

**“SOBRE O COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO DAS  
ESTRUTURAS: RELAÇÕES CONSTITUTIVAS E  
TÉCNICAS NUMÉRICAS”**

**Ana Rita Cordeiro da Silva**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos, da Universidade de São Paulo,  
como parte dos requisitos para obtenção do Título  
de Mestre em Engenharia de Estruturas.

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença**

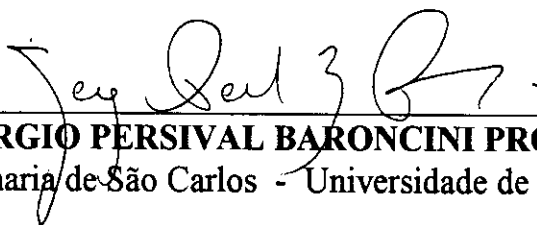
**São Carlos**

**1997**



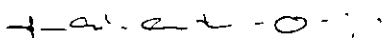
## FOLHA DE APROVAÇÃO

Dissertação defendida e aprovada em 28-5-1997  
pela Comissão Julgadora:



---

Prof. Doutor **SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



---

Prof. Doutor **JOÃO CARLOS ANTUNES DE OLIVEIRA E SOUZA**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



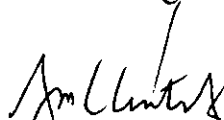
---

Prof. Doutor **ROBERTO CHUST CARVALHO**  
(Universidade Federal de São Carlos - UFSCar)



---

Prof. Associado **MOUNIR KHALIL EL DEBS**  
Coordenador da Área de Engenharia de Estruturas



---

**JOSÉ CARLOS A. CINTRA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

**O conhecimento do que é certo leva ao agir correto.**

**SÓCRATES(470-399 a.C.)**

Dedico este trabalho  
aos meus pais, Sílvio e Ritinha,  
bases do meu saber.

Aos meus irmãos,  
estímulos constantes  
na minha caminhada.

Este trabalho não teria sido realizado sem o apoio e a colaboração de algumas pessoas e entidades, às quais eu desejo agradecer, esperando não cometer injustiças.

Professor Sérgio Persival Baroncini Proença, pela orientação segura e paciente, pelo constante apoio e pela valiosa atenção dispensada.

Engenheiro Jorge Munaiar Neto, pela atenciosa colaboração na implementação do programa de cálculo desenvolvido.

CAPES e CNPQ, pela bolsa de estudos concedida.

Demais professores, colegas e funcionários, que emprestam a esse departamento um ambiente de profissionalismo e companheirismo.

Desejo agradecer também, e não menos, aos meus pais, pela força e sabedoria, presentes divinos; à Dulce, pela amizade verdadeira, presente nas horas difíceis; à Mana, pela compreensão, paciência, apoio e carinho, que muito contribuíram para a realização desta dissertação e, principalmente, a Deus, por tudo.

## SUMÁRIO

Lista de Figuras.....	i
Lista de Tabelas.....	iv
Lista de Símbolos.....	v
Resumo.....	vi
Abstract.....	vii
1 - Introdução.....	01
2 - Comportamento Viscoelástico de Estruturas em Concreto.....	04
2.1 - Características Viscoelásticas dos Materiais.....	05
2.1.1 - Deformações dependentes do tempo.....	06
- Deformações imediatas - cargas de curta duração.....	06
- fluência e retração - cargas de longa duração.....	07
- Componentes de deformação.....	08
2.1.2 - Proposições do CEB e do ACI para o cálculo das deformações.....	11
2.2 - Modelagem do Comportamento Viscoelástico.....	17
- Princípio de Superposição de McHenry.....	18
2.2.1 - Modelagem da Fluência.....	18
2.2.2 - Modelagem da Relaxação.....	25
2.2.3 - Relação entre as funções de Fluência e Relaxação.....	30
2.2.4 - Modelos Simplificados de Fluência.....	31
- Teoria da Hereditariedade.....	33
- Teoria do Envelhecimento.....	34
2.3 - Modelos Reológicos Unidimensionais.....	35
2.3.1 - Modelos Básicos.....	36
2.3.2 - Modelos Combinados.....	39
- Modelos Elastoplásticos.....	39
- Modelos Viscoelásticos.....	42
- Modelos Viscoplasticos.....	46
- Comentários sobre os Modelos Reológicos.....	49

<b>3 - Métodos de Integração do Modelo Constitutivo Viscoelástico.....</b>	<b>50</b>
3.1 - Forma Matricial das Equações Fundamentais da Viscoelasticidade	
Linear.....	50
3.2 - Método da Partição das Matrizes de Relaxação e Fluência.....	53
3.3 - Método dos Núcleos Degenerados.....	55
3.4 - Aplicação do MEF às Estruturas de Barras.....	61
<b>4 - Implementação do Modelo para Análise Unidimensional.....</b>	<b>69</b>
4.1 - Sobre a Resolução Numérica do Problema de Análise Estrutural	
Não - Linear .....	69
4.1.1 - Controle da Convergência.....	70
4.2 - Esquema de Solução para uma Análise Não-Linear no Tempo.....	71
4.2.1 - Algoritmo Malerba.....	72
4.2.2 - Algoritmo para Implementação do Modelo Viscoelástico.....	75
4.3 - Cálculo das Forças Nodais Equivalentes devidas às Deformações	
Viscosas.....	77
<b>5 - Implementação do Algoritmo para o Cálculo Viscoelástico em um</b>	
<b>Programa para Análise de Treliças Planas.....</b>	<b>79</b>
5.1 - Subrotinas do Programa TRELVE.FOR.....	80
5.2 - Fluxograma do Programa TRELVE.FOR.....	82
5.3 - Exemplos Testados no Programa TRELVE.FOR.....	84
<b>6 - Conclusões.....</b>	<b>90</b>
<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>92</b>
<b>Bibliografia.....</b>	<b>93</b>

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1a - CARREGAMENTO CONSTANTE APLICADO EM $t_0$ .....	09
FIGURA 2.1b - RESPOSTA DE DEFORMAÇÃO PARA O CARREGAMENTO APLICADO.....	09
FIGURA 2.1c - CURVA GENÉRICA DE RETRAÇÃO.....	09
FIGURA 2.1d - CURVA RESULTANTE DA ADIÇÃO DE 2.1b E 2.1c.....	09
FIGURA 2.2 - CURVA GENÉRICA DE FLUÊNCIA.....	19
FIGURA 2.3a - HISTÓRIA DE CARREGAMENTO.....	19
FIGURA 2.3b - CURVA DE DEFORMAÇÃO RESULTANTE.....	19
FIGURA 2.4 - CURVAS DE FLUÊNCIA PARA DIFERENTES IDADES DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO.....	21
FIGURA 2.5a - CARREGAMENTO CONSTANTE EM $(t_0, t)$ .....	22
FIGURA 2.5b - RESPOSTA DE DEFORMAÇÃO EM $(t_0, t)$ .....	22
FIGURA 2.6a - CARREGAMENTO VARIÁVEL APLICADO EM $t_0$ E $t_1$ .....	22
FIGURA 2.6b - RESPOSTA DE DEFORMAÇÃO PARA OS INTERVALOS $(t_0, t_1)$ E $(t_1, t_2)$ .....	22
FIGURA 2.7 - CURVA GENÉRICA DE RELAXAÇÃO.....	25
FIGURA 2.8a - HISTÓRIA DE DEFORMAÇÃO.....	25
FIGURA 2.8b - CURVA DE TENSÃO RESULTANTE.....	25
FIGURA 2.9 - CURVAS DE RELAXAÇÃO PARA DIFERENTES IDADES DE APLICAÇÃO DA DEFORMAÇÃO.....	27
FIGURA 2.10a- DEFORMAÇÃO CONSTANTE EM $(t_0, t)$ .....	28
FIGURA 2.10b- RESPOSTA DE TENSÃO EM $(t_0, t)$ .....	28
FIGURA 2.11a- DEFORMAÇÃO VARIÁVEL APLICADA EM $t_k$ INSTANTES DO INTERVALO $(t_0, t)$ .....	28
FIGURA 2.11b- RESPOSTA DE TENSÃO PARA OS $t_k$ INTERVALOS.....	28
FIGURA 2.12 - RESPOSTAS IMEDIATAS DO CONCRETO PARA DIFERENTES IDADES DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO.....	31
FIGURA 2.13 - RESPOSTAS VISCOSAS DO CONCRETO PARA DIFERENTES IDADES DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO.....	32
FIGURA 2.14 - 1ª SIMPLIFICAÇÃO - RESPOSTA IMEDIATA INDEPENDENTE DO INSTANTE DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO.....	32
FIGURA 2.15 - 2ª SIMPLIFICAÇÃO - RESPOSTA VISCOSA INDEPENDENTE DO INSTANTE DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO.....	32
FIGURA 2.16 - TEORIA DA HEREDITARIEDADE.....	33
FIGURA 2.17 - TEORIA DO ENVELHECIMENTO.....	34
FIGURA 2.18 - REGIME ELÁSTICO.....	36

FIGURA 2.19 - MOLA - MODELO ELÁSTICO.....	36
FIGURA 2.20a- REGIME RÍGIDO-PLÁSTICO OU PLÁSTICO PERFEITO.....	37
FIGURA 2.20b- REGIME PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO POSITIVO.....	37
FIGURA 2.21 - BLOCO SOBRE SUPERFÍCIE - MODELO PLÁSTICO.....	37
FIGURA 2.22a- HISTÓRIA DE CARREGAMENTO.....	38
FIGURA 2.22b- RESPOSTA DE DEFORMAÇÃO.....	38
FIGURA 2.23 - PISTÃO IMERSO EM LÍQUIDO VISCOZO - MODELO VISCOZO.....	39
FIGURA 2.24 - REGIME ELASTOPLÁSTICO PERFEITO.....	39
FIGURA 2.25 - MODELO ELASTOPLÁSTICO PERFEITO.....	40
FIGURA 2.26 - REGIME PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR.....	40
FIGURA 2.27 - MODELO PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR.....	41
FIGURA 2.28 - REGIME ELASTOPLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR.....	41
FIGURA 2.29 - MODELO ELASTOPLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR.....	42
FIGURA 2.30 - REGIME VISCOELÁSTICO DE MAXWELL.....	42
FIGURA 2.31 - MODELO VISCOELÁSTICO DE MAXWELL - ASSOCIAÇÃO EM SÉRIE.....	43
FIGURA 2.32 - REGIME VISCOELÁSTICO DE KELVIN.....	43
FIGURA 2.33 - MODELO VISCOELÁSTICO DE KELVIN - ASSOCIAÇÃO EM PARALELO.....	44
FIGURA 2.34 - REGIME VISCOELÁSTICO DE BOLTZMANN.....	44
FIGURA 2.35 - ASSOCIAÇÃO EM SÉRIE - MOLA/KELVIN.....	45
FIGURA 2.36 - REGIME VISCOELÁSTICO DE BURGER.....	45
FIGURA 2.37 - ASSOCIAÇÃO EM SÉRIE - MAXWELL/KELVIN.....	46
FIGURA 2.38 - REGIME VISCOPLÁSTICO LINEAR.....	47
FIGURA 2.39 - ASSOCIAÇÃO EM SÉRIE - AMORTECEDOR /PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR.....	47
FIGURA 2.40 - REGIME VISCOPLÁSTICO NÃO-LINEAR.....	48
FIGURA 2.41 - ASSOCIAÇÃO EM PARALELO - AMORTECEDOR /PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR.....	48
FIGURA 3.1 - TERMO INDIVIDUAL DO DESENVOLVIMENTO DE DIRICHLET.....	55
FIGURA 3.2 - DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE DIRICHLET PARA A FUNÇÃO DE FLUÊNCIA.....	56
FIGURA 3.3 - DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE DIRICHLET PARA A FUNÇÃO DE RELAXAÇÃO.....	56
FIGURA 3.4a - CARREGAMENTOS APLICADOS EM $t_0$ E $t_1$ .....	59
FIGURA 3.4b - DEFORMAÇÃO TOTAL PARA A HISTÓRIA DE CARREGAMENTO CONSIDERADA.....	59



FIGURA 3.5 - GRAUS DE LIBERDADE LOCAIS PARA O ELEMENTO DE VIGA GENÉRICO I.....	61
FIGURA 3.6 - GRAUS DE LIBERDADE LOCAIS E GLOBAIS PARA O ELEMENTO DE TRELIÇA GENÉRICO I.....	66
FIGURA 4.1 - ALGORITMO MALERBA.....	74
FIGURA 4.2 - ALGORITMO PROPOSTO PARA O MODELO VISCOELÁSTICO.....	77
FIGURA 5.1 - FLUXOGRAMA DO PROGRAMA TRELVE.FOR.....	83
FIGURA 5.2 - ESQUEMA ESTRUTURAL DO EXEMPLO 1.....	84
FIGURA 5.3 - ESQUEMA ESTRUTURAL DO EXEMPLO 2.....	86

## LISTA DE TABELAS

TABELA 5.1 - DEFORMAÇÕES TOTAIS DA TRELIÇA DO EXEMPLO 1.....	85
TABELA 5.2 - DEFORMAÇÕES ELÁSTICAS DA TRELIÇA DO EXEMPLO 2.....	86
TABELA 5.3 - DEFORMAÇÕES TOTAIS DA TRELIÇA DO EXEMPLO 2.....	87
TABELA 5.4 - DEFORMAÇÕES TOTAIS E VISCOSAS PARA A BARRA CENTRAL DA TRELIÇA DO EXEMPLO 3.....	88
TABELA 5.5 - DEFORMAÇÕES TOTAIS E VISCOSAS PARA A BARRA CENTRAL DA TRELIÇA DO EXEMPLO 4.....	89

## LISTA DE SÍMBOLOS

$E$	→	MÓDULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL DO MATERIAL
$\underline{D}$	→	MATRIZ DAS CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DO MATERIAL
$H$	→	PARÂMETRO DE ENCRUAMENTO
$\Delta t$	→	INTERVALO DE TEMPO
$\lambda$	→	TEMPO DE ESTABILIZAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES VISCOSAS
$\tau$	→	INSTANTE DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO
$\varepsilon$	→	DEFORMAÇÃO TOTAL
$\varepsilon_m$	→	DEFORMAÇÃO INSTANTÂNEA DE NATUREZA MECÂNICA
$\varepsilon_{nm}$	→	DEFORMAÇÃO NÃO-MECÂNICA IMPOSTA AO MATERIAL
$\varepsilon_e = \varepsilon^e$	→	PARCELA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA
$\varepsilon_p$	→	PARCELA DE DEFORMAÇÃO PLÁSTICA
$\varepsilon_v = \varepsilon^v = \bar{\varepsilon}$	→	PARCELA DE DEFORMAÇÃO VISCOSA
$\varepsilon_{ve}$	→	PARCELA DE DEFORMAÇÃO VISCOELÁSTICA
$\varepsilon_{vp}$	→	PARCELA DE DEFORMAÇÃO VISCOPLÁSTICA
$\varepsilon_a$	→	DEFORMAÇÃO DEVIDA AO ENVELHECIMENTO DOS MATERIAIS
$\varepsilon_r$	→	DEFORMAÇÃO DEVIDA À RETRAÇÃO
$\varepsilon_t$	→	DEFORMAÇÃO DEVIDA À TEMPERATURA
$\dot{\varepsilon}$	→	VELOCIDADE DE DEFORMAÇÃO
$\gamma$	→	COEFICIENTE DE FLUIDEZ DO MATERIAL
$\eta$	→	COEFICIENTE DE VISCOSIDADE DO MATERIAL
$\phi$	→	COEFICIENTE DE FLUÊNCIA
$\rho$	→	COEFICIENTE DE RELAXAÇÃO
$\nu$	→	COEFICIENTE DE POISSON
$\sigma$	→	TENSÃO APLICADA
$\bar{\sigma}$	→	TENSÃO QUE SURGE NO INSTANTE DA APLICAÇÃO DA DEFORMAÇÃO
$\sigma_y$	→	TENSÃO DE ESCOAMENTO
$\sigma_m$	→	TENSÃO APLICADA NA MOLA
$\sigma_s$	→	TENSÃO APLICADA NO SÓLIDO
$\sigma_a$	→	TENSÃO APLICADA NO AMORTECEDOR

## RESUMO

O presente trabalho relaciona-se à modelagem viscoelástica estrutural, objetivando-se a simulação numérica, com ênfase às estruturas de concreto. Faz-se, inicialmente, uma revisão dos modelos reológicos básicos unidimensionais para facilitar o entendimento das características intrínsecas da resposta viscoelástica das estruturas, tais como o fenômeno de fluência. Dentre as teorias que permitem levar em conta a idade do concreto no instante da aplicação do carregamento, são apresentadas a da hereditariedade e a do envelhecimento. Apresentam-se, em seguida, as funções de fluência e relaxação em notação apropriada à implementação numérica, combinada com o Método dos Elementos Finitos.

Alguns aspectos da integração numérica das relações constitutivas ao longo do tempo são discutidos, com a apresentação, em particular, de um esquema de solução explícito fundamentado na Técnica dos 'Núcleos Degenerados'. Finalmente, exemplos constituídos da análise de treliças planas ilustram a aplicabilidade dos modelos e procedimentos numéricos comentados.

Palavras-chaves: viscoelasticidade, análise estrutural.

## ABSTRACT

The present work is related to structural viscoelastic modeling aiming numerical simulation, with emphasis on concrete structures. First of all, a revision of unidimensional basic rheologic models is given, in order to enhance the inherent features of structural viscoelastic response, such as creep phenomenon. Among the theories able to consider the concrete age at the instant of loading, the hereditary and the aging theories are here presented. After that, the creep and relaxation functions are given in appropriate notation for numerical implementation, combined with the Finite Element Method.

Some aspects of time numerical integration of constitutive relations are discussed, mainly an explicit solution scheme based on the so called Degenerate Kernel Technic. Finally, examples consisting of plane trusses analysis illustrate the applicability of the models and numerical procedures commented.

Keywords: Viscoelasticity, structural analysis.

## Capítulo 1 - Introdução

O conhecimento da evolução das deformações e dos esforços ao longo do tempo, em estruturas submetidas a carregamentos variáveis ou não, que podem ser consideradas em regime elástico, é de fundamental importância. Em algumas estruturas, tais como vigas isostáticas, um efeito viscoelástico importante é o ganho de deformação no tempo. Em outras, tais como as hiperestáticas ou as protendidas, é interessante, também, quantificar a alteração na distribuição dos esforços solicitantes. Levando-se em conta, por outro lado, as dificuldades inerentes à realização de ensaios experimentais, torna-se bastante proveitoso o desenvolvimento de modelos matemáticos que possam conduzir a uma simulação confiável da resposta de estruturas em regime viscoelástico.

Entretanto, a simulação da resposta não-linear física de estruturas é em geral aproximada, em consequência do emprego de modelos que introduzem simplificações sobre as condições reais, tais como características dos materiais, estratégias de construção e sazonalidade específicas do local da obra.

Em certas situações, mesmo a alternativa de simulação de um único efeito, constitui tarefa difícil. Um exemplo é o tratamento rigoroso dos efeitos da fluência. Tal tratamento conduz, normalmente, a uma formulação matemática complexa, o que faz com que os efeitos do tempo sejam muitas vezes negligenciados no cálculo dos esforços em estruturas com alto grau de hiperestaticidade e também nos casos particulares de estruturas mistas - estruturas premoldadas, modificadas ao longo do tempo através da adição de novos elementos estruturais.

Um outro aspecto importante para uma análise teórica, é a determinação dos parâmetros inicialmente considerados incógnitos no âmbito da Engenharia Estrutural. Assim sendo, a modelagem matemática depende diretamente de informações experimentais e, normalmente, o relacionamento entre ambas se dá em forma iterativa. Um exemplo do avanço de tais pesquisas é o caso da Ponte Bernardo Goldfarb, construída em 1994 na cidade de São Paulo, para a qual foi especialmente desenvolvido um modelo matemático de predição de fluência e retração. Desde a sua execução, a ponte tem sido continuamente observada, registrando-se a evolução das deformações com o tempo, através de um Plano de Monitoramento, o que torna essa ponte uma das maiores estruturas extensamente monitoradas do mundo (IBRACON, 1996).

A preocupação com a estimativa da evolução das deformações ao longo do tempo tem sido alvo de pesquisas em todo o mundo, encontrando-se inúmeros trabalhos na bibliografia especializada. O presente trabalho objetiva reunir alguns elementos que possam servir como informação básica para a formulação, o entendimento e a aplicação de modelos mecânico-matemáticos dedicados, especialmente, à simulação numérica da resposta de estruturas em regime viscoelástico.

Essencialmente, apresenta-se um modelo constitutivo viscoelástico, capaz de levar em consideração os efeitos de cargas variáveis aplicadas em idades diferentes da 'vida' da estrutura. A formulação é fundamentada na Reologia dos Materiais e o modelo estudado combina em série uma mola e um arranjo de Kelvin. A relação matemática resultante é expressa na forma da integral de Stieltjes, optando-se pelo uso do método dos 'núcleos degenerados', para proceder, de forma aproximada, ao cálculo dos incrementos de deformação viscosa.

O envelhecimento dos materiais não foi levado em conta devido à dificuldade de se introduzir, em um trabalho de mestrado - cujo tempo de elaboração tem se tornado bastante reduzido - a apreciação dos vários fatores e a determinação dos parâmetros que contribuem para as variações das características dependentes do tempo.

Para a verificação da eficiência do modelo, utilizou-se um código de cálculo SIMAT.FOR, desenvolvido por MUNAIAR (1997)\*, que calcula os esforços e deformações em treliças planas considerando os efeitos do tempo (porém, integrando um modelo constitutivo expresso por uma relação diferencial). Modificou-se este programa de forma a possibilitar a implementação do modelo desenvolvido no presente trabalho, gerando o código de cálculo TRELVE.FOR.

Este trabalho consta de 6 capítulos, distribuídos, a partir do capítulo 2, da seguinte forma:

O capítulo 2 exprime as idéias básicas para a formulação das Equações Fundamentais da Viscoelasticidade Linear. No sub-item 2.3, relata-se o resultado da pesquisa realizada a respeito dos modelos reológicos unidimensionais, que são de grande interesse para o entendimento do comportamento viscoelástico dos materiais.

Os métodos de integração do modelo são apresentados no capítulo 3, dando-se ênfase ao método dos 'núcleos degenerados'. Ainda neste capítulo, faz-se a aplicação do modelo, via Princípio dos Trabalhos Virtuais e Método dos Elementos Finitos, para a análise de estruturas de barras, com destaque para o elemento de treliça plana implementado no programa TRELVE.FOR.

No capítulo 4, apresenta-se o algoritmo desenvolvido por MALERBA (1990) que deu origem a um algoritmo aqui proposto para solução do sistema não-linear. A implementação desse algoritmo no programa SIMAT.FOR de MUNAIAR(1997) (gerando o programa TRELVE.FOR) e o conseqüente emprego do mesmo para a realização de exemplos de aplicação são feitos no capítulo 5. E, finalmente, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões finais.

---

\* MUNAIAR(1997) - O programa SIMAT.FOR foi desenvolvido por MUNAIAR como parte integrante do seu trabalho de Doutorado, que se encontra em andamento.



## Capítulo 2 - Comportamento Viscoelástico de Estruturas em Concreto

O comportamento viscoelástico das estruturas de concreto tem sido extensamente estudado dada a importância de se prever a sua resposta ao longo do tempo.

Neste capítulo apresenta-se uma introdução aos conceitos e modelos elementares das relações tensão-deformação para o concreto. Conceituam-se fluência e retração, segundo as normas do CEB e ACI e citam-se as propostas destas normas para a determinação das deformações por fluência e retração.

No item 2.2, formulam-se as funções representativas dos fenômenos de fluência e relaxação, levando-se em consideração diferentes idades de aplicação da carga e história de carregamento variável com o tempo. Tais funções conduzem a relações entre deformações e tensões expressas na forma da integral de Stieltjes. Com o objetivo de se obter um modelo de aplicação viável, sugerem-se simplificações no modelo de fluência, dando origem a duas teorias: a da hereditariedade e a do envelhecimento.

Objetivando-se tratar de forma mais ampla a questão da modelagem da fluência, até para permitir um confronto com a forma integral, apresenta-se, ainda neste capítulo (item 2.3), uma formulação derivada da reologia dos materiais.

## 2.1 Características Viscoelásticas dos Materiais

O comportamento do concreto é de difícil simulação, devido ao seu caráter bastante complexo. Entretanto, é de grande interesse, tendo-se em vista aplicações práticas, modelos que permitam simular a sua resposta frente a solicitações de curta e longa duração. Neste caso, as relações que devem ser determinadas são:

- tensão-deformação em compressão e tração uniaxial;
- funções de fluência, retração e relaxação.

Já em estruturas de Concreto Armado, normalmente se usam dois tipos de aços: os de dureza natural e os encruados. As leis que devem ser fornecidas para os aços são:

- tensão-deformação em compressão e tração;
- função de relaxação.

Como se sabe, as propriedades do concreto variam com o decorrer do tempo e tais variações afetam o comportamento estrutural. Naturalmente, a relação tensão-deformação válida no instante de aplicação da carga, e que fornece o valor da tensão associada a uma deformação instantânea, não vale quando se deseja analisar a resposta estrutural do concreto ao longo do tempo. Um procedimento para a obtenção de relações tensão-deformação para o concreto, mais coerentes com a idéia de simular a resposta ao longo do tempo, consiste em dividir as deformações totais em deformações instantâneas e lentas. As deformações lentas, por sua vez, também podem ser classificadas como: fluência rápida (aquela que ocorre nas primeiras vinte e quatro horas após a concretagem) e fluência lenta. No entanto, no escopo deste trabalho será considerada, para o cálculo da deformação lenta, apenas a componente de fluência lenta que surge mais rapidamente no início do carregamento e desacelera com o decorrer do tempo.

Para melhor justificar esse procedimento de divisão da deformação total, faz-se, em seguida, um breve comentário a respeito do efeito da duração do carregamento sobre a relação tensão-deformação para estruturas de concreto; não consistindo em objeto deste trabalho o estudo do comportamento do aço.

## 2.1.1 Deformações Dependentes do Tempo

### Deformações imediatas - cargas de curta duração

A relação Tensão - Deformação uniaxial para o concreto é caracterizada através dos resultados extraídos de ensaios de compressão sobre corpos de prova cilíndricos ou cúbicos ou de vigas em flexão.

As curvas ( $\sigma - \varepsilon$ ), obtidas em ensaios de compressão apresentam um traço inicial aproximadamente elástico linear, com boa proporcionalidade entre tensão e deformação, seguido de um traço com inclinação decrescente até um valor máximo de tensão  $\sigma_{m\acute{a}x}$  correspondente a um valor de deformação  $\varepsilon_o (\approx 2/1000)$  e, finalmente, um traço descendente até uma deformação  $\varepsilon_{m\acute{a}x} (\approx 3,5-4/1000)$ .

O andamento da relação ( $\sigma - \varepsilon$ ) é caracterizado principalmente pelo valor da resistência do concreto. A valores mais altos de resistência correspondem valores mais altos dos módulos de rigidez iniciais. Por outro lado, um concreto com resistência menor é menos frágil do que um com resistência mais elevada, isto é, alcança valores de deformação última maiores.

A forma da curva ( $\sigma - \varepsilon$ ) é influenciada pela velocidade de aplicação do carregamento. A valores mais altos da velocidade de aplicação do carregamento correspondem valores mais altos dos módulos de rigidez iniciais e de resistência do concreto, havendo, porém, maior fragilidade, ou seja, os valores de deformação última são mais baixos.

Os valores de resistência do concreto são determinados, de forma prática, seguindo-se as modalidades sugeridas pelas Normas. Tais valores dependem de vários fatores, entre estes citam-se: a relação água-cimento, a dimensão e a granulometria dos materiais inertes, a idade do concreto e o tempo de prova. É sabido que a resistência do concreto aumenta com o tempo e tal aspecto pode ser importante nas análises dos efeitos de carregamentos de longa duração.

A resistência à tração do concreto é cerca de 10% da sua resistência à compressão e é freqüentemente estimada com base em provas de elementos submetidos à flexão. O valor teórico, obtido pelo esforço calculado no ato da ruptura por flexão da viga de prova, é denominado módulo de ruptura. Pode-se, ainda, medir a resistência à tração de forma direta, prova de tração pura ou, de forma indireta, comprimindo-se diametralmente um corpo de prova cilíndrico longo (ensaio brasileiro). Entretanto, a relação constitutiva válida para o regime de tração não é de definição imediata. Além disso, a tecnologia do concreto armado confia a resistência à tração, de preferência, ao aço da armadura e, por isso, nessa zona, deve-se levar em consideração não só o fato de que estão presentes dois materiais, como também, os fenômenos ligados à interação entre eles. É importante, ainda, observar que a resistência à tração do concreto pode ser levada em consideração de diferentes modos, em função do tipo de análise desenvolvida. Por exemplo, é fundamental para análises nos estados limites de serviço e secundária para análises nos estados limites últimos.

### **Fluência e Retração - cargas de longa duração**

Apesar da viscosidade ser uma característica associada predominantemente a líquidos, nos materiais sólidos ela se manifesta sob a forma de variações de tensão e deformação com o tempo.

A **fluência** é um fenômeno bastante complexo, que depende, de uma forma geral, de três fatores principais:

- de um retardamento na resposta elástica do material;
- de alterações nas camadas de água entre as partículas de gel da pasta de cimento que transmitem os esforços de compressão. Tais alterações, em geral, se dão muito rapidamente logo depois da aplicação do carregamento, desacelerando com o tempo;
- da formação de ligações entre as partículas da pasta de cimento na nova configuração assumida.

Além disso, ela apresenta um caráter de reversibilidade parcial, ou seja, removendo-se o carregamento, uma parte da deformação total é instantaneamente restituída, uma parte é restituída com o tempo e uma parte resta como deformação permanente.

A **retração** é o fenômeno que se observa quando uma amostra de concreto se deforma ao longo do tempo, mesmo que não esteja submetida a qualquer estado de sollicitação.

Normalmente, as deformações retardadas do concreto carregado ou descarregado devem ser consideradas como dois aspectos do mesmo fenômeno físico. Portanto, a distinção entre fluência e retração é convencional, residindo no fato de que na primeira as deformações são oriundas do concreto carregado e na segunda, do concreto não-carregado.

### Componentes de deformação

Com base no que foi exposto, pode-se escrever a deformação total  $\varepsilon(t)$ , em um instante  $t$ , para estados uniaxiais, como a adição das parcelas de deformações não-mecânicas e imediatas (mecânicas):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m(t) + \varepsilon_{nm}(t) \quad (2-01)$$

com

$$\varepsilon_{nm}(t) = \varepsilon_v(t) + \varepsilon_a(t) + \varepsilon_r(t) + \varepsilon_t(t) \quad (2-02)$$

em que,

$\varepsilon_m(t) \Rightarrow$  é a deformação instantânea de natureza mecânica, devida ao carregamento de curta duração, à qual se refere a relação tensão-deformação.

$$\sigma(t) = \sigma(\varepsilon_m(t)) \quad (2-03)$$

$\varepsilon_{nm}(t) \Rightarrow$  é a deformação não-mecânica imposta ao material ao tempo  $t$ , composta pelas seguintes parcelas:

$\varepsilon_v(t)$  - devida ao efeito viscoso  
(material sujeito a tensão);

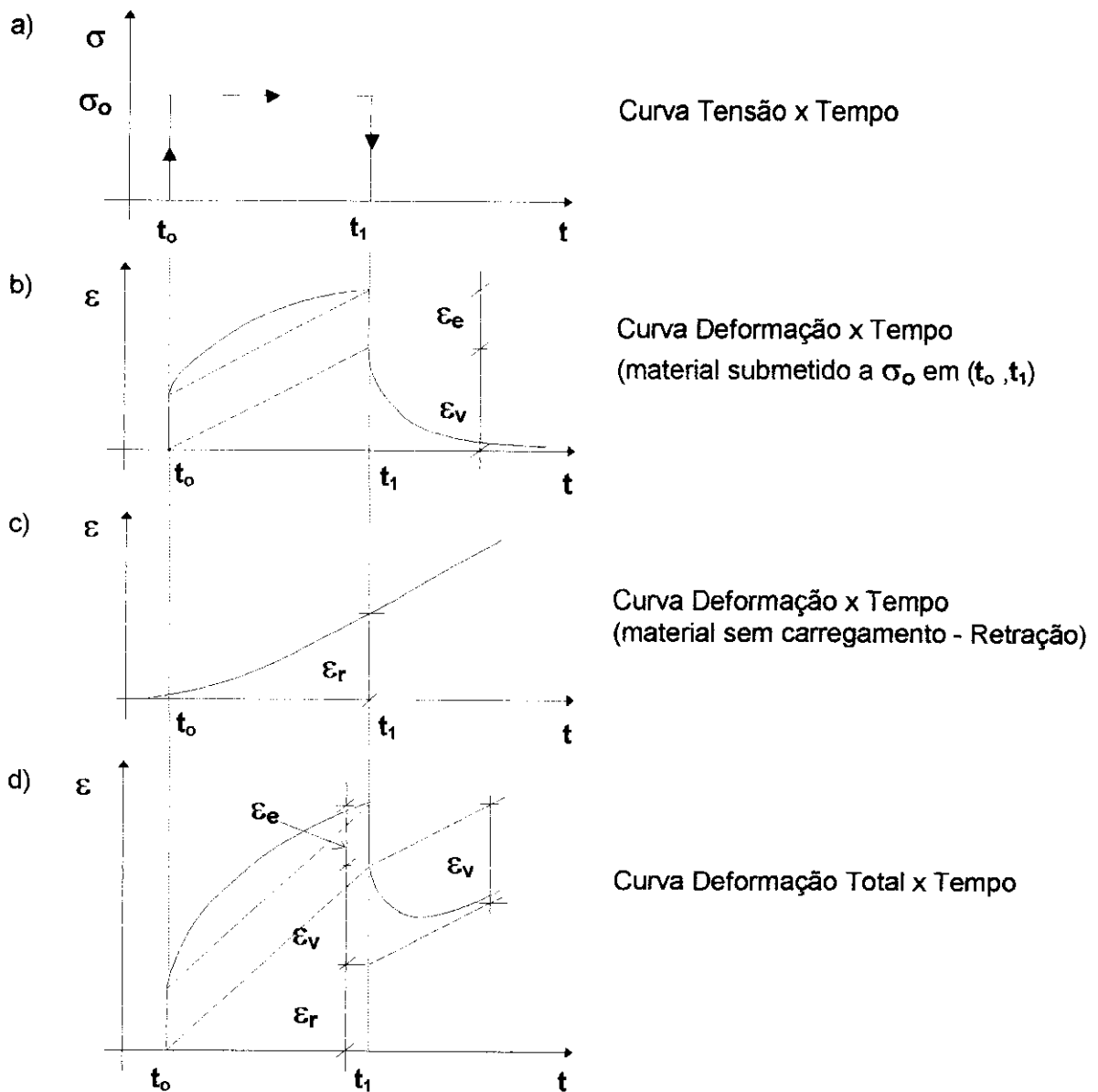
$\varepsilon_a(t)$  - devida ao envelhecimento dos materiais  
(sem carregamento);

$\varepsilon_r(t)$  - devida à retração;

$\varepsilon_t(t)$  - devida à temperatura.

Neste trabalho, nas aplicações numéricas a serem desenvolvidas, não serão levadas em consideração as parcelas devidas ao envelhecimento dos materiais  $\varepsilon_a(t)$ , à temperatura  $\varepsilon_t(t)$  e à retração  $\varepsilon_r(t)$ , dada a complexidade da obtenção de relações que simulem estas deformações.

A figura 2.1 ilustra o caráter aditivo das parcelas de deformação: imediata ou elástica ( $\epsilon_e$ ), viscosa ( $\epsilon_v$ ) e retração ( $\epsilon_r$ ), para uma amostra de concreto submetida a um carregamento constante  $\sigma_o$  no instante  $t_o$  e descarregada no instante  $t_1$ .



**FIGURA 2.1a) CARREGAMENTO CONSTANTE APLICADO EM  $t_o$**   
**2.1b) RESPOSTA DE DEFORMAÇÃO PARA O CARREGAMENTO APLICADO**  
**2.1c) CURVA GENÉRICA DE RETRAÇÃO**  
**2.1d) CURVA RESULTANTE DA ADIÇÃO DE 2.1b E 2.1c**

Em termos de modelagem, um modelo reológico que permite representar a forma aditiva em questão, para a deformação total, pode ser obtido pela associação do Modelo Combinado de Kelvin ou Modelo de Boltzmann (item 2.3.2) a uma curva genérica de retração, no qual as deformações totais são a soma das deformações simuladas pelo modelo de Boltzmann com as deformações devidas à retração.

Na figura 2.1c pode-se observar que as deformações devidas à retração acontecem independentemente da presença do carregamento e são crescentes com o tempo. A figura 2.1d representa a soma das curvas 2.1b (componentes de deformação obtidas a partir do Modelo de Boltzmann) e 2.1c (curva genérica de retração), nas quais se observam as seguintes componentes de deformação:

$\varepsilon_e \Rightarrow$  deformação elástica, que se manifesta no instante da aplicação do carregamento.

$\varepsilon_v \Rightarrow$  componente devida à elasticidade retardada. É uma parte da deformação reversível que se manifesta com atraso e que está presente em quase todos os materiais. Nas pedras, por exemplo, a deformação viscosa chega a 5% da deformação elástica inicial e é reversível por cerca de 80%. No concreto, no qual a pasta de cimento interage com os agregados predominantemente elásticos, a deformação elástica retardada é, em ordem de grandeza, cerca de 40% da deformação elástica instantânea.

$\varepsilon_r \Rightarrow$  deformação por retração, ou seja, a variação de volume que o concreto manifesta no tempo, independentemente do estado de esforços. É uma deformação 'não-mecânica', devida ao ressecamento que acontece na fase de cura e depende das condições ambientais (temperatura, umidade), das dimensões e da forma do elemento estrutural.

No item 2.2 apresenta-se o desenvolvimento da equação para o cálculo das deformações totais. Tal formulação não leva em consideração a contribuição da retração na evolução das deformações. Assim, com o objetivo apenas de introduzir informações a esse respeito, exibem-se, a seguir, as proposições do CEB e do ACI para o cálculo das deformações por fluência e retração.

### 2.1.2 Proposições do CEB e do ACI para o cálculo das deformações

Descrever de forma analítica a fluência e a retração do concreto, objetivando-se a análise estrutural, é tarefa complexa, existindo, para tanto, diversas proposições. Apenas como informação de caráter geral, reproduzem-se as propostas das normas europeia (CEB) e americana (ACI).

Os modelos propostos por tais normas apresentam as seguintes características:

- valem para valores de resistência característica do concreto estrutural entre  $12\text{MPa} < f_{ck} < 80\text{MPa}$ ;
- admitem estados de esforços compreendidos em uma faixa abaixo de um certo percentual (cerca de 40%) da resistência à compressão. Neste caso, é verdadeiro atribuir aos materiais um comportamento viscoelástico linear e continua válido o princípio da superposição de McHenry [1943]\*;
- supõem o módulo de Poisson constante no tempo;
- aceitam, também, estados de tração do concreto, embora as relações recomendadas pelas normas sejam direcionadas ao concreto sujeito a regimes de compressão.

#### Modelo CEB

Segundo o CEB (1991), as deformações totais ao tempo  $t$  de um elemento de concreto carregado no instante  $t_0$ , mantida a tensão constante, podem ser subdivididas em dois tipos: deformações que dependem das tensões e deformações que não dependem das tensões. As deformações que dependem das tensões são:

$\varepsilon_{ci}(t_0) \Rightarrow$  deformação imediata que surge no instante da aplicação do carregamento;

$\varepsilon_{cc}(t) \Rightarrow$  deformação lenta ao tempo  $t > t_0$

\* O Princípio de Superposição dos efeitos é apresentado no item 2.2, quando é feita a modelagem das funções de fluência e de relaxação.



e as que não dependem das tensões são:

$\varepsilon_{cs}(t) \Rightarrow$  deformação devida à retração;

$\varepsilon_{ct}(t) \Rightarrow$  deformação devida aos efeitos da temperatura.

### Modelo do CEB para determinação da Fluência

O Código Modelo - CEB (1991) considera uma combinação dos modelos apresentados, na qual o módulo de elasticidade  $E$  varia com o tempo e é tomado no instante do carregamento.

$$f(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi_{RH}}{E_c} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \cdot \left[ \frac{(t - t_0)/t_1}{\beta_{H+(t-t_0)/t_1}} \right]^{0,3} \quad (2-04)$$

em que,

$E_c \Rightarrow$  módulo de elasticidade aos 28 dias, calculado segundo o CEB;

$E_c(t_0) \Rightarrow$  módulo de elasticidade calculado no instante da aplicação do carregamento;

$\phi_{RH} \Rightarrow$  função que considera a umidade relativa do ar e a espessura efetiva do elemento;

$$\phi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH/RH_0}{0,46 \left( \frac{h}{h_0} \right)^3}$$

$RH =$  umidade relativa do meio ambiente;

$RH_0 = 100\%$ ;

$h = \frac{2Ac}{\mu} =$  espessura efetiva

( $Ac =$  área da seção transversal e  $\mu =$  perímetro do elemento em contato com a atmosfera);

$h_0 = 100\text{mm}$ ;

$\beta(f_{cm}) \Rightarrow$  função que considera a resistência à compressão média do concreto aos 28 dias;

$$\beta(f_{cm}) = \frac{5,3}{\left( \frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right)^{0,5}}$$

$(f_{cm})$  = resistência à compressão média do concreto aos 28 dias;

$(f_{cm0}) = 10 \text{ Mpa}$ ;

$\beta(t_0)$   $\Rightarrow$  função que considera a idade do concreto por ocasião do carregamento;

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + \left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{0,2}};$$

$t_1 = 1 \text{ dia}$ ;

$\beta_H$   $\Rightarrow$  função que considera a umidade relativa do ar e a espessura efetiva do elemento;

$$\beta_H = 150 \left[ 1 + \left( 1,2 \frac{RH}{RH_0} \right)^{18} \right] \frac{h}{h_0} + 250 \leq 1500$$

$t$   $\Rightarrow$  idade do concreto (dias);

$t_0$   $\Rightarrow$  idade do concreto no instante da aplicação do carregamento.

### Modelo do CEB-90 para determinação da Retração

Com respeito à retração, o CEB-90 propõe a seguinte relação:

$$\varepsilon_{CS}(t, t_s) = \varepsilon_s(f_{cm}) \cdot \beta_{RH} \cdot \beta_s(t - t_s) \quad (2-05)$$

em que,

$\varepsilon_s(f_{cm})$   $\Rightarrow$  função que considera o tipo de cimento ( $\beta_{sc}$ ) e a resistência à compressão média do concreto aos 28 dias ( $f_{cm}$ );

$$\varepsilon_s(f_{cm}) = \left[ 160 + 10\beta_{sc} \left( 9 - \frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right) \right] 10^{-6}$$

$(f_{cm0}) = 10 \text{ Mpa}$ ;

$\beta_{RH}$   $\Rightarrow$  função que considera a umidade relativa da atmosfera;

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1,55\beta_{SRH} & \text{para } 40\% \leq RH < 99\% \\ +0,25 & \text{para } RH \geq 99\% \end{cases};$$

$$\beta_{SRH} = 1 - \left( \frac{RH}{RH_0} \right)^3;$$

RH = umidade relativa da atmosfera (%);

RH<sub>0</sub> = 100%;

$\beta_s(t - t_s)$  ⇒ coeficiente que descreve o desenvolvimento da retração com o tempo; considera a espessura efetiva do elemento durante o tempo em que o material sofre retração ( $t - t_s$ )

$$\beta_s(t - t_s) = \left[ \frac{(t - t_s) / t_1}{350(h / h_0)^2 + (t - t_s) / t_1} \right]^{0,5};$$

h = espessura efetiva;

h<sub>0</sub> = 100mm;

t<sub>1</sub> = 1 dia;

t ⇒ idade do concreto (dias);

t<sub>s</sub> ⇒ idade do concreto no início da retração ou inchação.

### Modelo ACI

O modelo do ACI-209 é mais simples e resulta em emprego imediato nos códigos de cálculo.

#### **Modelo do ACI 209 para determinação da Fluência**

$$f(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} \left[ 1 + \frac{(t - t_0)^{0,6}}{10 + (t - t_0)^{0,6}} \cdot \phi_\infty \right] \quad (2-06)$$

no qual, o coeficiente de fluência  $\phi_\infty$  é dado por:

$$\phi_\infty = 2,35 \beta_{t_0} \beta_H \beta_d \beta_s \beta_F \beta_{AC} \quad (2-07)$$

em que,

$\beta_{t_0}$  ⇒ coeficiente para a idade do concreto no instante da aplicação do carregamento - t<sub>0</sub>

$$\beta_{t_0} = (1,25t_0)^{-0,118} \quad \text{para } t_0 \geq 7 \text{ dias;}$$

$\beta_H \Rightarrow$  coeficiente que considera a influência da umidade relativa do ambiente - H

$$\beta_H = 1,27 - 0,0067 H \quad \text{para } H \geq 0,4;$$

$\beta_d \Rightarrow$  coeficiente que considera a espessura média da peça de concreto:

(i) para  $50 \leq d \leq 150$  (mm)

d(mm):	50	75	100	125	150
$\beta_d$ :	1,3	1,17	1,11	1,04	1,0

(ii) para  $150 \leq d < 380$  (mm)

$$\beta_d = 1,14 - 2,093 \times 10^{-5} \quad \text{para } (t - t_0) \leq 365 \text{ dias}$$

ou

$$\beta_d = 1,10 - 1,139 \times 10^{-5} d^2 \quad \text{para } (t - t_0) > 365 \text{ dias}$$

(iii) para  $d \geq 375$  (mm)

$$\beta_d = 0,67 \left( 1 + 1,13e^{-0,212V/A} \right) \left( 1,13e^{-0,54V/A} \right)$$

(V = volume do elemento e A = área do elemento);

$\beta_S \Rightarrow$  coeficiente que considera a consistência do concreto fresco (função do Slump)

$$\beta_S = 0,82 + 1,7688 \times 10^{-4} S$$

(S = slump do concreto (mm) );

$\beta_F \Rightarrow$  coeficiente que considera as partículas do agregado fino (areia + pedrisco)

$$\beta_F = 0,88 + 24 \times 10^{-4} F$$

(F = (partículas / total de agregados) x100 );

$\beta_{AC} \Rightarrow$  coeficiente que considera a porcentagem de ar contido no concreto

$$\beta_{AC} = 0,46 + 0,09 AC \geq 1,0$$

(AC = teor de ar contido no concreto).

### Modelo do ACI 209 para determinação da Retração

Com respeito à retração, o ACI-209 propõe a seguinte relação para a deformação final de uma peça de concreto estrutural comum:

$$\varepsilon_{sh\infty} = 780 \times 10^{-6} \beta_{cp}^s \beta_H^s \beta_d^s \beta_s^s \beta_F^s \beta_{ce}^s \beta_{AC}^s \quad (2-08)$$

em que,

$\beta_{cp}^s \Rightarrow$  coeficiente que considera o período de cura

dias:	1	3	7	14	28	90
$\beta_{cp}^s$ :	1,2	1,1	1,0	0,93	0,86	0,75

$\beta_H^s \Rightarrow$  coeficiente que estima a contribuição da umidade

$$\beta_H^s = 1,40 - 0,01H \quad \text{para } 40 \leq H \leq 80\%$$

$$\beta_H^s = 3,0 - 0,03H \quad \text{para } 80 \leq H \leq 100\%;$$

$\beta_d^s \Rightarrow$  coeficiente que considera a influência da espessura média

para  $50 \leq d < 150$  (mm)

d(mm):	50	75	100	125	150
$\beta_d^s$ :	1,35	1,25	1,17	1,08	1,0

para  $150 \leq d \leq 375$  (mm)

$$\beta_d^s = 1,23 - 5,70 \times 10^{-8} d^2 \quad \text{para } (t - t_0) \leq 365 \text{ dias}$$

$$\beta_d^s = 1,17 - 3,19 \times 10^{-5} d^2 \quad \text{para } (t - t_0) \geq 365 \text{ dias}$$

para  $d > 375$  (mm)

$$\beta_d^s = 1,2e^{-0,047V/A} \left( 1,2e^{-0,12V/A} \right)$$

(V / A = razão entre área de superfície e volume);

$\beta_s^S$   $\Rightarrow$  coeficiente que considera a consistência da mistura

$$\beta_s^S = 0,89 + 8,56 \times 10^{-5} S$$

(S = slump do concreto)

$\beta_F^S$   $\Rightarrow$  coeficiente que considera a influência do agregado fino

$$\beta_F^S = 0,30 + 14 \times 10^{-4} F \quad \text{para } F \leq 50\%$$

$$\beta_F^S = 0,90 + 2 \times 10^{-3} F \quad \text{para } F > 50\%;$$

(F = teor de agregados finos (< 4,8mm));

$\beta_{ce}^S$   $\Rightarrow$  coeficiente que considera o conteúdo do cimento

$$\beta_{ce}^S = 0,75 + 2,196 \times 10^{-7} C;$$

$\beta_{AC}^S$   $\Rightarrow$  coeficiente que considera o conteúdo do ar incorporado

$$\beta_{AC}^S = 0,95 + 8 \times 10^{-3} A \geq 1,0.$$

As equações anteriormente descritas são fundamentadas em modelos viscoelásticos e permitem o cálculo das deformações devidas à fluência e à retração do concreto.

## 2.2 Modelagem do Comportamento Viscoelástico

Neste item, conceituam-se os fenômenos de fluência e relaxação, enfatizando-se os efeitos de aplicação de carregamentos com idades diferentes do material e cargas variáveis com o tempo. O princípio de superposição dos efeitos (McHenry), é empregado para exprimir a relação constitutiva na forma de uma integral de Stieltjes.

## Princípio de Superposição de McHenry

O princípio de superposição de McHenry baseia-se nas seguintes hipóteses:

- O concreto comporta-se como um material viscoelástico linear, cujas propriedades variam com a idade.
- O comportamento dependente do tempo do concreto na tração é igual ao comportamento na compressão.
- O CEB-90 admite a superposição linear até quando o nível de tensões for  $0,40f_{cj}$ .

O Princípio de Superposição de McHenry estabelece que as deformações produzidas no concreto em qualquer época ( $t$ ), por um incremento de tensão aplicado em qualquer instante ( $t_0$ ), são independentes dos efeitos de quaisquer tensões aplicadas ou antes ou depois de  $t_0$  (CARVALHO (1979)).

Segundo MENDES (1993), a validade da superposição dos efeitos foi confirmada através de ensaios e os resultados foram satisfatórios, mas somente quando as tensões crescem. Quando as tensões decrescem, a superposição pode ser aplicada desde que o decréscimo de tensão não seja exagerado.

### 2.2.1 Modelagem da fluência

*Dá-se o nome de fluência (creep) ao aparecimento de deformações ao longo do tempo em um corpo solicitado por tensão constante.*

A figura 2.2 mostra uma curva genérica de fluência, na qual se observa que após uma deformação imediata inicial  $\epsilon_0$  seguem-se três regiões de deformação lenta: a região de **fluência primária**, que tem inclinação decrescente com o tempo, graças a um ganho de rigidez do material (que é o caso do concreto novo); a região de **fluência secundária**, que tem inclinação constante, graças a uma “estabilização” da rigidez do material (concreto velho) e a região de **fluência terciária**, que tem inclinação crescente no tempo, devido a uma diminuição da área resistente, até a ruptura.

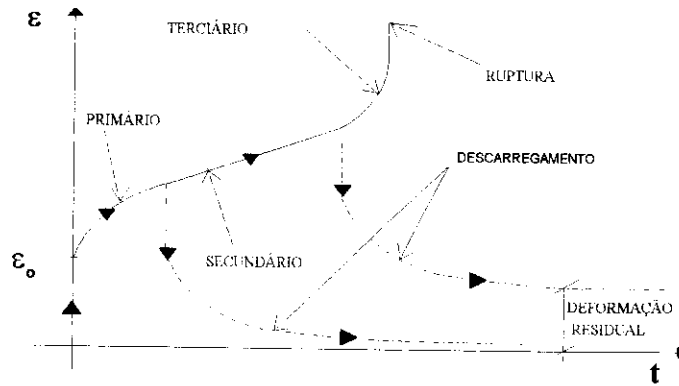


FIGURA 2.2 CURVA GENÉRICA DE FLUÊNCIA

Nota-se ainda que, em caso de descarregamento, na região de fluência primária, praticamente, toda a deformação é recuperada ao longo do tempo; na região de fluência secundária apenas a deformação elástica e parte da deformação viscosa são recuperadas, restando uma deformação acumulada ou residual ao final do processo carga-descarga. O efeito de altas temperaturas é verificado sobre o trecho de fluência secundária sob a forma de aumento da inclinação da curva e conseqüente encurtamento desta.

### Função de fluência

Para a caracterização da função de fluência, considera-se um corpo de prova de concreto submetido a uma tração uniaxial  $\sigma_c$  (constante) a partir do tempo  $t_0$ . Veja figura 2.3a.

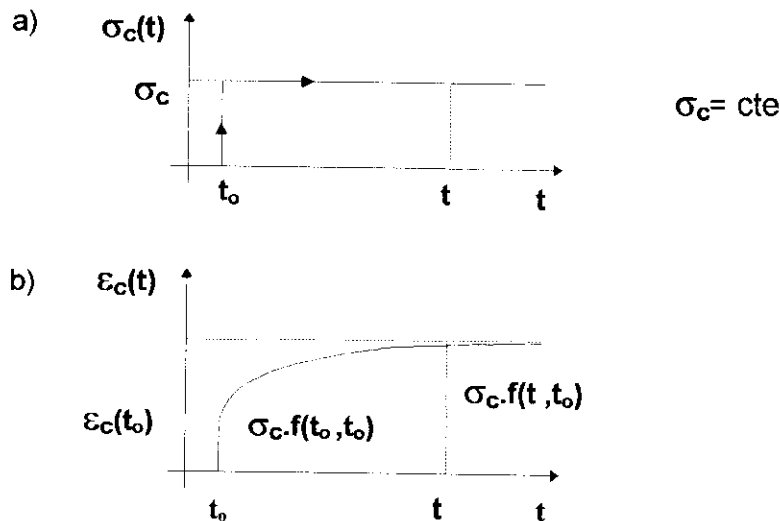


FIGURA 2.3a) HISTÓRIA DE CARREGAMENTO  
2.3b) CURVA DE DEFORMAÇÃO RESULTANTE



A deformação medida no instante genérico  $t$  vale (veja figura 2.3b):

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c \cdot f(t, t_0) \quad (2-09)$$

em que,  $f(t, t_0)$  é a 'função de fluência' definida como:

$$f(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} + C(t, t_0) \quad (2-10)$$

Introduzindo-se o coeficiente de fluência:

$$\phi(t, t_0) = E(t_0) \cdot C(t, t_0) \quad (2-11)$$

a (2-10) pode ser escrita na forma:

$$f(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} [1 + \phi(t, t_0)] \quad (2-12)$$

Fazendo-se coincidir o tempo de medida com o tempo  $t_0$  de carregamento, deve-se verificar que:

$$\phi(t_0, t_0) = 0$$

logo,

$$f(t_0, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} \quad (2-13)$$

A equação (2-13) mostra que a função de fluência  $f(t, t_0)$ , quando calculada no instante do carregamento, leva ao valor das deformações elásticas imediatas:

$$\varepsilon(t_0, t_0) = \frac{\sigma_c}{E(t_0)} \quad (2-14)$$

A função de fluência  $f(t, t_0)$  pode ser interpretada, a partir da (2-09), como a deformação total num instante  $t$ , causada por um esforço unitário aplicado no instante  $t_0$ .

Por outro lado, aplicando-se a amostras idênticas e nas mesmas condições ambientais uma tensão unitária a partir do instante  $\tau$  ( $t_0 < \tau < t$ ), obtêm-se as curvas representadas na figura 2.4, que ilustram o efeito da 'idade' do material (envelhecimento) sobre o regime de fluência:

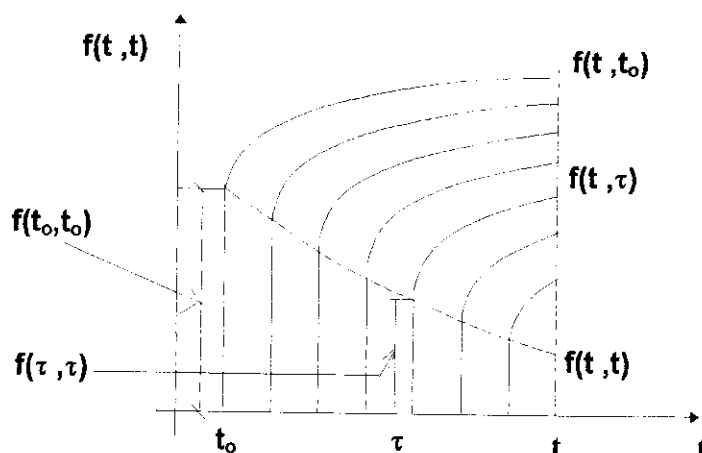


FIGURA 2.4 CURVAS DE FLUÊNCIA PARA DIFERENTES IDADES DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO

A forma das curvas  $f(t, \tau)$  obedece a quatro limitações matemáticas, listadas a seguir, que surgem da 2ª Lei da Termodinâmica e do fato de que o concreto endurece com o tempo e a taxa de endurecimento decresce para idades mais avançadas (CEB (1984)):

- i) para um dado instante  $\tau$  de carregamento, a deformação viscosa é monótona crescente com  $t$

$$\frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t} \geq 0;$$

- ii) para um dado instante  $\tau$  de carregamento, o incremento de deformação viscosa é sempre decrescente com  $t$

$$\frac{\partial^2 f(t, \tau)}{\partial t^2} \leq 0;$$

- iii) mantendo-se constante o intervalo de observação  $(t - \tau)$ , tem-se uma redução na deformação viscosa para tempos de carregamentos mais avançados

$$\left[ \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial \tau} \right]_{(t-\tau)} \leq 0;$$

- iv) mantendo-se constante o intervalo de observação  $(t - \tau)$ , tem-se uma redução no incremento de deformação viscosa, para tempos de carregamentos mais avançados

$$\left[ \frac{\partial^2 f(t, \tau)}{\partial \tau^2} \right]_{(t-\tau)} \geq 0$$

Admitindo-se válido o princípio de superposição, a deformação total, para uma história de carregamento variável no tempo, é obtida a partir do desenvolvimento que segue. Em particular, entendendo-se  $t_0$  como o instante de início de aplicação do carregamento, tem-se:

a) tensão constante no tempo, aplicada em  $t_0$ :

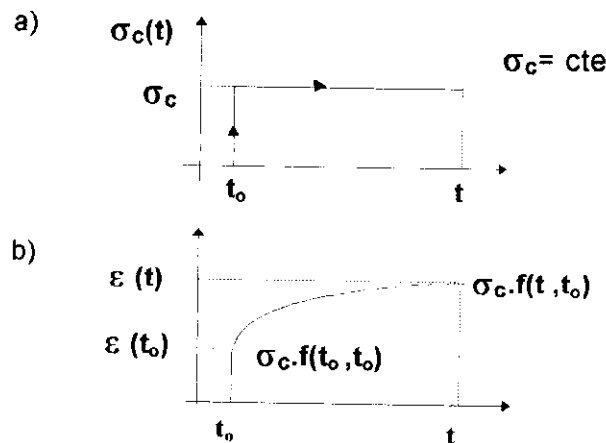


FIGURA 2.5a) CARREGAMENTO CONSTANTE EM  $(t_0, t)$   
 2.5b) RESPOSTA DE DEFORMAÇÃO EM  $(t_0, t)$

$$\epsilon(t, t_0) = \sigma_c \cdot f(t, t_0) \quad (2-15)$$

b) tensão variável no tempo, com dois passos de carregamento no intervalo  $(t, t_0)$ :

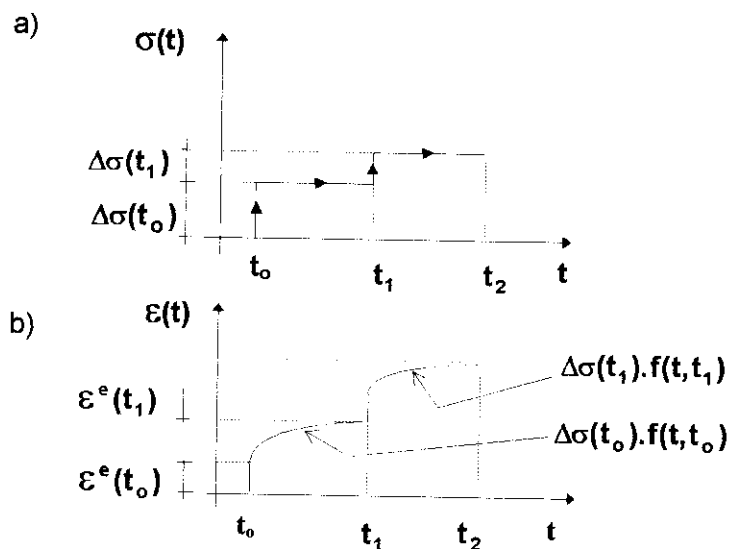


FIGURA 2.6a) CARREGAMENTO VARIÁVEL APLICADO EM  $t_0$  E  $t_1$   
 2.6b) RESPOSTA DE DEFORMAÇÃO PARA OS INTERVALOS  $(t_0, t_1)$  E  $(t_1, t_2)$

$$\begin{aligned} \tau = t_0 + \Delta t & \quad \sigma(\tau) = \sigma(t_0) + \Delta\sigma(\tau) \\ \text{para } t < t_1 & \quad \varepsilon(t, t_0) = \varepsilon^e(t_0) + \sigma(t_0).f(t, t_0) \\ \text{para } t > t_1 & \quad \varepsilon(t, t_0) = \varepsilon^e(t_0) + \varepsilon^e(t_1) + \Delta\sigma(t_0).f(t, t_0) + \Delta\sigma(t_1).f(t, t_1) \end{aligned}$$

em que,

$$\begin{aligned} \varepsilon^e(t_0) &= \Delta\sigma(t_0).f(t_0, t_0) & \Delta\sigma(t_0) &= \sigma(t_0) \\ \varepsilon^e(t_1) &= \Delta\sigma(t_1).f(t_1, t_1) & \Delta\sigma(t_1) &= \sigma(t_1) - \sigma(t_0) \end{aligned}$$

logo,

$$\varepsilon(t, t_0) = \Delta\sigma(t_0).f(t_0, t_0) + \Delta\sigma(t_1).f(t_1, t_1) + \Delta\sigma(t_0).f(t, t_0) + \Delta\sigma(t_1).f(t, t_1) \quad (2-16)$$

Considerando-se que,

$$\varepsilon^e(\tau) = \Delta\sigma(\tau).f(t, \tau) \quad \text{para } t = \tau$$

a (2-16) pode ser escrita como a somatória

$$\varepsilon(t, t_0) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1} \Delta\sigma(\tau).f(t, \tau) \quad (2-17)$$

com  $\tau$  representando as idades de aplicação do carregamento e  $t$  variando de forma discreta dentro do intervalo  $(t_0 - t)$ .

c) tensão variável no tempo, com k passos de carregamento, para um intervalo de tempo finito  $(t, t_0)$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \varepsilon^e(t_0) + \varepsilon^e(t_1) + \varepsilon^e(t_2) + \dots + \varepsilon^e(t_{k-1}) + \Delta\sigma(t_0).f(t, t_0) + \\ &\quad \Delta\sigma(t_1).f(t, t_1) + \Delta\sigma(t_2).f(t, t_2) + \dots + \Delta\sigma(t_{k-1}).f(t, t_{k-1}) \end{aligned} \quad (2-18)$$

em que,

$$\begin{aligned} \varepsilon^e(t_0) &= \Delta\sigma(t_0).f(t_0, t_0) & \Delta\sigma(t_0) &= \sigma(t_0) \\ \varepsilon^e(t_1) &= \Delta\sigma(t_1).f(t_1, t_1) & \Delta\sigma(t_1) &= \sigma(t_1) - \sigma(t_0) \\ \varepsilon^e(t_2) &= \Delta\sigma(t_2).f(t_2, t_2) & \Delta\sigma(t_2) &= \sigma(t_2) - \sigma(t_1) \\ &\vdots & &\vdots \\ \varepsilon^e(t_{k-1}) &= \Delta\sigma(t_{k-1}).f(t_{k-1}, t_{k-1}) & \Delta\sigma(t_{k-1}) &= \sigma(t_{k-1}) - \sigma(t_{k-2}) \end{aligned}$$

da equação (2-18), chamando-se de  $\tau$  os instantes de carregamento, resulta:

$$\varepsilon(t, t_0) = \sum_{\tau=t_0}^{t_k-1} \varepsilon^e(\tau) + \sum_{\tau=t_0}^{t_k-1} \Delta\sigma(\tau) \cdot f(t, \tau) \quad (2-19)$$

em que,

$$\varepsilon^e(\tau) = \Delta\sigma(\tau) \cdot f(t, \tau) \quad \text{para } t = \tau$$

logo,

$$\varepsilon(t, t_0) = \sum_{\tau=t_0}^{t_k-1} \Delta\sigma(\tau) \cdot f(t, \tau) \quad (2-20)$$

d) tensão continuamente variável no tempo:

No limite, quando  $\Delta t \rightarrow dt \Rightarrow \Delta\sigma \rightarrow d\sigma$ , os incrementos de tensões  $d\sigma$  passam a ser praticamente nulos, logo, os incrementos de deformações elásticas também tendem a um valor nulo:

$$d\varepsilon^e \rightarrow 0$$

Assim, a equação (2-19) pode ser escrita como:

$$\varepsilon(t, t_0) = \int_{t_0}^t d\varepsilon^e(\tau) + \int_{t_0}^t d\sigma(\tau) \cdot f(t, \tau) \quad (2-21)$$

por se tratar de carregamento contínuo  $\Rightarrow \int_{t_0}^t d\varepsilon^e(\tau) = 0$ .

Resultando,

$$\varepsilon(t, t_0) = \int_{t_0}^t d\sigma(\tau) \cdot f(t, \tau) \quad (2-22)$$

Para se levar em conta eventuais descontinuidades na história de carregamento, escreve-se a equação (2-22) sob a forma de uma Integral de Stieltjes:

$$\varepsilon(t, t_0) = \int_0^t d\sigma(\tau) \cdot f(t, \tau) \quad (2-23)$$

### 2.2.2 Modelagem da relaxação

*Dá-se o nome de relaxação ao processo de perda de tensão ao longo do tempo que acontece em um corpo, quando este é submetido a deformação constante.*

A figura 2.7 mostra uma curva de relaxação genérica. Observe que a tensão decai exponencialmente com o tempo, para uma deformação constante.

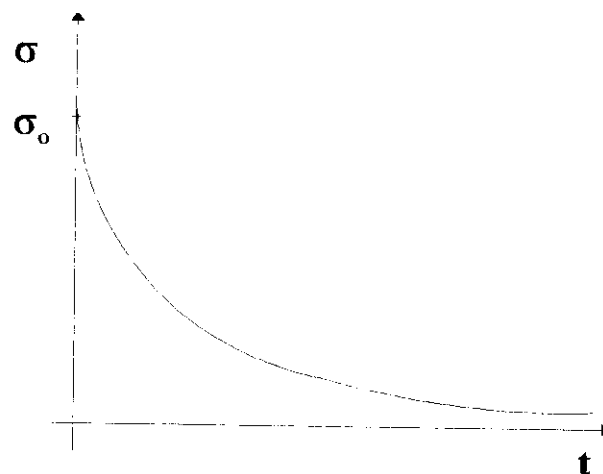


FIGURA 2.7 CURVA GENÉRICA DE RELAXAÇÃO

### Função de relaxação

Para a formulação da função de relaxação, considere-se um corpo de prova de concreto submetido a uma deformação uniaxial  $\epsilon_c$  (constante), a partir do instante  $t_0$ . Veja figura 2.8.

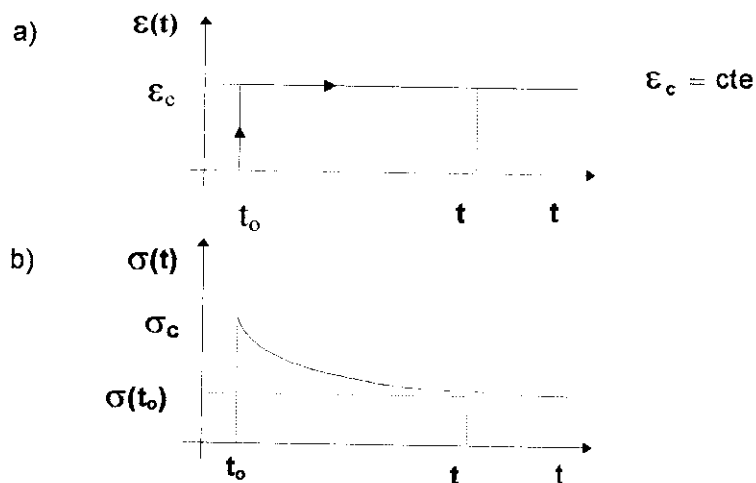


FIGURA 2.8a) HISTÓRIA DE DEFORMAÇÃO  
2.8b) CURVA DE TENSÃO RESULTANTE

A tensão medida no instante genérico  $t$  vale:

$$\sigma_c(t, t_0) = \varepsilon_c \cdot r(t, t_0) \quad (2-24)$$

em que,

$r(t, t_0)$  é a 'função de relaxação' definida como:

$$r(t, t_0) = E(t_0) - R(t, t_0) \quad (2-25)$$

Introduzindo-se o coeficiente de Relaxação:

$$\rho(t, t_0) = \frac{R(t, t_0)}{E(t_0)} \quad (2-26)$$

a (2-25) pode ser reescrita na forma:

$$r(t, t_0) = E(t_0)[1 - \rho(t, t_0)] \quad (2-27)$$

Fazendo-se coincidir o instante de medida com o instante  $t_0$  da aplicação de  $\varepsilon_c$ , deve-se verificar que:

$$\rho(t_0, t_0) = 0$$

logo,

$$r(t_0, t_0) = E(t_0) \quad (2-28)$$

e, portanto, obtém-se o valor da tensão no instante da aplicação da deformação:

$$\sigma_c(t_0, t_0) = \varepsilon_c \cdot E(t_0) \quad (2-29)$$

Dessa forma, a função de relaxação  $r(t, t_0)$  representa a tensão total num instante  $t$ , causada por uma deformação unitária aplicada no instante  $t_0$ . Aplicando-se a amostras idênticas e nas mesmas condições ambientais uma deformação unitária a partir do instante  $\tau$  ( $t_0 < \tau < t$ ), obtém-se as curvas representadas na figura 20.9.

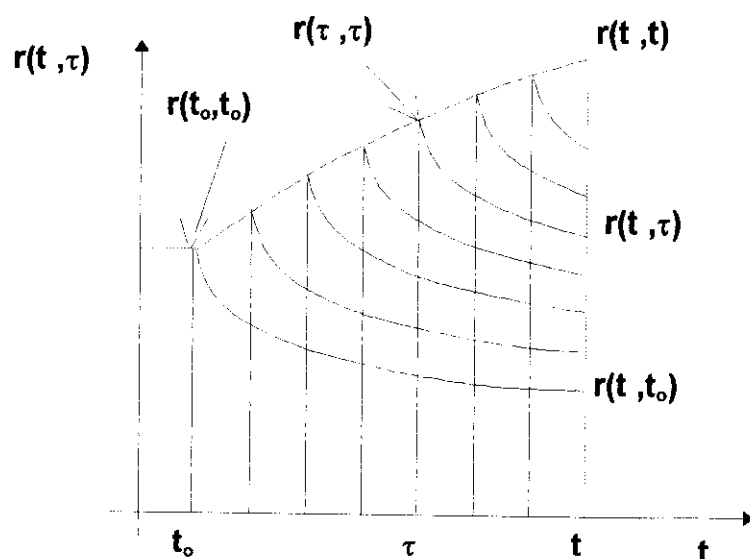


FIGURA 2.9 CURVAS DE RELAXAÇÃO PARA DIFERENTES IDADES DE APLICAÇÃO DA DEFORMAÇÃO

A função  $r(t, \tau)$  goza das seguintes propriedades determinadas experimentalmente:

- i) para um dado instante  $\tau$  de carregamento a tensão tende a diminuir com  $t$

$$\frac{\partial r(t, \tau)}{\partial t} \leq 0;$$

- ii) mantendo-se constante o intervalo de observação  $(t - \tau)$ , tem-se um aumento da relaxação para tempos de carregamentos mais avançados

$$\frac{\partial r(t, \tau)}{\partial \tau} \leq 0;$$

- iii) o módulo elástico é crescente com  $\tau$ , isto é, para concretos novos seguem-se tensões instantâneas menores do que para concretos mais velhos submetidos às mesmas deformações (constantes no tempo)

$$\left. \frac{\partial r(t, \tau)}{\partial \tau} \right|_{t=\tau} \geq 0.$$

Admitindo-se válido o princípio de superposição, no caso de uma deformação variável no tempo, a tensão total é obtida a partir do desenvolvimento que segue. Analogamente ao que foi feito para a fluência, tem-se:



a) para uma deformação constante aplicada em  $t_0$ :

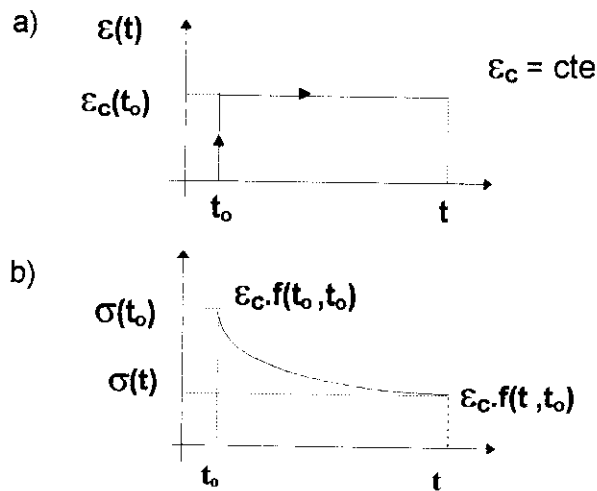


FIGURA 2.10a) DEFORMAÇÃO CONSTANTE EM  $(t_0, t)$   
2.10b) RESPOSTA DE TENSÃO EM  $(t_0, t)$

$$\sigma(t, t_0) = \epsilon(t) \cdot r(t, t_0) \quad (2-30)$$

b) para uma deformação variável no tempo, com  $k$  passos de aplicação no intervalo de tempo finito  $(t, t_0)$ :

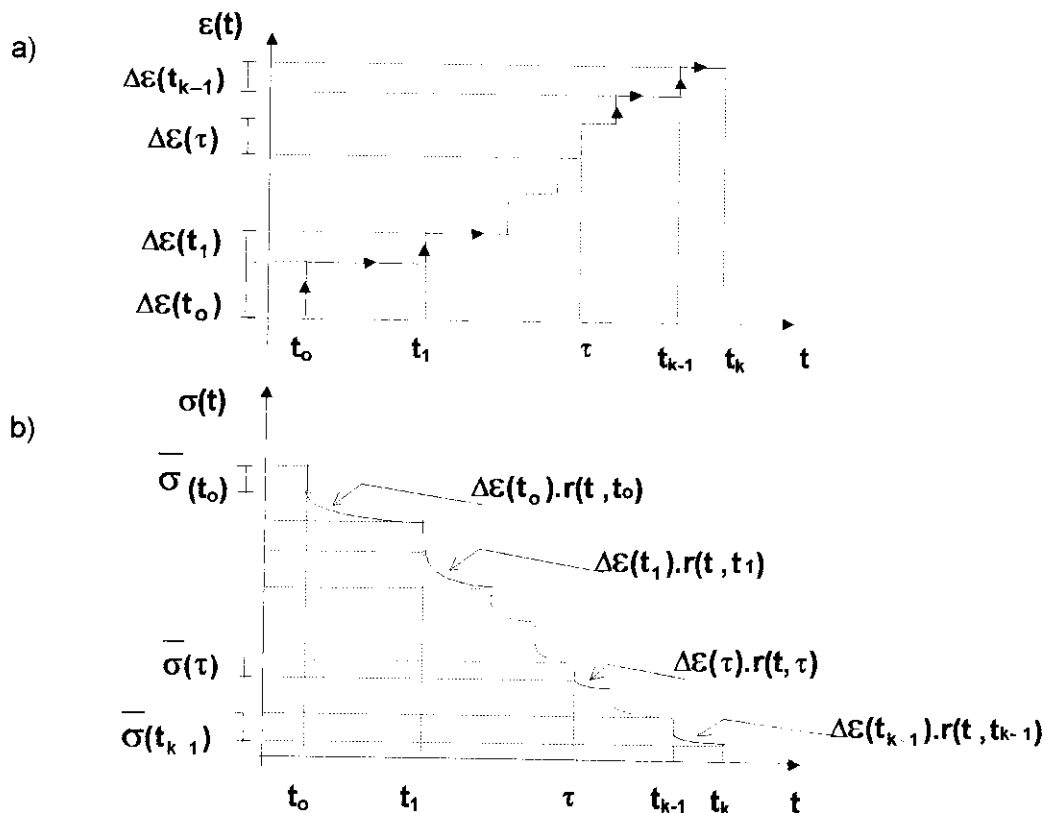


FIGURA 2.11a) DEFORMAÇÃO VARIÁVEL APLICADA EM  $t_k$   
INSTANTES DO INTERVALO  $(t_0, t)$   
2.11b) RESPOSTA DE TENSÃO PARA OS  $t_k$  INTERVALOS

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \bar{\sigma}(t_0) + \bar{\sigma}(t_1) + \bar{\sigma}(t_2) + \dots + \bar{\sigma}(t_{k-1}) + \Delta\varepsilon(t_0).r(t, t_0) + \\ & \Delta\varepsilon(t_1).r(t, t_1) + \Delta\varepsilon(t_2).r(t, t_2) + \dots + \Delta\varepsilon(t_{k-1}).r(t, t_{k-1}) \end{aligned} \quad (2-31)$$

em que,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t_0) &= \Delta\varepsilon(t_0).r(t_0, t_0) & \Delta\varepsilon(t_0) &= \varepsilon(t_0) \\ \bar{\sigma}(t_1) &= \Delta\varepsilon(t_1).r(t_1, t_1) & \Delta\varepsilon(t_1) &= \varepsilon(t_1) - \varepsilon(t_0) \\ \bar{\sigma}(t_2) &= \Delta\varepsilon(t_2).r(t_2, t_2) & \Delta\varepsilon(t_2) &= \varepsilon(t_2) - \varepsilon(t_1) \\ &\vdots & &\vdots \\ \bar{\sigma}(t_{k-1}) &= \Delta\varepsilon(t_{k-1}).r(t_{k-1}, t_{k-1}) & \Delta\varepsilon(t_{k-1}) &= \varepsilon(t_{k-1}) - \varepsilon(t_{k-2}) \end{aligned}$$

da equação (2-31), chamando de  $\tau$  os instantes de carregamento, resulta:

$$\sigma(t, t_0) = \sum_{\tau=t_0}^{t_{k-1}} \bar{\sigma}(\tau) + \sum_{\tau=t_0}^{t_{k-1}} \Delta\varepsilon(\tau).r(t, \tau) \quad (2-32)$$

em que,

$$\bar{\sigma}(\tau) = \Delta\varepsilon(\tau).r(t, \tau) \quad \text{para } t = \tau$$

logo,

$$\sigma(t, t_0) = \sum_{\tau=t_0}^{t_{k-1}} \Delta\varepsilon(\tau).r(t, \tau) \quad (2-33)$$

c) deformação continuamente variável no tempo:

No limite, quando  $\Delta t \rightarrow dt \Rightarrow \Delta\varepsilon \rightarrow d\varepsilon$ , os incrementos de tensões instantâneas tendem a se anularem:

$$\Rightarrow d\bar{\sigma} \rightarrow 0$$

Assim, a equação (2-32) pode ser escrita como:

$$\sigma(t, t_0) = \int_{t_0}^t d\bar{\sigma}(\tau) + \int_{t_0}^t d\varepsilon(\tau).r(t, \tau) \quad (2-34)$$

com

$$\int_{t_0}^t d\bar{\sigma}(\tau) = 0$$

$$\text{Resultando } \sigma(t, t_0) = \int_{t_0}^t d\varepsilon(\tau).r(t, \tau) \quad (2-35)$$

Para se levar em conta eventuais descontinuidades na história de carregamento, escreve-se a equação (2-35) sob a forma da Integral de Stieltjes:

$$\sigma(t, t_0) = \int_0^t d\varepsilon(\tau).r(t, \tau) \quad (2-36)$$

## 2.2.2 Relação entre as funções de Fluência e de Relaxação

A função de relaxação é de difícil determinação experimental. Assim, para fins de análise estrutural é de fundamental importância a formulação de uma relação entre as funções de fluência e de relaxação, de modo a permitir, mesmo de forma indireta, a consideração da relaxação.

Submetendo-se um corpo de prova a uma tensão unitária ( $\sigma_c = 1$ ) a partir do instante  $t_0$ , tem-se da equação (2-09) que:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = f(t, t_0) \quad (2-37)$$

Diferenciando-se e determinando-se a deformação no instante  $t_0$ , resultam, sucessivamente

$$\begin{aligned} d\varepsilon(\tau) &= \frac{\partial \varepsilon(t, t_0)}{\partial \tau} d\tau = \frac{\partial f(\tau, t_0)}{\partial \tau} d\tau \\ \sigma(t_0) &= E(t_0) \cdot \varepsilon(t_0) \quad \rightarrow \quad \varepsilon(t_0) = \frac{1}{E(t_0)} \end{aligned} \quad (2-38)$$

substituindo-se na equação (2-35)

$$1 = \frac{r(t, t_0)}{E(t_0)} + \int_{t_0}^t \frac{\partial f(\tau, t_0)}{\partial \tau} \cdot r(t, \tau) d\tau \quad (2-39)$$

Analogamente, submetendo-se um corpo de prova a uma deformação unitária ( $\varepsilon_c = 1$ ) a partir do instante  $t_0$ , tem-se da equação (2-24) que:

$$\sigma_c(t, t_0) = r(t, t_0) \quad (2-40)$$

Diferenciando-se e determinando-se a tensão no instante  $t_0$ , resultam, sucessivamente

$$\begin{aligned} d\sigma(\tau) &= \frac{\partial \sigma(t, t_0)}{\partial \tau} d\tau = \frac{\partial r(\tau, t_0)}{\partial \tau} d\tau \\ \sigma(t_0) &= E(t_0) \cdot \varepsilon(t_0) \quad \rightarrow \quad \sigma(t_0) = E(t_0) \end{aligned} \quad (2-41)$$

substituindo-se na equação (2-22)

$$1 = E(t_0) \cdot f(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial r(\tau, t_0)}{\partial \tau} \cdot f(t, \tau) d\tau \quad (2-42)$$

As equações (2-39) e (2-42) são integrais de Volterra e permitem a determinação de uma função quando se conhece a outra.

O fato de se ter suposto o módulo de Poisson constante no tempo permite, ainda, escrever as Equações Fundamentais da Viscoelasticidade Linear (2-21) e (2-34) para estados pluriaxiais, relacionando-se os 'vetores'  $\sigma$  e  $\varepsilon$  através da matriz de flexibilidade dos materiais e da integral de superposição (capítulo 3).

Apresentadas as funções de fluência e relaxação sob a forma de integrais de Stieltjes, para estados uniaxiais de esforços, e suas correlações, direciona-se, então, o presente trabalho para o estudo da função de fluência, que será empregada no código de cálculo TRELVE.FOR para a determinação das deformações viscoelásticas em estruturas de concreto.

### 2.2.3 Modelos simplificados de fluência

De uma forma geral, a partir do que foi visto anteriormente, pode-se descrever o comportamento viscoelástico do concreto por uma função  $f$  desenvolvida em termos das características elásticas ( $f_{imed}$  - resposta imediata) e viscosas ( $f_{tempo}$  - resposta no tempo) do material:

$$f = f_{imed} + f_{tempo} \quad (2-43)$$

Ambas as repostas, imediata ou viscosa, dependem do instante do carregamento  $t_0$  e podem ser observadas nas figuras abaixo:

$$f_{imed} = f(t_0) \quad (2-44)$$

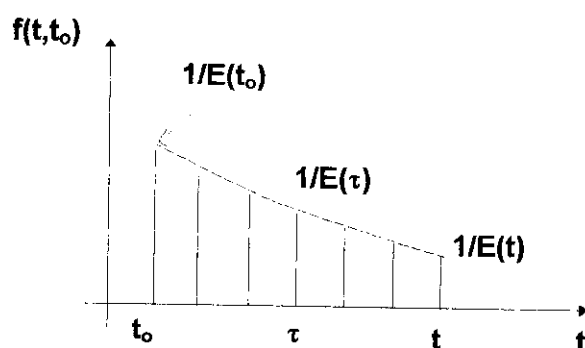
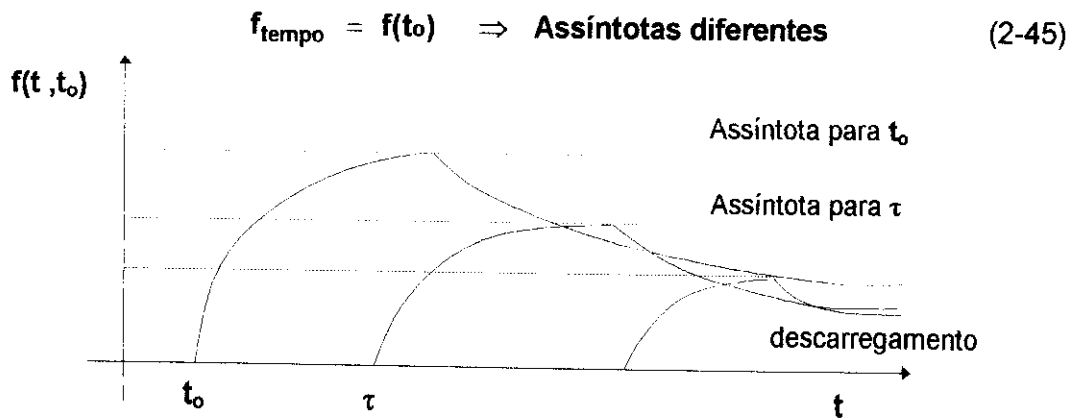


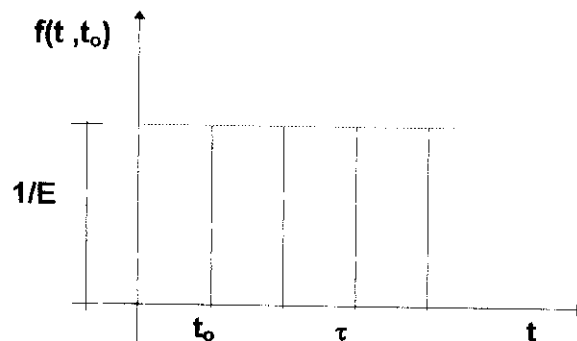
FIGURA 2.12 RESPOSTAS IMEDIATAS DO CONCRETO PARA DIFERENTES IDADES DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO



**FIGURA 2.13** RESPOSTAS VISCOSAS DO CONCRETO PARA DIFERENTES IDADES DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO

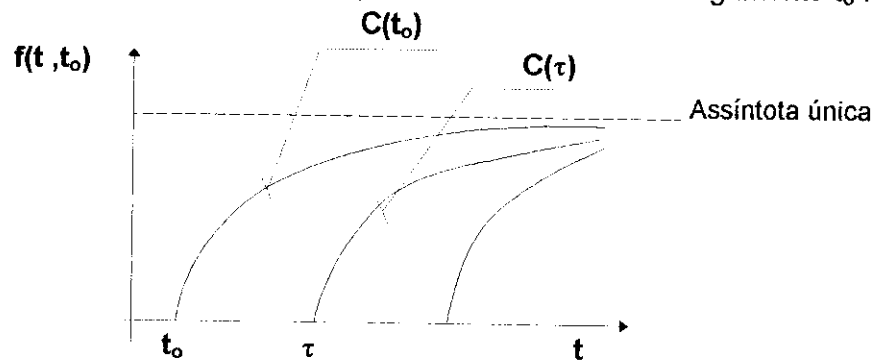
Com o objetivo de obter um modelo de aplicação viável, duas simplificações são sugeridas:

1ª) A resposta imediata não depende do instante do carregamento  $t_0$  :



**FIGURA 2.14** 1ª SIMPLIFICAÇÃO - RESPOSTA IMEDIATA INDEPENDENTE DO INSTANTE DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO

2ª) A resposta viscosa não depende do instante do carregamento  $t_0$  :



**FIGURA 2.15** 2ª SIMPLIFICAÇÃO - RESPOSTA VISCOSA INDEPENDENTE DO INSTANTE DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO

De acordo com tais simplificações, duas Teorias são apresentadas:

### Teoria da Hereditariedade - 1º Modelo Simplificado

Supondo que o concreto mantenha inalteradas no tempo suas características mecânicas, isto é,  $E(t_0) = E$ , no sentido de que a idade do concreto não tem influência sobre a resposta viscoelástica (1ª e 2ª Simplificações), chega-se a uma equação do tipo:

$$f(t, t_0) = \frac{1}{E} + C(\Delta t) \quad (2-46)$$

Desse modo, o aumento de deformação viscosa depende exclusivamente da duração do carregamento  $\Delta t$ , ou seja, mantendo-se constante a duração do carregamento, obtêm-se incrementos de deformação iguais para diferentes instantes de carregamentos. A forma da curva de fluência é a mesma para qualquer idade de aplicação do carregamento, bastando dar-se uma translação horizontal na primeira para se obter as demais. O valor da função de fluência para  $t \rightarrow \infty$  é o mesmo para todas as curvas carregadas em qualquer instante. Observa-se, também, que a hipótese do módulo elástico constante resulta em uma total recuperação da deformação viscosa no tempo para o caso de descarregamento.

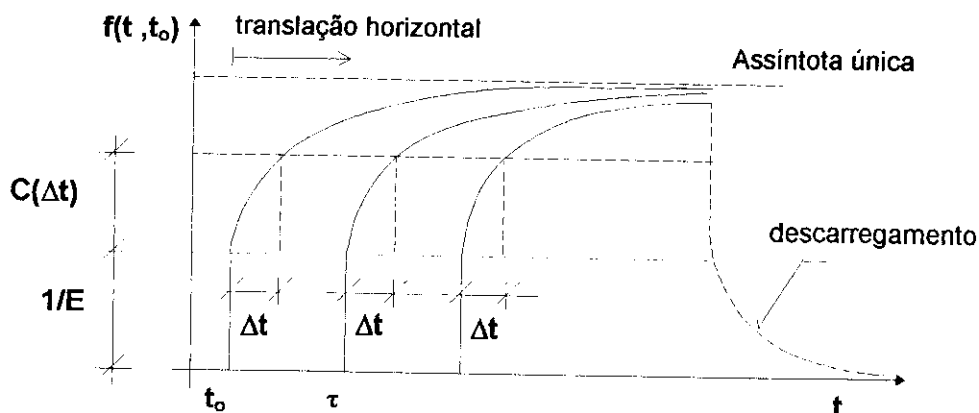


FIGURA 2.16 TEORIA DA HEREDITARIEDADE

Essa teoria não abrange o comportamento efetivo do concreto, sendo, em princípio, coerente com o caso de concretos muito velhos, para os quais os efeitos ligados à idade do carregamento são reduzidos. Considera-se que ela seja inconsistente para concretos carregados com idade menor que um ano, pois nesse período os efeitos da fluência são mais acentuados, tornando-se inadequado tal processo.

Entretanto, mesmo para os concretos velhos, ainda há uma contradição com relação ao comportamento real: concretos velhos perdem a capacidade de recuperação da deformação viscosa total.

Como se verá mais adiante, o modelo reológico que melhor representa o aspecto de não recuperação da deformação viscosa do concreto velho é o de Maxwell, do qual se consegue extrair, com facilidade, a relação (2-46).

### Teoria do Envelhecimento - 2º Modelo Simplificado

Neste caso, faz-se a função de fluência depender apenas do instante do carregamento  $E = E(t_0)$ . Isto faz com que os efeitos de envelhecimento do concreto sejam superestimados, não havendo nenhuma recuperação das deformações viscosas com o tempo.

$$f(t, t_0) = \frac{1}{E} + C(t) - C(t_0) \quad (2-47)$$

O aumento das deformações viscosas depende apenas da duração do carregamento (2ª Simplificação), porém, as deformações elásticas diminuem para idades de carregamentos mais avançados, devido ao aumento do valor do módulo de elasticidade longitudinal com o tempo.

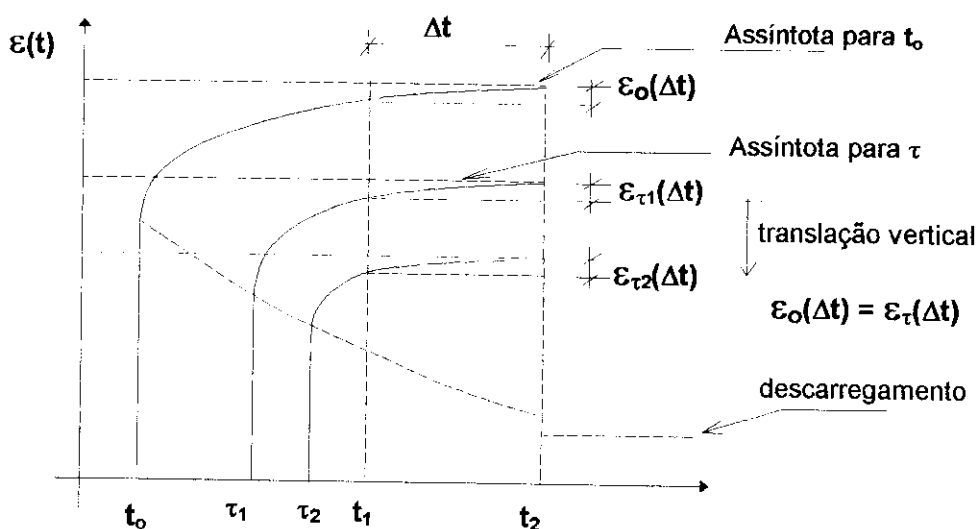


FIGURA 2.17 TEORIA DO ENVELHECIMENTO

Da figura 2.17 pode-se observar que os incrementos de deformações viscosas se mantêm constantes para intervalos de observação constantes, independentemente da idade de carregamento do concreto.

$$\varepsilon_1(t) - \varepsilon_1(t_1) = \varepsilon_0(t) - \varepsilon_0(t_1)$$

Esse modelo permite simular, somente, o comportamento do concreto novo ( $E =$  variável), desde que se tome medidas em tempos suficientemente distantes do instante do carregamento (para que se possa verificar a variação de  $E$ ). Para concretos velhos a teoria subestima o valor final da fluência, quando comparada a resultados experimentais. Existe, também, uma contradição no fato do modelo não permitir nenhuma recuperação da deformação viscosa com o tempo, visto que a recuperação total da deformação viscosa é uma característica do concreto novo. O modelo que melhor representa o comportamento do concreto novo é o Modelo Combinado de Kelvin, do qual se consegue extrair a equação (2-47).

O CEB (1984) apresenta o método de Dischinger generalizado que considera uma combinação de termos baseada nestas duas teorias.

### 2.3 Modelos Reológicos Unidimensionais

Com o objetivo de discutir um pouco mais os aspectos relacionados à modelagem da resposta viscoelástica, apresenta-se, no que segue, a formulação de modelos unidimensionais com base na Reologia dos Materiais.

Os materiais apresentam, normalmente, comportamento muito complexo, com variações consideráveis dependendo das solicitações, das condições do meio-ambiente e de confinamento a que são submetidos. Objetivando fornecer uma simulação para o comportamento dos materiais, a Reologia estabelece modelos unidimensionais básicos que permitem uma melhor aproximação na análise estrutural, a partir de combinações deles.

- Modelos Básicos: Elástico; Plástico e Viscoso.
- Modelos Combinados: Elastoplástico; Viscoelástico; Viscoplastico e Elastoviscoplastico.

Normalmente, analisa-se o diagrama tensão-deformação correspondente a um ensaio de tração simples, para se obter a diferenciação entre os modelos reológicos. Fundamentalmente, analisa-se o regime de deformações em uma situação alternada de carga e descarga.



### 2.3.1 Modelos Básicos

#### Modelo Elástico

O modelo elástico é caracterizado pelo aparecimento de deformações imediatas numa situação de carga.

As deformações elásticas surgem simultaneamente com as tensões e permanecem constantes no tempo, desde que as tensões também permaneçam. Elas desaparecem juntamente com as tensões, numa situação de descarga, sem deixar qualquer valor residual.

A relação tensão-deformação, no regime elástico, pode ser linear ou não-linear.

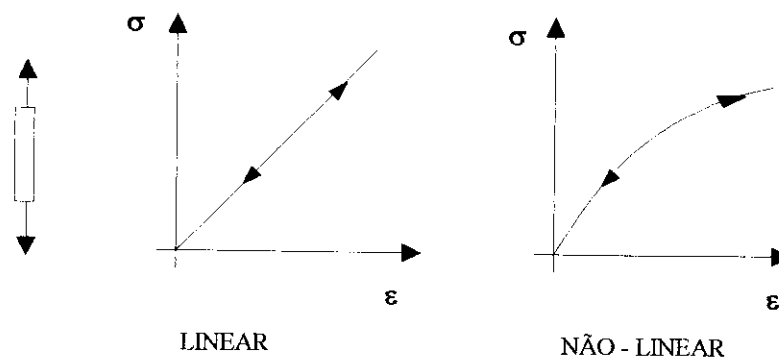


FIGURA 2.18 REGIME ELÁSTICO

No regime elástico linear, a relação tensão-deformação é dada pela Lei de Hooke ( $\sigma = E\epsilon$ ), em que  $E$  é o módulo de elasticidade que caracteriza o material.

O regime elástico não-linear é caracterizado pelo módulo de elasticidade  $E$  variável ao longo de toda a curva tensão-deformação.

Em Reologia representa-se a elasticidade por uma mola, com rigidez igual ao módulo de elasticidade do material, no caso linear.

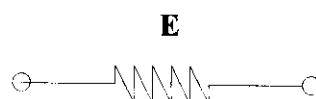


FIGURA 2.19 MOLA - MODELO ELÁSTICO

### Modelo Plástico

O modelo plástico é caracterizado pelo aparecimento de deformações residuais (não reversíveis) numa etapa de descarga.

As deformações plásticas aparecem a partir de um determinado valor de tensão  $\sigma_y$ , que é denominado tensão de escoamento do material. Neste modelo, até ser atingida  $\sigma_y$  o material permanece indeformável.

No Regime Plástico-Perfeito, a tensão de escoamento coincide com a de colapso. Atingida essa tensão, as deformações crescem de forma ilimitada. Já no Regime Plástico com Encruamento, atingida a tensão de escoamento, ainda pode-se ter variação de tensão com correspondentes acréscimos de deformação.

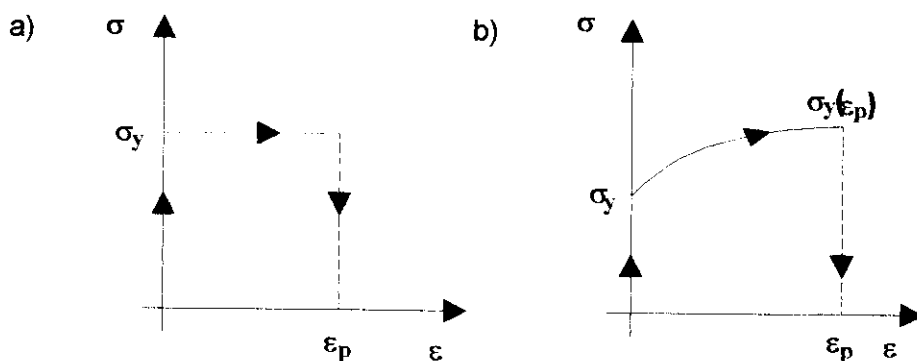


FIGURA 2.20a) REGIME RÍGIDO-PLÁSTICO OU PLÁSTICO PERFEITO  
 2.20b) REGIME PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO POSITIVO

Para  $\sigma < \sigma_y \rightarrow \epsilon = 0$

Para  $\sigma \geq \sigma_y \rightarrow \epsilon = \epsilon_p$

Representa-se a plasticidade por um sólido pesado que escorrega sobre uma superfície, sendo a tensão necessária para vencer o atrito igual à tensão de escoamento.

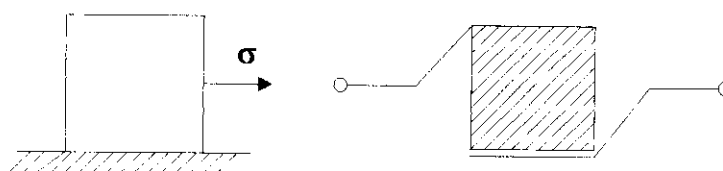


FIGURA 2.21 BLOCO SOBRE SUPERFÍCIE - MODELO PLÁSTICO

## Modelo Viscoso

A viscosidade é uma característica inerente aos líquidos que, no entanto, também se manifesta nos sólidos, pelo aparecimento de deformações não imediatas, isto é, que se desenvolvem ao longo do tempo, mesmo que as tensões permaneçam constantes ( $\sigma_0$ ).

Representa-se esse modelo pelo uso do amortecedor (pistão com êmbolo perfurado), que armazena toda a energia aplicada em um determinado instante e dissipa-a ao longo do tempo. Para levar em consideração o efeito da variável tempo, que é fundamental neste modelo, introduz-se o conceito de velocidade de deformação, que surge quando se aplica a tensão e leva, no decorrer do tempo, a deformações não-imediatas e irreversíveis. Diz-se que a relação entre a tensão aplicada e a velocidade de deformação é constante e igual ao coeficiente de viscosidade do material.

A Relação Fundamental da viscosidade é  $\sigma = \eta \dot{\epsilon}$ . Em que  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade do material e  $\dot{\epsilon}$  é a velocidade de deformação.

Da Relação Fundamental, derivam duas situações particulares: carregamento sob tensão constante e descarregamento, quando a tensão se anula.

Supondo que na fase de carregamento a tensão  $\sigma$  permaneça constante e igual a  $\sigma_0$  e considerando-se, ainda, que em  $t = 0 \rightarrow \epsilon(0) = 0$ . A relação que permite a simulação da deformação ao longo do tempo resulta

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} t \quad (2-48)$$

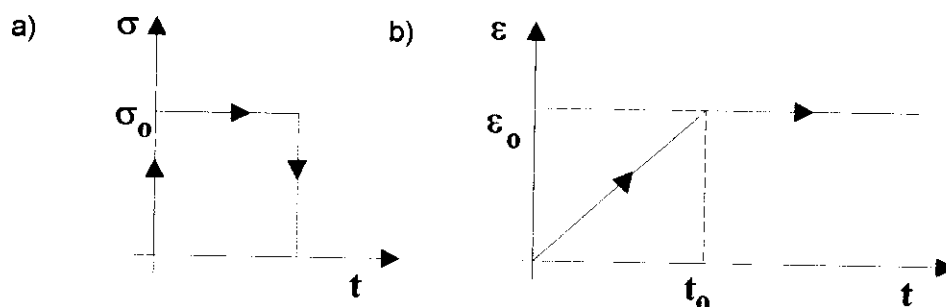


FIGURA 2.22a) HISTÓRIA DE CARREGAMENTO  
2.22b) RESPOSTA DE DEFORMAÇÃO

Considere-se, então, uma etapa de descarregamento em que a tensão  $\sigma_0$  é removida. Da relação fundamental, tem-se que a velocidade de deformação também se anula ( $\dot{\epsilon} = 0$ ), de modo que  $\epsilon = \text{cte}$ , isto é, aparece uma deformação não reversível que, no entanto, é diferente daquela do modelo plástico, pelo fato de não ser imediata (ver figura 2.22).

A representação reológica da viscosidade é um pistão com êmbolo perfurado, imerso em líquido viscoso.

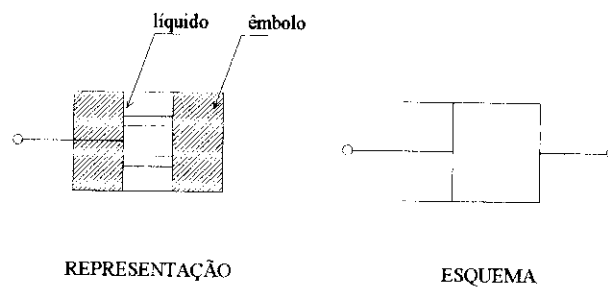


FIGURA 2.23 PISTÃO IMERSO EM LÍQUIDO VISCOZO - MODELO VISCOZO

### 2.3.2 Modelos Combinados

#### Modelos Elastoplásticos

Esses modelos podem ser representados por **associações de mola** (que representa o modelo Elástico) e **sólido** (que representa o modelo Plástico).

#### Modelo Elástico Perfeitamente Plástico

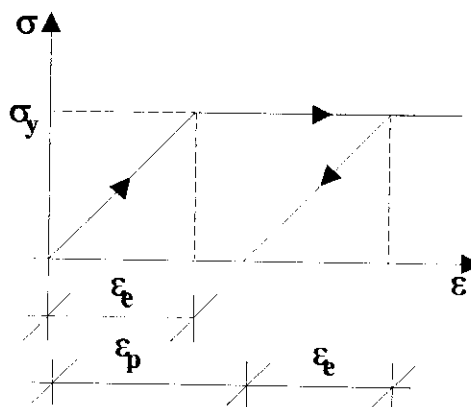


FIGURA 2.24 REGIME ELASTOPLÁSTICO PERFEITO

Representa-se este modelo pelo arranjo em série da mola com o sólido.

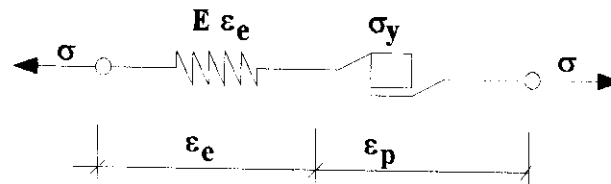


FIGURA 2.25 MODELO ELASTOPLÁSTICO PERFEITO

A principal característica deste arranjo é que a tensão nos dois elementos é a mesma, enquanto que a deformação do conjunto é a soma das deformações da mola e do sólido. Uma vez atingida a tensão de escoamento  $\sigma_y$ , o bloco desliza indefinidamente. As relações principais são:

$$\sigma_m = \sigma_s = \sigma$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \tag{2-49}$$

Para  $\sigma < \sigma_y \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e \rightarrow \varepsilon_p = 0$

Para  $\sigma \geq \sigma_y \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$

**Modelo Plástico com Encruamento Linear**

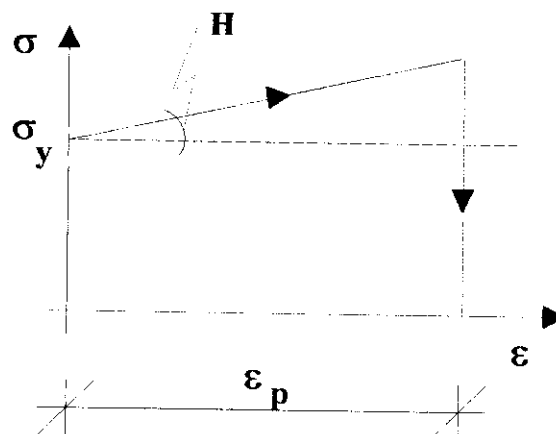


FIGURA 2.26 REGIME PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR

Representa-se esse modelo pelo arranjo em paralelo da mola com o sólido.

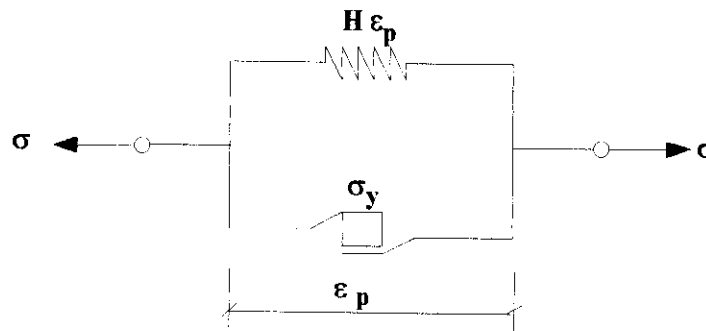


FIGURA 2.27 MODELO PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR

As características desse arranjo são inversas às do arranjo em série. Neste caso, a deformação da mola é sempre igual à deformação do sólido, enquanto que a tensão do conjunto é a soma das contribuições dos dois elementos. O elemento mola, nesse arranjo, caracteriza o encruamento ( $H$ ) do material, determinando a razão de crescimento constante da deformação. Em uma etapa de carregamento, se houver uma descarga e em seguida uma nova carga, a tensão para a qual surgem novos acréscimos de deformação plástica é diferente de  $\sigma_y$ , sendo função de  $\epsilon_p$ . As relações que representam este modelo são:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_s = H\epsilon_p + \sigma_y$$

$$\epsilon_m = \epsilon_s = \epsilon$$

$$H = \frac{\sigma - \sigma_y}{\epsilon_p} \tag{2-50}$$

Para  $\sigma < \sigma_y \rightarrow \epsilon = 0$

Para  $\sigma \geq \sigma_y \rightarrow \epsilon = \epsilon_p$

**Modelo Elastoplástico com Encruamento Linear**

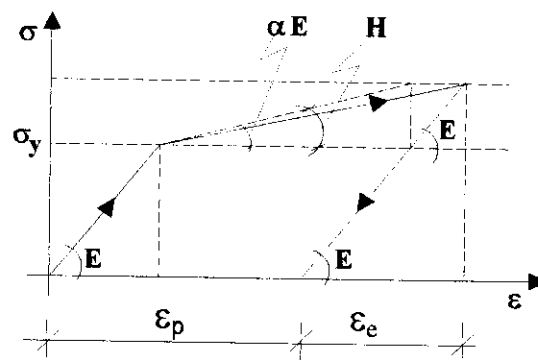


FIGURA 2.28 REGIME ELASTOPLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR

Representa-se esse modelo pelo arranjo em série de uma mola de constante E com o modelo Plástico com Encruamento Linear.

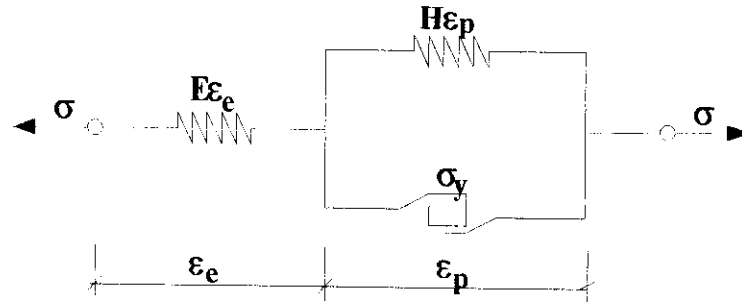


FIGURA 2.29 MODELO ELASTOPLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR

Esse arranjo fica caracterizado pela soma das contribuições de deformação de cada conjunto. Valem, neste caso, as seguintes relações:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

$$\sigma = \sigma_e = \sigma_p$$

$$H = \frac{\sigma - \sigma_y}{\varepsilon_p} = \frac{\sigma - \sigma_y}{\varepsilon - \varepsilon_e} = \frac{\sigma - \sigma_y}{\frac{\sigma - \sigma_y}{\alpha E} - \frac{\sigma - \sigma_y}{E}} = \frac{\alpha E}{1 - \alpha} \quad (2-51)$$

Para  $\sigma < \sigma_y \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e$

Para  $\sigma \geq \sigma_y \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$

### Modelos Viscoelásticos

Esses modelos podem ser representados por associações de mola (que representa o modelo Elástico) e amortecedor (que representa o modelo Viscoso).

#### Modelo de Maxwell

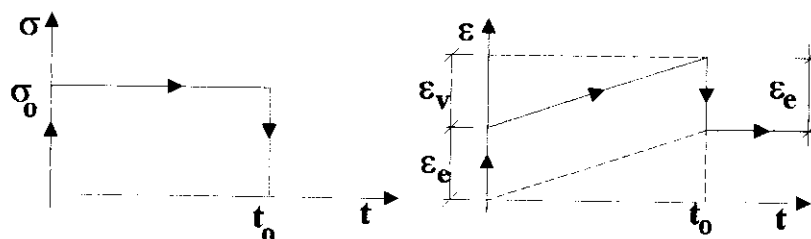


FIGURA 2.30 REGIME VISCOELÁSTICO DE MAXWELL

Representa-se esse modelo pelo arranjo em série da mola com o amortecedor.

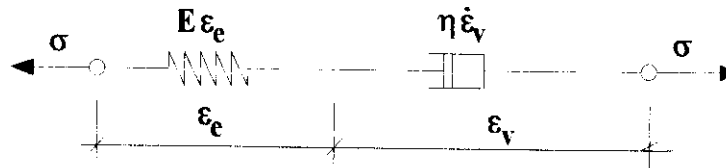


FIGURA 2.31 MODELO VISCOELÁSTICO DE MAXWELL - ASSOCIAÇÃO EM SÉRIE

Esse arranjo fica caracterizado pela igualdade de tensões nos dois elementos e a deformação total como a soma das deformações de cada elemento.

$$\sigma = \sigma_m = \sigma_a$$

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_v$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_v = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Integrando-se a equação diferencial do modelo e fazendo-se a tensão constante,  $\sigma = \sigma_0$ , obtém-se

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0 t}{\eta} \tag{2-52}$$

equação que descreve a fluência, para o modelo de Maxwell, que pode ser observada na figura 2.30. Note-se também que, em uma situação de descarregamento, toda a deformação elástica é recuperada instantaneamente, ficando, como resíduo, apenas a deformação viscosa.

**Modelo de Kelvin**

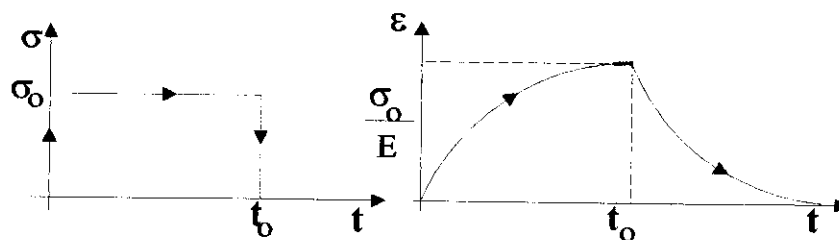


FIGURA 2.32 REGIME VISCOELÁSTICO DE KELVIN



Representa-se esse modelo pelo arranjo em paralelo da mola com o amortecedor.

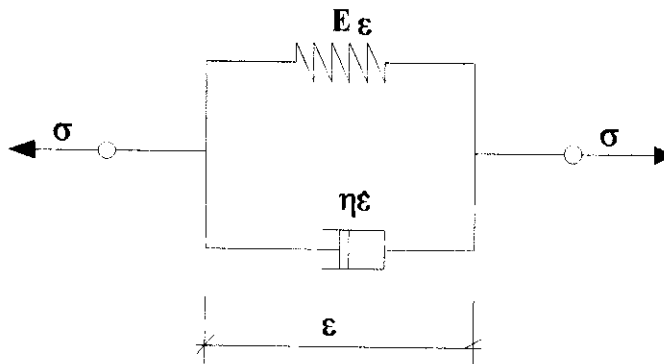


FIGURA 2.33 MODELO VISCOELÁSTICO DE KELVIN - ASSOCIAÇÃO EM PARALELO

Esse arranjo fica caracterizado pela igualdade de deformações dos dois elementos e a tensão como a soma das tensões de cada elemento.

$$\varepsilon = \varepsilon_m = \varepsilon_v = \varepsilon_e$$

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$$

Integrando-se a equação diferencial e fazendo-se a tensão constante,  $\sigma = \sigma_0$ , obtém-se

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - e^{-\frac{Et}{\eta}} \right] \tag{2-53}$$

equação que descreve a fluência, para o modelo de Kelvin, ilustrada na figura 2.32. Na fase de carregamento, o amortecedor armazena toda a energia e a transfere para a mola com o decorrer do tempo, retardando o aparecimento das deformações elásticas. Em uma posterior fase de descarregamento, observa-se que as deformações são totalmente reversíveis ao longo do tempo.

**Modelo Combinado de Kelvin ou Modelo de Boltzmann**

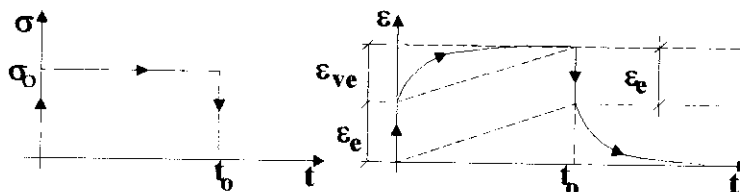


FIGURA 2.34 REGIME VISCOELÁSTICO DE BOLTZMANN

Representa-se esse modelo pelo arranjo em série de uma mola com o modelo de Kelvin.

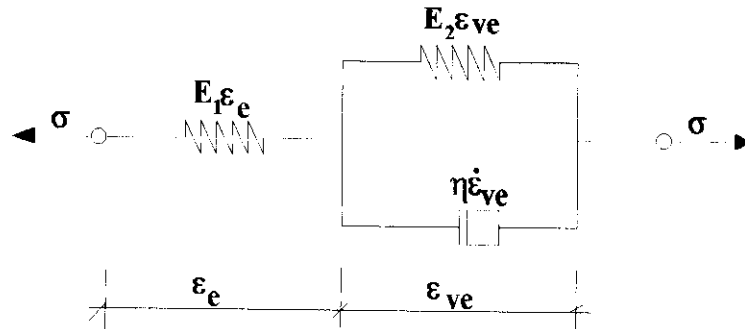


FIGURA 2.35 ASSOCIAÇÃO EM SÉRIE MOLA-KELVIN

Esse arranjo preserva as características do modelo de Kelvin, com a vantagem adicional de permitir a simulação de deformações elásticas instantâneas. Fica caracterizado pela igualdade de tensões nos dois conjuntos (Mola - Kelvin) e a deformação total como a soma das deformações de cada conjunto. As relações que governam o modelo são:

$$\sigma = \sigma_m = \sigma_K = \sigma_{ve} = E_1 \epsilon_e = E_2 \epsilon_{ve} + \eta \dot{\epsilon}_{ve}$$

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_{ve}$$

Resolvendo-se a equação diferencial e fazendo-se a tensão constante,  $\sigma = \sigma_0$ , obtém-se

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \left[ \left( \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \right) - \frac{e^{-\frac{E_2 t}{\eta}}}{E_2} \right] \quad (2-54)$$

equação que descreve a evolução da deformação com o tempo, para o modelo combinado de Kelvin, que pode ser observada na figura 2.34. Note também que, em uma situação de descarregamento, toda a deformação elástica é recuperada instantaneamente e a deformação viscoelástica é recuperada ao longo do tempo.

**Modelo de Burger**

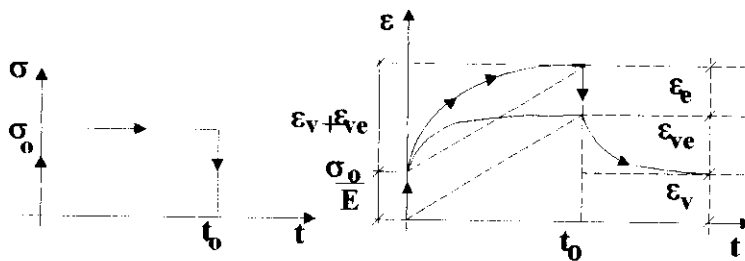


FIGURA 2.36 REGIME VISCOELÁSTICO DE BURGER

Representa-se esse modelo pelo arranjo em série do modelo de Maxwell com o de Kelvin.

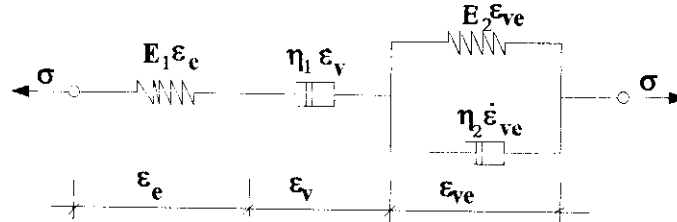


FIGURA 2.37 ASSOCIAÇÃO EM SÉRIE MAXWELL- KELVIN

Esse arranjo fica caracterizado pela igualdade de tensões nos dois conjuntos (Maxwell - Kelvin) e a deformação total como a soma das deformações de cada conjunto.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_M = \sigma_K = \sigma_e = \sigma_v = \sigma_{ve} \\ \sigma &= E_1 \epsilon_e = \eta_1 \dot{\epsilon}_v = E_2 \epsilon_{ve} + \eta_2 \dot{\epsilon}_{ve} \\ \epsilon &= \epsilon_e + \epsilon_v + \epsilon_{ve} \end{aligned}$$

Resolvendo-se a equação diferencial e fazendo-se a tensão constante,  $\sigma = \sigma_0$ , obtém-se

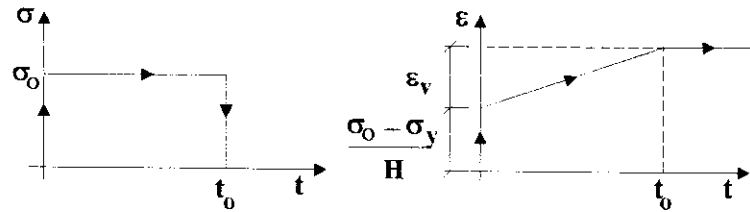
$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0 t}{\eta_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} \left[ 1 - e^{-\frac{E_2 t}{\eta_2}} \right] \quad (2-55)$$

equação que descreve a evolução da deformação com o tempo, para o modelo de Burger, que pode ser observada na figura 2.36. Note também que, em uma situação de descarregamento, toda a deformação elástica é recuperada instantaneamente, a deformação viscoelástica é recuperada ao longo do tempo e a deformação viscosa permanece como resíduo no sistema.

### Modelos Viscoplasticos

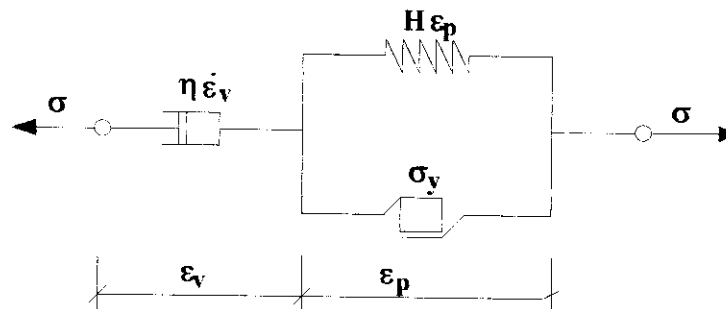
Esses modelos podem ser representados por associações de sólido (que representa o modelo Plástico) e amortecedor (que representa o modelo Viscoso).

**Associação em Série**



**FIGURA 2.38 REGIME VISCOPLÁSTICO LINEAR**

Representa-se esse modelo pelo arranjo em série do modelo plástico com encruamento linear com o amortecedor.



**FIGURA 2.39 ASSOCIAÇÃO EM SÉRIE- AMORTECEDOR / PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR**

Esse arranjo fica caracterizado pela igualdade de tensões nos dois conjuntos e a deformação total como a soma das deformações de cada conjunto.

$$\sigma = \sigma_p = \sigma_v = H\epsilon_p + \sigma_y = \eta \dot{\epsilon}_v$$

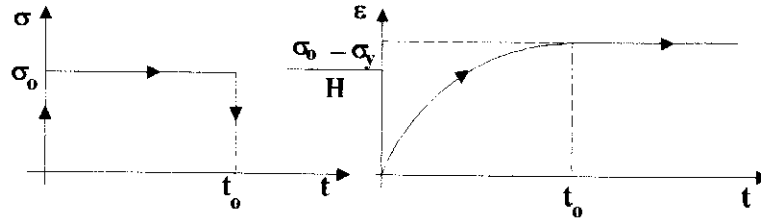
$$\epsilon = \epsilon_p + \epsilon_v$$

Resolvendo-se a equação diferencial e fazendo-se a tensão constante,  $\sigma = \sigma_0 > \sigma_y$ , obtém-se

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0 - \sigma_y}{H} + \frac{\sigma_0}{\eta} t \tag{2-56}$$

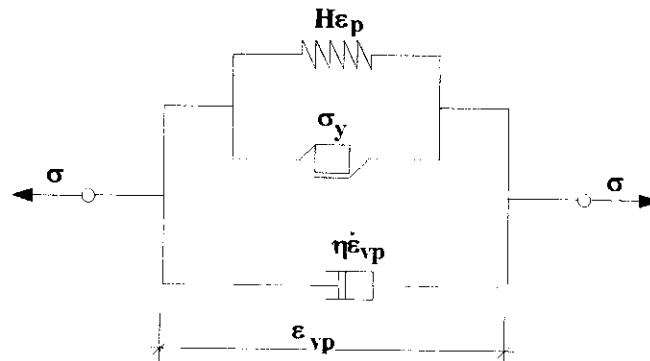
equação que descreve a evolução da deformação com o tempo, que pode ser observada na figura 2.38, onde se nota, também, a irreversibilidade da mesma.

**Associação em Paralelo**



**FIGURA 2.40 REGIME VISCOPLÁSTICO NÃO-LINEAR**

Representa-se esse modelo pelo arranjo em paralelo do modelo plástico com encruamento linear com o amortecedor.



**FIGURA 2.41 ASSOCIAÇÃO EM PARALELO - AMORTECEDOR / PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR**

Esse arranjo fica caracterizado pela igualdade de deformações nos dois conjuntos e a tensão total aplicada como a soma das tensões em cada elemento.

$$\epsilon = \epsilon_p = \epsilon_v = \epsilon_{vp}$$

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_v = H\epsilon_p + \sigma_y + \eta\dot{\epsilon}_v$$

Resolvendo-se essa equação diferencial e fazendo-se a tensão constante,  $\sigma = \sigma_0 > \sigma_y$ , obtém-se

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0 - \sigma_y}{H} \left[ 1 - e^{-\frac{Ht}{\eta}} \right] \tag{2-57}$$

a equação que descreve a evolução da deformação com o tempo, que pode ser observada na figura 2.40, onde se nota, também, a irreversibilidade das mesmas. Na fase de carregamento, o amortecedor armazena toda a energia e a transfere para o conjunto plástico, com o decorrer do tempo, retardando o aparecimento das deformações plásticas.

## Comentários sobre os Modelos Reológicos

Do ponto de vista prático, a importância da formulação dos modelos reológicos é indiscutível, já que eles permitem a obtenção de relações constitutivas para simulação do comportamento de materiais bastante complexos, como o concreto.

A Análise Não-Linear Física leva em consideração essas relações constitutivas para prever o comportamento de estruturas em fase de utilização e em regime de ruptura (o que se torna possível através dos modelos viscoso e plástico, respectivamente).

Os modelos que permitem uma simulação mais aproximada da resposta do concreto no tempo, são os viscoelásticos. É interessante que se comente resumidamente, neste ponto, as características de cada modelo apresentado, no que se refere às situações de **Fluência primária e secundária**.

O **modelo combinado de Kelvin** representa uma boa aproximação para a região de fluência primária, pois ele apresenta deformações imediatas (elásticas) e variáveis ao longo do tempo (viscoelásticas) que, em caso de descarregamento, são totalmente reversíveis.

O **modelo de Maxwell** fornece uma boa simulação para a região de fluência secundária, dadas as características de deformação residual que ele apresenta.

O **modelo de Burger** é mais completo, no sentido de que permite representar a região de fluência primária e a região de fluência secundária.

## Capítulo 3 - Métodos de Integração do Modelo Constitutivo Viscoelástico

Neste capítulo, apresenta-se a forma generalizada do modelo constitutivo para o estado de solitação pluriaxial, extraindo-se as equações para a determinação da fluência e da relaxação correspondentes a este estado de esforços.

Inicialmente, escreve-se as equações fundamentais da viscoelasticidade em notação matricial. Em seguida, são apresentados dois métodos de integração do modelo constitutivo, dando-se ênfase ao método dos núcleos degenerados que é o empregado no programa de cálculo de treliças planas, desenvolvido para as aplicações numéricas apresentadas ao final deste trabalho.

### 3.1 Forma Matricial das Equações Fundamentais da Viscoelasticidade Linear

Com o objetivo de facilitar o emprego das equações aqui apresentadas, uma abordagem matricial é introduzida.

Consideram-se materiais com comportamento viscoelástico linear e módulo de Poisson constante no tempo, submetidos a solitações proporcionalmente crescentes e aplicadas em etapas. Num certo instante de tempo, definem-se os seguintes vetores:

$\underline{\sigma}(t) \Rightarrow$  vetor que reúne as componentes de tensão;

$\underline{\varepsilon}(t) \Rightarrow$  vetor que reúne as componentes de deformação total;

$\underline{\varepsilon}^e(t) \Rightarrow$  vetor que reúne as componentes de deformação total imediata, correspondentes ao nível de tensão atual ou a soma das deformações imediatas correspondentes às etapas de carregamento aplicadas até o instante atual  $t$ .



Admitindo-se o estado pluriaxial de esforços,  $f$  se generaliza em  $J$ , surgindo na expressão (2-21) o termo  $\underline{D}$  que representa a matriz das características físicas do material. Assim, definem-se também:

$\underline{D}(t_0) \Rightarrow$  matriz constitutiva do material, considerada no instante  $t_0$ ;

$J(t, t') \Rightarrow$  função que fornece o valor da fluência no instante  $t$  para diferentes instantes de aplicação de carregamento  $t'$ ;

$R(t, t') \Rightarrow$  função que fornece o valor da relaxação no instante  $t$  para diferentes instantes de aplicação da deformação  $t'$ .

Considerando-se as definições anteriores, as Equações Fundamentais da Viscoelasticidade Linear (2-21) e (2-34) podem ser escritas para o estado pluriaxial na seguinte forma geral:

$$\underline{\varepsilon}(t) = \int_0^t \underline{E}(t_0) \underline{D}^{-1}(t_0) d\underline{\sigma}(t') J(t, t') + \underline{\varepsilon}^e(t) \quad (3-01a)$$

$$\underline{\sigma}(t) = \int_0^t \frac{1}{\underline{E}(t_0)} \underline{D}(t_0) d[\underline{\varepsilon}(t) - \underline{\varepsilon}^e(t)] R(t, t') \quad (3-01b)$$

Desenvolvendo-se tais integrais por via numérica, com a regra dos trapézios por exemplo, as equações fundamentais assumem uma forma algébrica linear que se adapta bem às análises estruturais de meios contínuos viscoelásticos e inclusive não-homogêneos.

Subdividindo-se o intervalo de tempo  $(t - t_0)$  em  $k$  instantes intermediários, definem-se, em consequência da integração numérica, as seguintes matrizes:

$$\underline{\sigma}_k = [\underline{\sigma}_1 \quad \underline{\sigma}_2 \quad \dots \quad \underline{\sigma}_k]$$

$$\underline{\varepsilon}_k = [\underline{\varepsilon}_1 \quad \underline{\varepsilon}_2 \quad \dots \quad \underline{\varepsilon}_k]$$

$$\underline{\varepsilon}_k^e = [\underline{\varepsilon}_1^e \quad \underline{\varepsilon}_2^e \quad \dots \quad \underline{\varepsilon}_k^e]$$

$$\Delta \underline{\sigma}_k = [\Delta \underline{\sigma}_1 \quad \Delta \underline{\sigma}_2 \quad \dots \quad \Delta \underline{\sigma}_k]$$

$$\Delta \underline{\varepsilon}_k = [\Delta \underline{\varepsilon}_1 \quad \Delta \underline{\varepsilon}_2 \quad \dots \quad \Delta \underline{\varepsilon}_k]$$

$$\Delta \underline{\varepsilon}_k^e = [\Delta \underline{\varepsilon}_1^e \quad \Delta \underline{\varepsilon}_2^e \quad \dots \quad \Delta \underline{\varepsilon}_k^e]$$



Apresentando-se as matrizes triangulares superiores  $\underline{J}$ ,  $\underline{R}$  e  $\underline{L}$ , assim definidas:

$$J_{ij} = \frac{1}{2} [J(t_j, t_i) + J(t_j, t_{i-1})] \quad (i \leq j; \quad j = 1, 2, \dots, k)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{2} [R(t_j, t_i) + R(t_j, t_{i-1})] \quad (i \leq j; \quad j = 1, 2, \dots, k)$$

$$L_{ij} = 1 \quad (i \leq j; \quad j = 1, 2, \dots, k)$$

$$J_{ij} = R_{ij} = L_{ij} = 0 \quad (i > j; \quad j = 1, 2, \dots, k)$$

as equações (3-01) assumem a seguinte forma algébrica:

$$\underline{\varepsilon}(t) - \underline{\varepsilon}^e(t) = \underline{E}(t_o) \underline{D}^{-1}(t_o) \underline{\Delta \sigma}_k \underline{J} \quad (3-02a)$$

$$\underline{\sigma}_k = \frac{1}{\underline{E}(t_o)} \underline{D}(t_o) \left[ \underline{\Delta \varepsilon}_k - \underline{\Delta \varepsilon}_k^e \right] \underline{R} \quad (3-02b)$$

Observando-se que  $\underline{\sigma}_k = \underline{\Delta \sigma}_k \underline{L}$  e  $(\underline{\varepsilon}_k - \underline{\varepsilon}_k^e) = (\underline{\Delta \varepsilon}_k - \underline{\Delta \varepsilon}_k^e) \underline{L}$  as equações (3-02) transformam-se em:

$$\underline{\varepsilon}(t) - \underline{\varepsilon}^e(t) = \underline{E}(t_o) \underline{D}^{-1}(t_o) \underline{\sigma}_k \underline{L}^{-1} \underline{J} \quad (3-03a)$$

$$\underline{\sigma}_k = \frac{1}{\underline{E}(t_o)} \underline{D}(t_o) \left[ \underline{\varepsilon}_k - \underline{\varepsilon}_k^e \right] \underline{L}^{-1} \underline{R} \quad (3-03b)$$

que evidenciam relações do tipo algébrico linear entre esforços e deformações através das matrizes  $\underline{J}$  e  $\underline{R}$ , que descrevem o comportamento reológico do material, em termos de fluência e relaxação, respectivamente. Tais relações permitem a obtenção dos esforços  $\underline{\sigma}_k$  e deformações  $\underline{\varepsilon}_k$  para todos os  $k$  instantes intermediários do intervalo  $(t - t_o)$ .

Como visto, da teoria da viscoelasticidade linear, as funções  $\underline{J}$  e  $\underline{R}$  e, por conseqüência, as matrizes  $\underline{J}$  e  $\underline{R}$ , não são independentes entre si, podendo-se, desta forma, estabelecer uma relação entre essas matrizes. Resolvendo-se, então, a (3-03a) com relação a  $\underline{\sigma}_k$  e confrontando-se com a (3-03b), obtém-se:

$$(\underline{L}^{-1} \underline{J})^{-1} = \underline{L}^{-1} \underline{R} \quad \Rightarrow \quad \underline{J}^{-1} \underline{L} = \underline{L}^{-1} \underline{R}$$

Tais equações exprimem, em forma matricial, a seguinte relação entre as funções  $\underline{J}$  e  $\underline{R}$ :

$$\int_0^t dR(t', t_o) J(t, t') = 1 \quad (3-04)$$

### 3.2 Método da Partição das Matrizes de Relaxação e Fluência

Com o objetivo de introduzir uma técnica de resolução para as equações (3-03a) e (3-03b), apresenta-se o Método da Partição das Matrizes de Fluência e de Relaxação, que consiste da subdivisão de tais matrizes, colocando-se em evidência os termos correspondentes ao instante de interesse.

As matrizes triangulares superiores  $\underline{J}$  e  $\underline{R}$ , assim apresentadas

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & \dots & J_{1k} \\ 0 & J_{22} & J_{23} & \dots & J_{2k} \\ 0 & 0 & J_{33} & \dots & J_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_{kk} \end{bmatrix} \text{ e } \underline{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1k} \\ 0 & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2k} \\ 0 & 0 & R_{33} & \dots & R_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_{kk} \end{bmatrix}$$

tomam a seguinte forma:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \underline{J}_{aa} & \underline{J}_{ak} \\ 0 & J_{kk} \end{bmatrix} \text{ e } \underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{R}_{aa} & \underline{R}_{ak} \\ 0 & R_{kk} \end{bmatrix}$$

Na qual,

$\underline{J}_{aa} \rightarrow$  é a matriz triangular superior que engloba todos os termos de fluência não relacionados ao instante de interesse  $t_k$ ;

$\underline{J}_{ak} \rightarrow$  é o vetor que reúne os valores de fluência calculados no instante  $t_k$  para cargas aplicadas nos demais instantes do intervalo  $(t - t_0)$ ;

$J_{kk} \rightarrow$  é o valor da fluência calculado em  $t_k$  para um carregamento também aplicado em  $t_k$ .

Os termos  $\underline{R}_{aa}$ ,  $\underline{R}_{ak}$  e  $R_{kk}$ , podem ser entendidos, de forma análoga ao exposto acima, como submatrizes da matriz de relaxação.

Dessa forma, para obter a solução das equações (3-03a) e (3-03b) no tempo  $t = t_k$ , os esforços e as deformações, em tal instante, podem ser colocados em evidência, utilizando-se tais matrizes repartidas, como se indica nas equações (3-05a) e (3-05b).

$$\begin{bmatrix} (\underline{\varepsilon}_a - \underline{\varepsilon}_a^e) & (\underline{\varepsilon}_k - \underline{\varepsilon}_k^e) \end{bmatrix} = \mathbf{E}(t_o) \underline{\mathbf{D}}^{-1}(t_o) \begin{bmatrix} \Delta \underline{\sigma}_a & \Delta \underline{\sigma}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{J}}_{aa} & \underline{\mathbf{J}}_{ak} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{J}}_{kk} \end{bmatrix} \quad (3-05a)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\sigma}_a & \underline{\sigma}_k \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathbf{E}(t_o)} \underline{\mathbf{D}}(t_o) \begin{bmatrix} (\Delta \underline{\varepsilon}_a - \Delta \underline{\varepsilon}_a^e) & (\Delta \underline{\varepsilon}_k - \Delta \underline{\varepsilon}_k^e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}}_{aa} & \underline{\mathbf{R}}_{ak} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{R}}_{kk} \end{bmatrix} \quad (3-05b)$$

em que,

$\Delta \underline{\sigma}_a$ ,  $\Delta \underline{\varepsilon}_a$  e  $\Delta \underline{\varepsilon}_a^e \Rightarrow$  são matrizes de incrementos de esforços e deformações para  $t = t_{k-1}$

$\underline{\mathbf{J}}_{ak}$  e  $\underline{\mathbf{R}}_{ak} \Rightarrow$  são vetores extraídos das matrizes de fluência e relaxação  
 $\underline{\mathbf{J}}_{ak} = [\underline{\mathbf{J}}_{ik}]$  e  $\underline{\mathbf{R}}_{ak} = [\underline{\mathbf{R}}_{ik}] \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$

Das relações anteriores obtém-se para  $t = t_k$ :

$$\underline{\varepsilon}(t) - \underline{\varepsilon}^e(t) = \mathbf{E}(t_o) \underline{\mathbf{D}}^{-1}(t_o) (\Delta \underline{\sigma}_a \underline{\mathbf{J}}_{ak} + \Delta \underline{\sigma}_k \underline{\mathbf{J}}_{kk}) \quad (3-06a)$$

$$\underline{\sigma}_k = \frac{1}{\mathbf{E}(t_o)} \underline{\mathbf{D}}(t_o) [(\Delta \underline{\varepsilon}_a - \Delta \underline{\varepsilon}_a^e) \underline{\mathbf{R}}_{ak} + (\Delta \underline{\varepsilon}_k - \Delta \underline{\varepsilon}_k^e) \underline{\mathbf{R}}_{kk}] \quad (3-06b)$$

Tais relações, quando adotadas nas técnicas resolutivas de análise estrutural, permitem colocar, numa forma padronizada, o estudo dos meios contínuos viscoelásticos e não homogêneos.

### 3.3 Método dos 'Núcleos Degenerados'

Uma outra alternativa, seria a solução direta da integral de superposição (equações 3-01) com fórmulas de quadratura. Para tanto, seria necessário o conhecimento, a cada passo, de toda a história de carregamento relativa aos passos precedentes. Neste sentido as funções de fluência e de relaxação precisariam estar bem caracterizadas.

Este problema pode ser resolvido, em forma aproximada, pela chamada técnica dos 'Núcleos Degenerados', que consiste em trabalhar com o desenvolvimento em série de Dirichlet da função de fluência ou de relaxação, particularmente adaptado ao caso em exame. Nesse caso, uma expressão geral pode ser colocada na seguinte forma:

$$f(t, \tau) = \sum_{i=1}^n a_i(\tau) \cdot [1 - e^{-(t-\tau)/\lambda_i}] \quad (3-07)$$

em que,  $a_i(\tau)$ ,  $n$  e  $\lambda$  - devem ser determinados com base em dados experimentais.

Os termos individuais do desenvolvimento de Dirichlet apresentam um típico andamento em degrau (figura 3.1).

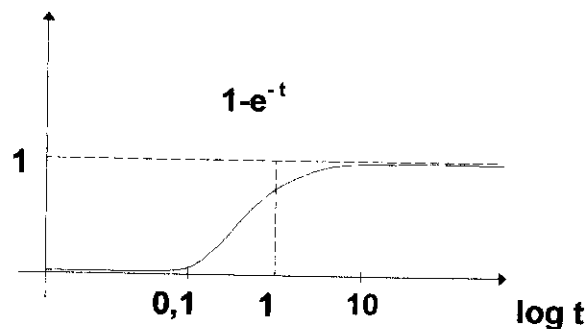


FIGURA 3.1 TERMO INDIVIDUAL DO DESENVOLVIMENTO DE DIRICHLET

A soma destas funções exponenciais (figura 3.2) é bastante representativa, qualquer que seja a função de fluência adotada.

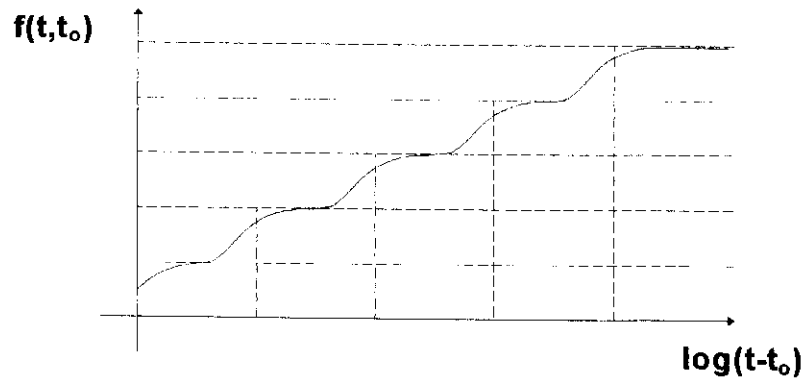


FIGURA 3.2 DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE DIRICHLET PARA A FUNÇÃO DE FLUÊNCIA

Da mesma forma, pode-se chegar a uma representação da função de relaxação (figura 3.3).

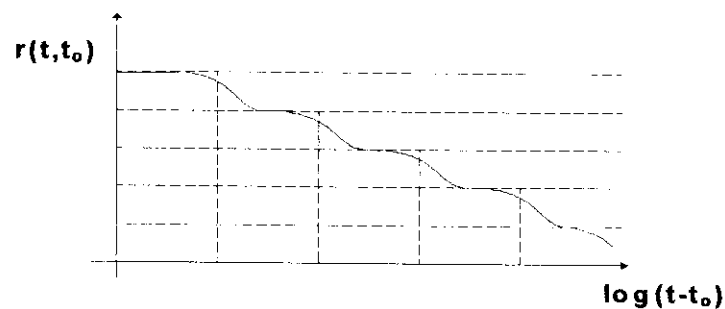


FIGURA 3.3 DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE DIRICHLET PARA A FUNÇÃO DE RELAXAÇÃO

Assim sendo, a deformação ao tempo  $t_K$  pode ser expressa como:

$$\varepsilon(t_K, t_j) = \sum_{j=1}^{k-1} \Delta\sigma_j \cdot f(t_K, t_j) \quad (3-08)$$

sendo  $t_j$  a idade do carregamento.

Analogamente, ao tempo  $t_{K-1}$ :

$$\varepsilon(t_{K-1}, t_j) = \sum_{j=1}^{k-2} \Delta\sigma_j \cdot f(t_{K-1}, t_j) \quad (3-09)$$

Combinando-se as equações (3-07), (3-08) e (3-09), MALERBA(1990) propõe a seguinte expressão para o incremento de deformação:

$$\Delta\varepsilon_K = \sum_{i=1}^n A_{ik} \cdot \left[ 1 - e^{-\Delta t_k / \lambda_i} \right] \quad (3-10)$$

com: 
$$A_{ik} = A_{ik-1} \cdot e^{-\Delta t_k / \lambda_i} + \Delta \sigma_{k-1} \cdot a_i(t_{k-1}); \quad (3-11)$$

$$A_{i2} = \Delta \sigma_1 \cdot a_i(t_1); \quad (3-12)$$

$i$  = passo de carregamento

$\lambda_i$  = intervalo de tempo, para o qual as deformações viscosas (oriundas da aplicação do carregamento  $i$ ) já se estabilizaram. É um parâmetro que deve ser obtido experimentalmente e, nos códigos de cálculo, está diretamente relacionado à convergência das deformações.

Nas equações (3-10), (3-11) e (3-12), valem as seguintes observações:

- $A_{i1} = 0$ , ou seja, para cada nova curva de fluência  $i$ , a deformação viscosa inicial é nula;
- os termos  $A_{ik}$  representam a somatória das variações de carregamento até o passo  $t_{k-1}$ ;
- a variação do módulo de elasticidade  $E$  é considerada nos termos  $a_i$ ;
- a deformação é calculada a cada passo de carregamento  $i$ , somando-se os incrementos de deformações surgidos em  $i$  às deformações acumuladas nos passos de carregamento anteriores.
- para se determinar o valor de  $a_i(\tau)$ , deve-se considerar um número de instantes que pertença ao intervalo de medida e calcular os correspondentes valores de  $f(t_k, t_{k-1})$ . Substituindo-se os grupos de valores na equação (3-07) obtém-se um sistema de equações, do qual os coeficientes incógnitos podem ser extraídos.
- um valor de  $\lambda_i$  que consegue retratar as variações no módulo de elasticidade é  $\lambda_i = 10^{l-1} \cdot \lambda_1$

Nas relações supra citadas, percebe-se a grande vantagem de se poder calcular, em cada um dos intervalos de tempo, o incremento de deformação viscosa sem precisar conhecer toda a história de carregamento, mas computando-se apenas a variação das tensões manifestadas no passo precedente ao de cálculo.

Se não são disponíveis dados experimentais, a formulação dos modelos de fluência do CEB e ACI pode ser usada para determinar os valores necessários da função de fluência.

Para esclarecer melhor as equações propostas por MALERBA (1990), e, também, com o objetivo de colocá-las em uma forma adequada à implementação em códigos de cálculo, faz-se, a seguir, o seu desenvolvimento para o cálculo das deformações viscosas.

### **Desenvolvimento da Equação para o cálculo das deformações viscosas com o uso Método dos ‘Núcleos Degenerados’**

Considere-se a curva de fluência de uma amostra submetida a carregamento constante  $\sigma_c$  aplicado em  $t_0$  (figura 2.3). O valor da deformação no instante  $t$  é:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c \cdot f(t, t_0) = \sigma_c \left[ \frac{1}{E(t_0)} + C(t, t_0) \right] \quad (3-13)$$

Como  $\varepsilon_c(t, t_0) = \varepsilon^e + \varepsilon^v$  e chamando  $\varepsilon^v$  de  $\bar{\varepsilon}$ , tem-se que  $\varepsilon^e = \sigma_c \cdot \frac{1}{E(t_0)}$  e  $\bar{\varepsilon} = \sigma_c \cdot C(t, t_0)$ .

Sabendo-se que para  $t = t_0 \Rightarrow C(t, t_0) = 0$  e para  $t \rightarrow \infty \Rightarrow C(\infty, t_0) = \frac{1}{E(\infty)}$

a função de fluência específica toma a seguinte forma:

$$C(t, t_0) = \frac{1}{E(\infty)} \left[ 1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{\lambda_1}} \right]$$

Então, a deformação total da amostra em um instante  $t$  pode ser obtida através da (3-14):

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \frac{\sigma_c}{E(t_0)} + \frac{\sigma_c}{E(\infty)} \left[ 1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{\lambda_1}} \right] \quad (3-14)$$

Fazendo-se  $\frac{1}{E(t_0)} = a_0$  e  $\frac{1}{E(\infty)} = a_\infty$  obtém-se a forma simplificada da equação (3-14):

$$\varepsilon_c(t, t_0) = a_0 \sigma_c + a_\infty \sigma_c \left[ 1 - e^{-\frac{t-t_0}{\lambda_1}} \right] \quad (3-15)$$

Sejam, então, dois intervalos de tempo  $t_{k-1}$  e  $t_k$  pertencentes ao intervalo  $(t_0 - t)$  de carregamento constante  $\sigma_c$  (figura 2.3). As deformações nos instantes  $t_k$  e  $t_{k-1}$ , são:

$$\varepsilon_c(t_k, t_0) = a_0 \sigma_c + a_\infty \sigma_c \left[ 1 - e^{-\frac{t_k-t_0}{\lambda_1}} \right] \quad (3-16)$$

$$\varepsilon_c(t_{k-1}, t_0) = a_0 \sigma_c + a_\infty \sigma_c \left[ 1 - e^{-\frac{t_{k-1}-t_0}{\lambda_1}} \right] \quad (3-17)$$

Subtraindo-se (3-17) de (3-16) e fazendo-se  $t_k = t_{k-1} + \Delta t_k$ , fica:

$$\Delta \varepsilon_k = \varepsilon_c(t_k, t_0) - \varepsilon_c(t_{k-1}, t_0) = a_\infty \sigma_c \cdot e^{-\frac{t_{k-1}-t_0}{\lambda_1}} \left[ 1 - e^{-\frac{\Delta t_k}{\lambda_1}} \right] = \Delta \varepsilon_k^- \quad (3-18)$$

Observe-se que, nesta situação, todo o incremento de deformação é 'viscoso'.

Considere-se, agora, a história de carregamento ilustrada na figura 3.4a.

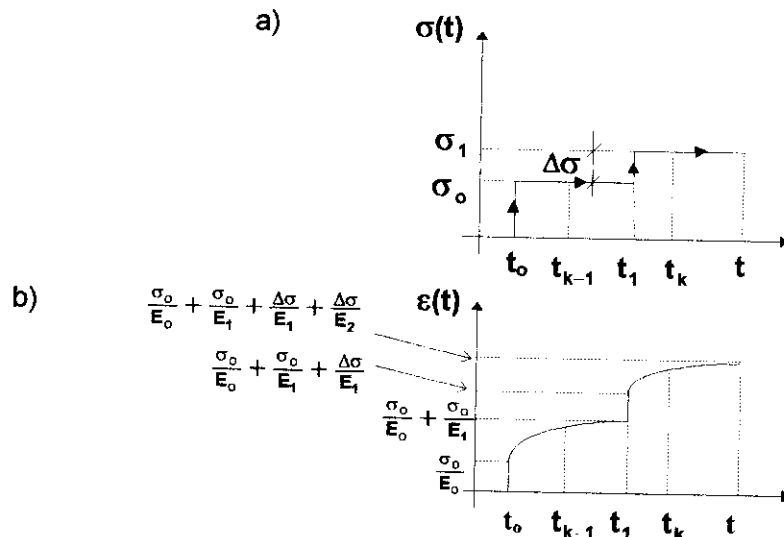


FIGURA 3.4a) CARREGAMENTOS APLICADOS EM  $t_0$  E  $t_1$   
3.4b) DEFORMAÇÃO TOTAL PARA A HISTÓRIA DE CARREGAMENTO CONSIDERADA



Para os instantes de tempo  $t_{k-1}$  e  $t_k$ , as deformações totais podem ser escritas, respectivamente, por:

$$\varepsilon(t_{k-1}, t_0) = a_0 \sigma_0 + a_1 \sigma_0 \left[ 1 - e^{-\frac{t_{k-1}-t_0}{\lambda_1}} \right] \quad (3-19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_k, t_0) = & a_0 \sigma_0 + a_1 \sigma_0 \left[ 1 - e^{-\frac{t_k-t_0}{\lambda_1}} \right] + \\ & a_2 (\sigma_1 - \sigma_0) \left[ 1 - e^{-\frac{t_k-t_1}{\lambda_2}} \right] + \underbrace{a_1 (\sigma_1 - \sigma_0) \left[ 1 - e^{-\frac{t_1-t_0}{\lambda_1}} \right]}_{\Delta \varepsilon_k^e} \end{aligned} \quad (3-20)$$

Neste caso, o incremento de deformação é composto de uma parcela elástica e outra 'viscosa'.

$$\Delta \varepsilon_k = \Delta \varepsilon_k^e + \Delta \bar{\varepsilon}_k$$

em que a parcela viscosa da deformação é dada pela (3-21):

$$\Delta \bar{\varepsilon}_k = a_1 \frac{\sigma_0}{\Delta \sigma_{k-1}} e^{-\frac{t_{k-1}-t_0}{\lambda_1}} \left[ 1 - e^{-\frac{\Delta t_k}{\lambda_1}} \right] + a_2 \underbrace{(\sigma_1 - \sigma_0)}_{\Delta \sigma_k} \left[ 1 - e^{-\frac{t_k-t_1}{\lambda_2}} \right] \quad (3-21)$$

O uso dos parâmetros  $a_i$  e  $\lambda_i$ , atualizados a cada etapa de carregamento  $i$ , permite que se leve em consideração, no cálculo das deformações, o envelhecimento dos materiais, através das variações do módulo de elasticidade longitudinal ( $E_i$ ) e do tempo de estabilização das deformações ( $\lambda_i$ ). Entretanto, a determinação de tais parâmetros é complexa e necessita de um estudo mais aprofundado sobre o envelhecimento dos materiais, o que não é possível de se realizar no prazo destinado à conclusão desta dissertação.

Assim, com o objetivo de facilitar o algebrismo e a conseqüente implementação da (3-21) no programa de cálculo que será exibido ao final deste trabalho, desconsidera-se o envelhecimento, admitindo-se  $a_i$  e  $\lambda_i$  constantes, para todas as etapas de carregamento, e iguais a  $a_0$  e  $\lambda$ , respectivamente.

Portanto, os incrementos de deformação viscosa, para um instante  $t_k$  qualquer, podem ser escritos na forma generalizada da equação (3-22).

$$\bar{\Delta\varepsilon}_k = a_\infty \left( 1 - e^{-\Delta t_k / \lambda} \right) \sum_{i=1}^{k-1} \Delta\sigma_i e^{-(t_k - t_i) / \lambda} \quad (3-22)$$

A equação (3-22) fornece o valor da deformação viscosa em uma amostra de concreto solicitada por carregamento variável, aplicado em várias etapas de carga  $i$ . Tal equação pode ser introduzida diretamente em programas para análise não-linear física de estruturas de concreto, desde que sejam fornecidos os valores de  $a_\infty$  e  $\lambda$ .

A consideração do envelhecimento dos materiais pode ser feita se, ao invés de se tomar  $a_i = a_\infty$ , forem tomados os valores de  $a$  correspondentes a cada etapa de carregamento da estrutura. No capítulo 4 insere-se a equação (3-22) em um algoritmo para a análise não-linear de estruturas de concreto, porém o envelhecimento não é considerado.

### 3.4 Aplicação do MEF às Estruturas de Barras

#### Características de um Elemento de Viga na Presença de Efeitos Viscosos

Seja o elemento de viga  $i$ , de comprimento  $\ell_i$ , com graus de liberdade locais indicados na figura 3.5.

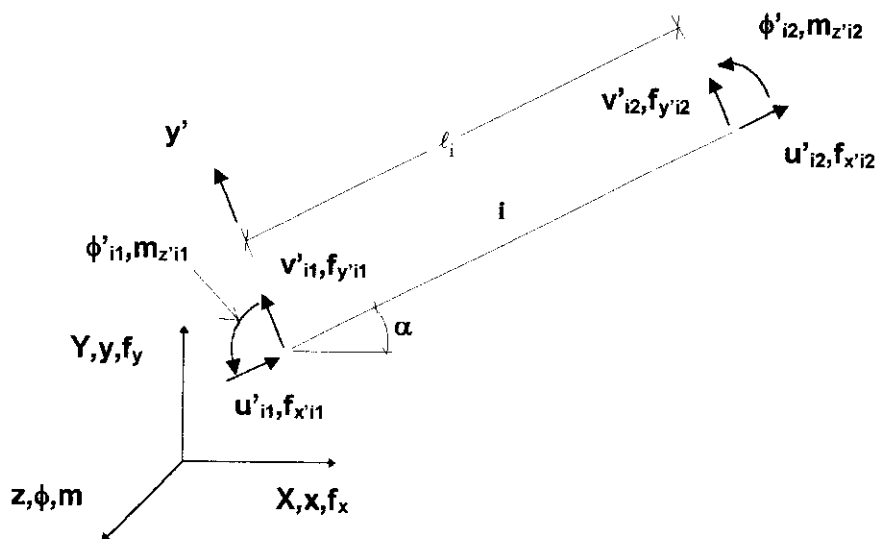


FIGURA 3.5 GRAUS DE LIBERDADE LOCAIS PARA O ELEMENTO DE VIGA GENÉRICO  $i$

Para esse elemento valem as seguintes funções de forma, empregadas na definição de uma aproximação para os deslocamentos:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 1 - \frac{x}{\ell} \\
 N_2 &= \frac{x}{\ell} \\
 N_3 &= 1 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \\
 N_4 &= x - \frac{2x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2} \\
 N_5 &= 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \\
 N_6 &= -\frac{x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2}
 \end{aligned} \tag{3-23}$$

Adotando-se a simbologia usual no Método dos Elementos Finitos, coloca-se em evidência, para o  $i$ -ésimo elemento:

- os vetores dos deslocamentos nodais locais e globais:

$$\underline{u}'_i = [u'_{i1} \quad v'_{i1} \quad \phi'_{i1} \quad u'_{i2} \quad v'_{i2} \quad \phi'_{i2}] \tag{3-24}$$

$$\underline{u}_i^T = [u_{i1} \quad v_{i1} \quad \phi_{i1} \quad u_{i2} \quad v_{i2} \quad \phi_{i2}]$$

e os seus incrementos ao tempo  $t_k$ :  $\Delta \underline{u}'_{i,k}$ ,  $\Delta \underline{u}_{i,k}$

- os vetores das forças nodais aplicadas locais e globais:

$$\underline{f}'_i = [f'_{x_{i1}} \quad f'_{y_{i1}} \quad m'_{z_{i1}} \quad f'_{x_{i2}} \quad f'_{y_{i2}} \quad m'_{z_{i2}}] \tag{3-25}$$

$$\underline{f}_i^T = [f_{x_{i1}} \quad f_{y_{i1}} \quad m_{z_{i1}} \quad f_{x_{i2}} \quad f_{y_{i2}} \quad m_{z_{i2}}]$$

- os vetores das forças nodais, local e global, equivalentes aos carregamentos aplicados ao longo da barra:

$$\underline{f}'_i{}^{eT} = [f'_{x_{i1}}{}^e \quad f'_{y_{i1}}{}^e \quad m'_{z_{i1}}{}^e \quad f'_{x_{i2}}{}^e \quad f'_{y_{i2}}{}^e \quad m'_{z_{i2}}{}^e] \tag{3-26}$$

$$\underline{f}_i{}^{eT} = [f_{x_{i1}}{}^e \quad f_{y_{i1}}{}^e \quad m_{z_{i1}}{}^e \quad f_{x_{i2}}{}^e \quad f_{y_{i2}}{}^e \quad m_{z_{i2}}{}^e]$$

- a matriz de transformação de coordenadas:

$$\underline{T}_i = \begin{bmatrix} \underline{T}_{io} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{T}_{io} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \underline{T}_{io} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 \\ s_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

- o vetor que reúne as aproximações independentes para os campos de deslocamentos axiais e os de deslocamentos transversais e giros:

$$\underline{s}'_i = \begin{bmatrix} \underline{u}' \\ \underline{v}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \underline{u}'_i = \underline{N}_i \underline{u}'_i = \underline{N}_i \underline{T}_i^T \underline{u}_i \quad (3-28)$$

- o vetor das deformações axiais totais e curvaturas:

$$\underline{\varepsilon}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_i \\ \chi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du'}{dx} \\ \frac{d^2v'}{dx^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2N_3}{dx^2} & \frac{d^2N_4}{dx^2} & 0 & \frac{d^2N_5}{dx^2} & \frac{d^2N_6}{dx^2} \end{bmatrix} \underline{u}'_i = \\ = \underline{B}'_i \underline{u}'_i = \underline{B}'_i \underline{T}_i^T \underline{u}_i = \underline{B}_i \underline{u}_i \quad (3-29)$$

- o vetor das deformações anelásticas, curvaturas e seus incrementos ao tempo  $t_k$ :

$$\underline{\bar{\varepsilon}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_i \\ \bar{\chi}_i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta \underline{\bar{\varepsilon}}_i = \begin{bmatrix} \Delta \bar{\varepsilon}_i \\ \Delta \bar{\chi}_i \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

- o vetor dos esforços nodais:

$$\underline{\sigma}_i = E_i(t_0) \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & J_i \end{bmatrix} (\underline{\varepsilon}_i - \underline{\bar{\varepsilon}}_i) = \underline{D}_i(t_0) \underline{B}_i \underline{u}_i - \underline{D}_i(t_0) \underline{\bar{\varepsilon}}_i \quad (3-31)$$

Empregando-se o método da partição da matriz de relaxação na análise de uma estrutura composta por  $ne$  elementos de viga e  $nn$  pontos nodais no tempo  $t_k$ , via Princípio dos Trabalhos Virtuais, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{ne} \int_{\ell_i} \underline{B}_i^T \underline{\sigma}_{i,k} dx = \sum_{i=1}^{ne} \underline{T}_i \int_{\ell_i} \underline{N}_i^T \underline{\bar{f}}_{i,k} dx + \sum_{j=1}^{nn} \underline{F}_{j,k} \quad (3-32)$$

em que,  $\underline{F}_{j,k}^T = [F_{x,j,k} \quad F_{y,j,k} \quad M_{z,j,k}]$  é o vetor das forças aplicadas no nó genérico  $j$  ao tempo  $t_k$ .

Adaptando-se a relação constitutiva (3-06b) ao caso da barra, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{ne} \frac{R_{i,kk}}{E_i(t_0)} \int_{\ell_i} B_i^T D_i(t_0) B_i dx \Delta u_{i,k} - \sum_{i=1}^{ne} \frac{R_{i,kk}}{E_i(t_0)} \int_{\ell_i} B_i^T D_i(t_0) \Delta \bar{\varepsilon}_{i,k} dx + \\
& \sum_{i=1}^{ne} \frac{1}{E_i(t_0)} \int_{\ell_i} B_i^T D_i(t_0) B_i dx \Delta u_{i,a} R_{i,ak} - \sum_{i=1}^{ne} \frac{1}{E_i(t_0)} \int_{\ell_i} B_i^T D_i(t_0) \Delta \bar{\varepsilon}_{i,a} dx R_{i,ak} = \\
& = \sum_{i=1}^{ne} T_i \int_{\ell_i} N_i^T \bar{f}_{i,k} dx + \sum_{j=1}^{nn} F_{j,k}
\end{aligned} \tag{3-33}$$

Supondo-se, por simplicidade, que as deformações anelásticas  $\Delta \bar{\varepsilon}_i$  sejam constantes em  $\ell_i$  e introduzindo-se as igualdades abaixo:

$$\begin{aligned}
K_i &= \int_{\ell_i} B_i^T D_i(t_0) B_i dx \\
F_{\varepsilon,j} &= \int_{\ell_i} B_i^T D_i(t_0) dx \\
f_{i,k}^e &= T_i \int_{\ell_i} N_i^T \bar{f}_{i,k} dx
\end{aligned}$$

a equação (3-33) fica:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{ne} \frac{R_{i,kk}}{E_i(t_0)} K_i \Delta u_{i,k} &= \sum_{i=1}^{ne} f_{i,k}^e + \sum_{j=1}^{nn} F_{j,k} + \sum_{i=1}^{ne} \frac{R_{i,kk}}{E_i(t_0)} F_{\varepsilon,i} \Delta \bar{\varepsilon}_{i,k} - \\
& \sum_{i=1}^{ne} \frac{1}{E_i(t_0)} K_i \Delta u_{i,a} R_{i,ak} + \sum_{i=1}^{ne} \frac{1}{E_i(t_0)} F_{\varepsilon,i} \Delta \bar{\varepsilon}_{i,a} R_{i,ak}
\end{aligned} \tag{3-34}$$

A equação (3-34) dá, ao tempo  $t_k$ , os incrementos de deslocamentos nodais  $\Delta u_{i,k}$ .

No caso particular de meios contínuos homogêneos, a matriz de relaxação é a mesma para todos os elementos e a equação (3-34) se transforma em:

$$\begin{aligned}
\frac{R_{kk}}{E(t_0)} \sum_{i=1}^{ne} K_i \Delta u_{i,k} &= \sum_{i=1}^{ne} f_{i,k}^e + \sum_{j=1}^{nn} F_{j,k} + \frac{R_{kk}}{E(t_0)} \sum_{i=1}^{ne} F_{\varepsilon,i} \Delta \bar{\varepsilon}_{i,k} - \\
& \frac{1}{E(t_0)} R_{ak} \sum_{i=1}^{ne} K_i \Delta u_{i,a} + \frac{1}{E(t_0)} R_{ak} \sum_{i=1}^{ne} F_{\varepsilon,i} \Delta \bar{\varepsilon}_{i,a}
\end{aligned} \tag{3-35}$$

que permite a recuperação das Equações Fundamentais da Viscoelasticidade Linear.

A solução proposta para o problema estrutural apela para as funções de relaxação  $R$ , que, porém, são de difícil determinação experimental. Assim, desenvolvem-se as relações constitutivas, de forma matricial, em função da matriz de relaxação e obtém-se a determinação desta matriz através da seguinte relação:

$$\underline{\underline{R}}_i = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{J}}_i^{-1} \underline{\underline{L}} \quad (3-36)$$

que permite, em última análise, a solução do problema estrutural mediante equação de equilíbrio com deslocamentos conhecidos e utiliza para definição das características reológicas, novamente, as funções de fluência.

O método mais eficiente para a resolução é o 'Método dos Núcleos Degenerados', que permite calcular, em cada intervalo de tempo, o incremento de deformação viscosa com base somente na variação de tensão do passo precedente ao instante de cálculo.

Vale salientar que, o que foi tratado até agora é válido para um comportamento viscoelástico linear do material. No caso de uma análise generalizada, consideram-se as relações constitutivas  $(\sigma - \varepsilon)$  não-lineares e pode-se atingir níveis de esforços que superem os 40% da resistência à compressão (colocados como limite de aplicabilidade da hipótese).

Com base no que foi exposto anteriormente, com o objetivo de analisar os procedimentos numéricos propostos, dentro do prazo previsto para a realização desta dissertação, optou-se por desenvolver um programa para o cálculo de treliças planas, utilizando-se o 'Método dos Núcleos Degenerados' para o cálculo das deformações viscosas. Tendo-se em vista este objetivo, apresentam-se, a seguir, as características de um elemento de treliça na presença de efeitos viscosos e o desenvolvimento matricial das equações, via Princípio dos Trabalhos Virtuais, para o cálculo dos esforços em uma treliça plana.

### **Características de um Elemento de Treliça na Presença de Efeitos Viscosos**

Seja o elemento de treliça ilustrado na figura (3.6). Considere-se as seguintes funções de forma lineares, para a representação dos deslocamentos ao longo do elemento, segundo uma coordenada local axial:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l} \quad (3-37)$$

$$N_2 = \frac{x}{l}$$

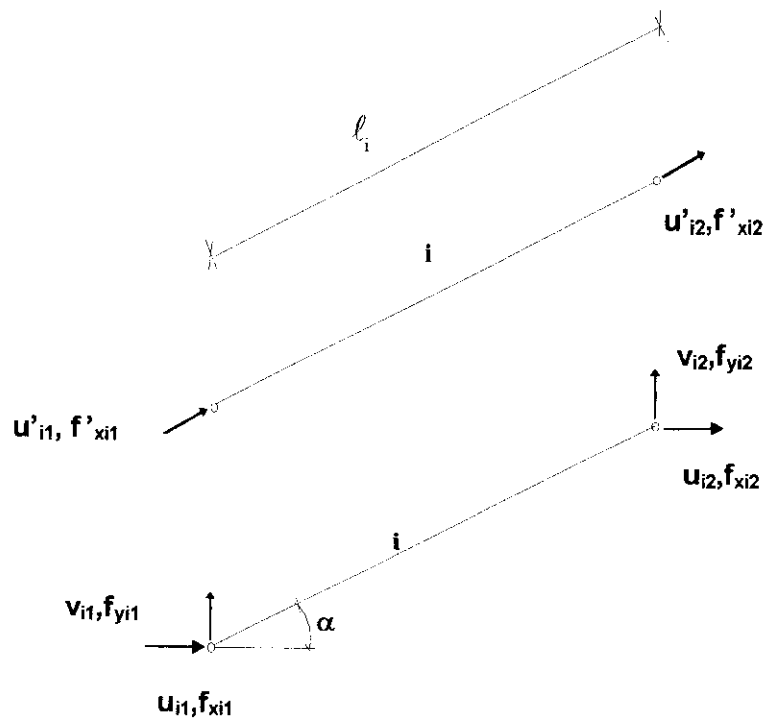


FIGURA 3.6 GRAUS DE LIBERDADE LOCAIS E GLOBAIS PARA O ELEMENTO DE TRELIÇA GENÉRICO  $i$

Adotando-se a simbologia usual no Método dos Elementos Finitos, colocam-se em evidência, para o  $i$ -ésimo elemento:

- o vetor dos graus de liberdade nodais, segundo eixos locais e globais:

$$\underline{u}'_i{}^T = [u'_{i1} \quad u'_{i2}] \quad (3-38)$$

$$\underline{u}_i{}^T = [u_{i1} \quad v_{i1} \quad u_{i2} \quad v_{i2}]$$

e os seus incrementos ao tempo  $t_k$ :  $\Delta \underline{u}'_{i,k}$ ,  $\Delta \underline{u}_{i,k}$

- o vetor das forças nodais aplicadas, locais e globais:

$$\underline{f}'_i{}^T = [f'_{xi1} \quad f'_{xi2}] \quad (3-39)$$

$$\underline{f}_i{}^T = [f_{xi1} \quad f_{yi1} \quad f_{xi2} \quad f_{yi2}]$$

- o vetor das forças nodais equivalentes às deformações viscosas:

$$\underline{\bar{f}}_i^{r,eT} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{f}}_{x_{i1}}^{r,e} & \underline{\bar{f}}_{x_{i2}}^{r,e} \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

$$\underline{\bar{f}}_i^{eT} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{f}}_{x_{i1}}^e & \underline{\bar{f}}_{y_{i1}}^e & \underline{\bar{f}}_{x_{i2}}^e & \underline{\bar{f}}_{y_{i2}}^e \end{bmatrix}$$

- a matriz de transformação de coordenadas:

$$\underline{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (3-41)$$

- a função aproximadora do campo de deslocamentos:

$$\underline{s}'_i = [N_1 \quad N_2] \underline{u}'_i = \underline{N}_i \underline{u}'_i = \underline{N}_i \underline{T}_i \underline{u}_i \quad (3-42)$$

- o vetor das deformações totais:

$$\underline{\varepsilon}_i = \left[ \frac{du}{dx} \right] = \left[ \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right] \underline{u}'_i = \underline{B}'_i \underline{u}'_i = \underline{B}'_i \underline{T}_i \underline{u}_i = \underline{B}_i \underline{u}_i \quad \text{com} \quad \underline{B}'_i \underline{T}_i = \underline{B}_i \quad (3-43)$$

- o vetor das deformações viscosas e de seus incrementos ao tempo  $t_k$ :

$$\underline{\varepsilon}_i \quad \text{e} \quad \Delta \underline{\varepsilon}_i \quad (3-44)$$

- o vetor dos esforços nodais:

$$\underline{\sigma}_i = E_i(t_0)(\underline{\varepsilon}_i - \underline{\varepsilon}_i) = E_i(t_0) \underline{B}_i \underline{u}_i - E_i(t_0) \underline{\varepsilon}_i \quad (3-45)$$

- as matrizes de rigidez nas coordenadas locais e globais:

$$\underline{K}_L = \int \underline{B}'_i{}^T E_i \underline{B}'_i dV = \frac{E_i \cdot A}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-57)$$

$$\underline{K}_G = \int \underline{B}_i{}^T E_i \underline{B}_i dV$$

$$= \frac{E_i A}{\ell} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (3-46)$$



Usando-se as equações apresentadas, pode-se exprimir, via Princípio dos Trabalhos Virtuais, a equação de equilíbrio, nas coordenadas globais, no instante  $t_k$  para uma treliça composta por  $ne$  elementos e  $nn$  pontos nodais, da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{ne} \int_{\ell_i} \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\sigma}_{i,k} dx = \sum_{j=1}^{nn} \mathbf{f}_{j,k} \quad (3-47)$$

em que,  $\mathbf{f}_{j,k}^T = [f_{x,j,k} \quad f_{y,j,k}]$  é o vetor das forças aplicadas no nó genérico  $j$  ao tempo  $t_k$ .

Desenvolvendo-se a (3-47) para o caso da barra de treliça de comprimento  $\ell_i$ , área de seção transversal  $A_i$  e módulo de elasticidade longitudinal  $E_i$ , obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{ne} \mathbf{B}_i^T E_i A_i \ell_i \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{u}_{i,k} = \sum_{j=1}^{nn} \mathbf{f}_{j,k} \quad (3-48)$$

$$\sum_{i=1}^{ne} \mathbf{K}_i \Delta \mathbf{u}_{i,k} = \sum_{j=1}^{nn} \mathbf{f}_{j,k} \quad (3-49)$$

A equação (3-49) fornece os incrementos de deslocamentos globais  $\Delta \mathbf{u}_{i,k}$ , para o carregamento atuante no instante  $t_k$ . Dos quais se podem extrair os incrementos de deformação  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{i,k}$  e, conseqüentemente, os de esforços  $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,k}$ .

O Método dos 'Núcleos Degenerados' permite, a partir do valor de  $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,k}$ , calcular-se o valor do incremento de deformação viscosa para cada barra da treliça, através da equação (3-22)

## Capítulo 4 - Implementação do Modelo para Análise Unidimensional

### 4.1 Sobre a Resolução Numérica do Problema de Análise Estrutural Não-Linear

O Método dos Elementos Finitos formulado nos deslocamentos leva a escrever, no contexto dos problemas tratados, sistemas de Equações de Equilíbrio na forma  $\underline{K}(\underline{u}) \cdot \underline{u} = \underline{F}$ , nos quais, a colocação da matriz de rigidez como função dos deslocamentos nodais põe em evidência o fato de que o sistema é não-linear. A não-linearidade surge:

- da não-linearidade da relação esforços-deformações empregada para modelar o comportamento do material;
- da não-linearidade geométrica conseqüente da relação não-linear entre deformações e deslocamentos;
- da combinação das duas causas citadas.

A solução de um sistema de equações não-lineares é obtida com uma sucessão de aproximações lineares iteradas até que as condições de equilíbrio e as condições associadas ao modelo de relação constitutiva adotado sejam satisfeitas, com uma tolerância julgada aceitável.

Todos os métodos empregados para a solução de problemas não-lineares utilizam como base as técnicas resolutivas do problema linear. Portanto, a formulação própria do método dos elementos finitos não é modificada.

Os procedimentos para a solução dos sistemas de equações não-lineares, na forma mais geral, são uma generalização do Método de Newton-Raphson.

Antecipa-se, sucintamente, a natureza do método, pensando, por simplicidade, em um problema com um só grau de liberdade. O carregamento é aplicado com uma série de incrementos sucessivos. O número de tais incrementos e as suas intensidades são escolhidos em função do grau de não-linearidade do problema, do nível de precisão requisitada e dos resultados que se queiram obter. A cada passo de carregamento é verificado o estado de equilíbrio da estrutura, confrontando-se os carregamentos externos totais aplicados com as forças nodais equivalentes às distribuições de esforços pelo interior dos elementos. As diferenças entre forças aplicadas e "forças internas", definidas por "forças residuais", são aplicadas iterativamente à estrutura até que o equilíbrio seja verificado com a tolerância admitida. Neste processo a matriz de rigidez da estrutura é de imediato atualizada, seja depois da aplicação de cada incremento de carregamento, seja no âmbito do processo iterativo associado a cada passo de carregamento.

A tal procedimento dá-se o nome de "processo incremental-iterativo" que é aqui apresentado como procedimento de caráter geral. Dele descendem numerosas variantes, seja com o caráter de simples alternativas do procedimento geral, seja como soluções que objetivam resolver aspectos particulares.

#### **4.1.1 Controle da Convergência**

O controle da convergência de um procedimento numérico em um espaço multidimensional envolve diversos aspectos de uma certa complexidade e fortemente caracterizados pela natureza do problema. Em primeiro lugar, observa-se que ter sob controle cada grau de liberdade é difícil e até sem significado. Isto faz com que se utilizem como parâmetros de controle médias e/ou normas dos parâmetros físicos significativos. A convergência do procedimento numérico terá como base os critérios impostos sobre o controle: dos resíduos de forças; dos deslocamentos e/ou dos esforços. Em função do tipo de problema, pode-se recorrer a um ou mais destes critérios.

Em uma solução com algoritmos que representam estados de equilíbrio, parece natural recorrer ao primeiro de tais critérios, que fará a verificação do

balanceamento entre as forças equivalentes aos esforços internos à estrutura e as forças externas efetivas. O parâmetro de controle mais indicado é a norma do vetor de forças residuais, módulo do vetor resultante no relativo espaço multidimensional. Assume-se que haja convergência quando é satisfeita a relação:

$$\frac{\|\underline{\mathbf{R}}\|}{\|\underline{\Delta\mathbf{F}}\|} \leq c$$

em que,  $\|\underline{\mathbf{R}}\| = \sqrt{\underline{\mathbf{R}}^T \cdot \underline{\mathbf{R}}}$ ; e  $\|\underline{\mathbf{F}}\| = \sqrt{\underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}}}$  são, respectivamente, a norma dos resíduos e a norma dos incrementos de carregamentos aplicados. A tolerância "c" é escolhida em função da precisão exigida e dos recursos de cálculo disponíveis. Um valor médio indicado é  $c=0,1\%$ . Ao aproximar-se do carregamento último, porém, o número de iterações necessárias para entrar em um valor de tolerância muito pequeno aumenta rapidamente e isto leva a aceitar também valores mais altos  $c=1 - 5\%$ , sem, no entanto, prejudicar a qualidade da solução. Estas são situações em que o critério de forças é de difícil aplicação ou mesmo sem sentido. As quantidades, em termos de forças, a serem confrontadas podem, na prática, ter ordens de grandezas muito diversas e dimensões físicas diferentes. Neste caso, é preferível adotar um critério expresso nos deslocamentos, baseado na Norma Máxima:

$$\max_i = \left| \frac{\Delta \underline{\mathbf{U}}_i}{\underline{\mathbf{U}}_i} \right| < \alpha \quad \text{com} \quad (\alpha \approx 0,05 - 0,001)$$

Naturalmente, podem ser empregados ambos os critérios. Em um programa do tipo geral convém deixar tal escolha como uma opção do usuário. No programa desenvolvido neste trabalho, adotou-se o controle da convergência através da Norma Máxima das deformações.

## 4.2 Esquema de Solução para uma Análise Não-Linear no Tempo

Com o objetivo de verificar o efeito do carregamento ao longo do tempo, implementou-se em um programa de cálculo de treliças planas, desenvolvido por MUNAIAR (1997), o modelo viscoelástico aqui estudado, no qual o cálculo dos incrementos de deformações viscosas é feito através do Método dos Núcleos Degenerados.

MALERBA (1990) propõe um algoritmo para uma análise não-linear no tempo, que considera as não-linearidades física e geométrica, usando um procedimento explícito para a resolução da integral de Stieltjes. Apresenta-se, a seguir, tal algoritmo e as modificações nele introduzidas para a resolução de treliças planas, considerando-se as características viscosas dos materiais.

A não-linearidade geométrica foi estudada neste trabalho com o intuito de proporcionar um melhor entendimento do comportamento não-linear das estruturas. Um resumo de tal estudo consta do apêndice ao final deste texto, porém a implementação dele no programa de cálculo não foi realizada, sendo objetivo de aperfeiçoamento futuro da pesquisa aqui apresentada.

Para empregar o algoritmo proposto por MALERBA (1990) neste trabalho, algumas modificações foram feitas, no sentido de adaptá-lo à análise não-linear física de treliças planas. Exibe-se, então, este algoritmo, na forma em que ele foi proposto e as modificações necessárias à sua implementação no cálculo das deformações viscosas de treliças planas, gerando-se o, então chamado, algoritmo para o cálculo viscoelástico.

#### 4.2.1 Algoritmo Malerba

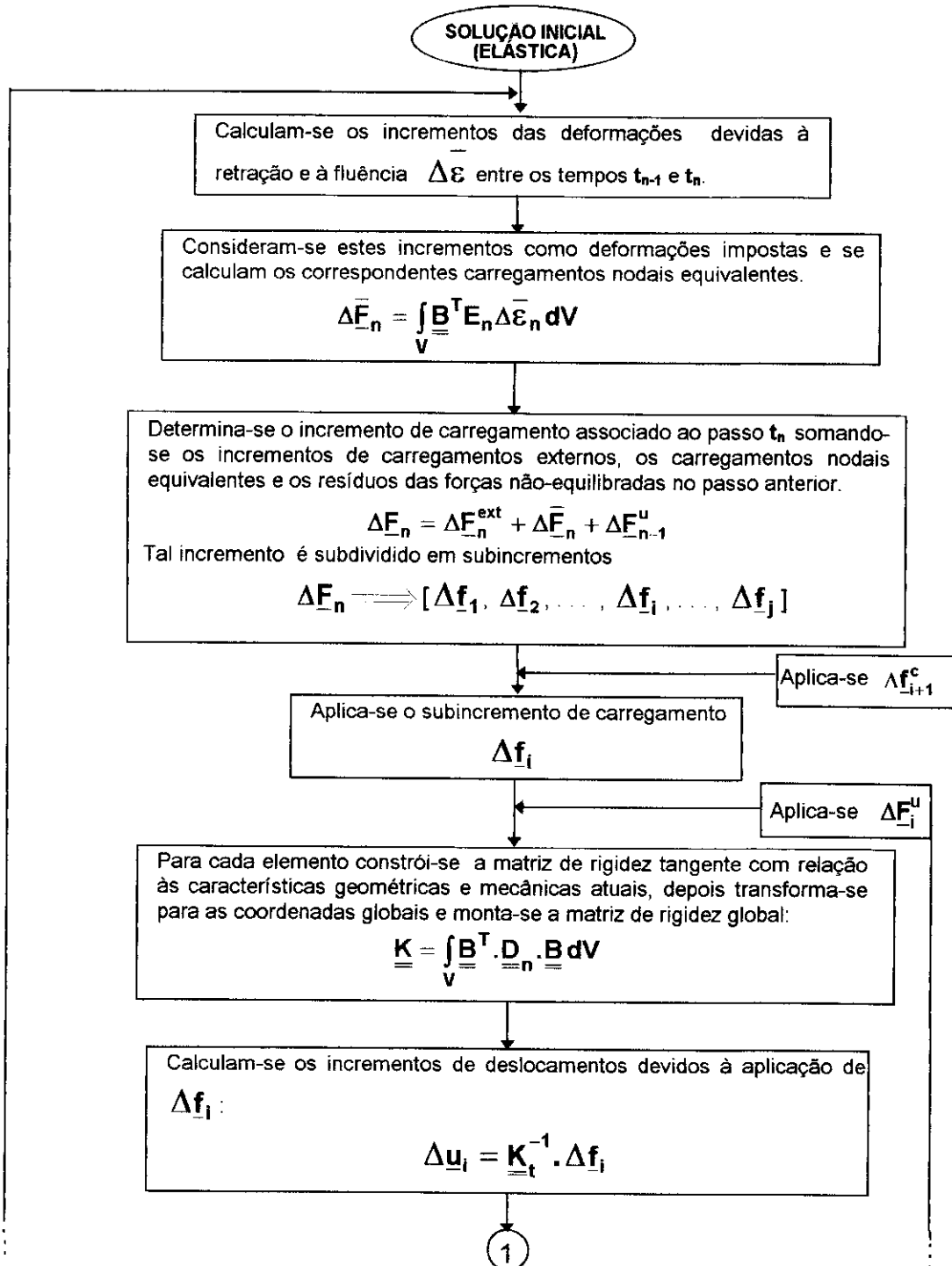
MALERBA (1990) considera que, para uma análise no tempo o domínio temporal deve ser subdividido em um número discreto de passos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  e, que devem ser conhecidos no instante  $t_{n-1}$ , para cada elemento da estrutura, os seguintes parâmetros: deslocamentos nodais ( $\underline{u}_{n-1}$ ); deformações totais ( $\underline{\varepsilon}_{n-1}$ ); deformações de natureza não-mecânica ( $\overline{\underline{\varepsilon}}_{n-1}$ ) e os esforços solicitantes ( $\underline{\sigma}_{n-1}$ ). MALERBA (1990) serve-se do método dos núcleos degenerados para o cálculo das deformações viscosas e transforma estas deformações em forças equivalentes, que são reaplicadas à estrutura de forma a obter-se a simulação da evolução das deformações ao longo do tempo.

No procedimento em questão, calculam-se, para cada elemento, os incrementos das deformações  $\overline{\Delta \underline{\varepsilon}}$  devidos à fluência entre os tempos  $t_{n-1}$  e  $t_n$ . Consideram-se tais incrementos como deformações impostas e calculam-se os correspondentes carregamentos nodais equivalentes.

$$\Delta \bar{\underline{F}}_n = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{E}_t \Delta \bar{\underline{\epsilon}}_n dV \quad (4-01)$$

em que,  $\underline{\underline{B}}$  é a matriz de congruência interna do elemento e  $\underline{E}_t$  o módulo tangente.

A figura 4.1 ilustra o procedimento adotado por MALERBA (1990) para uma análise não-linear. Supondo-se conhecidos no instante  $t_{n-1}$  para toda a estrutura,  $\underline{u}_{n-1}$ ,  $\underline{\epsilon}_{n-1}$ ,  $\bar{\underline{\epsilon}}_{n-1}$  e  $\underline{\sigma}_{n-1}$ , procede-se, então, da seguinte forma:



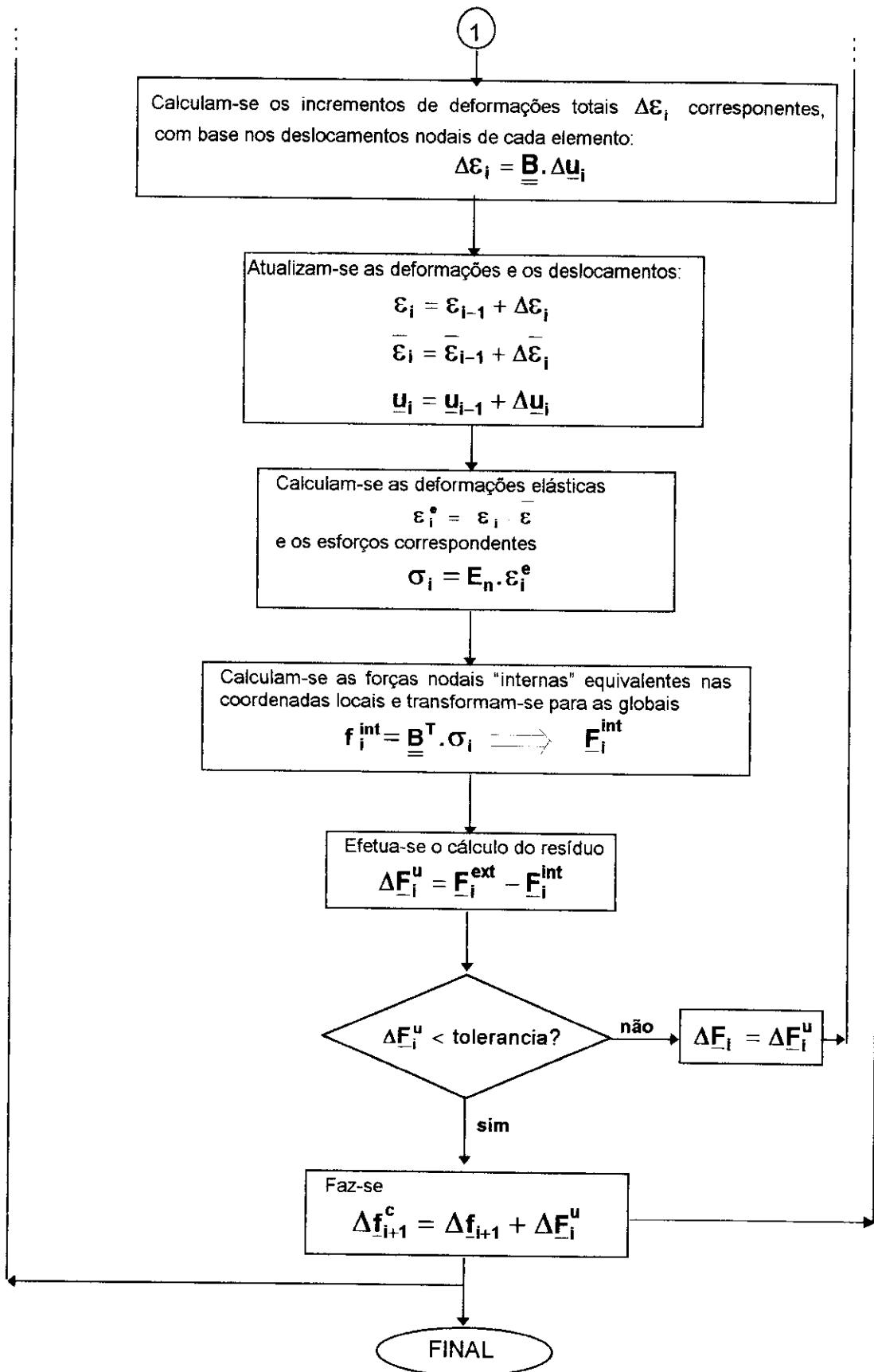


FIGURA 4.1 ALGORITMO MALERBA

#### 4.2.2 Algoritmo para Implementação do Modelo Viscoelástico

Da mesma forma, considera-se que o domínio temporal seja subdividido em um número discreto de passos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  e que se conheçam no instante  $t_{n-1}$ , para cada elemento da estrutura:  $\underline{u}_{n-1}$ ;  $\underline{\varepsilon}_{n-1}$ ;  $\overline{\underline{\varepsilon}}_{n-1}$  e  $\underline{\sigma}_{n-1}$ .

Para se observar a evolução das deformações, o carregamento externo é aplicado de forma incremental no tempo. No caso de protensão, a aplicação do carregamento de forma incremental torna-se indispensável para a verificação da variação das tensões. No caso em questão, as tensões não mudam.

Tal como MALERBA (1990) propõe, para cada carregamento externo aplicado, calcula-se o esforço solicitante correspondente, transforma-se este esforço em força nodal equivalente (através da deformação viscosa calculada) e calculam-se os incrementos de deformações resultantes.

A diferença entre o algoritmo proposto por MALERBA (1990) e o que se propõe neste trabalho reside basicamente no fato de que o algoritmo proposto para implementação do modelo viscoelástico introduz, para cada incremento de carregamento externo, um passo de cálculo inteiramente elástico, e a matriz de rigidez da estrutura não é atualizada em cada intervalo de tempo.

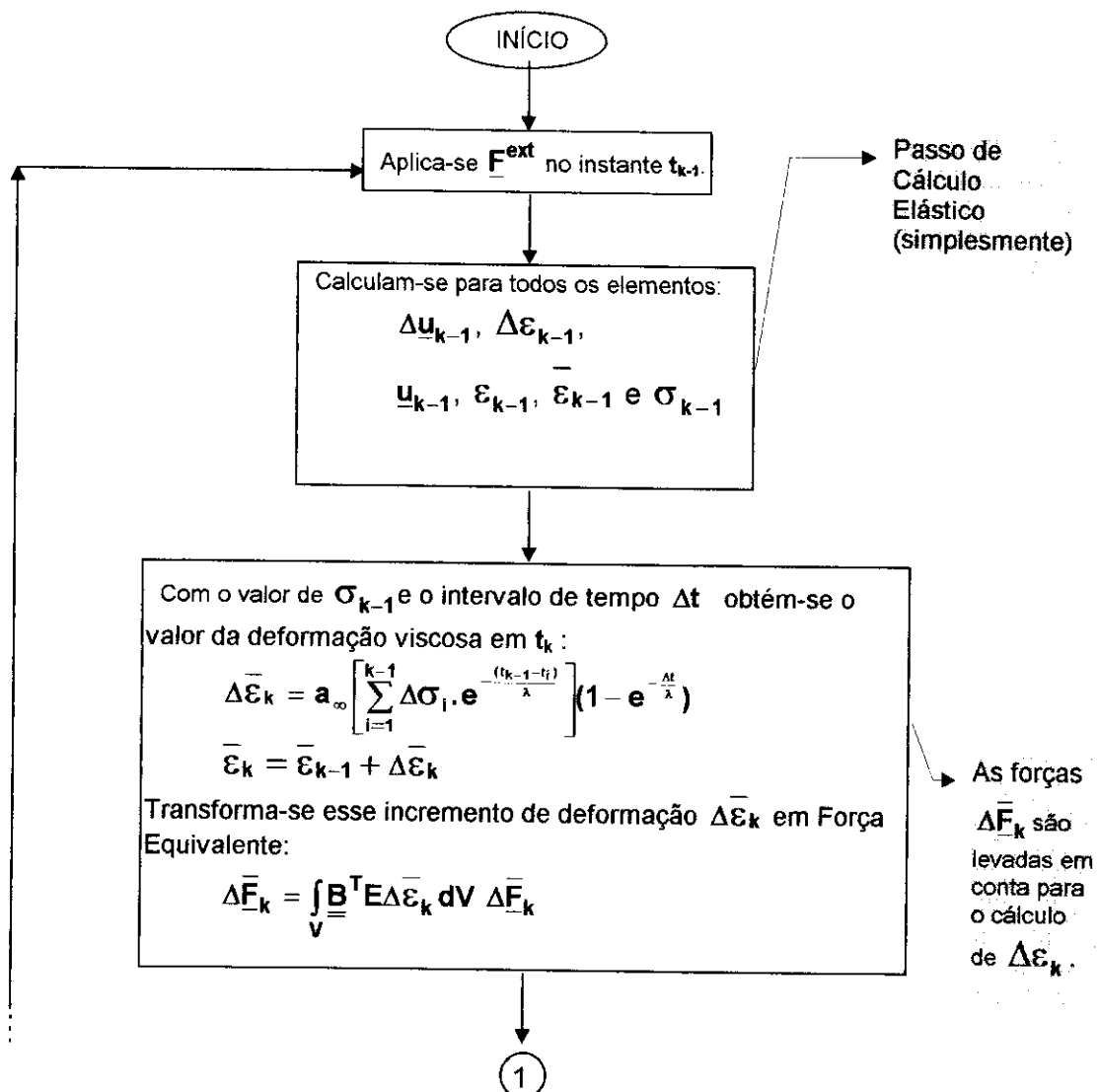
O algoritmo proposto descreve os seguintes passos:

1. Para o incremento de carregamento externo aplicado em  $t_{n-1}$  determinam-se  $\underline{u}_{n-1}$ ;  $\underline{\varepsilon}_{n-1}$ ;  $\overline{\underline{\varepsilon}}_{n-1}$  e  $\underline{\sigma}_{n-1}$ .
2. O valor de  $\underline{\sigma}_{n-1}$ , do passo elástico, é usado para calcular o valor da deformação viscosa com o método dos núcleos degenerados e, conseqüentemente, da força nodal equivalente que será aplicada no intervalo de tempo subsequente.
3. A cada intervalo de tempo, calculam-se os incrementos de deformação resultantes da aplicação de  $\Delta \overline{\underline{F}}$  e o estado de esforços correspondente  $\underline{\sigma}$ .



4. procede-se o cálculo das forças nodais equivalentes a este estado de esforços e aplicação das mesmas em um novo intervalo de tempo.
5. Repete-se o procedimento descrito até que os incrementos de deformações em um elemento qualquer, em um intervalo de tempo, sejam menores do que uma tolerância prefixada.
6. Aplica-se o incremento de carregamento externo subsequente e repetem-se os passos anteriormente descritos até que o último incremento de carregamento seja aplicado.

A figura 4.2 ilustra o procedimento descrito.



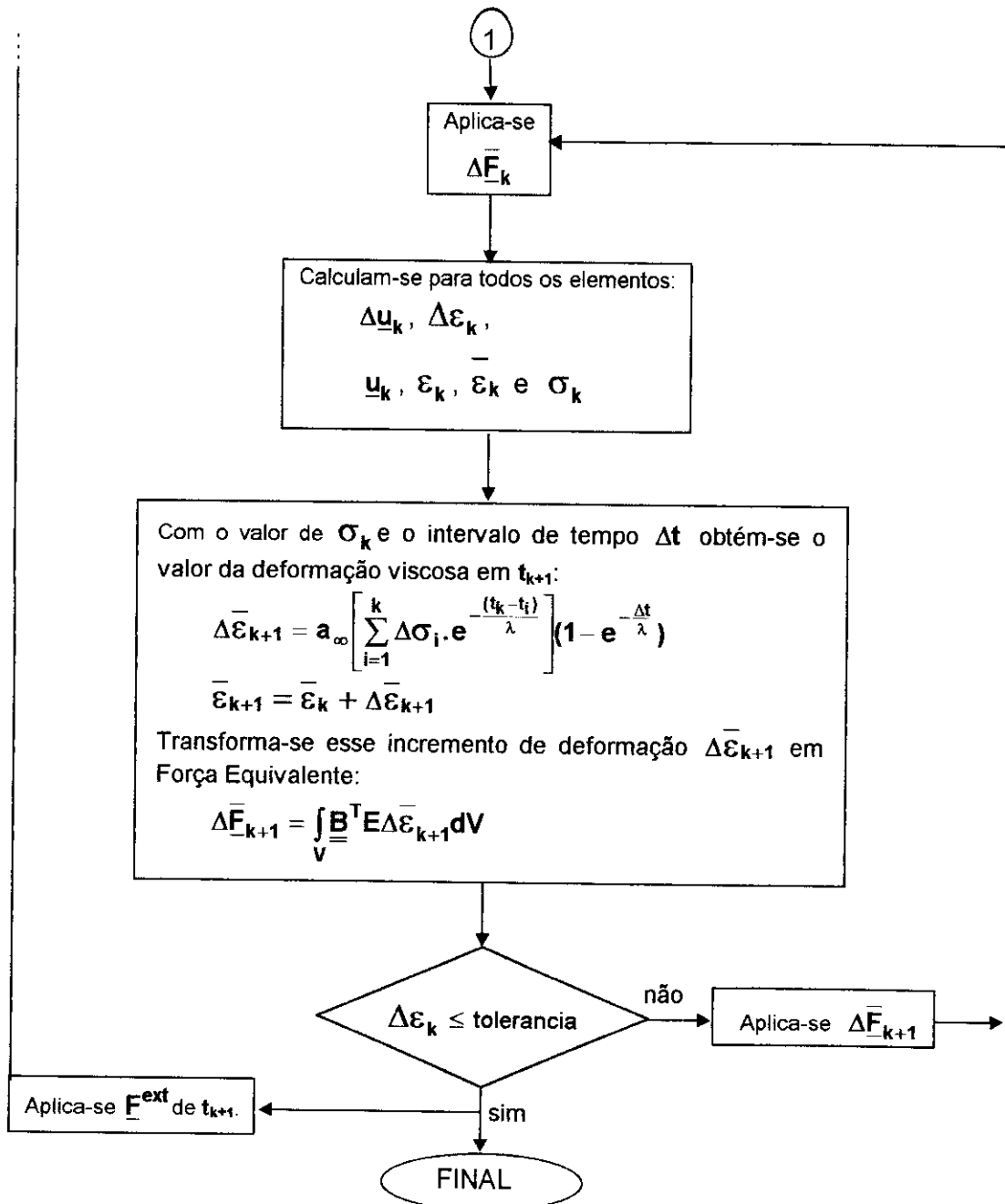


FIGURA 4.2 ALGORITMO PROPOSTO PARA O MODELO VISCOELÁSTICO

### 4.3 Cálculo das Forças Nodais Equivalentes devidas às Deformações Viscosas

Ao lado das deformações de natureza mecânica aparecem, em cada instante, deformações impostas de outra natureza, constituídas por:

- deformações impostas no instante  $t_n$  (por exemplo a relativa à retração entre os instantes  $t_{n-1}$  e  $t_n$ );

- efeitos viscosos das deformações impostas em instantes precedentes àquele em exame;
- deformações viscosas conseqüentes de carregamentos aplicados em instantes precedentes àquele em exame.

Não obstante, impondo-se a solução com o Método dos 'Núcleos Degenerados' consegue-se calcular o último incremento de deformação viscosa, sem que seja necessário o conhecimento de toda a história de carregamento, mas simplesmente computando-se a variação das tensões manifestadas no passo precedente ao de cálculo. Indicando-se com  $\Delta \underline{\varepsilon}_n$  o incremento de deformação viscosa entre  $t_{n-1}$  e  $t_n$ , as forças nodais a elas equivalentes que contribuem para o equilíbrio no instante  $t_n$ , são as obtidas pela expressão (4-01).

Tal procedimento foi seguido por CARVALHO (1979), na análise de pórticos planos de concreto armado submetidos a carregamentos variáveis. Ele considerou o envelhecimento dos materiais através da introdução do módulo de elasticidade longitudinal variável com o tempo, e empregou equações do CEB (1978) para estimar os valores de E em cada intervalo de tempo, obtendo, também, resultados satisfatórios com o emprego da equação (4-01).

## Capítulo 5 - Implementação do Algoritmo para o cálculo Viscoelástico em um Programa para Análise de Treliças Planas

Este capítulo reúne considerações a respeito da implementação do algoritmo proposto em um programa de análise não-linear física de treliças planas e aplicações deste no cálculo das deformações e esforços de tais estruturas.

O programa SIMAT.FOR desenvolvido por MUNAIAR(1997), executa o cálculo das deformações, esforços e reações em treliças planas, empregando um procedimento totalmente implícito\* proposto por SIMO(1988) e um modelo elastoviscoplastico\*\* que, em particular, se simplifica em um modelo viscoelástico. Foi implementado neste programa o algoritmo do item 4.1.2 e o modelo combinado de Kelvin (ver cap. 2.3.2), no qual o cálculo das deformações é feito levando-se em consideração a viscoelasticidade (equação 2-54). A determinação dos incrementos de deformação se dá através do emprego do procedimento explícito apresentado no cap. 3.3 (Método dos 'Núcleos Degenerados').

Para que se tornasse possível tal implementação no âmbito de uma pesquisa de mestrado, algumas simplificações foram admitidas:

- o envelhecimento dos materiais foi desconsiderado, ou seja, os parâmetros  $a_i$  e  $\lambda_i$  da equação (3-22) são entendidos como constantes para todas as etapas de carregamento e iguais a  $a_\infty$  e  $\lambda$ , respectivamente. Tais valores foram estipulados com base na calibragem dos resultados de deformações obtidos no programa SIMAT.FOR com os deste. É importante, entretanto, que se saiba

---

\* O procedimento totalmente implícito calcula o incremento de deformação no instante atual com base na velocidade de deformação no instante futuro. Ver MUNAIAR(1994).

\*\* MUNAIAR apresenta o MODELO DE OWEN/HINTON e propõe algumas modificações. Ver MUNAIAR(1994, p.48-54).

que os valores reais de tais parâmetros devem ser extraídos da realização de ensaios de amostras em laboratório;

- o programa SIMAT.FOR sofreu modificações preliminares, no sentido de passar de um programa que calculava deformações nos regimes elástico, viscoelástico, viscoplástico e a combinação destes três, para um programa que calcula as deformações elásticas e viscoelásticas. Tal simplificação foi feita com o objetivo de verificar a eficiência das equações formuladas com o método dos 'núcleos degenerados' e, de comparar as respostas obtidas através dos procedimentos implícitos e explícitos.

No item 5.1 explicitam-se as subrotinas do programa TRELVE.FOR adaptado do SIMAT.FOR, com a descrição sucinta do procedimento adotado por cada uma delas e o fluxograma do código de cálculo. Em seguida, são apresentados alguns dos exemplos testados no programa TRELVE.FOR.

## **5.1 Subrotinas do Programa TRELVE.FOR**

As subrotinas utilizadas no TRELVE.FOR são apresentadas a seguir, na ordem em que são chamadas no programa, com o objetivo de dar uma idéia geral da seqüência de operações por ele executadas:

**SUBROTINA DADO:** Leitura da entrada dos dados de controle do programa, propriedades dos materiais, condições de contorno, valores de cargas externas e os nós em que elas estão aplicadas;

**SUBROTINA VARZERO:** Possui a função de zerar as variáveis acumulativas de uso comum;

**SUBROTINA CARGA:** Leitura dos dados referentes aos incrementos de carga, fator de carga, número total de incrementos dentro do passo de carga, código de saída dos resultados e tolerância para convergência;

SUBROTINA ALGOR: Leitura da opção para solução do sistema de equações, que pode ser a atualização ou não da matriz de rigidez a cada incremento de carregamento;

SUBROTINA VECFOR: Montagem do vetor de forças globais;

SUBROTINA RIGIDEZ: Montagem da matriz de rigidez. A matriz de rigidez é montada de acordo com a opção escolhida na subrotina Algor;

SUBROTINA REDUGA: Subrotina de redução de Gauss. Avisa quando um valor nulo é encontrado na diagonal principal da matriz de rigidez;

SUBROTINA RESOLVE: Resolução do sistema de redução de Gauss;

SUBROTINA RETROSUB: Retro-substituição do sistema de equações. Ao final desta subrotina tem-se os valores dos incrementos de deslocamentos, deslocamentos totais e reações de apoios;

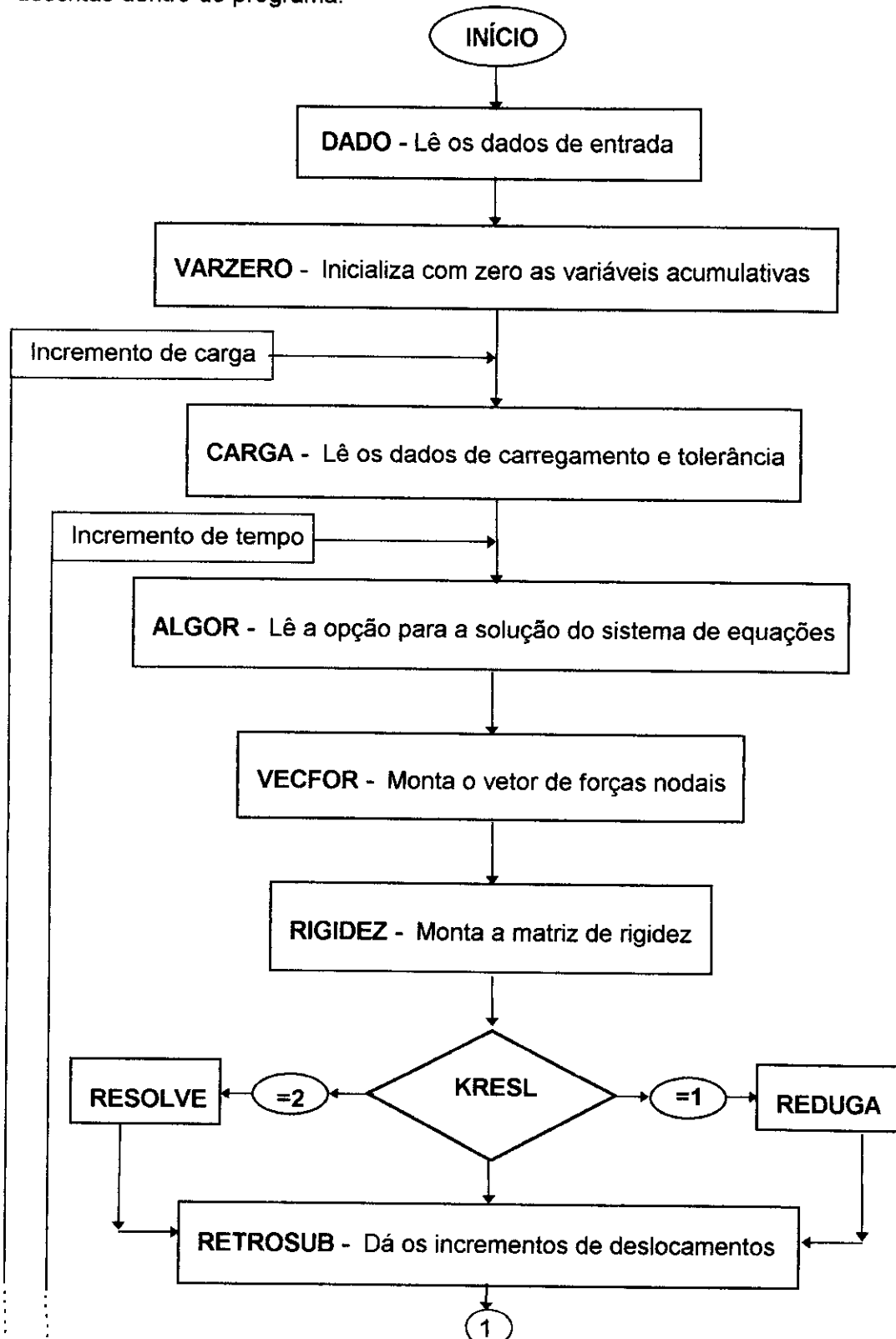
SUBROTINA VISCOSA: Cálculo do incremento de deformações viscosas e do vetor de forças nodais equivalentes. É também nesta subrotina que se calculam os valores das tensões e deformações totais em cada elemento e se verifica a convergência;

SUBROTINA RESULTA: Escreve os resultados de deslocamentos, tensões e deformações no arquivo de saída.

As subrotinas descritas acima, quando entendidas como parte integrante do programa TRELVE.FOR, forneceram bons resultados para os deslocamentos, deformações e tensões, usando-se incrementos de tempo suficientemente pequenos para que não houvesse instabilidade numérica.

## 5.2 Fluxograma do programa TRELVE. FOR

O fluxograma a seguir ilustra a disposição das subrotinas anteriormente descritas dentro do programa:



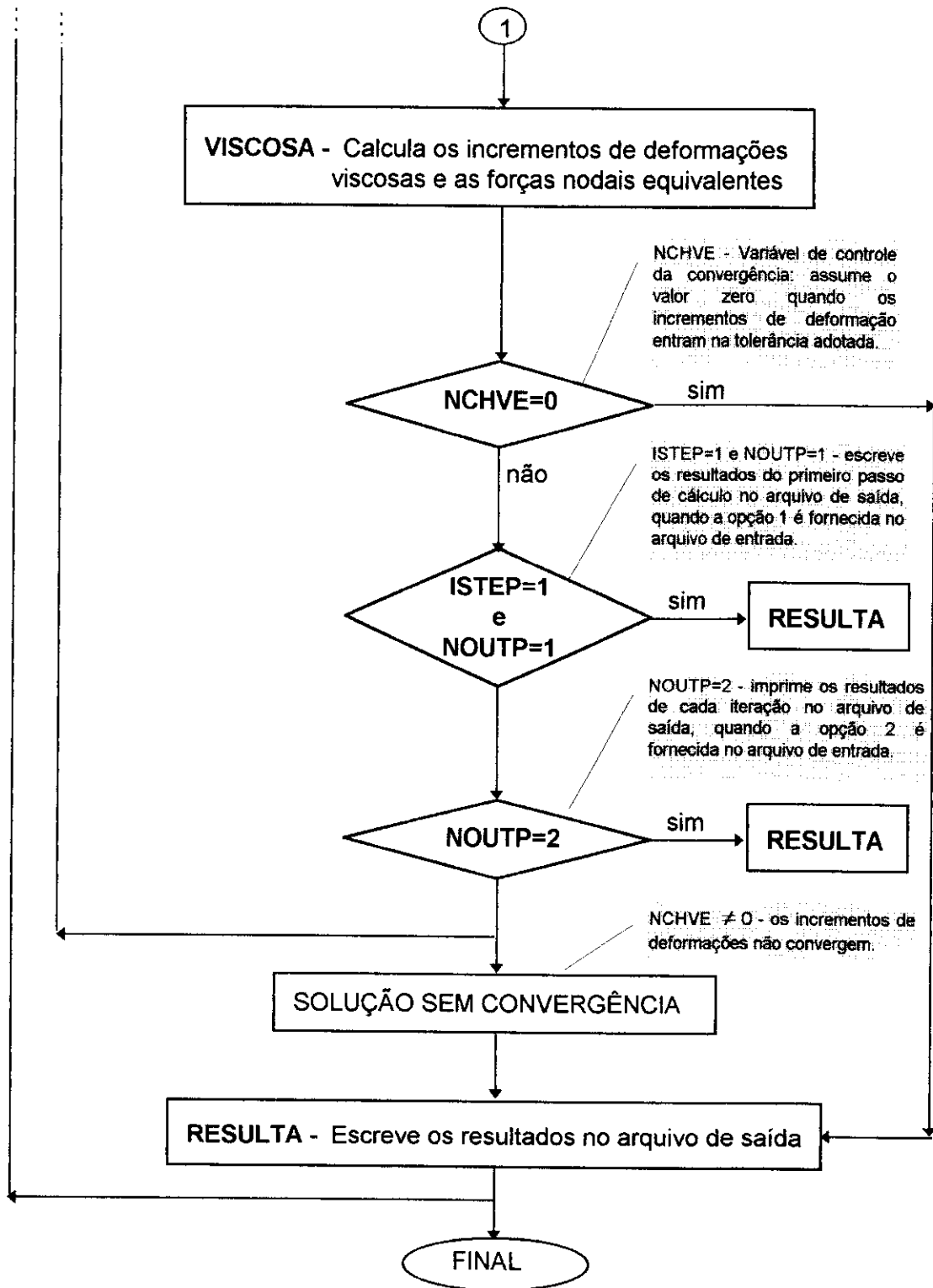


FIGURA 5.1 FLUXOGRAMA DO PROGRAMA TRELVE.FOR



### 5.3 Exemplos Testados no TRELVE.FOR

Vários exemplos de treliças planas foram calculados neste programa, com os quais se verificou o seu bom desempenho, como pode ser observado nos exemplos citados adiante. Ocorreram, porém, quando foram usados incrementos de tempo considerados grandes (da ordem de 0.20), casos de instabilidade numérica, devida ao emprego do procedimento explícito. Daí se constatar a necessidade de obediência de determinados limites para os passos de tempo.

Para ilustrar, seguem-se alguns exemplos de treliças planas, que foram testados no TRELVE.FOR:

#### EXEMPLO 1

MUNAIAR (1994) calculou a treliça da figura 5.2 no programa BIVEP.FOR, que consta de sua dissertação, e comparou os resultados obtidos com os fornecidos pela expressão exata do modelo viscoelástico combinado de Kelvin. Com o objetivo de comparar os resultados extraídos dos dois programas, executou-se este exemplo, mantendo-se os mesmos dados de MUNAIAR (1994), no programa TRELVE.FOR.

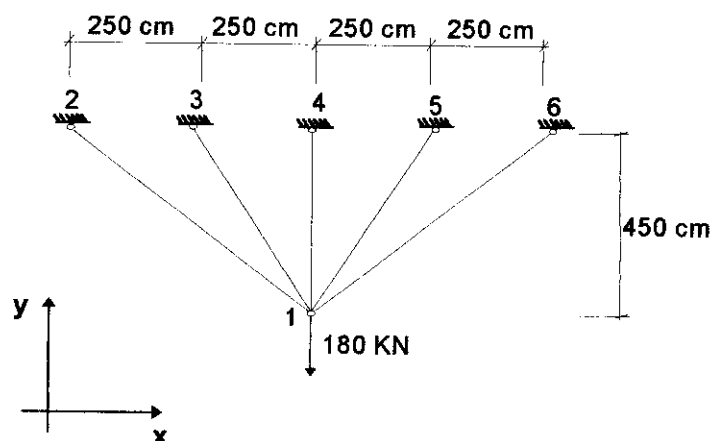


FIGURA 5.2 - ESQUEMA ESTRUTURAL DO EXEMPLO 1

São dados do problema:

$$E_1 = 2000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Área de seção transversal} = 4 \text{ cm}^2$$

$$a_{\infty} = 0,000500 \text{ cm}^2/\text{kN}$$

$$\lambda = 0,07750 \text{ e } \Delta t = 0,050$$

As deformações das barras 1-2, 1-3 e 1-4 obtidas através do programa BIVEP.FOR, da expressão exata da apostila 'NOÇÕES BÁSICAS DE REOLOGIA' de PROENÇA (1986) e do programa TRELVE.FOR, podem ser comparadas na tabela 5.1.

A expressão (2-54), apresentada por PROENÇA (1986), dá o valor exato das deformações viscoelásticas, a partir do modelo combinado de Kelvin.

Fazendo-se, na equação (2-54),  $\gamma_1 = \frac{1}{\eta}$ , obtém-se a expressão seguinte:

$$\varepsilon(t) = \sigma \left[ \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} - \frac{e^{-(E_2 \gamma_1 t)}}{E_2} \right] \quad (5-01)$$

Os parâmetros usados para o cálculo dos valores exatos das deformações, equivalentes aos usados para o cálculo em TRELVE.FOR, são:

$$E_2 = E_1 = 2000 \text{ kN/cm}^2 \text{ e } \gamma_1 = 0,00150$$

TABELA 5.1 - DEFORMAÇÕES TOTAIS DA TRELIÇA DO EXEMPLO 1

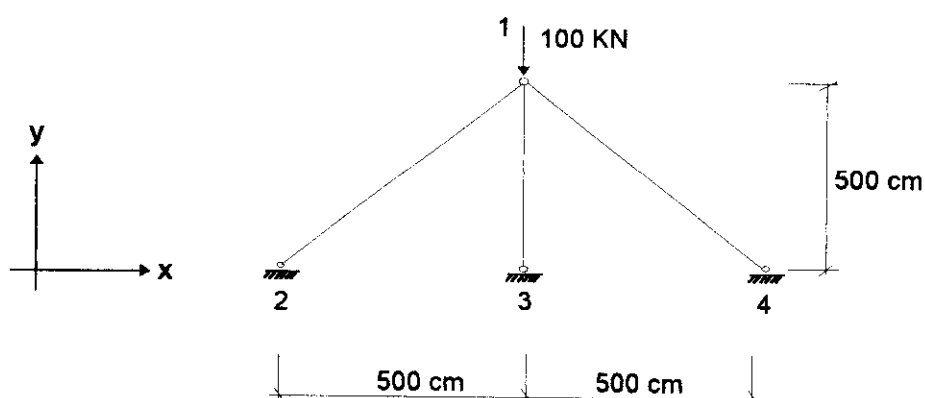
BARRA	VALOR EXATO	BIVEP.FOR	TRELVE.FOR
1-2	$2,74481 \times 10^{-3} \text{ cm}$	$2,74519 \times 10^{-3} \text{ cm}$	$2,74473 \times 10^{-3} \text{ cm}$
1-3	$4,68689 \times 10^{-3} \text{ cm}$	$4,68754 \times 10^{-3} \text{ cm}$	$4,68675 \times 10^{-3} \text{ cm}$
1-4	$6,13347 \times 10^{-3} \text{ cm}$	$6,13432 \times 10^{-3} \text{ cm}$	$6,13328 \times 10^{-3} \text{ cm}$

Deve-se ressaltar que os resultados expostos por MUNAIAR (1994) são os obtidos para o 7º incremento de carga ( $P_{\text{total}}=180 \text{ KN}$ ), os quais foram comparados com o valor exato da equação (5-01) e calculados para o tempo final de convergência. Já os valores do TRELVE.FOR, são obtidos para apenas um incremento de carga ( $P=180 \text{ KN}$ ).

**EXEMPLO 2**

O exemplo 2 tem o objetivo de mostrar uma comparação entre os resultados obtidos nos programas SIMAT.FOR e TRELVE.FOR.

Seja uma treliça plana composta por três barras, na qual se admite o aparecimento de deformações evolutivas em todas as barras, submetida ao carregamento indicado na figura 5.3:



**FIGURA 5.3 - ESQUEMA ESTRUTURAL DO EXEMPLO 2**

São dados, para todos os elementos:

$$\text{Área de seção transversal} = 40 \text{ cm}^2 \quad \lambda = 0,0775$$

$$E_1 = 2000 \text{ KN/cm}^2 \quad \Delta t = 0,0100$$

$$a_{\infty} = 0,000500 \text{ cm}^2/\text{KN}$$

Com os valores acima, considerando-se apenas um incremento de carga, obtiveram-se os seguintes resultados para as deformações nas barras:

**TABELA 5.2 - DEFORMAÇÕES ELÁSTICAS DA TRELIÇA DO EXEMPLO 2**

BARRA	DEFORMAÇÕES ELÁSTICAS
1-2	$-3,6612 \times 10^{-4} \text{ cm}$
1-3	$-7,3223 \times 10^{-4} \text{ cm}$

A resposta elástica obtida nos dois programas é absolutamente a mesma, visto que o programa TRELVE.FOR utiliza, para o cálculo das deformações imediatas, o mesmo procedimento de cálculo do programa SIMAT.FOR. A diferença de programação existente entre eles consiste no processo de cálculo das deformações viscoelásticas, já que MUNAIAR (1994) utiliza um procedimento implícito, enquanto TRELVE.FOR adota o cálculo explícito.

Na tabela 5.3 exibem-se as respostas finais de deformações totais dos dois programas, podendo-se constatar a equivalência dos resultados.

**TABELA 5.3 - DEFORMAÇÕES TOTAIS DA TRELIÇA DO EXEMPLO 2**

BARRA	SIMAT.FOR	TRELVE.FOR
1-2	$- 7,3223 \times 10^{-4}$ cm	$- 7,3120 \times 10^{-4}$ cm
1-3	$- 1,4645 \times 10^{-3}$ cm	$- 1,4640 \times 10^{-3}$ cm

É importante observar, também, que, para os valores adotados, a convergência se deu para a 58ª iteração, perfazendo-se um tempo final de 0,57 para estabilização das deformações viscosas, ou seja, para que os incrementos de deformações entrassem na tolerância admitida ( $10^{-4}$ ). O resultado final de deformação viscosa da barra 2 é da ordem da deformação elástica inicial  $\bar{\Delta\varepsilon} = -7,3182 \times 10^{-4}$  cm, o que representa um acréscimo de aproximadamente 100% no valor das deformações totais do elemento em questão.

### EXEMPLO 3

Para se observar a evolução das deformações com o tempo, restringindo-se o aparecimento das deformações viscosas, a treliça do exemplo 2 foi recalculada considerando-se os incrementos de tempo  $\Delta t = 0,0500$  (para diminuir o tempo de convergência), e admitindo-se deformações evolutivas apenas na barra central da treliça da figura 5.3, ou seja:

para os elementos 1-2 e 1-4  $a_{\infty} = 0$ ;

para o elemento 1-3  $a_{\infty} = 0,000500$  cm<sup>2</sup>/KN.

Observa-se, na tabela 5.4, que o fato de ter considerado o efeito do tempo apenas na barra central ocasionou uma diminuição no valor das deformações finais, o que pode ser explicado pela compatibilidade dos deslocamentos.

**TABELA 5.4 - DEFORMAÇÕES TOTAIS E VISCOSAS PARA A BARRA CENTRAL DA TRELIÇA DO EXEMPLO 3**

IT	DEFORMAÇÕES TOTAIS (x 10 <sup>-3</sup> cm)	DEFORMAÇÕES VISCOSAS (x 10 <sup>-4</sup> cm)
1	-0,73223	0
2	-0,93616	-3,48119
3	-1,00297	-4,62182
4	-1,02486	-4,99554
5	-1,03204	-5,11799
6	-1,03439	-5,15812
7	-1,03516	-5,17126
8	-1,03541	-5,17557
9	-1,03549	-5,17698
10	-1,03552	-5,18485

#### EXEMPLO 4

Considerando-se o exemplo 3, para um incremento de tempo  $\Delta t = 0,2500$ , verificou-se a ocorrência de instabilidade numérica ou oscilações no processo de convergência. Entretanto, os valores finais de deformação das barras são os mesmos do caso anterior, com  $\Delta t$  menor. Na tabela 5.5 expõem-se, para cada iteração, os valores de deformações totais e viscosas da barra central, com o objetivo de mostrar a oscilação dos valores causada provavelmente pelo emprego do procedimento explícito de resolução da integral de Stieltjes.

**TABELA 5.5 - DEFORMAÇÕES TOTAIS E VISCOSAS PARA A BARRA CENTRAL DA TRELIÇA DO EXEMPLO 4**

IT	DEFORMAÇÕES TOTAIS (x 10 <sup>-3</sup> cm)	DEFORMAÇÕES VISCOSAS (x 10 <sup>-4</sup> cm)
1	-0,7322	0
2	-1,1441	-7,0315
3	-9,9665	-4,5140
4	-1,0495	-5,4153
5	-1,0305	-5,0926
6	-1,0373	-5,2081
7	-1,0349	-5,1668
8	-1,0358	-5,1816
9	-1,0355	-5,1763
10	-1,0356	-5,1782
11	-1,0356	-5,1775

Observando-se a tabela 5.5, pode-se verificar que os valores de deformações fornecidos pelo programa TRELVE.FOR, oscilam em torno da resposta correta, chegando, contudo, aos mesmos resultados do exemplo anterior. O que é uma característica inerente a algoritmos de procedimentos explícitos, quando empregam-se passos de tempos maiores.

## Capítulo 6 - Conclusões

O estudo do comportamento viscoelástico das estruturas vem trazer contribuições para o campo da análise não-linear, no sentido de prever as deformações e os esforços dependentes do tempo. Em algumas situações de interesse prático na Engenharia Civil de Estruturas, como por exemplo as pontes construídas com balanços sucessivos, torna-se importante o conhecimento da evolução das deformações - neste caso, no sentido de se tentar programar adequadamente a execução da montagem e junção de partes adjacentes. Já no caso da recuperação de estruturas, verifica-se a necessidade da aplicação dos conhecimentos sobre o comportamento viscoelástico dos materiais, de modo a se proceder o método de recuperação mais adequado.

O presente trabalho procurou tratar dos fundamentos necessários para a modelagem do comportamento viscoelástico de materiais, com destaque para o concreto e apresentar um procedimento capaz de calcular as deformações e os esforços em estruturas, resultantes da consideração de tais fenômenos.

Para tanto, formularam-se as funções representativas dos fenômenos de fluência e relaxação, levando-se em consideração diferentes idades de aplicação de carregamentos, e introduzindo-se o conceito de envelhecimento dos materiais, embora o mesmo não tenha sido empregado nas aplicações numéricas desenvolvidas, devido à necessidade de um maior período de tempo dedicado ao estudo das características intrínsecas a este fenômeno.

Apresentou-se, ainda com o objetivo de proporcionar o melhor entendimento das formulações aqui tratadas, como também, de outras que exprimem o modelo constitutivo através de relações diferenciais, uma revisão dos modelos mecânico-matemáticos clássicos da Reologia dos Materiais.

O modelo viscoelástico estudado consiste da associação em série de uma mola ao arranjo de Kelvin. A implementação deste modelo em um programa de cálculo de treliças planas (TRELVE.FOR), usando-se um procedimento explícito para a resolução da integral de Stieltjes, mostrou respostas consistentes e bastante satisfatórias, quando comparadas às obtidas através de procedimentos implícitos de integração numérica.

Desta forma, dispõe-se de um algoritmo que pode ser generalizado, tendo-se em vista a análise de estruturas mais complexas.

Analisando-se o estudo realizado, percebe-se a necessidade da continuação das pesquisas sobre o comportamento não-linear das estruturas. Entre as várias possibilidades, dentro do vasto campo das não-linearidades, citam-se algumas opções que poderiam dar imediata continuidade a este trabalho:

- a) Obtenção de dados experimentais para calibração dos parâmetros das relações constitutivas viscoelásticas aqui apresentadas;
- b) Consideração do envelhecimento dos materiais, que pode ser adaptada às equações de determinação da deformação, através da variação do módulo de elasticidade do material ao longo do tempo;
- c) Consideração do dano, a partir da introdução de parâmetros que permitam que a evolução das deformações devida ao aparecimento de microfissuras, sejam levadas em conta;
- d) Extensão do programa TRELVE.FOR à análise não-linear geométrica, contemplando inclusive os casos de estruturas em concreto protendido;
- e) Aplicação do modelo desenvolvido ao estudo de recuperação de estruturas, no qual seriam considerados os casos de diferentes etapas de concretagem;
- f) Aplicação às estruturas mistas, abrangendo o estudo das ligações entre peças premoldadas.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE - ACI (1992). **ACI 209R-92 - Prediction of creep, shrinkage, and temperature effects in concrete structures**. Detroit.
- CARVALHO, E.B. (1979). **Análise bidimensional de estruturas de concreto armado, considerando-se os efeitos da fissuração retração e deformação lenta**. Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON - CEB (1978). CEB-FIP model code 1978. **Bulletin D'Information**, n.124-125, Paris.
- COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON - CEB (1984). CEB-FIP model code 1990. **Bulletin D'Information**, n.142, Saint Saphorin.
- COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON - CEB (1991). CEB-FIP model code 1990. **Bulletin D'Information**, n.203-205, July.
- IBRACON (1996). Ponte Bernardo Goldfarb. Monitorando o desempenho para aprimorar projetos e normas. **Revista IBRACON**, v. 4, n.13, p.6-12, junho-julho.
- MALERBA, P.G. (1990). Introduzione all'analisi di strutture in cemento armato. In: CORSO DI AGGIORNAMENTO SU INTRODUZIONE AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI, Politecnico di Milano, 5-9 nov.
- McHENRY, D. (1943). A new aspects of creep in concrete and its application to design. **ASTM Proceedings**, v.43, p.1069-1086.
- MENDES, J.A (1993). **Cálculo automático de perdas progressivas em peças de concreto protendido**. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MUNAIAR N., J. (1994). **Modelos de comportamentos viscoelástico e viscoplástico na análise de estruturas planas**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

PROENÇA, S.P.B. (1986). **Noções básicas de reologia**. São Carlos, EESC-USP.

SIMO, J.C.; HUGHES, T.J.R. (1988). **Elastoplasticity and viscoplasticity: computational aspects**.

## **BIBLIOGRAFIA**

BANGASH, M.Y.H. (1989). **Concrete and concrete structures: numerical modeling and applications**. New York, Elsevier Applied Science.

BAZANT. Z.P. (1982). **Creep and shrinkage in concrete structures**. New York, John Wiley & Sons.

BAZANT. Z.P. (1988). **Mathematical modeling of creep and shrinkage of concrete**. New York, John Wiley & Sons.

BAZANT.Z.P.;CAROL,I.(1993a). Preliminary guidelines and recommendations for characterizing creep and shrinkage in structural design codes. In: INTERNATIONAL RILEM SYMPOSIUM ON CREEP AND SHRINKAGE OF CONCRETE, 5., Barcelona, September 6-9. **Proceedings**.p. 805-829

BAZANT. Z.P.; CAROL, I. (1993b). Viscoelasticity with aging caused by solidification of nonaging constituent. **Journal of Engineering Mechanics**, v.119, n.11, p.2252-2269, Nov.

- CILONI, A.D. (1993). **Sobre o comportamento em serviço de estruturas planas de concreto armado**. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON - CEB (1985). CEB-FIP model code 1985. **Bulletin D'Information**, n.158.
- CREUS, G.J. (1969). Ecuaciones constitutivas para el hormigón: efecto de cargas permanentes. **IMME Boletín Técnico**, n.28, p.55-82, oct - dic.
- DRIEMEIER, L. (1995). **Considerações sobre a fadiga em metais e o comportamento do concreto sob solicitação cíclica**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- GHALI, A.; FAVRE, R. (1986). **Concrete structures: stresses and deformations**. London, Chapman and Hall.
- KOLMOGÓROV, A.N., FOMÍN, S.V. (1978). **Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional**. Trad. de Carlos Vega. Moscou, Editorial MIR.
- KREIDER, D.L. et al. (1966). **An introduction to linear analysis**. Addison - Wesley.
- LACIDOGNA, G.; NAPOLI, P. (1993). Analytical modeling of relaxation in concrete in accordance with the CEB MC90 creep formulation. In: INTERNATIONAL RILEM SYMPOSIUM ON CREEP AND SHRINKAGE OF CONCRETE, 5., Barcelona, September 6-9. **Proceedings**.p. 665-671
- MALVERN, L.E. (1969). **Introduction to the mechanics of a continuous medium**. Englewood Cliffs, Prentice Hall.

PROENÇA, S.P.B. (1989). **Notas sobre análise não-linear física de estruturas**. São Carlos, EESC-USP. (Notas de Aulas).

SOUZA, J.C.A.O. (1992). **Processos gerais da hiperestática clássica**. São Carlos, EESC-USP.

SYDENSTRICKER, R.M.; FAIRBAIRN, I.M.R.; COUTINHO, A.L.G.A. (1995). Modelo da cadeia de Maxwell adaptativo para materiais viscoelásticos com envelhecimento. In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 16., Curitiba, 29 nov.-1 dez. **Anais**. v.1, p.168-176

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. (1989). **The finite element method**. 4.ed. London, McGraw-Hill.