

**CONTRIBUIÇÃO PARA A DETERMINAÇÃO DE
MATRIZES DE RIGIDEZ E VETORES DE AÇÕES
NODAIS EQUIVALENTES COM O EMPREGO
DA FORMULAÇÃO HERMITIANA LIVRE.**

ANTONIO CARLOS RIGITANO

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR : Prof. Dr. José Elias Laier

São Carlos

1999

À memória de meus antepassados
italianos que trabalharam no
ramo da construção civil.

Aos meus pais Pedro e Wilma.

À minha esposa Maria Helena e
aos meus filhos
Henrique, Laura e Luisa.

Dedico este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor José Elias Laier, pela amizade, atenção, dedicação, compreensão e segurança transmitidas, desde que iniciamos este trabalho conjunto.

Ao Professor José Luiz de Souza, pelos ensinamentos de matemática.

Ao amigo Heitor Miranda Bottura, pela pronta ajuda, na hora certa.

Ao Professor Jorge Hamada e às Secretárias Marlene de Souza Almeida Lima e Maria de Oliveira, do Departamento de Engenharia Civil da UNESP de Bauru, pelo apoio.

Um imenso muito obrigado.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Generalidades	1
1.2	Revisão bibliográfica	2
1.3	Objetivos	5
1.4	Conteúdo do trabalho	6
2	OPERADORES DE DIFERENÇAS FINITAS LAGRANGIANOS E HERMITIANOS	8
2.1	Introdução	8
2.2	Definição e geração de operadores de diferenças finitas lagrangianos	8
2.3	Emprego de séries de Taylor para a geração de operadores de diferenças finitas lagrangianos	12
2.4	Emprego da variante de COLLATZ [1966] para a geração de operadores de diferenças finitas lagrangianos e hermitianos	14
2.5	Geração do operador lagrangiano de diferenças finitas centrais para primeira derivada	16
2.6	Geração do operador lagrangiano de diferenças finitas ascendentes de primeira derivada	19
2.7	Geração do operador lagrangiano de diferenças finitas descendentes de primeira derivada	20
2.8	Geração de um operador lagrangiano de diferenças finitas centrais em segunda derivada	21
2.9	Coleção de operadores de diferenças finitas hermitianos apropriados para a formulação de matrizes de rigidez	23

3	OPERADORES HERMITIANOS PARA A GERAÇÃO DE MATRIZES DE RIGIDEZ E VETORES DE AÇÕES NODAIS EQUIVALENTES EM PROBLEMAS AXIAIS	26
3.1	Introdução	26
3.2	Emprego do método dos elementos finitos na formulação da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais equivalentes de barras, considerando-se somente deformações axiais	27
3.3	Operadores hermitianos para a solução de problemas axiais	30
3.4	Considerações sobre o emprego do operador (3.15) em problemas axiais	31
3.5	Exemplo de aplicação do operador (3.17) na geração da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais equivalentes de barra submetida a ação axial	33
3.6	Exemplos de aplicação da expressão (3.17) na solução do problema de torção de seção retangular estreita	36
3.6.1	Exemplo de aplicação do operador (3.17) com o emprego de um elemento finito	37
3.6.2	Exemplo de aplicação do operador (3.17) com o emprego de quatro elementos finitos	38
4	OPERADORES HERMITIANOS PARA A GERAÇÃO DE MATRIZES DE RIGIDEZ E VETORES DE AÇÕES NODAIS EQUIVALENTES EM PROBLEMAS DE FLEXÃO	42
4.1	Introdução	42
4.2	Caso simples : Geração da matriz de rigidez de flexão de vigas elásticas ..	43
4.2.1	Emprego do método dos elementos finitos na geração da	

matriz de rigidez de flexão de vigas elásticas	43
4.2.2 Emprego da formulação hermitiana livre para a geração da matriz de rigidez de flexão de vigas elásticas	46
4.3 Caso com força normal : Geração da matriz de rigidez geométrica e do vetor das ações nodais equivalentes	52
4.3.1 Emprego do método dos elementos finitos na geração da matriz de rigidez geométrica e do vetor de ações nodais equivalentes de vigas elásticas	53
4.3.2 Emprego da formulação hermitiana livre para a geração da matriz de rigidez de flexão, geométrica e do vetor de ações nodais equivalentes de vigas elásticas	54
4.3.2.1 Primeira formulação da matriz de rigidez geométrica	57
4.3.2.2 Segunda formulação da matriz de rigidez geométrica	61
4.4 Exemplos de aplicação	67
4.4.1 Primeiro exemplo : Carga crítica em viga sob ação axial N constante	67
4.4.2 Segundo exemplo : Análise de pórtico plano sob efeito de segunda ordem	69
5 OPERADORES HERMITIANOS PARA A GERAÇÃO DE MATRIZES DE RIGIDEZ E VETORES DE AÇÕES NODAIS EQUIVALENTES EM OUTROS CASOS DE FLEXÃO	75
5.1 Introdução	75
5.2 Teoria de viga de Timoshenko : Geração da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais equivalentes	76
5.2.1 Emprego do método dos elementos finitos na geração da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais equivalentes para o elemento de viga de Timoshenko	76

5.2.2	Emprego da formulação hermitiana livre na geração da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais equivalentes para o elemento de viga de Timoshenko	83
5.2.2.1	Primeira formulação da matriz de rigidez da viga de Timoshenko	84
5.2.2.2	Segunda formulação da matriz de rigidez da viga de Timoshenko	88
5.2.2.3	Terceira formulação da matriz de rigidez da viga de Timoshenko	90
5.3	Viga sobre base elástica : Geração das matrizes de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes	92
5.3.1	Emprego do método dos elementos finitos na geração da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o elemento de viga sobre base elástica	92
5.3.2	Emprego da formulação hermitiana livre na geração da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o elemento de viga sobre base elástica	95
5.3.3	Observações sobre a formulação hermitiana livre da matriz de rigidez da fundação de Winkler	102
5.4	Exemplos de aplicação	105
5.4.1	Primeiro exemplo : Deslocamentos em viga isostática	105
5.4.2	Segundo exemplo : Flecha em viga sobre base elástica	106
6	OPERADORES HERMITIANOS PARA A GERAÇÃO DE MATRIZES DE RIGIDEZ E VETORES DE AÇÕES NODAIS EQUIVALENTES EM PROBLEMAS BI-DIMENSIONAIS - Caso da Torção de Saint-Venant.....	108
6.1	Introdução	108

6.2	Emprego do método dos elementos finitos na geração da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o problema da torção de Saint-Venant	109
6.3	Emprego da formulação hermitiana livre na geração da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o problema da torção de Saint-Venant	115
6.3.1	Formulação da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o problema da torção de Saint-Venant com o elemento triangular	116
6.3.2	Formulação da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o problema da torção de Saint-Venant com o elemento retangular	127
6.4	Exemplo de aplicação com o emprego de elementos triangulares	139
7	CONCLUSÕES	145
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	148

RESUMO

No presente trabalho empregam-se operadores de diferenças finitas hermitianos para formular matrizes de rigidez e vetores de ações nodais equivalentes, tendo como base as teorias de Euler-Bernoulli, Timoshenko e a de fundação sobre base elástica bi-paramétrica. Examina-se também o caso da torção de elementos estruturais através da teoria de Saint-Venant. Sabe-se que as formulações referentes a esses temas são bastante conhecidas e objeto de consideração por diversos autores, porém o objetivo desta pesquisa é o de desenvolver uma nova metodologia para a consideração dos denominados erros de truncamento. Para tanto, são utilizadas as técnicas de diferenças finitas hermitianas na geração de tais matrizes e vetores, tendo-se em mente que as expressões de erros locais resultantes, providenciam uma medida da magnitude relativa desses erros. São feitas comparações entre as soluções obtidas e as formuladas através do método dos elementos finitos.

ABSTRACT

Hermitian finite difference operators are employed to formulate element stiffness matrix and load vectors, based on Euler-Bernoulli, Timoshenko beams bending theory and two-parametric elastic foundations. Elastic torsion of structural elements by Saint-Venant's theory is considered. It is well known that approaches has been presented by several authors to solve these kind of problems, so the aim of this research is to develop a special method in considering explicitly the truncation errors. Finite difference techniques are used to derive such elements matrix and vectors, having in mind that a local truncation error expression provides a measure of relative errors magnitudes. The solutions attained are compared with those given by the finite-element analysis.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Generalidades.

O progresso tecnológico alcançado nas últimas décadas no campo do processamento de dados tem sido acompanhado por uma extraordinária divulgação de temas de interesse da Teoria das Estruturas, principalmente no que tange ao desenvolvimento de pesquisas que utilizam métodos de análise numérica, ocupando esse assunto um especial destaque na literatura em âmbito mundial.

Ao se investigar a produção científica nessa área do conhecimento, percebe-se, com bastante clareza, que a atenção do meio técnico em tempos mais recentes tem sido direcionada em dois rumos principais :

a) A questão da geração, aplicação e desenvolvimento de algoritmos que permitam analisar com mais requinte o comportamento estrutural.

b) A questão da confiabilidade da simulação numérica, pois o controle da ordem de grandeza do erro de tais simulações ainda está um tanto longe de contar com uma abordagem mais geral ou mesmo de aplicação mais ampla.

Procurando acompanhar essa tendência, iniciou-se em meados de 1994, uma pesquisa desenvolvida no Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos - USP, com o objetivo de contribuir no campo da geração de matrizes de rigidez aplicadas à solução de problemas de Engenharia de Estruturas,

empregando-se para tanto, uma formulação hermitiana livre que faz uso de operadores de diferenças finitas hermitianos, na qual, o erro de aproximação pudesse ser levado em conta, permitindo-se a explicitação das ordens de convergência das matrizes de rigidez resultantes.

Tal projeto de formulação não variacional de matrizes de rigidez (sem basear-se em expressões de energia), mostrou-se auspicioso com o emprego dos operadores de diferenças finitas hermitianos, deduzidos com o auxílio da metodologia de COLLATZ [1966], advindo daí a denominação "formulação hermitiana livre"; linha de pesquisa para a qual, em que pese a escassa bibliografia existente, veio a propiciar um grande desafio, pois o assunto desenvolvido apresenta uma série de informações importantes, dando origem a um longo caminho ainda a percorrer, cujos primeiros passos pretende-se mostrar neste trabalho.

1.2 - Revisão bibliográfica.

Sendo de interesse da pesquisa fazer considerações sobre a formulação de matrizes de rigidez com o emprego dos denominados métodos numéricos, não se poderia deixar de tecer comentários a respeito de uma ferramenta bastante conhecida na análise do comportamento das estruturas, que constitui-se da aplicação do método das diferenças finitas, um assunto bastante antigo segundo WAH [1970], primeiramente escrito em 1872, cuja utilização mais efetiva ocorreu entre os anos de 1955 a 1966.

São encontradas em tempos mais recentes, um número imenso de publicações sobre esse tema, nas quais se realizam substituições das equações diferenciais que governam o problema a ser estudado, por equações algébricas de diferenças finitas, como por exemplo ZHOU [1993], que trabalha o problema de malhas irregulares (espaçamentos diferentes nas direções x e y); CHEN [1993] que propõe um modelo matemático para a análise da interação solo-estrutura utilizando a combinação de elementos finitos e diferenças finitas; PARK [1993] que descreve um processo de emprego de diferenças finitas centrais e ascendentes para a análise da sensibilidade estrutural de viga em balanço; SWARTZ [1995] que apresenta um

programa de computador para cálculo de cargas críticas em placas carregadas transversalmente, em regime elástico, cujas expressões analíticas são substituídas por operadores de diferenças finitas; ZHOU [1995] que menciona o emprego da técnica de diferenças finitas para obter cargas críticas transversais em setores de placas; KARAYANNIS [1995] que desenvolve algoritmo para análise do comportamento à torção de elementos de concreto armado, com a participação de equações de diferenças finitas e tendo como base a teoria da torção livre de Saint-Venant.

Pois bem, outros trabalhos de qualidade e rigor indiscutíveis poderiam ser mencionados como seguidores dessa filosofia de investigação, porém, observa-se que o caminho seguido pelos pesquisadores não tem como objetivo um aprofundamento em considerações que dizem respeito ao erro local introduzido, denominado erro de truncamento (truncation error), que é resultante do abandono de termos da série de Taylor contidos nos operadores empregados.

Nessa linha, KRAUTHAMMER [1993], apresenta uma aproximação computacional para a análise de vigas e placas de concreto armado solicitadas por cargas transientes, através da teoria de Timoshenko, e que, ao se utilizar de operadores de diferenças, menciona tão somente o erro de truncamento (truncation error) pertinente a cada um dos operadores empregados.

Por outro lado, trabalhos que fazem parte da linha de pesquisa voltada para as aplicações de métodos numéricos de elementos finitos mostram uma preocupação mais explícita a respeito do erro, como por exemplo PIAN [1967] e OLIVEIRA [1968], que mencionam a necessidade do estudo sobre seu controle.

Nesse mesmo caminho, artigos publicados por BARNHILL [1973] e CIARLET [1973] abordam com critérios matemáticos a convergência de tal método numérico, de maneira bastante meticulosa.

Novamente, com a preocupação da análise do erro numérico, BABUSKA [1981] estuda o aprimoramento das malhas de elementos finitos (h-refinement), considerando também a elevação da ordem dos polinômios aproximadores empregados (p-refinement); UTKU [1984] expõe com detalhes uma pesquisa sobre o estado da arte dos componentes dos erros das soluções numéricas;

sendo na mesma linha, os trabalhos de ZIENCKIEWICZ [1987]; [1988]; [1991]; que introduzem conceitos na estimativa de erros, discutindo detalhes de geração de malhas, com a intenção de implementar avaliadores de erros nos códigos de programas comerciais de elementos finitos já existentes.

Voltando o interesse para avaliação do erro local de matrizes de rigidez, parece ser de grande importância o desenvolvimento mostrado em COLLATZ [1966] e [1972], onde a integração numérica de equações diferenciais é feita pela formulação hermitiana de operadores de diferenças finitas, que contemplam de maneira imediata expressões analíticas para o erro de aproximação.

Veja-se por exemplo a linha de trabalho utilizada por MAKINSON [1968], que emprega operadores de integração hermitianos de passo simples na solução de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem, mostrando o parâmetro de erro de truncamento (truncation error) e o de NORSET [1974], que em continuidade ao trabalho de MAKINSON [1968], estuda também o conceito de estabilidade do método, retomando o problema do abandono de termos da série de Taylor.

Por outro lado, embora não explicitamente, os trabalhos de MAKINSON [1968] e NORSET [1974] sinalizam que a tarefa de se levar a efeito o controle do erro na simulação numérica, concomitantemente com a geração de matrizes de rigidez para análise estrutural, é bastante sugestiva, o que possibilitaria, em nosso entendimento, a ligação dos dois rumos de pesquisa mencionados; e que são tratados em separado, conforme mostra claramente a bibliografia consultada.

Esse procedimento encontra amparo em KEY [1973], pois segundo as próprias palavras de tal autor, o método dos elementos finitos e o método das diferenças finitas embora aparentem ser completamente diferentes, de fato estão estreitamente relacionados.

Com base nessas citadas publicações e a pertinente preocupação com respeito à atualidade e ao interesse de linhas de pesquisa, no tocante à formulação de matrizes de rigidez que se pretende estabelecer, parece certo que o tema considerado

é de interesse da comunidade científica, bastando ter em vista que estudos desse teor podem ser encontrados em tempos recentes, veja-se por exemplo FRIEDMAN [1998] que trabalha o problema da matriz de rigidez para elemento finito de vigas considerando a deformação por esforço cortante (teoria de viga de Timoshenko) empregando funções de forma de modo a eliminar o bloqueio da solução; AHMADIAN [1998], que expressa a preocupação no sentido de que a análise do erro seja introduzida de preferência quando da formulação do elemento, em vez de empregada em testes a posteriori; e também em BETTESS [1998] que gera a matriz de rigidez de um elemento finito retangular para resolver a equação de Laplace, sem recorrer às tradicionais funções de forma empregadas correntemente no método dos elementos finitos.

1.3 - Objetivos.

À vista das sinalizações contidas na revisão bibliográfica, o objetivo desta pesquisa está centrado em uma antiga preocupação expressa em PIAN [1967], que sugere avaliar os méritos de diferentes matrizes de rigidez empregadas nas análises via método dos elementos finitos, parece ser de grande interesse, por vislumbrar um campo de pesquisa promissor, no qual este trabalho procura se inserir e trazer alguma contribuição.

A avaliação que se propõe é feita em termos do expresso em HULBERT [1992], que menciona o fato de que, nas expressões de erros de truncamento locais (truncation errors), a potência do termo de ordem mais baixa (que define a ordem de convergência do método numérico), fornece uma medida relativa da magnitude desse erro, abrindo a possibilidade de comparação de diferentes algoritmos, neste caso especial, de matrizes de rigidez, sendo os operadores de diferenças finitas hermitianos encarregados de fornecer uma base de comparação.

Parte dos resultados obtidos já encontra-se publicada em LAIER e RIGITANO [1995], mostrando-se a abordagem dos operadores hermitianos, da qual é possível deduzir-se a matriz de rigidez geométrica, indicando-se que o procedimento é bastante viável quando comparado aos outros mais conhecidos, e que

possui ainda a vantagem de mostrar explicitamente o erro de aproximação, que é propriedade inerente dos operadores hermitianos.

Esse tema é retomado com maior profundidade, sendo partes inéditas mostradas, quais sejam : o estudo de problemas especiais de flexão e o da torção de Saint-Venant.

Embora a teoria seja de carácter geral, as aplicações aqui encontradas são dedicadas às estruturas reticuladas de barras e aos elementos triangulares e retangulares mais comumente empregados em análises da Engenharia Civil, para comparações com problemas classicamente resolvidos nessa área, sendo utilizados também os conceitos básicos da Resistência dos Materiais, cujas hipóteses fundamentais consideram pequenos deslocamentos em teoria linear, valendo portanto a superposição de efeitos.

1.4 - Conteúdo do trabalho.

Nos diversos capítulos deste trabalho, apresentam-se de maneira expedita, para efeito comparativo com as da formulação ora proposta, as soluções clássicas da geração de matrizes de rigidez e dos vetores de ações nodais equivalentes obtidas através do método dos elementos finitos.

No capítulo 2 são apresentadas em detalhes, as metodologias clássicas utilizadas para a geração de operadores de diferenças finitas, em especial a variante proposta por COLLATZ [1966], que consiste em se explicitar o erro de aproximação dos operadores.

O capítulo 3 é dedicado à apresentação da formulação hermitiana livre, empregando-se para tanto os denominados problemas axiais, especificamente o caso de barras submetidas a ações axiais e o caso particular de torção livre de seção estreita, onde são dados os primeiros passos no sentido de avaliar o erro de aproximação do algoritmo desenvolvido. Tal teoria é passagem obrigatória para estudos mais requintados desenvolvidos nos capítulos que se seguem.

O capítulo 4 trata da aplicação da formulação hermitiana livre aos problemas flexionais, abordando-se o caso da flexão em teoria de segunda ordem,

procurando-se mostrar as providências tomadas no sentido de se elevar a ordem de convergência das matrizes deduzidas, o que permite comparar o desempenho das matrizes de rigidez geradas com diferentes ordens de convergência. Encerrando o capítulo são feitos exemplos de aplicação envolvendo estruturas de vigas e pórticos, para os quais é discutida a convergência do processo numérico, procurando-se destacar o erro de aproximação, propriedade inerente dos operadores hermitianos.

Na seqüência, o capítulo 5 é dedicado ao estudo de outros casos de flexão, iniciando-se pelo elemento de viga de Timoshenko, que considera a influência do esforço cortante nas deformações, sendo em seguida tratado o caso da viga sobre base elástica, mediante modelo bi-paramétrico. São mostradas importantes informações que não fazem parte da geração das matrizes de rigidez pelo método dos elementos finitos, constituindo-se uma vantagem inegável da formulação hermitiana livre. Encerrando o capítulo, encontram-se exemplos de aplicação às vigas.

O capítulo 6 é dedicado aos estudos preliminares para a solução dos problemas bi-dimensionais, mais especificamente voltando-se a atenção ao caso da torção de Saint-Venant. São geradas matrizes de rigidez e vetores de ações nodais equivalentes para elementos triangulares e retangulares, inspirados nas clássicas soluções obtidas pelo método dos elementos finitos e inova, pois o autor não encontrou nenhuma referência na bibliografia disponível que fizesse menção a resultados obtidos de modo similar ou com o emprego da metodologia desenvolvida. É mostrado também que as soluções procuradas necessitam de operadores mais específicos, que levem em consideração propriedades advindas do Teorema de Gauss. O estudo tem o propósito de dar continuidade às formulações desenvolvidas, no intuito de aplicá-las a elementos com maior número de pontos pivotais .

No Capítulo 7 apresentam-se as conclusões a que se chegaram no decorrer da pesquisa.

CAPÍTULO 2

OPERADORES DE DIFERENÇAS FINITAS LAGRANGIANOS E HERMITIANOS

2.1 - Introdução.

Este capítulo é dedicado à apresentação das metodologias clássicas utilizadas para a geração de operadores de diferenças finitas, no qual mostram-se inicialmente, de forma resumida, alguns operadores mais conhecidos, comumente encontrados na literatura especializada, sendo a atenção voltada para operadores de diferenças finitas lagrangianos.

Em seguida aborda-se um refinamento da técnica de geração de operadores de diferenças finitas segundo a variante proposta por COLLATZ [1966], cujos resultados levam a operadores mais gerais, denominados de operadores de diferenças finitas hermitianos. A escolha dessa abordagem decorre da propriedade inerente dessa variante, que consiste em se explicitar o erro de aproximação, objetivo do presente trabalho.

2.2 - Definição e geração de operadores de diferenças finitas lagrangianos.

O clássico método das diferenças finitas é um importante processo de integração numérica de equações diferenciais, utilizado frequentemente em problemas de Engenharia, que tem como vantagem uma conceituação matemática bastante simples, baseada na definição geométrica da derivada, porém sem levar em conta a passagem ao limite do argumento.

O emprego dessa formulação viabiliza a geração de operadores de diferenças finitas, que aplicados a valores conhecidos da função incógnita nos pontos pivotaís (pontos de malha), permitem a avaliação das derivadas dessa função de maneira aproximada, conforme mostrado na Fig. 2.1, a exemplo de CHAPRA [1985], sendo $y = f(x)$ uma função genérica.

De acordo com o ilustrado na Fig. 2.1, onde y_0^I é a derivada da função no ponto 0 (emprega-se a clássica notação de derivada indicada por número romano no expoente), y_1 e y_{-1} os valores da função nos pontos correspondentes aos índices 1 e -1, sendo h o incremento da variável independente (passo); tem-se :

$$y_0^I \cong \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \quad (2.1)$$

que dá origem a um operador de diferenças finitas para a primeira derivada de $y = f(x)$ no ponto x_0 , com um certo grau de aproximação, cuja magnitude será objeto de maiores considerações no que se segue.

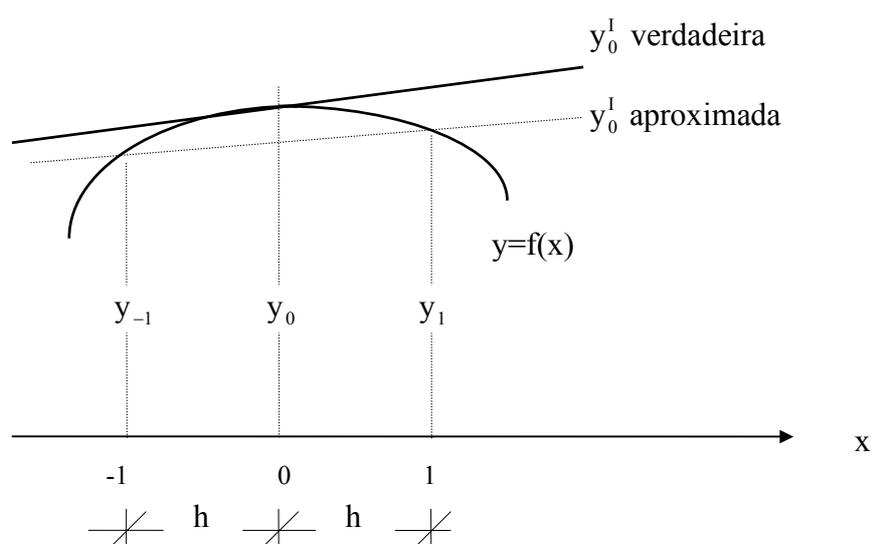


Fig. 2.1 - Derivadas verdadeira e aproximada de função $y = f(x)$.

Expressões de derivadas de maior ordem são obtidas de maneira similar, como, por exemplo o emprego recorrente de (2.1) na expressão aproximada da derivada de segunda ordem, ou seja :

$$y_0'' \cong \frac{y_{h/2}^I - y_{-h/2}^I}{h} \quad (2.2)$$

onde os valores das primeiras derivadas nos pontos médios são calculados através de (2.1) e dados por :

$$y_{h/2}^I \cong \frac{y_1 - y_0}{h} \quad (2.3)$$

$$y_{-h/2}^I \cong \frac{y_0 - y_{-1}}{h}$$

Substituindo (2.3) em (2.2) tem-se :

$$y_0'' = \frac{1}{h^2} (y_{-1} - 2y_0 + y_1) \quad (2.4)$$

que consiste numa expressão aproximada da segunda derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_0 , em termos de valores de $f(x)$ nos pontos -1, 0 e 1.

É importante ainda observar, apenas por questão de nomenclatura, que os operadores de diferenças finitas (2.1) e (2.4), assemelham-se ao polinômio interpolador de Lagrange, representado concisamente por :

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad (2.5)$$

onde os multiplicadores $L_i(x)$ são dados por :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n [(x - x_j) / (x_i - x_j)] \quad (2.6)$$

permitindo-se, por analogia às fórmulas de integração no formato de (2.5), conforme COLLATZ [1966] e posteriormente KETTER [1969], que tais expressões recebam a denominação de operadores de diferenças finitas lagrangianos.

Como é possível de se notar nessa breve exposição, as expressões de diferenças finitas foram deduzidas simplesmente através de considerações geométricas, havendo entretanto outros caminhos mais elegantes (menos expeditos), que levam à obtenção de fórmulas análogas.

Um outro caminho para a formulação de expressões de diferenças finitas, é o que emprega polinômios interpoladores, montados com os valores pivotaes conhecidos da função $y = f(x)$; podendo-se citar como exemplo, a escolha de um polinômio interpolador do segundo grau, ou seja :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (2.7)$$

conforme sugere SALVADORI [1956]; e também PILKEY[1994], levando-se aos mesmos resultados (2.1) e (2.4).

Note-se ainda que os operadores de diferenças finitas até agora estudados não contemplam de forma explícita o erro de aproximação, o que será considerado através de outra abordagem, com o emprego das séries de Taylor, conforme será mostrado no que se segue.

2.3 - Emprego de séries de Taylor para a geração de operadores de diferenças finitas lagrangianos.

Conforme sinalizado no item anterior, a maneira de se obter expressões do tipo (2.1) e (2.4) com indicação do erro de aproximação, consiste em se utilizar o desenvolvimento da função $f(x)$ em série de Taylor, porquanto, através desse expediente, introduz-se o denominado erro de truncamento (truncation error), que não é contemplado explicitamente quando são utilizados os princípios geométricos ou a adoção de polinômios interpoladores.

Para tanto, define-se a expansão em série de Taylor de uma função $y = f(x)$ qualquer numa vizinhança h , de acordo com o formato encontrado em um número imenso de autores, citando-se mais recentemente AKAI [1994] e CHAPRA [1995], que é a dada por :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(x) + R_n \quad (2.8)$$

na qual, ao se interromper a série no termo em derivada de ordem n , permanece como resto a parcela :

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \quad (2.9)$$

com $x < \xi < x + h$, cujo principal inconveniente, em princípio, é o desconhecimento do valor de ξ no intervalo mencionado.

Embora com essa restrição, a equação (2.9) possui grande importância na avaliação do erro de truncamento (truncation error), pois é possível arbitrariamente em função dos termos a serem incluídos na série, motivo pelo qual, sua forma encontra-se usualmente expressa na literatura como :

$$R_n = O(h^{n+1}) \quad (2.10)$$

onde $O(h^{n+1})$ significa que o erro de truncamento é da ordem de h^{n+1} ; ou seja, ele é proporcional ao tamanho do incremento h elevado à potência $n+1$. Tal fato é extremamente útil na avaliação do erro relativo, pois permite verificar, por exemplo, que a divisão por dois do passo h em uma fórmula com ordem de erro $O(h^2)$, implica em se diminuir o erro pela quarta parte (o erro cai quatro vezes).

Para se considerar o erro de aproximação na geração de expressões de diferenças finitas lagrangianas, observem-se os dois desenvolvimentos em série de Taylor de uma função $y = f(x)$ nos pontos y_{-1} e y_1 , de acordo com (2.8) que são :

$$y_{-1} = y_0 - hy_0^I + \frac{h^2}{2}y_0^{II} - \frac{h^3}{6}y_0^{III} + \frac{h^4}{24}y_0^{IV} - \dots \quad (2.11)$$

$$y_1 = y_0 + hy_0^I + \frac{h^2}{2}y_0^{II} + \frac{h^3}{6}y_0^{III} + \frac{h^4}{24}y_0^{IV} + \dots \quad (2.12)$$

Subtraindo-se os desenvolvimentos dados por (2.11) e (2.12) e resolvendo-se em termos de primeira derivada tem-se :

$$y_0^I = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6}y_0^{III} + \dots \quad (2.13)$$

ou simbolicamente :

$$y_0^I = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + O(h^2) \quad (2.14)$$

que é a mesma expressão mostrada em (2.1), com a informação adicional de que o erro de aproximação é de segunda ordem, como (2.13) está indicando; sendo que

esse operador é conhecido como operador de diferenças finitas centrais (a derivada é fornecida no ponto central).

Para se obter um operador de diferenças finitas que forneça a segunda derivada no ponto central, basta somar-se os desenvolvimentos (2.11) e (2.12), de onde vem :

$$y_0'' = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2} - \frac{h^2}{12} y_0^{IV} + \dots \quad (2.15)$$

que simbolicamente pode ser escrito como :

$$y_0'' = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2} + O(h^2) \quad (2.16)$$

expressão idêntica à mostrada em (2.4), porém agora evidenciando seu erro de aproximação, que é também de segunda ordem, conforme (2.15) está a indicar.

2.4 - Emprego da variante de COLLATZ [1966] para a geração de operadores de diferenças finitas lagrangianos e hermitianos.

Utilizou-se no item 2.2 a denominação de operadores de diferenças finitas lagrangianos, por analogia à fórmula (2.5) de Lagrange, porquanto as expressões obtidas envolviam termos apenas com os valores da função na vizinhança. Tipo similar de procedimento encontra-se COLLATZ [1966], onde esse autor faz referência aos operadores de diferenças finitas hermitianos, agora por analogia à fórmula de interpolação de Hermite, que são do tipo :

$$f(x) = \sum f(x_i)h_i(x) + \sum f'(x_i)H_i(x) + R \quad (2.17)$$

nos quais, além dos valores da função que são contemplados nos operadores lagrangianos, também são empregados os valores das derivadas em diversos pontos, o que confere à formulação um caráter de maior abrangência.

Mais especificamente, segundo a própria formulação empregada por COLLATZ [1966], o método de geração de operadores hermitianos está baseado em expressões da forma :

$$F = \sum_{v=-p}^p (a_v y_{i+v} + A_v y_{i+v}^{(k)}) \quad (2.18)$$

onde são contempladas combinações dos valores de y e suas k -ésimas derivadas na vizinhança dos pontos pivotais x_{i+v} , determinando-se os termos a_v e A_v , de modo que os coeficientes de potência de h nas séries de Taylor para a expressão F , centrada no ponto x_i sejam anulados preferencialmente, quanto mais alta for a potência de h (ordem de convergência).

Essa formulação, como se depreende de (2.18), amplia o conceito matemático já descrito, pois passa-se a incluir, no operador, além do conjunto dos valores da função na sua vizinhança, os valores das derivadas superiores da função; o que resulta em um processo de maior potencial de convergência, acrescentando ainda a vantagem, de se explicitar de maneira imediata o erro de aproximação em função do espaçamento h , de forma idêntica à mostrada no item 2.3 (operadores (2.14) e (2.16)).

Visando uma apresentação mais expedita, os operadores de diferenças finitas hermitianos podem ser expressos mais convenientemente, na forma sugerida por MAKINSON [1968], e mais recentemente também por PILKEY[1994], ou seja :

$$\sum (a_p y_p + b_q y_q^I + c_r y_r^{II} + \dots) = 0 + R \quad (2.19)$$

de sorte a facilitar a formulação de operadores, os mais genéricos possíveis, atribuindo-se valores arbitrários aos índices p , q , r e assim por diante (índices definidores dos pontos pivotais).

Devido ao emprego de derivadas de ordem superior da função y em (2.19), faz-se necessário considerar o desenvolvimento dessas derivadas em série de Taylor, o que pode ser obtido por recorrência à fórmula (2.8), ou seja :

$$f'(x+h) = f'(x) + hf''(x) + \frac{h^2}{2!} f'''(x) + \frac{h^3}{3!} f^{IV}(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{n+1}(x) + R_n \quad (2.20)$$

que consiste na expressão do desenvolvimento da primeira derivada; advindo assim as outras ordens de interesse.

Para elucidar o emprego dessa variante de formulação dos operadores hermitianos, são apresentados a seguir alguns exemplos da obtenção de operadores clássicos bem conhecidos de primeiras derivadas, que são os de diferenças finitas centrais, ascendentes, descendentes, encerrando-se com a formulação de um operador de segunda derivada.

2.5 - Geração do operador lagrangiano de diferenças finitas centrais para primeira derivada.

Para se deduzir o operador lagrangiano de diferenças finitas centrais para a primeira derivada através da variante proposta por COLLATZ [1966], escolhem-se em (2.19) valores dos índices p e q de modo a resultar :

$$a_{-1}y_{-1} + a_0y_0 + a_1y_1 + b_0y_0^I = 0 + R \quad (2.21)$$

notando-se a liberdade de seleção dos pontos pivotais incluídos na expressão pretendida.

Em qualquer caso, a parcela R do resto compreenderá os termos da série de Taylor que não forem passíveis de anulação no decorrer do processo.

Prosseguindo de acordo com a variante de COLLATZ [1966], desenvolvem-se os termos y_{-1} e y_1 de (2.21) em série de Taylor centrada em y_0 conforme (2.8), ou seja :

$$\begin{aligned} y_{-1} &= [y_0 - hy_0^I + \frac{h^2}{2!}y_0^{II} - \frac{h^3}{3!}y_0^{III} + \frac{h^4}{4!}y_0^{IV} \dots] \\ y_0 &= [y_0] \\ y_1 &= [y_0 + hy_0^I + \frac{h^2}{2!}y_0^{II} + \frac{h^3}{3!}y_0^{III} + \frac{h^4}{4!}y_0^{IV} \dots] \\ y_0^I &= [y_0^I] \end{aligned} \quad (2.22)$$

tem-se, omitidas as parcelas em h^4 e substituído em (2.21) :

$$\begin{aligned} &a_{-1}[y_0 - hy_0^I + \frac{h^2}{2!}y_0^{II} - \frac{h^3}{3!}y_0^{III}] + a_0[y_0] + \\ &+ a_1[y_0 + hy_0^I + \frac{h^2}{2!}y_0^{II} + \frac{h^3}{3!}y_0^{III}] + b_0[y_0^I] = 0 + R \end{aligned} \quad (2.23)$$

ou ainda, reunidos os termos comuns, assim se escreve :

$$\begin{aligned} &y_0 \quad [\quad a_{-1} + \quad a_0 + \quad a_1 + \quad 0 \quad] + \\ &+ hy_0^I \quad [\quad -a_{-1} + \quad 0 + \quad a_1 + \quad \frac{b_0}{h} \quad] + \\ &+ \frac{h^2 y_0^{II}}{2!} \quad [\quad a_{-1} + \quad 0 + \quad a_1 + \quad 0 \quad] + \\ &+ \frac{h^3 y_0^{III}}{3!} \quad [\quad -a_{-1} + \quad 0 + \quad a_1 + \quad 0 \quad] = 0 + R \end{aligned} \quad (2.24)$$

faltando-se ainda a determinação dos parâmetros a_{-1} , a_0 , a_1 e b_0 , o que é feito procurando-se anular as potências mais altas possíveis em h.

Pois bem, anulando-se em (2.24) os termos até a ordem h^2 , ou seja :

$$\begin{aligned} a_{-1} + a_0 + a_1 &= 0 \\ -a_{-1} + a_1 + \frac{b_0}{h} &= 0 \\ a_{-1} + a_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

resulta, tomando-se $b_0 = 1$ (COLLATZ [1966]) :

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{2h} \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= -\frac{1}{2h} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Os parâmetros (2.26), juntamente com $b_0 = 1$, substituídos em (2.24) levam a :

$$R = -\frac{h^2}{3!} y_0''' + \dots \quad (2.27)$$

permitindo-se escrever (2.21), que em termos de primeira derivada resulta :

$$y_0^I = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{3!} y_0''' + \dots \quad (2.28)$$

encerrando-se a formulação do operador lagrangiano de diferenças finitas centrais de primeira derivada, explicitando-se o erro de aproximação, que é de segunda ordem, conforme mostram (2.13) e (2.27).

2.6 - Geração do operador lagrangiano de diferenças finitas ascendentes de primeira derivada.

No caso da geração do operador lagrangiano de diferenças finitas ascendentes de primeira derivada (expressão aproximada de y_0^I no ponto x_0 , em termos de valores da função $f(x)$ nos pontos 0 e 1), escolhem-se em (2.19) valores dos índices p e q de modo a resultar :

$$a_0 y_0 + a_1 y_1 + b_0 y_0^I = 0 + R \quad (2.29)$$

Tomando-se $a_{-1} = 0$ em (2.24), e anulando-se os termos até a ordem h , ou seja :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 &= 0 \\ a_1 + \frac{b_0}{h} &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

resulta, com $b_0 = 1$ (COLLATZ [1966]) :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{h} \\ a_1 &= -\frac{1}{h} \\ R &= -\frac{h y_0^{II}}{2!} + \dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

permitindo-se escrever (2.29), em termos de primeira derivada no ponto pivotal x_0 :

$$y_0^I = \frac{1}{h}(-y_0 + y_1) - \frac{h y_0^{II}}{2!} + \dots \quad (2.32)$$

que é o operador lagrangiano de diferenças finitas ascendentes de primeira derivada procurado, já explicitado o erro de aproximação, que no caso é de primeira ordem, ou seja $O(h)$, conforme (2.32) está a indicar.

Note-se que a expressão (2.32) é idêntica à obtida quando se desenvolve a série de Taylor (2.8) no ponto $f(0+h)$; interrompida nos termos superiores a h^3 , ou seja :

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \dots \quad (2.33)$$

posteriormente explicitando-se o termo y_0' (primeira derivada).

2.7 - Geração do operador lagrangiano de diferenças finitas descendentes de primeira derivada.

Para a geração do operador lagrangiano de diferenças finitas descendentes de primeira derivada no ponto x_0 , em termos de valores da função $f(x)$ nos pontos -1 e 0 , escolhem-se em (2.19) valores dos índices p e q de modo a resultar :

$$a_{-1}y_{-1} + a_0y_0 + b_0y_0' = 0 + R \quad (2.34)$$

Arbitrando-se neste caso $a_1 = 0$ em (2.24), e anulando-se os termos até a ordem h , ou seja :

$$\begin{aligned} a_{-1} + a_0 &= 0 \\ -a_{-1} + \frac{b_0}{h} &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

resulta, tomando-se $b_0 = 1$ (COLLATZ [1966]) :

$$\begin{aligned}
 a_{-1} &= \frac{1}{h} \\
 a_0 &= -\frac{1}{h} \\
 R &= \frac{hy_0''}{2!} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

permitindo-se escrever (2.34) em termos de primeira derivada no ponto pivotal x_0 :

$$y_0' = \frac{1}{h}(-y_{-1} + y_0) + \frac{hy_0''}{2!} + \dots
 \tag{2.37}$$

ou seja, o operador de diferenças finitas descendentes lagrangiano de primeira derivada procurado, já mostrado o erro de aproximação que é de primeira ordem.

Para confirmar esse resultado, basta desenvolver a série de Taylor (2.8) no ponto $f(0-h)$, omitindo-se os termos superiores a h^3 , ou seja :

$$y_{-1} = y_0 - hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' - \dots
 \tag{2.38}$$

e explicitar-se a primeira derivada, obtendo-se expressão idêntica a (2.37).

2.8 - Geração de um operador lagrangiano de diferenças finitas centrais em segunda derivada.

Para se obter o operador de diferenças finitas centrais, escreve-se (2.19) no formato :

$$a_{-1}y_{-1} + a_0y_0 + a_1y_1 + c_0y_0'' = 0 + R
 \tag{2.39}$$

destacando-se a segunda derivada no ponto central y_0 .

Aproveitando-se os desenvolvimentos da função y nos pontos y_{-1} e y_1 que constam em (2.22), ou seja :

$$\begin{aligned}
 y_{-1} &= [y_0 - hy_0^I + \frac{h^2}{2!}y_0^{II} - \frac{h^3}{3!}y_0^{III} + \frac{h^4}{4!}y_0^{IV} - \frac{h^5}{5!}y_0^V \dots] \\
 y_0 &= [y_0] \\
 y_1 &= [y_0 + hy_0^I + \frac{h^2}{2!}y_0^{II} + \frac{h^3}{3!}y_0^{III} + \frac{h^4}{4!}y_0^{IV} + \frac{h^5}{5!}y_0^V \dots] \\
 y_0^{II} &= [y_0^{II}]
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

omitindo-se as parcelas em h^5 , o expresso em (2.39) ganha a seguinte redação :

$$\begin{aligned}
 &a_{-1}[y_0 - hy_0^I + \frac{h^2}{2!}y_0^{II} - \frac{h^3}{3!}y_0^{III} + \frac{h^4}{4!}y_0^{IV}] + a_0[y_0] + \\
 &+ a_1[y_0 + hy_0^I + \frac{h^2}{2!}y_0^{II} + \frac{h^3}{3!}y_0^{III} + \frac{h^4}{4!}y_0^{IV}] + c_0[y_0^{II}] = 0 + R
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

ou ainda, reunidos os termos comuns :

$$\begin{aligned}
 &y_0 [a_{-1} + a_0 + a_1 + 0] + \\
 &+ hy_0^I [-a_{-1} + 0 + a_1 + 0] + \\
 &+ \frac{h^2 y_0^{II}}{2!} [a_{-1} + 0 + a_1 + \frac{2c_0}{h^2}] + \\
 &+ \frac{h^3 y_0^{III}}{3!} [-a_{-1} + 0 + a_1 + 0] + \\
 &+ \frac{h^4 y_0^{IV}}{4!} [a_{-1} + 0 + a_1 + 0] = 0 + R
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

Pois bem, anulando-se em (2.42) os termos até a ordem h^2 , ou seja :

$$a_{-1} + a_0 + a_1 = 0$$

$$-a_{-1} + a_1 = 0 \quad (2.43)$$

$$a_{-1} + a_1 + \frac{2c_0}{h^2} = 0$$

resulta, tomando-se $c_0 = -1$ (COLLATZ [1966]) :

$$a_{-1} = \frac{1}{h^2}$$

$$a_0 = \frac{-2}{h^2}$$

(2.44)

$$a_1 = \frac{1}{h^2}$$

$$R = \frac{h^2}{12} y_0^{IV} + \dots$$

permitindo-se, finalmente, escrever o operador (2.39), que em termos de segunda derivada, resulta :

$$y_0^{II} = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2} - \frac{h^2}{12} y_0^{IV} + \dots \quad (2.45)$$

idêntico ao operador lagrangiano (2.15), gerado com o auxílio da soma de desenvolvimentos da função $y = f(x)$ em série de Taylor.

2.9 - Coleção de operadores de diferenças finitas hermitianos apropriados para a formulação de matrizes de rigidez.

Exibe-se a seguir, uma coleção de operadores de diferenças finitas hermitianos, deduzida com o emprego da variante de COLLATZ [1966],

observando-se que as manipulações algébricas pertinentes foram omitidas, no sentido de abreviar a exposição, porquanto são análogas às mostradas nos exemplos dos itens 2.5 a 2.8. Tal coleção, em ordem crescente de precisão de operadores, é a dada por :

$$-y_0 + y_1 - \frac{h}{2}(y_0^I + y_1^I) + \frac{h^3 y_0^{III}}{12} + \dots = 0 \quad (2.46)$$

$$-y_0 + y_1 - \frac{h}{2}(y_0^I + y_1^I) + \frac{h^3}{12}(y_0^{III}) + \frac{h^4 y_0^{IV}}{24} + \dots = 0 \quad (2.47)$$

$$-y_0 + y_1 - \frac{h}{3}(2y_0^I + y_1^I) - \frac{h^2}{6}(y_0^{II}) + \frac{h^4 y_0^{IV}}{72} + \dots = 0 \quad (2.48)$$

$$-y_0 + y_1 - \frac{h}{2}(y_0^I + y_1^I) + \frac{h^3}{12}(y_1^{III}) - \frac{h^4 y_0^{IV}}{24} + \dots = 0 \quad (2.49)$$

$$-y_0 + y_1 - \frac{h}{3}(y_0^I + 2y_1^I) + \frac{h^2}{6}(y_1^{II}) - \frac{h^4 y_0^{IV}}{72} + \dots = 0 \quad (2.50)$$

$$-y_0 + y_1 - \frac{h}{2}(y_0^I + y_1^I) - \frac{h^2}{12}(y_0^{II} - y_1^{II}) - \frac{h^5 y_0^V}{720} + \dots = 0 \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} & -y_0 + y_1 - \frac{h}{2}(y_0^I + y_1^I) - \frac{h^2}{10}(y_0^{II} - y_1^{II}) - \frac{h^3}{120}(y_0^{III} + y_1^{III}) + \\ & + \frac{h^7 y_0^{VII}}{100800} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned}
& -y_0 + y_1 - \frac{h}{2}(y_0^I + y_1^I) - \frac{h^2}{12}(y_0^{II} - y_1^{II}) + \frac{h^4}{720}(y_0^{IV} - y_1^{IV}) + \\
& + \frac{h^7 y_0^{VII}}{30240} + \dots = 0
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}
& -y_0 + y_1 - \frac{h}{2}(y_0^I + y_1^I) - \frac{3h^2}{28}(y_0^{II} - y_1^{II}) - \frac{h^3}{84}(y_0^{III} + y_1^{III}) + \\
& - \frac{h^4}{1680}(y_0^{IV} - y_1^{IV}) + - \frac{h^9 y_0^{IX}}{25401600} + \dots = 0
\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}
& -y_0 + y_1 - \frac{h}{2}(y_0^I + y_1^I) + \frac{h^2}{6}(y_0^{II} - y_1^{II}) + \frac{h^3}{8}(y_0^{III} + y_1^{III}) + \\
& + \frac{135h^4}{5040}(y_0^{IV} - y_1^{IV}) + \frac{23h^5}{10080}(y_0^V + y_1^V) - \frac{h^9 y_0^{IX}}{362880} + \dots = 0
\end{aligned} \tag{2.55}$$

que vai ser utilizada para as formulações de matrizes de rigidez nos Capítulos que se seguem.

CAPÍTULO 3

OPERADORES HERMITIANOS PARA A GERAÇÃO DE MATRIZES DE RIGIDEZ E VETORES DE AÇÕES NODAIS EQUIVALENTES EM PROBLEMAS AXIAIS.

3.1 - Introdução.

Este capítulo é dedicado à apresentação de uma formulação não variacional (sem basear-se em expressões de energia) para a geração de matrizes de rigidez, sendo a atenção voltada aos problemas axiais; ou mais especificamente, ao caso de barras submetidas a ações axiais; e em seguida, ao caso particular de torção de seção retangular estreita.

A abordagem que ora se introduz, consiste na escolha e aplicação de operadores hermitianos (apresentados no capítulo 2) ao conjunto de relações constitutivas e de equilíbrio nos pontos pivotais (pontos de malha) de um elemento estrutural qualquer (por exemplo esforços e deslocamentos nodais); que é realizada com bastante liberdade, motivo pelo qual, passou-se a denominar essa técnica de “formulação hermitiana livre”.

Antes de se desenvolver essa nova proposta de abordagem para a solução numérica dos problemas citados, apresentam-se, de maneira expedita, apenas para efeito comparativo, as soluções clássicas da geração da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais equivalentes, obtidas através do método dos elementos finitos, tendo como base a escolha das denominadas funções de forma.

Ressalte-se que o emprego da formulação hermitina livre possui ainda a vantagem de mostrar explicitamente o erro de aproximação das matrizes geradas

(erro local), fato que decorre de propriedade inerente dos operadores hermitianos; e que não é contemplado nas formulações do método dos elementos finitos.

3.2 - Emprego do método dos elementos finitos na formulação da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais equivalentes de barras, considerando-se somente deformações axiais.

Apresentam-se para a barra elástica ilustrada na Fig. 3.1, na qual são considerados somente deslocamentos axiais u , as formulações da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes às ações externas, empregando-se o método dos elementos finitos.

As deduções pertinentes a essa formulação são bem conhecidas, razão pela qual estão colocadas de forma resumida no que se segue; sendo que informações mais detalhadas sobre o assunto, podem ser encontradas em livros especializados, como por exemplo : ZIENKIEWICZ [1971]; BREBBIA [1973]; COOK [1986]; e PILKEY [1994].

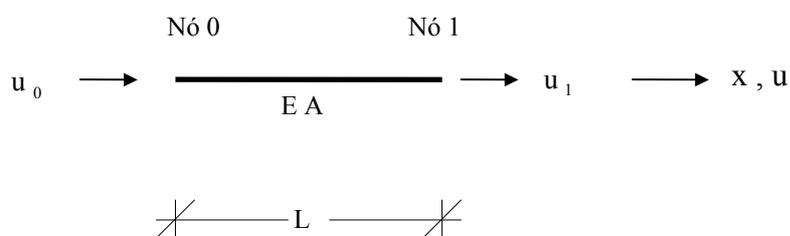


Fig. 3.1 - Deslocamentos axiais em barra elástica.

Para tanto, conforme preconizam os clássicos trabalhos sobre o tema, emprega-se como função aproximadora dos deslocamentos u , que acontecem entre os nós 0 e 1 do elemento (Fig. 3.1), o polinômio do primeiro grau :

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (3.1)$$

no qual α_i são denominados parâmetros generalizados, preferindo-se passar para parâmetros nodais (deslocamentos u_0 e u_1 dos nós); bastando verificar que :

$$\begin{aligned} u_0 &= \alpha_1 \\ u_1 &= \alpha_1 + L \alpha_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

cuja solução imediata é dada por :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= u_0 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{L}(-u_0 + u_1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Levando-se tais valores em (3.1); tem-se, em notação matricial :

$$u = \begin{Bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \{u_0 \quad u_1\}^T \quad (3.4)$$

ou ainda :

$$u = \{P\} \{u_0 \quad u_1\}^T \quad (3.5)$$

onde o vetor $\{P\} = \begin{Bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{Bmatrix}$, contém as funções classicamente conhecidas pela denominação de funções de forma, expressas neste caso em coordenadas cartesianas.

A primeira derivada do vetor de forma $\{P\}$, resulta :

$$\{B\} = \frac{d\{P\}}{dx} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

sendo a matriz de rigidez do elemento (COOK [1986]):

$$[k] = \int_0^L \{B\}^T EA \{B\} dx \quad (3.7)$$

onde, admitidos constantes E (módulo de elasticidade) e A (área da seção transversal da barra); resulta, após integração analítica :

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

que é a clássica matriz de rigidez de barra elástica.

O vetor de cargas nodais equivalentes do elemento é dado por (COOK[1986]) :

$$\{r_e\} = \int_0^L \{P\}^T p dx \quad (3.9)$$

onde p é a ação axial uniformemente distribuída ao longo do elemento, Fig. 3.2; expressão na qual, substituindo-se o vetor de forma $\{P\}$ dado por (3.5), resulta, após integração analítica :

$$\{r_e\} = \left\{ \frac{pL}{2} \quad \frac{pL}{2} \right\}^T \quad (3.10)$$

que é o denominado vetor das ações nodais equivalentes ao carregamento externo da barra elástica (GERE [1981]; COOK [1986]; e outros).

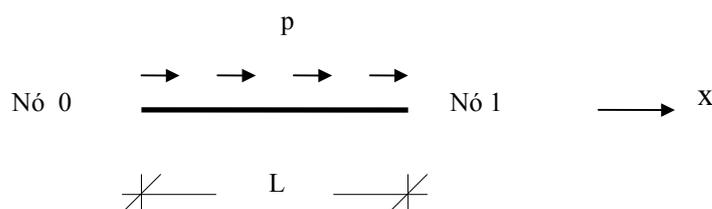


Fig. 3.2 - Elemento de barra sob ação axial uniformemente distribuída.

3.3 - Operadores hermitianos para a solução de problemas axiais.

A solução de problemas unidimensionais (axiais) pela formulação hermitiana livre pode ser obtida através de um procedimento matemático expedito, pois essa abordagem, quando referida aos casos axiais, consiste em se aplicar um operador hermitiano a uma função e sua primeira derivada, conforme mostrado a seguir.

Pois bem, escolhendo-se dentre os operadores da coleção que consta no capítulo 2 , o dado por :

$$-y_0 + y_1 - \frac{h}{2}(y_0^I + y_1^I) + \frac{h^3 y_0^{III}}{12} + \dots = 0 \quad (3.11)$$

conhecido como operador trapezoidal, sua aplicação aos pontos pivotais 0 e 1 de uma função genérica $y = f(x)$ e posteriormente à primeira derivada dessa função nos mesmos pontos, leva a :

$$-y_0 + y_1 - \frac{h}{2}(y_0^I + y_1^I) + \frac{h^3 y_0^{III}}{12} + \dots = 0 \quad (3.12)$$

$$-y_0^I + y_1^I - \frac{h}{2}(y_0^{II} + y_1^{II}) + \frac{h^3 y_0^{IV}}{12} + \dots = 0$$

que escritas em notação matricial, ganham a redação :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{h}{2} & -\frac{h}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0^I \\ y_1^I \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{h}{2} & -\frac{h}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0^{II} \\ y_1^{II} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{h^3 y_0^{III}}{12} + \dots \\ \frac{h^3 y_0^{IV}}{12} + \dots \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.13)$$

Procedendo-se a inversão da matriz presente no segundo termo ou seja :

$$\begin{bmatrix} \frac{-h}{2} & \frac{-h}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

e manobrando-se algebricamente (3.13), tem-se :

$$\begin{Bmatrix} y_0^I \\ y_1^I \end{Bmatrix} + \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{Bmatrix} + \frac{h}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0^{II} \\ y_1^{II} \end{Bmatrix} + \frac{h^2}{12} \begin{Bmatrix} -y_0^{III} \\ -y_1^{III} \end{Bmatrix} + \dots = 0 \quad (3.15)$$

que é um novo operador hermitiano de ordem de convergência $(0) h^2$; em formato apropriado para a solução de problemas unidimensionais (axiais), tema dos próximos ítems.

3.4 - Considerações sobre o emprego do operador (3.15) em problemas axiais.

Visando-se uma sistematização de cálculo com o emprego da operador (3.15), seja a sucessão de n pontos espaçados de h exibida na Fig. 3.3, onde em cada ponto são considerados conhecidos os valores pivotais de uma função e também de sua primeira derivada.

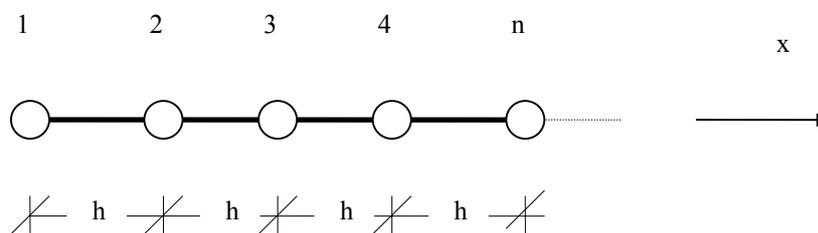


Fig. 3.3 - Sucessão de pontos espaçados de "h".

Representando-se dois elementos contíguos dessa malha, conforme ilustra a Fig. 3.4, onde "e" é o número do elemento; $y^{(e)}$ e $y^{I(e)}$ são

respectivamente os valores da função e de sua primeira derivada nos pontos de extremidade correspondentes aos índices $0^{(e)}$ e $1^{(e)}$; e mais, tomando-se positiva a rotação dada por $y_1^{(e)}$ quando no sentido anti-horário; é possível escrever-se uma relação que expresse a diferença das derivadas da função em um nó comum, do tipo :

$$y_1^{I(e)} - y_0^{I(e+1)} = k \quad (3.16)$$

onde o parâmetro "k" será nulo quando existir continuidade das derivadas, ou terá valor conhecido no caso de descontinuidade da função.

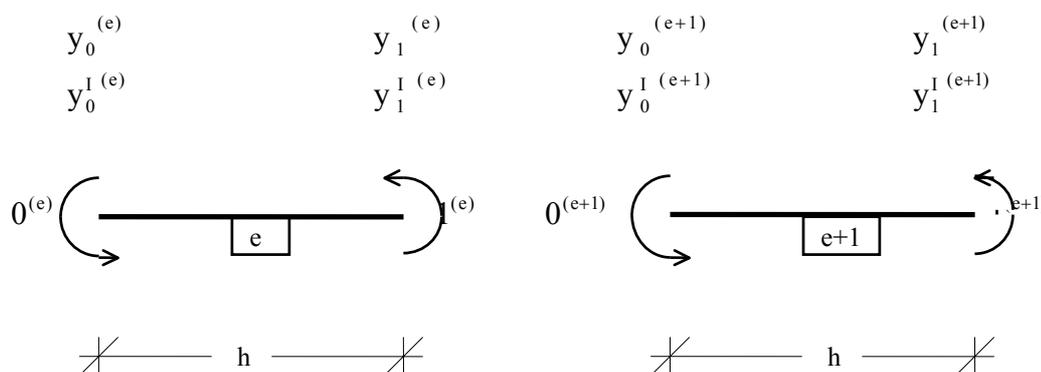


Fig.3.4 - Elementos contíguos de malha na direção x.

Para trabalhar-se com matrizes simétricas, basta adotar nova convenção para os sentidos positivos das rotações $y_1^{(e)}$, conforme exhibe a Fig. 3.5, o que significa trocar os sinais da segunda linha da expressão (3.15), ou seja :

$$\left\{ \begin{matrix} y_0^{I(e)} \\ y_1^{I(e)} \end{matrix} \right\} + \frac{1}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} y_0^{(e)} \\ y_1^{(e)} \end{matrix} \right\} + \frac{h^{(e)}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} y_0^{II(e)} \\ y_1^{II(e)} \end{matrix} \right\} + \frac{(h^{(e)})^2}{12} \left\{ \begin{matrix} -y_0^{III(e)} \\ y_0^{III(e)} \end{matrix} \right\} + \dots = \{0\} \quad (3.17)$$

passando (3.16), que representa a descontinuidade das derivadas, a ser expressa por :

$$y_1^{I(e)} + y_0^{I(e+1)} = k \quad (3.18)$$

resultando assim na mesma convenção utilizada para a montagem das matrizes de rigidez segundo o método dos elementos finitos, e que será empregada nos exemplos que se seguem.

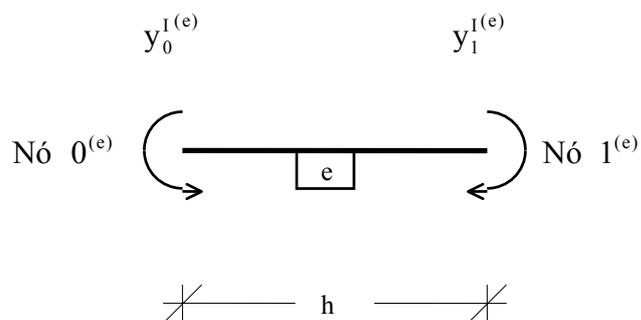


Fig. 3.5 - Convenção para sentido positivo das rotações.

3.5 - Exemplo de aplicação do operador (3.17) na geração da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais equivalentes de barra submetida a ação axial.

Considere-se a barra sob ação axial uniformemente distribuída p , conforme exibe a Fig. 3.6, onde $N_0^{(e)}$, $N_1^{(e)}$, $u_0^{(e)}$ e $u_1^{(e)}$ são respectivamente os esforços normais e os deslocamentos de extremidade do elemento, na convenção usual da Resistência dos Materiais.

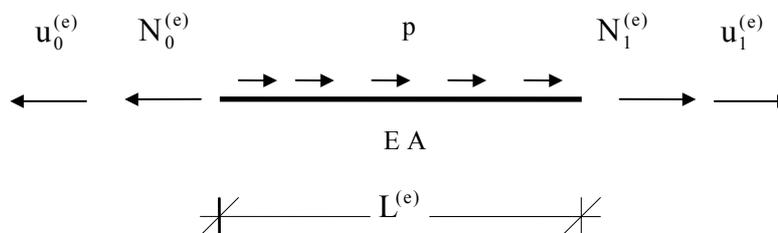


Fig. 3.6 - Barra sob ação axial uniformemente distribuída.

A equação diferencial regente do problema, como se sabe, é dada por :

$$u^I = \frac{N}{EA} \quad (3.19)$$

onde E é o módulo de elasticidade e A a área da seção transversal da barra. Tal relação sendo derivada outra vez, resulta :

$$u^{II} = \frac{N^I}{EA} \quad (3.20)$$

O equilíbrio de um elemento de barra conforme mostra a Fig. 3.7, implica em :

$$N^I = -p \quad (3.21)$$

que substituída em (3.20), leva a :

$$u^{II} = -\frac{p}{EA} \quad (3.22)$$

e derivada novamente resulta :

$$u^{III} = 0 \quad (3.23)$$

encerrando-se as relações diferenciais de interesse.

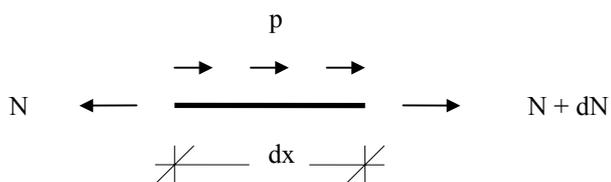


Fig. 3.7 - Elemento de barra sob ação axial uniformemente distribuída.

Pois bem, aplicando-se o operador (3.17) à função deslocamento u , em um elemento genérico de comprimento $L^{(e)}$, tem-se :

$$\begin{Bmatrix} u_0^{I(e)} \\ u_1^{I(e)} \end{Bmatrix} + \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^{(e)} \\ u_1^{(e)} \end{Bmatrix} + \frac{L^{(e)}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^{II(e)} \\ u_1^{II(e)} \end{Bmatrix} + \frac{(L^{(e)})^2}{12} \begin{Bmatrix} -u_0^{III(e)} \\ u_0^{III(e)} \end{Bmatrix} + \dots = \{0\} \quad (3.25)$$

expressão na qual, substituídas as informações dos pontos pivotais dadas por (3.19), (3.23) e (3.24), resulta :

$$\begin{Bmatrix} N_0^{(e)} \\ N_1^{(e)} \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^{(e)} \\ u_1^{(e)} \end{Bmatrix} + L^{(e)} \begin{Bmatrix} -\frac{p}{2} \\ -\frac{p}{2} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.26)$$

onde a matriz de rigidez e o vetor das ações nodais equivalentes são idênticos aos deduzidos pelo métodos dos elementos finitos (vide item 3.2), cumprindo-se observar que a parcela do erro de aproximação desaparece, porquanto neste exemplo são nulas as derivadas da função deslocamento u de ordem superior a dois (ação axial p constante em (3.23)).

Cumpre-se ainda lembrar, que o valor da constante k em (3.18), tendo em vista (3.19), resulta :

$$N_1^{(e)} + N_0^{(e+1)} = k EA \quad (3.27)$$

que representam as forças passíveis de serem aplicadas nos nós, já na convenção empregada pelo método dos elementos finitos.

3.6 - Exemplos de aplicação da expressão (3.17) na solução do problema de torção de seção retangular estreita.

A torção livre de elementos estruturais elásticos e homogêneos (torção de Saint-Venant) é regida pela equação diferencial dada por (TIMOSHENKO [1980]) :

$$\phi^{xx} + \phi^{yy} = -2G\theta \quad (3.28)$$

onde ϕ é denominada função de tensão, G é o módulo de elasticidade ao cisalhamento e θ o ângulo de giro por unidade de comprimento; na qual indica-se a dupla derivação parcial ($\partial^2 / \partial x^2$ e $\partial^2 / \partial y^2$) pelas respectivas letras x e y colocadas no expoente da função de tensão; sendo as tensões de cisalhamento desenvolvidas na seção transversal :

$$\sigma_{xz} = -\phi^y \quad (3.29)$$

$$\sigma_{yz} = \phi^x$$

No caso particular do problema de torção de seção retangular estreita, Fig. 3.8, a equação (3.28) simplifica-se para (TIMOSHENKO [1980]) :

$$\phi^{yy} = -2G\theta \quad (3.30)$$

que, derivada mais uma vez para uso posterior, resulta :

$$\phi^{yyy} = 0 \quad (3.31)$$

Segundo aquele autor, a equação (3.30) pode ser resolvida analiticamente, tomando-se uma função que tenha valores nulos no contorno, do tipo :

$$\phi = G\theta \left(\frac{c^2}{4} - y^2 \right) \quad (3.32)$$

Tal função sendo derivada uma vez e substituída nas relações (3.29), resultam :

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= 2G\theta y \\ \sigma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde nota-se a existência de tensões de cisalhamento atuando somente na direção do eixo x (vide Fig. 3.8).

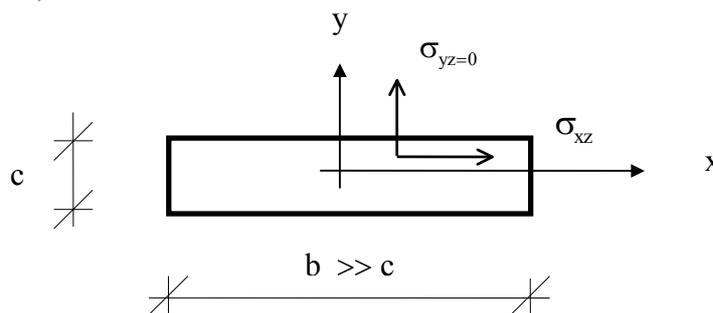


Fig. 3.8 - Tensões de cisalhamento em seção retangular estreita.

3.6.1 - Exemplo de aplicação do operador (3.17) com o emprego de um elemento finito.

Para a resolução numérica do problema de torção de seção retangular estreita empregando-se apenas um elemento finito, basta aplicar o operador (3.17) à função de torção ϕ nas extremidades desse elemento; tomando-se para tanto $h^{(e)} = c$ (nenhuma subdivisão da espessura), ou seja :

$$\left\{ \begin{matrix} \phi_0^{I(1)} \\ \phi_1^{I(1)} \end{matrix} \right\} + \frac{1}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \phi_0^{(1)} \\ \phi_1^{(1)} \end{matrix} \right\} + \frac{c}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \phi_0^{II(1)} \\ \phi_1^{II(1)} \end{matrix} \right\} + \frac{c^2}{12} \left\{ \begin{matrix} -\phi_0^{III(1)} \\ \phi_0^{III(1)} \end{matrix} \right\} + \dots = \{0\} \quad (3.34)$$

expressão na qual, considerando-se a nulidade da função ϕ nas extremidades 0 e 1; e tendo em vista as relações diferenciais (3.30) e (3.31), resulta :

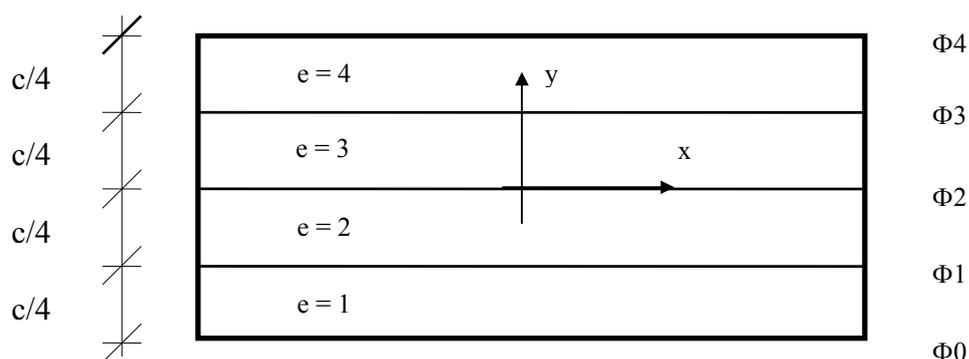
$$\left\{ \begin{matrix} \phi_0^{I(1)} \\ \phi_1^{I(1)} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} G\theta c \\ G\theta c \end{matrix} \right\} \quad (3.35)$$

onde $\phi^{I(1)}$ são as tensões cisalhantes nas extremidades do elemento, confirmando o resultado analítico expresso em (3.33) (o sinal trocado decorre da convenção adotada em (3.29)).

Cumpre-se ainda observar que a parcela do erro de aproximação inerente ao operador (3.34) desaparece (ordem de convergência 0 (c^2)); porquanto neste caso particular, a terceira derivada no ponto pivotal 0 se anula, conforme registrado na equação (3.31).

3.6.2 - Exemplo de aplicação do operador (3.17) com o emprego de quatro elementos finitos.

Resolve-se o problema da torção de seção retangular estreita empregando-se agora quatro elementos finitos (vide Fig. 3.9), onde ϕ_i são os valores da função de torção que se quer determinar, localizados nas extremidades dos elementos 1 a 4.



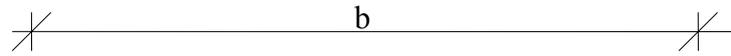


Fig. 3.9 - Malha para solução do problema de torção em seção retangular estreita.

Pois bem, escrevendo-se o operador (3.17) para um elemento genérico "e" de espessura $h^{(e)} = c/4$, ou seja :

$$\begin{Bmatrix} \phi_0^{I(e)} \\ \phi_1^{I(e)} \end{Bmatrix} + \frac{4}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_0^{(e)} \\ \phi_1^{(e)} \end{Bmatrix} + \frac{c}{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_0^{II(e)} \\ \phi_1^{II(e)} \end{Bmatrix} + \frac{c^2}{12} \begin{Bmatrix} -\phi_0^{III(e)} \\ \phi_0^{III(e)} \end{Bmatrix} + \dots = \{0\} \quad (3.36)$$

e aplicando-o em seguida aos elementos numerados de 1 a 4 da Fig. 3.9, obtem-se :

$$\begin{Bmatrix} \phi_0^{I(1)} \\ \phi_1^{I(1)} \end{Bmatrix} + \frac{4}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} + \frac{c}{4} \begin{Bmatrix} -G\theta \\ -G\theta \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_0^{I(2)} \\ \phi_1^{I(2)} \end{Bmatrix} + \frac{4}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} + \frac{c}{4} \begin{Bmatrix} -G\theta \\ -G\theta \end{Bmatrix} = \{0\}$$

(3.37)

$$\begin{Bmatrix} \phi_0^{I(3)} \\ \phi_1^{I(3)} \end{Bmatrix} + \frac{4}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} + \frac{c}{4} \begin{Bmatrix} -G\theta \\ -G\theta \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_0^{I(4)} \\ \phi_1^{I(4)} \end{Bmatrix} + \frac{4}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} + \frac{c}{4} \begin{Bmatrix} -G\theta \\ -G\theta \end{Bmatrix} = \{0\}$$

e tendo em vista as conexões dos nós, permitem a montagem da matriz de rigidez global da estrutura, que assim se escreve :

$$\left\{ \begin{array}{c} \phi_0^{I(1)} \\ \phi_1^{I(1)} + \phi_0^{I(2)} \\ \phi_1^{I(2)} + \phi_0^{I(3)} \\ \phi_1^{I(3)} + \phi_0^{I(4)} \\ \phi_1^{I(4)} \end{array} \right\} + \frac{4}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{array} \right\} + \frac{c}{4} \left\{ \begin{array}{c} -G\theta \\ -2G\theta \\ -2G\theta \\ -2G\theta \\ -G\theta \end{array} \right\} = \{0\} \quad (3.38)$$

Eliminando-se em (3.38) as linhas e colunas correspondentes à condição de contorno onde a função de torção é nula ($\phi = 0$), ou seja :

$$\left\{ \begin{array}{c} \phi_1^{I(1)} + \phi_0^{I(2)} \\ \phi_1^{I(2)} + \phi_0^{I(3)} \\ \phi_1^{I(3)} + \phi_0^{I(4)} \end{array} \right\} + \frac{4}{c} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{array} \right\} + \frac{c}{4} \left\{ \begin{array}{c} -2G\theta \\ -2G\theta \\ -2G\theta \end{array} \right\} = \{0\} \quad (3.39)$$

e tendo em vista que não estão aplicadas tensões nos nós ($k = 0$ em (3.18)); resulta :

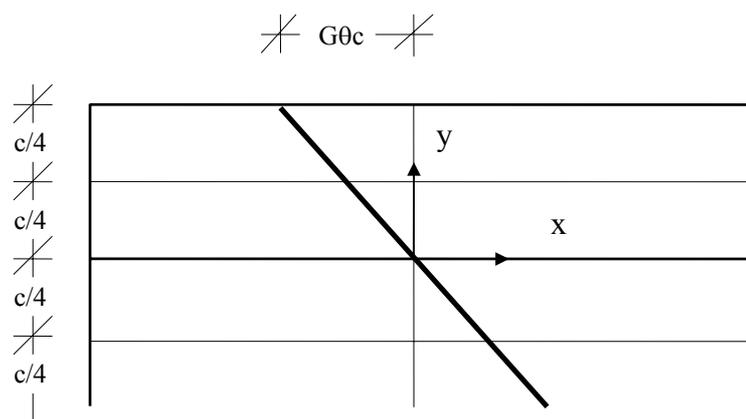
$$\left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{array} \right\} = c^2 \left\{ \begin{array}{c} 3G\theta / 16 \\ G\theta / 4 \\ 3G\theta / 16 \end{array} \right\} \quad (3.40)$$

ou seja, os valores procurados da função de tensão nos pontos 1 a 3; e que levados em (3.36), permitem que se obtenham :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \phi_0^{I(1)} \\ \phi_1^{I(1)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} G\theta c \\ -G\theta c / 2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \phi_0^{I(2)} \\ \phi_1^{I(2)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} G\theta c / 2 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \phi_0^{I(3)} \\ \phi_1^{I(3)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ G\theta c / 2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \phi_0^{I(4)} \\ \phi_1^{I(4)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -G\theta c / 2 \\ G\theta c \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.41)$$

verificando-se que as tensões de cisalhamento $\phi^{I(e)}$ nas extremidades do elemento (o sinal de σ_{xz} está trocado em decorrência da convenção adotada em (3.29)), são idênticas às deduzidas por TIMOSHENKO [1980] (vide equações 3.33), não exibindo erro de aproximação (fato já comentado no exemplo anterior), em virtude da nulidade das terceiras derivadas conforme registrado na equação (3.31).

Para visualização das tensões de cisalhamento, resumem-se na Fig. 3.10 as soluções analítica e numéricas, encerrando-se o estudo da torção de seção retangular estreita com o emprego da formulação hermitiana livre.



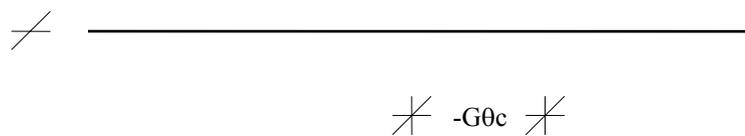


Fig. 3.10 - Diagrama de tensões de cisalhamento em seção retangular estreita.

CAPÍTULO 4

OPERADORES HERMITIANOS PARA A GERAÇÃO DE MATRIZES DE RIGIDEZ E VETORES DE AÇÕES NODAIS EQUIVALENTES EM PROBLEMAS DE FLEXÃO.

4.1 - Introdução.

Trata este capítulo da aplicação da formulação hermitiana livre aos problemas flexionais, em particular à geração da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais equivalentes do caso de flexão simples; para em seguida abordar-se o caso da flexão em presença de força normal (efeito de segunda ordem).

Nos problemas em consideração, a necessidade de maior número de graus de liberdade nos nós, decorrente de condições adicionais de continuidade, impede que seja realizado um expediente matemático mais simplificado ao estilo do capítulo 3, onde operadores idênticos estão aplicados à função e à primeira derivada, sendo obrigatório, conforme se expõe nos próximos itens, a utilização de maior variedade de operadores hermitianos.

A exemplo do capítulo anterior, apresentam-se as formulações clássicas das matrizes de rigidez dos casos mencionados com o emprego do método dos elementos finitos, para em seguida aplicar-se a técnica ora introduzida, que leva a resultados com diferentes ordens de convergência (dependendo dos operadores escolhidos).

Encerrando-se o capítulo são feitos exemplos de aplicação envolvendo estruturas simples de viga e pórtico.

4.2 - Caso simples : Geração da matriz de rigidez de flexão de vigas elásticas.

Apresenta-se para um elemento de viga a formulação da matriz de rigidez elástica (matriz de rigidez de flexão), empregando-se inicialmente o método dos elementos finitos, e em seguida a formulação hermitiana livre.

As deduções pertinentes ao método dos elementos finitos, que se seguem, são feitas de maneira resumida (conforme já exposto no capítulo 3), visando ressaltar a diferença de formulação entre o citado método e a formulação hermitiana livre, que emprega, neste caso mais simples, operadores hermitianos aplicados somente à função deslocamento v .

4.2.1 - Emprego do método dos elementos finitos na geração da matriz de rigidez de flexão de vigas elásticas.

A formulação da matriz de rigidez de flexão para a viga elástica ilustrada na Fig. 4.1 (onde os graus de liberdade considerados são os deslocamentos v e rotações φ das extremidades), é realizada com o emprego do método dos elementos finitos, adotando-se como função interpoladora dos deslocamentos no domínio entre os nós de extremidades 0 e 1 do elemento, o polinômio cúbico (PILKEY [1994]) :

$$v = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (4.1)$$

no qual α_i são os denominados parâmetros generalizados.

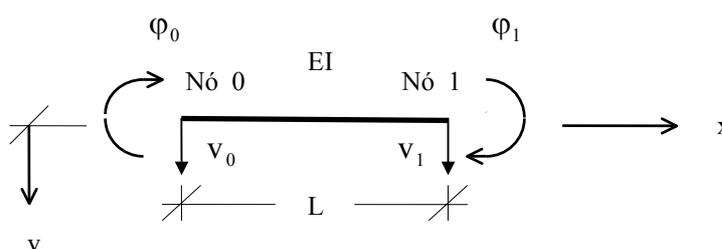


Fig 4.1 - Elemento finito de viga elástica.

Considerando-se pequenos deslocamentos (teoria linear), as rotações da elástica do elemento são obtidas pela primeira derivada de (4.1), ou seja :

$$\varphi = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 \quad (4.2)$$

preferindo-se passar para parâmetros nodais (deslocamentos verticais v_0, v_1 e rotações φ_0, φ_1 nas extremidades 0 e 1 do elemento), que têm significado físico mais compreensível; bastando verificar em (4.1) e (4.2) que :

$$\begin{aligned} v_0 &= \alpha_1 \\ \varphi_0 &= \alpha_2 \\ v_1 &= \alpha_1 + L\alpha_2 + L^2\alpha_3 + L^3\alpha_4 \\ \varphi_1 &= \alpha_2 + 2L\alpha_3 + 3L^2\alpha_4 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Resolvendo o sistema (4.3), tem-se :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= v_0 \\ \alpha_2 &= \varphi_0 \\ \alpha_3 &= -\frac{3}{L^2}v_0 - \frac{2}{L}\varphi_0 + \frac{3}{L^2}v_1 - \frac{1}{L}\varphi_1 \\ \alpha_4 &= \frac{2}{L^3}v_0 + \frac{1}{L^2}\varphi_0 - \frac{2}{L^3}v_1 + \frac{1}{L^2}\varphi_1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

parâmetros que substituídos em (4.1) levam a uma nova expressão da elástica, em notação matricial, dada por :

$$v = \{P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4\} \{v_0 \quad \varphi_0 \quad v_1 \quad \varphi_1\}^T \quad (4.5)$$

onde os P_i são clássicos polinômios interpoladores hermitianos, quais sejam :

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & P_2 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\
 P_3 &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & P_4 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

ou ainda em notação vetorial :

$$v = \{P\} \{v_0 \quad \varphi_0 \quad v_1 \quad \varphi_1\}^T \tag{4.7}$$

onde $\{P\}$ denomina-se vetor de forma, expresso em coordenadas cartesianas.

Derivando-se duas vezes o vetor de forma $\{P\}$, tem-se :

$$\{B\} = \frac{d^2 \{P\}}{dx^2} \tag{4.8}$$

ou seja :

$$\{B\} = \left\{ \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \right\} \tag{4.9}$$

sendo a matriz de rigidez do elemento de viga (COOK [1986]) :

$$[k] = \int_0^L \{B\}^T EI \{B\} dx \tag{4.10}$$

cuja integração analítica, admitindo-se o produto de inércia EI constante, leva a :

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sim.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

que é a matriz de rigidez de flexão da viga elástica, classicamente formulada pela aplicação de deslocamentos e rotações unitárias nas extremidades da barra (GERE [1981]).

4.2.2 - Emprego da formulação hermitiana livre para a geração da matriz de rigidez de flexão de vigas elásticas.

Considere-se um elemento de viga representado na Fig. 4.2, sob ação de uma carga q uniformemente distribuída na direção perpendicular ao eixo x , onde V é o esforço cortante, M é o momento fletor, sendo v a deflexão elástica. Pretendendo-se determinar a matriz de rigidez de flexão com o emprego da formulação hermitiana livre, faz-se necessário descrever o problema por meio das relações constitutivas e de equilíbrio, sabendo-se de início, que o momento fletor está relacionado à curvatura v'' através da conhecida equação momento curvatura da Resistência dos Materiais, dada por (SCHIEL [1984]) :

$$v'' = -\frac{M}{EI} \quad (4.12)$$

onde EI é o produto de inércia, no presente trabalho considerado constante; expressão que derivada uma vez, resulta :

$$v''' = -\frac{M'}{EI} \quad (4.13)$$

A geometria do elemento, conforme Fig. 4.2, permite obter-se outra relação diferencial, que assim se escreve :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dv}{dx} \quad (4.14)$$

sendo φ a rotação; ou ainda considerada a hipótese de pequenos deslocamentos :

$$\varphi = v' \quad (4.15)$$

Levando-se em conta o equilíbrio do elemento, a soma dos momentos em relação à face direita, desprezado o produto dos infinitésimos envolvidos, resulta :

$$V = M' \quad (4.16)$$

e ainda, somando-se as forças na direção v , implica :

$$V' = -q \quad (4.17)$$

Substituindo-se M' dado por (4.16) em (4.13), obtem-se :

$$v''' = -\frac{V}{EI} \quad (4.18)$$

encerrando-se a coleção de relações diferenciais de interesse do problema.

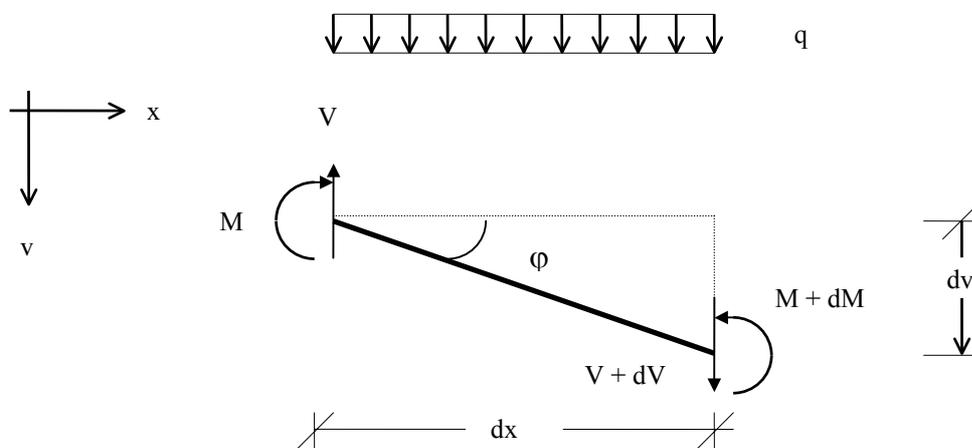


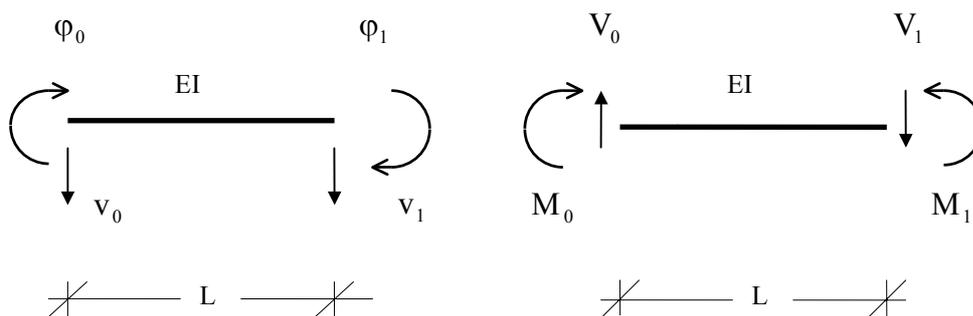
Fig. 4.2 - Configuração de equilíbrio de viga sob flexão simples.

Estabelecidas as relações constitutivas e de equilíbrio para o problema, cumpre-se assinalar que a formulação da matriz de rigidez de flexão $[k]$, vem a ser uma decorrência imediata da relação entre deslocamentos e rotações de extremidades e os esforços correspondentes (vide Fig. 4.3), que assim se expressa :

$$\begin{Bmatrix} V_0 \\ M_0 \\ V_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} - [k] \begin{Bmatrix} v_0 \\ \varphi_0 \\ v_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4.19)$$

onde os parâmetros nodais, conforme (4.15), (4.12) e (4.18), são dados por :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= v_0^I & \varphi_1 &= v_1^I \\ M_0 &= -EI v_0^{II} & M_1 &= -EI v_1^{II} \\ V_0 &= -EI v_0^{III} & V_1 &= -EI v_1^{III} \end{aligned} \quad (4.20)$$



a) Deslocamentos nodais

b) Esforços nodais

Fig. 4.3 Parâmetros nodais de elemento de viga elástica.

Pois bem, voltando-se a atenção para a escolha dos operadores hermitianos (fundamental no emprego da formulação hermitiana livre); a equação (4.19), tendo em vista (4.20), pode ser escrita :

$$[k] \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_0^I \\ v_1 \\ v_1^I \end{Bmatrix} + EI \begin{Bmatrix} v_0^{III} \\ v_0^{II} \\ v_1^{III} \\ v_1^{II} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4.21)$$

da qual se depreende que os operadores apropriados para a geração da matriz de rigidez de flexão, são os dados por :

$$\begin{aligned} a_0 v_0 + b_0 v_1 + c_0 v_0^I + d_0 v_1^I + e_0 v_0^{III} + R_0 &= 0 \\ a_1 v_0 + b_1 v_1 + c_1 v_0^I + d_1 v_1^I + e_1 v_0^{II} + R_1 &= 0 \\ a_2 v_0 + b_2 v_1 + c_2 v_0^I + d_2 v_1^I + e_2 v_1^{III} + R_2 &= 0 \\ a_3 v_0 + b_3 v_1 + c_3 v_0^I + d_3 v_1^I + e_3 v_1^{II} + R_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde os parâmetros e os restos desse conjunto são determinados com o emprego da variante de COLLATZ [1966]) mostrada no capítulo 2, resultando nos operadores (2.47), (2.48), (2.49) e (2.50).

Tais operadores aplicados à função deslocamento v , levam respectivamente a :

$$v_0 - v_1 + \frac{L}{2}(v_0^I + v_1^I) - \frac{L^3}{12}(v_0^{III}) - \frac{L^4 v_0^{IV}}{24} + \dots = 0$$

$$v_0 - v_1 + \frac{L}{3}(2v_0^I + v_1^I) + \frac{L^2}{6}(v_0^{II}) - \frac{L^4 v_0^{IV}}{72} + \dots = 0$$

(4.23)

$$v_0 - v_1 + \frac{L}{2}(v_0^I + v_1^I) - \frac{L^3}{12}(v_1^{III}) + \frac{L^4 v_0^{IV}}{24} + \dots = 0$$

$$v_0 - v_1 + \frac{L}{3}(v_0^I + 2v_1^I) - \frac{L^2}{6}(v_1^{II}) + \frac{L^4 v_0^{IV}}{72} + \dots = 0$$

e tendo em vista (4.20) :

$$v_0 - v_1 + \frac{L}{2}(\varphi_0 + \varphi_1) - \frac{L^3}{12}\left(-\frac{V_0}{EI}\right) - \frac{L^4 v_0^{IV}}{24} = 0$$

$$v_0 - v_1 + \frac{L}{3}(2\varphi_0 + \varphi_1) + \frac{L^2}{6}\left(-\frac{M_0}{EI}\right) - \frac{L^4 v_0^{IV}}{72} = 0$$

(4.24)

$$v_0 - v_1 + \frac{L}{2}(\varphi_0 + \varphi_1) - \frac{L^3}{12}\left(-\frac{V_1}{EI}\right) + \frac{L^4 v_0^{IV}}{24} = 0$$

$$v_0 - v_1 + \frac{L}{3}(\varphi_0 + 2\varphi_1) - \frac{L^2}{6}\left(-\frac{M_1}{EI}\right) + \frac{L^4 v_0^{IV}}{72} = 0$$

que encerram as relações de interesse.

As expressões (4.24) em notação matricial, ganham então a seguinte redação:

$$\{F\} + [k] \{d\} + \{R\} = \{0\} \quad (4.25)$$

onde :

$$\{F\}^T = \{V_0 \quad M_0 \quad V_1 \quad M_1\}$$

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

(4.26)

$$\{d\}^T = \{v_0 \quad \phi_0 \quad v_1 \quad \phi_1\}$$

$$\{R\}^T = \left\{ -EI \frac{L v_0^{IV}}{2} \quad EI \frac{L^2 v_0^{IV}}{12} \quad EI \frac{L v_0^{IV}}{2} \quad EI \frac{L^2 v_0^{IV}}{12} \right\}$$

sendo $[k]$ a clássica matriz de rigidez de flexão; que possui sinais trocados na segunda e terceira linhas em relação a (4.11) face à convenção usual da Resistência dos Materiais ora empregada, onde o momento e a cortante na extremidade 0 não tem a mesma orientação na extremidade 1 (vide Fig. 4.2).

Note-se ainda, que a escolha da coleção de operadores (4.23) leva à matriz de rigidez exata, pois os elementos do vetor $\{R\}^T$ representam as ações de engastamento perfeito $\left(v_0^{IV} = \frac{q}{EI} \right)$, cumprindo-se observar que a parcela correspondente à ordem de convergência desaparece, porquanto as derivadas da elástica superiores a quatro são nulas, sendo a carga q admitida constante.

No que se segue, procura-se elevar a ordem de convergência dos operadores, seguindo-se o mesmo estilo do exemplo da barra submetida a ações axiais, conforme já mostrado no capítulo 3.

4.3 - Caso com força normal : Geração da matriz de rigidez geométrica e do vetor das ações nodais equivalentes.

Considere-se o caso de flexão de viga em presença de força normal N constante, que contempla apenas a sollicitação por carga uniformemente distribuída q , conforme exhibe a Fig. 4.4.

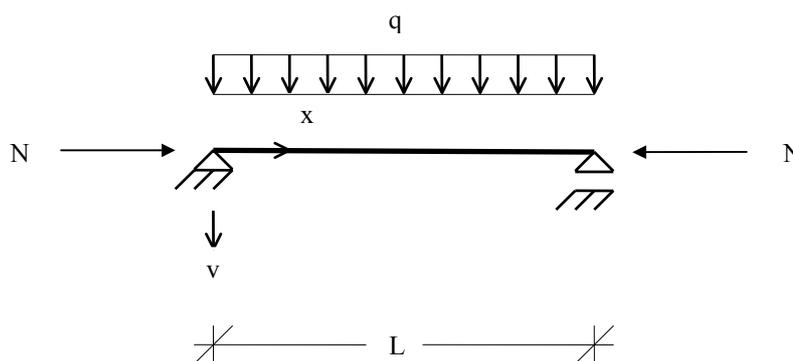


Fig. 4.4 - Flexão de viga em presença de força normal.

Esse tipo de sollicitação axial, segundo MOREIRA [1977]; COOK [1989]; PAZ [1991]; implica na alteração da matriz de rigidez de flexão $[k]$, modificando a clássica expressão que relaciona os esforços e deslocamentos nodais, para o formato dado por :

$$\{F\} + ([k] + [k_g]) \{d\} = \{0\} \quad (4.27)$$

onde $[k_g]$ denomina-se matriz de rigidez geométrica.

No que se segue, são feitas as deduções da matriz de rigidez geométrica e do vetor das ações nodais equivalentes ao carregamento externo para um elemento de viga elástica; empregado-se em primeiro lugar o método dos elementos finitos, e em seguida, a formulação hermitiana livre, cuja abordagem neste caso, faz uso de operadores aplicados aos esforços e deslocamentos nodais do elemento.

Evidenciam-se nos exemplos apresentados, o aumento da ordem de convergência das matrizes e vetores gerados, informação que não é contemplada quando da aplicação do método dos elementos finitos.

4.3.1 - Emprego do método dos elementos finitos na geração da matriz de rigidez geométrica e do vetor de ações nodais equivalentes de vigas elásticas.

As deduções pertinentes à formulação variacional da matriz de rigidez geométrica e do vetor de ações nodais equivalentes ao carregamento externo para a viga elástica, são colocadas a seguir de maneira resumida, podendo ser encontradas em COOK [1989]; que emprega para interpolação dos deslocamentos v , o mesmo polinômio dado por (4.1), sendo decorrentes as funções de forma $\{P\}$ mostradas em (4.5).

Derivando-se uma vez tais funções de forma, tem-se :

$$\{G\} = \left\{ \frac{dP_1}{dx} \quad \frac{dP_2}{dx} \quad \frac{dP_3}{dx} \quad \frac{dP_4}{dx} \right\} \quad (4.28)$$

ou seja :

$$\{G\} = \left\{ \left(-\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \right) \left(1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right) \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \right) \left(-\frac{2x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \right) \right\} \quad (4.29)$$

sendo a matriz de rigidez geométrica do elemento de viga (COOK [1983]) :

$$[k_g] = \int_0^L \{G\}^T N \{G\} dx \quad (4.30)$$

expressão que integrada analiticamente, sendo a força normal N constante ao longo do elemento, resulta :

$$[k_g] = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -3L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

O vetor das ações nodais equivalentes ao carregamento externo vem a ser (COOK [1986]) :

$$\{r_e\} = \int_0^L \{P\}^T q \, dx \quad (4.32)$$

expressão na qual substituída a função de forma, cujos elementos são dados por (4.6) e integrada analiticamente, resulta, tomando-se q constante :

$$\{r_e\} = \left\{ \frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \quad \frac{qL}{2} \quad -\frac{qL^2}{12} \right\}^T \quad (4.33)$$

ou sejam, as conhecidas reações de engastamento perfeito do elemento considerado.

4.3.2 - Emprego da formulação hermitiana livre para a geração da matriz de rigidez de flexão, geométrica e do vetor de ações nodais equivalentes de vigas elásticas.

Considere-se o elemento de viga da Fig. 4.5, sob ação de força N concentrada e constante e carga q uniformemente distribuída, no qual manifesta-se o efeito de segunda ordem.

Para a geração de matrizes de rigidez com o emprego da formulação hermitiana livre, faz-se necessária a descrição do problema por meio de relações

diferenciais constitutivas e de equilíbrio, partindo-se, por exemplo, da derivada da relação geométrica (4.15), que resulta :

$$\varphi^I = v^{II} \quad (4.34)$$

e tendo em vista (4.12), assim se escreve :

$$\varphi^I = -\frac{M}{EI} \quad (4.35)$$

Em continuidade, somando-se os momentos em relação à extremidade direita do elemento da Fig. 4.5, tem-se :

$$M^I = V + N v^I \quad (4.36)$$

ou à vista de (4.15), pode ser redigida :

$$M^I = V + N \varphi \quad (4.37)$$

equação que substitui (4.16), notando-se que continuam válidas as demais expressões empregadas no caso de flexão simples.

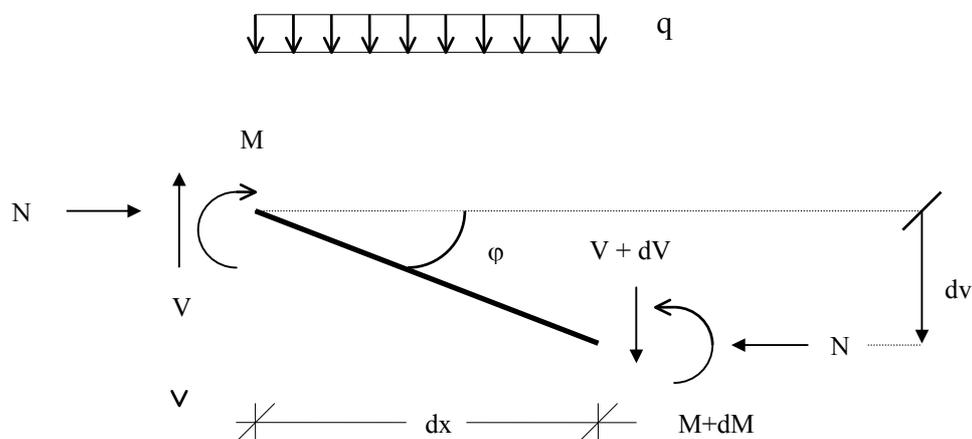


Fig. 4.5 - Flexão de elemento de viga com efeito de segunda ordem.

Derivando três vezes as expressões (4.15), (4.12) e duas vezes a expressão (4.17); tem-se, respectivamente :

$$\begin{aligned}\varphi^{\text{III}} &= v^{\text{IV}} \\ M^{\text{III}} &= -EI v^{\text{V}} \\ V^{\text{III}} &= 0\end{aligned}\tag{4.38}$$

encerrando-se a procura das relações diferenciais de interesse.

Tendo em vista (4.35), (4.37), (4.17), (4.15) e (4.12); escreve-se ainda o conjunto de derivadas nos pontos pivotais dadas por :

$$\begin{aligned}\varphi_0^{\text{I}} &= -\frac{M_0}{EI} & \varphi_1^{\text{I}} &= -\frac{M_1}{EI} \\ M_0^{\text{I}} &= V_0 + N\varphi_0 & M_1^{\text{I}} &= V_1 + N\varphi_1 \\ V_0^{\text{I}} &= -q & V_1^{\text{I}} &= -q \\ v_0^{\text{I}} &= \varphi_0 & v_1^{\text{I}} &= \varphi_1 \\ v_0^{\text{II}} &= -\frac{M_0}{EI} & v_1^{\text{II}} &= -\frac{M_1}{EI}\end{aligned}\tag{4.39}$$

convenientemente colocadas em função dos esforços internos, dos deslocamentos e da ação, que serão utilizadas para a formulação das matrizes de rigidez e do vetor de cargas nodais equivalentes.

Voltando-se agora a atenção para os operadores necessários ao emprego da formulação hermitiana livre, exhibe-se no Quadro 4.1 um resumo das relações diferenciais que envolvem a função deslocamento e os demais parâmetros do casos de flexão simples ou em segunda ordem, cujo objetivo é o de melhor orientar a escolha dos referidos operadores.

v	é a elástica.
v^I	é a rotação φ , de acordo com (4.15).
v^{II}	relaciona-se com o momento fletor M , conforme (4.12).
v^{III}	relaciona-se com o esforço cortante V , dado por (4.18).

Quadro 4.1 - Relações entre a elástica v e suas derivadas

Pois bem, tendo em vista o item 4.2.2, onde a aplicação de operadores somente aos deslocamentos nodais v possibilitou-se a geração da matriz de rigidez, seria elegante do ponto de vista matemático seguir-se o mesmo procedimento, aplicando-se operadores à função v e suas derivadas v^I , v^{II} e v^{III} , constantes do Quadro 4.1 (os problemas axiais do capítulo 3 estão resolvidos nesse formato). Verifica-se porém que esse procedimento não conduz à explicitação esforços e deslocamentos ao estilo da equação (4.27), ou seja, não possibilita a geração das matrizes almejadas.

Assim sendo, a solução do problema da flexão em presença de segunda ordem, pode ser realizada através de aplicações de operadores hermitianos ao conjunto das funções v , φ , M e V do Quadro 4.1; operadores escolhidos apropriadamente de modo a obter-se matrizes de rigidez simétricas, conforme será ilustrado nas duas formulações que se seguem.

4.3.2.1 - Primeira formulação da matriz de rigidez geométrica.

A formulação da matriz de rigidez geométrica, como se sabe, vem a ser uma decorrência da relação entre deslocamentos e rotações nas extremidades de um elemento e os esforços correspondentes. Para estabelecer-se essa relação com o emprego da formulação hermitiana livre, aplicam-se operadores trapezoidais (2.46) à rotação, ao momento fletor, à força cortante e o operador (2.51) à deformada, ou seja :

$$\begin{aligned}
-\varphi_0 + \varphi_1 - \frac{L}{2}\varphi_0^I - \frac{L}{2}\varphi_1^I + \frac{L^3\varphi_0^{III}}{12} + \dots &= 0 \\
-M_0 + M_1 - \frac{L}{2}M_0^I - \frac{L}{2}M_1^I + \frac{L^3M_0^{III}}{12} + \dots &= 0 \\
-V_0 + V_1 - \frac{L}{2}V_0^I - \frac{L}{2}V_1^I + \frac{L^3V_0^{III}}{12} + \dots &= 0 \\
-v_0 + v_1 - \frac{L}{2}v_0^I - \frac{L}{2}v_1^I - \frac{L^2}{12}v_0^{II} + \frac{L^2}{12}v_1^{II} - \frac{L^5v_0^V}{720} + \dots &= 0
\end{aligned} \tag{4.40}$$

tratando-se da menor ordem de convergência possível (a opção de aplicar-se o operador trapezoidal também à deformada, conduz à matriz de flexibilidade nula, e impede a geração da matriz de rigidez, o que pode ser visto mais adiante).

Substituindo-se (4.39) em (4.40), obtém-se :

$$\begin{aligned}
-\varphi_0 + \varphi_1 - \frac{L}{2}\left(-\frac{M_0}{EI}\right) - \frac{L}{2}\left(-\frac{M_1}{EI}\right) + \frac{L^3\varphi_0^{III}}{12} &= 0 \\
-M_0 + M_1 - \frac{L}{2}(V_0 + N\varphi_0) - \frac{L}{2}(V_1 + N\varphi_1) + \frac{L^3M_0^{III}}{12} &= 0 \\
-V_0 + V_1 - \frac{L}{2}(-q) - \frac{L}{2}(-q) + \frac{L^3V_0^{III}}{12} &= 0 \\
-v_0 + v_1 - \frac{L\varphi_0}{2} - \frac{L\varphi_1}{2} + \frac{L^2}{12}\left(\frac{M_0}{EI}\right) - \frac{L^2}{12}\left(\frac{M_1}{EI}\right) - \frac{L^5v_0^V}{720} &= 0
\end{aligned} \tag{4.41}$$

conjunto que reunido matricialmente, ganha a seguinte redação :

$$[\mathbf{k}^*]\{\mathbf{d}\} + [\delta^*]\{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{r}_e^*\} + \{\mathbf{R}_0^*\} = \{\mathbf{0}\} \quad (4.42)$$

onde :

$$\{\mathbf{d}\}^T = \{v_0 \quad \varphi_0 \quad v_1 \quad \varphi_1\}$$

$$\{\mathbf{F}\}^T = \{V_0 \quad M_0 \quad V_1 \quad M_1\}$$

$$\{\mathbf{r}_e^*\}^T = \{0 \quad 0 \quad qL \quad 0\}$$

$$[\mathbf{k}^*] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{NL}{2} & 0 & -\frac{NL}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{L}{2} & 1 & -\frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

(4.43)

$$[\delta^*] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{L}{2EI} & 0 & \frac{L}{2EI} \\ -\frac{L}{2} & -1 & -\frac{L}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{12EI} & 0 & -\frac{L^2}{12EI} \end{bmatrix}$$

$$\{\mathbf{R}_0^*\}^T = \left\{ \frac{L^3 \varphi_0'''}{12} \quad \frac{L^3 M_0'''}{12} \quad \frac{L^3 V_0'''}{12} \quad -\frac{L^5 v_0'''}{720} \right\}$$

ou ainda, preferindo-se expressar o resto como função da deformada, tem-se, à vista de (4.38) :

$$\{\mathbf{R}_0^*\}^T = \left\{ \frac{L^3 v_0^{IV}}{12} \quad -\frac{L^3 EI v_0^V}{12} \quad 0 \quad -\frac{L^5 v_0^V}{720} \right\} \quad (4.44)$$

Procedendo-se a inversão da matriz de flexibilidade $[\delta^*]$, e manobrando-se algebricamente o expresso em (4.42) com (4.44), tem-se finalmente :

$$\{\mathbf{F}\} + [\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\bar{g}}] \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{r}_{\bar{e}}\} + \{\mathbf{R}_0\} = 0 \quad (4.45)$$

onde :

$$\{\mathbf{r}_{\bar{e}}\}^T = \left\{ -\frac{qL}{2} \quad 0 \quad \frac{qL}{2} \quad 0 \right\}$$

$$\{\mathbf{R}_0\}^T = \left\{ \frac{L^2 EI}{10} v_0^V \quad \frac{L^2 EI}{12} v_0^{IV} \quad \frac{L^2 EI}{10} v_0^V \quad \frac{L^2 EI}{12} v_0^{IV} \right\}$$

$$[\mathbf{k}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$[\mathbf{k}_{\bar{g}}] = \mathbf{N} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo $[\mathbf{k}]$ a matriz de rigidez de flexão (idêntica à obtida pelo método dos elementos finitos, vide (4.11)); ressaltando-se que a matriz de rigidez geométrica $[\mathbf{k}_{\bar{g}}]$ (neste caso não simétrica !) e o vetor das ações nodais equivalentes $\{\mathbf{r}_{\bar{e}}\}$, são aproximações

de ordem de convergência 0 (L^2) em relação aos gerados pelo método dos elementos finitos em (4.31) e (4.33) respectivamente, conforme (4.46) está a indicar.

4.3.2.2 - Segunda formulação da matriz de rigidez geométrica.

A escolha dos operadores hermitianos (4.40), conforme mostrado no ítem 4.3.2.1, leva a uma aproximação da matriz de rigidez geométrica (sem simetria) com ordem de convergência 0 (L^2), solução que pode ser otimizada através da aplicação de novos operadores (tal formulação foi objeto de consideração em trabalho do autor em co-autoria com seu orientador, divulgado nos anais da XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural em 1995, conforme bibliografia anexa).

No que segue, providencia-se o aumento dessa ordem de convergência, sendo indispensável para tal, obter-se outras equações diferenciais (de maior ordem), que vão complementar as já empregadas nos tópicos anteriores; iniciando-se, por exemplo, pela derivada da equação (4.35), que resulta :

$$\varphi'' = -\frac{M^I}{EI} \quad (4.47)$$

ou, tendo-se em vista (4.37), pode ser redigida :

$$\varphi'' = -\frac{1}{EI}(V + N \varphi) \quad (4.48)$$

Derivando-se uma vez (4.37), tem-se :

$$M'' = V^I + N \varphi^I \quad (4.49)$$

na qual, substituídas as relações (4.17) e (4.35); resulta:

$$M'' = -q - N \frac{M}{EI} \quad (4.50)$$

que derivada outra vez, leva a :

$$M^{III} = -N \frac{M^I}{EI} \quad (4.51)$$

e tendo em vista (4.37), assim se escreve :

$$M^{III} = -\frac{1}{EI} (NV + N^2\varphi) \quad (4.52)$$

Derivando-se (4.12) conforme já expresso em (4.13), ou seja :

$$v^{III} = -\frac{M^I}{EI} \quad (4.53)$$

com a substituição de (4.37), tem-se :

$$v^{III} = -\frac{1}{EI} (V + N \varphi) \quad (4.54)$$

Expressões de derivadas de maior ordem das funções φ , M e V , escritas em termos da função deslocamento (para emprego na avaliação do erro de aproximação dos operadores), são obtidas em decorrência de (4.38), ou seja :

$$\begin{aligned} \varphi^V &= v^{VI} \\ M^{VII} &= -EI v^{IX} \\ V^{III} &= V^{III} = 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

encerrando-se a procura das relações diferenciais de interesse.

A escolha de operadores mais precisos, feita no sentido de dotar as matrizes de rigidez de um menor erro local, obriga que se tenha um maior número de parâmetros pivotais, calculados através de (4.48), (4.50), (4.52), (4.54), e dados por :

$$\begin{aligned}
\varphi_0^{\text{II}} &= -\frac{1}{EI}(V_0 + N\varphi_0) & \varphi_1^{\text{II}} &= -\frac{1}{EI}(V_1 + N\varphi_1) \\
M_0^{\text{II}} &= -q - \frac{NM_0}{EI} & M_1^{\text{II}} &= -q - \frac{NM_1}{EI} \\
M_0^{\text{III}} &= -\frac{1}{EI}(NV_0 + N^2\varphi_0) & M_1^{\text{III}} &= -\frac{1}{EI}(PV_1 + N^2\varphi_1) \\
v_0^{\text{III}} &= -\frac{1}{EI}(V_0 + N\varphi_0) & v_1^{\text{III}} &= -\frac{1}{EI}(V_1 + N\varphi_1)
\end{aligned} \tag{4.56}$$

que complementam o conjunto (4.39).

Para se estabelecer as relações entre deslocamentos, rotações e os esforços correspondentes, com o emprego da formulação hermitiana livre, aplica-se o operador (2.51) à rotação, (2.52) ao momento fletor, novamente (2.46) à força cortante e (2.52) à deformada, ou seja :

$$\begin{aligned}
-\varphi_0 + \varphi_1 - \frac{L}{2}\varphi_0^{\text{I}} - \frac{L}{2}\varphi_1^{\text{I}} - \frac{L^2}{12}\varphi_0^{\text{II}} + \frac{L^2}{12}\varphi_1^{\text{II}} - \frac{L^5\varphi_0^{\text{V}}}{720} + \dots = 0 \\
-M_0 + M_1 - \frac{L}{2}M_0^{\text{I}} - \frac{L}{2}M_1^{\text{I}} - \frac{L^2}{10}M_0^{\text{II}} + \frac{L^2}{10}M_1^{\text{II}} + \\
-\frac{L^3}{120}M_0^{\text{III}} - \frac{L^3}{120}M_1^{\text{III}} + \frac{L^7M_0^{\text{VII}}}{100800} + \dots = 0 \\
-V_0 + V_1 - \frac{L}{2}V_0^{\text{I}} - \frac{L}{2}V_1^{\text{I}} + \frac{L^3V_0^{\text{III}}}{12} + \dots = 0 \\
-v_0 + v_1 - \frac{L}{2}v_0^{\text{I}} - \frac{L}{2}v_1^{\text{I}} - \frac{L^2}{10}v_0^{\text{II}} + \frac{L^2}{10}v_1^{\text{II}} - \frac{L^3}{120}v_0^{\text{III}} - \frac{L^3}{120}v_1^{\text{III}} + \\
+\frac{L^7v_0^{\text{VII}}}{100800} + \dots = 0
\end{aligned} \tag{4.57}$$

tratando-se, conforme já sinalizado, de maior ordem de convergência em relação aos operadores (4.40).

Substituindo-se (4.39) e (4.56) em (4.57), obtém-se :

$$\begin{aligned}
 & -\varphi_0 + \varphi_1 - \frac{L}{2} \left(-\frac{M_0}{EI} \right) - \frac{L}{2} \left(-\frac{M_1}{EI} \right) + \frac{L^2}{12EI} (V_0 + N\varphi_0) + \\
 & -\frac{L^2}{12EI} (V_1 + N\varphi_1) - \frac{L^5 \varphi_0^V}{720} = 0 \\
 & -M_0 + M_1 - \frac{L}{2} (V_0 + N\varphi_0) - \frac{L}{2} (V_1 + N\varphi_1) - \frac{L^2}{10} \left(-q - \frac{NM_0}{EI} \right) + \\
 & + \frac{L^2}{10} \left(-q - \frac{NM_1}{EI} \right) - \frac{L^3}{120} \left[-\frac{1}{EI} (NV_0 + N^2\varphi_0) \right] + \\
 & -\frac{L^3}{120} \left[-\frac{1}{EI} (NV_1 + N^2\varphi_1) \right] + \frac{L^7 M_0^{VII}}{100800} = 0 \\
 & -V_0 + V_1 - \frac{L}{2} (-q) - \frac{L}{2} (-q) + \frac{L^3 V_0^{III}}{12} = 0 \\
 & -v_0 + v_1 - \frac{L\varphi_0}{2} - \frac{L\varphi_1}{2} - \frac{L^2}{10} \left(-\frac{M_0}{EI} \right) + \frac{L^2}{10} \left(-\frac{M_1}{EI} \right) + \\
 & -\frac{L^3}{120} \left[-\frac{1}{EI} (V_0 + N\varphi_0) \right] - \frac{L^3}{120} \left[-\frac{1}{EI} (V_1 + N\varphi_1) \right] + \frac{L^7 v_0^{VII}}{100800} = 0
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

conjunto que reunido matricialmente, ganha redação similar à (4.42), ou seja :

$$[k^{**}] \{d\} + [\delta^{**}] \{F\} + \{r_e^*\} + \{R_0^{**}\} = \{0\} \tag{4.59}$$

onde :

$$\begin{aligned}
 \{d\}^T &= \{v_0 \quad \varphi_0 \quad v_1 \quad \varphi_1\} \\
 \{F\}^T &= \{V_0 \quad M_0 \quad V_1 \quad M_1\} \\
 \{r_e^*\}^T &= \{0 \quad 0 \quad qL \quad 0\}
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

são os mesmos vetores de (4.43), seguidos dos outros termos matriciais que se alteram para :

$$[k^{**}] = \begin{bmatrix} 0 & \left(-1 + \frac{NL^2}{12EI}\right) & 0 & \left(1 - \frac{NL^2}{12EI}\right) \\ 0 & \left(-\frac{NL}{2} + \frac{N^2L^3}{120EI}\right) & 0 & \left(-\frac{NL}{2} + \frac{N^2L^3}{120EI}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \left(-\frac{L}{2} + \frac{NL^3}{120EI}\right) & 1 & \left(-\frac{L}{2} + \frac{NL^3}{120EI}\right) \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$[\delta^{**}] = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{2EI} & -\frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{2EI} \\ \left(-\frac{L}{2} + \frac{NL^3}{120EI}\right) & \left(-1 + \frac{NL^2}{10EI}\right) & \left(-\frac{L}{2} + \frac{NL^3}{120EI}\right) & \left(1 - \frac{NL^2}{10EI}\right) \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{L^3}{120EI} & \frac{L^2}{10EI} & \frac{L^3}{120EI} & -\frac{L^2}{10EI} \end{bmatrix}$$

$$\{R_0^{**}\}^T = \left\{ -\frac{L^5 \varphi_0^V}{720} \quad \frac{L^7 M_0^{VII}}{100800} \quad \frac{L^3 V_0^{III}}{12} \quad \frac{L^7 v_0^{VII}}{100800} \right\}$$

ou, preferindo-se expressar o resto como função da deformada, resulta, à vista de (4.55) :

$$\{R_0^{**}\}^T = \left\{ -\frac{L^5 v_0^{VI}}{720} \quad -\frac{L^7 EI v_0^{IX}}{100800} \quad 0 \quad -\frac{L^7 v_0^{VII}}{100800} \right\} \quad (4.62)$$

Procedendo-se a inversão da matriz de flexibilidade $[\delta^{**}]$, e manobrando-se algebricamente o expresso em (4.59) com o erro dado por (4.62), resulta, finalmente :

$$\{F\} + [k - k_g] \{d\} + \{r_e\} + \{R_0\} = 0 \quad (4.63)$$

onde :

$$\{r_e\}^T = \left\{ -\frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \quad \frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \right\}$$

$$\{R_0\}^T = \left\{ -\frac{L^4 EI}{8400} v_0^{VII} \quad -\frac{L^4 EI}{720} v_0^{VI} \quad -\frac{L^4 EI}{8400} v_0^{VII} \quad -\frac{L^4 EI}{720} v_0^{VI} \right\}$$

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$$[k_g] = N \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{2L}{15} & \frac{1}{10} & \frac{L}{30} \\ \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix}$$

sendo $\{r_e\}$ o vetor de ações nodais equivalentes ao carregamento externo; $[k]$ a matriz de rigidez clássica de flexão e $[k_g]$ a matriz de rigidez geométrica, com a simetria que se queria obter.

Cumpre-se notar que os resultados expressos em (4.64) são aproximações de ordem de convergência $O(L^4)$, idênticos aos obtidos com o emprego do método dos elementos finitos (vide (4.11), (4.31) e (4.33), respectivamente), observando-se que a assimetria verificada nos sinais vem a ser mero resultado da convenção adotada na formulação hermitiana livre (o momento e o esforço cortante não tem a mesma orientação nas extremidades), bastando para tanto, trocar o sinal das linhas centrais em ambas matrizes.

4.4 - Exemplos de aplicação.

4.4.1 - Primeiro exemplo : Carga crítica em viga sob ação axial N constante.

Seja calcular a carga crítica para a viga mostrada na Fig. 4.6, empregando-se as matrizes de rigidez obtidas via formulação hermitiana livre.

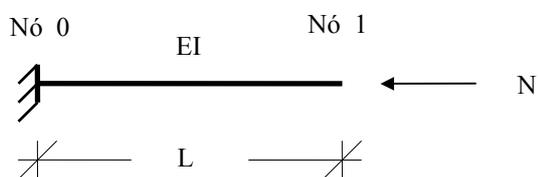


Fig. 4.6 - Viga submetida a carga axial N constante.

A resposta deste problema (carga crítica de Euler), segundo TIMOSHENKO [1961] é dada por :

$$N_{\text{CRIT.}} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (4.65)$$

podendo também ser determinada, sabendo-se que N é crítica quando a matriz de rigidez se torna singular, o que leva os deslocamentos a crescer indefinidamente. (DOMICIO[1977]).

Assim sendo, a carga crítica é obtida anulando-se o determinante da matriz de rigidez de viga, eliminando-se de princípio as linhas e colunas correspondentes aos deslocamentos impedidos, providência que realizada para a viga constituída de apenas um elemento leva a :

$$\text{Det} \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.66)$$

onde k_{ij} são dados por (4.46) e (4.64), com ordem de convergência $0(L^2)$ e $0(L^4)$, respectivamente.

Utilizando-se o resultado da primeira formulação da matriz de rigidez geométrica, ou seja (4.46), obtem-se à vista de (4.66) :

$$\text{Det} \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L^3} & \left(\frac{6EI}{L^2} + \frac{N_{\text{CRIT.}}}{2} \right) \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.67)$$

cuja solução é dada por :

$$N_{\text{CRIT.}} = \frac{4EI}{L^2} \quad (4.68)$$

apresentando uma diferença de 62,14 % em relação a (4.65), solução que pode ser refinada com o emprego de malha constituída por maior número de elementos finitos, eis que possui pequena ordem de convergência, ou seja $0(L^2)$, conforme (4.46) está a indicar.

Empregando-se o resultado da segunda formulação da matriz de rigidez geométrica, ou seja (4.64), obtem-se à vista de (4.66) :

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \left(-\frac{12EI}{L^3} + \frac{6N_{\text{CRIT.}}}{5L} \right) & \left(\frac{6EI}{L^2} - \frac{N_{\text{CRIT.}}}{10} \right) \\ \left(-\frac{6EI}{L^2} + \frac{N_{\text{CRIT.}}}{10} \right) & \left(\frac{4EI}{L} - \frac{2LN_{\text{CRIT.}}}{15} \right) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.69)$$

de onde vem :

$$N_{\text{CRIT.}} = 2,486 \frac{EI}{L^2} \quad (4.70)$$

com diferença de 0.77 % em comparação ao obtido por TIMOSHENKO [1961], conforme mostrado em (4.65), lembrando tratar-se de matriz de rigidez com ordem de convergência $O(L^4)$.

Subdividindo-se a viga da Fig. 4.6 em dois elementos, empregando-se a matriz de rigidez da segunda formulação livre, ou seja (4.64), obtem-se :

$$N_{\text{CRIT.}} = 2,469 \frac{EI}{L^2} \quad (4.71)$$

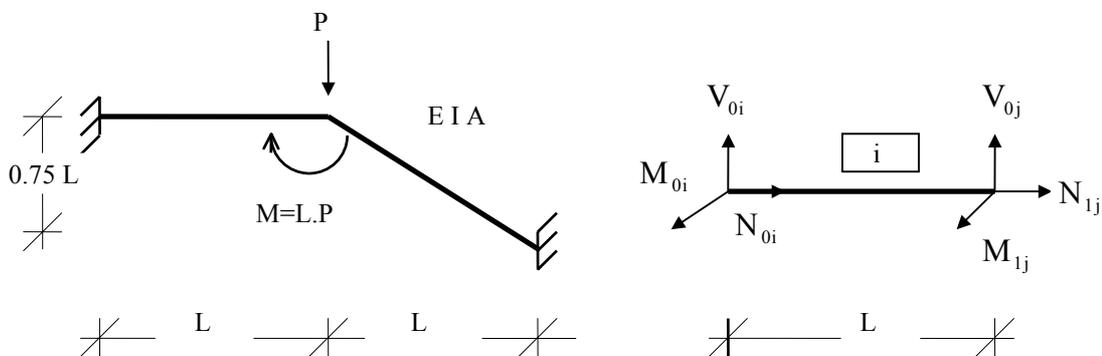
com diferença de 0.08 %, praticamente desprezível quando comparada à solução mostrada em (4.65).

Ressalte-se neste exemplo que os vetores de erros dados em (4.46) e (4.64) tendem ao infinito, porquanto seus elementos, que são constituídos de derivadas superiores da função deslocamento, acompanham a evolução desses mencionados deslocamentos, que crescem indefinidamente pela imposição da matriz de rigidez singular, conforme realizado em (4.67) e (4.69).

4.4.2 - Segundo exemplo : Análise de pórtico plano sob efeito de segunda ordem.

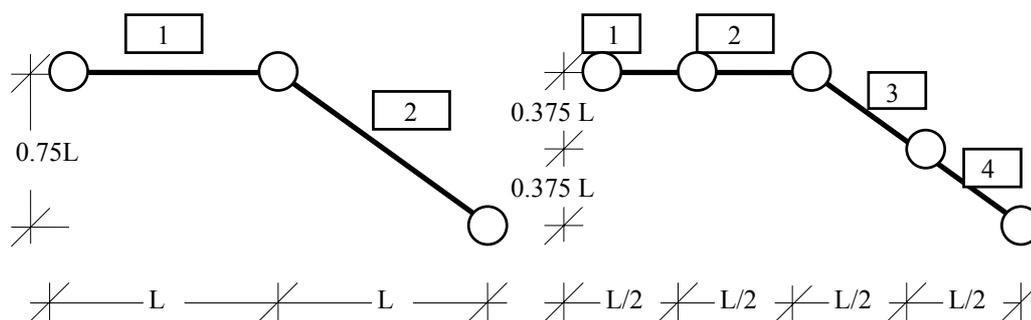
Seja analisar o pórtico da Fig. 4.7 resolvido em GERE [1981] em teoria de primeira ordem; considerando-se o efeito de segunda ordem e verificando-

se o comportamento do erro de aproximação, quando a estrutura estiver subdividida em dois, quatro e oito elementos.



a) Ações no pórtico.

b) Coordenadas locais do elemento.



c) Numeração dos nós e barras para dois, quatro e oito elementos.

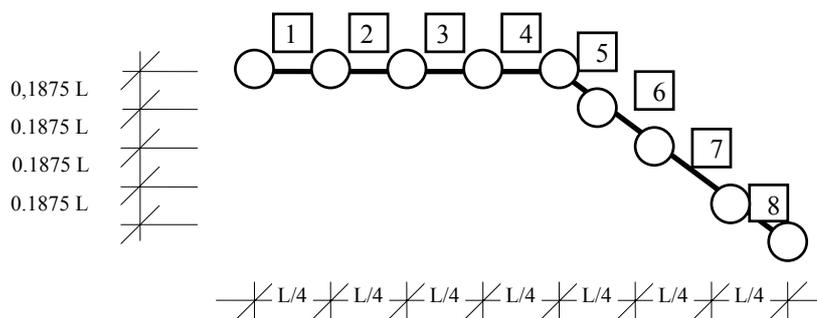


Fig. 4.7 - Pórtico plano sob efeito de segunda ordem.

A solução do problema é iterativa, devendo seguir-se os seguintes passos :

a) Resolução da estrutura sem considerar o efeito de segunda ordem, obtendo-se para as barras "i" os esforços de compressão N_{0i} nos nós iniciais, conforme coordenadas locais dos elemento da Fig. 4.7.b;

b) Substituição dos valores de N_{0i} nas matrizes de rigidez dos elementos conforme expressão (4.64) que leva em conta o efeito de segunda ordem, seguindo-se de nova resolução da estrutura, obtendo-se novos esforços normais;

c) Substituição dos novos esforços normais em (4.64), repetindo-se este último passo até que haja convergência dos valores, caso exista estabilidade.

Empregando-se a rotina supra descrita para a subdivisão da estrutura em dois elementos, adotando-se os valores numéricos de $E = 10000 \text{ KN/cm}^2$, $L = 100 \text{ cm}$, $I = 1000 \text{ cm}^4$, $P = 10 \text{ KN}$ e $A = 10 \text{ cm}^2$ (seção retangular), obtêm-se os resultados conforme Tabela 4.1, notando-se que foram necessárias apenas duas iterações, tratando-se portanto, de problema estável.

Tabela 4.1 - Esforços normais nas barras do pórtico.

Passo	N_{01} (KN)	N_{02} (KN)	Observações
a	6,344	13,860	Sem efeito de segunda ordem
b	6,351	13,868	Com efeito de segunda ordem - 1a. iteração
c	6,351	13,868	Com efeito de segunda ordem - 2a. iteração

Na Tabela 4.2, encontram-se resumidos os esforços e deslocamentos finais resultantes nos nós da estrutura (teoria de segunda ordem).

Tabela 4.2 - Esforços solicitantes e deslocamento nodais.

Nó	M (KN.cm)	N (KN)	V (KN)	Desloc. x (cm)	Desloc. y (cm)
1	80,122	6,351	4,645	0	0
2	384,202	6,351	4,645	0	0,0373624
3	372,845	13,868	7,905	0	0

O vetor do resto para um elemento genérico do pórtico, pode ser obtido expandindo-se o vetor dos erros da viga dado por (4.64), considerando-se a nulidade das parcelas correspondentes à força normal conforme mostrado em (3.23) e (3.25), ou seja :

$$\{R_0\}^T = \left\{ 0 \quad -\frac{L^4 EI}{8400} v_0^{VII} \quad -\frac{L^4 EI}{720} v_0^{VI} \quad 0 \quad -\frac{L^4 EI}{8400} v_0^{VII} \quad -\frac{L^4 EI}{720} v_0^{VI} \right\} \quad (4.72)$$

onde os elementos desse vetor estão colocados em função da deformada v , sendo referidos à extremidade local 0 do elemento (nó inicial).

Pois bem, a soma dos vetores do erro dos elementos, tendo em vista as conexões dos nós, permite a montagem do vetor de erro global da estrutura, sendo para o caso de subdivisão em duas barras, onde a primeira delas é horizontal e a outra inclinada (vide Fig. 4.7 c), expresso por :

$$\{R_e\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{L_1^4 EI}{8400} v_1^{VII} \\ -\frac{L_1^4 EI}{720} v_1^{VI} \\ \left(\frac{L_2^4 EI}{14000} v_2^{VII} \right) \\ \left(-\frac{L_1^4 EI}{8400} v_1^{VII} - \frac{L_2^4 EI}{10500} v_2^{VII} \right) \\ \left(-\frac{L_1^4 EI}{720} v_1^{VI} - \frac{L_2^4 EI}{720} v_2^{VI} \right) \\ \frac{L_2^4 EI}{14000} v_2^{VII} \\ -\frac{L_2^4 EI}{10500} v_2^{VII} \\ -\frac{L_2^4 EI}{720} v_2^{VI} \end{Bmatrix} \quad (4.73)$$

onde os elementos colocados entre parêntesis, correspondem ao erro referente às coordenadas globais do nó 2 (subdivisão em dois elementos da Fig. 4.7.c).

Substituindo-se em (4.73) os valores numéricos dos comprimentos das barras, obtêm-se para tal estrutura constituída de dois elementos finitos, os elementos do vetor de erro correspondentes ao nó 2 (expressões entre parêntesis) mostrados na Tabela 4.3, onde estão contidas as informações dos nós iniciais das barras 1 e 2, conforme (4.72) está a indicar.

Tabela 4.3 - Erros correspondentes ao nó 2.

$17438 EI v_2^{VII}$
$-11904 EI v_1^{VII} - 23251 EI v_2^{VII}$
$-138888 EI v_1^{VI} - 339084 EI v_2^{VI}$

Subdividindo-se a estrutura em quatro elementos finitos, conforme ilustra a Fig. 4.7 c, obtêm-se para o nó 3, os elementos do vetor de erros mostrados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 - Erros correspondentes ao nó 3.

$1089 EI v_3^{VII}$
$-7440 EI v_2^{VII} - 1453 EI v_3^{VII}$
$-8680 EI v_2^{VI} - 21192 EI v_3^{VI}$

Finalmente subdividindo-se a estrutura em oito elementos finitos, obtêm-se os elementos do vetor de erros para o nó 5, conforme mostra a Tabela 4.5.

Tabela 4.5 - Erros correspondentes ao nó 5.

$68 EI v_5^{VII}$
$-46 EI v_4^{VII} - 90 EI v_5^{VII}$
$-542 EI v_4^{VI} - 1324 EI v_5^{VI}$

Conforme se verifica nas Tabelas 4.3 a 4.5, os valores dos erros correspondentes aos nós 2, 3 e 5 comuns para as três subdivisões, tenderão a zero se forem empregadas outras malhas com maior número de elementos.

Ressalte-se ainda no exemplo que ora se encerra, o fato de não haver alastramento do erro local, eis que a sua interferência resume-se ao nó inicial de cada elemento, o que impede a propagação para o restante da estrutura.

CAPÍTULO 5

OPERADORES HERMITIANOS PARA A GERAÇÃO DE MATRIZES DE RIGIDEZ E VETORES DE AÇÕES NODAIS EQUIVALENTES EM OUTROS CASOS DE FLEXÃO.

5.1 - Introdução.

Este capítulo é dedicado ao estudo de dois outros casos de flexão, iniciando-se pelo elemento de viga de Timoshenko, em complementação ao capítulo 4, onde as aplicações estão baseadas na teoria de Euler-Bernoulli; para em seguida tratar-se do estudo da viga sobre base elástica, mediante modelo bi-paramétrico.

Na primeira parte, a atenção é voltada aos efeitos da deformação causada pelo esforço cortante, pois é sabido que a solução do problema da viga de Timoshenko, por intermédio do método dos elementos finitos encontrada em OÑATE [1993]; REDDY [1993]; e outros autores; pode apresentar o denominado "bloqueio da solução" (shear locking), fato possível de ser visualizado com bastante clareza quando da abordagem através da formulação hermitiana livre, sem a preocupação de aprimorar-se a solução através de expedientes pouco tradicionais, como por exemplo, o da integração numérica reduzida.

Numa segunda parte, passam-se às formulações das matrizes de rigidez do elemento de viga sobre base elástica, com o emprego do modelo mais requintado de dois parâmetros. Grande parte de trabalhos que dizem respeito às vigas sobre fundação elástica consideram o modelo de um parâmetro de Winkler, que é agora um caso particular do problema em consideração.

Encerrando o capítulo encontram-se aplicações a vigas isostáticas.

5.2 - Teoria de viga de Timoshenko : Geração da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes.

Passa-se a tratar nos próximos itens, da formulação da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o elemento de viga de Timoshenko.

A abordagem de aplicações de operadores hermitianos aos esforços e deslocamentos nodais que ora se introduzem; tem o propósito de uma apresentação mais imediata do que a encontrada na literatura referente ao método dos elementos finitos, cujos resultados, para efeito comparativo, estão expressos de modo resumido no que se segue.

5.2.1 - Emprego do método dos elementos finitos na geração da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o elemento de viga de Timoshenko.

Segundo OÑATE [1993], ao se formular a matriz de rigidez para o elemento de viga de Timoshenko com o emprego do método dos elementos finitos, diferentemente da clássica teoria de viga de Euler-Bernoulli, a deformada (v) e as rotações (φ) podem ser consideradas variáveis independentes, o que permite a interpolação em separado de cada uma delas, adotando-se, por exemplo, o polinômio de primeiro grau mostrado em (3.1), ou seja :

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 + \alpha_2 x \\ \varphi &= \alpha_3 + \alpha_4 x \end{aligned} \tag{5.1}$$

relações expressas em parâmetros generalizados, preferindo-se passar para parâmetros nodais (deslocamentos verticais e rotações nas extremidades 0 e 1 do elemento), que em vista de (3.5), levam às novas expressões em notação matricial, que assim se escrevem :

$$v = \{P_1 \quad P_2\} \{v_0 \quad v_1\}^T \quad (5.2)$$

$$\varphi = \{P_1 \quad P_2\} \{\varphi_0 \quad \varphi_1\}^T$$

onde P_1 e P_2 são as funções de forma, dadas respectivamente por :

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 - \frac{x}{L} \\ P_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Fazendo-se uso de (5.2), tendo em consideração (5.3), a curvatura é dada por (OÑATE [1993]) :

$$\varphi^I = \left\{ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\} \{\varphi_0 \quad \varphi_1\}^T \quad (5.4)$$

que na forma expandida se escreve :

$$\varphi^I = \left\{ 0 \quad -\frac{1}{L} \quad 0 \quad \frac{1}{L} \right\} \{v_0 \quad \varphi_0 \quad v_1 \quad \varphi_1\}^T \quad (5.5)$$

ou em notação vetorial :

$$\varphi^I = \{B_f\} \{v_0 \quad \varphi_0 \quad v_1 \quad \varphi_1\}^T \quad (5.6)$$

onde $\{B_f\}$ denomina-se vetor de deformação de flexão do elemento.

A deformação por cortante é dada por (OÑATE [1993]) :

$$v^I - \varphi = \left\{ \left(-\frac{1}{L} \right) \quad \left(-1 + \frac{x}{L} \right) \quad \left(\frac{1}{L} \right) \quad \left(-\frac{x}{L} \right) \right\} \{v_0 \quad \varphi_0 \quad v_1 \quad \varphi_1\}^T \quad (5.7)$$

ou mais concisamente em notação vetorial :

$$v^I - \varphi = \{B_c\} \{v_0 \quad \varphi_0 \quad v_1 \quad \varphi_1\}^T \quad (5.8)$$

onde $\{B_c\}$ é o vetor de deformação de cortante do elemento.

A matriz de rigidez de flexão, conforme OÑATE [1993], vem a ser :

$$[k] = \int_0^L \{B_f\}^T EI \{B_f\} dx \quad (5.9)$$

equação cuja integração analítica, admitindo-se constante o produto de inércia, conduz a :

$$[k] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

existindo também no problema a participação de outra matriz de rigidez, a qual leva em consideração os efeitos do esforço cortante na deformação, que é a dada por (OÑATE [1993]) :

$$[k_c] = \int_0^L \{B_c\}^T GA^* \{B_c\} dx \quad (5.11)$$

onde G é o módulo de rigidez ao cisalhamento e A^* é denominada área reduzida, que depende da forma da seção (seção retangular $A^* = 5A/6$; seção circular $A^* = 6A/7$).

Substituindo-se $\{B_c\}$ em (5.11), tem-se :

$$[k_c] = \int_0^L GA^* \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & \frac{L-x}{L^2} & -\frac{1}{L^2} & \frac{x}{L^2} \\ \frac{L-x}{L^2} & \left(-1 + \frac{x}{L}\right)^2 & \frac{-L+x}{L^2} & \frac{(L-x)x}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{-L+x}{L^2} & \frac{1}{L^2} & -\frac{x}{L^2} \\ \frac{x}{L^2} & \frac{(L-x)x}{L^2} & -\frac{x}{L^2} & \frac{x^2}{L^2} \end{bmatrix} dx \quad (5.12)$$

cuja integração analítica, admitindo GA^* constante, resulta :

$$[k_c] = GA^* \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{L}{6} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{L} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{L}{3} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Pois bem, exemplos de aplicação das matrizes (5.10) e (5.13); segundo os próprios termos de OÑATE [1993], levam à conclusão de que o elemento de viga de Timoshenko é incapaz de reproduzir a solução clássica de vigas, resultando num fenômeno narrado na literatura técnica como "bloqueio da solução" (aumento da rigidez), o que impede a utilização dessas matrizes em casos de uso corrente, pois o elemento só é eficiente para vigas com relação comprimento/altura pequena.

Para evitar que o fenômeno do bloqueio da solução (shear locking) se manifeste, utiliza-se, conforme HUGHES [1987]; OÑATE [1993]; REDDY [1993]; o

artifício de se integrar numericamente (5.12) com menor precisão, o que em termos práticos implica em se diminuir a importância da participação da matriz de rigidez de cortante dada por (5.13).

Pois bem, com o expediente da integração reduzida (quadratura de Gauss com apenas um ponto) aplicado à expressão (5.12), tem-se a nova matriz de rigidez de cortante, que é a dada por :

$$[k_c] = GA^* \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{L}{4} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{L} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{L}{4} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

cujas aplicações, na prática, aliviam o efeito do bloqueio da solução (shear locking), cumprindo-se salientar que tal modo de integração numérica, segundo as próprias palavras de OÑATE [1993], em que pesem suas propriedades "milagrosas", deve ser utilizado com extrema cautela.

O vetor de ações nodais equivalentes ao carregamento externo é o mesmo já mostrado em (4.32), ou seja :

$$\{r_e\} = \int_0^L \{P\}^T q \, dx \quad (5.15)$$

expressão na qual substituindo-se o vetor de forma dado por (OÑATE [1993]) :

$$\{P\} = \{P_1 \quad 0 \quad P_2 \quad 0\} \quad (5.16)$$

com P_1 e P_2 conforme (5.3), resulta, após integração analítica :

$$\{r_e\} = \left\{ \frac{qL}{2} \quad 0 \quad \frac{qL}{2} \quad 0 \right\}^T \quad (5.17)$$

vetor que contempla de forma aproximada, as reações de engastamento perfeito do elemento considerado.

Note-se ainda, que esse mesmo problema encontra-se exposto em REDDY [1993], onde o tal autor obtem outra solução, com o emprego de funções interpoladoras quadrática para a deformada v e linear para a rotação φ , o que leva às mesmas matrizes de rigidez (5.10) e (5.14), e a um novo vetor das ações nodais equivalentes diferente de (5.17), que é dado por :

$$\{r_e\} = \left\{ \frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \quad \frac{qL}{2} \quad -\frac{qL^2}{12} \right\}^T \quad (5.18)$$

demonstrando através de exemplo numérico, que o emprego desse vetor (que contém as componentes do momento devidas à ação uniformemente distribuida); leva a resultados mais precisos (maior ordem de convergência), com menor número de elementos finitos, quando comparado à utilização de (5.17).

Por outro lado, o estudo da influência do esforço cortante na matriz de rigidez de flexão já era preocupação bastante antiga, veja-se por exemplo PRZEMIENIECKI [1968]; e posteriormente WEAVER [1971], que deduz a matriz de rigidez para viga com deformações por esforço cortante mediante o emprego do denominado Método Direto (aplicações de deslocamentos e rotações unitárias nas

extremidades do elemento), obtendo os seguintes resultados para as matrizes de flexão e cortante, respectivamente :

$$[k] = \frac{EI}{1+2g} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ & & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \text{Sim.} & & & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$[k_c] = \frac{EI}{1+2g} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2g}{L} & 0 & -\frac{2g}{L} \\ & & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & & \frac{2g}{L} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

onde g é uma constante dada por :

$$g = \frac{6EI}{GA^*L^2} \quad (5.21)$$

verificando-se tratar de solução que não apresenta o problema de bloqueio e que, desprezada a participação do esforço cortante nas deformações ($g = 0$), resulta na clássica matriz de rigidez à flexão.

5.2.2 - Emprego da formulação hermitiana livre na geração da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o elemento de viga de Timoshenko.

Seja o mesmo elemento de viga ilustrado na Fig. 4.2 do capítulo anterior, que representa a configuração de equilíbrio de viga sob flexão simples; para o qual passa-se agora a considerar os efeitos de deformação por esforço cortante, empregando-se a teoria de viga de Timoshenko.

Segundo ZIENKIEWICZ [1992], quando a participação do esforço cortante é levada em conta nas deformações da viga, valem ainda as equações da flexão simples, ou sejam :

$$\begin{aligned} M^I &= V \\ V^I &= -q \\ \varphi^I &= -\frac{M}{EI} \end{aligned} \quad (5.22)$$

introduzindo-se para tanto uma nova equação constitutiva, no sentido de considerar-se o acréscimo da rotação causada pelo esforço cortante, que é a dada por :

$$v^I = \varphi + \frac{V}{GA^*} \quad (5.23)$$

expressões nas quais, conforme se sabe, v , φ , M e V , são respectivamente a deformada, a rotação, o momento fletor e a força cortante; E e G são os módulos de elasticidade à flexão e ao cisalhamento; I é a inércia da seção transversal e A^* a área reduzida, que depende da forma da seção.

Derivadas de ordem superior de M , V e v em função da rotação φ são obtidas com o emprego recorrente de (5.22) e (5.23), e que assim se expressam :

$$\begin{aligned}
M &= -EI \varphi^I & M^I &= -EI \varphi^{II} & M^{III} &= -EI \varphi^{IV} \\
V &= M^I & V &= -EI \varphi^{II} & & \\
V^{II} &= -EI \varphi^{IV} & V^{III} &= -EI \varphi^V & V^{IV} &= -EI \varphi^{VI} \\
v^{II} &= \varphi^I + \frac{V^I}{GA^*} & v^{III} &= \varphi^{II} + \frac{V^{II}}{GA^*} & v^V &= \varphi^{IV} + \frac{V^{IV}}{GA^*} \\
v^{II} &= \varphi^I - \frac{q}{GA^*} & v^{III} &= \varphi^{II} - \frac{EI \varphi^{IV}}{GA^*} & v^V &= \varphi^{IV} - \frac{EI \varphi^{VI}}{GA^*}
\end{aligned}
\tag{5.24}$$

encerrando as relações diferenciais de interesse.

Tendo-se em mente que a primeira das formulações realizadas no item anterior, onde o emprego do método dos elementos finitos levou à matriz de rigidez com o denominado bloqueio da solução (shear locking), passa-se a tratar tal assunto através da formulação hermitiana livre, mediante a escolha de operadores similares aos utilizados no caso de flexão em segunda ordem, conforme esclarecem as três formulações que se seguem.

5.2.2.1 - Primeira formulação da matriz de rigidez da viga de Timoshenko.

Terminada a fase de consecução das relações diferenciais de interesse, a dedução da matriz de rigidez pela formulação hermitiana livre faz-se de maneira direta, voltando-se a atenção somente para a a ordem de convergência dos operadores escolhidos, aplicando-se nesta primeira formulação, para estabelecer-se a relação entre esforços e deslocamentos de extremidade dos elementos, operadores

trapezoidais (menor ordem possível) à rotação, ao momento, ao esforço cortante e à deformada :

$$\begin{aligned}
 -\varphi_0 + \varphi_1 - \frac{L}{2}\varphi_0^I - \frac{L}{2}\varphi_1^I + \frac{L^3\varphi_0^{III}}{12} + \dots &= 0 \\
 -M_0 + M_1 - \frac{L}{2}M_0^I - \frac{L}{2}M_1^I + \frac{L^3M_0^{III}}{12} + \dots &= 0 \\
 -V_0 + V_1 - \frac{L}{2}V_0^I - \frac{L}{2}V_1^I + \frac{L^3V_0^{III}}{12} + \dots &= 0 \\
 -v_0 + v_1 - \frac{L}{2}v_0^I - \frac{L}{2}v_1^I + \frac{L^3v_0^{III}}{12} + \dots &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.25}$$

e tendo-se em vista (5.22) e (5.23), ou sejam :

$$\begin{aligned}
 -\varphi_0 + \varphi_1 - \frac{L}{2}\left(-\frac{M_0}{EI}\right) - \frac{L}{2}\left(-\frac{M_1}{EI}\right) + \frac{L^3\varphi_0^{III}}{12} &= 0 \\
 -M_0 + M_1 - \frac{L}{2}(V_0) - \frac{L}{2}(V_1) + \frac{L^3M_0^{III}}{12} &= 0 \\
 -V_0 + V_1 - \frac{L}{2}(-q) - \frac{L}{2}(-q) + \frac{L^3V_0^{III}}{12} &= 0 \\
 -v_0 + v_1 - \frac{L}{2}\left(\varphi_0 + \frac{V_0}{GA^*}\right) - \frac{L}{2}\left(\varphi_1 + \frac{V_1}{GA^*}\right) + \frac{L^3v_0^{III}}{12} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.26}$$

conjunto que escrito em notação matricial, ganha a seguinte redação :

$$[k^*]\{d\} + [\delta^*]\{F\} + \{r_e^*\} + \{R_0^*\} = \{0\}
 \tag{5.27}$$

onde :

$$\{\mathbf{d}\}^T = \{v_0 \quad \varphi_0 \quad v_1 \quad \varphi_1\}$$

$$\{\mathbf{F}\}^T = \{V_0 \quad M_0 \quad V_1 \quad M_1\}$$

$$\{\mathbf{r}_e^*\}^T = \{0 \quad 0 \quad qL \quad 0\}$$

$$[\mathbf{k}^*] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{L}{2} & 1 & -\frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

(5.28)

$$[\delta^*] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{L}{2EI} & 0 & \frac{L}{2EI} \\ -\frac{L}{2} & -1 & -\frac{L}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{L}{2GA^*} & 0 & -\frac{L}{2GA^*} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\mathbf{R}_0^*\}^T = \left\{ \frac{L^3}{12} \varphi_0^{\text{III}} \quad \frac{L^3}{12} M_0^{\text{III}} \quad \frac{L^3}{12} V_0^{\text{III}} \quad \frac{L^3}{12} v_0^{\text{III}} \right\}$$

ou, expressando-se o erro de aproximação como função da rotação, à vista de (5.24), resulta :

$$\{\mathbf{R}_0^*\}^T = \left\{ \frac{L^3}{12} \varphi_0^{\text{III}} \quad -\frac{L^3 EI}{12} \varphi_0^{\text{IV}} \quad -\frac{L^3 EI}{12} \varphi_0^{\text{V}} \quad \frac{L^3}{12} \left(\varphi_0^{\text{II}} - \frac{EI}{GA^*} \varphi_0^{\text{IV}} \right) \right\} \quad (5.29)$$

Invertendo a matriz de flexibilidade $[\delta^*]$ em (5.28) e manobrando algebricamente o expresso em (5.27), tem-se :

$$\{F\} + [k + k_c]\{d\} + \{r_e\} + \{R_0\} = 0 \quad (5.30)$$

onde :

$$\{r_e\}^T = \left\{ -\frac{qL}{2} \quad 0 \quad \frac{qL}{2} \quad 0 \right\}$$

$$\{R_0\}^T = \left\{ -\frac{EI}{2g} \varphi_0'' \quad -\frac{EIL}{4g} \varphi_0'' \quad -\frac{EI}{2g} \varphi_0'' \quad -\frac{EIL}{4g} \varphi_0'' \right\} \quad (5.31)$$

$$[k] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k_c] = GA^* \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{L}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{4} \\ \frac{1}{L} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{L}{4} \end{bmatrix}$$

cumprindo-se notar que as aproximações obtidas são de ordem de convergência $O(L^0)$, como o menor expoente de L em $\{R_0\}$ está a indicar.

Observe-se em (5.31) que a matriz de rigidez de flexão $[k]$ e o vetor de ações nodais equivalentes ao carregamento externo $\{r_e\}$ resultam idênticos aos

mostrados em (5.10) e (5.17) respectivamente; sendo digno de nota que a matriz de rigidez do esforço cortante $[k_c]$, foi gerada diretamente, com alívio do problema do bloqueio da solução, (veja-se (5.14)), e o que é mais importante, sem artifícios do tipo não convencional como integração reduzida.

Ressalte-se ainda a impossibilidade da geração da matriz de rigidez mostrada em (5.13), pois o rebaixamento da ordem dos operadores trapezoidais aplicados não permite obter-se relações entre esforços e deslocamentos, tratando-se de vantagem incontestável em comparação às deduções via método dos elementos finitos, que fornece essa solução matematicamente imprecisa, sem se atentar ao menos para o fato de não haver ordem de convergência.

5.2.2.2 - Segunda formulação da matriz de rigidez da viga de Timoshenko.

Buscando-se a geração de matrizes e vetores de maior precisão, levanta-se a ordem do operador hermitiano aplicado à rotação em (5.26), ou seja :

$$-\varphi_0 + \varphi_1 - \frac{L}{2}\varphi_0^I - \frac{L}{2}\varphi_1^I - \frac{L^2}{12}\varphi_0^{II} + \frac{L^2}{12}\varphi_1^{II} - \frac{L^5\varphi_0^V}{720} + \dots = 0 \quad (5.32)$$

que à vista de (5.24) assim se escreve :

$$-\varphi_0 + \varphi_1 + \frac{L}{2}\left(\frac{M_0}{EI}\right) + \frac{L}{2}\left(\frac{M_1}{EI}\right) + \frac{L^2}{12}\left(\frac{V_0}{EI}\right) - \frac{L^2}{12}\left(\frac{V_1}{EI}\right) - \frac{L^5\varphi_0^V}{720} = 0 \quad (5.33)$$

relação que altera a primeira linha da matriz de flexibilidade e o primeiro elemento do vetor dos erros em (5.28) e (5.29), ou sejam :

$$[\delta^*] = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{2EI} & -\frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{2EI} \\ -\frac{L}{2} & -1 & -\frac{L}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{L}{2GA^*} & 0 & -\frac{L}{2GA^*} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$\{R_0^*\}^T = \left\{ -\frac{L^5}{720}\varphi_0^V \quad \frac{L^3}{12}M_0^{III} \quad \frac{L^3}{12}V_0^{III} \quad \frac{L^3}{12}v_0^{III} \right\}$$

ou ainda expressando-se o resto como função da rotação, resulta :

$$\{R_0^*\}^T = \left\{ -\frac{L^5}{720}\varphi_0^V \quad -\frac{L^3EI}{12}\varphi_0^{IV} \quad -\frac{L^3EI}{12}\varphi_0^V \quad \frac{L^3}{12}\left(\varphi_0^{II} - \frac{EI}{GA^*}\varphi_0^{IV}\right) \right\} \quad (5.35)$$

Manobrando-se algebricamente (5.27) à vista de (5.34) e (5.35), obtêm-se :

$$\{r_e\}^T = \left\{ -\frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \quad \frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \right\} \quad (5.36)$$

$$\{R_0\}^T = \left\{ \frac{EI L^2}{120g}\varphi_0^{IV} \quad \frac{EI L^3(-1+10g)}{240g}\varphi_0^{IV} \quad \frac{EI L^2}{120g}\varphi_0^{IV} \quad \frac{EI L^3(1-10g)}{240g}\varphi_0^{IV} \right\}$$

e também as matrizes de rigidez $[k]$ e $[k_c]$ expressas em (5.31), cumprindo-se observar que o resultado obtido é uma aproximação de ordem de convergência $0(L^2)$, como o menor expoente em $\{R_0\}$ está a indicar.

Pois bem, é possível de se notar, que a formulação hermitiana livre conduz ao vetor de ações nodais equivalentes de maior precisão; resultado que foi

obtido providenciando-se apenas a escolha de um operador de ordem mais alta, tratando-se de vantagem inegável com relação ao emprego do método dos elementos finitos, onde a ordem de convergência, conforme já comentado, não é mostrada explicitamente.

5.2.2.3 - Terceira formulação da matriz de rigidez da viga de Timoshenko.

É possível ainda, com relação ao item anterior, elevar-se mais uma vez a ordem do operador hermitiano aplicado à deformada, ou seja :

$$-v_0 + v_1 - \frac{L}{2}v_0^I - \frac{L}{2}v_1^I - \frac{L^2}{12}v_0^{II} + \frac{L^2}{12}v_1^{II} - \frac{L^5v_0^V}{720} + \dots = 0 \quad (5.37)$$

e que, à vista de (5.24), assim se escreve :

$$\begin{aligned} & -v_0 + v_1 - \frac{L}{2}\left(\varphi_0 + \frac{V_0}{GA^*}\right) - \frac{L}{2}\left(\varphi_1 + \frac{V_1}{GA^*}\right) - \frac{L^2}{12}\left(-\frac{M_0}{EI} - \frac{q}{GA^*}\right) + \\ & + \frac{L^2}{12}\left(-\frac{M_1}{EI} - \frac{q}{GA^*}\right) - \frac{L^5}{720}\left(\varphi_0^{IV} - \frac{\varphi_0^{VI}EI}{GA^*}\right) = 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

relação que altera a quarta linha da matriz de flexibilidade e o quarto elemento do vetor dos erros dados por (5.34) e (5.35), ou sejam :

$$[\delta^*] = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{2EI} & -\frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{2EI} \\ -\frac{L}{2} & -1 & -\frac{L}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{L}{2GA^*} & \frac{L^2}{12EI} & -\frac{L}{2GA^*} & -\frac{L^2}{12EI} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$\{\mathbf{R}_0^*\}^T = \left\{ -\frac{L^5}{720}\phi_0^V \quad -\frac{L^3EI}{12}\phi_0^{IV} \quad -\frac{L^3EI}{12}\phi_0^V \quad -\frac{L^5}{720}\left(\phi_0^{IV} - \frac{\phi_0^{VI}EI}{GA^*}\right) \right\}$$

Manobrando-se algebricamente (5.27) à vista de (5.39), resultam finalmente :

$$\{\mathbf{R}_0\}^T = \left\{ \frac{L^2EI}{10(1+2g)}\phi_0^{IV} \quad \frac{L^3EI(-1+10g)}{120(1+2g)}\phi_0^{IV} \quad \frac{L^2EI}{10(1+2g)}\phi_0^{IV} \quad \frac{L^3EI(-1-10g)}{120(1+2g)}\phi_0^{IV} \right\} \quad (5.40)$$

$$[\mathbf{k}] = \frac{EI}{1+2g} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & -\frac{2}{L} \\ \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$[\mathbf{k}_c] = \frac{EI}{1+2g} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2g}{L} & 0 & \frac{2g}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2g}{L} & 0 & \frac{2g}{L} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

tratando-se de uma aproximação de ordem de convergência 0 (L^2), como o menor expoente do resto está a indicar, sendo as novas matrizes de rigidez idênticas às de WEAVER [1971] (vide (5.19) e (5.20)), bastando para tanto trocar os sinais das

linhas centrais dessa matriz, em razão da convenção adotada na formulação hermitiana livre.

5.3 - Viga sobre base elástica : Geração das matrizes de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes.

O tema da fundação sobre base elástica, que vem sendo tratado nas últimas décadas com o emprego do método dos elementos finitos de modo mais simplista (modelo de Winkler), pressupõe que as reações do solo sejam constituídas por molas distribuídas de comportamento linear. Em complemento a essa teoria, tem sido sugerido na literatura, conforme ZHAOHUA [1983], um outro modelo mais preciso, o qual utiliza dois parâmetros reativos do solo, objeto de estudos mais recentes, como por exemplo sugere YOKOYAMA [1996].

Pela importância do assunto, passa-se a tratar nos próximos itens, da formulação da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o elemento de viga sobre base elástica com o modelo da fundação de dois parâmetros, mostrando-se de início sua dedução com o emprego do método dos elementos finitos, para em seguida abordar o problema através da formulação hermitiana livre, que é realizada com relativa simplicidade, pois faz-se uso imediato das equações diferenciais regentes do problema.

5.3.1 - Emprego do método dos elementos finitos na geração da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o elemento de viga sobre base elástica.

Segundo ZHAOHUA [1983], a formulação das matrizes de rigidez para o elemento de viga sobre base elástica, com o emprego do método dos elementos finitos, pode ser realizada adotando-se uma interpolação cúbica dos deslocamentos idêntica à mostrada em (4.5), ou seja :

$$v = \{P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4\} \{v_0 \quad \varphi_0 \quad v_1 \quad \varphi_1\}^T \quad (5.43)$$

onde os P_i são clássicos polinômios interpoladores hermitianos, conforme (4.6), ou em notação vetorial :

$$\mathbf{v} = \{\mathbf{P}\} \{v_0 \quad \varphi_0 \quad v_1 \quad \varphi_1\}^T \quad (5.44)$$

sendo $\{\mathbf{P}\}$ denominado vetor de forma.

Derivando-se tal vetor de forma $\{\mathbf{P}\}$, tem-se :

$$\{\mathbf{A}\} = \frac{d\{\mathbf{P}\}}{dx} \quad (5.45)$$

$$\{\mathbf{B}\} = \frac{d^2\{\mathbf{P}\}}{dx^2}$$

ou sejam :

$$\{\mathbf{A}\} = \left\{ \left(-\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \right) \left(1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right) \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \right) \left(-\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right) \right\} \quad (5.46)$$

$$\{\mathbf{B}\} = \left\{ \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \right\}$$

sendo a matriz de rigidez do elemento constituída da soma de três parcelas, dadas respectivamente por (ZHAOHUA [1983]) :

$$[\mathbf{k}] = \int_0^L \{\mathbf{B}\}^T EI \{\mathbf{B}\} dx + \int_0^L \{\mathbf{P}\}^T \mathbf{k} \{\mathbf{P}\} dx + \int_0^L \{\mathbf{A}\}^T \mathbf{k}_1 \{\mathbf{A}\} dx \quad (5.47)$$

ou ainda :

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{k}_f] + [\mathbf{k}_w] + [\mathbf{k}_T] \quad (5.48)$$

que levam em conta a participação da flexão (f), da fundação de Winkler (w) e da fundação de Pasternak (T), cujas integrações analíticas são feitas separadamente e, sendo constantes o produto de inércia EI e os parâmetros do solo dados por k e k_1 , levam respectivamente a :

$$[k_f] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sim.} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[k_w] = k \begin{bmatrix} \frac{13L}{35} & \frac{11L^2}{210} & \frac{9L}{70} & \frac{-13L^2}{420} \\ & \frac{L^3}{105} & \frac{13L^2}{420} & \frac{-L^3}{140} \\ & & \frac{13L}{35} & \frac{-11L^2}{210} \\ \text{Sim.} & & & \frac{L^3}{105} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

$$[k_T] = k_1 \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & \frac{1}{L} & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2L}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ & & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ \text{Sim.} & & & \frac{2L}{15} \end{bmatrix}$$

que são as matrizes de rigidez à flexão, da fundação de Winkler e da fundação de dois parâmetros (Pasternak). O vetor das ações nodais equivalentes é o mesmo deduzido no capítulo 4, conforme mostrado na expressão (4.33).

5.3.2 - Emprego da formulação hermitiana livre na geração da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o elemento de viga sobre base elástica.

Considere-se o elemento diferencial de viga representado na Fig. 5.1, que mostra as ações e reações de uma fundação elástica segundo YOKOYAMA [1996]. Tal modelo, denominado de fundação elástica de dois parâmetros, está sollicitado por uma carga q uniformemente distribuída na direção perpendicular ao eixo x , cujas reações no solo são funções da elástica v e de sua segunda derivada, influência considerada através dos parâmetros do solo dados por k (módulo de fundação de Winkler) e k_1 (módulo da fundação de Pasternak); sendo os demais elementos que constam na figura já conhecidos dos problemas de flexão dos capítulos precedentes.

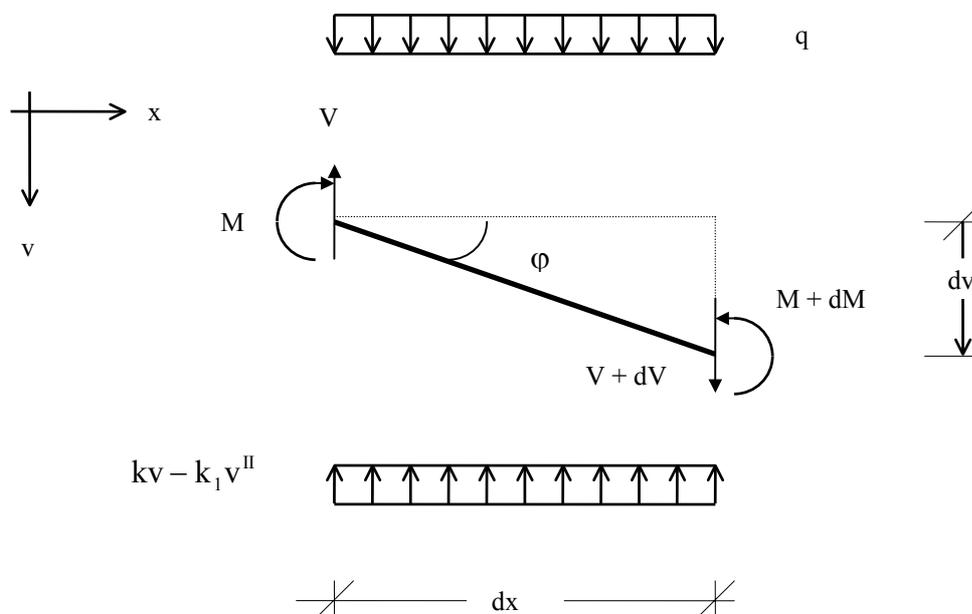


Fig. 5.1 - Configuração de equilíbrio de elemento de viga sobre base elástica.

Pretendendo-se determinar a matriz de rigidez de flexão com o emprego da formulação hermitiana livre, faz-se necessário descrever o problema por meio de relações constitutivas e de equilíbrio, continuando válidas algumas expressões da flexão de vigas, quais sejam :

$$\varphi = v^I \quad (5.50)$$

$$v^{II} = -\frac{M}{EI} \quad (5.51)$$

$$M = -EI \varphi^I \quad (5.52)$$

$$V = M^I \quad (5.53)$$

que expressam respectivamente, a relação geométrica do elemento para pequenas deformações, as relações constitutivas segundo a Resistência dos Materiais e o equilíbrio do momento fletor.

O equilíbrio das forças na direção v , neste caso com a participação das reações do solo, leva a :

$$V^I = -q + kv - k_1 v^{II} \quad (5.54)$$

expressão que pode ser redigida :

$$V^I = Q^I - V_1^I \quad (5.55)$$

onde :

$$Q^I = -q + kv \quad (5.56)$$

$$V_1^I = k_1 v^{II} \quad (5.57)$$

cuja integração imediata de (5.55) leva a :

$$Q = V + V_1 \quad (5.58)$$

assim colocada para a formulação em termos do esforço cortante modificado Q (ZHAOHUA [1983]).

A integração de (5.57), fornece ainda :

$$V_1 = k_1 v^I \quad (5.59)$$

que à vista de (5.50), pode ser redigida :

$$V_1 = k_1 \varphi \quad (5.60)$$

completando o conjunto de equações constitutivas e de equilíbrio regentes do problema.

Pois bem, no intuito de se organizar a seqüência das derivadas de maior ordem das funções φ M Q v , que são necessárias para uso nos operadores hermitianos, obtem-se, à vista das equações (5.50) a (5.60) :

$$\begin{aligned} \varphi^I &= -\frac{M}{EI} & \varphi^{II} &= \frac{-Q + k_1 \varphi}{EI} \\ M^I &= Q - k_1 \varphi & M^{II} &= -q + kv + \frac{k_1 M}{EI} & M^{III} &= k\varphi + \frac{k_1}{EI}(Q - k_1 \varphi) \\ M^{VII} &= -EI\varphi^{III} \\ Q^I &= -q + kv & Q^{II} &= k\varphi & Q^V &= k\varphi^{III} \\ v^I &= \varphi & v^{II} &= -\frac{M}{EI} & v^{III} &= \frac{-Q + k_1 \varphi}{EI} \end{aligned}$$

$$v^{VII} = \varphi^{VI} \quad (5.61)$$

encerrando-se as relações diferenciais de interesse.

Para se estabelecer as relações entre deslocamentos, rotações e os esforços correspondentes com o emprego da formulação hermitiana livre (que permite a geração das matrizes de rigidez e ações nodais equivalentes pretendidas), aplica-se o operador (2.51) à rotação e à força cortante Q ; sendo o operador (2.52) aplicado ao momento fletor e à deformada, ou seja :

$$\begin{aligned} -\varphi_0 + \varphi_1 - \frac{L}{2}(\varphi_0^I + \varphi_1^I) - \frac{L^2}{12}(\varphi_0^{II} - \varphi_1^{II}) - \frac{L^5 \varphi_0^V}{720} + \dots = 0 \\ -M_0 + M_1 - \frac{L}{2}(M_0^I + M_1^I) - \frac{L^2}{10}(M_0^{II} - M_1^{II}) - \frac{L^3}{120}(M_0^{III} + M_1^{III}) + \frac{L^7 M_0^{VII}}{100800} + \dots = 0 \\ -Q_0 + Q_1 - \frac{L}{2}(Q_0^I + Q_1^I) - \frac{L^2}{12}(Q_0^{II} - Q_1^{II}) - \frac{L^5 Q_0^V}{720} + \dots = 0 \\ -v_0 + v_1 - \frac{L}{2}(v_0^I + v_1^I) - \frac{L^2}{10}(v_0^{II} - v_1^{II}) - \frac{L^3}{120}(v_0^{III} + v_1^{III}) + \frac{L^7 v_0^{VII}}{100800} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (5.62)$$

observando-se ainda, que outros operadores poderão levar a matrizes de rigidez consistentes, embora não necessariamente simétricas, cujas aplicações representam, na prática, uma menor ordem de convergência, exigindo se assim maior refinamento da malha de elementos finitos.

Pois bem, substituindo-se (5.61) em (5.62), tem-se :

$$\begin{aligned}
 & -\varphi_0 + \varphi_1 - \frac{L}{2} \left(-\frac{M_0}{EI} - \frac{M_1}{EI} \right) - \frac{L^2}{12} \left(\frac{-Q_0 + k_1\varphi_0}{EI} + \frac{Q_1 - k_1\varphi_1}{EI} \right) - \frac{L^5 \varphi_0^V}{720} = 0 \\
 & -M_0 + M_1 - \frac{L}{2} (Q_0 - k_1\varphi_0 + Q_1 - k_1\varphi_1) + \\
 & -\frac{L^2}{10} \left(-q + kv_0 + \frac{k_1 M_0}{EI} + q - kv_1 - \frac{k_1 M_1}{EI} \right) + \\
 & -\frac{L^3}{120} \left(k\varphi_0 + \frac{k_1}{EI} (Q_0 - k_1\varphi_0) + k\varphi_1 + \frac{k_1}{EI} (Q_1 - k_1\varphi_1) \right) - \frac{L^7 EI \varphi_0^{IX}}{100800} = 0 \\
 & -Q_0 + Q_1 - \frac{L}{2} (-q + kv_0 - q + kv_1) - \frac{L^2}{12} (k\varphi_0 - k\varphi_1) - \frac{L^5 k\varphi_0^{III}}{720} = 0 \\
 & -v_0 + v_1 - \frac{L}{2} (\varphi_0 + \varphi_1) - \frac{L^2}{10} \left(-\frac{M_0}{EI} + \frac{M_1}{EI} \right) + \\
 & -\frac{L^3}{120} \left(\frac{-Q_0 + k_1\varphi_0}{EI} + \frac{-Q_1 + k_1\varphi_1}{EI} \right) + \frac{L^7 \varphi_0^{VI}}{100800} = 0
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

conjunto que reunido matricialmente ganha a redação :

$$\{k^*\} \{d\} + [\delta^*] \{F\} + \{r_e^*\} + \{R_0^*\} = \{0\} \tag{5.64}$$

onde :

$$\{d\}^T = \{v_0 \quad \varphi_0 \quad v_1 \quad \varphi_1\}$$

$$\{F\}^T = \{Q_0 \quad M_0 \quad Q_1 \quad M_1\}$$

$$\{r_e^*\}^T = \{0 \quad 0 \quad qL \quad 0\}$$

$$\{\mathbf{R}_0^*\}^T = \left\{ -\frac{L^5 \varphi_0^V}{720} \quad -\frac{L^7 EI \varphi_0^{IX}}{100800} \quad -\frac{L^5 k \varphi_0^{III}}{720} \quad \frac{L^7 \varphi_0^{VI}}{100800} \right\}$$

$$[\mathbf{k}^*] = \begin{bmatrix} 0 & \left(-1 - \frac{k_1 L^2}{12EI}\right) & 0 & \left(1 + \frac{k_1 L^2}{12EI}\right) \\ -\frac{kL^2}{10} \left\{ \frac{k_1 L}{2} - \frac{L^3}{120} \left(k - \frac{k_1^2}{EI}\right) \right\} & \frac{kL^2}{10} \left\{ \frac{k_1 L}{2} - \frac{L^3}{120} \left(k - \frac{k_1^2}{EI}\right) \right\} \\ -\frac{kL}{2} & -\frac{kL^2}{12} & -\frac{kL}{2} & \frac{kL^2}{12} \\ -1 & \left(-\frac{L}{2} - \frac{k_1 L^3}{120EI}\right) & 1 & \left(-\frac{L}{2} - \frac{k_1 L^3}{120EI}\right) \end{bmatrix}$$

$$[\delta^*] = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{2EI} & -\frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{2EI} \\ \left(-\frac{L}{2} - \frac{k_1 L^3}{120EI}\right) & \left(-1 - \frac{k_1 L^2}{10EI}\right) & \left(-\frac{L}{2} - \frac{k_1 L^3}{120EI}\right) & \left(1 + \frac{k_1 L^2}{10EI}\right) \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{L^3}{120EI} & \frac{L^2}{10EI} & \frac{L^3}{120EI} & -\frac{L^2}{10EI} \end{bmatrix}$$

(5.65)

Procedendo-se a inversão da matriz de flexibilidade $[\delta^*]$, e manobrando-se algebricamente o expresso em (5.64), resulta :

$$\{\mathbf{F}\} + [\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_w + \mathbf{k}_T] \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{r}_e\} + \{\mathbf{R}_0\} = 0 \quad (5.66)$$

onde :

$$\{\mathbf{r}_e\}^T = \left\{ -\frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \quad \frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \right\}$$

$$\{\mathbf{R}_0\}^T = \left\{ -\frac{L^4 EI}{8400} \varphi_0^{VI} \quad -\frac{L^4 EI}{720} \varphi_0^V \quad -\frac{L^4 EI}{8400} \varphi_0^{VI} \quad -\frac{L^4 EI}{720} \varphi_0^V \right\}$$

$$[\mathbf{k}_f] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{k}_w] = k \begin{bmatrix} \frac{37L}{100} & \frac{31L^2}{600} & \frac{13L}{100} & \frac{-19L^2}{600} \\ \frac{31L^2}{600} & \frac{7L^3}{7L^3} & \frac{19L^2}{19L^2} & \frac{11L^3}{11L^3} \\ \frac{600}{13L} & \frac{900}{19L^2} & \frac{600}{37L} & \frac{1800}{31L^2} \\ \frac{100}{-19L^2} & \frac{600}{11L^3} & \frac{100}{31L^2} & \frac{600}{7L^3} \\ \frac{600}{600} & \frac{-1800}{1800} & \frac{-600}{600} & \frac{900}{900} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{k}_T] = k_1 \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & \frac{1}{10} & \frac{L}{30} \\ \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{L}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix}$$

(5.67)

Cumpra-se notar que as matrizes de rigidez de flexão e do segundo parâmetro $[\mathbf{k}_f]$ e $[\mathbf{k}_T]$ pertencentes a (5.66), são aproximações de ordem de convergência 0 (L^4) idênticas às obtidas com o emprego do método dos elementos finitos (vide (5.48)), o mesmo não ocorrendo com a matriz de Winkler, embora as

diferenças não sejam tão significativas, conforme mostra o segundo exemplo inserido no próximo ítem deste capítulo.

Observe-se finalmente, que a assimetria verificada nos sinais das matrizes expressas em (5.66), em relação às deduzidas com o emprego do método dos elementos finitos, vem a ser mero resultado da convenção adotada na formulação hermitiana livre (o momento e o esforço cortante não tem a mesma orientação nas extremidades), bastando para tanto, trocar o sinal das linhas centrais em ambas matrizes.

5.3.3 - Observações sobre a formulação hermitiana livre da matriz de rigidez da fundação de Winkler.

De acordo com as deduções realizadas no ítem anterior, a matriz de rigidez da fundação de Winkler gerada com ordem de convergência $O(L^4)$ conforme (5.67) está a indicar, difere da obtida pela formulação via método dos elementos finitos expressa em (5.49).

Pois bem, providenciando-se o aumento da ordem do erro de aproximação dos operadores aplicados à rotação e à deformada do conjunto (5.62), com o emprego de (2.53) e (2.54), ou seja :

$$-\varphi_0 + \varphi_1 - \frac{L}{2}(\varphi_0^I + \varphi_1^I) - \frac{L^2}{12}(\varphi_0^{II} - \varphi_1^{II}) + \frac{L^4}{720}(\varphi_0^{IV} - \varphi_1^{IV}) + \frac{L^7}{30240}\varphi_0^{VII} + \dots = 0$$

$$-M_0 + M_1 - \frac{L}{2}(M_0^I + M_1^I) - \frac{L^2}{10}(M_0^{II} - M_1^{II}) - \frac{L^3}{120}(M_0^{III} + M_1^{III}) + \frac{L^7}{100800}M_0^{VII} + \dots = 0$$

$$-Q_0 + Q_1 - \frac{L}{2}(Q_0^I + Q_1^I) - \frac{L^2}{12}(Q_0^{II} - Q_1^{II}) - \frac{L^5}{720}Q_0^V + \dots = 0$$

$$\begin{aligned}
& -v_0 + v_1 - \frac{L}{2}(v_0^I + v_1^I) - \frac{3L^2}{28}(v_0^{II} - v_1^{II}) - \frac{L^3}{84}(v_0^{III} + v_1^{III}) + \\
& -\frac{L^4}{1680}(v_0^{IV} - v_1^{IV}) - \frac{L^9 y_0^{IX}}{25401600} + \dots = 0
\end{aligned} \tag{5.68}$$

e ainda outra possibilidade acrescentando-se os termos em quinta derivada no operador aplicado à deformada com o emprego de (2.55), tem-se :

$$\begin{aligned}
& -\varphi_0 + \varphi_1 - \frac{L}{2}(\varphi_0^I + \varphi_1^I) - \frac{L^2}{12}(\varphi_0^{II} - \varphi_1^{II}) + \frac{L^4}{720}(\varphi_0^{IV} - \varphi_1^{IV}) + \frac{L^7 \varphi_0^{VII}}{30240} + \dots = 0 \\
& -M_0 + M_1 - \frac{L}{2}(M_0^I + M_1^I) - \frac{L^2}{10}(M_0^{II} - M_1^{II}) - \frac{L^3}{120}(M_0^{III} + M_1^{III}) + \frac{L^7 M_0^{VII}}{100800} + \dots = 0 \\
& -Q_0 + Q_1 - \frac{L}{2}(Q_0^I + Q_1^I) - \frac{L^2}{12}(Q_0^{II} - Q_1^{II}) - \frac{L^5 Q_0^V}{720} + \dots = 0 \\
& -v_0 + v_1 - \frac{L}{2}(v_0^I + v_1^I) + \frac{L^2}{6}(v_0^{II} - v_1^{II}) + \frac{L^3}{8}(v_0^{III} + v_1^{III}) + \frac{135L^4}{5040}(v_0^{IV} - v_1^{IV}) + \\
& + \frac{23L^5}{10080}(v_0^V + v_1^V) - \frac{L^9 v_0^{IX}}{362880} + \dots = 0
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Substituindo-se em (5.68) e (5.69) o conjunto de derivadas nos pontos pivotais que vão complementar as já utilizadas em (5.63), omitindo-se as deduções dessas relações diferenciais e as respectivas manipulações algébricas pertinentes, apenas no sentido de abreviar a exposição; resultam matrizes de rigidez com elementos mais complexos, como por exemplo :

$$k_{11} = \frac{403200 (E^3 I^3 + E^2 I^2 k_1 L^2) + 12480 E^2 I^2 k L^4 + k k_1^2 L^8}{4 L^3 (8400 E^2 I^2 + k_1^2 L^4)} \quad (5.70)$$

somente para registrar um deles que é comum a essas duas formulações de ordem mais alta, no qual observa-se a impossibilidade da dissociação dos elementos da matriz de rigidez conforme formato expresso em (5.49), ou seja em elementos separados que representem as matrizes de rigidez de flexão, da fundação de Winkler e da fundação de Pasternak; o que indica a existência de influência dos parâmetros k_1 e k nos novos elementos da matriz de rigidez, interdependência resultante das relações diferenciais regentes do problema, realçando uma propriedade que não é objeto de considerações nas deduções pertinentes ao método dos elementos finitos.

Tomando-se $k_1 = 0$ nessas duas últimas formulações, obtém-se :

$$[k_w] = k \begin{bmatrix} \frac{13L}{35} & \frac{11L^2}{210} & \frac{9L}{70} & \frac{-13L^2}{420} \\ -11L^2 & -L^3 & -13L^2 & \frac{L^3}{420} \\ \frac{210}{-9L} & \frac{105}{-13L^2} & \frac{420}{-13L} & \frac{140}{11L^2} \\ \frac{70}{-13L^2} & \frac{420}{-L^3} & \frac{35}{-11L^2} & \frac{210}{L^3} \\ \frac{420}{420} & \frac{140}{140} & \frac{210}{210} & \frac{105}{105} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

que é a matriz de rigidez idêntica à da fundação de Winkler obtida pelo método dos elementos finitos, notando-se a assimetria nos sinais das linhas centrais, em razão da convenção adotada na formulação hermitiana livre.

A seguir encontram-se dois exemplos de aplicação das formulações livres que ora se encerram, envolvendo estruturas simples constituídas de vigas isostáticas.

5.4 - Exemplos de aplicação.

5.4.1 - Primeiro exemplo : Deslocamentos em viga isostática.

Seja calcular a flecha e a rotação na extremidade (nó 0) da viga mostrada na Fig. 5.2 com o emprego das matrizes de rigidez da teoria de Timoshenko, obtidas via formulação hermitiana livre, subdividindo-se a estrutura em 1, 2, 4 e 8 elementos, adotando-se os valores numéricos de $P = 100 \text{ KN}$, $L = 100 \text{ cm}$, $E = 150.000 \text{ KN/cm}^2$, $G = 60.000 \text{ KN/cm}^2$, $I = 400 \text{ cm}^4$, e $A = 20 \text{ cm}^2$ (seção retangular).

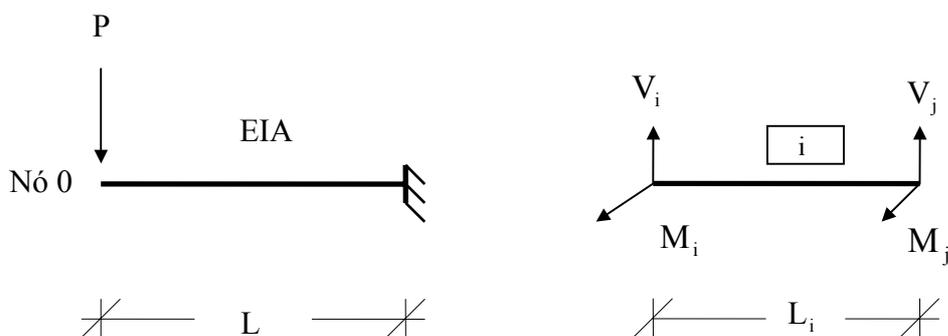


Fig. 5.2 - Viga em balanço submetida a carga P constante e coordenadas locais do elemento.

As respostas deste problema segundo a Resistência dos Materiais (Teoria de Euler-Bernoulli), desconsiderando-se a deformação causada pelo esforço cortante, são as dadas por :

$$f_0 = \frac{PL^3}{3EI} = 0,556 \text{ cm}$$

$$\varphi_0 = \frac{PL^2}{2EI} = 8,3 * 10^{-3} \text{ rad.}$$
(5.72)

respectivamente flecha e rotação do nó 0.

Empregando-se as matrizes e vetores deduzidos na segunda formulação livre da teoria de viga de Timoshenko, conforme ítem 5.2.2.2, obtêm-se os resultados mostrados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1

Nº elementos	Flecha no nó 0 (cm)	Rotação no nó 0 (rad.)	Erro no sentido local de V	Erro no sentido local de M
1	0,427	$8,3 * 10^{-3}$	$2314,81 EI\varphi_0^{IV}$	$-74074,10 EI\varphi_0^{IV}$
2	0,531	$8,3 * 10^{-3}$	$144,68 EI\varphi_0^{IV}$	$1591,44 EI\varphi_0^{IV}$
4	0,557	$8,3 * 10^{-3}$	$9,04 EI\varphi_0^{IV}$	$538,01 EI\varphi_0^{IV}$
8	0,563	$8,3 * 10^{-3}$	$0,57 EI\varphi_0^{IV}$	$77,85 EI\varphi_0^{IV}$

Empregando-se as matrizes e vetores deduzidos na terceira formulação livre da teoria de viga de Timoshenko, conforme ítem 5.2.2.3, obtêm-se novos valores conforme mostra a Tabela 5.2.

Tabela 5.2

Nº elementos	Flecha no nó 0 (cm)	Rotação no nó 0 (rad.)	Erro no sentido local de V	Erro no sentido local de M
1	0,566	$8,3 * 10^{-3}$	$932,83 EI\varphi_0^{IV}$	$-4975,12 EI\varphi_0^{IV}$
2	0,566	$8,3 * 10^{-3}$	$194,10 EI\varphi_0^{IV}$	$355,85 EI\varphi_0^{IV}$
4	0,566	$8,3 * 10^{-3}$	$29,04 EI\varphi_0^{IV}$	$288,00 EI\varphi_0^{IV}$
8	0,566	$8,3 * 10^{-3}$	$2,78 EI\varphi_0^{IV}$	$63,96 EI\varphi_0^{IV}$

5.4.2 - Segundo exemplo : Flecha em viga isostática sobre base elástica.

Seja calcular a flecha no ponto central da viga sobre base elástica mostrada na Fig. 5.3, mediante modelo bi-paramétrico, com o emprego das matrizes

de rigidez obtidas via formulação hermitiana livre, subdividindo-se a estrutura em 2, 4 e 8 elementos, adotando-se os valores numéricos de $P = 100 \text{ KN}$, $L = 500 \text{ cm}$, $E = 150.000 \text{ KN/cm}^2$, $I = 400 \text{ cm}^4$, com os parâmetros da fundação $k_w = 0,4 \text{ KN/cm}^2$ (Winkler) e $k_1 = 600 \text{ KN}$ (Pasternak).

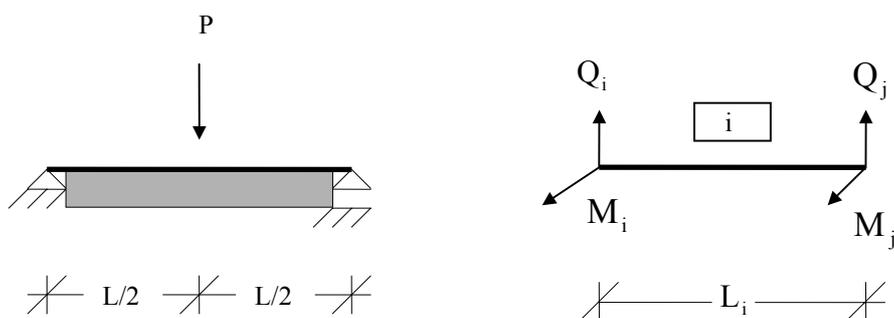


Fig. 5.3 - Viga sobre base elástica e coordenadas locais do elemento.

Empregando-se as matrizes da formulação via elementos finitos dadas em (5.49), e as deduzidas através da formulação hermitiana livre, conforme (5.67) obtêm-se os resultados que constam da Tabela 5.3.

Tabela 5.3

número de elementos finitos	Flecha obtida pelo M.E.F (cm)	Flecha obtida pela Formulação Livre (cm)	Erro no sentido local de Q (meio do vão)	Erro no sentido local de M (meio do vão)
2	0,811	0,814	$-465.029EI(\varphi_1^{VI} + \varphi_2^{VI})$	$-5.425.347EI(\varphi_1^V + \varphi_2^V)$
4	0,831	0,831	$-29.064EI(\varphi_2^{VI} + \varphi_3^{VI})$	$-339.084EI(\varphi_2^V + \varphi_3^V)$
8	0,832	0,832	$-1816EI(\varphi_4^{VI} + \varphi_5^{VI})$	$-21.192EI(\varphi_4^V + \varphi_5^V)$

Ressalte-se novamente nos exemplos que ora se encerram, o fato de não haver alastramento do erro local, eis que a sua interferência resume-se ao nó inicial de cada elemento, impedindo a propagação no restante da estrutura.

CAPÍTULO 6

OPERADORES HERMITIANOS PARA A GERAÇÃO DE MATRIZES DE RIGIDEZ E VETORES DE AÇÕES NODAIS EQUIVALENTES EM PROBLEMAS BI-DIMENSIONAIS - Caso da Torção de Saint-Venant.

6.1 - Introdução.

Trata este capítulo da aplicação da formulação hermitiana livre aos problemas bi-dimensionais, em particular ao caso de torção de Saint-Venant; solução que também é obtida empregando-se elementos finitos planos dotados de um grau de liberdade por nó, a exemplo RAO [1989]; PILKEY [1994].

Essa nova abordagem não pode ser realizada apenas com a procura de operadores hermitianos nos moldes dos capítulos precedentes, sendo necessário a priori, atribuir-se aos novos operadores hermitianos, uma coleção adicional de parâmetros livres, que são balizados pela da equação regente do problema (equação de Poisson), com o emprego do teorema de Gauss.

No que se segue, o problema é resolvido com a escolha de elementos triangulares e retangulares, cujo objetivo é o de se explicitar o erro de aproximação, que não aparece na solução via elementos finitos, e também investigar as providências a adotar em elementos com maior número de pontos pivotais, cujo propósito no caso é o de dar continuidade às formulações desenvolvidas no presente trabalho.

Encerrando-se o capítulo é apresentado um exemplo de aplicação em seção transversal quadrada, conforme padrão sugerido por BATHE [1996], empregando-se a configuração em elementos triangulares.

6.2 - Emprego do método dos elementos finitos na geração da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o problema da torção de Saint-Venant.

A formulação da matriz de rigidez de torção livre de elementos estruturais elásticos e homogêneos (torção de Saint-Venant), com o emprego do método dos elementos finitos, pode ser feita através do elemento bi-dimensional triangular (primeiro membro da família dos elementos triangulares), conforme RAO [1989], onde os graus de liberdade considerados são os valores da função de torção ϕ em cada vértice, conforme mostra-se na Fig. 6.1.

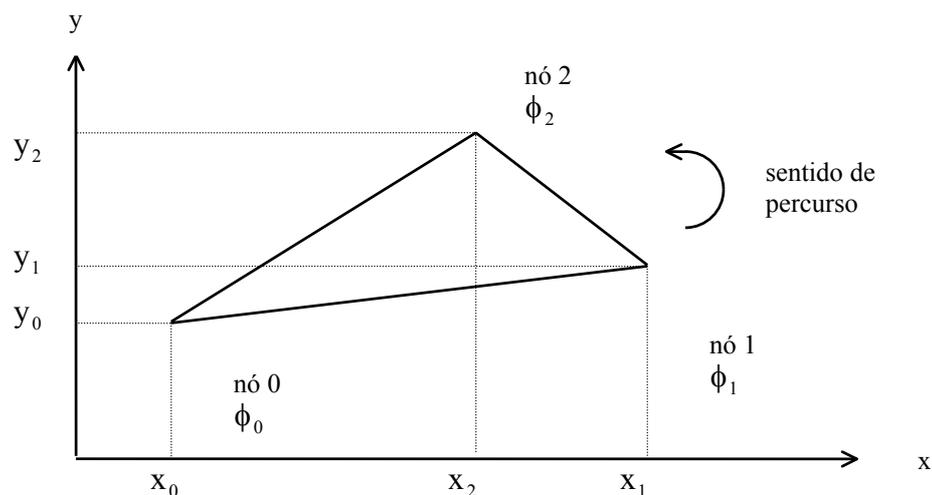


Fig. 6.1 - Elemento triangular para a solução do problema de torção.

Adotando-se para a função de torção no domínio do elemento a variação linear dada por (RAO [1989]) :

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (6.1)$$

na qual α_i são os denominados parâmetros generalizados. Tendo-se em vista passar para parâmetros nodais (valores de ϕ nos nós 0, 1 e 2), que têm significado físico mais compreensível; é o bastante verificar que :

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_0 + \alpha_3 y_0 \\ \phi_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ \phi_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2\end{aligned}\tag{6.2}$$

Resolvendo-se o sistema de equações (6.2) tem-se :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + a_2\phi_2) / 2A \\ \alpha_2 &= (b_0\phi_0 + b_1\phi_1 + b_2\phi_2) / 2A \\ \alpha_3 &= (c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + c_2\phi_2) / 2A\end{aligned}\tag{6.3}$$

onde A é a área do elemento. Os parâmetros generalizados, cuja substituição em (6.1) levam a uma outra expressão da função de torção, em notação matricial assim se redige :

$$\phi = \{P_1 \quad P_2 \quad P_3\} \{\phi_0 \quad \phi_1 \quad \phi_2\}^T\tag{6.4}$$

ou em notação vetorial :

$$\phi = \{P\} \{\phi_0 \quad \phi_1 \quad \phi_2\}^T\tag{6.5}$$

na qual $\{P\}$ denomina-se vetor de forma, sendo seus componentes :

$$\begin{aligned}P_1 &= (a_0 + b_0 x + c_0 y) / 2A \\ P_2 &= (a_1 + b_1 x + c_1 y) / 2A \\ P_3 &= (a_2 + b_2 x + c_2 y) / 2A\end{aligned}\tag{6.6}$$

onde as constantes pertinentes são dadas respectivamente por :

$$\begin{aligned}
a_0 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 & a_1 &= x_2 y_0 - x_0 y_2 & a_2 &= x_0 y_1 - x_1 y_0 \\
b_0 &= y_1 - y_2 & b_1 &= y_2 - y_0 & b_2 &= y_0 - y_1 \\
c_0 &= x_2 - x_1 & c_1 &= x_0 - x_2 & c_2 &= x_1 - x_0
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Procedendo-se a derivação parcial dos elementos do vetor de forma expressos em (6.6), tem-se (RAO [1989]) :

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_3}{\partial x} \\ \frac{\partial P_1}{\partial y} & \frac{\partial P_2}{\partial y} & \frac{\partial P_3}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

ou seja :

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

sendo a matriz de rigidez e o vetor de ações nodais equivalentes dados respectivamente por :

$$[\mathbf{k}] = \iint_A [\mathbf{B}]^T \frac{1}{G} [\mathbf{B}] dA \tag{6.10}$$

$$\{r_e\} = \iint_A 2\theta \{N\}^T dA \tag{6.11}$$

onde G é o módulo de elasticidade ao cisalhamento e θ o ângulo de giro por unidade de comprimento.

As integrações analíticas de (6.10) e (6.11), tomando-se G e θ constantes, levam respectivamente a :

$$[k] = \frac{1}{4AG} \begin{bmatrix} (b_0^2 + c_0^2) & (b_0 b_1 + c_0 c_1) & (b_0 b_2 + c_0 c_2) \\ & (b_1^2 + c_1^2) & (b_1 b_2 + c_1 c_2) \\ \text{Sim.} & & (b_2^2 + c_2^2) \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$$\{r_e\}^T = \left\{ \frac{2\theta A}{3} \quad \frac{2\theta A}{3} \quad \frac{2\theta A}{3} \right\} \quad (6.13)$$

que encerram a formulação do elemento triangular com o emprego do método dos elementos finitos.

A matriz de rigidez, ora em consideração, pode também ser formulada utilizando-se o primeiro membro da família de elementos retangulares, conforme exibe a Fig. 6.2, ao qual é voltada a atenção no que se segue.

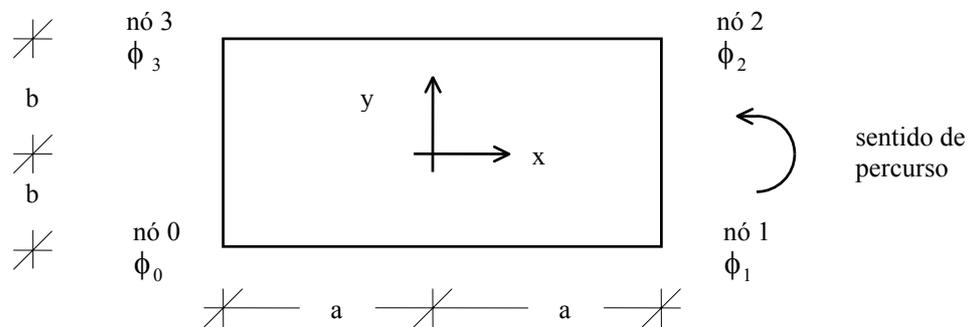


Fig. 6.2 - Elemento retangular para a solução do problema de torção.

Neste caso, a função ϕ no domínio do elemento empregada por BETTESS [1998] para resolver a equação de Laplace, é a dada por :

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \quad (6.14)$$

na qual α_i são os designados parâmetros generalizados. A passagem para parâmetros nodais é imediata, tendo-se em vista que :

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \alpha_1 - \alpha_2 a - \alpha_3 b + \alpha_4 ab \\ \phi_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 a - \alpha_3 b - \alpha_4 ab \\ \phi_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 a + \alpha_3 b + \alpha_4 ab \\ \phi_3 &= \alpha_1 - \alpha_2 a + \alpha_3 b - \alpha_4 ab\end{aligned}\tag{6.15}$$

cuja solução leva a :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{4}(\phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{4a}(-\phi_0 + \phi_1 + \phi_2 - \phi_3) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{4b}(-\phi_0 - \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ \alpha_4 &= \frac{1}{4ab}(\phi_0 - \phi_1 + \phi_2 - \phi_3)\end{aligned}\tag{6.16}$$

que são os parâmetros generalizados, os quais substituídos em (6.14) permitem escrever a expressão da função de torção em termos dos parâmetros nodais, que é a dada por :

$$\phi = \{P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4\} \{\phi_0 \quad \phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3\}^T \tag{6.17}$$

ou ainda em notação vetorial :

$$\phi = \{P\} \{\phi_0 \quad \phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3\}^T \tag{6.18}$$

sendo $\{P\}$ o vetor de forma, cujos elementos P_i são dados, respectivamente, por :

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} \\
P_2 &= \frac{(a+x)(b-y)}{4ab} \\
P_3 &= \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} \\
P_4 &= \frac{(a-x)(b+y)}{4ab}
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Procedendo-se a derivação parcial dos elementos do vetor de forma expressos em (6.19), tem-se (BETTESS [1998]) :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_3}{\partial x} & \frac{\partial P_4}{\partial x} \\ \frac{\partial P_1}{\partial y} & \frac{\partial P_2}{\partial y} & \frac{\partial P_3}{\partial y} & \frac{\partial P_4}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

ou seja :

$$[B] = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} (-b+y) & (b-y) & (b+y) & (-b-y) \\ (-a+x) & (-a-x) & (a+x) & (a-x) \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

sendo as expressões da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais equivalentes as mesmas (6.10) e (6.11), e que integradas analiticamente, admitindo-se G e θ constantes, fornecem :

$$[k] = \frac{1}{3G} \begin{bmatrix} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) & \left(\frac{a}{2b} - \frac{b}{a}\right) & \left(-\frac{a}{2b} - \frac{b}{2a}\right) & \left(-\frac{a}{b} + \frac{b}{2a}\right) \\ & \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) & \left(-\frac{a}{b} + \frac{b}{2a}\right) & \left(-\frac{a}{2b} - \frac{b}{2a}\right) \\ & & \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) & \left(\frac{a}{2b} - \frac{b}{a}\right) \\ \text{Sim.} & & & \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

e também :

$$\{r_e\}^T = \{2ab\theta \quad 2ab\theta \quad 2ab\theta \quad 2ab\theta\} \quad (6.23)$$

encerrando a formulação do elemento retangular através do método dos elementos finitos.

6.3 - Emprego da formulação hermitiana livre na geração da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o problema da torção de Saint-Venant.

Para a determinação da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes na torção livre de elementos estruturais elásticos e homogêneos (torção de Saint-Venant), através da formulação hermitiana livre, é preciso inicialmente, conforme já sinalizado nos capítulos precedentes, descrever-se o problema por meio de relações diferenciais de interesse, o que é providenciado, neste caso, pela clássica equação de Poisson (TIMOSHENKO [1980]) :

$$\phi^{xx} + \phi^{yy} = -2G\theta \quad (6.24)$$

na qual indica-se a dupla derivação parcial ($\partial^2 / \partial x^2$ e $\partial^2 / \partial y^2$) pelas respectivas letras x e y colocadas no expoente da função de tensão.

Procedendo-se a integração de (6.24) ao longo do domínio R constituído pela seção transversal de uma peça estrutural, obtém-se :

$$\iint_R (\phi^{xx} + \phi^{yy}) dx dy = \iint_R (-2G\theta) dx dy \quad (6.25)$$

expressão que, admitindo-se o produto $G\theta$ constante, passa a ser escrita :

$$\iint_R (\phi^{xx} + \phi^{yy}) dx dy = -2G\theta A \quad (6.26)$$

onde A é a área do domínio de integração; sendo possível ainda rebaixar-se a ordem da integração de (6.26) com o emprego do Teorema de Gauss (COURANT [1966]) :

$$\oint_C (\phi^x dy - \phi^y dx) = -2G\theta A \quad (6.27)$$

providência que permite a integração numérica dessa equação no contorno C do elemento, tomando-se as primeiras derivadas da função incógnita ϕ (tensões); porquanto existe interesse em estabelecer-se outra relação diferencial envolvendo, de forma direta, as tensões resultantes e o produto das constantes $G\theta A$.

Tal variante de integração numérica passa a ser utilizada nas formulações que se seguem, tendo-se em mente a pré-fixação de parâmetros livres nos operadores hermitianos; providência fundamental no problema bi-dimensional de torção (desnecessária nos problemas de flexão), empregando-se para tanto os elementos finitos triangulares e os retangulares.

6.3.1 - Formulação da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o problema da torção de Saint-Venant com o elemento triangular.

Considere-se o elemento finito triangular representado na Fig. 6.3, onde ϕ_i são os parâmetros nodais da função de torção a determinar; ϕ^x e ϕ^y as derivadas parciais dessa função, ou sejam as tensões de cisalhamento σ_{xz} e σ_{yz} segundo TIMOSHENKO [1980]; elemento para o qual, admite-se o nó inicial localizado na origem do sistema local de coordenadas cartesianas.

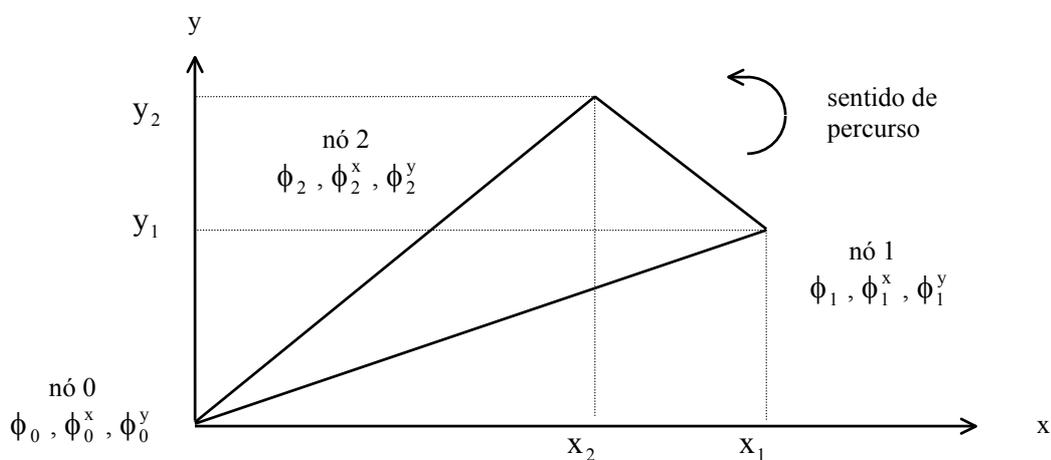


Fig. 6.3 - Elemento triangular para a solução do problema de torção.

Voltando-se a atenção à escolha dos operadores hermitianos, cumpre-se, de princípio, assinalar que a matriz de rigidez à torção vem a ser uma decorrência imediata da relação entre os valores da função de torção nos nós do elemento e os demais parâmetros envolvidos, que assim se expressa :

$$[k] \begin{Bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{2\theta A}{3} \\ \frac{2\theta A}{3} \\ \frac{2\theta A}{3} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6.28)$$

cujo formato está de acordo com as deduções realizadas com o emprego do método dos elementos finitos no item 6.2.

Pois bem, inspecionando-se a expressão (6.28) e a configuração exibida na Fig.6.3, é possível inferir que o conjunto dos operadores hermitianos apropriados para a geração da matriz de rigidez de torção é o dado por :

$$\begin{aligned} a_0\phi_0 + b_0\phi_1 + c_0\phi_2 + a_1\phi_0^x + b_1\phi_0^y + R_1 &= 0 \\ b_0\phi_0 + d_0\phi_1 + e_0\phi_2 + a_2\phi_1^x + b_2\phi_1^y + R_2 &= 0 \quad (6.29) \\ c_0\phi_0 + e_0\phi_1 + f_0\phi_2 + a_3\phi_2^x + b_3\phi_2^y + R_3 &= 0 \end{aligned}$$

onde procurou-se levar em conta um mínimo de parâmetros pivotais (operadores que contemplam somente termos da função e das primeiras derivadas parciais); impondo-se ainda a simetria dos elementos a_0, b_0, c_0, d_0, e_0 e f_0 (matriz de rigidez).

Assim sendo, passa-se à determinação dos parâmetros pertinentes a (6.29), sendo necessário introduzir-se nesse conjunto de operadores hermitianos, de princípio, uma coleção de parâmetros livres (providência adicional em relação aos problemas de flexão) e que permite, conforme sinalizado no item anterior, atribuir-se

à referida coleção de operadores, uma propriedade intrínseca, relacionando-se as tensões atuantes com as demais constantes de torção ($G\theta A$).

Para tanto, procede-se a integração numérica das tensões representadas na Fig.(6.3), empregando-se a regra do trapézio, ou seja :

$$2A \approx (\phi_0^x + \phi_1^x) \frac{y_1}{2} + (\phi_1^x + \phi_2^x) \left(\frac{y_2 - y_1}{2} \right) - (\phi_2^x + \phi_0^x) \frac{y_2}{2} + \quad (6.30)$$

$$- [(\phi_0^y + \phi_1^y) \frac{x_1}{2} - (\phi_1^y + \phi_2^y) \left(\frac{x_1 - x_2}{2} \right) - (\phi_2^y + \phi_0^y) \frac{x_2}{2}]$$

na qual, reunidos os termos comuns, tem-se, à vista de (6.27) :

$$\int \phi^x dy - \phi^y dx \approx -G\theta \left[\frac{y_1 - y_2}{2} \phi_0^x + \frac{-x_1 + x_2}{2} \phi_0^y + \right. \quad (6.31)$$

$$\left. + \frac{y_2}{2} \phi_1^x - \frac{x_2}{2} \phi_1^y + \right.$$

$$\left. - \frac{y_1}{2} \phi_2^x + \frac{x_1}{2} \phi_2^y \right]$$

assim redigida, de modo a mostrar os parâmetros livres a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 e b_3 (multiplicadores das primeiras derivadas da função ϕ) a se introduzir em (6.29).

Prosseguindo-se a determinação dos parâmetros de (6.29), considere-se o primeiro operador hermitiano dessa coleção, já substituídos a_1 e b_1 conforme (6.31), ou seja :

$$a_0 \phi_0 + b_0 \phi_1 + c_0 \phi_2 + \frac{y_1 - y_2}{2} \phi_0^x + \frac{-x_1 + x_2}{2} \phi_0^y + R_1 = 0 \quad (6.32)$$

Os parâmetros restantes a_0, b_0 e c_0 de (6.32), podem ser obtidos com o emprego da variante de COLLATZ [1966] exposta no capítulo 2, procedendo-se as expansões dos termos ϕ_1 e ϕ_2 em séries de Taylor; neste caso para função de duas variáveis, através da expressão dada por (PISKUNOV [1969]) :

$$\begin{aligned}
f(x, y) = & f(0,0) + f^x(0,0)\Delta x + f^y(0,0)\Delta y + \frac{f^{xx}(0,0)\Delta x^2}{2} + \\
& + f^{xy}(0,0)\Delta x\Delta y + \frac{f^{yy}(0,0)\Delta y^2}{2} + \frac{f^{xxx}(0,0)\Delta x^3}{6} + \\
& + \frac{f^{xxx}(0,0)\Delta x^3}{6} + \frac{f^{xxy}(0,0)\Delta x^2\Delta y}{2} + \frac{f^{xyy}(0,0)\Delta x\Delta y^2}{2} + \\
& + \frac{f^{yyy}(0,0)\Delta y^3}{6} + \frac{f^{xxxx}(0,0)\Delta x^4}{24} + \frac{f^{xxxxy}(0,0)\Delta x^3\Delta y}{6} + \dots
\end{aligned}
\tag{6.33}$$

que consiste no desenvolvimento centrado no ponto $f(0,0)$ do sistema de coordenadas cartesianas, que resulta em :

$$\begin{aligned}
\phi_1 = & [\phi_0 + \phi_0^x x_1 + \phi_0^y y_1 + \phi_0^{xx} \frac{x_1^2}{2} + \phi_0^{xy} x_1 y_1 + \phi_0^{yy} \frac{y_1^2}{2} + \phi_0^{xxx} \frac{x_1^3}{6} + \\
& + \phi_0^{xxy} \frac{x_1^2 y_1}{2} + \phi_0^{xyy} \frac{x_1 y_1^2}{2} + \phi_0^{yyy} \frac{y_1^3}{6} + \phi_0^{xxxx} \frac{x_1^4}{24} + \dots]
\end{aligned}
\tag{6.34}$$

e também :

$$\begin{aligned}
\phi_2 = & [\phi_0 + \phi_0^x x_2 + \phi_0^y y_2 + \phi_0^{xx} \frac{x_2^2}{2} + \phi_0^{xy} x_2 y_2 + \phi_0^{yy} \frac{y_2^2}{2} + \phi_0^{xxx} \frac{x_2^3}{6} + \\
& + \phi_0^{xxy} \frac{x_2^2 y_2}{2} + \phi_0^{xyy} \frac{x_2 y_2^2}{2} + \phi_0^{yyy} \frac{y_2^3}{6} + \phi_0^{xxxx} \frac{x_2^4}{24} + \dots]
\end{aligned}
\tag{6.35}$$

Substituindo-se (6.34) e (6.35) em (6.32), omitidas as parcelas em Δ^4 (produto dos expoentes de x e y das séries de Taylor), e ainda, reunidos os termos comuns, tem-se :

$$\begin{aligned}
& \phi_0 \quad [a_0 + b_0 + c_0 + 0] + \\
& + \phi_0^x \quad [0 + b_0 x_1 + c_0 x_2 + \frac{y_1 - y_2}{2}] + \\
& + \phi_0^y \quad [0 + b_0 y_1 + c_0 y_2 + \frac{-x_1 + x_2}{2}] + \\
& + \phi_0^{xx} \quad [0 + b_0 \frac{x_1^2}{2} + c_0 \frac{x_2^2}{2} + 0] + \\
& + \phi_0^{xy} \quad [0 + b_0 x_1 y_1 + c_0 x_2 y_2 + 0] + \\
& + \phi_0^{yy} \quad [0 + b_0 \frac{y_1^2}{2} + c_0 \frac{y_2^2}{2} + 0] + \\
& + \phi_0^{xxx} \quad [0 + b_0 \frac{x_1^3}{6} + c_0 \frac{x_2^3}{6} + 0] + \\
& + \phi_0^{xxy} \quad [0 + b_0 \frac{x_1^2 y_1}{2} + c_0 \frac{x_2^2 y_2}{2} + 0] + \\
& + \phi_0^{xyy} \quad [0 + b_0 \frac{x_1 y_1^2}{2} + c_0 \frac{x_2 y_2^2}{2} + 0] + \\
& + \phi_0^{yyy} \quad [0 + b_0 \frac{y_1^3}{6} + c_0 \frac{y_2^3}{6} + 0] + \dots = 0
\end{aligned} \tag{6.36}$$

faltando-se ainda a determinação de $a_0, b_0,$ e $c_0,$ o que é feito procurando-se anular as potências mais altas possíveis em x e y (produto dos expoentes de x e y).

Para a geração do segundo operador hermitiano, faz-se a substituição dos parâmetros livres a_2 e b_2 dados por (6.31) em (6.29), ou seja :

$$b_0 \phi_0 + d_0 \phi_1 + e_0 \phi_2 + \frac{y_2}{2} \phi_1^x - \frac{x_2}{2} \phi_1^y + R_2 = 0 \tag{6.37}$$

onde a diferença em relação ao primeiro operador (6.32) está no desenvolvimento dos termos ϕ_1^x e ϕ_1^y em séries de Taylor, que levam a (PISKUNOV [1969]) :

$$\phi_1^x = [\phi_0^x + \phi_0^{xx} x_1 + \phi_0^{xy} y_1 + \phi_0^{xxx} \frac{x_1^2}{2} + \phi_0^{xxy} x_1 y_1 + \phi_0^{xyy} \frac{y_1^2}{2} + \dots] \tag{6.38}$$

$$\phi_1^y = [\phi_0^y + \phi_0^{yx} x_1 + \phi_0^{yy} y_1 + \phi_0^{yxx} \frac{x_1^2}{2} + \phi_0^{yxy} x_1 y_1 + \phi_0^{yyy} \frac{y_1^2}{2} + \dots]$$

já omitidas as parcelas em Δ^4 ; desenvolvimentos que substituídos em (6.37), com a posterior reunião dos termos comuns, fornece :

$$\begin{aligned}
& \phi_0 \quad [b_0 + d_0 + e_0 + 0] + \\
& + \phi_0^x \quad [0 + d_0 x_1 + e_0 x_2 + \frac{y_2}{2}] + \\
& + \phi_0^y \quad [0 + d_0 y_1 + e_0 y_2 + -\frac{x_2}{2}] + \\
& + \phi_0^{xx} \quad [0 + d_0 \frac{x_1^2}{2} + e_0 x_2^2 / 2 + \frac{x_1 y_2}{2}] + \\
& + \phi_0^{xy} \quad [0 + d_0 x_1 y_1 + e_0 x_2 y_2 + \frac{y_1 y_2}{2} - \frac{x_1 x_2}{2}] + \\
& + \phi_0^{yy} \quad [0 + d_0 \frac{y_1^2}{2} + e_0 \frac{y_2^2}{2} + -\frac{x_2 y_1}{2}] + \\
& + \phi_0^{xxx} \quad [0 + d_0 \frac{x_1^3}{6} + e_0 \frac{x_2^3}{6} + \frac{x_1^2 y_2}{4}] + \\
& + \phi_0^{xxy} \quad [0 + d_0 \frac{x_1^2 y_1}{2} + e_0 \frac{x_2^2 y_2}{2} + \frac{x_1 y_1 y_2}{2} - \frac{x_1^2 x_2}{4}] + \\
& + \phi_0^{xyy} \quad [0 + d_0 \frac{x_1 y_1^2}{2} + e_0 \frac{x_2 y_2^2}{2} + \frac{y_1^2 y_2}{4} - \frac{x_1 x_2 y_1}{2}] + \\
& + \phi_0^{yyy} \quad [0 + d_0 \frac{y_1^3}{6} + e_0 \frac{y_2^3}{6} + -\frac{x_2 y_1^2}{4}] + \dots = 0
\end{aligned}
\tag{6.39}$$

onde a eliminação do produto das potências mais altas possíveis de x e y, permite a determinação dos parâmetros b_0 , d_0 e e_0 .

Finalmente, obtém-se o terceiro operador hermitiano do conjunto (6.29) providenciando-se a substituição dos parâmetros livres a_3 e b_3 dados por (6.31) em sua expressão, ou seja :

$$c_0 \phi_0 + e_0 \phi_1 + f_0 \phi_2 - \frac{y_1}{2} \phi_2^x + \frac{x_1}{2} \phi_2^y + R_3 = 0
\tag{6.40}$$

para em seguida desenvolver-se os termos ϕ_2^x e ϕ_2^y em séries de Taylor que fornecem (PISKUNOV [1969]) :

$$\phi_2^x = [\phi_0^x + \phi_0^{xx} x_2 + \phi_0^{xy} y_2 + \phi_0^{xxx} \frac{x_2^2}{2} + \phi_0^{xxy} x_2 y_2 + \phi_0^{xyy} \frac{y_2^2}{2} + \dots]$$

$$\phi_2^y = [\phi_0^y + \phi_0^{yx} x_2 + \phi_0^{yy} y_2 + \phi_0^{yxx} \frac{x_2^2}{2} + \phi_0^{yxy} x_2 y_2 + \phi_0^{yyy} \frac{y_2^2}{2} + \dots]$$

(6.41)

os quais, substituídos em (6.40) e de acordo com a seqüência já realizada para os dois operadores precedentes, leva a :

$$\begin{aligned} & \phi_0 [c_0 + e_0 + f_0 + 0] + \\ & + \phi_0^x [0 + e_0 x_1 + f_0 x_2 - \frac{y_1}{2}] + \\ & + \phi_0^y [0 + e_0 y_1 + f_0 y_2 + \frac{x_1}{2}] + \\ & + \phi_0^{xx} [0 + e_0 \frac{x_1^2}{2} + f_0 \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2 y_1}{2}] + \\ & + \phi_0^{xy} [0 + e_0 x_1 y_1 + f_0 x_2 y_2 + (\frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{2})] + \\ & + \phi_0^{yy} [0 + e_0 \frac{y_1^2}{2} + f_0 \frac{y_2^2}{2} + \frac{x_1 y_2}{2}] + \\ & + \phi_0^{xxx} [0 + e_0 \frac{x_1^3}{6} + f_0 \frac{x_2^3}{6} - \frac{x_2^2 y_1}{4}] + \\ & + \phi_0^{xxy} [0 + e_0 \frac{x_1^2 y_1}{2} + f_0 \frac{x_2^2 y_2}{2} + \frac{-x_2 y_1 y_2 + x_1 x_2^2}{2} + \frac{x_1 x_2^2}{4}] + \\ & + \phi_0^{xyy} [0 + e_0 \frac{x_1 y_1^2}{2} + f_0 \frac{x_2 y_2^2}{2} + \frac{-y_1 y_2^2 + x_1 x_2 y_2}{4} + \frac{x_1 x_2 y_2}{2}] + \\ & + \phi_0^{yyy} [0 + e_0 \frac{y_1^3}{6} + f_0 \frac{y_2^3}{6} + \frac{x_2 y_2^2}{4}] + \dots = 0 \end{aligned}$$

(6.42)

de onde é possível determinar-se as constantes c_0 , e_0 e f_0 .

Pois bem, anulando-se os termos de primeira ordem (correspondentes a ϕ_0 , ϕ_0^x , e ϕ_0^y) em (6.36), (6.39) e (6.42), tem-se, respectivamente, em notação matricial :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{c}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{y_1 - y_2}{2} \\ \frac{-x_1 + x_2}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{e}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{y_2}{2} \\ \frac{-x_2}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.43)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{f}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{-y_1}{2} \\ \frac{x_1}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cujas soluções resultam :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2(x_2 y_1 - x_1 y_2)} & \mathbf{b}_0 &= \frac{x_1 x_2 - x_2^2 + y_1 y_2 - y_2^2}{2(x_2 y_1 - x_1 y_2)} \\ \mathbf{c}_0 &= \frac{x_1 x_2 - x_1^2 + y_1 y_2 - y_1^2}{2(x_2 y_1 - x_1 y_2)} & \mathbf{d}_0 &= \frac{x_2^2 + y_2^2}{2(x_2 y_1 - x_1 y_2)} \\ \mathbf{e}_0 &= \frac{-(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{2(x_2 y_1 - x_1 y_2)} & \mathbf{f}_0 &= \frac{x_1^2 + y_1^2}{2(x_2 y_1 - x_1 y_2)} \end{aligned} \quad (6.44)$$

sendo os valores dos elementos da matriz de rigidez de torção, a menos da constante G , idênticos aos gerados com o emprego do método dos elementos finitos, mostrados em (6.12).

O restos em (6.29), que consistem nas parcelas que não foram passíveis de anulação em (6.36), (6.39) e (6.42), são respectivamente :

$$\begin{aligned} R_1 = & \phi_0^{xx} [b_0 \frac{x_1^2}{2} + c_0 \frac{x_2^2}{2}] + \phi_0^{xy} [b_0 x_1 y_1 + c_0 x_2 y_2] + \phi_0^{yy} [b_0 \frac{y_1^2}{2} + c_0 \frac{y_2^2}{2}] + \\ & + \phi_0^{xxx} [b_0 \frac{x_1^3}{6} + c_0 \frac{x_2^3}{6}] + \phi_0^{xyy} [b_0 \frac{x_1^2 y_1}{2} + c_0 \frac{x_2^2 y_2}{2}] + \\ & + \phi_0^{xyy} [b_0 \frac{x_1 y_1^2}{2} + c_0 \frac{x_2 y_2^2}{2}] + \phi_0^{yyy} [b_0 \frac{y_1^3}{6} + c_0 \frac{y_2^3}{6}] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 = & \phi_0^{xx} [d_0 \frac{x_1^2}{2} + e_0 \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1 y_2}{2}] + \phi_0^{xy} [d_0 x_1 y_1 + e_0 x_2 y_2 + \frac{y_1 y_2}{2} - \frac{x_1 x_2}{2}] + \\ & + \phi_0^{yy} [d_0 \frac{y_1^2}{2} + e_0 \frac{y_2^2}{2} - \frac{x_2 y_1}{2}] + \phi_0^{xxx} [d_0 \frac{x_1^3}{6} + e_0 \frac{x_2^3}{6} + \frac{x_1^2 y_2}{4}] + \\ & + \phi_0^{xyy} [d_0 \frac{x_1^2 y_1}{2} + e_0 \frac{x_2^2 y_2}{2} + \frac{x_1 y_1 y_2}{2} - \frac{x_1^2 x_2}{4}] + \\ & + \phi_0^{xyy} [d_0 \frac{x_1 y_1^2}{2} + e_0 \frac{x_2 y_2^2}{2} + \frac{y_1^2 y_2}{4} - \frac{x_1 x_2 y_1}{2}] + \\ & + \phi_0^{yyy} [d_0 \frac{y_1^3}{6} + e_0 \frac{y_2^3}{6} - \frac{x_2 y_1^2}{4}] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3 = & \phi_0^{xx} [e_0 \frac{x_1^2}{2} + f_0 \frac{x_2^2}{2} - \frac{y_1}{2} x_2] + \phi_0^{xy} [e_0 x_1 y_1 + f_0 x_2 y_2 - \frac{y_1 y_2}{2} + \frac{x_1 x_2}{2}] + \\ & + \phi_0^{yy} [e_0 \frac{y_1^2}{2} + f_0 \frac{y_2^2}{2} + \frac{x_1 y_2}{2}] + \phi_0^{xxx} [e_0 \frac{x_1^3}{6} + f_0 \frac{x_2^3}{6} - \frac{x_2^2 y_1}{4}] + \\ & + \phi_0^{xyy} [e_0 \frac{x_1^2 y_1}{2} + f_0 \frac{x_2^2 y_2}{2} - \frac{x_2 y_1 y_2}{2} + \frac{x_1 x_2^2}{4}] + \\ & + \phi_0^{xyy} [e_0 \frac{x_1 y_1^2}{2} + f_0 \frac{x_2 y_2^2}{2} - \frac{y_1 y_2^2}{4} + \frac{x_1 x_2 y_2}{2}] + \\ & + \phi_0^{yyy} [e_0 \frac{y_1^3}{6} + f_0 \frac{y_2^3}{6} + \frac{x_2 y_2^2}{4}] + \dots \end{aligned}$$

(6.45)

cuja soma vem a ser o erro R_0 no ponto origem do elemento. Substituidos os elementos da matriz de rigidez (6.44) em (6.45) resulta :

$$\begin{aligned}
 R_1 + R_2 + R_3 = & [\phi_0^{xx} + \phi_0^{yy}] \left[\frac{-x_2 y_1 + x_1 y_2}{2} \right] + \\
 & + \phi_0^{xxx} \left[\frac{-x_2^2 y_1 + x_1^2 y_2}{4} \right] + \phi_0^{xxy} \left[\frac{(-x_1 + x_2)(x_1 x_2 - 2y_1 y_2)}{4} \right] + \\
 & + \phi_0^{xyy} \left[\frac{(-y_1 + y_2)(2x_1 x_2 - y_1 y_2)}{4} \right] + \phi_0^{yyy} \left[\frac{-x_2 y_1^2 + x_1 y_2^2}{4} \right] + \dots
 \end{aligned}
 \tag{6.46}$$

ou, à vista de (6.24) e cálculo analítico da área do elemento, assim se expressa :

$$\begin{aligned}
 R_1 + R_2 + R_3 = & -2G\theta A + \\
 & + \phi_0^{xxx} \left[\frac{-x_2^2 y_1 + x_1^2 y_2}{4} \right] + \phi_0^{xxy} \left[\frac{(-x_1 + x_2)(x_1 x_2 - 2y_1 y_2)}{4} \right] + \\
 & + \phi_0^{xyy} \left[\frac{(-y_1 + y_2)(2x_1 x_2 - y_1 y_2)}{4} \right] + \phi_0^{yyy} \left[\frac{-x_2 y_1^2 + x_1 y_2^2}{4} \right] + \dots
 \end{aligned}
 \tag{6.47}$$

ou ainda, distribuindo-se o primeiro termo de (6.47) nos três operadores, permite nova redação a (6.29), em notação matricial :

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ b_0 & d_0 & e_0 \\ c_0 & e_0 & f_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{y_1 - y_2}{2} \phi_0^x + \frac{-x_1 + x_2}{2} \phi_0^y \\ \frac{y_2}{2} \phi_1^x + \frac{-x_2}{2} \phi_1^y \\ \frac{-y_1}{2} \phi_2^x + \frac{x_1}{2} \phi_2^y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{2G\theta A}{3} \\ \frac{2G\theta A}{3} \\ \frac{2G\theta A}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \tag{6.48}$$

onde :

$$\begin{aligned}
R_0 = & \phi_0^{xxx} \left[\frac{-x_2^2 y_1 + x_1^2 y_2}{4} \right] + \phi_0^{xyy} \left[\frac{(-x_1 + x_2)(x_1 x_2 - 2y_1 y_2)}{4} \right] + \\
& + \phi_0^{xyy} \left[\frac{(-y_1 + y_2)(2x_1 x_2 - y_1 y_2)}{4} \right] + \phi_0^{yyy} \left[\frac{-x_2 y_1^2 + x_1 y_2^2}{4} \right] + \dots
\end{aligned}$$

(6.49)

tratando-se de um operador hermitiano de ordem 0 (Δ^3), conforme (6.49) está a indicar, sendo a matriz de rigidez e vetor dos carregamentos nodais coincidentes com os obtidos pelo método dos elementos finitos (veja-se (6.12) e (6.13)), com a vantagem de informar o erro de aproximação, parâmetro inexistente naquela formulação.

É importante ressaltar neste estudo que ora se encerra, da inexistência de manobras algébricas para a inversão de matrizes de flexibilidade (obrigatórias nos problemas de flexão), sendo neste caso, a introdução dos parâmetros (6.31) nos operadores, suficiente para obter-se a matriz de rigidez com simetria, fato que não ocorre de forma imediata em outros tipos de elementos finitos (por exemplo no triângulo quadrático), conforme mostraram formulações realizadas pelo autor, em continuidade desta pesquisa.

No que se segue, emprega-se a formulação hermitiana livre para a geração da matriz de rigidez de um elemento retangular, tendo-se em mente o propósito de investigar as providências a serem adotadas no estudo de elementos com maior número de pontos nodais, para os quais, ao que tudo indica, não são possíveis de se obter de modo imediato, resultados idênticos aos proporcionados pelo método dos elementos finitos.

6.3.2 - Formulação da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes para o problema da torção de Saint-Venant com o elemento retangular.

Considere-se o elemento finito retangular conforme exhibe a Fig. 6.4, onde ϕ_i são os valores da função de torção, ϕ^x e ϕ^y as derivadas parciais dessa função (tensões) nos correspondentes nós do elemento; para o qual pretende-se determinar a matriz de rigidez, com o emprego da formulação hermitiana livre.

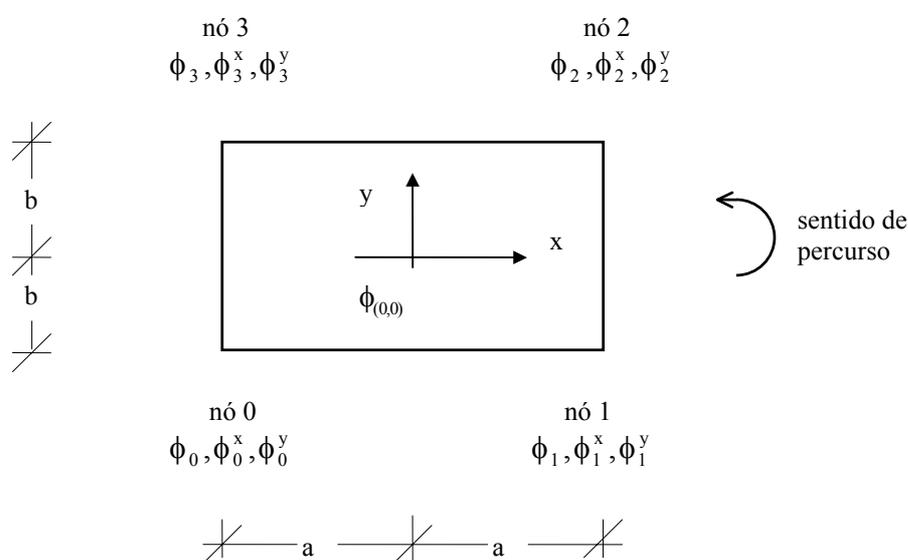


Fig. 6.4 - Elemento retangular para a solução do problema de torção.

Voltando-se a atenção para a escolha dos operadores necessários à formulação desse novo elemento, basta ter-se em mente as considerações feitas nos item 6.3 e 6.3.1; de onde se depreende que o conjunto ora a empregar é o dado por :

$$\begin{aligned}
 a_0 \phi_0 + b_0 \phi_1 + c_0 \phi_2 + d_0 \phi_3 + a_1 \phi_0^x + b_1 \phi_0^y + R_1 &= 0 \\
 b_0 \phi_0 + e_0 \phi_1 + f_0 \phi_2 + g_0 \phi_3 + a_2 \phi_1^x + b_2 \phi_1^y + R_2 &= 0 \\
 c_0 \phi_0 + f_0 \phi_1 + h_0 \phi_2 + i_0 \phi_3 + a_3 \phi_2^x + b_3 \phi_2^y + R_3 &= 0 \\
 d_0 \phi_0 + g_0 \phi_1 + i_0 \phi_2 + j_0 \phi_3 + a_4 \phi_3^x + b_4 \phi_3^y + R_4 &= 0
 \end{aligned}$$

(6.50)

onde acrescenta-se um nó em relação a (6.29), contemplando, a exemplo do elemento triangular, somente termos da função e das primeiras derivadas.

Pois bem, na determinação dos parâmetros pertinentes a (6.50), conforme sinalizado no item anterior, as constantes $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4$ e b_4 , devem ser providenciadas a priori, levando-se em conta a integral numérica das tensões exibidas na Fig. 6.4 (derivadas parciais). Para tanto emprega-se a regra do trapézio, pois a existência de dois pontos nodais em cada lado do retângulo impede a escolha de algoritmo de maior precisão, ou seja :

$$2A \approx \left\{ \frac{\phi_1^x + \phi_2^x}{2} 2b - \frac{\phi_3^x + \phi_0^x}{2} 2b - \left[\frac{\phi_0^y + \phi_1^y}{2} 2a - \frac{\phi_2^y + \phi_3^y}{2} 2a \right] \right\} \quad (6.51)$$

Reunidos os termos comuns de (6.51), tendo em vista (6.27), tem-se :

$$\begin{aligned} \int \phi^x dy - \phi^y dx \approx & -G\theta[\phi_0^x(-b) + \phi_0^y(-a) + \\ & + \phi_1^x(b) + \phi_1^y(-a) + \\ & + \phi_2^x(b) + \phi_2^y(a) + \\ & + \phi_3^x(-b) + \phi_3^y(a) + \dots] \end{aligned} \quad (6.52)$$

expressão da qual originam-se os parâmetros livres multiplicadores das primeiras derivadas dos operadores (6.50), quais sejam :

$$\begin{aligned} a_0 \phi_0 + b_0 \phi_1 + c_0 \phi_2 + d_0 \phi_3 - b \phi_0^x - a \phi_0^y + R_1 &= 0 \\ b_0 \phi_0 + e_0 \phi_1 + f_0 \phi_2 + g_0 \phi_3 + b \phi_1^x - a \phi_1^y + R_2 &= 0 \\ c_0 \phi_0 + f_0 \phi_1 + h_0 \phi_2 + i_0 \phi_3 + b \phi_2^x + a \phi_2^y + R_3 &= 0 \\ d_0 \phi_0 + g_0 \phi_1 + i_0 \phi_2 + j_0 \phi_3 - b \phi_3^x + a \phi_3^y + R_4 &= 0 \end{aligned}$$

(6.53)

onde os elementos da matriz de rigidez podem ser determinados com o emprego da variante de COLLATZ [1966], de modo a minimizar o erro local pertinente a cada um dos operadores.

Para tanto, desenvolvem-se os termos da função de torção referidos aos nós do elemento retangular pertencentes a (6.53) com o emprego de séries de Taylor centradas em $\phi_{(0,0)}$, que levam a (PISKUNOV [1969]) :

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \phi_{00} + \phi_{00}^x(-a) + \phi_{00}^y(-b) + \phi_{00}^{xx}\left(\frac{a^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xy}(ab) + \phi_{00}^{yy}\left(\frac{b^2}{2}\right) + \dots \\ \phi_1 &= \phi_{00} + \phi_{00}^x(a) + \phi_{00}^y(-b) + \phi_{00}^{xx}\left(\frac{a^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xy}(-ab) + \phi_{00}^{yy}\left(\frac{b^2}{2}\right) + \dots \quad (6.54) \\ \phi_2 &= \phi_{00} + \phi_{00}^x(a) + \phi_{00}^y(b) + \phi_{00}^{xx}\left(\frac{a^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xy}(ab) + \phi_{00}^{yy}\left(\frac{b^2}{2}\right) + \dots \\ \phi_3 &= \phi_{00} + \phi_{00}^x(-a) + \phi_{00}^y(b) + \phi_{00}^{xx}\left(\frac{a^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xy}(-ab) + \phi_{00}^{yy}\left(\frac{b^2}{2}\right) + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_0^x &= \phi_{00}^x + \phi_{00}^{xx}(-a) + \phi_{00}^{xy}(-b) + \phi_{00}^{xxx}\left(\frac{a^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xxy}(ab) + \phi_{00}^{xyy}\left(\frac{b^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xxxx}\left(-\frac{a^3}{6}\right) + \dots \quad (6.55) \\ \phi_0^y &= \phi_{00}^y + \phi_{00}^{xy}(-a) + \phi_{00}^{yy}(-b) + \phi_{00}^{xxy}\left(\frac{a^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xyy}(ab) + \phi_{00}^{yyy}\left(\frac{b^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xyxy}\left(-\frac{a^3}{6}\right) + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1^x &= \phi_{00}^x + \phi_{00}^{xx}(a) + \phi_{00}^{xy}(-b) + \phi_{00}^{xxx}\left(\frac{a^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xxy}(-ab) + \phi_{00}^{xyy}\left(\frac{b^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xxxx}\left(\frac{a^3}{6}\right) + \dots \quad (6.56) \\ \phi_1^y &= \phi_{00}^y + \phi_{00}^{xy}(a) + \phi_{00}^{yy}(-b) + \phi_{00}^{xxy}\left(\frac{a^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xyy}(-ab) + \phi_{00}^{yyy}\left(\frac{b^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xyxy}\left(\frac{a^3}{6}\right) + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2^x &= \phi_{00}^x + \phi_{00}^{xx}(a) + \phi_{00}^{xy}(b) + \phi_{00}^{xxx}\left(\frac{a^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xxy}(ab) + \phi_{00}^{xyy}\left(\frac{b^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xxxx}\left(\frac{a^3}{6}\right) + \dots \quad (6.57) \\ \phi_2^y &= \phi_{00}^y + \phi_{00}^{xy}(a) + \phi_{00}^{yy}(b) + \phi_{00}^{xxy}\left(\frac{a^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xyy}(ab) + \phi_{00}^{yyy}\left(\frac{b^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xyxy}\left(\frac{a^3}{6}\right) + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_3^x &= \phi_{00}^x + \phi_{00}^{xx}(-a) + \phi_{00}^{xy}(b) + \phi_{00}^{xxx}\left(\frac{a^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xxy}(-ab) + \phi_{00}^{xyy}\left(\frac{b^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xxxx}\left(-\frac{a^3}{6}\right) + \dots \quad (6.58) \\ \phi_3^y &= \phi_{00}^y + \phi_{00}^{xy}(-a) + \phi_{00}^{yy}(b) + \phi_{00}^{xxy}\left(\frac{a^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xyy}(-ab) + \phi_{00}^{yyy}\left(\frac{b^2}{2}\right) + \phi_{00}^{xyxy}\left(-\frac{a^3}{6}\right) + \dots\end{aligned}$$

Em prosseguimento, passa-se à geração do primeiro operador hermitiano da torção livre (Saint-Venant), substituindo-se (6.54) e (6.55) na primeira linha de (6.53) e agrupando-se os termos comuns, providência que leva a :

$$\begin{aligned}
& \phi_{00} [a_0 + b_0 + c_0 + d_0 + 0] + \\
& + \phi_{00}^x [(-a)a_0 + (a)b_0 + (a)c_0 + (-a)d_0 + (-b)] + \\
& + \phi_{00}^y [(-b)a_0 + (-b)b_0 + (b)c_0 + (b)d_0 + (a)] + \\
& + \phi_{00}^{xx} [\left(\frac{a^2}{2}\right)a_0 + \left(\frac{a^2}{2}\right)b_0 + \left(\frac{a^2}{2}\right)c_0 + \left(\frac{a^2}{2}\right)d_0 + (ab)] + \\
& + \phi_{00}^{xy} [(ab)a_0 + (-ab)b_0 + (ab)c_0 + (-ab)d_0 + (a^2 + b^2)] + \\
& + \phi_{00}^{yy} [\left(\frac{b^2}{2}\right)a_0 + \left(\frac{b^2}{2}\right)b_0 + \left(\frac{b^2}{2}\right)c_0 + \left(\frac{b^2}{2}\right)d_0 + (ab)] + \\
& + \phi_{00}^{xxx} [\left(-\frac{a^3}{6}\right)a_0 + \left(\frac{a^3}{6}\right)b_0 + \left(\frac{a^3}{6}\right)c_0 + \left(-\frac{a^3}{6}\right)d_0 + \left(-\frac{a^2b}{2}\right)] + \\
& + \phi_{00}^{xxy} [\left(-\frac{a^2b}{2}\right)a_0 + \left(-\frac{a^2b}{2}\right)b_0 + \left(\frac{a^2b}{2}\right)c_0 + \left(\frac{a^2b}{2}\right)d_0 + \left(-ab^2 - \frac{a^3}{2}\right)] + \\
& + \phi_{00}^{xyy} [\left(-\frac{ab^2}{2}\right)a_0 + \left(\frac{ab^2}{2}\right)b_0 + \left(\frac{ab^2}{2}\right)c_0 + \left(-\frac{ab^2}{2}\right)d_0 + \left(-\frac{b^3}{2} - a^2b\right)] + \\
& + \phi_{00}^{yyy} [\left(-\frac{b^3}{6}\right)a_0 + \left(-\frac{b^3}{6}\right)b_0 + \left(\frac{b^3}{6}\right)c_0 + \left(\frac{b^3}{6}\right)d_0 + \left(-\frac{ab^2}{2}\right)] + \\
& + \phi_{00}^{xxxx} [\left(\frac{a^4}{24}\right)a_0 + \left(\frac{a^4}{24}\right)b_0 + \left(\frac{a^4}{24}\right)c_0 + \left(\frac{a^4}{24}\right)d_0 + \left(\frac{a^3b}{6}\right)] + \\
& + \phi_{00}^{xxxxy} [\left(\frac{a^3b}{6}\right)a_0 + \left(-\frac{a^3b}{6}\right)b_0 + \left(\frac{a^3b}{6}\right)c_0 + \left(-\frac{a^3b}{6}\right)d_0 + \left(\frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^4}{6}\right)] + \\
& + \phi_{00}^{xxyyy} [\left(\frac{a^2b^2}{4}\right)a_0 + \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)b_0 + \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)c_0 + \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)d_0 + \left(\frac{ab^3}{2} + \frac{a^3b}{2}\right)] + \\
& + \phi_{00}^{xyyyy} [\left(\frac{ab^3}{6}\right)a_0 + \left(-\frac{ab^3}{6}\right)b_0 + \left(\frac{ab^3}{6}\right)c_0 + \left(-\frac{ab^3}{6}\right)d_0 + \left(\frac{b^4}{6} + \frac{a^2b^2}{2}\right)] + \\
& + \phi_{00}^{yyyyy} [\left(\frac{b^4}{24}\right)a_0 + \left(\frac{b^4}{24}\right)b_0 + \left(\frac{b^4}{24}\right)c_0 + \left(\frac{b^4}{24}\right)d_0 + \left(\frac{ab^3}{6}\right)] + \dots = 0
\end{aligned} \tag{6.59}$$

Pois bem, anulando-se os termos em ϕ_{00} , ϕ_{00}^x , ϕ_{00}^y e ϕ_{00}^{xy} de (6.59), resulta (COLLATZ [1966]) :

$$a_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \quad b_0 = \left(\frac{b}{4a} \right) \quad c_0 = 0 \quad d_0 = \left(\frac{a}{4b} \right) \tag{6.60}$$

que são os elementos da primeira linha da matriz de rigidez, obtidos de forma direta, sem a necessidade de manipulações algébricas (obrigatórias nos problemas de flexão).

Para a geração do segundo operador hermitiano da torção, substituem-se (6.54) e (6.56) na segunda linha de (6.53), que resulta, após organização dos termos comuns :

$$\begin{aligned}
& \phi_{00} [\quad b_0 \quad + \quad e_0 \quad + \quad f_0 \quad + \quad g_0 \quad + \quad 0 \quad] \quad + \\
& + \phi_{00}^x [\quad (-a)b_0 \quad + \quad (a)e_0 \quad + \quad (a)f_0 \quad + \quad (-a)g_0 \quad + \quad (b) \quad] \quad + \\
& + \phi_{00}^y [\quad (-b)b_0 \quad + \quad (-b)e_0 \quad + \quad (b)f_0 \quad + \quad (b)g_0 \quad + \quad (-a) \quad] \quad + \\
& + \phi_{00}^{xx} [\quad \left(\frac{a^2}{2}\right)b_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2}{2}\right)e_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2}{2}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2}{2}\right)g_0 \quad + \quad (ab) \quad] \quad + \\
& + \phi_{00}^{xy} [\quad (ab)b_0 \quad + \quad (-ab)e_0 \quad + \quad (ab)f_0 \quad + \quad (-ab)g_0 \quad + \quad (-a^2 - b^2) \quad] \quad + \\
& + \phi_{00}^{yy} [\quad \left(\frac{b^2}{2}\right)b_0 \quad + \quad \left(\frac{b^2}{2}\right)e_0 \quad + \quad \left(\frac{b^2}{2}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{b^2}{2}\right)g_0 \quad + \quad (ab) \quad] \quad + \\
& + \phi_{00}^{xxx} [\quad \left(-\frac{a^3}{6}\right)b_0 \quad + \quad \left(\frac{a^3}{6}\right)e_0 \quad + \quad \left(\frac{a^3}{6}\right)f_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^3}{6}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b}{2}\right) \quad] \quad + \\
& + \phi_{00}^{xxy} [\quad \left(-\frac{a^2b}{2}\right)b_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^2b}{2}\right)e_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b}{2}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b}{2}\right)g_0 \quad + \quad \left(-ab^2 - \frac{a^3}{2}\right) \quad] \quad + \\
& + \phi_{00}^{xyy} [\quad \left(-\frac{ab^2}{2}\right)b_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^2}{2}\right)e_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^2}{2}\right)f_0 \quad + \quad \left(-\frac{ab^2}{2}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{b^3}{2} + a^2b\right) \quad] \quad + \\
& + \phi_{00}^{yyy} [\quad \left(-\frac{b^3}{6}\right)b_0 \quad + \quad \left(-\frac{b^3}{6}\right)e_0 \quad + \quad \left(\frac{b^3}{6}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{b^3}{6}\right)g_0 \quad + \quad \left(-\frac{ab^2}{2}\right) \quad] \quad + \\
& + \phi_{00}^{xxxx} [\quad \left(\frac{a^4}{24}\right)b_0 \quad + \quad \left(\frac{a^4}{24}\right)e_0 \quad + \quad \left(\frac{a^4}{24}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{a^4}{24}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{a^3b}{6}\right) \quad] \quad + \\
& + \phi_{00}^{xxxxy} [\quad \left(\frac{a^3b}{6}\right)b_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^3b}{6}\right)e_0 \quad + \quad \left(\frac{a^3b}{6}\right)f_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^3b}{6}\right)g_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^2b^2}{2} - \frac{a^4}{6}\right) \quad] \quad + \\
& + \phi_{00}^{xxyy} [\quad \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)b_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)e_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^3}{2} + \frac{a^3b}{2}\right) \quad] \quad + \\
& + \phi_{00}^{xyyy} [\quad \left(\frac{ab^3}{6}\right)b_0 \quad + \quad \left(-\frac{ab^3}{6}\right)e_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^3}{6}\right)f_0 \quad + \quad \left(-\frac{ab^3}{6}\right)g_0 \quad + \quad \left(-\frac{b^4}{6} - \frac{a^2b^2}{2}\right) \quad] \quad + \\
& + \phi_{00}^{yyyy} [\quad \left(\frac{b^4}{24}\right)b_0 \quad + \quad \left(\frac{b^4}{24}\right)e_0 \quad + \quad \left(\frac{b^4}{24}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{b^4}{24}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^3}{6}\right) \quad] \quad + \dots = 0
\end{aligned}$$

(6.61)

onde a anulação dos termos em ϕ_{00} , ϕ_{00}^x , ϕ_{00}^y e ϕ_{00}^{xy} , leva a (COLLATZ [1966]) :

$$b_0 = \left(\frac{b}{4a}\right) \quad e_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \quad f_0 = \left(\frac{a}{4b}\right) \quad g_0 = 0 \quad (6.62)$$

tratando-se dos elementos da segunda linha da matriz de rigidez de torção.

Para a geração do terceiro operador hermitiano da torção, substituem-se (6.54) e (6.57) na terceira linha de (6.53), providenciando-se o agrupamento dos termos comuns, que resulta :

$$\begin{aligned}
& \phi_{00} [\quad c_0 \quad + \quad f_0 \quad + \quad h_0 \quad + \quad i_0 \quad + \quad 0 \quad] + \\
& + \phi_{00}^x [\quad (-a)c_0 \quad + \quad (a)f_0 \quad + \quad (a)h_0 \quad + \quad (-a)i_0 \quad + \quad (b) \quad] + \\
& + \phi_{00}^y [\quad (-b)c_0 \quad + \quad (-b)f_0 \quad + \quad (b)h_0 \quad + \quad (b)i_0 \quad + \quad (a) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xx} [\quad \left(\frac{a^2}{2}\right)c_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2}{2}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2}{2}\right)h_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2}{2}\right)i_0 \quad + \quad (ab) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xy} [\quad (ab)c_0 \quad + \quad (-ab)f_0 \quad + \quad (ab)h_0 \quad + \quad (-ab)i_0 \quad + \quad (a^2 + b^2) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{yy} [\quad \left(\frac{b^2}{2}\right)c_0 \quad + \quad \left(\frac{b^2}{2}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{b^2}{2}\right)h_0 \quad + \quad \left(\frac{b^2}{2}\right)i_0 \quad + \quad (ab) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xxx} [\quad \left(-\frac{a^3}{6}\right)c_0 \quad + \quad \left(\frac{a^3}{6}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{a^3}{6}\right)h_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^3}{6}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b}{2}\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xxy} [\quad \left(-\frac{a^2b}{2}\right)c_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^2b}{2}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b}{2}\right)h_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b}{2}\right)i_0 \quad + \quad (ab^2 + \frac{a^3}{2}) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xyy} [\quad \left(-\frac{ab^2}{2}\right)c_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^2}{2}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^2}{2}\right)h_0 \quad + \quad \left(-\frac{ab^2}{2}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{b^3}{2} + a^2b\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{yyy} [\quad \left(-\frac{b^3}{6}\right)c_0 \quad + \quad \left(-\frac{b^3}{6}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{b^3}{6}\right)h_0 \quad + \quad \left(\frac{b^3}{6}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^2}{2}\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xxxx} [\quad \left(\frac{a^4}{24}\right)c_0 \quad + \quad \left(\frac{a^4}{24}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{a^4}{24}\right)h_0 \quad + \quad \left(\frac{a^4}{24}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{a^3b}{6}\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xxyy} [\quad \left(\frac{a^3b}{6}\right)c_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^3b}{6}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{a^3b}{6}\right)h_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^3b}{6}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^4}{6}\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xyyy} [\quad \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)c_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)h_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^3}{2} + \frac{a^3b}{2}\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xyyy} [\quad \left(\frac{ab^3}{6}\right)c_0 \quad + \quad \left(-\frac{ab^3}{6}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^3}{6}\right)h_0 \quad + \quad \left(-\frac{ab^3}{6}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{b^4}{6} + \frac{a^2b^2}{2}\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{yyyy} [\quad \left(\frac{b^4}{24}\right)c_0 \quad + \quad \left(\frac{b^4}{24}\right)f_0 \quad + \quad \left(\frac{b^4}{24}\right)h_0 \quad + \quad \left(\frac{b^4}{24}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^3}{6}\right) \quad] + \dots = 0
\end{aligned} \quad (6.63)$$

e ainda, anulando-se os termos em ϕ_{00} , ϕ_{00}^x , ϕ_{00}^y e ϕ_{00}^{xy} , tem-se (COLLATZ [1966]) :

$$c_0 = 0 \quad f_0 = \left(\frac{a}{4b}\right) \quad h_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \quad i_0 = \left(\frac{b}{4a}\right) \quad (6.64)$$

que são os elementos da terceira linha da matriz de rigidez de torção.

Finalmente, buscando-se o quarto operador hermitiano da torção, procede-se a substituição de (6.54) e (6.58) na última linha de (6.53), que resulta :

$$\begin{aligned}
& \phi_{00} [\quad d_0 \quad + \quad g_0 \quad + \quad i_0 \quad + \quad j_0 \quad + \quad 0 \quad] + \\
& + \phi_{00}^x [\quad (-a)d_0 \quad + \quad (a)g_0 \quad + \quad (a)i_0 \quad + \quad (-a)j_0 \quad + \quad (-b) \quad] + \\
& + \phi_{00}^y [\quad (-b)d_0 \quad + \quad (-b)g_0 \quad + \quad (b)i_0 \quad + \quad (b)j_0 \quad + \quad (a) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xx} [\quad \left(\frac{a^2}{2}\right)d_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2}{2}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2}{2}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2}{2}\right)j_0 \quad + \quad (ab) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xy} [\quad (ab)d_0 \quad + \quad (-ab)g_0 \quad + \quad (ab)i_0 \quad + \quad (-ab)j_0 \quad + \quad (-a^2 - b^2) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{yy} [\quad \left(\frac{b^2}{2}\right)d_0 \quad + \quad \left(\frac{b^2}{2}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{b^2}{2}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{b^2}{2}\right)j_0 \quad + \quad (ab) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xxx} [\quad \left(-\frac{a^3}{6}\right)d_0 \quad + \quad \left(\frac{a^3}{6}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{a^3}{6}\right)i_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^3}{6}\right)j_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^2b}{2}\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xxy} [\quad \left(\frac{-a^2b}{2}\right)d_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^2b}{2}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b}{2}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b}{2}\right)j_0 \quad + \quad \left(ab^2 + \frac{a^3}{2}\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xyy} [\quad \left(-\frac{ab^2}{2}\right)d_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^2}{2}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^2}{2}\right)i_0 \quad + \quad \left(-\frac{ab^2}{2}\right)j_0 \quad + \quad \left(-\frac{b^3}{2} - a^2b\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{yyy} [\quad \left(-\frac{b^3}{6}\right)d_0 \quad + \quad \left(-\frac{b^3}{6}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{b^3}{6}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{b^3}{6}\right)j_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^2}{2}\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xxxx} [\quad \left(\frac{a^4}{24}\right)d_0 \quad + \quad \left(\frac{a^4}{24}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{a^4}{24}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{a^4}{24}\right)j_0 \quad + \quad \left(\frac{a^3b}{6}\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xxyy} [\quad \left(\frac{a^3b}{6}\right)d_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^3b}{6}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{a^3b}{6}\right)i_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^3b}{6}\right)j_0 \quad + \quad \left(-\frac{a^2b^2}{2} - \frac{a^4}{6}\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{xyyy} [\quad \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)d_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{a^2b^2}{4}\right)j_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^3}{2} + \frac{a^3b}{2}\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{yyyy} [\quad \left(\frac{ab^3}{6}\right)d_0 \quad + \quad \left(-\frac{ab^3}{6}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^3}{6}\right)i_0 \quad + \quad \left(-\frac{ab^3}{6}\right)j_0 \quad + \quad \left(-\frac{b^4}{6} - \frac{a^2b^2}{2}\right) \quad] + \\
& + \phi_{00}^{yyyy} [\quad \left(\frac{b^4}{24}\right)d_0 \quad + \quad \left(\frac{b^4}{24}\right)g_0 \quad + \quad \left(\frac{b^4}{24}\right)i_0 \quad + \quad \left(\frac{b^4}{24}\right)j_0 \quad + \quad \left(\frac{ab^3}{6}\right) \quad] + \dots = 0
\end{aligned} \quad (6.65)$$

e ainda, anulando-se os já mencionados termos, tem-se (COLLATZ [1966]) :

$$d_0 = \left(\frac{a}{4b}\right) \quad g_0 = 0 \quad i_0 = \left(\frac{b}{4a}\right) \quad j_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \quad (6.66)$$

elementos que constituem a quarta linha da matriz de rigidez de torção almejada, e que encerra a formulação pretendida de maneira relativamente simples, dado que realizada sem manipulações algébricas envolvendo inversões de matrizes de flexibilidade, tais como as providenciadas nos capítulos precedentes.

Substituindo-se os elementos da matriz de rigidez dados por (6.60), (6.62), (6.64) e (6.66) em (6.59), (6.61), (6.63), (6.65); obtem-se os restos dos operadores, que assim se escrevem :

$$R_1 = ab(\phi_{00}^{xx} + \phi_{00}^{yy}) + \left(-\frac{a^2b}{3}\right)\phi_{00}^{xxx} + (-ab^2)\phi_{00}^{xxy} + (-a^2b)\phi_{00}^{xyy} + \left(-\frac{ab^2}{3}\right)\phi_{00}^{yyy} + \left(\frac{a^3b}{6}\right)\phi_{00}^{xxxx} + \left(\frac{a^2b^2}{3}\right)\phi_{00}^{xxxy} + \frac{ab(a^2 + b^2)}{2}\phi_{00}^{xxyy} + \left(\frac{a^2b^2}{3}\right)\phi_{00}^{xyyy} + \left(\frac{ab^3}{6}\right)\phi_{00}^{yyyy} + \dots$$

$$R_2 = ab(\phi_{00}^{xx} + \phi_{00}^{yy}) + \left(\frac{a^2b}{3}\right)\phi_{00}^{xxx} + (-ab^2)\phi_{00}^{xxy} + (a^2b)\phi_{00}^{xyy} + \left(-\frac{ab^2}{3}\right)\phi_{00}^{yyy} + \left(\frac{a^3b}{6}\right)\phi_{00}^{xxxx} + \left(-\frac{a^2b^2}{3}\right)\phi_{00}^{xxxy} + \frac{ab(a^2 + b^2)}{2}\phi_{00}^{xxyy} + \left(-\frac{a^2b^2}{3}\right)\phi_{00}^{xyyy} + \left(\frac{ab^3}{6}\right)\phi_{00}^{yyyy} + \dots$$

$$R_3 = ab(\phi_{00}^{xx} + \phi_{00}^{yy}) + \left(\frac{a^2b}{3}\right)\phi_{00}^{xxx} + (ab^2)\phi_{00}^{xxy} + (a^2b)\phi_{00}^{xyy} + \left(\frac{ab^2}{3}\right)\phi_{00}^{yyy} + \left(\frac{a^3b}{6}\right)\phi_{00}^{xxxx} + \left(\frac{a^2b^2}{3}\right)\phi_{00}^{xxxy} + \frac{ab(a^2 + b^2)}{2}\phi_{00}^{xxyy} + \left(\frac{a^2b^2}{3}\right)\phi_{00}^{xyyy} + \left(\frac{ab^3}{6}\right)\phi_{00}^{yyyy} + \dots$$

$$R_4 = ab(\phi_{00}^{xx} + \phi_{00}^{yy}) + \left(-\frac{a^2b}{3}\right)\phi_{00}^{xxx} + (ab^2)\phi_{00}^{xxy} + (-a^2b)\phi_{00}^{xyy} + \left(\frac{ab^2}{3}\right)\phi_{00}^{yyy} + \left(\frac{a^3b}{6}\right)\phi_{00}^{xxxx} + \left(-\frac{a^2b^2}{3}\right)\phi_{00}^{xxxy} + \frac{ab(a^2 + b^2)}{2}\phi_{00}^{xxyy} + \left(-\frac{a^2b^2}{3}\right)\phi_{00}^{xyyy} + \left(\frac{ab^3}{6}\right)\phi_{00}^{yyyy} + \dots$$

(6.67)

expressões nas quais observa-se que o primeiro termo reúne as duplas derivadas em x e y, ou seja :

$$ab(\phi_{00}^{xx} + \phi_{00}^{yy}) \quad (6.68)$$

e que, à vista de (6.24), pode ser redigido:

$$ab(\phi_{00}^{xx} + \phi_{00}^{yy}) = -2G\theta ab \quad (6.69)$$

o que leva de modo imediato aos elementos do vetor das ações nodais equivalentes, passando (6.53) a ter a redação :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(-\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) & \frac{b}{2a} & 0 & \frac{a}{2b} \\ \frac{b}{2a} & \left(-\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) & \frac{a}{2b} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2b} & \left(-\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) & \frac{b}{2a} \\ \frac{a}{2b} & 0 & \frac{b}{2a} & \left(-\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} (-b)\phi_0^x + (-a)\phi_0^y \\ (b)\phi_1^x + (-a)\phi_1^y \\ (b)\phi_2^x + (a)\phi_2^y \\ (-b)\phi_3^x + (a)\phi_3^y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2abG\theta \\ 2abG\theta \\ 2abG\theta \\ 2abG\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.70)$$

onde a soma dos erros R_1, R_2, R_3 e R_4 , assim se expressa :

$$\{R_0\} = \frac{4a^3b}{3}\phi_{00}^{xxxx} + 4(ab^3 + a^3b)\phi_{00}^{xxyy} + \frac{4ab^3}{3}\phi_{00}^{yyyy} + \dots \quad (6.71)$$

cujo inconveniente, em princípio, está em sua localização interna ao elemento (origem do sistema de coordenadas locais).

Note-se que a matriz de rigidez (6.70) é uma aproximação com ordem de convergência $O(\Delta^4)$ diferente da deduzida pelo método dos elementos finitos, veja-se (6.22); sendo o vetor das ações nodais idêntico ao daquela formulação, conforme mostra (6.23).

Tratando-se de formulação livre, é possível ainda introduzir-se um fator multiplicativo w nos últimos termos de (6.59), (6.61), (6.63) e (6.65); previamente à determinação dos elementos da matriz de rigidez $(a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0, h_0, i_0, j_0)$, quais sejam :

$$\begin{aligned} \phi_{00}^{xy} [(ab)a_0 + (-ab)b_0 + (ab)c_0 + (-ab)d_0 + w(a^2 + b^2)] \\ \phi_{00}^{xy} [(ab)b_0 + (-ab)e_0 + (ab)f_0 + (-ab)g_0 + w(-a^2 - b^2)] \\ \phi_{00}^{xy} [(ab)c_0 + (-ab)f_0 + (ab)h_0 + (-ab)i_0 + w(a^2 + b^2)] \\ \phi_{00}^{xy} [(ab)d_0 + (-ab)g_0 + (ab)i_0 + (-ab)j_0 + w(-a^2 - b^2)] \end{aligned} \quad (6.72)$$

artifício que viabiliza a geração de uma família de matrizes de rigidez, sendo seus elementos obtidos, conforme sabido, com a anulação dos termos em $\phi_{00}, \phi_{00}^x, \phi_{00}^y$ e ϕ_{00}^{xy} , ora em função do novo parâmetro introduzido.

Tal procedimento leva aos sistemas de equações dados por :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a & a & a & -a \\ -b & -b & b & b \\ ab & -ab & ab & -ab \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -b \\ a \\ w(a^2 + b^2) \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6.73)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a & a & a & -a \\ -b & -b & b & b \\ ab & -ab & ab & -ab \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ b \\ -a \\ w(-a^2 - b^2) \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6.74)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a & a & a & -a \\ -b & -b & b & b \\ ab & -ab & ab & -ab \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ f_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ b \\ a \\ w(a^2 + b^2) \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6.75)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a & a & a & -a \\ -b & -b & b & b \\ ab & -ab & ab & -ab \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_0 \\ g_0 \\ i_0 \\ j_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -b \\ a \\ w(-a^2 - b^2) \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6.76)$$

Pois bem, fazendo uso de um processo de tentativas, toma-se $w = 1/3$ nos sistemas de equações (6.73) a (6.76), obtendo-se os elementos de uma nova matriz de rigidez dados por :

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) & b_0 &= \left(\frac{-a}{6b} + \frac{b}{3a}\right) & c_0 &= \left(\frac{a}{6b} + \frac{b}{6a}\right) & d_0 &= \left(\frac{a}{3b} - \frac{b}{6a}\right) \\
b_0 &= \left(\frac{-a}{6b} + \frac{b}{3a}\right) & e_0 &= -\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) & f_0 &= \left(\frac{a}{3b} - \frac{b}{6a}\right) & g_0 &= \left(\frac{a}{6b} + \frac{b}{6a}\right) \\
c_0 &= \left(\frac{a}{6b} + \frac{b}{6a}\right) & f_0 &= \left(\frac{a}{3b} - \frac{b}{6a}\right) & h_0 &= -\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) & i_0 &= \left(\frac{-a}{6b} + \frac{b}{3a}\right) \\
d_0 &= \left(\frac{a}{3b} - \frac{b}{6a}\right) & g_0 &= \left(\frac{a}{6b} + \frac{b}{6a}\right) & i_0 &= \left(\frac{-a}{6b} + \frac{b}{3a}\right) & j_0 &= -\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)
\end{aligned}$$

(6.77)

sendo os novos restos expressos por:

$$\begin{aligned}
R_1^* &= ab(\phi_{00}^{xx} + \phi_{00}^{yy}) + \frac{2(a^2 + b^2)}{3}\phi_0^{xy} + \left(-\frac{a^2b}{3}\right)\phi_{00}^{xxx} + (-ab^2)\phi_{00}^{xxy} + \\
&\quad (-a^2b)\phi_{00}^{xyy} + \left(-\frac{ab^2}{3}\right)\phi_{00}^{yyy} + \left(\frac{a^3b}{6}\right)\phi_{00}^{xxxx} + \left[\frac{a^2(a^2 + 4b^2)}{9}\right]\phi_{00}^{xxyy} + \\
&\quad \frac{ab(a^2 + b^2)}{2}\phi_{00}^{xxyy} + \left[\frac{b^2(4a^2 + b^2)}{9}\right]\phi_{00}^{xyyy} + \left(\frac{ab^3}{6}\right)\phi_{00}^{yyyy} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2^* &= ab(\phi_{00}^{xx} + \phi_{00}^{yy}) + \frac{-2(a^2 + b^2)}{3}\phi_0^{xy} + \left(\frac{a^2b}{3}\right)\phi_{00}^{xxx} + (-ab^2)\phi_{00}^{xxy} + \\
&\quad (a^2b)\phi_{00}^{xyy} + \left(-\frac{ab^2}{3}\right)\phi_{00}^{yyy} + \left(\frac{a^3b}{6}\right)\phi_{00}^{xxxx} + \left[\frac{-a^2(a^2 + 4b^2)}{9}\right]\phi_{00}^{xxyy} + \\
&\quad \frac{ab(a^2 + b^2)}{2}\phi_{00}^{xxyy} + \left[\frac{-b^2(4a^2 + b^2)}{9}\right]\phi_{00}^{xyyy} + \left(\frac{ab^3}{6}\right)\phi_{00}^{yyyy} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3^* &= ab(\phi_{00}^{xx} + \phi_{00}^{yy}) + \frac{2(a^2 + b^2)}{3}\phi_0^{xy} + \left(\frac{a^2b}{3}\right)\phi_{00}^{xxx} + (ab^2)\phi_{00}^{xxy} + \\
&\quad (a^2b)\phi_{00}^{xyy} + \left(\frac{ab^2}{3}\right)\phi_{00}^{yyy} + \left(\frac{a^3b}{6}\right)\phi_{00}^{xxxx} + \left[\frac{a^2(a^2 + 4b^2)}{9}\right]\phi_{00}^{xxyy} + \\
&\quad \frac{ab(a^2 + b^2)}{2}\phi_{00}^{xxyy} + \left[\frac{b^2(4a^2 + b^2)}{9}\right]\phi_{00}^{xyyy} + \left(\frac{ab^3}{6}\right)\phi_{00}^{yyyy} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_4^* = & ab(\phi_{00}^{xx} + \phi_{00}^{yy}) + \frac{-2(a^2 + b^2)}{3} \phi_0^{xy} + \left(-\frac{a^2 b}{3}\right) \phi_{00}^{xxx} + (ab^2) \phi_{00}^{xyy} + \\
& (-a^2 b) \phi_{00}^{xyy} + \left(\frac{ab^2}{3}\right) \phi_{00}^{yyy} + \left(\frac{a^3 b}{6}\right) \phi_{00}^{xxxx} + \left[\frac{-a^2(a^2 + 4b^2)}{9}\right] \phi_{00}^{xxyy} + \\
& \frac{ab(a^2 + b^2)}{2} \phi_{00}^{xxyy} + \left[\frac{-b^2(4a^2 + b^2)}{9}\right] \phi_{00}^{xyyy} + \left(\frac{ab^3}{6}\right) \phi_{00}^{yyyy} + \dots
\end{aligned}
\tag{6.78}$$

nos quais tornam-se visíveis parcelas em duplas derivadas idênticas a (6.68), fato que permite a formulação do vetor de ações nodais equivalentes; e ainda, em que pesem as diferenças desses termos em relação a (6.67), levando-se ao mesmo erro local dado por (6.71).

Isso posto, resume-se em notação matricial a formulação da matriz de rigidez e do vetor das ações nodais equivalentes ora obtidos, que assim se expressam :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) & \left(\frac{-a}{2b} + \frac{b}{a}\right) & \left(\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a}\right) & \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{2a}\right) \\ & -\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) & \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{2a}\right) & \left(\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a}\right) \\ & & -\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) & \left(\frac{-a}{2b} + \frac{b}{a}\right) \\ \text{Sim.} & & & -\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{Bmatrix} (-b) \phi_0^x + (-a) \phi_0^y \\ (b) \phi_1^x + (-a) \phi_1^y \\ (b) \phi_2^x + (a) \phi_2^y \\ (-b) \phi_3^x + (a) \phi_3^y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2abG\theta \\ 2abG\theta \\ 2abG\theta \\ 2abG\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.79}$$

cujos restos, conforme já comentado, é aquele mesmo dado por (6.71), qual seja :

$$\{R_0\} = \frac{2a^3b}{3}\phi_{00}^{xxxx} + 2(ab^3 + a^3b)\phi_{00}^{xyxy} + \frac{2ab^3}{3}\phi_{00}^{yyyy} + \dots \quad (6.80)$$

tratando-se assim de um operador hermitiano de ordem $O(\Delta^4)$, como (6.80) está a indicar, sendo a matriz de rigidez e o vetor de ações nodais idênticos aos obtidos através da formulação via elementos finitos, conforme mostrados em (6.22) e (6.23).

6.4 - Exemplo de aplicação com o emprego de elementos triangulares.

Seja calcular os valores da função de tensão ϕ nos pontos 3, 4, 5 e 6, para a seção transversal quadrada, conforme o padrão sugerido por BATHE [1996] e malha exibida na Fig. 6.5, empregando-se o operador hermitiano (6.48), cujo resto está expresso em (6.49).

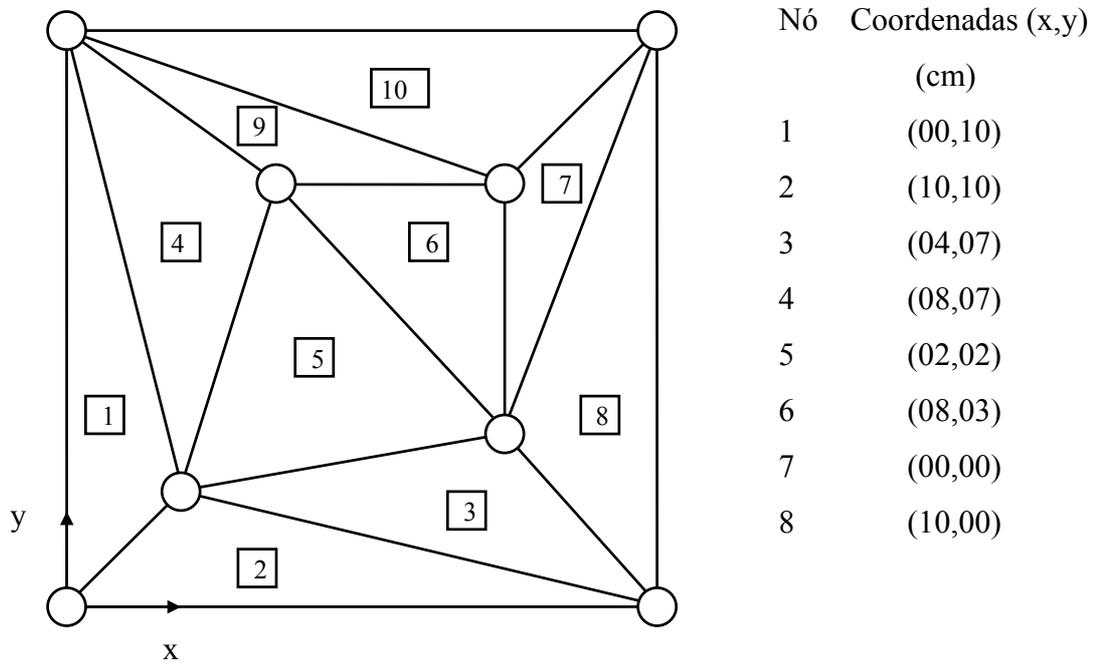


Fig. 6.5 - Seção retangular submetida à torção livre.

Trata-se de uma discretização com 10 elementos triangulares segundo uma configuração de 8 nós. As matrizes de rigidez, os vetores de ações nodais equivalentes e os demais vetores resultantes das deduções via formulação hermitiana livre para cada elemento são os seguintes (conforme ordem de numeração dada na Fig. 6.5) :

Elemento 1

$$\begin{bmatrix} \frac{-17}{10} & 2 & \frac{-3}{10} \\ -5 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \text{Sim.} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_7 \\ \phi_5 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{20G\theta}{3} \\ 20G\theta \\ \frac{20G\theta}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -4\phi_7^x - \phi_7^y \\ 5\phi_5^x \\ -\phi_1^x + \phi_1^y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10\phi_7^{xxx} + 20\phi_7^{xxy} - 40\phi_7^{xyy} + 50\phi_7^{yyy} + \dots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(6.81)

Elemento 2

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{-17}{10} & \frac{-3}{10} & 2 \\ & \frac{-1}{5} & \frac{1}{2} \\ \text{Sim.} & \frac{-5}{2} & \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{20G\theta}{3} \\ \frac{20G\theta}{3} \\ \frac{20G\theta}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\phi_7^x - 4\phi_7^y \\ \phi_8^x - \phi_8^y \\ 5\phi_5^y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 50\phi_7^{xxx} - 40\phi_7^{xxy} + 20\phi_7^{xyy} + 10\phi_7^{yyy} + \dots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.82)$$

Elemento 3

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{-13}{40} & \frac{-9}{40} & \frac{11}{20} \\ & \frac{-37}{40} & \frac{23}{40} \\ \text{Sim.} & \frac{-17}{10} & \frac{11}{10} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \phi_5 \\ \phi_8 \\ \phi_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{20G\theta}{3} \\ \frac{20G\theta}{3} \\ \frac{20G\theta}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{-3\phi_5^x}{2} - \phi_5^y \\ \frac{\phi_8^x}{2} - 3\phi_8^y \\ \phi_6^x + 4\phi_6^y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 34\phi_5^{xxx} - 26\phi_5^{xxy} + \frac{147}{2}\phi_5^{xyy} - 4\phi_5^{yyy} + \dots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.83)$$

Elemento 4

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{-25}{52} & \frac{8}{13} & \frac{-7}{52} \\ & \frac{-17}{13} & \frac{9}{13} \\ \text{Sim.} & \frac{-29}{52} & \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \phi_5 \\ \phi_3 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{26G\theta}{3} \\ \frac{26G\theta}{3} \\ \frac{26G\theta}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{3\phi_5^x}{2} - 2\phi_5^y \\ 4\phi_3^x + \phi_3^y \\ \frac{-5\phi_1^x}{2} + \phi_1^y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3\phi_5^{xxx} + 84\phi_5^{xxy} - 36\phi_5^{xyy} + \frac{89\phi_5^{yyy}}{2} + \dots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.84)$$

Elemento 5

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{-4}{7} & \frac{3}{14} & \frac{5}{14} \\ & \frac{-29}{56} & \frac{17}{56} \\ \text{Sim.} & \frac{-37}{56} & \frac{17}{56} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{28G\theta}{3} \\ \frac{28G\theta}{3} \\ \frac{28G\theta}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2\phi_5^x - 2\phi_5^y \\ \frac{5\phi_3^x}{2} - \phi_3^y \\ \frac{-\phi_1^x}{2} + 3\phi_1^y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 44\phi_5^{xxx} - 2\phi_5^{xxy} + 19\phi_5^{xyy} + 37\phi_5^{yyy} + \dots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.85)$$

Elemento 6

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{ccc}
 \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
 & -1 & \frac{1}{2} \\
 \text{Sim.} & & \frac{-1}{2}
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \phi_6 \\ \phi_4 \\ \phi_3 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \frac{16G\theta}{3} \\ \frac{16G\theta}{3} \\ \frac{16G\theta}{3} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} -2\phi_6^y \\ 2\phi_4^x + 2\phi_4^y \\ -2\phi_3^x \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} -16\phi_6^{xxx} + 32\phi_6^{xxy} + 0\phi_6^{xyy} + 16\phi_6^{yyy} + \dots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (6.86)$$

Elemento 7

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{ccc}
 \frac{-13}{6} & \frac{-3}{4} & \frac{25}{6} \\
 & -1 & \frac{7}{4} \\
 \text{Sim.} & & \frac{-53}{16}
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \phi_6 \\ \phi_2 \\ \phi_4 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \frac{8G\theta}{3} \\ \frac{8G\theta}{3} \\ \frac{8G\theta}{3} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{3\phi_6^x}{2} - \phi_6^y \\ 2\phi_2^x \\ \frac{-7\phi_4^x}{2} + \phi_4^y \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} 4\phi_6^{xxx} + 28\phi_6^{xxy} + 21\phi_6^{xyy} + 8\phi_6^{yyy} + \dots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (6.87)$$

Elemento 8

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{ccc}
 \frac{-53}{40} & \frac{-17}{40} & \frac{7}{4} \\
 & \frac{-13}{40} & \frac{3}{4} \\
 \text{Sim.} & & \frac{-5}{2}
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \phi_8 \\ \phi_2 \\ \phi_6 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \frac{20G\theta}{3} \\ \frac{20G\theta}{3} \\ \frac{20G\theta}{3} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{7\phi_8^x}{2} - \phi_8^y \\ \frac{3\phi_2^x}{2} + \phi_2^y \\ -5\phi_6^x \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} -10\phi_8^{xxx} + 30\phi_8^{xxy} + \frac{105}{2}\phi_8^{xyy} + 50\phi_8^{yyy} + \dots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (6.88)$$

Elemento 9

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{ccc}
 \frac{-74}{24} & \frac{41}{24} & \frac{4}{3} \\
 & \frac{-25}{24} & \frac{-2}{3} \\
 \text{Sim.} & & \frac{-2}{3}
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_1 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \frac{12G\theta}{3} \\ \frac{12G\theta}{3} \\ \frac{12G\theta}{3} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{-3\phi_3^x}{2} - 4\phi_3^y \\ \frac{3\phi_4^x}{2} + 2\phi_4^y \\ 2\phi_1^y \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} 12\phi_3^{xxx} + 32\phi_3^{xxy} - 24\phi_3^{xyy} + 9\phi_3^{yyy} + \dots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (6.89)$$

Elemento 10

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc} \frac{-5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ & \frac{-73}{60} & \frac{-7}{60} \\ \text{Sim.} & & \frac{-13}{60} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \phi_4 \\ \phi_2 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{30G\theta}{3} \\ \frac{30G\theta}{3} \\ \frac{30G\theta}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -5\phi_4^y \\ \frac{3\phi_2^x}{2} + 4\phi_2^y \\ \frac{-3\phi_1^x}{2} + \phi_1^y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -45\phi_4^{xxx} + 85\phi_4^{xxy} + 0\phi_4^{xyy} + \frac{45\phi_4^{yyy}}{2} + \dots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 & \hspace{15em} (6.90)
 \end{aligned}$$

Para a montagem da matriz de rigidez, do vetor das ações nodais equivalentes e dos vetores dos restos, basta considerar-se a conectividade entre os elementos 1 a 10 ou seja :

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccccccccc} \frac{-64}{39} & \frac{-7}{60} & \frac{79}{39} & \frac{-1}{3} & \frac{19}{52} & 0 & \frac{-3}{10} & 0 \\ & \frac{-61}{24} & 0 & \frac{37}{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{-17}{40} \\ & & \frac{-6017}{1092} & \frac{53}{24} & \frac{177}{182} & \frac{17}{56} & 0 & 0 \\ & & & \frac{-337}{48} & 0 & \frac{33}{16} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{-23213}{3640} & \frac{107}{140} & 4 & \frac{11}{40} \\ & & & & & \frac{-3377}{560} & 0 & \frac{29}{10} \\ \text{Sim.} & & & & & & \frac{-17}{5} & \frac{-3}{10} \\ & & & & & & & \frac{-49}{20} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \end{Bmatrix} - \frac{2G\theta}{3} \begin{Bmatrix} 44 \\ 29 \\ 41 \\ 33 \\ 57 \\ 46 \\ 20 \\ 30 \end{Bmatrix} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \begin{Bmatrix} -5\phi_1^x + 5\phi_1^y \\ 5\phi_2^x + 5\phi_2^y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5\phi_7^x - 5\phi_7^y \\ 5\phi_8^x - 5\phi_8^y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 + \dots \\ 0 + \dots \\ 12\phi_3^{xxx} + 32\phi_3^{xxy} - 24\phi_3^{xyy} + 9\phi_3^{yyy} + \dots \\ -45\phi_4^{xxx} + 85\phi_4^{xxy} + 0\phi_4^{xyy} + \frac{45\phi_4^{yyy}}{2} + \dots \\ 81\phi_5^{xxx} + 56\phi_5^{xxy} + \frac{113\phi_5^{xyy}}{2} + \frac{155\phi_5^{yyy}}{2} + \dots \\ -12\phi_6^{xxx} + 60\phi_6^{xxy} + 21\phi_6^{xyy} + 24\phi_6^{yyy} + \dots \\ 60\phi_7^{xxx} - 20\phi_7^{xxy} - 20\phi_7^{xyy} + 60\phi_7^{yyy} + \dots \\ -10\phi_8^{xxx} + 30\phi_8^{xxy} + \frac{105}{2}\phi_8^{xyy} + 50\phi_8^{yyy} + \dots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 & \hspace{15em} (6.91)
 \end{aligned}$$

As condições de contorno implicam na nulidade da função de torção nas bordas, que podem ser introduzidas em (6.91) eliminando-se as linhas e colunas 1, 2, 7, e 8.

Isso posto, resolve-se o sistema restante negligenciando-se os restos expressos em (6.91) conforme sugere AKAI [1994], obtendo-se assim os valores da função de tensão nos nós internos mostrados na Fig. 6.5, e que se encontram na Tabela 6.1 abaixo, na qual constam, para efeito comparativo, os valores da solução com o emprego de séries segundo TIMOSHENKO [1951].

Tabela 6.1

Comparação entre as soluções de Timoshenko e da formulação hermitiana livre.

(1) Solução de Timoshenko	(2) Solução via Formulação Hermitiana Livre	Erro da Solução via Formulação Hermitiana Livre	Diferença entre as soluções (1) e (2) %
$\phi_3 = 12,236 G\theta$	$\phi_3 = 10,869 G\theta$	$12\phi_3^{xxx} + 32\phi_3^{xxy} - 24\phi_3^{xyy} + 9\phi_3^{yyy} + \dots$	11,17
$\phi_4 = 8,742 G\theta$	$\phi_4 = 9,488 G\theta$	$-45\phi_4^{xxx} + 85\phi_4^{xxy} + 0\phi_4^{xyy} + \frac{45\phi_4^{yyy}}{2} + \dots$	8,53
$\phi_5 = 7,002 G\theta$	$\phi_5 = 8,814 G\theta$	$81\phi_5^{xxx} + 56\phi_5^{xxy} + \frac{113\phi_5^{xyy}}{2} + \frac{155\phi_5^{yyy}}{2} + \dots$	25,87
$\phi_6 = 8,742 G\theta$	$\phi_6 = 9,995 G\theta$	$-12\phi_6^{xxx} + 60\phi_6^{xxy} + 21\phi_6^{xyy} + 24\phi_6^{yyy} + \dots$	14,33

Note-se que os valores da função ϕ mostrados na Tabela 6.1, são idênticos aos obtidos pela formulação do método dos elementos finitos, tendo em vista a igualdade das matrizes de rigidez e dos vetores de ações nodais equivalentes resultantes em ambos os métodos.

Ressalte-se ainda que as diferenças mostradas na última coluna da Tabela 6.1, indicam a necessidade de refinamento da malha adotada na Fig. 6.5, providência que não consta do objetivo do presente trabalho.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

Em primeiro lugar, é digno de registro assinalar que procurou-se avaliar na bibliografia consultada, caminhos alternativos no sentido da abertura de uma nova linha de pesquisa, referente ao estudo de matrizes de rigidez e vetores de ações nodais equivalentes, o que, apesar de tratar-se de assunto bem conhecido, logrou sucesso em nosso entender, conforme vem a demonstrar o desenvolvimento deste trabalho.

Nesse sentido inovou-se, uma vez que a denominada formulação hermitiana livre constitui-se em uma alternativa para a geração de matrizes de rigidez e de vetores de ações nodais equivalentes; dispondo, além disso, da vantagem de se abordar o erro de aproximação de maneira explícita.

Ao que tudo indica, tal formulação é apropriada para aplicações mais amplas do que as estudadas neste trabalho, que restringiu-se a aplicações no âmbito da Estática das Estruturas.

O estudo aqui realizado mostra a possibilidade de se trabalhar, de princípio, com expressões analíticas para o erro de aproximação de operadores hermitianos e informar a ordem de convergência das matrizes de rigidez resultantes; o que possibilita uma medida relativa da magnitude do erro, para comparação de matrizes de rigidez geradas por outras formulações, assunto de interesse por parte de diversos pesquisadores do método dos elementos finitos, onde as avaliações de erro são realizadas normalmente a posteriori.

Estando a atenção do trabalho voltada ao erro de truncamento (truncation error); assim denominado por originar-se do abandono de termos do

desenvolvimento das funções em séries de Taylor, passou-se a empregar suas propriedades num sentido mais amplo, ou seja, avaliar o erro de aproximação das matrizes de rigidez, tema para o qual, presume o autor, acrescentou-se alguma contribuição.

Como é possível verificar, a abordagem que se faz, no tocante ao emprego de operadores, é totalmente diversa da realizada através do método tradicional das diferenças finitas, cujo objetivo concentra-se, principalmente nas aplicações de operadores em malhas de pontos, com o objetivo da discretização das estruturas, substituindo-se as equações diferenciais regentes do problema, por aproximações de diferenças.

Na metodologia ora empregada foram conseguidos resultados interessantes, tais como coleções de operadores apropriados à geração de matrizes de rigidez em problemas axiais; de flexão em primeira ordem e de flexão em segunda ordem, onde existem duas questões importantes a se preocupar : em primeiro lugar a obtenção de simetria nas matrizes resultantes, e em segundo lugar sua conseqüente ordem de convergência; propriedades que devem obrigatoriamente ser atribuídas quando da escolha dos referidos operadores, advindo daí as dificuldades pertinentes à formulação livre.

É interessante notar que, diferentemente do vem sendo realizado via análise matricial e método dos elementos finitos, obtem-se um só conjunto de resultados, onde destacam-se as matrizes de rigidez e o vetor das ações nodais; conjunto que depende, conforme já comentado, da escolha apropriada dos operadores, pois deles constam as informações referentes às equações diferenciais regentes do problema, de modo bastante acoplado, ao contrário da suposição de funções de forma adequadas (objeto do método dos elementos finitos), o que explica a geração da matriz de rigidez da teoria de viga de Timoshenko, conforme mostra o capítulo 5, já aliviada do problema de bloqueio da solução.

Também mostrou-se a impossibilidade da geração das matrizes da fundação sobre base elástica com o emprego do modelo bi-paramétrico idênticas às obtidas pelo método dos elementos finitos, vantagem inegável em relação a esse referido método, que não deixa transparente nas formulações, as informações de acoplamento aqui mencionadas.

Muito há de se fazer neste campo de atuação, pois, ao que tudo indica, é possível vislumbrar a viabilidade de resolver também problemas mais complexos da Teoria da Elasticidade por esta via de tratamento, dando ensejo à continuidade da linha de pesquisa.

Para tal continuidade pretende-se, de início, estudar o problema da fundação bi-paramétrica introduzindo-se a influência de força normal via formulação hermitiana livre, tendo em vista já estar realizada com o emprego do método dos elementos finitos (YOKOYAMA [1996]); passando-se em seguida para um aprofundamento do estudo do erro numérico de outros tipos de elementos finitos, constituídos de um número maior de pontos nodais.

Para tal, infere-se a necessidade do estudo de novos conjuntos de operadores hermitianos, com maior grau de dificuldade que os já empregados, pois a questão da simetria das matrizes não fica tão evidente, conforme já demonstrado para o elemento retangular do capítulo 6.

Como é sabido, as aplicações aqui encontradas são referentes aos casos da Estática das Estruturas, nada tendo sido comentado a respeito de aplicações em Dinâmica das Estruturas, campo extremamente promissor, conforme pode ser verificado em LAIER [1998], que trata de formulação livre no campo de propagação de ondas.

É oportuno assinalar, que os problemas bi-dimensionais, e por indução os multidimensionais, estão ainda por explorar. Por enquanto, tendo em vista os resultados mostrados neste trabalho, parece interessante aproveitar os algoritmos do método dos elementos finitos, procedendo-se uma posterior explicitação do erro, mediante o emprego direto de operadores do tipo hermitiano, providência que pode testar a consistência matemática daquela formulação.

Para finalizar, é importante ressaltar que a formulação hermitiana livre vem a ser uma nova ferramenta de geração de matrizes de rigidez e vetores de ações nodais equivalentes, cujos resultados podem ser inseridos nos códigos de programas de computador já existentes e amplamente conhecidos, pois o fato de se fornecer informações que não são objeto de considerações no método dos elementos finitos, em nosso entendimento, é um avanço que pode contribuir, sem a pretensão de competir com aquele consagrado método de análise numérica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHMADIAN H.; FRISWELL M.I.; MOTTERSHEAD J.E. - "Minimization of the Discretization Error in Mass and Stiffness Formulations by an Inverse Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 41, 371-387, 1998.

AKAI, T.J. - "Applied Numerical Methods for Engineers", John Wiley & Sons, Inc. USA, 410 p., 1994.

BABUSKA, I.; DORR, M.R. - "Error Estimates for the Combined h and p Versions of the Finite Element Method", Numer. Math., V 37, p 257-277, 1981.

BATHE, K. - "Finite Element Procedures", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1037 p., 1996.

BARNHILL, R.E.; WHITEMAN, J.R. - "Error Analysis of Finite Methods with Triangles for Elliptic Boundary Value Problems", The Math. of Finite Elements and Applications, p 83-112, Academic Press, N. York, 1973.

BETTES, P.; LAGHROUCHE O. - "Derivation of a Rectangular Finite Element for Potential Problems from Consistency Criteria", Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, p 35-42, 1998.

BREBBIA, C.A.; CONNOR, J.J. - "Fundamental of Finite Element Techniques for Structural Engineers", Butterworths & Co Ltd., London, UK, 269 p, 1973.

- CHAPRA, S.C.; CANALE, R.P. - "Numerical Methods for Engineers - With Personal Computer Application", McGraw-Hill Book Company, USA, 570 p, 1985.
- CHEN, Y. - "Interface Effects on Box-type Reinforced Concrete Structures - II. Implementation", Computers & Structures, V 47:3, England, p 391-398,1993.
- CIARLET, P.G. - "Orders of Convergence in Finite Methods", The Mat. of Finite Elements and Applications, p 113-129, Academic Press, N. York, 1973.
- COLLATZ, L. - "The Numerical Treatment of Differential Equations", Springer Verlag, 2a Ed., 1966.
- COLLATZ, L. - "Hermitean Methods for Initial Value Problems", Topics in Numerical Analysis - Proceedings of the Royal Irish Academy Conference on Numerical Analysis - Academic Press Inc. Ltd., London, 348 p., 1972.
- COOK, R.D., MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. - "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", 3d. ed., John Wiley & Sons, New York, 630 p., 1986.
- COURANT, R. - "Cálculo Diferencial e Integral", Vol. II, Editora Globo, Rio de Janeiro - Porto Alegre - São Paulo, 685 p., 1966.
- FRIEDMAN, Z.; KOSMATKA, J.B. - "An Accurate Two-Node Finite Element for Shear Deformable Curved Beams", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 41, 473-498, 1998.
- GERE, J.M.; WEAVER Jr, W. - "Análise de Estruturas Reticuladas", Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro, 432 p, 1981.

- HULBERT, G.M. - "Time Finite Element Methods for Structural Dynamics", International Journal for Numerical Methods in Engineering", Vol. 33, p. 307-331, 1992.
- HUGHES, T.J.R. - "The Finite Element Method - Linear, Static and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice-Hall, Inc., USA, 803 p., 1987.
- KARAYANNIS, C.G. - "Torsional Analysis of Flanged Concrete Elements with Tension Softening", Computers & Structures, V 54 n 1, England, p 97-110, 1995.
- KETTER, R.L.; PRAWEL, Jr. S.P. - "Modern Methods of Engineering Computation", McGraw-Hill Book Company, USA, 492 p., 1969.
- KEY, S.W.; KRIEG R.D. "Comparison of Finite-Element and Finite-Difference Methods", Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics", Eds : S.J. Fenves, N. Perrone, J. Robinson, W.C. Schonobrich, et. al., Academic Press, New York, 1973.
- KRAUTHAMMER, T.; ASSADI-LAMOUDI, A.; SHANAA, H.M. - "Analysis of Impulsively Loaded Reinforced Concrete Structural Elements - I. Theory", Computers & Structures, V 48:5, England, p 851-860, 1993.
- LAIER, J.E. - "Hermitian Lumped Mass Matrix Formulation for Flexural Wave Propagation", Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, 13-49, 1998.
- LAIER, J.E.; RIGITANO A.C. - "Formulação Hermitiana Livre da Matriz de Rigidez Geométrica", Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, V 3, Tucuman, Argentina, p 291-299, 1995.

- MAKINSON, H.J. - "Stable High Order Implicit Methods for the Numerical Solutions of Systems of Differential Equations", The Computer Journal , V 11, n 3, p 305-310, 1968.
- MOREIRA, D.F. - "Análise Matricial de Estruturas", LTC/EDUSP, Rio de Janeiro, 390 p, 1977.
- NORSET, S.P. - "One-step Methods of Hermite Type for Numerical Integration of Stiff Systems", BIT, V. 14, p 63-77, 1974.
- OLIVEIRA, E.R.A. - "Theoretical Foundations of the Finite Element Method", Int. J. Solids Structures, V.4, 929-952, 1968.
- PARK, G.J. - "Accuracy Tests for Various Sensitivity Analysis Methods with Respect to Shape Variables in Planar Cantilever Beams", Computers & Structures, V 47:6, England, p 1057-1063, 1993.
- PAZ, M. - "Structural Dynamics : Teory and Computation", 3° ed., Van Nostrand Reinhold Company, New York, 626 p., 1991.
- PIAN, T.H.H.; TONG, P. - "The Convergence of Finite Element Method in Solving Linear Elastic Problems", Int. J. Solids Structures, V.3, 865-879, 1967.
- PILKEY, W.D.; WUNDERLICH, W. - "Mechanics of Estruturas - Variational and Computational Methods", CRC Press Inc., USA, 855 p.,1994.
- PISKUNOV. N. - "Calculo Diferencial e Integral", Vol I, Editorial Mir, Moscu, 519 p., 1969.
- PRZEMIENIECKI, J.S. - "Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 468 p., 1968.

- RAO, S.S. - "The Finite Element Method in Engineering", 2^o ed., Oxford Pergamon Press, USA, 643 p., 1989.
- REDDY, J.N. - "Finite Element Method", 2d. ed., McGraw-Hill International Editions, 684 p., 1993.
- SALVADORI, M. G.; BARON M.L. - "Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia", Escola de Engenharia da Universidade de Minas Gerais, Belo Horizonte, 280 p., 1956.
- SHIEL, F. - "Introdução à Resistência dos Materiais", Editora Harper & Row do Brasil Ltda, São Paulo, 395p.,1984.
- SWARTZ, S.E.; O'NEILL, R.J. - "Linear Elastic Buckling of Plates Subjected to Combined Loads", Thin-Walled Structures, V 21 n 1, USA p 1-15, 1995.
- TIMOSHENKO, S.P. and GERE J.M. - "Theory of Elastic Stability", 2d. ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 541 p., 1961.
- TIMOSHENKO, S.P. and GOODIER, J.M., "Theory of Elasticity", 2d. ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 268 p, 1951.
- UTKU, S.; MELOSH, R.J. - "Solution Errors in Finite Element Analysis", Computers & Structures V 18, 4-3, p 379-393, 1984.
- YOKOYAMA , T. - "Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations", Computers & Structures V 61, No 6, p 995-1007, 1996.
- WAH, T.; CALCOTE, L.R. - "Structural Analysis by Finite Difference Calculus", Van Nostrand Reinhold Company, USA, 264 p., 1970.

ZHAOHUA F.; COOK, R.D. - "Beam Elements on Two-Parameter Elastic Foundations", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 109, No. 6, p. 1390-1403, 1983.

ZHOU, H.; LI G. - "Finite Difference Method Arbitrary Meshes for the Bending of Plates", *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, V 14, n 3, p 299-304, 1993.

ZHOU, Y.; ZHENG, X.; HARIK, I.E. - "Seminumerical Method for Buckling of Sector Plates", *Computers & Structures*, V 57 n 5, England, p 847-854, 1995.

ZHU, J.Z.; ZIENKIEWICZ, O.C. - "Adaptivity and Mesh Generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, V 32, p 783-810, 1991.

ZIENKIEWICZ, O.C. - "The Finite Element Method in Engineering Science", 2d. ed., McGraw-Hill Book Company, London, 521 p, 1971.

ZIENKIEWICZ, O.C.; CERVERA M.; OÑATE E. - "A Finite Volume Format for Structural Mechanics", *Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Barcelona, España, 32p, 1992.

ZIENKIEWICZ, O.C.; LIU, Y.C.; HUANG, G.C. - "Error Estimation and Adaptivity in Flow Formulation for Forming Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, V 25, 23-42, 1988.

ZIENKIEWICZ, O.C.; ZHU, J.Z. - "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, V 24, 337-357, 1987.

ZIENKIEWICZ, O.C.; ZHU, J.Z. - "Adaptivity and Mesh Generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, 783-810, 1991.