak{X}, \gamma(\mathfrak{X})) = \{ (\mathfrak{X}^*, r) \in W \times \mathcal{R} \text{ tal que, } \langle \mathfrak{G}^*, \mathfrak{X}^* - \mathfrak{X} \rangle \leq \gamma^0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^* - \mathfrak{X}) \leq r, \\ \forall \mathfrak{G}^* \in N_{[\gamma, W]}(\mathfrak{X}, \gamma(\mathfrak{X})) \}. \end{aligned} \quad (IV.39)$$

Nota-se na equação (IV.39) que $T_{[\gamma, W]}(\mathfrak{X}, \gamma(\mathfrak{X}))$ é equivalente ao epígrafo de $\gamma^0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^* - \mathfrak{X})$, onde γ^0 é definida em (IV.34b).

O conjunto $\bar{\partial}_\varepsilon \gamma(\mathfrak{X})$ visto em (IV.34a), pode ser definido de acordo com (IV.38) como:

$$\bar{\partial}_\varepsilon \gamma(\mathfrak{X}) = \{ \mathfrak{G}^* \in W^* \text{ tal que } (\mathfrak{G}^*, -1) \in N_{[\gamma, W]}(\mathfrak{X}, \gamma(\mathfrak{X})) \}. \quad (IV.40)$$

Analogamente define-se $N_{[\gamma^*, W^*]}(\mathfrak{G}, \gamma^*(\mathfrak{G}))$.

Observação:

A interpretação geométrica dos cones, normal e tangente definidos nas equações anteriores, pode ser feita de maneira análoga àquela feita nas figuras IV.3 e IV.4.

O conjunto do gradiente generalizado de γ^* , denotado por $\bar{\partial}_\sigma \gamma^*(\mathfrak{G})$, pode ser definido para $\mathfrak{G} \in W^*$, analogamente à equação (IV.34a) por:

$$\bar{\partial}_\sigma \gamma^*(\mathfrak{G}) = \{ \mathfrak{X} \in W \text{ tal que } (\gamma^*)^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^* - \mathfrak{G}) \geq \langle \mathfrak{X}, \mathfrak{G}^* - \mathfrak{G} \rangle, \forall \mathfrak{G}^* \in W^* \}. \quad (IV.41)$$

Da equação (IV.34b), $(\gamma^*)^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^* - \mathfrak{G})$ é tal que,

$$(\gamma^*)^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^* - \mathfrak{G}) = \text{máximo} \{ \langle \mathfrak{X}, \mathfrak{G}^* - \mathfrak{G} \rangle \text{ tal que } \mathfrak{X} \in \bar{\partial}_\sigma \gamma^*(\mathfrak{G}) \}, \quad (IV.42)$$

sendo um conjunto não-vazio e cujo máximo é atingido para algum $\mathfrak{X} \in W$ correlacionado com $\mathfrak{G} \in W^*$, pois, de (IV.36):

- se $\langle [E + T] \mathfrak{X}, \mathfrak{X} \rangle \geq 0$, então γ^* é um potencial convexo, próprio, i.s.c.;
- se $\langle [E + T] \mathfrak{X}, \mathfrak{X} \rangle < 0$, então γ^* é um potencial côncavo, próprio, s.s.c.;

Então, em ambos os casos o máximo é atingido em $\bar{\partial}_\sigma \gamma^*(\mathfrak{G})$.

Na relação (IV.37) é possível determinar uma expressão para \mathfrak{G} , pois esse é univocamente determinado em $\bar{\partial}_\varepsilon \gamma(\mathfrak{X})$. Portanto, γ é diferenciável e então,

$$\mathfrak{G} = \nabla_\varepsilon \gamma(\mathfrak{X}) = E \mathfrak{X} + T \mathfrak{X} = \mathfrak{G}^e + \mathfrak{G}^{\text{pd}}. \quad (IV.43)$$

É importante lembrar que, a relação de dualidade para funcionais não convexas nem sempre é válida. A existência do potencial conjugado γ^* relacionado ao potencial γ , só foi

possível porque a lei de partição do funcional γ gera dois potenciais que são ou convexo ou côncavo. Assim, γ é um exemplo de um potencial não-convexo que permite definir o seu potencial conjugado. Note-se que, considerando-se o potencial γ_1 como o funcional que rege o modelo considerado, não é possível postular a existência de seu potencial conjugado γ_1^* , pois a não-convexidade não permite que se tenha um ou outro caso, convexo ou côncavo.

Relações de consistência.

Do potencial γ_1 visto em (IV.30) derivam somente partes das relações que compõem o modelo constitutivo elastoplástico com dano.

As relações de consistência podem ser recuperadas, considerando-se no modelo a hipótese adicional $\mathbf{f} \cdot \mathbf{\kappa} = 0$ associada ao seguinte potencial não-convexo:

$$\gamma_2(\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\kappa}) = \begin{cases} \inf_{\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\kappa}} \{\gamma_1(\mathbf{\varepsilon}) + \tau(\mathbf{\kappa})\} & \text{se } \langle (\mathbf{E} + \mathbf{T})\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\varepsilon} \rangle \geq 0 \\ \sup_{\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\kappa}} \{\gamma_1(\mathbf{\varepsilon}) - \tau(\mathbf{\kappa})\} & \text{se } \langle (\mathbf{E} + \mathbf{T})\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\varepsilon} \rangle < 0 \end{cases}; \quad (\text{IV.44})$$

onde,

$$\tau(\mathbf{\kappa}) = - \frac{1}{2} \langle \mathbf{f} \mathbf{\kappa}, \mathbf{\kappa} \rangle.$$

Nesse caso adotou-se a seguinte condição de consistência:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{\kappa} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f} \cdot (\mathbf{\kappa}^* - \mathbf{\kappa}) \leq 0, \forall \mathbf{\kappa}^* \in \Lambda. \quad (\text{IV.45})$$

O potencial não-convexo γ_2 é Lipschitziano e regular (ver definição C.6), pois γ_1 e τ , são definidos por funcionais quadráticos e portanto são Lipschitzianos e regulares (proposição C.7). Na forma como foi definido, o potencial γ_2 recupera todas as relações constitutivas do modelo, se a ele estiver associada a condição $\mathbf{f} \cdot \mathbf{\kappa} = 0$.

Como consequência da definição do potencial γ_2 em (IV.44), devido a γ_2 ser convexo ou côncavo, existe o potencial conjugado $\gamma_2^* : \mathbf{W}^* \times \Lambda \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, dado por:

$$\gamma_2^*(\mathbf{\sigma}, \mathbf{\kappa}) = \begin{cases} \sup_{\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\kappa}} \{\langle \mathbf{\sigma}, \mathbf{\varepsilon} \rangle - \gamma_2(\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\kappa})\} & \text{se } \langle (\mathbf{E} + \mathbf{T})\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\varepsilon} \rangle \geq 0 \\ \inf_{\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\kappa}} \{\langle \mathbf{\sigma}, \mathbf{\varepsilon} \rangle - \gamma_2(\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\kappa})\} & \text{se } \langle (\mathbf{E} + \mathbf{T})\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\varepsilon} \rangle < 0 \end{cases}. \quad (\text{IV.46})$$

Analogamente à relação (IV.37), nesse caso também é válida a seguinte relação dualidade:

$$\begin{aligned} (\mathbf{\sigma}, -1) \in \mathbf{N}_{[\gamma_2, \mathbf{W}_{\times \Lambda}]}(\mathbf{\varepsilon}, \gamma_2(\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\kappa})) &\Leftrightarrow \mathbf{\sigma} \in \bar{\partial}_\varepsilon \gamma_2(\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\kappa}) \Leftrightarrow \mathbf{\sigma} \in \bar{\partial}_\sigma \gamma_2^*(\mathbf{\sigma}, \mathbf{\kappa}) \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{\sigma}, -1) \in \mathbf{N}_{[\gamma_2^*, \mathbf{W}^*_{\times \Lambda}]}(\mathbf{\sigma}, \gamma_2^*(\mathbf{\sigma}, \mathbf{\kappa})); \end{aligned} \quad (\text{IV.47})$$

onde $\mathbf{N}_{[\gamma_2, \mathbf{W}_{\times \Lambda}]}(\mathbf{\varepsilon}, \gamma_2(\mathbf{\varepsilon}, \mathbf{\kappa}))$ e $\mathbf{N}_{[\gamma_2^*, \mathbf{W}^*_{\times \Lambda}]}(\mathbf{\sigma}, \gamma_2^*(\mathbf{\sigma}, \mathbf{\kappa}))$ são definidos analogamente à equação (IV.38).

Observação:

É possível definir γ_1 de maneira simplificada utilizando-se a relação (IV.43) e a relação para \mathfrak{E}^{pd} vista em (III.71), ou seja: $\mathfrak{E}^{pd} = -\mathfrak{K} \mathbf{h}$ no caso não-associativo ou $\mathfrak{E}^{pd} = -\mathfrak{K} \mathbf{f}_\varepsilon$, no caso associativo.

Sabendo-se de (III.80) que $\mathfrak{K} = \frac{\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \mathfrak{E}}{G}$, tem-se que:

$$\mathfrak{E}^{pd} = T \mathfrak{E} = -\mathfrak{K} \mathbf{h} = -\frac{(\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \mathfrak{E})}{G} \mathbf{h} = -\left(\frac{\mathbf{h} \otimes \mathbf{f}_\varepsilon}{G}\right) \mathfrak{E}.$$

Então,

$$T \mathfrak{E} = -\left(\frac{\mathbf{h} \otimes \mathbf{f}_\varepsilon}{G}\right) \mathfrak{E} \Rightarrow T = -\frac{\mathbf{h} \otimes \mathbf{f}_\varepsilon}{G}.$$

Assim, γ_1 pode ser simplificada por:

$$\gamma_1(\mathfrak{E}) = \frac{1}{2} \{ \langle E \mathfrak{E}, \mathfrak{E} \rangle - \langle \frac{\mathbf{h} \otimes \mathbf{f}_\varepsilon}{G} \mathfrak{E}, \mathfrak{E} \rangle \}.$$

No caso associativo substitui-se \mathbf{h} por \mathbf{f}_ε na relação acima.

Todos os resultados obtidos no estudo de potenciais convexos e não-convexos, relativos ao modelo constitutivo podem ser incorporados num problema de valor de contorno constituído, além das relações constitutivas, por condições de equilíbrio, compatibilidade e de contorno, o que será visto na próxima seção.

IV.6 - O Problema de análise estrutural elastoplástica com dano.

Seja o corpo considerado ocupando a região \mathbf{B} do espaço euclídeano, onde $\Gamma \subset \mathbf{B}$, representa a região de contorno composta pelas partes Γ_u e Γ_s , nas quais se prescrevem deslocamentos \mathbf{u} e cargas \mathbf{s} , respectivamente.

Os campos de deslocamentos compatíveis e cinematicamente admissíveis com as restrições de apoio, homogêneas e bilaterais, constituem um subespaço vetorial normado e completo (Espaço de Banach) $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$, onde \mathbf{U} e \mathbf{V} estão definidos em (I.32) e (I.24) respectivamente e para cada parâmetro $t \in \mathfrak{R}$ que define o processo evolutivo, os campos de velocidade \mathfrak{u} (ou \mathbf{v}) $\in \mathbf{U}$, são compatíveis e também satisfazem as condições cinemáticas de contorno.

Considere-se ainda campos de deslocamentos virtuais, homogêneos em Γ_u , ou seja, $\mathbf{u} = 0$ se $\mathbf{u} \in \Gamma_u$, e não-homogêneos em $\text{int } \mathbf{B}$ (interior de \mathbf{B}), ou seja, $\mathbf{u} \neq 0$ se $\mathbf{u} \in \mathbf{B}$.

Por outro lado, é possível definir o espaço dual \mathbf{U}^* de \mathbf{U} , constituído por funcionais lineares contínuos \mathbf{L} , que caracterizam forças de corpo $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$ e de superfície $\mathbf{s} \in \Gamma_s$. Esses funcionais lineares representam o trabalho do sistema de forças nos deslocamentos ou velocidades de seus pontos de aplicação:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{B}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{B} + \int_{\Gamma_s} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma; \tag{IV.48}$$

$$\mathfrak{E}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{B}} \mathbf{b} \cdot \mathfrak{u} \, d\mathbf{B} + \int_{\Gamma_s} \mathbf{s} \cdot \mathfrak{u} \, d\Gamma = \int_{\mathbf{B}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{B} + \int_{\Gamma_s} \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = \mathbf{L}(\mathbf{v}). \tag{IV.49}$$

A formulação cinemática do problema da elastoplasticidade e dano admite que, a compatibilidade está satisfeita. Além disso, a taxa de tensão $\underline{\sigma} \in \mathbf{W}^*$, relacionada a $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ e $\underline{\kappa} \in \Lambda_f^+$ ou $\underline{\alpha} \in \Lambda_g$, através da equação constitutiva elastoplástica com dano, equilibra a taxa de carga externa no instante t , de modo que pelo Princípio das Potencias Virtuais vale a relação:

$$\int_{\mathbf{B}} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} d\mathbf{B} = \mathbf{E}(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}; \quad (\text{IV.50})$$

se e somente se,

$$\int_{\mathbf{B}} \underline{\sigma} \cdot D\mathbf{v} d\mathbf{B} = \mathbf{L}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}; \quad (\text{IV.51})$$

onde a taxa de deformação é expressa por $\underline{\varepsilon} = D\mathbf{v}$ com D um operador que transforma velocidade \mathbf{v} ou taxa de deslocamento \underline{u} em taxa de deformação $\underline{\varepsilon}$ e tal que, $D\mathbf{v}$ se relaciona com $\underline{\kappa}$ através da relação constitutiva elastoplástica com dano.

Considerando-se $\underline{\sigma} = E \underline{\varepsilon} - \underline{\kappa} f_\varepsilon = E D\mathbf{v} - \underline{\kappa} f_\varepsilon$, para $\underline{\kappa} \in \Lambda_f^+$ (definido em (III.28)), a condição de equilíbrio pode então ser escrita no caso associativo por:

$$\int_{\mathbf{B}} (E D\mathbf{v} - \underline{\kappa} f_\varepsilon) \cdot D\mathbf{v}^* d\mathbf{B} = \mathbf{L}(\mathbf{v}^*), \quad \forall \mathbf{v}^* \in \mathbf{U}, \quad (\text{IV.52})$$

ou então, de acordo com a relação (III.85), para $\underline{\kappa} = \psi \underline{\alpha}$, $\underline{\alpha} \in \Lambda_g$ (definido em (III.30):

$$\int_{\mathbf{B}} (E D\mathbf{v} - \psi \underline{\alpha} f_\varepsilon) \cdot D\mathbf{v}^* d\mathbf{B} = \mathbf{L}(\mathbf{v}^*), \quad \forall \mathbf{v}^* \in \mathbf{U}. \quad (\text{IV.53})$$

IV.6.1 - Formulação variacional em taxas.

A formulação variacional em taxas do problema de análise elastoplasticidade acoplada ao dano, admite que a compatibilidade está satisfeita identicamente e pretende encontrar, para cada taxa de carga, velocidades \mathbf{v} cinematicamente admissíveis e multiplicadores plásticos acoplados ao dano $\underline{\kappa}$, compatíveis com o modelo constitutivo.

Considerando-se inicialmente as relações do modelo constitutivo vistas em (III.92) a (III.95), com $\underline{\kappa} \in \Lambda_f^+$, relaxada, pela função indicatriz $\mathbf{I}_{\Lambda_f^+}$ definida em (III.34) e introduzida no modelo por meio de uma aproximação assintótica de acordo com (III.35), tem-se que para $\delta \rightarrow 0^+$:

$$\int_{\mathbf{B}} [-\frac{1}{\delta} \mathbf{f} - \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \underline{\sigma} + \underline{\kappa} G] \cdot (\underline{\kappa}^* - \underline{\kappa}) d\mathbf{B} \geq 0, \quad \forall \underline{\kappa}^* \in \Lambda_f \quad \text{e} \quad \delta \rightarrow 0^+ \quad (\text{IV.54})$$

e então, substituindo-se $\underline{\varepsilon} = D\mathbf{v}$ em (IV.53) obtém-se:

$$\int_{\mathbf{B}} [-\frac{1}{\delta} \mathbf{f} - \mathbf{f}_\varepsilon \cdot D\mathbf{v} + \underline{\kappa} G] \cdot (\underline{\kappa}^* - \underline{\kappa}) d\mathbf{B} \geq 0, \quad \forall \underline{\kappa}^* \in \Lambda_f; \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U} \quad \text{e} \quad \delta \rightarrow 0^+. \quad (\text{IV.55})$$

Por outro lado, de acordo com o resultado (I.38), do capítulo I, a relação de equilíbrio (IV.52) pode ser relaxada de acordo com a seguinte equação:

$$\sup_{\mathbf{v}^*} \left\{ \int_{\mathbf{B}} (E D\mathbf{v} - \underline{\kappa} f_\varepsilon) \cdot D\mathbf{v}^* d\mathbf{B} \right\} \geq \inf_{\mathbf{v}^*} \{ \mathbf{L}(\mathbf{v}^*) \}, \quad \forall \mathbf{v}^* \in \mathbf{U}. \quad (\text{IV.56})$$

A desigualdade (IV.56) garante a condição de compatibilidade do problema e diz-se que um estado limite estático é alcançado, quando é atingida a igualdade, ou seja, quando (IV.52) está satisfeita.

IV.6.2 - Existência do potencial resolvente convexo.

As relações dadas em (IV.53) e (IV.55) são condições necessárias de otimalidade do seguinte problema de minimização, para $\mathcal{K} \in \Lambda_f$ (definido em (III.29)) e $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$:

$$\inf_{\mathcal{K}^*, \mathbf{v}^*} \left\{ \int_{\mathbf{B}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{D}\mathbf{v}^* - \mathcal{K}^* \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \mathbf{D}\mathbf{v}^* + \frac{1}{2} \mathbf{G} \mathcal{K}^* \cdot \mathcal{K}^* - \frac{1}{\delta} \mathbf{f} \cdot \mathcal{K}^* \right] d\mathbf{B} - \mathbf{L}(\mathbf{v}^*) \right\} \quad (IV.57)$$

$$\forall \mathcal{K}^* \in \Lambda_f; \forall \mathbf{v}^* \in \mathbf{U} \text{ e } \delta \rightarrow 0^+.$$

A relação (IV.57) é equivalente a:

$$\zeta(\mathbf{v}^*, \mathcal{K}^*) = \inf_{\mathcal{K}^*, \mathbf{v}^*} \left\{ \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \mathbf{D}\mathbf{v}^*, \mathbf{D}\mathbf{v}^* \rangle - \langle \mathcal{K}^* \mathbf{f}_\varepsilon, \mathbf{D}\mathbf{v}^* \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{G} \mathcal{K}^*, \mathcal{K}^* \rangle - \langle \frac{1}{\delta} \mathbf{f}, \mathcal{K}^* \rangle - \mathbf{L}(\mathbf{v}^*) \right\}; \forall \mathcal{K}^* \in \Lambda_f; \forall \mathbf{v}^* \in \mathbf{U} \text{ e } \delta \rightarrow 0^+ \quad (IV.58)$$

Analogamente à seção IV.2, $\zeta(\mathbf{v}^*, \mathcal{K}^*)$ é um potencial resolvente convexo para o modelo elastoplástico com dano que incorpora em sua definição as relações de equilíbrio, compatibilidade e de contorno.

É possível também definir as equações (IV.55), (IV.56) e o problema de minimização (IV.57) ou (IV.58), pela substituição de $\mathcal{K} = \psi \mathbf{d}^\perp$, $\mathbf{d}^\perp \in \Lambda_g$. Os resultados são imediatos e não serão feitos aqui.

IV.6.3 - Equações variacionais em incrementos finitos.

As relações vistas na seção anterior podem ser expressas em incrementos finitos considerando-se os campos de incrementos incógnitos:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} \Delta t; \quad \Delta \lambda = \mathcal{K} \Delta t \quad (IV.59)$$

e fazendo-se nas relações em taxas $\delta = \Delta t$.

Nessas condições, as relações (IV.55) e (IV.56) são escritas por:

$$\int_{\mathbf{B}} [-\mathbf{f} - \Delta \lambda \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \mathbf{D}\Delta \mathbf{v} + \mathbf{G}\Delta \lambda] \cdot (\Delta \lambda^* - \Delta \lambda) d\mathbf{B} \geq 0, \quad \forall \Delta \lambda^* \in \Lambda_f \text{ e } \forall \Delta \mathbf{v} \in \mathbf{U}; \quad (IV.60)$$

$$\sup_{\Delta \mathbf{v}^*} \left\{ \int_{\mathbf{B}} (\mathbf{E} \mathbf{D}\Delta \mathbf{v}^* - \Delta \lambda \cdot \mathbf{f}_\varepsilon) \cdot \mathbf{D}\Delta \mathbf{v}^* d\mathbf{B} \right\} \geq \inf_{\Delta \mathbf{v}^*} \{ \Delta \mathbf{L}(\Delta \mathbf{v}^*) \}, \quad \forall \Delta \mathbf{v}^* \in \mathbf{U} \quad (IV.61)$$

e são condições de otimalidade do seguinte problema de minimização:

$$\inf_{\Delta \lambda^*, \Delta \mathbf{v}^*} \left\{ \int_{\mathbf{B}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}\Delta \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{D}\Delta \mathbf{v}^* - \Delta \lambda \cdot \mathbf{f}_\varepsilon \cdot \mathbf{D}\Delta \mathbf{v}^* + \frac{1}{2} \mathbf{G} \Delta \lambda^* \cdot \Delta \lambda^* - \mathbf{f} \cdot \Delta \lambda^* \right] d\mathbf{B} - \Delta \mathbf{L}(\Delta \mathbf{v}^*) \right\}; \forall \Delta \lambda^* \in \Lambda_f; \forall \Delta \mathbf{v}^* \in \mathbf{U}. \quad (IV.62)$$

Esse problema é ainda equivalente a:

$$\inf_{\Delta\lambda^*, \Delta v^*} \left\{ \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} D\Delta v^*, D\Delta v^* \rangle - \langle \Delta\lambda^* \mathbf{f}_\varepsilon, Dv^* \rangle + \frac{1}{2} \langle G\Delta\lambda^*, \Delta\lambda^* \rangle - \langle \mathbf{f}, \Delta\lambda^* \rangle - \Delta\mathbf{L}(\Delta v^*) \right\}; \quad \forall \Delta\lambda^* \in \Lambda_f; \quad \forall \Delta v^* \in \mathbf{U}. \quad (\text{IV.63})$$

As relações incrementais consideradas, podem ser redefinidas considerando-se $\Delta\lambda = \psi\Delta\alpha$, $\Delta\alpha \in \Lambda_g$.

IV.6.4 - Existência do potencial não-convexo.

É possível também definir um potencial não-convexo que incorpore às relações constitutivas do modelo, as relações de equilíbrio, compatibilidade e de contorno.

Denominando-se na relação (IV.29), $\mathbf{T} = \mathbf{K} - (\beta\mathbf{E})$, se considerar-se em (IV.51) a taxa de tensão \mathfrak{E} dada por, $\mathfrak{E} = (\mathbf{E} + \mathbf{T}) Dv$, então tem-se que:

$$\int_{\mathbf{B}} (\mathbf{E} + \mathbf{T}) \cdot Dv^* d\mathbf{B} = \mathbf{L}(v^*), \quad \forall v^* \in \mathbf{U}. \quad (\text{IV.64})$$

Definindo-se agora $\zeta_1: \mathbf{U} \times \Lambda \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ dado por:

$$\zeta_1(v, \mathfrak{K}) = \begin{cases} \inf_{v, \mathfrak{K}} \{ \varphi_1(v, \mathfrak{K}) - \mathbf{L}(v) \} & \text{se } \langle (\mathbf{E} + \mathbf{T}) Dv, Dv \rangle \geq 0 \\ \sup_{v, \mathfrak{K}} \{ \varphi_1(v, \mathfrak{K}) - \mathbf{L}(v) \} & \text{se } \langle (\mathbf{E} + \mathbf{T}) Dv, Dv \rangle < 0 \end{cases}; \quad (\text{IV.65})$$

onde,

$$\varphi_1(v, \mathfrak{K}) = \frac{1}{2} \langle (\mathbf{E} + \mathbf{T}) Dv, Dv \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}, \mathfrak{K} \rangle.$$

O potencial não-convexo ζ_1 é Lipschitziano e regular, pois φ_1 é definido por funcionais quadráticos e lineares e \mathbf{L} é linear, para alguma variável fixada, em esforço ou deslocamento.

Para essa definição do potencial γ_1 , existe o potencial conjugado γ_1^* , mas esse não estabelece uma relação dual direta entre \mathfrak{E} e Dv , que é de interesse e por isso não será visto aqui.

Desse potencial, derivam as relações mencionadas, vistas em (IV.45) e (IV.64) e ele recupera todas as condições do modelo constitutivo, se considerar associada a ele a hipótese adicional $\mathfrak{K} = 0$, caso contrário ele só dará informações das relações constitutivas se em qualquer instante a situação considerada é de carregamento efetuado. considerando-se a hipótese de $\mathfrak{K} = 0$ em qualquer instante, a situação de descarregamento é contemplada e então todas as condições do modelo constitutivo elastoplástico com dano são recuperadas.

Nesse caso, o potencial definido em (IV.65) torna-se equivalente àquele definido em (IV.57).

No próximo capítulo, explorando o fato que em regime de encruamento negativo os modelos com dano perdem a unicidade de solução, será feito um estudo da localização de deformação, o qual determinará a condição necessária para a perda da unicidade ou perda da condição de elipticidade.

CAPÍTULO V- Introdução à Análise de Localização de Deformação.

A contribuição desse capítulo está ligada à proposta de uma solução em deslocamentos que caracteriza a localização de deformação para as equações estática e dinâmica de equilíbrio ao mesmo tempo em que satisfaz a condição fraca de propagação de Maxwell e a condição forte de propagação de Fresnel-Hadamard. Essa solução permitirá dessa forma ligar o problema da localização de deformação com o de estacionariedade de propagação de ondas e servirá para dar uma condição necessária de perda de unicidade de solução associada à singularidade de tensores constitutivos relativos ao modelos elástico com dano ou elastoplástico com dano vistos no capítulo III.

Os Modelos Elástico com Dano e Elastoplástico com Dano, induzem naturalmente a uma análise de bifurcação de solução para os mesmos, já que em seu estudo pode aparecer solução em tensão, relativa à superfície de dano elástico ou de dano elastoplástico, correspondente a soluções em deformação não únicas. Consequentemente, os pontos em que tal fenômeno ocorre caracterizam pontos de bifurcação de solução para os mesmos.

Desde que, a análise desses modelos é feita em taxas de tensão e deformação, a ocorrência de tal fenômeno está associada ao aparecimento de taxa em deformação não única relacionada a uma única taxa de tensão, o que implica na perda de unicidade de solução para o modelo. É importante observar que, a perda de unicidade está associada à ocorrência de uma singularidade para os tensores constitutivos elástico com dano ou elastoplástico com dano, mas matematicamente tal singularidade não implica propriamente em que o ponto seja de bifurcação de solução. Em um campo de estudo similar, o da análise da estabilidade do equilíbrio, a condição de singularidade pode estar relacionada a um ponto limite, em que o equilíbrio passa a ser instável levando a estrutura a uma mudança na sua configuração geométrica e readquirindo estabilidade na nova configuração. Não há nesse caso a bifurcação. Alguns exemplos que diferenciam a ocorrência de ponto de bifurcação ou ponto limite, com relação ao comportamento de estruturas, serão vistos no capítulo VI, seção VI.1. Logo, a condição de singularidade pode estar relacionada não só a pontos de bifurcação, como também a pontos denominados limites (inflexão, máximos ou mínimos).

Ainda com relação aos modelos constitutivos em estudo, a singularidade apresenta-se no ponto de mudança do regime de encruamento positivo para o de encruamento negativo. Nesse caso, a conseqüente perda da condição de elipticidade implica em perda de unicidade de solução caracterizando então um ponto de bifurcação de solução. A partir desse ponto, o trecho de encruamento negativo da resposta do material, que implica em ganho de deformação com decréscimo de tensão, é instável.

Desde que unicidade, convexidade estrita e elipticidade são relações recíprocas, então pode-se afirmar que em um ponto de bifurcação a condição de perda de elipticidade acarreta aos modelos a perda de convexidade, o mesmo não se podendo afirmar se o ponto encontrado é um ponto limite. De fato, viu-se na análise feita no capítulo IV, seção IV.5, que em regime de encruamento positivo, os potenciais que regiam os modelos eram convexos enquanto que em regime de encruamento negativo os mesmos passavam a ser concâvos, comprovando que a perda de unicidade acarreta em perda de convexidade.

A figura V.1 seguinte esboça para o caso uniaxial um modelo não-linear ilustrando os regimes de elasticidade, “hardening” e “softening”.

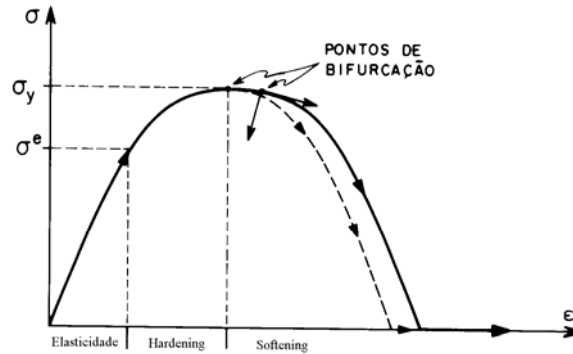


Figura V.1 - Modelo uniaxial não-linear relativo à plastificação e dano.

Pode-se admitir também que, a partir do ponto de bifurcação, dada à instabilidade do regime que segue, encontra-se um estado de dano que implica localmente em ruptura. Esse ponto passa a pertencer a um “plano de fratura” onde as deformações se localizam e as subsequentes taxas de deformação se tornam descontínuas em relação a pontos vizinhos que não tenham alcançado esse regime. A localização caracteriza-se então por um salto da deformação no plano de fratura (ver figura V.2).

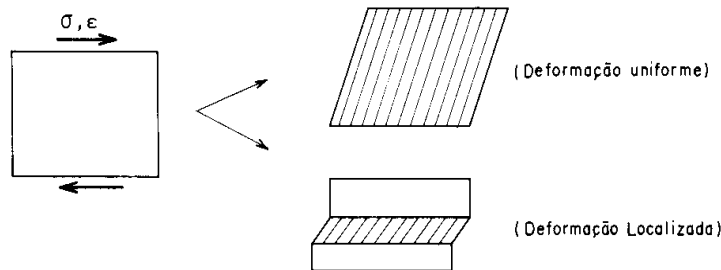


figura V.2 - Localização de um ponto de bifurcação.

No que segue, pretende-se fazer uma análise de bifurcação para os modelos, estudando a condição necessária de perda de estabilidade, denominada condição de perda de elipticidade ou condição de localização, para posteriormente investigar no capítulo VI, condições suficientes para caracterizar os pontos singulares como pontos de bifurcação ou pontos limite. Nas seções V.1, V.2 e V.3 seguintes, se faz a análise da condição de bifurcação ou critério de localização para um meio homogêneo e infinito bem como uma interpretação mecânica e geométrica da perda de elipticidade, baseando-se em [Burger, 1987], [Hachich, 1994], [Rizzi, 1995], [Billardon, 1989], entre outros.

V.1- Análise da condição necessária de perda de estabilidade para um meio homogêneo e infinito.

Considere a hipótese do corpo \mathbf{B} se constituir num meio homogêneo e infinito, sujeito no infinito a carregamentos uniformes com variação contínua no instante t , que dão origem às soluções homogêneas, em deslocamento $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, em velocidade $\dot{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}$, em aceleração $\ddot{\mathbf{u}}$, em taxa de aceleração $\dot{\ddot{\mathbf{u}}}$, em tensão $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}^*$, em taxa de tensão $\dot{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathbf{W}^*$, em carregamento $\mathbf{p} \in \mathbf{U}^*$, e em taxa de carregamento $\dot{\mathbf{p}} \in \mathbf{U}^*$, onde os espaços de Banach: \mathbf{U} , \mathbf{U}^* e \mathbf{W}^* , estão definidos no capítulo I. Com essa hipótese a equação de equilíbrio dinâmico pode ser dada por:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} = \rho \ddot{\mathbf{u}}; \quad (\text{V.1})$$

onde ρ é a densidade de massa do contínuo. Denotando-se $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$, tem-se que a relação (V.1) implica na seguinte relação em taxas,

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{p}} = \rho \dot{\ddot{\mathbf{u}}}. \quad (\text{V.2})$$

Se a taxa em deslocamento $\dot{\mathbf{u}}$ é constante, então, a relação (V.1) é equivalente à relação de equilíbrio estático,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} = 0 \quad (\text{V.3})$$

e (V.2) é equivalente à relação de equilíbrio estático em taxas:

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{p}} = 0. \quad (\text{V.4})$$

A relação (V.2) pode ser expressa considerando-se do capítulo III,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{H}(\mathbf{w}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}), \quad (\text{V.5})$$

por:

$$\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{w}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) + \dot{\mathbf{p}} = \rho \dot{\ddot{\mathbf{u}}}; \quad (\text{V.6})$$

onde $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathbf{W}$ (definido no capítulo I) e; no caso associativo, se $\mathbf{w} = \mathbf{w}^d$ então \mathbf{H} é o tensor elástico com dano, definido em (III.17) ou se $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{pd}$ então \mathbf{H} é o tensor elastoplástico com dano, definido em (III.83).

Para se verificar a unicidade de solução em velocidades e já procurando atender a hipótese de localização de deformação, se considera para um ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$ em um instante $t \in \mathfrak{R}$, a existência de uma outra solução composta por velocidades $\dot{\mathbf{u}}^+(\mathbf{x}, t)$ e $\dot{\mathbf{u}}^-(\mathbf{x}, t)$, que dividem o corpo \mathbf{B} em duas partes \mathbf{B}^+ e \mathbf{B}^- , tais que, a diferença entre elas expressa uma solução contínua em velocidades, mas que possuem gradiente de velocidade, $[[\nabla \dot{\mathbf{u}}]] = [[\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}}]]$, descontínuo ao passar de \mathbf{B}^+ para \mathbf{B}^- , ou seja,

$$[[\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)]] = \dot{\mathbf{u}}^+(\mathbf{x}, t) - \dot{\mathbf{u}}^-(\mathbf{x}, t) = 0; \quad (\text{V.7})$$

$$[[\nabla \dot{\mathbf{u}}]] = \nabla \dot{\mathbf{u}}^+ - \nabla \dot{\mathbf{u}}^- \neq 0. \quad (\text{V.8})$$

A equação (V.8) é conhecida como condição de compatibilidade de Maxwell e representa um “salto” de deformação. Admitindo-se a hipótese de pequenos deslocamentos e deformações, a solução (V.7)

deve satisfazer a condição de equilíbrio (V.2), de modo que sua substituição naquela equação verifica a condição abaixo:

$$\text{div } \mathbf{H}[[\mathfrak{E}(\mathbf{u})]] = \rho [[\mathfrak{A}]]; \quad (\text{V.9})$$

onde,

$$[[\mathfrak{A}]] = \mathfrak{A}^+ - \mathfrak{A}^- \neq 0; \quad (\text{V.10})$$

$$[[\mathfrak{E}(\mathbf{u})]] = \mathfrak{E}^+(\mathbf{u}) - \mathfrak{E}^-(\mathbf{u}) \neq 0; \quad (\text{V.11})$$

ou seja, a descontinuidade do tensor gradiente de velocidade no ponto (\mathbf{x},t) implica na descontinuidade da taxa de aceleração e na descontinuidade do tensor taxa de deformação, que pode ser expresso como a parte simétrica de $[[\nabla \mathfrak{u}]]$:

$$[[\mathfrak{E}(\mathbf{u})]] = \frac{1}{2} [[\nabla \mathfrak{u} + \nabla \mathfrak{u}^T]] \neq 0. \quad (\text{V.12})$$

Por outro lado, a hipótese assumida de homogeneidade do meio, permite fazer uma correlação entre o estudo da localização da deformação e o da “propagação de ondas de aceleração”. Nesse caso, a solução bifurcada em deslocamento para o problema de equilíbrio dinâmico (V.2), se relaciona diretamente às soluções harmônicas simples que representam ondas planas, provocadas por alguma perturbação local no meio. De fato, imagina-se que uma perturbação local no meio homogêneo provoca um frente de onda F que se propaga com velocidade c , na direção de um versor $\boldsymbol{\eta}$. Isto posto, nesse estudo, os campos de deslocamentos com as características de (V.7) e (V.8) serão definidos por funções $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, de natureza vetorial, associadas ao ponto \mathbf{x} , no instante t , na direção de um vetor $\tilde{\mathbf{g}}$ e dependente de funções escalares de onda $\Phi(\mathbf{x},t)$, denominadas pulso de onda, tais que:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \Phi(\mathbf{x},t) \tilde{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\eta}) = e^{i(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x} - ct)} \tilde{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\eta}), \quad (\text{V.13})$$

onde as variáveis de (V.13) são:

e - é a função exponencial definida em campo complexo;

\mathbf{u} - é o vetor deslocamento;

c - é a velocidade de propagação da onda;

$\boldsymbol{\eta}$ - é o versor direção de propagação da onda ;

$\tilde{\mathbf{g}}$ - é a direção de polarização do deslocamento;

Φ - é uma função de onda de classe C^∞ tal que $\Phi \neq 0$ e $\Phi_{xx} \neq 0$;

No que segue, mostra-se que a solução (V.13) permite associar o problema de localização da deformação com o da estacionariedade de ondas de aceleração. Isso será feito provando-se nos ítems i), ii) e iii), a seguir, que a solução em deslocamento \mathbf{u} satisfaz a condição fraca de propagação de Maxwell e a condição forte de propagação de Fresnel-Hadamard.

Assumindo-se para $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ em (V.13) as características já descritas de continuidade, ao atravessar o frente de onda F de \mathbf{B}^+ para \mathbf{B}^- , ou seja, $[[\mathbf{u}(\mathbf{x},t)]] = [[\mathfrak{u}(\mathbf{x},t)]] = 0$, e gradiente de velocidade descontínuo ao passar de \mathbf{B}^+ para \mathbf{B}^- , isto é, $[[\nabla \mathbf{u}]] \neq 0$, $[[\nabla \mathfrak{u}]] \neq 0$ e $[[\mathfrak{A}]] \neq 0$, tem-se:

- i) na hipótese de continuidade do deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, o frente de onda F se propaga no espaço com velocidade c , na direção de propagação $\boldsymbol{\eta}$.

Justificativa:

considerando-se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B(\delta)$ (bola de raio $\delta \rightarrow 0^+$), com $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, relacionados respectivamente a t_1 e t_2 , com $t_1 \neq t_2$ tal que $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, $dt = t_2 - t_1$, a continuidade de \mathbf{u} , implica em,

$$e^{i(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}_2 - c t_2)} \mathfrak{g}(\boldsymbol{\eta}) = e^{i(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}_1 - c t_1)} \mathfrak{g}(\boldsymbol{\eta}) \Rightarrow \boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = c(t_2 - t_1)$$

e então,

$$d\mathbf{x} = c \boldsymbol{\eta} dt, \quad (\text{V.14})$$

que se constitui em uma relação causa e efeito entre propagação de onda e deslocamento de pontos do corpo, ou seja, o deslocamento se dá na direção de propagação da onda. \square

ii) A condição de compatibilidade cinemática de Maxwell, denominada de *condição fraca de localização*, dada por,

$$c[[\nabla \boldsymbol{\mathfrak{u}}]] = - [[\boldsymbol{\mathfrak{u}}]] \otimes \boldsymbol{\eta}, \quad (\text{V.15})$$

está satisfeita para a classe de funções considerada.

Justificativa:

Inicialmente, se mostrará a validade de (V.15) para depois mostrar que (V.13) satisfaz essa condição.

Na hipótese de $[[\boldsymbol{\mathfrak{u}}(\mathbf{x}, t)]] = 0$, $[[\nabla \boldsymbol{\mathfrak{u}}(\mathbf{x}, t)]] \neq 0$ e $[[\boldsymbol{\mathfrak{u}}]] \neq 0$, então, $[[\boldsymbol{\mathfrak{u}}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t + dt)]] - [[\boldsymbol{\mathfrak{u}}(\mathbf{x}, t)]] = 0$, o que implica

$$[[\boldsymbol{\mathfrak{u}}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t + dt)]] - [[\boldsymbol{\mathfrak{u}}(\mathbf{x}, t)]] = - \left[\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\mathfrak{u}}(\mathbf{x}, t) \right] \right] d\mathbf{x} - [[\boldsymbol{\mathfrak{u}}(\mathbf{x}, t)]] dt = 0.$$

Utilizando-se agora (V.14), obtém-se,

$$- \left[\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\mathfrak{u}}(\mathbf{x}, t) \right] \right] c \boldsymbol{\eta} dt = [[\boldsymbol{\mathfrak{u}}(\mathbf{x}, t)]] dt,$$

e então,

$$c \left[\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\mathfrak{u}}(\mathbf{x}, t) \right] \right] \boldsymbol{\eta} = - [[\boldsymbol{\mathfrak{u}}(\mathbf{x}, t)]].$$

Levando-se em conta que $\boldsymbol{\eta}$ é um versor e que $(\boldsymbol{\mathfrak{u}} \otimes \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mathfrak{u}}$, a relação anterior pode ser escrita na forma (V.15).

Resta mostrar agora que a função deslocamento definida em (V.13), satisfaz (V.15).

De (V.13), tem-se que,

$$[[\boldsymbol{\mathfrak{u}}(\mathbf{x}, t)]] = -i c \Phi(\mathbf{x}, t) \mathfrak{g}(\boldsymbol{\eta}); \quad (\text{V.16})$$

$$[[\boldsymbol{\mathfrak{u}}(\mathbf{x}, t)]] = - c^2 \Phi(\mathbf{x}, t) \mathfrak{g}(\boldsymbol{\eta}); \quad (\text{V.17})$$

então,

$$[[\mathfrak{E}(\mathbf{x},t)]] \otimes \boldsymbol{\eta} = -c^2 \Phi(\mathbf{x},t) (\boldsymbol{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\eta}) \otimes \boldsymbol{\eta}). \quad (\text{V.18})$$

Por outro lado, desde que, da proposição D5.3.1i),

$$\nabla(\varphi \mathbf{w}) = \varphi \nabla \mathbf{w} + (\mathbf{w} \otimes \nabla \varphi), \quad (\text{V.19})$$

empregando-se (V.16), (V.17) e (V.19) tem-se que,

$$\begin{aligned} [[\nabla \mathfrak{u}]] &= \nabla(-i c \Phi(\mathbf{x},t) \boldsymbol{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\eta})) = -i c \Phi(\mathbf{x},t) (\nabla(\boldsymbol{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\eta})) - i c (\boldsymbol{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\eta}) \otimes \nabla \Phi(\mathbf{x},t))) = \\ &= -i^2 c \Phi(\mathbf{x},t) (\boldsymbol{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\eta}) \otimes \boldsymbol{\eta}) = c \Phi(\mathbf{x},t) (\boldsymbol{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\eta}) \otimes \boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

Logo, pode-se expressar,

$$[[\nabla \mathfrak{u}]] = c \Phi(\mathbf{x},t) (\boldsymbol{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\eta}) \otimes \boldsymbol{\eta}). \quad (\text{V.20})$$

Então, multiplicando-se (V.20) por $-c$ em ambos os lados tem-se:

$$-c[[\nabla \mathfrak{u}]] = -c^2 \Phi(\mathbf{x},t) (\boldsymbol{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\eta}) \otimes \boldsymbol{\eta}). \quad (\text{V.20a})$$

Logo, da igualdade entre (V.18) e (V.20a) demonstra-se que a condição de Maxwell (V.15) está satisfeita. \square

iii) A solução em deslocamento \mathbf{u} , definida em (V.13) satisfaz a condição de propagação de Fresnel-Hadamard, expressa por,

$$\mathbf{Q}^w \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\eta}) = \rho c^2 \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\eta}); \quad (\text{V.21})$$

onde, $\mathbf{Q}^w = [\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\eta}]$.

Justificativa:

Analisando-se diretamente a equação (V.9), tem-se à esquerda da igualdade que:

$$\text{div}(\mathbf{H}[[\mathfrak{E}(\mathbf{u})]]) = (\text{div} \mathbf{H}) [[\mathfrak{E}(\mathbf{u})]] + \mathbf{H}[[\nabla \mathfrak{E}(\mathbf{u})]] = \mathbf{H}[[\nabla \mathfrak{E}(\mathbf{u})]], \quad (\text{V.22})$$

resultado obtido de uma extensão da proposição D5.3.1v) e da simetria menor de \mathbf{H} .

Substituindo-se (V.12), em (V.22) resulta:

$$[[\nabla \mathfrak{E}(\mathbf{u})]] = \{\mathbf{H} \nabla[[\frac{1}{2}(\nabla \mathfrak{u} + \nabla \mathfrak{u}^T)]]\} = 0. \quad (\text{V.23})$$

Então, considerando-se a simetria menor de \mathbf{H} , chega-se na equação:

$$\mathbf{H}[[\nabla \mathfrak{E}(\mathbf{u})]] = \mathbf{H}[[\nabla(\nabla \mathfrak{u})]]; \quad (\text{V.24})$$

pois $H_{ijkl} (\nabla^2 \mathfrak{u})_{lk} = H_{jikl} (\nabla^2 \mathfrak{u})_{lk}$ (pela simetria menor de \mathbf{H}).

Com $[[\nabla \mathfrak{u}]]$ calculado em (V.20), e utilizando-se a proposição D5.4, tem-se que,

$\nabla(\nabla \mathfrak{u}) = \nabla\{[c \Phi(\mathbf{x},t) \boldsymbol{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\eta})] \otimes \boldsymbol{\eta}\} = \nabla[c \Phi(\mathbf{x},t) \boldsymbol{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\eta})] \otimes \boldsymbol{\eta} + (c \Phi(\mathbf{x},t) \boldsymbol{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\eta})) \otimes \nabla[\boldsymbol{\eta}]^T$
então, pela proposição D5.3i),

$$\nabla(\nabla \mathfrak{u}) = \nabla[c \Phi(\mathbf{x},t) \boldsymbol{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\eta})] \otimes \boldsymbol{\eta} = i c \Phi(\mathbf{x},t) (\boldsymbol{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\eta}) \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta}),$$

Logo,

$$[[\nabla(\nabla \mathbf{u})]] = i c \Phi(\mathbf{x},t)(\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta}). \quad (\text{V.25})$$

Voltando-se agora em (V.24), obtém-se:

$$\mathbf{H}[[\nabla(\nabla \mathbf{u})]] = i c \Phi(\mathbf{x},t) \mathbf{H}(\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta}). \quad (\text{V.26})$$

Desde que, da proposição D5.1.2iii) é válido,

$$\mathbf{H}(\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \otimes \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta}) = [\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\eta}] \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}), \quad (\text{V.27})$$

voltando-se com (V.27) em (V.26) tem-se,

$$\mathbf{H}[[\nabla(\nabla \mathbf{u})]] = i c \Phi(\mathbf{x},t)[\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\eta}] \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}). \quad (\text{V.28})$$

Fazendo-se em (V.28):

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}) = i c \Phi(\mathbf{x},t) \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}), \quad (\text{V.29})$$

tem-se que à esquerda da equação (V.9) :

$$\text{div } \mathbf{H}[[\mathbf{g}(\mathbf{u})]] = [\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\eta}] \mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}). \quad (\text{V.30})$$

Denotando-se $\mathbf{Q}^w = [\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\eta}]$ em (V.30), resulta-se:

$$\text{div}[[\mathbf{g}]] = \text{div } \mathbf{H}[[\mathbf{g}(\mathbf{u})]] = \mathbf{Q}^w \mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}). \quad (\text{V.31})$$

Se $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{w}^{pd})$ então \mathbf{Q}^w é denominado de *Tensor Acústico Elastoplástico com Dano*. Se $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{w}^d)$ então \mathbf{Q}^w é denominado de *Tensor Acústico Elástico com Dano*.

O tensor acústico \mathbf{Q}^w é simétrico se e somente se \mathbf{H} é um tensor simétrico.

Para chegar-se à condição de propagação de Fresnel-Hadamard, basta efetuar à direita da relação (V.9) o cálculo de:

$$\rho[[\mathbf{g}]] = i \rho c^3 \Phi(\mathbf{x},t) \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \rho c^2 \mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}); \quad (\text{V.32})$$

onde ρ é a densidade de massa do contínuo.

Logo, na relação (V.9), tem-se por (V.31) e (V.32) que,

$$\mathbf{Q}^w \mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}) = \rho c^2 \mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}), \quad (\text{V.33})$$

que é a conhecida condição de propagação de Fresnel-Hadamard e se caracteriza por ser uma *condição forte de localização*. \square

A equação (V.33) pode ser transformada em um problema de autovalor, considerando-se:

$$[\mathbf{Q}^w - \rho c^2] \mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}) = 0. \quad (\text{V.34})$$

A propriedade espectral de \mathbf{Q}^w em (V.34), define a condição de propagação de uma onda de aceleração em um meio elástico com dano ou elastoplástico com dano, já que nessa equação, ρc_i^2 pode ser associado a um autovalor de \mathbf{Q}^w e o autovetor correspondente $\mathbf{u}(\boldsymbol{\eta})_i$ define a direção de polarização do meio, enquanto que $\boldsymbol{\eta}$ é a direção de propagação da onda.

Fazendo-se $\gamma^* = \rho c^2$, então a (V.34) passa a ser escrita por:

$$\mathbf{Q}^w \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\eta}) - \gamma^* \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\eta}) = 0, \quad (\text{V.35})$$

que é a equação espectral a ser estudada para se pesquisar a existência ou não de pontos estacionários para os modelos com dano.

É importante notar que a análise feita até aqui para se estudar pontos estacionários, considerando-se a equação dinâmica de equilíbrio (V.2), gerou um problema de autovalor genérico. O problema de localização ou de velocidade de propagação estacionária, se caracteriza se a velocidade de propagação $c \rightarrow 0$, ou seja, a onda passa a ser estacionária em algum instante t da análise. Isso implica em pesquisar-se autovalores nulos no autoproblema (V.35). Em outras palavras, a condição de localização de deformação ou de estacionariedade de onda, se verifica para uma solução $\tilde{\mathbf{u}} \neq 0$ se:

$$\mathbf{Q}^w \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\eta}) = 0. \quad (\text{V.36})$$

Tal relação admite uma solução homogênea diferente da trivial, ou seja $\tilde{\mathbf{u}} \neq 0$, se a seguinte condição é verificada,

$$\exists \boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{R}^3 \text{ tal que } \det \mathbf{Q}^w = 0, \|\boldsymbol{\eta}\| = 1. \quad (\text{V.37})$$

Logo, o problema em velocidades para um meio infinito admite uma única solução homogênea enquanto a condição $\det[\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\eta}] > 0$ é satisfeita para toda direção $\boldsymbol{\eta}$. Nesse caso, as equações de equilíbrio são ditas elípticas. A condição necessária de perda de elipticidade ocorre quando a equação (V.37) é satisfeita e conseqüentemente dá uma condição necessária de perda de unicidade de solução do problema em velocidades (V.2).

Observe que, se a análise que foi feita até aqui considerando-se a equação (V.2), fosse feita para a equação em taxas estática (V.4), a condição de localização recairia diretamente no autoproblema (V.36) e a perda de elipticidade ocorreria se (V.37) estivesse satisfeita.

Pode-se afirmar também que, $\gamma^* = 0$ é uma condição necessária mas não suficiente para se ter o problema de autovalor nulo dado na equação (V.36). Será visto na seção V.4.4.1 que, para o caso não-associativo isótropo, em que o tensor \mathbf{Q}^w é não simétrico, podem ocorrer autovalores complexos conjugados que satisfaçam a condição de perda de elipticidade (V.37).

A conclusão que se chega é:

“Em qualquer caso de existência de autovalor nulo, na análise das equações (V.2) e (V.4), tem-se localização, mas pode-se ter localização associada a autovalor não nulo”.

Considerando-se por outro lado, o versor $\mathbf{g} = v \tilde{\mathbf{u}}$, onde $v = \|\tilde{\mathbf{u}}\|^{-1}$, substituindo-o em (V.35) e pré- multiplicando-se escalarmente por \mathbf{g} , resulta a seguinte equação, para $v \neq 0$:

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{Q}^w \cdot \mathbf{g} - \gamma^* = 0. \quad (\text{V.38})$$

A forma alternativa (V.38) é uma equação quadrática algébrica do segundo grau em \mathbf{g} , dependente de γ^* , ligada diretamente com as soluções limites de (V.37) e importante para se associar o problema da localização à perda de condição de elipticidade. Isso será visto com mais detalhes no final da seção V.4.2 .

V.2 - Interpretação mecânica - Perda de elipticidade e Localização da deformação.

De acordo com [Hill, 1962] e [Mandel, 1966], e como foi aqui visto, o estudo da localização pode ser enquadrado no âmbito da “propagação de ondas de aceleração” . A propagação de ondas ponto a ponto em um meio qualquer é provocada por uma excitação

local (podendo ser um carregamento). Se a rigidez do meio é finita, podem surgir em pontos quaisquer do corpo ondas de aceleração estacionárias, e aí diz-se que uma deformação localizada ocorreu.

O que permitiu ligar a perda de elipticidade ao aparecimento de ondas de aceleração estacionárias foi um estudo da equação homogênea (V.9). Viu-se que a análise de estacionariedade é equivalente a se pesquisar para aquela equação soluções na forma:

$$[[\mathbf{u}(\mathbf{x},t)]] = \Phi(\mathbf{x},t) \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}), \quad (\text{V.39})$$

pois, substituindo-se (V.39) na relação (V.9) obteve-se a condição necessária de estacionariedade (V.36), com $\tilde{\mathbf{u}}$ substituído pelo autoversor \mathbf{g} .

Pode-se concluir também, que na perda de elipticidade, o problema em velocidades admite soluções na forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_0 + \Phi(\mathbf{x},t) \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}); \quad (\text{V.40})$$

onde $\boldsymbol{\eta}$ é uma das direções satisfazendo (V.37), \mathbf{g} é um versor próprio relacionado a autovalor nulo γ^* do tensor \mathbf{Q}^w e \mathbf{u}_0 é uma solução da equação homogênea (V.9). Na $\Phi(\mathbf{x},t)$, a velocidade de propagação c , diretamente proporcional à rigidez da estrutura, é de fundamental importância pois se relaciona diretamente aos autovalores γ^* de \mathbf{Q}^w e, assim, permite ligar a condição de perda de elipticidade (V.37) ao aparecimento de ondas de aceleração estacionárias, as quais ocorrem para $c \rightarrow 0$.

O problema em velocidades também admite soluções gerais na forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_0 + \sum_j \mathbf{g}^j \Phi^j(\mathbf{x},t), \quad (\text{V.41})$$

se a série $\sum_j \mathbf{g}^j \Phi^j(\mathbf{x},t)$ é convergente para $\Phi \mathbf{g}$.

A seguir, uma interpretação geométrica da condição de localização ou perda de elipticidade será feita.

V.3- Interpretação geométrica da perda de elipticidade.

Considerando-se o meio homogêneo e infinito, a propagação de ondas provocadas por alguma perturbação em um ponto do meio, pode ser interpretada associando-se o frente de onda à superfície de uma esfera e as direções de propagação às direções radiais. Para distâncias consideráveis entre o ponto de excitação local e o frente de onda, esse frente pode ser descrito por um plano e denominado de frente de onda plana. O frente é então caracterizado pela direção $\boldsymbol{\eta}$, perpendicular ao plano e essa direção é denominada de direção de propagação. Se a onda é estacionária, a velocidade de propagação c tende a zero. Associado ao frente de onda plana, deslocamentos quaisquer de pontos do meio são regidos pela equação (V.13) e a estacionariedade fica então caracterizada pela singularidade do tensor \mathbf{Q}^w , vista em (V.37), em algum ponto do plano Ω . Também em [Gurtin, 1972], o campo de deslocamentos é descrito por uma equação matemática, que inclui uma função representativa de uma onda plana se propagando no meio com velocidade de propagação c , e uma direção definida por um autoversor \mathbf{g} , de acordo com a relação:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \Phi(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta} - ct) \mathbf{g}. \quad (\text{V.42})$$

Assim, os deslocamentos são proporcionais à direção \mathbf{g} e essa é denominada de direção de polarização. Nota-se que, na forma como foi definido $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ em (V.13), são equivalentes as equações (V.13) e (V.42). Tanto em uma como na outra definição do

deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, a finalidade é ligar o problema de estacionariedade de ondas ao problema de localização e a inter-relação entre estacionariedade e localização é vista da seguinte maneira: se a propagação de ondas é provocada por uma excitação local proveniente de esforços ou cargas aplicadas, o ponto onde a velocidade de propagação é nula tem correspondência com um ponto de localização de deformação e o conjunto desses pontos definem uma região no plano Ω denominada de banda de localização. Quando uma localização ocorre, o plano Ω divide \mathbf{B} em duas partes \mathbf{B}^+ e \mathbf{B}^- entre as quais o vetor de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ é admitido contínuo e tem a mesma direção do autovalor \mathbf{g} , que em geral não coincide com a direção $\boldsymbol{\eta}$ de propagação da onda, sendo porisso chamado de direção de polarização. Mas o tensor $\nabla \mathbf{u}$ é descontínuo ao passar de \mathbf{B}^+ para \mathbf{B}^- e essa descontinuidade pode ser vista como um salto de deformação no plano. Nesse caso, Ω pode ser denominado de plano de fratura. A figura V.3 ilustra o comportamento de \mathbf{u} e $\boldsymbol{\varepsilon}$ (dependente de $\nabla \mathbf{u}$) numa banda de localização.

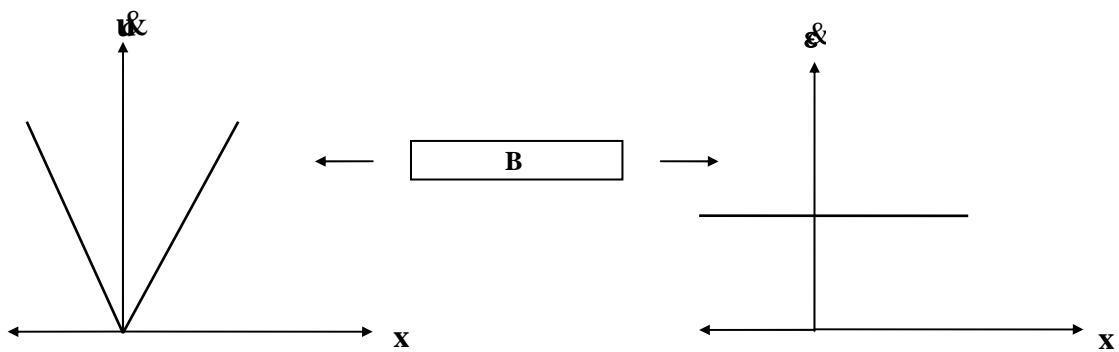


Figura V.3a) - Solução homogênea.

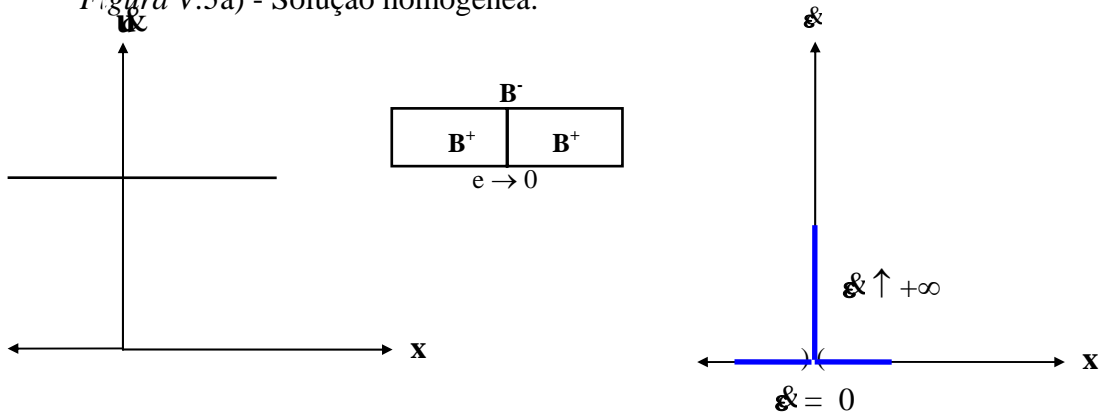


Figura V.3b) - Solução bifurcada com localização numa faixa.

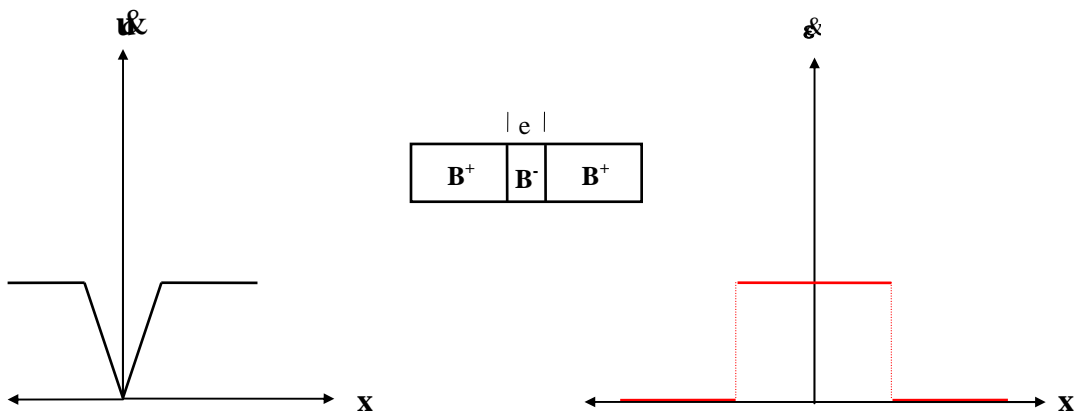


Figura V.3c) - Solução bifurcada com localização numa banda.

Figura V.3 - Interpretação geométrica de u e ϵ numa banda localizada.

Em termos práticos, descrever o salto de deformação através de um plano de descontinuidade é possível mas a dificuldade se encontra no fato que nesse plano pode-se ter o lado “-” em descarregamento enquanto o lado “+” está carregando. Desse modo é melhor descrever a localização da deformação através de dois planos paralelos que formam uma “banda de localização”, distantes de uma dimensão e (que pode ser nula) segundo a normal η (figura V.4). Nesse caso pesquisa-se uma solução bifurcada que coincida com u^- no exterior da banda (banda de descarregamento) e que assuma o valor u^+ no interior dessa banda (banda de carregamento). Assim, a solução em velocidades descreve o salto através dos dois planos limitando a banda e a caracterização da localização é feita impondo-se:

- as condições de equilíbrio,
- as condições de compatibilidade cinemática ;
- e as leis constitutivas.

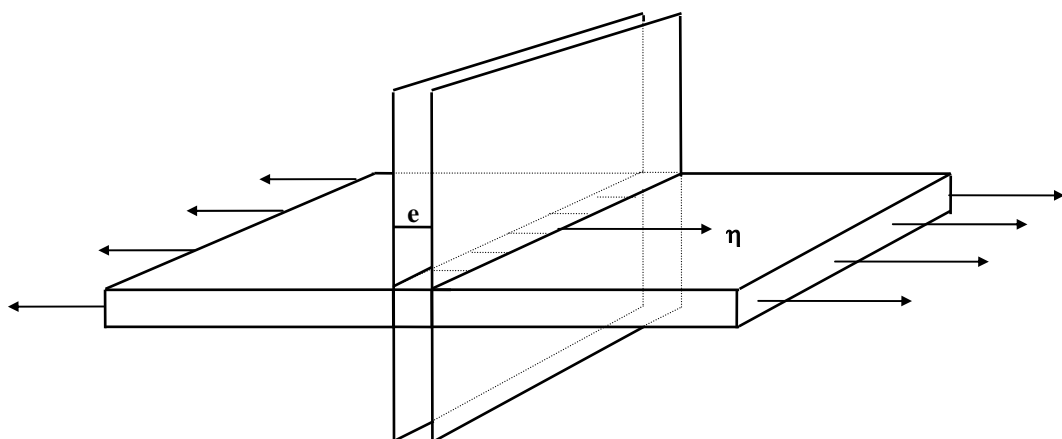


Figura V.4 - Planos paralelos delimitando a banda localizada.

Se a condição (V.37) é satisfeita, é possível determinar-se $\boldsymbol{\eta}$ e \mathbf{g} e o salto de deformação através dos planos delimitando a banda é determinado, considerando-se que (V.12) é equivalente a:

$$[[\boldsymbol{\varepsilon}]] = \frac{1}{2} ([[\boldsymbol{u}]] \otimes \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta} \otimes [[\boldsymbol{u}]]) \quad (\text{V.43})$$

e então, de (V.13) e (V.17) tem-se que:

$$[[\boldsymbol{\varepsilon}]] = -\frac{1}{2} c^2 \Phi(\mathbf{x}, t) [\mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{g}]. \quad (\text{V.44})$$

O tipo de localização fornecido pelo modelo de dano pode ser identificado, de acordo com o resultado do produto interno de \mathbf{g} por $\boldsymbol{\eta}$, que caracteriza o comportamento dos dois planos um em relação ao outro. Ou seja, diz-se que o salto ocorre em forma de abertura se \mathbf{g} é paralelo a $\boldsymbol{\eta}$ (modo I), em uma banda de cisalhamento puro (modo II) quando \mathbf{g} é ortogonal a $\boldsymbol{\eta}$ ou em um modo misto (torção ou rasgamento - modo III) quando o ângulo θ formado entre \mathbf{g} e $\boldsymbol{\eta}$ é tal que $0 < \theta < \pi/2$, como mostra a figura V.5, abaixo.

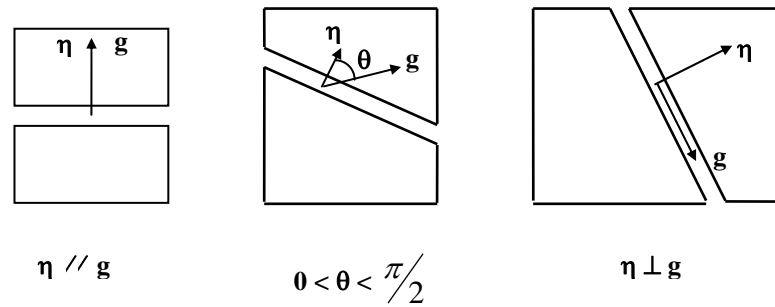


Figura V.5 - i) modo I; ii) modo II; iii) modo III

Na próxima seção, será feita uma análise mais aprofundada, da condição de perda de elipticidade (V.36) e (V.37), explorando-se diretamente a equação (V.35), de acordo com o proposto em [Rizzi, 1995], entre outros.

V.4 - Análise espectral do Tensor Acústico de Dano.

Uma maneira usual de se pesquisar a condição necessária da perda de unicidade de solução, consiste na investigação do sinal do determinante do tensor acústico de dano \mathbf{Q}^w .

Vários autores como [Hachich, 1994], [Benallal, 1990], [Billardon, 1993] e [Rizzi, 1995], entre outros, fizeram tal análise. Nesse contexto, aqui será feita essa análise seguindo mais diretamente o encontrado em [Rizzi, 1995].

Viu-se que o problema em velocidade analisado nas seções anteriores, admite uma única solução homogênea se a condição $\det \mathbf{Q}^w > 0$ está satisfeita para toda direção $\boldsymbol{\eta}$. Nesse caso, as equações de equilíbrio são ditas elípticas. Se $\det \mathbf{Q}^w < 0$, o problema se torna instável; então se investigará aqui a condição necessária crítica para a ocorrência da instabilidade, isto é, a condição de perda de elipticidade,

$$\det \mathbf{Q}^w = 0. \quad (\text{V.45})$$

A análise de (V.45) será feita de uma maneira geral, para tensores simétricos (com lei de fluxo de plastificação e dano associativa) e para tensores não-simétricos, considerando-se sempre o caso de isotropia. No que segue, o estudo se inicia por um problema de autovalor generalizado, explorado para analisar-se a singularidade de \mathbf{Q}^w .

V.4.1 - Análise espectral para o problema generalizado.

O tensor acústico elastoplástico com dano \mathbf{Q}^w é expresso em uma forma geral, considerando lei de fluxo não-associativa, por:

$$\mathbf{Q}^w = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{G} [(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{f}_\varepsilon) \otimes (\mathbf{g}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\eta})]; \quad (\text{V.46})$$

onde $\mathbf{w} = \mathbf{w}^d$ ou $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{pd}$, de acordo com o modelo considerado.

Note que de acordo com a notação adotada pode-se escrever:

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{f}_\varepsilon = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{f}_\varepsilon \quad \text{e} \quad \mathbf{g}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\eta} = \mathbf{g}_\varepsilon \boldsymbol{\eta}.$$

A simetria de \mathbf{Q}^w , é verificada para lei de fluxo associativa. No caso associativo um primeiro resultado que se tem é: $\mathbf{g}_\varepsilon = \mathbf{f}_\varepsilon$. Utilizando-se esse resultado conjuntamente com a proposição D5.1.2i), para o caso associativo a equação (V.46) é equivalente a:

$$\mathbf{Q}^w = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{G} [(\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\eta}) \otimes (\mathbf{f}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\eta})], \quad (\text{V.47})$$

a qual mostra a simetria de \mathbf{Q}^w .

Para se fazer a análise espectral de \mathbf{Q}^w , considera-se na equação (V.37), a substituição de $\tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\eta})$ pelo versor $v^{-1} \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$. Então para $v \neq 0$ aquela equação é equivalente a:

$$\mathbf{Q}^w \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) - \gamma^* \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = 0, \quad (\text{V.48})$$

que é equivalente ao problema de autovalor:

$$[\mathbf{Q}^w - \gamma^* \mathbf{I}_2] \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = 0; \quad (\text{V.49})$$

onde \mathbf{I}_2 é o tensor identidade de segunda ordem.

Se a equação (V.49) admitir um autovalor nulo $\gamma^* = 0$, então essa equação espectral pode ser escrita, nesse caso por:

$$\mathbf{Q}^w \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = 0, \quad (\text{V.50})$$

a qual, tem solução diferente da trivial (nula) se a condição (V.45) está satisfeita, para $\boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{R}^3$ tal que $\|\boldsymbol{\eta}\| = 1$.

Para se analisar (V.45), a melhor estratégia não é explorar diretamente a equação (V.48), mas sim a seguinte equação:

$$\mathbf{Q}^w \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) - \gamma \mathbf{Q} \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = 0; \quad (\text{V.51})$$

com \mathbf{Q} definida por,

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\eta} \quad (\text{V.52})$$

ou ainda, para o caso de materiais isotrópicos,

$$\mathbf{Q} = (\lambda + \mu) \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta} + \mu \mathbf{I}_2; \quad (\text{V.53})$$

onde λ, μ são as constantes de Lamé, com $\mathbf{E}(\mathbf{w})$ definida por,

$$\mathbf{E}(\mathbf{w}) = 2\mu(\mathbf{w}) \mathbf{I}_4 + \lambda(\mathbf{w}) \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2. \quad (\text{V.54})$$

A análise da equação (V.51) é equivalente ao seguinte problema de autovalor generalizado:

$$[\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^w - \gamma \mathbf{I}_2] \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \quad (\text{V.55})$$

e o estudo de (V.55), não fornece diretamente os autovalores do tensor acústico \mathbf{Q}^w , mas é útil para determinar-se a condição de singularidade desse tensor.

A equivalência das equações (V.49) e (V.55) para a existência de autovalores nulos é justificada a seguir, para os casos simétrico e não-simétrico.

Para o caso do tensor \mathbf{Q}^w simétrico, tem-se da proposição D3.2 que existe uma base ortonormal gerada pelos autoversores $\{\mathbf{g}_j, j = 1, 2, 3\}$, associados aos autovalores γ_j^* , tal que o tensor \mathbf{Q}^w pode ser representado nessa base. Além disso, \mathbf{Q}^w é semelhante a uma matriz diagonal $\boldsymbol{\Lambda}$, ou seja,

$$\mathbf{Q}^w = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{G}; \quad (\text{V.56})$$

onde \mathbf{G} é um tensor cujas colunas são formadas pelo autoversores \mathbf{g}_j^T e $\boldsymbol{\Lambda}$ é o tensor diagonal $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}[\gamma_1^* \ \gamma_2^* \ \gamma_3^*]$. Se $\mathbf{g}_j, j = 1, 2, 3$, não são ortonormais, podem ser ortonormalizados pelo processo de Gram-Schmidt.

Se o tensor \mathbf{Q}^w é simétrico, tem-se também que os autovalores γ_j^* são reais e independente da simetria ou não de \mathbf{Q}^w , seu determinante pode ser calculado por:

$$\det \mathbf{Q}^w = \gamma_1^* \gamma_2^* \gamma_3^*. \quad (\text{V.57})$$

De uma maneira análoga à (V.57) o determinante do tensor $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^w$ é determinado pelo produto dos seus autovalores associados, da seguinte forma:

$$\det \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^w = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \quad (\text{V.58})$$

Com os resultados (V.57) e (V.58) tem-se que, pesquisar autovalores nulos para a equação (V.49) é equivalente à mesma análise feita em (V.55), desde que:

$$\det \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^w = \frac{\det \mathbf{Q}^w}{\det \mathbf{Q}} = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \Rightarrow$$

$$\det \mathbf{Q}^w = \det \mathbf{Q} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad (\text{V.59})$$

ou seja,

$$\det \mathbf{Q}^w = \gamma_1^* \gamma_2^* \gamma_3^* = \det \mathbf{Q} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad (\text{V.60})$$

o que implica em $\det \mathbf{Q}^w = 0$ para o caso da existência de autovalor nulo $\gamma = 0$.

Para o caso de \mathbf{Q}^w ser não-simétrico (lei de fluxo não-associativa), ele pode não ser diagonalizável, o que invalida o resultado (V.56), mas não invalida as relações (V.57), (V.58), (V.59) e (V.60), relativas à singularidade de \mathbf{Q}^w . A não simetria de \mathbf{Q}^w , pode implicar na existência de autovalores complexos na análise espectral, mas em [Ottosen e Runesson, 1991b] é demonstrado que para uma classe de lei não associativa suficientemente geral os autovalores γ_j , $j \neq i$, permanecem reais, o que vem a excluir a ocorrência de autovalores complexos. Ainda assim, na seção V.4.4 é dada uma equação para se estudar a ocorrência de autovalores complexos, além disso, uma interessante estratégia encontrada em [Rizzi, 1995], a ser vista na seção V.4.3, é definida para se fazer a análise espectral de tensores não-simétricos.

Será visto, no decorrer dessa seção, que os tensores \mathbf{Q}^w e $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^w$ podem ser escritos como modificações de posto no máximo 2 do tensor identidade. Seus autovalores e autovetores serão caracterizados explorando-se essa característica peculiar, devido a resultados encontrados em [Pearson, 1969], reunidos no Apêndice D.

Considere-se o tensor acústico com dano, dado em (V.46), escrito da maneira simplificada abaixo:

$$\mathbf{Q}^w = \mathbf{Q} - \frac{1}{G} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}; \quad (\text{V.61})$$

onde $\mathbf{a} = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{e}}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{g}_{\mathbf{e}} \cdot \boldsymbol{\eta}$. Lembre-se que, no caso associativo, de acordo com a equação (V.47) tem-se: $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{f}_{\mathbf{e}} \cdot \boldsymbol{\eta}$.

Utilizando-se (V.61), o tensor do autoproblema generalizado (V.51) pode ser escrito na seguinte forma:

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^w = \mathbf{I}_2 - \frac{1}{G} \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}). \quad (\text{V.62})$$

Observe que, no caso de elasticidade isotrópica, utilizando-se a fórmula de [Sherman e Morrison, 1950], vista na seção D4, o tensor \mathbf{Q} pode ser invertido da seguinte maneira:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mu^{-1} \mathbf{I}_2 - (\lambda + \mu) [\mu (\lambda + 2\mu)]^{-1} (\boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta}). \quad (\text{V.63})$$

A resolução de $\det \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^w = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = 0$ é feita notando-se que em (V.62) o tensor $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^w$ é uma modificação de posto 1 do tensor identidade \mathbf{I}_2 . Baseando-se nisso e utilizando-se resultados dados na seção D3.1 do apêndice D, tem-se que o autovalor $\gamma = 1$ tem multiplicidade dois para o tensor $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^w$. Sem perda de generalidade, assumindo-se que $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, resta somente determinar o valor de γ_3 para se fazer a análise desejada.

O cálculo do autovalor γ_3 é então feito da seguinte forma:

$$\det \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^w = \frac{\det \mathbf{Q}^w}{\det \mathbf{Q}} = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \gamma_3, \quad (\text{V.64})$$

então, do resultado dado pela equação (D.11), que $\det(\mathbf{I} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 1 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, tem-se que

$$\det \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^w = 1 - \frac{1}{G} \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}. \quad (\text{V.65})$$

De (V.64) e (V.65) se conclui que:

$$\gamma_3 = 1 - \frac{1}{G} \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}. \quad (\text{V.66})$$

A condição necessária de localização de deformação se reduz a impor que:

$$\det \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^w = \gamma_3 = 0, \quad (\text{V.67})$$

ou seja,

$$\frac{1}{G} \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a} = G. \quad (\text{V.68})$$

Substituindo-se o valor de G, visto em (III.80) em (V.57), onde G é dado por:

$$G = - \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}^w} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{f}_w \cdot \mathbf{r} \quad (\text{V.69})$$

e sendo nesse caso $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{pd}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^w = \boldsymbol{\varepsilon}^{pd}$, obtém-se a seguinte condição de localização:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}^w} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{f}_w \cdot \mathbf{r} = 0. \quad (\text{V.70})$$

O valor máximo para $\boldsymbol{\eta}$ que satisfaça a equação (V.70) e tal que $\|\boldsymbol{\eta}\| = 1$, assinala um indício da deformação localizada onde $\boldsymbol{\eta}$ é a correspondente direção de localização. Esse problema, pode ser formulado da seguinte forma:

$$\text{maximizar } \{ \mathbf{e}^T \boldsymbol{\eta}; \mathbf{b}(\boldsymbol{\eta}) \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}^w} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{f}_w \cdot \mathbf{r} = 0; \|\boldsymbol{\eta}\| = 1 \}; \quad (\text{V.71})$$

onde $\mathbf{e}^T = (1,1,1)$.

Se a restrição (V.70) está satisfeita, então a determinação do versor $\boldsymbol{\eta}$ é feita resolvendo-se (V.71)

V.4.2- Análise dos autovalores de \mathbf{Q}^w para materiais isotrópicos.

Considerando-se materiais isotrópicos, tem-se que \mathbf{Q} é definida de acordo com (V.53), com $\lambda = \lambda(\mathbf{w})$ e $\mu = \mu(\mathbf{w})$; \mathbf{Q}^w é definida de acordo com (V.61) e a sua substituição em (V.49) resulta em:

$$[(\mu - \gamma^*) \mathbf{I}_2 + (\lambda + \mu) \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{G} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})] \mathbf{g} = 0. \quad (\text{V.72})$$

Nota-se que o tensor de (V.72) é uma modificação de posto 2 do tensor identidade \mathbf{I}_2 , então, utilizando-se resultados encontrados na seção D3.2, do Apêndice D, tem-se que $\gamma_1^* = \mu$ é um autovalor para (V.72). Os dois autovalores restantes são obtidos da equação (V.59) por:

$$\det \mathbf{Q}^w = \det \mathbf{Q} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \Leftrightarrow \gamma_1^* \gamma_2^* \gamma_3^* = \det \mathbf{Q} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \Leftrightarrow \mu \gamma_2^* \gamma_3^* = \mu \mu (\lambda + 2\mu) \gamma_3$$

que fornece:

$$\gamma_2^* \gamma_3^* = \mu (\lambda + 2\mu) \gamma_3 = \beta, \quad (\text{V.73})$$

cujos valores são zero para $\gamma_3 = 0$.

Precisa-se de mais uma equação para se determinar γ_2^* e γ_3^* . A operação traço de \mathbf{Q}^w vista em (D.33), define tal relação:

$$\begin{aligned} tr(\mathbf{Q}^w) &= tr(\mathbf{Q}) - \frac{1}{G} tr(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \gamma_1^* + \gamma_2^* + \gamma_3^* \Rightarrow \\ 2\mu + \lambda + 2\mu - \frac{1}{G} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} &= \mu + \gamma_2^* + \gamma_3^* \Rightarrow \\ \gamma_2^* + \gamma_3^* &= 3\mu + \lambda - \frac{1}{G} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \alpha. \end{aligned} \quad (V.74)$$

Então, (V.73) e (V.74) definem duas equações para se determinar γ_2^* e γ_3^* :

$$\begin{cases} \gamma_2^* + \gamma_3^* = \alpha \\ \gamma_2^* \gamma_3^* = \beta \end{cases} \quad (V.75)$$

e as soluções de (V.72), são as raízes de uma equação do segundo grau em γ^* , ou seja,

$$(\gamma^*)^2 - \alpha \gamma^* + \beta = 0. \quad (V.76)$$

Resolvendo-se (V.76), chega-se aos valores de γ_2^* e γ_3^* procurados.

Observações:

- i) Em [Ottosen e Runesson, 1991b] demonstra-se que em geral $\gamma_2^* > \gamma_3^*$ e $\gamma_3^* = 0$ se $\gamma_3 = 0$. Além disso, se existir algum $\gamma_3 < 0$ então, em correspondência $\gamma_3^* < 0$, com correspondente velocidade de propagação imaginária (pois $\gamma_3^* = \rho c_3^2$). Como foi visto pela proposição D3.1, devido a simetria de \mathbf{Q}^w , não existem autovalores complexos para (V.49); eles só poderão ocorrer para tensores não-simétricos (seção V.4.4.1);
- ii) A equação $\mathbf{g} \cdot \mathbf{Q}^w \cdot \mathbf{g} = \gamma^*$, vista em (V.38), é uma equação algébrica quadrática em \mathbf{g} , dependente diretamente dos autovalores γ^* obtidos no estudo de (V.49). Então, os valores de γ^* servem diretamente para especificar, o comportamento dessa equação:
 - se $\gamma^* > 0$, então tem-se que $det \mathbf{Q}^w > 0$, \mathbf{Q}^w é definida positiva e a equação representa um elipsóide em \mathfrak{R}^3 (note que se $\mathbf{Q}^w = \mathbf{I}_2$, a eq. $\mathbf{g} \cdot \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{g} = \gamma^*$ é a eq. de uma esfera se $\gamma^* > 0$). Desde que um elipsóide (ou elipse em \mathfrak{R}^2) é estritamente convexo, sempre tem-se $\mathbf{Q}^w \mathbf{g} \cdot (\mathbf{g}^* - \mathbf{g}) < 0$, $\forall \mathbf{g}^* \in \mathfrak{R}^3$, não colinear com \mathbf{g} (ver a figura V.6) e uma condição de perda de elipticidade ocorre se $\mathbf{Q}^w \mathbf{g} \cdot (\mathbf{g}^* - \mathbf{g}) \geq 0$, condição que é satisfeita se $\gamma^* \leq 0$, como será visto a seguir. $\mathbf{Q}^w \mathbf{g}$ pode ser visto como o gradiente da função $f(\mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{Q}^w \cdot \mathbf{g}$, e é tangente a cada ponto do contorno da elipse vista na figura V.6;
 - se existir algum $\gamma^* = 0$, então tem-se a perda da elipticidade da equação, que se degenera agora em planos ou retas no \mathfrak{R}^3 , já que $\mathbf{g} \cdot \mathbf{Q}^w \cdot \mathbf{g} = 0$ implica na singularidade de \mathbf{Q}^w , para se ter soluções diferentes da trivial nessa equação e conseqüentemente $posto(\mathbf{Q}^w) < 3$, o que degenera a equação no espaço de representação. Porisso essa equação é chamada de equação de uma cônica degenerada;
 - se $\gamma^* < 0$, então, tem-se que $det \mathbf{Q}^w < 0$, \mathbf{Q}^w é, portanto, definida negativa e a equação representa um hiperbolóide em \mathfrak{R}^3 (ou hipérbole em \mathfrak{R}^2).

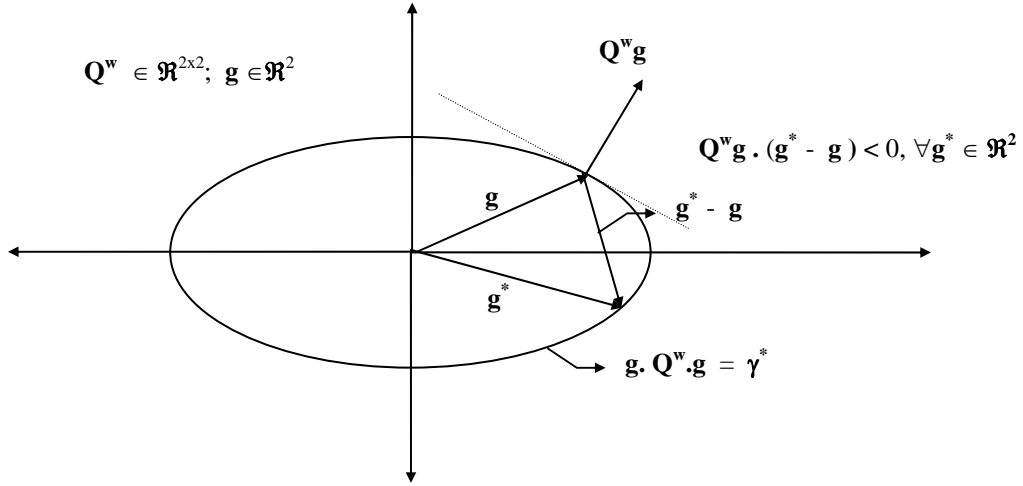


Figura V.6 - Condição elíptica em \mathbb{R}^2 .

iii) considerando-se o modelo escalar de dano de Mazars, as definições de λ e μ , do tensor elástico \mathbf{E}^0 para materiais isotrópicos, recaem em:

$$\lambda = (1 - D) \lambda_0; \quad \mu = (1 - D) \mu_0; \quad \mathbf{E}^0 = (1 - D) [2\mu_0 \mathbf{I}_4 + \lambda_0 \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2];$$

onde D é a variável de dano de Mazars tal que, $0 \leq D \leq 1$.

Assim, na análise efetuada para materiais isotrópicos, \mathbf{Q} pode ser substituída por \mathbf{Q}^0 tal que:

$$\mathbf{Q}^0 = (1 - D) [\mu_0 \mathbf{I}_2 + (\lambda_0 + 2\mu_0) \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta}]$$

e resultados análogos àqueles obtidos para \mathbf{Q} , vistos nessa seção, podem também ser obtidos para \mathbf{Q}^0 .

V.4.3 - Análise espectral do tensor simétrico \mathbf{Q}_s^w .

O estudo a ser efetuado aqui é importante para a análise de materiais não-associativos nos quais \mathbf{Q}^w é não-simétrico.

Considere o tensor acústico elastoplástico com dano \mathbf{Q}^w , escrito de maneira explícita por:

$$\mathbf{Q}^w = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{w}^w) \cdot \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}^w) \cdot \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{G} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{Q} - \frac{1}{G} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}; \quad (\text{V.77})$$

onde $\mathbf{a} = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{f}_\varepsilon$ e $\mathbf{b} = \mathbf{g}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\eta}$. ($\mathbf{f}_\varepsilon = \mathbf{g}_\varepsilon$ para o caso associativo).

É possível definir o tensor \mathbf{Q}^w como a soma de uma parte simétrica \mathbf{Q}_s^w com a parte anti-simétrica \mathbf{Q}_a^w , ou seja, $\mathbf{Q}^w = \mathbf{Q}_s^w + \mathbf{Q}_a^w$, onde:

$$\mathbf{Q}_s^w = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^w + (\mathbf{Q}^w)^T) = \mathbf{Q} - \frac{1}{2G} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}); \quad (\text{V.78})$$

$$\mathbf{Q}_a^w = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^w - (\mathbf{Q}^w)^T) = \mathbf{Q} - \frac{1}{2G} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}). \quad (\text{V.79})$$

Em geral, as propriedades espectrais de \mathbf{Q}_s^w e \mathbf{Q}_a^w , são diferentes da propriedade espectral de \mathbf{Q}^w . Essa afirmação é feita baseando-se na desigualdade de Bromwich, que estabelece que:

$$\gamma_{\min}^* (\mathbf{Q}_s^w) \leq \text{re}(\gamma^* (\mathbf{Q}^w)) \leq \gamma_{\max}^* (\mathbf{Q}_s^w); \quad (\text{V.80})$$

$$\gamma^*_{\min} \left(\frac{1}{i} \mathbf{Q}_a^w \right) \leq \text{im}(\gamma^*(\mathbf{Q}^w)) \leq \gamma^*_{\max} \left(\frac{1}{i} \mathbf{Q}_a^w \right); \quad (\text{V.81})$$

onde re e im indicam a parte real e imaginária de um número complexo, respectivamente. A desigualdade (V.80) implica que, um autovalor de \mathbf{Q}_s^w pode se anular, mas o correspondente autovalor de \mathbf{Q}^w permanece positivo. Isso implica que, ao se estudar a condição de estacionariedade da velocidade de propagação de onda $\gamma^* = \rho c^2 = 0$, essa resguarda a propriedade espectral do tensor simétrico \mathbf{Q}_s^w , mas é uma condição de estacionariedade forte para o equilíbrio estático, pois de (V.80), $\rho c^2_{\min}(\mathbf{Q}_s^w) \leq re(\rho c^2)_{\min}(\mathbf{Q}^w)$ e então é uma condição de localização mais restritiva para tensores não-simétricos. A seguir, é feita a análise de perda de elipticidade forte, que pode ser uma estratégia a ser usada para tensores não-simétricos.

A análise do problema espectral (V.55) é agora feita para \mathbf{Q}_s^w definida em (V.78) resultando no seguinte problema equivalente a (V.55):

$$[\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}_s^w - \gamma \mathbf{I}_2] \mathbf{g}(\eta) = 0; \quad (\text{V.82})$$

onde

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}_s^w = \mathbf{I}_2 - \frac{1}{2G} (\mathbf{a}' \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b}' \otimes \mathbf{a}); \quad (\text{V.83})$$

com $\mathbf{a}' = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{a}$ e $\mathbf{b}' = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b}$

A substituição de (V.83) em (V.82), resulta no seguinte problema espectral:

$$[(1 - \gamma) \mathbf{I}_2 - \frac{1}{2G} (\mathbf{a}' \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b}' \otimes \mathbf{a})] \mathbf{g} = 0 \quad (\text{V.84})$$

e nota-se em (V.84), que o tensor espectral é uma modificação de posto 2 do tensor identidade \mathbf{I}_2 , então os resultados vistos na seção D3.2, podem ser utilizados para a análise de (V.84):

$$\det \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}_s^w = \frac{\det \mathbf{Q}_s^w}{\det \mathbf{Q}} = 1 - \left(\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}}{G} \right) - \left(\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a})^2}{4G^2} \right). \quad (\text{V.85})$$

Zerar (V.85) é equivalente à resolução de uma equação do segundo grau dada por:

$$G = \frac{1}{2} [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}) \pm \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{b})}]. \quad (\text{V.86})$$

Substituindo-se em (V.86) o valor de G dado em (V.69) e considerando-se

$$\bar{G} = - \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}^w} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \text{ e } G_c = - \mathbf{f}_{w\text{pd}} \cdot \mathbf{r},$$

resulta:

$$\bar{G} = G_c + \frac{1}{2} [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}) \pm \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{b})}]. \quad (\text{V.87})$$

Desde que G é determinado tal que $G \geq 0$, então $\bar{G} - G_c \geq 0$.

Chamando-se de $G' = \frac{1}{2} [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}) \pm \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{b})}]$, então tem-se que,

o valor máximo para ocorrência da condição necessária de “softening” é obtido para $\bar{G} - G_c - G' = 0$ se e somente se $G' \geq 0$, pois G' é uma folga complementar com relação à $\bar{G} - G_c \geq 0$.

Assim, em (V.87), G' deve ser escolhido tal que:

$$G' = \frac{1}{2} [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}) + \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{b})}] \geq 0, \quad (\text{V.88})$$

para se ter a condição necessária de localização de deformação.

Note que, se tiver-se a hipótese de associatividade, o segundo termo entre parênteses na equação (V.85) se anula e (V.85) se torna idêntica ao caso associativo.

Então, é mais interessante fazer-se a análise do problema espectral (V.82) somente para materiais não-associativos, pois nesse caso \mathbf{Q}_s^w não coincide com \mathbf{Q}^w e $G' > 0$ em (V.88).

V.4.4 - Determinação de autovalores e autovetores de \mathbf{Q}^w para materiais isótropos.

No caso de elasticidade isótropa, o tensor de localização de deformação \mathbf{Q}^w é expresso através de uma modificação de posto 2 do tensor identidade:

$$\mathbf{Q}^w = \mu \mathbf{I}_2 + (\lambda + \mu) \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{G} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}). \quad (\text{V.89})$$

Para se fazer analogia com a seção D3.2 do apêndice D, considere:

$$\mathbf{Q}^w = \mu \mathbf{I}_2 + \mathbf{U}_2; \quad (\text{V.90})$$

onde $\mathbf{U}_2 = (\lambda + \mu) \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{G} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$.

Seja agora o problema:

$$[\mathbf{U}_2 - \omega \mathbf{I}_2] \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = 0. \quad (\text{V.91})$$

Os autovalores associados à equação (V.91), seguindo resultado visto em (D.17), tem a forma:

$$\omega_i = \frac{1}{2} [\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_2 \pm \sqrt{(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1 - \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_2)^2 + 4(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_2)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_1)}] \quad (i=1,2); \quad (\text{V.92})$$

onde, ω_1 (ω_2) é a soma (diferença) das parcelas entre colchetes e,

$$\mathbf{a}_1 = \boldsymbol{\eta}; \quad \mathbf{d}_1 = (\lambda + \mu)\boldsymbol{\eta}; \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}; \quad \mathbf{d}_2 = -\frac{1}{G} \mathbf{b}; \quad (\text{V.93})$$

sendo então expressos por:

$$\omega_i = \frac{1}{2} [(\lambda + \mu) - \frac{1}{G} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \pm \sqrt{(\lambda + \mu + \frac{1}{G} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - 4(\frac{\lambda + \mu}{G})(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{b})}] \quad (i=1,2). \quad (\text{V.94})$$

Assim, de (V.92), os autovalores de \mathbf{Q}^w para a equação (V.49) são dados por:

$$\gamma_i^* = \mu + \omega_i \quad (i = 1,2) \quad \text{e} \quad \gamma_3^* = \mu; \quad (\text{V.95})$$

com ω_i calculado em (V.94).

Note que, para $G \rightarrow \infty$; as equações (V.94) e (V.95) recuperam os autovalores para a análise de problemas puramente elásticos, ou seja, $\gamma_2^* = \gamma_3^* = \mu$ e $\gamma_1^* = \lambda + 2\mu$.

Utilizando-se mais uma vez os resultados vistos na seção D3.2 do apêndice D, tem-se que, os autovetores associados a ω , no problema (V.91), tem a forma:

$$\mathbf{g} = \alpha_1 \boldsymbol{\eta} + \alpha_2 \mathbf{a}; \quad (\text{V.96})$$

onde os α_i 's são calculados por:

$$\sum_{j=1}^2 (\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{a}_j - \omega \delta_{ij}) \alpha_j = 0, \quad (i = 1, 2 \text{ e } \omega = \omega_1 \text{ ou } \omega = \omega_2); \quad (\text{V.97})$$

com \mathbf{d}_i , \mathbf{a}_j ($i, j = 1, 2$) expressos em (V.93). Substituindo-se (V.93) em (V.97) obtém-se o seguinte sistema para determinar os α_i 's:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu - \omega)\alpha_1 + (\lambda + \mu)(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{a})\alpha_2 = 0 \\ (-\frac{1}{G})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta})\alpha_1 + ((-\frac{1}{G})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) - \omega)\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{V.98})$$

Então, com os α_i 's determinados em (V.98), tem-se, com relação ao autovalor ω , os seus autovetores relativos.

V.4.4.1 - A condição de localização.

A condição de localização $\det \mathbf{Q}^w = 0$, é obtida quando o autovalor γ_2^* definido em (V.95), expresso utilizando-se ω_2 em (V.94) como a diferença entre os dois termos naquela equação, se anula. Isso acontece quando em (V.95):

$$\omega_2 = -\mu. \quad (\text{V.99})$$

Por sua vez, a relação (V.99) só é válida se em (V.94):

$$(\lambda + \mu + \frac{1}{G} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - 4(\frac{\lambda + \mu}{G})(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{b}) \geq 0. \quad (\text{V.100})$$

Isto ocorre se o problema for associativo, o que implica no tensor \mathbf{Q}^w ser simétrico e então, da proposição D3.1, na existência de autovalores reais para \mathbf{Q}^w .

Supondo-se que (V.100) esteja satisfeita, então, a resolução de uma equação do segundo grau com respeito a G em (V.94), determina a seguinte condição de localização:

$$G = \frac{(\lambda + 2\mu)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\lambda + \mu)(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{b})}{\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad (\text{V.101})$$

a qual coincide com a substituição de $\mathbf{Q}^{-1} = \mu^{-1} \mathbf{I}_2 - (\lambda + \mu) [\mu (\lambda + 2\mu)]^{-1} (\boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta})$ em (V.68).

No caso não-associativo podem existir autovalores complexos. Isto ocorre se, interior à raiz quadrada de (V.94) tiver-se:

$$G_1 = (\lambda + \mu)^2 G^2 + [2(\lambda + \mu) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - 4(\lambda + \mu) (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{b})] G + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 < 0. \quad (\text{V.102})$$

Note-se que, para o estudo em questão, se a inequação (V.102) estiver satisfeita, então de (V.95) a única solução complexa possível gera uma raiz real (γ_3^*) e duas raízes complexas conjugadas tais que, $\gamma_i = \mu + re(\omega) \pm im(\omega)$, $i = 1, 2$, com,

$$re(\omega) = (\lambda + \mu) - \frac{1}{G} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}); \quad im(\omega) = i\sqrt{G_1}; \quad (\text{V.103})$$

onde $re(\omega)$ é a parte real de ω e $im(\omega)$ é a parte imaginária de ω , o que implica em γ_1^* e γ_2^* serem complexas conjugadas. Assim, em (V.95), os autovalores γ^* poderiam ser escritos por:

$$\gamma_1^* = \mu + re(\omega) + im(\omega); \quad \gamma_2^* = \mu + re(\omega) - im(\omega); \quad \gamma_3^* = \mu. \quad (\text{V.104})$$

Então, a condição necessária de localização recae em:

$$det \mathbf{Q}^w = \gamma_1^* \gamma_2^* \gamma_3^* = 0 \Leftrightarrow \gamma_1^* \gamma_2^* = 0 \Leftrightarrow \mu^2 + 2\mu re(\omega) + re(\omega)^2 - (im(\omega))^2 = 0 \quad (\text{V.105})$$

e a análise da condição necessária de localização, no caso da existência de autovalores complexos, é expressa por:

$$\mu^2 + 2\mu [(\lambda + \mu) - \frac{1}{G} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})] + (\lambda + \mu) - \frac{1}{G} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + G_1 = 0; \quad (\text{V.106})$$

com G_1 dado em (V.102), a qual determina o valor crítico de G , resolvendo-se com alguma dificuldade, uma equação do segundo grau. A resolução de (V.106) mostra que existem autovalores complexos γ^* diferentes da solução nula que implicam na singularidade do tensor \mathbf{Q}^w , na resolução do autoproblema (V.49).

Determinação dos autoversores de \mathbf{Q}^w .

Supondo-se que os autovalores foram calculados em (V.94) e (V.95), então é possível resolver (V.98) e determinar os autovetores associados, definidos na equação (V.96), dados por, $\mathbf{g} = \alpha_1 \boldsymbol{\eta} + \alpha_2 \mathbf{a}$.

Uma relação possível para α_1 e α_2 , considerando-se a primeira equação em (V.98), é:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{(\lambda + \mu)\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{a}}{\omega - (\lambda + \mu)}. \quad (\text{V.107})$$

Considerando-se a validade de (V.99), então, tem-se na condição de localização que $\omega_2 = -\mu$ e substituindo-o em (V.107) resulta:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{(\lambda + \mu)\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{a}}{(\lambda + 2\mu)}. \quad (\text{V.108})$$

Utilizando (V.107), tem-se em (V.96) que:

$$\mathbf{g} = \alpha_2 \left[\left(-\frac{(\lambda + \mu)\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{a}}{(\lambda + 2\mu)} \right) \boldsymbol{\eta} + \mathbf{a} \right]. \quad (\text{V.109})$$

Com o valor de \mathbf{g} expresso em (V.109) é possível agora caracterizar os seguintes modos de bifurcação (ver figura V.5):

- se \mathbf{g} está alinhado com $\boldsymbol{\eta}$ e \mathbf{a} está alinhado com $\boldsymbol{\eta}$, então a bifurcação é do modo de abertura (modo I);

- se \mathbf{g} é perpendicular a $\boldsymbol{\eta}$ e \mathbf{a} é perpendicular a $\boldsymbol{\eta}$, então a bifurcação é do modo de cisalhamento puro (modo II);

- se \mathbf{g} não está alinhado com $\boldsymbol{\eta}$, nem com uma direção perpendicular a essa, a localização é do modo misto (modo III).

Na análise da condição de perda de elipticidade feita aqui, optou-se por estudar a singularidade do tensor acústico \mathbf{Q}^w , mas a mesma análise pode ser feita explorando-se diretamente a singularidade do tensor elástico ou elastoplástico com dano \mathbf{H} , analisando-se a condição necessária de localização, $\det(\mathbf{H}) = 0$. Aplicando-se os resultados aqui obtidos, relações análogas seriam tiradas. Essa análise pode ser encontrada em [Rizzi, 1995], entre outros.

No próximo capítulo, seguindo resultados obtidos até aqui, faz-se uma análise pós-bifurcação ou pós-singularidade do problema da localização, utilizando-se resultados encontrados em [Jepson e Spence, 1985a] e [Decker e Keller, 1980], reunidos no Apêndice E.

CAPÍTULO VI - Introdução à Análise Pós-Bifurcação Relativa à Instabilidade de Solução.

No capítulo anterior, um amplo estudo da condição de localização ou de perda de elipticidade foi efetuado sem se preocupar em analisar o que ocorreria após tal condição estar satisfeita.

A contribuição desse capítulo se relaciona à caracterização do tipo de instabilidade de solução numa análise pós-singularidade da equação de equilíbrio, para sistemas conservativos com relação à forças, isotropos e associativos, explorando a singularidade do tensor acústico de dano visto no capítulo anterior. Utilizando-se de alguns resultados daquele capítulo, se tentará dar condições de caracterizar as soluções pós-singularidade, objetivando detectar se essas soluções representam instabilidade por bifurcação de equilíbrio ou instabilidade associada a pontos limites (inflexão, mínimo ou máximo) baseando-se em resultados da Teoria de Bifurcação reunidos no Apêndice E.

Esse aspecto é importante em função do tipo de interpretação física que se possa associar. Por exemplo, se a solução encontrada é um ponto limite, pode-se interpretar que a localização não implique em ruptura, ou em propagação instável de dano, de tal forma que, a instabilidade global ocorrida não leva a estrutura ao colapso, mas se caracteriza por uma mudança para uma nova configuração onde a estabilidade é novamente alcançada. No outro caso, quando há instabilidade por bifurcação de equilíbrio, a propagação de defeitos pode caracterizar globalmente um estado limite último da estrutura, onde qualquer incremento positivo de carga aplicado pode levá-la ao colapso.

Antes de se iniciar a análise de pós-bifurcação do modelo constitutivo, serão revistos alguns conceitos relativos à instabilidade das estruturas, que auxiliarão no entendimento desse capítulo, baseados no proposto em [Zagottis, 1980] e [Loula e Galeão, 1983].

VI.1 - A definição de estabilidade e instabilidade de solução.

O conceito de estabilidade: (no sentido de Liapunov)

Considere uma configuração de equilíbrio de um sistema mecânico em relação a um dado referencial. Diz-se que a configuração está em *equilíbrio estável* se, dadas pequenas perturbações arbitrárias no sistema, através de modificações de posição e da imposição de velocidades iniciais, os movimentos resultantes permanecem pouco afastados da configuração de equilíbrio e tão mais próximos dessa quanto menores forem as perturbações dadas. Diz-se ainda que a configuração está em equilíbrio assintoticamente estável se para o tempo tendendo ao infinito a configuração do sistema perturbado tender, em termos de posição e velocidade, à configuração de equilíbrio.

O conceito de instabilidade:

A configuração está em equilíbrio instável se dadas pequenas perturbações arbitrárias ao sistema, os movimentos resultantes tenderem a se afastar progressivamente da configuração de equilíbrio, embora esse não seja propriamente o caso geral.

A figura VI.1 vista a seguir ilustra os conceitos vistos.

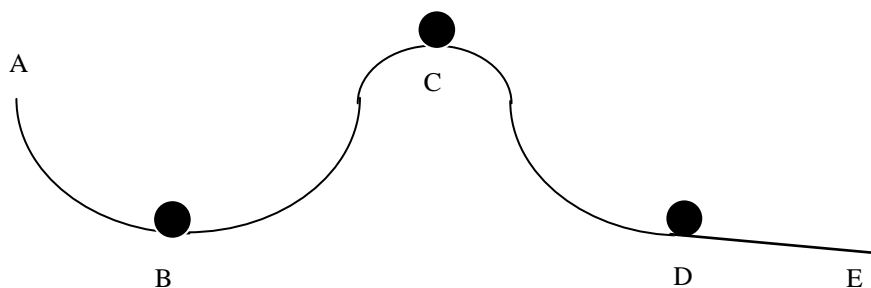


Figura VI.1 - comportamento estável e instável de uma esfera em um trecho A-E.

De acordo com as definições acima:

- a configuração B é de equilíbrio estável;
- a configuração C é de equilíbrio instável;
- a configuração D também é uma configuração de equilíbrio instável, pois qualquer movimento imposto em D produz um movimento que não se mantém próximo de D e mais afastado quanto maior for a perturbação. No entanto, se a perturbação for exclusivamente de posição, sem impor velocidade inicial, o sistema permanece em equilíbrio na posição em que for colocado e então diz-se que a nova configuração adquirida tem uma *equilíbrio indiferente*.

Esses tipos de configurações serão importantes para se caracterizar em uma análise estrutural estática para sistemas conservativos com relação à forças, mas não-conservativos com relação à dissipação de energia (por plastificação, dano, plastificação e dano, etc...), se a configuração encontrada em uma análise pós-bifurcação está relacionada à instabilidade do equilíbrio por bifurcação ou associada a pontos limites.

A maioria dos resultados a serem alcançados nesse capítulo, estão ligados diretamente ao Apêndice E, que além de discutir as condições de identificação dos pontos singulares em limite ou de bifurcação, caracteriza também o tipo de trajetória alcançada e o tipo de bifurcação ocorrida. Se o ponto é limite, a trajetória pode ser do tipo quadrática, cúbica ou elíptica. Se o ponto é de bifurcação, a trajetória pode apresentar uma ramificação simples, em garfo, ou em ilha. As figuras representativas desses tipos de trajetória, bem como sua análise se encontram no apêndice E e se baseiam na pesquisa encontrada em [Jepson e Spence, 1985], [Decker e Keller, 1980].

Os primeiros exemplos a seguir, servem para ilustrar, o aparecimento de bifurcação de equilíbrio e de instabilidade associada a ponto limite em problemas de análise estrutural estática (sistemas conservativos).

Exemplo 1:

O exemplo 1 se baseia em uma análise estática de uma barra prismática constituída por um material homogêneo e elástico linear, considerando-se apenas a massa m concentrada na extremidade livre, ou seja, desprezando-se a massa da coluna. A figura VI.2, ilustra a configuração.

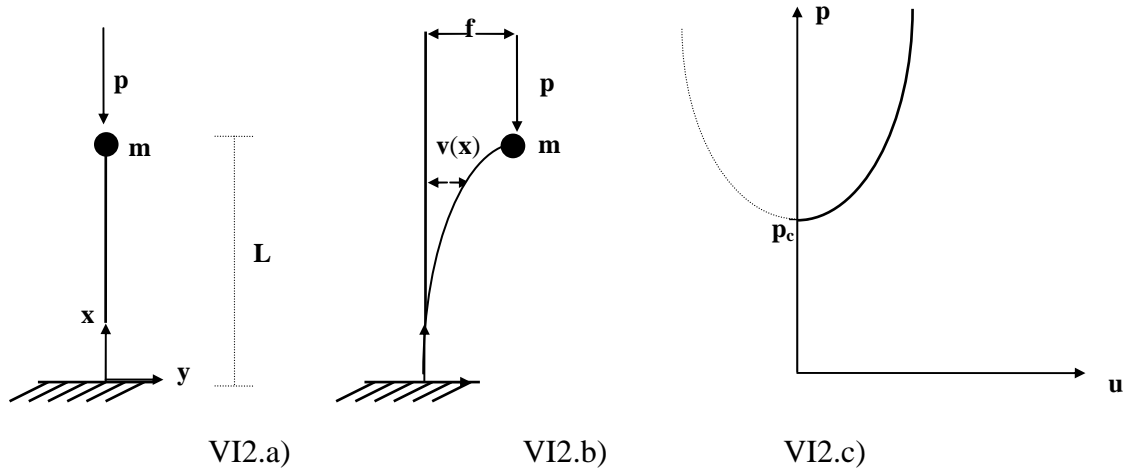


Figura VI.2 - barra prismática vertical engastada em uma extremidade e submetida a uma força de compressão centrada p na extremidade livre.

A condição de equilíbrio na posição deslocada da coluna mostrada engastada em $x = 0$ na figura VI.2a) e sujeita a uma força de compressão centrada p , aplicada na extremidade livre, $x = L$, leva à seguinte equação, quando desprezam-se as forças de inércia:

$$EI v''(x) = p(f - v(x)),$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, I é o momento de inércia da seção transversal com relação ao eixo em torno do qual se dá a flexão, L é o comprimento da coluna e f é a flecha na extremidade livre.

Adotando-se uma solução geral na forma:

$$v(x) = c_1 \operatorname{sen}\beta x + c_2 \operatorname{cos}\beta x + F,$$

onde $\beta = \sqrt{\frac{p}{EI}}$, e utilizando-se as condições de contorno $v(0) = 0$, $v(L) = f$ e $v'(0) = 0$,

determinam-se as constantes c_1 , c_2 , $\beta = \frac{n\pi}{2}$ e obtém-se os valores das cargas críticas de Euler ou cargas de flambagem dadas por:

$$p_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{4L^2}, \text{ para } n = 1, 3, 5, \dots$$

Dessa análise conclui-se que:

- i) para $p < p_1$, a única forma de equilíbrio possível é $v(x) = 0$, ou seja, o modo retilíneo;
- ii) para $p \geq p_n$, além da solução $v(x) = 0$, existem as soluções $v_n(x) = f(1 - \operatorname{cos}\frac{n\pi x}{2})$, correspondentes a uma configuração de equilíbrio curvilíneo, visto na figura VI.2b);
- iii) a qualidade do equilíbrio do modo retilíneo, $v(x) = 0$, pode ser resumida da seguinte maneira:
 - para $p < p_1$, o equilíbrio é estável;
 - para $p > p_1$, o equilíbrio é instável,
 onde p_1 é a primeira carga crítica.

A figura VI.2c) representa a relação força-deslocamento, onde para $p \leq p_1$, o equilíbrio é estável até atingir o primeiro ponto crítico p_1 , enquanto que para $p > p_1$, o equilíbrio é instável, com o sistema podendo apresentar uma outra configuração de equilíbrio possível nas proximidades da configuração crítica. Em outras palavras, a partir do ponto crítico o sistema não pode suportar acréscimos de p sem uma mudança radical na sua configuração, caracterizando o típico caso de instabilidade por bifurcação do equilíbrio.

Exemplo 2:

Considere-se a configuração dada na figura VI.3i) e VI.3ii) onde duas barras retas e indeformáveis, são articuladas nas extremidades, sendo a mola elástica com rigidez k para deslocamentos longitudinais. O sistema encontra-se em equilíbrio, sem carregamento, na posição caracterizada pelo ângulo α . Com a aplicação do carregamento estático p , o sistema desloca-se (o ponto B desloca-se para B' e o ponto C, para C') e a mola deforma-se, sendo a nova posição de equilíbrio caracterizada pelo ângulo θ .

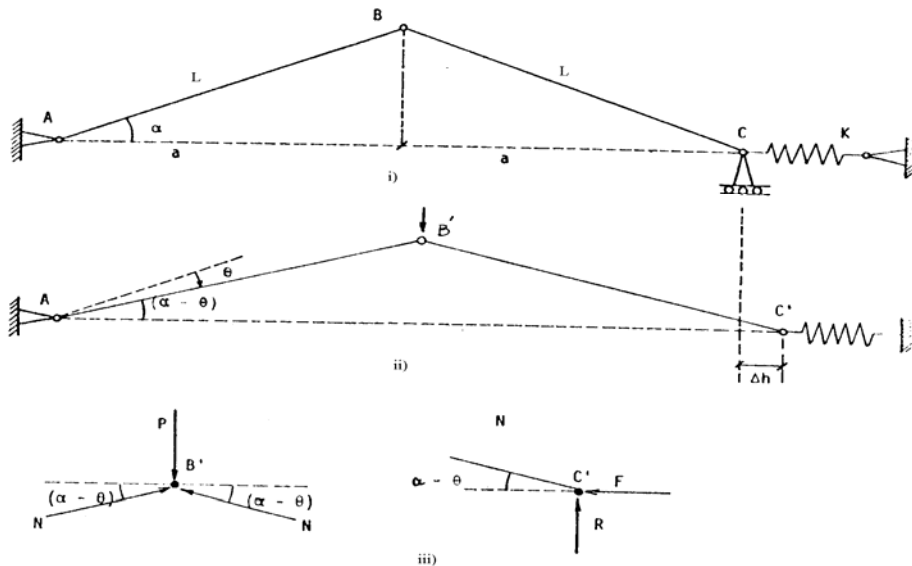


Figura VI.3 - Sistema formado por barras retas articuladas nas extremidades.

Analisando-se a figura VI.3iii), o equilíbrio no nó B permite escrever:

$$N = \frac{P}{2 \operatorname{sen}(\alpha - \theta)}$$

e o equilíbrio do nó C permite obter a força F que age na mola:

$$F = N \cos(\alpha - \theta).$$

Por sua vez o deslocamento Δh em C é dado por:

$$\Delta h = 2 L (\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha).$$

Sendo $F = K \Delta h$

decorre: $2KL (\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha) = \frac{P}{2 \operatorname{sen}(\alpha - \theta)} \cos(\alpha - \theta)$

e portanto,

$$\frac{p}{4K} = \frac{\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha}{\cos(\alpha - \theta)} \operatorname{sen}(\alpha - \theta).$$

Fixando-se α em 30° e fazendo-se variar o ângulo θ , obtém-se um conjunto de valores representado geometricamente pela figura VI.4 abaixo:

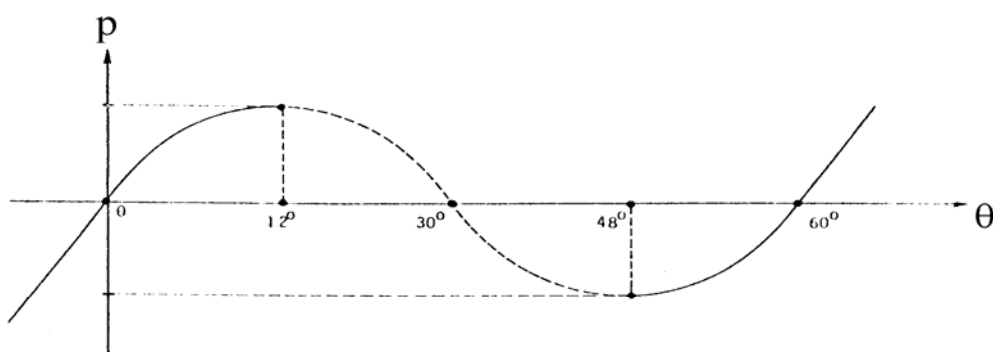


Figura VI.4 - representação da curva força-deslocamento para $\alpha = 30^0$ e θ variando.

O gráfico mostra um valor máximo de p para $\theta = 12^0$ e uma configuração de equilíbrio estável até esse valor de θ , onde p é crescente. Para, $12^0 < \theta < 48^0$, a configuração mostra um equilíbrio instável, onde p é decrescente, se anula para $\theta = 30^0$ e atinge um valor mínimo negativo para $\theta = 48^0$. Para $\theta > 48^0$, a configuração indica novamente equilíbrio estável, onde p é crescente e se anula para $\theta = 60^0$.

É importante notar que, fazendo-se p crescer a partir do valor zero, ao atingindo o primeiro ponto crítico (ponto de máximo), o sistema passa a ter equilíbrio instável mas sem ter outra configuração de equilíbrio possível nas proximidades da configuração crítica. Para poder suportar acréscimos de p a partir do ponto crítico o sistema deve sofrer uma mudança radical na sua configuração; não há portanto, bifurcação de equilíbrio. Denominam-se os pontos críticos em questão de *pontos limites* e diz-se que no sistema tem-se instabilidade associada a um ponto limite, em contraposição à instabilidade pelo aparecimento de um ponto de bifurcação.

Observa-se por outro lado, que considerando-se sistemas não-conservativos com relação às forças (tais como, ações de vento, forças variando no tempo, fluxo de fluídos, etc...), não se consegue a instabilidade como associada a ponto de bifurcação ou a ponto limite.

Nesse tipo de sistema é possível ocorrer instabilidade por *múltiplos pontos de bifurcação* ou por *bifurcação em pontos limites múltiplos*. No apêndice E, é apresentado um simples estudo das condições necessárias para a ocorrência desse tipo de comportamento de solução. Essa análise será objeto de pesquisa futura e não será desenvolvida aqui. O exemplo dado a seguir, extraído de [Loula e Galeão, 1983] e resolvido através de uma análise dinâmica, mostra que para sistemas com forças não-conservativas não é possível caracterizar a ocorrência de bifurcação ou ponto limite.

Exemplo 3:

Considere-se agora um problema variante do exemplo 1, onde a força de compressão p aplicada na extremidade livre, $x = L$, é sempre tangente à deformada, (*força seguidora*) e tal que a configuração do sistema é ilustrada na figura VI.5 abaixo.

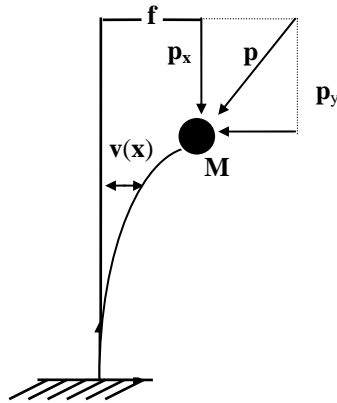


Figura VI.5 - barra vertical submetida à força seguidora.

A equação do movimento, fica expressa nesse caso por:

$$EI v''(x) = p(f - v) - p \delta (L - x) - M(L - x) \ddot{\delta};$$

onde δ é o ângulo formado entre a vertical e a tangente ao eixo deslocado na altura da ordenada x e M é a massa do sistema considerada na extremidade livre. Nessa expressão consideraram-se as aproximações:

$$- p_x = p \cos \delta = p, \quad p_y = p \sin \delta = p \delta.$$

Análise dinâmica.

Considerando-se soluções gerais na forma:

$$v(x) = V(x)e^{\lambda t}; \quad f(t) = F e^{\lambda t}, \quad \delta(t) = \delta e^{\lambda t}$$

e aplicando-as na equação do movimento, tem-se:

$$V'' + \beta^2 V = \beta^2 F - \beta^2 \delta (L - x) - \lambda^2 \frac{M}{EI} (L - x)F.$$

A solução geral é:

$$V(x) = c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x + F - \delta (L - x) - \lambda^2 \frac{M}{EI} (L - x)F.$$

Utilizando-se as condições de contorno do problema:

$$v(0,t) = 0, \quad v'(0,t) = 0, \quad v(L,t) = f(t), \quad v'(L,t) = \delta(t)$$

e impondo-se condições de existência de soluções não triviais, ou seja, que o determinante do sistema gerado pelas condições de contorno seja nulo, tem-se a seguinte solução em autovalores:

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{p\beta}{M} \frac{1}{\sin \beta L - \beta L \cos \beta L}}.$$

A análise do autovalor λ obtido acima caracteriza a ocorrência ou não de instabilidade:

- i) Para qualquer valor de β , tem-se que λ é sempre diferente de zero, logo não ocorre frequência nula, ou seja, não ocorre *instabilidade divergente estática*, ou seja, não há bifurcação estática.
- ii) Para $\sin \beta L - \beta L \cos \beta L > 0$, λ é imaginário puro, o movimento é *oscilatório* com frequência $\omega = \text{im}(\lambda)$, crescente com a carga p e tem-se *estabilidade*;
- iii) Para $\sin \beta L - \beta L \cos \beta L = 0$ ou $\text{tg} \beta L = \beta L$, a frequência do sistema atinge valor infinito;

iv) Para $\text{sen}\beta L - \beta L \cos \beta L < 0$, λ assume valores reais de sinais contrários, o que implica em soluções ilimitadas e portanto em *instabilidade*.

Análise estática.

Se esse mesmo exemplo fosse resolvido através de uma análise estática, utilizando-se a solução geral:

$$v(x) = c_1 \text{sen}\beta x + c_2 \cos\beta x + f - \delta (L - x),$$

considerando-se as condições de contorno, teria-se que o determinante do sistema resultaria sempre diferente de zero, o que implicaria em uma única forma de equilíbrio possível : a retilínea. Logo, não existiria nenhum valor de p capaz de manter em equilíbrio um modo curvilíneo qualquer dessa estrutura.

De acordo com [Loula e Galeão, 1983], a solução denominada ponto de bifurcação pode ser caracterizada como uma *bifurcação simétrica estável* enquanto que uma solução denominada ponto limite é caracterizada como *bifurcação simétrica instável* ou *bifurcação assimétrica instável*. Um exemplo dado por esses autores, visto a seguir, caracteriza esses três tipos de comportamento, ilustrados nas figuras VI.6b), VI.6c) e VI.6d).

Considere-se uma barra rígida, elasticamente engastada na extremidade inferior, através de uma mola com rigidez k e sujeita a uma força de compressão p na extremidade superior.

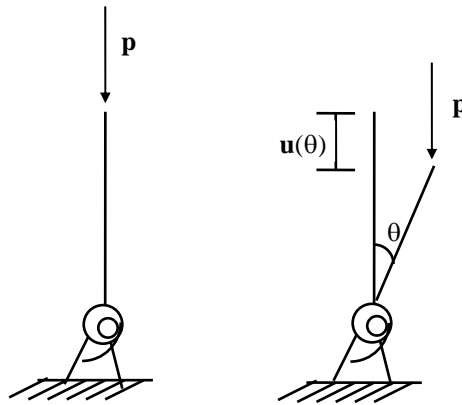
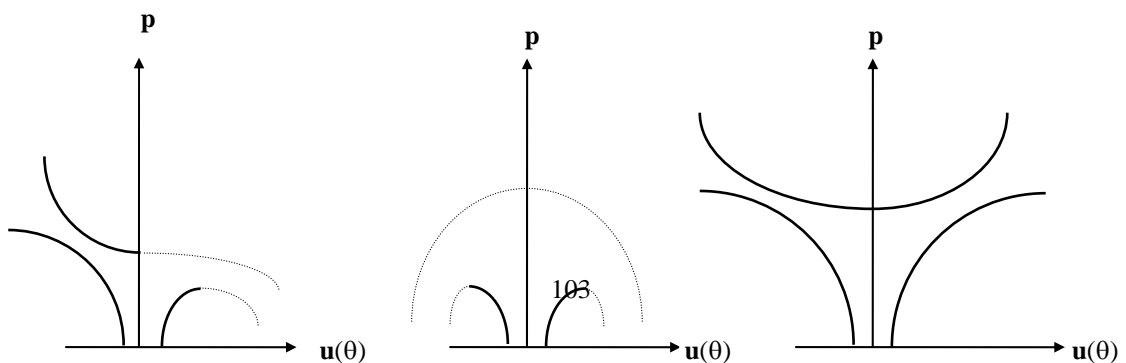


Figura VI.6a - barra vertical elasticamente engastada na extremidade.

Os tipos de solução encontrados permitem caracterizar os três tipos de bifurcação citados, caracterizados por p em função do deslocamento $u(\theta)$:



b)

c)

d)

Figura VI.6b - bifurcação assimétrica instável.

Figura VI.6c - bifurcação simétrica instável.

Figura VI.6d - bifurcação simétrica estável.

A classificação explorada nos itens i), ii), iii) e iv) acima pode ser utilizada para se determinar os tipos de instabilidade que ocorrem na prática, o que será feito a seguir.

VI.2 - Classificação geral da instabilidade de solução.

Antes de se fazer uma análise pós-bifurcação de solução, que é a proposta desse capítulo, é interessante relembrar algumas características relativas ao problema de instabilidade das estruturas e obter uma classificação dos tipos de instabilidade que ocorrem na prática. Essa classificação segue a proposta de [Zagottis, 1980] e evidencia a complexidade dos problemas gerais ligados à instabilidade.

A instabilidade pode ser de dois tipos: *divergente* e *oscilatória*.

Instabilidade divergente:

A instabilidade divergente se caracteriza pelo sistema estrutural abandonar sua configuração inicial de forma definitiva, buscando novos e eventualmente inexistentes estados equilibrados.

Instabilidade oscilatória:

A instabilidade oscilatória se caracteriza pelo sistema estrutural oscilar em torno de uma configuração de equilíbrio, em períodos maiores devido à crescente absorção de energia mecânica, típica do processo.

Classificação da instabilidade divergente:

A instabilidade divergente pode ser de dois tipos: *estática* e *dinâmica*.

i) *Instabilidade divergente estática:*

É o tipo de instabilidade divergente que pode ser estudada através de análise estática, se manifesta pelo aparecimento de pontos limites ou pontos de bifurcação, sendo típica de sistemas estruturais sujeitos a forças conservativas. Ela aparece em estruturas reticuladas planas ou espaciais, estruturas laminares, estruturas compostas, etc... e na forma de instabilidade local de barras isoladas ou por instabilidade global, sem que as barras isoladas percam a estabilidade.

ii) *Instabilidade divergente dinâmica:*

É típica de sistemas estruturais sujeitos a forças não conservativas, entre as quais se destacam as produzidas pelo vento, forças variáveis no tempo ou forças decorrentes de fluxo de fluido, devendo ser estudada por processos dinâmicos de análise.

Classificação da instabilidade oscilatória:

A instabilidade oscilatória manifesta-se de diferentes modos, por ressonância e flutter, entre outros.

i) *instabilidade oscilatória por ressonância*

Manifesta-se quando forças não-estacionárias e periódicas agem sobre o sistema estrutural de modo que a sua frequência se iguale a uma das frequências próprias da estrutura, levando a velocidade de propagação e a amplitude de ondas a uma quase constância.

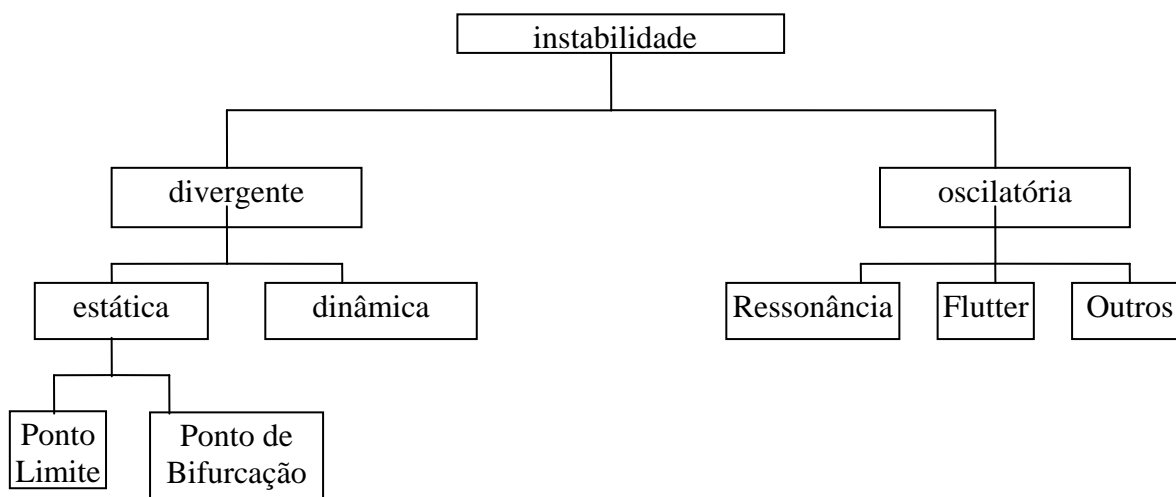
ii) *instabilidade oscilatória por flutter*

É o tipo de instabilidade oscilatória provocada por forças não conservativas sobre as estruturas. Pela ação dessas forças, passam a existir movimentos cíclicos rápidos, sendo que em cada ciclo, o sistema estrutural absorve energia mecânica do meio e por consequência as amplitudes de ondas e velocidades de propagação se tornam crescentes com o tempo.

Outros tipos de instabilidade oscilatória podem se caracterizadas pela interação da instabilidade por ressonância e por flutter.

De acordo com o estudo feito até aqui e do proposto em [Zagottis, 1980], uma classificação geral da instabilidade é dada abaixo pelo quadro I, relativa a seu gênero e espécie:

Quadro I:



VI.3 - Classificação da instabilidade para os modelos explorando os autovalores do tensor acústico.

Analogamente à análise dinâmica feita no exemplo 3, ao nível de modelo constitutivo, a caracterização dos tipos de instabilidade que podem acontecer, pode ser feita matematicamente, explorando-se os autovalores do tensor acústico Q^w ou do tensor rigidez tangente H .

Em princípio é possível também propor uma classificação para a “instabilidade material por localização” como sendo do tipo divergente ou oscilatória.

É importante ressaltar que a proposta de caracterização da instabilidade ao nível constitutivo aqui desenvolvida restringe-se ao âmbito matemático, não sendo ainda possível, no atual estágio de desenvolvimento, especular sobre o significado físico dos resultados obtidos.

Em particular observa-se que, no caso de imperfeições da estrutura, o estudo encontrado em [Zagottis, 1980] e em [Loula e Galeão, 1983], mostra que uma imperfeição pode levar a estrutura ao colapso antes que o valor crítico de carga, obtido pela análise

perfeita, seja alcançado, e nesse caso a instabilidade é resultante de uma bifurcação assimétrica instável (ver a figura VI.6b).

No caso do modelo constitutivo, o problema da imperfeição das estruturas, pode ser estudado considerando-se o tensor simétrico \mathbf{Q}_s^w , já que os autovalores desse são limitantes inferiores para o tensor \mathbf{Q}^w (ver seção V.4.3) se esse é não-simétrico, podendo detectar um ponto crítico antes daquele obtido na análise do tensor \mathbf{Q}^w , mas esse assunto não será abordado aqui.

Considerando-se o problema de autovalores (V.49) relativo à equação de equilíbrio dinâmico (V.1), visto no capítulo V, dado por:

$$[\mathbf{Q}^w - \gamma^* \mathbf{I}_2] \mathbf{g}(\eta) = 0 \quad (\text{VI.1})$$

e impondo-se a hipótese que o modelo analisado é o modelo isótropo, então, os resultados obtidos no capítulo V, seção V.4.1, podem ser utilizados para se caracterizar o tipo de instabilidade ocorrida. Daquele estudo, tem-se que um dos autovalores de (VI.1) é positivo, $\gamma^* = \mu > 0$, logo restam apenas dois autovalores de (VI.1) a serem analisados. Essa análise será desenvolvida nas seções VI.3.1 e VI.3.2. O caso do modelo geral, não-isótropo, não-conservativo e não-associativo é tratado na seção VI.3.3.

A classificação será feita explorando-se dois tipos de sistemas de equilíbrio considerados no capítulo V: o equilíbrio estático e o equilíbrio dinâmico.

VI.3.1 - Classificação para modelos isótropos, associativos e conservativos.

Considerem-se as hipóteses do modelo ser isótropo, associativo e conservativo (em força). A hipótese de associatividade é considerada para se ter o tensor \mathbf{Q}^w simétrico e garantir a existência de autovalores reais, somente. A hipótese de isotropia é feita para utilizar-se os resultados obtidos nas seções V.4.2 e V.4.4. A hipótese de sistema sujeito a forças conservativas é feita para se poder caracterizar pontos limite ou pontos de bifurcação de acordo com o quadro I.

Isto não impede que a análise dos autovalores de \mathbf{Q}^w seja feita através da equação (VI.1) relacionado ao equilíbrio dinâmico. Lembre-se que a equação de equilíbrio estático em taxas é equivalente à equação de equilíbrio dinâmico se a velocidade de propagação c é nula (equações V.2 e V.4). Nesse caso ocorre o aparecimento de pontos críticos de carga e investiga-se a ocorrência de um dos autovalores γ_2^* ou γ_3^* ser nulo.

Sem perda de generalidade, considere-se $\gamma_1^* = \mu > 0$:

- se $\gamma_3^* = 0$ então, utilizando um resultado demonstrado em [Ottosen e Runesson, 1991b], que em geral $\gamma_2^* > \gamma_3^*$, então, $\gamma_2^* > 0$ e a instabilidade ocorrida é do tipo divergente estática. Essa afirmação é verdadeira pois, $\gamma_i^* = \rho c_i^2 \geq 0$, $i = 1,2,3$; o que exclui a ocorrência de velocidade de propagação imaginária e portanto de instabilidade divergente dinâmica.

Nesse caso, $\gamma_3^* = 0$ implica na singularidade de \mathbf{Q}^w e conseqüentemente na existência de uma zona de localização e de um ponto crítico, a partir do qual pode-se ter instabilidade por bifurcação ou instabilidade associada a ponto limite.

É válido ressaltar que, o sistema é conservativo com relação às forças, mas é não-conservativo com relação à dissipação de energia (nos regimes de encruamento), podendo-se ter a ocorrência de autovalor negativo. Assumindo-se $\gamma_3^* < 0$ então de (V.95), $\gamma_2^* > 0$ e $\gamma_1^* = \mu > 0$. Nesse caso tem-se a ocorrência de velocidade de propagação imaginária, pois $\gamma_3^* = \rho c_3^2 < 0$ e a instabilidade é do tipo divergente dinâmica.

No estudo a ser feito nas seções VI.4, VI.5 e VI.6, somente será considerado o caso de instabilidade divergente estática ($\gamma_3^* = 0$) para fazer-se a análise de singularidade do tensor \mathbf{Q}^w .

Mas é importante dizer que no tratamento numérico do problema, a ocorrência de autovalor negativo ($\gamma_3^* < 0$) implica em um ponto crítico e em uma zona de localização já terem sido alcançados. Note que, se $\gamma_3^* < 0$ então $\det \mathbf{Q}^w < 0$, o que implica em encruamento negativo e na solução obtida ser um ponto de bifurcação (não caracterizado pela análise de singularidade).

VI.3.2 - Classificação para modelos isótropos, não-associativos e não-conservativos.

As hipóteses de isotropia, de não associatividade e de sistema não-conservativo, implicam:

- i) no tensor \mathbf{Q}^w ser não simétrico, o que possibilita a ocorrência de autovalores complexos;
- ii) na possibilidade de ocorrer instabilidade divergente dinâmica ou instabilidade oscilatória.

A hipótese de isotropia garante que, um dos autovalores é positivo, ou seja, $\gamma_1^* = \mu > 0$ e utilizando-se os resultados obtidos no capítulo V, seção V.4.4 tem-se:

- se o autovalor γ_3^* é negativo então γ_2^* é positivo,
- se o autovalor γ_3^* for complexo então γ_2^* é complexo e conjugado em relação a γ_3^* .

Com essas considerações chega-se a conclusão que, só é possível caracterizar a instabilidade através de uma análise dinâmica, análoga àquela feita para o exemplo 3. Nesse caso as seguintes situações podem ocorrer:

- i) se $\gamma_3^* < 0$, então, $\gamma_2^* > 0$ e a instabilidade ocorrida é do tipo divergente dinâmica, com correspondente velocidade de propagação imaginária (pois $\gamma_3^* = \rho c \frac{2}{3}$);
- ii) se γ_3^* é um autovalor complexo, então a instabilidade é do tipo oscilatório existindo duas possibilidades:
 - se $Re(\gamma_3^*) \neq 0$, a instabilidade é do tipo oscilatória por “flutter”;
 - se $Re(\gamma_3^*) = 0$, a instabilidade é do tipo oscilatória por ressonância.

VI.3.3 - Classificação para modelos gerais: não-isótropos, não-associativos e não-conservativos.

Nesse caso a análise é mais complicada pois podem aparecer os chamados fenômenos acoplados ou interativos. Por exemplo:

- i) se $\gamma_3^* < 0$ e γ_2^* é imaginário puro, tem-se instabilidade divergente dinâmica acoplada à instabilidade oscilatória ressonante;
- ii) se $\gamma_3^* < 0$ e γ_2^* é complexo com parte real não nula, então, tem-se instabilidade divergente dinâmica acoplada a instabilidade oscilatória por “flutter”;
- iii) se γ_3^* é imaginário puro e γ_2^* é complexo com parte real não nula, então, tem-se instabilidade oscilatória ressonante acoplada à instabilidade oscilatória por “flutter”;

Nas próximas seções, VI.4 e VI.5, exploram-se as hipóteses e os resultados da seção VI.3.1 e resultados reunidos no Apêndice E para se definir em uma análise estática, condições que caracterizem instabilidade por bifurcação ou instabilidade associada a ponto limite.

Essa análise será feita explorando a condição de existência de autovalores nulos para o Tensor \mathbf{Q}^w , ou seja, admitindo-se que a velocidade de propagação c se anule em uma determinada região do meio considerado, denominada no capítulo V de banda de localização.

Justifica-se a análise estática porque, conforme visto no início do capítulo V, se a velocidade de propagação é nula, o problema de equilíbrio dinâmico se torna equivalente ao

problema de equilíbrio estático. Explorando a condição de equilíbrio estático da estrutura, ou seja, desprezando-se forças de inércia, faz-se uma análise estática do problema, a nível local, relativa às propriedades físicas do material e a nível global, relativa às propriedades geométricas da estrutura.

VI.4- Condição de existência de pontos singulares.

Pretende-se fazer a análise pós-bifurcação, explorando-se as equações de equilíbrio estático e constitutiva combinadas na seguinte forma:

$$\text{div } \mathfrak{g} + \mathfrak{f} = \text{div } \mathbf{H}(\mathbf{w}) \mathfrak{g}(\mathbf{u}) + \mathfrak{f} = 0. \quad (\text{VI.2})$$

Denotando-se,

$$\mathbf{K}(\mathbf{w}, \mathfrak{g}) = \text{div } \mathbf{H}(\mathbf{w}) \mathfrak{g}(\mathbf{u}), \quad (\text{VI.3})$$

tem-se a equivalência de (VI.2) com a seguinte equação:

$$f(\mathfrak{g}, \mathbf{w}, \mu) = \text{div } \mathbf{H}(\mathbf{w}) \mathfrak{g}(\mathbf{u}) + \mathfrak{f} = \mathbf{K}(\mathbf{w}, \mathfrak{g}) + \mathfrak{f} = 0. \quad (\text{VI.4})$$

A função vetorial \mathbf{K} definida em (VI.3), relaciona deformações \mathfrak{g} (em função de deslocamentos \mathbf{u}), com forças \mathfrak{f} e está associada às propriedades físicas do material. Essa relação é puntual ou local.

Para se fazer a análise pós-bifurcação de (VI.4), considera-se na definição dessa um parâmetro $\mu \in \mathfrak{R}$, pré-multiplicando \mathfrak{f} , cuja função será auxiliar a descrever o tipo de trajetória provocada por incrementos de carga, após a condição de singularidade estar satisfeita. Em outras palavras, cada uma das soluções analisadas dependem do parâmetro $\mu \in \mathfrak{R}$ e, então, esse parâmetro define uma família de configurações de equilíbrio, denominada trajetória de equilíbrio. A equação (VI.4), então se torna:

$$f(\mathfrak{g}, \mathbf{w}, \mu) = \text{div } \mathbf{H}(\mathbf{w}) \mathfrak{g}(\mathbf{u}) + \mu \mathfrak{f} = \mathbf{K}(\mathbf{w}, \mathfrak{g}) + \mu \mathfrak{f} = 0. \quad (\text{VI.5})$$

A condição de existência de pontos singulares para (VI.5), implica em que $\nabla_{\mathfrak{g}} f$ seja singular, caso contrário o teorema da função implícita garantiria a existência e unicidade de solução. Então, a condição de singularidade é equivalente a se pesquisar para um versor $\boldsymbol{\varphi} \in \mathfrak{R}^3$, $\boldsymbol{\varphi} \neq \mathbf{0}$, a seguinte equação homogênea:

$$[\nabla_{\mathfrak{g}} f] \boldsymbol{\varphi} = 0 \Leftrightarrow [\nabla_{\mathfrak{g}} \mathbf{K} + \mu \nabla_{\mathfrak{g}} \mathfrak{f}] \boldsymbol{\varphi} = 0. \quad (\text{VI.6})$$

Antes de enunciar-se a proposição abaixo, que utiliza a hipótese do sistema considerado ser conservativo é válida a seguinte colocação: “ para sistema conservativo, ao nível do material \mathbf{f} é força por unidade de volume; $\mathfrak{f} = 0$ implica que não há variação da densidade do material e $\nabla \mathbf{f} = 0$ que a distribuição de densidade é homogênea”.

Proposição VI.1:

Considere-se a equação (VI.6) e sejam $\Phi(\mathbf{x}, t)$ e \mathbf{u} expressas por :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = e^{i(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x} - k t)}, \quad k \in \mathfrak{R}; \quad (\text{VI.7a})$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}, t) \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\eta}); \quad (\text{VI.7b})$$

onde $\tilde{\mathbf{u}}$ é um versor de polarização e a função de onda $\Phi(\mathbf{x},t)$ é definida independente da velocidade de propagação c , uma vez que a análise de equilíbrio relativo a (VI.2) é do tipo estático e garante que \mathbf{u} e $\mathcal{S}(\mathbf{u})$ são não singulares. Das relações (VI.7a) e (VI.7b) decorrem:

$$\mathbf{u} = -i k \Phi(\mathbf{x},t) \tilde{\mathbf{u}}(\eta); \quad (\text{VI.8a})$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} k \Phi(\mathbf{x},t) [\tilde{\mathbf{u}} \otimes \eta + \eta \otimes \tilde{\mathbf{u}}]; \quad (\text{VI.8b})$$

então, para carregamento conservativo, uma condição de singularidade análoga a (V.36) vista no capítulo V, é também uma condição de singularidade para (VI.6).

Justificativa:

Levando-se em conta a simetria menor de \mathbf{H} e os resultados obtidos no capítulo V, dados nas equações (V.16) até (V.31), tem-se que,

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}) \boldsymbol{\varphi} &= \{ \nabla_{\mathbf{u}} [\text{div } \mathbf{H}(\mathbf{w}) \mathcal{S}(\mathbf{u})] \} \boldsymbol{\varphi} = \{ \nabla(k \Phi [\eta \cdot \mathbf{H} \cdot \eta] \tilde{\mathbf{u}}) \} \boldsymbol{\varphi} = \\ &= \nabla(k \Phi(\mathbf{Q}^w \tilde{\mathbf{u}})) \boldsymbol{\varphi} = i k \Phi[\mathbf{Q}^w \tilde{\mathbf{u}} \otimes \eta] \boldsymbol{\varphi} = i k \Phi \mathbf{Q}^w [\tilde{\mathbf{u}} \otimes \eta] \boldsymbol{\varphi} \end{aligned}$$

Então,

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = i k \Phi((\eta \cdot \boldsymbol{\varphi})[\mathbf{Q}^w \tilde{\mathbf{u}}]). \quad (\text{VI.8c})$$

Assim, se existir η satisfazendo a equação (V.71) então,

$$[\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}] \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ se e somente se } i k \Phi((\eta \cdot \boldsymbol{\varphi})[\mathbf{Q}^w \tilde{\mathbf{u}}]) = 0,$$

a qual implica em \mathbf{Q}^w ser singular.

Logo, a singularidade de \mathbf{Q}^w é uma condição necessária para que $[\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{K}]$ seja singular.

Levando-se em consideração, que o sistema é conservativo, então $[\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}] \equiv 0$, e então, $[\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}] \boldsymbol{\varphi} = 0, \forall \boldsymbol{\varphi}$. Logo, tem-se que, se \mathbf{Q}^w for singular, então $[\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}] \boldsymbol{\varphi} = 0$, o que resulta na condição de singularidade (VI.6) satisfeita.

Portanto a condição de singularidade de \mathbf{Q}^w é também a condição de singularidade de $\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}$ e a proposição fica demonstrada. \square

Definindo-se:

$$\mathbf{g}(\eta) = i k \Phi \tilde{\mathbf{u}}(\eta), \quad (\text{VI.9a})$$

então a singularidade de \mathbf{Q}^w implica em \mathbf{g} ser um autoversor de \mathbf{Q}^w associado a autovalor nulo. Então, da proposição VI.1 e de (VI.9a) tem-se que:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) = \mathcal{F}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) = \mathbf{Q}^w \mathbf{g} \otimes \eta = \mathbf{Q}^w [\mathbf{g} \otimes \eta]. \quad (\text{VI.9b})$$

A análise de (VI.5) e (VI.6) é equivalente a se pesquisar soluções para o seguinte sistema estendido:

$$\bar{\mathcal{F}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) \\ \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) \boldsymbol{\varphi} \\ \|\boldsymbol{\varphi}\| - 1 \end{array} \right\} = 0, \quad (\text{VI.10})$$

o qual, pela proposição VI.1 é equivalente ao seguinte sistema estendido simplificado:

$$\bar{\mathcal{F}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) \\ \mathbf{Q}^w \mathbf{g} \\ \|\mathbf{g}\| - 1 \end{array} \right\} = 0, \quad (\text{VI.11})$$

com \mathbf{g} definido em (VI.9a). Por sua vez, o sistema definido em (VI.11) também pode ser simplificado por:

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) \\ \det \mathbf{Q}^{\mathbf{w}} \end{array} \right\} = 0, \quad (\text{VI.12})$$

pois, do capítulo V, seção V.4, a condição necessária de singularidade, $\det \mathbf{Q}^{\mathbf{w}} = 0$, é equivalente a se analisar autovalores nulos do seguinte problema espectral,

$$[\mathbf{Q}^{\mathbf{w}} - \gamma^* \mathbf{I}_2] \mathbf{g} = 0, \quad \|\mathbf{g}\| = 1, \quad (\text{VI.13})$$

ou seja, determinar autoversores \mathbf{g} associados a autovalores nulos $\gamma^* = 0$, o que é equivalente a,

$$\mathbf{Q}^{\mathbf{w}} \mathbf{g} = 0, \quad \|\mathbf{g}\| = 1. \quad (\text{VI.14})$$

A equivalência entre $\det \mathbf{Q}^{\mathbf{w}} = 0$ e a equação (VI.14), conjuntamente com a proposição VI.1, mostram que são equivalentes os sistemas estendidos (VI.10), (VI.11) e (VI.12), e estão bem definidos.

Essa afirmação é importante pois, a análise de pós-bifurcação agora pode ser feita, explorando-se o estudo de problemas de bifurcação para dois parâmetros (\mathbf{w} e μ) para sistemas estendidos, visto na definição (E.26), da seção E2 (Apêndice E), análogo ao sistema (VI.11) ou ao sistema (VI.12).

Viu-se que, na análise de instabilidade divergente estática tem-se instabilidade por bifurcação ou instabilidade por ponto limite. Isso implica de acordo com resultados encontrados na seção E1 (apêndice E), que o núcleo de $\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}$, denotado por $N(\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f})$, é gerado por um único vetor $\phi \in \mathcal{R}^3$, ou seja, $N(\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}) = \text{span}\{\phi\}$ tal que, $\dim N(\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}) = 1$.

Essa hipótese, descarta a possibilidade de se ter bifurcação em ponto limite ou múltiplos pontos de bifurcação relacionada a uma mesma variável, já que, esse tipo de bifurcação ocorre se e somente se $\dim N(\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}) > 1$ (ver a definição E3.1).

Esse resultado ($\dim N(\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}) = 1$) é sempre verificado nas hipóteses assumidas do modelo ser isótropo e associativo, o que garante que o tensor é simétrico e possui três autovalores distintos. Logo, a cada autovalor está associado um único autovetor. Portanto, o autovalor nulo gera um único autovetor $\phi \in \mathcal{R}^3$, ou seja, $N(\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}) = \text{span}\{\phi\}$ e $\dim N(\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{f}) = 1$. Nesse caso uma possibilidade exclui a outra, ou seja, ou se tem instabilidade estática por bifurcação ou por ponto limite, de acordo com a seção E1.

VI.5 - Análise pós-singularidade envolvendo propriedades físicas do material.

A análise pós-bifurcação relacionada às propriedades físicas do material, explora diretamente as equações de equilíbrio (VI.5) e (VI.6).

Foi visto na seção anterior que, a condição de singularidade para (VI.6), era equivalente a se ter,

$$\det \mathbf{Q}^{\mathbf{w}} = \det[\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\eta}] = 0. \quad (\text{VI.15})$$

Se (VI.15) é verificada, o primeiro passo para se iniciar a análise de pós-bifurcação, consiste em determinar um autoversor \mathbf{g} associado a autovalor nulo ($\gamma^* = 0$), solução da equação (VI.14). Vale lembrar que para se determinar o autoversor \mathbf{g} , é necessário antes determinar o versor $\boldsymbol{\eta}$, o qual, pode ser obtido para modelo associativo e isótropo, resolvendo-se o problema de maximização (V.71), visto no capítulo V. Após o versor $\boldsymbol{\eta}$ ser

determinado, o autovetor \mathbf{g} é calculado pela expressão (V.96), vista no capítulo V e é dado por:

$$\mathbf{g} = \alpha_1 \boldsymbol{\eta} + \alpha_2 \mathbf{a}; \quad (\text{VI.16})$$

onde α_1 e α_2 são determinados resolvendo-se o sistema (V.98). O autovetor \mathbf{g} definido em (VI.16) é equivalente àquele visto em (VI.9a) se o modelo considerado é o modelo isótropo e associativo.

Com o autovetor \mathbf{g} calculado, pode-se iniciar a análise de pós-bifurcação. Para isso, considera-se uma solução ramificada $(\mathbf{u}(\xi), \mathbf{w}(\xi), \mu(\xi))$ relacionada ao ponto singular obtido $(\mathbf{u}(\xi_0), \mathbf{w}(\xi_0), \mu(\xi_0)) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$. Todos os resultados obtidos a partir de agora são aplicações diretas dos resultados obtidos no apêndice E, seção E2.

A análise de pós-bifurcação se inicia efetuando-se os cálculos de ,

$$\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0 \text{ e } \boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\mathbf{w}^0; \quad (\text{VI.17a})$$

onde, de (E.4a) $\boldsymbol{\psi}^* \in N([\mathbf{f}_{\mathbf{u}}^0]^T)$, com:

$$\mathbf{f}_\mu^0 = \mathbf{f}_\mu(\mathbf{u}(\xi_0), \mathbf{w}(\xi_0), \mu(\xi_0)) = \mathbf{f}_\mu(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0); \quad (\text{VI.17b})$$

$$\mathbf{f}_\mathbf{w}^0 = \mathbf{f}_\mathbf{w}(\mathbf{u}(\xi_0), \mathbf{w}(\xi_0), \mu(\xi_0)) = \mathbf{f}_\mathbf{w}(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0). \quad (\text{VI.17c})$$

Inicialmente serão caracterizadas as condições de ponto limite e ponto de bifurcação, sem a preocupação de se determinar os valores de \mathbf{f}_μ^0 e $\mathbf{f}_\mathbf{w}^0$.

De acordo com a equação (E.16), do Apêndice E, $\boldsymbol{\psi}^*$ é determinado resolvendo-se:

$$[\mathbf{f}_{\mathbf{u}}^0]^T \boldsymbol{\psi}^* = 0. \quad (\text{VI.18a})$$

Considerando-se $\mathbf{f}_{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$, onde $\mathbf{f}_{\mathbf{u}}$ está determinado em (VI.9b), é feita a análise da equação (VI.18a):

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_{\mathbf{u}}^0]^T \boldsymbol{\psi}^* = 0 &\Leftrightarrow [\mathbf{Q}^w \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\eta}]^T \boldsymbol{\psi}^* = 0 \Leftrightarrow [\boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{Q}^w \mathbf{g}] \boldsymbol{\psi}^* = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [\boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{g}] ([\mathbf{Q}^w]^T \boldsymbol{\psi}^*) = 0 \Leftrightarrow [\boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{g}] (\mathbf{Q}^w \boldsymbol{\psi}^*) = 0, \end{aligned}$$

pois da lei associativa e isotropia tem-se que \mathbf{Q}^w é simétrica (ver equação (V.47)).

Logo,

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_{\mathbf{u}}^0]^T \boldsymbol{\psi}^* = 0 &\Leftrightarrow [\boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{g}] (\mathbf{Q}^w \boldsymbol{\psi}^*) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{g} \cdot \mathbf{Q}^w \boldsymbol{\psi}^*) \boldsymbol{\eta} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathbf{g} \cdot \mathbf{Q}^w \boldsymbol{\psi}^* = 0 \Leftrightarrow \mathbf{Q}^w \boldsymbol{\psi}^* = 0, \end{aligned}$$

o que implica na singularidade de \mathbf{Q}^w .

Então, por resultados análogos àqueles obtidos na proposição VI.1, a equação (VI.18a) implica em,

$$\mathbf{Q}^w \boldsymbol{\psi}^* = 0. \quad (\text{VI.18b})$$

Portanto, $\boldsymbol{\psi}^*$ é um autovetor associado a autovalor nulo de \mathbf{Q}^w , o que implica em poder se considerar $\boldsymbol{\psi}^* = \mathbf{g}$, e a análise de (VI.17a) é equivalente à análise de:

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}_\mu^0 \text{ e } \mathbf{g} \cdot \mathbf{f}_\mathbf{w}^0. \quad (\text{VI.18c})$$

Observação:

Na análise de (VI.9b) e (VI.18a) aparecem respectivamente os tensores $[\mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\eta}]$ e $[\boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{g}]$. Note que, esses tensores são singulares se \mathbf{g} for paralelo a $\boldsymbol{\eta}$ (modo I) ou \mathbf{g} for perpendicular a $\boldsymbol{\eta}$ (modo II) ou ainda se \mathbf{g} não é paralelo nem perpendicular a $\boldsymbol{\eta}$, mas \mathbf{Q}^w é singular. Desde que, \mathbf{Q}^w é singular se \mathbf{g} for paralelo a $\boldsymbol{\eta}$ (modo I) ou \mathbf{g} for perpendicular a $\boldsymbol{\eta}$ (modo II) então a singularidade de $[\mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\eta}]$ e $[\boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{g}]$ ocorre sempre que \mathbf{Q}^w é singular.

Portanto, a singularidade de \mathbf{Q}^w é uma condição suficiente para a análise de singularidade de (VI.9b) e (VI.18a).

VI.5.1 - Condição de ponto limite simples.

Baseando-se nos resultados (E.23a), (E.23b), (E.23c) e (E.23d), vistos no apêndice E, para problemas com um parâmetro, para se ter no problema de dois parâmetros (VI.11), somente a ocorrência de pontos limites em ambas as variáveis μ e w , deve se ter:

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}_{\mu}^0 \neq 0 \text{ e } \mathbf{g} \cdot \mathbf{f}_w^0 \neq 0, \quad (\text{VI.19})$$

com \mathbf{g} calculado em (VI.16), tal que,

- se $a_f \neq 0$, o ponto limite obtido é do tipo quadrático, em qualquer das variáveis, onde

$$a_f = \mathbf{g} \cdot [f_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \boldsymbol{\phi}] \boldsymbol{\phi} \neq 0; \quad (\text{VI.20})$$

- se $a_f = 0$, $d_{f\mu} \neq 0$ e $d_{fw} \neq 0$, o ponto limite é do tipo cúbico em qualquer das variáveis, onde,

$$d_{f\mu} = \mathbf{g} \cdot [f_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \boldsymbol{\phi}] \boldsymbol{\phi} + [f_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \boldsymbol{\phi}] \boldsymbol{\phi}_0 + f_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mu}^0 \boldsymbol{\phi} \neq 0 \quad (\text{VI.21a})$$

e

$$d_{fw} = \mathbf{g} \cdot [f_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \boldsymbol{\phi}] \boldsymbol{\phi} + [f_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \boldsymbol{\phi}] \tilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + f_{\mathbf{u}\mathbf{u}w}^0 \boldsymbol{\phi} \neq 0. \quad (\text{VI.21b})$$

As condições $d_{f\mu} \neq 0$ e $d_{fw} \neq 0$, são ditas condições de não degeneração das curvas que passam pelo ponto singular $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$ (ver equação (E23.e)).

A determinação de $\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\phi}_0$ e $\tilde{\boldsymbol{\phi}}_0$ resulta do desenvolvimento que segue.

Inicialmente, utilizando-se dos resultados (E.10) a (E.16), da seção E1, e considerando-se para simplificação de notação $\boldsymbol{\mathcal{E}}_0 = \boldsymbol{\mathcal{E}}_0$, então $\boldsymbol{\phi}$ deve ser determinado tal que,

$$f_{\mathbf{u}}^0(\boldsymbol{\mathcal{E}}_0 - \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \boldsymbol{\phi}_0) = 0, \quad (\text{VI.22a})$$

com $\boldsymbol{\phi}_0$ obtido na resolução de,

$$f_{\mathbf{u}}^0 \boldsymbol{\phi}_0 = - f_{\mu}^0, \quad (\text{VI.22b})$$

o que implica em

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_0 - \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \boldsymbol{\phi}_0 \in \mathbf{N}(f_{\mathbf{u}}^0). \quad (\text{VI.22c})$$

Desde que, em um ponto limite, $\boldsymbol{\mathcal{E}}_0 = 0$, então

$$f_{\mathbf{u}}^0(\boldsymbol{\mathcal{E}}_0) = 0 \quad (\text{VI.22d})$$

e como $\mathbf{v}_0 = \phi - \mathbf{v}_0 \phi_0$ então $\mathbf{v}_0 = \phi$. Logo ϕ deve ser determinado tal que, $f_{\mathbf{v}}^0 \phi = 0$, ou seja, $\phi \in N(f_{\mathbf{v}}^0)$. Lembrando-se que, $f_{\mathbf{v}}^0 = \nabla_{\mathbf{v}} f^0$ então tem-se que, ϕ é um autoversor de $\nabla_{\mathbf{v}} f^0$, associado a autovalor γ^* nulo, logo, ϕ pode ser substituído por \mathbf{g} , determinado em (VI.16), ou seja,

$$\phi = \mathbf{g}. \quad (\text{VI.23})$$

Com o resultado (VI.23), nas equações acima, onde aparecer ϕ , esse pode ser substituído por \mathbf{g} .

Vale ressaltar que, o mesmo resultado obtido em (VI.23), será encontrado considerando-se, para a determinação de ϕ , a equação:

$$f_{\mathbf{v}}^0(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0 \phi_0) = 0.$$

Como $\mathbf{v}_0 = 0$ (condição de ponto limite), recai-se novamente na equação (VI.22d).

Logo, seguindo a equação (E.10), a determinação de ϕ_0 é feita resolvendo-se o seguinte sistema:

$$f_{\mathbf{v}}^0 \phi_0 = -f_{\mu}^0, \quad (\text{VI.24a})$$

enquanto que, a determinação de $\tilde{\phi}_0$ é feita analogamente, resolvendo-se:

$$f_{\mathbf{v}}^0 \tilde{\phi}_0 = -f_{\mathbf{w}}^0. \quad (\text{VI.24b})$$

No apêndice E, a proposição E2.1 dá informações sobre o tipo de dobra que ocorre na vizinhança do ponto $(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$ se $a_f \neq 0$, ou seja, se a dobra é à direita ou à esquerda na vizinhança. Para se ter essa informação, basta então aplicar os resultados citados, o que não será feito aqui. Um outro resultado encontrado no apêndice E, visto no teorema E2.4, é que se o ponto encontrado é um ponto limite, a dobra não muda na vizinhança de $(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$. Esses resultados também são válidos se $\mathbf{g} \cdot f_{\mu}^0 \neq 0$ ou $\mathbf{g} \cdot f_{\mathbf{w}}^0 \neq 0$, o que caracterizaria um ponto limite em apenas uma das variáveis.

VI.5.2 - Condição de ponto de bifurcação.

Para se ter ocorrência de pontos de bifurcação para a equação (VI.5), não é necessário que se verifiquem ambas as situações:

$$\mathbf{g} \cdot f_{\mu}^0 = 0 \text{ e } \mathbf{g} \cdot f_{\mathbf{w}}^0 = 0, \quad (\text{VI.25})$$

ou seja, basta que uma ou outra se verifique.

Baseando-se em (VI.25), são reunidas a seguir resultados tirados da seção E2.3 do apêndice E relacionados à ocorrência de pontos de bifurcação .

O ponto $(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$ é um ponto de bifurcação se uma ou outra condição dada a seguir se verifica, de acordo com os resultados (E.18) a (E.20),

$$\mathbf{g} \cdot f_{\mathbf{w}}^0 = 0; \quad \mathbf{g} \cdot f_{\mu}^0 \neq 0 \text{ e } \Delta = (b_{f_{\mathbf{w}}})^2 - a_f c_{f_{\mathbf{w}}} \neq 0 \quad (\text{VI.26})$$

ou

$$\mathbf{g} \cdot f_{\mu}^0 = 0; \quad \mathbf{g} \cdot f_{\mathbf{w}}^0 \neq 0 \text{ e } \Delta = (b_{f_{\mu}})^2 - c_{f_{\mu}} a_f \neq 0; \quad (\text{VI.27})$$

onde, das equações (E.18), (E.19a), (E.19b) e (E.19c) tem-se,

$$a_f = \mathbf{g} \cdot [f_{\mathbf{u}\mathbf{k}}^0 \phi] \phi = \mathbf{g} \cdot [f_{\mathbf{u}\mathbf{k}}^0 \mathbf{g}] \mathbf{g}; \quad (\text{VI.28a})$$

$$b_{f\mu} = \mathbf{g} \cdot [[f_{\mathbf{u}\mathbf{k}}^0 \phi] \phi_0 + f_{\mathbf{u}\mu}^0 \phi] = \mathbf{g} \cdot [[f_{\mathbf{u}\mathbf{k}}^0 \mathbf{g}] \phi_0 + f_{\mathbf{u}\mu}^0 \mathbf{g}]; \quad (\text{VI.28b})$$

$$b_{f\mathbf{w}} = \mathbf{g} \cdot [[f_{\mathbf{u}\mathbf{k}}^0 \phi] \tilde{\phi}_0 + f_{\mathbf{u}\mathbf{w}}^0 \phi] = \mathbf{g} \cdot [[f_{\mathbf{u}\mathbf{k}}^0 \mathbf{g}] \tilde{\phi}_0 + f_{\mathbf{u}\mathbf{w}}^0 \mathbf{g}]; \quad (\text{VI.28c})$$

$$c_{f\mu} = \mathbf{g} \cdot [[f_{\mathbf{u}\mathbf{k}}^0 \phi_0] \phi_0 + 2f_{\mathbf{u}\mu}^0 \phi_0 + f_{\mu\mu}^0]; \quad (\text{VI.28d})$$

$$c_{f\mathbf{w}} = \mathbf{g} \cdot [[f_{\mathbf{u}\mathbf{k}}^0 \tilde{\phi}_0] \tilde{\phi}_0 + 2f_{\mathbf{u}\mathbf{w}}^0 \tilde{\phi}_0 + f_{\mathbf{w}\mathbf{w}}^0]; \quad (\text{VI.28e})$$

com ϕ_0 e $\tilde{\phi}_0$ determinados em (VI.24a) e (VI.24b), respectivamente.

A caracterização dos pontos de bifurcação segue de:

- considerando-se $\Delta > 0$,

- i) pelo teorema E2.4, se $a_f \neq 0$, o ponto $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$ implica em bifurcação simples ou bifurcação perturbada transcritical e a curva que passa pelo ponto, em uma vizinhança $V(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$, é uma quadrática simples, nesse caso hiperbólica; (figura E.5, apêndice E);
- ii) pelo teorema E2.5, se $a_f = 0$, o ponto $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$ implica em bifurcação em garfo e a curva passando pelo ponto, em $V(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$ é cúbica, em forma de cúspide, (figura E.6, apêndice E).

- considerando-se $\Delta < 0$,

- iii) pelo teorema E2.6, se $a_f \neq 0$, o ponto $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$ exhibe bifurcação em ilha e a curva passando pelo ponto, em uma vizinhança $V(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$ é uma quadrática simples, nesse caso elíptica; (figura E.7, Apêndice E);

Observação:

A consideração feita em (VI.25), é importante pois, pode-se fazer a análise de pós-bifurcação de solução, considerando-se um dos parâmetros como parâmetro de controle ou continuação, por exemplo o parâmetro μ , enquanto que o outro parâmetro é associado à bifurcação. Para isso, basta definir-se μ_0 tal que, $\mathbf{g} \cdot f_{\mu}^0 \neq 0$ com a condição de não degeneração $d_{f\mu} \neq 0$, dada em (VI.21a), satisfeita.

Isso simplifica os cálculos efetuados, já que a análise de bifurcação propriamente dita recai apenas no parâmetro \mathbf{w} .

VI.5.3 - Determinação dos coeficientes de Δ .

Voltando-se às equações (VI.28a), (VI.28b) (VI.28c), (VI.28d), (VI.28e), (VI.21a) e (VI.21b), para a determinação daqueles coeficientes, deve-se efetuar os cálculos de:

$$f_{\mathbf{u}\mathbf{k}}, f_{\mathbf{u}\mu}, f_{\mathbf{u}\mathbf{w}}, f_{\mu\mu} \text{ e } f_{\mathbf{w}\mathbf{w}}$$

Desde que, de (VI.8c),

$$f_{\mathbf{k}} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f} = \nabla_{\mathbf{k}} \mathbf{K}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \mathbf{i} \mathbf{k} \Phi[\mathbf{Q}^{\mathbf{w}} \mathbf{g} \otimes \eta]; \quad (\text{VI.29a})$$

$$f_{\mathbf{w}} = \frac{d}{d\mathbf{w}} (\mathbf{K}(\mathbf{w}, \mathbf{u})) = \frac{d}{d\mathbf{w}} [\text{div}(\mathbf{H}(\mathbf{w}) \mathbf{g}(\mathbf{u}))] = \mathbf{K}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}, \mathbf{u}),$$

Logo, pela simetria menor de \mathbf{H} ,

$$f_w = \mathbf{K}_w(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \frac{d}{d\mathbf{w}} [\text{div}(\mathbf{H}(\mathbf{w}) \nabla \mathbf{u})] = [\text{div}(\mathbf{H}_w^w \nabla \mathbf{u})] . \quad (\text{VI.29b})$$

Essa expressão pode ser melhorada utilizando-se a proposição D5.3.1 e resultados da seção D5.3, do Apêndice D.

Então, partindo-se de (VI.29), pode-se efetuar o cálculo dos coeficientes desejados, obtendo-se:

$$f_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = -k \Phi [\mathbf{Q}^w \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\eta}] \otimes \boldsymbol{\eta}; \quad (\text{VI.30a})$$

$$f_{\mathbf{u}\mu} = 0 \text{ (pois } f_{\mathbf{u}} \text{ não depende de } \mu), \quad (\text{VI.30b})$$

resultado obtido pela aplicação da proposição D5.3.1;

$$f_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = ik \Phi(\mathbf{Q}_w^w \mathbf{g}) \otimes \boldsymbol{\eta}, \text{ onde } \mathbf{Q}_w^w = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{H}_w \cdot \boldsymbol{\eta}; \quad (\text{VI.30c})$$

$$f_{\mu\mu} = 0 \text{ (pois } f_{\mu} \text{ não depende de } \mu); \quad (\text{VI.30d})$$

$$f_{\mathbf{w}\mathbf{w}} = \frac{d}{d\mathbf{w}} (\mathbf{K}_w(\mathbf{w}, \mathbf{u})) = \mathbf{K}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \quad (\text{VI.30e})$$

A determinação dos coeficientes fica completa voltando-se em (VI.28a), (VI.28b) (VI.28c), (VI.28d), (VI.28e), (VI.21a) e (VI.21b) com os resultados obtidos e com os valores de ϕ_0 e $\tilde{\phi}_0$ determinados, respectivamente, em (VI.24a) e (VI.24b) por:

$$f_{\mathbf{u}}^0 \phi_0 = -f_{\mu}^0 \Leftrightarrow ik[\Phi [\mathbf{Q}^{w_0} \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\eta}] \phi_0 = -\mathbf{f}^0 \quad (\text{VI.31a})$$

$$f_{\mathbf{u}}^0 \tilde{\phi}_0 = -f_w^0 \Leftrightarrow ik \Phi[\mathbf{Q}^{w_0} \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\eta}] \tilde{\phi}_0 = -\mathbf{K}_w^0 \quad (\text{VI.31b})$$

Na análise feita até aqui para (VI.5), apesar das dificuldades encontradas no estudo de $\det \mathbf{Q}^w = 0$ e no cálculo complicado de operações envolvendo gradientes de primeira e segunda ordem, esses dois problemas foram resolvidos algebricamente com êxito:

- utilizando-se resultados encontrados em [Rizzi, 1995], vistos no capítulo V, seção V.3.1, para analisar a condição necessária de perda de estabilidade, $\det \mathbf{Q}^w = 0$, para modelos isotropos e associativos;
- conseguindo-se determinar de maneira explícita ou indicando-se como efetuar o cálculo dos operadores gradiente de primeira e segunda ordem.

Esses mesmos problemas, a serem analisados na seção VI.6 seguinte, quando explorasse as propriedades geométricas da estrutura poderão ser resolvidos com procedimentos análogos aos efetuados aqui, mas não se terá uma forma explícita para se calcular os operadores gradiente de primeira e segunda ordem.

VI.6 - Análise pós-singularidade envolvendo propriedades geométricas da estrutura.

Nessa seção, uma análise pós-singularidade análoga àquela feita na seção VI.5 para equações envolvendo propriedades físicas do material, é feita explorando-se as propriedades geométricas da estrutura.

Já foi visto no capítulo IV, seção IV.6, que pelo Princípio do Trabalhos Virtuais (PTV), pode-se expressar as condições de compatibilidade ou equilíbrio do modelo estrutural, envolvendo, taxa em tensão ($\mathfrak{E} \in \mathbf{W}^*$), taxa em deformação ($\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$), taxa em deslocamento ($\mathfrak{u} \in \mathbf{U}$), forças de corpo ($\mathfrak{B} \in \mathbf{B}$) e forças de superfície ($\mathfrak{p} \in \Gamma_{\mathbf{B}} \subset \mathbf{B}$) que definem o espaço de Banach de forças \mathbf{U}^* (dual de \mathbf{U}), além de deformações virtuais ($\delta\mathfrak{E} \in \mathbf{W}$) e deslocamentos virtuais ($\delta\mathfrak{u} \in \mathbf{U}$), tal que a relação válida é expressa por:

$$\int_{\mathbf{B}} \mathfrak{E} \cdot \delta\mathfrak{E} \, d\mathbf{B} = \int_{\mathbf{B}} \mathfrak{B} \cdot \delta\mathfrak{u} \, d\mathbf{B} + \int_{\Gamma_{\mathbf{B}}} \mathfrak{p} \cdot \delta\mathfrak{u} \, d\Gamma_{\mathbf{B}}. \quad (\text{VI.32})$$

Considerando-se que:

i) a deformação virtual pode ser escrita como uma transformação linear dos deslocamentos virtuais,

$$\delta\mathfrak{E} = \mathbf{D}\delta\mathfrak{u}; \quad (\text{VI.33})$$

onde \mathbf{D} é um tensor de transformação de 3ª ordem;

ii) a taxa em deformação \mathfrak{E} pode ser escrita como uma transformação linear de deslocamentos,

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{u}) = \mathbf{D}\mathfrak{u}; \quad (\text{VI.34})$$

iii) das equações (III.17) e (III.83) do capítulo III, o tensor \mathfrak{E} pode ser expresso por,

$$\mathfrak{E} = \mathbf{H}(\mathfrak{w}) \mathfrak{E}(\mathfrak{u}), \quad (\text{VI.35})$$

então, substituindo-se (VI.33), (VI.34) e (VI.35) na equação (VI.32), obtém-se:

$$\left[\int_{\mathbf{B}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{H}(\mathfrak{w}) \cdot \mathbf{D} \mathfrak{u} \, d\mathbf{B} \right] \delta\mathfrak{u} = \left[\int_{\mathbf{B}} \mathfrak{B} \, d\mathbf{B} + \int_{\Gamma_{\mathbf{B}}} \mathfrak{p} \, d\Gamma_{\mathbf{B}} \right] \delta\mathfrak{u}. \quad (\text{VI.36})$$

Supondo que o sistema em questão é conservativo, ou seja, \mathfrak{p} e \mathfrak{B} não dependem de \mathfrak{u} , então, de (VI.36) chega-se à seguinte condição de equilíbrio:

$$\mathbf{R}(\mathfrak{w}, \mathfrak{u}) + \mathfrak{F} = 0; \quad (\text{VI.37})$$

onde

$$\mathbf{R}(\mathfrak{w}, \mathfrak{u}) = \int_{\mathbf{B}} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{H}(\mathfrak{w}) \cdot \mathbf{D}) \mathfrak{u} \, d\mathbf{B}; \quad \mathfrak{F} = - \left[\int_{\mathbf{B}} \mathfrak{B} \, d\mathbf{B} + \int_{\Gamma_{\mathbf{B}}} \mathfrak{p} \, d\Gamma_{\mathbf{B}} \right] \quad (\text{VI.38})$$

e a função vetorial \mathbf{R} , estabelece a relação entre forças \mathfrak{F} com deslocamentos \mathfrak{u} e está associada à propriedade geométrica global da estrutura.

Introduzindo-se na equação (VI.37), um parâmetro $\mu \in \mathfrak{R}$, pré-multiplicando \mathfrak{F} , cuja função será auxiliar a descrever o tipo de trajetória provocada por incrementos de carga, tem-se que:

$$\tilde{f}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) = \mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + \mu \mathbf{f} = 0; \quad (\text{VI.39})$$

com \mathbf{R} definida em (VI.37) por $\mathbf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \int_{\mathbf{B}} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{D}) \mathbf{u} \, d\mathbf{B}$

Note que, para (VI.39), o operador $\nabla_{\mathbf{u}} \tilde{f}$ é dado por:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \tilde{f} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}, \mathbf{u}); \quad (\text{VI.40})$$

onde $\mathbf{R}_{\mathbf{u}}$ é o tensor de rigidez tangente de 2ª ordem, associado a deslocamentos (\mathbf{u}) e forças (\mathbf{f}).

O tensor de rigidez tangente $\mathbf{R}_{\mathbf{u}}$ torna-se singular nos pontos limites ou de bifurcação, o que pode ser expresso, considerando um versor $\tilde{\varphi} \in \mathcal{R}^3$, $\tilde{\varphi} \neq 0$, pelo seguinte problema de autovalor nulo,

$$[\mathbf{R}_{\mathbf{u}} - \tilde{\gamma} \mathbf{I}_2] \tilde{\varphi} = 0, \|\tilde{\varphi}\| = 1, \quad (\text{VI.41})$$

o qual é equivalente, para $\tilde{\gamma} = 0$, a;

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) \tilde{\varphi} = 0. \quad (\text{VI.42})$$

A solução em (VI.42) é diferente da trivial se,

$$\det \mathbf{R}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = 0. \quad (\text{VI.43})$$

Logo, a análise de pós-bifurcação, para o problema (VI.39) é equivalente às equações (VI.10) e (VI.11) da seção VI.2, ou seja, pode ser analisada por uma das equações dadas a seguir:

$$\tilde{f}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) = \begin{cases} \tilde{f}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \tilde{\varphi} \\ \|\tilde{\varphi}\| - 1 \end{cases} = 0 \quad (\text{VI.44})$$

ou

$$\tilde{f}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) = \begin{cases} \tilde{f}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) \\ \det \mathbf{R}_{\mathbf{u}} \end{cases} = 0. \quad (\text{VI.45})$$

VI.6.1 - Condição de ponto limite:

Para se determinar tal condição explorando os resultados da seção E2 (apêndice E), e de uma maneira análoga a seção VI.3.1, considera-se a hipótese de $N(\nabla_{\mathbf{u}} \tilde{f})$ ser gerado por um único vetor $\tilde{\varphi} \in \mathcal{R}^3$, ou seja, $N(\nabla_{\mathbf{u}} \tilde{f}) = \text{span}\{\tilde{\varphi}\}$, então $\dim N(\nabla_{\mathbf{u}} \tilde{f}) = 1$, o que descarta a possibilidade de se ter bifurcação em ponto limite (ver Apêndice E, definição E3.1)

Analogamente à seção VI.5.1, a solução $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$, é um ponto limite para a equação (VI.39) se:

$$\tilde{\varphi} \cdot \tilde{f}_{\mu}^0 \neq 0 \text{ e } \tilde{\varphi} \cdot \tilde{f}_{\mathbf{w}}^0 \neq 0; \quad (\text{VI.46})$$

com $\tilde{\varphi}$ calculado resolvendo-se (VI.42), tal que;

- se $a_{\tilde{f}} \neq 0$, o ponto limite obtido é do tipo quadrático onde,

$$a_{\tilde{f}} = \tilde{\varphi} \cdot (\tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \tilde{\varphi}) \cdot \tilde{\varphi} \neq 0; \quad (\text{VI.46a})$$

- se $a_{\tilde{f}} \neq 0$, $d_{\tilde{f}\mu} \neq 0$ e $d_{\tilde{f}w} \neq 0$, o ponto limite é do tipo cúbico onde,

$$d_{\tilde{f}\mu} = \tilde{\varphi} \cdot [[\tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \tilde{\varphi}] \tilde{\varphi} + [\tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \tilde{\varphi}] \beta_0 + \tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \tilde{\varphi}] \neq 0; \quad (\text{VI.46b})$$

$$d_{\tilde{f}w} = \tilde{\varphi} \cdot [[\tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \tilde{\varphi}] \tilde{\varphi} + [\tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \tilde{\varphi}] \tilde{\beta}_0 + \tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{w}}^0 \tilde{\varphi}] \neq 0. \quad (\text{VI.46c})$$

Nas expressões vistas, β_0 e $\tilde{\beta}_0$, são determinados por,

$$\tilde{f}_{\mathbf{u}}^0 \beta_0 = - \tilde{f}_{\mu}^0; \quad (\text{VI.46d})$$

$$\tilde{f}_{\mathbf{u}}^0 \tilde{\beta}_0 = - \tilde{f}_{\mathbf{w}}^0. \quad (\text{VI.46e})$$

De maneira análoga, as conclusões feitas no final da seção VI.5.1 serão feitas aqui nas seções seguintes.

VI.6.2 - Condição de ponto de bifurcação.

O ponto $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$ é um ponto de bifurcação se:

$$\tilde{\varphi} \cdot \tilde{f}_{\mathbf{w}}^0 = 0, \quad \tilde{\varphi} \cdot \tilde{f}_{\mu}^0 \neq 0; \quad \text{e} \quad \tilde{\Delta} = (b_{\tilde{f}w})^2 - a_{\tilde{f}} c_{\tilde{f}w} \neq 0 \quad (\text{VI.47a})$$

ou

$$\tilde{\varphi} \cdot \tilde{f}_{\mu}^0 = 0, \quad \tilde{\varphi} \cdot \tilde{f}_{\mathbf{w}}^0 \neq 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\Delta} = (b_{\tilde{f}\mu})^2 - c_{\tilde{f}\mu} a_{\tilde{f}} \neq 0 \quad (\text{VI.47b})$$

onde, das equações (E.19a), (E.19b) e (E.19c) do apêndice E, tem-se,

$$a_{\tilde{f}} = \tilde{\varphi} \cdot [f_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \tilde{\varphi}] \tilde{\varphi}; \quad (\text{VI.48a})$$

$$b_{\tilde{f}\mu} = \tilde{\varphi} \cdot [[f_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \tilde{\varphi}] \beta_0 + \tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \tilde{\varphi}]; \quad (\text{VI.48b})$$

$$b_{\tilde{f}w} = \tilde{\varphi} \cdot [[f_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \tilde{\varphi}] \tilde{\beta}_0 + \tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{w}}^0 \tilde{\varphi}]; \quad (\text{VI.48c})$$

$$c_{\tilde{f}\mu} = \tilde{\varphi} \cdot [[f_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \beta_0] \beta_0 + 2 \tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \beta_0 + \tilde{f}_{\mu\mu}^0]; \quad (\text{VI.48d})$$

$$c_{\tilde{f}w} = \mathbf{g} \cdot [[f_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}}^0 \tilde{\beta}_0] \tilde{\beta}_0 + 2 \tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{w}}^0 \tilde{\beta}_0 + \tilde{f}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}^0]; \quad (\text{VI.48e})$$

com β_0 e $\tilde{\beta}_0$ determinados em (VI.46d) e (VI.46e), respectivamente.

A mesma caracterização dos pontos de bifurcação feita na seção VI.5.2, que utiliza resultados do Apêndice E, seção E2, pode ser feita aqui.

VI.6.3 - Determinação dos coeficientes de $\tilde{\Delta}$.

Analogamente à seção VI.5.3, para a determinação desses coeficientes, deve-se efetuar os cálculos de $\tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}, \tilde{f}_{\mathbf{u}\mu}, \tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{w}}, \tilde{f}_{\mu\mu}$ e $\tilde{f}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}$

Uma dificuldade que surge aqui, é não ser possível efetuar esse cálculo de maneira explícita, como foi feito naquela seção. Mas ao final desse trabalho, no Apêndice F, é indicada uma estratégia encontrada em [Jepson e Decker, 1986], explorando métodos de continuação, para se solucionar tal problema.

Desde que, de (VI.40),

$$\nabla_{\mathbf{u}} \tilde{f} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (\text{VI.49a})$$

e considerando também,

$$\tilde{f}_{\mathbf{w}} = \frac{d}{d\mathbf{w}} \mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{R}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}), \quad (\text{VI.49b})$$

então, partindo-se de (VI.49a) e (VI.49b), pode-se indicar o cálculo dos coeficientes desejados, por:

$$\tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}); \quad (\text{VI.50a})$$

$$\tilde{f}_{\mathbf{u}\mu} = 0 \text{ (pois } \tilde{f}_{\mathbf{u}} \text{ não depende de } \mu); \quad (\text{VI.50b})$$

$$\tilde{f}_{\mathbf{u}\mathbf{w}}^0 = \frac{d}{d\mathbf{w}} \mathbf{R}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}); \quad (\text{VI.50c})$$

$$\tilde{f}_{\mu\mu} = 0 \text{ (pois } \tilde{f}_{\mu} \text{ não depende de } \mu); \quad (\text{VI.50d})$$

$$\tilde{f}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}^0 = \frac{d}{d\mathbf{w}} \left(\frac{d}{d\mathbf{w}} (\mathbf{R}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{w})) \right) = \mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}). \quad (\text{VI.50e})$$

Voltando-se em (VI.48a), (VI.48b) (VI.48c), (VI.48d), (VI.48e), (VI.46b) e (VI.46c), com os resultados obtidos, os coeficientes ficam determinados de maneira implícita, já que não se tem uma expressão explícita para $\nabla_{\mathbf{u}} \tilde{f}$.

As dificuldades encontradas na análise de (VI.44) e (VI.45), se encontram no estudo de $\det \mathbf{Q}^w = 0$ e no cálculo complicado de operações envolvendo gradientes de primeira e segunda ordem.

Observações:

i) no estudo efetuado até aqui, apenas resultados relativos à seção VI.3.1, para materiais isotropos e associativos, foram abordados, devido ao fato de somente instabilidade estática por bifurcação ou instabilidade por ponto limite poderem ocorrer, com um caso excluindo o outro. As conclusões tiradas nas seções VI.3.2 e VI.3.3, quando se considerou respectivamente, modelos: isotropos, não-associativos e não-conservativos; não-isotropos, não-associativos e não-conservativos, geram tipos de instabilidade onde não se caracterizam mais um ou outro tipo de instabilidade, por bifurcação ou ponto limite.

Nesse caso pode-se ter a ocorrência de múltiplos pontos de bifurcação ou bifurcação em pontos limites múltiplos se,

$$\dim N(\nabla_{\mathbf{u}} f) > 1 \Rightarrow N(\nabla_{\mathbf{u}} f) = \text{span}\{\phi_i, i=1, \dots, m\}, m > 1. \quad (\text{VI.51})$$

Soluções do problema com essa característica são abordadas no Apêndice E (seção E.3), quando se analisa , na seção E3.2, Equações Algébricas de Bifurcação em Pontos Limites Múltiplos (**LPBE**) e na seção E3.1, Equações Algébricas de Múltiplos Pontos de Bifurcação (**ABE**). Ressalta-se que esse estudo é objeto de pesquisa ligado à continuação desse trabalho, ficando portanto em aberto aqui;

- ii) o estudo efetuado aqui foi particularizado para variáveis de deslocamento \mathbf{u} , de dissipação de energia \mathbf{w} e de trajetória de carga μ , mas é importante notar que os resultados dados no Apêndice E e utilizados aqui são resultados gerais e podem ser aplicados para análises envolvendo qualquer outro tipo de variável;
- iii) uma análise completa de (VI.12) e (VI.45), de uma maneira análoga àquela encontrada em [Wriggers, 1990] e [Paula,1997], pode ser efetuada aqui utilizando-se métodos de continuação, tipo Newton ou do tipo comprimento de arco (das cordas) para se estudar ramificações de soluções. A análise de soluções ramificadas de (VI.5) e (VI.12) encontra-se no Apêndice F e explora uma estratégia de ramificação vista em [Jepson e Decker, 1986], abordada nas seções E3.3 e E3.4, do Apêndice E. Analogamente, os resultados podem ser estendidos para (VI.37) e (VI.45).

CONCLUSÕES.

No que segue, algumas conclusões são tiradas sobre os capítulos subsequentes, abordando os estudos efetuados, as contribuições e algumas questões que podem ser exploradas dando continuidade a esse trabalho.

Resumidamente, os vários temas estudados nesse trabalho se subdividiram da seguinte forma: nos capítulos I, II, III e IV, foram apresentadas formulações que incluíram um tratamento variacional para os modelos elástico, elastoplástico perfeito, elástico com danificação e elastoplástico com danificação; nos capítulos V e VI, explorando as características dos modelos com dano, foram abordadas questões relativas à teoria de localização de deformação e à análise pós-bifurcação relativa à instabilidade de solução.

Olhando mais diretamente para cada capítulo, as seguintes conclusões podem ser tiradas.

No capítulo I, seguindo resultados encontrados em [Romano e Rosati, 1990], a existência de solução para os modelos matemáticos do comportamento estrutural foi postulada, definindo-se conjuntos convexos contendo soluções em tensão, deformação, deslocamento e força, estabelecendo-se um tratamento variacional baseado em princípios da Análise Limite e nas propriedades de intersecção de conjuntos convexos, as quais regem a existência de solução para os modelos. Em particular, para estruturas em regime elastoplástico, o estudo se fundamenta nos conceitos de cones normais externos a conjuntos convexos, que estabelecem uma inter-relação de convexidade entre deformação e tensão e entre deslocamento e força. Como consequência resulta uma relação variacional entre deformação cinematicamente consistente com deslocamento admissível e entre força externa admissível compatível com força interna admissível. Também nesse capítulo, discutem-se para o modelo elastoplástico perfeito, relações variacionais envolvendo taxas de tensão e de deformação, ou de deslocamento e força, que derivam de potenciais convexos nos campos de deformação e deslocamento. A convexidade desses potenciais leva à existência de seus respectivos potenciais conjugados nos campos de tensão e força, dos quais derivam as taxas de deformação e deslocamento, respectivamente.

No capítulo II, baseando-se em [Feijóo e Zouain, 1989], estudou-se o modelo elastoplástico com encruamento positivo. Seguindo os moldes do capítulo I, através de princípios variacionais foram obtidas as formulações em taxas e incrementos finitos, no espaço das tensões. Mostrou-se a existência de potenciais convexos e potenciais convexos conjugados dos quais derivam taxas e incrementos finitos de tensão e deformação, dentro dos respectivos conjuntos de subdiferenciais convexos, satisfazendo as condições de complementaridade e consistência do modelo. Essas últimas condições foram analisadas considerando-se uma função vetorial convexa de plastificação e multiplicadores plásticos que determinam a solução do modelo em ambas as situações, de carregamento e descarregamento, na hipótese de não haver plasticidade seguida de descarregamento.

Os capítulos I e II deram a base formal para os estudos efetuados nos outros capítulos. Como já foi mencionado no decorrer desse trabalho, as contribuições dadas se iniciaram no capítulo III, quando se estudou os modelos com danificação. Esses por sua vez possibilitaram dar sequência aos estudos feitos nos capítulos posteriores, permitindo que alguns novos resultados fossem conseguidos.

No capítulo III, foram estudados os modelos com danificação definidos no espaço das deformações, cuja formulação inicial se encontra em [Proença, 1989]. Analogamente ao estudo para o modelo com encruamento positivo, esses modelos foram apresentados incluindo-se as formas em taxa e em incremento finito de tensão e deformação. A novidade nesses modelos foi a inclusão de uma variável associada à energia dissipada no processo de danificação e limitada superiormente por uma máxima energia de dissipação.

Uma das contribuições encontrada nesse capítulo se relacionou a uma nova formulação matematicamente consistente dos modelos mencionados, a qual permitiu que se obtivessem novas relações para esses modelos.

Considerando-se uma resposta linear de encruamento negativo, inicialmente foi desenvolvido um modelo que ignora a existência de deformações residuais, considerando-se apenas o efeito do dano penalizando as propriedades elásticas; esse modelo foi denominado de elástico com dano. Mostrou-se que a fórmula incremental possibilita uma resolução numérica do problema, ilustrada por um exemplo simples. Mesmo na nova formulação o exemplo mostrou que a análise incremental pode levar ao aparecimento de rigidez negativa após atingir o limite máximo de energia dissipada, problema esse que já ocorria na formulação encontrada em [Proença, 1989]. Então, uma correção do modelo foi proposta, consistindo de uma alteração do passo de deslocamento ou de deformação próximo da situação limite, conseguindo-se assim evitar o problema mencionado. Concluiu-se esse capítulo, combinando-se a existência de deformações residuais com danificação por uma extensão do modelo elástico com dano para um outro denominado de modelo elastoplástico com dano.

Em tempo, tanto no capítulo II como no capítulo III a formulação incremental, expressa em sua forma local por um problema de complementaridade e consistência, evidencia a possibilidade de aplicação de métodos de programação matemática. Particularmente, se a função de plastificação e ou dano for linear por partes mostrou-se que a solução numérica é exata se o processo não envolve, na mesma iteração, plastificação ou dano seguido de descarregamento.

No capítulo IV, a contribuição dada diz respeito às definições de potenciais que regem os modelos com dano. Inicialmente foi proposto um particular potencial convexo associado aos modelos de danificação, denominado de regularizador convexo do qual deriva a relação constitutiva completa, incluindo-se as condições de complementaridade e consistência. Consequentemente, as taxas ou incrementos finitos de tensão ou deformação pertencem aos respectivos conjuntos de subdiferenciais convexos. O potencial regularizador resulta da soma de dois potenciais convexos, um relacionado às variáveis de deformação (elástica e elastoplástica com dano) e o outro associado à variável de dano e é convexo quando avaliado em cada uma dessas variáveis. Em seguida foi proposto um potencial não-convexo dependente apenas da variável de deformação, associado ao modelo de encruamento negativo linear, pois sabe-se que o potencial geral que rege os modelos com danificação é não-convexo. Com relação a esse potencial, ele é não-convexo por ser gerado pela soma de um potencial convexo com um outro côncavo. Mesmo assim foi possível definir o seu conjugado, pois para esse potencial vale uma partição em sua formulação que leva a dois casos, um potencial convexo e outro potencial côncavo, para os quais é possível definir seus conjugados.

No capítulo V, em virtude dos modelos perderem a unicidade de solução no regime de encruamento negativo, fez-se um estudo de soluções localizadas em deformação, analisando-se as equações de equilíbrio local estático e dinâmico. Foi proposta uma solução em

deslocamento que caracterizou a localização de deformação e permitiu ligá-la ao problema de estacionariedade de ondas de aceleração. Nessa análise chegou-se a uma condição necessária de localização relacionada à singularidade do tensor acústico de dano. Viu-se que tal condição está associada a um problema espectral de autovalor nulo nos casos estático e dinâmico, podendo existir autovalores não nulos no caso dinâmico para tensores não-simétricos (modelos isotrópicos não-associativos). Uma interpretação mecânica e geométrica do problema da localização foi feita. Utilizando-se da relação de semelhança do tensor acústico com tensores obtidos como modificações de posto um ou posto dois do tensor identidade, conseguiu-se expressões para calcular-se os autovalores e autovetores que implicam na singularidade desse tensor.

No capítulo VI, foram estudados os vários tipos de instabilidade de solução que podem ocorrer, através de uma análise pós-singularidade dos autovalores associados ao tensor acústico. Fez-se uma classificação da instabilidade de acordo com os modelos assumirem ou não, isotropia e associatividade, e carregamentos conservativos ou não. De acordo com cada caso, uma classificação foi proposta explorando-se os autovalores do tensor acústico. No caso do modelo isotrópico, associativo e conservativo em que o tensor é simétrico e os autovalores reais, foi possível caracterizar matematicamente a solução em dois casos excludentes: ponto limite ou ponto de bifurcação de solução. Os outros casos não foram analisados nesse trabalho.

É importante ressaltar mais uma vez que, a proposta de caracterização da instabilidade ao nível constitutivo desenvolvida restringiu-se ao âmbito puramente matemático, não sendo possível, no estágio de desenvolvimento efetuado, especular sobre o significado físico dos resultados obtidos.

Nesse trabalho não se tratou da implementação dos modelos, objetivando-se testá-los, confrontando-se a resposta numérica com resultados de problemas encontrados na prática. De qualquer modo notou-se a viabilidade de fazer-se tal implementação explorando-se a união de Métodos de Otimização relativos a problemas de complementaridade com o Método dos Elementos Finitos. A implementação do modelo para testá-lo e confrontá-lo com problemas encontrados na prática é objeto de pesquisa futura para se dar continuidade desse trabalho.

Um outro campo a ser explorado futuramente se relaciona à continuidade da análise de instabilidade de solução para os modelos: isotrópicos, não-associativos e não-conservativos; não-isotrópicos, não-associativos e não-conservativos. Isso será feito utilizando-se dos resultados de Teoria de Bifurcação reunidos no Apêndice E. Pretende-se investigar se tais modelos geram soluções relacionadas a múltiplos pontos de bifurcação ou a bifurcação em pontos limites múltiplos, cujas condições de ocorrência se encontram naquele apêndice. Uma outra possibilidade nesse campo diz respeito à exploração e implementação de Métodos de Continuação para se estudar o comportamento de soluções pós-singularidade. Nesse sentido, um primeiro passo foi dado nos resultados encontrados no Apêndice F.

Apêndice A - Revisão de Análise Funcional.

A1- Funcionais Lineares.

Definição A1.1: *Espaços Vetoriais Normados (E.V.N.)..*

Um espaço vetorial real \mathbf{X} é dito normado, se nele é definida uma função $\|\cdot\|_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathfrak{R}$, chamada norma, satisfazendo as seguintes propriedades:

- i) $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$;
- ii) $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$;
- ii) $\|\alpha\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} = |\alpha| \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}}; \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ e } \alpha \in \mathfrak{R}$;
- iii) $\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\|_{\mathbf{X}} \leq \|\mathbf{x}_1\|_{\mathbf{X}} + \|\mathbf{x}_2\|_{\mathbf{X}}; \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$.

Usa-se a notação simplificada $\|\cdot\|$ quando é evidente o espaço em que se opera a norma.

Definição A1.2: *Funcionais Lineares.*

Um funcional $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathfrak{R}$, onde \mathbf{X} é um espaço vetorial normado, é linear se, para quaisquer dois vetores \mathbf{x} e $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$ e escalares $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$, se verifique:

$$\mathbf{f}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta\mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Proposição A1.1:

Se um funcional linear sobre um espaço vetorial normado \mathbf{X} é contínuo em um ponto simples de \mathbf{X} , então ele é contínuo em todo \mathbf{X} .

Definição A1.3:

Um funcional linear \mathbf{f} sobre um espaço vetorial normado é limitado se existe uma constante $m > 0$, tal que $|\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq m\|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

A menor constante m é chamada a norma de \mathbf{f} e denotada $\|\mathbf{f}\|$.

Portanto, $\|\mathbf{f}\| = \inf\{m > 0: |\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq m\|\mathbf{x}\|, \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$ e satisfaz as condições usuais de norma.

Proposição A1.2:

Um funcional linear sobre um espaço normado qualquer é limitado se e somente se é contínuo.

Observação:

Funcionais lineares são elementos de um espaço vetorial e então o espaço de funcionais lineares é um espaço vetorial, pois $\forall \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ definida no espaço vetorial \mathbf{X} e $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$:

- i) $(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x})$;
- ii) $(\mathbf{f})(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x})$;
- iii) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f} \equiv 0$.

O espaço de funcionais lineares é chamado espaço algébrico dual de \mathbf{X} .

O sub-espaço dual algébrico de funcionais lineares limitados (contínuos) é um espaço normado. Esse é denominado de espaço dual topológico de \mathbf{X} .

Norma do funcional \mathbf{f} :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\| &= \inf\{ m > 0: |\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq m\|\mathbf{x}\|, \mathbf{x} \in \mathbf{X} \} = \\ &= \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|; \end{aligned}$$

e $\|\mathbf{f}\|$ satisfaz :

- i) $\|\mathbf{f}\| > 0, \|\mathbf{f}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f} \equiv 0$;
- ii) $\|\alpha\mathbf{f}\| = \alpha\|\mathbf{f}\|; \alpha \geq 0$;
- iii) $\|\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2\| \leq \|\mathbf{f}_1\| + \|\mathbf{f}_2\|$.

Definição A1.4: Dual de \mathbf{X} .

Seja \mathbf{X} : espaço vetorial normado.

O espaço de todos os funcionais lineares limitados sobre \mathbf{X} é chamado espaço normado dual de \mathbf{X} e é denotado por \mathbf{X}^* .

A norma de um elemento $\mathbf{f} \in \mathbf{X}^*$: espaço dual de \mathbf{X} , é dada por:

$$\|\mathbf{f}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|.$$

O valor do funcional linear $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^*$ para o ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ é definido por $\mathbf{x}^*(\mathbf{x})$ ou pela notação simétrica $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle$.

Definição A1.5: Espaços de Banach.

Em campo real ou complexo, um espaço de Banach é um espaço vetorial normado e completo.

Observação: Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é completo, logo é um espaço de Banach.

Todos os resultados vistos até aqui para espaços vetoriais normados, são válidos no espaço de Banach se acrescentar-se a hipótese do espaço vetorial ser normado e completo.

Vale ainda lembrar que, um espaço vetorial normado é completo se toda sequência de Cauchy é convergente nesse espaço. Além disso, a convergência pode ser fraca ou forte nesse espaço. O mesmo resultado é válido para o espaço dual \mathbf{X}^* .

O quadro abaixo mostra os diversos tipos de convergência para as sequências $\{\mathbf{x}_n\}$, $\mathbf{x}_n \in \mathbf{X}$ e $\{\mathbf{f}_n\}$, $\mathbf{f}_n \in \mathbf{X}^*$.

Convergência forte em \mathbf{X} : $\{\mathbf{x}_n\}$, $\mathbf{x}_n \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{X} \Leftrightarrow \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} \rightarrow 0$;

Convergência fraca em \mathbf{X} : $\{\mathbf{x}_n\}$, $\mathbf{x}_n \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x}_n \xrightarrow{f} \mathbf{x} \in \mathbf{X} \Leftrightarrow \langle \mathbf{f}, \mathbf{x}_n \rangle_{\mathbf{X}^* \times \mathbf{X}} \rightarrow \langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{X}^* \times \mathbf{X}}$,
 $\forall \mathbf{f} \in \mathbf{X}^*$;

Convergência forte em \mathbf{X}^ :* $\{\mathbf{f}_n\}$, $\mathbf{f}_n \in \mathbf{X}^*$, $\mathbf{f}_n \rightarrow \mathbf{f} \in \mathbf{X}^* \Leftrightarrow \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}\|_{\mathbf{X}^*} \rightarrow 0$;

Convergência fraca em \mathbf{X}^ :*

$$\{\mathbf{f}_n\}, \mathbf{f}_n \in \mathbf{X}^*, \mathbf{f}_n \rightarrow \mathbf{f} \in \mathbf{X}^* \Leftrightarrow \langle \mathbf{F}, \mathbf{f}_n \rangle_{\mathbf{X}^* \times \mathbf{X}^{**}} \xrightarrow{f} \langle \mathbf{F}, \mathbf{f} \rangle_{\mathbf{X}^* \times \mathbf{X}^{**}}, \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}^{**};$$

Convergência fraca estrela em \mathbf{X}^ :*

$$\{\mathbf{f}_n\}, \mathbf{f}_n \in \mathbf{X}^*, \mathbf{f}_n \rightarrow \mathbf{f} \in \mathbf{X}^* \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{f}_n \rangle_{\mathbf{X} \times \mathbf{X}^*} \xrightarrow{*} \langle \mathbf{x}, \mathbf{f} \rangle_{\mathbf{X} \times \mathbf{X}^*}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X};$$

Espaço de Hilbert

Um espaço de Hilbert é uma forma especial de espaço vetorial normado tendo um produto interno definido, que é análogo ao produto escalar de dois vetores se o espaço é de dimensão finita. Eles são importantes para se estudar por exemplo, o conceito de ortogonalidade, que não é geralmente avaliado em espaços normados mas que poderá sê-lo nesses espaços. Uma outra aplicação dentro da Teoria de Otimização é o Teorema da Projeção, que explora o princípio de ortogonalidade.

Antes de definir-se espaço de Hilbert, será definido em um espaço vetorial linear, o conceito de produto interno.

Definição A1.6: *Produto interno.*

Seja \mathbf{X} um espaço vetorial linear e considere a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathfrak{R}$ que leva o par (\mathbf{x}, \mathbf{y}) no escalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ e para a qual são válidas:

- i) $\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \beta \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{z} \in \mathbf{X}; \alpha, \beta \in \mathfrak{R}$;
- ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$; (em campo complexo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$, onde a barra denota o conjugado)
- iii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ e $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.

A forma bilinear definida acima, com as propriedades i), ii) e iii) é denominada de produto interno.

Um espaço vetorial linear \mathbf{X} munido com o produto interno é chamado de Espaço com produto interno.

Definição A1.7: *Espaço de Hilbert.*

Um espaço com produto interno \mathbf{X} de dimensão infinita e completo (no sentido de Cauchy) é denominado de *Espaço de Hilbert* (real ou complexo, de acordo com o campo escalar ser real ou complexo).

Observação: Todo espaço com produto interno de dimensão finita é completo, logo é um espaço de Hilbert.

Se o espaço com produto interno \mathbf{X} é de dimensão finita ele é chamado de *Espaço Euclideano*.

O operador norma em espaço de Hilbert.

Em um espaço de Hilbert a relação $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$, denotada por $\|\mathbf{x}\|$ satisfaz as condições usuais de norma e portanto é uma norma. Essa relação também pode ser expressa por:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X},$$

que em espaços vetoriais normados e completos é expresso por:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

Existe uma definição entre o espaço de Hilbert munido com a operação norma, e o espaço de Banach, dada a seguir.

Definição A1.8:

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial normado e completo e então é um espaço de Banach completo.

Como foi dito, em espaços de Hilbert com dimensão finita o produto interno é equivalente ao produto escalar usual, ou seja:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}.$$

Nesse caso, se $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, então $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ e a operação norma é definida no sentido usual por:

$$\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

Em espaços de Hilbert são válidas as seguintes proposições.

Proposição A1.3:

Em um espaço de Hilbert \mathbf{X} é válido que:

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X},$$

conhecida como desigualdade de Cauchy-Schwartz.

Proposição A1.4: *Continuidade do produto interno.*

Seja \mathbf{X} um espaço de Hilbert e suponha que $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ e $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}$, então tem-se que,

$$\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle \rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

É na demonstração dessa proposição que utiliza-se a conhecida regra do paralelogramo.

Veja a figura A.1

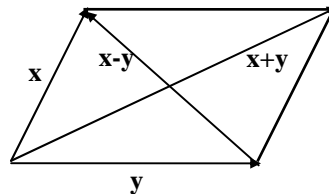


Figura A.1 - Regra do paralelogramo.

Exemplos envolvendo espaços duais de Banach e Hilbert:

i) O dual de \mathfrak{R}^n (espaço de Banach):

Seja $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ com $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$.

Qualquer funcional \mathbf{f} na forma $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $y_i \in \mathfrak{R}$ é claramente linear.

Da desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x})| = \left| \sum_{i=1}^n y_i x_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{x}\|.$$

Vê-se que \mathbf{f} é limitada com $\|\mathbf{f}\| \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}$.

Se $\mathbf{x} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \rightarrow \|\mathbf{f}\| = \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}$.

O espaço dual $\mathbf{X}^* \subset \mathfrak{R}^n$ é o próprio \mathfrak{R}^n , pois, para $\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, n$ e

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{f}(\mathbf{e}_i).$$

Considerando-se $y_i = \mathbf{x}^*(\mathbf{e}_i) \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ e a norma sobre \mathbf{X}^* é

$$\|\mathbf{f}\| = \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}.$$

ii) O dual do espaço de Hilbert:

Para \mathbf{y} fixo, considere $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$. Então sobre o espaço de Hilbert, \mathbf{f} é um funcional linear na variável \mathbf{x} . A desigualdade $|\mathbf{f}(\mathbf{x})| = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ mostra que o funcional \mathbf{f} é limitado com $\|\mathbf{f}\| \leq \|\mathbf{y}\|$. A relação $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$, mostra que de fato $\|\mathbf{f}\| = \|\mathbf{y}\|$. Obviamente, vetores distintos \mathbf{y} produzem funcionais distintos \mathbf{f} .

Logo, no espaço de Hilbert funcionais lineares limitados são gerados no próprio espaço e todo funcional linear neste espaço é gerado desta forma. O teorema abaixo ilustra o resultado geral sobre espaços de Hilbert.

Teorema A1.1: *Riesz-Fréchet.*

Se \mathbf{f} é um funcional linear limitado sobre o espaço de Hilbert \mathbf{H} , existe um único $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$, tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Além disso, para $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ tem-se que $\|\mathbf{f}\| = \|\mathbf{y}\|$ e todo \mathbf{y} determina um único funcional linear neste sentido.

O teorema visto acima define condições de existência para funcionais lineares no espaço de Hilbert.

O próximo teorema estabelece que, um funcional linear limitado \mathbf{f} definido sobre um sub-espaço \mathbf{M} de um espaço normado \mathbf{X} pode ser estendido para um funcional linear \mathbf{F} definido no espaço completo \mathbf{X} e com norma igual à norma de \mathbf{f} em \mathbf{M} , isto é,

$$\|\mathbf{F}\|_{\mathbf{X}} = \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{M}} = \sup_{\mathbf{m}} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{m})|}{\|\mathbf{m}\|}, \mathbf{m} \in \mathbf{M}.$$

Teorema A1.2: *teorema de Hahn-Banach na forma de extensão.*

Seja \mathbf{X} um espaço normado e \mathbf{p} um funcional sublinear contínuo sobre \mathbf{X} , isto é, $\mathbf{p}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \leq \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{p}(\mathbf{x}_2)$ e $\mathbf{p}(\alpha \mathbf{x}_1) = \alpha \mathbf{p}(\mathbf{x}_1)$, para todo $\alpha \geq 0$ e $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$.

Seja \mathbf{g} um funcional linear definido em $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$, satisfazendo $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{p}(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$. Então, existe um funcional linear \mathbf{f} definido em \mathbf{X} que estende a \mathbf{g} , ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{M}; \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{p}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}. \end{aligned}$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [Brézys, 1983] ou em [Luenberger, 1969].

Corolário A1.1:

Existe um funcional linear f em X que é uma extensão de g em $M \subset X$ e que tem norma igual à norma de f em M .

O teorema de Hahn-Banach é um teorema de existência para o problema de minimização a ser visto, pois, dado f em M não é difícil estendê-lo para o espaço completo X e podem existir várias extensões arbitrárias. O problema de norma mínimo então é o problema de selecionar qual destas extensões é a de norma mínimo, dentre todas as extensões.

Definição A1.7: *O segundo espaço dual.*

Seja $x^* \in X^*$. Dado $x \in X$, a equação $f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle$ define um funcional linear em X^* . Ambos, $f(x) = \langle x^*, x \rangle$ e $f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle$, definem funcionais lineares limitados em X e X^* .

O espaço de todos os funcionais lineares limitados sobre X^* é denotado por X^{**} e chamado segundo espaço dual de X .

Definição A1.8:

Seja $\varphi: X \rightarrow X^{**}$ tal que $x^{**} = \varphi(x)$ onde $\langle x^{**}, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$.

O espaço vetorial normado X é dito ser reflexivo se $\varphi: X \rightarrow X^{**}$ é sobrejetora.

Neste caso $X = X^{**}$.

Observações:

- i) qualquer espaço de Hilbert é reflexivo;
- ii) um espaço de Banach é reflexivo se e somente se seu espaço dual é reflexivo.

A2- Funcionais próprios, funcionais coercivos e semi-continuidade de funcionais.

É possível para um funcional real qualquer, não-contínuo atingir seus valores extremos em um problema de minimização, para isto basta que ele seja semi-contínuo e obviamente isso depende de outras hipóteses adicionais sobre os tipos de funcionais e os tipos de conjuntos em que se opera, como será visto no decorrer dos apêndices. Mas estes valores extremos podem ser $-\infty$ e $+\infty$. A definição abaixo diferencia então o conjunto real \mathfrak{R} do conjunto real estendido $\overline{\mathfrak{R}}$ para os valores $-\infty$ e $+\infty$.

Definição A2.1: *Conjunto real estendido.*

O conjunto dos reais estendidos $\overline{\mathfrak{R}}$ é aquele que vem da união do conjunto real \mathfrak{R} com os valores extremos $-\infty$ e $+\infty$, ou seja, $\overline{\mathfrak{R}} = [-\infty, +\infty]$.

Definição A2.2: *Funcional Próprio.*

Seja X um E.V.N..

Um funcional real qualquer $f: X \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ é dito próprio se f não é identicamente $+\infty$ e se f não atinge nunca o valor $-\infty$, ou seja, $f \neq +\infty$ e $f > -\infty$.

Para impor que f não atinja os valores $-\infty$ e $+\infty$, é definido a seguir o domínio efetivo de f .

Definição A2.3: *Domínio efetivo do funcional f.*

Chama-se domínio efetivo do funcional f e se denota por $D(f)$ ao subconjunto de X em que f é finito, ou seja:

$$D(f) = \{ x \in X \text{ tal que } -\infty < f(x) < +\infty \}.$$

A seguir é dada a definição de semicontinuidade de funcionais, cuja importância está na minimização de funcionais não contínuos.

Definição A2.4: *Semicontinuidade de funcionais.*

Um funcional $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é dito inferiormente semicontínuo em $x_0 \in X$ se, para toda sequência $\{x_n\}$, $x_n \in X$, convergente para x_0 ($x_n \rightarrow x_0$), tiver-se que:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_0);$$

analogamente, f é dito superiormente semicontínuo se:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x_0).$$

Definição A2.5: *Semicontinuidade fraca.*

Um funcional $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é dito fracamente inferiormente semicontínuo em $x_0 \in X$ se, para toda sequência $\{x_n\}$, $x_n \in X$, fracamente convergente para x_0 , tiver-se que:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_0).$$

Definição A2.6: *Funcional coercivo.*

Diz-se que um funcional $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é coercivo se para toda sequência divergente $\{x_n\}$, $x_n \in X$, tal que $\|x_n\| \rightarrow +\infty$, então $f(x_n) \rightarrow +\infty$, ou seja:

$$\lim_{\|x_n\| \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty.$$

Definição A2.7: *Propriedade do crescimento.*

Diz-se que o funcional $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ apresenta a propriedade do crescimento em $x_0 \in X$ se existe $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in X$, para todos os elementos x que satisfaçam $\|x - x_0\| > r$.

Proposição A2.1:

Se $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é coercivo, então f apresenta a propriedade do crescimento para todo $x \in X$.

A figura A.2 abaixo ilustra dois exemplos de funcionais coercivos, um não-convexo e o outro inferiormente semicontínuo (i.s.c.).

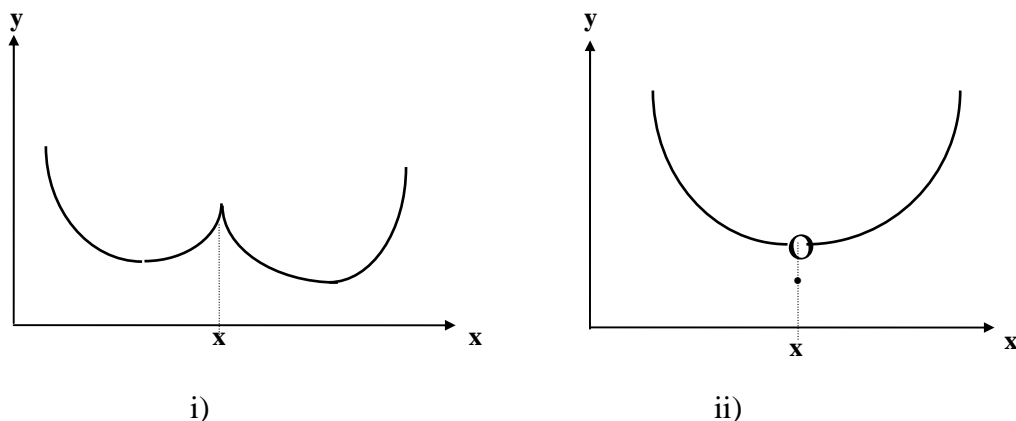


Figura A.2 - i) funcional coercivo não convexo; ii) funcional coercivo i.s.c.

A3- Alinhamentos e complementos ortogonais.

Em geral, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ e $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^*$, tem-se $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle \leq \| \mathbf{x} \| \| \mathbf{x}^* \|$.

No espaço de Hilbert, a igualdade nesta relação ocorre se e somente se o funcional \mathbf{x}^* é representado por um múltiplo não negativo de \mathbf{x} , isto é, se e somente se $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{x} \rangle$, $\alpha \geq 0$.

Motivando-se pelas propriedades encontradas em espaços de Hilbert, introduzirá-se a definição:

Definição A3.1: *Alinhamento.*

Um vetor $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^*$ é dito estar alinhado com um vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ se:

$$\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle = \| \mathbf{x} \| \| \mathbf{x}^* \|.$$

Alinhamento é uma relação entre vetores em dois espaços vetoriais distintos, um espaço normado e seu espaço normado dual.

Definição A3.2: *ortogonalidade.*

Os vetores $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ e $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^*$, são ditos ser ortogonais se $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle = 0$.

Definição A3.3:

Seja $\mathbf{S} \subset \mathbf{X}$. O complemento ortogonal \mathbf{S}^\perp de \mathbf{S} , consiste de elementos $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^*$, tais que \mathbf{x}^* é ortogonal a todo vetor de \mathbf{S} .

Definição A3.4:

Dado $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$, define-se o complemento ortogonal de \mathbf{U} em \mathbf{X} como ${}^\perp\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$, consistindo de todos os elementos em \mathbf{X} ortogonal a todo vetor de \mathbf{U} .

Definição A3.5:

Seja $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$, sub-espaço fechado do espaço normado \mathbf{X} , então ${}^\perp[{}^\perp\mathbf{M}] = \mathbf{M}$.

A4- Problemas na norma mínimo.

Considere a questão de determinar um vetor em um sub-espaço normado $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$, que melhor aproxima um dado vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, no sentido da norma mínimo em espaços de Hilbert.

O teorema da projeção a ser dado a seguir, citado na seção A1 quando definiu-se espaço de Hilbert e importante dentro da teoria de otimização, explora essa questão.

Teorema A4.1: *Teorema Clássico da Projeção.*

Seja \mathbf{H} um espaço de Hilbert e $\mathbf{M} \subset \mathbf{H}$. Correspondente para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ existe um único vetor $\mathbf{m}_0 \in \mathbf{M}$ tal que $\| \mathbf{x} - \mathbf{m}_0 \| \leq \| \mathbf{x} - \mathbf{m} \|$, $\forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}$. Além disso, uma condição necessária e suficiente para $\mathbf{m}_0 \in \mathbf{M}$ seja o único vetor minimizante é que $\mathbf{x} - \mathbf{m}_0$ seja ortogonal a \mathbf{M} .

A figura A.3 ilustra esse teorema.

Os teoremas vistos a seguir mostram a equivalência de dois problemas extremos: um formulado em um espaço normado e o outro em seu espaço dual.

Teorema A4.2:

Seja \mathbf{x} um elemento de um espaço vetorial normado \mathbf{X} e seja \mathbf{d} sua distância de um sub-espaço \mathbf{M} . Então:

$$\mathbf{d} = \inf_{\mathbf{m} \in \mathbf{M}} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| = \max_{\|\mathbf{x}^*\| \leq 1} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle;$$

com $\mathbf{x}^* \in \mathbf{M}^\perp$, onde o máximo da direita é determinado para algum $\mathbf{x}_0^* \in \mathbf{M}^\perp$. Se o ínfimo da esquerda é determinado para algum $\mathbf{m}_0 \in \mathbf{M}$, então, \mathbf{x}_0^* está alinhado com $\mathbf{x} - \mathbf{m}_0$. Veja a figura A.3:

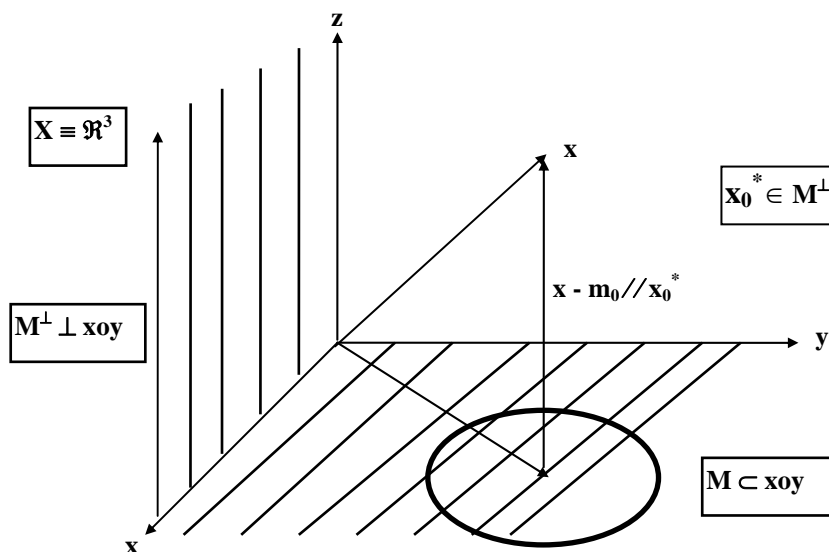


Figura A.3 - $\mathbf{x} - \mathbf{m}_0$ alinhado com \mathbf{x}_0^* em $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^2$.

Corolário A4.1:

Seja $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ e $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$.

Um vetor $\mathbf{m}_0 \in \mathbf{M}$, satisfaz $\|\mathbf{x} - \mathbf{m}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$ para todo $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ se e somente se existe um vetor $\mathbf{x}^* \neq 0$ em $\mathbf{M}^\perp \subset \mathbf{X}^*$, alinhado com $\mathbf{x} - \mathbf{m}_0$.

Teorema A4.3:

Seja $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ e $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^*$ à distância \mathbf{d} de \mathbf{M}^\perp . Então:

$$\mathbf{d} = \min_{\mathbf{m}^* \in \mathbf{M}^*} \|\mathbf{x}^* - \mathbf{m}^*\| = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{M}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle \text{ com } \|\mathbf{x}\| \leq 1,$$

onde o mínimo da esquerda é determinado para $\mathbf{m}_0^* \in \mathbf{M}^\perp \subset \mathbf{X}^*$.

Se o supremo da direita é determinado para algum $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$, então $\mathbf{x}^* - \mathbf{m}_0^*$ está alinhado com \mathbf{x}_0 .

A5- Hiperplanos e funcionais lineares (Forma geométrica do teorema de Hahn-Banach).

Funcionais lineares, muito mais que sendo visualizados como elementos de um espaço dual, são visualizados como hiperplanos gerados no espaço primal.

Os resultados dessa seção estabelecem uma correspondência entre hiperplanos fechados definidos no espaço primal \mathbf{X} e elementos do espaço dual \mathbf{X}^* .

Definição A5.1:

Um hiperplano \mathbf{H} em um espaço vetorial linear \mathbf{X} é uma variedade linear maximal própria, isto é, uma variedade linear \mathbf{H} tal que $\mathbf{H} \neq \mathbf{X}$, e se \mathbf{V} é qualquer variedade linear contendo \mathbf{H} , então $\mathbf{V} = \mathbf{X}$ ou $\mathbf{V} = \mathbf{H}$ (ver figura A.4).

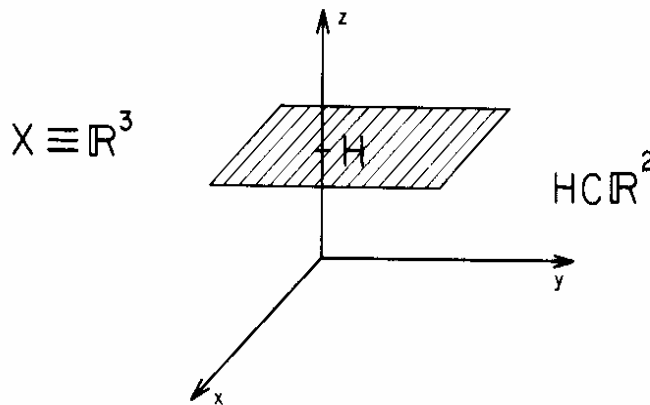


Figura A.4 - um hiperplano \mathbf{H} no espaço \mathbb{R}^3 .

Hiperplanos estão intimamente ligados a funcionais lineares, como será visto.

Teorema A5.1:

Seja \mathbf{H} um hiperplano em um espaço vetorial linear \mathbf{X} . Então, existe um funcional linear \mathbf{f} sobre \mathbf{X} e uma constante c tal que $\mathbf{H} = \{ \mathbf{x}: \mathbf{f}(\mathbf{x}) = c \}$.

Reciprocamente, se \mathbf{f} é um funcional linear diferente de zero sobre \mathbf{X} , o conjunto $\{ \mathbf{x}: \mathbf{f}(\mathbf{x}) = c \}$ é um hiperplano em \mathbf{X} .

Observação: este é o teorema de Hahn-Banach na forma geométrica.

Proposição A5.1:

Seja \mathbf{f} um funcional linear diferente de zero sobre um espaço normado \mathbf{X} .

Então, o hiperplano $\mathbf{H} = \{ \mathbf{x}: \mathbf{f}(\mathbf{x}) = c \}$ é fechado para todo $c \in \mathbb{R}$, isto é, a cada $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ faz corresponder um único $c \in \mathbb{R}$, pela aplicação de \mathbf{f} , se e somente se \mathbf{f} é contínuo.

Os conjuntos $\{ \mathbf{x}: \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq c \}$, $\{ \mathbf{x}: \mathbf{f}(\mathbf{x}) < c \}$, $\{ \mathbf{x}: \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq c \}$ e $\{ \mathbf{x}: \mathbf{f}(\mathbf{x}) > c \}$ são chamados semi-espacos gerados por \mathbf{f} .

Observação:

No teorema A5.1 e na proposição A5.1, associa-se \mathbf{f} a um elemento $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^*$ (espaço dual de \mathbf{X}). Assim, \mathbf{H} pode ser representado equivalentemente por:

$$\mathbf{H} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{X}: \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = c \} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{X}: \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle = c \}.$$

Apêndice B - Revisão de Conceitos de Análise Convexa.

B1- Hiperplanos e conjuntos convexos.

Definição B1.1: *Conjuntos afins.*

Seja \mathbf{X} : espaço vetorial linear.

Um subconjunto $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$, é chamado um conjunto afim se :

$$(1-\lambda) \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \in \mathbf{M} \text{ para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{M} \text{ e } \lambda \in \mathfrak{R}.$$

É também denominado por: variedade linear, variedade afim, etc...

A dimensão de um conjunto afim não vazio é definida como a dimensão do sub-espaço paralelo a ele. Assim, a dimensão de vazio é -1 (convenção) e conjuntos afins de dimensão 0,1 e 2 são chamados pontos, retas e planos, respectivamente.

Definição B1.2:

No espaço \mathfrak{R}^n , um hiperplano é um conjunto afim (n-1)-dimensional.

Exemplos:

Hiperplanos e outros conjuntos afins podem ser representados por funções e equações lineares do tipo:

$$\mathbf{H} = \{ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \text{ tal que } \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = \beta, \mathbf{b} \in \mathfrak{R}^n, \beta \in \mathfrak{R} \};$$

$$\mathbf{M} = \{ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \text{ tal que } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathfrak{R}^m \}.$$

Definição B1.3: *Envoltório afim (envoltório linear).*

Dado $\mathbf{S} \subset \mathbf{X}$, existe um único conjunto afim contendo \mathbf{S} dado pela intersecção da coleção de conjuntos afins $\mathbf{M} \supset \mathbf{S}$.

Este conjunto é chamado de envoltório afim de \mathbf{S} .

O envoltório afim de $\mathbf{S} \subset \mathfrak{R}^m$, consiste de todos os vetores da forma:

$$\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \lambda_m \mathbf{x}^m \text{ tal que } \mathbf{x}^i \in \mathbf{S}, \lambda_i \in \mathfrak{R} \text{ e } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Definição B1.4: *Conjuntos convexos.*

Um conjunto $\mathbf{C} \subset \mathbf{X}$ é dito ser convexo se o segmento de reta unindo dois quaisquer pontos do conjunto, pertence ao conjunto, isto é, se \mathbf{x} e $\mathbf{y} \in \mathbf{C}$, então, $(1-\lambda) \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \in \mathbf{C}$, para $\lambda \in [0,1]$, (ver figura B.1).

Pontos da forma $(1-\lambda) \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$ são referidos como combinações convexas de \mathbf{x} e \mathbf{y} .

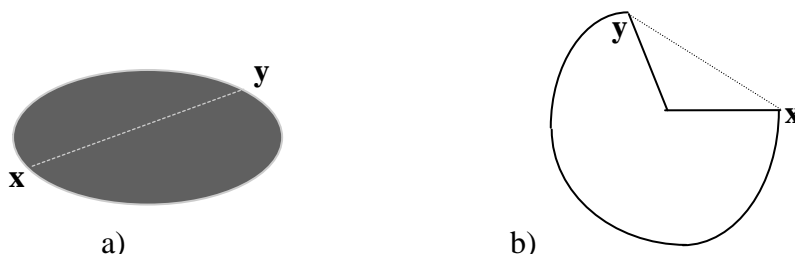


Figura B.1 - a) Conjunto convexo, b) Conjunto não convexo.

Observação: das definições B1.1 e B1.4 pode-se concluir que, todo conjunto convexo é um conjunto afim.

Definição B1.5: *Envoltório convexo (afim).*

Seja C um conjunto arbitrário em X .

O envoltório convexo de C , denotado por $H(C)$ é a coleção de todas as combinações convexas (afins) de C , isto é, $x \in H(C)$ se e somente se pode ser representado por:

$$x = \sum_{j=1}^n \lambda_j x^j \text{ tal que } \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \text{ para } x^1, x^2, \dots, x^n \in C.$$

Veja a figura B.2 :

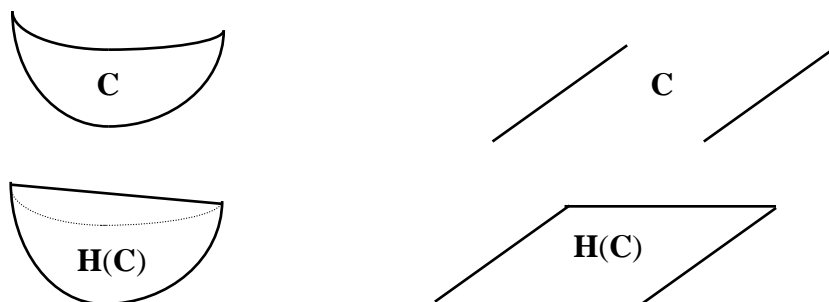


Figura B.2 - Exemplos de envoltório convexos para conjuntos quaisquer.

Definição B1.6: *Fecho, interior, contorno e contorno relativo de conjuntos quaisquer.*

Dado $x \in X$, uma ε - vizinhança de x é definida pelo conjunto:

$$N_{\varepsilon}(x) = \{y: \|y - x\| \leq \varepsilon, \text{ para } y \in X\}.$$

Seja $C \subset X$.

Um ponto x é dito estar no *fecho* de C , se $C \cap N_{\varepsilon}(x) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$.

O fecho é denotado por $cl C$.

Se $cl C = C$, então C é dito ser fechado.

O mesmo é dito estar no *interior* de C ($int C$), se $N_{\varepsilon}(x) \subset C$ para $\varepsilon > 0$.

Se $int C = C$ então C é dito ser aberto.

O ponto x é dito estar no *contorno* de C ($bnd C$), se $N_{\varepsilon}(x)$ contém ao menos um ponto em C e um ponto não pertencente a C .

O *contorno relativo* de C ($relbnd C$) é definido como o conjunto diferença :

$$cl C - int C.$$

Teoremas de separação e suporte para conjuntos convexos.

Teorema B1.1:

Seja C um conjunto convexo tendo um interior não vazio em um espaço vetorial linear normado real X . Suponha V uma variedade linear em X não contendo pontos interiores de C . Então, existe um hiperplano fechado em X contendo V mas não contendo pontos interiores de C , isto é, existe um elemento $x^* \in X^*$ e uma constante $k \in \mathfrak{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} \langle v, x^* \rangle &= k \text{ para todo } v \in V; k \in \mathfrak{R}; \\ \langle u, x^* \rangle &< k \text{ para todo } u \in C. \end{aligned}$$

Definição B1.7:

Um hiperplano H em um espaço vetorial normado X é dito ser um hiperplano suporte para C (convexo) se C está contido em um dos semi-espacos fechados determinados por H e H contém um ponto de $\text{bnd } C$.

Teorema B1.2: *teorema do hiperplano suporte.*

Se x não é um ponto interior de um conjunto convexo C que contém pontos interiores, existe um hiperplano fechado H contendo x tal que C pertence a um dos semi-espacos gerados por H .

Um hiperplano suporte pode ser construído contendo qualquer ponto do contorno de um conjunto convexo C contendo pontos interiores.

Teorema B1.3: *Teorema da separação de Eidelheit.*

Sejam C_1 e C_2 convexas em X , tal que C_1 contém pontos interiores e C_2 não contém nenhum ponto interior de C_1 . Então existe um hiperplano fechado H separando C_1 e C_2 , isto é, existe $x^* \in X^*$ tal que:

$$\sup_{x \in C_1} \langle x^*, x \rangle \leq \inf_{x \in C_2} \langle x^*, x \rangle.$$

Veja a figura B.3:

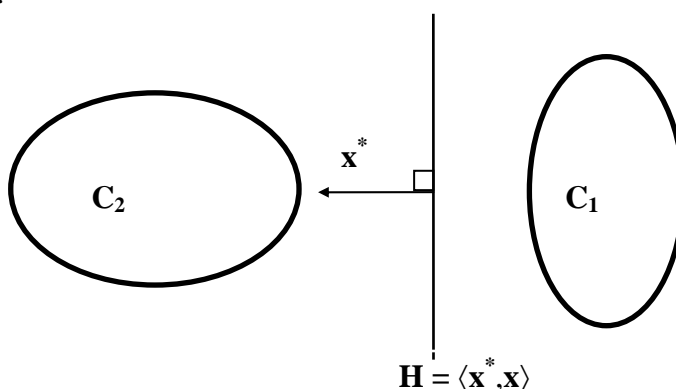


Figura B.3 - Hiperplano separando dois conjuntos convexas.

Teorema B1.4:

Se C é um conjunto convexo fechado e $x \notin C$, existe um semi-espaco fechado que contém C mas não contém x .

Teorema B1.5:

Se C é um conjunto convexo em um espaço normado, então, C é igual a intersecção de todos os semi-espacos fechados que o contém.

O teorema B1.5 é considerado o fundamento geométrico da teoria da dualidade para conjuntos convexas. Associando hiperplanos fechados ou semi-espacos gerados por elementos de X^* , o teorema expressa um conjunto convexo em X como uma coleção de elementos de X^* .

Definição B1.8: *Separção própria.*

Considere \mathbf{H} um hiperplano separador para os conjuntos convexos \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 , com \mathbf{C}_1 e $\mathbf{C}_2 \subset \mathbf{X}$: espaço vetorial normado.

Seja $\mathbf{H} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{X} : \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle = k, \text{ para } \mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^* \text{ e } k \in \mathfrak{R} \}$.

Se $\mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2 \not\subset \mathbf{H}$, então, \mathbf{H} é dito separar propriamente \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 (ver figura B.4).

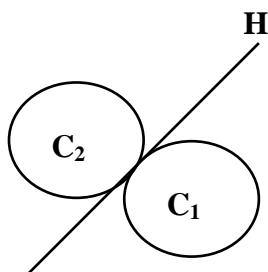


Figura B.4 - Separação própria de conjuntos convexos.

Definição B1.9: *Separação estrita.*

O hiperplano \mathbf{H} é dito separar estritamente \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 se $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle > k$ para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{C}_1$ e $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle < k$ para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{C}_2$ (ver figura B.5).

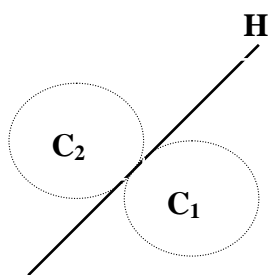


Figura B.5 - Separação estrita para conjuntos convexos.

Definição B1.10: *Separação forte.*

O hiperplano \mathbf{H} é dito separar fortemente \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 se $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle \geq k + \varepsilon$ para $\mathbf{x} \in \mathbf{C}_1$ e $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle \leq k - \varepsilon$ para $\mathbf{x} \in \mathbf{C}_2$.

Veja a figura B.6:

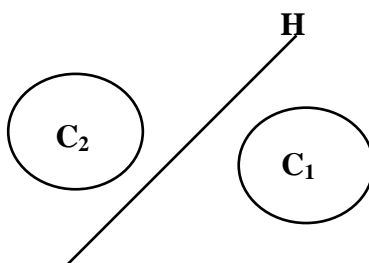


Figura B.6 - Separação forte para conjuntos convexos.

Observações:

- i) de acordo com as figuras acima vê-se claramente que, separação forte implica em separação estrita que implica em separação própria.
 ii) separação imprópria corresponde a hiperplanos separadores que contém ambos os conjuntos C_1 e C_2 , conforme mostra a figura B.7:

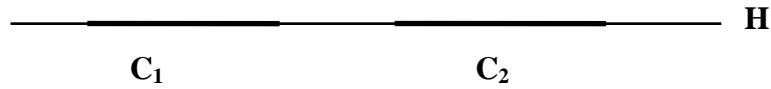


Figura B.7 - Separação imprópria.

Definição B1.11: *Suporte de conjuntos convexos para pontos do contorno.*

Seja X um espaço vetorial, $C \subset X$, um conjunto convexo.

Seja $\bar{x} \in \text{bnd } C$. Um hiperplano $H = \{ \mathbf{x}^* \in X^* : \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} - \bar{x} \rangle = 0 \}$, é chamado um hiperplano suporte de C para \bar{x} se:

$$C \subset H^+ \text{ tal que } \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} - \bar{x} \rangle \geq 0 \text{ para cada } \mathbf{x} \in C;$$

$$C \subset H^- \text{ tal que } \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} - \bar{x} \rangle \leq 0 \text{ para cada } \mathbf{x} \in C.$$

Ver a figura B.8.

Definição B1.12: *Hiperplano suporte próprio.*

Se em adição $C \not\subset H$, $C \neq \emptyset$, então H é chamado hiperplano suporte próprio de C em $\bar{x} \in \text{bnd } C$.

A definição é equivalente a : $H = \{ \mathbf{x}^* \in X^* : \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} - \bar{x} \rangle = 0 \}$, é um hiperplano suporte de C para $\bar{x} \in \text{bnd } C$ se:

$$\langle \mathbf{x}^*, \bar{x} \rangle = \inf \{ \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle, \mathbf{x} \in C \} \text{ ou } \langle \mathbf{x}^*, \bar{x} \rangle = \sup \{ \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle, \mathbf{x} \in C \}.$$

A figura B.8 dá exemplos de hiperplanos suportes próprios para um conjunto convexo.

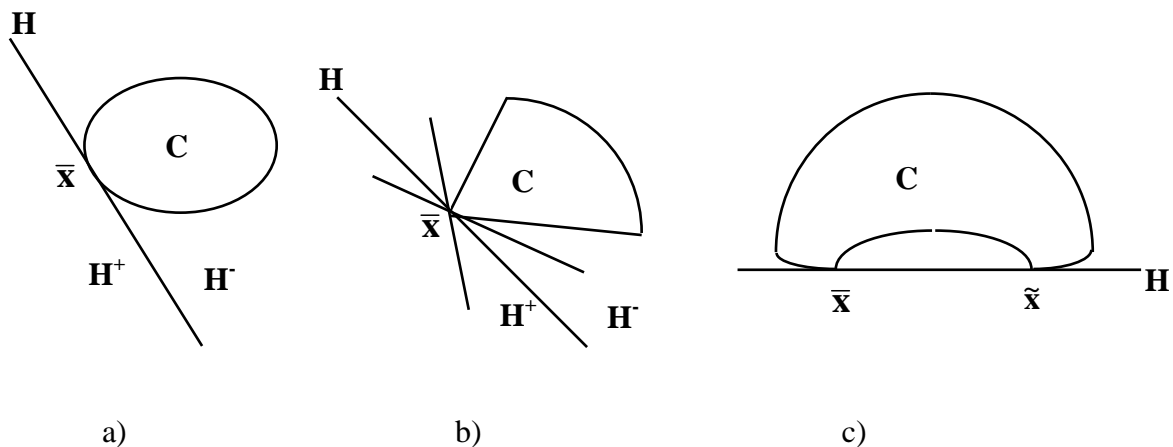


Figura B.8 - Hiperplanos suportes próprios.

- a) hiperplano suporte a um único ponto do contorno;
 b) infinitos hiperplanos suportes a um único ponto do contorno;
 c) hiperplano suporte a mais de um ponto do contorno;

Observação: um hiperplano suporte impróprio é aquele que contém o conjunto C . A ilustração pode ser vista na figura B.7.

O teorema a seguir determina que um conjunto convexo tem ao menos um hiperplano suporte para cada ponto do contorno.

Teorema B1.6:

Seja $C \subset X$, $C \neq \emptyset$, convexo e $\bar{x} \in \text{bnd } C$. Então, existe um hiperplano que é suporte para C em \bar{x} , isto é, existe $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, tal que $\langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leq 0$, para cada $x \in \text{cl } C$.

Teorema B1.7:

Seja $C \subset X$, $C \neq \emptyset$, C convexo e $\bar{x} \notin C$. Então, existe $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, tal que $\langle x^*, x - \bar{x} \rangle < 0$ para cada $x \in \text{cl } C$.

Teorema B1.8:

Seja C um conjunto convexo e seja D um subconjunto não vazio de C (por exemplo, um subconjunto consistindo de um único ponto).

Uma condição para que exista um hiperplano suporte não trivial para C contendo D é necessário e suficiente que D seja disjunto de $\text{int } C$.

B2- Dualidade em problema de norma-mínimo.

Deseja-se encontrar a distância mínima de um ponto a um conjunto convexo baseando-se nas noções de hiperplanos separadores.

Princípio básico da dualidade:

A distância mínima de um ponto a um conjunto convexo C é igual ao máximo das distâncias do ponto para hiperplanos separadores, separando o ponto e o conjunto. A ilustração desse resultado é feita na figura B.11.

Antes de enunciar um teorema que contemple essa afirmação, serão vistas, a definição B2.1 e o teorema B2.1.

Definição B2.1: (*Funcional Suporte*)

Seja C um conjunto convexo em um espaço vetorial normado X .

O funcional:

$$h(x^*) = \sup_{x \in C} \langle x^*, x \rangle;$$

definido sobre X^* , é chamado o funcional suporte de C .

Dado um elemento $x^* \in X^*$, considere-se a família de semi-espacos $\{x: \langle x^*, x \rangle \leq c\}$, quando c varia. Quando c cresce, estes semi-espacos tornam-se maiores e $h(x^*)$ é definido como o ínfimo daquelas constantes $c \in \mathcal{R}$ tal que C está contido no semi-espaco. Em vista desta definição, o fecho do conjunto C pode ser especificado através do conceito de funcional suporte por:

$$\text{cl } C = \overline{C} = \bigcap_{x^*} \{x: \langle x^*, x \rangle \leq h(x^*)\}.$$

Veja a figura B.9:

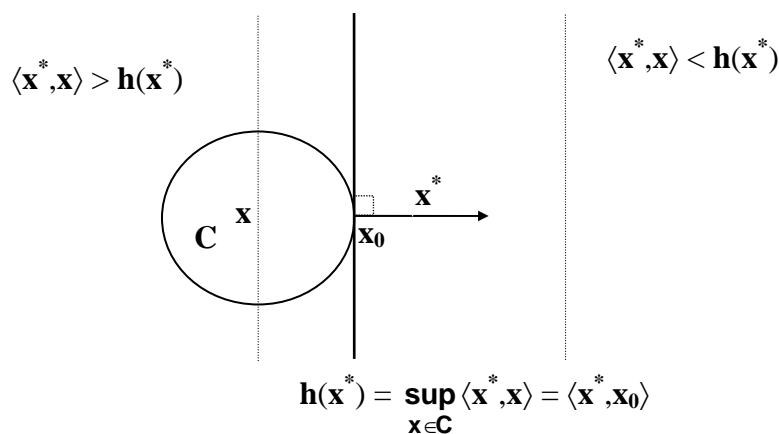


Figura B.9 - Funcional suporte.

Teorema B2.1:

Seja \mathbf{C} um conjunto convexo que está a uma distância finita do ponto nulo θ , seja $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^*$ tendo $\|\mathbf{x}^*\| = 1$ e suponha que o hiperplano $\mathbf{H} = \{\mathbf{x}: \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)\}$ é um hiperplano suporte para \mathbf{C} separando o ponto nulo θ de \mathbf{C} . Então, a distância do ponto θ para o conjunto \mathbf{C} é dada por $-\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)$

Ver a figura B.10.

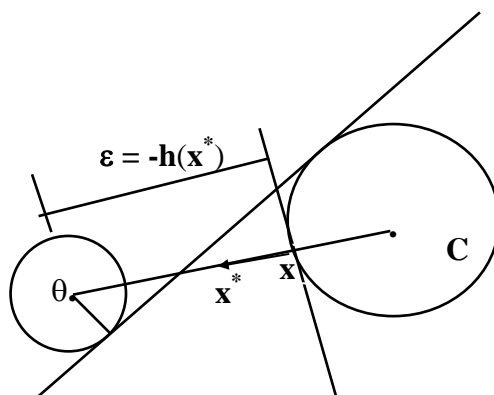


Figura B.10 - Distância do ponto θ ao conjunto convexo \mathbf{C} .

O teorema visto a seguir, determina a distância de um ponto qualquer diferente de θ para um conjunto convexo \mathbf{C} e é uma consequência direta do teorema B2.1. Ele estabelece o princípio básico da dualidade.

Teorema B2.2: Dualidade e norma mínimo.

Seja \mathbf{x}_1 um ponto em um espaço vetorial normado real \mathbf{X} e seja $\mathbf{d} > 0$, denotando sua distância do conjunto convexo \mathbf{C} , tendo funcional suporte \mathbf{h} , então:

$$\mathbf{d} = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{C}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| = \max_{\|\mathbf{x}^*\| \leq 1} [\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_1 \rangle - h(\mathbf{x}^*)];$$

onde o máximo do lado direito é determinado para algum $\mathbf{x}_0^* \in \mathbf{X}^*$.

Se o ínfimo do lado esquerdo é determinado para algum $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{C}$, então, $-\mathbf{x}_0^*$ está alinhado com $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1$.

A figura B.11, lustra o teorema B2.2, acima.

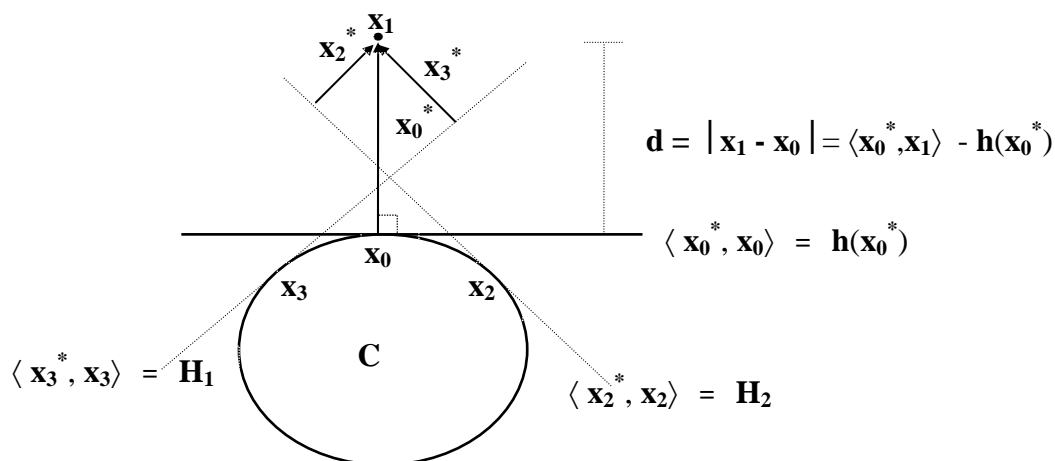


Figura B.11 - Distância mínima entre ponto e conjunto convexo.

B3 - Otimização de funcionais.

O estudo se baseia em duas representações de funcionais não-lineares:

i) representação de um funcional em de seu gráfico:

Suponha que f é um funcional definido sobre um subconjunto D do espaço vetorial X .

O espaço X é então imerso no espaço produto $\mathcal{R} \times X$, onde \mathcal{R} é a reta (espaço vetorial linear de dimensão 1). Elementos desse espaço consistem de pares ordenados (r, \mathbf{x}) . O gráfico de f é a superfície em $\mathcal{R} \times X$, consistindo dos pontos $(f(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ com $\mathbf{x} \in D$ (ver figura B.12).

Usualmente o eixo \mathcal{R} , isto é, pontos da forma (r, θ) , onde θ é o vetor nulo de X , é tomado como o eixo vertical e o valor do funcional para \mathbf{x} como a distância vertical do gráfico sobre o ponto $\mathbf{x} \in D$.

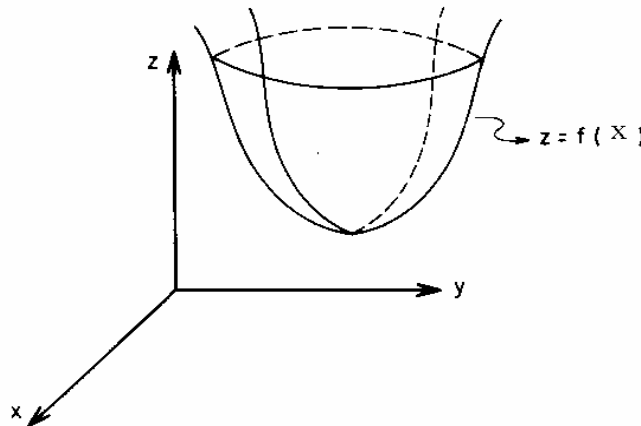


Figura B.12 - Gráfico de um funcional f no \mathcal{R}^3 ($D \subset \mathcal{R}^2$).

ii) A outra representação é uma extensão da técnica de representar um funcional linear por um hiperplano. O funcional é descrito pelo seu contorno no espaço X .

Se f é diferenciável em $\mathbf{x} \in D$, é natural construir hiperplanos tangentes ao contorno e definir o gradiente de f em \mathbf{x} . A vantagem é que, se $\mathbf{x} \in D \subset \mathcal{R}^n$, então o espaço de hiperplanos está contido em \mathcal{R}^{n-1} , (ver a figura B.13).

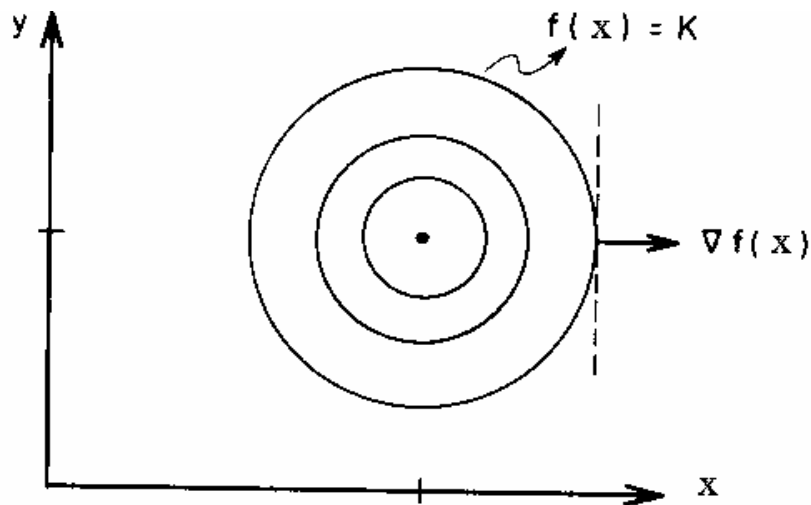


Figura B.13 - Curvas de nível de um funcional não linear.

Definição B3.1: *Funcionais convexos e côncavos.*

Funcional Convexo: um funcional de valor real f definido sobre um subconjunto C , em um espaço vetorial linear X é dito ser convexo se :

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2);$$

com $\alpha \in [0,1]$ e x_1 e $x_2 \in C$, (ver a figura B.14).

Se a desigualdade estrita se verifica, então, o funcional f é dito ser estritamente convexo.

Funcional Côncavo: um funcional g definido sobre um conjunto convexo é (estritamente) côncavo se $-g$ é (estritamente) convexo.

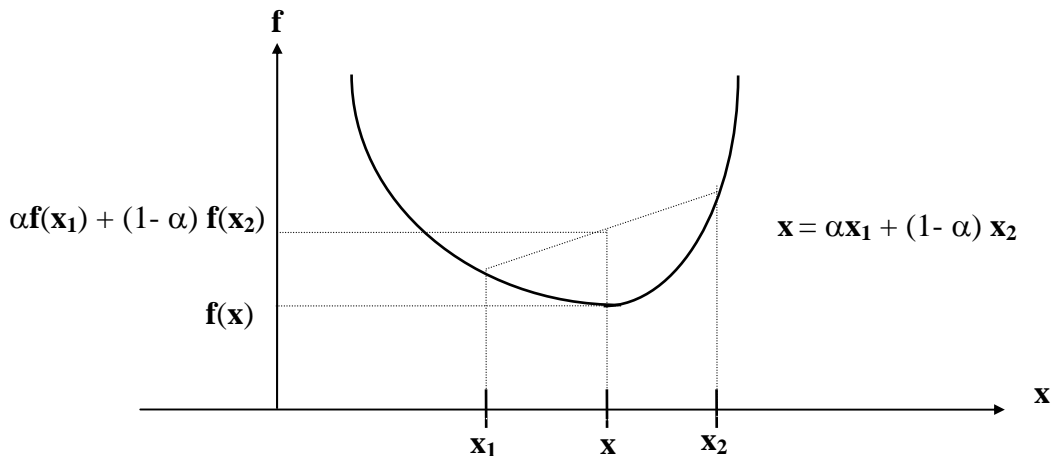


Figura B.14 - Funcional convexo.

Caracterização de convexidade e convexidade estrita para funcionais diferenciáveis.

Pode-se determinar a condição de convexidade ou convexidade estrita explorando-se diretamente o teorema abaixo:

Teorema B3.1.

Seja $f: C \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e duas vezes diferenciável em C , conjunto aberto e convexo e seja $x \in C$ e $x + d_x$ definido em uma vizinhança $V(x)$ de x . Utilizando-se aproximação de Taylor de ordem 2 em torno de x tem-se:

$$f(x + d_x) = f(x) + \nabla f(x)d_x + \frac{1}{2} d_x \cdot \nabla^2 f(x) \cdot d_x ;$$

onde $\nabla^2 f$ é conhecida como hessiana de f em x , então é válido:

se $d_x \cdot \nabla^2 f(x) \cdot d_x \geq 0$ (> 0) então $\nabla^2 f(x) \geq 0$ (> 0), é semidefinida positiva (definida positiva) e f é convexa (estritamente convexa) em uma vizinhança de x .

Se a matriz hessiana $\nabla^2 f(x) \geq 0$ (> 0), $\forall x \in C$ e C é fechado, então f é convexa (estritamente convexa) em todo o conjunto C .

Definição de epígrafo de um funcional convexo e suas propriedades.

Definição B3.2: Epígrafo do funcional f .

Em correspondência a um funcional convexo f definido em um conjunto convexo C de um espaço vetorial linear X , define-se o conjunto convexo $[f, C]$ em $\mathfrak{R} \times X$ como:

$$[f, C] = \{(r, x) \in \mathfrak{R} \times X: x \in C, f(x) \leq r\}$$

O espaço produto $\mathfrak{R} \times X$ é orientado de modo que, o eixo \mathfrak{R} , isto é todos os vetores da forma (r, θ) , é o eixo vertical.

Então, o conjunto $[f, C]$ é tomado como a região acima do gráfico de f , (ver a figura B.15) e denominado epígrafo de f .

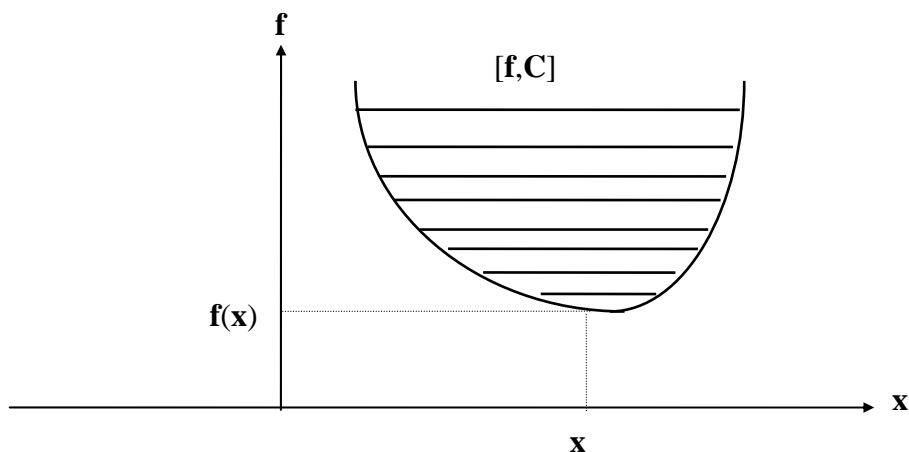


Figura B.15 - Epígrafo de f .

Proposição B3.1:

O funcional f definido sobre o domínio convexo C é convexo se e somente se $[f, C]$ é um conjunto convexo.

Proposição B3.2:

Seja $f: X \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$. Então f é i.s.c. (definição A2.4) se e somente se $[f, X]$ é fechado em $X \times \overline{\mathfrak{R}}$, onde ,

$$[f, X] = \{(r, x) \in \overline{\mathfrak{R}} \times X: x \in X, f(x) \leq r\}$$

Continuidade de funcionais convexos.

Proposição B3.3:

Se f é um funcional convexo sobre o domínio convexo C em um espaço vetorial linear e C tem interior relativo não vazio C^0 , então, o conjunto convexo $[f, C]$ tem um ponto interior relativo (r_0, x_0) se e somente se f é contínuo em $x_0 \in C^0$.

Proposição B3.4:

Um funcional convexo f definido sobre um domínio convexo C e contínuo em um ponto simples no interior relativo C^0 de C , é contínuo em todo C .

As conclusões ou significados dos teoremas B3.3 e B3.4, resumem-se no corolário seguinte.

Corolário B3.1:

Um funcional convexo definido sobre um conjunto convexo de dimensão finita e interior relativo não vazio, é contínuo em todo C .

A proposição B3.4 pode ser estendida para espaços vetoriais normados de acordo com a proposição abaixo, se restringir-se o contradomínio de f ao domínio efetivo $D(f)$, (ver a definição A2.3).

Proposição B3.5:

Seja X espaço vetorial normado e $f: X \rightarrow D(f)$, um funcional convexo. Se f é i.s.c. em $x_0 \in X$, então f é contínuo em x_0 .

Observe que neste resultado f deve assumir valores em $D(f)$, ou seja, valores finitos, pois se assumir valores em $+\infty$ ou $-\infty$, a proposição acima não é mais válida. Isto pode ser visto no seguinte contra-exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1,1] \\ +\infty & \text{se } x \notin [-1,1] \end{cases};$$

que é um funcional convexo, i.s.c. mas não é contínuo.

Proposição B3.6:

Seja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ um funcional convexo. Então são válidas a três afirmações abaixo:

- i) f é contínua em um elemento $x \in X$;
- ii) $\exists V(x)$ tal que f é limitada;
- iii) f é próprio e contínuo no interior de seu domínio efetivo $D(f)$.

Proposição B3.7:

Seja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, um funcional convexo e i.s.c., então f é contínuo em seu domínio efetivo $D(f)$.

Existência de mínimos globais e locais para funcionais convexos.

Proposição B3.8:

Seja f um funcional convexo definido sobre um subconjunto convexo C de um espaço vetorial linear. Seja $\mu = \inf_{x \in C} f(x)$, então:

- i) o subconjunto $C^0 \subset C$, onde $f(x) = \mu$, é convexo.
- ii) se x_0 é um mínimo local de f então $f(x_0) = \mu$ e portanto x_0 é um mínimo global.

As proposições, dadas a seguir caracterizam a existência de mínimo para funcionais convexos contínuos e não necessariamente diferenciáveis.

Proposição B3.9:

Seja X um espaço vetorial normado e $C \subset X$ um subconjunto convexo fechado.

Se $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, é um funcional convexo contínuo e coercivo então f é fracamente inferiormente semicontínuo e apresenta a propriedade do crescimento para algum ponto $x_0 \in C$.

Proposição B3.10:

Seja \mathbf{X} um espaço vetorial normado e $\mathbf{C} \subset \mathbf{X}$ um subconjunto convexo fechado.

Se $f: \mathbf{X} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, é um funcional fracamente inferiormente semicontínuo e que apresente a propriedade do crescimento para um ponto $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{C}$ então f é limitada e atinge seu mínimo em \mathbf{C} .

O teorema dado a seguir caracteriza a existência de mínimo para funcionais convexos não necessariamente contínuos e diferenciáveis.

Teorema B3.2:

Seja $\mathbf{C} \subset \mathbf{X}$ um conjunto convexo fechado e $f: \mathbf{C} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ um funcional convexo, próprio e inferiormente semicontínuo. Então, se \mathbf{C} é limitado ou f é coerciva, existe pelo menos uma solução $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ que minimiza o funcional f . Esta solução é única se f é estritamente convexo.

Observação: de acordo com [Ekeland e Temam, 1976], a proposição B3.10 e o teorema B3.2, valem também na hipótese de \mathbf{C} ser um conjunto fechado não-vazio.

Regularização de funcionais convexos.

Se f é um funcional convexo não diferenciável, uma das maneiras de se resolver este problema na prática é aproximá-lo por um outro que seja diferenciável ou seja regularizar o funcional. Isto pode ser feito seguindo o seguinte resultado.

Proposição B3.11:

Seja \mathbf{X} um espaço vetorial normado e considere o funcional $f: \mathbf{X} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, convexo, i.s.c. e próprio. Seja agora o funcional $f_\delta: \mathbf{X} \rightarrow \mathfrak{R}$ dado por;

$$f_\delta(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \left\{ \frac{1}{2\delta} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathbf{X}}^2 + f(\mathbf{y}) \right\};$$

então, tem-se que:

- i) $f_\delta(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \delta > 0;$
- ii) $\lim_{\delta \rightarrow 0} f_\delta(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in \mathbf{X};$
- iii) f_δ é diferenciável e $\partial f_\delta: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ é dado por:

$$\partial f_\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\delta} (\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x});$$

onde $\mathbf{P}\mathbf{x}$ é a solução que minimiza i).

Definição B3.3: *Indicatriz de um conjunto convexo C.*

Seja $\Gamma_{\mathbf{C}}: \mathbf{X} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ tal que:

$$\Gamma_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbf{C} \\ +\infty & \text{se } \mathbf{x} \notin \mathbf{C} \end{cases};$$

$\Gamma_{\mathbf{C}}$ é denominada como função indicatriz do conjunto convexo \mathbf{C} .

Esta função é convexa i.s.c., própria, mas não diferenciável para pontos fora de \mathbf{C} , assim a proposição B3.11 pode ser usada para aproximá-la por um funcional diferenciável quando de sua análise.

B4 - Funcionais Convexos Conjugados:

Servem para:

- no estudo de conjuntos convexos $[\mathbf{f}, \mathbf{C}]$, investigar a representação dual desses conjuntos em termos de hiperplanos fechados.
- obtenção de um princípio de dualidade geral para problemas de otimização que particularmente resolvem problemas norma-mínimo.

Definição B4.1: *Funcional conjugado de Fenchel ou Transformada de Legendre.*

Seja \mathbf{f} um funcional convexo definido sobre um conjunto convexo \mathbf{C} em um espaço vetorial linear \mathbf{X} . O conjunto conjugado \mathbf{C}^* é definido como:

$$\mathbf{C}^* = \{\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^* : \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{C}} [\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle - \mathbf{f}(\mathbf{x})] < \infty\},$$

e o funcional conjugado \mathbf{f}^* de \mathbf{f} é definido sobre \mathbf{C}^* como:

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{C}} [\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle - \mathbf{f}(\mathbf{x})].$$

\mathbf{f}^* é conhecido como *Transformada de Legendre* ou como funcional conjugado de *Fenchel*.

A interpretação geométrica dessa definição será feita nas seções B5 e B6.

Proposição B4.1:

Na hipótese de $[\mathbf{f}, \mathbf{C}]$ ser um conjunto convexo então, o conjunto conjugado \mathbf{C}^* e o funcional conjugado \mathbf{f}^* são convexos e $[\mathbf{f}^*, \mathbf{C}^*]$ é um subconjunto convexo fechado de $\mathfrak{R} \times \mathbf{X}^*$.

Nessas condições, vale que: $[\mathbf{f}^*, \mathbf{C}^*] = [\mathbf{f}, \mathbf{C}]^*$.

Note que, se $\mathbf{f} \equiv 0$, então $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{C}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle$ e \mathbf{f}^* se torna o funcional suporte de \mathbf{C}^* .

Nesse caso particular, o problema geral de otimização recai no problema de norma-mínimo.

Exemplo:

$$\text{Se } \mathbf{X} \equiv \mathfrak{R}^n, \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \text{ e } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p, \quad 1 < p < \infty,$$

$$\text{então, } \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*) = \sup_{\mathbf{x}} \left[\sum_{i=1}^n \xi_i x_i - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right], \text{ para } \mathbf{x}^* = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

Diferenciando-se o lado direito encontra-se:

$$\xi_i = |x_i|^{p-1} \text{sgn } x_i \Rightarrow \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^n |x_i|^p (1 - \frac{1}{p}) = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |x_i|^q, \text{ onde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Definição B4.2: *Funcional conjugado de $\Gamma_{\mathbf{C}}$.*

O funcional conjugado de $\Gamma_{\mathbf{C}}$, é o funcional suporte para $\Gamma_{\mathbf{C}}$ (ver definição B2.1) definido da seguinte maneira:

$$\Gamma_{\mathbf{C}}^*(\mathbf{x}^*) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{C}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle.$$

B5 - Relação entre funcional Conjugado e hiperplanos separadores.

Sobre o espaço $\Re \times \mathbf{X}$, hiperplanos fechados são representados pela equação na forma: $\mathbf{h}(s, \mathbf{x}^*) = s \cdot r + \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle = k$, onde $s, k \in \Re$ e $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^*$ determinam o hiperplano.

Definindo-se o eixo \Re como vertical, diz-se que um hiperplano é não vertical se intercepta o eixo \Re em um e somente um ponto. O que é equivalente a ter-se na equação que representa-o, $s \neq 0$.

Se a atenção é restrita para hiperplanos não-verticais, pode-se, sem perda de generalidade, considerar somente aqueles funcionais lineares da forma $\mathbf{h}(-1, \mathbf{x}^*)$, o que é equivalente a $-r + \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle = k$

Qualquer hiperplano fechado não-vertical pode então ser obtido pela escolha apropriada de $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^*$.

Para desenvolver uma interpretação geométrica do funcional conjugado, note-se que, quando k varia, as soluções (r, \mathbf{x}) da equação $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle - r = k$, descrevem hiperplanos fechados paralelos em $\Re \times \mathbf{X}$.

O valor $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*)$ é o supremo dos valores de k para o qual o hiperplano intercepta $[\mathbf{f}, \mathbf{C}]$.

Portanto, o hiperplano $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle - r = k$, é um hiperplano suporte de $[\mathbf{f}, \mathbf{C}]$ para $k = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*)$.

Na terminologia da outra seção, $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*)$ é o funcional suporte (definição B2.1) do funcional $\mathbf{h}(-1, \mathbf{x}^*)$ para o conjunto convexo $[\mathbf{f}, \mathbf{C}]$.

O resultado especial aqui é que somente considera-se funcionais da forma $\mathbf{h}(-1, \mathbf{x}^*)$ sobre $\Re \times \mathbf{X}$ e deste modo elimina-se a necessidade de se recorrer a variáveis extras.

Para a aplicação em problemas de otimização, a interpretação geométrica mais importante de funcionais conjugados é que eles medem a distância vertical para o hiperplano suporte.

O hiperplano suporte $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle - r = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*)$, intercepta o eixo vertical, isto é, $\mathbf{x} = \theta$ para $(-\mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*), \theta)$.

Portanto, $-\mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*)$, é a altura vertical do hiperplano acima da origem.

Ver a figura B.16.

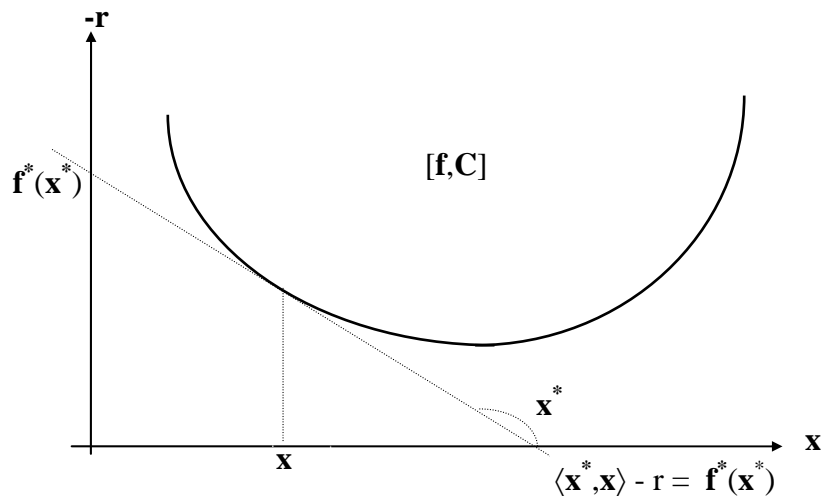


Figura B.16 - Funcional convexo conjugado.

Uma outra interpretação, mais claramente, mostra a dualidade entre $[f^*, C^*]$ e $[f, C]$, em termos da representação dual de um conjunto convexo como uma coleção de pontos ou como a intersecção de semi-espacos.

Dado o ponto, $(k, x^*) \in \mathfrak{R} \times X^*$, considere-se o semi-espaço consistindo de todo $(r, x) \in \mathfrak{R} \times X$, satisfazendo $\langle x^*, x \rangle - r \leq k$.

Então, o conjunto $[f^*, C^*]$ consiste daqueles semi-espacos não verticais que contém o conjunto $[f, C]$. Em particular para $k = f^*(x^*)$ o conjunto $[f^*, C^*]$ passa a consistir no conjunto dos hiperplanos suportes a $[f, C]$.

Nestas condições, $[f^*, C^*]$ é a representação dual de $[f, C]$.

Proposição B5.1:

Seja f um funcional convexo sobre o convexo C em um espaço vetorial X . Se $[f, C]$ é fechado, isto é, é possível definir hiperplanos suportes em pontos do contorno de $[f, C]$, então $[f, C] = [[f^*, C^*]]^*$.

B6 - Funcionais côncavos conjugados.

Não é possível tratar funcionais côncavos, meramente multiplicando-os por -1 e então aplicando a teoria de funcionais convexos, existe uma troca de sinal adicional.

Dado um funcional côncavo g definido sobre um subconjunto convexo D de um espaço vetorial X , define-se:

$$[g, D] = \{(r, x) : x \in D, r \leq g(x)\}.$$

O conjunto $[g, D]$ é convexo e todos os resultados sobre continuidade, pontos interiores, entre outros, já vistos para o caso de funcional convexo tem extensão direta aqui.

A figura B.17 ilustra $[g, D]$.

Definição B6.1:

Seja g um funcional côncavo sobre o conjunto convexo D . O conjugado D^* é definido como:

$$D^* = \{x^* \in X^* : \inf_{x \in D} [\langle x^*, x \rangle - g(x)] > -\infty \};$$

e o funcional g^* conjugado:

$$g^*(x^*) = \inf_{x \in D} [\langle x^*, x \rangle - g(x)];$$

onde D^* é convexo, g^* é côncavo sobre D^* e $[g, D]^* = [g^*, D^*]$.

A interpretação geométrica para funcionais conjugados côncavos é análoga a funcionais conjugados convexos.

O hiperplano $\langle x^*, x \rangle - r = g^*(x^*)$ é suporte ao conjunto convexo $[g, D]$. Assim sendo, $-g^*(x^*)$ é a intersecção deste hiperplano com o eixo vertical.

A figura B.17 vista a seguir ilustra a definição B6.1.

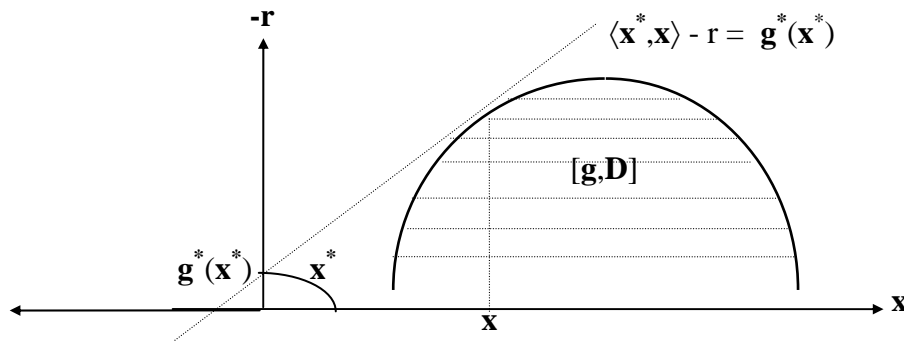


Figura B.17 - Funcional côncavo conjugado.

B7 - Problemas de otimização dual.

Seja f um funcional convexo sobre C e g um funcional côncavo sobre D .
Suponha que $C \cap D \neq \emptyset$ e que se deseja encontrar $\mathbf{x} \in C \cap D$ tal que:

$$\inf_{\mathbf{x} \in C \cap D} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})].$$

O problema pode ser interpretado geometricamente como aquele de encontrar a distância mínima dos conjuntos $[g, D]$ e $[f, C]$.

Também geometricamente, é possível visualizar que esta distância é igual a máxima separação vertical de dois hiperplanos paralelos separando $[g, D]$ e $[f, C]$.

Esta relação entre um dado problema de minimização e outra de maximização equivalente é a generalização do princípio de dualidade para problemas norma-mínimo e funcionais conjugados permitem expressar este princípio algebricamente.

Desde que $-f^*(\mathbf{x}^*)$ é a distância vertical para o hiperplano suporte abaixo de $[f, C]$ e $-g^*(\mathbf{x}^*)$ é a distância vertical para o hiperplano suporte acima de $[g, D]$, então $g^*(\mathbf{x}^*) - f^*(\mathbf{x}^*)$ é a separação vertical dos dois hiperplanos (ver a figura B.18).

O princípio de dualidade é estabelecido com detalhes no seguinte teorema:

Teorema B7.1:

Assumindo que f e g são respectivamente convexo e côncavo sobre C e D em um espaço vetorial \mathbf{X} , que $C \cap D$ contém pontos no interior relativo de C e D , que $[g, D]$ e $[f, C]$ tem interior não vazio e que $\mu = \inf_{\mathbf{x} \in C \cap D} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})]$ é finito então:

$$\mu = \inf_{\mathbf{x} \in C \cap D} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})] = \max_{\mathbf{x}^* \in C^* \cap D^*} [g^*(\mathbf{x}^*) - f^*(\mathbf{x}^*)],$$

onde o máximo da direita é determinado para algum $\mathbf{x}_0^* \in C^* \cap D^*$.

Se o ínfimo da esquerda é determinado para algum $\mathbf{x}_0 \in C \cap D$, então:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in C} [\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0^* \rangle - f(\mathbf{x})] &= \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0^* \rangle - f(\mathbf{x}_0) ; \\ \min_{\mathbf{x} \in D} [\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0^* \rangle - g(\mathbf{x})] &= \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0^* \rangle - g(\mathbf{x}_0) ; \end{aligned}$$

A figura B.18 ilustra os resultados da seção B7.

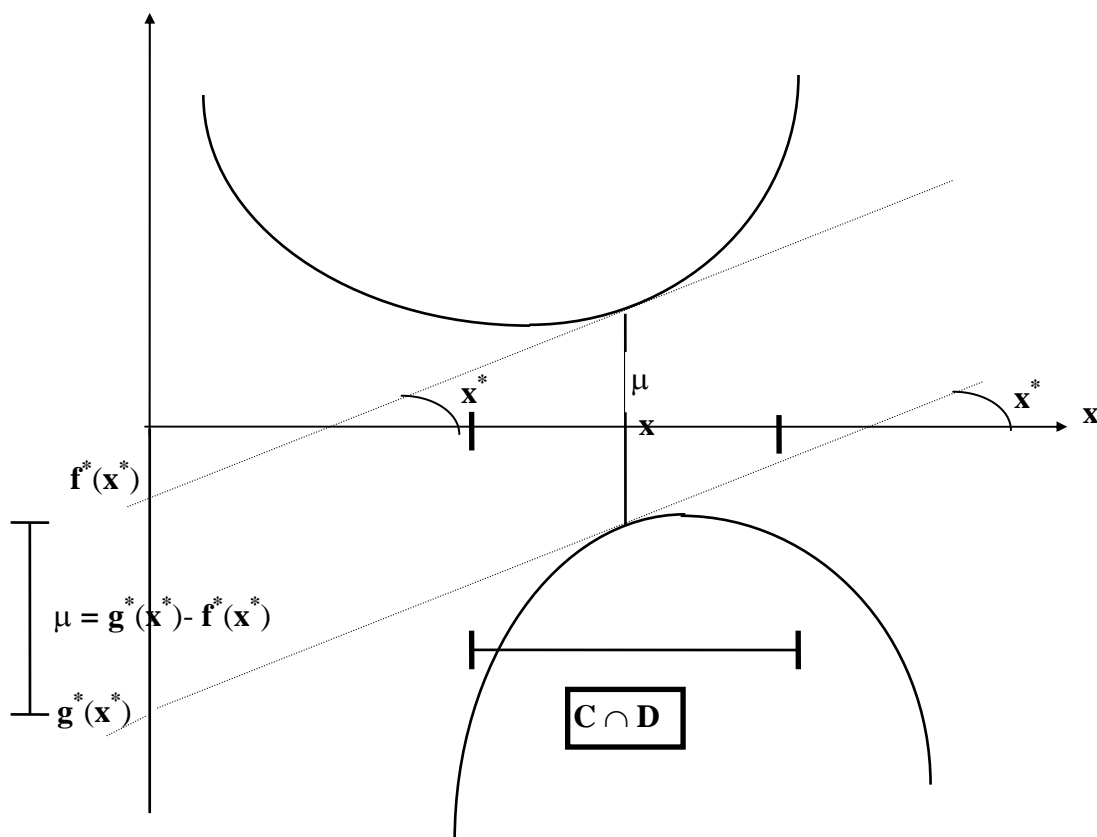


Figura B.18 - Distância mínima vertical entre dois hiperplanos.

Abaixo é dada a caracterização de subdiferenciação de funcionais, que vem generalizar a minimização de funcionais convexos mesmo no caso não diferenciável

B8 - Relação entre subgradientes e transformada de Legendre.

Pretende-se estabelecer a correlação entre elementos \mathbf{f}^* do dual \mathbf{X}^* e sub-gradientes do funcional \mathbf{f} (convexo ou côncavo).

Definição B8.1: subgradiente de \mathbf{f} .

Seja \mathbf{X} espaço vetorial normado e \mathbf{X}^* seu dual.

Considerando $\mathbf{C} \subset \mathbf{X}$, convexo, $\mathbf{C}^* \subset \mathbf{X}^*$ e \mathbf{f} um funcional convexo definido em \mathbf{C} , com valores finitos em \mathbf{C} e ∞ fora de \mathbf{C} . Então um elemento $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}^*$ é dito ser um subgradiente de \mathbf{f} para o ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ se:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C},$$

(\mathbf{x}^* é o declive de um minorante afim de \mathbf{f} exato no ponto \mathbf{x}).

O conjunto:

$$\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{x}^* \in \mathbf{C}^* \text{ tal que } \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}, \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle \},$$

é o conjunto de subgradientes de \mathbf{f} para o ponto \mathbf{x} .

Se \mathbf{f} é diferenciável em \mathbf{x} então $\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Proposição B8.1:

Sejam f , f_1 e f_2 definidos de \mathbf{X} em $\overline{\mathfrak{R}}$, funcionais convexos e próprios, então é válido que:

i) $\partial f(\mathbf{x})$ é um conjunto convexo e fechado em \mathbf{X}^* , $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}(f)$;

ii) $\partial(\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda \partial f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}(f)$ e $\lambda \in \mathfrak{R}^+$;

iii) $\partial(f_1+f_2)(\mathbf{x}) \subset \partial f_1(\mathbf{x}) + \partial f_2(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}(f_1+f_2)$;

além disso a igualdade em iii) é válida se um deles é contínuo ou diferenciável.

De acordo com a definição B4.1, a função conjugada de Fenchel (transformada de Legendre) f^* é definida em \mathbf{X}^* por:

$$f^*(\mathbf{x}^*) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{X}} [\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}^* \rangle - f(\mathbf{u})],$$

de tal forma que, a seguinte desigualdade se verifica se f é um funcional convexo:

$$f^*(\mathbf{x}^*) + f(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle, \quad \forall \mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^* \text{ e } \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

Além disso, \mathbf{x} e \mathbf{x}^* são ditos conjugados para f e f^* se a igualdade se verifica:

$$f^*(\mathbf{x}^*) + f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle,$$

ou, equivalentemente: $\mathbf{x}^* \in \partial f(\mathbf{x})$ e $\mathbf{x} \in \partial f^*(\mathbf{x}^*)$.

Desde que $\partial f(\mathbf{x})$ é convexo, a seguinte desigualdade se verifica:

$$\langle \mathbf{z}^* - \mathbf{x}^*, \mathbf{z} - \mathbf{x} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{z}^* \in \partial f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x}^* \in \partial f(\mathbf{x}) \text{ e } \forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbf{X}.$$

Considerando-se o espaço vetorial euclideo então, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^*$.

Logo, $f^*(\mathbf{x}^*) + f(\mathbf{x}) \geq \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^*$, e a igualdade,

$$f^*(\mathbf{x}^*) + f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^*,$$

só é válida em $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ se e somente se, $\mathbf{x}^* \in \partial f(\mathbf{x})$ e $\mathbf{x} \in \partial f^*(\mathbf{x}^*)$.

A interpretação geométrica de subdiferenciais, funcionais conjugados e hiperplanos suportes é dada nas figuras B.19a e B.19b, vistas a seguir.

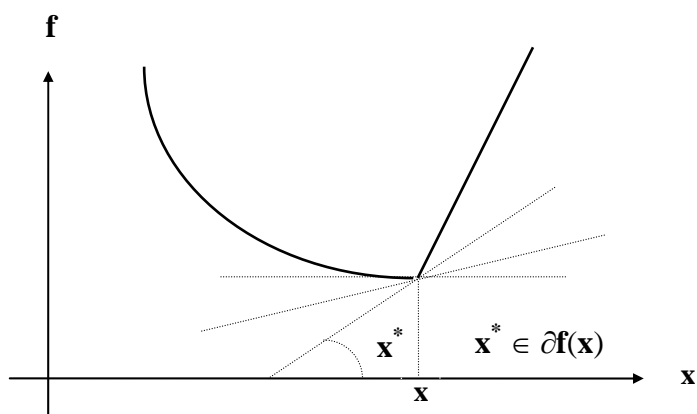


Figura B.19a) - Hiperplano suporte em um ponto em que f é não diferenciável.

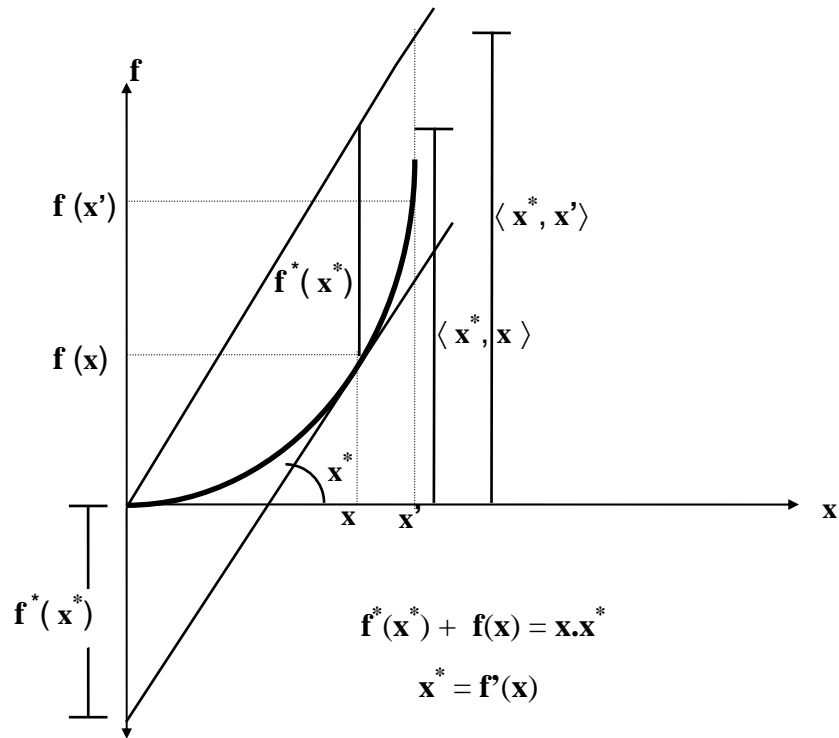


Figura B.19b) - Interpretação geométrica de subdiferenciais, funcionais conjugados e hiperplanos suportes para f diferenciável.

Definição B8.2: Cone normal externo N_C para o convexo C .

O cone normal externo de um conjunto convexo C para um ponto $\mathbf{x} \in C$ é definido como:

$$N_C(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}^* \text{ tal que } \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \leq 0, \forall \mathbf{y} \in C\},$$

onde \mathbf{X}^* é o espaço dual de \mathbf{X} (definição A1.4). Veja a figura B.20.

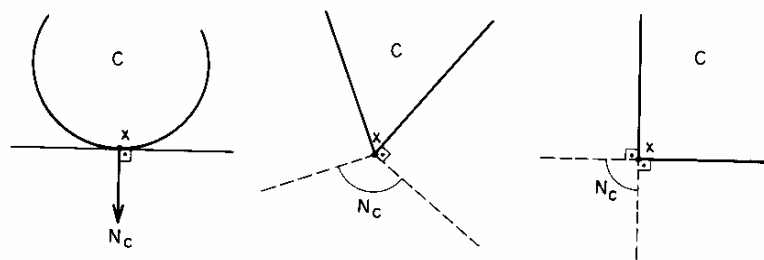


Figura B.20 - Cone normal externo de alguns conjuntos convexos.

Proposição B8.2:

O subdiferencial convexo de Γ_C , onde Γ_C é a função indicatriz do conjunto convexo C (ver definição B.3.3) para o ponto $\mathbf{x} \in C$ é o cone normal externo N_C em \mathbf{x} .

Proposição B8.3:

O domínio efetivo de Γ_C^* , denotado por $D(\Gamma_C^*)$, onde Γ_C^* é o funcional conjugado de Γ_C (ver definição B4.2) é o cone convexo N_C consistindo de todos os vetores normais externos para C .

B9 - Caracterização de extremos para funcionais diferenciáveis.

Seja \mathbf{X} um espaço vetorial normado, $\mathbf{C} \subset \mathbf{X}$ um subconjunto não vazio. Considere um funcional $f: \mathbf{X} \rightarrow \mathfrak{R}$ diferenciável $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}$ e que atinja seu mínimo em \mathbf{C} :

Teorema B9.1:

Se $\mathbf{C} \subset \mathbf{X}$ for convexo, a caracterização do ponto de mínimo pode ser feita pela seguinte inequação variacional:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C};$$

onde $\nabla f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}^*$, denota o operador gradiente do funcional f no ponto \mathbf{x} .

Teorema B9.2:

Se $\mathbf{C} \subset \mathbf{X}$ for um conjunto com interior não vazio e se o ponto de mínimo $\mathbf{x}_0 \in \text{int } \mathbf{C}$, a caracterização pode ser feita pela equação:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Proposição B9.1:

Se \mathbf{x} é um elemento que minimiza um funcional próprio $f: \mathbf{X} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, então, tem-se que $0 \in \hat{\partial} f(\mathbf{x})$, e nesse caso a solução do problema de minimização é caracterizada por:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}.$$

Proposição B9.2:

Se o funcional $f: \mathbf{C} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, é a soma dos funcionais $f_1: \mathbf{C}_1 \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ e $f_2: \mathbf{C}_2 \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, ambos convexos e próprios, sendo f_1 diferenciável em \mathbf{C} , f_2 não diferenciável, então vale para a solução $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ do problema de minimização de f :

$$\langle \nabla f_1(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle + f_2(\mathbf{y}) - f_2(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}.$$

Proposição B9.3:

Um funcional $f: \mathbf{C} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, $\mathbf{C} \subset \mathbf{X}$, convexo, próprio e inferiormente semicontínuo, pode ter seu domínio estendido para todo o espaço \mathbf{X} (teorema A1.2 de Hahn-Banach) sem perder nenhuma dessas propriedades quando a ele é atribuído o valor $+\infty$ para todos os elementos fora de \mathbf{C} , isto é, definindo-se $\bar{f}: \mathbf{X} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ tal que:

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbf{C} \\ +\infty & \text{se } \mathbf{x} \notin \mathbf{C} \end{cases}.$$

Baseado na proposição B9.2 e B9.3 é válida a proposição seguinte.

Proposição B9.4:

Se o funcional $f: \mathbf{C} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, $\mathbf{C} \subset \mathbf{X}$, é a soma dos funcionais $f_1: \mathbf{C}_1 \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ e $f_2: \mathbf{C}_2 \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, ambos convexos e próprios, sendo f_1 diferenciável em \mathbf{C} , f_2 não diferenciável, e se f_1 e f_2 são estendidos para todo o espaço \mathbf{X} , gerando respectivamente $\bar{f}_1: \mathbf{X} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ e $\bar{f}_2: \mathbf{X} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$ análogas à \bar{f} da proposição B9.3, então vale para a solução $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ do problema de minimização de f :

$$\langle \nabla \bar{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle + \bar{f}_2(\mathbf{y}) - f_2(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}.$$

B10- Problemas primais e duais.

Todos os resultados reunidos nessa seção podem ser encontrados em [Ekeland e Teman, 1976] e em [Kubrusly, 1986].

Definição B10.1: Problemas primais e duais.

Seja \mathbf{X} um espaço vetorial normado e \mathbf{X}^* seu dual. Considere um funcional real qualquer $\mathbf{F}: \mathbf{X} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$. Chama-se primal e se denota por (P) ao problema de encontrar o ínfimo (ou mínimo) de \mathbf{F} em \mathbf{X} , isto é:

$$\inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (P)$$

Condições suficientes de existência de solução para (P) já vistas no teorema B3.2 é que \mathbf{F} seja convexa, i.s.c. e coerciva.

Definição B10.2: Problema primal perturbado.

Sejam \mathbf{Y} e \mathbf{Y}^* dois espaços vetoriais normados e considere o funcional $\phi: \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, com a propriedade que $\phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$. Chama-se de primal perturbado e denota-se por (P_p) ao problema de encontrar o ínfimo de $\phi(\cdot, \mathbf{y})$ em \mathbf{X} , isto é,

$$\inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}. \quad (P_p)$$

Definição B10.3: Problema dual.

Dado o problema primal (P) e o problema primal perturbado (P_p) pode-se definir o problema dual (D) de (P) . Para isto, seja $\phi^*: \mathbf{X}^* \times \mathbf{Y}^* \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, a função conjugada de ϕ .

O problema de encontrar o seguinte supremo:

$$\sup_{\mathbf{y}^* \in \mathbf{Y}^*} \{-\phi^*(0, \mathbf{y}^*)\}; \quad (D)$$

é chamado problema dual (D) de (P) com respeito a ϕ .

Proposição B10.1:

A seguinte relação entre o problema primal e o seu problema dual é válida:

$$-\infty \leq \sup_{\mathbf{y}^* \in \mathbf{Y}^*} \{-\phi^*(0, \mathbf{y}^*)\} \leq \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq +\infty.$$

Proposição B10.2: Existência de solução para (D) .

Se existe solução finita para (P) , se ϕ é convexo e se existe um elemento $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ tal que $\mathbf{h}: \mathbf{Y} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, tal que $\mathbf{h}(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$ é contínua em $\mathbf{y} = 0$, então a função $\mathbf{g}: \mathbf{Y}^* \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, tal que $\mathbf{g}(\mathbf{y}^*) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)$ é finita e subdiferenciável em $\mathbf{y}^* = 0$. Nestas condições, $\exists \mathbf{y}_0^* \in \mathbf{Y}^*$ solução

de (D) e além disso é válido que:

- i) $\phi(\mathbf{x}_0, 0) = -\phi^*(0, \mathbf{y}_0^*)$;
- ii) $(0, \mathbf{y}_0^*) \in \partial\phi(\mathbf{x}_0, 0)$.

B11- Lagrangeanos e pontos de sela.

Definição B11.1: *Função Lagrangeana.*

A função denotada por $L: \mathbf{X} \times \mathbf{Y}^* \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}$, tal que:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = - \sup_{\mathbf{y}^* \in \overline{\mathbf{Y}^*}} [\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{y} \rangle - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})], \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \forall \mathbf{y}^* \in \mathbf{Y}^*,$$

é chamada de Lagrangeana do problema (P) (ou de (P_p)) relativa a ϕ .

Proposição B11.1:

O funcional $L_{\mathbf{y}^*}: \mathbf{Y}^* \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}, \{ \mathbf{y}^* \rightarrow L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \}$ para $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, fixo, é côncavo e superiormente semi-contínuo (s.s.c.). Além disso, se ϕ é convexo então o funcional $L_{\mathbf{x}}: \mathbf{X} \rightarrow \overline{\mathfrak{R}}, \{ \mathbf{x} \rightarrow L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \}$ para $\mathbf{y}^* \in \mathbf{Y}^*$, fixo é convexo, não necessariamente i.s.c..

Definido o lagrangeano, vale a seguinte representação para o problema dual (D) :

$$\sup_{\mathbf{y}^* \in \overline{\mathbf{Y}^*}} \{-\phi^*(0, \mathbf{y}^*)\} = \sup_{\mathbf{y}^* \in \overline{\mathbf{Y}^*}} \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*),$$

Justificativa:

$$\begin{aligned} \phi^*(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) &= \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \\ \mathbf{y} \in \mathbf{Y}}} [\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{y} \rangle - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} [\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle + \sup_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{y} \rangle - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} [\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle - L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)] \Rightarrow -\phi^*(0, \mathbf{y}^*) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*). \quad \square \end{aligned}$$

No caso em que ϕ é convexo e i.s.c., vale também a seguinte representação para o problema primal (P) :

$$\inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} F(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \sup_{\mathbf{y}^* \in \overline{\mathbf{Y}^*}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*).$$

A proposição dada a seguir é sempre válida para espaços vetoriais normados reais:

Proposição B11.2:

Se a função L é definida em $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}^*$ com valores reais, então é válido que:

$$\sup_{\mathbf{y}^* \in \overline{\mathbf{Y}^*}} \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \sup_{\mathbf{y}^* \in \overline{\mathbf{Y}^*}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*).$$

Pode-se então relacionar o estudo dos problemas variacionais em dualidade com o problema de encontrar pontos de sela da função lagrangeana.

Definição B11.2: *Pontos de sela.*

O elemento $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}^*) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}^*$ é dito um ponto de sela para L se vale a relação:

$$L(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}^*) \leq L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}^*) \leq L(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}^*), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \forall \mathbf{y}^* \in \mathbf{Y}^*.$$

Proposição B11.3:

Se ϕ é convexo e i.s.c., $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}^*)$ é um ponto de sela de L se e somente se:

- i) $\bar{\mathbf{x}}$ é solução de (P) e $\bar{\mathbf{y}}^*$ é solução de (D) ;
- ii) $\inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \phi(\mathbf{x}, 0) = \phi(\bar{\mathbf{x}}, 0) = \sup_{\mathbf{y}^* \in \overline{\mathbf{Y}^*}} \{-\phi^*(0, \mathbf{y}^*)\} = -\phi^*(0, \bar{\mathbf{y}}^*)$.

Proposição B11.4:

L possui um ponto de sela (\bar{x}, \bar{y}^*) se e somente se:

$$\max_{y^* \in Y^*} \inf_{x \in X} L(x, y^*) = \min_{x \in X} \sup_{y^* \in Y^*} L(x, y^*).$$

Proposição B11.5:

Se existe $\bar{x} \in X$, $\bar{y}^* \in Y$ e $\alpha \in \mathfrak{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} L(\bar{x}, y^*) &\leq \alpha, \forall y^* \in Y^*; \\ L(x, \bar{y}^*) &\geq \alpha, \forall x \in X; \end{aligned}$$

então (\bar{x}, \bar{y}^*) é um ponto de sela de L se vale:

$$\alpha = \inf_{x \in X} \sup_{y^* \in Y^*} L(x, y^*) = \sup_{y^* \in Y^*} \inf_{x \in X} L(x, y^*).$$

Hipóteses sobre a função L a serem utilizadas nas próximas proposições.

Admitindo-se que:

i) $C \subset X$ é convexo, fechado, não vazio; (B.1)

ii) $C^* \subset Y^*$ é convexo, fechado, não vazio; (B.2)

e que $L: C \times C^* \rightarrow \mathfrak{R}$ satisfaça:

iii) $\forall x \in C$, $\{y^* \rightarrow L(x, y^*)\}$ é côncava s.s.c.; (B.3)

iv) $\forall y^* \in C^*$, $\{x \rightarrow L(x, y^*)\}$ é convexa i.s.c.; (B.4)

pode-se enunciar as seguintes proposições.

Proposição B11.6:

Sobre as hipóteses (B.1), (B.2), (B.3) e (B.4) são válidas:

- i) o conjunto $C_0 \times C_0^*$ de pontos de sela para L é convexo;
- ii) se $\{y^* \rightarrow L(x, y^*)\}$ é estritamente côncava, $\forall x \in C_0$ então C_0^* contém ao menos um ponto e se $\{x \rightarrow L(x, y^*)\}$ é estritamente convexa, $\forall y^* \in C_0^*$, então C_0 contém ao menos um ponto.

Proposição B11.7: *Caracterização de pontos de sela para funcionais diferenciáveis.*

Assumindo-se que as hipóteses (B.1), (B.2), (B.3) e (B.4) são válidas e que:

- i) $\forall x \in C$, $\{y^* \rightarrow L(x, y^*)\}$ é diferenciável em C ;
- ii) $\forall y^* \in C^*$, $\{x \rightarrow L(x, y^*)\}$ é diferenciável em C^* ;

então $(\bar{x}, \bar{y}^*) \in C \times C^*$ é um ponto de sela de L se e somente se,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}^*), x - \bar{x} \right\rangle &\geq 0, \forall x \in C; \\ \left\langle \frac{\partial L}{\partial y^*}(\bar{x}, \bar{y}^*), y - \bar{y}^* \right\rangle &\leq 0, \forall y^* \in C^*. \end{aligned}$$

Proposição B11.8: *Existência de pontos de sela.*

Considerando-se as hipóteses (B.1), (B.2), (B.3) e (B.4) e também que:

$$\mathbf{C} \text{ é limitado e } \exists \mathbf{y}_0^* \in \mathbf{C}^* \text{ tal que } \lim_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbf{C} \\ \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0^*) = +\infty;$$

ou

$$\mathbf{C}^* \text{ é limitado e } \exists \mathbf{x}_0 \in \mathbf{C} \text{ tal que } \lim_{\substack{\mathbf{y}^* \in \mathbf{C}^* \\ \|\mathbf{y}^*\| \rightarrow +\infty}} L(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}^*) = -\infty;$$

então L possui um ponto de sela em $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^*$ e

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \sup_{\mathbf{y}^* \in \mathbf{Y}^*} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \max_{\mathbf{y}^* \in \mathbf{Y}^*} \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*).$$

Para se conhecer mais resultados e também as demonstrações das proposições acima sobre problemas primais e duais, e Lagrangeanos e pontos de sela, indica-se pesquisar [Ekeland e Temam, 1976] e [Kubrusly, 1986].

Apêndice C - Alguns Conceitos sobre Análise Não-Convexa.

Esse apêndice propõe alguns resultados da Análise Não-Convexa, que são utilizados diretamente na seção IV.4 do capítulo IV. Eles estão baseados naqueles resultados encontrados em [Clarke, 1983] e [Panagiotopoulos, 1985].

Viu-se na seção IV.4 que, se existir um potencial geral que rege modelos que acoplam a existência do dano, esse potencial é não-convexo e no caso particular do modelo linearizado, esse é resultado da soma de potenciais convexos com potenciais côncavos.

Os resultados a serem vistos exploram a particularidade dos modelos propostos serem regidos por funcionais não convexas mas Lipschitzianos e nesse contexto inicia-se esse apêndice definindo-se a condição de Lipschitz.

C1- Funções Lipschitzianas.

Definição C.1: *A condição de Lipschitz.*

Seja \mathbf{Y} um espaço de Banach e $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$. Uma função $f: \mathbf{Y} \rightarrow \Re$ é dita satisfazer a *Condição de Lipschitz* (em \mathbf{Y}) desde que, para algum escalar não negativo K , tem-se que:

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{y}')| \leq K \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\|; \quad (\text{C.1})$$

para todos os pontos $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbf{Y}$.

Essa condição é também conhecida como *Condição de Lipschitz de rank K*. Diz-se que f é Lipschitz de rank K próxima a \mathbf{y} , se para algum $\delta > 0$, f satisfaz a condição de Lipschitz em uma δ -vizinhança de \mathbf{y} , ou seja, no conjunto $\mathbf{y} + \delta\mathbf{B}$, onde \mathbf{B} representa uma bola aberta centrada em \mathbf{y} , de raio δ .

Uma função Lipschitziana, pode não ser diferenciável em algum ponto $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ e tem a peculiaridade de seu gráfico não ser muito “íngreme”. Nos pontos em que a função não admite a derivada direcional no sentido clássico é definido um conceito mais geral de derivação dada a seguir.

C2 - A derivada direcional generalizada.

Definição C.2: *A derivada direcional generalizada.*

Seja f lipschitziana próxima a um ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ e seja $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$. A *derivada direcional generalizada* de f para \mathbf{x} na direção de \mathbf{v} , denotada por $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ é definida por:

$$f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \limsup_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ t \rightarrow 0}} \frac{f(\mathbf{y} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{y})}{t}; \quad (\text{C.2})$$

onde $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$ e t é um escalar positivo.

Essa definição não pressupõe a existência de qualquer limite, desde que nela está envolvida somente limites superiores, isto é, ela envolve somente o comportamento de f em pontos próximos a \mathbf{x} , o que a diferencia da tradicional definição de derivada direcional, a qual no ponto analisado o quociente da diferença varia.

A derivada direcional generalizada tem as propriedades vistas na proposição a seguir.

Proposição C.1:

Seja f Lipschitz de rank K próxima a $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$. Então,

- i) A função $\mathbf{v} \rightarrow f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ é finita, homogênea positiva, sub-aditiva em \mathbf{x} e satisfaz,

$$|f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})| \leq K \|\mathbf{v}\|;$$
- ii) $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ é superiormente semi-contínua como função de (\mathbf{x}, \mathbf{v}) e, como uma função de \mathbf{v} é Lipschitz de rank K sobre \mathbf{X} ;
- iii) $f^0(\mathbf{x}, -\mathbf{v}) = (-f)^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$.

Justificativa:

Devido a condição de Lipschitz, o valor absoluto do quociente da diferença na definição de $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ é limitado por $K \|\mathbf{v}\|$ quando \mathbf{y} está suficientemente próximo a \mathbf{x} e t suficientemente próximo de zero. Daí, segue a propriedade $|f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})| \leq K \|\mathbf{v}\|$.

O fato que $f^0(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{v}) = \alpha f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ para qualquer $\alpha > 0$ é imediato e então f^0 é homogênea positiva.

A sub-aditividade, para \mathbf{x} , \mathbf{v} e $\mathbf{w} \in \mathbf{X}$, segue de:

$$\begin{aligned} f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \limsup_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ t \rightarrow 0}} \frac{f(\mathbf{y} + t\mathbf{v} + t\mathbf{w}) - f(\mathbf{y})}{t} \leq \\ &\leq \limsup_{\substack{\mathbf{y} + t\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{x} \\ t \rightarrow 0}} \frac{f(\mathbf{y} + t\mathbf{v} + t\mathbf{w}) - f(\mathbf{y} + t\mathbf{w})}{t} + \limsup_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ t \rightarrow 0}} \frac{f(\mathbf{y} + t\mathbf{w}) - f(\mathbf{y})}{t}; \end{aligned}$$

desde que o limite superior da soma é limitado acima pela soma dos limites superiores.

Logo, $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) \leq f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + f^0(\mathbf{x}, \mathbf{w})$, o que estabelece a sub-aditividade.

Logo, a propriedade i) está satisfeita.

Para demonstrar que f^0 é superiormente semi-contínua em (\mathbf{x}, \mathbf{v}) , considere agora as sequências $\{\mathbf{x}_i\}$ e $\{\mathbf{y}_i\}$ convergindo para \mathbf{x} e \mathbf{v} respectivamente.

Para cada i , pela definição de limite superior, existe \mathbf{y}_i em \mathbf{X} e t_i tal que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i\| + t_i &< \frac{1}{i}; \\ f^0(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i) - \frac{1}{i} &\leq \frac{f(\mathbf{y}_i + t_i \mathbf{v}_i) - f(\mathbf{y}_i)}{t_i} = \frac{f(\mathbf{y}_i + t_i \mathbf{v}_i) - f(\mathbf{y}_i)}{t_i} + \frac{f(\mathbf{y}_i + t_i \mathbf{v}_i) - f(\mathbf{y}_i + t_i \mathbf{v}_i)}{t_i} \end{aligned}$$

Note que esse último termo é limitado em magnitude por $K \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}\|$, em vista da condição de Lipschitz. Para $i \rightarrow \infty$ tem-se que:

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} f^0(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i) \leq f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

Logo, f^0 é superiormente semicontínua em (\mathbf{x}, \mathbf{v}) .

Para demonstrar que f^0 é Lipschitz de rank K em \mathbf{v} , considere que, para \mathbf{v} e $\mathbf{w} \in \mathbf{X}$ que:

$$f(\mathbf{y} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{y} + t\mathbf{w}) - f(\mathbf{y}) + K \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| t,$$

para \mathbf{y} próximo de \mathbf{x} e t tendendo a zero.

Dividindo por t e tomando o limite superior para $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$, quando $t \rightarrow 0$, tem-se:

$$f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \leq f^0(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + K \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|.$$

Logo, o ítem ii) está provado.

Para provar iii), calcula-se:

$$f^0(\mathbf{x}, -\mathbf{v}) = \lim_{\substack{\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \\ t \rightarrow 0}} \sup \frac{f(\tilde{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f(\tilde{\mathbf{x}})}{t} = \lim_{\substack{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{x} \\ t \rightarrow 0}} \sup \frac{(-f)(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) - (-f)(\mathbf{u})}{t} = (-f)^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}),$$

para $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{x}} - t\mathbf{v}$.

E a proposição está provada. \square

C3 - O gradiente generalizado.

O teorema de Hahn-Banach garante que qualquer funcional homogêneo positivo e sub-aditivo majora algum funcional linear sobre \mathbf{X} . Nessas condições, existe ao menos um funcional linear limitado $\xi : \mathbf{X}^* \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que, para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$, tem-se $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq \xi(\mathbf{v})$, onde \mathbf{X}^* é o espaço dual algébrico de \mathbf{X} , composto de funcionais lineares contínuos sobre \mathbf{X} .

Lembrando-se que foi denotado $\xi(\mathbf{v}) = \langle \xi, \mathbf{v} \rangle$ no apêndice A, o gradiente generalizado de f para \mathbf{x} , denotado por $\bar{\partial}f(\mathbf{x})$ é definido abaixo.

Definição C.3: O gradiente generalizado de f .

$$\bar{\partial}f(\mathbf{x}) = \{\xi \in \mathbf{X}^* \text{ tal que } f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq \langle \xi, \mathbf{v} \rangle, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}\}; \quad (\text{C.3})$$

tal que, $\|\xi\|_{\mathbf{X}^*}$ denotando a norma de ξ em \mathbf{X}^* , é dada por,

$$\|\xi\|_{\mathbf{X}^*} = \sup\{\langle \xi, \mathbf{v} \rangle : \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \|\mathbf{v}\| \leq 1\}. \quad (\text{C.4})$$

As propriedades do gradiente generalizado definido em (C.3) são dadas na seguinte proposição.

Proposição C.2:

Seja f Lipschitz de rank K próxima a $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$. Então,

- i) $\bar{\partial}f(\mathbf{x})$ é um conjunto não vazio, convexo, subconjunto compacto fracamente estrela de \mathbf{X}^* e $\|\xi\|_{\mathbf{X}^*} \leq K$ para todo $\xi \in \bar{\partial}f(\mathbf{x})$;
- ii) Para todo \mathbf{v} em \mathbf{X} , tem-se que,

$$f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \max\{\langle \xi, \mathbf{v} \rangle : \xi \in \bar{\partial}f(\mathbf{x})\}. \quad (\text{C.5})$$

Justificativa:

A justificativa de i) vem da proposição C.1 e do teorema de Alaoglu (ver [Clarke, 1983]).

Justificativa de ii):

Suponha, por contradição, que para algum $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$, $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ excede o máximo dado em (C.5), já que $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ não pode ser menor que o máximo pela definição de $\bar{\partial}f(\mathbf{x})$. De acordo com o teorema A1.2 de Hahn-Banach, existe um funcional linear $\xi \in \mathbf{X}^*$ majorado por $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ e coincidindo com f^0 em \mathbf{v} . Segue que $\xi \in \bar{\partial}f(\mathbf{x})$, e então, $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) > \langle \xi, \mathbf{v} \rangle = f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, o que é uma contradição. Logo, ii) se verifica. \square

Exemplo:

Para ilustrar o conceito de gradiente generalizado, calculará-se a seguir o gradiente generalizado da função valor absoluto no campo real, $\mathbf{X} = \mathfrak{R}$ e $\mathbf{f}: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$.

Nesse caso \mathbf{f} é Lipschitz, pela desigualdade triangular.

Se x é estritamente positivo, calcula-se:

$$\mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ t \rightarrow 0}} \sup \frac{\mathbf{y} + t\mathbf{v} - \mathbf{y}}{t} = \mathbf{v};$$

tal que, $\bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é o conjunto de números ξ satisfazendo $\mathbf{v} \geq \xi \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathfrak{R}$, que se reduz ao conjunto unitário $\bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{1\}$. Analogamente, $\bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{-1\}$ se $x < 0$.

O último caso a ser analisado é aquele tal $x = 0$. Nesse caso, encontra-se:

$$\mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{se } \mathbf{v} \geq 0 \\ -\mathbf{v} & \text{se } \mathbf{v} < 0 \end{cases};$$

ou seja, $\mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = |\mathbf{v}|$.

Portanto, $\bar{\partial} \mathbf{f}(0)$ consiste de $\xi \in \mathfrak{R}$ satisfazendo, $|\mathbf{v}| \geq \xi \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathfrak{R}$, ou seja, $\bar{\partial} \mathbf{f}(0) = [-1, 1]$.

Proposição C.3:

Seja \mathbf{f} Lipschitz de rank K próxima a $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$. Então, valem as propriedades:

i) *Multiplicação por escalar:*

Para qualquer escalar α , tem-se que :

$$\bar{\partial}(\alpha \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \alpha \bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (\text{C.6})$$

Justificativa:

Note que, se \mathbf{f} é Lipschitz então $\alpha \mathbf{f}$ o é.

Se α é não negativo, $(\alpha \mathbf{f})^0 = \alpha \mathbf{f}^0$ e segue (C.6).

Se α é negativo, escolha $\alpha = -1$. Um elemento $\xi \in \mathbf{X}^*$ pertence para $\bar{\partial}(-\mathbf{f})(\mathbf{x})$ se e somente se, $-\mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq \langle \xi, \mathbf{v} \rangle$ para todo \mathbf{v} , o que é equivalente a $-\xi \in -\bar{\partial}(\mathbf{f})(\mathbf{x})$.

Portanto, $\xi \in \bar{\partial}(-\mathbf{f})(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \xi \in -\bar{\partial}(\mathbf{f})(\mathbf{x})$. □

ii) *Subdiferencial generalizado da soma:*

Seja $\mathbf{g}: \mathbf{X} \rightarrow \mathfrak{R}$, Lipschitz de rank K próxima a $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, então:

$$\bar{\partial}(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{x}) \subset \bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \bar{\partial} \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (\text{C.7})$$

Justificativa:

Devido à propriedade de máximo ou supremo, tem-se das equações (C.3) e (C.5) que,

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 \in \bar{\partial}(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{x}) &\Leftrightarrow \\ \langle \xi_1 + \xi_2, \mathbf{v} \rangle \leq (\mathbf{f} + \mathbf{g})^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= \max\{ \langle \xi_1 + \xi_2, \mathbf{v} \rangle : \xi_1 + \xi_2 \in \bar{\partial}(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{x}) \} \leq \\ \max\{ \langle \xi_1, \mathbf{v} \rangle : \xi_1 \in \bar{\partial}(\mathbf{f})(\mathbf{x}) \} &+ \max\{ \langle \xi_2, \mathbf{v} \rangle : \xi_2 \in \bar{\partial}(\mathbf{g})(\mathbf{x}) \} \leq \\ \leq \mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \mathbf{g}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &\Leftrightarrow \xi_1 + \xi_2 \in \bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \bar{\partial} \mathbf{g}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Portanto, $\bar{\partial}(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{x}) \subset \bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \bar{\partial} \mathbf{g}(\mathbf{x})$. □

Essa proposição é válida também para um somatório de n subdiferenciais.

iii) *Extremo local:*

Se f assume um mínimo ou máximo local em \mathbf{x} , então:

$$0 \in \bar{\partial}f(\mathbf{x}). \quad (\text{C.8})$$

Justificativa:

Em vista de i), $\bar{\partial}(-f)(\mathbf{x}) = -\bar{\partial}f(\mathbf{x})$, é suficiente provar a proposição quando \mathbf{x} é um mínimo local. Mas nesse caso é óbvio que para qualquer $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$, tem-se $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq 0$.

Portanto, $\xi = 0$ pertence a $\bar{\partial}f(\mathbf{x})$. \square

Além disso, se f é convexa (respectivamente côncava e limitada inferiormente em uma vizinhança de $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$), então,

$$\bar{\partial}f(\mathbf{x}) = \partial f(\mathbf{x}); \text{ (respectivamente } \bar{\partial}f(\mathbf{x}) = -\partial(-f)(\mathbf{x}) \text{);} \quad (\text{C.9})$$

para todo \mathbf{x} onde f é finita, onde ∂f é o conjunto de subgradientes visto na definição B8.1.

Se f é diferenciável, em \mathbf{x} , então é válido que,

$$\bar{\partial}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}); \quad (\text{C.10})$$

ou seja, existe um único $\xi \in \bar{\partial}f(\mathbf{x})$ tal $\xi = \nabla f(\mathbf{x})$.

Derivadas Clássicas.

Seja $F: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$, onde \mathbf{X} e \mathbf{Y} são dois espaços de Banach.

A derivada direcional usual de F para $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, na direção de $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$ é:

$$F'(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - F(\mathbf{x})}{t}; \quad (\text{C.11})$$

quando (C.11) é limitada.

Definição C.4: *A derivada de Gâteaux, Fréchet e Hadamard.*

F é dita ser Gâteaux diferenciável para \mathbf{x} , se $F'(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ existe e é igual a $\langle DF(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle$, onde $DF(\mathbf{x})$ pertence ao conjunto de funcionais lineares $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \subset \mathbf{X}^*$.

Isso é equivalente a dizer que o quociente da diferença converge para cada \mathbf{v} de tal forma que,

$$F'(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - F(\mathbf{x})}{t} = \langle DF(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle \quad (\text{C.12})$$

e que a convergência é uniforme com respeito a \mathbf{v} em conjuntos finitos.

Se na definição anterior a palavra *finitos* é trocada por *limitados* então a derivada direcional é dita de Fréchet. Se for trocada por *compactos* então a derivada direcional é dita de Hadamard. Quando $\mathbf{X} = \mathfrak{R}^n$, a diferenciabilidade de Hadamard e Fréchet são equivalentes.

Quando F é Lipschitziana em uma vizinhança de \mathbf{x} , então, a diferenciabilidade de Hadarmard e Gâteaux são equivalentes.

Definição C.5: *Diferenciabilidade estrita.*

F admite uma derivada estrita para \mathbf{x} , desde que para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$, se verifique:

$$\mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{\substack{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x} \\ t \rightarrow 0}} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}' + t\mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}')}{t} = \langle D_s \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle \quad (\text{C.13})$$

e desde que, a convergência é uniforme para \mathbf{v} em conjuntos compactos, que é uma condição imediata se \mathbf{F} é Lipschitz próxima de \mathbf{x} .

Note que essa é uma derivada estrita do tipo Hadamard.

Proposição C.4:

São equivalentes as afirmações:

- i) \mathbf{F} é estritamente diferenciável para \mathbf{x} e $D_s \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \xi$, $\xi \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$;
- ii) \mathbf{F} é Lipschitz próxima a \mathbf{x} e para cada \mathbf{v} em \mathbf{X} tem-se:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x} \\ t \rightarrow 0}} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}' + t\mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}')}{t} = \langle \xi, \mathbf{v} \rangle.$$

Proposição C.5:

Seja \mathbf{f} Lipschitz próxima a \mathbf{x} e considere $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ uma derivada de Gâteaux (ou Fréchet, ou estrita ou Hadamard). Então $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Justificativa.

Por definição, $\mathbf{f}'(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ existe para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$ e é igual, por (C.12) a $\langle D\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle$.

Notando que, $\mathbf{f}' \leq \mathbf{f}^0$ (basta comparar (C.2) e (C.12)), então tem-se que, $\mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq \langle D\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$ e a proposição segue, da definição de $\bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Portanto, $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x})$. □

Exemplo:

O exemplo a ser visto mostra que $\bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ possui mais pontos que $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Seja $\mathbf{f}: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $\mathbf{f}(x) = x^2 \text{ sen} \left(\frac{1}{x} \right)$.

\mathbf{f} é Lipschitz próxima a $\mathbf{x} = 0$ e $\mathbf{f}'(0, \mathbf{v}) = |\mathbf{v}|$. Segue que, $\bar{\partial} \mathbf{f}(0) = [-1, 1]$, o qual contém a derivada não estrita $D\mathbf{f}(0) = 0$.

Proposição C.6:

Se \mathbf{f} é diferenciável para \mathbf{x} então \mathbf{f} é Lipschitz próxima a \mathbf{x} e $\bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = D_s \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Reciprocamente, se \mathbf{f} é Lipschitz próxima a \mathbf{x} e $\bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ se reduz ao conjunto unitário $\{\xi\}$, então \mathbf{f} é estritamente diferenciável para \mathbf{x} e $D_s \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \xi$.

Regularidade.

Definição C.6: Regularidade.

\mathbf{F} é dita ser regular em \mathbf{x} se:

- i) para todo \mathbf{v} , a derivada direcional usual unilateral (C.11), $\mathbf{f}'(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ existe;
- ii) para todo \mathbf{v} , $\mathbf{f}'(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$.

A regularidade implica na igualdade na condição dada na proposição C.3 ii).

Proposição C.7:

Seja \mathbf{f} Lipschitz próxima a \mathbf{x} , então:

- i) se f é estritamente diferenciável para \mathbf{x} , f é regular para \mathbf{x} ;
- ii) se f é convexa, f é regular para \mathbf{x} ;
- iii) uma combinação linear finita (por escalares não negativos) de funções regulares para \mathbf{x} é regular em \mathbf{x} ;
- iv) se f admite uma derivada de Gâteaux $Df(\mathbf{x})$ e f é regular para \mathbf{x} , então $\bar{\partial}f(\mathbf{x}) = \{Df(\mathbf{x})\}$.

C4 - Propriedades geométricas: cones normais e tangentes.

A seguir é dada a definição geométrica de cone normal e cone tangente em um ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{Y}$, para uma função qualquer Lipschitziana, que pode ser não convexa e não diferenciável.

Definição C.7: *Cone normal e cone tangente.*

Define-se geometricamente o cone normal \mathbf{N}_Y e o cone \mathbf{T}_Y em um ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{Y}$ inter-relacionados da seguinte forma, considerando \mathbf{Y}^* o conjunto dual algébrico de \mathbf{Y} :

$$\mathbf{N}_Y(\mathbf{x}) = \{ \xi \in \mathbf{Y}^* \text{ tal que } \langle \xi, \mathbf{v} \rangle \leq 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{T}_Y(\mathbf{x}) \}; \tag{C.14}$$

$$\mathbf{T}_Y(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{Y} \text{ tal que } \langle \mathbf{v}, \xi \rangle \leq 0, \forall \xi \in \mathbf{N}_Y(\mathbf{x}) \}. \tag{C.15}$$

Pode ser provado que \mathbf{T}_Y é um cone convexo que contém 0 (zero) e que, além disso, a definição (C.14) coincide com a definição de cone normal externo a um conjunto convexo (definição B9.1) se \mathbf{Y} é um conjunto convexo.

A figura C.1, dada a seguir ilustra as definições (C.14) e (C.15) para uma função não-convexa e não diferenciável (em alguns pontos).

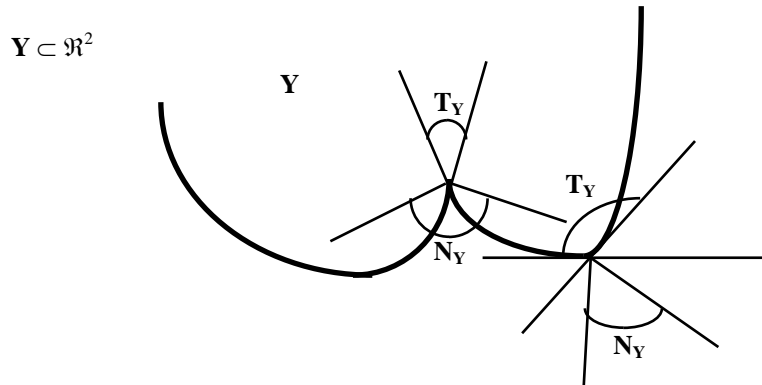


Figura C.1 - Cones, normal e tangente para funcionais não-convexos.

É possível definir-se o cone tangente \mathbf{T}_Y relacionado à função distância definida a seguir.

Definição C.8: *A função distância.*

Seja \mathbf{Y} um conjunto não vazio de \mathbf{X} . A função distância $d_Y: \mathbf{X} \rightarrow \mathfrak{R}$, de um ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ para o conjunto \mathbf{Y} , é definida por:

$$d_Y(\mathbf{x}) = \inf \{ \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|, \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \}. \tag{C.16}$$

Obviamente que, se $\mathbf{x} \in \mathbf{Y}$ então $d_Y(\mathbf{x}) = 0$.

Supondo agora que $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, então, um vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$ é *tangente* para \mathbf{Y} em \mathbf{y} se,

$$d_{\mathbf{Y}}^0(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = 0.$$

O conjunto de todas os vetores tangentes para \mathbf{Y} em \mathbf{y} é igual a $\mathbf{T}_{\mathbf{Y}}$ definido em (C.15).

Proposição C.8:

Seja f Lipschitz de rank K sobre \mathbf{X} e $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$. Suponha que f atinja um valor mínimo sobre \mathbf{Y} em \mathbf{y} . Então, para qualquer $\bar{K} \geq K$, a função $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \bar{K} d_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})$ atinge um mínimo sobre \mathbf{X} em \mathbf{y} . Se $\bar{K} > K$ e \mathbf{Y} é fechado, então, qualquer outro ponto minimizando \mathbf{g} sobre \mathbf{X} deve também pertencer a \mathbf{Y} .

Justificativa:

Suponha, em contradição, que exista um ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ e $\delta > 0$ tal que,

$$f(\mathbf{x}) + \bar{K} d_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) < f(\mathbf{y}) - \bar{K} \delta.$$

Seja $\mathbf{c} \in \mathbf{Y}$ tal que, $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \leq d_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) + \delta$. Então,

$$f(\mathbf{c}) \leq f(\mathbf{x}) + \bar{K} \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \leq f(\mathbf{x}) + \bar{K} (d_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) + \delta) < f(\mathbf{y}),$$

o que contradiz o fato que \mathbf{y} minimiza f sobre \mathbf{Y} .

Seja agora $\bar{K} > K$ e \mathbf{x} também minimizando \mathbf{g} sobre \mathbf{X} . Então,

$$f(\mathbf{x}) + \bar{K} d_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + (\bar{K} + K) \frac{d_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})}{2},$$

a qual, pelo primeiro resultado aplicado para $(\frac{\bar{K} + K}{2})$, implica em $d_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = 0$, e portanto que $\mathbf{x} \in \mathbf{Y}$. □

Corolário C.1:

Suponha que f é Lipschitz de rank K próxima de \mathbf{x} e atinja um valor mínimo sobre \mathbf{Y} em \mathbf{x} . Então, $0 \in \bar{\partial} f(\mathbf{x}) + \mathbf{N}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})$.

Justificativa:

Seja \mathbf{X} uma vizinhança de \mathbf{x} , sobre a qual f é Lipschitz de rank K . Pode-se supor que $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ (desde que \mathbf{Y} e $\mathbf{Y} \cap \mathbf{X}$ têm o mesmo cone normal para \mathbf{x}).

Então, pela proposição C.8, deduz-se que \mathbf{x} minimiza $f(\mathbf{y}) + K d_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ localmente.

Portanto, $0 \in \bar{\partial} (f + K d_{\mathbf{Y}})(\mathbf{x}) \subset \bar{\partial} f(\mathbf{x}) + K \bar{\partial} d_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})$.

Desde que, $\mathbf{N}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = \text{cl} \{ \sum_{\theta \geq 0} \theta \bar{\partial} d_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) \}$; onde cl denota o fecho, o resultado segue. □

C5 - Caracterização intrínseca do cone tangente.

Teorema C.1:

Um elemento $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$ é tangente para $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ se e somente se, para toda sequência \mathbf{x}_i em \mathbf{Y} convergindo para \mathbf{x} e a sequência t_i em $(0, +\infty)$ decrescendo para 0, existe uma sequência \mathbf{v}_i em \mathbf{X} convergindo para \mathbf{v} tal que $\mathbf{x}_i + t_i \mathbf{v}_i \in \mathbf{Y}$.

Justificativa:

(\Rightarrow)

Suponha que $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_Y(\mathbf{x})$ e que a sequência $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}$ (com $\mathbf{x}_i \in Y$) e $t_i \rightarrow 0_+$. Deve-se produzir uma sequência \mathbf{v}_i que concorda com o teorema. Desde que $d_Y^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0$, por hipótese, tem-se que,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d_Y(\mathbf{x}_i + t_i \mathbf{v}) - d_Y(\mathbf{x}_i)}{t_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d_Y(\mathbf{x}_i + t_i \mathbf{v})}{t_i} = 0. \quad (\text{C.17})$$

Seja $\mathbf{y}_i \in Y$ satisfazendo,

$$\| \mathbf{x}_i + t_i \mathbf{v}_i - \mathbf{y}_i \| \leq d_Y(\mathbf{x}_i + t_i \mathbf{v}_i) + \frac{t_i}{i}. \quad (\text{C.18})$$

Escolha,

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i}{t_i}.$$

Então, (C.17) e (C.18) implicam que $\| \mathbf{v} - \mathbf{v}_i \| \rightarrow 0$, isto é, que $\mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}$.

Além disso, $\mathbf{x}_i + t_i \mathbf{v}_i = \mathbf{y}_i \in Y$, como desejava-se.

(\Leftarrow)

Seja \mathbf{v} tendo as propriedades estabelecidas envolvendo sequências e escolha uma sequência \mathbf{y}_i convergindo para \mathbf{x} e $t_i \rightarrow 0_+$, tal que,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d_Y(\mathbf{y}_i + t_i \mathbf{v}) - d_Y(\mathbf{y}_i)}{t_i} = d_Y^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (\text{C.19})$$

Deve-se provar que $d_Y^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ definida em (C.19) é não-positiva, para então $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_Y(\mathbf{x})$ pela definição (C.15). Seja $\mathbf{c}_i \in Y$, satisfazendo,

$$\| \mathbf{c}_i - \mathbf{y}_i \| \leq d_Y(\mathbf{y}_i) + \frac{t_i}{i} \quad (\text{C.20})$$

Segue que $\mathbf{c}_i \rightarrow \mathbf{x}$. Portanto. Existe uma sequência $\mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}$ tal que $\mathbf{c}_i + t_i \mathbf{v}_i \in Y$.

Desde que, d_Y é Lipschitziana, tem-se,

$$d_Y(\mathbf{y}_i + t_i \mathbf{v}_i) \leq d_Y(\mathbf{c}_i + t_i \mathbf{v}_i) + \| \mathbf{y}_i - \mathbf{c}_i \| + t_i \| \mathbf{v} - \mathbf{v}_i \| \leq d_Y(\mathbf{y}_i) + t_i \left(\| \mathbf{v} - \mathbf{v}_i \| + \frac{t_i}{i} \right),$$

diretamente de (C.20).

Logo, tem-se em (C.20) o limite não-positivo, o que completa a prova. \square

Baseado no teorema C.1, o cone tangente \mathbf{T}_Y visto em (C.15) pode ser definido equivalentemente da seguinte forma:

$$\mathbf{T}_Y(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{v} \in X \text{ tal que, para } \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{x} \in Y \text{ e } t_i \rightarrow 0_+ \text{ existe } \mathbf{v}_i \text{ em } X, \mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}; \text{ tal que } \mathbf{x}_i + t_i \mathbf{v}_i \in Y \} \quad (\text{C.21})$$

C6 - Consistência entre tangência e derivada direcional generalizada.

Epígrafos.

De acordo com a definição B3.2, do apêndice B, o epígrafo da função f (convexo ou i.s.c.) sobre o conjunto \mathbf{X} é definido da seguinte maneira:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{X}] = \{(r, \mathbf{x}) \in \mathfrak{R} \times \mathbf{X} : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq r\}. \quad (\text{C.22})$$

Obviamente que o epígrafo de f descreve todas as informações sobre o funcional f .

Nesse contexto, $[\mathbf{f}, \mathbf{X}]$ confirmará o fato de que, localmente, tangência é consistente com a derivada direcional generalizada.

Teorema C.2:

Seja f Lipschitz em uma vizinhança de \mathbf{x} . Então:

- i) o epígrafo de $\mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \cdot)$ é $\mathbf{T}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$, isto é, $(\mathbf{v}, r) \in \mathbf{T}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ se e somente se $r \geq \mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$;
- ii) f é regular para \mathbf{x} se e somente se o epígrafo de f é regular para $(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$.

Justificativa de i):

(\Rightarrow)

Suponha que $(\mathbf{v}, r) \in \mathbf{T}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Escolha seqüências $\mathbf{y}_i \rightarrow \mathbf{x}$, $t_i \rightarrow 0$ tal que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y}_i + t_i \mathbf{v}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_i)}{t_i} = \mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (\text{C.23})$$

Note que $(\mathbf{y}_i, \mathbf{f}(\mathbf{y}_i))$ é uma seqüência em $[\mathbf{f}, \mathbf{X}]$ convergindo para $(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$, então, pelo teorema C.1, existe uma seqüência (\mathbf{v}_i, r_i) convergindo para (\mathbf{v}, r) tal que $(\mathbf{y}_i, \mathbf{f}(\mathbf{y}_i)) + t_i (\mathbf{v}_i, r_i) \in [\mathbf{f}, \mathbf{X}]$.

Logo,

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}_i) + t_i r_i \geq \mathbf{f}(\mathbf{y}_i + t_i \mathbf{v}_i) \Rightarrow \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y}_i + t_i \mathbf{v}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_i)}{t_i} \leq r_i;$$

no limite, para $i \rightarrow \infty$ e da equação (C.23) tem-se que $\mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \leq r$.

(\Leftarrow)

É suficiente agora provar que,

$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}$ e $\forall \delta \geq 0$, o ponto $(\mathbf{v}, \mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \delta) \in \mathbf{T}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$, onde,

$$\mathbf{T}_{\mathbf{Y}[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \{(\mathbf{v}, r) \in \mathbf{X} \times \mathfrak{R} \text{ tal que, para } \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, r_i \rightarrow r \text{ e } t_i \rightarrow 0_+; \text{ existe } \mathbf{v}_i \text{ em } \mathbf{X}, \mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}; \text{ tal que } \mathbf{x}_i + t_i \mathbf{v}_i \in \mathbf{X} \text{ e } \mathbf{f}(\mathbf{x}_i + t_i \mathbf{v}_i) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + t_i r_i \}. \quad (\text{C.24})$$

Seja (\mathbf{x}_i, r_i) qualquer seqüência em $\mathbf{T}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ convergindo para $(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ e $t_i \rightarrow 0$.

É definida uma seqüência (\mathbf{v}_i, s_i) convergindo para $(\mathbf{v}, \mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \delta)$ com a propriedade que $(\mathbf{x}_i, r_i) + t_i (\mathbf{v}_i, s_i) \in [\mathbf{f}, \mathbf{X}]$, para cada i , isto é, tal que,

$$r_i + t_i s_i \geq \mathbf{f}(\mathbf{x}_i + t_i \mathbf{v}_i). \quad (\text{C.25})$$

Defina $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$ e :

$$s_i = \max \left\{ \mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \delta, \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_i + t_i \mathbf{v}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)}{t_i} \right\}.$$

Observe que, $s_i \rightarrow \mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \delta$, desde que,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_i + t_i \mathbf{v}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)}{t_i} \leq \mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

Para verificar (C.23) e completar a prova de i), tem-se,

$$r_i + t_i s_i \geq r_i + [\mathbf{f}(\mathbf{x}_i + t_i \mathbf{v}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)] \geq \mathbf{f}(\mathbf{x}_i + t_i \mathbf{v}_i)$$

e $r_i \geq \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$, pois $(\mathbf{x}_i, r_i) \in [\mathbf{f}, \mathbf{X}]$, chegando-se no resultado (C.25).

A demonstração do ítem ii) do teorema C.2 se encontra em [Clarke, 1983]. \square

Corolário C.3:

Um elemento ξ de \mathbf{X}^* pertence para $\bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ se e somente se $(\xi, -1) \in \mathbf{N}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$.

Justificativa:

$\xi \in \bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ se e somente se para qualquer $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$ tem-se $\mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq \langle \xi, \mathbf{v} \rangle$, ou seja, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}$ e $\forall r \geq \mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ tem-se,

$$\langle (\xi, -1), (\mathbf{v}, r) \rangle \leq 0; \quad (\text{C.26})$$

o que implica pelo teorema C.3 que a relação (C.26) é válida para todos os elementos (\mathbf{v}, r) pertencentes a $\mathbf{T}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$, isto é,

$$(\xi, -1) \in \mathbf{N}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})). \quad \square$$

Assim, pode-se definir,

$$\bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{ \xi \in \mathbf{X}^* \text{ tal que } (\xi, -1) \in \mathbf{N}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \}; \quad (\text{C.27})$$

onde, $\mathbf{N}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}$ é dado por,

$$\mathbf{N}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \{ (\xi, -1) \in \mathbf{X}^* \times \Re \text{ tal que } \langle (\xi, -1), (\mathbf{v}, r) \rangle \leq 0, \forall (\mathbf{v}, r) \in \mathbf{T}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \}; \quad (\text{C.28})$$

com $\mathbf{T}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}$ definido por,

$$\mathbf{T}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \{ (\mathbf{v}, r) \in \mathbf{X} \times \Re \text{ tal que } \langle \xi, \mathbf{v} \rangle \leq \mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \leq r, \forall \xi \in \mathbf{N}_{[\mathbf{f}, \mathbf{x}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \}. \quad (\text{C.29})$$

A definição (C.29) é equivalente à (C.24).

A Função Indicatriz.

Considere a função indicatriz definida em B3.3 com $\mathbf{C} \subset \mathbf{X}$ (nesse caso, \mathbf{C} pode ser não-convexo):

$$\Gamma_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbf{C} \\ +\infty & \text{se } \mathbf{x} \notin \mathbf{C} \end{cases}$$

Sobre $\Gamma_{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$ é válida a seguinte proposição:

Proposição C.9:

Seja $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$, então, $\bar{\partial} \Gamma_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$ e $\Gamma_{\mathbf{C}}$ é regular para \mathbf{x} se e somente se \mathbf{C} é regular para \mathbf{x} .

Justificativa:

$\xi \in \bar{\partial} \Gamma_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow (\xi, -1) \in \mathbf{N}_{[\Gamma, \mathbf{C}]}(\mathbf{x}, 0)$ (onde $[\Gamma, \mathbf{C}]$ epígrafo de $\Gamma_{\mathbf{C}}$ sobre \mathbf{C}).

Mas, tem-se que, $[\Gamma, \mathbf{C}] = \mathbf{C} \times [0, \infty)$ pois do teorema C.1 é válido que:
 $\mathbf{N}_{\mathbf{C} \times \mathbf{D}}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_1) \times \mathbf{N}_{\mathbf{D}}(\mathbf{x}_2)$ onde $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{D}$ tal $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ e $\mathbf{C} \subset \mathbf{X}_1$, $\mathbf{D} \subset \mathbf{X}_2$, o que é equivalente a $\xi \in \mathbf{N}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$ e $-1 \in \mathbf{N}_{[0, \infty)}(0)$.

A recíproca desse resultado é sempre verdadeira.

A prova da regularidade segue da definição de regularidade vista em C.6. □

C7 - Funções Não-Lipschitz.

Vários resultados sobre funções não-lipschitzianas podem ser encontradas em [Clarke, 1983] e em [Panagiotopoulos, 1985]. A seguir são dados alguns.

Se $\mathbf{f}: \mathbf{X} \rightarrow \mathfrak{R}$, é uma função qualquer, que pode ser não-Lipschitziana e não diferenciável, então, o subdiferencial superior (ou derivada direcional generalizada) é definido por:

$$\mathbf{f}^{\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow 0_+} \sup_{\substack{\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{v} \\ \tilde{\mathbf{f}} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x})}} \inf_{\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}} + t\tilde{\mathbf{v}}) - \tilde{\mathbf{f}}}{t}; \quad (\text{C.29})$$

onde $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) \leq \tilde{\mathbf{f}}$, a qual simplifica a definição (C.29), se \mathbf{f} é uma função inferiormente semi-contínua em \mathbf{x} , já que $\tilde{\mathbf{f}}$ pode ser substituída diretamente por $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})$ em (C.29).

A função $\mathbf{f}^{\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ é convexa, i.s.c. e homogênea positiva. Além disso, se \mathbf{f} é convexa então,

$$\mathbf{f}^{\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow 0_+} \inf_{\substack{\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{v} \\ \tilde{\mathbf{f}} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x})}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\tilde{\mathbf{v}}) - \tilde{\mathbf{f}}}{t} = \tilde{\mathbf{f}}'(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{v}}); \quad (\text{C.30})$$

que se simplifica em $\mathbf{f}^{\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{f}}'(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ se existe $\mathbf{a} > 0$ e $t > 0$, tal que $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{a}$.

O subdiferencial inferior, $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{f}^{\downarrow}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, é definido analogamente a (C.29) com “lim sup inf” substituído por “lim inf sup”, tal que $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) \geq \tilde{\mathbf{f}}$.

Se \mathbf{f} é Lipschitziana, então, $\mathbf{f}^{\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = -\mathbf{f}^{\downarrow}(\mathbf{x}, -\mathbf{v}) = \mathbf{f}^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$.

Analogamente à definição C.3 é definido o gradiente generalizado de \mathbf{f} :

$$\bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{\xi \in \mathbf{X}^* \text{ tal que } \mathbf{f}^{\uparrow}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq \langle \xi, \mathbf{v} \rangle, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}\}; \quad (\text{C.31})$$

além disso, $\bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ pode ser definido, como no corolário C.3 por,

$$\bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \xi \in \mathbf{X}^* \text{ tal que } (\xi, -1) \in \mathbf{N}_{[\mathbf{f}, \mathbf{X}]}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \quad (\text{C.32})$$

e analogamente à proposição C.2 ii), tem-se ,

$$\mathbf{f}^{\downarrow}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sup \{ \langle \xi, \mathbf{v} \rangle : \xi \in \bar{\partial} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \}. \quad (\text{C.33})$$

Para ver mais resultados pesquisar [Clarke, 1983] e [Panagiotopoulos, 1985].

Apêndice D - Transformações Lineares, Adjuntas e alguns Conceitos de Análise Tensorial.

Os resultados a serem vistos, auxiliarão diretamente em alguns estudos feitos nos capítulos I, II, IV, V e no apêndice E. Alguns resultados vistos na seção A1 do apêndice A, para funcionais lineares contínuos, podem ser estendidos para esse apêndice, o que pode ser visto pela definição D1.1 a ser dada.

Todos os resultados a serem postos estão baseados em [Hoffman e Kunze, 1961], [Pearson, 1969] e [Gurtin, 1981], entre outros.

D1 - Transformação Linear.

Definição D1.1:

Sejam \mathbf{X} e \mathbf{Y} espaços vetoriais normados e considere o operador $\mathbf{T}: V \rightarrow W$, com $V \subset \mathbf{X}$ e $W \subset \mathbf{Y}$, então, \mathbf{T} é dito linear se satisfaz:

$$\mathbf{T}(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{T}(\mathbf{y}), \text{ com } \alpha, \beta \in \mathfrak{R}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Nesse caso diz-se que $\mathbf{T} \in \mathbf{Lin}(V, W)$.

Proposição D1.1: operadores lineares contínuos

As seguintes afirmações são válidas quando $\mathbf{T}: V \rightarrow W$ é um operador linear:

- i) \mathbf{T} é contínuo;
- ii) \mathbf{T} é limitado;
- iii) $\exists \mu > 0$ tal que $\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\|_W \leq \mu \|\mathbf{x}\|_V, \forall \mathbf{x} \in V$.

Dessa proposição pode-se afirmar que, todo operador linear $\mathbf{T}: V \rightarrow W$, contínuo e limitado é dito ser *continuamente dependente* na variável $\mathbf{x} \in V$.

Definição D1.2: Núcleo e Imagem de Transformação Linear

Sobre os conjuntos V e W , com relação à transformação linear \mathbf{T} , definem-se os seguintes operadores:

$N(\mathbf{T}) = \{\mathbf{x} \in V \text{ tal que } \mathbf{T}(\mathbf{x}) = 0\}$, denominado de operador Núcleo da transformação linear \mathbf{T} ;
 $R(\mathbf{T}) = \{\mathbf{y} \in W \text{ tal que } \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \mathbf{x} \in V\}$, denominado de operador Imagem da transformação linear \mathbf{T} .

Se $V \subset \mathbf{X}$ é de dimensão finita, e \mathbf{T} é uma transformação linear sobre V , uma proposição válida é que, $\dim V = \dim N(\mathbf{T}) + \dim R(\mathbf{T})$.

Um operador linear pode não ser contínuo, mas ser *limitado inferiormente*, condição a ser vista na definição seguinte.

Definição D1.3: Operador limitado inferiormente.

Um operador $\mathbf{T}: V \rightarrow W$ é dito limitado inferiormente se e somente se, existe uma constante $\mu > 0$ tal que,

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\|_W \geq \mu \|\mathbf{x}\|_V, \forall \mathbf{x} \in V. \quad (\text{D.1})$$

A importância dessa definição é que, um operador limitado inferiormente possui sempre um operador inverso contínuo definido em seu contra-domínio, o que pode ser visto no teorema a seguir.

Teorema D1.1:

Sejam V, W espaços vetoriais normados e $T: V \rightarrow W$, um operador limitado inferiormente. Então, T têm um operador inverso contínuo $T^{-1}: R(T) \rightarrow V$. Reciprocamente, se existe um operador inverso contínuo $T^{-1}: R(T) \rightarrow V$, então, existe uma constante $\mu > 0$ tal que, a equação (D.1) está satisfeita.

Definição D1.4: *Soma direta.*

Sejam V_1, V_2, \dots, V_n subespaços de um espaço vetorial $V \subset X$. Diz-se que V é soma direta de $V_i, i = 1, \dots, n$ se:

- i) $V = V_1 + \dots + V_n$ (V é gerado por V_1, V_2, \dots, V_n);
 - ii) $V_i \cap V_j = \{0\}, i, j = 1, \dots, n; i \neq j$;
 - $\forall v \in V$ então v pode ser representado por $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n; v_i \in V_i, i = 1, \dots, n$.
- Nesse caso denota-se, $V = V_1 \oplus V_2 \dots \oplus V_n$

Proposição D1.2:

Se V é soma direta de V_1, V_2, \dots, V_n então, $\forall v \in V, v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, tal que $v_i \in V_i, i = 1, \dots, n$.

O teorema visto a seguir será utilizado mais diretamente na seção E.3 do apêndice E.

Teorema D1.2: *Projeções num espaço vetorial.*

Seja o espaço vetorial $V \subset X$ tal que $V = V_1 \oplus V_2 \dots \oplus V_n, V_i \subset V$. Então, existem n operadores P_1, P_2, \dots, P_n sobre V tais que:

- i) cada E_i é uma projeção, ou seja, P_i é idempotente ($P_i^2 = P_i$);
- ii) $P_i P_j = 0$ se $i \neq j$;
- iii) $I_2 = P_1 + P_2 + \dots + P_n$;
- iv) a imagem de P_i é V_i .

Reciprocamente, se P_1, P_2, \dots, P_n são n operadores lineares sobre V que satisfazem as condições i), ii) e iii) e se indicar-se por V_i a imagem de P_i , então $V = V_1 \oplus V_2 \dots \oplus V_n$.

Considerando-se da proposição D1.2, $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, tal que $v_i \in V_i, i = 1, \dots, n$; então, cada P_i pode ser definido como:

$$P_i v = v_i; i = 1, \dots, n; \tag{D.2}$$

e então tem-se que:

- i) P_i é linear;
- ii) a imagem de P_i é V_i ;
- iii) o núcleo de P_i é $N(P_i) = V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_n$;
- iv) $x = P_1 x + P_2 x + \dots + P_n x$, ou seja, $I_2 = P_1 + P_2 + \dots + P_n$.

D2 - Operadores Adjuntos.

Definição D2.1:

Sejam X^* e Y^* os espaços duais algébricos de X e Y , respectivamente tais que, $V^* \subset X^*$ e $W^* \subset Y^*$. Dado $T \in \text{Lin}(V, W)$ (transformações lineares de V em W), então o operador $T^* \in \text{Lin}(W^*, V^*)$ (transformações lineares de W^* em V^*), é definido por operador *adjunto* de T se a seguinte relação é válida:

$$\langle y^*, Tx \rangle = \langle T^* y^*, x \rangle. \tag{D.3}$$

T^* é também denominado de operador transposto de T .

Justificativa:

Dado um elemento fixo $\mathbf{y}^* \in \mathbf{W}^*$, $\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{T}\mathbf{x} \rangle \in \mathfrak{R}$ para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ e da linearidade de \mathbf{T} conclui-se que a expressão anterior é um funcional linear em \mathbf{V} pelo qual será um elemento $\mathbf{x}^* \in \mathbf{V}^*$. Desta maneira, a cada $\mathbf{y}^* \in \mathbf{W}^*$, faz-se corresponder um elemento $\mathbf{x}^* \in \mathbf{V}^*$.

Designando-se por \mathbf{T}^* ao operador que estabelece tal correspondência tem-se que $\mathbf{T}^* \mathbf{y}^* = \mathbf{x}^*$, verificando-se, então, a equação anterior.

Além disso, pode-se mostrar a unicidade de \mathbf{T}^* . □

Esta relação pode ser vista através do seguinte diagrama dado na figura D.1:

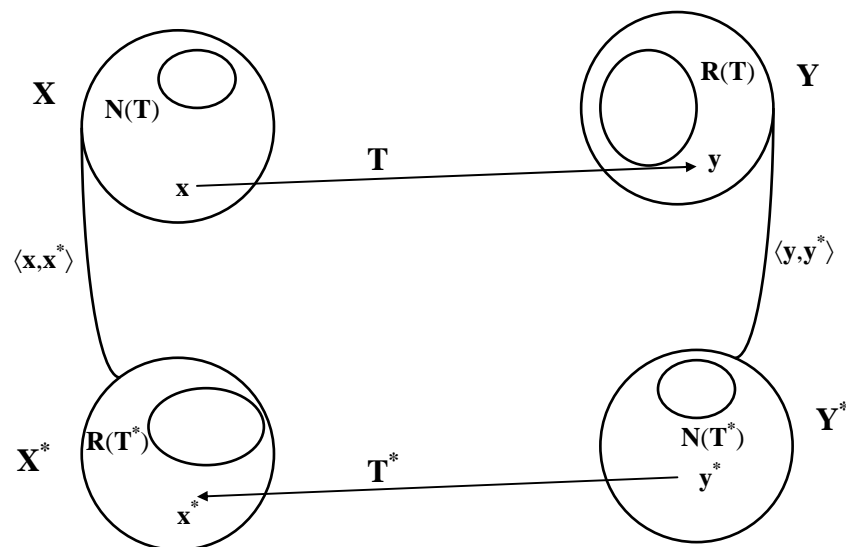


Figura D.1- diagrama inter-relacionando os espaços vetoriais \mathbf{V}, \mathbf{W} e seus respectivos duais $\mathbf{V}^*, \mathbf{W}^*$

A relação vista na figura D.1 pode ainda ser vista da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{dado } \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \text{ existe } \mathbf{y} \in \mathbf{W} \text{ tal que } \mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}, &\Rightarrow \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{T}\mathbf{x} \rangle \in \mathbf{V}^* \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{T}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle \in \mathbf{V}^*. \text{ Desde que } \exists \mathbf{y}^* \in \mathbf{W}^* \text{ tal que } \mathbf{x}^* = \mathbf{T}^* \mathbf{y}^* &\Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{T}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{T}^* \mathbf{y}^*, \mathbf{x} \rangle, \text{ completando-se a relação.} \end{aligned}$$

Exemplo:

Considerando-se: $\mathbf{T}: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$; $\mathbf{T}^*: \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$, então:

de $\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{T}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{T}^* \mathbf{y}^*, \mathbf{x} \rangle$, obtém-se o operador adjunto $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^T$ e vale a relação:

$$\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{T}\mathbf{x} \rangle = \mathbf{y}^* \cdot (\mathbf{T}\mathbf{x}) = (\mathbf{T}^T \mathbf{y}^*) \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{T}^* \mathbf{y}^*, \mathbf{x} \rangle.$$

Além disso, se \mathbf{T} é simétrica, então, $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^T = \mathbf{T}$, é a conhecida transformação *auto-adjunta*.

Relações entre os operadores Núcleo e Imagem.

Analogamente à definição D1.2, considere os operadores $\mathbf{N}(\mathbf{T}^*)$ e $\mathbf{R}(\mathbf{T}^*)$.

Sobre os operadores $\mathbf{N}(\mathbf{T})$, $\mathbf{R}(\mathbf{T})$, $\mathbf{N}(\mathbf{T}^*)$ e $\mathbf{R}(\mathbf{T}^*)$, são válidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_1) \quad N(\mathbf{T}) &= \mathbf{R}(\mathbf{T}^*)^\perp; \\
 \mathbf{R}_2) \quad \mathbf{R}(\mathbf{T}) &= \mathbf{N}(\mathbf{T}^*)^\perp; \\
 \mathbf{R}_3) \quad N(\mathbf{T}^*) &= \mathbf{R}(\mathbf{T})^\perp; \\
 \mathbf{R}_4) \quad \mathbf{R}(\mathbf{T}^*) &= \mathbf{N}(\mathbf{T})^\perp.
 \end{aligned}
 \tag{D.4}$$

Justificativa:

A relação \mathbf{R}_1 é válida pois:

sendo $\mathbf{v} \in N(\mathbf{T})$ então $\mathbf{T}\mathbf{v} = 0$, assim, é possível considerar um elemento $\mathbf{x}^* \in V^*$ e efetuar o produto dualidade com $\mathbf{T}\mathbf{v}$, tal que, $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{T}\mathbf{v} \rangle = 0$. Desde que, $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{T}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{T}^* \mathbf{x}^*, \mathbf{v} \rangle$, então, $\langle \mathbf{T}^* \mathbf{x}^*, \mathbf{v} \rangle = 0$. Como $\mathbf{T}^* \mathbf{x}^* \in \mathbf{R}(\mathbf{T}^*)$ então $\mathbf{v} \in \mathbf{R}(\mathbf{T}^*)^\perp$, o que demonstra a primeira relação.

As outras relações são demonstradas de maneira análoga. \square

D3 - O problema espectral.

Em toda essa seção, \mathbf{T} será um operador linear sobre um espaço vetorial n -dimensional V sobre o corpo \mathbf{X} .

Definição D3.1: *Vetores e valores característicos.*

Seja \mathbf{T} um operador linear sobre o espaço vetorial $V \subset \mathbf{X}$, tal que,

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}) = \mathbf{T}\mathbf{e} = \rho\mathbf{e}; \tag{D.5}$$

com $\mathbf{e} \in \mathbf{X}$, (\mathbf{e} não nulo), para algum escalar ρ . Esse escalar ρ é chamado de *valor característico* ou *autovalor* de \mathbf{T} associado ao *vetor característico* ou *autovetor* \mathbf{e} . O conjunto dos valores característicos é denominado de *Espectro de \mathbf{T}* enquanto que o conjunto dos vetores característicos determinados na resolução de (D.5) é chamado de *Espaço característico associado ao escalar ρ* .

Nesse contexto, (D.5) será denominado de *Problema espectral*.

A equação (D.5) é equivalente à equação $(\mathbf{T} - \rho\mathbf{I}_2)\mathbf{e} = 0$ e ρ é um valor característico de \mathbf{T} se e somente se $\mathbf{T} - \rho\mathbf{I}_2$ for singular, ou seja, $\det(\mathbf{T} - \rho\mathbf{I}_2) = 0$.

Considerando que o espaço V tem dimensão finita n , então ρ é dito ter *multiplicidade* n . O *Espectro* de \mathbf{T} é formado pelo conjunto $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p\}$, $p \leq n$, onde $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_p$ são os autovalores de \mathbf{T} , associados a cada autovetor \mathbf{e}_i , $i = 1, \dots, p$, com cada autovalor repetido um número de vezes igual a sua multiplicidade.

Proposição D3.1:

Sendo \mathbf{T} o tensor representativo da transformação linear definida em V , então, são válidas as afirmações seguintes:

- i) se \mathbf{T} é definido positivo, os autovalores associados a \mathbf{T} são estritamente positivos;
- ii) se \mathbf{T} é simétrico, os autovalores associados a \mathbf{T} são reais e os espaços característicos associados a seus autovetores são mutualmente ortogonais, além disso, se V_i é o espaço característico associado a \mathbf{e}_i , então, V pode ser escrito pela soma direta dos espaços V_i , da seguinte forma, $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_p$ e $\mathbf{e} \in V$ é tal que, $\mathbf{e} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{e}_i$.

Independente de \mathbf{T} ser ou não simétrica, ou seja, se \mathbf{T} é um tensor arbitrário, cada V_i é um subespaço de V *invariante* sobre \mathbf{T} , desde que $\mathbf{T}(V_i) \subset V_i$ e os subespaços V_i são independentes entre si.

Definição D3.2: *Operadores Diagonalizáveis.*

O operador linear \mathbf{T} sobre o espaço V é diagonalizável se existe uma base de V formada por vetores característicos de \mathbf{T} .

Note que na condição da proposição D3.1ii), ou seja, se o tensor \mathbf{T} é simétrico então \mathbf{T} é diagonalizável.

Proposição D3.2:

Se \mathbf{T} é diagonalizável então \mathbf{T} é semelhante a uma matriz diagonal $\mathbf{D} = \text{diag}(\rho_i)$ tal que:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}^T \mathbf{D} \mathbf{P};$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_j], \mathbf{P}_j = \mathbf{e}_i^T, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

onde nesse caso $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ e \mathbf{e}_i é um autovetor de \mathbf{T} associado a ρ_i .

Os elementos da diagonal de \mathbf{D} , não precisam ser todos distintos. Eles podem ser todos iguais, quando \mathbf{T} é um múltiplo escalar do Tensor Identidade.

Analogamente ao teorema D1.2, é válido o seguinte teorema:

Teorema D3.1:

Se \mathbf{T} é um operador diagonalizável sobre o espaço de dimensão finita V e $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ são os valores característicos distintos de \mathbf{T} , então, existem operadores lineares $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_p$ sobre V tais que:

- i) $\mathbf{T} = \rho_1 \mathbf{P}_1 + \rho_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \rho_p \mathbf{P}_p$;
- ii) $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_i, \quad i = 1, \dots, p$;
- iii) $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = 0$ se $i \neq j$;
- iv) $\mathbf{I}_2 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n$;
- v) a imagem de \mathbf{P}_i é V_i .

As seções D3.1 e D3.2 vistas a seguir, estudam o problema espectral (D.5) para tensores particulares e se baseiam nos resultados encontrados em [Pearson, 1969]. No desenvolvimento dessas seções utiliza-se a operação produto tensorial que pode ser vista em (D.28), na seção D.5.

D3.1 - Análise espectral para modificação de posto 1 de um tensor.

Seja o tensor \mathbf{V}_1 , representando a transformação linear $\mathbf{T} \in \text{Lin}(\mathfrak{R}^m, \mathfrak{R}^m)$.

\mathbf{V}_1 é uma modificação de posto 1 do tensor identidade \mathbf{I}_2 se \mathbf{V}_1 pode ser definida por:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_2 + \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{d}_1 = \mathbf{I}_2 + \mathbf{U}_1; \tag{D.6}$$

com \mathbf{a}_1 e $\mathbf{d}_1 \in \mathfrak{R}^m$.

A análise do problema espectral, $(\mathbf{I}_2 + \mathbf{U}_1) \mathbf{x} = \nu \mathbf{x}$ se resume então a pesquisar-se o autoproblema:

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{x} = \mu \mathbf{x}. \quad (\text{D.7})$$

Uma solução em autovalores para (D.6), determinada em [Pearson, 1969], é dada por:

$$\mu_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1. \quad (\text{D.8})$$

Além disso, \mathbf{V}_1 possui m-1 autovalores unitários e então os autovalores possíveis para \mathbf{V}_1 são:

$$v_1 = 1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1; \quad (\text{D.9})$$

$$v_2 = \dots = v_m = 1. \quad (\text{D.10})$$

Desses resultados tem-se que,

$$\det(\mathbf{V}_1) = \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{d}_1) = 1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1. \quad (\text{D.11})$$

Considerando-se $\mathbf{d}_1 = \rho \mathbf{b}_1$ então, relacionado ao autovalor μ_1 , o autovetor relativo pode ser calculado de:

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{x}_1 = \rho (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{x}_1) \mathbf{a}_1; \quad (\text{D.12})$$

o que sugere pesquisar-se autovetores do tipo:

$$\mathbf{x}_1 = \alpha_1 \mathbf{a}_1 \quad (\text{D.13})$$

e sem perda de generalidade α_1 pode ser escolhido igual a um.

D3.2 - Análise espectral para modificação de posto 2 de um tensor.

No caso de um tensor qualquer \mathbf{V}_2 ser uma modificação de posto 2 do tensor identidade \mathbf{I}_2 , então \mathbf{V}_2 pode ser definida por:

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 + \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{d}_2 = \mathbf{I}_2 + \mathbf{U}_2. \quad (\text{D.14})$$

A análise do problema espectral,

$$(\mathbf{I}_2 + \mathbf{U}_2) \mathbf{x} = \nu \mathbf{x}, \quad (\text{D.15})$$

se resume então a pesquisar-se o auto-problema:

$$\mathbf{U}_2 \mathbf{x} = \mu \mathbf{x}. \quad (\text{D.16})$$

A solução em autovalores para (D.16), determinada em [Pearson, 1969], resolvendo-se uma equação do segundo grau é dada por:

$$\mu_i = \frac{1}{2} [\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_2 \pm \sqrt{(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1 - \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_2)^2 + 4(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_2)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_1)}] \quad (i=1,2) \quad (\text{D.17})$$

e então, os autovalores não unitários de \mathbf{V}_2 são expressos por:

$$v_i = 1 + \mu_i \quad (i = 1,2). \quad (\text{D.18})$$

Desses resultados tem-se que,

$$\det(\mathbf{V}_2) = \det(\mathbf{I}_2 + \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{d}_2) = (1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1) (1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_2) - (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_2) (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_1). \quad (\text{D.19})$$

A eventualidade de autovalores complexos no caso de \mathbf{U}_2 não simétrica, dependem do sinal do discriminante Δ ,

$$\Delta = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1 - \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_2)^2 + 4(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_2)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_1). \quad (\text{D.20})$$

Nota-se que, no caso simétrico ($\mathbf{a}_1 = \mathbf{d}_1$ e $\mathbf{a}_2 = \mathbf{d}_2$), o segundo termo em (D.20) assume o valor positivo $4(\mathbf{a}_1)^2 (\mathbf{a}_2)^2$, o que exclui a existência de autovalores complexos.

Os autovetores de \mathbf{U}_2 são expressos por:

$$\mathbf{x}_i = \alpha_1^i \mathbf{a}_1 + \alpha_2^i \mathbf{a}_2 \quad (i=1,2); \quad (\text{D.21})$$

onde α_i^j ($i,j=1,2$) são determinados a seguir.

Tem-se de (D.11) e (D.12) que, $\mathbf{U}_2 \mathbf{x} = \mu \mathbf{x}$ e $\mathbf{V}_2 \mathbf{x} = \nu \mathbf{x}$, tal que:

$$\mathbf{V}_2 \mathbf{x} = (1 + \mu)\mathbf{x} = \nu \mathbf{x}, \quad (\text{D.22})$$

está satisfeita para $\nu_i = 1 + \mu_i$ ($i = 1,2$).

Considerando-se $\mathbf{d}_i = \mu_i \mathbf{b}_i$ então, desde que:

$$\mathbf{U}_2 \mathbf{x} = \sum_{i=1}^2 \mu_i (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}) \mathbf{a}_i, \quad (\text{D.23})$$

pois, de (D.12) o autovalor $\mu_i \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_i$ satisfaz (D.23), o que sugere pesquisar-se soluções do tipo,

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2; \quad (\text{D.24})$$

para (D.23).

Substituindo-se (D.24) em (D.16) e considerando-se $\mathbf{U}_2 = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{d}_2$ tem-se:

$$\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 (\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{a}_j - \mu \delta_{ij}) \alpha_j \right) \mathbf{a}_i = 0. \quad (\text{D.25})$$

Agora, anulando-se separadamente os coeficientes de \mathbf{a}_i chega-se na equação para cálculo dos α_i 's:

$$(\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{a}_j - \mu \delta_{ij}) \alpha_j = 0. \quad (\text{D.26})$$

Os mesmos resultados podem ser estendidos para modificações de posto n da matriz identidade, o que não será feito aqui.

D4 - A fórmula de Sherman e Morrison para inversão de um tensor.

Considere a transformação linear $\mathbf{B} \in \text{Lin}(\mathfrak{R}^m, \mathfrak{R}^m)$, representada por $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, onde $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{R}^m$, tal que \mathbf{A} é não-singular.

O tensor \mathbf{B} é não-singular se e somente se $1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u} \neq 0$ e se essa condição se verifica tem-se que a inversa de \mathbf{B} pode ser obtida pela fórmula de Sherman e Morrison:

$$\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u}}; \quad (\text{D.27})$$

a qual verifica que: $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}_2$.

D5 - Alguns resultados da Análise Tensorial.

Os resultados propostos a seguir são encontrados em [Gurtin, 1981] ou são uma extensão direta desses resultados. Eles serão bastante utilizados no capítulo V.

D5.1 - Álgebra tensorial.

Definição D5.1.1 - A Operação Produto Tensorial.

O produto tensorial de dois vetores \mathbf{v} e $\mathbf{w} \in V$ é um tensor denotado por $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$ que ao ser aplicado em um vetor \mathbf{z} produz o vetor $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{z})\mathbf{v}$, isto é,

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \mathbf{z} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}) \mathbf{v} \quad (\text{D.28})$$

e em notação indicial é escrito por:

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{ij} = v_i w_j. \quad (\text{D.29})$$

De (D.28) e (D.29) nota-se que, o produto tensorial de dois vetores \mathbf{v} e $\mathbf{w} \in V$ gera um tensor de segunda ordem \mathbf{T} sobre o espaço V representado por

$$\mathbf{T} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}), \text{ ou, } T_{ij} = v_i w_j. \quad (\text{D.30})$$

O produto tensorial do tensor \mathbf{T} por um vetor $\mathbf{z} \in V$, gera um tensor de terceira ordem

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{z} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \otimes \mathbf{z}, \text{ ou, } S_{ijk} = v_i w_j z_k. \quad (\text{D.31})$$

Se $\mathbf{T} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$ e $\mathbf{S} = (\mathbf{z} \otimes \mathbf{a})$ então, \mathbf{H} é um tensor de quarta ordem dado por,

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} \mathbf{S} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \otimes (\mathbf{z} \otimes \mathbf{a}) \text{ ou } H_{ijkl} = v_i w_j z_k a_l. \quad (\text{D.32})$$

Observa-se que, para o caso geral, o produto tensorial de um tensor de ordem m por um tensor de ordem n gera um tensor de ordem $m+n$.

Definição D5.2: A operação Contração.

É a operação, pela qual, de um tensor se obtém um outro tensor com a ordem inferior ao primeiro em duas unidades.

Se o tensor é de ordem n , tal que $n \geq 2k$, então é possível efetuar-se k contrações nesse tensor, gerando um tensor de ordem $n - 2k$. De acordo com o índice escolhido para realizar a contração, diferentes tensores de mesma ordem podem ser gerados.

A aplicação dessa operação será vista a seguir, quando sereão dadas as propriedades do produto tensorial.

Definição D5.2: A operação Traço.

O operador linear *traço*, denotado por tr designa para cada tensor \mathbf{T} de ordem dois, um escalar dado por:

$$tr(\mathbf{T}) = tr(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \quad (\text{D.33})$$

Definição D5.3: A operação Produto Interno.

É a operação que consiste na combinação de um produto tensorial com uma contração.

Em geral, o produto interno de um tensor de ordem m por um tensor de ordem n , com k contrações, fornece o tensor de ordem $m + n - 2k$.

Por exemplo, considere, em particular, o produto interno dos vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} . Essa operação consiste na contração sobre dois índices do tensor $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$, tal que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_i w_i. \quad (\text{D.34})$$

A definição algébrica do produto interno de tensores, depende da operação traço vista na definição D5.2 e é dada a seguir.

Definição D5.4: *O produto Interno de Tensores.*

O espaço dos tensores tem um produto interno natural definido por:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = \text{tr}(\mathbf{T}^T \mathbf{S}) = \sum_{i,j} T_{ij} S_{ij}. \quad (\text{D.35})$$

É sempre possível obter um escalar como resultado do produto interno de tensores de mesma ordem, operando-se um número adequado de contrações.

Por exemplo, considere os tensores $\mathbf{T} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ e $\mathbf{S} = \mathbf{z} \otimes \mathbf{a}$. O produto interno entre eles é obtido mediante duas contrações sobre os índices do tensor de quarta ordem $\mathbf{H} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{z} \otimes \mathbf{a}$. Em componentes, \mathbf{T} , \mathbf{S} e \mathbf{H} podem ser escritos por:

$$\mathbf{T} = v_i w_j; \mathbf{S} = z_k a_l \text{ e } \mathbf{H} = H_{ijkl}.$$

Então, o produto interno dos tensores \mathbf{T} por \mathbf{S} é dado por:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = (v_i z_i) (w_j a_j) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}); \quad (\text{D.36})$$

que é equivalente a:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{z} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}). \quad (\text{D.37})$$

Utilizando-se (D.35) e a propriedade P₁ tem-se que (D.37) é equivalente a:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = \text{tr}[(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})^T (\mathbf{z} \otimes \mathbf{a})] = \text{tr}[(\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}) (\mathbf{z} \otimes \mathbf{a})] = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}). \quad (\text{D.38})$$

Analogamente, o produto interno de tensores de terceira ordem tal que o resultado seja um escalar, é obtido mediante três contrações sobre os índices de um tensor de sexta ordem.

Propriedades envolvendo as operações vistas.

$$P_1) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})^T = (\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}); \text{ (transposto de um tensor)}$$

$$P_2) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) (\mathbf{z} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{a});$$

Aplicação de tensores de ordens diferentes.

$$P_3) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{z}) \mathbf{a} = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{a}) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}); \text{ (ou em componentes } (z_i a_i) v_j w_k)$$

$$P_4) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{z}) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = [(\mathbf{w} \otimes \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})] \mathbf{v} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}) (\mathbf{z} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{v}; \text{ (ou } (w_i a_i) (z_j b_j) v_k)$$

$$P_5) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{z} \otimes \mathbf{a}) (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = [(\mathbf{w} \otimes \mathbf{z} \otimes \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d})] \mathbf{v} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{b}) (\mathbf{z} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{v};$$

$$P_6) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{z} \otimes \mathbf{a}) (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = [(\mathbf{z} \otimes \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c})] (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{b}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w});$$

(ou em componentes: $(z_j b_j) (a_i c_i) v_k w_l$)

Em geral, para tensores de ordem diferente, a aplicação de um tensor de ordem m sobre um tensor de ordem n ($m > n$) tem como resultado um tensor de ordem $(m-n)$. Se os tensores tiverem mesma ordem ($m = n$), então, a aplicação mantém a ordem dos tensores.

Como o resultado da aplicação deve ser um tensor de ordem $(m-n)$, então, deve-se impor no produto interno que $k = n$.

Observação:

Outros tipos de contração podem ser gerados permitindo generalizar o conceito de produto de tensores. Em particular, um tipo de aplicação que interessa é o da composição entre tensores que podem gerar tensores de ordem igual a do tensor de maior ordem que compõe a aplicação. Nesse caso, a composição de tensores de mesma ordem só é possível se a ordem dos tensores for par.

A composição é então definida pela seguinte operação:

$$P_7) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) (\mathbf{z} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{v} \otimes \mathbf{a}); \quad (\text{ou } (w_i z_i) v_j a_k)$$

$$P_8) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{z}) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{b}); \quad (\text{ou } (z_i a_i) v_j w_k b_l)$$

$$P_9) (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) (\mathbf{z} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{v} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}); \quad (\text{ou } (w_j c_j) v_i a_k b_l c_m).$$

Outras propriedades envolvendo as operações.

Se \mathbf{e}_i é um vetor unitário:

$$P_{10}) (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i & \text{se } i = j \end{cases};$$

$$P_{11}) \sum_i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) = \mathbf{I}_2;$$

$$P_{12}) \text{tr } \mathbf{T} = \text{tr} \left(\sum_{i,j} T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i,j} T_{ij} \text{tr} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j} T_{ij} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_i T_{ii};$$

$$P_{13}) \text{tr } \mathbf{T}^T = \text{tr } \mathbf{T};$$

$$P_{14}) \text{tr} (\mathbf{T}\mathbf{S}) = \text{tr} (\mathbf{S}\mathbf{T}); \text{ onde } \mathbf{S} \text{ é um tensor sobre } V;$$

$$P_{15}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = \text{tr} (\mathbf{T}^T \mathbf{S}) = \sum_{i,j} T_{ij} S_{ij};$$

$$P_{16}) \mathbf{R} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{S}) = (\mathbf{T}^T \mathbf{R}) \cdot \mathbf{S} = (\mathbf{R}\mathbf{S}^T) \cdot \mathbf{T}; \text{ onde } \mathbf{R} \text{ é um tensor sobre } V;$$

$$P_{17}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\mathbf{w} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w});$$

Se $\mathbf{T} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$ e $\mathbf{S} = (\mathbf{z} \otimes \mathbf{a})$, então,

$$P_{18}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = \text{tr} (\mathbf{T}^T \mathbf{S}) = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{z} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}); \text{ em notação indicial, } T_{ij} S_{ij} = (v_i z_i)(w_j a_j);$$

$$P_{19}) \mathbf{S}\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{S} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \text{ e } \mathbf{v} \otimes \mathbf{S}\mathbf{u} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{S}^T;$$

Considerando o produto vetorial entre os vetores \mathbf{v} e $\mathbf{w} \in V$, denotado por $(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, então, se os vetores \mathbf{a} , \mathbf{v} e \mathbf{w} são linearmente independentes, o operador determinante de \mathbf{T} , denotado por $\det \mathbf{T}$, pode ser calculado por:

$$P_{20}) \det \mathbf{T} = \frac{\mathbf{T}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v} \times \mathbf{T}\mathbf{w})}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})};$$

onde $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, representa o volume do paralelepípedo \mathbf{P} definido por \mathbf{a} , \mathbf{v} e \mathbf{w} .

Proposição D5.1.1:

i) Se \mathbf{T} é simétrico, então, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{T} \cdot \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{S} + \mathbf{S}^T) \right\};$

ii) Se \mathbf{T} é simétrico e \mathbf{S} é anti-simétrico, então, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = 0.$

Considerando-se sobre V que, \mathbf{v} e \mathbf{w} são vetores, \mathbf{T} e \mathbf{S} são tensores de ordem dois e \mathbf{H} é um tensor de ordem 4, utilizando-se as propriedades acima e denotando-se

$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{T})(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w}$ (expressão utilizada no capítulo V), então é possível mostrar a seguinte proposição a ser utilizada naquele capítulo.

Proposição D5.1.2:

i) $\mathbf{T}\mathbf{w} \otimes \mathbf{T}\mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w}$.

Justificativa:

Seja $\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, com \mathbf{a}, \mathbf{b} tensores de ordem 1 em V .

Tem-se pelas propriedades que,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot (\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} &= (\mathbf{T} \otimes \mathbf{T})(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) = [(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \otimes (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})](\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) = \\ &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})[(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{w} \otimes \mathbf{w})] = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}) = \\ &= \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}) \otimes \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{w}) = [(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{w}] \otimes [(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{w}] = \\ &= \mathbf{T}\mathbf{w} \otimes \mathbf{T}\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{T}\mathbf{w} \otimes \mathbf{T}\mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w}$. □

ii) $\mathbf{T}\mathbf{w} \otimes \mathbf{S}\mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}) \cdot \mathbf{w}$.

A justificativa é análoga ao ítem i).

iii) $\mathbf{H}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) = [\mathbf{w}\mathbf{H}\mathbf{w}]\mathbf{v}$.

Justificativa:

Seja $\mathbf{H} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$.

À esquerda tem-se que,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d})(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) = \\ &= (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{a}. \end{aligned} \tag{D.39}$$

À direita tem-se que,

$$\begin{aligned} [\mathbf{w}\mathbf{H}\mathbf{w}]\mathbf{v} &= \mathbf{H}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w})\mathbf{v} = \\ &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d})(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w})\mathbf{v} = [(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{w} \otimes \mathbf{w})](\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = \\ &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a}. \end{aligned} \tag{D.40}$$

Portanto, comparando-se (D.39) e (D.40), tem-se o resultado desejado, ou seja, que:

$$\mathbf{H}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) = [\mathbf{w}\mathbf{H}\mathbf{w}]\mathbf{v}. \quad \square$$

iv) Se $\mathbf{E} = \alpha(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2) + \beta \mathbf{I}_4$, onde α, β são escalares, \mathbf{I}_2 é um tensor identidade de ordem 2 e \mathbf{I}_4 é o tensor identidade de ordem 4, então, tem-se que:

$$\mathbf{w}\mathbf{E}\mathbf{w} = (\beta \mathbf{I}_4 + \alpha(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2))(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}).$$

Justificativa:

$$\mathbf{w}\mathbf{E}\mathbf{w} = \mathbf{E}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) = (\beta \mathbf{I}_4 + \alpha(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2))(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}). \quad \square$$

v) se $\mathbf{H} = \mathbf{E} + \alpha_1(\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}) + \beta_1(\mathbf{T} \otimes \mathbf{T})$, então, tem-se que,

$$\mathbf{w}\mathbf{H}\mathbf{w} = (\beta \mathbf{I}_4 + \alpha(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2))(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) + \alpha_1(\mathbf{T}\mathbf{w} \otimes \mathbf{T}\mathbf{w}) + \beta_1(\mathbf{S}\mathbf{w} \otimes \mathbf{S}\mathbf{w}).$$

A justificativa vem diretamente dos ítems i), ii) e iv). □

D5.2 - A regra do produto.

Na álgebra tensorial podem-se encontrar diversas aplicações envolvendo a operação produto:

D5.2.1 - *Produto de números reais por vetores*: $Prod(\alpha, \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{v}$;

D5.2.2 - *Produto interno de vetores*: $Prod(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$;

D5.2.3 - *Produto interno de tensores*: $Prod(\mathbf{T}, \mathbf{S}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$;

D5.2.4 - *Produto tensorial de tensores*: $Prod(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$;

D5.2.5 - *Aplicação de um tensor sobre um vetor*: $Prod(\mathbf{T}, \mathbf{v}) = \mathbf{T} \mathbf{v}$.

Essas operações produto representadas por $Prod$, têm uma propriedade em comum, todas são bilineares. Assim sendo, considere o seguinte produto:

$$Prod: (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \rightarrow \mathbf{W},$$

onde \mathbf{F}, \mathbf{G} e \mathbf{W} são espaços vetoriais normados de dimensão finita contidos em \mathbf{Y} e $Prod$ é uma aplicação bilinear. Sejam \mathbf{f} e \mathbf{g} duas funções definidas em um subconjunto aberto $V \subset \mathbf{X}$, tais que, $\forall \mathbf{v} \in V$,

$$\mathbf{f}: V \rightarrow \mathbf{F}; \quad \mathbf{g}: V \rightarrow \mathbf{G} \quad \text{e} \quad \mathbf{h}: V \rightarrow \mathbf{W};$$

onde a função \mathbf{h} é definida por $\mathbf{h}(\mathbf{v}) = Prod(\mathbf{f}(\mathbf{v}), \mathbf{g}(\mathbf{v}))$.

Pode-se demonstrar que, se \mathbf{f} e \mathbf{g} forem diferenciáveis em $\mathbf{v} \in V$, então é válida a seguinte regra do produto:

$$D \mathbf{h}(\mathbf{v}) = Prod(\mathbf{f}(\mathbf{v}), D\mathbf{g}(\mathbf{v})[\mathbf{x}]) + Prod(D\mathbf{f}(\mathbf{v})[\mathbf{x}], \mathbf{g}(\mathbf{v})), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}. \quad (\text{D.41})$$

Além disso, quando o domínio comum de \mathbf{f} e \mathbf{g} é um subconjunto aberto de \mathfrak{R} então, para $t \in \mathfrak{R}$, a equação (D.41) é equivalente a:

$$\mathbf{h}'(t) = Prod(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}'(t)) + Prod(\mathbf{f}'(t), \mathbf{g}(t)). \quad (\text{D.42})$$

D5.3 - Definição e propriedades envolvendo Divergente e Gradiente.

Para simplificar notações, considere V um subconjunto aberto no espaço puntual euclideano. Uma função sobre V é dita um *campo escalar, vetorial, tensorial* ou *puntual*, de acordo com seus valores serem escalares, vetoriais, tensoriais ou puntuais.

Para as definições e propriedades que seguem, considere qualquer campo considerado diferenciável em V .

Definição D5.3.1: Gradiente.

Seja, φ um campo escalar definido sobre um subconjunto $\mathbf{I} \subset V$, ou seja, $\varphi: \mathbf{I} \rightarrow \mathfrak{R}$.

Então, para cada $\mathbf{x} \in V$ tem-se que, $D\varphi(\mathbf{x})$ é uma aplicação linear de V em \mathfrak{R} , tal que, para $\mathbf{v} \in V$, pelo teorema A1.1, de *Riez-Fréchet*, para representação de formas lineares, $D\varphi(\mathbf{x})[\mathbf{v}]$ é o produto interno de uma função vetorial $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ com \mathbf{v} .

Escrevendo-se $\nabla\varphi(\mathbf{x})$ como a função vetorial $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, tal que,

$$D\varphi(\mathbf{x})[\mathbf{v}] = \nabla\varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}; \quad (\text{D.43})$$

então, $\nabla\varphi(\mathbf{x})$ é denominado de *gradiente* de φ para \mathbf{x} . Nesse caso, tem-se a validade da expressão,

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}) + \nabla\varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} + o(\mathbf{u}); \quad (\text{D.44})$$

onde $o(\mathbf{u}) \rightarrow 0$, quando $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{x}$.

Semelhantemente, se \mathbf{v} é um campo vetorial definido de \mathbf{I} em V , ou seja, $\mathbf{v}: \mathbf{I} \rightarrow V$, então, $D\varphi(\mathbf{x})$ é uma transformação linear de V em V , ou $D\varphi(\mathbf{x}) \in \text{Lin}(V, V)$ (é um tensor de ordem 2). Nesse caso usa-se a notação padrão, $\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})$ para $D\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e escreve-se,

$$D\mathbf{v}(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (\text{D.45})$$

e o tensor $\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é o *gradiente* de \mathbf{v} para \mathbf{x} .

Definição D5.3.2: *Divergente.*

Dado um campo vetorial \mathbf{v} definido de \mathbf{I} em \mathfrak{R} , o campo escalar,

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \text{tr}(\nabla\mathbf{v}); \quad (\text{D.46})$$

é chamado *divergente do campo vetorial* \mathbf{v} .

Esse mesmo operador pode ser utilizado para definir-se a *divergência de um campo tensorial* \mathbf{T} , denotado por $\text{div}(\mathbf{T})$. Logo, $\text{div}(\mathbf{T})$ é o único campo vetorial com a seguinte propriedade:

$$\text{div}(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} = \text{div}(\mathbf{T}^T\mathbf{w}); \quad (\text{D.47})$$

para todo vetor \mathbf{w} em V .

Proposição D5.3.1:

Sejam φ , \mathbf{v} , \mathbf{w} e \mathbf{T} campos diferenciáveis com φ escalar, \mathbf{v} e \mathbf{w} campos vetoriais e \mathbf{T} campo tensorial sobre V . Então:

- i) $\nabla(\varphi\mathbf{v}) = \varphi\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla\varphi$;
- ii) $\text{div}(\varphi\mathbf{v}) = \varphi \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi$;
- iii) $\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\nabla\mathbf{w})^T \mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T \mathbf{w}$;
- iv) $\text{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{v} \text{div}\mathbf{w} + (\nabla\mathbf{v}) \mathbf{w}$;
- v) $\text{div}(\mathbf{T}^T\mathbf{v}) = \mathbf{T} \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{Div}\mathbf{T}$;
- vi) $\text{div}(\varphi\mathbf{T}) = \varphi \text{div}\mathbf{T} + \mathbf{T} \nabla\varphi$.

Justificativa do ítem i):

Seja $\mathbf{h} = \varphi\mathbf{v}$. Então, pelas regras (D.41) e (D.45) tem-se:

$$\nabla(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{x})\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{u} + (\nabla\varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}(\mathbf{x}) = [\varphi(\mathbf{x})\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \otimes \nabla\varphi(\mathbf{x})] \mathbf{u}.$$

Portanto, $\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \nabla(\varphi\mathbf{v}) = \varphi\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla\varphi$. □

Justificativa do ítem ii):

Aplicando-se a operação (D.46) na igualdade i) tem-se o resultado ii). □

Justificativa do ítem iii):

Seja $\varphi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, então pelas regras (D.41) e (D.43) tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla\varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla\mathbf{w}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \\ &= [\nabla\mathbf{w}(\mathbf{x})^T \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})^T \mathbf{w}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{u}, \end{aligned}$$

o que prova iii). □

Justificativa de iv):

Utilizando-se (D.47) e ii),

$$\mathbf{a} \cdot \text{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \text{div}[(\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})\mathbf{a}] = \text{div}[(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{w}] = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \text{div} \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}).$$

Então, por iii), $\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) = \nabla\mathbf{v}^T \mathbf{a}$, o que implica em:

$$\mathbf{a} \cdot \text{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \text{div} \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot (\nabla\mathbf{v}^T \mathbf{a}) = [\mathbf{v} \text{div}\mathbf{w} + (\nabla\mathbf{v}) \mathbf{w}] \cdot \mathbf{a},$$

de onde se conclui iv). □

Justificativa de v):

Antes de provar v), note que para qualquer tensor \mathbf{A} constante e qualquer campo vetorial \mathbf{v} é válida a igualdade,

$$\nabla(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \mathbf{A}\nabla\mathbf{v}; \quad (\text{D.48})$$

pois, $\mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{u}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{u} + o(\mathbf{u})$, tal que $o(\mathbf{u}) \rightarrow 0$.

Logo, $\mathbf{A}\mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{u} + o(\mathbf{u})$, o que implica em (D.48).

Aplicando a operação traço (D.46) em (D.48) e utilizando-se P_{15} chega-se na igualdade:

$$\text{div}(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \mathbf{A}^T \cdot \nabla\mathbf{v}. \quad (\text{D.49})$$

A prova da igualdade v), segue.

De (D.46), (D.47), da regra (D.41) e de (D.49) tem-se,

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{T}^T\mathbf{v})(\mathbf{x}_0) &= \text{tr} \nabla(\mathbf{T}^T\mathbf{v})(\mathbf{x}_0) = \text{tr} [\nabla(\mathbf{T}_0^T\mathbf{v})(\mathbf{x}_0) + \nabla(\mathbf{T}^T\mathbf{v}_0)(\mathbf{x}_0)] = \\ &= \text{div}(\mathbf{T}_0^T\mathbf{v})(\mathbf{x}_0) + \text{div}(\mathbf{T}^T\mathbf{v}_0)(\mathbf{x}_0) = \\ &= (\mathbf{T}_0 \cdot \nabla\mathbf{v})(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{v}_0 \cdot \text{Div}\mathbf{T})(\mathbf{x}_0); \end{aligned}$$

onde $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)$ e $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$.

Portanto, $\text{div}(\mathbf{T}^T\mathbf{v})(\mathbf{x}_0) = \mathbf{T}_0 \cdot \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{v}_0 \cdot \text{Div}\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)$. □

Justificativa do ítem vi):

Partindo-se da validade da igualdade:

$$\text{div}(\varphi\mathbf{T})(\mathbf{x}_0) = \text{div}(\varphi_0\mathbf{T})(\mathbf{x}_0) + \text{div}(\varphi\mathbf{T}_0)(\mathbf{x}_0), \text{ com } \mathbf{T}_0 = \mathbf{T}(\mathbf{x}_0) \text{ e } \varphi_0 = \varphi(\mathbf{x}_0).$$

Considerando-se que:

$$\begin{aligned} \text{div}(\varphi_0\mathbf{T}) &= \varphi_0\text{div}(\mathbf{T}); \\ \mathbf{w} \cdot \text{div}(\varphi\mathbf{T}) &= \text{div}(\varphi\mathbf{T}^T\mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in V; \end{aligned}$$

e que por ii), para $\mathbf{v} = \mathbf{T}_0^T\mathbf{w}$, tem-se,

$$\text{div}(\varphi\mathbf{T}_0^T\mathbf{w}) = \nabla\varphi \cdot (\mathbf{T}_0^T\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{T}_0\nabla\varphi;$$

então, $\text{div}(\varphi\mathbf{T}_0) = \mathbf{T}_0\nabla\varphi$.

Portanto, $\text{div}(\varphi\mathbf{T})(\mathbf{x}_0) = \varphi_0 \text{div}\mathbf{T}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{T}_0 \nabla\varphi(\mathbf{x}_0)$. □

Uma outra propriedade importante é que: $\text{div}(\nabla\mathbf{v}^T) = \nabla(\text{div}\mathbf{v})$.

Proposição D5.4:

Sejam \mathbf{w} e \mathbf{v} campos vetoriais definidos sobre V , então, $\nabla(\mathbf{w}\otimes\mathbf{v}) = \nabla\mathbf{w}\otimes\mathbf{v} + \mathbf{w}\otimes\nabla\mathbf{v}^T$.

Justificativa:

Considere $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathbf{x})\otimes\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Observe que, se \mathbf{u} é um vetor não dependente de \mathbf{x} então,

$$\nabla(\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{u}) = \nabla\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{u}.$$

Assim,

$$\nabla[\mathbf{w}\otimes\mathbf{v}]\mathbf{u} = \nabla[(\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})\mathbf{u}]. \quad (\text{D.50})$$

Desde que,

$$\nabla[(\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})\mathbf{u}] = \nabla[(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{w}]. \quad (\text{D.51})$$

Fazendo-se $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \varphi$ então, da proposição D5.3.1i) tem-se que:

$$\nabla[\varphi\mathbf{w}] = \varphi\nabla\mathbf{w} + \mathbf{w}\otimes\nabla\varphi. \quad (\text{D.52})$$

Da proposição D5.3.1ii) tem-se:

$$\nabla\varphi = \nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}) = \nabla\mathbf{v}^T\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \nabla\mathbf{v}^T\mathbf{u} \quad (\text{D.53})$$

pois nesse caso $\nabla\mathbf{u} = 0$.

Substituindo-se (D.53) em (D.52) vem:

$$\nabla[(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{w}] = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\nabla\mathbf{w} + \mathbf{w} \otimes \nabla\mathbf{v}^T\mathbf{u}. \quad (\text{D.54})$$

Prova-se utilizando as propriedades dadas que,

$$\mathbf{w} \otimes \nabla\mathbf{v}^T\mathbf{u} = [\mathbf{w} \otimes \nabla\mathbf{v}^T]\mathbf{u}; \quad (\text{D.55})$$

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\nabla\mathbf{w} = [\nabla\mathbf{w} \otimes \nabla\mathbf{v}]\mathbf{u}. \quad (\text{D.56})$$

Então, substituindo-se (D.55) e (D.56) em (D.54) tem-se:

$$\nabla[(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{w}] = [\nabla\mathbf{w} \otimes \nabla\mathbf{v}]\mathbf{u} + [\mathbf{w} \otimes \nabla\mathbf{v}^T]\mathbf{u}. \quad (\text{D.57})$$

De (D.57), (D.51) e (D.50) conclui-se que:

$$\nabla[\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}]\mathbf{u} = [\nabla\mathbf{w} \otimes \nabla\mathbf{v}]\mathbf{u} + [\mathbf{w} \otimes \nabla\mathbf{v}^T]\mathbf{u}. \quad (\text{D.58})$$

Portanto, $\nabla(\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}) = \nabla\mathbf{w} \otimes \nabla\mathbf{v} + \mathbf{w} \otimes \nabla\mathbf{v}^T$. □

As operações gradiente e divergente podem ser representadas em componentes, da seguinte maneira:

$$(\nabla\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}; \quad (\nabla\mathbf{v})_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}; \quad \text{div } \mathbf{v} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}; \quad \text{div } (\mathbf{T})_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}.$$

Apêndice E - Alguns Resultados sobre Pontos Limite e Pontos de Bifurcação.

A seguir são vistos alguns resultados da teoria de bifurcação para a análise de singularidade relacionada a problemas com um parâmetro e problemas com dois parâmetros.

Inicialmente, nas seções E1 e E2, a análise é feita considerando-se hipóteses que implicam nos problemas analisados a ocorrência de um ponto limite simples ou um ponto de bifurcação simples. A ocorrência de múltiplos pontos de bifurcação ou de bifurcação em pontos limite será vista na seção E3. Os resultados a serem obtidos se encontram em [Decker e Keller, 1980], [Jepson e Spence, 1985a] e [Jepson e Decker, 1986].

E1 - Problemas com um parâmetro.

Considere a seguinte equação:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = 0; \quad (\text{E.1})$$

onde $\mathbf{f}: \mathbf{X}_1 \times \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{X}_2$, é uma função de classe C^3 ; $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ são espaços de Banach e $\lambda \in \mathcal{R}$.

Assuma que em um ponto $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ tem-se $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \lambda_0) = 0$. Na análise de curvas soluções ramificadas a partir de $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$, se tiver-se que $\mathbf{f}'_{\mathbf{x}} = \mathbf{f}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ é não singular, então $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ é um ponto regular para (E.1), e o teorema da função implícita garante o resultado de existência e unicidade de curva solução em uma vizinhança $V(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$.

Se tiver-se que $\mathbf{f}'_{\mathbf{x}} = \mathbf{f}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$, é singular, então o comportamento de \mathbf{f} em $V(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ pode levar aos seguintes resultados: $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ é um ponto limite (mínimo ou máximo, inflexão) ou $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ é um ponto de bifurcação; em $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ ocorre bifurcação múltipla ou bifurcação em ponto limite simples.

Pretende-se nessa seção, estudar resultados que dêem condição de especificar se a partir de uma singularidade para $\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}$, o ponto encontrado é um ponto limite ou um ponto de bifurcação, analisando o comportamento da curva de ramificação em $V(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$, mas colocando hipóteses que excluem a ocorrência de múltiplos pontos de bifurcação ou de bifurcação em pontos limite.

Para analisar o comportamento da curva de ramificação no ponto $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$, para o caso de bifurcação simples ou de ponto limite simples, considere-se as seguintes hipóteses:

i) O Núcleo de $\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}$, denotado por $N(\mathbf{f}'_{\mathbf{x}})$, é gerado por um único versor ϕ , ou seja,

$$N(\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}) = \text{span}\{\phi\}; \|\phi\| = 1; \quad (\text{E.2a})$$

tal que,

$$\dim N(\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}) = 1 \quad (\text{E.2b})$$

$$\mathbf{X}_1 = \text{span}\{\phi\} \oplus \mathbf{V}; \quad (\text{E.2c})$$

onde, \mathbf{V} é um complemento de $\text{span}\{\phi\}$ em \mathbf{X}_1 ;

ii) A imagem do operador $\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}$, denotada por $\mathbf{R}(\mathbf{f}'_{\mathbf{x}})$, é fechada e de codimensão finita 1, ou seja,

$$\mathbf{R}(\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}) \text{ é fechada, } \text{codim}(\mathbf{R}(\mathbf{f}'_{\mathbf{x}})) = 1. \quad (\text{E.3})$$

Então, $\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}$ é um operador de Fredholm de Índice zero;

O fato de $\mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0)$ ser fechada e de codimensão finita 1, implica em que, o núcleo do operador adjunto \mathbf{f}_x^{0*} , denotado por $N(\mathbf{f}_x^{0*})$, onde $\mathbf{f}_x^{0*}: \mathbf{X}_2^* \rightarrow \mathbf{X}_1^*$, onde \mathbf{X}_2^* e \mathbf{X}_1^* são os conjuntos duais respectivamente de \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 , é gerado por um único versor $\boldsymbol{\psi}^*$ ou seja,

$$N(\mathbf{f}_x^{0*}) = \text{span}\{\boldsymbol{\psi}^*\}, \|\boldsymbol{\psi}^*\| = 1; \quad (\text{E.4a})$$

tal que,

$$\dim N(\mathbf{f}_x^{0*}) = \text{codim}\mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0) = 1. \quad (\text{E.4b})$$

Na hipótese (E.4b), desde que, $\mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0) = N(\mathbf{f}_x^{0*})^\perp$ (ver relação R3 vista em (D.4)), então, o espaço imagem de \mathbf{f}_x^0 , pode ser expresso por,

$$\mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0) = \{ \mathbf{y} \in \mathbf{X}_2 \text{ tal que, } \boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{y} = 0 \} \quad (\text{E.5})$$

e o conjunto \mathbf{X}_2 pode ser expresso por:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0) \oplus \mathbf{W}; \quad (\text{E.6})$$

tal que, para $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, deve-se ter $\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{w} \neq 0$.

Para a análise de curvas ramificadas do ponto solução $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$, em $V(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$, considera-se agora os arcos soluções $(\mathbf{x}(\xi), \lambda(\xi))$, de classe C^p , $p \geq 2$, tais que,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(\xi), \lambda(\xi)) = 0, \text{ em } V(\mathbf{x}_0, \lambda_0); \quad (\text{E.7a})$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(\xi + d\xi), \lambda(\xi + d\xi)) = 0, \text{ em } V(\mathbf{x}_0, \lambda_0); \quad (\text{E.7b})$$

com $\xi \rightarrow 0^+$ tal que $(\mathbf{x}(0), \lambda(0)) = (\mathbf{x}_0, \lambda_0)$.

Aplicando-se agora aproximação de Taylor de segunda ordem, na variável $(\mathbf{x}(\xi), \lambda(\xi))$, para exprimir aproximadamente (E.7b) e avaliando-se em $\xi = 0$, obtém-se:

$$\mathbf{f}_x^0 \mathbf{x}(0) + f_\lambda^0 \lambda(0) = 0; \quad (\text{E.8a})$$

$$\mathbf{f}_x^0 \mathbf{x}(0) + f_\lambda^0 \lambda(0) = - \{ [\mathbf{f}_{xx}^0 \mathbf{x}(0)] \mathbf{x}(0) + 2f_{x\lambda}^0 \mathbf{x}(0) \lambda(0) + f_{\lambda\lambda}^0 (\lambda(0))^2 \}. \quad (\text{E.8b})$$

Desde que,

i) $\lambda(\xi) = \frac{\partial \lambda(\xi)}{\partial \xi} = 0$, se o ponto $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ é um ponto limite ou seja a trajetória encontrada é

única e regular em $V(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$;

ii) $\lambda(\xi) \neq 0$ e existe $\mathbf{x}(0) \neq 0$, se o ponto $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ é um ponto de bifurcação, o que implica em existir pelo menos duas ramificações e a perda de regularidade da trajetória em $V(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$;

Então, duas possibilidades podem ocorrer para (E.1):

$$\mathbf{f}_\lambda^0 \in \mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0) \quad (\text{E.9a})$$

ou

$$\mathbf{f}_\lambda^0 \notin \mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0) \text{ mas } \lambda(0) = 0; \quad (\text{E.9b})$$

dessa forma, a equação (E.9a) está associada a um ponto limite, enquanto que a equação (E.9b), está associada a um ponto de bifurcação.

Para o resultado encontrado em (E.9a) é possível encontrar um vetor $\boldsymbol{\phi}_0$ tal que,

$$\mathbf{f}_x^0 \boldsymbol{\phi}_0 = -\mathbf{f}_\lambda^0. \quad (\text{E.10})$$

Voltando-se com (E.10) na equação (E.8a), tem-se:

$$\mathbf{f}_x^0 \mathbf{x}(0) + f_\lambda^0 \mathcal{L}(0) = \mathbf{f}_x^0 \mathbf{x}(0) - \mathbf{f}_x^0 \phi_0 \mathcal{L}(0) = 0, \quad (\text{E.11})$$

o que implica em

$$\mathbf{f}_x^0 (\mathbf{x}(0) - \mathcal{L}(0) \phi_0) = 0 \Rightarrow \mathbf{x}(0) - \mathcal{L}(0) \phi_0 \in N(\mathbf{f}_x^0);$$

assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) - \mathcal{L}(0) \phi_0 &= \phi \text{ tal que } \phi \in N(\mathbf{f}_x^0); \\ \mathbf{x}(0) &= \phi + \alpha_0 \phi_0 \text{ tal que } \alpha_0 = \mathcal{L}(0). \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Substituindo-se (E.12) em (E.8b), obtém-se:

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}_x^0 \mathbf{x}(0) + \mathbf{f}_\lambda^0 \mathcal{L}(0) = \\ &= - \{ [\mathbf{f}_{xx}^0 (\phi + \alpha_0 \phi_0)] (\phi + \alpha_0 \phi_0) + 2 \mathbf{f}_{x\lambda}^0 [(\phi + \alpha_0 \phi_0) \alpha_0] + \mathbf{f}_{\lambda\lambda}^0 (\alpha_0)^2 \}. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Multiplicando-se essa última equação à esquerda por $\boldsymbol{\psi}^* \in N(\mathbf{f}_x^0)$ e utilizando-se de (E.5) e de (E.9a) que,

$$\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 = 0, \text{ pois } \mathbf{f}_\lambda^0 \in \mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0); \quad (\text{E.14})$$

então, de (E.10),

$$\boldsymbol{\psi}^* \cdot (-\mathbf{f}_x^0 \phi_0) = 0; \quad (\text{E.15a})$$

que é equivalente a,

$$([\mathbf{f}_x^0]^T \boldsymbol{\psi}^*) \cdot \phi_0 = 0. \quad (\text{E.15b})$$

Desde que, ϕ_0 é um vetor genérico, tal que $\phi_0 \neq 0$, tem-se que,

$$[\mathbf{f}_x^0]^T \boldsymbol{\psi}^* = 0; \quad (\text{E.16})$$

de onde conclui-se que, $\boldsymbol{\psi}^*$ é um autovetor para $[\mathbf{f}_x^0]^T$, associado a autovalor nulo.

O resultado (E.16) será utilizado no capítulo VI.

Considerando-se (E.14) e (E.15a) na equação (E.13) essa é equivalente à seguinte equação quadrática na variável $\alpha_0 = \mathcal{L}(0)$:

$$\boldsymbol{\psi}^* \cdot ((\mathbf{f}_{xx}^0 \phi_0) \phi_0 + 2 \mathbf{f}_{x\lambda}^0 \phi_0 + \mathbf{f}_{\lambda\lambda}^0) \alpha_0^2 + \boldsymbol{\psi}^* \cdot ((\mathbf{f}_{xx}^0 \phi) \phi_0 + 2 \mathbf{f}_{x\lambda}^0 \phi) \alpha_0 + \boldsymbol{\psi}^* \cdot ((\mathbf{f}_{xx}^0 \phi_0) \phi_0) = 0. \quad (\text{E.17})$$

E1.1 - Equação de bifurcação simples (ABE_s)

A equação (E.17) pode ser simplificada por:

$$c_{f\lambda} \alpha_0^2 + b_{f\lambda} \alpha_0 + a_f = 0; \quad (\text{E.18})$$

$$a_f = \boldsymbol{\psi}^* \cdot [(\mathbf{f}_{xx}^0 \phi) \phi]; \quad (\text{E.19a})$$

$$b_{f\lambda} = \boldsymbol{\psi}^* \cdot [(\mathbf{f}_{xx}^0 \phi) \phi_0 + \mathbf{f}_{x\lambda}^0 \phi]; \quad (\text{E.19b})$$

$$c_{f\lambda} = \boldsymbol{\psi}^* \cdot [(\mathbf{f}_{xx}^0 \phi_0) \phi_0 + 2 \mathbf{f}_{x\lambda}^0 \phi_0 + \mathbf{f}_{\lambda\lambda}^0]. \quad (\text{E.19c})$$

A equação (E.18), é conhecida como Equação Algébrica de Bifurcação Simples (**ABE_s**), e sua análise é importante para caracterizar-se pontos de bifurcação para o problema com um parâmetro (E.1).

Denotando-se $\Delta' = 4 (b_{f\lambda}^2 - a_f c_{f\lambda})$, a análise de (E.18) pode ser feita explorando-se

$$\Delta = (b_{f\lambda})^2 - a_f c_{f\lambda}; \quad (E.20)$$

o que será feito no final dessa seção.

E1.2 - Equação algébrica de ponto limite simples (**LPBE_s**).

Voltando-se à equação (E.9b), a análise desta leva na não existência de um vetor ϕ_0 que satisfaça (E.9a) e assim, a solução geral (E.12) se escreve por:

$$\mathfrak{K}(0) = \phi, \text{ pois } \alpha_0 = \mathfrak{L}^{\mathfrak{K}}(0) = 0.$$

Considerando-se $n = \mathfrak{K}(0)$, se encontra que, a existência de uma solução $\mathfrak{K}(0) = \mathbf{u}_0$ deve satisfazer a equação (E.8b) com $\mathfrak{L}^{\mathfrak{K}}(0) = 0$, resultando em:

$$\mathbf{f}_x^0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{f}_\lambda^0 n = - [\mathbf{f}_{xx}^0 \phi] \phi; \quad (E.21a)$$

denominada aqui de equação algébrica de ponto limite simples (**LPBE_s**).

A solução \mathbf{v}_0 não é única. Uma forma de se obter unicidade é considerar $\phi^* \in \mathbf{X}_1^*$ tal que,

$$\phi^* \cdot \mathbf{u}_0 = 0. \quad (E.21b)$$

Logo, uma condição de existência de ponto limite recai em:

$$\psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 \neq 0; \quad (E.22)$$

pois nesse caso, $\mathbf{f}_\lambda^0 \notin \mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0)$ e considerando-se as equações (E.22) e (E.10), pode-se determinar ϕ_0 resolvendo-se a seguinte equação:

$$\mathbf{f}_x^0 \phi_0 = -\mathbf{f}_\lambda^0 + (\psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0) \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in \mathbf{W}; \quad (E.22a)$$

pois nesse caso $-\mathbf{f}_\lambda^0 + (\psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0) \mathbf{w} \in \mathbf{X}_2 = \mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0) \oplus \mathbf{W}$.

Utilizando-se dos resultados obtidos até aqui, encontrados em [Decker e Keller, 1980], segue a caracterização de pontos limites, pontos de bifurcação e sua classificação.

E1.3 - Pontos limites.

A condição necessária para se ter pontos limites, dada em (E.22) é:

$$\psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 \neq 0; \quad (E.23a)$$

i) se $a_f \neq 0$ então $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ é um ponto limite quadrático simples; (E.23b)

ii) se $a_f = 0$ (implicando em $\mathfrak{L}^{\mathfrak{K}}(0) = 0$) e $d_f \neq 0$; (E.23c)

então $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ é um ponto limite cúbico simples com:

$$d_f = 3 \psi^* \cdot ([\mathbf{f}_{xx}^0 \phi] \mathbf{v}_0 + \psi^* \cdot [\mathbf{f}_{xxx}^0 \phi] \phi) \neq 0. \quad (E.23d)$$

Será visto na seção E3 que a condição de não degeneração (E.23d) é equivalente a:

$$d_f = \psi^* \cdot [\mathbf{f}_{xx}^0 \phi + \mathbf{f}_{xx}^0 \phi_0 + \mathbf{f}_{x\lambda}^0] \phi. \quad (E.23e)$$

E1.4 - Pontos de bifurcação.

A condição necessária para se obter pontos de bifurcação simples é

$$\psi^* \cdot f_{\lambda}^0 = 0; \tag{E.24a}$$

i) se $\Delta > 0$ e $a_f \neq 0$, então $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ é um ponto de bifurcação transcrito; (E.24b)

ii) se $\Delta > 0$, $a_f = 0$ e $b_{f\lambda} \neq 0$, então $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ é um ponto de bifurcação em garfo; (E.24c)

iii) se $\Delta < 0$, então $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ é um ponto de bifurcação em ilha. (E.24d)

A figura E.1 ilustra pontos limite e sua caracterização.

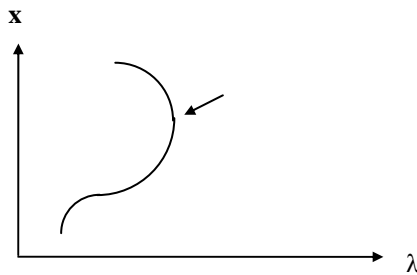


Figura E.1- Pontos limite e sua caracterização.

A figura E.2, ilustra pontos de bifurcação e sua caracterização

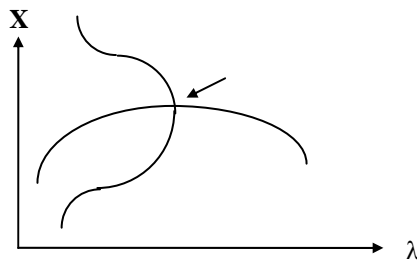


Figura E.2- pontos de bifurcação e sua caracterização

Observação: O caso de bifurcação em ponto limite, que não foi visto aqui, será considerado na seção E3. A figura E.3 vista a seguir, ilustra esse caso.

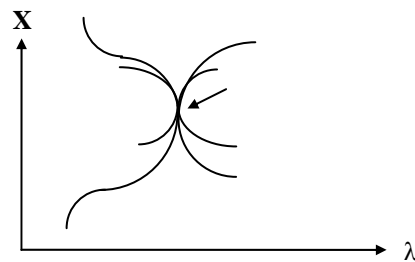


Figura E.3- bifurcação em ponto limite.

E2 - Problemas com dois parâmetros.

É usual em equações com dois parâmetros considerar-se um dos parâmetros associado à bifurcação (parâmetro distinto) enquanto que o outro pode ser considerado como um parâmetro de controle (parâmetro auxiliar), que pode ser fixado em um determinado valor ou relacionar-se a um ponto limite simples, para se analisar a curva solução em relação ao parâmetro de bifurcação. No que segue, essa afirmação é explorada com relação ao parâmetro μ , que será fixado em algum valor ou considerado um ponto limite simples em qualquer análise.

Considere a seguinte equação com dois parâmetros:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = 0; \tag{E.25}$$

onde $\mathbf{f}: \mathbf{X}_1 \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathbf{X}_2$, é uma função de classe C^3 ; $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ são espaços de Banach e $\lambda, \mu \in \mathfrak{R}$.

Considere também que as hipóteses (E.2), (E.3), (E.4), (E.5) e (E.6) estão satisfeitas.

Analogamente ao efetuado para problemas com um parâmetro, pretende-se analisar aqui o comportamento de curvas em dobra no espaço $\mathbf{S} = \mathbf{f}^{-1}(0)$, em uma vizinhança $V(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$. A análise se inicia, considerando que a variável μ , fixada em $\mu = \mu_0$, é um parâmetro de controle caracterizando um ponto limite para (E.25) com respeito a λ em $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$, ou seja, (E.22) está satisfeito, isto é, $\Psi^* \mathbf{f}_\lambda^0 \neq 0$. Esta última condição, será útil para caracterizar-se pontos regulares de (E.25), vistos na seção E2.1, mas será desconsiderada nas seções E2.2 e E2.3, quando se estudará pontos limites e pontos de bifurcação para (E.25), respectivamente.

Para se fazer o estudo desejado, considera-se o seguinte sistema estendido de (E.25), dado por:

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mu) = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) \\ \mathbf{f}_x(\mathbf{x}, \lambda, \mu)\phi \\ \|\phi\| - 1 \end{Bmatrix} = 0; \tag{E.26}$$

com $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \phi, \lambda)$, $\phi \in \mathbf{X}_1$. Na análise de pontos regulares ou singulares para (E.26), utiliza-se o lema E2.1, dado a seguir:

Lema E2.1:

Seja

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & \Psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 \\ a_f & b_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}. \tag{E.27}$$

Suponha que (E.2) a (E.6) estão satisfeitos e considere $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \phi, \lambda)$. Então,

$$\dim N(\bar{\mathbf{f}}_y^0) = \dim N(\mathbf{C}); \tag{E.28a}$$

$$\text{codim } \mathbf{R}(\bar{\mathbf{f}}_y^0) = \dim N(\mathbf{C}); \tag{E.28b}$$

$$\bar{\mathbf{f}}_y^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x^0 & 0 & \mathbf{f}_\lambda^0 \\ \mathbf{f}_{xx}^0 \phi & \mathbf{f}_x^0 & \mathbf{f}_{x\lambda}^0 \\ 0 & \phi^T & 0 \end{pmatrix}; \tag{E.28c}$$

utilizando-se na equação (E.26) a equivalência entre $\|\phi\|^2 - 1 = 0$, com $\phi \cdot \phi = 1$ ($\phi^T \phi = 1$).

Justificativa:

Seja $\Gamma = (\mathbf{p}, \mathbf{q}, r) \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_1 \times \mathfrak{R}$ tal que, $\bar{\mathbf{f}}_y^0 \Gamma = 0$, então,

$$\begin{cases} \mathbf{f}_x^0 \mathbf{p} + \mathbf{f}_\lambda^0 r = 0 \\ [\mathbf{f}_{xx}^0 \phi] \mathbf{p} + \mathbf{f}_x^0 \mathbf{q} + \mathbf{f}_{x\lambda}^0 \phi r = 0. \\ \phi \cdot \mathbf{q} = 0 \end{cases} \quad (\text{E.28d})$$

Um possível \mathbf{p} que satisfaz (E.28d) é dado por, $\mathbf{p} = v\phi + r\phi_0$, onde $v, r \in \mathfrak{R}$ são determinados de tal forma a satisfazer (E.8^a), ou seja, \mathbf{p} deve pertencer a $N(\mathbf{f}_x^0)$:

$$\mathbf{f}_x^0 \mathbf{p} = \mathbf{f}_x^0 (v\phi + r\phi_0) = 0. \quad (\text{E.28e})$$

Assim, multiplicando-se (E.28d) a esquerda por $\psi^* \in N(\mathbf{f}_x^0)$ e considerando (E.28e), no sistema (E.28d) resulta,

$$\begin{cases} r\psi^* \mathbf{f}_\lambda^0 = 0 \\ v\psi^* \cdot ([\mathbf{f}_{xx}^0 \phi])\phi + r\psi^* \cdot ([\mathbf{f}_{xx}^0 \phi])\phi_0 + \mathbf{f}_x^0 \mathbf{q} + \mathbf{f}_{x\lambda}^0 \phi + \psi^* \cdot [\mathbf{f}_x^0 \mathbf{q}] = 0. \\ \phi \cdot \mathbf{q} = 0 \end{cases} \quad (\text{E.28f})$$

Então, utilizando-se (E.18a), (E.18b) e (E.18c), tem-se que (E.28f) é equivalente a,

$$\begin{pmatrix} 0 & \psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 \\ a_f & b_{f\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ r \end{pmatrix} + \psi^* \cdot [\mathbf{f}_x^0 \mathbf{q}] = 0 \text{ e } \phi \cdot \mathbf{q} = 0; \quad (\text{E.28g})$$

o que implica em,

$$\mathbf{f}_x^0 \mathbf{q} = -v a_f - r b_{f\lambda} \text{ e } \phi \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (\text{E.28h})$$

Da equação (E.28h), tem-se o resultado (E.28a), ou seja, $\dim N(\bar{\mathbf{f}}_y^0) = \dim N(\mathbf{C}) = 1$; enquanto que o segundo resultado é obtido utilizando-se que, $\mathbf{R}(\bar{\mathbf{f}}_y^0)$ é fechada e de codimensão finita, tal que, $\text{codim } \mathbf{R}(\bar{\mathbf{f}}_y^0) = \dim \mathbf{R}(\bar{\mathbf{f}}_y^0) = 1$. Logo, de (E.28a), chega-se ao resultado (E.28b), ou seja, $\text{codim } \mathbf{R}(\bar{\mathbf{f}}_y^0) = \dim \mathbf{R}(\bar{\mathbf{f}}_y^0) = \dim N(\mathbf{C})$, e o resultado segue. \square

E2.1 - Caracterização de pontos regulares para o sistema estendido.

O lema E2.1 visto, implica diretamente no teorema E2.1 dado a seguir, que caracteriza pontos regulares para (E.26).

Teorema E2.1:

Seja (\mathbf{y}_0, μ_0) satisfazendo (E.26) com $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{x}_0, \phi, \lambda_0)$ e suponha que (E.2), (E.3), (E.4), (E.5), (E.6) e (E.26) se verifiquem para $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$. Então, $\bar{\mathbf{f}}_y^0$ é não-singular se e somente se $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$ é um ponto limite quadrático de (E.25) com respeito a λ , ou seja, $\psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 \neq 0$ e $a_f \neq 0$ (equações (E.23a) e (E.23b)).

Corolário E2.1:

Seja (\mathbf{y}_0, μ_0) dado nas hipóteses do teorema E2.1 e assumamos que $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$ é um ponto limite quadrático (equações (E.23a) e (E.23b)) com respeito a λ , para (E.25). Então, $\exists \rho_0 > 0$, e uma função $\mathbf{y}(\mu)$ de classe C^3 tal que, $\mathbf{y}(\xi_0) = \mathbf{y}_0$ e $(\mathbf{y}(\xi), \mu(\xi))$ satisfaz (E.26) para $|\xi - \xi_0| < \rho_0$, ou seja, pode-se definir uma curva regular na variável ξ , para (E.25) em $V(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$, por técnicas de continuação padrão.

Denomina-se $(\mathbf{y}(\xi), \mu(\xi))$ de *dobra* da curva regular $(\mathbf{y}(\mu), \mu)$ para (E.25) em $V(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$, se $\mathbf{y}(\xi)$ e $\mu(\xi)$ são regulares em $|\xi - \xi_0| < \rho_0$ e se $(\mathbf{y}(\xi), \mu(\xi))$ satisfaz (E.26).

E2.2 - A superfície S em relação à dobra.

A proposição dada a seguir serve para descrever como a dobra se comporta em relação à curva, ou seja, se a dobra é à direita ou à esquerda, no ponto $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$.

Proposição E2.1:

Suponha que $(\mathbf{y}(\xi), \mu(\xi))$ é uma solução de classe C^3 de (E.26) e $(\mathbf{y}_0, \mu_0) = (\mathbf{y}(\xi_0), \mu(\xi_0))$ é um ponto regular para (E.26). Suponha também que a parametrização é feita tal que $|\mathcal{L}'(\xi)| + |\mathcal{L}''(\xi)| \neq 0$ para $|\xi - \xi_0| < \rho_0$. Então, a dobra é dita ser à direita (à esquerda) para $\xi = \xi_0$ se

$$\frac{-a_f}{\{(\Psi^* \cdot \mathbf{f}'_{\lambda})_{\lambda=0} - (\Psi^* \cdot \mathbf{f}'_{\mu})_{\mu(\xi_0)}\}} < 0 \quad (> 0). \tag{E.29}$$

A figura E.4 abaixo, ilustra o comportamento da dobra.

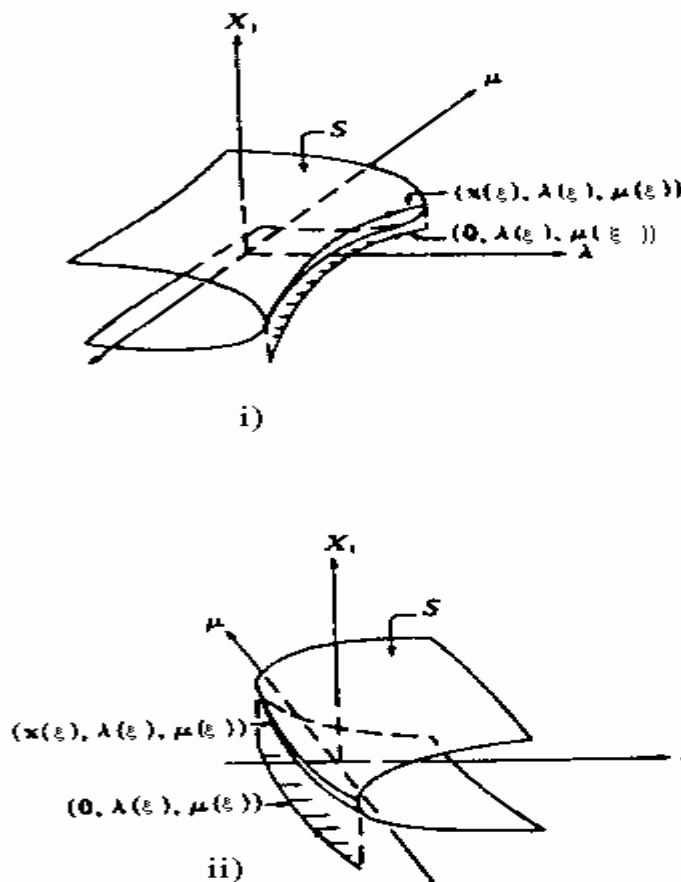


Figura E.4 - Comportamento da dobra à direita (i) e à esquerda (ii).

A expressão (E.29), dá informações sobre a superfície de solução \mathbf{S} , de (E.25), no ponto $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$.

Corolário E2.2: (mudança do comportamento da dobra)

A mudança no comportamento de uma dobra com respeito a uma curva de classe C^∞ $(\mathbf{y}(\xi), \mu(\xi))$, pode ocorrer para pontos $\xi = \xi_0$ se:

$$\bar{\mathbf{F}}_y^0 \text{ é singular ou } |\mathcal{L}(\xi)| + |\mathcal{M}(\xi)| = 0. \quad (\text{E.30})$$

Justificativa:

A diferenciação de (E.25) com respeito a ξ , multiplicada à esquerda por $\boldsymbol{\psi}^*$, resulta:

$$(\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0) \mathcal{L}(\xi) + (\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \mathcal{M}(\xi) = 0.$$

Se (E.30) não está satisfeita, então,

$$(\mathcal{L}(\xi), \mathcal{M}(\xi)) \neq 0 \text{ e } (\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0, \boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \neq 0;$$

o que implica em $(\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0) \mathcal{L}(\xi) - (\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \mathcal{M}(\xi) \neq 0$ e $|\mathcal{L}(\xi)| + |\mathcal{M}(\xi)| \neq 0$.

Então, existe uma função contínua em ξ tal que $\bar{\mathbf{F}}_y^0(\mathbf{y}(\xi), \mu(\xi))$ é não singular, $|\mathcal{L}(\xi)| + |\mathcal{M}(\xi)| \neq 0$ e da proposição E2.1, pode-se ter apenas um tipo de dobra, à direita ou à esquerda, dependendo do sinal de (E.29). Mas, (E.29) pode zerar para $\xi = \xi_0$ se e somente se $a_f = 0$ e pelo lema E2.1, $a_f = 0$ implica em $\bar{\mathbf{F}}_y^0$ é singular.

O ponto limite quadrático pode ser de dois tipos, elíptico ou hiperbólico. A definição dada a seguir caracteriza esses dois tipos.

Definição E2.1:

Assumindo que as condições da proposição E2.1 estão satisfeitas, diz-se que $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$, é um ponto elíptico (hiperbólico) de (E.26) se:

$$\frac{-a_f}{(\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 \mathcal{L}(\xi_0), \boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0 \mathcal{M}(\xi_0)) \cdot \mathbf{n}(\xi_0)} > 0 \quad (< 0); \quad (\text{E.31})$$

onde $\mathbf{n}(\xi_0) = (\mathcal{L}(\xi_0), -\mathcal{M}(\xi_0))$, ou seja, os tipos de curvas formados a partir da intersecção da dobra próxima a $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$, com hiperplanos perpendiculares à normal a superfície de dobra, caracterizam o tipo de ponto, hiperbólico se a dobra é à esquerda e elíptico se a dobra é à direita. Esse comportamento caracterizará bifurcação simples ou em ilha, a serem vistas na seção E2.3.

Uma conclusão importante pode ser tirada dessa seção, que pontos limites quadráticos simples de (E.25), correspondem a pontos regulares do sistema estendido (E.26) e a dobra só pode mudar para pontos singulares de (E.26).

Na próxima seção serão caracterizados, possíveis pontos limites simples para (E.26).

E2.3 - Pontos limites simples para o sistema estendido.

O grande interesse, em analisar-se pontos limites simples para o sistema estendido (E.26) é que, a aplicação direta dos resultados obtidos nessa seção, a serem vistos no teorema E2.2, vão servir para caracterizar, na ocorrência de pontos de bifurcação, se a bifurcação é simples, ou em garfo, ou em ilha.

Cada singularidade genérica do problema (E.25) pode caracterizar um ponto regular ou um ponto limite cúbico para (E.26), dependendo de $a_f \neq 0$ ou $a_f = 0$, respectivamente.

Pretende-se agora caracterizar esses possíveis pontos.

Da teoria vista para problemas com um parâmetro viu-se que, $(\mathbf{y}(\xi_0), \mu(\xi_0)) = (\mathbf{y}_0, \mu_0)$ é um ponto limite simples para (E.26) se e somente se:

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}_0, \mu_0) = 0; \quad (\text{E.32a})$$

$$N(\bar{\mathbf{f}}_y^0) = \text{span}\{\Phi\}, \Phi \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_1 \times \mathfrak{R}; \quad (\text{E.32b})$$

$$\mathbf{R}(\bar{\mathbf{f}}_y^0) = \{\mathbf{z} \in \mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_2 \times \mathfrak{R}: \Psi^* \cdot \mathbf{z} = 0\}, \Psi^* \in \mathbf{X}_2^* \times \mathbf{X}_2^* \times \mathfrak{R}; \quad (\text{E.32c})$$

$$\Psi^* \bar{\mathbf{f}}_\mu^0 \neq 0. \quad (\text{E.32d})$$

A seguir, encontram-se condições para $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda, \mu)$ em (E.25) que são equivalentes a (E.32). Aqui será considerado somente o caso em que (E.2), (E.3), (E.4), (E.5) e (E.6) se verificam.

Teorema E2.2:

Suponha que (\mathbf{y}_0, μ_0) satisfaça (E.26) e que as hipóteses (E.2), (E.3), (E.4), (E.5) e (E.6) estejam satisfeitas. Seja C dado por (E.27). Então, (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite simples do sistema estendido (E.29) se e somente se, uma das duas condições abaixo se verificarem:

$$\text{i) se } \Psi^* \mathbf{f}_\lambda^0 = 0; \Psi^* \mathbf{f}_\mu^0 \neq 0 \text{ e } a_f = \Psi^* \cdot (\mathbf{f}_{xx}^0 \phi) \cdot \phi \neq 0 \quad (\text{E.33})$$

ou

$$\text{ii) } a_f = 0; C \text{ tem rank 1,} \quad (\text{E.34a})$$

$$\Psi^* \mathbf{f}_{\bar{\lambda}}^0 \neq 0 \text{ e } b_{f\bar{\mu}} \neq 0; \quad (\text{E.34b})$$

onde,

$$b_{f\bar{\mu}} = \Psi^* \cdot ([\mathbf{f}_{xx}^0 \phi] \tilde{\phi}) + \Psi^* \cdot ([\mathbf{f}_{x\bar{\mu}}^0 \phi] \phi) \neq 0; \quad (\text{E.34c})$$

$$\bar{\lambda} = (\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0) \lambda + (\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \mu; \quad (\text{E.34d})$$

$$\bar{\mu} = -(\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \lambda + (\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0) \mu; \quad (\text{E.34e})$$

$$\mathbf{f}_x^0 \tilde{\phi} = -\mathbf{f}_{\bar{\mu}}^0; \phi \cdot \tilde{\phi} = 0. \quad (\text{E.34f})$$

Considerando-se que a condição (E.34) se verifique, então, em (E.34a), a condição de C ter posto 1 implica em que :

$$b_{f\lambda} \neq 0 \text{ e } \Psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 \neq 0; \text{ ou } b_{f\lambda} \neq 0 \text{ e } \Psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 = 0; \text{ ou } \Psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 \neq 0 \text{ e } b_{f\lambda} = 0. \quad (\text{E.34e})$$

No caso (E.33) tem-se que (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite quadrático simples.

No caso (E.34), (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite cúbico se $\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 = 0$ ou (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite quadrático simples se $\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 \neq 0$, resultado a ser dado no teorema E2.3.

Para que as condições (E.34b), (E.34c) e (E.34f) fiquem completas, deve-se determinar $\mathbf{f}_{\bar{\lambda}}^0$, $\mathbf{f}_{\bar{\mu}}^0$, $\mathbf{f}_{\mathbf{x}\bar{\lambda}}^0$ e $\mathbf{f}_{\mathbf{x}\bar{\mu}}^0$, os quais, utilizando-se (E.34d) e (E.34e) são expressos por:

$$\mathbf{f}_{\bar{\lambda}}^0 = \mathbf{f}_{\lambda}^0 \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \lambda} + \mathbf{f}_{\mu}^0 \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \mu}; \quad (\text{E.34f})$$

$$\mathbf{f}_{\bar{\mu}}^0 = \mathbf{f}_{\lambda}^0 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \lambda} + \mathbf{f}_{\mu}^0 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \mu}; \quad (\text{E.34g})$$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}\bar{\lambda}}^0 = \mathbf{f}_{\mathbf{x}\lambda}^0 \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \lambda} + \mathbf{f}_{\mathbf{x}\mu}^0 \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \mu}; \quad (\text{E.34h})$$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}\bar{\mu}}^0 = \mathbf{f}_{\mathbf{x}\lambda}^0 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \lambda} + \mathbf{f}_{\mathbf{x}\mu}^0 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \mu}; \quad (\text{E.34i})$$

onde

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \lambda} = \boldsymbol{\Psi}^* \mathbf{f}_{\lambda}^0; \quad (\text{E.34j})$$

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \mu} = \boldsymbol{\Psi}^* \mathbf{f}_{\mu}^0; \quad (\text{E.34k})$$

$$\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \lambda} = -\boldsymbol{\Psi}^* \mathbf{f}_{\mu}^0; \quad (\text{E.34l})$$

$$\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \mu} = \boldsymbol{\Psi}^* \mathbf{f}_{\lambda}^0. \quad (\text{E.34m})$$

Pontos limite simples para (E.25).

A condição de ponto limite obtida no teorema E2.2, se relaciona diretamente à variável μ , pois o fato de $\boldsymbol{\Psi}^* \cdot \mathbf{f}_{\lambda}^0 = 0$, implica pelos resultados vistos para problemas com um parâmetro em que o ponto é de bifurcação com relação à variável λ .

Então, baseando-se nos resultados (E.23a), (E.23b), (E.23c) e (E.23d), vistos para problemas com um parâmetro, para se ter no problema de dois parâmetros somente a ocorrência de pontos limites em ambas as variáveis, deve se ter:

$$\boldsymbol{\Psi}^* \cdot \mathbf{f}_{\lambda}^0 \neq 0 \text{ e } \boldsymbol{\Psi}^* \cdot \mathbf{f}_{\mu}^0 \neq 0; \quad (\text{E.35})$$

o que é equivalente a afirmar que, para $|\lambda - \lambda_0| < \rho_0$ e $|\mu - \mu_0| < \rho_0$, tem-se $(\mathcal{R}(\xi_0), \mathcal{A}(\xi_0)) = 0$, ou seja, a curva solução é regular em $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$.

Outro resultado sobre pontos limites, diz respeito ao comportamento da dobra. No corolário E2.1 viu-se que, se ocorrer de $\bar{\mathbf{f}}_y^0$ ser singular, a dobra da curva $(\mathbf{y}(\xi), \mu(\xi))$ poderia mudar de comportamento. A seguir será visto que o comportamento da dobra não muda em ponto limite.

Se no teorema (E2.2), a condição (E.33) se verifica, então, (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite quadrático simples, assim, pelo teorema E2.1, (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto regular para o sistema estendido (E.26) e pelo corolário E2.2, a dobra não muda o comportamento nesse ponto.

Será visto através do teorema abaixo que, na ocorrência de ponto limite cúbico, ou seja, se na condição (E.34) ocorrer $\boldsymbol{\Psi}^* \cdot \mathbf{f}_{\lambda}^0 = 0$, a dobra também não muda o comportamento.

Teorema E2.3:

Suponha que (\mathbf{y}_0, μ_0) é solução de (E.26), que as hipóteses (E.2) a (E.6) estão satisfeitas e (E.23d), (E.34), se verificam. Então, (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite quadrático (ou cúbico) se $\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 \neq 0$ (ou $\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 = 0$). Além disso, existe uma curva em dobra regular $(\mathbf{y}(\xi), \mu(\xi))$ para $|\xi - \xi_0| < \rho_0$, com $(\mathbf{y}_0, \mu_0) = (\mathbf{y}(\xi_0), \mu(\xi_0))$ tal que:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu} = \frac{-d_f}{b_{f\mu}} \neq 0; \quad (E.36a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu} = 0; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \lambda^2} = 2 d_f \neq 0 \quad (E.36b)$$

e também, para $|\xi - \xi_0| < \rho_0$ suficientemente pequeno, a dobra é, à direita (à esquerda) se,

$$\frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial \lambda^3} < 0 \quad (> 0). \quad (E.36c)$$

Todos os resultados vistos até aqui, são aplicados agora para se estudar a ocorrência de bifurcação perturbada e em ilha, a ser vista a seguir.

E2.4 - Bifurcações, perturbadas e em ilha.

A análise de pontos de bifurcação será vista com relação ao parâmetro λ , ou seja, considera-se a hipótese do ponto $(\mathbf{x}_0, \lambda, \mu_0)$ ser um ponto limite com relação a μ , mas os resultados a serem obtidos também são válidos com relação ao parâmetro μ . Essa mesma observação pode ser feita com relação à pontos limite, estudados na seção anterior.

Bifurcação perturbada.

Suponha que $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$ é um ponto de bifurcação simples com respeito a λ , de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda, \mu_0)$, ou seja,

$$\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 = 0; \quad (E.37a)$$

$$\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0 \neq 0; \quad (E.37b)$$

$$\Delta = (b_{f\lambda})^2 - a_f c_{f\lambda} > 0; \quad (E.37c)$$

então, a equação $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda, \mu_0) = 0$, exibe bifurcação perturbada em uma vizinhança de $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$.

Existem dois tipos de bifurcação perturbada que serão caracterizadas nos teoremas abaixo.

Teorema E2.4 : (bifurcação transcritical)

Assuma que as hipóteses (E.2), (E.3), (E.4), (E.5), (E.6) e (E.37) estão satisfeitas e que $a_f \neq 0$. Seja $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{x}_0, \phi, \lambda_0)$ com ϕ tal que, $\phi \cdot \phi = 1$. Então, (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite quadrático simples para (E.26), que nesse caso é do tipo hiperbólico.

Justificativa:

(\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite quadrático simples do sistema estendido (E.26), pois $a_f \neq 0$ e $\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0 \neq 0$, o que verifica a condição (E.33) do teorema E2.2.

Diferenciando $\mathbf{f}(\mathbf{x}(\xi), \lambda(\xi), \mu_0(\xi))$ com relação a ξ , pode-se mostrar que para uma escolha conveniente de ξ , a curva em dobra $(\mathbf{y}(\xi), \mu(\xi))$, satisfaz,

$$\mathbf{y}(\xi_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mu(\xi_0) = \mu_0; \tag{E.38a}$$

$$\dot{\lambda}(\xi_0) = 0, \quad \dot{\mu}(\xi_0) \neq 0; \tag{E.38b}$$

$$\ddot{\mu}(\xi_0) = \frac{\Delta a_f}{\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0} \neq 0; \tag{E.38c}$$

com $\Delta > 0$, dado em (E.37c).

De (E.31) e as hipóteses (E.38b) e (E.38c) tem-se que,

$$\frac{-a_f}{(\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0(\mathbf{x}_0), \boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{n}(\xi)} (\dot{\lambda}(\xi_0), \dot{\mu}(\xi_0)) \cdot \mathbf{n}(\xi_0) = \frac{\Delta a_f}{\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0} < 0. \tag{E.39}$$

e então, o ponto limite quadrático $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$ é um ponto hiperbólico para (E.39). \square

A figura E.5, ilustra o comportamento de um ponto com bifurcação perturbada transcritical.

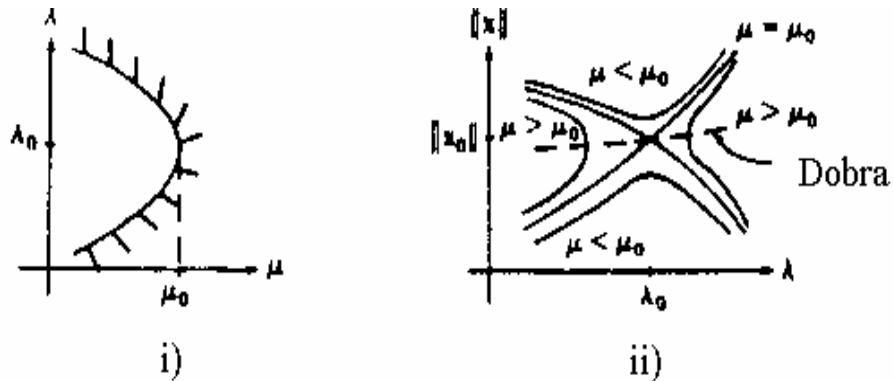


Figura E.5 - bifurcação transcritical perturbada.

- i) projeção da folha solução (ver figura E.4) sobre o plano (μ, λ) ;
- ii) curvas de solução de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = 0$ para $\mu > \mu_0$, $\mu = \mu_0$ e $\mu < \mu_0$.

Teorema E2.5: (bifurcação em garfo)

Assuma que as hipóteses (E.2), (E.3), (E.4), (E.5), (E.6) e (E.37) estão satisfeitas e que $a_f = 0$ e $d_f \neq 0$. Seja $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\phi}, \lambda_0)$ com $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = 1$. Então, (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite simples para (E.26), que nesse caso é do tipo cúbico.

Justificativa:

Considerando-se $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\phi}, \lambda_0)$ com $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = 1$, então, (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite simples do sistema estendido (E.26), se as hipóteses (E.34) do teorema E2.2 estão satisfeitas, o que é mostrado a seguir.

Desde que, $a_f = 0$, $\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 = 0$, tem-se que $\dim N(C) = 1$ se $b_{f\lambda} \neq 0$ em (E.27) e a condição (E.34a) está satisfeita.

Considerando $\boldsymbol{\psi}^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 = 0$, então em (E.34d) e (E.34e) tem-se,

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = (\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \mu \\ \bar{\mu} = -(\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \lambda \end{cases} \quad (\text{E.40})$$

Para se mostrar que (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite simples, deve-se ter em (E.34b) que $\Psi^* \cdot \mathbf{f}_{\bar{\lambda}}^0 \neq 0$ e $b_{f\bar{\mu}} \neq 0$.

$$\Psi^* \cdot \mathbf{f}_{\bar{\lambda}}^0 = (\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0) \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \lambda} + (\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \mu} = (\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0)(\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \neq 0 \text{ e então } \Psi^* \cdot \mathbf{f}_{\bar{\lambda}}^0 \neq 0.$$

$b_{f\bar{\mu}} \neq 0$ pois de,

$$b_{f\bar{\mu}} = \Psi^* \cdot ([\mathbf{f}_{xx}^0 \phi] \tilde{\phi}) + \Psi^* \cdot ([\mathbf{f}_{x\bar{\mu}}^0 \phi] \phi); \quad (\text{E.41})$$

tem-se que,

$$\mathbf{f}_{x\bar{\mu}}^0 = \mathbf{f}_{x\lambda}^0 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \lambda} + \mathbf{f}_{x\mu}^0 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \mu} = (-\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \mathbf{f}_{x\lambda}^0.$$

Calculando-se agora $\tilde{\phi}$, tem-se que,

$$\mathbf{f}_x^0 \tilde{\phi} = -\mathbf{f}_{\bar{\mu}}^0 = (\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \mathbf{f}_\lambda^0. \quad (\text{E.41a})$$

Desde que,

$$b_{f\lambda} = \Psi^* \cdot ([\mathbf{f}_{xx}^0 \phi] \phi_0 + f_{x\lambda}^0 \phi) \text{ com } \mathbf{f}_x^0 \phi_0 = -\mathbf{f}_\lambda^0; \quad (\text{E.41b})$$

tem-se de (E.41a) e (E.41b) que,

$$\tilde{\phi} = (-\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \phi_0. \quad (\text{E.42})$$

Substituindo-se (E.42) em (E.41) e considerando-se que em (E.41b),

$$b_{f\lambda} = \Psi^* \cdot ([\mathbf{f}_{xx}^0 \phi] \phi_0 + f_{x\lambda}^0 \phi);$$

chega-se no resultado,

$$b_{f\bar{\mu}} = (-\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) b_{f\lambda} \neq 0 \text{ pois } \Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0 \neq 0 \text{ e } b_{f\lambda} \neq 0.$$

Logo, (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite simples.

Para se mostrar que, (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite cúbico, utiliza-se de (E.35) que $d_f \neq 0$ e do teorema (E2.3) juntamente com a equação (E.40) tem-se que,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= (\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \mu = 0 \text{ se } \mu = 0; \\ \bar{\mu} &= (\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \mu = 0 \text{ se } \mu = 0; \\ \bar{\mu} &= (\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0) \mu \neq 0 \text{ se } \mu \neq 0; \end{aligned}$$

o que prova que (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite cúbico.

Nas hipóteses do teorema (E2.4), a equação $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda, \mu_0) = 0$ tem uma ramificação $(\mathbf{x}_1(\xi), \lambda_1(\xi))$ tal que,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(\xi_0) &= \mathbf{x}_0, \quad \lambda_1(\xi_0) = \lambda_0; \\ \mathbf{x}_\xi(\xi_0) &= \phi, \quad \lambda_\xi(\xi_0) = 0. \end{aligned}$$

Diferenciando (E.25) com respeito a ξ , obtém-se:

$$\mathcal{L}_1(\xi_0) = \frac{d_f}{3b_{f\lambda}};$$

o que implica que, para $d_f \neq 0$, pode-se considerar uma parametrização conveniente $\mathcal{L}_1(\xi_0) \neq 0$, ou seja, $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ é um ponto de bifurcação em garfo. \square

A figura E.6, ilustra bifurcação perturbada em garfo.

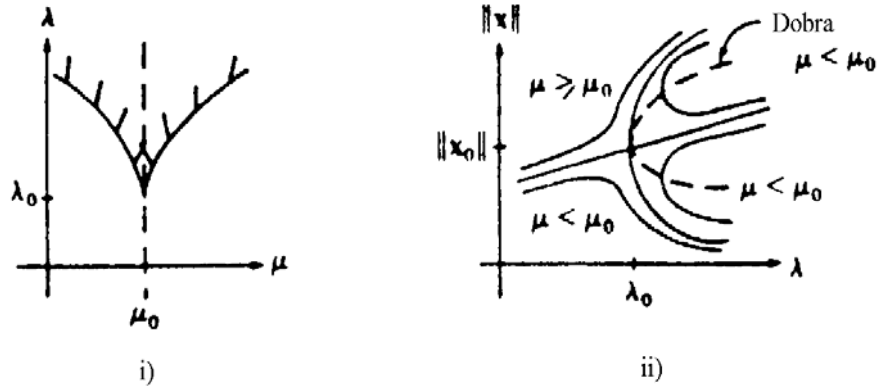


Figura E.6 - bifurcação perturbada em garfo.

- i) projeção sobre o plano (μ, λ) ;
- ii) curvas de solução de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = 0$ para μ fixo.

Bifurcação em ilha.

Teorema E2.6:

Assuma que as hipóteses (E.2), (E.3), (E.4), (E.5), (E.6) estão satisfeitas, que $a_f \neq 0$ e em (E.37) tem-se $\Delta < 0$. Assuma também que, (\mathbf{y}_0, μ_0) é um ponto limite elíptico simples para (E.26), ou seja, $\frac{a_f}{\Psi^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0} \mathcal{L}_0 < 0$. Então, ilhas de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda, \mu_1) = 0$, existem para μ_1 constante satisfazendo $(\mu_1 - \mu_0) \mathcal{L}_0 > 0$, para $(\mathbf{x}_0, \lambda, \mu_1)$ em uma vizinhança de $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$.

Justificativa:

Explorando-se a condição de ponto limite elíptico dada em (E.31) juntamente com as hipóteses do teorema (E2.4), para cada valor de μ_1 fixado, tem-se o aparecimento de ilhas (elipses) em torno do ponto $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$. \square

A figura E.7, ilustra o comportamento de bifurcação em ilha, para pontos limites elípticos.

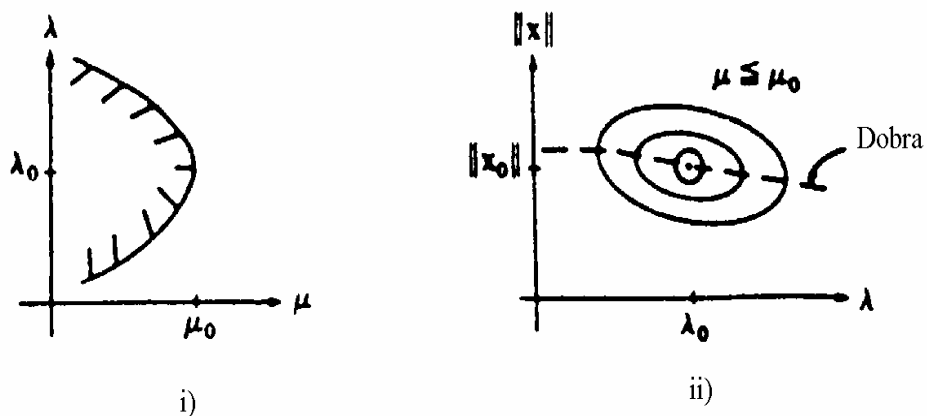


Figura E.7 - bifurcação em ilha a partir de um ponto limite elíptico do sistema estendido.

- a) projeção sobre o plano (μ, λ) ;
- b) curvas de solução de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = 0$ para μ fixo.

E3 - Bifurcação múltipla e bifurcação em ponto limite.

Na análise de bifurcação de problemas com dois parâmetros, uma hipótese que pode ser considerada é associar um parâmetro propriamente à bifurcação enquanto que o outro é associado a um parâmetro de controle ou parâmetro de continuação.

Essa consideração, simplifica a análise no problema com dois parâmetros, implicando em que a análise de pós-bifurcação recaia em um problema com apenas um parâmetro.

No estudo feito no capítulo VI, pode-se fazer isso, associando-se o parâmetro relacionado à trajetória de carga ao parâmetro de continuação enquanto que, o parâmetro de energia dissipada é associado à bifurcação propriamente dita.

Esta estratégia, além de simplificar o estudo, permite que se analise a ocorrência de bifurcação múltipla e bifurcação em ponto limite, explorando-se resultados encontrados em [Decker e Keller, 1980] e [Jepson e Decker, 1986], entre outros.

Considerando-se no problema com dois parâmetros, a variável μ associada ao parâmetro de continuação, então o problema com dois parâmetros pode ser definido da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}: \mathbf{X}_1 \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{X}_2, \mathbf{f} \in C^2,$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(\mu), \lambda(\mu), \mu) = 0. \quad (\text{E.43})$$

Considerando-se $\mathbf{y}(\mu) = (\mathbf{x}(\mu), \lambda(\mu))$, tem-se a equivalência da equação (E.43) à seguinte equação:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mu), \mu) = 0. \quad (\text{E.44})$$

No que segue no decorrer dessa seção, as hipóteses abaixo serão consideradas:

- i) a variável λ fixada em $\lambda = \lambda_0 = \lambda(\mu_0)$, caracteriza um ponto limite simples com respeito à variável μ para a equação (E.43) e será utilizada para se fazer a análise de bifurcação propriamente dita do problema em $\mathbf{x}(\mu)$ e $\lambda(\mu)$, onde $\mu \in V(\mu_0)$, o que será feito nas seções E3.1 e E3.2.;
- ii) nas seções E3.3 e E3.4, explora-se a equação (E.44) definindo-se μ em $V(\mu_0)$ para estudar-se técnicas de continuação do problema nas variáveis $\mathbf{y}(\mu)$ e μ , utilizando-se de resultados obtidos nas seções E3.1 e E3.2.

Nos dois ítems é possível analisar o problema utilizando-se resultados para problemas com um parâmetro, vistos na seção E1.

Hipóteses análogas àquelas vistas no início da seção E1, são novamente reconsideradas, mas considerando $\dim N(\mathbf{f}_x^0) > 1$. Assumindo-se que $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$, tal que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mu_0)$, $\lambda_0 = \lambda(\mu_0)$, é um ponto singular de (E.43) para o qual \mathbf{f}_x^0 é um operador de Fredholm de índice zero, ou seja,

- i) Existem m vetores ϕ_1, \dots, ϕ_m , linearmente independentes que formam uma base para o Núcleo de \mathbf{f}_x^0 , ou seja,

$$\mathbf{N}_1 = N(\mathbf{f}_x^0) = \text{span}\{\phi_i, i = 1, \dots, m\}; \quad (\text{E.45a})$$

tal que,

$$\dim \mathbf{N}_1 = m; \quad (\text{E.45b})$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{N}_1 \oplus \mathbf{R}_1; \quad (\text{E.45c})$$

tal que, \mathbf{R}_1 é um complemento de \mathbf{N}_1 em \mathbf{X}_1 ;

ii) A imagem do operador \mathbf{f}_x^0 , denotada por $\mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0)$, é fechada e de codimensão finita m , ou seja,

$$\mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0) \text{ é fechada, } \text{codim}(\mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0)) = m; \quad (\text{E.46a})$$

o que implica em existir uma base de dimensão m para $N(\mathbf{f}_x^{0*})$, $\mathbf{f}_x^{0*}: \mathbf{X}_2^* \rightarrow \mathbf{X}_1^*$, onde \mathbf{X}_2^* e \mathbf{X}_1^* são os conjuntos duais respectivamente de \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 , ou seja, existem $\boldsymbol{\psi}_i^*$, $i = 1, \dots, m$; vetores linearmente independentes, que geram $N(\mathbf{f}_x^{0*})$,

$$\mathbf{N}_2^* = N(\mathbf{f}_x^{0*}) = \text{span}\{\boldsymbol{\psi}_i^*, i = 1, \dots, m\}; \quad (\text{E.46b})$$

$$\dim \mathbf{N}_2^* = \text{codim} \mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0) = m. \quad (\text{E.46c})$$

Na hipótese (E.46b), desde que, $\mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0) = N(\mathbf{f}_x^{0*})^\perp$, então, o espaço imagem de \mathbf{f}_x^0 , pode ser expresso por,

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}(\mathbf{f}_x^0) = \{ \mathbf{y} \in \mathbf{X}_2 \text{ tal que, } \boldsymbol{\psi}_i^* \cdot \mathbf{y} = 0, i=1, \dots, m \} \quad (\text{E.47a})$$

e o conjunto \mathbf{X}_2 pode ser expresso por:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{R}_2 \oplus \mathbf{N}_2; \quad (\text{E.47b})$$

tal que, \mathbf{N}_2 é um complemento de \mathbf{R}_2 em \mathbf{X}_2 .

Definição E3.1 - *Condição de Ponto de bifurcação múltipla.*

Assuma que, para $\mu \in V(\mu_0)$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mu_0)$ e $\lambda_0 = \lambda(\mu_0)$ se tenha que, $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$ é um ponto de singularidade para (E.43) e um ponto limite simples em $\lambda_0 = \lambda(\mu_0)$, ou seja,

$$\boldsymbol{\psi}_j^* \cdot \mathbf{f}_\mu^0 \neq 0, j = 1, \dots, m. \quad (\text{E.48a})$$

Além disso, que a seguinte condição esteja satisfeita,

$$\mathbf{f}_\lambda^0 \in \mathbf{R}_2, \quad (\text{E.48b})$$

ou seja, que é possível encontrar um vetor $\boldsymbol{\phi}_0$ tal que

$$\mathbf{f}_x^0 \boldsymbol{\phi}_0 + \mathbf{f}_\lambda^0 = 0; \quad (\text{E.48c})$$

$$\boldsymbol{\phi}_j^* \cdot \boldsymbol{\phi}_0 = 0, j = 1, \dots, m \quad (\text{E.48d})$$

e que as hipóteses (E.45), (E.46) e (E.47) estão satisfeitas, então, o ponto $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$ é dito ser um ponto de bifurcação múltipla na variável λ se ocorrer $m > 1$ (lembre que o caso de bifurcação simples ocorria para $m = 1$).

Na restrição (E.48d), $\boldsymbol{\phi}_j^* \in \mathbf{R}_1$, para $j = 1, \dots, m$ e essa restrição serve para garantir-se unicidade de solução em (E.48c). Além disso, $\mathbf{f}_\lambda^0 = \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$ e $\mathbf{f}_x^0 = \mathbf{f}_x(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$.

E3.1 - Equação algébrica de bifurcação (ABE)

A equação **ABE**, a ser definida, é quem dará condições para analisar-se existência de arcos de solução regulares $(\mathbf{x}(\mu), \lambda(\mu), \mu)$ satisfazendo,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(\mu), \lambda(\mu), \mu) = 0; \quad (\text{E.49})$$

$|\mu - \mu_0| \leq \rho$. Isso porque, não se tem unicidade de solução para **ABE**, e assim, podem existir soluções dessa equação, as quais geram arcos não regulares para (E.49), o que dificultaria descrever a trajetória de solução gerada por alguma técnica de continuação (método tipo comprimento de arco ou método de Newton).

Considerando-se,

$$\mathfrak{X}(\mu_0) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \phi_i \quad \text{tal que} \quad \alpha_0 = \mathfrak{X}(\mu_0); \quad (\text{E.50})$$

então, a equação (E.18) pode ser generalizada por:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\alpha} + 2 \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha} \alpha_0 + \mathbf{C} \alpha_0^2 = 0 \quad (\text{E.51})$$

onde $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij}) = (\sum_{k=1}^m a_{ijk} \alpha_k)$; $\mathbf{B} = (b_{ij})$; $\mathbf{C} = (c_1, \dots, c_m)$; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$

tal que,

$$a_{ijk} = \boldsymbol{\psi}_i^* \cdot ([\mathbf{f}_{xx}^0 \phi_j] \phi_k); \quad (\text{E.51a})$$

$$b_{ij} = \boldsymbol{\psi}_i^* \cdot (\mathbf{f}_{xx}^0 \phi_0 + \mathbf{f}_{x\lambda}^0) \phi_j; \quad (\text{E.51b})$$

$$c_i = \boldsymbol{\psi}_i^* \cdot [\mathbf{f}_{xx}^0 \phi_0] \phi_0 + 2 \mathbf{f}_{x\lambda}^0 \phi_0 + \mathbf{f}_{\lambda\lambda}^0]; \quad (\text{E.51c})$$

para $i, j = 1, \dots, m$.

A unicidade de solução para (E.50) pode ser requerida, impondo-se que:

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha} + m_0 \alpha_0 - 1 = 0, \quad \text{tal que, } \mathbf{m} = (m_1, \dots, m_m)^T \in \mathfrak{R}^m, \quad m_0 \in \mathfrak{R}; \quad (\text{E.51d})$$

que é uma condição de normalização.

Escrevendo-se agora em uma forma conjunta as equações (E.51) e (E.51d), chega-se na seguinte equação:

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\alpha} + 2 \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha} \alpha_0 + \mathbf{C} \alpha_0^2] \\ \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha} + m_0 \alpha_0 - 1 \end{pmatrix} = 0; \quad (\text{E.52})$$

que é denominada de Equação de Bifurcação Algébrica (Algebraic Bifurcation Equation - **ABE**).

Em resumo, uma condição necessária para a existência de uma solução ramificada regular $(\mathbf{x}(\mu), \lambda(\mu), \mu)$, é que, a tangente satisfaça (E.50) e (E.52), para algum vetor de normalização (\mathbf{m}, m_0) .

Um resultado imediato que se tem é que a **ABE** (E.51) é equivalente a (E.52), com o vetor de normalização $(\mathbf{m}, m_0) = (\mathbf{0}, 1)$.

Definição E3.2 - Raíz isolada para **ABE**

Uma solução $(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_0)$ para a equação (E.52) é dita raíz isolada se o Jacobiano $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ avaliado para $(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_0)$ é não singular.

É válido lembrar, como já foi dito, que, nem toda solução de (E.52) pode garantir a existência de arcos de solução regulares para (E.49). A importância de raízes isoladas para **ABE**, está no fato da garantia de um arco de solução regular para (E.49), ou seja, é em raízes

isoladas que se tem arcos solução regular e onde os métodos de continuação do tipo comprimento de arco ou de Newton, são convergentes para uma solução continuada $\mathbf{x}(\mu)$. Isso será visto na seção final.

Determinação do Jacobiano $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$

De acordo com a definição de $\mathbf{Q}(\alpha, \alpha_0)$ em (E.52), tem-se que a matriz Jacobiana relativa a \mathbf{Q} é dada por:

$$\mathbf{J}(\alpha, \alpha_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\alpha) + \mathbf{B}\alpha_0 & \mathbf{B}\alpha + \mathbf{C}\alpha_0 \\ \mathbf{m} & \mathbf{m}_0 \end{pmatrix}; \quad (\text{E.53})$$

onde $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{A}(\alpha) \alpha) = \mathbf{A}(\alpha)$.

Representação de $\mathbf{A}(\alpha) + \mathbf{B}\alpha_0$ através de operadores de projeção.

Utilizando-se o resultado visto no teorema D1.2, considere os seguintes operadores de projeção:

$$\mathbf{P}_1: \mathbf{X}_1 \rightarrow \mathbf{N}_1; \quad \mathbf{P}_1 = (\phi_1, \dots, \phi_m) \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \mathbf{M} \\ \phi_m^* \end{pmatrix}; \quad (\text{E.54a})$$

tal que, $\phi_i^* \in \mathbf{R}_1$ e $\phi_i^* \cdot \phi_j = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, \dots, m$;

$$\mathbf{P}_2: \mathbf{X}_2 \rightarrow \mathbf{N}_2, \quad \mathbf{P}_2 = (\psi_1, \dots, \psi_m) \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \mathbf{M} \\ \psi_m^* \end{pmatrix}; \quad (\text{E.54b})$$

tal que, $\psi_j \in \mathbf{N}_2$ e $\psi_i^* \cdot \psi_j = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, \dots, m$.

Para os operadores projeção \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 é válido que:

$$\mathbf{P}_i \mathbf{X}_i = \mathbf{N}_i; \quad \mathbf{P}_i \mathbf{R}_i = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (\text{E.54c})$$

Considerando-se $\mathbf{f}_\lambda^0 \in \mathbf{R}_2$ e aplicando-se o operador \mathbf{P}_2 em (E.8b) resulta:

$$\mathbf{P}_2 (\mathbf{f}_x^0 \mathfrak{K}(\mu_0) + \mathbf{f}_\lambda^0 \mathfrak{L}(\mu_0)) = \mathbf{P}_2 [\mathbf{f}_x^0 (\mathfrak{K}(\mu_0) - \phi_0 \mathfrak{L}(\mu_0))] = 0; \quad (\text{E.54d})$$

já que, $(\mathfrak{K}(\mu_0) - \phi_0 \mathfrak{L}(\mu_0)) \in \mathbf{R}_2$.

Considerando agora, que se tenha uma raiz (α, α_0) para o **ABE** (E.51), que pode ser calculada tomando-se $(\mathbf{m}, m_0) = (\mathbf{0}, 1)$ em (E.52), então levando-se em conta a equação (E.54d), pode-se definir uma matriz com m linhas e m colunas dada por:

$$\mathbf{D}^0 = (\psi_1, \dots, \psi_m) \bar{\mathbf{D}}^0 \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \mathbf{M} \\ \phi_m^* \end{pmatrix}; \quad (\text{E.55})$$

onde, $\bar{\mathbf{D}}^0 = (\bar{d}_{ij}^0)$ tal que, $\bar{d}_{ij}^0 = \psi_i^* \cdot [\mathbf{f}_{xx}^0 (\sum_{k=1}^m \alpha_k \phi_k) + \mathbf{f}_{xx}^0 \phi_0 + \mathbf{f}_{x\lambda}^0] \phi_j$, para $i, j = 1, \dots, m$.

Segue que, \mathbf{D}^0 é não-singular se e somente se a matriz $\bar{\mathbf{D}}^0$ for não-singular, resultado a ser explorado no teorema E3.1, a ser visto.

Na forma como está proposta a matriz $\bar{\mathbf{D}}^0$ e considerando-se o vetor de normalização $(\mathbf{m}, m_0) = (\mathbf{0}, 1)$, o que implica em $\alpha_0 = 1$, tem-se que,

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}\alpha_0 = \bar{\mathbf{D}}^0 = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}; \quad (\text{E.56})$$

o que expressa $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}\alpha_0$ utilizando operadores projeção e que dará uma condição de não singularidade para $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_0)$ a ser vista a seguir.

A condição de não singularidade do Jacobiano $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_0)$.

A seguir é enunciado um lema encontrado em [Decker e Keller, 1980], que dá a condição de não singularidade para uma matriz equivalente a (E.53).

Lema E3.1

Sejam \mathbf{X} e \mathbf{Y} , dois espaços de Banach e considere um operador linear, $\mathbf{Z}: \mathbf{X} \times \mathfrak{R}^r \rightarrow \mathbf{Y} \times \mathfrak{R}^r$, dado por:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \mathbf{A}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}; \mathbf{B}: \mathfrak{R}^r \rightarrow \mathbf{Y}; \mathbf{C}: \mathbf{X} \rightarrow \mathfrak{R}^r; \mathbf{D}: \mathfrak{R}^r \rightarrow \mathfrak{R}^r; \quad (\text{E.57a})$$

então, se \mathbf{A} é não-singular tem-se que \mathbf{Z} é não-singular se e somente se,

$$(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) \text{ é não singular.} \quad (\text{E.57b})$$

Nesse mesmo lema encontrado na referência citada, se considera ainda uma condição de não singularidade de \mathbf{Z} quando \mathbf{A} é singular, o que não será visto aqui.

O lema E3.1 visto é agora utilizado diretamente no teorema a seguir.

Teorema E3.1 - A condição de não singularidade para ABE.

Assuma que $(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_0)$ é uma solução do ABE (E.56), com $(\mathbf{m}, m_0) = (\mathbf{0}, 1)$.

Então, \mathbf{D}^0 é não singular se e somente se $(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_0)$ é uma raiz isolada do ABE (E.56).

Justificativa:

Pela definição E3.1, $(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_0)$ é uma raiz isolada de (E.56) se e somente se $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_0)$ definido em (E.53) é não singular.

Utilizando-se o lema E3.1, tem-se que $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_0)$ é não singular se e somente se $\bar{\mathbf{D}}^0$. Desde que $\bar{\mathbf{D}}^0$ ser não-singular é equivalente a \mathbf{D}^0 ser não singular, conclui-se a prova. \square

Portanto, \mathbf{D}^0 pode ser explorada para se estudar a condição de não singularidade de ABE para uma solução $(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_0)$. Se \mathbf{D}^0 é não singular então $(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_0)$ é uma raiz isolada para ABE, e qualquer técnica de continuação pode ser utilizada para se explorar arcos de solução regulares $(\mathbf{x}(\mu), \lambda(\mu), \mu)$ satisfazendo, $\mathbf{f}(\mathbf{x}(\mu), \lambda(\mu), \mu) = 0$.

Esses resultados serão tratados na seção E3.4.

E3.2 - Equação de bifurcação em ponto limite (LPBE).

Considere as hipóteses dadas em (E.45), (E.46) e (E.47) tal que $m > 1$.

Voltando-se à equação (E.9b), a análise desta leva na não existência de um vetor ϕ_0 que satisfaça (E.9a), se a solução encontrada é um ponto limite, ou seja, $\mathbf{f}_\lambda^0 \notin \mathbf{R}_2$ e assim, a solução geral (E.50) se escreve por:

$$\mathbf{x}(\mu_0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_i \text{ pois } \alpha_0 = \mathcal{K}(\mu_0) = 0. \quad (\text{E.58})$$

Além disso, considerando-se,

$$d_i = \psi_i^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0; \quad (\text{E.59})$$

então,

$$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)^T \neq 0. \quad (\text{E.60})$$

Fazendo-se $n = \mathcal{K}(\mu_0)$, se encontra que a existência de uma solução $\mathbf{u}_0 = \mathcal{K}(\mu_0)$ satisfazendo a equação (E.8b), é obtida, inicialmente explorando a solução da equação homogênea:

$$\mathbf{A}(\alpha) \alpha + n\mathbf{d} = 0; \quad (\text{E.61})$$

a qual, pode não ter solução única. Para se requerer unicidade, considera-se a equação de normalização:

$$\alpha \cdot \alpha = 1; \quad (\text{E.62})$$

tal que, (E.61) e (E.62) podem ser definidas pela equação:

$$\mathbf{K}(\alpha, n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [\mathbf{A}(\alpha)\alpha + n\mathbf{d}] \\ \alpha \cdot \alpha - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{E.63})$$

A equação (E.63) é denominada Equação de Bifurcação em Ponto Limite (LPBE).

Supondo que se tenha uma raiz (α^0, n^0) da equação homogênea (E.63), então, em (E.58) tem-se que,

$$\phi^0 = \mathbf{x}(\mu_0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^0 \phi_i \quad (\text{E.64})$$

e uma solução geral para (E.8b) é dada por:

$$\mathbf{f}_x^0 \mathbf{u}_0 + n^0 \mathbf{f}_\lambda^0 = - [\mathbf{f}_{xx}^0 \phi^0] \phi^0, \quad (\text{E.65})$$

que terá solução única impondo-se que:

$$\phi_i^* \cdot \mathbf{u}_0 = 0; \phi_i^* \in \mathbf{R}_1; \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{E.66})$$

Nem todas as raízes (α, n) do LPBE (E.63) podem gerar arcos soluções regulares, no entanto, arcos regulares existem se (α, n) é uma raiz isolada.

Definição E3.3 - Raiz isolada para LPBE

Uma solução (α, n) para a equação (E.63) é dita raiz isolada se o Jacobiano $\mathbf{J}(\mathbf{K})$ avaliado para (α, n) é não singular.

Determinação do Jacobiano J(K)

De acordo com a definição de $\mathbf{K}(\alpha, n)$ em (E.63), tem-se que o Jacobiano relativo a \mathbf{K} é dado por:

$$\mathbf{J}(\alpha, n) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\alpha) & \mathbf{d} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.67})$$

Teorema E3.2 - *A condição de não singularidade para LPBE.*

Assuma que (α, n) é uma solução do LPBE (E.63).

Então, (α, n) é uma raiz isolada do LPBE (E.63) se e somente se \mathbf{D}_1^0 é não singular, onde \mathbf{D}_1^0 é dada por:

$$\mathbf{D}_1^0 = (\psi_1, \dots, \psi_m) \bar{\mathbf{B}}^0 \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \mathbf{M} \\ \phi_m^* \end{pmatrix}; \quad (\text{E.68})$$

tal que, $\phi_i^* \in \mathbf{R}_1$ e $\phi_i^* \cdot \phi_j = \delta_{ij}$; $\psi_j \in \mathbf{N}_2$ e $\psi_i^* \cdot \psi_j = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, \dots, m$.

Além disso,

$$\bar{\mathbf{B}}^0 = (\bar{\mathbf{d}}_{ij}^0) \text{ tal que, } \bar{\mathbf{d}}_{ij}^0 = \psi_i^* \cdot [\mathbf{f}_{\mathbf{xx}}^0 \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \phi_k \right)] \phi_j, \text{ para } i, j = 1, \dots, m. \quad (\text{E.69})$$

A prova desse teorema é análoga a aquela feita para o teorema E3.1.

Portanto, \mathbf{D}_1^0 pode ser explorada para se estudar a condição de não singularidade de LPBE para uma solução (α, n) . Se \mathbf{D}_1^0 é não singular então (α, n) é uma raiz isolada para LPBE, e qualquer técnica de continuação pode ser utilizada para se explorar arcos de solução regulares $(\mathbf{x}(\mu), \lambda(\mu), \mu)$ satisfazendo, $\mathbf{f}(\mathbf{x}(\mu), \lambda(\mu), \mu) = 0$.

Uma outra maneira de reescrever-se (E.61) pode ser feita considerando-se m vetores linearmente independentes π_i tal que,

$$\pi_i \cdot \mathbf{d} = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{E.70a})$$

e (E.61) é equivalente a:

$$\Pi \mathbf{A}(\alpha) \alpha = 0; \quad \mathbf{d} \cdot \mathbf{A}(\alpha) \alpha + n \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 0; \quad (\text{E.70b})$$

tal que,

$$\Pi = (\pi_1^T, \dots, \pi_m^T)^T. \quad (\text{E.70c})$$

Assim, (E.63) e (E.67) podem ser expressos por:

$$\mathbf{K}(\alpha, n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Pi \mathbf{A}(\alpha) \alpha \\ \frac{1}{2} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{A}(\alpha) \alpha + n \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}) \\ \alpha \cdot \alpha - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{E.70d})$$

e

$$\mathbf{J}(\alpha, n) = \begin{pmatrix} \Pi \mathbf{A}(\alpha) \\ \alpha \end{pmatrix}. \quad (\text{E.70e})$$

Uma raiz (α, n) de (E.70d) é não singular se e somente se $\mathbf{J}(\alpha, n)$ é não singular e está demonstrado em [Decker e Keller, 1980] que existem no máximo 2^m raízes isoladas para LPBE e que cada raiz isolada gera um arco solução local.

A seguir são dadas condições e teoremas encontradas em [Jepson e Decker, 1986] que garantem a convergência dos métodos de continuação para raízes isoladas.

E3.3 - Resolução de ABE e LPBE através de sistemas estendidos.

Para estudar a trajetória de arcos-solução para o problema (E.43), uma estratégia que pode ser utilizada é explorar a técnica de continuação de Euler-Newton, gerada por uma equação de normalização $\mathbf{N}: \mathbf{X}_1 \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathbf{X}_2$, dada por:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = 0; \quad (\text{E.71})$$

que é conhecida como equação pseudo-comprimento de arco, onde μ é o parâmetro associado à continuação.

A adição de (E.71) à equação (E.43), resulta no seguinte sistema estendido:

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mu) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mu), \lambda(\mu), \mu) \\ \mathbf{N}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) \end{pmatrix} = 0; \quad \mathbf{y} = (\mathbf{x}, \lambda). \quad (\text{E.72})$$

A vantagem de utilizar-se esse procedimento é que em pontos limite simples, \mathbf{F}_y^0 é não-singular, ou seja, $(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0)$ é um ponto regular para (E.72) (resultado obtido de uma extensão do teorema E2.1, para $m > 1$). Além disso, ainda que \mathbf{F}_y^0 seja singular para pontos de bifurcação, a convergência dos métodos de continuação de Newton e das Cordas (Comprimento de arco) será garantida por teoremas a serem vistos.

Uma fórmula de normalização definida para \mathbf{N} é expressa:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, \lambda, s) = \mathbf{N}_x^* \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{N}_\lambda (\lambda - \lambda_0) - (\mu - \mu_0); \quad (\text{E.73})$$

onde $\mathbf{N}_x^* \in \mathbf{X}_1^*$ e \mathbf{N}_λ é constante. Essa fórmula não é essencial para a análise algébrica do problema mas é importante para a análise numérica do mesmo. Tem-se em (E.73), que $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0) = 0$ e qualquer normalização regular satisfazendo $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0, \lambda_0, \mu_0) = 0$, pode ser definida como a normalização (E.73) para μ próximo a μ_0 .

Baseando-se em (E.72) com \mathbf{N} definido em (E.73), serão vistos resultados que garantem existência de raízes isoladas para (E.72) considerando ABE e LPBE.

Existência de raízes isoladas de (E.72) para ABE e LPBE.

Para chegar-se ao resultado desejado, serão vistos os resultados seguintes.

i) \mathbf{F}_y^0 é um operador de Fredholm de índice zero para (E.72) considerando-se ABE;

Para isso, considere:

$$\mathbf{F}_y^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x^0 & \mathbf{f}_\lambda^0 \\ \mathbf{N}_x^* & \mathbf{N}_\lambda \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}_\mu^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_\mu^0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.74a})$$

e $(m, m_0) \neq 0$ tal que,

$$m_i = \mathbf{N}_x^* \cdot \phi_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad m_0 = \mathbf{N}_x^* \cdot \phi_0 + \mathbf{N}_\lambda. \quad (\text{E.74b})$$

O espaço nulo de \mathbf{F}_y^0 , pode ser determinado considerando-se que, $\mathbf{F}_y^0 \Phi_i = 0$, se e somente se,

$$\Phi_i = \left(\sum_{k=1}^m \gamma_k^i \phi_k + \gamma_0^i \phi_0, \gamma_0^i \right); \quad (\text{E.75a})$$

tal que

$$m \cdot \gamma + m_0 \gamma_0^i = 0, \quad \gamma = (\gamma_1^i, \dots, \gamma_m^i); \quad (\text{E.75b})$$

a qual possui m soluções linearmente independentes. Logo, $\dim N(\mathbf{F}_y^0) = m$.

Analogamente se mostra que $\text{codim}(\mathbf{R}(\mathbf{F}_y^{0*})) = m$, verificando que $\Psi^* \mathbf{F}_y^0 = 0$, se e somente se $\Psi^* = (\psi^*, \tau)$ satisfaz,

$$\psi^* \mathbf{f}_x^0 + \tau \mathbf{N}_x^* = 0; \quad (\text{E.76a})$$

$$\psi^* \cdot \mathbf{f}_\lambda^0 + \tau \mathbf{N}_\lambda = 0. \quad (\text{E.76b})$$

Analisando-se $\mathbf{F}_y^0 \Phi_i = 0$ a qual é equivalente a aplicar-se (E.76a) em $\gamma_k^i \phi_k + \gamma_0^i \phi_0$ e (E.76b) em γ_0^i e adicionando-se os resultados se mostra que, $\text{codim}(\mathbf{R}(\mathbf{F}_y^{0*})) = m$ se e somente se $\tau = 0$.

A prova de que \mathbf{F}_y^0 é um operador de Fredholm de índice zero para (E.72) considerando-se **LPBE** é dada em [Jepson e Decker, 1986].

ii) a existência de raízes isoladas de (E.72) para **ABE** e **LPBE**.

Esses resultados são justificados pelos teoremas a seguir demonstrados em [Jepson e Decker, 1986].

Teorema E3.3:

Considere o sistema estendido (E.72) com $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \lambda, \mu)$ definida em (E.73) . Então, para $\mathbf{y}(\mu_0) = (\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ e \mathcal{X}^0 definida por

$$\mathcal{X}^0 = \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \phi_k + \alpha_0 \phi_0, \alpha_0 \right); \quad (\text{E.77a})$$

tal que (α, α_0) satisfaz

$$m \cdot \alpha + m_0 \alpha_0 = 1, \quad (\text{E.77b})$$

então, \mathcal{X}^0 verifica a equação:

$$\mathbf{F}_y^0 \mathcal{X}^0 + \mathbf{F}_\mu^0 = 0, \quad (\text{E.77c})$$

se e somente se (α, α_0) é uma raiz de **ABE**. Além disso, essa raiz é isolada se e somente se \mathbf{D}^0 é não-singular.

Analogamente aos resultados visto nos itens i) e ii), tem-se que \mathbf{F}_y^0 é um operador de Fredholm de índice zero para (E.72) considerando-se **LPBE**, com o seguinte teorema válido para a existência de raízes isoladas de (E.72) para **LPBE**:

Teorema E3.4:

Considere o sistema estendido (E.72) com $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \lambda, \mu)$ definida em (E.73). Então, \mathfrak{X}^0 é definido por

$$\mathfrak{X}^0 = \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \phi_k, 0 \right); \quad (\text{E.78a})$$

tal que (α, n) satisfaz,

$$m \cdot \alpha = 1. \quad (\text{E.78b})$$

Então \mathfrak{X}^0 verifica (E.77c) se e somente se (α, n) é uma raiz de LPBE e $n = \frac{-1}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\alpha) \alpha$ (de acordo com (E.70b)). Além disso, a raiz (α, n) de LPBE é uma raiz isolada se e somente se $\bar{\mathbf{B}}^0$ (ou \mathbf{D}^0) é não singular.

E3.4 - A condição de convergência dos métodos de continuação.

Suponha que para algum valor do parâmetro μ_0 tem-se uma solução conhecida $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$ satisfazendo (E.43), ou seja, $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0) = 0$. Além disso, suponha também que $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0) = \mathbf{f}_{\mathbf{y}}^0$ é singular nesse ponto, o que implica na não existência de $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0) = (\mathbf{f}_{\mathbf{y}}^0)^{-1}$.

Então, utilizando-se essa solução e alguma informação adicional sobre $\mu = \mu_0$, uma solução estimadora ou previsora $\mathbf{z}(\mu)$ tal que $\mathbf{z}(\mu_0) = \mathbf{z}_0$, é feita para $\mu \neq \mu_0$, $\mu \in V(\mu_0)$ e processos iterativos utilizando $\mathbf{z}(\mu)$ como uma estimativa inicial podem ser definidos para a geração de soluções continuadas $\mathbf{y}(\mu)$, definidas em um arco regular que passa pelo ponto singular $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$ de (E.43) mas não necessariamente satisfaz (E.43). Como será visto, esses processos iterativos dependem de $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{y}(\mu), \mu)$ e deverão então ser vistas condições para a existência de $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}^{-1}$ para $\mu \in V(\mu_0)$.

Dois processos iterativos usualmente utilizados são, o método das cordas e o método de Newton, que estão definidos a seguir, considerando-se uma solução estimativa inicial $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(\mu) \neq \mathbf{y}_0$.

Sequência iterativa do método tipo comprimento de arco ou método das cordas:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - \mathbf{f}_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{z}_k, \mu) \mathbf{f}(\mathbf{z}_k, \mu), \text{ para } k = 0, 1, \dots \quad (\text{E.79a})$$

Sequência iterativa do método de Newton:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - \mathbf{f}_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{z}_k, \mu) \mathbf{f}(\mathbf{z}_k, \mu), \text{ para } k = 0, 1, \dots \quad (\text{E.79b})$$

Uma solução estimativa inicial proposta em [Jepson e Decker, 1986] é dada por:

$$\mathbf{z}(\mu, \mathbf{v}) = \mathbf{z}(\mu) + (\mu - \mu_0) \mathbf{v}; \quad (\text{E.80})$$

tal que $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_1 \times \mathfrak{R}$.

Obviamente que, a existência das sequências definidas em (E.79a) e (E.79b) está relacionada à existência da inversa $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}^{-1}$ no ponto \mathbf{z}_k , $k = 0, 1, \dots$

Três questões naturais que surgem são:

- como garantir que o arco solução $(\mathbf{z}(\mu), \mu)$ passe por $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$;
- como garantir a existência de $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}^{-1}$ no ponto \mathbf{z}_k , $k = 0, 1, \dots$; se para $(\mathbf{y}(\mu), \mu)$ em uma vizinhança de $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$ não existe $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{y}(\mu), \mu)$;
- como garantir a convergência dos métodos definidos em (E.79a) e (E.79b) para uma solução continuada $\mathbf{y}(\mu)$.

Essas três questões estão algebricamente resolvidas em [Jepson e Decker, 1986].

Um arco solução regular $(\mathbf{z}(\mu), \mu)$ que passe por $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$, ou seja, tal que $\mathbf{z}(\mu)$ seja tangente a um arco solução $\mathbf{y}(\mu)$ é determinado da seguinte maneira.

Considerando-se a equação (E.43) escrita por:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mu), \mu) = 0. \quad (\text{E.81})$$

Diferenciando-se (E.60) com relação a μ e aplicando-se em μ_0 obtém-se:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{y}}^0 \mathfrak{X}^0 + \mathbf{f}_{\mu}^0 = 0; \quad (\text{E.82})$$

que implica em $\mathbf{f}_{\mu}^0 \in \mathbf{R}(\mathbf{f}_{\mathbf{y}}^0)$ e então, $\mathbf{P}_2 \mathbf{f}_{\mu}^0 = 0$, onde \mathbf{P}_2 está definida em (E.54b).

Desde que, $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}^0$ é singular, a equação (E.82) não determina unicamente \mathfrak{X}^0 . Uma segunda condição é então obtida diferenciando-se mais uma vez a equação (E.82) e aplicando-se a projeção \mathbf{P}_2 nessa para obter-se:

$$\mathbf{P}_2 ([\mathbf{f}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^0 \ \mathfrak{X}^0] \mathfrak{X}^0 + 2\mathbf{f}_{\mathbf{y}\mu}^0 \mathfrak{X}^0 + \mathbf{f}_{\mu\mu}^0) = 0. \quad (\text{E.83})$$

Então, a condição para $\mathbf{z}(\mu)$ ser tangente a um arco solução $\mathbf{y}(\mu)$ é verificada se, em adição a $\mathbf{z}^0 = \mathbf{z}(\mu_0) = \mathbf{y}_0$, as condições (E.82) e (E.83) estão satisfeitas, o que responde a primeira questão.

A questão da existência de $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{z}(\mu), \mu)$ e $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{z}(\mu, \mathbf{v}), \mu)$ é confirmada em $\mu \in V(\mu_0)$ se as seguintes condições estão satisfeitas:

$$\mathbf{D}^0 = \mathbf{P}_2 (\mathbf{f}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^0 \ \mathfrak{X}^0 + \mathbf{f}_{\mathbf{y}\mu}^0) \mathbf{P}_1; \quad (\text{E.84})$$

é não singular em μ onde $V(\mu_0) = \{\mu \in \Re \text{ tal que } 0 < |\mu - \mu_0| < \delta\}$, $\|\mathbf{v}\| \leq \delta_1$, com δ e δ_1 pequenas tolerâncias positivas.

Se as duas primeiras questões estão resolvidas, ou seja, $(\mathbf{z}(\mu), \mu)$ é um arco solução que passe por $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$ e \mathbf{D}^0 é não singular para $0 < |\mu - \mu_0| < \delta$ e $\|\mathbf{v}\| \leq \delta_1$, então, está demonstrado em [Jepson e Decker, 1986] que existe um cone de convergência (figura E.8) tal que os métodos definidos em (E.79a) e (E.79b) convergem para uma solução $\mathbf{y}(\mu)$ da equação (E.81), a partir de uma solução estimativa inicial $\mathbf{z}(\mu, \mathbf{v}) = \mathbf{z}(\mu) + (\mu - \mu_0)\mathbf{v}$.

A figura E.8 vista a seguir ilustra a existência de um cone de convergência para os métodos vistos em (E.79a) e (E.79b).

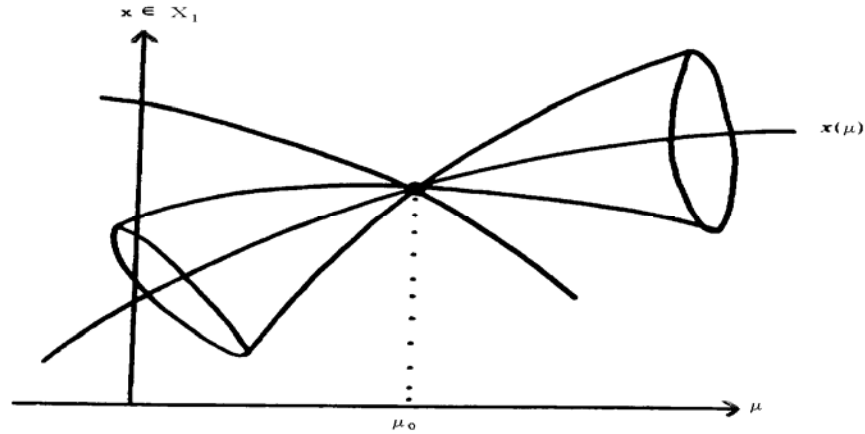


Figura E.8 - cone de convergência na vizinhança da solução bifurcada.

Para as condições (E.82), (E.83) e (E.84) vistas, \mathcal{X}^0 pode ser definido da seguinte maneira:

i) na ocorrência de bifurcação múltipla,

$$\mathcal{X}^0 = \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \phi_k + \alpha_0 \phi_0, \alpha_0 \right), \text{ tal que } (\alpha, \alpha_0) \text{ é uma raiz de } \mathbf{ABE} \text{ onde } m \cdot \alpha + m_0 \alpha_0 = 1;$$

ii) na ocorrência de bifurcação em ponto limite,

$$\mathcal{X}^0 = \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \phi_k, 0 \right), \text{ tal que } (\alpha, n) \text{ é uma raiz de } \mathbf{LPBE} \text{ onde } m \cdot \alpha = 1.$$

Apêndice F - Ramificação de Solução Associada ao Problema Físico.

Para estudar-se a trajetória de arcos- solução para o problema (VI.5), do capítulo VI, uma estratégia que pode ser utilizada, analogamente ao efetuado na seção E3.3 do Apêndice E, é explorar métodos de continuação, como o método de Newton ou o método das cordas.

Para simplificação de cálculo, considere o parâmetro μ , como um parâmetro de controle ou continuação associado à trajetória de carga, enquanto que o parâmetro \mathbf{w} é associado à bifurcação. Para isso, basta definir-se μ_0 tal que, $\mathbf{g}_{\mu}^0 \neq 0$ com a condição de não-degeneração $d_{f_{\mu}} \neq 0$ dada em (VI.21a) satisfeita e redefinir-se (VI.5) tal que:

$$f(\mathbf{u}(\mu), \mathbf{w}(\mu), \mu) = 0. \quad (\text{F.1})$$

Analogamente à seção E3.3, suponha que para algum valor do parâmetro μ_0 tem-se uma solução conhecida $\mathbf{y}(\mu_0) = (\mathbf{u}(\mu_0), \mathbf{w}(\mu_0)) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0)$ tal que, $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$ é uma solução da equação (F.1) e $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0) = f_{\mathbf{y}}^0$ é singular nesse ponto, o que implica na não existência de $f_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0) = (f_{\mathbf{y}}^0)^{-1}$. Então, utilizando-se essa solução e alguma informação adicional sobre $\mu = \mu_0$, uma solução estimadora ou previsorora $\mathbf{z}(\mu)$ tal que $\mathbf{z}(\mu_0) = \mathbf{z}_0$, é feita para $\mu \neq \mu_0$, $\mu \in V(\mu_0)$ e processos iterativos utilizando $\mathbf{z}(\mu)$ como uma estimativa inicial podem ser definidos para a geração de soluções continuadas $\mathbf{y}(\mu)$, definidas em um arco regular que passa pelo ponto singular $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$ de (F.1), mas não necessariamente satisfazem (F.1).

Dois processos iterativos usualmente utilizados que dependem da existência de $f_{\mathbf{y}}^{-1}$ para $\mu \in V(\mu_0)$ são, o método das cordas e o método de Newton, que estão definidos a seguir, analogamente a (E.79a) e (E.79b), para se fazer o estudo de soluções ramificadas.

Sequência iterativa do método tipo comprimento de arco ou método das cordas:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - f_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{z}_k, \mu) f(\mathbf{z}_k, \mu), \text{ para } k = 0, 1, \dots \quad (\text{F.2})$$

Sequência iterativa do método de Newton:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - f_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{z}_k, \mu) f(\mathbf{z}_k, \mu), \text{ para } k = 0, 1, \dots \quad (\text{F.3})$$

Uma solução estimadora inicial proposta em [Jepson e Decker, 1986] é dada por:

$$\mathbf{z}_0(\mu) = \mathbf{z}(\mu, \mathbf{v}) = \mathbf{z}(\mu) + (\mu - \mu_0)\mathbf{v}; \quad (\text{F.4})$$

tal que $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$, é uma solução em deslocamento admissível, onde \mathbf{V} é o conjunto dos deslocamentos livres definido no capítulo I em (I32).

Como já visto na seção E3.3, a existência das sequências definidas em (F.2) e (F.3) está relacionada à existência da inversa $f_{\mathbf{y}}^{-1}$ no ponto \mathbf{z}_k , $k = 0, 1, \dots$

Três questões naturais que surgem são:

- como garantir que o arco solução $(\mathbf{z}(\mu), \mu)$ passe por $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$;
- como garantir a existência de $f_{\mathbf{y}}^{-1}$ no ponto \mathbf{z}_k , $k = 0, 1, \dots$; se para $(\mathbf{y}(\mu), \mu) = (\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$

não existe $f_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{y}(\mu), \mu)$, pois $f_{\mathbf{y}}$ é singular em $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$;

- como garantir a convergência dos métodos definidos em (F.2) e (F.3) para uma solução continuada $\mathbf{y}(\mu)$;

Essas três questões estão algebricamente resolvidas em [Jepson e Decker, 1986], com os resultados vistos na seção E3.3.

F1 - Condição de convergência para ABE_s.

No caso de $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$ ser um ponto de bifurcação, um arco solução regular $(\mathbf{z}(\mu), \mu)$ que passe por $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$, ou seja, tal que $\mathbf{z}(\mu)$ seja tangente a um arco solução $\mathbf{y}(\mu)$ é determinado a seguir.

Diferenciando-se (F.1) com relação a \mathbf{y} e μ , aplicando-se em μ_0 obtém-se:

$$f_y^0 \mathcal{X}^0 + f_\mu^0 = 0; \quad (\text{F.5})$$

que implica em $f_\mu^0 \in \mathbf{R}(f_y^0)$ (conjunto imagem de f_y^0).

Desde que, f_y^0 é singular, a equação (F.5) não determina unicamente \mathcal{X}^0 . Uma segunda condição é então obtida diferenciando-se mais uma vez a equação (F.5) para obter-se:

$$(f_{yy}^0 \mathcal{X}^0 \mathcal{X}^0 + 2f_{y\mu}^0 \mathcal{X}^0 \mathcal{X}^0 + f_{\mu\mu}^0 (\mathcal{X}^0)^2) = f_y^0 \mathcal{X}^0 + f_\mu^0 \mathcal{X}^0. \quad (\text{F.6})$$

Então, a condição para $\mathbf{z}(\mu)$ ser tangente a um arco solução $\mathbf{y}(\mu)$ é verificada se:

- $\mathbf{z}(\mu_0) = \mathbf{z}_0 = \mathbf{y}_0$;
- as condições (F.5) e (F.6) estão satisfeitas, o que responde a primeira questão.

Uma solução \mathcal{X}^0 pode ser escolhida de acordo com a seção E3.3, na ocorrência de ponto de bifurcação, ou seja, $f_\mu^0 \in \mathbf{R}(f_y^0)$, por:

$$\mathcal{X}^0 = \Phi = (\alpha\phi + \alpha_0\phi_0, \alpha_0) = (\alpha\mathbf{g} - \mathcal{X}^0\phi_0, -\mathcal{X}^0); \quad (\text{F.7})$$

tal que $(\alpha, \alpha_0) = (\alpha, -\mathcal{X}^0)$ é uma raiz de ABE_s (vista na seção E1.1) expressa por:

$$c_{f\mu} \alpha_0^2 + b_{f\mu} \alpha \alpha_0 + a_f \alpha^2 = 0; \quad (\text{F.8})$$

com a_f , $b_{f\mu}$ e $c_{f\mu}$ definidos (VI.28a), (VI.28b) e (VI.28d), tal que, \mathbf{g} é determinado em (V.96) e ϕ_0 determinado em (VI.24a).

A unicidade de solução é requerida impondo-se que,

$$m\alpha + m_0 \alpha_0 = 1; \quad (\text{F.8a})$$

para $(m, m_0) \in \mathfrak{R}^2$, sendo algum vetor de normalização.

A questão da existência de $f_y^{-1}(\mathbf{z}(\mu), \mu)$ e $f_y^{-1}(\mathbf{z}(\mu, \mathbf{v}), \mu)$ é confirmada se as seguintes condições estão satisfeitas:

$$\mathbf{D}^0 = \Psi (f_{yy}^0 \mathcal{X}^0 + f_{y\mu}^0) \Phi, \quad (\text{F.9})$$

é não singular em μ onde $0 < |\mu - \mu_0| < \delta$, $\|\mathbf{v}\| \leq \delta_1$ tal que, δ e δ_1 são pequenas tolerâncias positivas, com Ψ determinado tal que,

$$f_y^0 \Psi = 0. \quad (\text{F.10})$$

Se as duas primeiras questões estão resolvidas, ou seja, $(\mathbf{z}(\mu), \mu)$ é um arco solução que passe por $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$ e \mathbf{D}^0 é não singular para $0 < |\mu - \mu_0| < \delta$ e $\|\mathbf{v}\| \leq \delta_1$, então, está demonstrado em [Jepson e Decker, 1986] que existe um cone de convergência (ver a figura E.8, Apêndice E) tal que os métodos definidos em (F.3) e (F.4) convergem para uma solução $\mathbf{y}(\mu)$ da equação (F.1) a partir da solução inicial dada em (F.4). Nesse caso, (α, α_0) é dita uma raiz isolada de \mathbf{ABE}_s .

F2 - Condição de convergência para LPBE_s.

No caso de $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$ ser um ponto limite, a solução \mathbf{y}^0 é definida por:

$$\mathbf{y}^0 = \Phi = (\alpha\phi, 0). \quad (\text{F.11})$$

Nesse caso, um arco solução regular $(\mathbf{z}(\mu), \mu)$ que passe por $(\mathbf{y}(\mu_0), \mu_0)$, ou seja, tal que $\mathbf{z}(\mu)$ seja tangente à curva solução $\mathbf{y}(\mu)$ é determinado de maneira que (α, n) seja uma raiz de LPBE_s (vista na seção E1.2). Essa equação é dada por:

$$a_f \alpha^2 + nd = 0; \quad (\text{F.12})$$

tal que,

$$d = \Psi f_\mu^0 = \mathbf{g} f_\mu^0; \quad (\text{F.12a})$$

$$n = \mathbf{g}^0; \quad (\text{F.12b})$$

com $m\alpha = 1$, para se garantir a unicidade de solução.

Nem todas as raízes (α, n) do LPBE_s (F.12) podem gerar arcos soluções regulares, no entanto, arcos regulares existem se (α, n) é uma raiz isolada, ou seja, se \mathbf{D}^0 definida em (F.9) é não singular.

Se (α, n) é uma raiz isolada de (F.12) então, tem-se a existência de f_y^{-1} no ponto \mathbf{z}_k , $k = 0, 1, \dots$; para a sequências (F.3) e (F.4). Nesse caso, existe um cone de convergência tal que os métodos definidos em (F.3) e (F.4) convergem para uma solução $\mathbf{y}(\mu)$ da equação (F.1), a partir de uma solução inicial $\mathbf{z}_0(\mu) = \mathbf{z}(\mu, \mathbf{v}) = \mathbf{z}(\mu) + (\mu - \mu_0)\mathbf{v}$, dada em (F.4)

F3 - Métodos de continuação para sistemas estendidos.

Para estudar a trajetória de arcos- solução para o problema (VI.5), uma estratégia que também pode ser utilizada, analogamente ao efetuado na seção E3.3 do Apêndice E, é utilizar os métodos de continuação, explorando-se o sistema (VI.12) estendido por uma equação de normalização $\mathbf{N}: \mathbf{U} \times \Lambda \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, onde \mathbf{U} é um espaço de Banach, com \mathbf{U} associado ao espaço de deslocamentos visto em (I.32) e Λ associado ao espaço de dissipação de energia, tal que:

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) = 0. \quad (\text{F.13})$$

Essa equação é conhecida como pseudo-comprimento de arco, onde μ é o parâmetro associado à continuação.

A adição de (F.13) à equação (VI.12), resulta no seguinte sistema estendido:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{u}(\mu), \mathbf{w}(\mu), \mu) \\ \mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) \end{Bmatrix} = 0. \quad (\text{F.14})$$

A vantagem de utilizar-se esse procedimento é que em pontos limite simples, \mathbf{F}_y^0 é não singular, ou seja, $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0)$ é um ponto regular para (F.14) e a convergência dos métodos definidos em (F.3) e (F.4) está garantida se (α, n) é uma raiz isolada de **LPBE**_s, resultados garantidos pelo teorema E3.3. Ainda que \mathbf{F}_y^0 seja singular para pontos de bifurcação, a convergência dos métodos de continuação de Newton e das Cordas (Comprimento de arco) será garantida se (α, α_0) é uma raiz isolada de **ABE**_s, resultado garantido pelo teorema E3.4. As raízes isoladas para esse caso são obtidas da mesma maneira que nas seções F1 e F2, respectivamente nas equações (F.7) e (F.11). Uma fórmula de normalização definida para **N** é expressa por:

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mu) = \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^*(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{N}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) - (\mu - \mu_0); \quad (\text{F.15})$$

onde $\mathbf{N}_{\mathbf{u}}^* \in \mathbf{U}^*$ (espaço de forças admissíveis visto em (I.33)) e $\mathbf{N}_{\mathbf{w}}$ é constante. Tem-se em (F.15), que $\mathbf{N}(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0) = 0$ e qualquer normalização regular satisfazendo $\mathbf{N}(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mu_0) = 0$, pode ser definida como a normalização (F.15) para μ próximo a μ_0 .

Uma contribuição importante do sistema estendido (F.14) é que esse contém informações sobre $\det \mathbf{Q}^w$, e então, uma das maneiras de se detectar pontos singulares de (VI.5) é observando no processo iterativo definido em (F.3) e (F.4) se $\det \mathbf{Q}^w$ troca de sinal em alguma iteração.

Observações:

- i) Segundo [Wriggers, 1990], apesar da garantia teórica de convergência dos métodos propostos em (F.3) e (F.4), a melhor maneira de se fazer a análise de singularidade do problema, consiste em explorar o método de Newton, que trabalha com aproximações para os operadores de primeira e segunda ordem. O método tipo comprimento de arco, pode ser adaptado à análise, mas não se ajusta bem para a implementação em Elementos Finitos, devido a operação com gradientes ser trabalhosa e complicada.
- ii) todas as considerações feitas aqui para a análise numérica de (VI.5) e (VI.12) podem ser estendidas para:
 - o problema relacionado às propriedades geométricas da estrutura visto em (VI.37);
 - o problema estendido visto em (VI.45).

BIBLIOGRAFIA.

- ASTON, P. J., SPENCE, A., *Hopf bifurcation near a double singular point*, J. Comp. Appl. Math., 80, 277- 297, 1997
- BARBOSA, H.J.C., FEIJÓO, R.A., *Numerical Algorithms for Contact Problems in Linear Elastostatics*, Laboratório Nacional de Computação Científica-LNCC, ISSN-0101 6113, No.13/84, Rio de janeiro, 1984.
- BARBOSA, H.J.C., RAUPP, F.M.P., BORGES, C.C.H., *Estudo comparativo de algoritmos para a resolução de inequações variacionais em mecânica*, Laboratório Nacional de Computação Científica-LNCC, ISSN-0101 6113, No.25 /93, Rio de janeiro, 1993.
- BAZARAA, M. S., SHETTY, C.M. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John-Willey & Sons, Inc., New York, 1979.
- BENALLAL, A., *Localisation phenomena in thermoelastoplasticity*. Arch. Mechanics, 44, 15-29, 1992.
- BENALLAL, A., BILLARDON, R., GEYMONAT, G., *Some mathematical aspects of the damage softening problem*, In Cracking and Damage, ed. J. Mazars and Z. P. Bazant, 247- 258, Elsevier, Amsterdam, 1988.
- BILLARDON, R., *Etude de la rupture par la mecanique de l'endommagement*, Lab. Mec. Tech., E.N.S. Cachan/ C.N.R.S./ Un. Paris 6, 1989.
- BRÉZIS, H., *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.
- BURGER, B.B., *A study of localized failure modes in brittle materials*, Thesis of Master, Un. de Cape Town, South Africa, 1987.
- CLARKE, F.H., *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley & Sons Inc., New York, 1983.
- COMI, C., MAIER, G., PEREGO, U. *Generalised variable finite element modelling and extremum theorems in stepwise holonomic elastoplasticity with internal variables*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 96, 213-237, 1992.
- COMI, C., PEREGO, U., *A unified approach for variationally consistent finite elements in elastoplasticity*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 121, 323-344, 1994.
- COMI, C., *Computational modelling of gradient-enhanced damage in quasi-brittle materials*, Tec. Rep. Dip. Ing. Strut., Politecnico di Milano, 1997.
- DECKER, D.W., KELLER, H.B., *Multiple limit point bifurcation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 75, 417-430, 1980.
- DUVAUT, G., LIONS, J.L. *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.

- EKELAND, I., TEMAM, R., *Convex analysis and variational problems*, North-Holland, American Elsevier, N.Y., 1976.
- FANCELLO, E. A., FEIJÓO, R.A., *Shape Optimization in Frictionless Contact Problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.37, 2311-2335, 1994.
- FEIJÓO, R.A., *Formulación y resolución via Programación Matemática del problema de contacto elastoplástico con fricción*. IX Congresso Brasileiro de E.M., v.1, pp.15, 1987.
- FEIJÓO, R.A., ZOUAIN, N., *Variational Formulations for rates and increments in plasticity*, in Computational Plasticity Models, Software and Applications, Ed. D.R.J. Owen, E. Hinton and E. Oñate, Part I. 33-57, Pineridge Press, 1987.
- FEIJÓO, R.A., ZOUAIN, N., *Formulations in rates and increments for elastic-plastic analysis*, Int. J. Num. Meth. Engng., v.26, 2031-2048, 1988.
- FEIJÓO, R.A., ZOUAIN, N., *A contribution to structural plasticity by optimization techniques - Part I - Potential Functionals for rates and increments of stress and strain*, in Proceedings of the 2nd International Conference on Computational Plasticity Models, Software and Applications, Ed. D.R.J. Owen, E. Hinton and E. Oñate, Part I., 1435 - 1452, Pineridge Press, 1989.
- FEIJÓO, R.A., ZOUAIN, N., *Elastic-Plastic Potential Functionals for Rates and Increments of Stress and Strain*, Tech. Rep., Laboratório Nacional de Computação Científica-LNCC, ISSN-0101 6113, No.07/90, Rio de Janeiro, 1990.
- FENCHEL, W., *On conjugate convex functions*, Canad. J. Math., 1, 73-77, 1949.
- GURTIN, E.M., *An introduction to continuum mechanics*, Academic Press Inc., N.Y., 1981.
- HACHICH, M., *Conditions de bifurcation dans les solides*, These de Doctorat, Lab. Mech. Tech., E.N.S. Cachan/C.N.R.S./Un. Paris 6, 1994.
- HAN, F.R., CHEN, W.F., *Strain-Space Plasticity formulation for hardening-softening materials with elastoplastic coupling*, Int Journal of Solids & Structures, v.22, n.8, 1986.
- HILL, R., *Acceleration waves in solids*, J. Mech. Phys. Solids, No. 10, 1-16, 1962.
- HOFFMAN, K., KUNZE, R., *Linear Algebra*, Prentice-Hall Inc, New Jersey, USA, 1961.
- HUGHES T.J.R., *The finite element method*. V.I, V.II, Prentice-Hall, Inc.,1987.
- JEPSON, A.D., DECKER, W., *Convergence cones near bifurcation*, SIAM J. NUM., ANAL., vol. 23, No. 5, 959-975, 1986.
- JEPSON, A.D., SPENCE, A., *Folds in the solution of two parameter systems and their calculation*, SIAM J. NUM., ANAL., v. 22, No. 2, 347-368, 1985.

- JEPSON, A.D., SPENCE, A., *The numerical solution of nonlinear equations having several parameters I: scalar equations*, SIAM J. NUM., ANAL., v. 22, No. 4, 736-759, 1985.
- KRAJCINOVIC, D., FONSEKA, G.U., *Continuous Damage Theory of Brittle Materials*. Journal of Applied Mechanics, 48, 809-815, 1981.
- KUBRUSLY, R.S., *Mais uma introdução à Análise Convexa*, Laboratório Nacional de Computação Científica-LNCC, ISSN-0101 6113, Rio de Janeiro, 1985.
- KUMAR L.T., LI M., SHA, D., *Conjugate Gradient based projection a new computational methodology for frictional contact problems*, Communication in Numerical Methods in Engineering, v.10, pp.633-648, 1994.
- LADEVEZE, P., *Sur une Theorie de L'Endommagement Anisotrope*, Rapport n.34, Laboratoire de Mechanique et Technologie, Cachan, France, 1987.
- LEMAITRE, J., CHABOCHE J.L., *Mechanics of solids materials*, Cambridge University Press, N. Y., USA, 1990.
- LOPEZ, J.F., *Modelos de daño concentrado para la simulacion numerica del colapso de porticos planos*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, v.9, 2, 123-139, 1993.
- LOULA, A.F., GALEÃO, A.C., *Dinâmica e estabilidade em cascas - Sobre o conceito de estabilidade*, Curso de Mecânica teórica e Aplicada, ch. 3, 371-408, LCC, 3 / janeiro a 11 / fevereiro, LCC, Rio de Janeiro, 1983.
- LUENBERGER, D.G., *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley Publ. Co., 2nd.ed.,1984.
- LUENBERGER, D.G., *Optimization by Vector Space Methods*. John-Wiley & Sons, Inc., 1969.
- MAIER, G., *Piecewise linearization of yield criteria in structural plasticity*, S.M., Archives, v.1, No. 213, 230-281, 1976.
- MANDEL, J., *Ondes plastiques dans un milieu indéfini à trois dimensions*, J. de Mechanique, No.1, 3-30, 1962.
- MOORE, G., SPENCE A., *The calculation of turning points of nonlinear equations*, SIAM J. NUM., ANAL., v. 17, No. 4, 567-576, 1985.
- MOREAU, J.J., *Fonctionnelles Convexes*, Lecture Notes, Séminaire Equations aux dérivées partielles, Collège de France, 1966.
- NGUYEN, Q. S., *Bifurcation and pos-bifurcation analysis in plasticity and brittle fracture*, J. Mech. Phys. Solids, v. 35, 303-324, 1987.

- OTTOSEN, N.S., RUNESSON, K., *Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity*, Int. J. Solids Structures, v. 27, No. 4, 421-421, 1991.
- OTTOSEN, N.S., RUNESSON, K., *Acceleration waves in elasto-plasticity*, Int. J. Solids Structures, v. 28, No. 2, 135-159, 1991.
- PANAGIOTOPOULOS, P.D., *Non-Convex Superpotentials in the sense of F. H. Clarke and Applications*, Mech. Res. Comm., 8, 335-340, 1981.
- PANAGIOTOPOULOS, P.D., *Non-convex Energy Functions. Application to Non-Convex Elastoplasticity*, Mech. Res. Comm., 9, 23-29, 1982.
- PANAGIOTOPOULOS, P.D., *Inequality Problems in Mechanics and Applications: convex and nonconvex energy functions*. Birkhause, 1985.
- PAULA, C.F., *Estudo das descrições lagrangeana e euleriana na análise não-linear geométrica com o emprego do método dos elementos finitos*, Dissertação de mestrado, EESC-USP, São Carlos, Brasil, 1997.
- PROENÇA, S.P.B., *Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuição*, Tese de Doutorado, EESC-USP, S. Carlos, Brasil, 1988.
- PROENÇA, S.P.B., BALBO, A.R., *On a variational formulation of an elastic-damage model*, Computational plasticity: fundamentals and applications (eds. OWEN, D.R.J., OÑATE, E. and HINTON, E.), Barcelona, CIMNE, part1, 489-492, 1997.
- PROENÇA, S.P.B., BALBO, A.R., *Formulation of an Elastic-damage Constitutive Model including fracture work limitation*, XVIII CILAMCE (Congresso Íbero Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia), Brasilia, Brasil, 1145-1152, 1997.
- PROENÇA, S.P.B., BALBO, A.R., *On a Variational Formulation of an Elastoplastic-damage Constitutive Model*, to be published in Computational Mechanics, New trends and Applications (eds. E. OÑATE and S.R. Idelsohn), Barcelona, CIMNE, 1998.
- REKTORYS, K., *Variational Methods in Mathematics Science and Engineering*, Reidel Publ., 1980.
- RIZZI, E., *Localization analysis of damaged materials*, Tec. Rep, CU/SR-93/5, CEAE Dept., Un. Colorado, USA, 1993.
- RIZZI, E., *Fracture-Energy based regularization of a scalar damage model*, Atti Ottavo Convegno Italiano di Meccanica Computazionale, AIMETA, 15-17 june, 107-112, Torino, Italy, 1994.
- RIZZI, E., *Sulla localizzazione delle deformazioni in materiali e strutture*, Tesi di Dottorato, Dip. Ing. Strut., Politecnico di Milano, 1995.

- ROJAS-MEDAR, M.A., VIEIRA-BRANDÃO, A.J., SILVA, G.N., *On optimality conditions for infinite dimensional nonsmooth optimization problems*, Tech. Rep., IMECC, UNICAMP, Campinas, Brasil, 1996.
- ROMANO, G., ROSATI L., *Convex Analysis of Elastic and Inelastic Mechanical Problems*, ASCE, Specialty Conference, Blacksburg - Virginia, may 23-25, 1988.
- ROMANO, G., ROSATI, L., *On Limit States, Plasticity and Locking*, Atti IX Congresso Naz. AIMETA, Bari, 4-7 october, 1988.
- ROMANO, G., ROSATI, L., *Variational Principles and Numerical Methods in Convex Structural Analysis*, CMEM89, Capri, 23-26 may, 1989
- ROMANO, G., ROSATI, L., *A survey on recent advances in convex structural analysis*. Tec. Rep., Fac. Eng., University of Naples, 1990.
- ROCKAFELLAR, R.T., *Convex Analysis*. Princeton university Press, Princeton, 1970.
- SIMO, J.C., WRIGGERS, P., TAYLOR, L., *A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 50, 163-180, 1985.
- TAYLOR, A.E., *Introduction to Functional Analysis*, Wiley & Sons, New York, 1958.
- TIMOSHENKO, S.P., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Inc., 1970.
- TOLSTOY, I., *Wave propagation*, McGraw-Hill Inc., New York, 1973.
- VIEIRA-BRANDÃO, A.J., ROJAS-MEDAR, M.A., SILVA, G.N., *Condiciones necesarias y suficientes de optimalidad en programación no-diferenciable con tiempo continuo: caso convexo*, Relatório de Pesquisa, IMECC, UNICAMP, RP 65/96, Campinas, Brasil, 1996.
- ZAGOTTIS, D., *Introdução à Teoria das Estruturas - Estabilidade e Instabilidade do Equilíbrio*, capítulo 10, 10.1-10.81, Edusp, São Paulo, 1980.
- ZYSSET, P.K., CURNIER, A., *An implicit projection algorithm for simultaneous flow of plasticity and damage in standard generalized materials*, Int. J. Num. Meth. Engng., v.39, 3065-3082, 1996.