

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS
DE EDIFÍCIOS ALTOS COM NÚCLEOS RESISTENTES SOBRE
FUNDAÇÕES FLEXÍVEIS**

Ivan Gomes Matias Junior

Dissertação apresentada à Escola de engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Dagoberto Dario Mori

São Carlos
1997

Aos meus pais

Ao Professor Dagoberto Dario Mori, pela dedicação e excelente orientação fornecida durante a elaboração deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de pesquisa - CNPq, pela bolsa de estudo concedida.

A todos os colegas, professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC/USP, que colaboraram para a realização desta pesquisa.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	xiv
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	xvi
LISTA DE SÍMBOLO	xvii
RESUMO	xxiv
ABSTRACT	xxv
1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Generalidades	1
1.2 - Alguns trabalhos desenvolvidos em teoria de primeira ordem	5
1.3 - Alguns trabalhos desenvolvidos em teoria de segunda ordem	5
1.4 - Objetivos	8
1.5 - Resumo dos capítulos	9
2 . CARACTERÍSTICAS ESTRUTURAIS	11
2.1 . Introdução	11
2.2 . Descrição dos elementos	11
2.2.1 - Laje	12
2.2.2 - Elemento de treliça	12
2.2.3 - Elemento de pórtico plano	12
2.2.4 - Elemento de pórtico espacial	13
2.2.5 - Elemento de núcleo	13
2.2.6 - Elementos horizontais de contraventamento	13
2.2.7 - Elementos diagonais de contraventamento	14
2.3 - Sistema de referência	14
2.3.1 - Sistema global de eixos	14
2.3.2 - Sistema local de eixos para o elemento de treliça	15
2.3.3 - Sistema local de eixos para o elemento de pórtico plano	15
2.3.4 - Sistema local de eixos para os elementos de pórtico espacial	15
2.3.5 - Sistema local de eixos para o elemento de núcleo	15
2.3.6 - Sistema local de eixos para o elemento horizontal	15

2.3.7 - Sistema local de eixos para o elemento diagonal.....	17
2.4 - Coordenadas deslocamento	18
2.4.1 - Coordenadas para o elemento de treliça	18
2.4.2 - Coordenadas para o elemento de pórtico plano	18
2.4.3 - Coordenadas para os elementos de pórtico espacial	19
2.4.4 - Coordenadas para o elemento de núcleo.....	20
2.4.5 - Coordenadas para os elementos horizontais	21
2.4.6 - Coordenadas para os elementos diagonais.....	22
2.4.7 - Coordenadas para a subestrutura.....	23
2.4.8 - Coordenadas na estrutura	28
3 - MATRIZ DE RIGIDEZ EM TEORIA DE 1ª ORDEM E VETOR DE FORÇAS NODAIS	30
3.1 - Introdução.....	30
3.2 - Energia de deformação da subestrutura.....	30
3.2.1 - Vínculos elásticos de translação	33
3.2.2 - Vínculos elásticos de rotação.....	35
3.2.3 - Vínculos elásticos na direção do empenamento	36
3.3 - Energia potencial das cargas atuantes	38
3.4 - Energia potencial total.....	39
3.5 - Princípio da Energia Potencial Total Mínima (P.E.P.T.M.)	40
3.6 - Aplicação do P.E.P.T.M. ao elemento de treliça.....	41
3.6.1 - Matriz de rigidez e vetor de forças do elemento de treliça.....	41
3.6.2 - Contribuição da rigidez do elemento e suas ações aplicadas.....	43
3.7 - Aplicação do P.E.P.T.M. ao elemento de pórtico plano	44
3.7.1 - Matriz de rigidez e vetor de forças do elemento de pórtico plano.....	45
3.7.2 - Contribuição da rigidez do elemento e suas ações aplicadas.....	48
3.8 - Aplicação do P.E.P.T.M. ao elemento de pórtico espacial	51
3.8.1 - Matriz de rigidez e vetor de forças do elemento de pórtico espacial.....	53
3.8.2 - Contribuição da rigidez do elemento e suas ações aplicadas.....	56
3.9 - Aplicação do P.E.P.T.M. ao elemento de núcleo	59
3.9.1 - Matriz de rigidez e vetor de forças equivalente do elemento núcleo.....	61
3.9.2 - Contribuição da rigidez do elemento e suas ações aplicadas.....	66

3.10 - Aplicação do P.E.P.T.M. aos elementos horizontais.....	68
3.10.1 - Matriz de rigidez do elemento horizontal	69
3.10.2 - Contribuição da rigidez do elemento	70
3.11 - Aplicação do P.E.P.T.M. aos elementos diagonais	75
3.11.1 - Matriz de rigidez dos elementos diagonais	76
3.11.2 - Contribuição da rigidez dos elementos diagonais.....	76
3.12 - Matriz de rigidez e o vetor de forças nodais para a subestrutura.....	82
4 - MATRIZ DE RIGIDEZ DA SUBSTRUTURA EM TEORIA DE 2 ^a	
ORDEM	85
4.1 - Introdução.....	85
4.2 - Equações diferenciais de um elemento genérico em teoria de 2 ^a ordem.....	85
4.2.1 - Equações dos deslocamentos horizontais na linha do esqueleto	85
4.2.2 - Energia potencial dos esforços internos de 1 ^a ordem nas	
deformações de 2 ^a ordem.	87
4.2.3 - Energia potencial total em teoria de 2 ^a ordem	91
4.2.4 - Dedução das equações diferenciais em teoria de 2 ^a ordem.....	92
4.3 - Matriz de rigidez do elemento de pórtico plano em teoria de 2 ^a ordem.....	92
4.4 - Matriz de rigidez dos elementos de pórtico espacial em teoria de 2 ^a	
ordem	94
4.4.1 - Elemento ELM-03.....	94
4.4.2 - Elemento ELM-04.....	94
4.5 - Matriz de rigidez do elemento de núcleo em teoria de segunda ordem	97
4.6 - Matriz de rigidez do elemento diagonal em teoria de segunda ordem.....	99
5 - OPERAÇÕES DE REDUÇÃO DE COORDENADAS, CONDIÇÕES DE	
CONTORNO, RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES E	
METODOLOGIA USADA NO CÁLCULO EM TEORIA DE 2 ^a ORDEM ...	100
5.1 - Introdução.....	100
5.2 - Operações de redução de coordenadas.....	100
5.2.1 - Liberação de coordenadas internas	100
5.2.2 - Decomposição matricial de Choleski.....	102
5.3 - Condições de contorno	105
5.3.1 - Vinculações com deslocamentos nulos.....	106

5.3.2 - Vinculações com deslocamentos conhecidos	106
5.3.3 - Vinculações com rigidez conhecida.....	107
5.4 - Método de resolução do sistema de equações.....	107
5.5 - Metodologia empregada para o cálculo em teoria de segunda ordem	109
5.6 - Parâmetros de instabilidade para o cálculo em teoria de 2ª ordem	111
6 - ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS.....	119
6.1 - Introdução.....	119
6.2 - Deslocamentos nas subestruturas tipo.....	119
6.3 - Deslocamentos e esforços nas extremidades dos elementos	120
6.3.1 - Elementos de treliça	121
6.3.2 - Elementos de pórtico plano.....	121
6.3.3 - Elementos de pórtico espacial.....	122
6.3.4 - Elementos de núcleo	124
6.3.5 - elementos horizontais de contraventamento	126
6.3.6 - Elementos diagonais de contraventamento	127
7 - ANÁLISE DAS ESTRUTURAS.....	129
7.1 - Introdução.....	129
7.2 - Exemplo número 1	129
7.3 - Exemplo número 2	138
7.4 - Exemplo número 3	154
7.5 - Exemplo número 4	170
7.6 - Considerações finais e sugestões.....	187
8- BIBLIOGRAFIA :	194

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Sistemas de referência para uma subestrutura modelo e seus elementos.....	17
Figura 2.2 - Coordenadas do elemento de treliça (ELM-01).....	18
Figura 2.3 - Coordenadas do elemento de pórtico plano(ELM-02).....	19
Figura 2.4 - Coordenadas do elemento de pórtico espacial (ELM-03).....	19
Figura 2.5 - Coordenadas do elemento de pórtico espacial (ELM-04).....	20
Figura 2.6 - Coordenadas do elemento de núcleo (ELM-05).....	20
Figura 2.7 - Coordenadas do elemento horizontal (ELM-06).....	21
Figura 2.8 - Coordenadas do elemento horizontal (ELM-07).....	21
Figura 2.9 - Sistema de coordenadas em uma subestrutura modelo.....	28
Figura 2.10 - Esquema simplificado do processo de subestruturação.....	29
Figura 3.1 - Vínculos elásticos de translação nas direções X_g , Y_g e Z_g	34
Figura 3.2 - Vínculos elásticos de rotação em torno dos eixos X_g , Y_g e Z_g	35
Figura 3.3 - Vínculos elásticos contínuos e em pontos localizados nos núcleos.....	37
Figura 3.4 - Deslocamentos de extremidades e vínculos elásticos dos ELM-01	41
Figura 3.5 - Deslocamentos de extremidades e vínculos elásticos dos ELM-02	45
Figura 3.6 - Formação de trechos rígidos nas extremidades do ELM-02	49
Figura 3.7 - Rotação das coordenadas do ELM-02 para os eixos globais.....	50
Figura 3.8 - Deslocamentos de extremidades e vínculos elásticos dos ELM-04	52
Figura 3.9 - Translação das coordenadas de rotação e translação vertical do centro de gravidade para o centro de torção.....	54
Figura 3.10 - Formação de trechos rígidos nos elementos ELM-04	56
Figura 3.11 - Rotação das coordenadas dos ELM-04 para os eixos globais.....	57
Figura 3.12 - Deslocamentos de extremidades e vínculos elásticos dos ELM-05	60
Figura 3.13 - Rotação das coordenadas dos ELM-05 para os eixos globais.....	67

Figura 3.14- Rotação das coordenadas dos ELM-07 para o sistema de referência local dos elementos que lhe servem de apoio.....	70
Figura 3.15- Translação das coordenadas dos ELM-07 do seu ponto de incidência para o centróide da seção transversal do elemento vertical que lhe serve de apoio (sem propriedades setoriais).....	71
Figura 3.16- Translação das coordenadas dos ELM-07 do seu ponto de incidência para o centróide da seção transversal do elemento vertical que lhe serve de apoio (com propriedades setoriais).....	72
Figura 3.17- Translação das coordenadas dos ELM-08 do seu ponto de incidência para o centróide da seção transversal do elemento vertical que lhe serve de apoio (sem propriedades setoriais).....	78
Figura 3.18- Translação das coordenadas dos ELM-08 do seu ponto de incidência para o centróide da seção transversal do elemento vertical que lhe serve de apoio (com propriedades setoriais).....	79
Figura 3.19- Translação das coordenadas dos ELM-09 do seu ponto de incidência para o centróide da seção transversal do elemento vertical que lhe serve de apoio (sem propriedades setoriais).....	79
Figura 3.20- Translação das coordenadas dos ELM-09 do seu ponto de incidência para o centróide da seção transversal do elemento vertical que lhe serve de apoio (com propriedades setoriais).....	80
Figura 3.21- Excentricidade entre os eixos longitudinais de elementos verticais pertencentes a subestruturas vizinhas.....	83
Figura 4.1 - Deslocamentos de um ponto genérico da linha do esqueleto.....	86
Figura 4.2 - Deformação de um elemento infinitesimal de área ds e comprimento dx	87
Figura 4.3 - Elástica de flexão no plano xy	89
Figura 4.4 - Acréscimo nos esforços cortantes devido ao momento torçor.....	90
Figura 5.1 - Barra esbelta submetida à carregamento crítico.....	111
Figura 5.2 - Idealização da estrutura como um pilar de rigidez equivalente	114
Figura 7.1 - Detalhes da estrutura de núcleo idealizada por COSTA(1984)	130

Figura 7.2 - Curvas representativas das rotações em torno de X_g no núcleo idealizado por COSTA (1982)	131
Figura 7.3 - Curvas dos deslocamentos devido ao empenamento no núcleo idealizado por COSTA (1984)	133
Figura 7.4 - Curvas das translações do ponto 4, em cada pavimento, no núcleo idealizado por COSTA (1982).....	134
Figura 7.5 - Curvas representativas das rotações em torno de X_g , com e sem lintéis, no núcleo idealizado por COSTA (1982).....	135
Figura 7.6 - Curvas das rotações em torno de X_g , com e sem rigidez ao empenamento, no núcleo idealizado por COSTA (1982)	136
Figura 7.7 - Curvas das tensões normais no ponto 3, em cada pavimento, no núcleo idealizado por COSTA (1982).....	138
Figura 7.8 - Planta baixa e corte X_g x Z_g da estrutura de núcleo idealizado por YAGUI (1987)	139
Figura 7.9 - Vinculação na direção do empenamento para o núcleo idealizado por YAGUI (1978).....	140
Figura 7.10 -Translações na direção de Z_g e rotações em torno de X_g , no núcleo idealizado por YAGUI (1978)	141
Figura 7.11 - Translações na direção de Z_g e rotações em torno de X_g , com vínculos rígidos e elásticos, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).....	145
Figura 7.12 - Translações em Z_g e rotações em torno de X_g , com e sem lintéis, no núcleo idealizado por YAGUI (1978)	147
Figura 7.13 - Momentos fletores, em cada pavimento e na direção do eixo local y_5 , no núcleo idealizado por YAGUI (1978)	148
Figura 7.14 - Curvas representativas dos bimomentos de 1ª e 2ª ordens, em cada pavimento, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).....	150
Figura 7.15 - Diagrama de barras dos momentos fletores e cortantes de 1ª ordem no núcleo idealizado por YAGUI (1978).....	151

Figura 7.16- Bimomentos em cada pavimento, com vínculos livres, elásticos e restringido, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).....	153
Figura 7.17- Planta baixa da estrutura de contraventamento idealizada por SILVA (1989).....	155
Figura 7.18- Curvas das Translação na direção Z_g e das rotações em torno de X_g , relativas ao sistema estrutural idealizado por SILVA (1989).....	157
Figura 7.19- Vínculo elástico na direção do empenamento para o núcleo do sistema estrutural idealizado por SILVA (1989).....	158
Figura 7.20- Curvas das translações em Y_g e rotações em X_g , relativas à estrutura idealizada por SILVA (1989).....	159
Figura 7.21- Curvas das translações em Y_g e das rotações em X_g , ambas em 2ª ordem, com vínculos livres, elásticos e restringidos, na estrutura idealizada por SILVA (1989).....	161
Figura 7.22- Sistema estrutural idealizada por SILVA (1989) com núcleo contraventado por elementos tipo ELM-07	162
Figura 7.23- Curvas das translações em Y_g , com vínculos elásticos, livres e restringidos, no sistema estrutural idealizado por SILVA (1989), sendo o núcleo contraventado por elementos ELM-07	163
Figura 7.24- Curvas das translações em Y_g e das rotações em X_g , ambas em 1ª e 2ª ordens, no sistema estrutural idealizado por SILVA (1989), com e sem rigidez ao empenamento	164
Figura 7.25- Diagrama de momentos fletores em relação ao eixo local y_4 , resultantes no ELM-04 de número 3, da estrutura idealizada por SILVA (1989)	165
Figura 7.26- Curvas representativa dos momentos fletores em 1ª e 2ª ordens, nas extremidades inferiores dos ELM-05 , do sistema estrutural idealizado por SILVA (1989).....	167

Figura 7.27- Diagrama dos momentos de 1ª e 2ª ordens no pilar 4, resultantes no eixo local z_4 , na estrutura idealizada por SILVA (1989), considerando seu núcleo com e sem rigidez ao empenamento.	168
Figura 7.28- Curvas dos momentos de 1ª ordem no ELM-05, em cada pavimento da estrutura idealizada por SILVA (1989), considerando os seus vínculos, rígidos, elásticos e livres.	169
Figura 7.29- Planta baixa dos pavimentos tipo e fachadas lateral e frontal da estrutura do exemplo 4.....	175
Figura 7.30- Excentricidades entre os eixos longitudinais dos ELM-06 e ELM-03 da estrutura do exemplo 4	176
Figura 7.31- Excentricidade entre os eixos longitudinais dos ELM-04, ELM-08 e ELM-06 da estrutura do exemplo 4.....	177
Figura 7.32- Formação de trechos rígidos nas vigas e pilares da estrutura do exemplo 4.....	178
Figura 7.33- Excentricidades existentes entre os eixos longitudinais dos ELM-03, pertencentes a modelos vizinhos, da estrutura do exemplo 4.....	179
Figura 7.34- Curvas das translações em Z_g e diagrama de barras dos momentos fletores, em relação ao eixo local y_3 , no elemento tipo ELM-03 indicado na figura 2.29, considerando a existência ou não das excentricidades verticais entre os pilares pertencentes a modelos vizinhos (estrutura do exemplo 4).....	182
Figura 7.35- Curvas das translações em Z_g e diagrama de barras dos momentos fletores no ELM-03 (ver figura 7.29), considerando a existência ou não de trechos rígidos (estrutura do exemplo 4).....	184
Figura 7.36- Idealização do vínculo elástico na direção do empenamento (exemplo 4).....	185
Figura 7.37- Curvas das translações de 1ª e 2ª ordens na direção de Z_g para a estrutura do exemplo 4.....	187

- Figura 7.38-** Curvas das translações na direção de Z_g e das rotações em torno de X_g , ambas em teoria de 1ª ordem, na estrutura do exemplo 4, quando seu núcleo é modelado com e sem rigidez ao empenamento. 188
- Figura 7.39-** Diagrama de tensões normais na seção da base do núcleo idealizado por **COSTA** (1982) em kgf / cm^2 190

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Quantidade de coordenadas por nó	23
Tabela 5.1 - Esquema do cálculo em teoria de 2ª ordem, utilizando a técnica de iteração direta	110
Tabela 7.1 - Valores das rotações em torno de X_g no núcleo idealizado por COSTA(1982)	132
Tabela 7.2 - Valores dos deslocamentos na direção do empenamento no núcleo idealizado por COSTA (1982).....	133
Tabela 7.3 - Translações verticais no ponto 4, em cada pavimento, no núcleo idealizado por COSTA (1984)	134
Tabela 7.4 - Rotações em X_g , com e sem lintéis, no núcleo idealizado por COSTA (1982)	135
Tabela 7.5 - Rotações em torno de X_g , com e sem rigidez ao empenamento, no núcleo idealizado por COSTA (1982)	136
Tabela 7.6 - Tensões normais no ponto 3, em cada pavimento, no núcleo idealizado por COSTA (1984)	137
Tabela 7.7 - Translações na direção de Z_g , com vínculos rígidos, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).....	141
Tabela 7.8 - Rotações em torno de X_g , com vínculos rígidos, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).....	142
Tabela 7.9 - Translações na direção de Z_g , com vínculos elásticos, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).....	143
Tabela 7.10 - Rotações em torno de X_g , com vínculos elásticos, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).....	144
Tabela 7.11 - Valores das translações na direção Z_g , com e sem lintéis, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).....	146

Tabela 7.12- Valores das rotações em torno de X_g , com e sem lintéis, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).....	146
Tabela 7.13- Momentos fletores em cada pavimento, na direção do eixo local y_s , no núcleo idealizado por YAGUI (1978).....	148
Tabela 7.14- Bimomentos de 1ª e 2ª ordens, com e sem lintéis, resultantes em cada pavimento, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).....	149
Tabela 7.15- Momentos fletores em Y_g e cortantes em Z_g de 1ª ordem, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).....	150
Tabela 7.16- Valores dos bimomentos, com vínculos livres, elásticos e restringidos ao empenamento, no núcleo idealizado por YAGUI (1978)	153
Tabela 7.17- Valores das translações na direção Y_g , em cada pavimento, no sistema de contraventamento misto idealizado por SILVA (1989).....	156
Tabela 7.18- Valores das rotações em torno de X_g , em cada pavimento, no sistema estrutural idealizado por SILVA (1989).....	157
Tabela 7.19- Translações em Y_g e rotações em X_g , ambos em 1ª ordem, com vínculos livres elásticos e restringidos, para a estrutura idealizada por SILVA (1989).....	159
Tabela 7.20- Valores das translações em Y_g e das rotações em X_g , ambos em teoria de 2ª ordem, com vínculos livres, elásticos e restringidos para o sistema de contraventamento misto idealizado por SILVA (1989).....	160
Tabela 7.21- Translações de 1ª e 2ª ordens em Y_g com vínculos rígidos, elásticos e livres, no sistema estrutural idealizado por SILVA (1989). Sendo o núcleo contraventado por elementos ELM-07	162
Tabela 7.22- Valores das translações em Y_g e das rotações em X_g com e sem rigidez ao empenamento no sistema estrutural idealizado por SILVA (1989)	164

Tabela 7.23- Valores dos momentos fletores de 1ª ordem no ELM-04 de número 3, pertencente à estrutura idealizada por SILVA (1989).....	165
Tabela 7.24- Valores dos momentos fletores em 1ª e 2ª ordens, resultantes nas extremidades inferiores dos ELM-05 , no sistema de contraventamento misto idealizado por SILVA (1989).....	166
Tabela 7.25- Valores dos momentos de 1ª e 2ª ordens no pilar 4 (em relação ao eixo local z_4), na estrutura idealizada por SILVA (1989), considerando seu núcleo com e sem rigidez ao empenamento.....	168
Tabela 7.26- Valores dos momentos fletores de 1ª ordem nas extremidades inferiores do ELM-05 , considerando os vínculos da estrutura idealizada por SILVA (1989) rígidos, elásticos e livres.	169
Tabela 7.27- Ações horizontais aplicadas nos nós mestres das lajes da estrutura modelo (exemplo 4).....	179
Tabela 7.28- Valore das translações em Z_g e dos momentos fletores no elemento tipo ELM-03 , indicado na figura 2.29 (eixo local y_3), considerando a existência ou não das excentricidades verticais entre os pilares pertencentes a modelos vizinhos (estrutura do exemplo 4).	180
Tabela 7.29 - Valores das translações em Z_g e dos momentos fletores, no ELM-03 (ver figura 7.29), considerando a existência ou não de trechos rígidos (estrutura do exemplo 4)	183
Tabela 7.30- Valores das translações, em de 1ª e 2ª ordens e na direção de Z_g , para a estrutura do exemplo 4.....	186

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	- Associação brasileira de normas técnicas
CEB	- Comité Euro-International du Béton
NB	- Norma brasileira
C.G.	- Centro de gravidade
C.T.	- Centro de torção
Dir.	- Direção ou direções
DKT	- Discrete Kirchhoff Theory
ELM-01	- Elemento de treliça
ELM-02	- Elemento de pórtico plano
ELM-03	- Elemento de pórtico espacial sem rigidez à torção
ELM-04	- Elemento de pórtico espacial com rigidez à torção
ELM-05	- Elemento de núcleo
ELM-06	- Elemento horizontal de contraventamento sem rigidez à torção
ELM-07	- Elemento horizontal de contraventamento com rigidez à torção
ELM-08	- Elemento diagonal de treliça
ELM-09	- Elemento diagonal de pórtico
Empen.	- Empenamento
Mom.	- Momento
NNO-01	- Nó gerado pelo elemento ELM-01
NNO-02	- Nó gerado pelo elemento ELM-02
NNO-03	- Nó gerado pelo elemento ELM-03
NNO-04	- Nó gerado pelo elemento ELM-04
NNO-05	- Nó gerado pelo elemento ELM-05
NAG	- Numerical Algorithm Groups.
P.E.P.T.M.	- Princípio da Energia Potencial Total Mínima.
Vinc.	- Vínculos
Trans.	- Translação

LISTA DE SÍMBOLOS

Romanos

- B - Bimomento
- B_i - Bimomento aplicado na seção que contém o ponto i
- C_0 - Constante de rigidez do solo
- Dk_Y - Excentricidade “y” entre os eixos longitudinais dos elementos verticais pertencentes a subestruturas vizinhas
- Dk_Z - Excentricidade “z” entre os eixos longitudinais dos elementos verticais pertencentes a subestruturas vizinhas
- E - Módulo de elasticidade longitudinal
- F - Funcional da expressão da energia potencial em teoria de 2ª ordem
- G - Módulo de elasticidade transversal
- i_D - Raio de giração polar em relação ao centro de torção
- H_Y - Ação horizontal na direção de Y_g aplicada no nó mestre da laje superior da subestrutura
- H_Z - Ação horizontal na direção de Z_g aplicada no nó mestre da laje superior da subestrutura
- I_X - Momento de inércia à torção
- I_Y - Momento de inércia em relação ao eixo “y”
- I_Z - Momento de inércia em relação ao eixo “z”
- I_ω - Momento setorial de inércia da seção transversal do elemento
- $I_{\omega f}$ - Momento setorial de inércia da seção transversal da fundação
- J - Número de elementos por tipo
- JK_Y - Auxiliar para calcular o número de coordenadas da laje superior
- JK_Z - Auxiliar para calcular o número de coordenadas da laje inferior
- JK_F - Auxiliar para calcular o número de coordenadas na fundação
- J_Y - Segmento característico em relação a y
- J_Z - Segmento característico em relação a z
- Kem_i - Rigidez do vínculo no ponto i relativo ao empenamento
- Kt_{x_i} - Rigidez do vínculo de translação na direção do eixo x_i do **ELM-0i**

Kt_{y_i}	- Rigidez do vínculo de translação na direção do eixo y_i do ELM-0i
Kt_{z_i}	- Rigidez do vínculo de translação na direção do eixo z_i do ELM-0i
Kr_{x_i}	- Rigidez do vínculo de rotação em torno do eixo x_i do ELM-0i
Kr_{y_i}	- Rigidez do vínculo de rotação em torno do eixo y_i do ELM-0i
Kr_{z_i}	- Rigidez do vínculo de rotação em torno do eixo z_i do ELM-0i
K_Y	- Coordenada y do círculo de estabilidade ou ponto de Kinden
K_Z	- Coordenada z do círculo de estabilidade ou ponto de Kinden
L	- Comprimento do elemento
M_X	- Momento torçor em torno do eixo X_g
M_Y	- Momento fletor na direção do eixo Y_g
M_Z	- Momento fletor na direção do eixo Z_g
N	- Esforço normal
NCT	- Quantidade de coordenadas deslocamento em uma laje
NCT_X	- Número da coordenada de translação vertical na direção de X_g
NCT_Y	- Número da coordenada de translação vertical na direção de Y_g
NCT_Z	- Número da coordenada de translação vertical na direção de Z_g
NCR_X	- Número da coordenada de rotação em torno de X_g
NCR_Y	- Número da coordenada de rotação em torno de Y_g
NCR_Z	- Número da coordenada de rotação em torno de Z_g
NCE_M	- Número da coordenada na direção do empenamento
NE1	- Quantidade de elementos do tipo ELM-01 na subestrutura
NE2	- Quantidade de elementos do tipo ELM-02 na subestrutura
NE3	- Quantidade de elementos do tipo ELM-03 na subestrutura
NE4	- Quantidade de elementos do tipo ELM-04 na subestrutura
NE5	- Quantidade de elementos do tipo ELM-05 na subestrutura
P_X	- Ação vertical
Q_Y	- Esforço cortante na direção de y
Q_Z	- Esforço cortante na direção de z
S	- Área da seção transversal do elemento

t	- Espessura da parede que constitui a seção transversal do ELM-05
U_{DF}	- Energia de deformação da subestrutura
U_{esp}	- Energia de deformação específica
U_{PC}	- Energia potencial das cargas aplicadas na subestrutura
U_{r_X}	- Energia de deformação do vínculo elástico de rotação (torção)
U_{r_Y}	- Energia de deformação do vínculo elástico de rotação (flexão em y)
U_{r_Z}	- Energia de deformação do vínculo elástico de rotação (flexão em z)
U_{t_i}	- Energia potencial das cargas do elemento ELM-0i
U_{t_X}	- Energia de deformação do vínculo elástico de translação em “x”
U_{t_Y}	- Energia de deformação do vínculo elástico de translação em “y”
U_{t_Z}	- Energia de deformação do vínculo elástico de translação em “z”
U_{τ_Y}	- Energia potencial devido ao esforço cortante Q_Y
U_{ω}	- Característica geométrica de Vlassov
U_{τ_Z}	- Energia potencial devido ao esforço cortante Q_Z
$U_{\tau_Y}^{2^\circ}$	- Energia potencial devido ao esforço cortante Q_Y de 1ª ordem nas distorções de 2ª ordem
$U_{\tau_Z}^{2^\circ}$	- Energia potencial devido ao esforço cortante Q_Z de 1ª ordem nas distorções de 2ª ordem
$U_{\sigma}^{2^\circ}$	- Energia potencial dos esforços internos de 1ª ordem nas deformações de 2ª ordem
u	- Função que define as translações na direção de X_g ou x_i
u_i	- Translação do ponto i na direção do eixo X_g ou x_i
v	- Função que define as translações na direção de Y_g ou y_i
v_i	- Translação do ponto i na direção do eixo Y_g ou y_i
v'_i	- Rotação do ponto i em torno do eixo Z_g ou z_i
v_D	- Translação do centro de torção na direção do eixo Y_g
v_N	- Translação horizontal do nó mestre na direção de Y_g

- y - Ordenada na direção de y_i , com origem na linha neutra da seção transversal do elemento
 Y_J - Coordenada Y_g do elemento J
 Y_{gt} - Distância, na direção “y”, entre os centros de torção e gravidade
 w - Função que define as translações na direção de Z_g ou z_i
 w_i - Translação do ponto i na direção do eixo Z_g ou z_i
 w'_i - Rotação do ponto i em torno do eixo Y_g ou y_i
 w_D - Translação do centro de torção na direção do eixo Z_g
 w_N - Translação horizontal do nó mestre na direção de Z_g
 z - Ordenada na direção de z_i , com origem na linha neutra da seção transversal do elemento
 Z_J - Coordenada Z_g do elemento J
 Z_{gt} - Distância, na direção “z”, entre os centros de torção e gravidade

Gregos

- α_i, β_i - Ângulos formados entre os sistemas de referência global e local do elemento **ELM-0i**
 α - Grandeza adimensional, relacionada à rigidez à torção de **ELM-05**
 $\delta\Delta$ - Representa deslocamentos infinitesimais
 $\delta\varepsilon$ - Deformações infinitesimais, normais à seção transversal
 $\delta\gamma$ - Deformações infinitesimais, tangenciais à seção transversal
 ε - Deformação longitudinal, referente à tensão normal
 ε_D - Valor da tolerância para a análise não linear
 ∂ - Símbolo da derivada parcial
 γ - Deformação transversal, referente à tensão tangencial
 τ - Tensão tangencial à seção transversal do elemento
 σ - Tensão normal à seção transversal do elemento
 σ_0 - Tensão na fundação aplicada pelo solo

- ϕ - Função que define os deslocamentos de rotação em torno do eixo X_g ou x_i
- ϕ_i - Rotação do ponto i em torno do eixo X_g ou x_i
- ϕ'_i - Derivada da rotação em torno do eixo X_g ou x_i , que passa pelo centro de torção da seção transversal, onde está situado o ponto i
- ϕ_N - Rotação em torno do nó mestre (eixo X_g)
- ω - Área setorial
- ω_i - Área setorial no ponto i da linha do esqueleto da seção transversal do **ELM-05**

Matrizes e vetores

- $[BC]_J$ - Matriz de translação de coordenadas do eixo que passa pelo centro de gravidade para o eixo do centro de torção do elemento J .
- $[Be_i]_J$ - Matriz de rotação de coordenadas do elemento J , tipo **ELM-0i**, do seu sistema de referência local para os eixos globais.
- $\{Fe_i\}_J$ - Vetor do forças equivalentes do elemento J do tipo **ELM-0i**, referido ao Sistema local de eixos.
- $\{F_i\}$ - Vetor de forças da subestrutura considerando apenas as ações aplicadas nos elementos do tipo **ELM-0i**.
- $\{f_i\}_J$ - Vetor dos esforços internos no elemento J do tipo **ELM-0i**.
- $\{F\}_S$ - Vetor de forças nodais equivalente da subestrutura, segundo o sistema de coordenadas globais.
- $\{F^*\}_S$ - Vetor de forças nodais equivalente da subestrutura, relacionado às suas coordenadas externas (coordenadas da sua laje inferior).
- $[I]$ - Matriz identidade
- $[K_i]$ - Matriz de rigidez da subestrutura com a contribuição apenas dos elementos **ELM-0i**.

- $[K]_S$ - Matriz de rigidez da subestrutura, segundo o sistema de coordenadas globais.
- $[K^*]_S$ - Matriz de rigidez da subestrutura, relacionada às suas coordenadas externas (coordenadas da sua laje inferior)
- $[K]_L$ - Matriz de rigidez da subestrutura em teoria de primeira ordem
- $[K(f_n)]_{N.L.}$ - Matriz de rigidez da subestrutura em teoria de segunda ordem
- $[Mt_i]_S$ - Matriz de translação das coordenadas do elemento de contraventamento **J** (horizontal ou diagonal) dos seus pontos de apoio para os centróides das seções transversais dos seus elementos verticais de apoio.
- $[MS]_S$ - Matriz de translação de coordenadas dos centróides das seções transversal dos elementos verticais da subestrutura **K** para o centróide das seções transversais dos elementos verticais da subestrutura **K-1**.
- $[N]$ - Matriz nula (todos os seus coeficientes são iguais a zero)
- $[Re_i]_J$ - Matriz de rigidez do elemento **J** do tipo **ELM-0i**, referida ao seu Sistema local de eixos, em teoria de 1ª ordem.
- $[Re_i]_J^{2^\circ}$ - Matriz de rigidez do elemento **J** do tipo **ELM-0i**, referida ao seu Sistema local de eixos, em teoria de 2ª ordem.
- $[Tr_i]_J$ - Matriz de translação de coordenadas das extremidades do comprimento flexível do elemento **J** do tipo **ELM-0i** para os seus pontos nodais nas lajes superior e inferior.
- $\{\delta e_i\}_J$ - Vetor dos deslocamentos nas extremidades do elemento **J** do tipo **ELM-0i**, segundo o seu sistema de referência local.
- $\{\delta\}_S^K$ - Vetor de deslocamentos na direção das coordenadas globais da subestrutura “S”, pertencente ao modelo “K”.
- $\{\delta\}_E^K$ - Vetor de deslocamentos na direção das coordenadas externas da subestrutura “S”, pertencente ao modelo “K”.
- $\{\delta\}_I$ - Vetor de deslocamentos na direção das coordenadas internas da subestrutura
- - A barra acima da variável dentro do símbolo de matriz “ [] ” ou

de vetor “ { } ” indica uma operação de rotação ou translação de coordenada.

Os símbolos ausentes nesta lista estão definidos no texto, onde são utilizados.

RESUMO

MATIAS Jr., I.G. (1997). *Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes sobre fundações flexíveis*. São Carlos,

1997. 197p., Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O principal objetivo deste trabalho é analisar a interação tridimensional entre núcleos e as estruturas usuais de contraventamento, tais como, treliças, pórticos e pilares isolados, considerando a influência da flexibilidade das suas fundações no equilíbrio final do sistema estrutural, sobretudo quando são introduzidos os efeitos da não linearidade geométrica. A influência dos trechos rígidos e das excentricidades entre os eixos longitudinais dos elementos, incidentes em um mesmo ponto nodal, também é pesquisada na rigidez global do sistema. Para possibilitar estas análises, elaborou-se um programa em linguagem **FORTRAN 90** com recursos para processar estruturas complexas. A automação dos cálculos fundamenta-se no método dos deslocamentos e nas técnicas de análise matricial. Na determinação da rigidez do sistema aplicou-se o princípio da energia potencial total mínima. As estruturas dos edifícios usadas na aferição dos resultados, fornecidos pelo referido programa, são reticuladas e suas lajes funcionam como diafragmas horizontais infinitamente rígidos nos seus planos e sem qualquer resistência à flexão. Os efeitos de segunda ordem são computados através de um processo de cálculo iterativo, onde a matriz de rigidez da estrutura tem seus coeficientes afetados pelo esforço normal e no caso dos sistemas com núcleos, além deste, os momentos fletores e os bimomentos.

Palavras - chaves: Núcleo; Não linearidade geométrica; Base elástica

ABSTRACT

MATIAS Jr., I.G. (1997). *Non linear analysis of tridimensional tall building structure with resistant core on flexible foundation.*, São Carlos, 1997. 197p, Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

The principal aim of this work is to analyse the tridimensional interaction between cores and the usual bracing structure, such as, trusses, frames and isolated column, considering their foundation flexibility in the structural system final equilibrium, even when the geometric non linear effects are introduced. The offsets and the eccentricities among longitudinal axis of the elements, incidents in the same nodal point, is researched in the system global stiffness as well. To make this analysis possible, a program in **FORTRAN 90** language was made with resources to process complex structures. The calculus automation is based on the stiffness method and on the matricial analysis technique. To obtain the system stiffness, the minimum total potential energy principle was applied. The building structures used to check the results, given by the mentioned program, are reticulated and their slabs works as horizontal diaphragm, infinitely stiffened in their planes and without any bedding resistance. The second order effects are computed thru a iterative calculus process, where the structure stiffness matrix has its coefficients affected by the axial force and in cases of systems with cores, besides it, the bending moments and the bimoments.

Key words: Cores; Non geometric linearity; Elastic foundations

1 - INTRODUÇÃO

1.1 - Generalidades

O alto custo dos terrenos e a crescente demanda por imóveis nos grandes centros urbanos transformou as construções verticais na alternativa mais viável para expansão do mercado imobiliário, exigindo dos engenheiros, especialistas na área, conhecimentos mais precisos relacionados à estabilidade lateral de suas estruturas. A cada dia surgem novos trabalhos, cujas metas se resumem em propor um modelo ideal que simule com maior realismo o comportamento estrutural dos edifícios altos, submetidos à ação do vento, visando maior segurança e economia.

Dentre os diversos sistemas estruturais propostos existem os pórticos planos ou tridimensionais, painéis treliçados, painéis-parede, núcleos resistentes, pilares isolados e os elementos horizontais de contraventamento que são as lajes e as vigas.

Os pórticos planos são os mais conhecidos entre os pesquisadores e mais usados na prática. São constituídos pela associação plana de pilares, vigas e quando necessárias diagonais, conectados entre si através de nós rígidos ou semi-rígidos. Podem isoladamente compor a estrutura de contraventamento ou associar-se aos demais sistemas.

Os painéis treliçados são formados por barras verticais e diagonais, ligadas por nós perfeitamente articulados. Surgem como alternativa para aumentar a rigidez das estruturas de contraventamento, sobretudo nos edifícios de estrutura metálica.

Os painéis-parede são os elementos, cuja seção transversal possui uma das dimensões consideravelmente maior que a outra, ou seja, são paredes planas e

isoladas. Alguns autores os pesquisaram associados, no espaço tridimensional, em três ou mais unidades continuamente ligados entre si, formando um elemento único de seção transversal aberta. Neste tipo de análise, eles assumem um comportamento estrutural semelhante aos núcleos resistentes submetidos à torção. A interação tridimensional se dá através das tensões de cisalhamento distribuídas ao longo de suas ligações.

Os núcleos resistentes são elementos de elevada rigidez, constituídos pela associação tridimensional de paredes delgadas retas ou curvas, formando seções transversais abertas. São usualmente posicionados nas áreas centrais dos edifícios, ou seja, em torno dos elevadores, das escadas, depósitos ou espaços reservados para instalação de tubulações elétricas e hidráulicas. A característica principal que o distingue dos demais sistemas estruturais é sua rigidez ao empenamento. Podem ser parcialmente fechados pelas vigas, lintéis ou lajes, que contribuem com suas resistências à flexão para diminuir as deformações na direção do empenamento. Em alguns edifícios altos eles podem isoladamente constituir a estrutura, absorvendo tanto os esforços horizontais como verticais, nestes casos as tensões devido às deformações por flexão e empenamento podem ter a mesma ordem de grandeza, devendo ser ambas consideradas, o que exige do projetista conhecimentos da teoria da flexo-torção, amplamente pesquisada por VLASSOV (1961).

Pilares isolados são elementos de comportamento tridimensional inseridos nas estruturas de contraventamento, tendo sua rigidez ao empenamento desprezada. São interligados entre si ou a outros sistemas estruturais através de barras horizontais (vigas), ou diagonais, formando pórticos espaciais.

A laje é um elemento de travamento ao nível dos pisos, ou seja, admite-se a hipótese da indeformabilidade do seu plano médio, tendo sua rigidez transversal desprezada, porém já existem trabalhos em que foi analisada a influência de sua resistência à flexão na estrutura de contraventamento. Esta hipótese é de extrema importância, devido ao fato de torná-la um elemento compatibilizador dos deslocamentos horizontais, reduzindo sensivelmente o número de incógnitas do problema.

As vigas são barras horizontais posicionadas ao nível das lajes. Sua rigidez axial é desprezada nos caso em que as lajes funcionam como elemento de

rigidez infinita no seu plano. Interligam pilares isolados entre si ou outros sistemas estruturais. Quando conectam internamente os núcleos são denominadas lintéis. Podem ainda ser discretizadas em elementos finitos de barra interagindo com as lajes discretizadas em elementos finitos de placa, dando origem ao sistema estrutural do pavimento, cuja resistência à flexão também poderá ser considerada na estrutura.

Existe ainda um outro tipo de contraventamento denominado sistema tubular, o qual é formado por pórticos posicionados no perímetro do edifício. Estes pórticos são constituídos por pilares, vigas e, quando conveniente, diagonais, interligados através de nós rígidos. São usados em edifícios de planta quadrada ou retangular, seus elementos verticais são posicionados próximos um do outro, resultando em vigas com comprimentos pequenos quando comparados às suas alturas. Este tipo de estrutura é semelhante a um tubo fechado e vazio com diversos orifícios em sua superfície. A filosofia básica do sistema é concentrar na periferia todos os elementos estruturalmente importantes com o objetivo de aumentar a rigidez à flexão.

Os vários sistemas estruturais, descritos anteriormente, podem ter seus esforços internos e deslocamentos determinados pelo método dos deslocamentos ou da flexibilidade, utilizando-se técnicas de cálculo matricial. Poderão ainda ser empregados outros recursos, conforme conveniência do projetista e o tipo do sistema estrutural adotado, tais como o método dos elementos finitos, de contorno ou meio contínuo.

A tendência de verticalização das edificações tem exigido também maior atenção no que diz respeito a esbeltez das estruturas. Em alguns casos os deslocamentos horizontais, causados pelas ações do vento, produzem esforços adicionais, quando são aplicadas simultaneamente as ações de origem gravitacional. Sendo assim, é necessária a verificação do equilíbrio de forças na sua posição deformada, ou como é conhecida da literatura técnica, análise em teoria de 2ª ordem. Para possibilitar esta análise serão adotados processos da estática clássica. Considerando inicialmente a estrutura na sua posição indeformada e aplicando-lhe as ações verticais e aquelas originadas dos ventos determinam-se os seus esforços resistentes. Em função desses esforços, obtém-se os parâmetros característicos de rigidez de todos os seus elementos, cujo somatório resultará na matriz de rigidez da

estrutura em teoria de segunda ordem, também conhecida por matriz de rigidez secante. O cálculo é iterativo e os deslocamentos resultantes deverão convergir de acordo com um valor de tolerância a ser definido mais adiante. A análise consistirá em diversas atualizações da matriz de rigidez e a cada iteração realizada ocorrerá uma degeneração da rigidez da estrutura, provocando um aumento nas deformações, que após em um certo limite introduz esforços adicionais significativos, denominados esforços de segunda ordem.

Nas estruturas dos edifícios altos existe ainda um problema relacionado com a automação dos cálculos de seus deslocamentos e esforços resistentes. Devido ao elevado número de elementos envolvidos e à limitação na memória central dos microcomputadores, torna-se necessário o emprego de técnicas computacionais que viabilizem o processamento. Os pesquisadores na sua maioria adotam o processo de substruturação que é baseado na divisão da estrutura em substruturas, as quais são resolvidas por partes utilizando a memória central, armazenando na memória auxiliar dados necessários para complementação dos cálculos. Isto torna possível a resolução de estruturas de edifícios com elevado número de pavimentos. Sendo assim a limitação é transferida para capacidade de armazenamento do disco rígido (memória auxiliar). Uma substrutura é constituída por um número limitado de pavimentos, sendo esta quantidade determinada conforme a dimensão de sua matriz de rigidez resultante. Nesta abordagem serão adotadas substruturas com apenas um pavimento, com a finalidade de simplificar a análise.

A vinculação da estrutura também poderá influir na determinação de sua posição final de equilíbrio. A existência de deslocamentos nos seus nós de ligação com os elementos da base contribuem para aumentar ainda mais os desvios horizontais, causados pela ação do vento. Estes deslocamentos ocorrem quando os elementos da fundação estão embasados sobre solos compressíveis, os quais se deformam proporcionalmente aos esforços absorvidos. Para avaliar a influência dessas ligações, será aplicado o método energético, o qual consiste no princípio da energia potencial total mínima (**P.E.P.T.M**) e possibilita avaliar a rigidez da estrutura vinculada à fundações flexíveis. Para o núcleo, na direção do empenamento, serão previstos dois tipos de vínculos, os contínuos e aqueles situados em pontos localizados ao longo de suas paredes.

O método dos deslocamentos e as técnicas de análise matricial, serão utilizados para obtenção dos esforços resistentes e deslocamentos nodais das estruturas tratadas nesta abordagem. Sendo assim, torna-se necessária a adoção de elementos específicos, que simulem o comportamento estrutural dos sistemas de contraventamento descritos anteriormente. As deformações dos materiais que constituem estas estruturas serão consideradas no regime elástico linear.

1.2 - Alguns trabalhos desenvolvidos em teoria de primeira ordem.

A análise linear dos esforços atuantes nos sistemas estruturais dos edifícios altos tem sido objeto de pesquisa para diversos autores, dentre eles pode ser citado **YAGUI** (1971) que pesquisou um processo de cálculo aproximado para núcleos resistentes com diafragmas transversais, usando técnicas de cálculos matricial. Cada parede foi substituída por uma estrutura plana equivalente, constituída por um pilar flexível e vigas de rigidez infinita à flexão posicionadas ao nível desses diafragmas. Foram consideradas forças de cisalhamento atuando nas ligações entre as suas paredes, cuja espessura é constante no intervalo entre dois diafragmas. Foram admitidos também vínculos externos completamente rígidos ou elásticos, prevendo-se ainda os efeitos causados pela temperatura. Esta abordagem embora não tenha sido dirigida diretamente as estruturas dos edifícios altos, foi utilizada por alguns autores citados mais adiantes.

Através dos métodos do meio contínuo e discreto **COSTA** (1984) analisa esforços nas paredes de núcleos estruturais, contraventados por lintéis com vinculação elástica ao nível da fundação. No tratamento discreto é usado o método dos deslocamentos com as técnicas matriciais tendo sido considerado para o núcleo a mesma estrutura equivalente apresentada por **YAGUI** (1971). No tratamento contínuo foi usada a teoria de flexo-torção, considerando para o núcleo comportamento das barras de seção aberta constituídas de paredes delegadas. Por fim é feita uma comparação que evidencia uma boa aproximação entre os valores obtidos nos dois tratamentos.

BECKER (1989) analisou os efeitos da associação tridimensional de pórticos planos, pilares isolados, núcleos resistentes e elementos horizontais de contraventamento (lintéis e vigas). Os núcleos foram considerados como elementos tridimensionais constituídos por paredes delegadas e analisados pela teoria da flexo-torção desenvolvida por **VLASOV** (1961), **HEIDEBRECHT** e **SWIFT** (1970), **TARANATH** e **SWITH** (1972), onde é pesquisado o efeito da deformação por empenamento da seção transversal. Através do tratamento discreto utilizando o método dos deslocamentos determinou-se a matriz de rigidez do núcleo modelando-o como um membro linear com sete deslocamentos por extremidade, sendo seis relacionados ao comportamento tridimensional e o sétimo atribuído ao empenamento. Foram desprezadas as deformações por força cortante e pelo momento de flexo-torção.

BEZERRA (1995) analisou a influência da rigidez a flexão das lajes nas estruturas tridimensionais dos edifícios utilizando o método dos elementos finitos e as técnicas de cálculo matricial. A laje teve sua rigidez transversal computada através de sua discretização em elementos finitos **DKT**¹ e os demais elementos (pilares e vigas) foram utilizados elementos de barra. A existência de excentricidades entre os eixos longitudinais de elementos incidentes em um mesmo ponto nodal, também tiveram suas influências avaliadas. No sistema estrutural não foi considerada a presença de núcleos resistentes. O autor conclui que em alguns casos quando considerada a rigidez à flexão das lajes, pode ocorrer uma redução nos esforços absorvidos pelo elementos reticulados em até 17%.

1.3 - Alguns trabalhos desenvolvidos em teoria de segunda ordem.

Com o objetivo de conhecer o comportamento real das estruturas, alguns pesquisadores desenvolveram trabalhos de extrema importância, no que diz respeito aos esforços adicionais introduzidos nas estruturas devido sua deformação. Como exemplo pode-se evidenciar o trabalho desenvolvido por **ANTUNES** (1978), cujo principal objetivo foi fundamentado na determinação do carregamento crítico de

¹ Discrete Kirchhoff Theory

instabilidade elástica geral. Foram analisadas as estruturas tridimensionais de edifícios altos constituídas por pórticos planos e pilares isolados. Utilizando equações diferenciais de equilíbrio do elemento em sua posição deformada, determinaram-se as matrizes de rigidez, em teoria de 2ª ordem, para os pilares, cujas seções transversais possuem um, dois ou nenhum eixo de simetria, sendo consideradas, em alguns casos, as suas propriedades setoriais. Para determinação do parâmetro de instabilidade foi considerado exclusivamente o esforço axial.

MORI (1978) analisou esforços solicitantes em barras de seção delegada aberta com vínculos rígidos e elásticos submetidos a cargas torçoras concentradas, uniformemente distribuída e bimomentos aplicados. As matrizes de rigidez em teoria de 1ª e 2ª ordem, bem como o vetor de forças nodais foram obtidos através do método energético e do processo de **Ritz**, adotando funções polinomiais aproximadas para os deslocamentos.

YAGUI (1978) analisou a influência do esforço normal em três sistemas estruturais, tendo como elemento principal e núcleo resistente de concreto armado, utilizando as mesmas considerações descritas no seu trabalho de doutorado **YAGUI** (1971). O primeiro contendo pilares periféricos, o segundo com pendurais vinculados em treliças de aço posicionadas no seu topo e o terceiro com pilares periféricos vinculados nas suas extremidades superiores às treliças de topo. Além dos esforços é determinado também o carregamento crítico de instabilidade geral no regime elástico.

SILVA (1989) apresentou em seu trabalho uma análise do efeito $P-\delta$ nas estruturas tridimensionais de edifícios altos constituídas de pórticos e núcleos resistentes. O núcleo tem o mesmo comportamento considerado nos trabalhos de **YAGUI** (1978) e **COSTA** (1984) quando utiliza o método discreto. Levou - se em consideração a influência das deformações por força cortante, bem como, a existência dos nós de comprimento finito (trechos rígidos). O efeito $P-\delta$ está baseado em uma análise simplificada, a qual usa a estrutura de um programa em teoria de 1ª ordem. Através de cálculos iterativos são acrescentadas em cada pavimento forças horizontais calculadas com base nos deslocamentos laterais, obtendo assim, valores para os esforços de segunda ordem bastantes próximos aos dos métodos que utilizam as matrizes de rigidez dos elementos em suas posições deslocadas.

MORI (1992) - Acrescentou à análise feita por **BECKER** (1989) os efeitos da não linearidade geométrica, usando as matrizes de rigidez dos elementos afetada pelos seus respectivos esforços internos. Para os pilares isolados, bem como aqueles pertencentes aos pórticos planos são consideradas as matrizes de rigidez em teoria de 2ª ordem, determinadas por **ANTUNES** (1978). No caso do núcleo resistente a matriz de rigidez em teoria de 2ª ordem é obtida a partir da solução do sistema de equações diferenciais de equilíbrio obtidas com o elemento na sua posição deformada na situação mais geral, ou seja, a seção transversal não possui eixos de simetria e as cargas axiais aplicadas nas suas extremidades admitem excentricidades, surgindo momentos fletores e bimomentos que também influirão no cálculo. As três equações resultantes dessas considerações nem sempre são desacopláveis o que torna difícil a solução do sistema de forma fechada, sendo assim o autor optou pela sua resolução usando técnicas numéricas com o auxílio da biblioteca de programas **NAG**². Como na abordagem feita por **SILVA** (1989) o cálculo também é iterativo, tendo sido utilizada a técnica da iteração direta.

Todos os autores citados anteriormente, adotaram para o comportamento estrutural das lajes a hipótese do diafragma infinitamente rígido no seu plano.

1.4 - Objetivos

Esta pesquisa tem como principal objetivo a análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios altos sob fundações flexíveis, sobretudo os núcleos resistentes. Para isso foi desenvolvido um programa em linguagem **FORTRAN 90**, baseado no programa elaborado por **BECKER** (1989), posteriormente modificado por **MORI** (1992) para análise em segunda ordem. O programa proposto tem em sua estrutura alguns recursos adicionais, os quais são relacionados a seguir:

² Numerical Algorithms Groups

Foram implementadas subrotinas para tornar possível a consideração de trechos rígidos e excentricidades existentes entre os eixos longitudinais dos elementos incidentes no mesmo nó (excentricidades de projeto).

Para analisar a influência da deformação das fundações na estrutura, são considerados na formulação da matriz de rigidez dos seus elementos, vínculos elásticos nas sua extremidades inferiores.

Devido à complexidade do programa, foi adotada a técnica de modularização, a qual consiste em dividir o bloco único de tarefas em sub-blocos menores e mais simples, denominados subrotina e gerenciadas por um sub-programa auxiliar, definido como programa principal.

São ainda utilizados recursos da linguagem **FORTRAN** que permitem a locação dinâmica de memória, possibilitando ao programa calcular estruturas de qualquer dimensão. Estes recursos associados à técnica de subestruturação citada anteriormente transferem para o disco rígido as limitações relacionadas ao processamento.

1.5 - Resumo dos capítulos

Nos próximos itens constam descrições relacionadas com a teoria utilizada para automação dos cálculos. No segundo capítulo estão as definições referentes ao comportamento estrutural dos diversos elementos adotados. São apresentados ainda os seus sistemas de referência e respectivas coordenadas. Foi adotado ainda um sistema de eixos ortogonais para orientação dos deslocamentos na estrutura.

No terceiro capítulo é apresentado o cálculo para determinação da matriz de rigidez em teoria de primeira ordem e do vetor de forças nodais para uma subestrutura, utilizando o princípio da energia potencial total mínima (**P.E.P.T.M.**). No quarto capítulo é apresentado o processo para obtenção da matriz de rigidez em teoria de segunda ordem a partir das matrizes de rigidez dos elementos, cujos

coeficientes são calculados em função dos seus respectivos esforços internos, que influem nos efeitos da não linearidade geométrica.

No quinto capítulo constam as definições dos processos de subestruturação usualmente aplicados. São também apresentadas as condições de contorno, o método utilizado para resolução do sistema de equações e os parâmetros de instabilidade, que indicam a obrigatoriedade ou não de uma análise não linear.

No sexto capítulo está descrito o processo usado na obtenção dos deslocamentos nodais das subestruturas tipo, bem como as técnicas de cálculo matricial empregadas para determinação dos esforços e deslocamentos nas extremidades dos elementos.

No sétimo capítulo são analisadas quatro estruturas, das quais três foram escolhidas nas teses e dissertações pesquisadas durante a realização deste trabalho. A última será uma estrutura modelo idealizada com elevado número de pavimentos contendo todos os tipos de elementos, definidos mais adiante, admitindo ainda a existência de vínculos elásticos, excentricidades de projeto e trechos rígidos. O objetivo deste capítulo é aferir os resultados obtidos com o programa proposto.

No oitavo capítulo consta apenas as referências aos trabalhos que serviram de embasamento para a elaboração desta pesquisa.

2. CARACTERÍSTICAS ESTRUTURAIS

2.1. Introdução

Pretende-se descrever o comportamento estrutural de vários elementos que fazem parte das estruturas de contraventamento dos edifícios altos, trata-se de definições relacionadas com rigidez, absorção de esforços e em consequência deformações, cujos efeitos acumulados resultam em deslocamentos. Serão ainda adotados os sistemas de referência local e global com a função de orientar as direções e sentidos de tais deslocamentos, os quais são representados por vetores denominados de “**coordenadas deslocamentos**”.

Embora os princípios fundamentais do método de cálculo, utilizados nesta abordagem, sejam os mesmos para todos os tipos de elemento, as definições inerentes a cada um serão apresentadas separadamente. Isto se deve ao fato de suas características básicas os tornarem representativos de uma determinada classe estrutural.

2.2. Descrição dos elementos

Com exceção das lajes, os demais elementos são reticulados, isto é, seus comprimentos são bem maiores que as dimensões de suas seções transversais. As ligações entre eles podem ser idealizadas como perfeitamente articuladas ou completamente rígidas. Tais elementos são divididos em sete tipos:

- laje
- elemento de treliça

- elemento de pórtico plano
- elemento de pórtico espacial
- elemento de núcleo
- elementos horizontais de contraventamento
- elementos diagonais de contraventamento

2.2.1 - Laje

A laje é considerada como um diafragma infinitamente rígido no seu plano, tendo sua rigidez transversal desprezada. Compatibiliza as translações horizontais, funcionando apenas como elemento transmissor de forças horizontais entre os demais membros do sistema de contraventamento.

2.2.2 - Elemento de treliça

Possui apenas rigidez axial, tendo como esforço interno resultante uma força de tração ou de compressão. Suas ligações com outros elementos são perfeitamente articuladas e sua incidência na estrutura é sempre normal ao plano da laje. Simula o comportamento estrutural dos montantes das treliças, sejam planas ou tridimensionais, pode ainda ser utilizado como escoras ou tirantes e será identificado por **ELM-01**.

2.2.3 - Elemento de pórtico plano

Dotado de rigidez axial e à flexão apenas no seu plano. Os esforços internos resultantes em qualquer seção do elemento são: um momento fletor, uma força cortante, e uma força axial. Suas ligações com outros elementos podem ser perfeitamente rígidas ou articuladas e sua incidência também será normal ao plano da laje. Simula o comportamento estrutural dos membros verticais dos pórticos planos e será identificado por **ELM-02**.

2.2.4 - Elemento de pórtico espacial

Tem rigidez nas direções de todos os deslocamentos no espaço. Os esforços internos que atuam em qualquer seção do elemento são: dois momentos fletores contidos nos planos principais de inércia, duas forças cortantes, uma força axial e um momento torçor. Suas ligações com outros elementos também podem ser perfeitamente rígidas ou articuladas e sua incidência na estrutura é normal ao plano da laje. Simula o comportamento estrutural dos membros verticais dos pórticos espaciais. Será identificado por **ELM-03**, quando for desprezada sua rigidez à torção e **ELM-04** nos demais casos.

2.2.5 - Elemento de núcleo

Tem comportamento semelhante ao elemento de pórtico espacial (**ELM-04**), porém as propriedades setoriais de sua seção transversal dota-o de rigidez ao empenamento, provocando assim o aparecimento de mais um esforço interno denominado bimomento. Suas ligações com outros elementos também podem ser rígidas ou articuladas e sua incidência é normal ao plano da laje. Simula o comportamento estrutural dos núcleos resistentes, bem como dos pilares cujas seções transversais possuem propriedades setoriais. Será identificado por **ELM-05**.

2.2.6 - Elemento horizontal de contraventamento

Interliga os elementos **ELM-02**, **ELM-03**, **ELM-04** e **ELM-05** ao nível da laje superior, constituindo nós perfeitamente rígidos. É considerada sua rigidez à torção e à flexão no plano horizontal. A rigidez axial é desprezada devido à indeformabilidade do plano médio da laje. Os esforços internos que atuam em qualquer uma de suas seções são: um momento fletor, uma força cortante e um momento torçor. Será identificado por **ELM-06**, quando for desprezada sua rigidez à torção e por **ELM-07** nos casos contrários. Simula o comportamento estrutural dos

membros horizontais dos pórticos planos, quando é do tipo **ELM-06** e espaciais ou barra de grelhas, quando do tipo **ELM-07**.

2.2.7 - Elemento diagonal de contraventamento

É caracterizado pela sua incidência oblíqua nas estruturas. Interliga todos os elementos verticais e possui rigidez axial e à flexão. Os esforços internos resultantes nas suas seções transversais são: um momento fletor, uma força cortante e uma força axial. É usado freqüentemente em estruturas esbeltas, onde os deslocamentos horizontais relativos entre suas lajes são excessivos. É identificado por **ELM-08**, quando for desprezada sua rigidez à flexão e por **ELM-09** nos demais casos. O elemento **ELM-08** simula o comportamento estrutural das barras diagonais das treliças, pode ainda ser utilizado como escora ou tirante. O **ELM-09** é a barra inclinada dos pórticos planos.

2.3 - Sistema de referência

2.3.1 - Sistema global de eixos

Para a estrutura é adotado um sistema de eixos cartesianos X_g, Y_g, Z_g , com origem "o" contida em um ponto arbitrário no plano horizontal ao nível da fundação. O eixo X_g tem direção vertical e seu sentido positivo será considerado da base para o topo. O Y_g pertence ao plano da fundação e tem sentido arbitrário. O Z_g tem sua direção e seu sentido positivo definido por uma rotação anti-horária de 90 graus, partindo de Y_g no sentido positivo de X_g . As diversas subestruturas existentes serão orientadas também por este mesmo sistema (ver figura 2. 1).

Para cada elemento constituinte da estrutura, também é adotado um sistema local de eixos cartesianos x_i, y_i, z_i , sendo suas direções e sentidos relacionados com X_g, Y_g, Z_g , definidos nos itens a seguir. Para todos os sistemas de referência será válida a regra da mão direita.

2.3.2 - Sistema local de eixos para o elemento de treliça

O elemento **ELM-01** é orientado por um único eixo x_1 , com origem "o₁" localizada no plano da laje inferior. Este eixo passa pelo centróide de sua seção transversal e tem a mesma direção e sentido X_g . (ver figura 2.1).

2.3.3 - Sistema local de eixos para o elemento de pórtico plano

O elemento **ELM-02** é orientado por um sistema de eixos cartesianos x_2, y_2, z_2 , com origem "o₂" localizada no plano da laje inferior. O eixo x_2 passa pelo centróide de sua seção transversal e tem a mesma direção e sentido de X_g . O y_2 tem sua direção definida pela interseção entre os planos de flexão do elemento e da laje inferior e seu sentido positivo é arbitrário. O z_2 tem sua direção e seu sentido definido por uma rotação anti-horária de 90 graus partindo de y_2 , no sentido positivo de x_2 . A relação entre x_2, y_2, z_2 e X_g, Y_g, Z_g é dada pelo ângulo α_2 , medido segundo rotação anti-horária partindo de Y_g em direção ao y_2 no sentido positivo de X_g . (ver figura 2.1).

2.3.4 - Sistema local de eixos para os elementos de pórtico espacial

Os elementos **ELM-03** e **ELM-04** são orientados por um sistema de eixos cartesianos x_i, y_i, z_i com origem "o_i" posicionada no plano da laje inferior. O x_i passa pelos centros de torção de suas seções transversais e tem a mesma orientação de X_g . Os y_i e z_i têm como direções dos eixos principais de inércia. O sentido positivo de y_i é arbitrário e o de z_i é definido por uma rotação anti-horária

de 90 graus partindo de y_i no sentido positivo de x_i . A relação entre x_i, y_i, z_i e X_g, Y_g, Z_g será dada pelo ângulo α_i , medido da mesma forma que o ângulo α_2 do item anterior.

Obs.: O índice i assume os valores 3 e 4 para os elementos **ELM-03** e **ELM-04** respectivamente (ver figura 2.1).

2.3.5 - Sistema local de eixos para o elemento de núcleo

O elemento **ELM-05** é orientado por um sistema de eixos cartesianos x_5, y_5, z_5 , com as mesmas características dos eixos dos elementos de pórtico espacial. A relação entre x_5, y_5, z_5 e X_g, Y_g, Z_g será dada pelo ângulo α_5 medido segundo rotação anti-horária partindo de Y_g em direção ao y_i no sentido positivo de X_g (ver figura 2.1).

2.3.6 - Sistema local de eixos para os elementos horizontais

Os elementos **ELM-06** e **ELM-07** são orientados por um sistema de eixos x_i, y_i, z_i com origem "o_i" no ponto da extremidade inicial escolhido arbitrariamente. O eixo x_i tem a mesma orientação de X_g . O y_i passa pelo centróide da seção transversal e seu sentido positivo é do nó inicial para o final. O z_i tem a direção e sentido definidos por uma rotação anti-horária de 90 graus partindo de y_i no sentido positivo de x_i . A relação entre x_i, y_i, z_i e X_g, Y_g, Z_g é dada pelo ângulo α_i , medido segundo rotação anti-horária, partindo de Y_g em direção a y_i no sentido positivo de X_g .

Obs.: O índice i assume os valores de 6 e 7 para os elementos **ELM-06** e **ELM-07** respectivamente (ver figura 2. 1).

2.3.7 - Sistema local de eixos para os elementos diagonais

Os elementos **ELM-08** e **ELM-09** são orientados segundo eixos cartesianos local x_i, y_i, z_i , com origem " o_i " na laje inferior. O eixo x_i passa pelos centróides de suas seções transversais e seu sentido positivo é da base para o topo. O y_i tem sua direção definida pela interseção dos planos de flexão dos elementos e o da laje inferior com sentido positivo arbitrário. O z_i tem sua orientação definida por uma rotação anti-horária de 90 graus, partindo de y_i no sentido positivo de x_i . A relação entre x_i, y_i, z_i e X_g, Y_g, Z_g será dada pelos ângulos α_i e β_i . O primeiro medido de X_g para x_i , tendo como referência o sentido positivo de y_i . O segundo medido de Y_g para a projeção horizontal de x_i , no sentido positivo de X_g .

Obs.: O índice i assume os valores de 8 e 9 para os elementos **ELM-08** e **ELM-09**, respectivamente (ver figura 2.1).

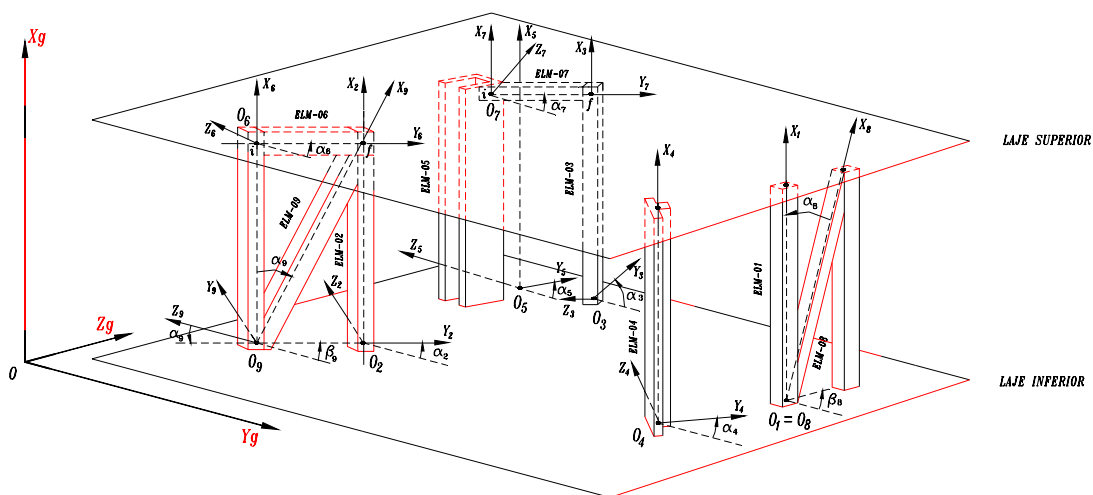


Figura 2.1- Sistemas de referência para uma subestrutura modelo e seus elementos.

2.4 - Coordenadas deslocamento

São esquematizados a seguir os sistemas de coordenadas representativos dos deslocamentos nas extremidades dos diversos elementos, referidas aos sistemas de eixos cartesianos locais. Para os elementos verticais e diagonais, a numeração é iniciada na extremidade incidente na laje superior, no caso dos horizontais na extremidade inicial. Para a subestrutura é apresentada a eliminação das coordenadas deslocamento, devido ao comportamento estrutural admitido para as lajes. Com relação a estrutura é dada uma ideia simplificada do processo de subestruturação.

2.4.1 - Coordenadas para o elemento de treliça

O elemento **ELM-01** possui apenas duas coordenadas de translação na direção do eixo x_1 , uma em cada extremidade. Seus sentidos positivos são indicados por vetores na figura 2.2.

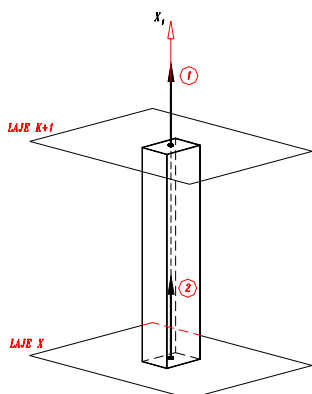


Figura 2.2 - Coordenadas deslocamento do elemento de treliça (**ELM-01**).

2.4.2 - Coordenadas para o elemento de pórtico plano

O elemento **ELM-02** possui seis coordenadas, três em cada extremidade, uma rotação em torno do eixo y_2 e duas translações nas direções dos eixos x_2 e z_2 . Seus sentidos positivos estão indicados por vetores na figura 2. 3.

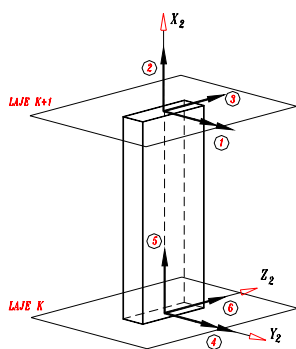


Figura 2.3 - Coordenadas deslocamento do elemento de pórtico plano (ELM-02).

2.4.3 - Coordenadas para os elementos de pórtico espacial

2.4.3.1 - Elemento ELM-03

Possui dez coordenadas, cinco por extremidade, duas rotações em torno dos eixos y_3 e z_3 e três translações nas direções dos eixos x_3, y_3 e z_3 . Seus sentidos positivos são indicados na figura 2.4.

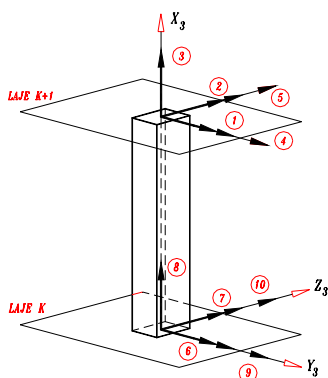


Figura 2.4 - Coordenadas deslocamento do elemento de pórtico espacial (ELM-03).

2.4.3.2 - Elemento ELM-04

Possui doze coordenadas, seis por extremidade, três rotações em torno dos eixos x_4, y_4 e z_4 e três translações nas direções dos mesmos eixos. Seus sentidos positivos são apresentados na figura 2.5.

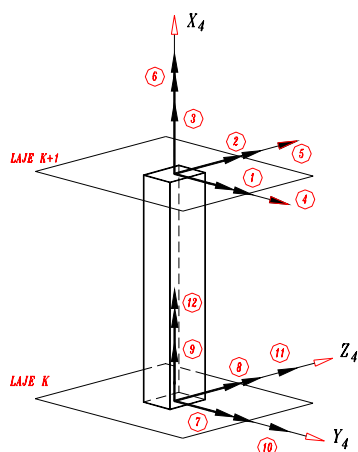


Figura 2.5 - Coordenadas deslocamento do elemento de pórtico espacial (ELM-04).

2.4.4 - Coordenadas para o elemento de núcleo

O elemento **ELM-05** possui catorze coordenadas, sete por extremidade, onde seis são referentes ao comportamento tridimensional descrito no item 2.4.3.2 e a sétima está relacionada com a derivada da rotação em torno do eixo x_5 (empenamento). Seus sentidos positivos são indicados por vetores na figura 2.6.

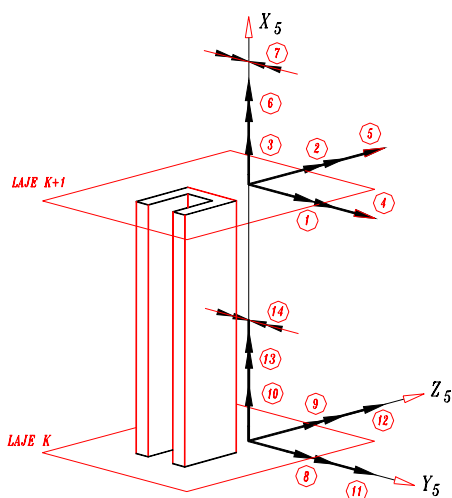


Figura 2.6 - Coordenadas deslocamento do elemento de núcleo (ELM-05).

2.4.5 - Coordenadas para os elementos horizontais

2.4.5.1 - Elemento ELM-06

O elemento **ELM-06** possui quatro coordenadas, duas por extremidade, sendo uma rotação em torno do eixo z_6 e uma translação na direção do eixo x_6 . Seus sentidos positivos são indicados na figura 2.7.

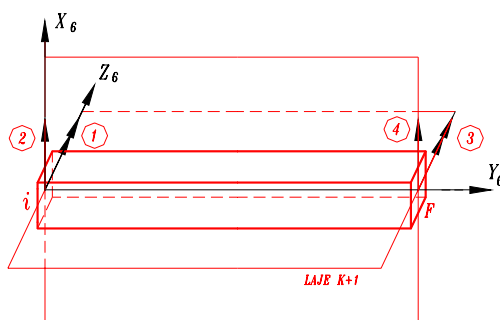


Figura 2.7 - Coordenadas deslocamento do elemento horizontal (**ELM-06**).

2.4.5.2 - Elemento ELM-07

O elemento **ELM-07** possui seis coordenadas, três por extremidade, sendo duas semelhantes ao elemento **ELM-06** e mais uma representativa da rotação em torno do eixo y_7 . Seus sentidos positivos são indicados por vetores na figura 2.8.

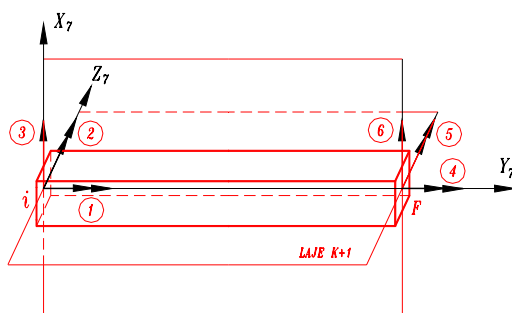


Figura 2.8 - Coordenadas deslocamento do elemento horizontal (**ELM-07**).

2.4.6 - Coordenadas para os elementos diagonais

2.4.6.1 - Elemento ELM-08

O elemento **ELM-08** possui duas coordenadas, uma por extremidade. Suas direções e sentidos positivos são iguais às do **ELM-01** e estão esquematizados na figura 2.2.

2.4.6.2 - Elemento ELM-09

O elemento **ELM-09** possui seis coordenadas, três por extremidade. Suas direções e sentidos positivos são iguais às do **ELM-02** e estão esquematizados na figura 2.3.

2.4.7 - Coordenadas para a subestrutura

Devido à hipótese adotada para o comportamento estrutural das lajes, cada elemento incidente na subestrutura, terá suas coordenadas dependentes do **movimento de corpo rígido**¹, transladadas para um ponto escolhido de forma aleatória e denominado de **nó mestre**², ocorrendo com isso uma redução substancial no número de incógnitas do problema. Para possibilitar esta translação, os pontos onde elas estão localizadas devem ter suas ordenadas e abcissas horizontais relacionadas aos nós mestres de suas respectivas lajes. Sendo assim, o eixo vertical X_g do sistema de referência global, deve interceptá-los em todos os pavimentos. Ao nível da fundação não ocorre esta translação devido à ausência do diafragma (ver figura 2.9).

Os nós da subestrutura são definidos pela interseção dos eixos longitudinais dos elementos verticais com o plano médio da laje. Portanto cada nó

¹ São as translações horizontais e a rotação normal ao plano da laje.

² Ponto que contém as coordenadas de translação horizontal e de rotação normal ao plano da laje. Geralmente é posicionado nas proximidades do centro elástico da estrutura, porém podem ocupar qualquer lugar deste plano.

gerado poderá ter número de coordenadas diferentes. Na tabela 2.1 são apresentados os tipos de nós e a quantidade de suas respectivas coordenadas deslocamento.

Tabela 2.1 - Quantidade de coordenadas por nó

Elemento	Tipo do nó	coord trans. p/ nó mestre			rot. y	rot. Z	trans. X	empen.	Total de coord.
		Trans. Y _g	Trans. Z _g	Rot. X _g					
ELM-01	NNO-01	0	0	0	0	0	1	0	1
ELM-02	NNO-02	1	1	0	1	1	1	0	3
ELM-03	NNO-03	1	1	0	1	1	1	0	3
ELM-04	NNO-04	1	1	1	1	1	1	0	3
ELM-05	NNO-05	1	1	1	1	1	1	1	4

A numeração das coordenadas é iniciada na laje de topo e a prioridade é dada àquelas posicionadas nos nós gerados pelos elementos com menor número de coordenadas, isto é, inicia-se pelos **ELM-01** e finaliza-se nos **ELM-05**. Em cada laje as últimas a serem numeradas serão sempre as do nó mestre, a primeira será a translação na direção do eixo Y_g , a segunda a translação na direção do Z_g e por fim a rotação em torno do X_g .

As coordenadas poderão ser internas ou externas, conforme sua posição na subestrutura. Quando situadas nos nós das lajes comuns a duas subestruturas são consideradas externas e as demais internas. Seus números de identificação são denominados de indexadores e auxiliam na montagem da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais, sendo calculados através das expressões a seguir:

$$NCT = NE1 + 3 \cdot (NE2 + NE3 + NE4) + 4 \cdot NE5 + 3 \quad (2.1)$$

$$JK_Z = NCT + JK_Y \quad (2.2)$$

Onde:

NCT = Número de coordenadas em uma laje

JK_Y = Auxiliar p/ calcular o número da coordenada da laje superior.

JK_Z = Auxiliar p/ calcular o número da coordenada da laje inferior.

NE1 = Número de elementos **ELM-01** existentes na subestrutura.

NE2 = Número de elementos **ELM-02** existentes na subestrutura.

NE3 = Número de elementos **ELM-03** existentes na subestrutura.

NE4 = Número de elementos **ELM-04** existentes na subestrutura.

NE5 = Número de elementos **ELM-05** existentes na subestrutura.

a) Para coordenadas geradas nos nós **NNO-01**

$$JK_Y = J \quad (2.3)$$

$$JK_F = NCT + 3 \cdot J \quad (2.4)$$

Onde:

J = Número de elemento.

JK_F = Auxiliar p/ calcular o número da coordenadas na fundação.

a.1) na laje superior

$$NCT_X = JK_Y \quad (2.5.a)$$

a.2) na laje inferior

$$NCT_X = JK_Z \quad (2.5.b)$$

a.3) na ligação com a fundação

$$NCT_X = JK_F - 2 \quad (2.5.c)$$

$$NCT_Y = JK_F - 1 \quad (2.5.d)$$

$$NCT_Z = JK_F \quad (2.5.e)$$

b) Para coordenadas geradas nos nós **NNO-02**

Os nós **NNO-02** dos elementos **ELM-02**, quando incidentes nas estruturas, dependendo da sua posição na laje ou ao nível da fundação, passam a ter 3 ou 5 coordenadas, respectivamente. Isto ocorre devido à projeção das coordenadas de rotação em y_2 e translação em z_2 nos eixos globais Y_g e Z_g . Assim as expressões para determinar o número das suas coordenadas serão:

$$JK_Y = NE1 + 3 \cdot J \quad (2.6)$$

$$JK_F = NCT + 3 \cdot NE1 + 5 \cdot J \quad (2.7)$$

b.1) na laje superior

$$NCR_Y = JK_Y - 2 \quad (2.8.a)$$

$$NCR_Z = JK_Y - 1 \quad (2.8.b)$$

$$NCT_X = JK_Y \quad (2.8.c)$$

b.2) na laje inferior

$$NCR_Y = JK_Z - 2 \quad (2.8.d)$$

$$NCR_Z = JK_Z - 1 \quad (2.8.e)$$

$$NCT_X = JK_Z \quad (2.8.f)$$

b.3) na ligação com a fundação

$$NCR_Y = JK_F - 4 \quad (2.8.g)$$

$$NCR_Z = JK_F - 3 \quad (2.8.h)$$

$$NCT_X = JK_F - 2 \quad (2.8.i)$$

$$NCT_Y = JK_F - 1 \quad (2.8.j)$$

$$NCT_Z = JK_F \quad (2.8.k)$$

c) Para coordenadas geradas nos nós **NNO-03**

$$JK_Y = NE1 + 3 + NE2 + 3 \cdot J \quad (2.9)$$

$$JK_F = NCT + 3 \cdot NE1 + 5 \cdot NE2 + 5 \cdot J \quad (2.10)$$

c.1) na laje superior

$$NCR_Y = JK_Y - 2 \quad (2.11.a)$$

$$NCR_Z = JK_Y - 1 \quad (2.11.b)$$

$$NCT_X = JK_Y \quad (2.11.c)$$

c.2) na laje inferior

$$NCR_Y = JK_Z - 2 \quad (2.11.d)$$

$$NCR_Z = JK_Z - 1 \quad (2.11.e)$$

$$NCT_X = JK_Z \quad (2.11.f)$$

c.3) na ligação com a fundação

$$NCR_Y = JK_F - 4 \quad (2.11.g)$$

$$NCR_Z = JK_F - 3 \quad (2.11.h)$$

$$NCT_X = JK_F - 2 \quad (2.11.i)$$

$$NCT_Y = JK_F - 1 \quad (2.11.j)$$

$$NCT_Z = JK_F \quad (2.11.k)$$

d) Para coordenadas geradas nos nós **NNO-04**

$$JK_Y = NE1 + 3 \cdot (NE2 + NE3) + 3 \cdot J \quad (2.12)$$

$$JK_F = NCT + 3 \cdot NE1 + 5 \cdot (NE2 + NE3) + 6 \cdot J \quad (2.13)$$

d.1) na laje superior

$$NCR_Y = JK_Y - 2 \quad (2.14.a)$$

$$NCR_Z = JK_Y - 1 \quad (2.14.b)$$

$$NCT_X = JK_Y \quad (2.14.c)$$

d.2) na laje inferior

$$NCR_Y = JK_Z - 2 \quad (2.14.d)$$

$$NCR_Z = JK_Z - 1 \quad (2.14.e)$$

$$NCT_X = JK_Z \quad (2.14.f)$$

d.3) na ligação com a fundação

$$NCR_Y = JK_F - 5 \quad (2.14.g)$$

$$NCR_Z = JK_F - 4 \quad (2.14.h)$$

$$NCT_X = JK_F - 3 \quad (2.14.i)$$

$$NCT_Y = JK_F - 2 \quad (2.14.j)$$

$$NCT_Z = JK_F - 1 \quad (2.14.k)$$

$$NCR_X = JK_F \quad (2.14.l)$$

e) Para coordenadas geradas nos nós **NNO-05**

$$JK_Y = NE1 + 3 \cdot (NE2 + NE3 + NE4) + 4 \cdot J \quad (2.15)$$

$$JK_F = NCT + 3 \cdot NE1 + 5 \cdot (NE2 + NE3) + 6 \cdot NE4 + 7 \cdot J \quad (2.16)$$

e.1) na laje superior

$$NCR_Y = JK_Y - 3 \quad (2.17.a)$$

$$NCR_Z = JK_Y - 2 \quad (2.17.b)$$

$$NCT_X = JK_Y - 1 \quad (2.17.c)$$

$$NCE_M = JK_Y \quad (2.17.d)$$

e.2) na laje inferior

$$NCR_Y = JK_Y - 3 \quad (2.17.e)$$

$$NCR_Z = JK_Y - 2 \quad (2.17.f)$$

$$NCT_X = JK_Y - 1 \quad (2.17.g)$$

$$NCE_M = JK_Y \quad (2.17.h)$$

e.3) na ligação com a fundação

$$NCR_Y = JK_F - 6 \quad (2.17.i)$$

$$NCR_Z = JK_F - 5 \quad (2.17.j)$$

$$NCT_X = JK_F - 4 \quad (2.17.k)$$

$$NCT_Y = JK_F - 3 \quad (2.17.l)$$

$$NCT_Z = JK_F - 2 \quad (2.17.m)$$

$$NCR_X = JK_F - 1 \quad (2.17.n)$$

$$NCE_M = JK_F \quad (2.17.o)$$

As subestruturas da figura 2.9 são constituídas de um pavimento. A figura 2.9.a possui dois diafragmas horizontais e a 2.9.b apenas um, tendo as extremidades inferiores dos seus elementos ligados diretamente à fundação. As coordenadas de deslocamento estão representadas por vetores numerados com o auxílio das expressões apresentadas anteriormente. Ambas possuem todos os tipos de elementos definidos neste capítulo.

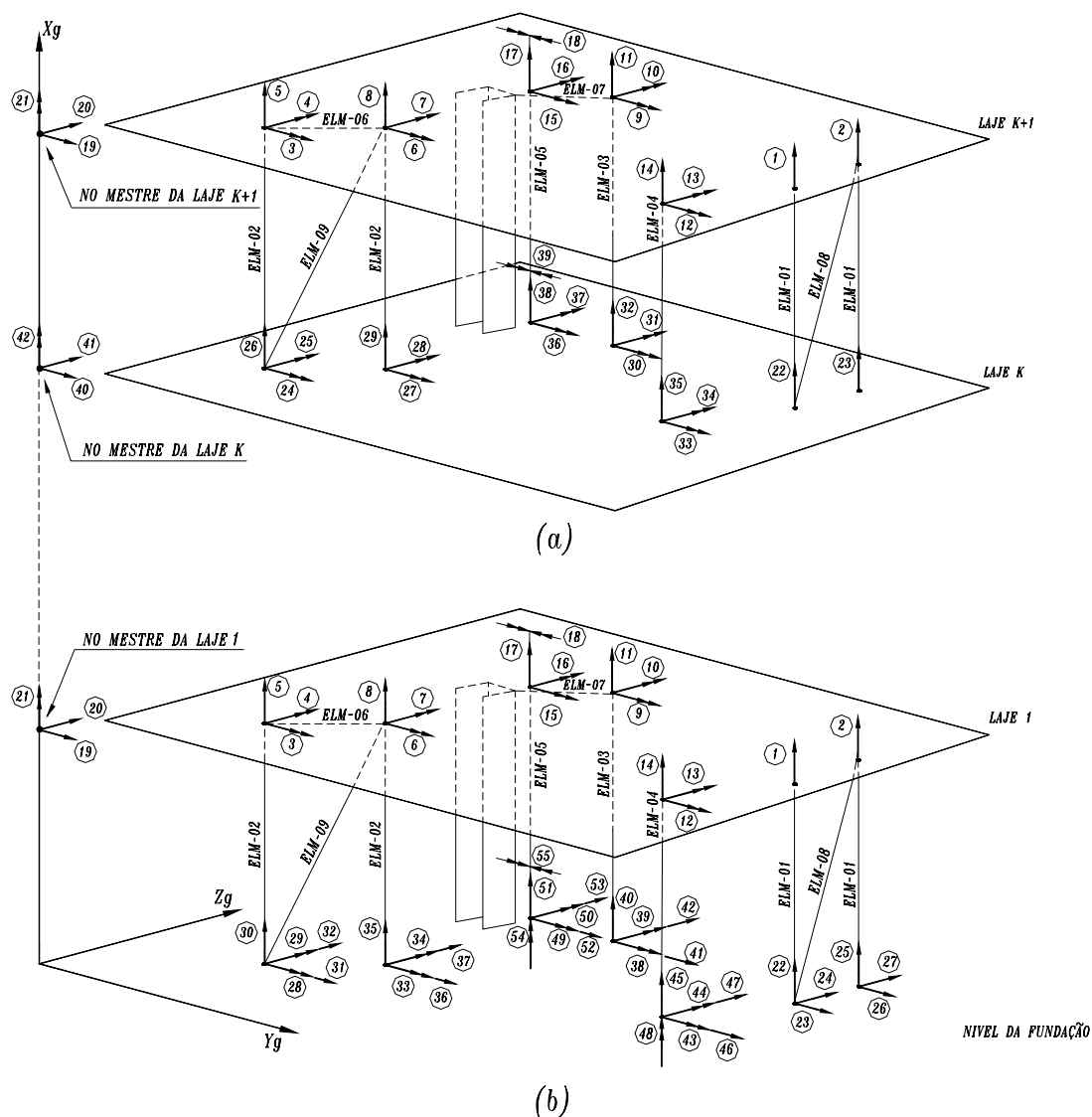


Figura 2.9 - Sistema de coordenadas em uma subestrutura modelo.

2.4.8 - Coordenadas na estrutura

As estruturas são compostas pela associação de duas ou mais subestruturas. Esta associação se dá através dos nós contidos no plano das lajes de base e de topo. Sabe-se que as matrizes de rigidez e os vetores de forças nodais de cada subestrutura são calculados segundo sistema de coordenadas globais (interna e externas), os quais podem ser reduzidos às externas através de um processo de decomposição matricial (ver item 5.2). Este processo de redução é realizado em

cada subestrutura, com exceção daquela ligada à fundação, iniciando na cobertura e finalizando no primeiro pavimento. A contribuição da rigidez e das forças nodais de uma subestrutura sob a outra se dá através das coordenadas externas. A figura 2.10 apresenta uma estrutura plana constituída de três subestruturas, onde está esquematizado de forma simplificada o processo de subestruturação.

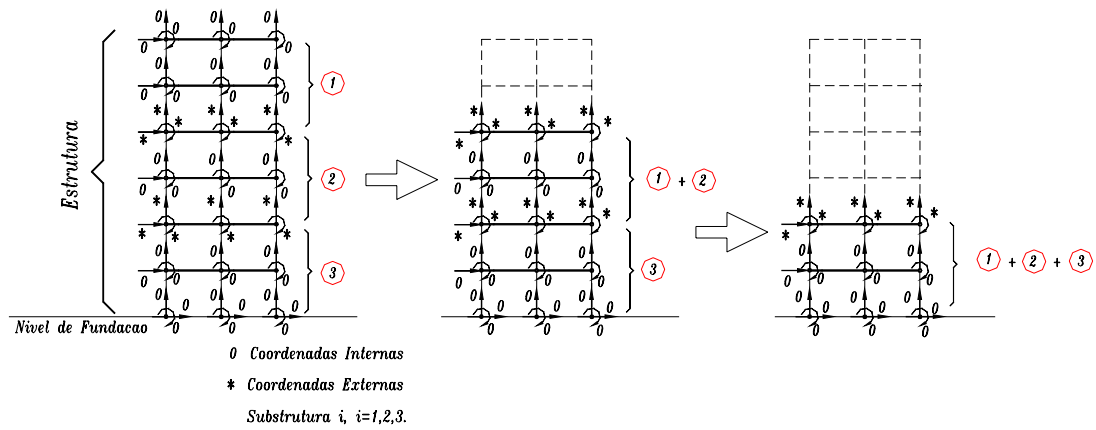


Figura 2.10 - Esquema simplificado do processo de subestruturação.

3 - MATRIZ DE RIGIDEZ EM TEORIA DE 1ª ORDEM E VETOR DE FORÇAS NODAIS

3.1 - Introdução

Serão calculados o vetor de forças nodais e a matriz de rigidez em teoria de primeira ordem, utilizando o método da energia. Para isso serão determinadas as expressões da energia de deformação e potencial das cargas para uma subestrutura genérica com vinculações elásticas de translação, de rotação e na direção do empenamento. As ações horizontais serão aplicadas no nó mestre da sua laje superior e as de origem gravitacional nas extremidades superiores dos seus elementos verticais.

O princípio da energia potencial total mínima (P.E.P.T.M.) será apresentado e sua aplicação utilizada na obtenção das matrizes de rigidez de cada tipo de elemento, com vínculos elásticos nas suas extremidades inferiores ligadas à fundação. Para a contribuição destes elementos na rigidez da subestrutura serão definidas matrizes de translação de coordenadas, onde estão previstas a existência de trechos rígidos e as excentricidades entre os eixos longitudinais dos elementos incidentes no mesmo ponto nodal, bem como para simulação da laje como diafragma perfeitamente rígido no seu plano.

3.2 - Energia de deformação da subestrutura

Uma subestrutura quando submetida à um carregamento qualquer, tem seus pontos nodais deslocados, o que caracteriza a sua posição deformada, responsável pelo aparecimento de tensões normais e tangenciais nas seções

transversais de seus elementos. Sendo assim, a energia de deformação específica dissipada por um volume infinitesimal é fornecida pela eq(3.1)

$$U_{\text{esp}} = \frac{1}{2}(\sigma.\varepsilon + \tau.\gamma) \quad (3.1)$$

onde:

- U_{esp} - É a energia de deformação específica.
- σ - Tensão normal às paredes do volume infinitesimal.
- τ - Tensão tangencial às paredes do volume infinitesimal.
- ε - Deformação referente à tensão normal.
- γ - Deformação referente à tensão tangencial.

Como mencionado anteriormente a estrutura trabalha no regime elástico linear, ou seja, existe proporcionalidade entre as tensões e deformações. Portanto as relações (3.2) e (3.3), obtidas com base na lei de **HOOKE**, podem ser substituídas em eq (3.1), a qual integrada no volume da estrutura resulta na expressão (3.4).

$$e = \frac{\sigma}{E} \quad (3.2)$$

$$\gamma = \frac{G}{\tau} \quad (3.3)$$

$$U_{\text{DF}} = \frac{1}{2.E} \int_0^L \int_S \sigma^2 ds . dx + \int_0^L \int_S \tau^2 ds . dx \quad (3.4)$$

Onde:

- U_{DF} - é a energia de deformação da subestrutura.
- E - módulo de elasticidade longitudinal.
- G - módulo de elasticidade transversal.
- L - comprimento dos elementos existentes na subestrutura.
- S - área da seção transversal dos elementos.

Desprezando as deformações causadas pelo esforço cortante e pelo momento de flexo-torção, as tensões normais e tangenciais em função dos esforços internos, resultantes nas seções transversais dos elementos, são fornecidas pelas eq(3.5) e eq(3.6), respectivamente.

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_Y}{I_Y} z + \frac{M_Z}{I_Z} y + \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega \quad (3.5)$$

$$\tau = \frac{M_X}{I_X} t \quad (3.6)$$

onde:

N - Esforço normal.

M_X - Momento torçor em torno do eixo x.

M_Y - Momento fletor em relação ao eixo y.

M_Z - Momento fletor em relação ao eixo z.

B - Bimomento.

I_X - Momento de inércia à torção.

I_Y - Momento de inércia à flexão no plano y/x.

I_Z - Momento de inércia à flexão no plano z/x.

I_ω - Momento setorial de inércia.

S - Área da seção transversal dos elementos.

t - Espessura da seção transversal.

y - Ordenada na direção y_i com origem na linha neutra da seção transversal.

z - Ordenada na direção z_i com origem na linha neutra da seção transversal.

ω - Área setorial.

Substituindo as eq(3.5) e eq(3.6) na eq(3.4) e lembrando que os termos em y, z, w, yz, wy e wz, são nulos na integração sobre a seção, obtém-se:

$$U_{DF} = \frac{1}{2.E} \int_0^L \left(\frac{N^2}{S} + \frac{M_Y^2}{I_Y} + \frac{M_Z^2}{I_Z} + \frac{B^2}{I_\omega} \right) dx + \frac{1}{2.G} \int_0^L \frac{M_X^2}{I_X} dx \quad (3.7)$$

As equações diferenciais regentes dos problemas de deformação, em teoria de primeira ordem, são dadas por:

$$N = E.S.u' \quad (3.8.a)$$

$$M_Y = E.I_Y.w'' \quad (3.8.b)$$

$$M_Z = E.I_Z.v'' \quad (3.8.c)$$

$$M_x = G.I_x \cdot \phi' \quad (3.8.d)$$

$$B = E.I_\omega \cdot \phi'' \quad (3.8.e)$$

onde:

u - Função que define os deslocamentos de translação no eixo X_g .

v - Função que define os deslocamentos de translação no eixo Y_g .

w - Função que define os deslocamentos de translação no eixo Z_g .

ϕ - Função que define os deslocamentos de rotação em torno do eixo X_g .

' - Símbolo de derivação em relação a X_g .

Substituindo as eq(3.8) em eq(3.7), obtém-se:

$$U_{DF} = \frac{1}{2} \int_0^L (E.S.u'^2 + E.I_Y.w''^2 + E.I_Z.v''^2 + E.I_\omega.\phi''^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^L G.I_x.\phi'^2 dx \quad (3.9)$$

Deve-se ainda acrescentar as parcelas referentes a energia de deformação absorvidas pelos vínculos elásticos, os quais são representados por elementos de molas, que se deformam proporcionalmente aos seus esforços. Estes vínculos serão divididos em três tipos; vínculos elásticos de translação, de rotação e na direção do empenamento, sendo suas definições encontradas nos itens a seguir:

3.2.1 - Vínculos elásticos de translação

Os vínculos elásticos de translação, idealizados em uma subestrutura submetida a um carregamento qualquer, deformam-se absorvendo esforços, cujos valores são fornecidos por eq(3.10) (ver figura 3.1).

$$R_i = Kt_i \cdot \delta_i \quad (3.10)$$

Onde:

R_i - Reação elástica na direção i.

- Kt_i - Rigidez do vínculo de translação na direção i .
- δ_i - Translações nas direções dos vínculos i (δ_i será igual a u_i , v_i ou w_i , conforme o exposto na figura 3.1).
- I - Índice que poderá ser substituído por x , y ou z caso o vínculo esteja posicionado nas direções dos eixos x , y ou z , respectivamente.

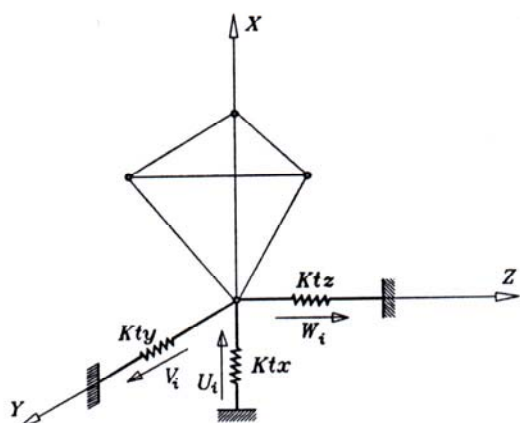


Figura 3.1 - Vínculos elásticos de translação nas direções X_g , Y_g e Z_g .

A energia de deformação de cada vínculo será obtida através do trabalho interno realizado pelo esforço absorvido em suas respectivas deformações, de acordo com as eqs. (3.11).

$$Ut_x = \frac{1}{2} Kt_x \cdot u_i^2 \quad (3.11.a)$$

$$Ut_y = \frac{1}{2} Kt_y \cdot v_i^2 \quad (3.11.b)$$

$$Ut_z = \frac{1}{2} Kt_z \cdot w_i^2 \quad (3.11.c)$$

Onde:

Ut_x - Energia de deformação do vinc. elástico de translação na direção do eixo X_g .

Ut_y - Energia de deformação do vinc. elástico de translação na direção do eixo Y_g .

Ut_z - Energia de deformação do vinc. elástico de translação na direção do eixo Z_g .

u_i - Deslocamento do ponto i na direção do eixo X_g .

v_i - Deslocamento do ponto i na direção do eixo Y_g .

w_i - Deslocamento do ponto i na direção do eixo Z_g .

3.2.2 - Vínculos elásticos de rotação

Os vínculos elásticos de rotação deformam-se absorvendo esforços de flexão e torção, de acordo com suas posições na subestrutura (ver figura 3.2), e suas reações elásticas são fornecidas por eq(3.12).

$$M_I = Kr_I \cdot \phi_I \quad (3.12)$$

Onde:

ϕ_I - Rotação em torno do eixo "I".

Kr_I - Rigidez do vínculo de rotação em torno do eixo "I".

M_I - Reação momento no vínculo elástico na direção ϕ_I .

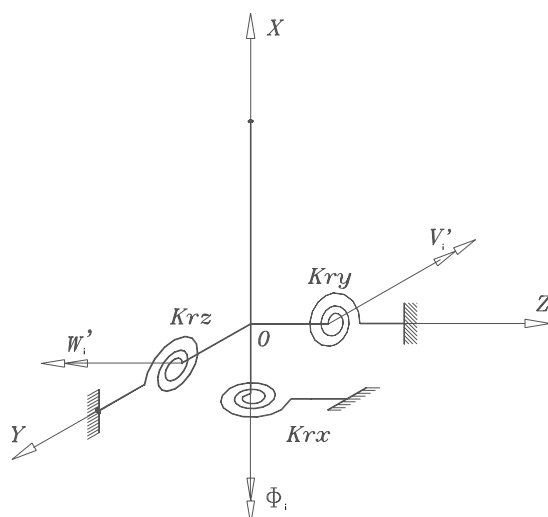


Figura 3.2 - Vínculos elásticos de rotação em torno dos eixos X_g , Y_g e Z_g .

A energia de deformação de cada vínculo também será obtida através do trabalho interno realizado pelo esforço absorvido em sua respectivas deformações, conforme as eqs (3.13).

$$U_{r_x} = \frac{1}{2} Kr_x \cdot \phi_i^2 \quad (3.13.a)$$

$$U_{r_Y} = \frac{1}{2} K_{r_Y} \cdot w_i'^2 \quad (3.13.b)$$

$$U_{r_Z} = \frac{1}{2} K_{r_Z} \cdot v_i'^2 \quad (3.13.c)$$

Onde:

U_{r_X} - Energia de deformação do vínculo elástico de rotação na direção do eixo X_g .

U_{r_Y} - Energia de deformação do vínculo elástico de rotação na direção do eixo Y_g .

U_{r_Z} - Energia de deformação do vínculo elástico de rotação na direção do eixo Z_g .

ϕ_i - Rotação do ponto i em torno do eixo X_g .

w_i' - Rotação do ponto i em torno do eixo Y_g .

v_i' - Rotação do ponto i em torno do eixo Z_g .

3.2.3 - Vínculos elásticos na direção do empenamento

Serão representados por molas, que impedem parcialmente os deslocamentos axiais relativos entre os pontos posicionados na **linha do esqueleto**¹ da seção transversal (ver figura 3.3.a). Estes deslocamentos são causados pelo bimomento, o qual introduz tensões normais, que produzem esforços de tração e compressão na direção destes vínculos. Seus valores são dados por:

$$R_1 = K_{em_1} \cdot u_1 \quad (3.14)$$

Onde:

R_1 - Reação elástica no ponto i, que pertence à linha do esqueleto.

K_{em_1} - Rigidez à translação do vínculo no ponto i.

u_1 - Translação do ponto i, na direção do eixo longitudinal.

Segundo a teoria da flexo-torção os deslocamentos u_1 são calculados pela eq(3.15):

$$u_1 = \omega_1 \cdot \phi' \quad (3.15)$$

¹ Segmento que divide eqüitativamente a espessura das paredes que constituem a seção transversal do núcleo.

Onde:

ω_i - Área setorial no ponto i na linha do esqueleto.

ϕ' - Derivada da rotação da seção transversal, onde está situado o ponto i .

A energia de deformação dos diversos vínculos, situados ao longo da linha do esqueleto, será dada pelo somatório dos trabalhos internos realizados pelos esforços de tração e compressão, absorvidos durante suas respectivas deformações.

$$U_{em} = \frac{1}{2} \phi'^2 \cdot \sum_{i=1}^N K_{em_i} \omega_i^2 \quad (3.16)$$

Sendo N o número de pontos na linha do esqueleto, considerados com vinculação elástica (ver figura 3.3.a).

A vinculação na direção do empenamento também poderá ser considerada contínua. Basta adotar um sistema de referência com origem "o" em um ponto qualquer, ao longo da linha do esqueleto e com sentido arbitrário, e por fim imaginar os pontos "i" situados a uma distância infinitesimal "ds" um do outro (ver figura 3.3.b). Sendo assim, a energia de deformação será dada pela eq(3.17).

$$U_{em} = \frac{1}{2} \phi'^2 \cdot K_{em_c} \cdot \int_s \omega^2 ds \quad (3.17)$$

Onde K_{em_c} é a rigidez do vínculo elástico contínuo (ver figura 3.3.b).

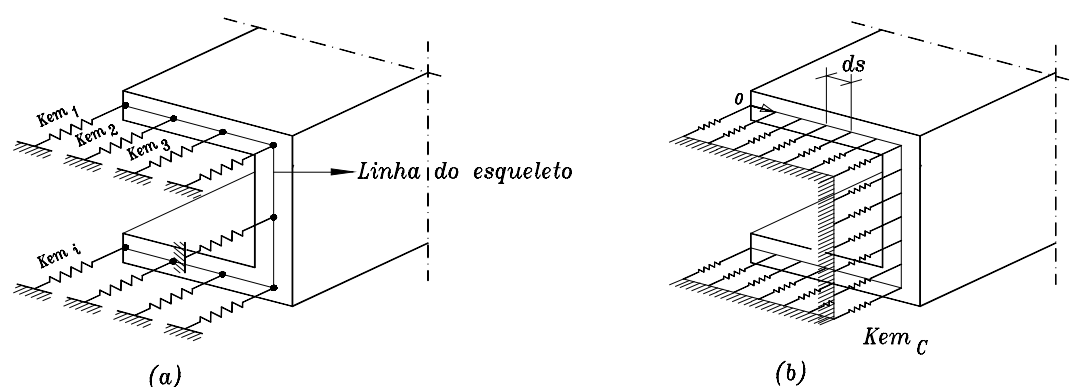


Figura 3.3 - Vínculos elásticos contínuos e em pontos localizados (núcleos).

A energia de deformação da subestrutura com os vínculos elásticos, definidos anteriormente, será dada pela soma das eq(3.9) eq(3.11), eq(3.13). Quando os vínculos na direção do empenamento forem contínuos, adiciona-se ainda a eq(3.17) e para vínculos localizados em pontos a eq(3.16). Como a subestrutura analisada é genérica serão considerados os dois casos.

$$U_{DF} = \frac{1}{2} \int_0^L (E.S.u'^2 + E.I_Y.w''^2 + E.I_Z.v''^2 + E.I_\omega.\phi''^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^L G.I_X.\phi'^2 dx + \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^N Kt_{x_i}.u_i^2 + \sum_{i=1}^N Kt_{y_i}.v_i^2 + \sum_{i=1}^N Kt_{z_i}.w_i^2 + \sum_{i=1}^N Kr_{x_i}.\phi_i^2 + \sum_{i=1}^N Kr_{y_i}.w_i'^2 + \sum_{i=1}^N Kr_{z_i}.v_i'^2 + \sum_{i=1}^N Kem_i.\phi_i'^2.\omega_i^2 + \sum_{i=1}^N \phi_i'^2.Kem_c.\int_s \omega^2 ds \right) \quad (3.18)$$

3.3 - Energia potencial das cargas atuantes

A energia absorvida no trabalho externo, realizado pelo carregamento durante os deslocamentos nodais, é denominada energia potencial das cargas e seu valor é fornecido pela eq(3.19), tendo sido adotada como referência a posição indeformada da subestrutura. As ações horizontais foram aplicadas no nó mestre da sua laje de topo e as de origem gravitacional nas extremidades superiores dos seus elementos verticais.

$$U_{PC} = \sum_{i=1}^N (Px_i.u_i + My_i.w_i' + Mz_i.v_i' + B_i.\phi_i') + H_Y.v_N + H_Z.w_N + M_X.\phi_N \quad (3.19)$$

Onde:

- Px_i - Ação vertical no ponto i.
- My_i - Momento fletor aplicado no ponto i, na direção do eixo y.
- Mz_i - Momento fletor aplicado no ponto i, na direção do eixo z.
- B_i - Bimomento aplicado no ponto i.
- Hy - Ação horizontal na direção Y_g , aplicada no nó mestre da laje de topo.
- Hz - Ação horizontal na direção Z_g , aplicada no nó mestre da laje de topo.
- Mx - Momento torçor aplicado no nó mestre da laje de topo, na direção X_g .
- v_N - Translação horizontal do nó mestre, na direção Y_g .

w_N - Translação horizontal do nó mestre, na direção Z_g .

ϕ_N - Rotação do nó mestre em torno do eixo X_g .

3.4 - Energia potencial total

A energia potencial total da subestrutura é definida pela soma das suas energias de deformação e potencial das cargas e será dada por:

$$U_t = U_{DF} + U_{PC} \quad (3.20)$$

Sendo a energia potencial das cargas com seu sinal trocado.

3.5 - Princípio da Energia Potencial Total Mínima (P.E.P.T.M.)

Seja uma estrutura qualquer submetida a um carregamento, constituindo um sistema que será dividido em dois. O primeiro relacionado a um conjunto de forças (cargas atuantes e tensões) e o segundo relacionado com deslocamentos e deformações. O PTV (Princípio dos Trabalhos Virtuais) estabelece que para tal sistema estar em equilíbrio os trabalhos virtuais externos e internos devem ser iguais, ou seja, forças em equilíbrio, no intervalo em que ocorrem deslocamentos infinitesimais ou imaginários dos seus pontos de aplicação, anulam o trabalho total.

$$\sum P \cdot \delta \Delta = \int_V (\sigma \cdot \delta \epsilon + \tau \cdot \delta \gamma) dv \quad (3.21)$$

Onde:

$\sum P$ - Representa o sistema de cargas.

$\delta \Delta$ - Representa deslocamentos infinitesimais.

$\delta \epsilon$ - Representa deformações infinitesimais normais à seção.

$\delta \gamma$ - Representa deformações infinitesimais tangenciais à seção.

Imaginando deslocamentos infinitesimais na subestrutura, pode-se relacionar o primeiro termo da eq(3.21) com a sua energia potencial das cargas e o segundo com a sua energia de deformação. Sendo assim, conclui-se que a energia

potencial total de um sistema estrutural em equilíbrio é estacionária ou mínima, isto é, a derivada da energia potencial total é igual a zero, o que caracteriza o **P.E.P.T.M.** (Princípio da Energia Potencial Total Mínima).

$$\delta U_{DF} + \delta U_{PC} = 0 \xrightarrow{\text{IMPLICA EM}} \delta U_t = 0 \quad (3.22)$$

A matriz de rigidez e o vetor de forças nodais da subestrutura serão obtidos a partir das matrizes de rigidez e dos vetores de forças equivalentes de seus elementos, com o auxílio do princípio da energia potencial total mínima (**P.E.P.T.M.**). Por esta razão, a eq(3.20) deve ser adaptada às características de cada elemento definido no item 2 separadamente, para em seguida empregar-se o procedimento apresentado a seguir.

1. Inicialmente define-se as equações diferenciais regentes dos problemas de deformação do elemento.
2. Adota-se uma função polinomial, a qual determina a forma exata de sua elástica e em consequência fornece a solução geral da equação diferencial do procedimento anterior.
3. Aplica-se à função polinomial os valores de contorno, ou seja, os deslocamentos nas extremidades deste elemento, obtendo assim um sistema de equações lineares, onde as incógnitas são as constantes da referida função.
4. Soluciona-se o sistema de equações, determinando as constantes em função dos deslocamentos nas extremidades do elemento.
5. Determina-se a função polinomial em função destes deslocamentos.
6. Com a eq(3.20), devidamente adaptada às características do elemento, e a função polinomial resultante da aplicação dos procedimentos anteriores, obtém-se a expressão da energia potencial total em função dos deslocamentos nas extremidades do elemento em análise.

7. E por fim, deriva-se esta expressão em relação a cada um destes deslocamento, obtendo-se assim a matriz de rigidez e o vetor de forças equivalentes do elemento.

3.6 - Aplicação do P.E.P.T.M. ao elemento de treliça

A energia potencial total, para o elemento **ELM-01** com um vínculo elástico de translação na sua extremidade inferior e carregamento apenas no seu nó da laje superior (ver figura 3.4), será dada pela eq(3.23).

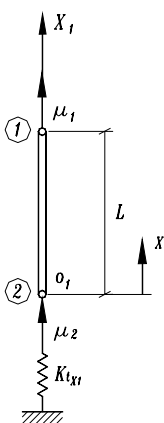


Figura 3.4 - Deslocamentos de extremidade e vínculo elástico dos **ELM-01**.

$$U_{t1} = \frac{1}{2} \int_0^L E.S.u'^2 \cdot dx + \frac{1}{2} K_{t_{x1}} \cdot u_2^2 - P_{x1} \cdot u_1 \quad (3.23)$$

Onde:

$K_{t_{x1}}$ - Rigidez do vínculo de translação na extremidade 2.

P_{x1} - Ação vertical aplicada na extremidade 1.

u_1 - Translação na direção do eixo x_1 na extremidade 1.

u_2 - Translação na direção do eixo x_1 na extremidade 2.

3.6.1 - Matriz de rigidez e vetor de forças do elemento de treliça

1. Equação diferencial:

$$E.S.u'' = 0 \quad (3.24)$$

2. Polinômio exato que define os deslocamentos:

$$u = A \cdot x + B \quad (3.25)$$

Onde, A e B são as constantes polinomiais.

3. Condições de contorno:

$$\begin{array}{l} \text{Para } x = 0 \xrightarrow{\text{IMPLICA EM}} u = u_2 \\ x = L \xrightarrow{\text{IMPLICA EM}} u = u_1 \end{array}$$

4. Determinação das constantes polinomiais:

Com as condições de contorno descritas acima e eq(3.25), obtém-se um sistema de equações lineares, cuja solução fornecerá os valores das constantes polinomiais.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\text{Solução: } A = (u_1 - u_2) / L \quad (3.27.a)$$

$$B = u_2 \quad (3.27.b)$$

5. Polinômio em função dos deslocamentos:

Será obtido pela substituição das equações (3.27) em eq(3.25).

$$u = \frac{(u_1 - u_2)}{L} \cdot x + u_2 \quad (3.28)$$

6. Expressão da energia potencial total em função dos deslocamentos:

Substituindo “u” da eq(3.28) na eq(3.23) e integrando o resultado ao longo do elemento, obtém-se a expressão da energia potencial total em função dos deslocamentos (u_1 e u_2) nas extremidades do elemento.

$$U_{t_1} = \frac{E.S}{2.L}(u_1^2 - 2.u_1.u_2 + u_2^2) + \frac{1}{2}Kt_{x_1}.u_2^2 - P_{x_1}.u_1 \quad (3.29)$$

7. Determinação da matriz de rigidez e do vetor de força equivalente:

Conforme o **P.E.P.T.M.** descrito no item 3.5, as derivadas parciais da eq(3.29) em relação aos deslocamentos u_1 e u_2 são iguais a zero.

$$\frac{\partial U_{t_1}}{\partial u_1} = \frac{E.S}{L}.u_1 - \frac{E.S}{L}.u_2 - P_{x_1} \quad (3.30.a)$$

$$\frac{\partial U_{t_1}}{\partial u_2} = -\frac{E.S}{L}.u_1 + \left(\frac{E.S}{L} + Kt_{x_1}\right).u_2 \quad (3.30.b)$$

Colocando as equações acima na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{E.S}{L} & -\frac{E.S}{L} \\ -\frac{E.S}{L} & \frac{E.S}{L} + Kt_{x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{x_1} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

$$[Re_1]_J \cdot \{\delta e_1\}_J = \{Fe_1\}_J$$

Onde:

$[Re_1]_J$ - Matriz de rigidez do elemento J do tipo **ELM-01**.

$\{\delta e_1\}_J$ - Vetor dos deslocamentos nas extremidades do elemento **J**.

$\{Fe_1\}_J$ - vetor de forças equivalentes

3.6.2 - Contribuição da rigidez do elemento e suas ações aplicadas

3.6.2.1 - Considerações de trechos rígidos

A matriz de translação de coordenadas, das extremidades do trecho flexível para os pontos de interseção com as lajes, nos elementos **ELM-01** é

identidade de ordem 2. Não havendo portanto modificação na matriz $[Re_1]_j$, definida no item anterior.

3.6.2.2 - Matriz de incidência cinemática para rotação de coordenadas

A matriz de rotação de coordenadas para os elementos **ELM-01** também é identidade de ordem 2, devido seu único eixo local x_1 estar na mesma direção e sentido do eixo X_g de referência global.

3.6.2.3 - Consideração da laje como um diafragma rígido.

O elemento **ELM-01** não possui rigidez ao deslocamento lateral, não existindo portanto coordenadas a serem transladadas para o nó mestre. As contribuições de sua rigidez e ações aplicadas na matriz de rigidez e vetor de forças nodais da subestrutura, são dadas pelas eq(3.31) e eq(3.32), respectivamente.

$$[K_1] = \sum_{j=1}^{NE1} [Re_1]_j \quad (3.31)$$

$$\{F_1\} = \sum_{j=1}^{NE1} \{Fe_1\}_j \quad (3.32)$$

Onde:

$[K_1]$ - Matriz de rigidez da subestrutura apenas com a rigidez dos **ELM-01**.

$\{F_1\}$ - Vetor de forças nodais da subestrutura apenas com as ações dos **ELM-01**.

Obs.: A posição dos coeficientes de rigidez dos elementos **ELM-01** e todos os demais, definidos no capítulo anterior, na matriz de rigidez da subestrutura é fornecida pelas equações do item 2.4.7.

3.7 - Aplicação do P.E.P.T.M. ao elemento de pórtico plano

A energia potencial total, para o elemento **ELM-02** com vínculos elásticos na direção de suas coordenadas posicionadas na extremidade inferior e

ações aplicadas apenas no seu extremo incidente na laje superior (ver figura 3.5), será dada pela eq(3.33).

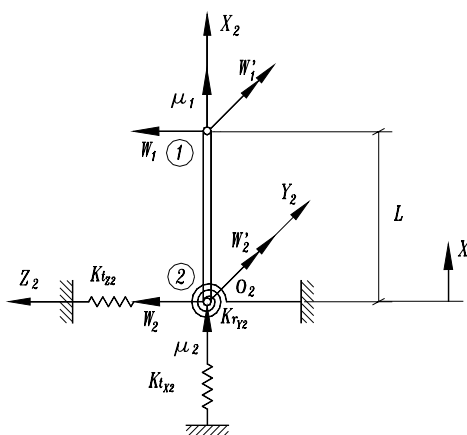


Figura 3.5 - Deslocamentos de extremidade e vínculo elástico dos **ELM-02**.

$$U_{t_2} = \frac{1}{2} \int_0^L (E \cdot I_Y \cdot w''^2 + E \cdot S \cdot u'^2) \cdot dx + \frac{1}{2} (K_{t_{x_2}} \cdot u_2^2 + K_{t_{z_2}} \cdot w_2^2 + K_{r_{Y_2}} \cdot w_2'^2) - (P_{x_2} \cdot u_1 + M_{y_2} \cdot w_1') \quad (3.33)$$

Onde:

$K_{t_{x_2}}$ - Rigidez do vínculo de translação na direção do eixo x_2 .

$K_{t_{z_2}}$ - Rigidez do vínculo de translação na direção do eixo z_2 .

$K_{r_{Y_2}}$ - Rigidez do vínculo de rotação em torno do eixo y_2 .

P_{x_2} - Carga vertical aplicada na extremidade 1 na direção do eixo x_2 .

M_{y_2} - Momento fletor aplicado na extremidade 1 na direção do eixo y_2 .

w_1 - Translação na direção do eixo z_2 na extremidade 1.

w_1' - Rotação em torno do eixo y_2 na extremidade 1.

w_2 - Translação na direção do eixo z_2 na extremidade 2.

w_2' - Rotação em torno do eixo y_2 na extremidade 2.

3.7.1 - Matriz de rigidez e vetor de forças do elemento de pórtico plano

1. Equações diferenciais:

$$E \cdot S \cdot u'' = 0 \quad (3.34.a)$$

$$E \cdot I_Y \cdot w'''' = 0 \quad (3.34.b)$$

A eq(3.34.a) fornecerá os coeficientes de rigidez axial, já determinados para o elemento **ELM-01** no item 3.6.1. Os coeficientes de rigidez à flexão serão calculados com auxílio da eq(3.34.b), empregando o mesmo procedimento do item 3.6.1.

2. Polinômio exato que define os deslocamentos devido à flexão:

$$w = A + B.x + C.x^2 + D.x^3 \quad (3.35)$$

Onde, A, B, C e B são as constantes polinomiais.

3. Condições de contorno:

$$\begin{array}{l} \text{Para } x = 0 \xrightarrow{\text{IMPLICA EM}} w = w_2 \quad \text{e} \quad w' = w'_2 \\ x = L \xrightarrow{\text{IMPLICA EM}} w = w_1 \quad \text{e} \quad w' = w'_1 \end{array}$$

4. Determinação das constates polinomiais:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w'_1 \\ w_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2.L & 3.L^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\text{Solução: } A = w_2 \quad (3.37.a)$$

$$B = w'_2 \quad (3.37.b)$$

$$C = -\frac{3.w_2}{L^2} - \frac{2.w'_2}{L} + \frac{3.w_1}{L^2} - \frac{w'_1}{L} \quad (3.37.c)$$

$$D = \frac{2.w_2}{L^3} + \frac{w'_2}{L^2} - \frac{2.w_1}{L^3} + \frac{w'_1}{L^2} \quad (3.37.d)$$

5. Polinômio em função dos deslocamentos:

$$w = w_2 + w'_2 \cdot x + \left(-\frac{3 \cdot w_2}{L^2} - \frac{2 \cdot w'_2}{L} + \frac{3 \cdot w_1}{L^2} - \frac{w''_1}{L}\right) \cdot x^2 + \left(\frac{2 \cdot w_2}{L^3} + \frac{w'_2}{L^2} - \frac{w'_1}{L^2}\right) \cdot x^3 \quad (3.38)$$

6. Expressão da energia potencial total em função dos deslocamentos:

A energia potencial total, considerando-se apenas as deformações por flexão e as respectivas vinculações elásticas, bem como o momento fletor aplicado (My_2), será dada por:

$$Ut_2 = \frac{1}{2} \int_0^L E \cdot I_Y \cdot w''^2 dx + \frac{1}{2} (Kt_{z_2} \cdot w_2^2 + Kr_{y_2} \cdot w_2'^2) - My_2 \cdot w'_1 \quad (3.39)$$

Substituindo a eq(3.38) em eq(3.39) e integrando o resultado no intervalo de 0 a L (ao longo do elemento), obtém-se a expressão da energia potencial total em função dos deslocamentos nas extremidades do elemento **ELM-02**, devido apenas à flexão.

$$Ut_2 = \frac{E \cdot I_Y}{L^3} [2 \cdot (3 \cdot w_1^2 - 3 \cdot w'_2 \cdot w_1 \cdot L - 6 \cdot w_2 \cdot w_1 - 3 \cdot w_1 \cdot w'_1 \cdot L + 3 \cdot w_2 \cdot w'_2 \cdot L + w_2'^2 \cdot L^2 + 3 \cdot w_2 \cdot w'_1 \cdot L + w_1'^2 \cdot L^2 + 3 \cdot w_2^2 + w'_2 \cdot w'_1 \cdot L)] + \frac{1}{2} (Kt_{z_2} \cdot w_2^2 + Kr_Y \cdot w_2'^2) - My_2 \cdot w'_1 \quad (3.40)$$

7. Determinação da matriz de rigidez e do vetor de força equivalente

$$\frac{\partial Ut_2}{\partial w'_1} = \frac{4 \cdot E \cdot I_Y}{L} \cdot w'_1 - \frac{6 \cdot E \cdot I_Y}{L^2} \cdot w_1 + \frac{2 \cdot E \cdot I_Y}{L} \cdot w'_2 + \frac{6 \cdot E \cdot I_Y}{L^2} \cdot w_2 - My_2 \quad (3.41.a)$$

$$\frac{\partial Ut_2}{\partial w_1} = -\frac{6 \cdot E \cdot I_Y}{L^2} \cdot w'_1 + \frac{12 \cdot E \cdot I_Y}{L^3} \cdot w_1 + \frac{6 \cdot E \cdot I_Y}{L^2} \cdot w'_2 - \frac{12 \cdot E \cdot I_Y}{L^3} \cdot w_2 \quad (3.41.b)$$

$$\frac{\partial Ut_2}{\partial w'_2} = \frac{2 \cdot E \cdot I_Y}{L} \cdot w'_1 + \frac{6 \cdot E \cdot I_Y}{L^2} \cdot w_1 + \left(\frac{4 \cdot E \cdot I_Y}{L} + Kr_{y_2}\right) \cdot w'_2 - \frac{6 \cdot E \cdot I_Y}{L^2} \cdot w_2 \quad (3.41.c)$$

$$\frac{\partial Ut_2}{\partial w_2} = \frac{6 \cdot E \cdot I_Y}{L^2} \cdot w'_1 - \frac{12 \cdot E \cdot I_Y}{L^3} \cdot w_1 - \frac{6 \cdot E \cdot I_Y}{L^2} \cdot w'_2 + \left(\frac{12 \cdot E \cdot I_Y}{L^3} + Kt_{z_2}\right) \cdot w_2 \quad (3.41.d)$$

Colocando as equações acima na forma matricial e acrescentando os coeficientes de rigidez axial e suas respectivas ações, seguindo orientação estabelecida no item 2.4.2, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI_Y}{L} & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{2EI_Y}{L} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} \\ & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 \\ & & \frac{12EI_Y}{L^3} & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_Y}{L^3} \\ & & & \frac{4EI_Y}{L} + Kr_{Y2} & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} \\ \text{simet.} & & & & \frac{ES}{L} + Kt_{X2} & 0 \\ & & & & & \frac{12EI_Y}{L^3} + Kt_{Z2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{1'} \\ u_1 \\ w_1 \\ w_2' \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} My_2 \\ Px_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

$$[Re_2]_J \cdot \{\delta e_2\}_J = \{Fe_2\}_J$$

Onde:

$[Re_2]_J$ - Matriz de rigidez do elemento J do tipo **ELM-02**.

$\{\delta e_2\}_J$ - Vetor dos deslocamentos nas extremidades do elemento **J**.

$\{Fe_2\}_J$ - Vetor de forças equivalentes.

3.7.2 - Contribuição da rigidez do elemento e suas ações aplicadas

3.7.2.1 - Considerações de trechos rígidos

A translação das coordenadas das extremidades 1 e 2 do comprimento flexível do elemento **ELM-02** para seus pontos nodais 1' e 2' (ver figura 3.6) será feita pela matriz de translação $[Tr_2]_J$, apresentada a seguir:

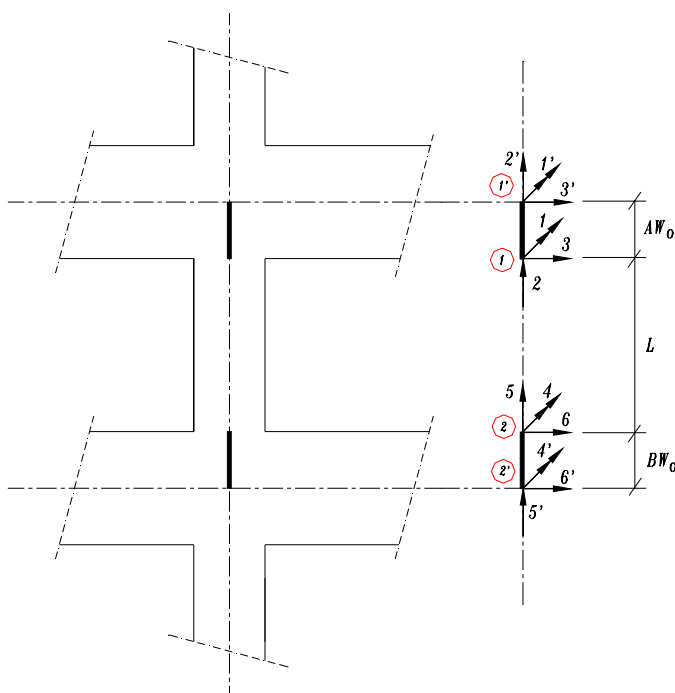


Figura 3.6 - Formação de trechos rígidos nas extremidades dos elementos **ELM-02**.

$$[\text{Tr}_2]_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ AW_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -BW_0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde, AW_0 e BW_0 são os trechos rígidos nas extremidades superior e inferior, respectivamente e a matriz de rigidez referida aos pontos 1' e 2' da figura 3.6, será dada pelo triplo produto matricial da eq(3.42).

$$[\overline{\text{Re}}_2]_j = [\text{Tr}_2]_j^T \cdot [\text{Re}_2]_j \cdot [\text{Tr}_2] \quad (3.42)$$

3.7.2.2 - Matriz de rotação de coordenadas

Conforme o exposto no item 2.3.3 o elemento **ELM-02** poderá incidir na subestrutura de um ângulo α_2 qualquer (ver figura 3.7). Portanto suas coordenadas

3.7.2.3 - Consideração da laje como um diafragma rígido

Nesta fase as coordenadas dos elementos **ELM-02**, dependentes do movimento de corpo rígido da laje, são transladadas para o nó mestre através da matriz de translação $[mt_2]_j$, de acordo com a eq(3.44).

$$[mt_2]_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Z_j \\ 0 & 1 & Y_j \end{bmatrix}$$

$$[\overline{re}_2]_j = [mt_2]_j^T \cdot [re_2]_j \cdot [mt_2]_j \quad (3.45)$$

Onde:

Y_j - Distância y do nó mestre ao elemento j.

Z_j - Distância z do nó mestre ao elemento j.

$[re_2]_j$ - Representa as quatro submatrizes quadradas de dimensão 2, que reúnem os coeficientes de rigidez relacionados com o movimento de corpo rígido da laje.

A contribuição da rigidez dos elementos **ELM-02** e de suas ações aplicadas na matriz de rigidez e no vetor de forças nodais da subestrutura, são fornecidos pelas eq(3.46) e (3.47) respectivamente.

$$[K_2] = \sum_{j=1}^{NE2} [\overline{Re}_2]_j \quad (3.46)$$

$$\{F_2\} = \sum_{j=1}^{NE2} \{\overline{Fe}_2\}_j \quad (3.47)$$

Onde:

$[K_2]$ - Matriz de rigidez da subestrutura apenas com a rigidez dos **ELM-02**.

$\{F_2\}$ - Vetor de forças nodais da subestrutura apenas com as ações aplicadas nos **ELM-02**.

3.8 - Aplicação do P.E.P.T.M. ao elemento de pórtico espacial

De acordo com as considerações de rigidez e admitindo vinculações elásticas nas direções de suas coordenadas inferiores (ver figura 3.8), a expressão da

energia potencial total para o elemento de pórtico espacial com ações aplicadas na sua extremidade superior será dada pela eq(3.48).

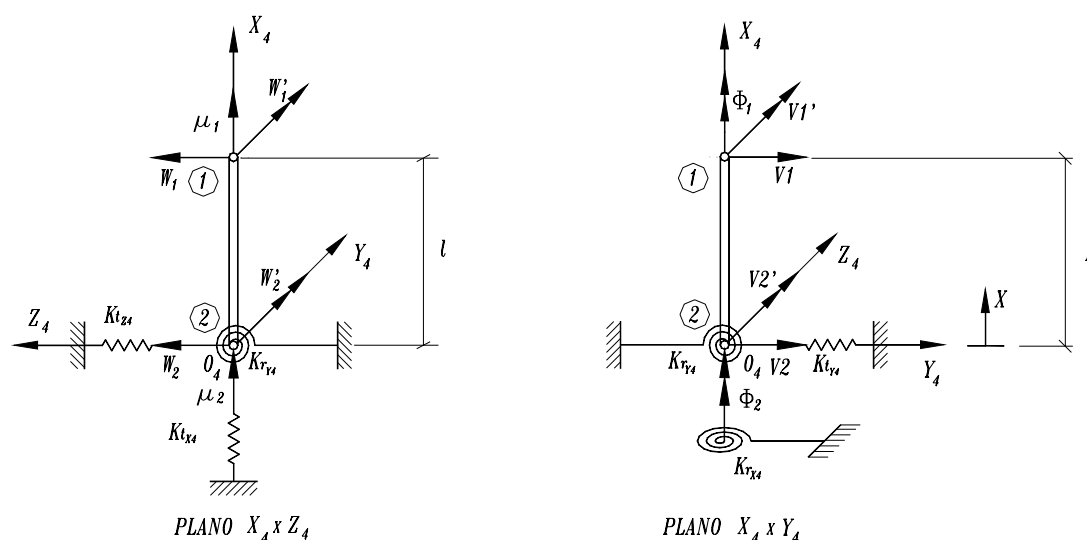


Figura 3.8 - Deslocamentos de extremidade e vínculo elástico dos ELM-04.

$$\begin{aligned}
 U_{t4} = & \frac{1}{2} \int_0^L (E.I_Y \cdot w''^2 + E.I_Z \cdot v''^2 + E.S \cdot u'^2) \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^L G.I_X \cdot \phi'^2 \cdot dx + \\
 & \frac{1}{2} (Kt_{x4} \cdot u_2^2 + Kt_{y4} \cdot v_2^2 + Kt_{z4} \cdot w_2^2 + Kr_{x4} \cdot \phi_2^2 + Kr_{y4} \cdot w_2'^2 + Kr_{z4} \cdot v_2'^2) - \\
 & (Px_4 \cdot u_1 + My_4 \cdot w_1' + Mz_4 \cdot v_1')
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Onde:

Kt_{x4} - Rigidez do vínculo de translação na direção do eixo x_4 .

Kt_{y4} - Rigidez do vínculo de translação na direção do eixo y_4 .

Kt_{z4} - Rigidez do vínculo de translação na direção do eixo z_4 .

Kr_{x4} - Rigidez do vínculo de rotação em torno do eixo x_4 .

Kr_{y4} - Rigidez do vínculo de rotação em torno do eixo y_4 .

Kr_{z4} - Rigidez do vínculo de rotação em torno do eixo z_4 .

Px_4 - Carga vertical aplicada na extremidade 1 na direção do eixo x_4 .

My_4 - Momento fletor aplicado na extremidade 1 na direção do eixo y_4 .

Mz_4 - Momento fletor aplicado na extremidade 1 na direção do eixo z_4 .

v_1 - Translação na direção do eixo y_4 na extremidade 1.

v_1' - Rotação em torno do eixo z_4 na extremidade 1.

v_2 - Translação na direção do eixo y_4 na extremidade 2.

v'_2 - Rotação em torno do eixo z_4 na extremidade 2.

3.8.1 - Matriz de rigidez e vetor de forças do elemento de pórtico espacial

1. Equações diferenciais:

$$E.S.u'' = 0 \quad (3.49.a)$$

$$E.I_Y.w'''' = 0 \quad (3.49.b)$$

$$E.I_Z.v'''' = 0 \quad (3.49.c)$$

$$G.I_X.\phi'' = 0 \quad (3.49.d)$$

Os coeficientes de rigidez axial e à flexão no plano xy, calculados com auxílio das eq(3.49.a) e eq(3.49.b), são iguais aos obtidos para os elementos **ELM-01** e **ELM-02**, respectivamente. Quanto à flexão no plano zx, são idênticos aos do plano xy, devendo apenas trocar o índice "y" por "z". A eq(3.49.d) fornecerá matriz de rigidez à torção.

Adotando a função polinomial do item 3.6.1 e seguindo o mesmo procedimento, utilizado para derivação dos coeficientes de rigidez axial do elemento de treliça (**ELM-01**), encontra-se a matriz de rigidez à torção e o respectivo vetor de forças de **ELM-04**, conforme a expressão matricial abaixo.

$$\begin{bmatrix} \frac{G.I_X}{L} & -\frac{G.I_X}{L} \\ -\frac{G.I_X}{L} & \frac{G.I_X}{L} + Kr_{x4} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

$$[Ret_4]_J \cdot \{\delta re_4\}_J = \{Fet_4\}_J$$

Onde:

$[Ret_4]_J$ - Matriz de rigidez à torção do elemento J do tipo **ELM-04**.

$\{\delta re_4\}_J$ - Vetor dos deslocamentos nas extremidades do elemento **J**.

$\{Fet_4\}_J$ - Vetor de forças equivalentes.

Considerando as seções transversais dos elementos **ELM-04** completamente assimétricas, haverá excentricidades entre os eixos que passam pelos centros de torção (C. T.) e de gravidade (C. G.). Sendo portanto necessária a relação entre os deslocamentos nestes dois eixos (ver figura 3.9). Baseado na indeformabilidade da laje no seu plano foi determinada a matriz $[BC]_J$, que tem a função de transladar as coordenadas do "C. G.". para o "C. T.".

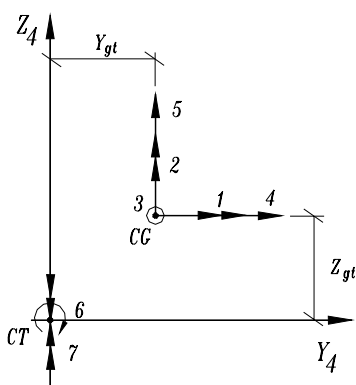


Figura 3.9 - Translação das coordenadas de rotação e translação vertical do centro de gravidade para o centro de torção.

$$[BC]_J = \begin{bmatrix} [bc] & [0] \\ [0] & [bc] \end{bmatrix}$$

Onde:

$$[bc] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ z_{gt} & -y_{gt} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[0]$ - Matriz quadrada nula de dimensão 5.

y_{gt} - Distância y do "C. T." ao "C. G.".

z_{gt} - Distância z do "C. T." ao "C. G.".

Assim a matriz do **ELM-04**, que reúne os coeficientes de rigidez axial e à flexão, será referida ao centro de torção através da eq(3.50)

$$[\overline{rf}_4]_J = [BC]_J^T \cdot [rf_4]_J \cdot [BC]_J \quad (3.50)$$

Onde:

$[rf_4]_J$ - Matriz que reúne os coeficientes de rigidez axial e à flexão, referida ao "C.G."

$[\overline{rf}_4]_J$ - Matriz $[rf_4]_J$ referida ao "C. T."

Por fim serão agrupados em uma única matriz $[Re_4]_J$ todos os coeficientes de rigidez do elemento **ELM-04**, com suas posições definidas pelo sistema de coordenadas estabelecido no item 2.4.3.2.

$$[Re_4]_J = \begin{bmatrix} [re_4]_{SS} & [re_4]_{SI} \\ [re_4]_{IS} & [re_4]_{II} \end{bmatrix}$$

$$\text{Fazendo, } w_x = E.S / L \quad (3.51.a)$$

$$w_y = 2.E.I_Y / L \quad (3.51.b)$$

$$w_z = 2.E.I_Z / L \quad (3.51.c)$$

$$[re_4]_{SI} = \begin{bmatrix} w_y - w_x \cdot z_{gt} & w_x \cdot y_{gt} \cdot z_{gt} & -w_x \cdot z_{gt} & 0 & -3.w_y / L & 0 \\ w_x \cdot y_{gt} \cdot z_{gt} & 2.w_z - w_x \cdot y_{gt}^2 & w_x \cdot y_{gt} & 3.w_z / L & 0 & 0 \\ -w_x \cdot z_{gt} & w_x \cdot y_{gt} & -w_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.w_z / L & 0 & -6.w_z / L^2 & 0 & 0 \\ 3.w_y / L & 0 & 0 & 0 & -6.w_y / L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G.I_X / L \end{bmatrix}$$

$$[re_4]_{II} = \begin{bmatrix} 2.w_y + w_x \cdot z_{gt}^2 & -w_x \cdot y_{gt} \cdot z_{gt} & w_x \cdot z_{gt} & 0 & -3.w_y / L & 0 \\ & 2.w_z + w_x \cdot y_{gt}^2 & -w_x \cdot y_{gt} & 3.w_z / L & 0 & 0 \\ & & w_x & 0 & 0 & 0 \\ & & & 6.w_y / L^2 & 0 & 0 \\ & & & & 6.w_y / L^2 & 0 \\ & & & & & G.I_X / L \end{bmatrix}$$

simet.

A submatriz $[re_4]_{SS}$ é igual a $[re_4]_{II}$, exceto os coeficientes referentes às coordenadas (1,5) e (2,4), bem como seus simétricos, que têm o sinal inverso. Aos

elementos da diagonal principal de $[re_4]_{II}$ devem ser adicionados os valores da rigidez de seus respectivos vínculos elásticos.

$$[re_4]_{IS} = [re_4]_{SI}^T$$

O vetor de forças equivalentes também terá seus valores posicionados seguindo a mesma orientação e será apresentado a seguir:

$$\{Fe_4\}_J^T = \{My_4 \quad Mz_4 \quad Px_4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

3.8.2 - Contribuição da rigidez do elemento e suas ações aplicadas

3.8.2.1 - Considerações de trechos rígidos

A translação das coordenadas das extremidades 1 e 2 do seu comprimento flexível para pontos 1' e 2' (ver figura 3.10), será feita pela matriz de translação $[Tr_4]_J$, apresentada a seguir:

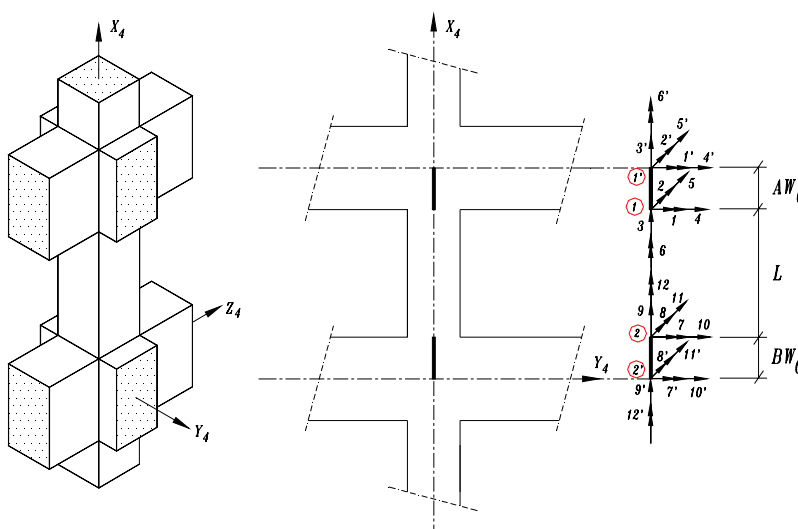


Figura 3.10 - Formação de trechos rígidos nas extremidades dos elementos ELM-04.

$$[\text{Tr}_4]_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & AW_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -AW_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & BW_0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -BW_0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde AW_0 e BW_0 são os trechos rígidos nas extremidades superior e inferior, respectivamente e a matriz de rigidez referida aos pontos 1' e 2' da figura 3.10, será dada por:

$$[\overline{\text{Re}}_4]_J = [\text{Tr}_4]_J^T \cdot [\text{Re}_4]_J \cdot [\text{Tr}_4]_J \quad (3.52)$$

3.8.2.2 - Matriz de incidência cinemática para rotação de coordenadas

A incidência dos **ELM-04** também poderá ser definida por um ângulo α_4 qualquer (ver figura 3.11). Sendo assim a rotação das suas coordenadas do sistema de referência local para o global será fornecida pela matriz $[\text{Be}_4]_J$, apresentada a seguir:

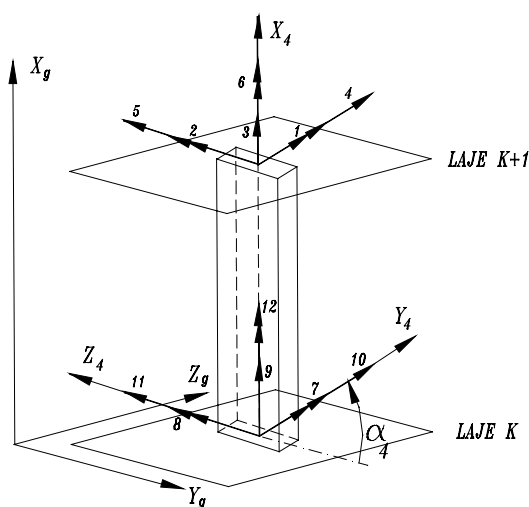


Figura 3.11- Rotação das coordenadas dos **ELM-04** para o sistema de referência global.

$$[\text{Be}_4]_J = \begin{bmatrix} [\text{be}_4] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\text{be}_4] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\text{be}_4] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\text{be}_4] \end{bmatrix}$$

Onde:

$$[\text{be}_4] = \begin{bmatrix} \cos.\alpha_4 & \text{sen}.\alpha_4 & 0 \\ -\text{sen}.\alpha_4 & \cos.\alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[0] - matriz quadrada nula de dimensão 3

A matriz de rigidez e o vetor de força equivalente, referidos ao sistema de eixos global, serão fornecidos pelas eq(3.53) e eq(3.54), respectivamente.

$$[\overline{\text{Re}}_4]_J = [\text{Be}_4]_J^T \cdot [\overline{\text{Re}}_4]_J \cdot [\text{Be}_4]_J \quad (3.53)$$

$$\{\overline{\text{Fe}}_4\}_J = [\text{Be}_4]_J^T \cdot \{\text{Fe}_4\}_J \quad (3.54)$$

3.8.2.3 - Consideração da laje como diafragma rígido

As coordenadas dos elementos **ELM-04**, dependentes do movimento de corpo rígido da laje, também serão transladadas para o nó mestre. Sendo portanto utilizada a matriz de translação $[\text{mt}_4]_J$ e a eq(3.55).

$$[\text{mt}_4]_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Z_J \\ 0 & 1 & Y_J \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\overline{\text{re}}_4]_J = [\text{mt}_4]_J^T \cdot [\text{re}_4]_J \cdot [\text{mt}_4]_J \quad (3.55)$$

Onde $Y_j, Z_j, [re_4]$ e $[\overline{re_4}]$ têm o mesmo significado apresentado na consideração do diafragma rígido para os elementos **ELM-02**.

A contribuição da rigidez dos elementos **ELM-04** e de suas ações aplicadas na matriz de rigidez e no vetor de forças nodais da subestrutura, são fornecidos pelas eq(3.56) e eq(3.57), respectivamente.

$$[K_4] = \sum_{j=1}^{NE4} [\overline{Re_4}]_j \quad (3.56)$$

$$\{F_4\} = \sum_{j=1}^{NE4} \{\overline{Fe_4}\}_j \quad (3.57)$$

Onde:

$[K_4]$ - Matriz de rigidez da subestrutura apenas com a rigidez dos **ELM-04**.

$\{F_4\}$ - Vetor de forças nodais da subestrutura apenas com as ações nos **ELM-04**.

Obs.: Para determinação da matriz de rigidez e do vetor de forças equivalentes dos elementos **ELM-03**, serão válidas as mesmas considerações feitas para o **ELM-04**, eliminando-se apenas da sua matriz de rigidez e vetor de forças as linhas e colunas referentes à rigidez à torção.

3.9 - Aplicação do P.E.P.T.M. ao elemento de núcleo

A energia potencial total para os elementos **ELM-05**, com vinculações elásticas nas direções de suas coordenadas das extremidades inferiores (ver figura 3.12), será dada pela eq(3.58). As ações serão aplicadas apenas nas extremidades incidentes na laje superior.

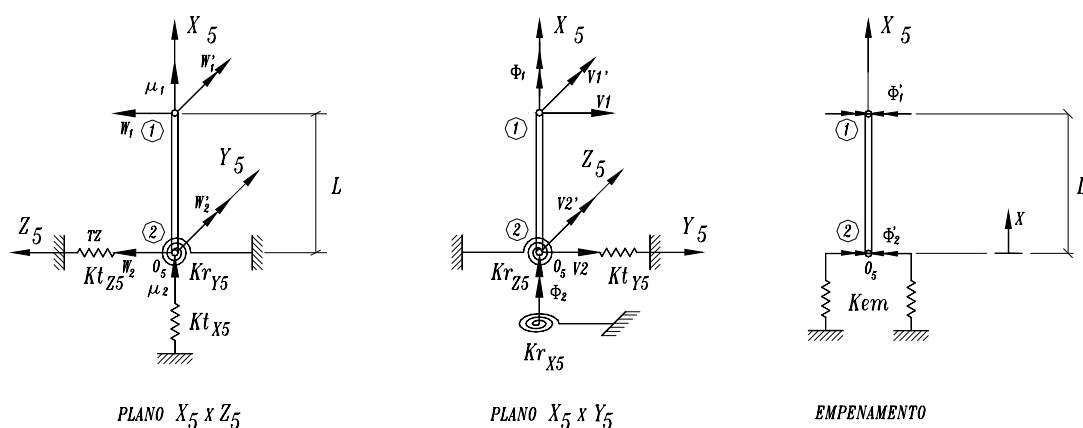


Figura 3.12 - Deslocamentos de extremidade e vínculo elástico dos **ELM-05**.

$$\begin{aligned}
 U_{t5} = & \frac{1}{2} \int_0^L (E \cdot I_Y \cdot w''^2 + E \cdot I_Z \cdot v''^2 + E \cdot S \cdot u'^2 + E \cdot I_\omega \cdot \phi''^2) \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^L G \cdot I_X \cdot \phi'^2 \cdot dx + \\
 & \frac{1}{2} (Kt_{X5} \cdot u_2^2 + Kt_{Y5} \cdot v_2^2 + Kt_{Z5} \cdot w_2^2 + Kr_{X5} \cdot \phi_2^2 + Kr_{Y5} \cdot w_2'^2 + Kr_{Z5} \cdot v_2'^2 + \\
 & Kem \cdot \phi_2'^2 \cdot \sum_{i=1}^n \omega_i^2) - (Px_5 \cdot u_1 + My_5 \cdot w_1' + Mz_5 \cdot v_1' + B \cdot \phi_1') \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

Onde:

Kt_{X5} - Rigidez do vínculo de translação na direção do eixo x_5 .

Kt_{Y5} - Rigidez do vínculo de translação na direção do eixo y_5 .

Kt_{Z5} - Rigidez do vínculo de translação na direção do eixo z_5 .

Kr_{X5} - Rigidez do vínculo de rotação em torno do eixo x_5 .

Kr_{Y5} - Rigidez do vínculo de rotação em torno do eixo y_5 .

Kr_{Z5} - Rigidez do vínculo de rotação em torno do eixo z_5 .

Kem - Rigidez do vínculo na direção do empenamento.

Px_5 - Carga vertical aplicada na extremidade 1 na direção do eixo x_5 .

My_5 - Momento fletor aplicado na extremidade 1 na direção do eixo y_5 .

Mz_5 - Momento fletor aplicado na extremidade 1 na direção do eixo z_5 .

B - Bimomento aplicado.

- ϕ_1 - Rotação em torno do eixo x_5 na extremidade 1.
 ϕ'_1 - Derivada da rotação em torno do eixo x_5 na extremidade 1.
 ϕ_2 - Rotação em torno do eixo x_5 na extremidade 2.
 ϕ'_2 - Derivada da rotação em torno do eixo z_5 na extremidade 2.

3.9.1 - Matriz de rigidez e vetor de forças equivalente do elemento núcleo

1. Equações diferenciais:

$$E.S.u'' = 0 \quad (3.59.a)$$

$$E.I_Y.w'''' = 0 \quad (3.59.b)$$

$$E.I_Z.v'''' = 0 \quad (3.59.c)$$

$$E.I_\omega.\phi'''' - G.I_X.\phi'' = 0 \quad (3.59.d)$$

As matrizes de rigidez axial e à flexão nos planos principais de inércia são fornecidas pelas equações eq(3.59.a), eq(3.59.b) e eq(3.59.c), já definidas anteriormente para os elementos **ELM-01** e **ELM-02**. Os coeficientes relacionados à torção e ao empenamento serão obtidos através da eq(3.59.d) juntamente com a função exata, que fornece sua solução geral.

2. Função exata que define a elástica de rotação em torno de x_5 :

$$\phi = A + B.x + C.\cosh(\alpha.x) + D.\sinh(\alpha.x) \quad (3.60)$$

Onde A, B, C e D são suas constantes e α é um valor adimensional, definido por:

$$\alpha = \sqrt{\frac{G.I_X}{E.I_\omega}} \quad (3.61)$$

3. Condições de contorno:

$$\text{Para } \begin{array}{l} x = 0 \\ x = L \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{IMPLICA EM}} \\ \xrightarrow{\text{IMPLICA EM}} \end{array} \begin{array}{l} \phi = \phi_2 \text{ e } \phi' = \phi'_2 \\ \phi = \phi_1 \text{ e } \phi' = \phi'_1 \end{array}$$

4. Determinação das constantes polinomiais:

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi'_1 \\ \phi_2 \\ \phi'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L & \cos(\alpha \cdot L) & \text{sen}(\alpha \cdot L) \\ 0 & 1 & \text{sen}(\alpha \cdot L) & \cos(\alpha \cdot L) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

Solução:

$$A = \gamma \cdot \left[(1 - \text{ch}) \cdot \phi_1 + \left(-L + \frac{\text{sh}}{\alpha} \right) \cdot \phi'_1 + (1 + L \cdot \alpha \cdot \text{sh} - \text{ch}) \cdot \phi_2 + \left(L \cdot \text{ch} - \frac{\text{sh}}{\alpha} \right) \cdot \phi'_2 \right]$$

$$B = \gamma \cdot \left[(\alpha \cdot \text{sh}) \cdot \phi_1 + (1 - \text{ch}) \cdot \phi'_1 + (-\alpha \cdot \text{sh}) \cdot \phi_2 + (\text{ch} - 1) \cdot \phi'_2 \right]$$

$$C = \gamma \cdot \left[(\text{ch} - 1) \cdot \phi_1 + \left(L - \frac{\text{sh}}{\alpha} \right) \cdot \phi'_1 + (1 - \text{ch}) \cdot \phi_2 + \left(-L \cdot \text{ch} + \frac{\text{sh}}{\alpha} \right) \cdot \phi'_2 \right]$$

$$D = \gamma \cdot \left[(-\text{sh}) \cdot \phi_1 + (\text{ch} - 1) \cdot \phi'_1 + (\text{sh}) \cdot \phi_2 + \left(\frac{1}{\alpha} + L \cdot \text{sh} - \frac{\text{ch}}{\alpha} \right) \cdot \phi'_2 \right]$$

$$\text{Onde: sh} = \text{senh}(\alpha \cdot L) \quad (3.63)$$

$$\text{ch} = \text{cosh}(\alpha \cdot L) \quad (3.64)$$

$$\gamma = \frac{G \cdot I_x}{2 - 2 \cdot \text{ch} + L \cdot \alpha \cdot \text{sh}} \quad (3.65)$$

5. Expressão da elástica em função dos deslocamentos:

Substituindo as constantes A, B, C e D na eq(3.58), obtém-se a expressão da elástica em função dos deslocamentos nas extremidades (ϕ_1, ϕ'_1, ϕ_2 e ϕ'_2) do elemento.

$$\phi = \gamma \cdot \left[(1 - \text{ch}) \cdot \phi_1 + \left(-L + \frac{\text{sh}}{\alpha} \right) \cdot \phi'_1 + (1 + L \cdot \alpha \cdot \text{sh} - \text{ch}) \cdot \phi_2 + \left(L \cdot \text{ch} - \frac{\text{sh}}{\alpha} \right) \cdot \phi'_2 \right] +$$

$$\begin{aligned}
& \gamma \cdot [(\alpha \cdot \text{sh}) \cdot \phi_1 + (1 - \text{ch}) \cdot \phi_1' + (-\alpha \cdot \text{sh}) \cdot \phi_2 + (\text{ch} - 1) \cdot \phi_2'] \cdot x + \\
& \gamma \cdot \left[(\text{ch} - 1) \cdot \phi_1 + \left(L - \frac{\text{sh}}{\alpha} \right) \cdot \phi_1' + (1 - \text{ch}) \cdot \phi_2 + \left(-L \cdot \text{ch} + \frac{\text{sh}}{\alpha} \right) \cdot \phi_2' \right] \cdot \cosh(\alpha \cdot x) + \\
& \gamma \cdot \left[(-\text{sh}) \cdot \phi_1 + (\text{ch} - 1) \cdot \phi_1' + (\text{sh}) \cdot \phi_2 + \left(\frac{1}{\alpha} + L \cdot \text{sh} - \frac{\text{ch}}{\alpha} \right) \cdot \phi_2' \right] \cdot \sinh(\alpha \cdot x)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

6. Expressão da energia potencial total em função dos deslocamentos:

A energia potencial total, considerando-se apenas as deformações por torção e bimomento e as respectivas vinculações elásticas, bem como o bimomento aplicado, será dada por:

$$U_{t_5} = \frac{1}{2} \int_0^L (E \cdot I_x \cdot \phi''^2 + G \cdot I_x \cdot \phi'^2) \cdot dx + \frac{1}{2} (K_{r_{x_5}} \cdot \phi_2^2 + K_{em} \cdot \phi_2'^2 \cdot \sum_{i=1}^n \omega_i^2 - B \cdot \phi_1') \tag{3.67}$$

Substituindo a eq(3.66) em eq(3.67) e integrando o resultado no intervalo de 0 a L, obtém-se a expressão da energia potencial total em função dos deslocamentos nas extremidades do elemento.

7. Determinação da matriz de rigidez e do vetor de força equivalente:

Conforme estabelece o **P.E.P.T.M.**, as derivadas parciais da expressão da energia potencial total em relação aos deslocamentos ϕ_1 , ϕ_1' , ϕ_2 e ϕ_2' são iguais a zero.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{t_5}}{\partial \phi_1} &= \gamma [(\alpha \cdot \text{sh}) \cdot \phi_1 + (1 - \text{ch}) \cdot \phi_1' + (-\alpha \cdot \text{sh}) \cdot \phi_2 + (1 - \text{ch}) \cdot \phi_2'] - M_{x_5} \\
\frac{\partial U_{t_5}}{\partial \phi_1'} &= \gamma \left[(1 - \text{ch}) \cdot \phi_1 + \left(L \cdot \text{ch} - \frac{\text{sh}}{\alpha} \right) \cdot \phi_1' + (\text{ch} - 1) \cdot \phi_2 + \left(\frac{\text{sh}}{\alpha} - L \right) \cdot \phi_2' \right] - B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{t_5}}{\partial \phi_2} &= \gamma \cdot \left[(-\alpha \cdot \text{sh}) \cdot \phi_1 + (\text{ch} - 1) \cdot \phi_1' + \left((\alpha \cdot \text{sh}) + \frac{K_{r_{X5}}}{\gamma} \right) \cdot \phi_2 + (\text{ch} - 1) \cdot \phi_2' \right] \\ \frac{\partial U_{t_5}}{\partial \phi_2'} &= \gamma \cdot \left[(1 - \text{ch}) \cdot \phi_1 + \left(\frac{\text{sh}}{\alpha} - 1 \right) \cdot \phi_1' + (\text{ch} - 1) \cdot \phi_2 + \left(\left(L \cdot \text{ch} - \frac{\text{sh}}{\alpha} \right) + \frac{\sum_{i=1}^n K_{em_i} \cdot \omega_i^2}{\gamma} \right) \cdot \phi_2' \right] \end{aligned} \quad (3.68)$$

Colocando as quatro equações (3.68) na forma matricial, obtém-se:

$$\gamma \cdot \begin{bmatrix} \alpha \cdot \text{sh} & 1 - \text{ch} & -\alpha \cdot \text{sh} & 1 - \text{ch} \\ & L \cdot \text{ch} - \frac{\text{sh}}{\alpha} & \text{ch} - 1 & \frac{\text{sh}}{\alpha} - L \\ & & (\alpha \cdot \text{sh}) + \frac{K_{r_{X5}}}{\gamma} & \text{ch} - 1 \\ & & & \left(L \cdot \text{ch} - \frac{\text{sh}}{\alpha} \right) + \frac{\sum_{i=1}^n K_{em_i} \cdot \omega_i^2}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_1' \\ \phi_2 \\ \phi_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

$$[\text{Ret}_5]_J \cdot \{\delta \text{re}_5\}_J = \{\text{Fet}_5\}_J$$

Onde:

$[\text{Ret}_5]_J$ - Matriz de rigidez à torção do elemento J do tipo **ELM-05**.

$\{\delta \text{re}_5\}_J$ - Vetor dos deslocamentos nas extremidades do elemento **J**.

$\{\text{Fet}_5\}_J$ - Vetor de forças equivalentes.

Nos elementos **ELM-05** também poderão ocorrer excentricidades entre os eixos concorrentes nos centros de torção e gravidade, Sendo assim a matriz que reúne os coeficientes de rigidez axial e à flexão deverá ser transladada, conforme eq(3.69) para o " C. T. " com auxílio da matriz $[BC]_J$, definida anteriormente.

$$[\overline{rf}_5]_J = [BC]_J^T \cdot [rf_5]_J \cdot [BC]_J \quad (3.69)$$

Onde:

$[rf_5]_J$ - Matriz que reúne os coeficientes de rigidez axial e à flexão, referida ao "C.G."

$[\overline{rf}_5]_J$ - Matriz $[rf_5]_J$ referida ao "C. T."

Por fim serão reunidos na matriz $[Re_5]_J$ todos os coeficientes de rigidez do elemento **ELM-05**, com suas posições definidas pelo sistema de coordenadas estabelecido no item 2.4.4.

$$[Re_5]_J = \begin{bmatrix} [re_5]_{SS} & [re_5]_{SI} \\ [re_5]_{IS} & [re_5]_{II} \end{bmatrix}$$

Lembrando as eq(3.51.a), eq(3.51.b) e eq(3.51.c) do item anterior, definem-se as submatrizes de $[Re_5]_J$.

$$[re_5]_{SI} = \begin{bmatrix} w_y - w_x \cdot z_{gt} & w_x \cdot y_{gt} \cdot z_{gt} & -w_x \cdot z_{gt} & 0 & -3 \cdot w_y / L & 0 & 0 \\ w_x \cdot y_{gt} \cdot z_{gt} & 2 \cdot w_z - w_x \cdot y_{gt}^2 & w_x \cdot y_{gt} & 3 \cdot w_z / L & 0 & 0 & 0 \\ -w_x \cdot z_{gt} & w_x \cdot y_{gt} & -w_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 \cdot w_z / L & 0 & -6 \cdot w_z / L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 \cdot w_y / L & 0 & 0 & 0 & -6 \cdot w_y / L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma \cdot \alpha \cdot sh & \gamma \cdot (ch - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \cdot (ch - 1) & \gamma \cdot (sh / \alpha - L) \end{bmatrix}$$

$$[re_5]_{II} = \begin{bmatrix} 2.w_y + w_x \cdot z_{gt}^2 & -w_x \cdot y_{gt} \cdot z_{gt} & w_x \cdot z_{gt} & 0 & -3.w_y / L & 0 & 0 \\ & 2.w_z + w_x \cdot y_{gt}^2 & -w_x \cdot y_{gt} & 3.w_z / L & 0 & 0 & 0 \\ & & w_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 6.w_y / L^2 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{simet.} & & & 6.w_y / L^2 & 0 & 0 \\ & & & & & \gamma \cdot (\alpha \cdot sh) & \gamma \cdot (ch - 1) \\ & & & & & & \gamma \cdot (L \cdot ch - sh / \alpha) \end{bmatrix}$$

Obs.: Aos coeficientes da diagonal principal da submatriz $[re_5]_{II}$, devem ser adicionados os valores da rigidez dos seus respectivos vínculos elásticos. Na direção do empenamento, o vínculo poderá ser em pontos isolados ou contínuo (ver figura 3.3).

$[re_5]_{SS}$ é igual a $[re_5]_{II}$, exceto os coeficientes referentes as coordenadas (1,5) e (2,4), bem como seus simétricos, que têm o sinal trocado, sendo assim:

$$[re_5]_{SI} = [re_5]_{IS}^T$$

O vetor de forças equivalentes também terá seus valores posicionados seguindo a mesma orientação e será representado por:

$$\{Fe_5\}_J^T = \{My_5 \quad Mz_5 \quad Px_5 \quad B \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

3.9.2 - Contribuição da rigidez do elemento e suas ações aplicadas

3.9.2.1 - Considerações de trechos rígidos

Nas estruturas de contraventamento usuais, os núcleos possuem rigidez à flexão bem maior que os demais elementos. Portanto não ocorre a formação de trechos rígidos ao longo dos seus comprimentos.

3.9.2.2 - Matriz de incidência cinemática para rotação de coordenadas

O elemento **ELM-05** poderá também incidir na subestrutura de forma genérica, tendo suas coordenadas rotacionadas do sistema de referência local para o global pela matriz $[Be_5]_j$ (ver figura 3.13), apresentada a seguir:

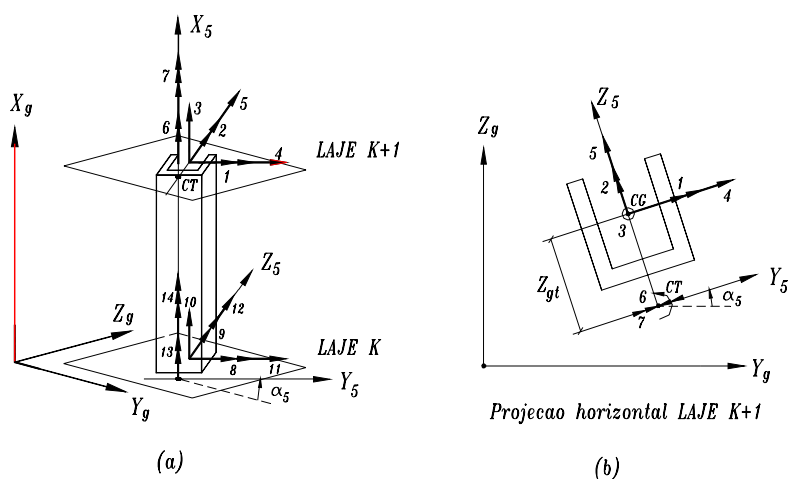


Figura 3.13- Rotação das coordenadas dos **ELM-05** para o sistema de referência global.

$$[Be_5]_j = \begin{bmatrix} [be_4] & [0] & [N] & [0] & [0] & [N] \\ [0] & [be_4] & [N] & [0] & [0] & [N] \\ [L] & [L] & [1] & [L] & [L] & [1] \\ [0] & [0] & [N] & [be_4] & [0] & [N] \\ [0] & [0] & [N] & [0] & [be_4] & [N] \\ [L] & [L] & [1] & [L] & [L] & [1] \end{bmatrix}$$

Onde:

$[be_4]$ - É definida no item 3.8.2.2, devendo trocar apenas o valor de α_4 por α_5 .

$[1]$ - Matriz identidade de ordem 1.

$[N]$ - Matriz coluna de ordem 3 nula.

$[L]$ - Matriz linha de ordem 3 nula.

A matriz de rigidez e o vetor de força equivalente, referidos ao sistema de eixos global, serão fornecidos pelas eq(3.70) e eq(3.71), respectivamente.

$$\left[\overline{\text{Re}}_4 \right]_J = \left[\text{Be}_4 \right]_J^T \cdot \left[\text{Re}_4 \right]_J \cdot \left[\text{Be}_4 \right]_J \quad (3.70)$$

$$\left\{ \overline{\text{Fe}}_4 \right\}_J = \left[\text{Be}_4 \right]_J^T \cdot \left\{ \text{Fe}_4 \right\}_J \quad (3.71)$$

3.9.2.3 - Consideração da laje como um diafragma rígido

As coordenadas dos elementos **ELM-05**, dependentes do movimento de corpo rígido da laje, também serão transladadas para o nó mestre, seguindo o mesmo raciocínio usado no item 3.8.2.3 para o elemento **ELM-04**, conforme a eq(3.72).

$$\left[\overline{\text{re}}_5 \right]_J = \left[\text{mt}_4 \right]_J^T \cdot \left[\text{re}_5 \right]_J \cdot \left[\text{mt}_4 \right]_J \quad (3.72)$$

Onde: $\left[\text{re}_5 \right]$ e $\left[\overline{\text{re}}_5 \right]$ têm o mesmo significado apresentado na consideração do diafragma rígido para os elementos **ELM-02**.

A contribuição da rigidez dos elementos **ELM-05** e de suas ações aplicadas na matriz de rigidez e no vetor de forças nodais da subestrutura, são fornecidos pelas eq(3.73) e eq(3.74), respectivamente.

$$\left[\text{K}_5 \right] = \sum_{J=1}^{\text{NES}} \left[\overline{\text{Re}}_5 \right]_J \quad (3.73)$$

$$\left\{ \text{F}_5 \right\} = \sum_{J=1}^{\text{NES}} \left\{ \overline{\text{Fe}}_5 \right\}_J \quad (3.74)$$

Onde:

$\left[\text{K}_5 \right]$ - Matriz de rigidez da subestrutura apenas com a rigidez dos **ELM-05**.

$\left\{ \text{F}_5 \right\}$ - Vetor de forças nodais da subestrutura apenas com as ações aplicadas nos **ELM-05**.

3.10 - Aplicação do P.E.P.T.M. aos elementos horizontais

Para os elementos horizontais de contraventamento serão determinadas apenas as suas matrizes de rigidez. As ações atuantes ao longo dos seus comprimentos são transformadas em cargas equivalentes, aplicadas na direção das coordenadas locais das extremidades superiores dos elementos verticais que lhes servem de apoio. Não havendo portanto vetores de forças a serem determinados, assim a expressão da energia potencial total se reduz às parcelas relativas às suas deformações, conforme eq(3.75).

$$U_{DF7} = \frac{1}{2} \int_0^L (E.I_Z \cdot v''^2 + G.I_X) dx \quad (3.75)$$

3.10.1 - Matriz de rigidez do elemento horizontal

1. Equações diferenciais:

$$E.I_Z \cdot v'''' = 0 \quad (3.76.a)$$

$$G.I_X \cdot \phi'' = 0 \quad (3.76.b)$$

Os coeficientes de rigidez à flexão e à torção para o **ELM-07**, obtidos pelas equações acima, são iguais aos dos elementos **ELM-02** e **ELM-04**, respectivamente, devendo apenas eliminar as parcelas relativas aos vínculos elásticos. Seus valores estão reunidos na matriz $[Re_7]_j$ e suas posições foram definidas seguindo a orientação do sistema de coordenadas, estabelecido no item 2.4.5.2.

$$[Re_7]_J = \begin{bmatrix} \frac{G.I_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{G.I_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4.E.I_z}{L} & -\frac{6.E.I_z}{L} & 0 & \frac{2.E.I_z}{L} & \frac{6.E.I_z}{L} \\ 0 & -\frac{6.E.I_z}{L} & \frac{12.E.I_z}{L} & 0 & \frac{6.E.I_z}{L} & -\frac{12.E.I_z}{L} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G.I_x}{L} & 0 & 0 \\ \text{simt.} & & & & \frac{4.E.I_z}{L} & -\frac{6.E.I_z}{L} \\ & & & & 0 & \frac{6.E.I_z}{L} \\ & & & & & \frac{12.E.I_z}{L} \end{bmatrix}$$

3.10.2 - Contribuição da rigidez do elemento

3.10.2.1 - matriz de incidência cinemática para rotação de coordenadas

As coordenadas posicionadas nas extremidades inicial e final dos elementos **ELM-07** devem ser rotacionadas do seu sistema de eixos local para o sistema de referência dos elementos que lhe servem de apoio (ver figura 3.14). Esta rotação será feita pela matriz $[Be_7]_J$, de acordo com a eq(3.77).

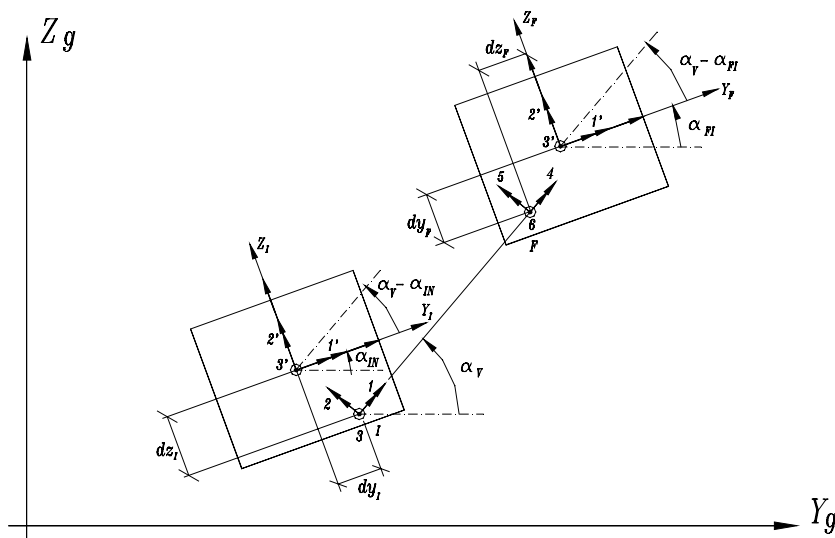


Figura 3.14- Rotação das coordenadas dos **ELM-07** p/ o sistema de referência local dos elementos que lhe servem de apoio.

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{Be}_7]_J &= \begin{bmatrix} [\mathbf{be}_{in}] & [0] \\ [0] & [\mathbf{be}_{fi}] \end{bmatrix} \\
 [\overline{\mathbf{Re}}_7]_j &= [\mathbf{Be}_7]_J^T \cdot [\mathbf{Re}_7] \cdot [\mathbf{Be}_7]_J
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Onde:

$$[\mathbf{be}_{in}] = \begin{bmatrix} \cos.\alpha_{in} & \text{sen}.\alpha_{in} & 0 \\ -\text{sen}.\alpha_{in} & \cos.\alpha_{in} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{be}_{fi}] = \begin{bmatrix} \cos.\alpha_{fi} & \text{sen}.\alpha_{fi} & 0 \\ -\text{sen}.\alpha_{fi} & \cos.\alpha_{fi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{in} = \alpha_v - \alpha_i$$

$$\alpha_{fi} = \alpha_v - \alpha_f$$

α_v - Ângulo de incidência do elemento **ELM-07**.

α_i - Ângulo de incidência do elemento de apoio inicial.

α_f - Ângulo de incidência do elemento de apoio final.

3.10.2.2 - Matriz de incidência cinemática para translação de coordenadas

Será prevista a existência de excentricidades entre os pontos de apoio do **ELM-07** e os centróides dos seus elementos verticais de apoio. Para isso serão determinadas matrizes de translação, cuja função é relacionar os deslocamentos nestes dois pontos.

O **ELM-07** poderá unir todos os tipos de elementos verticais com exceção do **ELM-01**. Sendo assim, para cada tipo interligado haverá uma matriz de translação específica, constituída pela combinação das submatrizes $[\mathbf{mt}_1]_7$ e $[\mathbf{mt}_2]_7$ (ver figuras 3.15 e 3.16), definidas com base na hipótese de indeformabilidade da laje no seu plano e de acordo com o tipo de elemento contraventado.

- Para elementos de apoio sem rigidez ao empenamento:

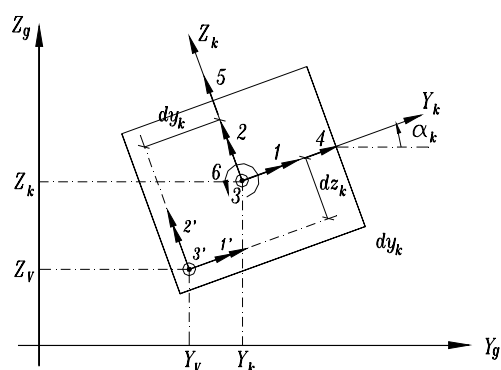


Figura 3.15 - Translação das coordenadas dos **ELM-07** do seu ponto de incidência para o centróide da seção transversal do elemento vertical que lhe serve de apoio (sem propriedades setoriais).

$$[mt_1]_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dz_k & -dy_k & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para elementos de apoio com rigidez ao empenamento:

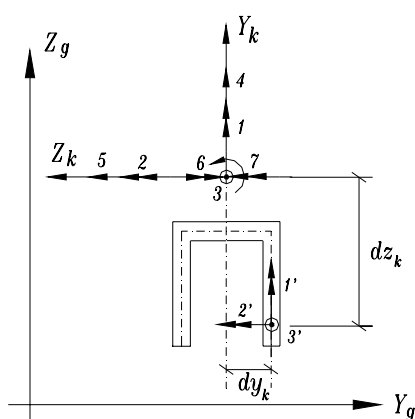


Figura 3.16 - Translação das coordenadas dos **ELM-07** do seu ponto de incidência para o centróide da seção transversal do elemento vertical que lhe serve de apoio (com propriedades setoriais).

$$[mt_2]_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -dy_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -dz_k \\ dz_k & dy_k & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega \end{bmatrix}$$

Onde:

ω - É a área setorial no ponto de incidência do **ELM-07**.

dy_k e dz_k são as distâncias nas direções y_k e z_k , entre centróide da seção transversal e o ponto de incidência do elemento **ELM-07**, dados por:

$$dy_k = (Y_v - Y_k) \cdot \cos.\alpha_k + (Z_v - Z_k) \cdot \sin.\alpha_k \quad (3.78)$$

$$dz_k = (Z_v - Z_k) \cdot \cos.\alpha_k - (Y_v - Y_k) \cdot \sin.\alpha_k \quad (3.79)$$

Y_v e Z_v são as coordenadas do ponto de apoio de elemento **ELM-07** em relação aos eixos globais (ver figura 3.15).

Y_k e Z_k são as coordenadas do elemento vertical de apoio em relação aos eixos globais (ver figura 3.15).

Obs.: A coluna 7 da submatriz $[mt_2]_7$ foi obtida da seguinte forma:

- Impondo-se uma rotação ϕ_6 na direção da coordenada "6", o ponto de apoio sofrerá uma translação, cujas componentes são:

$$\delta_y = -dz_k \cdot \phi_6 \quad (3.80)$$

$$\delta_z = -dy_k \cdot \phi_6 \quad (3.81)$$

Sendo δ_y e δ_z nas direções Y_k e Z_k , respectivamente.

- Derivando-se as eq(3.80) e eq(3.81) em relação a X_k , obtém-se:

$$\frac{d\delta_y}{dX_k} = -dz_k \cdot \phi'_6 \quad (3.82)$$

$$\frac{d\delta_z}{dX_k} = -dy_k \cdot \phi'_6 \quad (3.83)$$

Sabe-se que, $\frac{d\delta_y}{dX_{k_6}}$ é uma rotação positiva em torno do eixo Z_k e $\frac{d\delta_z}{dX_{k_6}}$ é

uma rotação negativa em torno do eixo Y_k

- Impondo-se unitário o valor da derivada do giro ϕ_6 segundo X_k , conclui-se que ocorrem deslocamentos na direção das coordenadas 1' e 2', os quais são $-dy_k$ e $-dz_k$, respectivamente.
- Da teoria da flexo-torção, sabe-se que o deslocamento vertical do ponto de apoio de **ELM-07** será dado por:

$$u_i = \omega \cdot \phi'_6 \quad (3.84)$$

Fazendo ϕ'_6 unitário o deslocamento na direção da coordenada 3' será igual “ ω ”.

A matriz de rigidez de **ELM-07** referida aos centróides dos elementos que lhe servem de apoio será dada por:

$$\left[\overline{\text{Re}}_7 \right]_J = \left[\text{Mt}_7 \right]_J^T \cdot \left[\overline{\text{Re}}_7 \right]_J \cdot \left[\text{Mt}_7 \right]_J \quad (3.85)$$

Onde $\left[\text{Mt}_7 \right]_J$ será fornecida pelas combinações apresentadas a seguir:

- Primeira combinação:

Os elementos contraventados não possuem rigidez ao empenamento.

$$\left[\text{Mt}_7 \right]_J = \begin{bmatrix} \left[\text{mt}_1 \right]_7 & [0] \\ [0] & \left[\text{mt}_1 \right]_7 \end{bmatrix}$$

- Segunda combinação:

Só o elemento de apoio inicial possui rigidez ao empenamento.

$$\left[\text{Mt}_7 \right]_J = \begin{bmatrix} \left[\text{mt}_2 \right]_7 & [0] \\ [0] & \left[\text{mt}_1 \right]_7 \end{bmatrix}$$

- Terceira combinação:

Ambos possuem rigidez ao empenamento.

$$[Mt_7]_J = \begin{bmatrix} [mt_2]_7 & [0] \\ [0] & [mt_2]_7 \end{bmatrix}$$

Com estas considerações a matriz de rigidez do elemento **ELM-07** encontra-se referida aos sistemas de eixos locais dos elementos verticais de apoio inicial e final, devendo ainda ser rotacionada para o sistema coordenado global, através da eq(3.86).

$$[\overline{\overline{Re}}_7]_J = [Bg_7]_J^T \cdot [\overline{Re}_7]_J \cdot [Bg_7]_J \quad (3.86)$$

Onde:

$$[Bg_7]_J = \begin{bmatrix} [Be_1]_{in} & [0] \\ [0] & [Be_1]_{fi} \end{bmatrix}$$

$[Be_1]_{in}$ - Submatriz de rotação de coordenadas da extremidade superior do elemento de apoio inicial.

$[Be_1]_{fi}$ - Submatriz de rotação de coordenadas da extremidade superior do elemento de apoio final.

A contribuição da rigidez dos elementos **ELM-07** na matriz de rigidez da subestrutura será dada por:

$$[K_7] = \sum_{J=1}^{NE7} [\overline{\overline{Re}}_7]_J \quad (3.87)$$

Obs.: As considerações feitas anteriormente, também são válidas para o elemento **ELM-06**, devendo apenas eliminar da matriz de rigidez as linhas e colunas referentes à rigidez à torção.

3.11 - Aplicação do P.E.P.T.M. aos elementos diagonais

O elemento diagonal não possui carregamentos ao longo do seu eixo longitudinal, sendo a expressão de sua energia potencial total definida pelas parcelas relativas à sua deformação.

- Para os elementos **ELM-08**:

$$U_{DF} = \frac{1}{2} \int_0^L E.S.u'^2 .dx \quad (3.88)$$

- Para os elementos **ELM-09**:

$$U_{DF} = \frac{1}{2} \int_0^L (E.I_Y .w''^2 + E.S.u'^2) .dx \quad (3.89)$$

3.11.1 - Matriz de rigidez dos elementos diagonais

De acordo com as expressões da energia de deformação, as matrizes de rigidez dos elementos **ELM-08** e **ELM-09** são iguais às do **ELM-01** e **ELM-02**, respectivamente, quando eliminados os coeficientes de rigidez dos seus vínculos elásticos.

3.11.2 - Contribuição da rigidez dos elementos diagonais

3.11.2.1 - Matriz de incidência cinemática para rotação de coordenadas

As coordenadas dos elementos **ELM-08** e **ELM-09** também serão rotacionadas para os sistemas de eixos locais dos elementos verticais contraventados, utilizando as matrizes $[Be_8]_J$ e $[Be_9]_J$ e as eq(3.90) e eq(3.91), respectivamente.

- Para os elementos **ELM-08**:

$$[\overline{Re}_8]_J = [Be_8]_J^T \cdot [Re_8]_J \cdot [Be_8]_J \quad (3.90)$$

Onde:

$$[Be_8]_J = \begin{bmatrix} [be_{in}] & [0] \\ [0] & [be_{fi}] \end{bmatrix}$$

$$[be_{in}] = [\cos.\alpha_8 \quad \text{sen}.\alpha_8 \cdot \cos.\beta_K \quad \text{sen}.\alpha_8 \cdot \text{sen}.\beta_K]$$

$$[be_{fi}] = [\cos.\alpha_8 \quad \text{sen}.\alpha_8 \cdot \cos.\beta_L \quad \text{sen}.\alpha_8 \cdot \text{sen}.\beta_L]$$

[0] - Matriz linha com três posições nulas.

$$\beta_K = \beta_8 - \alpha_i$$

$$\beta_L = \beta_8 - \alpha_f$$

β_8 - Ângulo definido no item 2.3.7 (ver figura 2.1).

α_i - Ângulo de incidência do elemento de apoio inicial.

α_f - Ângulo de incidência do elemento de apoio final.

- Para os elementos **ELM-09**:

$$[\overline{Re}_9]_J = [Be_9]_J^T \cdot [Re_9]_J \cdot [Be_9]_J \quad (3.91)$$

Onde:

$$[Be_9]_J = \begin{bmatrix} [be_{in}] & [0] \\ [0] & [be_{fi}] \end{bmatrix}$$

$$[be_{in}] = \begin{bmatrix} -\cos.\beta_K & \text{sen}.\beta_K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos.\alpha_9 & \text{sen}.\alpha_9.\cos\beta_K & \text{sen}.\alpha_9.\text{sen}.\beta_K \\ 0 & 0 & \text{sen}.\alpha_9 & -\cos.\alpha_9.\cos\beta_K & -\cos.\alpha_9.\text{sen}.\beta_K \end{bmatrix}$$

$$[be_{fi}] = \begin{bmatrix} -\cos.\beta_L & \text{sen}.\beta_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos.\alpha_9 & \text{sen}.\alpha_9.\cos\beta_L & \text{sen}.\alpha_9.\text{sen}.\beta_L \\ 0 & 0 & \text{sen}.\alpha_9 & -\cos.\alpha_9.\cos\beta_L & -\cos.\alpha_9.\text{sen}.\beta_L \end{bmatrix}$$

[0] - Matriz nula de dimensão 5 por 3.

$\beta_K, \beta_L, \alpha_i$ e α_f têm os mesmos significados descritos para o elemento **ELM-08**.

3.11.2.2 - Matriz de incidência cinemática para translação de coordenadas

As excentricidades previstas para os elementos horizontais também existirão nos **ELM-08** e **ELM-09** e as matrizes de translação $[mt_1]_i$ e $[mt_2]_i$ usadas para suas considerações serão apresentadas a seguir:

- Para os elementos **ELM-08**:

a) Elementos verticais de apoio sem rigidez ao empenamento:

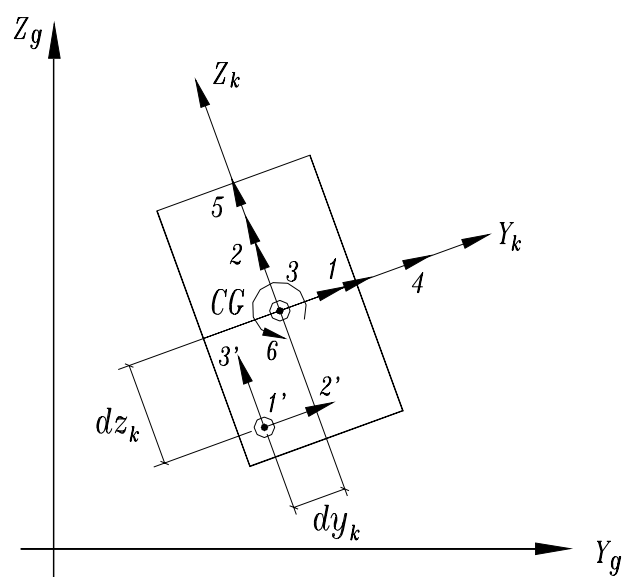


Figura 3.17- Translação das coordenadas dos **ELM-08** do seu ponto de incidência para o centróide da seção transversal do elemento vertical que lhe serve de apoio (sem propriedades setoriais).

$$[mt_1]_8 = \begin{bmatrix} dz_k & -dy_k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -dz_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & dy_k \end{bmatrix}$$

b) Elementos verticais de apoio com rigidez ao empenamento:

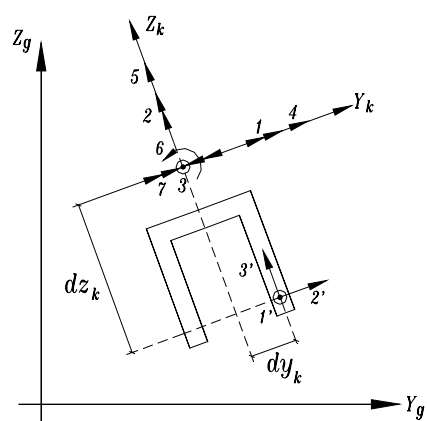


Figura 3.18 - Translação das coordenadas dos **ELM-08** do seu ponto de incidência para o centróide da seção transversal do elemento vertical que lhe serve de apoio (com propriedades setoriais).

$$[mt_2]_8 = \begin{bmatrix} dz_k & -dy_k & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -dz_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & dy_k & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para os elementos **ELM-09**:

a) Elementos verticais de apoio sem rigidez ao empenamento:

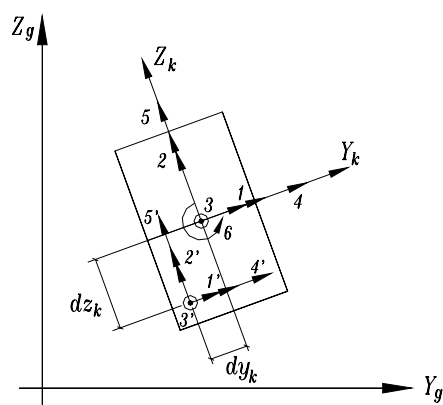


Figura 3.19 - Translação das coordenadas dos **ELM-09** do seu ponto de incidência para o centróide da seção transversal do elemento vertical que lhe serve de apoio (sem propriedades setoriais).

$$[mt_1]_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dz_k & -dy_k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -dz_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & dy_k \end{bmatrix}$$

b) Elementos verticais de apoio com rigidez ao empenamento:

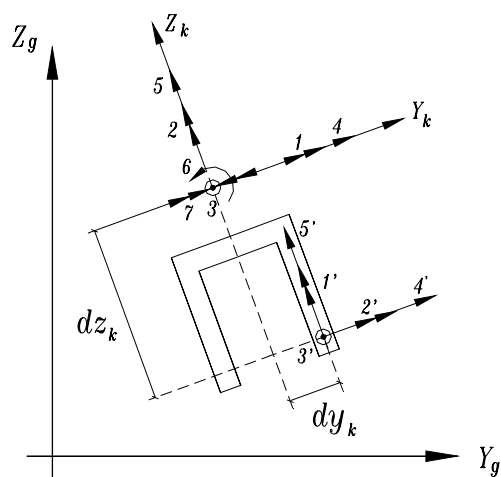


Figura 3.20 - Translação das coordenadas dos **ELM-09** do seu ponto de incidência para o centróide da seção transversal do elemento vertical que lhe serve de apoio (com propriedades setoriais).

$$[mt_2]_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -dz_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -dy_k \\ dz_k & dy_k & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -dz_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & dy_k & 0 \end{bmatrix}$$

Obs.: As colunas 7 das submatrizes $[mt_2]_8$ e $[mt_2]_9$ foram obtidas através de um processo semelhante ao utilizado para o elemento **ELM-07**.

As matrizes de rigidez dos **ELM-08** e **ELM-09**, referidas aos eixos locais dos elementos verticais contraventados serão dadas por:

$$[\overline{\overline{Re}}]_J = [Mt_i]_J^T \cdot [\overline{Re}]_J \cdot [Mt_i]_J \quad (3.92)$$

Onde $[Mt_i]_J$ será formada pela combinação das submatrizes $[mt_1]_i$ e $[mt_2]_i$, conforme as considerações de rigidez adotadas para os elementos interligados. Estas combinações serão semelhantes as dos elementos horizontais de contraventamento.

Com estas considerações a matriz de rigidez do elemento diagonal encontra-se referida aos sistemas de eixos locais dos elementos verticais contraventados, devendo ainda ser rotacionada para o sistema coordenado global, através da eq(3.93).

$$[\overline{\overline{Re}}]_J = [Bg_i]_J^T \cdot [\overline{\overline{Re}}]_J \cdot [Bg_i]_J \quad (3.93)$$

Onde:

$$[Bg_i]_J = \begin{bmatrix} [Be_1]_{in} & [0] \\ [0] & [Be_1]_{fi} \end{bmatrix}$$

$[Be_1]_m$ - Submatriz de rotação de coordenadas da extremidade superior do elemento de apoio inicial.

$[Be_1]_{fi}$ - Submatriz de rotação de coordenadas da extremidade inferior do elemento de apoio final.

3.11.2.3 - Consideração da laje como diafragma rígido

A transferência das coordenadas do elemento diagonal, dependentes do movimento de corpo rígido, para o nó mestre será feita pela matriz definida no item 3.8.2.3 para o **ELM-04**. Os valores de Y_J e Z_J variam conforme as posições dos nós onde o elemento incide.

$$[\overline{re}_i]_J = [Mt_4]_J^T \cdot [re_i]_J \cdot [Mt_4]_J \quad (3.94)$$

Onde:

$[re_i]_J$ - Submatrizes quadradas de dimensão 3 que reúnem os coeficientes de rigidez do elemento **J** dependentes do movimento de corpo rígido da laje.

A contribuição da rigidez dos elementos diagonais na matriz de rigidez da subestrutura será dada por:

$$[K_i] = \sum_{J=1}^{NEi} [\overline{Re}_i]_J \quad (3.95)$$

Obs.: O índice *i* assumirá os valores 8 e 9 para o elemento **ELM-08** e **ELM-09**, respectivamente.

3.12 - Matriz de rigidez e o vetor de forças nodais para a subestrutura

A matriz de rigidez e o vetor de forças nodais da subestrutura serão dados pelo somatório da rigidez de todos os elementos constituintes e suas ações aplicadas, conforme as eq(3.96) e eq(3.97), respectivamente.

$$[K]_s = \sum_{I=1}^9 [K_I] \quad (3.96)$$

$$\{F\}_s = \sum_{I=1}^5 \{F_I\} \quad (3.97)$$

A matriz $[K]_s$ e o vetor $\{F\}_s$ deverão passar por um processo de decomposição matricial para serem reduzidos às suas coordenadas externas, ou seja, às coordenadas de sua laje inferior (ver item 5.2), para em seguida serem somados à matriz de rigidez e ao vetor de forças da subestrutura imediatamente inferior. Antes, porém, devem ser consideradas as excentricidades entre os eixos longitudinais dos seus elementos verticais e os eixos dos elementos verticais, correspondentes na subestrutura subsequente (ver figura 3.21), conforme as eq(3.98) e eq(3.99).

$$[K]_s \xrightarrow{\text{REDUÇÃO DE COORDENADAS}} [K^*]_s$$

$$\{F\}_s \xrightarrow{\text{REDUÇÃO DE COORDENADAS}} \{F^*\}_s$$

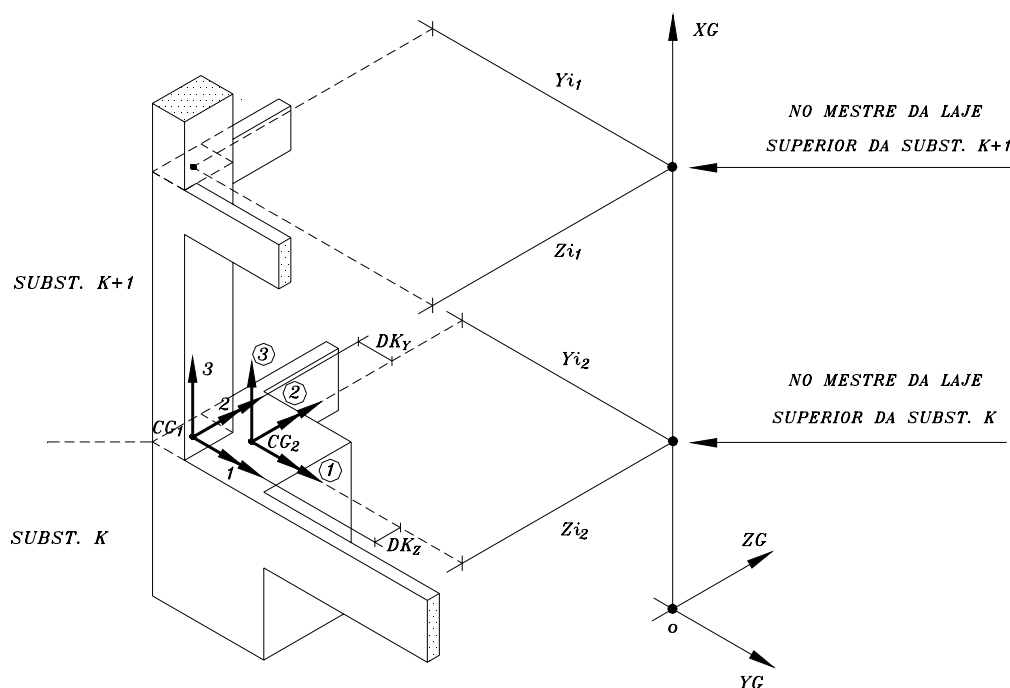


Figura 3.21 - Excentricidade entre os eixos longitudinais de elementos verticais pertencentes a subestruturas vizinhas.

$$[\overline{\mathbf{K}}^*]_s = [\mathbf{MS}]_s^T \cdot [\mathbf{K}^*]_s \cdot [\mathbf{MS}]_s \quad (3.98)$$

$$\{\overline{\mathbf{F}}^*\}_s = [\mathbf{MS}]_s^T \cdot \{\mathbf{F}^*\}_s \quad (3.99)$$

Onde:

$[\overline{\mathbf{K}}^*]_s$ - Matriz de rigidez reduzida às coordenadas de base e transladada para os centróides dos elementos verticais da subestrutura subsequente.

$\{\overline{\mathbf{F}}^*\}_s$ - Vetor de forças reduzido às coordenadas de base e transladado para os centróides dos elementos verticais da subestrutura subsequente.

$$[\mathbf{MS}]_s = \begin{bmatrix} [\mathbf{ms}_1]_s^K & & & \\ & [\mathbf{ms}_2]_s^K & & \\ & & \ddots & \\ & & & [\mathbf{ms}_j]_s^K \end{bmatrix}$$

Sendo $[ms_j]_s^K$ a submatriz de translação de coordenadas do centro de torção do elemento " J " da subestrutura " K " para o correspondente elemento " J " da subestrutura " K-1 ", dada por:

$$[ms_j]_s^K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Dk_z & -Dk_y & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Onde: } Dk_y = Y_{i_1} - Y_{i_2} \quad (3.100)$$

$$Dk_z = Z_{i_1} - Z_{i_2} \quad (3.101)$$

Y_{i_1} e Z_{i_1} são as ordenadas do ponto " i " onde incide o elemento vertical " J " da subestrutura "K" (ver figura 3.21).

Y_{i_2} e Z_{i_2} são as ordenadas do ponto " i " onde incide o elemento vertical " J " da subestrutura "K-1" (ver figura 3.21).

4 - MATRIZ DE RIGIDEZ DA SUBSTRUTURA EM TEORIA DE 2ª ORDEM

4.1 - Introdução

A matriz de rigidez da subestrutura, em teoria de segunda ordem, será obtida através de um processo semelhante ao apresentado no capítulo anterior, sendo considerada, no cálculo dos seus coeficientes, a influência do esforço axial, do momento fletor e do bimomento. Para isso, serão apresentadas as equações diferenciais regentes dos problemas de deformação de um elemento genérico, submetido a tais esforços, determinadas pelo método da energia, com auxílio das equações de Euler do cálculo variacional. Estas equações serão adaptadas a cada caso e suas soluções fornecerão as matrizes de rigidez em teoria de segunda ordem dos elementos de pórtico plano e espacial, de núcleo, e diagonal de contraventamento.

4.2 - Equações diferenciais de um elemento genérico em teoria de 2ª ordem

4.2.1 - Equações dos deslocamentos horizontais na linha do esqueleto

Devido à hipótese do diafragma rígido adotada para o comportamento estrutural das lajes, a seção transversal dos elementos verticais permanecem inalteradas, na projeção sobre o plano $Y_g \times Z_g$, após a aplicação das ações. Sendo assim, as equações que definem os deslocamentos w e v , contidos neste plano, são funções apenas de X_g .

Após uma solicitação qualquer o ponto Q , situado na linha do esqueleto, e o centro de torção D são deslocados para as posições finais Q'' e D' (ver figura 4.1). As translações de Q para Q' e D para D' têm componentes w_D e v_D . Devido à rotação ϕ , em torno do eixo que passa pelo centro de torção deslocado D' , o ponto Q' passa a ocupar a posição Q'' de componentes v_1 e w_1 dadas pelas eq(4.1) e eq(4.2), respectivamente.

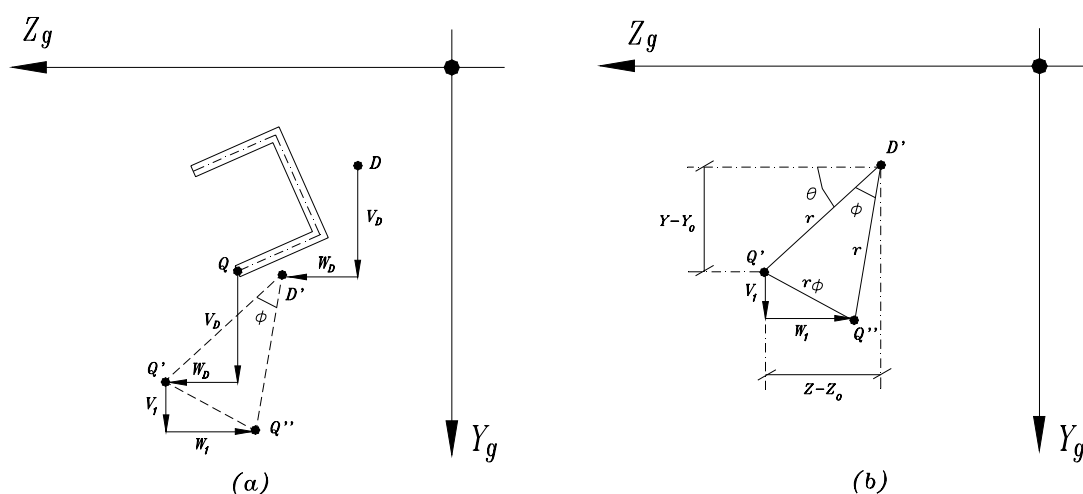


Figura 4.1 - Deslocamentos de um ponto genérico da linha do esqueleto.

$$v_1 = r \cdot \phi \cdot \cos \theta \quad (4.1)$$

$$w_1 = r \cdot \phi \cdot \sin \theta \quad (4.2)$$

onde: $\cos \theta = \frac{z - z_D}{r}$ e $\sin \theta = \frac{y - y_D}{r}$. Sendo assim,

$$v_1 = (z - z_D) \cdot \phi \quad (4.3)$$

$$w_1 = (y - y_D) \cdot \phi \quad (4.4)$$

A posição final ocupada por Q'' será fornecida pela superposição dos deslocamentos w_D e v_D com v_1 e w_1 , de acordo com as eq(4.5) e eq(4.6).

$$v = v_D + (z - z_D) \cdot \phi \quad (4.5)$$

$$w = w_D - (y - y_D) \cdot \phi \quad (4.6)$$

Onde: y , z e y_D , z_D são as coordenadas do ponto Q e do centro de torção D, respectivamente.

4.2.2 - Energia potencial dos esforços internos de 1ª ordem nas deformações de 2ª ordem.

Considerando uma subestrutura submetida a um carregamento qualquer e observando os deslocamentos que ocorrem nas extremidades de um elemento infinitesimal de área “ ds ” e comprimento “ dx ” sujeito à compressão, pode-se constatar um encurtamento na direção do seu eixo longitudinal (ver figura 4.2).

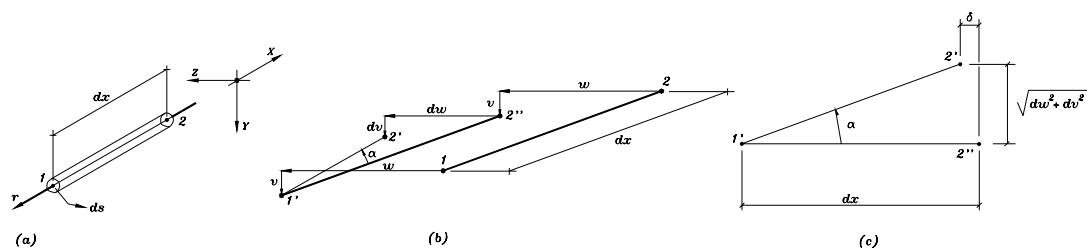


Figura 4.2 - Deformação de um elemento infinitesimal de área ds e comprimento dx .

Inicialmente o elemento translada dos pontos 1 e 2 situados nas suas extremidades para 1' e 2' de tal forma que os segmentos $\overline{12}$ e $\overline{1'2'}$ ficam paralelos, sendo que o seu comprimento permanece inalterado (ver figura 4.2.b).

Ao ocupar a posição final 1' e 2' ocorre uma rotação α no seu eixo longitudinal, a qual provoca um encurtamento δ , cuja expressão que fornece seu valor será determinada a seguir (ver figura 4.2.c).

$$\delta = dx \cdot (1 - \cos. \alpha) \quad (4.7)$$

Adotando as aproximações relativas ao cálculo em teoria de segunda ordem, obtém-se:

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot \alpha^2 \cdot dx \quad (4.8)$$

Sendo a rotação α dada por:

$$\alpha = \frac{\sqrt{dv^2 + dw^2}}{dx} \quad (4.9)$$

Substituindo-se o valor de α na eq(4.8), encontra-se finalmente o valor do encurtamento δ .

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot (v'^2 + w'^2) \cdot dx \quad (4.10)$$

A parcela da energia potencial considerando apenas a tensão normal σ será dada por:

$$U_{\sigma^{2^\circ}} = \int_V \sigma \cdot \delta \cdot dv \quad (4.11)$$

Substituindo as equações eq(3.5) e as derivadas de eq(4.5) e eq(4.6) em eq(4.11), obtém-se a expressão da energia potencial do esforço axial, de flexão e bimomento de primeira ordem, nas deformações de segunda ordem.

$$U_{\sigma^{2^\circ}} = \int_L \int_S \left\{ \left(\frac{N}{S} + \frac{Mz}{I_z} \cdot y + \frac{My}{I_y} \cdot z + \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega \right) \cdot [(v'_D + (z - z_D) \cdot \phi')^2 + (w'_D - (y - y_D) \cdot \phi')^2] \right\} \cdot ds \cdot dx \quad (4.12)$$

Desenvolvendo-se as integrações indicadas acima, tem-se

$$U_{\sigma^{2^\circ}} = \frac{1}{2} \int_L \left\{ N \cdot [i_D^2 \cdot \phi'^2 + 2 \cdot (y_D \cdot w'_D - z_D \cdot v'_D) \cdot \phi' + v_D'^2 + w_D'^2] + 2 \cdot [Mz \cdot (K_Y - y_D) + My \cdot (K_Z - z_D)] \cdot \phi'^2 - 2 \cdot Mz \cdot w'_D \cdot \phi' - 2 \cdot My \cdot v'_D \cdot \phi' + \frac{B}{I_\omega} \cdot U_\omega \cdot \phi'^2 \right\} \cdot dx \quad (4.13)$$

Onde: i_D , K_Y , K_Z e U_ω são características geométricas definidas a seguir:

i_D é o raio de giração polar em relação ao centro de torção dado por:

$$i_D = y_D^2 + z_D^2 + \frac{I_Y + I_Z}{S} \quad (4.14)$$

K_Y e K_Z são as coordenadas do círculo de estabilidade ou do ponto do Kinden.

$$K_Y = \frac{1}{2.I_Z} \int_S y.(y^2 + z^2).ds \quad (4.15.a)$$

$$K_Z = \frac{1}{2.I_Y} \int_S z.(y^2 + z^2).ds \quad (4.15.b)$$

U_ω é uma característica introduzida por VLASSOV (1961), conhecida como característica geométrica de Vlassov.

$$U_\omega = \int_S \omega.(y^2 + z^2).ds \quad (4.16)$$

Deve-se ainda determinar a parcela relativa aos esforços cortantes e de torção. Considerando inicialmente a elástica à flexão apenas no plano xy (ver figura 4.3), a energia potencial relativa ao esforço cortante Q_Y será fornecida pela eq(4.17).

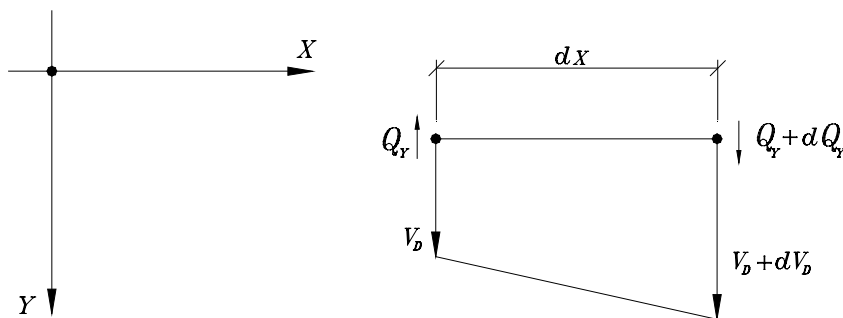


Figura 4.3 - Elástica de flexão no plano xy.

$$U\tau_Y = \int_L [Q_Y \cdot v_D - (Q_Y + dQ_Y) \cdot (v_D + dv_D)].dx \quad (4.17)$$

Simplificando a equação acima, obtém-se:

$$U\tau_Y = -\int_L Q_Y \cdot v'_D \cdot dx - \int_L Q'_Y \cdot v_D \cdot dx \quad (4.18)$$

Onde:

$-\int_L Q_Y \cdot v'_D \cdot dx$ é o potencial das forças concentradas

$-\int_L Q'_Y \cdot v_D \cdot dx$ é o potencial das forças distribuídas (nas estruturas analisadas neste trabalho será igual a zero).

Analogamente determina-se a parcela relativa a elástica no plano xz.

$$U\tau_Z = -\int_L Q_Z \cdot w'_D \cdot dx - \int_L Q'_Z \cdot w_D \cdot dx \quad (4.19)$$

Além da flexão nos dois planos haverá ainda a torção, a qual provocará um acréscimo nos esforços cortantes em y e z, representados na figura 4.4 e dados pelas eq(4.20) e eq(4.21), respectivamente.

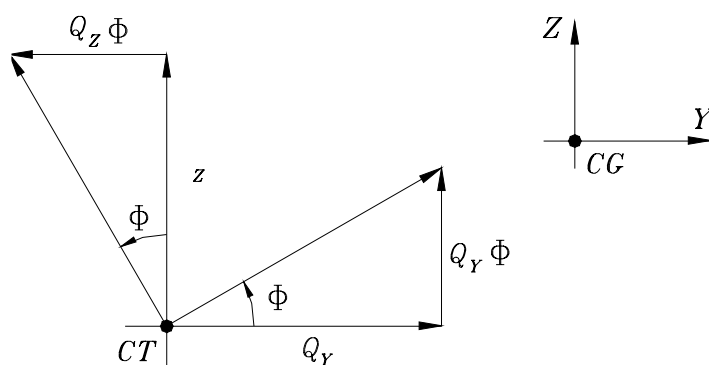


Figura 4.4 - Acréscimo nos esforços cortantes devido ao momento torçor.

$$Q_Y = Q_Y - Q_Z \cdot \phi \quad (4.20)$$

$$Q_Z = Q_Z + Q_Y \cdot \phi \quad (4.21)$$

A energia potencial fornecida por eq(4.13) deve ser acrescida das seguintes parcelas:

$$U\tau_Y^{2^\circ} = -\int_L (-Q_Z \cdot \phi) \cdot v'_D \cdot dx \quad (4.22)$$

$$U\tau_Z^{2^\circ} = -\int_L (Q_Y \cdot \phi) \cdot w'_D \cdot dx \quad (4.23)$$

Lembrando a relação diferencial entre momento fletor e força cortante e somando as eq(4.22) e eq(4.23), obtém-se:

$$U\tau^{2^o} = U\tau_Y^{2^o} + U\tau_Z^{2^o} = \int_L My' \cdot \phi \cdot v_D' \cdot dx - \int_L Mz' \cdot \phi \cdot w_D' \cdot dx \quad (4.24)$$

A energia potencial total dos esforços internos de primeira ordem nas deformações de segunda ordem será dada pela soma das eqs. (4.13), (4.19), (4.18) e (4.24).

$$\begin{aligned} U^{2^o} = \frac{1}{2} \int_L \{ & N \cdot [i_D^2 \cdot \phi'^2 + 2 \cdot (y_D \cdot w_D' - z_D \cdot v_D')] \cdot \phi' + v_D'^2 + w_D'^2 \} + 2 \cdot [Mz \cdot (K_Y - y_D) + \\ & My \cdot (K_Z - z_D)] \cdot \phi'^2 - (2 \cdot Mz \cdot w_D' - 2 \cdot My \cdot v_D') \cdot \phi' + \frac{B}{I_\omega} \cdot U_\omega \cdot \phi'^2 + \\ & 2 \cdot (Mz' \cdot w_D' - My' \cdot v_D') \cdot \phi \} \cdot dx \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.2.3 - Energia potencial total em teoria de 2ª ordem

Será obtida a partir da soma das eq(3.9), eq(3.19) e eq(4.25) e estará apresentada a seguir sob forma de um funcional.

$$\begin{aligned} Ut^{2^o} = \int_L F \cdot (v_D, v_D', v_D'', w_D, w_D', w_D'', \phi, \phi', \phi'') \cdot dx - \sum_{i=1}^n (Px_i \cdot u_i + My_i \cdot w_i' + Mz_i \cdot v_i' + B_i \cdot \phi_i') - \\ (H_Z \cdot w_N + H_Y \cdot v_N + M_X \cdot \phi_N) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Onde:

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2} \cdot \{ E \cdot I_Z \cdot v_D''^2 + E \cdot I_Y \cdot w_D''^2 + E \cdot I_W \cdot \phi''^2 + G \cdot I_X \cdot \phi'^2 + N \cdot [i_D^2 \cdot \phi'^2 + 2 \cdot (y_D \cdot w_D' - z_D \cdot v_D')] \cdot \phi' + v_D'^2 + w_D'^2 \} + \\ + 2 \cdot [Mz \cdot (K_Y - y_D) + My \cdot (K_Z - z_D)] \cdot \phi'^2 - 2 \cdot Mz \cdot w_D' \cdot \phi' - 2 \cdot My \cdot v_D' \cdot \phi' + \frac{B}{I_\omega} \cdot U_\omega \cdot \phi'^2 + 2 \cdot (Mz' \cdot w_D' - My' \cdot v_D') \cdot \phi \} \cdot dx \end{aligned} \quad (4.27)$$

4.2.4 - Dedução das equações diferenciais em teoria de 2ª ordem

Para obtenção das equações diferenciais, regentes dos problemas de deformação do elemento genérico, serão aplicadas as equações de Euler do cálculo variacional, apresentadas a seguir:

$$\frac{\partial F}{\partial v_D} - \left[\frac{\partial F}{\partial v'_D} \right]' + \left[\frac{\partial F}{\partial v''_D} \right]'' = 0 \quad (4.28.a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_D} - \left[\frac{\partial F}{\partial w'_D} \right]' + \left[\frac{\partial F}{\partial w''_D} \right]'' = 0 \quad (4.28.b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_D} - \left[\frac{\partial F}{\partial \phi'_D} \right]' + \left[\frac{\partial F}{\partial \phi''_D} \right]'' = 0 \quad (4.28.c)$$

Derivando o funcional F conforme as eqs(4.28) obtém-se o sistema de equações diferenciais procurado.

$$E.I_Z.v_D'''' - [N.(v'_D - z_D.\phi')] + 2.M_y'.\phi' + M_y.\phi'' = 0 \quad (4.29.a)$$

$$E.I_Y.w_D'''' - [N.(w'_D - y_D.\phi')] + 2.M_z'.\phi' + M_z.\phi'' = 0 \quad (4.29.b)$$

$$E.I_\omega.\phi'''' - G.I_X.\phi'' - \{ [N.i_D^2 + 2.M_z.(K_Y - y_D) + 2.M_y.(K_Z - z_D) + \frac{B}{I_\omega}.U_\omega].\phi' \}' - (N.w'_D)'.y_D + (N.v'_D)'.z_D + M_z.w_D'' - M_y.v_D'' = 0 \quad (4.29.c)$$

4.3 - Matriz de rigidez do elemento de pórtico plano em teoria de 2ª ordem

A equação regente dos problemas de deformação do elemento **ELM-02** em sua posição deslocada, ou seja, com a influência do esforço axial será dada por:

$$E.I_Y.w_D'''' + P.w_D'' = 0 \quad (4.30)$$

Sua solução geral, para os casos em que o esforço axial P é de compressão ou de tração, será fornecida pelas eq(4.31) e eq(4.32), respectivamente.

$$w = A + B.x + C.\cos.\frac{2.\mu_y}{L}.x + D.\sen.\frac{2.\mu_y}{L}.x \quad (4.31)$$

$$w = A + B.x + C.\cosh.\frac{2.\mu_y}{L}.x + D.\sinh.\frac{2.\mu_y}{L}.x \quad (4.32)$$

Onde:

$$\mu_y = \frac{L}{2} \cdot \sqrt{\frac{|P|}{E.I_y}} \quad (4.33)$$

A matriz de rigidez em teoria de 2ª ordem $[\text{Re}_2]_J^{2^\circ}$ do elemento **ELM-02**, apresentada a seguir, foi determinada por **ANTUNES** (1978) através do cálculo das constantes A,B,C e D utilizando os valores de contorno (deslocamentos nas extremidades do elemento), prevendo ainda a ocorrência de ambos os casos.

$$[\text{Re}_2]_J^{2^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{E.I_y}{L} \cdot s_y & 0 & -\frac{E.I_y}{L} \cdot s_y (1+c_y) & \frac{E.I_y}{L} \cdot s_y \cdot c_y & 0 & \frac{E.I_y}{L} \cdot s_y (1+c_y) \\ & \frac{E.S}{L} & 0 & 0 & -\frac{E.S}{L} & 0 \\ & & \frac{E.I_y}{L} \cdot \frac{2 \cdot s_y (1+c_y)}{m_y} & -\frac{E.I_y}{L} \cdot s_y (1+c_y) & 0 & -\frac{E.I_y}{L} \cdot \frac{2 \cdot s_y (1+c_y)}{m_y} \\ & & & \frac{E.I_y}{L} \cdot s_y & 0 & \frac{E.I_y}{L} \cdot s_y (1+c_y) \\ & \text{simet.} & & & \frac{E.S}{L} & 0 \\ & & & & & \frac{E.I_y}{L} \cdot \frac{2 \cdot s_y (1+c_y)}{m_y} \end{bmatrix}$$

Onde s_y , c_y e m_y são funções de estabilidade, que variam conforme o esforço P de compressão ou de tração.

- Para o esforço axial P de compressão.

$$s_y = \mu_y \cdot \frac{1 - 2 \cdot \mu_y \cdot \cot g 2 \cdot \mu_y}{\text{tg} \cdot \mu_y - \mu_y} \quad (4.34.a)$$

$$c_y = \frac{2 \cdot \mu_y - \text{sen} \cdot 2 \cdot \mu_y}{\text{sen} \cdot 2 \cdot \mu_y - 2 \cdot \mu_y \cdot \cos \cdot 2 \cdot \mu_y} \quad (4.34.b)$$

$$m_y = \frac{2 \cdot s_y \cdot (1 + c_y)}{2 \cdot s_y \cdot (1 + c_y) - 4 \cdot \mu_y^2} \quad (4.34.c)$$

- Para o esforço axial P de tração

$$s_y = \mu_y \cdot \frac{1 - 2\mu_y \cdot \cot \operatorname{gh} 2\mu_y}{\operatorname{tgh} \mu_y - \mu_y} \quad (4.35.a)$$

$$c_y = \frac{2\mu_y - \sinh 2\mu_y}{\sinh 2\mu_y - 2\mu_y \cdot \cosh 2\mu_y} \quad (4.35.b)$$

$$m_y = \frac{2s_y \cdot (1 + c_y)}{2s_y \cdot (1 + c_y) + 4\mu_y^2} \quad (4.35.c)$$

Obs.: A rigidez dos vínculos elásticos, na direção das coordenadas da extremidade inferior ligada à fundação, deve ser somada aos seus respectivos coeficientes na diagonal principal, conforme resultado do processo de integração e derivação utilizado no **P.E.P.T.M.**, apresentado no capítulo anterior.

4.4 - Matriz de rigidez dos elementos de pórtico espacial em teoria de 2ª ordem

4.4.1 - Elemento ELM-03

Para o elemento **ELM-03** o sistema de equações diferenciais (4.29) se transforma em duas equações independentes, relacionadas à flexão nos seus planos principais de inércia.

$$E \cdot I_Y \cdot v_D'''' + P \cdot v_D'' = 0 \quad (4.36.a)$$

$$E \cdot I_Y \cdot w_D'''' + P \cdot w_D'' = 0 \quad (4.36.b)$$

Os coeficientes de rigidez da matriz $[\operatorname{Re}_3]_J^{2^\circ}$ para o esforço axial P de compressão ou de tração são iguais aos da matriz do elemento **ELM-02**, devendo apenas mudar o índice "y" por "z" no plano de flexão "xz".

$$[\operatorname{Re}_3]_J^{2^\circ} = \begin{bmatrix} [\operatorname{re}_3]_{SS}^{2^\circ} & [\operatorname{re}_3]_{SI}^{2^\circ} \\ [\operatorname{re}_3]_{IS}^{2^\circ} & [\operatorname{re}_3]_{II}^{2^\circ} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{re}_3]_{II}^{2\circ} = \begin{bmatrix} \frac{E.I_y}{L} \cdot s_y & 0 & 0 & 0 & -\frac{E.I_y}{L^2} \cdot s_y(1+c_y) \\ & \frac{E.I_z}{L} \cdot s_z & 0 & \frac{E.I_z}{L^2} \cdot s_z(1+c_z) & 0 \\ & & \frac{E.S}{L} & 0 & 0 \\ \text{simet.} & & & \frac{E.I_z}{L^3} \cdot \frac{2 \cdot s_z(1+c_z)}{m_z} & 0 \\ & & & & \frac{E.I_y}{L^3} \cdot \frac{2 \cdot s_y(1+c_y)}{m_y} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{re}_3]_{SI}^{2\circ} = \begin{bmatrix} \frac{E.I_y}{L} \cdot s_y \cdot c_y & 0 & 0 & 0 & -\frac{E.I_y}{L^2} \cdot s_y(1+c_y) \\ & \frac{E.I_z}{L} \cdot s_z \cdot c_z & 0 & \frac{E.I_z}{L^2} \cdot s_z(1+c_z) & 0 \\ & & \frac{E.S}{L} & 0 & 0 \\ & & & -\frac{E.I_z}{L^3} \cdot \frac{2 \cdot s_z(1+c_z)}{m_z} & 0 \\ \frac{E.I_y}{L^2} \cdot s_y(1+c_y) & 0 & 0 & 0 & -\frac{E.I_y}{L^3} \cdot \frac{2 \cdot s_y(1+c_y)}{m_y} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{re}_3]_{IS}^{2\circ} = [\mathbf{re}_3]_{SI}^{2\circ T}$$

$[\mathbf{re}_3]_{SS}^{2\circ}$ é igual a $[\mathbf{re}_3]_{II}^{2\circ}$ com exceção dos coeficientes (1,5) e (2,4), que têm os seus sinais trocados juntamente com os seus simétricos e s_y , c_y , m_y e s_z , c_z , m_z são as funções de estabilidade, definidas no item anterior, sendo as últimas calculadas para o plano de flexão "xz" através de μ_z , dado por:

$$\mu_z = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{|P|}{E.I_z}} \quad (4.37)$$

Quanto à rigidez dos vínculos elásticos deste elemento, permanece válida a observação feita no final do item anterior.

4.4.2 - Elemento ELM-04

Na determinação da matriz de rigidez em teoria de segunda ordem do elemento **ELM-04**, apenas o esforço axial influirá na sua rigidez à flexão e à torção, sendo assim, o sistema de equações (4.29) se transformará em:

$$E.I_z \cdot v_D'''' + P \cdot v_D'' + P \cdot y_D \cdot \phi'' = 0 \quad (4.38.a)$$

$$E.I_y \cdot w_D'''' + P \cdot w_D'' + P \cdot z_D \cdot \phi'' = 0 \quad (4.38.b)$$

$$E.I_\omega \cdot \phi'''' - (G.I_x - P \cdot i_D^2) \cdot \phi'' + P \cdot z_D \cdot v_D'' - P \cdot y_D \cdot w_D'' = 0 \quad (4.38.c)$$

ANTUNES (1978) determinou as matrizes de rigidez dos elementos **ELM-04** em teoria de segunda ordem, através da solução do sistema de equações diferenciais (4.38) adaptando-o à vários tipos de seções transversais, os quais estão apresentados a seguir:

- Com um eixo de simetria passando por z_4 .

A primeira das eqs(4.38), que traduz a flexão no plano xy se torna independente das demais.

$$y_D = 0$$

$$E.I_Z \cdot v_D'''' + P \cdot v_D'' = 0 \quad (4.39.a)$$

$$E.I_Y \cdot w_D'''' + P \cdot w_D'' + P \cdot z_D \cdot \phi'' = 0 \quad (4.39.b)$$

$$E.I_\omega \cdot \phi'''' - (G.I_X - P \cdot i_D^2) \cdot \phi'' + P \cdot z_D \cdot v_D'' = 0 \quad (4.39.c)$$

- Com dois eixos de simetria.

Todas as equações do sistema (4.38) se tornam independentes.

$$y_D = 0 \quad e \quad z_D = 0$$

$$E.I_Z \cdot v_D'''' + P \cdot v_D'' = 0 \quad (4.40.a)$$

$$E.I_Y \cdot w_D'''' + P \cdot w_D'' = 0 \quad (4.40.b)$$

$$E.I_\omega \cdot \phi'''' - (G.I_X - P \cdot i_D^2) \cdot \phi'' = 0 \quad (4.40.c)$$

- Para seções transversais com área setorial nula.

1. Com um eixo de simetria passando por z_4 .

$$E.I_Z \cdot v_D'''' + P \cdot v_D'' = 0 \quad (4.41.a)$$

$$E.I_Y \cdot w_D'''' + P \cdot w_D'' + P \cdot z_D \cdot \phi'' = 0 \quad (4.41.b)$$

$$-(G.I_X - P \cdot i_D^2) \cdot \phi'' + P \cdot z_D \cdot v_D'' = 0 \quad (4.41.c)$$

2. Com dois eixos de simetria.

$$E.I_Z \cdot v_D'''' + P \cdot v_D'' = 0 \quad (4.42.a)$$

$$E.I_Y \cdot w_D'''' + P \cdot w_D'' = 0 \quad (4.42.b)$$

$$-(G.I_X - P \cdot i_D^2) \cdot \phi'' = 0 \quad (4.42.c)$$

3. Sem eixos de simetria.

$$E.I_Z.v_D'''' + P.v_D'' + P.y_D.\phi'' = 0 \quad (4.43.a)$$

$$E.I_Y.w_D'''' + P.w_D'' + P.z_D.\phi'' = 0 \quad (4.43.b)$$

$$-(G.I_X - P.i_D^2).\phi'' + P.z_D.v_D'' - P.y_D.w_D'' = 0 \quad (4.43.c)$$

Para solucionar os sistemas de equações diferenciais (4.39), (4.40), (4.41), (4.42) e (4.43) foram admitidos o esforço axial de compressão e de tração. As matrizes de rigidez encontram-se em ANTUNES (1978) nas páginas 66 e 67, devendo ainda ser somado aos coeficientes das suas diagonais principais o valor da rigidez dos vínculos elásticos, conforme a observação apresentada no final do item 4.3.

4.5 - Matriz de rigidez do elemento de núcleo em teoria de 2ª ordem

O elemento de núcleo poderá ter seção transversal sem qualquer eixo de simetria e os esforços axial, de flexão e bimomento influirão na rigidez à flexão, à torção e ao empenamento, não havendo portanto alterações no sistema de equações (4.29) transcrito a seguir:

$$E.I_Z.v_D'''' - [N.(v_D' - z_D.\phi')] + 2.M_y'.\phi' + M_y.\phi'' = 0 \quad (4.44.a)$$

$$E.I_Y.w_D'''' - [N.(w_D' - y_D.\phi')] + 2.M_z'.\phi' + M_z.\phi'' = 0 \quad (4.44.b)$$

$$E.I_\omega.\phi'''' - G.I_X.\phi'' - \left\{ [N.i_D^2 + M_z.J_Y + M_y.J_Z + \frac{B}{I_\omega}.U_\omega].\phi' \right\}' - (N.w_D')'.y_D + (N.v_D')'.z_D + M_z.w_D'' - M_y.v_D'' = 0 \quad (4.44.c)$$

Onde:

J_Y e J_Z são denominados de segmentos característicos e são dados por:

$$J_Y = 2.(K_Y - y_D) \quad (4.45.a)$$

$$J_Z = 2.(K_Z - y_D) \quad (4.45.b)$$

As três equações neste caso não são independentes e suas soluções fornecerão os coeficientes da matriz de rigidez do elemento **ELM-05** em teoria de segunda ordem. Para obtenção destas soluções será utilizado o processo desenvolvido por **MORI** (1992), o qual consiste na aplicação de técnicas numéricas auxiliadas pelas subrotinas **ODEPACK**¹ desenvolvidas por **HINDMARCH** (1983). O sistema (4.44) deverá ser colocado na forma da eq(4.46).

$$Y' = C(x).Y \quad (4.46)$$

Onde:

$$Y'^T = \{v'_D \ v''_D \ v'''_D \ v''''_D \ w'_D \ w''_D \ w'''_D \ w''''_D \ \phi'_D \ \phi''_D \ \phi'''_D \ \phi''''_D\}$$

$$Y^T = \{v_D \ v'_D \ v''_D \ v'''_D \ w_D \ w'_D \ w''_D \ w'''_D \ \phi_D \ \phi'_D \ \phi''_D \ \phi'''_D\}$$

e

$C(x)$ é uma matriz de ordem 12 X 12, cujos elementos são funções de x .

Cada uma das doze equações diferenciais, obtidas com o emprego de eq(4.46), será integrada no intervalo de "0" a "L" pelas subrotinas **LSODE**², resultando em uma matriz $[y]_{x=L}$, fornecida por:

$$[y]_{x=L} = [y_1(x=L) \ y_2(x=L) \ \cdots \ y_i(x=L) \ \cdots \ y_{12}(x=L)]$$

Sendo o sistema (4.44) linear e homogêneo, sua solução será dada por:

$$y(x) = a_1 \cdot y_1(x) + a_2 \cdot y_2(x) + \cdots + a_i \cdot y_i(x) + \cdots + a_{12} \cdot y_{12}(x) \quad (4.47)$$

Onde $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$ e a_{12} são constantes arbitrárias. Aplicando as condições de contorno para determinar a solução geral de (4.44), obtém-se um

¹ Conjunto de subrotinas para resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias.

² Livermore Solver for Differential Equation.

sistema de equações lineares, cujas incógnitas $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$ e a_{12} , constituem o vetor Y' da eq(4.46), com seus valores calculados nas extremidades superior e inferior do elemento. Maiores detalhes encontram-se em **MORI** (1992) no terceiro capítulo.

Quanto aos vínculos elásticos também é válida a observação feita para o elemento tipo **ELM-02** no final do item 4.3.

4.6 - Matriz de rigidez do elemento diagonal em teoria de 2ª ordem

O sistema de eqs(4.29) será transformado por uma única equação, relativa à rigidez à flexão no plano do elemento, cuja solução fornecerá coeficientes de rigidez em teoria de segunda ordem iguais aos da matriz do elemento **ELM-02**, apresentados no item 4.3.

$$E.I_Y \cdot w_D'''' + P \cdot w_D'' = 0 \quad (4.48)$$

5 - OPERAÇÕES DE REDUÇÃO DE COORDENADAS, CONDIÇÕES DE CONTORNO, RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES E METODOLOGIA USADA NO CÁLCULO EM TEORIA DE 2ª ORDEM

5.1 - Introdução

A redução da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais da subestrutura às suas coordenadas externas poderá ser obtida pelo método de liberação de coordenadas internas ou através da decomposição matricial, segundo **ROSEN & RUBINSTEIN** (1977). Ambos serão descritos e será utilizado aquele que envolve menor número de operações matemáticas.

Após a aplicação de um destes métodos a todas subestruturas, obtém-se finalmente a matriz de rigidez e o vetor de forças da estrutura reduzidos às coordenadas da subestrutura ligada à fundação, originando assim, um sistema de equações lineares, ao qual serão impostas as condições de contorno, cuja descrição também fará parte do conteúdo deste capítulo.

Será ainda apresentada a metodologia usada para realização do cálculo em teoria de segunda ordem, bem como uma sucinta descrição dos parâmetros de instabilidade que indicam a obrigatoriedade deste tipo de análise.

5.2 - Operações de redução de coordenadas

5.2.1 - Liberação de coordenadas internas

O sistema de numeração idealizado para uma subestrutura, descrito no item 2.4.7, possibilitará a obtenção da sua matriz de rigidez e do seu vetor de forças nodais na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} [k]_{II} & [k]_{IE} \\ [k]_{EI} & [k]_{EE} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\delta\}_I \\ \{\delta\}_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\}_I \\ \{f\}_E \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Onde:

$[k]_{II}$ - Submatriz que reúne os coeficientes de rigidez relacionados às coordenadas internas, resultantes da aplicação de deslocamentos unitários, um por vez, em suas respectivas direções, mantendo as demais restringidas.

$[k]_{IE}$ - Submatriz que reúne os coeficientes de rigidez relacionados às coordenadas internas, resultantes da aplicação de deslocamentos unitários, um por vez, em cada uma das coordenadas externas, mantendo as demais restringidas.

$[k]_{EI}$ - Submatriz que reúne os coeficientes de rigidez relacionados às coordenadas externas, resultantes da aplicação de deslocamentos unitários, um por vez, em cada uma das coordenadas internas, mantendo as demais restringidas.

$[k]_{EE}$ - Submatriz que reúne os coeficientes de rigidez relacionados às coordenadas externas, resultantes da aplicação de deslocamentos unitários, um por vez, em suas respectivas direções, mantendo as demais restringidas.

As coordenadas internas serão então liberadas, obtendo-se assim, a relação entre força e deformação referente às coordenadas externas, de acordo com a equação apresentada a seguir:

$$[K]_S^* \cdot \{\delta\}_E = \{F\}_S^* \quad (5.2)$$

Onde $[K]_S^*$ e $\{F\}_S^*$ são respectivamente a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais da subestrutura relacionados apenas às coordenadas externas. Da relação fornecida por eq(5.1), obtém-se as seguintes equações:

$$\{f\}_I = [k]_{II} \cdot \{\delta\}_I + [k]_{IE} \cdot \{\delta\}_E \quad (5.3)$$

$$\{f\}_E = [k]_{EI} \cdot \{\delta\}_I + [k]_{EE} \cdot \{\delta\}_E \quad (5.4)$$

O vetor dos deslocamentos considerados internos, obtido a partir da eq(5.3) será dado por:

$$\{\delta\}_I = [k]_{II}^{-1} \cdot \{f\}_I - [k]_{II}^{-1} \cdot [k]_{IE} \cdot \{\delta\}_E \quad (5.5)$$

Substituindo a equação acima em eq(5.4) e reorganizando as diversas parcelas, obtém-se a seguinte relação:

$$\{[k]_{EE} - [k]_{EI} \cdot [k]_{II}^{-1} \cdot [k]_{IE}\} \cdot \{\delta\}_E = \{f\}_E - [k]_{EI} \cdot [k]_{II}^{-1} \cdot \{f\}_I \quad (5.6)$$

Comparando os termos da equação acima com os da eq(5.2), chega-se à conclusão de que a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais reduzidos às coordenadas externas serão dados por:

$$[K]_S^* = [k]_{EE} - [k]_{EI} \cdot [k]_{II}^{-1} \cdot [k]_{IE} \quad (5.7)$$

$$\{F\}_S^* = \{f\}_E - [k]_{EI} \cdot [k]_{II}^{-1} \cdot \{f\}_I \quad (5.8)$$

5.2.2 - Decomposição matricial de Choleski

O processo de decomposição matricial consiste na transformação da matriz de rigidez $[K]_S$ em um triplo produto matricial, conforme eq(5.9).

$$\begin{bmatrix} [k]_{II} & [k]_{IE} \\ [k]_{EI} & [k]_{EE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [R] & [I] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [K]^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [L]^T & [R]^T \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Onde:

[L] - Matriz triangular inferior, cujos elementos de sua diagonal principal são unitários.

[R] - Matriz retangular.

[0] - Matriz nula.

[I] - Matriz identidade.

[D] - Matriz diagonal.

[K]* - Matriz simétrica.

Da eq(5.9) serão obtidas as seguintes relações:

$$[k]_{II} = [L].[D].[L]^T \quad (5.10)$$

$$[k]_{EI} = [k]_{IE}^T = [R].[D].[L]^T \quad (5.11)$$

$$[k]_{EE} = [K]^* + [R].[D].[R]^T \quad (5.12)$$

As eqs(5.11) e eq(5.12) fornecerão as matrizes [R] e [K]*, respectivamente.

$$[R] = [k]_{EI} \cdot \{[D].[L]^T\}^{-1} \quad (5.13)$$

$$[K]^* = [k]_{EE} - \{[R].[D].[R]^T\} \quad (5.14)$$

Das duas últimas relações, determina-se as expressões genéricas para obtenção dos elementos $r_{i,j}$ e $k_{i,j}$ das matrizes [R] e [K]*.

$$r_{i,j} = \frac{1}{d_{j,j}} \cdot \left(k_{j,(i+NI)} - \sum_{L=1}^{j-1} r_{i,L} \cdot l_{j,L} \cdot d_{L,L} \right) \quad (5.15)$$

$$k_{i,j} = k_{i+NI,j+NI} - \sum_{L=1}^{NI} l_{i,L}^2 \cdot d_{L,L} \quad (5.16)$$

Onde NI é o número de coordenadas internas da subestrutura, “l” e “d” são os elementos das matrizes [L] e [D], respectivamente.

Observando a eq(5.15), constata-se que $[R]$ é a matriz transposta, resultante da triangularização da matriz de rigidez da subestrutura até a coluna correspondente à última coordenada interna. A submatriz $[K]^*$ é idêntica a $[K]_s^*$ da eq(5.7) e também será obtida pela referida triangularização.

$$\begin{bmatrix} [k]_{II} & [k]_{IE} \\ [k]_{EI} & [k]_{EE} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{O processo de triangularização resulta em}} \begin{bmatrix} [L]^T & [R]^T \\ [0] & [K]^* \end{bmatrix}$$

A substituição do triplo produto matricial da eq(5.9) em eq(5.1), fornecerá a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [K]^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\delta\}_I^* \\ \{\delta\}_E^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\}_I^* \\ \{F\}_E^* \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Onde:

$$\begin{Bmatrix} \{\delta\}_I^* \\ \{\delta\}_E^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L]^T & [R]^T \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\delta\}_I \\ \{\delta\}_E \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \{F\}_I \\ \{F\}_E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [R] & [I] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{F\}_I^* \\ \{F\}_E^* \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

Da eq(5.17), obtém-se:

$$\{F\}_I^* = [D] \cdot \{\delta\}_I^* \quad (5.20)$$

$$\{F\}_E^* = [K]^* \cdot \{\delta\}_E^* \quad (5.21)$$

Sendo a eq(5.21) representativa do sistema " **força x deslocamento** " para as coordenadas externas, o qual é desacoplado, tendo portanto sua solução independente. Observando a eq(5.18), conclui-se que:

$$\{\delta\}_E^* = \{\delta\}_E \quad (5.22)$$

Os vetores de força, referidos às coordenadas internas e externas, separadamente, serão fornecidos pelas relações obtidas da eq(5.19) e apresentadas a seguir:

$$\{F\}_I^* = [L]^{-1} \cdot \{F\}_I \quad (5.23)$$

$$\{F\}_E^* = \{F\}_E - [R] \cdot \{F\}_I^* \quad (5.24)$$

Para determinação do vetor dos deslocamentos internos $\{\delta\}_I$, será utilizada a primeira das relações fornecidas pela eq(5.18), conforme o exposto abaixo:

$$\{\delta\}_I^* = [L]^T \cdot \{\delta\}_I + [R]^T \cdot \{\delta\}_E \quad (5.25)$$

ou

$$\{\delta\}_I = [L]^{T-1} \cdot (\{\delta\}_I^* - [R]^T \cdot \{\delta\}_E) \quad (5.26)$$

Ambos os métodos de análise por substruturação, apresentados anteriormente, poderão ser utilizados, porém no método de decomposição matricial ocorre uma redução significativa no número de operações matemáticas e não necessita de inversões de matrizes, desaconselháveis em tratamentos computacionais devido à problemas de precisão. Por isso o mesmo será usado no desenvolvimento deste trabalho (ver item 6.2).

O processo de redução de coordenadas inicia-se na substrutura do topo e e finaliza-se na substrutura da base. As matrizes $[L]$ e $[R]$ e o vetor $\{\delta\}_I^*$, resultantes da aplicação do método de decomposição matricial em cada substrutura, serão armazenados e posteriormente utilizados nos cálculos dos deslocamentos nodais da estrutura.

5.3 - Condições de contorno

A aplicação do algoritmo apresentado no item 5.2.2, a todas as substruturas, fornecerá um sistema de equações lineares em termos dos deslocamentos. Este sistema é representativo do equilíbrio da estrutura e está relacionado apenas às coordenadas da substrutura ligada aos elementos da fundação, onde poderão ocorrer três tipos de vinculação, definidas nos itens a seguir.

Imaginando uma estrutura modelo constituída por várias subestruturas, seu sistema de equações reduzido às "n" coordenadas da sua subestrutura de base será:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2N} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & k_{N3} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \vdots \\ \delta_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

5.3.1 - Vinculações com deslocamentos nulos.

Este tipo de vinculação é semelhante a um engaste perfeito. Nesta situação as linhas e colunas da matriz de rigidez e o elemento do vetor de forças nodais, correspondentes ao deslocamento restringido, são anulados e o coeficiente posicionado na diagonal principal se tornará unitário. Restringindo o deslocamento na direção da coordenada de número 2 da estrutura modelo do item anterior, o seu sistema de equações modificado passará a ter a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & \cdots & k_{1N} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{33} & \cdots & k_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & 0 & k_{N3} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \vdots \\ \delta_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

5.3.2 - Vinculações com deslocamentos conhecidos

São os caso de recalques diferenciais, tendo a matriz de rigidez o mesmo tratamento apresentado no item anterior e o vetor de forças nodais será modificado da seguinte forma; na posição referente à coordenada recalcada fica o valor do recalque e os elementos restantes são subtraídos por este mesmo valor. Impondo recalques de valores α e β na direção das coordenadas de número 1 e 3 da estrutura modelo do item 5.3, sua matriz de rigidez e o seu vetor de forças passarão a ser:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & \cdots & k_{2N} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k_{N2} & 0 & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \vdots \\ \delta_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ f_2 - k_{21} \cdot \alpha - k_{23} \cdot \beta \\ \beta \\ \vdots \\ f_N - k_{N1} \cdot \alpha - k_{N3} \cdot \beta \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

5.3.3 - Vinculações com rigidez conhecida.

São conhecidos como vínculos deformáveis ou elásticos. O sistema de equações não sofrerá alterações, com exceção dos coeficientes da diagonal principal a eles relacionados, aos quais serão adicionados o valor de sua respectiva rigidez. Imaginando a estrutura modelo do item 5.3 com um vínculo, na direção da coordenada de número 3, de rigidez K_3 , o sistema de equações representativo do seu equilíbrio terá a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2N} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} + K_3 & \cdots & k_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & k_{N3} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \vdots \\ \delta_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

5.4 - Método de resolução do sistema de equações.

Após à aplicação das condições de contorno à matriz de rigidez e ao vetor de forças nodais da estrutura, os deslocamentos dos seus nós deverão ser determinados. Para isso será empregado o método de eliminação de **GAUSS** (1977). Inicialmente devem ser realizadas operações matemáticas no sistema, com a finalidade de anular todos os coeficientes da matriz de rigidez abaixo da sua diagonal principal, iniciando na primeira coluna, conforme as eq(5.31) e eq(5.32). Ao fim do

processo, a matriz será triangular superior e o sistema terá o aspecto apresentado em eq(5.33).

$$k'_{i,j} = \frac{k_{i,j}}{k_{i,j}} \cdot k_{i-1,i-1} - k_{i-1,i-1} \quad (5.31)$$

$$f'_i = \frac{f_i}{k_{i,j}} \cdot k_{i-1,i-1} - k_{i-1,i-1} \quad (5.32)$$

Onde “i” varia de 2 até NL (número de linhas) e “j” varia de 1 até NC (número de colunas).

$$\begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} & \cdots & k'_{1N} \\ 0 & k'_{22} & k'_{23} & \cdots & k'_{2N} \\ 0 & 0 & k'_{33} & \cdots & k'_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k'_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \vdots \\ \delta_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ \vdots \\ f'_N \end{Bmatrix} \quad (5.33)$$

Sendo $k'_{i,j}$ e f'_i os elementos da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais modificados pelas operações matemáticas de triangularização.

O mesmo processo deverá ser utilizado para anular os coeficientes $k'_{i,j}$ acima da diagonal principal, empregando as mesmas equações definidas anteriormente, iniciando desta vez pela última coluna. No fim das operações os elementos f'_i do vetor de forças serão novamente modificados e a matriz de rigidez terá elementos diferentes de zero apenas na sua diagonal principal, conforme a eq (5.34).

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \vdots \\ \delta_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ f_3'' \\ \vdots \\ f_N'' \end{Bmatrix} \quad (5.34)$$

Onde $d_{i,j}$ e f_i'' são os elementos da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais respectivamente, modificados pelo processo de diagonalização. Finalmente os deslocamentos serão dados pela razão entre vetor de forças e a matriz de rigidez diagonalizada, conforme eq(5.35).

$$\{\delta\} = [D]^{-1} \cdot \{F\} \quad (5.35)$$

5.5 - Metodologia empregada para o cálculo em teoria de segunda ordem

O cálculo de uma estrutura em teoria de segunda ordem exige o conhecimento prévio dos esforços e deslocamentos, resultantes da sua análise em teoria de primeira ordem. Sendo assim, durante esta primeira fase, todos os dados referentes às propriedades elásticas, às características geométricas e às ações aplicadas deverão ser definidos e devidamente armazenados em arquivos temporários específicos. Para os elementos diagonais, de pórtico e de núcleo, além destes dados, deverão ser também arquivados os valores dos seus respectivos esforços que influem nos efeitos de segunda ordem (ver item 4). Estes valores são imprescindíveis para a determinação da matriz de rigidez, em teoria de 2ª ordem, da estrutura.

Após a análise linear será iniciado o cálculo em teoria de 2ª ordem, com base nos dados mencionados anteriormente. Os esforços resultantes serão novamente arquivados, para serem utilizados na análise consecutiva. Este processo se repetirá sucessivas vezes, sendo as ações aplicadas constantes e a matriz de rigidez da estrutura afetada pela influência dos esforços resultantes da etapa anterior. Estes esforços contribuem para que ocorra uma degenerescência gradativa da rigidez da estrutura, aumentando conseqüentemente os deslocamentos dos seus nós.

As equações formuladas na análise em teoria de 2ª ordem, em termos dos esforços não são lineares, sendo portanto utilizado um processo iterativo para definir a posição final de equilíbrio. O processo adotado é a técnica de iteração direta, o qual constitui-se na verificação da convergência dos deslocamentos, resultantes de sucessivas atualizações da matriz de rigidez. A base desta técnica está na determinação prévia de um valor de tolerância " ε_D ", que funciona como indicador da posição de equilíbrio atingida pela estrutura após a realização de várias iterações, conforme esquema apresentado na tabela a seguir:

Tabela 5.1 - Esquema do cálculo iterativo utilizando a técnica de iteração direta.

	mat. de rigidez	vetor dos desloc.	vetor de forças
1ª ordem	$[K]_L$	$\{\delta_1\} = [K]_L^{-1} \cdot \{F\}$	$\{f_1\} = [K]_L \cdot \{\delta_1\}$
1ª iter. em 2ª ord.	$[K(f_1)]_{N.L.}$	$\{\delta_2\} = [K(f_1)]_{N.L.}^{-1} \cdot \{F\}$	$\{f_2\} = [K(f_1)]_{N.L.} \cdot \{\delta_2\}$
2ª iter. em 2ª ord.	$[K(f_2)]_{N.L.}$	$\{\delta_3\} = [K(f_2)]_{N.L.}^{-1} \cdot \{F\}$	$\{f_3\} = [K(f_2)]_{N.L.} \cdot \{\delta_3\}$
⋮	⋮	⋮	⋮
nª iter. em 2ª ord.	$[K(f_n)]_{N.L.}$	$\{\delta_{n+1}\} = [K(f_n)]_{N.L.}^{-1} \cdot \{F\}$	$\{f_{n+1}\} = [K(f_n)]_{N.L.} \cdot \{\delta_{n+1}\}$

Onde:

$[K]_L$ é a matriz de rigidez calculada em teoria de primeira ordem.

$[K(f_n)]_{N.L.}$ é a matriz de rigidez em teoria de 2ª ordem calculada com a influência dos esforços $\{f_n\}$.

$\{F\}$ é o vetor das forças nodais.

O processo iterativo deverá ser finalizado quando o valor de tolerância " ε_D " for igual ou ligeiramente superior ao valor " v " calculado na eq(5.36).

$$v = \frac{\|\{\delta_n\} - \{\delta_{n-1}\}\|}{\|\{\delta_n\}\|} \quad (5.36)$$

Onde:

$\| \quad \|$ - representa a norma Euclidiana de um vetor

$\{\delta_n\}$ - vetor dos deslocamentos na iteração n

$\{\delta_{n-1}\}$ - vetor dos deslocamentos na iteração anterior a n

Para cada iteração realizada, será feita esta verificação no nó mestre da laje de topo, sendo analisada separadamente a convergência para os deslocamentos de translação e rotação. Segundo **BATHE** (1980), em ambos os casos deve ser adotado o valor de 0.0001 para " ε_D "

5.6 - Parâmetros de instabilidade para o cálculo em teoria de segunda ordem

O parâmetro de instabilidade, conhecido por " α " foi inicialmente idealizado por **BECH** e **KONIG** (1966), com base na análise de pórticos rotulados, contraentados por paredes, cujo comportamento estrutural é semelhante ao de uma viga em balanço. A finalidade de " α " é avaliar a rigidez horizontal das estruturas sujeitas à ação do vento e é definido a partir da determinação do carregamento crítico " P_{CR} " para uma barra esbelta, constituída por um material elástico linear, articulada nas suas extremidades (ver figura 5.1).

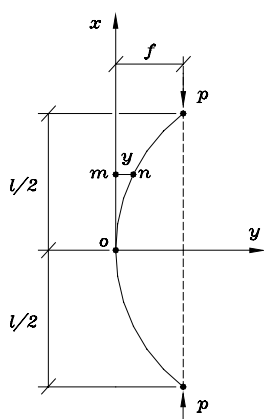


Figura 5.1 - Barra esbelta submetida à carregamento crítico.

A carga crítica " P_{CR} ", também conhecida como carga de **EULER**, é definida como a intensidade de força axial necessária para manter a barra afastada da sua configuração de equilíbrio inicial, ou seja, da posição reta, fazendo-a permanecer na posição de equilíbrio estável ou na forma curva, mostrada na figura 5.1. Apenas para determinação da carga é utilizada a eq(5.37), que corresponde à equação diferencial simplificada da linha elástica, ficando sua flecha " f " indeterminada (aproximação referente à teoria de 2ª ordem).

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (5.37)$$

Onde $\frac{1}{r}$ é a curvatura da barra.

O momento fletor " M " em uma seção transversal genérica será dado por:

$$M = -P(f - y) \quad (5.38)$$

Substituindo a equação acima em eq(5.37) e organizando seus termos, chega-se a seguinte relação:

$$y'' + k^2 \cdot y = k^2 \cdot f \quad (5.39)$$

$$\text{Sendo } k^2 = \frac{P}{EI} \quad (5.40)$$

A solução geral da eq(5.39) será dada por:

$$y = A \cdot \cos.kx + B \cdot \text{sen}.kx + f \quad (5.41)$$

Onde " A " e " B " são as constantes de integração, determinadas de acordo com as condições de vinculação da barra da figura 5.1, apresentadas a seguir:

- Para $x = 0 \Rightarrow y = 0$ e $y' = 0$ e os valores das constantes serão:

$$A = -f$$

$$B = 0$$

Portanto, a equação da elástica em função da flecha " f " será dada por:

$$y = f.(1 - \cos.kx) \quad (5.42)$$

- Para $x = \frac{L}{2} \Rightarrow y = f$ e a equação da elástica fornecerá:

$$f.\cos.k.\frac{L}{2} = 0 \quad (5.43)$$

Como a barra é considerada na posição fletida ($f \neq 0$), conclui-se que $\cos.k.\frac{L}{2}$ será nulo, definindo assim o valor da carga crítica e em consequência o parâmetro de instabilidade " α " procurado.

$$\alpha = k.L$$

ou

$$\alpha = L.\sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (5.44)$$

Onde " L " é a altura total do edifício, " P " é o somatório de todas as ações verticais atuantes na estrutura e " EI " representa a rigidez de todos os pilares do edifício.

O valor de " α " é definido apenas no regime elástico e são desprezadas a influência das vigas e diagonais na rigidez global da estrutura. Entretanto, nos casos normais, as ligações entre os pilares e esse elementos são monolíticas, o que contribui para uma redução significativa no valor do parâmetro de instabilidade. Estudos realizados por VASCONCELOS (1985) mostram uma redução de até 50% de seu valor, quando são acrescidos os momentos de inércia das seções transversais da vigas. Chegando, em alguns casos, a dispensar a análise não linear da estrutura em questão.

Considerando uma estrutura com essas ligações, torna-se difícil a avaliação de sua rigidez global, a qual não se restringe apenas ao somatório da rigidez de seus pilares. Devendo-se portanto adotar aproximações, como a determinação de uma rigidez equivalente " $(EI)_{eq}$ ", apresentada a seguir:

Sob ação de forças horizontais é calculado o deslocamento " δ " na laje de topo, em seguida considera-se a estrutura como um único pilar engastado na sua extremidade inferior e livre na superior, submetido a um carregamento horizontal uniformemente distribuído, equivalente ao utilizado para obtenção de " δ " (ver figura 5.2). Sabe-se que o deslocamento horizontal da sua extremidade superior é igual a flecha " f " que ocorre na extremidade em balanço de um viga engastada submetida a um carregamento distribuído, conforme eq(5.45).

$$f = \frac{q \cdot H^4}{8 \cdot EI} \quad (5.45)$$

Igualando-se a flecha " f " ao deslocamento " δ ", determina-se o valor da rigidez do pilar considerado, a qual é equivalente à rigidez da estrutura original, dada por:

$$(EI)_{eq} = \frac{q \cdot H^4}{8 \cdot \delta} \quad (5.46)$$

Onde:

H é a altura total do edifício

q é a ação do vento distribuída ao longo da altura H

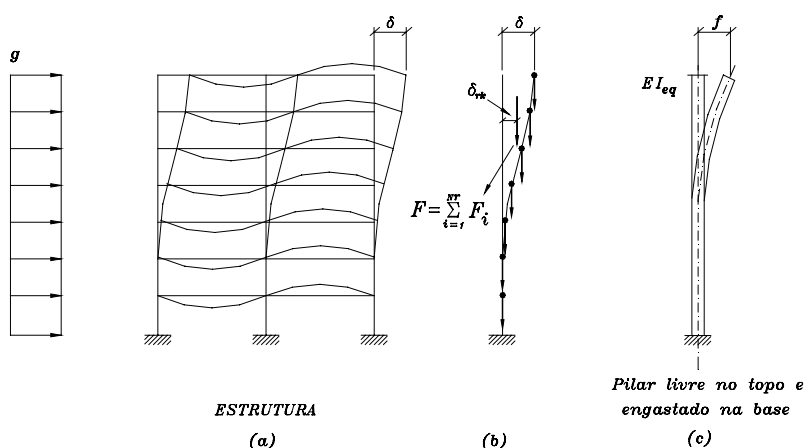


Figura 5.2 - Idealização da estrutura como um pilar de rigidez equivalente

Realizando estudos comparativos entre os resultados do cálculo de " α ", obtidos para a ação horizontal distribuída ao longo da altura e concentrada no topo

do edifício, **FRANÇA** (1985) constatou que a primeira situação de carregamento fornece valores de " α " mais próximos da realidade.

Os valores adotados pelo **CEB** (1978) e pela **NB-1/1994 (ABNT)**, que indicam o limite permitido para a análise linear das estruturas são:

$$\alpha \leq 0,2 + 0,1.n \quad \text{para } n \leq 3 \text{ pavimentos.}$$

$$\alpha < 0,6 \quad \text{para } n > 4 \text{ pavimentos.}$$

Através de vários estudos **VASCONCELOS** (1986), determinou os seguintes valores:

$$\alpha \leq 0,80 \quad \text{para edifícios com três pavimentos.}$$

$$\alpha \leq 0,55 \quad \text{para edifícios com dois pavimentos.}$$

$$\alpha \leq 0,50 \quad \text{para edifícios com um pavimento.}$$

O efeito de segunda ordem é função da forma da linha elástica, a qual varia conforme o tipo de sistema estrutural considerado. **FRANÇA** (1985) analisou a deformação de três estruturas de contraventamento (laje-viga, laje nervurada e laje cogumelo) para um mesmo edifício, obtendo valores diferentes para " α ", conforme o tipo de contraventamento predominante, introduzindo assim o conceito do parâmetro de forma " ψ ", dado por:

$$\psi = \frac{\delta_{rd}}{f_d} = \frac{\delta_{rk}}{f_k} \quad (5.47)$$

Onde:

δ_{rd} - é o deslocamento horizontal, em teoria de primeira ordem, do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais de projeto.

δ_{rk} - é o deslocamento horizontal, em teoria de primeira ordem, do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais características (ver figura 5.2).

f_d - flecha de projeto no topo do edifício.

f_k - flecha característica no topo do edifício.

FRANÇA (1985) utilizando a condição de imobilidade dos nós das estruturas, a qual estabelece que os esforços adicionais causados pelos efeitos de segunda ordem não devem ultrapassar 10% dos respectivos esforços de primeira ordem, obteve ainda o valor limite do parâmetro de instabilidade " α_{lim} " em função da forma da linha elástica " ψ ", conforme demonstração apresentada a seguir:

O momento em teoria de primeira ordem na base da estrutura da figura 5.2.b e seu incremento, devido ao deslocamento " δ " onde é aplicada a resultante das cargas " P ", serão dados pelas eq(5.48) e eq(5.49), respectivamente.

$$M_1 = \frac{q \cdot H^2}{2} \quad (5.48)$$

$$\Delta M_1 = \delta_r \cdot P \quad (5.49)$$

Onde:

δ_r - é o deslocamento horizontal, em teoria de primeira ordem, do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais.

O momento em teoria de segunda ordem será dado por:

$$M_2 = M_1 + \Delta M_2 + \Delta M_3 + \dots + \Delta M_j \quad (5.50)$$

Onde ΔM_j é o acréscimo de momento, gerados na iteração " j "

Considerando os momentos $M_1, \Delta M_2, \Delta M_3, \dots$ e ΔM_j , como uma progressão geométrica decrescente de razão $r' \leq 1$, onde:

$$r' = \frac{\Delta M_2}{\Delta M_1} = \frac{\Delta M_3}{\Delta M_2} = \dots = \frac{\Delta M_j}{\Delta M_{j-1}} \quad (5.51)$$

e

$$\Delta M_j = r' \cdot \Delta M_{j-1} \quad (5.52)$$

A eq(5.50) terá a seguinte forma:

$$M_2 = (1 + r' + r'^2 + r'^3 + \dots + r'^{(j-1)}) \cdot M_1 \quad (5.53)$$

Quando " j " tende a infinito, o limite da soma da progressão geométrica da equação acima valerá:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (1 + r' + r'^2 + r'^3 + \dots + r'^{(j-1)}) \cdot M_1 = \frac{1}{1 - r'} \cdot M_1 \quad (5.54)$$

Considerando " j " como a análise linear, tem-se:

$$\Delta M_j = \Delta M_2 = \Delta M \quad (5.55)$$

e

$$\Delta M_{j-1} = \Delta M_1 = M_1 \quad (5.56)$$

O que implica em:

$$r' = \frac{\Delta M}{M_1} \quad (5.57)$$

O momento de projeto em teoria de segunda ordem será obtido através da substituição da equação acima em eq(5.54).

$$M_{2d} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_d}{M_{1d}}} \cdot M_{1d} \quad (5.58)$$

De acordo com a condição de imobilidade dos nós da estrutura, chega-se na seguinte relação:

$$\frac{1}{1 - \frac{\Delta M_d}{M_{1d}}} \cdot M_{1d} \leq 1,1 \cdot M_{1d} \quad (5.59)$$

ou

$$\Delta M_d \leq \frac{M_{1d}}{11} \quad (5.60)$$

Substituindo as eqs(5.37), (5.48) e (5.49) na equação acima, obtém-se:

$$\psi \cdot \frac{q_d \cdot H^4}{8 \cdot (EI)_{eq}} \cdot P_d \leq \frac{1}{11} \cdot \frac{q_d \cdot H^2}{2} \quad (5.61)$$

ou

$$\frac{H^2 \cdot P_d}{(EI)_{eq}} \leq \frac{4}{11 \cdot \psi} \quad (5.62)$$

A **NB-1**(1978) estabelece que, $P_d = \gamma_f \cdot P_k$, onde $\gamma_f = 1,4$. Para redução da rigidez, devido à não linearidade física, será adotado 70% de $(EI)_{eq}$, que representa o valor utilizado na análise com linearidade física. Segundo **CARMO** (1995) este procedimento é aceito pela maioria dos calculistas de estruturas em concreto armado, sendo assim:

$$\frac{H^2 \cdot P_k}{(EI)_{eq}} \leq \frac{4}{11 \cdot \psi} \cdot \frac{0,7}{1,4} \quad (5.63)$$

Onde o segundo termo corresponde ao valor procurado de " α_{Lim} ".

$$\alpha_{Lim} = \sqrt{\frac{2}{11 \cdot \psi}} \quad (5.64)$$

O parâmetro de forma " ψ " da equação acima deverá ser calculado através da eq(5.65) quando se tratar de estruturas com linhas elásticas não usuais.

$$\psi = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{np} (P_{ik} \cdot \delta_{ik})}{\sum_{i=1}^{np} P_{ik}} \quad (5.65)$$

Onde: P_{ik} é o carregamento característico do pavimento " i "

δ_{ik} é o deslocamento lateral da laje do pavimento " i "

De acordo com a eq(5.63), a análise não linear da estrutura será obrigatória quando o valor do " α ", calculado com base na rigidez equivalente, for maior que " α_{Lim} ", obtido em função do parâmetro de forma da linha elástica " ψ ".

6 - ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS

6.1 - Introdução

Os deslocamentos, calculados com base no algoritmo apresentado no item 5.4 do capítulo anterior, são relacionados às coordenadas globais da subestrutura ligada aos elementos da fundação e deverão auxiliar na determinação dos deslocamentos nodais nas demais subestruturas. Para isso, serão usadas as submatrizes $[L]$ e $[R]$ e os vetores $\{\delta\}_1^*$, resultantes da aplicação do processo de redução de coordenadas da estrutura, conforme o esquema apresentado neste capítulo.

Serão descritas ainda as técnicas de cálculo matricial empregadas na obtenção dos deslocamentos e esforços nas extremidades dos diversos elementos existentes, segundo seus sistemas locais de referência.

6.2 - Deslocamentos nas subestruturas tipo

O vetor de deslocamentos nodais nas coordenadas internas da subestrutura genérica “ I ” $\{\delta\}_1^I$ será obtidos através da eq(5.26), aqui transcrita.

$$\{\delta\}_1^I = [L]^{-1} \cdot (\{\delta\}_1^* - [R]^T \cdot \{\delta\}_E^I) \quad (6.1)$$

As submatrizes $[L]^I$ e $[R]^I$, bem como, os vetores $\{\delta\}_I^{I*}$, foram armazenados em arquivos temporários durante a aplicação do algoritmo, apresentado no item 5.2.2 do capítulo anterior, à subestrutura “ I ”. O vetor de deslocamentos externos $\{\delta\}_E^I$ de “ I ” é constituído pelos deslocamentos na direção das coordenadas posicionadas na laje de topo da subestrutura “I-1”. Caso existam excentricidades entre os eixos longitudinais dos elementos verticais pertencentes às subestruturas “ I ” e “ I-1 ”, o vetor $\{\delta\}_E^I$ de “I” será fornecido por:

$$\{\delta\}_E^I = [MS]\{\delta\}_E^{I-1} \quad (6.2)$$

Onde:

$\{\delta\}_E^{I-1}$ é o vetor que reúne os deslocamentos na direção das coordenadas posicionadas na laje de topo da subestrutura “ I-1 ”.

$[MS]$ é a matriz de translação de coordenadas definidas no item 3.12.

Por fim o vetor $\{\delta\}_S^I$ da subestrutura “I” com os deslocamentos na direção das coordenadas externas e internas é determinado pela superposição dos vetores $\{\delta\}_I^I$ e $\{\delta\}_E^I$, seguindo orientação dos indexadores, apresentados no item 2.4.7.

6.3 - Deslocamentos e esforços nas extremidades dos elementos

Após a determinação do vetor $\{\delta\}_S^I$ referido ao sistema global de eixos da subestrutura “I”, poderão ser calculados os deslocamentos e respectivos esforços nas extremidades dos diversos elementos que a compõem, utilizando técnicas de cálculo matricial.

6.3.1 - Elementos de treliça

Devido às suas características, definidas no tem 2.2.2, os elementos **ELM-01** terão seus deslocamentos determinados sem maiores dificuldades. A posição destes deslocamentos no vetor $\{\delta\}_s^1$ são definidas com auxílio dos números de suas coordenadas superior e inferior, fornecidos pelas equações apresentadas no item 2.4.7.a., sendo o vetor dos esforços nas suas extremidades $\{f_1\}_J$ dado por:

$$\{f_1\}_J = [Re_1]_J \cdot \{\delta e_1\}_J \quad (6.3)$$

6.3.2 - Elementos de pórtico plano

No caso de **ELM-02** os deslocamentos nas suas extremidades deverão ser localizados no vetor $\{\delta\}_s^1$ através das equações do item 2.4.7.b e posicionados em $\{\overline{\delta e_2}\}_J$ de acordo com o sistema de coordenadas apresentado em 2.4.2. Devido ao comportamento estrutural adotado para as lajes, os deslocamentos dependentes do movimento de corpo rígido devem ser transladados dos nós mestres para os nós de incidência do elemento, utilizando a relação abaixo:

$$\{\overline{\delta e_2}\}_J = [MT_2]_J \cdot \{\overline{\delta e_2}\}_J \quad (6.4)$$

$$\text{Onde } [MT_2]_J = \begin{bmatrix} [I] & & & 0 \\ & [mt_2] & & \\ & & [I] & \\ 0 & & & [mt_2] \end{bmatrix}$$

e $[I]$ é uma submatriz identidade de ordem 3 X 3 e $[mt_2]$ está definida no item 3.7.2.3.

Finalmente os deslocamentos, referidos ao sistema local de eixos, será dado por:

$$\{\overline{\delta e_2}\}_j = [Be_2]_j \cdot \{\overline{\delta e_2}\}_j \quad (6.5)$$

Caso o elemento possua trechos rígidos, os deslocamentos deverão ser transferidos dos seus pontos nodais para as extremidades do seu comprimento flexível com a aplicação da eq(6.6).

$$\{\delta e_2\}_j = [Tr_2]_j \cdot \{\overline{\delta e_2}\}_j \quad (6.6)$$

O vetor contendo os esforços $\{f_2\}_j$ resultantes nas extremidades do elemento "j" será definido por:

$$\{f_2\}_j = [Re_2]_j \cdot \{\delta e_2\}_j \quad (6.7)$$

6.3.3 - Elementos de pórtico espacial

O processo para obtenção do vetor de deslocamentos $\{\overline{\delta e_4}\}_j$, relacionado ao sistema coordenado global, para o elemento **ELM-04** seguirá o mesmo raciocínio empregado nos elementos **ELM-02**, sendo utilizada na sua montagem, as equações do item 2.4.7.d. O vetor $\{\overline{\delta e_4}\}_j$ com os deslocamentos dependentes do movimento de corpo rígido das lajes devidamente transferidos dos nós mestre para os nós de incidência do elemento, será dado por eq(6.8).

$$\{\overline{\delta e_4}\}_j = [MT_4]_j \cdot \{\overline{\delta e_4}\}_j \quad (6.8)$$

Onde:

$$[MT_4]_J = \begin{bmatrix} [I] & & 0 \\ & [mt_4] & \\ 0 & & [I] \\ & & & [mt_4] \end{bmatrix}$$

$[I]$ é uma submatriz identidade de ordem 3 X 3 e $[mt_4]$ está definida no item 3.8.2.3.

A rotação de $\{\overline{\delta e_4}\}_J$ para o sistema de referência local será fornecida pela relação apresentada a seguir:

$$\{\overline{\delta e_4}\}_J = [Be_4]_J \cdot \{\overline{\delta e_2}\}_J \quad (6.9)$$

Havendo trechos rígidos, os deslocamentos de $\{\overline{\delta e_4}\}_J$ devem ser transladados para as extremidades do seu comprimento flexível através da eq(6.10).

$$\{\delta e_4\}_J = [Tr_4]_J \cdot \{\overline{\delta e_4}\}_J \quad (6.10)$$

O vetor $\{\delta e_4\}_J$ de **ELM-04**, está referido ao sistema de eixos do centro de torção e os momentos fletores, cortantes e esforços normais nele resultantes atuam na direção das coordenadas relacionadas aos eixos que passam pelo centro de gravidade. Sendo assim, seus respectivos deslocamentos serão transladados do " C. T. " para o " C. G. " através da eq(6.11).

$$\{\delta e_4^f\}_J = [BC]_J \cdot \{\overline{\delta e_4^f}\}_J \quad (6.11)$$

Onde:

$\{\overline{\delta e_4^f}\}_J$ - é o vetor que reúne os deslocamentos relativos às deformações axiais e por flexão, segundo sistema local de eixos concorrente no centro de torção.

Os vetores de esforços axiais e de flexão $\{f_4^f\}_J$ e de torção $\{f_4^t\}_J$ serão dados por eq(6.12) e eq(6.13), respectivamente.

$$\{f_4^f\}_J = [rf_4]_J \cdot \{\delta e_4^f\}_J \quad (6.12)$$

$$\{f_4^t\}_J = [rt_4]_J \cdot \{\delta e_4^t\}_J \quad (6.13)$$

Sendo $\{\delta e_4^t\}_J$ o vetor que reúne os deslocamentos relativos à deformação por torção.

Obs: Os esforços e deslocamentos nas extremidades dos elementos **ELM-03** serão determinados através da aplicação das equações apresentadas neste item, devendo lembrar apenas que as linhas e colunas da matrizes e vetores das referidas equações, relacionados à torção, devem ser eliminadas.

6.3.4 - Elementos de núcleo

Utilizando o processo anteriormente empregado, e aplicando as equações do item 2.4.7.e, determina-se o vetor de deslocamentos $\{\overline{\delta e_5}\}_J$ nas extremidades do elemento **ELM-05** referido ao sistema coordenado global. A translação dos deslocamentos, dependentes do movimento de corpo rígido, dos nós mestres para os nós de incidência do elemento será dado por:

$$\{\overline{\delta e_5}\}_J = [MT_5]_J \cdot \{\delta e_5\}_J \quad (6.14)$$

Onde:

$\{\overline{\delta e_5}\}_J$ é o vetor dos deslocamentos referido ao sistema global de eixos.

$$[MT_5]_J = \begin{bmatrix} [I] & & & & & \\ & [mt_4] & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & [I] & & \\ & 0 & & & [mt_4] & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$[I]$ é uma submatriz identidade de ordem 3 X 3 e $[mt_4]$ está definida no item 3.8.2.3.

O vetor $\{\delta e_5\}_J$ relacionado ao sistema local de coordenada será obtido pela rotação de $\{\overline{\delta e_5}\}_J$, conforme a relação apresentada a seguir:

$$\{\delta e_5\}_J = [Be_5]_J \cdot \{\overline{\delta e_5}\}_J \quad (6.15)$$

Devido à magnitude do valor de sua rigidez à flexão em relação aos demais elementos, não haverá formação de trechos rígidos nas suas extremidades. Da mesma forma que o elemento **ELM-04** o vetor $\{\delta e_5\}_J$ de **ELM-05** também está referido ao sistema de eixos do centro de torção e seus deslocamentos, na direção das deformações axiais e por flexão, devem ser transferidos para o " C. G. " através da eq(6.16).

$$\{\delta e_5^f\}_J = [BC]_J \cdot \{\overline{\delta e_5^f}\}_J \quad (6.16)$$

Onde:

$\{\overline{\delta e_5^f}\}_J$ - é o vetor que reúne os deslocamentos relativos às deformações axiais e por flexão, segundo sistema local de eixos concorrente no centro de gravidade.

Os vetores de esforços axiais e de flexão $\{f_5^f\}_J$ e de torção e do bimomento $\{f_5^t\}_J$ serão dados por eq(6.17) e eq(6.18), respectivamente.

$$\{f_5^f\}_J = [rf_5]_J \cdot \{\delta e_5^f\}_J \quad (6.17)$$

$$\{f_5^t\}_J = [rt_5]_J \cdot \{\delta e_5^t\}_J \quad (6.18)$$

Sendo $\{\delta e_5^t\}_J$ o vetor que reúne os deslocamentos relativos à deformação por torção e empenamento da seção.

6.3.5 - elementos horizontais de contraventamento

Os deslocamentos nas extremidades dos elementos **ELM-07**, segundo coordenadas locais dos elementos verticais que lhe servem de apoio, serão dados por:

$$\{\overline{\delta e_7}\}_J = [Bg_7]_J \cdot \{\overline{\overline{\delta e_7}}\}_J \quad (6.19)$$

Onde:

$\{\overline{\overline{\delta e_7}}\}_J$ é o vetor de deslocamentos segundo sistema de referência global.

A translação do vetor $\{\overline{\delta e_7}\}_J$ dos centros de torção das seções transversais dos elementos verticais contraventados para os pontos de apoio de **ELM-07**, contidos nestas mesmas seções, será fornecida por:

$$\{\overline{\delta e_7}\}_J = [MT_7]_J \cdot \{\overline{\overline{\delta e_7}}\}_J \quad (6.20)$$

Onde a matriz $[MT_7]_J$ será constituída pelas submatrizes $[mt_1]_7$ e $[mt_2]_7$, conforme combinação dos tipos de elementos verticais contraventados, apresentada no item 3.10.2.2. E por fim o vetor de deslocamentos $\{\delta e_7\}_J$, referido ao sistema local de eixos, será calculado pela seguinte equação:

$$\{\delta e_7\}_J = [Be_7]_J \cdot \{\overline{\delta e_7}\}_J \quad (6.21)$$

O vetor $\{f_7\}_j$ dos esforços, atuantes na direção das coordenadas locais do elemento "j", será obtido por:

$$\{f_7\}_j = [Re_7]_j \cdot \{\delta e_7\}_j \quad (6.22)$$

Obs: Os esforços e deslocamentos nas extremidades dos elementos **ELM-06** serão calculados por equações semelhantes às formuladas neste item, sendo desprezadas as linhas e colunas das matrizes e vetores referente à coordenada na direção da deformação por torção.

6.3.6 - Elementos diagonais de contraventamento

Os deslocamentos, dependentes do movimento de corpo rígido das lajes, serão transladados dos nós mestres para os nós de incidência do elemento **ELM-0i**, através da aplicação da eq(6.23)

$$\{\overline{\delta e_i}\}_j = [MT_i]_j \cdot \{\overline{\delta e_i}\}_j \quad (6.23)$$

Onde:

$\{\overline{\delta e_i}\}_j$ é o vetor de deslocamentos do elemento "j" referido ao sistema global de eixos

$$[MT_i]_j = \begin{bmatrix} [I] & & & & & \\ & [mt_4] & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & [I] & & \\ & 0 & & & [mt_4] & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$[I]$ é uma submatriz identidade de ordem 3 X 3 e $[mt_4]$ está definida no item 3.8.2.3.

Nesta fase o vetor $\{\overline{\overline{\delta e_i}}\}$ deve ser rotacionado para os sistemas de referência local dos elemento verticais contraventados, para isso utiliza-se a relação abaixo:

$$\{\overline{\overline{\delta e_i}}\}_J = [Bg_i]_J \cdot \{\overline{\overline{\delta e_i}}\}_J \quad (6.24)$$

Os deslocamentos serão agora transferidos do centro de torção dos elementos verticais contraventados para os pontos de apoio inicial e final de **ELM-0i**. Para isso será empregada a seguinte relação:

$$\{\overline{\delta e_i}\}_J = [MT_i]_J \cdot \{\overline{\overline{\delta e_i}}\}_J \quad (6.25)$$

Sendo $[MT_i]_J$ formada pelas submatrizes $[mt_1]_i$ e $[mt_2]_i$, definidas no item 3.11.2.2, conforme o tipo dos elementos contraventados. Finalmente usando a eq(6.26), obtém-se o vetor de deslocamentos $\{\overline{\delta e_i}\}_J$, referido ao sistema de coordenadas locais.

$$\{\delta e_i\}_J = [Be_i]_J \cdot \{\overline{\delta e_i}\}_J \quad (6.26)$$

O vetor de forças nas extremidades do elemento será fornecido por:

$$\{f_i\}_J = [Re_i]_J \cdot \{\delta e_i\}_J \quad (6.27)$$

Obs: O índice "i" das equações deste item deverá ser substituído por "8" ou "9", conforme o elemento analisado for do tipo **ELM-08** ou **ELM-09**, respectivamente.

7 - ANÁLISE DAS ESTRUTURAS

7.1 - Introdução

Baseado na teoria exposta nos capítulos anteriores, foi desenvolvido um programa em linguagem **FORTRAN 90** e para verificar a precisão dos resultados por ele fornecidos, serão analisadas quatro estruturas. As três primeiras foram extraídas das teses e dissertações pesquisadas durante a realização deste trabalho e a última tem como objetivo principal evidenciar os recursos existentes no referido programa. Sendo assim, ela foi idealizada com elevada quantidade de elementos distribuídos em cinco tipos de pavimentos diferentes (modelos). Nos seus nós existem a formação de trechos rígidos, ocorrendo também as excentricidades usualmente encontradas nos projetos estruturais dos edifícios.

As curvas construídas com base nos valores obtidos com este trabalho e por **MORI** (1992) aparecem superpostas, isto se deve ao fato das considerações e hipótese de cálculo, adotadas por ambos, terem sido as mesmas. O confronto entre estes valores tem como objetivo comprovar a coerência dos cálculos realizados pelo programa.

7.2 - Exemplo número 1

Neste exemplo será analisada a estrutura de um edifício de vinte pavimentos com 2,80 m de pé-direito, constituída exclusivamente por um núcleo de seção transversal constante ao longo da sua altura, todas as suas paredes possuem espessura de 0,35 m, sendo ainda contraventado por lintéis ao nível de cada andar, com a mesma espessura das paredes e altura de 0,45m (ver figuras 7.1.a e 7.1.c). Para

o módulo de elasticidade longitudinal foi adotado o valor de $2,83 \times 10^9 \text{ kgf} / \text{m}^2$ e para o coeficiente de Poisson 0,15. As ações aplicadas serão um momento torçor de 3756,10 kgf.m atuando ao nível da cobertura e 3182,20 kgf.m nos demais pavimentos.

A estrutura tem fundação em sapatas como mostra a figura 7.1.b. Serão feitas duas análises; a primeira considerando o solo indeformável e a segunda compressível, tendo para sua rigidez o valor de $8 \times 10^6 \text{ kgf} / \text{m}^2 / \text{m}$.

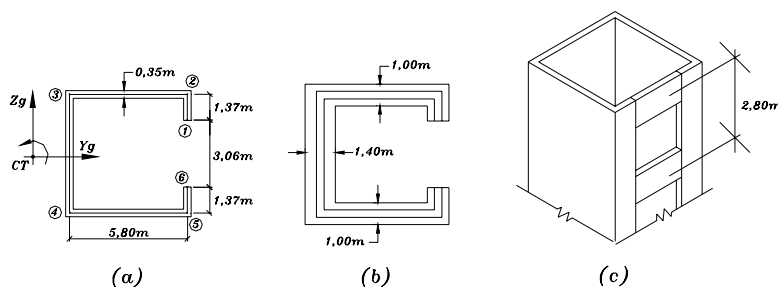


Figura 7.1 - Detalhes da estrutura de núcleo idealizada por COSTA(1984).

O sistema de referência X_g, Y_g, Z_g está posicionado no centro de torção com origem “o” ao nível da fundação. Todos os vínculos serão considerados restringidos, com exceção daquele na direção do empenamento, cujo valor da rigidez será definido a seguir. Esta mesma estrutura foi analisada por COSTA (1984) utilizando os métodos contínuo e discreto, onde foram adotadas as seguintes considerações:

- O solo possui a mesma resistência à tração e à compressão.
- A pressão aplicada pelo solo é constante na largura da sapata.
- As sapatas são indeformáveis segundo a sua espessura.

Admite-se válida a seguinte relação:

$$\sigma_0 = C_0 \cdot u \quad (7.1)$$

Onde:

σ_0 - É a pressão aplicada pela fundação.

u - É o afundamento do ponto da sapata igual ao correspondente na parede.

C_0 - É a constante de rigidez do solo.

A rigidez do vínculo segundo COSTA (1984) é dada por:

$$K_f = \frac{E \cdot I_{\omega}}{C_0 \cdot I_{\omega f}} \quad (7.2)$$

Sendo $I_{\omega f}$ o momento de inércia setorial da seção transversal da fundação.

Nesta abordagem a rigidez do vínculo na direção do empenamento é considerada contínua. Seu valor será calculado por comprimento unitário utilizando a média aritmética entre a rigidez relativa a cada parede, conforme a eq(7.3).

$$K_{emp} = \frac{\sum_{i=1}^{np} K_i}{np} \quad (7.3)$$

Onde: K_i é a rigidez relativa à base da parede “ i ” e “ np ” é o número de paredes, cujas bases têm largura diferentes.

$$K_i = A_i \cdot C_0 \quad (7.4)$$

Sendo A_i a área, por comprimento unitário da base da parede “i”. O valor da rigidez do vínculo para este exemplo é $9,07 \times 10^6$ kgf/m.

Na tabela 7.1 estão os valores dos deslocamentos de rotação em torno do eixo X_g representados pelas curvas do gráfico da figura 7.2, com vínculo rígido e flexível, de acordo com as análises feitas por COSTA (1984) e neste trabalho.

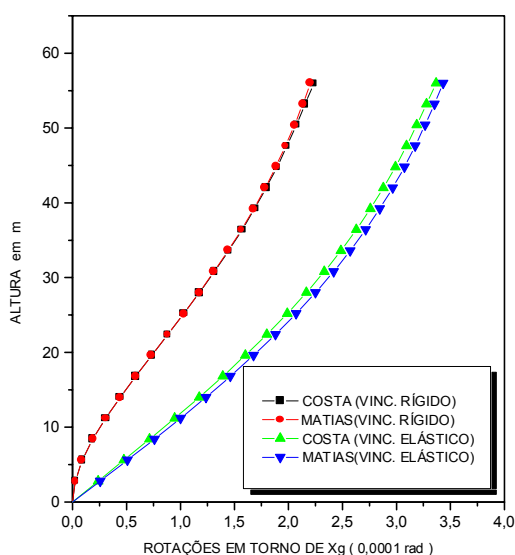


Figura 7.2 - Curvas das rotações em torno de X_g , no núcleo idealizado por COSTA(1982).

Tabela 7.1 - Rotações em torno de X_g , no núcleo idealizado por COSTA(1982).

pavimentos	altura (m)	ϕ_{CR} ($\times 10^{-4}$ rad)	ϕ_{MR} ($\times 10^{-4}$ rad)	ϕ_{CE} ($\times 10^{-4}$ rad)	ϕ_{ME} ($\times 10^{-4}$ rad)
0	00.00	0.000	0.000	0.000	0.000
1	02.80	0.025	0.025	0.237	0.256
2	05.60	0.091	0.091	0.476	0.509
3	08.40	0.188	0.188	0.713	0.759
4	11.20	0.308	0.307	0.946	1.001
5	14.00	0.442	0.441	1.173	1.237
6	16.80	0.585	0.585	1.392	1.462
7	19.60	0.734	0.733	1.601	1.676
8	22.40	0.883	0.882	1.800	1.880
9	25.20	1.031	1.030	1.989	2.071
10	28.00	1.176	1.174	2.167	2.251
11	30.80	1.314	1.311	2.332	2.418
12	33.60	1.446	1.441	2.486	2.573
13	36.40	1.570	1.564	2.629	2.716
14	39.20	1.686	1.680	2.760	2.846
15	42.00	1.794	1.785	2.880	2.966
16	44.80	1.894	1.883	2.991	3.075
17	47.60	1.987	1.973	3.094	3.174
18	50.40	2.074	2.056	3.189	3.267
19	53.20	2.156	2.133	3.279	3.352
20	56.00	2.236	2.207	3.366	3.433

Onde:

- ϕ_{CR} - São as rotações obtidas por COSTA (1984) com vínculo rígido.
- ϕ_{MR} - São as rotações obtidas por MATIAS com vínculo rígido.
- ϕ_{CE} - São as rotações obtidas por COSTA (1984) c/ vínculo elástico.
- ϕ_{ME} - São as rotações obtidas por MATIAS c/ vínculo elástico.

Como pode-se notar, quando o vínculo é rígido as rotações são praticamente coincidentes, sendo o modelo analisado pelo método do meio contínuo um pouco mais flexível. Com relação aos resultados para o vínculo elástico, embora os valores também sejam praticamente iguais, o mesmo modelo se torna mais rígido. Isto se deve ao fato de ter sido adotada por COSTA (1982) a teoria de seção delgada para obtenção do coeficiente de rigidez da base elástica. A relação largura/comprimento da seção transversal da sapata corrida é superior a 10%, não permitindo portanto a adoção da hipótese de distribuição uniforme das tensões de cisalhamento na sua largura, ou seja, o emprego da teoria de VLASSOV (1961) se torna impróprio. Porém os valores obtidos nos dois métodos são bastante aproximados. De acordo com os valores da tabela 7.2 e as curva do gráfico da figura 7.3, verificou-se que os deslocamentos na direção do empenamento também são bem próximos.

Tabela 7.2 - Deslocamentos, na direção do empenamento, do núcleo idealizado por COSTA (1982)

Paviment	altura (m)	ϕ'_{CR} ($\times 10^{-6}$ rad/m)		ϕ'_{CE} ($\times 10^{-6}$ rad/m)	ϕ'_{ME} ($\times 10^{-6}$ rad/m)
----------	------------	--	--	--	--

os	(m)		ϕ'_{MR} ($\times 10^{-6}$ rad/m)		
0	00.00	0.000	0.000	8.391	9.090
1	02.80	1.701	1.700	8.519	9.082
2	05.60	2.977	2.966	8.317	8.970
3	08.40	3.909	3.900	8.411	8.773
4	11.20	4.563	4.544	8.222	8.510
5	14.00	4.991	4.969	7.966	8.194
6	16.80	5.239	5.214	7.658	7.836
7	19.60	5.342	5.313	7.310	7.447
8	22.40	5.329	5.298	6.932	7.034
9	25.20	5.227	5.191	6.533	6.606
10	28.00	5.055	5.013	6.122	6.168
11	30.80	4.831	4.783	5.705	5.728
12	33.60	4.571	4.516	5.290	5.291
13	36.40	4.289	4.224	4.884	4.864
14	39.20	4.000	3.922	4.494	4.453
15	42.00	3.713	3.621	4.131	4.066
16	44.80	3.443	3.332	3.803	3.712
17	47.60	3.205	3.070	3.512	3.400
18	50.40	3.011	2.848	3.298	3.142
19	53.20	2.881	2.681	3.150	2.952
20	56.00	2.832	2.587	3.095	2.848

Onde:

- ϕ'_{CR} - Valores obtidas por **COSTA (1984)** com vínculo rígido.
- ϕ'_{MR} - Valores obtidas por **MATIAS** com vínculo rígido.
- ϕ'_{CE} - Valores obtidas por **COSTA (1984)** com vínculo elástico.
- ϕ'_{ME} - Valores obtidas por **MATIAS** com vínculo elástico.

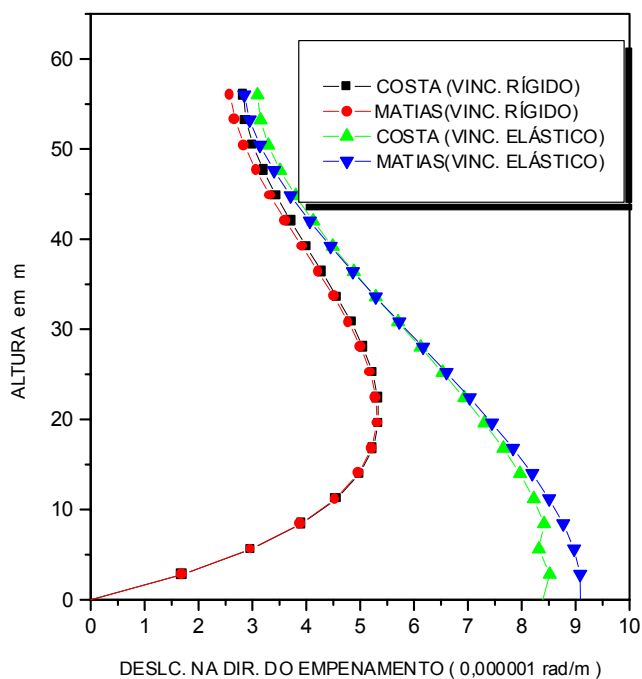


Figura 7.3 - Curvas representativas dos deslocamentos devido ao empenamento, no núcleo idealizado por **COSTA (1984)**.

Na tabela 7.3 encontram-se os valores das translações verticais dos pontos situados em “4” (ver figura 7.1) e no gráfico da figura 7.4 as curvas representativas destes deslocamentos, obtidas por ambos os métodos.

Tabela 7.3 - Translações verticais no ponto 4 em cada pavimento, no núcleo idealizado por **COSTA** (1984).

pavimentos	altura (m)	u_{CR}^4 ($\times 10^{-5}$ m)	u_{MR}^4 ($\times 10^{-5}$ m)	u_{CE}^4 ($\times 10^{-5}$ m)	u_{ME}^4 ($\times 10^{-5}$ m)
0	00.00	0.000	0.000	-7.753	-8.400
1	02.80	-1.570	-1.560	-7.871	-8.390
2	05.60	-2.751	-2.740	-7.870	-8.280
3	08.40	-3.612	-3.590	-7.772	-8.100
4	11.20	-4.216	-4.200	-7.597	-7.860
5	14.00	-4.612	-4.590	-7.361	-7.560
6	16.80	-4.841	-4.810	-7.076	-7.240
7	19.60	-4.936	-4.910	-6.755	-6.880
8	22.40	-4.942	-4.890	-6.405	-6.500
9	25.20	-4.829	-4.790	-6.037	-6.100
10	28.00	-4.670	-4.620	-5.675	-5.690
11	30.80	-4.464	-4.420	-5.271	-5.290
12	33.60	-4.224	-4.170	-4.888	-4.890
13	36.40	-3.963	-3.900	-4.513	-4.490
14	39.20	-3.695	-3.620	-4.153	-4.110
15	42.00	-3.431	-3.340	-3.817	-3.750
16	44.80	-3.182	-3.080	-3.513	-3.420
17	47.60	-2.961	-2.830	-3.253	-3.140
18	50.40	-2.782	-2.620	-3.047	-2.900
19	53.20	-2.662	-2.470	-2.910	-2.720
20	56.00	-2.617	-2.390	-2.860	-2.630

Onde:

- u_{CR}^4 - Valores obtidos por **COSTA** (1984) com vínculo rígido.
- u_{MR}^4 - Valores obtidos por **MATIAS** com vínculo rígido.
- u_{CE}^4 - Valores obtidos por **COSTA** (1984) com vínculo elástico.
- u_{ME}^4 - Valores obtidos por **MATIAS** com vínculo elástico.

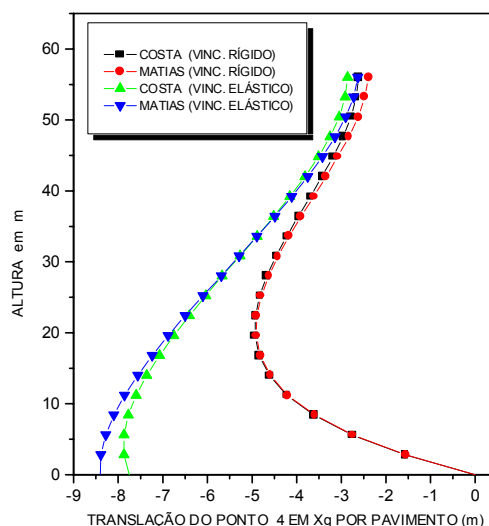


Figura 7.4 - Translações do ponto 4, em cada pavimento, no núcleo idealizado por **COSTA** (1982).

Através dos valores da tabela 7.4 e do gráfico da figura 7.5 pode ser notada a influência dos lintéis na rigidez da estrutura. Comparando os resultados obtidos por **COSTA** (1982) com vínculos rígidos e lintéis aos desta abordagem sem lintéis, pode-se constatar um acréscimo de aproximadamente 482% nas rotações, as quais tendem a aumentar quando o vínculo é elástico. Em alguns casos a não

consideração dos referidos elementos poderá acarretar deslocamentos excessivos, não permitidos pelas normas atuais.

Tabela 7.4 - Rotações em X_g , com e sem lintéis, no núcleo idealizado por COSTA.

Pavimentos	Altura (m)	ϕ_{CR}^{CL} ($\times 10^{-4}$ rad)	ϕ_{MR}^{SL} ($\times 10^{-4}$ rad)	ϕ_{ME}^{SL} ($\times 10^{-4}$ rad)
0	00.00	0.000	0.000	0.000
1	02.80	0.025	0.058	1.810
2	05.60	0.091	0.223	3.660
3	08.40	0.188	0.481	5.550
4	11.20	0.308	0.821	7.450
5	14.00	0.442	1.231	9.370
6	16.80	0.585	1.701	11.290
7	19.60	0.734	2.222	13.220
8	22.40	0.883	2.785	15.140
9	25.20	1.031	3.382	17.070
10	28.00	1.176	4.007	18.980
11	30.80	1.314	4.658	20.880
12	33.60	1.446	5.314	22.760
13	36.40	1.570	5.987	24.630
14	39.20	1.686	6.668	26.490
15	42.00	1.794	7.352	28.330
16	44.80	1.894	8.038	30.170
17	47.60	1.987	8.725	31.980
18	50.40	2.074	9.410	33.790
19	53.20	2.156	10.094	35.580
20	56.00	2.236	10.777	37.380

Onde:

- ϕ_{CR}^{CL} - Valores obtidos por COSTA (1984) com vínculo rígido e lintéis.
- ϕ_{MR}^{SL} - Valores obtidos por MATIAS com vínculo rígido e sem lintéis.
- ϕ_{ME}^{SL} - Valores obtidos por COSTA (1984) com vínculo elástico e sem lintéis.

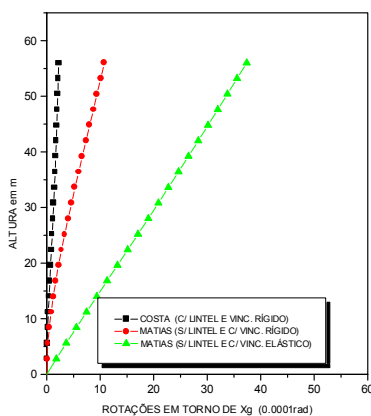
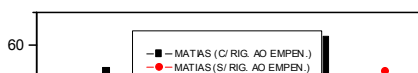


Figura 7.5 - Rotações em X_g , com e sem lintéis, no núcleo idealizado por COSTA.

A importância da rigidez ao empenamento neste tipo de estrutura é evidenciada pelo gráfico da figura 7.6 e pelos valores apresentados na tabela 7.5. Quando a rigidez ao empenamento é desprezada ocorre um aumento de 499% na rotação da laje do último pavimento. Sua consideração resulta em um acréscimo significativo no valor do coeficiente de rigidez à torção, tornando a estrutura mais rígida às ações horizontais aplicadas fora do seu centro elástico. No caso da estrutura



analisada neste item, o valor do coeficiente em cada pavimento, com e sem rigidez ao empenamento, será $1,26 \times 10^8$ kgf/m e $5,40 \times 10^{11}$ kgf/m, respectivamente.

Figura 7.6 - Curvas das rotações em torno de X_g , com e sem rigidez ao empenamento, no núcleo idealizado por COSTA (1982).

Tabela 7.5 - Rotações em torno de X_g , com e sem rigidez ao empenamento, no núcleo idealizado por COSTA (1982).

Pavimentos	altura (m)	ϕ_{MR}^{CE} ($\times 10^{-4}$ rad)	ϕ_{MR}^{SE} ($\times 10^{-4}$ rad)
0	00.00	0.000	0.000
1	02.80	0.058	5.070
2	05.60	0.223	9.906
3	08.40	0.481	14.482
4	11.20	0.821	18.806
5	14.00	1.231	22.878
6	16.80	1.701	26.698
7	19.60	2.222	30.267
8	22.40	2.785	33.585
9	25.20	3.382	36.650
10	28.00	4.007	39.464
11	30.80	4.658	42.026
12	33.60	5.314	44.337
13	36.40	5.987	46.395
14	39.20	6.668	48.202
15	42.00	7.352	49.758
16	44.80	8.038	51.062
17	47.60	8.725	52.114
18	50.40	9.410	52.914
19	53.20	10.094	53.463
20	56.00	10.777	53.76

Onde:

ϕ_{MR}^{CE} - Rotações em torno de X_g com consideração da rigidez ao empenamento.

ϕ_{MR}^{SE} - Rotações em torno de X_g sem consideração da rigidez ao empenamento.

Na tabela 7.6 e no gráfico da figura 7.7 constam os valores das tensões normais no ponto “ 3 ” da seção transversal em cada pavimento(ver figura 7.1). Através deles verifica-se que as diferenças entre os valores fornecidos pelos dois métodos são mínimas. No modelo utilizado por **COSTA** (1982) não há tensões no último pavimento, o que não ocorre na análise feita neste trabalho. Isto ocorre, devido a presença do lintel, que provoca um bimomento e conseqüentemente uma tensão.

Tabela 7.6 - Tensões normais no ponto 3, em cada pavimento, no núcleo idealizado por **COSTA** (1984).

altura (m)	σ_{CR} (t/m ²)	σ_{MR} (t/m ²)	σ_{CE} (t/m ²)	σ_{ME} (t/m ²)
00.00	-18.161	-18.187	-1.889	-2.175
02.80	-13.763	-14.096	-0.546	-1.087
05.60	-10.198	-10.759	0.538	-0.191
08.40	-7.312	-8.037	1.408	0.547
11.20	-4.978	-5.815	2.103	1.156
14.00	-3.097	-4.004	2.652	1.656
16.80	-1.586	-2.530	3.080	2.065
19.60	-0.380	-1.333	3.405	2.394
22.40	0.572	-0.367	3.640	2.654
25.20	1.313	0.405	3.797	2.852
28.00	1.875	1.013	3.881	2.990
30.80	2.280	1.447	3.897	3.071
33.60	2.549	1.813	3.846	3.092
36.40	2.690	2.031	3.724	3.050
39.20	2.712	2.136	3.527	2.939
42.00	2.615	2.126	3.247	2.749
44.80	2.395	1.998	2.870	2.467
47.60	2.042	1.740	2.381	2.075
50.40	1.541	1.337	1.759	1.553
53.40	0.870	0.767	0.977	0.873
56.00	0.000	-0.976	0.000	-2.314

Onde:

- σ_{CR} - Tensões normais no ponto 3 obtida por **COSTA**(1982) c/ vinc. rígido.
- σ_{MR} - Tensões normais no ponto 3 obtida por **MATIAS** c/ vinc. rígido.
- σ_{CE} - Tensões normais no ponto 3 obtida por **COSTA**(1982) c/ vinc. elástico.
- σ_{ME} - Tensões normais no ponto 3 obtida por **MATIAS** c/ vinc. elástico.

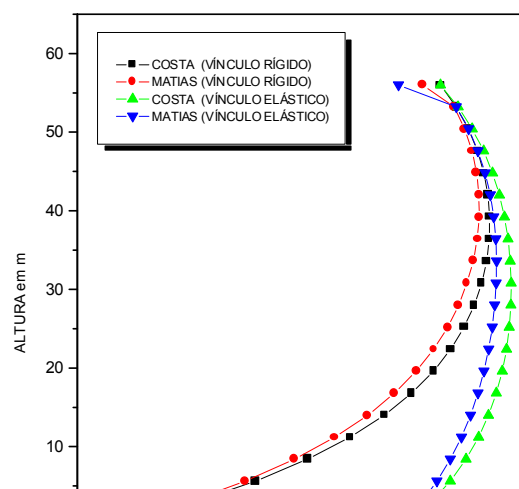


Figura 7.7 - Curvas das tensões normais no ponto 3, em cada pavimento, no núcleo idealizado por **COSTA** (1982).

7.3 - Exemplo número 2

Neste item será analisada uma estrutura de núcleo em concreto armado, que possui em seu topo uma treliça vinculada a pendurais de aço (ver figura 7.8). **YAGUI** (1987) resolveu esta estrutura com a finalidade de evidenciar o efeito da força normal na sua flexibilidade considerando-a com e sem lintéis. Seu pé-direito é igual a 4,00 m, as suas paredes possuem espessura de 0,25 m, os lintéis que a contraentam nos pontos 1 e 6 têm seções transversais iguais em todos os andares, cujas dimensões são 0,25m x 0,52 m . Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal são 14486600 kN / m² e 6036700 kN / m², respectivamente.

As ações horizontais aplicadas no nó mestre ao nível de cada pavimento será 56,7 kN, as verticais foram calculadas por **YAGUI** (1987) e têm resultantes aplicadas nos pontos 1,2,3,4,5 e 6 das seções transversais do núcleo em cada andar e são fornecidas a seguir:

- Para a laje da cobertura as ações verticais são:

$$P_1 = P_6 = 9,00 \text{ kN}$$

$$P_2 = P_5 = 6970,30 \text{ kN}$$

$$P_3 = P_4 = 7141,30 \text{ kN}$$

- Para as demais lajes são:

$$P_1 = P_6 = 105,50 \text{ kN}$$

$$P_2 = P_5 = 240,50 \text{ kN}$$

$$P_3 = P_4 = 370,00 \text{ kN}$$

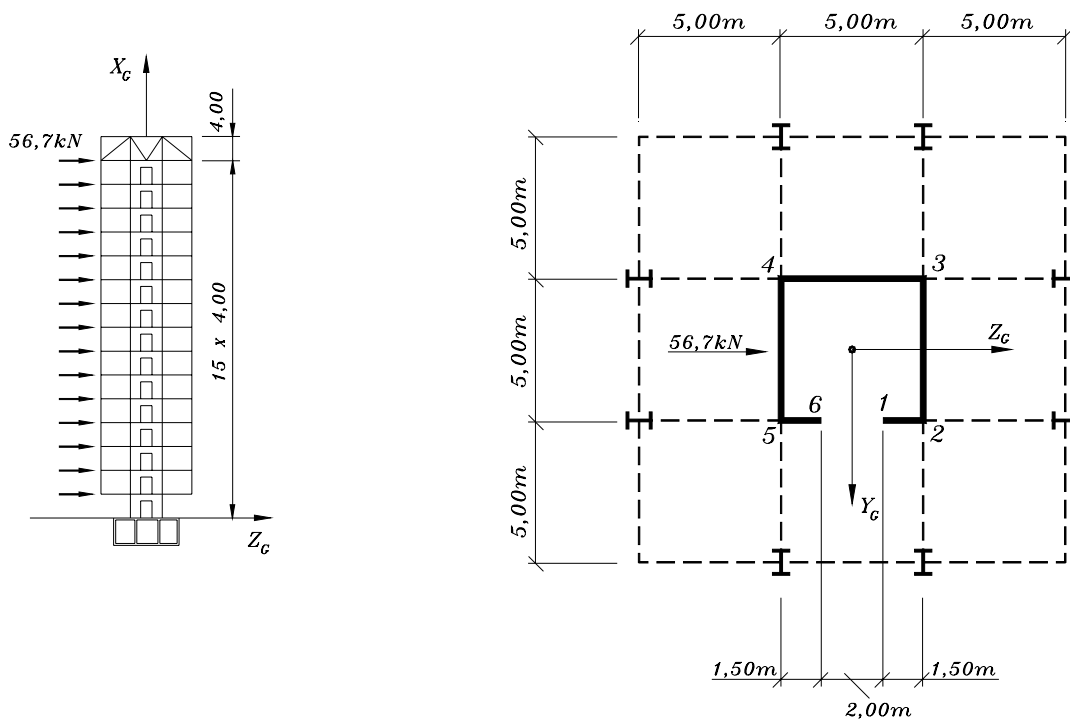


Figura 7.8 - Planta baixa e corte X_g x Z_g do núcleo idealizado por YAGUI (1987).

Os resultados obtidos por YAGUI (1987), MORI (1992) e os deste trabalho, considerando as ações acima, aplicadas simultaneamente na estrutura, serão comparados a seguir, tendo todos os seus vínculos com a chapa terra restringidos.

Com relação à flexibilidade da fundação será analisada apenas o vínculo na direção do empenamento, o qual é constituído por estacas de rigidez K_i posicionadas nos pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, conforme o esquema apresentado na figura 7.9.

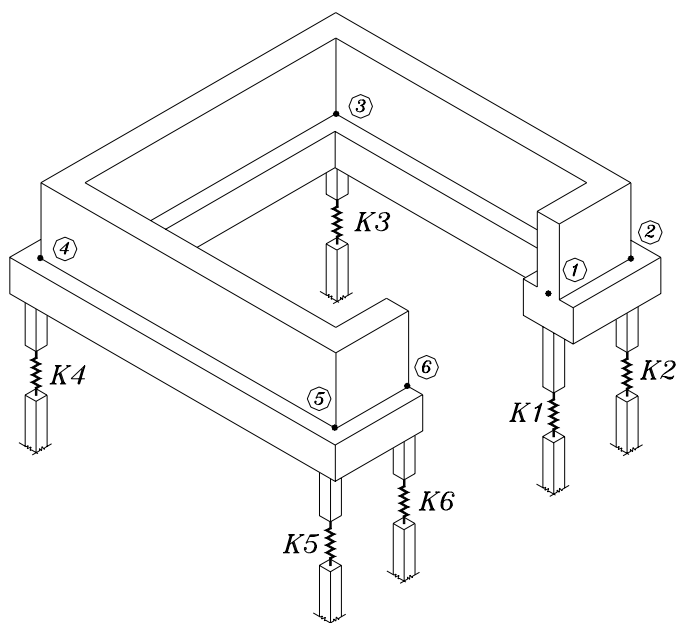
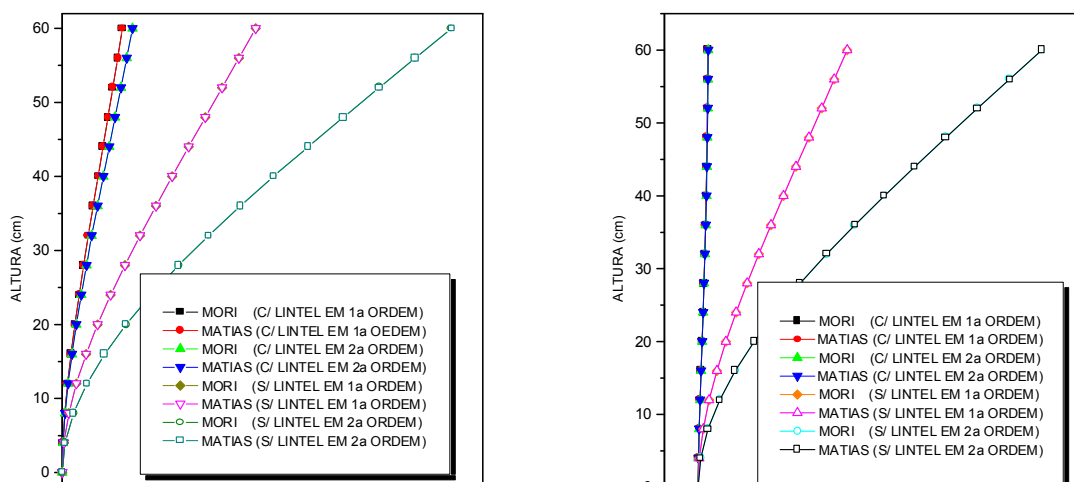


Figura 7.9 - Vinculação, na direção do empenamento, para o núcleo idealizado por YAGUI (1978).

Onde: $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = K_6 = 8,5 \times 10^4 \text{ kN / m}$

Nos gráficos das figuras 7.10.a e 7.10.b estão plotadas as curvas representativas das translações na direção de Z_g e das rotações em torno do centro de torção, respectivamente, considerando todos os vínculos da estrutura infinitamente rígidos. Os seus valores encontram-se nas tabelas 7.7 e 7.8 e foram obtidos pela teoria exposta neste trabalho e também por MORI (1992).

Como mencionado anteriormente, o confronto entre os valores, obtidos por MORI (1992) e os deste trabalho, tem com único objetivo avaliar a precisão dos resultados fornecidos pelo programa, a qual poderá ser evidenciada através da superposição das curvas das figuras 7.10.a e 7.10.b, bem como através da igualdade entre os valores das tabelas 7.7 e 7.8.



(A)

(B)

Figura 7.10 - Translações na direção de Z_g e rotações em torno de X_g , no núcleo idealizado por YAGUI (1978).

Tabela 7.7 - Translações na direção de Z_g com vínculos rígidos, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).

pavs.	Altura (cm)	a(cm)	b(cm)	c(cm)	D(cm)	e(cm)	f(cm)	g(cm)	h(cm)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	400	0.121	0.121	0.132	0.132	0.291	0.291	0.490	0.490
2	800	0.437	0.437	0.480	0.480	1.105	1.105	1.896	1.896
3	1200	0.898	0.898	0.994	0.994	2.365	2.365	4.127	4.127
4	1600	1.468	1.468	1.634	1.634	4.000	4.000	7.090	7.090
5	2000	2.119	2.119	2.373	2.373	5.935	5.935	10.693	10.693
6	2400	2.832	2.832	3.190	3.190	8.120	8.120	14.847	14.847
7	2800	3.590	3.590	4.064	4.064	10.501	10.501	19.470	19.470
8	3200	4.380	4.380	4.928	4.928	13.031	13.031	24.482	24.482
9	3600	5.190	5.190	5.931	5.931	15.671	15.671	29.810	29.810
10	4000	6.009	6.009	6.898	6.898	18.387	18.387	35.387	35.387
11	4400	6.833	6.833	7.887	7.887	21.152	21.152	41.152	41.152
12	4800	7.652	7.652	8.856	8.856	23.945	23.945	47.053	47.053
13	5200	8.469	8.469	9.838	9.838	26.750	26.750	53.045	53.045
14	5600	9.276	9.276	10.812	10.812	29.557	29.557	59.090	59.090
15	6000	10.075	10.075	11.779	11.779	32.363	32.363	65.158	65.158

Onde:

a - Translações na direção de Z_g com lintéis em 1ª ordem obtidos por MORI (1992).

b - Translações na direção de Z_g com lintéis em 1ª ordem obtidos por MATIAS.

c - Translações na direção de Z_g com lintéis em 2ª ordem obtidos por MORI (1992).

d - Translações na direção de Z_g com lintéis em 2ª ordem obtidos por MATIAS.

e - Translações na direção de Z_g sem lintéis em 1ª ordem obtidos por MORI (1992).

f - Translações na direção de Z_g sem lintéis em 1ª ordem obtidos por MATIAS.

g - Translações na direção de Z_g sem lintéis em 2ª ordem obtidos por **MORI** (1992).

h - Translações na direção de Z_g sem lintéis em 2ª ordem obtidos por **MATIAS**.

Tabela 7.8 - Rotações em torno de X_g , com vínculos rígidos, no núcleo idealizado por **YAGUI** (1978).

pavs.	Altura (cm)	a(rad)	b(rad)	c(rad)	d(rad)	e(rad)	f(rad)	g(rad)	h(rad)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	400	0.092	0.092	0.095	0.095	0.409	0.409	0.759	0.759
2	800	0.308	0.308	0.316	0.316	1.549	1.549	2.944	2.944
3	1200	0.584	0.584	0.600	0.600	3.306	3.306	6.417	6.417
4	1600	0.882	0.882	0.909	0.909	5.576	5.576	11.034	11.034
5	2000	1.182	1.182	1.219	1.219	8.262	8.262	16.658	16.658
6	2400	1.469	1.469	1.516	1.516	11.283	11.283	23.152	23.152
7	2800	1.736	1.736	1.793	1.793	14.562	14.562	30.385	30.385
8	3200	1.979	1.979	2.044	2.044	18.036	18.036	38.236	38.236
9	3600	2.195	2.195	2.267	2.267	21.699	21.699	46.586	46.586
10	4000	2.383	2.383	2.462	2.462	25.356	25.356	55.333	55.333
11	4400	2.542	2.542	2.627	2.627	29.119	29.119	64.382	64.382
12	4800	2.674	2.674	2.763	2.763	32.909	32.909	73.649	73.649
13	5200	2.781	2.781	2.873	2.873	36.708	36.708	83.061	83.061
14	5600	2.864	2.864	2.960	2.960	40.505	40.505	92.560	92.560
15	6000	2.931	2.931	3.030	3.030	44.297	44.297	102.100	102.100

Onde:

a - Rotações com lintéis e em primeira ordem obtidos por **MORI** (1992).

b - Rotações com lintéis e em primeira ordem obtidos por **MATIAS**.

c - Rotações com lintéis em segunda ordem obtidos por **MORI** (1992).

d - Rotações com lintéis em segunda ordem obtidos por **MATIAS**.

e - Rotações sem lintéis em primeira ordem obtidos por **MORI** (1992).

f - Rotações sem lintéis em primeira ordem obtidos por **MATIAS**.

g - Rotações sem lintéis em segunda ordem obtidos por **MORI** (1992).

h - Rotações sem lintéis em segunda ordem obtidos por **MATIAS**.

De acordo com a afirmação de **YAGUI** (1987) e com os valores aqui analisados, o efeito da força normal tem maior importância no modelo sem lintéis, onde ocorre uma diferença de aproximadamente 33 cm entre as translações horizontais em teoria de primeira e segunda ordens. No modelo com lintéis essa diferença fica em torno de 1,7 cm, evidenciando que sua rigidez à flexão é pouco afetada pelas ações verticais. Quanto às rotações, no modelo sem lintéis a diferença é de 57,8 radianos, o que mostra também a grande influência da força normal na flexibilidade da estrutura à torção. Como pode-se notar, no sistema contraventado

por lintéis a rigidez à torção praticamente não sofre alterações e a diferença entre as rotações de primeira e segunda ordens é inferior a 0,10 radianos.

Conforme os valores apresentados nas tabelas 7.9 e 7.10 e as curvas das figuras 7.11.a e 7.11.b, a flexibilidade do vínculo na direção do empenamento contribui para aumentar os deslocamentos tanto de primeira como os de segunda ordem. Com vínculos elásticos as diferenças analisadas anteriormente se acentuam sobretudo no sistema onde não foi considerada a rigidez dos lintéis. Com relação a translação na laje de topo ocorrem acréscimos de 0,035 cm e 17,12 cm para o modelo com e sem lintéis respectivamente. As rotações passam de 0,099 para 0,113 radianos com lintéis e de 57,803 para 89,58 radianos sem lintéis. Esses resultados evidenciam a importância de se considerar a rigidez de tais elementos, que contribuem para diminuir o empenamento da seção transversal do núcleo, aumentando sua resistência à torção e à flexão.

Tabela 7.9 - Translações na direção de Z_g , com vínculos rígidos e elásticos, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).

Pavs.	Altura (cm)	a(cm)	b(cm)	c(cm)	d(cm)	e(cm)	f(cm)	g(cm)	h(cm)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	400	0.121	0.180	0.132	0.200	0.291	0.686	0.490	1.423
2	800	0.437	0.540	0.480	0.590	1.105	1.879	1.896	3.891
3	1200	0.898	1.024	0.994	1.125	2.365	3.501	4.127	7.283
4	1600	1.468	1.607	1.634	1.780	4.000	5.481	7.090	11.501
5	2000	2.119	2.267	2.373	2.528	5.935	7.755	10.693	16.446
6	2400	2.832	2.984	3.190	3.349	8.120	10.265	14.847	22.018
7	2800	3.590	3.745	4.064	4.227	10.501	12.960	19.470	29.124
8	3200	4.380	4.536	4.928	5.147	13.031	15.795	24.482	34.676
9	3600	5.190	5.364	5.931	6.097	15.671	18.732	29.810	41.592
10	4000	6.009	6.167	6.898	7.066	18.387	21.739	35.387	48.795
11	4400	6.833	6.991	7.887	8.044	21.152	24.789	41.152	56.219
12	4800	7.652	7.813	8.856	9.027	23.945	27.836	47.053	63.800
13	5200	8.469	8.628	9.838	10.006	26.750	30.946	53.045	71.498
14	5600	9.276	9.435	10.812	10.980	29.557	34.028	59.090	79.243
15	6000	10.075	10.236	11.779	11.974	32.363	37.109	65.158	87.024

Onde:

a - Translações de primeira ordem na direção de Z_g , com lintéis e vínculo rígido.

b - Translações de primeira ordem na direção de Z_g , com lintéis e vínculo elástico.

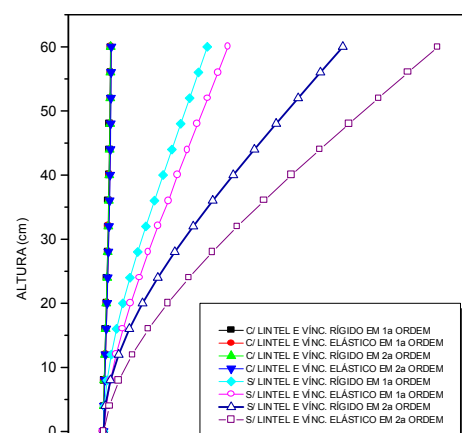
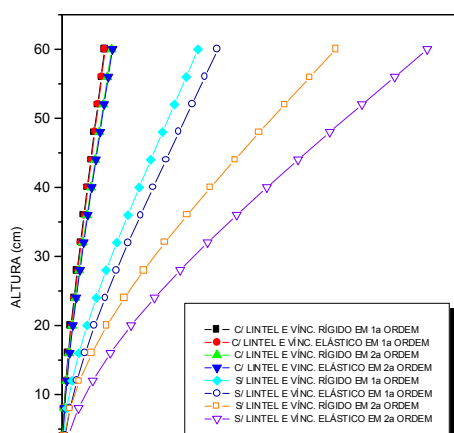
- c - Translações de segunda ordem na direção de Z_g , com lintéis e vínculo rígido.
- d - Translações de segunda ordem na direção de Z_g , com lintéis e vínculo elástico.
- e - Translações de primeira ordem na direção de Z_g , sem lintéis e vínculo rígido.
- f - Translações de primeira ordem na direção de Z_g , sem lintéis e vínculo elástico.
- g - Translações de segunda ordem na direção de Z_g , sem lintéis e vínculo rígido.
- h - Translações de segunda ordem na direção de Z_g , sem lintéis e vínculo elástico.

Tabela 7.10 - Rotações em torno de X_g , com vínculos rígidos e elásticos, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).

pavs.	Altura (rad)	a(rad)	b(rad)	c(rad)	d(rad)	e(rad)	f(rad)	g(rad)	h(rad)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	400	0.092	0.212	0.095	0.219	0.409	1.141	0.759	2.503
2	800	0.308	0.500	0.316	0.515	1.549	2.984	2.944	6.647
3	1200	0.584	0.818	0.600	0.844	3.306	5.415	6.417	12.273
4	1600	0.882	1.141	0.909	1.180	5.576	8.331	11.034	19.222
5	2000	1.182	1.456	1.219	1.506	8.262	11.641	16.658	27.335
6	2400	1.469	1.751	1.516	1.812	11.283	15.263	23.152	36.460
7	2800	1.736	2.034	1.793	2.095	14.562	19.125	30.385	46.446
8	3200	1.979	2.270	2.044	2.350	18.036	23.166	38.236	57.154
9	3600	2.195	2.488	2.267	2.576	21.699	27.733	46.586	68.452
10	4000	2.383	2.677	2.462	2.771	25.356	31.577	55.333	80.218
11	4400	2.542	2.836	2.627	2.937	29.119	35.869	64.382	92.343
12	4800	2.674	2.969	2.763	3.074	32.909	40.181	73.649	104.730
13	5200	2.781	3.076	2.873	3.184	36.708	44.495	83.061	117.290
14	5600	2.864	3.160	2.960	3.271	40.505	48.803	92.560	130.000
15	6000	2.931	3.227	3.030	3.340	44.297	53.104	102.100	142.680

Onde:

- a - Rotações de primeira ordem com lintéis e vínculo rígido.
- b - Rotações de primeira ordem com lintéis e vínculo elástico.
- c - Rotações de segunda ordem com lintéis e vínculo rígido.
- d - Rotações de segunda ordem com lintéis e vínculo elástico.
- e - Rotações de primeira ordem sem lintéis e vínculo rígido.
- f - Rotações de primeira ordem sem lintéis e vínculo elástico.
- g - Rotações de segunda ordem sem lintéis e vínculo rígido.
- h - Rotações de segunda ordem sem lintéis e vínculo elástico.



(A)

(B)

Figura 7.11 - Translações na direção de Z_g e rotações em torno de X_g , com vínculos rígidos e elásticos, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).

As tabelas 7.11 e 7.12, bem como os gráficos das figuras 7.12.a e 7.12.b, mostram a função dos lintéis como elemento de travamento, que impedem parcialmente as translações na direção de X_g dos pontos situados na linha do esqueleto das seções transversais do núcleo. Uma vez desprezada a rigidez ao empenamento, nota-se pelas curvas das duas figuras que os deslocamentos de primeira ordem no sistema com e sem estes elementos são exatamente os mesmos. Neste exemplo, como no anterior, a rigidez ao empenamento é de fundamental importância, sobretudo quando os lintéis fazem parte do sistema estrutural. Quando a referida rigidez não é considerada, as translações dos nós mestre na laje da cobertura aumentam de 10,08 cm para 150,32cm e de 32,37 cm para 150,32 cm nos modelos com e sem lintéis respectivamente. Nas rotações ocorrem acréscimos bem mais significativos; com lintéis passa de 2,93 para 263,23 radianos e de 44,30 para 263,23 radianos quando os lintéis não são considerados.

Tabela 7.11 - Valores das translações na direção Z_g , com e sem lintéis, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).

pavimentos	altura (cm)	a (cm)	b (cm)	c (cm)	d (cm)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	400	0.121	17.799	0.291	17.799
2	800	0.437	34.546	1.105	34.546
3	1200	0.898	50.224	2.365	50.224

4	1600	1.468	64.815	4.000	64.815
5	2000	2.119	78.307	5.935	78.307
6	2400	2.832	90.684	8.120	90.684
7	2800	3.590	101.930	10.501	101.930
8	3200	4.380	112.050	13.031	112.050
9	3600	5.190	121.010	15.671	121.010
10	4000	6.009	128.830	18.387	128.830
11	4400	6.833	135.470	21.152	135.470
12	4800	7.652	140.950	23.945	140.950
13	5200	8.469	145.250	26.750	145.250
14	5600	9.276	148.380	29.557	148.380
15	6000	10.075	150.320	32.363	150.320

Onde:

a - Translações com lintéis e com rigidez ao empenamento.

b - Translações com lintéis e sem rigidez ao empenamento.

c - Translações sem lintéis e com rigidez ao empenamento.

d - Translações sem lintéis e sem rigidez ao empenamento.

Tabela 7.12 - Valores das rotações em torno de X_g , com e sem lintéis, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).

pavimentos	altura (rad)	a (rad)	b (rad)	c (rad)	d (rad)
0	0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	400	0.092	32.903	0.409	32.903
2	800	0.308	63.613	1.549	63.613
3	1200	0.584	92.129	3.306	92.129
4	1600	0.882	118.450	5.576	118.450
5	2000	1.182	142.580	8.262	142.580
6	2400	1.469	164.520	11.283	164.520
7	2800	1.736	184.260	14.562	184.260
8	3200	1.979	201.810	18.036	201.810
9	3600	2.195	217.160	21.699	217.160
10	4000	2.383	230.320	25.356	230.320
11	4400	2.542	241.290	29.119	241.290
12	4800	2.674	250.060	32.909	250.060
13	5200	2.781	256.650	36.708	256.650
14	5600	2.864	261.030	40.505	261.030
15	6000	2.931	263.230	44.297	263.230

Onde:

a - Rotações com lintéis e com rigidez ao empenamento.

b - Rotações com lintéis e sem rigidez ao empenamento.

c - Rotações sem lintéis e com rigidez ao empenamento.

d - Rotações sem lintéis e sem rigidez ao empenamento.

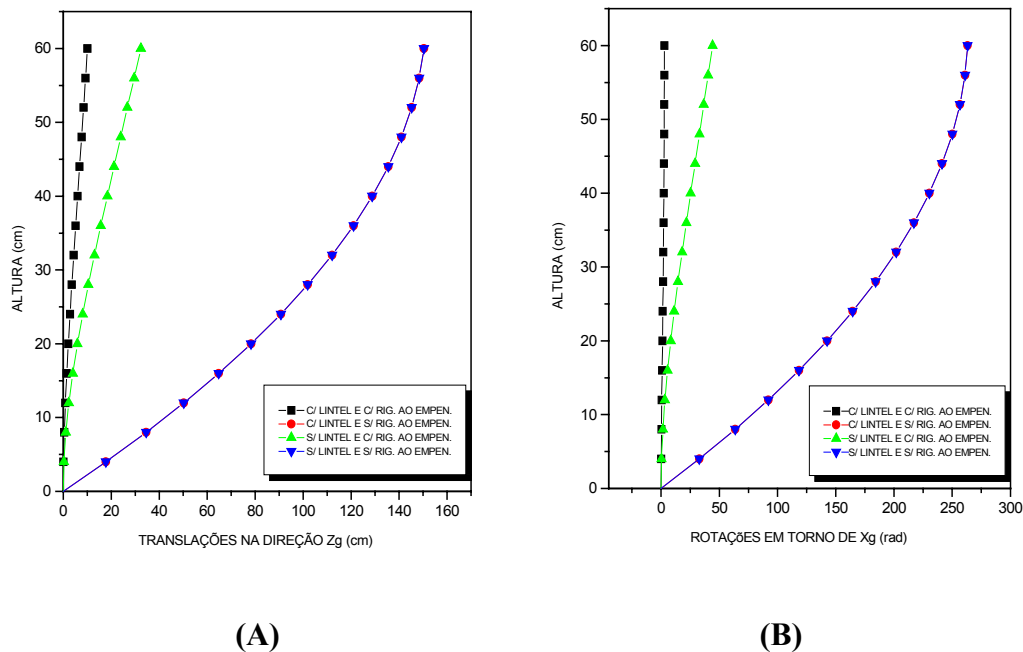


Figura 7.12 - Translações em Z_g e rotações em torno de X_g , com e sem lintéis, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).

Embora não tenham sido determinados para os núcleos, os parâmetros de instabilidade apresentados no item 5.6 foram aplicados à estrutura analisada neste exemplo com e sem lintéis, vinculada a fundações rígidas e flexíveis. De acordo com os resultados, a mesma deve ser dimensionada com os esforços calculados em teoria de segunda ordem devido ao critério de imobilidade dos nós. A tabela 7.13 contém os momentos na direção de y_5 (eixo de referência local), os quais estão plotados no gráfico da figura 7.13.

Tabela 7.13 - Momentos fletores, em cada pavimento e na direção do eixo local y_5 , no núcleo idealizado por YAGUI (1978).

pavimentos	altura (cm)	a (kN.m)	b (kN.m)	c (%)
0	0	2760	3130	13.41
1	400	2420	2780	14.88
2	800	2100	2450	16.67
3	1200	1800	2130	18.33
4	1600	1520	1830	20.40
5	2000	1270	1560	22.83

6	2400	1040	1300	25.00
7	2800	829	1060	27.80
8	3200	645	848	31.47
9	3600	484	657	34.63
10	4000	346	488	41.04
11	4400	230	342	48.70
12	4800	138	221	60.14
13	5200	69	123	78.60
14	5600	23	49	114.00
15	6000	0	0	00.00

Onde:

a - Momentos em y de primeira ordem.

b - Momentos em y de segunda ordem.

c - Porcentagem de acréscimo dos momentos de primeira ordem.

Como mostra a última coluna da tabela 7.13, o momento de segunda ordem na base é 13,41% maior que o de primeira ordem e nos pavimentos acima este percentual sobe gradualmente até atingir o valor máximo de 114% no décimo quarto pavimento.

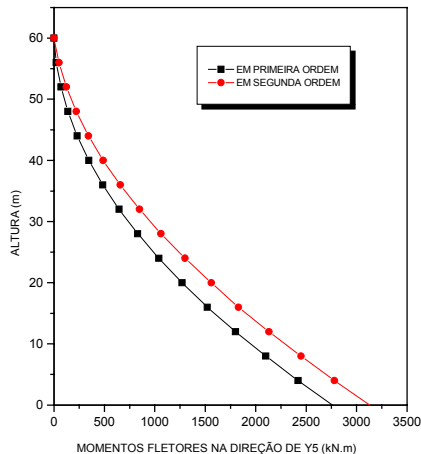


Figura 7.13 - Momentos fletores, em cada pavimento e na direção do eixo local y_s , no núcleo idealizado por YAGUI (1978).

A tabela 7.14 e o gráfico da figura 7.14 mostram os bimomentos em cada andar da estrutura, com e sem lintéis, em teoria de primeira e segunda ordens, obtidos neste trabalho e por MORI (1992). No sistema sem lintéis existe maior liberdade de movimento na direção do empenamento e em consequência disto os bimomentos surgem apenas pela variação do momento torçor ao longo da altura, resultando em valores bem menores que o do sistema com lintéis.

Tabela 7.14 - Bimomentos de 1ª e 2ª ordens, com e sem lintéis, em cada pavimento, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).

Pavimentos	altura (cm)	a(kN.m)	b(kN.m)	c(kN.m)	d(kN.m)	e(kN.m)	f(kN.m)	g(kN.m)	h(kN.m)
0	0	-3287.2	-3287.2	-3353.3	-3353.3	-12390.1	-12390.1	-22546	-22546
1	400	-2080.4	-2080.4	-2144.9	-2144.9	-10551.1	-10551.1	-20579	-20579
2	800	-1340.3	-1340.3	-1392.6	-1392.6	-8877.6	-8877.6	-18556.9	-18556.9
3	1200	-876.9	-876.9	-915.4	-915.4	-7363.3	-7363.3	-16518.9	-16518.9
4	1600	-577.7	-577.7	-603.9	-603.9	-6002	-6002	-14501.4	-14501.4
5	2000	-376.1	-376.1	-392.5	-392.5	-4788.5	-4788.5	-12536.2	-12536.2
6	2400	-232.7	-232.7	-241.9	-241.9	-3718	-3718	-10650.9	-10650.9
7	2800	-124.6	-124.6	-128.3	-128.3	-2786.3	-2786.3	-8869.2	-8869.2
8	3200	-38.6	-38.6	-38.6	-38.6	-1989.8	-1989.8	-7210.7	-7210.7
9	3600	32.2	32.2	34.7	34.7	-1325.3	-1325.3	-5691.3	-5691.3
10	4000	90.6	90.6	94.6	94.6	-790.2	-790.2	-4323.5	-4323.5
11	4400	135.6	135.6	140.3	140.3	-382.4	-382.4	-3116.7	-3116.7
12	4800	162.9	162.9	167.4	167.4	-100.4	-100.4	-2077.5	-2077.5
13	5200	162.9	162.9	166.6	166.6	-57	-57	-1210.4	-1210.4
14	5600	118.4	118.4	120.6	120.6	90.5	90.5	-517.6	-517.6

Onde:

- a - Bimomentos de primeira ordem, sem lintéis, obtidos por **MORI** (1992).
- b - Bimomentos de primeira ordem, sem lintéis, obtidos por **MATIAS**.
- c - Bimomentos de segunda ordem, sem lintéis, obtidos por **MORI** (1992).
- d - Bimomentos de segunda ordem, sem lintéis, obtidos por **MATIAS**.
- e - Bimomentos de primeira ordem, com lintéis, obtidos por **MORI** (1992).
- f - Bimomentos de primeira ordem, com lintéis, obtidos por **MATIAS**.
- g - Bimomentos de segunda ordem, com lintéis, obtidos por **MORI** (1992).
- h - Bimomentos de segunda ordem, com lintéis, obtidos por **MATIAS**.

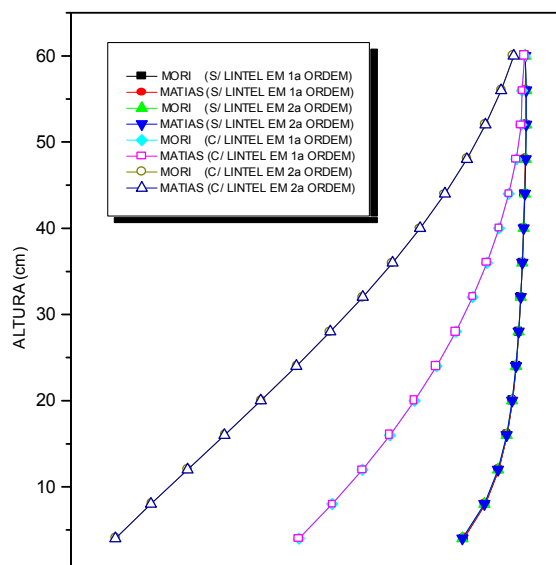


Figura 7.14 - Curvas dos bimomentos de 1ª e 2ª ordens, em cada pavimento, no núcleo idealizado por **YAGUI** (1978).

As tabelas 7.15.a e 7.15.b contêm os valores dos momentos fletores e cortantes de primeira ordem, nas extremidades direita dos lintéis, obtidos por **YAGUI** (1987), **MORI** (1992) e pelo programa desenvolvido nesta abordagem. A representação gráfica deste valores encontra-se nas figuras 7.15.a e 7.15.b.

Tabela 7.15 - Momentos fletores em Y_g e cortantes em Z_g de 1ª ordem, no núcleo idealizado por **YAGUI** (1978).

(A)				(B)			
pavimentos	a(kN.m)	b(kN.m)	c(kN.m)	pavimentos	d(kN)	e(kN)	f(kN)
15	13.705	4.775	4.775	15	6.303	4.951	4.951
14	8.263	5.759	5.759	14	8.056	5.966	5.966
13	9.531	7.328	7.328	13	9.603	7.580	7.580
12	11.381	9.235	9.235	12	11.465	9.547	9.547
11	13.427	11.331	11.331	11	13.511	11.712	11.712
10	15.544	13.516	13.516	10	15.628	13.975	13.975
9	17.644	15.717	15.717	9	17.729	16.259	16.259
8	19.642	17.865	17.865	8	19.730	18.492	18.492
7	21.432	19.878	19.878	7	21.520	20.582	20.582
6	22.867	21.633	21.633	6	22.958	22.400	22.400
5	23.751	22.936	22.936	5	23.844	23.741	23.741
4	23.776	23.469	23.469	4	23.862	24.267	24.267
3	22.436	22.694	22.694	3	22.536	23.424	23.424
2	19.024	19.711	19.711	2	19.126	20.289	20.289
1	12.383	13	13	1	12.485	13.330	13.330

Onde:

a - Momentos fletores de 1ª ordem em Y_g , obtidos por **YAGUI** (1978).

b - Momentos fletores de 1ª ordem em Y_g , obtidos por **MORI** (1992).

c - Momentos fletores de 1ª ordem em Y_g , obtidos por **MATIAS**.

d - Cortantes de 1ª ordem em Z_g , obtidos por **YAGUI** (1978).

e - Cortantes de 1ª ordem em Z_g , obtidos por **MORI** (1992).

f - Cortantes de 1ª ordem em Z_g , obtidos por MATIAS.

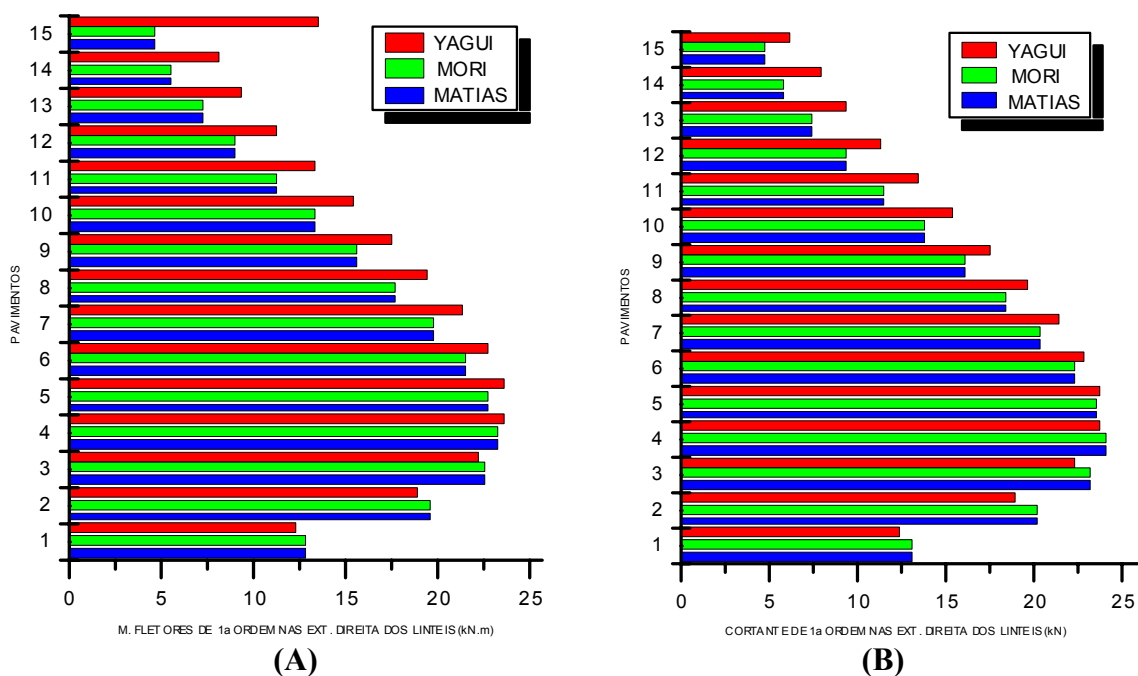


Figura 7.15 – Diagrama de barras dos momentos fletores e cortantes de 1ª ordem, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).

Na estrutura com lintéis são analisados os bimomentos de primeira e segunda ordens na altura da laje inferior, em cada pavimento, e ao nível da fundação, considerando seu vínculo na direção do empenamento restringido, elástico e livre. A tabela 7.16 reúne seus valores, os quais estão plotados no gráfico da figura 7.16. Para a base restringida, os resultados observados foram os maiores. Com relação à fundação elástica idealizada neste exemplo (ver figura 7.9), ocorreu a deformação axial das suas estacas quando foram aplicadas às ações na estrutura, resultando assim em um alívio de tensões nas seções transversais próximas da base. Quando não houve restrições ao empenamento, o bimomento no vínculo foi nulo e os valores obtidos foram os menores entre os três casos.

Tabela 7.16 - Valores dos bimomentos com vínculos livres, elásticos e restringidos ao empenamento, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).

pavimentos	a(kN.m)	b(kN.m)	c(kN.m)	d(kN.m)	e(kN.m)	f(kN.m)
1	-3290	-3350	-2390	-2460	0	0
2	-2080	-2140	-1550	-1610	-132	-129
3	-1340	-1390	-1030	-1070	-185	-182
4	-877	-915	-691	-723	-192	-188
5	-578	-604	-468	-488	-172	-168
6	-376	-393	-311	-323	-136	-137
7	-233	-242	-194	-200	-90.2	-85
8	-125	-128	-102	-103	-40.2	-34.4
9	-38.6	-38.6	-25	-23.7	11.5	17.6
10	32.2	34.7	40.3	43.6	61.9	68.3
11	90.6	94.6	95.3	99.9	108	115
12	136	140	138	143	146	152
13	163	167	164	169	169	174
14	163	167	164	168	166	170
15	118	121	119	121	120	122

Onde:

- a** - Bimomentos de primeira ordem com vínculo rígido.
- b** - Bimomentos de segunda ordem com vínculo rígido.
- c** - Bimomentos de primeira ordem com vínculo elástico.
- d** - Bimomentos de segunda ordem com vínculo elástico.
- e** - Bimomentos de primeira ordem com vínculo livre.
- f** - Bimomentos de segunda ordem com vínculo livre.

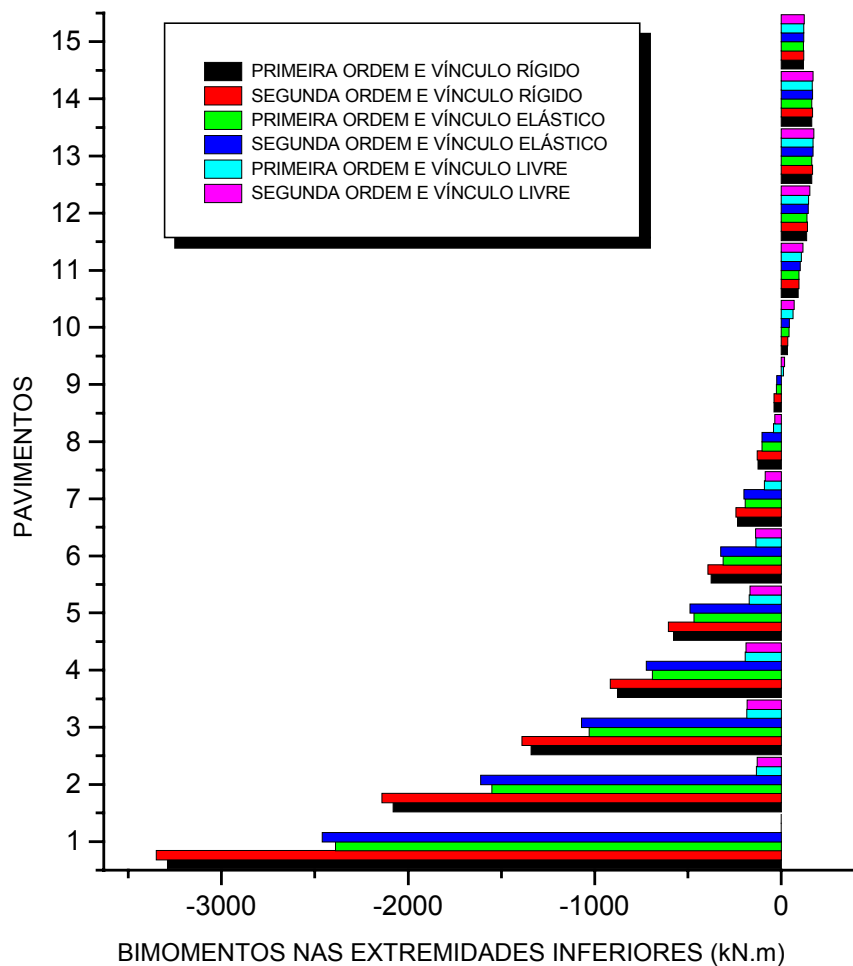


Figura 7.16 - Bimomentos em cada pavimento com vínculos livres, elásticos e restringido, no núcleo idealizado por YAGUI (1978).

7.4 - Exemplo número 3

Será analisado um edifício de concreto armado com 15 pavimentos, cujo pé-direito tem 4,00 m. Sua estrutura de contraventamento é composta de quatro pórticos planos, quatro pilares isolados e um núcleo. Na figura 7.17 encontra-se a planta do pavimento tipo, o qual tem vigas e pilares com seções transversais retangulares de 20 cm x 60 cm e 25 cm x 50 cm respectivamente. O núcleo tem seção transversal em forma de “U” com paredes de 15 cm de espessura e suas outras dimensões estão indicadas na mesma figura. Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal são 2000 kN/cm^2 e 800 kN/cm^2 , respectivamente.

Carregamento:

Ações aplicadas no último pavimento.

- Cargas uniformemente distribuídas ao longo das vigas - 10 kN/m
- Carga aplicadas nos pontos 1, 2, 3 e 4 situados na seção transversal do

núcleo:

Ponto 1 - 35 kN

Ponto 2 - 90 kN

Ponto 3 - 90 kN

Ponto 4 - 35 kN

- Ação horizontal aplicada na direção e sentido do eixo Y_g - 25.5 kN

Ações aplicadas nos demais pavimentos:

- Cargas uniformemente distribuídas ao longo das vigas - 20 kN/m
- Carga aplicadas nos pontos 1, 2, 3 e 4 situados na seção transversal do

núcleo:

Ponto 1 - 70 kN

Ponto 2 - 180 kN

Ponto 3 - 180 kN

Ponto 4 - 70 kN

- Ações horizontais aplicadas na direção e sentido do eixo Y_g - 51 kN

SILVA (1989) analisa esta estrutura em segunda ordem, considerando apenas a parcela correspondente ao efeito $P - \delta$. O objetivo é evidenciar a interação tridimensional entre pórticos planos, pilares isolados e núcleos resistentes. O núcleo é discretizado em painéis parede, os quais interagem entre si através de forças cortantes atuando ao longo de suas interseções.

MORI (1992) compara seus valores aos de **SILVA** (1989), adotando para o núcleo a teoria de **VLASSOV** (1961). Na análise não linear foi utilizada a matriz de rigidez da estrutura, calculada com as equações diferenciais dos elementos na posição deslocada.

Os resultados obtidos com o programa desenvolvido neste trabalho serão comparados com os dos dois autores, citados anteriormente, sendo ainda analisada a flexibilidade dos vínculos na direção do empenamento no núcleo e de rotação à flexão nos pilares.

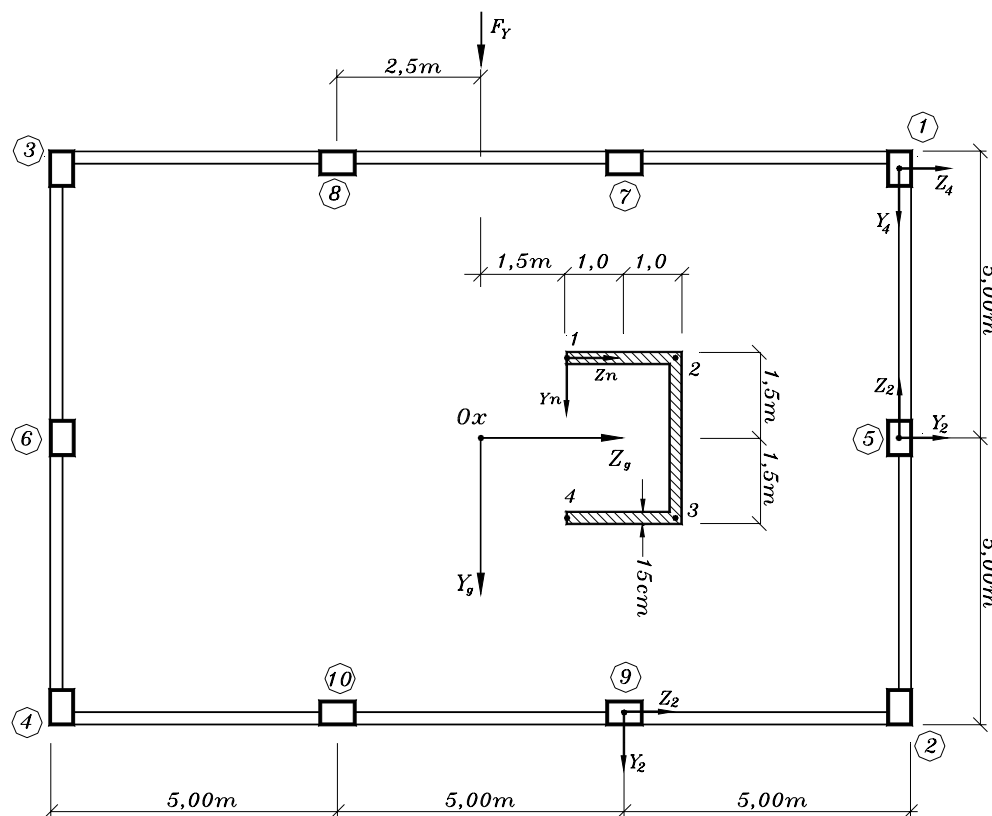


Figura 7.17 - Planta baixa da estrutura de contraventamento idealizada por **SILVA** (1989).

As tabelas 7.17 e 7.18 e os gráficos das figuras 7.18.a e 7.18.b apresentam as translações na direção de Y_g e as rotações em torno do centro elástico da estrutura. Como pode-se observar, os resultados deste trabalho são exatamente os mesmos obtidos por **MORI** (1992) e com relação a **SILVA** (1989) ocorrem diferenças mínimas, o que revela uma boa aproximação entre os dois processos de cálculo utilizados, mesmo sendo as considerações bastante distintas.

Tabela 7.17 - Valores das translações na direção Y_g em cada pavimento, no sistema de contraventamento misto idealizado por **SILVA** (1989).

pavimentos	altura (cm)	a(cm)	b(cm)	c(cm)	d(cm)	e(cm)	f(cm)
0	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	400	0.59	0.51	0.51	0.64	0.55	0.55
2	800	1.64	1.49	1.49	1.79	1.60	1.60
3	1200	2.90	2.68	2.68	3.17	2.88	2.88
4	1600	4.27	4.00	4.00	4.68	4.31	4.31
5	2000	5.72	5.41	5.41	6.26	5.82	5.82
6	2400	7.19	6.85	6.85	7.88	7.37	7.37
7	2800	8.65	8.30	8.30	9.48	8.93	8.93
8	3200	10.09	9.37	9.37	11.06	10.46	10.46
9	3600	11.49	11.12	11.12	12.57	11.95	11.95
10	4000	12.81	13.44	13.44	14.02	13.37	13.37
11	4400	14.07	13.70	13.70	15.39	14.72	14.72
12	4800	15.25	14.89	14.89	16.67	15.99	15.99
13	5200	16.36	16.00	16.00	17.87	17.18	17.18
14	5600	17.39	17.05	17.05	18.98	18.30	18.30
15	6000	18.36	18.05	18.05	20.04	19.37	19.37

Onde:

- a** - Translações de primeira ordem na direção de Y_g obtidas por **SILVA** (1989).
- b** - Translações de primeira ordem na direção de Y_g obtidas por **MORI** (1992).
- c** - Translações de primeira ordem na direção de Y_g obtidas por **MATIAS**.
- d** - Translações de segunda ordem na direção de Y_g obtidas por **SILVA** (1989).
- e** - Translações de segunda ordem na direção de Y_g obtidas por **MORI** (1992).
- f** - Translações de segunda ordem na direção de Y_g obtidas por **MATIAS**.

Tabela 7.18 - Valores das rotações em torno de X_g , em cada pavimento do sistema estrutural idealizado por SILVA (1989)

pavimentos	altura (cm)	a(rad)	b(rad)	c(rad)	d(rad)	e(rad)	f(rad)
0	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	400	0.65	0.69	0.69	0.72	0.75	0.75
2	800	1.54	1.63	1.63	1.73	1.79	1.79
3	1200	2.33	2.45	2.45	2.64	2.70	2.70
4	1600	2.99	3.13	3.13	3.40	3.45	3.45
5	2000	3.54	3.69	3.69	4.03	4.06	4.06
6	2400	3.98	4.14	4.14	4.54	4.56	4.56
7	2800	4.33	4.50	4.50	4.95	4.94	4.94
8	3200	4.61	4.78	4.78	5.26	5.23	5.23
9	3600	4.81	4.98	4.98	5.48	5.44	5.44
10	4000	4.94	5.11	5.11	5.62	5.57	5.57
11	4400	5.01	5.17	5.17	5.70	5.63	5.63
12	4800	5.01	5.17	5.17	5.70	5.61	5.61
13	5200	4.95	5.1	5.1	5.62	5.53	5.53
14	5600	4.81	4.96	4.96	5.47	5.37	5.37
15	6000	4.62	4.75	4.75	5.26	5.14	5.14

Onde:

- a** - Rotações de primeira ordem obtidas por SILVA (1989).
- b** - Rotações de primeira ordem obtidas por MORI (1992).
- c** - Rotações de primeira ordem obtidas por MATIAS.
- d** - Rotações de segunda ordem obtidas por SILVA (1989).
- e** - Rotações de segunda ordem obtidas por MORI (1992).
- f** - Rotações de segunda ordem obtidas por MATIAS.

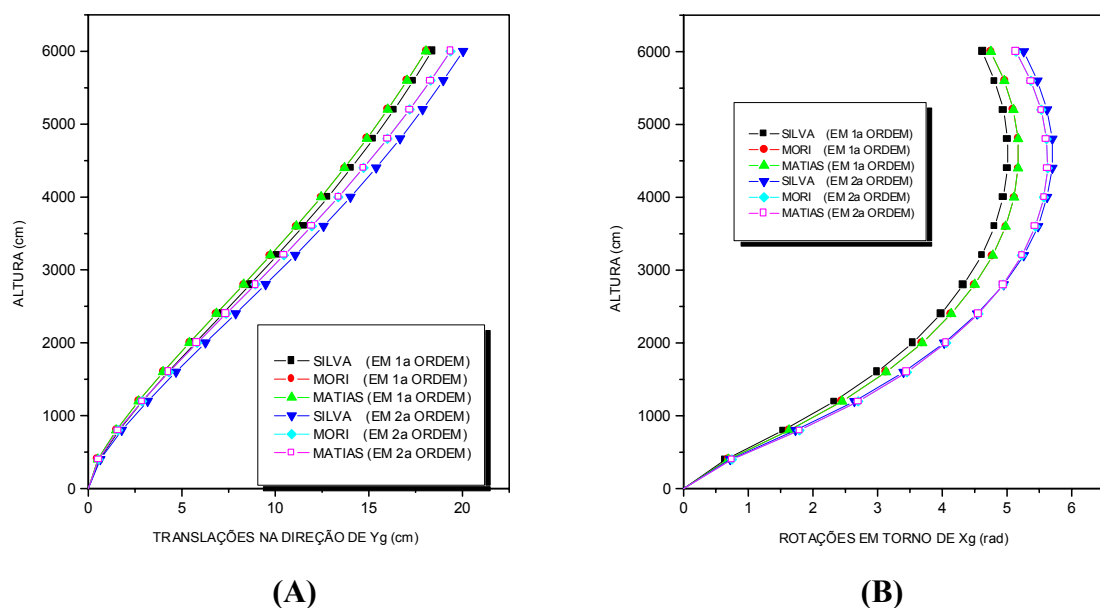


Figura 7.18 - Curvas das Translação na direção Z_g e das rotações em torno de X_g , relativas ao sistema estrutural idealizado por SILVA (1989).

Para a rigidez dos vínculos descritos anteriormente serão adotados os seguintes valores:

- Vínculo de rotação à flexão para os pilares - 30000 kN.m
- Para o núcleo na direção do empenamento serão adotadas estacas de rigidez K_1 , posicionadas nos pontos 1, 2, 3 e 4, como mostra a figura 7.19.

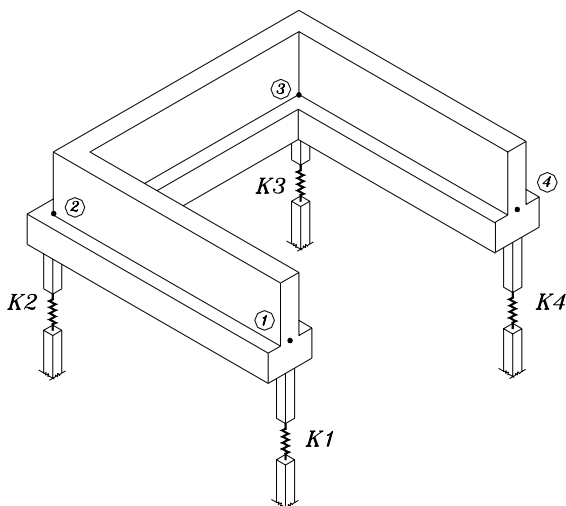


Figura 7.19 - Idealização do vínculo elástico na direção do empenamento para o núcleo do sistema estrutural idealizado por SILVA (1989).

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 30000 \text{ kN / m}$$

Submetendo a estrutura ao mesmo carregamento da análise anterior, obtém-se os deslocamentos mostrados nas tabelas 7.19.a e 7.19.b, relativos à translação na direção Y_g e à rotação em torno de X_g , respectivamente, em teoria de primeira ordem. Nos gráficos das figuras 7.20.a e 7.20.b estão as curvas representativas das elásticas de translação e rotação para os três casos (vínculos restringidos, elásticos na direção do empenamento da seção transversal do núcleo e na rotação devido à flexão dos pilares e por fim livres nestas mesmas direções). Nota-se que não ocorrem diferenças significativas nos deslocamentos laterais dos três modelos, isto se deve a elevada rigidez à flexão do núcleo, o qual não teve seus vínculos liberados nesta direção, mostrando com isso, que o efeito da flexibilidade dos demais vínculos pouco interferem nos deslocamentos da estrutura.

Tabela 7.19 - Translações em Y_g e rotações em X_g , ambos em 1ª ordem, com vínculos livres, elásticos e restringidos, para a estrutura idealizada por SILVA (1989).

(A)				(B)			
altura (cm)	a(cm)	b(cm)	c(cm)	altura (cm)	d(rad)	e(rad)	f(rad)
0	0.00	0.00	0.00	0	0.00	0.00	0.00
400	0.51	0.99	1.41	400	0.69	1.80	2.78
800	1.49	2.06	2.52	800	1.63	2.95	4.04
1200	2.68	3.26	3.73	1200	2.45	3.77	4.89
1600	4.00	4.59	5.06	1600	3.13	4.46	5.58
2000	5.41	5.99	6.46	2000	3.69	5.02	6.14
2400	6.85	7.44	7.91	2400	4.14	5.47	6.59
2800	8.30	8.89	9.36	2800	4.50	5.83	6.95
3200	9.37	10.32	10.80	3200	4.78	6.10	7.23
3600	11.12	11.71	12.16	3600	4.98	6.31	7.43
4000	13.44	13.04	13.50	4000	5.11	6.44	7.56
4400	13.70	14.30	14.76	4400	5.17	6.51	7.63
4800	14.89	15.48	15.95	4800	5.17	6.51	7.63
5200	16.00	16.60	17.07	5200	5.1	6.43	7.56
5600	17.05	17.65	18.12	5600	4.96	6.30	7.42
6000	18.05	18.64	19.11	6000	4.75	6.08	7.21

Onde:

- a - Translações de primeira ordem na direção de Y_g com vínculos rígidos.
- b - Translações de primeira ordem na direção de Y_g com vínculos elásticos.
- c - Translações de primeira ordem na direção de Y_g com vínculos livres.
- d - rotações de primeira ordem com vínculos rígidos.
- e - rotações de primeira ordem com vínculos elásticos.
- f - rotações de primeira ordem com vínculos livres.

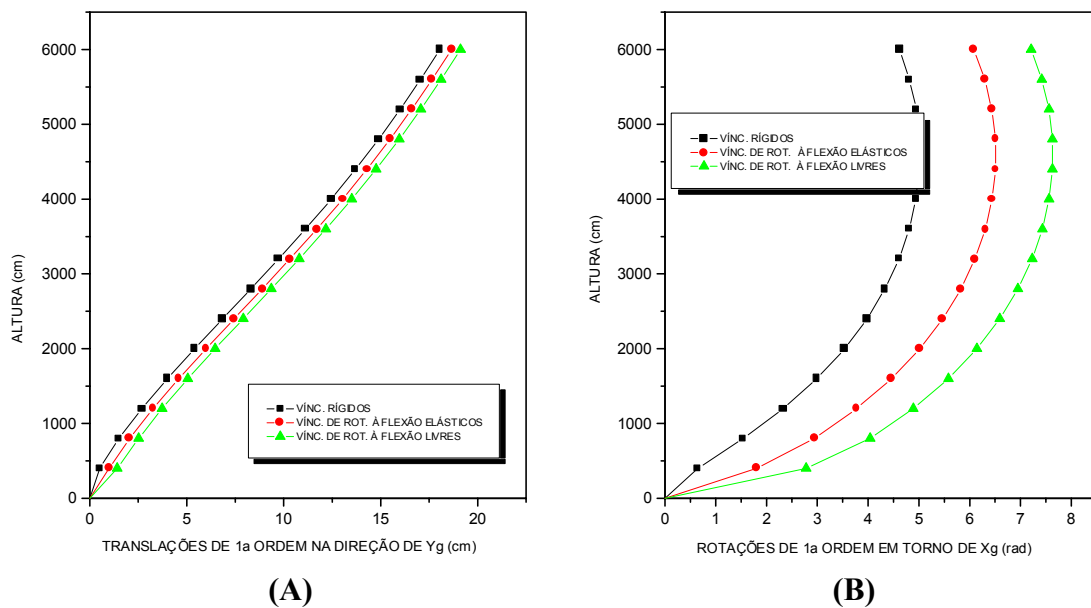


Figura 7.20 - Curvas da translações em Y_g e rotações em X_g , relativas à estrutura idealizada por SILVA (1989).

Com relação aos valores em teoria de segunda ordem, pode-se observar pelas tabelas 7.20.a e 7.20.b, bem como através dos gráficos das figuras 7.21.a e 7.21.b, que a estrutura se comporta da mesma forma, ocorrendo apenas um pequeno acréscimo nos deslocamentos.

Tabela 7.20 - Valores das translações em Y_g e das rotações em X_g , ambos em teoria de 2ª ordem, com vínculos livres, elásticos e restringidos para o sistema de contraventamento misto idealizado por SILVA (1989).

(A)				(B)			
altura (cm)	a(cm)	b(cm)	c(cm)	altura (cm)	d(rad)	e(rad)	f(rad)
0	0.00	0.00	0.00	0	0.00	0.00	0.00
400	0.55	1.14	1.78	400	0.75	2.12	3.58
800	1.60	2.31	3.02	800	1.79	3.44	5.10
1200	2.88	3.61	4.33	1200	2.70	4.37	6.07
1600	4.31	5.04	5.65	1600	3.45	5.13	6.84
2000	5.82	6.56	7.28	2000	4.06	5.74	7.45
2400	7.37	8.11	8.83	2400	4.56	6.24	7.95
2800	8.93	9.67	10.38	2800	4.94	6.62	8.33
3200	10.46	11.20	11.92	3200	5.23	6.91	8.63
3600	11.95	12.69	13.41	3600	5.44	7.12	8.84
4000	13.37	14.11	14.83	4000	5.57	7.25	8.97
4400	14.72	15.46	16.18	4400	5.63	7.31	9.03
4800	15.99	16.73	17.45	4800	5.61	7.30	9.02
5200	17.18	17.93	18.65	5200	5.53	7.21	8.93
5600	18.30	19.05	19.77	5600	5.37	7.05	8.87
6000	19.37	20.12	20.84	6000	5.14	6.28	8.55

Onde:

- a** - Translações de segunda ordem na direção de Y_g com vínculos rígidos.
- b** - Translações de segunda ordem na direção de Y_g com vínculos elásticos.
- c** - Translações de segunda ordem na direção de Y_g com vínculos livres.
- d** - Rotações de segunda ordem com vínculos rígidos.
- e** - Rotações de segunda ordem com vínculos elásticos.
- f** - Rotações de segunda ordem com vínculos livres.

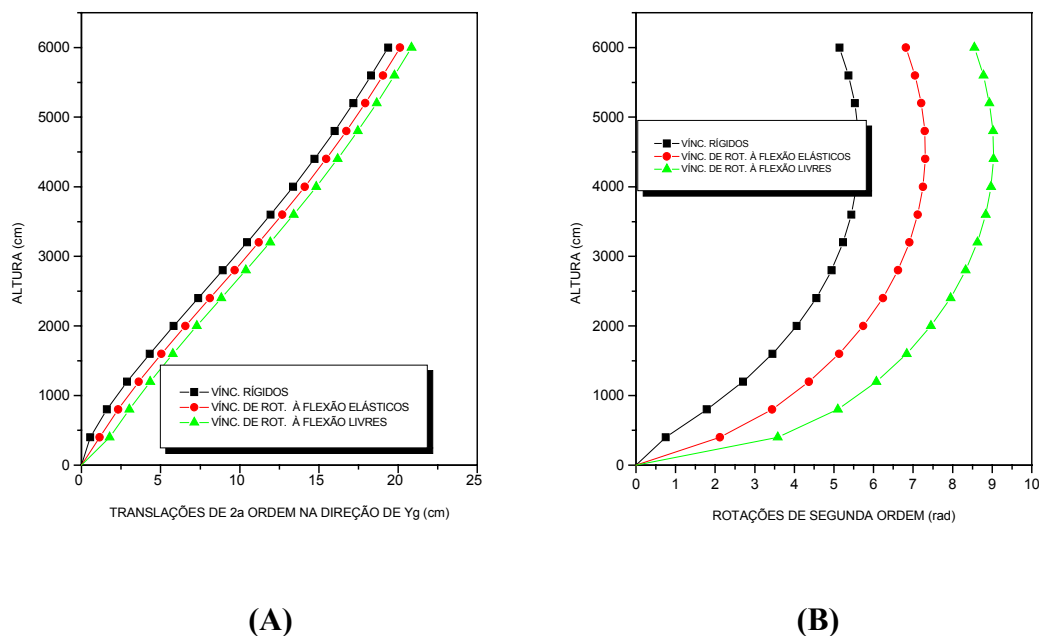


Figura 7.21 - Curvas das translações em Y_g e das rotações em X_g , ambas em 2ª ordem, com vínculos livres, elásticos e restringidos na estrutura idealizada por SILVA (1989).

Para mostrar que a restrição do vínculo de rotação à flexão do núcleo impede parcialmente os deslocamentos da estrutura com fundações flexíveis, serão acrescentadas ao sistema estrutural, em cada pavimento, quatro vigas do tipo 7 (ELM-07), ligando os quatro pilares isolados aos pontos 1, 2, 3 e 4 da seção transversal do núcleo (ver figura 7.22). O objetivo principal é liberar o referido vínculo sem tornar a estrutura hipostática.

Quando foi analisada a flexibilidade da fundação, o núcleo teve todos os seus vínculos restringidos com exceção da rotação em torno do seu eixo de referência “y”, o qual é perpendicular a ação do vento. Os outros elementos tiveram todos os vínculos de rotação liberados e os demais restringidos.

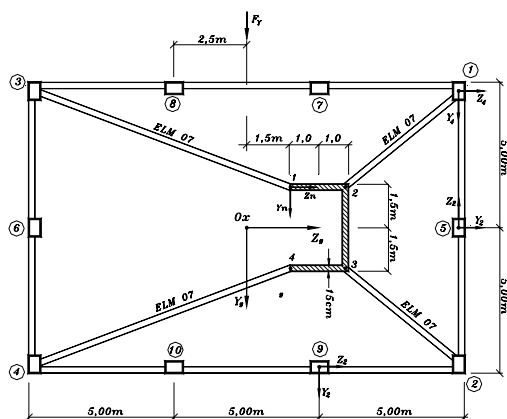


Figura 7.22 - Estrutura idealizada por SILVA (1989) com núcleo contraventado por elementos tipo ELM-07.

Na tabela 7.21 e no gráfico da figura 7.23 constam as translações de primeira e segunda ordens na direção de Y_g , as quais confirmam a influência do referido vínculo nos deslocamentos da estrutura. A vinculação na direção do empenamento, seja restringida, elástica ou livre pouco interfere na rigidez do sistema estrutural. Quando a mesma é liberada, ocorre apenas um pequeno acréscimo nas rotações e como previsto, um aumento do empenamento das seções transversais do núcleo, sobretudo naquelas mais próximas da fundação.

Tabela 7.21 - Translações de 1ª e 2ª ordens em Y_g , com vínculos rígidos, elásticos e livres, no sistema estrutural idealizado por SILVA (1989), sendo o núcleo contraventado por elementos ELM-07.

pavimentos	Altura	a(cm)	b(cm)	c(cm)	d(cm)	e(cm)	f(cm)
0	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	400	0.53	0.57	2.10	2.62	3.00	3.65
2	800	1.43	1.54	3.54	4.12	5.15	6.08
3	1200	2.44	2.68	4.97	5.75	7.15	8.31
4	1600	3.46	3.91	6.41	7.32	9.06	10.43
5	2000	4.85	5.18	7.85	8.87	10.88	12.44
6	2400	6.05	6.47	9.27	10.38	12.61	14.35
7	2800	7.26	7.75	10.63	11.85	14.24	16.15
8	3200	8.42	8.98	11.94	13.25	15.78	17.84
9	3600	9.53	10.16	13.18	14.58	17.22	19.41
10	4000	10.58	11.27	14.34	15.82	18.56	20.88
11	4400	11.57	12.30	15.42	16.97	19.80	22.24
12	4800	12.47	13.26	16.48	18.044	20.95	23.50
13	5200	13.31	14.14	17.35	19.032	22.02	24.66
14	5600	14.09	14.96	18.21	19.95	23.01	25.74
15	6000	14.80	15.72	19.03	20.80	23.94	26.77

Onde:

- a - Translações de primeira ordem na direção de Y_g com vínculos rígidos.
- b - Translações de segunda ordem na direção de Y_g com vínculos rígidos.
- c - Translações de primeira ordem na direção de Y_g com vínculos elásticos.
- d - Translações de segunda ordem na direção de Y_g com vínculos elásticos.
- e - Translações de primeira ordem na direção de Y_g com vínculos livres.
- f - Translações de segunda ordem na direção de Y_g com vínculos livres.

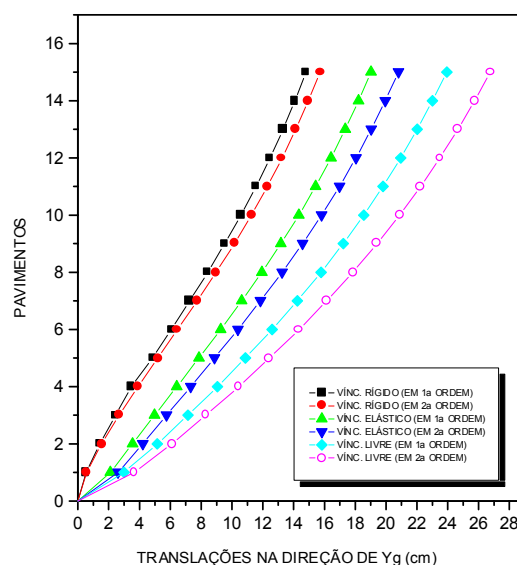


Figura 7.23 - Curvas das translações em Y_g , com vínculos elásticos, livres e restringidos, no sistema estrutural idealizado por SILVA (1989), sendo o núcleo contraventado por elementos ELM-07.

Para analisar a influência da rigidez ao empenamento, a estrutura da figura 7.17 foi processada com todos os seus vínculos restringidos e o núcleo modelado como um elemento do tipo 4 (ELM-04). Os resultados obtidos foram comparados com os valores das quartas e sétimas colunas das tabelas 7.17 e 7.18, transcritos para a tabela 7.22.a e 7.22.b. Como pode-se observar não ocorreram diferenças significativas nos deslocamentos (ver figuras 7.24.a e 7.24.b), o que permite constatar que a rigidez ao empenamento do núcleo em sistemas de contraventamento desse tipo pouco influi para aumentar a resistência do conjunto. O coeficiente de rigidez à torção por pavimento, em teoria de primeira ordem, sofre uma redução de apenas 2,17% quando é desprezada a rigidez do núcleo ao empenamento, passando de $1,243 \times 10^{10}$ para $1,216 \times 10^{10}$ kN.m.

Tabela 7.22 - Valores das translações em Y_g e das rotações em X_g , com e sem rigidez ao empenamento, no sistema estrutural idealizado por SILVA.

(A)					(B)				
altura(cm)	a(cm)	b(cm)	c(cm)	d(cm)	altura(cm)	e(rad)	f(rad)	g(rad)	h(rad)
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0	0.00	0.00	0.00	0.00
400	0.51	0.56	0.55	0.60	400	0.69	0.81	0.75	0.88
800	1.49	1.54	1.60	1.67	800	1.63	1.77	1.79	1.95
1200	2.68	2.74	2.88	2.95	1200	2.45	2.60	2.70	2.87
1600	4.00	4.06	4.31	4.38	1600	3.13	3.28	3.45	3.62
2000	5.41	5.45	5.82	5.89	2000	3.69	3.83	4.06	4.23
2400	6.85	6.91	7.37	7.44	2400	4.14	4.28	4.56	4.72
2800	8.30	8.36	8.93	8.99	2800	4.50	4.64	4.94	5.10
3200	9.37	9.79	10.46	10.53	3200	4.78	4.92	5.23	5.40
3600	11.12	11.17	11.95	12.01	3600	4.98	5.12	5.44	5.60
4000	13.44	12.50	13.37	13.43	4000	5.11	5.25	5.57	5.73
4400	13.70	13.76	14.72	14.78	4400	5.17	5.31	5.63	5.79
4800	14.89	14.95	15.99	16.05	4800	5.17	5.31	5.61	5.78
5200	16.00	16.06	17.18	17.24	5200	5.1	5.24	5.53	5.69
5600	17.05	17.11	18.30	18.37	5600	4.96	5.10	5.37	5.53
6000	18.05	18.10	19.37	19.43	6000	4.75	4.89	5.14	5.30

Onde:

- a** - Translações de primeira ordem na direção de Y_g com rigidez ao empenamento.
- b** - Translações de primeira ordem na direção de Y_g sem rigidez ao empenamento.
- c** - Translações de segunda ordem na direção de Y_g com rigidez ao empenamento.
- d** - Translações de segunda ordem na direção de Y_g sem rigidez ao empenamento.
- e** - rotações de primeira ordem com rigidez ao empenamento.
- f** - rotações de primeira ordem sem rigidez ao empenamento.
- g** - rotações de segunda ordem com rigidez ao empenamento.
- h** - rotações de segunda ordem sem rigidez ao empenamento.

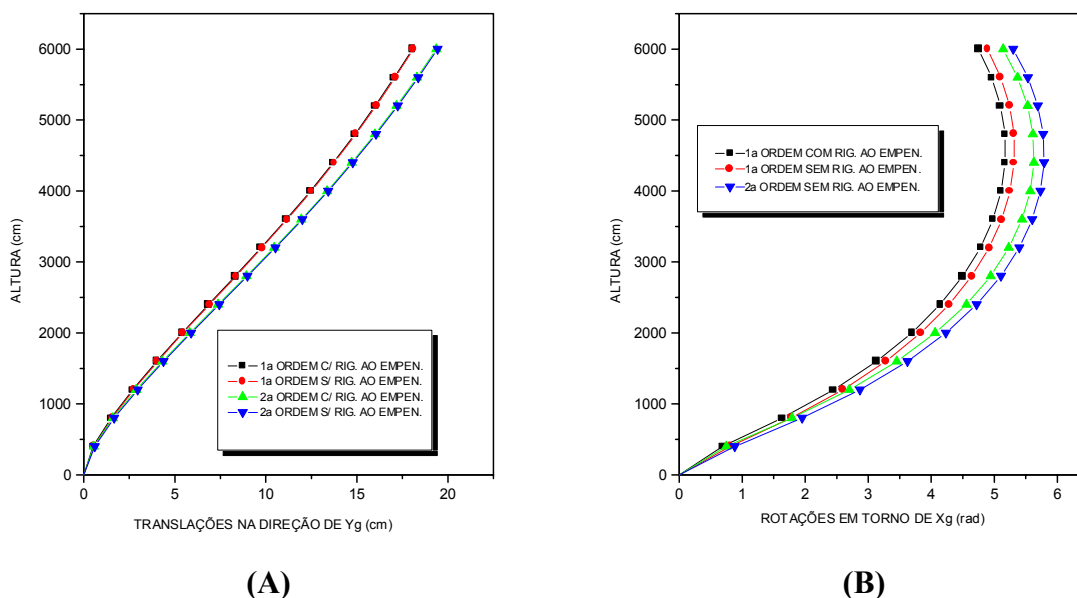


Figura 7.24 - Curvas das translações em Y_g e das rotações em X_g , ambas em 1ª e 2ª ordens, no sistema estrutural idealizado por SILVA (1989), com e sem rigidez ao empenamento.

Os momentos em teoria de primeira ordem nas extremidades inferiores do pilar (ELM-04) de número 3, obtidos por SILVA (1989), MORI (1992) e com o

programa desenvolvido neste trabalho, encontram-se na tabela 7.23 e no diagrama de barras da figura 7.25.

Tabela 7.23 - Valores dos momentos de 1ª ordem no **ELM-04** de número 3, pertencente à estrutura idealizada por **SILVA** (1989).

Pavimentos	a(kN.cm)	b(kN.cm)	c(kN.cm)
1	135.8	133.78	133.78
2	96.1	113.39	113.39
3	94.1	107.58	107.58
4	88.7	104.44	104.44
5	83	99.51	99.51
6	76.2	93.54	93.54
7	68.7	86.59	86.59
8	60.6	78.94	78.94
9	52	70.79	70.79
10	43.2	62.33	62.33
11	34.4	53.74	53.74
12	25.5	45.17	45.17
13	17	36.92	36.92
14	8.4	28.53	28.53
15	4.5	24.86	24.86

Onde:

- a - Momentos obtidos por **SILVA** (1989).
- b - Momentos obtidos por **MORI** (1992).
- c - Momentos obtidos por **MATIAS**.

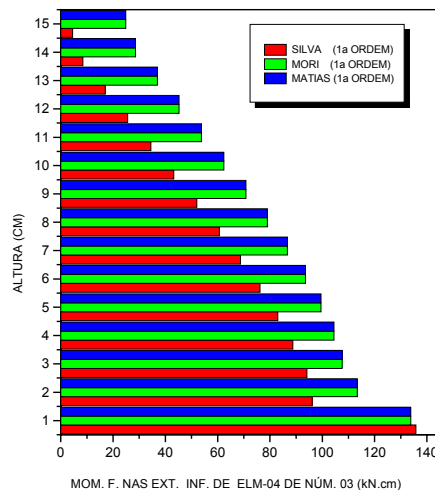


Figura 7.25 - Diagrama de momentos fletores em y_4 (eixo local), resultantes no **ELM-04** de número 3, na estrutura idealizada por **SILVA** (1989).

A tabela 7.24 e o diagrama de barras da figura 7.26 apresentam os momentos de primeira e segunda ordens nas extremidades inferiores do núcleo. Os valores obtidos por **MORI** (1992) e os deste trabalho são praticamente iguais aos de

SILVA (1989), mostrando mais uma vez a boa aproximação existente entre os dois métodos.

Para fazer a comparação entre os valores de **SILVA** (1989) com os desta abordagem utilizou-se a seguinte expressão:

$$M_{nuc} = M_5 + 1,5.(N_6 + N_7) \quad (7.5)$$

Onde: M_5 é o momento fletor atuante na parede 5

N_6 e N_7 são as forças normais nas parede 7 e 6 respectivamente (figura 7.21)

Tabela 7.24 - Valores dos momentos fletores em 1ª e 2ª ordens nas extremidades inferiores dos **ELM-05**, no sistema de contraventamento misto idealizado por **SILVA** (1989).

pavimentos	a(kN.cm)	b(kN.cm)	c(kN.cm)	d(kN.cm)	e(kN.cm)	f(kN.cm)
15	-9494.3	-9805	-9805	-10147.5	-10304	-10304
14	-7280.6	-7462.1	-7462.1	-7873.6	-7934.5	-7934.5
13	-5472.6	-5590	-5590	-5968.3	-6004	-6004
12	-3987.1	-4044.1	-4044.1	-4376.7	-4382.1	-4382.1
11	-2763.5	-2777.8	-2777.8	-3048.9	-3033.7	-3033.7
10	-1762.5	-1745.5	-1745.5	-1952.1	-1921.6	-1921.6
9	-952.7	-914.1	-914.1	-1059.1	-1018	-1018
8	-310.1	-257.1	-257.1	-347.8	299.6	299.6
7	183.6	245	245	199.4	251.8	251.8
6	542.3	608.5	608.5	595.7	650.3	650.3
5	774.9	841.5	841.5	851.5	906	906
4	886.4	949.7	949.7	972.3	1024	1024
3	887.9	934.7	934.7	961	1008	1008
2	745.4	790.9	790.9	813.8	852.7	852.7
1	496	527.9	527.9	536.5	568.4	568.4

Onde:

a - Momentos obtidos por **SILVA** (1989) em primeira ordem.

b - Momentos obtidos por **MORI** (1992) em primeira ordem.

c - Momentos obtidos por **MATIAS** em primeira ordem.

a - Momentos obtidos por **SILVA** (1989) em segunda ordem.

b - Momentos obtidos por **MORI** (1992) em segunda ordem.

c - Momentos obtidos por **MATIAS** em segunda ordem.

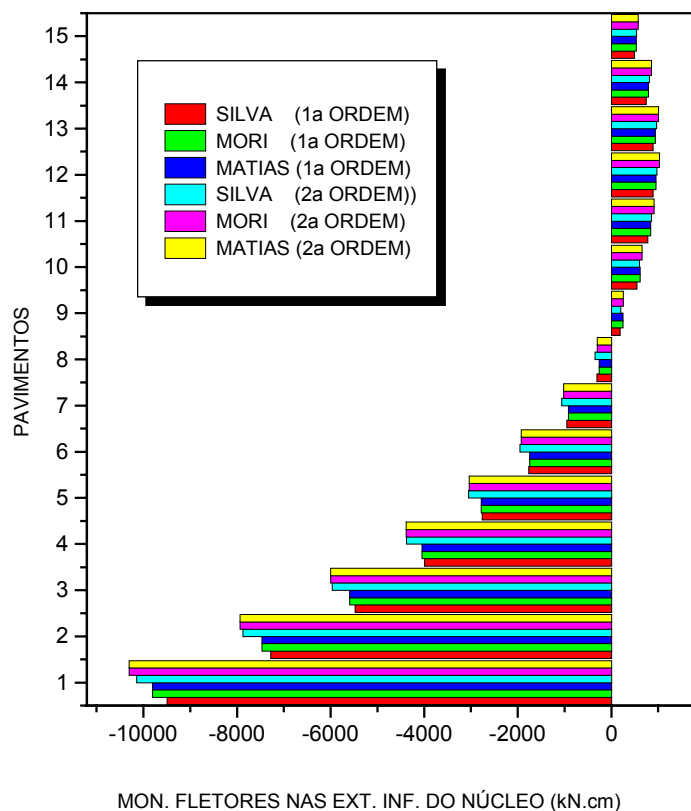


Figura 7.26 - Curvas dos momentos fletores, em 1ª e 2ª ordens, nas extremidades inferiores dos **ELM-05**, pertencente ao sistema estrutural idealizado por **SILVA** (1989).

Os momentos fletores nas extremidades inferiores do pilar 4 (**ELM-04**), em cada pavimento, nos casos em que o núcleo foi modelado com e sem rigidez ao empenamento encontram-se nas tabelas 7.25.a e 7.25.b, bem como nos diagramas de barra das figuras 7.27.a e 7.27.b. Nas análises em primeira e segunda ordens, observou-se um acréscimo em torno de 17% no valor da extremidade ligada à fundação, quando foi desprezada a resistência do núcleo ao empenamento. No primeiro pavimento o aumento foi de 1,6% para análise linear e 2,1 % para a não linear, nos demais andares praticamente não houve diferenças.

Tabela 7.25 - Valores dos momentos de 1ª e 2ª ordens no pilar 4 (em relação ao eixo local z_4), na estrutura idealizada por SILVA (1989), considerando seu núcleo com e sem rigidez ao empenamento.

(A)			(B)		
Pavimentos	a(kN.cm)	b(kN.cm)	pavimentos	c(kN.cm)	d(kN.cm)
1	159.82	186.73	1	166.41	195.4
2	208.07	211.37	2	225.94	230.63
3	198.4	198.88	3	217.3	217.99
4	190.03	189.91	4	207.27	207.13
5	181.72	181.6	5	196.92	196.73
6	173.82	173.71	6	187.03	186.86
7	165.9	165.8	7	177.31	177.17
8	157.67	157.59	8	167.51	167.4
9	148.93	148.87	9	157.45	157.37
10	139.52	139.48	10	146.96	146.9
11	129.33	129.31	11	135.92	134.88
12	118.26	118.26	12	124.2	124.18
13	106.27	106.25	13	111.75	111.7
14	92.85	92.83	14	97.98	97.95
15	85.79	84.56	15	91.11	89.84

Onde:

- a - Momentos em primeira ordem com rigidez ao empenamento .
- b - Momentos em primeira ordem sem rigidez ao empenamento.
- c - Momentos em segunda ordem com rigidez ao empenamento.
- d - Momentos em segunda ordem sem rigidez ao empenamento.

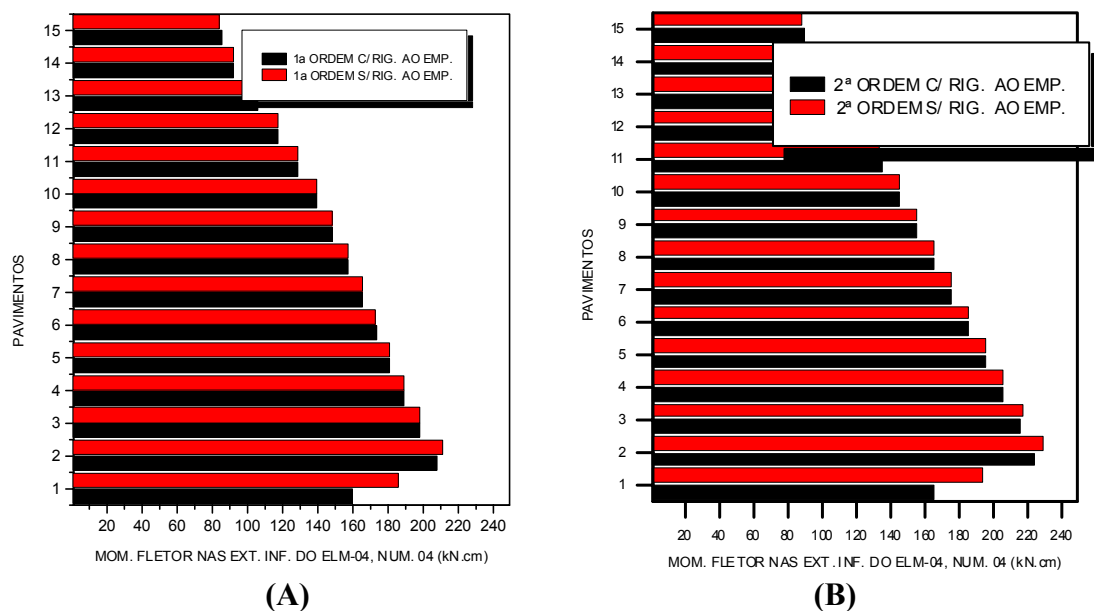


Figura 7.27- Diagrama dos momentos de 1ª e 2ª ordens no pilar 4 (eixo local z_4) na estrutura idealizada por SILVA (1989), considerando seu núcleo com e sem rigidez ao empenamento.

Por fim a tabela 7.26 e o diagrama da figura 7.28 apresentam os momentos fletores no núcleo, ao nível de cada pavimento, para a estrutura com vínculos rígidos, elásticos e livres. O núcleo terá vinculação flexível na direção do empenamento, sendo as demais restringidas. Nota-se que apenas nas extremidades da base e do primeiro andar ocorrem pequenos acréscimos, quando os vínculos são parcialmente liberados ou totalmente livres, sendo os valores nos demais andares praticamente iguais.

Tabela 7.26 - Valores dos momentos de 1ª ordem nas extremidades inferiores do **ELM-05**, considerando os vínculos da estrutura idealizada por **SILVA (1989)**, rígidos, elásticos e livres.

Pavimentos	a(kN.cm)	B(kN.cm)	c(kN.cm)
1	-980	-1010	-991
2	-746	-737	-739
3	-559	-560	-561
4	-404	-404	-405
5	-278	-278	-278
6	-175	-174	-175
7	-91.4	-91.2	-91.8
8	-25.7	-25.6	-26
9	24.6	24.7	24.3
10	60.8	61	60.7
11	84.1	84.2	84
12	95	95	94.9
13	93.5	93.5	93.4
14	79.1	79.1	79
15	52.8	52.8	52.8

Onde: **a** - momentos de primeira ordem para os vínculos rígidos;
b - Momentos de primeira ordem para os vínculos elásticos;
c - momentos de primeira ordem para os vínculos livres.

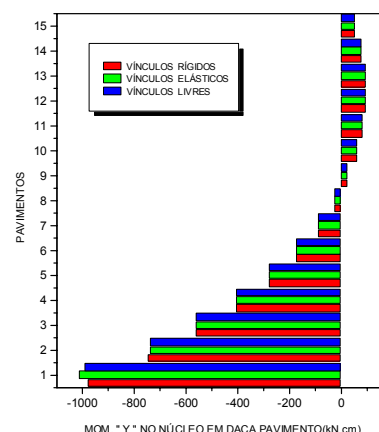


Figura 7.28 - Curvas dos momentos de 1ª ordem nas extremidades inferiores do **ELM-05**, considerando os vínculos da estrutura idealizada por **SILVA (1989)** rígidos, elásticos e livres.

7.5 - Exemplo número 4

Trata-se de um edifício com elevado número de pavimentos, contendo todos os tipos de elementos, descritos no capítulo 2. Sua estrutura de contraventamento possui 5 modelos (pavimentos tipo), os quais podem ser vistos na figura 7.29. O primeiro tem 5 pavimentos, o segundo 35 e os três últimos 5 cada um, totalizando 55 andares. A inércia dos pilares tipo 3 (**ELM-03**) varia de um modelo para o outro. O núcleo (**ELM-05**) tem a mesma seção transversal em todos andares e todas as suas paredes possuem espessura igual a 10 cm. As vigas (**ELM-06** e **ELM-07**), diagonais (**ELM-08** e **ELM-09**) e os pilares do tipo 1, 2 e 4 (**ELM-01**, **ELM-02** e **ELM-04**) possuem seção transversal constante ao longo da altura, cujas dimensões encontra-se a seguir:

- Seções transversais que são constantes em todos os modelos:

ELM-01 - 10 cm x 10 cm

ELM-02 - 20 cm x 40 cm

ELM-04 - 20 cm x 250 cm

ELM-06 - 15 cm x 60 cm

ELM-07 - 15 cm x 60 cm

ELM-08 - 10 cm x 10 cm

- Em todos os modelos exceto o primeiro:

ELM-09 - 16 cm x 60 cm

- Modelo 1: **ELM-03** - 20cm x 40 cm
- Modelo 2: **ELM-03** - 20cm x 80 cm
- Modelo 3: **ELM-03** - 20cm x 120 cm
- Modelo 4: **ELM-03** - 20cm x 160 cm
- Modelo 5: **ELM-03** - 20cm x 200 cm

Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal são iguais a 2000 kN/cm^2 e 800 kN/cm^2 , respectivamente. O pé-direito em todos os modelos vale 300 cm . Na figura 7.29 os elementos que constituem a estrutura são identificados nas plantas baixas dos seus respectivos pavimentos pelo esquema exposto abaixo:

NE / Ei / NI, NF

Onde NE é o número do elemento e Ei é a identificação do tipo de elemento.

E1 = ELM-01

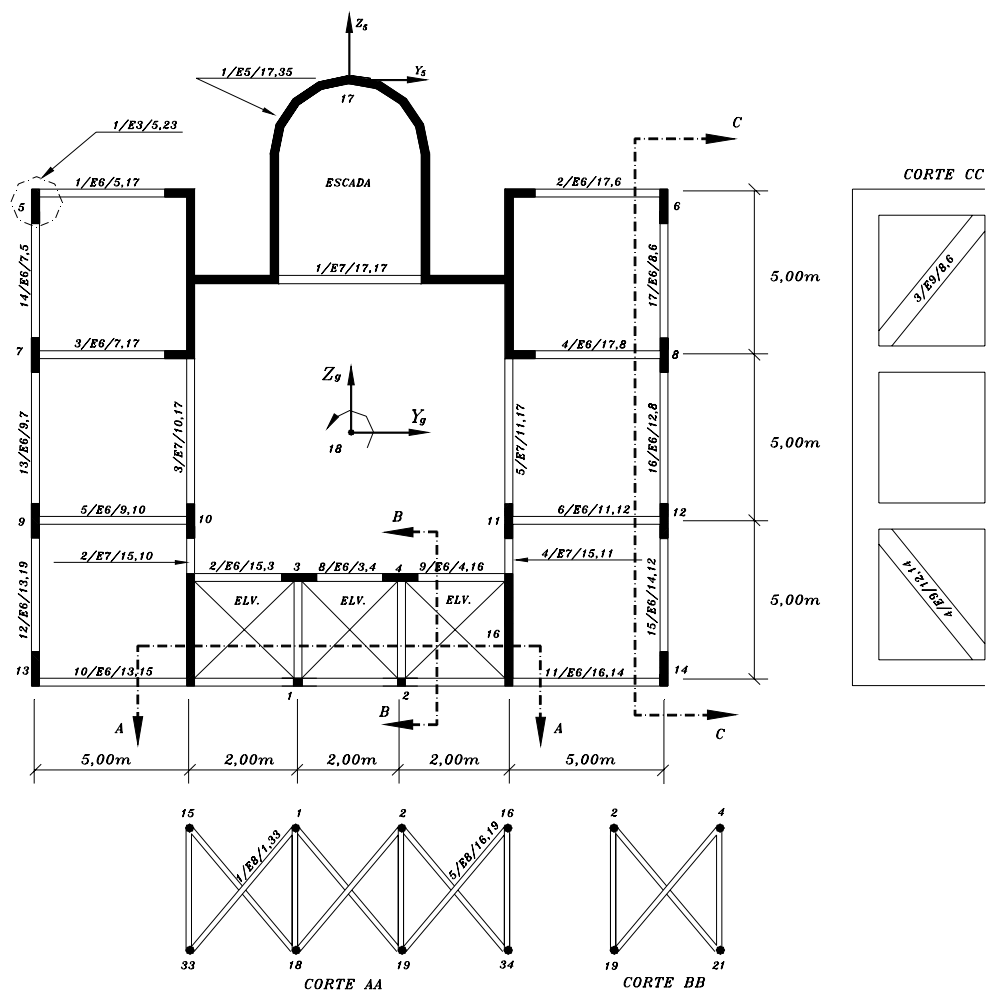
E2 = ELM-02

⋮

E9 = ELM-09

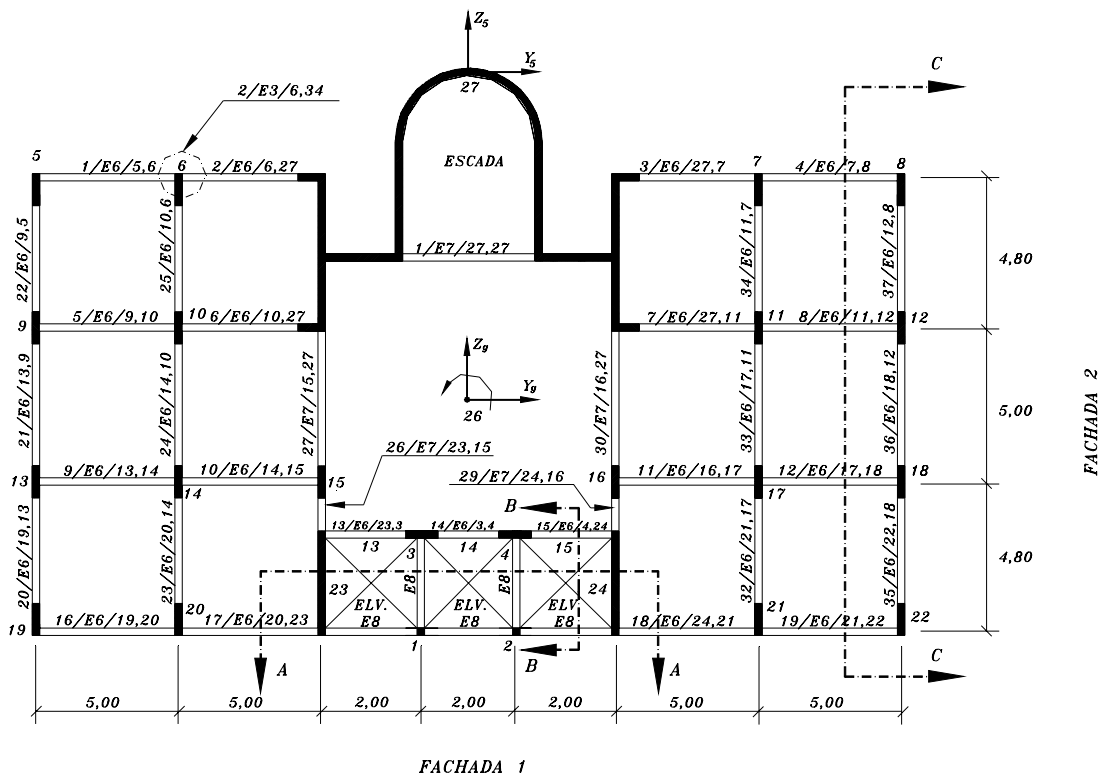
NI = Número do nó de incidência inicial do elemento.

NF = Número do nó de incidência final do elemento.



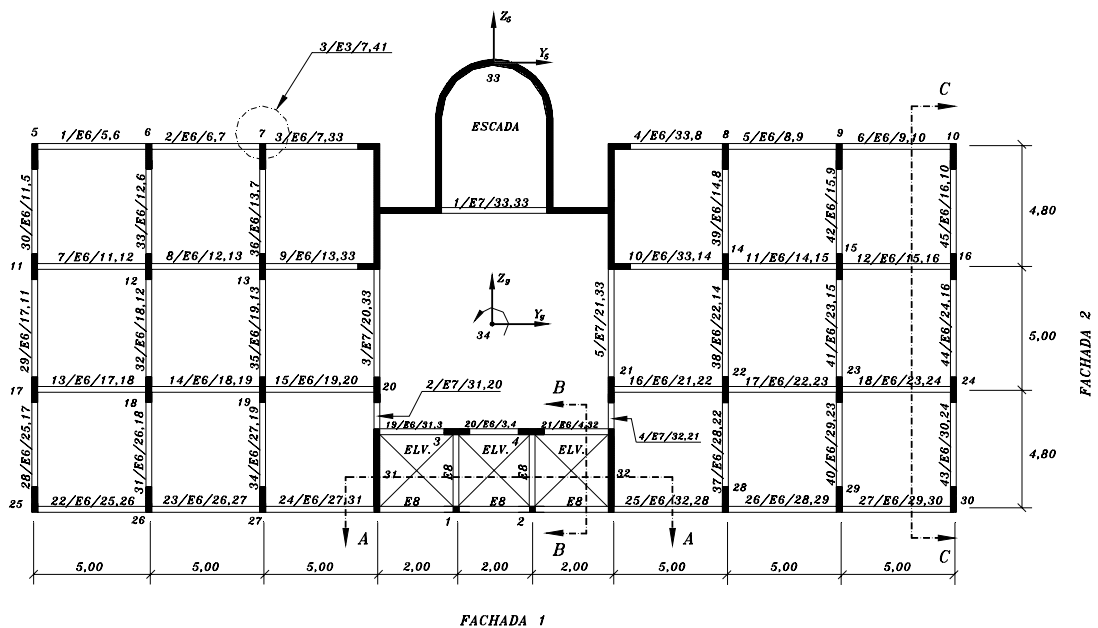
FACHADA 1

(Figura 7.29.a)



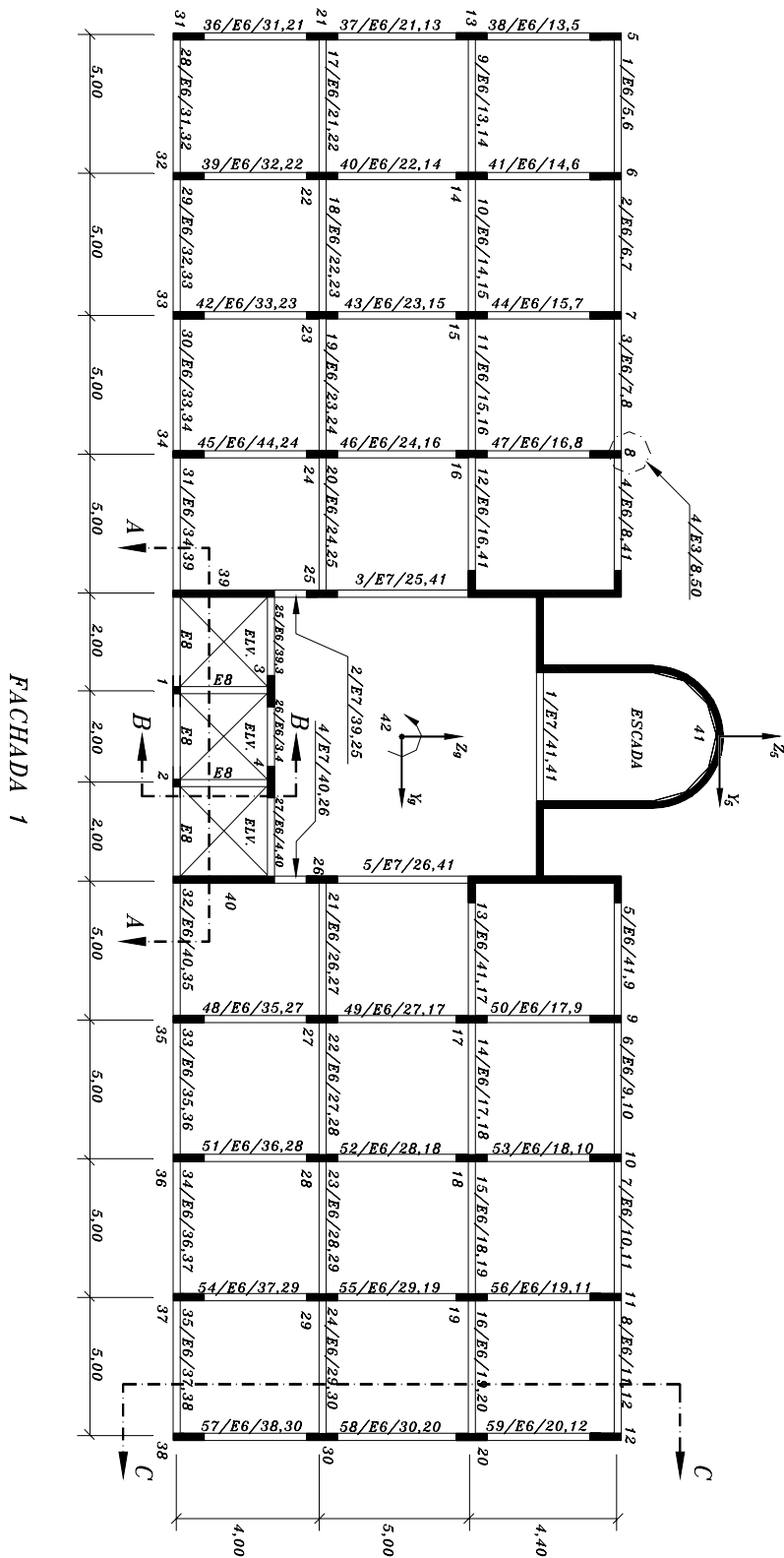
FACHADA 1

(Figura 7.29.b)

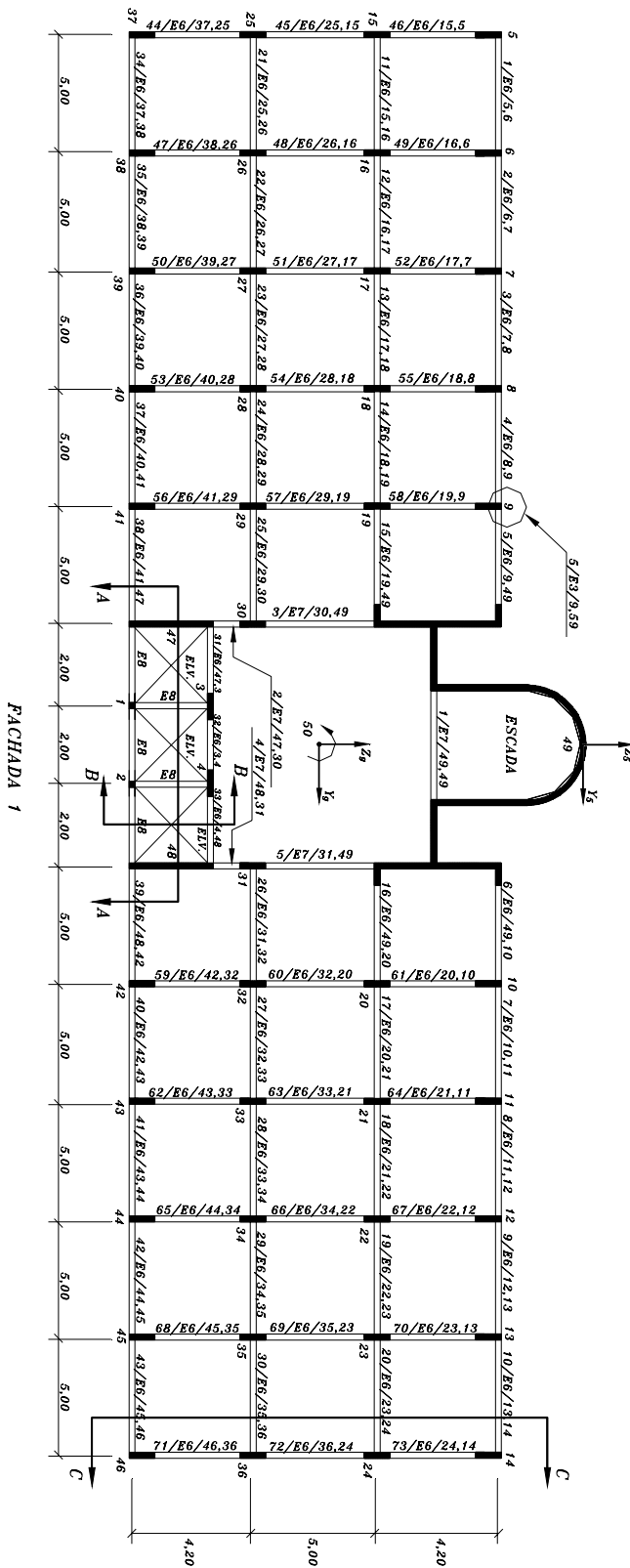


FACHADA 1

(Figura 7.29.c)



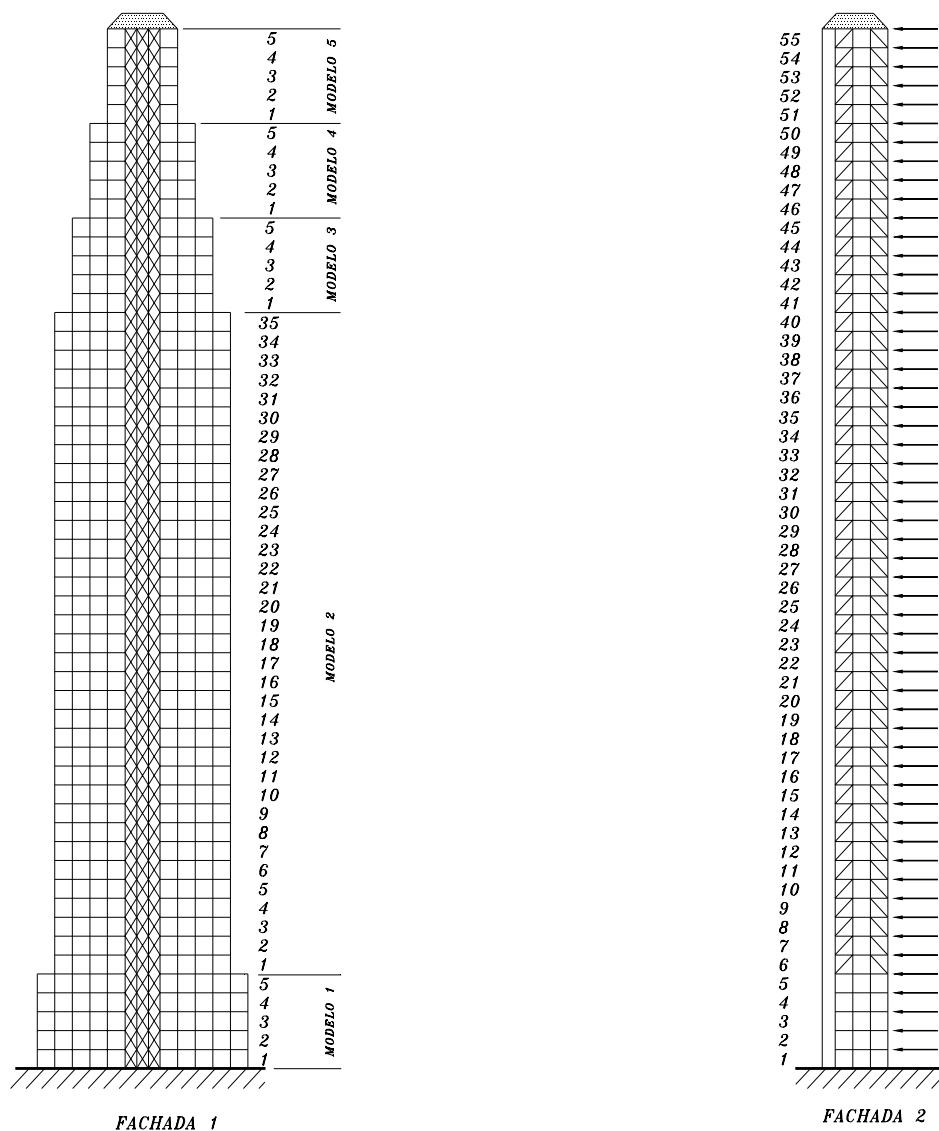
FACHADA 2
(Figura 7.29.d)



FACHADA 1

FACHADA 2

(Figura 7.29.e)



(Figura 7.29.f)

Figura 7.29 - Planta baixa dos pavimentos tipo e fachadas lateral e frontal da estrutura modelo do exemplo 4.

Todos os elementos de incidência vertical são do tipo **ELM-03** com exceção daqueles que possuem uma de suas faces voltada para o poço dos elevadores e da escada (ver figura 7.29.a, b, c, d e e). As figuras 7.30 e 7.31 mostram as excentricidades existentes entre os eixos longitudinais das vigas e pilares incidentes nos nós periféricos, que estão contidos nas fachadas 1 e 3 em todos os modelos, as quais podem ser vistas nas plantas baixas da figura 7.29.a, b, c, d e e.

Excentricidades entre os eixos longitudinais dos **ELM-03** e **ELM-06**.

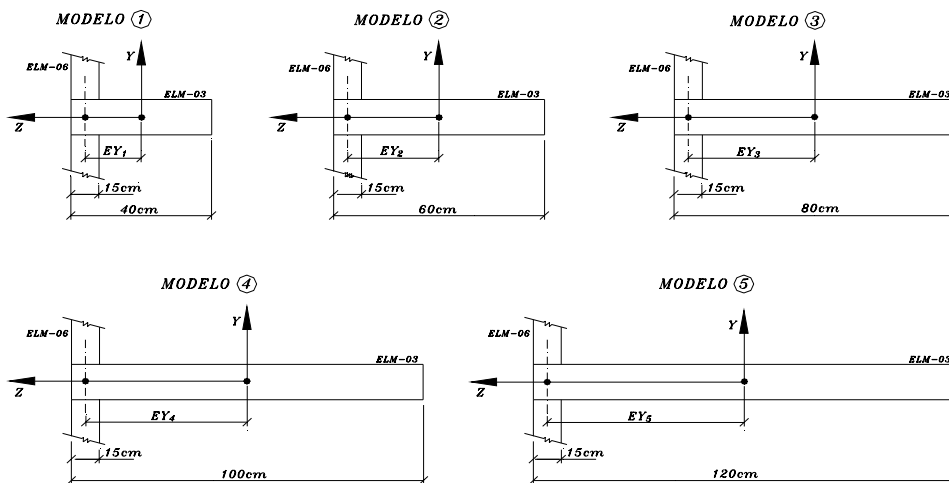


Figura 7.30 - Excentricidades entre os eixos longitudinais dos **ELM-06** e **ELM-03** da estrutura modelo do exemplo 4.

Excentricidades entre os eixos longitudinais dos **ELM-04**, **ELM-08** e **ELM-06**.

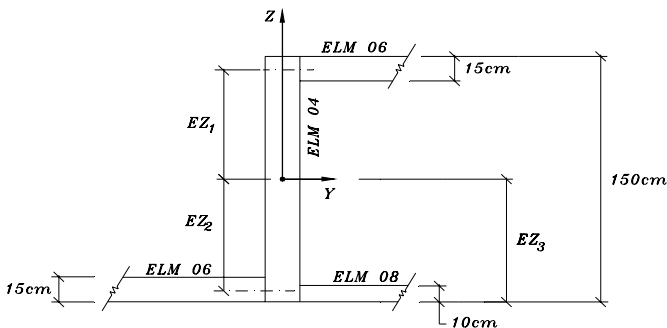


Figura 7.31 - Excentricidade entre os eixos longitudinais dos **ELM-04**, **ELM-08** e **ELM-06** da estrutura modelo (exemplo 4).

Os valores destas excentricidades são fornecidos a seguir:

$$EY_1 = 12,5 \text{ cm}$$

$$EY_2 = 22,5 \text{ cm}$$

$$EY_3 = 32,5 \text{ cm}$$

$$EY_4 = 42,5 \text{ cm}$$

$$EY_5 = 52,5 \text{ cm}$$

$$EZ_1 = 67,5 \text{ cm}$$

$$EZ_2 = 67,5 \text{ cm}$$

Os comprimentos considerados rígidos dos pilares e vigas, estão esquematizados na figura 7.32.

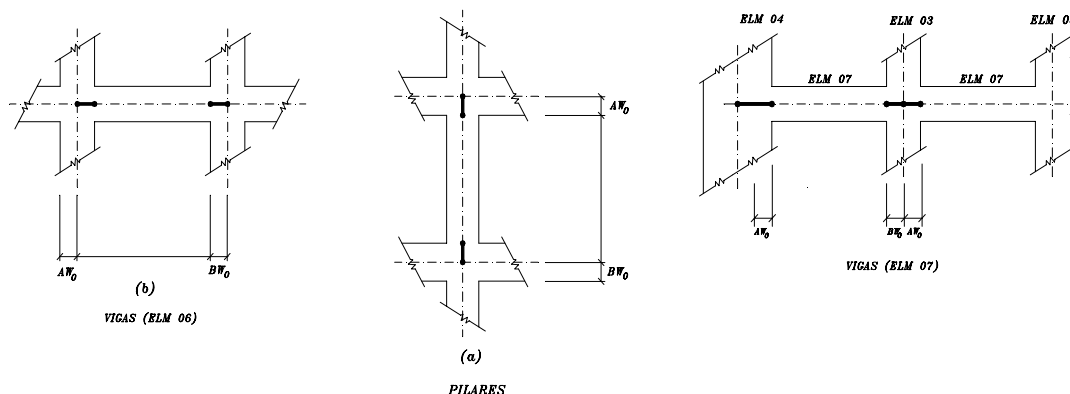


Figura 7.32 - Formação de trechos rígidos nas vigas e pilares da estrutura modelo (exemplo 4)

Para os pilares os valores de Aw_0 e Bw_0 são constantes em todos os pavimentos e é igual a 30 cm, no caso das vigas ocorrem variações de acordo com o tipo (**ELM-06** ou **ELM-07**) e o modelo onde elas estão localizadas. Os **ELM-06** têm os mesmos comprimentos para seus trechos rígidos inicial e final, porém nos **ELM-07** ocorrem variações. Os valores para ambos, dados na seqüência “ Aw_0 e Bw_0 ”, serão mostrados a seguir:

- Vigas do tipo 6 (**ELM-06**)

- Modelo 1 - 20 cm e 20 cm
- Modelo 2 - 30 cm e 30 cm
- Modelo 3 - 40 cm e 40 cm
- Modelo 4 - 50 cm e 50 cm
- Modelo 5 - 60 cm e 60 cm

- Vigas do tipo 7 (**ELM-07**)

- Modelo 1 - 125 cm e 20 cm
- Modelo 2 - 125 cm e 30 cm
- Modelo 3 - 125 cm e 40 cm
- Modelo 4 - 125 cm e 50 cm
- Modelo 5 - 125 cm e 60 cm

A variação da inércia dos pilares tipo 3 (**ELM-03**), fazem surgir excentricidades, cujos valores serão mostrados nos esquemas da figura 7.33.

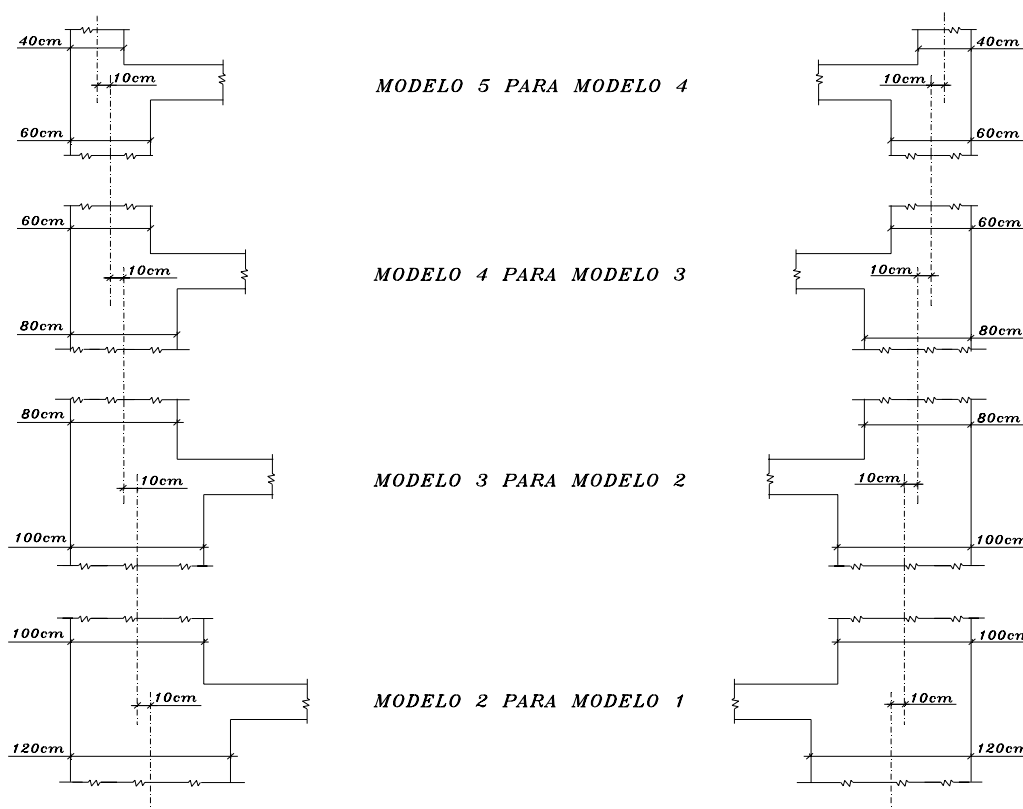


Figura 7.33 - Excentricidades existentes entre os eixos longitudinais dos **ELM-03**, pertencentes a modelos vizinhos da estrutura modelo (exemplo 4).

Ações aplicadas no sistema estrutural:

Para todos os pavimentos dos 5 modelos as ações verticais serão iguais e seus valores, por tipo de elemento, serão dados a seguir:

- **ELM-01** - 80 kN
- **ELM-02** - 90 kN
- **ELM-03** - 135,55 kN
- **ELM-04** - 135,55 kN
- **ELM-04** - 135,55 kN
- **ELM-05** - 135,55 kN

As ações horizontais foram calculadas com base na **NB 1989**, considerando para o vento a velocidade característica de 40 m/s, fator topográfico “1”. Imaginou-se a edificação construída nas proximidades de um grande centro urbano e destinada ao uso comercial. A tabela a seguir contém os valores das forças resultantes, aplicadas em cada laje da estrutura.

Tabela 7.27 - Ações horizontais aplicadas nos nós mestres das lajes da estrutura (exemplo 4).

Modelos	pavimentos	direção y	direção z	mom. torçor
1	1	0	-076.62	0
	2	0	-092.40	0
	3	0	-103.09	0
	4	0	-111.41	0
	5	0	-118.33	0
2	1	0	-124.30	0
	2	0	-129.60	0
	3	0	-134.34	0
	4	0	-138.68	0
	5	0	-142.69	0
	6	0	-146.41	0
	7	0	-149.89	0
	8	0	-153.16	0
	9	0	-156.26	0
	10	0	-159.19	0
	11	0	-161.99	0
	12	0	-164.67	0
	13	0	-167.23	0
	14	0	-169.69	0
	15	0	-172.05	0
	16	0	-174.33	0
	17	0	-176.54	0
	18	0	-178.67	0
	19	0	-180.73	0
	20	0	-182.73	0
	21	0	-184.68	0
	22	0	-186.57	0
	23	0	-188.41	0
	24	0	-190.21	0
	25	0	-191.96	0
	26	0	-193.66	0
	27	0	-195.33	0
	28	0	-196.96	0
	29	0	-198.55	0
	30	0	-200.11	0
	31	0	-201.64	0
	32	0	-203.14	0
	33	0	-204.61	0
	34	0	-206.05	0
	35	0	-207.46	0
3	1	0	-208.85	0
	2	0	-210.21	0
	3	0	-211.55	0
	4	0	-212.87	0
	5	0	-214.16	0
4	1	0	-215.49	0
	2	0	-216.96	0
	3	0	-217.93	0
	4	0	-219.145	0
	5	0	-220.34	0
5	1	0	-221.53	0
	2	0	-222.69	0
	3	0	-223.84	0
	4	0	-224.97	0
	5	0	-226.09	0

A estrutura será inicialmente processada sem as excentricidades verticais entre os pilares pertencentes a módulos diferentes, sem trechos rígidos e com todos os seus vínculos restringidos. Em seguida serão introduzidas apenas as excentricidades verticais e por fim serão acrescentados os nós de comprimento finito. Os resultados serão plotados em gráficos e analisados com o objetivo de mostrar a importância destes detalhes. Com relação à flexibilidade das fundações, serão vistos exclusivamente os vínculos de rotação à flexão em todos os pilares, exceto os **ELM-01**, que terão vínculos elásticos na direção dos seus deslocamentos de translação. Para o núcleo, além da referida rotação, será introduzido o vínculo elástico na direção do empenamento.

- **Análise dos resultados**

Através dos valores encontrados na tabela 7.28 e das curvas da figura 7.34, observa-se que não há diferenças entre os deslocamentos obtidos nos sistemas de contraventamento com e sem excentricidades verticais, não ocorrendo portanto, alterações nos esforços resultantes nos elementos que não possuem variação de seção ao longo da altura. Analisando os momentos fletores nas extremidades superiores dos pilares periféricos do tipo **ELM-03** (ver detalhes nas plantas baixas das figuras 7.29.a, 7.29.b, 7.29.c, 7.29.d, e 7.29.e), nota-se que existem diferenças apenas nos nós de transição entre os modelos. No sistema onde tais excentricidades foram consideradas, verificou-se alterações, algumas com inversões de esforços (ver tabela 7.29.b e figura 7.34.b), que praticamente desapareceram após três pavimentos acima e abaixo dos referidos nós.

Tabela 7.28 - Valores das translações em Z_g e dos momentos fletores no elemento tipo **ELM-03** indicado na figura 7.29 (eixo local y_3), considerando a existência ou não das excentricidades verticais entre os pilares pertencentes a modelos vizinhos.

(A)					(B)				
modelos	Pav.	altura (cm)	a(cm)	b(cm)	modelos	pav.	altura (cm)	c(kN.cm)	d(kN.cm)
1	1	300	0.095	0.095	1	1	300	45816	45740
	2	600	0.353	0.353		2	600	33748	34455
	3	900	0.739	0.714		3	900	23070	21016
	4	1200	1.228	1.231		4	1200	17536	26256
	5	1500	1.796	1.802		5	1500	469.27	-31527

modelos	pav.	altura (cm)	a(cm)	b(cm)	modelos	pav.	altura (cm)	c(kN.cm)	d(kN.cm)
2	1	1800	2.433	2.441	2	1	1800	-6278.6	-10942
	2	2100	3.129	3.138		2	2100	-9189.7	-8054.9
	3	2400	3.876	3.885		3	2400	-11671	-11989
	4	2700	4.664	4.672		4	2700	-13754	-13678
	5	3000	5.487	5.494		5	3000	-15491	-15512
	6	3300	6.337	6.345		6	3300	-16934	-16939
	7	3600	7.221	7.218		7	3600	-18155	-18162
	8	3900	8.103	8.109		8	3900	-19164	-19173
	9	4200	9.101	9.015		9	4200	-20001	-20014
	10	4500	9.928	9.932		10	4500	-20691	-20708
	11	4800	10.850	10.857		11	4800	-21255	-21257
	12	5100	11.785	11.787		12	5100	-21710	-21733
	13	5400	12.719	12.719		13	5400	-22071	-22096
	14	5700	13.653	13.652		14	5700	-22351	-22376
	15	6000	14.586	14.583		15	6000	-22558	-22585
	16	6300	15.516	15.511		16	6300	-22703	-22729
	17	6600	16.441	16.434		17	6600	-22792	-22818
	18	6900	17.360	17.350		18	6900	-22813	-22856
	19	7200	18.271	18.295		19	7200	-22826	-22850
	20	7500	19.173	19.158		20	7500	-22781	-22805
	21	7800	20.066	20.048		21	7800	-22701	-22723
	22	8100	20.947	20.926		22	8100	-22588	-22609
	23	8400	21.816	21.791		23	8400	-22447	-22467
	24	8700	22.672	22.643		24	8700	-22280	-22299
	25	9000	23.514	23.481		25	9000	-22090	-22108
	26	9300	24.341	24.303		26	9300	-21881	-21899
	27	9600	25.153	25.109		27	9600	-21656	-21674
	28	9900	25.947	25.898		28	9900	-21418	-21437
	29	10200	26.724	26.669		29	10200	-21179	-21200
	30	10500	27.483	27.421		30	10500	-20923	-20950
	31	10800	28.222	28.153		31	10800	-20754	-20783
	32	11100	28.941	28.864		32	11100	-20332	-20393
	33	11400	29.637	29.551		33	11400	-21047	-21058
	34	11700	30.309	30.213		34	11700	-17743	-18038
	35	12000	30.953	30.845		35	12000	-30335	-29835
3	1	12300	31.568	31.448	3	1	12300	-11143	-12508
	2	12600	32.158	32.026		2	12600	-7413.7	-11097
	3	12900	32.724	32.580		3	12900	-10178	-10045
	4	13200	33.267	33.112		4	13200	-8484.2	-8479
	5	13500	33.785	33.618		5	13500	-12265	-12059
4	1	13800	34.278	34.099	4	1	13800	790.23	1114.9
	2	14100	34.749	34.559		2	14100	1114.8	1919
	3	14400	35.200	34.999		3	14400	1468.9	335.94
	4	14700	35.631	35.419		4	14700	1208.1	5363.1
	5	15000	36.040	35.818		5	15000	3448.3	-6382.5
5	1	15300	36.427	36.194	5	1	15300	1182.7	4594
	2	15600	36.798	36.555		2	15600	1830.4	2672
	3	15900	37.158	36.906		3	15900	2160	2088
	4	16200	37.511	37.251		4	16200	2244.3	2357
	5	16500	37.861	37.592		5	16500	3039	3136

Onde:

- a** - Translações de primeira ordem na direção de Z_g sem excentricidades verticais.
- b** - Translações de primeira ordem na direção de Z_g com excentricidades verticais.
- c** - Momentos fletores de primeira ordem sem excentricidades verticais.
- d** - Momentos fletores de primeira ordem com excentricidades verticais.

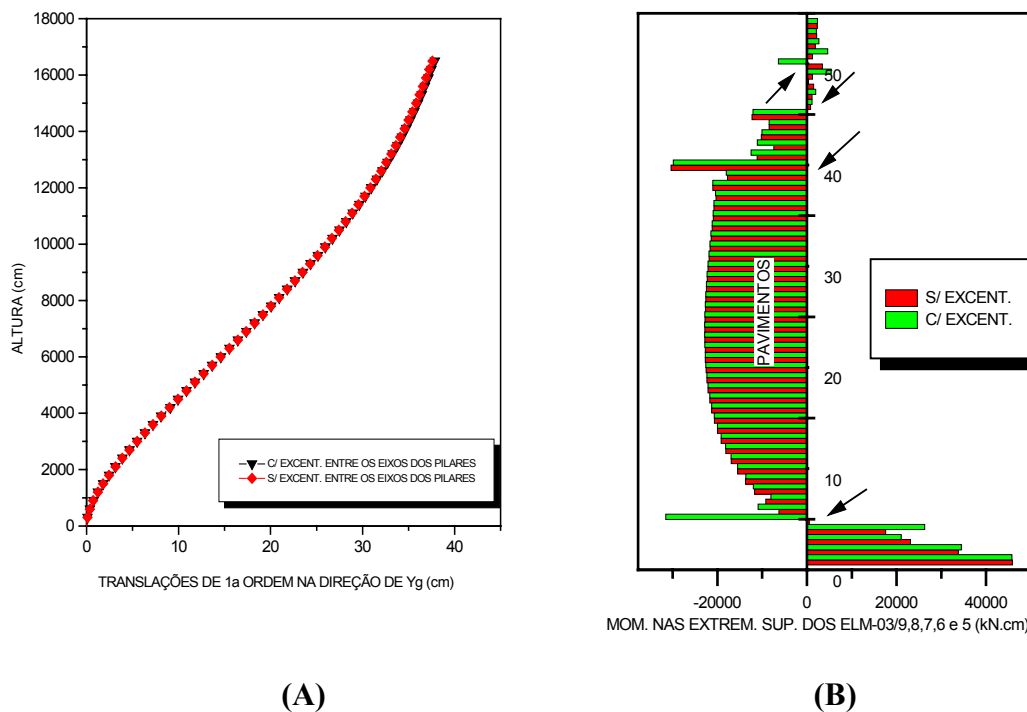


Figura 7.34- Curvas das translações em Z_g e diagrama de barras dos momentos fletores no elemento tipo **ELM-03**, indicado na figura 7.29 (eixo local y_3), considerando a existência ou não das excentricidades verticais entre os pilares pertencentes a modelos vizinhos.

Acrescentando os trechos rígidos, esquematizados na figura 7.32 e comparando os seus deslocamentos de translação na direção de Z_g com o mesmo sistema considerando apenas as excentricidades verticais, verifica-se que as diferenças são bastante significativas (ver tabela 7.29.a e figura 7.35.a), atingindo na laje da cobertura uma redução de 87,5 %.

Os momentos fletores nas extremidades do mesmo elemento da análise anterior encontram-se na tabela 7.29.b e estão representados pelo diagrama de barras da figura 7.35.b. Observando-os, constata-se que nos modelos 2 e 4 seus valores aumentaram, quando foram considerados os nós de comprimento finito. Em 1, 3 e 5 verificou-se o inverso, porém de um modo geral o sistema estrutural torna-se mais rígido e absorve mais esforços. De acordo com os parâmetros de instabilidade (ver

item 5.6), os sistemas de contraventamento deste exemplo sem trechos rígidos devem ser calculados em teoria de segunda ordem. A seguir são fornecidos seus valores:

- Sem trechos rígidos e sem excentricidades verticais

$$\alpha_{\text{lim}} = 6,13 \times 10^{-1} \text{ e } \alpha_{\text{eq}} = 7,72 \times 10^{-1}$$

- Sem trechos rígidos e com excentricidades verticais

$$\alpha_{\text{lim}} = 6,11 \times 10^{-1} \text{ e } \alpha_{\text{eq}} = 7,69 \times 10^{-1}$$

- Com trechos rígidos e com excentricidades verticais

$$\alpha_{\text{lim}} = 6,12 \times 10^{-1} \text{ e } \alpha_{\text{eq}} = 5,61 \times 10^{-1}$$

Obs.: α_{lim} e α_{eq} estão definidos no item 5.6 e conforme estabelece o critério de imobilidade dos nós, que prevê a necessidade de análise não linear, α_{lim} deve ser maior do que α_{eq} , condição que ocorre apenas no sistema com trechos rígidos.

Tabela 7.29 - Valores das translações em Z_g e dos momentos fletores no **ELM-03** (ver figura 7.29), considerando a existência ou não de trechos rígidos.

(A)					(B)				
modelos	pavimentos	altura (cm)	a(cm)	b(cm)	modelos	pavimentos	altura (cm)	c(kN.cm)	d(kN.cm)
1	1	300	0.095	0.059	1	1	300	45740	25160
	2	600	0.353	0.211		2	600	34455	8802.4
	3	900	0.714	0.431		3	900	21016	-5729.4
	4	1200	1.231	0.702		4	1200	26256	-4839.3
	5	1500	1.802	1.013		5	1500	-31527	-47764
2	1	1800	2.441	1.366	2	1	1800	-10942	-19310
	2	2100	3.138	1.753		2	2100	-8054.9	-16824
	3	2400	3.885	2.167		3	2400	-11989	-22722
	4	2700	4.672	2.602		4	2700	-13678	-24504
	5	3000	5.494	3.054		5	3000	-15512	-26798
	6	3300	6.345	3.517		6	3300	-16939	-28221
	7	3600	7.218	3.990		7	3600	-18162	-29413
	8	3900	8.109	4.470		8	3900	-19173	-30271
	9	4200	9.015	4.955		9	4200	-20014	-30919
	10	4500	9.932	5.443		10	4500	-20708	-31387
	11	4800	10.857	5.933		11	4800	-21257	-31693
	12	5100	11.787	6.424		12	5100	-21733	-31884
	13	5400	12.719	6.915		13	5400	-22096	-31974
	14	5700	13.652	7.404		14	5700	-22376	-31978
	15	6000	14.583	7.890		15	6000	-22585	-31907
	16	6300	15.511	8.374		16	6300	-22729	-31772
	17	6600	16.434	8.854		17	6600	-22818	-31579
	18	6900	17.350	9.330		18	6900	-22856	-31335
	19	7200	18.295	9.800		19	7200	-22850	-31045
	20	7500	19.158	10.265		20	7500	-22805	-30714
	21	7800	20.048	10.724		21	7800	-22723	-30344
	22	8100	20.926	11.176		22	8100	-22609	-29939
	23	8400	21.791	11.621		23	8400	-22467	-29501
	24	8700	22.643	12.058		24	8700	-22299	-29032
	25	9000	23.481	12.478		25	9000	-22108	-28536
	26	9300	24.303	12.907		26	9300	-21899	-28012
	27	9600	25.109	13.318		27	9600	-21674	-27470
	28	9900	25.898	13.720		28	9900	-21437	-26890

modelos	pavimentos	altura (cm)	a(cm)	b(cm)	modelos	pavimentos	altura (cm)	c(kN.cm)	d(kN.cm)
2	29	10200	26.669	14.112	2	29	10200	-21200	-26339
	30	10500	27.421	14.494		30	10500	-20950	-25634
	31	10800	28.153	14.865		31	10800	-20783	-25320
	32	11100	28.864	15.225		32	11100	-20393	-23841
	33	11400	29.551	15.573		33	11400	-21058	-25727
	34	11700	30.213	15.909		34	11700	-18038	-17873
3	1	12300	31.448	16.548	3	1	12300	-12508	-7660.7
	2	12600	32.026	16.857		2	12600	-11097	-6461
	3	12900	32.580	17.159		3	12900	-10045	-6667
	4	13200	33.112	17.453		4	13200	-8479	-5267
	5	13500	33.618	17.737		5	13500	-12059	-7883.4
4	1	13800	34.099	18.012	4	1	13800	1114.9	1478
	2	14100	34.559	18.278		2	14100	1919	3224
	3	14400	34.999	18.536		3	14400	335.94	-843.84
	4	14700	35.419	18.784		4	14700	5363.1	7768
	5	15000	35.818	19.019		5	15000	-6382.5	-7779.2
5	1	15300	36.194	19.243	5	1	15300	4594	3639
	2	15600	36.555	19.458		2	15600	2672	1853
	3	15900	36.906	19.667		3	15900	2088	1758
	4	16200	37.251	19.871		4	16200	2357	1946
	5	16500	37.592	20.074		5	16500	3136	2742

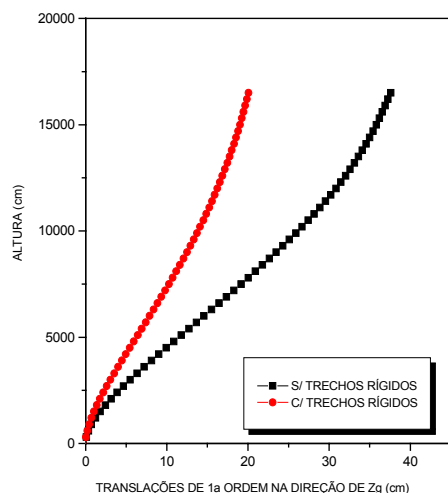
Onde:

a - Translações de primeira ordem na direção de Z_g sem trechos rígidos.

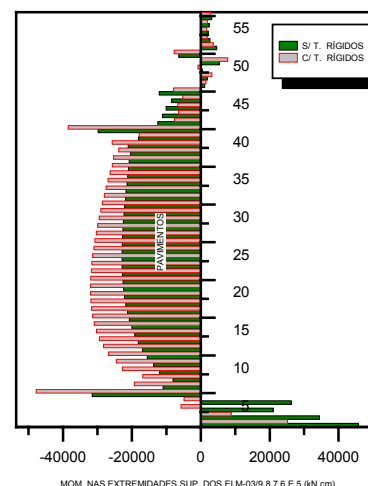
b - Translações de primeira ordem na direção de Z_g com trechos rígidos.

c - Momentos fletores de primeira ordem sem trechos rígidos.

d - Momentos fletores de primeira ordem com trechos rígidos.



(A)



(B)

Figura 7.35 - Curvas das translações em Z_g e diagrama de barras dos momentos fletores no **ELM-03** (ver figura 7.29), considerando a existência ou não de trechos rígidos.

Para analisar a influência da flexibilidade da fundação no sistema de contraventamento, serão adotados para os vínculos de translação, de rotação à flexão e na direção do empenamento os seguintes valores:

- A rigidez dos vínculos de translação dos **ELM-01** será:

$$K_{t_{x1}} = K_{t_{y1}} = K_{t_{z1}} = 50 \times 10^8 \text{ kN / cm}$$

- A rigidez dos vínculos de rotação à flexão dos **ELM-02** será:

$$K_{r_{y2}} = 50 \times 10^8 \text{ kN / cm}$$

- A rigidez dos vínculos de rotação à flexão dos **ELM-03** será :

$$K_{r_{y3}} = 65 \times 10^7 \text{ kN / cm}$$

- A rigidez dos vínculos de rotação à flexão dos **ELM-04** será :

$$K_{r_{z4}} = 75 \times 10^7 \text{ kN / cm}$$

- A rigidez do vínculo de rotação à flexão para o **ELM-05** será:

$$K_{r_{y5}} = 65 \times 10^7 \text{ kN / cm}$$

$$K_{r_{z5}} = 75 \times 10^7 \text{ kN / cm}$$

- Para a rigidez do vínculo na direção do empenamento no **ELM-05** serão adotadas estacas de rigidez axial K_i , posicionadas em cada um dos pontos existentes na linha do esqueleto (ver figura 7.36).

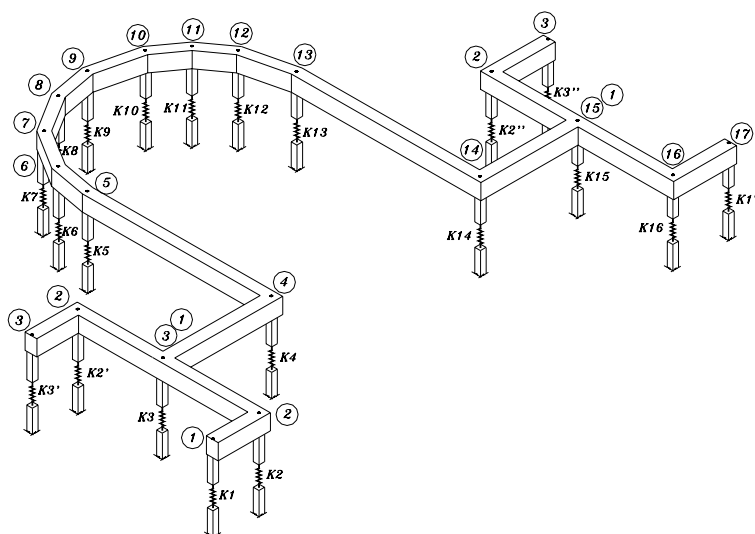


Figura 7.36 - Idealização do vínculo elástico na direção do empenamento.

$K_i = 10^9 \text{ kN/cm}$, onde "i" varia de 1 a 17

$K'_i = 10^9 \text{ kN/cm}$, onde "i" varia de 2 a 3

$K''_i = 10^9 \text{ kN/cm}$, onde "i" varia de 2 a 3

Nas tabelas 7.30.a e 7.30.b encontram-se os valores das translações na direção de Z_g , para o sistema com vínculos restringidos, elásticos e livre, em teoria de primeira e segunda ordens e nos gráficos das figuras 7.37.a e 7.37.b as curvas representativas de suas respectivas elásticas. A estrutura não sofreu rotações devido à simetria na geometria e no carregamento, portanto o vínculo na direção do empenamento não foi solicitado.

Tabela 7.30 - Valores das translações em de 1ª e 2ª ordens na direção de Z_g para a estrutura do exemplo 4.

(A)						(B)					
Mods.	Pavs.	Altura (cm)	a(cm)	b(cm)	c(cm)	Mods.	Pavs.	altura (cm)	d(cm)	e(cm)	d(cm)
1	1	300	0.095	0.471	1.121	1	1	300	0.099	0.482	1.162
	2	600	0.353	1.006	2.139		2	600	0.369	1.037	2.227
	3	900	0.739	1.598	3.034		3	900	0.777	1.657	3.233
	4	1200	1.228	2.238	4.008		4	1200	1.294	2.332	4.200
	5	1500	1.796	2.919	4.892		5	1500	1.896	3.052	5.142
2	1	1800	2.433	3.635	5.758	2	1	1800	2.573	3.814	6.067
	2	2100	3.129	4.387	6.617		2	2100	3.315	4.615	6.987
	3	2400	3.876	5.169	7.477		3	2400	4.112	5.542	7.909
	4	2700	4.664	5.981	8.341		4	2700	4.955	6.320	8.838
	5	3000	5.487	6.816	9.312		5	3000	5.835	7.215	9.775
	6	3300	6.337	7.672	10.092		6	3300	6.746	8.133	10.720
	7	3600	7.221	8.545	10.978		7	3600	7.683	9.070	11.673
	8	3900	8.103	9.432	11.869		8	3900	8.640	10.021	12.632
	9	4200	9.101	10.329	12.765		9	4200	9.612	10.985	13.595
	10	4500	9.928	11.235	13.664		10	4500	10.596	11.957	14.561
	11	4800	10.850	12.146	14.564		11	4800	11.588	12.937	15.528
	12	5100	11.785	13.061	15.465		12	5100	12.568	13.916	16.495
	13	5400	12.719	13.978	16.365		13	5400	13.586	14.998	17.461
	14	5700	13.653	14.893	17.236		14	5700	14.586	15.878	18.422
	15	6000	14.586	15.807	18.157		15	6000	15.583	16.856	19.379
	16	6300	15.516	16.717	19.046		16	6300	16.577	17.829	20.324
	17	6600	16.441	17.623	19.929		17	6600	17.564	18.795	21.272
	18	6900	17.360	18.521	20.805		18	6900	18.543	19.753	22.207
	19	7200	18.271	19.412	21.673		19	7200	19.514	20.702	23.131
	20	7500	19.173	20.294	22.553		20	7500	20.474	21.640	24.044
	21	7800	20.066	21.166	23.380		21	7800	21.421	22.567	24.946
	22	8100	20.947	22.027	24.218		22	8100	22.356	23.480	25.834
	23	8400	21.816	22.876	25.044		23	8400	23.277	24.380	26.708
	24	8700	22.672	23.713	25.857		24	8700	24.182	25.264	27.568
	25	9000	23.514	24.535	26.656		25	9000	25.071	26.133	28.492
	26	9300	24.341	25.343	27.441		26	9300	25.943	26.984	29.239
	27	9600	25.153	26.135	28.211		27	9600	26.797	27.818	30.049
	28	9900	25.947	26.912	28.965		28	9900	27.631	28.634	30.840
	29	10200	26.724	27.670	29.702		29	10200	28.446	29.429	31.613
	30	10500	27.483	28.411	30.422		30	10500	29.241	30.205	32.366
	31	10800	28.222	29.133	31.123		31	10800	30.014	30.959	33.098
	32	11100	28.941	29.834	31.803		32	11100	30.763	31.691	33.808
	33	11400	29.637	30.514	32.463		33	11400	31.489	32.400	34.495
	34	11700	30.309	31.17	33.099		34	11700	32.188	33.082	35.156
	35	12000	30.953	31.798	33.709		35	12000	32.858	33.735	35.790
3	1	12300	31.568	32.399	34.291	3	1	12300	33.496	34.358	36.393
	2	12600	32.158	32.974	34.849		2	12600	34.106	34.953	36.970
	3	12900	32.724	33.526	35.384		3	12900	34.691	35.524	37.523
	4	13200	33.267	34.055	35.897		4	13200	35.252	36.071	38.053
	5	13500	33.785	34.561	36.387		5	13500	35.787	36.593	38.558
4	1	13800	34.278	35.042	36.853	4	1	13800	36.295	37.088	39.038
	2	14100	34.749	35.501	37.298		2	14100	36.780	37.561	39.495
	3	14400	35.200	35.941	37.724		3	14400	37.244	38.013	39.933
	4	14700	35.631	36.361	38.131		4	14700	37.687	38.445	40.350
	5	15000	36.040	36.760	38.517		5	15000	38.107	38.855	40.747
5	1	15300	36.427	37.137	38.882	5	1	15300	38.504	39.242	41.121
	2	15600	36.798	37.498	39.232		2	15600	38.884	39.612	41.484
	3	15900	37.158	37.849	39.572		3	15900	39.253	39.972	41.828
	4	16200	37.511	38.193	39.905		4	16200	39.616	40.325	42.168
	5	16500	37.861	38.534	40.234		5	16500	39.974	40.674	42.506

Onde:

- a - Translações de primeira ordem na direção de Z_g com vínculos rígidos.
- b - Translações de primeira ordem na direção de Z_g com vínculos elásticos.
- a - Translações de primeira ordem na direção de Z_g com vínculos livres.
- d - Translações de segunda ordem na direção de Z_g com vínculos rígidos.
- e - Translações de segunda ordem na direção de Z_g com vínculos elásticos.
- f - Translações de segunda ordem na direção de Z_g com vínculos livres.

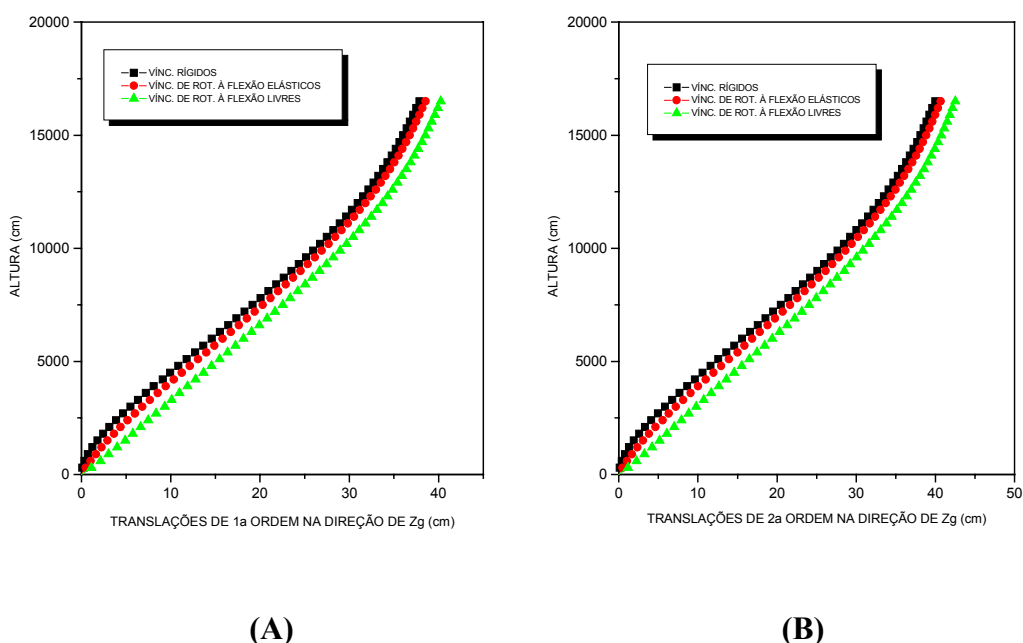


Figura 7.37 - Curvas das translações de 1ª e 2ª ordens na direção de Z_g para a estrutura do exemplo 4.

Para verificar a influência da resistência ao empenamento na rigidez global do sistema de contraventamento, serão aplicadas as ações horizontais com uma excentricidade, cujo valor corresponderá a 30 % da largura da fachada em cada modelo. Os vínculos serão todos restringidos e os resultados obtidos serão comparados a mesma estrutura, desta vez com o núcleo modelado como um pilar do tipo **ELM-04** (pilar isolado).

Analisando os gráficos das figuras 7.38.a e 7.38.b, nota-se que não ocorreram alterações na rigidez global da estrutura, pois os seus deslocamentos com

e sem rigidez ao empenamento são praticamente iguais. Devido à maior quantidade de elementos existentes no sistema em análise, as diferenças entre seus deslocamentos nos dois casos são bem menores, quando comparadas as do exemplo anterior (ver tabelas 7.22.a e 7.22.b e figuras 7.24.a e 7.24.b), o que permite concluir que quanto maior for a rigidez à torção da estrutura em relação à do núcleo, menor importância terá sua rigidez ao empenamento.

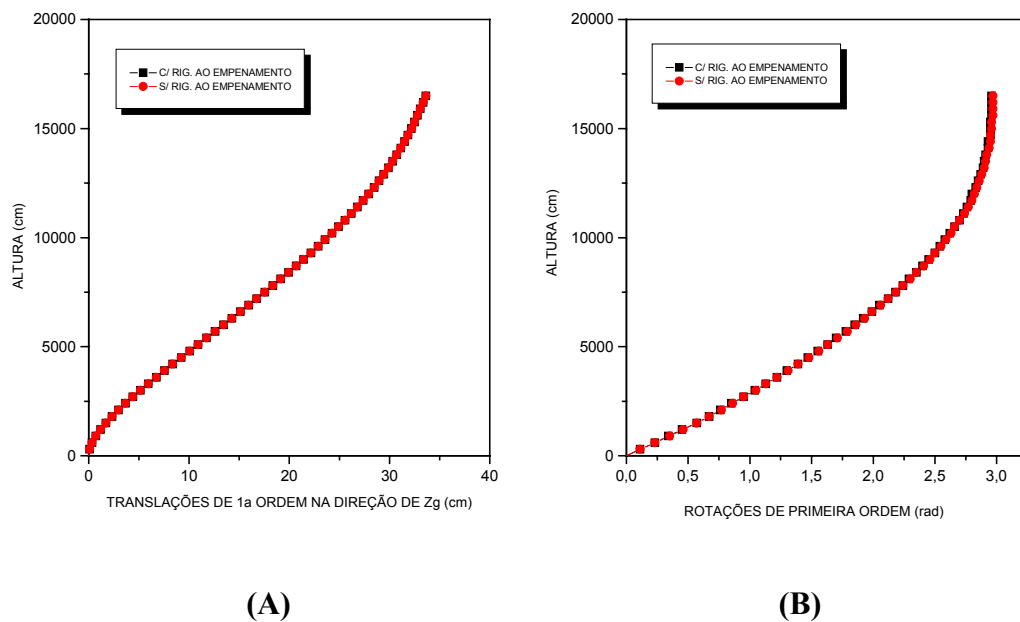


Figura 7.38 - Curvas das translações na direção de Z_g e das rotações em torno de X_g , ambas em teoria de 1ª ordem, na estrutura do exemplo 4, quando seu núcleo é modelado com e sem rigidez ao empenamento.

7.6 - Considerações finais e sugestões

A teoria exposta nos capítulos anteriores viabilizou a análise de estruturas de contraventamento, considerando a não linearidade geométrica de seus elementos constituintes. No equacionamento do problema empregou-se o método dos deslocamentos associados às técnicas de cálculo matricial, tendo sido utilizado o princípio da energia potencial mínima para determinação da rigidez global do sistema. A adoção dos elementos, definidos no capítulo 2, teve como objetivo a elaboração de um programa capaz de processar a estrutura de um edifício em várias versões, permitindo o confronto entre diversos modelos de concepção estrutural. Em todos os elementos foi adotada a **hipótese de Navier**¹, e para o núcleos, além desta, as hipóteses da teoria de **Vlassov** (1961). Desprezou-se as deformações causadas pelo esforço cortante em todos os elementos estruturais. As seções transversais dos núcleo foram consideradas indeformáveis apenas na projeção horizontal, desprezando-se assim as distorções causadas pelas tensões de cisalhamento provenientes do momento de flexo-torção. Isto significa que o centro de torção é determinado através do equilíbrio entre os momentos torçores internos e externos, ou seja, sua posição passa a ser função apenas da forma da seção transversal.

Este programa torna-se útil na medida em que possibilita ao projetista a idealização de uma infinidade de estruturas de contraventamento, utilizando várias combinações entre os elementos, existentes nas suas subrotinas, deixando-o livre para escolher o sistema que melhor se adaptar às formas arquitetônicas do edifício e às condições de segurança e viabilidade econômica.

Pretende-se que fique como contribuição ao desenvolvimento das pesquisas na área dos edifícios altos, a possibilidade que o programa oferece de analisar, em teoria de segunda ordem, a interação entre o núcleo e os sistemas de contraventamento mais comuns (treliças, pórticos e pilares isolados), considerando ainda a flexibilidade dos seus vínculos com a chapa terra, sobretudo daquele relacionado ao empenamento.

Como complemento às conclusões tiradas na análise da estrutura do exemplo 1, podem ser evidenciadas as tensões normais na seção da base, causadas pelo bimomento, quando o vínculo na sua direção é restringido e elástico. Na figura

7.39 constam os diagramas com os valores das tensões resultantes nas paredes do núcleo, ao nível da fundação, para as duas formas de vinculação. Observando-os constata-se novamente que existe uma boa aproximação entre os dois métodos, o discreto e o contínuo, sobretudo quando o vínculo é completamente restringido (ver figura 7.39.a).

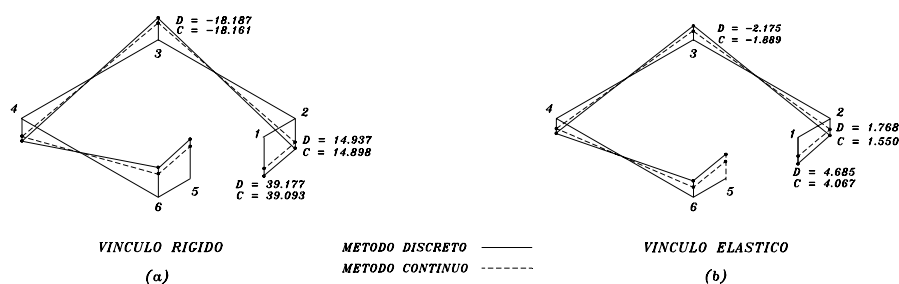


Figura 7.39 - Diagrama de tensões normais na seção da base do núcleo idealizado por **COSTA** (1982) em kgf / cm^2 .

No diagrama da figura 7.39.b é verificada uma diminuição das tensões, provavelmente devido à deformação da fundação na direção do empenamento, a qual libera parcialmente as translações verticais entre pontos pertencentes à seção da base. Embora ocorra um alívio de tensões na estrutura, os deslocamentos em todos os seus pavimentos aumentam, e em alguns casos podem exceder os limites estabelecidos nas normas. Portanto é aconselhável, ao analisar estruturas deste tipo, admitir sempre a possibilidade de flexibilidade dos seus vínculos, principalmente os de rotação à flexão e na direção do empenamento.

No exemplo 2 analisou-se a estrutura de núcleo pesquisada por **YAGUI** (1978), mostrando a influência do esforço normal na sua rigidez à flexão e à torção. Nos gráficos da figura 7.12.a e 7.12.b ficou bem definida a importância de se considerar a rigidez ao empenamento em estruturas constituídas por um único núcleo. Como pode-se notar as curvas da referida figura representam os deslocamentos de primeira ordem, isto se deve ao fato das ações verticais aplicadas

¹ Após as solicitações as seções transversais dos elementos, originalmente planas, permanecem planas

no topo da estrutura serem superiores ao seu carregamento crítico, quando a mesma é modelada como um pilar isolado (**ELM-04**), impossibilitando assim uma análise em segunda ordem. Todos os vínculos com a chapa terra foram considerados infinitamente rígidos, com exceção daqueles que impedem o empenamento da seção na base. Para este vínculo adotou-se estacas de rigidez K_1 , posicionadas nos pontos de área setorial conhecida, as quais se alongam ou se encurtam de acordo com o esforço nelas resultantes. Nos gráficos da figura 7.11.a. pode-se perceber um acréscimo nas translações Z_g , devido às deformações axiais destas estacas, que também contribuem para aumentar os efeitos de segunda ordem.

No item 7.4 foi analisado o sistema de contraventamento misto idealizado por **SILVA** (1989) e através da flexibilidade dos vínculos de rotação dos seus elementos verticais com a chapa - terra, verificou-se a importância da rigidez à flexão do núcleo na sua rigidez global. Quanto à rigidez ao empenamento, constatou-se que a sua influência no aumento da resistência à torção do sistema é mínima, isto se deve ao fato da sua consideração acarretar um acréscimo insignificante no coeficiente de rigidez à torção global, quando comparado à contribuição dada pela rigidez lateral dos demais elementos.

A análise da estrutura do item 7.5 teve como objetivo evidenciar os recursos existentes no programa e mostrar as limitações relacionadas ao **CEASO** que foram eliminadas nesta nova versão. Por esta razão a mesma foi projetada com elevado número de elementos distribuídos em 5 pavimentos tipo (5 modelos). Foram considerados ainda trechos rígidos e excentricidades de projeto. Observando as figuras e tabelas, relacionadas a este item, nota-se que a referida estrutura foi modelada em várias versões. Os resultados, inerentes à cada versão, foram obtidos em um tempo de processamento que pode ser considerado satisfatório (12 minutos em teoria de primeira ordem), revelando assim o bom desempenho do programa. A esta mesma estrutura foi aumentado progressivamente o número de pavimentos e o limite para um microcomputador com aproximadamente 1 giga de memória auxiliar foi atingido quando a estrutura tinha 75 pavimentos. Isto revela apenas que a limitação relativa às dimensões da estrutura foi eliminada, porém permanecem alguns limites referentes ao tipo de modelagem utilizada, os quais podem ser vistos

no item 5 do exemplar que contém a descrição dos códigos computacionais usados neste trabalho.

As análises das estruturas dos itens 7.2, 7.3 e 7.4 tiveram como principal objetivo o confronto dos resultados fornecidos por esse programa com os obtidos por outros autores, no sentido de aferir a precisão entre os diferentes métodos e hipóteses adotados por cada um.

Visando o desenvolvimento das pesquisas direcionadas aos edifícios altos, ficam para o leitor as seguintes sugestões:

- Para todos os elementos com rigidez à flexão acrescentar as deformações causadas pelo esforço cortante.
- Consideração das deformações causadas pelo momento de flexo-torção no núcleo. Isto implica na variação da posição do centro de torção de suas seções transversais ao longo da sua altura, sobretudo nas proximidades da fundação com rigidez suficiente para impedir total ou parcialmente o empenamento ou em regiões onde existem variações abruptas do momento torçor. Estas mudanças na posição do C.T., mesmo sendo mínimas, impedem a idealização de um eixo longitudinal retilíneo, o que pode exigir a adoção de um novo modelo matemático.
- Consideração da rigidez à flexão do pavimento através do método dos elementos finitos. Neste caso os elementos de contraventamento horizontais deverão ser discretizados em elementos finitos de barra e a laje em elementos finitos de placa, possibilitando assim, a determinação da rigidez do sistema estrutural do pavimento. As lajes poderão ainda contribuir com sua rigidez à flexão para diminuir o empenamento da seções transversais dos núcleos.
- Pode-se ainda associar o elemento de placa a um elemento de chapa, criando-se um elemento de casca. A laje discretizada com este elemento não mais funcionará como um diafragma infinitamente rígido no seu plano, inviabilizando a aplicação da técnica de translação de coordenada para o nó mestre.

Adotando-se para a deformação do plano médio do referido elemento, o módulo de elasticidade longitudinal do material que constitui a laje, pode-se verificar a veracidade do seu funcionamento como elemento compatibilizador dos deslocamentos horizontais. Quanto às ações do vento, anteriormente aplicadas no nó mestre, seriam transformadas em forças equivalentes, aplicadas

na direção das coordenadas de translação horizontal dos nós contidos no plano da fachada em que atuam.

- Nesta abordagem utilizou-se o princípio da energia potencial total mínima com o objetivo de determinar a rigidez da estrutura considerando seus vínculos com a chapa terra elásticos. Estes vínculos representam a possibilidade de ocorrer deformações nos elementos da fundação e exigem a determinação prévia dos valores de suas respectivas rigidezes, que são introduzidos no programa sob a forma de dados. Na tentativa de traduzir melhor o comportamento da estrutura e evitar o cálculo manual destes valores, sugere-se a elaboração de uma subrotina para obtenção da rigidez da fundação, a qual substituiria aquela que atualmente tem a função de impor as condições de contorno ao sistema de equações. Na elaboração deste algoritmo seria empregado o método dos elementos finitos associado ao método dos elementos de contorno. Para determinar a rigidez da supra estrutura, a mesma seria discretizada em elementos finitos e o solo em elementos de contorno, em fim seria uma subrotina dotada de recursos numéricos para analisar a interação da estrutura com o solo.

8 - BIBLIOGRAFIA

- ANTUNES, H.M.C.C. (1978). *Carregamento crítico de instabilidade geral para estruturas tridimensionais de edifícios altos*. São Carlos. 160p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1978). *NB 1/78 - Projeto e execução de obras de concreto armado*. Rio de Janeiro.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1994). *Texto base para a revisão da NB 1/78*.
- BATHE, K.J.; CIMENTO, A.P. (1980). Some practical procedures for the solution of nolinear finite element equation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v.22, p.59-85.
- BECK, H.; KÖNIG, G. (1966). Restraining forces (Festhaltekräfte) in the analysis of tall buildings. In: SYMPOSIUM ON TALL BUILDINGS, Oxford. *Proceedings*. p.513-536
- BECKER, E.P. (1989). *Edifícios altos: interação tridimensional das peças de contraventamento*. São Carlos. 181p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BEZERRA, D.P. (1995). *Análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos considerando a rigidez transversal à flexão das lajes*. São Carlos. 138p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BOSWELL, L.F.; LI, Q. (1995). Consideration of the relationships between torsion, distortion and warping of thin-walled beams. *Thin-Walled Structures*, v.21, p.147-161.
- CARMO, R.M.S. (1995). *Efeito de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado*. São Carlos. 112p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- CHAUDHARY, A.B. (1982). Generalized stiffness matrix for thin walled beams. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.108, p.559-577.
- CHEUNG, Y.K.; YEO, M.F. (1979). *A practical introduction to finite element analysis*. London, Pitman.
- COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DO BÉTON (1978). CEB-FIP Manual of buckling and instability. *CEB Bulletin D'Information*, n.123.
- COSTA, J.L. (1984). *Núcleos estruturais sobre fundações flexíveis*. São Carlos. 187p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- FIGUEIREDO, R.G. (1976). *Sobre a instabilidade elástica de pórticos tridimensionais de edifícios*. São Carlos. 160p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- FRANÇA, R.L.S. (1995). Exemplo de cálculo do esforço de segunda ordem em um edifício de concreto armado. In: REUNIÃO ANUAL DO IBRACON: Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado, São Paulo, 22-26 jul. *Anais*.
- FURLONG, R.W. (1983). Slenderness of columnns in braced frames. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.119, p.3405-3415.
- HINDMARSH, A.C. (1983). *ODEPACK: a systematized collection of ODE¹ solvers, in scientific computing*. Edited by R.S. Stepleman et al. Amsterdam, North-Holland. p.55-64.
- KRAJCINOVIC, D. (1970). Matrix force analysis of thin-walled structure. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.96, p.107-121.
- MACGREGOR, J.G.; HAGE, S.E. (1977). Stability analysis and design of concrete frames. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.103, p.1953-1970.
- MANCINI, E. (1983). *Núcleo estrutural sobre fundação flexível*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 24p.
- MICHAEL, D. (1969). Torsional compling of core walls in tall buildings. *The Structural Engineer*, v.47, n.2, p.67-71.
- MORI, D.D. (1978). *Flexo-torção: teorias de 1ª e 2ª ordem - automatização do cálculo*. São Carlos. 174p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

¹ Ordinary differential equation

- MORI, D.D. (1988). *Flexo-torção: barras com seção transversal aberta e paredes delgadas*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 132p.
- MORI, D.D. (1992). *Os núcleos estruturais e a não linearidade geométrica na análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos*. São Carlos. 196p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RACHID, M. (1975). *Instabilidade de barras de seção delgada*. São Carlos. 119p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RACHID, M.; MORI, D.D. (1989). *Instabilidade: conceitos- aplicação na flambagem por flexão*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 130p.
- RACHID, M.; MORI, D.D. (1993). *Instabilidade: flambagem de barras de seção delgada por torção e flexão*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 166p.
- REUNIÃO ANUAL DO IBRACON (1985): Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado, São Paulo, 22-26 jul. *Anais*. São Paulo, IBRACON.
- ROSEN, R.; RUBINSTEIN, M.F. (1977). Substructure analysis by matrix decomposition. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.3, p.663-670.
- SILVA, R.M. (1989). *Análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleo resistentes considerando o efeito P- δ* . São Carlos. 239p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SMITH, B.S.; COULL, A. (1991). *Tall building structure: analysis and design*. London, Wiley-Interscience.
- SORIANO, L.H. (1981). *Sistema de equações algébricas lineares em problemas estruturais*. Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil. (Seminário 280)
- SWIFT, R.D.; HEIDEBRECHT, A.C. (1970). *Behaviour of coupled shear-wall building*. Ontário, Dept. of Civ. Engrg. and Engrg. Mech. p.70-75.
- TARANATH, B.S. (1975). Torsion analysis of braced multy-storey cores. *The Structural Engineer*, v.53, p.285-288.
- TARANATH, B.S.; STAFFORD-SMITH, B. (1972). The analysis of tall core-supported structure subject to torsion. *Proc. Inst.Civ. Engrs.*, v.53, p.173-187.
- TSO, W.K.; BISWAS, J.K. (1973). Analysis of core wall structure subjected to applied torque. *Build. Sci.*, v.8, p.251-257.

- TSO, W.K.; BISWAS, J.K. (1973). Analysis of core wall structure subjected to applied torque. *Build. Sci.*, v.8, p.251-257.
- VASCONCELLOS, A.C. (1985). Critérios para dispensa de consideração do efeito de segunda ordem. In: REUNIÃO ANUAL DO IBRACON: Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado, São Paulo, 22-26 jul. *Anais*.
- VASCONCELLOS, A.C. (1986). Como se pode enrijecer edifícios muito flexíveis. In: LA INGENIERIA ESTRUCTURAL SULAMERICANA EN LA DÉCADA DEL 80, Montevideo, Uruguai. *Anais*. v.1, p.237-268.
- VLASOV, V. (1961). *Thin-walled elastic beams*. Washington, D.C., The Israel Program for Scientific Translations.
- WEAVER JR., W.; GERE, J.M. (1965). *Análise de estruturas reticuladas*. Rio de Janeiro, Guanabara Dois.
- WEAVER JR., W. (1967). *Computer programs for structural analysis*. Princeton, S. Van Nostrand. 300p.
- YAGUI, T. (1971). *Estruturas constituídas de paredes delgadas com diafragmas transversais*. São Carlos. 138p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- YAGUI, T. (1978). *Análise de estruturas de edifícios constituídas de núcleo de concreto armado e pilares ou pendurais de aço (carregamento crítico de instabilidade geral)*. Limeira. Tese (Livre-docência) - Faculdade Engenharia de Limeira, Universidade Estadual de Campinas.