

**ANÁLISE DE PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS DE
CONCRETO ARMADO COM A CONSIDERAÇÃO
DA NÃO-LINEARIDADE FÍSICA**

RICHARD SARZI OLIVEIRA

Dissertação apresentada à Escola de
Engenharia de São Carlos, da Universidade de
São Paulo, como parte dos requisitos para
obtenção do Título de Mestre em Engenharia de
Estruturas

ORIENTADOR: Prof. Dr. Márcio Roberto Silva Corrêa

São Carlos

1997

Ofereço este trabalho aos meus pais,
Pedro e Noêmia,

e à minha esposa ***Adriana***

AGRADECIMENTOS

À Deus, por tudo que tem me proporcionado.

Ao paciente e competente trabalho de orientação prestado pelo prof. Dr. Márcio Roberto Silva Corrêa, e, acima de tudo, pela amizade frutificada nestes anos de trabalho conjunto.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, onde ainda nos estudos de graduação, fui incentivado a trabalhar na área de pesquisa.

Ao CNPq e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelas bolsas de estudos que tornaram possível minha dedicação à elaboração deste trabalho.

Ao prof. Dr. Sérgio P. B. Proença, um dos responsáveis por meu interesse pela área da não-linearidade física.

Ao prof. Dr. Márcio Antonio Ramalho pelo incentivo, contribuições e amizade.

À Sra. Maria Nadir Minatel pela preciosa ajuda com a bibliografia.

À Suzy, Elaine e Sérgio pelo apoio contínuo.

À todas as pessoas que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	iv
LISTA DE TABELAS	vii
LISTA DE SÍMBOLOS	viii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	xii
RESUMO	xiii
<i>ABSTRACT</i>	xiv

1. INTRODUÇÃO

1.1. Apresentação	1
1.2. Finalidades	3
1.3. Descrição sucinta dos capítulos	3

2. CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DOS MATERIAIS

2.1. Introdução	5
2.2. Critérios de escoamento	5
2.2.1. Critério de Von Mises	6
2.2.2. Critério de Mohr-Coulomb	9
2.2.3. Critério de Drucker-Prager	10
2.3. Relações constitutivas dos materiais	11
2.3.1. Relação elastoplástica perfeita	12

2.3.2. Relação elastoplástica com encruamento positivo isótropo	14
2.3.3. Relação elastoplástica com encruamento positivo cinemático	16
2.3.4. Relação elastoplástica com encruamento positivo misto	17
3. UM MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA AS VIGAS	
3.1. Introdução	18
3.2. Um breve histórico	19
3.3. Formulação básica do modelo elastoplástico	20
3.4. Formulação incremental do modelo elastoplástico	22
3.5. O procedimento incremental-iterativo	24
3.6. A implementação no Sistema ANSER	28
4. UM MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA AS LAJES	
4.1. Introdução	31
4.2. Um breve histórico	32
4.3. Formulação básica do modelo elastoplástico	33
4.4. Formulação incremental do modelo elastoplástico	37
4.5. O procedimento incremental-iterativo	44
4.6. A implementação no Sistema ANSER	47
4.6.1. Determinação da raiz da função $f^2(\gamma)$	47
4.6.2. A integração da tensão de análise	48
4.6.3. A determinação do resíduo de forças	49
4.6.4. Melhorias no Sistema	50
4.7. Caracterização de seções de concreto armado	52
5. EXEMPLOS	
5.1. Introdução	60
5.2. Exemplo 1	61

5.3. Exemplo 2	64
5.4. Exemplo 3	68
5.5. Exemplo 4	71
5.6. Exemplo 5	74
5.7. Exemplo 6	79
5.7.1. Conclusões	102
6. CONCLUSÃO	105
ANEXOS	
Anexo A - Procedimentos de integração numérica	108
Anexo B - Sobre os elementos finitos empregados	112
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	118
APÊNDICE	
Apêndice 1 - Subrotina para a condensação estática	
Apêndice 2 - Subrotina para a determinação da raiz de $f(\gamma) = 0$	
Apêndice 3 - Programa para a determinação do diagrama momento-curvatura de uma seção transversal	

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 - Superfícies típicas de escoamento e de ruptura para o concreto	6
FIGURA 2.2 - Interpretação geométrica do critério de Von Mises	8
FIGURA 2.3 - Representação do Círculo de Mohr	9
FIGURA 2.4 - Representação dos critérios de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager no espaço das tensões principais	11
FIGURA 2.5 - Relação elastoplástica perfeita - ilustração para o caso uniaxial	12
FIGURA 2.6 - Relação elastoplástica com encruamento positivo isótropo - ilustração para o caso uniaxial	14
FIGURA 2.7 - Relação elastoplástica com encruamento positivo cinemático - ilustração para o caso uniaxial	16
FIGURA 3.1 - Procedimento incremental-iterativo para o modelo elastoplástico	24
FIGURA 3.2 - Diagrama momento-curvatura trilinear idealizado para seções de concreto armado	28
FIGURA 4.1 - Representação gráfica do vetor fluxo plástico $r(\sigma, q)$ sobre o domínio elástico ($\text{int}E_\sigma$)	37
FIGURA 4.2 - Procedimento incremental-iterativo para o modelo elastoplástico triaxial	44
FIGURA 4.3 - Comportamento da Curva $f^2(\gamma) \times \gamma$	48
FIGURA 4.4 - Pontos-amostra e acoplamento para a formação do quadrilátero	50
FIGURA 4.5 - Diagrama momento-curvatura trilinear idealizado para seções de concreto armado	53
FIGURA 4.6 - Fissuração para o Estádio Ia	54
FIGURA 4.7 - Escoamento da seção	55
FIGURA 4.8 - Situação última da seção - 1ª e 2ª hipóteses	57
FIGURA 4.9 - Situação última da seção - 3ª hipótese	57
FIGURA 5.1 - Viga metálica biapoiada	61
FIGURA 5.2 - Discretização / numeração dos nós	61
FIGURA 5.3 - Diagrama momento-curvatura convencional para a viga	62
FIGURA 5.4 - Diagrama força-deslocamento do nó 6	63
FIGURA 5.5 - Viga metálica biengastada	64
FIGURA 5.6 - Discretização / numeração dos nós	64
FIGURA 5.7 - Diagrama momento-curvatura convencional para a viga	65
FIGURA 5.8 - Diagrama força-deslocamento do nó 6	66

FIGURA 5.9 - Viga em concreto armado biapoiada	69
FIGURA 5.10 - Discretização / numeração dos nós	69
FIGURA 5.11 - Diagrama momento-curvatura convencional para a viga	70
FIGURA 5.12 - Diagrama força-deslocamento do nó 6	71
FIGURA 5.13 - Viga em concreto armado biapoiada	72
FIGURA 5.14 - Discretização / numeração dos nós	72
FIGURA 5.15 - Diagrama momento-curvatura convencional para a viga	73
FIGURA 5.16 - Diagrama força-deslocamento do nó 7	74
FIGURA 5.17 - Destaque de um quarto da placa apoiada	75
FIGURA 5.18 - Discretização do quarto de placa apoiada	76
FIGURA 5.19 - Diagrama momento-curvatura convencional para a placa	76
FIGURA 5.20 - Diagrama força-deslocamento transversal do nó 3	77
FIGURA 5.21 - Momento fletor M_x (x100)	78
FIGURA 5.22 - Momento fletor M_y (x100)	78
FIGURA 5.23 - Momento volvente M_{xy} (x100)	78
FIGURA 5.24 - Deslocamento transversal w (x100)	79
FIGURA 5.25 - Pavimento tipo - laje plana (medidas em 'cm')	80
FIGURA 5.26 - Discretização de meio pavimento	81
FIGURA 5.27 - Armadura construtiva para bordos livres	82
FIGURA 5.28 - Deslocamento transversal w (cm)	83
FIGURA 5.29 - Momento fletor M_x (kN.m/m)	83
FIGURA 5.30 - Momento fletor M_y (kN.m/m)	84
FIGURA 5.31 - Momento volvente M_{xy} (kN.m/m)	84
FIGURA 5.32 - Grupos de materiais adotados	86
FIGURA 5.33-a - Diagrama momento-curvatura do grupo I	87
FIGURA 5.33-b - Diagrama momento-curvatura do grupo II	87
FIGURA 5.33-c - Diagrama momento-curvatura do grupo III	87
FIGURA 5.34-a - Diagrama momento-curvatura das vigas V03 e V05	88
FIGURA 5.34-b - Diagrama momento-curvatura das vigas V01, V02 e V07	89
FIGURA 5.35 - Deslocamento transversal w (cm)	90
FIGURA 5.36 - Momento fletor M_x (kN.m/m)	90
FIGURA 5.37 - Momento fletor M_y (kN.m/m)	91
FIGURA 5.38 - Momento volvente M_{xy} (kN.m/m)	91
FIGURA 5.39 - Armaduras positivas - regime elastoplástico	93
FIGURA 5.40 - Armaduras negativas - regime elastoplástico	94
FIGURA 5.41 - Armaduras positivas - regime elástico linear	96

FIGURA 5.42 - Armaduras negativas - regime elástico linear	96
FIGURA 5.43 - Comparação de consumos de aço	98
FIGURA 5.44 - Grupos de materiais adotados para a verificação	99
FIGURA 5.45 - Deslocamento transversal w (cm)	100
FIGURA 5.46 - Momento fletor M_x (kN.m/m)	100
FIGURA 5.47 - Momento fletor M_y (kN.m/m)	101
FIGURA 5.48 - Momento fletor M_{xy} (kN.m/m)	101
FIGURA A.1.1 - Representação gráfica dos procedimentos de integração para o critério de Von Mises	109
FIGURA A.2.1 - Elemento de barra de grelha - coordenadas locais	112
FIGURA A.2.2 - Elemento de placa T3AF - coordenadas locais	116

LISTA DE TABELAS

TABELA 5.1 - Deslocamentos notáveis analíticos e numéricos	68
TABELA 5.2 - Resultados significativos para a placa	77
TABELA 5.3 - Comparação dos tempos de processamento	79
TABELA 5.4a - Reações de apoio - valores de cálculo	85
TABELA 5.4b - Esforços para as vigas - valores de cálculo	85
TABELA 5.5 - Armaduras longitudinais de referência para as lajes	86
TABELA 5.6 - Armaduras longitudinais de referência para as vigas	88
TABELA 5.7a - Reações de apoio - valores de cálculo	92
TABELA 5.7b - Esforços para as vigas - valores de cálculo	92
TABELA 5.8 - Armaduras das lajes - regime elastoplástico	94
TABELA 5.9 - Armaduras longitudinais para as vigas - regime elastoplástico	95
TABELA 5.10 - Armaduras das lajes - regime elástico linear	97
TABELA 5.11 - Armaduras longitudinais para as vigas - regime elástico linear	97
TABELA 5.12 - Comparação de consumos de aço	98
TABELA 5.13 - Esforços para as vigas - valores de cálculo	102

LISTA DE SÍMBOLOS

letras romanas maiúsculas

A_s	- área da armadura longitudinal de tração
A'_s	- área da armadura longitudinal de compressão
B	- matriz que relaciona deformações aos deslocamentos nodais
D	- matriz que reúne os módulos plásticos de encruamento
C	- matriz (constante) dos módulos constitutivos de rigidez para o EPT
E	- módulo de elasticidade longitudinal
E_c^*	- módulo secante de elasticidade longitudinal do concreto afetado do coeficiente 2/3
E_s	- módulo de elasticidade longitudinal do aço
E_T	- módulo de rigidez tangente à curva tensão-deformação pós escoamento
E_σ	- conjunto convexo e fechado que reúne as tensões admissíveis para o material
F	- vetor de forças nodais
G_T	- módulo de elasticidade transversal
H	- módulo de encruamento cinemático (constante)
I	- momento de inércia à flexão da seção
I_1	- 1º invariante do tensor das tensões
J_t	- momento de inércia à torção da seção
J_2	- 2º invariante do tensor das tensões desviadoras
K	- tensão de escoamento por cisalhamento puro
\bar{K}	- tensão octaédrica de cisalhamento no escoamento
K^λ	- coeficiente do critério de Drucker-Prager
K^G	- matriz de rigidez da estrutura
L_e	- comprimento do elemento finito de barra
Lin	- espaço dos tensores de 2ª ordem
M	- momento fletor / matriz momento-deslocamento
M_0	- vetor dos momentos iniciais
M^{ef}	- momento efetivo proporcionado pelo critério de Von Mises
M_r	- momento de fissuração da seção
M_u	- momento relativo à situação última da seção
M_x, M_y	- momentos fletores de placa

M_{xy}	- momento volvente de placa
M_y	- momento de escoamento da seção
P	- matriz que relaciona o tensor das tensões σ , com o respectivo desviador incompleto
S	- tensor das tensões desviadoras
S^*	- tensor das tensões desviadoras incompleto
Z_p	- módulo plástico da seção transversal

letras romanas minúsculas

a	- coeficiente do critério de Drucker-Prager
b	- largura da seção transversal
c	- coesão do material
d	- altura útil da seção
d'	- cobrimento da armadura longitudinal de compressão
f	- função que exprime o critério de plastificação
f_{ck}	- resistência característica do concreto à compressão
f_{cm}	- resistência média do concreto à compressão
f_{ctk}	- resistência característica do concreto à tração
f_{ctm}	- resistência média do concreto à tração na flexão
f_{yk}	- resistência característica do aço à tração
h	- vetor que define o tipo de encruamento. representa também a altura da viga/espessura da laje
k	- módulo plástico do material (constante)
k^e	- matriz de rigidez de um elemento finito
ne	- número de elementos finitos
q	- variável interna relacionada ao encruamento cinemático ou vetor que reúne os parâmetros e as variáveis internas relacionadas com o encruamento
r	- vetor que determina a direção do fluxo plástico
t_u	- tolerância em deslocamentos preestabelecida
t_F	- tolerância em forças preestabelecida
u	- deslocamentos nodais
w	- campo de deslocamentos transversais no domínio do elemento
x	- distância da linha neutra ao ponto de maior encurtamento na seção transversal de uma peça fletida

letras gregas maiúsculas

Δ	- intervalo, variação
∇^s	- gradiente simétrico de um tensor
$\Xi(\gamma)$	- matriz elástica tangente modificada

letras gregas minúsculas

α	- variável interna relacionada ao encruamento isótropo
$\bar{\alpha}$	- deformação plástica efetiva
α_1	- ponderador da ampliação do domínio elástico
α_e	- razão entre E_s e E_c^*
β	- arctg (E)
β^*	- arctg (E_T)
$\sqrt{\beta_b}$	- fator empregado no CEB90 para a redução do momento de fissuração
γ	- deformação plástica acumulada no caso de encruamento por deformação
γ_f	- coeficiente de segurança
ε	- deformação total
ε^e	- parcela de deformação elástica
ε_c	- deformação específica do concreto à compressão
ε^p	- parcela de deformação plástica
ε_{sc}	- deformação específica do aço à compressão
ε_{st}	- deformação específica do aço à tração
θ_x	- rotação em torno do eixo X
θ_y	- rotação em torno do eixo Y
ν	- coeficiente de Poisson
σ	- tensor das tensões / tensão normal (caso uniaxial)
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	- tensões principais para o estado tridimensional de tensões
σ_c	- tensão normal de compressão no concreto
σ^{ef}	- tensão efetiva proporcionada pelo critério de escoamento de Von Mises
σ_{oct}	- tensão normal octaédrica

σ_{st}	- tensão normal de tração na armadura
σ_t	- tensão normal de tração
σ_y	- tensão de escoamento
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	- tensões normais do estado tridimensional de tensões
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	- tensões de cisalhamento do estado tridimensional de tensões
τ_{oct}	- tensão octaédrica de cisalhamento
ϕ	- ângulo de atrito interno do material
ψ	- vetor resíduo de forças

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACI	- American Concrete Institute
ASCE	- American Society of Civil Engineers
CEB	- Comité Euro-International du Béton
EESC	- Escola de Engenharia de São Carlos
NB	- Norma Brasileira
NBR	- Norma Brasileira Regulamentada
USP	- Universidade de São Paulo

RESUMO

OLIVEIRA, R.S. *Análise de pavimentos de edifícios de concreto armado com a consideração da não-linearidade física*. São Carlos, 1997. 123p.

Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho trata da evolução natural do modelo de cálculo em regime elástico linear, largamente empregado no dimensionamento de pavimentos de concreto armado, para um modelo com maior capacidade de representação.

A consideração da não-linearidade física do material concreto armado é incorporada a um sistema computacional em elementos finitos segundo modelos não-estratificados, através da generalização das formulações para o campo dos esforços. O elemento de barra é abordado em campo uniaxial, verificando-se o escoamento produzido pela flexão. Para o elemento de placa, estabelece-se o critério de escoamento de Von Mises com leis associativas particularizado ao estado plano de tensões (EPT). Essas tensões são integradas ao longo da espessura do elemento, permitindo escrever o critério em função do terno de valores de momentos atuantes. Por fim, os modelos de barra e placa são integrados ao sistema computacional, resultando um sistema de análise não-linear de pavimentos de concreto armado. A caracterização do comportamento físico da seção transversal é feita segundo um diagrama momento-curvatura trilinear.

A aplicação do modelo proposto a elementos estruturais isolados, e a um pavimento convencional, confirma a melhoria do sistema computacional, e os tempos de processamento requeridos evidenciam a viabilidade do emprego do modelo não-linear físico em projetos usuais de pavimentos de concreto armado.

Palavras-chave: *concreto armado, não-linearidade física, plasticidade, pavimento, elementos finitos.*

ABSTRACT

OLIVEIRA, R.S. *Analysis of reinforced concrete building slabs with physical nonlinearity.* São Carlos, 1997. 123p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This work deals with the natural evolution of the design model based on linear elasticity, widely employed on reinforced concrete slabs designs, to a improved design model.

The consideration of physical nonlinearity of the reinforced concrete is introduced into a finite element computational system by nonlayered models with generalization of the formulation to the bending moment field. The beam element is treated in a uniaxial field, with bending moment yielding. In the plate element it is established the Von Mises yield criterion with associative laws particularized to the Plane Stress. These stresses are integrated along the element depth, enabling to write the criterion with plate bending moments. At last, the beam and the plate models are incorporated into a computational system, resulting in a reinforced concrete slabs analysis system. The characterization of the cross section physical behavior is made by a trilinear bending moment-curvature diagram.

The application of the proposed model to isolated structural elements and to a conventional slab confirms the improvement of the finite element system and the required computational analysis times show the feasibility of the nonlinear model application into usual reinforced concrete slab design.

Keywords: reinforced concrete, physical nonlinearity, plasticity, slab, finite elements.

1. INTRODUÇÃO

1.1. Apresentação

A utilização de um modelo elástico linear para a representação do comportamento do concreto armado, vem desempenhando fundamental importância nos cenários técnico e científico desde o surgimento desse material na segunda metade do século passado, e atualmente mantém-se ainda como a hipótese de cálculo mais empregada no projeto de estruturas. O largo emprego desta aproximação do comportamento não só do concreto como dos demais materiais empregados em estruturas (como a madeira e o aço), deve-se ao fato da relativa simplicidade do seu equacionamento quando comparado com modelos de cálculo mais refinados, como o faz a análise de estruturas considerando-se a não-linearidade física do material que a constitui. As formulações deste comportamento não-linear, no entanto, conduzem a problemas matemáticos mais complexos, com soluções praticamente inviáveis sem o auxílio de computadores com boa capacidade de trabalho, motivo pelo qual não só o estudo do comportamento não-linear das estruturas, como métodos de cálculo, dentre eles, o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC), dentre outros, tiveram o seu desenvolvimento adiado por vários anos.

Com o crescente aperfeiçoamento dos equipamentos de informática, tem ocorrido nos últimos anos uma grande evolução nos processos de cálculo, buscando-se sempre representações mais realistas para o comportamento das estruturas e, sobretudo, a evolução de um modelo

razoavelmente limitado como o elástico linear, para outros com maior capacidade de representação.

Em 1947 surge a primeira tentativa de utilização do computador no cálculo estrutural, e a partir da década de 1960 são elaborados os primeiros modelos que tratam da não-linearidade física dos materiais, através do emprego do MEF.

A análise não-linear física tem evoluído desde então tanto no aspecto das formulações teóricas quanto na melhoria da qualidade das implementações computacionais. Atualmente, buscam-se continuamente proporcionar não só melhorias nos modelos não-lineares, como otimizações nas rotinas de cálculo, de modo a agilizar-se o processamento de estruturas usuais de concreto. Desse modo, essas rotinas podem se tornar viáveis para o emprego em escritórios de projeto de estruturas, sob a forma de programas para microcomputadores.

Neste contexto, insere-se oportunamente o presente trabalho, que busca o estudo e a implementação do comportamento não-linear físico de pavimentos de edifícios de concreto armado, mediante a utilização de um modelo elastoplástico para o concreto armado.

Todos os algoritmos desenvolvidos foram implementados no Sistema de Análise de Estruturas Reticuladas (ANSER), em funcionamento no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP. Assim como no sistema ANSER, a linguagem de programação utilizada foi o FORTRAN com a utilização do compilador Power Station da Microsoft. Os processamentos dos exemplos deram-se em um microcomputador equipado com processador Pentium de 100 Mhz, 8Mb de memória RAM e disco rígido com tempo de acesso de 9.14 ms (milissegundos), capacidade de transferência de 3.06 Mb/segundo e capacidade de armazenamento de 1.3 Gb.

1.2. Finalidades

A finalidade principal deste trabalho consiste em criar uma ferramenta de auxílio para o projeto consistente de pavimentos de concreto armado. O 'software' resultante dos estudos aqui desenvolvidos, permite ao projetista

fazer hipóteses de dimensionamento, e manipular as rigidezes dos elementos (lajes e vigas) de modo a obter uma distribuição de esforços mais favorável ao conjunto de formas do pavimento.

A verificação do estado limite de deformações excessivas constitui em um objetivo não menos importante. Através da análise não-linear física, ou elastoplástica, consegue-se determinar com maior exatidão os deslocamentos apresentados pela estrutura e bastante influenciados por efeitos da fissuração e escoamento das armaduras de flexão. Outra finalidade que se coloca, é a de verificação de pavimentos atuando em serviço, uma vez que um programa com mais recursos para a representação da estrutura do pavimento permite chegar a conclusões mais próximas do seu comportamento real.

Todas as finalidades a que se destinam as implementações abordadas neste trabalho são perfeitamente viáveis para emprego em escritórios de projeto, pois, os tempos de processamento requeridos mostram-se bastante reduzidos, em especial quando comparados aos tempos absorvidos por outras atividades envolvidas no projeto.

1.3. Descrição sucinta dos capítulos

Os capítulos foram organizados de modo a facilitar a compreensão dos fenômenos envolvidos, e a evolução do desenvolvimento das formulações utilizadas.

O capítulo 2 contém uma pequena introdução dos conceitos básicos envolvidos na formulação de modelos elastoplásticos. Definem-se algumas regras de encruamento e critérios de escoamento, buscando-se abordar com maior ênfase a regra de encruamento isótropo e o critério de escoamento de Von Mises.

Prosseguindo-se no desenvolvimento de um modelo elastoplástico uniaxial para o elemento de barra a ser empregado às vigas de concreto armado, colocam-se, no capítulo 3, formulações, algoritmos, e um procedimento incremental-iterativo para a aplicação dos algoritmos

propostos à resolução de problemas elastoplásticos uniaxiais. São também abordados alguns aspectos das implementações das rotinas de barra no sistema ANSER.

No capítulo 4, promove-se uma generalização dos algoritmos descritos em campo uniaxial para o campo triaxial. Objetivando-se o emprego do modelo na resolução de placas sujeitas ao Estado Plano de Tensões (EPT), promove-se nova particularização das formulações, adaptando-as de modo que o EPT não seja violado no procedimento incremental-iterativo. Logo após, são abordados alguns aspectos relativos à implementação das rotinas relativas ao elemento de placa triangular T3AF e do quadrilátero resultante da condensação de quatro elementos triangulares no sistema ANSER, além de aspectos relativos à determinação dos diagramas momento-curvatura representativos para seções de concreto armado. Por fim, a última parte desse capítulo é dedicada às rotinas para a elaboração dos diagramas momento-curvatura convencionais para seções de concreto armado (vigas e lajes).

O capítulo 5 apresenta exemplos utilizados para a aferição dos modelos propostos para as vigas e lajes. Em seguida, dimensiona-se um pavimento em concreto armado, apresentando-se uma proposta de metodologia para esse tipo de análise e dimensionamento em regime elastoplástico.

Finalizando-se o trabalho, o capítulo 6 apresenta as principais conclusões obtidas dos estudos desenvolvidos e algumas sugestões para trabalhos futuros nesta área.

2. CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DOS MATERIAIS

2.1. Introdução

De acordo com PROENÇA, S.P.B. (1988 e 1989), define-se que: “O regime de comportamento plástico de um material fica evidenciado pelo aparecimento de deformações irreversíveis, ou permanentes, quando se anula a sollicitação a que o corpo esteja sujeito. Por outro lado, as deformações plásticas aparecem simultaneamente com as tensões que excedem um determinado limite, denominado limite de escoamento.”

Para que a definição colocada no parágrafo anterior possa ser melhor compreendida, necessitam-se a caracterização e a compreensão dos fenômenos envolvidos no comportamento plástico dos materiais. Nos itens que se seguem, procura-se definir, de modo sucinto, alguns critérios de escoamento e regras de endurecimento utilizadas para a composição das relações constitutivas elastoplásticas. Essas relações permitem reproduzir analítica e numericamente o comportamento não-linear de diversos materiais.

2.2. Critérios de escoamento

Os critérios de escoamento são imprescindíveis em um modelo matemático para análise elastoplástica de estruturas, pois definem a partir de que nível de tensões o material passa a apresentar características de

plastificação. Os critérios de escoamento são expressos por relações matemáticas entre as componentes de tensão atuantes em um ponto do corpo analisado. Apenas a título de ilustração, coloca-se na FIGURA 2.1 as superfícies de escoamento e de ruptura do concreto no espaço das tensões principais, sugeridas por experimentações.

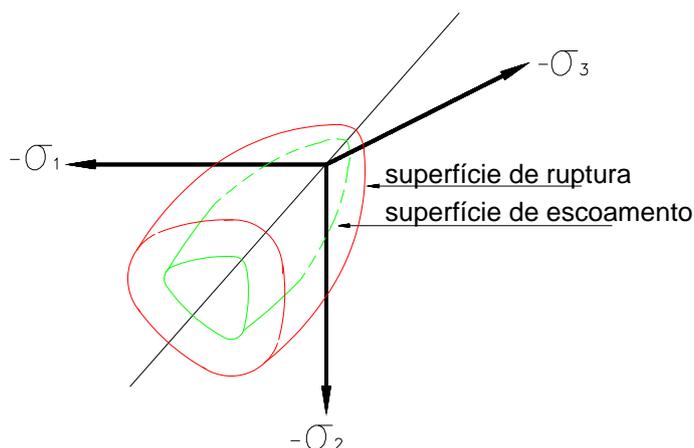


FIGURA 2.1 - Superfícies típicas de escoamento e de ruptura para o concreto

2.2.1. Critério de Von Mises

Suponha-se um determinado ponto pertencente a um corpo e sujeito a um estado tridimensional de tensões ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$). Segundo o critério de Von Mises (1913), o material inicia a plastificação no instante em que a tensão octaédrica de cisalhamento (τ_{oct}) no ponto atinge um valor \bar{K} correspondente à tensão octaédrica de cisalhamento no escoamento. Desse modo, o comportamento em regime elástico do material ocorreria até o limite dado pela expressão:

$$\tau_{oct} \leq \bar{K} \quad (2.1)$$

As tensões octaédricas ocorrem segundo os planos desviadores, cujas normais são igualmente inclinadas com relação aos eixos das direções principais. De acordo com a definição de plano desviador, podem-se obter

as expressões para as tensões normal (σ_{oct}), e de cisalhamento (τ_{oct}) octaédricas, respectivamente:

$$\sigma_{\text{oct}} = \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (2.2)$$

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \quad (2.3)$$

onde : $J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]$ - é o 2º invariante das tensões desviadoras;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - tensões principais do estado tridimensional de tensões.

Reescrevendo-se o critério de Von Mises, tem-se:

$$\sqrt{\frac{2}{3} J_2} \leq \bar{K} \quad (2.4)$$

Para um ensaio de cisalhamento puro, o valor \bar{K} pode ser relacionado à tensão de escoamento por cisalhamento puro K:

$$\bar{K} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot K \quad (2.5)$$

e, das relações 2.4 e 2.5, o critério passa a ser escrito:

$$\sqrt{J_2} \leq K \quad (2.6)$$

Existe ainda a possibilidade de exprimir o critério em termos da tensão de tração σ_t . Para um ensaio de tração uniaxial

($\sigma_1 = \sigma_t$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), tem-se $J_2 = \frac{\sigma_t^2}{3}$, o que resulta:

$$\sqrt{\frac{2}{3} J_2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_t \text{ ou, de modo a satisfazer ao critério:}$$

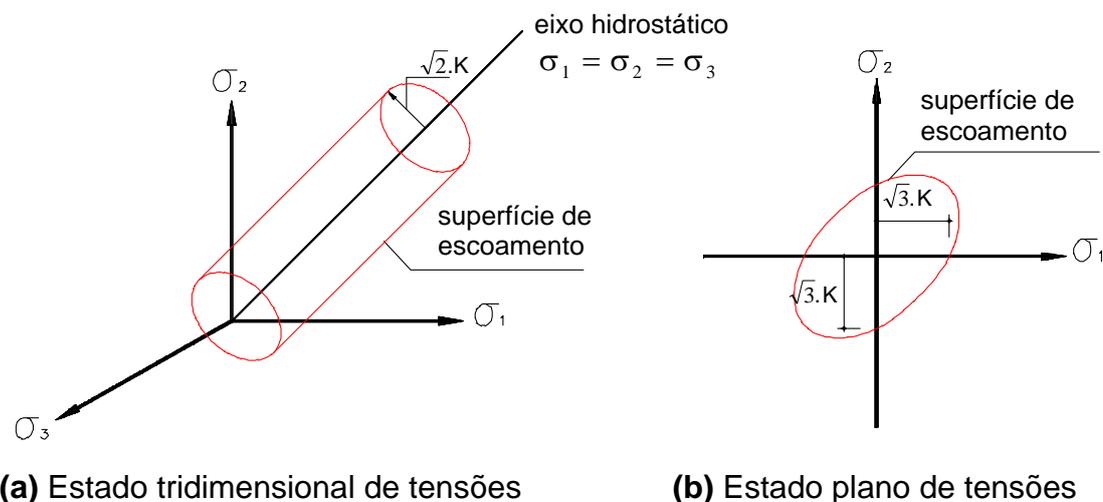
$$\sqrt{3 \cdot J_2} \leq \sigma_y \quad (2.7)$$

onde: σ_y - tensão de escoamento do material por tração.

De acordo com OWEN,D.R.J.;HINTON,E.(1980), pode-se definir uma tensão efetiva (σ^{ef}) de acordo com a expressão 2.8.

$$\sigma^{ef} = \sqrt{3.J_2} \leq \sigma_y \quad (2.8)$$

Coloca-se a seguir, na FIGURA 2.2, uma interpretação geométrica do critério de Von Mises para o estado tridimensional (ETT) e plano de tensões (EPT) no espaço das tensões principais.



(a) Estado tridimensional de tensões

(b) Estado plano de tensões

FIGURA 2.2 - Interpretação geométrica do critério de Von Mises

Uma conclusão imediata da interpretação geométrica deste critério, é a de que estados de tensão hidrostáticos ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) não são capazes de provocar o escoamento do material. Por isso, o critério de Von Mises mostra-se mais representativo do comportamento de materiais metálicos.

A aplicação do critério de Von Mises ao material concreto, no entanto, constitui aproximação que tem revelado bons resultados, como nos trabalhos realizados por LIN,C.S.;SCORDELIS,A.C. (1975) e HU,H.T.;SCHNOBRICH, W.C. (1991), e em pesquisas desenvolvidas por CORRÊA,M.R.S. (1991). A aplicação deste critério em detrimento de outros mais apropriados ao comportamento do concreto, reside na relativa simplicidade da sua formulação, pois as componentes de tensão são independentes e podem ser agrupadas de modo a formar uma tensão efetiva (expressa por J_2). Em modelos aplicados a elementos finitos não-estratificados (elementos cuja seção transversal não é dividida em

camadas), o critério pode também ser facilmente escrito em função do terno de momentos de placa obtidos pela integração das tensões ao longo da espessura do elemento.

Existem, no entanto, outros critérios que melhor representam o comportamento do concreto, como: o de Mohr-Coulomb, o de Drucker-Prager, e o de Kupfer, dentre outros. Coloca-se, a seguir, uma breve discussão sobre alguns desses critérios.

2.2.2. Critério de Mohr-Coulomb

Em 1773, Coulomb definiu um critério de ruptura por cisalhamento que seria aplicado a materiais como o solo, a rocha, e o concreto. Segundo Coulomb, a tensão de cisalhamento limite para a ruptura do material (τ) é dependente da tensão normal ao seu plano de ação (σ), do ângulo de atrito interno do material (ϕ), e da sua coesão (c).

$$|\tau| = c - \sigma \cdot \text{tg}\phi \quad (2.9)$$

Já em 1882, Mohr demonstrou as relações propostas por Coulomb através do círculo da FIGURA 2.3, denominado Círculo de Mohr. Para a construção deste círculo, supõe-se a ordenação $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

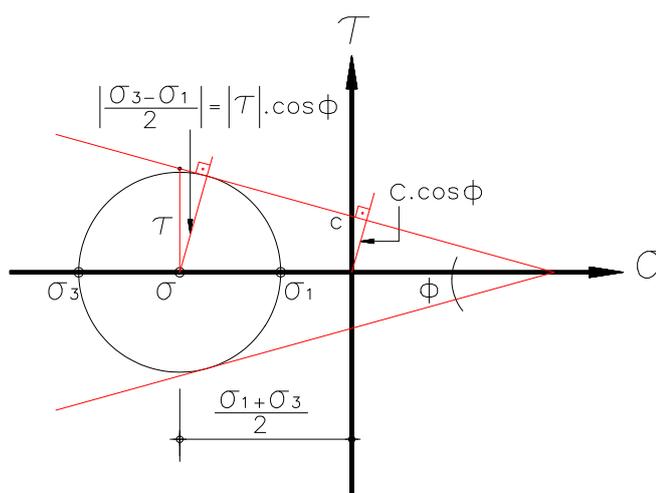


FIGURA 2.3 - Representação do Círculo de Mohr

Analisando-se a FIGURA 2.3, pode-se escrever o critério em função das tensões principais σ_1 e σ_3 , pois o círculo é independente de σ_2 .

$$\frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2 \cdot \cos \phi} + \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} \cdot \operatorname{tg} \phi = c \quad (2.10)$$

que pode ser rearranjada na forma:

$$\sigma_1(1 + \operatorname{sen} \phi) - \sigma_3(1 - \operatorname{sen} \phi) = 2 \cdot c \cdot \cos \phi \quad (2.11)$$

A representação do critério no espaço das tensões principais, corresponde a uma superfície piramidal, cuja seção transversal é um hexágono irregular, como representado na FIGURA 2.4. Esse critério apresenta o inconveniente de não haver limites para valores da pressão hidrostática (de compressão) suportáveis pelo material.

2.2.3. Critério de Drucker-Prager

O critério de Drucker-Prager foi proposto em 1952 como uma aproximação do critério de Mohr-Coulomb, através de modificação do critério de Von Mises. A influência da componente do estado hidrostático de tensão no critério de Von Mises foi introduzida pela inclusão do invariante I_1 , resultando:

$$a \cdot I_1 + \sqrt{J_2} = K' \quad (2.12)$$

onde: $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ (1º invariante do tensor das tensões);

$$a = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 \pm \operatorname{sen} \phi)};$$

$$K' = \frac{6 \cdot c \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 \pm \operatorname{sen} \phi)}. \quad (2.13)$$

Nas expressões 2.13, tomando-se o sinal positivo(+) ou o sinal negativo(-) no denominador, o Círculo de Drucker-Prager passa, respectivamente, pelos três vértices do hexágono de Mohr-Coulomb mais próximos ou mais afastados do eixo hidrostático. Na FIGURA 2.4, ilustra-se

o caso em que o círculo passa pelos vértices mais afastados do eixo hidrostático.

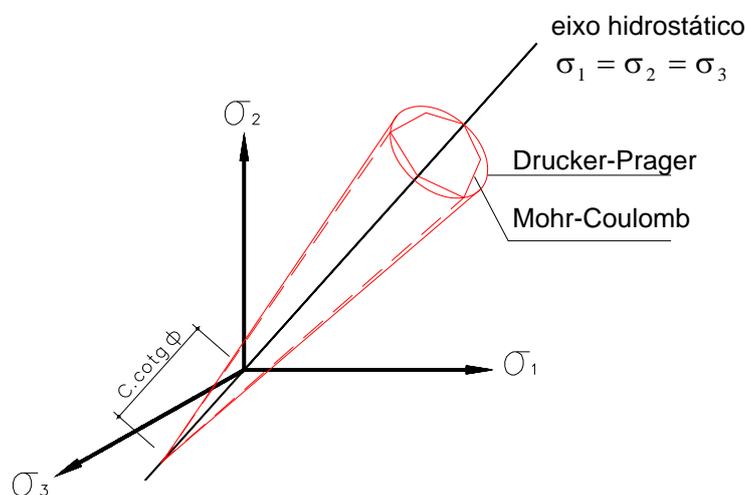


FIGURA 2.4 - Representação dos critérios de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager no espaço das tensões principais

2.3. Relações constitutivas dos materiais

Com o objetivo de buscar uma representação do comportamento elastoplástico de materiais, introduziram-se as relações constitutivas que podem ser divididas em duas fases: a primeira, correspondente à fase elástico linear do comportamento até que se atinja o limite de escoamento, e a segunda, relativa ao comportamento plástico a partir de então. Diferentemente do que ocorre com o modelo elástico linear, onde não caracteriza-se a plastificação, a relação constitutiva elastoplástica é dependente do nível de deformação plástica acumulada no carregamento, ou seja, os níveis de tensão e deformação são relacionados em função do nível de deformação plástica atingido. Considera-se, também, simplificada, que toda descarga dá-se proporcionalmente ao módulo de elasticidade longitudinal E (aproximação de descarga elástica).

De modo a facilitar a compreensão dos fenômenos de encruamento, as relações constitutivas ilustradas a seguir referem-se ao comportamento

elastoplástico uniaxial linearizado. Coloca-se ainda que as linearizações propostas para o caso uniaxial serão aplicadas também aos estudos multiaxiais no espaço tridimensional das tensões, mediante a utilização dos conceitos de tensão e deformação efetivas.

2.3.1. Relação elastoplástica perfeita

A relação constitutiva elastoplástica perfeita caracteriza-se por apresentar um comportamento elástico linear até que se atinja a tensão de escoamento do material. A partir desse instante o material perde a capacidade resistente, e passa a deformar-se indefinidamente, mesmo sem acréscimos de tensões, como mostra a FIGURA 2.5.

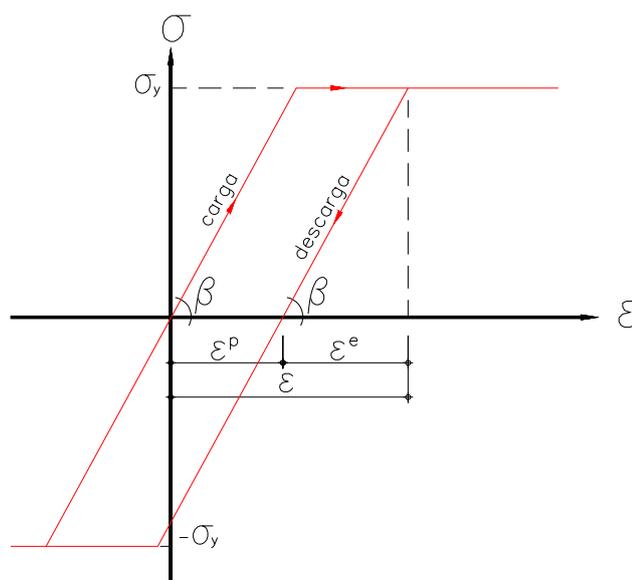


FIGURA 2.5 - Relação elastoplástica perfeita - ilustração para o caso uniaxial

Com base no diagrama da FIGURA 2.5, admite-se que as deformações possam ser decompostas aditivamente, como segue:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (2.14)$$

deste modo, pela teoria da elasticidade, pode-se escrever:

$$\sigma = E \cdot \epsilon^e = E(\epsilon - \epsilon^p) \quad (2.15)$$

onde: ε - deformação total;

ε^p - parcela de deformação plástica acumulada;

ε^e - parcela de deformação elástica acumulada;

σ - tensão que está sendo analisada;

σ_y - tensão de escoamento do material;

$E = \text{tg}\beta$ - módulo de elasticidade longitudinal do material.

As grandezas ε, σ , e ε^p devem ser expressas como funções do tempo em um intervalo $[0, T] \subset \mathbb{R}$, pois deste modo, se tornarão capazes de representar a evolução das plastificações segundo um modelo elastoplástico adotado. Assim, suas variações podem ser relacionadas por:

$$\dot{\sigma} = E \cdot \dot{\varepsilon}^e = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (2.16)$$

$$\text{onde: } \dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}; \quad \dot{\varepsilon}^e = \frac{d\varepsilon^e}{dt}; \quad \dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}; \quad \dot{\varepsilon}^p = \frac{d\varepsilon^p}{dt} \quad (2.17)$$

\mathbb{R} - conjunto dos números reais.

A condição de plastificação é representada por uma função f , onde os estados de tensão possíveis satisfazem à inequação:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (2.18)$$

Define-se, também, um escalar positivo $\dot{\gamma}$ que corresponde ao valor absoluto da velocidade de deformação plástica que pode ocorrer quando atingido o limite de escoamento ($f(\sigma) = 0$). O escalar deve estar associado a um versor correspondente à direção do fluxo plástico. Para o caso uniaxial, como a direção da velocidade de deformação plástica é única, verifica-se que o seu sentido passa a ser dado pelo sinal da tensão utilizada na análise, que também é única.

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \cdot \text{sin}(\sigma) \quad (2.19)$$

onde: $\text{sin}(\sigma)$ é uma função à qual atribui-se o sinal da tensão σ .

No caso multiaxial, por exemplo, essa tensão de análise deve ser a tensão efetiva associada ao critério escolhido, e a direção do fluxo estabelecida pelo versor 'r' a ser estudado no capítulo 4 desta dissertação.

2.3.2. Relação elastoplástica com encruamento positivo isótropo

A relação constitutiva elastoplástica com encruamento positivo isótropo ilustrada na FIGURA 2.6, caracteriza os materiais que apresentam comportamento elástico linear até que seja atingido o limite de escoamento, e a partir daí, com a evolução da plastificação, passam a ampliar o seu domínio elástico simetricamente em relação à média das tensões de escoamento positiva e negativa. Para o caso da FIGURA 2.6, essa média das tensões é nula, e a ampliação do domínio elástico se dá simetricamente ao eixo das deformações ε .

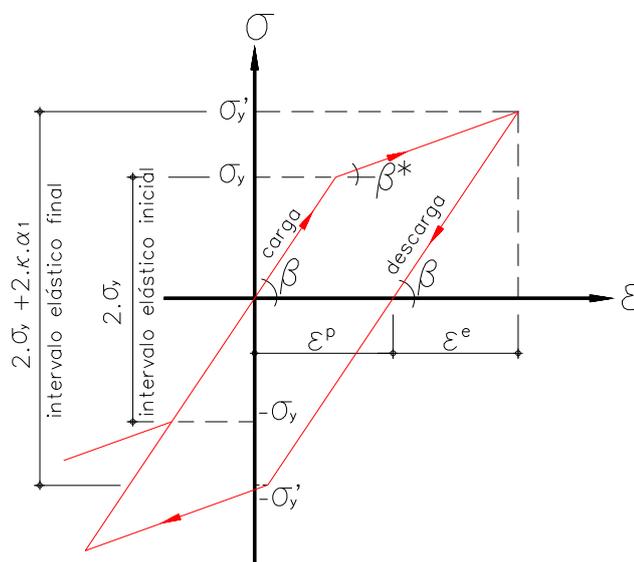


FIGURA 2.6 - Relação elastoplástica com encruamento positivo isótropo - ilustração para o caso uniaxial

Para o caso de encruamento isótropo, vale a mesma decomposição aditiva para as deformações e suas variações no tempo. O que muda, no

entanto, é a condição de plastificação que recebe a influência da variável interna de encruamento (α), e é escrita como:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(\sigma) = |\sigma| - (\sigma_y + k \cdot \alpha) \leq 0 \quad (2.20)$$

Para a caracterização do processo de encruamento, define-se, de acordo com o tipo de encruamento adotado para o modelo, a variável interna positiva α , que também pode ser expressa como função do tempo. No encruamento por trabalho, conhecido como ‘work-hardening’, a variação de α com o tempo é expressa por:

$$\dot{\alpha} = \sigma \cdot \dot{\varepsilon}^p, \quad \text{ou} \quad \dot{\alpha} = |\sigma| \dot{\gamma} \quad (2.21)$$

O encruamento por trabalho recebe esta designação pelo fato de associar a evolução da variável interna de encruamento à evolução da deformação plástica conjugada à tensão de análise. Esse conjugado tensão-deformação exprime a conceituação clássica de trabalho.

O que normalmente utiliza-se, é a associação da evolução da variável interna de encruamento à evolução exclusiva da deformação plástica, designando-se assim o encruamento por deformação ou ‘strain-hardening’.

$$\dot{\alpha} = \left| \dot{\varepsilon}^p \right| = \dot{\gamma} \quad (2.22)$$

Como ilustração, coloca-se que o ponderador da ampliação do domínio elástico na FIGURA 2.6, denominado de α_1 , corresponde à deformação plástica acumulada até o início do descarregamento (ε^p), pois trata-se de encruamento por deformação.

O módulo plástico k é uma constante do material. Materiais com comportamento elastoplástico perfeito, apresentam módulos plásticos nulos (iguais a zero), e materiais com encruamento positivo isótropo, apresentam k positivo. Partindo-se da relação infinitesimal entre tensão e deformação plástica, escreve-se:

$$k(\varepsilon^p) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad (2.23)$$

nomeando-se o módulo de rigidez tangente à curva tensão-deformação pós escoamento como $E_T = \tan \beta^*$, tem-se:

$$k = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon^e} = \frac{1}{\frac{d\varepsilon}{d\sigma} - \frac{d\varepsilon^e}{d\sigma}} = \frac{1}{\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E}} = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \quad (2.24)$$

2.3.3. Relação elastoplástica com encruamento positivo cinemático

A relação constitutiva elastoplástica com encruamento positivo cinemático, caracteriza-se pela translação do intervalo elástico inicial, à medida que a plastificação evolui (FIGURA 2.7). A translação ocorre porém sem que haja alteração do intervalo elástico inicial, e o seu sentido é governado pelo vetor fluxo plástico 'r'. No caso uniaxial, o sentido é dado pelo sinal da variável de análise ($\sin \sigma$).

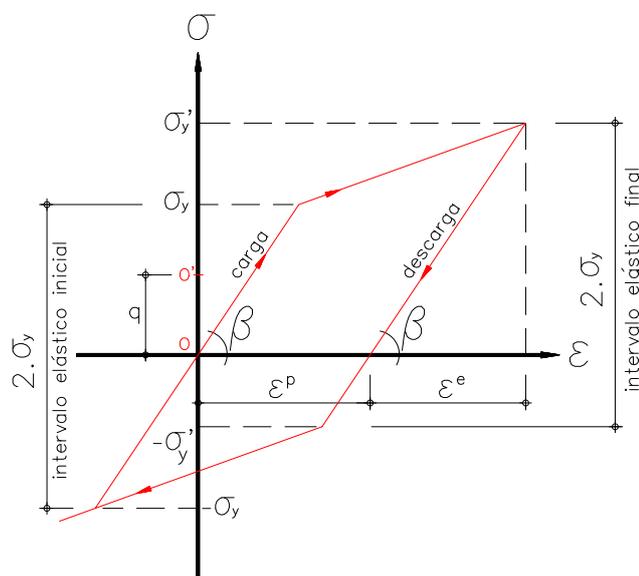


FIGURA 2.7 - Relação elastoplástica com encruamento positivo cinemático - ilustração para o caso uniaxial

Assim como nas outras relações, a decomposição aditiva para as deformações e suas variações no tempo são mantidas. A condição de plastificação muda e passa a receber a influência da variável interna de encruamento do material (q). A variável interna q é responsável pelo novo

posicionamento do centro do intervalo elástico (translação do ponto O para o ponto O').

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(\sigma) = |\sigma - q| - \sigma_y \leq 0 \quad (2.25)$$

A evolução da variável q é expressa em função da velocidade de deformação plástica ($\dot{\varepsilon}^p$), e do módulo de encruamento cinemático (H):

$$\dot{q} = H \cdot \dot{\varepsilon}^p \quad (2.26)$$

2.3.4. Relação elastoplástica com encruamento positivo misto

A relação elastoplástica com encruamento misto caracteriza-se pela combinação das relações elastoplásticas com encruamento positivo isótropo e cinemático. A condição de plastificação toma a seguinte forma:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(\sigma) = |\sigma - q| - (\sigma_y + k\alpha) \leq 0 \quad (2.27)$$

As relações obtidas para as variáveis internas (k e q) permanecem como nos respectivos modelos tratados isoladamente.

As formulações apresentadas neste capítulo constituem a base para o desenvolvimento, no capítulo 3, de um modelo constitutivo elastoplástico em campo uniaxial para a representação do comportamento do elemento de barra de grelha.

3. UM MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA AS VIGAS

3.1. Introdução

O objetivo deste capítulo constitui o estudo e a implementação de um modelo elastoplástico para o cálculo de vigas de concreto armado (dimensionamento e verificação), a partir dos conceitos introduzidos no capítulo 2.

Todo o desenvolvimento teórico é feito no campo das tensões. No entanto, com o objetivo de implementação do modelo a elemento finito de barra não discretizado por camadas (modelo não-estratificado), procede-se, ao final das deduções, a integração da tensão de análise (σ^{ef}) ao longo da altura do elemento, e passa-se a analisar o comportamento elastoplástico do elemento de barra com relação ao momento fletor (M) e à curvatura.

Os modelos constitutivos desenvolvidos neste trabalho baseiam-se nas hipóteses de relação constitutiva elastoplástica com encruamento positivo isótropo linear, onde supõe-se que o material tenha encruamento por deformação (strain-hardening). Deste modo, visando a simplificação na exposição do conteúdo deste trabalho, toda a formulação desenvolve-se já particularizada a essas hipóteses.

O **Anexo B** traz um breve resumo sobre o elemento de barra de grelha utilizado nas implementações.

3.2. Um breve histórico

A aplicação das relações constitutivas elastoplásticas baseadas na teoria clássica da plasticidade: HILL,R. (1950), PRAGER,W.;HODGE,P.G. (1963), MENDELSON,A. (1968), tem oferecido a possibilidade de modelar com sucesso o comportamento não-linear dos materiais constituintes de sistemas estruturais.

Na década de 1960, o Método dos Elementos Finitos (MEF) foi estendido para a aplicação a problemas não-lineares. YAMADA,Y. et al. (1968) expõem as idéias básicas sobre a análise elastoplástica via elementos finitos.

NAYAK,G.C.;ZIENCKIEWICZ,O.C. (1972) generalizam várias relações constitutivas, agrupando-as de forma sintética, para aplicação em problemas elastoplásticos gerais. Datam dessa mesma época, os trabalhos expressivos de LIN,C.S.;SCORDELIS,A.C. (1975) e BASHUR,F.K.; DARWIN,D. (1978), considerando-se a estrutura estratificada em uma série de camadas superpostas, o que possibilita a representação de variações nas propriedades do material ao longo da espessura.

Destacam-se, na primeira metade da década de 1980, a publicação do ASCE (1982), sobre aplicação do MEF na análise de estruturas de concreto armado (CA), e o texto clássico de CHEN,W.F. (1982) sobre plasticidade em CA.

A partir de 1984, SIMO,J.C. et al. iniciam uma série de publicações nas áreas da não-linearidade física, viscoelasticidade e viscoplasticidade. Em seus trabalhos, apresentam algoritmos voltados à implementação dos modelos uniaxiais e multiaxiais desenvolvidos.

HINTON,E.; OWEN,D.R.J.(1986) editam uma coletânea de trabalhos sobre modelagem computacional de estruturas de CA, e OWEN,D.R.J.; HINTON,E. (1980) publicam extenso trabalho onde são enfocadas rotinas específicas para a modelagem elastoplástica em campo uni e multiaxial.

PROENÇA,S.P.B. (1988) trata de Modelos Matemáticos do Comportamento Não-linear do Concreto, em tese de doutoramento.

3.3. Formulação básica do modelo elastoplástico

Um modelo constitutivo, seja ele uniaxial ou multiaxial, deve abranger leis, critérios e condições capazes de torná-lo bem definido e consistente com suas hipóteses. A seguir, nos itens de 'a' a 'd', reúnem-se as hipóteses de modelagem e os aspectos correspondentes à formulação básica de um modelo constitutivo uniaxial a ser aplicado às vigas de concreto armado.

a) Decomposição aditiva do tensor das deformações totais

Como exposto no capítulo 2, a decomposição aditiva das deformações totais pode ser expressa por:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (3.1)$$

b) Critério de plastificação

Por tratar-se de um modelo constitutivo uniaxial, o critério de plastificação deve ser referido a uma única variável de análise. Define-se, então, uma função $f:R \rightarrow R$, denominada critério de plastificação e pertencente a um espaço de tensões possíveis E_σ convexo e fechado tal que:

$$f:R \rightarrow R / f(\sigma) = |\sigma| - (\sigma_y + k.\alpha) \leq 0 \quad (3.2)$$

$$E_\sigma = \{\sigma \in R / f(\sigma) \leq 0\} \quad (3.3)$$

o interior de E_σ ($\text{int}E_\sigma$) representa o domínio elástico, e o contorno (∂E_σ), a curva de plastificação do material em campo uniaxial.

c) Uma lei de evolução das deformações plásticas

A lei de plastificação, que expressa a variação da deformação plástica, é escrita em função do produto de um escalar ($\dot{\gamma}$) por um vetor direção. Para o caso uniaxial, como colocado no capítulo 2, a direção da velocidade de deformação plástica é única, e verifica-se que o seu sentido passa a ser dado pelo sinal da tensão utilizada na análise.

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \cdot \sin(\sigma) \quad (3.4)$$

O escalar $\dot{\gamma} \geq 0$ obedece a duas condições, juntamente com a função que exprime o critério de plastificação (f):

- condição de complementaridade ou de Kuhn-Tucker:

se $\dot{\gamma} \geq 0$ e $f \leq 0$ (pois $\dot{f} > 0$ implica $f(t + \Delta t) > 0$, o que é inadmissível)

$$\therefore \dot{\gamma} \cdot f = 0 \quad (3.5)$$

Essa condição exprime o comportamento simultâneo do par velocidade de deformação plástica e critério de plastificação. Na região elástica do modelo, tem-se:

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{e} \quad f < 0 \quad (\therefore \dot{\gamma} \cdot f = 0)$$

e na região plástica, verifica-se que:

$$\dot{\gamma} > 0 \quad \text{e} \quad f = 0 \quad (\therefore \dot{\gamma} \cdot f = 0)$$

- condição de consistência:

se $f = 0$, tem-se $\dot{f} \leq 0$, portanto $\dot{\gamma} \cdot \dot{f} = 0$ (3.6)

A condição de consistência pode representar um descarregamento, onde:

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{f} < 0 \quad (\therefore \dot{\gamma} \cdot \dot{f} = 0)$$

d) Uma lei de evolução da variável interna de encruamento (α)

A variável interna relacionada ao encruamento isótropo do material evolui de acordo com a deformação plástica, e pode ser expressa pelo escalar $\dot{\gamma}$ no caso de encruamento por deformação:

$$\dot{\alpha} = \left| \dot{\varepsilon}^p \right| = \dot{\gamma} \quad (3.7)$$

3.4. Formulação incremental do modelo elastoplástico

A formulação básica apresentada no item 3.3 está referida às taxas de variação das variáveis. Para a obtenção de um modelo constitutivo passível de implementação em códigos de cálculo, torna-se evidente a necessidade de integração do modelo apresentado em um intervalo de interesse $\Delta t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$. Através de integração numérica, o modelo poderá ser escrito de forma incremental, tornando-se possível atualizar as variáveis de estado $\{\sigma, \varepsilon^p, \alpha\}_i$ dadas no instante de tempo inicial t_i , para seus valores $\{\sigma, \varepsilon^p, \alpha\}_{i+1}$ no instante de tempo final $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ após um incremento de forças.

Dentre os procedimentos de integração numérica existentes, destacam-se, para esse fim, o procedimento de integração explícito e o procedimento de integração implícito (utilizado neste trabalho). No **Anexo A** - 'Procedimentos de integração numérica', descrevem-se os procedimentos de integração numérica, realçando-se as bases de suas formulações, assim como as vantagens que podem ser obtidas com a utilização do procedimento implícito.

Da aplicação do procedimento de integração implícito às expressões do item 3.3, resultam:

da lei de evolução das deformações plásticas: $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \cdot \sin(\sigma)$,

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta t \cdot \dot{\gamma}_{i+1} \cdot \sin(\sigma(t_{i+1})) = \varepsilon_i^p + \Delta \gamma \cdot \sin(\sigma(t_{i+1})) \quad (3.8)$$

onde: $\Delta \gamma = \Delta t \cdot \dot{\gamma}_{i+1}$.

da lei de evolução da variável interna de encruamento: $\dot{\alpha} = \dot{\gamma}$,

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \Delta t \cdot \dot{\alpha}_{i+1} = \alpha_i + \Delta t \cdot \dot{\gamma}_{i+1} = \alpha_i + \Delta \gamma \quad (3.9)$$

do critério de plastificação: $f(\sigma) = |\sigma| - (\sigma_y + k \cdot \alpha) \leq 0$,

$$f(\sigma_{i+1}) = |\sigma_{i+1}| - (\sigma_y + k \cdot \alpha_{i+1}) \leq 0 \quad (3.10)$$

da condição de Kuhn-Tucker: $\dot{\gamma} \cdot f = 0$

$$\dot{\gamma}_{i+1} \cdot f(\sigma_{i+1}) = \Delta\gamma \cdot f(\sigma_{i+1}) = 0, \text{ pois } \Delta t \geq 0 \quad (3.11)$$

Para que o processo iterativo possa ser iniciado, as expressões 3.8 a 3.11 devem estar relacionadas a um estado de tensões originário de uma tentativa inicial que será tomada, por simplicidade, como o resultado da aplicação de relação elástica linear entre tensão e deformação. A indicação das variáveis relativas a esse estado de tensões será feita através do superíndice 't'. Com a tentativa de comportamento elástico linear, resultam:

$$\varepsilon_{i+1}^{p(t)} = \varepsilon_i^p \text{ (passo elástico)} \quad (3.12)$$

$$\sigma_{i+1}^t = E \cdot [\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^p] \quad (3.13)$$

$$\alpha_{i+1}^t = \alpha_i \quad (3.14)$$

$$f_{i+1}^t = |\sigma_{i+1}^t| - (\sigma_y + k \cdot \alpha_i) \quad (3.15)$$

As variáveis de estado $\{\sigma, \varepsilon^p, \alpha\}_{i+1}$ no instante de tempo final $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, podem agora ser reescritas com relação aos seus valores oriundos da tentativa em regime elástico linear, através de uma expressão para $\Delta\gamma \geq 0$ obtida pela imposição da condição $f_{i+1} = 0$.

$$\Delta\gamma = \frac{f_{i+1}^t}{(E + k)} \quad (3.16)$$

A partir de $\Delta\gamma \geq 0$, podem ser obtidas as demais variáveis de estado, de acordo com as expressões 3.17 a 3.19.

A expressão 3.17 ainda pode ser utilizada para provar que: $\sin(\sigma_{i+1}^t) = \sin(\sigma_{i+1})$.

$$\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^t - E \cdot \Delta\gamma \cdot \sin(\sigma_{i+1}^t) \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\gamma \cdot \sin(\sigma_{i+1}^t) \quad (3.18)$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \Delta\gamma \quad (3.19)$$

3.5. O procedimento incremental-iterativo

A análise elastoplástica de estruturas é elaborada numericamente através de um procedimento incremental-iterativo oriundo da integração do modelo constitutivo, como o obtido nas equações 3.8 a 3.11. A FIGURA 3.1 ilustra as fases envolvidas no procedimento para o caso uniaxial. Para estados multiaxiais de tensão, ocorre a generalização das curvas para superfícies de escoamento no espaço tridimensional das tensões.

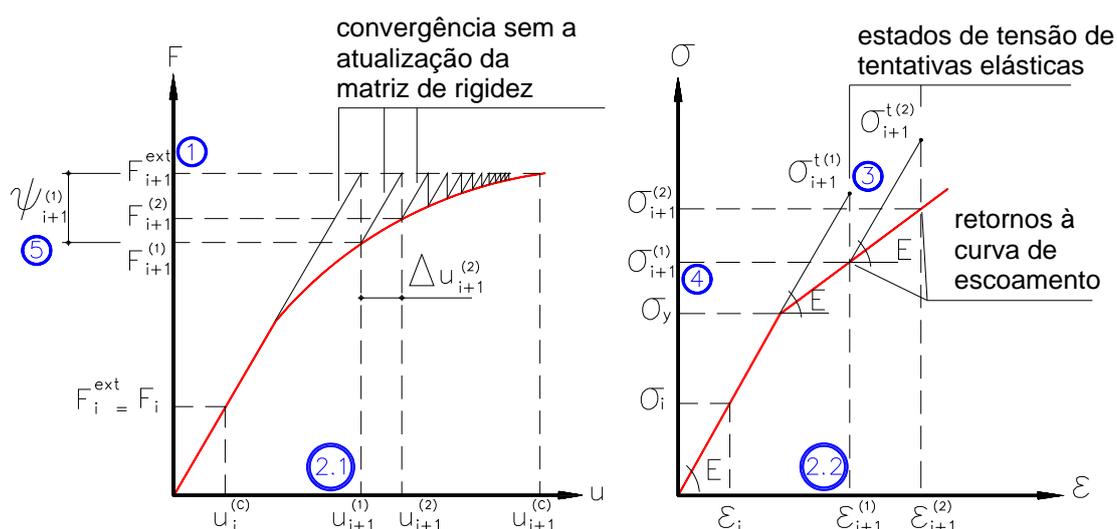


FIGURA 3.1 - Procedimento incremental-iterativo para o modelo elastoplástico

Os passos descritos a seguir, estão ilustrados na FIGURA 3.1 com o intuito de auxiliar a compreensão do processo, genericamente mostrado para o incremento de forças 'i+1'.

passo 1 - aplica-se o incremento de forças 'i+1' somado ao resíduo de forças do incremento de forças anterior 'i' à estrutura, quando existir. Isto caracteriza o início da primeira iteração do incremento 'i+1'. O não abandono

do resíduo de forças final do incremento de forças anterior, tem o objetivo de promover o equilíbrio final de forças no elemento com maior precisão.

$$\text{do equilíbrio no incremento 'i', tem-se: } \psi_i = K_i^G \cdot u_i^c + F_i^{\text{ext}} \quad (3.20)$$

no incremento 'i+1', aplicar-se-á o vetor de forças:

$$\Delta F_{i+1}^{\text{ext}} = \Delta F_{i+1}^{\text{ext}} + \psi_i \quad (3.21)$$

onde : ψ_i - resíduo de forças do incremento de forças 'i';

K_i^G - matriz de rigidez da estrutura, que pode ser variável
 $K_i^G = K_i^G(u_i)$. Neste trabalho, a matriz de rigidez da estrutura não é atualizada;

u_i^c - vetor deslocamentos nodais na iteração final do incremento 'i';

F_{i+1}^{ext} - vetor de forças nodais aplicadas à estrutura no incremento 'i+1'
 (correspondente à soma dos ΔF^{ext} aplicados até o instante 'i+1');

$\Delta F_{i+1}^{\text{ext}}$ - vetor de incremento de forças de 'i' a 'i+1'.

passo 2 - assume-se comportamento elástico linear entre o vetor de forças aplicado e o de deslocamentos obtidos. Através dos deslocamentos, determina-se o estado de tensões relativo ao comportamento elástico linear arbitrado.

$$\Delta u_{i+1} = [K_i^G]^{-1} \cdot \Delta F_{i+1}^{\text{ext}} \quad , \quad (3.22)$$

$$\text{portanto } \Delta \varepsilon_{i+1} = B \cdot \Delta u_{i+1} \quad (3.23)$$

$$\text{e } \Delta \sigma_{i+1}^t = E \cdot \Delta \varepsilon_{i+1} \quad (3.24)$$

onde : Δu_{i+1} - vetor de incrementos dos deslocamentos nodais de 'i' a 'i+1';

$\Delta \varepsilon_{i+1}$ - incremento das deformações globais de 'i' a 'i+1';

$\Delta \sigma_{i+1}^t$ - incremento elástico das tensões globais de 'i' a 'i+1';

B - matriz que relaciona as deformações aos deslocamentos nodais;

E - módulo de elasticidade longitudinal do material.

$$\text{passo 3- acumula-se a tensão total } \sigma_{i+1}^t = \sigma_i + \Delta \sigma_{i+1}^t \quad (3.25)$$

onde : σ_{i+1}^t - tensão elástica global (tentativa inicial) a ser analisada.

passo 4- verifica-se o escoamento do elemento através do critério:

$$\sigma_{i+1}^{ef} \geq \sigma_{y_i} \quad (3.26)$$

onde : $\sigma_{i+1}^{ef} = \sigma_{i+1}^t$ - tensão efetiva para o caso uniaxial;

$$\sigma_{y_i} = (\sigma_{y_{i-1}} + k \cdot \alpha_i) \quad \text{- tensão de escoamento para o caso uniaxial.}$$

Se ocorreu o escoamento, ou seja, $\sigma_{i+1}^{ef} \geq \sigma_{y_i}$, faz-se a redução da tensão σ_{i+1}^t para a curva de escoamento, obtendo-se σ_{i+1} de acordo com o modelo constitutivo deduzido. Se não ocorreu o escoamento durante o incremento 'i+1', $\sigma_{i+1}^{ef} < \sigma_{y_i}$, conclui-se verdadeira a hipótese inicial de incremento elástico, e a tensão ao final do incremento 'i+1' é: $\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^t$.

passo 5- através de integração das tensões no domínio do elemento, calculam-se as forças nodais internas, que comparadas ao vetor de forças externas, determinam o resíduo ψ_{i+1} . Se este for maior que a tolerância estipulada no modelo, retorna-se ao **passo 1**, aplicando-se porém, apenas o vetor de forças do resíduo, e caracterizando-se então, o início da 2ª iteração do incremento 'i+1'. Caso contrário, se este for menor que a tolerância estipulada, conclui-se este incremento 'i+1' de forças, e parte-se para um novo incremento 'i+2', caso exista.

O estabelecimento do critério de convergência é de grande importância para o processo incremental-iterativo, e divide-se em convergência de forças e de deslocamentos. Para a caracterização da convergência segundo o critério de forças, toma-se como referência a norma do vetor resíduo, que atua como um dos parâmetros de controle do processo.

O vetor resíduo de forças em um elemento na iteração 'j' do incremento 'i', resulta da diferença entre as componentes do vetor de forças aplicado e do vetor de forças internas obtido através de integração das tensões no domínio desse elemento. A integração é efetuada segundo os pontos-amostra de tensões ou pontos de Gauss, que neste modelo

confundem-se com os nós do elemento. Para a estrutura, o vetor de resíduos deve ser calculado com a contribuição de todos os elementos finitos, como segue:

$$\psi_i = \left(\sum_{e=1}^{ne} \int_0^{L_e} \mathbf{B}^T \cdot \sigma_i^j \cdot dL_e \right) + \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \quad (3.27)$$

onde : L_e - comprimento do elemento analisado;

ne - número de elementos finitos.

Oportunamente, coloca-se que os referidos vetores de força abordados neste trabalho são compostos por forças segundo o eixo global Z (transversais), e momentos fletores concentrados nos nós da estrutura.

Estabelece-se que a convergência do processo iterativo, quanto às forças, foi atingida no instante em que a razão entre a norma do vetor de resíduos de forças e a norma do vetor de forças aplicadas esteja dentro da tolerância estipulada. A convergência em deslocamentos é atingida no instante em que a razão entre norma do incremento de deslocamentos para a estrutura (globais) entre duas iterações consecutivas, e a norma do respectivo vetor global esteja dentro da tolerância estipulada.

$$\frac{\|\psi_i^j\|}{\|\mathbf{F}_i^{\text{ext}}\|} \leq t_F \quad \text{e} \quad \frac{\|\Delta u_i^j\|}{\|u_i^j\|} \leq t_u \quad (3.28)$$

onde : $\| \cdot \|$ - representa a norma Euclidiana de um vetor;

ψ_i^j - vetor resíduo de forças na iteração 'j' do incremento 'i';

$\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$ - vetor de forças no incremento 'i';

u_i^j - vetor deslocamentos da iteração 'j' do incremento 'i';

Δu_i^j - vetor dos incrementos de deslocamentos na iteração 'j';

t_F e t_u - tolerâncias em força e deslocamento respectivamente.

3.6. A implementação no Sistema ANSER

Colocam-se neste item os aspectos relevantes da implementação do modelo proposto neste capítulo.

Como já mencionado anteriormente, por tratar-se de um modelo não-estratificado destinado à análise de vigas de concreto armado, torna-se necessária a integração da tensão de análise (σ_{ef}) ao longo da altura da viga, de modo a exprimirem-se as relações elastoplásticas coerentemente em termos do momento fletor e da curvatura. Caracteriza-se como variável de análise, então, o momento fletor atuante (M).

$$M = \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} \sigma^{ef} \cdot z \cdot dz \quad (3.29)$$

onde: h - altura da viga.

Com o modelo expresso no campo dos momentos fletores e das curvaturas, torna-se necessária a quantificação da rigidez da viga em termos de um diagrama momento-curvatura trilinear convencional como o proposto FIGURA 3.2.

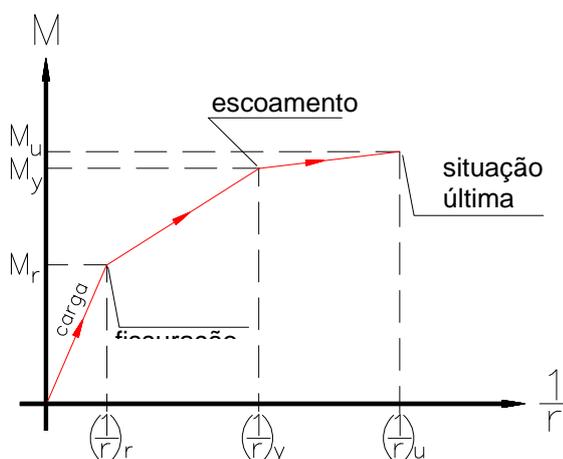


FIGURA 3.2 - Diagrama momento-curvatura trilinear idealizado para seções de concreto armado

onde: M_r - momento de fissuração da seção;

M_y - momento de escoamento da seção;

M_u - momento relativo à situação última da seção;

$\left(\frac{1}{r}\right)_r$ - curvatura correspondente ao momento de fissuração;

$\left(\frac{1}{r}\right)_y$ - curvatura correspondente ao momento de escoamento;

$\left(\frac{1}{r}\right)_u$ - curvatura correspondente ao momento último para a seção.

Para o campo de momentos fletores e curvaturas, a matriz constitutiva 'E' deve ser substituída coerentemente pelo módulo de rigidez à flexão (E.I), e a matriz 'B', passa a relacionar os deslocamentos nodais às curvaturas (1/r).

Os esforços de análise devem ser obtidos nos pontos-amostra. A determinação geométrica desses pontos no domínio do elemento é de grande importância, pois os esforços solicitantes ocorridos nesses pontos serão representativos de todo o elemento tanto na verificação do escoamento, como do seu emprego como pontos da integração de Gauss (numérica) indicada pela expressão 3.27. Muitos autores, como OWEN,D.R.J.;HINTON,E. (1980), utilizam pontos-amostra localizados no interior do elemento finito.

O elemento de barra de grelha implementado neste trabalho é dotado de um campo de deslocamentos transversais (w) cúbico ao longo de seu comprimento. Desse modo, pode-se concluir que o campo dos momentos fletores (M), seja linear dentro do elemento, pois são dependentes da 2ª derivada dos deslocamentos ($M=-E.I.(w'')$). A adoção de pontos-amostra internos ao elemento, neste caso, levaria à introdução de erro, pois, se a distribuição dos momentos fletores é linear no domínio do elemento, os seus extremos (nós), devem apresentar os valores mais significativos para esse esforço. Exatamente por esse motivo, neste modelo, os pontos-amostra foram tomados como sendo os próprios nós dos elementos finitos.

A expressão para a determinação do resíduo de forças indicada em 3.27, pode ser reescrita como uma soma (nos elementos finitos da estrutura) da integração do resíduo de momentos fletores:

$$\psi_i = \sum_{e=1}^{ne} \int_0^{L_e} B^T \sigma_i^j . dL_e + F_i^{ext} = \sum_{e=1}^{ne} \int_0^{L_e} B . \Delta M_e . dL_e \quad (3.30)$$

onde: L_e - comprimento do elemento;

B - matriz que relaciona as curvaturas aos deslocamentos nodais;

$\Delta M_e = M_e^t - M_e$ - representa a diferença entre os momentos fletores nodais oriundos da tentativa em regime elástico linear, e os momentos fletores obtidos pela aplicação do modelo elastoplástico no elemento.

O modelo apresentado neste capítulo, apesar de simples em relação a outros já desenvolvidos pelos meios técnico e científico, mostra-se bastante representativo do fenômeno do comportamento não-linear físico de vigas metálicas e de concreto armado, e os exemplos do capítulo 5 ilustram e confirmam a sua eficiência.

4. UM MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA AS LAJES

4.1. Introdução

Este capítulo traz a proposta de um modelo elastoplástico destinado à representação do comportamento de lajes de concreto armado. O modelo proposto é incorporado ao elemento finito de placa triangular de formulação livre denominado T3AF, e ao quadrilátero composto pela condensação estática de quatro elementos triangulares. O **Anexo B** traz um breve resumo sobre o elemento T3AF, abordando alguns aspectos de sua formulação.

A caracterização do comportamento elastoplástico do elemento de placa ocorre segundo uma generalização do modelo uniaxial, para o campo triaxial. No entanto, a aplicação de um modelo generalizado (como o tridimensional) à análise de placas poderia violar a condição de estado plano de tensões (EPT). Deste modo, promove-se uma nova particularização do modelo objetivando-se a garantia da condição de EPT durante o processo de análise.

O desenvolvimento teórico é feito no campo das tensões. No entanto, por tratar-se de implementação a elemento finito não discretizado por camadas (modelo não-estratificado), procede-se, ao final das deduções, a integração da tensão de análise (σ^{ef}) ao longo de sua espessura, e passa-se a analisar o seu comportamento elastoplástico com relação ao momento efetivo (M^{ef}) escrito em função dos momentos de placa (M_x, M_y, M_{xy}).

O modelo desenvolvido baseia-se em relação constitutiva elastoplástica com encruamento positivo isótropo linear ocorrendo por deformação (strain-hardening), e critério de escoamento de Von Mises.

4.2. Um breve histórico

Coloca-se, concisamente, um histórico sobre a evolução da plasticidade em campo multiaxial, omitindo-se os trabalhos clássicos já referenciados no item 3.2 deste trabalho.

A partir da década de 1960, o Método dos Elementos Finitos (MEF) foi estendido para a aplicação a problemas não-lineares. MARÇAL,P.V.;KING,I.P. (1967) apresentam trabalho sobre a aplicação do MEF a problemas elastoplásticos bidimensionais. A aplicação particular às placas é feita por ARMEN,H. et al. (1968) e MALLET,R.;MARÇAL,P.V. (1968). WHANG,B. (1969) analisa placas e cascas de comportamento elastoplástico com o modelo em camadas. ZIENCKIEWICZ,O.C. et al. (1969), publicam um importante trabalho em que o Método das Tensões Iniciais, largamente utilizado até a atualidade, é apresentado para a solução de problemas elastoplásticos com o uso do MEF.

BELITSCHKO,T.;VELEBIT,M. (1972) utilizam elemento triangular de momento constante para a análise elastoplástica de placas. Na década de 1970 aparecem os primeiros trabalhos que, com sucesso, aplicam a análise elastoplástica com o MEF em lajes de concreto armado (CA), destacando-se os de HAND,F.R. et al. (1973) e DOTREPPE,J.C. et al. (1973). Ainda na década de 1970, LIN,C.S.;SCORDELIS,A.C. (1975) e BASHUR,F.K.; DARWIN,D.(1978), publicam trabalhos considerando-se a estrutura estratificada em uma série de camadas superpostas, o que possibilita a representação de variações nas propriedades do material ao longo de sua espessura.

Destaca-se, na primeira metade da década de 1980, a tese de FIGUEIRAS,J.A. (1983), sobre a análise limite de placas e cascas

anisotrópicas e de CA, com não-linearidades física e geométrica, excelente e detalhado estudo sobre o assunto.

A partir de 1984, SIMO, J.C. et al. iniciam uma série de publicações nas áreas da não-linearidade física, viscoelasticidade e viscoplasticidade, apresentando algoritmos voltados à implementação dos modelos abordados para vários elementos estruturais. AUFARE et al. (1986) analisam lajes em comportamento elastoplástico sob carregamento dinâmico.

HU, H.T.; SCHNOBRICH, W.C. (1991) publicam trabalho sobre a aplicação do MEF à análise de placas e cascas de CA sob carregamento monotonicamente crescente. É assumido o modelo em camadas, com relações constitutivas dos materiais bem elaboradas. Em tese de doutoramento, CORRÊA, M.R.S. (1991) propôs um modelo simples para a análise de lajes de concreto armado.

4.3. Formulação básica do modelo elastoplástico

Procura-se, a seguir, de acordo com os itens de 'a' a 'd', definir as hipóteses de modelagem e os aspectos correspondentes à formulação básica de um modelo constitutivo geral (triaxial), segundo uma generalização do modelo uniaxial.

a) Decomposição aditiva do tensor das deformações totais

Devido à generalização para o estado tridimensional de tensões, as deformações (ε) e as tensões (σ) são agora representadas por tensores. Deste modo, a decomposição aditiva do tensor das deformações totais é expressa por:

$$\varepsilon = \nabla^s u \rightarrow \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (4.1)$$

onde: $\nabla^s u$ - parcela simétrica do tensor gradiente dos deslocamentos;

ε^e - parcela elástica da deformação total;

ε^p - parcela plástica da deformação total.

b) Critério de plastificação

Em se tratando de um modelo constitutivo triaxial, o critério de plastificação deve referir-se a uma variável denominada de tensão efetiva (σ^{ef}), que deve ser representativa do critério adotado. Para o critério de Von Mises, a tensão efetiva é expressa por: $\sigma^{ef} = \sqrt{3 \cdot J_2}$.

O critério definido pela função $f: \text{Lin} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, é denominado critério de plastificação. As tensões possíveis a um determinado critério devem pertencer a um conjunto E_σ convexo e fechado tal que:

$$f: \text{Lin} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} / f(\sigma, q) = \|\sigma^{ef}\| - (\sigma_y + k \cdot \alpha) \leq 0 \quad (4.2)$$

$$E_\sigma = \{(\sigma, q) \in \text{Lin} \times \mathbb{R}^m / f(\sigma, q) \leq 0\} \quad (4.3)$$

onde: $\sigma^{ef} = \sqrt{3 \cdot J_2}$ - tensão efetiva para o critério de Von Mises;

m - número de componentes do vetor 'q' que reúne os parâmetros e as variáveis internas relacionadas com o encruamento;

Lin - espaço de tensores de 2ª ordem.

O interior de E_σ ($f < 0$), representa o domínio elástico, e o contorno ∂E_σ ($f = 0$), a superfície de plastificação do material.

$$\text{int} E_\sigma = \{(\sigma, q) \in \text{Lin} \times \mathbb{R}^m / f(\sigma, q) < 0\} \quad \text{e} \quad \partial E_\sigma = \{(\sigma, q) \in \text{Lin} \times \mathbb{R}^m / f(\sigma, q) = 0\}$$

c) Uma lei de evolução do tensor de deformações plásticas

A lei de plastificação que expressa a variação da deformação plástica, é expressa em função do produto de um escalar ($\dot{\gamma}$) por um vetor direção:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} [r(\sigma, q)] \quad (4.4)$$

onde: $\dot{\varepsilon}^p = \frac{d\varepsilon^p}{dt}$ - representa a velocidade de deformação plástica;

$r \in \text{Lin} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{Lin}$ - vetor que determina a direção do fluxo plástico;

$\dot{\gamma} \geq 0$ é um escalar que obedece às condições de complementaridade (Kuhn-Tucker), e de consistência.

As condições de Kuhn-Tucker e de consistência permitem-nos avaliar o que ocorre no processo de análise em termos do estado de carregamento/descarregamento, de acordo com as colocações dos parágrafos seguintes.

Suponha-se, inicialmente, um estado de tensão $\{\sigma, q\} \in \text{int}(E_\sigma)$, que leva, de acordo com a expressão 4.2, a $f(\sigma, q) < 0$. Da condição de Kuhn-Tucker, conclui-se que se $\dot{\gamma} \cdot f = 0$ e $f < 0$, então $\dot{\gamma} = 0$, ou seja, $\dot{\varepsilon}^p = 0$. Conclui-se que $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e$, o que configura uma situação de *resposta instantânea elástica* do material.

Por outro lado, admita-se agora que $\{\sigma, q\} \in \partial E_\sigma$, o que implica em $f(\sigma, q) = 0$. Da condição de Kuhn-Tucker, pode-se admitir $\dot{\gamma} \geq 0$, o que gera duas situações distintas a serem analisadas. Primeiramente, admite-se $\dot{f}(\sigma, q) < 0$. Da condição de consistência ($\dot{\gamma} \dot{f} = 0$), conclui-se que $\dot{\gamma} = 0$, o que caracteriza o *descarregamento de um estado plástico*. Admite-se agora, que se $\dot{f}(\sigma, q) = 0$, a condição de consistência é automaticamente satisfeita. Neste caso, se $\dot{\gamma} > 0$, configura-se o *carregamento plástico*. Se $\dot{\gamma} = 0$, configura-se o chamado *carregamento neutro*. Em resumo, colocam-se:

$$f < 0 \leftrightarrow (\sigma, q) \in \text{int}(E_\sigma) \rightarrow \dot{\gamma} = 0 - \text{carregamento elástico};$$

$$f = 0 \leftrightarrow (\sigma, q) \in \partial E_\sigma: \dot{f} < 0 \rightarrow \dot{\gamma} = 0 - \text{descarregamento elástico};$$

$$\dot{f} = 0 \text{ e } \dot{\gamma} > 0 - \text{carregamento plástico};$$

$$\dot{f} = 0 \text{ e } \dot{\gamma} = 0 - \text{carregamento neutro.} \quad (4.5)$$

O carregamento neutro caracteriza-se por modificar o estado de tensões, mantendo-o, no entanto, sobre a superfície de escoamento do material sem provocar, conseqüentemente, a evolução da superfície de plastificação (evolução do encruamento).

d) Uma lei de evolução do vetor que reúne os parâmetros de encruamento

Os parâmetros e as variáveis internas relacionados ao encruamento do material, são dispostos em um vetor $q \in \mathbb{R}^m$, cuja lei de evolução também é obtida em função do escalar $\dot{\gamma}$, e expressa por:

$$\dot{q} = -\dot{\gamma}[h(\sigma, q)] \quad (4.6)$$

onde: $h \in \text{Lin} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ define o tipo de encruamento, e o sinal negativo dá consistência termodinâmica ao processo dissipativo associado ao encruamento.

Os vetores $h(\sigma, q)$ e $r(\sigma, q)$ podem ser associados às derivadas parciais da função $f(\sigma, q)$, através das leis associativas:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = f_{\sigma} = r(\sigma, q) \quad (\text{regra da normalidade}) \quad (4.7)$$

$$D \cdot \frac{\partial f}{\partial q} = D \cdot f_q = h(\sigma, q) \quad (4.8)$$

onde: $D = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$ - matriz que reúne os módulos plásticos de encruamento;

k - módulo plástico de encruamento isótropo;

H - módulo plástico de encruamento cinemático.

Esta associação, ilustrada na FIGURA 4.1, tem como objetivo principal estabelecer a perpendicularidade entre a direção do fluxo plástico e a superfície de escoamento (∂E_{σ}) , assim como f_{σ} .

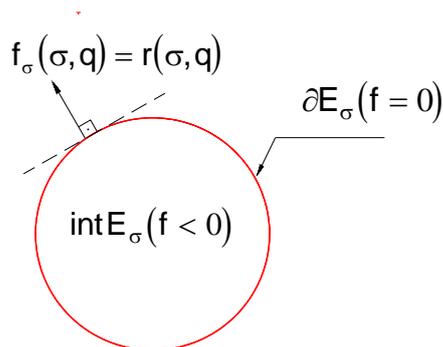


FIGURA 4.1 - Representação gráfica do vetor fluxo plástico $r(\sigma, q)$ sobre o domínio elástico ($\text{int}E_\sigma$) no espaço das tensões

Segundo CORRÊA, M.R.S. (1991), “As noções de fluxo plástico, escoamento, regra da normalidade, etc. estão associadas ao comportamento dos metais dúcteis. No concreto não há fluxo plástico, e é questionável, sob o ponto de vista conceitual, a aplicação da regra da normalidade”. Em termos práticos, a aplicação desses conceitos ao concreto tem fornecido bons resultados, como atestado em muitos trabalhos, dentre eles: HAND, F.R. et al. (1973), DOTREPPE, J.C. et al. (1973), LIN, C.S.; SCORDELIS, A.C. (1975), BASHUR, F.K.; DARWIN, D. (1978), BERGAN, P.G.; HOLLAND, I. (1979), ASCE (1982), CHEN, W.F. (1982), FIGUEIRAS, J.A. (1983), KLEIN, D.G. (1986), CERVERA, M.; HINTON, E. (1986), SIMO, J.C.; HUGHES, T.J.R. (1988), PROENÇA, S.P.B. (1988), e CORRÊA, M.R.S. (1991).

4.4. Formulação incremental do modelo elastoplástico

As expressões 4.1 a 4.8, que definem um modelo elastoplástico básico, podem ser reescritas em função da parte desviadora do tensor das tensões, aqui denotado por ‘S’. A expressão do critério de Von Mises, dada por 4.2, pode ser reescrita como:

$$f(\sigma, q) = \sqrt{2 \cdot J_2} - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + k \cdot \alpha) \quad (4.9)$$

o invariante J_2 pode ser escrito em função do tensor das tensões:

$$J_2 = \frac{1}{2} \|\sigma\|^2 - \frac{1}{6} (\text{tr}\sigma)^2 \quad (4.10)$$

onde: $S = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}\sigma$;

σ - tensor das tensões no espaço tridimensional;

$\text{tr}\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ - é o traço do tensor das tensões σ .

por sua vez, a norma do tensor 'S' pode ser escrita como:

$$\|S\| = \sqrt{\|\sigma\|^2 - \frac{1}{3} (\text{tr}\sigma)^2} \quad (4.11)$$

a partir das expressões 4.10 e 4.11, reescreve-se o critério como:

$$f(\sigma, q) = \|S\| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + k \cdot \alpha) \quad (4.12)$$

e redefine-se a evolução das deformações plásticas:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{S}{\|S\|} = \dot{\gamma} n \quad (4.13)$$

onde: $n = \frac{S}{\|S\|} = r(\sigma, q)$ - corresponde ao vetor unitário que determina a direção do fluxo plástico segundo uma lei associativa ($r(\sigma, q) = f_\sigma$).

Necessita-se agora, a definição de deformação plástica efetiva $\bar{\alpha}$. Esta variável deve ser definida de tal modo a recuperar-se o caso uniaxial. Deste modo, a partir da definição clássica de deformação plástica efetiva:

$$\bar{\alpha}(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \|\dot{\varepsilon}^p(t)\| dt \quad (4.14)$$

obtém-se:

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha \quad (4.15)$$

e, a evolução da deformação plástica efetiva, torna-se:

$$\dot{\bar{\alpha}} = \dot{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4.16)$$

De modo a adaptar as expressões 4.12 a 4.16, à representação do comportamento relativo ao EPT ($\sigma_z \equiv \tau_{xz} \equiv \tau_{yz} = 0$), necessita-se uma particularização das relações, através da introdução de uma matriz 'P' que relaciona o tensor de um estado plano de tensões ao respectivo tensor desviador 'S*' (incompleto), omitindo-se a representação da componente de tensão desviadora segundo uma terceira direção, aqui denominada direção 'z' (s_{zz}).

$$S^* = P \cdot \sigma \quad (4.17)$$

onde: $S = \left\{ S_{xx} \ S_{xy} \ S_{yy} \ S_{zz} \right\}$ - representa o tensor desviador completo;

$$s_{zz} = -\sigma_m = -\left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{3} \right);$$

$S^* = \left\{ S_{xx} \ S_{yy} \ S_{xy} \right\}$ - representa o tensor desviador incompleto;

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \text{matriz que relaciona o tensor das tensões } \sigma, \text{ com}$$

o respectivo desviador.

desse modo, pode-se reescrever $\|S\|$ como:

$$\|S\| = \sqrt{S \cdot S} = \sqrt{S^{*2} + s_{zz}^2} = \sqrt{S^{*2} + \sigma_m^2} \quad (4.18)$$

$$\|S\| = \sqrt{S^{*2} + \begin{Bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ 0 \end{Bmatrix} S^*} = \sqrt{\left(S^* + \begin{Bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ 0 \end{Bmatrix} \right) S^*} = \sqrt{\left(S^* + \begin{Bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ 0 \end{Bmatrix} \right) P \sigma}$$

$$\|S\| = \sqrt{\sigma^T P \sigma} \quad (4.19)$$

onde: σ^T - tensor das tensões transposto.

Com base na equação 4.19, reescrevem-se as expressões 4.12, 4.13 e 4.16 como:

$$f(\sigma, q) = \sqrt{\sigma^T P \sigma} - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + k \cdot \bar{\alpha}) \quad (4.20)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} P \sigma \quad (4.21)$$

$$\dot{\bar{\alpha}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^T P \sigma \quad (4.22)$$

Integra-se, a seguir, o modelo triaxial adaptado ao EPT em um intervalo de interesse $\Delta t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$. A integração ocorre segundo um procedimento puramente implícito (o Backward-Euler Difference Scheme), proposto por SIMO, J.C.; HUGHES, T.J.R. (1988). As relações constitutivas poderão ser escritas de forma incremental, viabilizando-se a atualização das variáveis de estado $\{\sigma, \varepsilon^p, \bar{\alpha}\}_i$ dadas no instante de tempo inicial t_i , para seus valores $\{\sigma, \varepsilon^p, \bar{\alpha}\}_{i+1}$ no instante de tempo final $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Após a integração, as expressões 4.1 e 4.20 a 4.22 resultam:

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \dot{\varepsilon} \Delta t = \varepsilon_i + \nabla^s(\Delta u) \quad (4.23)$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \dot{\varepsilon}_{i+1}^p \Delta t = \varepsilon_i^p + \dot{\gamma}_{i+1} \Delta t P \sigma_{i+1} = \varepsilon_i^p + \gamma_{i+1} P \sigma_{i+1} \quad (4.24)$$

$$\bar{\alpha}_{i+1} = \bar{\alpha}_i + \dot{\bar{\alpha}}_{i+1} \Delta t = \bar{\alpha}_i + \dot{\gamma}_{i+1} \Delta t \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{f}_{i+1} = \bar{\alpha}_i + \gamma_{i+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{f}_{i+1} \quad (4.25)$$

$$\sigma_{i+1} = C [\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^p] \quad (4.26)$$

onde : $\gamma_{i+1} = \Delta t \cdot \dot{\gamma}_{i+1}$ para simplificação da notação utilizada;

$\bar{\alpha}_{i+1}$ - deformação plástica efetiva no incremento 'i + 1';

$$\bar{f}_{i+1} = \sqrt{\sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1}} ;$$

C - matriz dos módulos constitutivos de rigidez para o EPT.

A condição de complementaridade de Kuhn-Tucker, reescreve-se:

$$f(\sigma_{i+1}, q_{i+1}) \leq 0$$

$$\gamma_{i+1} \geq 0$$

$$\gamma_{i+1} f(\sigma_{i+1}, q_{i+1}) = 0, \text{ pois } \Delta t \geq 0 \quad (4.27)$$

Para que o processo iterativo possa ser iniciado, as expressões 4.23 a 4.27 devem estar relacionadas a um estado de tensões originário de uma tentativa inicial que será tomada, por simplicidade, como o resultado da aplicação de relação elástica linear entre tensão e deformação. A indicação das variáveis relativas a esse estado de tensões será feita através do superíndice 't'.

$$\sigma_{i+1}^t = \mathbf{C}[\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^p] \quad (4.28)$$

que resulta em:

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \nabla^s \mathbf{u} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{q}_{i+1}^t = \mathbf{q}_i \quad (4.30)$$

$$\mathbf{f}_{i+1}^t = \mathbf{f}(\sigma_{i+1}^t, \mathbf{q}_{i+1}) \quad (4.31)$$

$$\Xi_{i+1}(\gamma) = [\mathbf{C}^{-1} + \gamma_{i+1} \mathbf{P}]^{-1} \quad (4.32)$$

$$\sigma_{i+1} = \Xi_{i+1}(\gamma) \mathbf{C}^{-1} \sigma_{i+1}^t \quad (4.33)$$

onde: $\Xi_{i+1}(\gamma)$ - representa a matriz elástica tangente modificada.

As expressões 4.27, quando relacionadas ao estado de tentativa, possibilitam verificar uma situação de carregamento em regime elástico ou plástico, com base nas seguintes condições:

a) se $\mathbf{f}_{i+1}^t < 0 \rightarrow \mathbf{f}_{i+1} < 0$

e portanto: $\gamma_{i+1} \mathbf{f}_{i+1} = 0 \rightarrow \gamma_{i+1} = 0$ (incremento elástico)

b) se $\mathbf{f}_{i+1}^t > 0 \rightarrow \varepsilon_{i+1}^{e(t)} \neq \varepsilon_{i+1} \rightarrow \gamma_{i+1} \neq 0 \rightarrow \gamma_{i+1} > 0$ ($\gamma_{i+1} \geq 0$ p/ definição)

e portanto: $\gamma_{i+1} \mathbf{f}_{i+1} = 0 \rightarrow \mathbf{f}_{i+1} = 0$ (incremento plástico)

As expressões 4.29 a 4.33, que representam o estado de tentativa em regime elástico linear, dependem da determinação do parâmetro γ , o qual pode ser obtido pela imposição do critério ($f=0$) no instante t_{i+1} . Assim, a

expressão $f = f(\sigma, q)$, pode ser escrita na forma $f = f(\gamma)$. Suponha-se $(f(\sigma, q) \in \partial E_\sigma)$, então:

$$f(\sigma, q) = \bar{f}(\sigma, q) - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot k(\bar{\alpha}_{i+1}) = 0, \quad (4.34)$$

onde: $k(\bar{\alpha}_{i+1}) = (\sigma_y + k \cdot \bar{\alpha}_{i+1})$.

elevando-se ao quadrado ambos os membros da expressão, tem-se:

$$f^2 = \bar{f}^2 - 2 \cdot \bar{f} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot k(\bar{\alpha}_{i+1}) + \frac{2}{3} \cdot k^2(\bar{\alpha}_{i+1}) = \frac{1}{2} \bar{f}^2 - \bar{f} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot k(\bar{\alpha}_{i+1}) + \frac{1}{3} \cdot k^2(\bar{\alpha}_{i+1}) = 0$$

agrupando-se os termos semelhantes, vem:

$$\frac{1}{2} \cdot \bar{f}^2 - \frac{1}{3} \cdot k^2(\bar{\alpha}_{i+1}) \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3 \cdot \bar{f}}{k(\bar{\alpha}_{i+1})} - 1 \right] = 0 \quad (4.35)$$

lembrando-se da expressão 4.34, onde:

$$\bar{f} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot k(\bar{\alpha}_{i+1})$$

que, introduzida na expressão 4.35, fornece:

$$\frac{1}{2} \cdot \bar{f}^2 - \frac{1}{3} \cdot k^2(\bar{\alpha}_{i+1}) \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot k(\bar{\alpha}_{i+1})}{k(\bar{\alpha}_{i+1})} - 1 \right] = 0$$

de onde conclui-se que:

$$\frac{1}{2} \bar{f}_{i+1}^2 - \frac{1}{3} \cdot k^2(\bar{\alpha}_{i+1}) = 0 \quad (4.36)$$

que pode ser escrita na forma:

$$[f(\gamma_{i+1})]^2 = \frac{1}{2} [\bar{f}(\gamma_{i+1})]^2 - [R(\gamma_{i+1})]^2 = 0 \quad (4.37)$$

$$\text{onde: } [R(\gamma_{i+1})]^2 = \frac{1}{3} [k(\bar{\alpha}_{i+1})]^2 = \frac{1}{3} \left\{ k \left[\bar{\alpha}_i + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \gamma_{i+1} \cdot \bar{f}_{i+1}(\gamma_{i+1}) \right] \right\}^2 \quad (4.38)$$

Para o caso de isotropia, a matriz constitutiva C, e a matriz P têm as mesmas características, e podem ser reescritas em função de matrizes diagonalizadas como:

$$P = Q\Lambda p Q^T \quad (4.39)$$

$$C = Q\Lambda c Q^T \quad (4.40)$$

$$\text{onde: } Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix};$$

$$\Lambda p = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \Lambda c = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

reescrevendo-se a expressão para \bar{f}^2 , tem-se:

$$(\bar{f}_{i+1})^2 = \sigma^T P \sigma = \sigma^T Q \Lambda p Q^T \sigma \quad (4.41)$$

e, utilizando-se a diagonalização dada em 4.39 e 4.40, manipula-se a expressão 4.41 que pode, então, ser escrita segundo um estado de tensão relativo à tentativa em regime elástico.

$$[\bar{f}(\gamma_{i+1})]^2 = \frac{(\sigma_x^t + \sigma_y^t)^2}{6 \left[1 + \left(\frac{E}{3(1-\nu)} \right) \gamma_{i+1} \right]^2} + \frac{(\sigma_x^t - \sigma_y^t)^2 + 4(\tau_{xy}^t)^2}{2[1 + 2G\gamma_{i+1}]^2} \quad (4.42)$$

Em resumo, o procedimento de atualização das variáveis de estado $\{\sigma, \varepsilon^p, \bar{\alpha}\}_i$, para seus valores $\{\sigma, \varepsilon^p, \bar{\alpha}\}_{i+1}$, devido a um acréscimo de carregamento, pode ser descrito como:

- Imposição de incremento em regime elástico linear (expressões 4.28 a 4.31);
- Resolução da equação 4.37 com $[\bar{f}(\gamma_{i+1})]^2$ dado pela expressão 4.42, obtendo-se o valor de γ_{i+1} ;
- A partir de γ_{i+1} , determinam-se as variáveis de estado no instante 'i+1', pelas expressões 4.32, 4.33, 4.25 e 4.24 (na ordem indicada).

4.5. O procedimento incremental-iterativo

O procedimento incremental-iterativo utilizado para a análise do elemento de placa desenvolve-se similarmente ao procedimento empregado na análise do elemento de barra, e por esse motivo, o presente capítulo contemplará uma abordagem sucinta, ressaltando-se apenas os aspectos que diferenciem este procedimento do abordado no capítulo 3.

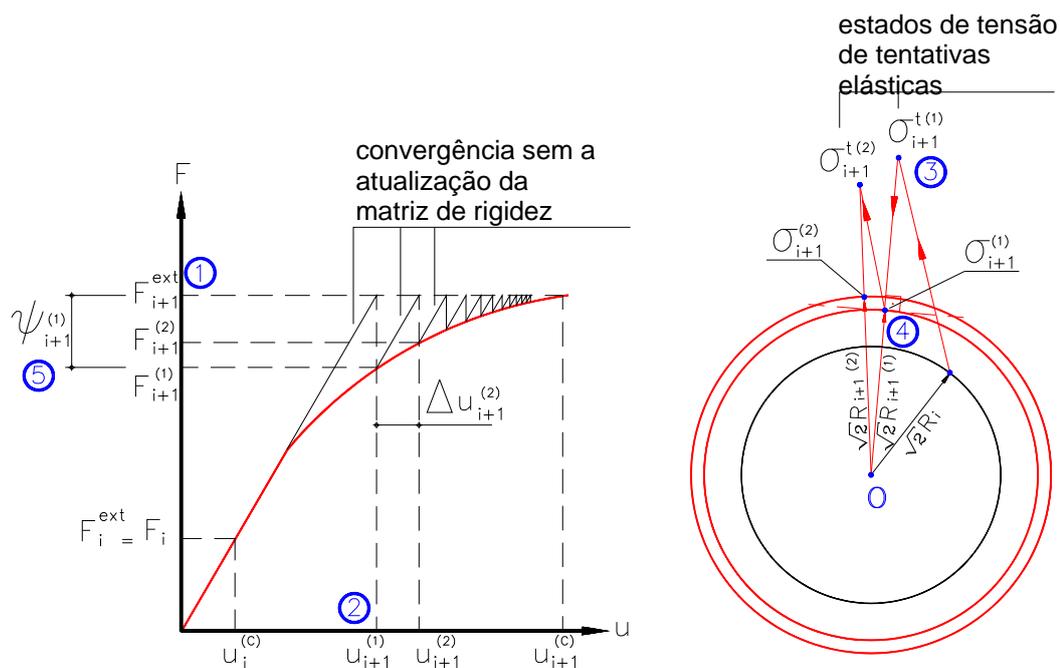


FIGURA 4.2 - Procedimento incremental-iterativo para o modelo elastoplástico triaxial

A FIGURA 4.2 representa o comportamento do estado de forças e seus respectivos estados triaxiais de tensão em uma estrutura genérica. No espaço das tensões desviadoras, o critério de Von Mises corresponde a uma hipersfera de raio $\sqrt{2}.R$, ou, de acordo com a expressão 4.38:

$$\sqrt{2}.R = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (k \cdot \bar{\alpha}_{i+1}).$$

passo 1 - aplica-se o incremento de forças 'i+1' somado ao resíduo de forças do incremento de forças anterior 'i' à estrutura, quando existir. Isto caracteriza o início da primeira iteração do incremento 'i+1'.

do equilíbrio no incremento 'i', tem-se
$$\psi_i = K_i^G \cdot u_i^c + F_i^{\text{ext}} \quad (4.43)$$

no incremento 'i+1', aplicar-se-á o vetor de forças:

$$\Delta F_{i+1}^{\text{ext}} = \Delta F_{i+1}^{\text{ext}} + \psi_i \quad (4.44)$$

passo 2 - assume-se comportamento elástico linear entre o vetor de forças aplicado e o de deslocamentos obtido.

$$\Delta u_{i+1} = [K_i^G]^{-1} \cdot \Delta F_{i+1}^{\text{ext}}, \quad (4.45)$$

$$\text{portanto } \Delta \varepsilon_{i+1} = B \cdot \Delta u_{i+1} \quad (4.46)$$

$$\text{e } \Delta \sigma_{i+1}^t = C \cdot \Delta \varepsilon_{i+1} \quad (4.47)$$

com a tentativa de comportamento elástico linear, resultam:

$$\varepsilon_{i+1}^{p(t)} = \varepsilon_i^p \quad (4.48)$$

$$\bar{\alpha}_{i+1}^t = \bar{\alpha}_i \quad (4.49)$$

$$\text{passo 3- acumula-se o tensor de tensões } \sigma_{i+1}^t = \sigma_i + \Delta \sigma_{i+1}^t \quad (4.50)$$

onde : σ_{i+1}^t - tensor de tensões elásticas (tentativa inicial) a ser analisado.

passo 4- verifica-se o escoamento do elemento através do critério de Von Mises:

$$\sigma_{i+1}^{\text{ef}} \geq \sigma_{y_i} \quad (4.51)$$

onde : $\sigma_{i+1}^{\text{ef}} = \sqrt{2 \cdot J_2^t}$ - tensão efetiva do critério de Von Mises relativo ao estado de tentativa de acordo com a expressão 4.9;

$$\sigma_{y_i} = \sigma_{y_{i-1}} + \sqrt{\frac{2}{3}} (k \cdot \bar{\alpha}_i) \text{ - tensão de escoamento para o caso triaxial.}$$

A atualização da tensão de escoamento se dá a partir da tensão de escoamento inicial (σ_y), sendo sua primeira atualização dada

$$\text{por: } \sigma_{y_i} = \sigma_y + \sqrt{\frac{2}{3}} (k \cdot \bar{\alpha}_1).$$

Se ocorreu o escoamento, ou seja, $\sigma_{i+1}^{\text{ef}} \geq \sigma_{y_i}$, faz-se a redução do tensor de tensões σ_{i+1}^t para a superfície de escoamento, obtendo-se σ_{i+1} de acordo com o modelo constitutivo deduzido. Se não ocorreu o escoamento

durante o incremento 'i+1', $\sigma_{i+1}^{ef} < \sigma_{y_i}$, conclui-se verdadeira a hipótese inicial de incremento elástico, e o tensor de tensões ao final do incremento 'i+1' é:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^t.$$

passo 5- através de integração das tensões no domínio do elemento, calculam-se as forças nodais internas, que comparadas ao vetor de forças externas, permitem determinar o resíduo ψ_{i+1} . Se este for maior que a tolerância estipulada no modelo, retorna-se ao **passo 1**, aplicando-se porém, apenas o vetor de forças do resíduo, e caracterizando-se então, o início da 2ª iteração do incremento 'i+1'. Caso contrário, se este for menor que a tolerância estipulada, conclui-se este incremento 'i+1' de forças, e parte-se para um novo incremento 'i+2', caso exista.

O vetor resíduo de forças para a estrutura na iteração 'j' do incremento 'i' pode ser escrito como na expressão 3.27:

$$\psi_i = \left(\sum_{e=1}^{ne} \int_{A_e} \mathbf{B}^T \sigma_i^j \cdot dA_e \right) + \mathbf{F}_i^{ext}.$$

onde: ne - número de elementos;

A_e - área do elemento.

Assim como no modelo implementado às barras, a convergência do processo iterativo (dentro de um incremento de forças), é controlada segundo dois critérios: critério de convergência de forças e de deslocamentos.

Estabelece-se que a convergência do processo iterativo quanto às forças foi atingida no instante em que a razão entre a norma do vetor de resíduos de forças e a norma do vetor de forças aplicadas no incremento esteja dentro da tolerância estipulada. A convergência em deslocamentos é atingida no instante em que a razão entre norma do incremento de deslocamentos para a estrutura (globais) entre duas iterações consecutivas, e a norma do respectivo vetor global esteja dentro da tolerância estipulada.

$$\frac{\|\psi_i^j\|}{\|\Delta \mathbf{F}_i^{ext}\|} \leq t_F \quad \text{e} \quad \frac{\|\Delta \mathbf{u}_i^j\|}{\|\mathbf{u}_i^j\|} \leq t_u \quad (4.52)$$

onde : $\| \cdot \|$ - representa a norma Euclidiana de um vetor;

ψ_i^j - vetor resíduo de forças na iteração 'j' do incremento 'i';

ΔF_i^{ext} - vetor dos incrementos de força no incremento 'i';

u_i^j - vetor deslocamento do estado de equilíbrio final do incremento 'i';

Δu_i^j - vetor dos incrementos de deslocamentos na iteração 'j';

t_F e t_u - tolerâncias em força e deslocamento, respectivamente.

4.6. A implementação no Sistema ANSER

4.6.1. Determinação da raiz da função $f^2(\gamma)$

Para a determinação da raiz (γ) da equação 4.37, que representa a superfície de escoamento de raio $\sqrt{2}.R$, empregou-se o Método de Newton devido à sua rápida convergência (quadrática), e possível aplicabilidade para a resolução desta equação em específico, pois um estudo sobre o comportamento da curva $f^2(\gamma)_{x\gamma}$ para vários estados de tensão significativos mostrou-a invariável em seu aspecto. Como 1ª aproximação da variável γ , inicializando-se a resolução, aplica-se o Método de Newton em $\gamma = 0$. Desta aplicação, inicializa-se o método com γ_0 que, para os casos analisados atingiu, na pior hipótese, 75% do valor final para a variável γ .

A FIGURA 4.3 mostra o aspecto das curvas envolvidas, e os pontos característicos da curva $f^2(\gamma)_{x\gamma}$ para $\gamma = 0$ e $\gamma = \infty$.

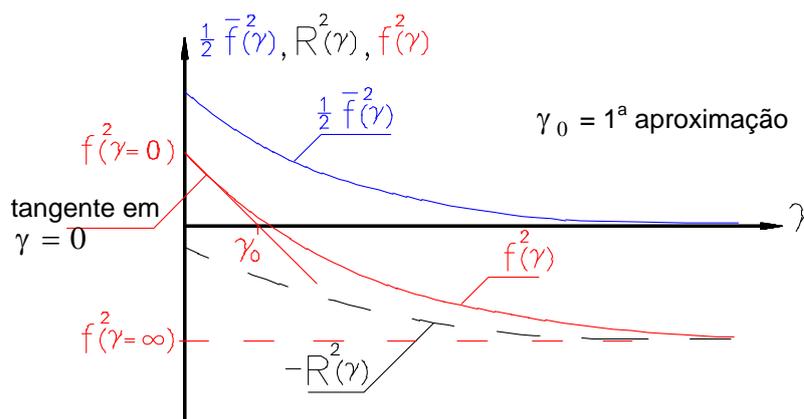


FIGURA 4.3- Comportamento da Curva $f^2(\gamma) \times \gamma$

onde :

$$f^2(\gamma = \infty) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sigma_y + k. \left(\bar{\alpha}_{i+1} + \sqrt{\frac{\frac{1}{6} \cdot (\sigma_x^t + \sigma_y^t)^2 + \frac{1}{6} \cdot (\sigma_x^t - \sigma_y^t)^2 + (\tau_{xy}^t)^2}{\frac{E}{3 \cdot (1-\nu)}} + \frac{G_T}{G_T}} \right) \right]^2 \leq 0$$

$$f^2(\gamma = 0) = \frac{1}{3} \left[(\sigma_x^t - \sigma_y^t)^2 + \sigma_x^t \cdot \sigma_y^t \right] + (\tau_{xy}^t)^2 - \left[\frac{\sigma_{y_i} + k. \bar{\alpha}_{i+1}}{\sqrt{3}} \right]^2 \geq 0;$$

$\sigma_x^t, \sigma_y^t, \tau_{xy}^t$ - representam o estado de tentativa elástico para o EPT;

$G_T = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$ - módulo de elasticidade transversal.

4.6.2. A integração da tensão de análise

Por tratar-se de um modelo de análise aplicado a elemento finito não-estratificado, torna-se necessária a integração da tensão de análise (σ^{ef}) ao longo da espessura da placa, de modo a exprimirem-se coerentemente as relações elastoplásticas em termos de diagramas momento-curvatura trilineares conforme o idealizado na FIGURA 3.2. Caracteriza-se como variável de análise então, o momento fletor efetivo (M^{ef}) dado por:

$$M^{ef} = \int_{z=-\frac{e}{2}}^{z=\frac{e}{2}} \sigma^{ef} \cdot z \cdot dz \quad (4.53)$$

onde: h - espessura da placa.

Para o EPT no plano xy , o momento efetivo pode ser expresso de acordo com os esforços de placa, através da integração da tensão efetiva dada por $\sqrt{2.J_2}$:

$$M^{ef} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot (M_x^2 + M_y^2 - M_x \cdot M_y) + 2 \cdot M_{xy}^2} \quad (4.54)$$

A relação entre os momentos fletores e as curvaturas é dada pela matriz constitutiva 'C' adaptada coerentemente para 'C*':

$$C^* = \frac{h^3}{12} \cdot C = D \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

onde: $D = \frac{Eh^3}{12 \cdot (1-\nu^2)}$.

E desse modo, a matriz 'B' passa então a relacionar os deslocamentos nodais às curvaturas ($1/r$) no domínio do elemento.

4.6.3. A determinação do resíduo de forças

A expressão para o resíduo de forças indicado em 3.27 pode ser reescrita em função da soma da integração dos resíduos de momentos fletores nos pontos de Gauss para cada um dos elementos finitos:

$$\psi_i = \left(\sum_{e=1}^{ne} \int_{A_e} B^T \sigma_i^j \cdot dA_e \right) + F_i^{ext} = \sum_{e=1}^{ne} \int_{A_e} B^T \Delta M_e \cdot dA_e \quad (4.55)$$

onde: B - matriz que relaciona as curvaturas aos deslocamentos nodais;

$\Delta M_e = M_e^t - M_e$ - representa a diferença entre os momentos de placa (M_x^t, M_y^t, M_{xy}^t) nos pontos de Gauss oriundos de tentativa em regime elástico linear, e os momentos de placa (M_x, M_y e M_{xy}) obtidos pela aplicação do modelo elastoplástico.

4.6.4. Melhorias no Sistema

O sistema ANSER já possuía as rotinas de um modelo elastoplástico integrado segundo um procedimento explícito. Encontrava-se implementado o elemento de placa triangular com um ponto-amostra de esforços, ou ponto de integração de Gauss (no C.G. do elemento), e com quatro pontos-amostra (no C.G. e em mais três pontos de Gauss no domínio do elemento). Toda a parte referente à análise elastoplástica foi então removida, e em seu lugar, introduzido o modelo elastoplástico abordado neste trabalho, proporcionando todas as vantagens que um modelo integrado implicitamente possui.

O modelo elastoplástico deduzido neste capítulo foi incorporado ao elemento finito triangular de placa T3AF, e ao elemento finito quadrilateral formado pela condensação estática de quatro elementos triangulares. O sistema ANSER passou a empregar os elementos triangulares e quadrilaterais para a análise de placas, de acordo com o procedimento descrito a seguir:

a) utilizam-se elementos finitos triangulares com 4 pontos de saída de esforços quando estes são abordados isoladamente, e elementos triangulares com 1 ponto de saída de esforços quando da composição do quadrilátero, como ilustrado na FIGURA 4.4.

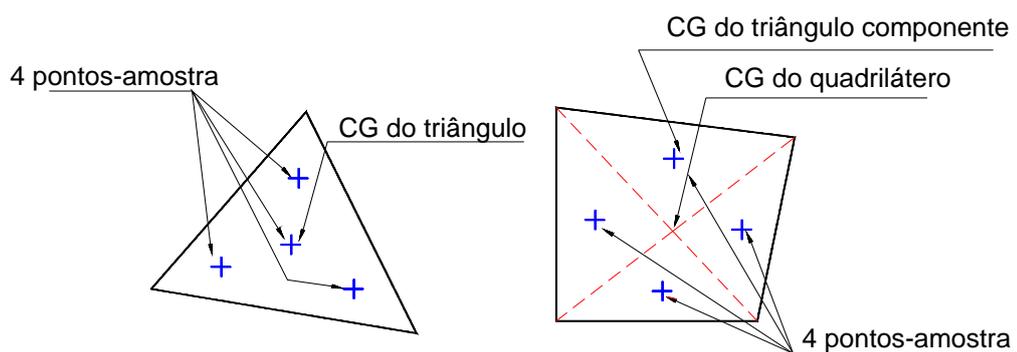


FIGURA 4.4 - Pontos-amostra e acoplamento para a formação do quadrilátero

b) obtêm-se as matrizes de rigidez (k^e), momento-deslocamento (M), e os vetores dos esforços iniciais (M_0), e de forças (F) para o quadrilátero a partir do acoplamento das matrizes e vetores do elemento triangular, com

posterior condensação estática dos graus de liberdade (gdl) internos do quadrilátero. A subrotina de condensação utilizada foi a proposta por WILSON, E.L. (1974). Deste modo, tem-se a redução dos gdl das matrizes e vetores, conforme esquema a seguir:

$$\begin{aligned}
 k^e(15,15) &\rightarrow k^e(12,12) \\
 M(12,15) &\rightarrow M(12,12) \\
 M_0(15) &\rightarrow M_0(12) \\
 F(15) &\rightarrow F(12)
 \end{aligned}
 \tag{4.56}$$

A partir das matrizes e vetores dos elementos triangulares (isolados) e quadrilaterais, monta-se o sistema global de equações.

c) resolve-se o sistema de equações e obtêm-se os deslocamentos. A partir destes, determinam-se, através da matriz momento-deslocamento, os esforços M_x^t, M_y^t, M_{xy}^t nos pontos-amostra dos elementos. Se um elemento triangular escoou, faz-se o acerto do tensor dos esforços para M_x, M_y, M_{xy} , de acordo com o modelo exposto neste capítulo. Posteriormente, através da comparação entre as forças nodais aplicadas e a integração dos esforços no domínio do elemento determina-se o vetor de resíduos que será utilizado na verificação da convergência do processo.

Se um elemento quadrilateral atinge o escoamento, o mesmo é recomposto pelos quatro triângulos em que foi dividido inicialmente. Cada um de seus 4 pontos-amostra (um por triângulo) é analisado como sendo o centróide do correspondente triângulo componente do quadrilátero. Do mesmo modo que no elemento triangular isolado, é feita a integração dos esforços no domínio do triângulo segundo um ponto-amostra, e ao final da análise dos 4 triângulos (4 pontos de saída de esforços), tem-se o vetor resíduo de forças com 15 componentes e referido aos 4 vértices e ao C.G. do elemento quadrilateral. Procede-se, então, a condensação estática do vetor de resíduos referente aos gdl do nó interno do quadrilátero, utilizando-

se para isso os mesmos pivôs advindos da condensação do vetor de forças do item **b**.

A análise é então retomada como descrito no **passo 1** do item **4.5**.

Os modelos de barra e de placa apresentados, foram colocados em funcionamento no sistema ANSER. A atuação conjunta dos dois tipos de elemento exigiu que as tolerâncias fossem determinadas globalmente, ou seja, a tolerância de forças passou a ser calculada pela razão entre o vetor de resíduo total nos nós (resultado dos resíduos dos elementos de placa somados aos dos elementos de barra), e o vetor global de forças no incremento.

A listagem da subrotina para a condensação estática dos gdl internos ao quadrilátero encontra-se no **Apêndice 1**, e no **Apêndice 2**, encontra-se a listagem da subrotina utilizada na determinação da raiz da função $f(\gamma)$.

4.7. Caracterização de seções de concreto armado

A análise de pavimentos de concreto armado com a consideração da não-linearidade física envolve duas caracterizações distintas para o material concreto armado. No processamento da estrutura, buscando uma maior representatividade do comportamento mecânico do material em todo o pavimento, os diagramas momento-curvatura convencionais para as seções devem ser elaborados a partir de valores médios de resistência. Ao final do processamento, como prescreve a NB-1/78 'Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado', efetua-se o dimensionamento das seções a partir dos valores de cálculo de resistência do aço e do concreto.

Para o concreto, de acordo com as situações utilizadas, serão tomados os seguintes valores médios de resistência:

na compressão: $f_{cm} = f_{ck} + 3.5$ (MPa), como sugerido no item 8.2.5 da NB-1;

na tração por flexão (para a determinação do momento de fissuração M_r):

$f_{ctm} = 1.5f_{ctk}$ - para peças de seção retangular (lajes e vigas isoladas) **(4.57)**

$f_{ctm} = 1.2f_{ctk}$ - para peças de seção T ou duplo T (vigas de pavimento). **(4.58)**

módulo de elasticidade: será adotado o módulo de elasticidade secante sugerido no item 4.2.3.1 da NB-1, multiplicado por pelo fator 2/3, de modo a contemplar, mesmo que simplificada, os efeitos da deformação lenta.

$$E_c^* = \frac{2}{3} \times 0.9 \times 6600 \times \sqrt{f_{ck} + 3.5} \text{ (MPa)} \quad (4.59)$$

coeficiente de Poisson: será tomado o coeficiente relativo às deformações elásticas $\nu = 0.2$, de acordo com o item 8.2.6 da NB-1.

Para o aço, na falta de especificações normativas, ou referências em trabalhos técnicos, serão adotados os valores médios iguais aos valores característicos. Esta aproximação mostra-se razoável uma vez que ensaios já realizados com esse material evidenciam a ocorrência de valores médios próximos aos valores característicos de resistência.

Os diagramas momento-curvatura constituem aproximações linearizadas para a representação do comportamento de seções de concreto armado solicitadas por momento fletor. Neste trabalho, como já mencionado, será admitido um diagrama trilinear como o da FIGURA 4.5.

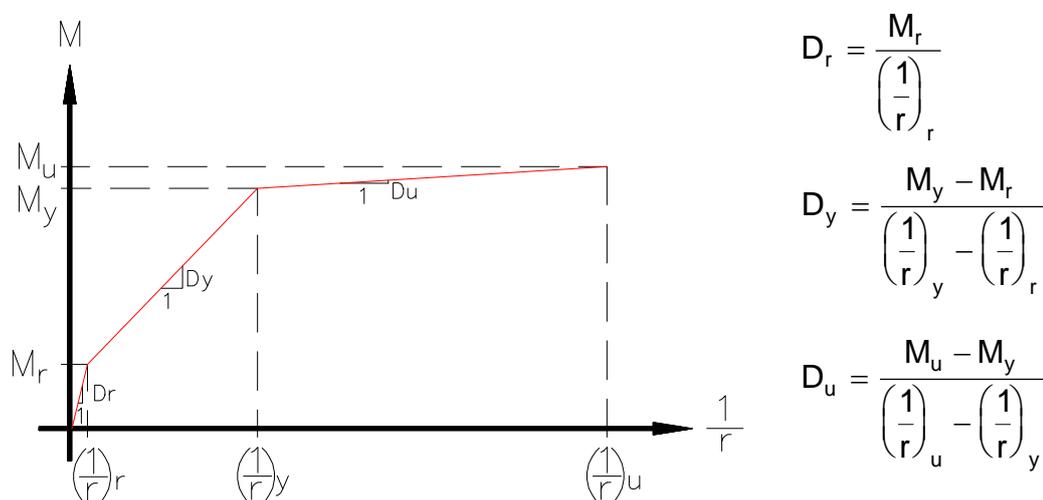


FIGURA 4.5 - Diagrama momento-curvatura trilinear idealizado para seções de concreto armado

Os módulos plásticos de endurecimento isótropo correspondentes aos dois trechos de encruamento (k_y e k_u) podem ser obtidos da expressão 2.24.

$$k_y = \frac{D_y}{1 - \frac{D_y}{D_r}} \quad (4.60)$$

$$k_u = \frac{D_u}{1 - \frac{D_u}{D_r}} \quad (4.61)$$

O momento de fissuração é determinado no estágio Ia desprezando-se a existência das armaduras, em conformidade com o item 1.1.2 do Anexo da NB-1/78. A resistência do concreto à tração na flexão assume os valores dados em 4.57 ou 4.58, conforme a seção transversal. A FIGURA 4.6 representa a distribuição de tensões e de deformações genéricas na seção transversal.

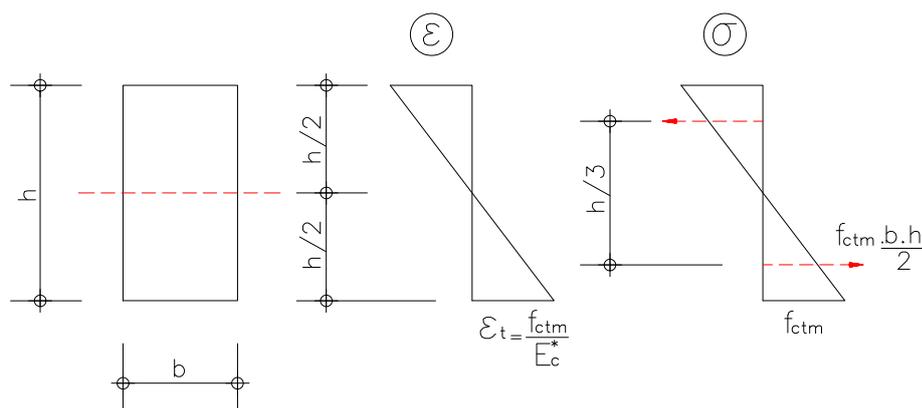


FIGURA 4.6 - Fissuração para o Estádio Ia.

O momento de fissuração pode ser obtido pela expressão:

$$M_r = \frac{f_{ctm} \cdot b \cdot h^2}{6} \quad (4.62)$$

da expressão clássica de flexão:

$$M = -E \cdot I \cdot (1/r)$$

deduz-se que a curvatura correspondente vale:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_r = \frac{2 \cdot f_{ctm}}{E_c \cdot h} \quad (4.63)$$

O escoamento da seção transversal, como utilizado por CORRÊA, M.R.S. (1991), inicia-se com o escoamento da armadura tracionada ($\sigma_{st} = f_{yk}$). O concreto tracionado não contribui, e as tensões de compressão tanto no concreto como no aço comprimido são proporcionais às respectivas deformações, mantendo-se os respectivos módulos de elasticidade longitudinais. A FIGURA 4.7 ilustra a distribuição de tensões e de deformações na seção transversal.

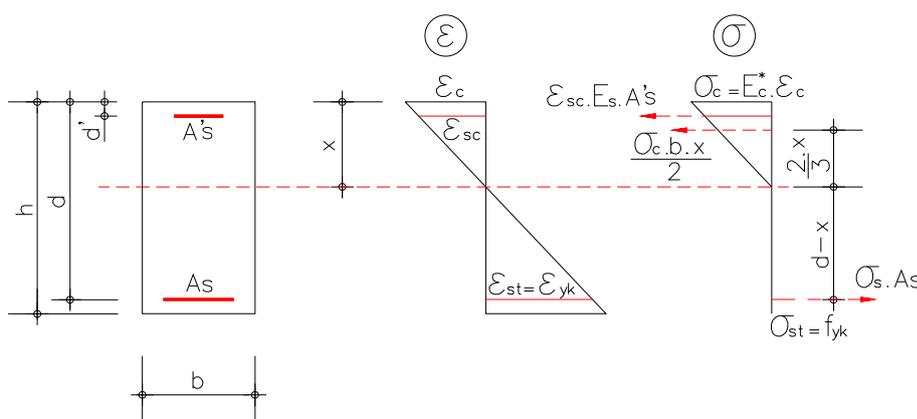


FIGURA 4.7 - Escoamento da seção.

Fazendo-se o equilíbrio de forças na seção transversal, obtém-se:

$$\frac{\sigma_c \cdot x \cdot b}{2} + \sigma_{sc} \cdot A_s' = \sigma_{st} \cdot A_s \quad (4.64)$$

que, em conjunto com a compatibilidade de deformações na seção:

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_{st}}{d-x} = \frac{\varepsilon_{sc}}{x-d'} \quad (4.65)$$

fornece a equação para a obtenção da linha neutra:

$$x = \frac{-\alpha_e (A_s + A_s') + \sqrt{\alpha_e \cdot \left[\alpha_e \cdot (A_s + A_s')^2 + 2 \cdot b \cdot (A_s' \cdot d' + A_s \cdot d) \right]}}{b} \quad (4.66)$$

onde: $\alpha_e = \frac{E_s}{E_c^*}$ - razão entre os módulos de deformação.

A partir da posição da linha neutra pode-se observar um dos dois fenômenos: escoamento da armadura tracionada, ou fibra mais comprimida do concreto atingindo a tensão $\sigma_c = f_{cm}$. Supondo-se o escoamento da

armadura de tração, a deformação na fibra mais comprimida do concreto, e a respectiva tensão, podem ser obtidas por:

$$\varepsilon_c = \frac{f_{yk} \cdot A_s}{\left(\frac{E_c^* \cdot x \cdot b}{2} + A_s' \cdot E_s \cdot \frac{(x - d')}{x} \right)} \quad (4.67)$$

$$\sigma_c = E_c^* \cdot \varepsilon_c \quad (4.68)$$

se ($\sigma_c \leq f_{cm}$), então a hipótese de escoamento da armadura é coerente, e passa-se à determinação do momento fletor de escoamento dado pela expressão 4.71. Caso contrário, se ($\sigma_c > f_{cm}$), a hipótese não se confirma. Neste caso, parte-se para a verificação da segunda hipótese: fibra mais comprimida do concreto com $\sigma_c = f_{cm}$. Determinam-se, então, os valores da tensão e da deformação no concreto:

$$\sigma_c = f_{cm} \quad (4.69)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c^*} \quad (4.70)$$

e, a partir desses, calcula-se o momento relativo ao escoamento dado pela expressão 4.71:

$$M_y = \frac{\sigma_c \cdot x \cdot b}{2} \cdot \left(d - \frac{x}{3} \right) + \frac{[\varepsilon_c \cdot (x - d')]}{x} \cdot E_s \cdot A_s' \cdot (d - d') \quad (4.71)$$

e a respectiva curvatura:

$$\left(\frac{1}{r} \right)_y = \frac{\varepsilon_{st}}{(d - x)} = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad (4.72)$$

Por fim, o momento último para a seção é determinado segundo uma das alternativas colocadas na FIGURA 4.8 ou 4.9. A primeira alternativa consiste em admitir que a fibra mais comprimida do concreto atinja a deformação de 0.35% ($\sigma_c = f_{cm}$), enquanto a deformação na armadura de tração atue com valores inferiores a 1.00% ($\sigma_{st} = f_{yk}$). A segunda alternativa admite deformação de 1.00% na armadura de tração, enquanto que a deformação na fibra mais comprimida do concreto situe-se entre os valores

de 0.20% e 0.35%. Como permite o item 4.1.1.1 da NB-1, o diagrama parábola retângulo foi substituído pelo retângulo equivalente. Uma terceira alternativa consiste no caso em que a deformação na armadura tracionada atinge o valor máximo de 1%, sem que no entanto, a fibra mais comprimida do concreto apresente deformação igual ou superior a 0.20%. Neste caso, o diagrama retangular deixa de existir, sendo substituído pelo diagrama triangular representado na FIGURA 4.9, de acordo com uma 3ª hipótese.

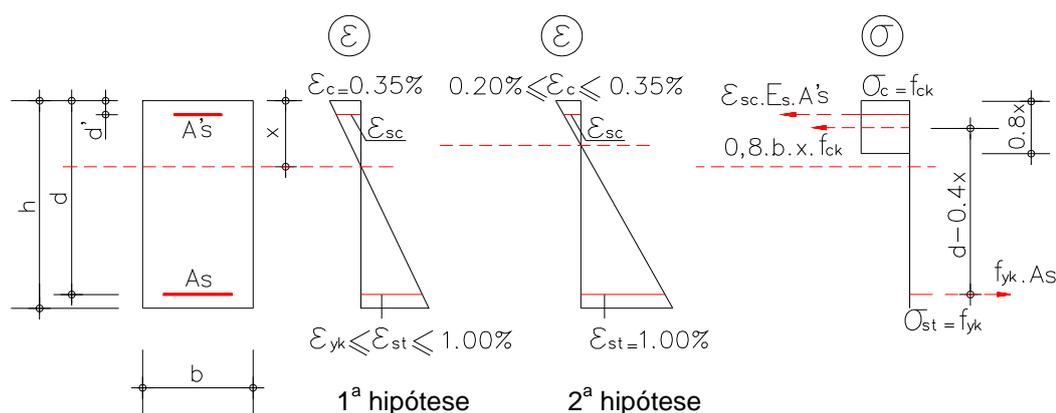


FIGURA 4.8 - Situação última da seção - 1ª e 2ª hipóteses.

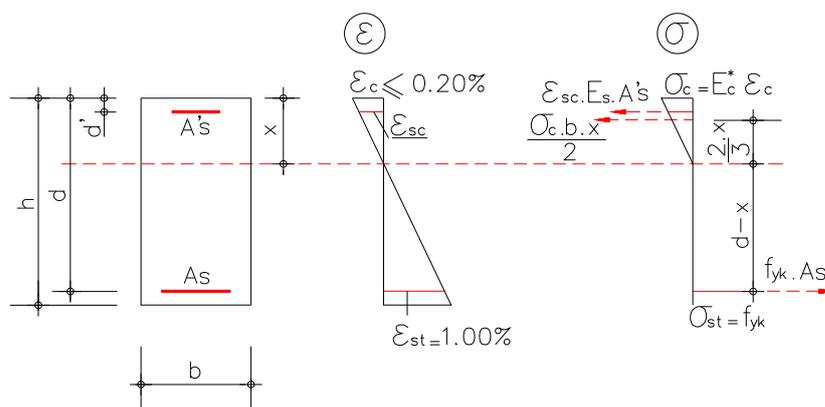


FIGURA 4.9 - Situação última da seção - 3ª hipótese.

A partir do equilíbrio de forças na seção transversal, e da equação de compatibilidade, chegam-se às expressões para a determinação da posição da linha neutra: para a 1ª e a 2ª hipóteses.

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \quad (4.73)$$

onde: $a = 0,8 \cdot b \cdot f_{cm}$; (4.74)

$$b = -\left[(0,8 \cdot b \cdot f_{cm} \cdot d) + (0,01 \cdot A_s' \cdot E_s) + (A_s \cdot f_{yk}) \right] \quad (4.75)$$

$$c = \left[(0,01 \cdot A_s' \cdot E_s \cdot d') + (A_s \cdot f_{yk} \cdot d) \right] \quad (4.76)$$

a expressão para o momento fletor último é dada por:

$$M_u = 0,8 \cdot x \cdot b \cdot f_{cm} \cdot (d - 0,4 \cdot x) + \varepsilon_{sc} \cdot E_s \cdot A_s' \cdot (d - d') \quad (4.77)$$

onde: $\varepsilon_{sc} = \frac{0,0035 \cdot (x - d')}{x}$ - para a 1ª hipótese; (4.78)

$$\varepsilon_{sc} = \frac{0,01 \cdot (x - d')}{(d - x)} \quad \text{- para a 2ª hipótese.} \quad (4.79)$$

as curvaturas representativas das duas hipóteses iniciais são:

$$\left(\frac{1}{r} \right)_u = \frac{0,0035}{x} \quad \text{- para a 1ª hipótese;} \quad (4.80)$$

$$\left(\frac{1}{r} \right)_u = \frac{0,010}{d - x} \quad \text{- para a 2ª hipótese.} \quad (4.81)$$

Se o valor da deformação na fibra mais comprimida do concreto for inferior a 0.20%, parte-se para o equacionamento da 3ª hipótese das equações de equilíbrio e compatibilidade na seção transversal, tem-se que a posição da linha neutra é dada por:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad (4.82)$$

onde: $a = E_c^* \cdot b$; (4.83)

$$b = \left[(2 \cdot A_s' \cdot E_s) + (200 \cdot A_s \cdot f_{yk}) \right]; \quad (4.84)$$

$$c = \left[(2 \cdot A_s' \cdot E_s \cdot d') + (200 \cdot A_s \cdot f_{yk} \cdot d) \right]; \quad (4.85)$$

A partir do posicionamento da linha neutra, determina-se o momento fletor último para a seção de acordo com a expressão:

$$M_u = A_s \cdot f_{yk} \cdot \left(d - \frac{x}{3} \right) - \varepsilon_{sc} \cdot E_s \cdot A_s' \cdot (d' - x) \quad (4.86)$$

com ε_{sc} dado pela expressão 4.79.

No **Apêndice 3** deste trabalho, encontra-se a listagem de um programa utilizado para a determinação do diagrama momento-curvatura trilinear de uma seção de concreto armado (de viga ou de laje).

As formulações desenvolvidas, bem como as implementações realizadas neste capítulo e no capítulo 3 constituem a base para o entendimento dos exemplos abordados no capítulo 5.

5. EXEMPLOS

5.1. Introdução

A elaboração deste capítulo tem o objetivo de abordar os aspectos práticos deste trabalho. Procura-se mostrar as aplicabilidades dos estudos desenvolvidos, discutindo a rotina de aplicação dos modelos elastoplásticos na solução de pavimentos de concreto armado, e na verificação quanto ao estado limite de deformação excessiva.

Os exemplos são apresentados de acordo com a ordem de abordagem dos temas no corpo do trabalho, partindo-se da solução de vigas até a solução de um pavimento completo.

Nos itens 5.2 e 5.3, estudam-se as vigas metálicas biapoiada e biengastada apresentadas por OWEN,D.R.J.;HINTON,E.(1980). Em seguida, no item 5.4, aborda-se uma das vigas de concreto armado experimentadas por BRESLER,B.;SCORDELIS,A.C.(1963). Os resultados experimentais são comparados a valores numéricos obtidos por CERVERA,M.; HINTON,E.(1986), e a resultados obtidos com o presente trabalho. No item 5.5, aborda-se uma das vigas ensaiadas e estudadas por ÁLVARES,M. S.(1993), e analisadas também por CARVALHO,R.C.(1994).

O item 5.6 apresenta uma placa metálica isolada simplesmente apoiada no seu contorno. Esta placa foi objeto de estudos realizados por OWEN,D.R.J.;HINTON,E.(1980).

Finalmente, no item 5.7, apresenta-se um pavimento de concreto armado estudado e apresentado por FRANÇA,R.L.S.(1984) quanto aos

efeitos das ações laterais, e por CORRÊA, M.R.S. (1991), quanto à não-linearidade física do material concreto armado.

5.2. Exemplo 1

A FIGURA 5.1 apresenta a viga biapoiada estudada por OWEN, D.R.J.; HINTON, E. (1980).

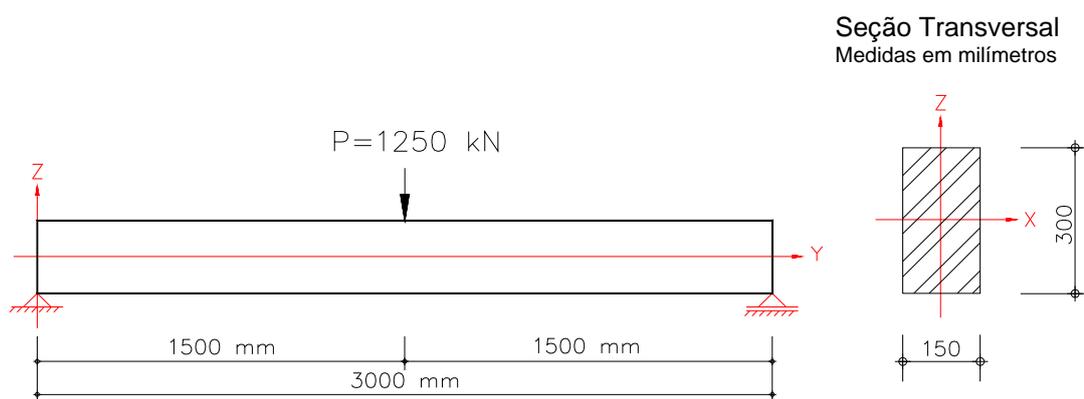


FIGURA 5.1 - Viga metálica biapoiada

A discretização da barra em elementos finitos pode ser observada na FIGURA 5.2 onde, por simplicidade, optou-se apenas pela colocação da numeração dos nós.

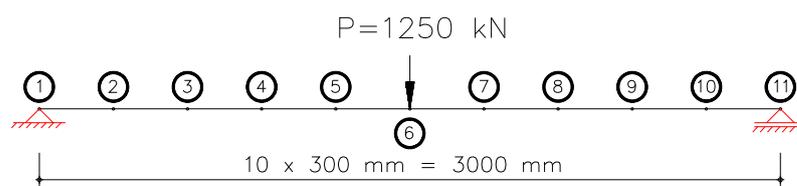


FIGURA 5.2 - Discretização / numeração dos nós

Características do material:

$E = 210 \text{ kN/mm}^2$ (módulo de elasticidade longitudinal);

$k = 0.0$ (parâmetro de encruamento isótropo);

$\sigma_y = 0.25 \text{ kN/mm}^2$ (tensão de escoamento).

A partir dos dados da seção transversal e do material, elabora-se o diagrama momento-curvatura convencional para a viga, onde constam apenas o momento de escoamento da seção (M_y), e a respectiva curvatura

$\left(\frac{1}{r}\right)_y$, por se tratar de caso de elastoplasticidade perfeita. O diagrama obtido

está apresentado na FIGURA 5.3.

$$M_y = Z_p \cdot \sigma_y = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot \sigma_y = \frac{150 \times 300^2}{4} \times 0.25 = 843750.0 \text{ kN.mm}$$

onde: Z_p - módulo plástico da seção transversal.

Da elasticidade, vem:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_y = \frac{M_y}{E \cdot I} = \frac{843750.0}{210 \times \left(\frac{150 \times 300^3}{12}\right)} = 1.19 \times 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$$

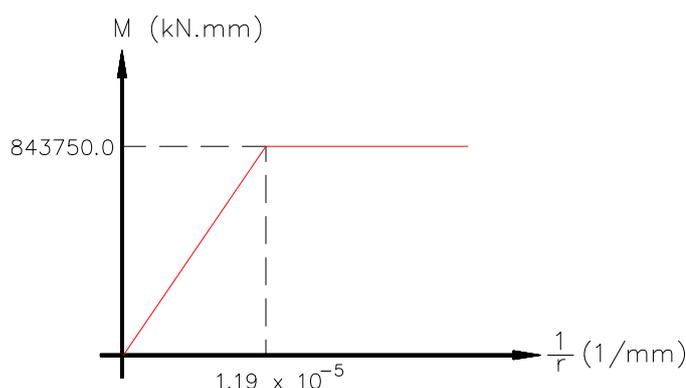


FIGURA 5.3 - Diagrama momento-curvatura convencional para a viga

Para a solução do problema elastoplástico da viga foram utilizados os seguintes parâmetros de controle:

- 11 incrementos de força, sendo o primeiro com 80% da força total e os demais com 2% da força total cada um;
- tolerância em força admitida para a convergência $\leq 0.3\%$;
- tolerância em deslocamento admitida para a convergência $\leq 0.1\%$;
- máximo de 50 iterações por incremento.

Os resultados obtidos com o presente trabalho são comparados aos apresentados por OWEN,D.R.J.;HINTON,E.(1980) no gráfico da FIGURA 5.4. Os referidos autores apresentam os resultados para dois modelos de análise: o não-estratificado, com poder de representação semelhante ao

apresentado neste trabalho, e o estratificado, com maior poder de representação do fenômeno elastoplástico, já que este modelo define a seção transversal da peça analisada em camadas que podem apresentar diferentes características elásticas e de plasticidade. O modelo em camadas mostra-se ainda mais eficiente na análise elastoplástica de peças de concreto armado, pois tem a capacidade de definir o aço em uma das camadas do modelo separadamente do concreto, com suas características elásticas e plásticas individualizadas.

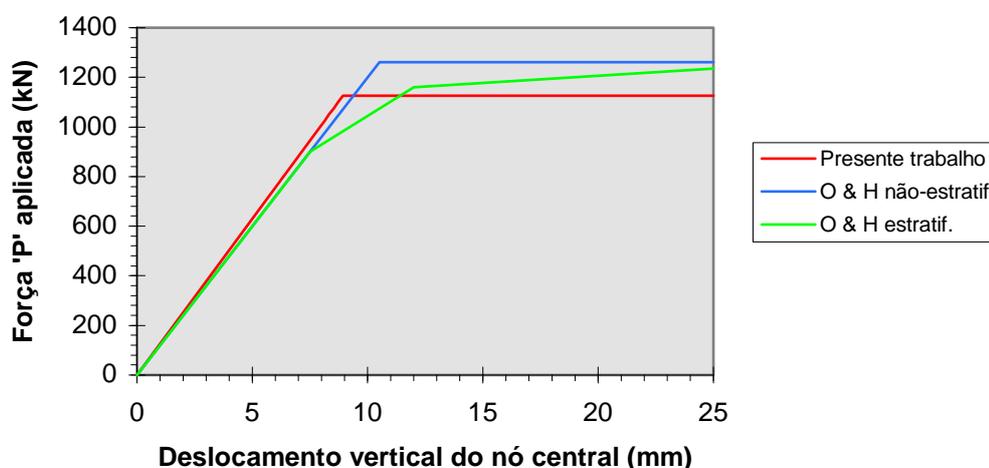


FIGURA 5.4 - Diagrama força-deslocamento do nó 6

Por tratar-se de material com comportamento elastoplástico perfeito, e o modelo mecânico ser o não-estratificado, pode-se determinar a força ' P_u ' que transforma a viga em mecanismo, aplicando-se a teoria das rótulas plásticas:

$$P_u = \frac{4.M_y}{L} = \frac{4 \times 843750.0}{3000} = 1125.0 \text{ kN}$$

onde: L - comprimento da viga.

O deslocamento do nó central correspondente ao final do regime elástico (w_u) é obtido por:

$$w_u = \frac{P_u \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{1125.0 \times 3000^3}{48 \times 210 \times \left(150 \times \frac{300^3}{12}\right)} = 8.93 \text{ mm}$$

Como pode-se observar, os resultados obtidos pelo presente trabalho encontram-se em perfeita concordância com os apresentados pela teoria das rótulas plásticas e pela elasticidade linear.

5.3. Exemplo 2

A FIGURA 5.5 apresenta a viga biengastada estudada por OWEN,D.R.J.;HINTON,E.(1980).

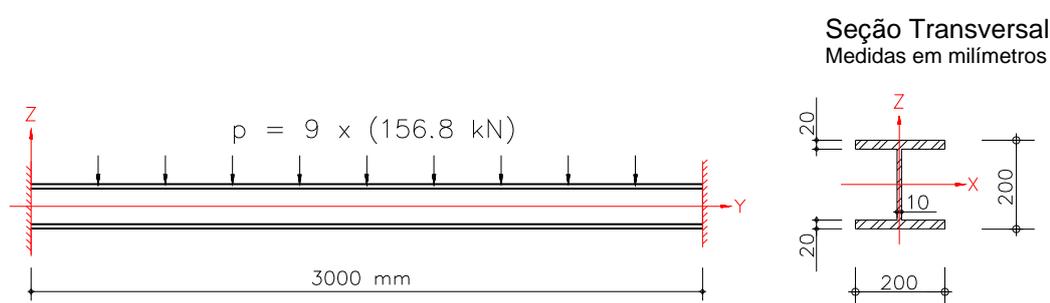


FIGURA 5.5 - Viga metálica biengastada

A discretização da viga em elementos finitos pode ser observada na FIGURA 5.6.

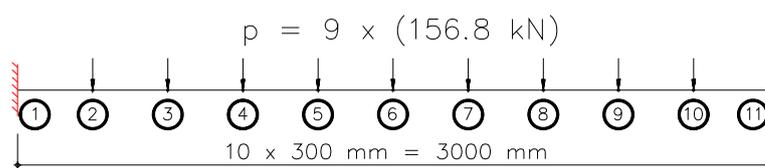


FIGURA 5.6 - Discretização / numeração dos nós

Características do material:

$E=210 \text{ kN/mm}^2$ (módulo de elasticidade longitudinal);

$k = 0.0$ (parâmetro de encruamento isótropo);

$\sigma_y = 0.25 \text{ kN/mm}^2$ (tensão de escoamento).

Como colocado no item 5.2, a partir dos dados da seção transversal e do material de que é constituída a barra, elabora-se o diagrama momento-curvatura convencional para a viga, conforme ilustrado na FIGURA 5.7.

$$M_y = Z_p \cdot \sigma_y = \left(\frac{10 \times 160^2}{4} + 20 \times 200 \times (200 - 20) \right) \times 0.25 = 196000.0 \text{ kN.mm}$$

$$\left(\frac{1}{r} \right)_y = \frac{196000.0}{210 \times \left(\frac{10 \times 160^3}{12} + 2 \times (200 \times 20 \times 90^2) \right)} = 1.37 \times 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$$

onde: Z_p - módulo plástico da seção transversal.

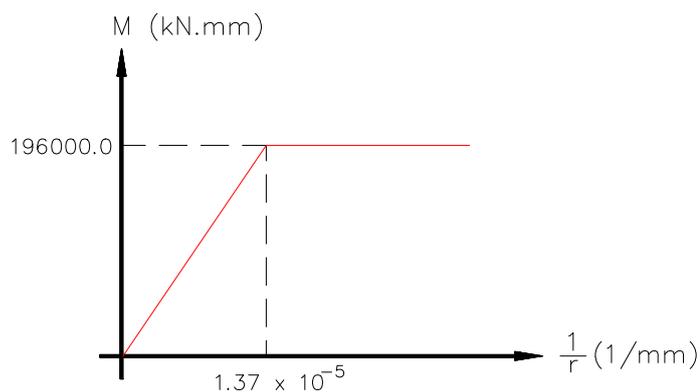


FIGURA 5.7 - Diagrama momento-curvatura convencional para a viga

Neste exemplo ocorre a simulação de força distribuída sobre a viga através da aplicação de forças verticais concentradas nos nós pelos quais a viga foi discretizada. O número de elementos finitos, e como consequência as forças (q_i) aplicadas aos nós do modelo, foram mantidos de acordo com a citada bibliografia para que as soluções pudessem ser comparadas sem restrições.

Para a solução do problema elastoplástico desta viga não seriam necessários mais do que 5 incrementos de força. Todavia, visando uma determinação mais precisa dos pontos de inflexão do diagrama da FIGURA 5.8, foram utilizados os seguintes parâmetros de controle:

- 28 incrementos de força, sendo o primeiro com 46% da força total em cada nó, e os demais com 2% cada um;
- tolerância em força admitida para a convergência $\leq 0.3\%$;
- tolerância em deslocamento admitida para a convergência $\leq 0.1\%$;
- máximo de 50 iterações por incremento.

Os resultados obtidos com o presente trabalho, além dos apresentados por OWEN,D.R.J.;HINTON,E.(1980), constam do diagrama da FIGURA 5.8.

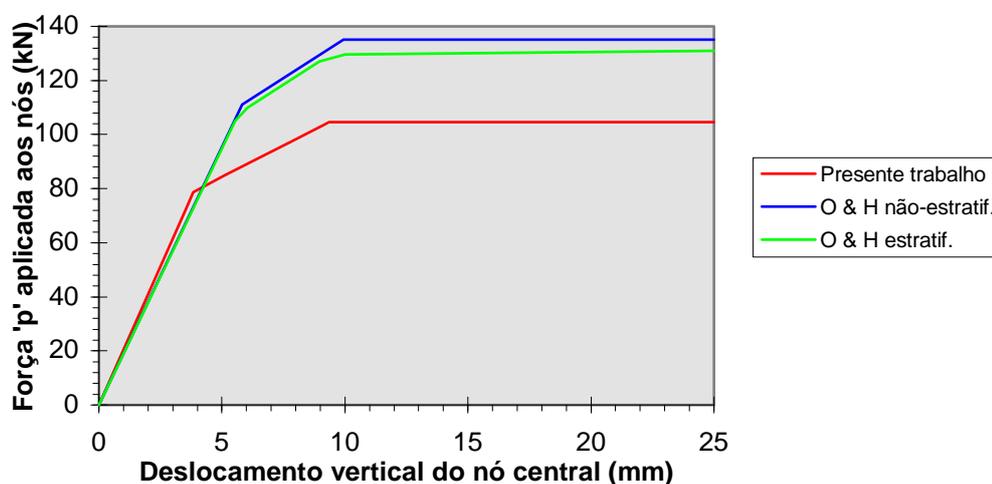


FIGURA 5.8 - Diagrama força-deslocamento do nó 6

Os resultados obtidos com o presente trabalho para o 1º ponto de inflexão do diagrama da FIGURA 5.8, correspondem a força e deslocamento além dos esperados pela teoria da elasticidade. Por outro lado, os resultados obtidos referentes ao 2º ponto de inflexão correspondem a força e deslocamento aquém dos esperados pela teoria das rótulas plásticas. Ressalta-se, porém, que em ambos os casos foi considerada a hipótese de carregamento distribuído sobre a viga, como mostrado a seguir:

1º ponto de inflexão - viga em regime elástico linear.

força relativa à plastificação

$$q_1 = \frac{12.M_y}{L^2} = \frac{12 \times 196000.0}{3000^2} = 0.2613 \text{ kN/mm}$$

onde: L - representa o comprimento da viga analisada.

Uma aproximação razoável para o carregamento nodal adotado pode ser obtida pela multiplicação do carregamento distribuído pelo comprimento de cada elemento finito.

$$p_1 = 0.2613 \times 300 = 78.4 \text{ kN}$$

deslocamento correspondente à força de plastificação:

$$w_1 = \frac{q_1 \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I} = \frac{0.2613 \times 3000^4}{384 \times 210 \times \left(\frac{10 \times 160^3}{12} + 2 \times \left(\frac{200 \times 20^3}{12} + 200 \times 20 \times 90^2 \right) \right)} = 3.83 \text{ mm}$$

2º ponto de inflexão - viga em regime elastoplástico.

De acordo com a teoria das rótulas plásticas apresentada por NEAL, B.G. (1977), determinam-se:

força relativa à ruptura

$$q_2 = \frac{16 \cdot M_y}{L^2} = \frac{16 \times 196000.0}{3000^2} = 0.3484 \text{ kN/mm}$$

e, fazendo-se a mesma aproximação tomada para o 1º ponto de inflexão:

$$p_2 = 0.3484 \times 300 = 104.5 \text{ kN}$$

deslocamento correspondente à força de ruptura

$$w_2 = \frac{M_y \cdot L^2}{12 \cdot E \cdot I} = \frac{196000.0 \times 3000^2}{12 \times 210 \times \left(\frac{10 \times 160^3}{12} + 2 \times \left(\frac{200 \times 20^3}{12} + 200 \times 20 \times 90^2 \right) \right)} = 10.22 \text{ mm}$$

A TABELA 5.1 compara os resultados obtidos pelo presente trabalho com os teóricos esperados. As diferenças verificadas devem-se exclusivamente ao fato de que a aproximação do carregamento distribuído por forças concentradas nos nós leva a uma imprecisão facilmente detectada, por exemplo, quando da resolução da viga pelo processo dos deslocamentos. Nesse processo observa-se que, ao transformar a força distribuída ao longo de um elemento em forças nodais equivalentes, resultariam unicamente forças verticais aplicadas aos nós de 2 a 10, e forças verticais associadas a momentos aplicados aos nós engastados.

Desse modo conclui-se que os resultados do presente trabalho referentes ao 1º ponto de inflexão do diagrama da FIGURA 5.8 correspondam a um par força-deslocamento acima do esperado teoricamente, pois o momento de plastificação nos engastes ocorre com um quinhão de forças acima do deduzido analiticamente. Inversamente, observando-se o par força-deslocamento relativo ao 2º ponto de inflexão,

verificam-se valores inferiores ao deduzido analiticamente. O nó localizado no meio do vão teve também um acréscimo de momento positivo proporcional ao quinhão de forças acrescido para atingir-se o 1º ponto de inflexão. Este nó deve então plastificar-se com um carregamento inferior ao esperado teoricamente. Como a plastificação da barra iniciou-se (no 1º ponto de inflexão) com forças pouco superiores às deduzidas analiticamente, e entrou em ruptura (2º ponto de inflexão) com forças inferiores às deduzidas, conclui-se que a mesma tenha plastificado menos do que o esperado no intervalo entre os dois pontos de inflexão, e desse modo, o deslocamento correspondente ao 2º ponto de inflexão tenha sido reduzido em comparação ao esperado analiticamente.

TABELA 5.1 - Deslocamentos notáveis analíticos e numéricos

Pontos do Diagrama	Força (kN)		Deslocamento (mm)	
	analítico	numérico	analítico	numérico
1º ponto de inflexão	78.4	79.6	3.83	3.89
2º ponto de inflexão	104.5	103.6	10.22	9.36

5.4. Exemplo 3

Como já mencionado neste capítulo, BRESLER,B.; SCORDELIS,A.C.(1963) experimentaram uma série de vigas de concreto armado. A viga apresentada na FIGURA 5.9, além de ter sido ensaiada pelos referidos autores, foi também objeto de estudos realizados por CERVERA,M.; HINTON,E.(1986). Coloca-se ainda que os dados experimentais são considerados de grande confiabilidade, e a viga tem sido utilizada em inúmeros trabalhos para a aferição de formulações analíticas e numéricas. As unidades constantes no artigo original foram mantidas.

CERVERA,M.; HINTON,E.(1986) utilizam para análise da viga, elemento finito tridimensional adaptado ao comportamento elastoplástico. O modelo inclui ainda regra de endurecimento não-linear e um critério de escoamento semelhante ao de Kupfer. A fissuração e a condição de

esmagamento do concreto são também incorporadas ao modelo. Os autores dividem a viga alternativamente em 10 e 20 elementos finitos iguais, dispostos em duas filas ao longo da altura. Os resultados contidos na FIGURA 5.12 referem-se à malha correspondente à segunda alternativa.

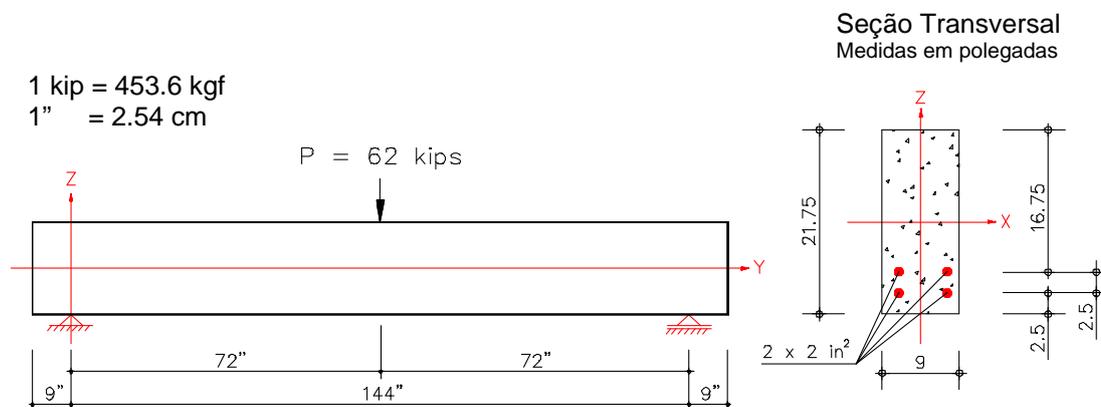


FIGURA 5.9 - Viga em concreto armado biapoiada

Neste trabalho optou-se pela divisão da viga em 10 elementos finitos iguais, como pode observar-se na FIGURA 5.10.

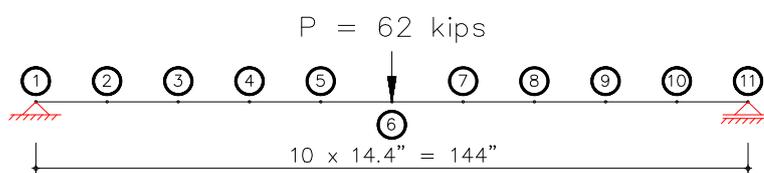


FIGURA 5.10 - Discretização / numeração dos nós

Os parâmetros de controle utilizados na análise foram:

- 10 incrementos de força, com 10% da força total cada um;
- tolerância em força admitida para a convergência $\leq 1.0\%$;
- tolerância em deslocamento admitida para a convergência $\leq 0.1\%$;
- máximo de 50 iterações por incremento.

Cabe salientar que, por se tratarem de peças destinadas a ensaios, os valores de resistência divulgados por BRESLER, B.; SCORDELIS, A.C. (1963) correspondem aos valores médios obtidos. Deste modo, torna-se desnecessária qualquer conversão dos valores de resistência colocados no trabalho original.

Características dos materiais:

Concreto

$E_c=3300 \text{ kips/in}^2$ (módulo de elasticidade longitudinal);

$f_{cm}= 3.16 \text{ kips/in}^2$ (resistência à compressão média);

$f_{ctm}= 0.333 \text{ kips/in}^2$ (resistência à tração média).

Aço

$E_s=27800 \text{ kips/in}^2$ (módulo de elasticidade longitudinal);

$f_y=60.0 \text{ kips/in}^2$ (tensão de escoamento do aço).

O diagrama momento-curvatura convencional para a seção de concreto armado apresentado na FIGURA 5.11 foi determinado a partir das formulações apresentadas no capítulo 4.

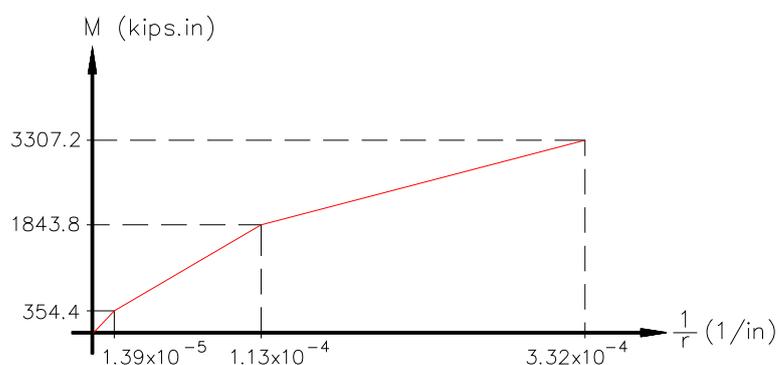


FIGURA 5.11 - Diagrama momento-curvatura convencional para a viga

Por tratar-se de um exemplo destinado à aferição do modelo, optou-se por procedimento rigoroso na determinação do referido diagrama, considerando-se as duas camadas de aço em suas respectivas posições. Em problemas correntes esse rigor não se justifica, e o diagrama pode ser determinado considerando-se toda a armadura concentrada no centro de gravidade das duas camadas, seguindo-se as prescrições do item 6.3.1.2 da NB-1/78.

Na FIGURA 5.12, são comparados os resultados obtidos pelo presente trabalho com os tabulados por CERVERA, M.; HINTON, E. (1986), e por CORRÊA, M. R. S. (1991).

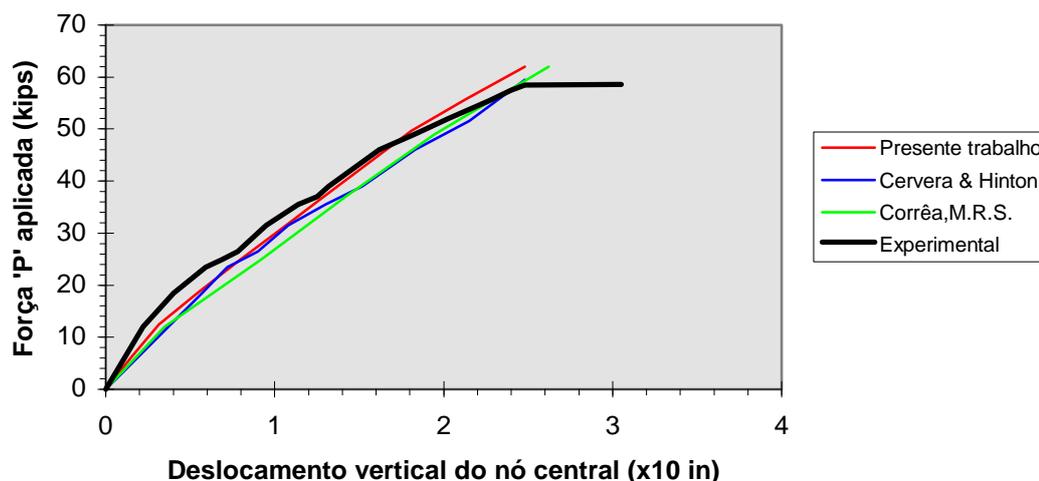


FIGURA 5.12 - Diagrama força-deslocamento do nó 6

Como pode-se notar, os resultados obtidos com o presente trabalho aproximam-se de modo bastante satisfatório tanto da curva experimental quanto da curva obtida por CERVERA, M.; HINTON, E. (1986) que dispunham de um modelo mais completo e abrangente do que o exposto neste trabalho. Essa proximidade dos resultados dá indícios não só da boa capacidade de representação do modelo proposto, bem como de uma correta caracterização da seção de concreto armado através do diagrama momento-curvatura trilinear proposto.

5.5. Exemplo 4

Ao estudar um modelo para o concreto, ÁLVARES, M.S. (1993) propôs três conjuntos de vigas que foram ensaiadas no Laboratório do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP. Os resultados dos ensaios foram utilizados por CARVALHO, R.C. (1994), que comparou-os aos obtidos por três métodos para a consideração da não-linearidade física do material concreto armado: o proposto por Branson, e os modelos dos boletins CEB158, e CEB90. De um modo geral, esses métodos propõem a variação do momento de inércia da seção transversal pelo efeito da fissuração após a ultrapassagem de um determinado valor do momento fletor atuante. Os modelos de Branson e do CEB158 propõem a redução do

momento de inércia da seção transversal a partir do momento fletor de fissuração M_r , enquanto o CEB90 propõe que essa redução inicie-se com valores de momentos fletores inferiores a M_r . Essa redução de M_r é conseguida com o fator $\sqrt{\beta_b}$, que leva em consideração a superfície das barras de aço que compõem a viga, e a duração das forças aplicadas. O modelo proposto pelo CEB90, por antecipar o início da fissuração, deve conduzir a representações menos rígidas das estruturas.

Neste trabalho foram analisados os resultados referentes à viga da FIGURA 5.13. CARVALHO,R.C.(1994) dividiu-a em 10 elementos finitos, e o carregamento foi aplicado em 10 incrementos iguais.

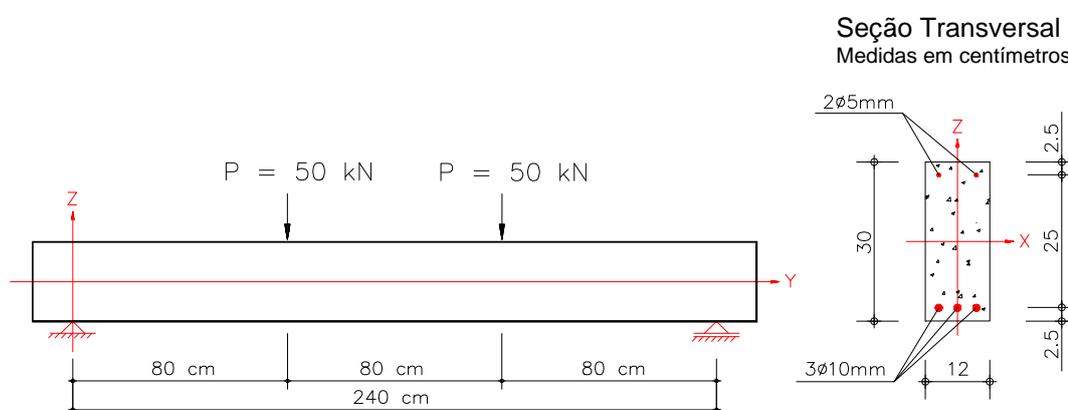


FIGURA 5.13 - Viga em concreto armado biapojada

Neste trabalho, optou-se pela divisão da viga em 12 elementos finitos iguais, como pode observar-se na FIGURA 5.14.

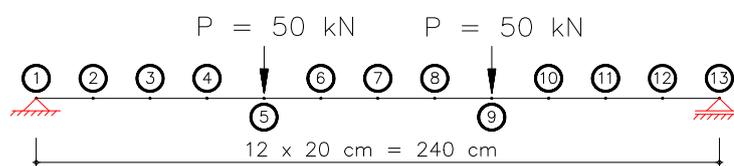


FIGURA 5.14 - Discretização / numeração dos nós

Os parâmetros de controle utilizados na análise foram:

- 10 incrementos de força com 10% da força total aplicada cada um;
- tolerância em força admitida para a convergência $\leq 1.0\%$;
- tolerância em deslocamento admitida para a convergência $\leq 0.1\%$;

- máximo de 50 iterações por incremento.

Do mesmo modo que no item 5.4, coloca-se que por se tratarem de peças destinadas a ensaios, os valores de resistência divulgados correspondem aos valores médios obtidos.

Características dos materiais:

Concreto

$E_c=2920 \text{ kN/cm}^2$ (módulo de elasticidade longitudinal)

$f_{cm}= 2.40 \text{ kN/cm}^2$ (resistência à compressão média)

$f_{ctm}= 0.268 \text{ kN/cm}^2$ (resistência à tração média)

Aço

$E_s=21000 \text{ kN/cm}^2$ (módulo de elasticidade longitudinal)

$f_y=50.0 \text{ kN/cm}^2$ (tensão de escoamento do aço)

O diagrama momento-curvatura convencional para a seção de concreto armado apresenta-se na FIGURA 5.15.

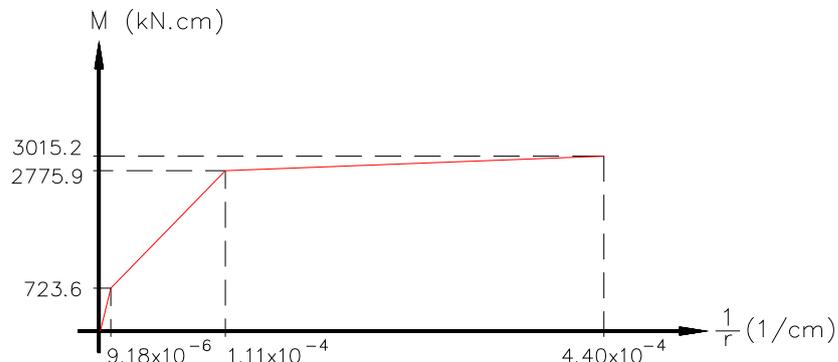


FIGURA 5.15 - Diagrama momento-curvatura convencional para a viga

Em benefício da clareza na exposição dos resultados da FIGURA 5.16, optou-se por representar, dentre os modelos expostos anteriormente, apenas aquele que mais se aproximou dos ensaios e, conseqüentemente, dos resultados conseguidos neste trabalho.

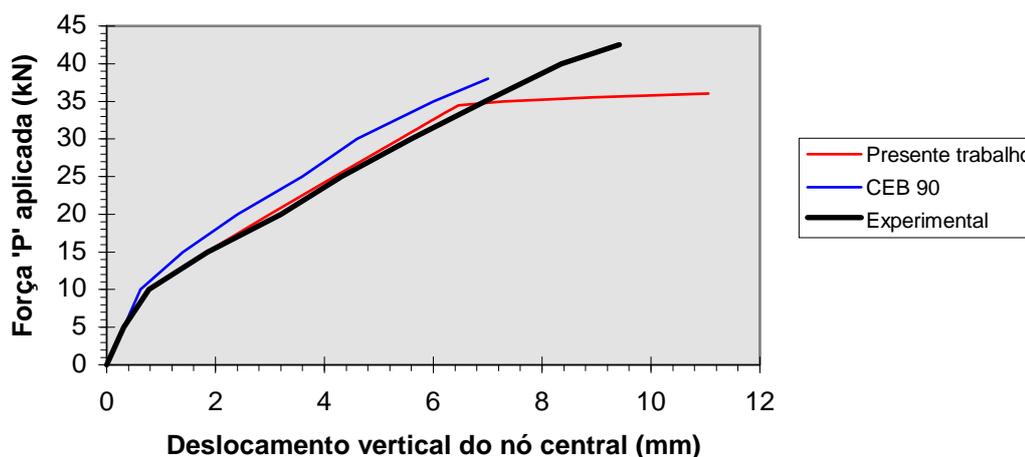


FIGURA 5.16 - Diagrama força-deslocamento do nó 7

Observa-se que os resultados obtidos com o presente trabalho encontram-se bastante próximos dos resultados experimentais. O primeiro ponto de inflexão do diagrama força-deslocamento, em torno dos 10 kN foi extremamente bem representado, e a partir daí, os resultados experimentais e os obtidos numericamente seguiram bem próximos até o 2º ponto de inflexão. A partir daí os deslocamentos obtidos com o modelo passaram a ser mais acentuados do que os obtidos no ensaio.

5.6. Exemplo 5

A figura 5.17 apresenta as características geométricas de uma placa quadrada estudada por OWEN, D.R.J.; HINTON, E. (1980). A placa é simplesmente apoiada e está submetida a um carregamento distribuído “q”. Serão apresentados os resultados de duas análises com relação ao carregamento aplicado: na primeira, a placa será submetida a 85,6% da força total distribuída, e na segunda, à força total “q”. Os objetivos são os de observar primeiramente o comportamento força-deslocamento da placa até a iminência do colapso e, através do acréscimo de força, verificar a representação do seu colapso. Assim como na referência citada, omitem-se aqui as unidades das grandezas envolvidas no exemplo.

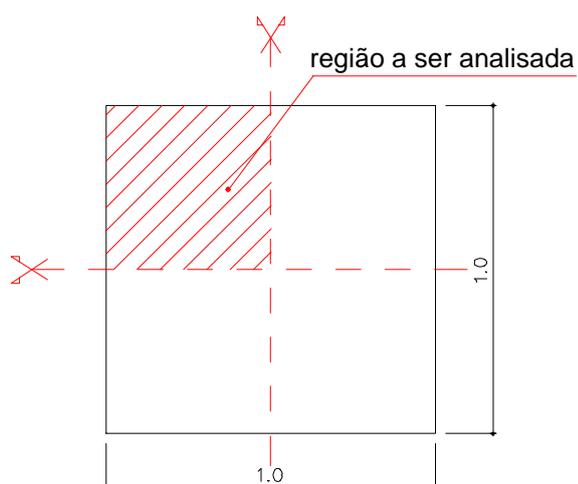


FIGURA 5.17 - Destaque de um quarto da placa apoiada

Os autores analisam o quarto de placa com quatro elementos quadrilaterais Heterosis adaptados à teoria de Reissner-Mindlin que, de modo sucinto, caracteriza-se pela consideração do esforço cortante na formulação do elemento finito pelo método da energia. O carregamento é aplicado em cerca de 100 incrementos, com um máximo de 60 iterações por incremento, e tolerâncias estipuladas em 10% para força e deslocamento.

Neste trabalho, optou-se pela mesma discretização quanto ao número de elementos, ou seja, 4 elementos quadrilaterais formados pela condensação estática de 4 elementos T3AF cada um, como pode observar-se na FIGURA 5.18. Pela necessidade de representação do diagrama força-deslocamento da FIGURA 5.20, aplicou-se para essa análise, o carregamento total em oito incrementos iguais, sendo o primeiro correspondente a 80% do total, o segundo a 10%, o terceiro a 5%, e os demais, correspondentes a 1% cada um, não sendo permitidos mais que cinquenta iterações por incremento. As tolerâncias em força e deslocamento foram tomadas iguais a 0.1%.

Para a segunda análise efetuada com 85.6% da força total, como desejava-se apenas o resultado final da análise, alterou-se unicamente o número de incrementos, que passou de oito para quatro, sendo o primeiro com 80%, o segundo com 10%, e os demais com 5% cada um.

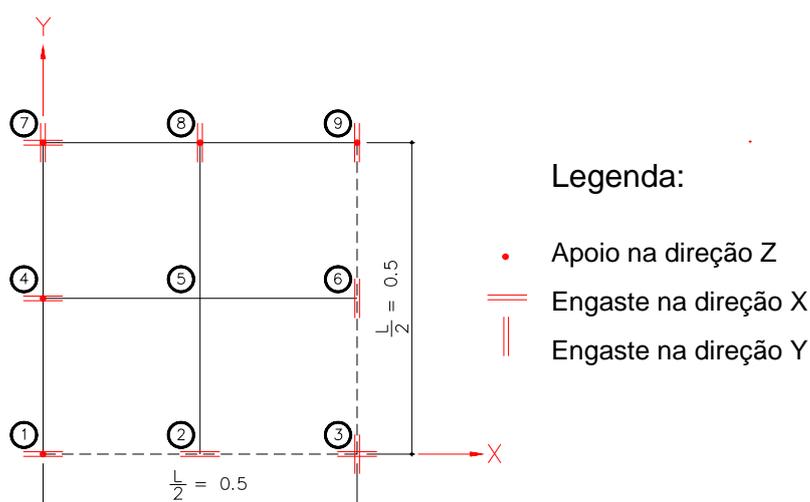


FIGURA 5.18 - Discretização do quarto de placa apoiada

Características do exemplo:

$h=0.01$ (espessura da placa);

$E=10.92 \times 10^4$ (módulo de elasticidade longitudinal);

$\nu=0.30$ (coeficiente de Poisson);

$\sigma_y=1600$ (tensão de escoamento);

$k=0.0$ (parâmetro de encruamento isótropo);

$q=-1.0$ (força total uniformemente distribuída).

A partir das características do material e da seção transversal, determina-se o diagrama momento-curvatura convencional ilustrado na FIGURA 5.19.

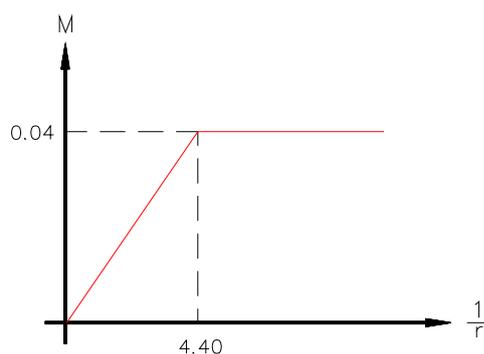


FIGURA 5.19 - Diagrama momento-curvatura convencional para a placa

onde: $M_y = \frac{\sigma_y \cdot h^2}{4} = 0.04$ (momento de escoamento para a seção transversal unitária);

$$\left(\frac{1}{r}\right)_y = \frac{0.04}{10.92 \times 10^4 \times \left(\frac{1 \times 0.01^3}{12}\right)} = 4.40.$$

Os resultados quanto ao comportamento força-deslocamento, submetendo-se a placa à força total distribuída, constam da FIGURA 5.20.

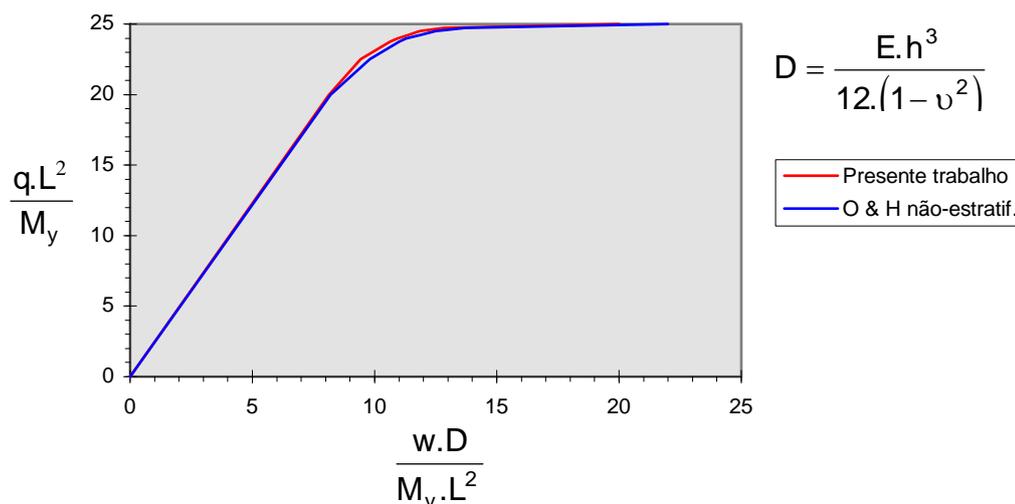


FIGURA 5.20 - Diagrama força-deslocamento vertical do nó 3

A TABELA 5.2 apresenta os resultados para deslocamentos e esforços obtidos por OWEN,D.R.J.;HINTON,E. (1980),e pelo sistema ANSER para uma força de 85.6% do valor da força distribuída total.

TABELA 5.2 - Resultados significativos para a placa

Esforços e Desloc. Máximos	O & H	ANSER
Momento M_x (próx. ao nó 3)	0.039997	0.038980
Momento M_y (próx. ao nó 3)	0.039997	0.038980
Momento M_{xy} (próx. ao nó 7)	-0.023087	-0.023081
Rotação θ_x (nó 9)	1.18879	1.168809
Rotação θ_y (nó 1)	1.18879	1.168809
Deslocamento transversal w (nó 3)	-0.349631	-0.349040

É patente a proximidade de resultados, devendo-se realçar que são coerentes os valores de M_x e M_y maiores na análise com o elemento

Heterosis, pois o ponto-amostra utilizado nesse caso está mais próximo do centro da placa do que com o elemento T3AF.

Os resultados da análise da placa obtidos da aplicação de 85.6% do valor da força distribuída total estão apresentados da FIGURA 5.21 à FIGURA 5.24 como curvas de isovalor.

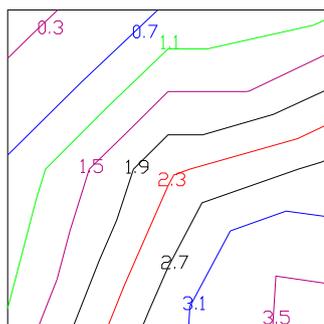


FIGURA 5.21 - Momento fletor M_x (x100)

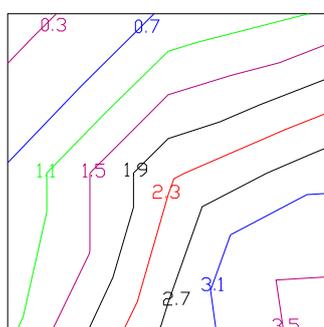


FIGURA 5.22 - Momento fletor M_y (x100)

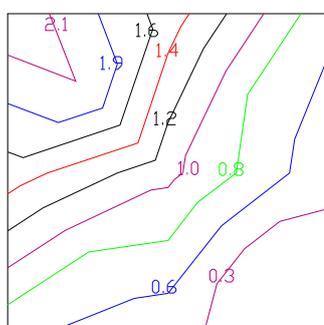


FIGURA 5.23 - Momento volvente M_{xy} (x100)

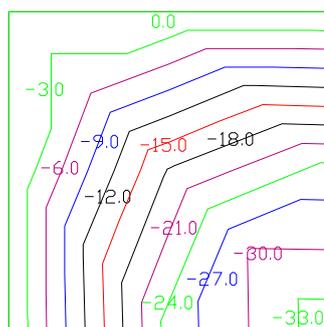


FIGURA 5.24 - Deslocamento transversal w ($\times 100$)

Oportunamente, processou-se o mesmo exemplo com a versão anterior do sistema ANSER, que dispunha apenas de elementos triangulares T3AF implementados para análise elastoplástica com as relações temporais integradas segundo um procedimento explícito. Dividiu-se o quarto de placa em dezesseis triângulos, cada um com um ponto-amostra, e compararam-se os tempos de processamento requeridos para a análise com 85.6% da força total. Ressalta-se, ainda, que os demais parâmetros de controle permaneceram inalterados.

TABELA 5.3 - Comparação dos tempos de processamento

Modelo	Tempo de processamento (s)
Quadriláteros com proc. implícito	4.5
Triângulos com proc. explícito	6.0

5.7. Exemplo 6

Consolidando-se os aspectos relativos à análise e dimensionamento em regime não-linear abordados neste trabalho, coloca-se a seguir, uma proposta aplicada de procedimento para análise de pavimentos de concreto armado.

A figura 5.25 apresenta a forma do pavimento tipo simétrico de um edifício de escritórios estudado por FRANÇA,R.L.S.(1984) e por CORRÊA,M.R.S.(1991).

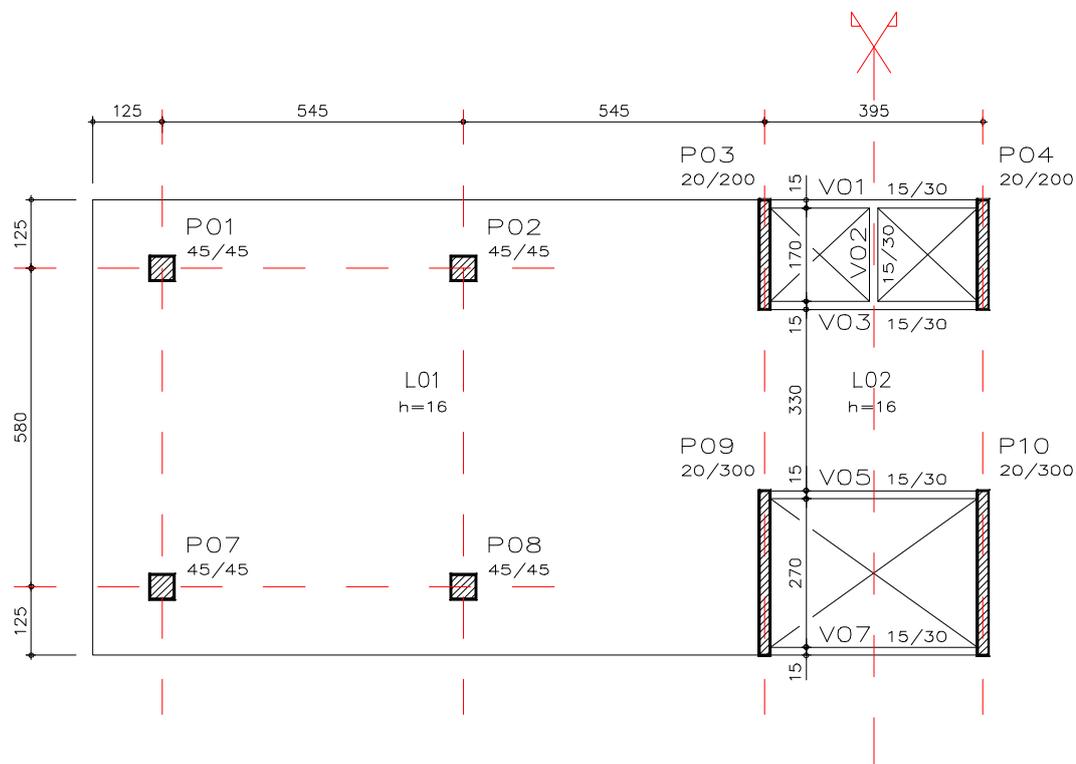


FIGURA 5.25 - Pavimento tipo - laje plana (medidas em 'cm')

Como pode-se observar, o pavimento a ser estudado é composto de laje cogumelo com espessura de 16 cm. As vigas ocorrem apenas na caixa da escada e de elevadores, unindo os pilares-parede. O concreto utilizado no dimensionamento é o C-20, armado com aço CA-50A.

Para a análise de meio pavimento, utilizaram-se 204 elementos finitos quadrilaterais de placa compostos por 4 elementos T3AF cada um. Empregaram-se 15 barras para a simulação de vigas (3 barras para cada viga ou meia viga) e 4 barras para a representação dos pilares (P01,P02,P07 e P08). Os pilares-parede P03 e P09 foram simulados por 4 e 6 molas de rotação respectivamente. A discretização empregada ao longo de todo esse exemplo está representada na FIGURA 5.26, juntamente com os eixos ordenados (sistema dextrorso).

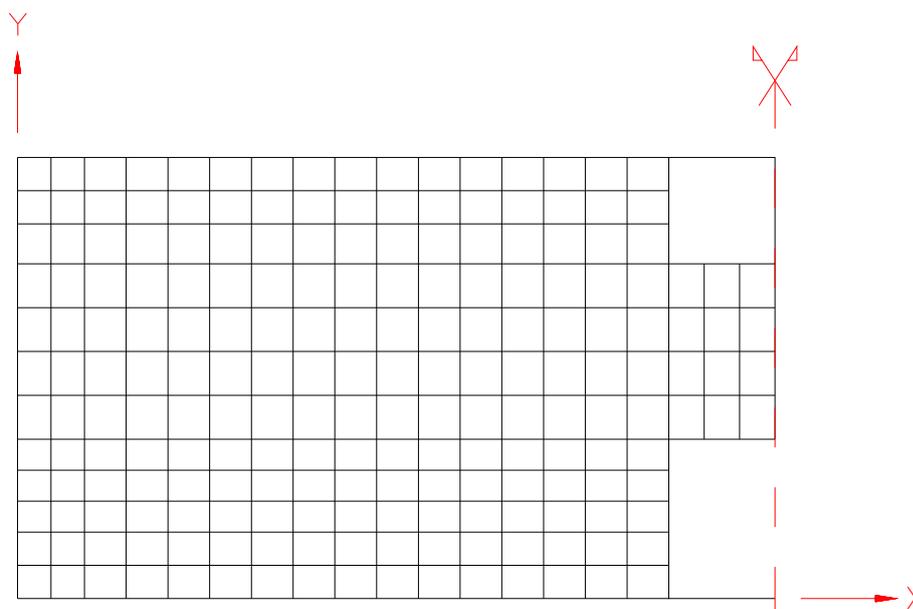


FIGURA 5.26 - Discretização de meio pavimento

De acordo com as expressões apresentadas no capítulo 4, as propriedades médias dos materiais empregados são:

Concreto

$$E_c^* = 1920 \text{ kN/cm}^2 \text{ (módulo de elasticidade long. reduzido);}$$

$$f_{cm} = 2.35 \text{ kN/cm}^2 \text{ (resistência à compressão média);}$$

$$f_{ctm} = 0.19 \text{ kN/cm}^2 \text{ (resistência à tração média);}$$

$$\nu = 0.20 \text{ (coeficiente de Poisson);}$$

$$\gamma = 25.0 \text{ kN/m}^3 \text{ (peso específico).}$$

Aço

$$E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2 \text{ (módulo de elasticidade longitudinal);}$$

$$f_y = 50.0 \text{ kN/cm}^2 \text{ (tensão de escoamento do aço).}$$

O carregamento pode ser composto do seguinte modo:

Carregamento (além do peso próprio)

$$\text{revestimento} = 1.0 \text{ kN/m}^2 ;$$

$$\text{divisórias} = 1.0 \text{ kN/m}^2 ;$$

$$\text{sobrecarga} = 3.0 \text{ kN/m}^2 .$$

A bem da simplificação dos resultados, omitiram-se aqui, propositadamente, todo e qualquer tipo de armadura construtiva que sabe-se

necessária neste tipo de pavimento. Nos bordos livres, por exemplo, seria necessário um arranjo de armaduras como o ilustrado na FIGURA 5.27.

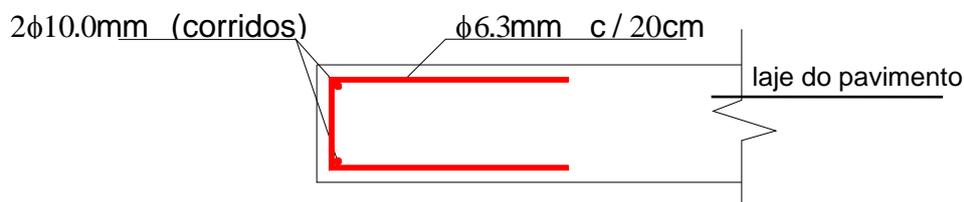


FIGURA 5.27 - Armadura construtiva para bordos livres

A verificação quanto ao Estado Limite de Deformação Excessiva será feita de acordo com a NB-1/78 - Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado, e a NBR 8681/84 - Ações e Segurança nas Estruturas. Para a combinação dos carregamentos, optou-se pela combinação rara de utilização por tratar-se de prédio destinado a escritórios dividido internamente por divisórias. O coeficiente de ponderação das ações será então tomado com valor unitário, e as ações variáveis serão consideradas em seu valor total. O valor limite para a flecha estabelecido pela NB-1/78, é de $L/300$ do vão teórico L . Será tomado como vão teórico L na região crítica, a distância entre os eixos dos pilares (apoios) P01 e P08, que é de 796 cm. Desse modo, a flecha máxima permitida na região situada entre os pilares P01, P02, P07 e P08, deverá ser de 2.65 cm.

As figuras que expressam as curvas de isodeslocamentos já estarão referidas à combinação rara de utilização de acordo com as prescrições já colocadas no parágrafo anterior, e os resultados de esforços, serão exibidos em valores de cálculo.

Iniciando-se o procedimento, processa-se o pavimento primeiramente em regime elástico linear. Os resultados encontram-se nas FIGURAS 5.28 à 5.31 como curvas de isovalor para as lajes e, nas TABELAS 5.4 para as vigas e os pilares.

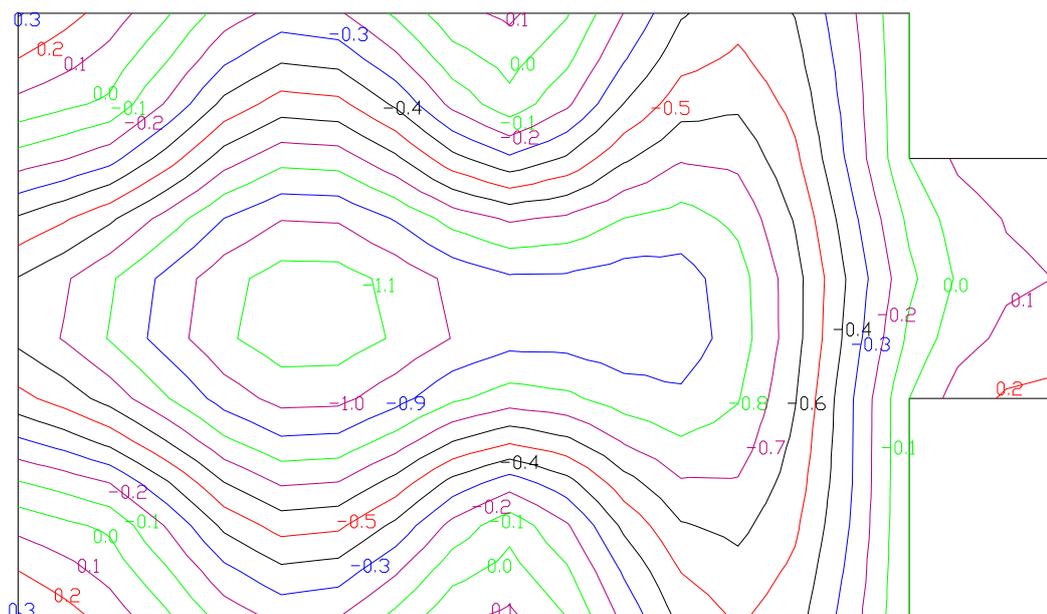


FIGURA 5.28 - Deslocamento transversal w (cm)

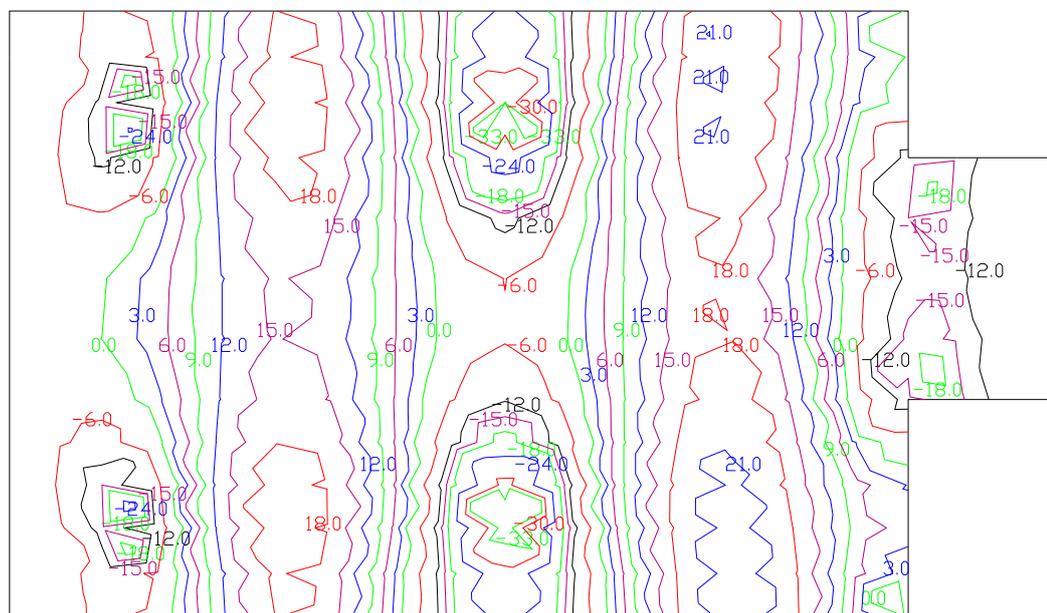


FIGURA 5.29 - Momento fletor M_x (kN.m/m)

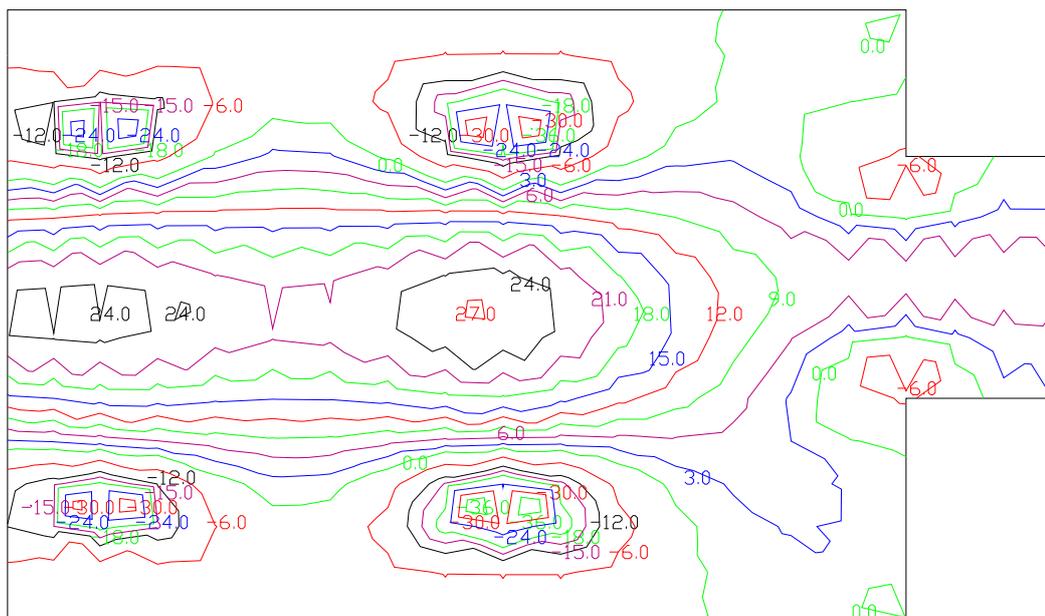


FIGURA 5.30 - Momento fletor M_y (kN.m/m)

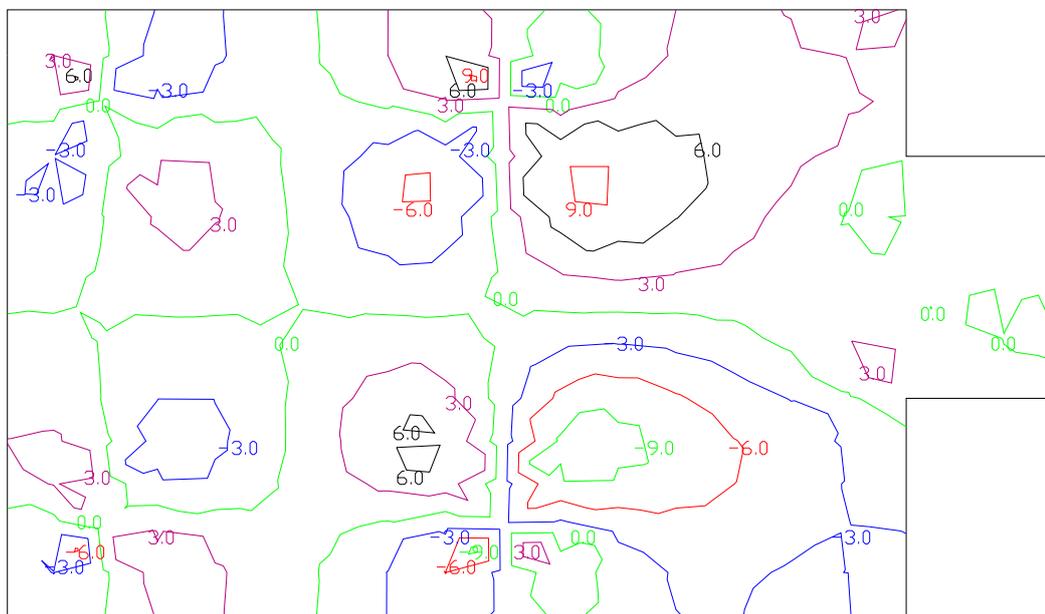


FIGURA 5.31 - Momento volvente M_{xy} (kN.m/m)

TABELA 5.4a - Reações de apoio - valores de cálculo

Pilar	F_z (kN)	M_x (kN.m)	M_y (kN.m)
P01	198.91	-70.49	49.22
P02	305.98	-77.07	1.73
P07	198.13	69.52	48.92
P08	309.68	76.24	4.14

Para a elaboração da TABELA 5.4b utilizaram-se os momentos fletores (negativos) referentes ao extremo mais solicitado das vigas, pois nenhuma delas apresentou momento fletor positivo.

TABELA 5.4b - Esforços para as vigas - valores de cálculo

Viga	Momentos fletores (kN.m)
V01	-11.94
V02	-2.67
V03	-18.84
V05	-20.17
V07	-11.75

A partir dos resultados, elegem-se grupos que representam faixas do pavimento a serem dimensionadas para resistir a determinados valores de referência dos esforços. De acordo com a distribuição dos esforços (M_x e M_y) obtida da análise em regime elástico linear, delimitam-se faixas do pavimento de modo a compor um determinado grupo, ao qual será imposto um valor de referência para os esforços permitidos no seu domínio no decorrer da análise. Este esforço de referência será o responsável pelo dimensionamento das seções transversais do grupo, e deve corresponder ao próprio valor máximo do esforço obtido pela análise elástico linear (M_x ou M_y) no seu domínio, afetado ou não de uma redução imposta pelo projetista. O objetivo de reduzirem-se os picos está em promover a uniformização dos efeitos no pavimento.

Estabelecidas as armaduras correspondentes a cada grupo, determinam-se os respectivos diagramas momento-curvatura convencionais que deverão ser associados aos elementos finitos componentes dos grupos.

Neste exemplo, as lajes constituem 3 grupos de materiais: o **grupo I** engloba os elementos armados com armadura mínima, e portanto, com capacidade de resistir a um momento fletor de cálculo da ordem de 15 kN.m/m; o **grupo II** compõe-se de elementos que deverão, ao final da análise, estar solicitados por momento fletor de cálculo em torno de 21 kN.m/m, e o **grupo III** que deverá ao final da análise apresentar um momento fletor máximo em torno de 28 kN.m/m (cerca de 80% do maior valor obtido no procedimento elástico). A FIGURA 5.32 ilustra os grupos delimitados pelos elementos finitos que foram adotados neste exemplo, e a TABELA 5.5 mostra as correspondentes armaduras para os grupos de lajes.

O cobrimento utilizado nos elementos estruturais é de 2.0 cm.

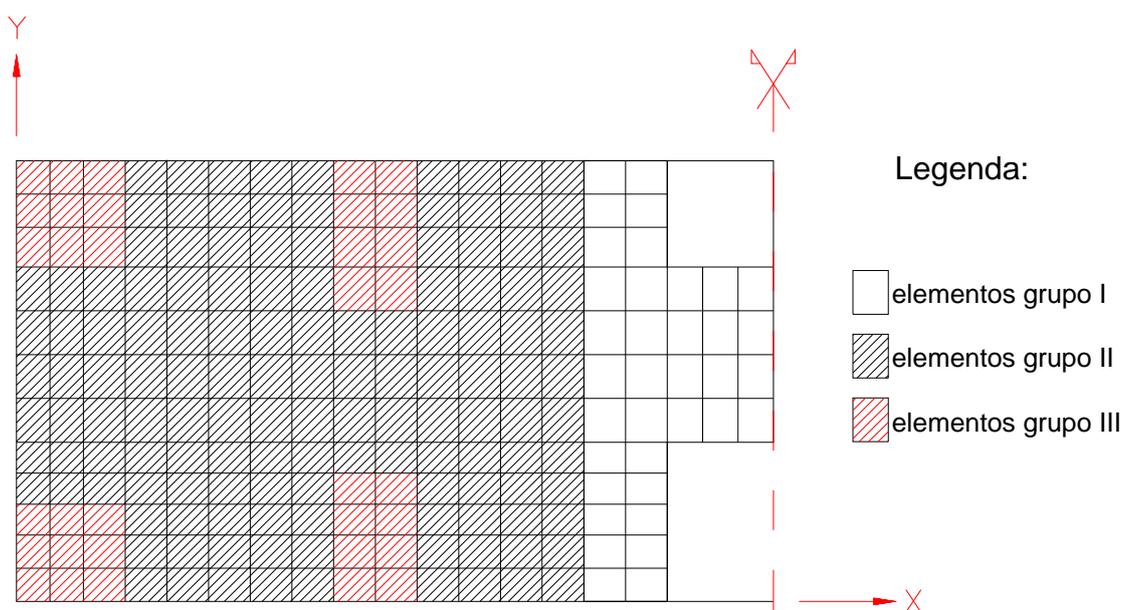


FIGURA 5.32 - Grupos de materiais adotados

TABELA 5.5 - Armaduras longitudinais de referência para as lajes

Grupos	Armadura positiva(cm ² /m)	Armadura negativa(cm ² /m)
I	2.50 (ϕ 8.0 c/20 cm)	-
II	3.57 (ϕ 8.0 c/14 cm)	-
III	-	5.00 (ϕ 8.0 c/10 cm)

A FIGURA 5.33 apresenta os diagramas momento-curvatura convencionais para cada grupo de laje.

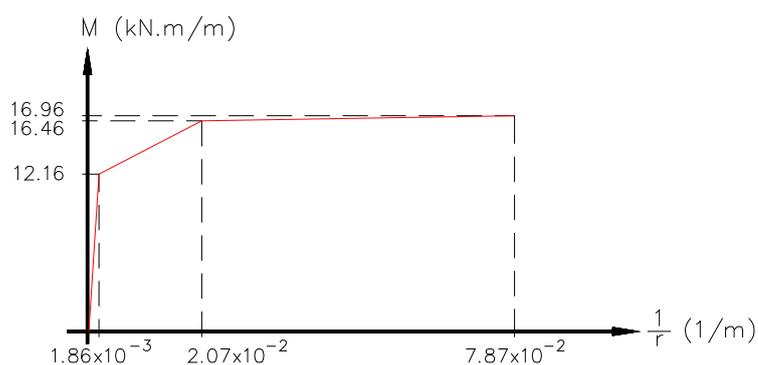


FIGURA 5.33-a - Diagrama momento-curvatura do grupo I

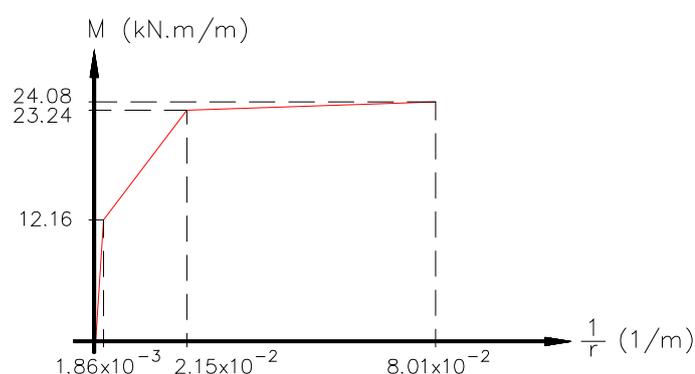


FIGURA 5.33-b - Diagrama momento-curvatura do grupo II

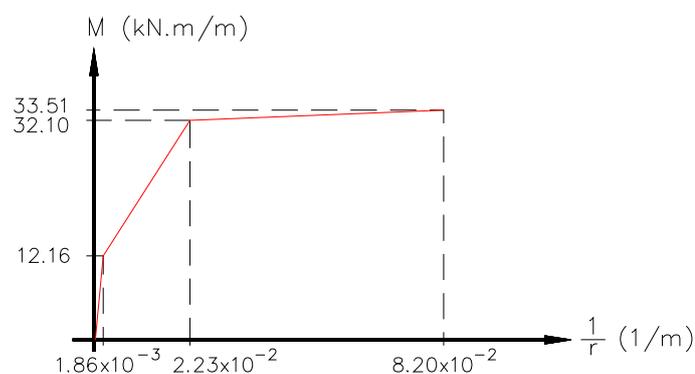


FIGURA 5.33-c - Diagrama momento-curvatura do grupo III

O raciocínio colocado para as lajes deve ser repetido para as vigas, notando-se porém, que a composição de grupos seja mais adequada para as lajes nervuradas, pelo fato de as vigas serem geralmente pouco e igualmente espaçadas entre si. Com isso, os esforços atuantes dentro de determinadas faixas devem apresentar pouca variação, possibilitando a formação de grupos.

Neste exemplo, a distribuição dos esforços nas vigas permite-nos a divisão das mesmas em dois grupos: ao primeiro contendo as vigas V01, V02 e V07, será imposto um esforço de referência de 8.00 kN.m, o que corresponde a uma redução de cerca de 30% sobre o valor máximo da análise elástico linear; ao segundo grupo formado pelas vigas V03 e V05, será atribuído um esforço de referência de 11.60 kN.m, correspondente à redução de cerca de 40% sobre o valor máximo obtido da análise elástico linear. As armaduras resultantes do dimensionamento feito segundo os valores de referência encontram-se na TABELA 5.6.

TABELA 5.6 - Armaduras longitudinais de referência para as vigas

Viga	Armadura positiva(cm ²)	Armadura negativa(cm ²)
V01	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)
V02	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)
V03	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	1.00 (2 ϕ 8.0 mm)
V05	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	1.00 (2 ϕ 8.0 mm)
V07	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)

A partir das armaduras, determinam-se os diagramas momento-curvatura convencionais dos grupos de vigas mostrados na FIGURA 5.34.

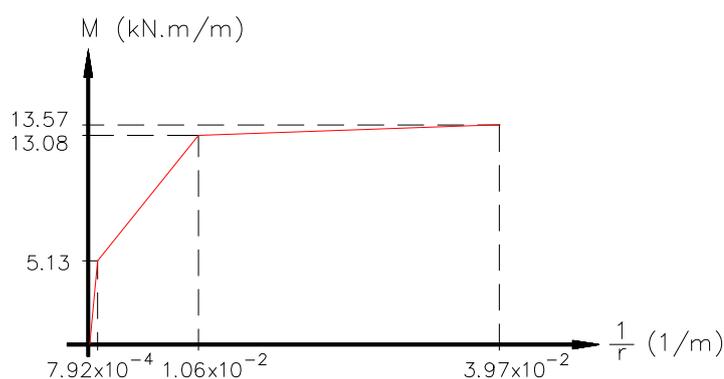


FIGURA 5.34-a - Diagrama momento-curvatura das vigas V03 e V05

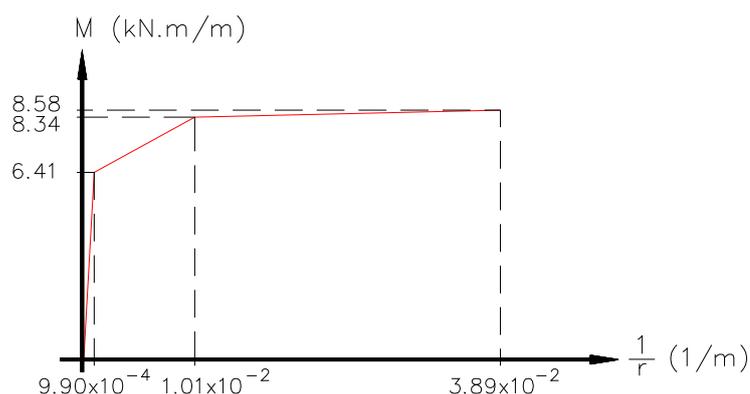


FIGURA 5.34-b - Diagrama momento-curvatura das vigas V01,V02 e V07

Antes de iniciar-se a análise em regime não-linear no entanto, cabe observar que, como coloca a NBR8681/84, pode-se considerar o coeficiente de ponderação das ações γ_f como sendo o produto de dois termos: γ_{f1} , que leva em conta a variabilidade das ações, e γ_{f3} , que pondera possíveis erros de avaliação dos efeitos dessas ações. Com o emprego de modelos não-lineares, não há proporcionalidade entre as ações aplicadas e os esforços ou deslocamentos calculados. Nesse caso, de modo a evitar ampliações irreais de efeitos pela majoração indevida das ações, desdobra-se o coeficiente γ_f , e carrega-se a estrutura com as ações majoradas apenas por γ_{f1} . Ao final da análise, ponderam-se os efeitos com γ_{f3} para determinarem-se as solicitações de cálculo. Nesta análise, utilizou-se $\gamma_f = 1.4$ desdobrado como $\gamma_{f1} = 1.25$ e $\gamma_{f3} = 1.12$ seguindo-se as recomendações da NBR8681/84 de não tomar-se γ_{f3} menor que 1.1.

Definido o pavimento composto por grupos com características pré-estabelecidas, passa-se a processá-lo agora em regime elastoplástico. Para esta análise, utilizaram-se 6 incrementos de força, sendo o primeiro correspondente a 50%, e os demais, a 10% do carregamento total. As tolerâncias utilizadas para o controle da convergência foram de 5% em força e de 1% em deslocamento, não permitindo-se mais que 40 iterações por incremento. Adianta-se que as análises feitas neste exemplo convergiram dentro dos parâmetros estipulados. O resultado para deslocamentos referido à combinação rara de utilização encontra-se na FIGURA 5.35, e os esforços

em valores de cálculo, encontram-se nas FIGURAS 5.36, 5.37 e 5.38 em forma de curvas de isovalor.

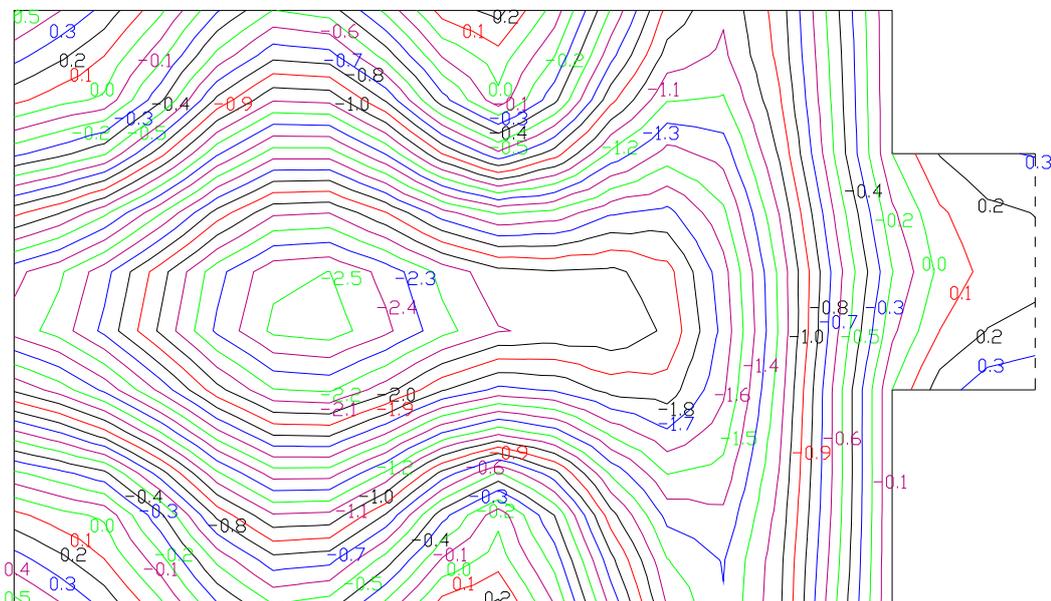


FIGURA 5.35 - Deslocamento transversal w (cm)

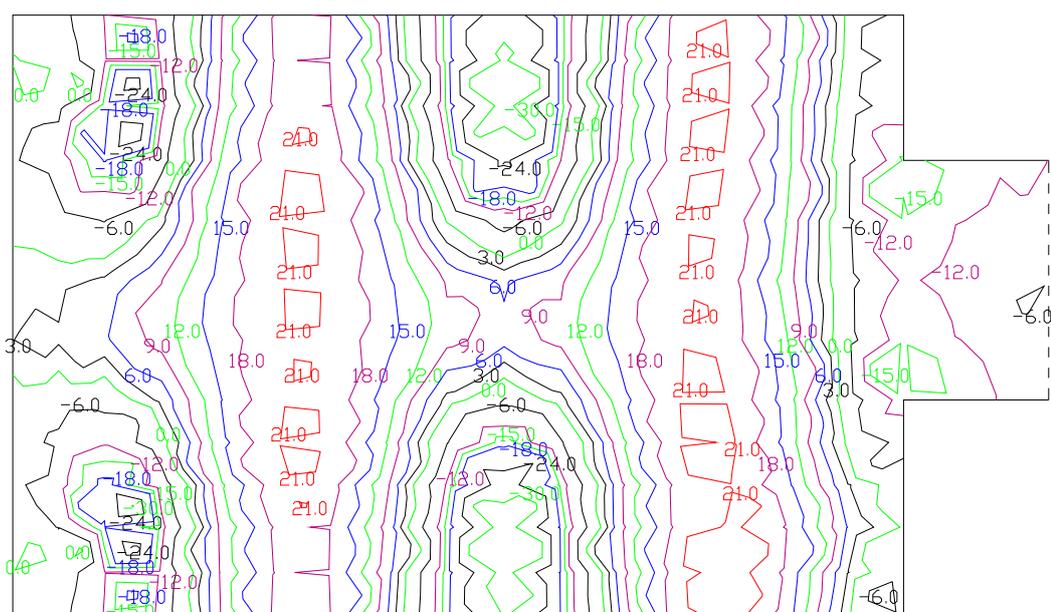


FIGURA 5.36 - Momento fletor M_x (kN.m/m)

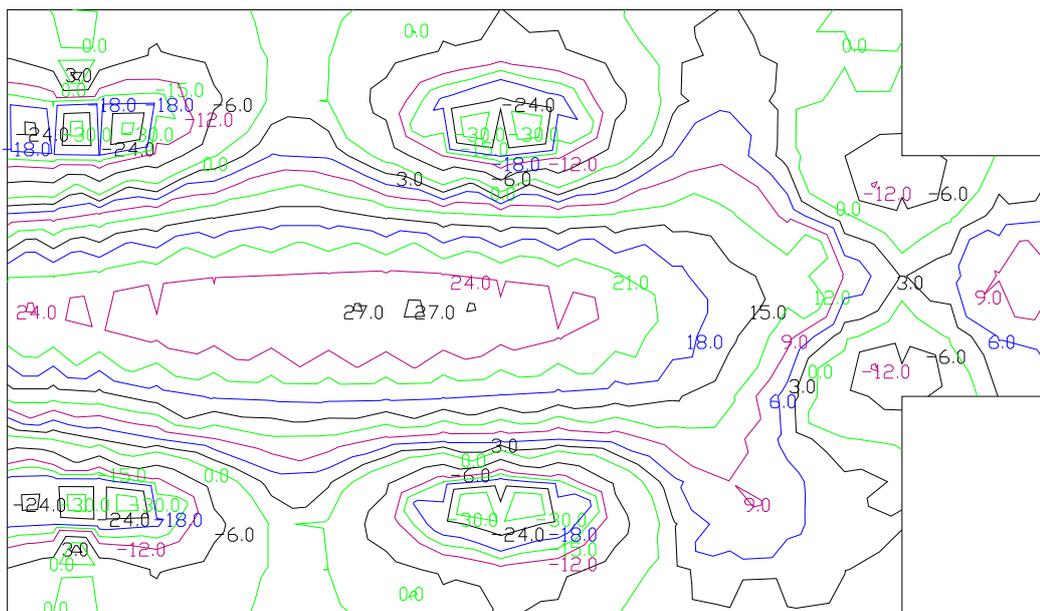


FIGURA 5.37 - Momento fletor M_y (kN.m/m)

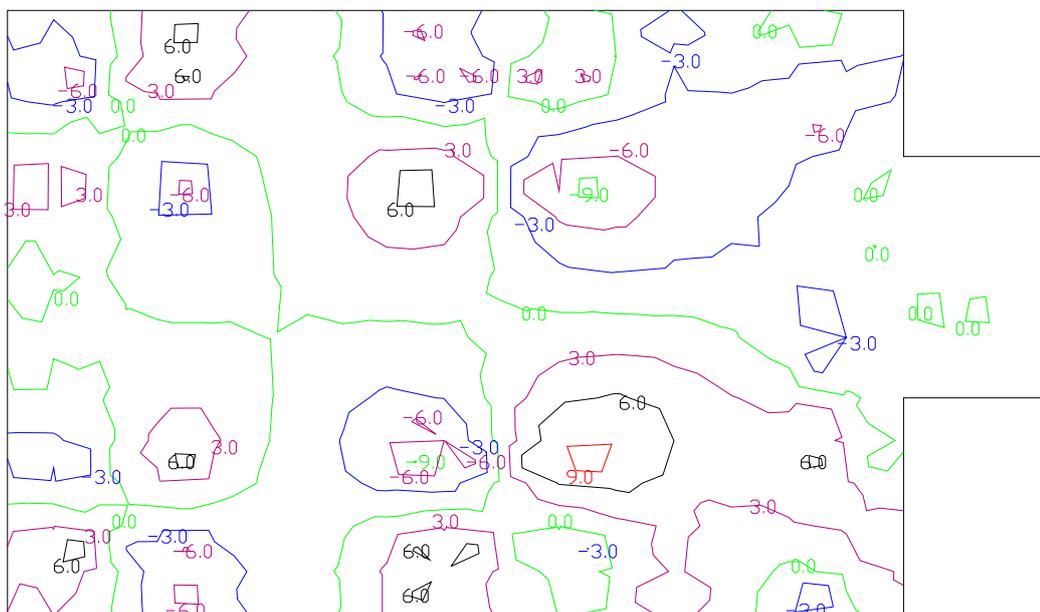


FIGURA 5.38 - Momento volvente M_{xy} (kN.m/m)

Listam-se também, nas TABELAS 5.7, as reações nos pilares abordados na fase elástica da análise, e os esforços nas vigas. As solicitações estão em valores de cálculo, e assim como na TABELA 5.4-a, o peso próprio dos pilares não está contemplado na TABELA 5.7a.

TABELA 5.7a - Reações de apoio - valores de cálculo

Pilar	F_z (kN)	M_x (kN.m)	M_y (kN.m)
P01	206.86	-83.49	61.47
P02	294.45	-75.80	2.46
P07	203.06	73.86	58.86
P08	292.77	59.55	5.50

TABELA 5.7b - Esforços para as vigas - valores de cálculo

Viga	Momentos fletores (kN.m)
V01	-9.56
V02	-2.92
V03	-16.13
V05	-16.58
V07	-9.60

Comparando-se as tabelas 5.4a e 5.7a, nota-se a tendência de alívio dos pilares P02 e P08 com acréscimos de solicitações nos pilares P01 e P07. Esse fenômeno resulta da uniformização dos efeitos produzida por uma mudança no fluxo de forças provocada pela fissuração das regiões mais solicitadas. No decorrer do processo de carregamento, as regiões do pavimento mais rígidas naquele instante tendem a absorver os acréscimos de esforços com mais intensidade do que as regiões mais fissuradas ou de rigidez inferior. Esse efeito de uniformização é diretamente influenciado pela escolha e introdução dos grupos de materiais no pavimento com características de rigidez distintas.

Os resultados obtidos do processamento em regime elastoplástico devem ser analisados quanto aos seguintes aspectos: a correspondência entre os esforços de referência de cada grupo adotado, e a distribuição dos esforços (M_x e M_y) obtida nos domínios desse grupo. Sugere-se que dentro de cada grupo, o valor de esforço referencial pré estabelecido não seja ultrapassado em mais de cerca de 10%. Se um dos grupos não atender a um desses quesitos, aborta-se o procedimento, que deve ser reiniciado com

a adoção de novos grupos de um dos dois modos distintos: alterando-se a geometria das faixas que o compõem, ou modificando-se o valor de referência imposto ao grupo.

Observando os resultados deste exemplo, pode-se verificar a concordância entre as faixas adotadas para os grupos e a distribuição dos esforços no pavimento. Desse modo, procede-se a armação do pavimento para os esforços obtidos, como exposto na FIGURA 5.39 e na FIGURA 5.40. A TABELA 5.8 apresenta as posições utilizadas na armação das lajes, e a TABELA 5.9, as armaduras de dimensionamento das vigas.

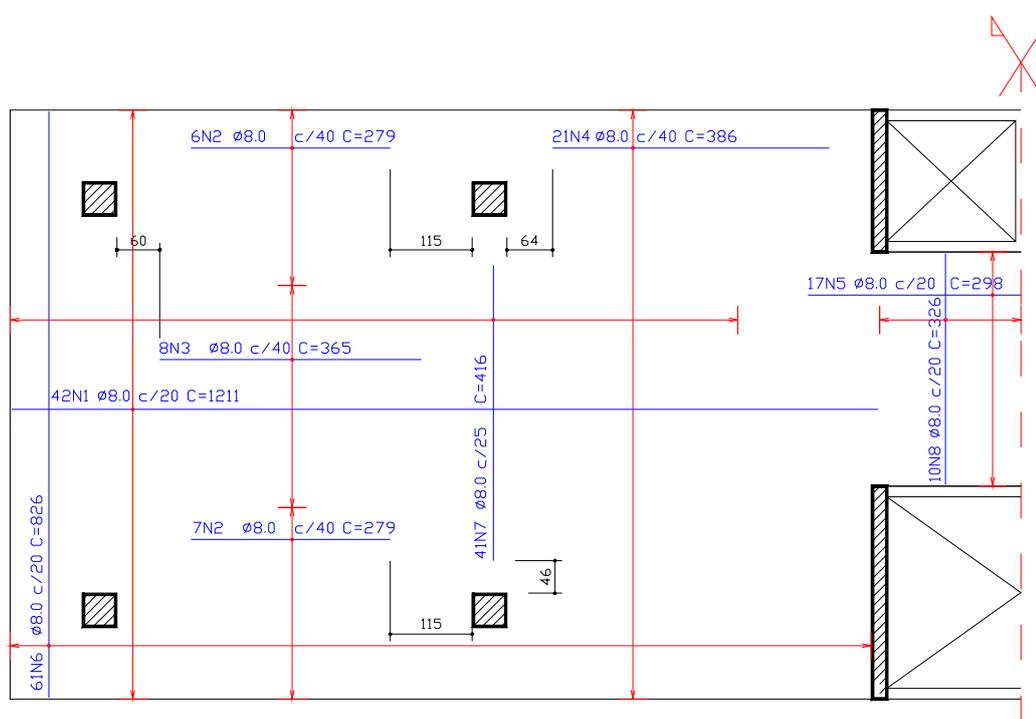


FIGURA 5.39 - Armaduras positivas - regime elastoplástico

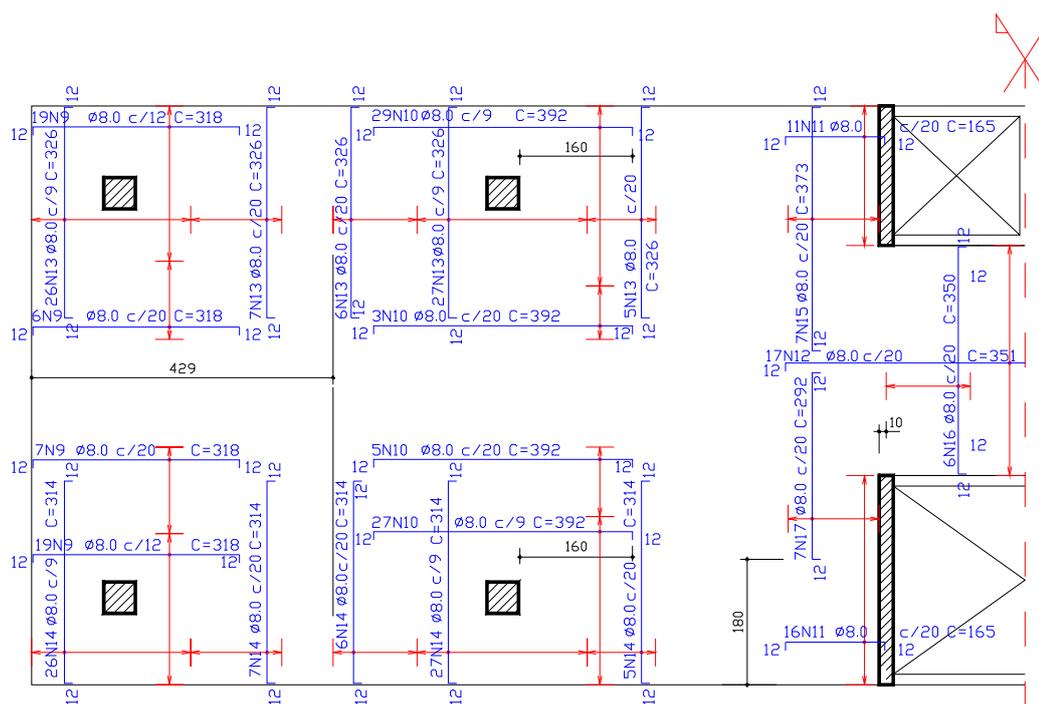


FIGURA 5.40 - Armaduras negativas - regime elastoplástico

TABELA 5.8 - Armaduras das lajes - regime elastoplástico

Armaduras positivas					Armaduras negativas				
Pos.	ϕ	Quant.	Comp. unit (cm)	Comp. total (cm)	Pos.	ϕ	Quant.	Comp. unit (cm)	Comp. total (cm)
1	8.0	42	1211	50862	9	8.0	51	318	16218
2	8.0	13	279	3627	10	8.0	64	392	25088
3	8.0	8	365	2920	11	8.0	27	165	4455
4	8.0	21	386	8106	12	8.0	17	351	5967
5	8.0	17	298	5066	13	8.0	71	326	23146
6	8.0	61	826	50386	14	8.0	71	314	22294
7	8.0	41	416	17056	15	8.0	7	373	2611
8	8.0	10	326	3260	16	8.0	6	350	2100
					17	8.0	7	292	2044

TABELA 5.9 - Armaduras longitudinais para as vigas - regime elastoplástico

Viga	Armadura positiva(cm²)	Armadura negativa(cm²)
V01	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)
V02	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)
V03	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	1.00 (2 ϕ 8.0 mm)
V05	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	1.00 (2 ϕ 8.0 mm)
V07	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)

A fase final do procedimento consiste em processar-se novamente o pavimento, agora com as taxas reais de armadura existentes nos grupos de lajes e de vigas. Essas taxas, apesar de não diferirem muito das taxas obtidas com os valores de referência, que foram utilizadas para a determinação dos diagramas momento-curvatura do modelo elastoplástico, podem, em certos casos, influenciar os resultados e promover pequenas mudanças nas distribuições dos esforços. Neste ponto do projeto, pode-se até considerar o efeito das armaduras de compressão no diagrama momento-curvatura, como é o caso do grupo III. A bem da simplificação do exemplo, não serão colocados os resultados referentes à verificação do pavimento no regime elastoplástico, mesmo porque não houve mudança na distribuição dos esforços que justificasse uma nova apresentação neste texto. Coloca-se, apenas, que o deslocamento máximo obtido com o novo processamento foi de 2.12 cm na região crítica situada entre os pilares P01, P02, P07 e P08.

Como pode-se perceber, o dimensionamento de pavimentos de concreto armado com a consideração da não-linearidade física, recai em um procedimento iterativo. Neste exemplo houve apenas duas iterações, mas em outros casos podem ocorrer três iterações ou até mais, originadas na fase final de verificação. Isso deverá acontecer quando a primeira aproximação para os grupos produzir resultados superiores às tolerâncias sugeridas neste exemplo.

Para efeito de comparação, colocam-se na FIGURA 5.41 e na FIGURA 5.42 as armaduras para o pavimento obtidas do processamento em regime elástico linear. A TABELA 5.10 apresenta as posições utilizadas na

armação das lajes, e a TABELA 5.11, as armaduras de dimensionamento das vigas.

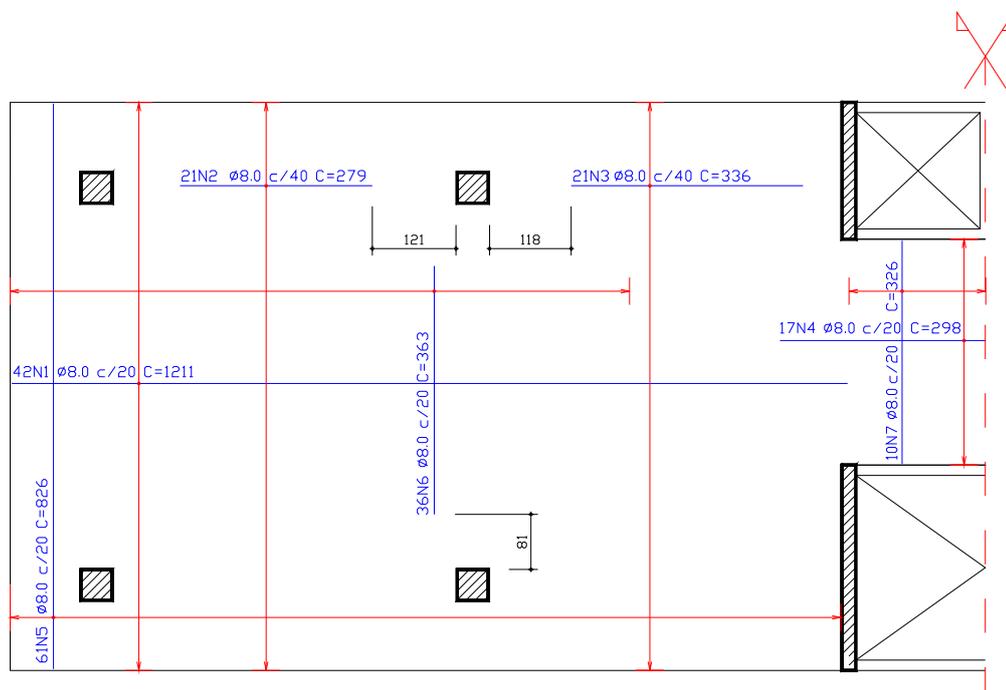


FIGURA 5.41 - Armaduras positivas - regime elástico linear

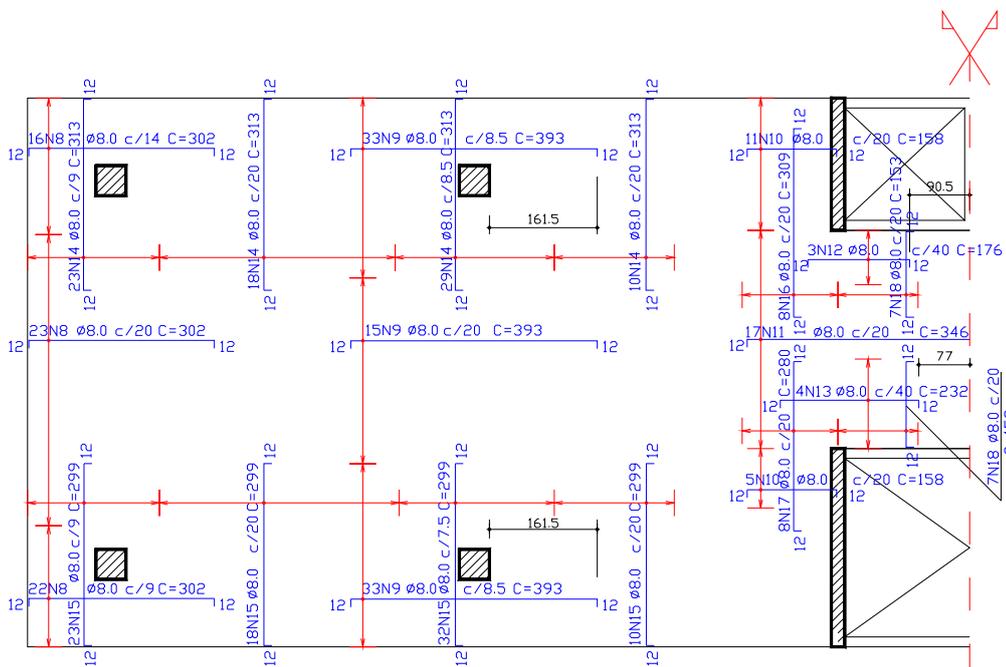


FIGURA 5.42 - Armaduras negativas - regime elástico linear
TABELA 5.10 - Armaduras das lajes - regime elástico linear

Armaduras positivas					Armaduras negativas				
Pos.	φ	Quant.	Comp.	Comp.	Pos.	φ	Quant.	Comp.	Comp.

			unit (cm)	total (cm)				unit (cm)	total (cm)
1	8.0	42	1211	50862	8	8.0	61	302	18422
2	8.0	21	279	5859	9	8.0	81	393	31833
3	8.0	21	336	7056	10	8.0	16	158	2528
4	8.0	17	298	5066	11	8.0	17	346	5882
5	8.0	61	826	50386	12	8.0	3	176	528
6	8.0	36	363	13068	13	8.0	4	232	928
7	8.0	10	326	3260	14	8.0	80	313	25040
					15	8.0	83	299	24817
					16	8.0	8	309	2472
					17	8.0	8	280	2240
					18	8.0	14	153	2142

TABELA 5.11 - Armaduras longitudinais para as vigas - regime elástico linear

Viga	Armadura positiva(cm ²)	Armadura negativa(cm ²)
V01	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	1.00 (2 ϕ 8.0 mm)
V02	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)
V03	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	1.60 (2 ϕ 10.0 mm)
V05	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	2.50 (2 ϕ 12.5 mm)
V07	0.63 (2 ϕ 6.3 mm)	1.00 (2 ϕ 8.0 mm)

De acordo com a NB-1/78, para a verificação da laje com relação à punção, sem a utilização de armadura específica para esse fim, chega-se a um valor de cálculo limite para a reação normal dos pilares mais carregados (pilares de 45x45) de 314 kN. Como as reações máximas observadas foram da ordem de 309 kN, conclui-se não haverem problemas com relação a esse fenômeno segundo qualquer uma das análises efetuadas neste exemplo.

O estado limite de deformações excessivas também foi atendido por ambas as análises, não observando-se valores superiores a 2.65 cm.

Prosseguindo na análise do pavimento, colocam-se a seguir algumas comparações entre o procedimento de cálculo elástico linear e o

procedimento elastoplástico no tocante às armaduras requeridas segundo os dois procedimentos. A TABELA 5.12 mostra o total em massa de armadura requerida pelos dois processos, dividida em armadura positiva e negativa de laje e armadura longitudinal de vigas. A FIGURA 5.43 ilustra os dados da TABELA 5.12.

TABELA 5.12 - Comparação de consumos de aço

Procedimento	Laje (kg)		Viga (kg)	Total (kg)
	Arm. Pos.	Arm. Neg.		
elástico	542.23 (100%)	467.33 (100%)	14.92 (100%)	1024.48 (100%)
elastoplástico	565.13 (104.2%)	415.69 (88.9%)	13.30 (89.1%)	994.12 (97.0%)

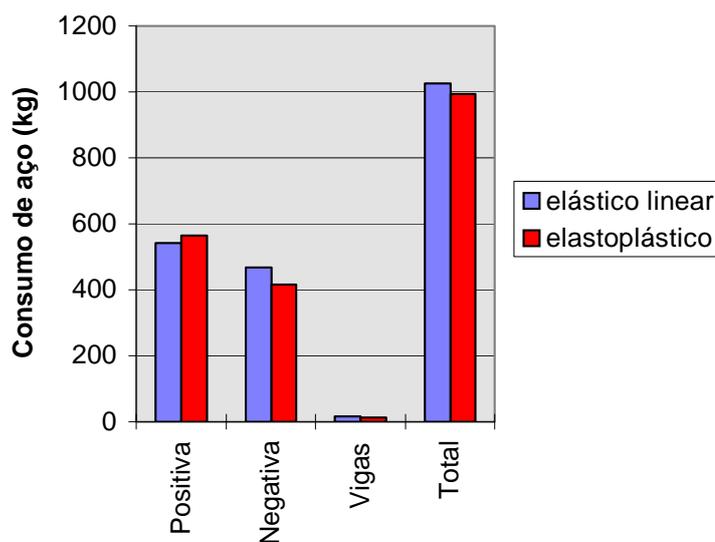


FIGURA 5.43 - Comparação de consumos de aço

Como parte final da análise, seria interessante testar o dimensionamento em regime elástico linear. O que se quer verificar, é se o procedimento de dimensionamento em regime elástico linear pelos valores máximos dos esforços em determinadas regiões, levam a taxas de armadura tais que permitam uma redistribuição segura de esforços no pavimento reprocessado em regime elastoplástico. De acordo com as FIGURAS 5.29 e 5.30, elegem-se dois grupos de lajes: ao **grupo I** será atribuído um valor de

referência de 22 kN.m/m, e ao **grupo II**, o valor de referência de 30 kN.m/m. Esses valores correspondem respectivamente aos valores absolutos dos máximos momentos positivos e negativos obtidos da análise elástico linear. As vigas formarão dois grupos: ao primeiro, composto pelas vigas V01, V02 e V07, será atribuído o valor de referência de 12 kN.m/m, e ao segundo, composto pelas vigas V03 e V05, o valor de referência de 29 kN.m/m.

Na FIGURA 5.44, apresentam-se os grupos de lajes adotados para essa verificação.

Após o dimensionamento de cada grupo de vigas e lajes de acordo com os valores de referência impostos, e da definição dos diagramas momento-curvatura convencionais para as seções de concreto armado envolvidas, processa-se o pavimento em regime elastoplástico, obtendo-se as curvas de deslocamentos segundo uma combinação rara de utilização mostradas na FIGURA 5.45, e os esforços de cálculo, de acordo com as FIGURAS 5.46, 5.47 e 5.48.

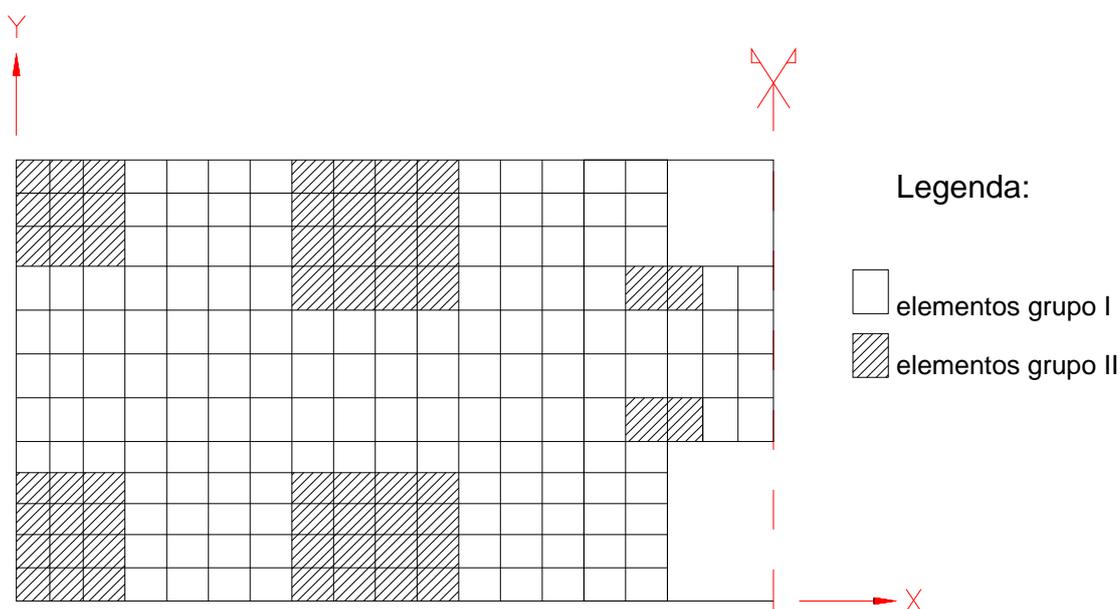


FIGURA 5.44 - Grupos de materiais adotados para a verificação

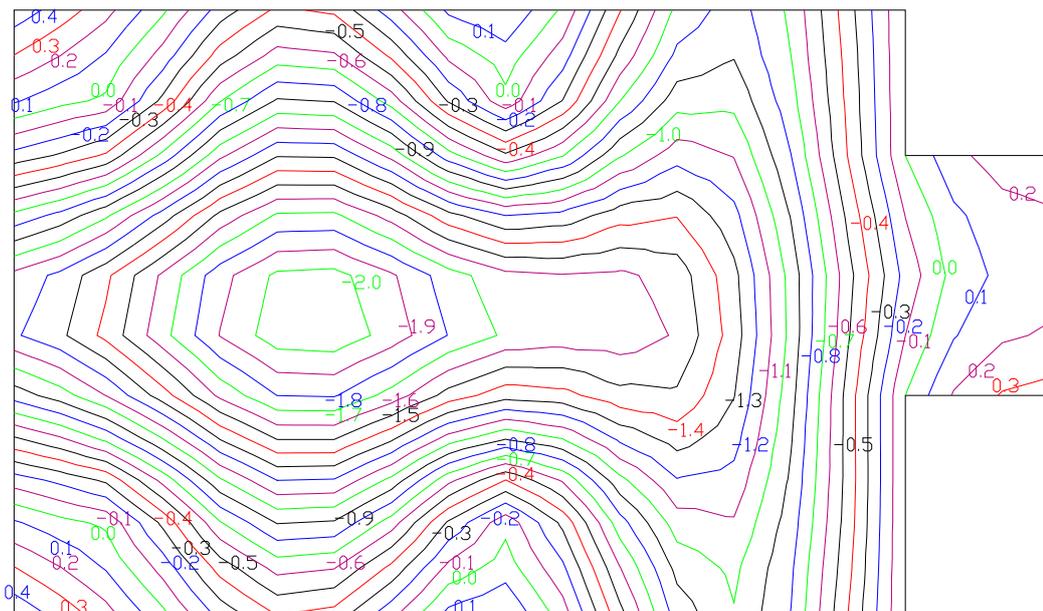


FIGURA 5.45 - Deslocamento transversal w (cm)

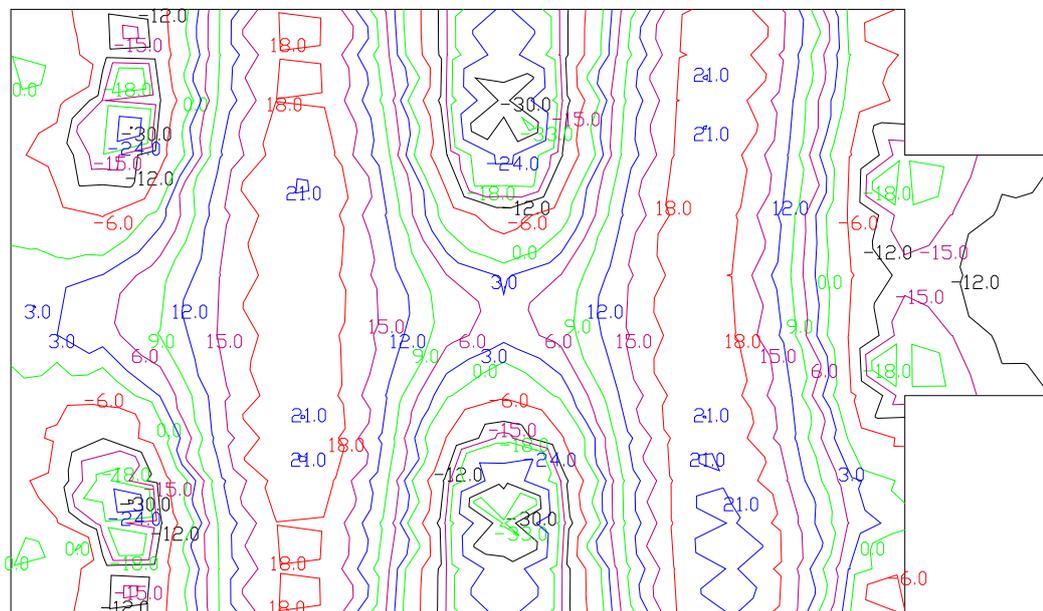


FIGURA 5.46 - Momento fletor M_x (kN.m/m)

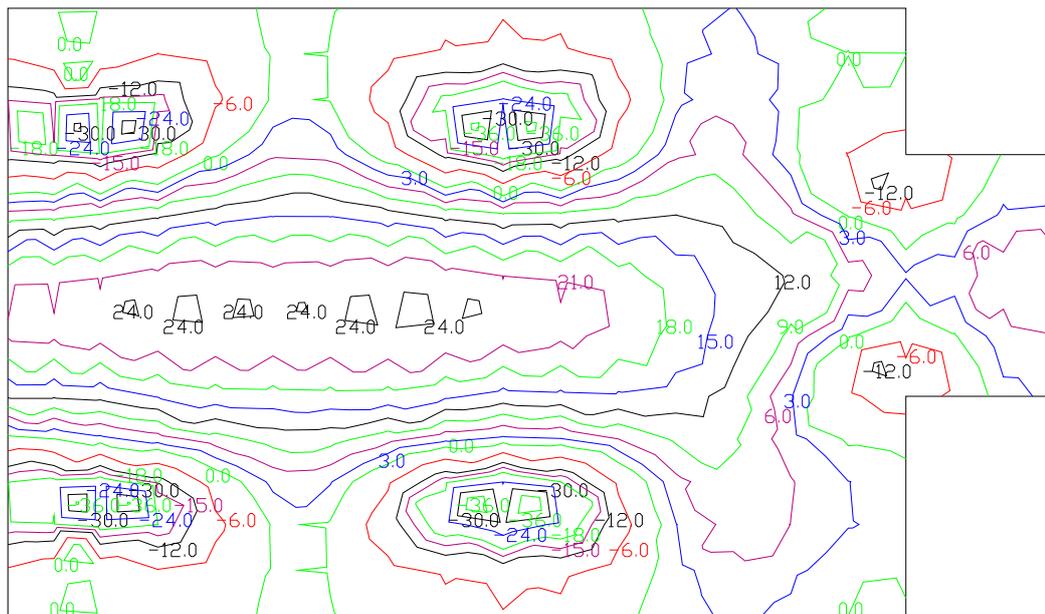


FIGURA 5.47 - Momento fletor M_y (kN.m/m)

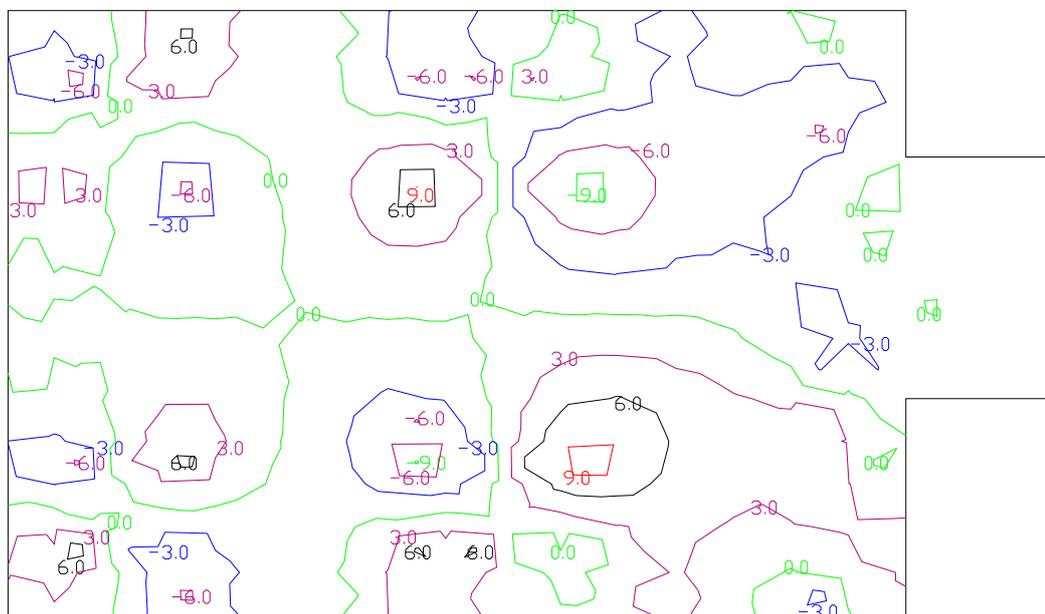


FIGURA 5.48 - Momento fletor M_{xy} (kN.m/m)

Os esforços para as vigas podem ser analisados na TABELA 5.13.

TABELA 5.13 - Esforços para as vigas - valores de cálculo

Viga	Momentos fletores (kN.m)
V01	-21.58
V02	-10.24
V03	-31.10
V05	-34.54
V07	-21.54

Observa-se que o dimensionamento das lajes pelos valores máximos dos momentos fletores obtidos do processamento em regime elástico linear leva a uma configuração de armadura segura. O reprocessamento do pavimento em regime elastoplástico conduz a resultados de esforços bem próximos aos da análise elástico linear, inclusive no que se refere às distribuições dos mesmos no pavimento. Quanto às vigas, observa-se que algumas delas apresentam valores de momentos fletores superiores aos suportáveis pelas armaduras de referência de seus grupos. Poderiam-se promover maiores plastificações nas vigas, de modo a representar o que certamente ocorreria com as mesmas em serviço. No entanto, devido à importância maior das lajes neste exemplo, já que as vigas são em número e dimensões reduzidos, optou-se pelo não reprocessamento do pavimento em regime elastoplástico.

5.7.1. Conclusões

A grande vantagem da análise de pavimentos com a consideração da não-linearidade física consiste em seu poder de representar com maior acuidade o comportamento dos efeitos de carregamentos sobre o pavimento. Veja-se, por exemplo, que os deslocamentos tiveram acréscimos de cerca de 130% (para a armação segundo 3 grupos), e de 90% (para a armação segundo 2 grupos armados pelos valores máximos do regime elástico linear) sobre os resultados da análise elástico linear. Não ocorre neste exemplo, mas esse fato poderia inviabilizar um projeto concebido em regime elástico linear.

A contribuição dada pela uniformização dos efeitos proporcionada pela análise em regime elastoplástico pode ser de grande benefício para pavimentos que apresentem picos de esforços que inviabilizem o seu dimensionamento, impondo modificações na forma. Aqui, esses efeitos puderam ser percebidos na análise das reações de apoio nos pilares, e no comportamento das curvas de momentos. Nota-se que os picos de momentos negativos nas regiões dos pilares foram abatidos e restritos a regiões menores, o que possibilitou a armação negativa por regiões e não contínua como ocorria na análise em regime elástico linear. Obviamente, com a restrição da ação dos momentos negativos, teve-se um acréscimo nas regiões sujeitas a momento positivo. Em pavimentos que apresentam diferenças significativas entre os momentos positivos e negativos, a uniformização será melhor notada, e seus efeitos poderão proporcionar economia maior de armadura.

A economia de armadura neste exemplo não foi significativa (3.0% no total), pois o fato de os pilares serem representados puntualmente no modelo em elementos finitos proporciona o aparecimento de picos de momentos fletores no seu entorno. Desse modo, mesmo havendo a tendência de uniformização dos esforços no pavimento, esses pontos permanecem produzindo picos. A amenização desse fenômeno poderia ser conseguida abordando-se o pilar como apoio extenso no modelo em elementos finitos, com a consideração das suas dimensões reais. Essa sugestão fica como proposta para trabalhos futuros.

Coloca-se também que as plastificações promovidas no pavimento são limitadas pelo acréscimo das flechas provocadas por sua consequência. Deste modo, mesmo que a princípio se pudesse pensar em grandes plastificações para uma maior economia de armadura, encontrar-se-iam nas flechas o limitante deste procedimento. Neste exemplo, as reduções impostas foram da ordem de no máximo 20%, pois tentativas maiores que essa, levaram a resultados para as flechas no pavimento que não atendiam às prescrições de deslocamento já comentadas.

O tempo de processamento consumido na análise elástico linear do pavimento em microcomputador equipado com processador de 100MHz

Pentium, foi de 4 segundos. Na análise elastoplástica foram necessários 242.17 segundos (4 minutos e 2.17 segundos). Apesar da diferença significativa do tempo consumido pela análise em regime elastoplástico com relação à análise em regime elástico linear, nota-se que o tempo de processamento requerido é ainda pequeno, o que torna a análise viável para a utilização em escritórios de projetos.

6. CONCLUSÃO

Empregando modelos relativamente simples para a representação do fenômeno elastoplástico em elementos de barra (representativos das vigas) e de placa (representativos das lajes), e mostrando a viabilidade de suas aplicações na análise estrutural de pavimentos de edifícios, procura-se abrir um horizonte muito rico e ainda pouco explorado dentro da análise de estruturas.

O modelo uniaxial aplicado aos elementos finitos de barra não-estratificados, apesar de sua simplicidade, produziu boas representações do comportamento de vigas metálicas e de concreto armado, como pode-se verificar nos exemplos apresentados neste trabalho.

As lajes de concreto armado tiveram seu comportamento aproximado por elementos de placa também não-estratificados, e com o critério de escoamento de Von Mises. Apesar de ser um modelo relativamente simples quando comparado ao modelo estratificado com outros critérios de escoamento considerados mais apropriados ao concreto, produziu resultados bastante satisfatórios, como os apresentados no exemplo 6 deste trabalho.

Como conseqüência das implementações realizadas no sistema ANSER, ressalta-se a melhoria do sistema de análise que passou a incorporar o elemento finito de placa quadrilateral, além do elemento de barra de grelha em análise elastoplástica. Faz-se necessária ainda, a implementação de um modelo elastoplástico destinado à representação das barras de pilares, introduzindo-se o efeito do esforço normal.

A aplicação de um procedimento de cálculo de pavimentos de edifícios em regime elastoplástico pode trazer grandes benefícios à análise estrutural, pois permite ao projetista atuar sobre a redistribuição dos esforços obtidos com um mesmo conjunto de formas, através da imposição de taxas de armadura diferenciadas no pavimento.

Além disso, o dimensionamento em regime elastoplástico oferece a possibilidade de determinar-se com maior precisão os deslocamentos da estrutura, pois considera a diminuição da rigidez dos elementos por fissuração do concreto e escoamento das armaduras, dispensando-se procedimentos aproximados para a determinação desses efeitos sobre os elementos do pavimento. Com isso, estruturas projetadas em regime elástico linear, e que satisfazem ao estado limite de utilização de deformações excessivas em uma primeira avaliação, podem, quando analisadas em regime elastoplástico, não mais atender a esse critério de dimensionamento.

Como pode ser observado no exemplo 6 deste trabalho, uma outra grande vantagem da análise elastoplástica de pavimentos, é a de promover uma uniformização dos efeitos (reações de apoio e esforços distribuídos) nos elementos do pavimento. Esse fato pode vir a viabilizar um conjunto de formas preestabelecido, e o mais importante, uniformizar os conjuntos de armaduras utilizadas na armação do pavimento, beneficiando-se, conseqüentemente, o aspecto construtivo. Outra conseqüência importante oriunda da uniformização dos esforços, é a possível economia de armaduras no dimensionamento do pavimento. Através da eliminação de picos de esforços (negativos ou positivos), com o conseqüente acréscimo nos esforços de sinais contrários (positivos ou negativos), forçam-se as seções de concreto a trabalharem em patamares de esforços próximos da média. Deste modo, promove-se um melhor aproveitamento das seções transversais.

Para trabalhos futuros, ficam as sugestões de estenderem-se os modelos elastoplásticos ao comportamento dos pilares do pavimento, a elaboração de um modelo elastoplástico estratificado para os elementos estruturais, a consideração de anisotropia introduzida por taxas de armaduras diferentes em direções ortogonais, e a introdução de outros

critérios de escoamento, complementando o modelo proposto. Verifica-se, também, a necessidade de implementar modelos que permitam representar os efeitos que variam com o tempo.

ANEXOS

Anexo A - Procedimentos de integração numérica

Seja uma função de interesse $x(t)$ definida no intervalo $\Delta t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$, e $f(x(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de modo a caracterizar o seguinte problema de valor inicial:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

$$x(0) = x_0$$

Deseja-se expressar a função de interesse $x(t)$, colocada em termos de 'taxas', de uma forma incremental, promovendo-se para isso, a integração da função segundo um procedimento qualquer. Dentre os procedimentos de integração possíveis, destacam-se o explícito, baseado nas diferenças finitas ascendentes, e o implícito, fundamentado nas diferenças finitas descendentes.

A teoria das diferenças finitas permite obter uma aproximação para a derivada da função de interesse no instante t_i segundo três métodos: as diferenças finitas ascendentes, descendentes e centrais (não abordadas neste trabalho).

$$\text{diferenças ascendentes: } \dot{x}_i \cong \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \quad (\text{A.1.1})$$

$$\text{diferenças descendentes: } \dot{x}_i \cong \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \quad (\text{A.1.2})$$

As aproximações dadas pelas diferenças finitas podem ser rearranjadas de modo a caracterizarem os procedimentos:

$$\text{explícito: } x(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta t \cdot \dot{x}_i = x(t_i) + \Delta t \cdot f(x(t_i)) \quad (\text{A.1.3})$$

$$\text{implícito: } x(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta t \cdot \dot{x}_{i+1} = x(t_i) + \Delta t \cdot f(x(t_{i+1})) \quad (\text{A.1.4})$$

No procedimento explícito, a descrição da função de interesse $x(t)$ no instante t_{i+1} , $x(t_{i+1})$, é obtida com relação à derivada da própria função no instante t_i (anterior). Já no procedimento implícito, $x(t_{i+1})$ é expressa em função da derivada da função no instante t_{i+1} (atual).

Pelo fato de o procedimento explícito referir-se à derivada no instante de partida (t_i), podem aparecer problemas de convergência, como será evidenciado para o caso geral no espaço tridimensional R^3 das tensões desviadoras obedecendo-se ao critério de Von Mises. O emprego deste procedimento pode levar a uma indeterminação das variáveis de estado caso o incremento de tensões ultrapasse determinados níveis, como pode-se observar graficamente na FIGURA A.1.1.

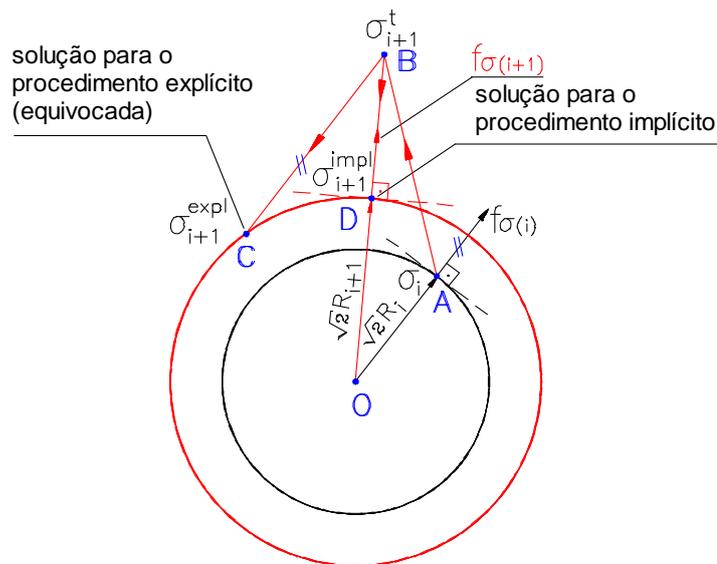


FIGURA A.1.1 - Representação gráfica dos procedimentos de integração para o critério de Von Mises

Considere-se, inicialmente, a superfície de escoamento do critério de Von Mises representada pela hiperesfera de raio $\sqrt{2}.R_i$ e centro 'O', ao final do incremento 'i'. Sobre essa superfície, tem-se o estado de tensões:

$$\sigma_i \in \partial E_{\sigma_i} \text{ em } t = t_i \quad (\text{A.1.5})$$

e representado pelo ponto 'A'. Neste ponto, o vetor normal à superfície é:

$$r(\sigma_i, q) = f_{\sigma(i)} \quad (\text{normalidade}) \quad (\text{A.1.6})$$

Por ocasião do incremento de cargas 'i+1', procura-se o estado de tensões que atenda ao modelo constitutivo adotado e promova o equilíbrio do elemento. A primeira tentativa na determinação do estado de tensões, $\sigma_{i+1} \in \partial E_{\sigma_{i+1}}$ em $t = t_{i+1}$, consiste em adotar o comportamento elástico linear do elemento sujeito a um campo de deslocamentos nodais, o que poderia conduzir ao estado de tensões:

$$\sigma_{i+1}^t \notin \partial E_{\sigma_{i+1}} \quad (\text{A.1.7})$$

e representado pelo ponto 'B'. A partir deste ponto, necessita-se fazer o retorno à superfície de escoamento encruada (expandida), através de um procedimento de integração do modelo constitutivo. A integração segundo um procedimento explícito, levaria ao estado de tensões:

$$\sigma_{i+1}^{\text{expl.}} \in \partial E_{\sigma_{i+1}} \quad (\text{A.1.8})$$

representado pelo ponto 'C', que é a intersecção entre a reta paralela ao vetor $f_{\sigma(i)}$ e a superfície de escoamento representada pela hiperesfera de raio $\sqrt{2}.R_{i+1}$. A integração segundo um procedimento implícito levaria ao estado de tensões :

$$\sigma_{i+1}^{\text{impl.}} \in \partial E_{\sigma_{i+1}} \quad (\text{A.1.9})$$

representado pelo ponto 'D', localizado na intersecção entre o segmento de reta que une os pontos 'B' e 'O' e a hiperesfera de raio $\sqrt{2}.R_{i+1}$.

Pode-se deduzir, entretanto, que o retorno do estado de tensões oriundos da tentativa em regime elástico linear para a superfície de escoamento, deve corresponder à minimização da norma energia envolvida neste retorno. Isso corresponde a afirmar que o retorno à superfície de

plastificação deve ocorrer segundo a menor 'distância' entre o estado de tentativa em regime elástico e a superfície de escoamento do critério adotado no espaço tridimensional de tensões.

Como se observa graficamente, o procedimento implícito sempre proporciona um retorno à superfície de escoamento segundo a menor distância. O retorno dá-se na direção do vetor fluxo no instante 'i+1', $f_{\sigma(i+1)}$, correspondente à direção radial, que é a que proporciona a menor distância geométrica entre um ponto e uma superfície esférica.

Em função do critério de Von Mises ser representado por uma hiperesfera no espaço das tensões desviadoras, a retro-projeção proporcionada pelo procedimento implícito ocorre sempre na direção do seu centro, ou seja, radialmente. Por isso, denomina-se Método da Retro-Projeção Radial ('Radial Return Mapping').

Com o objetivo de minimizar a possível distorção de resultados provocada pelo emprego do procedimento explícito, autores como OWEN,D.R.J.;HINTON,E. (1980) lançam mão do artifício de dividir o incremento de tensões em vários subincrementos iguais e de menor módulo. Este procedimento, no entanto, contribui com a morosidade da análise, uma vez que o particionamento em 'n' subincrementos leva a 'n' análises de redução dos subincrementos à superfície de escoamento.

Anexo B - Sobre os elementos finitos empregados

Este Anexo tem o objetivo de apresentar alguns aspectos dos elementos finitos empregados neste trabalho. Colocam-se, de modo sucinto, características relevantes sobre as hipóteses e formulações utilizadas na implementação dos elementos de barra de grelha e de placa (delgada).

B.1. Elemento de barra

O elemento finito de barra de grelha utilizado nas implementações dos modelos elastoplásticos unidimensionais apresentados no capítulo 3, possui três graus de liberdade (gdl) por nó, sendo uma translação segundo o eixo **Z**, e duas rotações segundo os eixos **X** e **Y**, como colocado esquematicamente na FIGURA A.2.1.

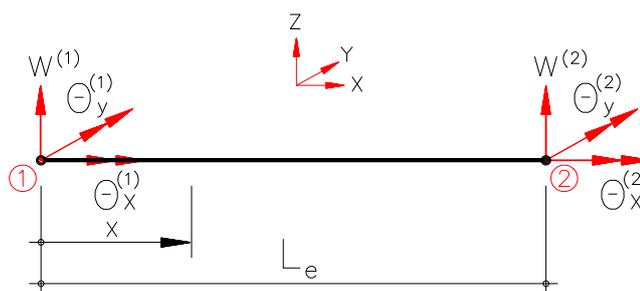


FIGURA A.2.1 - Elemento de barra de grelha - coordenadas locais

onde: w - translação segundo o eixo **Z**;

θ_x - rotação em torno do eixo **X**;

θ_y - rotação em torno do eixo **Y**;

x - coordenada genérica no domínio do elemento;

L_e - comprimento da barra.

O elemento possui um campo de deslocamentos $w(x)$ cúbico no seu domínio:

$$w(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (\text{A.2.1})$$

Deste modo, podem ser determinadas as rotações (θ_y) em função da coordenada x :

$$\theta_y(x) = \frac{dw(x)}{dx} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (\text{A.2.2})$$

As rotações em torno do eixo x (θ_x), possuem campo linear no domínio do elemento, obviamente independente dos deslocamentos verticais:

$$\theta_x(x) = a_5 + a_6x \quad (\text{A.2.3})$$

onde: a_i - constantes.

Matricialmente, podem-se escrever os campos de deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} w(x) \\ \theta_x(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & | & 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} w(x) \\ \theta_x(x) \end{Bmatrix} = [X]\{a\} \quad (\text{A.2.4})$$

Os deslocamentos nodais podem ser escritos em função das constantes e dos campos de deslocamentos impostos, como segue:

$$\begin{Bmatrix} w^{(1)} \\ \theta_y^{(1)} \\ w^{(2)} \\ \theta_y^{(2)} \\ \theta_x^{(1)} \\ \theta_x^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 1 & L_e & L_e^2 & L_e^3 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2L_e & 3L_e^2 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & L_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \rightarrow \{u\} = [A]\{a\} \quad (\text{A.2.5})$$

Da expressão (A.2.5) conclui-se que $\{a\} = [A]^{-1}\{u\}$, que levada à expressão (A.2.4), permite reescrevê-la como:

$$\begin{Bmatrix} w(x) \\ \theta_x(x) \end{Bmatrix} = [X][A]^{-1}\{u\} = [Nw||N\theta_x]\{u\} = [N]\{u\} \quad (\text{A.2.6})$$

onde: $[Nw]$ - função de forma relacionada aos deslocamentos verticais;

$[N\theta_x]$ - função de forma relacionada à rotação em torno do eixo X ;

$[N] = [X][A]^{-1}$ - função de forma total.

A relação entre os deslocamentos e as curvaturas no domínio do elemento podem ser obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \\ \frac{d\theta_x(x)}{dx} \end{Bmatrix} = \partial[Nw||N\theta_x]\{u\} = [Bw||B\theta_x]\{u\} = [B]\{u\} \quad (\text{A.2.7})$$

onde: ∂ - operador diferencial;

$[Bw]$ - matriz que relaciona as curvaturas aos deslocamentos nodais;

$[B\theta_x]$ - matriz que relaciona as rotações no domínio do elemento às rotações nodais em torno do eixo X ;

$$[B] = \partial[N] = \begin{bmatrix} \frac{-6}{L_e^2} + \frac{12x}{L_e^3} & \frac{-4}{L_e} + \frac{6x}{L_e^2} & \frac{6}{L_e^2} - \frac{12x}{L_e^3} & \frac{-2}{L_e} + \frac{6x}{L_e^2} \\ \left\| \frac{-1}{L_e} & \frac{1}{L_e} \right\| \end{bmatrix}$$

- função de forma total. (A.2.8)

A matriz de rigidez $[k^e]$ de um elemento nas suas coordenadas locais corresponde a:

$$[k^e] = \int_0^{L_e} [Bw]^T EI [Bw] dx + \int_0^{L_e} [B\theta_x]^T GJ_t [B\theta_x] dx \quad (\text{A.2.9})$$

onde: E - módulo de elasticidade longitudinal do material;

I - momento de inércia da seção transversal;

G - módulo de elasticidade transversal do material;

J_t - momento de inércia à torção da seção transversal.

Efetuando-se as integrais indicadas, torna-se possível escrever a matriz de rigidez explicitamente como:

$$[k^e] = \begin{bmatrix} \frac{12.EI}{L_e^3} & \frac{-6.EI}{L_e^2} & \frac{-12.EI}{L_e^3} & \frac{-6.EI}{L_e^2} & 0 & 0 \\ \frac{-6.EI}{L_e^2} & \frac{4.EI}{L_e} & \frac{6.EI}{L_e^2} & \frac{2.EI}{L_e} & 0 & 0 \\ \frac{-12.EI}{L_e^3} & \frac{6.EI}{L_e^2} & \frac{12.EI}{L_e^3} & \frac{6.EI}{L_e^2} & 0 & 0 \\ \frac{-6.EI}{L_e^2} & \frac{2.EI}{L_e} & \frac{6.EI}{L_e^2} & \frac{4.EI}{L_e} & 0 & 0 \\ \frac{L_e^2}{L_e} & \frac{L_e}{L_e} & \frac{L_e^2}{L_e} & \frac{L_e}{L_e} & \frac{G.J_t}{L_e} & -\frac{G.J_t}{L_e} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G.J_t}{L_e} & \frac{G.J_t}{L_e} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.10})$$

Para a integração dos resíduos de forças indicada na expressão 3.30 do capítulo 3 deve ser utilizada apenas a parcela [Bw] da matriz [B], pois o modelo elastoplástico é uniaxial, com plastificação produzida exclusivamente pelo momento fletor.

B.2. Elemento de placa T3AF

O elemento finito de placa T3AF foi proposto por BERGAN,P.G.; HANSSSEN,L.(1978), como um dos primeiros elementos de formulação livre, juntamente com o elemento T3AE. A idéia básica da formulação livre é a de conceber o elemento finito impondo-se as condições do “Patch Test” na montagem da matriz de rigidez.

O elemento T3AF, cuja designação significa **Triângulo com 3** gdl por nó com coordenadas de **Área** homogêneas e ortogonalidade em **Força**, foi apontado por IRONS,B.M.(1983) como o elemento triangular de melhor desempenho para a análise de placas delgadas. Essa afirmação, juntamente com as experiências relatadas por CORRÊA,M.R.S.(1991) com o elemento T3AF, levaram-no a ser empregado neste trabalho. Coloca-se na FIGURA A.2.2 um desenho esquemático do elemento T3AF com seus gdl.

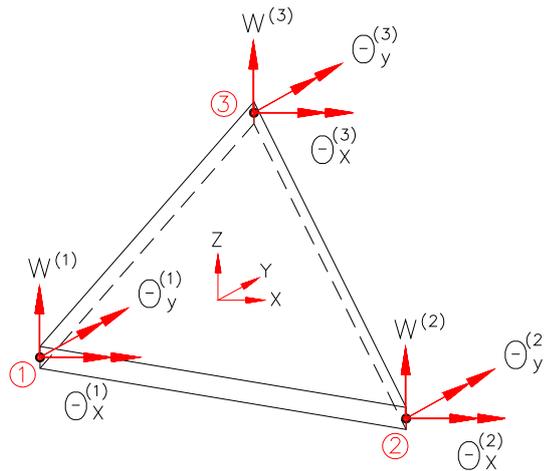


FIGURA A.2.2 - Elemento de placa T3AF - coordenadas locais

O campo dos deslocamentos (w) segundo o eixo Z no elemento é cúbico, e descrito por um conjunto de modos básicos (responsáveis pela descrição do movimento de corpo rígido e da deformação constante) composto com modos superiores (funções de forma de alta ordem, responsáveis pela descrição das variações da curvatura no domínio do elemento).

$$w = [N_{rc}] \{\alpha_{rc}\} + [N_h] \{\alpha_h\} \quad (\text{A.2.11})$$

onde: w - campo dos deslocamentos no domínio do elemento;

$[N_{rc}] = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad \xi_1\xi_2 \quad \xi_2\xi_3 \quad \xi_3\xi_1]$ - polinômio completo até o grau que corresponde aos modos rígidos e de deformação constante;

$[N_h] = [\xi_1\xi_2(\xi_1 - \xi_2) \quad \xi_2\xi_3(\xi_2 - \xi_3) \quad \xi_3\xi_1(\xi_3 - \xi_1)]$ - conjunto de modos superiores;

$\{\alpha_{rc}\}, \{\alpha_h\}$ - coeficientes associados;

ξ_i - coordenadas homogêneas de área.

A relação entre os deslocamentos e as curvaturas no domínio do elemento são dadas por:

$$\nabla w = \nabla [N_{rc}] \{\alpha_{rc}\} + \nabla [N_h] \{\alpha_h\} = [B_{rc}] \{\alpha_{rc}\} + [B_h] \{\alpha_h\} \quad (\text{A.2.12})$$

onde: ∇ - operador diferencial;

$[B_{rc}]$ - matriz que relaciona as curvaturas aos deslocamentos nodais (modo básico);

$[B_h]$ - matriz que relaciona as curvaturas aos deslocamentos nodais (modo superior);

Uma possibilidade de montagem da matriz de rigidez generalizada $[k_\alpha^e]$ de um elemento finito consiste em utilizarem-se modos básicos completos em conjunto com modos superiores linearmente independentes, do seguinte modo:

$$[k_\alpha^e] = \begin{bmatrix} [k_{\alpha rc}^e] & [P_{rc}^T G_h] \\ [G_h^T P_{rc}] & [k_{\alpha h}^e] \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.13})$$

onde: $[k_{\alpha rc}^e]$, $[k_{\alpha h}^e]$ - submatrizes de rigidez referentes aos modos básicos e superiores respectivamente;

$[G_h^T P_{rc}]$, $[P_{rc}^T G_h]$ - submatrizes de rigidez que acoplam os modos básicos aos superiores;

$[G] = [G_{rc}] + [G_h]$ - matriz quadrada de ordem 9 que relaciona os parâmetros generalizados $\{\alpha\}$ aos deslocamentos nodais $\{u\}$:

$$\{u\} = [G]\{\alpha\};$$

$$[P_{rc}] = [k^e][G_{rc}].$$

A formulação do elemento de placa triangular T3AF colocada neste Anexo constitui uma pequena introdução ao assunto, colocada com a finalidade de apoio para a compreensão das implementações elastoplásticas realizadas no capítulo 4. O assunto é bem mais amplo do que o discorrido aqui, e maiores esclarecimentos sobre a formulação deste elemento podem ser encontradas em CORRÊA, M.R.S. (1991).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ÁLVARES, M.S. (1993); *Estudo de um modelo para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação do método dos elementos finitos*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP.
- AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS (1982). *State-of-the-art report on finite element analysis of reinforced concrete*. New York, ASCE.
- ARMEN, H.; PIFKO, A.; LEVINE, H. (1968). A finite element method for the plastic bending analysis of structures. In: CONF. ON MATRIX METHODS IN STRUCTURAL MECHANICS, WPAFB, Ohio. *Proc.*
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. (1978). *NB1- Projeto e execução de obras de concreto armado*. Rio de Janeiro.
- _____. (1984). *NBR8681- Ações e segurança nas estruturas*. Rio de Janeiro.
- AUFARE, M.; CHAUVEL, D.; L'HUBY, Y. (1986). Dynamic elasto-plastic analysis of reinforced concrete slabs and application to plastic design of some building structures. In: HINTON, E.; OWEN, D.R.J., ed. *Computational modelling of reinforced concrete structures*. Swansea, Pineridge Press. p.303-326.
- BASHUR, F.K.; DARWIN, D. (1978). Nonlinear model for reinforced concrete slabs. *J. Struct. Div.*, ASCE, v.104, 157-170.
- BAZANT, Z.P. (1996). Is no-tension design of concrete or rock structures always safe?-fracture analysis. *J. Structural Engrg.* v.122, p.2-10
- BELYTSCHKO, T.; VELEBIT, M. (1972). Finite element method for elastic plastic plates. *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, v.98, 227-242.

- BERGAN,P.G.; HANSSEN,L.(1975). A new approach for deriving 'good' element stiffness matrices. In: WHITEMAN,J.R., ed. *The mathematics of finite elements and applications II*. London, Academic Press. p.483-498.
- BERGAN,P.G.; HOLLAND,I.(1979). Nonlinear finite element analysis of concrete structures. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, v.17/18, p. 443-467.
- BERGAN,P.G.; NYGARD,M.K.(1985). Nonlinear shell analysis using free formulation finite elements. In: BERGAN,P.G.; BATHE,K.J.; WUNDERLICH,W., eds. *Finite element methods for nonlinear problems*. Berlin, Springer Verlag. p.317-338.
- BESHARA,F.B.A.;VIRDI,K.S.(1991). Non-linear finite element dynamic analysis of two-dimensional concrete structures. *Computers and Structures*, v. 41 p. 1281-1294.
- BRESLER,B.;SCORDELIS,A.C.(1963). Shear strenghtof reinforced concrete beams. *Proc. of the American Concrete Institute*, v. 60 n° 1 p. 51-74.
- CARVALHO,R.C.; *Análise não-linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP.
- CEB; Manual on cracking and deformations; Bulletin n° 158; 1985
- CEB; CEB-FIP model code 1990 - final draft - Bulletin D'Information, n° 203-205; 1991
- CERVERA,M.; HINTON,E.(1986). Nonlinear analysis of reinforced concrete plates and shells using a three dimension model. In: HINTON,E.; OWEN,D.R.J., ed. *Computacional modelling of reinforced concrete structures*. Swansea, Pineridge Press. p.303-326.
- CHEN,W.F.(1982). *Plasticity in reinforced concrete*. New York, McGraw-Hill.

- CORRÊA,M.R.S.(1991). *Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios*. São Carlos. Tese (Doutorado) -Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP.
- CORRÊA,M.R.S., RAMALHO,M.A.(1987). Sistema LASER de análise estrutural. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE TECNOLOGIA DE CONSTRUÇÃO, 5.: Software para o Projeto do Edifício. *Anais*. São Paulo, EPUSP.
- CORRÊA,M.R.S., RAMALHO,M.A.(1995). Modelos numéricos para análise estrutural de edifícios.In: SEMINÁRIO SOBRE NÃO-LINEARIDADE FÍSICA E GEOMÉTRICA DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO, maio, 1995. *Anais*. São Paulo, IBRACON.
- DOTREPPE,J.C., SCHNOBRICH,W.C., PECKNOLD,D.A.(1973). Layered finite element procedure for inelastic analysis of reinforced concrete slabs. *IABSE Publications*, p.11-33, 53-68.
- FELIPPA,C.A.; BERGAN,P.G.(1987). A triangular bending element based on an energy-orthogonal free formulation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* v. 61, p. 129-160.
- FIGUEIRAS,J.A.(1983). *Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells*. Swansea. Tese (Doutorado) - Depart. of Civil Engrg., University College of Swansea.
- FRANÇA,R.L.S.(1985). *Exemplo de cálculo do esforço de segunda ordem global em um edifício de concreto armado*. In: Colóquio sobre estabilidade global das estruturas de concreto armado; IBRACON, São Paulo.
- HAND,F.R.; PECKNOLD,D.A.; SCHNOBRICH,W.C.(1973). Nonlinear layered analysis of RC plates and shells. *J. Struct. Div.*, ASCE. v. 99, p. 1491-1504.

- HILL,R.(1950). *The mathematical theory of plasticity*. Oxford, Oxford University Press.
- HINTON,E.; OWEN,D.R.J.(1986). *Computational modelling of reinforced concrete structures*. Swansea, Pineridge Press.
- HU,H.T.; SCHNOBRICH,W.C.(1991). Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete plates and shells under monotonic loading. *Comput. & Struct.*, v.38, p. 637-651.
- IRONS,B.M.:(1980). Putative high-performance plate bending element. Carta ao editor. *Int. J. Num. Meths. Engrg.*,v. 19, p. 310.
- KLEIN,D.G.(1986). A finite element model for reinforced concrete slabs with consideration of transverse shear deformation. In: HINTON,E.; OWEN,D.R.J., ed. *Computacional modelling of reinforced concrete structures*. Swansea, Pineridge Press. p. 189-216.
- KWON,W.Y., AKIN,J.E.(1986). *A simple efficient algorithm for elasto-plastic plate bending*. Swansea, Pineridge Press. p. 283-286.
- LIN,C.S.; SCORDELIS,A.C.(1975). Nonlinear analysis of rc shells of general form. *J. Struct. Div.*, ASCE, v. 101, p. 523-538.
- LIN,J.J.;FAFARD,M.;BEAULIEU,D.;MASSICOTE,B.(1991). Nonlinear analysis of composite bridges by the finite element method. *Computers and Structures*, v. 40 p. 1151-1167.
- MALLET,R.; MARÇAL,P.V.(1968). Elastic-plastic analysis of flat plates by the finite element method. In: ASME WINTER ANNUAL MEETIND AND ENERGY SYSTEMS EXPOSITION, New York.
- MARÇAL,P.V.; KING,I.P.(1967). Elasto-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method. *Int. J. Mech. Sci.*, v.9, p. 143-155.

- MENDELSON,A.(1968). *Plasticity: theory and application*. Robert E. Krieger Publ.
- NAYAK,G.C.; ZIENKIEWICZ,O.C.(1972). Elasto-plastic stress analysis: a generalization for various constitutive relations including strain softening. *Int. J. Num. Meths. Engrg.*,v. 5, p. 113-135.
- NEAL,B.G.(1977). *The plastic methods of structural analysis*. New York, Halsted Press.
- NOGUEIRA,L.A.(1993). *Análise de vigas de pisos de edifícios considerando comportamento não-linear dos materiais*. São Carlos. Trabalho de Iniciação Científica - EESC-USP.
- NYGARD,M.K.; BERGAN,P.G.(1989). Nonconforming finite elements based on the free formulation. In: KUHN,G.; MANG,H., eds. *Discretization methods in structural mechanics*. Berlin, Springer Verlag. p. 71-82.
- OWEN,D.R.J.; HINTON,E.(1980). *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Swansea, Pineridge Press.
- PRAGER,W.; HODGE, P.G.(1963). *Theory of perfectly plastic solids*. New York, John Wiley and Sons.
- PROENÇA,S.P.B.(1988). *Sobre modelos matemáticos do comportamento não linear do concreto: análise crítica e contribuições*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP.
- PROENÇA,S.P.B.(1989). *Notas sobre análise não-linear física de estruturas. Parte I: teoria da plasticidade e técnicas numéricas*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP. Notas de Aula.
- RAMALHO,M.A.(1990). *Sistema para análise de estruturas considerando interação com o meio elástico*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP.

RAZAQPUR,A.G.;NOFAL,M.(1990) Analytical modelling of nonlinear behavior of composite bridges. *J. Structures Engrg.* v.116, p.1715-1733

SHEHATA,L.C.D.; MARTINS,P.C.R.; PEREIRA,S.S.R.; *Classificação e propriedades do concreto e do aço.*

SIMO,J.C.; HUGHES,T.J.R.(1988). *Elastoplasticity and viscoplasticity: computacional aspects.*

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Escola de Engenharia de São Carlos. Serviço de Biblioteca (1993). *Diretrizes para elaboração de dissertações e teses na EESC-USP.* São Carlos. 56 p.

WHANG,B.(1969). Elasto-plastic orthotropic plates and shells. In: SYMP. ON APPLICATIONS ON FINITE ELEMENT METHODS IN CIVIL ENGINEERING, Tennessee, Vanderbilt University.*Proc.* p. 481-513.

WILSON,E.L.(1974). The static condensation algorithm. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, v.8, p.198-203.

YAMADA,Y.;YISHIMURA,N.;SAKURAI,T.(1968). Plastic stress-strain matrix and its applications for the solution of elasto-plastic problems by the finite element method. *Int. J. Mech. Sci.*,v. 10, p.343-354.

ZIENKIEWICZ,O.C.; VALLIAPAN,S.; KING,I.P.(1969). Elasto-plastic solutions on engineering problems - 'initial stress', finite element approach. *Int. J. Num. Meths. Engrg.*, v.1, p.75-100.

APÊNDICE

Apêndice 1 - Subrotina para a condensação estática

Segue-se a listagem da subrotina utilizada na condensação estática dos graus de liberdade (gdl) referentes ao nó interno de um quadrilátero composto por 4 elementos triangulares. Esta subrotina elimina os 3 últimos gdl (1 translação e duas rotações referentes ao centro de gravidade do elemento) do elemento quadrilátero, aqui denominados pelos gdl 13, 14 e 15. Esta subrotina também armazena os pivôs a serem utilizados para a condensação dos resíduos de força e das tensões iniciais referentes ao nó interno do quadrilátero. Para tal condensação, serão necessárias as variáveis **PIVOTS** e **TES**.

```
*****
C$$$COND -CONDENSACAO GRAUS DE LIBERD. DO NO INTERNO DO
QUADRILATERO
*****
C Rotina feita em 28/04/96 com a finalidade de efetuar a condensacao estatica (ref. graus
C de liberdade internos) da matriz de rigidez ASA, vetor de cargas RF, matriz momento x
C deslocamento SA e dos momentos iniciais SF
C
C Principais variáveis
C ASA - matriz de rigidez
C RF - vetor de cargas
C SA - matriz momento x deslocamento
C SF - matriz de momentos iniciais
C NIF - número de graus de liberdade internos a serem condensados
C NEF - número de graus de liberdade externos do elemento
C NTF - número total de graus de liberdade do elemento
C PIVOTS - matriz que armazena os pivots para a condensação de RF nos resíduos
C ASALL - vetor que armazena os elementos da diagonal principal de ASA
utilizados na condensação de RF nos resíduos
```

C TES - matriz que armazena os pivots auxiliares para a condensação de SF nos resíduos

SUBROUTINE COND(NTF,NEF,PIVOTS,TES,ASALL)

```
IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)
INTEGER I,J,K,K1,L,N,NIF,NTF,NEF
REAL*4 PIVOTS(14,3),TES(12,3),ASALL(3)
REAL*8 T,C
COMMON/EM/ LM(24),ND,NS,PF(24),RF(24,4),XM(24),SA(12,24),SF(12,4),
*          ASA(24,24),LMI(4),IX(7),IY(7),EL(4),TLO(5,4),QQQ(696)
```

```
NIF = NTF - NEF
DO 200 N = 1,NIF
  K = NTF - N
  L = K + 1
  IF (ASA(L,L).LE.0.)GO TO 200
  DO 165 I = 1,K
    IF (ASA(L,I).EQ.0.) GO TO 165
    T = ASA(L,I)/ASA(L,L)
    ASALL(N)=ASA(L,L)
```

C

C Matriz de rigidez [ASA]

```
DO 160 J = I,K
  ASA(J,I) = ASA(J,I) - ASA(J,L)*T
  ASA(I,J) = ASA(J,I)
160    END DO
165    END DO
      C=RF(L,1)/ASA(L,L)
```

C

C Vetor de cargas [RF] com uma coluna

```
DO 180 I=1,K
  PIVOTS(I,N)=ASA(I,L)/ASA(L,L)
  RF(I,1)=RF(I,1)-ASA(I,L)*C
180    CONTINUE
```

C

C Matriz Momento x Deslocamento [SA] e Momentos Iniciais [SF]

```
IF(ASA(L,L).LT.1.0D-8) GO TO 200
DO 195 K1=1,12
  T=Sa(K1,L)
  TES(K1,N)=T
  Sa(K1,L)=Sa(K1,L)/ASA(L,L)
  DO 190 I=1,K
    Sa(K1,I) = Sa(K1,I) - (ASA(I,L)/ASA(L,L))*T
190    CONTINUE
      SF(K1,1)=SF(K1,1)+T*C
195    CONTINUE
200    CONTINUE
      RETURN
      END
```

Apêndice 2 - Subrotina para a determinação da raiz de $f(\gamma) = 0$

C\$\$NEWTON

C

C Principais variáveis

C PM - escoamento/inflexão (Mr ou My)

C EPSTN - deformação efetiva

C HL - parâmetro de encruamento isótropo (ky ou ku)

C E - módulo de elasticidade longitudinal

C G - módulo de elasticidade transversal

C NI - coef. de Poisson

C SE - momentos de placa relativos ao estado de tentativa (Mx,My,Mxy)

C GAMA - variável procurada

C f - função f^2

C df - derivada da função f^2

C fbar2 - função \bar{f}^2

C R2 - função R^2

SUBROUTINE NEWTON(PM,EPSTN,HL,E,NI,SE,GAMA)

INTEGER cont

REAL*4 SE(3)

REAL*8 PM,HL,E,NI,EPSTN,dx,aux,GAMA,GAMA0,fbar,f,df

C Aproximacao inicial para GAMA --> GAMA0

GAMA0=0.

CALL FUNCVAL(PM,EPSTN,HL,E,NI,SE,GAMA0,fbar,f,df)

GAMA0=-f/df

GAMA=GAMA0

aux=0.

cont=0

dx=0.

DO WHILE (abs((GAMA-aux)/GAMA).GT.(1.0E-6))

CALL FUNCVAL(PM,EPSTN,HL,E,NI,SE,GAMA,fbar,f,df)

dx=f/df

GAMA=(GAMA-dx)

aux=GAMA+dx

END DO

RETURN

END

C\$\$FUNCVAL

SUBROUTINE FUNCVAL(PM,EPSTN,HL,E,NI,SE,GAMA,fbar,f,df)

REAL*4 SE(3)

REAL*8 PM,HL,EPSTN,E,NI,GAMA,G,fbar,f,df,

* aux1,aux2,aux3,aux4,fbar2,R,R2,dfbar,dR

G=E/(2*(1+NI))

aux1=(1./6.)*(SE(1)+SE(2))**2/(((E*GAMA)/((3-3*NI))+1)**2)

aux2=(0.5*((SE(1)-SE(2))**2)+(2*(SE(3))**2))/(1+(2*G*GAMA))**2

aux3=-((2*E*aux1)/((3-3*NI)*((E/(3-3*NI))*GAMA+1)))

aux4=E/(3-(3*NI))

```

fbar2=aux1+aux2
fbar=SQRT(fbar2)
dfbar=(1./(SQRT(aux1+aux2)*2))*
* (aux3-((4*aux2*G)/(1+(2*G*GAMA))))
R2=((((fbar*GAMA*SQRT(2./3.))+EPSTN)*HL)+PM)**2*(1./3.)
R=SQRT(R2)
dR=(((1./(6*fbar))*GAMA*SQRT(6.)*(SQRT(3.)/3.))*
* (((-2*AUX1)*AUX4)-(4*AUX2*G))+1./3.)*fbar*SQRT(6.))*HL
f=(0.5*fbar2)-R2
df=(fbar*dfbar)-(2*(R*dR))
RETURN
END

```

Apêndice 3 - Programa para a determinação do diagrama momento-curvatura de uma seção transversal

```

*****
C  PROGRAMA PARA A DETERMINACAO DO DIAGRAMA MOMENTO x
C  CURVATURA CARACTERISTICO DE UMA SEÇÃO DE
C  CONCRETO ARMADO (VIGA OU LAJE)
*****
C
C Principais variáveis
C   Ec   - módulo de elasticidade longitudinal do concreto
C   fcm  - resistência média do concreto à compressão
C   fctk - resistência característica do concreto à tração
C   fctm - resistência média do concreto à tração na flexão
C   Es   - módulo de elasticidade longitudinal do aço
C   fyk  - tensão de escoamento do aço
C   b, h - dimensões da seção transversal
C   d    - altura útil da seção
C   dl   - cobrimento da armadura longitudinal de compressão
C   As   - armadura longitudinal de tração
C   Als  - armadura longitudinal de compressão
C   M    - vetor que armazena os momentos Mr, My e Mu
C   curv - vetor que armazena as respectivas curvaturas
C   alfae - Es/Ec
C   ecc  - deformação específica do concreto à compressão
C   esc  - deformação específica do aço à compressão
C   est  - deformação específica do aço à tração
C   Rcc  - resultante de compressão no concreto
C   Rsc  - resultante de tração na armadura longitudinal de tração
C   scc  - tensão normal de compressão no concreto
C   xis  - profundidades da linha neutra para as diversas situações
C   Dr, Dy, Du - inclinações dos trechos do diagrama momento-curvatura trilinear
C   ky, ku - parâmetro de encruamento isótropo correspondente ao primeiro ou
           segundo trecho de encruamento

```

```

INCLUDE 'FGRAPH.FI'
INCLUDE 'FGRAPH.FD'

```

```

INTEGER tipo

```

```

REAL Ec, fcm, fctk, fctm, Es, fyk, b, h, d, dl, As, Als, M(3),
* curv(3), alfae, ecc, esc, est, Rcc, Rsc, scc,

```

* xis(2), aa, bb, cc, Dr, Dy, Du, ky, ku

C

C Entrada de dados

```
CHARACTER ARQ*15  
RECORD/rccoord/curpos
```

C

C Tela de abertura

```
CALL clearscreen ($GCLEARSCREEN)  
CALL settextposition (8,1,CURPOS)  
WRITE(*,1)
```

```
1 FORMAT('PROGR. P/ A DETERMINACAO DO DIAGR. MOMENTOxCURVATURA',  
* /1X,'MESTRADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS',  
* /1X,'PROFESSOR - MARCIO ROBERTO SILVA CORREA',  
* /1X,'ALUNO - RICHARD SARZI OLIVEIRA',  
* ////1X,'NOME DO ARQUIVO DE ENTRADA (sem extensao): ',L10)  
CALL settextposition (16,1,CURPOS)
```

C

C Leitura do nome do arquivo de dados de entrada

```
READ(*,2) ARQ  
2 FORMAT(A10)
```

C

C Abertura dos arquivos de entrada e saida

```
OPEN (3, FILE = ARQ//'.DAT')  
OPEN (5, FILE = ARQ//'.OUT')  
WRITE(5,3) ARQ
```

```
3 FORMAT (17X,'ARQUIVO DE ENTRADA (sem extensao): ',A15)
```

C

C Leitura da opcao de calculo - 1:Viga retangular; Laje 2: Viga seção T

```
READ (3,*)tipo  
WRITE(5,4) tipo  
4 FORMAT (/3X,'Tipo de elemento (Viga,Laje=1, Secao"T"=2) --> ',I1)
```

C

C Leitura e gravacao dos dados da viga ou laje

```
READ (3,*)b,h,d,dl,As,Als  
WRITE (5,5)
```

```
5 FORMAT (/3X,'=====',/5X,  
* 'DADOS GEOMETRICOS',/3X,'=====',/5X,  
* 'b',10X,'h',10X,'d',10X,'dl',10X,'As',10X,'Als',/)
```

```
WRITE (5,6)b,h,d,dl,As,Als
```

```
6 FORMAT(3X,F6.2,5X,F5.2,6X,F5.2,6X,F5.2,7X,F5.2,7X,F5.2)
```

```
READ (3,*)Ec,fcm,fctk,Es,fyk  
WRITE (5,7)
```

```
7 FORMAT (/3X,'=====',/5X,  
* 'DADOS DOS MATERIAIS',/3X,'=====',/5X,  
* 'Ec',9X,'fcm',8X,'fctk',7X,'Es',10X,'fyk',/)
```

```
WRITE (5,8)Ec,fcm,fctk,Es,fyk
```

```
8 FORMAT(2X,F8.2,2X,F8.2,3X,F8.2,4X,F8.2,3X,F8.2)
```

C

C Determinacao da fissuracao (M_r , $(1/r)r$)

```
IF (tipo.EQ.1) THEN  
fctm=1.5*fctk  
ELSE  
IF (tipo.EQ.2) THEN  
fctm=1.2*fctk  
END IF  
END IF  
M(1) = (b*h*h/6.)*fctm  
curv(1) = 12*M(1)/(Ec*b*h*h)
```

C

C Determinacao do escoamento (My,(1/r)y)

```
alfae = Es/Ec
xis(1) = (-alfae*(As+Als)+(SQRT(alfae*(alfae*((As+Als)*(As+Als))+
* 2*b*(Als*dl+As*d))))/b
ecc = fyk*As/( (Ec*xis(1)*b/2.)+(Als*Es*(xis(1)-dl)/xis(1) )
scc = ecc*Ec
IF (scc.GT.fcm) THEN
  scc = fcm
  ecc = scc/Ec
END IF
esc = (ecc*(xis(1)-dl))/xis(1)
Rcc = (scc*xis(1)*b)/2.
Rsc = esc*Es*Als
M(2) = Rcc*(d-xis(1)/3.)+Rsc*(d-dl)
est = ecc*(d-xis(1))/xis(1)
curv(2) = est/(d-xis(1))
```

C

C Determinacao da situação última (Mu,(1/r)u)

```
aa = 0.8*b*fcm
bb = -((0.8*b*fcm*d)+(0.01*Als*Es)+As*fyk)
cc = (0.01*Als*Es*dl)+As*fyk*d
xis(2) = (-bb-SQRT((bb*bb)-(4*aa*cc)))/(2.*aa)
ecc = 0.01*(xis(2))/(d-xis(2))
IF (ecc.LT.0.02)THEN
  aa = Ec*b
  bb = (2*Es*Als)+(200*fyk*As)
  cc = -( 2*Es*Als*dl)+(200*fyk*As*d )
  xis(2) = (-bb+SQRT((bb*bb)-(4*aa*cc)))/(2.*aa)
  ecc = 0.01*(xis(2))/(d-xis(2))
END IF
esc = 0.01*(xis(2)-dl)/(d-xis(2))
curv(3) = 0.010/(d-xis(2))
IF (ecc.GT.0.0035)THEN
  ecc = 0.0035
  esc = 0.0035*(xis(2)-dl)/xis(2)
  curv(3) = 0.0035/xis(2)
END IF
Rcc = 0.8*xis(2)*b*fcm
Rsc = esc*Es*Als
M(3) = Rcc*(d-(0.4*xis(2)))+Rsc*(d-dl)
IF (ecc.LT.0.02)THEN
  M(3) = ( As*fyk*(d-xis(2)/3.) )-( Rsc*(dl-xis(2)) )
END IF
```

C

C Determinacao dos parametros de encruamento

```
Dr = M(1)/curv(1)
Dy = (M(2)-M(1))/(curv(2)-curv(1))
Du = (M(3)-M(2))/(curv(3)-curv(2))
ky = Dy/(1-Dy/Dr)
ku = Du/(1-Du/Dr)
```

C

C Gravação dos resultados

```
WRITE (5,10)
10  FORMAT (/3X,'*****',/5X,
*  'DIAGRAMA MOMENTO x CURVATURA',/3X,'*****',/5X,
*  'Mr',8X,'(1/r)r',7X,'My',8X,'(1/r)y',7X,'Mu',7X,'(1/r)u',/)
WRITE (5,15)M(1),curv(1),M(2),curv(2),M(3),curv(3)
15  FORMAT(3(F9.2,2X,E10.2,2X))
```

```

WRITE (5,20)
20  FORMAT (/3X,'*****',/5X,
*    'POSICOES DA LINHA NEUTRA',/3X,'*****'
*    ',/5X,
*    'Xy',8X,'Xu',/)
WRITE (5,25)xis(1),xis(2)
25  FORMAT(2X,2(F6.2,4X))
WRITE (5,30)
30  FORMAT (/3X,'*****',/5X,
*    'PARAMETROS DE ENCRUAMENTO',/3X,'*****',/5X,
*    'ky',12X,'ku',/)
WRITE (5,35)ky,ku
35  FORMAT(2X,2(E9.3,4X))
STOP
END

```