

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**GRANDES DEFORMAÇÕES E
ANISOTROPIA POR TENSORES DE MAPEAMENTO
APLICADOS A PROBLEMAS DE MATERIAIS COMPOSTOS E
NA CONFORMAÇÃO DE METAIS.**

JOSE BENAQUE RUBERT

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para
obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Sergio Persival Baroncini Proença

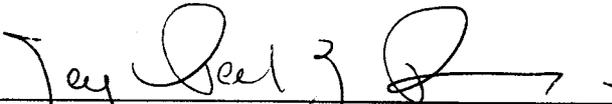
**São Carlos
1997**



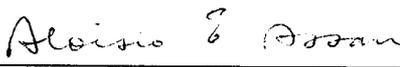
FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidato: Engenheiro **JOSÉ BENAQUE RUBERT**

Tese defendida e aprovada em 21-11-1997
pela Comissão Julgadora:


Prof. Doutor **SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)


Prof. Titular **WALTER SAVASSI**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)


Prof. Livre Doc. **ALOÍSIO ERNESTO ASSAN**
(Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP)


Prof. Titular **ESTEVAM BARBOSA DE LAS CASAS**
(Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG)


Prof. Doutor **JONAS DE CARVALHO**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)


Prof. Titular **CARLITO CALIL JUNIOR**
Coordenador da Área de Engenharia de Estruturas


JOSÉ CARLOS A CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Para Sandra e Helena

*"É difícil não sermos injustos
com aquilo que amamos"*

Oscar Wilde

AGRADECIMENTOS

Certamente é pouco o espaço desta página para agradecer o apoio que tive de todos que de alguma forma contribuíram com sugestões e incentivos na elaboração desta tese.

Especialmente quero agradecer ao professor Sergio P. B. Proença pela orientação e estímulo ao longo deste trabalho, além de seu empenho em propiciar-me a possibilidade de desenvolver parte da tese no Centro Internacional de Métodos Numéricos em Engenharia na UPC em Barcelona.

Agradeço ao professor Dr. Eugenio Oñate diretor do CIMNE pelo seu apoio e por colocar à minha disposição a infra-estrutura necessária para o desenvolvimento dos trabalhos.

Da minha passagem por Barcelona, quero ressaltar e agradecer as orientações e contribuições dos professores Dr. Sergio Oller e Dr. Javier Oliver da UPC e Dr. Estevam Las Casas da UFMG.

Agradeço aos colegas Patricio C. Hernández, Osvaldo Manzoli, William Taylor Matias, Francisc Bassas, Joan Carles Mestres, Francisco Zárata, Juan Carlos C. Terán, Emanuelle Ilpide, Alex Hanganus pelas contribuições e principalmente pela amizade desinteressada. Este saudável convívio revelou-se uma experiência inesquecível.

Quero agradecer também aos colegas, professores e funcionários do departamento de Estruturas da EESC-USP, em especial ao professor Walter Savassi, pela atenção e colaboração. Agradeço também à CAPES e ao CNPq pela ajuda financeira que permitiu levar a bom termo este trabalho.

À minha família pela dedicação, compreensão e paciência manifestadas ao longo deste período.

Jose Benaque Rubert

São Carlos, Outubro de 1997

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivos e Histórico	1
1.2 Organização e conteúdo dos capítulos desta tese	6
2. GENERALIDADES SOBRE O PROGRAMA UTILIZADO	8
2.1 Introdução	8
2.2 Algoritmos Implícito e Explícito.	9
2.3 Formas diferencial e variacional do movimento	10
2.4 Esquemas de solução da equação de movimento	14
2.5 Discretização espacial	15
2.6 Integração explícita no tempo	20
2.7 Matriz de massa concentrada e condição para estabilidade numérica	22
2.8 Algoritmos de contato e consideração do atrito	24
2.9 Esquema geral do programa Stampack[59]	25
3. ELEMENTOS DE MECÂNICA DE MEIOS CONTÍNUOS	27
3.1 Introdução e definições preliminares	27
3.2 Descrição do movimento	29
3.3 Deslocamentos e deformações	33
3.4 Medidas de tensão	40
3.5 Decomposição do tensor gradiente de deformações	43
3.6 Equação constitutiva	46
3.7 Anisotropia	63
4. TEORIA DE INTERAÇÃO DE SUBSTÂNCIAS NO CONTÍNUO	75
4.1 Introdução	75
4.2 Consistência termodinâmica do modelo constitutivo	76
4.3 Generalidades a respeito das formulações paralela, série e mista	80
4.4 Associação em paralelo	82
4.5 Compostos de matriz elasto-plástica e fibras longas	88
4.6 Compostos de matriz frágil e fibras curtas	93
4.7 Comentários finais.	98
5. MODELO ANISÓTROPO BASEADO EM FORMULAÇÃO ISÓTROPA	99
5.1 Introdução	99
5.2 Lei constitutiva geral para materiais elasto-plásticos anisotrópos	102
5.3 Regra de fluxo, variáveis internas e equação constitutiva tangente	108
5.4 Tensores de mapeamento em grandes deformações	111
5.5 Verificação numérica da transformação em grandes deformações	115

6.	IMPLEMENTAÇÃO EM CÓDIGO DE CÁLCULO EXPLÍCITO	119
6.1	Generalidades	119
6.2	Algoritmo de Previsão e Correção	120
6.3	Descrição do Algoritmo	127
6.4	Descrição das subrotinas principais	133
7.	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	137
7.1	Introdução	137
7.2	Exemplos de validação	139
7.2.1	Viga em balanço	140
7.2.2	Cúpula esférica submetida a carga impulsiva	143
7.2.3	Barra tracionada por meio de imposição de deslocamentos	147
7.3	Exemplos de validação para a teoria de misturas	149
7.3.1	Barra de material composto bi-fásico e ambas fases isotrópicas	149
7.3.2	Barra de material bi-fásico com fase isotrópica e fibras longas	150
7.3.3	Placa em lâminas de material bi-fásico com matriz isotrópica e fibras longas	153
7.4	Teoria de misturas aplicada a materiais frágeis reforçados com fibras curtas	157
7.4.1	Barra de material bi-fásico com fase frágil e fibras curtas	158
7.5	Aplicações tecnológicas na área de embutição de chapas	161
7.5.1	OSU Benchmark test: Estiramento de uma lâmina metálica	162
7.5.2	Embutição de uma lâmina metálica: OSU Benchmark test	170
7.5.3	Chalmers University test: Embutição de lâmina metálica	176
7.6	Considerações gerais sobre os resultados obtidos	184
8.	CONCLUSÕES	186
8.1	Contribuições contidas nesta tese e conclusões	186
8.2	Propostas de desenvolvimentos futuros	190
9.	BIBLIOGRAFIA	191
9.1	Referências bibliográficas	191
9.2	Bibliografia	199
	APÊNDICE A	206
	APÊNDICE B	215
	APÊNDICE C	220

LISTA DE VARIÁVEIS

- F** - Tensor gradiente de deformações.
- E** - Tensor de deformações de Green-Lagrange.
- L** - Tensor gradiente de velocidades.
- D** - Tensor velocidade de deformações ou taxa de deformações (simétrico).
- W** - Tensor velocidade de rotação ou tensor spin.
- V e U** - Tensores de estiramento esquerdo e direito respectivamente (decomposição polar).
- Q** - Tensor ortogonal da decomposição polar.
- C** - Tensor direito de Cauchy-Green.
- B** - Tensor esquerdo de Cauchy-Green.
- J** - Tensor gradiente material dos deslocamentos.
- G** - Tensor métrico material.
- g** - Tensor métrico na configuração deformada.
- j** - Tensor gradiente espacial de deslocamentos.
- e** - Tensor de deformações de Almansi.
- σ - Tensor de tensões de Cauchy.
- τ - Tensor de tensões de Kirchhoff.
- I** - Primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff.
- S** - Segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff.
- ρ - Densidade espacial.
- u** - Vetor de deslocamentos nodais.
- $\dot{\mathbf{u}}$ - Vetor de velocidades nodais.
- $\ddot{\mathbf{u}}$ - Vetor de acelerações nodais.
- X** - Vetor posição na configuração de referência ou material.
- x** - Vetor posição na configuração deformada.
- Γ_x - Parte de um contorno onde conhecem-se os deslocamentos.

- Γ_τ - Parte de um contorno onde conhecem-se as tensões.
- \mathbf{n} - Vetor normal à superfície.
- \mathbf{R}^{extr} - Vetor das forças resultante externas.
- $\delta\mathbf{u}$ - Vetor deslocamentos virtuais nodais.
- $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ - Vetor deformações virtuais.
- \mathbf{m} - Matriz de massa diagonal.
- N_j e N_k - Funções de forma para os elementos finitos.
- \mathbf{W}_n - Máxima frequência natural do sistema discreto.
- ϕ_* e ϕ^* - Transformações tensoriais denominadas por "push-forward" e "pull-back".
- L_V - Derivada de Lie.
- \mathbf{b}^{-1} - Tensor das deformações de Finger.
- $\mathbf{b}^{\text{e}-1}$ - Componente elástica do tensor de deformações de Finger.
- $\mathbf{W}(\mathbf{E})$ - Função escalar potencial elástico.
- ψ - Potencial de energia livre.
- α_n - Conjunto de variáveis internas.
- \mathbf{A} e \mathbf{a} - Tensores de elasticidade tangente material e espacial.
- $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ - Deformação plástica efetiva.
- σ_{y0} - Tensão de proporcionalidade inicial.
- \mathbf{d} - Variável de dano.
- σ_y - Função de endurecimento.
- \mathbf{H} - Parâmetro de endurecimento.
- \mathbf{f} - Função de fluência.
- σ_r - Tensão de comparação.
- σ_e - Tensão efetiva.
- $\dot{\gamma}$ - Parâmetro de consistência plástica.

Algumas variáveis recebem uma barra superior. No capítulo 3 a barra indica que a variável está na configuração intermediária, e no capítulo 5 a barra representa variáveis do espaço fictício isótropo.

Os índices superiores p e e indicam respectivamente as componentes plástica e elástica dos tensores.

RESUMO

RUBERT, J. B. (1997). Grandes deformações e anisotropia por tensores de mapeamento aplicados a problemas de materiais compostos e na conformação de metais. São Carlos, 228p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho tem por objetivo demonstrar a viabilidade do emprego da teoria de interação de substâncias no contínuo para a análise de compostos multifásicos, sendo possível considerar-se substâncias anisótropas através de sua representação via uma formulação isótropa equivalente.

No campo teórico, referente à anisotropia via formulação isótropa equivalente, deduzem-se tensores de mapeamento de tensões e deformações para o espaço fictício na configuração deformada, adequados às análises com grandes deformações.

Os modelos de materiais compostos e de anisotropia propostos, foram implementados no âmbito de um código de cálculo para análise dinâmica explícita com grandes deformações. Entre as aplicações do programa destacam-se o estudo de problemas de conformação de lâminas metálicas e de compostos multifásicos e a possibilidade de analisar compostos de matriz frágil reforçada por fibras curtas, considerando-se uma função simples de dano elasto-plástico.

Os exemplos executados mostram boa concordância dos resultados obtidos neste trabalho com aqueles obtidos por outros autores e com alguns resultados experimentais existentes.

Palavras-chave: Grandes deformações; Anisotropia; Compostos.

ABSTRACT

RUBERT, J. B. (1997). Finite deformations and anisotropy by mapping tensors applied to composites and sheet metal forming. São Carlos, 228p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

The aim of this work is to evaluate the performance of the theory of interacting substances in the continuum (rule of mixtures) applied to composites including anisotropic substances which are modeled by an isotropic equivalent formulation.

In the theoretical field, with respect to the anisotropy consideration by an equivalent isotropic formulation on the deformed configuration, convenient mapping tensors for stresses and strains in the fictitious space are deduced and applied to large deformation problems.

The proposed models of anisotropy and composites were implemented in an explicit code for dynamic analysis with large deformations. The code is applied to the solution of sheet metal forming processes and multiphase composites including an analysis of a brittle matrix composite reinforced by short fibers by a simple elastoplastic damage model.

The numerical results of the chosen examples are in good agreement with those suggested in some references or with some reported experiments.

Keywords: Finite deformations; Anisotropy; Composites.

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

1.1 Objetivos e Histórico

O objetivo deste trabalho, é o de estudar modelos matemáticos do comportamento de materiais submetidos a grandes deformações elasto-plásticas, destacando-se em particular aqueles dedicados à simulação de certos materiais compostos e de metais submetidos a processo de conformação a frio. Em ambos casos inclui-se a consideração da anisotropia inicial ou induzida pelo processo de plastificação, utilizando-se para isso o conceito de tensores de mapeamento em lugar das clássicas funções de Hill[22][31][36] e outros modelos propostos e já estudados por diversos autores; ver por exemplo Barlat[25][26], Hoffman[58], Karafilis[30] entre outros.

Uma das primeiras tentativas de situar com rigor o estudo da plasticidade com grandes deformações no âmbito da mecânica de meios contínuos foi feita por Green e Naghdi[54] em 1965, introduzindo a denominada Teoria Aditiva. A proposta do modelo consiste em, basicamente, decompor o tensor de deformações de Green-Lagrange E em suas componentes elástica e plástica.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p \quad (1.1.1)$$

O inconveniente desta proposição, segundo Garino[41], é o fato de que ela pode não ter correspondência com o fenômeno físico observado, uma vez que as grandezas envolvidas, tais como regra de fluxo, função de fluência e variáveis internas, referem-se a um espaço sem sentido físico. Todo o modelo está, de fato, formulado no espaço de tensões de Piola-Kirchhoff (configuração de referência). Trabalhos posteriores: Rubin, Voyiadjis e outros, ainda segundo Garino[41], introduziram modificações neste modelo, aplicáveis a metais e geomateriais.

Seguiram-se aos trabalhos de Green e Naghdi, os modelos baseados na decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformações (Lee[46] entre outros propõe modelos deste tipo). O modelo de Lee[46] caracteriza-se por adotar uma função potencial de energia cujas componentes elástica e plástica aparecem desacopladas; estabelece ainda que a função de energia livre elástica só depende da parte simétrica da componente elástica do tensor esquerdo de Cauchy-Green \mathbf{V} . Nos modelos baseados na decomposição multiplicativa do gradiente total de deformações \mathbf{F} , as grandezas envolvidas podem, no caso de grandes deformações, referirem-se à configuração atualizada. A relação básica que exprime a decomposição em questão é:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (1.1.2)$$

A unificação desses dois modelos surgiu a partir dos trabalhos de Green e Naghdi e Sidoroff. Partindo da decomposição multiplicativa de \mathbf{F} , eles obtiveram uma expressão para a componente plástica do tensor direito de Cauchy-Green \mathbf{C}^p que guarda relação com a regra de fluxo \mathbf{d}^p do modelo adotado. Os demais tensores envolvidos podem ser obtidos partindo dessa expressão. Posteriormente Simo e Ortiz entre outros autores, também propuseram formas para a unificação do tratamento dado à cinemática do problema de plasticidade em grandes deformações.

No presente trabalho adota-se um modelo baseado na decomposição multiplicativa de \mathbf{F} para a consideração de grandes deformações elasto-plásticas, sendo que o problema passa a ser

como obter no caso de materiais compostos uma resposta global a partir da combinação das respostas das substâncias constituintes.

Sob certas condições, a teoria de interação mecânica de substâncias no contínuo, ou teoria de misturas, aproxima de maneira bastante eficiente o comportamento experimental de vários materiais compostos empregados na atualidade. As hipóteses básicas desta teoria consistem em admitir que em todo ponto do sólido cada uma das substâncias formadoras contribue proporcionalmente à fração do volume total que ocupa para o computo das tensões globais, além do que o volume de cada uma das substâncias deve ser bem menor do que o volume total do composto.

A teoria de interação de substâncias no contínuo foi apresentada num clássico trabalho de Truesdell e Toupin[71] em 1960. Esse trabalho serviu de base para desenvolvimentos posteriores como os de Green e Naghdi[29] em 1965 que formularam uma teoria dinâmica para o fluxo entre dois ou mais meios contínuos e de Ortiz e Popov de 1982 que estudaram o concreto como um material bi-fásico. Tanto em Truesdell e Toupin[71] como em Green e Naghdi[29] há muitas referências a trabalhos anteriores de outros autores. Soma-se a estes conceitos básicos a teoria constitutiva da plasticidade generalizada desenvolvida entre outros por Oller[49] onde se propõe um modelo mais geral capaz de representar o comportamento constitutivo de materiais compostos n-fásicos. De uma maneira mais ampla esta teoria surge como um gerenciador não apenas da resposta individual de substâncias de um composto mas também do tipo de comportamento manifestado por essas substâncias.

Um último aspecto tratado neste trabalho, no que se refere ao comportamento constitutivo em regime elasto-plástico dos materiais, é a possibilidade de analisar materiais anisótropos frequentemente utilizados na fabricação de compostos multi-fásicos. A maneira usual de fazê-lo consiste em introduzir uma função de fluência capaz de levar em conta os parâmetros de anisotropia das substâncias. As funções de fluência mais conhecidas e empregadas são as formuladas por Hill [22][31][36], com base no critério de von Mises, razão pela qual são designadas frequentemente na literatura por funções de Mises-Hill.

A primeira proposta de Hill[22] surgiu em 1948 visando problemas de conformação a frio de chapas metálicas finas e planas, caso em que a anisotropia é induzida pelo processo de laminação, alterando-se a resistência do material na direção transversal ao plano médio. Bons

resultados foram obtidos inicialmente para o caso dos aços; contudo, a sequência de experimentos mostrou que para determinados materiais tais como o alumínio, a função de plastificação adotada produzia maus resultados. Com o intuito de ampliar as possibilidades de análise, Hill[31][36] introduz em 1978 e depois em 1990, correções à sua proposta original melhorando alguns aspectos de sua aplicabilidade. Posteriormente diversos autores [33][34][35] têm demonstrado que sob certas condições as superfícies de fluência obtidas com a aplicação dos critérios de Mises-Hill produzem algumas inconsistências matemáticas capazes de produzir resultados alterados para algumas situações.

Paralelamente aos trabalhos de Hill outros autores propuseram funções de fluência aplicáveis a materiais anisótropos. Dentre eles pode-se citar Barlat[25] em 1989, Hoffman [58] em 1967 e Karafilis e Boyce[30] em 1993.

Neste trabalho a simulação da resposta de materiais considerando a anisotropia é feita empregando-se o conceito de tensor de mapeamento introduzido inicialmente por Betten[7] e posteriormente generalizado por Oller[2]. A idéia básica consiste em resolver o problema num espaço isótropo fictício, onde se podem empregar estratégias computacionais já disponíveis. Para isso constroem-se tensores de quarta ordem, contendo toda informação acerca da anisotropia dos materiais e que permitem relacionar os estados de tensão e deformação do espaço real com os seus equivalentes no espaço fictício. Apesar de geral, este tratamento exige um conhecimento mais rigoroso dos parâmetros dos materiais, uma vez que estes entram na definição dos tensores de mapeamento como se verá mais adiante.

Uma contribuição original no campo teórico, proposta neste trabalho, é a descrição dos referidos tensores de mapeamento na configuração atualizada, de interesse para a aplicação do modelo a grandes deformações. Para isso empregam-se as operações denominadas na literatura por "pull-back" e "push-forward", respectivamente transformações tensoriais de uma configuração atualizada para uma configuração de referência e vice-versa; ver por exemplo em Marsden e Hughes[43] e Garino[41].

Os modelos desenvolvidos são implementados em um programa explícito para análise de sólidos elasto-plásticos submetidos a grandes deformações denominado Stampack[59]. Os elementos finitos utilizados são os quadriláteros sólidos bi-dimensionais e sólidos tri-dimensionais com variação linear das deformações no domínio e com integração seletiva nos pontos de Gauss,

adequados para a análise de estados planos de deformação, de problemas com simetria de revolução e sólidos tri-dimensionais. Estados planos de tensão são tratados utilizando-se os sólidos tri-dimensionais, de modo que no caso de ocorrência de plastificação o vetor fluxo-plástico originado se mantém coerente.

A função de fluência empregada neste trabalho é a de von Mises e a integração no tempo da equação de equilíbrio dinâmica é feita pelo método das diferenças centrais. O fator de retorno à superfície de fluência é calculado por meio do emprego do algoritmo de retorno radial, ver em Crisfield[52] e Simo e Hughes[47]. Obviamente não foi necessária a implementação de funções de fluência específicas para o tratamento da anisotropia uma vez que a integração da equação constitutiva neste trabalho é sempre feita dentro de um espaço fictício isótropo.

O trabalho reúne no capítulo 7 exemplos de cunho exclusivamente acadêmico para validação e aferição dos resultados obtidos e exemplos de aplicação em problemas tecnológicos nas áreas de conformação de metais e de materiais compostos.

O texto contido no capítulo 2 introduz o leitor no conhecimento de conceitos teóricos utilizados no desenvolvimento da parte geral do programa. Envolve de maneira resumida a formulação dos elementos finitos e a técnica de solução da equação dinâmica de equilíbrio empregadas, aspectos sobre a estabilidade numérica, passo de tempo crítico, matriz de massa e por fim aspectos gerais de caráter introdutório sobre os algoritmos de contato usados na simulação de conformação de metais. O autor limitou-se a introduzir as implementações feitas ao programa, de modo que a maior parte do conteúdo deste capítulo deve-se aos trabalhos de Hernández[67], Rojek[59][61], Garino[19][41], Las Casas[44][70] e Oller[2].

1.2 Organização e conteúdo dos capítulos desta tese

No capítulo 2 estão contidos os temas que não fazem parte dos assuntos desenvolvidos nesta tese mas que são fundamentais na compreensão da estrutura do programa Stampack[59] utilizado nas implementações. Descreve-se em linhas gerais o programa fazendo-se referência ao tipo de elemento finito utilizado, à técnica de integração explícita da equação dinâmica de

equilíbrio e aos algoritmos de contato e fricção incluídos no programa. A estrutura e a descrição das principais rotinas incluídas no bloco principal do programa são também descritas neste capítulo.

O capítulo 3 destina-se à exposição dos aspectos teóricos básicos da mecânica de meios contínuos. Em primeiro lugar descrevem-se os tensores de tensões e deformações nas denominadas configurações de referência e deformada. Na sequência descrevem-se o modelo proposto por Garino[41] para grandes deformações e um modelo simplificado para a consideração de dano elasto-plástico. Introduzem-se aspectos também da implementação computacional destes modelos.

No capítulo 4 encontra-se a exposição da teoria de interação de substâncias no contínuo para emprego na solução de problemas com materiais compostos. Com base em textos de Oller[17] [18] e Oñate[64], mostram-se aspectos de consistência termodinâmica do modelo num contexto de grandes deformações. Descrevem-se as formulações mista, em série e em paralelo estendendo-se o estudo apenas no caso da formulação paralela. O caso de particularização do modelo para emprego em compostos com fibras longas e curtas está descrito no final deste capítulo.

O capítulo 5 introduz o estudo da consideração da anisotropia dos materiais por meio de uma formulação isótropa equivalente segundo uma abordagem denominada anisotropia por tensores de mapeamento. O modelo, na forma proposta por Oller[2], é estendido ao caso de grandes deformações em uma formulação explícita e é proposta uma dedução para os tensores de mapeamento numa configuração deformada, empregando-se o gradiente de deformações. Este último desenvolvimento e a correspondente implementação pode ser considerada como a contribuição teórica contida nesta tese.

O capítulo 6 descreve a implementação computacional dos modelos propostos sendo que ao final desse capítulo inclui-se um diagrama de blocos referentes às implementações feitas internamente aos módulos do programa em elementos finitos utilizado, bem como a descrição das subrotinas dessa fase.

No capítulo 7 encontram-se os exemplos utilizados com o objetivo de validar os modelos numéricos propostos. Por meio de confronto dos resultados obtidos nesta tese com aqueles propostos por outros pesquisadores e que se encontram na literatura disponível, procura-se

demonstrar as possibilidades de aplicação dos modelos no campo dos materiais compostos e no campo da conformação de metais. Os resultados obtidos mostram-se satisfatórios.

O capítulo 8 contém as conclusões, os comentários finais e propostas para desenvolvimentos posteriores.

Esta tese contém ainda três apêndices referentes a assuntos de interesse apenas localizado: o apêndice A diz respeito ao estudo de contato e trata-se de um texto contido em relatório técnico elaborado por Las Casas[83]; No apêndice B exemplifica-se o conceito de métrica; No apêndice C deduzem-se as partes volumétrica e desviadora do tensor constitutivo anisótropo.

CAPÍTULO 2

2. GENERALIDADES SOBRE O PROGRAMA UTILIZADO

2.1 Introdução

O programa utilizado, e no qual implementaram-se as modificações propostas nos capítulos 4 e 5 desta tese, foi desenvolvido no Centro Internacional de Métodos Numéricos em Engenharia na UPC em Barcelona e denomina-se Stampack[59]. Ao longo do tempo muitos autores [59][64][65] ofereceram contribuições ao seu desenvolvimento e a versão utilizada nesta tese está de acordo com as informações e instruções fornecidas em Rojek[59].

Os próximos itens resumem aspectos de caráter geral acerca do programa, importantes na compreensão do desenvolvimento dos estudos, eles têm por base textos de Garino[19][32][41] e Hernández[67], autores que contribuíram com o desenvolvimento deste programa. As informações contidas referem-se principalmente aos elementos utilizados, ao tipo de integração da equação dinâmica de equilíbrio e aos tipos de algoritmos de contato utilizados. Na parte final inclui-se um diagrama esquemático geral do programa.

2.2 Algoritmos Implícito e Explícito.

O método das diferenças finitas e a integração temporal explícita têm sido largamente empregados na solução de uma vasta gama de problemas de análise dinâmica transiente que surgem, por exemplo, em processos tecnológicos industriais e na simulação do impacto entre sólidos deformáveis ou não. Estes métodos em dado momento mostram-se vantajosos quando aplicados a problemas com deformações finitas que ocorrem em intervalo de tempo muito pequeno. Nestas condições, os métodos implícitos, que envolvem a construção de matrizes de rigidez e a solução de sistemas de equações de grandes dimensões, levam a um esforço computacional e requisitos de armazenamento de dados muitas vezes exagerado. Contudo é necessário ressaltar que o contínuo desenvolvimento das técnicas numéricas pode levar a uma revisão destas colocações uma vez que as condições necessárias que se impoem à solução explícita também apresentam suas desvantagens como se verá a seguir.

O desenvolvimento do programa Stampack[59] parte de princípios da mecânica dos meios contínuos e utiliza o método dos elementos finitos e das diferenças finitas conjuntamente para resolver as equações de movimento. Os procedimentos para encontrar a resposta dinâmica não-linear das estruturas estão implementados em sua forma mais geral, e portanto sua utilização estende-se aos comportamentos linear ou não linear, seja geométrico, material ou combinação de ambos.

O equilíbrio na configuração deformada com relação ao tempo t é imposto via princípio dos trabalhos virtuais (PTV) e escrito em forma aproximada a partir da discretização do meio com elementos finitos isoparamétricos. O sistema de equações resultante é resolvido mediante um esquema de integração temporal do tipo explícito onde as acelerações e velocidades de um dado ponto do sólido se expressam em função dos deslocamentos por meio de expressões em diferenças finitas, ou seja, a nova configuração de tempo $t+\Delta t$ é obtida através da descrição do movimento na configuração de equilíbrio no tempo t .

A utilização do conceito de matriz de massa concentrada permite resolver o sistema de equações sem necessidade de trabalhosas transformações matriciais. Dado que os algoritmos de

integração explícita são condicionalmente estáveis, o intervalo de tempo Δt deve ser limitado para assegurar-se a estabilidade da resposta, sob pena de ter-se uma resposta amplificada artificialmente.

Diferentes expressões para determinar o valor do intervalo de tempo crítico em função da frequência máxima do sistema discreto se encontram na literatura. No programa o intervalo de tempo crítico pode ser recalculado a cada passo ou para um determinado número de passos fornecido pelo usuário e pode ser obtido a partir do método de busca do maior autovalor do sistema discreto de acordo com o algoritmo de Mises dado em Bathe[72], ou por meio de equações simplificadas, ver Cook[73] ou Zienkiewicz[74], entre outros.

Um código com as características mencionadas anteriormente denomina-se na literatura como hidrocódigo Benson[40]. A origem dos hidrocódigos tem raiz na necessidade de resolver problemas militares e de defesa; atualmente seu campo de aplicação estende-se a problemas estruturais tais como os de conformação de metais e impacto entre corpos.

2.3 Formas diferencial e variacional do movimento

Admita-se que um corpo de volume V com uma resposta constitutiva não linear se movimenta em relação a um referencial coordenado cartesiano fixo sofrendo grandes deslocamentos. Tendo-se em conta a simetria do tensor de tensões σ_{ij} , o problema consiste em encontrar o campo de deslocamentos materiais $u_i({}^0\mathbf{x}, t)$ que satisfaz a equação diferencial de movimento de Cauchy num instante t qualquer dentro de um intervalo de tempo estabelecido.

$${}^t\rho {}^t\ddot{u}_i = \frac{\partial^t\sigma_{ij}}{\partial^t x_j} + {}^t\rho {}^t b_i \quad (2.3.1)$$

Na expressão acima ρ é uma função de densidade espacial e $\rho \mathbf{b}$ são forças por unidade de volume, $\ddot{\mathbf{u}}$ é o vetor de acelerações nodais e \mathbf{x} é o vetor de coordenadas espaciais, por sua vez

função das coordenadas materiais 0x dos pontos do sólido e de t .

As condições de contorno podem ser especificadas como deslocamentos impostos ou como tensões prescritas. As regiões do contorno onde os deslocamentos e tensões são conhecidos são denotados por Γ_x e Γ_τ respectivamente (ver Fig. 2.01):

$${}^t u_i = f_i(x, t) \quad \text{sobre} \quad \Gamma_x \tag{2.3.2}$$

$${}^t_i \sigma_{ij} n_j = h_i(x, t) \quad \text{sobre} \quad \Gamma_\tau \tag{2.3.3}$$

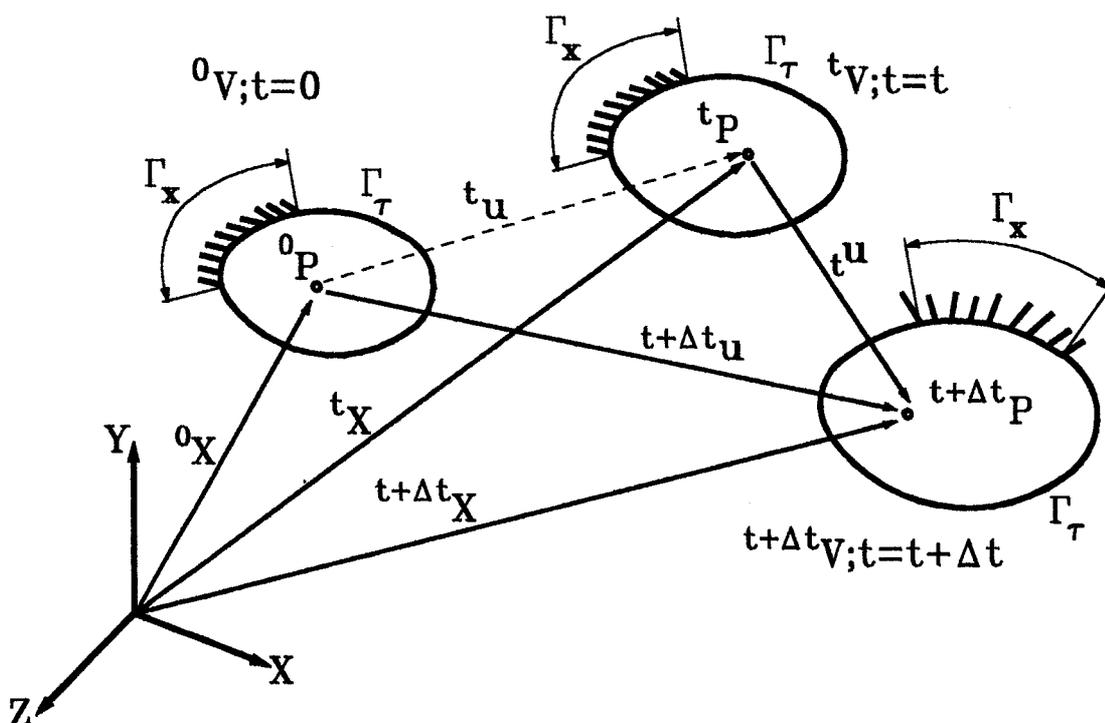


Fig. 2.01 - Sucessivas configurações de um sólido em relação a um sistema de coordenadas cartesianas ao longo do tempo.

As condições iniciais para o campo de deslocamentos e de velocidades expressam-se como função das coordenadas materiais ${}^0\mathbf{x}$ de modo que tem-se:

$${}^0u_i = u_i({}^0\mathbf{x}) \quad (2.3.4)$$

$${}^0\dot{u}_i = \dot{u}_i({}^0\mathbf{x}) \quad (2.3.5)$$

Nas expressões anteriores \mathbf{n}_j são as componentes do versor normal à superfície, os índices superiores à esquerda indicam o instante t que corresponde à configuração na qual o corpo se encontra, os subíndices à direita indicam os eixos coordenados. Quando existirem, subíndices à esquerda indicam a configuração com relação à qual se está considerando a variável.

O problema de valor inicial fica totalmente determinado quando se consideram as relações de compatibilidade entre os campos de deslocamentos e deformações e a equação constitutiva adequada que relaciona as tensões com os deslocamentos dos pontos do sólido.

Para propósitos numéricos é mais apropriado reduzir a equação de movimento de Cauchy à sua forma variacional, empregando-se o método dos resíduos ponderados e escolhendo-se como funções peso o campo de deslocamentos virtuais $\delta^t u_i$; Desta forma tem-se:

$$\int_V ({}^t\rho \dot{u}_i - \frac{\partial^t \sigma_{ij}}{\partial^t x_j} - {}^t\rho b_i) \delta^t u_i dV = 0 \quad (2.3.6)$$

com $\delta^t \mathbf{u}$ satisfazendo os mesmos requisitos de continuidade e integrabilidade que o vetor solução ${}^t \mathbf{u}$, e tendo valores nulos no contorno Γ_x . Aplicando-se o teorema da divergência à equação 2.3.6 obtém-se:

$$\int_{tV} {}^t\rho {}^t\ddot{u}_i \delta^t u_i {}^t dV = \int_{tV} {}^t\rho {}^t b_i \delta^t u_i {}^t dV + \int_{\Gamma_t} h_i \delta^t u_i dS - \int_{tV} {}^t\sigma_{ij} \frac{\partial^t u_i}{\partial^t x_j} {}^t dV \quad (2.3.7)$$

Na expressão do PTV (eq. 2.3.7), observam-se os termos referentes às forças inerciais do lado esquerdo da igualdade, e à direita pela ordem, tem-se: A integral das forças volumétricas dadas por ρb_i , a integral sobre a superfície da função h_i que representa solicitações externas aplicadas no contorno Γ_t e a integral do campo de tensões no volume do corpo. O problema variacional se resume em obter o campo de deslocamentos materiais $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ que satisfaz a seguinte equação:

$$F({}^t\ddot{u}) = R^{extr}({}^t u) - f^{inte}({}^t u) \quad (2.3.8)$$

O operador forças internas f^{inte} pode ser reescrito em função da variação virtual do tensor de pequenas deformações $\delta^t e_{ij}$, de modo que tem-se:

$$f_i^{inte}({}^t u_i) = \int_{tV} {}^t\sigma_{ij} \delta^t e_{ij} {}^t dV \quad (2.3.9)$$

Tendo-se em conta também a equação de continuidade, ou princípio de conservação da massa [50], pode-se escrever o vetor de forças inerciais F_i em função do volume inicial do corpo.

Supondo que as forças de superfície são conservativas independentemente do nível de deformações, o operador resultante das forças externas R^{extr} também pode ser expresso em termos desse volume inicial, de modo que:

$$F_i(\delta u_i) = \int_{0V} \rho \delta u_i dV \quad (2.3.10)$$

$$R_i^{extr}(\delta u_i) = \int_{0V} \rho b_i \delta u_i dV + \int_{0S} h_i \delta u_i dS \quad (2.3.11)$$

2.4 Esquemas de solução da equação de movimento

A solução para a equação de movimento pode ser encontrada a partir de uma discretização do intervalo de tempo de interesse. Nessas condições trata-se de determinar as posições de equilíbrio do sólido em cada instante de tempo $t=t_0+n\Delta t$ com $n=1,2,\dots,i$ onde Δt é o incremento de tempo escolhido na discretização [67]. Para encontrar essas configurações existem dois caminhos possíveis. Num primeiro, a configuração atual, em $t+\Delta t$, é determinada a partir da configuração conhecida no tempo t ; nesse caso o esquema de integração no tempo será explícito. Num segundo caminho considera-se a própria configuração no tempo $t+\Delta t$ onde nem todas as variáveis cinemáticas e estáticas são conhecidas; o esquema de integração nesse caso é do tipo implícito (Newmark, Bossak-Newmark, Houbolt. etc.) [67], ver por exemplo em Bathe[72].

A escolha do esquema de integração a ser utilizado depende normalmente de três fatores: estabilidade, precisão e custo [67]. Nesta tese adota-se o mesmo esquema de integração do tipo explícito utilizado por Hernández[67], o qual é adequado para tratar problemas em deformações finitas cuja ocorrência se dá em intervalos de tempo muito pequenos [59] [65] [67]. Como já foi demonstrado, os operadores forças externas e forças inerciais podem ser expressos em relação à configuração inicial em $t=0$. Uma solução para a equação 2.3.8 pode ser obtida referindo-se todas as variáveis do operador forças internas a qualquer uma das configurações previamente utilizadas. Na prática utilizam-se somente duas possibilidades dentro de um contexto lagrangiano: uma solução na qual todas as variáveis cinemáticas e estáticas referem-se à configuração inicial do sólido no tempo $t=0$, denominada formulação lagrangiana total (FLT) [72] [67], e uma solução

onde todas as variáveis cinemáticas e estáticas referem-se à última configuração conhecida no tempo t , que se definirá como formulação lagrangiana atualizada (FLA) [72] [67]. Ambas as formulações podem incluir todos os efeitos não lineares cinemáticos devidos a grandes deslocamentos e deformações, para isso, basta que os tensores utilizados na definição do modelo constitutivo empregado sejam deduzidos tendo em conta a configuração considerada. Utilizando-se adequadas medidas conjugadas de tensão e deformação em cada formulação (FLA ou FLT) deve-se obter os mesmos resultados para um dado problema.

Nesta tese, da mesma forma que em Hernández[67], utiliza-se a formulação lagrangiana atualizada para a descrição do movimento das partículas do sólido.

Com base na figura 2.01, o movimento das partículas do sólido considera-se via formulação Lagrangeana atualizada e descreve-se da seguinte forma:

$${}^{t+\Delta t}x_i = {}^t x_i + {}^t u_i \quad (2.4.1)$$

$${}^t u_i = {}^{t+\Delta t} u_i - {}^t u_i \quad ; \quad i = 1,2,3 \quad (2.4.2)$$

onde ${}^t u_i$ é o incremento de deslocamentos entre as configurações t e $t+\Delta t$. A determinação do tensor de tensões de Cauchy na configuração $t+\Delta t$ será apresentada nos próximos capítulos, uma vez que há uma relação direta com o modelo constitutivo a ser empregado.

2.5 Discretização espacial

Considere-se um domínio discretizado por um conjunto de pontos ou nós que definem uma rede de elementos finitos [67] [75] numa configuração t arbitrária. Os deslocamentos ${}^t u_{\alpha i}$ e velocidades ${}^t \dot{u}_{\alpha i}$ são valores nodais, onde α é o número do nó e i corresponde à direção relativa a um sistema cartesiano retangular. Sendo N_{α} funções de forma adequadas que aproximam os

campos de deslocamentos e velocidades, os valores dos deslocamentos, velocidades e acelerações em qualquer ponto do domínio podem ser interpolados em função de seus valores nodais. Desse modo tem-se que:

$${}^t u_i = N_\alpha {}^t u_{\alpha i} \quad (2.5.1)$$

$${}^t \dot{u}_i = N_\alpha {}^t \dot{u}_{\alpha i} \quad (2.5.2)$$

$${}^t \ddot{u}_i = N_\alpha {}^t \ddot{u}_{\alpha i} \quad (2.5.3)$$

De maneira análoga a variação virtual dos deslocamentos e seus gradientes são interpolados utilizando-se as mesmas funções de forma e suas derivadas com relação às coordenadas espaciais:

$$\delta {}^t u_i = N_\alpha \delta {}^t u_{\alpha i} \quad (2.5.4)$$

$$\frac{\partial \delta {}^t u_i}{\partial \delta {}^t x_j} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial \delta {}^t x_j} \delta {}^t u_{\alpha i} \quad (2.5.5)$$

Substituindo-se as relações anteriores nas equações 2.3.9, 2.3.10 e 2.3.11, chega-se a uma expressão matricial que representa um sistema de equações diferenciais de segunda ordem a coeficientes variáveis dada por:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}^{extr} - \mathbf{f}^{intr}(\mathbf{u}) \quad (2.5.6)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa consistente referida à configuração inicial, $\ddot{\mathbf{u}}$ é o vetor de acelerações nodais e \mathbf{R}^{extr} é o vetor das resultantes externas no instante de tempo t , $\mathbf{f}^{intr}(\mathbf{u})$ é a expressão do vetor global de forças internas e é dada por:

$$\mathbf{f}^{intr}(\mathbf{u}) = \sum_e \int_{t_v^{(e)}} \mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma} \, dV \quad (2.5.7)$$

onde \mathbf{B}_L é a matriz de deformação linear [72] e $\boldsymbol{\sigma}$ o vetor de tensão de Cauchy.

A técnica dos elementos finitos consiste em aproximar o campo de deslocamentos dos pontos de um sólido por meio da contribuição dos deslocamentos aproximados nos subdomínios (elementos) utilizados na discretização. De maneira simplificada verificam-se para a resposta aproximada em cada elemento, as seguintes relações:

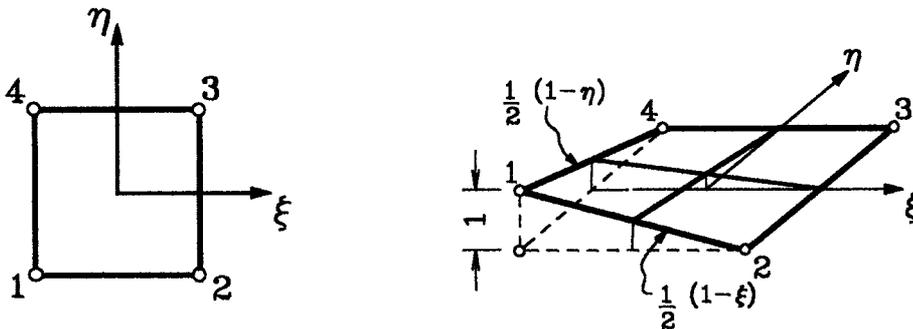
$$u_i = \sum_{\alpha=1}^m N_{\alpha i} u_{\alpha i} \quad (2.5.8)$$

$$\delta u_i = \sum_{\alpha=1}^m N_{\alpha i} \delta u_{\alpha i} \quad (2.5.9)$$

$$\delta \epsilon_i = \sum_{i=1}^m B_{\alpha i} \delta u_{\alpha i} \tag{2.5.10}$$

onde u_{α} é o vetor de deslocamentos nodais do elemento, δu_{α} é o vetor de deslocamentos virtuais nodais e $\delta \epsilon$ é o vetor de deformações virtuais, i varia de um até m pontos nodais, o índice α está associado aos elementos e $B_{\alpha i}$ é a matriz que contém as derivadas das funções de forma.

Neste trabalho empregam-se os elementos quadriláteros lineares de quatro nós para os problemas bi-dimensionais em deformação plana e simetria de revolução. Nos problemas tri-dimensionais empregam-se os elementos hexaédricos de oito nós.



$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)$$

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)$$

Nó	1	2	3	4
ξ_i	-1	1	1	-1
η_i	-1	-1	1	1

Fig. 2.02- Elemento Lagrangeano quadrilátero plano linear de quatro nós.

As funções de forma para os elementos 2D em coordenadas homogêneas segundo Oñate[75] são expressas como produto de dois polinômios de Lagrange unidimensionais função das coordenadas homogêneas consideradas, ou seja, para um dado ponto i pode-se escrever:

$$N_i(\xi, \eta) = l_i^i(\xi) l_j^i(\eta) \quad (2.5.11)$$

com polinômios dados por:

$$l_i^i(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi \xi_i) \quad e \quad l_j^i(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta \eta_j) \quad (2.5.12)$$

onde ξ_i e η_i são as coordenadas homogêneas do $i^{\text{ésimo}}$ ponto do elemento e assumem os valores da tabela mostrada na figura 2.02.

As funções de forma para o elemento hexaédrico obtêm-se efetuando o produto de três polinômios de Lagrange também lineares e função, neste caso, de três coordenadas homogêneas. O tratamento é análogo ao do caso plano [75].

2.6 Integração explícita no tempo

A solução numérica do sistema de equações diferenciais do movimento, representado pela equação 2.5.6, é feita mediante um esquema de integração explícita no tempo. Levando-se em conta as considerações constantes neste capítulo e as aplicações a serem feitas, resumem-se os motivos desta escolha aos seguintes fatores: maior simplicidade ao avaliar as incógnitas nodais quando se usa uma matriz de massa diagonal; Quando a rede se torna mais refinada, o esforço computacional aumenta apenas linearmente em função do número de graus de liberdade do

sistema; As poucas operações executadas a cada intervalo de tempo e o reduzido espaço de memória utilizado, uma vez que apenas a solução num único instante de tempo é armazenada, torna a estratégia interessante do ponto de vista computacional; Não é necessário construir a matriz de rigidez global do sistema, de modo que para problemas em grande escala isto se traduz também numa importante economia de memória.

Os métodos explícitos, contudo, são condicionalmente estáveis, portanto sua estabilidade numérica depende do tamanho do intervalo Δt de integração, existindo um valor crítico que quando violado leva a uma amplificação da solução de forma artificial. Isto significa que em problemas práticos o número de passos de tempo pode chegar a ser da ordem de 10^4 ou 10^5 [67]. Cabe lembrar que para um grande número de problemas não lineares, independentemente das considerações de estabilidade numérica, exigem-se igualmente intervalos reduzidos de tempo de modo a ter-se uma resposta adequada [67], em particular os problemas onde a propagação da frente de ondas é importante. Tipicamente os problemas de impacto entre corpos enquadram-se nesta categoria.

Nos métodos explícitos usam-se expressões em diferenças finitas para aproximar, no domínio do tempo, as acelerações e velocidades em função dos deslocamentos. Teoricamente uma variedade de expressões em diferenças finitas poderiam ser utilizadas, contudo, neste trabalho, utilizaram-se as diferenças centrais com aproximação de segunda ordem em Δt [40] [67] [59]. Nas expressões que seguem, um índice superior n indica que a função se avalia em $t=t^n$.

De forma simplificada, supondo-se conhecidos os deslocamentos u em um instante de tempo t^n e as velocidades no instante $t^{n-1/2}$, juntamente com as forças internas $f=f(u)$ e as resultantes externas R , a integração é feita de acordo com as expressões abaixo:

$$\ddot{u} = M^{-1}[f(u) - R] \quad (2.6.1)$$

$$\dot{u}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{u}^{n-\frac{1}{2}} + \ddot{u}^n \Delta t^n \quad (2.6.2)$$

$$u^{n+1} = u^n + \dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.6.3)$$

$$\Delta t^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\Delta t^n + \Delta t^{n+1}) \quad (2.6.4)$$

onde Δt^n e Δt^{n+1} são dois intervalos sucessivos de tempo entre os instantes de tempo t^{n-1} , t^n e t^{n+1} respectivamente.

2.7 Matriz de massa concentrada e condição para estabilidade numérica

O uso da matriz de massa consistente obtida diretamente da aplicação do método dos elementos finitos gera um sistema de equações que leva a um custo computacional elevado, pois o fato de se tratar de uma matriz não diagonal faz com que haja o acoplamento entre as equações associadas às demais incógnitas nodais. A fim de evitar este problema, neste trabalho a matriz de massa M , da equação 2.5.6, corresponderá a uma matriz de massa equivalente conhecida como matriz de massa concentrada, a qual somente possui termos em sua diagonal principal. A consequência desta consideração é a economia computacional no momento de resolver o sistema de equações diferenciais representado pela equação 2.5.6 (ver em [67] [72] [73] [74] e [75]).

A matriz de massa concentrada para um dado elemento obtém-se distribuindo a massa desse elemento proporcionalmente aos termos da matriz de massa consistente [67] [72] [73]. O termo de massa diagonal m_{jj} para um nó genérico j calcula-se de acordo com:

$$m_{jj} = \left(\frac{\int_V \rho N_j N_j dV}{\sum_{k=1}^n \int_V \rho N_k N_k dV} \right) \int_V \rho dV \quad (2.7.1)$$

onde n é o número de nós do elemento, ρ é a densidade de massa, N_j e N_k são as funções de forma e V representa o volume ocupado pelo elemento.

Por outro lado, como já foi comentado, assegura-se a estabilidade numérica da resposta dos algoritmos de integração temporal do tipo explícito, limitando-se o tamanho do incremento de tempo Δt . Neste trabalho emprega-se a seguinte expressão simplificada:

$$\Delta t \leq \Delta t_{crit} = l_c \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (2.7.2)$$

onde l_c é o comprimento característico do elemento que corresponde à menor distância possível entre dois vértices consecutivos, E é o módulo de elasticidade e ρ é a densidade do material. O inverso da raiz quadrada na equação acima denomina-se velocidade de transmissão da onda.

Existem, contudo, outras formas para determinar o valor deste tempo crítico, como por exemplo as que levam em conta a máxima frequência natural do sistema discreto w_n , que pode ser calculada a partir da solução do problema de autovalores. Dado que o valor de w_n não se mantém constante durante a análise, modificando-se em função das características de não linearidade do problema [72], seria necessário recalculá-lo a cada certo número de passos de tempo para assegurar a estabilidade numérica da resposta. Para evitar o cálculo repetitivo de w_n , outros autores utilizam fatores de segurança para estimar o valor do tempo crítico [67]. Neste trabalho utilizou-se a forma mais simples indicada acima, porém também pode-se

obrigar o programa a calcular um novo valor para Δt a cada passo da integração ou em determinados intervalos de passos de integração, de modo a ter também estabilidade numérica com alguma economia computacional. Não foi objetivo deste trabalho um estudo detalhado a respeito da estabilidade numérica da resposta, contudo, procurou-se, nos casos mais críticos, utilizar passos de tempo os menores possíveis de modo a que não fosse esta a causa de eventuais insucessos na marcha dos processamentos.

2.8 Algoritmos de contato e consideração do atrito

No programa Stampack [59], utilizado neste trabalho, encontram-se implementados dois algoritmos para tratamento do contato arbitrário entre duas superfícies, com ou sem a consideração de atrito, e aplicáveis aos problemas bi-dimensionais e tri-dimensionais de conformação de lâminas metálicas contidos nesta tese. Além disso se permite também a consideração de contato com parede rígida.

Os dois algoritmos são baseados no método da penalização e assumem a lei de Coulomb para consideração do atrito entre duas superfícies. As superfícies de contato podem ser discretizadas tanto por elementos lineares de dois nós como por elementos triangulares ou quadrados de três e quatro nós respectivamente. As superfícies de contato recebem os nomes "master" e "slave", designações usuais na literatura, e os nós que definem estas superfícies recebem os nomes de "master nodes" e "slave nodes", respectivamente. Durante o processamento, cada "slave node" é verificado quanto à penetração através da superfície "master" e, se uma penetração for detectada, uma força de contato é calculada e aplicada entre o "slave node" e o apropriado "master node" (a intensidade desta força é proporcional à penetração e a um coeficiente de penalização fornecido).

A diferença entre os dois algoritmos é que no primeiro não se verifica a possibilidade de haver penetração de um "master node" através de uma superfície "slave", característica presente no segundo algoritmo quando se escolhe o tratamento simétrico para a interface do contato. Utiliza-se neste caso um algoritmo que faz a troca do que se definiu de início como

superfície "master" por uma superfície "slave", e vice-versa, procedendo-se a nova verificação quanto às penetrações. O segundo algoritmo permite ainda a consideração do auto-contato, situação em que a interface de contato é definida por uma única superfície e a verificação da penetração é feita entre os nós e a própria superfície que contém esses nós.

O procedimento de busca (localização dos nós e seus potenciais segmentos de contato) em ambos algoritmos baseia-se na busca do "master node" mais próximo a cada um dos "slave nodes". Os segmentos vizinhos a um dado "slave node" são verificados quanto a penetração com a diferença de que no primeiro algoritmo são verificadas as distâncias entre um "slave node" e todos os "master nodes" a cada passo de tempo. No segundo algoritmo utiliza-se um procedimento otimizado onde se verificam as distâncias entre os referidos nós apenas para segmentos vizinhos ao ponto mais próximo determinado no passo anterior, sendo, portanto, muito mais rápido que o primeiro.

No apêndice A desta tese encontra-se uma breve exposição, que se deve a Las Casas[83], e que ilustra resumidamente aspectos de algumas formulações já desenvolvidas para o tratamento de problemas de contato com e sem atrito. O texto inclui os algoritmos implementados no programa Stampack[59] e menciona também o método Lagrangeano aumentado não utilizado nesta tese.

2.9 Esquema geral do programa Stampack[59]

A seguir descreve-se a organização modular do programa Stampack. O diagrama de blocos mostrado na figura 2.03 ilustra esquematicamente o processo de cálculo.

Os módulos denominados por **PRINCIPAL 1**, **PRINCIPAL 2** e **PRINCIPAL 3** contêm as sub-rotinas que se referem à aquisição de dados da rede, parâmetros de controle, contato, etc, excluem-se todas as rotinas referentes ao tipo de elemento finito. As principais rotinas nestes blocos são as seguintes:

PRINCIPAL 1

OPENFI	Abertura de arquivos usados no programa.
RESTAR	Cria arquivo para permitir o reinício de um processo a posteriori e lê se desejado um arquivo prévio.
CONTOL	Lê os dados de controle e aloca espaço para o vetor de trabalho na memória.
INPDAT	Lê coordenadas nodais, dados da malha, condições de contorno e condições cinemáticas.
INTIME	Lê dados de tempo para saída de resultados, condições iniciais, velocidades impostas, dados de amortecimento e acelerogramas.
LUMASS	Executa a construção da matriz de massa global a partir das massas dos elementos e lê valores de massa concentrada se existirem.
LOADPL	Lê as cargas externas e monta o vetor de cargas nodais equivalentes.
PREVOS	Lê dados de tensões prévias se houverem.
CONTAC	Sub-rotinas de leitura dos dados de contato.
CONT3D	Sub-rotinas de leitura dos dados de contato para análise tri-dimensional.

PRINCIPAL 2

EXPLIT	Executa a integração explícita no tempo.
RIGWAL	Análise de contato com parede rígida.
CORACT	Atualiza as coordenadas nodais.
RESVPL	Sub-rotina principal para a determinação das forças internas.
CONTAC	Sub-rotinas para verificação do contato.
CONT3D	Sub-rotinas para verificação do contato em três dimensões.
INCDLT	Sub-rotina principal para determinação do tempo crítico.
OUTDYN	Sub-rotina principal para controle dos dados de saída para pós-processo.
RESTAR	Armazena dados para reinício de um processo.

PRINCIPAL 3

CLOSEF Fecha os arquivos de trabalho.

MAPA Armazena o conteúdo das matrizes e vetores de trabalho.

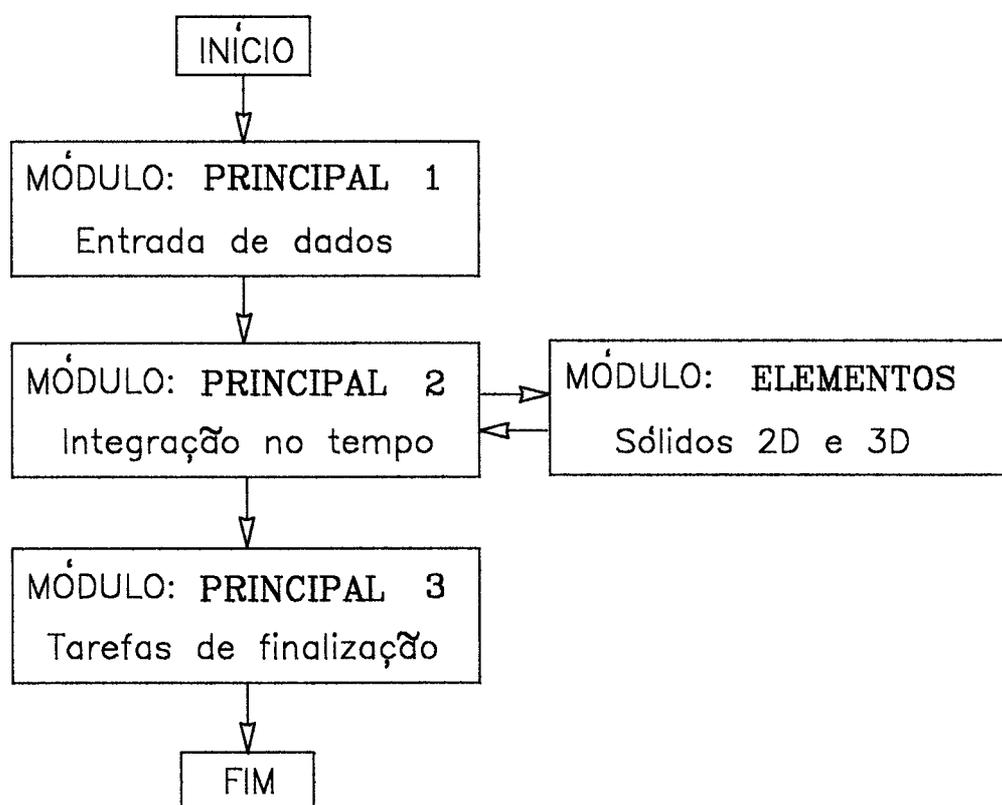


Fig. 2.03- Esquema modular do programa Stampack.

O módulo denominado **ELEMENTOS** contém o conjunto de rotinas de todos os elementos finitos admitidos pelo programa. Para cada tipo de elemento tem-se um grupo de subrotinas. Nesta tese utilizaram-se apenas dois dos elementos disponíveis; a organização destas rotinas e sua descrição, incluindo as que se referem as implementações desenvolvidas nesta tese, serão apresentadas no capítulo 6 de modo a que se situem no contexto geral da implementação.

CAPÍTULO 3

3. ELEMENTOS DE MECÂNICA DE MEIOS CONTÍNUOS

3.1 Introdução e definições preliminares

Neste capítulo pretende-se resumir definições e conceitos básicos da mecânica dos meios contínuos, necessários à compreensão do conteúdo dos próximos capítulos. A definição dos diversos tensores nas formas Euleriana e Lagrangeana é colocada em destaque tendo-se em vista os casos onde se consideram grandes deformações elásticas e elasto-plásticas.

Na mecânica dos meios contínuos realiza-se uma análise macroscópica, descrevendo-se o comportamento do meio por funções que devem ser contínuas e ter derivadas também contínuas, não importando a estrutura microscópica. Os fenômenos verificados na microestrutura dos materiais são considerados por meio de equações constitutivas adequadas a cada material.

Uma partícula genérica \mathbf{P} de um meio contínuo ocupa uma posição \mathbf{X} em um instante $t=0$ e descreve uma trajetória ao longo do tempo dada pela equação de movimento, denotada por φ , de modo que em um instante t qualquer sua nova posição \mathbf{x} fica bem determinada. A

configuração de referência é definida pela posição \mathbf{X} das partículas no instante $t=0$ e a configuração deformada pela posição \mathbf{x} das partículas em um instante t qualquer. A figura 3.01 ilustra ambas configurações e a equação do movimento φ .

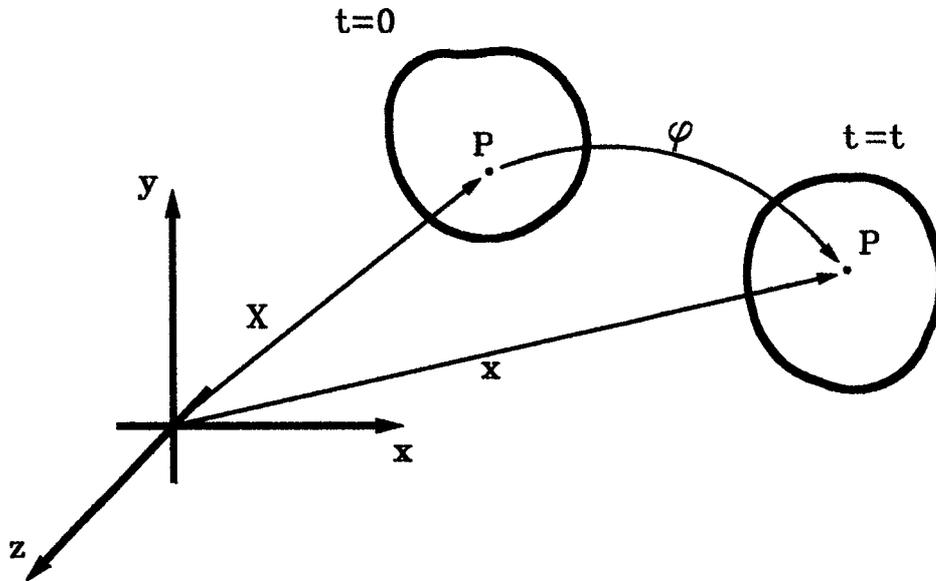


Fig. 3.01- Configuração de referência em $t=0$ e deformada em $t=t$.

A equação de movimento deve satisfazer às seguintes condições: a) ser contínua e ter derivadas contínuas; b) deve ser consistente, ou seja, fazendo-se $t=0$ devem ser recuperadas as coordenadas de \mathbf{P} na configuração de referência; c) deve ser biunívoca, ou seja, admitir inversa, e d) deve verificar a relação $(\rho_0/\rho) > 0$, onde ρ_0 e ρ são respectivamente as densidades na configuração de referência e na configuração deformada.

Quando a descrição da cinemática de um meio contínuo é feita por meio de funções que têm como um dos argumentos as coordenadas da partícula no instante $t=0$, fala-se de descrição material. No caso particular em que para $t=0$ as coordenadas dos pontos desse meio contínuo coincidem com as da posição inicial, a descrição é dita Lagrangeana. Em presença de grandes deslocamentos é usual empregar uma descrição Lagrangeana atualizada, neste caso, a cada instante de tempo t , as coordenadas dos pontos que definem esse meio contínuo são atualizadas.

Como neste trabalho estudamos apenas a mecânica dos sólidos deformáveis, substituiremos o termo geral meio contínuo por sólido, em favor da simplicidade. É usual, na literatura mais moderna representar com letras minúsculas as variáveis do problema quando na configuração deformada, e por letras maiúsculas quando as mesmas estão na configuração de referência. Por exemplo, as coordenadas dos vetores posição da partícula P na configuração de referência representam-se pela letra X e na configuração deformada pela letra x .

Destaca-se neste ponto que nos ítems que seguem introduzem-se operadores matemáticos usualmente envolvidos no estudo das grandes deformações. As transformações tensoriais denominadas na literatura por "push-forward" e por "pull-back" [43], representadas aqui por ϕ_* e por ϕ^* , respectivamente, e a derivada de Lie, designada por L_v , são exemplos desses operadores. As transformações tensoriais permitem fazer o mapeamento dos tensores de uma configuração para outra de maneira consistente, empregando-se, para isso, o tensor gradiente total de deformações F . A derivada de Lie é, como se verá mais adiante, a extensão do conceito de derivada de tempo convectiva aplicado a campos tensoriais espaciais.

O texto de Marsden e Hughes[43] contém todo o embasamento conceitual necessário para o estudo dos operadores matemáticos utilizados. Pode-se citar como referências importantes também os trabalhos de Lubliner[1] [38] [51], Malvern[50], Mattiasson[48] e Garino[19] [32] [41] entre outros.

3.2 Descrição do movimento

Qualquer propriedade Π associada a um ponto de um sólido pode ser descrita como função das coordenadas de suas partículas na configuração de referência $\Pi=\Pi(X,t)$, ou na configuração deformada $\Pi=\pi(x,t)$. No primeiro caso, a propriedade escolhida está associada a uma determinada partícula, e varia no tempo "acompanhando" essa partícula, caracterizando-se a descrição material da propriedade em estudo. No segundo caso fixa-se um ponto no espaço e nele estuda-se como varia no tempo a propriedade Π escolhida, enquanto sucessivas partículas passam por esse ponto. Isto é equivalente a dizer que, ao longo do tempo, no primeiro caso, X é fixo e

no segundo caso \mathbf{x} é que permanece fixo.

A mudança de descrição de uma propriedade, de material para espacial, representa-se por:

$$\Pi = \Pi(\mathbf{X}, t) = \Pi(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \pi(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.1)$$

A mudança inversa é dada por:

$$\pi = \pi(\mathbf{x}, t) = \pi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) = \Pi(\mathbf{X}, t) \quad (3.2.2)$$

Pode-se definir um campo de deslocamentos \mathbf{u} em um dado instante de tempo t como sendo $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$; segundo uma descrição material pode-se escrever que $\mathbf{u} = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$. De fato, levando-se em conta que $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$, o campo de deslocamentos ficará dado por.

$$\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \quad (3.2.3)$$

A descrição espacial do campo de deslocamentos é dada por.

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.4)$$

A derivada no tempo do vetor posição (mantendo-se \mathbf{X} fixo e variando-se t), ou derivada material fornece o vetor de velocidade da partícula, definição que só tem sentido em descrição material.

$$V(X,t) = \frac{\partial \varphi(X,t)}{\partial t} \quad (3.2.5)$$

A descrição espacial das velocidades é dada pela seguinte transformação, com $\mathbf{x}=\varphi^{-1}(X,t)$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = V(\varphi^{-1}(X,t),t) \quad (3.2.6)$$

Por sua vez o vetor aceleração é dado pela derivada material do vetor velocidade:

$$A(X,t) = \frac{dV(X,t)}{dt} \quad (3.2.7)$$

A descrição espacial da aceleração pode ser obtida em função da velocidade em descrição espacial dada por $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ fazendo-se:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}(X,t),t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}(X,t),t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}(X,t),t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}(X,t),t) \quad (3.2.8)$$

Para certas propriedades dos meios contínuos, dadas na forma de campos escalares ou vetoriais, demonstra-se que se pode escrever a seguinte expressão para a derivada material de um campo espacial $\pi(\mathbf{x},t)$:

$$\frac{d\pi(\mathbf{x}(X,t),t)}{dt} = \frac{\partial \pi(\mathbf{x}(X,t),t)}{\partial t} + V(X,t) \cdot \nabla \pi(\mathbf{x}(X,t),t) \quad (3.2.9)$$

onde π , representa uma propriedade qualquer dada pela sua descrição espacial. Na expressão acima o termo da esquerda da igualdade denomina-se derivada material de uma grandeza espacial, o primeiro termo do lado direito da igualdade é a derivada local e o segundo termo é a derivada de tempo convectiva.

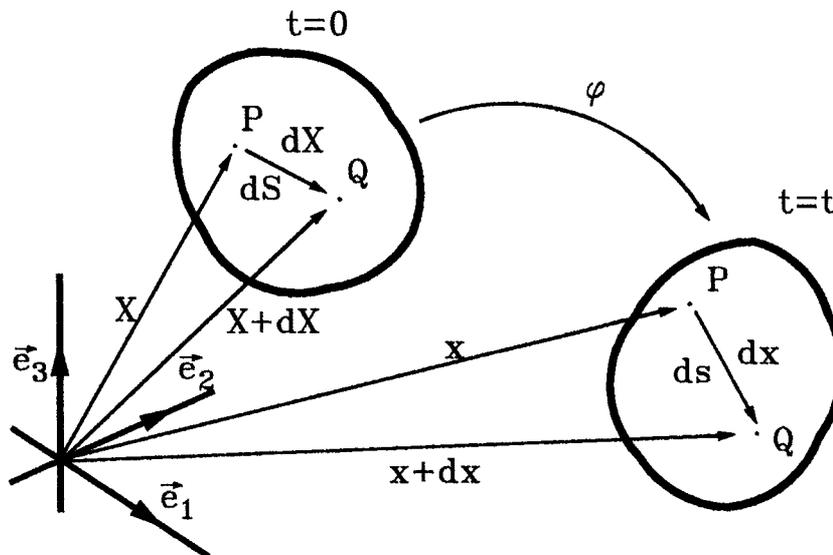


Fig. 3.02- Vetores deslocamento relativo nas configurações de referência dX e deformada dx .

Também definem-se derivadas objetivas de tempo Lagrangeanas. Trata-se precisamente do caso da derivada de Lie, a qual de maneira geral escreve-se da seguinte forma [43]:

$$L_v(\chi) = \phi_* \left[\frac{d}{dt} [\phi^*(\chi)] \right] \quad (3.2.10)$$

onde χ é um tensor dado na configuração atualizada sendo ϕ^* e ϕ_* as funções de transporte.

3.3 Deslocamentos e deformações

O tensor gradiente de deformações pode ser representado por uma matriz 3x3 cujos termos são as derivadas parciais das coordenadas espaciais x_i com relação às coordenadas materiais X_I de um ponto P do sólido, sendo X_I e t argumentos da equação de movimento dada por $\varphi = \varphi(X_I, t)$ com $I=1,2,3$ (ver Fig. 3.02).

Em um instante de tempo t arbitrário e fixo, as coordenadas Eulerianas do ponto P do sólido são dadas por $x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t)$, $i=1,2,3$ e o diferencial de x , escrito como combinação linear dos vetores que formam a base no espaço, é dado por $dx = dx_i e_i$. Desenvolvendo-se a expressão do diferencial de x obtém-se o seguinte:

$$dx = dx_i e_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j e_i \quad (3.3.1)$$

com,

$$dX \cdot e_j = dX_I e_i \cdot e_j = dX_I \delta_{ij} = dX_j \quad (3.3.2)$$

Substituindo-se o resultado acima na expressão 3.3.1 e desenvolvendo-se, obtém-se:

$$dx = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} e_i (e_j \cdot dX) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} (e_i \otimes e_j) dX \quad (3.3.3)$$

O tensor bi-pontual de segunda ordem denominado gradiente de deformação será dado por:

$$F = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} (e_i \otimes e_j) \quad (3.3.4)$$

Cujos termos são:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (3.3.5)$$

Em notação intrínseca dx é obtido pela aplicação de um tensor de segunda ordem, o gradiente de deformação F , sobre o tensor material de primeira ordem dX , ou seja, $dx = FdX$.

Em plasticidade utiliza-se em muitas passagens importantes o teorema da decomposição polar do tensor gradiente de deformações F . Este teorema permite decompor F segundo as expressões: $F = QU = VQ$, onde U e V são tensores de segunda ordem simétricos positivos-definidos, denominados tensores de estiramento direito e esquerdo respectivamente, e Q é um tensor de segunda ordem ortogonal próprio, denominado tensor de rotação.

O tensor gradiente material de deslocamentos obtém-se da expressão do tensor gradiente de deformações F , onde substitui-se o vetor posição espacial x por $X+u$, de modo que pode-se escrever:

$$F_{ij} = \frac{\partial (X_i + u_i)}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (3.3.6)$$

O termo mais à direita da equação acima fornece as componentes do tensor gradiente material dos deslocamentos J . De maneira compacta pode-se escrever que:

$$J_{IJ} = J_{IJ}(e_i \otimes e_j) = \frac{\partial u_i}{\partial X_J} (e_i \otimes e_j) \quad (3.3.7)$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade na equação 3.3.6 corresponde ao tensor métrico material G_{IJ} , cujo significado corresponde ao valor de uma determinada medida tomada com relação a um sistema de referência estabelecido. Em outras palavras pode-se dizer que é uma transformação de coordenadas de um sistema para outro, por exemplo: a representação de uma medida tomada num sistema cartesiano de referência representada em coordenadas curvilíneas. Este trabalho limita-se a sistemas cartesianos de referência, de modo que os tensores métricos material ou espacial corresponderão à identidade. No apêndice B encontra-se um exemplo simples do significado da métrica.

O tensor gradiente espacial de deslocamentos j é obtido de maneira análoga partindo-se do tensor gradiente de deformações F inverso.

Sendo os módulos dos vetores dX e dx , respectivamente, dS e ds , pode-se escrever que:

$$dS^2 = dX \cdot dX = dX_I \cdot dX_J \delta_{IJ} = (F_{KI}^{-1} dx_i) \cdot (F_{KJ}^{-1} dx_j) \quad (3.3.8)$$

$$ds^2 = dx \cdot dx = dx_i \cdot dx_j \delta_{ij} = (F_{KI} dX_I) \cdot (F_{KJ} dX_J) \quad (3.3.9)$$

Os tensores de deformação nas configurações de referência e deformada, respectivamente os tensores de Green-Lagrange E e de Almansi e , ambos de segunda ordem e simétricos, resultam das seguintes operações:

$$(ds^2 - dS^2) = (F_{KI} dX_I) \cdot (F_{KJ} dX_J) - dX_I \cdot dX_J \delta_{IJ} = (F_{KI} \cdot F_{KJ} - \delta_{IJ}) dX_I dX_J \quad (3.3.10)$$

$$(ds^2 - dS^2) = dx_i dx_j \delta_{ij} - (F_{Ki}^{-1} dx_i) \cdot (F_{Kj}^{-1} dx_j) = (\delta_{ij} - F_{Ki}^{-1} \cdot F_{Kj}^{-1}) dx_i dx_j \quad (3.3.11)$$

Define-se o tensor de deformação de Green-Lagrange por suas componentes como sendo:

$$2E_{IJ} = (F_{KI} \cdot F_{KJ} - \delta_{IJ}) \quad (3.3.12)$$

ou ainda em notação tensorial:

$$E = \frac{1}{2} (F^T F - I) \quad (3.3.13)$$

Por sua vez, o tensor de deformações na configuração deformada, também simétrico, denominado tensor de Almansi, é dado por suas componentes na forma:

$$2e_{ij} = (\delta_{ij} - F_{Ki}^{-T} \cdot F_{Kj}^{-1}) \quad (3.3.14)$$

Em notação tensorial fica:

$$e = \frac{1}{2} (I - F^{-T} F^{-1}) \quad (3.3.15)$$

Ao longo deste trabalho serão mencionados outros tensores importantes que são apresentados em seguida. Na configuração de referência definem-se os tensores direito e esquerdo de Cauchy-Green dados por:

$$C = F^T F \quad e \quad B = FF^T \quad (3.3.16)$$

Os tensores correspondentes na configuração espacial são os tensores direito e esquerdo de Cauchy-Green inversos; este último recebe também o nome de tensor de Finger das deformações. É usual representá-los acompanhados do expoente -1 [41] [50].

$$c^{-1} = F^{-1} F^{-T} \quad e \quad b^{-1} = F^{-T} F^{-1} \quad (3.3.17)$$

Os tensores de Green-Lagrange E e de Almansi e das deformações podem também ser escritos como função dos gradientes material e espacial dos deslocamentos, da seguinte forma:

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} (J + J^T + J^T J) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_J}{\partial X_I} + \frac{\partial u_K}{\partial X_I} \frac{\partial u_K}{\partial X_J} \right) \quad (3.3.18)$$

e

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (j + j^T - j^T j) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_I}{\partial x_j} + \frac{\partial u_J}{\partial x_i} - \frac{\partial u_K}{\partial x_i} \frac{\partial u_K}{\partial x_j} \right) \quad (3.3.19)$$

No caso particular de pequenas deformações tem-se que $X \approx x$, e os termos de ordem superior, representados pelos dois produtos entre derivadas parciais, podem ser desprezados sem prejuízo da análise.

A interpretação física da deformação pode ser feita introduzindo-se os escalares que fornecem os valores do estiramento e do alongamento. Define-se estiramento λ como sendo a razão entre os módulos dos vetores posição relativa nas configurações deformada e de referência.

$$\lambda = \frac{ds}{dS} \quad (3.3.20)$$

Define-se alongamento linear como sendo a razão entre a diferença dos vetores posição relativa final e inicial e o vetor posição relativa inicial, como segue:

$$\epsilon = \frac{ds-dS}{dS} = \frac{ds}{dS} - 1 \quad (3.3.21)$$

É fácil observar que $\epsilon = \lambda - 1$, Fazendo-se as substituições convenientes e desenvolvendo-se, obtêm-se expressões para o alongamento e para o estiramento em um ponto, numa direção dada, em função dos tensores de Green-Lagrange ou de Almansi.

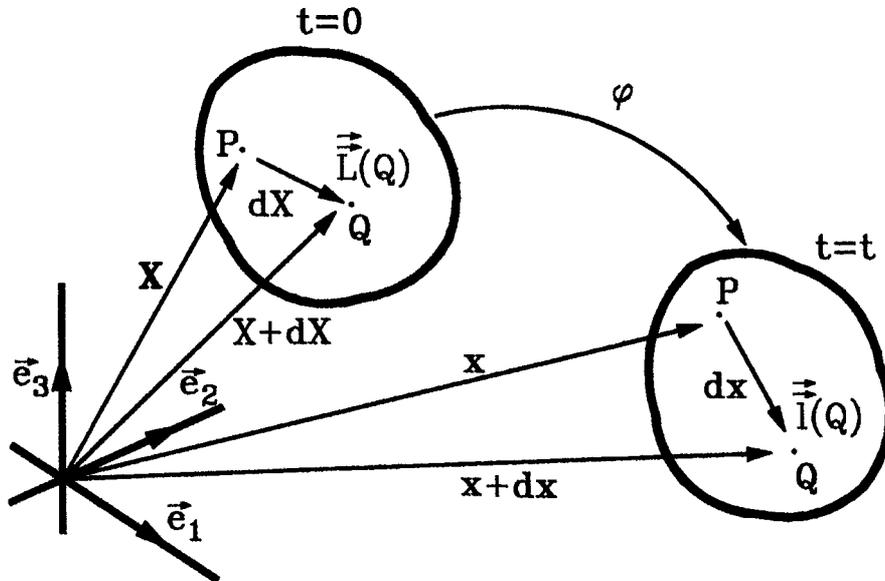


Fig. 3.03- Representação dos tensores velocidade de deformação L e l .

Em descrição Euleriana, localmente o movimento é definido pelo tensor gradiente de velocidades L . Este tensor de segunda ordem e não simétrico, relaciona o vetor posição relativa com o vetor velocidade relativa entre os pontos P e Q na configuração deformada (Fig. 3.03). O tensor gradiente de velocidades se decompõe em dois novos tensores: um simétrico denominado tensor velocidade de deformações D ou ainda tensor taxa de deformação e outro antisimétrico denominado tensor velocidade de rotações ou tensor spin W , também denominado vorticidade.

O tensor taxa de deformações D tem relação com a taxa de variação do comprimento da fibra elementar. Fazendo-se a consideração de que todas as componentes do tensor taxa de deformação D são nulas, o movimento instantâneo verificado é a vorticidade W , cujo significado físico é equivalente a uma rotação de corpo rígido [50].

A decomposição do tensor gradiente de velocidades L nas suas partes simétrica e anti-simétrica é feita da seguinte forma:

$$L = \frac{1}{2}(L+L^T) + \frac{1}{2}(L-L^T) = D+W \quad (3.3.22)$$

Pode-se também escrever em descrição espacial a velocidade e o diferencial de velocidade:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} \quad e \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx = L \cdot dx \quad (3.3.23)$$

No caso de isotropia o tensor gradiente de velocidades L é igual à taxa de deformação D , no entanto, ao utilizar funções de fluência aplicáveis a materiais que apresentam comportamento anisótropo, é necessário incluir o tensor spin na dedução da equação constitutiva [41]. Vê-se adiante que no modelo de anisotropia proposto neste trabalho não é necessário o emprego do tensor spin.

3.4 Medidas de tensão

Assim como ocorre com os tensores de deformação, os tensores de tensão também podem ser escritos nas configurações de referência (espaço de tensões de Piola-Kirchhoff) ou deformada (espaço de tensões de Cauchy). Inicialmente define-se o tensor de tensões de Cauchy com base na existência de uma relação linear entre a normal \mathbf{n} e o vetor de trações \mathbf{t} em um ponto qualquer sobre uma dada superfície do sólido ou de parte dele (ver Fig. 3.04).

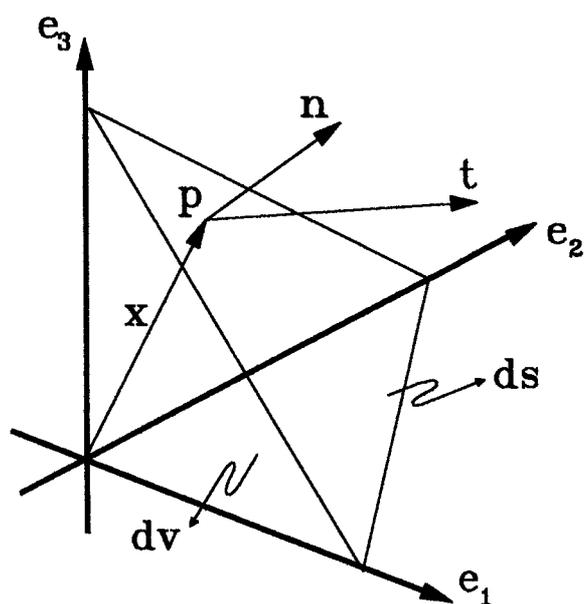


Fig. 3.04- Versor normal \mathbf{n} e vetor de trações \mathbf{t} no ponto p do espaço de tensões de Cauchy.

O vetor de trações \mathbf{t} é dado em função das coordenadas espaciais \mathbf{x} do ponto P e da normal \mathbf{n} a esse ponto, ou seja $\mathbf{t}=\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{n})$. Se existe uma relação linear entre \mathbf{t} e \mathbf{n} , então existe um tensor de segunda ordem $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ tal que: $\mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{n})=\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n}$. O tensor $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ denomina-se tensor de tensões

de Cauchy e demonstra-se que é um tensor simétrico.

Freqüentemente usa-se na configuração deformada o tensor de tensões de Kirchhoff τ , que guarda uma relação com o tensor de Cauchy diretamente proporcional à relação entre as densidades do sólido nas configurações de referência e deformada. Para um material incompressível, as tensões de Kirchhoff e de Cauchy são idênticas, pois $\rho = \rho_0$.

$$\tau = \frac{\rho_0}{\rho} \sigma \quad (3.4.1)$$

Em certas teorias como a da plasticidade em grandes deformações é interessante definir tensores de tensão na configuração de referência. O espaço de tensões de Piola-Kirchhoff é uma alternativa. A figura 3.05, mostra um sólido de volume infinitesimal nas configurações de referência e deformada.

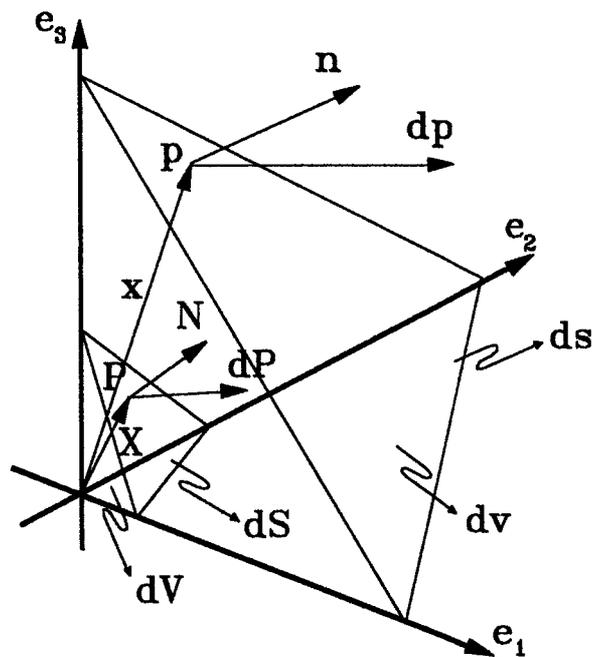


Fig. 305- Volumes infinitesimais tomados nas configurações de referência dV e deformada dv .

No ponto \mathbf{P} assinalado em ambas configurações considera-se um vetor normal a cada uma das superfícies, dados por \mathbf{N} e \mathbf{n} respectivamente, e supõe-se a existência de vetores de forças infinitesimais, ou de tensão, aplicados a cada um destes pontos, dados por $d\mathbf{P}$ e $d\mathbf{p}$. A regra escolhida para relacionar as forças infinitesimais $d\mathbf{P}$ e $d\mathbf{p}$, determina que tipo de tensores de tensão serão derivados na configuração de referência.

Os vetores de tensão em ambas configurações são dados em função das normais e dos tensores de tensão correspondentes, ou seja, $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ e $\mathbf{T} = \boldsymbol{\Pi}\mathbf{N}$. Com isso pode-se calcular o valor dos vetores de força infinitesimais fazendo-se:

$$d\mathbf{P} = \mathbf{T}d\mathbf{S} = \boldsymbol{\Pi}\mathbf{N}d\mathbf{S} \quad \text{ou ainda} \quad d\mathbf{p} = \mathbf{t}d\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}d\mathbf{s} \quad (3.4.2)$$

O tensor $\boldsymbol{\sigma}$ é o já mencionado tensor de tensões de Cauchy. Impondo-se, como condição, a igualdade entre as forças infinitesimais $d\mathbf{p} = d\mathbf{P}$, calculadas em ambas as configurações, deriva-se uma relação para o tensor $\boldsymbol{\Pi}$ que define o espaço de tensões de Piola-Kirchhoff como segue:

$$d\mathbf{P} = \boldsymbol{\Pi}\mathbf{N}d\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}d\mathbf{s} = d\mathbf{p} \quad (3.4.3)$$

O tensor $\boldsymbol{\Pi}$, de segunda ordem, escrito na configuração de referência que aparece na expressão acima, denomina-se tensor de tensões Lagrangeanas nominais ou, usualmente, primeiro tensor de Piola-Kirchhoff. Para obter-se a expressão do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{\Pi}$, em função do tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, emprega-se a relação de Nanson que relaciona as áreas infinitesimais $d\mathbf{S}$ e $d\mathbf{s}$ por meio do gradiente de deformações inverso \mathbf{F}^{-1} , as densidades e os vetores \mathbf{N} e \mathbf{n} na forma (ver Fig. 3.05) [42] [50]:

$$nds = \frac{\rho_0}{\rho} F^{-1} N dS \quad (3.4.4)$$

Substituindo-se esta relação em 3.4.3, obtém-se:

$$\Pi = \frac{\rho_0}{\rho} F^{-1} \sigma \quad (3.4.5)$$

Convém observar que trata-se de um tensor não simétrico, o que traz inconvenientes para o seu emprego em códigos de cálculo por computador. Para obter um tensor simétrico mais adequado, admite-se que os vetores material $d\mathbf{X}$ e de forças infinitesimais $d\mathbf{P}$ se relacionam com os vetores $d\mathbf{x}$ e $d\mathbf{p}$ de maneira idêntica, usando para isso o tensor gradiente de deformações inverso \mathbf{F}^{-1} , ou seja: $d\mathbf{P}=\mathbf{F}^{-1}d\mathbf{p}$ e $d\mathbf{X}=\mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}$. Substituindo-se nestes termos as equações 3.4.2 juntamente com a expressão de Nanson (eq. 3.4.4), obtém-se o segundo tensor de Piola-Kirchoff \mathbf{S} , este sim de segunda ordem e simétrico, adequado às implementações computacionais:

$$\mathbf{S} = \frac{\rho_0}{\rho} \mathbf{F}^{-1} \sigma \mathbf{F}^{-T} \quad (3.4.6)$$

3.5 Decomposição do tensor gradiente de deformações

Para o tratamento da plasticidade em grandes deformações, neste trabalho utiliza-se a decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformações $\mathbf{F}=\mathbf{F}^e\mathbf{F}^p$, proposta originalmente por Lee[46], e empregada por diversos autores na formulação de modelos constitutivos. Essa decomposição vem em alternativa à decomposição aditiva do tensor de deformações de Green-

Lagrange E , proposta anteriormente por Green e Nagdhi[53]. Observa-se contudo, que as duas abordagens não são totalmente incompatíveis, conforme é demonstrado em trabalhos posteriores destes mesmos autores bem como em outros textos. Em Garino[41], por exemplo, mostram-se diversas situações em que se verificam as compatibilidades entre as duas abordagens, sendo que aqui procurar-se-á resumir os aspectos mais importantes.

Na teoria clássica da plasticidade infinitesimal, divide-se a deformação infinitesimal total em parte elástica e parte plástica, isto é:

$$E = E^e + E^p \quad (3.5.1)$$

A taxa de deformação obtém-se pelas derivadas parciais no tempo, de modo que:

$$\dot{E} = \dot{E}^e + \dot{E}^p \quad (3.5.2)$$

Nesta decomposição separam-se a parte recuperável das deformações E^e , da parte plástica não recuperável E^p observada quando da descarga elástica. Neste ponto, pode-se introduzir o conceito do que vem a ser a configuração intermediária, obtida precisamente ao final do processo de descarga elástica; ver Garino[19], [32], [41]. Alguns autores utilizam esta configuração como artifício matemático de modo a deduzir a partir dela os tensores nas configurações material e espacial. Não há sentido em referir-se a uma configuração intermediária nos problemas em pequenas deformações pois neste caso as três configurações confundem-se e o comportamento do sólido pode ser descrito de forma mais simples.

Representam-se as variáveis nesta nova configuração por meio de letras maiúsculas com um traço superior. A figura 3.06 ilustra esquematicamente as configurações em questão.

Sendo \bar{X} as coordenadas do ponto \bar{P} , pode-se dizer que as coordenadas na configuração deformada x , são função das coordenadas nas configurações intermediária e de referência bem como dos deslocamentos u , ou seja $x = x(X, \bar{X}, u)$. Desta forma pode-se escrever o gradiente de deformações como segue :

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} = F^e F^p \quad (3.5.3)$$

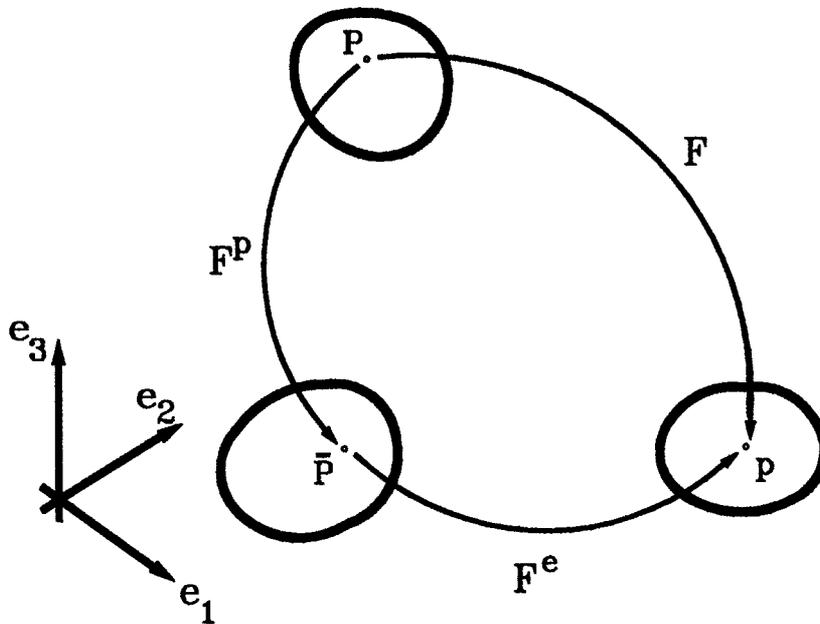


Fig. 3.06- Decomposição multiplicativa e esquema das configurações de referência, intermediária e deformada.

A expressão para o tensor gradiente de deformações acima, origina o que se denomina decomposição multiplicativa, onde F^e é a parte elástica e F^p é a parte plástica do tensor F . Como consequência, nesta nova configuração, pode ser determinado um novo conjunto de tensores de deformação conforme se mostra em Garino[41]. Observa-se que considerando-se a decomposição multiplicativa de F , obtém-se, após algum algebrismo, na configuração deformada uma expressão aditiva para o tensor de deformações de Almansi, ou seja:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad \rightarrow \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p \quad (3.5.4)$$

Fazendo-se uso das operações de transporte entre configurações, pode-se escrever que, $\mathbf{E} = \phi^*(\mathbf{e})$. Portanto o tensor de deformações de Green-Lagrange recupera-se fazendo o transporte ("pull-back") do tensor de Almansi para a configuração material. Com isto recupera-se também a decomposição aditiva do tensor de Green-Lagrange.

Para todos os efeitos, ambas as formulações são equivalentes, o que significa dizer que os resultados obtidos devem ser iguais qualquer que seja a formulação utilizada. A opção por uma determinada formulação decorre das facilidades encontradas na implementação computacional com vistas a aplicação em determinado tipo de problema. No caso de grandes deformações o modelo proposto por Garino[41], e utilizado também neste trabalho, mostra-se mais adequado quando deduzem-se as expressões do modelo constitutivo na configuração deformada. O modelo proposto em Garino[41] é explicado a seguir.

3.6 Equação constitutiva

Os conceitos expostos até aqui são agora utilizados para apresentar o modelo constitutivo proposto por Garino[19][32][41] e utilizado nesta tese. A seguir apresenta-se resumidamente a cinemática no contínuo elasto-plástico por meio das expressões dos tensores de deformação e dos tensores de taxas de deformações deduzidos nas três configurações ainda segundo Garino[41]. Nas expressões que seguem admite-se a aditividade dos tensores de deformação de Green \mathbf{E} nas configurações de referência e intermediária e do tensor de deformações de Almansi \mathbf{e} . O tensor métrico material representa-se nas configurações de referência e intermediária respectivamente por \mathbf{G} e $\tilde{\mathbf{G}}$ e na configuração deformada por \mathbf{g} . Os índices superiores e e p referem-se respectivamente às componentes elástica e plástica dos tensores.

Na configuração de referência tem-se:

$$C = F^T g F \quad (3.6.1a)$$

$$C^P = F^P{}^T \bar{G} F^P \quad (3.6.1b)$$

$$E = \frac{1}{2}(C - G) \quad (3.6.2a)$$

$$E^P = \frac{1}{2}(C^P - G) \quad (3.6.2b)$$

$$E^e = \frac{1}{2}(C - C^P) \quad (3.6.2c)$$

onde C e C^P são respectivamente os tensores direito de Cauchy-Green e sua componente plástica e E é o tensor de deformações de Green, sendo E^e e E^P suas componentes elástica e plástica .

Os tensores da configuração intermediária obtém-se calculando o "push-forward" ou o "pull-back" plástico ou elástico sobre os tensores das configurações de referência ou atualizada respectivamente. Os resultados mais importantes são dados pelas seguintes expressões:

$$\bar{C} = F^e{}^T g F^e \quad (3.6.3a)$$

$$\bar{G} \quad (3.6.3b)$$

$$(b^P)^{-1} = (F^P)^{-T} G (F^P)^{-1} \quad (3.6.3c)$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2}(\bar{C} - (b^p)^{-1}) \quad (3.6.4a)$$

$$\bar{E}^p = \frac{1}{2}(\bar{G} - (b^p)^{-1}) \quad (3.6.4b)$$

$$\bar{E}^e = \frac{1}{2}(\bar{C} - \bar{G}) \quad (3.6.4c)$$

Os tensores da configuração deformada obtém-se através do cálculo do "push-forward" de tensores da configuração intermediária ou da configuração de referência e são dados por:

$$g \quad (3.6.5a)$$

$$(b^e)^{-1} = (F^e)^{-T} \bar{G} (F^e)^{-1} \quad (3.6.5b)$$

$$b^{-1} = F^{-T} G F^{-1} \quad (3.6.5c)$$

e

$$e = \frac{1}{2}(g - b^{-1}) \quad (3.6.6a)$$

$$e^p = \frac{1}{2}((b^e)^{-1} - b^{-1}) \quad (3.6.6b)$$

$$e^e = \frac{1}{2}(g - (b^e)^{-1}) \quad (3.6.6c)$$

onde e é o tensor de Almansi das deformações e b é o tensor de Finger.

A regra da aditividade aplica-se também aos tensores taxa de deformação nas três configurações. Na configuração de referência o tensor taxa de deformações totais é dado por $\dot{\bar{\mathbf{E}}}$ e suas componentes elástica e plástica são dadas respectivamente por $\dot{\bar{\mathbf{E}}}^e$ e $\dot{\bar{\mathbf{E}}}^p$. Os tensores equivalentes na configuração intermediária obtém-se calculando as derivadas plásticas de Lie dos respectivos tensores de deformação da configuração intermediária da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{D}} = L_v^p(\bar{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2}(\dot{\bar{\mathbf{C}}} + L^p{}^T \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}} L^p) \quad (3.6.7a)$$

$$\bar{\mathbf{D}}^e = L_v^p(\bar{\mathbf{E}}^e) = \frac{1}{2}(\dot{\bar{\mathbf{E}}} + L^p{}^T \bar{\mathbf{E}}^e + \bar{\mathbf{E}}^e L^p) \quad (3.6.7b)$$

$$\bar{\mathbf{D}}^p = L_v^p(\bar{\mathbf{E}}^p) = \frac{1}{2}(+L^p{}^T \bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{G}} L^p) \quad (3.6.7c)$$

Finalmente deduzem-se os tensores taxa de deformação na configuração deformada calculando as derivadas de Lie dos tensores de deformação dessa configuração de acordo com as seguintes expressões:

$$d = L_v(e) = \frac{1}{2} F^{e^{-T}} (\dot{\bar{\mathbf{C}}} + L^p{}^T \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}} L^p) F^{e^{-1}} \quad (3.6.8a)$$

$$d^e = L_v(e^e) = \frac{1}{2} F^{e^{-T}} (\dot{\bar{\mathbf{E}}} + L^p{}^T \bar{\mathbf{E}}^e + \bar{\mathbf{E}}^e L^p) F^{e^{-1}} \quad (3.6.8b)$$

$$d^P = L_v(e^P) = \frac{1}{2} F^{e^{-T}} (+L^P \bar{G} + \bar{G} L^P) F^{e^{-1}} \tag{3.6.8c}$$

Duas relações são indispensáveis na dedução do modelo, a primeira é a correspondência entre os tensores direito de Cauchy-Green C^P (configuração de referência) e o tensor elástico de Finger $b^{e^{-1}}$ (configuração deformada), e a segunda é a relação entre a derivada da componente plástica do tensor direito de Cauchy-Green \dot{C}^P com a componente plástica do tensor velocidade de deformações d^P na configuração deformada; estas correspondências estabelecem-se matematicamente por meio de operações de "push-forward" ϕ_* e "pull-back" ϕ^* [41][43][47]. A figura 3.07 destaca essas correspondências e também os tensores equivalentes na configuração intermediária.

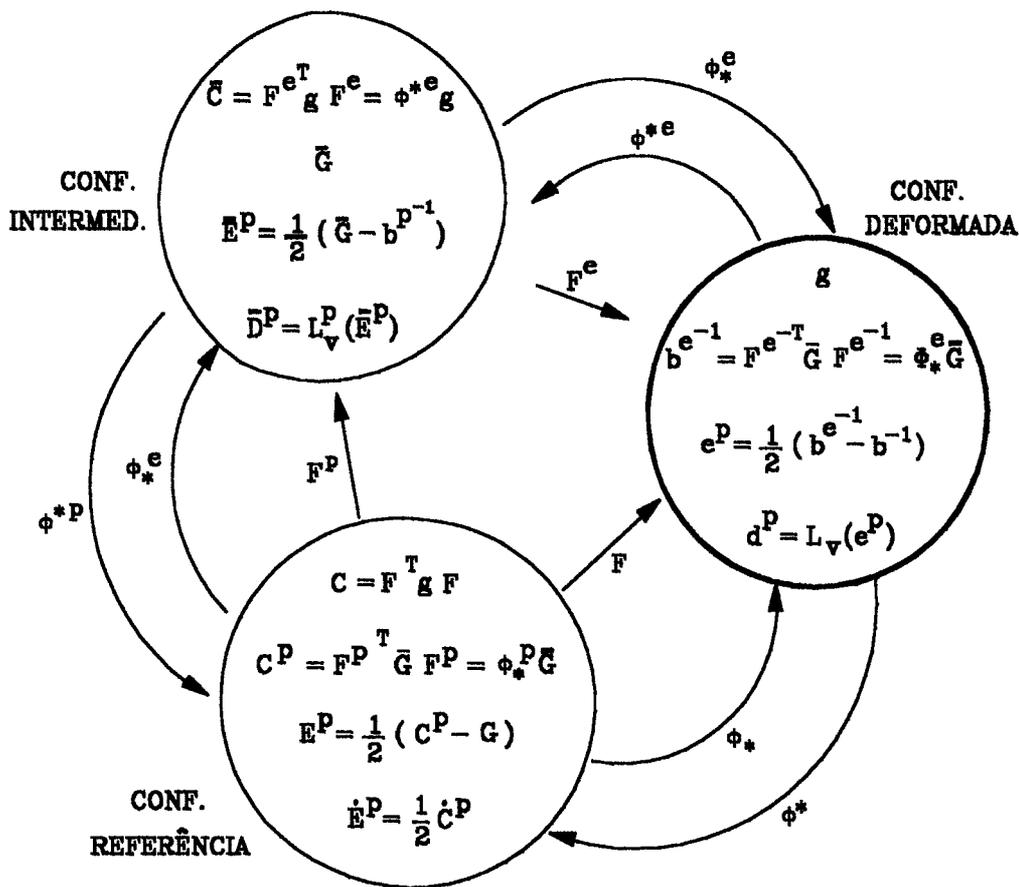


Fig. 3.07- Relação entre as regras de fluxo das três configurações.

O modelo proposto por Garino[19] traz uma inovação que consiste na consideração da hipótese de pequenas deformações elásticas, apenas após ter sido feita a dedução da equação constitutiva do modelo, garantindo-se com isso as restrições de objetividade e simetria material. Isto permite estender o emprego do algoritmo de retorno radial na integração da equação constitutiva também aos casos com grandes deformações, o que é do ponto de vista computacional vantajoso em comparação a outros tipos de algoritmo dada a sua simplicidade e eficiência [19][41]. Obviamente, uma vez feita esta hipótese, o modelo fica especialmente adequado aos materiais dúcteis a exemplo dos metais utilizados em processos de conformação a frio, para os quais as deformações elásticas são comprovadamente pequenas.

A dedução deste modelo parte da decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformações e utiliza uma equação constitutiva hiperelástica para o cálculo da resposta elástica. Isto é, dada a função escalar potencial elástico $W(\mathbf{E})$, com argumento \mathbf{E} que corresponde a um dos possíveis tensores de deformações, as derivadas com relação a cada componente fornecem as correspondentes componentes do estado de tensões. Em pequenas deformações pode-se escrever as componentes do tensor de tensões de Cauchy como segue [50]:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \quad (3.6.9)$$

Algumas características da formulação do modelo merecem destaque. Em primeiro lugar a consideração de equações constitutivas hiperelásticas é consistente com a termodinâmica dos corpos deformáveis [76]. Como já foi dito anteriormente, recupera-se a aditividade das deformações também na configuração deformada definindo-se adequadamente os tensores de deformações elásticas e plásticas [19] [76]. Finalmente, o modelo é deduzido no contexto da plasticidade com variáveis internas.

Coerente com a cinemática adotada, considera-se a configuração intermediária de modo que o potencial de energia livre ψ' tem como argumentos os gradientes de deformação total \mathbf{F} e plástico \mathbf{F}^P e um conjunto de variáveis internas α_n , capaz de representar o comportamento

intrínseco do material durante a etapa plástica. A função energia livre representa-se da seguinte forma:

$$\Psi' = \Psi'(F, F^P, \alpha_n) \quad (3.6.10)$$

Uma vez que a parte elástica do gradiente de deformações F^e pode ser escrita como função do gradiente total F e de sua parte plástica F^P , admitindo-se ainda a hipótese de elasticidade desacoplada, decompõe-se a energia livre nas suas partes elástica, função apenas da componente elástica do gradiente de deformações e plástica, função apenas das variáveis internas, reescrevendo-a da seguinte forma:

$$\Psi = \Psi(F^e, \alpha_n) = \psi^e(F^e) + \psi^p(\alpha_n) \quad (3.6.11)$$

As funções de potencial plástico $G=G(F^e, \alpha_n)$ e de fluência $F=F(F^e, \alpha_n)$ escrevem-se também em função dos mesmos argumentos utilizados na equação 3.6.11. A regra de fluxo do modelo fornece a evolução da componente plástica do tensor gradiente de deformações F^P .

O tensor gradiente de velocidades plástico L^P , por sua vez, decompõe-se em uma parte simétrica D^P (tensor taxa de deformação plástica) e outra anti-simétrica W^P (tensor spin plástico) e também se relaciona com o tensor F^P obedecendo a seguinte relação:

$$L^P = D^P + W^P = \dot{F}^P F^{P-1} \quad (3.6.12)$$

O modelo proposto por Garino[41] considera apenas isotropia na dedução da regra de fluxo de modo que despreza a contribuição rotacional representada pelo tensor spin W^P , contribuição esta necessária ao deduzir a regra de fluxo para materiais anisótropos. Contudo, o modelo de anisotropia por tensores de mapeamento proposto nesta tese não fica prejudicado por esta simplificação, uma vez que a integração da equação constitutiva se dá num espaço fictício

isótopo compatível com o modelo proposto.

As leis que governam a evolução das variáveis internas α_n definem-se em função da regra de fluxo na configuração intermediária e de um conjunto de tensores \mathbf{H} compatíveis com o comportamento físico dos materiais. Tendo-se em conta a simplificação feita para isotropia, a regra de fluxo e a evolução das variáveis internas representam-se da seguinte forma:

$$L^p \approx \bar{D}^p \quad e \quad \dot{\alpha}_n = H(F^e, \alpha_n) \bar{D}^p \quad (3.6.13)$$

A restrição imposta às derivadas das funções potencial e fluência plástica para atender à condição de objetividade, permite reescrever essas funções tendo como argumento a componente elástica do tensor de deformações na configuração intermediária $\bar{\mathbf{E}}^e$. A hipótese de elasticidade desacoplada, por sua vez, também permite escrever o segundo tensor de Piola-Kirchhoff $\bar{\mathbf{S}}$ como função de $\bar{\mathbf{E}}^e$, e com isso o potencial e a fluência plásticas serão dados por:

$$\bar{G} = \bar{G}(\bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{E}}^e), \bar{\alpha}) \quad e \quad \bar{F} = \bar{F}(\bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{E}}^e), \bar{\alpha}) \quad (3.6.14)$$

Escritas as funções potencial e de fluência plásticas no espaço das tensões, a regra de fluxo e a evolução das variáveis internas são dadas por:

$$\bar{D}^p \propto \frac{\partial \bar{G}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\alpha})}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \quad e \quad \dot{\bar{\alpha}} \propto H(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\alpha}) \bar{D}^p \quad (3.6.15)$$

O tensor de tensões $\bar{\mathbf{S}}$ calcula-se derivando o potencial hiperelástico em relação à componente elástica do tensor de deformações $\bar{\mathbf{E}}^e$. A segunda derivada do potencial hiperelástico fornece o tensor de elasticidade tangente $\bar{\mathbf{A}}^e$. Por último faz-se a derivada plástica de Lie em relação ao tensor de tensões $L_v^p(\bar{\mathbf{S}})$ de modo a obter-se o tensor tangente elastoplástico $\bar{\mathbf{A}}$; as

expressões são as seguintes:

$$\bar{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi^e(\bar{E}^e)}{\partial \bar{E}^e} \quad (3.6.16)$$

$$\bar{A}^e = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi^e(\bar{E}^e)}{\partial \bar{E}^e \otimes \partial \bar{E}^e} \quad (3.6.17)$$

$$L_v^p(\bar{S}) = \left[\bar{A}^e - \frac{\left\{ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{S}} : \bar{A}^e \right\} \otimes \left\{ \bar{A}^e : \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{S}} \right\}}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{S}} : \bar{A}^e : \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{S}} + H} \right] : \bar{D} \quad e \quad L_v^p(\bar{S}) = \bar{A} : \bar{D} \quad (3.6.18)$$

A demonstração de que a dissipação para este modelo deve ser positiva faz-se utilizando-se a desigualdade de Clausius-Duhem, garantindo-se com isso o cumprimento da segunda lei da termodinâmica:

$$\bar{S} : \bar{D} - \rho_0 \dot{\bar{\psi}} \geq 0 \quad (3.6.19)$$

Levando-se em conta a decomposição aditiva do tensor taxa de deformações na configuração intermediária $\bar{D} = \bar{D}^e + \bar{D}^p$ e a hipótese de elasticidade desacoplada tem-se:

$$\bar{S} : (\bar{D}^e + \bar{D}^p) - \rho_0 (\dot{\psi}^e(\bar{E}^e) + \dot{\psi}^p(\bar{\alpha})) \geq 0 \quad (3.6.20)$$

Aplicando-se a regra da cadeia às derivadas indicadas no termo entre parênteses na equação acima tem-se:

$$\dot{\psi}^e(\bar{E}^e) = \frac{\partial \psi^e(\bar{E}^e)}{\partial \bar{E}^e} \dot{\bar{E}}^e \quad (3.6.21)$$

e

$$\dot{\psi}^p(\bar{\alpha}) = \frac{\partial \psi^p(\bar{\alpha})}{\partial \bar{\alpha}} \dot{\bar{\alpha}} \quad (3.6.22)$$

Expressando a derivada da expressão 3.6.22 como um conjunto de forças termodinâmicas \bar{P}_j conjugadas às variáveis internas, levando-se em conta que para um movimento elástico a configuração intermediária permanece inalterada e nestas condições $\bar{D}^e = \dot{\bar{E}}$ e agrupando-se convenientemente os termos, reescreve-se a igualdade de Clausius-Duhem na seguinte forma:

$$(\bar{S} - \rho_0 \dot{\psi}^e(\bar{E}^e)) : \bar{D}^e - \bar{S} : \bar{D}^p + \bar{P}_j : \dot{\bar{\alpha}} \geq 0 \quad (2.6.23)$$

O termo entre parênteses na expressão acima trata-se da própria equação constitutiva expressa em termos de taxas. Este termo anula-se para um incremento arbitrário da variável livre \bar{D}^e . Portanto, restam os termos associados à evolução das variáveis internas e que correspondem à dissipação plástica D^p :

$$D^p = -\bar{S} : \bar{D}^p + \bar{P}_j : \dot{\bar{\alpha}} \geq 0 \quad (3.6.24)$$

Por outro lado, pode-se expressar a primeira das equações 3.6.7 em termos de uma lei

de fluxo tipo normalidade:

$$\bar{D}^p = \dot{\bar{E}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{G}(\bar{S}, \bar{\alpha})}{\partial \bar{S}} \quad (3.6.25)$$

No caso de uma lei associada (equações 3.6.14), as condições de Kuhn-Tucker ou de carga e descarga (ver Fig.3.08) levam ao fator multiplicador plástico $\dot{\gamma}$.

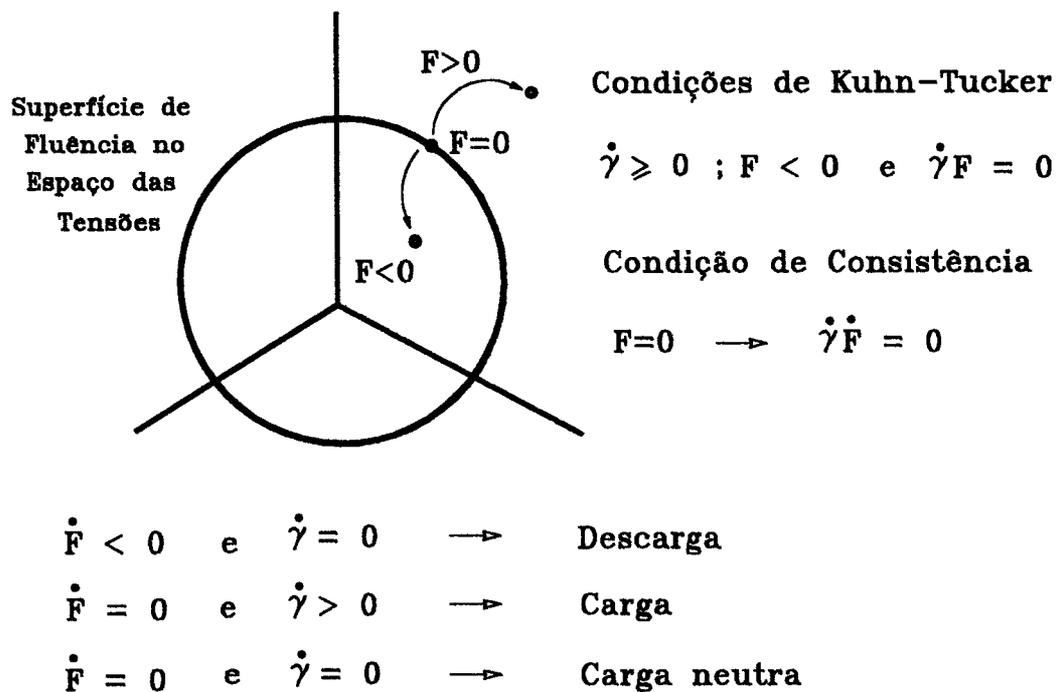


Fig. 3.08- Condições de carga e de descarga e condição de consistência.

Com isto ficam determinados todos os tensores da configuração intermediária. O passo seguinte é transformar estes tensores efetuando o "push-forward" elástico ϕ^e : [41] [43] a fim de obter os tensores na configuração deformada. É necessário incluir como argumento da energia livre a componente elástica do tensor gradiente de deformações F^e para garantir objetividade [41]. A componente elástica da energia livre será então escrita com argumentos espaciais e dada por:

$$\bar{\Psi}^e(\bar{E}^e) = \bar{\Psi}^e(F^{eT} e F^e) = \Psi^e(e^e, F^e) \quad (3.6.26)$$

O "push-forward" elástico da equação 3.6.8 e a fórmula de Doyle-Ericksen [41], que se expressa em função da componente elástica do tensor gradiente de deformações F^e , permite deduzir o tensor de tensões de Kirchhoff da configuração deformada τ . Finalmente, o tensor de tensões de Kirchhoff τ pode ser colocado em função das componentes elásticas do tensor de deformações de Almansi e^e e do próprio tensor F^e . As transformações comentadas estão indicadas abaixo:

$$\tau = \phi_*^e \bar{S} = \rho_0 F^e \frac{\partial \bar{\Psi}^e(\bar{E}^e)}{\partial \bar{E}^e} F^{eT} = \rho_0 \frac{\partial \Psi^e(e^e, F^e)}{\partial e^e} \quad (3.6.27)$$

Utilizando-se raciocínio análogo àquele feito na determinação do tensor de elasticidade tangente \bar{A}^e obtém-se, mediante o cálculo do "push-forward" elástico, o referido tensor na configuração deformada $a^e = \phi_*^e \bar{A}^e$. O potencial plástico e a função de plastificação na configuração deformada também deverão ter como argumento o tensor F^e . Impondo-se a condição de que o multiplicador plástico $\dot{\gamma}$ permanece inalterado em ambas configurações, e sabendo-se que a componente plástica do tensor taxa de deformação na configuração deformada obedece a relação $d^p = \phi_*^e \bar{D}^p$, a regra de fluxo na configuração deformada obedece a seguinte relação:

$$d^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g(\tau, \alpha, F^e)}{\partial \tau} = \dot{\gamma} \phi_*^e \frac{\partial \bar{G}(\bar{S}, \bar{\alpha})}{\partial \bar{S}} = \phi_*^e \bar{D}^p \quad (3.6.28)$$

Impondo-se a restrição de simetria material [19] a expressão da energia livre e as funções potencial e de plastificação plásticas podem ser expressas em função de um tensor simétrico, derivado do tensor de estiramento esquerdo elástico V^e , e denominado tensor elástico de Finger b^{e-1} , o qual é utilizado a posteriori na implementação computacional do modelo. Feitas essas considerações, a energia livre será dada por:

$$\psi = \psi^e(e^e, b^{e-1}) + \psi^p(\alpha, b^{e-1}) \quad (3.6.29)$$

e as funções potencial e fluência plásticas por:

$$g = g(\tau, \alpha, b^{e-1}) \quad e \quad f = f(\tau, \alpha, b^{e-1}) \quad (3.6.30)$$

O tensor de tensões de Kirchhoff τ e o tensor de elasticidade tangente a^e são escritos em função da componente elástica do tensor de Almansi e^e , e do tensor elástico de Finger b^{e-1} . Por sua vez o tensor tangente elastoplástico a será dado pelo cálculo da derivada de Lie com relação ao tensor de tensões de Kirchhoff conforme as seguintes expressões:

$$\tau = \rho_0 \frac{\partial \psi^e(e^e, b^{e-1})}{\partial e^e} \quad (3.6.31)$$

$$a^e = \rho_0 \frac{\partial^2 \Psi^e(e^e, b^{e-1})}{\partial e^e \otimes \partial e^e} \quad (3.6.32)$$

$$L_v(\tau) = \left[a^e - \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \tau} : a^e \right\} \otimes \left\{ a^e : \frac{\partial g}{\partial \tau} \right\}}{\frac{\partial f}{\partial \tau} : a^e : \frac{\partial g}{\partial \tau} + H} \right] : d \quad e \quad L_v(\tau) = a : d \quad (3.6.33)$$

Demonstra-se também neste caso que a dissipação é positiva o que garante o cumprimento da segunda lei da termodinâmica também na configuração deformada. Neste ponto tem-se todos os tensores na configuração deformada e como o demonstra Garino[41], recupera-se a aditividade do tensor de deformações de Almansi. O próximo passo consiste em aplicar o modelo ao caso de metais.

A hipótese considerada por Garino[19] [32] [41] para aplicar o modelo desenvolvido aos metais, é a de pequenas deformações elásticas. Com isso F^e aproxima-se da unidade e o tensor de Finger b^{e-1} tende ao tensor métrico espacial g , situação na qual as configurações intermediária e deformada confundem-se. Admitida essa hipótese não é necessário ter-se o tensor de Finger como argumento nas expressões 3.6.22, e é suficiente escrever a componente elástica da energia livre ψ^e na forma de uma função quadrática do tensor elástico de Almansi e das constantes λ e μ do material na seguinte forma (modelo de Murnaghan):

$$\psi^e = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{1}{2} \lambda \text{tr}(e^e)^2 + \mu (e^e : e^e) \right] \quad (3.6.34)$$

Adota-se neste modelo um endurecimento isótropo de modo que a componente plástica da energia livre fica dada, neste caso, em função apenas da variável interna deformação plástica efetiva, ou seja $\psi^p = \psi^p(\epsilon^p)$. O modelo é o de plasticidade associada na configuração deformada

portanto $g(\tau, \epsilon^p) = f(\tau, \epsilon^p)$. A função de plastificação utilizada é a de von Mises escrita em função do invariante J_2 e é dada de forma simplificada por:

$$f(\tau, \epsilon^p) = \sqrt{J_2(\tau)} - \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_e(\epsilon^p) \quad (3.6.35)$$

Garino[19] emprega uma função de endurecimento isótropo linear dada por:

$$\sigma_e = \sigma_{e0} + H \epsilon^p \quad (3.6.36)$$

onde H é o parâmetro de endurecimento e σ_{e0} é a tensão de proporcionalidade e também uma função de endurecimento isótropo não linear dada por:

$$\sigma_e = a(b + c \epsilon^p)^n \quad (3.6.37)$$

onde a , b , c e n são constantes que dependem do material a ser empregado.

Nesta tese implementou-se, por outro lado, uma função de dano elasto-plástico com vistas ao exemplo de aplicação da teoria de interação de substâncias, a ser apresentada no próximo capítulo. No exemplo em questão, tem-se uma matriz de concreto, um material frágil, à qual adicionam-se fibras curtas de polipropileno [68]. Durante a sollicitação atinge-se uma determinada tensão a partir da qual ocorre a degradação da matriz. A função dada em seguida procura simular essa perda de resistência (amolecimento) do material a partir do momento que se atinge o limite de dano.

A função de plastificação considerada é ainda a de von Mises na forma apresentada pela equação 3.6.35, acrescentando-se como argumento uma variável interna a mais, justamente a que

se refere à evolução do dano. Evidentemente esta função não é a mais adequada para tratar materiais frágeis; Oller[49] apresenta várias outras possibilidades para esse fim, contudo para os objetivos desta tese considerá-la, por conveniência, não prejudica o que se pretende ilustrar no que diz respeito à aplicação da teoria de interação de substâncias no contínuo.

A equação 3.6.35 é reescrita considerando-se que o invariante J_2 deve ser calculado tendo-se em conta a história da evolução da variável de dano $\mathbf{d}=\mathbf{G}(\mathbf{r})$, o que significa que o tensor de tensões de Kirchhoff τ calculado leva em consideração a degradação do material já ocorrida. Na função de endurecimento σ_e , por sua vez, passa a depender do cálculo da energia de fratura do concreto reforçado com fibras, embutida no termo H da equação 3.6.36, e da evolução da deformação plástica efetiva $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, de modo que:

$$f(\tau, \boldsymbol{\varepsilon}^p, d) = \sqrt{J_2(\tau, d)} - \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_e(\boldsymbol{\varepsilon}^p, d) \quad (3.6.38)$$

onde τ é dado por:

$$\tau = (1 - d) \mathbf{a}^e : \mathbf{e}^e \quad (3.6.39)$$

com \mathbf{a}^e tensor de elasticidade tangente, \mathbf{e}^e tensor elástico das deformações de Almansi e \mathbf{d} função de dano dependente do valor limite de dano r que aqui se refere à tensão de proporcionalidade calculada em um instante qualquer. O valor inicial r^0 corresponde ao material íntegro e, em termos de uma tensão uniaxial, equivaleria, neste caso, à tensão de fluência σ_{e0} que aparece na equação 3.6.36.

Em termos de tensão uniaxial escreve-se:

$$\sigma_e = \sigma_{e0}(d) + H_c \varepsilon^P(d) \quad (3.6.40)$$

Observa-se na expressão acima que a tensão de fluência $\sigma_{e0}(\mathbf{d})$ é dependente da variável de dano $\mathbf{d}=\mathbf{G}(\mathbf{r})$. Como consequência, a medida que se avança na etapa plástica mais degradado fica o material e menor será o limite de dano dado por $\mathbf{G}(\mathbf{r})$. A função \mathbf{G} é a que regula a evolução da variável de dano. A evolução da deformação plástica efetiva também dependerá da evolução do dano. A expressão 3.6.36 pode ser reescrita tendo-se em conta um algoritmo em etapas de previsão e correção da seguinte forma:

$$\sigma_e^{(t+\Delta t)} = (1 - d^t) E e^{e^*} + H_c (e^{e^*} - e^{e(t)}) \quad (3.6.41)$$

onde E é o módulo de elasticidade tangente e H_c é o parâmetro de endurecimento negativo calculado a partir da energia de fratura do concreto reforçado com fibras. O termo $(1-d^t)Ee^{e^*}$ é um estado de tensões elástico previsto dependente do dano no instante t e o termo $e^{e(t)}$ corresponde ao tensor elástico de deformações de Almansi calculado no instante t .

A evolução da variável interna deformação plástica efetiva ε^P está embutida no segundo termo à direita da igualdade na equação 3.6.41; ela evolui no tempo até a degradação total do material. Observe que quando $\mathbf{d}=1$ anula-se o limite de dano o que significa ter-se o material totalmente degradado não sendo mais possível cumprir a etapa de previsão de tensões. Neste ponto, o material não pode sofrer nenhum esforço adicional e as deformações serão irrecuperáveis.

As considerações feitas se aplicam ao dano simétrico; isto equivale a dizer que o material, uma vez degradado não é capaz de resistir a novos acréscimos de tensões de tração e nem de compressão. Esta hipótese não é correta no caso de concretos pois na compressão ocorre o fechamento das fissuras o que confere ao material novamente capacidade resistente. Também no que diz respeito ao modelo de dano, além da adoção de uma função de plastificação adequada, é necessária a consideração de outras funções a fim de levar em conta aspectos como a assimetria

do comportamento dos materiais e a não linearidade durante a degradação.

3.7 Anisotropia

A formulação de leis constitutivas adequadas para sólidos anisótipos é um problema de grande complexidade. Uma das mais conhecidas tentativas de formular funções de plastificação adequadas aos materiais anisótipos foi feita por Hill[22][31][36] estendendo o modelo isotrópico de Von Mises para o caso ortótropo. O primeiro modelo proposto por Hill[22] em 1948 foi, e é até hoje, largamente empregado na simulação de processos de conformação de lâminas metálicas; esse modelo admite a hipótese de anisotropia planar. Desenvolvimentos posteriores do mesmo autor [31][46] estenderam a aplicação de seu modelo original a outros tipos de materiais metálicos. A teoria de Hill, contudo, não se aplica aos geomateriais, madeira e materiais compostos de maneira geral embora possa ser utilizada em casos particulares. Como crítica aos modelos propostos por Hill, alguns autores demonstram que em certas situações não se verifica o cumprimento da exigência de convexidade da superfície de plastificação [44], e nestes casos os resultados obtidos não são matematicamente consistentes.

Desenvolvimentos posteriores de outros autores, dentre eles podem-se citar os trabalhos de Barlat [25] [26], Dutko[24][27], Chou[37] e Hoffman[58], fornecem atualmente uma vasta gama de modelos adequados a diversos tipos de materiais anisótipos. As bases teóricas para o estudo da anisotropia encontram-se em textos clássicos de mecânica de meios contínuos tais como os de Malvern[50], Fung[60] e Spencer[66]. Resumem-se a seguir aspectos da teoria de equações constitutivas aplicáveis aos materiais anisótipos.

No espaço de tensões do segundo tensor de Piola-Kirchhoff, admitindo-se a simetria dos tensores de tensões e de deformações, e considerando-se o tensor de quarta ordem C mais geral que relaciona as tensões e deformações [50], escreve-se a equação constitutiva da seguinte forma:

$$S_{IJ} = C_{IJKL} E_{KL} \quad (3.7.1)$$

onde os C_{IJKL} são os termos do tensor constitutivo C com E_{KL} e S_{IJ} respectivamente termos do tensor de deformações de Green E e do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff S .

O caso particular de tensor constitutivo de quarta ordem isótropo é dado pela seguinte expressão:

$$C_{IJKL} = \lambda \delta_{IJ} \delta_{KL} + \mu (\delta_{IK} \delta_{JL} + \delta_{IL} \delta_{JK}) \quad (3.7.2)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé.

Nestas condições e levando-se em conta a existência do potencial hiperelástico de Green, demonstra-se a simetria do tensor de quarta ordem C [50] completo e com 21 constantes elásticas independentes. Pode-se escrever em notação matricial a lei de Hooke generalizada da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{14} \\ S_{15} \\ S_{16} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{14} \\ E_{15} \\ E_{16} \end{Bmatrix} \quad (3.7.3)$$

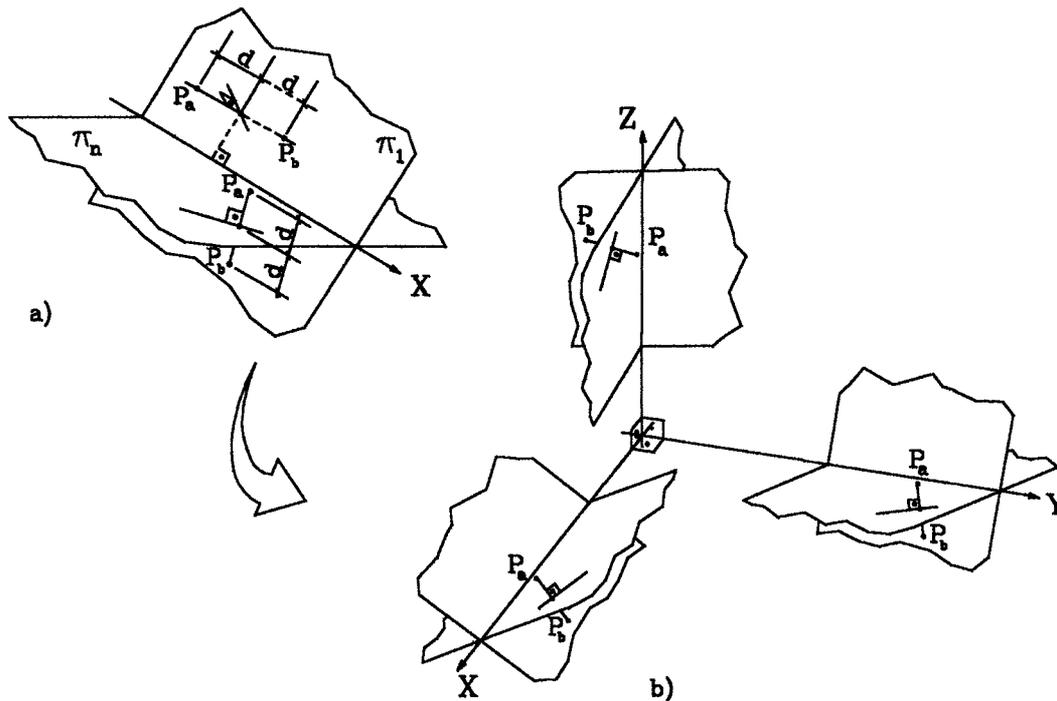


Fig. 3.09- Simetrias: a) Grupo de simetria b) Grupos de simetria ortogonais.

Nessa notação os termos do tensor constitutivo de quarta ordem aparecem contraídos afim de tornar possível uma programação mais simples. Restam, contudo, ainda 21 constantes independentes. Um material é definido como isótropo se a forma da função potencial elástico e os valores C_{IJ} do tensor constitutivo independem da orientação dos eixos de referência global, caso contrário tem-se um material anisótropo.

Define-se grupo de simetria material ou grupo isótropo de um material ao conjunto de transformações das coordenadas materiais que mantém invariante a equação constitutiva [57]. O grupo de simetria depende em geral da escolha do estado de referência. Isto posto, um material isótropo, por exemplo, é aquele que possui pelo menos um estado de referência (denominado estado não distorcido) para o qual seu grupo de simetria contém todo o conjunto das transformações ortogonais das coordenadas materiais. Com isso, seja qual for a rotação rígida, a reflexão em relação a um dado plano ou a um ponto impostas ao sistema de eixos cartesianos de

referência, a equação constitutiva permanece inalterada na sua forma. Nenhuma mudança de coordenadas altera os coeficientes elásticos da matriz C [50].

Um material que possua alguma simetria mas cujo grupo de simetria não contenha todas as transformações ortogonais possíveis denomina-se material aelótropo. Quando as constantes elásticas em um dado ponto tem o mesmo valor para qualquer par de coordenadas as quais são a reflexão uma da outra em relação a um certo plano, esse plano recebe o nome de plano de simetria elástica para o material naquele ponto. Na figura 3.09a estão representados os planos π_1, \dots, π_n concorrentes em uma reta que define o eixo de um grupo de simetria, os pontos P_a e P_b serão simétricos em relação a qualquer plano π considerados. Convém ressaltar que não necessariamente este plano coincide com o plano de simetria do corpo ou mesmo do seu estado de tensões. A simetria em questão é uma simetria direcional em um ponto do plano.

Em particular, se em qualquer ponto de um material concorrem três planos mutuamente perpendiculares entre si, cujas intersecções desses planos dois a dois definem os três eixos coordenados principais, e ao mesmo tempo cada um desses eixos tem a propriedade ilustrada pela figura 3.09a, diz-se neste caso que o material possui três grupos de simetria ortogonais e portanto será um material de simetria ortótropa (ver Fig. 3.09b). Macroscopicamente uma chapa metálica laminada pode ser considerada ortótropa com duas das suas direções principais contidas no seu plano dadas pela direção de laminação e pela direção perpendicular a esta, e por uma direção principal perpendicular ao plano médio dessa chapa.

Para o material ortótropo com as características dadas anteriormente, a matriz de coeficientes elásticos reduz-se a apenas 9 constantes diferentes, e a relação tensão x deformação neste caso será representada por:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{14} \\ S_{15} \\ S_{16} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{14} \\ E_{15} \\ E_{16} \end{Bmatrix} \quad (3.7.4)$$

Para os materiais isotrópicos estas nove constantes podem ser escritas exclusivamente como função das duas constantes de Lamé λ e μ [50][66]. Nessas condições o tensor \mathbf{C} que aparece em 3.7.1 assume a forma particular dada por 3.7.2.

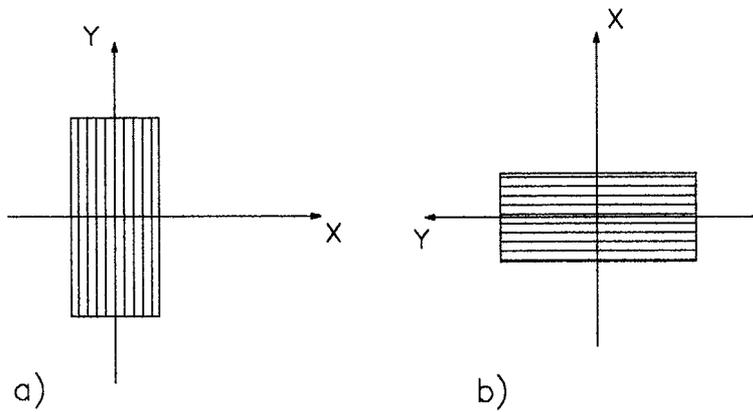


Fig. 3.10- Orientações para os ensaios bi-axiais a) e b).

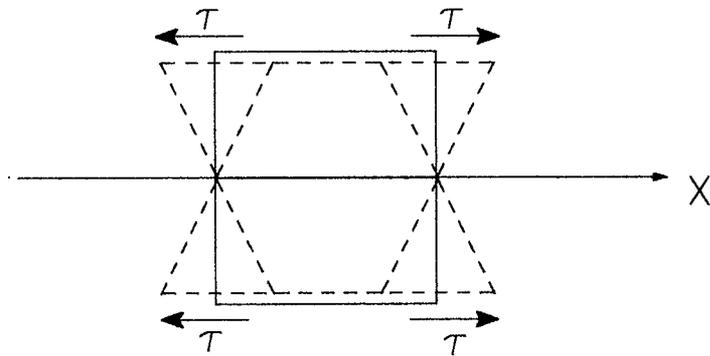


Fig. 3.11- Orientação para o ensaio a cisalhamento e seu simétrico por reflexão em relação ao eixo X.

Voltando ao caso ortótropo, fisicamente considerar estas simetrias consiste em admitir

que um corpo de prova do material ortótropo, pode ser ensaiado em uma dada direção de ortotropia orientada em qualquer direção relativa ao sistema global de referência sem que isto produza resultados diferentes. A figura 3.10 ilustra a simetria do comportamento para uma sollicitação bi-axial; observa-se que não importa a orientação da anisotropia, pois os resultados do ensaio nas direções assinaladas pelos eixos X e Y serão sempre os mesmos independentemente da orientação desses eixos. Por sua vez a figura 3.11 mostra um corpo de prova sollicitado por uma tensão tangencial; neste caso o resultado independe do sentido de aplicação dessa tensão tangencial, e além disso admitindo-se um segundo ensaio realizado dispondo o modelo simetricamente em relação ao eixo X assinalado, se os resultados de ambos ensaios também são iguais, isto caracteriza simetria por reflexão.

Os coeficientes do tensor constitutivo anisótropo estão associados aos resultados destes ensaios. Uma vez que se verifica tal comportamento experimental, o tensor constitutivo deve refletir esses resultados e ele o faz na medida em que se anulam os coeficientes associados a estas simetrias. Obviamente o problema a ser resolvido considerando apenas 9 constantes independentes não nulas torna-se muito mais simples. A consideração destas simetrias contudo não restringe demais suas aplicações visto que os materiais anisótropos usuais podem em geral ser bem representados considerando apenas ortotropia.

Em regime elástico-linear e de pequenas deformações tem-se até aqui elementos suficientes para a análise. Contudo, é preciso definir funções de plastificação adequadas no caso de se considerarem deformações plásticas. A relação que define a regra de fluxo plástico está associada a escolha da função de plastificação a qual, por sua vez, evolui no tempo de acordo com uma lei de encruamento. A figura 3.12 ilustra a superfície de fluência evoluindo no tempo com um dado vetor fluxo plástico associado a ela.

Como vimos, o próprio processo de laminação de uma chapa metálica, por exemplo, produz uma orientação bem definida dos seus cristais e conseqüentemente torna o material anisótropo. Em processos de grandes deformações, característicos em conformação de metais, a anisotropia é principalmente induzida pela re-orientação dos cristais na direção da maior deformação. Uma hipótese usual com finalidade à simulação numérica é a de anisotropia planar.

Usualmente a função de fluência f é considerada acoplada à regra da normalidade e diferentes modelos elasto-plásticos podem ser considerados. Ressalta-se a importância de que a

superfície de fluência seja convexa a fim de assegurar a unicidade da taxa de deformações para uma dada taxa de tensões. É neste ponto que se consideram as diversas funções de fluência propostas nos trabalhos dos diversos autores mencionados no início deste item.

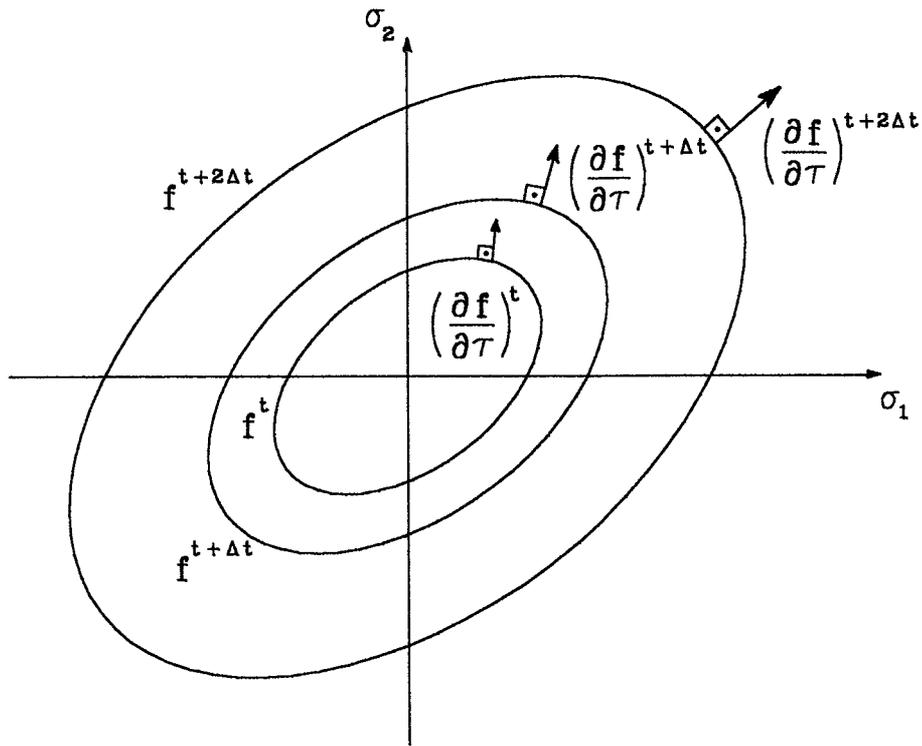


Fig. 3.12- Evolução da função de fluência de von Mises no espaço de tensões.

A primeira aproximação visando uma análise numérica e considerando-se um comportamento anisótropo planar foi proposta por Hill[22] em 1948 a partir de uma generalização do modelo de Huber-Mises. A função de plastificação proposta é dada pela seguinte expressão:

$$f = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1 \quad (3.7.5)$$

onde F , G , H , L , M e N são constantes do material.

Para implementação numérica é melhor, segundo Hernández[67], reescrever a expressão 3.7.5 da seguinte forma:

$$f = \sigma_e^2 - \sigma_r^2 = 0 \quad (3.7.6)$$

onde σ_r é a tensão de comparação dada por:

$$\sigma_r = C(\epsilon_0 + \epsilon^p)^n \quad (3.7.7)$$

com C denotando a constante de Ludwik-Nadai característica do material, ϵ^p a deformação plástica efetiva e ϵ_0 calculado a partir da tensão de fluência inicial $\sigma_0 = C(\epsilon_0)^n$, com n variando entre 0.1 e 0.5. A tensão efetiva σ_e é dada por:

$$2\sigma_e^2 = \alpha_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \alpha_{31}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \alpha_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 6\alpha_{44}\sigma_{23}^2 + 6\alpha_{55}\sigma_{31}^2 + 6\alpha_{66}\sigma_{12}^2 \quad (3.7.8)$$

Por meio de ensaios de tração uniaxial determinam-se as tensões de fluência nas direções principais de anisotropia $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$ e $\bar{\sigma}_{33}$ e operando-se convenientemente obtém-se os valores dos coeficientes α_{ij} . A regra de fluxo é dada por:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{P \sigma}{2\sigma_e} \quad (3.7.9)$$

Considerando o conceito de taxa de trabalho plástico dado por [67]:

$$\dot{W}_p = \sigma^T \dot{E}^p = \sigma_r \dot{e}^p \quad (3.7.10)$$

deduz-se a regra de evolução da deformação plástica efetiva dada por:

$$\dot{e}^p = \dot{\gamma} \quad (3.7.11)$$

Na equação 3.7.9, \mathbf{P} é uma matriz que contém os parâmetros de anisotropia, σ é o tensor de tensões e $\dot{\gamma}$ é o parâmetro de consistência plástica. A dedução da matriz \mathbf{P} e do fator $\dot{\gamma}$ é bastante trabalhosa de modo que foi aqui omitida; Hernández[67] em seu trabalho deduz estes termos.

Para emprego em programas destinados a simular especificamente a conformação de lâminas metálicas a função de fluência é escrita da seguinte forma:

$$f = \sigma_{11}^2 + \frac{R_0(1+R_{90})}{R_{90}(1+R_0)} \sigma_{22}^2 - \frac{2R_0}{(1+R_0)} \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{(1+2R_{45})(1+R_{90})}{R_{90}(1+R_0)} \sigma_{12}^2 - \sigma_r^2 = 0 \quad (3.7.12)$$

onde R_0 , R_{90} e R_{45} são razões entre deformações de três direções contidas no plano da lâmina e obtidas mediante ensaios realizados solicitando uma lâmina de prova respectivamente na direção de laminação, na direção perpendicular a esta e numa direção a 45° da direção de laminação. Estas razões são dadas por:

$$R_0 = \frac{E_{22}}{E_{33}} \quad ; \quad R_{90} = \frac{E_{11}}{E_{33}} \quad e \quad R_{45} = \frac{E(\theta=45)}{E_{33}} \quad (3.7.13)$$

A figura 3.13 ilustra as direções de sollicitações dos três ensaios necessários para determinar os valores de R_0 , R_{90} e R_{45} . Os ensaios devem ser realizados com um corpo de prova laminar, cortado convenientemente de modo a ter-se a direção de laminação paralela a uma das arestas, direção que será considerada como eixo 1-1. A direção perpendicular a esta será a do eixo 2-2 e por sua vez a direção normal ao plano da lâmina será a direção 3-3. No capítulo de exemplos mostra-se uma comparação de resultados obtidos por meio desta função de plastificação com aqueles obtidos empregando tensores de mapeamento.

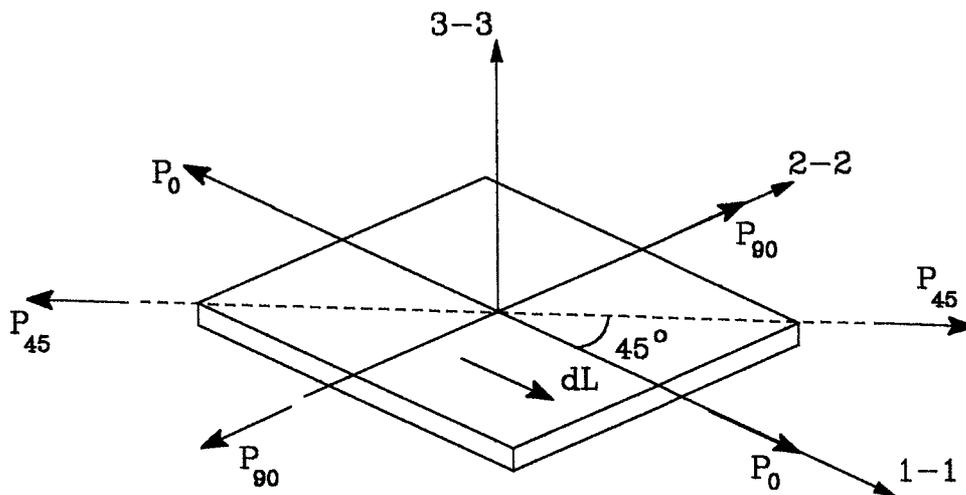


Fig. 3.13- Ensaios a 0° , 45° e 90° realizados em lâmina cuja direção principal de ortotropia é dada por dL .

Ainda que esta função de plastificação tenha sido largamente empregada na simulação do comportamento anisotrópico dos materiais metálicos, ela falha ao tentar representar uma classe importante de materiais usualmente empregados em processos de conformação, materiais estes que apresentam o denominado comportamento anômalo, sendo o alumínio um deles.

Para esses materiais o valor médio das razões de deformação R resulta ser menor do que

1 de acordo com os ensaios e a razão (σ_v/σ_{ii}) maior do que 1 com σ_b sendo a tensão de fluência do material sob tração bi-axial. Ocorre que ao empregar a função dada pela expressão 3.7.11, obtém-se uma razão (σ_v/σ_{ii}) menor do que 1. Para eliminar essa inconsistência Hill[31] em 1979 propôs uma generalização para a expressão 3.7.5 dada por:

$$f = F |\sigma_{22} - \sigma_{33}|^m + G |\sigma_{33} - \sigma_{11}|^m + H |\sigma_{11} - \sigma_{22}|^m + A |2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}|^m + B |2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}|^m + C |2\sigma_{33} - \sigma_{22} - \sigma_{11}|^m = \sigma_m \quad (3.7.13)$$

onde F, G, H, A, B, C e m são coeficientes que dependem do material e σ_m é um fator de escala.

De maneira análoga ao que se fez para a primeira função de fluência, Hernández[67] deduz a regra de fluxo e a evolução das variáveis internas também para este caso. Novamente obtém-se para o caso de anisotropia planar uma expressão da função de fluência em função do coeficiente de Lankford R dado por:

$$R = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4} \quad (3.7.14)$$

Esta função contudo representa, em casos de anisotropia planar, uma superfície de fluência não convexa para certos valores de m e R . Além disso, ela não inclui termos de tensões tangenciais de modo que sua aplicação fica restrita aos casos em que as direções dos eixos de ortotropia coincidem com as direções principais. Um modelo anisótropo proposto por Chu e discutido em Hernández[67] generaliza este segundo critério de Hill incluindo na sua formulação os termos de tensões tangenciais.

Outros autores propuseram funções de fluência aplicáveis ao contexto da conformação de metais porém menos difundidas. Uma delas é a função de Barlat e Lian[25] que inclui os efeitos das tensões tangenciais e gera uma superfície de fluência que independe da pressão

hidrostática e é sempre convexa. Esta função é dada por:

$$f = a |K_1 - K_2|^m + a |K_1 + K_2|^m + (2 - a) |2K_2|^m = 2\bar{\sigma} \quad (3.7.15)$$

com:

$$K_1 = \frac{\sigma_{11} + h\sigma_{22}}{2} \quad (3.7.16)$$

e

$$K_2 = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - h\sigma_{22})}{2} + \rho^2 \sigma_{12}^2} \quad (3.7.17)$$

onde a , h , m e ρ são constantes do material e $\bar{\sigma}$ é a tensão de fluência na direção de laminação.

Recente trabalho de Hill[36] também incorpora as tensões tangenciais em sua formulação e Barlat também em trabalho recente desenvolve modelo para materiais ortótropos em três dimensões. Modelos de anisotropia formulados matematicamente em termos de espaços isotropos equivalentes são muito menos difundidos dado a complexidade matemática envolvida na dedução de tensores de mapeamento adequados e consistentes [7][20][30][57]. Nesta tese propõem-se um modelo deste tipo baseado nos estudos de Oller[2].

CAPÍTULO 4

4. TEORIA DE INTERAÇÃO DE SUBSTÂNCIAS NO CONTÍNUO

4.1 Introdução

Na análise e projeto de peças fabricadas com materiais compostos consideram-se tradicionalmente propriedades mecânicas médias ou de conjunto, determinadas especificamente para cada caso, sendo usuais grandes simplificações nos modelos utilizados. Isto dificulta a avaliação exata do seu real comportamento em casos mais complexos e conseqüentemente restringe as suas aplicações.

A teoria de interação mecânica de substâncias do contínuo objetiva tratar de maneira consistente um material composto genérico que se comporte de acordo com a resultante das características constitutivas de seus componentes. Essa teoria também denominada teoria de misturas, foi estudada inicialmente em um clássico trabalho de Trusdell e Toupin[71] sendo que estudos posteriores feitos por outros autores [54][17][18] estenderam a sua aplicação a materiais bi-fásicos como o concreto.

Mais recentemente com o desenvolvimento da teoria da plasticidade generalizada, Oller[49] propôs um modelo mais geral, capaz de representar o comportamento de materiais multi-fásicos. No tratamento numérico de problemas envolvendo materiais compostos esta teoria permite aplicar para muitos casos um procedimento sistematizado que emprega ferramentas já desenvolvidas na mecânica de meios contínuos [64][65][45].

Neste capítulo discute-se o emprego da teoria de interação em suas formulações em série e em paralelo [17][18][78] sendo que apenas esta última foi implementada no programa utilizado. Na sua forma mais simples, a teoria de misturas aplica-se, em princípio, a compostos formados pela combinação de substâncias dúcteis. Todavia, mediante a introdução de funções de plastificação para materiais anisótropos e de modelos de dano elasto-plástico por exemplo, estende-se a sua aplicação a materiais formados por matriz dúctil com fibras longas orientadas em qualquer direção, usuais nas indústrias automobilística e aeronáutica, e a materiais formados por uma matriz frágil, usualmente o concreto, com a adição de fibras curtas [64][68]. Tais assuntos também são objeto de estudo neste capítulo.

Não está previsto neste trabalho o estudo de materiais laminados. Contudo, há no capítulo 7 um exemplo em que se simulou o comportamento dinâmico de uma placa laminada utilizando o modelo aqui proposto (não é possível, entretanto, levar em conta fenômenos de delaminação, assunto que exige estudos à parte que não estão contemplados nesta tese).

4.2 Consistência termodinâmica do modelo constitutivo

Resumem-se neste item aspectos apresentados em Oñate[64] para a verificação da consistência termodinâmica da teoria de interação de substâncias no contínuo com o objetivo de construir um modelo constitutivo adequado a materiais de matriz composta [1][49][50][51]. Esta verificação é feita considerando-se deformações infinitesimais em um problema termo-mecânico desacoplado.

Em pequenas deformações para um ponto do sólido deriva-se a regra de fluxo $\dot{\mathbf{E}}_{IJ}$ diretamente da parte simétrica do tensor velocidade de deformações \mathbf{D}_{IJ} . Em Garino[41]

demonstra-se que na configuração deformada também há uma relação semelhante. A consequência de ter-se um problema termo-mecânico desacoplado é o fato de que a desigualdade de Clausius-Duhem desdobra-se em duas desigualdades que devem ser atendidas de forma independente, a primeira delas refere-se à dissipação mecânica D_m e a segunda à dissipação térmica D_θ :

$$\begin{cases} D_m = \theta \dot{\eta} - \dot{\omega} + \left(\frac{S_{IJ} D_{IJ}}{\rho_0} \right) \geq 0 \\ D_\theta = -q_i \nabla \theta \geq 0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

onde $\dot{\omega}$ é a derivada temporal da função densidade de energia interna dada por $\omega = \omega(E_{IJ}, \alpha_n, \eta)$, com α_n representando o grupo de variáveis internas considerado, E_{IJ} o tensor de deformações total, η a entropia e θ a temperatura. Na primeira das expressões 4.2.1 S_{IJ} é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, q_i é o campo vetorial do fluxo de calor e ρ_0 é a densidade material.

Executando-se a derivada temporal da função densidade de energia interna e substituindo o resultado na expressão da dissipação mecânica obtém-se:

$$D_m = \left(\theta - \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \dot{\eta} + \left(\frac{S_{IJ}}{\rho_0} - \frac{\partial \omega}{\partial E_{IJ}} \right) \dot{E}_{IJ} - \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \geq 0 \quad (4.2.2)$$

onde $\dot{\eta}$ e \dot{E}_{IJ} representam a derivada temporal da entropia e o tensor taxa de deformação respectivamente e α_i é uma determinada variável interna.

Aplicando-se à equação acima o método de Coleman conforme Lubliner[1], para que se garanta o cumprimento da desigualdade, é necessário que os coeficientes que aparecem multiplicando as derivadas temporais sejam todos simultaneamente nulos para um dado estado

termodinâmico. O resultado disso produz as relações constitutivas gerais termodinamicamente consistentes dadas em seguida:

$$\theta = \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \quad (4.2.3)$$

$$S_M = \rho_0 \frac{\partial \omega}{\partial E_M} \quad (4.2.4)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \leq 0 \quad (4.2.5)$$

Por outro lado, a energia livre de Helmholtz $\psi = \psi(E_M, \theta, \alpha_n)$ é um potencial termodinâmico conjugado à dissipação mecânica dada pela expressão 4.2.2 e adequado ao propósito de formular um modelo constitutivo para materiais compostos. Seus argumentos são basicamente os mesmos que os da energia interna porém com a variável livre temperatura θ no lugar da entropia.

Em termos de variáveis internas no modelo de grandes deformações proposto é suficiente considerar apenas a deformação plástica efetiva ϵ^p . Em um dos exemplos implementou-se, contudo, uma função de dano elasto-plástico e apenas nesse caso considerou-se a variável interna de dano d . A maneira mais conveniente de introduzir o potencial ψ tendo-se em conta as considerações anteriores é através de sua relação com a função da densidade de energia ω com vistas obter a forma local da desigualdade de Clausius-Duhem:

$$\Psi = \Psi(E_M, \theta, \epsilon^p, d) = \omega(E_M, \eta, \epsilon^p, d) - \eta \theta \quad (4.2.6)$$

A desigualdade de Clausius-Duhem na sua forma local passa a ser dada por [64]:

$$\left(\frac{S_M}{\rho_0} - \frac{\partial \Psi}{\partial E_M}\right) \dot{E}_M - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \eta\right) \dot{\theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^P} \dot{\epsilon}^P - \frac{1}{\theta \rho_0} q_i \nabla \theta \geq 0 \quad (4.2.7)$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, o método de Coleman conduz à dissipação e as relações constitutivas termodinamicamente consistentes dadas por:

$$\eta = - \frac{\partial \Psi(E_M, \theta, \epsilon^P)}{\partial \theta} \quad (4.2.8)$$

$$S_M = \rho_0 \frac{\partial \Psi(E_M, \theta, \epsilon^P)}{\partial E_M} \quad (4.2.9)$$

$$D_m = - \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^P} \dot{\epsilon}^P - \frac{1}{\theta \rho_0} q_i \nabla \theta \equiv - \frac{\partial \Psi}{\partial E_M^P} \dot{E}_M^P - \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^P} \dot{\epsilon}^P - \frac{1}{\theta \rho_0} q_i \nabla \theta \geq 0 \quad (4.2.10)$$

Observe-se que a equação 4.2.9 é a equação constitutiva escrita na configuração material. Note-se também, conforme visto no capítulo 2, que no modelo para grandes deformações formulado por Garino[41] expressa-se a equação constitutiva em função apenas da componente elástica da energia livre ψ^e , cujo único argumento é a componente elástica do tensor de deformações \mathbf{E}^e . A variável interna deformação plástica efetiva ϵ^P , considerada a hipótese de elasticidade desacoplada, aparece apenas na componente plástica da energia livre, desprezando-se uma possível variação de temperatura. Apresentou-se ainda a expressão da equação constitutiva na configuração deformada na qual a componente elástica da energia livre tem como argumentos as componentes elásticas do tensor de Finger \mathbf{b}^{e-1} e do tensor gradiente de deformações \mathbf{F}^e .

Uma vez que a teoria de misturas faz o papel de administrar um conjunto de modelos constitutivos para os quais, em princípio, não se impõe qualquer tipo de restrição, através dela implementou-se nesta tese o modelo de grandes deformações e o modelo anisótropo por tensores de mapeamento. No item seguinte apresentam-se aspectos gerais das formulações em série, em paralelo e da formulação mista, limitando-se em seguida o estudo à formulação em paralelo implementada neste trabalho.

4.3 Generalidades a respeito das formulações paralela, série e mista

Definidas as substâncias formadoras de um dado composto, outras hipóteses complementares devem ser feitas. A primeira e mais usual é a suposição de que todas as substâncias formadoras do composto estão sujeitas a um mesmo estado de deformações ϵ_C . Esta hipótese leva ao que se pode denominar associação em paralelo dessas substâncias.

Outros materiais, contudo, podem apresentar comportamento distinto e neste caso outras hipóteses devem ser feitas. É possível, por exemplo, supor uma associação em série, o que equivale a dizer que cada uma das substâncias formadoras do composto está sujeita a um estado de deformações próprio e que a soma destas deformações será a deformação do composto como um todo. Há ainda a composição destas duas possibilidades, o que equivale a dizer que a deformação total é imposta ao mesmo tempo a um ou mais grupos de substâncias associadas em série os quais aparecem também associados a outras substâncias em paralelo.

Segundo uma associação mista as componentes de deformação de um material composto podem ser expressas por [78]:

$$\epsilon_{ij} = (1-N)\epsilon_{ij}^P + N\epsilon_{ij}^S \quad (4.3.1)$$

onde N pode variar entre 0 e 1 em função da participação de substâncias associadas em série e/ou em paralelo.

Na expressão 4.3.1 quando $N=0$, recupera-se a associação exclusivamente em paralelo e quando $N=1$ recupera-se a associação exclusivamente em série. Observa-se ainda que a associação paralela atende satisfatoriamente as aplicações com materiais compostos consideradas nesta tese.

Uma vez calculadas e separadas convenientemente as deformações nas partes que cabem respectivamente às substâncias associadas em série e àquelas em paralelo, cada substância por meio de seu modelo constitutivo fornece um resultado em tensões. Combinando os resultados em tensões de cada substância, respeitando a proporção de suas participações no volume total e tendo-se em conta a formulação mais adequada aplicável, obtém-se a resposta global em tensões para o composto. Dado um campo de deslocamentos \mathbf{u} , na figura 4.01 ilustra-se esquematicamente a formulação mista mais geral.

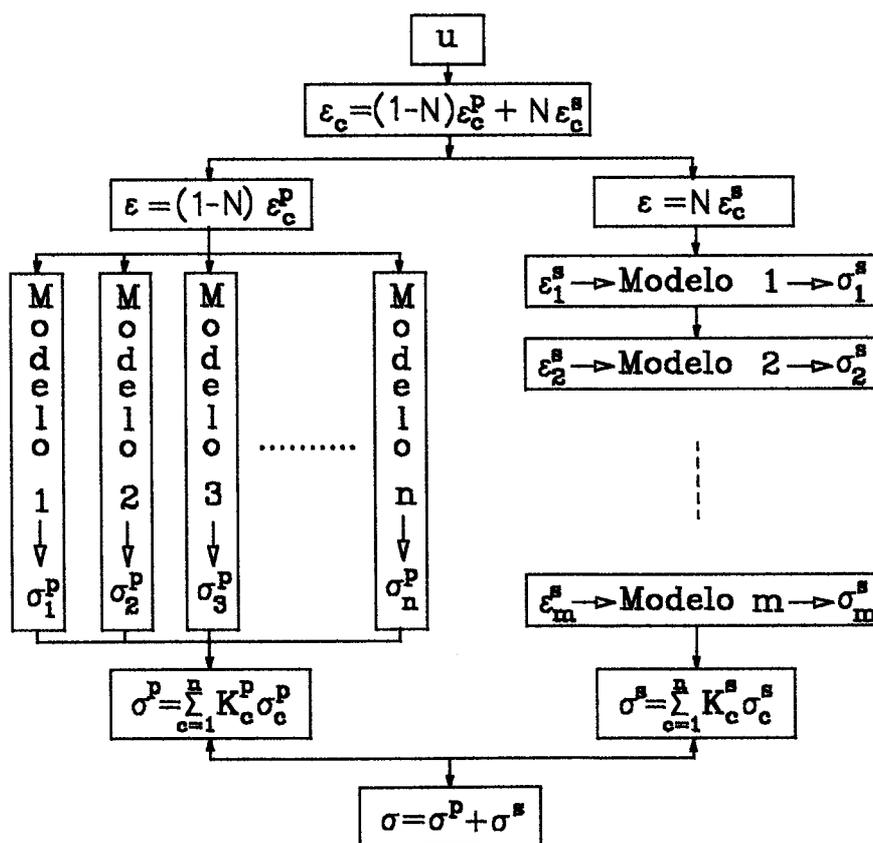


Fig. 4.01- Esquema geral para a formulação mista numa implementação da teoria de interação de substâncias no contínuo.

Ao final, determinado o campo de tensões para o composto calculam-se as forças internas e tem sequência os procedimentos normais para a solução das equações de equilíbrio que governam o problema.

4.4 Associação em paralelo

Neste item, particulariza-se o estudo da teoria de interação das substâncias no contínuo ao caso paralelo (ver figura 4.02), ou seja, admite-se a condição de compatibilidade dada por:

$$E_c = E_1 = E_2 = \dots = E_n \quad (4.4.1)$$

onde E_c é a deformação material do composto e E_i com $i=1,2,\dots,n$ são as deformações de cada substância.

O objetivo, a partir daqui, é demonstrar a regra de distribuição tensional entre as substâncias e o equilíbrio entre as fases dentro de um contexto termodinâmico partindo-se da energia livre dada pela equação 4.4.2 e tendo-se em conta a hipótese 4.4.1:

$$\rho_0 \Psi(E_U, \theta, \alpha_n) = \rho_0 \sum_{c=1}^n k_c \Psi_c(E_U, \eta, (\alpha_n)_c) \quad (4.4.2)$$

onde Ψ_c é a energia livre do $c^{\text{ésimo}}$ componente e k_c é a fração do volume total por ele ocupada.

Deve ainda ser observada a seguinte condição:

$$\sum_{c=1}^n k_c = \sum_{c=1}^n \frac{V_c}{V} = 1 \quad (4.4.3)$$

com V igual ao volume total e V_c igual ao volume da $c^{\text{ésima}}$ substância.

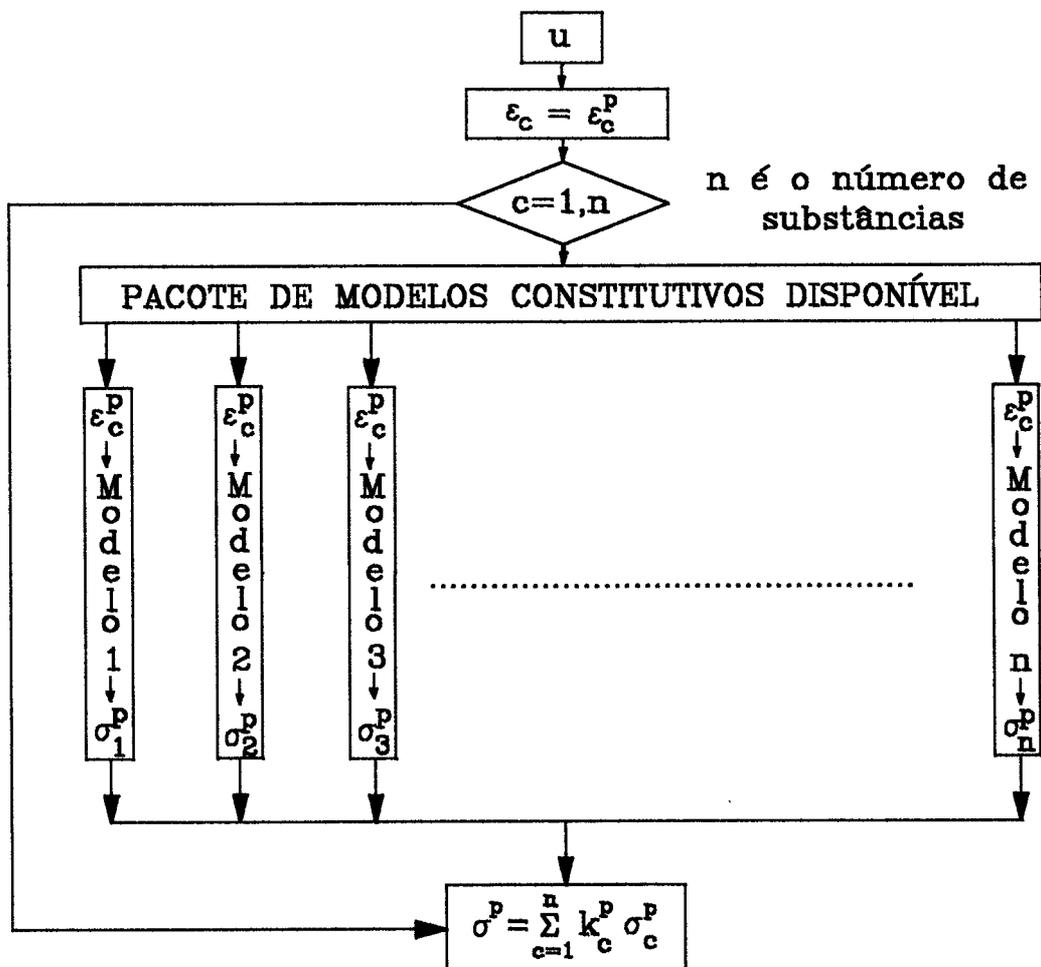


Fig. 4.02- Arranjo de n substâncias em paralelo.

Neste ponto pode-se generalizar as equações constitutivas dadas pelas equações 4.2.8 e 4.2.9 para um material composto **n**-fásico de modo que:

$$\eta = - \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial \Psi_c(E_{IJ}, \theta, (\epsilon^p)_c)}{\partial \theta} = - \sum_{c=1}^n k_c (\eta)_c \quad (4.4.4)$$

$$S_{IJ} = \rho_0 \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial \Psi_c(E_{IJ}, \theta, (\epsilon^p)_c)}{\partial E_{IJ}} = \sum_{c=1}^n k_c (S_{IJ})_c \quad (4.4.5)$$

Para que a dissipação seja positiva também neste caso, considerando por simplicidade apenas uma variável interna representada pela função escalar deformação plástica efetiva ϵ^p , deve-se ter o seguinte:

$$\frac{\partial \Psi(E_{IJ}, \theta, \epsilon^p)}{\partial \epsilon^p} \dot{\epsilon}^p = \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial \Psi_c(E_{IJ}, \theta, (\epsilon^p)_c)}{\partial (\epsilon^p)_c} (\dot{\epsilon}^p)_c \leq 0 \quad (4.4.6)$$

A partir da equação 4.4.5 num contexto baseado na hipótese de elasticidade desacoplada $\Psi = \Psi^e(E^e, \theta) + \Psi^p(\epsilon^p, \theta)$ e da plasticidade com variáveis internas, deduz-se o tensor constitutivo tangente **C** considerando-se apenas a parte elástica da energia livre Ψ^e , de modo que:

$$C_{IJKL} = \rho_0 \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial^2 \Psi_c^e(E_{PQ}^e, \theta)}{\partial E_{IJ}^e \partial E_{KL}^e} = \sum_{c=1}^n k_c (C_{IJKL})_c \quad (4.4.7)$$

O tensor conjugado da dilatação térmica $\beta(\epsilon^p)$ e o calor específico por unidade de temperatura $c_k(\epsilon^p)$ calculam-se a partir da energia livre total Ψ da seguinte forma:

$$\beta_{IJ}(\epsilon^p) = \rho_0 \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial^2 \Psi_c(E_{IJ}, \theta, (\epsilon^p)_c)}{\partial E_{IJ} \partial \theta} = \sum_{c=1}^n k_c (\beta_{IJ}(\epsilon^p))_c \quad (4.4.8)$$

$$\frac{c_k(\epsilon^p)}{\theta} = \rho_0 \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial^2 \Psi_c(E_{IJ}, \theta, (\epsilon^p)_c)}{\partial \theta \partial \theta} = \sum_{c=1}^n k_c (c_k(\epsilon^p))_c \quad (4.4.9)$$

Tendo-se em conta a aditividade do tensor de deformações, a condição de compatibilidade de deformações entre as substâncias do composto dada pela expressão 4.4.1 e o tensor conjugado da dilatação térmica, escreve-se a deformação do composto da seguinte forma:

$$(E_{IJ})_c = (C_{IJKL}^{-1})_c (S_{KL})_c + (E_{IJ}^p)_c + (\beta_{IJ}(\epsilon^p))_c (\theta - \theta_0) \quad (4.4.10)$$

Operando-se convenientemente afim de separar o termo $(S_{IJ})_c$ da equação acima e substituindo-o na equação 4.4.5 tem-se:

$$S_{IJ} = \sum_{c=1}^n k_c (S_{IJ})_c = \sum_{c=1}^n k_c (C_{IJKL})_c [E_{KL} - (E_{KL}^p)_c - (\beta_{KL}(\epsilon^p))_c (\theta - \theta_0)] \quad (4.4.11)$$

Por outro lado exprime-se o tensor de tensões também considerando-se as propriedades

de conjunto do composto do seguinte modo:

$$S_{IJ} = C_{IJKL} [E_{KL} - E_{KL}^p - \beta_{KL}(\epsilon^p)(\theta - \theta_0)] \quad (4.4.12)$$

Igualando-se as equações 4.4.11 e 4.4.12, tendo-se em conta 4.4.7 e operando-se convenientemente, obtém-se a deformação plástica total em função da parcela correspondente de cada substância formadora do composto:

$$E_{IJ}^p = C_{IJPQ}^{-1} \left\{ \sum_{c=1}^n k_c (C_{PQRS})_c [(E_{RS}^p)_c + (\beta_{RS}(\epsilon^p))_c (\theta - \theta_0)] \right\} - \beta_{IJ}(\epsilon^p)(\theta - \theta_0) \quad (4.4.13)$$

O tensor deformação plástica para uma dada substância e e sua taxa de variação serão respectivamente dados por:

$$(E_{IJ}^p)_c = \int_0^t (\dot{E}_{IJ}^p)_c dt \quad (4.4.14)$$

com:

$$(\dot{E}_{IJ}^p)_c = (\dot{\gamma})_c \frac{\partial (G(S_{KL}, \theta))_c}{\partial (S_{IJ})_c} \quad (4.4.15)$$

Observa-se que o potencial está escrito em função do segundo tensor de Piola-Kirchhoff S e que este por sua vez escreve-se em função do tensor de deformações de Green ou mais precisamente, no caso do modelo para grandes deformações proposto por Garino[41], em função

apenas da componente elástica E^e do referido tensor. Nesta dedução surge a mais o argumento θ referente a temperatura.

Considerando-se a expressão 4.4.7 e a compatibilidade de deformações dada por 4.4.1 escreve-se a seguinte relação:

$$C_{IJKL} E_{KL} = \sum_{c=1}^n k_c (C_{IJKL})_c E_{KL} \quad (4.4.16)$$

Substituindo-se a expressão acima em 4.4.10 e escrevendo-se o tensor de tensões para uma fase em função da resposta global do composto tem-se:

$$(S_{IJ})_c = (C_{IJPQ})_c \left\{ C_{PQKL}^{-1} \left[\sum_{c=1}^n k_c (C_{KLR S})_c E_{RS} \right] - (E_{PQ}^p)_c - (\beta_{RS}(\epsilon^p))_c (\theta - \theta_0) \right\} \quad (4.4.17)$$

Operando-se convenientemente, obtém-se uma expressão simplificada para as tensões na $c^{\text{ésima}}$ fase dada por:

$$(S_{IJ})_c = (\beta_{IJKL})_c S_{KL} + (\zeta_{IJ})_c \quad (4.4.18)$$

onde $(\beta_{IJKL})_c$ é o tensor de influência das tensões totais na $c^{\text{ésima}}$ fase e $(\zeta_{IJ})_c$ são as tensões residuais de interfase. Estes tensores satisfazem às seguintes condições:

$$\sum_{c=1}^n k_c (\beta_{IJKL})_c = (C_{IJPQ})_c C_{PQKL}^{-1} = I_{IJKL} \quad (4.4.19)$$

$$\sum_{c=1}^n k_c (\epsilon_{LJ})_c = (C_{LJPQ})_c [(E_{PQ}^p)_c - (E_{PQ}^p)_c] - (C_{LJPQ})_c (\beta_{RS}(\epsilon^p))_c (\theta - \theta_0) = 0_{LJ} \quad (4.4.20)$$

As equações acima garantem: a distribuição tensional entre as fases pois permite escrever o tensor de tensões no composto como função das tensões de cada substância formadora; e também o equilíbrio entre as fases demonstrando que são nulas as tensões intersubstâncias. Com base no exposto pode-se escrever as tensões num composto a partir da combinação das tensões de suas fases de maneira simples da seguinte forma:

$$S_{LJ} = k_1(S_{LJ})_1 + k_2(S_{LJ})_2 + \dots + k_c(S_{LJ})_c + \dots + k_n(S_{LJ})_n \quad (4.4.21)$$

com $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1$.

A implementação elaborada tem como base a expressão 4.4.21 e segue o diagrama de blocos representado na figura 4.02. Em seguida introduzem-se modificações para considerar compostos de matriz elasto-plástica e fibras longas e também compostos de matriz frágil e fibras curtas.

4.5 Compostos de matriz elasto-plástica e fibras longas

Consideram-se aqui as fibras longas paralelas entre si, uniformemente e simetricamente distribuídas porém orientadas em qualquer direção numa matriz que pode ser isotrópica ou anisotrópica. Admite-se que não há descolamento entre a matriz e a fibra e que a carga externa aplicada distribui-se uniformemente pela seção. Usualmente nos casos de ortotropia, conforme o ilustrado na figura 4.03, o eixo principal de maior resistência é considerado orientado na direção

longitudinal das fibras, o plano normal às fibras conterá o par de eixos restante também perpendiculares entre si.

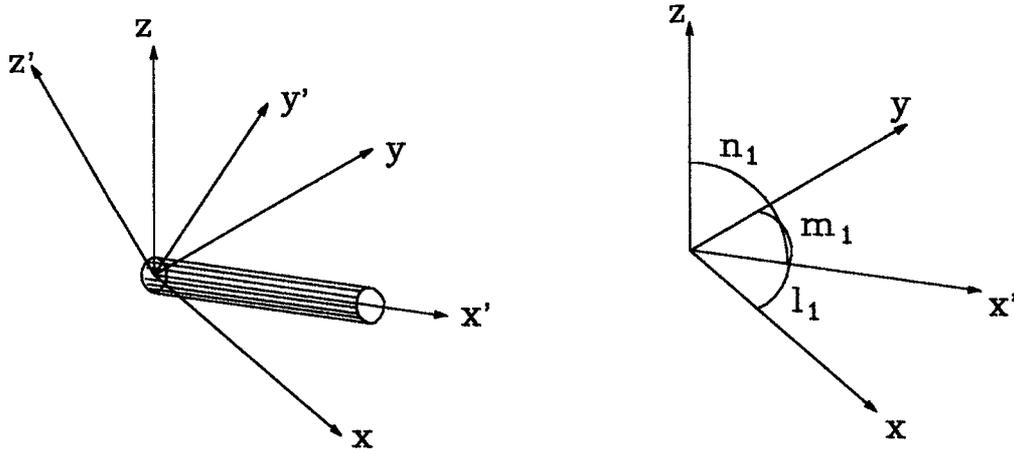


Fig. 4.03- Orientação do sistema de referência local da fibra em relação ao sistema global.

Particularizando-se a expressão 4.4.21 a este caso tem-se:

$$(S_{IJ})_c = k_m (S_{IJ})_m + k_f (S_{IJ})_f \quad (4.5.1)$$

onde os índices **c**, **m** e **f** referem-se respectivamente ao composto, à matriz e à fibra e os coeficientes k_m e k_f referem-se às frações em volume ocupadas por cada fase. Obviamente deve-se ter $k_m + k_f = 1$.

Reescreve-se a expressão 4.5.1 em função apenas das tensões e da fração k_f da seguinte forma:

$$(S_{IJ})_c = (S_{IJ})_m + k_f ((S_{IJ})_f - (S_{IJ})_m) \quad (4.5.2)$$

Na forma como se implementou esta teoria, a previsão elástica e a correção plástica das tensões é feita separadamente para cada substância, de modo que para a matriz não há nada a ser acrescentado ao modelo de grandes deformações proposto e nem a consideração de anisotropia. Contudo, é necessário modificar a verificação da função de fluência para as fibras uma vez que sua contribuição na resistência do composto se dá apenas na direção em que estas estão orientadas.

Consideram-se as fibras como um material isótropo e de comportamento simétrico (na compressão consideram-se as fibras confinadas pela matriz a fim de evitar instabilidade localizada), admite-se incompressibilidade, plasticidade associada com variáveis internas e emprego do critério de fluência de von Mises expresso em função do segundo invariante do tensor desviador de tensões $J_2(\tau)$ no espaço de tensões de Kirchhoff conforme descrito no capítulo 3 desta tese. Na verificação da plastificação das fibras é necessário, portanto, separar as partes volumétrica e desviadora do tensor de tensões. Assim;

$$\tau_{ij} = \frac{1}{3} \tau_{ii} \delta_{ij} + dev \tau_{ij} \quad (4.5.3)$$

a modificação ocorre na etapa da correção plástica onde a regra de fluxo para um problema associado escreve-se na configuração deformada da seguinte forma:

$$d^P = \dot{\gamma} n \quad (4.5.4)$$

onde $\dot{\gamma}$ é o multiplicador plástico e n é um vetor normal à superfície de plastificação dado por:

$$n = \frac{\partial f(\tau, \epsilon^p)}{\partial \tau} \quad (4.5.5)$$

com $f(\tau, \epsilon^p)$ a função de fluência e τ o tensor de tensões de Kirchhoff.

Em uma fibra solicitada, tomada isoladamente, apenas existem tensões axiais. Admite-se que transversalmente à sua direção, a fibra não transfere tensões normais por efeito de Poisson para a matriz que a envolve. Tendo-se em conta um sistema ortogonal e local de referência com um de seus eixos orientado no sentido longitudinal das fibras (ver orientação dos eixos x' , y' e z' na figura 4.03), e considerando-se que no caso da função de von Mises o tensor desviador de tensões $\text{dev } \tau$, coincide com o tensor fluxo plástico, reescreve-se o tensor desviador de tensões da seguinte forma:

$$\text{dev } \tau_{ij} = r_{ijkl} \left(\frac{\partial f(\tau, \epsilon^p)}{\partial \tau} \right)_{kl} = n \quad (4.5.6)$$

onde r é o tensor de rotação de quarta ordem.

De início as fibras são tratadas como substância isotrópica, de modo que apenas considera-se sua orientação no espaço na etapa da correção plástica, o que é feito por meio da rotação do tensor fluxo plástico. É por essa razão que introduz-se o tensor de rotação de quarta ordem r apenas neste ponto. Convém salientar que apesar de utilizar-se o tensor r convencional dado por Cook[73] não se trata da mesma rotação feita quando se considera de início uma substância anisotrópica cujos eixos principais não coincidem com a referência global, ocasião em que se rotacionam todos os tensores anisotrópicos que contenham propriedades constitutivas.

Para assegurar que apenas tenha-se a contribuição do estado de tensão uniaxial na fibra nas direções x , y e z da referência global (ver Fig. 4.03), consideram-se não nulos apenas os

cossenos diretores do eixo local que orienta as fibras e, além disso, desprezam-se as tensões tangenciais que aparecem no tensor desviador de tensões. Para tornar válida esta última consideração fazem-se nulos também os termos de r que multiplicam aquelas tensões tangenciais.

Neste caso, o tensor desviador de tensões será dado por:

$$dev \begin{Bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ 2\tau_{12} \\ 2\tau_{23} \\ 2\tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & & & \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & & & \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f'_{11} \\ f'_{22} \\ f'_{33} \\ f'_{12} \\ f'_{23} \\ f'_{31} \end{Bmatrix} \quad (4.5.7)$$

onde os f'_{ij} são os termos do tensor fluxo plástico e $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3$ são os cossenos diretores dos eixos do sistema local; um dos seus eixos coincidirá com o eixo local da fibra. Identificado qual o eixo que coincide com a fibra, observe-se que apenas uma entre as três primeiras colunas será não nula.

Quando houver coincidência dos eixos locais da fibra com os eixos da referência global faz-se nula a matriz de rotações r à exceção do termo da diagonal principal referente ao eixo do sistema global que coincide com a direção das fibras, que será igual a 1. Supondo que as fibras estejam orientadas segundo o eixo y (ou 2) por exemplo, o termo r_{22} é que será feito igual a 1. Com isso ve-se claramente que apenas o termo $dev \tau_{22}$ será diferente de zero e neste caso o tensor desviador de tensões será dado por:

$$\text{dev} \begin{Bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ 2\tau_{12} \\ 2\tau_{23} \\ 2\tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f'_{11} \\ f'_{22} \\ f'_{33} \\ f'_{12} \\ f'_{23} \\ f'_{31} \end{Bmatrix} \quad (4.5.8)$$

A correção plástica portanto é feita sobre este tensor corrigido de modo que a verificação resume-se ao caso uniaxial. Uma vez corrigida a tensão desviadora recompõe-se o tensor de tensões completo. A tensão final no composto será dada pela equação 4.5.1. No caso particular em que a solitação é paralela ao sentido das fibras, estas não têm contribuição alguma na direção transversal. Há um exemplo no capítulo 7 que ilustra claramente o funcionamento de um composto de matriz elasto-plástica com fibras longas.

4.6 Compostos de matriz frágil e fibras curtas

O caso clássico de material composto de matriz frágil e fibras curtas é o do concreto reforçado com fibras, material que vem sendo estudado com crescente interesse para a aplicação na construção civil. A adição de fibras ao concreto melhora substancialmente a resistência deste a esforços de tração reduzindo conseqüentemente o número de fissuras nas regiões tracionadas das peças de concreto armado. Além disso dependendo do teor e do tipo de fibras adicionadas à matriz de concreto pode-se obter economia pela redução das seções das peças a serem projetadas.

Genericamente a matriz é formada pelo concreto simples ou com agregados finos e/ou grãos e pode conter aditivos para diversas finalidades. As fibras curtas podem ser: de aço

comum ou inoxidável com ou sem ganchos nas extremidades; à base de polímeros como as de acrílico, aramida, nylon, carbono, poliéster, polietileno e polipropileno; podem ser minerais como as fibras de vidro e até naturais como as fibras de bambú e de sisal.

Históricamente o conceito de material composto com reforço de fibras é muito antigo, remonta aos primórdios da construção civil quando na fabricação de blocos de barro para construção empregavam-se diversos tipos de materiais fibrosos para obter-se blocos mais resistentes. Mais recentemente passou-se a utilizar fibras para reforçar concretos utilizados na construção de pisos industriais, ramo que atualmente é objeto de muitas pesquisas e desenvolvimento. Contudo, apenas a partir da década de 60 o emprego de concretos reforçados com fibras ganhou impulso definitivo. Demonstrações experimentais de evidentes melhoras nos aspectos de ductilidade, resistência à fratura e inclusive aumento da resistência à flexão, aliado a soluções tecnológicas adequadas para produção destes compostos, tornaram definitivamente interessante, economicamente, o emprego destes materiais em diversas aplicações da construção civil. Em Balaguru[68] encontra-se um breve histórico relativo aos usos e ao desenvolvimento de compostos reforçados com fibras.

Neste contexto, a teoria de interação de substâncias no contínuo foi utilizada para analisar a contribuição das fibras no composto [68]. A partir de ensaios realizados com o composto e com a matriz separadamente utilizou-se a teoria para determinar qual a contribuição das fibras. Admite-se distribuição uniforme das fibras em todo o volume do composto; desta forma o material pode ser considerado isótropo do ponto de vista macroscópico. Nesta tese implementou-se no programa um modelo elástico-linear baseado na mecânica da fratura proposto em Balaguru[68] destinado a simular o comportamento de compostos dessa natureza fornecendo como dados de entrada os parâmetros da fibra, obtidos a partir de ensaios feitos em uma fibra isolada, e os parâmetros da matriz também obtidos a partir de ensaios.

A caracterização das fibras é feita pelo denominado ensaio de arrancamento ("pull-out") (ver Fig.4.04), que fornece a carga crítica de arrancamento P_{CR} para uma fibra imersa numa determinada matriz. Conhecida a geometria da fibra é possível determinar a tensão de cisalhamento τ_f na interface matriz fibra da seguinte forma simplificada:

$$\tau_f = \frac{P_{CR}}{l(2\pi a)} \quad (4.6.1)$$

onde l é o comprimento da fibra e a é o seu raio.

No modelo numérico, para determinar o valor da carga crítica P_{CR} , utilizam-se valores experimentais da tensão de cisalhamento τ_f na interface fornecidos para cada tipo de fibra. Obtido o valor da carga crítica, determina-se o valor numérico do trabalho específico interfacial na fratura γ_i através de uma expressão simplificada dada por [68]:

$$\frac{1}{2} \frac{P_{CR}^2}{E_f \pi a^2} = (2\pi a) 2\gamma_i \quad (4.6.2)$$

onde E_f é o módulo de Young da fibra.

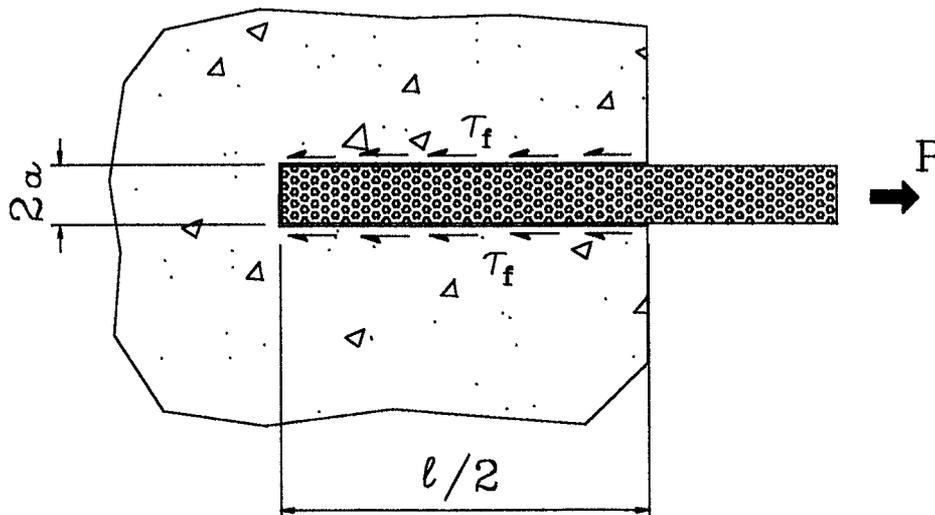


Fig. 4.04- Ensaio de arrancamento ("pull-out") considerando interface elástica.

O passo final consiste em determinar um novo valor da tensão de ruptura na tração σ_{CR} para a matriz de concreto reforçada com fibras. Isto é feito utilizando-se a seguinte expressão:

$$\sigma_{CR} = 2k_f \left[\frac{E_c E_f}{(E_c - k_f E_f)} \frac{2\gamma_i}{a} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.6.3)$$

onde k_f é a fração do volume total que corresponde às fibras e E_c é o módulo de Young do composto dado pela teoria de misturas por:

$$E_c = k_m E_m + k_f E_f \quad (4.6.4)$$

com E_m o módulo de elasticidade da matriz de concreto e k_m sua correspondente fração de participação no volume total do composto.

Neste ponto têm-se os parâmetros da fibra e computou-se a influência destas na resistência à tração do concreto, falta apenas considerar que a partir do ponto em que se verifica o início da fissuração é necessário levar em conta a degradação da matriz de concreto. Isto é feito introduzindo-se a variável de dano conforme o modelo apresentado no final do item 3.6 do capítulo 3. Além disso, é necessário determinar o parâmetro de amolecimento H_c para a matriz e isto é feito a partir da determinação da energia de fratura W calculada para cada tipo de matriz de concreto.

O valor da energia de fratura W é numericamente igual a área sob o diagrama de tensão x deformação obtido quando se ensaia um corpo de prova de concreto puro a tração. A correspondência com o parâmetro de amolecimento H_c é estabelecida impondo-se que, para qualquer acréscimo de tensões que ultrapassa a tensão de ruptura do concreto, haverá uma dissipação de energia que cresce linearmente, reduzindo-se o novo limite de escoamento do

concreto na mesma proporção até que não haja mais energia de fratura a ser dissipada e que se tenha, conseqüentemente, tensão de escoamento nula para o concreto totalmente degradado. A figura 4.05 mostra graficamente a determinação da energia de fratura W e o parâmetro de amolecimento H_c em função de $\varepsilon_f = \varepsilon - \varepsilon^e$.

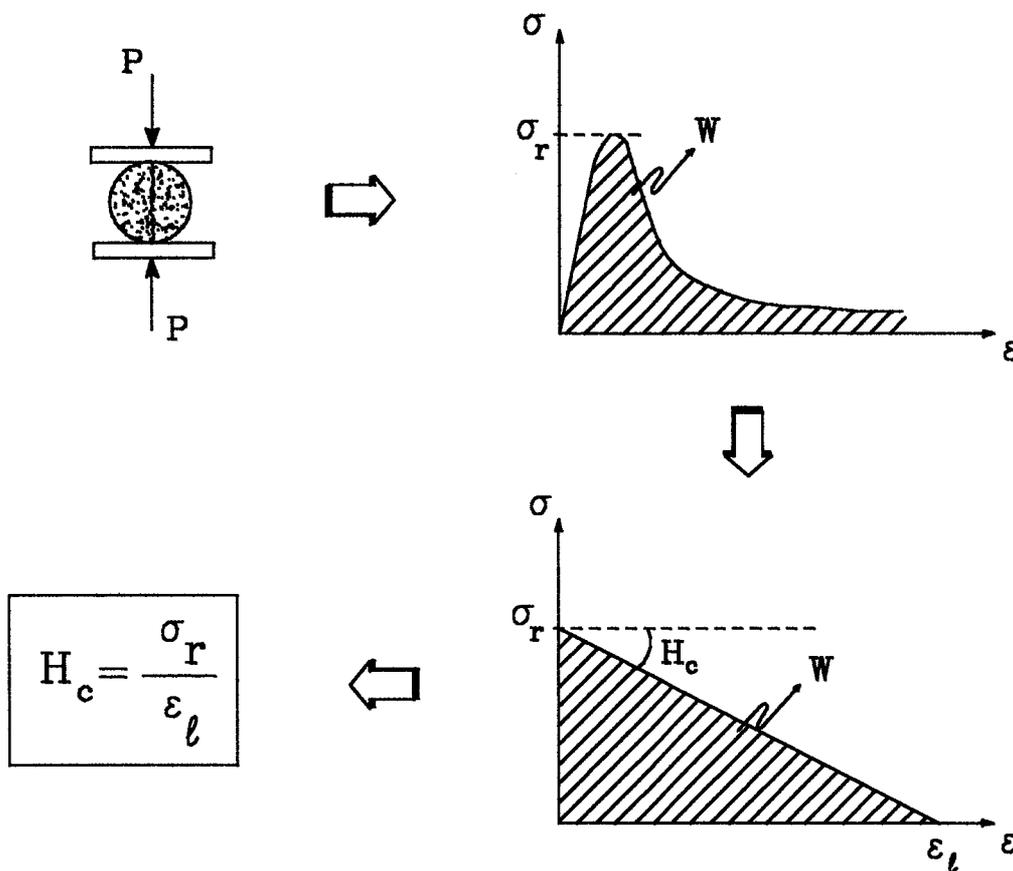


Fig. 4.05- Determinação do parâmetro de amolecimento H_c a partir de ensaio de compressão diametral em corpo de prova de concreto puro.

Com todos os parâmetros determinados, utilizando-se a teoria de misturas recupera-se a tensão no composto a partir das respostas em tensões dos modelos de fibra curta e de matriz frágil calculadas independentemente. Novamente reportamo-nos ao esquema da figura 4.02 para

ilustrar o encaminhamento da solução. No capítulo de exemplos desta tese encontra-se um caso clássico de matriz frágil com fibra curta para o qual existem resultados experimentais [68].

4.7 Comentários finais

Está claro que a teoria de interação mecânica de substâncias no contínuo é um instrumento poderoso para análise de elementos estruturais construídos com materiais compostos. Não há restrições ao seu emprego no que diz respeito a tipos de elementos finitos ou modelos constitutivos, evidentemente, quanto mais sofisticados forem os modelos constitutivos adotados melhor será a simulação do comportamento destes materiais.

Nesta tese não consideraram-se problemas de delaminação em materiais estratificados, estes casos dependem de formulação de elementos finitos adequadas. Não há restrições para a aplicação a concretos com fibras curtas orientadas em apenas uma direção, esta possibilidade é atendida se utilizarmos, por exemplo, o modelo de anisotropia proposto nesta tese. Há ainda a possibilidade de tratar problemas com fibras curtas paralelas entre si utilizando-se o modelo proposto por Jayatilaka mencionado em Oñate et al. [64] que parte das mesmas idéias básicas utilizadas aqui.

Obviamente esta técnica não esgota as possibilidades numéricas para análise de materiais compostos; há muito a ser feito nesta linha de pesquisa.

CAPÍTULO 5

5. MODELO ANISÓTROPO BASEADO EM FORMULAÇÃO ISÓTROPA

5.1 Introdução

Neste capítulo introduz-se uma abordagem da questão da plastificação de materiais anisótropos que se baseia em um modelo proposto por Betten[7] [20], no qual procura-se obter para cada grupo de simetria [50] de um material anisótropo um conjunto de invariantes [57], e utilizá-los como argumentos da função de plastificação.

No caso particular da função de fluência de von Mises aplicável a materiais dúcteis, ela é escrita em função do invariante do tensor desviador de tensões \mathbf{J}_2 . Admitindo-se isotropia e considerando-se o modelo de plasticidade com variáveis internas dadas por α_n , pode-se escrever:

$$f(\mathbf{J}_2, \alpha_n) = 0 \quad (5.1.1)$$

A consideração de isotropia supõe a igualdade dos grupos de simetria seja qual for o eixo considerado no âmbito do sistema de referência genérico que tenha sido adotado. No caso mais geral de materiais anisótropos, não há a igualdade entre grupos de simetria de modo que para cada eixo admitido tem-se um grupo de simetria diferente. Evidentemente na prática o que ocorre é um número limitado de possibilidades no que diz respeito aos grupos de simetria. Estes estão associados a redes cristalinas e agrupam-se em categorias bem definidas tais como as redes cristalinas cúbicas, triclínicas, tetragonais, etc. Para cada uma delas existe um número característico de grupos de simetria. Karfilis e Boyce[30] deduziram um critério geral de fluência que leva em conta esses grupos de simetria. Em termos do conceito aqui empregado pode-se escrever o seguinte neste caso:

$$f(\sigma_{ij}, \alpha_n, A_{ijkl}, A_{kl}, \dots) = 0 \quad (5.1.2)$$

onde A_{kl} , A_{ijkl} , etc são tensores materiais que contém toda a informação a respeito da anisotropia do material [20].

Nesta tese considera-se o caso particular de anisotropia que corresponde à ortotropia. Neste caso existem apenas três grupos de simetria que correspondem aos três eixos ortogonais de um sistema cartesiano de referência. Uma forma de tratar esses materiais anisótropos, consiste em definir um espaço fictício isótropo \bar{S} (neste capítulo, a barra sobre os símbolos das variáveis distingue o espaço fictício), para o qual se fará o mapeamento dos campos de tensões e de deformações correspondentes ao sólido anisótropo real. Neste caso, como veremos em seguida, determina-se um tensor material de quarta ordem A_{ijkl} que contém toda a informação da anisotropia de modo que a relação 5.1.2, tendo-se em conta a nomenclatura para a configuração material, rescreve-se da seguinte forma:

$$F(S_{ij}, \alpha_n, A_{ijkl}) = 0 \quad (5.1.3)$$

Originalmente, Betten[7] [20] assumiu como hipótese básica em seu modelo a igualdade entre as deformações elásticas nos espaços real e fictício; isto introduz a limitação de ter-se proporcionalidade entre a tensão de escoamento e o módulo de elasticidade em cada direção do material ($f_{11}^s / E_{11} = f_{22}^s / E_{22} = \dots = f_{23}^s / E_{23}$). Oller et al [2] introduziram uma generalização ao modelo proposto de modo a eliminar esta limitação. Essa forma generalizada é seguida neste trabalho.

É possível deduzir tensores de quarta ordem contendo toda a informação da anisotropia, que permitem, por meio de transformações simples, utilizar o modelo proposto para relacionar a evolução dos campos de tensões e deformações de um sólido isotrópico fictício com os campos correspondentes do sólido anisótropo real. A mais imediata vantagem consiste em que é possível utilizar as mesmas funções de potencial e plastificação derivadas para materiais isotrópicos padrão. Os parâmetros do material envolvidos na dedução dos tensores de mapeamento podem ser definidos a partir de ensaios experimentais adequados. Esse modelo é denominado por Oller et al [2] "modelo isotrópico mapeado para materiais não-proporcionais".

Com esta formulação pode-se modelar diferentes classes de materiais ortótropos e anisótropos utilizados tipicamente na fabricação de compósitos, dependendo basicamente da determinação de um conjunto adequado de propriedades constitutivas. Neste trabalho o modelo de anisotropia mapeada é implementado em um programa explícito aplicável a problemas com grandes deformações elasto-plásticas. Estende-se a sua aplicação a problemas de embutição e estiramento de chapas metálicas [59] e ao concreto reforçado com fibras curtas [68]. O caso de fibras longas é considerado por meio da imposição da direção das fibras ao vetor de fluxo plástico [2].

Nas próximas seções descreve-se a lei constitutiva geral para materiais anisótropos, incluindo-se a dedução da regra de fluxo e a evolução das variáveis internas de acordo com os trabalhos desenvolvidos por Oller [2] [3] [17] [18]. Em seguida estendeu-se o modelo de anisotropia proposto aos casos com grandes deformações utilizando-se, para isso, o modelo constitutivo proposto por Garino[41], tendo-se em conta que a integração da equação constitutiva se dá no espaço fictício isotrópico.



No item 5.4 está uma das contribuições contidas nesta tese que consiste em transformar os tensores de mapeamento deduzidos na configuração de referência em seus equivalentes na configuração deformada. Para isso, deduzem-se as expressões do "push-forward" elástico para tensores de quarta ordem bi-pontuais e implementam-se as mesmas numa rotina capaz de realizar essa tarefa no escopo de um programa explícito.

5.2 Lei constitutiva geral para materiais elasto-plásticos anisótropos

O modelo anisótropo elasto-plástico proposto por Oller[2] é termodinamicamente consistente e está formulado com relação à configuração material usando-se uma descrição lagrangiana total. Segundo uma descrição lagrangiana atualizada, o modelo proposto por Oller[2], associado à integração da equação constitutiva na configuração deformada, na forma proposta por Garino[41], pode lidar com problemas não-lineares envolvendo grandes deformações elasto-plásticas de maneira matematicamente coerente, desde que também os tensores de mapeamento estejam na configuração deformada. Modelos mais simples ortótropos e de plasticidade isótropa são casos particulares do modelo geral proposto.

Admite-se que as funções potencial G e de fluência F estão definidas no espaço de tensões através do segundo tensor de Piola-Kirchhoff S , como:

$$G(S_{ij}, \alpha_n) = K \quad e \quad F(S_{ij}, \alpha_n) = 0 \quad (5.2.1)$$

onde:

$$S_{ij} = S_{ij}(C_{rs}, \alpha_n) \quad (5.2.2)$$

C_{rs} é o tensor direito de Cauchy-Green, α_n é um conjunto de "n" variáveis internas e K é um parâmetro constante.

As funções potencial e de fluência são ditas isótropas se satisfazem a condição de invariância para qualquer transformação ortogonal \mathbf{a} ($a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o tensor de Kronecker) [7] [20] [50]. Materiais isótropos satisfazem a condição de invariância [50]; se além disso o material satisfaz a condição de incompressibilidade plástica, as funções potencial e de fluência podem ser escritos em termos dos invariantes do tensor desviador de tensões. Assim sendo, valem as seguintes relações:

$$G(S_{ij}, \alpha_n) = G(a_{ip}a_{jq}S_{pq}, \alpha_n) = G(J_1(S_{ij}), J_2(S_{ij}), J_3(S_{ij}), \alpha_n) = K \quad (5.2.3)$$

e

$$F(S_{ij}, \alpha_n) = F(a_{ip}a_{jq}S_{pq}, \alpha_n) = F(J_1(S_{ij}), J_2(S_{ij}), J_3(S_{ij}), \alpha_n) = 0 \quad (5.2.4)$$

Encontram-se na bibliografia propostas de equações constitutivas derivadas de funções potencial e de fluência que levam em conta a anisotropia [22] [25] [30] [31] [36]. Estas funções nem sempre atendem à condição de invariância. Esta condição, contudo, é sempre atendida no caso do modelo empregado neste trabalho, uma vez que as propriedades do sólido real anisótropo escrevem-se como função de propriedades equivalentes de um sólido isótropo fictício. Para esse fim, relaciona-se o tensor de tensões do espaço fictício com o tensor de tensões do espaço real por meio de um tensor de quarta ordem da seguinte forma:

$$\bar{S}_{ij} = A_{ijkl}^S S_{kl} \quad (5.2.5)$$

sendo o tensor material de quarta ordem e inversível A_{ijkl} dado por:

$$A_{ijkl}^s = f_{ik}^{\bar{s}} f_{jl}^{s^{-1}} \quad (5.2.6)$$

Os tensores de segunda ordem $f_{ik}^{\bar{s}}$ e $(f_{jl}^s)^{-1}$ são respectivamente o tensor de tensões de escoamento no espaço mapeado e o inverso do tensor de tensões de escoamento no espaço real.

Na definição dos tensores de tensões de escoamento escolhe-se, por conveniência, o maior valor dentre aqueles dados para o material anisótropo, com ele escrevendo-se o tensor $f_{ik}^{\bar{s}}$. Em seguida escreve-se o inverso do tensor equivalente no espaço real $(f_{jl}^s)^{-1}$ e o produto tensorial entre ambos fornece o primeiro dos tensores de mapeamento de quarta ordem A^s .

Usando estratégia semelhante escolhem-se dentre as propriedades constitutivas do material anisótropo aquelas que definirão o sólido isótropo fictício. Definem-se os tensores constitutivos em ambos os espaços: $C^{\bar{s}}$ no espaço isótropo fictício e C^s no espaço real anisótropo.

Para relaxar a condição imposta por Betten de igualdade entre os tensores elásticos de deformação nos espaços fictício e real, estabelece-se a seguinte relação:

$$\bar{E}_{ij}^e = A_{ijkl}^E E_{kl}^e \quad (5.2.7)$$

onde:

$$A_{rsmn}^E = C_{rsik}^{\bar{s}^{-1}} : A_{ijkl}^s : C_{jlmn}^s \quad (5.2.8)$$

Observa-se que tanto os tensores de tensões de escoamento, como os tensores constitutivos, devem referir-se a um sistema de coordenadas global. Quando estes estiverem definidos em sistemas locais deve proceder-se à rotação dos referidos tensores da seguinte forma:

$$C^S = R^T : C_{local}^S : R \tag{5.2.9}$$

$$f^S = R^T : f_{local}^S \tag{5.2.10}$$

onde R é a matriz de rotação de quarta ordem.

Com isto, as funções potencial e de fluência podem ser escritas com argumentos do espaço fictício, mais precisamente em função de um conjunto de invariantes do tensor de tensões nesse espaço fictício. Na maioria dos casos basta expressar essas funções tendo como argumento um número reduzido de invariantes. A figura 5.01 resume as relações entre os espaços fictício e real.

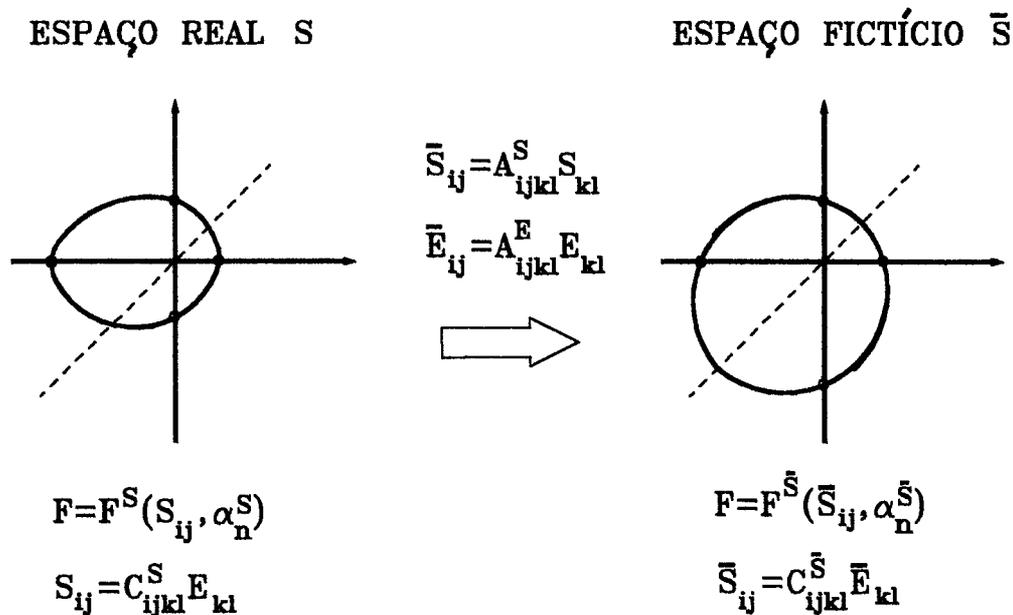


Fig. 5.01- Relação entre os espaços real e fictício.

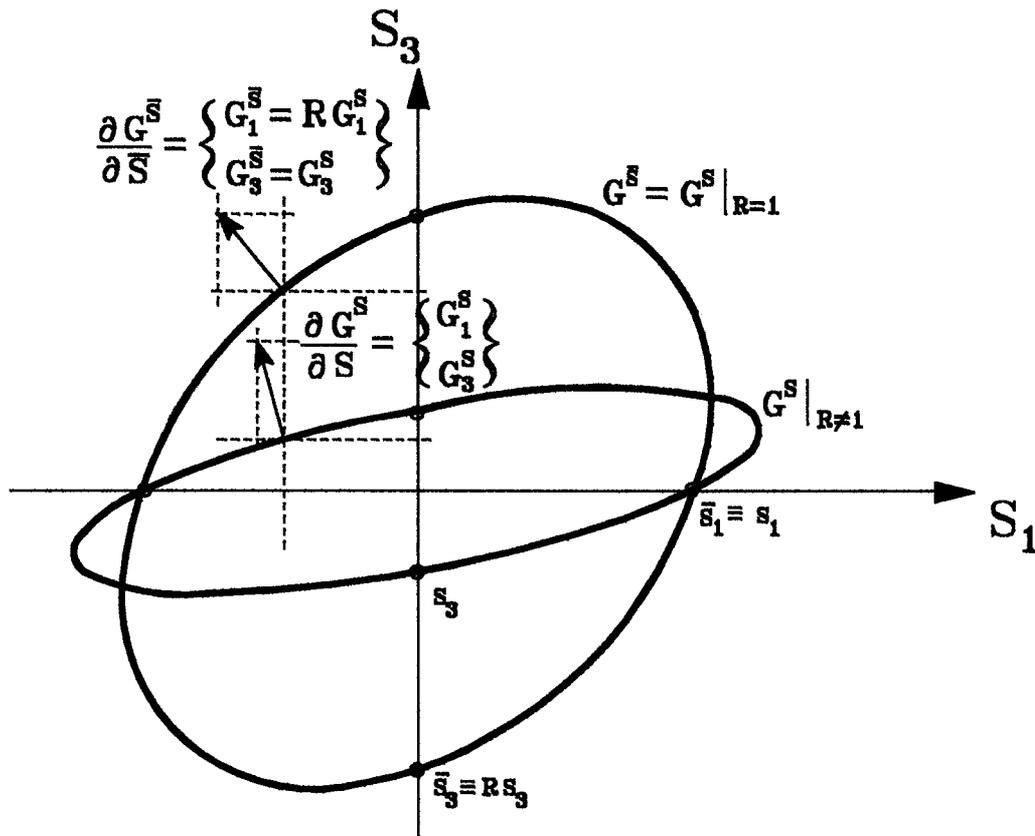


Fig. 5.02- Superfícies de fluência isótropa com tensão $S_1=S_3$ e anisótropa real com tensão $\bar{S}_3=RS_3$.

Aos problemas em que se pode aplicar a função de plastificação de von Mises, por exemplo, o segundo invariante do tensor desviador de tensões J_2 é argumento suficiente além das variáveis internas. As variáveis internas por sua vez, também são afetadas pela transformação proposta. Oller[2] mostra a influência da variação da relação (\bar{S}_{ij}/S_{ij}) em várias funções de fluência. A figura 5.02 mostra a função de fluência de von Mises representada no plano para o caso isótropo clássico e para um caso particular de material anisótropo. Observa-se claramente

a mudança de direção do vetor fluxo plástico o qual permanece perpendicular à superfície de fluência anisótropa.

A equação constitutiva para o material anisótropo real escrita em função do campo de tensões no espaço fictício, obtém-se a partir da expressão da dissipação mecânica D^s (Oller[2]) dada por:

$$D^s = \left(\frac{S_{ij}}{\rho_0} - \frac{\partial \Psi^s}{\partial E_{ij}^e} \right) \dot{E}_{ij}^e + \frac{S_{ij} \dot{E}_{ij}^p}{\rho_0} - \sum_m \frac{\partial \Psi^s}{\partial \alpha_n^m} \dot{\alpha}_n^m \geq 0 \quad (5.2.11)$$

Operando-se convenientemente de modo a garantir a positividade da dissipação e levando-se em conta as equações 5.2.5 a 5.2.8, obtém-se a equação constitutiva secante [2] dada por:

$$S_{ij} = \rho_0 \frac{\partial \Psi^s(E_{ij}^e, \alpha_n^m)}{\partial E_{ij}^e} = A_{ijkl}^{s^{-1}} \bar{S}_{kl} \quad (5.2.12)$$

onde ρ_0 é a densidade na configuração material e $\bar{S}_{ij} = C_{ijkl}^{\bar{s}} \bar{E}_{kl}^e$ o tensor de tensões no espaço fictício.

Tendo-se em conta as relações tensoriais para isotropia mostradas no capítulo 2, vimos que deduz-se também na configuração deformada uma expressão semelhante à dada pela equação 5.2.12 para o tensor de tensões de Kirchhoff τ . Admitindo-se que se trate do espaço fictício isótropo pode-se escrever a seguinte equação constitutiva:

$$\bar{\tau}_{ij} = \rho_0 \frac{\partial \Psi^{e\bar{s}}(\bar{e}_{ij}^e, \bar{b}_{ij}^{e^{-1}})}{\partial \bar{e}_{ij}^e} = c_{ijkl}^{\bar{s}} \bar{e}_{kl}^e \quad (5.2.13)$$

Recuperam-se os tensores de tensões \mathbf{S} e de deformações \mathbf{E} na configuração material calculando-se o "pull-back" elástico dos correspondentes tensores da configuração deformada. Como resultado, obtém-se relações semelhantes às dadas pelas equações 5.2.5 e 5.2.7 para a transformação dos campos de tensões e deformações para a configuração deformada, ou seja:

$$\bar{\tau}_{ij} = a_{ijkl}^S \tau_{kl} \quad (5.2.14)$$

e

$$\bar{e}_{ij}^e = a_{ijkl}^E e_{kl}^e \quad (5.2.15)$$

As relações dos tensores de mapeamento de quarta ordem da configuração deformada \mathbf{a}^S e \mathbf{a}^E com os seus equivalentes da configuração de referência \mathbf{A}^S e \mathbf{A}^E serão deduzidas mais adiante.

5.3 Regra de fluxo, variáveis internas e equação constitutiva tangente

A regra de fluxo no espaço real, tendo-se em conta a configuração de referência e a aditividade do tensor de deformações é dada por:

$$\dot{E}_{ij}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial G^S(\bar{S}_{ij}, \alpha^n)}{\partial S_{ij}} \quad (5.3.1)$$

Considerando-se a relação entre o campo de tensões real e fictício dado pela expressão 5.2.5 e aplicando-se a regra da cadeia tem-se:

$$\dot{E}_{ij}^P = \dot{\gamma} \frac{\partial G^{\bar{s}}}{\partial \bar{S}_{kl}} \frac{\partial \bar{S}_{kl}}{\partial S_{ij}} = \dot{\gamma} \frac{\partial G^{\bar{s}}}{\partial \bar{S}_{kl}} A_{kl ij}^S \quad (5.3.2)$$

O tensor de mapeamento de deformações A^E relaciona o tensor de deformações do espaço fictício com o seu análogo no espaço real conforme a equação 5.2.7. Consequentemente pode-se escrever a regra de fluxo no espaço fictício da seguinte forma:

$$\bar{E}_{rs}^P = A_{rs ij}^E \dot{E}_{ij}^P = A_{rs ij}^E \dot{\gamma} \frac{\partial G^{\bar{s}}}{\partial \bar{S}_{kl}} A_{kl ij}^S \quad (5.3.3)$$

Utilizando-se raciocínio análogo ao feito na dedução da regra de fluxo, deduz-se uma expressão para a evolução das variáveis internas α_n em função de variáveis tensoriais ou escalares h^n que governam a evolução dessas variáveis internas e do fator de consistência plástica γ :

$$\dot{\alpha}_n^S = \dot{\gamma} (h_{ij}^n)^S \frac{\partial G^S}{\partial S_{ij}} = \dot{\gamma} (h_{ij}^n)^S \frac{\partial G^{\bar{s}}}{\partial \bar{S}_{ij}} A_{kl ij}^S = \dot{\gamma} (h_{ij}^n)^{\bar{s}} \frac{\partial G^{\bar{s}}}{\partial \bar{S}_{ij}} = \dot{\alpha}_n^{\bar{s}} \quad (5.3.4)$$

Substituindo-se as transformações das tensões e deformações, a relação entre as regras de fluxo em ambos espaços e a evolução das variáveis internas na equação da dissipação dada por 5.2.11, recupera-se a expressão 5.2.5 demonstrando-se com isso a unicidade da dissipação garantindo a consistência termodinâmica também no espaço fictício isótropo [2].

Partindo-se da equação constitutiva escrita em termos de taxas no espaço real, chega-se a uma expressão análoga no espaço fictício da seguinte forma:

$$\dot{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}^e} \dot{E}_{kl}^e = \frac{\partial S_{ij}}{\partial \bar{S}_{rs}} \frac{\partial \bar{S}_{rs}}{\partial \bar{E}_{mn}^e} \frac{\partial \bar{E}_{mn}^e}{\partial E_{kl}^e} \dot{E}_{kl}^e \quad (5.3.5)$$

onde $\dot{E}^e = \dot{E} - \dot{E}^p$. Substituindo-se as derivadas pelos correspondentes tensores tem-se:

$$\dot{S}_{ij} = (A_{ijrs}^S)^{-1} C_{rsmn}^{\bar{S}} (\bar{E}_{mn} - \bar{E}_{mn}^p) = (A_{ijrs}^S)^{-1} \bar{S}_{rs} \quad (5.3.6)$$

Desta forma, a equação acima pode ser interpretada como uma transformação linear da equação constitutiva em termos de taxas escrita para o espaço fictício isótropo onde:

$$\bar{S}_{rs} = \frac{\partial \bar{S}_{ij}}{\partial E_{kl}^e} \dot{E}_{kl}^e = C_{ijkl}^{\bar{S}} (\bar{E}_{kl} - \bar{E}_{kl}^p) \quad (5.3.7)$$

A imposição da condição de consistência plástica permite deduzir o tensor constitutivo elastoplástico no espaço fictício que conjuntamente com as equações 5.3.6 e 5.3.7 levam a expressão da equação constitutiva em termos de taxas no espaço real:

$$\dot{S}_{ij} = A_{ijkl}^{S^{-1}} \bar{S}_{kl} = A_{ijkl}^{S^{-1}} C_{klrs}^{\bar{S}^{ep}} A_{rstu}^E \dot{E}_{tu} \quad (5.3.8)$$

O tensor constitutivo elastoplástico no espaço real será dado por:

$$C_{ijtu}^{S^{ep}} = A_{ijkl}^{S^{-1}} C_{klrs}^{\bar{S}^{ep}} A_{rstu}^E \quad (5.3.9)$$

Todas as deduções feitas no espaço fictício isótropo aplicam-se de maneira idêntica ao modelo para grandes deformações proposto por Garino[41]. Convindo recordar que também se recupera o conceito da aditividade do tensor de deformações de Almansi e, além disso, a regra de fluxo na configuração deformada obtém-se efetuando o cálculo do "push-forward" elástico sobre a regra de fluxo na configuração de referência. Admitindo a existência dos tensores de mapeamento \mathbf{a}^S e \mathbf{a}^E na configuração deformada, passa-se à dedução de uma expressão que seja capaz de determiná-los.

5.4 Tensores de mapeamento em grandes deformações

Ainda que o modelo constitutivo utilizado já esteja formulado para problemas com grandes deformações elasto-plásticas, é necessário transformar os tensores de mapeamento \mathbf{A}^S e \mathbf{A}^E obtidos anteriormente, uma vez que estes foram definidos para a configuração material. Para representar estes tensores numa configuração espacial, implementou-se no programa a operação tensorial designada por "push-forward" elástico e denotada por ϕ^e ... Neste caso trata-se de transformação de tensores de quarta ordem e por isso empregou-se dois asteriscos para denotar essa transformação:

$$\mathbf{a}^S = \phi_{**}^e \mathbf{A}^S \quad e \quad \mathbf{a}^E = \phi_{**}^e \mathbf{A}^E \quad (5.4.1)$$

Para a dedução das expressões explícitas para as transformações acima, parte-se das relações entre tensões e deformações nos espaços real e fictício dadas pelas equações 5.2.5 e 5.2.7. No espaço fictício isótropo aplicam-se ainda as seguintes transformações:

$$\bar{S}_{IJ} = F_{Ii}^{-1} F_{Jj}^{-1} \bar{\tau}_{ij} \tag{5.4.2}$$

$$\bar{E}_{IJ} = F_{Ii} F_{Jj} \bar{e}_{ij} \tag{5.4.3}$$

$$C_{IJKL}^{\bar{s}} = F_{Ii}^{-1} F_{Jj}^{-1} F_{Kk}^{-1} F_{Ll}^{-1} c_{ijkl}^{\bar{s}} \tag{5.4.4}$$

onde $C^{\bar{s}}$ e $c^{\bar{s}}$ designam respectivamente os tensores constitutivos tangentes no espaço fictício isótropo para as configurações material e deformada.

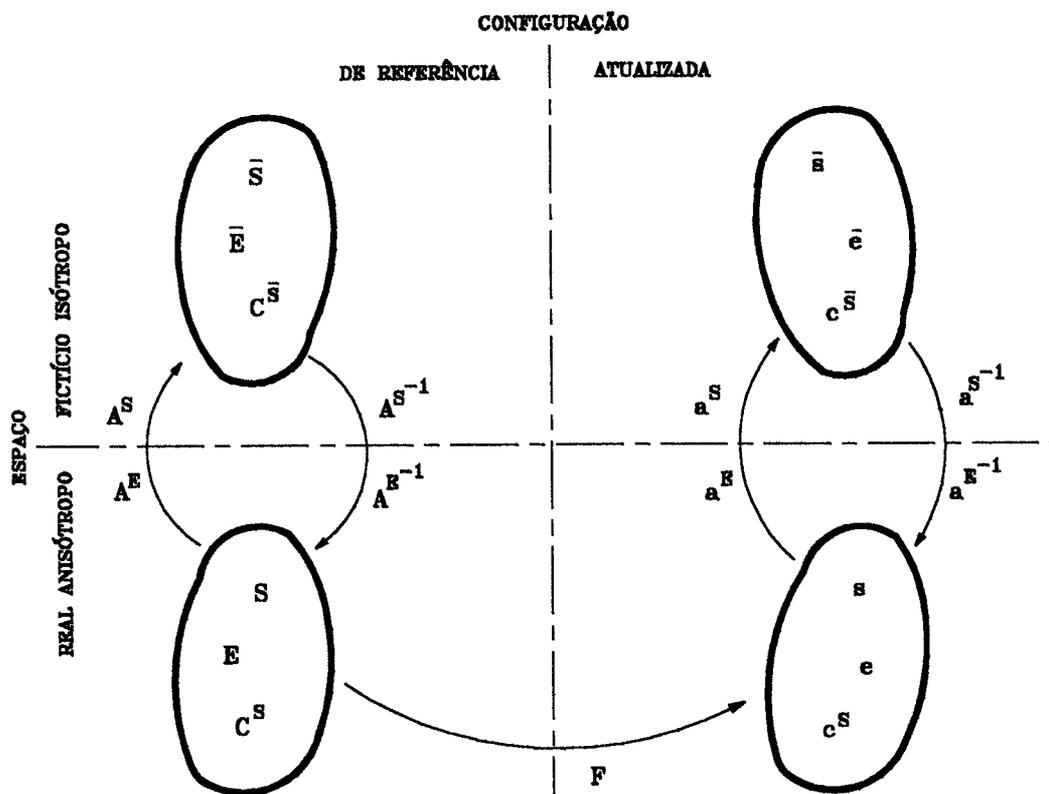


Fig. 5.03- Correspondências entre configurações e espaços.

A figura 5.03 ilustra a correspondência entre as configurações de referência e atualizada (ou deformada) e entre os espaços real anisótropo e fictício isótropo.

Admitindo-se a hipótese da incompressibilidade plástica, a utilização da forma linear do modelo de Murnaghan [41] segundo a equação 3.6.26 na redação da expressão do potencial ψ e a fórmula de Doyle-Ericksen (ver equação 3.6.27 no capítulo 2) deduz-se o tensor de tensões de Kirchhoff τ . Na etapa de previsão elástica é possível deduzir o tensor de tensões de Kirchhoff, no espaço mapeado $\bar{\tau}$ e no espaço real τ ; além disso, para este último admite-se também o cálculo do "pull-back" elástico a fim de obter-se o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff $S = \phi^* \tau$ no espaço real. Pode-se com isso determinar a partir da expressão 5.4.2 na formá indicial, uma relação entre os tensores de mapeamento de tensões na configuração de referência A^S e deformada a^S em função dos gradientes de deformação da seguinte forma:

$$\bar{S}_{ij} S_{rs}^{-1} = (F_{ii}^{-1} F_{jj}^{-1} \bar{\tau}_{ij}) S_{rs}^{-1} = F_{ii}^{-1} F_{jj}^{-1} (\bar{\tau}_{ij} \tau_{rs}^{-1}) F_{rR} F_{sS} \tag{5.4.5}$$

Ao isolar-se o termo A^S na expressão 5.2.5 obtém-se o produto $\bar{S}S^{-1}$ mais a esquerda na equação acima. O termo entre parentesis mais a direita na expressão 5.4.5 pode ser interpretado, por ter construção semelhante a do tensor A^S , como sendo o equivalente tensor de mapeamento de tensões na configuração deformada a^S , de modo que se estabelece a relação procurada em notação indicial da seguinte forma:

$$A_{IJKL}^S = F_{Ii}^{-1} F_{Jj}^{-1} a_{ijkl}^S F_{kK} F_{lL} \tag{5.4.6}$$

A operação inversa em notação indicial fornece:

$$a_{ijkl}^S = F_{iI} F_{jJ} A_{IJKL}^S F_{kK}^{-1} F_{lL}^{-1} \tag{5.4.7}$$

Substituindo-se na expressão 5.2.8 os tensores constitutivos tangentes materiais pelos seus equivalentes espaciais, calculados fazendo-se a inversão da expressão 5.4.4, conforme Garino[41], e substituindo-se o tensor de mapeamento A^S , dado pela expressão 5.4.6, operando-se com os índices convenientemente, pode-se escrever que:

$$A_{RSMN}^E = C_{RSIK}^{\bar{S}^{-1}} A_{IJKL}^S C_{JLMN}^S = F_{Rr} F_{Ss} (c_{rsij}^{\bar{S}^{-1}} a_{ijkl}^S c_{klmn}^S) F_{mM}^{-1} F_{nN}^{-1} \quad (5.4.8)$$

O termo entre parentesis é por construção semelhante ao tensor de mapeamento das deformações na configuração de referência, portanto pode ser denominado como tensor de mapeamento de deformações na configuração deformada a^E . Então:

$$A_{IJKL}^E = F_{iI} F_{jJ} a_{ijkl}^E F_{kK}^{-1} F_{lL}^{-1} \quad (5.4.9)$$

Invertendo-se a expressão acima chega-se finalmente a expressão de a^E :

$$a_{ijkl}^E = F_{iI}^{-1} F_{jJ}^{-1} A_{IJKL}^E F_{kK} F_{lL} \quad (5.4.10)$$

No programa implementaram-se as expressões 5.4.7 e 5.4.10 além da expressão 5.4.4. Na seção seguinte, por meio de um exemplo simples demonstra-se como a resposta em tensões na configuração deformada afasta-se daquela obtida transportando o tensor constitutivo tangente para essa configuração e calculando diretamente o tensor de tensões de Kirchhoff.

5.5 Verificação numérica da transformação em grandes deformações

Para esta verificação considera-se um material anisótropo hipotético com as seguintes propriedades constitutivas e mecânicas:

Módulo de Elasticidade : $E_x = E_z = 2000.0 \text{ tf/cm}^2$ e $E_y = 1000.0 \text{ tf/cm}^2$

Coefficiente de Poisson : $\nu_{xy} = \nu_{zx} = 0.30$ e $\nu_{yz} = 0.075$

Tensões de escoamento: $\sigma_x = \sigma_z = 2.0 \text{ tf/cm}^2$ e $\sigma_y = 1.0 \text{ tf/cm}^2$

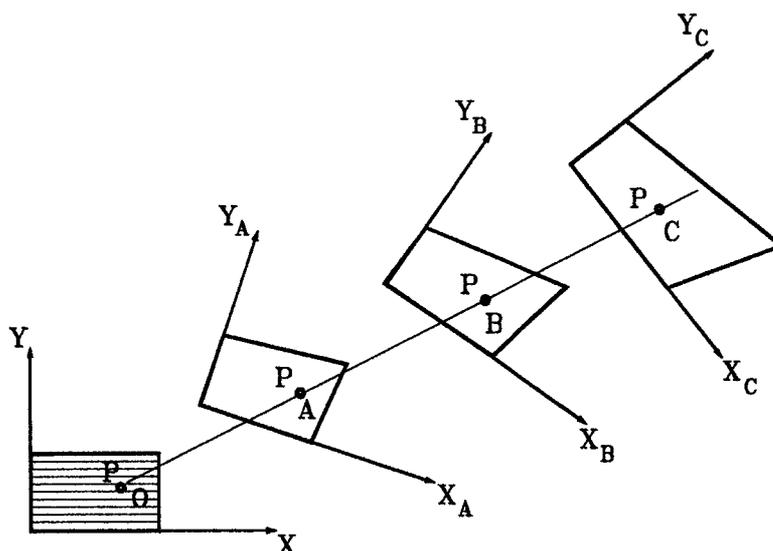


Fig. 5.04- Etapas de deslocamento do ponto P do sólido.

O sólido isótropo fictício é construído a partir do sólido anisótropo considerando-se as seguintes propriedades:

Módulo de Elasticidade : $E = 2000.0 \text{ tf/cm}^2$

Coefficiente de Poisson : $\nu = 0.30$

Tensões de escoamento: $\sigma = 2.0 \text{ tf/cm}^2$

Calculam-se os tensores constitutivos tangentes na configuração material da maneira clássica [42][50][58], em seguida determinam-se os tensores de mapeamento A^S e A^E de acordo com as expressões 5.2.6 e 5.2.8. Admitindo-se que os eixos principais de anisotropia do sólido coincidem inicialmente com os eixos x , y e z , conforme indica a área hachurada na figura 5.04, considera-se que um dado ponto P desse sólido desloca-se de acordo com a reta que passa pelos pontos O , A , B e C assinalados.

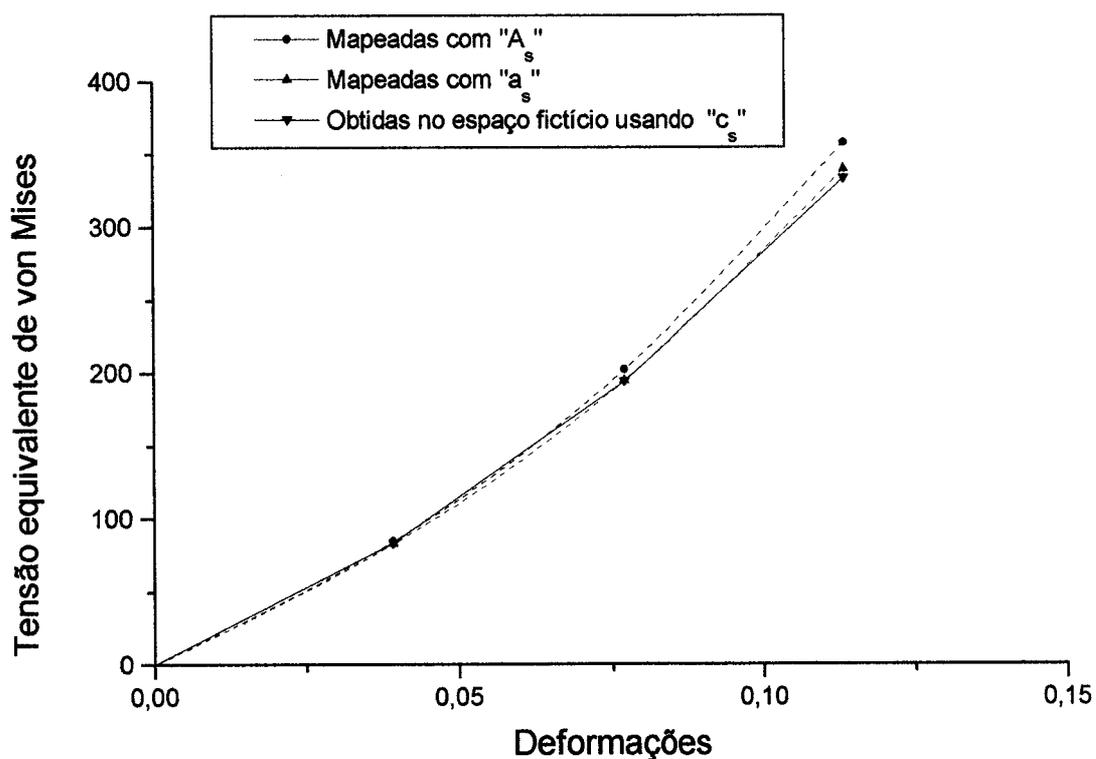


Fig. 5.05-

Gráfico das tensões mapeadas pelos tensores A^S e a^S , contra a deformação em relação ao eixo X original.

Determinam-se os gradientes de deformação considerando-se em cada ensaio numérico apenas um passo, ou seja, primeiro o gradiente de deformações correspondente ao deslocamento do ponto **P** de **O** até **A**, em seguida de **O** até **B** e finalmente de **O** até **C**. Calculam-se em seguida os tensores de deformação correspondentes à configuração de referência e a cada uma das três configurações deformadas assinaladas na figura 5.04.

Sempre considerando-se o regime elástico-linear por simplicidade, para cada um dos três casos de deformação, calcula-se o tensor de tensões de Kirchhoff no espaço real correspondente. Nesta situação faz-se o mapeamento do campo de tensões obtido utilizando-se em primeiro lugar o tensor A^S da configuração de referência. Em seguida faz-se o cálculo do novo tensor de mapeamento para a configuração deformada a^S de acordo com a expressão 5.4.7 e com ele determina-se novo campo de tensões no espaço fictício. Por último determina-se o campo de tensões fictício transportando-se diretamente o tensor constitutivo isótropo C^S para a configuração deformada e operando-se com ele sobre o campo de deformações nessa configuração. Os resultados em termos da tensão equivalente de von Mises são os mostrados no gráfico da figura 5.05.

A figura 5.05 mostra que ao usar o tensor de mapeamento A^S , da configuração de referência, ocorre um desvio maior da resposta em relação àquela obtida atualizando-se o tensor de mapeamento, ou seja, utilizando-se a^S ; vê-se claramente que esta última aproxima-se mais do resultado alcançado atualizando-se o próprio tensor constitutivo C^S . Ao tratar-se de um problema envolvendo um material real, as três respostas estariam afetadas pela qualidade das propriedades constitutivas e mecânicas utilizadas ao calcular o tensor constitutivo anisótropo, e principalmente da quantidade de parâmetros utilizados na determinação dos tensores de mapeamento.

A figura 5.06 mostra quão maior é o erro que se comete ao se determinar o campo de tensões sem atualizar o tensor de mapeamento, à medida que se aumenta o deslocamento imposto ao ponto **P**. Neste caso, a previsão elástica afasta-se cada vez mais daquilo que seria correto, a consequência disso numa análise elasto-plástica verificar-se-ia na determinação das tensões corrigidas: o erro seria tão maior quanto menor fosse o parâmetro de endurecimento para um material que manifestasse, por exemplo, endurecimento linear.

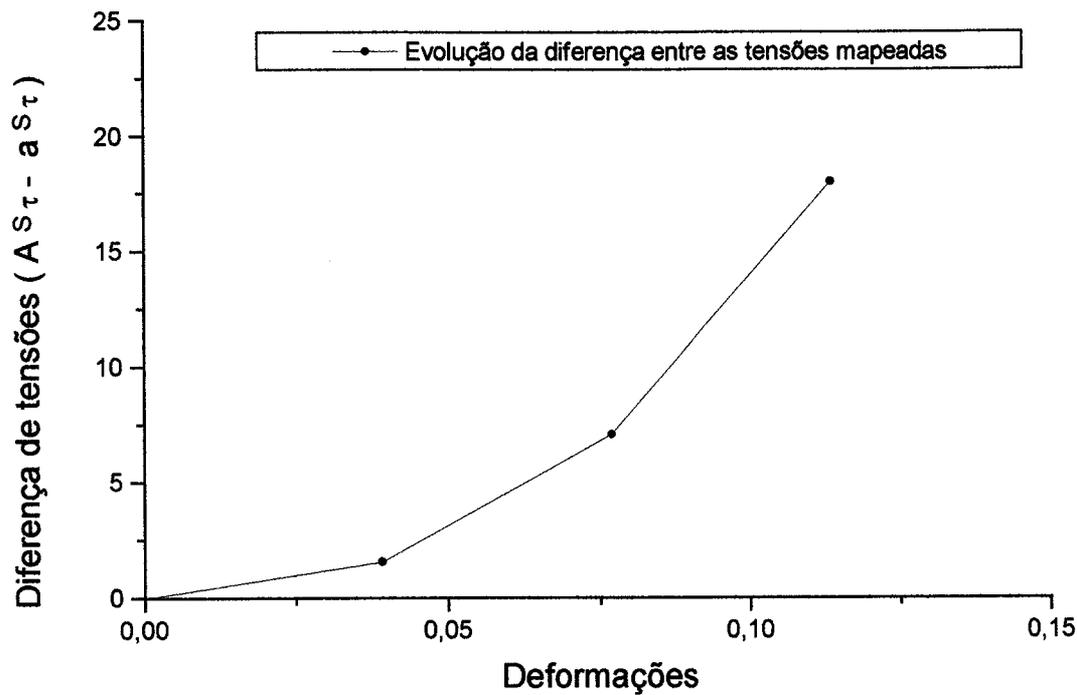


Fig. 5.06- Diferença entre as tensões mapeadas nos pontos A, B e C do sólido correspondentes aos três ensaios numéricos realizados.

Muito embora nos casos práticos propostos nesta tese tenham sido verificadas apenas pequenas diferenças, como se mostra em exemplo do capítulo 7, esta é uma implementação que visa tornar coerente o modelo de anisotropia por tensores de mapeamento desenvolvido por Betten[7][20] e Oller[2], dentre outros, com o modelo de grandes deformações proposto por Garino[41]. Seguramente em programas onde o passo de tempo para a análise não esteja obrigado a ser suficientemente pequeno por força do método de integração da equação constitutiva utilizado, diferenças significativas deverão ser verificadas.

A implementação do modelo de anisotropia mapeada para grandes deformações, também em um algoritmo para o qual a estabilidade numérica seja incondicional, é seguramente um desenvolvimento interessante a ser realizado não estando incluído no escopo desta tese.

CAPÍTULO 6

6. IMPLEMENTAÇÃO EM CÓDIGO DE CÁLCULO EXPLÍCITO

6.1 Generalidades

A implementação computacional dos temas até aqui abordados foi feita em um código explícito aplicável a problemas envolvendo grandes deformações elasto-plásticas. A análise elasto-plástica baseia-se na decomposição multiplicativa do tensor gradiente das deformações \mathbf{F} e admite a existência de um potencial hiperelástico e a aplicação do critério de fluência de von Mises. A integração do modelo constitutivo proposto [19] [32] [41] faz-se por meio de um algoritmo do tipo previsão elástica correção plástica, sendo que a superposição das soluções em separado dos problemas elástico e plástico fornece a solução para o modelo original.

Por outro lado, a teoria de misturas foi implementada como um gerenciador das respostas constitutivas dos diversos materiais possíveis tendo em conta apenas arranjos em paralelo [64]. A generalização proposta por Oller[78] não foi implementada, desta forma não se altera estruturalmente o modelo constitutivo proposto em Garino[41].

Observa-se que a inserção no código da consideração de anisotropia utilizando o conceito de tensor de mapeamento conforme a proposta contida no capítulo 5 [2] [7] [64], não se vê prejudicada pela simplificação feita na dedução da regra de fluxo do modelo pelas razões mencionadas no capítulo 2.

O aspecto original da implementação mencionada no item 5.6 do capítulo 5 consiste na transformação dos tensores de mapeamento \mathbf{A}_s e \mathbf{A}_E , originalmente na configuração material, para a configuração deformada. Para isso implementou-se uma rotina que calcula o "push-forward" de tensores de quarta-ordem de modo a obter os correspondentes tensores \mathbf{a}_s e \mathbf{a}_E da configuração deformada.

Finalmente, para a consideração da não linearidade geométrica utiliza-se uma formulação lagrangiana atualizada. Os elementos finitos utilizados são os descritos no capítulo 1 desta tese, observando-se que para evitar o bloqueio numérico da solução utiliza-se um esquema de integração com 2X2 pontos de Gauss no caso dos sólidos bi-dimensionais e 2X2X2 para os sólidos tri-dimensionais [59] [65].

6.2 Algoritmo de Previsão e Correção

Os algoritmos do tipo previsão elástica e correção plástica constituem-se em técnicas eficientes para integrar as equações constitutivas do modelo hiperelástico [41] [43] [47]. Sua implementação é feita considerando-se uma configuração deformada conhecida ${}^t\Omega$ à qual se superpõe um movimento espacial definido pelo incremento de deslocamentos \mathbf{u} de modo a obter-se uma nova configuração ${}^{t+\Delta t}\Omega$.

$$\Delta \mathbf{u}: {}^t\Omega \rightarrow {}^{t+\Delta t}\Omega$$

A solução do problema consiste em calcular no instante $t+\Delta t$ as variáveis de estado, representadas pelo tensor de Finger \mathbf{b}^{e-1} e as variáveis internas, neste caso a deformação plástica efetiva \mathbf{e}^p , conhecidos seus valores no instante t . Observa-se que em presença de grandes

deformações plásticas utiliza-se a decomposição multiplicativa do tensor gradiente das deformações $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$, sendo os tensores gradiente de deformação elástico dado por \mathbf{F}^e e plástico dado por \mathbf{F}^p . Como vimos, o tensor gradiente de velocidades \mathbf{L} decompõe-se em componentes elástica e plástica. Desta última, depois de se fazer a restrição relativa à isotropia ($\bar{\mathbf{W}}^p$ nulo), deriva-se a regra de fluxo $\bar{\mathbf{D}}^p = \mathbf{L}^p$ na configuração intermediária e, finalmente, através do cálculo do "push-forward" elástico obtém-se a regra de fluxo na configuração deformada \mathbf{d}^p . Na integração do modelo constitutivo, deve ser satisfeita a aditividade do tensor taxa de deformações \mathbf{d} também na configuração deformada, de modo que:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{d} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{d}^e + {}^{t+\Delta t}\mathbf{d}^p \quad (6.2.1)$$

com:

$$\mathbf{d}^p = \mathbf{L}_v(e^p) = \dot{\gamma} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (6.2.2)$$

e

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\gamma} H \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (6.2.3)$$

onde $\dot{\gamma}$ é o multiplicador plástico e \mathbf{g} é o potencial plástico em termos do tensor de tensões de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$.

Na etapa de previsão elástica supõe-se que o gradiente de deformações plásticas \mathbf{F}^p permanece constante e que as variáveis internas não se alteram. Assim, conhecido o incremento de deslocamentos \mathbf{u} entre os instantes \mathbf{t} , configuração de referência atualizada dada pelas

coordenadas ${}^t\mathbf{X}$, e $t+\Delta t$, configuração atual, calcula-se o gradiente incremental $\Delta\mathbf{f}$, de modo que pode-se escrever o seguinte:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{pr} = \Delta\mathbf{f} \cdot {}^t\mathbf{F} \quad (6.2.4)$$

com,

$${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{f} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{x}}{\partial {}^t\mathbf{X}} = \frac{\partial ({}^t\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial {}^t\mathbf{X}} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} \quad (6.2.5)$$

onde $\nabla\mathbf{u}$ é o gradiente de deslocamentos no instante $t+\Delta t$.

Com o gradiente previsto ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{pr}$, determina-se o tensor elástico de deformações de Almansi fazendo ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^e = 0.5 \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{F}^{-t}\mathbf{F}^t)$ e em seguida o tensor elástico das deformações de Finger $\mathbf{b}^{e-1} = \mathbf{F}^{-t}\mathbf{F}^t$. Obtém-se, então, o tensor desviador de Finger, utilizando-se a expressão que o relaciona ao tensor desviador de Almansi, dada por $\text{dev } \mathbf{e} = -0.5 \cdot \text{dev } \mathbf{b}^{e-1}$. Na prática o que se quer é a previsão do tensor elástico de Finger \mathbf{b}^{e-1} em $t+\Delta t$, tomando-se a configuração em t como referência. Com \mathbf{b}^{e-1} em t atualiza-se utilizando o gradiente incremental inverso $\Delta\mathbf{f}^{-1}$ da seguinte forma [41]:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1(pr)} = \Delta\mathbf{f}^{-t} \mathbf{b}^{e-1} \Delta\mathbf{f}^{-1} \quad (6.2.6)$$

No modelo desenvolvido por Garino[41] utiliza-se o critério de fluência de von Mises escrito em função do segundo invariante do tensor desviador de tensões \mathbf{J}_2 (embora este critério seja aplicável a metais, com algum critério ele pode ser empregado para outros tipos de material). Nesse caso, basta que se considere a previsão da parte desviadora do tensor de tensões, dada pela relação seguinte:

$${}^{t+\Delta t}dev \tau = G^{t+\Delta t} dev e^e \quad (6.2.7)$$

onde G é constante dependente dos parâmetros elásticos do material.

No caso de materiais anisótropos, dado que se conhece o tensor de Finger atualizado segundo a equação 6.2.6, pode-se obter o tensor elástico de deformações de Almansi e com ele realizar a previsão do tensor de tensões completo da seguinte forma:

$${}^{t+\Delta t} \tau = C {}^{t+\Delta t} e^e \quad (6.2.8)$$

onde C é o tensor constitutivo anisótropo.

Obtido o estado de tensões τ , bem como o tensor de deformações de Almansi e^e , referem-se a tensões e deformações do espaço real anisótropo. Calculados os tensores A^S e A^E respectivamente tensores de mapeamento de tensões e deformações, fica estabelecida a relação entre as tensões e deformações nos espaços isotropo fictício e anisótropo real. As variáveis do espaço fictício, a partir deste ponto, receberão uma barra superior de modo que:

$$\bar{\tau} = A^S \tau \quad (6.2.9)$$

$$\bar{e}^e = A^E e^e \quad (6.2.10)$$

Na operação de mapeamento encontra-se uma das contribuições desta tese. Observe-se que os tensores de mapeamento A^S e A^E , de quarta ordem, foram calculados no início do processo e referem-se portanto à configuração material. Contudo, à medida que o processo avança a orientação inicial admitida para os eixos principais de anisotropia vai perdendo o sentido. Quando

os gradientes incrementais Δf calculados forem suficientemente pequenos não há diferença em manter estes tensores; do contrário, é necessário efetuar o "push-forward" sobre eles para a configuração deformada. Para calcular o "push-forward" de tensores de quarta ordem, implementou-se uma rotina específica capaz de determinar na configuração deformada os tensores de mapeamento a^S e a^E .

Para diferenciar a transformação destes tensores daquelas feitas com tensores de segunda ordem, utilizam-se dois asteriscos como índice superior à direita na notação de "push-forward". Reescrevem-se os tensores de deformação e de tensão no espaço fictício na configuração deformada da seguinte forma:

$$\bar{\tau} = \phi^{**} A^S \cdot \tau = a^S \cdot \tau \quad (6.2.11)$$

$$\bar{e}^e = \phi^{**} A^E \cdot e^e = a^e \cdot e^e \quad (6.2.12)$$

A separação das partes desviadora e volumétrica do tensor de tensões no espaço fictício isotrópico é feita após o mapeamento do tensor de tensões completo obtido no espaço real, afim de garantir-se a coerência na evolução das partes volumétrica e desviadora durante a integração do modelo constitutivo.

É importante observar que pela aplicação da teoria de interação de substâncias podem coexistir vários modelos constitutivos diferentes no programa. Cada um deles recebe como dados de entrada toda a história do carregamento via variáveis internas armazenadas no último passo de tempo, e o campo de deformações calculado \bar{e}^e ou e^e . Um laço sobre todas as substâncias formadoras do composto permite, mediante a somatória das tensões de resposta produzidas pelos diversos modelos constitutivos ponderada pelas frações volumétricas de cada substância, obter-se o estado de tensões σ_c do sólido multifásico da seguinte forma:

$$\sigma_C = \sum_{k=1}^n \sigma_k V_k \quad (6.2.13)$$

onde σ_k e V_k são respectivamente a tensão e a fração volumétrica da substância k .

Neste ponto retorna-se à marcha do algoritmo proposto por Garino[41]. Internamente cada modelo constitutivo gerará um estado de tensões elásticas de previsão. Se for um estado que viola a superfície de fluência, procede-se à etapa da correção plástica. Nessa etapa, a configuração deformada é considerada fixa e atualizam-se as variáveis internas afim de satisfazer a equação constitutiva. Partindo-se da relação entre a componente plástica do tensor direito de Cauchy-Green e a regra de fluxo d^P na configuração deformada, $\dot{C}^P = 2\phi^* d^P$, mostrada na figura 3.07, e tendo-se em conta a plasticidade associada, que fornece:

$$d^P = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \tau} \quad (6.2.14)$$

discretiza-se por meio de uma diferença o tensor \dot{C}^P , de modo que pode-se escrever o seguinte:

$$\dot{C}^P = {}^{t+\Delta t} \dot{C}^P - {}^t \dot{C}^P = 2\phi^* \left(\dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) \quad (6.2.15)$$

O cálculo do "push-forward" sobre a expressão acima fornece, tendo-se em conta a relação $\phi.C^P = b^{e-1}$ e observando-se que a derivada entre parênteses trata-se, neste caso, da própria normal à superfície de fluência, a expressão para o tensor elástico de Finger b^{e-1} corrigido no instante de tempo $t+\Delta t$ [41]:

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{F}^{-t}\mathbf{F}^{-1}) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1(pr)} + 2\dot{\gamma}^{t+\Delta t}\mathbf{n} \quad (6.2.16)$$

onde γ é o multiplicador plástico obtido utilizando-se o algoritmo de retorno radial [47] e dado, no caso de endurecimento linear por:

$$2\mu\dot{\gamma} = \frac{{}^{t+\Delta t}f^{pr}}{1 + \frac{H}{3\mu}} \quad (6.2.17)$$

na expressão anterior ${}^{t+\Delta t}f^{pr}$ é o valor correspondente à etapa de previsão da função de fluência, H é o parâmetro de endurecimento linear e μ é o parâmetro de rigidez a torção.

No caso de endurecimento não-linear, com função $\sigma_y = a(b + c\dot{\epsilon}^p)^n$, sendo a, b e c constantes conhecidas, o multiplicador $\dot{\gamma}$ se expressa por:

$$\dot{\gamma}^{k+1} = \dot{\gamma}^k - \frac{r(\dot{\gamma})}{r'(\dot{\gamma})} \quad (6.2.18)$$

com:

$$r(\dot{\gamma}) = s^e - 2\mu\dot{\gamma} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y(\dot{\gamma}) \quad (6.2.19)$$

Esta equação resolve-se iterativamente para $\sigma_v(\dot{\gamma})$ pelo método de Newton-Raphson, de modo a anular o resíduo $r(\dot{\gamma})$. Na eq.6.2.18 $r'(\dot{\gamma})$ representa a derivada $dr(\dot{\gamma})/d(\dot{\gamma})$. As condições iniciais para o algoritmo são $\dot{\gamma}^0=0$, ${}^{t+\Delta t} \bar{e}^{p0} = {}^t \bar{e}^p e s^{e0} = \| {}^{t+\Delta t} s^{pr} \|$.

Determinado $\dot{\gamma}$, corrige-se a parte desviadora do tensor de tensões.

$${}^{t+\Delta t} dev \tau = {}^{t+\Delta t} \tau^{pr} - 2\mu \dot{\gamma} {}^{t+\Delta t} n \quad (6.2.20)$$

A parte volumétrica, por sua vez, é atualizada elasticamente usando:

$${}^{t+\Delta t} tr(\tau) = 3K tr(e^e) \quad (6.2.21)$$

No caso de material anisótropo, uma vez recomposto o tensor completo de tensões, deve-se recuperar os tensores de tensão e deformação do espaço real. Para isso fazem-se as operações inversas às dadas pelas equações 6.2.9, 6.2.10, 6.2.11 e 6.2.12.

6.3 Descrição do Algoritmo

O algoritmo explícito implementado para a análise de problemas de transiente dinâmico é descrito no que segue. Considerem-se os instantes de tempo t e $t+\Delta t$ nos quais se conhecem os deslocamentos u^t e $u^{t+\Delta t}$, respectivamente, tomando-se k como um sub-índice que indica uma variável relacionada a uma dada substância que forma o composto e n o número total de substâncias que formam esse composto. Para o instante de tempo t encontram-se armazenados na base de dados os valores do tensor de Finger, das deformações plásticas efetivas acumuladas e da superfície de fluência atualizada, para cada uma das k substâncias do composto. Pode-se, então, resumir o algoritmo da seguinte forma.

1.) Geometria.

a) Cálculo do incremento de deslocamentos \mathbf{u} .

Utilizando-se o método das diferenças centrais, determinam-se para o instante de tempo t , o vetor de velocidades \mathbf{v} , o de deslocamentos \mathbf{u} e o de acelerações nodais \mathbf{a} [59]. Em particular, o de deslocamentos incrementais será dado por.

$$\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u} \quad (6.3.1)$$

b) Cálculo do tensor gradiente de deformações incremental inverso.

$${}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{f}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{x}} \quad (6.3.2)$$

2.) Para cada uma das k substâncias.

a) Atualizar o tensor elástico de Finger.

$$\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{b}^{e-1} \}_k^{(pr)} = \mathbf{f}^{-T} \{ {}^t \mathbf{b}^{e-1} \}_k \mathbf{f}^{-1} \quad (6.3.3)$$

b) Separar as partes volumétrica e desviadora do tensor de Finger.

$$\{ \mathbf{b}_{vol}^{e-1} \}_k^{(pr)} = \frac{1}{3} b_{kk} \delta_{ij} \quad (6.3.4)$$

$$\{b_{dev}^{e^{-1}}\}_k^{(pr)} = \{b^{e^{-1}}\}_k^{(pr)} - \{b_{vol}^{e^{-1}}\}_k^{(pr)} \quad (6.3.5)$$

c) Obter a previsão das tensões desviadoras.

$$\{e_{dev}^e\}_k^{(pr)} = -\frac{1}{2}\{b_{dev}^{e^{-1}}\}_k^{(pr)} \quad (6.3.6)$$

$$\{\tau_{dev}\}_k^{pr} = \frac{E}{(1+\nu)} \{e_{dev}^e\}_k^{pr} \quad (6.3.7)$$

2.1) Em caso de anisotropia, calcular o tensor total de tensões e executar o mapeamento do campo de tensões.

$$\{t+\Delta t \bar{\tau}\}_k^{(pr)} = \{A^S\}_k : \{t+\Delta t \tau\}_k^{(pr)} \quad (6.3.8)$$

2.2) Para grandes deformações com anisotropia, executar a transformação das tensões com o tensor de mapeamento escrito na configuração atualizada ($\{A^S\}_k \Rightarrow {}^{t+\Delta t}\{a^S\}_k$).

$$\{t+\Delta t \bar{\tau}\}_k^{(pr)} = {}^{t+\Delta t}\{a^S\}_k : \{t+\Delta t \tau\}_k^{(pr)} \quad (6.3.9)$$

3.) Separadas a parte volumétrica e desviadora do tensor de tensões, verificar se é violada a superfície de fluência $f=f(\text{dev } \tau)$.

Para esta verificação utiliza-se uma função de previsão ${}^{t+\Delta t}f^{pr}$ escrita em função do segundo invariante do tensor de tensões J_2 e da tensão de referência σ_r correspondente a superfície de fluência atual da seguinte forma.

$${}^{t+\Delta t}f^{-1} = \sqrt{2J_2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma}_r \quad (6.3.10)$$

Nesta expressão, $(2J_2)^{1/2}$ é o raio do cilindro que representa o critério de von Mises no espaço.

3.1) Caso $f^{pr} \leq 0$, avançar para o passo 4.

3.2) Caso $f^{pr} > 0$, determinar o fator multiplicador plástico $\dot{\gamma}$.

a) No caso de endurecimento linear, introduz-se diretamente o resultado da aplicação do algoritmo de retorno radial que fornece.

$$2\mu\gamma = \frac{{}^{t+\Delta t}f^{pr}}{1 + \frac{H}{3\mu}} \quad (6.3.11)$$

b) No caso de endurecimento não linear com função $\sigma_r = a(b + c\bar{\epsilon}^p)^n$, e constantes a, b e c dadas, o multiplicador γ é obtido por meio de um processo iterativo e se expressa por.

$$\gamma^{k+1} = \gamma^k - \frac{r(\gamma)}{r'(\gamma)} \quad (6.3.12)$$

c) Obter as tensões desviadoras corrigidas e o novo tensor desviador de Finger..

$$\{^{t+\Delta t} dev \bar{\tau}\}_k = (1-\gamma) \cdot \{^{t+\Delta t} dev \bar{\tau}\}_k^{(pr)} \quad (6.3.13)$$

$$\{^{t+\Delta t} dev \bar{b}^{e^{-1}}\}_k = -\frac{(1+\nu)}{E} \cdot \{^{t+\Delta t} dev \bar{\tau}\}_k \quad (6.3.14)$$

4.) Compor o novo tensor de tensões já corrigido se for o caso e o tensor de deformações de Finger.

$$\{^{t+\Delta t} \bar{\tau}\}_k = \{^{t+\Delta t} vol \bar{\tau}\}_k + \{^{t+\Delta t} dev \bar{\tau}\}_k \quad (6.3.15)$$

$$\{^{t+\Delta t} \bar{b}^{e^{-1}}\}_k = \{^{t+\Delta t} vol \bar{b}^{e^{-1}}\}_k + \{^{t+\Delta t} dev \bar{b}^{e^{-1}}\}_k \quad (6.3.16)$$

4.1) Em presença de anisotropia sem ou com grandes deformações, faz-se o mapeamento inverso do tensor de tensões utilizando respectivamente.

$$\{^{t+\Delta t} \tau\}_k = \{A^S\}_k^{-1} : \{^{t+\Delta t} \bar{\tau}\}_k \quad (6.3.17)$$

ou,

$$\{^{t+\Delta t} \tau\}_k = \{a^S\}_k^{-1} : \{^{t+\Delta t} \bar{\tau}\}_k \quad (6.3.18)$$

4.2) Altera-se a parte desviadora do tensor de Finger fazendo.

$$\{t+\Delta t \mathbf{e}\}_k = [\mathbf{C}]^{-1} : \{t+\Delta t \boldsymbol{\tau}\}_k \quad (6.3.19)$$

e em seguida,

$$\{t+\Delta t \mathit{dev} \mathbf{e}\}_k = \{t+\Delta t \mathbf{e}\}_k - \{t+\Delta t \mathit{vol} \mathbf{e}\}_k = -\{0.5 \mathit{dev} \mathbf{b}^e\}^{-1}_k \quad (6.3.20)$$

Utilizando-se a relação entre os tensores desviadores de Almansi e de Finger acima, obtém-se novo tensor desviador de Finger que composto com a parte volumétrica armazenada na base de dados fornece o tensor de Finger completo, agora já se tendo em conta a anisotropia.

5.) Considera-se a próxima substância incrementando \mathbf{k} e voltando ao passo 2 enquanto \mathbf{k} for menor que o total de substâncias do composto.

6.) Calcula-se a tensão no composto a partir da proporção em volume das \mathbf{k} fases.

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\sigma}_k V_k \quad (6.3.21)$$

7.) Obtenção das forças internas.

$$\mathbf{f}^i = \int_{\Omega} \mathbf{B} \boldsymbol{\sigma}_C \, d\Omega \quad (6.3.22)$$

8.) Incrementos dos deslocamentos, velocidades e acelerações. Próximo passo de tempo. Volta ao passo 1 item a).

6.4 Descrição das subrotinas principais

O programa Stampack[59] está composto por um corpo principal de subrotinas que se aplicam a todos os elementos finitos disponíveis no programa e que já foi descrito no capítulo 2 desta tese. A figura 6.01 ilustra em particular o bloco de controle para o elemento 2D.

O grupo de rotinas descrito na sequência compreende tudo o que se refere às etapas de leitura dos dados de geometria do modelo especificamente relativos a malha de elementos específicos utilizados em determinado problema (elementos sólidos 2D ou 3D). Os dados de materiais encontram-se também nesta parte juntamente com a leitura dos parâmetros necessários para o processamento de cada tipo de elemento existente na malha.

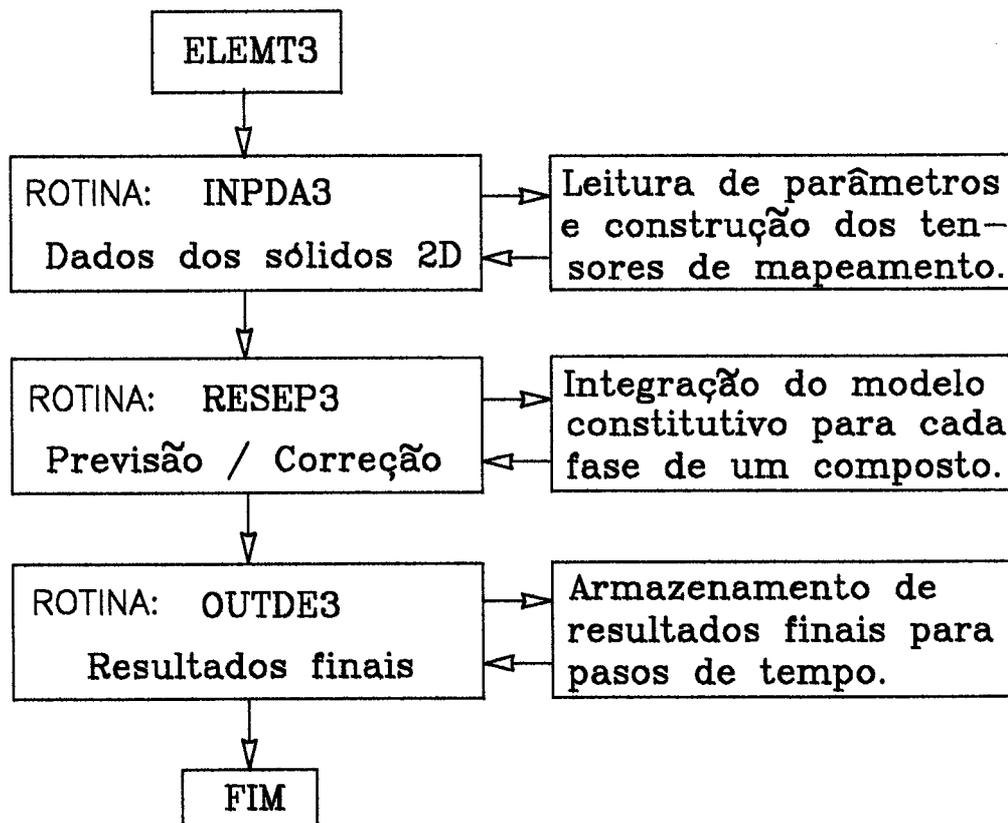


Fig. 6.01- Diagrama de blocos para a etapa do elemento finito 2D.

As rotinas principais contidas neste bloco consistem nas etapas de previsão elástica e correção plástica além obviamente daquelas que constroem os tensores de mapeamento para anisotropia e fazem a transformação para grandes deformações. O laço sobre as substâncias que formam um composto está implícito na ilustração do fluxograma mostrado na figura 6.02.

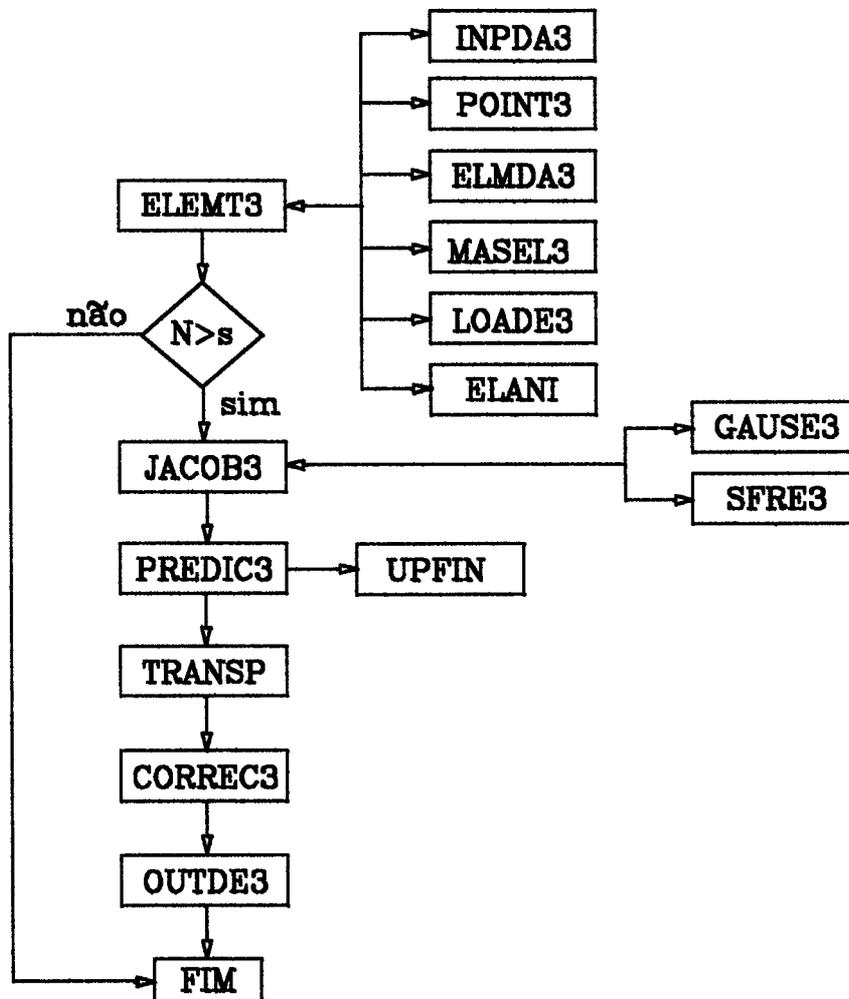


Fig. 6.02- Fluxograma da rotina RESEP3 para a integração da equação constitutiva das s substâncias incluindo anisotropia mapeada.

A descrição de rotinas que se segue, refere-se ao elemento sólido bi-dimensional. O conjunto de rotinas referentes aos elementos sólidos tri-dimensionais é análogo, possui as mesmas rotinas porém com as modificações adequadas, de modo que limitou-se a apresentação apenas das que se referem ao elemento 2D.

BMATX3	Calcula a matriz B .
CORECN3	Cálculo do multiplicador plástico mediante um algoritmo de retorno radial para forçar o fluxo desviador das tensões de von Mises com endurecimento constante e isótropo a ficar sobre a superfície de fluência.
CORREC3	Força as tensões a ficarem sobre a superfície de fluência mediante um algoritmo de retorno mapeado para um fluxo de von Mises com endurecimento não-linear isótropo.
ELEMT3	Subrotina principal para o elemento tipo 3.
ELMDA3	Lê os dados elementares.
GAUSE3	Calcula os parâmetros de Gauss.
INISTR	Inicializa as variáveis internas.
INPDA3	Lê os dados de controle e aloca os vetores elementais, lê os dados dos elementos.
JACOB3	Calcula a matriz jacobiana assim como as derivadas das funções de interpolação.
LOADE3	Lê os dados elementais de carga e gera o vetor consistente de carga.
LUMAE3	Calcula a matriz de massa concentrada.
MASEL3	Escreve durante um reinício os dados elementais.
OUTDE3	Escreve os resultados elementais.
POINT3	Aloca memória para os arquivos elementais.
PREDIC3	Calcula as tensões de previsão elásticas e as deformações supondo também comportamento elástico-linear.
REL003	Aloca espaço de memória para armazenar os valores das variáveis COMMON.
RESEP3	Calcula as tensões e forças internas.

SFRE3	Calcula as funções de forma e suas derivadas.
UPFIN	Atualiza o tensor elástico de Finger.

As subrotinas seguintes são aplicadas tanto aos sólidos bi-dimensionais quanto aos tri-dimensionais e referem-se à anisotropia por tensores de mapeamento e a integração da equação constitutiva por substâncias independentes formadoras de um composto. São elas:

ELANI	Lê os dados de um material anisótropo e constroe com esses dados os tensores constitutivos anisótropo e isótropo equivalente. Monta os tensores de mapeamento.
TRANSP	Transporta os tensores de tensões e deformações para o espaço mapeado e vice-versa. Se desejado atualiza para a configuração deformada os tensores de mapeamento.

CAPÍTULO 7

7. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

7.1 Introdução

Para demonstrar a variedade de aplicações possíveis com as ferramentas desenvolvidas, elaborou-se um conjunto de exemplos que cobre os temas tratados neste trabalho.

Em primeiro lugar, apresenta-se um exemplo clássico encontrado na literatura que consiste de uma viga em balanço submetida a um campo de deslocamentos controlado. Objetiva-se aferir a resposta no que diz respeito às grandes deformações elasto-plásticas. Para este exemplo existem resultados de outros programas tabulados por Garino [41], dos quais resumimos aqui os mais importantes.

Na sequência, procede-se ao processamento de uma cúpula esférica, considerando-se um regime de pequenas deformações, discretizada por elementos com simetria axial e submetida a uma carga impulsiva. Comparam-se os resultados para os casos de comportamento elástico, elasto-plástico e elasto-plástico com anisotropia.

Para demonstrar a aplicação do conceito de anisotropia mapeada, executou-se o processamento de uma barra modelada por 40 elementos sólidos hexaédricos de 8 nós, à qual se impõem deslocamentos crescentes nas suas extremidades. Para exemplificar o uso da teoria de misturas e o tratamento da anisotropia, considera-se a mesma barra constituída por diferentes materiais multifásicos.

Consideram-se, então, as seguintes situações: Material formado por substâncias dúcteis porém isotropas, o que é equivalente a uma liga metálica usual. Em seguida a mesma barra é considerada de material formado por uma matriz dúctil e fibras longas, característica comum a compostos empregados em diversos processos industriais. Por último, considera-se o caso em que a uma matriz frágil se adicionam fibras curtas, as quais atribuem à matriz um significativo aumento na sua tensão limite de ruptura à tração. Este caso aplica-se ao concreto reforçado por fibras curtas.

Por último, apresentam-se exemplos de aplicações tecnológicas no campo de conformação de metais. Nos casos escolhidos considera-se o comportamento anisótropo para fins de comparação com resultados disponíveis na literatura, e com resultados de análise com isotropia e resposta elasto-plástica.

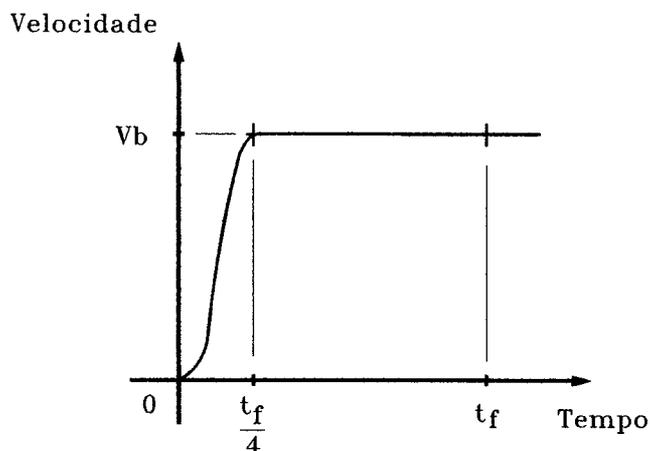


Fig. 7.01- Função velocidade x tempo para imposição de deslocamentos.

É necessário ressaltar que nos exemplos onde impõem-se deslocamentos em pontos do modelo a ser analisado, foi utilizada uma função de variação da velocidade no tempo dada por (ver Fig. 7.01) $v = 0.5b_0(1 - \cos \omega t)$ no intervalo compreendido entre $t=0$ e $t=t_f/4$ com t_f sendo o tempo final de análise, e $v=b_0$ para $t_f/4 < t \leq t_f$. Outras funções de velocidade no tempo estão disponíveis, porém para facilitar a compreensão dos resultados, utilizou-se apenas esta ao longo deste trabalho.

7.2 Exemplos de validação

Os exemplos reunidos nos próximos sub-ítemos demonstram de maneira simples o comportamento do programa ao tratar de grandes deformações e considerando-se os efeitos da anisotropia..

A figura 7.02 mostra a distribuição de pontos de Gauss interna aos elementos planos utilizados e também a orientação das tensões radial, tangencial e circunferencial para os casos com simetria de revolução. Os elementos planos com simetria de revolução são utilizados nos exemplos de conformação e no exemplo da cúpula esférica.

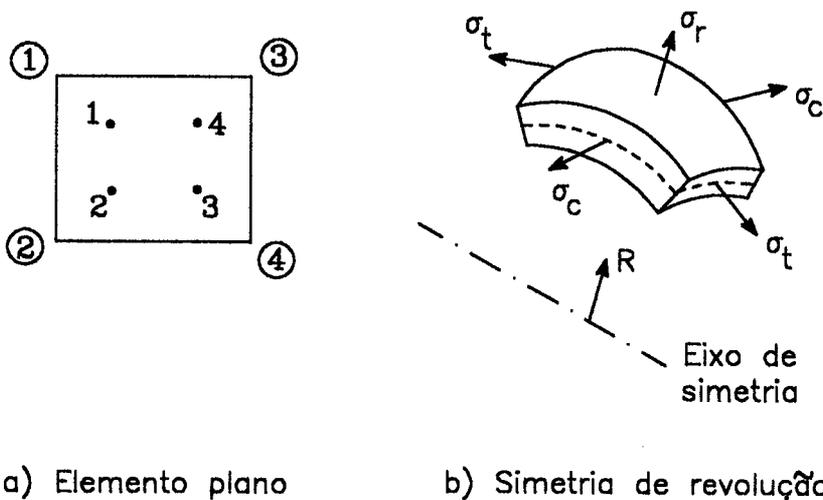


Fig. 7.02- Localização dos pontos de Gauss em um elemento plano e orientação das tensões em elemento com simetria de revolução.

7.2.1 Viga em balanço

Utilizam-se 48 elementos sólidos de 4 nós, num estado de deformação plana, para discretizar uma viga em balanço (Fig. 7.03) submetida a imposição de um deslocamento crescente, em sua extremidade livre, variando de zero até o equivalente a altura da própria viga. Resultados para este modelo produzidos por diversos grupos de pesquisa são tabulados por Garino[41] o qual, por sua vez, para obter seus resultados empregou elementos isoparamétricos de 8 nós e os mesmos elementos lineares de 4 nós utilizados neste trabalho. Os dados de geometria estão ilustrados na figura 7.03 e os resultados obtidos neste trabalho encontram-se na tabela 7.01 juntamente com os resultados obtidos por Garino[41] e por outros autores.

Dados do material:

$$E = 20000.0 \text{ daN} \quad \sigma_y = 40.0 \text{ daN} \quad H = 100.0 \text{ daN} \quad \nu = 0.3$$

Deslocamento imposto ao nó superior direito, $u = 0.0 \text{ mm} \rightarrow u = 1.0 \text{ mm}$; $L = 3 \text{ mm}$ e $l = 1 \text{ mm}$

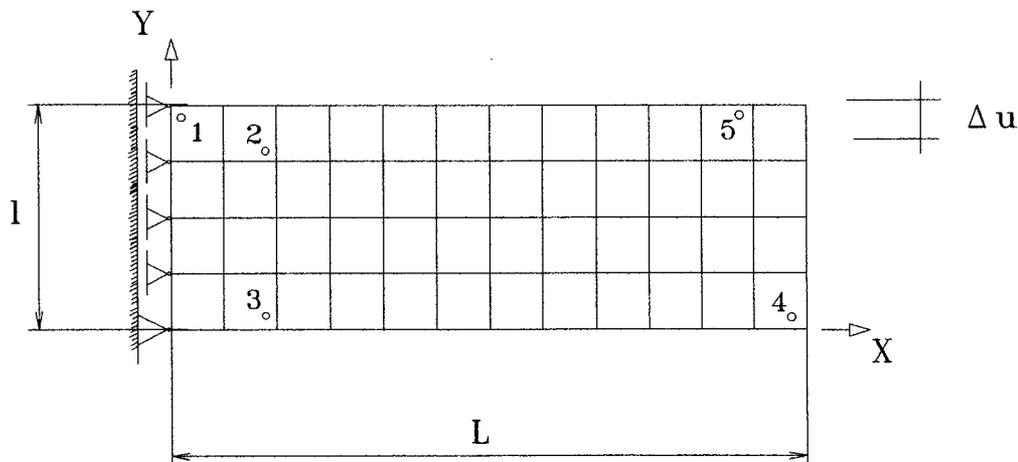


Fig. 7.03- Viga em balanço com deslocamento imposto a extremidade livre.

Tab. 7.01 - Resultados para os pontos de Gauss assinalados.

Pt. Gauss	Código	σ_x	σ_y	σ_z	σ_{xy}	e_p
1	Garino	68.58	-3.66	32.66	5.80	0.2337
	Ponhot	68.93	-3.72	32.66	5.78	0.2372
	Dubois	68.67	-3.71	32.69	5.82	0.2349
	Esta tese	68.63	-3.72	32.64	5.81	0.2346
2	Garino	60.33	-0.06	30.69	11.61	0.1650
	Ponhot	60.49	-0.01	30.74	11.71	0.1619
	Dubois	60.34	-0.03	30.67	11.64	0.1604
	Esta tese	60.28	-0.08	30.66	11.61	0.1601
3	Garino	-66.28	-0.77	-25.97	-16.71	0.2399
	Ponhot	-65.92	-1.04	-25.78	-16.71	0.2367
	Dubois	-66.22	-0.70	-25.90	-16.54	0.2401
	Esta tese	-66.16	-0.58	-25.85	-16.47	0.2401
4	Garino	-4.49	-1.33	-1.01	1.75	0.0000
	Ponhot	-4.42	-1.31	-1.03	1.75	0.0000
	Dubois	-4.48	-1.34	-1.02	1.76	0.0000
	Esta tese	-4.47	-1.33	-1.03	1.76	0.0000
5	Garino	27.83	4.67	-2.55	-9.43	0.0492
	Ponhot	28.78	3.13	-2.72	-8.61	0.0482
	Dubois	28.18	4.32	-2.55	-9.27	0.0486
	Esta tese	28.40	3.95	-2.57	-9.04	0.0486

Os resultados tabulados por Garino[41] nos pontos de Gauss assinalados na figura 7.03, considerando-se as redes de elementos lineares de 4 nós, são transcritos na tabela 7.01 (a integração numérica foi realizada com 4 pontos de Gauss por elemento). Observa-se, pelos resultados, que há uma boa concordância entre eles. A deformada obtida neste trabalho ilustrada na figura 7.04 é semelhante àquela obtida por Garino[41].

Os pontos de Gauss assinalados na barra apresentam as seguintes situações: O ponto 1 sofre grandes deformações e pequenas rotações, os pontos 2 e 3 apresentam grandes deformações e rotações moderadas, no ponto 4 se observam grandes rotações e pequenas deformações e finalmente no ponto 5 ocorrem grandes deformações e rotações.

Este teste, segundo Garino[41], foi proposto a vários centros de pesquisa e os resultados obtidos permitem aferir a validade dos diversos modelos desenvolvidos para tratar problemas em grandes deformações.

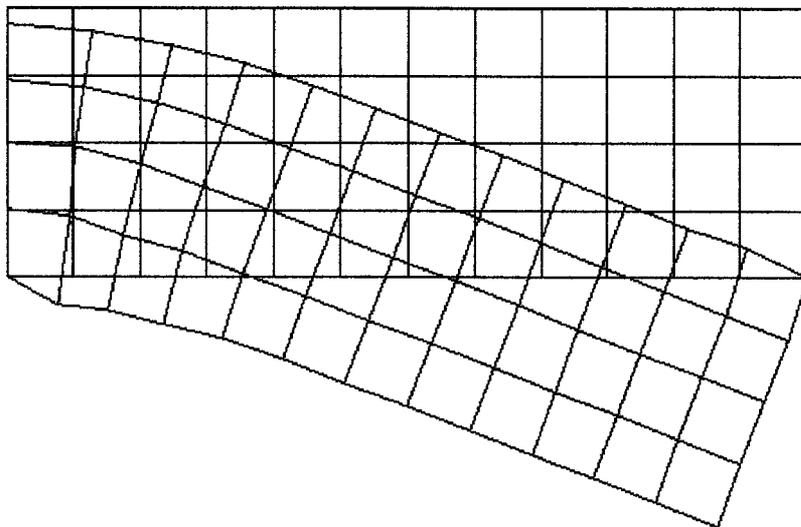


Fig. 7.04- Deformada da viga em balanço.

7.2.2 Cúpula esférica submetida a carga impulsiva

Uma cúpula esférica constituída por um material considerado inicialmente isotrópico, modelada utilizando-se 48 elementos sólidos lineares de 4 nós com simetria de revolução (ver Fig. 7.05), é solicitada por uma carga impulsiva representada por uma pressão externa de 600 psi. Introduziu-se a anisotropia neste caso admitindo-se uma tensão de escoamento circunferencial (ver Fig. 7.01) maior que as tensões de escoamento radiais e tangenciais.

Comparou-se qualitativamente os resultados obtidos neste trabalho com aqueles obtidos por Huang[56], que utilizou uma malha diferente daquela aqui empregada e o critério de Mises-Hill, enquanto que aqui empregou-se a anisotropia mapeada.

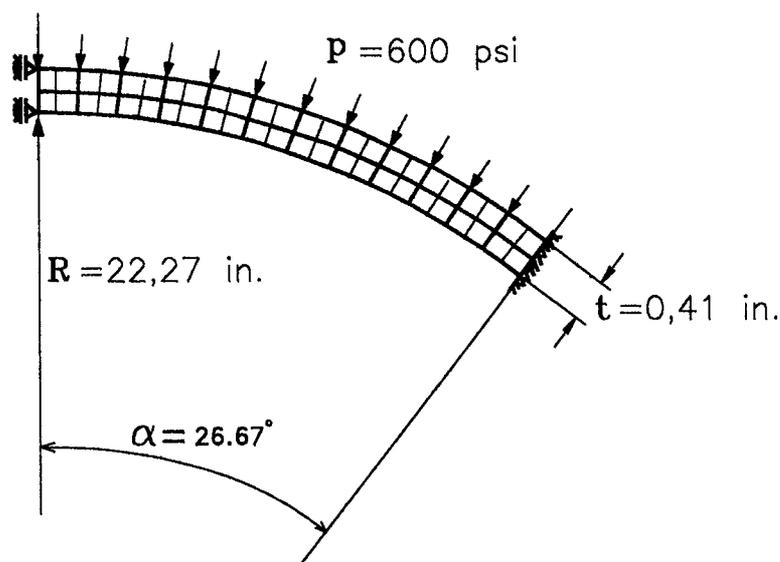


Fig. 7.05- Cúpula esférica sob carga impulsiva.

Os dados para este problema são os seguintes:

$$E = 10.5 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$H = 0.21 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\rho = 2.45 \times 10^{-4} \text{ lb.s}^2 / \text{in}^2$$

$$\nu = 0.30$$

Conforme ilustra a figura 7.05, a cúpula foi discretizada em duas camadas, cada uma delas formada por 24 elementos distribuídos em meio arco (no trabalho de Huang[56], esta cúpula aparece discretizada por meio de elementos de nove nós).

Observa-se que a função de fluência de Mises-Hill para anisotropia empregada por Huang[56] exige que sejam conhecidos os dados das tensões de escoamento de referência nas direções principais de anisotropia e a 45°: σ_{00} , σ_{90} e σ_{45} (ver Cap 3 item 3.7 e Fig. 3.11).

Os parâmetros propostos em Huang[56] são:

$$\sigma_{00} = 0,024 \times 10^6 \text{ psi} ; \sigma_{90} = 0.04 \times 10^6 \text{ psi} \text{ e } \sigma_{45} = 0.024 \times 10^6 \text{ psi}$$

Neste trabalho, foi feito inicialmente um processamento considerando-se isotropia com tensão de escoamento dada por $\sigma_c=0,024 \times 10^6$ psi. Em seguida a anisotropia foi introduzida alterando-se o valor da tensão de escoamento circunferencial para:

$$\sigma_c = 0.04 \times 10^6 \text{ psi}$$

Como se pode observar pelos dados, não há variação nas propriedades constitutivas do material, mas há variação nas tensões de escoamento de referência o que é suficiente para produzir o comportamento anisótropo do modelo. Apresentam-se nos diagramas seguintes os resultados obtidos nesta análise e por último os resultados obtidos por Huang[56], para o mesmo modelo.

Há, evidentemente, diferenças entre os resultados dado que, em primeiro lugar, as malhas utilizadas são distintas. Contudo, adiantando conclusões posteriores, observa-se que resultados diferentes são esperados em certas situações, pois o critério de Mises-Hill pode superestimar a rigidez transversal (resposta ao cisalhamento) enquanto que o modelo aqui apresentado, para a consideração de materiais anisótropos, respeitando outras premissas básicas não introduz esta distorção.

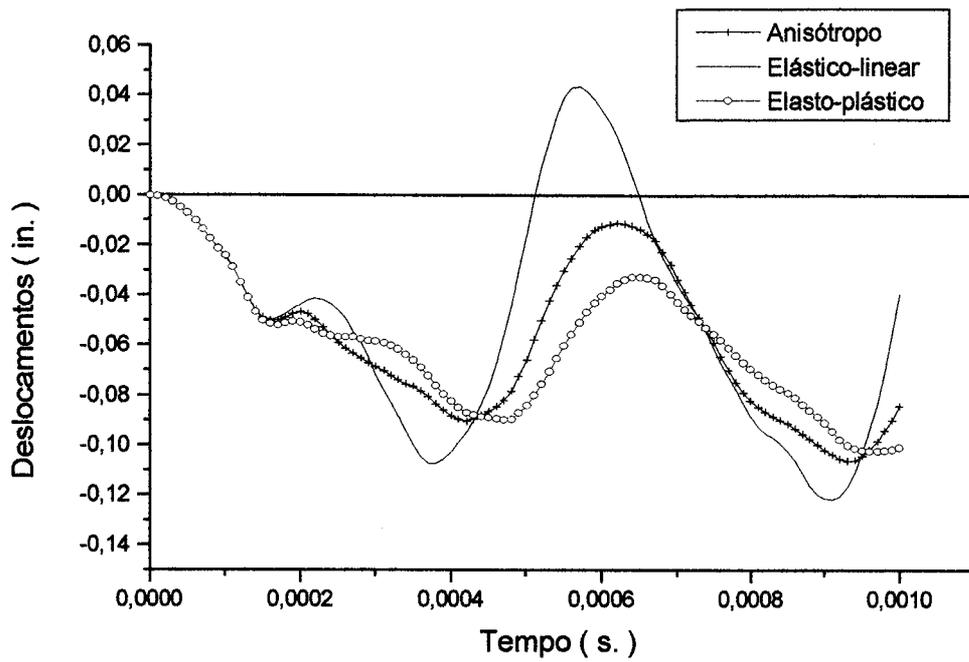


Fig. 7.06- Resultados obtidos para os casos elasto-plástico,elástico-linear e anisótropo.

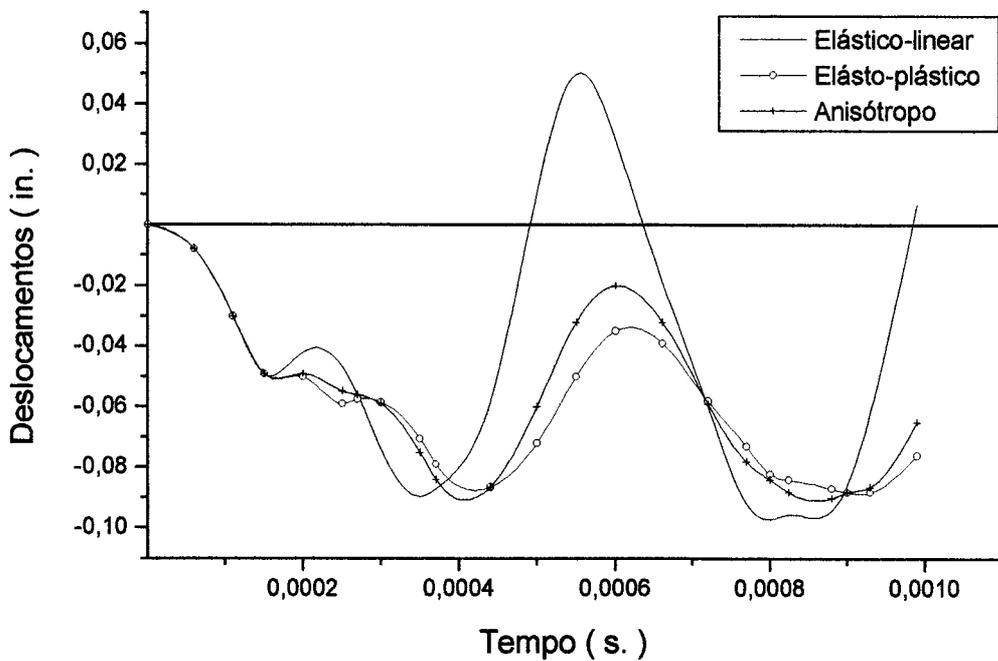


Fig. 7.07- Resultados obtidos por Huang[56] para os mesmos casos.

No gráfico da figura 7.08 comparam-se os resultados com anisotropia considerando-se o transporte do tensor de mapeamento de tensões para a configuração atualizada. Observa-se que são mínimas as diferenças, já que poucos pontos do modelo estão sujeitos a grandes deformações. Na figura 7.09 mostra-se a deformada ampliada para destacar as regiões mais solicitadas.

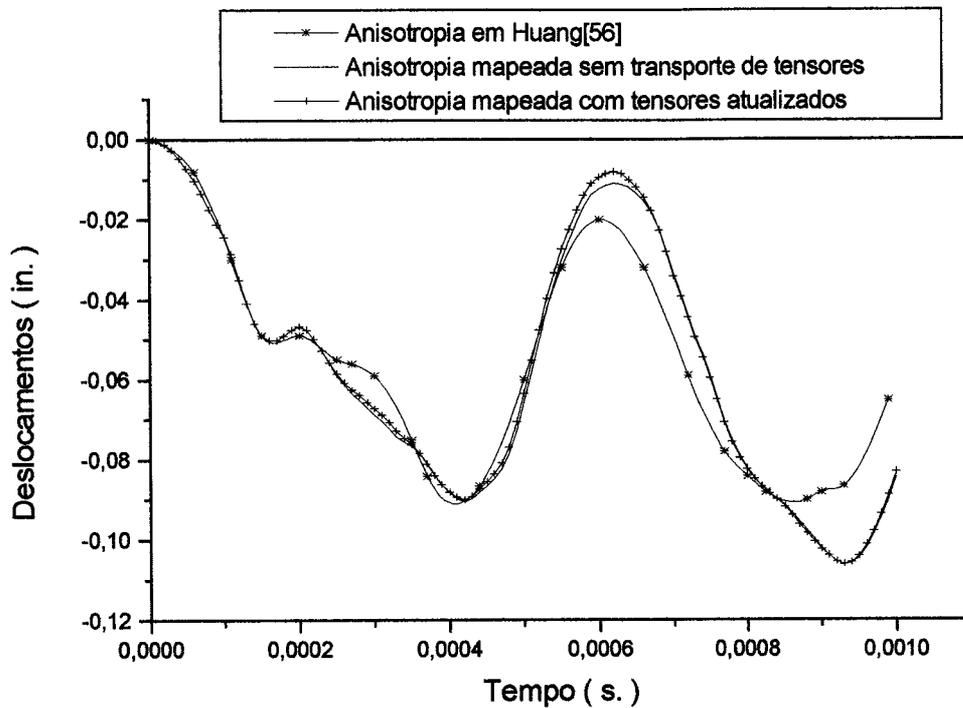


Fig. 7.08- Comparação entre os resultados considerada a anisotropia.

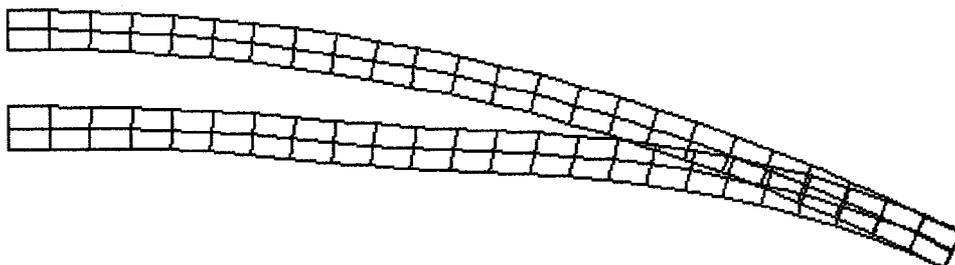


Fig 7.09- Deformada ampliada da cúpula esférica em $t=0.001s$.

7.2.3 Barra tracionada por meio de imposição de deslocamentos

A consideração da anisotropia por tensores de mapeamento é aplicada ao caso da barra ilustrada na figura 7.10, solicitada à tração por meio de imposição de deslocamentos crescentes nos seus contornos. A barra é discretizada utilizando-se 40 elementos sólidos hexaédricos de oito nós e submetida a três situações diferentes de solicitação: a primeira indicada pela letra **A** na direção longitudinal, a segunda indicada pela letra **B** na direção perpendicular à primeira e por último no sentido da diagonal longitudinal indicada pela letra **C** (ver Fig. 7.11).

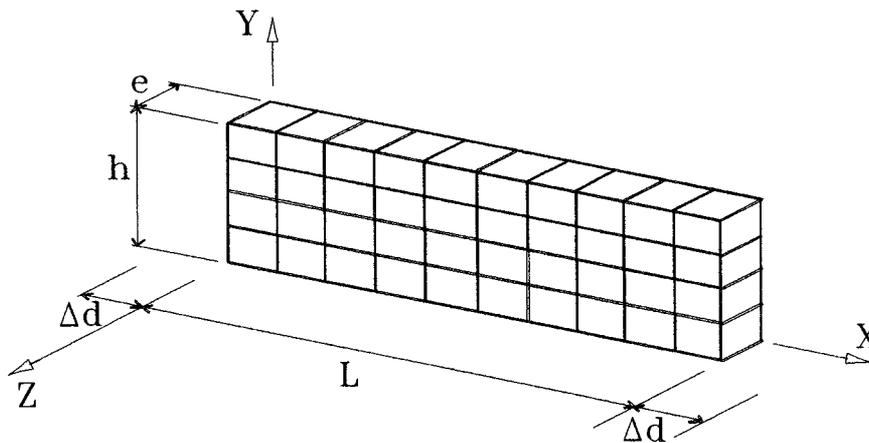


Fig. 7.10- Barra com espessura $e=1$ cm discretizada para ensaios numéricos.

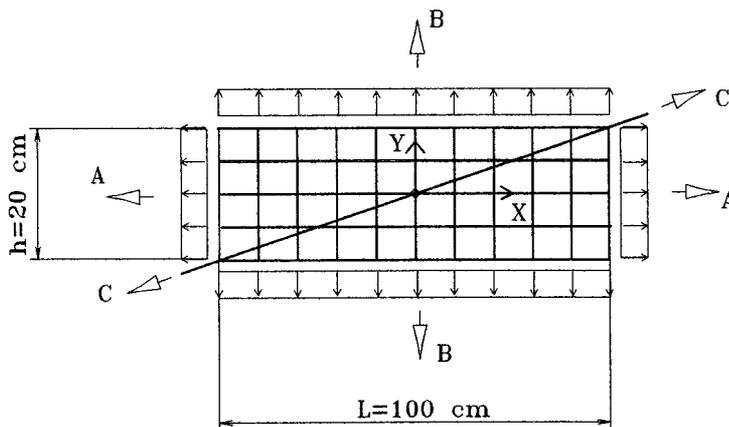


Fig. 7.11- Solicitações consideradas: a) Longitudinais, b) Transversais e c) Diagonais.

Foram consideradas as seguintes propriedades iniciais:

Na direção X:	$E_x = 2.5 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$	e	$f_x = 8000 \text{ kgf/cm}^2$
Na direção Y:	$E_y = 2.0 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$	e	$f_y = 6000 \text{ kgf/cm}^2$
	$E_z = E_y$		$\nu = 0,30$
	$G = 0.45 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$		$H = 0.25 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$

O gráfico da figura 7.12 ilustra a resposta obtida, apresentando-se também os resultados de Oller[2], para o mesmo modelo, quando se utiliza a função de Fluência de Hill. Oller[2], em seu trabalho, compara os resultados utilizando anisotropia mapeada com aqueles obtidos com o uso da função de Mises-Hill e observa que utilizando-se o modelo de Hill há uma influência excessiva das tensões tangenciais levando a uma resposta mais rígida. A implementação feita no programa explícito utilizado neste trabalho reproduz de forma bem aproximada os resultados obtidos por Oller[2] em seu trabalho que empregou um outro tipo de implementação na análise.

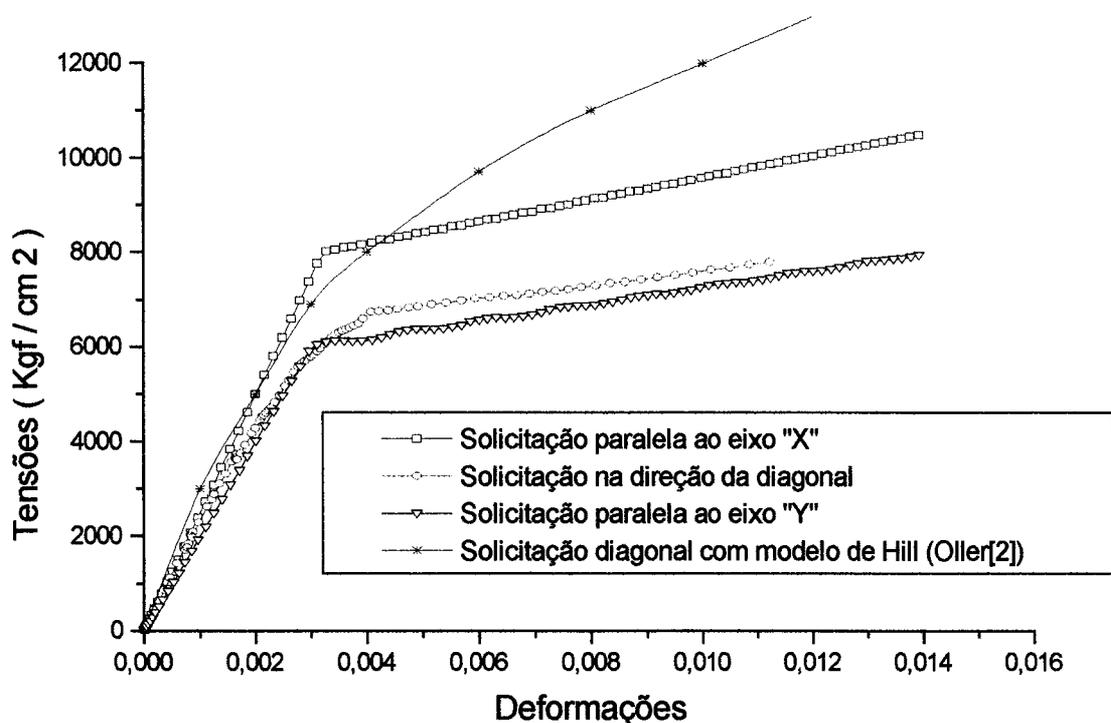


Fig. 7.12- Respostas para as tres sollicitações e comparação com a teoria de Hill.

7.3 Exemplos de validação para a teoria de misturas

Nos próximos exemplos utiliza-se a teoria de misturas para aplicações aos materiais compostos. No primeiro exemplo combinam-se dois materiais isotrópicos. Em seguida combinam-se lâminas de uma matriz isotrópica com fibras longas orientadas a 0° e a 90° graus. Finalmente analisa-se o caso da resposta dinâmica de uma placa laminada submetida a uma pressão uniformemente distribuída. Observa-se, contudo, que nesse caso não se leva em conta o problema da delaminação.

7.3.1 Barra de material composto bi-fásico e ambas fases isotrópicas

Considera-se neste exemplo a mesma barra do item 7.2.3 e ilustrada na figura 7.10, com as dimensões dadas por $L=100$ mm, $h=20$ mm, e espessura $e=1$ mm. A barra é constituída, agora, por um material que se admite bi-fásico onde cada fase é um substância isotrópica diferente. A primeira substância isotrópica ocupa fração volumétrica que corresponde a 70% do volume total, por sua vez a segunda corresponde aos 30% restantes do volume total da barra. As propriedades das duas substâncias bem como os resultados de um processamento com deslocamento imposto e análise elasto-plástica estão apresentados em seguida.

Substâncias empregadas:

Substância 1:	$E_x = E_y = E_z = 2.5 \times 10^6 \text{ Kgf / cm}^2$	e	$f_x = 8000.0 \text{ Kgf / cm}^2$	
	$G = 0.45 \times 10^6 \text{ Kgf / cm}^2$		$H = 0.25 \times 10^6 \text{ Kgf}$	$\nu = 0.30$
Substância 2:	$E_x = E_z = E_y = 1.5 \times 10^6 \text{ Kgf / cm}^2$	e	$f_x = 5000.0 \text{ Kgf / cm}^2$	
	$G = 0.30 \times 10^6 \text{ Kgf / cm}^2$		$H = 0.15 \times 10^6 \text{ Kgf}$	$\nu = 0.30$

No diagrama de tensão equivalente de von Mises x deformação para a direção "X" apresentado em seguida pode observar-se a influência de cada fase e a resposta do composto.

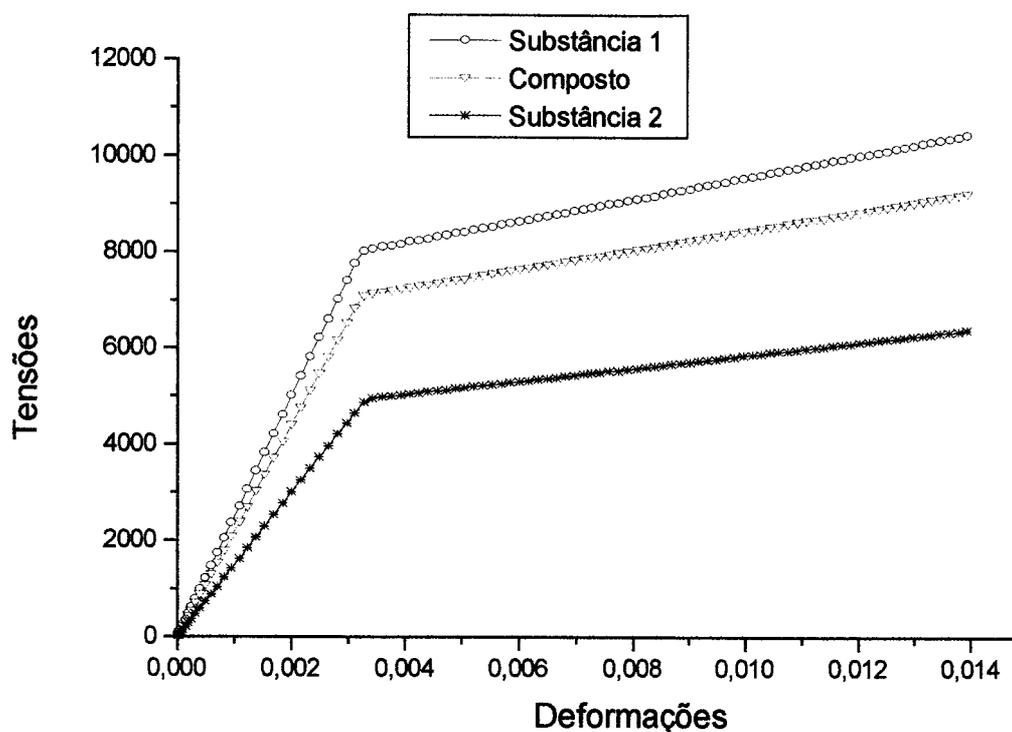


Fig. 7.13- Resposta do composto e de suas fases separadamente.

7.3.2 Barra de material bi-fásico com fase isótropa e fibras longas

Considera-se a mesma barra do item anterior, agora constituída por um material bi-fásico composto por fase isótropa (matriz) e fase de fibras longas ocupando, respectivamente, as frações de 80% e 20% do volume total. Neste exemplo as fibras são dispostas primeiramente no sentido

longitudinal da barra e em seguida no sentido transversal; em ambos os casos a sollicitação por meio da imposição de deslocamentos é aplicada no sentido longitudinal.

A teoria de misturas produz o efeito da combinação da matriz com a fibra para fins de determinação das propriedades do composto. Ambas as fases consideradas aqui são materiais perfeitamente plásticos. Assume-se que o fluxo plástico está sempre na direção de orientação das fibras. Este exemplo foi estudado anteriormente por Oller[2] utilizando-se um programa implícito e os seus resultados são semelhantes aos obtidos neste trabalho onde emprega-se o código explícito. A figura 7.14 apresenta os resultados para fibras dispostas longitudinalmente.

Propriedades dos materiais:

Matriz isotrópica: $E = 7.24 \text{ tf} / \text{mm}^2$; $f = 0.0360 \text{ tf} / \text{mm}^2$ e $\nu = 0.33$

Fibras longas: $E = 84.4 \text{ tf} / \text{mm}^2$; $f = 0.2283 \text{ tf} / \text{mm}^2$ e $\nu = 0.30$

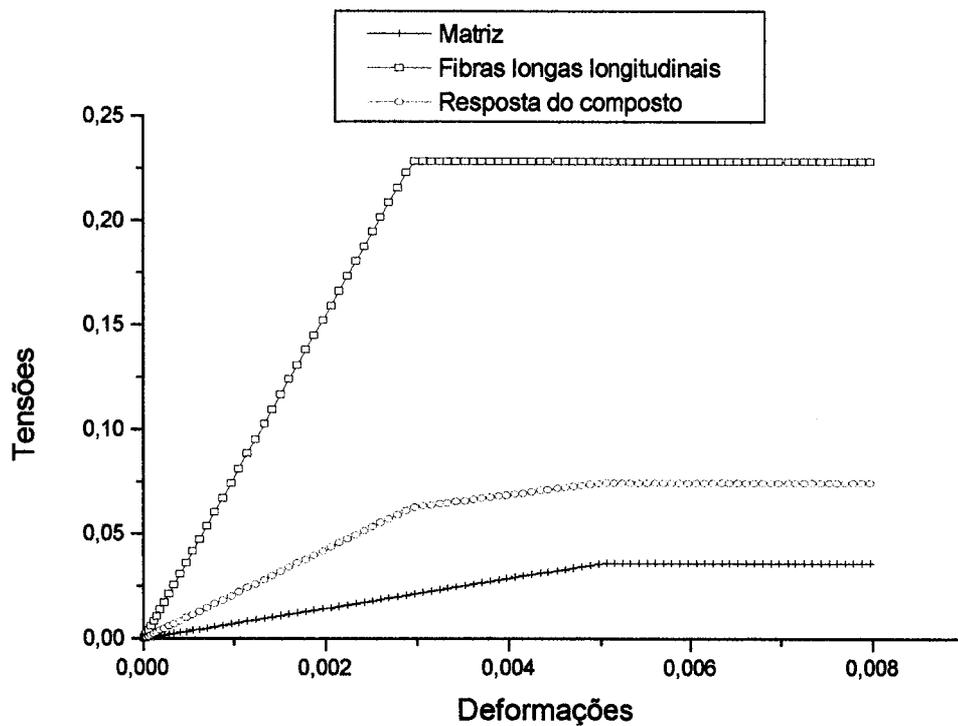


Fig. 7.14- Resposta no caso de fibras orientadas no sentido longitudinal.

Observa-se que no caso de fibras dispostas transversalmente, figura 7.15, o composto apresenta menor resistência longitudinal que a matriz dado o enfraquecimento desta pelos vazios que as fibras deixam considerando-se o sentido da sollicitação. No sentido transversal, a fibra aparece tracionada e a matriz comprimida; a composição de ambas as tensões resulta numa tensão nula para o composto nesse sentido, o que era esperado.

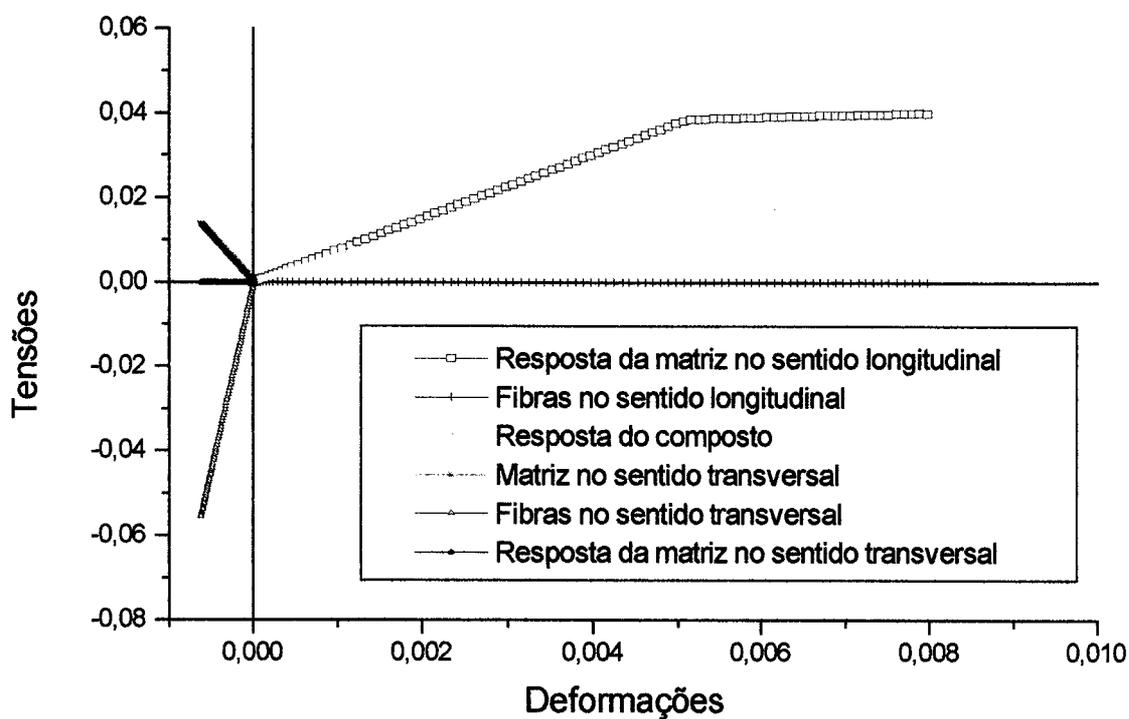


Fig. 7.15- Resultados no caso de fibras orientadas no sentido transversal.

7.3.3 Placa em lâminas de material bi-fásico com matriz isotrópica e fibras longas

Utilizando-se 25 elementos sólidos hexaédricos de 8 nós, foi discretizada a quarta parte de uma placa quadrada ortotrópica composta por uma resina a base de epoxi com fibras de grafite conforme ilustrado na figura 7.16. A orientação das fibras de carbono segue a direção dos eixos "X" e "Z" assinalados de modo a obter-se 50% das fibras orientadas segundo o eixo "X" e 50% orientadas segundo o eixo "Z".

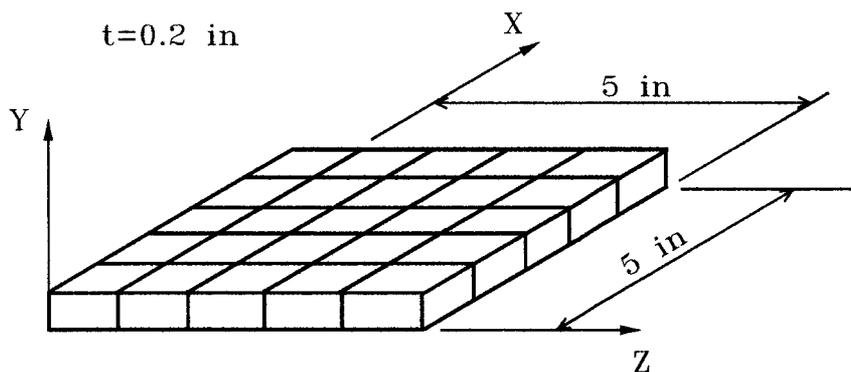


Fig. 7.16- Esquema da quarta parte de uma placa laminada.

A placa é formada por lâminas superpostas no sentido da espessura de modo que as fibras encontram-se orientadas nas direções dos eixos "X" e "Z", alternadamente, e em igual número (Ver Fig. 7.17). Utilizando-se a teoria de misturas, do ponto de vista macroscópico, considerou-se este composto como sendo formado por duas substâncias isotrópicas combinadas, sendo elas a matriz à base de epoxi e as fibras de carbono. Os dados das substâncias são os seguintes:

Matriz a base de epoxi: $E = 1.0 \times 10^6$ psi $\sigma_y = 5.8 \times 10^3$ psi $\nu = 0.40$
 $\rho = 0.040$ lb / in³

Fibras de carbono: $E = 40.0 \times 10^6$ psi $\sigma_y = 30.4 \times 10^3$ psi $\nu = 0.20$
 $\rho = 0.082$ lb / in³

O grupo de propriedades seguinte refere-se ao material isótropo equivalente:

$E = 20.5 \times 10^6$ psi $\sigma_y = 18.1 \times 10^3$ psi $\nu = 0.30$ $\rho = 0.061$ lb / in³

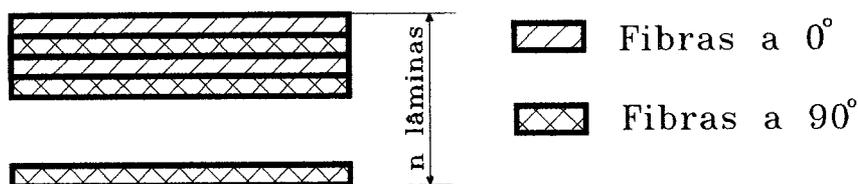


Fig. 7.17- Arranjo das lâminas que compõem a placa.

A placa é solicitada por uma carga impulsiva igual a 100 psi sendo, nestas condições, analisada a resposta no tempo em termos do deslocamento vertical do ponto central da placa. Comparam-se os resultados da teoria de misturas mostrados na figura 7.18, com os de um material isótropo hipotético com propriedades mecânicas equivalentes obtidas em função dos valores iniciais de cada substância ponderados pelas suas correspondentes frações em volume (Fig. 7.19).

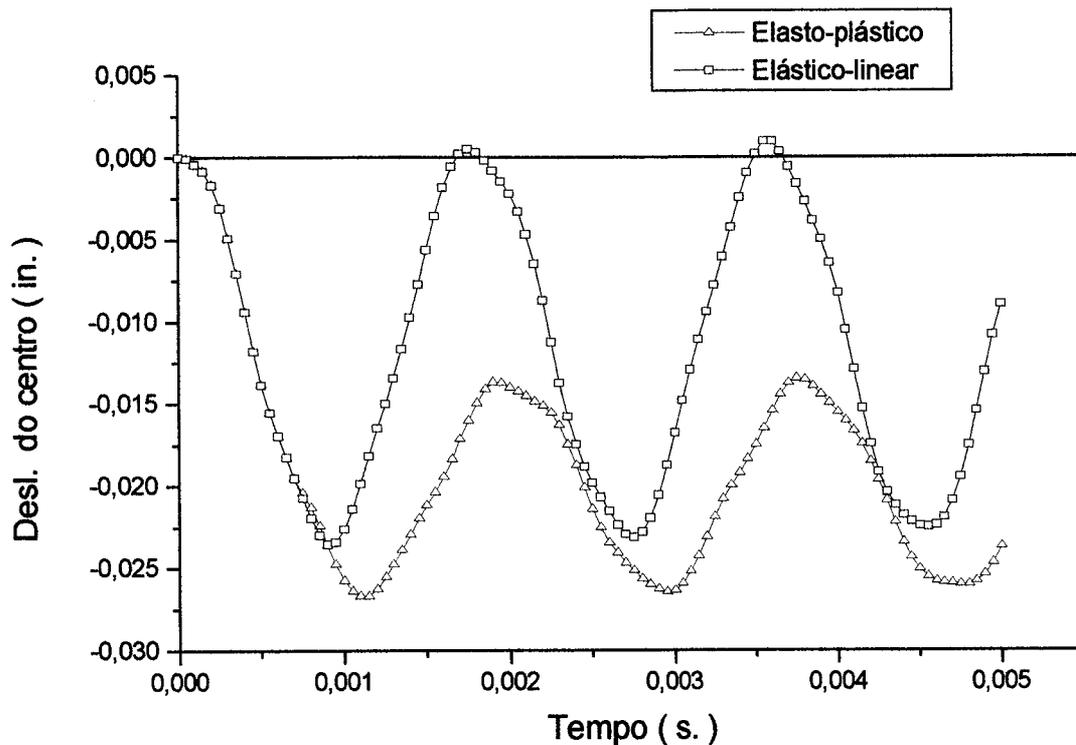


Fig. 7.18- Resultados obtidos utilizando a teoria de misturas.

Verifica-se na análise elástica-linear respostas semelhantes, basta observar as curvas correspondentes nas figuras 7.18 e 7.19. O resultado para a placa de material isotrópico equivalente (figura 7.19) mostrou-se ligeiramente mais flexível. Na análise elasto-plástica obtiveram-se resultados diferentes para os dois casos e o comportamento é inverso, ou seja, utilizando-se a teoria de misturas obteve-se uma tendência para deslocamentos residuais maiores. Observa-se ainda que a curva para a análise elasto-plástica considerando-se a teoria de misturas apresenta uma perturbação que corresponde à plastificação da substância de menor tensão de escoamento.

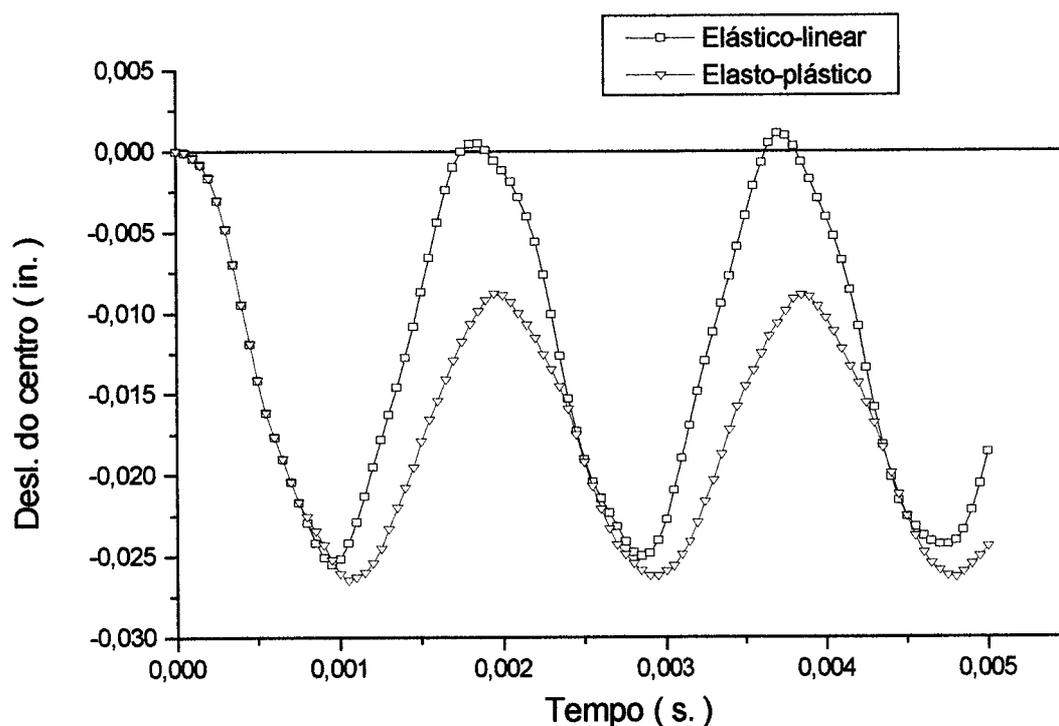


Fig. 7.19- Resultados para o material isotrópico de propriedades ponderadas.

Uma possível explicação para o fenômeno observado no caso elasto-plástico decorre do fato de que a teoria de misturas permite interpretar cada material isoladamente, de modo que os limites elásticos de cada fase do composto são perfeitamente identificáveis. Neste caso em estudo, a matriz à base de epóxi tem um limite de proporcionalidade muito inferior ao das fibras de grafite, de modo que durante a sollicitação a matriz entra em regime plástico antes do que o faria o material isotrópico com propriedades médias proposto. Dessa forma justifica-se a resposta mais "flexível" do composto tratado pela teoria de misturas.

Com o intuito de aproximar a resposta estática para este problema introduziu-se o amortecimento na solução da equação de equilíbrio dinâmico. Neste caso os resultados obtidos estão ilustrados na figura 7.20.

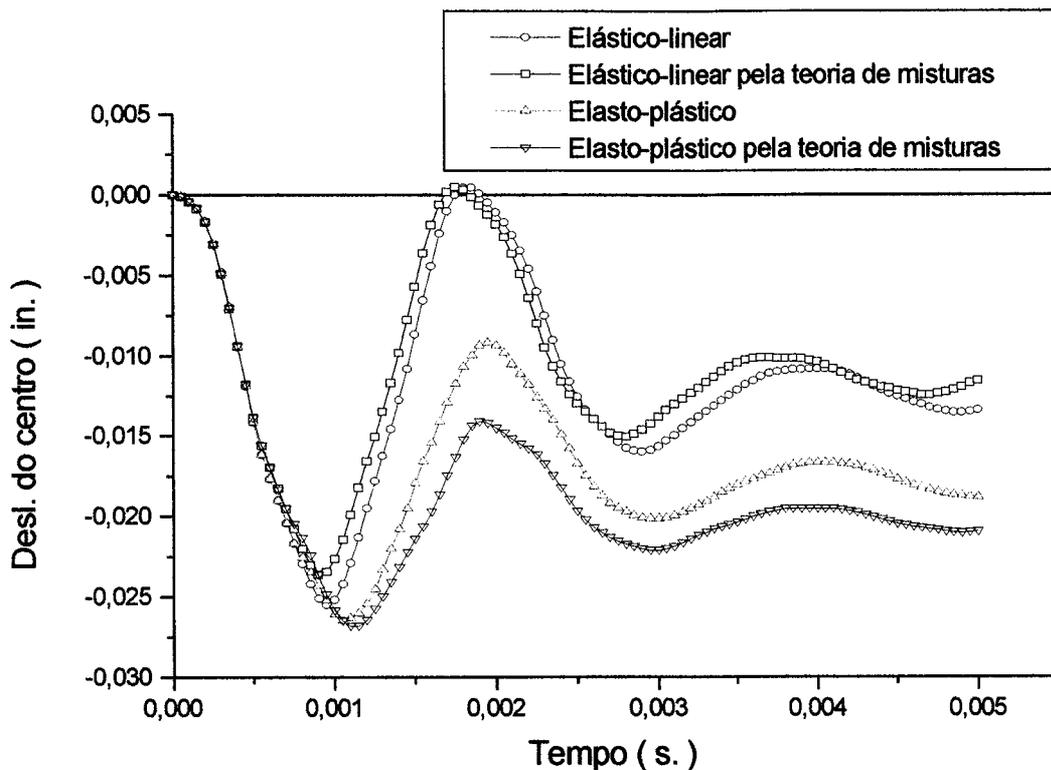


Fig. 7.20- Resultados comparativos com amortecimento dinâmico.

7.4 Teoria de misturas aplicada a materiais frágeis reforçados com fibras curtas

Neste item limitamo-nos a mencionar e ilustrar a aplicação da teoria de misturas aos materiais frágeis reforçados com fibras curtas. Nestes casos é necessário introduzir modificações no modelo que dependem de um estudo mais detalhado da micro-estrutura das matrizes frágeis. É necessária, também, a determinação rigorosa das propriedades dos diversos tipos de fibras utilizadas, sua geometria e distribuição no volume do sólido a ser analisado.

O exemplo seguinte trata do concreto funcionando como matriz frágil reforçada por fibras de polipropileno. Considera-se que as fibras de polipropileno utilizadas distribuem-se uniformemente pelo volume do modelo e que sua orientação é tal que pode-se considerar as fibras contribuindo seja qual fôr a direção da sollicitação.

7.4.1 Barra de material bi-fásico com fase frágil e fibras curtas

Uma barra apresentando a mesma geometria da barra utilizada anteriormente é constituída por uma matriz frágil de concreto com reforço por fibras curtas de polipropileno. O modelo é submetido a um esforço de tração induzido pela imposição de deslocamentos às suas extremidades (ver figura 7.21). Para poder provocar a concentração de deformações nos elementos centrais, consideram-se impedidos os deslocamentos transversais nas seções extremas do modelo. A vinculação das extremidades da barra é considerada conforme ilustrado na figura 7.21.

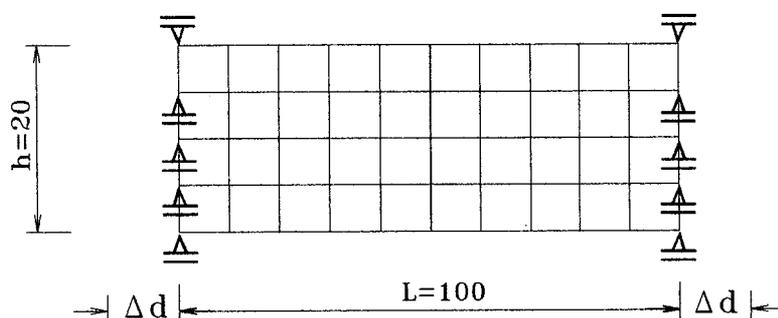


Fig 7.21- Vinculação da barra para o ensaio numérico.

O comportamento do concreto é modelado segundo uma função de dano-elastoplástico, conforme descrito no capítulo 4, sendo necessário fornecer ao programa a energia de fratura H e a tensão de ruptura à tração σ_T para o concreto puro. Neste exemplo a energia de fratura é

obtida determinando-se a área sob o diagrama de carga x deslocamento para o concreto simples, apresentado no gráfico da figura 7.23 (Ver Balaguru[68]).

Emprega-se neste trabalho o modelo apresentado em Balaguru[68] para obter o novo valor da resistência à tração da matriz de concreto reforçado pelas fibras. O valor para a tensão de cisalhamento admissível na interface concreto/fibra (τ) em função do comprimento e do diâmetro das fibras, é determinado em ensaios denominados de "pull-out" executados em uma fibra isoladamente. Os dados da geometria da fibra e da tensão de cisalhamento na interface, devem ser fornecidos ao programa.

Dados para os materiais:

Concreto puro: $E = 2.00 \times 10^5 \text{ Kgf / cm}^2$ $\sigma_r = 0.40 \times 10^2 \text{ Kgf / cm}^2$ $\nu = 0.20$

Fibras de polipropileno: $E = 1.30 \times 10^5 \text{ Kgf / cm}^2$ $\sigma = 4.75 \times 10^3 \text{ Kgf / cm}^2$ $\nu = 0.30$
 $\tau = 10.0 \text{ Kgf / cm}^2$ $l = 0.80 \text{ cm}$ $d = 0.13 \times 10^{-1} \text{ cm}$

Executaram-se dois experimentos numéricos considerando a proporção em volume de fibras igual a 8.7% e a 13.4% do volume total, e compararam-se os resultados obtidos com resultados experimentais fornecidos em Balaguru[68]. A figura 7.22 mostra a região de concentração de deformações nos elementos centrais do modelo.

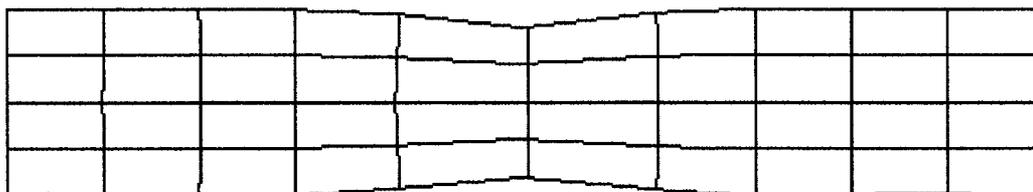


Fig. 7.22- Deformada do modelo mostrando a concentração de deformações.

Nota-se boa concordância na fase elástica até o denominado "Bending Over Point" (BOP). A partir desse ponto observa-se que os ensaios numéricos produziram uma resposta mais rígida conforme demonstram as figuras 7.23 e 7.24. Isto ocorre em razão de que o modelo de dano implementado não é capaz de reproduzir fielmente o processo de evolução de defeitos observados experimentalmente. É necessário do ponto de vista dos materiais frágeis reforçados com fibras curtas desenvolver mais o modelo aqui proposto, o que não é objetivo deste trabalho.

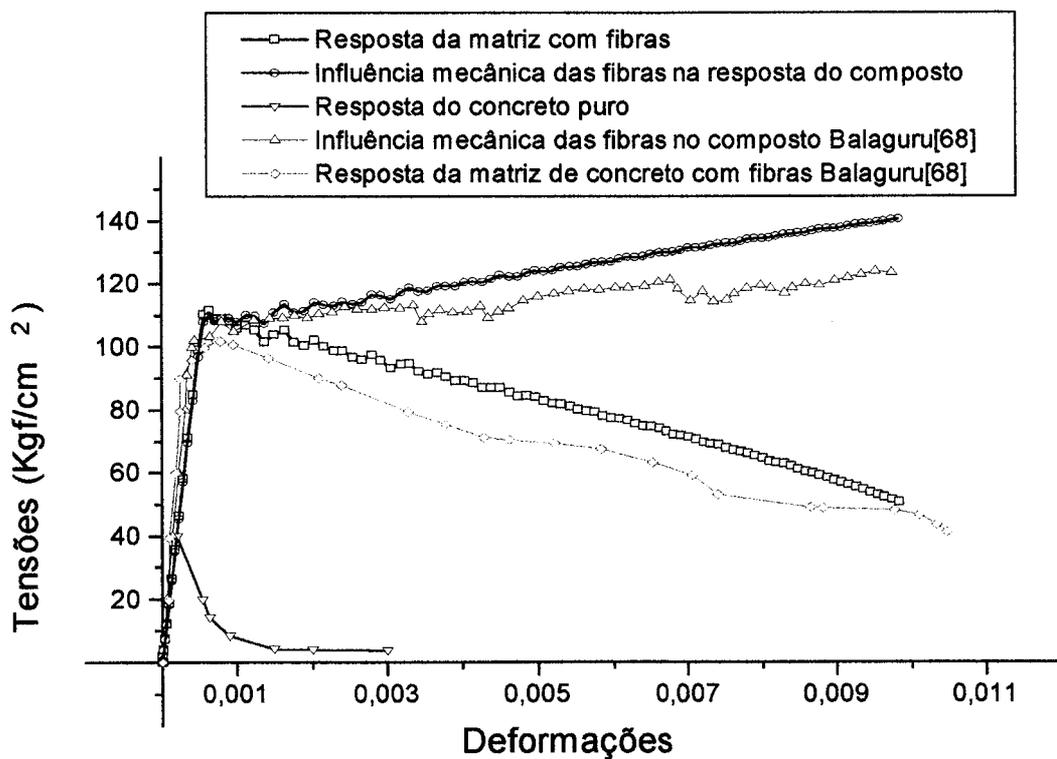


Fig. 7.23- Resultados numéricos e experimentais (Balaguru[68]) para uma fração de fibras igual a 8,7%.

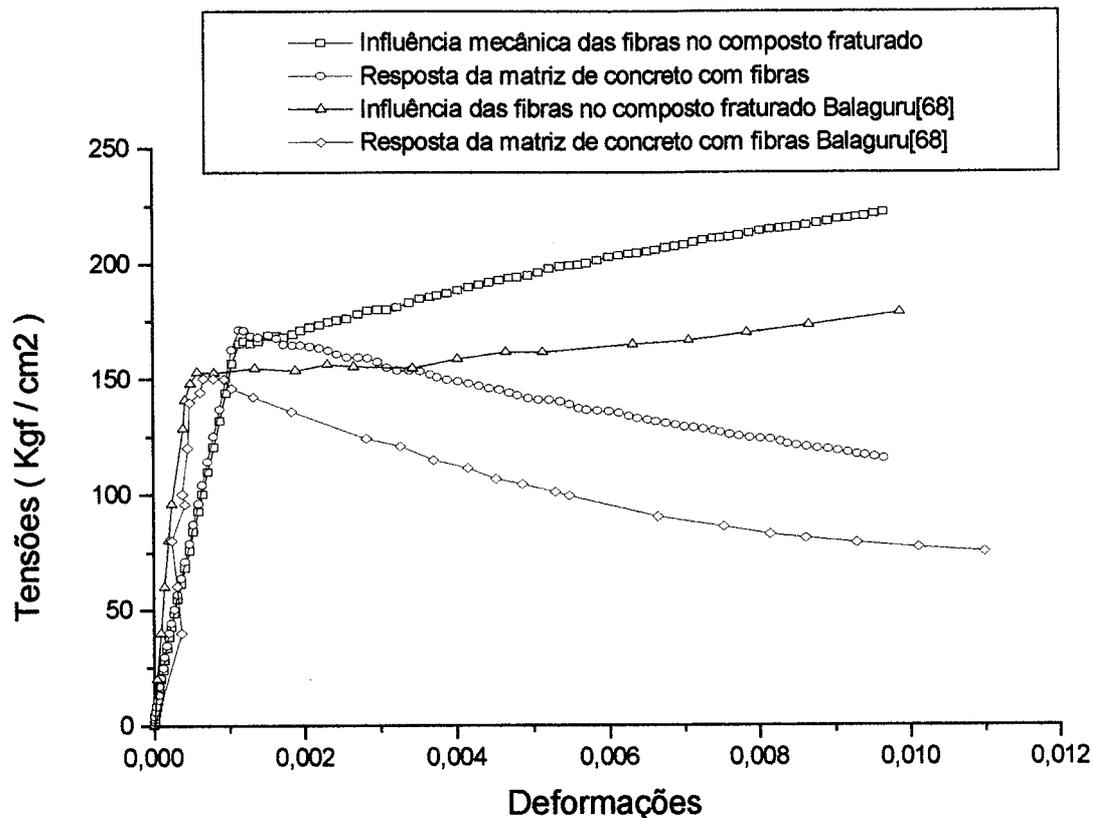


Fig. 7.24- Resultados numéricos e experimentais (Balaguru[68]) para uma fração de fibras igual a 13,4%.

7.5 Aplicações tecnológicas na área de embutição de chapas

Nos exemplos seguintes explora-se o tema da conformação de lâminas metálicas consideradas inicialmente como materiais isotrópicos ou anisotrópicos. Emprega-se no processamento dos exemplos os conceitos de anisotropia mapeada e de transporte dos tensores de mapeamento para a configuração atualizada (Operação de "push-forward"). Os resultados obtidos são

comparados com outros resultados fornecidos pela literatura disponível e com alguns resultados experimentais.

7.5.1 OSU Benchmark test: Estiramento de uma lâmina metálica

Neste exemplo clássico na área de conformação de metais, uma tira de alumínio é modelada por elementos sólidos lineares de 4 nós e estirada por meio de um punção de seção semicircular. A geometria do problema é ilustrada na figura 7.25 e a configuração deformada resultante na figura 7.26.

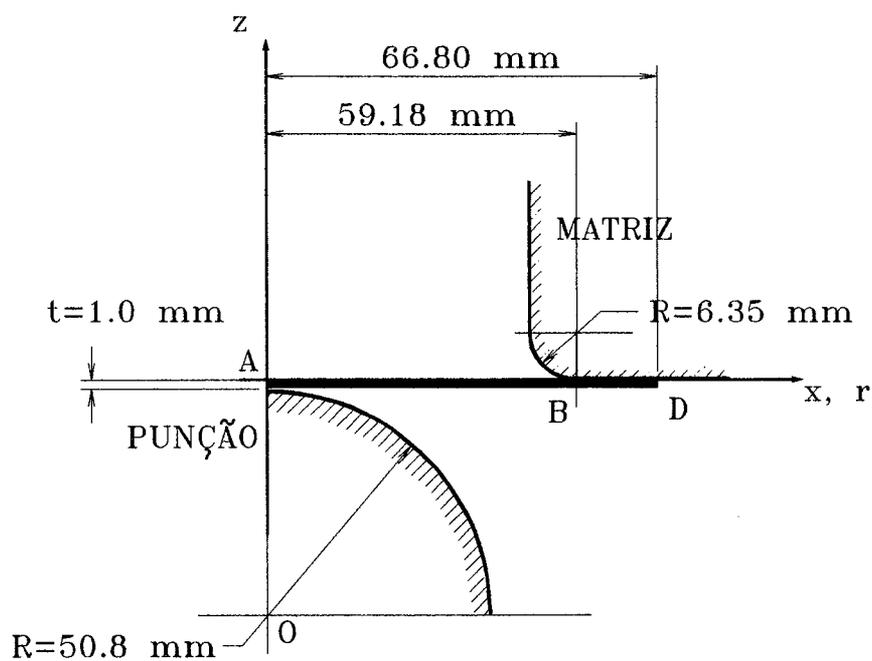


Fig. 7.25- Geometria das ferramentas utilizadas na conformação da lâmina.

Os dados relativos à liga de alumínio utilizada são:

$$E = 69000 \text{ Mpa} \quad \nu = 0.30 \quad \rho = 2700.0 \text{ Kg / m}^3$$

$$\text{Curva uniaxial de tensão x deformação: } \sigma = 589.0 (1.0 \cdot 10^{-4} + \epsilon^{ep})^{0.216} \quad (\text{em MPa})$$

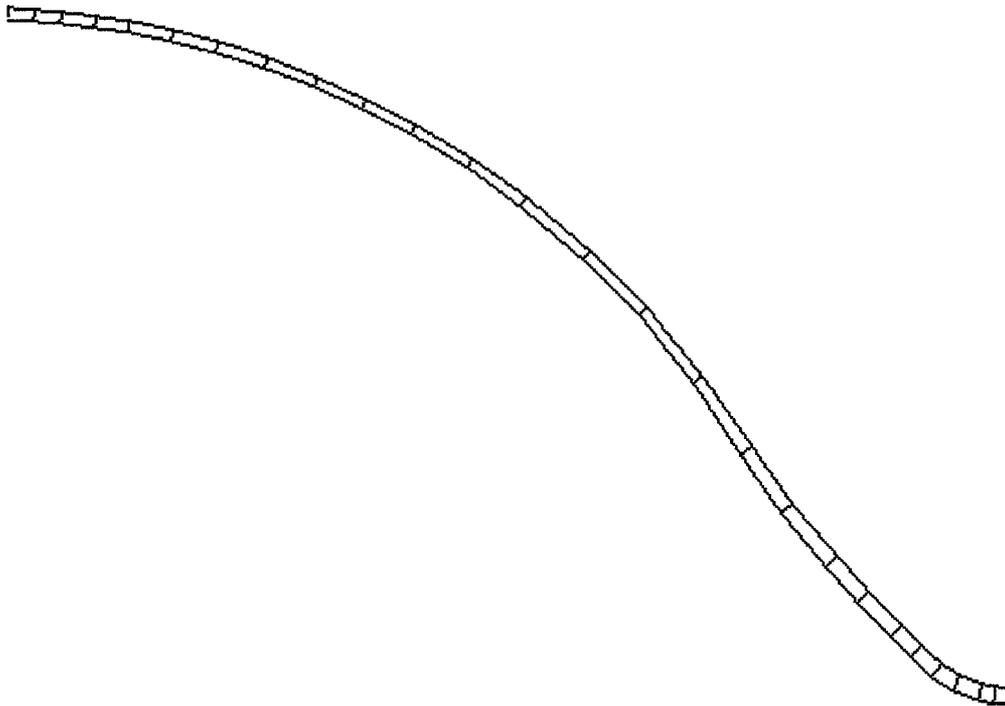


Fig. 7.26- Deformada típica da lâmina para penetração de 40 mm.

Inicialmente, mantendo-se o coeficiente de atrito constante e igual a 0.15, estuda-se a influência da malha utilizada na discretização da lâmina considerando-a isotrópica. A penetração do punção é de 20 mm no primeiro estudo e de 40 mm no segundo. A figura 7.27 mostra as malhas utilizadas. Os gráficos das figuras 7.28 e 7.29 mostram, para as três malhas propostas, os resultados comparativos em termos de deformações longitudinais em pontos da face da lâmina opostos ao lado aonde há o contato com o punção.

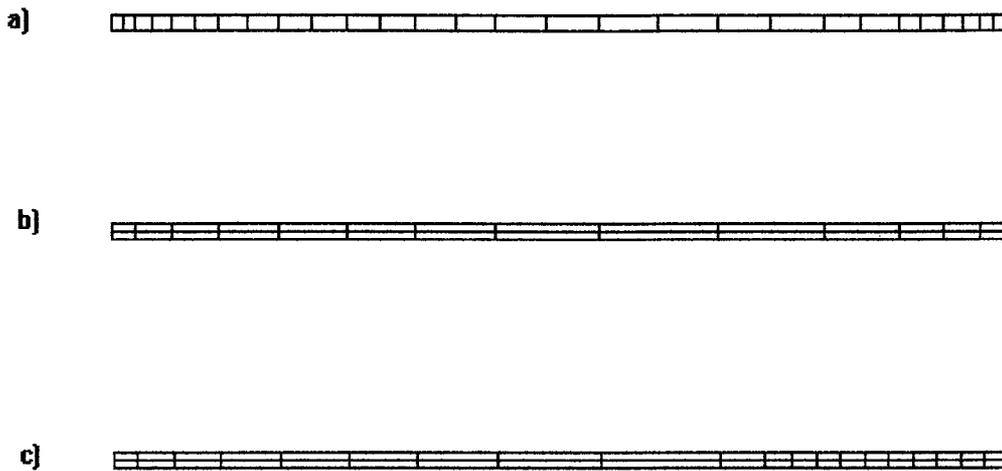


Fig. 7.27- Malhas utilizadas a) 28 elementos b) 28 elementos em duas camadas e c) 40 elementos em duas camadas.

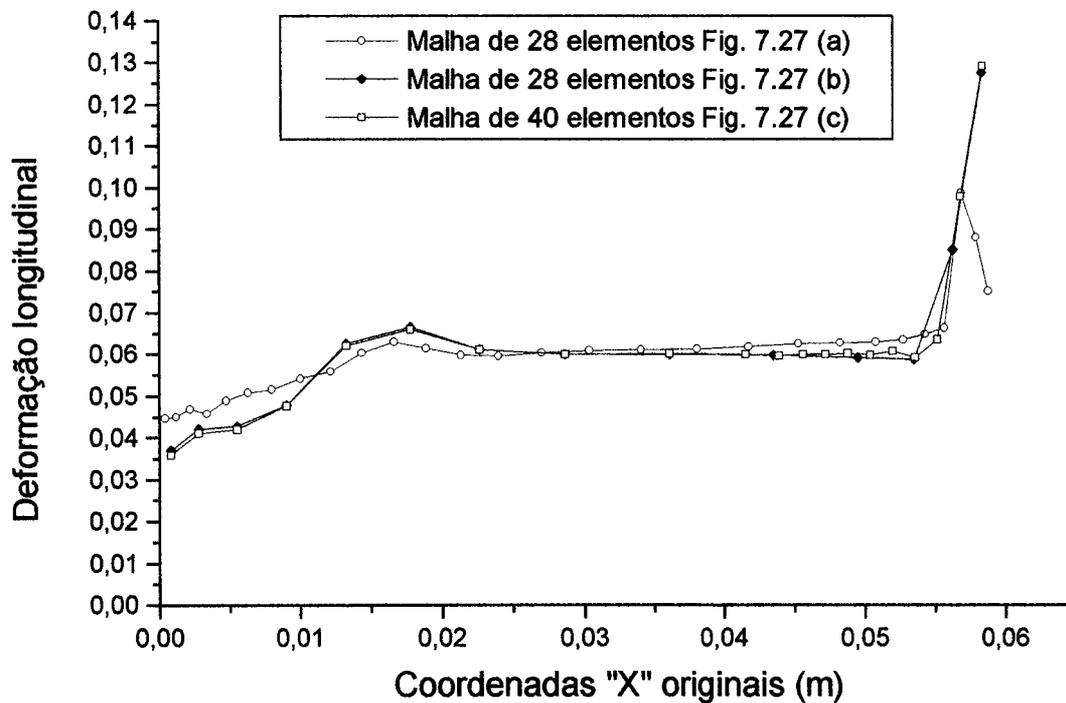


Fig. 7.28- Resultado comparativo para penetração de 20 mm.

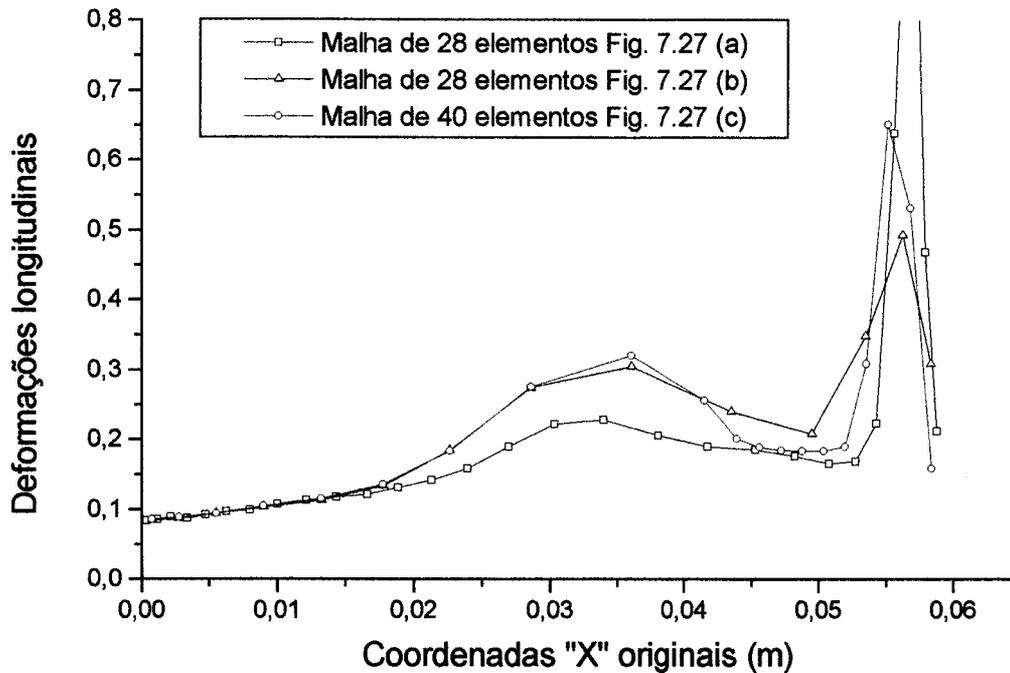


Fig. 7.29- Resultados comparativos para penetração de 40 mm.

As figuras 7.30 e 7.31 mostram uma comparação dos resultados aqui obtidos com aqueles obtidos por outros autores, Hernández[67]. Observa-se que Hernández desenvolve uma análise tridimensional enquanto que neste trabalho considera-se a tira em estado plano de deformações. Esta última consideração bem como a discretização utilizada na espessura da lâmina e a escolha do ponto ao longo da espessura onde estão sendo medidas as deformações podem servir de justificativa para a perturbação das deformações observada na extremidade da lâmina junto à matriz. As figuras 7.30 e 7.31 indicam razoável concordância entre os resultados. Com base neste estudo preliminar, pode-se observar que o modelo constitutivo e os elementos sólidos empregados neste trabalho produzem resultados satisfatórios quando confrontados com resultados de outros autores.

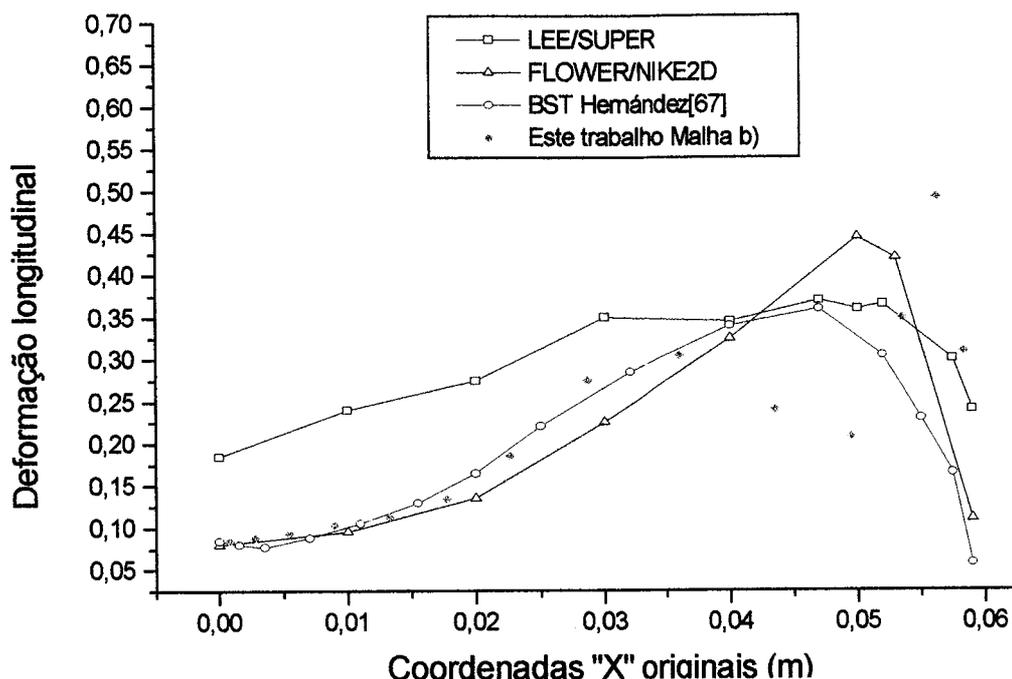


Fig. 7.30- Comparação de resultados para uma penetração de 40 mm.

Daqui por diante optou-se por desenvolver as análises considerando-se a influência da anisotropia utilizando-se apenas as malhas de 28 elementos distribuídos em uma camada e de 40 elementos distribuídos em duas camadas, conforme o mostrado na figura 7.27 a) e c) respectivamente.

Para efeito de construção dos tensores de mapeamento para a anisotropia, considerou-se o valor da tensão de proporcionalidade no plano da lâmina igual ao valor médio obtido por experimentos. Na direção perpendicular ao plano da lâmina fez-se variar a tensão de escoamento de modo a evidenciar a influência da anisotropia na resposta em deformações deste modelo.

Tensão de proporcionalidade: $\sigma_{REF} = 137.0 \text{ MPa}$

Tensão na direção do eixo "Y": $\sigma_Y = 134.5 \text{ MPa} < \sigma_{REF}$

Tensão na direção do eixo "Y": $\sigma_Y = 139.5 \text{ MPa} > \sigma_{REF}$

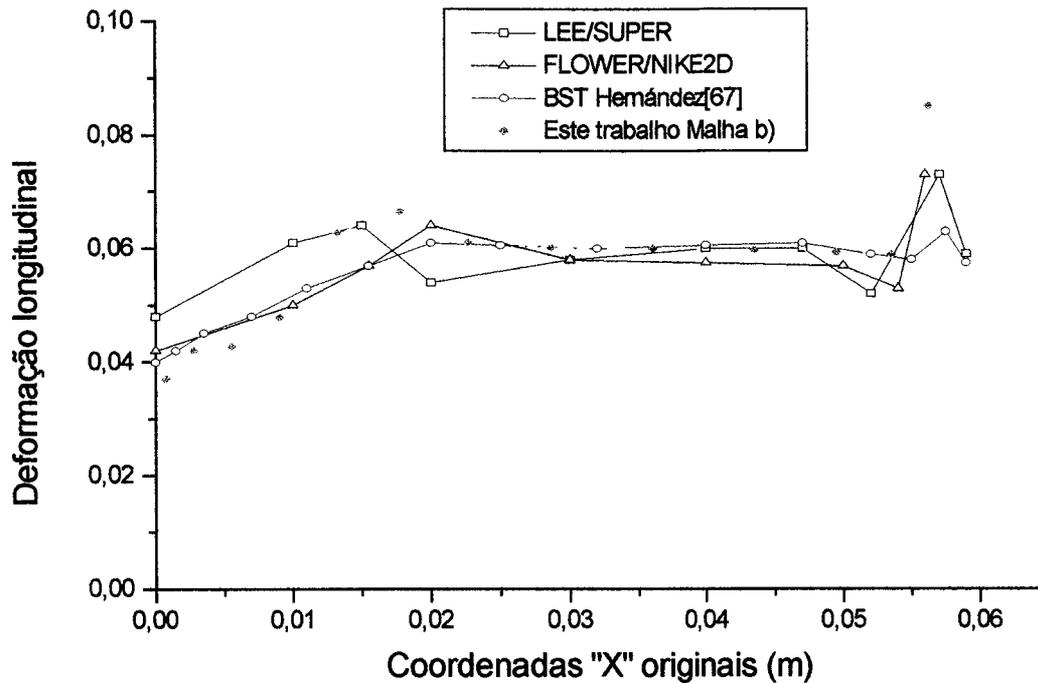


Fig. 7.31- Comparação de resultados para uma penetração de 20 mm.

Utilizando-se a malha de 28 elementos e considerando-se a penetração do punção igual a 20 mm com coeficiente de fricção $\mu=0.3$ processou-se o modelo e compararam-se os resultados obtidos com aqueles fornecidos por Lee[62] que neste caso não considerou a anisotropia. A figura 7.32 mostra os resultados obtidos neste trabalho incluindo-se também o caso isótropo.

O modelo de 40 elementos foi processado considerando-se também um coeficiente de fricção $\mu=0.0$ e avanço do punção equivalente a 20 mm, com tensão de escoamento fora do plano da lâmina aumentada em 20% ou reduzida em 20% em relação ao valor médio da tensão de proporcionalidade. Os resultados obtidos são mostrados na Fig. 7.33 junto aos fornecidos por Hernández[67], que utilizou o elemento BST (Elementos de lâmina sem graus de liberdade rotacional). Apresentam-se ainda, resultados de outros autores e uma resposta teórica gerada pela teoria de membrana.

De um modo geral há uma boa concordância entre os resultados obtidos. Nota-se, contudo, que ao variar a tensão de escoamento fora do plano da lâmina obteve-se respostas que se afastam das curvas referentes aos casos isotrópicos e teórico. Distribuição de deformações mais uniforme, exceto junto à matriz, verificou-se no primeiro caso (Fig. 7.32).

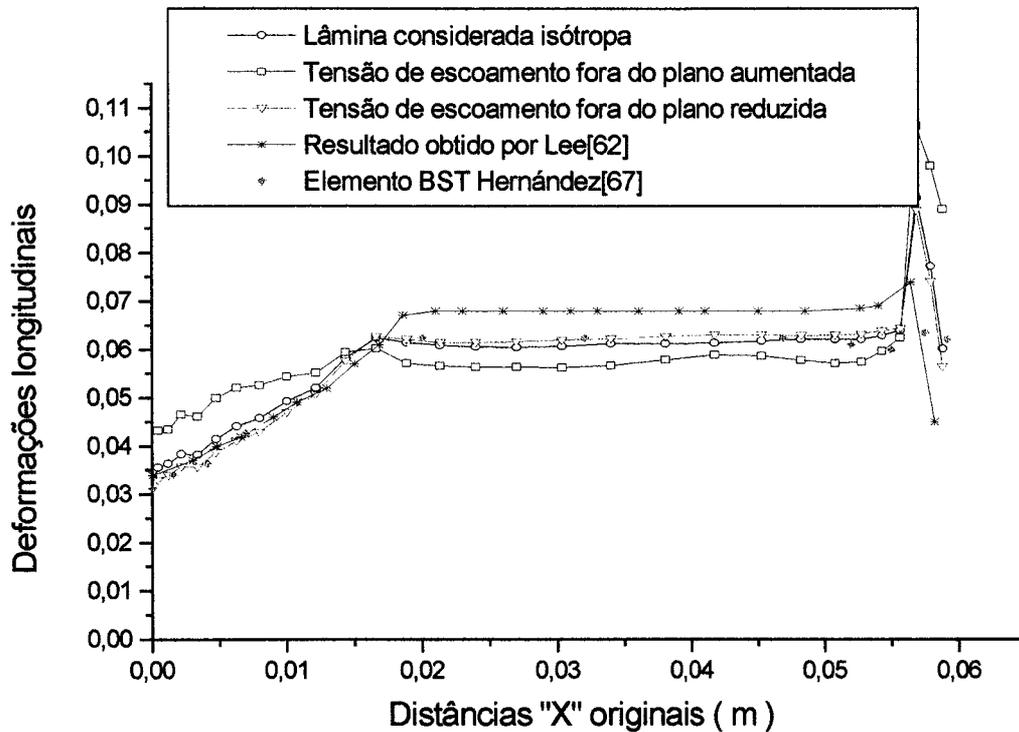


Fig. 7.32- Comparação com $\mu=0.3$ e penetração igual a 40 mm.

Na Figura 7.33, observa-se que a resposta é mais afastada do caso isotrópico quando a variação adotada para a tensão perpendicular ao plano médio da lâmina é maior. Contudo, quando há redução dessa tensão, ao contrário do que ocorreu no primeiro caso, a curva obtida mostra uma distribuição de deformações longitudinais mais uniforme, excetuando-se também a região de extremidade da lâmina próxima à matriz.

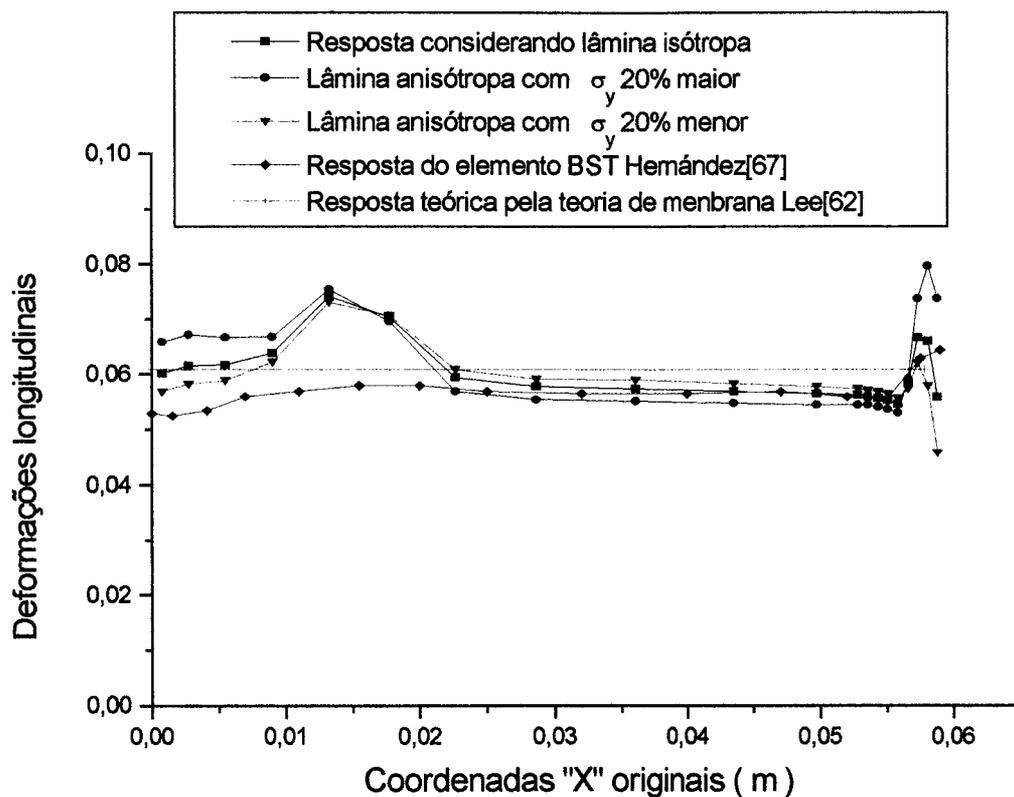


Fig. 7.33- Comparação com $\mu=0$ e penetração igual a 20 mm.

Na figura 7.34 representou-se a variação das espessuras ao longo da lâmina para o segundo modelo também considerando os casos em que há anisotropia. Verificou-se que concentram-se deformações junto à matriz produzindo a diminuição na espessura da lâmina. Junto ao punção pelo contrário, obteve-se espessuras ligeiramente maiores.

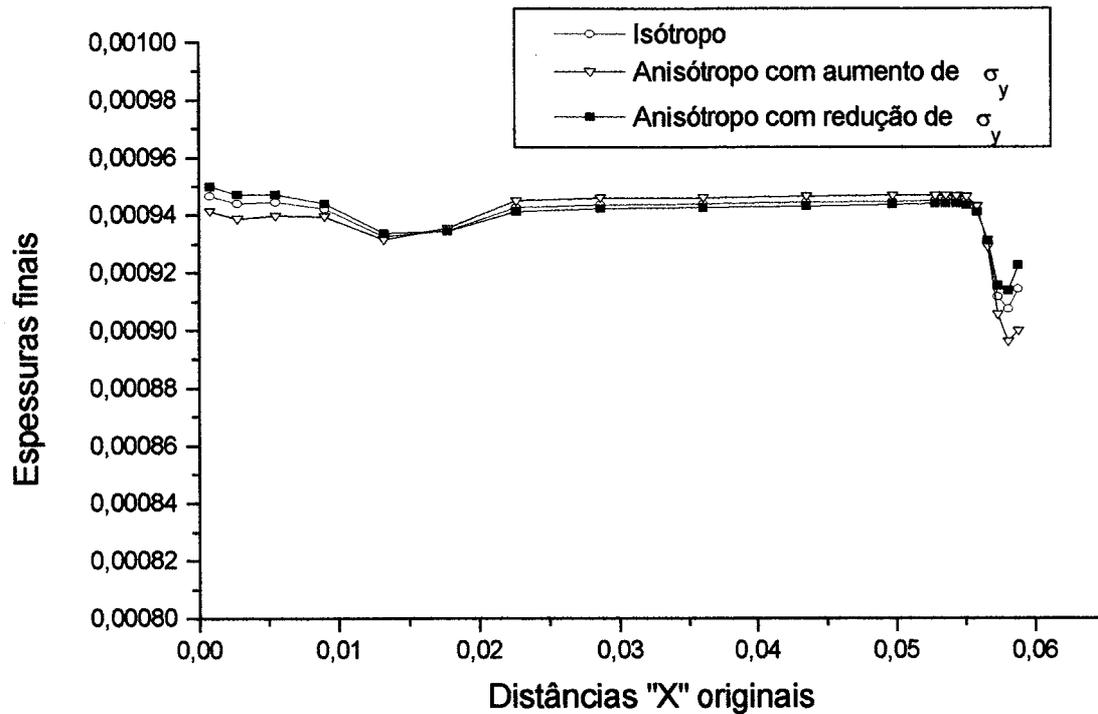


Fig. 7.34- Espessuras finais da lâmina com fricção nula e penetração de 20 mm.

7.5.2 Embutição de uma chapa metálica: OSU Benchmark test

O teste anterior foi modificado para simular um processo de embutição por meio de um punção agora hemisférico. Neste caso a lâmina de alumínio e as ferramentas utilizadas, são modeladas empregando os mesmos 28 elementos lineares de 4 nós dispostos em apenas uma camada (Fig. 7.35) porém utilizando simetria de revolução. Os dados de geometria e as propriedades dos materiais são idênticos aos do item anterior (Ver Fig. 7.25).

Efetou-se uma simulação preliminar com penetração do punção igual a 40 mm e com coeficiente de fricção igual a 0,15, considerando-se a lâmina isótropa. Nessa simulação compararam-se os resultados obtidos utilizando os elementos sólidos de 4 nós empregados aqui com os obtidos empregando-se os elementos de casca delgada, com simetria de revolução, propostos em Rojek[59]. Os resultados estão ilustrados na figura 7.36.

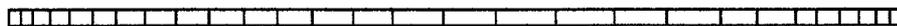


Fig. 7.35- Malha de 28 elementos distribuídos em uma camada.

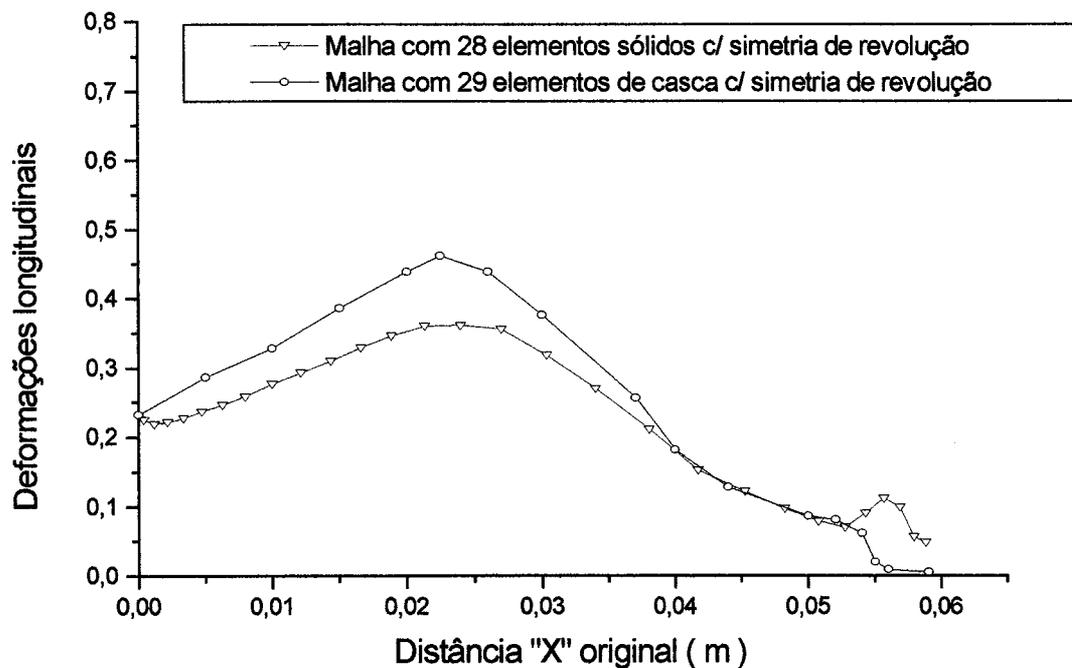


Fig. 7.36- Resultado comparativo entre os elementos de casca e os sólidos.

Num segundo processamento, a malha de 40 elementos distribuídos em duas camadas (Fig. 7.37), considerando-se o coeficiente de fricção nulo e uma penetração do punção igual a 20 mm. A anisotropia foi introduzida através do valor da tensão de escoamento fora do plano da lâmina, adotado entre menos 20% e mais 20% do valor da tensão de escoamento média admitida para este material (igual a 137,0 MPa). Os resultados neste caso são ilustrados nos diagramas das figuras 7.38 e 7.39.

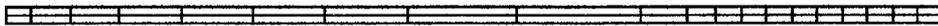


Fig. 7.37- Malha de 40 elementos distribuídos em duas camadas.

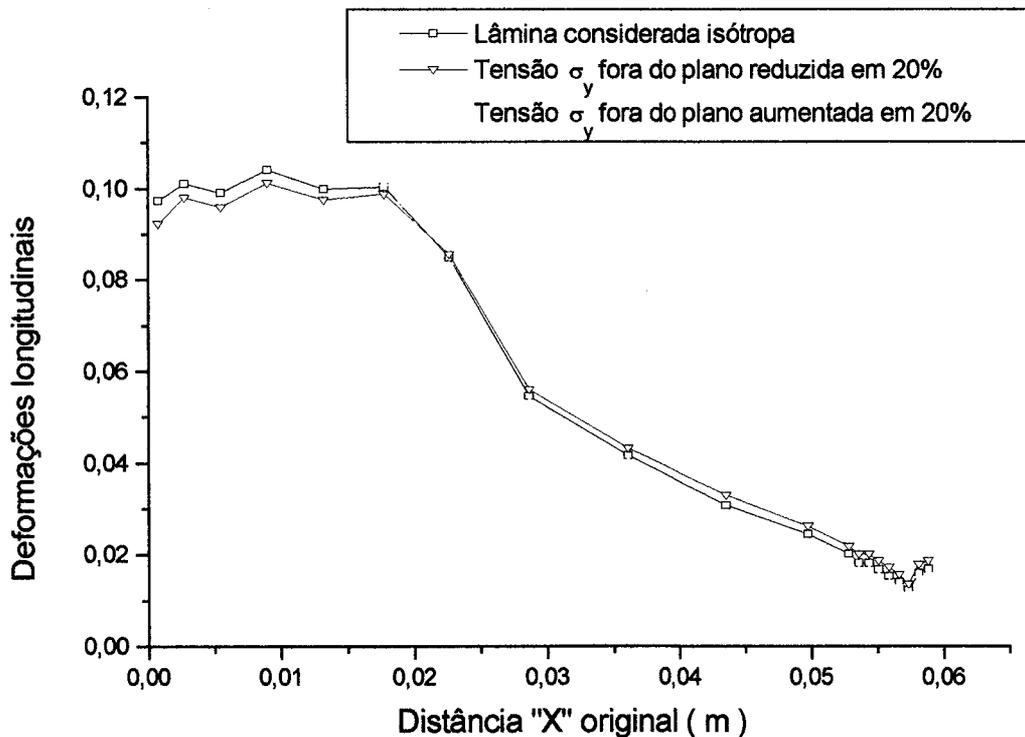


Fig. 7.38- Resultados para uma penetração do punção igual a 20 mm e coeficiente de fricção igual a 0,0.

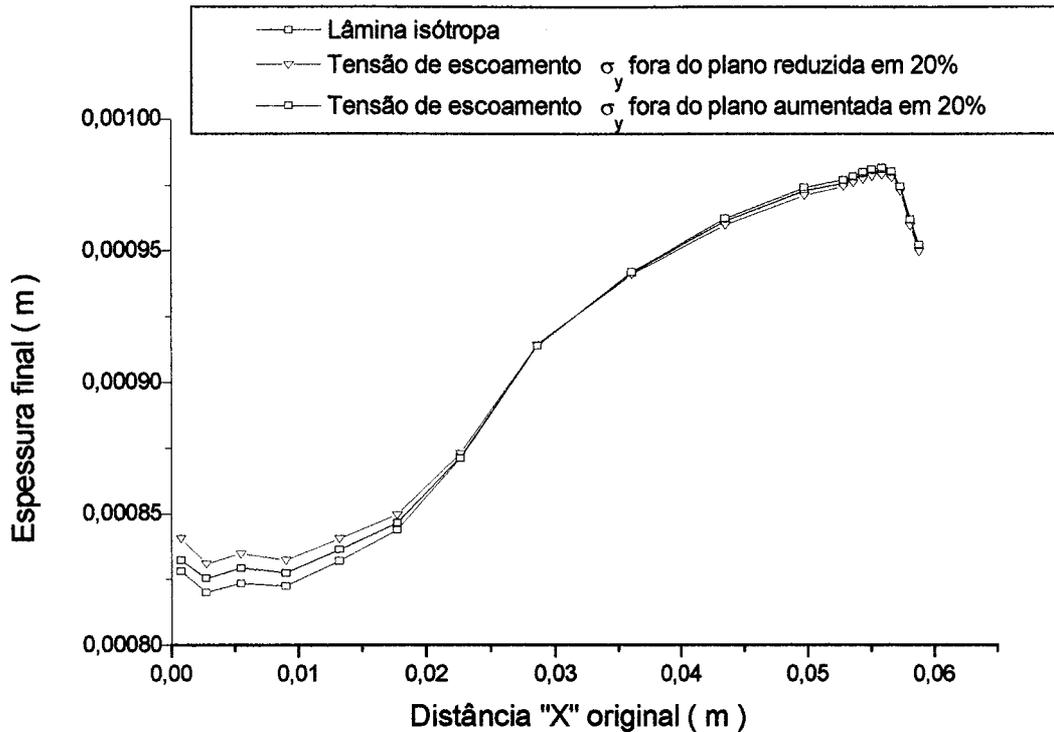


Fig. 7.39- Resultados para a variação de espessuras.

Da mesma forma que no exemplo anterior, verificou-se que a redução da tensão de escoamento faz com que as deformações longitudinais se tornem ligeiramente mais uniformes, com valores menores junto ao punção e ocorrendo o contrário na extremidade junto à matriz. Em relação à variação das espessuras, estas revelaram-se mais pronunciadas junto ao punção.

Na sequência, mantendo-se a penetração do punção igual a 20 mm e alterando-se o coeficiente de fricção para $\mu=0.30$, realizou-se a mesma série de estudos. Os resultados são ilustrados nos diagramas das figuras 7.40 e 7.41.

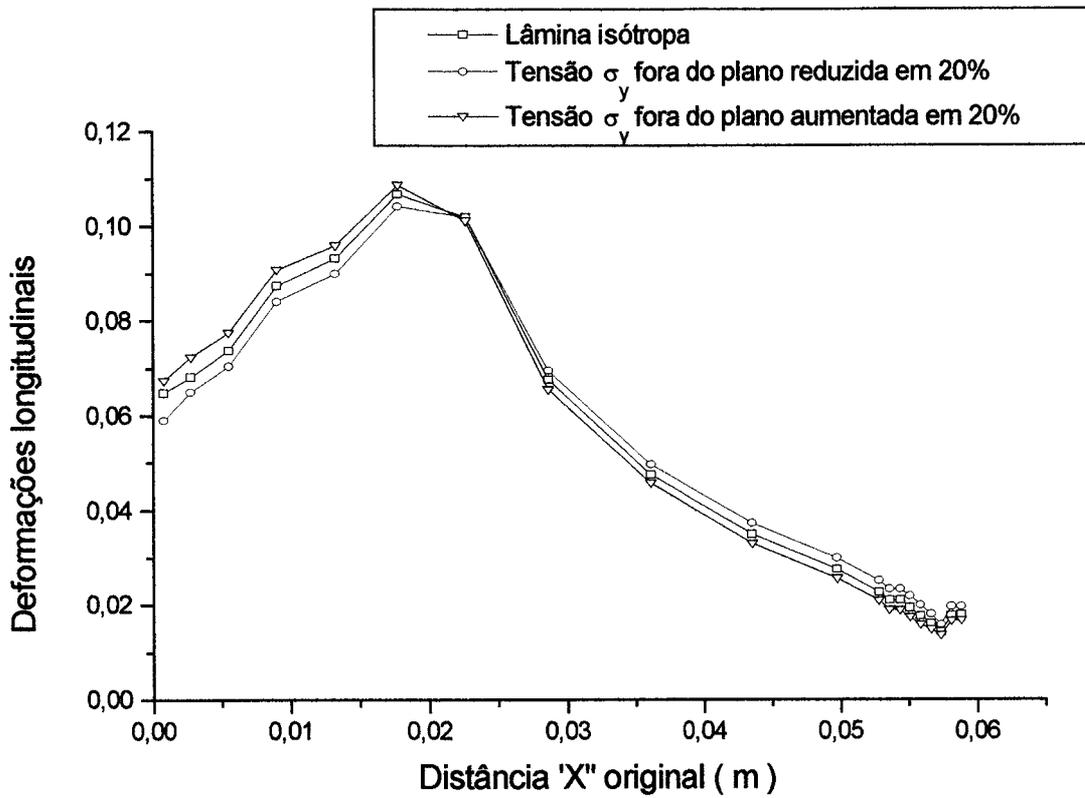


Fig. 7.40- Resposta com fricção igual a 0,3 e penetração do punção igual a 20 mm.

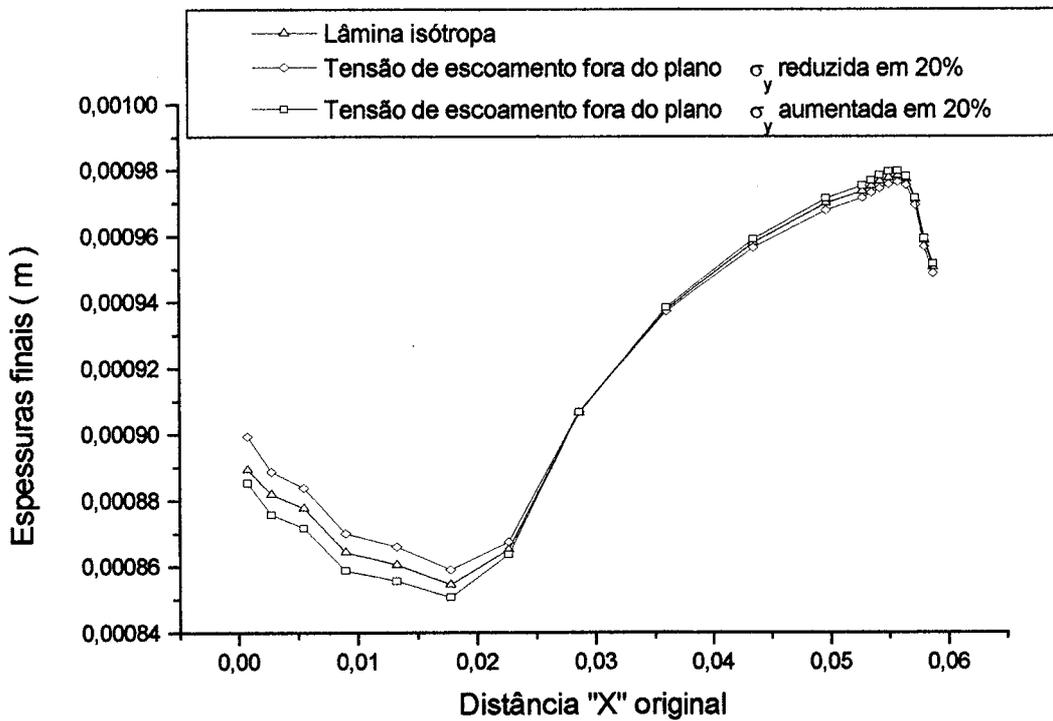


Fig. 7.41- Resultados para as espessuras finais.

Observando-se o conjunto de resultados obtidos para este teste, inclusive aqueles relativos ao estudo preliminar, constatou-se que a anisotropia produziu o mesmo tipo de resposta no que diz respeito a distribuição de deformações longitudinais e as espessuras finais observadas na lâmina. A variação dos valores do coeficiente de atrito também altera a distribuição de deformações de acordo com os resultados observados pois há uma influência do contato da lâmina com a matriz quando se introduz o coeficiente de atrito.

Finalizando o estudo deste exemplo, considerou-se uma penetração do punção igual a 40 mm e um coeficiente de fricção igual a 0.15 sob as mesmas condições do que foi feito anteriormente, obtendo-se os resultados ilustrados nas figuras 7.42 e 7.43.

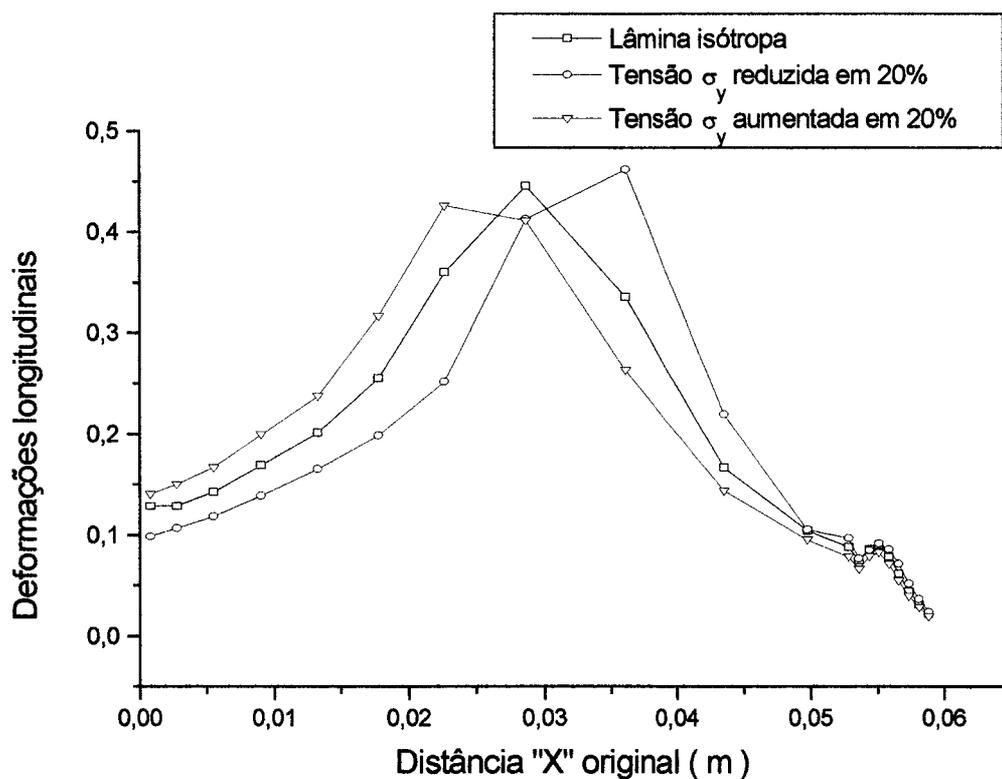


Fig 7.42- Resultados com penetração de 40 mm e fricção igual a 0,15.

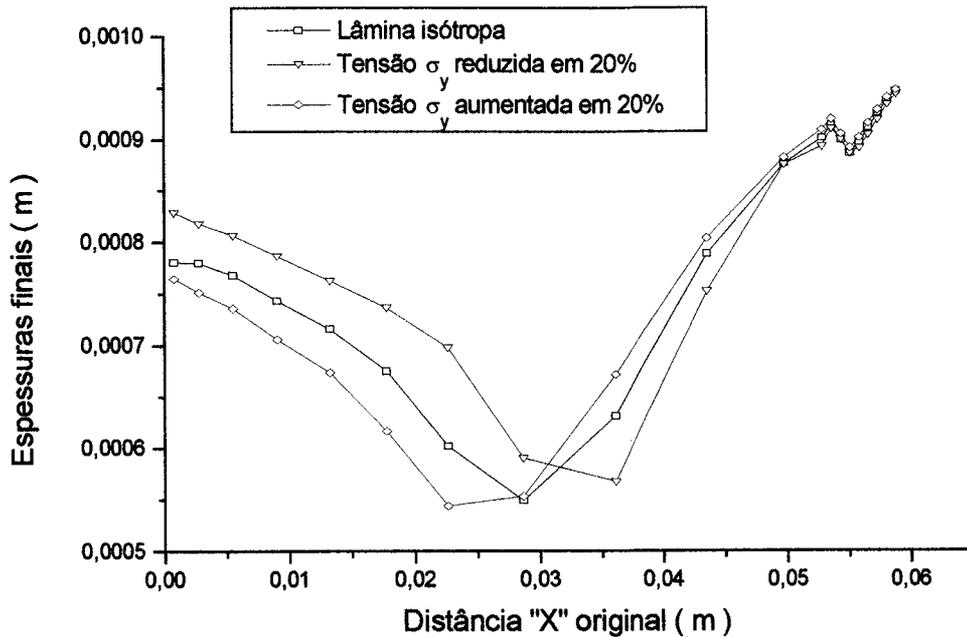


Fig. 7.43- Resultados para espessuras finais da lâmina.

Os resultados obtidos neste caso mostram que ao aumentar a penetração do punção com o coeficiente de fricção igual a 0,15, a variação da tensão de escoamento normal ao plano médio da chapa leva a significativas mudanças na distribuição das deformações longitudinais e espessuras finais da lâmina, é possível concluir que a medida que crescem as deformações maior é a influência da anisotropia. No exemplo seguinte serão feitas comparações com resultados experimentais.

7.5.3 Chalmers University test: Embutição de lâmina metálica

Este teste consiste na embutição de uma lâmina de aço modelada por 100 elementos lineares de 4 nós com simetria de revolução. As ferramentas, também de aço, tem simetria de

revolução incluindo-se um "blankholder" (ferramenta que dificulta o deslizamento da lâmina) também modelado pelo mesmo tipo de elemento e que aplica sobre a lâmina uma força de 80 KN. Admite-se que durante todo o processo o "blankholder" está em regime elástico-linear. Os dados de geometria da lâmina e das ferramentas utilizadas são os mostrados na figura 7.44:

As propriedades do aço que constitui a lâmina, considerada inicialmente isotrópica, são as seguintes:

$$E = 21000 \text{ KN/cm}^2 \quad \nu = 0.30 \quad \rho = 7900.0 \text{ Kg / m}^3$$

$$\text{Curva tensão x deformação uniaxial: } \sigma = 547.0 \times 10^6 (6.15 \times 10^{-16} + \epsilon^{ep})^{0.18} \quad (\text{ em N/m}^2)$$

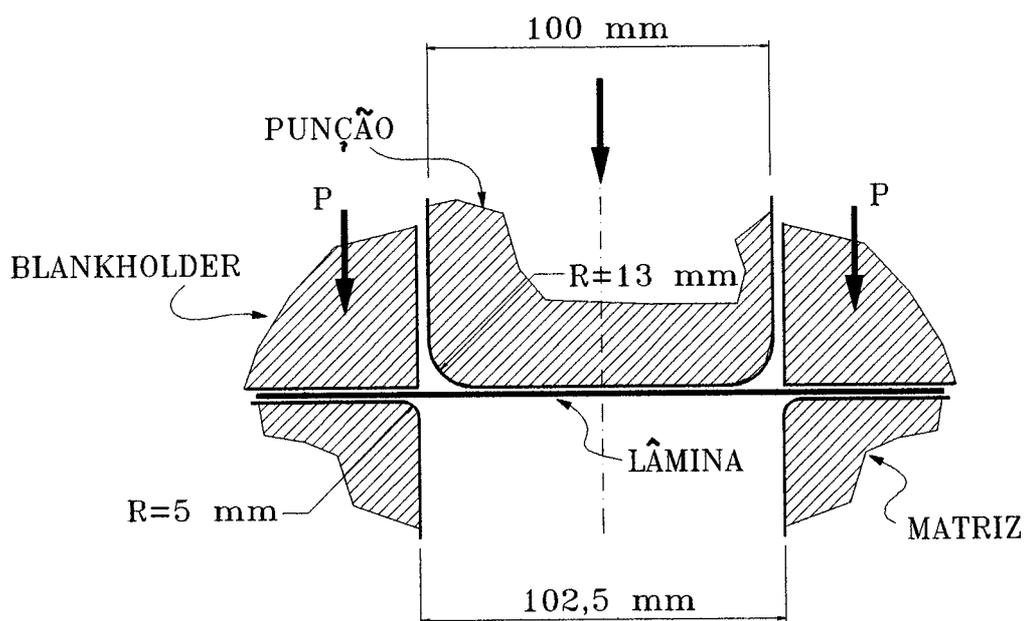


Fig. 7.44- Geometria das ferramentas utilizadas no teste.

A figura 7.45 mostra a malha de elementos finitos utilizada.

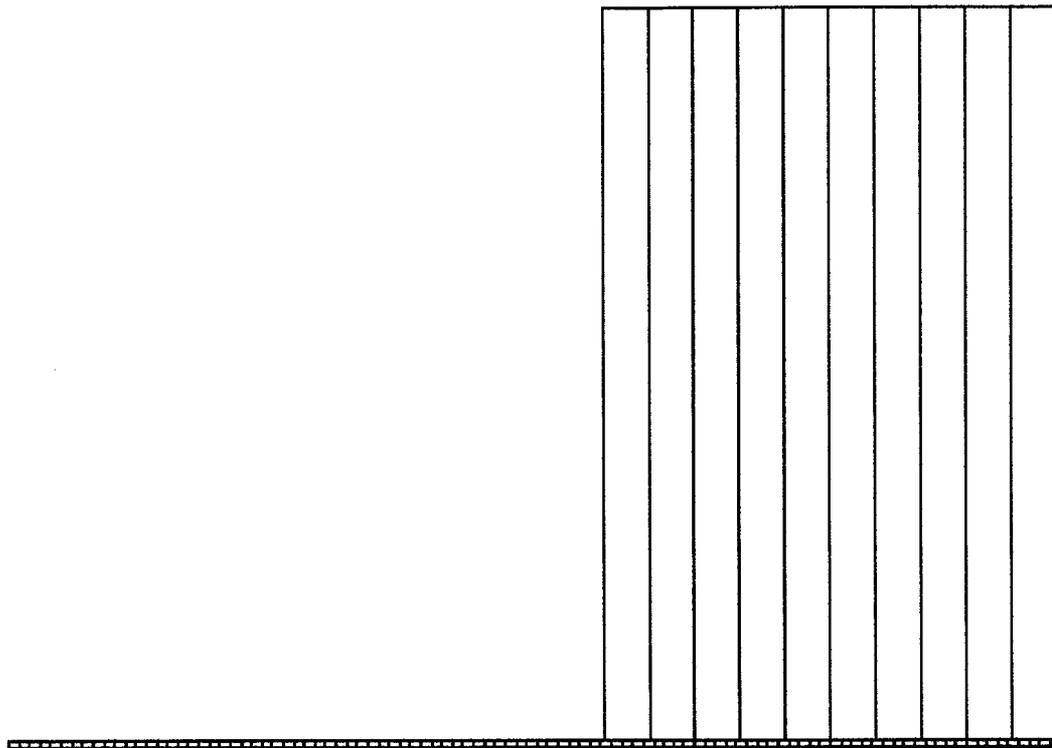


Fig. 7.45- Malha indeformada com 100 elementos distribuídos na lâmina e 10 elementos distribuídos no blankholder.

Admitiu-se em primeiro lugar uma tensão de escoamento média de referência σ_e , no plano da lâmina, igual a $173,1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ e em seguida igual a $176,2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$. Mantendo-se a tensão de escoamento transversal ao plano σ_y constante e igual a $167,0 \times 10^6 \text{ N/m}^2$, construíram-se os tensores de mapeamento para o espaço fictício de modo a ter-se variações de 3,5 % e de 5,5 % para menos com relação ao valor da tensão de escoamento no plano. Isto equivale a introduzir a anisotropia através da relação entre as tensões de escoamento no plano da lâmina e no plano perpendicular ao da lâmina.

Compararam-se os resultados obtidos, para uma penetração total do punção igual a 31.5 mm, com os valores experimentais descritos em ROJEK[59] para o mesmo problema. Neste

exemplo o coeficiente de fricção foi considerado igual a $\mu = 0.05$, o que, de acordo com ROJEK[59], corresponde a ter as superfícies das ferramentas ligeiramente lubrificadas. O coeficiente de penalização para o algoritmo de contato é igual a 0.01 para as forças de contato normal e tangencial. Os resultados obtidos em deformações longitudinais e circunferenciais são os seguintes.

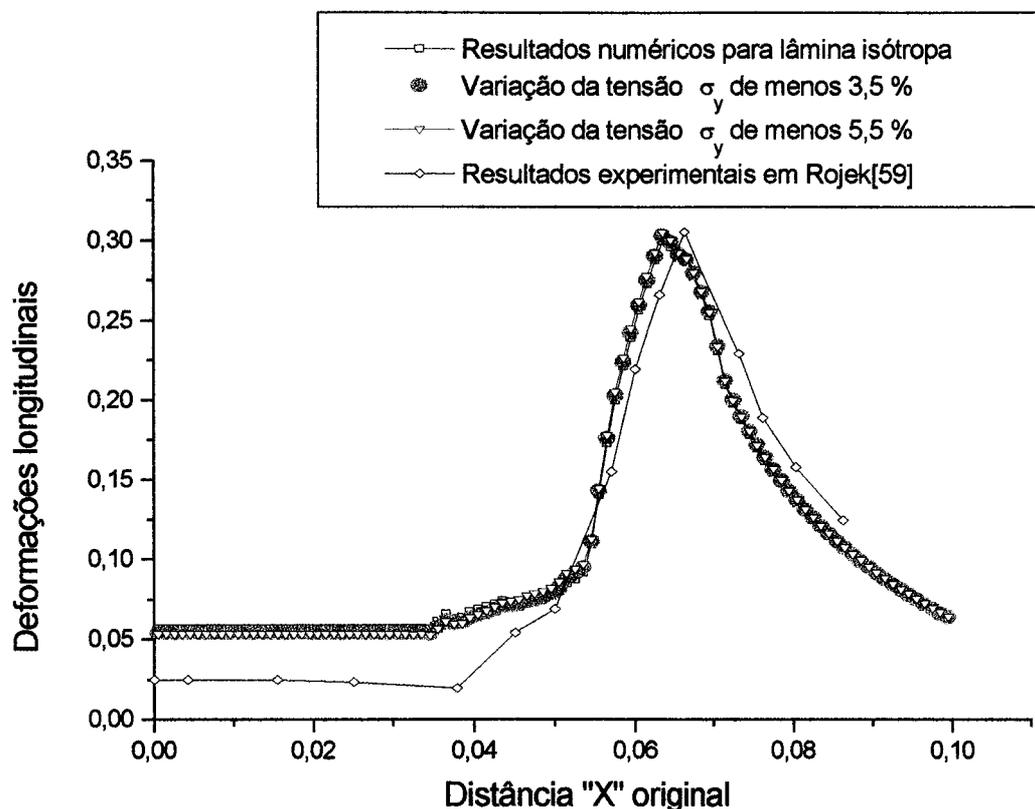


Fig. 7.46- Resultados numéricos e experimentais para deformações longitudinais.

Observa-se que para as variações consideradas da relação entre a tensão de escoamento σ_y e as tensões médias no plano, não houve significativa alteração dos resultados em deformações longitudinais. Os resultados contudo, mostram razoável aproximação com o experimental. Na

figura 7.47 amplia-se parte do gráfico das deformações longitudinais para poder observar o que ocorre com os resultados à medida em que se aumenta a relação entre tensões de escoamento.

O mesmo gráfico mostra que à medida em que a tensão média de escoamento se afastou da tensão σ_y , o pico de deformações observado aproximou-se do valor experimental. As deformações junto ao punção afastaram-se com relação ao do caso isótropo em direção à curva experimental destacada em Rojek[59].

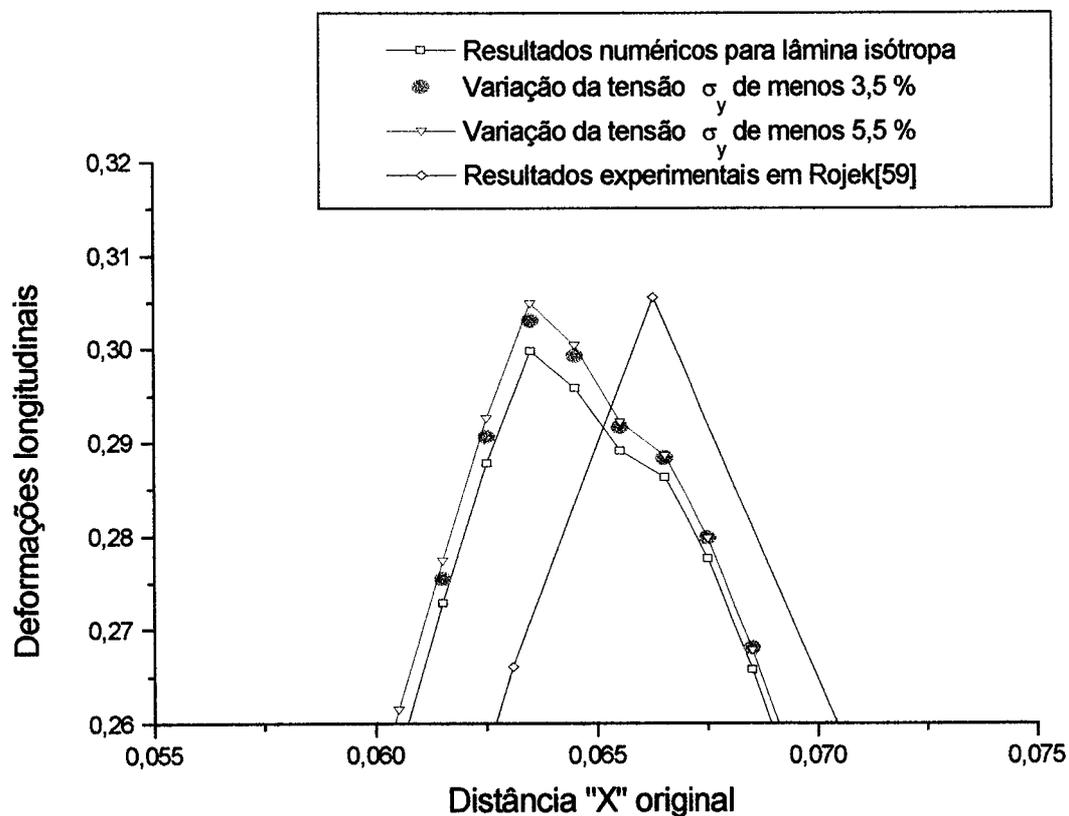


Fig 7.47 - Destaque dos valores máximos de deformações longitudinais.

Os resultados destacados na figura 7.48 para as deformações circunferenciais também mostram boa aproximação aos resultados experimentais assinalados.

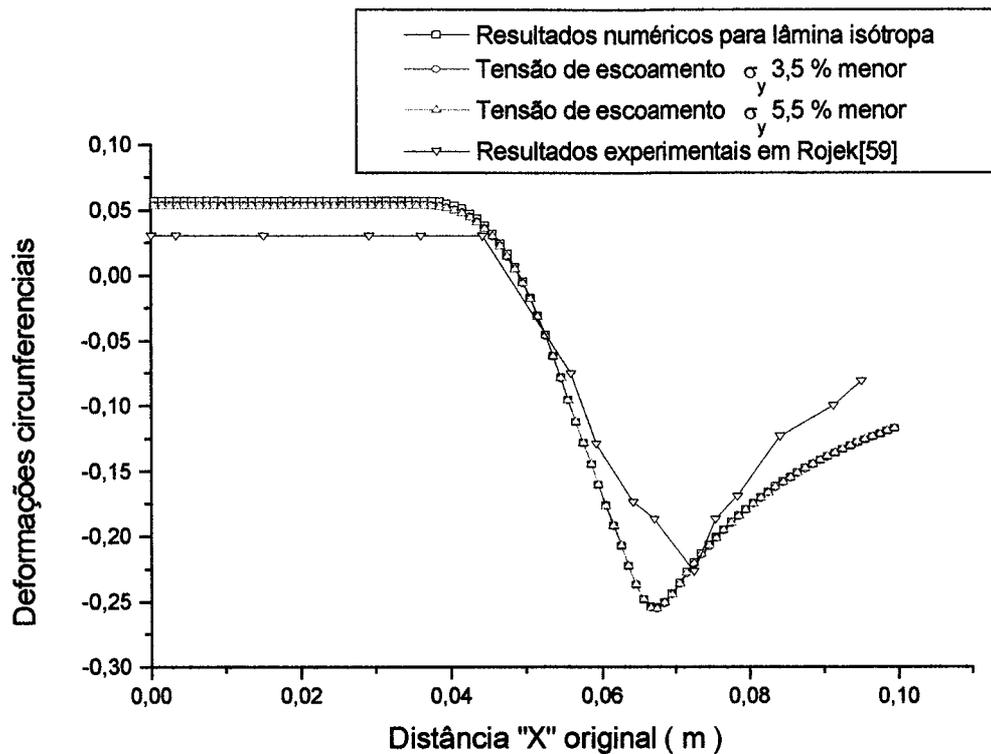


Fig. 7.48 - Resultados comparativos das deformações circunferenciais.

Finalizando esta série de exemplos, considerou-se o caso de anisotropia onde a tensão de escoamento no plano da lâmina é dada por $\sigma_x = 173,1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ e a tensão de escoamento σ_y fora do plano é 15% menor.

Mantidas as condições de atrito e de penetração do punção, aumentou-se a rigidez da lâmina contra as deformações longitudinais, elevando-se o valor do módulo de elasticidade nessa direção para **231 GPa** e reduziu-se a rigidez contra as deformações circunferenciais adotando-se o módulo de elasticidade do material nessa direção igual a **189 GPa**, conservando na direção perpendicular ao plano da lâmina o valor médio previsto de **210 GPa**. Estas considerações tem por objetivo representar melhor o comportamento do material atribuindo-se rigidez maior para a

direção suposta como direção de laminação da chapa (longitudinal) e rigidez menor na direção perpendicular a esta (circunferencial), ambas no plano da lâmina. O valor médio atribuiu-se a direção perpendicular ao plano da lâmina. Os resultados em deformações longitudinais e circunferenciais em comparação com os valores experimentais são mostrados nas figuras 7.49 e 7.50.

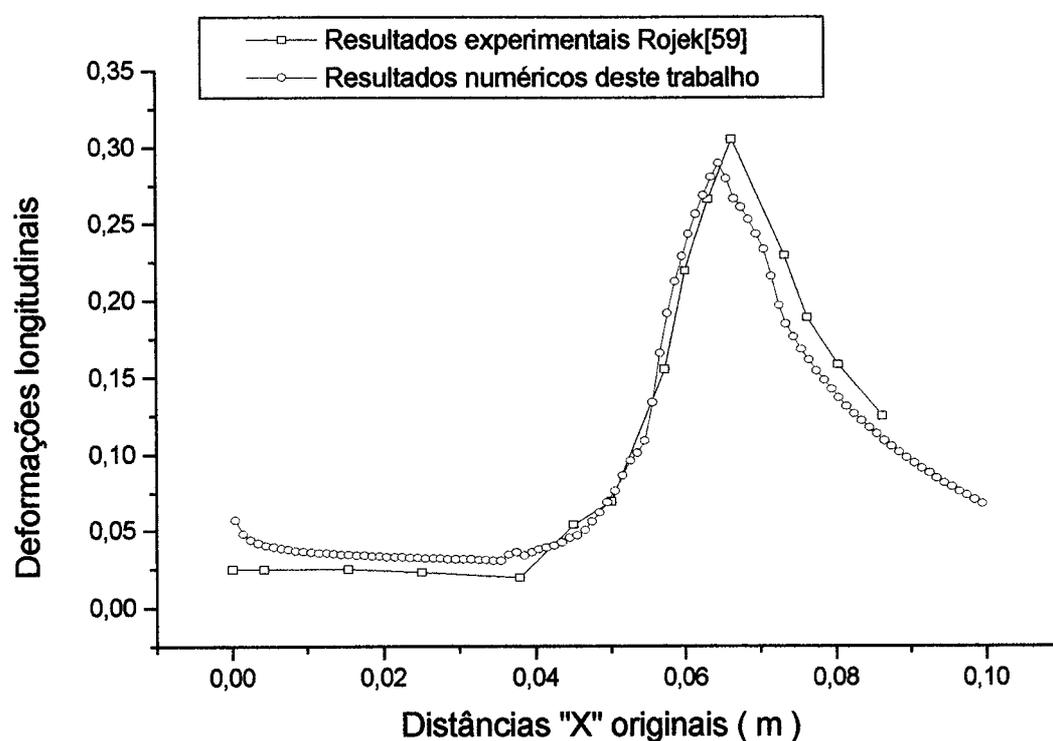


Fig. 7.49- Resultados comparativos com rigidezes alteradas.

A figura 7.51 mostra como variou a distribuição de espessuras finais da lâmina, com resultados numéricos nas três situações de anisotropia consideradas em comparação com o caso isotrópico. A deformada final da lâmina é ilustrada na figura 7.52.

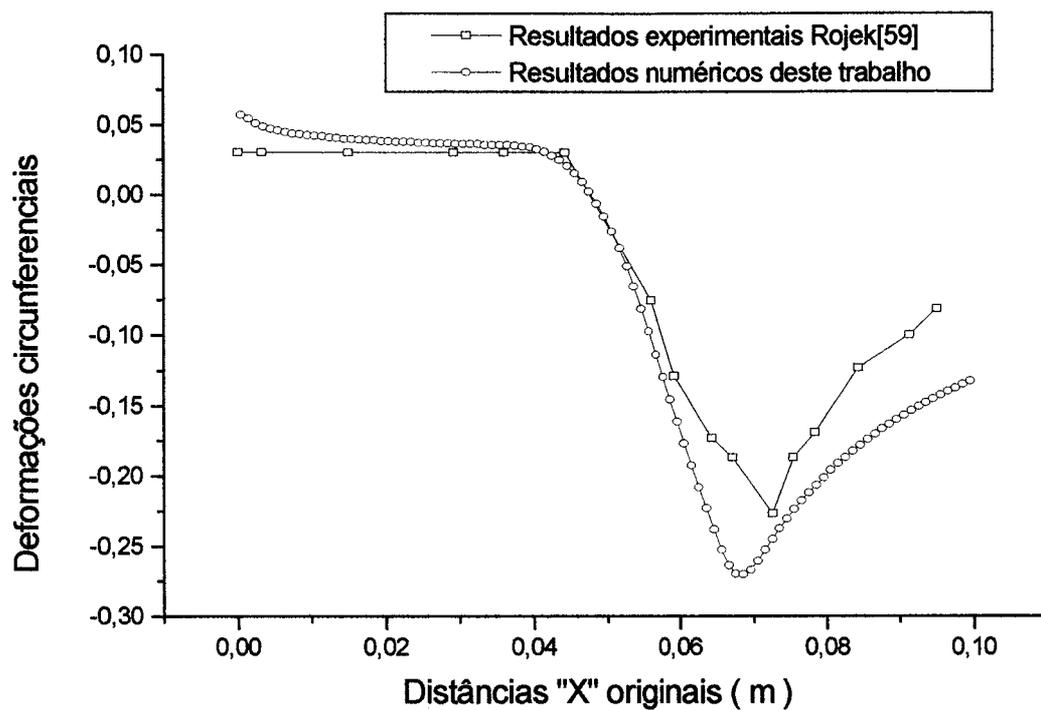


Fig. 7.50- Resultados comparativos para deformações circunferenciais.

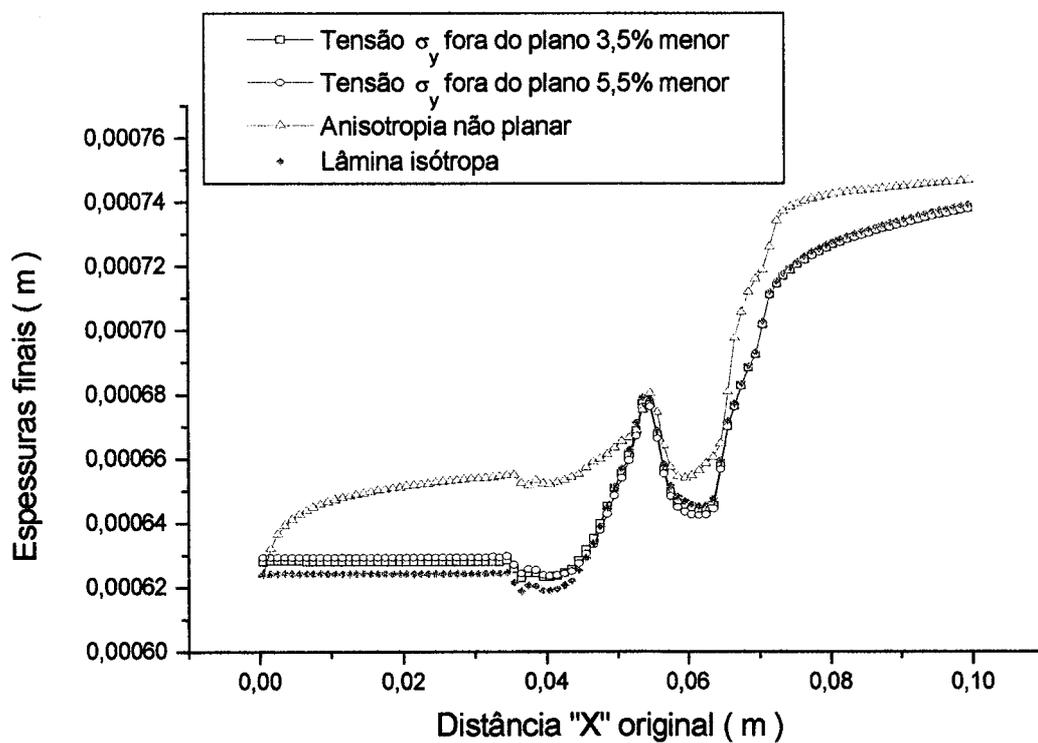


Fig. 7.51- Resultados de espessuras finais exclusivamente numéricas.

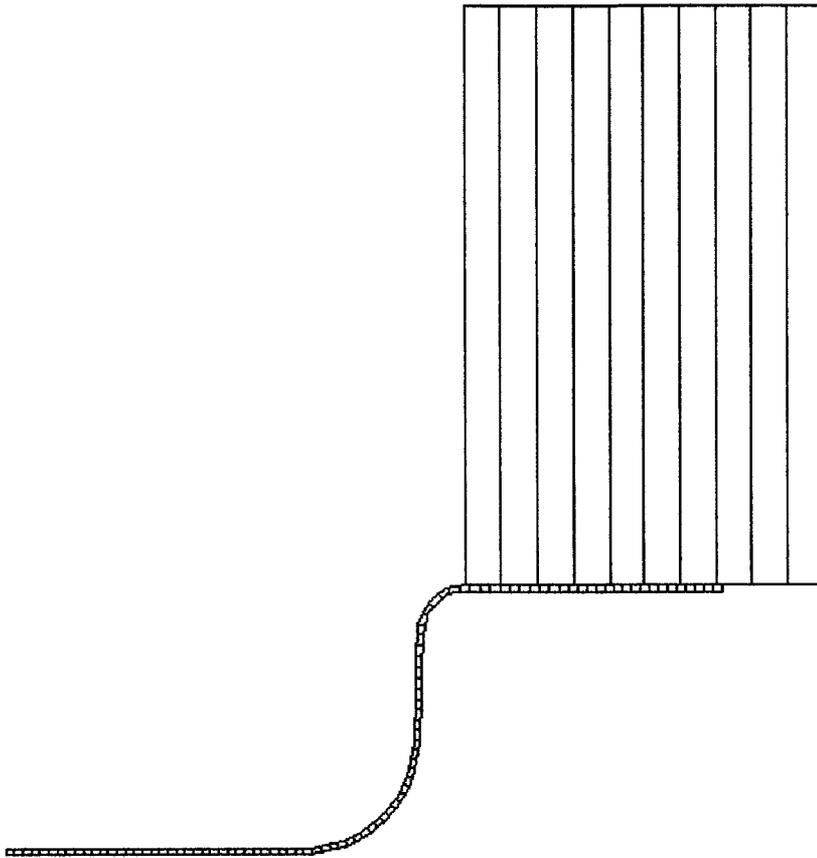


Fig. 7.52 - Deformada final da lâmina para penetração de **31,5 mm**.

7.6 Considerações gerais sobre os resultados obtidos

Os resultados do último exemplo mostram que ao introduzir particularmente a anisotropia a resposta obtida aproxima-se mais dos valores experimentais. Isto indica que o modelo de anisotropia por tensores de mapeamento empregado neste trabalho pode produzir bons resultados, desde que se possa determinar com precisão as propriedades mecânicas necessárias para as

direções principais de ortotropia. Comparado ao que é necessário conhecer quando se empregam funções de fluência como as propostas por Hill, isto representa de certo modo uma desvantagem, já que a determinação de propriedades mecânicas como o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento na direção perpendicular ao plano médio da lâmina é particularmente difícil e é feita de maneira indireta, dado que as espessuras são normalmente pequenas. Neste caso o experimento necessário para determinar estas propriedades adicionais é bem mais sofisticado.

Entretanto excluindo-se o caso de conformação de lâminas e eventualmente casos em que algumas das propriedades mecânicas necessárias são de difícil determinação, o modelo de anisotropia por tensores de mapeamento não apresenta dificuldades maiores para sua implementação e utilização e os resultados obtidos neste trabalho indicam que é possível obter bons resultados em aplicações práticas. Convém ressaltar que se forem disponíveis e confiáveis todos os dados de propriedades mecânicas dos materiais, mais precisa será a consideração da anisotropia empregando-se os tensores de mapeamento de modo que os resultados gerados pelo programa se tornam proporcionalmente mais confiáveis.

CAPÍTULO 8

8. CONCLUSÕES

8.1 Contribuições contidas nesta tese e conclusões

Pode-se considerar como contribuição teórica original contida neste trabalho a proposta e a implementação computacional de operações do tipo "pull-back" e "push-forward" [41][43] sobre tensores bi-pontuais de quarta ordem. É o caso dos tensores de mapeamento utilizados para representar um material anisótropo via uma formulação isótropa equivalente (espaço isótropo fictício). Os tensores de mapeamento são deduzidos na configuração material e sobre eles realizam-se as transformações acima para a obtenção dos referidos tensores na configuração deformada.

Resumem-se a seguir todas as implementações feitas e que no seu conjunto constituem uma contribuição ao estudo das grandes deformações e do comportamento dinâmico de elementos estruturais formados por materiais compostos.

- 1- Implementação da teoria de interação mecânica de substâncias no contínuo na sua formulação em paralelo em um programa de análise dinâmica explícita via método dos elementos finitos..
- 2- Implementação no mesmo programa da consideração de materiais anisótropos por meio de formulação isótropa equivalente.
- 3- Implementação das transformações dos tensores de mapeamento de quarta ordem para a configuração deformada.
- 4- Aplicações a vários tipos de compostos em particular ao caso de concreto com adição de fibras curtas, empregando-se uma função simples de dano-elastoplástico para simular a degradação da matriz de concreto.
- 5- Aplicações aos casos de conformação de lâminas metálicas com a consideração da anisotropia via formulação isótropa equivalente.

De um modo geral obtiveram-se resultados satisfatórios destacando-se os aspectos que seguem. A teoria de misturas revelou-se eficiente nas simulações feitas em comparação com resultados de outros autores, e mesmo com alguns resultados experimentais relatados na bibliografia. A possibilidade de tratar cada substância em separado abre espaço para introduzir novos modelos constitutivos sem que seja necessário modificar substancialmente o programa. As restrições ao seu emprego se reduzem às próprias limitações numéricas dos elementos finitos em consideração. Como exemplo haveria a necessidade de se utilizar elementos finitos específicos para levar em conta a delaminação em materiais compostos estratificados, apesar de que a resposta tensional dos estratos pode ser administrada pela teoria de misturas sem maiores dificuldades.

Destaca-se em particular os bons resultados obtidos no caso de compostos de matriz de concreto reforçado com fibras curtas de polipropileno. Verificou-se que mesmo não se empregando uma função de fluência mais adequada, os resultados obtidos aproximaram-se bem dos experimentais fornecidos em Balaguru[68]. Nesta direção, resultados melhores seriam obtidos

mediante o emprego de funções de fluência adequadas para o concreto e mencionadas nos trabalhos de Oller [2][3][4][49] e Oliver[13], por exemplo, e mediante a introdução de funções de dano unilateral, de modo a ter-se em conta o fechamento de fissuras na compressão. Neste trabalho limitou-se a demonstrar a viabilidade do emprego da teoria de misturas no tratamento destes tipos de materiais.

Outro resultado obtido no capítulo de exemplos diz respeito à placa laminada que foi simulada por meio da composição de dois materiais isotrópicos. Neste caso foi feita uma simplificação considerando-se que as fibras distribuem-se em iguais proporções a 90° e a 0° , condição suposta suficiente para admitir-se que o material, do ponto de vista macroscópico, é formado por duas substâncias isotrópicas. Os resultados mostram que a resposta, considerando-se uma substância equivalente com propriedades médias, não é adequada, já que ela não permite identificar o momento em que uma das substâncias formadoras do composto encontra o seu limite de fluência. O exemplo mostra claramente que utilizando-se a teoria de misturas o ponto em questão tem por efeito uma perturbação dos deslocamentos da placa sob a ação dinâmica. Ressalta-se contudo, que não se levou em conta problemas de delaminação

A anisotropia via formulação isotrópica equivalente mostrou resultados satisfatórios em comparação com resultados de outros autores, as diferenças verificadas eram esperadas e são próprias de um modelo que não tem como base os mesmos princípios considerados na dedução de funções de fluência clássicas como as de Hill. Observa-se que as funções de Hill e as derivadas desta aplicam-se a problemas de anisotropia inicial na plasticidade sem considerar, por exemplo, a anisotropia na fase elástica. Na conformação de metais obviamente esta não é uma restrição grave, contudo sua generalização a outros casos deve ser feita cuidadosamente.

O emprego de uma formulação isotrópica equivalente para a anisotropia, por outro lado, é termodinamicamente consistente como o demonstram estudos de Oller[2] na medida em que sempre se verifica o cumprimento da regra da normalidade na plasticidade. Melhores ou piores resultados são obtidos em função da qualidade dos parâmetros mecânicos dos materiais fornecidos e utilizados no momento de calcular os tensores de mapeamento. Os resultados dos exemplos estudados mostram, contudo, que poucas informações a respeito do material bastam para que se tenham resultados próximos aos de outros autores e mesmo próximos aos resultados experimentais considerados.

Em particular uma observação deve ser feita em relação ao exemplo 7.2.3 contido no capítulo 7 desta tese, nele verificou-se que a função de fluência de Hill para materiais anisótropos sofre influência excessiva das tensões tangenciais e produz resultados fora daquilo que seria esperado, o que já havia sido obtido anteriormente por Oller[2]. A consequência disto em problemas onde predominam as tensões tangenciais são imprevisíveis. A utilização de uma formulação isótropa equivalente na anisotropia aponta para soluções numéricas matematicamente mais consistentes. As bases desta formulação contidas nos trabalhos de Betten[7][20] por exemplo, dão claramente a idéia das dificuldades e do muito que há a ser explorado nesta linha de pesquisa.

Nos exemplos de conformação de lâminas metálicas o objetivo pretendido foi alcançado. Também nestes exemplos verifica-se o mesmo bom desempenho das formulações implementadas em confronto com estudos de outros autores e mesmo com os resultados experimentais fornecidos no Chalmers University Test (item 7.5.3 do capítulo 7) por exemplo.

Obviamente, apenas a limitada quantidade de exemplos propostos não assegura a completa eficiência dos modelos empregados; seria necessário por exemplo estudar ainda a influência do tipo de elemento finito utilizado e como devem ser medidos parâmetros constitutivos importantes utilizados na determinação dos tensores de mapeamento. Ao utilizar funções de fluência como as de Hill não há necessidade de conhecer, por exemplo, o módulo de elasticidade na direção perpendicular ao plano de uma lâmina a ser conformada. No caso da anisotropia por tensores de mapeamento este dado é importante uma vez que ele é necessário ao escrever a matriz de constantes elásticas do material anisótropo que é utilizada no cálculo do tensor de mapeamento de deformações (ver o capítulo 5). Sempre é possível admitir para esses dados, normalmente, não disponíveis, um valor médio aproximado adequado ao material em estudo (o que foi feito nestes exemplos sob pena de introduzir um erro, ainda que calculado, nos resultados finais obtidos com o modelo proposto).

8.2 Propostas de desenvolvimentos futuros

Os estudos conduzidos apontam para a necessidade de desenvolver trabalhos futuros na área de compostos dentre os quais pode-se citar:

- 1- A implementação das formulações mista e em série além da paralela para outros elementos finitos e comparar resultados com casos experimentais.
- 2- Implementar modelos de dano adequados a materiais compostos de matriz frágil.
- 3- Implementar a possibilidade de considerar materiais laminados tendo-se em conta o fenômeno da delaminação.
- 4- Considerar o efeito da variação de temperatura em problemas com grandes deformações em materiais compostos.

No que se refere especificamente ao estudo dos materiais anisótropos via formulação isótropa equivalente pode-se mencionar, além dos itens anteriores, as seguintes linhas de pesquisa:

- 1- Introduzir funções de fluência clássicas como as de Hill e outras como as de Barlat e Chu, considerando-se exemplos processados com o uso de malhas e elementos finitos iguais, a fim de estabelecer uma comparação coerente entre os resultados de cada formulação.
- 2- Realizar um número maior de testes utilizando-se esta formulação a fim de assegurar a sua eficiência e facilidade de aplicação frente a outras propostas e também estudos comparativos no que diz respeito também ao custo computacional.

CAPÍTULO 9

9. BIBLIOGRAFIA

9.1 Referências bibliográficas

- [1] LUBLINER, J. (1972). On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics. *Int. J Non-linear Mechanics*. Vol. 7, p.237-254, Pergamon Press.
- [2] OLLER, S. ; BOTELHO, S. ; MIQUEL, J. ; OÑATE E. (1995). An anisotropic elasto-plastic model based on an isotropic formulation. *Eng. Computations*, Vol. 12, p.245-262, Pineridge Press.
- [3] OLLER, S. ; OÑATE, E. ; MIQUEL, J. ; BOTELHO, S. (1994). A plastic damage constitutive model for composite materials. *Int. J. Solids and Structures*.(A ser publicado).
- [4] OLLER, S. ; OÑATE, E. ; OLIVER, J. ; LUBLINER, J. (1990). Finite element nonlinear analysis of concrete structures using a "plastic-damage model". *Eng. Fracture*

- Mechanics, Vol. 35, No. 1/2/3, p.219-231, Pergamon Press 1990.
- [5] OWEN, D. R. J. ; LI, Z. H. (1988). Elastic-plastic dynamic analysis of anisotropic laminated plates. *Comp. Meth. in App. Mechanics and Engineering*, Vol. 70, p.349-365, Elsevier Sc. Publishers.
- [6] OWEN, D. R. J. ; LI, Z. H. (1987). A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods- I. Fundamentals and static analysis. *Computers & Structures*, Vol. 26, No. 6, p. 907-914, Pergamon Journals.
- [7] BETTEN, J. (1988). Applications of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *Int. J. of Plasticity*, Vol. 4, p.29-46, Pergamon Journals.
- [8] OLIVER, J. ; OÑATE, E. (1986). A total lagrangian formulation for the geometrically nonlinear analysis of structures using finite elements. Part II: Arches, Frames and axisymmetric shells. *Int. J. for Num. Meth. in Engineering*, Vol. 23, p.253-274, John Wiley & Sons.
- [9] HUGHES, T. J. R. ; LIU, W. K. (1978). Implicit-explicit finite elements in transient analysis: Stability theory. *J. of App. Mechanics*, Vol. 45, p.371-374.
- [10] HUGHES, T. J. R. ; LIU, W. K. (1978). Implicit-explicit finite elements in transient analysis: Implementation and numerical examples. *J. of App. Mechanics*, Vol. 45, p.375-378.
- [11] CHOI, I. ; HORGAN, C. O. (1977). Saint-Venant's principle and end effects in anisotropic elasticity. *J. of App. Mechanics*, Vol. September 1977, p.424-430.
- [12] HUGHES, T. J. R. ; CAUGHEY, T. K. ; LIU, W. K. (1978). Finite-element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy. *J. of App. Mechanics*, Vol. 45, p.366-370.
- [13] OLIVER, J. ; CERVERA, M. ; OLLER, S. ; LUBLINER, J. (1990). Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. *SCI-C 1990, Second Int. Conf. on Computer Aided Design of Concrete Structure, Zell am See, Austria*, p.945-957.
- [14] SIMO, J. C. ; GOVINDJEE, S. (1989). Non linear B-Stability and simmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity. *Div of App. Mechanics Dept. of Mech. engineering, Stanford University*.
- [15] SIMO, J. C. (1990). Nonlinear stability of the time-discrete variational problem of

- evolution in nonlinear heat conduction, plasticity and viscoplasticity. Div of App. Mechanics Dept. of Mech. engineering, Stanford University.
- [16] COLEMAN, B. D. ; MIZEL, V. J. (1964). Existence of caloric equations of state in thermodynamics. *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 40, No. 4, p.1116-1125.
- [17] OLLER, S. ; OÑATE, E. (A ser publicado). A hygro-thermo-mechanical constitutive model for multiphase composite materials. *Int. J. Solids and Structures*.
- [18] OLLER, S. ; OÑATE, E. ; MIQUEL, J. (A ser publicado). A mixing anisotropic formulation for analysis of composites. *Comm. in Num. Meth. in Engineering*.
- [19] GARINO, C. G. ; OLIVER, J. (1995). Un modelo constitutivo para el analisis de solidos elastoplasticos sometidos a grandes deformaciones. Parte I: Formulación teórica y aplicación a metales. *Rev. Int. de Mét. Num. en Ingeniería*, Vol. II, 1, p.105-123.
- [20] BETTEN, J. (1981). Creep theory of anisotropic solids. *Journal of Rheology*, Vol. 25(6), p.565-581, John Wiley and Sons.
- [21] KATTAN, P. I. ; VOYIADJIS, G. Z. (1993). Overall damage and elastoplastic deformation in fibrous metal matrix composites. *Int. J. of Plasticity*, Vol. 9, p.931-949, Pergamon Press.
- [22] HILL, R. (1948). A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Royal Soc. London Proc.* 193A, 281.
- [23] TAI, W. H. (1988). A damage mechanics model for anisotropic material and its application to sheet metal forming. *Int. J. of Solids Structures*, Vol. 24, No. 10, p.1045-1057, Pergamon Press.
- [24] PERIĆ, D. ; DUTKO, M. ; OWEN, D.R.J. (1991). On superquadric functional representation: Computational issues with applications. Dept. of Civil Eng., Univ. College of Swansea.
- [25] BARLAT, F. ; LIAN, J. (1989). Plastic behaviour and stretchability of sheet metals. Part 1: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions. *Int. J. of Plasticity*, Vol. 5, p.51-66, Pergamon Press.
- [26] BARLAT, F. ; CHUNG, K. ; SHAW, K. N. ; LEGER, D. J. ; BREM, J. C. (1990). Modeling sheet forming of polycrystalline metals. ALCOA Laboratories, EUA.
- [27] DUTKO, M. ; PERIĆ, D. ; OWEN, D.R.J. (1993). Universal anisotropic yield criterion

- based on superquadric functional representation: Part 1. Algorithmic issues and accuracy analysis. *Computer Meth. in App. Mechanics and Engineering* 109, p.73-93, North-Holland.
- [28] FEENSTRA, P.H. ; BORST, R. (1989). Accuracy analysis of return mapping algorithms for the Hill criterion. *Proc. of 2nd. Int. Conf. on Computational Plasticity. Part I*, 377-388, Ed. by D. Owen, E. Hinton and E. Oñate. Pineridge Press.
- [29] GREEN, A. E. ; NAGHDI, P. M. (1965). A dynamical theory of interacting continua. *Int. J. Engineering Science*, Vol. 3, p.231-241, Pergamon Press.
- [30] KARAFILIS, A. P. ; BOYCE, M. C. (1993). A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. *J. of Mech. Physics of Solids*, Vol. 41, No. 12, p.1859-1886, Pergamon Press.
- [31] HILL, R. (1979). Theoretical plasticity of textured aggregates. *Math. Proc. of Cambridge Philosophy Society* 85, p.179-191, 1979.
- [32] GARINO, C. G. ; OLIVER, J. (1995). Un modelo constitutivo para el analisis de solidos elasto-plasticos sometidos a grandes deformaciones. Parte II: Implementación numerica y ejemplos de aplicación. *Rev. Int. de Mét. Num. en Ingeniería*, Vol. IX, 1, p.1-.
- [33] DODD, B. ; CADDELL, R. M. (1984). On the anomalous behaviour of anisotropic sheet metals. *Int. J. of Mech. Science*, Vol. 26, No. 2, p.113-118, Pergamon Press.
- [34] DODD, B. ; CADDELL, R. M. ; HOSFORD, W. F. (1987). Convexity restrictions on non-quadratic anisotropic yield criteria. *Int. J. of Mech. Science*, Vol. 29, No. 10/11, p. 733-741, Pergamon Journals.
- [35] KOBAYASHI, S. ; CADDELL, R. M. ; HOSFORD, W. F. (1985). Examination of Hill's latest yield criterion using experimental data for various anisotropic sheet metals. *Int. J. Mech. Science*, Vol. 27, No. 7/8, p.509-517, Pergamon Press.
- [36] HILL, R. (1990). Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. *J. Mech. Physics of Solids*, Vol. 38, No. 3, p.405-417, Pergamon Press.
- [37] CHOU, C. H. ; PAN, J. ; TANG, S. C. (1996). An anisotropic stress resultant constitutive law for sheet metal forming. *Int. J. for Num. Meth. in Engineering*, Vol. 39, p.435-449, John Wiley&Sons.
- [38] LUBLINER, J. ; TAYLOR, R. L. ; AURICCHIO, F. (1993). A new model of

- generalized plasticity and its numerical implementation. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 30, No. 22, p.3171-3184, Pergamon Press.
- [39] DYCZEK, J. R. L. ; PETRI, M. A. (1992). Polypropylene FRC: Fiber-matrix bond strength. *Proc. of the fourth RILEM Int. Synposiun*, 17, p.324-342, E & FN Spon.
- [40] BENSON, D. J. (1992). Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes. *Computer Meth. in App. Mech. and Engineering*, Vol. 99, p.235-394, Elsevier Sci. Publishers.
- [41] GARINO, C. G. (1993). Un modelo numérico para el analisis de solidos elastoplasticos sometidos a grandes deformaciones. Tese de Doutorado, E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona, UPC, 1993.
- [42] MASSAGUER, J. M. ; FALQUÉS, A. (1994). Mecánica del continuo: Geometria y dinámica. Edicions UPC, 1994.
- [43] MARSDEN, J. E. ; HUGHES, T. J. R. (1983). *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [44] LAS CASAS, E. B. ; RUBERT, J. B. ; OLLER, S. ; OÑATE, E. (1996). Application of the mapped stress tensor concept for anisotropy analysis in sheet metal forming. *Proc. NUMISHEET 96*, Ohio.
- [45] RUBERT, J. B. ; OLLER, S. ; CASAS, E. B. ; OÑATE, E. (1996). Implementación explícita de um modelo anisótropo para compuestos multifásicos. Zaragoza, España.
- [46] LEE, E. H. (1969). Elastic-plastic deformation at finite strains. *J. Applied Mechanics*, Vol. 36, p. 1-6.
- [47] SIMO, J. C. ; HUGHES, T. J. R. (1988). Elastoplasticity and viscoplasticity computational aspects. Pré-print.
- [48] MATTIASSON, K. (1981). Continuum mechanics principles for large deformation problems in solid and structural mechanics. Publ. 81:6, Dept. of Structural Mechanics, Chalmers University of Technology.
- [49] OLLER, S. (1988). Un modelo de daño continuo para materiales friccionales. Tese de doutorado, E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona, UPC.
- [50] MALVERN, L. (1969). *Introduction to the mechanics of continuous medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York.

- [51] LUBLINER, J. (1990). *Plasticity theory*. Macmillan Publishing, New York.
- [52] CRISFIELD, M. A. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, John Wiley, Chichester.
- [53] GREEN, A. E. ; NAGHDI, P. M. (1971). Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strains. *Int.Journal of Engineering Sciences*, Vol. 9, p.1219-1229.
- [54] GREEN, A. E. ; NAGHDI, P. M. (1964). A general theory of an elastic-plastic continuum. Berkeley.
- [55] KOH, C. G. ; OWEN, D. R. J. ; PERIC, D. (1995). Explicit dynamic analysis of elasto-plastic laminated composite shells: implementation of non-iterative stress update schemes for the Hoffman yielded criterion. *Comp. Mechanics* 16, p.307-314, Springer-Verlag.
- [56] HUANG, H. C. (1989). *Static and dynamic analyses of plates and shells*. Springer-Verlag.
- [57] SPENCER, A. J. M. (1971). Theory of invariants. In Eringen, A. C. (ed.), *Continuum Physics*, Vol. I (Mathematics), Academic Press, New York/ London, p.239-353.
- [58] HOFFMAN, O. (1967). The brittle strenght of orthotropic materials. *Journal of Composite Materials* 1, p.200-206.
- [59] ROJEK, J. ; HERRE, J. ; OÑATE, E. (1994). Stampack, an explicit finite element program for analysis of sheet stamping problems. Technical Report n° IT- 159, CIMNE.
- [60] FUNG, Y. C. (1965). *Foundations of solid mechanics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [61] ROJEK, J. ; GARINO, C. G. ; OÑATE, E. (1994). Advanced finite element models for analysis of industrial sheet forming processes. Publ. CIMNE n° 48, Barcelona.
- [62] LEE, J. K. ; CHO, U. Y. ; HAMBRECHT, J. (1991). Recent advances in sheet metal forming analysis. AMD-Vol 125, ASME.
- [63] CHUNG, K. ; SHAH, K. (1992). Finite element simulation of sheet metal forming for planar anisotropic metals. *Int. Journal of Plasticity*, Vol. 8, p.453-476.
- [64] OÑATE, E. ; OLLER, S. ; BOTELHO, S. ; CANET, J. M. (1991). Métodos avanzados de cálculo de estructuras de materiales compuestos. Monografía CIMNE n° 3, Barcelona.
- [65] CANET, J. M. ; OÑATE, E. ; GARINO, C. G. ; BOTELHO, S. ; FLORES, F. ; ROJEK, (1994). Análisis de problemas de choque e impacto entre sólidos deformables por el

- método de los elementos finitos. Monografía CIMNE n° 25, Barcelona.
- [66] SPENCER, A. J. M. (1988). Continuum mechanics. Longman Scientific & Technical, New York.
- [67] HERNÁNDEZ, P. H. (1996). Nuevos elementos finitos para el análisis dinámico elastoplástico no lineal de estructuras laminares. Tese de Doutorado, E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona, UPC, 1996.
- [68] BALAGURU, P. N. ; SHAH, S. P. (1992). Fiber reinforced cement composites. McGraw-Hill, New York.
- [69] ATZEMA, E. H. (1994). Formability of sheet metal and sandwich laminates. Enschede, The Netherlands.
- [70] LAS CASAS, E. B. ; MOITA, G. F. ; PROENÇA, S. P. B. ; RUBERT, J. B. (1997). On recent finite element developments for composite materials.
- [71] TRUSDELL, C. ; TOUPIN, R. (1960). The classical field theories. in Flugge, S. (ed.), Handbuch der Physik III/I - Springer-Verlag, Berlin.
- [72] BATHE, K. J. ; WILSON, E. L. (1976). Numerical methods in finite element analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [73] COOK, R. D. ; MALKUS, D. S. ; PLESHA, M. E. (1989). Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley & Sons, New York.
- [74] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L. (1994). El método de los elementos finitos. 4ª Ed. CIMNE, Barcelona.
- [75] OÑATE, E. (1992). Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. CIMNE, Barcelona.
- [76] SIMO, J. C. ; ORTIZ, M. (1985). A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 49, pp. 221-245.
- [77] KHAN, A. S. ; HUANG, S. (1995). Continuum theory of plasticity. John Wiley & Sons, Inc, New York.
- [78] OLLER, S. ; NEAMȚU, L. ; OÑATE, E. (1996). Una generalización de la teoría de mezclas clásica: Tratamiento de compuestos en serie/paralelo. CIMNE-UPC, Barcelona.
- [79] CHAKRABARTY, J. (1987). Theory of plasticity. McGraw Hill, New York.

-
- [80] TIMOSHENKO, S. P. ; GOODIER, J. N. (1980). Teoria da elasticidade. Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- [81] BROUTMAN, J. (1974). Composite materials. Volume 5 - Fracture and Fatigue. Academic Press, New York.
- [82] NUMISHEET'93. (1993). 2nd. International Conference: Numerical simulation of 3-D sheet metal forming processes. 31-August - 02 September, Isehara, Japan.
- [83] LAS CASAS, E. B. (1994). Alguns aspectos da simulação numérica pelo método dos elementos finitos da estampagem de chapas. Relatório técnico - CIMNE - UPC, Barcelona.

9.2 Bibliografía

- ATZEMA, E. H. (1994). Formability of sheet metal and sandwich laminates. Enschede, The Netherlands.
- BALAGURU, P. N. ; SHAH, S. P. (1992). Fiber reinforced cement composites. McGraw-Hill, New York.
- BARLAT, F. ; LIAN, J. (1989). Plastic behaviour and stretchability of sheet metals. Part 1: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions. *Int. J. of Plasticity*, Vol. 5, p.51-66, Pergamon Press.
- BARLAT, F. ; CHUNG, K. ; SHAW, K. N. ; LEGE, D. J. ; BREM, J. C. (1990). Modeling sheet forming of polycrystalline metals. ALCOA Laboratories, EUA.
- BATHE, K. J. ; WILSON, E. L. (1976). Numerical methods in finite element analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- BENSON, D. J. (1992). Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes. *Computer Meth. in App. Mech. and Engineering*, Vol. 99, p.235-394, Elsevier Sci. Publishers.
- BETTEN, J. (1981). Creep theory of anisotropic solids. *Journal of Rheology*, Vol. 25(6), p.565-581, John Wiley y Sons.
- BETTEN, J. (1988). Applications of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *Int. J. of Plasticity*, Vol. 4, p.29-46, Pergamon Journals.
- CANET, J. M. ; OÑATE, E. ; GARINO, C. G. ; BOTELHO, S. ; FLORES, F. ; ROJEK, (1994). Análisis de problemas de choque e impacto entre sólidos deformables por el método de los elementos finitos. Monografía CIMNE nº 25, Barcelona.
- CHOI, I. ; HORGAN, C. O. (1977). Saint-Venant's principle and end effects in anisotropic elasticity. *J. of App. Mechanics*, Vol. September 1977, p.424-430.
- CHOU, C. H. ; PAN, J. ; TANG, S. C. (1996). An anisotropic stress resultant constitutive law for sheet metal forming. *Int. J. for Num. Meth. in Engineering*, Vol. 39, p.435-449, John Wiley&Sons.

- CHUNG, K. ; SHAH, K. (1992). Finite element simulation of sheet metal forming for planar anisotropic metals. *Int. Journal of Plasticity*, Vol. 8, p.453-476.
- COLEMAN, B. D. ; MIZEL, V. J. (1964). Existence of caloric equations of state in thermodynamics. *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 40, No. 4, p.1116-1125.
- COOK, R. D. ; MALKUS, D. S. ; PLESHA, M. E. (1989). Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley & Sons, New York.
- CRISFIELD, M. A. (1991). Non-linear finite element analysis of solids and structures, John Wiley, Chichester.
- DODD, B. ; CADDELL, R. M. (1984). On the anomalous behaviour of anisotropic sheet metals. *Int. J. of Mech. Science*, Vol. 26, No. 2, p.113-118, Pergamon Press.
- DODD, B. ; CADDELL, R. M. ; HOSFORD, W. F. (1987). Convexity restrictions on non-quadratic anisotropic yield criteria. *Int. J. of Mech. Science*, Vol. 29, No. 10/11, p. 733-741, Pergamon Journals.
- DUTKO, M. ; PERIĆ, D. ; OWEN, D.R.J. (1993). Universal anisotropic yield criterion based on superquadric functional representation: Part 1. Algorithmic issues and accuracy analysis. *Computer Meth. in App. Mechanics and Engineering* 109, p.73-93, North-Holland.
- DYCZEK, J. R. L. ; PETRI, M. A. (1992). Polypropylene FRC: Fiber-matrix bond strength. *Proc. of the fourth RILEM Int. Synposiun*, 17, p.324-342, E & FN Spon.
- FEENSTRA, P.H. ; BORST, R. (1989). Accuracy analysis of return mapping algorithms for the Hill criterion. Delft Un. Tech., TNO Inst., the Netherlands.
- FUNG, Y. C. (1965). Foundations of solid mechanics. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- GARINO, C. G. (1993). Un modelo numérico para el analisis de solidos elastoplasticos sometidos a grandes deformaciones. Tese de Doutorado, E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona, UPC, 1993.
- GARINO, C. G. ; OLIVER, J. (1995). Un modelo constitutivo para el analisis de solidos elastoplasticos sometidos a grandes deformaciones. Parte I: Formulación teórica y aplicación a metales. *Rev. Int. de Mét. Num. en Ingeniería*, Vol. II, 1, p.105-123.
- GARINO, C. G. ; OLIVER, J. (1995). Um modelo constitutivo para el analisis de solidos elastoplasticos sometidos a grandes deformaciones. Parte II: Implementación numerica y ejemplos de

- aplicación. Rev. Int. de Mét. Num. en Ingeniería, Vol. IX, 1, p.1-.
- GREEN, A. E. ; NAGHDI, P. M. (1964). A general theory of an elastic-plastic continuum. Berkeley.
- GREEN, A. E. ; NAGHDI, P. M. (1965). A dynamical theory of interacting continua. Int. J. Engineering Science, Vol. 3, p.231-241, Pergamon Press.
- GREEN, A. E. ; NAGHDI, P. M. (1971). Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strains. Int. Journal of Engineering Sciences, Vol. 9, p.1219-1229.
- GREEN, A. E. ; NAGHDI, P. M. (1971). Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strains. Int. Journal of Engineering Sciences, Vol. 9, p.1219-1229.
- HERNÁNDEZ, P. H. (1996). Nuevos elementos finitos para el análisis dinámico elastoplástico no lineal de estructuras laminares. Tese de Doutorado, E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona, UPC, 1996.
- HILL, R. (1948). A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. Royal Soc. London Proc. 193A, 281.
- HILL, R. (1979). Theoretical plasticity of textured aggregates. Math. Proc. of Cambridge Philosophy Society 85, p.179-191, 1979.
- HILL, R. (1990). Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. J. Mech. Physics of Solids, Vol. 38, No. 3, p.405-417, Pergamon Press.
- HOFFMAN, O. (1967). The brittle strenght of orthotropic materials. Journal of Composite Materials 1, p.200-206.
- HUANG, H. C. (1989). Static and dynamic analyses of plates and shells. Springer-Verlag.
- HUGHES, T. J. R. ; LIU, W. K. (1978). Implicit-explicit finite elements in transient analysis: Stability theory. J. of App. Mechanics, Vol. 45, p.371-374.
- HUGHES, T. J. R. ; LIU, W. K. (1978). Implicit-explicit finite elements in transient analysis: Implementation and numerical examples. J. of App. Mechanics, Vol. 45, p.375-378.
- HUGHES, T. J. R. ; CAUGHEY, T. K. ; LIU, W. K. (1978). Finite-element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy. J. of App. Mechanics, Vol. 45, p.366-370.
- KARAFILIS, A. P. ; BOYCE, M. C. (1993). A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. J. of Mech. Physics of Solids, Vol. 41, No. 12, p.1859-1886, Pergamon Press.



- KATTAN, P. I. ; VOYIADJIS, G. Z. (1993). Overall damage and elastoplastic deformation in fibrous metal matrix composites. *Int. J. of Plasticity*, Vol. 9, p.931-949, Pergamon Press.
- KHAN, A. S. ; HUANG, S. (1995). *Continuum theory of plasticity*. John Wiley & Sons, Inc, New York.
- KIOUSIS, P. D. ; VOYIADJIS, G. Z. ; TUMAY, M. T. (1986). A large strain theory for the two-dimensional problems in geomechanics. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol 10, p.17-38.
- KOBAYASHI, S. ; CADDELL, R. M. ; HOSFORD, W. F. (1985). Examination of Hill's latest yield criterion using experimental data for various anisotropic sheet metals. *Int. J. Mech. Science*, Vol. 27, No. 7/8, p.509-517, Pergamon Press.
- KOH, C. G. ; OWEN, D. R. J. ; PERIC, D. (1995). Explicit dynamic analysis of elasto-plastic laminated composite shells: implementation of non-iterative stress update schemes for the Hoffman yielded criterion. *Comp. Mechanics* 16, p.307-314, Springer-Verlag.
- LAS CASAS, E. B. ; RUBERT, J. B. ; OLLER, S. ; OÑATE, E. (1996). Application of the mapped stress tensor concept for anisotropy analysis in sheet metal forming. *Proc. NUMISHEET 96*, Ohio.
- LAS CASAS, E. B. ; MOITA, G. F. ; PROENÇA, S. P. B. ; RUBERT, J. B. (1997). On recent finite element developments for composite materials.
- LEE, E. H. (1969). Elastic-plastic deformation at finite strains. *J. App. Mech.*, Vol. 36, p. 1-6.
- LEE, J. K. ; CHO, U. Y. ; HAMBRECHT, J. (1991). Recent advances in sheet metal forming analysis. *AMD-Vol 125*, ASME.
- LUBLINER, J. (1990). *Plasticity theory*. Macmillan Publishing, New York.
- LUBLINER, J. (1972). On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics. *Int. J Non-linear Mechanics*. Vol. 7, p.237-254, Pergamon Press.
- LUBLINER, J. ; TAYLOR, R. L. ; AURICCHIO, F. (1993). A new model of generalized plasticity and its numerical implementation. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 30, No. 22, p.3171-3184, Pergamon Press.
- MALVERN, L. (1969). *Introduction to the mechanics of continuous medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York.
- MARSDEN, J. E. ; HUGHES, T. J. R. (1983). *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-

- Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- MASSAGUER, J. M. ; FALQUÉS, A. (1994). Mecánica del continuo: Geometría y dinámica. Edicións UPC, 1994.
- MATTIASSON, K. (1981). Continuum mechanics principles for large deformation problems in solid and structural mechanics. Publ. 81:6, Dept. Struc. Mech., Chalmers Univ. of Technology.
- OLIVER, J. ; OÑATE, E. (1986). A total lagrangian formulation for the geometrically nonlinear analysis of structures using finite elements. Part II: Arches, Frames and axisymmetric shells. Int. J. for Num. Meth. in Engineering, Vol. 23, p.253-274, John Wiley & Sons.
- OLIVER, J. ; CERVERA, M. ; OLLER, S. ; LUBLINER, J. (1990). Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. SCI-C 1990, Second Int. Conf. on Computer Aided Design of Concrete Structure, Zell am See, Austria, p.945-957.
- OLLER, S. (1988). Un modelo de daño continuo para materiales friccionales. Tese de doutorado, E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona, UPC.
- OLLER, S. (1989). Nuevos materiales estructurales, cerámicos en ingeniería. CIMNE, Barcelona.
- OLLER, S. ; OÑATE, E. ; OLIVER, J. ; LUBLINER, J. (1990). Finite element nonlinear analysis of concrete structures using a "plastic-damage model". Eng. Fracture Mechanics, Vol. 35, No. 1/2/3, p.219-231, Pergamon Press.
- OLLER, S. ; OÑATE, E. ; MIQUEL, J. ; BOTELHO, S. (1994). A plastic damage constitutive model for composite materials. Int. J. Solids and Structures.(A ser publicado).
- OLLER, S. ; BOTELHO, S. ; MIQUEL, J. ; OÑATE E. (1995). An anisotropic elasto-plastic model based on an isotropic formulation. Eng. Comp., Vol. 12, p.245-262, Pineridge Press.
- OLLER, S. ; OÑATE, E. (1995). A hygro-thermo-mechanical constitutive model for multiphase composite materials. Int. J. Solids and Structures.(A ser publicado).
- OLLER, S. ; OÑATE, E. ; MIQUEL, J. (1995). A mixing anisotropic formulation for analysis of composites. Comm. in Num. Meth. in Engineering, (A ser publicado).
- OLLER, S. ; NEAMȚU, L. ; OÑATE, E. (1996). Una generalización de la teoría de mezclas clásica: Tratamiento de compuestos en serie/paralelo. CIMNE-UPC, Barcelona.
- OÑATE, E. (1992). Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. CIMNE, Barcelona.
- OÑATE, E. ; OLLER, S. ; BOTELHO, S. ; CANET, J. M. (1991). Métodos avanzados de

- cálculo de estructuras de materiales compuestos. Monografía CIMNE nº 3, Barcelona.
- ORTIZ, M. ; POPOV, E. P. (1982). Plain concrete as a composite material. *Mechanics of Materials*, North Holland Publishing Company, nº 1, p.139-150.
- OWEN, D. R. J. ; LI, Z. H. (1988). Elastic-plastic dynamic analysis of anisotropic laminated plates. *Comp. Meth. in App. Mechanics and Engineering*, Vol. 70, p.349-365, Elsevier Sc. Publishers.
- OWEN, D. R. J. ; LI, Z. H. (1987). A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods- I. Fundamentals and static analysis. *Computers & Structures*, Vol. 26, No. 6, p. 907-914, Pergamon Journals.
- PERIĆ, D. ; DUTKO, M. ; OWEN, D.R.J. (1991). On superquadric functional representation: Computational issues with applications. Dept. of Civil Eng., Univ. College of Swansea.
- ROJEK, J. ; HERRE, J. ; OÑATE, E. (1994). Stampack, an explicit finite element program for analysis of sheet stamping problems. Technical Report nº IT- 159, CIMNE.
- ROJEK, J. ; GARINO, C. G. ; OÑATE, E. (1994). Advanced finite element models for analysis of industrial sheet forming processes. Publ. CIMNE nº 48, Barcelona.
- RUBERT, J. B. ; OLLER, S. ; CASAS, E. B. ; OÑATE, E. (1996). Implementación explícita de un modelo anisótropo para compuestos multifásicos. Zaragoza, España.
- RUBIN, M. B. (1990). Elastic-viscoplastic model for large deformation of soils, *ASCE journal of Engineering Mechanics*, p.1995-2015, vol 116, nº 9.
- SIDOROFF, F. M. (1970). Quelques réflexions sur le principe d'indifférence matérielle pour un milieu ayant un état relâché. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 271, p.1026-1029.
- SIMO, J. C. ; ORTIZ, M. (1985). A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering*, Vol. 49, p.221-245.
- SIMO, J. C. ; HUGHES, T. J. R. (1988). Elastoplasticity and viscoplasticity computational aspects. Pré-print.
- SIMO, J. C. (1988). A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I Continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 66, pp. 199-219.
- SIMO, J. C. (1988). A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic

dissipation and the multiplicative decomposition: Part II Continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 68, pp. 1-31.

SIMO, J. C. ; GOVINDJEE, S. (1989). Nonlinear B-Stability and symmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity. Div of App. Mechanics Dept. of Mech. engineering, Stanford University.

SIMO, J. C. (1990). Nonlinear stability of the time-discrete variational problem of evolution in nonlinear heat conduction, plasticity and viscoplasticity. Div of App. Mechanics Dept. of Mech. engineering, Stanford University.

SPENCER, A. J. M. (1988). *Continuum mechanics*. Longman Scientific&Technical, New York.

SPENCER, A. J. M. (1971). Theory of invariants. In Eringen, A. C. (ed.), *Continuum Physics*, Vol. I (Mathematics), Academic Press, New York/ London, p.239-353.

TAI, W. H. (1988). A damage mechanics model for anisotropic material and its application to sheet metal forming. *Int. J. of Solids Structures*, Vol. 24, No. 10, p.1045-1057, Pergamon Press.

TRUSDELL, C. ; TOUPIN, R. (1960). The classical field theories. in Flugge, S. (ed.), *Handbuch der Physik III/I - Springer-Verlag*, Berlin.

VON MISES, R. (1913). *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*. Göttinger Nachrichten, math.-phys. K1, p.582-592.

VON MISES, R. (1928). *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*. *Z. angew Math. Mech.*, 8, p.161-185.

VOYIADJIS, G. Z. ; KIOUSIS, P. D. (1987). Stress rate and the Lagrangian formulation of the finite strain plasticity for a Von-Mises kinematic hardening model. *International Journal of Solids and Structures*, Vol 23, 1, p.95-107.

ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L. (1994). *El método de los elementos finitos*. 4ª Ed. CIMNE, Barcelona.

STEINMANN, P. ; BETSCH, P. ; STEIN, E. (1997). FE plane stress analysis incorporating arbitrary 3D large strain constitutive models. *Engineering Computations*, Vol 14, 2, p.175-201.

HEIDUSCHKE, K. (1997). An elastic isotropic, plastic orthotropic constitutive model based on deviator transformations. *Int. J. Solids Structures*, Vol 34, 18, p.2339-2356.

APÊNDICE A

Contato

Os desenvolvimentos relativos ao tratamento de contato com fricção não são objeto de estudos específicos nesta tese, contudo, empregam-se algoritmos para esse fim em alguns exemplos contidos no capítulo 7 de modo que o autor acredita ser interessante a inclusão de algum texto relativo ao tema. O texto que se segue deve-se a Las Casas e resume aspectos de alguns dos algoritmos existentes inclusive fazendo menção aos utilizados no programa Stampack. Garino em seu trabalho também fornece informações específicas relativas aos algoritmos de contato e fricção utilizados nesta tese.

A consideração da interação entre a chapa e as superfícies das ferramentas, um problema de contato com atrito, é central na simulação da estampagem de chapas finas pelo método dos elementos finitos. Problemas mecânicos com contato são inerentemente não-lineares, envolvendo condições de contorno desconhecidas a priori. Os modelos matemáticos descrevendo o fenômeno envolvem inequações ou equações não-lineares e sua descrição precisa é complexa, já que os parâmetros relevantes são função do grau de rugosidade das superfícies, as características físicas e químicas dos lubrificantes, movimento e temperatura das partes em contato. No entanto, modelos cada vez mais precisos têm sido propostos na literatura.

O primeiro modelo para o problema, proposto com o objetivo de determinar as forças totais de atrito e de contato, deve-se a Coulomb, limitando o valor da força de atrito à força de contato multiplicada pelo coeficiente de atrito $\mu: |f_t| \leq \mu |f_n|$. Um segundo modelo, onde se incluía uma hipotética distribuição elíptica das tensões na superfície de contato, foi proposto por Hertz em 1881. Muito mais tarde, já com vistas às técnicas computacionais de simulação, novos modelos foram propostos, com o objetivo de se obter uma solução numérica aproximada ao invés de uma solução analítica fechada.

Representando-se por Γ_c a parte do contorno onde o contato pode ocorrer, deve-se impor as condições de que as forças de contato sejam de compressão e que não haja penetração entre duas superfícies. Assim, sendo $g(\mathbf{x},t)$ uma função "gap" definindo a distância entre as duas superfícies e $\mathbf{f}_c(\mathbf{x},t)$ a força de contato tem-se:

$$g(\mathbf{x},t) = g(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{N} \geq 0 ; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c$$

$$f_1(\mathbf{x},t) = f_c(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{N} \leq 0 ; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c$$

onde f_1 é a componente normal de \mathbf{f}_c . Além disto, a condição $g(\mathbf{x},t)f_1(\mathbf{x},t)=0$ deve ser satisfeita, de forma que sempre g ou f_1 seja nulo. Para contato de acordo com a lei de Coulomb, para \mathbf{v}_t a velocidade tangencial entre as duas superfícies, tem-se:

$$f_t(\mathbf{x},t) \leq \mu f_1(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c$$

$$\mathbf{v}_t(\mathbf{x},t) = \begin{cases} 0 & \text{se } f_1(\mathbf{x},t) < \mu f_1(\mathbf{x},t) ; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c \\ -\lambda f_1(\mathbf{x},t) & \text{se } f_1(\mathbf{x},t) = \mu f_1(\mathbf{x},t) ; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c \end{cases}$$

onde λ um escalar não negativo, μ o coeficiente de atrito e

$$f_1(\mathbf{x},t) = f_c(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{N}$$

Esta formulação, devido a sua simplicidade, tem suas limitações. Mesmo diferenciando-se entre o coeficiente de atrito estático de um valor inferior para o coeficiente dinâmico, o modelo não capta fenômenos tais como o pequeno movimento relativo entre as partes (verificado

experimentalmente) mesmo para $|\mathbf{f}_t(\mathbf{x},t)| < \mu|\mathbf{f}_n(\mathbf{x},t)|$. Outros efeitos não considerados são que a lei de Coulomb independe da área de contato entre as partes e das velocidades relativas entre elas, o que contradiz os dados experimentais. Este último efeito, mais pronunciado para altas velocidades, não é normalmente levado em conta. Modelos não-clássicos para o atrito foram então propostos (Michalowski e Mroz, 78, p.e.), com um tratamento similar ao utilizado em problemas elastoplásticos, quando se busca minimizar um funcional com restrições.

No que se segue descreve-se uma lei de atrito não-clássica (Zhong, 1993), formulada em termos de forças concentradas de forma a poder ser incluída em um problema de elementos finitos com mais facilidade. Uma possível relação entre a força de atrito \mathbf{f}_t e o deslocamento tangencial é dada na figura abaixo para uma força normal constante:

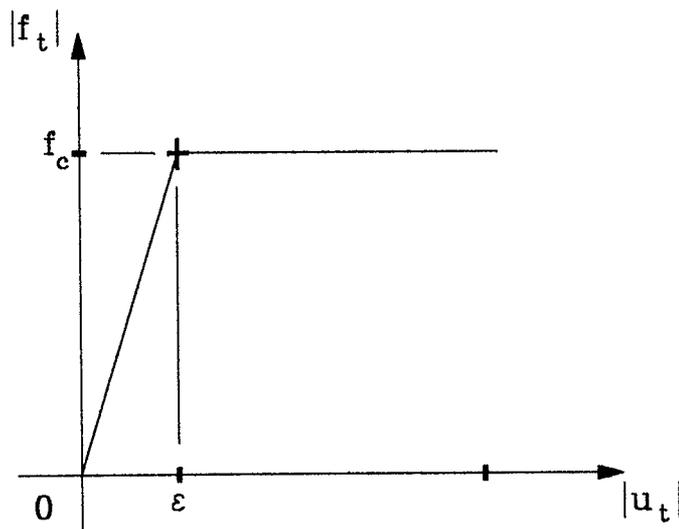


Fig. ApA.01- Relação entre a força de atrito \mathbf{f}_t e o deslocamento tangencial para uma força normal constante.

Para $|\mathbf{f}_t|$ menor que o limite de atrito, $\mathbf{f}_t = -E_t \mathbf{u}_t$, com E_t a inclinação da curva no trecho correspondente aos micro-deslocamentos, e para $|\mathbf{f}_t| = f_c$ os deslocamentos passam a depender do restante do sistema mecânico. Em uma analogia com a elastoplasticidade, toma-se $\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_t^e + \mathbf{v}_t^s$, com

v_t^e , a velocidade do deslocamento elástico (reversível) e v_t^s , a velocidade de deslizamento do trecho irreversível. Para a parte elástica tem-se:

$$v_t^e = -\frac{f_t}{E_f} \Rightarrow f_t = -E_f (v_t - v_t^s)$$

E_f , que aqui se toma constante, pode ser função do movimento relativo entre as superfícies. Denominando-se por ϕ à condição de deslizamento tem-se o seguinte critério:

$$\phi = |f_t| + \mu f_1 \begin{cases} < 0 \Rightarrow v_t^s = 0 \\ = 0 \Rightarrow v_t^s = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial f_t} \end{cases}$$

A segunda relação implica numa regra de deslizamento associada, e $\dot{\lambda}$ é uma constante a ser determinada. Dela pode-se obter:

$$v_t^s = \dot{\lambda} \frac{f_t}{|f_t|} = \dot{\lambda} n$$

Diferenciando-se a equação de v_t^s em ϕ obtém-se:

$$n \cdot \dot{f} + \dot{\mu} f_1 + \mu \dot{f}_1 = 0$$

Tomando-se agora μ como função da variável v_t^p , cuja taxa é definida como:

$$\dot{v}_t^p = \alpha \sqrt{(v_t^s \cdot v_t^s)}$$

obtém-se:

$$\dot{\mu} = \frac{d\mu}{dv_t^p} \dot{v}_t^p = \mu' \alpha \dot{\lambda} \quad \text{com} \quad \mu' = \frac{d\mu}{dv_t^p}$$

com isso vem que:

$$\dot{f}_t = -E_f(v_t - v_t^s) = -E_f(v_t - \lambda n) = -E_f \left[1 - \frac{E_f n \otimes n}{E_f + \mu' \alpha f_1} \right] v_t - \frac{\mu E_f f_1 n}{E_f + \mu' \alpha f_1}$$

Esta expressão é conhecida como uma relação constitutiva de atrito. No caso em que $\dot{\mu} = 0$, então:

$$\dot{f}_t = -E_f(1 - n \otimes n)v_t - \mu f_1 n$$

Uma formulação elegante unificando as principais técnicas de solução do problema de contato é a formulação lagrangiana com perturbação (Wriggers e Simo, 1985). Baseia-se na formulação do problema como um problema de minimização com restrições, onde se busca tornar estacionário o funcional da energia potencial do sistema respeitando as restrições devidas ao contato. Define-se o funcional de Lagrange com perturbação como:

$$\Pi_\varepsilon(u, \lambda) = \bar{\Pi}(u) + \lambda^t g - \frac{1}{2\varepsilon} \lambda^t \lambda$$

onde $u \in \mathbf{R}^n$ é o vetor de deslocamentos nodais, $\lambda \in \mathbf{R}^s$ o vetor contendo as s forças de contato, $g \in \mathbf{R}^s$ o vetor de "gaps" nodais e $\bar{\Pi}(u)$ a energia potencial total associada ao problema:

$$\bar{\Pi}(u) = \frac{1}{2} u^t K u - u^t f$$

O "gap" para um nó é dado por: $g_s = (x_s - x_1) \cdot n$, onde n o vetor normal ao segmento ou superfície em relação ao qual se busca verificar o contato (master), $x_s = X_s + u_s$ é a posição do nó slave (para o qual se pretende verificar o contato), $x_1 = X_1 + u_1$ e $x_2 = X_2 + u_2$ definem a posição do segmento master.

As equações discretas resultantes da minimização do funcional lagrangiano com perturbação resultam então:

$$\begin{cases} \delta \Pi(u) + \bar{\lambda}^t \delta g = 0 \\ \delta \lambda^t \left(-\frac{1}{\varepsilon} \bar{\lambda} + g \right) = 0 \end{cases}$$

Tomando-se $\varepsilon = \infty$, obtém-se o método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \delta \Pi(u) + \bar{\lambda}^t \delta g = 0 \\ \delta \bar{\lambda}^t g = 0 \end{cases}$$

A equação não-linear a ser resolvida pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

onde γ é a distância inicial entre dois corpos na direção \mathbf{n} e \mathbf{B} uma matriz contendo a cinemática dos nós em contato.

O número de incógnitas é aumentado pela inclusão das restrições no funcional a ser minimizado e das forças de contato como incógnitas. O sistema resultante é não-singular, porém a matriz é indefinida, com elementos nulos na diagonal, apresentando dificuldades numéricas quando de sua solução. Os elementos de λ são interpretados como as forças de contato nos nós correspondentes (sobre os conceitos básicos do método, veja (Oñate,92)). A dimensão do sistema varia com o número de nós em contato a cada instante da análise. A vantagem do método é que as condições de contato são satisfeitas exatamente.

A partir do lagrangiano com perturbação pode-se também obter o funcional correspondente ao método das penalizações. Resolvendo-se:

$$\delta \lambda' \left(\mathbf{g} - \frac{\lambda}{\epsilon} \right) = 0$$

para \mathbf{g} e substituindo-se no funcional original, de onde se obtém:

$$\Pi_{\epsilon}(\mathbf{u}) = \bar{\Pi}(\mathbf{u}) + \frac{\epsilon \mathbf{g}' \mathbf{g}}{2}$$

onde os elementos da matriz diagonal ϵ são os coeficientes de penalização.

Tornando o funcional estacionário, obtém-se um sistema da forma $\mathbf{K}_p \mathbf{u} = \mathbf{F}_p$. As forças de contato são então dadas por $\mathbf{F}_c = \epsilon \mathbf{P}$, onde a penetração \mathbf{P} pode ser determinada a partir dos deslocamentos \mathbf{u} obtidos. Fisicamente, os termos da diagonal ϵ_{ii} podem ser interpretados como a rigidez de uma mola fictícia entre dois pontos em contato. Para o método das penalizações, a matriz do sistema resultante é simétrica e positiva definida, e seu tamanho não se altera durante o processo. No entanto, as restrições de contato se satisfazem apenas aproximadamente e o método é sensível à escolha pelo usuário do parâmetro de penalização. Valores muito elevados provocam uma piora no condicionamento da matriz, podendo provocar erros computacionais, enquanto valores baixos, que reduzem o número de iterações necessárias para convergência, diminuem a precisão do modelo, podendo levar a resultados absurdos (Nour-Omid e Wriggers, 86).

De maneira similar àquela utilizada para os métodos de multiplicadores de Lagrange e das penalizações, pode-se obter o terceiro entre os processos de solução mais usuais a partir do funcional lagrangiano com perturbação. Neste caso, substitui-se o termo $(1/2\epsilon)\lambda' \lambda$ por $(\epsilon/2)\mathbf{g}' \mathbf{g}$, obtendo-se o potencial para o método Lagrangiano aumentado:

$$\Pi_\epsilon = \bar{\Pi} + \lambda' \mathbf{g} + \frac{\epsilon}{2} \mathbf{g}' \mathbf{g}$$

Desta forma, modifica-se a matriz do método lagrangeano tornando-a positiva, e agora pode-se satisfazer as restrições de contato exatamente para um valor finito de λ . A escolha criteriosa dos valores de ϵ_{ii} tornam o sistema de equações de mais fácil solução. Outras técnicas para solução do problema de minimização com restrições, apesar de menos utilizadas, são encontradas na literatura (veja, por exemplo, (Eterovic e Bathe, 91)).

Um outro aspecto importante é o algoritmo a se utilizar para determinar se houve ou não contato entre as duas superfícies. É usual utilizar-se de uma estrutura de pares de superfícies, onde se identifica as partes do contorno Γ_c entre as quais pode haver contato durante o carregamento. Cada par de superfícies é composto de um segmento master, que define a região onde se verificará o eventual contato da superfície slave, como mencionado anteriormente. Para problemas

de estampagem, para os quais Γ_c compreende normalmente quase todo o contorno Γ , a busca de possíveis penetrações toma a maior parcela do tempo utilizado na consideração do contato. Daí a necessidade de utilização de algoritmos eficientes nesta parte do processo.

O cálculo da distância de cada nó da superfície slave com os da superfície master seria extremamente caro, e aplicável apenas a problemas pequenos. Algoritmos baseados em estrutura hierárquica de entidades geométricas, onde o sistema geral é composto por corpos, estes por sua vez por superfícies, formados por segmentos que incluem arestas formadas por nós (Zhong, 93) possibilitam otimizar a busca, aumentando seu desempenho.

Um outro algoritmo (Hallquist, 79) subdivide a busca em três partes: primeiramente (busca global), encontra-se o nó master n_m mais próximo de um nó slave n_s , define-se então (busca local) como segmento alvo aquele entre os quais o n_m está contido que mais se aproxima de n_s . Calcula-se então a menor distância entre este segmento e n_s . Se esta distância for menor que um determinado valor, considera-se que n_s está em contato. Uma variação, onde todas as superfícies de contato são consideradas simultaneamente na busca, é descrita em (Benson e Hallquist, 1987).

Um procedimento que aumenta a confiabilidade do algoritmo consiste em, após a busca, repeti-la com a inversão das superfícies master-slave em cada par. Após detectar-se o contato, deve-se verificar a persistência deste para o passo seguinte de carregamento, operação esta bastante mais simples pois não envolve uma busca.

APÊNDICE B

Métrica

Define-se como tensor métrico material o tensor que permite transportar para qualquer sistema de referência uma medida realizada em um sistema de referência dado. A figura ApB.01 mostra o comprimento dS medido em relação a um sistema de coordenadas cartesianas $\mathbf{x}=\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ e dado por:

$$dS^2 = dx_i dx_i = dx_i dx_j \delta_{ij}$$

(ApB.01)

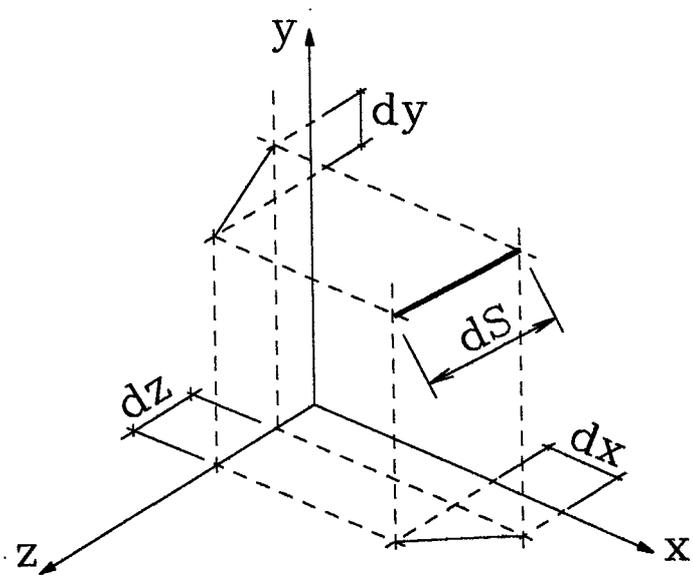


Fig. ApB.01- Medida dS no sistema cartesiano de referência.

Considerando-se um sistema genérico constituído pelos eixos θ_1 , θ_2 e θ_3 tal que $\theta_i = \theta_i(x_1, x_2, x_3)$ é uma transformação de coordenadas para o sistema cartesiano, a transformação inversa será dada por $x_i = x_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Feitas estas considerações, é possível escrever novamente ds^2 como segue:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial \theta^k} \frac{\partial x_i}{\partial \theta^m} d\theta^k d\theta^m \quad (\text{ApB.02})$$

Define-se o tensor métrico Euclidiano como sendo:

$$\bar{G}_{km}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial \theta^k} \frac{\partial x_i}{\partial \theta^m} \quad (\text{ApB.03})$$

de modo que:

$$ds^2 = \bar{G}_{km} d\theta^k d\theta^m \quad (\text{ApB.04})$$

Para exemplificar vamos supor dadas as coordenadas polares de um ponto do plano X_1 X_2 (Fig. ApB.02) de modo que:

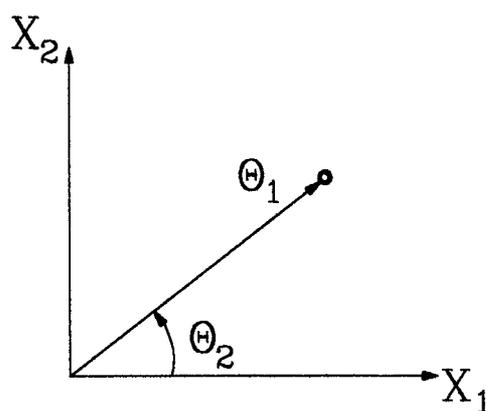


Fig. Apb.02- Sistemas de referência cartesiano e polar.

$$x_1 = \theta_1 \cos \theta_2$$

$$x_2 = \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2$$

$$\theta_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\theta_2 = \operatorname{arcsen} \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Nestas condições os termos do tensor métrico serão dados por:

$$\bar{G}_{11} = \cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2 = 1$$

$$\bar{G}_{12} = (\cos \theta_2)(-\theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + (\operatorname{sen} \theta_2)(\theta_1 \cos \theta_2) = 0 = \bar{G}_{21} \quad (\text{ApB.05})$$

$$\bar{G}_{22} = (-\theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)^2 + (\theta_1 \cos \theta_2)^2 = \theta_1^2$$

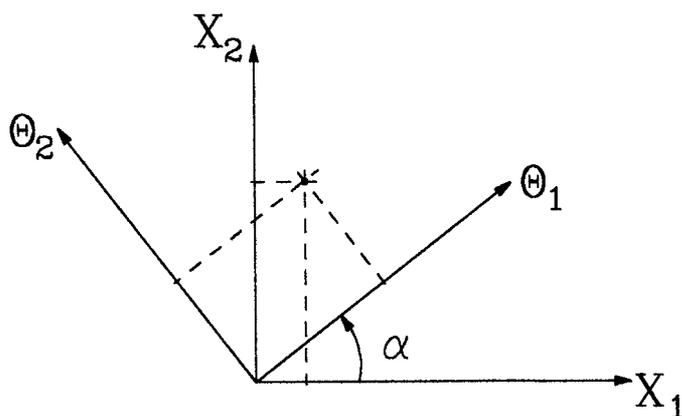


Fig. ApB.03- Rotação α de um sistema cartesiano.

Se por outro lado agora calcularmos o tensor métrico para um sistema de coordenadas que apenas está rotacionado de um ângulo α com relação ao plano $X_1 X_2$ (Fig. ApB.03) tem-se:

$$x_1 = \theta_1 \cos \alpha - \theta_2 \operatorname{sen} \alpha$$

$$x_2 = \theta_1 \operatorname{sen} \alpha + \theta_2 \cos \alpha$$

$$\theta_1 = x_1 \cos \alpha + x_2 \operatorname{sen} \alpha$$

$$\theta_2 = x_2 \cos \alpha - x_1 \operatorname{sen} \alpha$$

Substituindo-se as expressões acima nas expressões dos termos do tensor métrico e operando-se convenientemente tem-se:

$$\bar{G}_{11} = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

$$\bar{G}_{12} = (\cos \alpha)(-\operatorname{sen} \alpha) + (\operatorname{sen} \alpha)(\cos \alpha) = 0 = \bar{G}_{21} \quad (\text{ApB.06})$$

$$\bar{G}_{22} = (-\operatorname{sen} \alpha)(-\operatorname{sen} \alpha) + (\cos \alpha)(\cos \alpha) = 1$$

Os termos acima agrupados na forma de uma matriz constituem-se na matriz identidade de segunda ordem. Desta forma verifica-se que mesmo tendo o sistema de referência sofrido uma rotação, o sistema rotacionado continua sendo cartesiano de modo que a transformação representada pelo tensor métrico não afeta o resultado da medida dS , isto pode ser verificado calculando o suposto valor de dS em ambas referências da seguinte forma:

$$dS^2 = (d\theta_1)^2 + (\theta_1)^2 (d\theta_2)^2$$

(ApB.07)

$$dS^2 = (d\theta_1)^2 + (d\theta_2)^2$$

Observa-se que o tensor métrico é igual a identidade quando temos apenas sistemas de referência cartesianos, por essa razão no estudo da mecânica de meios contínuos quando nos referimos apenas a sistemas cartesianos de referência, os tensores métricos da configuração de referência \mathbf{G} , deformada \mathbf{g} e intermediária $\bar{\mathbf{G}}$ são invariavelmente substituídos pelo tensor identidade de segunda ordem. Destaca-se contudo, que as transformações entre as configurações não são diretas, ou seja, a transformação do tensor métrico material \mathbf{G} por exemplo, não corresponde a \mathbf{g} na configuração deformada e sim ao tensor de Finger \mathbf{b}^{-1} [41].

APÊNDICE C

Separação do tensor constitutivo anisótropo em parte desviadora e parte volumétrica

O tensor de tensões no caso de isotropia escreve-se em função da soma de suas partes desviadora e volumétrica da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = K_s^D \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G_s^D e_{ij} = 3K_s^D \varepsilon_{oct} + 2G_s^D (\varepsilon - \varepsilon_{oct}) \quad (\text{ApC.01})$$

onde:

$$K_s^D = \frac{E_s}{3(1-2\nu_s)} \quad (\text{ApC.02})$$

$$G_s^D = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)}$$

Na expressão ApC.01 é possível colocar em evidência as constantes K_s^D módulo volumétrico e G_s^D módulo secante dadas em função do módulo de elasticidade E_s e do coeficiente de Poisson ν_s . Estas constantes aparecem multiplicando as matrizes que representam respectivamente o tensor volumétrico de deformações ε_{oct} e o tensor desviador de deformações dado por $(\varepsilon - \varepsilon_{oct})$ [49]. A mesma idéia pode ser aplicada na determinação de matrizes que substituam as constantes K_s^D e G_s^D e que conteram toda a informação da anisotropia, neste caso

a matriz constitutiva anisótropa divide-se da seguinte forma: Seja a relação tensão deformação $\epsilon_{ij} = D_{ijkl} \sigma_{kl}$ dada por:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_1}{E_2} & -\frac{\nu_2}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_3}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_2}{E_3} & -\frac{\nu_3}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{ApC.03})$$

onde valem as relações abaixo afim de manter-se a simetria.

$$E_1 \nu_{yx} = E_2 \nu_{xy}$$

$$E_2 \nu_{zy} = E_3 \nu_{yz}$$

$$E_3 \nu_{xz} = E_1 \nu_{zx}$$

(ApC.04)

com:

$$\begin{matrix}
 v_{yx} = v_1 \\
 v_{zx} = v_2 \\
 v_{zy} = v_3
 \end{matrix}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 E_1 v_1 = E_2 v_{xy} \Rightarrow -\frac{v_{xy}}{E_1} = -\frac{v_1}{E_2} \\
 E_2 v_3 = E_3 v_{yz} \Rightarrow -\frac{v_{yz}}{E_2} = -\frac{v_3}{E_3} \\
 E_3 v_{xz} = E_1 v_2 \Rightarrow -\frac{v_{xz}}{E_1} = -\frac{v_2}{E_3}
 \end{cases}
 \quad (\text{ApC.06})$$

Obtendo-se o tensor constitutivo em termos dos coeficientes de Poisson v_1 , v_2 e v_3 e dos módulos de elasticidade E_1 , E_2 e E_3 segundo Hoffman[58] tem-se:

$$[c^s] = \frac{1}{\gamma}
 \begin{bmatrix}
 \frac{E_3 - v_2^2 E_2}{E_2 E_3^2} & \frac{E_2 v_2 v_3 + v_1 E_3}{E_2 E_3^2} & \frac{v_1 v_2 v_3}{E_2 E_3} & 0 & 0 & 0 \\
 \sim & \frac{E_3 - v_3^2 E_1}{E_1 E_3^2} & \frac{E_1 v_1 v_3 + v_2 E_2}{E_1 E_2 E_3} & 0 & 0 & 0 \\
 \sim & \sim & \frac{E_2 - v_1^2 E_1}{E_1 E_2^2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & G_{12} \gamma & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \gamma & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \gamma
 \end{bmatrix}
 \quad (\text{ApC.06})$$

com:

$$\gamma = -\frac{v_3^2}{E_2 E_3^2} - 2\frac{v_1 v_2 v_3}{E_2 E_3^2} - \frac{v_2^2}{E_1 E_3^2} - \frac{v_1^2}{E_2 E_3} + \frac{1}{E_1 E_2 E_3} \quad (\text{ApC.07})$$

Sendo:

$$v_{21} = v_{12} \frac{E_2}{E_1} ; \quad v_{32} = v_{23} \frac{E_3}{E_2} ; \quad v_{13} = v_{31} \frac{E_1}{E_3} \quad (\text{ApC.08})$$

Para simplificar a expressão do tensor constitutivo considera-se as seguintes constantes:

$$A_1 = (1 - v_{23} v_{32}) ; \quad B_1 = (v_{12} + v_{13} v_{32}) ; \quad C_1 = (v_{23} + v_{21} v_{13}) ; \quad D_1 = (v_{31} + v_{32} v_{21})$$

$$A_2 = (1 - v_{31} v_{13}) ; \quad B_2 = (v_{21} + v_{23} v_{31}) ; \quad C_2 = (v_{32} + v_{31} v_{12}) ; \quad D_2 = (v_{13} + v_{12} v_{23})$$

$$A_3 = (1 - v_{12} v_{21})$$

de modo que tem-se:

$$[C^s] = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{A_2 A_1 - B_1 B_2} & \frac{E_1 A_1 B_2}{A_1 (A_2 A_1 - B_1 B_2)} & \frac{E_1 D_1 A_1}{A_1 (A_2 A_1 - B_1 B_2)} & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \frac{E_2 A_2}{A_3 A_2 - C_1 C_2} & \frac{E_2 C_2 A_2}{A_2 (A_3 A_2 - C_1 C_2)} & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \frac{E_3 A_3}{A_1 A_3 - D_1 D_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix} \quad (\text{ApC.09})$$

Expressando as tensões em sua parte volumétrica e desviadora também para o caso de anisotropia com:

$$\begin{cases} \tau_{11} = C_{11} \epsilon_{11} + C_{12} \epsilon_{22} + C_{13} \epsilon_{33} \\ \tau_{22} = C_{12} \epsilon_{11} + C_{22} \epsilon_{22} + C_{23} \epsilon_{33} \\ \tau_{33} = C_{13} \epsilon_{11} + C_{23} \epsilon_{22} + C_{33} \epsilon_{33} \end{cases} \quad (\text{ApC.10})$$

e:

$$\begin{cases} \tau_{12} = C_{44} 2\epsilon_{12} \\ \tau_{23} = C_{55} 2\epsilon_{23} \\ \tau_{31} = C_{66} 2\epsilon_{31} \end{cases} \quad (\text{ApC.11})$$

Dada a decomposição do tensor de tensões em partes volumétrica e desviadora com C o tensor constitutivo anisótropo tem-se:

$$\tau_{oct} + \tau_{dev} = C \epsilon \quad (\text{ApC.12})$$

Vale também neste caso decompor o tensor constitutivo em parte volumétrica K e desviadora G de modo a ter:

$$K \epsilon_{oct} + G \epsilon_{dev} = C \epsilon \quad (\text{ApC.13})$$

fazendo:

$$\sigma_{oct} = K \epsilon_{oct} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}(C_{11} \epsilon_{11} + C_{12} \epsilon_{22} + C_{13} \epsilon_{33} + C_{12} \epsilon_{11} + C_{22} \epsilon_{22} + C_{23} \epsilon_{33} + C_{13} \epsilon_{11} + C_{23} \epsilon_{22} + C_{33} \epsilon_{33}) \\ \frac{1}{3}(C_{11} \epsilon_{11} + C_{12} \epsilon_{22} + C_{13} \epsilon_{33} + C_{12} \epsilon_{11} + C_{22} \epsilon_{22} + C_{23} \epsilon_{33} + C_{13} \epsilon_{11} + C_{23} \epsilon_{22} + C_{33} \epsilon_{33}) \\ \frac{1}{3}(C_{11} \epsilon_{11} + C_{12} \epsilon_{22} + C_{13} \epsilon_{33} + C_{12} \epsilon_{11} + C_{22} \epsilon_{22} + C_{23} \epsilon_{33} + C_{13} \epsilon_{11} + C_{23} \epsilon_{22} + C_{33} \epsilon_{33}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

(ApC.14)

e operando convenientemente vem:

$$K \epsilon_{oct} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{3}(C_{11} + C_{12} + C_{13}) & \frac{1}{3}(C_{12} + C_{22} + C_{23}) & \frac{1}{3}(C_{13} + C_{23} + C_{33}) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(C_{11} + C_{12} + C_{13}) & \frac{1}{3}(C_{12} + C_{22} + C_{23}) & \frac{1}{3}(C_{13} + C_{23} + C_{33}) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(C_{11} + C_{12} + C_{13}) & \frac{1}{3}(C_{12} + C_{22} + C_{23}) & \frac{1}{3}(C_{13} + C_{23} + C_{33}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

(ApC.15)

Para a parte desviadora faz-se:

$$G \epsilon_{dev} = \left\{ \begin{array}{l} [\tau_{11} - \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})] \\ [\tau_{22} - \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})] \\ [\tau_{33} - \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})] \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{array} \right\} \quad (\text{ApC.16})$$

Substituindo-se τ_{ij} e agrupando-se os termos na forma de um produto de uma matriz por um vetor pode-se escrever:

$$G \epsilon_{dev} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3}(C_{11}\epsilon_{11} + C_{12}\epsilon_{22} + C_{13}\epsilon_{33}) - \frac{1}{3}(C_{12}\epsilon_{11} + C_{22}\epsilon_{22} + C_{23}\epsilon_{33}) - \frac{1}{3}(C_{13}\epsilon_{11} + C_{23}\epsilon_{22} + C_{33}\epsilon_{33}) \\ -\frac{1}{3}(C_{11}\epsilon_{11} + C_{12}\epsilon_{22} + C_{13}\epsilon_{33}) + \frac{2}{3}(C_{12}\epsilon_{11} + C_{22}\epsilon_{22} + C_{23}\epsilon_{33}) - \frac{1}{3}(C_{13}\epsilon_{11} + C_{23}\epsilon_{22} + C_{33}\epsilon_{33}) \\ -\frac{1}{3}(C_{11}\epsilon_{11} + C_{12}\epsilon_{22} + C_{13}\epsilon_{33}) - \frac{1}{3}(C_{12}\epsilon_{11} + C_{22}\epsilon_{22} + C_{23}\epsilon_{33}) + \frac{2}{3}(C_{13}\epsilon_{11} + C_{23}\epsilon_{22} + C_{33}\epsilon_{33}) \\ 2C_{44}\epsilon_{12} \\ 2C_{55}\epsilon_{23} \\ 2C_{66}\epsilon_{33} \end{array} \right\} \quad (\text{ApC.17})$$

$$G \epsilon_{dev} = \left[\begin{array}{cc} [M1]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [M2]_{3 \times 3} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} [\epsilon_{ii}]_{3 \times 1} \\ 2[\epsilon_{jk}]_{3 \times 1} \end{array} \right\} \quad (\text{ApC.18})$$

com [M1] uma matriz dada por:

$$[M1] = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3}C_{11} - \frac{1}{3}C_{12} - \frac{1}{3}C_{13}\right) & \left(\frac{2}{3}C_{12} - \frac{1}{3}C_{22} - \frac{1}{3}C_{23}\right) & \left(\frac{2}{3}C_{13} - \frac{1}{3}C_{23} - \frac{1}{3}C_{33}\right) \\ \left(-\frac{1}{3}C_{11} + \frac{2}{3}C_{12} - \frac{1}{3}C_{13}\right) & \left(-\frac{1}{3}C_{12} + \frac{2}{3}C_{22} - \frac{1}{3}C_{23}\right) & \left(-\frac{1}{3}C_{13} + \frac{2}{3}C_{23} - \frac{1}{3}C_{33}\right) \\ \left(-\frac{1}{3}C_{11} - \frac{1}{3}C_{12} + \frac{2}{3}C_{13}\right) & \left(-\frac{1}{3}C_{12} - \frac{1}{3}C_{22} + \frac{2}{3}C_{23}\right) & \left(-\frac{1}{3}C_{13} - \frac{1}{3}C_{23} + \frac{2}{3}C_{33}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{ApC.19})$$

e [M2] outra matriz dada por:

$$[M2] = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{ApC.20})$$

As matrizes **K** e **G** desta forma deduzidas são as partes volumétrica e desviadora do tensor constitutivo anisótropo e substituem as constantes K_s^D e G_s^D na expressão ApC.01.