

ANÁLISE DE LAJES PELA TEORIA DAS CHARNEIRAS
PLÁSTICAS E COMPARAÇÃO DE CUSTOS ENTRE LAJES MACIÇAS E LAJES
TRELIÇADAS

ROGÉRIO LUCIANO MIZIARA GONZALEZ

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São Paulo
como parte dos requisitos para obtenção do
título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

ORIENTADOR: PROF. DR. LIBÂNIO MIRANDA PINHEIRO

São Carlos, 1997

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca - EESC-USP

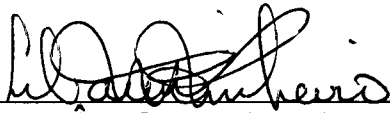
G643a Gonzalez, Rogério Luciano Miziara
Análise de lajes pela teoria das charneiras
plásticas e comparação de custos entre lajes
maciças e lajes treliçadas / Rogério Luciano
Miziara Gonzalez. -- São Carlos, 1997.

Dissertação (Mestrado). -- Escola de Engenharia
de São Carlos-Universidade de São Paulo, 1996.
Orientador: Prof. Dr. Libânio Miranda Pinheiro.

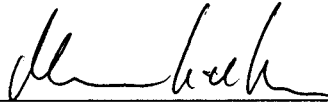
1. Concreto armado. 2. Lajes. Teoria das
charneiras plásticas. I. Título

FOLHA DE APROVAÇÃO

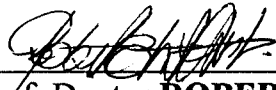
Dissertação defendida e aprovada em 11-4-1997
pela Comissão Julgadora:



Prof. Doutor **LIBÂNIO MIRANDA PINHEIRO (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Associado **MOUNIR KHALIL EL DEBS**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor **ROBERTO CHUST CARVALHO**
(Universidade Federal de São Carlos - UFSCar)



Prof. Assoc. **MOUNIR KHALIL EL DEBS**
Coordenador da Área de Engenharia de Estruturas



JOSÉ CARLOS A. CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

À JULIANA, pelo incentivo
e aos meus pais, Raul e Ana Maria
pelo apoio constante.

AGRADECIMENTOS

AO PROF. DR. Libânio Miranda Pinheiro, por sua dedicação e competência como orientador e professor, pelo seu bom senso e carisma que tanto me incentivaram.

A minha esposa Juliana, que sempre me incentivou e acreditou no meu trabalho e que foi minha companheira em tantos momentos do meu esforço.

Aos meus pais e irmãos que me apoiaram, me deram as condições necessárias e me aplaudiram pelo esforço.

Aos demais professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC - USP.

Aos colegas e amigos pelo convívio e amizade.

Ao CNPQ pelo auxílio financeiro prestado, através da concessão de bolsa de estudos.

S U M Á R I O

LISTA DE FIGURAS.....	i
LISTA DE TABELAS.....	ii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....	iii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	iv
RESUMO.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. GENERALIDADES.....	1
1.2. OBJETIVOS.....	2
1.3. ETAPAS DO TRABALHO.....	3
2. CONCEITOS BÁSICOS DO CÁLCULO PLÁSTICO.....	5
2.1. FASES DE COMPORTAMENTO	5
2.2. RESERVA DE RESISTÊNCIA	6
2.2.1. Endurecimento do aço	7
2.2.2. Efeitos de membrana	7
2.3. CLASSIFICAÇÃO DOS MATERIAIS	9
2.3.1. Materiais frágeis e materiais dúcteis	9
2.3.2. Materiais elastoplásticos e rigidoplásticos.....	10
2.4. TEOREMAS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO PLÁSTICO	11
2.4.1. Teorema estático ou do limite inferior ...	12
2.4.2. Teorema cinemático ou do limite superior..	12
3. NOÇÕES SOBRE A TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS....	13
3.1. GENERALIDADES	13

3.2.	HIPÓTESES DE CÁLCULO	14
3.3.	CONFIGURAÇÕES POSSÍVEIS DAS CHARNEIRAS	15
3.4.	FATORES QUE INFLUEM NAS CONFIGURAÇÕES DAS CHARNEIRAS	16
3.5.	NOTAÇÃO	17
3.6.	PROCESSOS DE CÁLCULO	18
3.7.	PROCESSO DO EQUILÍBRIO OU DAS FORÇAS NODAIS	18
3.7.1.	Definições	18
3.7.2.	Determinação das forças nodais	21
3.7.3.	Teoremas.....	26
3.7.4.	Exemplo.....	29
3.8.	PROCESSO DA ENERGIA	31
3.8.1.	Trabalho das forças externas.....	32
3.8.2.	Trabalho das forças internas.....	33
3.8.3.	Determinação dos momentos de plastificação.....	34
3.8.4.	Exemplo.....	35
3.9.	LAJES ORTÓTROPAS	37
3.9.1.	Isotropia, anisotropia e ortotropia.....	37
3.9.2.	Transformação de lajes ortótropas em isótropas.....	39
3.9.3.	Exemplo de resolução com a laje isótropa afim.....	41
4.	SISTEMATIZAÇÃO DO CÁLCULO DE LAJES RETANGULARES...	44
4.1.	GENERALIDADES.....	44
4.2.	BORDAS ENGASTADAS OU SIMPLEMENTE APOIADAS	44
4.3.	VERIFICAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO DE RUÍNA.....	48
4.4.	LIMITE SUPERIOR	49
4.5.	LIMITE INFERIOR	49
4.6.	COMPRIMENTO DA ARMADURA NEGATIVA.....	50
5.	FLECHAS.....	54
5.1.	GENERALIDADES.....	54
5.2.	TIPOS E VALORES DAS AÇÕES.....	54
5.3.	DETERMINAÇÃO DA FLECHA.....	56

5.4.	FLECHA ELÁSTICA	56
5.5.	MOMENTO DE FISSURAÇÃO, MOMENTO DE INÉRCIA E MÓDULO DE ELASTICIDADE.....	58
5.5.1.	Cálculo do Momento de inércia - ESTÁDIO I.....	60
5.5.2.	Cálculo do Momento de fissuração	62
5.5.3.	Cálculo do Momento de inércia - ESTÁDIO II.....	64
5.4.4.	Valores Médios ou Valores Efetivos.....	66
5.6.	FLECHA TOTAL DECORRENTE DE AÇÕES DE LONGA DURAÇÃO.....	66
5.7.	FLECHA ELÁSTICA DECORRENTE DAS AÇÕES DE CURTA DURAÇÃO.....	69
5.8.	FLECHA DECORRENTE DA RETRAÇÃO.....	70
5.9.	CONTRA FLECHA.....	72
6.	MARCHA DE CÁLCULO.....	73
6.1.	DADOS.....	73
6.2.	MOMENTOS ELÁSTICOS.....	73
6.3.	MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO	74
6.4.	COMPRIMENTOS DAS ARMADURAS NEGATIVAS	76
6.5.	VERIFICAÇÃO DA FLECHA.....	78
7.	SISTEMA DE LAJE TRELIÇADA.....	83
7.1.	DEFINIÇÃO DA LAJE TRELIÇADA.....	83
7.2.	FUNCIONAMENTO ESTRUTURAL DO SISTEMA ACABADO	84
7.3.	NECESSIDADE DO ESCORAMENTO	85
7.4.	DIMENSIONAMENTO	86
7.5.	VANTAGENS DO SISTEMA TRELIÇADO	87
7.6.	PATOLOGIA DO SISTEMA.....	88
7.6.1.	Do projeto e da fabricação	88
7.6.2.	Da aplicação e da montagem em obras	89

8. APLICAÇÕES.....	90
8.1. EXEMPLO 1.....	90
8.1.1. Considerações para adoção das lajes pré - moldadas.....	94
8.1.2. Cálculo elástico - ESTRUTURA 1.2.....	94
8.1.3. Cálculo pela TCP - ESTRUTURA 1.2.....	97
8.1.4. Flechas - ESTRUTURA 1.2.....	100
8.1.5. Comparação dos custos - EXEMPLO 1.....	101
8.2. EXEMPLO 2.....	104
8.2.1. Considerações para adoção das lajes pré - moldadas.....	107
8.2.2. Cálculo Elástico - ESTRUTURA 2.2.....	107
8.2.3. Cálculo pela TCP - ESTRUTURA 2.2.....	110
8.2.4. Flechas - ESTRUTURA 2.2.....	113
8.2.5. Comparação dos custos - EXEMPLO 2.....	114
9. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	117
9.1. ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	117
9.2. CONCLUSÕES.....	119
ANEXO A.....	121
ANEXO B.....	132
BIBLIOGRAFIA.....	142

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Fases de comportamento das lajes subarmadas....	5
Figura 2.2 - Diagrama tensão x deformação dos Aços.....	7
Figura 2.3 - Efeito de arqueamento.....	8
Figura 2.4 - Efeito de membrana tracionada.....	9
Figura 2.5 - Comportamento dos materiais elastoplásticos...10	
Figura 2.6 - Comportamento dos materiais rígido-plásticos..11	
Figura 3.1 - Exemplos de configurações de ruína.....	16
Figura 3.2 - Laje quadrada com carga uniforme.....	19
Figura 3.3 - Forças de transmissão.....	20
Figura 3.4 - Nó com duas charneiras positivas e uma negativa.....	22
Figura 3.5 - Nó com duas charneiras positivas e uma negativa.....	24
Figura 3.6 - Charneira concorrente com borda não engastada.....	28
Figura 3.7 - Laje retangular com uma borda livre.....	29
Figura 3.8 - Laje retangular com uma borda livre.....	35
Figura 3.9 - Charneira inclinada em relação às armaduras...38	
Figura 3.10 - Obtenção da laje isótropa afim.....	40
Figura 3.11 - Laje ortótropa (a) e sua isótropa afim.....	41
Figura 4.1 - Esquema de laje para sistematização.....	45
Figura 4.2 - Gráfico das funções f_1 e f_2	48
Figura 4.3 - Laje retangular engastada em seu contorno.....	51
Figura 5.1 - Viga após atingido o momento de fissuração....	59
Figura 5.2 - Seção homogeneizada.....	60
Figura 5.3 - Seção fissurada	64
Figura 5.4 - Diagrama de deformação.....	68
Figura 7.1 - Armadura treliçada.....	83
Figura 7.2 - Corte transversal genérico.....	84
Figura 7.3 - Detalhe do sistema acabado.....	84
Figura 7.4 - Resistência às tensões.....	85
Figura 7.5 - Detalhe da armadura superior acima da linha neutra.....	86
Figura 8.1 - Arquitetura 1.....	91
Figura 8.2 - Estrutura 1.1 - Esquema - Laje pré-moldada....	92

Figura 8.3 - Estrutura 1.2 - Formas - Laje maciça.....	93
Figura 8.4 - Momentos elásticos compatibilizados - Estrutura 1.2.....	95
Figura 8.5 - Desenho esquemático das armaduras - Estrutura 1.2.....	96
Figura 8.6 - Momentos negativos para o cálculo plástico - Estrutura 1.2.....	97
Figura 8.7 - Momentos provenientes do cálculo plástico: Estrutura 1.2.....	98
Figura 8.8 - Desenho esquemático das armaduras - Estrutura 1.2.....	99
Figura 8.9 - Arquitetura 1.....	104
Figura 8.10 - Estrutura 2.1 - Esquema - Laje pré-moldada..	105
Figura 8.11 - Estrutura 2.2 - Formas - Laje maciça.....	106
Figura 8.12 - Momentos elásticos compatibilizados - Estrutura 2.2.....	108
Figura 8.13 - Desenho esquemático das armaduras - Estrutura 2.2.....	109
Figura 8.14 - Momentos negativos para o cálculo plástico - Estrutura 2.2.....	110
Figura 8.15 - Momentos provenientes do cálculo plástico: Estrutura 2.2.....	111
Figura 8.16 - Desenho esquemático das armaduras - Estrutura 2.2.....	112

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Valores de K.....	70
Tabela 8.1 - Características e cargas - Estrutura 1.2.....	94
Tabela 8.2 - Flechas - Estrutura 1.2.....	100
Tabela 8.3 - Resultado dos custos - Exemplo 1.....	102
Tabela 8.4 - Comparação dos custos - Exemplo 1.....	103
Tabela 8.5 - Características e cargas - Estrutura 2.2.....	107
Tabela 8.6 - Flechas - Estrutura 2.2.....	113
Tabela 8.7 - Resultado dos custos - Exemplo 2.....	115
Tabela 8.8 - Comparação de custos - Exemplo 2.....	116

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

NBR - Norma Brasileira Registrada

ACI - American Concrete Institute

TCP - Teoria das Charneiras Plásticas

LISTA DE SÍMBOLOS

- f_{ck} - Resistência característica do concreto à compressão
- f_{ctk} - Resistência característica do concreto à tração
- σ_c - Componente normal de tensão do concreto na região comprimida
- σ_t - Componente normal de tensão do concreto na região tracionada
- σ'_s - Componente normal de tensão do aço na região comprimida
- σ_s - Componente normal de tensão do aço na região tracionada
- ϵ_c - Deformação unitária do concreto na região comprimida
- ϵ_t - Deformação unitária do concreto na região tracionada
- ϵ'_s - Deformação unitária do aço na região comprimida
- ϵ_s - Deformação unitária do aço na região tracionada
- E_c - Módulo de deformação longitudinal do concreto
- E_s - Módulo de deformação longitudinal do aço
- I - Momento de inércia à flexão da placa
- f_y - Tensão de plastificação do aço
- ϵ_u - Deformação última do aço (Ponto de ruptura)

RESUMO

GONZALEZ, R.L.M. (1997) *Análise de lajes pela teoria das charneiras plásticas e comparação de custos entre lajes maciças e lajes treliçadas.*

144p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

O objetivo principal deste trabalho é sistematizar e automatizar o cálculo de lajes maciças e retangulares de edifícios, utilizando-se a Teoria das Charneiras Plásticas. Apresentam-se as formulações necessárias para a sua automatização.

Aborda-se também a questão relativa às deformações nas lajes maciças em concreto armado, evidenciando a necessidade de consideração das fissuras e dos efeitos dependentes do tempo.

Por fim, faz-se um estudo comparativo com o método elástico para dimensionamento de lajes maciças em concreto e com o sistema de lajes treliçadas, através de aplicações em dois pavimentos de lajes, analisando-se os aspectos técnicos e financeiros (custos) dos resultados.

Palavras-chave: Concreto armado, custos; Lajes.

ABSTRACT

GONZALEZ, R.L.M. (1997) *Analysis of slabs by yield line theory and comparison of costs between compact slabs and lattice slabs.*

144 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

The main purpose of this work is to systematize the building rectangular compact slab calculation, using the yield line theory. The necessary formulation is presented.

Deflections of reinforced concrete slabs are also discussed, making evident that cracking and time dependent effects are important parameters to be considered.

Finally, a comparison with the elastic method for compact slabs design and with the lattice slab systems is presented, considering two examples of building floors, taking into account technical and financial (expenses) aspects of the results.

Keywords: Reinforced concrete, costs; Slabs.

1. INTRODUÇÃO

1.1. GENERALIDADES

Até hoje, a maioria das estruturas é analisada com base no comportamento elástico, mesmo nos casos em que ele apresenta limitações. A dificuldade de integração da Universidade e do Sistema Produtivo faz com que grande parte dos escritórios de cálculo fiquem restritos a métodos de cálculos já dominados e, às vezes, ultrapassados. Os escritórios de arquitetura, por sua vez, ficam impossibilitados de questionar e exigir mudanças, devido à falta de orientação e de conhecimento do problema.

O cálculo elástico não permite uma determinação precisa da carga de ruína, pois, nessa condição, os materiais podem estar comportando-se plasticamente e, conseqüentemente, a estrutura não mais apresenta comportamento linear. Dessa forma, a teoria elástica levaria a soluções anti-econômicas, pois suas bases estariam sendo violadas e não se teria uma verdadeira indicação da distribuição de momentos na estrutura.

O cálculo elástico descreve bem o comportamento da estrutura em serviço, sendo bastante apropriado para o estudo das deformações e dos problemas de fissuração, enquanto o cálculo plástico permite a obtenção mais racional da carga última.

Pode-se concluir, então, que o cálculo elástico e o cálculo plástico são fundamentais e se completam; cada qual serve a propósitos distintos.

A Teoria das Charneiras Plásticas foi imaginada por INGERSLEV (1921), num trabalho publicado em dinamarquês e, dois anos depois, em inglês. JOHANSEN publica seu primeiro

trabalho também em dinamarquês, em 1931, mas a teoria passa a ter um tratamento correto e baseado em ensaios apenas em 1941, desenvolvidos pelo próprio JOHANSEN, passando a ser conhecida como teoria de JOHANSEN. Nesses ensaios, com lajes de tamanho natural, nos quais as cargas foram mantidas por muito tempo, a configuração de ruína e o valor do momento de plastificação estiveram em ótimo acordo com a teoria, também conhecida como Teoria das Charneiras Plásticas.

A Teoria das Charneiras Plásticas começou a tomar impulso após 1950, com inúmeros trabalhos publicados, destacando-se os de MASFIELD(1957), WOOD(1961), JONES(1966) e LANGENDONCK(1966).

Com intuito de facilitar o uso da teoria, AMARAL(1964) propôs fórmulas simples e diretas, onde os próprios momentos negativos eram fixados. Na mesma linha, PINHEIRO(1988) fixou uma relação entre os momentos negativos e positivos; partindo do cálculo elástico, conduziu a um cálculo iterativo, bastante apropriado para automatização do processo. Rios (1991), em um trabalho mais didático, apresenta uma formulação para o cálculo dos momentos de plastificação e dos comprimentos das armaduras negativas (fator importante no cálculo plástico) para lajes retangulares de edifícios, associando o cálculo elástico ao cálculo plástico.

1.2. OBJETIVOS

Neste trabalho, pretende-se sistematizar e automatizar o cálculo de lajes retangulares de edifícios, utilizando-se o Processo das Charneiras Plásticas, e fazer um estudo comparativo, levando-se em consideração os aspectos técnicos e financeiros, com o Método Elástico e com o sistema de lajes treliçadas (também conhecidas como lajes mistas), utilizado, atualmente, em larga escala.

Apresenta-se uma formulação para o cálculo dos momentos de plastificação e dos comprimentos das armaduras negativas, para lajes retangulares simplesmente apoiadas ou engastadas, sujeitas a carga uniformemente distribuída. Esta formulação é baseada na teoria das charneiras plásticas (TCP), onde são fixados os momentos negativos, com base no cálculo elástico.

Apresenta-se também uma formulação para o cálculo das flechas nas lajes, considerando-se a diminuição da rigidez devida à fissuração e mais os efeitos dependentes do tempo, decorrentes da deformação lenta e da retração. O valor da flecha total, incluindo todos esses fatores, é muito maior que simplesmente o valor da flecha inicial.

1.3. ETAPAS DO TRABALHO

No capítulo 2 são expostos os conceitos do cálculo plástico, como base da Teoria das Charneiras Plásticas. As noções sobre a Teoria das Charneiras Plásticas são apresentadas a partir do capítulo 3, juntamente com os processos de cálculo : do equilíbrio (ou das forças nodais) e da energia. As considerações de isotropia, anisotropia e ortotropia também são expostas nesse capítulo.

No capítulo 4 é apresentada a sistematização para o cálculo de lajes retangulares engastadas ou simplesmente apoiadas e o desenvolvimento da formulação necessária para o cálculo do comprimento da armadura negativa.

Um procedimento para verificação do estado de deformação excessiva é apresentado no capítulo 5. O cálculo das flechas inclui a consideração da fissuração e mais os efeitos de deformação lenta e de retração.

No capítulo 6 apresenta-se uma marcha de cálculo, para orientar o engenheiro calculista no cálculo de lajes em regime plástico.

No capítulo 7 são apresentadas as lajes treliçadas, seu funcionamento estrutural e, ainda, algumas das vantagens e das desvantagens observadas com relação ao sistema.

No capítulo 8 são apresentados dois exemplos completos do cálculo de pavimentos de lajes. Em cada exemplo reliaza-se uma tabela comparando-se os custos para os diferentes métodos aplicados (expostos anteriormente).

Apresenta-se uma análise das aplicações no capítulo 9 e, por fim, as conclusões.

2. CONCEITOS BASICOS DO CÁLCULO PLÁSTICO

2.1. FASES DE COMPORTAMENTO

Sabe-se que as peças de concreto subarmadas, submetidas a esforços de flexão simples com carregamento proporcional, ou seja, função de um único parâmetro, apresentam deslocamentos que obedecem lei semelhante à indicada na figura 2.1. As fases de comportamento são apresentadas a seguir.

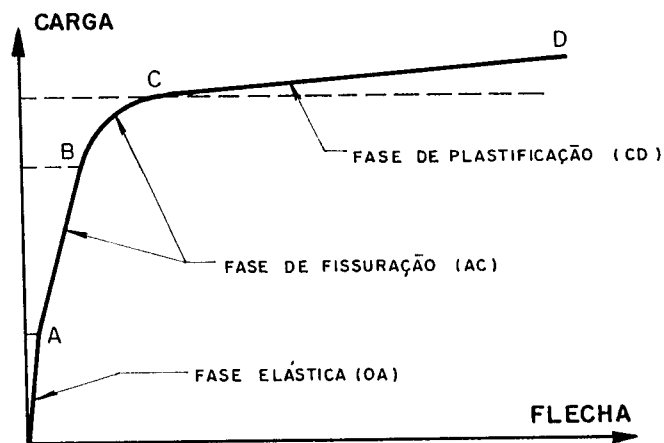


FIG 2.1 - FASES DE COMPORTAMENTO DAS LAJES SUBARMADAS

Trecho OA: fase elástica, peça não-fissurada, concreto resiste à tração e armadura no trecho elástico linear; corresponde ao Estádio I.

Trecho AC: fase de fissuração, com as seções fissuradas no Estádio II. A resistência do concreto à tração é ultrapassada nas seções de maiores momentos, iniciando-se a

fase de fissuração. Esta fase é caracterizada por uma redução da rigidez da peça e pela redistribuição dos esforços, que caminham para as seções não-fissuradas e provocam novas fissuras. No trecho BC as armaduras ultrapassam o regime elástico linear e o crescimento do deslocamento é mais acentuado ainda.

Trecho CD: fase de plastificação, na qual a armadura entra em escoamento nas seções de maiores momentos. Nesta fase, caracterizada por grandes deformações, a redistribuição de esforços é bem mais acentuada que na fase anterior. As seções plastificadas definem as linhas de plastificação, nas quais os momentos fletores permanecem praticamente constantes, crescendo nas seções vizinhas até que estas se plastifiquem e assim sucessivamente, até a formação de um mecanismo.

Ponto D: fase de ruína; esmagamento do concreto. Nas regiões mais solicitadas, o deslocamento da superfície neutra na direção da face comprimida e a decorrente diminuição das seções resistentes à compressão fazem com que ocorra a ruptura do concreto, acarretando o colapso da laje. Torna-se impossível o acréscimo de carga e os deslocamentos aumentam mesmo com a diminuição do carregamento.

2.2. RESERVA DE RESISTÊNCIA

As lajes de concreto armado, componentes de um sistema estrutural, apresentam uma reserva de resistência, que garante a possibilidade de um acréscimo de carga mesmo após completamente desenvolvida a configuração de ruína. Explicações para este fenômeno são baseadas no endurecimento do aço e nos efeitos de membrana, comentados a seguir.

2.2.1. Endurecimento do aço

Este efeito também pode ser notado nos aços de dureza natural, mas ocorre principalmente nos aços encruados, onde a tensão de ruptura é maior que a de escoamento, dando segurança suplementar à estrutura (Ver figura 2.2).

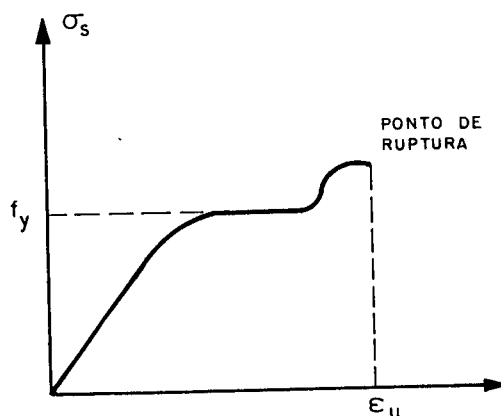


FIG 2.2 DIAGRAMAS TENSÃO X DEFORMAÇÃO DOS AÇOS

2.2.2. Efeitos de Membrana

Aplicam-se a lajes com restrições para os deslocamentos horizontais, restrições estas decorrentes da rigidez lateral das vigas de borda ou, principalmente, da continuidade em relação às lajes vizinhas. Estes efeitos podem ser de arqueamento ou de membrana tracionada.

a) Efeito de arqueamento

Com a mudança de forma da superfície média da laje, que é mais acentuada após iniciada a fase de fissuração, a superfície neutra desloca-se para as proximidades da face comprimida, caminhando para baixo na região dos apoios e para cima na região central da laje. Para pequenos deslocamentos transversais, a superfície neutra, na região dos apoios, permanece abaixo da superfície neutra na região central da laje, dando origem a um comportamento de casca ou, ao longo de uma faixa da laje, a um comportamento de arco, daí o nome de efeito de arqueamento (Ver figura 2.3).

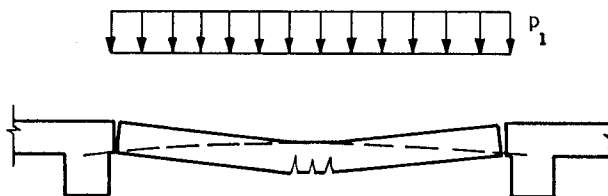


FIG 2.3 - EFEITO DE ARQUEAMENTO

b) Efeito de membrana tracionada

Na fase de plastificação, os grandes deslocamentos transversais fazem com que o efeito de arqueamento diminua, até as forças longitudinais mudarem de compressão para tração. Nesta situação a laje encontra-se bastante plastificada e tem o comportamento de estrutura pênsil, onde surge o efeito de membrana tracionada, ficando bem caracterizado nas lajes com elevadas taxas de armadura.

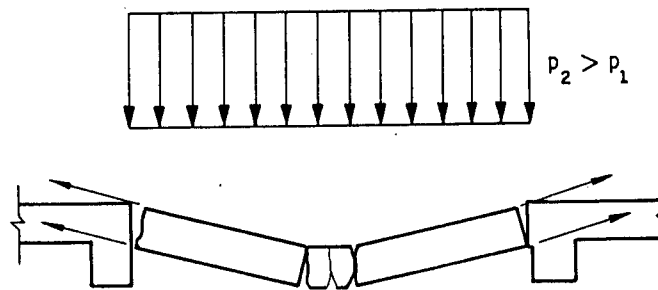


FIG 2.4 - EFEITO DE MEMBRANA TRACIONADA

2.3. CLASSIFICAÇÃO DOS MATERIAIS

Os materiais, em geral, apresentam comportamentos diferentes quanto à deformação e à ruptura, quando submetidos a ações externas.

Alguns materiais apresentam pequenas deformações no regime elástico e uma ruptura brusca (frágil), sendo portanto inadequados para uso na construção civil como materiais estruturais; outros apresentam grandes deformações e comportamento no regime plástico bem definido, sendo divididos em materiais elastoplásticos ou rígido-plásticos, como será exposto adiante.

2.3.1. Materiais frágeis e materiais dúcteis

São denominados frágeis os materiais que se rompem com pequenas deformações, não apresentando comportamento plástico. Para estes materiais, por não permitirem adequada redistribuição de esforços, não valem os métodos do cálculo plástico. O concreto simples e o concreto superarmado são exemplos destes materiais.

Ao contrário dos materiais frágeis, os materiais denominados dúcteis rompem-se após grandes deformações, apresentando comportamento plástico e, sendo a eles, portanto, aplicada a teoria das charneiras plásticas. Enquadram-se neste caso, por exemplo, o aço e as lajes de concreto subarmadas.

2.3.2. Materiais elastoplásticos e rígido-plásticos

Denominam-se elastoplásticos os materiais que possuem um comportamento caracterizado por três fases, conforme indica a figura 2.5:

- a) Fase elástica - deslocamento proporcional à carga (trecho OA);
- b) Fase elastoplástica - o acréscimo da deformação é maior que o da carga (trecho AB);
- c) Fase plástica - a deformação cresce sob carga constante (trecho BC);

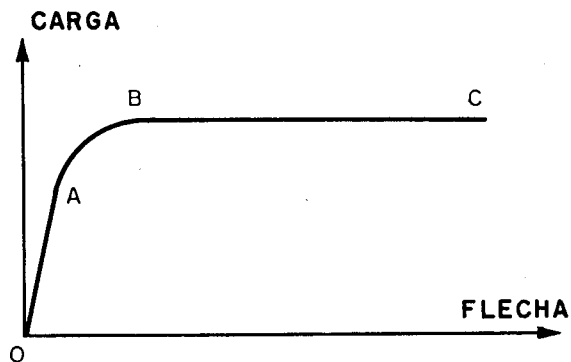


FIG 2.5 - COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS ELASTOPLÁSTICOS

Nos materiais denominados rígido-plásticos, a deformação é desprezada até o início da plastificação, que se inicia de forma brusca, adquirindo um comportamento como indicado na figura 2.6.

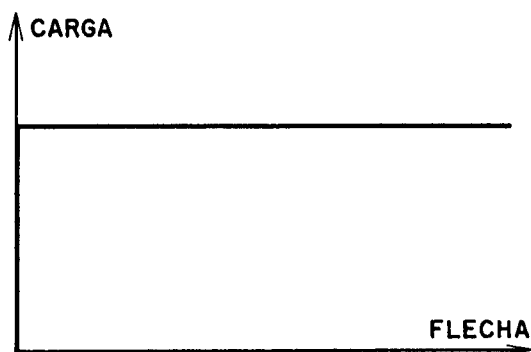


FIG 2.6 - COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS RÍGIDO-PLÁSTICOS

Como as cargas de ruína, calculadas pelos teoremas fundamentais da teoria da plasticidade, são iguais, tanto para materiais elastoplásticos como para materiais rígido-plásticos, e como o objetivo é tão somente a determinação dessas cargas, considera-se o material como sendo rígido-plástico, para maior simplicidade matemática, embora o concreto subarmado seja um material com comportamento elastoplástico.

2.4. TEOREMAS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO PLÁSTICO

O cálculo plástico é baseado em dois teoremas: o teorema estático, que fornece um limite inferior para a carga de ruína, e o teorema cinemático, que fornece um limite superior.

Com a combinação desses dois teoremas tem-se o teorema da unicidade e com este a carga de ruína das estruturas calculadas em regime plástico.

2.4.1. Teorema estático ou do limite inferior

Todo carregamento, para o qual houver a possibilidade de se achar uma distribuição de esforços estaticamente possível e segura, é menor ou igual ao que provoca a ruína.

Denomina-se distribuição de esforços estaticamente possível e segura aquela que satisfaça as condições de equilíbrio com as cargas e que, em nenhum ponto, ultrapasse a capacidade resistente da laje.

O teorema estático fornece um limite inferior para a carga de ruína, uma vez que a carga efetiva de ruína é maior ou igual ao valor obtido através do mesmo, tendo-se, então, um cálculo a favor da segurança.

2.4.2. Teorema cinemático ou do limite superior

Todo carregamento que corresponder a um mecanismo é igual ou superior ao que provoca a ruína.

Um mecanismo equivale a qualquer configuração de ruína cinematicamente admissível e caracteriza-se pela situação na qual torna-se impossível qualquer acréscimo de carga à estrutura; os deslocamentos podem aumentar até mesmo com a diminuição da carga aplicada. A carga obtida com a aplicação do teorema cinemático é em geral contra a segurança, sendo, então, um limite superior.

3. NOÇÕES SOBRE A TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS

3.1. GENERALIDADES

As lajes, assim como outras peças de concreto armado submetidas à flexão, podem atingir a ruína por ruptura do concreto à compressão sem que a armadura esteja em escoamento (ruptura frágil), caso em que são denominadas superarmadas, ou por ruptura do concreto com a armadura em escoamento, sendo então conhecidas como subarmadas.

As peças superarmadas são perigosas e antieconômicas e devem, portanto, ser evitadas. Conseqüentemente as lajes usuais são subarmadas e não apresentam tais inconvenientes.

A Teoria das Charneiras Plásticas consiste da aplicação às placas do teorema do limite superior do cálculo plástico e fornece, portanto, um valor de carga igual ou superior à carga de ruína, o que poderia sugerir que a teoria é contra a segurança; contudo, resultados experimentais demonstram que a carga de ruína é, em geral, maior que a obtida pela TCP (Teoria das Charneiras Plásticas), devido à reserva de resistência, decorrente, sobretudo, dos efeitos de membrana e do endurecimento do aço, mencionados no item 2.2.

Com base nesses resultados e nos conceitos apresentados no item 2, pode-se passar a apresentar as hipóteses de cálculo e as regras que fundamentam a Teoria das Charneiras Plásticas.

3.2. HIPÓTESES DE CÁLCULO

As hipóteses fundamentais que constituem as bases da TCP são as seguintes:

a) O material é considerado rígido-plástico, ou seja, as deformações elásticas são desprezadas em face das deformações plásticas. Nestas condições, a configuração da superfície média da laje plastificada será poliédrica e as charneiras serão retas, delimitando regiões planas adjacentes, que giram em torno dessas retas (eixos), constituindo rotações relativas entre si. Essas rotações são, portanto, as únicas deformações consideradas.

b) As lajes devem ser subarmadas, isto é, as taxas de armaduras devem ser pequenas e suficientes para que não ocorra ruptura do concreto por compressão antes do escoamento das armaduras, permitindo o completo desenvolvimento das linhas de plastificação e conseqüentemente do mecanismo de colapso.

c) Ao longo e nas vizinhanças de cada charneira o momento fletor é considerado constante e igual ao momento máximo que a laje pode resistir.

d) Não deverá haver ruína prematura por cisalhamento ou por punção. A ruína da estrutura deve ocorrer com formação de um mecanismo de colapso.

e) Desprezam-se as reservas de resistência, provenientes dos efeitos de membrana e do fenômeno do endurecimento do aço.

3.3. CONFIGURAÇÕES POSSÍVEIS DAS CHARNEIRAS

Todas as configurações geometricamente possíveis são denominadas configurações possíveis e cada uma corresponde a um carregamento (ver a figura 3.1).

Pelo teorema cinemático da teoria da plasticidade, a carga efetiva de ruína é a menor entre todas aquelas correspondentes a configurações possíveis. Esta carga é denominada carga de ruína e a correspondente distribuição das charneiras é chamada configuração de ruína.

Nos problemas de dimensionamento, onde é a carga que se conhece, a situação é recíproca. Para cada configuração das charneiras encontra-se um determinado valor do momento de plastificação.

A configuração de ruína é aquela associada ao maior valor do momento de plastificação e a laje deverá, então, ser dimensionada para este valor.

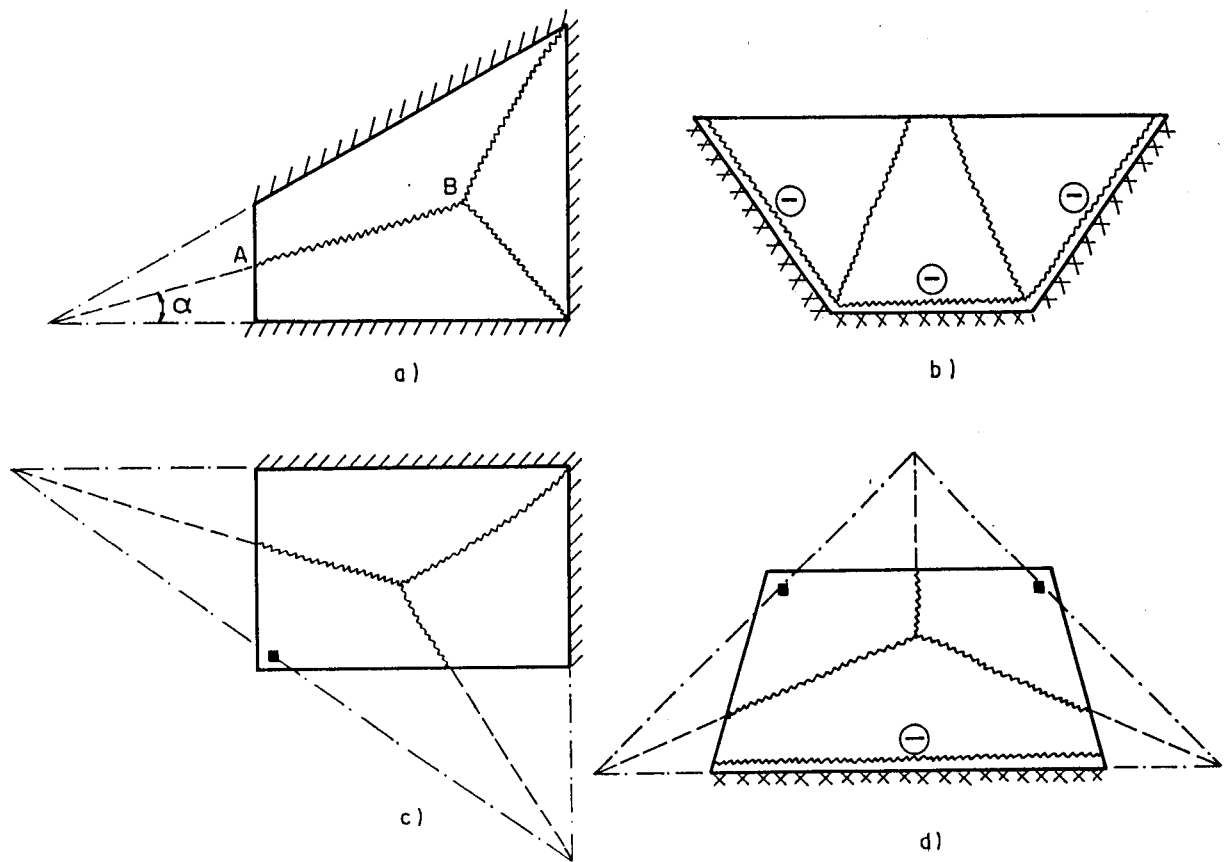


FIG 3.1 - EXEMPLOS DE CONFIGURAÇÕES DE RUÍNA

3.4. FATORES QUE INFLUEM NAS CONFIGURAÇÕES DAS CHARNEIRAS

Para se determinarem as diversas configurações das charneiras, existem alguns fatores a ser considerados:

a) Condições de apoio - ao longo dos contornos engastados formam-se charneiras superiores ou negativas, pois correspondem aos momentos considerados negativos. Cada charneira passa pelo ponto de intersecção dos eixos de rotação das regiões adjacentes. Estes eixos coincidem com lados simplesmente apoiados, com lados engastados ou passam pelos pontos de apoios isolados, sendo neste caso sua direção indeterminada.

b) Natureza e distribuição das cargas - cargas distribuídas geralmente dão origem a charneiras retilíneas, enquanto que as cargas concentradas podem acarretar charneiras curvas.

c) Disposição das armaduras - as condições de trabalho da laje serão definidas de acordo com as disposições que se queira adotar para as armaduras. Se não se quiser armar esta laje nos contornos de possíveis engastes, por exemplo, ela obviamente trabalhará como apoiada nestes contornos e aí ocorrerá a situação do item a), onde as condições de apoio influem na configuração das charneiras que deverão se formar.

3.5. NOTAÇÃO

~~~~~ charneiras  
///// borda apoiada  
xxxxxxxxx borda engastada  
———— borda livre  
- - - - - eixo de rotação  
▪ apoio pontual  
X carga concentrada para dentro  
● carga concentrada para fora  
+ + + + + carga linear

### 3.6. PROCESSOS DE CÁLCULO

São dois os processos de cálculo atualmente existentes. O primeiro empregado por JOHANSEN (1932), denominado processo do equilíbrio ou processo das forças nodais. O segundo mais recente denominado processo da energia, que em alguns casos pode ser empregado com vantagens.

### 3.7. PROCESSO DO EQUILÍBRIO OU DAS FORÇAS NODAIS

#### 3.7.1. Definições

##### a) Esforços solicitantes envolvidos

Para determinar a figura de ruína, devem ser estabelecidas condições de equilíbrio para as partes isoladas, nas quais a laje se acha dividida pelas linhas de plastificação.

Seja como exemplo uma parte da laje da figura 3.2, destacada do conjunto no instante que precede a ruína. Para que o equilíbrio em que se achava o conjunto não seja desrespeitado, deve-se aplicar, na parte isolada, a reação de apoio na borda AD e, nas linhas de plastificação AE e ED, os respectivos momentos de plastificação  $m_{AE}$  e  $m_{ED}$ , os esforços cortantes e os momentos torçores, sendo estes últimos substituídos pelas forças nodais, que serão determinadas e explicadas nos ítems a seguir.

No caso da figura 3.2, como na maioria dos casos comuns, as forças nodais são nulas e fazendo-se o equilíbrio de momentos em relação à borda AD, o momento da reação de

apoio AD também é nulo; portanto tem-se:

$$\Sigma M_i = \frac{m\ell}{2 \cos\alpha} \cdot \cos\alpha \cdot 2$$

Nota-se na equação, que não há necessidade de calcular o momento resultante da charneira e depois calcular sua projeção em relação ao eixo de rotação; o resultado é o mesmo obtido multiplicando o momento de plastificação pelo comprimento das projeções das charneiras sobre o eixo de rotação; portanto

$$\Sigma M_i = m \cdot \ell$$

que igualado à somatória dos momentos externos com relação à AD, tem-se o valor de m que é a incógnita do problema:

$$m \cdot \ell = \frac{p\ell^2}{4} \frac{\ell}{6}$$

ou  $m = p \ell^2 / 24$

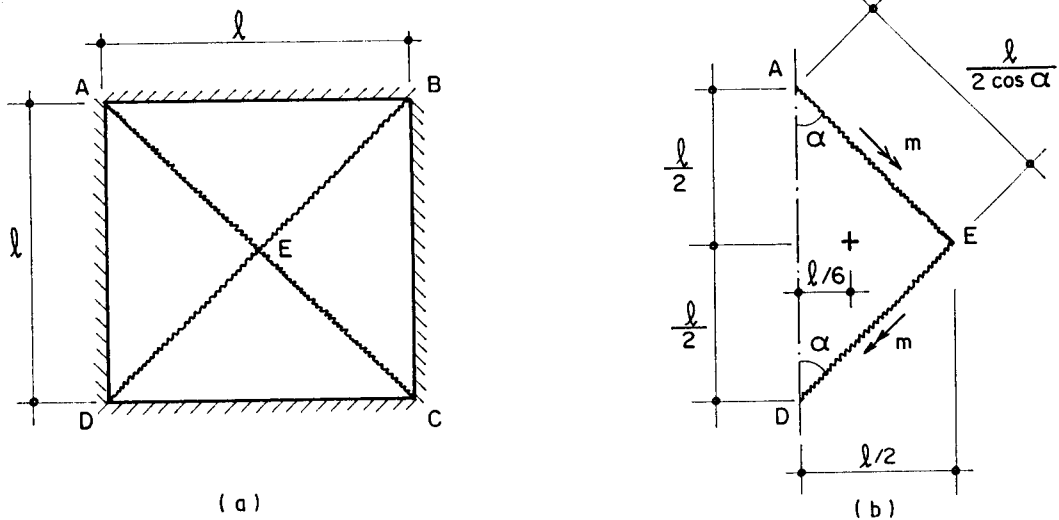


FIG 3.2 - LAJE QUADRADA COM CARGA UNIFORME

## b) Forças de transmissão

Não se conhecendo a distribuição das forças cortantes ( $v$ ) e do momento torçor ( $m_t$ ) ao longo das charneiras, admitem-se, nas extremidades dessas, pares de forças estaticamente equivalentes, formados por duas forças iguais e de sentidos contrários, nas margens opostas das linhas de plastificação (ver figura 3.3), chamadas forças de transmissão.

Esta situação se justifica, uma vez que, para o estabelecimento das equações de equilíbrio, não é necessário o conhecimento da distribuição exata dos esforços ao longo das linhas de plastificação, bastando que os esforços internos equilibrem as forças externas.

Assim tem-se, na figura 3.3a, os pontos indicando forças para cima e o sinal x forças para baixo, que correspondem às forças de transmissão.

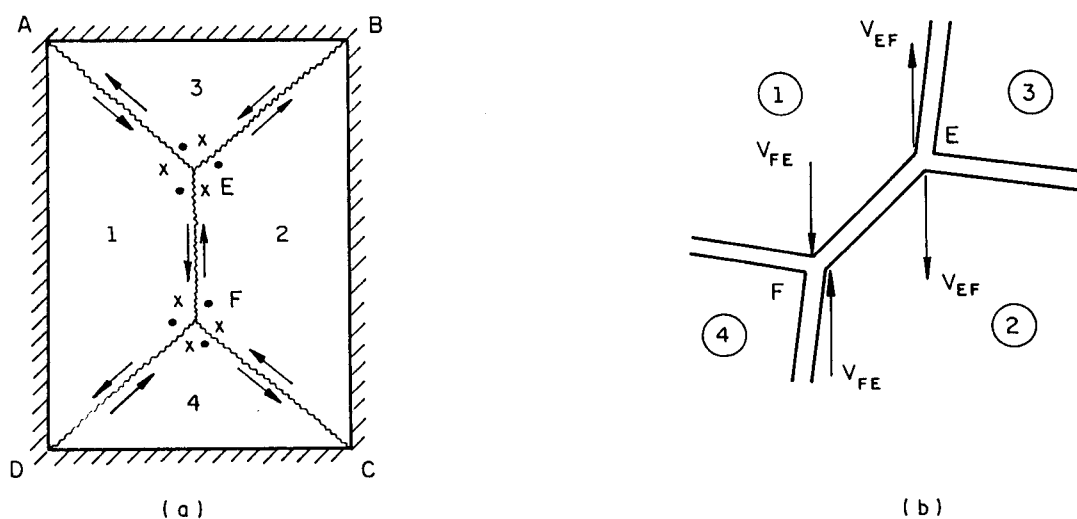


FIG 3.3 - FORÇAS DE TRANSMISSÃO

### c) Forças nodais

São as forças correspondentes à soma das forças de transmissão (com os respectivos sinais), referentes a cada nó e a cada parte da laje.

Para o nó E da figura 3.3a pode-se escrever, respectivamente, para as partes 1,2 e 3 da laje:

$$\begin{aligned} K_{E1} &= V_{EF} - V_{EA} \\ K_{E2} &= V_{EB} - V_{EF} \\ K_{E3} &= V_{EA} - V_{EB} \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

Para o nó F, analogamente às partes 1,2 e 4, resulta:

$$\begin{aligned} K_{F1} &= V_{FD} - V_{FE} \\ K_{F2} &= V_{FE} - V_{FC} \\ K_{F4} &= V_{FC} - V_{FD} \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

As forças  $K_{E1}$ ,  $K_{E2}$ ,  $K_{E3}$ ,  $K_{F1}$ ,  $K_{F2}$  e  $K_{F4}$  são, portanto, forças nodais, indicando o primeiro índice o nó a que pertencem e o segundo a correspondente parte da laje.

#### 3.7.2. Determinação das forças nodais

Partindo-se da hipótese de que nas proximidades das linhas de plastificação o momento fletor é o mesmo que existe ao longo desta linha, considere-se um caso geral de laje isótropa, com momento de plastificação positivo  $m$  e momento de plastificação negativo  $m'$  e um nó onde concorrem duas charneiras positivas e uma negativa, como na figura 3.4a :

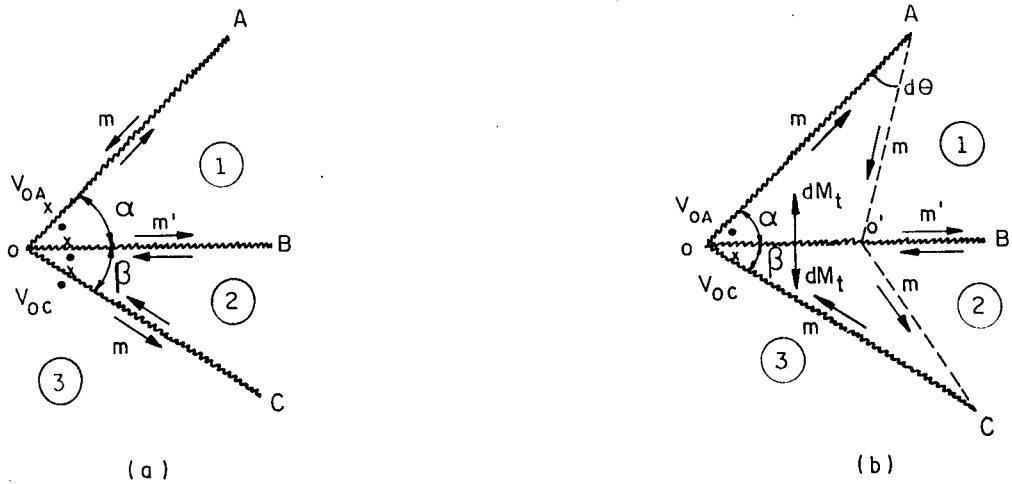


FIG 3.4 - NÓ COM DUAS CHARNEIRAS POSITIVAS E UMA NEGATIVA

Considere-se agora os triângulos  $OA O'$  e  $OC O'$  infinitamente pequenos (figura 3.4b), sendo  $OO' = dx$  um comprimento infinitesimal. No triângulo  $OA O'$ , sobre a charneira  $OA$  atua o momento total  $m \overline{OA}$  e o par estaticamente equivalente (forças de transmissão); sobre  $OO'$ , atuam o momento fletor  $m' dx$ , a força cortante  $dv = \tau dx$  e o momento torçor  $dM_t$ . Com base na hipótese inicial na seção  $AO'$ , vizinha de  $AO$ , o momento tem o mesmo valor máximo  $m$  por unidade de comprimento e, portanto, um momento total de  $m \overline{AO'}$ .

Deve-se ainda considerar que no triângulo  $OA O'$  age a carga  $dp$  que, considerada como uniformemente distribuída com intensidade  $p$ , vale:

$$dp = \frac{1}{2} p \overline{OA'} dx \sin \alpha$$

Escrevendo-se a equação de equilíbrio do triângulo  $OA O'$  em torno de  $AO'$  e considerando-se  $\cos d\theta = 1$  por ser  $d\theta$  um ângulo muito pequeno, obtém-se :

$$\begin{aligned} & - V_{oA} dx \sin \alpha - m \overline{OA} - m' dx \cos \alpha - dM_t \sin \alpha + \\ & + \tau dx \eta dx \sin \alpha + \frac{1}{2} p \overline{OA} dx \sin \alpha \xi dx \sin \alpha + \\ & + m \overline{AO'} = 0 \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Sendo

$$\overline{OA} = \overline{AO} + dx \cos \alpha \quad (3.7.4)$$

e desprezando-se as contribuições dos momentos da força cortante e da carga externa, por serem infinitésimos de ordem superior, a equação fica :

$$\begin{aligned} - V_{OA} dx \sin \alpha - m \overline{AO'} - m dx \cos \alpha - m' dx \cos \alpha + \\ - dM_t \sin \alpha + m \overline{AO'} = 0 \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

Dividindo-se todos os termos de (3.7.5) por  $dx \sin \alpha$ , chega-se a:

$$V_{OA} = - \frac{dM_t}{dx} - (m + m') \cotg \alpha \quad (3.7.6)$$

Analogamente, para o triângulo  $OCO'$  (figura 3.4b), a condição de equilíbrio de momentos em torno da seção vizinha  $O'C$  fornece, considerando-se, diretamente, o vetor resultante  $m dx$  dos dois vetores  $m \overline{CO}$  e  $m \overline{O'C}$ ,

$$V_{OC} dx \sin \beta - m dx \cos \beta - m' dx \cos \beta + dM_t \sin \beta = 0 \quad (3.7.7)$$

donde

$$V_{OC} = - \frac{dM_t}{dx} + (m + m') \cotg \beta \quad (3.7.8)$$

Da figura 3.4a, tem-se que a força nodal  $K_{03}$  vale :

$$K_{03} = V_{OC} - V_{OA} \quad (3.7.9)$$

Substituindo-se (3.7.6) e (3.7.8) em (3.7.9), resulta

$$K_{03} = (m + m')(\cotg \alpha + \cotg \beta). \quad (3.7.10)$$

Utilizando-se o mesmo artifício, ou seja, escolhendo-se os triângulos de maneira que o momento torçor fique eliminado por soma algébrica, considerem-se os triângulos  $COO''$  e  $BOO''$  (figura 3.5), onde  $OO'' = dx$ ; as seções  $BO''$  e  $CO''$ , vizinhas das charneiras  $BO$  e  $CO$ , têm os mesmos momentos  $m'$  e  $m$  respectivamente.

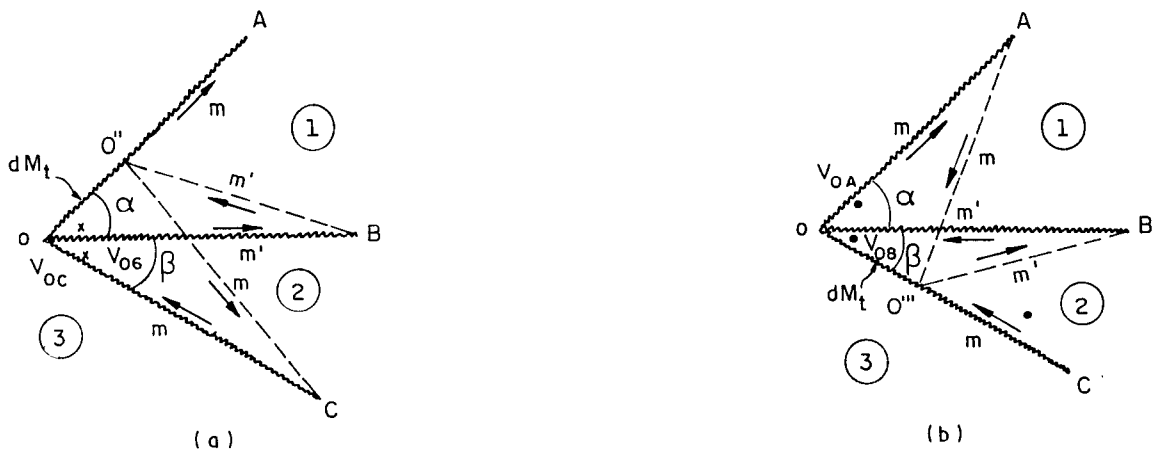


FIG 3.5 - NÓ COM DUAS CHARNEIRAS POSITIVAS E UMA NEGATIVA

Para o triângulo  $BOO''$ , estabelecendo-se a equação de momentos em torno de  $BO''$ , tem-se:

$$V_{OB} dx \operatorname{sen} \alpha + m' dx \cos \alpha + m dx \cos \alpha + dM_t \operatorname{sen} \alpha = 0, \quad (3.7.11)$$

donde

$$V_{OB} = - \frac{dM_t}{dx} - (m + m') \operatorname{cotg} \alpha \quad (3.7.12)$$

Para o triângulo  $COO''$ , a equação de momentos em torno de  $CO''$  fornece

$$V_{OC} dx \operatorname{sen} (\alpha + \beta) + m dx \cos (\alpha + \beta) - m dx \cos (\alpha + \beta) = 0 + dM_t \operatorname{sen} (\alpha + \beta) = 0, \quad (3.7.13)$$



resultando

$$V_{oc} = - \frac{dM_t}{dx} \quad (3.7.14)$$

Novamente da figura 3.4a tem-se que a força nodal  $K_{oz}$  vale:

$$K_{oz} = V_{oB} - V_{oc} \quad (3.7.15)$$

Substituindo-se (3.7.12) e (3.7.14) em (3.7.15), resulta

$$K_{oz} = - (m + m') \cotg \alpha . \quad (3.7.16)$$

Finalmente, escolhendo-se os triângulos  $A00'''$  e  $B00'''$  (figura 3.5b), com  $\overline{00'''} = dx$ , e calculando-se os momentos em torno de  $A0'''$  e  $B0'''$ , tem-se, respectivamente

$$\begin{aligned} & - V_{oA} dx \sen (\alpha + \beta) + m dx \cos (\alpha + \beta) - \\ & - m dx \cos (\alpha + \beta) - dM_t \sen (\alpha + \beta) = 0 , \end{aligned} \quad (3.7.17)$$

donde:

$$V_{oA} = - \frac{dM_t}{dx} ; \quad (3.7.18)$$

$$\begin{aligned} & - V_{oB} dx \sen \beta + m' dx \cos \beta + m dx \cos \beta - \\ & - dM_t \sen \beta = 0 \end{aligned} \quad (3.7.19)$$

donde :

$$V_{oB} = - \frac{dM_t}{dx} + (m + m') \cotg \beta . \quad (3.7.20)$$

Novamente da figura 3.4a , tem-se que a força nodal  $K_{01}$  vale:

$$K_{01} = V_{0A} - V_{0B} , \quad (3.7.21)$$

donde

$$K_{01} = - (m + m') \cotg \beta . \quad (3.7.22)$$

Tem-se, então, os valores das forças nodais, para o caso geral proposto, isto é, nó com duas charneiras positivas e uma negativa, dados pelas expressões (3.7.22), (3.7.16), (3.7.10) .

$$\begin{aligned} K_{01} &= - (m + m') \cotg \alpha, \\ K_{02} &= - (m + m') \cotg \beta, \\ K_{03} &= (m + m')(\cotg \alpha + \cotg \beta) \end{aligned} \quad (3.7.23)$$

Nota-se que a soma algébrica das forças nodais é igual a zero.

### 3.7.3. TEOREMAS

Seguem-se os teoremas sobre as forças nodais.

a) Resultante das forças em um nó

Pode-se demonstrar facilmente que

A SOMA ALGÉBRICA DAS FORÇAS NODAIS, EM UM NÓ QUALQUER, É IGUAL A ZERO.

Para isto, basta calcular a somatória das forças nodais do nó E da figura 3.3 vista anteriormente, dadas pelas expressões (3.7.1), obtendo-se:

$$K_{E1} + K_{E2} + K_{E3} = V_{EF} - V_{EA} + V_{EB} - V_{EF} + V_{EA} - V_{EB} = 0 \quad (3.7.24)$$

b) Nó com charneira de mesmo sinal

Pode-se demonstrar que

EM UM NÓ PARA O QUAL CONVERGEM SOMENTE CHARNEIRAS DE MESMO SINAL, TODAS AS FORÇAS NODAIS SÃO NULAS.

Para tal, basta supor que para o nó 0 da figura 3.4a concorram três charneiras positivas, onde as forças nodais são dadas pelas expressões (3.7.23), substituindo-se  $m'$  por  $-m$ , obtém-se :

$$K_{01} = 0, \quad K_{02} = 0, \quad K_{03} = 0.$$

O mesmo resultado seria obtido se as três charneiras fossem negativas, pois bastaria substituir  $m$  por  $-m'$  nas expressões (3.7.23).

c) Charneira concorrente com borda não engastada

Quando uma linha de plastificação negativa atinge uma borda livre ou simplesmente apoiada, as forças nodais podem ser obtidas com as expressões (3.7.23), fazendo-se  $m=0$  na borda e  $(\alpha + \beta) = \pi$ , supondo-se  $\alpha \leq \beta$  ; obtém-se, então (ver figura 3.6a) :

$$\begin{aligned} K_{01} &= -m' \cotg \beta = m' \cotg \alpha \\ K_{02} &= -m' \cotg \alpha \\ K_{03} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7.25)$$

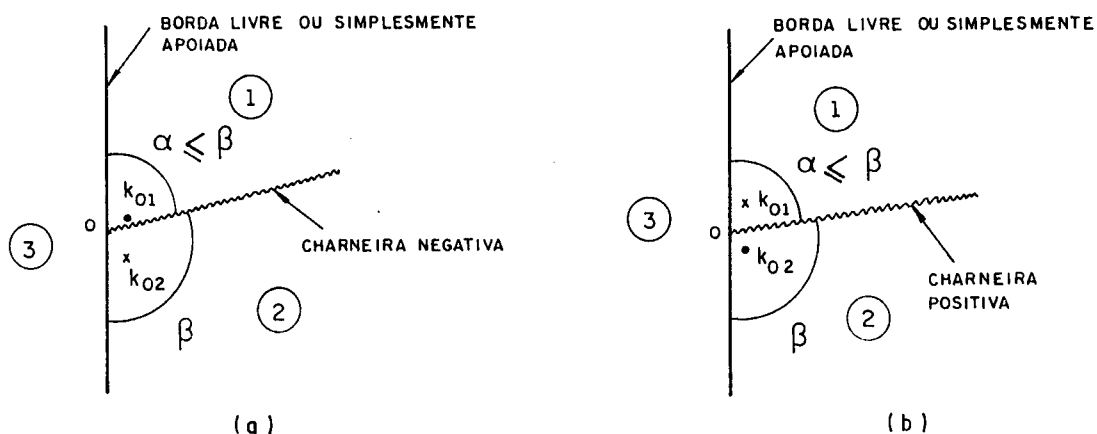


FIG 3.6 - CHARNEIRA CONCORRENTE COM BORDA NÃO ENGASTADA

Se a charneira for positiva (figura 3.6b), substitui-se, ainda,  $m'$  por  $-m$  nas equações (3.7.25), obtendo-se :

$$\begin{aligned}
 K_{01} &= -m \cotg \alpha \\
 K_{02} &= m \cotg \alpha \\
 K_{03} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.7.26}$$

Pode-se, portanto, enunciar:

EM UM NÓ FORMADO POR UMA BORDA LIVRE OU SIMPLEMENTE APOIDA E UMA CHARNEIRA PLÁSTICA, TEM-SE DUAS FORÇAS NODAIS IGUAIS E CONTRÁRIAS, COM VALOR IGUAL AO PRODUTO DO MOMENTO DE PLASTIFICAÇÃO PELA COTANGENTE DO ÂNGULO AGUDO, SENDO A DESTE DIRIGIDA PARA BAIXO NO CASO DA CHARNEIRA SER POSITIVA E PARA CIMA NO CASO CONTRÁRIO.

#### 3.7.4. Exemplo

Laje retangular isótropa com uma borda maior engastada e outra livre, as duas menores apoiadas,  $\phi = m'/m = 2$  e carga uniforme total  $p$ .

As dimensões em metros são dadas na figura 3.7, onde também é indicada a configuração de ruína com uma indeterminação  $x$ . Se resultar  $x > 0,5 \ell_y$ , as charneiras se interceptam num ponto interno, devendo os cálculos serem refeitos para esta outra configuração.

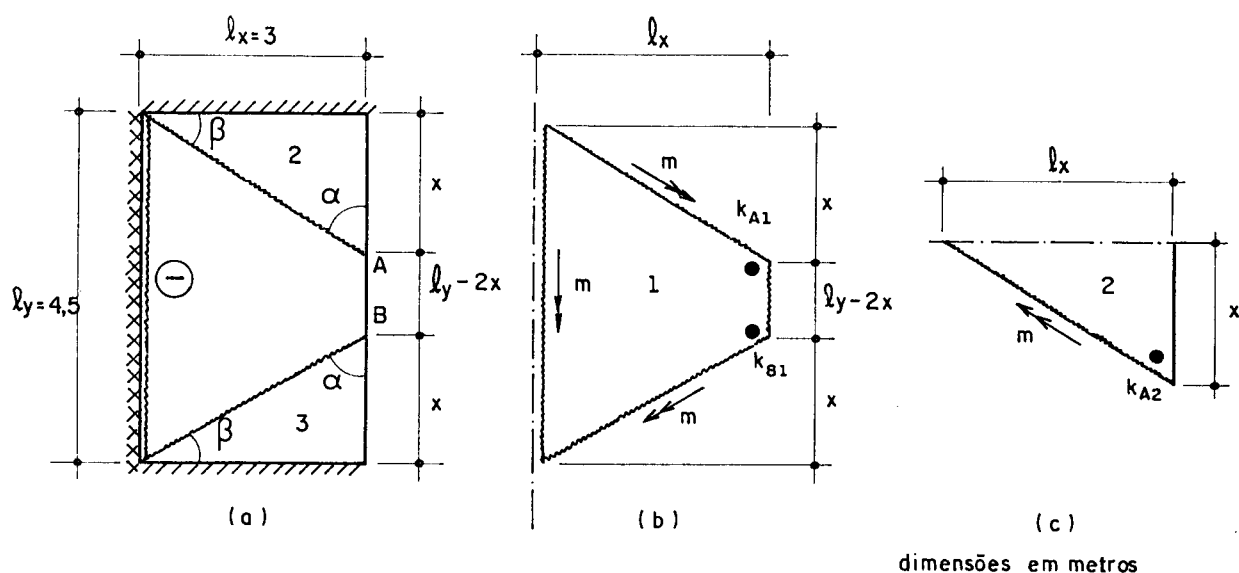


FIG 3.7 - LAJE RETANGULAR COM UMA BORDA LIVRE

Como o ângulo entre as charneiras e a borda livre é diferente de  $90^\circ$ , as forças nodais não se anulam, devendo portanto ser calculadas com as expressões (3.7.26) :

$$K_{A1} = K_{B1} = m \cotg \alpha = \frac{mx}{\ell_x}, \quad (3.7.27)$$

$$K_{A2} = -m \cotg \alpha = -\frac{mx}{\ell_x}. \quad (3.7.28)$$

Equilíbrio da região 1 :

$$\Sigma M_i = \Sigma M_e$$

$$m \cdot 2x + m' \cdot \ell_y + (K_{A1} + K_{B1}) \cdot \ell_x = p \left[ x \cdot \frac{\ell_x}{2} \cdot \frac{\ell_y}{3} \cdot 2 + \right. \\ \left. + (\ell_y - 2x) \cdot \ell_x \cdot \frac{\ell_x}{2} \right]$$

Substituindo-se os valores de  $\ell_x$ ,  $\ell_y$ ,  $K_{A1}$  e  $K_{B2}$  e resolvendo, resulta:

$$m = p \cdot \frac{20,25 - 6x}{9 + 4x} \quad (3.7.29)$$

Equilíbrio da região 2 = região 3 :

$$\Sigma M_i = \Sigma M_e$$

$$m \cdot \ell_x + K_{A2} \cdot x = p \cdot \ell_x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

Substituindo-se os valores de  $\ell_x$  e  $K_{A2}$  e resolvendo, resulta:

$$m = p \cdot \frac{3x^2}{18 - 2x^2} \quad (3.7.30)$$

Cálculo de x :

Igualando-se (3.7.29) e (3.7.30) tem-se:

$$p \cdot \frac{20,25 - 6x}{9 + 4x} = p \cdot \frac{3x^2}{18 - 2x^2}$$

Resolvendo-se a equação de segundo grau daí decorrente, resulta:

$$x = 1,6576 \text{ metros}$$

Cálculo de M :

Substituindo-se o valor de  $x$ , na (3.7.29) ou na (3.7.30), obtém-se, finalmente,

$$m = 0,659 p,$$

onde  $p$  é o valor da carga por metro quadrado.

### 3.8. PROCESSO DA ENERGIA

O processo da energia, também chamado processo do trabalho, permite um cálculo rápido e prático das equações de equilíbrio e nada mais é que a simples aplicação do princípio dos trabalhos virtuais

Uma vez determinada a configuração de ruína, admite-se um deslocamento virtual (de preferência de valor unitário) a um dos pontos convenientemente escolhido da laje.

A equação de trabalho é obtida igualando-se o trabalho das forças externas ( $T_e$ ) ao trabalho das forças internas ( $T_i$ ), o que é equivalente a se igualar o trabalho desenvolvido pela carga à energia consumida pelas charneiras durante a deformação virtual da laje. Nessas condições, o trabalho das forças nodais é nulo para a laje como um todo.

Se a configuração de ruína depender de alguns parâmetros  $x, y$  etc, o que é bastante comum, a equação que

fornece o momento é função desses parâmetros e da carga  $p$  e se apresenta sob a forma:

$$m = F(x, y, \dots, p). \quad (3.8.1)$$

Como, pelo teorema cinemático da teoria da plasticidade, o momento de plastificação é o maior entre aqueles correspondentes às diversas configurações possíveis, os valores dos parâmetros  $x, y$  etc são determinados por aproximações sucessivas ou pelas condições de máximo (derivada primeira da equação do momento):

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, \quad (3.8.2)$$

### 3.8.1. Trabalho das forças externas

Analisando-se uma região qualquer de laje, delimitada pelas charneiras e pelo apoio, e denominando-se  $f_j$  os deslocamentos das cargas concentradas  $P_j$ ,  $f$  os das distribuídas  $p$  e  $f_\ell$  o das lineares  $p_\ell$ , o trabalho desenvolvido pelas cargas nesta região da laje será:

$$T_e = P_j f_j + \int p f \, dA + \int p_\ell f_\ell \, ds \quad (3.8.3)$$

sendo  $dA$  a área do elemento infinitesimal da região em estudo e  $ds$  o comprimento infinitesimal ao longo da carga linear.

Uma vez que a laje é composta de várias regiões delimitadas pelas linhas de plastificação e pelos apoios, o trabalho total das forças externas é a somatória do trabalho desenvolvido por cada uma dessas regiões.

$$T_e = \sum [P_j f_j + \int p f \, dA + \int p_\ell f_\ell \, ds]_{\text{região}} \quad (3.8.4)$$



O trabalho desenvolvido pela carga uniformemente distribuída pode ser calculado por  $pV$ , onde  $V$  é o volume desenvolvido pela superfície deformada. Daí a equação resulta:

$$T_e = \sum [P_j f_j + \int p_\ell f_\ell ds]_{\text{região}} + pV \quad (3.8.5)$$

### 3.8.2. Trabalho das forças internas

Supondo um determinado deslocamento (unitário de preferência) de um ponto da laje na direção perpendicular ao seu plano médio, determinam-se os ângulos de rotação de todas as charneiras positivas e negativas respectivamente. Sendo  $m$  e  $m'$  os momentos de plastificação por unidade de comprimento e  $\ell$  e  $\ell'$  os comprimentos das charneiras positivas e negativas respectivamente, a energia absorvida pelas charneiras ao se deformarem será

$$T_i = m_i \ell_i \theta_i + m'_i \ell'_i \theta'_i \quad (3.8.6)$$

No caso de lajes isótropas, onde se pode considerar  $m_i$  e  $m'_i$  constantes e iguais a  $m$  e  $m'$  respectivamente, a equação fica:

$$T_i = m \ell_i \theta_i + m' \ell'_i \theta'_i \quad (3.8.7)$$

Pode-se observar em exemplos práticos (PINHEIRO, 1988) que o ângulo de rotação total de cada charneira nem sempre é de fácil obtenção.

Raciocinando-se como no item anterior, ou seja, trabalhado-se com as regiões adjacentes às charneiras isoladamente, obtém-se solução mais simples; para isto basta multiplicar  $m$  pelo comprimento da projeção ( $\ell_{i\text{proj}}$ ) da charneira ao longo do eixo de rotação e pelo ângulo de

rotação  $\theta_i$  do elemento de laje (região considerada) em relação ao mesmo eixo de rotação. Procedendo-se desta maneira para cada região, o trabalho interno total será a soma dos trabalhos parciais referentes a cada região. Então:

$$T_i = \sum [ m \ell_{i\text{proj}} \theta_i + m' \ell'_{i\text{proj}} \theta_i ]_{\text{região}} \quad (3.8.8)$$

### 3.8.3. Determinação dos momentos de plastificação

Pelo princípio dos trabalhos virtuais tem-se que a somatória dos trabalhos externos é igual a somatória dos trabalhos internos:

$$\sum T_e = \sum T_i \quad (3.8.9)$$

Os momentos de plastificação  $m$  e  $m'$  podem ser obtidos de duas formas; escolhendo-se um e calculando-se o outro, daí

$$m' = ( T_e - m \ell_i \theta_i ) / ( \ell'_i \theta'_i ), \quad (3.8.10)$$

$$m = ( T_e - m' \ell'_i \theta'_i ) / ( \ell_i \theta_i ). \quad (3.8.11)$$

ou ainda, escolhendo-se a razão  $\phi$  de  $m'$  e  $m$ , resultando

$$m = T_e / ( \ell_i \theta_i + \phi \ell'_i \theta'_i ). \quad (3.8.12)$$

Essas equações, como dito anteriormente, geralmente ficam em função de alguns parâmetros  $x, y$  etc e  $p$ . Para sua solução basta aplicar a condição de máximo, já que as cargas são conhecidas, obtendo-se assim o valor de  $m$  ou  $m'$  que são as incógnitas nos problemas mais comuns de dimensionamento.

Nos problemas de verificação, nos quais são conhecidos os momentos de plastificação  $m$  e  $m'$ , são adotados valores das cargas  $P_j$ ,  $p$  e  $p_\ell$  e se determina o fator  $K$  pelo

qual se deve multiplicar estas cargas para que se tenha o carregamento correspondente à configuração das charneiras em questão. O fator  $K$  é determinado igualando-se (3.8.5) e (3.8.8) e substituindo-se, nestas,  $P_j$ ,  $p$  e  $P_\ell$  respectivamente por  $K P_j$ ,  $Kp$  e  $Kp_\ell$ , resultando:

$$K = T_i / ( P_j f_j + pV + \int p_\ell f_\ell ds )$$

### 3.8.4. Exemplo

Tem-se agora o mesmo exemplo do item 3.7.4, resolvido pelo processo da energia, adotando-se, obviamente, a mesma configuração de ruína.

Laje retangular isótropa com uma borda maior engastada e a outra livre, as duas menores apoiadas, carga uniforme  $p$  e  $\phi = m'/m = 2$  (figura 3.8).

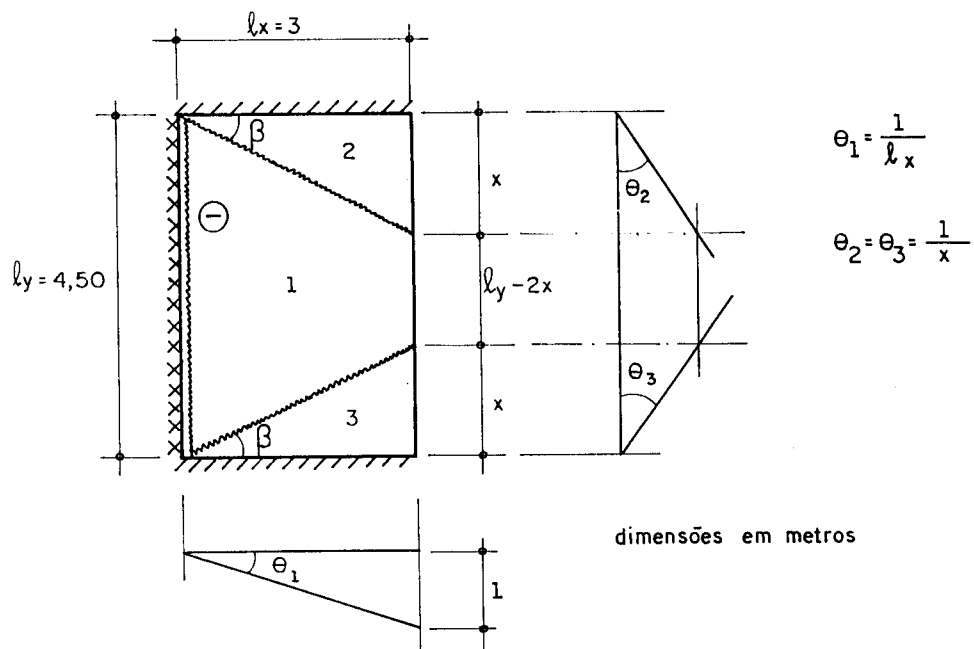


FIG 3.8 - LAJE RETANGULAR COM BORDA LIVRE

Para a região 1, tem-se:

$$\begin{aligned} T_i &= m \cdot 2x \cdot \theta_1 + m' \cdot \ell_y \cdot \theta_1 = 2 m (x + \ell_y) \frac{1}{\ell_x} = \\ &= \frac{2}{3} m (x + 4,5) \end{aligned} \quad (3.8.13)$$

$$\begin{aligned} T_e &= p \left[ x \frac{\ell_x}{2} \frac{1}{3} \cdot 2 + (\ell_y - 2x) \ell_x \frac{1}{2} \right] = \\ &= p (6,75 - 2x) \end{aligned} \quad (3.8.14)$$

Para as regiões iguais 2 e 3 tem-se :

$$T_i = m \ell_x \theta_2 = \frac{3m}{x}, \quad (2 \text{ vezes}) \quad (3.8.15)$$

$$T_e = p \ell_x \frac{x}{2} \frac{1}{3} = \frac{px}{2} \quad (2 \text{ vezes}) \quad (3.8.16)$$

Para a laje toda se obtém, respectivamente :

$$T_i = \frac{2}{3} m (x + 4,5) + \frac{6m}{x} = m \left( \frac{2}{3} x + 3 + \frac{6}{x} \right), \quad (3.8.17)$$

$$T_e = p (6,75 - 2x + x) = p (6,75 - x). \quad (3.8.18)$$

Igualando-se  $T_i$  e  $T_e$  resulta :

$$m = p \frac{6,75 - x}{\frac{2}{3} x + 3 + \frac{6}{x}} = 3p \frac{6,75x - x^2}{2x^2 + 9x + 18}. \quad (3.8.19)$$

O momento de plastificação  $m$  corresponde ao maior valor dado pela expressão (3.8.19). Derivando-a em relação a  $x$  e igualando a zero esta derivada, obtém-se  $x$ :

$$\frac{dm}{dx} = 3p \frac{(2x^2 + 9x + 18)(6,75 - 2x) - (6,75x - x^2)(4x + 9)}{(2x^2 + 9x + 18)^2} = 0$$

$$(2x^2 + 9x + 18) (6,75 - 2x) - (6,75x - x^2) (4x + 9) = 0$$

$$x^2 + 1,6x - 5,4 = 0$$

$$x = 1,6576 \quad (3.8.20)$$

Substituindo-se este valor na expressão (3.8.19), resulta

$$m = 0,659 p$$

onde  $p$  é a carga por unidade de área em  $m^2$ .

Pode-se perceber a facilidade de cálculo oferecida por este processo, principalmente, pelo fato de não se fazer necessário o cálculo das forças nodais.

### 3.9. LAJES ORTÓTROPAS

Enuncia-se neste item os conceitos de isotropia, anisotropia e ortotropia, mostrando a seguir o método de resolução das lajes ortótropas por afinidade, ou seja, transformando-as em lajes isótropas afins, proposto por JOHANSEN (1962).

Até agora só foram consideradas lajes isótropas, para maior simplicidade das demonstrações dos métodos de resolução propostos, e mostra-se adiante, que estes métodos podem ser utilizados e aplicados nas lajes ortótropas.

#### 3.9.1. Isotropia, anisotropia e ortotropia

Denominam-se isótropas as lajes que apresentam a mesma resistência à flexão, qualquer que seja a direção da seção transversal considerada.

Em uma laje qualquer, sendo  $m_1$  e  $m_2$  os momentos de plastificação nas direções 1 e 2 respectivamente, como indicado na fig. (3.9), admite-se que em uma seção inclinada  $\alpha$  em relação à direção 1, o momento de plastificação seja

$$m_{\alpha} = m_1 \text{sen}^2 \alpha + m_2 \text{cos}^2 \alpha.$$

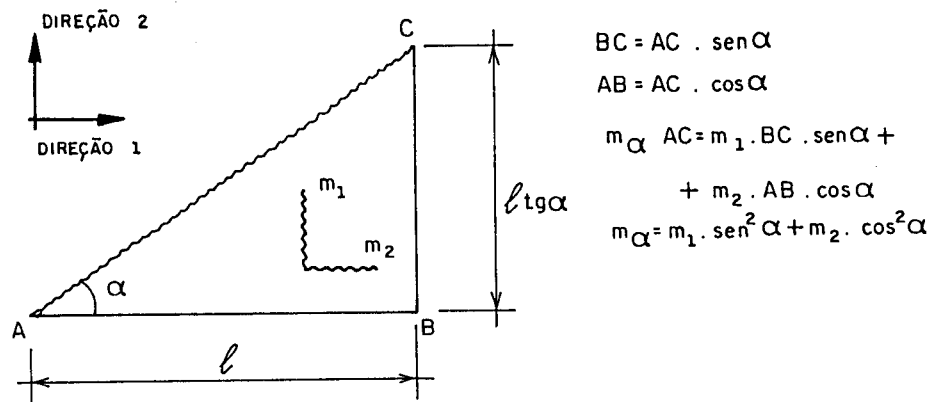


FIG 3.9 - CHARNEIRA INCLINADA EM RELAÇÃO AS ARMADURAS

Se a laje for isótropa,  $m_1$  é igual a  $m_2$ , verificando-se, portanto, que o momento na seção inclinada de  $\alpha$  terá o mesmo valor, pois

$$m = m_1 (\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha) = m_1.$$

Então, para que uma laje com armaduras dispostas ortogonalmente seja isótropa, basta que sejam iguais os momentos de plastificação nestas duas direções, conclusão válida tanto para os momentos positivos quanto para os negativos.

Deve-se atentar para o fato de que os momentos serão iguais, mas as armaduras não poderão ser iguais, pois

elas não se encontram no mesmo nível, devendo ser, portanto, inversamente proporcionais às alturas úteis em que estão localizadas.

Caso as lajes não apresentem a mesma resistência à flexão em qualquer direção que seja considerada, elas são denominadas anisótropas. Neste caso, porém, admite-se que numa mesma direção os momentos de plastificação sejam os mesmos.

Em alguns casos encontrados na prática as lajes são ortótropas, ou seja, possuem armaduras ortogonais, que oferecem momentos de plastificação positivos diferentes  $m_1$  e  $m_2$  e momentos negativos também diferentes  $m'_1$  e  $m'_2$  e que guardam a mesma relação  $\mu$  entre si, denominada índice de ortotropia, portanto

$$m_2 = \mu m_1 \quad \text{e} \quad m'_2 = \mu m'_1$$

### 3.9.2. Transformação de lajes ortótropas em isótropas

As lajes ortótropas podem ser calculadas como se fossem isótropas, bastando para isso fazer uma modificação de suas dimensões.

Uma placa ortótropa com momentos de plastificação  $m$ ,  $m'$  e  $\mu m$ ,  $\mu m'$ , pode ser calculada como uma placa isótropa, afim à ortótropa, que conduz ao mesmo momento de plastificação, multiplicando-se as dimensões nas direções de  $m$  e  $m'$  por  $1/\sqrt{\mu}$ , onde  $\mu$  é o índice de ortotropia.

Na laje afim, as resultantes aparecem divididas por  $\sqrt{\mu}$ .

a) Carga concentrada

Laje ortótropa:  $P$       Laje afim:  $P_a = \frac{P}{\sqrt{\mu}}$

b) Carga uniformemente distribuída

Laje ortótropa:  $p$       Laje afim:  $p_a = p$

c) Carga linear

Laje ortótropa:  $p_\ell$

Laje afim:  $p_{\ell a} = \frac{p_\ell}{\sqrt{\mu \cos^2 \omega + \sin^2 \omega}}$

onde  $\omega$  é o ângulo entre a carga linear e a direção em que as dimensões não se alteram.

Este procedimento foi proposto por JOHANSEN (1962) e a demonstração para se chegar a estes resultados pode ser facilmente visualizada em PINHEIRO (1988) e é ilustrado pela figura 3.10.

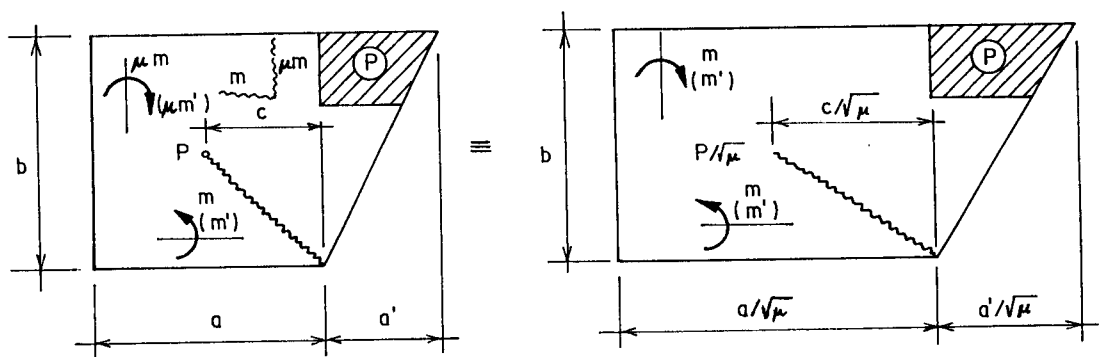


FIG 3.10 - OBTENÇÃO DA LAJE ISÓTROPICA AFIM



### 3.9.3. Exemplo de resolução com a laje isótropa afim

Laje retangular com uma borda livre, carga uniformemente distribuída  $p = 5 \text{ kN/m}^2$  e carga linear ao longo da borda livre  $p_\ell = 8 \text{ kN/m}$ . O índice de ortotropia  $\mu = 2$  é indicado na figura e adotado com base no cálculo elástico.

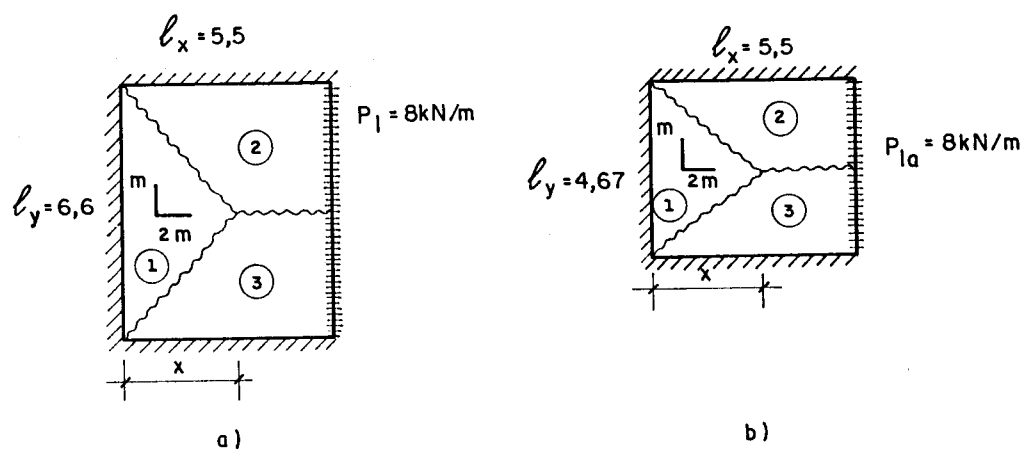


FIG 3.11 - LAJE ORTÓTropa (A) E SUA ISÓTropa AFIM (B)

Aplicando-se o processo da energia e ainda adotando-se o valor de  $x = 3,3$  ( $\alpha = 45^\circ$ ), como primeira tentativa, tem-se:

a) 1ª Tentativa  $x = 3,3$  ( $\alpha = 45^\circ$ )

#### TRABALHO DAS FORÇAS INTERNAS ( $T_i$ )

$$T_i = \sum [ m \ell_{i \text{proj}} \theta_i + m' \ell'_{i \text{proj}} \theta_i ]_{\text{região}}$$

$$T_i = m \left[ 4,67 \frac{1}{3,3} + 2 \times 5,5 \frac{2}{4,67} \right] = 6,126 \text{ m}$$

TRABALHO DAS FORÇAS EXTERNAS (T<sub>e</sub>)

$$T_e = \sum \left[ P_j F_j + \int p f da + \int p_\ell^f \ell ds \right]_{\text{região}}$$

$$T_e = 5,0 \times 4,67 \frac{3,3}{2} \frac{1}{3} + 2 \times 5,0 \left[ \left( 3,3 \frac{2,335}{2} \frac{1}{3} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2,2 \times 2,335 \frac{1}{2} \right) \right] + 8,0 \times 4,67 \frac{1}{2}$$

$$T_e = 70 \text{ kN}$$

Como  $\sum T_i = \sum T_e$ , tem-se:

$$6,136 \text{ m} = 70$$

Daí

$$\underline{m = 11,41 \text{ kN m/m}}$$

b) 2ª Tentativa  $x = 2,5$  ( $\alpha = 37,15^\circ$ )

Analogamente, tem-se:

$$m = 11,12 \text{ kN m/m}$$

c) 3<sup>o</sup> Tentativa  $x = 3,8$  ( $\alpha = 49^\circ$ )

$$m = 11,46 \text{ kN m/m}$$

c) 4<sup>o</sup> Tentativa  $x = 4,0$  ( $\alpha = 50,5^\circ$ )

$$m = 11,45 \text{ kN m/m}$$

Pode-se perceber com este exemplo também a simplicidade da resolução por tentativas, ou seja, arbitrando-se valores para a incógnita do problema consegue-se uma rápida convergência para a sua solução.

## 4. SISTEMATIZAÇÃO DO CÁLCULO DE LAJES RETANGULARES

### 4.1. GENERALIDADES

Faz-se neste capítulo uma sistematização do cálculo de lajes retangulares não-isótropas para edifícios, com carga distribuída e bordas apoiadas ou engastadas, com uma formulação simples e direta, de forma a permitir ao engenheiro de estruturas enfrentar casos reais e mais comuns da prática.

O processo de resolução será o do equilíbrio, de fácil aplicação, permitindo inclusive a elaboração de um programa para computador.

Os momentos negativos serão dados de entrada e devem ser baseados nos momentos provenientes do cálculo elástico, como foi proposto por RIOS (1991).

### 4.2. BORDAS ENGASTADAS OU SIMPLEMENTE APOIADAS

Considerando-se a figura (4.1) e fazendo-se o equilíbrio de momentos de cada região, tem-se:

Região 1:

$$(m + m_1) b = p \left[ b_1 \frac{a_1}{2} \cdot \frac{a_1}{3} + b_2 \frac{a_1}{2} \cdot \frac{a_1}{3} + (b - b_1 - b_2) \frac{a_1^2}{2} \right]$$

$$(m + m_1) = \frac{pa_1^2}{6b} \left[ 3b - 2(b_1 + b_2) \right] \quad (4.1)$$

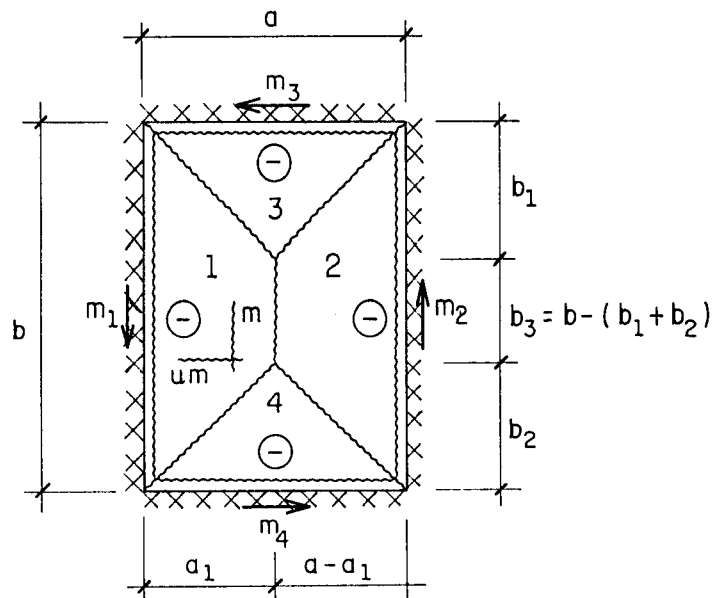


FIG. 4.1 - ESQUEMA DE LAJE PARA SISTEMATIZAÇÃO

Região 2:

$$(m + m_2) = p \frac{(a - a_1)^2}{6b} \left[ 3b - 2(b_1 + b_2) \right] \quad (4.2)$$

Região 3:

$$(\mu m + m_3) a = p a \frac{b_1}{2} \cdot \frac{b_1}{3}$$

$$(\mu m + m_3) = \frac{pb_1^2}{6} \quad (4.3)$$

Região 4 (Analogamente):

$$(\mu m + m_4) = \frac{pb_2^2}{6} . \quad (4.4)$$

Observar que as forças nodais são nulas, devido ao teorema B do item 3.7.3.

Das equações (4.3) e (4.4), obtém-se respectivamente:

$$b_1 = \sqrt{\frac{6}{p} (\mu m + m_3)} \quad (4.5)$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{6}{p} (\mu m + m_4)} \quad (4.6)$$

Substituindo-se  $(b_1 + b_2)$  nas equações (4.1) e (4.2), tem-se, respectivamente:

$$m + m_1 = \frac{pa_1^2}{6b} \left[ 3b - 2 \sqrt{\frac{6}{p}} \left( \sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4} \right) \right]$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{6b(m + m_1)}{3pb - 2\sqrt{6p} (\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4})}} \quad (4.7)$$

$$m + m_2 = \frac{p(a - a_1)^2}{6b} \left[ 3b - 2 \sqrt{\frac{6}{p}} \left( \sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4} \right) \right]$$

$$a - a_1 = \sqrt{\frac{6b(m + m_2)}{3pb - 2\sqrt{6p}(\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4})}} \quad (4.8)$$

Somando-se (4.7) e (4.8):

$$a = \frac{\sqrt{6b}(\sqrt{m + m_1} + \sqrt{m + m_2})}{\sqrt{3pb - 2\sqrt{6p}(\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4})}} \quad (4.9)$$

Então, resulta finalmente:

$$\begin{aligned} \sqrt{m + m_1} + \sqrt{m + m_2} &= \\ &= \frac{a}{\sqrt{6b}} \sqrt{3pb - 2\sqrt{6p}(\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4})} \end{aligned} \quad (4.10)$$

A equação (4.10) depende somente de  $m$  e pode ser resolvida iterativamente, pois pode-se considerar:

$$f_1(m) = \sqrt{m + m_1} + \sqrt{m + m_2} \quad (4.11)$$

$$f_2(m) = \frac{a}{\sqrt{6b}} \sqrt{3pb - 2\sqrt{6p}(\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4})} \quad (4.12)$$

As funções  $f_1(m)$ , crescente, e  $f_2(m)$ , decrescente, podem ser esquematizadas como se indica na Fig. 4.2, na qual se indica também o valor de  $m$  relativo à solução do problema.

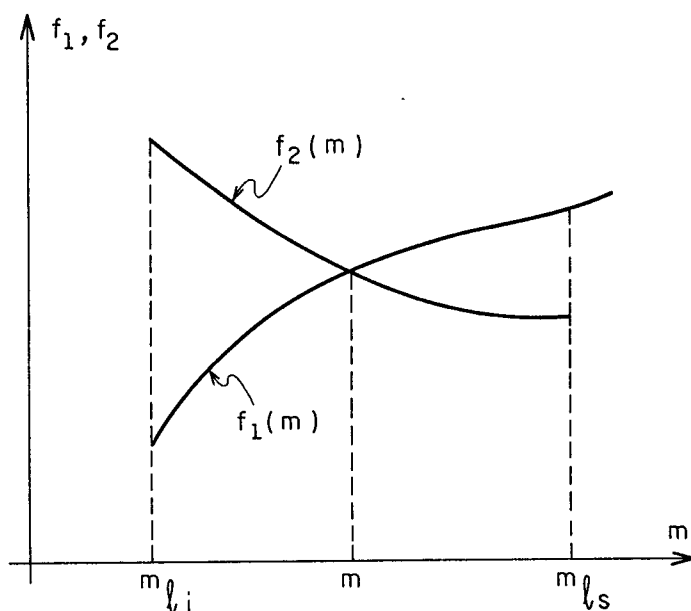


FIG 4.2 - GRÁFICO DAS FUNÇÕES  $f_1$  E  $f_2$

#### 4.3. VERIFICAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO DE RUÍNA

Supor inicialmente, com a notação da figura 4.1,  $a = \ell_x$ ,  $b = \ell_y$ ,  $\mu = \frac{m_y}{m_x}$ . Com a notação adotada, são conhecidos também os valores de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  e  $m_4$ .

Obtém-se o valor de  $m$  que corresponde a  $f_1 = f_2$ . Para que a configuração de ruína seja, de fato, a configuração comum, com a charneira central na direção do maior vão, deve ser verificada a condição:

$$b_1 + b_2 \leq b$$

Substituindo-se os valores dados pelas equações (4.5) e (4.6), tem-se:



$$\sqrt{\frac{6}{p} (\mu m + m_3)} + \sqrt{\frac{6}{p} (\mu m + m_4)} \leq b$$

$$\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4} \leq b \sqrt{\frac{p}{6}} \quad (4.13)$$

Se esta condição se verifica tem-se, de fato, configuração comum. Caso contrário, tem-se configuração eventual, com a charneira central na direção do menor vão, e o cálculo deverá ser refeito, trocando-se os valores de a e b e invertendo-se a relação  $\mu$ .

#### 4.4. LIMITE SUPERIOR ( $m_{\ell s}$ )

A partir da condição 4.13, conforme RIOS (1991), chega-se a:

$$m \leq m_{\ell s} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{1,5}{pb^2} \left\{ \frac{pb^2}{6} - m_3 + m_4 \right\}^2 - m_4 \right] \quad (4.14)$$

#### 4.5. LIMITE INFERIOR ( $m_{\ell i}$ )

A partir da equação 4.10, também conforme RIOS (1991), chega-se a:

$$2 \sqrt{(m + m_1) (m + m_2)} = \frac{a^2}{6b} \left[ 3p - 2\sqrt{6} p \left( \sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4} \right) \right] - 2m - m_1 - m_2$$

Com a condição 4.13, tem-se

$$2 \sqrt{(m + m_1)(m + m_2)} \geq \frac{a^2}{6b} \left[ 3pb - 2 \sqrt{6p} b \sqrt{\frac{p}{6}} \right]$$

Simplificando-se, chega-se a:

$$m \geq m_{\ell i} = \frac{1,5}{pa^2} \left\{ \frac{pa^2}{6} - m_1 + m_2 \right\}^2 - m_2 \quad (4.15)$$

#### 4.6. COMPRIMENTO DA ARMADURA NEGATIVA

Deve-se notar a importância de se determinar o comprimento adequado das barras negativas, para se evitar um tipo de ruína localizada como nas figuras 4.3, pois no ponto de interrupção da armadura forma-se uma charneira negativa, cujo momento de plastificação é nulo.

Para se determinar o comprimento mínimo das barras negativas, considera-se uma laje equivalente, simplesmente apoiada na linha de interrupção das barras ( $m_i = 0$ ). A nova laje deve resistir aos novos esforços, com as armaduras relativas à laje original.

Supõe-se, inicialmente, configuração comum (figuras 4.3a e 4.3b), onde:

$$\begin{aligned} a &= \ell_x & b &= \ell_y & m &= m_x & \mu_c &= \frac{m_y}{m_x} \\ m_1 &= m_{xe} & m_2 &= m_{xd} & m_3 &= m_{ys} & m_4 &= m_{yi} \end{aligned}$$

Na equação (4.10) do item 4.2 substitui-se  $a$  por  $a^*$ , resultando:

$$a^* = \frac{\sqrt{6b} (\sqrt{m + m_1} + \sqrt{m + m_2})}{\sqrt{3pb - 2 \sqrt{6} p (\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4})}} \quad (4.16)$$

Analogamente, substituindo-se  $b$  por  $b^*$  na mesma equação encontra-se:

$$b^* = \frac{2a^2 \sqrt{6p} (\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4})}{3pa^2 - 6 (\sqrt{m + m_1} + \sqrt{m + m_2})^2} \quad (4.17)$$

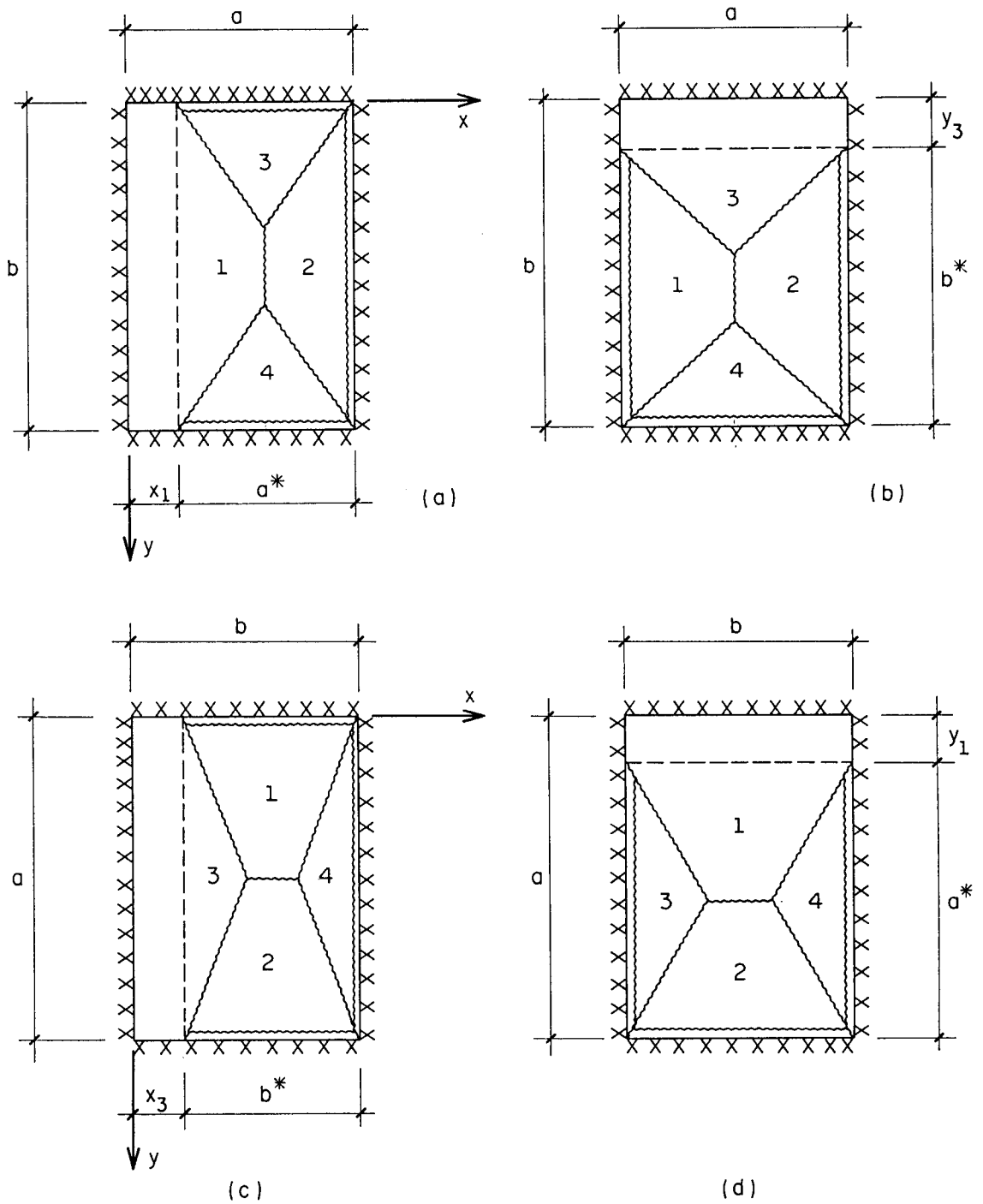


FIG 4.3 - LAJE RETANGULAR ENGASTADA EM SEU CONTOURO

Chamando-se de  $x_1$  e  $x_2$  os pontos de interrupção da armadura negativa ao longo dos lados esquerdo e direito, respectivamente, e sabendo-se que o momento negativo, ao longo do lado que delimita a nova laje, é nulo (suposto simplesmente apoiado), obtém-se:

$$x_1 = a - a_1^* , \quad a_1^* \text{ calculado com } m_1 = 0 ;$$

$$x_2 = a - a_2^* , \quad a_2^* \text{ calculado com } m_2 = 0 .$$

Chamando-se, ainda, de  $y_3$  e  $y_4$  os pontos de interrupção da armadura negativa ao longo dos lados superior e inferior, respectivamente, com as mesmas considerações anteriores, obtém-se:

$$y_3 = b - b_3^* , \quad b_3^* \text{ calculado com } m_3 = 0 ;$$

$$y_4 = b - b_4^* , \quad b_4^* \text{ calculado com } m_4 = 0 .$$

Após a consideração de configuração comum, deve-se verificar as situações de configuração eventual, mostradas nas figuras 4.3c e 4.3d, para as quais deve-se fazer:

$$\begin{array}{llll} a = \ell_y & b = \ell_x & m = m_y & \mu_e = \frac{m_x}{m_y} \\ m_1 = m_{ys} & m_2 = m_{yi} & m_3 = m_{xe} & m_4 = m_{xd} \end{array}$$

Com as mesmas equações (4.16) e (4.17) e as considerações feitas anteriormente, obtêm-se:

$$x_3 = b - b_3^*, \quad b_3^* \text{ calculado com } m_3 = 0 ;$$

$$x_4 = b - b_4^*, \quad b_4^* \text{ calculado com } m_4 = 0 ;$$

$$y_1 = a - a_1^*, \quad a_1^* \text{ calculado com } m_1 = 0 ;$$

$$y_2 = a - a_2^*, \quad a_2^* \text{ calculado com } m_2 = 0 .$$

De posse desses valores, pode-se determinar o comprimento mínimo das barras negativas sobre cada lado da laje, adotando-se o maior valor de cada par:

$$x_e = x_1 \text{ ou } x_3$$

$$x_d = x_2 \text{ ou } x_4$$

$$y_s = y_3 \text{ ou } y_1$$

$$y_i = y_4 \text{ ou } y_2$$

Note-se que nestes valores não são considerados os prolongamentos das barras necessários à ancoragem. Deve-se, portanto, somar-se a eles os respectivos comprimentos de ancoragem.

## 5. FLECHAS

### 5.1. GENERALIDADES

As estruturas de concreto armado devem ser projetadas não só para atender aos critérios de verificação de segurança contra a ruína, mas também satisfazer às condições de utilização.

De acordo com as normas brasileiras NBR-6118 (1982) e NBR-8681 (1984), definem-se estados limites como sendo os estados a partir dos quais a estrutura apresenta desempenho inadequado às finalidades da construção. Os estados limites podem ser estados limites últimos, referentes à ruína, e estados limites de utilização, referentes às condições de utilização da estrutura.

Em geral, quando se adota a espessura de uma laje, para que se atenda às exigências das normas quanto à espessura mínima e ao limite de deformabilidade, chega-se a valores excessivos com relação à flexão.

O cálculo baseado na teoria das charneiras plásticas, por ser em geral mais econômico, permite a utilização de espessuras menores, fazendo-se conveniente e até necessária a verificação da flecha da laje para garantir que esta atenda às condições de utilização.

### 5.2. TIPOS E VALORES DAS AÇÕES

Podem classificar-se as ações em: de curta duração e de longa duração.

a) Ações de longa duração ( $p_\ell$ )

São representadas pelas cargas permanentes ( $g_k$ ) mais uma pequena parcela da carga de uso ( $q_k$ ), que são determinadas pela expressão  $\psi_2 q_k$  e denominadas valores quase-permanentes das ações variáveis, ou seja, podem atuar durante grande parte do período de vida da estrutura, da ordem da metade desse período. São estas ações que provocam fluência.

Os valores de  $\psi_2$  são expostos a seguir. Note-se que esses valores são referentes a lajes de edifícios convencionais.

- Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas  $\Rightarrow \psi_2 = 0,2$ .

- Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo ou de elevadas concentrações de pessoas  $\Rightarrow \psi_2 = 0,4$ .

- Bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens  $\Rightarrow \psi_2 = 0,6$ .

Desta forma, a expressão para maioria das lajes de edifícios fica:

$$p_\ell = g_k + 0,2q_k \quad (5.1)$$

b) Ações de curta duração ( $p_i$ )

Referem-se à maior parte da carga de uso e causam somente flecha imediata, não se devendo, portanto, considerar esta parcela de carga no cálculo da fluência. Seu valor não é explicitamente indicado nas normas, mas pode ser expresso

por:

$$p_i = (1 - \psi_2) q_k \quad (5.2)$$

### 5.3. DETERMINAÇÃO DA FLECHA

O cálculo das flechas em lajes, considerando apenas a flecha elástica instantânea, leva a uma estimativa não muito fiel do que acontece na realidade. Uma análise mais adequada deve levar em conta, além da diminuição da rigidez devida à fissuração, os efeitos dependentes do tempo, decorrentes basicamente da fluência e da retração.

Para tal, a flecha final de uma laje teria a seguinte expressão:

$$a_{tot} = a_\ell + a_i + a_{cs} \quad (5.3)$$

onde:

$a_{tot}$  = flecha resultante na idade  $t$ ,  
 $a_\ell$  = flecha total decor. das ações de longa duração ( $p = p_\ell$ )  
 $a_i$  = flecha elástica para cargas de curta duração ( $p = p_i$ )  
 $a_{cs}$  = flecha decorrente da retração.

### 5.4. FLECHA ELÁSTICA IMEDIATA

No caso de barras submetidas à flexão pura, a equação diferencial que rege o problema de deformação é (ver RIOS, 1991):

$$\frac{d^2 v}{d x^2} = - \frac{M}{EI} \quad (5.4)$$



Para o caso de laje, a equação diferencial da elástica é muito mais complexa e é regida pela equação de Lagrange:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (5.5)$$

onde D é o módulo de rigidez à flexão, cujo valor é

$$D = \frac{EI}{(1-\nu^2)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5.6)$$

sendo,

I = momento de inércia à flexão da placa;

h = espessura da placa;

E = módulo de deformação longitudinal;

$\nu$  = coeficiente de Poisson.

É imediato perceber que o cálculo de flechas para lajes, utilizando a equação diferencial da elástica, é muito laborioso; por isso recorre-se a tabelas que, em geral, utilizaram diferenças finitas ou série de funções. Pode-se também utilizar outros processos numéricos, tais como elementos de contorno ou elementos finitos.

Sugere-se para tanto o cálculo a partir das Tabelas de Bares (PINHEIRO, 1993), donde

$$a_i = \frac{\alpha}{100} \frac{p \ell_x^4}{Eh^3}$$

Como

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad h^3 = \frac{12I}{b}$$

tem-se, portanto

$$a_i = \frac{\alpha}{100} \frac{p \ell_x^4}{E \cdot \frac{12I}{b}}$$

e, por fim

$$a_i = \frac{\alpha b}{1200} \cdot \frac{p \ell_x^4}{EI} \quad (5.7)$$

onde

$b \Rightarrow 100$  cm

$\ell_x \Rightarrow$  menor vão

$E \Rightarrow$  módulo de elasticidade do concreto

$I \Rightarrow$  Momento de inércia

$p \Rightarrow$  Carga ( $p_{dur}$  ou  $p_{tr}$ )

O módulo de elasticidade e o momento de inércia a serem usados nesta fórmula dependerão do estágio em que se encontra a peça, ou seja, se a peça já atingiu o momento de fissuração (Estádio II) ou não (Estádio I); para tanto estes conceitos são expostos a seguir.

#### 5.5. MOMENTO DE FISSURAÇÃO, MOMENTO DE INÉRCIA E MÓDULO DE ELASTICIDADE

Define-se momento de fissuração  $M_r$  como uma solicitação resistente, com a qual haverá grande probabilidade de se iniciar a formação de fissuras normais à armadura longitudinal.

Quando o momento de serviço for menor que o momento de fissuração, supõe-se que a peça esteja trabalhando no estágio I e, então, a peça deverá ser calculada com a seção

homogeneizada, considerando-se, portanto, a contribuição do concreto à tração .

Quando o momento de serviço ultrapassar o momento de fissuração, caso mais comum na prática, a estrutura estará parte no estágio I (o concreto não está fissurado na zona tracionada, absorvendo as forças de tração) e parte no estágio II (o concreto está fissurado na zona tracionada e as forças de tração são totalmente absorvidas pela armadura, desprezando-se a colaboração do concreto nesta zona).

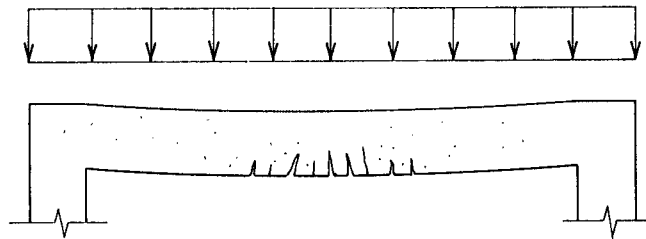


FIG 5.1 - VIGA APÓS TER ATINGIDO O MOMENTO DE FISSURAÇÃO

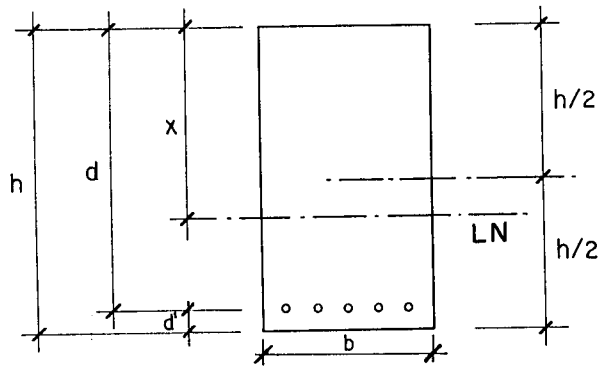
O que ocorre, na realidade, é que a seção onde aparece a fissura, após alcançado o momento de fissuração  $M_r$ , encontra-se no estágio II, na qual só trabalham o concreto comprimido e a armadura. À medida que se afasta da seção fissurada, o comportamento aproxima-se do estágio I, onde o concreto ainda possui a capacidade de absorver os esforços de tração, pois os momentos nestas seções não alcançaram o momento de fissuração  $M_r$  (Ver figura 5.1).

Desta forma, o cálculo da flecha elástica inicial deverá ser feito com o momento de inércia efetivo, ou seja, será considerado uma média ponderada entre o momento de inércia da região fissurada (Estádio II) e momento de inércia da região não fissurada (Estádio I). Para tal, sugere-se a fórmula empírica conhecida como fórmula de Branson, exposta adiante.

O módulo de elasticidade deve ser usado o secante quando a peça se encontrar no estágio II.

### 5.5.1. Cálculo do Momento de Inércia - ESTÁDIO I

Seja a seção retangular, conforme indica a figura 5.2, considerando-se a contribuição do concreto à tração.



$h/2$  = distância do CG da seção de concreto à face superior.

$x$  = distância do CG da seção homogeneizada à face superior.

FIG 5.2 - SEÇÃO HOMOGENEIZADA

#### a) Linha Neutra

O valor de  $x$  pode ser calculado fazendo-se o momento estático em relação à linha neutra igual a zero, com a seção homogeneizada.

$$xb \cdot \frac{x}{2} - (h-x)b \cdot \frac{(h-x)}{2} - \alpha_e A_s (d-x) + \alpha_e A'_s (x-d') = 0$$

$$\frac{b}{2} \cdot x^2 - \frac{b}{2} \cdot h^2 + bhx - \frac{b}{2} \cdot x^2 - \alpha_e (A_s \cdot d + A'_s \cdot d') +$$

$$+ \alpha_e x (A_s + A'_s) = 0$$

$$x_1 \cdot [bh + \alpha_e (A_s + A'_s)] = \frac{bh^2}{2} + \alpha_e (A_s d + A'_s d')$$

Tem-se então

$$x_1 = \frac{0,5bh^2 + \alpha_e (A_s d + A'_s d')}{bh + \alpha_e (A_s + A'_s)} \quad (5.8)$$

onde

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} \quad (5.9)$$

com

$A_s$  = área de armadura tracionada,

$A'_s$  = área da armadura comprimida,

$E_c$  = módulo de deformação longitudinal do concreto,

$E_s$  = módulo de deformação longitudinal do aço.

b) Módulo de Elasticidade (ou de Deformação Longitudinal)

$$E_c = E_{c0} = 6600 \sqrt{f_{ck} + 3,5} \quad (\text{MPa}) \quad (5.10)$$

$$E_s = 210000 \text{ MPa.}$$

c) Momento de Inércia

O momento de inércia da seção homogeneizada é

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} + bh(x_1 - \frac{h}{2})^2 + \alpha_e A_s (d - x_1)^2 + \alpha_e A'_s (x_1 - d')^2 \quad (5.11)$$

Desprezando-se a influência da armadura para  $\rho < 0,5\%$ , o que é válido para lajes em geral, pode-se adotar:

$$x_1 = x_0 = \frac{h}{2} \quad (5.12)$$

$$I_1 = I_0 = \frac{bh^3}{12} \quad (5.13)$$

d) Tensões

$$\sigma_c = \frac{M}{I} x \quad \frac{\sigma'_s}{\alpha_e} = \frac{M}{I} (x-d')$$

$$\frac{\sigma_s}{\alpha_e} = \frac{M}{I} (d-x) \quad \sigma_t = \frac{M}{I} (h-x)$$

e) Deformações

$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} \quad \epsilon'_s = \frac{\sigma'_s}{E_s}$$

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} \quad \epsilon_t = \frac{\sigma_t}{E_c}$$

#### 5.5.2. Cálculo do momento de fissuração

O momento fletor que conduz à formação da primeira fissura é chamado de momento de ruptura à tração ou simplesmente de momento de fissuração.

A NBR-6118 (1982) e a NBR 7197 (1989) definem as hipóteses que são as bases para o cálculo do momento de fissuração, a saber:

$$f_{ctm} = \begin{cases} 1,5 f_{ctk} & \text{p/ seção retangular} \\ 1,2 f_{ctk} & \text{p/ seção T} \end{cases}$$

$$f_{ctk} = \begin{cases} \frac{f_{ck}}{10} & \text{para } f_{ck} \leq 18 \text{ MPa} \\ 0,06 f_{ck} + 0,7 \text{ MPa} & \text{para } f_{ck} > 18 \text{ MPa} \end{cases}$$

O cálculo é feito no ESTÁDIO Ia:

$$\sigma_t = \frac{M}{I} (h - x_1) \quad \Rightarrow \quad M = \sigma_t \frac{I}{h - x_1}$$

Portanto:

$$M_r = f_{ctm} \cdot \frac{I}{h - x_1} \quad (5.14)$$

O ACI 318 (1989) propõe um outro valor para o momento de fissuração :

$$M_r = \frac{0,7 \sqrt{f_{ck}} bh^2}{6} \quad (\text{Mpa}) \quad (5.15)$$

Nota-se que os valores obtidos a partir da NBR 7197 são menores, para as classes de concreto mais utilizadas.

### 5.5.3. Cálculo do Momento de Inércia - ESTÁDIO II

A parte relativa ao concreto tracionado deixa de influir, uma vez que a peça está fissurada, e determinam-se as partes efetivas da seção transversal, a partir da linha neutra.

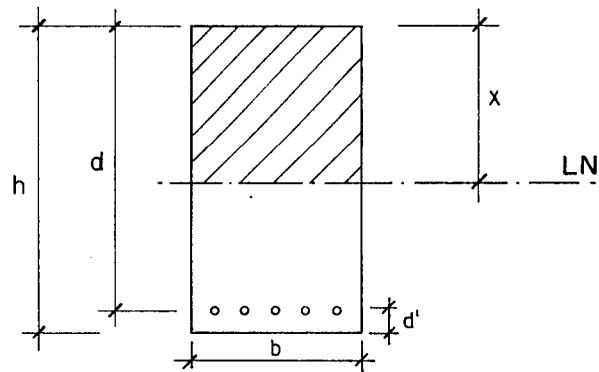


FIG 5.3 - SEÇÃO FISSURADA

#### a) Linha Neutra

Sabendo-se que o momento estático em relação à linha neutra é zero, calcula-se o valor de x (figura 5.3).

$$xb \cdot \frac{x}{2} - \alpha_e \cdot A_s (d-x) + \alpha_e A'_s (x - d') = 0$$

$$x^2 + \frac{2\alpha_e}{b} (A_s + A'_s) \cdot x - \frac{2\alpha_e}{b} (A_s d + A'_s d') = 0$$

$$x_2 = - \frac{\alpha_e}{b} (A_s + A'_s) + \sqrt{\frac{\alpha_e}{2b} (A_s + A'_s) + \frac{2\alpha_e}{b} (A_s d + A'_s d')}$$

(5.16)



b) Módulo de Elasticidade

Para o Estádio II, considera-se o módulo de elasticidade secante:

$$E_c = 0,9 E_{c0}$$

$$E_c = 0,9.6600 \sqrt{f_{ck} + 3,5} \quad (\text{MPa}) \quad (5.17)$$

$$E_s = 210000 \text{ MPa}$$

c) Momento de Inércia

$$I_2 = \frac{bx_2^3}{12} + bx_2 \left( \frac{x_2}{2} \right)^2 \alpha_e A_s (d - x_2)^2 + \alpha_e A'_s (x_2 - d')^2$$

$$I_2 = \frac{bx_2^3}{3} + \alpha_e A_s (d - x_2)^2 + \alpha_e A'_s (x_2 - d')^2 \quad (5.18)$$

d) Tensões

$$\sigma_c = \frac{M}{I} x \qquad \frac{\sigma'_s}{\alpha_e} = \frac{M}{I} (x-d')$$

$$\frac{\sigma_s}{\alpha_e} = \frac{M}{I} (d-x)$$

e) Deformações

$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} \qquad \epsilon'_s = \frac{\sigma'_s}{E_s}$$
$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s}$$

5.5.4. Valores Médios ou Valores Efetivos

Numa peça fissurada, encontram-se seções no Estádio I e seções no Estádio II, conforme fig. (5.3). Nesta condição o ACI318 (1989) propõe que se calculem as flechas utilizando-se os valores médios, da linha neutra e do momento de inércia, conforme as fórmulas de Branson:

a) Linha Neutra

$$x_e = \left( \frac{M_r}{M} \right)^{2,5} x_1 + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M} \right)^{2,5} \right] \cdot x_2 \leq x_1 \qquad (5.19)$$

b) Momento de inércia

$$I_e = \left( \frac{M_r}{M} \right)^3 I_1 + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M} \right)^3 \right] \cdot I_2 \leq I_1 \qquad (5.20)$$

5.6. FLECHA TOTAL DECORRENTE DAS AÇÕES DE LONGA DURAÇÃO ( $a_\ell$ )

Além da análise com relação ao módulo de elasticidade e ao momento de inércia, que considera a diminuição da rigidez devida à fissuração, a flecha total deve ser dividida, como visto em 5.3, em flecha decorrente

das ações de longa duração, onde se deve considerar o fenômeno da fluência, e flecha elástica para cargas de curta duração.

A flecha decorrente das ações de longa duração  $a_\ell$  compreende duas parcelas: a flecha elástica imediata, calculada com as ações expostas em 5.2a, mais uma flecha incremental  $a_{cc}$  decorrente da fluência, considerada através do coeficiente  $\varphi_{cc}$ .

Portanto,

$$a_\ell = a_{i\ell} + a_{cc} = \varphi_{cc} \cdot a_{i\ell} \quad (5.21)$$

sendo

$a_{i\ell} \Rightarrow$  flecha elástica calculada com  $p = p_\ell$

a) Cálculo de  $\varphi_{cc}$

Para levar em conta o efeito da deformação lenta (fluência), a NBR-6118 (1982) (item 4.2.3.1-B) permite avaliar a flecha final, devida às ações de longa duração, como o produto do valor da flecha imediata respectiva pela relação das curvaturas final e inicial, na seção de maior momento em valor absoluto, definido como :

$$\varphi_{cc} = \frac{(1/r)_t}{(1/r)_o}$$

com

$(1/r)_t =$  curvatura final,

$(1/r)_o =$  curvatura inicial.

O valor da curvatura, segundo essa norma, deve ser calculado através da expressão

$$\frac{1}{r} = \frac{|\epsilon_c| + \epsilon_s}{d},$$

fazendo-se  $\epsilon_c$  final igual a três vezes o valor de  $\epsilon_c$  inicial e  $\epsilon_s$  constante e igual ao seu valor inicial. A norma ainda permite tomar o valor de  $\epsilon_c$  final igual a duas vezes o valor inicial, no caso de ações de longa duração aplicadas seis meses ou mais após a concretagem. O caso mais usual é a aplicação das cargas antes de atingir seis meses após a concretagem; desta forma, adota-se  $\epsilon_c$  final igual a três vezes seu valor inicial

$$\varphi_{cc} = \frac{|\epsilon_{ct}| + \epsilon_{st}}{|\epsilon_{co}| + \epsilon_{so}}$$

$$\epsilon_{st} = \epsilon_{so} = \epsilon_s \quad \text{e} \quad \epsilon_{ct} = 3\epsilon_{co} = 3\epsilon_c$$

$$\varphi_{cc} = \frac{3|\epsilon_c| + \epsilon_s}{|\epsilon_c| + \epsilon_s} \tag{5.22}$$

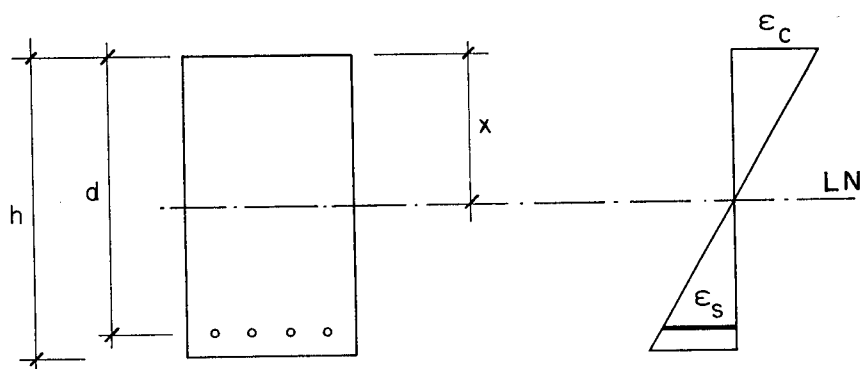


FIG 5.4. - DIAGRAMA DE DEFORMAÇÃO

De acordo com o diagrama de deformação (figura 5.4), tem-se uma condição de compatibilidade:

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_s}{d-x}$$

donde:

$$\epsilon_c = \frac{x \cdot \epsilon_s}{d-x} \quad (5.23)$$

Substituindo-se o valor de  $\epsilon_c$  dado por (5.23) na equação (5.22) resulta

$$\varphi_{cc} = \frac{\frac{3x\epsilon_s}{d-x} + \epsilon_s}{\frac{x\epsilon_s}{d-x} + \epsilon_s}$$

$$\varphi_{cc} = \frac{3x\epsilon_s + (d-x)\epsilon_s}{x\epsilon_s + (d-x)\epsilon_s}$$

$$\varphi_{cc} = \frac{2x+d}{d} \quad (5.24)$$

onde o valor de  $x$  é fornecido pelas expressões (5.8) ou (5.16), dependendo do momento de serviço ser inferior ou não ao momento de fissuração  $M_r$ .

## 5.7 FLECHA ELÁSTICA DECORRENTE DAS AÇÕES DE CURTA DURAÇÃO ( $a_i$ )

A flecha elástica decorrente das ações de curta duração não causa o fenômeno da fluência; portanto compreende uma única parcela, calculada com as ações expostas no item 6.2b:

$a_i$  = flecha elástica imediata calculada com  $p = p_i$

## 5.8. FLECHA DECORRENTE DA RETRAÇÃO ( $a_{cs}$ )

De acordo com a NBR-6118 (1982), item 4.2.3, a flecha total deve incluir o efeito da retração. Esta norma, no entanto, não apresenta recomendações de como fazê-lo.

Passamos, então, a apresentar uma alternativa, baseada no procedimento do ACI-209 referente às vigas, onde o cálculo é feito independentemente em cada uma das direções perpendiculares, adotando-se como resultado a média dos resultados obtidos.

Para cada direção, a flecha decorrente da retração é dada por


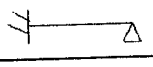
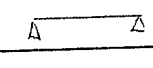
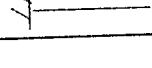
$$a_{cs} = K \cdot \phi_{cs} \cdot \ell^2 \quad (5.25)$$

onde

$K$  = coeficiente dependente da vinculação,  
 $\phi_{cs}$  = curvatura decorrente da retração,  
 $\ell$  = vão.

O valor de  $K$  pode ser obtido na tabela 5.1.

TABELA 5.1. - VALORES DE  $K$

| Vinculação                                                                          | Valores de $K$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
|  | 0,0625         |
|  | 0,0859375      |
|  | 0,125          |
|  | 0,5            |

A curvatura é obtida a partir de uma fórmula empírica, baseada no tipo de armadura (ACI-209). Sendo para armaduras simples

$$\phi_{cs} = 0,7 \cdot \epsilon_{cs} \cdot \frac{\rho^{1/3}}{h} \quad (5.26)$$

com:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \text{taxa de armadura (em percentagem);}$$

$\epsilon_{cs}$  = deformação específica de retração;

h = espessura da laje.

A NBR-6118 (1982) (item 3.1.1.5) permite que se adote a deformação específica de retração para peças de concreto armado, nos casos mais correntes, igual a  $15 \times 10^{-5}$ .

Portanto, a expressão da curvatura fica:

$$\phi_{cs} = 0,7 \cdot 15 \times 10^{-5} \cdot \frac{\rho^{1/3}}{h}$$

Substituindo-se em (5.25)

$$a_{cs} = K \times 0,7 \times 15 \times 10^{-5} \times \frac{\rho^{1/3}}{h} \times \ell^2 \quad (5.27)$$

Finalmente pode-se considerar a retração, utilizando-se a expressão:

$$a_{cs} = 10,5 \times 10^{-5} \times K \times \frac{\rho^{1/3}}{h} \times \ell^2 \quad (5.28)$$

## 5.9 CONTRAFLECHA

Duas condições devem ser verificadas relativas à necessidade ou não da adoção de uma contraflecha. Para tanto, a NBR-6118 (1989) estabelece limites de deformabilidade das lajes.

a) Primeira condição:  $a_{tot} - a_{\ell} - a_{cs} = a_i < a_{1,lim}$

onde

$$a_{1,lim} = \ell/500 \quad \text{e} \quad a_{1,lim} = \ell/250 \text{ para balanços}$$

Se esta condição não for satisfeita, deve-se enrijecer a laje sem a adoção de contraflechas, por exemplo aumentando-se sua espessura.

b) Segunda condição:  $a_{tot} \leq a_{2,lim}$

onde

$$a_{2,lim} = \ell/300 \quad \text{e} \quad a_{2,lim} = \ell/150 \text{ para balanços}$$

Se esta condição não for satisfeita, deve-se adotar uma contraflecha ou enrijecer a laje. No caso de adoção de uma contraflecha, seu valor não deverá ser superior ao valor da flecha elástica imediata para ações de longa duração ( $a_{i\ell}$ ), somado à metade da flecha decorrente da fluência ( $a_{cc}$ ). Costuma-se adotar valores múltiplos de 0,5 cm.



## 6. MARCHA DE CÁLCULO

Pode-se agora, para orientação do engenheiro de estruturas, apresentar uma marcha de cálculo para determinação dos momentos de plastificação em lajes retangulares, pela teoria das charneiras plásticas, dos comprimentos das armaduras negativas, e ainda para a verificação das deformação, considerando-se os efeitos dependentes do tempo e da rigidez. Supõe-se que as cargas permanentes e acidentais são conhecidas.

### 6.1. DADOS

Para os casos mais comuns da prática, tem-se como dados do problema:

$l_x$  = lado menor

$l_y$  = lado maior

$p$  = carga total uniformemente distribuída

Para as lajes retangulares de bordas apoiadas ou engastadas, alvo principal deste trabalho, as cargas lineares de alvenarias e divisórias são transformadas em cargas uniformemente distribuídas, para maior facilidade do cálculo, devendo-se obviamente atentar para alguns casos críticos, para se evitar algum tipo de ruptura localizada (ver LANGENDONK, 1966).

### 6.2 MOMENTOS ELÁSTICOS

Inicia-se com a utilização das tabelas tradicionais de cálculo elástico, seguindo-se a compatibilização dos momentos negativos entre as lajes vizinhas. Toma-se esses

momentos compatibilizados com valores reduzidos à metade como valores de  $m_i$  para o cálculo plástico. Tal redução é para se obter momentos positivos com mesma ordem de grandeza dos negativos. O valor de  $\mu$  também é proveniente dos momentos elásticos compatibilizados  $m_x$  e  $m_y$ .

### 6.3. MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO

Para o cálculo dos momentos de plastificação são feitas as seguintes suposições:

a) Charneira central na vertical (configuração comum). Para tanto:

$$a = \ell_x \qquad b = \ell_y \qquad \mu = \frac{m_y}{m_x} \left( \text{ou } \frac{\mu_y}{\mu_x} \right)$$

$$m_1 = m_e \qquad m_2 = m_d \qquad m_3 = m_s \qquad m_4 = m_i$$

b) Cálculo de  $m_{\ell s}$  e  $m_{\ell i}$

Utilizam-se as expressões (4.13) e (4.14):

$$m_{\ell s} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{1,5}{pb^2} \left( \frac{pb^2}{6} - m_3 + m_4 \right)^2 - m_4 \right]$$

$$m_{\ell i} = \frac{1,5}{pa^2} \left[ \frac{pa^2}{6} - m_1 + m_2 \right]^2 - m_2$$

c) Cálculo de m

A solução encontra-se no intervalo:

$$m_{\ell i} \leq m \leq m_{\ell s}$$

De posse desses limites, deve-se calcular m por iteração, com as expressões (4.10) e (4.11), de forma que  $f_1 = f_2$ , arbitrando-se valores para m.

$$f_1(m) = \sqrt{m + m_1} + \sqrt{m + m_2}$$

$$f_2(m) = \frac{a}{\sqrt{6b}} \sqrt{3pb - 2\sqrt{6p} (\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4})}$$

d) Verificação

Para que a configuração admitida seja a correta, deve-se ter:

$$\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_2} \leq b \sqrt{\frac{p}{6}}$$

Caso contrário, tem-se configuração com a charneira central na horizontal (configuração eventual).

e) Configuração eventual

Não sendo a condição anterior atendida, pode-se garantir que a configuração de ruína não é a configuração comum, devendo-se analisar o caso da charneira central ser paralela ao lado menor (horizontal) - configuração eventual.

Para isso, refaz-se os cálculos com:

$$a = \ell_y \quad b = \ell_x \quad \mu = \frac{m_x}{m_y} \left\{ \mu = \frac{\mu_x}{\mu_y} \right\}$$

$$m_1 = m_s \quad m_2 = m_i \quad m_3 = m_e \quad m_4 = m_d$$

#### 6.4. COMPRIMENTOS DAS ARMADURAS NEGATIVAS

Conforme as expressões (4.15) e (4.16) tem-se:

$$a^* = \frac{\sqrt{6b} (\sqrt{m+m_1} + \sqrt{m+m_2})}{\sqrt{3pb - 2\sqrt{6} p (\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4})}}$$

$$b^* = \frac{2a^2 \sqrt{6p} (\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4})}{3pa^2 - 6 (\sqrt{m+m_1} + \sqrt{m+m_2})^2}$$

Os comprimentos das armaduras são calculados supondo-se inicialmente configuração comum:

$$a = \ell_x \quad b = \ell_y \quad m = m_x \quad \mu_c = \frac{m_y}{m_x}$$

$$m_1 = m_{xe} \quad m_2 = m_{xd} \quad m_3 = m_{ys} \quad m_4 = m_{yi}$$

$$x_1 = a - a_1^* , a_1^* \text{ calculado com } m_1 = 0 ;$$

$$x_2 = a - a_2^* , a_2^* \text{ calculado com } m_2 = 0 .$$

$$y_3 = b - b_3^* , b_3^* \text{ calculado com } m_3 = 0 ;$$

$$y_4 = b - b_4^* , b_4^* \text{ calculado com } m_4 = 0 .$$

A seguir, deve-se verificar para configuração eventual:

$$a = \ell_y \quad b = \ell_x \quad m = m_y \quad \mu_e = \frac{m_x}{m_y}$$

$$m_1 = m_{ys} \quad m_2 = m_{yi} \quad m_3 = m_{xe} \quad m_4 = m_{xd}$$

$$x_3 = b - b_3^*, b_3^* \text{ calculado com } m_3 = 0 ;$$

$$x_4 = b - b_4^*, b_4^* \text{ calculado com } m_4 = 0 ;$$

$$y_1 = a - a_1^*, a_1^* \text{ calculado com } m_1 = 0 ;$$

$$y_2 = a - a_2^*, a_2^* \text{ calculado com } m_2 = 0 .$$

Os comprimentos, então, são determinados adotando-se o maior valor de cada par:

$$x_e = x_1 \text{ ou } x_3$$

$$x_d = x_2 \text{ ou } x_4$$

$$y_s = y_3 \text{ ou } y_1$$

$$y_i = y_4 \text{ ou } y_2$$

A estes valores devem ser somados os respectivos comprimentos de ancoragem.

## 6.5. VERIFICAÇÃO DA FLECHA

Apresenta-se uma marcha de cálculo para as flechas, supondo-se conhecidas as cargas permanentes e as acidentais e a espessura da laje.

a) Cálculo da linha neutra - ESTÁDIO I

$$x_1 = \frac{0,5bh^2 + \alpha_e (A_s d_s + A'_s d')}{bh + \alpha_e (A_s + A'_s)}$$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c}$$

$A_s$  = área de armadura tracionada,

$A'_s$  = área da armadura comprimida,

$E_c$  = módulo de deformação longitudinal do concreto,

$E_s$  = módulo de deformação longitudinal do aço.

b) Cálculo do módulo de elasticidade - ESTÁDIO I

$$E_c = E_{c0} = 6600 \cdot \sqrt{f_{ck} + 3,5} \quad (\text{MPa})$$

$$E_s = 210000 \text{ MPa}$$

c) Cálculo do momento de inércia - ESTÁDIO I

O momento de inércia da seção homogeneizada é

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} + bh\left(x_1 - \frac{h}{2}\right)^2 + \alpha_e A_s (d - x_1)^2 + \alpha_e A'_s (x_1 - d')^2$$

Desprezando-se a influência da armadura para  $\rho < 0,5\%$ , o que é válido para lajes em geral, pode-se adotar:

$$x_1 = x_0 = \frac{h}{2}$$

$$I_1 = I_0 = \frac{bh^3}{12}$$

d) Cálculo do momento de fissuração

O momento de fissuração da laje é dado por:

$$M_r = f_{ctm} \cdot \frac{I}{h - x_1}$$

com a linha neutra e momento de inércia no Estádio I.

e) Verificação

Se  $M \leq M_r \Rightarrow$  Estádio I; usam-se os valores calculados nos ítems anteriores.

Se  $M > M_r \Rightarrow$  Estádio II; a linha neutra e momento de inércia a serem adotados são os valores médios sugeridos por BRANSON.

Para tanto, calculam-se os valores no Estádio II.

f) Cálculo da linha neutra - ESTÁDIO II

$$x_2 = -\frac{\alpha_e}{b} (A_s + A'_s) + \sqrt{\frac{\alpha_e}{2b} (A_s + A'_s) + \frac{2\alpha_e}{b} (A_s d + A'_s d')}$$

g) Cálculo do módulo de elasticidade - ESTÁDIO II

Para o Estádio II, considera-se o módulo de elasticidade secante:

$$E_c = 0,9 E_{c0}$$

$$E_c = 0,9.6600 \sqrt{f_{ck} + 3,5} \quad (\text{MPa})$$

$$E_s = 210000 \text{ MPa}$$

h) Cálculo do momento de inércia - ESTÁDIO II

$$I_2 = \frac{bx_2^3}{3} + \alpha_e A_s (d - x_2)^2 + \alpha_e A'_s (x_2 - d')^2 \quad (5.17)$$

i) Cálculo dos valores médios ou valores efetivos

$$x_e = \left( \frac{M_r}{M} \right)^{2,5} x_1 + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M} \right)^{2,5} \right] \cdot x_2 \leq x_1$$

$$I_e = \left( \frac{M_r}{M} \right)^3 I_1 + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M} \right)^3 \right] \cdot I_2 \leq I_1$$

j) Cálculo do coeficiente de deformação lenta  $\varphi_{cc}$

$$\varphi_{cc} = \frac{2x+d}{d}$$

O valor de  $x$  é fornecido nos resultados dos itens (a) ou (i), dependendo do momento de serviço ser inferior ou não ao momento de fissuração  $M_r$ .



k) Cálculo da flecha elástica imediata decorrente das ações de longa duração ( $\ell$ )

$$p_{\ell} = g_k + \psi_2 \cdot q_k$$

onde  $\psi_2$  é obtido no item 5.2.(a)

$$a_{i\ell} = \frac{\alpha b}{1200} \cdot \frac{p\ell_x^4}{EI}$$

onde:

b  $\Rightarrow$  100 cm

$\ell_x$   $\Rightarrow$  menor vão

E  $\Rightarrow$  módulo de elasticidade do concreto

I  $\Rightarrow$  momento de inércia

p  $\Rightarrow$  carga ( $p_{\ell}$ )

l) Cálculo da flecha total decorrente das ações de longa duração

O cálculo é feito multiplicando-se o valor do item (j) pelo do item (k):

$$a_{\ell} = \varphi_{cc} \cdot a_{i\ell}$$

m) Cálculo da flecha elástica decorrente das ações de curta duração (i)

$$p_i = (1 - \psi_2) q_k$$

$$a_i = \frac{\alpha b}{1200} \cdot \frac{p\ell_x^4}{EI}$$

onde:

b  $\Rightarrow$  100 cm

$\ell_x$   $\Rightarrow$  menor vão

E  $\Rightarrow$  módulo de elasticidade do concreto

I  $\Rightarrow$  momento de inércia

p  $\Rightarrow$  carga ( $p_i$ )

n) Cálculo da flecha decorrente da retração

$$a_{cs} = K \times 0,7 \times 15 \times 10^{-5} \times \frac{\rho^{1/3}}{h} \times \ell^2$$

onde:

K = coeficiente obtido na tabela 5.1.

$\rho$  = percentagem de armadura

$\ell$  = vão

h = espessura da laje

O cálculo é feito para as duas direções da laje, adotando-se como resultado a média desses valores.

o) Flecha total

$$a_{tot} = a_{\ell} + a_i + a_{cs}$$

## 7. SISTEMA DE LAJE TRELIÇADA

### 7.1. DEFINIÇÃO DA LAJE TRELIÇADA

Define-se como treliçada a laje maciça ou nervurada, plana, composta por elementos pré-moldados, constituídos de armaduras em forma de treliça e blocos de concreto, cerâmicos ou de isopor (EPS) como elementos de enchimento, mais uma capa de concreto para complementação e solidarização do sistema, moldada "in loco".

O elemento pré-moldado (vigota ou vigueta) é constituído por dois banzos, ligados por diagonais (sinusoidais) igualmente espaçadas, com altura  $H$  variando de 70mm a 250mm e comprimento praticamente limitado por condições de transporte.

O banzo superior é constituído de fios de aço que variam de 6mm a 12,5mm de diâmetro, o banzo inferior é composto por dois fios que variam em diâmetro de 4,2mm a 12,5mm, enquanto que o elemento em forma de senóide é composto por dois fios que variam de 3,4mm a 6,0mm.

A industrialização da armação se dá por eletrofusão, transformando as peças em um único corpo rígido, conforme ilustrado nas figuras 7.1 e 7.2.

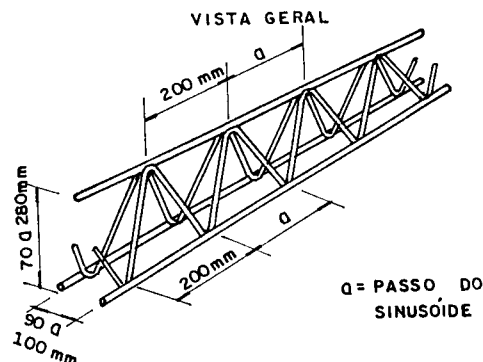


FIG 7.1 - ARMADURA TRELIÇADA

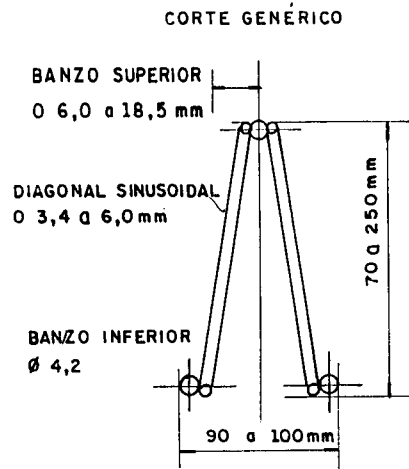


FIG 7.2 - CORTE TRANSVERSAL GENÉRICO

## 7.2. FUNCIONAMENTO ESTRUTURAL DO SISTEMA ACABADO

Após o endurecimento do concreto de capeamento, há uma solidarização dos elementos que compõem a laje, formando uma estrutura monolítica. A solidarização entre o concreto de capeamento e o elemento pré-moldado se processa da seguinte forma:

a) Os elementos em forma de senóide promovem um efeito positivo, unindo a zona de tração com a zona comprimida da laje, e absorvem os esforços cisalhantes horizontais e cortantes, conforme indicado na figura 7.3.

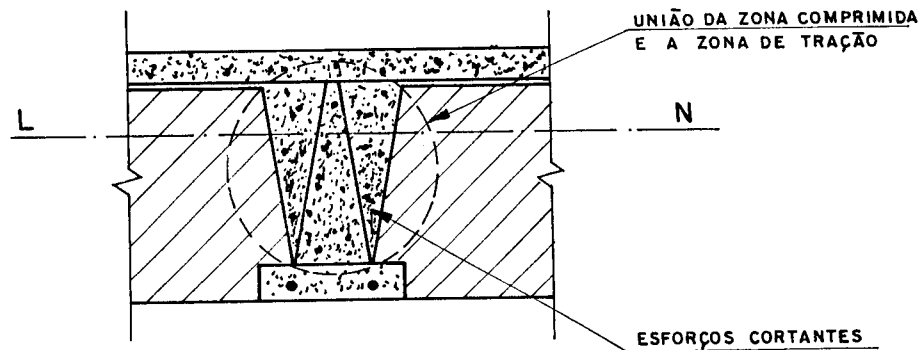


FIG 7.3 - DETALHE DO SISTEMA ACABADO

b) A rugosidade na face superior, ou seja, na face que entrará em contato com o concreto de capeamento, faz com que seja capaz de resistir aos esforços tangenciais, provocados pela retração do concreto, e também ao cisalhamento, quando em regime de utilização (figura 7.4).

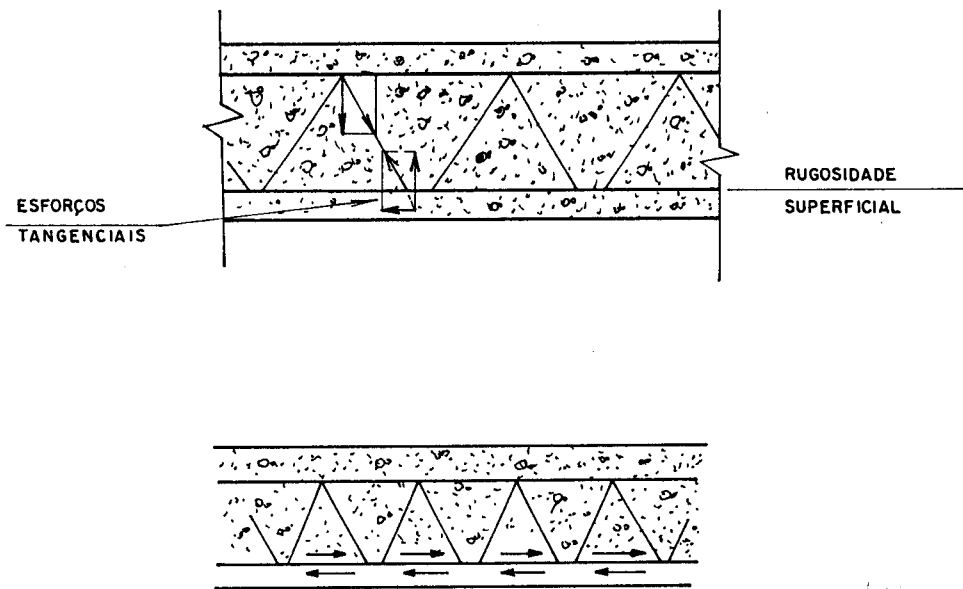


FIG 7.4 - RESISTÊNCIA ÀS TENSÕES TANGENCIAIS

### 7.3. NECESSIDADE DO ESCORAMENTO

Durante a fase de montagem e de concretagem, a viga treliçada é complementada mediante a colocação dos blocos de enchimento, posicionados e apoiados sobre as vigas, e posteriormente com o concreto de capeamento.

Nesta fase há necessidade de se escorar a laje, com distâncias variadas para cada caso, para suportar os esforços decorrentes do peso próprio, dos equipamentos e dos operários, até o concreto de capeamento atingir a condição necessária para resistir aos esforços de compressão no banzo superior (cerca de 20 dias após o lançamento do concreto).

#### 7.4 DIMENSIONAMENTO

O dimensionamento da laje é feito conforme os procedimentos prescritos na norma NBR 6119 (1980) - Cálculo e Execução de Lajes Mistas, considerando-se o esforço de compressão resistido unicamente pelo concreto existente acima da linha neutra, ou seja, desprezando-se a atuação dos elementos de enchimento.

Para as condições de apoio, três situações podem ocorrer: apoio simples, engaste parcial e engaste perfeito, sendo que esta última situação não deve ser considerada no cálculo, pela dificuldade de se garantir que cada vigota se situe exatamente em continuidade com a laje adjacente.

Desta forma adota-se, nas situações de apoio simples, um momento fletor de  $-\frac{P\ell^2}{8}$  e, nas situações de engaste parcial, momento positivo de  $-\frac{P\ell^2}{10}$  e momento negativo de  $-\frac{P\ell^2}{40}$ .

A linha neutra (L.N.), decorrente das solicitações de flexão que atuam sobre a seção de concreto, pode ocorrer abaixo do banzo superior. A altura de treliça varia de acordo com a espessura da laje.

Deste modo, a armadura do banzo superior pode trabalhar, depois da peça solidarizada, como armadura de compressão (ou dupla), conforme ilustra a figura 7.5.

Deve-se prever também a colocação de uma armadura transversal, na mesa de compressão do concreto, com a finalidade de compensar os efeitos de dilatação térmica que eventualmente possam ocorrer, bem como manter a ligação do concreto quando interrompido por dutos que seccionam a capa de compressão.

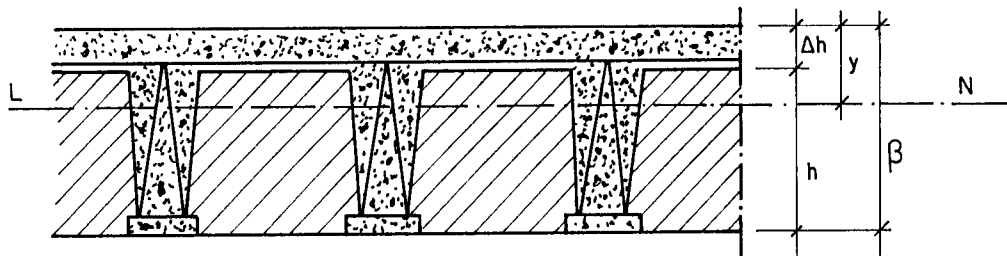


FIG 7.5 - DETALHE DA ARMADURA SUPERIOR ACIMA DA LINHA NEUTRA

### 7.5. VANTAGENS DO SISTEMA TRELIÇADO

A grande vantagem deste sistema está na facilidade e na agilização que proporciona, principalmente a pequenas obras, como a construção de casas para pessoas de baixa renda, decorrente da diminuição da quantidade de escoramento para concretagem, devido ao efeito auto portante das vigotas. Este escoramento é reduzido, mas de suma importância para o perfeito funcionamento do sistema, bastando aproximadamente uma escora a cada 1,5m (medida aproximada, pois depende do tipo da laje).

O transporte e o manuseio dessas vigotas são fáceis, devido a seu formato e massa (cerca de 10kg/m).

## 7.6. PATOLOGIA DO SISTEMA

Assim como nos outros tipos de lajes, este sistema também está sujeito a defeitos provenientes da fabricação e projeto ou da montagem do sistema na obra.

### 7.6.1 Do projeto e da fabricação

Fabricantes leigos, sem conhecimento de teoria das estruturas, contribuem para a ocorrência de falhas do sistema durante as etapas de projeto e fabricação, tais como:

a) Ausência de uma planta estrutural bem elaborada, com indicação de ferragem adequada, altura da capa de compressão e escoramento necessário.

b) Ferragem insuficiente, padronizada através de tabelas para uma carga específica, e por vezes estendidas a cargas maiores;

c) Utilização de concreto de baixa qualidade, que não atingem o  $f_{ck}$  necessário;

d) Armaduras em posições inadequadas, ocasionando trincas de tração nas viguetas;



### 7.6.2 Da aplicação e da montagem em obras

As falhas mais comuns são as que normalmente ocorrem durante a montagem do sistema na obra, devido à falta de mão-de-obra treinada e da fiscalização de pessoas responsáveis:

a) Escoramentos fora de níveis, sem base de fixação no solo, não contraventados, com espaçamentos maiores do que os recomendados no projeto estrutural;

b) Armaduras negativas e de travamento em posições incorretas ou até inexistentes;

c) Concreto da capa com  $f_{ck}$  ou espessura menor que a especificada no projeto;

d) Desforma antes do tempo normal de cura;

e) Cura inadequada, secando ao ar livre sob a ação do sol intenso, sem as preocupações previstas pela NBR - 6118 (1982);

f) Lajes com engastamentos substituídos por apoios simples.

## 8. APLICAÇÕES

Serão mostrados neste capítulo dois exemplos, com o intuito de comparar resultados e analisar custos dos pavimentos de dois edifícios, dimensionados utilizando-se, inicialmente, lajes pré-moldadas e, posteriormente, lajes maciças calculadas por dois processos distintos: primeiramente com o processo mais comumente utilizado, feito no regime elástico, utilizando-se para tanto as tabelas de Bares, baseadas em Lagrange (Teoria da Elasticidade); posteriormente, será utilizado o método baseado na Teoria das Charneiras Plásticas (Cálculo no regime plástico).

### 8.1 EXEMPLO 1

A figura 8.1 mostra a arquitetura de uma unidade do pavimento, sendo o mesmo constituído de duas unidades simétricas. A figura 8.2 mostra a estrutura executada com o sistema de lajes pré - moldadas do tipo TRELIÇADA PARA PISO. A figura 8.3 mostra a estrutura, adotando-se lajes maciças de concreto armado, calculadas no regime elástico e, posteriormente, no regime plástico.

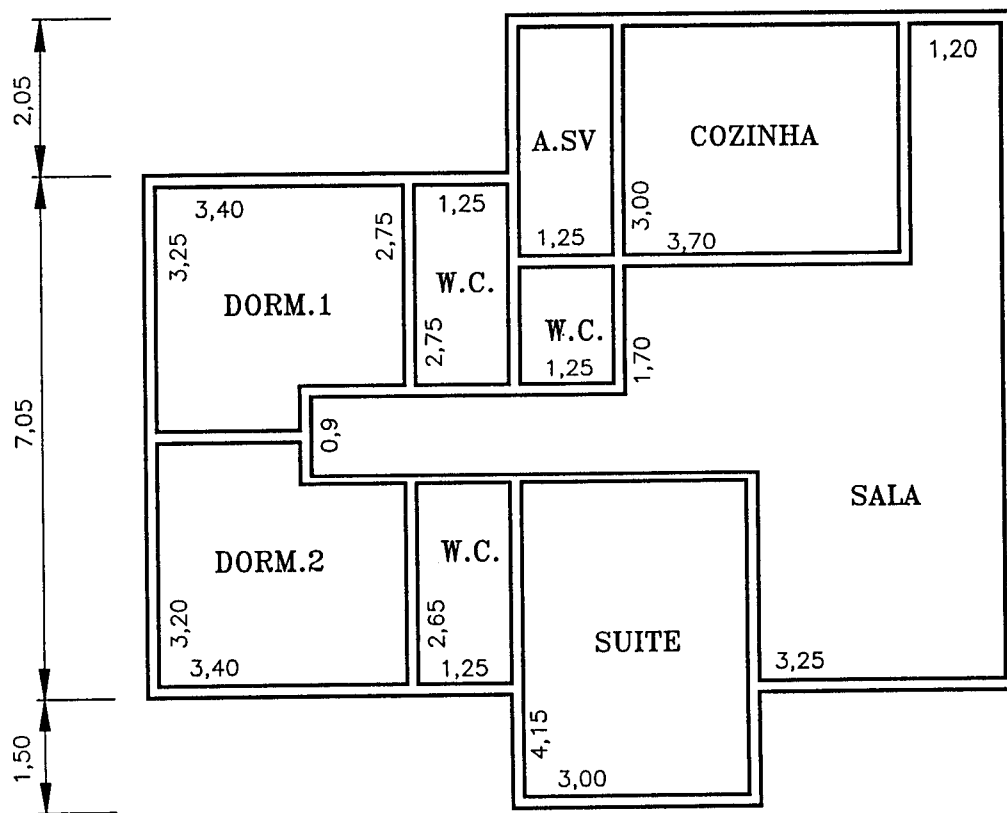


FIG 8.1 ARQUITETURA 1

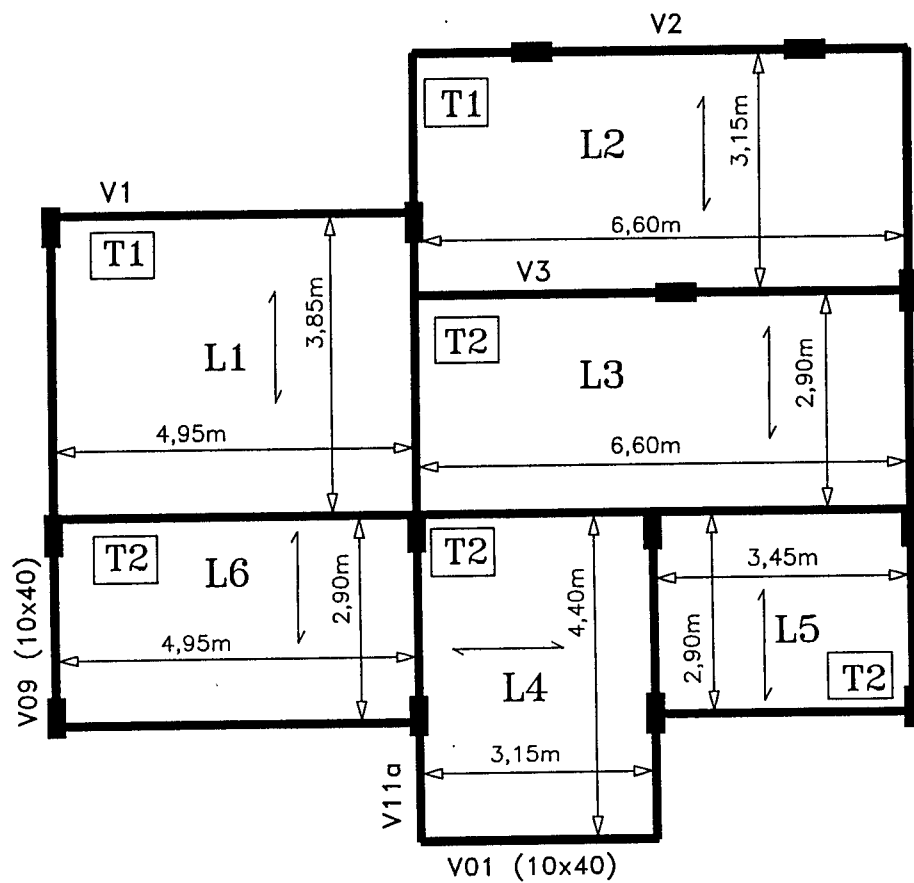


FIG 8.2 ESTRUTURA 1.1 - ESQUEMA - LAJE PRÉ-MOLDADA

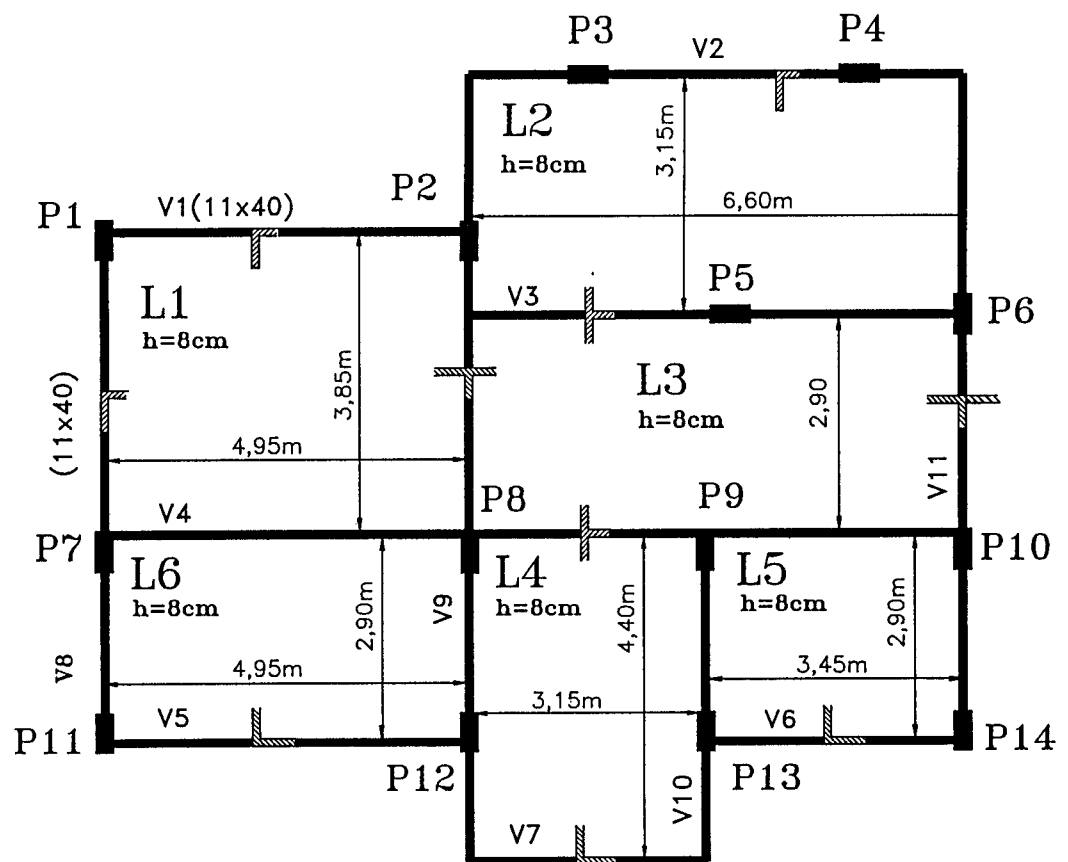


FIG 8.3 ESTRUTURA 1.2 - FORMAS - LAJE MACIÇA

### 8.1.1 Considerações para adoção das lajes pré-moldadas

As lajes L1 e L2 foram consideradas pré-moldadas do Tipo 1: intereixo com 41cm, espessura 16cm, capeamento de 4cm e consumo de concreto usinado C18 igual a 0,057m<sup>3</sup>/m<sup>2</sup>, para sobrecargas de até 5,0 kN/m<sup>2</sup> e vãos de até 4,0 metros.

As lajes L3, L4, L5 e L6 foram consideradas do Tipo2: intereixo com 41cm, espessura de 12cm, capeamento de 4cm e consumo de concreto usinado C18 igual a 0,048m<sup>3</sup>/m<sup>2</sup>, para sobrecargas de até 3,5 kN/m<sup>2</sup> e vãos de até 4,0 metros.

### 8.1.2 Cálculo elástico - ESTRUTURA 1.2

O cálculo dos momentos elásticos é feito utilizando-se as funções aproximadoras apresentadas por PINHEIRO (1991) e as características e cargas das lajes encontram-se na tabela 8.1. O critério de compatibilização dos momentos negativos é o maior valor entre a média e 80% do maior momento.

TABELA 8.1 - CARACTERÍSTICAS E CARGAS - ESTRUTURA 1.2

| LAJE            |                | L1   | L2   | L3   | L4   | L5   | L6   |
|-----------------|----------------|------|------|------|------|------|------|
| Características | Lx (m)         | 3,85 | 3,15 | 2,90 | 3,15 | 2,90 | 2,90 |
|                 | Ly (m)         | 4,95 | 6,60 | 6,60 | 4,40 | 3,45 | 4,95 |
|                 | $\lambda$      | 1,29 | 2,10 | 2,28 | 1,40 | 1,19 | 1,71 |
|                 | h (cm)         | 8,00 | 8,00 | 8,00 | 8,00 | 8,00 | 8,00 |
| Cargas          | p.p.           | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 |
|                 | piso + revest. | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |
|                 | paredes        | 2,00 | 1,80 | 1,00 | 0,50 | 0,50 | 1,20 |
|                 | g              | 5,00 | 4,80 | 4,00 | 3,50 | 3,50 | 4,20 |
|                 | q              | 1,50 | 1,50 | 1,50 | 1,50 | 1,50 | 1,50 |
|                 | p= g+q         | 6,5  | 6,30 | 5,50 | 5,00 | 5,00 | 5,70 |

Os valores dos momentos elásticos e dos momentos compatibilizados (dentro dos retangulos) estão indicados na figura 8.4. As armaduras estão indicadas na figura 8.5.

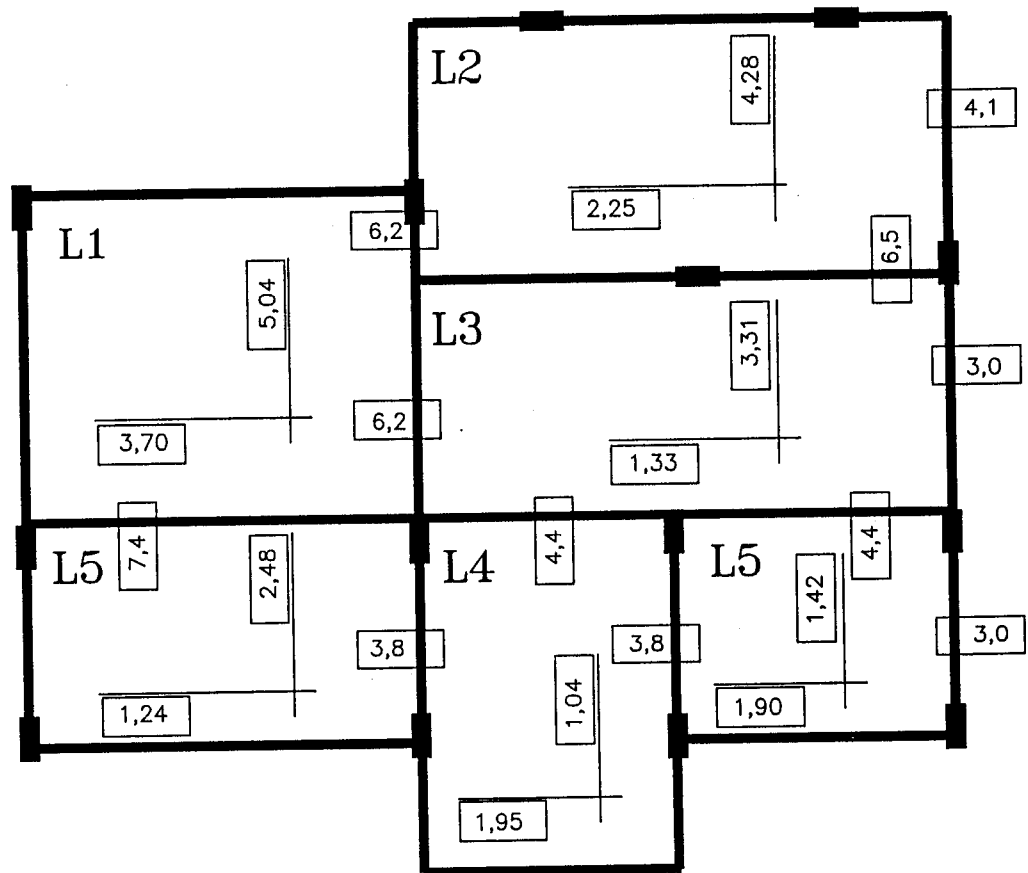
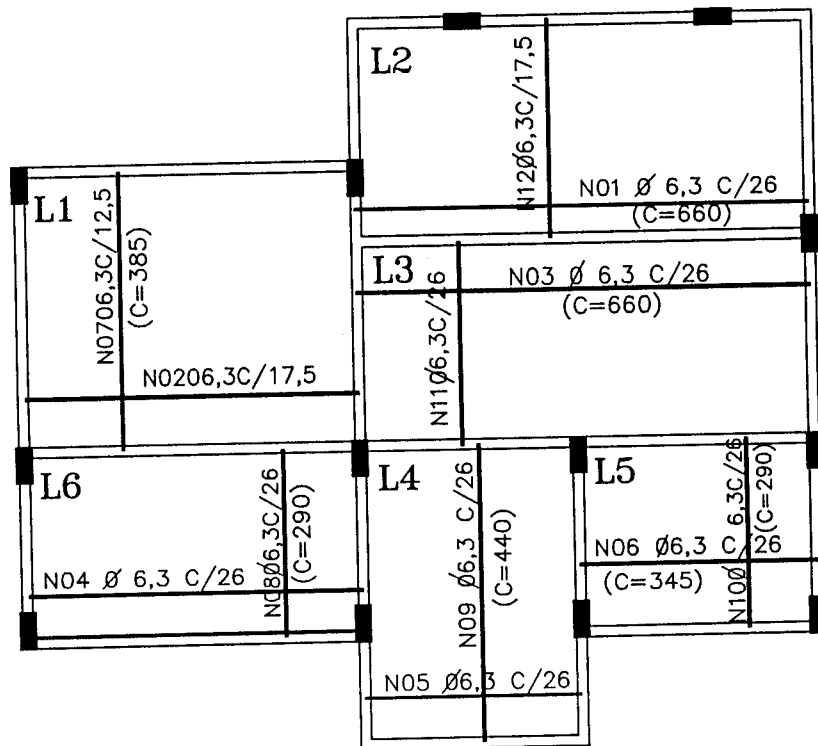
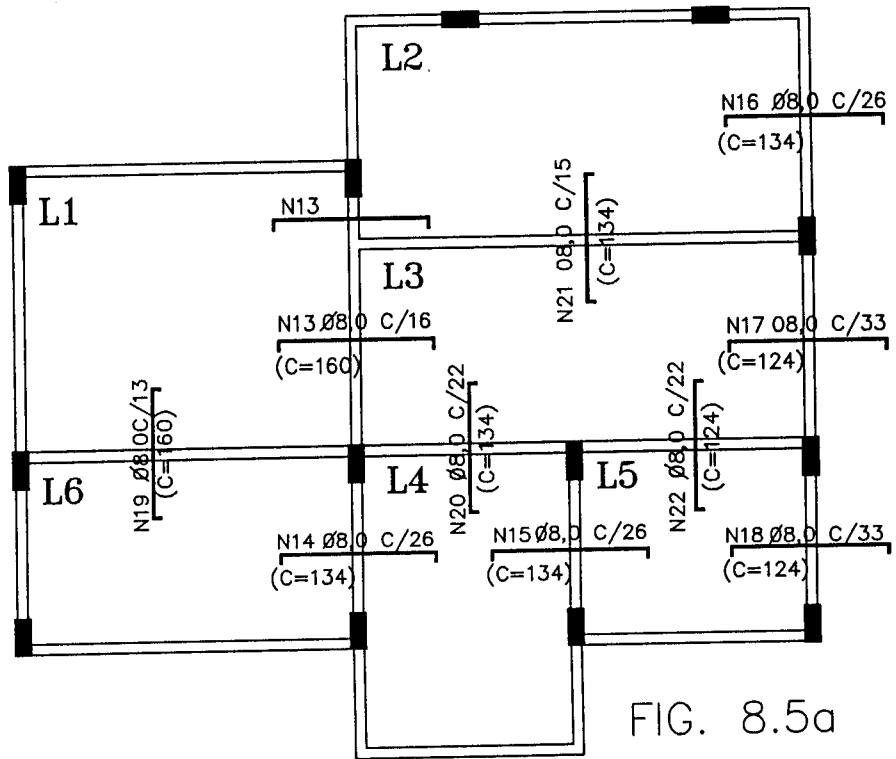


FIG 8.4 - MOMENTOS ELÁSTICOS COMPATIBILIZADOS - ESTRUTURA 1.2



8.5 - DESENHO ESQUEMÁTICO DAS ARMADURAS - ESTRUTURA 1.2



### 8.1.3 Cálculo pela TCP - ESTRUTURA 1.2

Os momentos negativos, adotados para o cálculo plástico, são os provenientes do cálculo elástico reduzidos pela metade, ou seja, multiplicados por 0,5 (Ver figura 8.6). Na laje L2, considera-se não - engastado o lado adjacente à laje L1, pois a parte engastada é menor que 2/3 do total do comprimento desse lado (2,10m). Já na laje L4 os vínculos com  $m_1$  e  $m_2$  (figura 8.6) são considerados engastados, pois as partes que permitem o engastamento equivalem a 2/3 dos comprimentos desses lados. Porém faz-se uma redução proporcional para estes momentos, ou seja, adota-se como dado de entrada o momento reduzido:

$$1,9 \times \frac{2,9 \text{ (comprimento da parte engastada)}}{4,4 \text{ (comprimento total do lado)}} = 1,25 \text{ kN.m/m}$$

e arma-se para o momento original 1,9kN.m/m.

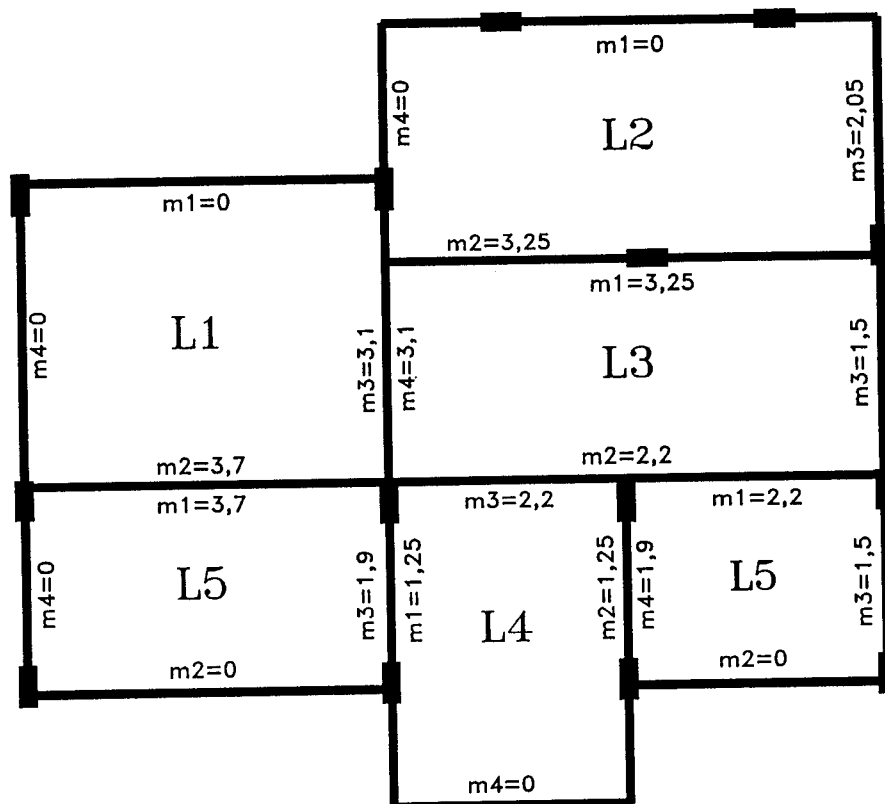


FIG 8.6 - MOMENTOS NEGATIVOS PARA O CÁLCULO PLÁSTICO

Os resultados provenientes do cálculo plástico são apresentados na figura 8.7 e as armaduras na figura 8.8. Os cálculos encontram-se no Anexo A.

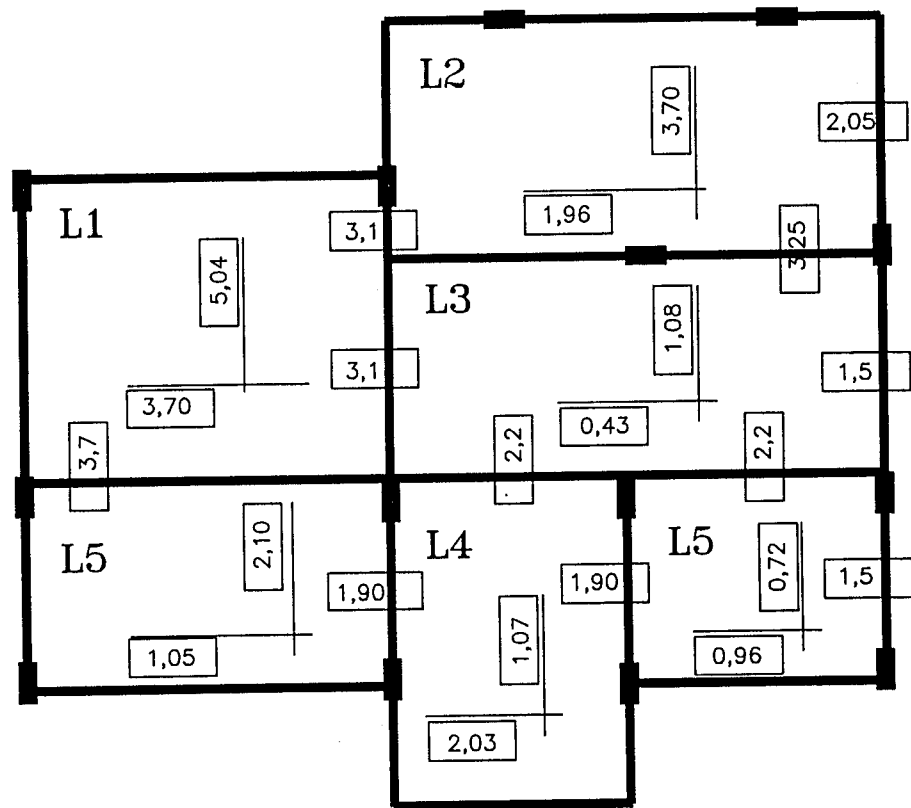


FIG.8.7 - MOMENTOS PROVENIENTES DO CÁLCULO PLÁSTICO: ESTRUTURA 1.2

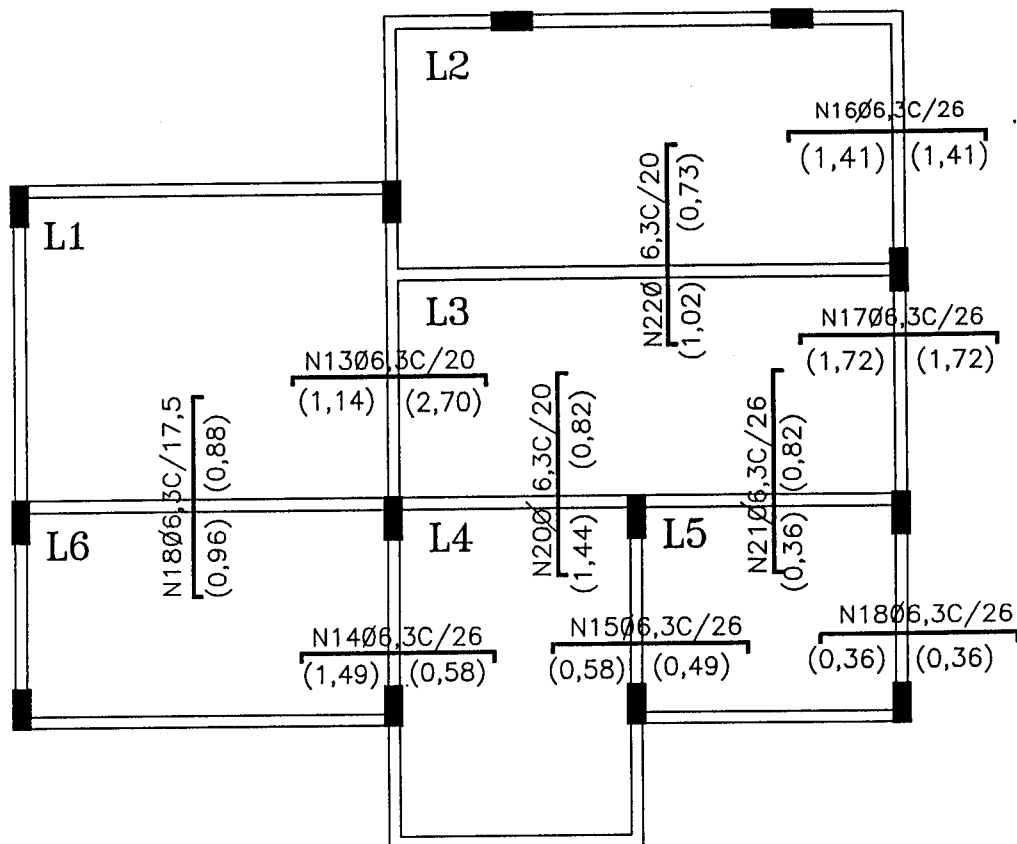


FIG. 8.8a

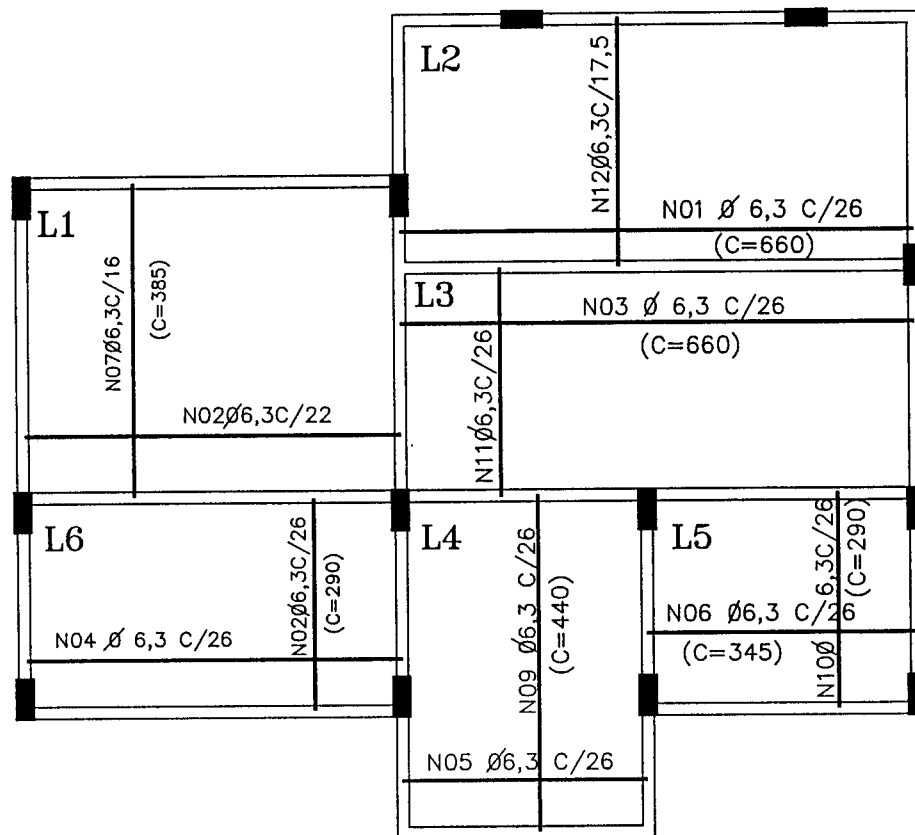


FIG 8.8 - DESENHO ESQUEMÁTICO DAS ARMADURAS - ESTRUTURA 1.2

#### 8.1.4 Flechas - ESTRUTURA 1.2

Os valores das flechas máximas das lajes e os limites estabelecidos pela NBR - 6118 encontram-se na tabela 8.2. Os cálculos encontram-se no Anexo A.

TABELA 8.2 - FLECHAS - ESTRUTURA 1.2

| LAJE | FLECHAS (cm) - ESTRUTURA 1.2 |                           |                      |                   |                 | LIMITE<br>DA<br>NBR |
|------|------------------------------|---------------------------|----------------------|-------------------|-----------------|---------------------|
|      | ELÁSTICA<br>INICIAL (ai)     | FINAL C/<br>D. LENTA (al) | AÇÕES<br>C. DUR.(ai) | RETRAÇÃO<br>(acs) | TOTAL<br>(atot) |                     |
| L-01 | 0,690                        | 1,180                     | 0,160                | 0,013             | 1,350           | 1,280               |
| L-02 | 0,700                        | 1,110                     | 0,160                | 0,022             | 1,300           | 1,050               |

### 8.1.5 Comparação dos custos - EXEMPLO 1

A tabela 8.3 mostra o resultado dos custos considerando-se cada tipo de laje apresentado para execução do pavimento proposto no exemplo 1 (Laje Pré-moldada; Laje maciça - cálculo regime elástico; Laje maciça - cálculo regime plástico). Pode-se observar duas colunas de preços, onde se considera duas situações para a utilização das formas:

- 1) Utilização de uma única vez (Primeira coluna)
- 2) Utilização em até três vezes (Segunda coluna)

A composição dos custos foi baseada nos resultados obtidos nos itens anteriores e no TCPO 9, nona edição, 1992. Os custos para os materiais foram adotados com base em pesquisa no mercado da região de São José do Rio Preto, no mês de março de 1996. Não foram considerados os custos da mão-de-obra.

A tabela 8.4 mostra uma comparação dos resultados obtidos na tabela 8.3.

TABELA 8.3 - RESULTADO DOS CUSTOS - EXEMPLO 1

| LAJE PRE-MOLDADA TRELIÇADA P/ PISO - ESTRUTURA 1.1 |         |          |         |                           |                            |
|----------------------------------------------------|---------|----------|---------|---------------------------|----------------------------|
| MATERIAL                                           | UNIDADE | QUANTID. | P.UNIT. | PREÇO TOTAL( Utiliz. 1v.) | PREÇO TOTAL( Utiliz. 3vs.) |
| Laje treliçada Tipo1(e=16cm; s.carga=500kg/m2)     | m2      | 39,85    | 10,50   | 418,43                    | 418,43                     |
| Concreto Usinado(fck=18MPa)                        | m3      | 2,27     | 100,00  | 227,15                    | 227,15                     |
| Aço CA - 50A (6,3mm)                               | kg      | 11,96    | 0,70    | 8,37                      | 8,37                       |
| Arame Recozido nº18                                | kg      | 0,24     | 1,00    | 0,24                      | 0,24                       |
| Tabua de Pinho (1x12")                             | m       | 25,1055  | 1,75    | 43,93                     | 14,64                      |
| Pontaletes de Pinho (3x3")                         | m       | 45,0305  | 1,30    | 58,54                     | 19,51                      |
| Sarrafo de Pinho (3x3")                            | m       | 26,6995  | 0,35    | 9,34                      | 3,11                       |
| Prego 18x27                                        | kg      | 1,1955   | 2,00    | 2,39                      | 0,80                       |
| <i>SUB-TOTAL</i>                                   |         |          |         | <i>768,39</i>             | <i>632,25</i>              |
| Laje treliçada Tipo2(e=12cm; s.carga=350kg/m2)     | m2      | 57,35    | 7,50    | 430,13                    | 430,13                     |
| Concreto Usinado(fck=18MPa)                        | m3      | 2,75     | 100,00  | 275,28                    | 275,28                     |
| Aço CA - 50A (6,3mm)                               | kg      | 17,21    | 0,70    | 12,04                     | 12,04                      |
| Arame Recozido nº18                                | kg      | 0,34     | 1,00    | 0,34                      | 0,34                       |
| Tabua de Pinho (1x12")                             | m       | 36,1305  | 1,75    | 63,23                     | 21,08                      |
| Pontaletes de Pinho (3x3")                         | m       | 64,8055  | 1,30    | 84,25                     | 28,08                      |
| Sarrafo de Pinho (3x3")                            | m       | 38,4245  | 0,35    | 13,45                     | 4,48                       |
| Prego 18x27                                        | kg      | 1,7205   | 2,00    | 3,44                      | 1,15                       |
| <i>SUB-TOTAL</i>                                   |         |          |         | <i>882,16</i>             | <i>772,58</i>              |
| <b>TOTAL (R\$)</b>                                 |         |          |         | <b>1.650,55</b>           | <b>1.464,83</b>            |

| LAJE MACIÇA- CALCULO ELASTICO (H= 8,00 cm) - ESTRUTURA 1.2 |         |          |         |                           |                            |
|------------------------------------------------------------|---------|----------|---------|---------------------------|----------------------------|
| MATERIAL                                                   | UNIDADE | QUANTID. | P.UNIT. | PREÇO TOTAL( Utiliz. 1v.) | PREÇO TOTAL( Utiliz. 3vs.) |
| Concreto Usinado(fck=18MPa)                                | m3      | 7,78     | 100,00  | 777,60                    | 777,60                     |
| Aço CA - 50A                                               | kg      | 523,54   | 0,70    | 366,48                    | 366,48                     |
| Arame Recozido nº18                                        | kg      | 10,47    | 1,00    | 10,47                     | 10,47                      |
| Chapa de Mad. Comp. Resinada (12mm)                        | m2      | 125,39   | 3,00    | 376,16                    | 125,39                     |
| Tábua de Pinho (1x12")                                     | m       | 349,92   | 1,75    | 612,36                    | 204,12                     |
| Pontaletes de Pinho (3x3")                                 | m       | 379,08   | 1,30    | 492,80                    | 164,27                     |
| Pregos 18x27                                               | kg      | 24,30    | 2,00    | 48,60                     | 48,60                      |
| Desmoldante p/ forma                                       | kg      | 9,72     | 1,00    | 9,72                      | 9,72                       |
| <i>SUB-TOTAL</i>                                           |         |          |         | <i>2.684,48</i>           | <i>1.706,64</i>            |
| <b>TOTAL</b>                                               |         |          |         | <b>R\$2.684,48</b>        | <b>R\$1.706,64</b>         |

| LAJE MACIÇA- CALCULO PLASTICO (H= 8,00 cm) - ESTRUTURA 1.2 |         |          |         |                           |                            |
|------------------------------------------------------------|---------|----------|---------|---------------------------|----------------------------|
| MATERIAL                                                   | UNIDADE | QUANTID. | P.UNIT. | PREÇO TOTAL( Utiliz. 1v.) | PREÇO TOTAL( Utiliz. 3vs.) |
| Concreto Usinado(fck=18MPa)                                | m3      | 7,78     | 100,00  | 777,60                    | 777,60                     |
| Aço CA - 50A                                               | kg      | 364,85   | 0,70    | 255,40                    | 255,40                     |
| Arame Recozido nº18                                        | kg      | 7,30     | 1,00    | 7,30                      | 7,30                       |
| Chapa de Mad. Comp. Resinada (12mm)                        | m2      | 125,39   | 3,00    | 376,16                    | 125,39                     |
| Tábua de Pinho (1x12")                                     | m       | 349,92   | 1,75    | 612,36                    | 204,12                     |
| Pontaletes de Pinho (3x3")                                 | m       | 349,92   | 1,30    | 454,90                    | 151,63                     |
| Pregos 18x27                                               | kg      | 24,30    | 2,00    | 48,60                     | 48,60                      |
| Desmoldante p/ forma                                       | kg      | 9,72     | 1,00    | 9,72                      | 9,72                       |
| <i>SUB-TOTAL</i>                                           |         |          |         | <i>2.542,03</i>           | <i>1.579,75</i>            |
| <b>TOTAL</b>                                               |         |          |         | <b>R\$2.542,03</b>        | <b>R\$1.579,75</b>         |

TABELA 8.4 - COMPARAÇÃO DE CUSTOS - EXEMPLO 1

| ALTERNATIVA                        | CUSTO MATERIAIS               |                  | CUSTO MATERIAIS               |                  |
|------------------------------------|-------------------------------|------------------|-------------------------------|------------------|
|                                    | Utilização das formas - 1 Vez | ECONOMIA<br>Em % | Utilização das formas - 3 Vez | ECONOMIA<br>Em % |
| <b>Laje Maciça - Reg. Elástico</b> | <b>2.684,48</b>               |                  | <b>1.706,64</b>               |                  |
| Laje Maciça - Cálculo Plástico     | 2.542,03                      | 5,60%            | 1.579,75                      | 8,00%            |
| Laje Treliçada                     | 1.650,55                      | 62,64%           | 1.464,83                      | 16,51%           |
|                                    |                               |                  |                               |                  |
| <b>Laje Maciça - Reg. Plástico</b> | <b>2.542,03</b>               |                  | <b>1.579,75</b>               |                  |
| Laje Treliçada                     | 1.650,55                      | 54,10%           | 1.464,83                      | 7,85%            |

## 8.2 EXEMPLO 2

Apresenta-se agora um segundo exemplo, de um pavimento semelhante ao primeiro, porém com uma estrutura constituída de painéis de lajes maiores, procurando evidenciar o problema relativo a flechas.

A figura 8.9 mostra a arquitetura do pavimento. A figura 8.10, mostra a estrutura executada com o sistema de lajes pré-moldadas e a figura 8.11 a estrutura com adoção de lajes maciças de concreto armado, calculadas no regime elástico e, posteriormente, no regime plástico.

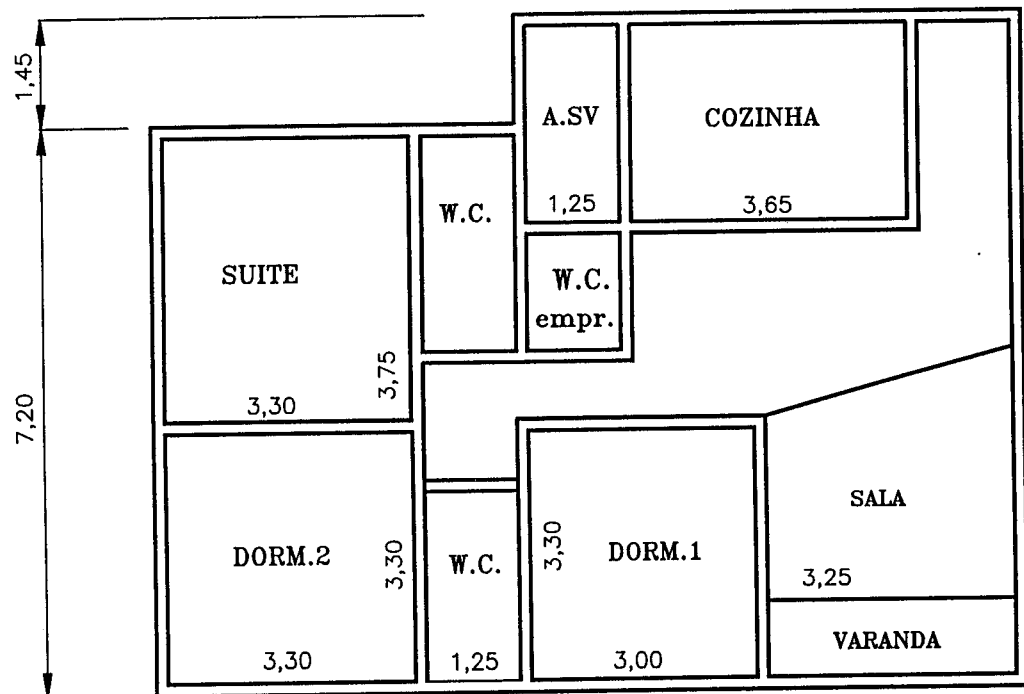


FIG 8.9 - ARQUITETURA 2



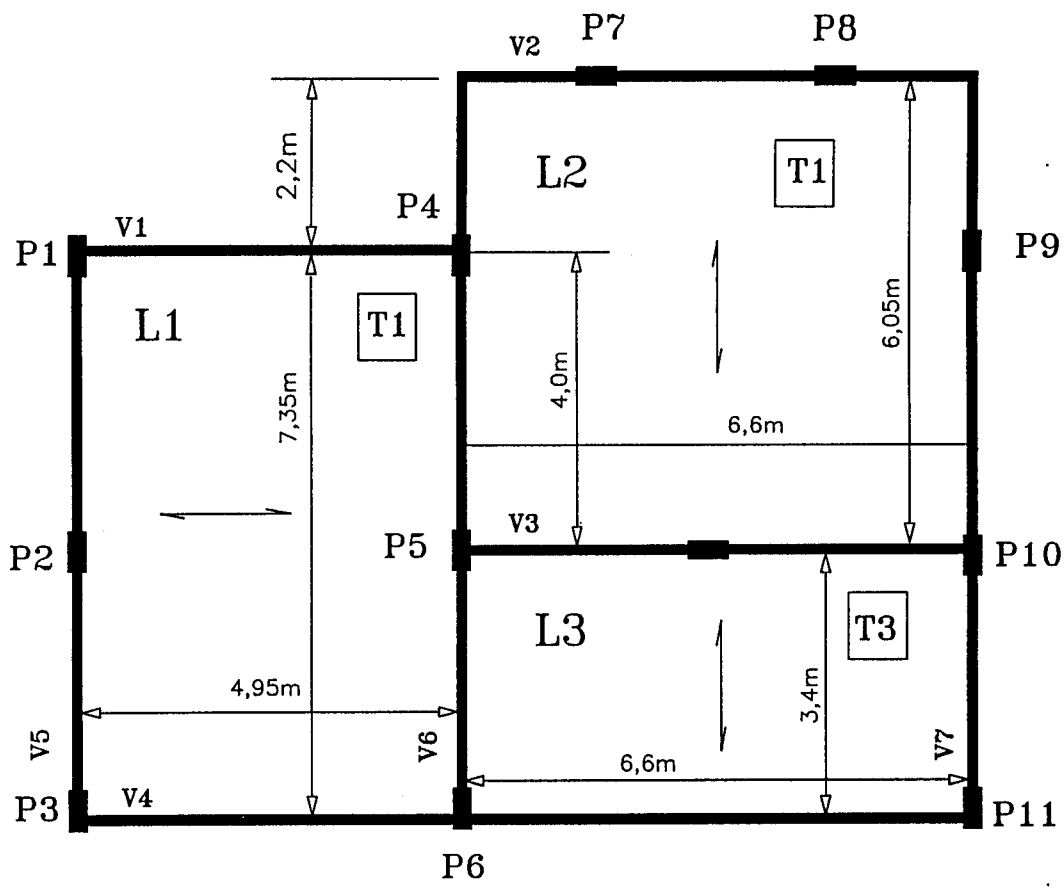


FIG 8.10 ESTRUTURA 2.1 - ESQUEMA - LAJE PRÉ-MOLDADA

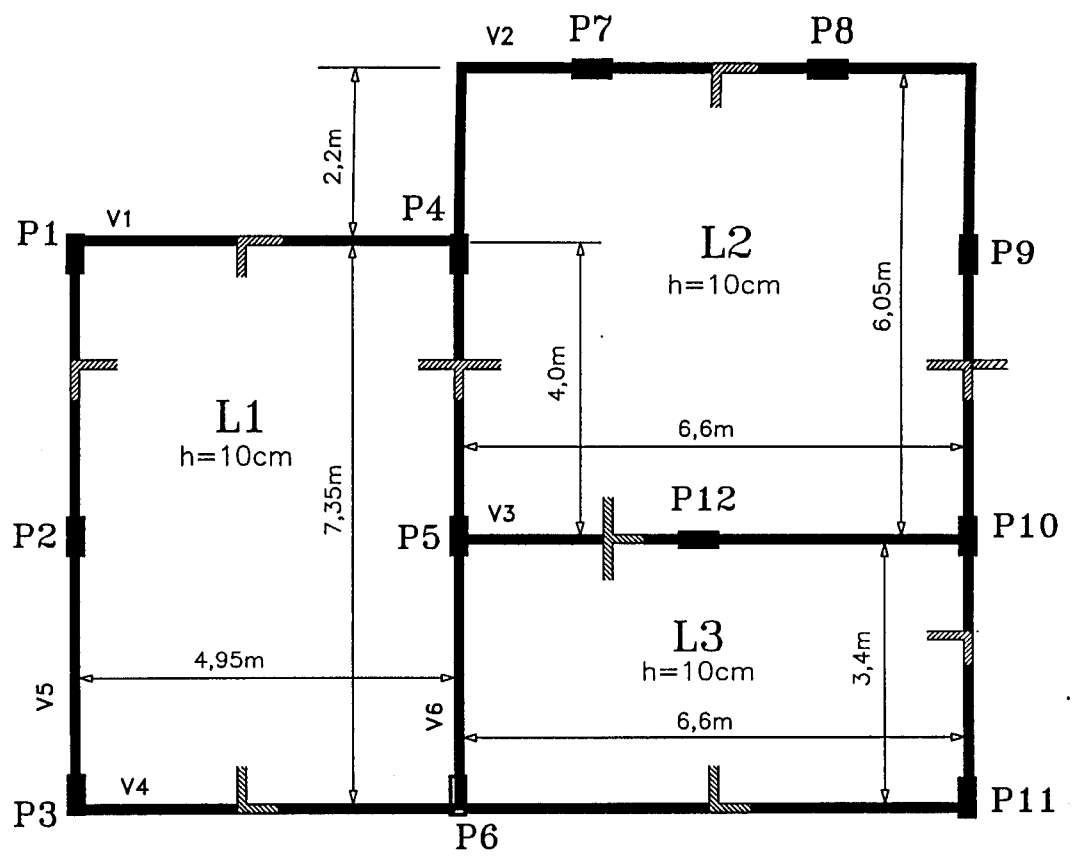


FIG 8.11 ESTRUTURA 2.2 - FORMAS - LAJE MACIÇA

### 8.2.1 Considerações para adoção das lajes pré-moldadas

As lajes L1 e L2 lajes foram consideradas pré-moldadas do Tipo 1: intereixo com 41cm, espessura 16cm, capeamento de 4cm e consumo de concreto usinado C18 igual a  $0,057\text{m}^3/\text{m}^2$ , para sobrecarga de até  $5,0\text{ kN/m}^2$  e vãos de até 4,0 metros.

A laje L3 foi considerada do Tipo 3: intereixo com 41cm, espessura de 16cm, capeamento de 4cm e consumo de concreto usinado C18 igual a  $0,0657\text{m}^3/\text{m}^2$ , para sobrecargas de até  $12,5\text{ kN/m}^2$  e vãos de até 4,0 metros.

### 8.2.2 Cálculo Elástico - ESTRUTURA 2.2

Com os mesmos critérios do item 8.1.2 e utilizando-se agora a tabela 8.5, faz-se o cálculo da estrutura 2.2 no regime elástico.

TABELA 8.5 - CARACTERÍSTICAS E CARGAS - ESTRUTURA 2.2

| LAJE            |                              | L1    | L2    | L3    |
|-----------------|------------------------------|-------|-------|-------|
| Características | Lx (m)                       | 4,95  | 6,05  | 3,40  |
|                 | Ly (m)                       | 7,35  | 6,60  | 6,60  |
|                 | $\lambda$                    | 1,48  | 1,09  | 1,94  |
|                 | h (cm)                       | 10,00 | 10,00 | 10,00 |
| Cargas          | p.p.                         | 2,50  | 2,50  | 2,50  |
|                 | piso+<br>revest.+<br>enchim. | 1,00  | 1,00  | 9,50  |
|                 | paredes                      | 2,12  | 2,13  | 1,26  |
|                 | g                            | 5,62  | 5,63  | 13,26 |
|                 | q                            | 1,50  | 1,50  | 1,50  |
|                 | p=g+q                        | 7,12  | 7,13  | 14,76 |

Os valores dos momentos elásticos compatibilizados (dentro dos retângulos) estão indicados na figura 8.12. As armaduras estão indicadas na figura 8.13.

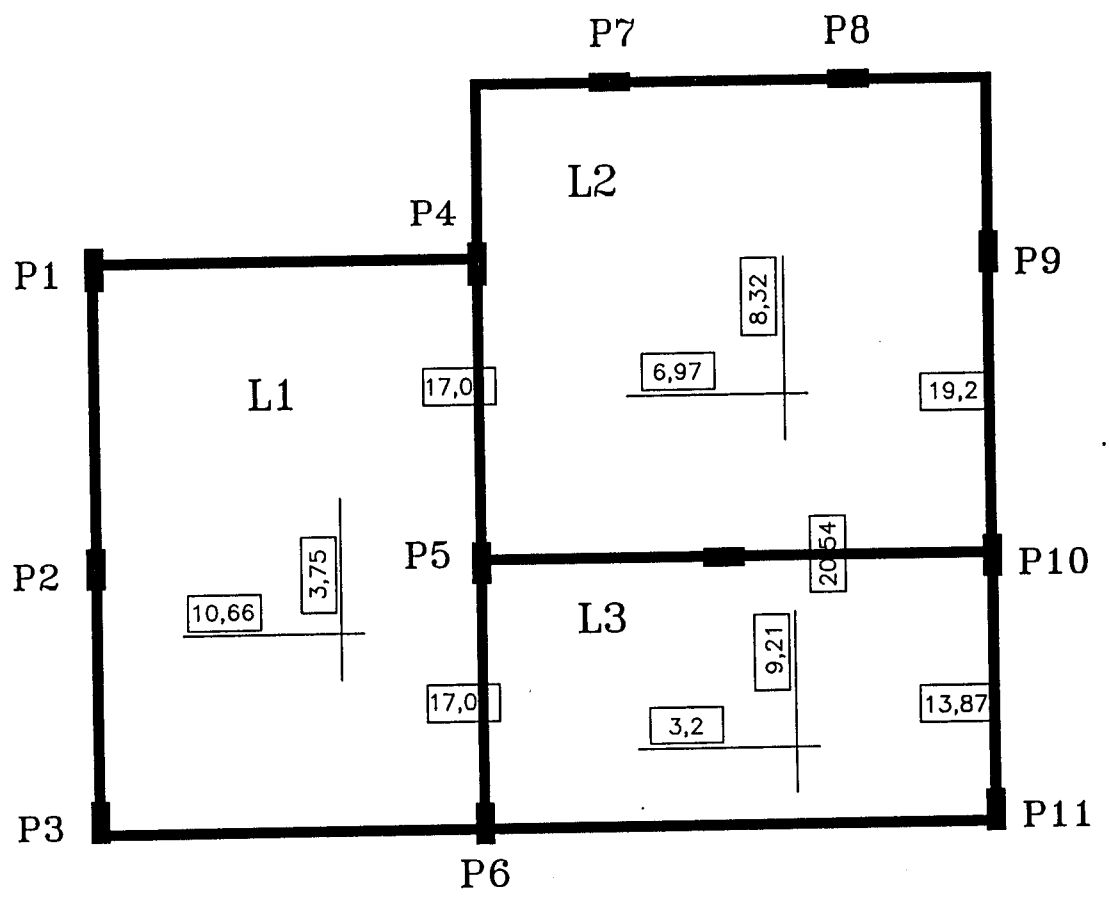


FIG 8.12 - MOMENTOS ELÁSTICOS COMPATIBILIZADOS - ESTRUTURA 2.2

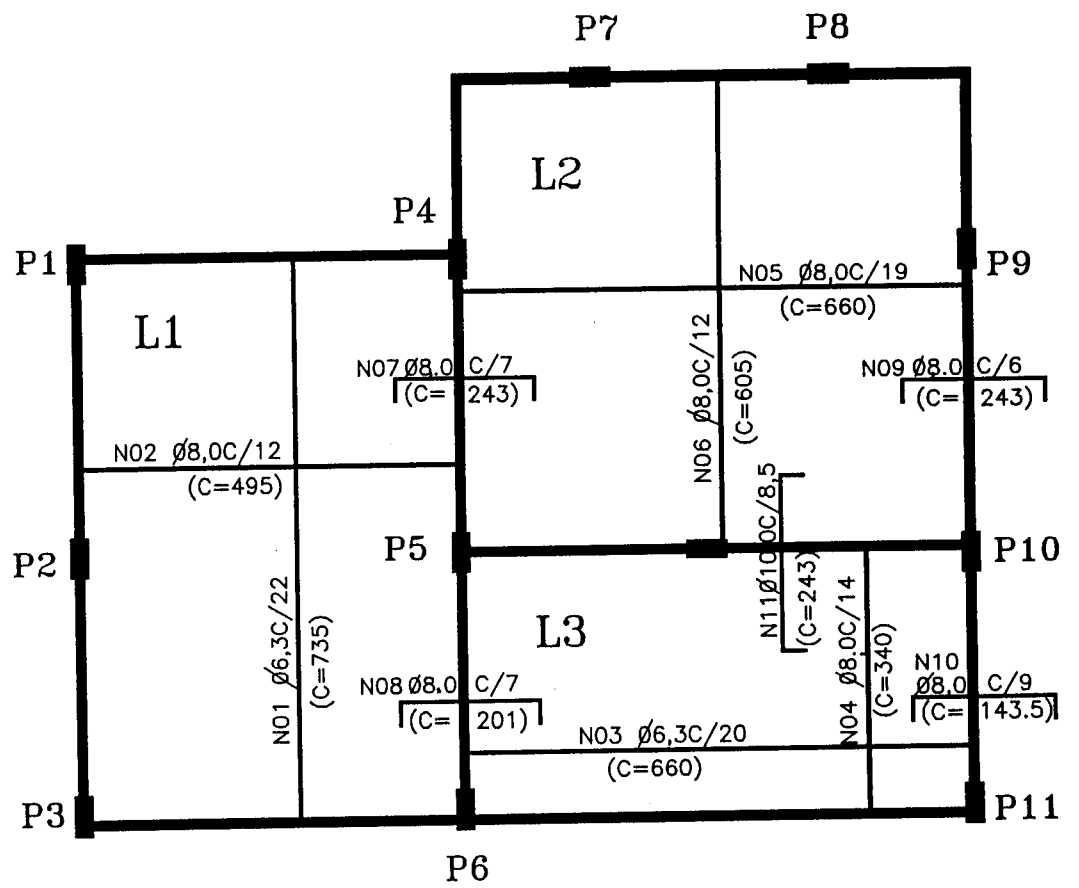


FIG 8.13 - DESENHO ESQUEMÁTICO DAS ARMADURAS - ESTRUTURA 2.2

### 8.2.3 Cálculo pela TCP - ESTRUTURA 2.2

Adotam-se aqui também os mesmos critérios do item 8.1.3, ou seja, momentos negativos provenientes do cálculo elástico reduzidos pela metade (Ver figura 8.14). Na laje L2, considera-se aqui, também, o lado adjacente à laje L1, não-engastado, pois a parte engastada (4m) é menor que 2/3 do total do comprimento desse lado (4,03m).

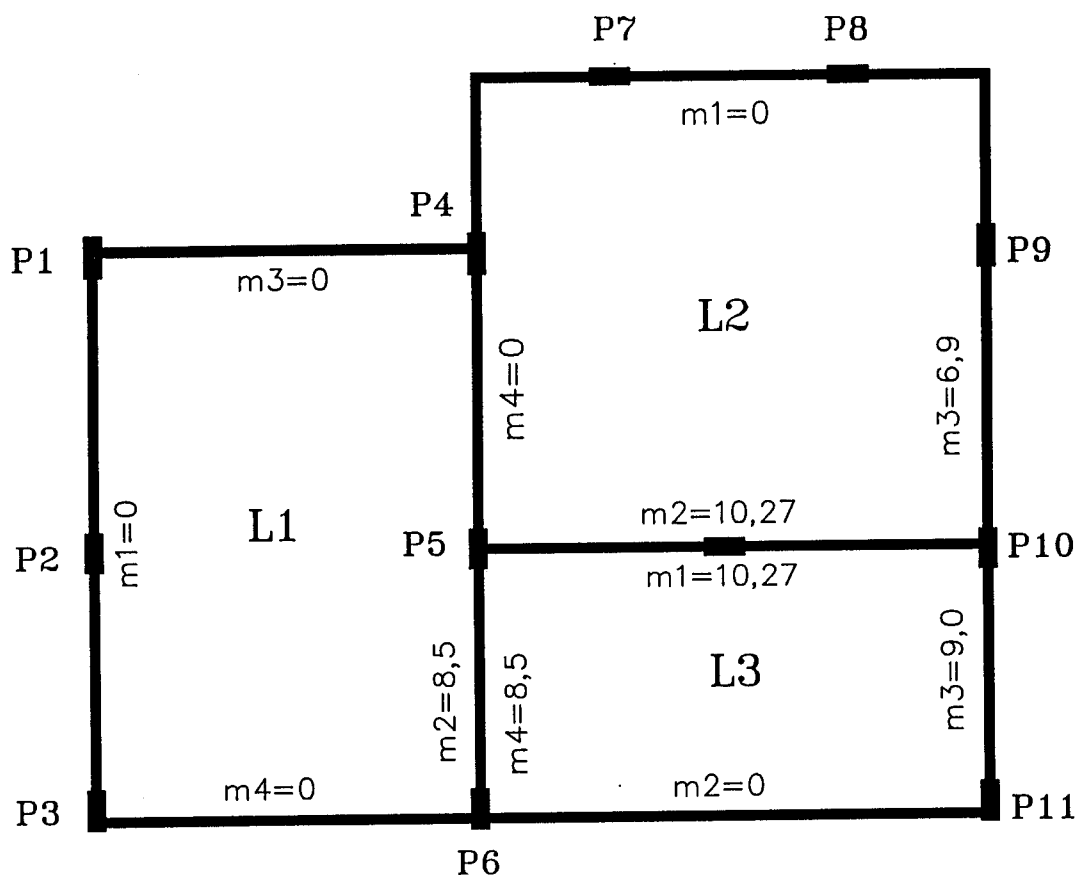


FIG. 8.14 MOMENTOS NEGATIVOS PARA O CÁLCULO PLÁSTICO

Os resultados são apresentados nas figuras 8.15 e 8.16, estando os cálculos indicados no Anexo B.

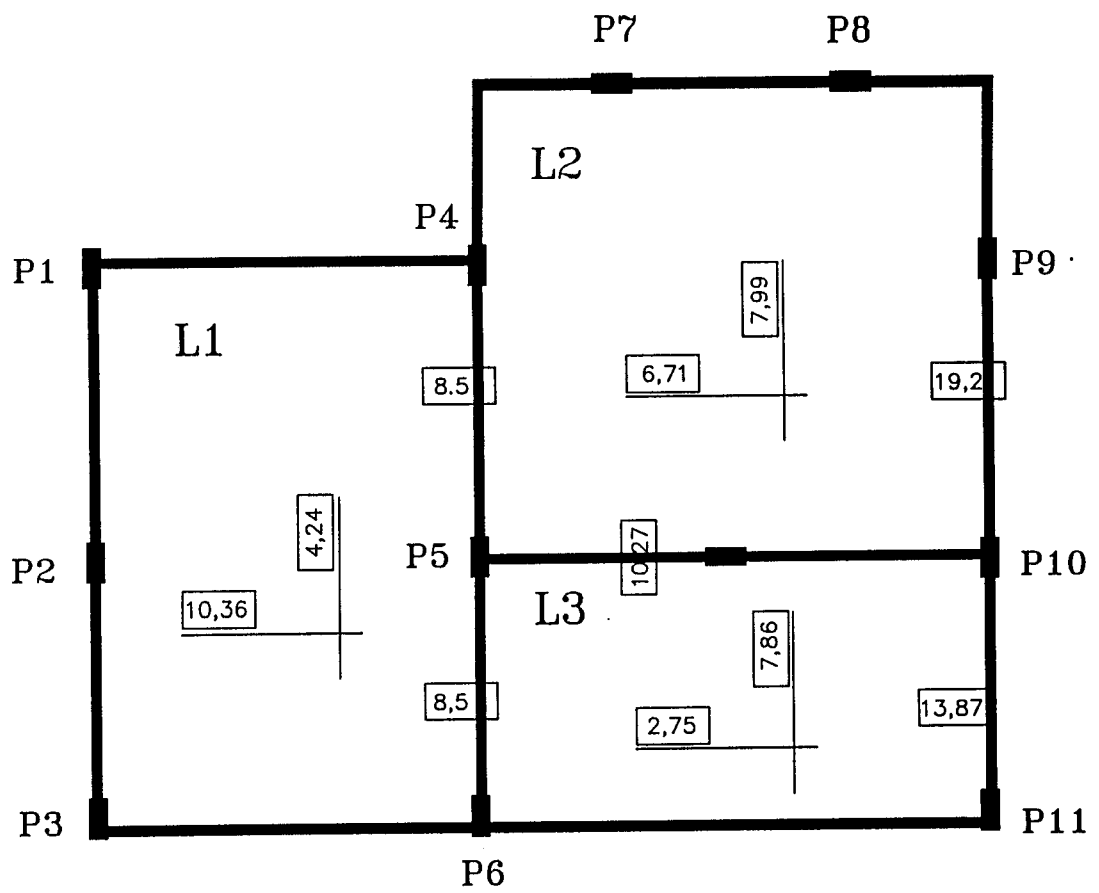
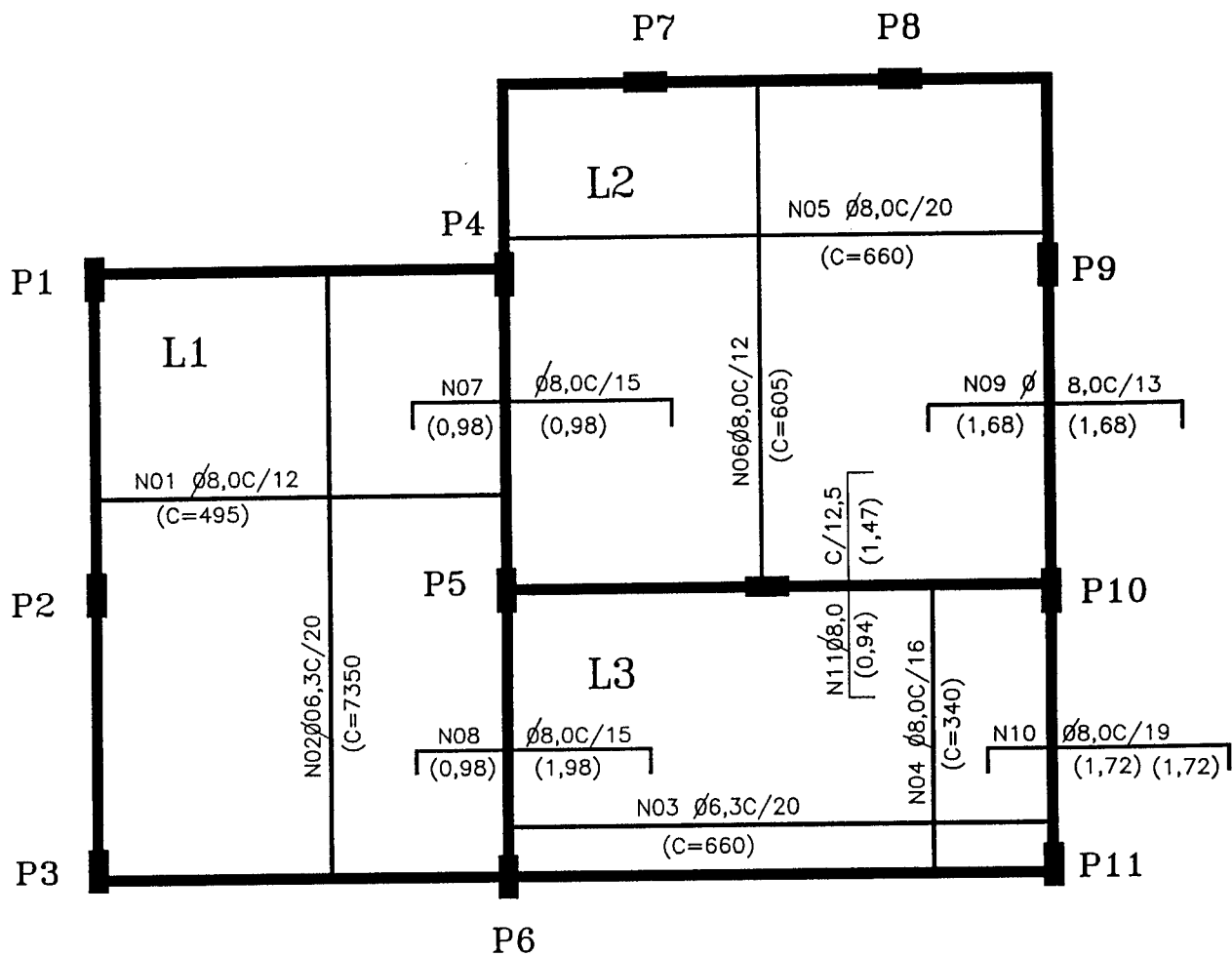


FIG.8.15 MOMENTOS PROVENIENTES DO CÁLCULO PLÁSTICO: ESTRUTURA 2.2



8.16 DESENHO ESQUEMÁTICO DAS ARMADURAS - ESTRUTURA 2.2



#### 8.2.4 Flechas - ESTRUTURA 2.2

Os valores das flechas máximas das lajes e os limites estabelecidos pela NBR - 6118 encontram-se na tabela 8.6. Os cálculos encontram-se no Anexo B.

TABELA 8.6 - FLECHAS - ESTRUTURA 2.2

| LAJE | FLECHAS (cm) - ESTRUTURA 2.2 |                           |                      |                   |                 | LIMITE<br>DA<br>NBR |
|------|------------------------------|---------------------------|----------------------|-------------------|-----------------|---------------------|
|      | ELÁSTICA<br>INICIAL (aj)     | FINAL C/<br>D. LENTA (aj) | AÇÕES<br>C. DUR.(aj) | RETRAÇÃO<br>(acs) | TOTAL<br>(alot) |                     |
| L-01 | 2,020                        | 3,180                     | 0,410                | 0,024             | 3,620           | 1,650               |
| L-02 | 2,470                        | 3,960                     | 0,500                | 0,024             | 4,480           | 2,010               |
| L-03 | 1,190                        | 1,840                     | 0,110                | 0,015             | 1,960           | 1,130               |

### 8.2.5 Comparação dos custos - EXEMPLO 2

Foram utilizados, neste exemplo, os mesmos critérios do exemplo 1. A tabela 8.7 mostra os resultados dos custos, levando-se em consideração, novamente, as duas situações do exemplo 1: utilização das fôrmas uma única vez (Primeira coluna); utilização das fôrmas em até 3 vezes (Segunda coluna)

A tabela 8.8 mostra uma comparação dos resultados obtidos na tabela 8.7.

TABELA 8.7 - RESULTADO DOS CUSTOS - EXEMPLO 2

| LAJE PRÉ-MOLDADA TRELIÇADA P/ PISO - ESTRUTURA 2.1             |                |          |         |                           |                            |
|----------------------------------------------------------------|----------------|----------|---------|---------------------------|----------------------------|
| MATERIAL                                                       | UNIDADE        | QUANTID. | P.UNIT. | PREÇO TOTAL( Utiliz. 1v.) | PREÇO TOTAL( Utiliz. 3vs.) |
| Laje treliçada Tipo 1 (e=16cm; s.carga=500kg/m <sup>2</sup> )  | m <sup>2</sup> | 76,31    | 10,50   | 801,26                    | 801,26                     |
| Concreto Usinado(fck=18MPa)                                    | m <sup>3</sup> | 4,35     | 100,00  | 434,97                    | 434,97                     |
| Aço CA - 50A (6,3mm)                                           | kg             | 22,89    | 0,70    | 16,03                     | 16,03                      |
| Arame Recozido nº18                                            | kg             | 0,46     | 1,00    | 0,46                      | 0,46                       |
| Tabua de Pinho (1x12")                                         | m              | 48,0753  | 1,75    | 84,13                     | 28,04                      |
| Pontaletes de Pinho (3x3")                                     | m              | 86,2303  | 1,30    | 112,10                    | 37,37                      |
| Sarrafo de Pinho (3x3")                                        | m              | 51,1277  | 0,35    | 17,89                     | 5,96                       |
| Prego 18x27                                                    | kg             | 2,2893   | 2,00    | 4,58                      | 1,53                       |
| <i>SUB-TOTAL</i>                                               |                |          |         | <i>1.471,41</i>           | <i>1.325,61</i>            |
| Laje treliçada Tipo 3 (e=16cm; s.carga=1250kg/m <sup>2</sup> ) | m <sup>2</sup> | 22,44    | 11,50   | 258,06                    | 258,06                     |
| Concreto Usinado(fck=18MPa)                                    | m <sup>3</sup> | 1,28     | 100,00  | 127,91                    | 127,91                     |
| Aço CA - 50A (6,3mm)                                           | kg             | 6,73     | 0,70    | 4,71                      | 4,71                       |
| Arame Recozido nº18                                            | kg             | 0,13     | 1,00    | 0,13                      | 0,13                       |
| Tabua de Pinho (1x12")                                         | m              | 14,1372  | 1,75    | 24,74                     | 8,25                       |
| Pontaletes de Pinho (3x3")                                     | m              | 25,3572  | 1,30    | 32,96                     | 10,99                      |
| Sarrafo de Pinho (3x3")                                        | m              | 15,0348  | 0,35    | 5,26                      | 1,75                       |
| Prego 18x27                                                    | Kg             | 0,6732   | 2,00    | 1,35                      | 0,45                       |
| <i>SUB-TOTAL</i>                                               |                |          |         | <i>455,13</i>             | <i>412,25</i>              |
| <b>TOTAL (R\$)</b>                                             |                |          |         | <b>1.926,54</b>           | <b>1.737,86</b>            |

| LAJE MACIÇA- CALCULO ELASTICO (H= 10,00 cm) - ESTRUTURA 2.2 |                |          |         |                           |                            |
|-------------------------------------------------------------|----------------|----------|---------|---------------------------|----------------------------|
| MATERIAL                                                    | UNIDADE        | QUANTID. | P.UNIT. | PREÇO TOTAL( Utiliz. 1v.) | PREÇO TOTAL( Utiliz. 3vs.) |
| Concreto Usinado(fck=18MPa)                                 | m <sup>3</sup> | 9,88     | 100,00  | 987,50                    | 987,50                     |
| Aço CA - 50A                                                | kg             | 893,00   | 0,70    | 625,10                    | 625,10                     |
| Arame Recozido nº18                                         | kg             | 17,86    | 1,00    | 17,86                     | 17,86                      |
| Chapa de Mad. Comp. Resinada (12mm)                         | m <sup>2</sup> | 127,39   | 3,00    | 382,16                    | 127,39                     |
| Tábua de Pinho (1x12")                                      | m              | 355,50   | 1,75    | 622,13                    | 207,38                     |
| Pontaletes de Pinho (3x3")                                  | m              | 385,13   | 1,30    | 500,66                    | 166,89                     |
| Pregos 18x27                                                | kg             | 24,69    | 2,00    | 49,38                     | 49,38                      |
| Desmoldante p/ forma                                        | kg             | 9,88     | 1,00    | 9,88                      | 9,88                       |
| <i>SUB-TOTAL</i>                                            |                |          |         | <i>3.184,79</i>           | <i>2.191,36</i>            |
| <b>TOTAL</b>                                                |                |          |         | <b>R\$3.184,79</b>        | <b>R\$2.191,36</b>         |

| LAJE MACIÇA- CALCULO PLASTICO (H= 10,00 cm) - ESTRUTURA 2.2 |                |          |         |                           |                            |
|-------------------------------------------------------------|----------------|----------|---------|---------------------------|----------------------------|
| MATERIAL                                                    | UNIDADE        | QUANTID. | P.UNIT. | PREÇO TOTAL( Utiliz. 1v.) | PREÇO TOTAL( Utiliz. 3vs.) |
| Concreto Usinado(fck=18MPa)                                 | m <sup>3</sup> | 9,88     | 100,00  | 987,50                    | 987,50                     |
| Aço CA - 50A                                                | kg             | 716,00   | 0,70    | 501,20                    | 501,20                     |
| Arame Recozido nº18                                         | kg             | 14,32    | 1,00    | 14,32                     | 14,32                      |
| Chapa de Mad. Comp. Resinada (12mm)                         | m <sup>2</sup> | 127,39   | 3,00    | 382,16                    | 127,39                     |
| Tábua de Pinho (1x12")                                      | m              | 355,50   | 1,75    | 622,13                    | 207,38                     |
| Pontaletes de Pinho (3x3")                                  | m              | 355,50   | 1,30    | 462,15                    | 154,05                     |
| Pregos 18x27                                                | kg             | 24,69    | 2,00    | 49,38                     | 49,38                      |
| Desmoldante p/ forma                                        | kg             | 9,88     | 1,00    | 9,88                      | 9,88                       |
| <i>SUB-TOTAL</i>                                            |                |          |         | <i>3.028,71</i>           | <i>2.051,08</i>            |
| <b>TOTAL</b>                                                |                |          |         | <b>R\$3.028,71</b>        | <b>R\$2.051,08</b>         |

TABELA 8.8 - COMPARAÇÃO DE CUSTOS - EXEMPLO 2

| ALTERNATIVA                        | CUSTO MATERIAIS               | ECONOMIA | CUSTO MATERIAIS               | ECONOMIA |
|------------------------------------|-------------------------------|----------|-------------------------------|----------|
|                                    | Utilização das formas - 1 Vez | Em %     | Utilização das formas - 3 Vez | Em %     |
| <b>Laje Maciça - Reg. Elástico</b> | <b>3.184,79</b>               |          | <b>2.191,36</b>               |          |
| Laje Maciça - Cálculo Plástico     | 3.028,71                      | 5,15%    | 2.051,08                      | 6,84%    |
| Laje Treliçada                     | 1.926,54                      | 65,31%   | 1.737,86                      | 26,10%   |
|                                    |                               |          |                               |          |
| <b>Laje Maciça - Reg. Plástico</b> | <b>3.028,71</b>               |          | <b>2.051,08</b>               |          |
| Laje Treliçada                     | 1.926,54                      | 57,21%   | 1.737,86                      | 18,02%   |

## 9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 9.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para uma análise mais completa do custo de execução de diferentes tipos de lajes, deve-se enfatizar que, faz-se necessária também a consideração da mão-de-obra.

Lembre-se, ainda, que parte dos quantitativos, nos exemplos apresentados, foram obtidos com base nas composições do TCPO 9, nona edição, 1992 e ainda que os custos para estes materiais foram adotados com base em pesquisa no mercado da região de São José do Rio Preto no mês de março de 1996.

Porém, para uma análise menos rigorosa, comparando-se os custos entre as alternativas nos exemplos apresentados (Exemplos 1 e 2), pode-se observar que a reutilização das fôrmas é de fundamental importância para uma análise financeira relativa ao tipo de estrutura a ser utilizada em uma edificação.

Observa-se também que as opções em lajes treliçadas, tanto no exemplo 1 como no exemplo 2, apresentaram um custo consideravelmente menor que as opções em lajes maciças, mesmo quando considerada a reutilização das fôrmas em até 3 vezes.

No exemplo 1, o custo da alternativa em laje treliçada (Estrutura 1.1) resultou em uma economia de 16,51% com relação a alternativa em laje maciça (Estrutura 1.2), calculada no regime elástico e uma economia de 7,85% em relação à calculada no regime plástico.

No Exemplo 2, o custo da alternativa em laje treliçada (Estrutura 2.1) resultou em uma economia de 26,10% em relação à alternativa em laje maciça (Estrutura 2.2),

calculada no regime elástico e uma economia de 18,02% em relação à calculada no regime plástico.

Partindo-se das tabelas 8.3 e 8.7, pode-se observar, também, que a economia que o cálculo pela teoria das charneiras plásticas pode trazer é significativa em relação ao consumo de aço. Na estrutura 1.2 (Exemplo 1), o cálculo plástico resultou numa economia de 43,5% no consumo de aço em relação ao cálculo elástico, enquanto que na estrutura 2.2 (Exemplo 2) obteve-se uma economia de 24,72%.

Observa-se que a economia conseguida no pavimento do Exemplo 2, que apresenta painéis de lajes maiores, portanto menos armaduras negativas, aumentou sensivelmente, com a alternativa em laje treliçada, e diminuiu com a alternativa em lajes maciças - cálculo plástico, em relação ao exemplo 1.

No cálculo pela TCP, onde os momentos negativos e a relação entre os positivos são fixados, não é necessário que seja feito um cálculo iterativo entre as lajes vizinhas. Convém ressaltar que, quando um lado de uma laje está conectado com duas lajes diferentes (vide laje 1 - estrutura 2.2), os momentos negativos, adotados para as lajes, podem ser diferentes ao longo do mesmo tramo da viga. Cada laje é dimensionada para seu respectivo momento negativo, levando-se em conta sua espessura, e adotando-se a maior armadura.

Deve-se ressaltar mais uma vez que os custos apresentados não levaram em consideração o custo da mão-de-obra necessária à execução de cada alternativa, o que provavelmente modificaria os resultados, principalmente na comparação entre lajes treliçadas e lajes maciças.

## 9.2 CONCLUSÕES

A utilização das lajes pré-moldadas treliçadas, com base na análise anterior, parece uma alternativa bastante interessante e econômica para edificações menores como pequenos edifícios (por exemplo, até três pavimentos) e residências em geral, devido à facilidade e rapidez na aplicação do sistema e também pela impossibilidade de maior reutilização das fôrmas.

A utilização de lajes maciças passa a ser uma alternativa mais adequada às edificações com vários pavimentos, pois além de resultar numa estrutura com melhor qualidade, pode-se conseguir economia com a grande reutilização das fôrmas.

Ainda em edificações com menos pavimentos, porém com vários painéis de lajes adjacentes e iguais, onde se pode conseguir além da economia com a reutilização das fôrmas, concretando-se por etapas, uma significativa economia suplementar, com o cálculo no regime plástico, devido à grande quantidade de apoios e, portanto, de armadura negativa. A economia do cálculo plástico cresce com o número de bordas engastadas.

Não há dúvida, portanto, que o cálculo plástico é o mais adequado para o dimensionamento das lajes comuns de concreto armado, pois a economia conseguida em alguns casos é bastante interessante, tanto em relação ao consumo de aço, como no consumo de concreto com a redução nas espessuras das lajes e por fim na mão-de-obra necessária.

A automação do cálculo plástico pode ser feita com facilidade, utilizando-se as expressões fornecidas no capítulo 4, tornando-se uma ferramenta bastante útil para o engenheiro calculista. Para os edifícios residenciais com cargas usuais, as aplicações já são bem amplas e conhecidas.

Porém devem-se tomar maiores cuidados com lajes submetidas a cargas excepcionais, atentando-se para o problema de ruínas localizadas.

A redução da espessura da laje direciona a uma maior atenção aos problemas de deformação, com cálculos mais apurados das flechas. Considerando-se apenas a flecha elástica instantânea, obtém-se uma estimativa muito reduzida da flecha real. Pode-se observar que a consideração da deformação lenta, da retração e da diminuição da rigidez devida à fissuração resulta em valores muito superiores ao da flecha elástica imediata.

Há casos em que os valores admissíveis para as flechas (Ver item 5.9) são ultrapassados, tornando-se necessária portanto a verificação das condições relativas à possibilidade de adoção de uma contraflecha ou de enrijecimento da laje.

Sabendo-se que a laje comporta-se elasticamente em serviço, o cálculo elástico é, novamente, fundamental para a verificação dos estados limites de utilização.

Deve-se ter em mente que o cálculo elástico é imprecindível e que a escolha dos momentos negativos e da relação entre os momentos positivos, baseados na teoria da elasticidade, não viola o comportamento das lajes em serviço, permitindo uma distribuição mais racional das armaduras.

Finalizando, recomenda-se que no dimensionamento sejam adotados os momentos negativos provenientes do cálculo elástico reduzidos, de forma que os momentos positivos finais não resultem muito pequenos. Isto é interessante, tanto do ponto de vista econômico quanto do ponto de vista prático, pois em última instância as armaduras inferiores são as responsáveis pela segurança da laje, não sendo conveniente que essas armaduras apresentem pequena capacidade resistente, tendo em conta a má qualidade de execução da armadura negativa.



**ANEXO A**  
**CÁLCULO DA ESTRUTURA 1.2**

\* \* \* ARQUIVO DE SAIDA : Estrutura 1.2 : Laje 01.txt \* \* \*

DADOS INICIAIS

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| lx   | ly   | mx   | my   | p    |
| 3.85 | 4.95 | 5.04 | 3.70 | 6.50 |
| m1   | m2   | m3   | m4   |      |
| 0.00 | 3.70 | 3.10 | 0.00 |      |

CONFIGURACAO : COMUM

|      |      |      |      |      |      |      |    |
|------|------|------|------|------|------|------|----|
| a    | b    | u    | mi   | ms   | mkx  | mky  | ni |
| 3.85 | 4.95 | 0.73 | 2.38 | 7.05 | 3.90 | 2.85 | 4  |
| a1   | a2   | b1   | b2   | b3   |      |      |    |
| 1.61 | 2.24 | 2.35 | 1.63 | 0.98 |      |      |    |

COMPRIMENTO DAS BARRAS SOBRE OS APOIOS

|     |      |
|-----|------|
| x2= | 0.64 |
| x4= | 0.63 |
| xd= | 0.64 |
| y3= | 0.90 |
| y1= | 0.88 |
| ys= | 0.90 |

\* \* \* ARQUIVO DE SAIDA : Estrutura 1.2 : Laje 02.txt \* \* \*

DADOS INICIAIS

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| lx   | ly   | mx   | my   | p    |
| 3.15 | 6.60 | 4.28 | 2.25 | 6.30 |
| m1   | m2   | m3   | m4   |      |
| 0.00 | 3.25 | 2.05 | 0.00 |      |

CONFIGURACAO : COMUM

|      |      |      |      |       |      |      |    |
|------|------|------|------|-------|------|------|----|
| a    | b    | u    | mi   | ms    | mkx  | mky  | ni |
| 3.15 | 6.60 | 0.53 | 1.23 | 19.84 | 3.70 | 1.96 | 6  |
| a1   | a2   | b1   | b2   | b3    |      |      |    |
| 1.33 | 1.82 | 1.95 | 1.36 | 3.29  |      |      |    |

COMPRIMENTO DAS BARRAS SOBRE OS APOIOS

|     |      |
|-----|------|
| x2= | 0.49 |
| x4= | 0.42 |
| xd= | 0.49 |
| y3= | 1.17 |
| y1= | 0.08 |
| ys= | 1.17 |

\* \* \* ARQUIVO DE SAIDA : Estrutura 1.2 : Laje 03.txt \* \* \*

DADOS INICIAIS

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| lx   | ly   | mx   | my   | p    |
| 2.90 | 6.60 | 3.31 | 1.33 | 5.50 |
| m1   | m2   | m3   | m4   |      |
| 3.25 | 2.20 | 1.50 | 3.10 |      |

CONFIGURACAO : COMUM

|      |      |      |       |       |      |      |    |
|------|------|------|-------|-------|------|------|----|
| a    | b    | u    | mi    | ms    | mkx  | mky  | ni |
| 2.90 | 6.60 | 0.40 | -0.76 | 19.16 | 1.08 | 0.43 | 6  |
| a1   | a2   | b1   | b2    | b3    |      |      |    |
| 1.55 | 1.35 | 1.45 | 1.96  | 3.18  |      |      |    |

COMPRIMENTO DAS BARRAS SOBRE OS APOIOS

|     |      |
|-----|------|
| x1= | 0.78 |
| x3= | 0.72 |
| xe= | 0.78 |
| x2= | 0.58 |
| x4= | 0.51 |
| xd= | 0.58 |
| y3= | 1.48 |
| y1= | 0.62 |
| ys= | 1.48 |
| y4= | 2.46 |
| y2= | 1.77 |
| yi= | 2.46 |

\* \* \* ARQUIVO DE SAIDA : Estrutura 1.2 : Laje 04.txt \* \* \*

DADOS INICIAIS

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| lx   | ly   | mx   | my   | p    |
| 3.15 | 4.40 | 1.95 | 1.03 | 5.00 |
| m1   | m2   | m3   | m4   |      |
| 1.25 | 1.25 | 2.20 | 0.00 |      |

CONFIGURACAO : COMUM

|      |      |      |      |      |      |      |    |
|------|------|------|------|------|------|------|----|
| a    | b    | u    | mi   | ms   | mkx  | mky  | ni |
| 3.15 | 4.40 | 0.53 | 0.82 | 5.70 | 2.03 | 1.07 | 5  |
| a1   | a2   | b1   | b2   | b3   |      |      |    |
| 1.57 | 1.58 | 1.98 | 1.13 | 1.29 |      |      |    |

COMPRIMENTO DAS BARRAS SOBRE OS APOIOS

|     |      |
|-----|------|
| x1= | 0.34 |
| x3= | 0.32 |
| xe= | 0.34 |
| x2= | 0.34 |
| x4= | 0.32 |
| xd= | 0.34 |
| y3= | 1.20 |
| y1= | 1.14 |
| ys= | 1.20 |

\* \* \* ARQUIVO DE SAIDA : Estrutura 1.2 : Laje 05.txt \* \* \*

DADOS INICIAIS

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| lx   | ly   | mx   | my   | p    |
| 2.90 | 3.45 | 1.42 | 1.90 | 5.00 |
| m1   | m2   | m3   | m4   |      |
| 2.20 | 0.00 | 1.50 | 1.90 |      |

CONFIGURACAO : EVENTUAL

|      |      |      |      |      |      |      |    |
|------|------|------|------|------|------|------|----|
| a    | b    | u    | mi   | ms   | mkx  | mky  | ni |
| 3.45 | 2.90 | 0.75 | 0.78 | 1.10 | 0.96 | 0.72 | 3  |
| a1   | a2   | b1   | b2   | b3   |      |      |    |
| 1.66 | 1.79 | 0.93 | 1.87 | 0.10 |      |      |    |

COMPRIMENTO DAS BARRAS SOBRE OS APOIOS

|     |      |
|-----|------|
| x1= | 0.51 |
| x3= | 0.52 |
| xe= | 0.52 |
| y3= | 0.12 |
| y1= | 0.12 |
| ys= | 0.12 |
| y4= | 0.25 |
| y2= | 0.25 |
| yi= | 0.25 |

\* \* \* ARQUIVO DE SAIDA : Estrutura 1.2 : Laje 06.txt \* \* \*

DADOS INICIAIS

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| lx   | ly   | mx   | my   | p    |
| 2.90 | 4.95 | 2.48 | 1.24 | 5.70 |
| m1   | m2   | m3   | m4   |      |
| 3.70 | 0.00 | 1.90 | 0.00 |      |

CONFIGURACAO : COMUM

|      |      |      |      |      |      |      |    |
|------|------|------|------|------|------|------|----|
| a    | b    | u    | mi   | ms   | mkx  | mky  | ni |
| 2.90 | 4.95 | 0.50 | 0.58 | 9.82 | 2.10 | 1.05 | 6  |
| a1   | a2   | b1   | b2   | b3   |      |      |    |
| 1.81 | 1.09 | 1.76 | 1.05 | 2.14 |      |      |    |

COMPRIMENTO DAS BARRAS SOBRE OS APOIOS

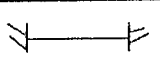
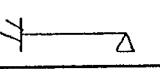
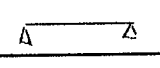
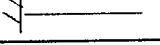
|     |      |
|-----|------|
| x1= | 0.72 |
| x3= | 0.68 |
| xe= | 0.72 |
| y3= | 1.25 |
| y1= | 0.90 |
| ys= | 1.25 |

PROGRAMA - CÁLCULO DE FLECHAS

E 1.2 LAJE 01

1- DADOS DO PROBLEMA

B(cm)= 100                      Fck(Mpa)= 18                      As= 2.5  
 H(cm)= 8                              Mlx(KNcm)= 415                      As'= 0  
 G(KN/m2)= 5                          Q(KN/m2)= 1.5                      α= 3.7  
 Lx(cm)= 385                          Ly(cm)= 495                      ψ2= 0.2  
  
 Kx= 0,0859375                      Ky= 0,0859375

| Vinculação                                                                          | Valores de K |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
|    | 0,0625       |
|    | 0,0859375    |
|   | 0,125        |
|  | 0,5          |

| Valores de                                  | ψ2  |
|---------------------------------------------|-----|
| edifícios em geral                          | 0,2 |
| multo peso, elevadas concentrações de pess. | 0,4 |
| bibliotecas, arquivo, oficinas, garagens    | 0,6 |

2- Momento de fissuração

Ftk= 0,18 KN/cm2  
 Fctm= 0,27 KN/cm2  
 Mr1= 288 KN.cm  
 Mr2= 288 KN.cm

Estádio II

3 - Módulo de Elasticidade

Eco= 3.060,29 KN/cm2  
 Ec= 2.754,26 KN/cm3

4 - Linha Neutra

xo= 4,00 cm                      αε= 7,62  
  
 x1= FALSE cm  
 x2= 1,45 cm  
  
 Xe= 2,48 cm                      (< xo)=>OK!

5 - Momento de Inércia

Io= 4.266,67 cm4  
 I2= 688,76 cm4  
  
 Ie= 1.884,57 cm4                      (< Io)=>OK!



PROGRAMA - CÁLCULO DE FLECHAS

6 - Flecha Elastica Decorrente das Ações de Longa Duração (al)

6.1 - Flecha Imediata (ai)

PI = 5,3 KN/m2

ail = 0,69 cm

6.2 - Coeficiente de Fluência

φ = 1,71

6.3 - Flecha Total

φ \* ail = 1,18 cm

7 - Flecha Elástica Decorrente das Ações de Curta Duração (ai)

Pi = 1,2 KN/m2

ai = 0,16 cm

8 - Flecha Decorrente da Retração

ρ = 5,9761%

Acsx = 0,009991357 cm

Acsy = 0,016516325 cm

acs = 0,0132538 cm

9 - Flecha Total (Valores em cm)

|                        |                   |                     |             |                         |
|------------------------|-------------------|---------------------|-------------|-------------------------|
| atot =                 | 1,35              | flecha permitida    | (a1,lim) =  | 0,77000                 |
|                        |                   |                     | (a2,lim) =  | 1,28333                 |
| atot - al - acs =      | 0,16              | contraflecha máxima | =           | 0,93632                 |
| Verificação 1          | (atot - al - acs) | <                   | (a1,lim) => | OKI                     |
| Verificação 2          | atot              | >                   | (a2,lim) => | necessário contraflecha |
| Contraflecha           | =                 | 0,50                | <           | (Ail + Acc/2) => OKI    |
| atotal c/ contraflecha | 0,85              | <                   | (a2,lim) => | OKI                     |

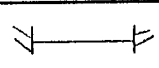

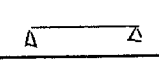
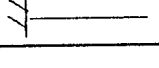
PROGRAMA - CÁLCULO DE FLECHAS

E 1.2 LAJE 02

1- DADOS DO PROBLEMA

B(cm)= 100                      Fck(Mpa)= 18                      As= 2  
 H(cm)= 8                        M<sub>kx</sub>(KNcm)= 470                      As'= 0  
 G(KN/m<sup>2</sup>)= 4,8                      Q(KN/m<sup>2</sup>)= 1,5                      α= 6,5  
 L<sub>x</sub>(cm)= 315                      L<sub>y</sub>(cm)= 660                      ψ<sub>2</sub>= 0,2

K<sub>x</sub>= 0,0859375                      K<sub>y</sub>= 0,125

| Vinculação                                                                          | Valores de K |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
|    | 0,0625       |
|    | 0,0859375    |
|   | 0,125        |
|  | 0,5          |

| Valores de                                  | ψ <sub>2</sub> |
|---------------------------------------------|----------------|
| edifícios em geral                          | 0,2            |
| muito peso, elevadas concentrações de pess. | 0,4            |
| bibliotecas, arquivo, oficinas, garagens    | 0,6            |

2- Momento de fissuração

F<sub>tk</sub>= 0,18 KN/cm<sup>2</sup>  
 F<sub>ctm</sub>= 0,27 KN/cm<sup>2</sup>  
 M<sub>r1</sub>= 288 KN.cm  
 M<sub>r2</sub>= 288 KN.cm

Estádio II

3 - Módulo de Elasticidade

E<sub>co</sub>= 3.060,29 KN/cm<sup>2</sup>  
 E<sub>c</sub>= 2.754,26 KN/cm<sup>3</sup>

4 - Linha Neutra

x<sub>o</sub>= 4,00 cm                      αε= 7,62  
 x<sub>1</sub>= FALSE cm  
 x<sub>2</sub>= 1,32 cm  
 X<sub>e</sub>= 2,11 cm (< x<sub>o</sub>)=>OK!

5 - Momento de Inércia

I<sub>o</sub>= 4.266,67 cm<sup>4</sup>  
 I<sub>2</sub>= 568,64 cm<sup>4</sup>  
 I<sub>e</sub>= 1.419,49 cm<sup>4</sup> (< I<sub>o</sub>)=>OK!

PROGRAMA - CÁLCULO DE FLECHAS

6 - Flecha Elastica Decorrente das Ações de Longa Duração (ai)

6.1 - Flecha Imediata (ai)

Pi = 5,1 KN/m<sup>2</sup>

ail = 0,70 cm

6.2 - Coeficiente de Fluência

φ = 1,60

6.3 - Flecha Total

φ \* ail = 1,11 cm

7 - Flecha Elástica Decorrente das Ações de Curta Duração (ai)

Pi = 1,2 KN/m<sup>2</sup>

ai = 0,16 cm

8 - Flecha Decorrente da Retração

ρ = 5,3452%

Acsx = 0,005982313 cm

Acsy = 0,038199983 cm

acs = 0,0220911 cm

9 - Flecha Total (Valores em cm)

|                      |                   |   |                             |                         |
|----------------------|-------------------|---|-----------------------------|-------------------------|
| atot =               | 1,30              |   | flecha permitida (a1,lim) = | 0,63000                 |
|                      |                   |   | (a2,lim) =                  | 1,05000                 |
| atot - ai - acs =    | 0,16              |   | contraflecha máxima =       | 0,9049                  |
| Verificação 1        | (atot - ai - acs) | < | (a1,lim) =>                 | OK!                     |
| Verificação 2        | atot              | > | (a2,lim) =>                 | necessário contraflecha |
| Contraflecha =       | 0,50              | < | (Ail + Acc/2) =>            | OK!                     |
| atot c/ contraflecha | 0,80              | < | (a2,lim) =>                 | OK!                     |

**ANEXO B**  
**CÁLCULO DA ESTRUTURA 2.2**

\* \* \* ARQUIVO DE SAIDA : Estrutura 2.2 : Laje 01.txt \* \* \*

DADOS INICIAIS

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| lx   | ly   | mx   | my   | p    |
| 4.95 | 7.35 | 9.06 | 3.75 | 7.12 |
| m1   | m2   | m3   | m4   |      |
| 0.00 | 8.50 | 0.00 | 0.00 |      |

CONFIGURACAO : COMUM

|      |      |      |      |       |       |      |    |
|------|------|------|------|-------|-------|------|----|
| a    | b    | u    | mi   | ms    | mkx   | mky  | ni |
| 4.95 | 7.35 | 0.41 | 3.64 | 38.72 | 10.36 | 4.24 | 5  |
| a1   | a2   | b1   | b2   | b3    |       |      |    |
| 2.11 | 2.84 | 1.90 | 1.90 | 3.55  |       |      |    |

COMPRIMENTO DAS BARRAS SOBRE OS APOIOS

|     |      |
|-----|------|
| x2= | 0.74 |
| x4= | 0.63 |
| xd= | 0.74 |

\* \* \* ARQUIVO DE SAIDA : Estrutura 2.2 : Laje 02.txt \* \* \*

DADOS INICIAIS

|      |       |      |      |      |
|------|-------|------|------|------|
| lx   | ly    | mx   | my   | p    |
| 6.05 | 6.60  | 8.32 | 6.97 | 7.13 |
| m1   | m2    | m3   | m4   |      |
| 0.00 | 10.27 | 9.60 | 0.00 |      |

CONFIGURACAO : COMUM

|      |      |      |      |       |      |      |    |
|------|------|------|------|-------|------|------|----|
| a    | b    | u    | mi   | ms    | mkx  | mky  | ni |
| 6.05 | 6.60 | 0.84 | 6.35 | 10.25 | 7.99 | 6.71 | 4  |
| a1   | a2   | b1   | b2   | b3    |      |      |    |
| 2.41 | 3.64 | 3.70 | 2.37 | 0.52  |      |      |    |

COMPRIMENTO DAS BARRAS SOBRE OS APOIOS

|     |      |
|-----|------|
| x2= | 1.23 |
| x4= | 1.23 |
| xd= | 1.23 |
| y3= | 1.44 |
| y1= | 1.44 |
| ys= | 1.44 |

\* \* \* ARQUIVO DE SAIDA : Estrutura 2.2 : Laje 03.txt \* \* \*

DADOS INICIAIS

|       |      |      |      |       |
|-------|------|------|------|-------|
| lx    | ly   | mx   | my   | p     |
| 3.40  | 6.60 | 9.21 | 3.20 | 14.76 |
| m1    | m2   | m3   | m4   |       |
| 10.27 | 0.00 | 6.90 | 8.50 |       |

CONFIGURACAO : COMUM

|      |      |      |      |       |      |      |    |
|------|------|------|------|-------|------|------|----|
| a    | b    | u    | mi   | ms    | mkx  | mky  | ni |
| 3.40 | 6.60 | 0.35 | 2.90 | 54.96 | 7.86 | 2.75 | 6  |
| a1   | a2   | b1   | b2   | b3    |      |      |    |
| 2.05 | 1.35 | 1.98 | 2.14 | 2.48  |      |      |    |

COMPRIMENTO DAS BARRAS SOBRE OS APOIOS

|     |      |
|-----|------|
| x1= | 0.70 |
| x3= | 0.66 |
| xe= | 0.70 |
| y3= | 1.48 |
| y1= | 1.22 |
| ys= | 1.48 |
| y4= | 1.74 |
| y2= | 1.49 |
| yi= | 1.74 |

PROGRAMA - CÁLCULO DE FLECHAS

E 2.2 LAJE 01

1- DADOS DO PROBLEMA

B(cm)= 100                      Fck(Mpa)= 18  
 H(cm)= 10                        M<sub>kx</sub>(KNcm)= 906  
 G(KN/m<sup>2</sup>)= 5,62                Q(KN/m<sup>2</sup>)= 1,5  
 Lx(cm)= 495                      Ly(cm)= 735

As= 4,14  
 As'= 0  
 α= 4,9  
 ψ<sub>2</sub>= 0,2

K<sub>x</sub>= 0,0859375

K<sub>y</sub>= 0,0859375

| Vinculação | Valores de K |
|------------|--------------|
|            | 0,0625       |
|            | 0,0859375    |
|            | 0,125        |
|            | 0,5          |

| Valores de                                  | ψ <sub>2</sub> |
|---------------------------------------------|----------------|
| edifícios em geral                          | 0,2            |
| muito peso, elevadas concentrações de pess. | 0,4            |
| bibliotecas, arquivo, oficinas, garagens    | 0,6            |

2- Momento de fissuração

F<sub>tk</sub>= 0,18 KN/cm<sup>2</sup>  
 F<sub>ctm</sub>= 0,27 KN/cm<sup>2</sup>  
 M<sub>r1</sub>= 450 KN.cm  
 M<sub>r2</sub>= 450 KN.cm

Estádio II

3 - Módulo de Elasticidade

E<sub>co</sub>= 3.060,29 KN/cm<sup>2</sup>  
 E<sub>c</sub>= 2.754,26 KN/cm<sup>3</sup>

4 - Linha Neutra

x<sub>0</sub>= 5,00 cm                      α<sub>s</sub>= 7,62  
 x<sub>1</sub>= FALSE cm  
 x<sub>2</sub>= 2,09 cm  
 x<sub>e</sub>= 2,59 cm                      (< x<sub>0</sub>)=>OK!

5 - Momento de Inércia

I<sub>o</sub>= 8.333,33 cm<sup>4</sup>  
 I<sub>2</sub>= 1.811,51 cm<sup>4</sup>  
 I<sub>e</sub>= 2.610,65 cm<sup>4</sup>                      (< I<sub>o</sub>)=>OK!



PROGRAMA - CÁLCULO DE FLECHAS

6 - Flecha Elastica Decorrente das Ações de Longa Duração (a1)

6.1 - Flecha Imediata (ai)

PI = 5,92 KN/m2

ail = 2,02 cm

6.2 - Coeficiente de Fluência

φ = 1,58

6.3 - Flecha Total

φ \* ail = 3,18 cm

7 - Flecha Elástica Decorrente das Ações de Curta Duração (ai)

Pi = 1,2 KN/m2

ai = 0,41 cm

8 - Flecha Decorrente da Retração

ρ = 6,7823%

Acsx = 0,014995513 cm

Acsy = 0,033061733 cm

acs = 0,0240286 cm

9 - Flecha Total (Valores em cm)

|                      |                   |   |                             |                         |
|----------------------|-------------------|---|-----------------------------|-------------------------|
| atot =               | 3,62              |   | flecha permitida (a1,lim) = | 0,99000                 |
|                      |                   |   | (a2,lim) =                  | 1,65000                 |
| atot - al - acs =    | 0,41              |   | contraflecha máxima =       | 2,60034                 |
| Verificação 1        | (atot - al - acs) | < | (a1,lim) =>                 | OK!                     |
| Verificação 2        | atot              | > | (a2,lim) =>                 | necessário contraflecha |
| Contraflecha =       | 2,00              | < | (Ail + Acc/2) =>            | OK!                     |
| atot c/ contraflecha | 1,62              | < | (a2,lim) =>                 | OK!                     |

PROGRAMA - CÁLCULO DE FLECHAS

E 2.2 LAJE 02

1- DADOS DO PROBLEMA

B(cm)= 100                      Fck(Mpa)= 18                      As= 4,1  
 H(cm)= 10                        M<sub>kx</sub>(KNcm)= 832                      As'= 0  
 G(KN/m<sup>2</sup>)= 5,63                      Q(KN/m<sup>2</sup>)= 1,5                      α= 2,91  
 L<sub>x</sub>(cm)= 605                        L<sub>y</sub>(cm)= 660                      ψ<sub>2</sub>= 0,2

K<sub>x</sub>= 0,0859375                      K<sub>y</sub>= 0,0859375

| Vinculação | Valores de K |
|------------|--------------|
|            | 0,0625       |
|            | 0,0859375    |
|            | 0,125        |
|            | 0,5          |

| Valores de                                  | ψ <sub>2</sub> |
|---------------------------------------------|----------------|
| edifícios em geral                          | 0,2            |
| muito peso, elevadas concentrações de pess. | 0,4            |
| bibliotecas, arquivo, oficinas, garagens    | 0,6            |

2- Momento de fissuração

F<sub>tk</sub>= 0,18 KN/cm<sup>2</sup>  
 Mr<sub>1</sub>= 450 KN.cm  
 Mr<sub>2</sub>= 450 KN.cm

Estádio II

3 - Módulo de Elasticidade

E<sub>co</sub>= 3.060,29 KN/cm<sup>2</sup>  
 E<sub>c</sub>= 2.754,26 KN/cm<sup>3</sup>

4 - Linha Neutra

x<sub>o</sub>= 5,00 cm                      αε= 7.62  
 x<sub>1</sub>= FALSE cm  
 x<sub>2</sub>= 2,08 cm  
 X<sub>e</sub>= 2,71 cm                      (< x<sub>o</sub>)=>OK!

5 - Momento de Inércia

I<sub>o</sub>= 8.333,33 cm<sup>4</sup>  
 I<sub>2</sub>= 1.796,92 cm<sup>4</sup>  
 I<sub>e</sub>= 2.831,13 cm<sup>4</sup>                      (< I<sub>o</sub>)=>OK!

PROGRAMA - CÁLCULO DE FLECHAS

6 - Flecha Elástica Decorrente das Ações de Longa Duração (al)

6.1 - Flecha Imediata (ai)

PI = 5,93 KN/m2

ail = 2,47 cm

6.2 - Coeficiente de Fluência

φ = 1,60

6.3 - Flecha Total

φ \* ail = 3,96 cm

7 - Flecha Elástica Decorrente das Ações de Curta Duração (ai)

Pi = 1,2 KN/m2

ai = 0,50 cm

8 - Flecha Decorrente da Retração

ρ = 6,7495%

Acsx = 0,022292226 cm

Acsy = 0,026529591 cm

acs = 0,0244109 cm

9 - Flecha Total (Valores em cm)

|                                 |      |                             |                         |
|---------------------------------|------|-----------------------------|-------------------------|
| atot =                          | 4,48 | flecha permitida (a1,lim) = | 1,21000                 |
|                                 |      | (a2,lim) =                  | 2,01667                 |
| atot - ai - acs =               | 0,50 | contraflecha máxima =       | 3,21419                 |
| Verificação 1 (atot - ai - acs) | <    | (a1,lim) =>                 | OKI                     |
| Verificação 2 atot              | >    | (a2,lim) =>                 | necessário contraflecha |
| Contraflecha =                  | 2,50 | (Ai1+Acc/2) =>              | OKI                     |
| atotal c/ contraflecha          | 1,98 | (a2,lim) =>                 | OKI                     |

PROGRAMA - CÁLCULO DE FLECHAS

E.2.2 LAJE 03

1- DADOS DO PROBLEMA

B(cm)= 100      Fck(Mpa)= 18      As= 3,57  
 H(cm)= 10      M<sub>kx</sub>(KNcm)= 921      As'= 0  
 G(KN/m<sup>2</sup>)= 13,26      Q(KN/m<sup>2</sup>)= 1,5      α= 5,17  
 Lx(cm)= 340      Ly(cm)= 660

K<sub>x</sub>= 0,0859375      K<sub>y</sub>= 0,0859375

ψ<sub>2</sub>= 0,2

| Vinculação | Valores de K |
|------------|--------------|
|            | 0,0625       |
|            | 0,0859375    |
|            | 0,125        |
|            | 0,5          |

| Valores de                                 | ψ <sub>2</sub> |
|--------------------------------------------|----------------|
| edifícios em geral                         | 0,2            |
| multo peso, elevadas concentrações de pess | 0,4            |
| bibliotecas, arquivo, oficinas, garagens   | 0,6            |

2- Momento de fissuração

F<sub>tk</sub>= 0,18 KN/cm<sup>2</sup>  
 F<sub>ctm</sub>= 0,27 KN/cm<sup>2</sup>  
 M<sub>r1</sub>= 450 KN.cm  
 M<sub>r2</sub>= 450 KN.cm

Estádio II

3 - Módulo de Elasticidade

E<sub>co</sub>= 3.060,29 KN/cm<sup>2</sup>  
 E<sub>c</sub>= 2.754,26 KN/cm<sup>3</sup>

4 - Linha Neutra

x<sub>o</sub>= 5,00 cm      αε= 7,62  
 x<sub>1</sub>= FALSE cm  
 x<sub>2</sub>= 1,96 cm  
 X<sub>e</sub>= 2,47 cm (< x<sub>o</sub>)=>OK!

5 - Momento de Inércia

I<sub>o</sub>= 8.333,33 cm<sup>4</sup>  
 I<sub>2</sub>= 1.600,03 cm<sup>4</sup>  
 I<sub>e</sub>= 2.385,42 cm<sup>4</sup> (< I<sub>o</sub>)=>OK!

PROGRAMA - CÁLCULO DE FLECHAS

6 - Flecha Elastica Decorrente das Ações de Longa Duração (ai)

6.1 - Flecha Imediata (ai)

PI = 13,56 KN/m2

ail = 1,19 cm

6.2 - Coeficiente de Fluência

$\varphi$  = 1,55

6.3 - Flecha Total

$\varphi \cdot ail = 1,84$  cm

7 - Flecha Elástica Decorrente das Ações de Curta Duração (ai)

Pi = 1,2 KN/m2

ai = 0,11 cm

8 - Flecha Decorrente da Retração

$\rho$  = 6,2981%

Acsx = 0,006569657 cm

Acsy = 0,024755559 cm

acs = 0,0156626 cm

9 - Flecha Total (Valores em cm)

|                        |                   |                     |             |                         |
|------------------------|-------------------|---------------------|-------------|-------------------------|
| atot =                 | 1,96              | flecha permitida    | (a1,lim) =  | 0,68000                 |
|                        |                   |                     | (a2,lim) =  | 1,13333                 |
| atot - ai - acs =      | 0,11              | contraflecha máxima | =           | 1,5138                  |
| Verificação 1          | (atot - ai - acs) | <                   | (a1,lim) => | OK!                     |
| Verificação 2          | atot              | >                   | (a2,lim) => | necessário contraflecha |
| Contraflecha           | =                 | 1,00                | <           | (Ai1 + Acc/2) => OK!    |
| atotal c/ contraflecha | 0,96              | <                   | (a2,lim) => | OK!                     |

## BIBLIOGRAFIA

AMARAL, O. C. Sobre as lajes contínuas. Revista da Escola de Engenharia da UFMG, Belo Horizonte, v.3 n.6: p.133-161, nov. 1964.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Building code requirements for reinforced concret (ACI 318M-83). Detroit, ACI, 1985.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 - Projeto e execução de obras de concreto armado. Rio de Janeiro, ABNT, 1978.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6120 - Cargas para o cálculo de estruturas de edificações . Rio de Janeiro, ABNT, 1980. 6p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8681 - Ações e segurança nas estruturas. Rio de Janeiro, ABNT, 1984.

AMED , P. C. Associação do cálculo elástico com a teoria das charneiras plásticas para lajes retangulares com uma borda livre. São Carlos, 1995. 169p. Dissertação (Mestrado) - EESC. USP.

DUBINSKY, A. M. Cálculo de losas por el metodo de las lineas de rotura. Montevideo, Tecni Ciencia, 1964. 237p.

GOBETTI, L. C. W. Determinação de momentos e deformações em lajes retangulares maciças sob carregamento linear. Porto Alegre, Escola de Engenharia da UFRGS, 1986 (Caderno técnico CT-68).

GONZALEZ, R. L. M. A Importância da Integração Arquiteto-Eng. Calculista para Obtenção de Qualidade e Baixo Custo na Construção Civil. São Carlos, 1994.(Seminário de Patologia das Construções I)

JOHANSEN, K. W. Bruchmoment der Kreuzweise bewehrten Platten. Mémoires, Association Internationale des Ponts et Charpents: p.277/296, 1932

JOHANSEN, K.W. Linhas de ruptura : teoria e prática. Rio de Janeiro, Ao livro Técnico, 1962. 380p.

LANGENDONCK, T. Teoria elementar das charneiras plásticas São Paulo, ABCP, 1970. v.1. 414p.

LANGENDONCK, T. Teoria elementar das charneiras plásticas São Paulo, ABCP, 1975. v.2. 520p.

LANGENDONCK, T. Charneiras plásticas em lajes de edifícios. São Paulo, ABCP, 1966. 81p.

LIMA. J. C. O. Sistema treliçado global v.1, 3ed. Campinas, Mediterrânea Pré-fabricados de concreto. (Boletim Técnico).

PINHEIRO, L. M. Análise elástica e plástica de lajes retangulares de edifícios. São Carlos, 1988. 303p (Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos/USP).

PINHEIRO, L. M. Concreto Armado: Tabelas e Abacos . São Carlos, EESC-USP, 1986. 66p

RIOS, P. M. Lajes Retangulares de Edifícios, Associação do cálculo elástico com a Teoria das Charneiras Plásticas. São Carlos, 1991. (Dissertação de Mestrado - Escola de Engenharia de São Carlos/USP).

SANTOS, L. M. Cálculo plástico de lajes contínuas de edifícios de concreto armado. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 1., São Paulo, 22-24 ago. 1989. Anais. São Paulo, NEP/EPUSP, 1989. v2, p.577-608

TABELAS DE COMPOSIÇÃO DE PREÇOS PARA ORÇAMENTO - TCPO9, nona edição, São Paulo: Pini, 1992.

WOOD, R. H. Plastic and elastic desing of slabs and plates. London, Thames & Hudson, 1961.