

**ANÁLISE DA INTERAÇÃO PLACA-ESTACA-SOLO VIA  
COMBINAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM  
O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

**ÂNGELO VIEIRA MENDONÇA**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos, da Universidade de São Paulo,  
como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia de Estruturas

**ORIENTADOR: Prof. Dr. João Batista de Paiva**

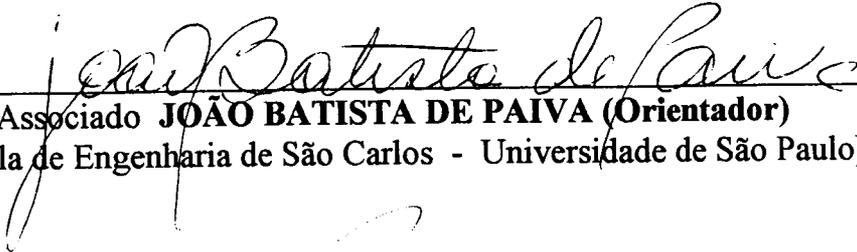


**São Carlos**

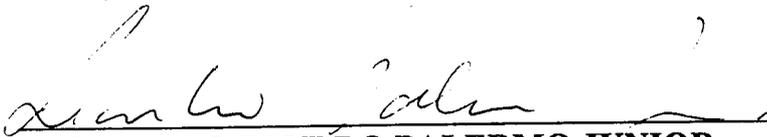
**Abril / 1997**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

Dissertação defendida e aprovada em 30-4-1997  
pela Comissão Julgadora:



Prof. Associado **JOÃO BATISTA DE PAIVA (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor **LEANDRO PALERMO JUNIOR**  
(Universidade Estadual de Campinas)



Prof. Titular **WILSON SERGIO VENTURINI**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor **MOUNIR KHALIL EL DEBS**  
Coordenador da Área de Engenharia de Estrutura



**JOSÉ CARLOS A. CINTRA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Aos meus pais.*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Dr. João Batista de Paiva pelo seu dedicado trabalho de orientação, atenção e compreensão.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Enfim, a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente na realização desta obra.

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1-INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1)Objetivos	8
<b>CAPÍTULO 2- FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS E DOS</b>	
<b>PRINCÍPIOS VARIACIONAIS</b>	<b>11</b>
2.1)Introdução	11
2.2)Relações básicas da teoria da elasticidade	11
2.3)Teoria clássica de placas	15
2.4)Placa com efeito da força cortante	21
2.4.1)Teoria de placas de Reissner	22
2.5)Princípios variacionais	28
2.5.1)Princípio dos Trabalhos Virtuais(PTV)	28
2.5.2)Princípio de energia potencial mínima	30
2.5.3)Princípio dos trabalhos virtuais complementar	32
2.5.4)Princípio de energia complementar mínima	33
2.5.5)Princípios variacionais estacionários	35
<b>CAPÍTULO 3-MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>38</b>
3.1)Introdução	38
3.2)Formulação do Método dos Elementos Finitos	38
3.2.1)Discretização da represent. integral dos funcionais	40
3.3)Elemento Finito DKT	44
3.4)Elemento Finito HSM	57
3.5)Vetor das cargas de nodais equivalentes	67
<b>CAPÍTULO 4- EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO</b>	<b>71</b>
4.1)introdução	71
4.1.1)Generalidades	71
4.2)Problema Elástico fundamental	71

4.2.1) Solução fundamental de Kelvin	72
4.2.2) Solução fundamental Mindlin	74
4.2.3) Solução Fundamental de Boussinesq-Cerruti	77
4.3) Corpos Tridimensionais infinitos	78
4.3.1) Representação integral para o campo de deslocamento	79
4.3.2) Representação integral para o campo das tensões	84
4.4) Corpos tridimensionais semi-infinitos	85
<b>CAPÍTULO 5- MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO</b>	<b>86</b>
5.1) Introdução	86
5.2) Discretização das equações integrais	86
5.3) Cont. do meio semi-infinito na interação placa-solo	92
5.3.1) Discretização da representação integral para a superfície do solo	93
<b>CAPÍTULO 6- MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO AO SISTEMA ESTACA-SOLO</b>	<b>98</b>
6.1) Introdução	98
6.2) Hipóteses Básicas	98
6.3) Discretização da representação integral	100
6.4) Integração numérica	110
<b>CAPÍTULO 7-COMBINAÇÃO ENTRE O MEC E O MEF</b>	<b>113</b>
7.1) Introdução	113
7.2) Sistema placa-solo	113
7.3) Sistema placa-estaca-solo	120
<b>CAPÍTULO 8-EXEMPLOS NUMÉRICOS</b>	<b>122</b>
8.1) Introdução	122
8.2) Interação placa-solo	122
8.2.1) Placa quadrada	122

8.2.2)Placa circular	129
8.3) Interação entre grupos de estacas e o solo	132
8.4) Interação placa-estaca-solo	136
8.4.1)Sapata longa apoiada sobre 4 estacas	137
8.4.2)Placa retangular apoiada sobre 9 estacas	140
8.4.3)Placa circular apoiada sobre 4 estacas	143
<b>CAPÍTULO 9-CONCLUSÕES</b>	<b>145</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>147</b>

**LISTA DE FIGURAS**

Figura 2.1- Estado de Tensões em um elemento infinitesimal.	12
Figura 2.2- Deslocamentos segundo às direções dos eixos cartesianos.	15
Figura 2.3- Deslocamento vertical e rotações presentes na placa	16
Figura 2.4- Comp. de tensão e momentos no sistema $(n, s, x_3)$	18
Figura 2.5- Esforços presentes em um elem. infinitesimal de placa.	20
Figura 2.6- Configurações da placa indeformada (a) e da placa fletida de Reissner-Mindlin (b).	24
Figura 2.7- Representações das densidades de energia potencial complementar, de materiais elásticos lineares (a) e não-lineares (b), para elementos unidimensionais.	34
Figura 3.1- Representação dos deslocamentos transversais no interior do elemento finito em função dos deslocamentos nodais.	41
Figura 3.2 - Parâmetros nodais e nós auxiliares do elemento DKT.	45
Figura 3.4- Variação cúbica ao longo dos lados do elemento.	50
Figura 3.5- Relações geométricas no elemento finito.	51

Figura 3.6 - Parâmetros nodais do elemento HSM.	58
Figura 3.7 - Forças de superfície e cargas nodais equivalentes.	68
Figura 3.8- Variação linear do deslocamento transversal e da força de superfície no interior do elemento finito.	69
Figura 4.1-Figura adaptada de NAKAGUMA(1979) para o problema de Kelvin.	74
Figura 4.2 -Figura adaptada de NAKAGUMA(1979) para o problema de Mindlin.	76
Figura 4.3 - Problema de Boussinesq-Cerruti.	79
Figura 4.4-Ponto fonte situado no contorno.	82
Figura 5.1-Representação da discretização do corpo em elementos de contorno (a) e em células(b)	89
Figura5.2- Distribuição das forças de superfície ao longo do elemento de contorno.	95
Figura 5.3 - Sistema local de coordenadas.	96
Figura 6.1- Representação das funções interpoladoras na estaca.	104
Figura 6.2- Integração na célula com o ponto fonte no interior do semi-espaço.	113

Figura 7.1 - Regiões discretizadas em MEC e MEF.	116
Figura 7.2- Forças presentes na interação placa-solo.	116
Figura 7.3- Nó com presença de estaca.	122
Figura 8.1 -Malha utilizada na modelagem e os tipos de carregamentos analisados.	125
Figura 8.2- Momentos na direção x ao longo de A-B em uma placa flexível com sujeita a uma força concentrada em seu centro.	127
Figura 8.3- Momentos na direção y ao longo de A-B em uma placa flexível com sujeita a uma força concentrada em seu centro	127
Figura 8.4- Deslocamentos verticais ao longo de A-B em uma placa flexível com sujeita a uma força concentrada em seu centro.	128
Figura 8.5- Reação do solo ao longo de A-B em uma placa flexível com sujeita a uma força concentrada em seu centro	128
Figura 8.6- Momentos na direção x ao longo de A-B em uma placa com rigidez intermediária sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.	129
Figura 8.7- Momentos na direção y ao longo de A-B em uma placa com rigidez intermediária sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.	130

- Figura 8.8-Deslocamentos verticais ao longo de A-B ao longo de A-B em uma placa com rigidez intermediária sujeita a um carregamento uniformemente distribuído. 130
- Figura 8.9-Reação do solo ao longo de A-B em uma placa com rigidez intermediária sujeita a um carregamento uniformemente distribuído. 131
- Figura 8.10-Placa circular apoiada sobre o solo: carregamento e malha de elementos finitos e de contorno adotados. 132
- Figura 8.11-Deslocamento do ponto central A da placa circular em função da rigidez da placa. 133
- Figura 8.12-Desloc. verticais da placa circular no eixo A-B. 134
- Figura 8.13- Esquema representativo de uma estaca isolada no semi-espaço. 135
- Figura 8.14-Relação carga-deslocamento de uma estaca flexível isolada em função de seu comprimento. 136
- Figura 8.15-Esquema representativa de duas estacas isoladas no semi-espaço. 136
- Figura 8.16- Relação carga-deslocamento de duas estacas flexíveis isoladas em função de seus comprimentos. 137
- Figura 8.17-Malha utilizada na placa rígida em contato com o solo e apoiada sobre 2 estacas. 137
- Figura 8.18-Relação carga-deslocamento para um bloco rígido apoiado sobre estacas flexíveis. 138

- Figura 8.19-Esquema representativo da sapata longa apoiada sobre quatro estacas. 139
- Figura 8.20- Deslocamentos ao longo da linha A-B em uma sapata longa sobre quatro estacas rígidas. 140
- Figura 8.21- Deslocamentos ao longo da linha C-D em uma sapata longa sobre quatro estacas rígidas. 140
- Figura 8.22- Deslocamentos ao longo da linha A-B em uma sapata longa sobre quatro estacas flexíveis. 141
- Figura 8.23- Deslocamentos ao longo da linha C-D em uma sapata longa sobre quatro estacas flexíveis. 141
- Figura 8.24- Malha de elementos finitos e de contorno utilizada na modelagem da placa apoiada sobre 9 estacas. 143
- Figura 8.25- Deslocamentos ao longo da linha A-B em uma placa retangular apoiada sobre 9 estacas rígidas. 144
- Figura 8.26- Deslocamentos ao longo da linha A-B em uma placa retangular apoiada sobre 9 estacas flexíveis. 144
- Figura 8.27-Dimensões e esquema representativo da placa circular apoiada sobre 4 estacas. 145
- Figura 8.28- Malha de elementos finitos e de contorno utilizada na modelagem de uma placa circular apoiada sobre 4 estacas. 146
- Figura 8.29- Deslocamentos ao longo da linha A-B em uma placa circular apoiada sobre 4 estacas rígidas e flexíveis. 146

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 8.1-Deslocamento vertical no centro de uma placa rígida apoiada no solo.	124
---	-----

## LISTAS DE SÍMBOLOS

$A$ : é a área do elemento de finito ou de contorno.

$A_p$ : é a área da seção transversal da estaca.

$b_i$ : são as componentes de forças volumétricas segundo a três direções dos eixos cartesianos.

$D$ : é o módulo de rigidez à flexão da placa; diâmetro da estaca.

$E$ : é o módulo de elasticidade longitudinal.

$E_{ijkl}$ : é o tensor de quarta ordem.

$E_{ijkl}^{-1}$ : é o tensor inverso de quarta ordem.

$E_p$ : é o módulo de elasticidade longitudinal da estaca.

$E_s$ : é o modulo de elasticidade para o solo.

$F_z$ : é a força de compressão que atua em uma altura  $z$  da estaca.

$g$ : é o carregamento externo distribuído.

$\bar{g}$ ,  $\bar{m}_1$ ,  $\bar{m}_2$  são as cargas nodais equivalentes relativo ao carregamento transversal e aos momentos, respectivamente.

$G$ : é o módulo de elasticidade transversal.

$G_s$ : é o módulo de elasticidade transversal do solo.

$m_{ij}$ : são as componentes dos momentos segundo o sistema global de coordenadas.

$m_s$ ,  $m_{ns}$ : são os momentos no sistema local de coordenada.

$K_z$ : é um fator de rigidez relativa.

$L$ : comprimento da estaca, comprimento do lado da placa.

$N_i$ : são as funções de formas para o elemento DKT.

$np$ : é o número de estacas.

$\hat{n}$ ,  $\hat{r}$  : são os versores de direção da normal do lado do elemento  $n$  e do raio vetor de distância.

$P$ : é a carga vertical concentrada aplicada sobre a estaca.

$\bar{p}_i$  são as componentes de forças de superfície prescritas.

$p_i$  : são as componentes de forças de superfície

$p_{ij}^*$  : é a solução fundamental em forças de superfície o problema elástico fundamental.

$Q_i$ : são as forças cortantes segundo as direções do sistema global de coordenadas.

$Q_n$  : são as forças cortantes, momentos fletores e momentos volventes no contorno, respectivamente

$r$ : é a distância entre o ponto-fonte e o ponto campo, é a distância do centro de uma placa circular a um ponto contido nela.

$R_b$ : é o raio da estaca.

$R_p$ : Raio na base da estaca.

$T_e$ : é o trabalho devido às cargas externas.

$U_b$ : é a energia de deformação provenientes da flexão no elemento DKT.

$U_{DKT}$ ,  $U_{HSM}$ : é a parcela da energia de deformação devida à flexão nos elementos DKT e HSM, respectivamente.

$U_i$ : é a energia de deformação no elementos DKT.

$u_i$ : representa as componentes de deslocamento.

$\bar{u}_i$  representa as componentes de deslocamento prescritos.

$u_{ij}^*$  : é a solução fundamental em forças de superfície o problema elástico fundamental

$U_0, U_0^*$ : representam a densidade de energia de deformação e a densidade de energia complementar, respectivamente.

$U_s$ : é a energia de deformação oriunda da força cortante.

$U\tau_1, U\tau_2$ : são as parcelas da energia de deformação devidas as tensões cisalhantes na direção  $x_3$ .

$V_n$ : é a *cortante equivalente* de Kirchhoff.

$w$ : é o deslocamento vertical do plano médio da placa.

$w_{,n}, w_{,s}$ : são as rotações do plano médio segundo os eixos  $n$  e  $s$  do sistema local situado no contorno.

$w^*$ : é o deslocamento adimensional vertical em uma placa circular.

$X$ : é o fator de rigidez relativa.

$\beta_{ij}$ : são os valores das rotações da seção transversal nos nós correspondentes aos vértices e ao pontos médios dos lados no elemento DKT.

$\Gamma$ : é uma sub-região do contorno de um corpo genérico.

$\Gamma_{el}$ : é o contorno do elemento de contorno.

$\Gamma_{pi}$  e  $\Gamma_{bi}$ : são o contorno do fuste e da base da estaca  $i$ , respectivamente.

$\Gamma_1$ : é a região do contorno de um corpo que contém as forças de superfície prescritas.

$\Gamma_2$ : é a região do contorno de um corpo que contém os deslocamentos prescritos.

$\Gamma_k$ : é o contorno do elemento  $k$ .

$\Delta$ : é o operador laplaciano:

$\delta_{ij}$ : é o delta de Kronecker

$\delta(p, s)$ : é o delta de Dirac

$\varepsilon_{ij}$ : representa as componentes de deformação no sistema global.

$\varepsilon_{ijk}^*$ : é a solução fundamental em deformações para o problema elástico fundamental.

$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ : são coordenadas adimensionais.

$\zeta$ : é uma coordenada adimensional.

$\eta$ : é uma coordenada adimensional.

$\eta_i$ : são os cossenos diretores da normal à superfície no ponto; são os cossenos diretores da direção  $n$ .

$\theta_1, \theta_2$ : são rotações das seções transversais da placa.

$\nu$ : é o coeficiente de Poisson.

$\nu_s$ : é o coeficiente de Poisson do solo.

$\pi_{\text{HSM}}$ : é o funcional de energia do modelo híbrido em tensões.

$\pi_{\text{DKT}}$ : é o funcional de energia do elemento finito DKT.

$\sigma_{ij}$ : são as componentes de tensão

$\sigma_{ijk}^*$ : é a solução fundamental em tensões para o problema elástico fundamental

$\phi$ : é o ângulo central do setor de círculo da interface estaca-placa.

$\Omega$ : é o domínio dos corpos..

$\Omega^*$ : é o domínio associado ao problema fundamental .

$\Omega_{el}$ : é o domínio do elemento de contorno .

$\tilde{A}$ : é a matriz que multiplica os vetor das incógnitas após impostas as condições de contorno.

$\tilde{B}$ : é o vetor que contém as forças volumétricas no MEC; No elemento DKT, é uma matriz que relaciona o vetor das curvaturas ao vetor dos parâmetros nodais.

$\tilde{B}_k$ : é o vetor que representa as forças volumétricas do elemento  $k$ .

$\tilde{B}_l^m$ : é o vetor dos valores nodais das forças volumét. na célula  $l$ .

$\tilde{C}_k$ : é a matriz da relação deformação/deslocamento de um elemento finito genérico  $k$ .

$\tilde{D}$ : é a matriz oriunda da lei de Hooke relacionando as tensões  $\tilde{\sigma}$  com as deformações  $\tilde{\varepsilon}$ .

$\tilde{D}_k$ : é a matriz oriunda da lei de Hooke relacionando as tensões  $\tilde{\sigma}_k$  com as deformações  $\tilde{\varepsilon}_k$  no elemento  $k$ .

$\tilde{e}^k$ : é a matriz que armazena o resultados das integrais quando o ponto fonte está percorrendo os nós do elemento de contorno  $k$ .

$\tilde{F}$ : é o vetores que contém as forças nodais equiv. de todos os nós.

$\tilde{f}_k$ : é a matriz que armazena o resultado das integrais das forças de superfície e das forças das forças volumétricas no elemento finito  $K$ .

$\tilde{G}$ : é a matriz que contém as contribuições  $\tilde{g}^k$  de todos elementos de contorno; é uma matriz auxiliar na formulação da matriz de rigidez do HSM.

$\tilde{g}^k$ : é a matriz que armazena o resultado das integrais dos forças de superfície fundamentais quando o ponto fonte percorre os nós do elemento de contorno  $k$ .

$\tilde{G}_s$ : é a matriz armazena os coeficientes que multiplicam os elementos do vetor  $\tilde{P}_s$ .

$\tilde{G}^{-1}$ : é a matriz  $\tilde{\bar{G}}^{-1}$  após a expansão.

$\tilde{h}^k$ : é a matriz que armazena o resultado das integrais dos

deslocamentos fundamentais quando o ponto fonte percorre os nós do elemento de contorno  $k$ .

$\tilde{H}$ : é a matriz que contém as contribuições  $\tilde{h}^k$  de todos os elementos de contorno; é uma matriz auxiliar na formulação da matriz de rigidez do elemento finito HSM.

$\tilde{k}$ : é o vetor que contém as componentes curvaturas no elemento finito DKT.

$\tilde{k}_k$ : é a matriz que contém a matriz de rigidez do elemento  $k$ .

$\tilde{K}_{DKT}$ : é a matriz de rigidez do elemento finito DKT.

$\tilde{K}_{HSM}$ : é a matriz de rigidez do elemento HSM.

$\tilde{K}_2$ : é a matriz de rigidez do sistema placa-solo após combinação do MEC com o Mec

$\tilde{L}$ : é a matriz de correlação entre  $\tilde{U}$  e  $\tilde{T}$ .

$\tilde{h}_f^k$ : é a matriz que armazena o resultado das integrais dos deslocamentos fundamentais quando o ponto-fonte percorre os nós do fuste da estaca  $k$ .

$\tilde{h}_b^k$ : é a matriz que armazena o resultado das integrais dos deslocamentos fundamentais quando o ponto-fonte está na base da estaca  $k$ .

$\tilde{h}_{el}^i$ : é a matriz que armazena o resultado das integrais dos deslocamentos fundamentais quando o ponto-fonte percorre os nós do elemento de contorno  $i$ .

$\tilde{M}$ : é a matriz que contém os momentos nos elementos finitos.

$\tilde{N}$ : é a matriz que faz ligação entre os deslocamentos nodais  $\tilde{U}_k$  com os deslocamentos  $u_k$  do domínio do  $k$ -ésimo elemento finito.

$\tilde{P}^n$ : é o vetor das forças de superfície nodais do elemento de contorno.

$\bar{\tilde{P}}_c$ : é o vetor das forças de superfície da interface placa-solo de um elemento de contorno.

$\tilde{Q}$ : é a matriz de transformação para o elemento de contorno  $k$ .

$\bar{\tilde{Q}}$ : é a matriz de transformação expandida relativa à contribuição de todos os elementos de contorno.

$\tilde{S}^k$ : é a matriz que contém os resultados das integrais das tensões fundamentais quando o ponto fonte percorre os nós do elemento de contorno  $k$ .

$\tilde{S}$ : é a matriz que contém as contribuições  $\tilde{S}^k$  de todos elementos de contorno.

$\tilde{U}$ : é o vetor que contém os deslocamentos nodais discretizados na superfície do semi-espaço e nas estacas; é o vetor que contém o deslocamento de todos os nós dos elementos finitos.

$\bar{\tilde{U}}_c$ : é o vetor dos deslocamentos de um elemento de contorno contendo apenas deslocamentos de translação.

$\tilde{T}$  : é o vetor que contém as forças de superfície nodais referentes à superfície do semi-espaço e as tensões nodais discretizadas nas estacas.

$\tilde{\beta}$  : é o vetor dos parâmetros generalizados do HSM.

$\tilde{\gamma}$  : é o vetor que contém as distorções da direção  $X_3$ .

$\tilde{\phi}$  : é uma matriz auxiliar da formulação da matriz de rigidez do elemento finito HSM.

$\tilde{\lambda}$  : é um vetor auxiliar da formulação da matriz de rigidez do elemento HSM.

$\tilde{\varepsilon}$  : é o vetor das deformações.

$\tilde{\Phi}^T, \tilde{\Psi}^T$  : são as matrizes transpostas compostas por funções interpoladoras das variáveis de contorno e das forças volumétricas, respectivamente.

$\tilde{\sigma}_k$  : é o vetor que contém as tensões normais da base da estaca  $k$ .

$\tilde{\sigma}_k^{np}$  : são os valores nodais das tensões normais da estaca  $k$ .

$\tilde{\tau}_k$  : é o vetor que contém as tensões cisalhantes do fuste da estaca  $k$ .

$\tilde{\tau}_k^{np}$  : são os valores nodais das tensões cisalhantes da estaca  $k$ .

$\tilde{\omega}$  : é o vetor que contém os parâmetros nodais do elemento DKT.

**LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ACM- Adini, Clough & Melosh.

DKT- Discrete Kirchoff Theory.

HSM- Hybrid Stress Model.

MEC- Método dos Elementos de Contorno.

MEF- Método dos elementos Finitos.

## RESUMO

MENDONÇA, A . V. *Análise da interação placa-estaca-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno.* São Carlos, 1997. 151p. Dissertação (Mestrado)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Neste trabalho é apresentada uma formulação híbrida do Método dos Elementos de Contorno/Método dos Elementos finitos à análise da interação placa-estaca-solo. Nesta formulação a placa é modelada pelo método dos elementos finitos, utilizando os elementos DKT( Discrete Kirchhoff Theory) e HSM(Hybrid Stress Model); e o solo é modelado pelo método dos elementos de contorno como um meio elástico semi-infinito. A estaca é representada por apenas um elemento, com 3 pontos nodais definidos ao longo de seu fuste e a tensão de cisalhamento ao longo da mesma é aproximada por um polinômio do segundo grau. A tensão normal à seção da extremidade inferior da estaca é suposta constante e um ponto nodal é definido no centro desta seção. A interface placa-solo é dividida em elementos de contorno triangulares coincidentes com a divisão dos elementos finitos da placa; e admite-se que a tensão de contato varie linearmente no domínio de cada elemento. As tensões de contato são eliminadas nos dois sistemas de equações, provenientes do MEF e do MEC, para obter o sistema final de equações governantes do problema. Após a resolução deste sistema são obtidos os deslocamentos nos nós e a partir deles são calculadas as tensões de contato placa-solo e a carga absorvida por cada estaca. Além disso, esta formulação também permite a análise de blocos de estacas com ou sem contato entre o bloco e o solo. Vários exemplos envolvendo a interação placa-solo, estaca-solo e placa-estaca-solo foram analisados e os resultados obtidos estão de acordo com os fornecidos por outras formulações.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno; Método dos elementos Finitos; Interação placa-estaca-solo; Estacas flexíveis.

## ABSTRACT

MENDONÇA, A . V. .Analysis of the plate-pile-soil interactions by combination of the Finite and Boundary Element Method. São Carlos, 1997. 151p. Dissertação (Mestrado)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This work presents a hybrid Finite Element/Boundary Element formulation for the analysis of plate-pile-soil interactions problems. In this formulation the plate is modeled by finite elements using DKT(Discrete Kirchhoff Theory) and HSM(Hybrid Stress Model) elements and the soil is modeled as an elastic half space by the boundary element method. The pile is represented by only one element, with 3 nodal points, and shear force along the pile is approximated by a second degree polynomial. The pile-tip stress is assumed to be constant over the cross-section and a further nodal point is located there. The interface plate-soil is divided in a triangular boundary elements mesh coincident with that used in the finite element of the plate and the subgrade traction is assumed to vary linearly across each element. The subgrade tractions are eliminated from the two system of equation obtained with FEM and BEM resulting in the governing system of equation for plate-pile-soil interactions problems. By solving this set of equations the nodal displacements, the load on the piles and the subgrade tractions are calculated. Besides, this formulation allows also analysis several piles groups with and without ground-contacting rigid and flexible caps. Numerical results are presented for plate-soil, pile-soil and plate-pile-soil interactions. In all the results agree closely with those from much more elaborate analysis.

Keywords: Boundary Element Method; Finite Element Method; Plate-pile-soil interactions; flexible piles.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

O solo tem sido alvo de inúmeras pesquisas, já que cumpre um papel importante na concepção e na definição final em projetos de engenharia civil e áreas correlatas.

Um dos parâmetros relevantes do solo a ser determinado é o recalque devido ao carregamento da estrutura. Uma parcela deste recalque, associada à deformação elástica, pode ser obtida mediante a teoria da elasticidade. Dentre os vários modelos existentes na literatura, podem-se aludir a três modelos clássicos do comportamento elástico do solo, a saber :

#### a) Modelo de Winkler

WINKLER(1867) propôs, em 1867, que o deslocamento na superfície do solo, em um ponto  $i$ , é diretamente proporcional à força de superfície aplicada neste ponto, e independente de outras forças aplicadas nos demais pontos, isto é, o deslocamento só ocorre onde atua a carga.

#### b) Modelo do Meio Contínuo

Na análise de experimentos no solo verificou-se que também ocorrem deslocamentos em regiões distintas daquela onde a carga atua. Alguns trabalhos foram desenvolvidos onde tal efeito era computado, dentre eles, o de BOUSSINESQ(1885), no qual é analisado o problema de um semi-espaço elástico linear sujeito à carga concentrada normal à superfície. Flamant desenvolveu formulação para o semi-espaço, onde analisou o caso de linhas de cargas normais à superfície descritas em TIMOSHENKO & GOODIER(1970). SELVADURAI(1979) cita que os deslocamentos na superfície de um semi-espaço, sujeito a uma carga normal uniforme de largura finita, pode ser analisado mediante a aproximação da integral de

Fourier, ou o método da superposição, usado por SNEDDON(1958). Quando o carregamento for dado por uma pressão uniforme distribuída numa região circular, utilizando-se o método da superposição, o integrando da equação integral é ponderado por funções de Bessel como descrito em WATSON(1944).

### c) Modelo de Dois parâmetros

Este modelo é definido por duas constantes elásticas independentes, reduzindo a descontinuidade apresentada pelo modelo de Winkler. SELVADURAI(1979) cita alguns modelos apresentados por alguns pesquisadores, a saber:

#### c<sub>1</sub>)Modelo de Filonenko-Borodich

A continuidade entre as molas é promovida por uma membrana delgada tensionada entre elas, de maneira que a equação diferencial incorpora a contribuição da tensão na membrana e o coeficiente da base elástica de Winkler.

#### c<sub>2</sub>)Modelo de Pasternack

O princípio é análogo ao modelo anterior, só que a continuidade entre as molas é simulada por uma camada flexível apenas ao cisalhamento, de forma que a equação diferencial é afetada pelo módulo de elasticidade transversal da camada e pelo coeficiente da base elástica.

#### c<sub>3</sub>)Modelo de Hetényi

A continuidade é simulada pela introdução de uma placa elástica na interação entre as molas, de sorte que a equação diferencial tem uma parcela da equação de placa e outra adicional referente à base de Winkler.

#### c<sub>4</sub>) Modelo de Vlasov

É um modelo híbrido derivado de simplificações do contínuo isótropo e obtido através de restrições sobre as possíveis distribuições de deslocamentos, usando, inclusive, variação linear e exponencial deste. As equações diferenciais do solo são obtidas a partir do método variacional, e após a imposição de restrições acima mencionadas, dão respostas parecidas com as obtidas pelo método de dois parâmetros.

Vários trabalhos foram publicados em que o modelo de Winkler foi usado para modelar a interação solo-estrutura, tais como: CHILTON & WEKEVER(1990), que apresentam o estudo de placas usando o elemento finito de placa quadrilateral não-conforme. BOLTON(1972) estuda grandes deslocamentos e tensões induzidas numa placa circular sujeita a um carregamento uniforme, onde os coeficientes da base elástica são posicionados na matriz de rigidez da placa; CALDERÓN(1991) estuda o problema de uma placa sobre fundação elástica via MEC, onde a integral de domínio, proveniente dos carregamentos tanto externo como da reação base, é transformada em integral de contorno ao longo das respectivas regiões onde as cargas estão atuando. MANZOLI(1992) apresenta formulação pelo método dos elementos de contorno à análise de placas delgadas em que a solução fundamental leva em conta a presença da base elástica. BADIE & SALMON(1996) apresentam um estudo em que o solo é representado pelo modelo de dois parâmetros, assim como é levado em conta a fricção entre a base da estrutura e o solo. A superestrutura é modelada com elementos finitos quadrilaterais isoparamétricos representando o estado plano de tensão ou de deformação, que são capazes de computar a distorção da superestrutura; e os deslocamentos são aproximados quadraticamente e a tensão linearmente. YUNG & WANG(1991) discutem o caso de uma placa sobre fundação elástica utilizando o multiplicador de Lagrange, a fim de estabelecer um princípio variacional generalizado com uma função para os deslocamentos e outra para a reação do solo.

Com relação ao estudo da interação solo-estrutura, em que o solo é representado por um meio contínuo tridimensional, pode-se citar: CHAKRAVORTY & GHOSH(1975) analisam a interação da superfície do solo com placas circulares utilizando o método das diferenças finitas. CHEUNG & NAG(1968) estudam placas e vigas pelo MEF, onde são consideradas tanto a fricção, entre a superestrutura e a superfície do solo, assim como o descolamento da placa do solo em algumas regiões; o solo é modelado utilizando-se a equação de Flamant . YANG & LU(1992) analisam a interação de uma torre de resfriamento hiperbólica com o solo, tomando partido da axissimetria da superestrutura. Nesse estudo partiu-se para uma formulação semi-analítica do MEF e do MEC modelando, respectivamente, a superestrutura e o solo. Os deslocamentos e as forças de superfície são aproximados por séries de Fourier. KUKRETI & ISSA(1993) desenvolvem uma solução semi-analítica para o comportamento de um tanque cilíndrico, onde a função de distribuição de pressões, postulada por SNEDDON(1958), requer que a placa de fundo seja circular. Os deslocamentos são aproximados por uma série de potência, cuja convergência depende do número de termos adotados.

Podem ser citados também, segundo PAIVA(1993), os trabalhos publicados por HEMSLEY (1990 a,b) que fazem um estudo das várias formulações do método dos elementos finitos disponíveis para a análise da interação placa-solo. Nesses trabalhos o número de incógnitas é geralmente muito grande e, devido à modelagem do solo pelo MEC, a matriz de rigidez final deixa de ser simétrica, o que implica em que grande área de memória ser necessária para armazenar essas matrizes, resultando em grande tempo de processamento computacional necessário para a resolução do sistema de equações. MESSAFER & COATES(1990) desenvolvem uma formulação em que o método dos elementos finitos é associado ao método dos elementos de contorno para a análise deste problema. Nesse trabalho a placa é dividida em elementos finitos e o solo, suposto meio contínuo, é definido por equações integrais. Com isso, associado à não simetria do problema, decorrente do método dos elementos de contorno, também tem grande número de

incógnitas resultante da divisão da placa em elementos finitos. Nessa formulação o volume de dados de entrada é bem menor que as formulações comentadas anteriormente, mas mesmo assim continua sendo grande. FATEMI-ARDAKANI (1987) desenvolve uma formulação em que tanto o solo como a placa são modelados pelo método dos elementos de contorno. Neste caso, a matriz final do sistema de equações também não é simétrica, entretanto, devido ao fato de que a dimensão do problema fica reduzida, característica do método dos elementos de contorno, o número de incógnitas é bem menor que o das formulações anteriores. Nesse trabalho, entretanto, a interface placa-solo é dividida em células retangulares, em que tanto a reação do solo como os deslocamentos da placa são supostas constantes, de forma que promove resultados não muito precisos, quando comparados com os obtidos por outras formulações.

Com relação à interação solo-estaca em POULOS & DAVIS(1968) é apresentada uma formulação onde a estaca é dividida em vários elementos. Nessa formulação são escritas as equações integrais para cada um desses elementos, considerando-se a influência do solo e das outras estacas do grupo, supondo-se que apenas a tensão de cisalhamento atua ao longo do fuste de cada estaca. Esta formulação foi posteriormente estendida para permitir uma análise simplificada de grupos de estacas. Inicialmente foi feito um estudo paramétrico da interação entre duas estacas com o solo, e a partir dos resultados obtidos, o método foi aplicado ao estudo de grupos de estacas, considerando-se a superposição elástica da influência de todos elementos do grupo tomados dois a dois. Embora esta superposição somente seja válida quando todas as estacas estejam distribuídas ao longo de uma circunferência, esse método tem sido utilizado para calcular a distribuição de carga em grupos de estacas em que isto não ocorre. A grande vantagem desse método é que, para grupos com pequeno número de estacas, o cálculo pode ser feito manualmente. Posteriormente, BUTTERFIELD & BANERJEE(1971) estenderam esta formulação incluindo também o efeito da tensão radial, o que permite a compatibilização de deslocamentos nesta direção. Entretanto, a consideração da tensão radial

conduz a resultados que diferem muito pouco dos obtidos quando seu efeito não é considerado, o que levou a esta tensão ser desprezada em formulações posteriormente desenvolvidas. Embora possam ser aplicadas a análise de grupos de estacas, com qualquer distribuição geométrica de seus elementos, essas formulações envolvem um número muito grande de variáveis resultando em grandes sistemas de equações e, conseqüentemente, o acoplamento desse elemento estrutural (estaca) com outros fica praticamente inviabilizado.

Um dos tipos de fundações de edifícios geralmente utilizado é o "radier", que consiste em uma placa de concreto que está apoiada sobre o solo e recebendo os carregamentos advindos da superestrutura. Embora a placa sempre possa ser dimensionada para receber todo o peso da superestrutura, a sua utilização pode ser comprometida devido à ocorrência de grandes recalques. Com o objetivo de reduzir esses recalques são utilizadas estacas formando uma estrutura composta. Entretanto, no dimensionamento desse conjunto, a tendência é desprezar a contribuição da placa e considerar que todo peso é absorvido pelas estacas, o que leva a um super-dimensionamento da fundação. A principal causa desta simplificação é que a análise do problema real é muito complexa e, até o presente momento, poucos trabalhos foram desenvolvidos para sua análise. Dentre estes trabalhos podem-se citar os apresentados por DAVIS & POULOS (1972), BUTERFILED & BANERJEE (1971b), cujas formulações a placa é considerada rígida. Poucos trabalhos foram desenvolvidos onde a placa é considerada de rigidez finita, podendo-se citar o de BROWN & WIESNER(1975) para a análise de uma longa sapata flexível apoiada em estacas. Nessa formulação, entretanto, são utilizadas as simplificações da teoria de vigas e a reação do solo é suposta constante em toda largura da sapata. Em FATEMI-ARDAKAMI(1987) é apresentada também uma formulação do método dos elementos de contorno para o estudo deste problema. Nessa formulação, inicialmente, é estudada a interação entre as estacas e o solo com o objetivo de se determinarem as rigidezes das estacas, que posteriormente são tratadas como vínculos elásticos

concentrados. Nessa formulação, entretanto, a contribuição da tensão de contacto entre a placa e o solo não é considerada na determinação das rigidezes das estacas e, conseqüentemente, a interação entre os elementos estruturais envolvidos não é representada adequadamente. Em POULOS & DAVIS(1980) é apresentada uma formulação para a análise da interação entre uma placa rígida e um grupo de estacas em que são consideradas as interações entre o solo, as estacas e a placa; a contribuição das estacas é obtida de modo semelhante à formulação proposta POULOS & MATES(1971) para grupo de estacas isoladas; é feito um estudo paramétrico da interação do solo com um grupo de duas unidades placa-estaca, cuja placa é circular e rígida. A partir dos resultados obtidos, o método é aplicado ao estudo da interação de uma placa rígida apoiada sobre estacas, considerando-se a superposição elástica da influência de todas as estacas tomadas duas a duas. Embora esta superposição seja válida apenas quando todas as estacas do grupo estejam distribuídas ao longo de uma circunferência, este método tem sido utilizado para a análise de conjuntos placa-estaca-solo em que isto não ocorre. Posteriormente, HAIN & LEE(1978) estenderam essa formulação para a análise da interação entre placas flexíveis e estacas, e a aplicaram à análise de problemas genéricos, cuja distribuição circular de estacas não era obedecida, embora esta condição continue sendo necessária para a validade da formulação.

Pode-se destacar também trabalho apresentado por POULOS(1994) à análise da interação placa-estaca-solo, no qual, como no trabalho de FATEMI, as estacas são representadas por molas, obtidas a partir de um programa para a análise da interação estaca-solo. Além disso, são usadas relações carga-deslocamento para duas estacas, a fim de sejam escritas as equações referentes aos pontos localizados no topo das estacas.

PAIVA(1993) apresentou uma formulação, onde o conjunto placa-estaca-solo é modelado pelo MEC, em que todas as interações envolvidas são consideradas simultaneamente. A placa pode ser tanto rígida como flexível. As estacas são rígidas e representadas por um elemento de contorno. As reações do solo são admitidas variando linearmente no

domínio dos elementos de contorno; e as tensões na estaca são escritas como uma tensão equivalente no topo desta, possibilitando que o sistema final de equações seja escrito apenas em função dos nós que estão discretizados na superfície do solo.

### **1.1)Objetivos**

Este trabalho tem como finalidade o desenvolvimento de uma formulação para a análise da interação placa-estaca-solo com a utilização conjunta do método dos elementos finitos e do método dos elementos de contorno onde todas as interações envolvidas serão consideradas simultaneamente, obtendo-se assim uma alternativa à formulação proposta em PAIVA(1993). A placa é modelada pelo MEF utilizando os elementos DKT e HSM; e o solo é modelado pelo MEC. A estaca é representada por um único elemento e a tensão de cisalhamento ao longo de seu fuste é aproximada por um polinômio do segundo grau; e a tensão normal na base da estaca é suposta uniformemente distribuída. Para cada estaca tem-se quatro pontos nodais, três ao longo do fuste e um ponto nodal em sua base. A reação do solo é suposta linearmente distribuída na área dos elementos de contorno, que nesta formulação coincide com os elementos finitos de placa.

É apresentado no capítulo 2, os fundamentos da teoria de placas, assim como uma introdução aos princípios variacionais. No capítulo 3 é apresentado o método dos elementos finitos, evidenciando-se as formulações dos elementos finitos de placa DKT (Discrete Kirchhoff Theory) e HSM(Hybrid Stress Model). No capítulo 4 são descritos os problemas elásticos fundamentais e suas respectivas soluções para meios tridimensionais infinitos e semi-infinitos. São deduzidas equações integrais que ligam os problemas elásticos fundamentais aos problemas elásticos reais. No capítulo 5 é discutida a discretização das equações integrais descritas no capítulo anterior, que após o cálculo das integrais obtém-se a representação algébrica do método dos elementos de contorno para problemas tridimensionais genéricos. São particularizadas as

representações integrais e algébricas do MEC para analisar a contribuição da superfície do solo no problema da interação da interface placa-solo. No capítulo 6 são apresentadas as representações integrais e algébricas para o problema da interação estaca-solo. É discutida a influência da flexibilidade axial das estacas na matriz que multiplica o vetor das forças de superfície. No capítulo 7 o sistema de equações algébricas, oriundo do MEF modelando a placa, é acoplado ao sistema de equações algébricas oriundo do MEC modelando o solo e as estacas. Com isso, é mostrada as operações matriciais necessárias à combinação do MEF com o MEC utilizada no conjunto placa-estaca-solo. No capítulo 8 faz-se uma análise numérica da formulação apresentada nos capítulos anteriores.

Computacionalmente, este trabalho envolveu o desenvolvimento das seguintes rotinas na linguagem FORTRAN:

Subrotina QUOTA: armazena os valores das coordenadas adimensionais  $\eta$  referentes aos pontos nodais discretizados no fuste e base das estacas.

Subrotina AXI\_PILE: calcula as expressões  $f_i$ , dadas em (6.18 a-e), para a consideração da flexibilidade da estaca.

Subrotina ARTER: Calcula as forças nodais equivalentes nas células.

Subrotina FLEX\_PILE: posiciona a contribuição das expressões  $f_i$  na matriz indicada em (6.19).

Subrotina PRODUTO: calcula o produto das matrizes  $\bar{Q}$  e  $\bar{G}^{-1}$  definidas no capítulo 7.

Subrotina EXPANSAO: Compatibiliza a ordem da matriz resultante do produto das matrizes anteriores com a matriz de rigidez obtida pelo método dos elementos finitos. Na seqüência esta subrotina realiza a operação matricial indicada em (7.16), obtendo-se a matriz de rigidez do acoplamento MEF-MEC.

Subrotina S\_LINEAR: resolve o sistema de equações lineares indicado em (7.15) através do procedimento de eliminação de Gauss.

Estas subrotinas foram incluídas nos programas PILE desenvolvidos em PAIVA(1993), que faz análise de grupos de estacas com bloco rígido e

nos programas PAV\_DKT desenvolvidos em REZENDE & PAIVA(1994) para a análise de placas pelo método dos elementos finitos utilizando os elementos de placa DKT e HSM.

## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS E DOS PRINCÍPIOS VARIACIONAIS

#### 2.1) Introdução

Neste capítulo são apresentadas as relações básicas da teoria da elasticidade, assim como os fundamentos da teoria de placas relativas às hipóteses de Kirchhoff e Reissner. Também são apresentados os fundamentos dos princípios variacionais, que posteriormente serão utilizados na obtenção das matrizes de rigidez dos elementos finitos DKT e HSM.

#### 2.2) Relações Básicas da teoria da elasticidade

Um sistema estrutural pode ser dividido em sub-estruturas colaborantes, que por sua vez podem ser compostos por elementos estruturais, ou até mesmo, serem os próprios. Os elementos estruturais podem ser classificados em três grupos, a saber:

- a) *Elementos lineares*: quando uma das dimensões é bem maior que as demais.
- b) *Elementos de superfície*: quando de uma das dimensões é desprezível quando comparada às demais.
- c) *Elementos volumétricos ou tridimensionais*: quando todas as dimensões têm a mesma ordem de grandeza.

A placa é um elemento estrutural de superfície, que satisfaz a seguintes prescrições:

- a) É limitada por duas superfícies planas, onde o plano eqüidistante entre elas é chamado *plano médio*.
- b) A distância entre as superfícies simétricas ao plano médio, chamada de *espessura*, não necessariamente constante, é pequena quando comparada as demais dimensões, caracterizando-se um elemento de superfície.
- c) As ações solicitam o elemento na direção transversal ao plano médio.

A placa recebe a seguinte classificação em relação às propriedades do material constituinte:

- a) *Anisótropa*: quando apresenta propriedades diferentes em qualquer direção.
- b) *Ortótropa*: quando apresenta propriedades diferentes em direções ortogonais.
- c) *Isótropa*: quando apresenta as mesmas propriedades em qualquer direção.

Pode-se ainda classificar a placa segundo à relação espessura-dimensão do menor lado ( $h/a$ ), a saber:

- a) *Muito delgada*: quando  $h/a < 1/100$ .
- b) *Delgada*: quando  $1/100 < h/a < 1/5$ .
- c) *Espessa*: quando  $h/a > 1/5$ .

As componentes de tensão, em um elemento infinitesimal, são mostradas na figura 2.1

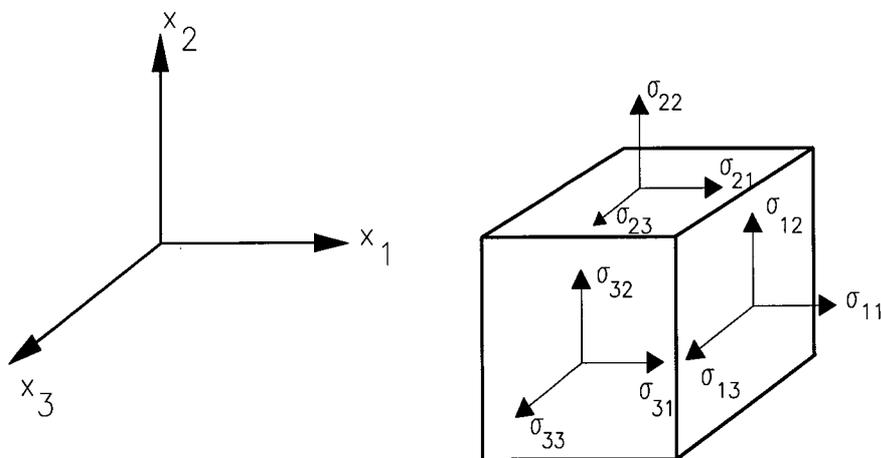


Figura 2.1-Estado de Tensões em um elemento infinitesimal

O regime elástico linear é regido pela lei de Hooke, que pode ser apresentada como:

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{||} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.1)$$

ou na forma inversa:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{||} \delta_{ij} \right) \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.2)$$

onde:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.2a)$$

E: é o módulo de elasticidade longitudinal

G: é o módulo de elasticidade transversal

$\nu$ : é o coeficiente de Poisson

$\sigma$ : representa o campo das tensões

$\varepsilon$ : representa o campo das deformações

$\delta_{ij}$ : é o delta de Kronecker

O tensor de deformações de Cauchy, ou relação deformação/deslocamento, para pequenos deslocamentos, é dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.3)$$

Quando não houver momentos distribuídos por unidade de volume, a simetria do tensor das tensões pode ser obtida através das condições de equilíbrio dos momentos no elemento infinitesimal mostradas na figura 2.1, isto é:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.3a)$$

As componentes de forças de superfície e as de tensões podem ser relacionadas, a partir de equações conhecidas como *fórmula de tensão de Cauchy*, isto é:

$$p_i = \sigma_{ij}\eta_j \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.4)$$

Onde:

$p_i$  ,  $\sigma_{ij}$ : são as componentes de forças de superfície e de tensões, respectivamente.

$\eta_i$ : são os cossenos diretores da normal à superfície no ponto.

Fazendo-se o equilíbrio do elemento, mostrado na figura 2.1, obtém-se as equações de equilíbrio dadas por:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.5)$$

Onde  $b_i$  são as componentes das forças volumétricas segundo a três direções dos eixos cartesianos.

Ao levar-se a equação constitutiva (2.1) na equação de equilíbrio(2.5), obtém-se a equação de Navier dada por:

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{ik,jk} + u_{ij,kk} + \frac{b_i}{G} = 0, \quad (i,j,k=1,2,3) \quad (2.6)$$

### 2.3) Teoria clássica de placas

O desenvolvimento da *teoria clássica de placas* é devido a Kirchoff, e ela é baseada em algumas hipóteses, a saber:

- a) A placa é constituída de material elástico linear, homogêneo e isótropo.
- b) Os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados à espessura da placa.
- c) As Tensões normais na direção transversal são desprezadas, assim como as tensões tangenciais nas faces da placa.
- d) Seções planas, inicialmente normais ao plano médio da placa, após a flexão, permanecem planas e perpendiculares ao plano médio deformado, ou seja, a teoria clássica despreza a influência da deformação devido à força cortante.

As componentes de deslocamento de um ponto pertencente à placa são representadas por  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  nas direções dos eixos cartesianos  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , mostrados na figura 2.2. O deslocamento vertical do plano médio  $U_3$  é representado por  $W$ .

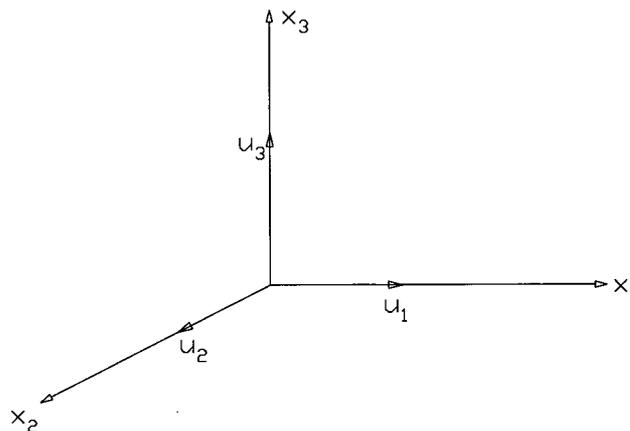


Figura 2.2- Deslocamentos segundo às direções dos eixos cartesianos.

Os deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$  podem ser obtidos através de relações geométricas a partir das rotações do plano médio mostradas na figura 2.3.

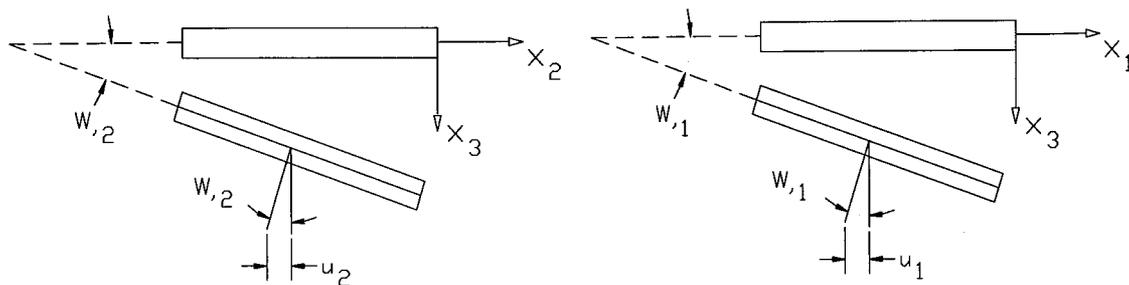


Figura 2.3- deslocamento vertical e rotações presentes na placa

Indicialmente, tais relações geométricas dos deslocamentos podem ser apresentadas na forma, a saber:

$$u_i = -x_3 w_{,i} \quad (i,j=1,2) \quad (2.7)$$

As tensões são obtidas levando-se a equação (2.7) na lei de Hooke (2.1), isto é:

$$\sigma_{ij} = -x_3 \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (1-\nu)w_{,ij} + \nu w_{,||} \delta_{ij} \right] \quad (i,j=1,2) \quad (2.8)$$

Os momentos fletores e momentos volventes, assim como as forças cortantes, por unidade de comprimento, são representados, respectivamente por:

$$m_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} x_3 dx_3 \quad (i,j=1,2) \quad (2.9)$$

$$q_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{i3} dx_3 \quad (i,j=1,2) \quad (2.10)$$

Substituindo-se (2.8) em (2.9) e efetuando-se a integração em  $X_3$ , obtém-se os momentos em função das curvaturas:

$$m_{ij} = -D[(1-\nu)w_{,ij} + \nu w_{,ll} \delta_{ij}] \quad (i,j=1, 2) \quad (2.11)$$

onde  $D$  é o módulo de rigidez à flexão e é dado por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.12)$$

As forças cortantes também podem ser escritas em função da elástica da placa, isto é:

$$q_i = -D w_{,i3} \quad (i,l=1,2) \quad (2.13)$$

As componentes de tensão podem ser representadas em um outro sistema de coordenadas  $(n, S, X_3)$ , conforme mostrado na figura 2.4.

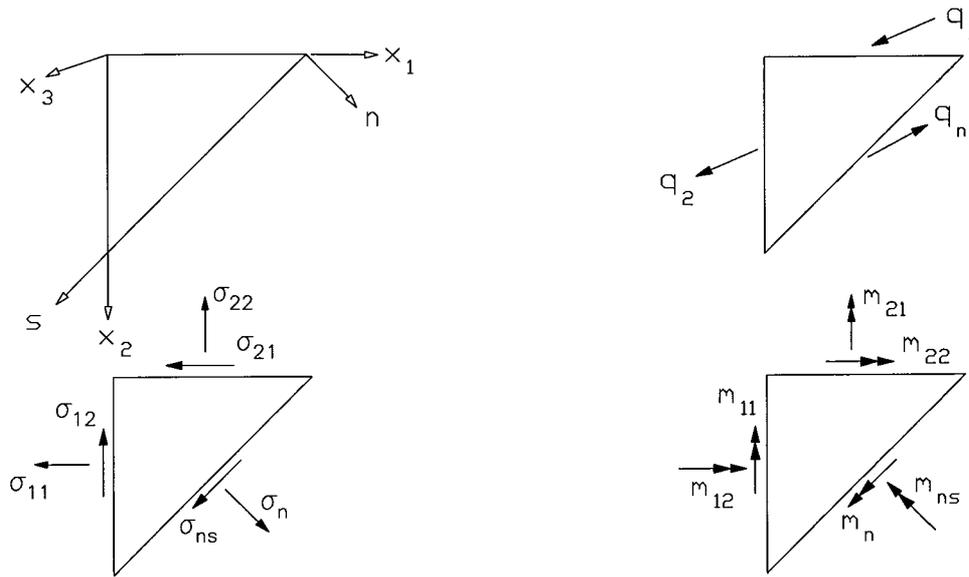


Figura 2.4 - Componentes de tensão e momentos no sistema  $(n, s, x_3)$ .

As componentes de tensões no sistema  $(n, s, x_3)$  podem ser obtidas a partir das componentes de tensões no sistema  $(x_1, x_2, x_3)$ , mediante uma rotação de eixos coordenados em torno do eixo  $x_3$ , isto é:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^n & \sigma_{12}^n \\ \sigma_{21}^n & \sigma_{22}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \zeta_1 & \zeta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta_2 & \zeta_2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Onde:

$\sigma_{ij}^n$  : são as componentes de tensões no sistema  $(n, s, x_3)$

$\eta_i$  : são os cossenos diretores da direção  $n$

$\zeta_i$  : são os cossenos diretores da direção  $s$

Ou na forma indicial, isto é:

$$\sigma_n = \sigma_{ij} \eta_i \eta_j \quad (i,j=1,2) \quad (2.15)$$

$$\sigma_{ns} = \sigma_{ij} \eta_i \zeta_j \quad (i,j=1,2) \quad (2.16)$$

Os momentos fletores, momentos volventes e forças cortantes, podem ser escritos, respectivamente, como:

$$m_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_n x_3 dx_3 \quad (i,j=1,2) \quad (2.17)$$

$$m_{ns} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ns} x_3 dx_3 \quad (2.18)$$

$$q_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{n3} dx_3 \quad (2.19)$$

A partir de (2.9 ), (2.10 ), (2.15 ), (2.16), (2.17), (2.18) e (2.19), os momentos fletores, momentos volventes e forças cortantes podem ser escritos , no sistema  $(n, S, X_3)$ , respectivamente, como:

$$m_n = m_{ij} \eta_i \eta_j \quad (i,j=1,2) \quad (2.20)$$

$$m_{ns} = m_{ij} \eta_i \zeta_j \quad (i,j=1,2) \quad (2.21)$$

$$q_n = q_i \eta_i \quad (i,j=1,2) \quad (2.21a)$$

A imposição de equilíbrio dos esforços atuantes no elemento infinitesimal de placa, mostrado na figura 2.5, permite escrever as seguintes relações:

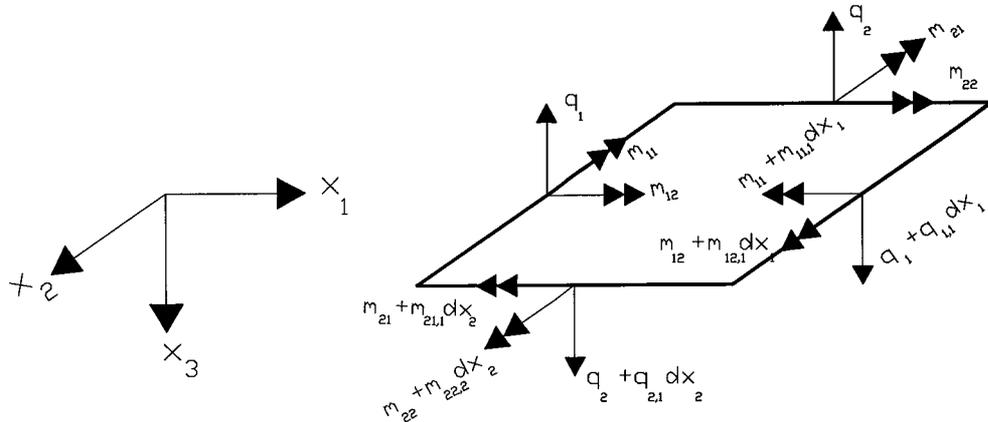


Figura 2.5- Esforços presentes em um elemento infinitesimal de placa

$$q_{i,i} + g = 0 \quad (i=1,2) \quad (2.22)$$

$$m_{ij,j} - q_i = 0 \quad (i,j=1,2) \quad (2.23)$$

Onde  $g$  é o carregamento externo distribuído.

Derivando-se (2.23) em relação a  $j$ , seguida da substituição em (2.22), obtém-se a equação diferencial de placas em função dos momentos, a saber:

$$m_{ij,jj} + g = 0 \quad (i,j=1,2) \quad (2.24)$$

A equação diferencial de placas delgadas, em função do deslocamento transversal do plano médio, é obtida através da substituição de (2.11) em (2.24):

$$w_{,ijij} = \frac{q}{D} \quad (i,j=1,2) \quad (2.25)$$

Faz-se necessário, para resolução da equação diferencial de placas, a prescrição das condições de contorno. A solução para a equação diferencial de quarta ordem das placas requer que duas condições de contorno sejam satisfeitas em cada lado da placa. Estas condições são escritas em relação ao sistema  $(n, s, X_3)$  e podem ser uma combinação do deslocamento  $w$ , rotação  $W_{,n}$ , força cortante,  $Q_n$ , momento fletor  $m_n$  e momento volvente  $m_{ns}$ .

Kirchhoff mostrou que, placas em que a deformação transversal é desprezada, as condições de contorno relativas aos esforços  $Q_n$  e  $m_{ns}$  podem ser agrupadas em uma única condição chamada de *cortante equivalente*, isto é:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} \quad (2.26)$$

Com isso, as três condições de contorno para os esforços existentes em cada borda ficam reduzidas a apenas duas, possibilitando a resolução da equação diferencial de quarta ordem da teoria clássica.

#### 2.4) Placa com efeito da força cortante

A teoria clássica de placas não conduz a bons resultados em algumas situações, por exemplo: na análise de placas espessas, na análise

das regiões próximas aos bordos das placas, na análise de furos de pequenas dimensões comparados à espessura da placa.

A perda do bom desempenho, acima mencionado, vem do fato que as deformações devido às tensões cisalhantes  $\sigma_{3j}$  são desprezadas, equivalendo a considerar um valor infinito para o módulo de elasticidade transversal na direção  $X_3$ . Com isso, a equação diferencial de placas recai em uma equação de quarta ordem requerendo que apenas duas condições de contorno sejam satisfeitas em cada lado.

Uma análise mais criteriosa do comportamento da placa requer que três condições de contorno sejam satisfeitas em cada lado, recaindo-se em uma equação diferencial de sexta ordem, que incorpora a contribuição das forças cortantes.

Na literatura são encontradas diversas teorias que levam em conta o efeito da força cortante no comportamento da placa, dentre elas, pode-se citar a teoria de Reissner

#### **2.4.1) Teoria de placas de Reissner**

A diferença básica entre teoria de Kirchhoff e a de Reissner é que a última assume que seções planas, inicialmente normais ao plano médio da placa, após a flexão, permanecem planas, mas não obrigatoriamente perpendiculares ao plano médio deformado como indicado na figura 2.6. As demais hipóteses assumidas pela teoria clássica são incorporadas pela teoria de Reissner.

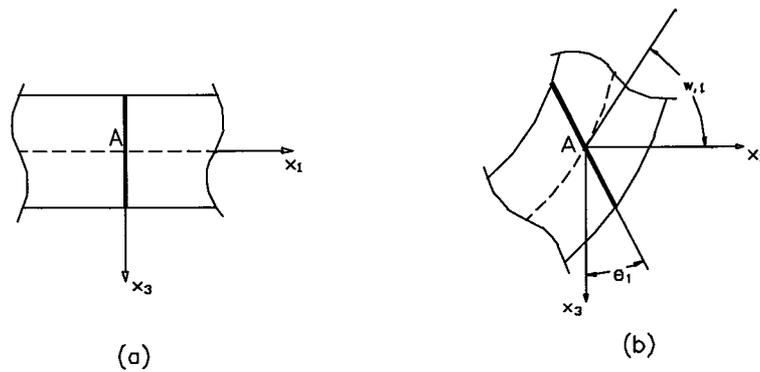


Figura 2.6- Configurações da placa indeformada (a) e da placa fletida de Reissner (b)

No plano médio são definidos valores médios para o deslocamento transversal  $w$ , assim como para as rotações  $(\theta_1, \theta_2)$  das seções transversais da placa.

O trabalho realizado pelo estado de tensões e de deslocamentos, que os pontos situados ao longo de uma seção estão submetidos, é equivalente ao trabalho oriundo do produto dos esforços, atuantes no plano médio, pelos valores médios dos deslocamentos e das rotações das seções, de forma que pode-se escrever que:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} u_k dx_3 = m_{ij} \theta_k \quad (i,j,k=1,2) \quad (2.27)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{3j} u_3 dx_3 = q_j w \quad (j=1,2) \quad (2.27a)$$

A distribuição de tensões, nas direções  $x_1$  e  $x_2$  ao longo da espessura, é assumida ser idêntica à teoria clássica, isto é:

$$\sigma_{ij} = \frac{m_{ij}h^3}{12} x_3 \quad (i,j=1,2) \quad (2.28)$$

Substituindo-se (2.28) em (2.27), tem-se as rotações médias de uma seção da placa após a deformação:

$$\frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_i x_3 dx_3 = \theta_i \quad (i,j=1,2) \quad (2.29)$$

Tomando-se a equação de equilíbrio (2.5) na direção  $x_1$  e auxiliado por (2.28), seguida da integração ao longo da espessura, e tomando-se ainda as condições de contorno,  $\sigma_{3j} = 0$  em  $x_3 = \pm \frac{h}{2}$ , obtém-se:

$$\sigma_{3j} = \frac{3}{2h} q_j \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (j=1,2) \quad (2.30)$$

Derivando-se (2.30) em relação a  $j$ , seguida da substituição conjunta com (2.22) em (2.5) na direção  $x_3$ , e integrando-se em  $x_3$  com a imposição da condição contorno,  $\sigma_{33} = 0$  quando  $x_3 = 0$ , obtém-se:

$$\sigma_{33} = -\frac{g}{4} \left[ 2 - \frac{6}{h} x_3 + \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (2.31)$$

As distorções das seções  $\varepsilon_{3j}$  podem ser obtidas a partir das equações das tensões dadas em (2.30) e auxiliadas pelas equações

constitutivas (2.1). Com isso, obtém-se a seguinte relação entre as distorções e as forças cortantes:

$$\varepsilon_{3j} = \frac{12(1+\nu)}{5 Eh} q_j \quad (j=1,2) \quad (2.32)$$

As parcelas da energia de deformação, devida às tensões cisalhantes, são dadas por:

$$U_{\tau 1} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \sigma_{31} \varepsilon_{31} dA dx_3 \quad (2.32a)$$

$$U_{\tau 2} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \sigma_{32} \varepsilon_{32} dA dx_3 \quad (2.32b)$$

As parcelas da energia de deformação, devida às tensões tangenciais no plano médio, podem ser representadas por:

$$U_{\tau 1} = \int_A q_1 \varepsilon_{31} dA \quad (2.33a)$$

$$U_{\tau 2} = \int_A q_2 \varepsilon_{32} dA \quad (2.33b)$$

A partir de (2.32 a,b) ,(2.33 a,b) e com o auxílio de (2.30) e (2.5), obtém-se:

$$\varepsilon_{3j} = \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_{i,3} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3 + \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_{3,i} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3 \quad (i,j=1,2) \quad (2.34)$$

Efetuada-se a integração por partes da primeira parcela de (2.34), e substituindo-se na derivada de (2.29), obtém-se:

$$\varepsilon_{3j} = \theta_j + w_{,j} \quad (i,j=1,2) \quad (2.35)$$

A partir de (2.32) e (2.35), os giros médios das seções e as rotações do plano médio podem se relacionar através de equações do tipo:

$$\theta_j = \frac{12(1+\nu)}{5Eh} q_j - w_{,j} \quad (i,j=1,2) \quad (2.36)$$

Derivando-se as rotações médias da seções (2.29) em relação as suas respectivas direções de atuação, seguida da substituição conjunta de (2.5) e (2.3), obtém-se:

$$\theta_{1,1} = \frac{12}{Eh^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) x_3 dx_3 + \frac{12}{Eh^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{33} x_3 dx_3 \quad (2.37)$$

$$\theta_{2,2} = \frac{12}{Eh^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) x_3 dx_3 + \frac{12}{Eh^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{33} x_3 dx_3 \quad (2.38)$$

Substituindo-se (2.31) em (2.37) e (2.38), auxiliado por (2.9) e efetuando-se o cálculo das integrais envolvidas, obtém-se:

$$\theta_{1,1} = \frac{12}{Eh^3} \left( m_{11} - \nu m_{22} - \frac{h^2}{10} \nu g \right) \quad (2.39)$$

$$\theta_{2,2} = \frac{12}{Eh^3} \left( m_{22} - \nu m_{11} - \frac{h^2}{10} \nu g \right) \quad (2.40)$$

Fazendo-se a soma das distorções, isto é, a soma das derivadas de (2.29), quando  $i \neq j$ , e substituindo-se em (2.1), tem-se:

$$\theta_{1,2} + \theta_{2,1} = \frac{24(1+\nu)}{Eh^3} m_{12} \quad (2.41)$$

Resolvendo o sistema formado por (2.39) e (2.40), e isolando-se o momento volvente em (2.41), pode-se expressar os momentos, em notação indicial, como:

$$m_{ij} = -D \left[ \left( \frac{1-\nu}{2} \right) (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) + \delta_{ij} \left( \nu \theta_{i,i} + \frac{h^2}{10} \frac{\nu g}{D(1-\nu)} \right) \right] \quad (i,j=1,2) \quad (2.42)$$

Derivando-se as equações(2.36) em relação a  $i$ , obtém-se:

$$\theta_{j,i} = \frac{12(1+\nu)}{5 Eh} q_{j,i} - w_{,ji} \quad (i,j=1,2) \quad (2.43)$$

Substituindo-se (2.43) em (2.42) e efetuando-se dupla derivação em relação a  $j$  e  $i$ , respectivamente, obtém-se:

$$m_{ij,ij} = -D \left( \frac{6}{5Gh} \Delta q_{i,i} - \Delta w_{,ii} \right) - \frac{h^2}{10} \frac{\nu}{(1-\nu)} g_{,ii} \quad (i,j=1,2) \quad 2.44)$$

onde  $\Delta$  é o operador laplaciano.

Fazendo-se a substituição de (2.22) e da derivada de (2.23) em relação a  $i$  na equação (2.44), obtém-se a equação diferencial de placas espessas:

$$Dw_{,ijij} = g - \frac{(2-\nu)}{10(1-\nu)} h^2 g_{,ii} \quad (i,j=1,2) \quad (2.45)$$

Ou sendo expressa numa segunda forma:

$$D\Delta^2 w = g - \frac{(2-\nu)}{10(1-\nu)} h^2 \Delta g \quad (2.46)$$

## 2.5) Princípios Variacionais

### 2.5.1) Princípio dos trabalhos virtuais (PTV)

Sejam as condições estáticas de um corpo dada por:

$$p_i - \bar{p}_i = 0 \text{ em } \Gamma_1 \quad (2.47)$$

onde

$\Gamma_1, \Gamma_2$  são as regiões do contorno que contêm as forças de superfície prescritas  $\bar{p}_i$  e os deslocamentos prescritos  $\bar{u}_i$ , respectivamente.

O PTV é uma formulação em que o campo dos deslocamentos é conhecido e que estabelece uma relação entre as equações de equilíbrio dadas em (2.5) e as condições de contorno estáticas(2.47).

A relação entre (2.5) e (2.47) pode ser estabelecida multiplicando-se ambas equações por deslocamentos virtuais e integrando-as no domínio do corpo e ao longo da região  $\Gamma_1$ , isto é :

$$-\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_1} (p_i - \bar{p}_i) \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (i,j=1,3) \quad (2.48)$$

O contorno do corpo pode ser dividido em duas partes,  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , de forma que permite escrever a seguinte equação:

$$\int_{\Gamma_1} p_i \delta u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_2} p_i \delta u_i d\Gamma \quad (i,j=1,3) \quad (2.48a)$$

A partir da fórmula de tensões de Cauchy (2.3b) pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma} p_i \delta u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \eta_j \delta u_i d\Gamma \quad (i,j=1,3) \quad (2.48b)$$

Utilizando-se o teorema da divergência , pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} \eta_j \delta u_i d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \delta u_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega \quad (2.49)$$

Substituindo-se (2.49),(2.48a) em (2.48), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_1} \bar{p}_i \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_2} p_i \delta u_i d\Gamma = 0$$

$$(i,j=1,3) \quad (2.50)$$

Como  $\delta u_i = 0$  em  $\Gamma_2$ , pode-se escrever que:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (i,j=1,3) \quad (2.51)$$

Pode-se demonstrar, a partir de (2.3), que a seguinte identidade é válida.

$$\sigma_{ij} \delta u_{i,j} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (i,j=1,3) \quad (2.52)$$

Substituindo-se (2.52) em (2.51), encontra-se a equação governante do PTV.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_1} \bar{p}_i \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (i,j=1,3) \quad (2.53)$$

### 2.5.2) Princípio de Energia potencial mínima

Conforme REDDY(1984), quando os corpos elásticos ideais estão sujeitos a uma transformação isotérmica, a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita como:

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (i,j=1,3) \quad (2.54)$$

ou na forma variacional

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (i,j=1,3) \quad (2.54a)$$

Substituindo-se (2.54a) em (2.53), tem-se:

$$\delta \left[ \int_{\Omega} U_0 d\Omega - \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_1} \bar{p}_i u_i d\Gamma \right] = 0 \quad (i,j=1,3) \quad (2.55)$$

ou

$$\delta\pi = 0 \quad (2.56)$$

onde  $\pi$  representa o funcional da energia potencial e é dado por :

$$\pi = \int_{\Omega} U_0 d\Omega - \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_1} \bar{p}_i u_i d\Gamma \quad (i,j=1,3) \quad (2.57)$$

A segunda variação do funcional  $\pi$  é dada por:

$$\delta^2 \pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E_{ijkl} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} d\Omega \quad (i,j,k,l=1,3) \quad (2.58)$$

Onde  $E_{ijkl}$  é o tensor de quarta ordem dado por:

$$E_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (i,j,k,l=1,3) \quad (2.58a)$$

Quando o material for elástico linear o integrando de (2.57) é uma função quadrática positiva, o que implica um valor não-negativo para a segunda variação do funcional.

Se  $\delta^2 \pi \geq 0$  implica que, no equilíbrio, o funcional da energia potencial atinge um valor mínimo.

### 2.5.3) Princípio dos trabalhos virtuais complementar

Sejam as condições cinemáticas de um corpo dada por:

$$u_i - \bar{u}_i = 0 \text{ em } \Gamma_2 \quad (2.59)$$

onde

$\Gamma_1, \Gamma_2$  são as regiões do contorno que contêm as forças de superfície prescritas  $\bar{p}_i$  e os deslocamentos prescritos  $\bar{u}_i$ , respectivamente.

O PTV complementar é uma formulação em que o campo das forças são conhecidos e que estabelece uma lei entre a relação deformação/ deslocamento e as condições de contorno cinemáticas (2.59).

Segundo PILKEY & WUNDERLICH (1994), através de aplicações de tensões virtuais no domínio do corpo e de forças de superfície virtuais no contorno, uma relação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (\varepsilon_{ij} - u_{i,j}) \delta \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Gamma_2} (u_i - \bar{u}_i) \delta p_i d\Gamma = 0 \quad (i,j=1,3) \quad (2.60)$$

O contorno do corpo pode ser dividido em duas partes,  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , de forma que permite escrever a seguinte equação:

$$\int_{\Gamma_2} u_i \delta p_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i \delta p_i d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u_i \delta p_i d\Gamma \quad (i,j=1,3) \quad (2.61)$$

A partir de (2.48b) e do teorema da divergência, pode-se escrever que:

$$\int_{\Gamma_2} u_i \delta p_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i \delta (\sigma_{ij} \eta_i) d\Gamma = \int_{\Omega} u_{i,j} \delta \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \delta \sigma_{ij,j} d\Omega \quad (i,j=1,3) \quad (2.62)$$

Substituindo-se (2.62), (2.61) em (2.60), tem-se que:

$$-\int_{\Omega} u_i \delta \sigma_{ij,j} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Gamma_1} u_i \delta p_i d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{u}_i \delta p_i d\Gamma = 0$$

(i,j = 1,3) (2.63)

A primeira variação das equações de equilíbrio em  $\Omega$ , assim como das forças de superfície em  $\Gamma_1$  tem que ser satisfeitas, isto é :

$$\delta(\sigma_{ij,j} + b_i) = 0 \text{ em } \Omega \quad (2.64)$$

$$\delta p_i = 0 \text{ em } \Gamma_1 \quad (2.65)$$

A equação governante do PTV complementar é obtida por substituição de (2.64) e (2.65) em (2.63), isto é:

$$-\int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Gamma_2} \bar{u}_i \delta p_i d\Gamma = 0 \quad (i,j = 1,3) \quad (2.66)$$

#### 2.5.4) Princípio de Energia Complementar Estacionária

Análogo a (2.54), a seguinte relação pode ser escrita para derivada da densidade de energia complementar em relação às tensões:

$$\frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \quad (i,j = 1,3) \quad (2.67)$$

ou na forma variacional:

$$\delta U_0^* = \frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} \quad (i,j=1,3) \quad (2.68)$$

Convém ressaltar que quando o material for elástico linear, a densidade de energia de deformação  $U_0$  e a densidade de energia complementar  $U_0^*$  apresentam o mesmo valor. Na figura 2.7 são mostrados os diagramas que ilustram  $U_0$  e  $U_0^*$  para elementos unidimensionais, em casos genéricos em que o material constituinte é elástico linear ou elástico não-linear.

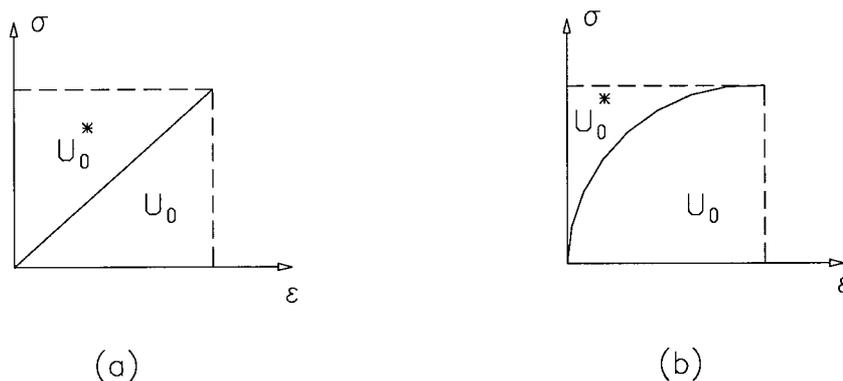


Figura 2.7- Representação das densidades de energia potencial e complementar, de materiais elásticos lineares (a) e não-lineares (b), para elementos unidimensionais.

Substituindo-se (2.68) em (2.66), o valor estacionário do princípio vale:

$$\delta \left[ - \int_{\Omega} U_0^* d\Omega + \int_{\Gamma_2} \bar{u}_i p_i d\Gamma \right] = 0 \quad (i,j=1,3) \quad (2.68)$$

ou

$$\delta\pi^* = 0 \quad (2.69)$$

Um funcional  $\pi^*$ , representando a energia potencial complementar, pode ser expresso a partir de (2.68) e (2.69) por:

$$\pi^* = -\int_{\Omega} U_0^* d\Omega + \int_{\Gamma_2} \bar{u}_i p_i d\Gamma \quad (i,j=1,3) \quad (2.70)$$

A primeira variação do funcional de energia potencial complementar (2.69) fornece o valor estacionário deste funcional.

A segunda variação de  $\pi^*$  é dada por:

$$\delta^2 \pi^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E_{ijkl}^{-1} \delta\sigma_{ij} \delta\sigma_{kl} d\Omega \quad (i,j,k,l=1,3) \quad (2.71)$$

Onde:

$$E_{ijkl}^{-1} = \frac{1}{2G} \left[ (1 - \delta_{ij}) \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{1 + \nu} \delta_{kl} \delta_{ij} \right] \quad (i,j,k,l=1,3) \quad (2.71a)$$

Quando o material for elástico linear o integrando de (2.68) é uma função quadrática positiva, o que implica um valor não-negativo para a segunda variação do funcional.

Se  $\delta^2 \pi^* \geq 0$  implica que, no equilíbrio, o funcional da energia potencial complementar atinge um valor mínimo.

### 2.5.5) Princípios variacionais estacionários

Os princípios variacionais estacionários são representados por funcionais, que não se conseguem determinar nem ponto de máximo, nem

de mínimo, uma vez que estabelecem relações entre campos de deslocamento e de forças que variam simultaneamente. As formulações dos funcionais são escritas de tal forma que garante um valor estacionário no instante em que o equilíbrio do corpo é atingido.

Dentre alguns funcionais generalizados existentes, pode-se mencionar o funcional de Hellinger-Reissner, o funcional do HSM (Hybrid Stress Model).

Uma das alternativas para obtenção da equação governante do funcional de Hellinger-Reissner é a partir da somatória de (2.50) com (2.60), obtendo-se:

$$\delta \left[ - \int_{\Omega} U_o^* d\Omega + \int_{\Omega} u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_2} (u_i - \bar{u}_i) p_i d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{p}_i u_i d\Gamma \right] = 0 \quad (i,j=1,3) \quad (2.72)$$

A variação do funcional no valor estacionário pode ser expressa por:

$$\delta \pi_R = 0 \quad (2.73)$$

Finalmente, através de (2.72) e (2.73), pode-se escrever o funcional por:

$$\pi_R = - \int_{\Omega} U_o^* d\Omega + \int_{\Omega} u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_2} (u_i - \bar{u}_i) p_i d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{p}_i u_i d\Gamma \quad (i,j=1,3) \quad (2.74)$$

Uma das alternativas para obtenção da equação governante do funcional HSM é através da somatória (2.48) com (2.63), obtendo-se:

$$\delta \left[ - \int_{\Omega} U_o^* d\Omega - \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i d\Omega + \int_{\Gamma_1} (p_i - \bar{p}_i) u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{u}_i p_i d\Gamma \right] = 0 \quad (2.75)$$

ou

$$\delta \pi_{\text{HSM}} = 0 \quad (2.76)$$

A partir (2.75) e (2.76), pode-se escrever a expressão do funcional do HSM, isto é:

$$\pi_{\text{HSM}} = - \int_{\Omega} U_o^* d\Omega - \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i d\Omega + \int_{\Gamma_1} (p_i - \bar{p}_i) u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{u}_i p_i d\Gamma \quad (i,j = 1,3) \quad (2.77)$$

## CAPÍTULO 3

### MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

#### 3.1) Introdução

Neste capítulo é apresentada a formulação básica do método do elementos finitos utilizando-se os princípios variacionais apresentados no capítulo 2. A formulação para obtenção das matrizes de rigidez do elementos finitos de placa DKT (Discrete Kirchhoff Theory) e HSM (Hybrid Stress Model) também fazem parte do escopo deste capítulo. O vetor das cargas nodais equivalentes, oriundos do carregamento externo, fecha os tópicos apresentados neste capítulo. Convém enfatizar que o sistema algébrico advindo da modelagem da placa pelo MEF será acoplado a outro sistema algébrico, que recebe contribuições do solo modelado pelo MEC. A montagem desse último sistema algébrico e o acoplamento do MEF com o MEC estão apresentados nos capítulos subseqüentes.

#### 3.2) Formulação do Método dos Elementos Finitos

Os problemas em diversas áreas da engenharia, em geral, são representados por equações diferenciais e integrais. A solução analítica de tais equações conduz às respostas exatas da equação governante em quaisquer pontos onde esteja definido o problema, entretanto, tais soluções são encontradas em apenas em alguns casos particulares, de forma que para superar esta limitação, soluções numéricas são implementadas no estudo dos problemas.

Dentre as soluções numéricas existentes consta o método dos elementos finitos, que consiste em representar o domínio do problema global por um número finito de sub-regiões conhecidas como *elementos finitos*. Pontos discretos ou *nós funcionais*, nos quais faz-se associar

---

A notação indicial não é válida para equações, cuja a numeração está indicada com (\*)

funções interpoladoras às variáveis do problema, são definidos em cada elemento finito.

A formulação do MEF pode ser obtida, em geral, empregando duas formulações: a da técnica do resíduo ponderado e a dos Princípios Variacionais.

Em Mecânica dos sólidos, onde estão inseridos os problemas discutidos neste trabalho, a formulação do método dos elementos finitos é obtida, geralmente, utilizando os princípios variacionais escritos em funcionais, que representam o trabalho tanto das forças externas assim como o devido às forças internas.

Existem funcionais que atingem um valor estacionário mínimo, quando o corpo está na posição de equilíbrio, tais como: funcional da energia potencial mínima e funcional da energia complementar mínima. Por outro lado, existem outros funcionais, ditos *funcionais generalizados*, que atingem apenas um valor estacionário na posição de equilíbrio, tais como: Funcional de Hellinger-Reissner, funcional do modelo híbrido em tensão (HSM), funcional de Hu-Washizu, e outros.

Na literatura são encontrados elementos finitos desenvolvidos tanto com funcionais com valores estacionários mínimos quanto com funcionais generalizados. Com o objetivo de mostrar como o sistema de equações algébricas é obtido no método dos elementos finitos, por intermédio dos princípios variacionais, o equacionamento, utilizando o funcional da energia potencial mínima, é mostrado na seqüência, ressaltando-se que no caso de outros funcionais, um procedimento análogo pode ser implementado.

A partir da equação (2.54a) e (2.57), a primeira variação do funcional de energia potencial mínima pode ser escrita, na forma matricial, como:

$$\delta\pi = \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \delta U^T \underset{\sim}{B} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta U^T \underset{\sim}{P} d\Gamma = 0 \quad (3.1)$$

Onde:

$\tilde{\varepsilon}$ ,  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{B}$ : são os vetores que representam as deformações, deslocamentos, forças de superfície e forças volumétricas, respectivamente.

$\tilde{D}$ : é a matriz oriunda da lei de Hooke relacionando as tensões  $\tilde{\sigma}$  com as deformações  $\tilde{\varepsilon}$ .

### 3.2.1) Discretização da representação integral dos funcionais

Para que a solução numérica seja implementada nos funcionais, há necessidade que sejam feitas suas discretizações em sub-regiões, por exemplo, em elementos finitos. Ao se computar a contribuição de cada elemento, a representação integral do funcional (3.1) passa a ser expressa por:

$$\delta\pi = \sum_{k=1}^{nel} \left[ \int_{\Omega_k} \delta \tilde{\varepsilon}_k^T \tilde{D}_k \tilde{\varepsilon}_k d\Omega_k - \int_{\Omega_k} \delta \tilde{U}_k^T \tilde{B}_k d\Omega_k - \int_{\Gamma_k} \delta \tilde{U}_k^T \tilde{P}_k d\Gamma_k \right] = 0 \quad (3.2)$$

Onde:

$\tilde{\varepsilon}_k$ ,  $\tilde{U}_k$ ,  $\tilde{P}_k$ ,  $\tilde{B}_k$ : são os vetores que representam as deformações, deslocamentos, forças de superfície e forças volumétricas do elemento  $k$ , respectivamente.

$\tilde{D}_k$ : é a matriz oriunda da lei de Hooke relacionando as tensões  $\tilde{\sigma}_k$  com as deformações  $\tilde{\varepsilon}_k$  no elemento  $k$ .

$\Omega_k$ ,  $\Gamma_k$ : representam as regiões que contêm o domínio e o contorno do elemento  $k$ , respectivamente.

*nel*: é o número total de elementos finitos.

Os deslocamentos internos  $u_k$ , ao longo de  $\Omega_k$ , são representados através de uma função interpoladora  $N$ , que é escrita em termos dos deslocamentos nodais  $U_k$ , indicado na figura 3.1, isto é:

$$u_k = NU_k \quad (3.3)$$

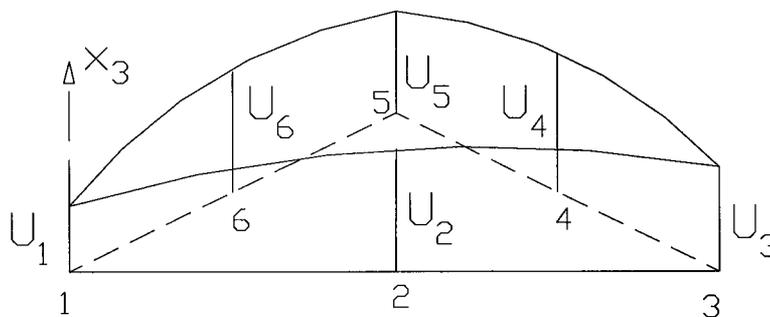


Figura 3.1- Representação dos deslocamentos transversais no interior do elemento finito em função dos deslocamentos transversais nodais.

A partir de (3.3) e da relação deformação/deslocamento  $C_k$ , as deformações dos pontos nodais  $\varepsilon_k$  podem ser escritas como:

$$\varepsilon_k = C_k U_k \quad (3.4)$$

Com isso, a expressão (3.2) pode ser alterada para:

$$\delta\pi = \sum_{k=1}^{nel} \left[ \int_{\Omega_k} \delta \mathbf{U}_k^T \underset{\sim}{\mathbf{C}}_k^T \underset{\sim}{\mathbf{D}}_k \underset{\sim}{\mathbf{C}}_k \underset{\sim}{\mathbf{U}}_k d\Omega_k - \int_{\Omega_k} \delta \mathbf{U}_k^T \underset{\sim}{\mathbf{B}}_k d\Omega_k - \int_{\Gamma_k} \delta \mathbf{U}_k^T \underset{\sim}{\mathbf{P}}_k d\Gamma_k \right] = 0 \quad (3.5)$$

A expressão (3.5), para cada elemento, pode ser fatorada e ser apresentada na forma:

$$\delta\pi = \sum_{k=1}^{nel} \left\{ \delta \mathbf{U}_k^T \left[ \int_{\Omega_k} \underset{\sim}{\mathbf{C}}_k^T \underset{\sim}{\mathbf{D}}_k \underset{\sim}{\mathbf{C}}_k \underset{\sim}{\mathbf{U}}_k d\Omega_k - \int_{\Omega_k} \underset{\sim}{\mathbf{B}}_k d\Omega_k - \int_{\Gamma_k} \underset{\sim}{\mathbf{P}}_k d\Gamma_k \right] \right\} = 0 \quad (3.6)$$

Como a variação  $\delta \mathbf{U}_k^T$  é arbitrária, a equação (3.6) pode ser escrita

como:

$$\delta\pi = \sum_{k=1}^{nel} \left\{ \left[ \int_{\Omega_k} \underset{\sim}{\mathbf{C}}_k^T \underset{\sim}{\mathbf{D}}_k \underset{\sim}{\mathbf{C}}_k d\Omega_k \right] \underset{\sim}{\mathbf{U}}_k - \int_{\Omega_k} \underset{\sim}{\mathbf{B}}_k d\Omega_k - \int_{\Gamma_k} \underset{\sim}{\mathbf{P}}_k d\Gamma_k \right\} = 0 \quad (3.7)$$

Efetuando-se o cálculo das integrais em um elemento  $k$ , pode-se escrever que:

$$\underset{\sim}{\mathbf{k}}_k = \int_{\Omega_k} \underset{\sim}{\mathbf{C}}_k^T \underset{\sim}{\mathbf{D}}_k \underset{\sim}{\mathbf{C}}_k d\Omega_k \quad (3.8)$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{f}}_k = \int_{\Omega_k} \underset{\sim}{\mathbf{B}}_k d\Omega_k + \int_{\Gamma_k} \underset{\sim}{\mathbf{P}}_k d\Gamma_k \quad (3.9)$$

Substituindo-se as integrais calculadas ( 3.8) e (3.9) em (3.7),tem-se que:

$$\delta\pi = \sum_{k=1}^{nel} \left\{ \underset{\sim}{k}_k \underset{\sim}{U}_k - \underset{\sim}{f}_k \right\} = 0 \quad (3.10)$$

Ao computar-se a contribuição de todos os elementos finitos, o sistema algébrico pode ser escrito como:

$$\underset{\sim}{K} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{F} \quad (3.11)$$

Onde:

$\underset{\sim}{U}$ ,  $\underset{\sim}{F}$ : são os vetores que contêm os deslocamentos e forças nodais equivalentes de todos os nós.

Um dos fatores que influencia nos resultados de uma simulação numérica consiste no tipo de elementos utilizados pela formulação. A seguir é apresentada uma classificação concisa de elementos finitos, que em muitos casos podem ser adotados por outros métodos numéricos, por exemplo, o método dos elementos de contorno.

Os elementos podem receber diversas classificações, dentre elas:

Quanto à dimensão:

*Unidimensionais*: Elementos lineares

*Bidimensionais*: Elementos de superfície

*Tridimensionais*: Elementos sólidos

Quanto à ordem das funções interpoladoras:

*Constante*: Quando não há variação da função no elemento

*Linear:* A função é de primeiro grau

*Quadrático:* A função tem ordem igual a dois.

*Ordem superior:* A função tem grau superior a dois.

Quanto à não uniformidade da ordem das funções interpoladoras da geometria e das variáveis do contorno:

*Hipoparamétrica:* Quando a ordem das funções interpoladoras da geometria é menor que as das variáveis do contorno

*Hiperparamétrica:* Quando a ordem das funções interpoladoras da geometria é maior que as das variáveis do contorno

*Isoparamétrica:* Quando ambas funções interpoladoras têm a mesma ordem

Neste trabalho, elementos estruturais de superfície, na modalidade de placas, são analisados pelo método dos elementos finitos. Várias formulações de elementos finitos triangulares para análise de placas foram desenvolvidas por pesquisadores, dentre elas constam o DKT(Discrete Kirchoff Theory) e o HSM(Hybrid Stress Model). A partir dos bons resultados apresentados por estes elementos na análise de placas delgadas, eles são utilizados, neste trabalho, para gerar a matriz de rigidez dos elementos estruturais de superfície em problemas de interação solo-estrutura.

As formulações dos elementos finitos DKT e HSM, extraídas de BATOZ et al. (1980), são apresentadas na seqüência.

### **3.3) ELEMENTO FINITO DKT(Discrete Kirchoff Theory)**

O DKT é um elemento triangular com nós situados nos vértices e nos pontos médios dos lados. Os graus de liberdade, associados a cada nó dos vértices, são duas rotações e um deslocamento transversal. Nos nós auxiliares dos pontos médios existe apenas um grau de liberdade representando a rotação da seção transversal, como mostra a figura 3.2.

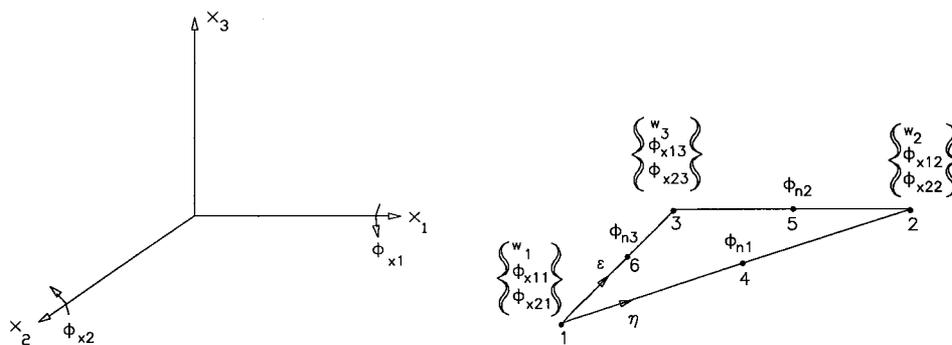


Figura 3.2 - Parâmetros nodais e nós auxiliares do elemento DKT.

O elemento é desenvolvido, inicialmente, utilizando a teoria de Reissner e a parcela devida à energia de deformação do funcional da energia potencial mínima (2.57), que pode ser expressa na forma matricial por:

$$U_i = \int_A \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^T \tilde{D} \tilde{\varepsilon} dA \quad (3.12)$$

Onde:

$\tilde{\varepsilon}$ : é o vetor que contém as deformações.

$\tilde{D}$ : é a matriz que representa o tensor de quarta ordem  $E_{ijkl}$  dado em (2.58a).

$A$ : é a área do elemento.

As deformações  $\tilde{\varepsilon}$  podem ser divididas em duas parcelas, a saber:

a) Proveniente da flexão, e pode ser representada por:

$$\tilde{\varepsilon}_{-b} = x_3 \tilde{k} \quad (3.12a)$$

Onde  $\tilde{\varepsilon}_{-b}$  e  $\tilde{k}$  são os vetores que contêm as componentes de deformações e das curvaturas, respectivamente, isto é :

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$\underset{\sim}{k} = \begin{pmatrix} \theta_{1,1} \\ \theta_{2,2} \\ \theta_{1,2} + \theta_{2,1} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

A partir de (2.39), (2.40) e (2.41), o vetor  $\underset{\sim}{k}$  pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} \theta_{1,1} \\ \theta_{2,2} \\ \theta_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{pmatrix} - \nu g \frac{h^2}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

b) Proveniente da força cortante: a partir de (2.35) o vetor das distorções  $\underset{\sim}{\gamma}$  pode ser escrito como:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 + w_{,1} \\ \theta_2 + w_{,2} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

As distorções  $\underset{\sim}{\gamma}$  também podem, a partir de (2.32), serem escritas na seguinte forma:

$$\underset{\sim}{\gamma} = \frac{12(1+\nu)}{5 Eh} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Com isso, a energia de deformação dada em (3.12), pode ser subdividida em parcelas provenientes da flexão  $U_b$  e da força cortante  $U_s$ , isto é :

$$U_i = U_b + U_s \quad (3.18)$$

Onde:

$$U_b = \int_A \frac{1}{2} \mathbf{k}^T \mathbf{D}_{\sim b} \mathbf{k} dA \quad (3.19)$$

$$U_s = \int_A \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_{\sim s} \boldsymbol{\gamma} dA \quad (3.20)$$

Com:

$$\mathbf{D}_{\sim b} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{D}_{\sim s} = \frac{5}{12} \frac{Eh}{(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Substituindo-se (3.14), (3.16) em (3.19), (3.20), respectivamente, tem-se que:

$$U_b = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_A [\theta_{1,1}^2 + \theta_{2,2}^2 + 2\nu\theta_{1,2}\theta_{2,1} + 2\nu\theta_{1,2}\theta_{2,1} + \frac{1-\nu}{2}(\theta_{1,2} + \theta_{2,1})^2] dA \quad (3.23)$$

$$U_s = \frac{5}{24} \frac{Eh}{(1+\nu)} \int_A [(\theta_1 + w_{,1})^2 + (\theta_2 + w_{,2})^2] dA \quad (3.24)$$

Os momentos e forças cortantes podem ser expressos por:

$$\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{pmatrix} = \underset{\sim b \sim}{D} \underset{\sim}{k} \quad (3.25)$$

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \underset{\sim s \sim}{D} \underset{\sim}{\gamma} \quad (3.26)$$

A contribuição da parcela da energia de deformação devida à força cortante é desprezada, já que o objetivo é o estudo de um elemento para placas delgadas, de maneira que (3.18) pode ser reescrita como:

$$U_i = U_b \quad (3.27)$$

Como a equação da energia potencial interna (3.23) é dependente das derivadas das rotações das seções, há necessidade de formular-se as equações primitivas das rotações  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , para tanto, estabelece-se as seguintes hipóteses:

a) As rotações das seções variam quadraticamente sobre o elemento.

b) A hipótese de Kirchhoff é imposta nos vértices e nos pontos médios dos lados, isto é:

$$\theta_i + w_{,i} = 0 \quad (\text{vértices}) \quad (3.28)$$

$$\theta_s + w_{,s} = 0 \quad (\text{pontos médios dos lados}) \quad (3.29)$$

c) O deslocamento vertical varia cubicamente ao longo dos lados.

d) A rotação da seção varia linearmente em relação à normal do lado do elemento.

$$\theta_n = \frac{1}{2}(\theta_i + \theta_j) \quad (3.30)$$

onde  $i, j$  são as extremidades do lado  $ij$  do elemento.

As rotações das seções podem ser expressas por uma função, em coordenadas homogêneas, mostradas na figura 3.2, isto é:

$$\theta_i = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 \quad (3.31)$$

Como alternativa, as rotações das seções podem ser expressas através de expressão do tipo:

$$\theta_j = \beta_{ij}N_i \quad (i=1,6; j=1,2) \quad (3.32)$$

Onde:

$\beta_{ij}$ : é a matriz que possui os valores das rotações da seção transversal nos nós correspondentes aos vértices e ao pontos médios dos lados.

$N_i$ : são as funções de formas dadas por:

$$N_i = 2\xi_i^2 - \xi_i \quad (i=1,2,3) \quad (3.33a)$$

$$N_4 = 4\xi_2\xi_3 \quad (3.33b)$$

$$N_5 = 4\xi_1\xi_3 \quad (3.33c)$$

$$N_6 = 4\xi_2\xi_3 \quad (3.33d)$$

O deslocamento vertical pode ser escrito em função de uma coordenada auxiliar  $s$  ao longo do lado, mostrado na figura 3.4, isto é:

$$w(s) = b_1 + b_2s + b_3s^2 + b_4s^3 \quad (3.34)$$

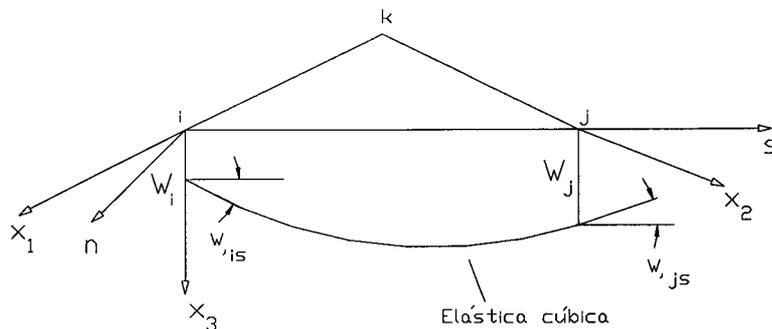


Figura 3.4- Variação cúbica ao longo dos lados do elemento.

Derivando-se (3.34) e substituindo-se os valores de contorno nos nós de extremidade  $i, j$  do lado  $ij$ , pode-se escrever o seguinte sistema linear:

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_j \\ w_{,si} \\ w_{,sj} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{ij} & l_{ij}^2 & l_{ij}^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l_{ij} & 3l_{ij} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Ou na forma inversa dado por:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{l_{ij}^2} & \frac{3}{l_{ij}^2} & -\frac{2}{l_{ij}} & -\frac{1}{l_{ij}} \\ 0 & 0 & 2/l_{ij} & 3/l_{ij} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_j \\ w_{,si} \\ w_{,sj} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Com o auxílio de (3.36), os deslocamentos dados por (3.34) podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} w(s) = & \left( 1 - \frac{3s^2}{l_{ij}^2} + \frac{2s^3}{l_{ij}^3} \right) w_i + \left( s - \frac{2s^2}{l_{ij}} + \frac{s^3}{l_{ij}^2} \right) w_{,si} + \\ & + \left( \frac{3s^2}{l_{ij}^2} - \frac{2s^2}{l_{ij}^2} \right) w_j + \left( -\frac{s^2}{l_{ij}} + \frac{3s^2}{l_{ij}^2} \right) w_{,sj} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Derivando-se (3.37) e substituindo-se o valor de  $s$  correspondente ao ponto médio do lado  $ij$ , tem-se que:

$$w_{,s} = -\frac{3}{2l_{ij}} w_i - \frac{1}{4} w_{,si} - \frac{3}{2l_{ij}} w_j + \frac{1}{4} w_{,sj} \quad (3.38)$$

Para obter-se as rotações da seção transversal  $\theta_1$  e  $\theta_2$  em função dos parâmetros nodais  $\omega$ , localizados apenas nos vértices do triângulo, é necessário inicialmente escrever as rotações da seção transversal e do plano médio no sistema de coordenadas  $(n,s)$ , mostradas na figura 3.4, isto é:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_n \\ \theta_s \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$\begin{pmatrix} w_{,s} \\ w_{,n} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_{,1} \\ w_{,2} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Onde:

$c, s$  : são o cosseno e seno da normal do lado  $ij$  em relação ao eixo cartesiano  $X_1$ .

O vetor  $\tilde{\omega}$  contém os parâmetros nodais finais do elemento e é dado por:

$$\tilde{\omega}^T = (w_1 \quad \phi_{x11} \quad \phi_{x21} \quad w_2 \quad \phi_{x12} \quad \phi_{x22} \quad w_3 \quad \phi_{x13} \quad \phi_{x23}) \quad (3.41)$$

A partir das equações de (3.32) a (3.40), uma relação entre as rotações da seção transversal e os parâmetros nodais pode ser escrita finalmente, como:

$$\theta_i = H_{ij} (\xi, \eta) \omega_j, \quad (i=1,2; j=1,9) \quad (3.42)$$

Onde:

$$H_{11} = 1.5(a_6 N_6 - a_5 N_5) \quad (3.42a)$$

$$H_{12} = b_5 N_5 + b_6 N_6 \quad (3.42b)$$

$$H_{13} = N_1 - c_5 N_5 - c_6 N_6 \quad (3.42c)$$

$$H_{21} = 1.5(d_6 N_6 - d_5 N_5) \quad (3.42d)$$

$$H_{22} = -N_1 + e_5 N_5 + e_6 N_6 \quad (3.42e)$$

$$H_{23} = -H_{12} \quad (3.42f)$$

$H_{14}, H_{15}, H_{16}, H_{24}, H_{25}, H_{26}$  são obtidos mediante substituição de  $N_1$  por  $N_2$ , assim como os índices 6 e 5 por 4 e 6, respectivamente, nas expressões dadas em (3.42 a-f).

$H_{17}, H_{18}, H_{19}, H_{27}, H_{28}, H_{29}$  são obtidos mediante substituição de  $N_1$  por  $N_3$ , assim como os índices 6 e 5 por 5 e 4, respectivamente, nas expressões dadas em (3.42 a-f).

Com:

$$a_k = -\frac{x_{1ij}}{l_{ij}^2} \quad (3.42g)$$

$$d_k = -\frac{x_{2ij}}{l_{ij}^2} \quad (3.42h)$$

$$b_k = \frac{3}{4} \frac{1}{l_{ij}^2} x_{1ij} x_{2ij} \quad (3.42i)^*$$

$$c_k = \frac{1}{l_{ij}^2} \left( \frac{1}{4} x_{1ij}^2 - \frac{1}{2} x_{2ij}^2 \right) \quad (3.42j)$$

$$e_k = \frac{1}{l_{ij}^2} \left( \frac{1}{4} x_{2ij}^2 - \frac{1}{2} x_{1ij}^2 \right) \quad (3.42k)$$

Onde  $k = 4, 5, 6$  para os lados  $ij = 23, 31, 12$  respectivamente. A representação geométrica de algumas variáveis utilizadas anteriormente estão indicadas na figura 3.5.

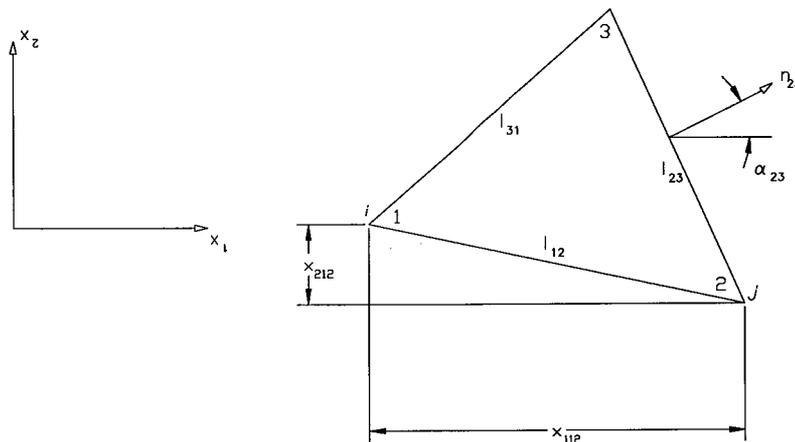


Figura 3.5-Relações geométricas no elemento finito.

Com o auxílio de (3.13) e (3.42 a-f) pode-se escrever uma relação entre o vetor das curvaturas e o vetor dos parâmetros nodais, isto é:

$$\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{\omega} \quad (3.43)$$

Onde:

$$\underset{\sim}{B}(\xi, \eta) = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_{231} H_{\sim 1, \xi}^T + x_{212} H_{\sim 1, \eta}^T \\ -x_{131} H_{\sim 2, \xi}^T - x_{112} H_{\sim 2, \eta}^T \\ -x_{131} H_{\sim 1, \xi}^T - x_{112} H_{\sim 1, \eta}^T + x_{231} H_{\sim 2, \xi}^T + x_{212} H_{\sim 2, \eta}^T \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Onde  $A$  é a área do elemento; e a forma explícita dos vetores de (3.44) dados por:

$$H_{\sim 1, \xi} = \begin{bmatrix} P_6(1-2\xi) + (P_5 - P_6)\eta \\ q_6(1-2\xi) - (q_5 + q_6)\eta \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -P_6(1-2\xi) + (P_4 + P_6)\eta \\ q_6(1-2\xi) - (q_6 - q_4)\eta \\ -2 + 6\xi + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -\eta(P_5 + P_4) \\ \eta(q_4 - q_5) \\ -\eta(r_5 - r_4) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$H_{\sim 2, \xi} = \begin{bmatrix} t_6(1-2\xi) + \eta(t_5 - t_6) \\ 1 + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -q_6(1-2\xi) + \eta(q_5 + q_6) \\ -t_6(1-2\xi) + \eta(t_4 + t_6) \\ -1 + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -q_6(1-2\xi) - \eta(q_4 - q_6) \\ -\eta(t_4 + t_5) \\ \eta(r_4 - r_5) \\ -\eta(q_4 - q_5) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$H_{\sim 1, \eta} = \begin{bmatrix} -P_5(1-2\eta) + \xi(P_6 - P_5) \\ q_5(1-2\eta) - \xi(q_5 + q_6) \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ \xi(P_4 + P_6) \\ \xi(q_4 - q_6) \\ -\xi(r_6 - r_4) \\ P_5(1-2\eta) - \xi(P_4 + P_5) \\ q_5(1-2\eta) + \xi(q_4 - q_5) \\ -2 + 6\eta + r_5(1-2\eta) - \xi(r_4 + r_5) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{H}_{\sim 2, \eta} = \begin{bmatrix} -t_5(1-2\eta) - \xi(t_6 - t_5) \\ 1+r_5(1-2\eta) - \xi(r_6 + r_5) \\ -q_5(1-2\eta) + \xi(q_6 + q_5) \\ \xi(t_4 + t_5) \\ \xi(r_4 - r_6) \\ -\xi(q_4 - q_6) \\ t_5(1-2\eta) - \xi(t_4 + t_5) \\ -1+r_5(1-2\eta) - \xi(r_4 - r_5) \\ -q_5(1-2\eta) - \xi(q_4 - q_5) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Substituindo-se (3.43) em (3.23), obtém-se a energia de deformação para o elemento em coordenadas homogêneas:

$$U_{\text{DKT}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \omega^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \omega d\xi d\eta \quad (3.49)$$

Fazendo-se a primeira variação do funcional de energia igual a zero, obtém-se a matriz de rigidez do elemento DKT em relação ao sistema de coordenadas locais do elemento:

$$\mathbf{K}_{\sim \text{DKT}} = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\xi d\eta \quad (3.50)$$

Os momentos podem ser calculados substituindo-se (3.26) em (3.42), obtendo-se:

$$\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{B} \omega \quad (3.51)$$

### 3.4) ELEMENTO FINITO HSM (Hybrid Stress Model)

O HSM é um elemento triangular da classe de 9 parâmetros nodais, 3 por nó, mostrados na figura 3.6.

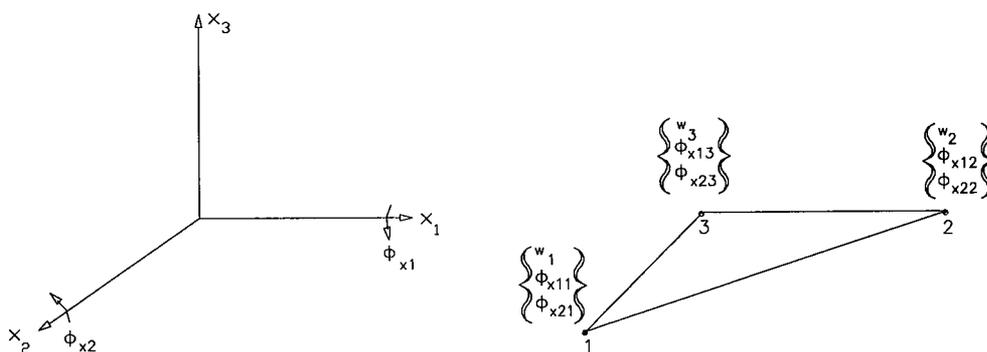


Figura 3.6 - Parâmetros nodais do elemento HSM

Este elemento é desenvolvido segundo a teoria de placas delgadas de Kirchhoff e utilizando o funcional do modelo híbrido em tensão, que pode ser expresso, em função dos momentos, a partir (2.77) e (2.28), a saber:

$$\pi_H^* = -\frac{12}{Eh^3} \int_{\Omega} (m_{11} + m_{22})^2 + 2(1+\nu)(m_{12}^2 - m_{11}m_{22}) d\Omega + \int_{\Gamma} (wq_n - w_{,n}m_n - w_{,s}m_{ns}) d\Gamma \quad (3.52)$$

Onde:

$w$ ,  $w_{,n}$ ,  $w_{,s}$ : são os deslocamentos, as rotações segundo os eixos  $n$  e  $s$  no contorno, respectivamente.

$q_n$ ,  $m_s$ ,  $m_{ns}$ : são as forças cortantes, momentos fletores e momentos volventes no contorno, respectivamente.

$\Omega, \Gamma$ : são o domínio e o contorno do plano médio do elemento, respectivamente.

Para que a discretização do funcional seja implementada, há necessidade de que sejam estabelecidas hipóteses para as funções interpoladoras presentes no elemento, tais como:

- a) Os momentos têm variação linear no interior do elemento.
- b) O deslocamento vertical varia cubicamente ao longo dos lados do elemento.
- c) A derivada do deslocamento vertical em relação a normal do lado tem variação linear.

A função interpoladora, que rege a distribuição linear dos momentos ao longo do domínio  $\Omega$ , pode ser escrita como:

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{\beta} \quad (3.53)$$

Com:

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\beta^T = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5 \quad \beta_6 \quad \beta_7 \quad \beta_8 \quad \beta_9) \quad (3.55)$$

Onde  $\underset{\sim}{\beta}$  é um vetor de nove parâmetros generalizados.

Os deslocamentos verticais são representados por uma função interpoladora cúbica semelhante a utilizada no elemento DKT, só que é escrita em coordenadas adimensionais  $\zeta$ , isto é:

$$w = H_{01}^1 w_i + H_{02}^1 w_j + H_{11}^1 w_{,i} + H_{12}^1 w_{,j} \quad (3.56)$$

onde:

$$H_{01}^1 = 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \quad (3.56a)$$

$$H_{02}^1 = 3\zeta^2 - 2\zeta^3 \quad (3.56b)$$

$$H_{11}^1 = I_{ij} (\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3) \quad (3.56c)$$

$$H_{12}^1 = I_{ij} (-\zeta^2 + \zeta^3) \quad (3.56d)$$

A rotação relativa à normal do lado  $ij$  é representada por:

$$w_{,n} = (1 - \zeta) w_{,n}^i + \zeta w_{,n}^j \quad (3.57)$$

A parcela do funcional híbrido, devido à energia complementar, pode ser expressa por:

$$U_1 = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{M}^T \tilde{D}^{-1} \tilde{M} d\Omega \quad (3.58)$$

A partir de (3.53), a expressão (3.58) pode ser escrita como:

$$U_1 = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\beta}^T \tilde{X}^T \tilde{D}^{-1} \tilde{X} \tilde{\beta} d\Omega \quad (3.58a)$$

Ou forma mais compacta como:

$$U_1 = -\frac{1}{2} \tilde{\beta}^T \tilde{H} \tilde{\beta} \quad (3.59)$$

Onde:

$$\tilde{H} = \int_{\Omega} \tilde{X}^T \tilde{D}^{-1} \tilde{X} d\Omega \quad (3.59a)$$

O produto matricial do lado direito da expressão (3.59a) gera uma matriz, cujos elementos são formados pelo produto de cada elemento da matriz  $\tilde{D}^{-1}$  por uma mesma matriz  $\tilde{\phi}$ , isto é:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} c_{11} \tilde{\phi} & c_{12} \tilde{\phi} & c_{13} \tilde{\phi} \\ c_{21} \tilde{\phi} & c_{22} \tilde{\phi} & c_{23} \tilde{\phi} \\ c_{31} \tilde{\phi} & c_{32} \tilde{\phi} & c_{33} \tilde{\phi} \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Onde:

$$\tilde{\phi} = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_2 & x_1 x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} d\Omega \quad (3.61)$$

Os momentos e os produtos de inércia de uma área são definidos, respectivamente, por:

$$I_{11} = \int_{\Omega} x_1^2 d\Omega \quad (3.62)$$

$$I_{22} = \int_{\Omega} x_2^2 d\Omega \quad (3.63)$$

$$I_{12} = \int_{\Omega} x_1 x_2 d\Omega \quad (3.64)$$

Levando-se (3.62), (3.63), (3.64) em (3.61), tem-se:

$$\phi = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & I_{12} \\ 0 & I_{12} & I_{22} \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

Para o caso de elementos triangulares, os momentos de inércia e o produto de inércia, em relação aos eixos baricêntricos, podem escritos como:

$$I_{pq} = \frac{A}{12} \alpha_p^T \alpha_q \quad (p, q = 1, 2) \quad (3.66a)$$

Onde:

$$\alpha_p = \begin{pmatrix} x_{pi} & x_{pj} & x_{pk} \end{pmatrix} \quad (p = 1, 2) \quad (3.66b)$$

Sendo  $x_{pi}$ ,  $x_{pj}$ ,  $x_{pk}$  as coordenadas cartesianas dos vértices  $i$ ,  $j$ ,  $k$  do elemento.

A contribuição do lado  $ij$  na parcela do funcional híbrido, referente ao trabalho das cargas externas no elemento, é expressa por:

$$U_2 = \int_{\Gamma_{ij}} (wq_n - w_{,n}m_n - w_{,s}m_{ns}) d\Gamma \quad (3.67)$$

Com o auxílio de (2.20), (2.21), (3.53) tem-se :

$$\begin{pmatrix} q_n \\ -m_n \\ -m_{ns} \end{pmatrix}_{ij} = \underset{\sim}{R}_{ij} \underset{\sim}{\beta} \quad (3.68)$$

Onde:

$$\underset{\sim}{R}_{ij} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{R}_{ij}^1 & \underset{\sim}{R}_{ij}^2 & \underset{\sim}{R}_{ij}^3 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Cujas sub-matrizes são dadas por:

$$\underset{\sim}{R}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -cc & -ccx_1 & -ccx_2 \\ cs & csx_1 & csx_2 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

$$\underset{\sim}{R}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ -ss & -ssx_1 & -ssx_2 \\ -cs & -csx_1 & -csx_2 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

$$\underset{\sim}{R}_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & s & c \\ -2cs & -2csx_1 & -2csx_2 \\ -(c^2 - s^2) & -(c^2 - s^2)x_1 & -(c^2 - s^2)x_2 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

onde:

c: é o cosseno da normal do lado ij

s: é o seno da normal do lado ij

A partir de (3.40), (3.56) e (3.57), pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} W \\ W_{,n} \\ W_{,s} \end{pmatrix} = \underset{\sim}{L_{ij}} \underset{\sim}{\lambda_{ij}} \quad (3.73)^*$$

Onde:

$$\underset{\sim}{\lambda_{ij}} = (\underset{\sim}{w_i} \quad \theta_{1i} \quad \theta_{2i} \quad \underset{\sim}{w_j} \quad \theta_{1j} \quad \theta_{2j}) \quad (3.74)$$

$$\underset{\sim}{L_{ij}} = \begin{pmatrix} H_{01}^1 & cH_{11}^1 & sH_{11}^1 & H_{02}^1 & cH_{12}^1 & sH_{12}^1 \\ 0 & s(1-\zeta) & -c(1-\zeta) & 0 & s\zeta & -c\zeta \\ \frac{H_{01,\zeta}^1}{l_{ij}} & \frac{cH_{11,\zeta}^1}{l_{ij}} & \frac{sH_{11,\zeta}^1}{l_{ij}} & \frac{H_{02,\zeta}^1}{l_{ij}} & \frac{cH_{12,\zeta}^1}{l_{ij}} & \frac{sH_{12,\zeta}^1}{l_{ij}} \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

A partir de (3.68) e (2.73), a equação (3.67) pode ser expressa por:

$$U_2 = \underset{\sim}{\beta}^T \underset{\sim}{G_{ij}} \underset{\sim}{\lambda_{ij}} \quad (3.76)^*$$

Onde:

$$\underset{\sim}{G}_{ij} = \int_0^{l_{ij}} \underset{\sim}{R}_{ij}^T \underset{\sim}{L}_{ij} ds \quad (3.77)^*$$

A matriz  $\underset{\sim}{G}_{ij}$  para cada lado ii do elemento é dada por:

$$\underset{\sim}{G}_{ij} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{G}_{ij}^1 & \underset{\sim}{G}_{ij}^2 & \underset{\sim}{G}_{ij}^3 \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

Onde:

$$\underset{\sim}{G}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} -cs & -1/2 c^2 x_{1ij} \\ -1/2 x_{2ij} - csx_{1k} & 1/12 x_{2ij}^2 - 1/2 c^2 x_{1ij} x_{1k} \\ -csx_{2k} & -1/2 c^2 x_{1ij} x_{2k} \\ cs & -1/2 s^2 x_{1ij} \\ csx_{1k} & -1/12 x_{1ij}^2 - 1/2 s^2 x_{1ij} x_{1k} \\ 1/2 x_{1ij} + csx_{2k} & -1/6 x_{1ij} x_{2k} - 1/2 s^2 x_{1ij} x_{2k} \\ c^2 - s^2 & -csx_{1ij} \\ 1/2 x_{1ij} + (c^2 - s^2) x_{1k} & s^2 x_{2ij} x_{1k} \\ -1/2 x_{2ij} + (c^2 - s^2) x_{2k} & 1/6 x_{2ij}^2 + s^2 x_{2ij} x_{2k} \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

$$\tilde{G}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} -1/2 c^2 x_{2ij} & CS \\ -1/6 x_{1ij} x_{2ij} - 1/2 c^2 x_{2ij} x_{1k} & -1/2 x_{2ij} + CS x_{1k} \\ -1/12 x_{2ij}^2 - 1/2 c^2 x_{2ij} x_{2k} & CS x_{2k} \\ -1/2 s^2 x_{2ij} & -CS \\ -1/2 s^2 x_{2ij} x_{1k} & -CS x_{1k} \\ 1/12 x_{1ij}^2 - 1/2 s^2 x_{2ij} x_{2k} & 1/2 x_{1ij} - CS x_{2k} \\ -CS x_{2ij} & -(c^2 - s^2) \\ 1/6 x_{1ij}^2 + c^2 x_{1ij} x_{1k} & 1/2 x_{1ij} - (c^2 - s^2) x_{1k} \\ c^2 x_{1ij} x_{2k} & -1/2 x_{2ij} - (c^2 - s^2) x_{2k} \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

$$\tilde{G}_{ij}^3 = \begin{pmatrix} -1/2 c^2 x_{1ij} & -1/2 c^2 x_{2ij} \\ -1/12 x_{2ij}^2 - 1/2 c^2 x_{1ij} x_{2k} & 1/6 x_{1ij} x_{2ij} - 1/2 c^2 x_{2ij} x_{1k} \\ -1/2 c^2 x_{1ij} x_{2k} & 1/12 x_{2ij}^2 - 1/2 c^2 x_{2ij} x_{2k} \\ -1/2 s^2 x_{1ij} & -1/2 s^2 x_{2ij} \\ 1/12 x_{1ij}^2 - 1/2 s^2 x_{1ij} x_{1k} & -1/2 s^2 x_{2ij} x_{1k} \\ 1/6 x_{1ij} x_{2ij} + 1/2 s^2 x_{1ij} x_{2k} & -1/12 x_{1ij}^2 - 1/2 s^2 x_{2ij} x_{2k} \\ -CS x_{1ij} & -CS x_{2ij} \\ s^2 x_{2ij} x_{1k} & -1/6 x_{1ij}^2 + c^2 x_{1ij} x_{1k} \\ -1/6 x_{2ij}^2 + s^2 x_{2ij} x_{2k} & c^2 x_{1ij} x_{2k} \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

Ao computar-se a contribuição de todos os lados do elemento, a parcela do funcional híbrido devido às cargas externas pode ser expressa por:

$$U_3 = \beta^T \tilde{G} \lambda \quad (3.82)$$

onde:

$$\underset{\sim}{G} \underset{\sim}{\lambda} = \underset{\sim}{G}_{12} \underset{\sim}{\lambda}_{12} + \underset{\sim}{G}_{23} \underset{\sim}{\lambda}_{23} + \underset{\sim}{G}_{31} \underset{\sim}{\lambda}_{31} \quad (3.83)$$

O funcional híbrido total pode ser representado por:

$$U_{\text{HSM}} = -\frac{1}{2} \underset{\sim}{\beta}^T \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{\lambda} + \underset{\sim}{\beta}^T \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{\lambda} \quad (3.84)$$

Onde:

$$\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{H}^{-1} \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{\lambda} \quad (3.85)$$

Substituindo-se (3.85) em (3.84), e sabendo-se que  $\underset{\sim}{H}$  é uma matriz simétrica, tem-se:

$$U_{\text{HSM}} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\lambda}^T \underset{\sim}{G}^T \underset{\sim}{H}^{-1} \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{\lambda} \quad (3.86)$$

Fazendo-se a primeira variação do funcional híbrido em tensões igual a zero, obtém-se a matriz de rigidez do elemento HSM

$$\underset{\sim}{K}_{\text{HSM}} = \underset{\sim}{G}^T \underset{\sim}{H}^{-1} \underset{\sim}{G} \quad (3.87)$$

A partir de (3.85) e (3.53), os momentos podem ser escritos como:

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{P} \underset{\sim}{H}^{-1} \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{\lambda} \quad (3.88)$$

### 3.5) VETOR DAS CARGAS NODAIS EQUIVALENTES

O vetor das cargas nodais equivalentes é igual ao vetor das derivadas do trabalho das cargas externas em relação aos deslocamentos.

Nos elementos HSM e DKT, o trabalho externo das cargas nodais equivalentes, correspondentes aos graus de liberdade presentes em um nó  $i$ , pode ser expresso por:

$$T_e = \bar{g} w_i + \bar{m}_1 w_{,1i} + \bar{m}_2 w_{,2i} \quad (3.89)$$

Onde:

$\bar{g}$ ,  $\bar{m}_1$ ,  $\bar{m}_2$  são as cargas nodais equivalentes relativo à carga transversal e aos momentos, respectivamente.

As funções interpoladoras das forças de superfície são representadas por  $g(x_1, x_2)$ ,  $m_1(x_1, x_2)$ ,  $m_2(x_1, x_2)$ . Neste trabalho será desenvolvida apenas a função para  $g(x_1, x_2)$ .

As forças de superfície transversais e as cargas nodais equivalentes são mostradas na figura 3.7.

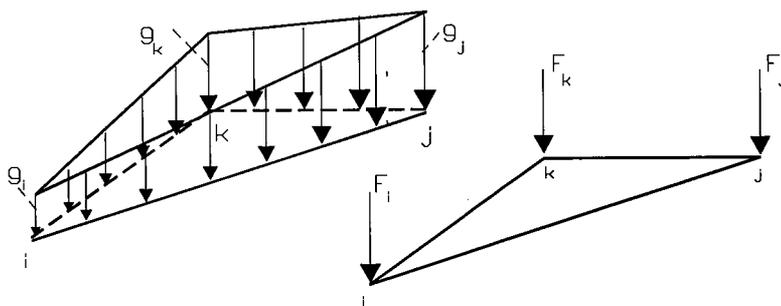


Figura 3.7 - Forças de superfície e cargas nodais equivalentes

O trabalho das cargas externas pode ser expresso por:

$$T_e = \int_A g(x_1, x_2) w(x_1, x_2) dA \quad (3.90)$$

Onde:

$w(x_1, x_2)$ : é a função interpoladora dos deslocamentos no domínio do elemento.

$A$ : é a área do elemento.

Em ambos elementos, isto é, DKT e HSM, para efeito de cálculo do vetor de cargas nodais, a função interpoladora dos deslocamentos, assim como para as forças de superfície será admitida variando linearmente no domínio, conforme indicada na figura 3.8 e podendo ser expressa por:

$$w = w_i \xi_1 + w_j \xi_2 + w_k \xi_3 \quad (3.91)$$

Analogamente, as forças de superfície podem ser expressas por:

$$g = g_i \xi_1 + g_j \xi_2 + g_k \xi_3 \quad (3.92)$$

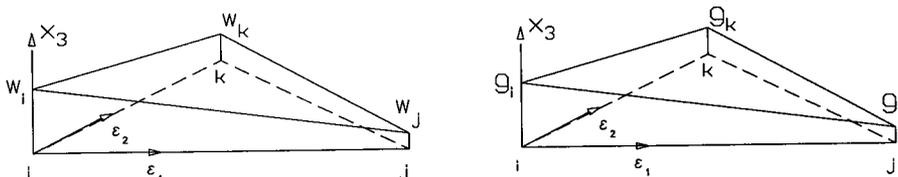


Figura 3.8- Variação linear do deslocamento transversal e da força de superfície no interior do elemento finito.

A transformação dos eixos cartesianos para o homogêneo é obtida a partir da seguinte relação:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

$\underset{\sim}{Z}$  é a matriz de transformação de coordenadas cartesianas para as coordenadas homogêneas, REDDY(1984).

Substituindo-se (3.91) ,(3.92) em (3.90), obtém-se:

$$T_e = \int_A (g_i \xi_1 + g_j \xi_2 + g_k \xi_3) (w_i \xi_1 + w_j \xi_2 + w_k \xi_3) dA \quad (3.94)$$

Ao minimizar-se a energia potencial devida às cargas externas, pode-se escrever que:

$$\begin{pmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_e}{\partial w_i} \\ \frac{\partial T_e}{\partial w_j} \\ \frac{\partial T_e}{\partial w_k} \end{pmatrix} = \int_A \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 & \xi_3^2 \end{pmatrix} dA \begin{pmatrix} g_i \\ g_j \\ g_k \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

A integral do tipo  $\int_A f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dA$  pode ser calculada como:

$$\int_A \xi_1^{\eta_1} \xi_2^{\eta_2} \xi_3^{\eta_3} dA = 2A \frac{\eta_1! \eta_2! \eta_3!}{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + 2)!} \quad (3.96)$$

Com isso , o vetor de cargas nodais pode ser dado por:

$$\begin{pmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{pmatrix} = \underset{\sim}{Q} \begin{pmatrix} g_i \\ g_j \\ g_k \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

Onde:

$$\underset{\sim}{Q} = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Para o caso mais corrente, onde a força de superfície é constante sobre o domínio, (3.98) pode ser simplificada para:

$$\begin{pmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{pmatrix} = \frac{g}{3} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.99)$$

## CAPÍTULO 4

### EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

#### 4.1) Introdução

Neste capítulo são apresentados os problemas elásticos fundamentais tridimensionais genéricos e suas respectivas soluções. Também são mostradas as equações integrais que fazem uma ligação entre os problemas elásticos reais e os fundamentais. São deduzidas as equações integrais para sólidos tridimensionais genéricos.

##### 4.1.1) Generalidades

Na análise dos problemas elásticos, há necessidade de determinação das variáveis associadas aos campos de deslocamentos, de deformações e de tensões. A partir das relações e teoremas fornecidos pela teoria da elasticidade, uma representação integral pode ser escrita envolvendo dois tipos de problemas: O primeiro está associado ao problema fundamental definido em um domínio infinito  $\Omega^*$  e sendo representado pelas componentes vetoriais  $u_{ij}^*$ ,  $p_{ij}^*$  e tensoriais  $\sigma_{ijk}^*$ ,  $\varepsilon_{ijk}^*$ . O segundo tipo é de fato o problema real, definido em um domínio finito  $\Omega$ , que é uma sub-região de  $\Omega^*$ , sendo representado pelas componentes vetoriais  $u_{ij}$ ,  $p_{ij}$  e pelas componentes tensoriais  $\sigma_{ijk}$ ,  $\varepsilon_{ijk}$ , e ainda caracterizado pelas condições de contorno naturais e essenciais.

#### 4.2) Problema elástico fundamental

O problema elástico fundamental está sujeito às mesmas leis e teoremas da elasticidade dos problemas reais. Quando o problema

fundamental está submetido a apenas um estado de carregamento devido à ação de uma carga unitária aplicada no ponto  $p$ , na direção  $i$ , e com efeito observado no ponto  $s$ , na direção  $j$ , a equação governante dos sólidos elásticos, isto é, a equação de Navier, pode ser escrita como:

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{ik,jk}^* + u_{ij,kk}^* + \frac{1}{G} \delta(p,s) \delta_{ij} = 0 \quad (4.1)$$

Onde:

$\delta(p,s)$ : é a distribuição conhecida como delta de Dirac

$\delta_{ij}$ : é o delta de Kronecker.

$\nu$ ,  $G$ : são as constantes elásticas coeficiente de Poisson e módulo de elasticidade transversal, respectivamente.

A solução da equação diferencial (4.1) é conhecida como solução fundamental em deslocamentos  $u_{ij}^*$ .

As soluções fundamentais estão vinculadas às características do domínio e do contorno da região onde o problema elástico fundamental está definido, que podem ser divididos em dois grupos: O primeiro é o *problema fundamental de Kelvin*, já o segundo é conhecido como *problema fundamental de Mindlin*. Este último, quando sujeito a algumas condições particulares, também é conhecido problema *fundamental de Boussinesq-Cerruti*.

#### 4.2.1) Solução Fundamental de Kelvin

LOVE(1944) apresentou as análises de Kelvin para os problemas elásticos fundamentais definidos em um meio infinito  $\Omega^*$ , cujo material constituinte era elástico, homogêneo e isótropo, quando submetidos à ação de uma carga unitária concentrada, conforme mostrado na figura 4.1.

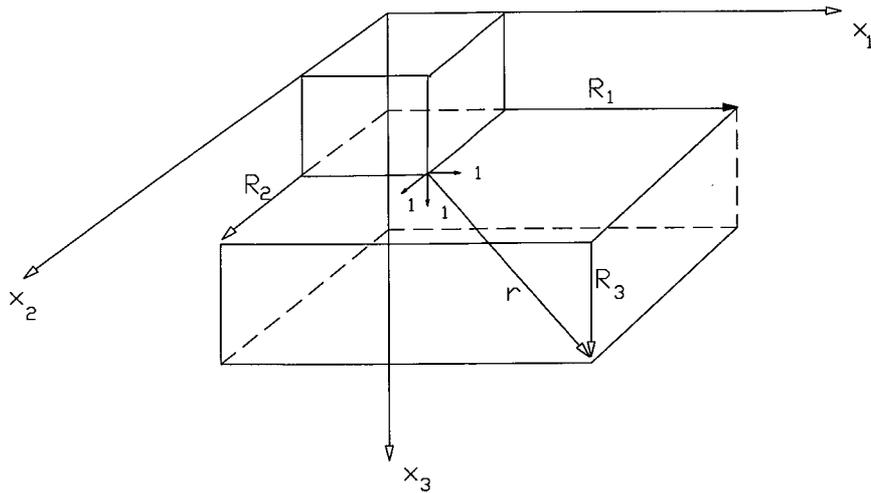


Figura 4.1-Figura adaptada de NAKAGUMA(1979) para o problema de Kelvin

A solução da equação de Navier do problema elástico fundamental infinito envolvendo análises tridimensionais, conforme Kelvin, é dada por:

$$u_{ij}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_j r_{,i}] \quad (i,j=1,2,3) \quad (4.2)$$

A solução fundamental em deformações pode ser obtida a partir da relação deformação/deslocamento. Com isso, pode-se obter o tensor das deformações dado por:

$$\varepsilon_{jik}^* = -\frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr^2} \left\{ (1-2\nu)[r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}] - r_{,i}\delta_{jk} + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \quad (i,j,k=1,2,3) \quad (4.3)$$

Por intermédio das equações constitutivas do meio elástico, obtém-se a solução fundamental em tensões, cujo tensor pode ser representado por:

$$\sigma_{jik}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)Gr^2} \left\{ (1-2\nu) [r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik} - r_{,i} \delta_{jk}] + 3r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\}$$

(i,j,k=1,2,3) (4.4)

Através das relações de Cauchy, obtém-se a solução fundamental em termos de forças de superfície, ou seja:

$$p_{ji}^* = \sigma_{jik}^* \eta_k \quad (4.5)$$

Levando-se (4.4) em (4.5), obtém-se:

$$p_{ji}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ r_{,n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3(r_{,i} r_{,j})] - (1-2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\} \quad (i,j=1,2,3) \quad (4.6)$$

#### 4.2.2) Solução Fundamental de Mindlin

Mindlin estudou problemas elásticos fundamentais definidos em um meio semi-infinito  $\Omega^*$ , cujo material constituinte era elástico, homogêneo e isótropo, quando submetidos à ação de uma carga unitária concentrada. Ele assumiu que a superfície do contorno, definida em  $x_3 = 0$ , era considerada livre de forças de superfície. A representação geométrica do problema elástico fundamental de Mindlin é mostrada na figura 4.2.



$$k_s = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad (4.7h)$$

$$u_{11}^* = k_d \left\{ \frac{(3-4\nu)}{r} + \frac{1}{R} + \frac{r_1^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_1^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left( 1 - \frac{3r_1^2}{R^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R+R_3} \left[ 1 - \frac{r_1^2}{R(R+R_3)} \right] \right\} \quad (4.7i)$$

$$u_{12}^* = k_d r_1 r_2 \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{3-4\nu}{R^3} - \frac{6cz}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \right\} \quad (4.7j)$$

$$u_{13}^* = k_d r_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} - \frac{6czR_3}{R^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right\} \quad (4.7k)$$

$$u_{21}^* = u_{12}^* \quad (4.7m)$$

$$u_{22}^* = k_d \left\{ \frac{(3-4\nu)}{r} + \frac{1}{R} + \frac{r_2^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_2^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left( 1 - \frac{3r_2^2}{R^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R+R_3} \left[ 1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_3)} \right] \right\} \quad (4.7n)$$

$$u_{23}^* = \frac{r_2}{r_1} u_{13}^* \quad (4.7o)$$

$$u_{31}^* = k_d r_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} + \frac{6czR_3}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right\} \quad (4.7p)$$

$$u_{32}^* = \frac{r_2}{r_1} u_{31}^* \quad (4.7q)$$

$$u_{33}^* = k_d \left\{ \frac{r_3^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)}{r} + \frac{6czR_3^2}{R^5} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R} + \frac{(3-4\nu)R_3^2 - 2cz}{R^3} \right\} \quad (4.7r)$$

A solução fundamental em função das tensões e das forças de superfície, podem ser encontradas em NAKAGUMA(1979) na forma explícita, ou na forma indicial descritas em TELLES(1986).

#### 4.2.3 Solução Fundamental de Boussinesq-Cerruti

Boussinesq analisou o comportamento de superfícies de semi-espacos elásticos, homogêneo e isotropos em que carregamentos concentrados eram aplicados na superfície com direção normal a esta.

Uma análise, semelhante à de Boussinesq, foi feita por Cerruti, em que levava-se em conta apenas o efeito de cargas concentradas aplicadas tangencialmente à superfície do semi-espaco.

Com isso, o problema de Boussinesq-Cerruti pode ser considerado um caso particular da solução de Mindlin. A representação geométrica do problema é apresentada pela figura 4.3.

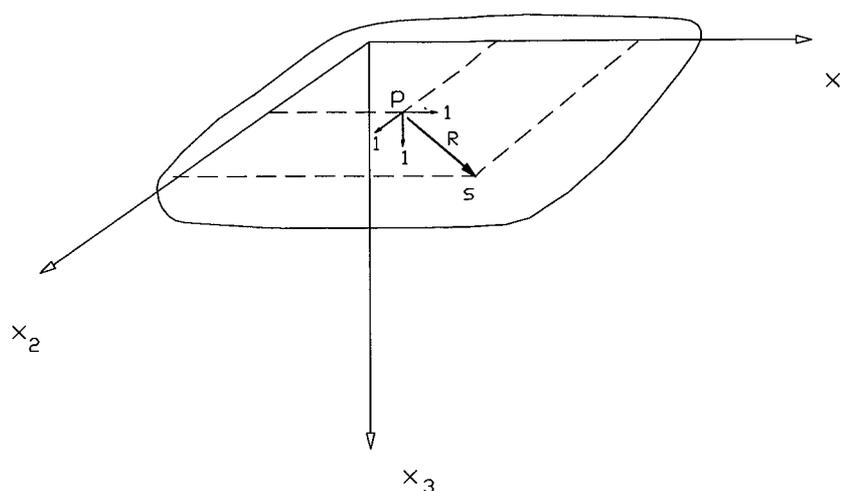


Figura 4.3 - Problema de Boussinesq-Cerruti

As equações da solução fundamental de Boussinesq-Cerruti podem ser escritas na forma indicial, como:

$$u_{ji}^* = \frac{1}{2\pi Gr} [(1-\nu)\delta_{ij} + \nu r_{,i}r_{,j}] \quad (i,j=1,2) \quad (4.8)$$

$$u_{j3}^* = \frac{1}{2\pi Gr} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \nu \right) r_{,j} + \delta_{3j} \left[ (1-\nu) + r_{,j} \left( \nu - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (j=1,2,3) \quad (4.8a)$$

$$u_{3j}^* = -(-1)^{\delta_{3j}} u_{j3}^* \quad (j=1,2,3) \quad (4.8b)$$

### 4.3) Corpos tridimensionais infinitos

A representação integral para os problemas elásticos envolve os campos de deslocamentos, de deformações e de tensões. Os dois últimos estão diretamente relacionados através da lei de Hooke, de forma que há necessidade que seja implementada apenas a representação integral de um

deles para que o outro esteja automaticamente determinado. A solução fundamental, que é incorporada na representação integral dos corpos tridimensionais infinitos, é a de Kelvin.

#### 4.3.1) Representação Integral para o campo de deslocamento

A representação integral para o campo de deslocamento pode ser dividida em duas etapas: a primeira é caracterizada quando o ponto fonte está no domínio, a representação integral recebe o nome de *equação integral para pontos de domínio*. Já a segunda etapa, quando o ponto fonte está no contorno do corpo, a representação integral é conhecida como *equação integral para pontos de contorno*.

As equações integrais, para os pontos de domínio, podem ser obtidas por intermédio de uma variedade de métodos, dentre eles, tem-se:

- a) Técnica do resíduo ponderado.
- b) Teorema da reciprocidade.

A técnica do resíduo ponderado, por ser empregada em outros métodos numéricos, será apresentada neste trabalho.

Para que o equilíbrio do corpo esteja garantido, é necessário obter-se a solução das equações diferenciais de equilíbrio (2.5). A solução exata é viabilizada apenas em alguns casos particulares, de sorte que são adotadas soluções aproximadas; o erro obtido pela admissão dessa solução é minimizado igualando-se a zero, o resultado da integração de um integrando formado pelo produto de (2.5) por uma função ponderadora  $u_{ij}^*$ , de forma que pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_{ij}^* d\Omega = 0 \quad (i,j=1,2,3) \quad (4.9)$$

O contorno  $\Gamma$  pode ser dividido em  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  onde condições essenciais  $u_k = \overline{u_k}$  e condições naturais  $p_k = \overline{p_k}$  estão prescritas.

Ao integrar-se por partes (4.9) duas vezes, e pela imposição das condições naturais e essenciais, pode-se escrever que:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = - \int_{\Gamma_1} p_i u_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \overline{p}_i u_{ij}^* d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_1} \overline{u}_i p_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_i p_{ij}^* d\Gamma \quad (i,j=1,2,3) \quad (4.10)$$

Escolhendo  $u_{ij}^*$  como a solução fundamental relativo a uma carga unitária de direção  $k$  e aplicada na direção  $j$ , portanto, satisfazendo a equação de equilíbrio, isto é:

$$\sigma_{ij,j}^* + \delta(p,s)\delta_{ij} = 0 \quad (i,j=1,2,3) \quad (4.11)$$

Sabendo-se que a integração da função de distribuição de Dirac ao longo do domínio fornece um valor unitário, pode-se escrever que:

$$\int_{\Omega} \delta(p,s)\delta_{ij} u_j d\Omega = \delta_{ij} u_j = u_i \quad (4.12)$$

Com o auxílio de (4.12) e (4.10), escreve-se a identidade de Somigliana como:

$$u_i = - \int_{\Gamma} u_i p_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega \quad (i,k=1,2,3) \quad (4.13)$$

A identidade de Somigliana é válida para pontos do domínio. Quando o ponto fonte migra ponto  $i$  do contorno há necessidade de um artifício matemático para equacionar-se tal ponto. Um artifício é adicionar uma superfície esférica no ponto  $i$ , e com isso, o contorno passa a ser  $\overline{\overline{\Gamma}} = \Gamma - \overline{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon$  como mostrado na figura 4.4. Com esta modificação ponto  $i$  passa a pertencer ao domínio  $\overline{\overline{\Omega}}$ , portanto, pode-se aplicar (4.13).

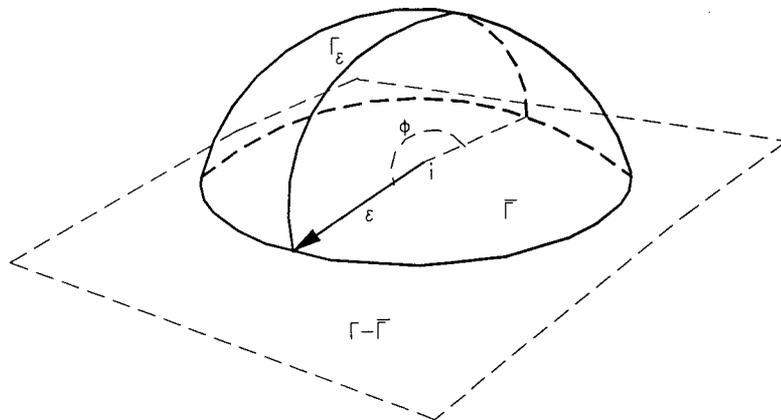


Figura 4.4 - Ponto fonte situado no contorno

$$u_i = \int_{\Gamma - \overline{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma - \int_{\Gamma - \overline{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega - \overline{\Omega} + \Omega_\varepsilon} u_{ij}^* b_j d\Omega$$

(i,j=1,2,3) (4.14)

A fim de retornar ao contorno primitivo basta  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\overline{\overline{\Gamma}}_\varepsilon \rightarrow 0$ , isto é:

$$u_i = \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \overline{\Gamma}} u_{ij}^* p_j d\Gamma - \int_{\Gamma - \overline{\Gamma}} p_{ij}^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega - \overline{\Omega}} u_{ij}^* b_j d\Omega \right] +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^* u_j d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* b_j d\Omega \right] \quad (4.15)$$

Ao computar-se o limite dos termos que estão definidos em  $\Gamma - \overline{\Gamma}$  e  $\Omega - \overline{\Omega}$ , isto é, referentes à primeira parcela de (4.15), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega \quad (4.16)$$

O limite da segunda parcela da equação (4.15) pode ser dividido em duas partes, consistindo na presença ou não de fortes singularidades. Os termos ausentes de fortes singularidades ao calcular-se o limite, tendendo o raio a zero, obtém-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma = 0 \quad (4.17)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} u_{ij}^* b_j d\Gamma = 0 \quad (4.18)$$

O termo que apresenta forte singularidade é:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{ij}^* u_j d\Gamma \quad (i,j=1,2,3) \quad (4.19)$$

Para superar a descontinuidade originada pela singularidade é utilizar de um artifício de somar e subtrair o mesmo termo auxiliar em (4.17), como mostrado abaixo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{ij}^* [u_j(s) - u_j(p)] d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{ij}^* u_j(p) d\Gamma \quad (4.20)$$

Assumindo que é válida a condição de Hölder, isto é:

$$|u_j(s) - u_j(p)| \leq B\varepsilon^{\alpha} \quad (4.21)$$

Onde:

$B$  e  $\alpha$  são números positivos.

Substituindo-se a condição Hölder no primeiro termo de (4.20), encontra-se o valor zero, quando efetuado o cálculo do limite.

Por ser uma esfera, o corpo que foi anexado ao contorno primitivo, algumas relações matemáticas podem ser incorporadas, a saber:

A normal da superfície da esfera e o raio tem a mesma direção, isto é:

$$r_{,n} = 1$$

As forças de superfície fundamentais  $p_{ij}^*$  tornam-se simplificadas devido a um termo contribuinte ser nulo, isto é:

$$(r_j n_j - r_i n_i) = 0 \quad (4.22)$$

O diferencial de área do setor de esfera pode ser escrito como:

$$d\Gamma = 2\phi \epsilon^2 d\phi \quad (4.23)$$

Com isso, o segundo termo de (4.19) pode ser escrito como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^\phi -\frac{1}{2(1-\nu)} [(1-2\nu)\delta_{ij} - 3r_{,i} r_{,j}] d\phi \right\} = \frac{\phi}{2\pi} \delta_{ij} u_i \quad (4.24)$$

Com o auxílio de (4.24), (4.16), a identidade de Somigliana pode ser representada por:

$$C_{ij}(p)u_j(p) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(p,s)u_j(s)d\Gamma(s) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(p,s)p_j(s)d\Gamma(s) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(p,s)b_j(s)d\Omega \quad (i,j=1,2,3) \quad (4.25)$$

onde:

$$C_{ij}(p) = \left( \frac{2\pi - \phi}{2\pi} \right) \delta_{ij}, \text{ com } \phi \text{ em radianos.} \quad (i,j=1,2,3) \quad (4.26)$$

Com isso, a identidade de Somigliana pode ser escrita numa forma global, ou seja, envolvendo pontos situados no domínio ou no contorno, bastando adequar o valor de  $C_{ij}$  ao problema equivalente, isto é:

$$C_{ij}(p) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in \Omega \\ \frac{(2\pi - \phi)}{2\pi}, & \text{se } p \in \Gamma \end{cases} \quad (i,j=1,2,3) \quad (4.27)$$

#### 4.3.2) Representação integral para o campo das tensões

De forma análoga ao campo de deslocamentos, a representação integral é dividida nas mesmas duas etapas.

O campo das tensões, para pontos de domínio, pode ser obtido a partir de diferenciações nas equações que regem o campo dos deslocamentos.

Com isso, a partir da identidade de Somigliana, uma equação integral representando campo das tensões que um ponto  $p$  está sujeito, é dada por:

$$\sigma_{ij}(p) = -\int_{\Gamma} \sigma_{ijk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} \varepsilon_{ijk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* b_k d\Omega \quad (4.28)$$

Há necessidade de escrever-se o estado de tensões de pontos situados no contorno do corpo. Análogo ao que acontece no campo de deslocamentos, quando o ponto fonte se encontra sobre o contorno ocorrem fortes singularidades no cálculo das integrais.

Um artifício análogo ao utilizado no campo dos deslocamentos pode ser implementado para obtenção da equação integral, que representa o estado de tensões. No caso de pontos situados sobre contorno sem presença de angulosidades, a representação integral pode ser escrita como:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij}(p) = -\int_{\Gamma} \sigma_{ijk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} \varepsilon_{ijk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* b_k d\Omega \quad (4.29)$$

#### 4.4) Corpos tridimensionais semi-infinitos

Para um meio contínuo semi-infinito equações semelhantes às montadas anteriormente podem ser obtidas analogamente, mudando-se apenas a solução fundamental, que agora passa ser a de Mindlin. No estudo que se refere este trabalho serão compatibilizados apenas os deslocamentos verticais da interface placa-solo. Neste caso, a equação integral para o deslocamento vertical é dada por:

$$u_3 = \int_{\Gamma} u_{33}^* p_3 d\Gamma + \int_{\Omega} u_{33}^* b_3 d\Omega \quad (4.30)$$

Observar que neste caso o coeficiente  $C_{33}$  tem valor igual a um.

## CAPÍTULO 5

### MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

#### 5.1) Introdução

Neste capítulo é obtida a representação algébrica, a partir das equações integrais, apresentadas no capítulo 4, para problemas tridimensionais genéricos. Na seqüência é obtida a representação algébrica de um meio contínuo semi-infinito, que será posteriormente utilizada modelar o solo. Convém enfatizar que o sistema algébrico obtido pelo MEF modelando a placa, e a representação algébrica obtida pelo MEC modelando a superfície do solo serão acoplados no intuito determinar as variáveis presentes na interação placa-solo.

#### 5.2) Discretização das equações integrais

Escrevendo-se a identidade de Somigliana (4.13) na forma matricial tem-se que:

$$\underset{\sim}{C} \underset{\sim}{U} = - \int_{\underset{\sim}{\Gamma}} \underset{\sim}{P}^* \underset{\sim}{U} d\Gamma + \int_{\underset{\sim}{\Gamma}} \underset{\sim}{U}^* \underset{\sim}{P} d\Gamma + \int_{\underset{\sim}{\Omega}} \underset{\sim}{U}^* \underset{\sim}{B} d\Omega \quad (5.1)$$

A solução exata de (5.1) não está disponível na maioria dos problemas existentes. Uma alternativa, para superar este inconveniente, é resolver as equações integrais numericamente.

A solução numérica requer que a superfície de contorno  $\Gamma$  da região, onde o problema elástico genérico esteja definido, seja dividido em um número finito de regiões menores, que são denominadas de *elementos de contorno*. Na presença de forças volumétricas o domínio do corpo  $\Omega$  é dividido em um número finito de sub-regiões chamadas de *células*, que são representados na figura 5.1.

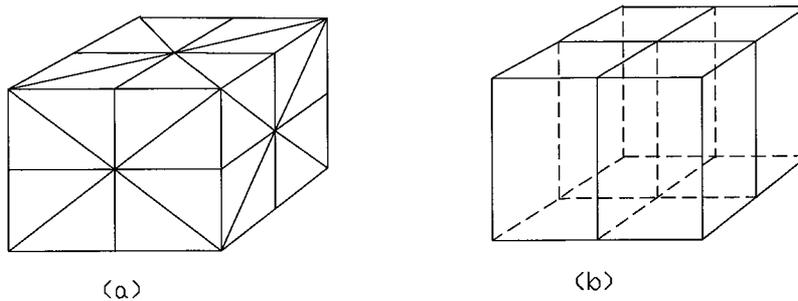


Figura 5.1-Representação da discretização do corpo em elementos de contorno (a) e em células(b).

Ao computar-se a contribuição de cada elemento e de cada célula, as de equações integrais (5.1) podem ser expressas de uma outra maneira, a saber:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{U} = & - \sum_{k=1}^n \left[ \int_{\Gamma} \underset{\sim}{P}^* \underset{\sim}{\Phi}^T d\Gamma \right] \underset{\sim}{U}_k^n + \sum_{k=1}^n \left[ \int_{\Gamma} \underset{\sim}{U}^* \underset{\sim}{\Phi}^T d\Gamma \right] \underset{\sim}{P}_k^n + \\ & + \sum_{l=1}^{ncel} \left[ \int_{\Gamma} \underset{\sim}{U}^* \underset{\sim}{\Psi}^T d\Gamma \right] \underset{\sim}{B}_l^n \end{aligned} \quad (5.2)$$

Onde:

$n$ : é o número de elementos de contorno.

$ncel$ : é o número de células do domínio.

$\underset{\sim}{U}_k^n, \underset{\sim}{P}_k^n$  : são os vetores dos valores nodais dos deslocamentos e

forças de superfície, respectivamente, no elemento  $k$ .

$\underset{\sim}{B}_l^m$  : é o vetor dos valores nodais das forças volumétricas na

célula  $l$ .

$\underset{\sim}{\Phi}^T, \underset{\sim}{\Psi}^T$  : são as matrizes compostas por funções interpoladoras

das variáveis de contorno e das forças volumétricas, respectivamente.

O sistema de equações algébricas é obtido a partir do sistema de equações integrais, através do cálculo das respectivas integrais. O resultado das integrações nos elementos pode ser representado por:

$$\tilde{h}^k = \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{U}^* \tilde{\Phi}^T d\Gamma \quad (5.3)$$

$$\tilde{g}^k = \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{P}^* \tilde{\Phi}^T d\Gamma \quad (5.4)$$

$$\tilde{b}^l = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{U}^* \tilde{\Psi}^T d\Omega \quad (5.5)$$

Através da somatória das sub-matrizes contribuintes dos elementos e células, o sistema algébrico toma a forma de:

$$\tilde{C}\tilde{U} = -\sum_{k=1}^n \tilde{h}^k \tilde{U}_k^n + \sum_{k=1}^n \tilde{g}^k \tilde{P}_k^n + \sum_{l=1}^{ncel} \tilde{b}^l \tilde{B}_l^m \quad (5.6)$$

O sistema, expresso por (5.6), pode ainda ser escrito em matrizes globais, isto é:

$$\tilde{C}\tilde{U} = -\tilde{H}\tilde{U} + \tilde{G}\tilde{P} + \tilde{D}\tilde{B} \quad (5.7)$$

A matriz  $\tilde{C}$  pode ser incorporada na matriz  $\tilde{H}$ , já que seus elementos possuem as mesmas posições dos elementos das submatrizes da diagonal principal de  $\tilde{H}$ , de forma que o sistema (5.8) pode ser escrito como:

$$\tilde{H}\tilde{U} = \tilde{G}\tilde{P} + \tilde{D}\tilde{B} \quad (5.8)$$

Onde:

$\tilde{U}, \tilde{P}$  : são os vetores que contêm as componentes de deslocamentos e de forças de superfície, respectivamente, de todos os nós associados às variáveis de contorno.

$\tilde{B}$  : é o vetor que contém as componentes das forças de volume de todos os nós discretizados no domínio

$\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{D}$  : são as matrizes que contêm as contribuições de todas as sub-matrizes  $\tilde{g}^k, \tilde{h}^k, \tilde{b}^k$ , respectivamente.

Após a imposição das condições de contorno em (5.8), seguida da separação entre os termos conhecidos e os desconhecidos, obtém-se um sistema linear que pode ser apresentado como:

$$\tilde{A} \tilde{Y} = \tilde{F} \quad (5.8a)$$

Onde:

$\tilde{A}$  : é a matriz dos coeficientes conhecidos, que multiplicam as incógnitas do problema

$\tilde{Y}$  : é o vetor das incógnitas do problema, que pode ser formado por deslocamentos e forças de superfície.

$\tilde{F}$  : é o vetor dos termos independentes, cujo todos seus elementos são conhecidos

Para encontrar as incógnitas do problema elástico basta utilizar os procedimentos clássicos de resolução de sistemas lineares, enfatizando-se que a matriz  $\tilde{A}$  não possui simetria.

Somente a determinação das variáveis no contorno não torna a análise do problema elástico completa, restando-se ainda determinar os deslocamentos e o estado de tensões dos pontos pertencentes ao domínio.

A equação integral (4.28), representando o campo das tensões, pode ser escrita na forma matricial como:

$$\underset{\sim}{\sigma} = - \int_{\underset{\sim}{\Gamma}} \underset{\sim}{S}^* \underset{\sim}{U} d\Gamma + \int_{\underset{\sim}{\Gamma}} \underset{\sim}{E}^* \underset{\sim}{P} d\Gamma + \int_{\underset{\sim}{\Omega}} \underset{\sim}{S}^* \underset{\sim}{b} d\Omega \quad (5.9)$$

A discretização da equação integral (5.9) pode ser feita de maneira análoga ao implementado na representação da identidade de Somigliana, de forma que a representação integral para as tensões, levando-se em conta a contribuição de cada elemento de contorno e de cada célula, pode ser expressa por:

$$\underset{\sim}{\sigma} = - \sum_{k=1}^n \left[ \int_{\underset{\sim}{\Gamma}} \underset{\sim}{S}^* \underset{\sim}{\Phi}^T d\Gamma \right] \underset{\sim}{U}_k^n + \sum_{k=1}^n \left[ \int_{\underset{\sim}{\Gamma}} \underset{\sim}{E}^* \underset{\sim}{\Phi}^T d\Gamma \right] \underset{\sim}{P}_k^n + \sum_{l=1}^{ncel} \left[ \int_{\underset{\sim}{\Gamma}} \underset{\sim}{E}^* \underset{\sim}{\Psi}^T d\Gamma \right] \underset{\sim}{B}_l^m \quad (5.10)$$

A representação algébrica das tensões pode ser obtida através do cálculo das integrais contribuintes de cada elemento, isto é:

$$\underset{\sim}{s}^k = \int_{\underset{\sim}{\Gamma}} \underset{\sim}{S}^* \underset{\sim}{\Phi}^T d\Gamma \quad (5.11)$$

$$\underset{\sim}{e}^k = \int_{\underset{\sim}{\Gamma}} \underset{\sim}{E}^* \underset{\sim}{\Phi}^T d\Gamma \quad (5.12)$$

$$\tilde{t}^l = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{S}^* \tilde{\Psi}^T d\Omega \quad (5.13)$$

Através da somatória das sub-matrizes contribuintes dos elementos, a expressão algébrica toma a forma de:

$$\tilde{\sigma} = -\sum_{k=1}^n \tilde{s}^k \tilde{U}_k^n + \sum_{k=1}^n \tilde{e}^k \tilde{P}_k^n + \sum_{l=1}^{ncel} \tilde{t}^l \tilde{B}_l^m \quad (5.14)$$

A expressão (5.14) pode ainda ser escrita em matrizes globais, isto é:

$$\tilde{\sigma} = -\tilde{S}\tilde{U} + \tilde{E}\tilde{P} + \tilde{T}\tilde{B} \quad (5.15)$$

Onde:

$\tilde{S}$ ,  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{T}$  : são as matrizes que contêm as contribuições de todas

sub-matrizes  $\tilde{s}^k$ ,  $\tilde{e}^k$ ,  $\tilde{t}^k$ , respectivamente.

Após a resolução do sistema linear (5.8), as incógnitas associadas às variáveis de contorno são determinadas, de forma que o campo das tensões pode ser obtido diretamente de (5.15), uma vez que todos os vetores e matrizes já são conhecidos.

A análise do problema elástico é finalizada com a determinação do terceiro campo, isto é: o estado de deformações. Aplicando a lei de Hooke no campo das tensões, obtém-se o campo das deformações do problema elástico.

### 5.3) Contribuição do meio semi-infinito na interação placa-solo

As representações integrais e algébricas para o método dos elementos de contorno, até o momento apresentada, regem o comportamento dos problemas elásticos tridimensionais. Como o objetivo desta obra abrange apenas parte deles, as representações integrais e algébricas serão adaptadas para os casos, em que são estudados problemas de interação de certas estruturas com o meio contínuo semi-infinito, isto é:

- a) Interação placa-solo
- b) Interação estaca-solo
- c) Interação placa-estaca-solo

Neste capítulo é apresentada a contribuição do semi-espaço no problema da interação placa-solo. Esse problema incorpora a solução fundamental de Boussinesq-Cerruti, e se as forças de volume forem desprezadas, a representação integral pode ser escrita como:

$$u_i = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(p, s) p_j(s) d\Gamma(s), \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (5.16)$$

O problema analisado restringe-se a carregamentos aplicados normalmente à superfície do semi-espaço, o que necessitada que apenas o deslocamento vertical seja compatibilizado nesta formulação. Com isso, a representação integral do problema (5.16) pode ser simplificada para:

$$u_3 = \int_{\Gamma} u_{33}^*(p, s) p_3(s) d\Gamma(s) \quad (5.17)$$

### 5.3.1) Discretização da representação integral para a superfície do solo

Implementando-se a discretização da equação integral (5.17), obtém-se:

$$u_3 = \sum_1^n \int_{\Omega_{el}} u_{33}^*(p, s) p_3(s) d\Omega_{el}(s) \quad (5.18)$$

Onde:

$\Omega_{el}$ : é o domínio do elemento de contorno .

n: é o número de elementos de contorno que compõem o contorno  $\Gamma$ .

Cabe ressaltar que o contorno é dividido em elementos de contorno triangulares, já que esta geometria permite aproximar diversas formas do contorno. Admite-se também que as forças de superfície variam linearmente ao longo do domínio do elemento como mostrado na figura 5.2

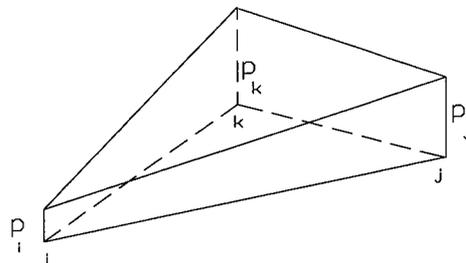


Figura 5.2- Distribuição das forças de superfície ao longo do elemento de contorno.

A função interpoladora das forças de superfície é uma equação de um plano, portanto, pode ser expressa por:

$$p_3 = A_i x_{1s} + B_i x_{2s} + C_i \quad (5.19)$$

Onde:

$x_{1s}, x_{2s}$ : são as coordenadas do ponto  $s$  no sistema global de referência  $(x_1, x_2)$ .

Através de uma translação de eixos, as coordenadas do ponto  $s$  podem ser escritas em relação a um sistema  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , mostrado na figura 5.3

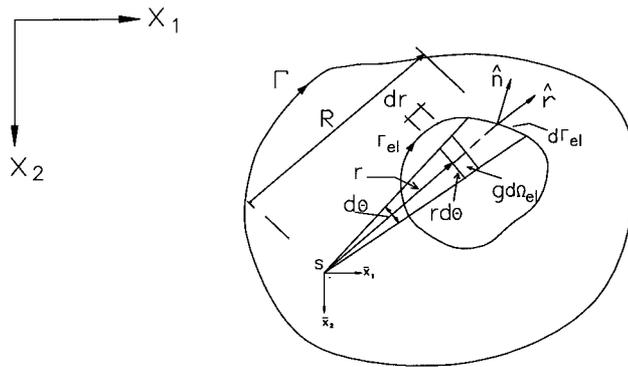


Figura 5.3 - Sistema local de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

As forças de superfície, no sistema  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , podem ser escritas como:

$$\bar{p}_3 = A_i \bar{x}_1 + B_i \bar{x}_2 + D_i \quad (5.21)$$

Onde:

$$D_i = A_i x_{1s} + B_i x_{2s} + C_i \quad (5.22)$$

Um método interessante, encontrado em PAIVA(1993), é transformar a integração analítica (5.18) sobre o domínio  $\Omega_{el}$  em uma integral equivalente, que requer apenas integração ao longo do contorno do elemento  $\Gamma_{el}$ , isto é, ao longo dos lados do triângulo. O método é mostrado a seguir:

Transformando-se o sistema cartesiano local  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  em um sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$ , as forças de superfície podem ser escritas como:

$$\bar{p}_3 = A_i r \cos \theta + B_i r \sin \theta + D_i \quad (5.23)$$

e

$$d\Omega_{el} = r dr d\theta \quad (5.24)$$

Com isso, a representação integral (5.18) para um elemento  $k$  pode ser escrita como:

$$h_k = \int_0^R \int_{\theta_0}^{\theta_1} [A_i r \cos \theta + B_i r \sin \theta + D_i] u_{33}^* r dr d\theta \quad (i,j=1,2,3) \quad (5.25)$$

Particularizando-se a equação (5.25) para o problema fundamental de Boussinesq e calculando-se a integral ao longo do raio vetor  $r$ , tem-se que:

$$h_k = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1-\nu}{4\pi G} [A_i R^2 \cos \theta + B_i R^2 \sin \theta + 2D_i R] d\theta \quad (5.26)$$

Através de relações de geometria plana, mostradas na figura 5.2 , o diferencial angular  $d\theta$  pode ser escrito em função do diferencial de contorno do elemento  $d\Gamma_{el}$ , isto é:

$$d\theta = \frac{\hat{n}^* \hat{r}}{R} d\Gamma_{el} \quad (5.27)$$

Onde:

$\hat{n}$  ,  $\hat{r}$  : são os versores de direção da normal do lado do elemento  $n$  e do raio vetor de distância

R: é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo.

Finalmente, substituindo-se (5.27) em (5.26), obtém-se a integração equivalente em função apenas do contorno do célula  $i$ , isto é:

$$h = \int_{\Gamma_{el}} \frac{1-\nu}{4\pi G} [A_i R \cos \theta + B_i R \sin \theta + 2D_i] \hat{n}^* \hat{r} d\Gamma_{el} \quad (5.28)$$

Enfatizando-se que o ângulo  $\theta$  é o formado pelo raio vetor  $\hat{r}$  e o eixo  $\bar{X}_1$  do sistema local de coordenadas.

Após efetuar o cálculo das integrais indicadas, obtém-se a representação algébrica do solo dada por:

$$\tilde{H}_s \tilde{U}_s = \tilde{G}_s \tilde{P}_s \quad (5.29)$$

Onde:

$\tilde{P}_s$ ,  $\tilde{U}_s$  são os vetores que contêm as forças de superfície e os deslocamentos de todos os nós dos elementos de contorno discretizados na superfície do solo.

A matriz  $\tilde{H}_s$ , para o caso em que malha discretiza parte da superfície do semi-espaço, torna-se igual a matriz identidade. A matriz  $\tilde{G}_s$  armazena os coeficientes que multiplicam os elementos do vetor  $\tilde{P}_s$ .

## **CAPÍTULO 6**

### **MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO AO SISTEMA ESTACA-SOLO**

#### **6.1) Introdução**

No capítulo 5 foram apresentadas as equações integrais e a discretização das mesmas, pelo método dos elementos de contorno, para pontos-fonte e campo situados na superfície do semi-espço . Neste capítulo serão apresentadas as equações integrais, juntamente com sua discretização, para o problema da estaca imersa no espaço semi-infinito, sendo dada especial atenção para operações matriciais implementadas no sistema algébrico, com intuito de escrever a contribuição dos pontos discretizados no fuste e na base da estaca em função do nó discretizado em seu topo.

#### **6.2) Hipóteses básicas**

Existem diversos fatores que interferem no comportamento real do conjunto estaca-solo, dentre eles, podem-se citar:

- a) Propriedades físicas do solo e da estaca.
- b) Tipo de execução da estaca.
- c) Espaçamento das estacas.
- d) Ordem de cravação.
- e) Nível de carregamento aplicado.

A formulação apresentada, neste trabalho para análise numérica do problema, incorpora apenas a influência de alguns fatores através de hipóteses simplificadoras, a saber:

- a) O espaçamento entre estacas é tomado como a distância eixo a eixo.

b) O solo e a estaca são admitidos trabalhando no regime elástico linear.

c) É admitido que as estacas estão totalmente imersas em um semi-espaço, elástico linear, homogêneo e isótropo .

d) A perturbação devida à presença das estacas no espaço semi-infinito é desprezada.

e) O solo e as estacas estão livres de tensões iniciais decorrentes da instalação das mesmas.

f) A superfície das estacas são admitidas rugosas, de forma que inibe o deslizamento na região da superfície de contato estaca-solo.

h) As forças volumétricas são desprezadas.

i) As estacas estão sujeitas apenas a carregamentos verticais.

j) A deformação radial da estaca é desprezada, portanto, havendo compatibilidade apenas para os deslocamentos verticais.

O deslocamento de um ponto  $p$ , pertencente ao problema elástico aqui representado, isto é, superfície do semi-espaço interagindo com as estacas, pode ser escrito como:

$$u_3(p) = \int_{\Gamma} u_{33}^* p_3 d\Gamma + \sum_{i=1}^{np} \left\{ \int_{\Gamma_{pi}} u_{33}^* \tau_i d\Gamma_{pi} + \int_{\Gamma_{bi}} u_{33}^* \sigma_i d\Gamma_{bi} \right\} \quad (6.1)$$

Onde:

$np$ : é o número de estacas

$\Gamma$ : é uma sub-região do contorno do semi-espaço onde  $p_3$  está definido.

$\Gamma_{pi}$  e  $\Gamma_{bi}$ : são o contorno do fuste e da base da estaca  $i$ , respectivamente.

Como neste problema as tensões das estacas estão aplicadas no interior do espaço semi-infinito, portanto, a solução fundamental a ser utilizadas é a de Mindlin.

A representação integral para o conjunto estaca-solo pode ser escrita matricialmente como:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{\mathbf{U}}^* \tilde{\mathbf{P}} d\tilde{\Gamma} + \sum_{k=1}^{np} \left[ \int_{\tilde{\Gamma}_{pk}} \tilde{\mathbf{U}}^* \tilde{\boldsymbol{\tau}}_k d\tilde{\Gamma}_{pk} + \int_{\tilde{\Gamma}_{bk}} \tilde{\mathbf{U}}^* \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_k d\tilde{\Gamma}_{bk} \right] \quad (6.2)$$

Onde:

$\tilde{\mathbf{P}}$ : é o vetor que representa as forças de superfície no contorno  $\tilde{\Gamma}$ .

$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_k, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_k$ : são os vetores que representam as tensões cisalhantes do fuste e as tensões normais da base da estaca  $k$ , respectivamente.

### 6.3) Discretização da representação integral

Implementando-se a discretização da representação integral (6.2), obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^{np} \left\{ \left[ \int_{\tilde{\Gamma}_p} \tilde{\mathbf{U}}^* \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T d\tilde{\Gamma}_p \right] \tilde{\boldsymbol{\tau}}_k^{np} + \left[ \int_{\tilde{\Gamma}_b} \tilde{\mathbf{U}}^* \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T d\tilde{\Gamma}_b \right] \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_k^{np} \right\} + \sum_{i=1}^n \left[ \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{\mathbf{U}}^* \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T d\tilde{\Gamma} \right] \tilde{\mathbf{P}}_i^n \quad (6.3)$$

Onde:

$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_k^{np}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_k^{np}$ : são os valores nodais das tensões cisalhantes e normais

na estaca  $k$ , respectivamente.

$\tilde{\mathbf{P}}^n$ : é o vetor das forças de superfície nodais dos elementos.

$\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T, \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T$ : são as funções interpoladoras para as tensões cisalhantes, tensões normais, forças de superfície, respectivamente.

PAIVA(1993) admite algumas hipóteses para as funções interpoladoras da geometria e das variáveis de contorno para as estacas, mostradas na figura 6.1, a saber:

a) Um único elemento linear representa cada estaca.

b) As tensões de cisalhamento variam quadraticamente ao longo do fuste, sendo definidos três nós funcionais para representá-las, de forma que funções interpoladoras podem ser escritas como:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{p1} \\ \Phi_{p2} \\ \Phi_{p3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(9\eta^2 - 9\eta + 2) \\ -9\eta^2 + 6\eta \\ \frac{1}{2}(9\eta^2 - 3\eta) \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Onde:

$$\eta = \frac{z}{L} \quad (6.5)$$

Onde :

Z: representa a cota de um ponto genérico pertencente à estaca

L: é o comprimento da estaca.

c) As tensões normais na base das estacas são admitidas com distribuição uniforme na área da mesma, sendo representadas por um quarto nó funcional .



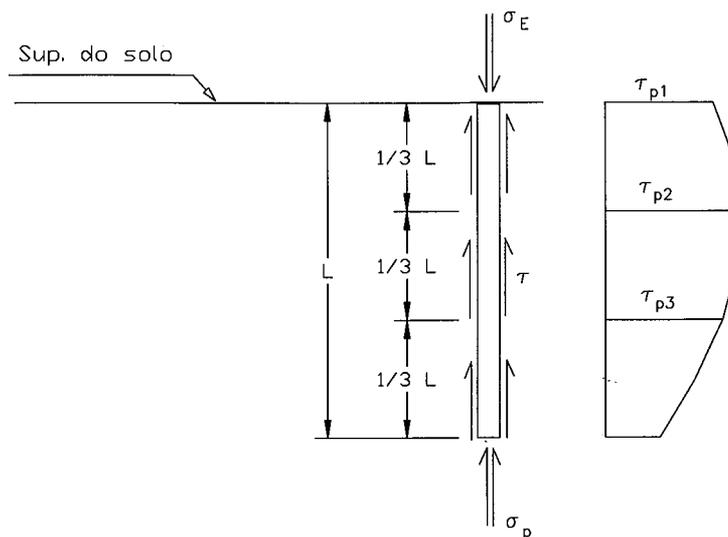


Figura 6.1- Representação das funções interpoladoras na estaca.

Os resultados do cálculo das integrais na estaca  $K$  e no elemento  $i$  do contorno do semi-espaço, podem ser representados por:

$$\underset{\sim}{h}_f^k = \int_{\underset{\sim}{\Gamma}_p} \underset{\sim}{U}^* \underset{\sim}{\theta}^T d\underset{\sim}{\Gamma}_{pk} \quad (6.6)$$

$$\underset{\sim}{h}_b^k = \int_{\underset{\sim}{\Gamma}_b} \underset{\sim}{U}^* \underset{\sim}{\lambda}^T d\underset{\sim}{\Gamma}_{bk} \quad (6.7)$$

$$\underset{\sim}{h}_{cel}^i = \int_{\underset{\sim}{\Gamma}} \underset{\sim}{U}^* \underset{\sim}{\Phi}^T d\underset{\sim}{\Gamma} \quad (6.8)$$

O sistema algébrico, que explicita a contribuição de cada elemento do conjunto solo-estaca, pode ser expresso por:

$$\underset{\sim}{U} = \sum_{k=1}^{np} \left[ \underset{\sim}{h}_f^k \underset{\sim}{\tau}_k^{np} + \underset{\sim}{h}_b^k \underset{\sim}{\sigma}_k^{np} \right] + \sum_{i=1}^n \left[ \underset{\sim}{h}_{cel}^i \underset{\sim}{P}_i^n \right] \quad (6.9)$$

Ou

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{T} \quad (6.9a)$$

$\underset{\sim}{U}$ : é o vetor que contém os deslocamentos nodais discretizados na superfície do semi-espaço e nas estacas.

$\underset{\sim}{T}$ : é o vetor que contém as forças de superfície nodais referentes à superfície do semi-espaço e as tensões nodais discretizadas nas estacas.

$\underset{\sim}{L}$ : é a matriz de correlação entre  $\underset{\sim}{U}$  e  $\underset{\sim}{T}$

O sistema algébrico (6.9) pode ser dividido em duas partes: a primeira envolvendo os deslocamentos dos pontos discretizados na superfície do semi-espaço  $\underset{\sim}{U}_\Gamma$  e segunda parte contém os pontos discretizados sobre a estaca  $\underset{\sim}{U}_p$ , isto é:

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{U}_\Gamma \\ \underset{\sim}{U}_p \\ \sim \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{R} & \underset{\sim}{Q} \\ \underset{\sim}{q} & \underset{\sim}{r} \\ \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underset{\sim}{P}_\Gamma \\ \underset{\sim}{\tau}_p \\ \sim \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

O vetor  $\underset{\sim}{U}_p$  pode ser expandido de forma a explicitar a contribuição de cada estaca, isto é:

$$\begin{pmatrix} U_{\Gamma} \\ \vdots \\ U_p^k \\ \vdots \\ U_p^p \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R & \dots & Q_1^k & \dots & Q_1^p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ q^k & \dots & r^{kk} & \dots & r^{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r^p & \dots & r^{pk} & \dots & r^{pp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_{\Gamma} \\ \vdots \\ \tau_p^k \\ \vdots \\ \tau_p^p \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Explicitando-se apenas as linhas da matriz  $L$  referentes à estaca  $k$ , no sistema dado por (6.11), tem-se que:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ u_{mi} \\ \vdots \\ u_p \\ u_{p1} \\ u_{p2} \\ u_{p3} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & b_{mi} & \dots & b_{mp} & b_{m,p1} & b_{m,p2} & b_{m,p3} & \dots & p_{mi} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ & b_{qi} & & b_{qp} & b_{q,p1} & b_{q,p2} & b_{q,p3} & & \tau_1 \\ & b_{ri} & & b_{rp} & b_{r,p1} & b_{r,p2} & b_{r,p3} & & \tau_2 \\ \dots & b_{si} & \dots & b_{sp} & b_{s,p1} & b_{s,p2} & b_{s,p3} & \dots & \tau_3 \\ & b_{ti} & & b_{tp} & b_{t,p1} & b_{t,p2} & b_{t,p3} & & \sigma \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ p_{mi} \\ \vdots \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \sigma \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Admitindo-se que a estaca é rígida, todos os pontos definidos sobre ela têm o mesmo deslocamento, de forma que o sistema (6.12) pode ser alterado para:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ u_{mi} \\ \vdots \\ u_p \\ u_p \\ u_p \\ u_p \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{mi} & \cdots & b_{mp} & b_{m,p1} & b_{m,p2} & b_{m,p3} & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ b_{qi} & b_{qp} & b_{q,p1} & b_{q,p2} & b_{q,p3} & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{ri} & b_{rp} & b_{r,p1} & b_{r,p2} & b_{r,p3} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{si} & \cdots & b_{sp} & b_{s,p1} & b_{s,p2} & b_{s,p3} & \cdots \\ b_{ti} & b_{tp} & b_{t,p1} & b_{t,p2} & b_{t,p3} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ p_{mi} \\ \vdots \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \sigma \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Escrevendo-se (6.13) na forma inversa, as linhas da matriz  $L^{-1}$ , referentes à estaca  $k$ , podem ser expressas por:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ p_{mi} \\ \vdots \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \sigma \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mp} & a_{m,p1} & a_{m,p2} & a_{m,p3} & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{qi} & a_{qp} & a_{q,p1} & a_{q,p2} & a_{q,p3} & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ri} & a_{rp} & a_{r,p1} & a_{r,p2} & a_{r,p3} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{si} & \cdots & a_{sp} & a_{s,p1} & a_{s,p2} & a_{s,p3} & \cdots \\ a_{ti} & a_{tp} & a_{t,p1} & a_{t,p2} & a_{t,p3} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ u_{mi} \\ \vdots \\ u_p \\ u_p \\ u_p \\ u_p \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

A representação integral da carga transmitida à estaca é dada por:

$$P_E = \int_{\Gamma_p} u_{33}^* \tau_p d\Gamma_p + \int_{\Gamma_b} u_{33}^* \sigma_b d\Gamma_b \quad (6.15)$$

A tensão no topo da estaca pode ser obtida pela divisão de (6.15) pela área da base da mesma:

$$\sigma_E = C_1 \tau_l + C_2 \tau_j + C_3 \tau_k + C_4 \sigma_b \quad (6.16)$$

Onde:

$$C_1 = \frac{\pi R_b}{A_b} \int_0^1 \theta_{p1} |J| d\eta = \frac{L}{2R_b} \quad (6.16a)$$

$$C_2 = \frac{2\pi R_b}{A_b} \int_0^1 \theta_{p2} |J| d\eta = 0 \quad (6.16b)$$

$$C_3 = \frac{\pi R_b}{A_b} \int_0^1 \theta_{p3} |J| d\eta = \frac{3L}{2R_b} \quad (6.16c)$$

$$C_4 = 1 \quad (6.16d)$$

As linhas da matriz  $\tilde{L}^{-1}$ , correspondentes à estaca  $k$ , podem ser multiplicadas respectivamente por constantes  $c_1, c_2, c_3, c_4$  assim como as linhas do vetor  $\tilde{\tau}$ . Quando for feita a soma das linhas correspondentes à estaca  $k$ , e ainda substituindo-se a equação (6.16) no vetor  $\tilde{\tau}$ , obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \sigma_E \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & & \\ \cdots & a_{qp}^* & \cdots \\ \vdots & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ u_p \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

Repetindo-se o processo para todas as estacas, o sistema de equações pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \vdots \\ \sigma_E^k \\ \vdots \\ \sigma_E^p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1k}^* & \cdots & a_{1p}^* \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & a_{2k}^* & & a_{2p}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{nk}^* & \cdots & a_{np}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}^* & a_{k2}^* & & a_{kn}^* & a_{kk}^* & & a_{kp}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}^* & a_{p2}^* & \cdots & a_{pn}^* & a_{pk}^* & \cdots & a_{pp}^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ \vdots \\ u_p^k \\ \vdots \\ u_p^p \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

No caso de estacas flexíveis, um procedimento análogo ao das estacas rígidas pode ser implementado, no entanto, há necessidade que seja incorporada ao sistema algébrico equações que relacionem os deslocamentos dos pontos discretizados sobre a estaca entre si.

Como é assumido que a estaca está sujeita a apenas carregamentos verticais, a deformação axial de um ponto genérico é dada por:

$$u_{3,z} = \frac{-F_z}{A_p E_p} \quad (6.19)$$

Onde :

$$F_z = 2\pi R_b \left\{ \left[ \int_{\eta}^1 \theta_{p1} |J| d\eta \right] \tau_{p1} + \left[ \int_{\eta}^1 \theta_{p2} |J| d\eta \right] \tau_{p2} + \left[ \int_{\eta}^1 \theta_{p3} |J| d\eta \right] \tau_{p3} \right\} + \sigma_b A_b \quad (6.18a)$$

Onde:

$F_z$ : é a força de compressão que atua em uma altura  $z$  da estaca

$A_p$ : é a área transversal da estaca

$E_p$ : é o módulo de elasticidade longitudinal da estaca.

$R_p$ : é o raio da estaca.

Os deslocamentos dos pontos discretizados sobre a estaca podem ser representados:

$$u_3 = \int_z \frac{-F_z}{E_p A_p} dz \quad (6.19)$$

Integrando (6.17) e impondo-se a condição de contorno  $u = u_p$  quando  $z = 0$ , obtém-se a expressão do deslocamento axial da estaca. Escrevendo-se esta expressão para os quatro pontos nodais localizados na estaca obtém-se:

$$\begin{pmatrix} u_p \\ u_{p1} \\ u_{p2} \\ u_{p3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_p \\ u_p \\ u_p \\ u_p \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

Onde:

$u_p, u_{p1}, u_{p2}, u_{p3}$  : são os deslocamentos no topo, no fuste e na base da estaca. As funções  $f_i$  são dadas por:

$$f_1 = K_f \left( \frac{1}{4} \eta - \frac{3}{8} \eta^4 + \frac{3}{4} \eta^3 - \frac{1}{2} \eta^2 \right) \quad (6.20a)$$

$$f_2 = K_f \left( \frac{3}{4} \eta^4 - \eta^3 \right) \quad (6.20b)$$

$$f_3 = K_f \left( \frac{3}{4} \eta - \frac{3}{8} \eta^4 + \frac{1}{4} \eta^3 \right) \quad (6.20c)$$

$$f_4 = K_b \eta \quad (6.20d)$$

$$K_f = \frac{2L^2}{E_p R_b} \quad (6.20e)$$

$$K_b = \frac{L}{E_p} \quad (6.20f)$$

$\eta$  assume os valores 0, 1/3, 2/3, 1 quando o ponto fonte estiver sobre os 3 nós do fuste e sobre o nó da base, respectivamente.

Ao incorporar-se o sistema dado em (6.20) ao sistema (6.12), tem-se um novo sistema algébrico, isto é:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ u_{mi} \\ \vdots \\ u_p \\ u_p \\ u_p \\ u_p \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{mi} & \cdots & b_{mp} & b_{m,p1} & b_{m,p2} & b_{m,p3} & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ b_{qi} & \bar{\alpha}_1 & b_{q,p1} & b_{q,p2} & b_{q,p3} & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{ri} & b_{rp} & \bar{\alpha}_2 & b_{r,p2} & b_{r,p3} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{si} & \cdots & b_{sp} & b_{s,p1} & \bar{\alpha}_3 & b_{s,p3} & \cdots \\ b_{ti} & b_{tp} & b_{t,p1} & b_{t,p2} & \bar{\alpha}_4 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ p_{mi} \\ \vdots \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \sigma \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

Onde:

$$\bar{\alpha}_1 = b_{q,p} - f_1 \quad (6.21a)$$

$$\bar{\alpha}_2 = b_{r,p1} - f_2 \quad (6.21b)$$

$$\bar{\alpha}_3 = \mathbf{b}_{s,p2} - \mathbf{f}_3 \quad (6.21c)$$

$$\bar{\alpha}_4 = \mathbf{b}_{t,p3} - \mathbf{f}_4 \quad (6.21d)$$

Convém ressaltar que a diferença existente entre o sistema (6.13) e o (6.21) está em alguns termos da matriz  $\tilde{\mathbf{L}}$ , que foram afetados pela flexibilidade axial da estaca. Já os vetores  $\tilde{\mathbf{U}}$  e  $\tilde{\mathbf{T}}$  permanecem inalterados, de forma que todos os passos aplicados da equação (6.13) até a (6.18) para a estaca rígida podem ser repetidos, a partir da equação (6.21), para as estacas flexíveis.

#### 6.4) Integração numérica

Quando o ponto fonte  $p$  está no interior e o de campo  $s$  pertence à superfície, mostrado na figura 6.2, pode-se utilizar do procedimento de transformar as integrais no domínio do elemento de contorno em integrais ao longo de seu contorno, analogamente ao que foi mostrado no capítulo anterior, só que a solução utilizada em (5.28) é a de Mindlin. A integração sobre um elemento de contorno  $i$  é apresentada a seguir, e foi extraída de PAIVA(1993).

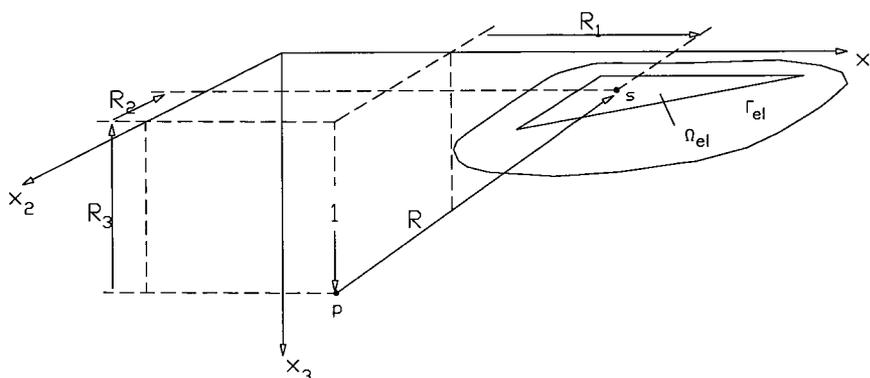


Figura 6.2- Integração na célula com o ponto fonte no interior do semi-espaço.

$$h_i = \int_{\Gamma_{el}} \left\{ \frac{1}{R} (A_i x_1 + B_i x_2) [\alpha f_1 - \beta f_2] + \right. \\ \left. + D_i [\alpha f_3 - \beta x_3^2 f_4] \right\} \frac{\hat{n} \hat{r}}{R} d\Gamma_{cel} \quad (6.22)$$

Onde:

$$F_3 = \ln \left( \frac{r + \sqrt{r^2 + x_3^2}}{x_3} \right) \quad (6.23)$$

$$F_1 = \frac{1}{2} \left( r \sqrt{r^2 + x_3^2} - x_3^2 F_3 \right) \quad (6.24)$$

$$F_2 = - \frac{r}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \quad (6.25)$$

$$F_{31} = \sqrt{r^2 + x_3^2} - x_3 \quad (6.26)$$

$$F_4 = - \frac{1}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} + \frac{1}{x_3} \quad (6.27)$$

$$\alpha = \frac{1 - \nu_s}{\pi E_s} \quad (6.28)$$

$$\beta = \frac{1 + \nu_s}{2\pi E_s} \quad (6.29)$$

Quando os pontos fonte e campo estão na superfície do semi-espaço, a solução utilizada é a de Boussinesq, portanto, recaindo-se no cálculo das integrais numéricas discutidas no capítulo anterior.

## **CAPÍTULO 7**

### **COMBINAÇÃO ENTRE O MEC E O MEF**

#### **7.1) Introdução**

No capítulo 3 é apresentado o sistema algébrico obtido a partir do método dos elementos finitos (MEC) modelando a placa. Já no capítulos 5 e 6 são apresentados os sistemas algébricos oriundos do método dos elementos de contorno modelando a superfície do semi-espaco e as estacas nele imersas. Neste capítulo é apresentada a combinação entre os sistemas algébricos oriundos MEF e do MEC, de modo que as variáveis dos problemas da interação placa-solo e placa-estaca-solo sejam determinadas.

A combinação entre as duas técnicas numéricas podem ser obtidas de algumas maneiras, dentre elas, podem-se citar:

a) Tratar a região discretizada em elementos de contorno como elemento finito equivalente. Esta técnica consiste em montar uma matriz de rigidez equivalente advinda da região discretizada em MEC.

b) Tratar a região discretizada em elementos finitos como elemento de contorno equivalente.

Como um dos objetivos deste trabalho é a influência do solo na matriz de rigidez da estrutura, a primeira técnica é a que será implementada na formulação.

#### **7.2) Sistema Placa -Solo**

Seja  $\Omega_1$  a superfície de uma placa discretizada em elementos finitos e  $\Omega_2$  outra superfície do solo discretizada em elementos de contorno mostradas na figura 7.1.

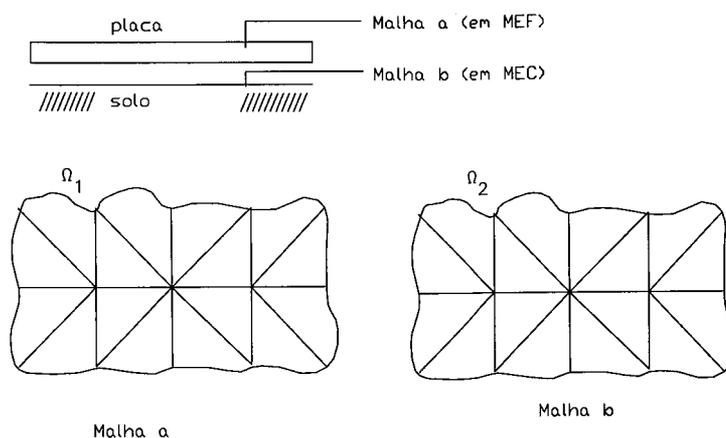


Figura 7.1 - Regiões discretizadas em MEC e MEF

As forças presentes no sistema placa-solo são mostradas na figura 7.2.

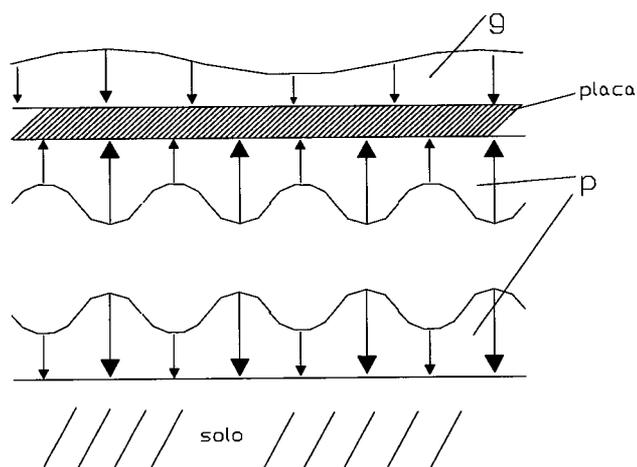


Figura 7.2- Forças presentes na interação placa-solo.

O funcional da placa, com a contribuição do carregamento transversal externo e da reação do solo, pode ser escrito como:

$$\pi = \pi_p - \int_{\Omega} g(x, y)w(x, y)d\Omega + \int_{\Omega} p(x, y)w(x, y)d\Omega \quad (7.1)$$

Ou

$$\pi = \pi_p - \sum_1^{nel} \int_{\Omega_{el}} g(x, y) w(x, y) d\Omega_{el} + \sum_1^{nel} \int_{\Omega_{el}} p(x, y) w(x, y) d\Omega_{el} \quad (7.2)$$

Onde:

$nel$ : é o numero de elementos de contorno.

$\Omega_{el}$ : é o domínio de um elemento de contorno.

Convém ressaltar que tanto para a placa quanto para a superfície do solo, utiliza-se a mesma discretização, de maneira que os elementos finitos e os elementos de contorno são idênticos em número e na geometria.

Computando a contribuição de um elemento finito, pode-se escrever (7.2), matricialmente, como:

$$\pi_1 = \frac{1}{2} \underset{\sim}{U}_c^T \underset{\sim}{K}_c \underset{\sim}{U}_c - \underset{\sim}{U}_c^T \underset{\sim}{F}_c + \bar{\underset{\sim}{U}}_c^T \underset{\sim}{Q} \bar{\underset{\sim}{P}}_c \quad (7.3)$$

Onde:

$\underset{\sim}{U}_c$ : é o vetor dos deslocamentos de um elemento finito contendo tanto os provenientes de rotação, quanto os de translação .

$\underset{\sim}{K}_c$ : é a matriz de rigidez de placa referida a um elemento finito

$\underset{\sim}{F}_c$ : é o vetor das forças nodais equivalentes em um elemento finito proveniente do carregamento transversal externo.

$\bar{\underset{\sim}{U}}_c$ : é o vetor dos deslocamentos de um elemento de contorno contendo apenas deslocamentos de translação.

$\bar{\underline{P}}_c$  : é o vetor das forças de superfície da interface placa-solo de um elemento de contorno.

$\underline{Q}$  : é a matriz de transformação dada por (3.98)

Devido à ausência dos deslocamentos de rotação em  $\bar{\underline{U}}_c$  e a inexistência qualquer força associada à rotação em  $\bar{\underline{P}}_c$ , fazem com que esses vetores tenham ordem menor que  $\underline{U}_c$  e  $\underline{F}_c$ . Com a finalidade de compatibilizar a ordem dos vetores  $\bar{\underline{U}}_c$  e  $\bar{\underline{P}}_c$  com  $\underline{U}_c$  e  $\underline{F}_c$ , respectivamente, inserem-se zeros na matriz  $\underline{Q}$ , que passa a ser denominada  $\bar{\underline{Q}}$  e podendo ser escrita como:

$$\bar{\underline{Q}} = \frac{A}{12} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Com isso, pode-se escrever  $\bar{\underline{U}}_c$  como um vetor igual a  $\underline{U}_c$ , e  $\bar{\underline{P}}_c$  como  $\underline{P}_c$ , isto é:

$$\underline{\underline{U}}_c^T = \{ \underline{W}_i \quad \phi_{x1i} \quad \phi_{x2i} \quad \underline{W}_j \quad \phi_{x1j} \quad \phi_{x2j} \quad \underline{W}_k \quad \phi_{x1k} \quad \phi_{x2k} \} \quad (7.5)$$

$$\underline{\underline{P}}_c^T = \{ p_i \quad 0 \quad 0 \quad p_j \quad 0 \quad 0 \quad p_k \quad 0 \quad 0 \} \quad (7.6)$$

Após as expansões, acima mencionadas, pode-se escrever (7.3) como:

$$\pi_1 = \frac{1}{2} \underline{\underline{U}}_c^T \underline{\underline{K}}_c \underline{\underline{U}}_c - \underline{\underline{U}}_c^T \underline{\underline{F}}_c + \underline{\underline{U}}_c^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{P}}_c \quad (7.7)$$

Fazendo-se a somatória da contribuição de todas as células, seguida da minimização do funcional de energia, obtém-se:

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{P}} \quad (7.8)$$

Onde:

$\underline{\underline{U}}$ : é o vetor dos deslocamentos composto por todos os nós dos elementos finitos.

$\underline{\underline{F}}$ : é o vetor das cargas nodais equivalentes oriundo do carregamento externo e composto por todos os nós dos elementos finitos.

$\underline{\underline{P}}$ : é o vetor expandido das forças de superfície devido à reação do solo e composto por todos os nós dos elementos de contorno

$\underline{\underline{K}}$ : é a matriz de rigidez global da placa.

$\underline{\underline{Q}}$ : é a matriz de transformação expandida relativa à contribuição de todos os elementos de contorno.

A representação algébrica do método dos elementos de contorno para o semi-espaço infinito, desprezando-se as forças de volume e a partir de (5.8), pode ser apresentada como:

$$\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{U}}_s = \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{P}}_s \quad (7.9)$$

Onde:

$\bar{\mathbf{U}}_s$ ,  $\bar{\mathbf{P}}_s$  são os vetores de deslocamento de translação e forças de superfície, respectivamente, que recebem contribuições de todos os elementos de contorno, enfatizando-se que  $\bar{\mathbf{P}}_s$  tem ordem três vezes menor que o vetor expandido  $\mathbf{P}$ .

O sistema algébrico (7.9) pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbf{P}}_s = \bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{U}}_s \quad (7.10)$$

Onde:

$$\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{G}}^{-1}\bar{\mathbf{H}} \quad (7.11)$$

A matriz  $\bar{\mathbf{H}}$  é igual a matriz identidade, já que a superfície é suposta livre de forças de superfície, portanto, (7.11) pode ainda ser escrita como:

$$\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{G}}^{-1} \quad (7.12)$$

Adicionando-se linhas e colunas de zeros em  $\bar{\mathbf{G}}^{-1}$ ,  $\bar{\mathbf{U}}_s$  pode ser escrito como  $\mathbf{U}$ . Com isso, a partir de (7.10) e (7.12), obtém-se:

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{G}^{-1} \underset{\sim}{U} \quad (7.13)$$

Onde:

$\underset{\sim}{G}^{-1}$  : é a matriz  $\overline{\underset{\sim}{G}}^{-1}$  após a expansão.

Substituindo-se (7.13) em (7.8), obtém-se:

$$\underset{\sim}{K} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{F} - \overline{\underset{\sim}{Q}} \underset{\sim}{G}^{-1} \underset{\sim}{U} \quad (7.14)$$

Reagrupando-se a representação algébrica (7.14), tem-se que:

$$\underset{\sim}{K}_2 \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{F} \quad (7.15)$$

Com:

$$\underset{\sim}{K}_2 = \underset{\sim}{K} + \overline{\underset{\sim}{Q}} \underset{\sim}{G}^{-1} \quad (7.16)$$

Onde:

$\underset{\sim}{K}_2$  : é a matriz de rigidez do sistema placa-solo após combinação do

MEC com o MEF.

### 7.3) Sistema placa-estaca-solo

No sistema placa-estaca-solo pode ser adotado o mesmo procedimento de combinação utilizado no sistema placa-solo, diferenciando-se apenas nos valores dos elementos da matriz de transformação. Quando uma estaca está presente na célula algumas regiões da mesma deixa de desenvolver forças de superfície.

Supondo que a estaca esteja locada no nó 1 da célula  $j$ , uma alternativa consiste em eliminar os elementos da matriz que contribuem com o nó 1. O setor de círculo do topo da estaca que está em contato com a célula  $j$ , mostrado na figura 7.3, contribui na matriz de transformação na diagonal principal na posição do elemento  $Q_{11}$  da matriz  $Q$ .

Com isso, a matriz de transformação, quando há presença de estaca na célula, pode ser escrita como:

$$Q = \frac{A}{2} \begin{pmatrix} 6\phi \frac{R_b^2}{A} & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

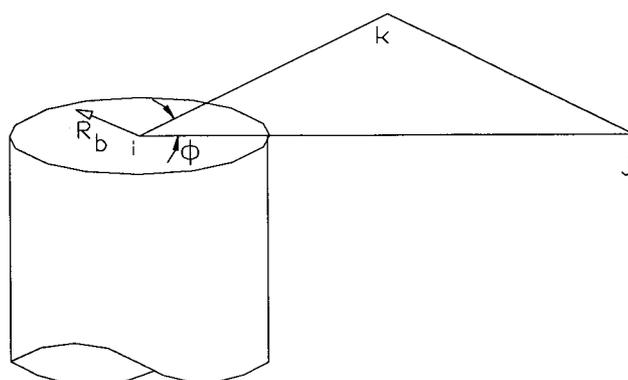


Figura 7.3- Nó com presença de estaca.

Onde:

A: Área do elemento de contorno

$R_p$ : Raio da estaca

$\phi$ : Ângulo central do setor de círculo

Quando há ausência de estaca na célula, a matriz de transformação tem a mesma forma apresentada no capítulo 3 pela equação (3.99).

## CAPÍTULO 8

### EXEMPLOS NUMÉRICOS

#### 8.1) Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados da simulação numérica da formulação proposta, e seu desempenho é comparado com outras formulações quando disponíveis na literatura pesquisada. A seqüência de apresentação dos resultados segue a mesma da exposição dos fundamentos desta formulação, isto é: Interação placa-solo, interação estaca-solo e interação placa-estaca-solo.

#### 8.2) Interação placa-solo

Neste problema admite-se uma placa apoiada sobre o meio semi-infinito elástico linear, contínuo, homogêneo e isótropo. A simulação numérica desta formulação para o problema placa-solo envolve dois tipos de geometria de placa: quadrada e circular.

##### 8.2.1) Placa quadrada

A placa quadrada, cujos lados medem 12m e com espessura de 0.1 m, está apoiada sobre o solo, que possui módulo de elasticidade  $E_s=0,26 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$  e módulo de Poisson  $\nu_s=0,3$ . Um fator de rigidez relativa entre a placa e o solo é apresentado em CHEUNG & ZIENKIEWICZ(1965), a saber:

$$X = 180\pi \left( \frac{E_s}{E_p} \right) \left( \frac{a}{t} \right)^3 \quad (8.1)$$

Onde  $a = \left(\frac{L}{6}\right)$ , sendo  $L$  o lado da placa.

A placa quadrada foi analisada assumindo três valores para o fator de rigidez relativa  $X$ , de forma que placas com diferentes rigidezes podem ser representadas. Os valores  $\text{Log } X = 1.8561$ ,  $\text{Log } X = 1.08$  e  $\text{Log } X = 0.0$  correspondem a placa flexível, com rigidez intermediária e rígida, respectivamente. A malha utilizada para discretizar a placa e a superfície do solo contém 128 elementos triangulares, conforme indicado na figura 8.1.

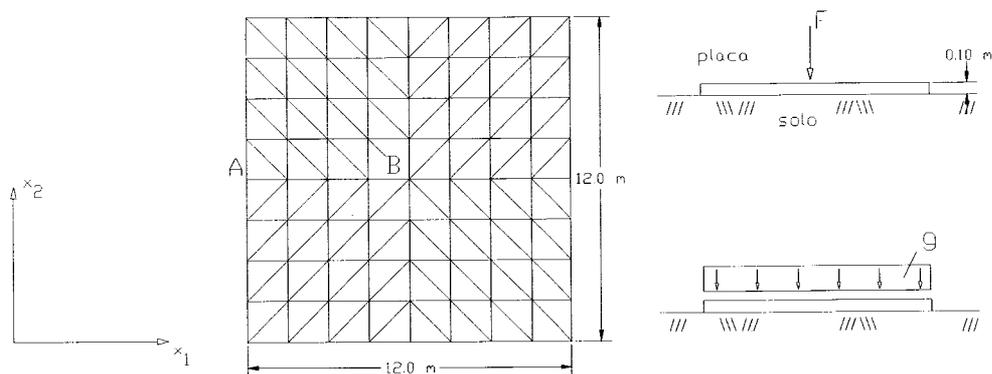


Figura 8.1 - Malha utilizada na modelagem e os tipos de carregamentos analisados.

A primeira análise consiste em uma placa rígida sujeita a um carregamento concentrado no ponto B indicado na 8.1. Na tabela 1 encontram-se os resultados obtidos com a formulação proposta e os de outros pesquisadores. MESSAFER & COATES(1990), que será indicado como M. & C. (1990), estudou este problema através de uma combinação MEF-MEC em que a placa é dividida em 100 elementos finitos quadrangulares com igual número de elementos de contorno modelando o

solo. Enfatizando-se que o elemento finito utilizado foi o ACM(Adini, Clough & Melosh). O trabalho de GORBUNOV-POSSADOV & SEREBRJANYI(1961), que será indicado como G. & S. (1961), apresenta resultados computados analiticamente. PAIVA(1993) modela tanto o solo quanto a placa pelo MEC, sendo que a interface placa-solo é dividida em 128 elementos triangulares e o contorno da placa em 32 elementos de igual comprimento. Pode-se observar que os resultados obtidos com a formulação proposta estão de acordo com as demais indicadas na tabela 8.1.

Ref.	$w \cdot 10^9$ (m)	Reação do solo (N/m <sup>2</sup> )
PAIVA 1993	0,216	0,0045
M. & C. 1990	0,24	0,0038
G.& S. 1961	0,26	0,004
(HSM)-MEC	0,2122	0,00419
(DKT)-MEC	0,2124	0,00423

Tabela 8.1- deslocamento vertical no centro de uma placa rígida apoiada no solo

A seguir são apresentados resultados para uma placa flexível sendo admitido o módulo de elasticidade correspondente a  $\text{Log } X = 1.8561$ . Um carregamento concentrado é aplicado sobre a placa no ponto B indicados na figura 8.1. Nas figuras 8.2 a 8.5 são representados os momentos fletores, deslocamentos e reação do solo desta análise. Os resultados obtidos pela combinação DKT&HSM-MEC apresentam valores menos discrepantes em relação à formulação de Paiva, que modela o conjunto unicamente pelo MEC.

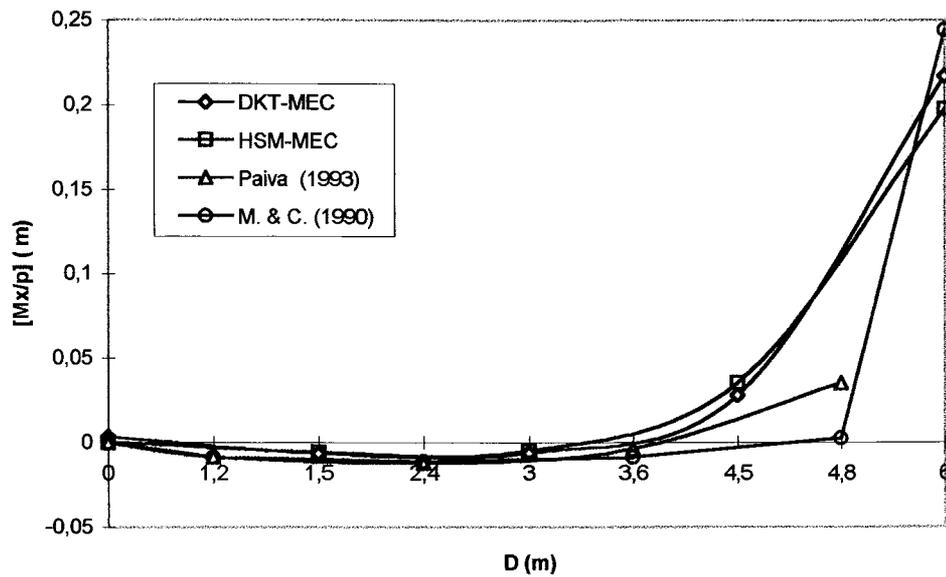


Figura 8.2- Momentos na direção x ao longo de A-B em uma placa flexível sujeita a uma força concentrada em seu centro.

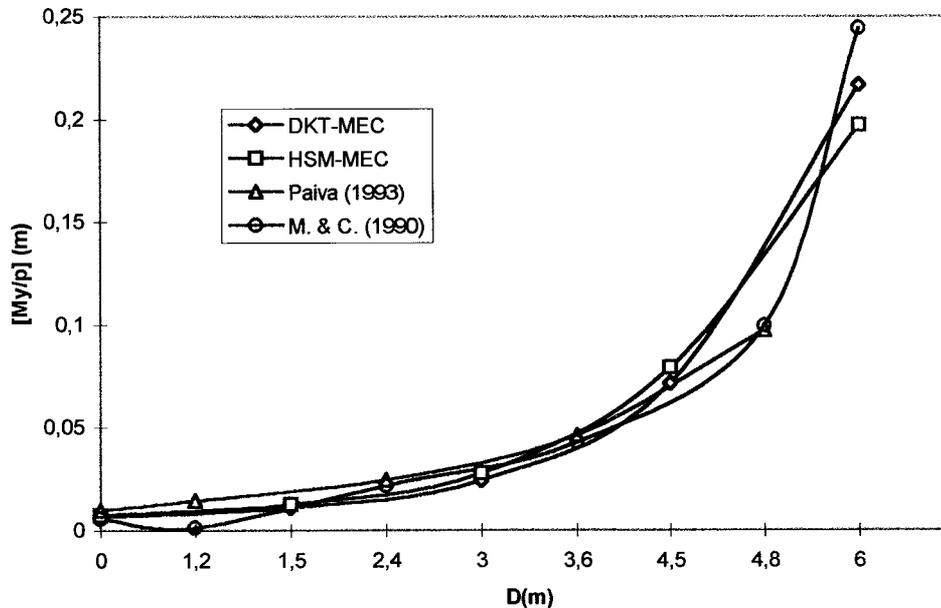


Figura 8.3- Momentos na direção y ao longo de A-B em uma placa flexível sujeita a uma força concentrada em seu centro.

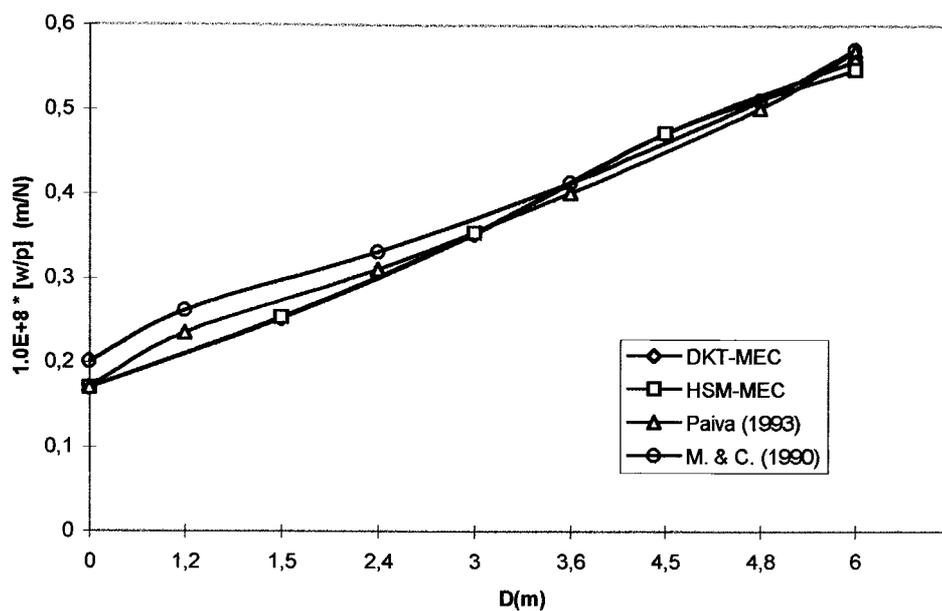


Figura 8.4- Deslocamentos verticais ao longo de A-B em uma placa flexível sujeita a uma força concentrada em seu centro.

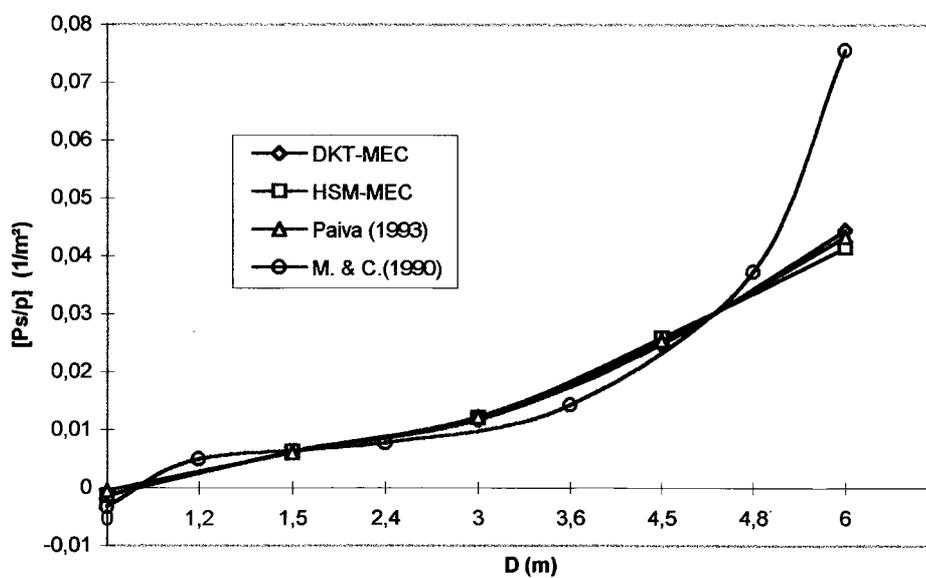


Figura 8.5- Reação do solo ao longo de A-B em uma placa flexível sujeita a uma força concentrada em seu centro.

A terceira análise envolvendo a placa quadrada apoiada sobre o solo simula o problema de um carregamento uniformemente distribuído aplicado sobre uma placa com rigidez intermediária com módulo de elasticidade correspondente a  $\text{Log } X = 1.08$ . As figuras 8.6 a 8.9 ilustram o desempenho obtido por esta formulação representando os momentos fletores, deslocamentos, reação do solo. Não é observado grandes discrepâncias entre os resultados obtidos por esta formulação e as demais aqui apresentadas. Mais uma vez é observado resultados mais concordantes com PAIVA(1993).

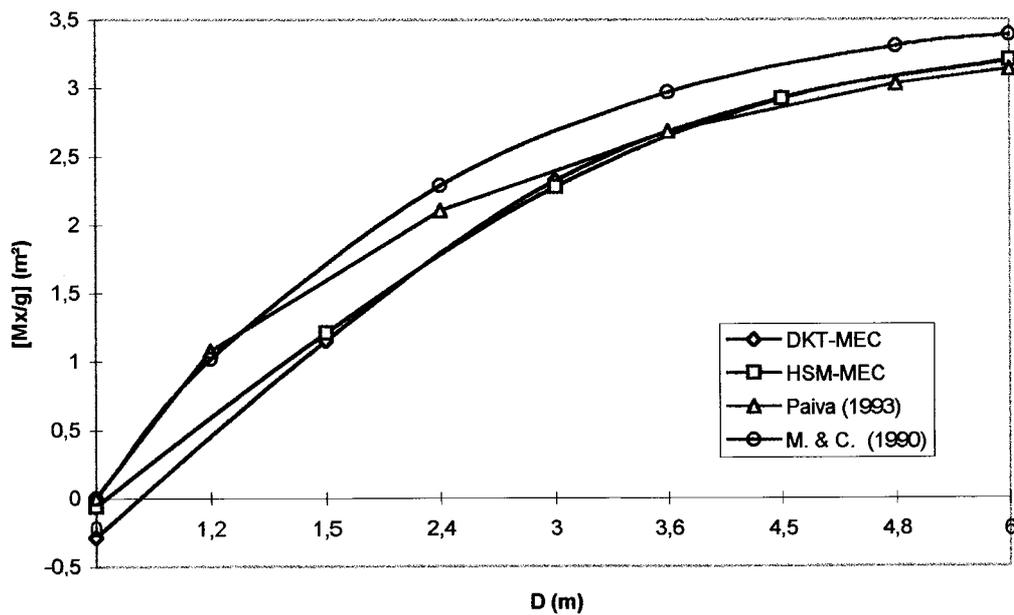


Figura 8.6- Momentos na direção x ao longo de A-B em uma placa com rigidez intermediária sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

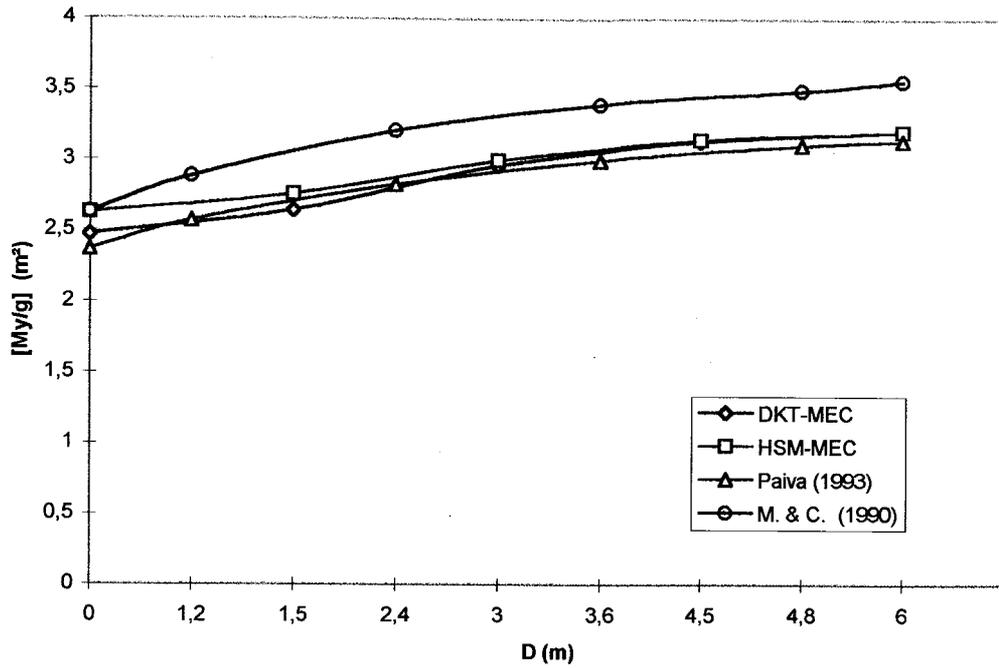


Figura 8.7- Momentos na direção y e ao longo de A-B em uma placa com rigidez intermediária sujeita ao carregamento uniformemente distribuído.

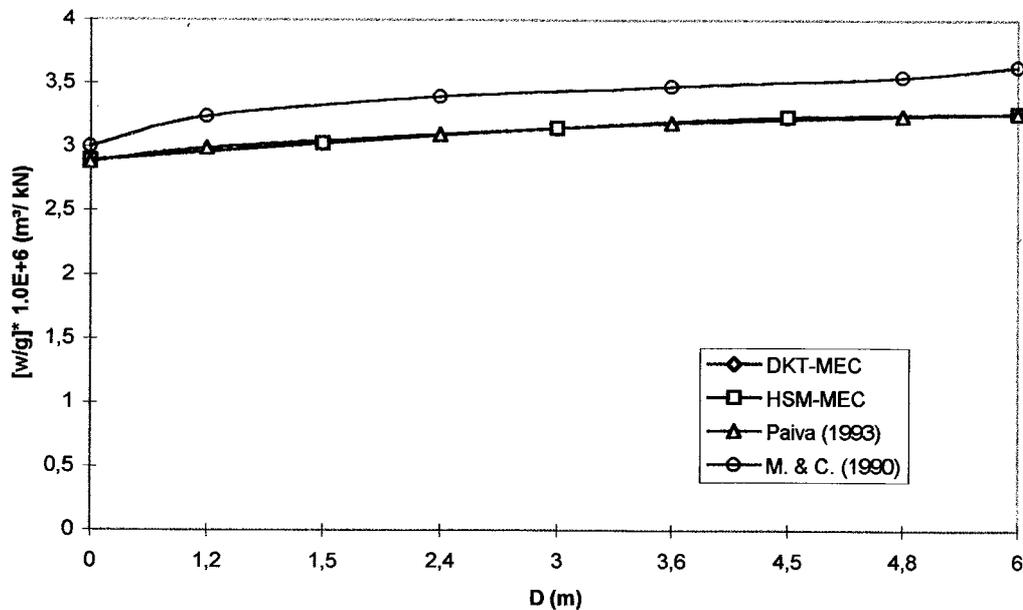


Figura 8.8-Deslocamentos verticais ao longo de A-B em uma placa com rigidez interm. sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

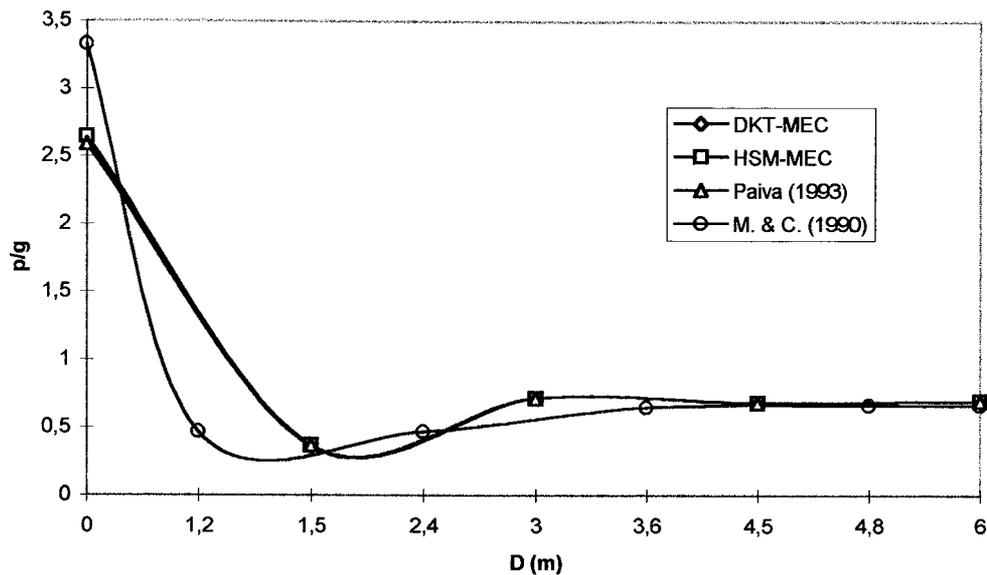


Figura 8.9-Reação do solo ao longo de A-B em uma placa flexível sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

### 8.2.2) Placa circular

Nesta seção é analisada uma placa circular, com raio  $a$  e espessura  $t$ , apoiada no espaço semi-infinito. Um carregamento uniforme, de intensidade  $g$ , é assumido estar distribuído sobre a superfície plena da placa. As propriedades do espaço semi-infinito são descritas pelo módulo de Young  $E_s$  e coeficiente de Poisson  $\nu_s$ . Um fator de rigidez relativa  $K_z$ , entre a placa e o solo, é citado em ZAMAN et al.(1988), a saber:

$$R_p = \frac{\pi}{6(1-\nu_s^2)} K_z = \frac{\pi}{6} \left( \frac{E_p}{E_s} \right) \left( \frac{a}{t} \right)^3 \quad (8.2)$$

Os deslocamentos, na forma adimensional, são apresentados em ZAMAN et al.(1988), como:

$$w^*(\rho) = \frac{E_s}{ga(1 - \nu_s^2)} w(\rho) \quad (8.3)$$

Onde:

$$\rho = \frac{r}{a}$$

$r$  : é uma posição genérica de um ponto situado no intervalo  $0 \leq r \leq a$  .

$w^*$  : é o deslocamento adimensional.

$w$  : é o deslocamento real

A placa é discretizada numa malha com 184 elementos triangulares, figura 8.10, e analisada para diferentes rigidezes. É admitido que o fator de rigidez relativa assume os valores 0.1, 1.0, 10 para placas flexível, com rigidez intermediária e rígida, respectivamente.

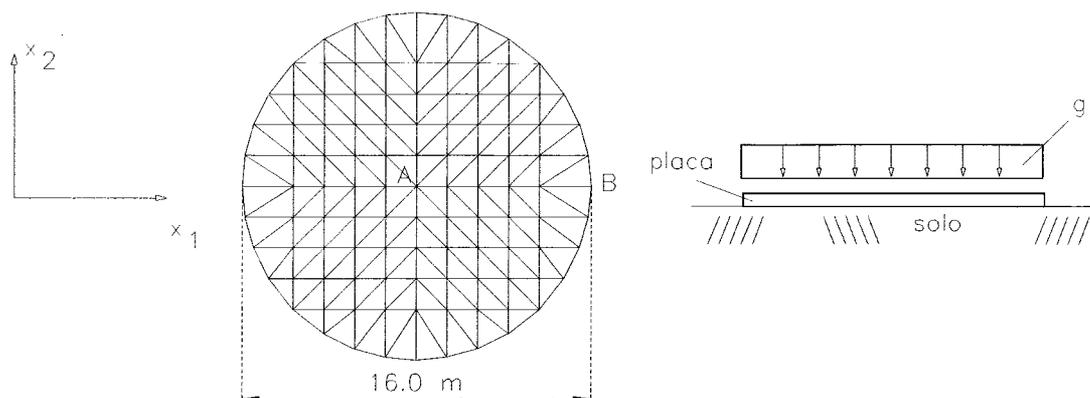


Figura 8.10-Placa circular apoiada sobre o solo: carregamento e malha de elementos finitos e de elementos de contorno adotados.

A placa circular tem 8.0 m de raio e coeficiente de Poisson  $\nu=0.3$  e está submetida a um carregamento uniformemente distribuído. A seguir são apresentados resultados obtidos por esta formulação assim como os obtidos por ZAMAN et al.(1988), que utiliza uma formulação analítica escrevendo os deslocamentos transversais em função de uma série de potência. Na figura 8.11 está indicado o deslocamento vertical do ponto A em função a variação do fator de rigidez relativa. Já na figura 8.12 são mostrados deslocamentos de pontos em função de sua distância do centro da placa. Pode-se observar pouca discrepância entre os resultados analíticos de ZAMAN et al. (1988) e os obtidos por esta formulação.

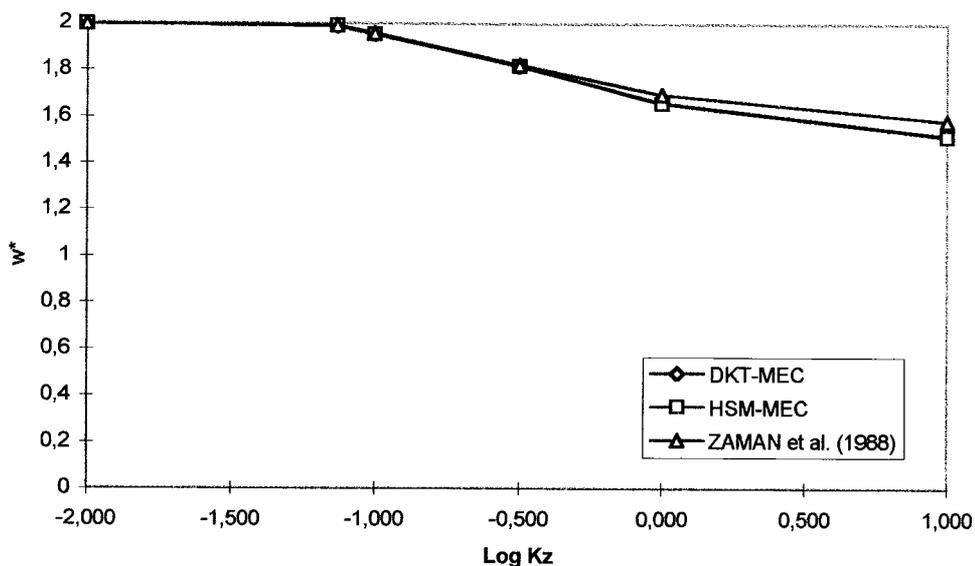


Figura 8.11-Deslocamento do ponto central A da placa circular em função da rigidez da placa.

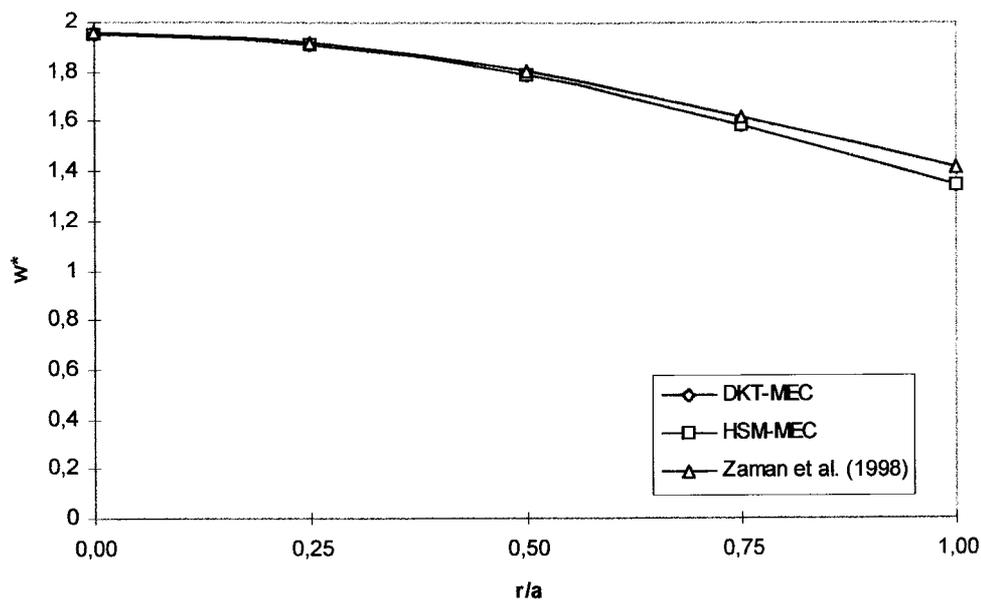


Figura 8.12-Deslocamentos verticais da placa circular ao longo do eixo A-B

### 8.3) Interação entre um grupo de estacas e o solo

A análise estaca-solo consiste em problemas que apenas as estacas estão em contato com o solo. Para simular os casos em que ocorrem tais problemas, é admitido que as estacas, pertencentes a um mesmo grupo de estacas, estão ligadas entre si por um bloco rígido, que por sua vez, não tem contato com a superfície do solo. As figuras 8.13 e 8.15 ilustram a existência de uma altura livre entre bloco rígido e a superfície do solo. Nas figuras 8.14 e 8.16 são indicados os resultados obtidos por esta formulação assim como os obtidos a BUTTERFIELD & BANERJEE(1971a) cuja formulação considera a tensão de cisalhamento ao longo do fuste constante para cada 1 dos 16 elementos de contorno discretizados na estaca. Convém antes da apresentação das figuras, que ilustram o comportamento de 1 e 2

estacas isoladas, definir um fator  $K_p$  que relaciona a carga aplicada sobre as estacas e o deslocamentos de seus respectivos topos, isto é:

$$K_p = \frac{P}{G_s w D} \quad (8.4)$$

Onde:

P: é a carga aplicada sobre a estaca.

D: é o diâmetro da estaca.

$G_s$ : é o módulo de elasticidade transversal do solo.

A relação entre o módulo de elasticidade longitudinal da estaca e o módulo de elasticidade transversal do solo  $\frac{E_p}{G_s}$  é assumida igual a 6000.

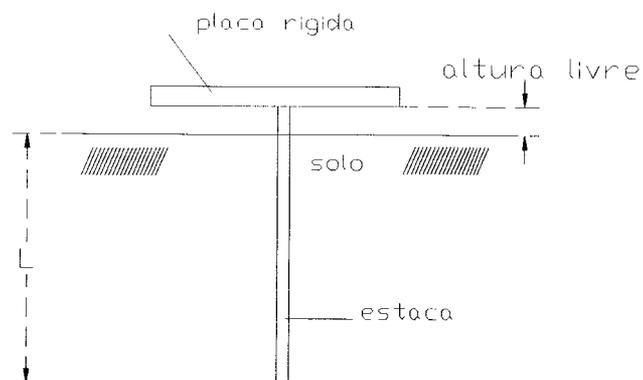


Figura 8.13- Esquema representativo de uma estaca isolada no semi-espaço.

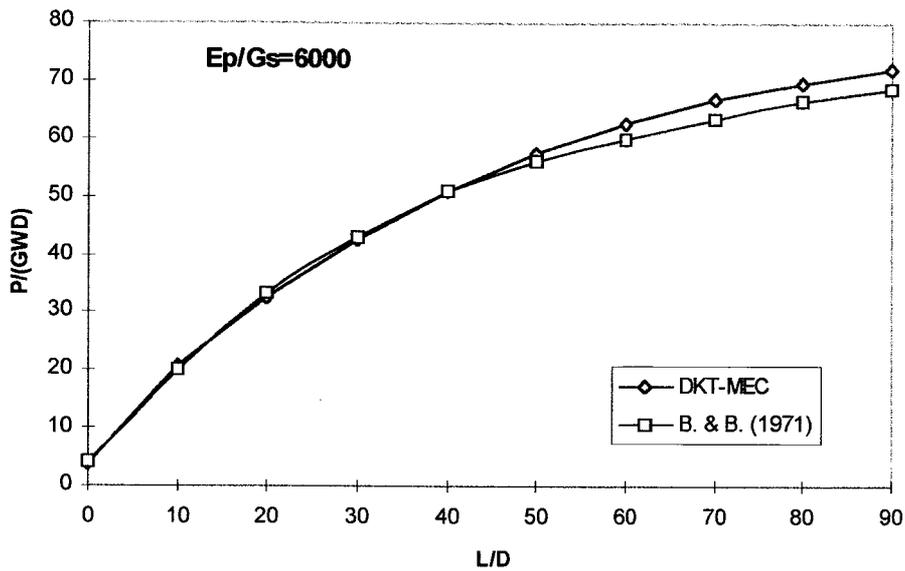


Figura 8.14-Relação carga-deslocamento de uma estaca flexível isolada em função de seu comprimento.

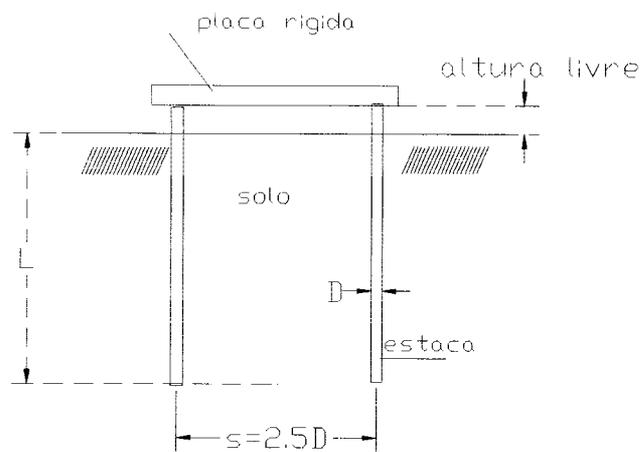


Figura 8.15-Esquema representativa de duas estacas isoladas no semi-espço.

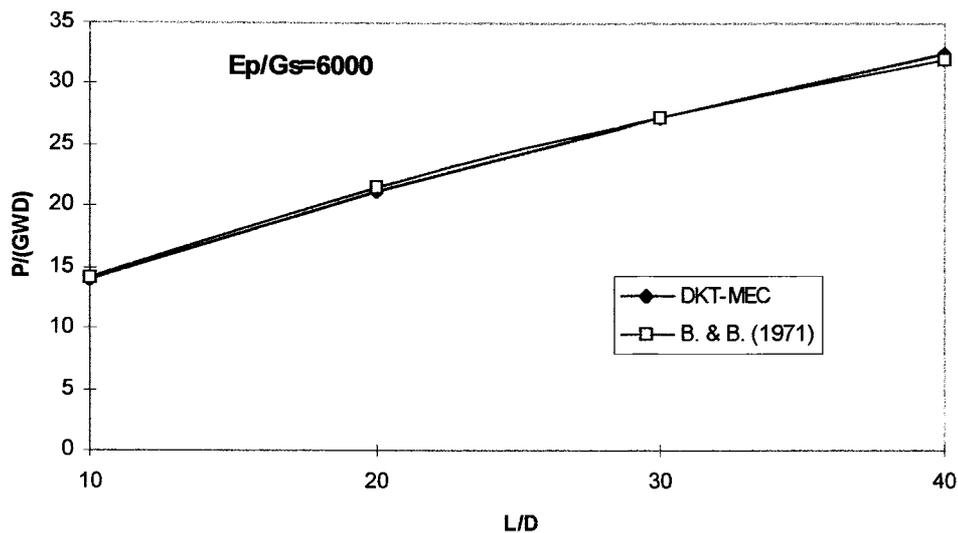


Figura 8.16- relação carga-deslocamento de duas estacas flexíveis isoladas em função de seus comprimentos.

Este mesmo exemplo de duas estacas foi analisado considerando-se o contato entre a placa rígida e o solo. Com isso, o módulo da placa é admitido assumir um valor infinito. Nas figuras 8.17 e 8.18 estão indicadas a malha e a relação carga-deslocamento. Nesta última figura  $K_p$  é dado pela expressão (8.4). Pode-se observar concordância dos resultados da formulação proposta com os fornecidos por BUTTERFIELD & BANERJEE(1971b).

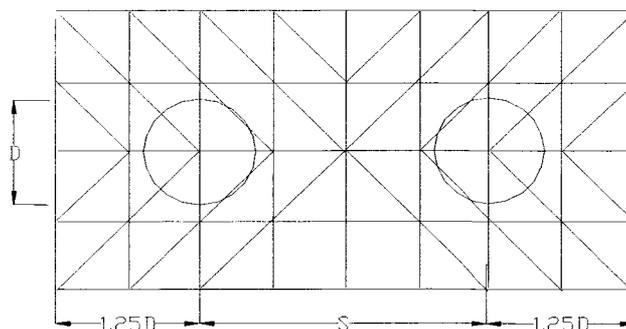


Figura 8.17-Malha utilizada na placa rígida em contato com o solo e apoiada sobre 2 estacas.

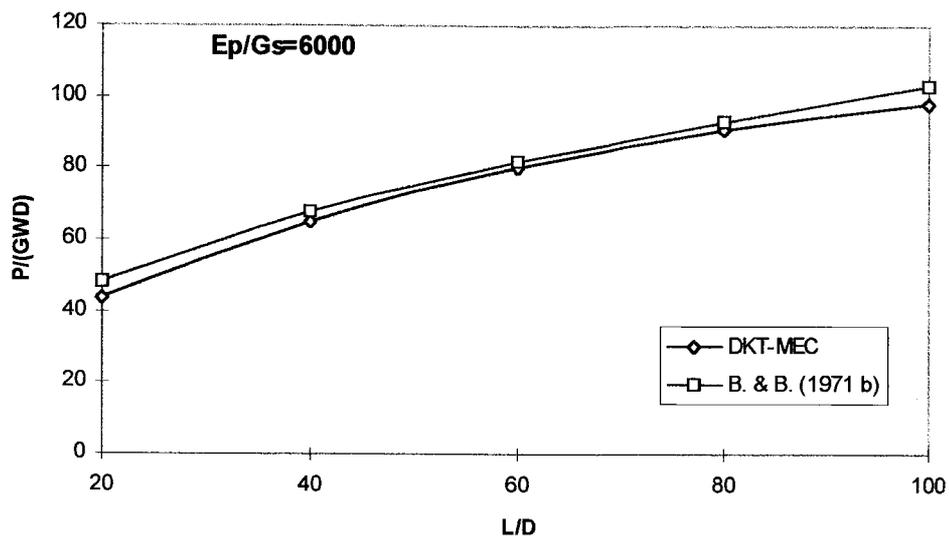


Figura 8.18-Relação carga-deslocamento para um bloco rígido apoiado sobre estacas flexíveis.

#### 8.4) Interação placa-estaca-solo

A análise da interação placa-estaca-solo engloba as demais interações discutidas até aqui. Três tipos de problemas foram analisados: o primeiro considera um dos lados da placa muito maior que o outro. O caso que representa esta situação é uma sapata longa apoiada sobre 4 estacas. O segundo problema envolve placas com lados com mesma ordem de grandeza, sendo o caso analisado de uma placa retangular apoiada sobre 9 estacas. O terceiro tipo envolve a análise de placa circulares com geometria aproximadas por segmentos de reta. O exemplo analisado foi uma placa circular apoiada sobre 4 estacas.

### 8.4.1) sapata longa apoiada sobre 4 estacas

A sapata longa tem dimensões 25X2.5X0.079 m, módulo de elasticidade longitudinal  $E_p=2 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>, coeficiente de Poisson  $\nu_p=0.3$ . O solo tem coeficiente de deformação longitudinal  $E=2 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup> e coeficiente de Poisson  $\nu=0.5$ . A malha utilizada na discretização do problema possui 96 elementos finitos modelando a sapata e outro igual número de elementos de contorno modelando a interface placa-solo e estão ilustrados na figura 8.19. Um carregamento unitário uniformemente distribuído está aplicado em toda superfície da sapata. Nas figuras 8.20 e 8.21 constam os resultados obtidos por esta formulação assim como os contidos em PAIVA (1993) que discretizou a interface sapata-solo em 96 elementos de contorno. Pode-se observar uma boa concordância entre os resultados obtidos.

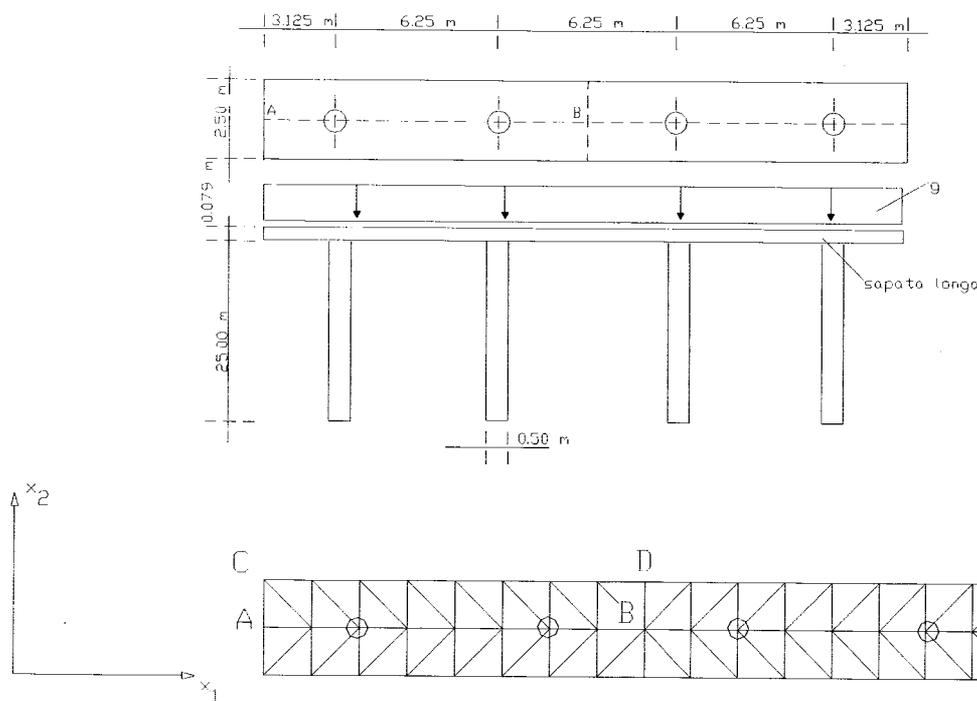


Figura 8.19-Esquema representativo da sapata longa apoiada sobre quatro estacas.

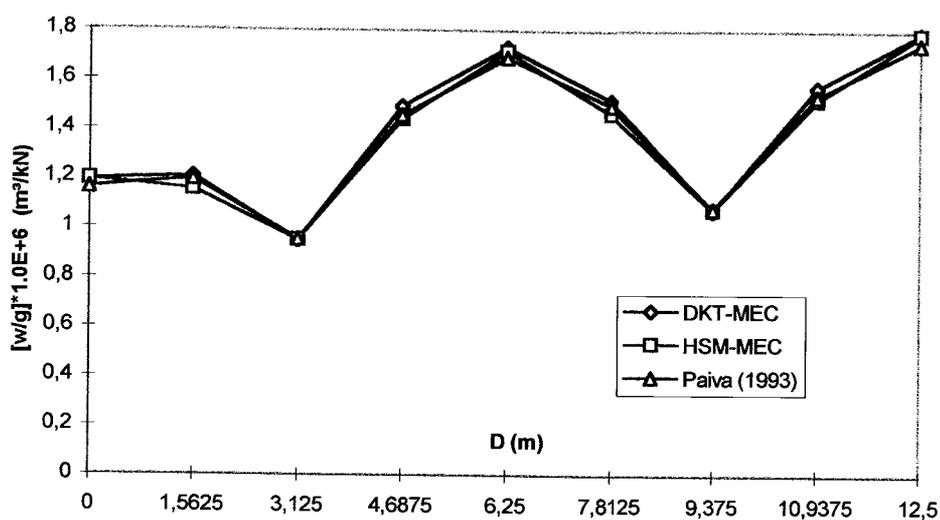


Figura 8.20- Deslocamentos ao longo da linha A-B, em uma sapata longa sobre quatro estacas rígidas.

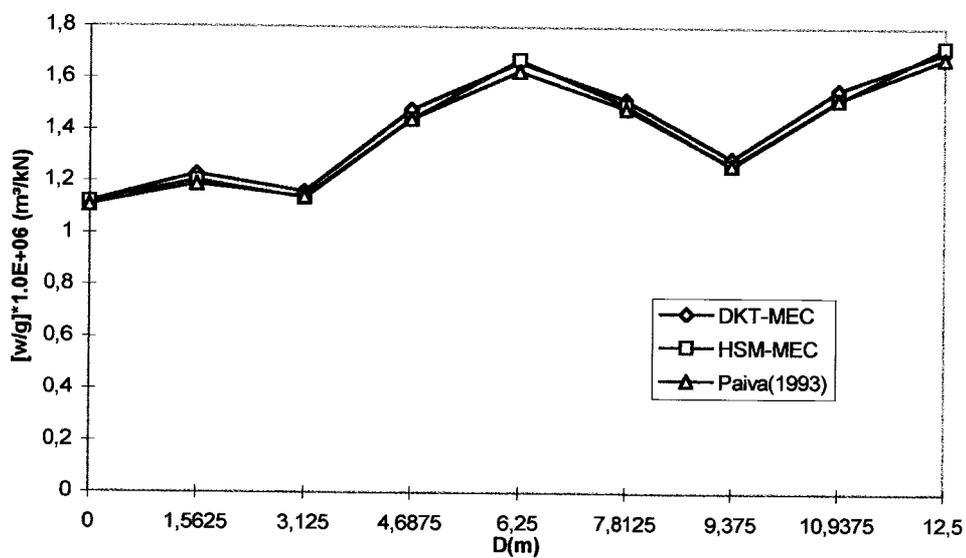


Figura 8.21- Deslocamentos ao longo da linha C-D, em uma sapata longa sobre quatro estacas rígidas.

Nas figuras 8.22 e 8.23 são indicados resultados obtidos considerando-se as estacas flexíveis.

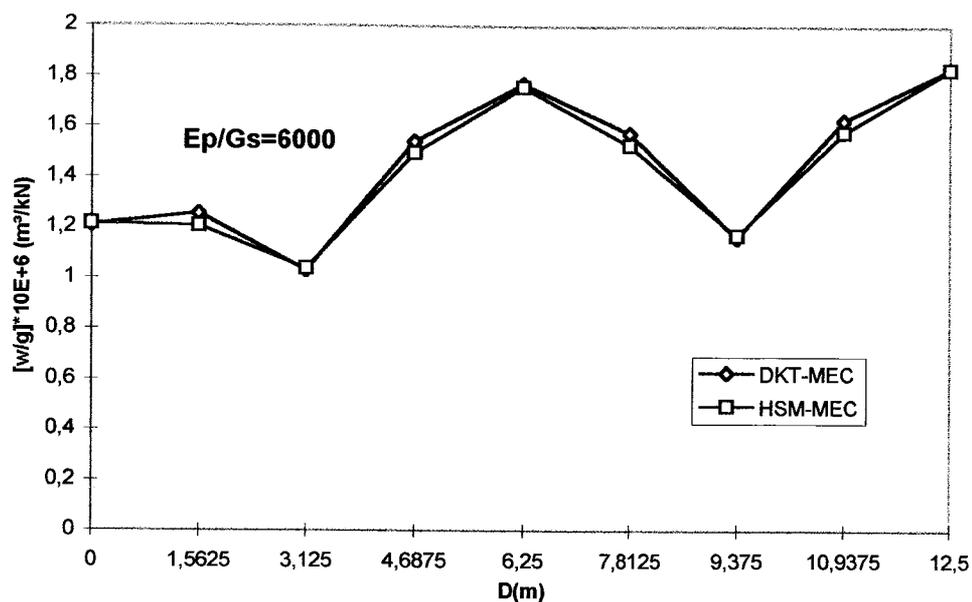


Figura 8.22- Deslocamentos ao longo da linha A-B, em uma sapata longa sobre quatro estacas flexíveis.

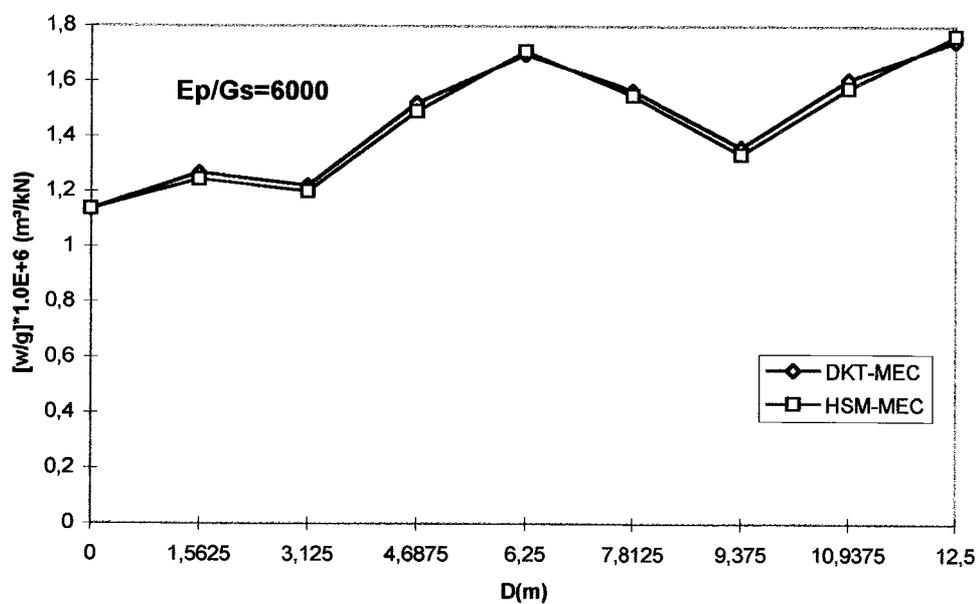


Figura 8.23- Deslocamentos ao longo da linha C-D, em uma sapata longa sobre quatro estacas flexíveis.

#### 8.4.2) Placa retangular apoiada sobre 9 estacas

A placa retangular tem dimensões (30X15 m) e espessura (0.25 m). Suas propriedades consistem de um módulo de elasticidade  $E=2.0 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup> e de um coeficiente de Poisson  $\nu =0.2$ . As propriedades físicas do solo apresenta um módulo de elasticidade  $E_s=2.0 \cdot 10^5$  kN/m<sup>2</sup> e um coeficiente de Poisson  $\nu_s=0.5$ . As 9 estacas possuem comprimentos iguais a 15.0 m e diâmetros iguais a 0.30 m. Quando analisadas como flexíveis, as estacas foram admitidas terem um módulo de elasticidade  $E_p=4.0 \cdot 10^8$  kN/m<sup>2</sup>. A malha utilizada é dividida em 256 elementos finitos triangulares modelando a placa e outro igual número de elementos de contorno triangulares modelando a interface placa-solo mostrada na figura 8.24. Um carregamento  $g=30.0$  kN/ m<sup>2</sup> uniformemente distribuído está aplicado ao longo de toda superfície da placa.

Os resultados da análise estão apresentados nas figuras 8.25 juntamente os valores obtidos em PAIVA(1993), cuja discretização da interface placa-solo contém 256 elementos de contorno triangulares. Pode-se observar um bom comportamento entre os resultados oriundos da formulação proposta e os da formulação encontrada em PAIVA (1993).

Na figura 8.26 são indicados os resultados obtidos considerando-se a flexibilidade axial da estacas.

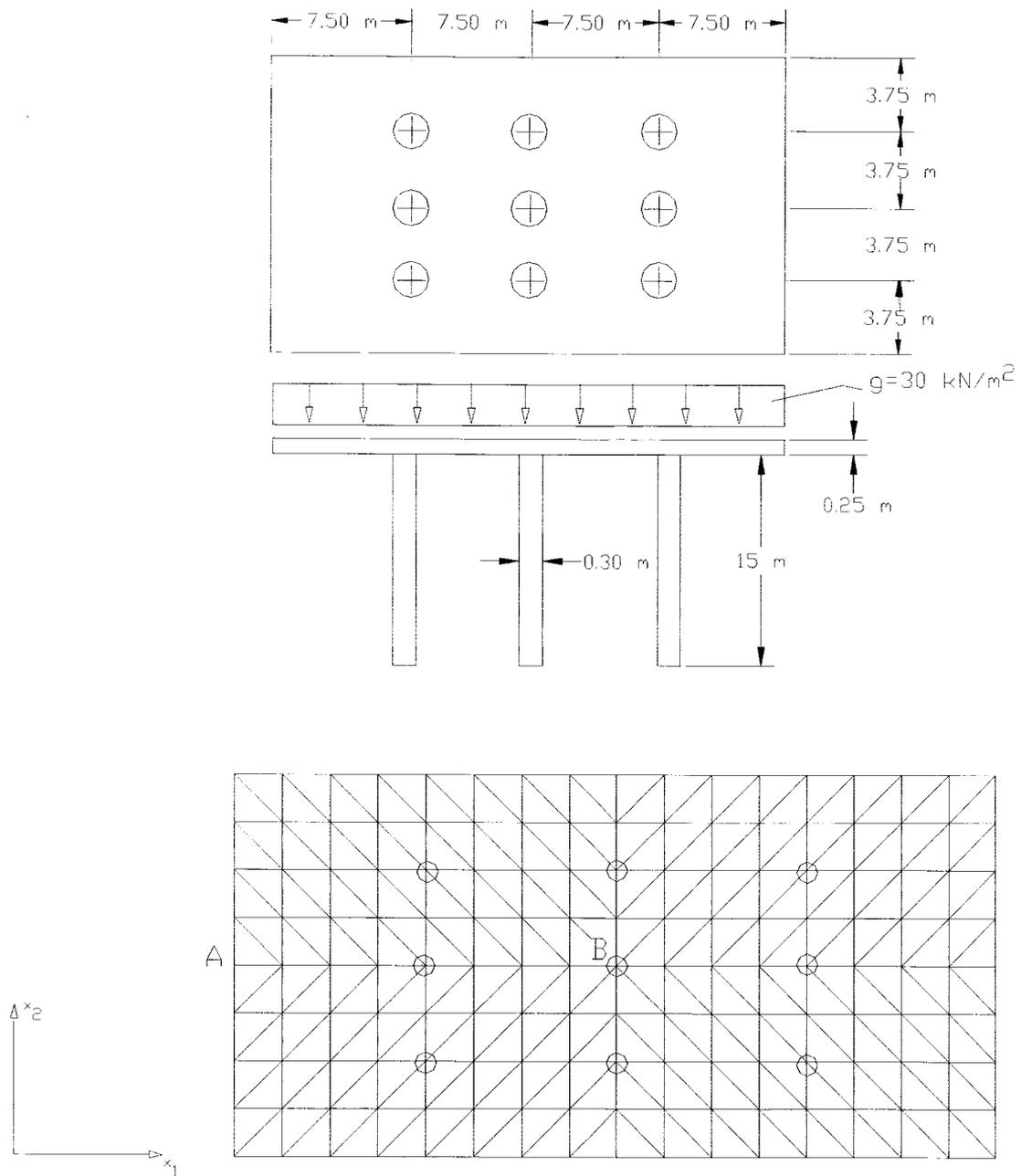


Figura 8.24- Malha de elementos finitos e de contorno utilizada na modelagem da placa apoiada sobre 9 estacas.

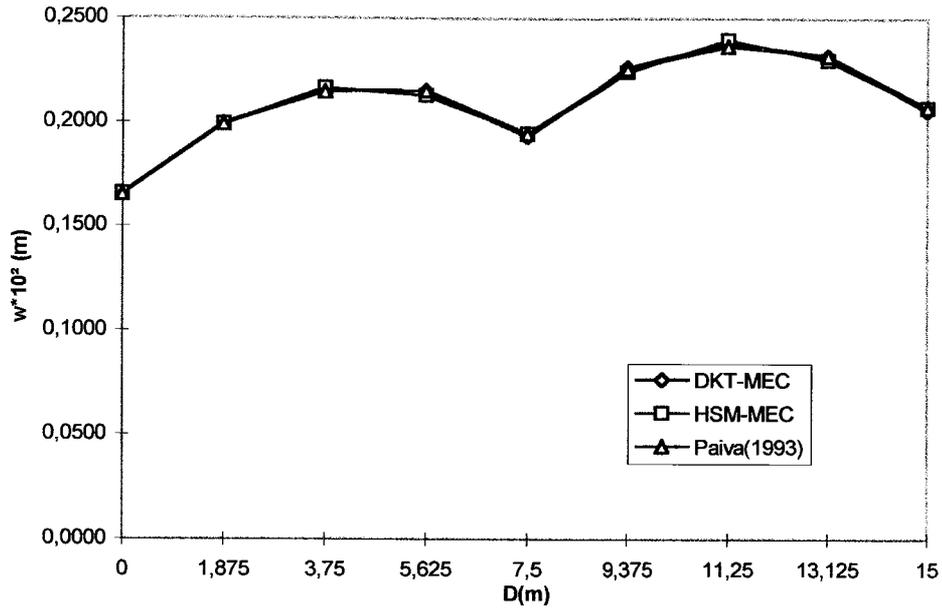


Figura 8.25- Deslocamentos ao longo da linha A-B em uma placa retangular apoiada sobre nove estacas rígidas.

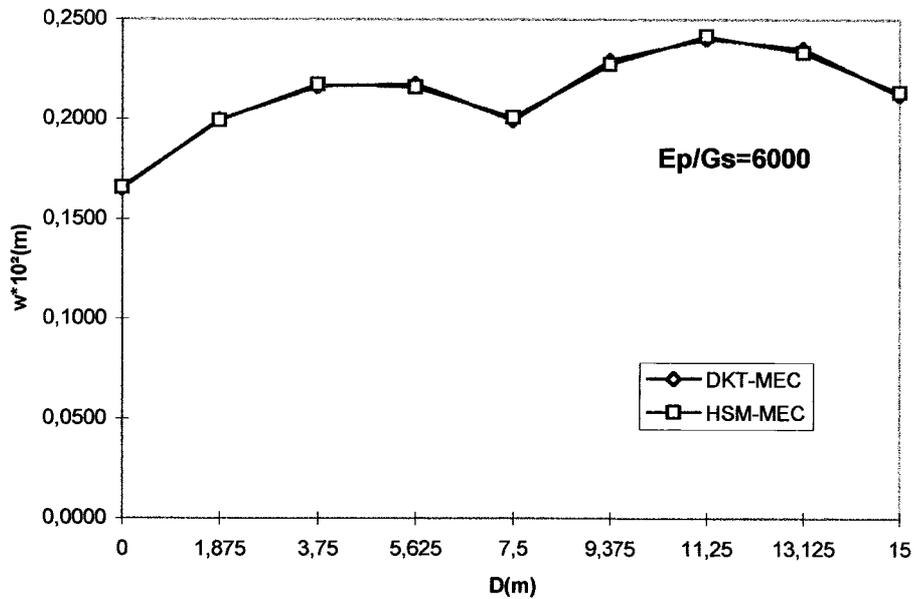


Figura 8.26- Deslocamentos ao longo da linha A-B em uma placa retangular apoiada sobre nove estacas flexíveis.

### 8.4.3) Placa circular apoiada sobre 4 estacas

A placa circular com diâmetro 16.0 m e espessura (0.10 m). Suas propriedades consistem de um módulo de elasticidade  $E=2.0 \cdot 10^{10}$  kN/m<sup>2</sup> e de um coeficiente de Poisson  $\nu=0.2$ . As propriedades físicas do solo apresenta um módulo de elasticidade  $E_s=2.0 \cdot 10^6$  kN/m<sup>2</sup> e um coeficiente de Poisson  $\nu_s=0.5$ . As estacas possuem comprimentos iguais a 15.0 m e diâmetros iguais a 0.30 m. Quando analisadas como flexíveis, as estacas foram admitidas terem um módulo de elasticidade  $E_p=4.0 \cdot 10^9$  kN/m<sup>2</sup>. A malha utilizada possui 184 elementos finitos triangulares modelando a placa e outro igual número de elementos de contorno triangulares modelando a interface placa-solo mostrada na figura 8.27 e 8.28. Os resultados da análise estão indicados na figura 8.29.

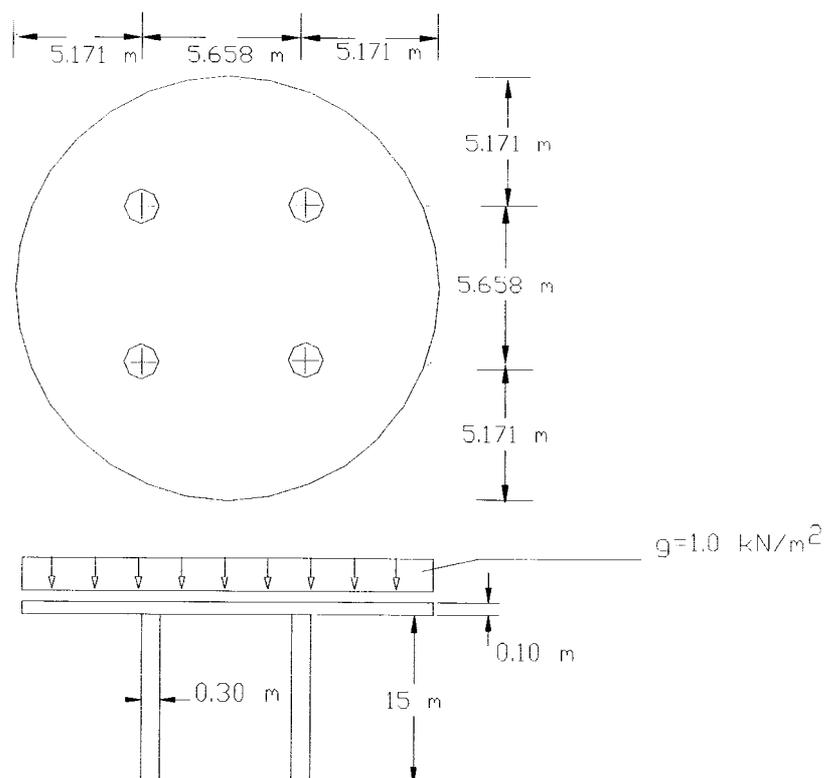


Figura 8.27-Dimensões e esquema representativo da placa circular apoiada sobre 4 estacas.

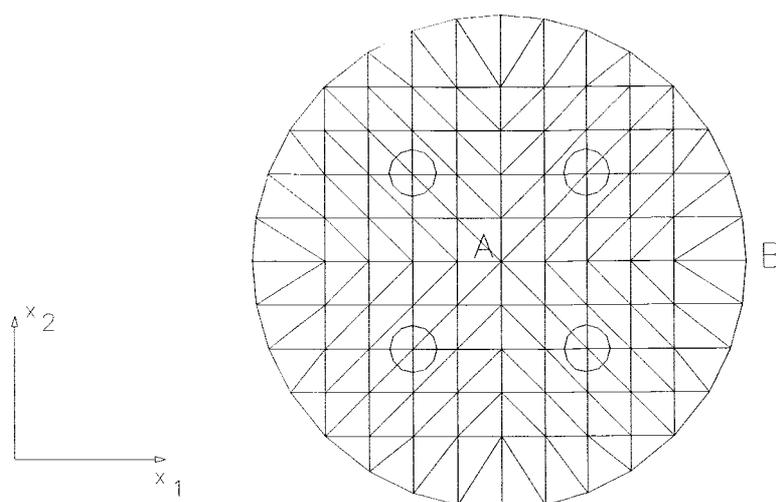


Figura 8.28- Malha de elementos finitos e de contorno utilizada na modelagem placa circular apoiada sobre quatro estacas.

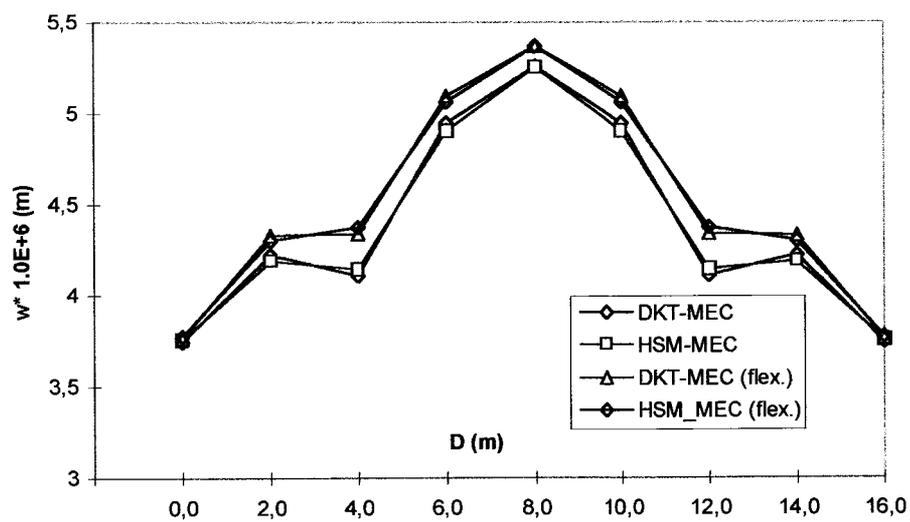


Figura 8.29- Deslocamentos ao longo da linha A-B em uma placa circular apoiada sobre 4 estacas rígidas e flexíveis.

## **CAPÍTULO 9**

### **CONCLUSÕES**

Neste trabalho foi apresentada uma formulação híbrida utilizando o método dos elementos de contorno/método dos elementos finitos para análise da interação placa-estaca-solo. A placa é modelada pelo MEF utilizando os elementos finitos DKT( Discrete Kirchhoff Theory) e HSM( Hybrid Stress Model); e o solo é modelado pelo MEC como um meio elástico semi-infinito. A estaca é representada por apenas um elemento, com 3 pontos nodais definidos ao longo de seu fuste e a tensão de cisalhamento ao longo da estaca é aproximada por um polinômio de segundo grau. A tensão normal à seção transversal da base da estaca é admitida constante e um ponto nodal é definido no centro desta seção. A interface placa-solo é dividida em elementos de contorno triangulares coincidentes com a malha de elementos finitos e admite-se que as tensões de contato desenvolvidas na interface placa-solo variem linearmente no domínio de cada elemento. Estas tensões são eliminadas nos dois sistemas de equações, obtidos com o MEC e o MEF, com o objetivo de escrever um sistema final de equações governantes do problema. Após a resolução deste sistema são obtidos os deslocamentos nos nós , a partir dos quais, as tensões de contato placa-solo e a carga absorvida por cada estaca são determinados. A simulação numérica da formulação envolveu casos representados por grupos de estacas ligadas por uma placa rígida havendo ou não contato da mesma com o solo. Os resultados obtidos pela formulação proposta mostram concordância com resultados obtidas em outras formulações. A simulação numérica da interação placa-solo envolvendo dois tipos de geometria de placa. O primeiro tipo envolve a análise de uma placa quadrada. Os resultados obtidos pela formulação proposta são mais concordante com PAIVA(1993), que analisou o conjunto unicamente pelo MEC. Quanto à a maior dispersão obtida em relação aos resultados encontrados em

Quanto à a maior dispersão obtida em relação aos resultados encontrados em MESSAFER & COATES(1990), que utilizaram uma combinação MEF/MEC pode ser atribuído os resultados menos precisos fornecidos pelo elemento ACM quando comparados ao DKT e HSM. O segundo tipo é uma placa circular. Os resultados obtidos pela formulação proposta são comparados com a respostas fornecidas pela solução analítica desenvolvida em série de potência por ZAMAN et al. (1988). Para o caso da análise do deslocamento do ponto central em função da rigidez da placa a dispersão entre os resultados obtidos pelas duas formulações atingiu 4% para o caso de uma placa muito rígida. Para rigidezes menores da placa a dispersão tendeu a valores menores. A simulação numérica envolvendo o conjunto placa-estaca-solo foi analisada para três casos: sapata longa flexível apoiada apoiada sobre estacas rígidas ou flexíveis. O segundo caso consiste de uma placa flexível retangular apoiada sobre nove estacas rígidas ou flexíveis. O terceiro problema consiste em uma placa circular apoiada sobre quatro estacas rígidas ou flexíveis. Nos dois primeiros casos de interação placa-estaca-solo os resultados obtidos para o caso de estacas rígidas estão concordantes com os mostrados em PAIVA(1993). Os demais casos não foram encontrados na literatura pesquisada. A partir dos resultados obtidos pela formulação proposta, para o caso da interação placa-estaca-solo apoiada em estacas flexíveis, pode-se notar que a flexibilidade axial das estacas tem maior influência nos pontos pertencentes em região próxima ao nó onde está locado a estaca.

Como sugestão para continuidade deste estudo cita-se a incorporação de solos que apresentem perfis não uniformes, assim como incorporar à placa uma superestrutura, por exemplo, um edifício.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BADIE, S. S. ; SALMON, D. C. (1996). *A quadratic order elastic foundation finite element* . Computers & Structures, vol. 58, n. 3, feb .

BATOZ, J. L. ;BATHE, K. J. ; HO, L. W. (1980). *A study of three-node triangular plate bending elements*. Journal for Numerical Methods In Engineering,15.

BOLTON, R. (1972). *Stresses in circular plates on elastic foundations*. Journal Engineering Mechanics Division , june.

BOUSSINESQ, J. (1885). *Applications des potentiels à L'étude de L'équilibre et du Moviment des Solides Elastique*. Gualtier-Villars, Paris.

BROWN P. T. ; WEISNER T. J. (1975). *The behaviour of uniformly loaded piled strip footings*. Soil and Fndns. vol 15, n.4.

BUTTERFIELD R.; BANERJEE P. K. (1971). *The elastic analysis of compressible piles and piles groups*. Geotechnique vol. 21, n.1.

BUTTERFIELD R.; BANERJEE P. K. (1971b). *The problem of pile group-pile cap interaction*. Geotechnique vol. 21, n.2

CALDERÓN, E. T. (1991). *Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno*. São Carlos. Dissertação (mestrado)-Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CHAKRAVORTY, A. K. ; GHOSH, A. (1975). *Finite difference solution for circular plates on elastic foundations*. International Journal for Numerical Methods In Engineering, vol. 9, 1975.

CHEUNG, Y. K. ; NAG , D. K. (1968). *Plates and beams on elastic foundations-linear and non-linear behavior*. Géotechnique, vol.18.

CHEUNG,Y. ; ZIENKIEWICZ, O. C. (1965). *Plates and tanks on elastic foundation-an application of Finite Element Method*. International Journal of Solids Structures, vol.1.

CHILTON, D. S. ; WEKEZER, J. W. (1990). Plates on elastic foundation. Journal of Structural Engineering, vol.16, n.11, nov.

DAVIS, E. H. ; POULOS, H.G. (1972). *The analysis of pile-raft systems*. Aust. Geomechs. Jnl. vol. G2, n.1.

FATEMI-ARDAKANI B. (1989). *A contribution to the analysis of pile-supported raft foundations*. Southampton. Tese (doutorado). Universidade de Southampton.

GORBUNOV-POSSADOV, M ; SEREBRJANYI, R. V. (1961). *Design of structures on elastic foundations*. In: Proc. of the 5th international conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering, vol.1.

HAIN, S.J. & LEE, I.K. (1978). *The analysis of flexible pile-raft systems*. Geotechnique, vol.28, n.1.

HEMSLEY, J. A. (1990a). *Elastic solutions for large matrix problems in foundation interaction analysis*. In: Proc. Instn. Civ. Engrs.

HEMSLEY, J. A. (1990b). *Application of large matrix interaction analysis to raft foundations*. In: Proc. Instn. Civ. Engrs.

KUKRETI, A. R. ; ZAMAN M. M. ; ISSA, A. (1993). *Analysis of fluids storage tanks including foundation-superstructure interaction*.

Applied Math. Modelling, vol.17, dec.

LOVE, A . E. H. (1944). *A tratisse on the Mathematical Theory of Elascity*. New York. Dover.

MANZOLI, O. L. (1992). *Formulação do método dos elementos de contorno para placas sobre fundação elástica*. São Carlos.

Dissertação (mestrado)-Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MESSAFER T.; COATES;L. E. (1990). *An application of FEM/BEM coupling to foundation analysis*. *Advances In Boundary*

*Methods*, Vol. 3.

MINDLIN, R. D. (1936). *Force at a point in the interior of semi-infinite solid*. *Journal Applied Physics*. , 7(5).

PAIVA, J. B. (1993). *Formulação do método dos elementos de contorno para análise da interação solo-estrutura*. São Carlos. Tese (livre-docência). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

POULOS H. G. & MATES, N.S.(1971). *Settlement and load distributions analysis of pile groups*. *Aust. Geomechs. Jnl.*, vol. G1, n.1, 1971

POULOS, H.G. & DAVIS, E.H. (1968). *The settlement simple axially-loaded incompresible piles and piers*. New York. John Wiley & Sons.

POULOS, H.G. & DAVIS, E.H. (1980). *Pile foundation analysis and design*. New York. John Wiley & Sons.

POULOS, H. G. (1994). *An Approximate numerical analysis of plate-raft interaction*. *International Journal for numerical and analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 18.

REDDY, J.N. (1984). *Energy and variational methods in applied Mechanics*. New York. Wiley Interscience.

REZENDE, M.N.; Paiva, J.B. (1994). *A quadrilateral discrete Kirchhoff finite element for building slab analysis*. In: II INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL STRUCTURES TECHNOLOGY. Atenas.

SELVADURAI, A. P. S. (1979). *Elastic analysis of soil-foundation interaction*. Amsterdam. Elsevier Scientific Publishing Company.

SNEDDON, I. N. ; BERRY, D. S. (1958). *The classical theory of elasticity*. Berlin. Handbuch der Physik, vol VI, Elasticity and Plascity. Spring-Verlag

TELLES, J. F.; SÁ, A . C. O . (1986). *Análise de problemas de elasticidade linear tridimensional pelo método dos elementos de contorno utilizando as soluções fundamentais de kelvin e Mindlin*. In: VII CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA. São Carlos.

TIMOSHENKO, S. P. ; GOODIER, J. N. (1970). *Theory of elasticity*. New York. Mcgraw-Hill.

WATSON, G. N. (1944). *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. London. Cambridge University Press.

WINKLER, E. (1867). *Die lehre von der Elastizitat und Festigkeit*. Domicius. Prague.

WUNDERLICH, W. ; PILKEY, W . (1994). *Mechanics of structures: Variational and computational methods*.

YANG, Z. W. ; LU, W. D. (1992). *Static soil-structure interaction analysis by FE-BE coupling method*. Applied math. Modelling, vol.16, july.

YUAN, R. L. ; WANG, L. S. (1991). *Generalized variational principle of plates on elastic foundation*. Journal Of Applied Mechanics, vol.58, dec.

ZAMAN M. M. ; ISSA, A. KUKRETI, A. R.(1988). *Analysis of circular plate-elastic half-space interaction using an energy approach*. Applied Math. Modelling, vol.18, june.