

**UMA FAMÍLIA DE ALGORITMOS HERMITIANOS
PARA A INTEGRAÇÃO DIRETA DAS EQUAÇÕES
DE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS**

HEITOR MIRANDA BOTTURA

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Dr. José Elias Laier

**São Carlos
1997**



Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca - EESC-USP

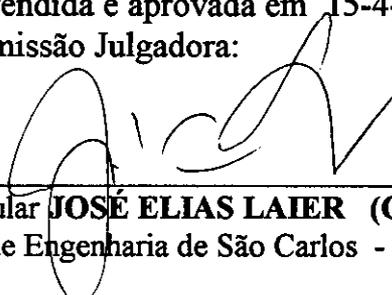
B751f Bottura, Heitor Miranda
Uma família de algoritmos hermitianos para a
integração direta das equações de dinâmica das
estruturas / Heitor Miranda Bottura. -- São
Carlos, 1997.

Tese (Doutorado). -- Escola de Engenharia
de São Carlos-Universidade de São Paulo, 1997.
Área: Engenharia de Estruturas
Orientador: Prof. Dr. José Elias Laier

1. Algoritmo de integração. 2. Hermitianos.
3. Algoritmo de passo simples. I. Título

FOLHA DE APROVAÇÃO

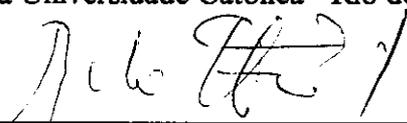
Tese defendida e aprovada em 15-4-1997
pela Comissão Julgadora:



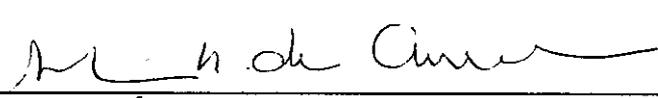
Prof. Titular **JOSE ELIAS LAIER (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



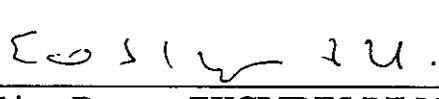
Prof. Doutor **LUIZ ELOY VAZ**
(Pontifícia Universidade Católica - Rio de Janeiro)



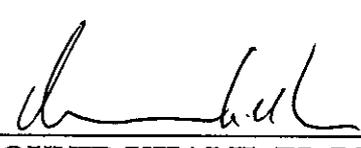
Prof. Associado **REYOLANDO MANOEL L. R. DA FONSECA BRASIL**
(Escola Politécnica - Universidade de São Paulo)



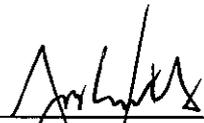
Profa Douõora **ANA LÚCIA HOMCE DE CRESCE EL DEBS**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Livre Docente **EUCLIDES DE MESQUITA NETO**
(Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP)



Prof. Dr. **MOUNIR KHALIL EL DEBS**
Coordenador da Área de Engenharia de Estruturas



JOSE CARLOS A. CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*A minha esposa e a meus filhos,
pela ajuda e compreensão,
com muito carinho.*

AGRADECIMENTOS

Ao Professor José Elias Laier pela segura orientação e amizade, mais uma vez demonstrados, durante a elaboração deste trabalho.

Professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC/USP, pela atenção que me dispensaram em todos os nossos contatos. Especialmente a Francisco Carlos Guete de Brito e Sylvia Helena Moretti Villani, pela presteza e cuidado na execução dos desenhos.

Colegas e funcionários do Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia da UNESP - Bauru, pela amizade e estímulo.

Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela bolsa de estudo concedida.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	AS EQUAÇÕES DE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS	7
2.1	Introdução	7
2.2	A Equação de Equilíbrio	7
2.3	A Superposição Modal	12
2.4	Sistemas com um Grau de Liberdade (SDOF)	15
2.5	Excitação Harmônica	20
2.6	A Perturbação Transiente	23
2.7	A Transformada de Fourier	26
3	ANÁLISE DE ALGORITMOS	31
3.1	Introdução	31
3.2	Expressão Geral dos Algoritmos	31
3.3	Características de Algoritmos de Integração	36
3.3.1	Auto-iniciação	36
3.3.2	Estabilidade	37
3.3.3	Consistência e Precisão	41
3.3.4	Convergência	41
3.3.5	Aniquilamento	42
3.3.6	Overshoot	43
3.4	Medida de Erros	45
3.4.1	Conceito de Erro	45
3.4.2	Erro Global e Erro Local	46
3.4.3	Dissipação e Dispersão	48
4	AS LINHAGENS DE ALGORITMOS	55
4.1	Introdução	55
4.2	Métodos Baseados em Expressões de Diferenças	55
4.2.1	Diferenças Centrais	55
4.2.2	Método de Houbolt	58

4.3	Método de Houbolt Generalizado	63
4.4	Método de Newmark	69
4.4.1	Método Beta - m	76
4.4.2	Algoritmo de Extrapolação de Newmark	79
4.5	Formulação por Resíduos Ponderados	86
4.5.1	Método de Zienkiewicz & Wood	87
4.5.2	Um Conjunto Unificado de Algoritmos de Passo Simples	90
4.5.3	Método de Hoff-Pahl	94
4.5.4	Uma Família de Mínimos Quadrados Generalizada	97
4.6	Elementos Finitos no Domínio Espaço-Tempo	106
5	UMA NOVA FAMÍLIA DE ALGORITMOS: FORMULAÇÃO HERMITIANA .	116
5.1	Introdução	116
5.2	A Formulação Hermitiana Aplicada a Equações de Primeira Ordem	117
5.3	A Família Proposta por Argyris	125
5.4	Uma Formulação Geral para a Dinâmica Estrutural: Formulação Hermitiana Direta	133
6	PROPOSTA DE UMA FAMÍLIA DE ALGORITMOS COM ANIQUILAMENTO ASSINTÓTICO	139
6.1	Introdução	139
6.2	A Escolha dos Operadores	140
6.3	As Propriedades Espectrais	144
6.4	Os Algoritmos da Família	147
6.4.1	Algoritmo de Primeira Ordem	147
6.4.2	Algoritmo de Segunda Ordem	149
6.4.3	Algoritmo de Terceira Ordem	151
6.4.4	Algoritmo de Quarta Ordem	153
6.4.5	Algoritmo de Quinta Ordem	155
6.4.6	Algoritmo de Sexta Ordem	156
6.4.7	Algoritmo de Sétima Ordem	157
6.4.8	Algoritmo de Oitava Ordem	159
6.4.9	Algoritmos de Ordens Superiores	160

6.5 Exemplos Numéricos	161
7 CONCLUSÕES	170
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	175

RESUMO

No presente trabalho desenvolve-se uma família de algoritmos de passo simples, com ordem de precisão local qualquer e aniquilamento assintótico para a análise dinâmica de estruturas. São utilizadas expressões hermitianas para as relações em diferenças envolvidas na representação das equações que descrevem o problema. Explicitam-se os membros da família, com precisão desde a primeira até a oitava ordem, que apresentam estabilidade incondicional, efetuando-se sua análise espectral bem como resolvendo-se um problema unidimensional e comparando-se com outros métodos, permitindo concluir-se pelo seu grande potencial de aplicação.

ABSTRACT

An one-step methods family for direct numerical integration in structural dynamic analysis is derived. Asymptotic annihilation and arbitrary truncation error order are attained. Hermitian type expressions are used in difference equations involved in the problem description. Inconditionally stable members, from first up to eighth order, are presented. A spectral analysis is performed in these cases and a single degree of freedom problem is solved. The solution is compared with those given from other methods, allowing to expect a good performance in practical applications.

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

A solução do problema de análise dinâmica de estruturas semi-discretizadas no espaço sob excitação qualquer variável com o tempo passa pela solução numérica de um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, que expressa as condições de equilíbrio segundo o sistema de coordenadas utilizado.

De fato, a solução analítica fechada de tais equações é um caminho que logo se esgota, por se limitar bastante a natureza da sollicitação, cuja resposta pode ser obtida a partir da integração explícita das expressões resultantes. Outras formas de abordar o problema são em geral necessárias. Algumas delas, como o emprego das transformadas de Fourier e da integral de Duhamel também não são suficientemente flexíveis, ou demandam trabalho numérico excessivo, para satisfazer o analista na maioria dos casos, a exemplo dos problemas não-lineares.

A solução mais geral é a que substitui as relações diferenciais do problema por expressões finitas, gerando um sistema de equações lineares simultâneas onde os dados de entrada configuram o movimento em instantes já determinados e as incógnitas são representadas pelo deslocamento e suas derivadas num instante posterior, por determinar. A solução do sistema assim estruturado permite então o avanço no movimento.

As expressões finitas empregadas definem o método numérico utilizado sendo que a qualidade da resposta obtida, bem como o tempo despendido em cálculos, dependem basicamente

do processo empregado para efetuar as integrações presentes no problema.

O estudo da ponderação desses fatores visando um algoritmo que se mostre o melhor possível para uma dada situação abre um fértil campo de pesquisa, no qual o presente trabalho se insere.

Dada a diversidade de solicitações de interesse na análise estrutural, dificilmente chegar-se-á a um método ideal para um caso genérico, sendo conveniente estudar-se o maior número possível de suas características, para melhor definir sua viabilidade e possibilidades de emprego.

No capítulo 2 apresenta-se a formulação tradicional da análise dinâmica de estruturas na forma matricial, para sistemas com múltiplos graus de liberdade. O método da superposição modal é então descrito, visando justificar o tratamento das características de comportamento dos métodos numéricos via sistemas com um único grau de liberdade (SDOF), o que simplifica sobremaneira a formulação e estudo dos algoritmos de integração. Os conceitos de modo de vibração, frequência natural, período natural e taxa de amortecimento são apresentados.

A solução explícita da equação de equilíbrio dinâmico, no caso da vibração forçada amortecida sob excitação harmônica, é apresentada. Efetua-se a adimensionalização do problema e apresentam-se a nomenclatura e terminologia a serem empregadas, objetivando a generalização das análises comparativas feitas posteriormente.

O estudo do movimento transiente via integral de Duhamel é comentado, e também a solução complexa em frequências, com o emprego da técnica da transformada de Fourier.

Fecha-se o capítulo apontando para a solução geral do problema, qual seja o emprego dos ditos métodos numéricos de integração direta.

O capítulo 3 é dedicado à apresentação da expressão geral dos algoritmos de integração, e sua classificação relativamente aos critérios habituais, isto é, são

conceituados algoritmos explícitos e implícitos, de ordens inferiores e superiores, de passo simples e multi-passo.

Numa segunda parte, relacionam-se as propriedades e características usualmente empregadas para qualificar métodos de integração utilizados em dinâmica, objetivando comparações de desempenho entre eles. Assim, a necessidade de procedimentos especiais para os instantes iniciais é comentada, os conceitos de consistência, convergência e precisão são apresentados, definindo-se os conceitos de estabilidade e "overshoot" do método numérico. O aniquilamento, entendido como um amortecimento numérico seletivo que filtra os modos superiores indesejáveis arrola-se aqui como uma propriedade benéfica e procurada.

A idéia de "erro cometido" recebe razoável atenção, uma vez que numa análise comparativa o algoritmo que apresente resposta com "menor erro" demandando trabalho numérico equivalente ou mesmo inferior é em princípio melhor. O caminho escolhido para isso é o tradicionalmente empregado pelos autores que vêm lidando com o problema em questão, isto é, a análise espectral e as medidas da dispersão e distorção, bem como a ordem de erro local de truncamento resultante.

A revisão bibliográfica dos principais métodos numéricos existentes é feita no capítulo 4, e o critério empregado na sua ordem de apresentação foi o de importância histórica, qualidade da resposta produzida e generalidade de formulação, uma vez que diversos processos há que não passam de abordagens um pouco modificadas de algoritmos já existentes ou casos particulares de outros conhecidos.

Na apresentação dos métodos, a matriz de amplificação é um aspecto preferencialmente apresentado, bem como gráficos comparativos de desempenho e uma crítica sobre suas características e propriedades.

O primeiro grupo, ou família, a merecer destaque é o dos processos derivados da aplicação de expressões em diferenças: especificamente a utilização de expressões em diferenças finitas centrais e o método apresentado por HOUBOLT (1950), uma bem conhecida variante dessa família. Mostra-se uma generalização deste último apresentada por

HULBERT (1991) e aperfeiçoada por HULBERT (1994) E HULBERT & CHUNG (1994b), cuja importância maior é a de esgotar as possibilidades dos métodos de passo simples de ordens inferiores, assim entendidos aqueles que apresentam erro local de até segunda ordem.

Na seqüência, descreve-se o processo de NEWMARK (1959), que introduz a interessante idéia de parâmetros livres cuja variação acarreta modificações nos coeficientes das expressões que permitem intensificar características consideradas de utilidade. A idéia é retomada por WILSON (1968) com o seu método Wilson- θ , aqui utilizado para comparação de desempenho em alguns gráficos. Diversas abordagens subseqüentes são comentadas, como as de BRUSA & NIGRO (1980), WOOD, BOSSAK & ZIENKIEWICZ (1980), a família ρ , apresentada por BAZZI & ANDERHEGGEN (1982) e o método Beta-m, apresentado por KATONA & ZIENKIEWICZ (1985). Um algoritmo de extrapolação baseado no método de Newmark e proposto por AUSTIN (1993) também merece atenção.

Uma alternativa à de escrever expressões em diferenças é a formulação por resíduos ponderados, introduzida por ZIENKIEWICZ (1977) que discretiza o domínio do tempo similarmente à forma utilizada para o tratamento de domínios elásticos no espaço por elementos finitos. Este caminho tem seqüência em ZIENKIEWICZ, WOOD & TAYLOR (1980) e HOFF & PAHL (1988) entre outros.

Com a intenção de reunir uma série de algoritmos dessa natureza numa única formulação geral, ZIENKIEWICZ, WOOD & HINE (1984) apresentam um "conjunto unificado de algoritmos de passo simples", e SALAMON & XIANG (1990) contribuem com uma proposta de geração sistemática de função-peso, cujo desempenho testam e comparam com uma série de outros processos.

O procedimento de mínimos quadrados é outra abordagem que se prestou à montagem de algoritmos, e a família de KUJAWSKI & GALLAGHER (1989) é objeto de abordagem descritiva.

O tratamento simultâneo do domínio espaço-tempo por elementos finitos é a proposta de HUGHES & HULBERT (1988) e

este caminho é retomado por HULBERT (1992 e 1994), aproveitando o método descontínuo de Galerkin (TDG).

O capítulo 5 inicia-se com a apresentação da formulação hermitiana aplicada à solução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, conforme descrito em COLLATZ (1968) e presente nas análises efetuadas nos trabalhos de MAKINSON (1968) e NØRSETT (1973). Interessantes observações sobre as conclusões desses trabalhos e sua extrapolação para equações de segunda ordem são feitas por KRIEG (1973). Posteriormente, expressões hermitianas de primeira e terceira ordem são utilizadas por ARGYRIS, VAZ & WILLAM (1977 e 1978) na solução de problemas de escoamento viscoso e de viscoelasticidade, viscoplasticidade e difusão transiente. Uma extensão da técnica à equação de equilíbrio dinâmico já é feita por ARGYRIS & al. (1973), e essa idéia é retomada posteriormente por ARGYRIS & al (1979), inclusive com a presença do aniquilamento assintótico. Em 1991, ARGYRIS & MLEJNEK novamente abordam o tema, agora sem obter dissipação numérica. Comenta-se a qualidade dos resultados encontrados.

Numa segunda parte, é feita referência a um algoritmo hermitiano cúbico gerado por LAIER (1993), com parâmetros livres de ajuste, comparado favoravelmente ao de KUJAWSKI & GALLAGHER (1989). Citam-se ainda os estudos publicados por LAIER (1995) e que resultam numa família cujos gráficos de propriedades espectrais para membros de até terceira ordem são mostrados em confronto com os dos processos de HOUBOLT (1950) e HULBERT (1992).

Finalmente, no capítulo 6 propõe-se um caminho para a geração de uma família de algoritmos hermitianos de ordem de precisão local qualquer que apresenta estabilidade incondicional, aniquilamento assintótico em todos os seus membros e bifurcação na origem. Não se utilizam em princípio parâmetros livres de ajuste, embora seja possível estudar-se seu emprego para, abrindo mão da ordem de precisão, aprimorar as qualidades do algoritmo resultante.

Posteriormente à dedução da expressão geral para um método de ordem qualquer, explicitam-se os processos de primeira à oitava ordem pertencentes à família.

As principais propriedades espectrais como a evolução do raio espectral, amortecimento numérico e alongamento contra o tamanho do passo utilizado (tomados como medidas da dissipação e dispersão presentes), são apresentados em gráficos.

Toma-se um primeiro exemplo numérico unidimensional de movimento harmônico e algumas comparações com outros processos bem como entre os membros da família de diferentes ordens de precisão são mostradas em tabelas, para enfatizar o potencial dos algoritmos deduzidos.

No capítulo 7, comenta-se a abordagem utilizada para a geração da família de algoritmos e faz-se uma crítica dos resultados encontrados, notadamente sobre a conveniência ou não de se aumentar indefinidamente a ordem de precisão do erro local, assim como das características espectrais encontradas.

CAPÍTULO 2 - AS EQUAÇÕES DE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

2.1. INTRODUÇÃO

Apresenta-se neste capítulo a formulação do problema de análise dinâmica de estruturas, discriminando-se as principais características das grandezas envolvidas, bem como as relações básicas.

2.2. A EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO

Uma estrutura cuja descrição do movimento sob uma dada sollicitação exija o conhecimento do deslocamento em mais de uma coordenada de um sistema qualquer escolhido configura um sistema de múltiplos graus de liberdade. A equação matricial de equilíbrio segundo essas coordenadas tem a forma:

$$\{q(t)\} + [C]\left\{\dot{x}\right\} + [M]\left\{\ddot{x}\right\} = \{P(t)\} \quad (2.1)$$

onde $\{x\}$ é o vetor dos deslocamentos segundo as coordenadas adotadas, um ponto indica uma derivação com relação ao tempo e analogamente, são usados dois pontos para a indicação da segunda derivada de $\{x\}$, isto é, a aceleração.

A matriz de massa é escrita $[M]$, o amortecimento é representado por $[C]$, as forças internas pelo termo $\{q\}$ e $\{P(t)\}$ é o vetor das sollicitações. A interpretação das grandezas e variáveis nela presentes permite extrair algumas conclusões iniciais a respeito do método a ser empregado em sua solução.

A equação (2.1) resolvida fornece os deslocamentos segundo as coordenadas escolhidas, arranjadas no vetor $\{x\}$ para o instante considerado, dado por $\{x\}^T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Estes têm importância *de per si* ao se imporem limitações funcionais ou psicológicas a seus valores. Suas derivadas com o tempo também são de interesse por estarem relacionadas ao conforto do usuário. São elas: a velocidade, primeira derivada denotada neste trabalho por um ponto sobre a representação do deslocamento, e a aceleração, segunda derivada, indicada por dois pontos sobre o vetor deslocamento.

Os esforços internos provocados pelos deslocamentos relativos das diversas partes da estrutura implicam em requisitos de resistência e as tensões internas a eles associadas, se periódicas, podem provocar fadiga nos materiais componentes da estrutura. Assim, seu conhecimento (em valor e frequência) pode também ser um dado para o dimensionamento.

As solicitações $P(t)$ e as condições iniciais são as causas dos deslocamentos.

Em geral, em tais casos, $P(t)$ pode ser bem representada por uma superposição de funções senoidais e cossenoidais de amplitude conhecida.

A função-pulso repetida a intervalos regulares representa também uma gama considerável de solicitações, como as que ocorrem onde há choque. A figura 2.1 mostra exemplos de formas assumidas para a função pulso.

Nem todas as solicitações determinísticas são, entretanto, periódicas. Máquinas em regime transitório, como em arranque e paragem, e solicitações decorrentes de tráfego de veículos representados por trens-tipo com ou sem frenagem ou aceleração são exemplos de solicitações aperiódicas notáveis. Habitualmente, o interesse em tais casos é na história da estrutura apenas por um curto período além do intervalo de atuação da solicitação.

Podem ainda ocorrer solicitações aleatórias, desconhecidas em amplitude ou frequência num dado intervalo de tempo. Recorre-se então a uma distribuição estatística dos seus valores num período conveniente de amostragem.

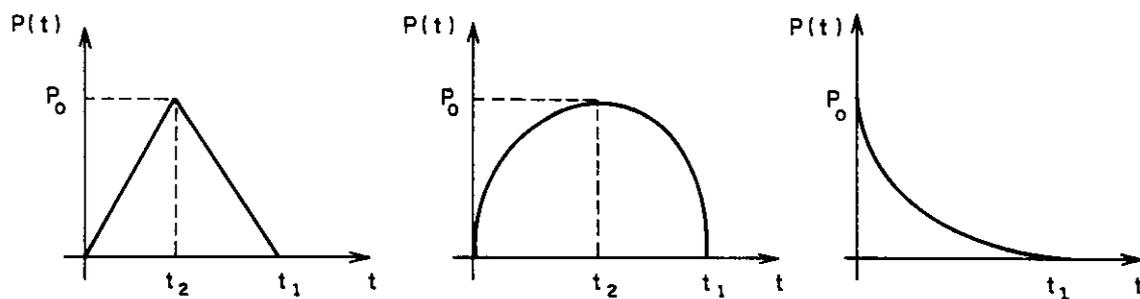


Figura 2.1 - Formas usuais da função pulso

Tipicamente, terremotos, ventos ou ondas marítimas originam solicitações com tal característica.

As forças internas estão representadas em (2.2) pelo vetor $\{q(t)\}$ e considerado um intervalo de tempo iniciado em t_i e concluído em t_{i+1} , pode-se escrever, como fazem BAZZI & ANDERHEGGEN (1982):

$$\{q(t)\} = \{q_i\} + [\tilde{K}] \left\{ \{x(t)\} - \{x_i\} \right\} + \{q'(t)\} \quad (2.2)$$

para um instante t no interior do intervalo, ou então graficamente, com a nomenclatura indicada, o que sugere a geometria ilustrada na figura 2.2. As forças internas no instante t_i são representadas por $\{q_i\}$ e $[\tilde{K}]$ é uma aproximação para a matriz de rigidez incremental válida no intervalo. Esta pode ser tomada como a matriz tangente calculada em t_i e dada por $[K_t]$. O termo $\{q'(t)\}$ representa a parcela desconhecida das forças internas que não poderiam ser linearizadas no início do intervalo, e é conveniente expressá-lo em função do seu valor no instante final, isto é, $\{q'(t_{i+1})\}$.

Adotando-se uma função $b(t)$ adimensional no tempo de domínio $[t_i, t_{i+1}]$, vem:

$$\begin{aligned} \{q'(t)\} &= b(t)\{q'_{i+1}\} \\ b(t_i) &= 0; b(t_{i+1}) = 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

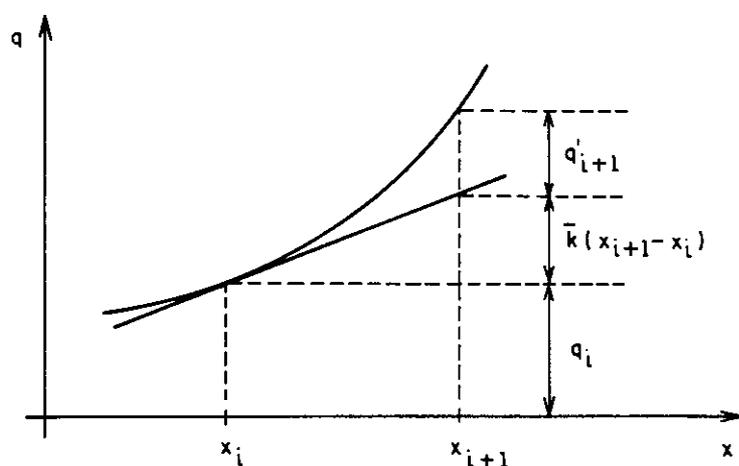


Fig. 2.2 - Forças internas no caso não-linear

e além disso, se tomada a matriz tangente $[K_t]$ para representar $[\tilde{K}]$ deve-se ainda atender a $\dot{b}(t_i) = 0$.

Nas condições acima, conhecidos o deslocamento e suas derivadas no instante t_i é possível avançar nas informações para t_{i+1} apenas se já forem conhecidos os deslocamentos nesse instante. Em outras palavras, a parcela não-linear é dada por $\{q'(t_{i+1})\}$. Na verdade, os problemas relacionados com sua obtenção, como o cálculo das forças internas e das matrizes de rigidez incrementais são bastante complicados e sua discussão foge ao escopo do presente trabalho. Entretanto é importante que os métodos numéricos buscados contemplem também os problemas não-lineares, o que exige determinadas propriedades, aqui a serem discutidas no momento apropriado.

Por outro lado, se o problema pode ser bem descrito assumindo-se comportamento linear as forças internas podem ser escritas como:

$$\{q(t)\} = [K]\{x(t)\} \quad (2.4)$$

sendo tal condição imprescindível para uma análise teórica das propriedades numéricas de algoritmos de integração

utilizados na solução de (2.1), que passaria com essa hipótese a ter aspecto:

$$[K]\{x\} + [C]\{\dot{x}\} + [M]\{\ddot{x}\} = \{P(t)\} \quad (2.5)$$

que, como será visto, é a expressão a ser utilizada no estudo dos métodos cuja aplicação este trabalho pretende discutir.

O amortecimento eventualmente presente no movimento está associado à matriz $[C]$, com os valores dos seus elementos obtidos a partir de uma hipótese assumida para o comportamento da estrutura. É bastante difícil mensurar o amortecimento, sendo sua consideração feita indiretamente através de coeficientes em $[C]$ que busquem reproduzir com a fidelidade e simplicidade convenientes o fenômeno físico que ocorre.

Uma expressão amplamente utilizada para a sua representação tem a forma:

$$[C] = \lambda_m[M] + \lambda_k[K] \quad (2.6)$$

onde se toma uma combinação linear das matrizes de rigidez e de massa, já vislumbrando as facilidades de manipulação numérica que esta forma permitirá. O chamado modelo visco-elástico é uma particularização dessa última relação, fixando-se o coeficiente multiplicador da matriz de massa nulo. Desta forma, vem:

$$[C] = c[K] \quad (2.7)$$

onde uma única constante quantifica o fenômeno.

Quando a estrutura é discretizada para a análise, a matriz de massa $[M]$ pode ser obtida nas formas chamadas de consistente ou concentrada, dependendo da função de interpolação utilizada para efetuar as integrais no elemento envolvidas no seu cálculo. Essa última forma (a da matriz de massa concentrada) é diagonal, contrariamente à consistente, que é esparsa e não tão atraente do ponto de vista numérico.

Os coeficientes de $[M]$ são sempre tomados constantes no tempo.

As condições de contorno associadas à equação (2.5) são traduzidas em valores conhecidos de deslocamentos e velocidades no instante inicial do movimento (condições iniciais).

Eventualmente nem todas essas informações são conseguidas da simples observação do problema, podendo resultar parcialmente da aplicação da própria equação (2.1).

2.3 A SUPERPOSIÇÃO MODAL

Assumindo-se forma ortogonal para a matriz de amortecimento como discutido em WILSON & PENZIEN apud BATHE & WILSON (1973)*, uma transformação de coordenadas como:

$$\{x\} = [Z]\{y\} \quad (2.8)$$

pode ser aplicada à equação (2.5), onde $\{y\}$ é um vetor de deslocamentos generalizados, com o objetivo de desacoplar as equações do problema. Este vetor, transformado por $[Z]$, matriz quadrada não-singular a ser determinada, resulta nos deslocamentos originais $\{x\}$.

Levando-se (2.8) a (2.5), vem:

$$[M][Z]\{\ddot{y}\} + [C][Z]\{\dot{y}\} + [K][Z]\{y\} = \{P(t)\} \quad (2.9)$$

e pré-multiplicando-se pela transposta de $[Z]$, resulta:

$$[Z]^T[M][Z]\{\ddot{y}\} + [Z]^T[C][Z]\{\dot{y}\} + [Z]^T[K][Z]\{y\} = [Z]^T\{P(t)\} \quad (2.10)$$

ou fazendo ainda, para sintetizar a notação:

* WILSON, E. L. & PENZIEN, J - Evaluation of orthogonal damping matrices Int. J. Num. Meth. Eng. 4, 5-10 (1972)

$$\begin{aligned}
[Z]^T[M][Z] &= [M^*] \\
[Z]^T[C][Z] &= [C^*] \\
[Z]^T[K][Z] &= [K^*] \\
[Z]^T\{P(t)\} &= \{P^*(t)\}
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

vem finalmente:

$$[M^*]\left\{\ddot{y}\right\} + [C^*]\left\{\dot{y}\right\} + [K^*]\{y\} = \{P^*(t)\}
\tag{2.12}$$

A determinação de uma forma possível e conveniente para $[Z]$ pode ser feita tomando-se a equação de equilíbrio das vibrações livres não-amortecidas obtida de (2.5) particularizada para essa situação, de aspecto:

$$[M]\left\{\ddot{x}\right\} + [K]\{x\} = \{0\}
\tag{2.13}$$

cuja solução geral é da forma:

$$\{x\} = \{\phi\} \text{sen } \omega(t - t_0)
\tag{2.14}$$

pois levando-a, e à sua segunda derivada a (2.13), resulta:

$$-[M]\{\phi\}\omega^2 \text{sen } \omega(t - t_0) + [K]\{\phi\} \text{sen } \omega(t - t_0) = \{0\}$$

que permite também afirmar-se que:

$$\omega^2[M]\{\phi\} = [K]\{\phi\}
\tag{2.15}$$

o que configura um problema de autovalores de \underline{n} soluções, sendo \underline{n} o número de graus de liberdade presentes, igual à ordem do sistema de equações de (2.5). Essas soluções formam o conjunto de pares $(\omega_1^2, \phi_1), (\omega_2^2, \phi_2), \dots, (\omega_n^2, \phi_n)$ de autovalores e autovetores, onde esses últimos podem ser M-ortonormalizados, de modo a ter-se:

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.16)$$

e ainda $0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$. Diz-se que cada par $\omega_i, \{\phi_i\}$ caracteriza um modo de vibração da estrutura. Definindo-se as matrizes:

$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \dots \{\phi_n\}]$$

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

passa-se a notar a equação da vibração livre não-amortecida (2.15) como:

$$[M][\Phi][\Omega^2] = [K][\Phi] \quad (2.18)$$

sendo que, devido a (2.16), se pré-multiplicada a anterior por $[\Phi]^T$, vem:

$$[\Omega^2] = [\Phi]^T [K] [\Phi] \quad (2.19)$$

o que indica a conveniência de se tomar para $[Z]$ em (2.8), a matriz $[\Phi]$. De fato, fazendo:

$$\{x\} = [\Phi]\{y\} \quad (2.20)$$

e levando-se a (2.10), considerando-se (2.16), resulta:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{y} \\ y \end{Bmatrix} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ y \end{Bmatrix} + [\Omega^2] \{y\} = [\Phi]^T \{P(t)\} \quad (2.21)$$

que era o objetivo da manipulação algébrica feita acima.

A análise dessa última expressão mostra que nos problemas sem amortecimento ou em que este se apresente de forma proporcional a $[M]$ e/ou $[K]$, isto é, atendendo a (2.6),

as equações de equilíbrio apresentam-se desacopladas, uma vez que $[\Omega^2]$ é diagonal. Aliás, isto costuma ocorrer, como já afirmado anteriormente, pois dificilmente se consegue representar o fenômeno com exatidão. Assim, é bastante comum optar-se por uma matriz que concilie uma razoável fidelidade de modelagem com uma forma matemática que permita o desacoplamento das equações.

2.4 SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE (SDOF)

Para esses sistemas, referidos geralmente na literatura como SDOF (single degree of freedom) e cujo modelo físico está representado na figura 2.3, a equação (2.5) no caso linear reduz-se à forma escalar dada pela relação:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = p^*(t) \quad (2.22)$$

que representa uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e cuja solução é do tipo:

$$x = x_c + x_p \quad (2.23)$$

onde a primeira parcela, chamada de solução complementar é a solução da equação homogênea correspondente, isto é:

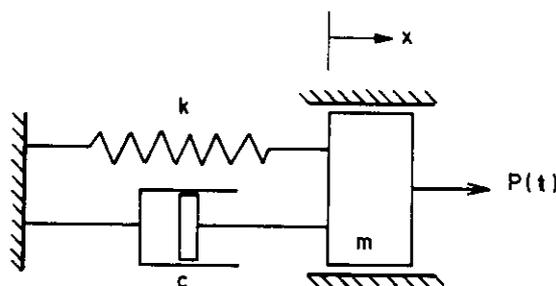


Figura 2.3. Modelo físico para sistemas com um grau de liberdade (SDOF)

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0 \quad (2.24)$$

e a segunda parcela é uma solução particular de (2.22).

A equação (2.24) oferece uma solução do tipo:

$$x = A \exp(\lambda t) \quad (2.25)$$

que é característica da estrutura, independente da solicitação, e cujo estudo fornece indicações importantes. Vale a relação:

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \left[\left(\frac{c}{2m} \right)^2 - \frac{k}{m} \right]^{1/2} \quad (2.26)$$

que fornece as raízes da equação característica relativa à solução de (2.24).

Se as duas raízes são reais, ou seja, se $\gamma = \frac{c}{2m} > \sqrt{\frac{k}{m}}$, (2.25) escreve-se:

$$x = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) \quad (2.27)$$

representando uma volta da massa m à posição original de equilíbrio, já que λ_1 e λ_2 são negativos, como é mostrado na figura 2.4.

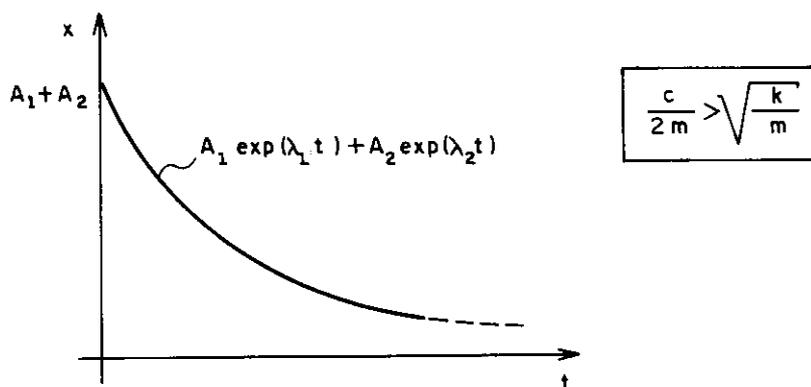


Figura 2.4. Movimento superamortecido

Tal hipótese é de pequeno interesse porque ocorre para amortecimentos muito maiores do que os fisicamente existentes na quase totalidade dos casos práticos de estruturas.

Se, entretanto, $\gamma = \frac{c}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$, as raízes são complexas, com representação na forma:

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm i \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.28)$$

e a solução assume a expressão:

$$x = \exp\left(-\frac{c}{2m} t\right) (A_1 \operatorname{sen} \omega_1 t + A_2 \operatorname{cos} \omega_1 t) \quad (2.29)$$

onde:

$$\omega_1 = \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.30)$$

sendo A_1 e A_2 obtidas a partir das condições iniciais do problema, que são geralmente o deslocamento e a velocidade

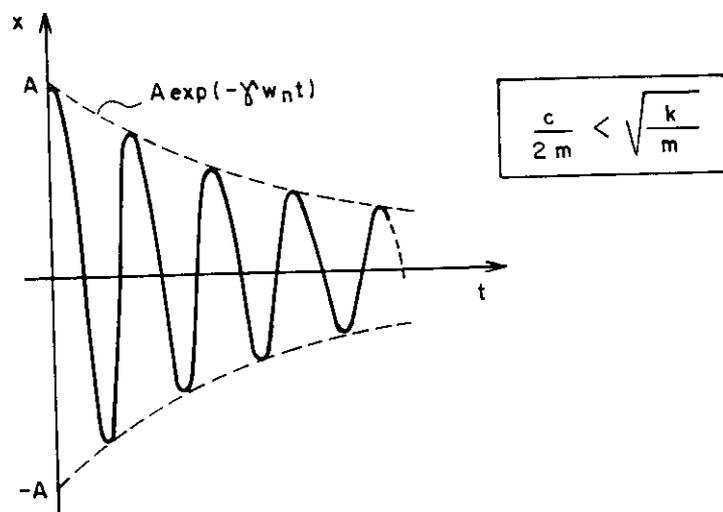


Figura 2.5 - Vibração livre amortecida

conhecidos no princípio do movimento. A figura 2.5. mostra a evolução do deslocamento com o tempo neste caso.

A solução (2.29) oferece dois valores importantes de amortecimento: o nulo ($c = 0$) corresponde à chamada vibração não-amortecida, quando se tem:

$$x = A_1 \operatorname{sen} \omega_n t + A_2 \operatorname{cos} \omega_n t \quad (2.31)$$

onde se toma:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad (2.32)$$

ou então, alternativamente:

$$\begin{aligned} x &= A \operatorname{sen}(\omega_n t + \alpha) \\ A &= (A_1^2 + A_2^2)^{1/2} \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{A_2}{A_1} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nessas últimas expressões A é a amplitude (deslocamento máximo da posição média) e ω_n a frequência natural do sistema, dada pela relação:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \quad (2.34)$$

onde T é o período do movimento. A representação deste

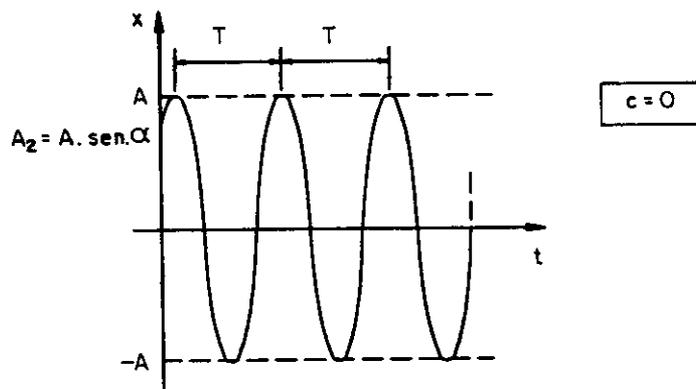


Figura 2.6 - Vibração livre não-amortecida

movimento é feita à figura 2.6.

Outro valor notável do amortecimento é o que corresponde ao limite entre raízes reais e complexas para (2.24), dado pelas relações:

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow c_c = 2\sqrt{km} \quad (2.35)$$

que define o amortecimento crítico c_c . Utilizando (2.32), pode-se definir esse parâmetro do movimento como:

$$c_c = 2m\omega_n \quad (2.36)$$

A adimensionalização do amortecimento é feita definindo-se a taxa de amortecimento (ou, quando não houver margem de dúvidas, simplesmente amortecimento) γ pela fórmula:

$$\gamma = \frac{c}{c_c} \quad (2.37)$$

Usualmente, (2.22) é apresentada dividida pela massa, com o fim de generalizar os resultados da análise e facilitar comparações entre problemas diversos. Trabalha-se então com a expressão:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{p^*(t)}{m} \quad (2.38)$$

sendo levadas (2.37) e (2.32) de modo a ter-se:

$$\ddot{x} + \gamma \frac{c_c}{m} \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{p^*(t)}{m}$$

ou finalmente, considerando (2.35) e novamente (2.32), vem:

$$\ddot{x} + 2\gamma\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = p(t) \quad (2.39)$$

atentando-se para tomar-se $p(t) = p^*(t)/m$. Com essas últimas relações, (2.29) escreve-se:

$$x = \exp(-\gamma\omega_n t)(A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_1 t) \quad (2.40)$$

e também (2.30) assume aspecto:

$$\omega_1 = \omega_n(1 - \gamma^2)^{1/2} \quad (2.41)$$

valendo evidentemente uma alternativa de representação similar a (2.33), isto é:

$$x = A \exp(-\gamma\omega_n t) \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (2.40a)$$

sendo que para as estruturas reais, pode-se afirmar que ω_n é muito próximo de ω_1 , uma vez que a taxa de amortecimento γ é usualmente pequena, conforme WARBURTON (1976), querendo com isto dizer-se que assume valores até 0,2, ou seja, a frequência de vibrações livres do sistema é praticamente sua frequência natural.

2.5 EXCITAÇÃO HARMÔNICA

Quando as solicitações são do tipo $p(t) = p_0 \cos \omega t$ (ou, analogamente $p(t) = p_0 \sin(\omega t)$), isto é, harmônicas simples, a solução fechada da equação diferencial é uma alternativa. Retomando para tal condição, a expressão (2.39), vem:

$$\ddot{x} + 2\gamma\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = p_0 \sin \omega t \quad (2.42)$$

e para atender a (2.23), escolhendo-se por inspeção a solução particular da forma:

$$x_p = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2.43)$$

e considerando a relação:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (2.44)$$

chega-se à fórmula:

$$x_p = \frac{P_0}{\omega_n^2 \left[(1 - r^2)^2 + 4r^2\gamma^2 \right]} \left\{ (1 - r^2) \operatorname{sen} \omega t - 2r\gamma \operatorname{cos} \omega t \right\} \quad (2.45)$$

que acrescentada à solução complementar dada por (2.29) ou (2.40), fornece os deslocamentos resultantes.

Pode-se dizer que fisicamente a resposta completa é a soma da função de partida transiente (função complementar) exponencialmente decrescente com o tempo, com a resposta estacionária (solução particular). Um estudo da expressão completa fornece informações sobre as vibrações nos primeiros ciclos, se nisso houver interesse; porém em muitos casos apenas a resposta estacionária é desejada, bastando então uma análise de (2.45).

Para se reescrever os deslocamentos conforme mostrado nas (2.33), vem:

$$A = \frac{P_0}{\omega_n^2 \left[(1 - r^2)^2 + 4r^2\gamma^2 \right]^{1/2}} \quad (2.46)$$

e também:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[- \frac{2r\gamma}{(1 - r^2)} \right] \quad (2.47)$$

O deslocamento correspondente a uma solicitação estática p_0^* , em (2.22), vale:

$$x_{st} = \frac{p_0^*}{k} = \frac{p_0 m}{k}$$

e a relação entre a amplitude do deslocamento estacionário, dada por (2.46), e esse último valor, é dada por:

$$\frac{A}{x_{st}} = \frac{P_0}{\omega_n^2 \left[(1 - r^2)^2 + 4r^2\gamma^2 \right]^{1/2} \frac{P_0 m}{k}} = \frac{1}{\left[(1 - r^2)^2 + 4r^2\gamma^2 \right]^{1/2}} \quad (2.48)$$

onde se verifica que na ausência de amortecimento e para a frequência de excitação igual à natural da estrutura os deslocamentos crescem indefinidamente, já que o denominador de (2.48) anular-se-ia em tal circunstância. Este é o fenômeno de ressonância, cuja importância está em indicar que na presença de pequenos amortecimentos estruturas de frequência natural próxima à da solicitação apresentam grandes deslocamentos.

Observa-se também que para solicitações de frequência relativa baixa, os deslocamentos são praticamente os estáticos. Por outro lado, em situações opostas, isto é, excitações de frequência relativa elevada, resultam deslocamentos pequenos.

As duas últimas características mencionadas da solução harmônica valem praticamente para qualquer amortecimento e em termos qualitativos, essa análise é válida para quaisquer solicitações periódicas.

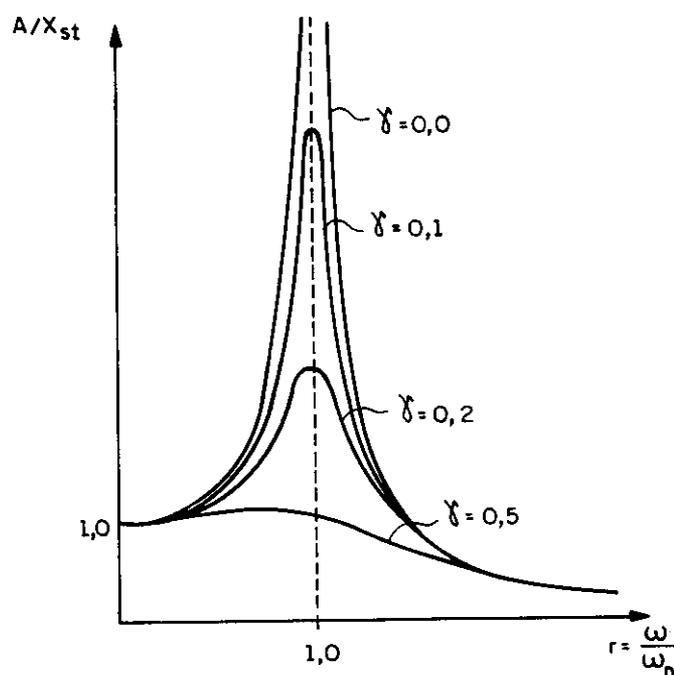


Figura 2.7 - Variação da amplitude com a frequência para diversos valores de amortecimento

No modelo chamado de amortecimento histerético, que assume ser a energia dissipada por ciclo independente da frequência do movimento, a amplitude máxima é para frequência de solicitação igual à natural do sistema para qualquer valor do amortecimento.

Pode-se estender esse caminho à solução de sistemas de resposta linear sob solicitações periódicas mais gerais, desde que passíveis de representações por séries de Fourier convergentes, o que é tratado por HASSAN (1987).

Os cálculos envolvidos no entanto são bastante numerosos e o método inviabiliza-se quando se exige um número não muito pequeno de termos da série para que a superposição resultante reproduza satisfatoriamente o problema original.

2.6 A PERTURBAÇÃO TRANSIENTE

As perturbações de curta duração, chamadas de transientes ou não-estacionárias, incluem os deslocamentos dos vínculos $x_0(t)$ de forma a que as forças de rigidez sejam escritas $k(x - x_0)$ e as de amortecimento $c\begin{pmatrix} \dot{x} - \dot{x}_0 \\ x - x_0 \end{pmatrix}$. Nesse caso, (2.22) assume aspecto:

$$k(x - x_0) + c\begin{pmatrix} \dot{x} - \dot{x}_0 \\ x - x_0 \end{pmatrix} + m\ddot{x} = 0 \quad (2.49)$$

ou ainda:

$$kx + c\begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} + m\ddot{x} = kx_0 + c\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

ou finalmente, em termos de movimento relativo da massa com os vínculos, denotado por $x_r = x - x_0$, vem:

$$m\ddot{x}_r + c\begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ x_r \end{pmatrix} + kx_r = -m\ddot{x}_0 \quad (2.51)$$

todas de mesmo aspecto formal, o que permite o aproveitamento das soluções de (2.22) para as (2.50) e (2.51).

Pode-se alternativamente construir a solução considerando-se que a perturbação de curta duração produziu deslocamentos, velocidades e acelerações, e após seu término o movimento passou a ser de vibrações livres amortecidas.

Os valores relevantes dos deslocamentos e esforços produzidos estão contidos no intervalo de tempo durante a aplicação da solicitação ou pouco depois, pelo que apenas os primeiros ciclos são usualmente relevantes na análise.

O efeito dos valores em geral existentes do amortecimento é pouco importante nesses ciclos iniciais. Desconsiderá-lo simplifica a análise e superestima ligeiramente os deslocamentos máximos.

Para obtenção da expressão do deslocamento, considera-se que a massa esteja inicialmente em repouso, sem deslocamento e que o impulso, assumida a ausência de perdas, seja igual à quantidade de movimento, isto é:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 &= 0 \\ \dot{x}_0 &= 0 \\ \mathfrak{J} &= m \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Após o instante inicial da aplicação do impulso ($t > 0$), ocorrem vibrações livres segundo (2.40), que devem atender às condições iniciais descritas, pelo que nessa expressão A_2 deve se anular.

Da derivação de (2.40) em tal situação, vem:

$$\dot{x} = \exp(-\gamma\omega_n t) (-\gamma\omega_n A_1 \sin \omega_1 t + \omega_1 A_1 \cos \omega_1 t) \quad (2.53)$$

de modo que, para o instante inicial, tem-se:

$$\dot{x}_0 = \omega_1 A_1 \quad (2.54)$$

e considerando-se esta última e (2.52), resulta o valor de A_1 , isto é:

$$A_1 = \frac{\mathfrak{J}}{\omega_1 m} \quad (2.55)$$

ficando a expressão para o deslocamento com o aspecto:

$$x = \exp(-\gamma\omega_n t) \frac{\mathfrak{J}}{\omega_1 m} \text{sen } \omega_1 t \quad (2.56)$$

Se o impulso é aplicado num instante $\tau > 0$ e a massa estava em repouso até então, uma expressão análoga a (2.56) pode ser escrita, na forma:

$$x = \frac{\mathfrak{J}}{\omega_1 m} \exp[-\gamma\omega_n(t - \tau)] \text{sen } \omega_1(t - \tau) \quad (2.57)$$

válida para instantes $\tau > t$.

O movimento para forças transientes aplicadas de forma geral durante um intervalo de tempo pode ser descrito a partir de (2.57), tomando-se um impulso elementar \mathfrak{J} na forma $P(\tau) \cdot \Delta\tau$, isto é, o produto do valor médio da força num intervalo de tempo suficientemente pequeno multiplicado pelo próprio intervalo, como indicado na figura (2.8) abaixo.

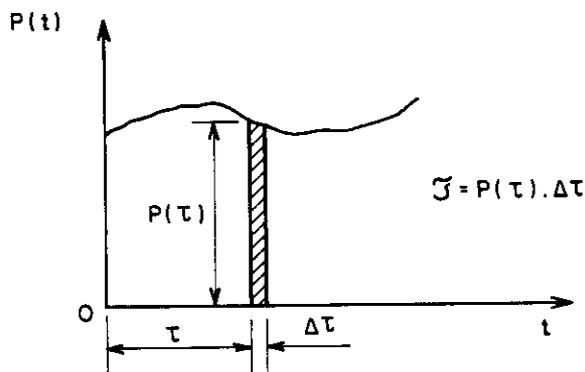


Figura 2.8 - Impulso de uma força transiente

Este impulso provoca um incremento de deslocamento de expressão semelhante a (2.57), isto é:

$$\Delta x = \frac{P(\tau)\Delta\tau}{m\omega_1} \exp[-\gamma\omega_n(t - \tau)] \text{sen } \omega_1(t - \tau) \quad (2.58)$$

e o efeito do impulso correspondente à atuação de $P(t)$ no intervalo entre o instante inicial e um instante t é dada tomando-se em (2.58) o limite indicado por $\Delta\tau \rightarrow d\tau$ e efetuando-se a integração, o que resulta em:

$$x = \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t P(\tau) \exp[-\gamma\omega_n(t - \tau)] \text{sen } \omega_1(t - \tau) d\tau \quad (2.59)$$

chamada de integral de Duhamel. As condições iniciais que lhe correspondem são deslocamento e velocidade nulos e para situação diversa deve-se acrescentar o termo relativo à vibração livre, dado por (2.40) com A_1 e A_2 encontrados a partir da imposição das condições iniciais.

Esta forma de resolver (2.22) é eficaz e eficiente para pulsos correspondentes a funções $P(t)$ relativamente simples; caso contrário, o trabalho algébrico envolvido passa a comprometer sua aplicabilidade, mesmo com a integração numérica.

Visando estender o alcance prático desse procedimento e atendendo ao fato de pequenos amortecimentos terem pouca influência nos ciclos iniciais, é usual a simplificação de (2.59) para:

$$x = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t P(\tau) \text{sen } \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (2.60)$$

embora ainda assim seja limitada a gama dos problemas viáveis de serem enfrentados com a utilização do procedimento descrito.

2.7 A TRANSFORMADA DE FOURIER

A existência da solução fechada para excitações harmônicas e a possibilidade de representar uma função de sollicitação transiente por outra que lhe seja equivalente, porém com período tendendo ao infinito, se conjugadas, ensejam uma abordagem alternativa ao problema de dinâmica das estruturas.

Seja a solicitação transiente representada no intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$, de modo a ter-se:

$$\begin{aligned} -\frac{T}{2} \leq t \leq 0; f(t) &\equiv 0 \\ 0 \leq t \leq \frac{T}{2}; f(t) &\text{ conhecido, } T \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Em tal situação, $f(t)$ pode ser assimilada a uma função periódica $f_T(t)$, de período T . Representando-se esta última por uma série de Fourier na sua forma complexa, vem:

$$f_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t} \quad (2.61)$$

onde:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (2.62)$$

Os coeficientes C_n são obtidos a partir de:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_T(t) e^{-i(n\omega_0 t)} dt \quad (2.63)$$

sendo portanto função do \underline{n} tomado, ou alternativamente, fazendo:

$$\omega = n\omega_0 \quad (2.64)$$

são vistos como funções de uma determinada frequência. A consideração de (2.62) e (2.64) mostra que no limite para T tendendo ao infinito, as frequências envolvidas ficarão cada vez mais próximas, tendendo para um espectro contínuo, pois:

$$\Delta\omega = (n + \Delta n)\omega_0 - n\omega_0 = \Delta n \frac{2\pi}{T} \quad (2.65)$$

e conseqüentemente, anular-se-iam os C_n . Isto é contornado tomando-se $\Delta n = 1$ em (2.65), correspondendo então, lembrando (2.62), a:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_0 \Rightarrow \left(\frac{T}{2\pi}\right)\Delta\omega = 1 \quad (2.66)$$

Retornando-se a (2.61) multiplicada em cada um de seus termos pela unidade, dada na forma (2.66), vem:

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T \cdot C_n e^{i\omega t} \Delta\omega \quad (2.67)$$

desde que se considere (2.64). Nessa última:

$$T \cdot C_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.68)$$

pois (2.63) continua válida. Efetivando-se o limite do período ao infinito o aspecto da $f(t)$, agora com a variável ω contínua, passa a ser:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (T \cdot C_n) e^{i\omega t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.69)$$

com:

$$C(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} (T \cdot C_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.70)$$

sendo (2.69) a representação integral de Fourier de uma função arbitrária $f(t)$, obtida de $f_T(t)$ para T tendendo ao infinito.

A transformada de Fourier da função $f(t)$, denominada $F(\omega)$ é a própria $C(\omega)$ dada por (2.70), enquanto $f(t)$ é então a transformada inversa de Fourier.

As expressões obtidas acima são empregadas na representação da solução de (2.22) em que seja possível escrever a solicitação $p^*(t)$ na forma:

$$p^*(t) = Ce^{i\omega t} \quad (2.71)$$

cuja resposta é também uma função de variável complexa. A parcela permanente, que corresponde à solução particular, apresenta aspecto:

$$x(t) = Xe^{i\omega t} \quad (2.72)$$

e por consequência, também se tem:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= i\omega x(t) \\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2 x(t) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Essas relações levadas à equação de equilíbrio em análise fornecem:

$$x(t) = \frac{Ce^{i\omega t}}{k - m\omega^2 + ic\omega} \quad (2.74)$$

indicando a proporcionalidade entre a excitação e a resposta, dada pelo fator:

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + ic\omega} \quad (2.75)$$

onde $H(\omega)$ é a chamada resposta complexa em frequência. Com isso, vem:

$$x(t) = H(\omega)Ce^{i\omega t} \quad (2.76)$$

e superpondo-se as respostas correspondentes a cada termo que (2.61) indica necessários para reproduzir o problema, finalmente chega-se à expressão dos deslocamentos, dada por:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n(\omega)C_n e^{i(n\omega_0 t)} \quad (2.77)$$

o que conclui o equacionamento.

As respostas indicadas são válidas para condições iniciais nulas e há hipóteses que devem ser respeitadas para se garantir a possibilidade de representação da função excitação da maneira proposta, bem como para se ter assegurada a convergência da solução encontrada. Uma fonte onde tais aspectos são discutidos em detalhe, juntamente com a dedução das expressões acima é o trabalho de HASSAN (1987).

O trabalho numérico envolvido na abordagem de representação pela frequência é geralmente desanimador; muito maior que na integração direta. Entretanto, seu alcance foi consideravelmente ampliado com a introdução de algoritmos numéricos bem como da transformada rápida de Fourier, apresentados inclusive com a programação correspondente no trabalho de HASSAN (1987).

CAPÍTULO 3 - ANÁLISE DE ALGORITMOS

3.1. INTRODUÇÃO

Solicitações aleatórias exigem a solução numérica do problema de dinâmica estrutural. O estudo de uma equação isolada corresponde à análise de sistemas com um único grau de liberdade ou a outro mais geral segundo um sistema de coordenadas generalizadas associadas aos modos de vibração da estrutura, promovendo o desacoplamento das equações.

Já foi citado neste trabalho que mesmo em se tratando de métodos diretos a múltiplos graus de liberdade, as propriedades de um algoritmo estudado para uma única equação se mantém para o sistema simultâneo que então resulta.

É importante discriminar, identificar e até medir, quando for o caso, as qualidades que podem classificar os processos disponíveis, bem como eleger ou descartar um algoritmo conforme sua adequação à solução de um problema específico.

Neste capítulo são apresentadas as principais propriedades tradicionalmente reconhecidas pela literatura de um método de integração com vistas à equação da dinâmica, objetivando a posterior comparação dos algoritmos mais utilizados com os propostos no presente trabalho.

3.2. EXPRESSÃO GERAL DOS ALGORITMOS

A aplicação de um método numérico consiste em substituir as derivadas que estão presentes em (2.22) ou

(2.39) por expressões finitas e aproximadoras que buscam a partir do conhecimento dos deslocamentos e suas derivadas em alguns instantes da história da estrutura prever seus valores num momento futuro, atendendo ao equilíbrio nesses instantes distanciados de um certo passo escolhido Δt .

A equação (2.39) pode ser representada pela expressão geral utilizada por COLLATZ (1968) na forma:

$$F\left(t, x, \dot{x}, \ddot{x}\right) = 0 \quad (3.1)$$

válida para qualquer t pertencente ao domínio de F . O equilíbrio para um instante um passo à frente do último conhecido, é escrito então:

$$F\left(\Delta t, x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, \ddot{x}_{i+1}\right) = 0 \quad (3.2)$$

ou alternativamente:

$$x_{i+1} = f\left(\Delta t, x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, p_{i+1}\right) \quad (3.3)$$

expressão esta que relaciona as três incógnitas de interesse para avançar no conhecimento do movimento. Nessa expressão a excitação está representada por um termo p .

As derivadas presentes em (3.3) podem ser substituídas por relações finitas envolvendo valores já determinados que indiquem a tendência do movimento, e têm geralmente aspecto:

$$\dot{x}_{i+1} \approx g\left(\Delta t, x_{i+1}, \ddot{x}_{i+1}, x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i, x_{i-1}, \dot{x}_{i-1}, \ddot{x}_{i-1}, \dots\right) \quad (3.4)$$

$$\ddot{x}_{i+1} \approx h\left(\Delta t, x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i, x_{i-1}, \dot{x}_{i-1}, \ddot{x}_{i-1}, \dots\right) \quad (3.5)$$

onde a escolha das expressões que combinam os termos conhecidos para obtenção dos deslocamentos e derivadas incógnitas define o método empregado. Pode-se mostrar que é sempre possível escrever (3.4) e (3.5) de ordem de aproximação \underline{r} não-negativa, querendo-se com isto dizer que tais expressões finitas diferem das derivadas que representam por um polinômio em Δt de coeficientes não-nulos apenas para expoentes superiores a \underline{r} , ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i+1} = & g \left(\Delta t, \overset{\bullet}{x}_{i+1}, \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1}, \overset{\bullet}{x}_i, \overset{\bullet\bullet}{x}_i, \overset{\bullet}{x}_{i-1}, \overset{\bullet\bullet}{x}_{i-1}, \overset{\bullet}{x}_{i-1}, \dots \right) + \\ & + R_g(\Delta t^{r_1+1}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1} = & h \left(\Delta t, \overset{\bullet}{x}_{i+1}, \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1}, \overset{\bullet}{x}_i, \overset{\bullet\bullet}{x}_i, \overset{\bullet}{x}_{i-1}, \overset{\bullet\bullet}{x}_{i-1}, \overset{\bullet}{x}_{i-1}, \dots \right) + \\ & + R_h(\Delta t^{r_2+1}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde r_1 e r_2 são as ordens de aproximação das representações respectivamente de velocidade e aceleração.

O conjunto de (3.3), (3.6) e (3.7), omitidos os resíduos reproduz um sistema de equações simultâneas lineares nas incógnitas $\overset{\bullet}{x}_{i+1}, \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1}, \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1}$ cuja solução permite avançar um passo no tempo.

Conforme o arranjo das relações e seus coeficientes é possível resolver o sistema sem a inversão de matrizes, isto é, não se trata de um sistema simultâneo de equações, bastando então uma multiplicação de matrizes para resolvê-lo sem necessidade de inverter nenhuma delas. O ganho computacional é evidente e o método direto é então chamado de explícito.

A representação de tal caso assume aspecto:

$$\begin{aligned}
 \overset{\bullet}{x}_{i+1} &= f \left(\overset{\bullet}{\Delta t}, \overset{\bullet}{x}_{i+1}, \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1}, \overset{\bullet\bullet}{p}_{i+1} \right) \\
 \overset{\bullet}{x}_{i+1} &= g \left(\overset{\bullet}{\Delta t}, \overset{\bullet}{x}_i, \overset{\bullet\bullet}{x}_i, \overset{\bullet\bullet}{x}_i, \overset{\bullet}{x}_{i-1}, \overset{\bullet}{x}_{i-1}, \overset{\bullet\bullet}{x}_{i-1}, \dots \right) \\
 \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1} &= h \left(\overset{\bullet}{\Delta t}, \overset{\bullet}{x}_i, \overset{\bullet\bullet}{x}_i, \overset{\bullet\bullet}{x}_i, \overset{\bullet}{x}_{i-1}, \overset{\bullet}{x}_{i-1}, \overset{\bullet\bullet}{x}_{i-1}, \dots \right)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

omitindo-se os termos referentes aos resíduos dos segundos termos de (3.6) e (3.7).

Métodos não possíveis de representar por (3.8) são chamados de implícitos e essa diferenciação tem consequências práticas nas características resultantes no processo.

O método explícito mais tradicional é o das diferenças centradas e o atrativo da eficiência computacional nos processos dessa natureza, principalmente nos problemas com não-linearidades, tem estimulado a busca de novos algoritmos dessa classe, como atestam os trabalhos de CHUNG (1994) e HULBERT & CHUNG (1994b) e PEZESHK (1995) entre outros, bem como a apresentação de versões "explícitas" que certos algoritmos permitem quando se atendem certas condições, como é feito em BAZZI & ANDERHEGGEN (1982).

A maior desvantagem desses algoritmos é a impossibilidade de apresentarem estabilidade incondicional como KRIEG (1973) mostra, exigindo controle do tamanho do passo para evitar a deterioração da resposta.

Quando para avançar no tempo no conhecimento do movimento é suficiente utilizar informações relativas apenas ao passo anterior, isto é, quando as expressões são representáveis por:

$$\begin{aligned}
 \overset{\bullet}{x}_{i+1} &= f \left(\overset{\bullet}{\Delta t}, \overset{\bullet}{x}_{i+1}, \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1}, \overset{\bullet\bullet}{p}_{i+1} \right) \\
 \overset{\bullet}{x}_{i+1} &= g \left(\overset{\bullet}{\Delta t}, \overset{\bullet}{x}_{i+1}, \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1}, \overset{\bullet}{x}_i, \overset{\bullet\bullet}{x}_i, \overset{\bullet\bullet}{x}_i \right) \\
 \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1} &= h \left(\overset{\bullet}{\Delta t}, \overset{\bullet}{x}_{i+1}, \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1}, \overset{\bullet}{x}_i, \overset{\bullet\bullet}{x}_i, \overset{\bullet\bullet}{x}_i \right)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

o algoritmo resultante é dito de passo simples; caso contrário trata-se de um procedimento de passo múltiplo. Também essa diferenciação está associada a propriedades de interesse prático. O fato de ser imediata a alteração do passo nos algoritmos da forma indicada em (3.9) é uma vantagem importante e a solução de problemas não-lineares praticamente exige métodos dessa natureza.

Para requintar os conhecimentos sobre o problema podem-se utilizar relações que envolvam derivadas superiores. Em tal caso, (3.6) e (3.7) transformam-se em:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i+1} &= g \left(\begin{array}{c} \Delta t, x_{i+1}, \ddot{x}_{i+1}, x_{i+1}^{(3)}, \dots, x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i, x_i^{(3)}, \dots \\ \dots, x_{i-1}, \dot{x}_{i-1}, \ddot{x}_{i-1}, x_{i-1}^{(3)}, \dots \end{array} \right) \\ \ddot{x}_{i+1} &= h \left(\begin{array}{c} \Delta t, x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, x_{i+1}^{(3)}, \dots, x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i, x_i^{(3)}, \dots \\ \dots, x_{i-1}, \dot{x}_{i-1}, \ddot{x}_{i-1}, x_{i-1}^{(3)}, \dots \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

e com a explicitação das novas incógnitas em t_{i+1} torna-se necessário levantar a indeterminação gerada, o que pode ser feito derivando-se (3.3) com relação ao tempo tantas vezes quantas preciso, pois as expressões resultantes são independentes. Assim, o sistema de equações é complementado com as relações:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i+1} &= \frac{df}{dt} = f \left(\Delta t, \ddot{x}_{i+1}, x_{i+1}^{(3)}, \dot{p}_{i+1} \right) \\ \ddot{x}_{i+1} &= \frac{d^2f}{dt^2} = f \left(\Delta t, x_{i+1}^{(3)}, x_{i+1}^{(4)}, \ddot{p}_{i+1} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

e assim por diante. Evidentemente, há que pensar também numa representação finita para as derivadas da excitação nos movimentos forçados.

A obtenção das informações no instante t_i utiliza o mesmo caminho, isto é, derivações sucessivas da equação do equilíbrio, resultando:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{df}{dt} = f\left(\Delta t, \ddot{x}_i, x_i^{(3)}, \dot{p}_i\right) \\ \ddot{x}_i &= \frac{d^2f}{dt^2} = f\left(\Delta t, x_i^{(3)}, x_i^{(4)}, \ddot{p}_i\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

com a mesma observação.

Tais algoritmos, que contém mais informações sobre o problema, cobram um preço pela possibilidade de obtenção de melhores resultados; para estruturas com \underline{n} deslocamentos generalizados incógnitos, ou graus de liberdade resultantes da semi-discretização, geram sistemas de ordem $\underline{2n}$ de equações lineares, o dobro comparativamente aos processos que envolvem derivadas até segunda ordem apenas.

Os métodos assim descritos são chamados "de ordens superiores" e sua utilização foi inicialmente preterida até que a aplicação de técnicas especiais de solução de sistemas, como a mostrada por CARTER (1984) tornaram-nos competitivos.

Também SONEMMANS (1991) discute o compromisso entre a utilização de ordens superiores e passos maiores aproveitando-se da maior precisão resultante, para obter-se melhores resultados, chegando à construção de um ábaco onde dada a ordem da equação diferencial a ser resolvida, pode-se determinar a "ordem ideal" do algoritmo a ser empregado, relacionada ao passo que se pretende utilizar.

Outros autores que propõem métodos dessa natureza, não temendo os obstáculos de sua implementação, talvez estimulados pela disponibilidade de equipamentos com capacidade de processamento e velocidade cada vez maiores, são MÖLLER (1993), AUSTIN (1993) e ARGYRIS (1977), dentre os pesquisadores voltados a esse problema.

3.3. CARACTERÍSTICAS DE ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO

3.3.1. Auto-iniciação

Há processos cuja aplicação não é possível desde o início do movimento, isto é, não bastam as condições iniciais

e a escolha de um passo para a obtenção do deslocamento e derivadas no instante t_1 diretamente a partir da utilização das relações que constituem o método. É o caso dos algoritmos multi-passos, como se pode observar nas equações (3.6) e (3.7), tomando-se nelas $i = 0$.

Nesses casos, para viabilizar a implementação do processo aplica-se um procedimento de partida, com o objetivo de resolver o problema para tantos instantes iniciais quantos necessário para a completa montagem das relações que caracterizam o algoritmo. Por consequência, as propriedades resultantes da solução numérica podem estar contaminadas por esse procedimento.

Utiliza-se aqui o neologismo "auto-iniciáveis" para denominar os métodos aplicáveis desde o início do movimento, referidos na literatura como "self-starting procedures".

Quando se utilizam expressões de diferenças centrais, que são de passo duplo, o problema é contornado imaginando-se um movimento virtual que produza no instante t_0 as condições do problema real. Em outros casos, a própria escolha do procedimento de iniciação enseja estudos, visando melhores resultados.

Para o método de HOUBOLT (1950), de passo triplo, BATHE (1976) sugere o uso das diferenças centrais com uma fração do passo para os primeiros instantes do movimento.

Algoritmos de passo simples são auto-iniciáveis, o que se constitui numa grande vantagem, simplificando inclusive a programação.

3.3.2. Estabilidade

O conceito de estabilidade numérica que interessa utilizar no estudo dos algoritmos de integração é aquele associado à garantia de que as aproximações para os deslocamentos e suas derivadas produzidas pelo método não cresçam indefinidamente para o tempo tendendo ao infinito.

Seja um algoritmo definido por um conjunto de relações como (3.3), (3.6) e (3.7), omitindo-se o resíduo

para simplificar a representação e rearranjado para assumir o aspecto seguinte:

$$[M] \begin{Bmatrix} x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} \\ \Delta t x_{i+1} \\ \ddot{x}_{i+1} \\ \Delta t^2 x_{i+1} \end{Bmatrix} = -[N] \begin{Bmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \\ \Delta t x_i \\ \ddot{x}_i \\ \Delta t^2 x_i \end{Bmatrix} + [L^*] \{p_i\}$$

ou, fazendo:

$$-[M]^{-1}[N] = [A]; [M]^{-1}[L^*] = [L]$$

vem também:

$$\begin{Bmatrix} x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} \\ \Delta t x_{i+1} \\ \ddot{x}_{i+1} \\ \Delta t^2 x_{i+1} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \\ \Delta t x_i \\ \ddot{x}_i \\ \Delta t^2 x_i \end{Bmatrix} + [L] \{p_i\} \quad (3.13)$$

ou ainda, representando mais sinteticamente:

$$\{x_{i+1}\} = [A]\{x_i\} + [L]\{p_i\} \quad (3.13a)$$

onde se indica a obtenção do deslocamento e suas derivadas no instante t_{i+1} como resultado de uma transformação aplicada aos respectivos valores no instante t_i . A influência da excitação é medida por um operador de cargas $[L]$ aplicado a um vetor indicado de forma genérica por $\{p_i\}$. Tomado o instante t_{i+2} , (3.13a) é escrita:

$$\{x_{i+2}\} = [A]\{x_{i+1}\} + [L]\{p_{i+1}\}$$

ou então:

$$\{x_{i+2}\} = [A]([A]\{x_i\} + [L]\{p_i\}) + [L]\{p_{i+1}\}$$

e considerando finalmente t_{i+n} :

$$\begin{aligned} \{x_{i+n}\} = & [A]^n \{x_i\} + [A]^{n-1} [L] \{p_i\} + [A]^{n-2} [L] \{p_{i+1}\} + \dots \\ & \dots + [A] [L] \{p_{i+n-1}\} + [L] \{p_{i+n}\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde se observa, fazendo \underline{n} crescer indefinidamente, que a estabilidade é governada pelo comportamento da chamada matriz $[A]$ de amplificação do método, independentemente da função de excitação, razão pela qual pode-se fazer o estudo com vibrações livres, isto é, utilizando a expressão:

$$\{x_{i+n}\} = [A]^n \{x_i\} \quad (3.14a)$$

ponto de partida para a análise apresentada a seguir.

Quanto à possível influência das condições iniciais na estabilidade, a dúvida é dirimida a partir da observação da relação (3.14a) escrita para $i = 0$. De fato, para qualquer $\{x_0\}$ tal propriedade apresenta-se dependente apenas da matriz $[A]$.

Seja a decomposição espectral de $[A]$, dada por:

$$[A]^n = [P][\Lambda]^n [P]^{-1} \quad (3.15)$$

onde $[P]$ é a matriz dos autovetores ortonormalizados e $[\Lambda]$ uma matriz diagonal contendo os autovalores λ_i , $i=1,2,\dots,m$ de $[A]$. Seja $\rho(A)$ o raio espectral de $[A]$, cuja definição é dada pela expressão:

$$\rho(A) = \max |\lambda_i|, i = 1, 2, \dots, m \quad (3.16)$$

então, de acordo com BATHE (1976) $[A]^n$ é limitado para \underline{n} tendendo ao infinito se, e somente se, for atendida a condição:

$$\rho(A) \leq 1,0 \quad (3.17)$$

que define o critério de estabilidade empregado para classificar os algoritmos.

Quando, para atender (3.17) é necessário tomar um passo menor do que um certo limite (função do período natural T do modo de vibração em questão) o processo é dito condicionalmente estável. A figura 3.1. apresenta evoluções típicas do raio espectral com o tamanho do passo.

Na aplicação de um método direto a sistemas com múltiplos graus de liberdade não se definem os modos presentes no movimento, ao passo que na utilização da superposição modal um pequeno número de modos inferiores (os de maiores períodos naturais) é em geral suficiente para a representação do problema com a precisão requerida.

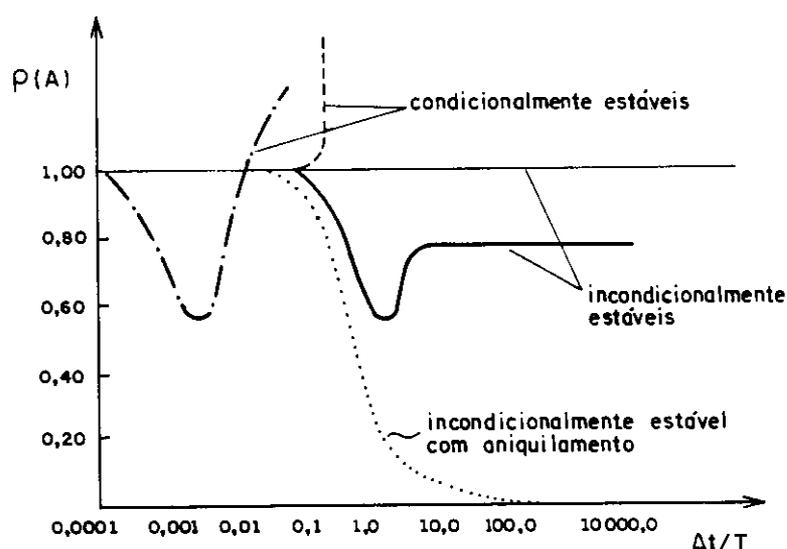


Figura 3.1 - Variação do raio espectral com o passo

Uma vez que passos maiores têm como consequência menor esforço computacional e tendo em vista as considerações anteriores, é comum a utilização de intervalos maiores que os necessários para garantir estabilidade nos modos superiores dos algoritmos condicionalmente estáveis. É portanto interessante dispor-se de estabilidade incondicional no método a ser empregado.

3.3.3. Consistência e precisão

Vislumbrando (3.3), (3.6) e (3.7), seja um algoritmo cuja aplicação ao problema de vibrações possa ser representado à semelhança de (3.13), explicitando-se o resíduo decorrente da representação das derivadas por expressões finitas, de aspecto:

$$\{x_{i+1}\} = [A]\{x_i\} + [L]\{p_i\} + \{R_i(\Delta t)^{r+2}\} \quad (3.18)$$

onde $r+2$ é o menor expoente de Δt no vetor $\{R_i\}$ e seu valor caracteriza a ordem de precisão do algoritmo.

Alternativamente, pela sua importância na análise, toma-se como referência a ordem de precisão nos esforços ou acelerações, que é dada por \underline{r} . De forma geral, algoritmos de ordens mais elevadas têm desempenho melhor.

Consistência, segundo HILBER & HUGHES (1977) é a propriedade apresentada pelos métodos em que \underline{r} é positivo.

3.3.4. Convergência

Dadas as condições iniciais, escolhido um passo Δt e fixado um instante $t_n = n.\Delta t$, a aplicação sucessiva de um algoritmo \underline{n} vezes permite a previsão do valor do deslocamento correspondente $x(t_n)$.

Pode-se representar o valor t_n por infinitos pares diferentes de \underline{n} e Δt , reduzindo-se o passo cada vez mais e aplicando-se o processo um número maior de vezes.

Se quanto menor o passo, mais próxima estiver a resposta obtida do valor correto, o algoritmo é chamado de convergente, como definem BAZZI & ANDERHEGGEN (1982). Invocando o teorema de Lax-Richtmayer, HILBER* apud BAZZI &

* HILBER, H. M. "Analysis and Design of Numerical Integration Methods in Structural Dynamics", Report n. EERC 76-29, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 1976 apud BAZZI, G. ; ANDERHEGGEN, E. "The Error! Indicador não definido.-Family of Algorithms for Time-Step Integration with Improved Numerical Dissipation", *Earthqu. Eng. and Struct. Dyn.*, vol 10, pp. 537-550, 1982.

ANDERHEGGEN afirma que algoritmos consistentes e estáveis no limite para o passo tendendo a zero são convergentes.

Essas condições acima enunciadas podem ser expressas através do par de desigualdades:

$$\begin{cases} \lim_{\omega\Delta t \rightarrow 0} \rho(A) \leq 1,0 \\ r > 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

e são suficientes inclusive para vibrações forçadas, desde que a excitação $p(t)$ seja uma função analítica, quando o teorema de existência para equações a coeficientes analíticos garante a convergência da solução de (2.39) em séries de potências, conforme lembram KREIDER, KULLER & OSTBERG (1972).

3.3.5. Aniquilamento

O erro resultante das operações numéricas efetuadas na solução dos modos superiores de um movimento tende a ser maior do que o presente nos primeiros modos. Ademais, sua parcela contribuinte na representação do deslocamento e suas derivadas é, em geral, pouco significativo, embora isto possa não ser verdadeiro nos problemas envolvendo impacto.

Visando anular a influência desses modos superiores, alguns algoritmos introduzem uma dissipação numérica seletiva, que os atinge após os instantes iniciais.

Essa propriedade estará presente nos métodos que respeitarem ao limite dado por:

$$\lim_{\omega\Delta t \rightarrow \infty} \rho(A) = 0 \quad (3.20)$$

e pode ser vista como a inclusão de um amortecimento numérico encarregado de aniquilar os modos superiores.

O ideal sob esse aspecto é quando o algoritmo possui pelo menos um parâmetro livre na sua definição cujo ajuste esteja ligado à frequência de corte, isto é, que permita definir a partir de que modo o aniquilamento se fará sentir eficazmente.

3.3.6. Overshoot

Retomando as expressões (3.14a) e (3.15), pode-se escrever para representar os deslocamentos num problema de vibrações livres a relação:

$$\{x_{i+n\Delta t}\} = [P][\Lambda]^n[P]^{-1}\{x_i\} \quad (3.21)$$

e seja a norma de $[\Lambda]$ denotada por $\|[\Lambda]\| = \rho$, a partir da observação de (3.16). Seja ainda x_i o instante inicial, isto é, tome-se $i = 0$. Pré-multiplicando-se ambos os lados de (3.21) pela inversa de $[P]$, resulta:

$$[P]^{-1}\{x_{n\Delta t}\} = [\Lambda]^n[P]^{-1}\{x_0\} \quad (3.22)$$

e ainda, tomando-se as normas respectivas, vale escrever:

$$\|[P]^{-1}\{x_{n\Delta t}\}\| \leq \|[\Lambda]^n\| \cdot \|[P]^{-1}\{x_0\}\| \quad (3.23)$$

Lembrando-se a definição do raio espectral ρ , dada por (3.16), vem também:

$$\|[P]^{-1}\{x_{n\Delta t}\}\| \leq \rho^n \|[P]^{-1}\{x_0\}\| \quad (3.24)$$

mostrando que o limite superior do primeiro membro desta última é seu valor correspondente ao instante inicial, para algoritmos estáveis.

A expressão mostra ainda que, se é verdade que para \underline{n} tendendo ao infinito e raio espectral inferior a um, $\|[P]^{-1}\{x_{n\Delta t}\}\|$ se anula, por outro lado não é verdade que qualquer $\{x_n\}$ precise ter norma inferior à de $\{x_0\}$.

Realmente, escrevendo-se uma relação envolvendo as normas das matrizes e vetores de (3.21), vem, para $i = 0$:

$$\|x_{n\Delta t}\| \leq \| [P] \| \cdot \| [A]^n \| \cdot \| [P]^{-1} \| \cdot \| \{x_0\} \| \quad (3.25)$$

ou ainda, utilizando resultados e hipóteses anteriores:

$$\| \{x_{n\Delta t}\} \| \leq \rho^n \| [P]^{-1} \| \cdot \| \{x_0\} \| \quad (3.26)$$

e fica clara a possibilidade de se atender a essa última, com $\| \{x_n\} \| > \| \{x_0\} \|$ para algoritmos estáveis, principalmente para valores baixos de n . HILBER & HUGHES (1977) enfatizam isso.

A primeira observação dessa propriedade indesejável foi feita por GOUDREAU & TAYLOR (1972) ao analisar o algoritmo WILSON- θ . Foi-lhe dada a denominação de "overshoot", numa referência a seu efeito direto de superestimar o deslocamento e suas derivadas nos instantes iniciais do movimento.

A aceleração, velocidade e o próprio deslocamento podem ser afetados diferentemente pelo fenômeno, conforme suas expressões aproximadoras.

Uma conclusão que se tira do exposto é que o comportamento da resposta para os primeiros instantes fornecida pelo algoritmo empregado é governada pela norma da matriz de amplificação, enquanto a longo prazo o que importa é a estabilidade, que depende do raio espectral da mesma matriz.

O trabalho citado de HILBER & HUGHES (1977) evidencia a independência dessas duas variáveis do problema, através do seguinte exemplo.

Seja um algoritmo cuja matriz de amplificação é representada por:

$$[A] = \begin{bmatrix} \varepsilon & k \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}; 0 < \varepsilon < 1 \quad (3.27)$$

com o valor de k bastante superior à unidade.

Em tal caso, o raio espectral de $[A]$ é ε , enquanto sua norma vale $\| [A] \| \approx k$. Em tais circunstâncias:

$$[A]^n = \begin{bmatrix} \varepsilon^n & n\varepsilon^{n-1}k \\ 0 & \varepsilon^n \end{bmatrix}$$

e observa-se que para n tendendo ao infinito, todos os termos se anulam, como efeito de $\rho = \varepsilon < 1,0$. Entretanto, para valores pequenos de n , $\| [A] \|^n \approx n \varepsilon^{n-1} k$, podendo portanto ser significativamente maior que a unidade.

Ao se utilizar um algoritmo, para se efetuar o controle de sua norma, é necessário calculá-la a cada passo. Assim, dado um movimento conhecido de deslocamento e derivadas máximas determinadas pode-se aplicar o método para vários passos e comparar os máximos das respostas com os valores exatos, para detectar a existência do problema. Espera-se "overshoot" maior para passos maiores, já que a convergência limita, indiretamente, o fenômeno para o passo tendendo a zero no limite. Uma abordagem direta como mostrado em BAZZI & ANDERHEGGEN (1982) permite a obtenção da ordem do overshoot no deslocamento ou na velocidade.

3.4. MEDIDA DE ERROS

3.4.1. Conceito de erro

De forma geral um algoritmo é melhor que outro para a solução de um problema específico se reproduz mais fielmente o movimento, sem que o esforço computacional para a sua utilização seja tão maior que essa desvantagem pese mais que o ganho de qualidade da resposta.

O erro cometido é proporcional ao desvio verificado, relativamente aos valores teóricos e pode-se dizer que algoritmos melhores estão associados a uma relação mais favorável de limites de erros aceitáveis com o esforço computacional demandado para respeitá-los.

Há vários problemas envolvidos na aplicação da idéia acima para a classificação, escolha ou rejeição de processos numéricos.

Num movimento cuja resposta seja desconhecida, a medida direta do desvio pode não ser possível.

A opção usual é estudar-se as vibrações livres, aceitando-se a validade da extrapolação das conclusões obtidas para problemas onde haja excitação presente. Isto confere uma generalidade maior às análises feitas, desde que o analista tenha sensibilidade suficiente para detectar situações atípicas que mereçam maior cuidado ou meios diferentes de aferição da qualidade dos resultados.

Outra hipótese considerada com frequência é a ausência de amortecimento físico. Isto não só evita a particularização das conclusões ao valor adotado para esse parâmetro como permite visualizar-se claramente o efeito da dissipação numérica sobre a amplitude.

Geralmente a intensidade do amortecimento quando existente no modelo físico é pequena, incapaz portanto de provocar alteração significativa no comportamento do algoritmo. Novamente entretanto evidencia-se a necessidade do analista emitir juízo sobre a validade da extrapolação dos resultados obtidos.

3.4.2. Erro global e erro local

Sempre fazendo referência apenas aos erros de discretização ou truncamento, ou seja, abstraindo-se os erros de arredondamento cometidos pelo equipamento utilizado ao representar os números envolvidos na análise, e tomando-se o índice $i+1$ para denotar o instante $\Delta t.(i+1)$ a partir do início do movimento, o erro global cometido no deslocamento é dado pela expressão:

$$E_g(x_{i+1}) = x_{i+1} - x(t_{i+1}) \quad (3.28)$$

onde x_{i+1} é o valor fornecido pelo método empregado e $x(t_{i+1})$ é o deslocamento teórico exato. Via de regra, não é possível o cálculo do valor acima pelo desconhecimento do último termo da expressão.

Se tomados os valores x_i, \bar{x}_i, x_i do deslocamento e derivadas aproximados fornecidos pelo método para t_i , como condições iniciais de um movimento, seja \bar{x}_{i+1} a solução exata correspondente para o instante t_{i+1} . Veja-se à figura 3.2 as indicações das medidas desses parâmetros. A expressão para o erro local escreve-se neste caso:

$$E_l(x_{i+1}) = x_{i+1} - \bar{x}_{i+1} \quad (3.29)$$

isto é, decorre do avanço em um simples passo do movimento. Seu valor tampouco pode ser calculado no caso geral, porém sua ordem é definida pela ordem de precisão \underline{r} do algoritmo utilizado.

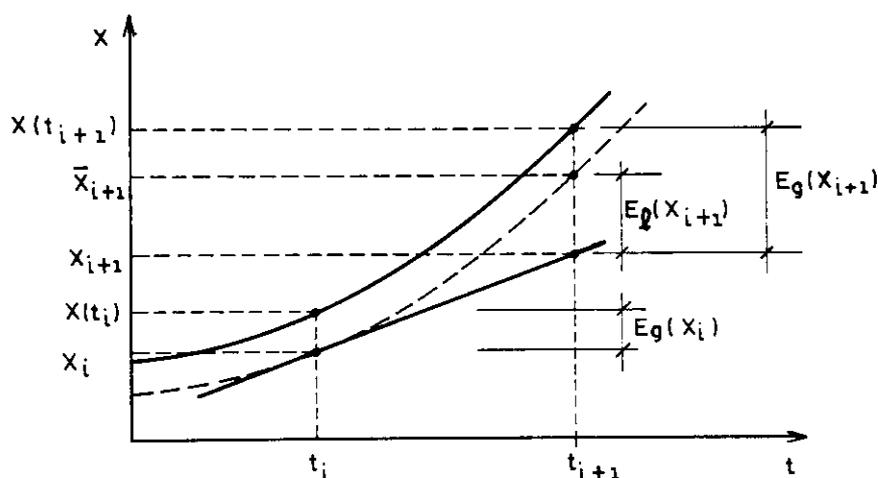


Figura 3.2 - Erro local e erro global

Uma diferença importante entre os dois conceitos enunciados pode ser entendida com o exemplo de um método que apresente pequeno erro local, porém sistemático, como um acréscimo no valor de uma grandeza a cada passo. O acúmulo desse pequeno erro local resultará, após um certo número de passos, num erro global considerável.

Infelizmente, o mais difícil de ser avaliado ou estimado é justamente o erro global, lançando-se mão de extrapolações de análises de movimentos teoricamente conhecidos ou influências sobre o efeito da ordem do erro local sobre ele para se prever a qualidade de um resultado obtido.

Para os métodos de passo simples, se o erro local é de ordem $r+1$, HAIRER & WANNER* apud AUSTIN (1993) mostram que o erro global é uma combinação deste mais os erros de transporte, e é de ordem r .

3.4.3. Dissipação e dispersão

Apesar das dificuldades enunciadas para a medida dos erros de discretização cometidos há valores tradicionalmente referidos pela bibliografia para comparar algoritmos de integração em dinâmica estrutural.

Tomam-se geralmente vibrações livres e não-amortecidas, para condições iniciais correspondentes a um deslocamento da posição de repouso $x(t=0) = x_0$ e sem velocidade, isto é, $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = 0$. A aceleração pode ser obtida da condição de equilíbrio.

Este movimento tem como vantagens principais ser periódico, facilitando a medida de erros numéricos nas frequências ou períodos resultantes, além de ter amplitude teórica constante, sendo portanto imediata a quantificação do erro no seu cálculo. Além disso a ausência de excitação evita associar-se conclusões à natureza da solicitação.

Nas condições aludidas a equação de equilíbrio (2.39) simplifica-se para:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (3.30)$$

bem como (3.13a) toma a forma:

* HAIRER, E., NØRSETT, S. P. & WANNER, G. - Solving Ordinary Differential Equations 1: Nonstiff Problems, Springer, Berlin, 1987

$$\{x_{i+1}\} = [A]\{x_i\} \quad (3.31)$$

bastante conveniente para o estudo que se pretende.

A equação característica dessa última tem aspecto:

$$-\det([A] - \lambda[I]) = 0 \quad (3.32)$$

ou então:

$$\lambda^3 - 2I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \quad (3.33)$$

cujos coeficientes reais são os invariantes da matriz de amplificação. A possibilidade de serem todas reais pode ser verificada a partir do critério de Routh-Hurwitz, citado em KRIEG (1973) que afirma sobre um polinômio dessa forma não ter raízes complexas se, e somente se:

$$\begin{aligned} 2I_1 &= \text{traço de } [A] \leq 0 \\ I_2 &= \text{soma dos menores principais de } [A] \geq 0 \\ I_3 &= \text{determinante de } [A] \leq 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

e ainda:

$$I_2 - \frac{I_3}{2I_1} \geq 0 \quad (3.35)$$

É de se esperar que as condições acima não sejam atendidas por tratar-se da representação de um movimento cuja descrição exata é dada por (2.31) ou (2.33). Resta portanto a possibilidade de um par de raízes complexas conjugadas λ_1 e λ_2 , e uma terceira raiz real, λ_3 , chamada "espúria".

Para os algoritmos convergentes, de muito maior interesse prático, existe uma constante positiva $\tilde{\Omega}$ tal que se tomado um passo de modo que $\Omega = \omega\Delta t$ pertença ao intervalo $(0, \tilde{\Omega})$ pode-se afirmar a validade da relação:

$$|\lambda_3| < |\lambda_{1,2}| \leq 1,0 \quad (3.36)$$

indicando que as raízes complexas λ_1 e λ_2 são mais importantes que λ_3 na representação do movimento.

Tomada (3.14a) com $i = 0$, e considerada (3.15), é possível escrever:

$$x_n = C_1^* \lambda_1^n + C_2^* \lambda_2^n + C_3 \lambda_3^n \quad (3.37)$$

ou seja, o deslocamento (e suas duas primeiras derivadas) num dado instante t_n pode ser colocado em função da combinação linear da n -ésima potência dos autovalores, sendo os coeficientes C_j , $j = 1, 2, 3$ dados pelas condições iniciais.

As raízes complexas:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a + bi \\ \lambda_2 &= a - bi \end{aligned} \quad (3.38)$$

podem ser representadas na forma polar, como:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \rho e^{\theta i} \\ \lambda_2 &= \rho e^{-\theta i} \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde valem:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta &= \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

resultando, para (3.37), a relação:

$$x_n = C_1^* \rho^n e^{n\theta i} + C_2^* \rho^n e^{-n\theta i} + C_3 \lambda_3^n \quad (3.41)$$

onde, se for adotada a denominação:

$$\gamma_{\text{num}} = -\frac{\ln \rho}{\theta} \quad (3.42)$$

bem como:

$$\omega_{\text{num}} = \frac{\theta}{\Delta t} \quad (3.43)$$

pode-se escrever:

$$\rho = e^{-\gamma_{\text{num}}\omega_{\text{num}}\Delta t} \quad (3.44)$$

a ser utilizada na seqüência.

Com isso, (3.41) assume, alternativamente, o aspecto que se revela de maior interesse dado por:

$$x_n = e^{-\gamma_{\text{num}}\omega_{\text{num}}n\Delta t} \left(C_1^* e^{\omega_{\text{num}}n\Delta t i} + C_2^* e^{-\omega_{\text{num}}n\Delta t i} \right) + C_3 \lambda_3^n \quad (3.45)$$

e há trabalhos (um dos quais citado na revisão bibliográfica) mostrando que mesmo quando λ_3 não é significativamente inferior à unidade, pouca relevância tem na composição da resposta numérica; um algoritmo de boa performance é apresentado por HULBERT & CHUNG (1994) que dispensa essa condição, embora atendendo a (3.36), obviamente.

O trabalho citado dedica maior atenção às circunstâncias em que λ_3 não precisa ser considerado; de qualquer forma basta ter em mente que sua influência desaparece em algoritmos convergentes para o limite do passo tendendo a zero, o que justifica a omissão do termo que lhe corresponde, representando-se o deslocamento apenas por:

$$x_n = e^{-\gamma_{\text{num}}\omega_{\text{num}}n\Delta t} \left(C_1^* e^{\omega_{\text{num}}n\Delta t i} + C_2^* e^{-\omega_{\text{num}}n\Delta t i} \right) \quad (3.45a)$$

de ora em diante.

Utilizando-se as igualdades:

$$\begin{aligned} e^{\omega_{\text{num}}n\Delta t i} &= \cos(\omega_{\text{num}}n\Delta t) + i \text{sen}(\omega_{\text{num}}n\Delta t) \\ e^{-\omega_{\text{num}}n\Delta t i} &= \cos(\omega_{\text{num}}n\Delta t) - i \text{sen}(\omega_{\text{num}}n\Delta t) \end{aligned} \quad (3.46)$$

e as representações:

$$\begin{aligned}
 C_1^* &= \frac{1}{2}(C_1 + C_2i) \\
 C_2^* &= \frac{1}{2}(C_3 + C_4i)
 \end{aligned}
 \tag{3.47}$$

levadas a (3.45a), chega-se à forma:

$$x_n = e^{-\gamma_{\text{num}}\omega_{\text{num}}n\Delta t} [C_1 \cos(\omega_{\text{num}}n\Delta t) + C_2 \text{sen}(\omega_{\text{num}}n\Delta t)]
 \tag{3.48}$$

equivalente e mais interessante.

A solução exata de (3.30), dada por (2.40) e (2.41) sem amortecimento, é escrita:

$$x = A_1 \text{sen } \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t
 \tag{3.49}$$

e comparada a (3.48), permite observar-se a introdução, pelo algoritmo, de um fator formalmente similar ao existente em problemas com amortecimento físico. Isto é decorrente da dissipação numérica produzida pelo método, dada por (3.42). Observa-se desde já que algoritmos sem aniquilamento obviamente não têm dissipação embutida na sua utilização.

O amortecimento numérico γ_{num} introduzido é uma medida proporcional ao erro global presente, embora seja desejável sua existência, quando controlada nos modos superiores, por levarem ao seu aniquilamento.

Nota-se assim o compromisso entre essas duas importantes características, isto é, erro global no deslocamento e aniquilamento produzido; por tal razão, análises comparativas de métodos numéricos sempre remetem ao cotejo da dissipação presente em cada um, principalmente sua variação com o tamanho do passo, pois de (3.41) e (3.42), vem:

$$\gamma_{\text{num}} = -\frac{\ln \rho}{\omega_{\text{num}}\Delta t} = -\frac{(\ln \rho)}{2\pi} \left(\frac{1}{\frac{\Delta t}{T_{\text{num}}}} \right)
 \tag{3.50}$$

ou seja, passos maiores geralmente implicam em maiores dissipações e a maneira como isto ocorre é função da influência do passo no valor do raio espectral. Um contra-exemplo é o algoritmo apresentado por HILBER, HUGHES & TAYLOR (1977).

Nota-se também da observação de (3.48) e (3.49) uma discordância no período fornecido como resposta, pois:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

enquanto, a partir do valor fornecido para a frequência, vem:

$$T_{num} = \frac{2\pi}{\omega_{num}}$$

e pode-se utilizar o erro relativo do período, dado por:

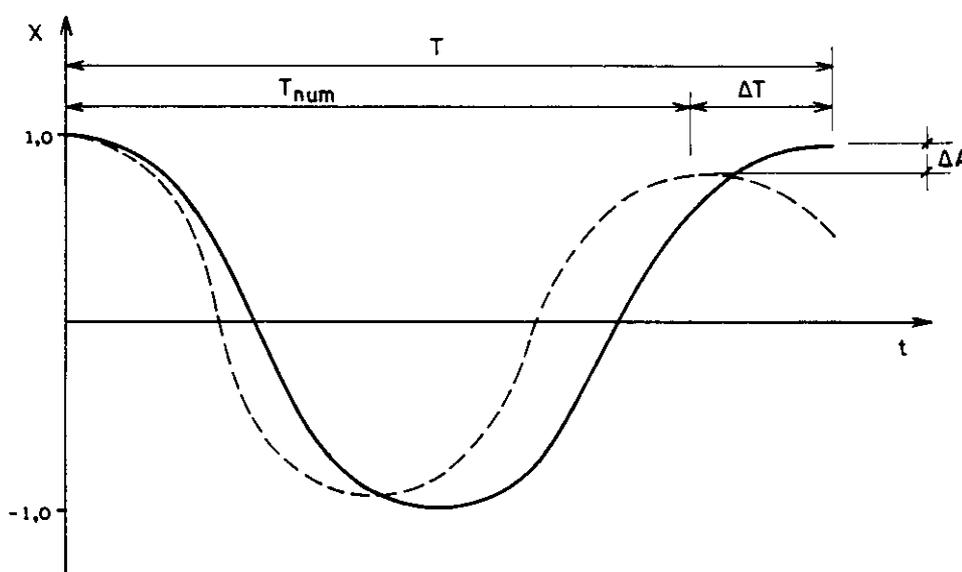


Figura 3.3 - Efeitos da dissipação (ΔA) e dispersão (ΔT)

$$\tau = \frac{T_{num} - T}{T} = \frac{\omega_n}{\omega_{num}} - 1 \quad (3.51)$$

como uma medida da distorção da frequência introduzida pelo algoritmo, chamada de dispersão. A figura 3.3 mostra o efeito da dissipação e dispersão na evolução do movimento.

A última expressão é determinada a partir das raízes principais, tendo assim significado apenas para a região de

convergência. Como a idéia é considerar apenas amortecimentos abaixo do crítico e passos que permitam a validade de (3.36), a restrição não é forte. Não há, inclusive, sentido prático em medir precisão fora do limite de convergência.

CAPÍTULO 4 - AS LINHAGENS DE ALGORITMOS

4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são descritos os caminhos mais utilizados para a integração numérica da equação de equilíbrio em dinâmica estrutural, sempre aplicados a sistemas com um só grau de liberdade.

As justificativas da validade de se abordar o caso unidimensional para extrapolar conclusões sobre os métodos diretos já foram apresentadas nesse trabalho.

A organização do texto é baseada no agrupamento dos algoritmos mais conhecidos em famílias, isto é, grupos que assumem as mesmas hipóteses para gerar o método respectivo, levando assim ao compartilhamento de um mínimo de características relevantes.

Naturalmente, pode ocorrer que métodos de formulação mais simples possam eventualmente ser considerados membros de mais de uma dessas linhagens, se apresentarem características e hipóteses comuns a elas.

4. 2. MÉTODOS BASEADOS EM EXPRESSÕES DE DIFERENÇAS

4.2.1. Diferenças centrais

A simples substituição das expressões da primeira e segunda derivadas presentes em (2.39) por diferenças centrais de ordem correspondente produz o primeiro método relevante historicamente utilizado.

Seja a representação dos valores dos deslocamentos nos pontos anterior e posterior ao de referência, dados por x_{i-1} e x_{i+1} respectivamente, por séries de Taylor centradas em x_i , da forma:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_i + \frac{\Delta t^3}{6} x_i^{(3)} + \dots \quad (4.1)$$

$$x_{i-1} = x_i - \Delta t \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_i - \frac{\Delta t^3}{6} x_i^{(3)} + \dots \quad (4.2)$$

cuja soma truncada nos termos em segunda ordem, como indica WARBURTON (1976) produz após isolado o termo na segunda derivada:

$$\ddot{x}_i = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (4.3)$$

e analogamente, da diferença entre (4.1) e (4.2) sob as mesmas condições pode-se escrever, evidenciando-se o termo na primeira derivada:

$$\dot{x}_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \quad (4.4)$$

A aplicação de (4.3) e (4.4) na equação de equilíbrio (2.39) para o instante t_i permite a obtenção de x_{i+1} , supostos conhecidos x_i e x_{i-1} . A expressão resultante é da forma:

$$x_{i+1} = \frac{1}{(1 + \gamma\omega\Delta t)} \left[p_i + x_i(2 - \omega^2\Delta t^2) + x_{i-1}(-1 + \gamma\omega\Delta t) \right] \quad (4.5)$$

e com o fim de obter uma expressão análoga a (3.13a) para evidenciar uma matriz de amplificação, pode-se arranjar o método como tendo aspecto:

$$\begin{Bmatrix} x_{i+1} \\ x_i \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} x_i \\ x_{i-1} \end{Bmatrix} + [L]p_i \quad (4.6)$$

onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{(2 - \omega^2 \Delta t^2)}{(1 + \gamma \omega \Delta t)} & -\frac{(1 - \gamma \omega \Delta t)}{(1 + \gamma \omega \Delta t)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

e com o operador das cargas sendo escrito como:

$$[L] = \begin{bmatrix} \Delta t^2 \\ (1 + \gamma \omega \Delta t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

As velocidades e acelerações vão sendo obtidas da aplicação sucessiva das (4.3) e (4.4), e uma análise espectral permite concluir que este algoritmo de passo duplo é estável para $\Delta t/T < 1/\pi$, com o comportamento de seu raio espectral mostrado à figura 4.1.

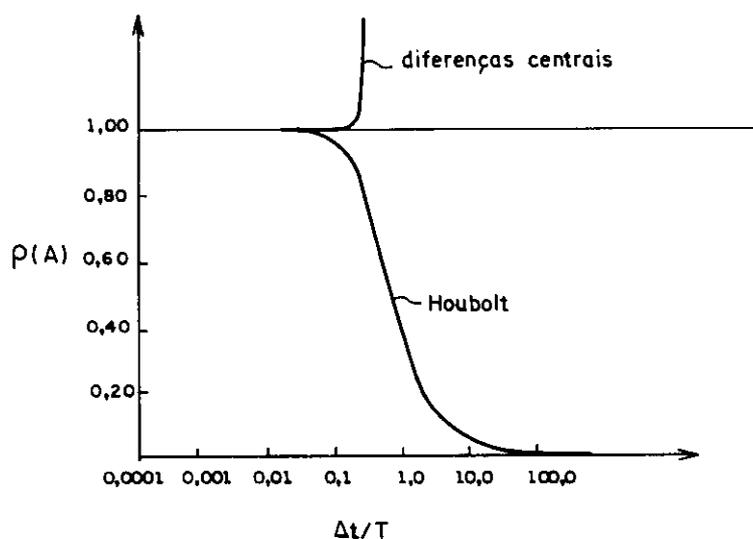


Figura 4.1 - Raio espectral das diferenças centrais e do método de Houbolt

O problema de iniciar sua aplicação é contornado a partir da criação de um movimento virtual nos instantes anteriores à origem que leve às mesmas condições iniciais.

Tomando-se $i = 0$ em (4.3) e (4.4) e isolado o termo de interesse, é possível escrever-se:

$$x_{-1} = -x_0 - \Delta t \dot{x}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_0 \quad (4.9)$$

o que possibilita utilizar o método descrito por (4.6) e (4.7) desde o começo do movimento.

O algoritmo resultante é explícito para sistemas com múltiplos graus de liberdade, desde que as matrizes de massa e de amortecimento sejam diagonais.

Embora o aniquilamento adquira maior significado apenas nos algoritmos incondicionalmente estáveis pode-se observar que essa propriedade não está presente no método em questão.

As expressões utilizadas para representar as acelerações e velocidades são de segunda ordem, o que implica mesma ordem de precisão para a representação dos esforços.

Caso o amortecimento seja desprezado a solução pode ser obtida sem a montagem das matrizes globais de massa e rigidez, trabalhando-se apenas no nível do elemento. Isto pode representar substancial economia de tempo e memória de processamento, principalmente nos casos de malhas regulares, onde os elementos têm propriedades iguais.

Uma análise de erro e estabilidade nos problemas com viscoplasticidade em que se emprega esse esquema de integração é feita por KULKARNI (1995).

4.2.2. Método de Houbolt

Neste método apresentado por HOUBOLT (1950) expressões em diferenças finitas descendentes são empregadas para aproximar os valores de velocidade e aceleração, gerando

um método multi-passo. As diferenças em primeira, segunda e terceira ordem consideradas são, portanto, respectivamente:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x_i}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} (x_i - x_{i-1}) \\ \frac{\Delta^2 x_i}{\Delta t^2} &= \frac{1}{\Delta t^2} (x_i - 2x_{i-1} + x_{i-2}) \\ \frac{\Delta^3 x_i}{\Delta t^3} &= \frac{1}{\Delta t^3} (x_i - 3x_{i-1} + 3x_{i-2} - x_{i-3})\end{aligned}\tag{4.10}$$

e podem-se escrever relações que explicitem o erro cometido na representação das derivadas efetuando-se a substituição dos deslocamentos por séries de Taylor centradas em x_i .

Na primeira das (4.10), efetuando-se:

$$x_{i-1} = x_i - \Delta t \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_i - \frac{\Delta t^3}{6} x_i^{(3)} + \frac{\Delta t^4}{24} x_i^{(4)} - \dots$$

pode-se chegar a:

$$\dot{x}_i = \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t} \right) + \frac{\Delta t}{2} \ddot{x}_i - \frac{\Delta t^2}{6} x_i^{(3)} + \frac{\Delta t^3}{24} x_i^{(4)} - \dots\tag{4.11}$$

onde a partir do segundo termo do segundo membro encontra-se o erro em questão.

Com substituições análogas na segunda e terceira das (4.10), considerando-se:

$$\begin{aligned}x_{i-2} &= x_i - 2\Delta t \dot{x}_i + 2\Delta t^2 \ddot{x}_i - \frac{4}{3} \Delta t^3 x_i^{(3)} + \frac{2}{3} \Delta t^4 x_i^{(4)} - \dots \\ x_{i-3} &= x_i - 3\Delta t \dot{x}_i + \frac{9}{2} \Delta t^2 \ddot{x}_i - \frac{9}{2} \Delta t^3 x_i^{(3)} + \frac{27}{8} \Delta t^4 x_i^{(4)} - \dots\end{aligned}$$

obtém-se também:

$$\ddot{x}_i = \left(\frac{\Delta^2 x_i}{\Delta t^2} \right) + \Delta t x_i^{(3)} - \frac{7}{12} \Delta t^2 x_i^{(4)} + \dots\tag{4.12}$$

e ainda:

$$x_i^{(3)} = \left(\frac{\Delta^3 x_i}{\Delta t^3} \right) + \frac{3}{2} \Delta t x_i^{(4)} - \dots \quad (4.13)$$

para a terceira derivada.

Levando-se (4.12) e (4.13) a (4.11) resulta, após efetuadas as somas algébricas possíveis de termos de mesma ordem, a relação:

$$\dot{x}_i = \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\Delta^2 x_i}{\Delta t^2} \right) + \frac{\Delta t^2}{3} \left(\frac{\Delta^3 x_i}{\Delta t^3} \right) + \frac{\Delta t^3}{4} x_i^{(4)} + \dots \quad (4.14)$$

e analogamente levando-se (4.13) em (4.12), vem:

$$\ddot{x}_i = \left(\frac{\Delta^2 x_i}{\Delta t^2} \right) + \Delta t \left(\frac{\Delta^3 x_i}{\Delta t^3} \right) + \frac{11\Delta t^2}{12} x_i^{(4)} + \dots \quad (4.15)$$

que garantem precisão em quarta ordem para a representação dos deslocamentos, ou segunda ordem nos esforços. A consideração das (4.10) nessas duas últimas produz, finalmente:

$$\dot{x}_i = \frac{1}{6\Delta t} (11x_i - 18x_{i-1} + 9x_{i-2} - 2x_{i-3}) \quad (4.16)$$

e para a segunda derivada, vale a relação:

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{\Delta t^2} (2x_i - 5x_{i-1} + 4x_{i-2} - x_{i-3}) \quad (4.17)$$

também utilizada no método.

Para avançar no movimento, (4.16) e (4.17) são levadas à equação de equilíbrio (2.39) considerada no instante t_{i+1} , o que resulta em:

$$x_{i+1} = \frac{1}{\left(2 + \frac{11}{3} \gamma \omega \Delta t + \omega^2 \Delta t^2\right)} \begin{bmatrix} p_{i+1} + x_i(5 + 6\gamma\omega\Delta t) + \\ + x_{i-1}(-4 - 3\gamma\omega\Delta t) + \\ + x_{i-2}\left(1 + \frac{2}{3} \gamma\omega\Delta t\right) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

sendo que as (4.17) e (4.16) permitem o cálculo, respectivamente, de aceleração e velocidade no instante considerado.

Com o objetivo de se fazer uma análise espectral, o processo pode ser arranjado de forma a ser escrito:

$$\begin{Bmatrix} x_{i+1} \\ x_i \\ x_{i-1} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} x_i \\ x_{i-1} \\ x_{i-2} \end{Bmatrix} + [L] p_{i+1} \quad (4.19)$$

onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} \left(\frac{5\beta}{\omega^2 \Delta t^2} + 6\kappa\right) & -\left(\frac{4\beta}{\omega^2 \Delta t^2} + 3\kappa\right) & \left(\frac{\beta}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{2\kappa}{3}\right) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

com:

$$\beta = \left(\frac{2}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{11\gamma}{3\omega\Delta t} + 1\right)^{-1} \quad (4.21)$$

e também:

$$\kappa = \frac{\gamma\beta}{\omega\Delta t} \quad (4.22)$$

sendo o operador das cargas dado por:

$$[L] = \begin{bmatrix} \beta \\ \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Trata-se de um método incondicionalmente estável e implícito, uma vez que o equilíbrio é efetuado no instante ao final do passo, em t_{i+1} . O amortecimento numérico está presente, crescente com o tamanho do passo e de forma brusca a partir de um certo valor desse, não havendo um parâmetro livre que permita controlá-lo.

Uma característica interessante é o fato de que se desprezados os fatores envolvendo massa e amortecimento, o processo continua aplicável, fornecendo então a solução estática para ações variáveis com o tempo.

O procedimento de iniciação originalmente proposto pelo próprio autor é considerar expressões em diferenças de mesma ordem de erro das já utilizadas para as derivadas no ponto correspondente a t_i , dadas pelas relações:

$$\dot{x}_i = \frac{1}{6\Delta t} (2x_{i+1} + 3x_i - 6x_{i-1} + x_{i-2}) \quad (4.24)$$

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{\Delta t^2} (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \quad (4.25)$$

e aplicá-las para $i = 0$. Com isto, dadas as condições iniciais inclusive o equilíbrio, têm-se os valores de x_{i-1} e x_{i-2} como funções de x_1 , isto é:

$$x_{-2} = 6 \left(\Delta t \dot{x}_0 + \Delta t^2 \ddot{x}_0 \right) + 9x_0 - 8x_1 \quad (4.26)$$

e também:

$$x_{-1} = \Delta t^2 \ddot{x}_0 + 2x_0 - x_1 \quad (4.27)$$

e a sua aplicação a (4.18) para $i = 0$ permite a obtenção da estimativa para o deslocamento x_1 e sucessivamente, o valor resultante e mais (4.27) novamente aplicados a (4.18), agora para $i = 1$, completam o procedimento em discussão.

Não obstante a proposta acima, BATHE (1976) sugere como mais adequado para os primeiros passos a aplicação das diferenças centrais com um intervalo igual a uma fração do passo escolhido para o restante do movimento.

A hipótese implícita no método tal qual apresentado originalmente é de se utilizar para representação do deslocamento no intervalo entre os quatro instantes considerados de cada vez um polinômio de interpolação de ordem três.

A importância desse processo está em ser o primeiro identificado como portando aniquilamento assintótico, o que pode ser visto à figura 4.1, quase eliminando as respostas correspondentes às frequências mais elevadas já no primeiro passo.

Foi por isso muito utilizado em programas comerciais de elementos finitos, já que essa característica permite estabilizar numericamente cálculos envolvendo fenômenos altamente não-lineares, como afirma CHUNG (1994).

Suas duas principais desvantagens são o fato de ser multi-passo, dificultando ajustes de tamanho de passo e exigindo procedimento de iniciação do movimento. É também exageradamente dissipativo nas frequências inferiores, exigindo passos relativamente pequenos para esse efeito não prejudicar a contribuição na resposta dos primeiros modos.

4.3. MÉTODO DE HOUBOLT GENERALIZADO

O método de Houbolt pode ser visto como uma particularização do apresentado por WOOD (1984) e por ele denominado método 2, se tomados para os parâmetros do processo os valores $\alpha_2 = 31/9$, $\beta_2 = 23/9$ e $\gamma_2 = 5/3$.

Analogamente, KATONA & ZIENKIEWICZ (1985) ao apresentarem o método Beta-m observaram que recai-se no

processo de Houbolt desde que fixados $\beta_0 = 6$, $\beta_1 = 11/3$ e ainda $\beta_2 = 2$.

Essa tendência de os métodos lineares conterem o de Houbolt fica muito bem explicada a partir dos trabalhos de HULBERT (1991), HULBERT & CHUNG (1994) e CHUNG (1994) que classificam como "métodos de Houbolt" todos os algoritmos lineares passíveis de serem colocados na forma de passo triplo. Aliás, CHUNG (1991) mostra que o único algoritmo linear com precisão em segunda ordem incondicionalmente estável com aniquilamento assintótico de passo triplo existente é o de Houbolt.

Essa informação implica em exigência de passo quádruplo, caso se deseje limitar a dissipação nos modos inferiores mantendo-se os demais atributos. Conseqüentemente, os procedimentos de iniciação passam a interferir na análise.

Outra conclusão é a de que os únicos métodos lineares de passo simples que apresentam aniquilamento assintótico são os espectralmente semelhantes ao processo em questão. Após esgotadas portanto, as possibilidades do método de Houbolt generalizado quanto a aniquilamento, o caminho que resta é lidar com algoritmos de ordens superiores.

Convém observar entretanto, que semelhança espectral não significa obrigatoriamente comportamento numérico similar; assim, dependendo das propriedades priorizadas na análise, pode-se concluir por um método específico da família para melhor qualidade da resposta obtida.

Com o objetivo de discutir as características presentes num algoritmo de \underline{n} passos, a expressão (3.13a) generalizada para tal caso fornece:

$$\{X_{I+1}\} = \sum_{k=1}^{\underline{n}} [A_k] \{X_{i-k+1}\} + \sum_{k=1}^{\underline{n}} [L_k] \{P_{i-k+1}\} \quad (4.28)$$

que pode ser reescrita:

$$\sum_{k=0}^{\underline{n}} ([A_k] \{X_{i-k+1}\} + [L_k] \{P_{i-k+1}\}) = \{0\} \quad (4.29)$$

onde se adotou uma representação sucinta para o vetor deslocamento e suas derivadas dado por:

$$\{x_{i-k+1}\} = \begin{Bmatrix} x_{i-k+1} \\ \dot{x}_{i-k+1} \\ \ddot{x}_{i-k+1} \\ \Delta t^2 x_{i-k+1} \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Explicitando-se (4.30) em (4.29), pode-se escrever então:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(a_{k11} x_{i-k+1} + a_{k12} \dot{x}_{i-k+1} + a_{k13} \ddot{x}_{i-k+1} + \ell_{k1} \Delta t^2 p_{i-k+1} \right) &= 0 \\ \sum_{k=0}^n \left(a_{k21} x_{i-k+1} + a_{k22} \dot{x}_{i-k+1} + a_{k23} \ddot{x}_{i-k+1} + \ell_{k2} \Delta t^2 p_{i-k+1} \right) &= 0 \\ \sum_{k=0}^n \left(a_{k31} x_{i-k+1} + a_{k32} \dot{x}_{i-k+1} + a_{k33} \ddot{x}_{i-k+1} + \ell_{k3} \Delta t^2 p_{i-k+1} \right) &= 0 \quad \dots \end{aligned}$$

..... (4.31)

onde cada igualdade corresponde a uma das linhas em (4.29), $a_{k,ij}$ é o elemento de posição ij de $[A_k]$ e $\ell_{k,i}$ é o elemento da linha i de $[L_k]$.

Pode-se somar (4.31) membro a membro, gerando:

$$\sum_{k=0}^n \left(a_k^* x_{i-k+1} + b_k^* \dot{x}_{i-k+1} + c_k^* \ddot{x}_{i-k+1} + d_k^* \Delta t^2 p_{i-k+1} \right) = 0 \quad (4.32)$$

e observando-se (3.3), (3.4) e (3.5) para os algoritmos lineares, o aspecto para n passos é:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f \left(\Delta t, \dot{x}_{i+1}, \ddot{x}_{i+1}, p_{i+1} \right) \\ \dot{x}_{i+1} &= g \left(\Delta t, x_{i+1}, \ddot{x}_{i+1}, x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i, \dots, x_{i-n+1}, \dot{x}_{i-n+1}, \ddot{x}_{i-n+1} \right) \\ \ddot{x}_{i+1} &= h \left(\Delta t, x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, \ddot{x}_{i+1}, x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i, \dots, x_{i-n+1}, \dot{x}_{i-n+1}, \ddot{x}_{i-n+1} \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

cuja manipulação permite explicitar a primeira e segunda derivadas do deslocamento no instante t_{i+1} , como função de x_{i+1} . Com isto, (4.32) toma a forma apresentada por HULBERT (1991) dada por:

$$\sum_{k=0}^n \left[a_k x_{i-k+1} + 2\gamma\omega\Delta t b_k x_{i-k+1} + \omega^2 \Delta t^2 c_k x_{i-k+1} + \Delta t^2 d_k p_{i-k+1} \right] = 0$$

..... (4.34)

que é a expressão mais geral possível para algoritmos lineares.

O número de parâmetros livres nessa relação é dado pela relação $4.(n + 1)$, correspondendo aos a_k , b_k , c_k e d_k , com $k = 1, \dots, n$. Restringindo a análise às vibrações livres não-amortecidas, pelo fato de o amortecimento viscoso ter pouco ou nenhum efeito nos modos superiores, conforme mostrado por HILBER* apud HULBERT (1991) tem-se $b_k = d_k = 0$, e tomando um dos parâmetros não-nulos unitário, simplesmente como referência, a expressão assume o aspecto:

$$\sum_{k=0}^n (a_k + \omega^2 \Delta t^2 c_k) x_{i-k+1} = 0 \quad (4.35)$$

apresentando nesse caso $2.n + 1$ parâmetros de ajuste. Para algoritmos de passo triplo, portanto, totalizando sete.

O erro local de truncamento de (4.35), segundo HULBERT (1991) é dado por:

$$E_\ell(t_i) = \frac{1}{\Delta t^2} \left(\sum_{k=0}^n B_k x_{i-k+1} \right) \quad (4.36)$$

com B_0 unitário e:

* HILBER, H. M. "Analysis and Design of Numerical Integration Methods in Structural Dynamics", Report n. EERC 76-29, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 1976 apud HULBERT, G. M. "Limitations on Linear Multistep Methods for Structural Dynamics", *Earthqu. Eng. and Struct. Dynamics*, vol. 20, pp 191-196, 1991.

$$B_k = \frac{a_k + \omega^2 \Delta t^2 c_k}{a_0 + \omega^2 \Delta t^2 c_0}, 0 < k \leq n \quad (4.37)$$

Para precisão em segunda ordem, deve-se respeitar às relações:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k &= 0 \\ a_0 - \sum_{k=2}^n (k-1)a_k &= 0 \\ a_0 + \sum_{k=2}^n (k-1)^2 a_k - 2 \sum_{k=0}^n c_k &= 0 \\ a_0 - \sum_{k=2}^n (k-1)^3 a_k - 6 \left[c_0 - \sum_{k=2}^n (k-1)c_k \right] &= 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

de modo que a aplicação das condições acima reduz o número de parâmetros independentes em quatro, isto é, para três nos algoritmos de passo triplo ($n = 3$).

Utilizando o resultado de DAHLQUIST (1963) que demonstra não haver algoritmo explícito de passo múltiplo incondicionalmente estável deve-se impor também $c_0 \neq 0$.

Outras relações devem ser atendidas pelos parâmetros a_k e c_k , com vistas à estabilidade e encontram-se descritas para $n = 2, 3$ e 4 em KATONA & ZIENKIEWICZ (1985).

Se for exigido aniquilamento assintótico, além das propriedades acima de precisão e estabilidade deve-se atender à expressão (3.21) relativamente ao raio espectral, sendo o cálculo dos autovalores feito com a utilização da relação:

$$\sum_{k=0}^n \{a_k + \omega^2 \Delta t^2 c_k\} \lambda^{n-k} = 0 \quad (4.39)$$

como se deduz da observação de (4.35).

Tomando-se o limite de $\omega \Delta t$ tendendo ao infinito, o aniquilamento assintótico exige raízes nulas no polinômio característico definido por (4.39). Para tal, deve-se fixar:

$$c_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.40)$$

nessa mesma expressão.

Isto acrescenta n relações a serem atendidas para os parâmetros envolvidos, permitindo afirmar-se para os algoritmos lineares de n passos, já incluindo o resultado de DAHLQUIST (1963) que:

a) não há métodos explícitos incondicionalmente estáveis;
 b) para precisão em segunda ordem, estabilidade incondicional, aniquilamento assintótico, com $n = 2$, isto é, passo duplo, tem-se:

nº. de parâmetros livres com vibrações livres não-amortecidas: 5

nº de relações similares a (4.38) a atender: 4

nº de condições análogas a (4.40) a atender: 2

o que permite concluir que não há um algoritmo que apresente simultaneamente todas as características acima.

Impondo-se as mesmas condições, porém com $n = 3$, isto é, passo triplo, vem:

nº de parâmetros livres: $2 \times 3 + 1 = 7$

nº de relações (4.38): 4

nº de condições (4.40): 3

verificando-se ser o problema determinado, e cuja única solução nos parâmetros livres conduz ao método de Houbolt.

Se repetido o raciocínio para $n = 4$, verifica-se uma indeterminação, restando um parâmetro de ajuste. O obstáculo que começa a surgir é a busca de um processo de iniciação eficiente que não deteriore as propriedades do algoritmo de passo quádruplo resultante.

O raciocínio acima praticamente esgota as possibilidades dos algoritmos lineares, induzindo à busca de algoritmos de ordens superiores caso haja interesse em aprimorar as características presentes.

4.4. MÉTODO DE NEWMARK

Em 1959, NEWMARK apresentou o método de passo simples representado pelas expressões:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \Delta t \dot{x}_i + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta_N \right) \ddot{x}_i + \beta_N \ddot{x}_{i+1} \right] \\ \dot{x}_{i+1} &= \dot{x}_i + \Delta t \left[(1 - \gamma_N) \ddot{x}_i + \gamma_N \ddot{x}_{i+1} \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

que apresentam dois parâmetros de ajuste β_N e γ_N , introduzidos com o objetivo de indicar o quanto a aceleração ao final do passo pesa na estimativa da velocidade e deslocamento nesse mesmo instante. Pode-se dizer então que esses parâmetros ponderam "o quanto de implícito" o método apresenta, uma vez que tomados nulos, produzem um processo explícito.

A variação adequada dos parâmetros confere ou intensifica algumas características do algoritmo. Sua precisão é de segunda ordem para $\beta_N = 1/6$, desde que não haja amortecimento numérico, quando se perde esse atributo, como afirmado em WOOD, BOSSAK & ZIENKIEWICZ (1980).

Isto pode ser verificado tomando-se a equação de equilíbrio e usando-se as expressões (4.41) para representar o deslocamento e a velocidade no instante ao final do passo. A seguir, exprimem-se as grandezas envolvidas com o uso de séries de Taylor centradas no instante inicial do passo. Respeitando-se então à condição de equilíbrio e suas primeiras derivadas para t_i , verifica-se que o resíduo é de primeira ordem nos esforços na presença de amortecimento e segunda ordem em caso contrário. Para $\gamma_N = 1/2$ e $\beta_N = 1/6$, tem-se o chamado método da aceleração linear.

A proposta original do autor é $\gamma_N = 1/2$ e $\beta_N = 1/4$, o que implica numa aceleração média constante no intervalo e resulta num método incondicionalmente estável sem amortecimento numérico (portanto de precisão em segunda ordem, de acordo com o dito acima), chamado também de regra trapezoidal. As figuras 4.2, 4.3 e 4.4 mostram o desempenho

do método, comparando-o aos de Houbolt e Wilson- θ , outro tradicional método que contém parâmetro de ajuste apresentado em 1968.

Uma nova abordagem do algoritmo para os parâmetros assumindo tais valores é apresentada e discutida por PEZESHK & CAMP (1995) onde comparações são feitas com o Newmark tradicional, relativamente à precisão e custo computacional. O algoritmo resultante é explícito e condicionalmente estável, e chamado pelo autor de método trapezoidal modificado (MTM). Os gráficos mostrados no trabalho apontam para alongamento do período igual ao apresentado pelo método de Newmark com $\beta = 0$, ausência de dissipação numérica para velocidade nula no início do movimento e presença dessa característica com o aumento do passo para deslocamento inicial nulo.

Uma discussão dos erros globais presentes é feita por WARBURTON (1990) com ênfase no desempenho do método das diferenças centrais, que corresponde a $\beta_N = 0$ e que é eficiente para problemas não-lineares como terremotos, pelo fato de ser explícito.

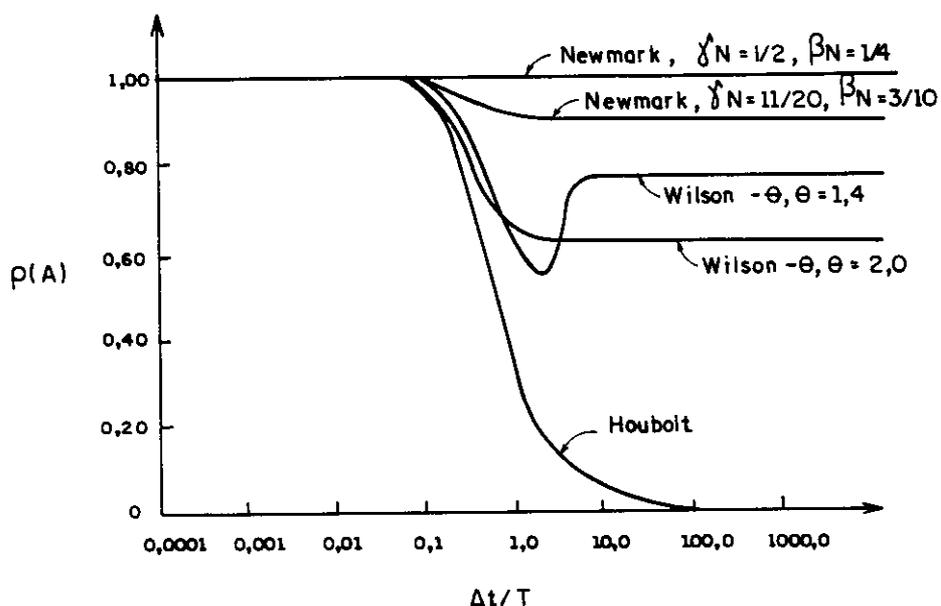


Figura 4.2. - Raio espectral x tamanho do passo, nos métodos de Houbolt, Newmark e Wilson- θ

Em 1980, BRUSA & NIGRO retomam a regra trapezoidal, introduzindo parâmetros de ajuste nos coeficientes dos termos

da matriz de amplificação e chegando à sua determinação a partir da fixação da ordem do erro local (segunda), garantia de estabilidade incondicional e ordem das matrizes envolvidas na solução do sistema igual ao número de graus de liberdade.

Os autores argumentam, e assim conduzem sua análise, em favor de medir-se a eficiência de um método não mais em termos do erro local de truncamento. Alternativamente, preocupam-se com a precisão obtida na representação do problema de autovalores associado às equações de movimento, com termos exponenciais. Assim, conforme sua proposta, quanto mais próximos dos corretos estiverem os autovalores da solução numérica apresentada pelo método, tanto melhor a qualidade da resposta.

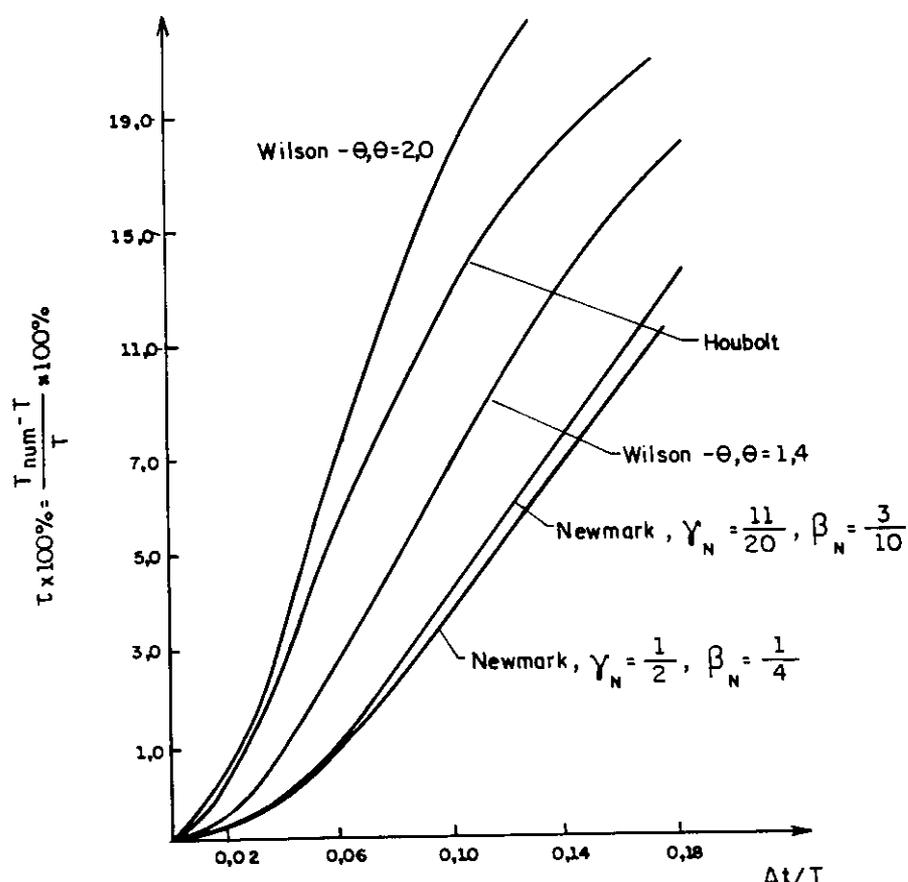


Figura 4.3 - Alongamento do período nos métodos de Houbolt, Newmark e Wilson- θ

WOOD, BOSSAK & ZIENKIEWICZ (1980) introduzem um parâmetro α_B e obtém uma versão modificada do método em pauta, simultaneamente de segunda ordem de precisão,

incondicionalmente estável e com amortecimento numérico, para vibrações livres não-amortecidas.

As expressões do deslocamento, velocidade e o equilíbrio são dados neste caso respectivamente por:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \dot{x}_i + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{2} - \beta_B \right) \ddot{x}_i + (\Delta t)^2 \beta_B \ddot{x}_{i+1}$$

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta t (1 - \gamma_B) \ddot{x}_i + \Delta t \gamma_B \ddot{x}_{i+1}$$

$$(1 - \alpha_B) m \ddot{x}_{i+1} + \alpha_B m \ddot{x}_i + c \dot{x}_{i+1} + k x_{i+1} = p_{i+1}$$

de modo que se $\alpha_B = 0$, tem-se $\beta_B = \beta_N$ e $\gamma_B = \gamma_N$, correspondendo ao esquema original de Newmark.

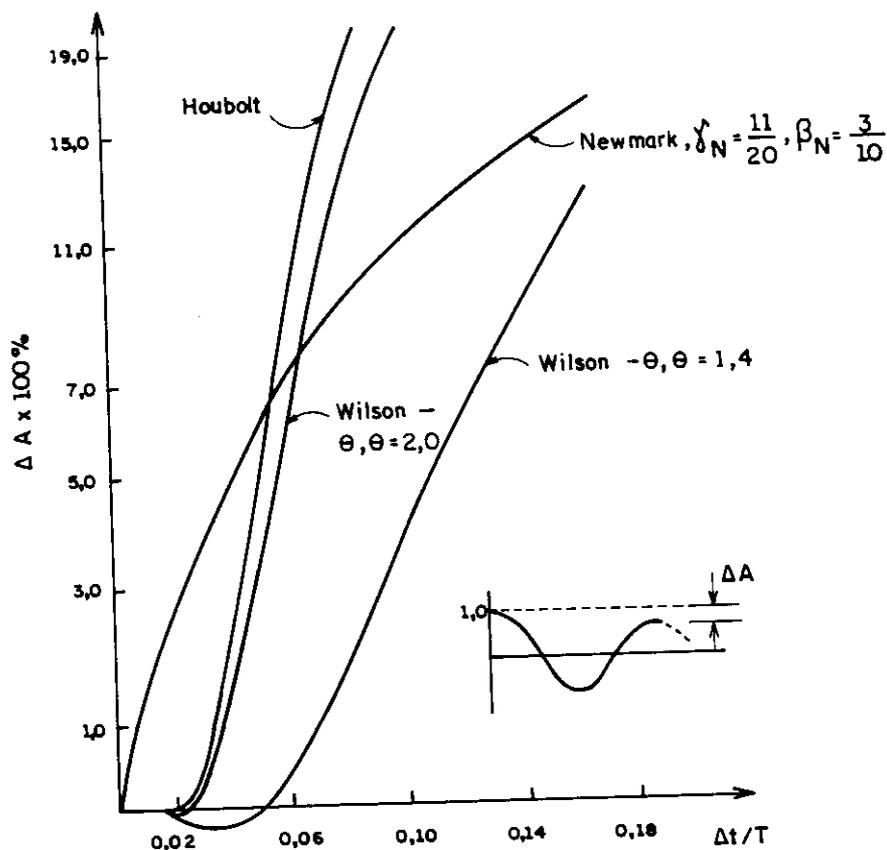


Figura 4.4 - Decréscimo de amplitude; métodos de Houbolt, Newmark e Wilson- θ

A estabilidade incondicional é atendida desde que se tenha:

$$\beta_B > \frac{\gamma_B}{2} > \frac{1}{4}; \alpha_B = \frac{1}{2} - \gamma_B$$

As figuras 4.5 e 4.6 apresentam uma comparação do desempenho espectral dos algoritmos de Newmark (N) e de Bossak-Newmark (B_1 , B_2 , B_3), bem como de HILBER, HUGHES & TAYLOR (1977) (HHT₁ e HHT₂). Os valores associados aos gráficos são:

$$B_1: \alpha_B = -0,1; \beta_B = 0,3025; \gamma_B = 0,6$$

$$B_2: \alpha_B = -0,1; \beta_B = 0,500; \gamma_B = 0,6$$

$$B_3: \alpha_B = +0,1; \beta_B = 0,3025; \gamma_B = 0,6.$$

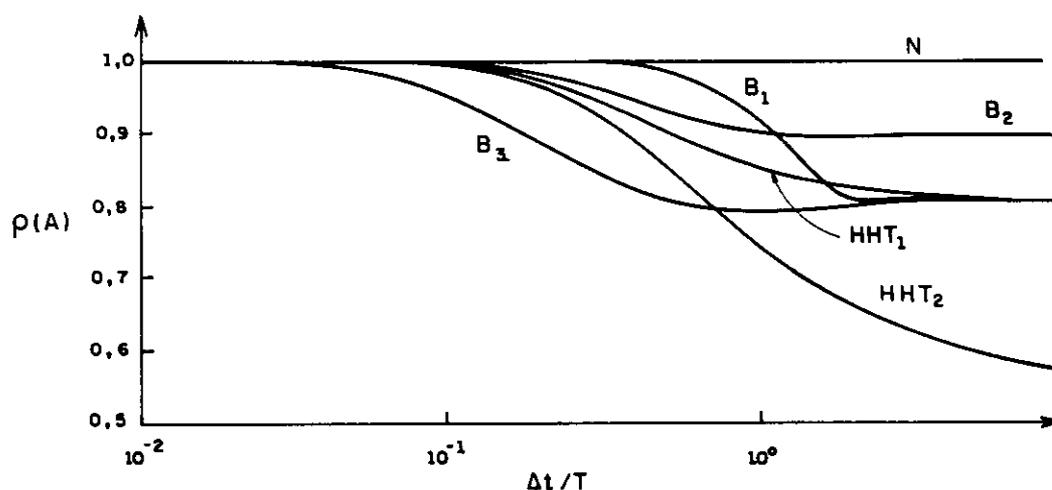


Figura 4.5 - Raio espectral x passo; métodos de Newmark(N), Hilber, Hughes & Taylor(HHT) e Bossak-Newmark(B)

Diversos outros autores retomaram a idéia básica desse procedimento, qual seja a de assumir uma lei de variação para a aceleração no interior do passo expressa com o uso de parâmetros livres de ajuste, sendo que muitos dos métodos assim gerados englobam o de Newmark como seu caso particular.

Tal é o caso da família ρ , apresentada por BAZZI & ANDERHEGGEN (1982). Seu desempenho comparativo é mostrado às figuras 4.7 a 4.9.

Para fins de análise espectral a matriz de amplificação é representada por:

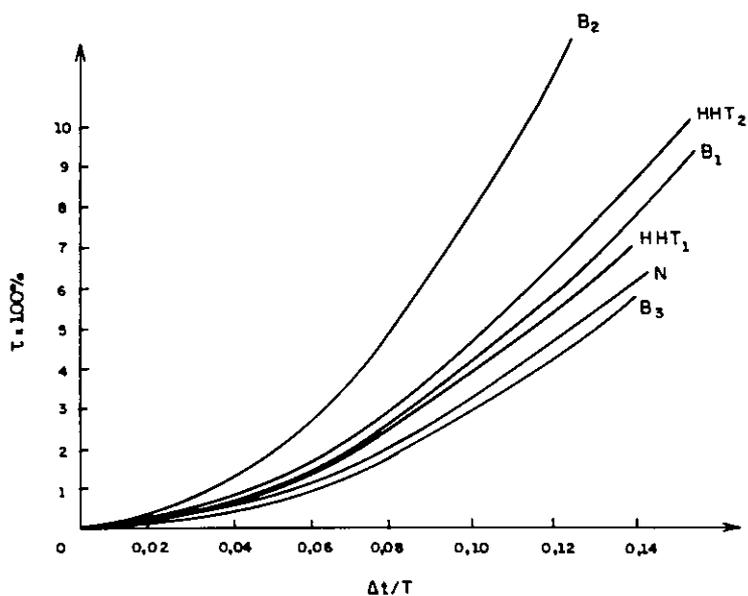


Figura 4.6 - Alongamento do período x passo; métodos de Newmark(N), Hilber, Hughes & Taylor(HHT) e Bossak-Newmark(B)

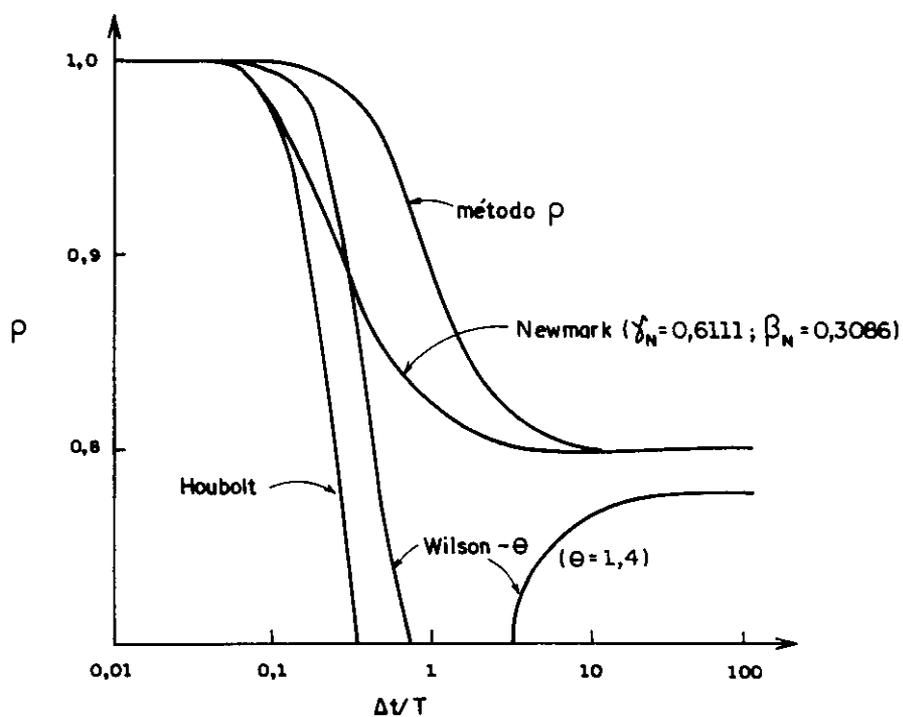


Figura 4.7 - Raio espectral x passo; métodos de Houbolt, Newmark, Wilson-θ e método ρ

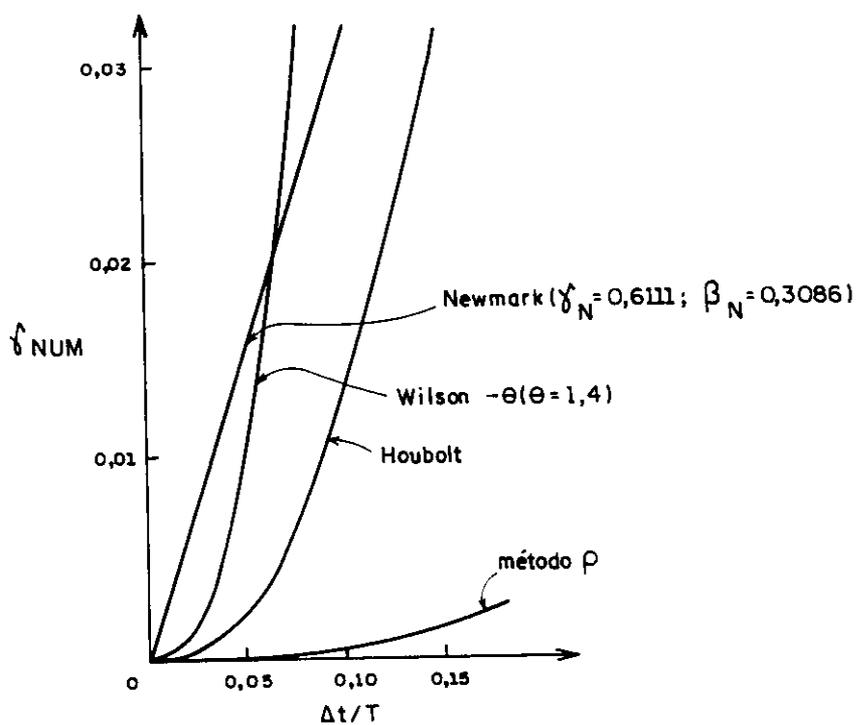


Figura 4.8 - Dissipação x passo (método ρ)

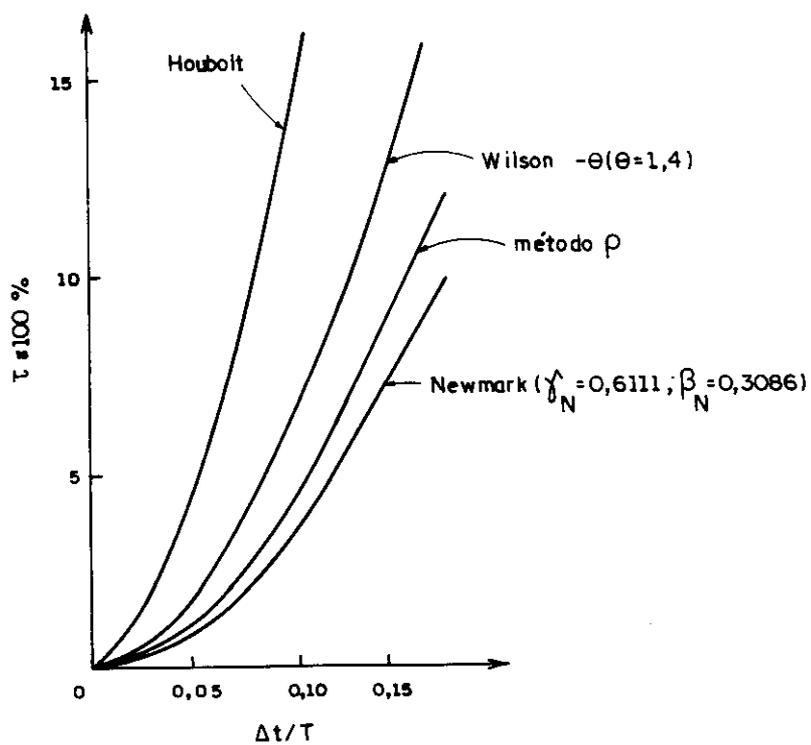


Figura 4.9 - Erro relativo do período x passo (método ρ)

$$[A] = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2} - \beta_N\right)\beta - 2(1 - \gamma_N)\kappa & \frac{1}{\Delta t}(-\beta - 2\kappa) & \frac{1}{\Delta t^2}(-\beta) \\ \Delta t \left[1 - \gamma_N - \left(\frac{1}{2} - \beta_N\right)\gamma_N\beta - 2(1 - \gamma_N)\gamma_N\kappa \right] & (1 - \beta\gamma_N - 2\gamma_N\kappa) & \frac{1}{\Delta t}(-\beta\gamma_N) \\ \Delta t^2 \left[\frac{1}{2} - \beta_N - \left(\frac{1}{2} - \beta_N\right)\beta_N\beta - 2(1 - \gamma_N)\beta_N\kappa \right] & \Delta t(1 - \beta_N\beta - 2\beta_N\kappa) & (1 - \beta_N\beta) \end{bmatrix}$$

..... (4.42)

com o operador das cargas:

$$[L]^T = \begin{bmatrix} \beta & \beta\gamma_N & \beta_N\beta \\ \omega^2\Delta t^2 & \omega^2\Delta t & \omega^2 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

e valendo nas equações anteriores:

$$\beta = \left(\frac{1}{\omega^2\Delta t^2} + \frac{2\gamma\gamma_N}{\omega\Delta t} + \beta_N \right)^{-1}$$

$$\kappa = \frac{\beta\gamma}{\omega\Delta t} \quad (4.44)$$

o que completa a definição do algoritmo clássico de Newmark.

4.4.1. Método Beta - m

Uma das generalizações desse último método descrito é o proposto por KATONA & ZIENKIEWICZ (1985) que o interpretam como uma expansão em série de Taylor, com representação exata dos termos até a segunda ordem. As expressões (4.41) e (4.42) são reescritas para $k = 0$ e 1 , respectivamente, na forma:

$$x_{i+1}^{(k)} = \sum_{j=k}^2 x_i^{(j)} \frac{\Delta t^{j-k}}{(j-k)!} + \beta_k \frac{\Delta t^{2-k}}{(2-k)!} \Delta x^{(2)} \quad (4.45)$$

onde:

$$\Delta x^{(k)} = x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}$$

$$\beta_0 = 2\beta_N; \beta_1 = \gamma_N$$

para utilizar a notação empregada até aqui.

O último termo de (4.45) pode ser escrito como r_k , dado por:

$$r_0 = \left(\frac{\beta_0 \Delta t^3}{2!} \right) \frac{\Delta x^{(2)}}{\Delta t} \approx \left(\frac{\beta_0 \Delta t^3}{2!} \right) x_i^{(3)}$$

$$r_1 = \left(\frac{\beta_1 \Delta t^2}{1!} \right) \frac{\Delta x^{(2)}}{\Delta t} \approx \left(\frac{\beta_1 \Delta t^2}{1!} \right) x_i^{(3)} \quad (4.46)$$

e se tomados $\beta_0 = 1/3$ e $\beta_1 = 1/2$, verifica-se que as expressões acima são as aproximações para o termo de ordem 3 da série de Taylor representada por (4.45).

O método Beta-m é uma extensão do processo de Newmark onde a ordem \underline{m} está associada à derivada mais elevada considerada na representação do deslocamento. Assim, sua definição é dada por:

$$x_{i+1}^{(k)} = q_k + b_k \Delta x^{(m)} \quad (4.47)$$

com:

$$q_k = \sum_{j=k}^m x_i^{(j)} \frac{\Delta t^{j-k}}{(j-k)!} \quad (4.48)$$

e ainda:

$$b_k = \beta_k \frac{\Delta t^{m-k}}{(m-k)!}, k = 0, 1, \dots, m \quad (4.49)$$

tomando-se como referência $\beta_m = 1$.

A expressão (4.48) representa a expansão em série de Taylor de $x_{i+1}^{(k)}$ até o termo $x_i^{(m)}$. A última parcela de (4.46) pode ser interpretada como uma aproximação para o termo

seguinte da série, $x_i^{(m+1)}$. A precisão da aproximação é definida pela dos parâmetros $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$.

Se a escolha for feita de modo que $\beta_k = 1/(m-k+1)$, os termos b_k coincidem com os coeficientes da série para $x_i^{(m+1)}$. Nota-se, porém, que essa pode não ser a melhor escolha para seus valores do ponto de vista de precisão e estabilidade. Qualquer conjunto de β_k tomado atenderá aos requisitos de consistência, pelo que as alternativas e possibilidades concretas são bastante numerosas.

Para uma descrição do algoritmo considere-se que x_{i+1} e suas derivadas podem ser escritos em termos de $\Delta x^{(m)}$, através de (4.47), com os q_k dados por (4.48) e os b_k por (4.49) sendo os β_k os parâmetros independentes. Com isto estabelecido e rearranjando a equação de equilíbrio, tem-se:

$$(b_{2m} + b_{1c} + b_{0k})\Delta x^{(m)} = f_{i+1} - (mq_2 + cq_1 + kq_0)$$

e as etapas do algoritmo são então:

1. Iniciação. Dados o deslocamento e a velocidade no instante inicial, a aplicação da equação de equilíbrio e tantas derivadas quantas necessário para o instante inicial fornece:

$$x_0^{(k)} = m^{-1} [cx_0^{(k-1)} + kx_0^{(k-2)} - f_0^{(k-2)}], k = 2, \dots, m$$

2. Dados $x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(m)}$, formação do vetor:

$$r = f_{i+1} - mq_2 - cq_1 - kq_0$$

3. Atualização parcial do deslocamento e derivadas, com:

$$x_{i+1}^{(k)} = q_k, k = 1, 2, \dots, m$$

4. Resolução para a incógnita $\Delta x^{(m)}$ da equação:

$$(b_{2m} + b_{1c} + b_{0k})\Delta x^{(m)} = r$$

5. Complementação da atualização da solução:

$$x_{i+1}^{(k)} = x_{i+1}^{(k)} + b_k \Delta x^{(m)}, k = 1, 2, \dots, m$$

6. Repetição das etapas 2-5 para o próximo passo.

Quando $\beta_0 = 0$, o algoritmo resulta explícito para qualquer ordem \underline{m} . Se a matriz de massa e a de amortecimento forem diagonais o sistema resulta totalmente desacoplado, podendo ser resolvido no nível do elemento, isto é, dispensando a montagem das matrizes globais.

Através de uma engenhosa transformação do algoritmo para a forma multi-passo, lança-se mão de relações entre os parâmetros β_k e os coeficientes resultantes, o que possibilita associar o processo a esquemas tradicionais e realizar uma análise espectral bem como de erros e estabilidade, inclusive com exemplos.

Algumas tabelas são apresentadas em KATONA & ZIENKIEWICZ (1985) mostrando para diversos algoritmos dessa família, a ordem e coeficiente do erro de truncamento, a presença ou não de estabilidade incondicional e amortecimento numérico, e a correspondência entre os β_k e os parâmetros dos principais métodos tradicionais.

4.4.2. Algoritmo de extrapolação de Newmark

Em 1993, AUSTIN apresentou um algoritmo de integração para equações de segunda ordem lineares ou apresentando não-linearidades "suaves", isto é, garantindo-se ordem suficiente de derivação das funções envolvidas.

A idéia básica é combinar o método de Newmark tradicional com técnicas de extrapolação visando ordens superiores de precisão. É preciso que o método empregado seja estável, de precisão em segunda ordem, e produza expressões assintóticas do erro na resposta contendo apenas termos de ordem par, o que é garantido tomando-se $\gamma_N = 1/2$. O autor mostra que essa é uma alternativa melhor que a redução do

passo, se atendidas as condições citadas, para aumentar a precisão da resposta.

A equação de equilíbrio tomada na forma não-linear para o caso unidimensional, para os instantes ao início e final do passo considerado, dados respectivamente por t_i e t_{i+1} , é assumida de aspecto:

$$\begin{aligned} m \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} \ddot{x}_i + f \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} &= p_i \\ m \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} \ddot{x}_{i+1} + f \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} &= p_{i+1} \end{aligned} \quad (4.50)$$

e considerando-se como é usual que o movimento no instante t_i seja conhecido, pretendendo-se avançar para o instante t_{i+1} , pode-se explicitar nas (4.41) o deslocamento e a velocidade desejados em função da aceleração também desconhecida. Com isso, a última das (4.50) pode ser representada na forma:

$$g \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} \ddot{x}_{i+1} + f \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} - p_{i+1} = 0 \quad (4.51)$$

que pode ser resolvida iterativamente em \ddot{x}_{i+1} . Com a solução, chega-se ao deslocamento e velocidade através das (4.41).

O teorema de GRAGG* apud AUSTIN (1993) estabelece uma relação entre a ordem do erro local cometido em cada subdivisão tomada do passo e a do erro global cometido no método numérico para funções suficientemente diferenciáveis, atendidas as condições apresentadas por AUSTIN. A validade do teorema para métodos implícitos foi mostrada por STETTER** apud AUSTIN (1993).

Seja então:

$$\begin{aligned} x(t_{i+h}) &= x_i + h\Phi[t_i, x_i, h] + d_{p+1}(h) + \dots + \\ &+ d_{p+k}(t)h^{p+k} + o(h^{p+k+1}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

* GRAGG, W. B. "On extrapolation algorithms for ordinary initial value problems" - *J. SIAM Numer. Anal.*, 2, 384-403, 1965.

** STETTER, H. J. "Asymptotic expansions for the error of discretization algorithms for non-linear functional equations" - *Numer. Math.*, 7, 18-31, 1965.

a expansão assintótica para o erro local de um dado método de extrapolação, cuja função de incremento $\Phi(t_i, x_i, h)$ satisfaça à condição de consistência dada por $\Phi(t_i, x_i, 0) = f(t_i, x_i)$, considerando-se:

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f[\tau, x(\tau)] d\tau \quad (4.53)$$

Se o passo Δt for subdividido em N intervalos de tamanho $h = \Delta t/N$, o teorema afirma que a diferença entre a resposta numérica e a exata escreve-se:

$$u_{i+1} - x_{i+1} = e_p(t)\Delta t^p + \dots + e_{p+k}(t)\Delta t^{p+k} + E_h(t)^{p+k+1} \quad (4.54)$$

onde u_{i+1} é a resposta aproximada para o deslocamento no instante considerado e $e_p(t)$ são soluções das equações homogêneas:

$$\dot{e}_p(t) = \frac{df}{dx}(t, x)e^p(t) - d_{p+1}(t) \quad (4.55)$$

tais que $e_p(t_i) = 0$.

Um método de extrapolação é dito simétrico se permanece invariável ao se efetuar as mudanças de parâmetros:

$$t_i \leftrightarrow t_{i+h}$$

$$x(t_i) \leftrightarrow x(t_{i+h})$$

$$\text{e de ordem de integração: } h \leftrightarrow -h.$$

Por exemplo, se

$$x(t_{i+h}) = x_i + h\psi(t_i, t_{i+h}, x_i, x(t_{i+h}), h) + O(h^3)$$

é equivalente a:

$$x_i = x(t_{i+h}) - h\psi(t_{i+h}, t_i, x(t_{i+h}), x_i, -h) + O(h^3)$$

isto é, não há alteração do método, ele é simétrico. Tais integradores numéricos têm expansão assintótica da forma:

$$u_{i+1} = x_{i+1} + A_2\Delta t^2 + A_4\Delta t^4 + A_6\Delta t^6 + \dots \quad (4.56)$$

com os coeficientes A_{2k} , $k=1,2,\dots$ soluções de (4.55).

Denotando as soluções numéricas para n_k passos de tamanho $\Delta t/n_k$ utilizando um método de ordem de precisão \underline{m} de:

$$u_{n_k}^m(x_i, \Delta t) \quad (4.57)$$

e assumindo a solução a partir do valor exato x_i , aproximações numéricas sucessivamente mais precisas podem ser obtidas resolvendo-se o problema com n_k cada vez maiores.

Métodos de precisão em segunda ordem geram uma seqüência de aproximações de aspecto:

$$u_{n_1}^2(x_i, \Delta t), u_{n_2}^2(x_i, \Delta t), \dots, u_{n_k}^2(x_i, \Delta t) \quad (4.58)$$

para os n_1, n_2, \dots, n_k crescentes. Combinações lineares das aproximações podem ser utilizadas para eliminar coeficientes A_i existentes em (4.56) com o objetivo de elevar-se a ordem de precisão.

Para exemplificar, seja a seqüência numérica de Romberg $\{1,2,4,8,16,32,\dots\}$ para os $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ e tomem-se os dois primeiros termos. Nesse caso:

$$u_1^2(x_i, \Delta t) = x_{i+1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}(\Delta t)^{2k} \quad (4.59)$$

$$u_2^2(x_i, \Delta t) = x_{i+1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^{2k} \quad (4.60)$$

e subtraindo-se (4.59) do quádruplo de (4.60), vem:

$$\begin{aligned}
 4x_{i+1} - x_{i+1} &= (4u_2^2 - u_1^2) + O(\Delta t^4) = \\
 &= (4 - 1)u_2^4 + O(\Delta t^4)
 \end{aligned}
 \tag{4.61}$$

obtendo-se assim duas ordens adicionais de precisão, pois vale agora:

$$x_{i+1} = u_2^4 + O(\Delta t^4)$$

isto é, precisão em quarta ordem para a aplicação de um método básico de segunda ordem, com um intervalo $h = \Delta t/2$, através do uso da relação:

$$u_2^4 = \frac{4u_2^2 - u_1^2}{(4 - 1)}$$

para o cálculo do deslocamento aproximado ao final do passo.

Do raciocínio anterior, pode-se verificar que com a aplicação da expressão:

$$u_{2n_k}^{(s+2)} = \left[\frac{4^{(s/2)} u_{2n_k}^{(s)} - u_{n_k}^{(s)}}{4^{(s/2)} - 1} \right]
 \tag{4.62}$$

para passos internos $\Delta t_i = \Delta t/n_k$ com os n_k arranjados conforme a seqüência de Romberg, pode-se eliminar coeficientes do polinômio de erros correspondentes a termos de ordens cada vez mais elevadas.

O algoritmo passo a passo apresentado no trabalho citado consiste, para as condições acima, em:

- 1a) Iniciação. Para cada componente de velocidade e deslocamento, reservar memória para uma tabela de extrapolação de ordem $(P \times P)$, com P oscilando, na prática, entre 4 e 7.

1b) Escolha de um passo Δt . Se a estabilidade for condicional, o limite desse valor está associado a essa propriedade. Caso contrário, o que rege a escolha é a qualidade do aspecto da resposta observada.

2a) Ciclo externo, para $q = 1$ até n passos.

2b) $t_q = (q - 1) \cdot \Delta t$

3a) Primeiro ciclo interno, para $i = 1$ a P

4a) Segundo ciclo interno, para $k = 1$ a $2(i-1)$

4b) Cálculo da ação $p(t_k)$, para $t_k = t_q + k\Delta t_i$

4c) Solução de:

$$M \left[\ddot{x}(t_k) \right] \ddot{x}(t_k) + F \left[\ddot{x}(t_k) \right] = P(t_k)$$

análoga a (4.51)

4d) Atualização, segundo as expressões de Newmark:

$$\dot{x}(t_k) = \dot{x}(t_{k-1}) + \Delta t_i \left[(1 - \gamma) \ddot{x}(t_{k-1}) + \gamma \ddot{x}(t_k) \right]$$

$$x(t_k) = x(t_{k-1}) + \Delta t_i \dot{x}(t_{k-1}) + \left(\frac{\Delta t_i^2}{2} \right) \left[(1 - 2\beta) \ddot{x}(t_{k-1}) + 2\beta \ddot{x}(t_k) \right]$$

4e) Fim do segundo ciclo interno

3d) Atribuição do deslocamento $x(t_{q+\Delta t})$ e velocidade $\dot{x}(t_{q+\Delta t})$ à posição $u_{2(i-1)}^2$ da correspondente tabela de extrapolação, de aspecto:

Nº de passos	Passo	$O(\Delta t^2)$	$O(\Delta t^4)$...	$O(\Delta t^{2(p-1)})$
1	Δt	u_1^2			
2	$\Delta t/2$	u_2^2	u_2^4		
.	.	.	.		
.	.	.	.		
$2(p-1)$	$\frac{\Delta t}{2^{(p-1)}}$	$u_{2^{(p-1)}}^2$	$u_{2^{(p-1)}}^4$...	$u_{2^{(p-1)}}^{2p}$

2c) Final do primeiro ciclo interno

1c) Uso da equação (4.62) para a conclusão das demais colunas da tabela de extrapolação. O elemento extremo inferior direito da tabela é tomado como deslocamento inicial para o próximo passo.

1d) Substituição do deslocamento e velocidade da etapa anterior na equação de equilíbrio para obtenção da aceleração correspondente.

1e) Final do ciclo externo.

Para sistemas lineares, a precisão em segunda ordem do Newmark é conseguida apenas para $\gamma = 1/2$. Se, além disso, for tomado $\beta = 1/4$, o método é incondicionalmente estável. Para sistemas não-lineares, desde que continuamente diferenciáveis duas vezes em \underline{t} e \underline{x} , a regra trapezoidal é estável, convergente e de precisão em segunda ordem, conforme HUGHES (1976).

Os ajustes de parâmetro visando diminuir os coeficientes de erro deixam de ter importância, uma vez que o objetivo principal da extrapolação é eliminar os erros até uma dada ordem e não mincrá-los.

O autor desse trabalho em consideração observa que atendidas certas condições apresentadas em exemplos, a técnica presente fornece respostas 1 000 000 vezes mais

precisas que as obtidas pela aplicação do método original de Newmark.

4.5. FORMULAÇÃO POR RESÍDUOS PONDERADOS

Em 1977, ZIENKIEWICZ aproveita a formulação através de resíduos ponderados utilizada para a discretização de domínios elásticos por elementos finitos para a solução do problema de dinâmica estrutural.

O domínio a ser discretizado é o intervalo de tempo considerado e os pontos nodais passam a ser os instantes distanciados do passo onde a equação de equilíbrio deve ser atendida.

A representação do deslocamento e suas derivadas no interior do passo é feita com o uso de "funções de forma" que se encarregam de interpolar os valores assumidos nos nós, isto é, nos instantes considerados na análise.

Para o deslocamento vale então:

$$x(t) = \sum_{k=i}^{i+n} N_k(t)x_k, \quad 0 \leq t \leq \Delta t \quad (4.63)$$

onde \underline{n} é o número de passos considerados, sendo igual a um para os algoritmos de passo simples e $N_k(t)$ é a função de forma.

As derivadas do deslocamento são representadas de forma análoga, com funções de forma que podem inclusive ser independentes entre si.

A relação a ser atendida é:

$$\int_0^{\Delta t} \omega(t) \left(m \ddot{x} + c \dot{x} + kx - f \right) dt = 0 \quad (4.64)$$

ou seja, escolhida uma função-peso ω conveniente, o resíduo médio da equação de equilíbrio do intervalo é anulado.

A função-peso deve também atender à condição de normalidade, ou seja, deve valer:

$$\int_0^{\Delta t} \omega(t) dt = 1 \quad (4.65)$$

e as representações assumidas para o deslocamento, velocidade e aceleração caracterizam os diversos métodos, que apresentarão propriedades diversas.

4.5.1. Método de ZIENKIEWICZ, WOOD & TAYLOR (1980)

Esses autores apresentaram um método de passo simples baseado nas relações:

$$\begin{aligned} m \dot{v} + cv + kx &= f \\ v - \dot{x} &= 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

isto é, transformando-se a equação de segunda ordem do equilíbrio em um par de equações de primeira ordem, com o emprego de $v(t) = \dot{x}(t)$ para a representação da velocidade. O deslocamento e a velocidade no interior do passo são escritos, conforme (4.63), como:

$$\begin{aligned} v &= N_i v_i + N_{i+1} v_{i+1} \\ x &= N_i x_i + N_{i+1} x_{i+1} \end{aligned} \quad (4.67)$$

onde as funções de interpolação, as mesmas nas duas equações, são dadas por:

$$\begin{aligned} N_i(t) &= \frac{(t_{i+1} - t)}{\Delta t} \\ N_{i+1}(t) &= \frac{(t - t_i)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4.68)$$

de primeiro grau portanto.

Substituindo as expressões acima em (4.67), adotando funções-peso arbitrárias $X(t)$ e $V(t)$ e integrando no passo vem, de acordo com (4.64):

$$\int_0^{\Delta t} x(t) \left(m \dot{v} + cv + kx - f \right) dt = 0$$

$$\int_0^{\Delta t} v(t) \left(v - \dot{x} \right) dt = 0 \quad (4.69)$$

e efetuando as integrais indicadas, chega-se às relações:

$$m(v_{i+1} - v_i) + \Delta t c [\theta v_{i+1} + (1 - \theta)v_i] + \Delta t k [\theta x_{i+1} + (1 - \theta)x_i] = \text{Im } p_{i+1}$$

$$\Delta t [\alpha v_{i+1} + (1 - \alpha)v_i] = x_{i+1} - x_i$$

.... (4.70)

sendo $\text{Im } p_{i+1}$ o impulso ponderado da força aplicada no intervalo. Sua expressão é:

$$\text{Im } p_{i+1} = \Delta t \frac{\int_0^{\Delta t} x(t) \cdot f \cdot dt}{\int_0^{\Delta t} x(t) \cdot dt}$$

com os parâmetros α e θ dados, respectivamente, por:

$$\alpha = \frac{\int_0^{\Delta t} v(t) \cdot t \cdot dt}{\Delta t \int_0^{\Delta t} v(t) \cdot dt}$$

$$\theta = \frac{\int_0^{\Delta t} x(t) \cdot t \cdot dt}{\Delta t \int_0^{\Delta t} x(t) \cdot dt} \quad (4.71)$$

que encerram a definição do algoritmo.

Os autores apresentam uma análise de estabilidade para os valores assumidos de α e θ . Novamente, conclui-se pela precisão em segunda ordem apenas para o método trapezoidal, resultante para $\alpha = \theta = 1/2$, sendo todos os outros de primeira ordem.

Problemas não-lineares são também considerados e comentários são feitos relativamente à escolha das funções-peso $X(t)$ e $V(t)$.

A interpolação considerada para o impulso Imp_{i+1} interfere na qualidade da resposta obtida e exemplos numéricos comparativos de critérios diversos utilizados são mostrados. Para funções de excitação suficientemente suaves, pode-se tomar:

$$\text{Imp}_{i+1} = \Delta t[(1 - \theta)f_i + \theta f_{i+1}]$$

como uma representação suficientemente boa.

Entretanto, para variações rápidas da força aplicada uma integração mais refinada é conveniente, principalmente se apenas os modos inferiores são de interesse. Assim, os efeitos do carregamento nas altas frequências são eliminados, o que equivale a introduzir amortecimento numérico e permitir o uso de passos maiores sem perder-se a fidelidade na reprodução do movimento.

O algoritmo consiste então em se efetuar os seguintes passos, sucintamente descritos:

1. Iniciação. Fornecimento de x_0 e \dot{x}_0 .

2. Efetuar:

$$A = \left[(1 - \alpha)v_i + \frac{x_i}{\theta\Delta t} \right] \frac{1}{\alpha}$$

$$B = \left[(\alpha - \theta)\Delta t v_i - x_i \right] \frac{1}{\alpha}$$

$$DK = \left[\left(\frac{1}{\theta\alpha\Delta t} \right) m + \left(\frac{1}{\alpha} \right) c + \Delta t k \right]$$

3. Calcular:

$$DK\hat{x}_{i+1} = \text{Imp}_{i+1} - mA - cB$$

4. Obter x_{i+1} e v_{i+1} de:

$$\hat{x}_{i+1} = \theta x_{i+1} + (1 - \theta)x_i$$

$$\alpha v_{i+1} = -(1 - \alpha)v_i + [\hat{x}_{i+1} - x_i] \frac{1}{\theta\Delta t}$$

5. Avançar um passo ($i+1 \rightarrow i$) e retornar à etapa 2.

Há uma versão explícita do algoritmo desde que θ ou α sejam nulos, mantendo-se o outro parâmetro independente. No primeiro caso, utiliza-se a segunda das (4.70) para avançar no tempo de forma explícita mesmo que a matriz de amortecimento não seja diagonal.

4.5.2. Um conjunto unificado de algoritmos de passo simples

Publicado em 1984 por ZIENKIEWICZ, HINES, WOOD & TAYLOR, esse conjunto de algoritmos é bastante geral e consegue-se qualquer ordem de precisão local.

Considere-se a relação:

$$x = x_i + \dot{x}_i t + \ddot{x}_i \frac{t^2}{2} + \dots + \alpha_i^{(p)} t^p \frac{1}{p!} \quad (4.72)$$

para representar a função de interpolação do deslocamento no interior do passo, isto é, válida para $0 \leq t \leq \Delta t$. O parâmetro $\alpha_i^{(p)}$ é função do instante i considerado e da ordem $(p-1)$ da última derivada considerada do deslocamento. Mais compactamente, (4.72) pode ser dada por:

$$x = \sum_{q=0}^{p-1} x_i^{(q)} \frac{t^q}{q!} + \alpha_i^{(p)} t^p \frac{1}{p!} \quad (4.73)$$

e com tal notação, onde se utiliza $\alpha_i^{(p)}$ como coeficiente do erro local de ordem p nos deslocamentos antes de ser afetado pelo denominador $p!$ pode-se escrever o valor da aproximação assumida para o deslocamento ao final do passo como:

$$x_{i+1} = \sum_{q=0}^{p-1} x_i^{(q)} \frac{\Delta t^q}{q!} + \alpha_i^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!} \quad (4.74)$$

Para a determinação de $\alpha_i^{(p)}$, impõe-se o respeito a (4.64), onde (4.73) e suas duas primeiras derivadas

representam o deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente.

Se definidos:

$$\theta_q \Delta t^q = \frac{\int_0^{\Delta t} \omega(t) \cdot t^q \cdot dt}{\int_0^{\Delta t} \omega(t) \cdot dt} \quad \begin{array}{l} \theta_0 = 1 \\ 1 \leq q \leq p \\ 0 \leq \theta_q \leq 1 \end{array} \quad (4.75)$$

pode-se escrever, aplicando-se (4.72) e suas duas primeiras derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^{\Delta t} \omega \cdot x \cdot dt}{\int_0^{\Delta t} \omega \cdot dt} &= \sum_{q=0}^{p-1} x_i^{(q)} \frac{\Delta t^q}{q!} \theta_q + \alpha_i^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!} \theta_p \\ \frac{\int_0^{\Delta t} \omega \cdot \dot{x} \cdot dt}{\int_0^{\Delta t} \omega \cdot dt} &= \sum_{q=1}^{p-1} x_i^{(q)} \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \theta_{q-1} + \alpha_i^{(p)} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \theta_{p-1} \\ \frac{\int_0^{\Delta t} \omega \cdot \ddot{x} \cdot dt}{\int_0^{\Delta t} \omega \cdot dt} &= \sum_{q=2}^{p-1} x_i^{(q)} \frac{\Delta t^{q-2}}{(q-2)!} \theta_{q-2} + \alpha_i^{(p)} \frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \theta_{p-2} \end{aligned} \quad (4.76)$$

e ainda, para a força aplicada:

$$\frac{\int_0^{\Delta t} \omega \cdot f \cdot dt}{\int_0^{\Delta t} \omega \cdot dt} = \bar{f} \quad (4.77)$$

A divisão de (4.64) por $\int_0^{\Delta t} \omega \cdot dt$ e a observação das expressões acima permite escrever:

$$\begin{aligned} m \left[\sum_{q=2}^{p-1} x_i^{(q)} \frac{\Delta t^{q-2}}{(q-2)!} \theta_{q-2} + \alpha_i^{(p)} \frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \theta_{p-2} \right] + \\ c \left[\sum_{q=1}^{p-1} x_i^{(q)} \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \theta_{q-1} + \alpha_i^{(p)} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \theta_{p-1} \right] + \\ k \left[\sum_{q=0}^{p-1} x_i^{(q)} \frac{\Delta t^q}{q!} \theta_q + \alpha_i^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!} \theta_p \right] - \bar{f} = 0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

e portanto:

$$\alpha_i^{(p)} = \left[\frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \theta_{p-2} \cdot m + \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \theta_{p-1} \cdot c + \frac{\Delta t^p}{p!} \theta_p \cdot k \right] \left(\bar{F} - m \ddot{\tilde{x}}_{i+1} - c \dot{\tilde{x}}_{i+1} - k \tilde{x}_{i+1} \right)$$

.... (4.79)

onde \tilde{x}_{i+1} , $\dot{\tilde{x}}_{i+1}$, $\ddot{\tilde{x}}_{i+1}$ são "extrapolações médias" para o deslocamento e derivadas para o final do passo, definidas pelas expressões:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i+1} &= \sum_{q=0}^{p-1} x_i^{(q)} \frac{\Delta t^q}{q!} \theta_q \\ \dot{\tilde{x}}_{i+1} &= \sum_{q=1}^{p-1} x_i^{(q)} \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \theta_{q-1} \\ \ddot{\tilde{x}}_{i+1} &= \sum_{q=2}^{p-1} x_i^{(q)} \frac{\Delta t^{q-2}}{(q-2)!} \theta_{q-2} \end{aligned} \quad (4.80)$$

sendo as relações descritas acima suficientes para explicitar completamente o algoritmo de ordem \underline{p} , conhecidos os valores iniciais de deslocamento e derivadas até ordem $(p-1)$.

Conseguem-se as características desejadas mediante escolha adequada das constantes θ_q ($1 \leq q \leq p$). O interesse inicial é assegurar estabilidade, uma vez que o algoritmo é consistente "a priori".

Considerada a parcela correspondente à massa ($m \neq 0$), a ordem \underline{p} mínima é dois.

Os próprios autores analisam várias possibilidades de escolha de parâmetros θ_q e ordem \underline{p} , comparando os resultados alcançados aos decorrentes da aplicação de outros processos conhecidos.

Não é apresentada uma análise espectral do método; ao contrário, são mostrados gráficos de deslocamentos e de erros cometidos no seu cálculo, em função do tempo para um sistema SDOF e uma onda de pressão através de um fluido, comparando-se os resultados encontrados com a solução exata e a fornecida pelo método de Newmark.

Em particular, se $p = 2$ recai-se no método de Newmark fazendo-se $\theta_1 = \gamma_N$ e $\theta_2 = 2\beta_N$, e para estabilidade incondicional deve-se tomar a seguinte faixa para os valores: $\theta_1 \geq 0,5$ e $\theta_2 \geq \theta_1$.

O algoritmo consiste resumidamente das etapas descritas abaixo:

1. Cálculo de \tilde{x}_{i+1} , $\dot{\tilde{x}}_{i+1}$ e $\ddot{\tilde{x}}_{i+1}$ a partir de $x_i, \dot{x}_i, \dots, x_i^{(p-1)}$ através de (4.80)
2. Cálculo de $\alpha_i^{(p)}$, através de (4.79)
3. Cálculo de $x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, \dots, x_{i+1}^{(p-1)}$, com a aplicação de (4.74)
4. Repetir as etapas 1-3 para o próximo passo

Em 1990, SALAMON & XIANG propõem para a função-peso de (4.75) a forma $\omega(t) = t^r$ e considerando a mesma relação reescrita como:

$$\theta_q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} \omega(\tau) \cdot \tau^q \cdot d\tau}{(t + \Delta t)^q \int_t^{t+\Delta t} \omega(\tau) \cdot d\tau}, q = 0,1,2, \dots, p \quad (4.75a)$$

obtem, para a solução da integral acima:

$$\theta_q = \frac{(r + 1)}{(q + r + 1)}, q + r \neq -1$$

e testam várias escolhas de \underline{r} em um problema de pêndulo não-linear, comparando os resultados obtidos com os métodos de Wilson, Houbolt, Hilber, Hughes & Taylor e Bossak & Newmark, através de tabelas.

Valores não-positivos de \underline{r} , notadamente entre -7 e -5, apresentam resultados competitivos, inclusive melhores que os dos métodos utilizados como bases de comparação para analisar as respostas.

4.5.3. Método de Hoff & Pahl (1988)

Esse algoritmo generalizado, de passo simples, de segunda ordem, implícito, é incondicionalmente estável, tem dissipação numérica controlável e apresenta seis parâmetros livres, cujo ajuste lhe confere as propriedades desejadas e o fazem recair em métodos já conhecidos.

As seguintes expressões são utilizadas para exprimir o deslocamento e suas derivadas no interior do passo:

$$\tau = t - t_i, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad 0 \leq \tau \leq \Delta t \quad (4.81)$$

$$\Delta \overset{\bullet\bullet}{x} = \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1} - \overset{\bullet\bullet}{x}_i$$

$$\overset{\bullet\bullet}{x}(\tau) = \overset{\bullet\bullet}{x}_i + \chi \eta \frac{\Delta \overset{\bullet\bullet}{x}}{\Delta t} \tau$$

$$\overset{\bullet}{x}(\tau) = \overset{\bullet}{x}_i + \chi \overset{\bullet\bullet}{x}_i \tau + \delta \gamma \frac{\Delta \overset{\bullet\bullet}{x}}{\Delta t} \tau^2$$

$$\overset{\bullet\bullet}{x}(\tau) = \overset{\bullet\bullet}{x}_i + \chi \overset{\bullet}{x}_i \tau + \frac{1}{2} \delta \overset{\bullet\bullet}{x}_i \tau^2 + \varepsilon \beta \frac{\Delta \overset{\bullet\bullet}{x}}{\Delta t} \tau^3 \quad (4.82)$$

A interpolação da aceleração não pode ser de ordem superior à linear, para garantia de estabilidade incondicional, como indicam KATONA & ZIENKIEWICZ (1985). Os parâmetros livres são χ , η , δ , γ , ε , β e para a carga $f(\tau)$ a interpolação assumida é da forma:

$$f(\tau) = f_i + \frac{1}{\Delta t} (f_{i+1} - f_i) \tau \quad (4.83)$$

sendo portanto linear.

Substituem-se as expressões (4.82) e (4.83) na equação de equilíbrio, visando a anulação da integral do resíduo ponderado por uma função $\omega(\tau)$, como indicado em (4.64). Consideradas as expressões auxiliares (4.65) e mais:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \tau^k \omega(\tau) d\tau = \psi_k \Delta t^k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.84)$$

pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \ddot{x}(\tau) \cdot \omega(\tau) \cdot d\tau &= \ddot{x}_i + \psi_1 \chi \eta \Delta \ddot{x} \\ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \dot{x}(\tau) \cdot \omega(\tau) \cdot d\tau &= \dot{x}_i + \psi_1 \chi \eta \ddot{x}_i + \psi_2 \delta \gamma \Delta \ddot{x} \\ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} x(\tau) \cdot \omega(\tau) \cdot d\tau &= x_i + \psi_1 \chi \eta \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} \psi_2 \delta \ddot{x}_i \Delta t^2 + \psi_3 \varepsilon \beta \Delta \ddot{x} \Delta t^2 \\ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(\tau) \cdot \omega(\tau) \cdot d\tau &= f_i + \psi_1 (f_{i+1} - f_i) \end{aligned}$$

..... (4.85)

e renomeando-se:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \psi_1 & \theta_1 &= \psi_1 \chi \\ \theta_2 &= \psi_2 \delta & \theta_3 &= \psi_3 \varepsilon \end{aligned} \quad (4.86)$$

estas últimas, levadas nas (4.85) e subsequentemente em (4.64), permitem chegar-se à relação que fornece a incógnita primária do processo, isto é, a relação:

$$\begin{aligned} (\theta_1 \eta m + \theta_2 \gamma \Delta t c + \theta_3 \beta \Delta t^2 k) \Delta \ddot{x} &= f_i + \theta_0 (f_{i+1} - f_i) - m \ddot{x}_i + \\ -c \left(\dot{x}_i + \theta_1 \Delta t \ddot{x}_i \right) &- k \left(x_i + \theta_1 \Delta t \dot{x}_i + \frac{1}{2} \theta_2 \Delta t^2 \ddot{x}_i \right) \end{aligned} \quad (4.87)$$

permite isolar-se $\Delta \ddot{x}$.

A aplicação das (4.82) para $\tau = \Delta t$ possibilita a obtenção de x_{i+1} e suas derivadas.

O algoritmo apresenta os seis parâmetros livres θ_1 , θ_2 , θ_3 , β , γ , η e mais θ_0 para a função representativa do carregamento.

Os autores ressaltam o fato da função carregamento ser ponderada independentemente das outras grandezas e apresentam uma análise comparativa com outros algoritmos conhecidos, mostrando que o ajuste dos parâmetros livres faz recair-se em esquemas clássicos, como os de Newmark e Wilson- θ .

Uma análise espectral é realizada, com vistas a definir os limites dos parâmetros associados às propriedades desejadas, como estabilidade, overshoot e dissipação numérica controlados.

Atendidas as propriedades essenciais, as relações necessárias entre os parâmetros conduzem a um único coeficiente independente, e o algoritmo torna-se o descrito pelas etapas seguintes.

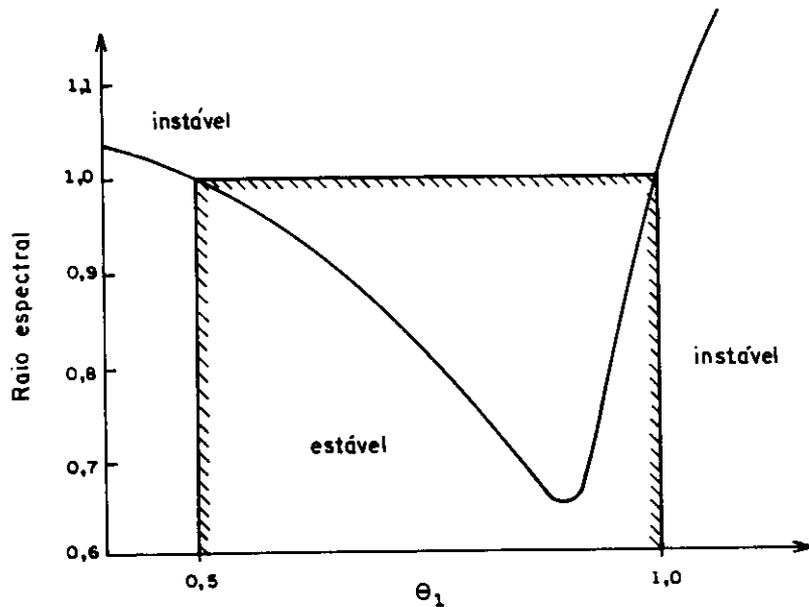


Figura 4.10- Raio espectral $\times \theta_1$ no limite para $\Delta t/T \rightarrow \infty$
(método de Hoff & Pahl)

ALGORITMO

$$\dot{x}_0, \ddot{x}_0, \text{ e } \ddot{x}_0 = \frac{1}{m} \left(f_0 - c \dot{x}_0 - kx_0 \right)$$

1. Iniciação. Fornecer

2. Obter $\Delta \ddot{x}$, de:

$$\left[m + \left(\frac{3}{2} - \theta_1 \right) \Delta t c + \frac{1}{4\theta_1^2} \Delta t^2 k \right] \Delta \ddot{x} =$$

$$= p_i + \theta_0 (p_{i+1} - p_i) - m \ddot{x}_i - c \left(\dot{x}_i + \theta_1 \Delta t \ddot{x}_i \right) - k \left(x_i + \theta_1 \Delta t \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_i \right)$$

3. Atualizar o movimento, com:

$$\ddot{x}_{i+1} = \ddot{x}_i + \Delta \ddot{x}$$

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta t \ddot{x}_i + \left(\frac{3}{2} - \theta_1\right) \Delta t \Delta \ddot{x}$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_i + \frac{1}{4\theta_1^2} \Delta t^2 \Delta \ddot{x}$$

4. Repetir 2-3 para o próximo passo.

O algoritmo tem precisão em segunda ordem para amortecimento físico arbitrário, com dissipação numérica. Apresenta raiz espúria nula para as frequências inferiores e é incondicionalmente estável.

As características descritas dependem do respeito a $0,95 \leq \theta_1 \leq 1,00$ e o algoritmo acima corresponde à particularização do geral, tomando-se, a partir de conclusões fornecidas pela análise espectral, os valores abaixo:

$$\gamma = \theta_1(\eta - 1) + \frac{1}{2}; \quad \theta_1 = \frac{1}{\eta}; \quad \theta_3 = \theta_2 = 1; \quad \beta = \frac{1}{4\theta_1^2}$$

Na verdade $\theta_1 = 1,00$ corresponde à regra trapezoidal de Newmark. As figuras de 4.10 a 4.15 mostram a evolução de suas principais características para alguns valores de interesse dos parâmetros acima.

4.5.4. Uma família de mínimos quadrados generalizada

O objetivo de KUJAWSKI & GALLAGHER, 1989, foi a obtenção de um procedimento de ordens superiores através do emprego de elementos finitos quadráticos no tempo.

As funções de forma são dadas por:

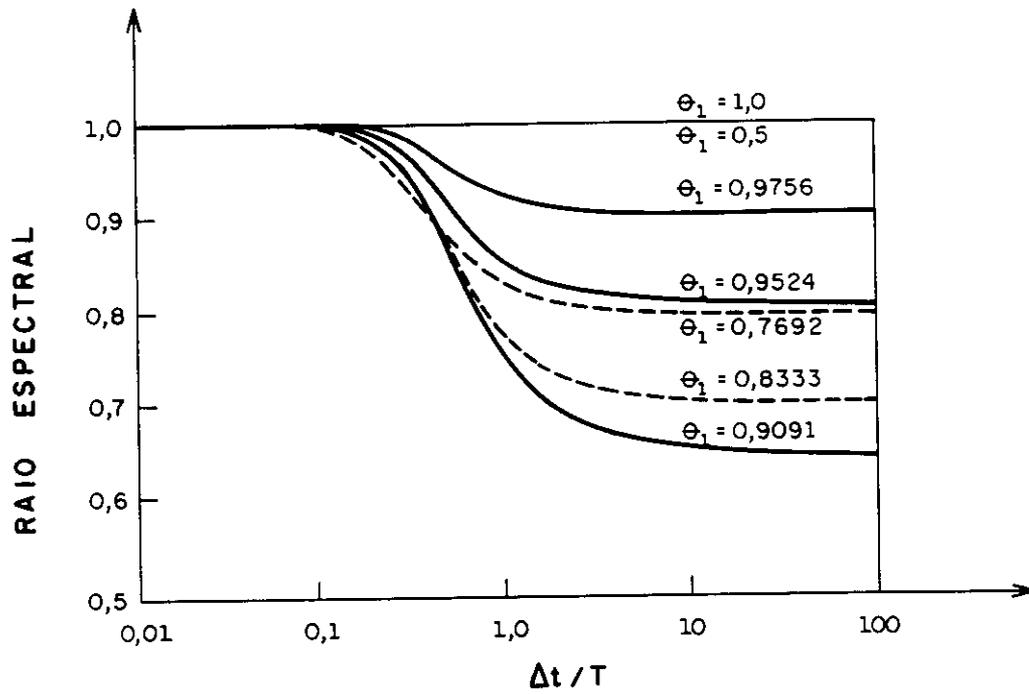


Figura 4.11 - Raio espectral x passo, no método de Hoff-Pahl

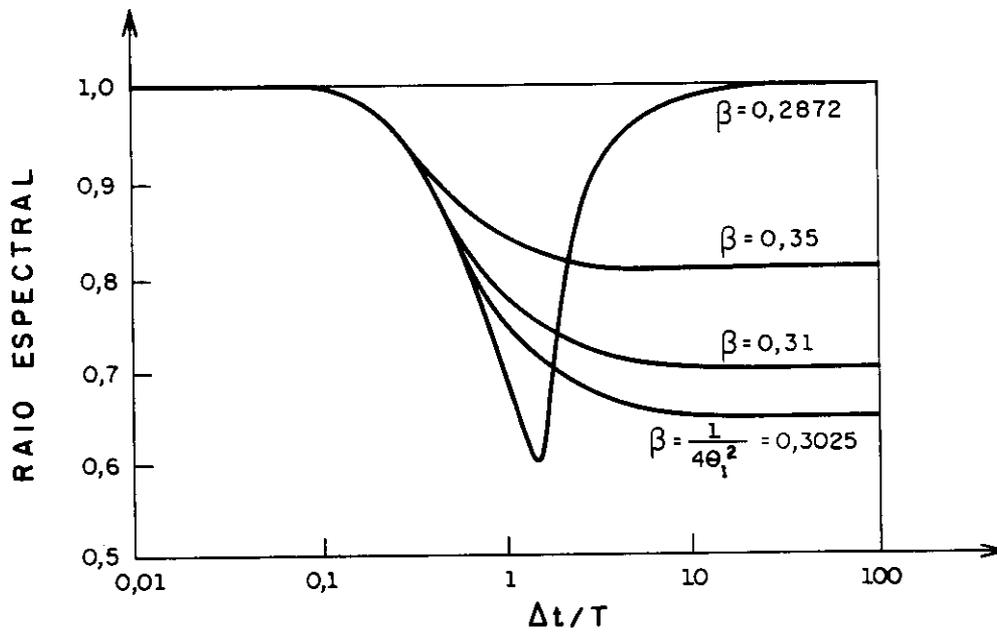


Figura 4.12 - Raio espectral x passo, no método de Hoff-Pahl para diversos β , com $\theta_1 = 0,9091$

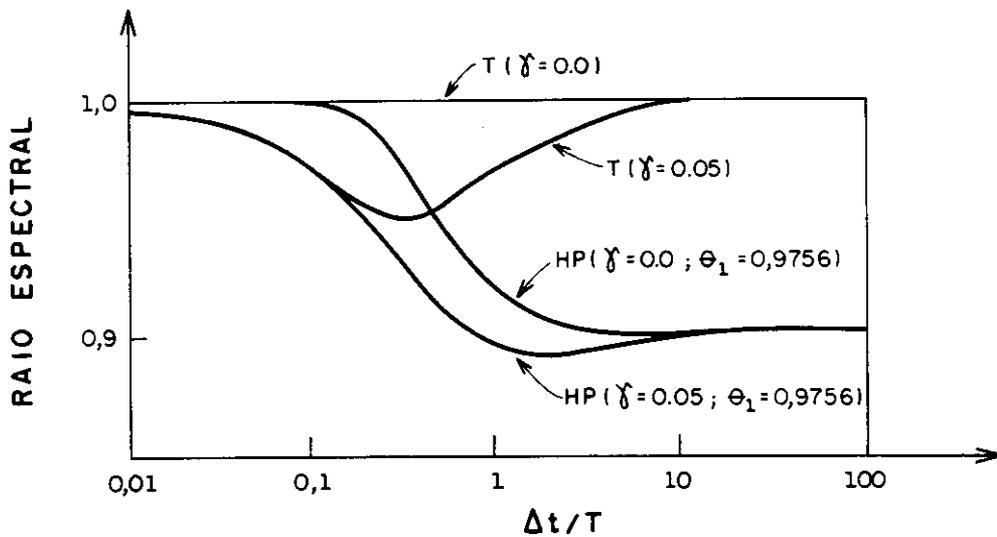


Figura 4.13 - Raio espectral x passo, com e sem amortecimento físico, da regra trapezoidal de Newmark (T) e do método de Hoff-Pahl (HP)

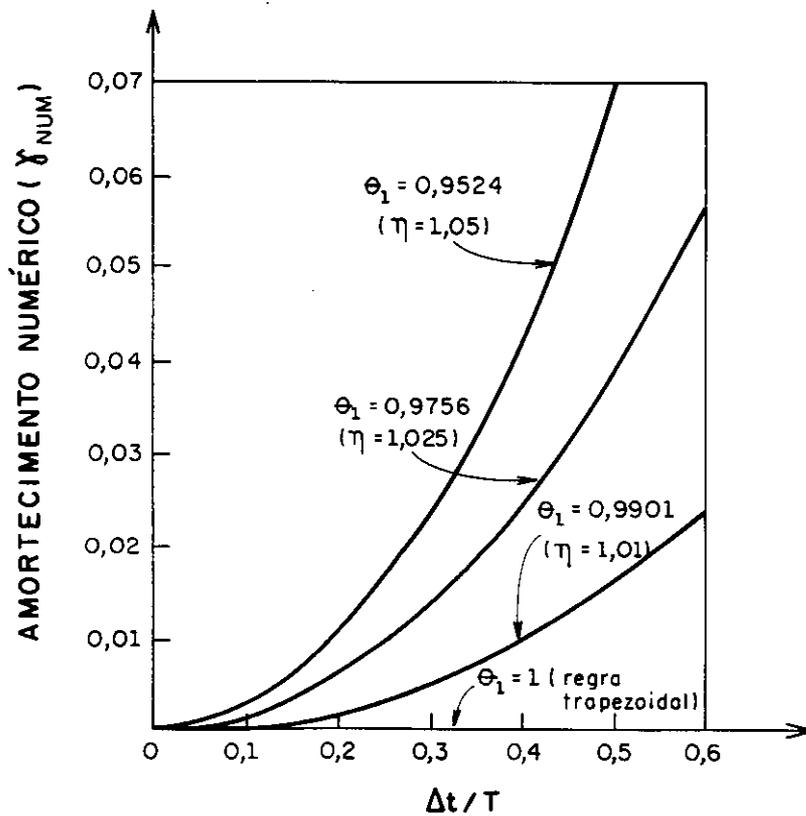


Figura 4.14 - Amortecimento numérico do método de Hoff-Pahl sem amortecimento físico

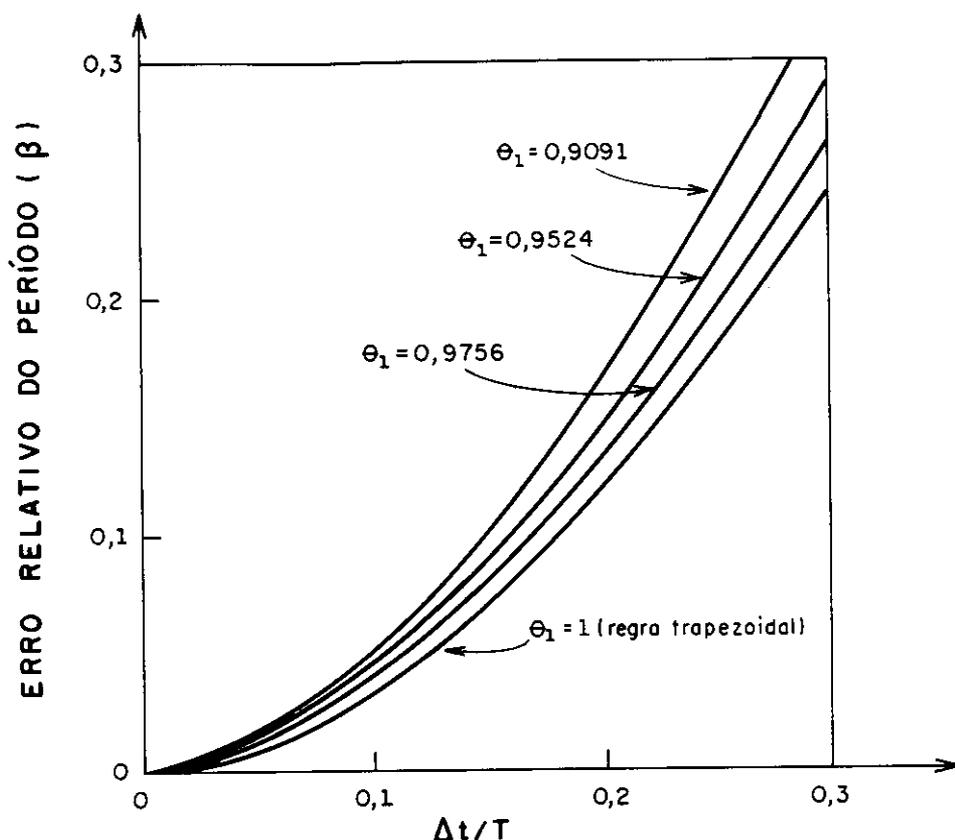


Figura 4.15 - Erro relativo do período no método de Hoff-Pahl sem amortecimento físico

$$N(t) = \begin{Bmatrix} N_{i-1} \\ N_i \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \tau(1 - \tau) \\ 1 - \tau^2 \\ \frac{1}{2} \tau(1 + \tau) \end{Bmatrix}; \quad \tau = \frac{t}{\Delta t} \quad (4.88)$$

e com isso o deslocamento e a carga, no caso uni-dimensional são dados respectivamente por:

$$x = [N_{i-1} \quad N_i \quad N_{i+1}] \begin{Bmatrix} x_{i-1} \\ x_i \\ x_{i+1} \end{Bmatrix} = N^T x_e$$

$$f = [N_{i-1} \quad N_i \quad N_{i+1}] \begin{Bmatrix} f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \end{Bmatrix} = N^T f_e \quad (4.89)$$

A velocidade e a aceleração no elemento resultam então da aplicação das expressões:



$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{x}}_e; \quad \dot{\mathbf{N}} = \frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}(1-2\tau) \\ -2\tau \\ \frac{1}{2}(1+2\tau) \end{Bmatrix} \quad (4.90)$$

e para a segunda derivada do deslocamento:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^T \ddot{\mathbf{x}}_e; \quad \ddot{\mathbf{N}} = \frac{1}{\Delta t^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.91)$$

podendo-se observar que (4.90) fornece a expressão de diferenças centrais para a velocidade em t_i , isto é, $\tau = 0$, o que resulta em:

$$\dot{x}_i = \frac{1}{\Delta t} (x_{i+1} - x_{i-1})$$

enquanto (4.91) indica que a aceleração é tomada constante no interior do intervalo e também dada pela expressão em diferenças centrais:

$$\ddot{x}_i = \ddot{x} = \frac{1}{\Delta t^2} (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})$$

Desprezado o amortecimento reescreve-se a equação de equilíbrio considerando-se seu resíduo, na forma:

$$\mathbf{R}_g = \mathbf{N}^T \ddot{\mathbf{x}}_e + \omega^2 \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{x}_e - \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{f}_e \quad (4.92)$$

com a matriz diagonal $[\mathbf{D}]$ contendo fatores de ponderação α_0 e α_1 nas posições indicadas:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

permitindo assim obter-se fórmulas mais gerais de integração.

A minimização do resíduo em (4.92) é efetuada através do cálculo de:

$$r^2 = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} W \cdot R_g^T \cdot R_g \cdot dt = \text{mínimo} \quad (4.94)$$

onde W é uma função-peso, impondo-se a condição:

$$\frac{\partial r^2}{\partial x_{i+1}} = 0 \quad (4.95)$$

para que se atenda a 4.94.

Trata-se de um método de passo duplo, por exigir conhecimento de x_{i-1} e x_i para o avanço na solução do movimento, em t_{i+1} . A aplicação das relações anteriores fornece para o caso unidimensional, a relação:

$$\begin{aligned} & (\beta + \Delta t^2 \phi_1 2\omega^2 + \phi_2 \Delta t^4 \omega^4) x_{i+1} - [2\beta + \Delta t^2 (2\phi_1 \omega^2 - \alpha_1 \delta \omega^2) - \alpha_1 \delta_1 \Delta t^4 \omega^4] x_i + \\ & + [\beta + \Delta t^2 (\alpha_0 \gamma \omega^2 + \phi_1 \omega^2) + \alpha_0 \gamma_1 \Delta t^4 \omega^4] x_{i-1} = F_i \end{aligned}$$

..... (4.96)

onde:

$$\begin{Bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{Bmatrix} = \int_{-1}^{+1} W \begin{Bmatrix} 1 \\ N_{i-1} \\ N_i \end{Bmatrix} dt; \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \delta_1 \end{Bmatrix} = \int_{-1}^{+1} W \cdot N^2 \begin{Bmatrix} N_{i-1} \\ N_i \end{Bmatrix} dt$$

$$F_i = \Delta t^2 [(\phi_1 + \phi_2 \Delta t^2 \omega^2) F_{i+1} + \alpha_1 (\delta + \delta_1 \Delta t^2 \omega^2) F_i + \alpha_0 (\gamma + \gamma_1 \Delta t^2 \omega^2) F_{i+1}]$$

..... (4.97)

e onde se tomou:

$$\phi_1 = \beta - \gamma - \delta; \quad \phi_2 = \phi_1 - \gamma_1 - \delta_1 \quad (4.98)$$

relações que serão utilizadas de ora em diante, para descrever o método.

A normalização dos fatores de ponderação é conseguida fazendo-se $\beta = 1$. Com isso, (4.95) pode ser reescrita na forma:

$$P \cdot x_{i+1} - 2 \cdot P_1 \cdot x_i + P_2 \cdot x_{i-1} = F_i \quad (4.99)$$

onde vale:

$$\begin{Bmatrix} P \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_1 & k_1 & k_2 \\ 1 & k_1 & k_3 & k_4 \\ 1 & k_1 & k_5 & k_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \omega^2 \Delta t^2 \\ \omega^2 \Delta t^2 \\ \omega^4 \Delta t^4 \end{Bmatrix} \quad (4.100)$$

e ainda:

$$\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\phi_1 \\ \phi_2 \\ -\frac{1}{2} \alpha_1 \delta \\ -\frac{1}{2} \alpha_1 \delta_1 \\ \alpha_0 \gamma \\ \alpha_0 \gamma_1 \end{Bmatrix} \quad (4.101)$$

com o vetor de cargas no elemento sendo definido por:

$$F_i = \Delta t^2 \left[(k_1 + k_2 \Delta t^2 \omega^2) f_{i+1} - 2(k_3 + k_4 \omega^2 \Delta t^2) f_i + (k_5 + k_6 \Delta t^2 \omega^2) f_{i-1} \right]$$

.....(4.102)

A equação (4.99) representa uma família de esquemas quadráticos de integração para sistemas não-amortecidos de passo duplo e bastante geral. Os seis parâmetros k_i , $i=1, \dots, 6$ podem ser obtidos visando precisão, estabilidade e dissipação numérica. Conseguem-se algoritmos incondicionalmente estáveis de quarta ordem nos esforços e até oitava ordem, se for aceita estabilidade condicional.

Se tomados $k_{2i} = 0$, $i = 1, 2, 3$ recai-se na família de Newmark.

Se tomados $(k_5, k_6) = (k_1, k_2)$ o algoritmo não apresenta dissipação (amortecimento numérico).

Para o conjunto de valores:

$$(k_1, k_2, k_3) = \left(\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2} + k_4 - \frac{1}{24}, -\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} \right)$$

o algoritmo apresenta consistência matemática e precisão em quarta ordem para quaisquer valores de β e k_4 . Para estabilidade incondicional, deve-se ter:

$$\beta \geq \frac{1}{4}; \quad k_4 \geq \frac{1}{48} - \frac{\beta}{4} .$$

O menor erro de truncamento possível para estabilidade incondicional em algoritmo dessa família é dado pela expressão em sexta ordem nos deslocamentos:

$$E = 0,00118\omega^6\Delta t^6 + O(\omega^8\Delta t^8)$$

e ocorre para $\beta = 1/4$, $k_4 = -1/24$. Para os valores dos parâmetros $\beta = 11/252$, $k_4 = 0,0207011$, obtém-se um algoritmo de oitava ordem, condicionalmente estável para $\omega\Delta t \leq 5,0$.

Segundo KUJAWSKI & GALLAGHER (1989), devido à sua grande precisão e alto limite de estabilidade ($\Delta t_{\text{crít}} = 0,796T_{\text{MÍN}}$), esse algoritmo parece uma boa alternativa para a solução de problemas onde o passo precisa ser selecionado em função da precisão requerida, o que ocorre quando os modos superiores são importantes na resposta da estrutura. Problemas de impacto, vibrações de altas frequências, terremotos e ações de choques em geral são dessa natureza.

A aplicação do processo para o caso multi-dimensional consiste basicamente nos cálculos indicados abaixo:

1. Fornecer vetores deslocamento e velocidade iniciais
 x_0 e \dot{x}_0

2. Iniciação:

$$r_0 = Mx_0; \quad z_0 = Kx_0$$

$$\tilde{P} = M^T M + k_1 \Delta t^2 (K^T M + M^T K) + k_2 \Delta t^4 K^T K$$

calcular \tilde{P}^{-1}

$$\tilde{F}_0 = \Delta t^2 \left[(k_1 M^T + k_2 \Delta t^2 K^T) \dot{f}_1 - 2(k_3 M^T + k_4 \Delta t^2 K^T) \dot{f}_0 \right]$$

$$x_1 = \tilde{P}^{-1} \left[(M^T + k_1 \Delta t^2 K^T) r_0 + \Delta t^2 (k_3 M^T + k_4 \Delta t^2 K^T) z_0 + \tilde{F}_0 \right] - 2\Delta t \dot{x}_0$$

3. Avanço de um passo:

$$r_i = Mx_i; \quad z_i = Kx_i$$

$$\tilde{F}_i = \Delta t^2 \left[(k_1 M^T + k_2 \Delta t^2 K^T) (\dot{f}_{i+1} + \dot{f}_{i-1}) - 2(k_3 M^T + k_4 \Delta t^2 K^T) \dot{f}_i \right]$$

$$x_{i+1} = \tilde{P}^{-1} \left[(M^T + k_1 \Delta t^2 K^T) r_i + \Delta t^2 (k_3 M^T + k_4 \Delta t^2 K^T) z_i + \tilde{F}_i \right] - x_{i-1}$$

4. Repetir a etapa 3 para o próximo passo.

Sendo um método de ordens superiores, demanda um esforço computacional maior que os métodos lineares, o que pode ser visualizado através da largura de banda da matriz de rigidez efetiva $[\tilde{P}]$, em torno do dobro daquela de $[M]$ e $[K]$.

Quando a semi-discretização é feita com o uso do método dos elementos de contorno, entretanto, onde as matrizes $[M]$ e $[K]$ surgem esparsas, o fato acima tem pouca importância.

Os algoritmos de ordens superiores tendem a ser competitivos em problemas não-lineares de muitos graus de liberdade, quando a demanda de memória computacional é elevada. Nesses casos seu uso associado a processos indiretos de solução de sistemas, como o Gauss-Seidel, relaxação dinâmica ou gradiente conjugado pode tornar-se vantajoso se comparado aos métodos lineares, explícitos ou implícitos.

A solução do problema de vibrações livres não-amortecidas para um SDOF é apresentada para alguns valores convenientes dos parâmetros de ajuste, através de tabelas comparativas com outros processos tradicionais, a fim de mostrar a potencialidade do método.

4.6. ELEMENTOS FINITOS NO DOMÍNIO ESPAÇO-TEMPO

A técnica habitual de semi-discretização do problema de dinâmica estrutural implica em utilizar elementos finitos no espaço, gerando um sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem igual ao número de graus de liberdade no tempo.

Essas equações resolvem-se com o emprego de métodos tradicionais de diferenças finitas aplicadas ao intervalo de tempo de interesse, por sua vez também discretizado.

Em 1988, no entanto, HUGHES & HULBERT propuseram uma formulação para a elastodinâmica que realiza a discretização no domínio espaço-tempo simultaneamente, permitindo a criação de uma "malha" mais flexível que considera inclusive passos diferentes para elementos diferentes no espaço.

Essa liberdade de criação da "hipergeometria" do elemento pode ser associada, segundo indicação dos autores, à criação de um algoritmo que inclua um eficiente controle de erros.

A ênfase é colocada na análise matemática da formulação básica do problema de dinâmica, incluindo a apresentação de teoremas que garantam consistência e estabilidade.

O método descontínuo de Galerkin é utilizado com vistas a obter-se processos estáveis, de ordens superiores de precisão.

Embora promissor, à época a implementação do algoritmo não foi efetivada, e há consideráveis diferenças com relação aos métodos tradicionais. Os autores opinavam então que dever-se-ia envidar esforços também no sentido de simplificar os processos resultantes, para conferir-lhes

competitividade em dispêndio de tempo e memória computacional no cotejo com os esquemas usuais.

O assunto é retomado por HULBERT (1992) que através dessa formulação considera diversas interpolações possíveis para o deslocamento e velocidade no interior do elemento-tempo, com polinômios independentes.

O autor denomina de métodos de campo simples aqueles em que a interpolação adotada para os deslocamentos já define a da velocidade, através de sua derivação. Em contrapartida, na formulação de campo duplo (two-field) são utilizados polinômios de interpolação independentes para as duas grandezas. A denominação P_i nas figuras adiante indica campos simples, com ordem i no polinômio de interpolação do deslocamento, enquanto P_i-P_j , analogamente, está associado à ordem i para os deslocamentos e j para as velocidades, num método de campo duplo.

Métodos de campo simples, isto é, apenas em deslocamento, são também utilizados na análise e embora haja medidas mais adequadas para a precisão resultante, com o objetivo de comparar com os métodos tradicionais efetua-se, da forma usual, uma análise espectral.

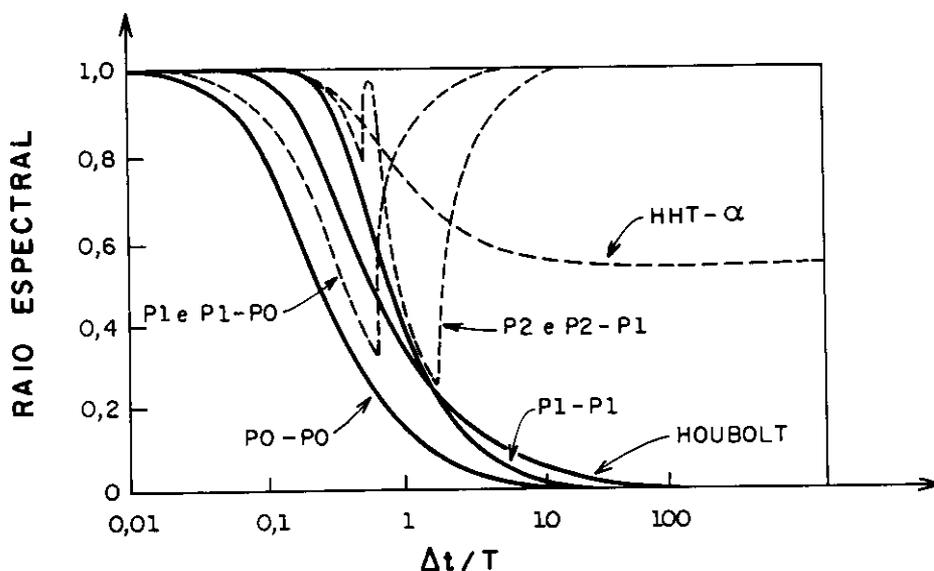


Figura 4.16 - Raio espectral do método descontínuo de Galerkin (TDG)

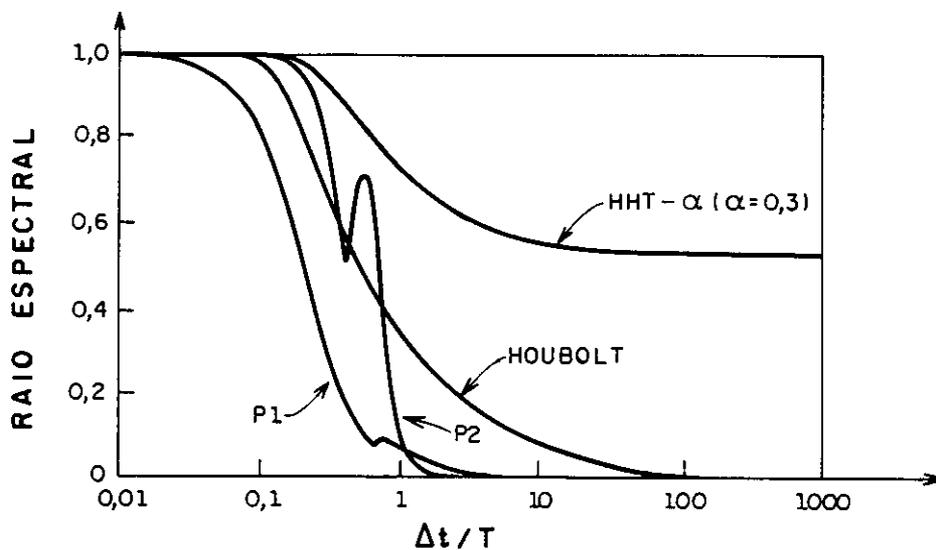


Figura 4.17 - Raio espectral para o método de Galerkin/mínimos quadrados, formulação de campo simples

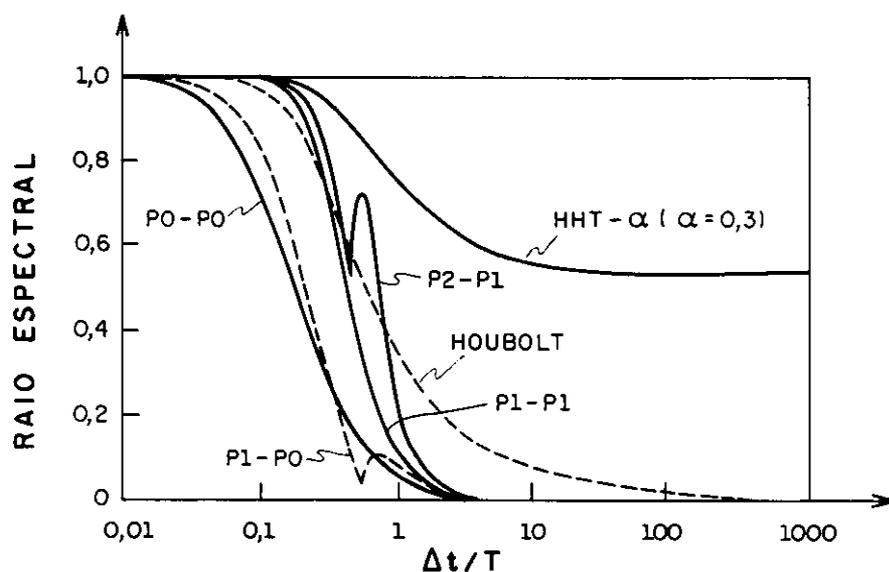


Figura 4.18 - Raio espectral para o método de Galerkin/mínimos quadrados; formulação de campo duplo

Um dos processos derivados, que inclui termos na forma de mínimos quadrados visando a estabilidade, atinge precisão em ordens superiores e aniquilamento assintótico dos

modos superiores, sem a introdução de excessivo amortecimento numérico nos modos inferiores, o que é mostrado às figuras 4.16, 4.17 e 4.18.

A desvantagem essencial dos algoritmos assim gerados é produzir, em geral, sistemas de equações de ordem maior do que as associadas aos métodos tradicionais lineares. Assim, para que sejam competitivos, devem ser desenvolvidos algoritmos com controle de erros para utilização de passos os maiores possíveis que não comprometam a qualidade da resposta.

HULBERT (1994) retoma o assunto e explicita um conjunto de algoritmos de passo simples baseados no método descontínuo de Galerkin (TDG), isto é, permitindo "saltos" nos nós para os valores considerados de deslocamentos e velocidades. Exemplos de funções utilizadas nesses algoritmos são mostrados à figura 4.19.

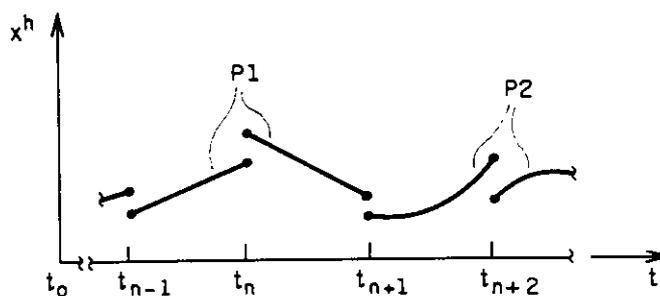


Figura 4.19 - Funções descontínuas no tempo, de primeira ordem (P1) e segunda ordem (P2)

Ao utilizar polinômios interpoladores de mesma ordem para a representação de deslocamentos e velocidades, o autor obtém aniquilamento assintótico.

Da mesma forma como em outros métodos, o equilíbrio pode ser representado por:

$$\begin{aligned} \bullet \\ m \dot{v} + cv + kx &= f \\ \bullet \\ x &= v \end{aligned} \tag{4.103}$$

submetidas às condições iniciais:

$$x(0) = x_0 ; \quad v(0) = v_0 \quad (4.104)$$

ou, alternativamente, por:

$$\begin{aligned} A_0 \dot{X} + A_1 X &= F \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \quad (4.105)$$

sendo, nas equações acima:

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}; & A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -K \\ K & C \end{bmatrix} \\ X &= \begin{Bmatrix} x \\ v \end{Bmatrix}; & X_0 &= \begin{Bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{Bmatrix}; & F &= \begin{Bmatrix} 0 \\ f \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.106)$$

O domínio no tempo é particionado em intervalos abertos, correspondentes ao interior dos passos, de modo a ter-se $I_n = (t_{n-1}, t_n)$, $n = 1, 2, \dots, N$.

A aproximação para X é dada por:

$$X^h = \begin{Bmatrix} x^h \\ v^h \end{Bmatrix} \quad (4.107)$$

e o espaço dos polinômios de ordem k é denotado por ρ^k . As funções de interpolação são então dadas por:

$$\mathcal{J}^h = \left\{ X^h \in \bigcup_{n=1}^N (\rho^k(I_n))^{2n_{eq}} \right\}$$

de modo a permitir descontinuidades nos campos de deslocamento e velocidade entre os intervalos. Para representação dos valores nodais então:

$$X^h(t_n^\pm) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^\pm} X^h(t_n + \varepsilon)$$

O escopo do método TDG é encontrar $X^h \in \mathcal{J}^h$ tal que para qualquer $w^h \in \mathcal{J}^h$ tenha-se:

$$\begin{aligned} \int_{I_n} W^h A_0 \dot{X}^h dt + \int_{I_n} W^h A_1 X^h dt + W^h(t_{n+1}^+) \cdot A_0 \cdot X^h(t_{n-1}^+) = \\ = \int_{I_n(n>1)} W^h F dt + W^h(t_{n-1}^+) \cdot A_0 \cdot X^h(t_{n-1}^-) \end{aligned} \quad (4.108)$$

valendo ainda, para $n = 1$:

$$\int_{I_1} W^h \cdot F \cdot dt + W^h(0^+) \cdot A_0 \cdot X^h(0)$$

para o segundo membro da relação acima.

Discriminando para a função de interpolação de primeira ordem, dada pela expressão:

$$W^h = \begin{bmatrix} \frac{(t - t_{n-1})}{\Delta t} & 0 \\ 0 & \frac{(t - t_{n-1})}{\Delta t} \\ \frac{(t_n - t)}{\Delta t} & 0 \\ 0 & \frac{(t_n - t)}{\Delta t} \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

vem então:

$$X^h = \begin{bmatrix} \frac{(t - t_{n-1})}{\Delta t} & 0 & \frac{(t_n - t)}{\Delta t} & 0 \\ 0 & \frac{(t - t_{n-1})}{\Delta t} & 0 & \frac{(t_n - t)}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n^- \\ v_n^- \\ x_{n-1}^+ \\ v_{n-1}^+ \end{Bmatrix} = (W^h)^T \begin{Bmatrix} x_n^- \\ x_{n-1}^+ \end{Bmatrix}$$

.....(4.110)

e também:

$$\dot{X}^h = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_n^- \\ v_n^- \\ x_{n-1}^+ \\ v_{n-1}^+ \end{Bmatrix} = \left(\dot{W}^h \right)^T \begin{Bmatrix} x_n^- \\ x_{n-1}^+ \end{Bmatrix} \quad (4.111)$$

e as integrações indicadas no primeiro membro de (4.108) nesse caso levam a:

$$\left[\begin{array}{c} \left(\frac{1}{2} A_0 + \frac{\Delta t}{3} A_1 \right) \left(-\frac{1}{2} A_0 + \frac{\Delta t}{6} A_1 \right) \\ \left(\frac{1}{2} A_0 + \frac{\Delta t}{6} A_1 \right) \left(\frac{1}{2} A_0 + \frac{\Delta t}{3} A_1 \right) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} X^h(t_n^-) \\ X^h(t_{n-1}^+) \end{array} \right\} = W^h(t_{n-1}^+) \cdot A_0 \cdot X^h(t_{n-1}^-) + \tilde{F}_n$$

....(4.112)

enquanto para a primeira parcela do segundo membro tem-se:

$$W^h(t_{n-1}^+) \cdot A_0 \cdot X^h(t_{n-1}^-) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} x_{n-1}^- \\ v_{n-1}^- \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ kx_{n-1}^- \\ mv_{n-1}^- \end{array} \right\}$$

e

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{I_n} \begin{bmatrix} 0 \\ (t - t_{n-1})f \\ 0 \\ (t_n - t)f \end{bmatrix} dt$$

para a segunda. Observa-se que para cada instante considerado, tem-se dois pares de deslocamento e velocidade resultantes, isto é, $X(t_n^-)$ e $X(t_n^+)$ no caso do deslocamento.

Isto é resolvido eliminando-se em (4.112) $X^h(t_{n-1}^+)$, o que conduz a equações de aspecto:

$$\left[\begin{array}{c} \left(m + \frac{5}{18} \Delta t^2 k \right) \quad -\frac{1}{9} \Delta t^2 k \\ -\left(m - \frac{7}{18} \Delta t^2 k \right) \quad \left(m - \frac{1}{18} \Delta t^2 k \right) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} X^h(t_n^-) \\ \Delta t v^h(t_n^-) \end{array} \right\} = \\ = \Delta t \tilde{F}_n + \left[\begin{array}{c} \left(m - \frac{2}{9} \Delta t^2 k \right) \quad m \\ -\left(m + \frac{1}{2} \Delta t^2 k \right) \quad 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} X^h(t_{n-1}^-) \\ \Delta t v^h(t_{n-1}^-) \end{array} \right\}$$

que mostram o fato dessa formulação conduzir a um sistema de equações, no caso de múltiplos graus de liberdade, de largura de banda igual ao dobro do número desses graus.

Para ordem arbitrária do polinômio de interpolação gera-se uma classe de métodos com aniquilamento assintótico, como o autor preocupa-se em mostrar.

Na análise espectral realizada são tomados algoritmos dessa classe com funções interpoladoras polinomiais de graus 0, 1, 2 e 3, para comparação de desempenho com os métodos de Houbolt e Park. As figuras 4.20 a 4.22 mostram o resultado encontrado.

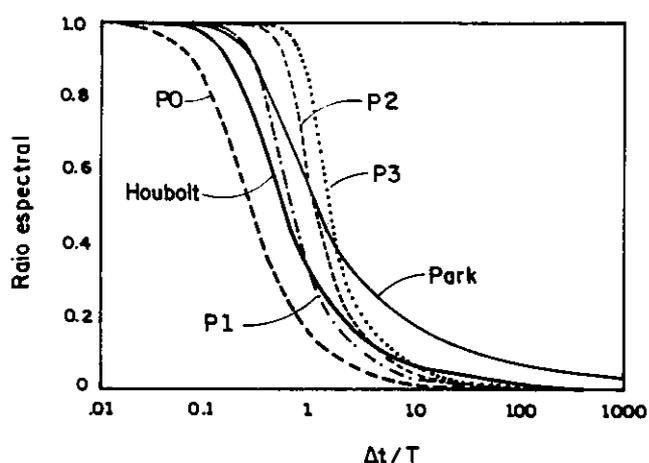


Figura 4.20 - Raio espectral dos algoritmos de Park (P), Houbolt (H) e TDG (P0, P1, P2 e P3)

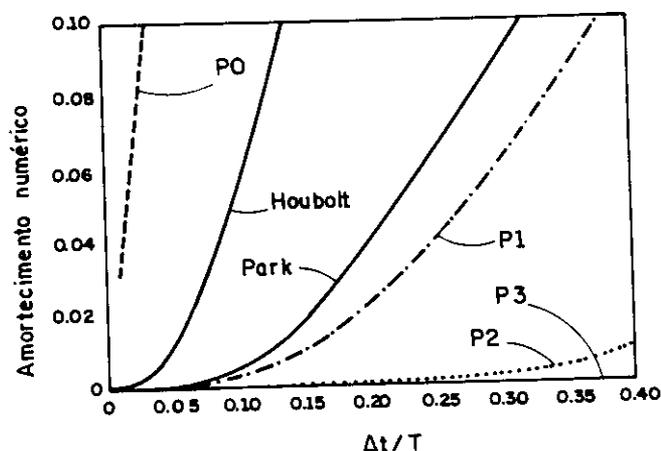


Figura 4.21 - Amortecimento numérico para os métodos de Park (P), Houbolt (H) e TDG (P0, P1, P2 e P3)

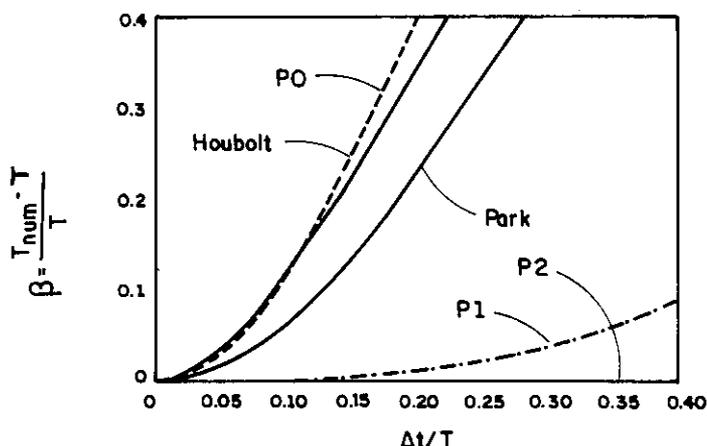


Figura 4.22 - Distorção nos algoritmos de Park (P), Houbolt (H) e TDG (P0, P1, P2 e P3)

Como é esperado, a frequência de corte assim como a brusquidão com que o aniquilamento ocorre aumentam com a ordem do método.

O amortecimento numérico e o erro na frequência diminuem para os modos inferiores à medida que se utilizam polinômios de graus mais elevados. Isto é consequência do fato de que para grau do polinômio igual a 2 tem-se ordem de precisão local igual a 5, afinal.

O overshoot não está presente nesses processos porque eles não exigem o cálculo de um vetor de aceleração inicial que introduziria, eventualmente, tal fenômeno.

O autor indica como seqüência do trabalho apresentado organizar os métodos hierarquicamente, isto é, fazendo com que os de ordens maiores contenham os de ordens menores e deles sejam um desenvolvimento, a fim de facilitar a geração de suas expressões com a mesma formulação e desenvolvimento.

Resumidamente, essa classe de algoritmos apresenta desempenho potencialmente bom em termos de precisão e aniquilamento assintótico geneticamente presente, mas necessita ser mais explorada nos aspectos de sua

implementação computacional e formulação específica, de modo a compensar sua maior complexidade de manipulação algébrica e memória computacional despendida.

CAPÍTULO 5 - UMA NOVA FAMÍLIA DE ALGORITMOS: FORMULAÇÃO HERMITIANA

5.1. INTRODUÇÃO

Apresenta-se aqui uma linhagem alternativa de algoritmos de passo simples, qual seja a dos chamados métodos hermitianos. Sua formulação é bastante livre, podendo ou não conter parâmetros de ajuste com vistas a se atingir as propriedades desejadas e necessárias em cada caso.

Embora já há algum tempo tal abordagem venha sendo empregada à solução numérica de equações diferenciais, suas vantagens para a dinâmica estrutural não vêm sendo exploradas proporcionalmente ao potencial oferecido pela própria natureza do procedimento para a construção de algoritmos que se apresenta em tal caso. Os trabalhos mais comuns citados a seguir referem-se à exploração dos operadores hermitianos para a solução de equações diferenciais de primeira ordem.

A geração de membros dessa família é simples, podendo-se chegar a métodos da ordem de precisão local que se pretenda apresentando as características tradicionalmente buscadas, como o aniquilamento assintótico.

São algoritmos genuinamente de passo simples, não exigindo portanto a aplicação de um procedimento específico no início do movimento e não apresentam "overshoot".

São também consistentes, por resultarem de uma expansão em séries de Taylor e o ajuste eventualmente necessário dos parâmetros presentes conduz à estabilidade (inclusive incondicional, embora não em todos os casos) e convergência.

A comparação com outros métodos e um estudo inicial do seu desempenho podem ser feitos em termos de análise espectral, como já consagrado na literatura.

5.2. A FORMULAÇÃO HERMITIANA APLICADA A EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

A representação de equações diferenciais de primeira ordem correspondente a (3.1) é dada por:

$$F(t, x, \dot{x}) = 0 \quad (5.1)$$

e definida a distância Δt entre dois pontos consecutivos do intervalo de validade de (5.1), tomado um ponto de referência t_i pode-se escrever para o ponto dado por $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ a seguinte expressão, análoga a (3.2):

$$F(\Delta t, x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}) = 0 \quad (5.2)$$

ou também alternativamente, de forma semelhante a (3.3) vale:

$$x_{i+1} = f(\Delta t, \dot{x}_{i+1}, p_{i+1}) \quad (5.3)$$

onde $p(t)$ representa uma função na variável independente presente na equação, quando esta não for homogênea.

Uma relação finita pode ser utilizada em substituição à derivada presente em (5.3) gerando uma expressão de aspecto:

$$\dot{x}_{i+1} \approx g(\Delta t, x_{i+1}, x_i, \dot{x}_i, x_{i-1}, \dot{x}_{i-1}, \dots) \quad (5.4)$$

e o par de relações (5.3) e (5.4) define um sistema de equações lineares no caso geral simultâneas cuja solução

fornece o valor da função e sua primeira derivada para um ponto avançado de Δt em relação ao último anteriormente conhecido.

A técnica descrita por COLLATZ (1968) visa escrever equações em diferenças finitas para representar (5.4) de forma a resultar erro de truncamento de ordem superior à conseguida com as expressões usuais.

A denominação métodos hermitianos é devida a uma analogia com os métodos lagrangianos que envolvem fórmulas expressas em termos de valores assumidos por funções em determinados pontos, ou seja, a fórmula de interpolação de Lagrange.

No presente caso além dos valores das funções também as derivadas em diversos pontos são levadas em conta, de modo semelhante à fórmula de interpolação de Hermite, de aspecto:

$$f(x) = \sum f(x_i) \cdot h_i(x) + \sum f'(x_i) \cdot H_i(x) + R$$

conforme HOUSEHOLDER* apud COLLATZ (1968).

Para a consecução do objetivo proposto considerem-se $2p$ pontos no domínio da função de interesse distanciados de um intervalo constante Δt .

Escrevem-se então combinações lineares dos valores da função e de suas derivadas tomadas até uma certa ordem. A expressão resultante tem aspecto:

$$\sum_{v=-p}^{+p} [a_v x_{i+v} + b_v x_{i+v}^{(\ell)}] = R(\Delta t^r) \approx 0, \ell = 1, 2, \dots, n \quad (5.5)$$

e a determinação dos coeficientes ponderadores a_v e b_v na combinação linear é feita substituindo-se a função e suas derivadas por séries de Taylor centradas no ponto t_i e a seguir anulando-se os coeficientes resultantes do agrupamento dos termos de mesma ordem em Δt até a ordem a mais elevada possível.

* HOUSEHOLDER, A. S. Principles of Numerical Analysis, p. 194; New York, McGraw-Hill, 1953.

Na expressão acima o segundo membro representa o resíduo cuja ordem \underline{r} é a do termo não-nulo de menor ordem restante na combinação linear indicada.

O ganho de precisão obtido advém não da inclusão de mais pontos na montagem das expressões como em diferenças finitas usuais mas do respeito à equação diferencial em mais de um ponto no domínio.

O valor tomado para \underline{n} interfere na precisão por ser uma medida da quantidade de informações considerada na aproximação da função.

A obra citada apud apresenta os primeiros membros dessa família de métodos numéricos para diferenças centradas bem como para intervalos assimétricos em torno do ponto \underline{i} de referência até a expressão correspondente à derivada quarta com erro de truncamento de ordem 10.

Indiscutivelmente, entretanto, por razões já citadas neste trabalho, quando se visa a análise dinâmica a sub-família de passo simples é a mais importante. Para isso, a relação (5.5) pode ser reescrita tomando-se apenas os termos da somatória correspondentes a valores nulo e unitário de \underline{v} , ficando de aspecto:

$$\sum_{j=0}^n \Delta t^{(j)} \left[a_j x_i^{(j)} + b_j x_{i+1}^{(j)} \right] + R_i(\Delta t^r) = 0 \quad (5.6)$$

bastando para isso rearranjar os termos originais.

A substituição dos valores assumidos no ponto $\underline{i+1}$ por séries de Taylor centradas em \underline{i} fornece:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \Delta t \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_i + \frac{\Delta t^3}{6} x_i^{(3)} + \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} x_i^{(n)} + \dots \\ \dot{x}_{i+1} &= \dot{x}_i + \Delta t \ddot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} x_i^{(3)} + \frac{\Delta t^3}{6} x_i^{(4)} + \dots + \frac{\Delta t^{(n-1)}}{(n-1)!} x_i^{(n)} + \dots \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_{i+1}^{(n-1)} &= x_i^{(n-1)} + \Delta t x_i^{(n)} + \dots \\ x_{i+1}^{(n)} &= x_i^{(n)} + \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

e sua substituição em (5.6) resulta em:

$$\begin{aligned}
 & a_0 x_i + b_0 \left(x_i + \Delta t \overset{\bullet}{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \overset{\bullet\bullet}{x}_i + \frac{\Delta t^3}{6} x_i^{(3)} + \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} x_i^{(n)} + \dots \right) + \\
 & + a_1 \Delta t \overset{\bullet}{x}_i + b_1 \Delta t \left(x_i + \Delta t \overset{\bullet\bullet}{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} x_i^{(3)} + \dots + \frac{\Delta t^{n-1}}{(n-1)!} x_i^{(n)} + \dots \right) + \\
 & + a_2 \Delta t^2 \overset{\bullet\bullet}{x}_i + b_2 \Delta t^2 \left(\overset{\bullet\bullet}{x}_i + \Delta t x_i^{(3)} + \dots + \frac{\Delta t^{n-2}}{(n-2)!} x_i^{(n)} + \dots \right) + \\
 & + a_{n-1} \Delta t^{n-1} x_i^{(n-1)} + b_{n-1} \Delta t^{n-1} \left(x_i^{(n-1)} + \Delta t x_i^{(n)} + \dots \right) + \\
 & a_n \Delta t^n x_i^{(n)} + b_n \Delta t^n \left(x_i^{(n)} + \dots \right) + R_i(\Delta t^r) = 0
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

e agrupando-se os coeficientes das derivadas de mesma ordem em Δt , obtém-se as identidades:

$$\begin{aligned}
 & (a_0 + b_0) x_i = 0 \\
 & (b_0 + a_1 + b_1) \Delta t \overset{\bullet}{x}_i = 0 \\
 & \left(\frac{b_0}{2} + b_1 + a_2 + b_2 \right) \Delta t^2 \overset{\bullet\bullet}{x}_i = 0 \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \left(\frac{b_0}{n!} + \frac{b_1}{(n-1)!} + \dots + a_n + b_n \right) \Delta t^n x_i^{(n)} = 0
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

em número total de $n+1$. Essas relações geram um sistema de equações homogêneas nos $2(n+1)$ coeficientes a_k e b_k . Pode-se tomar um deles não-nulo e de valor arbitrário com o objetivo de relacioná-lo com os demais, o que fornece para o grau de indeterminação do sistema o valor n .

Este último pode ser interpretado também como o número máximo p de parâmetros livres presentes em (5.6) para que essa expressão em diferenças se anule até os termos daquela ordem em Δt .

Se considerados não-nulos e a determinar, em tais condições, os coeficientes a_k e b_k , $k = 0, 1, \dots, n$ que respeitem (5.9) até n , valem as expressões:

$$p + (n + 1) = 2m + 1 \quad (5.10)$$

e também, vista a mesma expressão sob outra forma:

$$n = 2m - p \quad (5.11)$$

resultando ordem no erro de truncamento igual a $n + 1$, ou seja, observando-se a expressão acima vale:

$$r = 2m - p + 1 . \quad (5.12)$$

O primeiro membro da família de algoritmos que pode ser assim obtido é o correspondente a m unitário sem parâmetros livres, o que resulta conforme indicado por (5.12) em ordem 3 para o erro local de truncamento. Sua determinação é feita especificando-se esses valores nas (5.9), que são escritas neste caso:

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 &= 0 \\ b_0 + a_1 + b_1 &= 0 \\ \frac{b_0}{2} + b_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.9a)$$

e arbitrando-se a_0 unitário resultam $b_0 = -1$, $b_1 = a_1 = 1/2$, com (5.6) assumindo aspecto:

$$x_i - x_{i+1} + \frac{\Delta t}{2} \dot{x}_i + \frac{\Delta t}{2} \dot{x}_{i+1} + R_i(\Delta t^3) = 0 \quad (5.13)$$

e levando em conta as (5.8) tem-se ainda a expressão do erro local determinada na forma de:

$$R_i(\Delta t^3) = \Delta t^3 x_i^{(3)} \left(\frac{b_0}{6} + \frac{b_1}{2} \right) + O(\Delta t^4) = \frac{1}{12} \Delta t^3 x_i^3 + \dots \quad (5.14)$$

que é o operador trapezoidal clássico, pois (5.13) pode ser rearranjada para assumir a forma:

$$x_{i+1} \approx x_i + \frac{\Delta t}{2} \left(\dot{x}_i + \dot{x}_{i+1} \right)$$

Não há nessa família operador com erro de ordem quatro sem parâmetro livre, como se depreende de (5.12). Assim, seja $m = 2$ e $p = 1$ para a aplicação de (5.9). Neste caso específico vêm:

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 &= 0 \\ b_0 + a_1 + b_1 &= 0 \\ \frac{b_0}{2} + b_1 + a_2 + b_2 &= 0 \\ \frac{b_0}{6} + \frac{b_1}{2} + b_2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.9b}$$

e arbitrando-se novamente a_0 unitário resultam, deixando b_1 por determinar, os valores:

$$b_0 = -1; \quad a_1 = 1 - b_1; \quad a_2 = \frac{1}{3} - \frac{b_1}{2}; \quad b_2 = \frac{1}{6} - \frac{b_1}{2}$$

correspondentes ao algoritmo:

$$\begin{aligned} x_i - x_{i+1} + (1 - b_1)\Delta t \dot{x}_i + b_1\Delta t \dot{x}_{i+1} + \left(\frac{1}{3} - \frac{b_1}{2}\right)\Delta t^2 \ddot{x}_i + \\ + \left(\frac{1}{6} - \frac{b_1}{2}\right)\Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} + R_i(\Delta t^4) = 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

que pode ser escrito na forma de um método de colocação, rearranjando os termos de modo a ter-se:

$$x_{i+1} \approx x_i + \Delta t \left[(1 - b_1) \dot{x}_i + b_1 \dot{x}_{i+1} \right] + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{b_1}{2} \right) \ddot{x}_i + \left(\frac{1}{3} - \frac{b_1}{2} \right) \ddot{x}_{i+1} \right]$$

.... (5.16)

com o erro expresso por:

$$R_i(\Delta t^4) = \frac{1}{12} \left(-b_1 + \frac{1}{2} \right) \Delta t^4 x_i^{(4)} + \dots \quad (5.17)$$

dependente do valor adotado para o parâmetro b_1 .

Pode-se variar b_1 visando atender ou melhorar alguma propriedade desejada do algoritmo.

Se tomado $b_1 = 1/2$, verifica-se de (5.17) que o erro passa a ser de quinta ordem e efetuando-se os cálculos necessários, indicados nas expressões já deduzidas chega-se ao operador descrito por:

$$x_i - x_{i+1} + \frac{\Delta t}{2} x_i + \frac{\Delta t}{2} x_{i+1} + \frac{\Delta t^2}{12} x_i - \frac{\Delta t^2}{12} x_{i+1} + R_i(\Delta t^5) = 0 \quad (5.18)$$

agora com o resto escrito:

$$R_i(\Delta t^5) = -\frac{1}{720} \Delta t^5 x_i^{(5)} + \dots \quad (5.19)$$

e pode-se aumentar indefinidamente a família através da escolha adequada de conjuntos de m , n e p repetindo o procedimento descrito.

Um importante trabalho divulgado sobre a utilização desses processos é o de MAKINSON (1968).

O emprego de parâmetros livres de ajuste para conformar o algoritmo a uma propriedade desejada, no caso a facilidade de inversão das matrizes envolvidas já é então apresentado.

MAKINSON resolve ainda um exemplo numérico que trata da solução da equação de condução de calor.

Ao retomar o assunto, NØRSETT (1973) afirma existirem métodos A-estáveis de ordens 1,2,3 e 5, não os havendo de ordem 4. Sobre as ordens de 6 a 15, aceita a possibilidade de existência de métodos "quase-estáveis".

A definição de A-estabilidade é apresentada por DAHLQUIST (1963) na forma do atendimento a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\Delta t) = 0, \quad \forall \Delta t$$

onde x_n é a solução numérica de $\dot{x} = f(x, t)$ para um ponto t_n do domínio, dado por $t_n = t_0 + n\Delta t$. Trata-se portanto de conceito ligado ao de estabilidade incondicional, definido por (3.16).

No mesmo trabalho o autor já mostrara não haver métodos explícitos multi-passos incondicionalmente estáveis e também que o menor erro de truncamento local possível é o da regra trapezoidal.

Com relação às conclusões desses autores, resultantes de lemas e teoremas, portanto de um rigoroso tratamento matemático da questão, ressaltam os comentários de KRIEG (1973) que lembra o fato de que embora uma equação diferencial de segunda ordem possa ser escrita como um sistema de duas equações de primeira ordem (e diversos métodos disso se prevalecem), "há sutis diferenças" (nas palavras do autor) nas classes de métodos multi-passos empregados na solução dos dois casos.

Assinala ainda que o método das diferenças centrais, importante histórica e praticamente no caso da análise dinâmica, não está incluído na classe dos métodos examinados por DAHLQUIST (1963) e para os quais são válidas as conclusões desse autor.

Por outro lado, relativamente à equação de interesse, isto é, (3.30), e considerando os métodos explícitos de N passos dados pela relação:

$$x_{i+1} + \sum_{j=0}^N (a_j x_{N-j} + b_j \omega^2 x_{N-j}) = 0 \quad (5.20)$$

que incluem o operador em diferenças centrais (bastando, para isso, tomar-se $a_0 = -2$, $a_1 = 1$, $b_0 = \Delta t^2$, $b_1 = 0$ e $N = 1$) faz uma afirmativa importante.

De fato, conclui não haver método de integração dessa forma para $N \leq 2$ que seja estável para um passo de tamanho maior que o máximo possível nas diferenças centrais que mantenha essa propriedade, ou seja, deve-se ter, para estabilidade, $\Delta t/T \leq 1/\pi$.

O exposto acima estimula a que sejam buscados processos implícitos, para aplicação em dinâmica estrutural, de passo simples incondicionalmente estáveis, com parâmetros de ajuste eventualmente presentes visando atender a um aniquilamento assintótico conveniente para o problema de interesse, sem barreiras de ordem de precisão, pois não há na bibliografia disponível qualquer resultado conclusivo (mesmo entre os trabalhos mais recentes mencionados no capítulo anterior) apontando para a impossibilidade de se atingir tal objetivo.

Acresce que a possibilidade de desenvolvimento de métodos de ordens inferiores encontra-se praticamente esgotada, com formulações gerais o bastante para abarcar todos os caminhos já reconhecidos como potencialmente vantajosos, como se pode verificar da revisão bibliográfica presente neste trabalho.

5.3. A FAMÍLIA PROPOSTA POR ARGYRIS

Embora já houvesse proposto algoritmos hermitianos cúbicos e de ordens superiores em ARGYRIS & al. (1973), ARGYRIS, VAZ & WILLAM (1978) e ARGYRIS & al. (1979) a geração de uma família de métodos dessa natureza é descrita por ARGYRIS num trabalho mais recente (ARGYRIS & MLEJNEK, 1991).

Considere-se para isso:

$$\tau = \frac{t - t_i}{\Delta t} \quad (5.21)$$

a variável que identifica um instante no interior do intervalo. Assumido o conhecimento de velocidade e deslocamento no início do passo, bem como a aceleração, é possível avançar no movimento através das relações:

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_i + \Delta t \int_0^\tau \ddot{x}(\tau) d\tau \quad (5.22)$$

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_i + \tau \Delta t \dot{\mathbf{x}}_i + (\Delta t)^2 \int_0^1 \int_0^1 \ddot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau d\tau \quad (5.23)$$

ambas válidas para o intervalo $0 \leq \tau \leq 1$, podendo-se transformar a integral dupla constante da última expressão de modo a ter-se:

$$\int_0^1 \int_0^1 \ddot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau d\tau = \int_0^1 \ddot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau - \int_0^1 \tau \ddot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau \quad (5.24)$$

através da bem conhecida operação de integração por partes do cálculo integral.

O incremento de deslocamento e velocidade vem das (5.23) e (5.22) respectivamente tomando-se τ unitário, resultando:

$$\Delta \mathbf{x} = \Delta t \dot{\mathbf{x}}_i + (\Delta t)^2 \int_0^1 (1 - \tau) \ddot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau \quad (5.25)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \Delta t \int_0^1 \ddot{\mathbf{x}}(\tau) d\tau \quad (5.26)$$

confirmando ser suficiente a expressão da aceleração para a determinação do movimento.

Analogamente à discretização no espaço efetuada no método dos elementos finitos na sua formulação tradicional, é então adotada a representação:

$$\ddot{\mathbf{x}}(\tau) = \omega_A(\tau) \rho_A \quad (5.27)$$

onde ω_A representa uma função de interpolação que afeta os valores nos pontos pivotaes no tempo, expressos por ρ_A . Com isto, reescrevem-se (5.25) e (5.26) na forma:

$$\Delta \mathbf{x} = \Delta t \dot{\mathbf{x}}_i + (\Delta t)^2 \left(\int_0^1 (1 - \tau) \omega_A(\tau) d\tau \right) \rho_A \quad (5.25a)$$

$$\Delta \dot{x} = \Delta t \left(\int_0^1 \omega_A(\tau) d\tau \right) \rho_A \quad (5.26a)$$

sendo a integração executada uma vez apenas para cada tipo de elemento após definida a função ω_A . Na notação dos autores, tem-se:

$$\begin{aligned} C_{DA} &= \int_0^1 (1 - \tau) \omega_A(\tau) d\tau \\ C_{VA} &= \int_0^1 \omega_A(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.28)$$

respectivamente para os incrementos de deslocamento e velocidade.

As relações apresentadas até aqui não são suficientes para os métodos implícitos, onde não se conhece ρ_A , que pode tomar aspecto:

$$\rho_A = \left\{ \begin{matrix} \ddot{x}_i & \ddot{x}_{i+1} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \ddot{x}_i & \ddot{x}_i + \Delta \ddot{x} \end{matrix} \right\}$$

ou semelhante, exigindo a solução de um sistema de equações como já discutido, para obtenção das variáveis de interesse.

Na interpolação cúbica hermitiana de acelerações (ARGYRIS & al., 1973) são utilizados os valores pivotais:

$$\rho_A = \left\{ \begin{matrix} \ddot{x}_i & \left(\frac{d \ddot{x}}{d\tau} \right)_i & \ddot{x}_{i+1} & \left(\frac{d \ddot{x}}{d\tau} \right)_{i+1} \end{matrix} \right\} \quad (5.29)$$

juntamente com as funções:

$$\omega_A = \left[\left(1 - 3\tau^2 + 2\tau^3 \right) \mathbb{I}_n \quad \left(\tau - 2\tau^2 + \tau^3 \right) \mathbb{I}_n \quad \left(3\tau^2 - 2\tau^3 \right) \mathbb{I}_n \quad \left(-\tau^2 + \tau^3 \right) \mathbb{I}_n \right]$$

..... (5.30)

onde I_n é a matriz identidade de ordem necessária (quatro, para um sistema unidimensional). Valem ainda:

$$\begin{aligned} C_{DA} &= \frac{1}{60} [21I_n \quad 3I_n \quad 9I_n \quad -2I_n] \\ C_{VA} &= \frac{1}{12} [6I_n \quad I_n \quad 6I_n \quad -I_n] \\ \frac{d \ddot{x}}{d\tau} &= \frac{d \ddot{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \Delta t x^{(3)} \end{aligned} \quad (5.31)$$

e como em todo procedimento de ordem superior, nota-se a introdução de uma nova variável $x^{(3)}$ que pode ser relacionada às demais pela derivação da equação do movimento.

A substituição de (5.25a) e (5.26a) na equação de equilíbrio e sua derivada, consideradas (5.28) e (5.31), fornece um sistema de ordem $2n$ de equações lineares simultâneas em \ddot{x}_{i+1} e $x_{i+1}^{(3)}$ cuja solução permite determinar-se a situação ao final do passo.

A matriz de amplificação para vibrações livres não amortecidas é escrita:

$$[A] = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{15} \Omega^2 + \frac{1}{240} \Omega^4\right)} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{7}{20} \Omega^2\right) \Delta t \left(1 - \frac{1}{20} \Omega^2\right) & \\ \left(-\frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{\Delta t}\right) & \left(1 - \frac{1}{12} \Omega^2\right) \end{bmatrix}, \quad \Omega = \omega \Delta t$$

.....(5.32)

e uma análise espectral revela que o método é condicionalmente estável, para $\Omega^2 < 10$, não apresentando amortecimento numérico, pois o raio espectral é unitário.

Comparado ao método de Newmark com diversos valores de β apresenta ainda distorção menor (menor erro relativo do período calculado).

O trabalho dos mesmos autores mencionado de 1991 é uma retomada desse caminho, substituindo (5.30) pela expressão mais geral:

$$\ddot{x} = \omega_1(\tau) \ddot{x}_i + \omega_2(\tau) \ddot{x}_{i+1} + \omega_3(\tau) \Delta t x_i^{(3)} + \omega_4(\tau) \Delta t x_{i+1}^{(3)} \quad (5.33)$$

para representar a aceleração no interior do passo. As funções de interpolação $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \dots, 4$ não são explicitadas bastando ter-se em conta que algumas condições devem ser atendidas por elas, nos nós, relativamente à sua forma e valores, objetivando evitar-se ressaltos e descontinuidades.

Assim é que devem valer as relações:

$$\begin{aligned} \omega_1(0) &= 1 & \omega_2(0) &= 0 \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau}(0) &= 0 & \frac{\partial \omega_2}{\partial \tau}(0) &= 0 \\ \omega_1(1) &= 0 & \omega_2(1) &= 1 \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau}(1) &= 0 & \frac{\partial \omega_2}{\partial \tau}(1) &= 0 \\ \omega_3(0) &= 0 & \omega_4(0) &= 0 \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau}(0) &= 1 & \frac{\partial \omega_4}{\partial \tau}(0) &= 0 \\ \omega_3(1) &= 0 & \omega_4(1) &= 0 \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau}(1) &= 0 & \frac{\partial \omega_4}{\partial \tau}(1) &= 1 \end{aligned} \quad (5.34)$$

para que tal se verifique.

A integração de (5.33) fornece a velocidade, dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i+1} &= \dot{x}_i + \Delta t \ddot{x}_i \int_0^1 \omega_1(\tau) d\tau + \Delta t \ddot{x}_{i+1} \int_0^1 \omega_2(\tau) d\tau + \\ &+ \Delta t^2 x_i^{(3)} \int_0^1 \omega_3(\tau) d\tau + \Delta t^2 x_{i+1}^{(3)} \int_0^1 \omega_4(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.35)$$

e os autores impõem ainda as condições:

$$\begin{aligned} \omega_1(\tau) &= \omega_2(1 - \tau) \\ \omega_3(\tau) &= -\omega_4(1 - \tau) \end{aligned} \quad (5.36)$$

de modo que as áreas sob os gráficos de ω_1 e ω_2 contra o tempo sejam iguais, ao passo que aquelas sob ω_3 e ω_4 sejam

iguais mas de sinais opostos. As razões para isso são comentadas no trabalho.

Dessa forma, (5.35) pode ser escrita:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + a_0 \Delta t \left(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1} \right) + a_1 \Delta t^2 \left(x_i^{(3)} - x_{i+1}^{(3)} \right) \quad (5.37)$$

expressão mais compacta.

O deslocamento, conforme (5.25a), tem aspecto:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \dot{x}_i + \Delta t^2 \left(b_0 \ddot{x}_i + c_0 \ddot{x}_{i+1} \right) + \Delta t^3 \left(b_1 x_i^{(3)} + c_1 x_{i+1}^{(3)} \right) \quad (5.25b)$$

onde se tem:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 + c_0 \\ a_1 &= b_1 - c_1 \end{aligned} \quad (5.38)$$

e, para as condições impostas para as $\omega_i(\tau)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - \tau) \omega_1(\tau) d\tau &= \int_0^1 \tau \omega_2(\tau) d\tau = b_0 \\ \int_0^1 (1 - \tau) \omega_2(\tau) d\tau &= \int_0^1 \omega_2(\tau) d\tau - \int_0^1 \tau \omega_2(\tau) d\tau = c_0 = a_0 - b_0 \\ \int_0^1 (1 - \tau) \omega_3(\tau) d\tau &= - \int_0^1 \tau \omega_4(\tau) d\tau = b_1 \\ \int_0^1 (1 - \tau) \omega_4(\tau) d\tau &= \int_0^1 \omega_4(\tau) d\tau - \int_0^1 \tau \omega_4(\tau) d\tau = c_1 = -a_1 + b_1 \end{aligned} \quad (5.39)$$

A garantia de convergência é obtida assegurando-se de que pelo menos a aceleração constante seja representada exatamente, ou seja:

$$\begin{aligned} r_i^{(3)} &= r_{i+1}^{(3)} = 0 \\ \ddot{r}_i &= \ddot{r}_{i+1} = \text{constante} \end{aligned}$$

o que exige que:

$$\omega_1(\tau) + \omega_2(\tau) = 1, \forall \tau \in 0 \leq \tau \leq 1$$

e conseqüentemente, de relações já escritas, obtém-se para a_0 o valor $1/2$.

As demais constantes presentes em (5.37) são determinadas a partir da imposição de estabilidade incondicional, reprodução exata de aceleração linear e finalmente, para que não restem parâmetros livres, reprodução exata também da aceleração variando quadraticamente no interior do intervalo, isto é, que se tenha:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ddot{x}(\tau) = \tau^2 \ddot{x}_0$$

resultando os valores: $a_1 = 1/12$, $b_1 = 1/24$, $c_1 = -1/24$, $b_0 = 1/3$ e $c_0 = 1/6$, que são empregados em (5.25b) e (5.37) para definir o algoritmo, que respeitará então às condições previamente impostas. A matriz de amplificação é dada por:

$$[A] = \frac{1}{1 + \frac{1}{12} \Omega^2 + \frac{1}{144} \Omega^4} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{5}{12} \Omega^2 + \frac{1}{144} \Omega^4\right) & \Delta t \left(1 - \frac{1}{12} \Omega^2\right) \\ -\frac{\Omega^2}{\Delta t} \left(1 - \frac{1}{12} \Omega^2\right) & \left(1 - \frac{5}{12} \Omega^2 + \frac{1}{144} \Omega^4\right) \end{bmatrix}$$

....(5.40)

e corresponde a um algoritmo com precisão em terceira ordem, incondicionalmente estável porém sem amortecimento numérico que os autores denominam de "algoritmo hermitiano cúbico modificado".

O conceito é extrapolado de modo a formar uma família que inclua métodos com a mesma gênese, mas de ordens superiores a três. A expressão geral para a aceleração no interior do passo é escrita:

$$\ddot{x}(\tau) = \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta t)^j \left[\omega_{ij}(\tau) \ddot{x}_i^{(j)} + \omega_{i+1,j}(\tau) \ddot{x}_{i+1}^{(j)} \right] \quad (5.41)$$

e para balancear a influência de $\ddot{x}_i^{(j)}$ e $\ddot{x}_{i+1}^{(j)}$ sobre a aceleração no elemento:

$$\omega_{ij}(\tau) = (-1)^j \omega_{i+1,j}(1 - \tau) \quad (5.42)$$

como feito anteriormente.

A integração de (5.41) considerada (5.42) fornece a velocidade ao final do passo, dada por:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \sum_{j=0}^{n-1} a_j (\Delta t)^{j+1} \left[\ddot{x}_i^{(j)} + (-1)^j \ddot{x}_{i+1}^{(j)} \right] \quad (5.43)$$

e também o deslocamento, escrito:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \dot{x}_i + \sum_{j=1}^n (\Delta t)^{j+2} \left[b_j \ddot{x}_i^{(j)} + c_j \ddot{x}_{i+1}^{(j)} \right] \quad (5.44)$$

com a seguinte relação entre os coeficientes:

$$b_j + (-1)^j c_j = a_j \quad (5.45)$$

sendo necessário considerar-se ainda a equação de equilíbrio e suas derivadas para o final do passo. Os parâmetros de ajuste que restam são eliminados considerando-se polinômios de ordem adequada para a representação da aceleração no interior do passo a partir de seu valor inicial, isto é, aceita-se que valham relações do tipo:

$$\ddot{x}(\tau) = \tau^m \ddot{x}(0) \quad (5.46)$$

e esta hipótese completa as condições necessárias.

A generalização dos algoritmos dessa família é feita com a determinação dos coeficientes a_j , b_j e c_j para os quatro primeiros membros, isto é, até quinta ordem do erro local nos deslocamentos.

É apresentado um gráfico comparativo do alongamento do período para os algoritmos Wilson- θ , Newmark- β e os

hermitianos cúbico e cúbico modificado, aqui descritos e que mostra as vantagens sob esse ponto de vista, dos últimos. O gráfico é reproduzido à figura 5.1.

Também são resolvidos alguns exemplos modelados por elementos finitos: pulso triangular em uma barra sob sollicitação normal sem vinculação, barra engastada em ressonância sob compressão, oscilação amortecida de uma barra bi-apoiada sob flexão por carga concentrada e treliça com matriz de amortecimento não-modal, que permitem avaliar-se o desempenho do algoritmo comparado aos processos tradicionais.

A grande crítica que pode ser feita é a ausência do aniquilamento assintótico, característica muito interessante dos métodos de integração, como já discutido. Os métodos apresentados em ARGYRIS, VAZ & WILLAM (1978) trazem tal propriedade, cuja intensidade pode ser aumentada ou diminuída em função dos valores adotados por parâmetros de ajuste presentes.

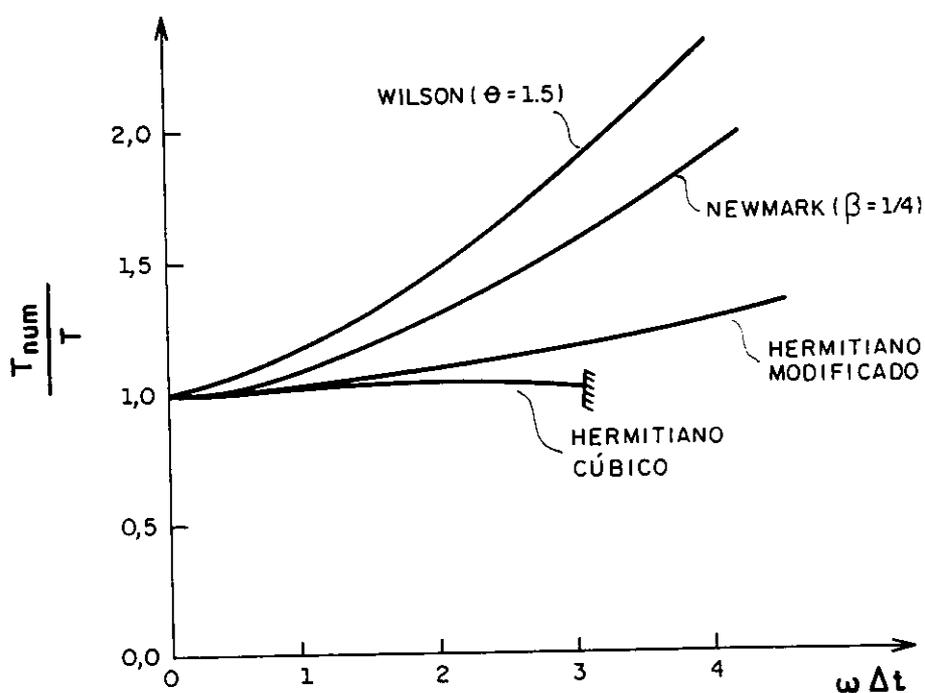


Figura 5.1 - Alongamento do período nos algoritmos hermitianos cúbico e cúbico modificado

5.4. UMA FORMULAÇÃO GERAL PARA A DINÂMICA ESTRUTURAL: FORMULAÇÃO HERMITIANA DIRETA

O problema de análise dinâmica em sua solução numérica pode ser colocado na forma dada pelo sistema de equações algébricas definido por (3.3), (3.6) e (3.7) no caso unidimensional, com apenas um grau de liberdade. Para um sistema com múltiplos graus de liberdade o aspecto formal é o mesmo porém as incógnitas passam a ser os vetores deslocamento, velocidade e aceleração nas coordenadas generalizadas consideradas na discretização. Se não for aplicada uma transformação que desacople os modos da estrutura, as equações envolvidas serão simultâneas, conforme já discutido anteriormente.

No caso de vibrações livres não-amortecidas a expressão correspondente é (3.30) que colocada nos moldes de (3.1) resulta:

$$\ddot{x}_{i+1} + \omega^2 x_{i+1} = 0 \quad . \quad (5.47)$$

Se tomados operadores hermitianos expressos conforme (5.6) para representar (3.6) e (3.7), considerada a possibilidade de se envolverem derivadas de ordens superiores, como já previsto em (3.10) pode-se adotar a representação:

$$\mathcal{H}_{n_1}^1 \left(\Delta t, x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i, \dots, x_i^{(n)}, x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, \ddot{x}_{i+1}, \dots, x_{i+1}^{(n)} \right) + R_i^1(\Delta t^{r_1+2}) = 0$$

$$\mathcal{H}_{n_2}^2 \left(\Delta t, x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i, \dots, x_i^{(n)}, x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, \ddot{x}_{i+1}, \dots, x_{i+1}^{(n)} \right) + R_i^2(\Delta t^{r_2+2}) = 0$$

... (5.48)

ou ainda nessas últimas, substituindo (3.11) e (3.12) aplicadas a (3.30) vem:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n_1}^1 \left(\Delta t, x_i, \dot{x}_i, x_{i+1}, \dot{x}_{i+1} \right) + R_i^1 (\Delta t^{r_1+2}) &= 0 \\ \mathcal{H}_{n_2}^2 \left(\Delta t, x_i, \dot{x}_i, x_{i+1}, \dot{x}_{i+1} \right) + R_i^2 (\Delta t^{r_2+2}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

onde Δt é o passo escolhido, t_i é um instante de referência de deslocamento e derivadas já conhecidos e ainda utiliza-se a notação $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ como um instante onde essas grandezas são desconhecidas e a determinar.

A segunda parcela corresponde ao resíduo ou erro de truncamento local cometido no cálculo da expressão de diferenças que substitui as derivadas presentes. Sua ordem é $r_1 + 2$ no primeiro algoritmo das (5.49), onde a ordem da maior derivada considerada em (5.6) para a sua montagem é dada por n_1 .

Se os algoritmos forem independentes trata-se de um sistema de duas equações lineares simultâneas nas incógnitas x_{i+1} e \dot{x}_{i+1} , cuja solução permite o avanço de um passo no conhecimento do movimento.

Dessa forma para um sistema com \underline{n} graus de liberdade a ordem do sistema resultante é $2n$, pois as coordenadas escolhidas para representar o movimento devem ser linearmente independentes. Isto é característico dos métodos de ordens superiores. É possível contornar parcialmente tal problema em um método como o descrito por ARGYRIS, VAZ & WILLAM (1978), mediante o desacoplamento parcial das equações resultantes em dois conjuntos independentes de \underline{n} equações simultâneas. No processo dos autores citados, inclusive, a matriz a ser invertida para cada subconjunto de equações é a mesma, o que implica novamente em ganho computacional.

Para efeito de análise espectral convém arranjar as expressões resultantes de (5.49) de forma análoga às (3.13), isto é, escrevendo-se:

$$[M] \begin{Bmatrix} x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} \end{Bmatrix} + [N] \begin{Bmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_i^1 (\Delta t^{r_1+2}) \\ R_i^2 (\Delta t^{r_2+2}) \end{Bmatrix} \quad (5.50)$$

ou mais sinteticamente e após pré-multiplicar ambos os membros por $[M]^{-1}$:

$$\{x_{i+1}\} = [A]\{x_i\} + \{R_i(\Delta t^{r+2})\} \quad (5.51)$$

onde $[A]$ é a matriz de amplificação do algoritmo dada por $[A] = -[M]^{-1} [N]$, \underline{r} é a ordem do erro nos esforços ou acelerações, função da matriz $[M]$ e dos parâmetros r_1 e r_2 , sendo em geral o menor valor entre esses dois últimos números.

Fica patente pelo exposto a grande flexibilidade que esse caminho proporciona para se moldar a matriz de amplificação do processo resultante, inclusive podendo-se lançar mão de parâmetros livres que podem ser ajustados à feição do objetivo pretendido.

Podem ser gerados dessa forma através de (5.6) infinitos operadores e mesmo restringindo seu número aos que contenham quantidade razoável de coeficientes a_k e b_k , pode-se combiná-los dois a dois com bastante liberdade, testando seu potencial de desempenho através da tradicional análise espectral.

Esse foi o caminho trilhado por LAIER (1993), para gerar um algoritmo uni-paramétrico de ordem 3, favoravelmente comparado com os de NEWMARK (1959) e de KUJAWSKI & GALLAGHER (1989), este também de terceira ordem.

As expressões utilizadas e que definem o processo proposto são:

$$\begin{aligned} &6(1 + \ell)x_i - 6(1 + \ell)x_{i+1} + (2 + 4\ell)\Delta t \dot{x}_i + (4 + 2\ell)\Delta t \dot{x}_{i+1} + \\ &+ \ell\Delta t^2 \ddot{x}_i - \Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} = 0 - \frac{(2\ell - 2)}{24} \Delta t^4 x_i^{(4)} - \frac{(4\ell - 6)}{120} \Delta t^5 x_i^{(5)} + \dots \\ &(2 + 10\ell)\Delta t \dot{x}_i - (2 + 10\ell)\Delta t \dot{x}_{i+1} + 6\ell\Delta t^2 \ddot{x}_i + (2 + 4\ell)\Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} + \\ &+ \ell\Delta t^3 x_i^{(3)} - \Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} = 0 - \frac{(2\ell - 2)}{6} \Delta t^4 x_i^{(4)} - \frac{(6\ell - 6)}{24} \Delta t^5 x_i^{(5)} + \dots \end{aligned} \quad (5.52)$$

com ℓ indicando o parâmetro livre, cujo valor nulo está associado ao aniquilamento assintótico. Seu limite superior unitário resulta na ausência de amortecimento numérico.

Embora seja um algoritmo de ordem superior (erro local de ordem 4) o ganho de precisão pode compensar o maior trabalho computacional envolvido na sua utilização.

É relevante observar ainda que para os modelos estruturais com massa concentrada e amortecimento proporcional à massa, não ocorre essa disparidade de volume de trabalho computacional comparativamente aos algoritmos clássicos de segunda ordem.

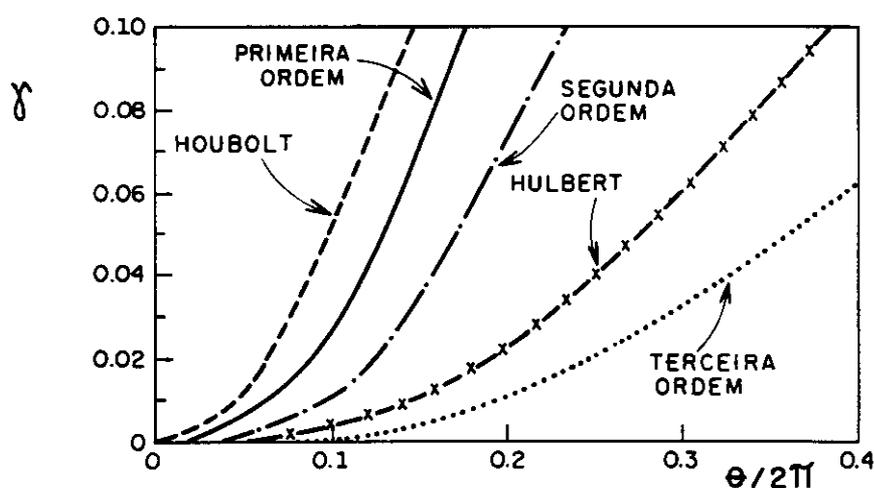


Fig. 5.2 - Amortecimento numérico dos operadores hermitianos de Laier (1995) comparado aos métodos de Houbolt e Hulbert

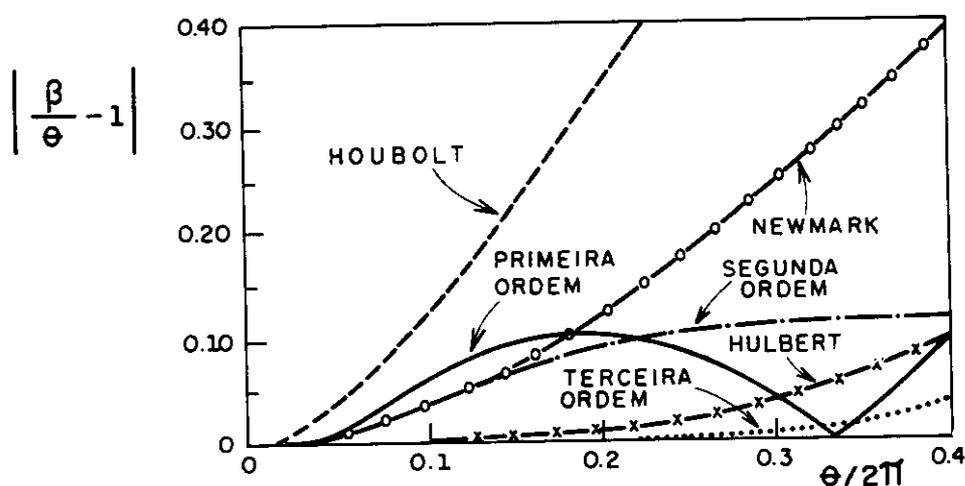


Fig. 5.3 - Alongamento dos operadores hermitianos de Laier (1995) comparado aos métodos de Houbolt, Hulbert e Newmark

Novamente LAIER (1995) retoma o estudo mostrando métodos dessa família cujas propriedades espectrais, para primeira e segunda ordens, são intermediárias entre as dos processos de HOUBOLT (1950) e HULBERT (1992) o que é mostrado às figuras 5.2 e 5.3.

O algoritmo de primeira ordem apresentado é constituído pelos operadores explicitados pelas relações:

$$\begin{aligned} 2x_i - 2x_{i+1} + 2\Delta t \overset{\bullet}{x}_{i+1} - \Delta t^2 \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1} &= 0 - \frac{\Delta t^3}{3} x_i^{(3)} + \dots \\ 2\Delta t \overset{\bullet}{x}_i - 2\Delta t \overset{\bullet}{x}_{i+1} + 2\Delta t^2 \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1} - \Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} &= 0 - \frac{\Delta t^4}{3} x_i^{(4)} + \dots \end{aligned} \quad (5.53)$$

e o de segunda:

$$\begin{aligned} 6x_i + 2\Delta t \overset{\bullet}{x}_i - 6x_{i+1} + 4\Delta t \overset{\bullet}{x}_{i+1} - \Delta t^2 \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1} &= 0 - \frac{1}{12} \Delta t^4 x_i^{(4)} + \dots \\ 2\Delta t \overset{\bullet}{x}_i - 2\Delta t \overset{\bullet}{x}_{i+1} + 2\Delta t^2 \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1} - \Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} &= 0 - \frac{1}{3} \Delta t^4 x_i^{(4)} + \dots \end{aligned} \quad (5.54)$$

enquanto para erro de truncamento local em terceira ordem é proposta a utilização dos operadores:

$$\begin{aligned} -24x_i - 24x_{i+1} - 18\Delta t \overset{\bullet}{x}_{i+1} + 6\Delta t^2 \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1} - \Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} &= 0 - \frac{1}{20} \Delta t^5 x_i^{(5)} + \dots \\ 6\Delta t \overset{\bullet}{x}_i - 6\Delta t \overset{\bullet}{x}_{i+1} + 2\Delta t^2 \overset{\bullet\bullet}{x}_i + 4\Delta t^2 \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1} - \Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} &= 0 - \frac{1}{12} \Delta t^5 x_i^{(5)} + \dots \end{aligned}$$

.... (5.55)

cuja avaliação numa análise espectral apresentada no trabalho referido demonstra o alto grau de precisão alcançado, mostrando-se competitivo comparativamente aos algoritmos tradicionais, como as figuras apresentadas permitem concluir.

CAPÍTULO 6 - UMA FAMÍLIA PROPOSTA DE ALGORITMOS COM ANIQUILAMENTO ASSINTÓTICO

6.1. INTRODUÇÃO

Os algoritmos hermitianos de passo simples têm um grande potencial de utilização para a solução do problema de dinâmica estrutural, como se observa do estudo apresentado no capítulo anterior.

Apesar dessa consideração, entretanto, são escassos os trabalhos disponíveis na literatura relativos ao desenvolvimento de algoritmos decorrentes dessa abordagem, embora o relativamente grande número de pesquisas recentes divulgadas sobre os métodos diretos de integração indique a relevância do problema.

Na verdade, as únicas tentativas de sistematização na obtenção de algoritmos hermitianos para dinâmica estrutural parecem ser as de ARGYRIS, DUNE & ANGELOPOULOS (1973), ARGYRIS, VAZ & WILLAM (1978) e ARGYRIS & MLEJNEK (1991), aqui referidas.

No presente capítulo, descreve-se um caminho que permite a geração de algoritmos hermitianos de passo simples, com estabilidade incondicional, da ordem de precisão local que se queira, e com aniquilamento assintótico. A bifurcação é na origem, de modo que não se tem raízes espúrias, qualquer que seja o tamanho do passo adotado.

Não há parâmetros de ajuste nos operadores escolhidos para o desenvolvimento do método, embora haja a possibilidade, não testada, de introduzir-se tais parâmetros para acentuar alguma característica desejada para uma

aplicação específica do processo. Evidentemente, isto custaria uma ou mais ordens de precisão.

A potencialidade dos métodos resultantes é mostrada como tradicionalmente feito na literatura, por meio de análise espectral.

Os algoritmos de primeira a oitava ordem são deduzidos como exemplos e os gráficos das principais propriedades são mostrados, bem como um exemplo numérico comparado às respostas obtidos com o emprego de outros métodos tradicionais.

6.2. A ESCOLHA DOS OPERADORES

Visando gerar uma família de algoritmos que apresente aniquilamento assintótico observa-se que para tanto deve-se atender a (3.20) que determina:

$$\lim_{\omega\Delta t \rightarrow \infty} \rho(A) = 0$$

onde $\rho(A)$ é o raio espectral da matriz de amplificação $[A]$ do algoritmo. Pois bem, tal condição é atendida se:

$$\lim_{\omega\Delta t \rightarrow \infty} a_{ij} = 0 \quad i, j = 1, 2 \quad (6.1)$$

ou seja, se todos os elementos da matriz de amplificação tenderem a se anular com o aumento indefinido do passo.

Tendo em mente (5.50) e (5.51), considere-se que:

$$\begin{aligned} [A] &= -[M]^{-1}[N]; \\ [M]^{-1} &= \frac{1}{\det[M]} \text{adj}[M] \end{aligned} \quad (6.2)$$

denotando-se ainda:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}; \quad [N] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

e efetuando-se as operações necessárias com os valores expressos acima, pode-se explicitar os elementos da matriz de amplificação através de:

$$[A] = -\frac{1}{(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})} \begin{bmatrix} (m_{22}n_{11} - m_{12}n_{21}) & (m_{22}n_{12} - m_{12}n_{22}) \\ (m_{11}n_{21} - m_{21}n_{11}) & (m_{11}n_{22} - m_{21}n_{12}) \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

com a expressão do resíduo dada analogamente por:

$$\{R(\Delta t^{r+2})\} = \frac{1}{(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})} \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R^1(\Delta t^{r_1+2}) \\ R^2(\Delta t^{r_2+2}) \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

também em função dos coeficientes dos deslocamentos e derivadas envolvidos.

As relações acima são oriundas da utilização de um par de operadores expressos em sua forma geral por (5.6).

Observando-se também (5.50) pode-se afirmar que os m_{ij} são funções dos coeficientes do deslocamento e suas derivadas no instante t_i , enquanto os n_{ij} estão associados ao instante t_{i+1} .

Se levada (5.6) a (5.47) pode-se também reescrever cada um dos operadores para vibrações livres não-amortecidas, explicitando-se os primeiros termos da somatória como:

$$a_0x_i + b_0x_{i+1} + a_1\Delta t \dot{x}_i + b_1\Delta t \dot{x}_{i+1} - \omega^2\Delta t^2 a_2x_i - \omega^2\Delta t^2 b_2x_{i+1} + \\ -\omega^2\Delta t^2 a_3 \left(\Delta t \dot{x}_i \right) - \omega^2\Delta t^2 b_3 \left(\Delta t \dot{x}_{i+1} \right) + \omega^4\Delta t^4 a_4x_i + \omega^4\Delta t^4 b_4x_{i+1} + \dots \approx 0$$

ou agrupando-se os termos correspondentes ao instante de referência e ao seguinte, Δt à sua frente:

$$\left(a_0 - \omega^2\Delta t^2 a_2 + \omega^4\Delta t^4 a_4 - \dots \right) x_i + \left(a_1 - \omega^2\Delta t^2 a_3 + \dots \right) \Delta t \dot{x}_i + \\ + \left(b_0 - \omega^2\Delta t^2 b_2 + \dots \right) x_{i+1} + \left(b_1 - \omega^2\Delta t^2 b_3 + \dots \right) \Delta t \dot{x}_{i+1} \approx 0 \quad (6.6)$$

de modo que se este for o primeiro operador considerado, vale também, levando-se em conta as expressões anteriormente deduzidas, a seguinte relação para exprimi-lo:

$$n_{11}x_i + n_{12}\Delta t \dot{x}_i + m_{11}x_{i+1} + m_{12}\Delta t \dot{x}_{i+1} \approx 0 \quad (6.6a)$$

e é fácil ver que a expressão resultante para o segundo é análoga, de aspecto:

$$n_{21}x_i + n_{22}\Delta t \dot{x}_i + m_{21}x_{i+1} + m_{22}\Delta t \dot{x}_{i+1} \approx 0 \quad (6.7)$$

desde que se omitam as parcelas referentes ao resíduo.

Objetivando atender a (6.1) e considerando-se (6.4) bem como as (6.6) e (6.7), verifica-se a conveniência de se tomar a sub-família de operadores representados pelas relações de aspecto:

$$\mathcal{H}_{m,n} = \sum_{j=0}^n (\Delta t)^j a_j x_i^{(j)} + \sum_{k=0}^m (\Delta t)^k b_k x_{i+1}^{(k)} + R_i(\Delta t^{r+2}) = 0 \quad (6.8)$$

dada a possibilidade de se tomar valores independentes de \underline{m} e \underline{n} que garantam a m_{ij} ordem em Δt grande o suficiente quando comparada à de n_{ij} para conduzir ao desejado aniquilamento.

O número de coeficientes a determinar para tais algoritmos é $m + n + 2$ e fixado um deles não-nulo e arbitrário para relacioná-lo aos demais tem-se como número de equações necessárias $m + n + 1$.

Este último número exprime também a ordem de anulação do erro de truncamento nos deslocamentos, isto é:

$$r + 2 = m + n + 1 \Rightarrow r = m + n - 1 \quad (6.9)$$

sendo \underline{r} a ordem de precisão local nos esforços e acelerações.

Pode-se ainda como já discutido neste trabalho, sacrificar a precisão em favor de um ou mais parâmetros de ajuste visando alcançar ou otimizar alguma propriedade do algoritmo. Então passa a valer:

$$r = m + n - 1 - p \quad (6.10)$$

sendo p o número de parâmetros livres mantidos na expressão do operador em questão.

Para a montagem de um algoritmo que respeite às condições acima indicadas como desejáveis, um critério possível utilizado na escolha do segundo operador é que possua como expressão a derivada do primeiro com relação ao tempo. Com isto, seus coeficientes são os mesmos e conseqüentemente é de esperar que suas características sejam mantidas, tal como a ordem relativa (em Δt) dos coeficientes de m_{ij} e n_{ij} , que são um indicativo de se o algoritmo é mais ou menos "conservador", ou seja, se a situação presente do movimento é mais ou menos ponderada na estimativa da situação futura.

Dado então o operador:

$$\mathcal{M}_{m,n}^1 = \sum_{j=0}^n (\Delta t)^j a_j x_i^{(j)} + \sum_{k=0}^m (\Delta t)^k b_k x_{i+1}^{(k)} + R^1 (\Delta t^{r_1+2}) = 0 \quad (6.11)$$

seja o segundo, atendendo ao proposto acima, definido por:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{m+1,n+1}^2 &= \frac{d(\mathcal{M}_{m,n}^1)}{dt} = \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} (\Delta t)^j c_j x_i^{(j)} + \sum_{k=1}^{m+1} (\Delta t)^k d_k x_{i+1}^{(k)} + R^2 (\Delta t^{r_1+3}) = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde valem as relações decorrentes da derivação $c_j = a_{j-1}$ e $d_k = b_{k-1}$ para definir os coeficientes da combinação linear, resultando portanto para o segundo algoritmo o aspecto:

$$\mathcal{M}_{m+1,n+1}^2 = \sum_{j=1}^{n+1} (\Delta t)^{(j)} a_{j-1} x_i^{(j)} + \sum_{k=1}^{m+1} (\Delta t)^k b_{k-1} x_{i+1}^{(k)} + R^2 (\Delta t^{r_1+3}) = 0$$

..... (6.13)

A substituição da equação do movimento, sempre para vibrações livres não-amortecidas, em (6.11) e (6.13), à

semelhança de (6.6) mas tomando-se $\theta = \omega\Delta t$ como tradicionalmente feito na literatura, fornece então a forma final do algoritmo dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{m,n}^1 &= x_{i+1}[b_0 - \theta^2 b_2 + \theta^4 b_4 - \dots] + \Delta t \dot{x}_{i+1}[b_1 - \theta^2 b_3 + \theta^4 b_5 - \dots] + \\ &+ x_i[a_0 - \theta^2 a_2 + \theta^4 a_4 - \dots] + \Delta t \dot{x}_i[a_1 - \theta^2 a_3 + \theta^4 a_5 - \dots] + R_i^1 = 0 \\ \mathcal{X}_{m+1,n+1}^2 &= x_{i+1}[-\theta^2 b_1 + \theta^4 b_3 - \theta^6 b_5 + \dots] + \Delta t \dot{x}_{i+1}[b_0 - \theta^2 b_2 + \theta^4 b_4 - \dots] + \\ &+ x_i[-\theta^2 a_1 + \theta^4 a_3 - \theta^6 a_5 + \dots] + \Delta t \dot{x}_i[a_0 - \theta^2 a_2 + \theta^4 a_4 - \dots] + R_i^2 = 0 \\ &\dots (6.14) \end{aligned}$$

e de uma comparação com (6.6a) e (6.7) pode-se escrever que valem para os elementos das matrizes envolvidas as expressões que seguem:

$$\begin{aligned} m_{11} &= b_0 - \theta^2 b_2 + \theta^4 b_4 - \theta^6 b_6 + \dots \\ m_{12} &= b_1 - \theta^2 b_3 + \theta^4 b_5 - \theta^6 b_7 + \dots \\ m_{21} &= -\theta^2 m_{12} \\ m_{22} &= m_{11} \\ n_{11} &= a_0 - \theta^2 a_2 + \theta^4 a_4 - \theta^6 a_6 + \dots \\ n_{12} &= a_1 - \theta^2 a_3 + \theta^4 a_5 - \theta^6 a_7 + \dots \\ n_{21} &= -\theta^2 n_{12} \\ n_{22} &= n_{11} \end{aligned} \tag{6.15}$$

e considerando-se (6.3) para este caso particular tem-se para o determinante de [M] o valor:

$$\det[M] = m_{11}^2 + \theta^2 m_{12}^2 \tag{6.16}$$

completamente definido a partir dos b_k .

6.3. AS PROPRIEDADES ESPECTRAIS

Para os elementos da matriz de amplificação [A], levando-se em conta (6.6) e (6.7), valem as relações:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -\frac{m_{11}n_{11} + \theta^2 m_{12}n_{12}}{\det[M]} = a_{22} \\
 a_{12} &= -\frac{m_{11}n_{12} - m_{12}n_{11}}{\det[M]} \\
 a_{21} &= -\theta^2 a_{12}
 \end{aligned}
 \tag{6.17}$$

a serem utilizadas.

Com as informações acima deduzidas, a equação característica de [A] a ser considerada para uma análise espectral assume aspecto:

$$(a_{11} - \lambda)^2 + \theta^2 a_{12}^2 = 0$$

resultando o par de raízes complexas conjugadas dado por:

$$\lambda = a_{11} \pm i\theta a_{12}$$

e conseqüentemente com raio espectral expresso por:

$$\rho = |\lambda| = \sqrt{a_{11}^2 + \theta^2 a_{12}^2} = \sqrt{\frac{n_{11}^2 + \theta^2 n_{12}^2}{m_{11}^2 + \theta^2 m_{12}^2}} \tag{6.18}$$

resultado a que se pode chegar considerando-se as relações desenvolvidas anteriormente.

É interessante também notar aqui que a bifurcação de raízes nesses algoritmos está na origem. De fato, como se pode ver da expressão de λ , apenas no caso limite de θ nulo ocorre uma raiz real dupla, o que elimina a preocupação com raízes espúrias eventualmente ocorrentes em outros métodos ao se efetuar um estudo de desempenho do processo em questão.

Levando-se as (6.15) em (6.18) a expressão final para o raio espectral dessa família é da forma:

$$\rho = \sqrt{\frac{(a_0 - \theta^2 a_2 + \theta^4 a_4 - \theta^6 a_6 + \dots)^2 + \theta^2 (a_1 - \theta^2 a_3 + \theta^4 a_5 - \theta^6 a_7 + \dots)^2}{(b_0 - \theta^2 b_2 + \theta^4 b_4 - \theta^6 b_6 + \dots)^2 + \theta^2 (b_1 - \theta^2 b_3 + \theta^4 b_5 - \theta^6 b_7 + \dots)^2}}$$

.....(6.19)

que se constitui num excelente ponto de partida para o estudo das propriedades dos processos em pauta.

Algumas características são geneticamente inerentes, como a auto-iniciação. Tratando-se de algoritmos de passo simples, sempre apresentam tal propriedade.

As derivadas são aproximadas a partir de sua expansão em séries de Taylor, pelo que resultam métodos sempre consistentes. De fato, sua expressão é semelhante a (3.18), com r_1 e r_2 positivos.

A convergência está garantida uma vez que sempre ter-se-á $|a_0| = |b_0|$, respeitando assim à condição imposta por (3.19).

Da forma como se montou o algoritmo, da consideração de (6.19) verifica-se a existência do aniquilamento assintótico desde que se tome \underline{m} maior que \underline{n} , pois isto resultará em denominador com ordem em Δt superior à do numerador, atendendo-se assim também a (3.20).

A ordem do erro alcançada é dada pela expressão (6.9) ou (6.10), conforme discussão anteriormente feita neste trabalho, juntamente com a conceituação de erro adotada para a classificação dos processos numéricos estudados.

Um estudo da estabilidade pode ser feito de forma imediata, confrontando-se (3.17) com a expressão (6.19) resultante do algoritmo.

A comparação de desempenho com outros métodos é tradicionalmente feita medindo-se a dissipação numérica introduzida, dada por (3.50) bem como a distorção resultante, assim denominado o erro relativo no período, explicitado pela relação (3.51).

Apresentam-se a seguir os primeiros membros dessa família em ordem crescente de precisão alcançada e realiza-se um estudo inicial de seu potencial de utilização baseado nas

propriedades e características acima reputadas como importantes, bem como comparam-se os resultados obtidos com outros métodos já consagrados, com o objetivo de encaminhar-se estudos ulteriores de possibilidades de sua utilização prática.

6.4. OS ALGORITMOS DA FAMÍLIA

Explicitam-se a seguir os algoritmos de primeira a oitava ordem obtidos mediante o procedimento resultante das considerações anteriores.

6.4.1. Algoritmo de primeira ordem

A determinação do primeiro algoritmo assim obtido sem a inclusão de parâmetros livres de ajuste é feita a partir da consideração de (6.9) tomado \underline{r} unitário, o que fornece:

$$m + n = 2$$

e para aniquilamento assintótico, cumprindo-se ainda:

$$m > n$$

havendo assim como única possibilidade $m = 2$ e $n = 0$. O método correspondente, nos moldes de (6.11) é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{2,0}^1 &= x_i - x_{i+1} + \Delta t \dot{x}_{i+1} - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_{i+1} + R_i^1(\Delta t^3) = 0 \\ R_i^1(\Delta t^3) &= -\frac{1}{6} \Delta t^3 x_i^{(3)} + \dots \end{aligned} \quad (6.20)$$

combinado com a expressão decorrente de sua derivação relativamente ao tempo, conforme indicado por (6.14), de aspecto:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{3,1}^2 &= \Delta t \dot{x}_i - \Delta t \dot{x}_{i+1} + \Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} - \frac{\Delta t^3}{2} x_{i+1}^{(3)} + R_i^2(\Delta t^4) = 0 \\ R_i^2(\Delta t^4) &= -\frac{1}{6} \Delta t^4 x_i^{(4)} + \dots \end{aligned} \quad (6.21)$$

reproduzindo assim o método de primeira ordem apresentado por LAIER (1995) conforme (5.53), de características já comentadas.

Para atender-se à estabilidade incondicional, deve-se respeitar a:

$$|\rho(A)| \leq 1,0 \Rightarrow [\rho(A)]^2 \leq 1,0; \quad \forall \theta$$

De (6.19), substituindo-se os valores de a_k e b_k encontrados, resulta:

$$\rho^2 = \frac{(1)^2 + \theta^2(0)^2}{\left(-1 + \theta^2 \frac{1}{2}\right)^2 + \theta^2(1)^2} \leq 1,0 \Rightarrow \theta^4 \geq 0$$

o que é verdadeiro para qualquer valor assumido pelo parâmetro θ , ou seja, para qualquer tamanho do passo adotado, tratando-se portanto de um algoritmo incondicionalmente estável. Um estudo de seu desempenho numérico comparativo com o dos métodos de Newmark, Houbolt e Hulbert já referidos neste trabalho, pode ser feito a partir das figuras 5.2 e 5.3, pois este operador é exatamente o de primeira ordem já proposto por LAIER (1995) tratado aqui anteriormente. A matriz de amplificação é definida pela aplicação das (6.16) e (6.17), com os valores:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = -1, \quad b_1 = 1 \quad \text{e} \quad b_2 = -1/2$$

representando os coeficientes não-nulos presentes na combinação linear representativa das expressões em diferenças que reproduzem as derivadas no tempo presentes no problema.

6.4.2. Algoritmo de segunda ordem

As condições impostas levam nesse caso a que se tenham verificadas entre os índices dos termos extremos da somatória da expressão de diferenças as relações:

$$m + n = 3; \quad m > n$$

o que leva a duas possibilidades. Na primeira delas, tomado \underline{n} unitário e $m = 2$, o operador resultante é:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2,1}^1 &= -6x_i + 6x_{i+1} - 2\Delta t \overset{\bullet}{x}_i - 4\Delta t \overset{\bullet}{x}_{i+1} + \Delta t^2 \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1} + R_i^1(\Delta t^4) = 0 \\ R_i^1(\Delta t^4) &= \frac{1}{12} \Delta t^4 x_i^{(4)} + \dots \end{aligned} \quad (6.22)$$

já utilizado também por LAIER (1995) mas não conjuntamente com o outro operador obtido da forma anteriormente descrita, de aspecto:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{3,2}^2 &= -6\Delta t \overset{\bullet}{x}_i + 6\Delta t \overset{\bullet}{x}_{i+1} - 2\Delta t^2 \overset{\bullet\bullet}{x}_i - 4\Delta t^2 \overset{\bullet\bullet}{x}_{i+1} + \Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} + R_i^2(\Delta t^5) = 0 \\ R_i^2(\Delta t^5) &= \frac{1}{12} \Delta t^5 x_i^{(5)} + \dots \end{aligned} \quad \dots (6.23)$$

cuja verificação de estabilidade em (6.19) escrita com os a_k e b_k encontrados produz:

$$\rho^2 = \frac{(-6)^2 + \theta^2(-2)^2}{(6 - \theta^2)^2 + \theta^2(-4)(2)} \leq 1,0 \Rightarrow \theta^4 \geq 0$$

e esta exigência é atendida incondicionalmente para qualquer passo adotado.

A evolução das demais propriedades com o tamanho do passo é mostrada às figuras 5.6 a 5.8.

Sua matriz de amplificação define-se através das expressões (6.16) e (6.17) tomando-se:

$$a_0 = -6, b_0 = 6, a_1 = -2, b_1 = -4, b_2 = 1$$

que são os valores encontrados para os coeficientes da expressão em diferenças, já presentes em (6.22).

O outro operador possível é o correspondente a \underline{n} nulo e $m = 3$. Encontra-se a relação:

$$\mathcal{K}_{3,0}^1 = 6x_i - 6x_{i+1} + 6\Delta t \dot{x}_{i+1} - 3\Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} + \Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} + R_i^1(\Delta t^4) = 0$$

$$R_i^1(\Delta t^4) = \frac{1}{4} \Delta t^4 x_i^{(4)} + \dots$$

....(6.24)

a ser utilizado em conjunto com $\mathcal{K}_{4,1}^2$ para que o método resultante pertença à família em questão. Entretanto, ao se verificar a estabilidade nota-se a exigência de passos correspondentes a $\theta^2 \geq 3$ para a presença dessa propriedade. O presente trabalho não tenciona centrar interesse em processos condicionalmente estáveis, razão pela qual deixa-se de lado esse algoritmo.

Não se descarta entretanto a possibilidade de outras vantagens suplantarem esse "defeito" para utilização em problemas específicos, o que só poderia ser comprovado levando-se a efeito um estudo mais profundo da tentativa de implementação do processo ao caso particular de interesse do analista.

Há outros processos que apresentam comportamento similar, isto é, exigência de limitação do passo, de utilização relatada pela literatura, como já aqui referido.

Outro comentário pertinente refere-se ao fato de que o operador descrito por (6.24) não apresenta obstáculos *de per si* para seu emprego. Basta abandonar a exigência de resultar um método que pertença à família aqui apresentada para que haja inúmeras possibilidades de combinações com outros operadores. Aliás, seu potencial "genético" é bastante bom, dadas as condições que se procurou atender por ocasião da escolha dos coeficientes não-nulos da expressão de diferença considerados.

Uma possibilidade adicional de emprego de operadores desse tipo é a introdução, a partir de suas expressões básicas, de termos cujos coeficientes sejam parâmetros de ajuste que permitam restaurar a estabilidade incondicional.

Pelo dito acima, pretende-se concluir que o motivo do descarte de (6.24) é a impossibilidade de atendimento às hipóteses propostas no enunciado da família ora em apresentação.

6.4.3. Algoritmos de terceira ordem

A primeira possibilidade é a de tomar-se \underline{n} unitário e $m = 3$, gerando:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{3,1}^1 &= 24x_i - 24x_{i+1} + 6\Delta t \dot{x}_i + 18\Delta t \dot{x}_{i+1} + \\ &\quad - 6\Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} + \Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} + R_i^1(\Delta t^5) = 0 \\ R_i^1(\Delta t^5) &= \frac{1}{20} \Delta t^5 x_i^{(5)} + \dots \end{aligned} \quad (6.25)$$

a ser utilizado em conjunto com:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{4,2}^2 &= 24\Delta t \dot{x}_i - 24\Delta t \dot{x}_{i+1} + 6\Delta t^2 \ddot{x}_i + 18\Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} + \\ &\quad - 6\Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} + \Delta t^4 x_{i+1}^{(4)} + R_i^2(\Delta t^6) = 0 \\ R_i^2(\Delta t^6) &= \frac{1}{20} \Delta t^6 x_i^{(6)} + \dots \end{aligned} \quad (6.26)$$

e verifica-se estabilidade incondicional se feito um estudo análogo ao dos casos anteriores. Com os coeficientes:

$$a_0 = 24, \quad b_0 = -24, \quad a_1 = 6, \quad b_1 = 18, \quad b_2 = -6, \quad b_3 = 1$$

pode-se escrever a matriz de amplificação correspondente. Uma visualização de seu desempenho pode ser obtida da observação das figuras 5.6 a 5.8.

A combinação dos operadores:

$$\mathcal{H}_{4,0}^1 \times \mathcal{H}_{5,1}^2$$

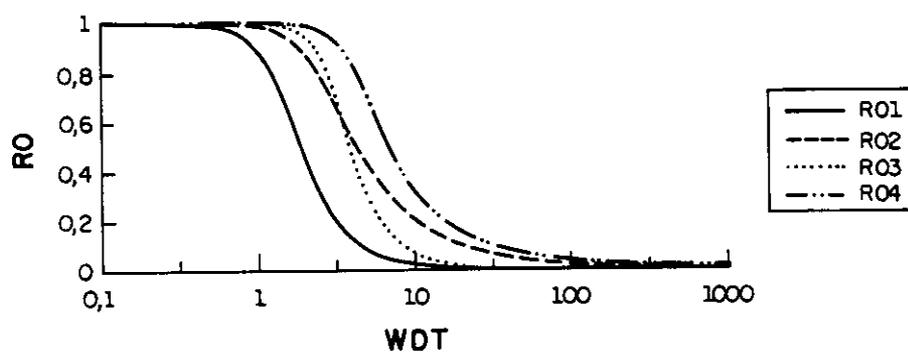


Fig. 6.1 - Raio espectral dos algoritmos hermitianos de primeira a quarta ordem

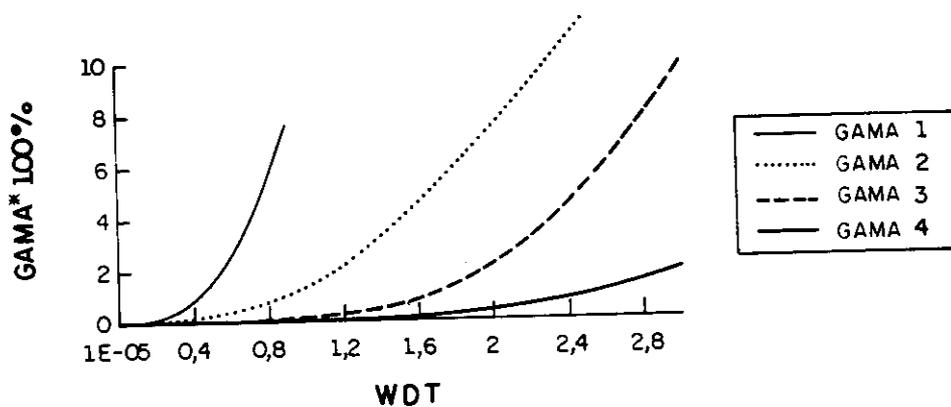


Fig. 6.2 - Amortecimento numérico dos algoritmos hermitianos de primeira a quarta ordem

definidos pelas relações:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{4,0}^1 &= 24x_i - 24x_{i+1} + 24\Delta t \dot{x}_{i+1} - 12\Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} + \\
 &\quad + 4\Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} - \Delta t^4 x_{i+1}^{(4)} + R_i^1(\Delta t^5) = 0 \\
 R_i^1(\Delta t^5) &= -\frac{1}{5} \Delta t^5 x_i^{(5)} + \dots
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

e sua derivada resulta estável apenas para $\theta^2 \geq 8$ esgotando-se assim os membros de terceira ordem da família de métodos proposta.

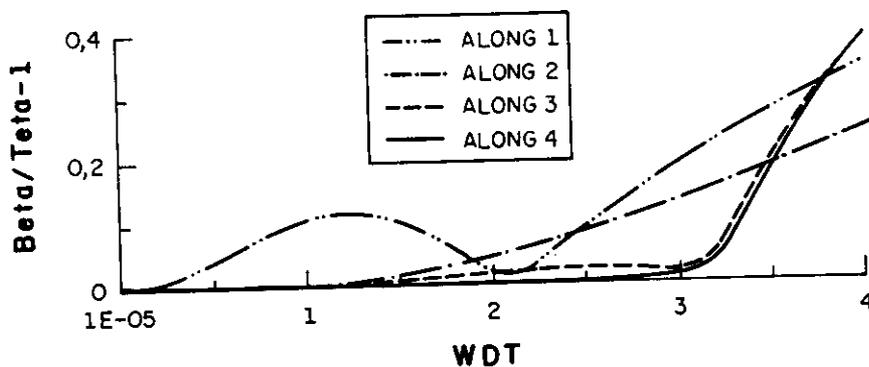


Fig. 6.3 - Erro relativo do período nos algoritmos hermitianos de primeira a quarta ordem

6.4.4. Algoritmos de quarta ordem

Um dos operadores possíveis é o dado pela expressão de diferenças escrita:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{3,2}^1 &= 60x_i - 60x_{i+1} + 24\Delta t \dot{x}_i + 36\Delta t \dot{x}_{i+1} + 3\Delta t^2 \ddot{x}_i + \\
 &\quad - 9\Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} + \Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} + R_i^1(\Delta t^6) = 0 \\
 R_i^1(\Delta t^6) &= -\frac{1}{24} \Delta t^6 x_i^{(6)} + \dots
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

para ser utilizado juntamente com $\mathcal{K}_{4,3}^2$, sendo os coeficientes de ambos expressos, como se vê da relação anterior, por:

$$\begin{array}{ll} a_0 = 60 & b_0 = -60 \\ a_1 = 24 & b_1 = 36 \\ a_2 = 3 & b_2 = -9 \\ & b_3 = 1 \end{array}$$

sendo o processo resultante incondicionalmente estável. Uma comparação com os algoritmos de ordens inferiores é feita nas figuras apresentadas, mostrando-se o presente método como uma alternativa interessante quando há uma exigência maior de precisão na solução do problema.

Quanto a utilizar-se a combinação dos operadores:

$$\mathcal{K}_{4,1}^1 \times \mathcal{K}_{5,2}^2$$

com sua definição dada na forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{4,1}^1 &= 120x_i - 120x_{i+1} + 24\Delta t \dot{x}_i + 96\Delta t \dot{x}_{i+1} - 36\Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} + \\ &+ 8\Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} - \Delta t^4 x_{i+1}^{(4)} + R_i^1(\Delta t^6) = 0 \\ R_i^1(\Delta t^6) &= -\frac{1}{30} \Delta t^6 x_i^{(6)} + \dots \end{aligned} \quad (6.29)$$

o método resultante exige, para a estabilidade, tomar-se valores de θ^2 superiores a 8, violando uma das condições propostas para os processos em análise. Problema análogo ocorre com a última combinação possível, expressa por:

$$\mathcal{K}_{5,0}^1 \times \mathcal{K}_{6,1}^2$$

esgotando-se assim as possibilidades de precisão em quarta ordem.

6.4.5. Algoritmos de quinta ordem

Respeitando-se sempre as premissas estabelecidas no início deste capítulo, considere-se o operador:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{4,2}^1 &= 360x_i - 360x_{i+1} + 120\Delta t \dot{x}_i + 240\Delta t \dot{x}_{i+1} + 12\Delta t^2 \ddot{x}_i + \\ &\quad - 72\Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} + 12\Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} - \Delta t^4 x_{i+1}^{(4)} + R_i^1(\Delta t^7) = 0 \\ R_i^1(\Delta t^7) &= -\frac{1}{210} \Delta t^7 x_i^{(7)} + \dots \end{aligned}$$

(6.30)

combinado com aquele obtido da sua derivação no tempo, aqui denotado por $\mathcal{M}_{5,3}^2$ tomando-se para os coeficientes de ambos, como indicado acima, os números:

$$\begin{array}{ll} a_0 = 360 & b_0 = -360 \\ a_1 = 120 & b_1 = 240 \\ a_2 = 12 & b_2 = -72 \\ & b_3 = 12 \\ & b_4 = -1 \end{array}$$

e considere-se como anteriormente um estudo de estabilidade em (6.19). O resultado encontrado é que se trata de um algoritmo incondicionalmente estável, cujo desempenho pode ser visto nas figuras 5.7 a 5.9.

Os operadores denotados por:

$$\mathcal{M}_{5,1}^1 \times \mathcal{M}_{6,2}^2$$

resultam num método estável apenas para valores de θ^2 inferiores a 20, não apresentando portanto aqui interesse.

A possibilidade que restaria com tal ordem de precisão seria a da combinação das expressões em diferenças denominada, conforme a convenção estabelecida, por:

$$\mathcal{M}_{6,0}^1 \times \mathcal{M}_{7,1}^2$$

que apresenta porém restrição análoga relativamente à estabilidade.

6.4.6. Algoritmos de sexta ordem

Neste caso, a primeira opção que se apresenta é a descrita por:

$$\mathcal{M}_{4,3}^1 \times \mathcal{M}_{5,4}^2$$

cujo operador básico escreve-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{4,3}^1 &= 840x_i - 840x_{i+1} + 360\Delta t \dot{x}_i + 480\Delta t \dot{x}_{i+1} + 60\Delta t^2 \ddot{x}_i + \\ &\quad - 120\Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} + 4\Delta t^3 x_i^{(3)} + 16\Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} - \Delta t^4 x_{i+1}^{(4)} + R_i^1(\Delta t^8) = 0 \\ R_i^1(\Delta t^8) &= \frac{1}{1680} \Delta t^8 x_i^{(8)} + \dots \end{aligned}$$

....(6.31)

e para a montagem da matriz de amplificação, tomam-se os coeficientes:

$$\begin{array}{ll} a_0 = 840 & b_0 = -840 \\ a_1 = 360 & b_1 = 480 \\ a_2 = 60 & b_2 = -120 \\ a_3 = 4 & b_3 = 16 \\ & b_4 = -1 \end{array}$$

para emprego nas expressões já deduzidas dos seus elementos.

O algoritmo definido é incondicionalmente estável e seu desempenho numérico do ponto de vista da análise espectral é mostrado às figuras 5.9 a 5.11, de forma análoga aos anteriormente deduzidos.

Um estudo de:

$$\mathcal{H}_{5,2}^1 \times \mathcal{H}_{6,3}^2$$

$$\mathcal{H}_{6,1}^1 \times \mathcal{H}_{7,2}^2$$

$$\mathcal{H}_{7,0}^1 \times \mathcal{H}_{8,1}^2$$

mostra que os algoritmos resultantes apresentam restrições quanto à presença da estabilidade, limitando o tamanho do passo que pode ser utilizado para ter essa característica, o que leva a preterí-los no cotejo com aqueles métodos que oferecem essa propriedade para qualquer valor de θ , isto é, qualquer passo.

Com as considerações acima, esgota-se o estudo dos processos de sexta ordem.

6.4.7. Algoritmos de sétima ordem

O único membro incondicionalmente estável da família em questão que apresenta esta ordem de precisão local nos esforços é o que decorre da combinação:

$$\mathcal{H}_{5,3}^1 \times \mathcal{H}_{6,4}^2$$

cujo operador básico é dado por uma expressão da forma:

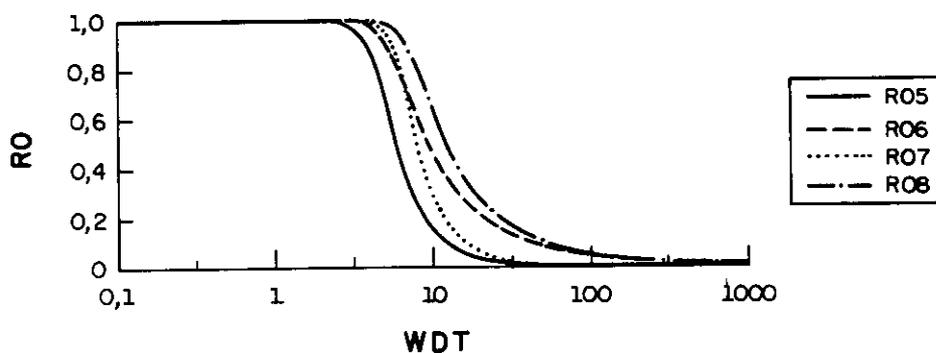


Fig. 6.4 - Raio espectral x passo dos algoritmos hermitianos de quinta a oitava ordem

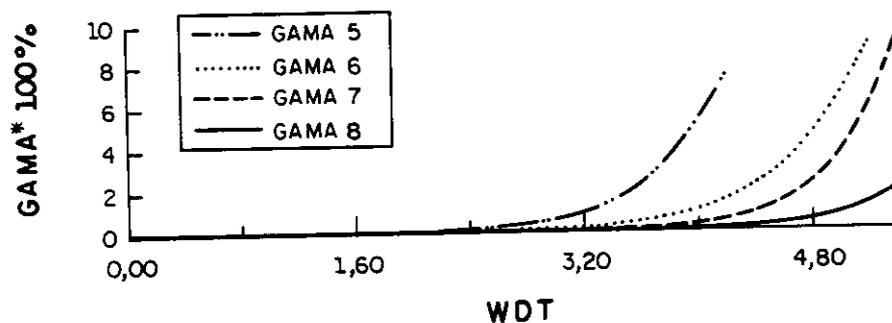


Fig. 6.5 - Dissipação x passo nos algoritmos hermitianos de quinta a oitava ordem

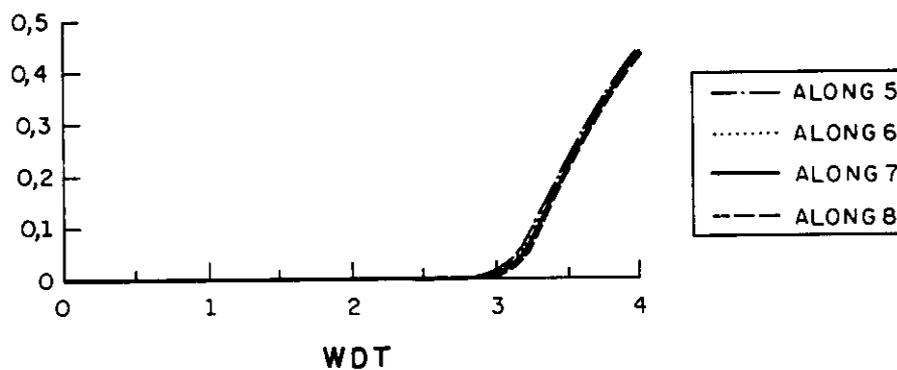


Fig. 6.6 - Dispersão x passo nos algoritmos hermitianos de quinta a oitava ordem

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{5,3}^1 = & 6720x_i - 6720x_{i+1} + 2520\Delta t \dot{x}_i + 4200\Delta t \dot{x}_{i+1} + \\ & + 360\Delta t^2 \ddot{x}_i - 1200\Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} + 20\Delta t^3 x_i^{(3)} + 200\Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} + \\ & - 20\Delta t^4 x_{i+1}^{(4)} + \Delta t^5 x_{i+1}^{(5)} + R_i^1(\Delta t^9) = 0 \end{aligned}$$

$$R_i^1(\Delta t^9) = \frac{1}{3024} \Delta t^9 x_i^{(9)} + \dots \quad (6.32)$$

onde os coeficientes da combinação linear evidenciados têm os valores seguintes, utilizados na montagem da matriz de amplificação com vistas à análise espectral:

$$\begin{array}{ll}
 a_0 = 6720 & b_0 = -6720 \\
 a_1 = 2520 & b_1 = 4200 \\
 a_2 = 360 & b_2 = -1200 \\
 a_3 = 20 & b_3 = 200 \\
 & b_4 = -20 \\
 & b_5 = 1
 \end{array}$$

descartando-se, como já comentado e feito anteriormente as combinações indicadas por:

$$\begin{array}{l}
 \mathcal{H}_{6,2}^1 \times \mathcal{H}_{7,3}^2 \\
 \mathcal{H}_{7,1}^1 \times \mathcal{H}_{8,2}^2 \\
 \mathcal{H}_{8,0}^1 \times \mathcal{H}_{9,1}^2
 \end{array}$$

devido ao condicionamento da estabilidade ao tamanho do passo empregado. A confirmação disso pode ser feita repetindo-se procedimento aqui discutido.

Pode-se visualizar o potencial de utilização e limitações do algoritmo acima com o auxílio das figuras 5.7 a 5.9 onde os principais parâmetros utilizados na análise espectral para qualificar um método são apresentados.

6.4.8. Algoritmos de oitava ordem

Apenas um dos operadores de oitava ordem da família em estudo gera um método com o requisito exigido de estabilidade incondicional, qual seja o definido pela expressão em diferenças:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{5,4}^1 = & 15120x_i - 15120x_{i+1} + 6720\Delta t \dot{x}_i + 8400\Delta t \dot{x}_{i+1} + \\ & + 1260\Delta t^2 \ddot{x}_i - 2100\Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} + 120\Delta t^3 x_i^{(3)} + 300\Delta t^3 x_{i+1}^{(3)} + \\ & + 5\Delta t^4 x_i^{(4)} - 25\Delta t^4 x_{i+1}^{(4)} + \Delta t^5 x_{i+1}^{(5)} + R_i^1(\Delta t^{10}) = 0 \end{aligned}$$

$$R_i^1(\Delta t^{10}) = \frac{1}{30240} \Delta t^{10} x_i^{(10)} + \dots$$

.... (6.33)

a ser utilizado em conjunção com $\mathcal{M}_{6,5}^2$ tomados os valores de a_k e b_k empregados acima, isto é:

$a_0 = 15120$	$b_0 = -15120$
$a_1 = 6720$	$b_1 = 8400$
$a_2 = 1260$	$b_2 = -2100$
$a_3 = 120$	$b_3 = 300$
$a_4 = 5$	$b_4 = -25$
	$b_5 = 1$

e às figuras 5.7 a 5.9 mostra-se a evolução do raio espectral, dissipação e dispersão do algoritmo, ao lado dos referentes aos de ordens inferiores.

6.4.9. Algoritmos de ordens superiores

Os algoritmos descritos acima têm lei de formação igual e geral, estabelecida neste capítulo. Nada há a indicar que não se possa obter membros de ordens superiores às aqui apresentadas, e com as mesmas características, adotando-se o mesmo critério para descartar os "indesejáveis". Entretanto, o objetivo central ao se explicitar os primeiros métodos resultantes é apenas a geração dos gráficos das principais propriedades, a fim de compará-los com processos já conhecidos e assim indicar seu mérito relativo a eles de maneira mais evidente.

Como não se tem um fim específico em vista, ou seja, a solução de um problema determinado, os algoritmos até

oitava ordem são mais do que suficientes para caracterizar a família proposta e indicar suas principais características.

6.5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Considere-se o problema de vibrações livres não-amortecidas de um sistema de um grau de liberdade já tratado em AUSTIN (1993), de massa $m = 1$, rigidez $k = 16$, sujeito às condições iniciais de deslocamento unitário e velocidade nula. Sua solução analítica nos deslocamentos é dada pela expressão $x(t) = \cos(4t)$. Seja a determinação do deslocamento para o instante $t = 0,03s$.

A tabela 6.1 mostra o valor apresentado por alguns métodos, bem como o passo utilizado para seu cálculo. Nesta tabela, o algoritmo de Newmark foi considerado com os parâmetros de valores $\gamma_N = 0$ e $\beta_N = 1/4$. Os cálculos foram feitos com doze algoritmos significativos, apenas para efeito

Tabela 6.1. Comparação de deslocamentos e velocidades: $m = 1$, $k = 16$, $c = 0$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, $p(t)=0$, $t = 0,03s$

MÉTODO	PASSO	DESLOCAMENTO	VELOCIDADE
Exato	-----	0,99280863585	-0,47884882916
Newmark	0,002	0,99327166641	-0,46295394093
Austin (ord.2)	0,03	0,99282582702	-0,47827819849
Austin (ord.8)	0,00375	0,99280863585	-0,47884882916
Hermit (ord.1)	0,002	0,99280847506	-0,47885390859
Hermit (ord.2)	0,002	0,99280863501	-0,47884882874
Hermit (ord.3)	0,002	0,99280863586	-0,47884882916
Hermit (ord.3)	0,005	0,99280863585	-0,47884882932
Hermit (ord.4)	0,01	0,99280863586	-0,47884882916
Hermit (ord.4)	0,03	0,99280863544	-0,47884882892
Hermit (ord.5)	0,03	0,99280863585	-0,47884882917

de comparação. Há que levar-se em conta que os resultados de Austin referem-se a um método de extrapolação e são gerados a

partir da montagem de uma tabela, como já descrito nesse trabalho, de modo que a comparação de trabalho numérico envolvido não é função direta apenas do passo e da ordem de precisão local.

Observa-se o ganho de qualidade na resposta com o aumento da ordem de precisão, permitindo a utilização de passos maiores. Em termos absolutos, para movimentos transientes correspondentes a pequenos intervalos de tempo como o caso em pauta, já os primeiros algoritmos mostram bons resultados, suficientes para boa parte dos problemas usuais.

Para as condições anteriores, foram efetuados os cálculos para o instante $t = 100\pi$ segundos, com o objetivo de analisar o comportamento dos algoritmos hermitianos após intervalos de tempo maiores. Os resultados obtidos estão arranjados na tabela 6.2.

Outro aspecto de interesse é a verificação da possibilidade de reduzir o número de operações a realizar ao aplicar o método através da consideração de passos maiores, o que é possível ao explorar-se a precisão maior que um determinado processo apresente. Assim é que o confronto

Tabela 6.2. Comparação de deslocamentos e velocidades: $m = 1$,

$k = 16$, $c = 0$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, $p(t) = 0$, $t = 100\pi$ s, nos algoritmos hermitianos com aniquilamento assintótico, para $\Delta t/T = 1/8$

ORDEM	DESLOCAMENTO	VELOCIDADE
Exato	1,00000000000	0,00000000000
1	0,00000000000	0,00000000000
2	-0,00005586535	0,00150442670
3	0,44520584086	-2,31735194457
4	0,95096985749	0,02604170526
5	0,99912396763	-0,01485548119
6	0,99983995115	0,00006420927
7	0,99999844780	-0,00003465233
8	0,99999969460	0,00000052727

direto entre dois algoritmos não passa apenas pela precisão obtida nos resultados mas também pelo tempo demandado para obtê-la.

As conclusões relativamente a esse problema são dificultadas por envolverem a modelagem da solicitação, que também afeta o tempo de processamento principalmente nos algoritmos de ordens superiores que se utilizam de derivadas da equação de equilíbrio para a determinação do sistema de equações, particularizando assim o estudo. Além disso, podem ser afetadas ao se utilizar hardware diferente, sendo que até o software desenvolvido a partir do algoritmo escolhido interfere com o estudo.

Não obstante esses comentários e considerações, a tabela 6.3 fornece uma indicação da eficiência dos algoritmos comparados sob esse ponto de vista. Foram tomados para o mesmo problema já tratado e para as várias ordens explicitadas de algoritmos hermitianos passos que corresponderam a resposta com aproximadamente a mesma precisão. Assim, com todas as ressalvas já feitas, é lícito esperar que haja relação entre o número de passos empregado e o tempo de processamento requerido.

No caso concreto considerado, há uma proporcionalidade bem nítida entre o número de passos e o tempo necessário para os cálculos, pois trata-se de vibrações livres e o equipamento utilizado foi sempre o mesmo. Não parece haver sentido, entretanto, em quantificar esse tempo, válido para uma situação muito particular. Outro fato a lembrar é que a precisão da resposta é "aproximadamente" a mesma, e para um intervalo específico de tempo decorrido entre o início do movimento e o de interesse.

Fica mais evidente com esses resultados, se observada a coluna das velocidades, um comentário já feito por ocasião da análise espectral desse conjunto de algoritmos, qual seja o fato deles estarem arranjados em duas sub-famílias de métodos de comportamento similar: a sub-família dos algoritmos de ordem par e outra formada por aqueles de ordem de precisão local ímpar.

Tabela 6.3. Comparação entre o tamanho do passo necessário e a ordem do algoritmo hermitiano utilizado para obtenção de precisão equivalente: $m = 1$, $k = 16$, $c = 0$, $t = 5\pi$ s,

$$x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$$

ORDEM	$\Delta t/T$	N. passos	Deslocamento	Velocidade
Exato	----	-----	1,000000000000	0,000000000000
1	1/160	1600	0,99939426836	-0,06453300293
2	1/80	800	0,99957759760	0,00003539578
3	1/16	160	0,99949098304	-0,01219008208
4	1/12	120	0,99966224623	0,000121871920
5	1/6	60	0,99968074290	-0,00401897360
6	1/5	50	0,99979355019	0,00013371470
7	1/3	30	0,99953463561	-0,00359837162
8	2/5	25	0,99954911547	0,00047476332

Outra observação cabível diz respeito ao fato de que eleita uma variável de controle para a precisão, e no caso foi o deslocamento, isto não significa que as demais vão tem comportamento similar. De fato, na tabela 6.3 observa-se uma grande disparidade nos resultados correspondentes à velocidade e o mesmo pode acontecer relativamente à aceleração. Por tudo isso, a referida tabela deve ser vista como apenas ilustrativa, devendo-se ver com reservas qualquer tentativa de se tirar conclusões mais definitivas dela.

A figura 6.7 mostra o esquema estrutural de um pórtico de dois andares cujas vigas têm rigidez igual e unitária. Não há amortecimento físico no problema e as condições iniciais correspondem a deslocamento e velocidade nulas para ambos os graus de liberdade, numerados conforme indicado na figura. A massa do sistema é representada por uma unidade concentrada ao nível de cada andar.

Este esquema é utilizado em um exemplo apresentado por WARBURTON (1976) porém sob outra solicitação. Nas condições descritas, as matrizes de massa e rigidez são dadas respectivamente por:

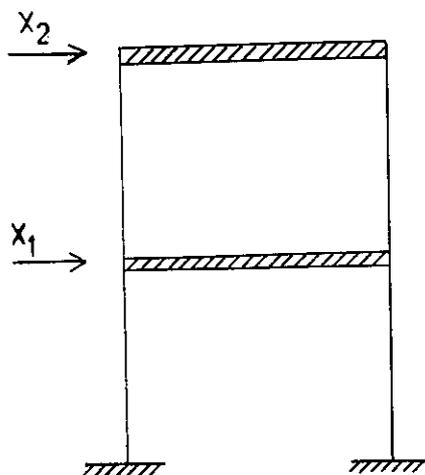


Figura 6.7 - Esquema estrutural para o segundo exemplo

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [K] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e conforme mostrado na referência citada, de acordo com a nomenclatura da expressão (2.17) deste trabalho, tem-se:

$$\omega_1^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cong 0,382 \quad ; \quad \{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 0,52157 \\ 0,8506 \end{Bmatrix} \quad ; \quad T_1 \cong 10,1664s$$

$$\omega_2^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cong 2,618 \quad ; \quad \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} -0,8506 \\ 0,5257 \end{Bmatrix} \quad ; \quad T_2 \cong 3,8832s.$$

Os cálculos de deslocamentos a seguir efetuados, sempre segundo as direções mostradas na figura, correspondem à solicitação dada por:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 10,0 \\ -8,4 \end{Bmatrix}$$

e a relação entre as componentes desse vetor foi escolhida de forma que as amplitudes das vibrações segundo os dois modos se equivalham.

A expressão (2.21) para a situação proposta assume o aspecto:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ y \end{Bmatrix} + [\Omega^2]\{y\} = [\Phi]^T\{P(t)\}$$

e substituindo-se os valores numéricos correspondentes:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,382 & 0 \\ 0 & 2,618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5257 & 0,8506 \\ -0,8506 & 0,5257 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10,0 \\ -8,4 \end{Bmatrix}$$

levando às soluções dadas segundo os modos por:

$$y_1 = 4,9425(\cos 0,6181t - 1)$$

$$y_2 = 4,9358(\cos 1,6180t - 1).$$

Quanto à solução estática, isto é, desprezando-se o efeito das acelerações, resta a considerarem-se as relações:

$$[\Omega^2]\{y\} = [\Phi]^T\{P(t)\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} y_{1,ST} \\ y_{2,ST} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4,94 \\ -4,94 \end{Bmatrix}$$

vetor que fornece os deslocamentos segundo os modos de vibrações da estrutura. Já em relação ao sistema de coordenadas proposto, vale:

$$\{x\} = [\Phi]\{y\}$$

de forma que após o aniquilamento do segundo modo, pode-se escrever:

$$\{x_{AN}\} = \begin{Bmatrix} x_{1,AN} \\ x_{2,AN} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5257 & -0,8506 \\ 0,8506 & 0,5257 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_{2,ST} \end{Bmatrix}$$

expressão que fornece os deslocamentos quando se considera a contribuição do primeiro modo e aniquilou-se completamente a influência do segundo. Pode-se dizer que esta é a resposta nos deslocamentos após a "filtragem" completa do segundo modo de vibração. Num problema de múltiplos graus de liberdade, raciocínio análogo é aplicável, relativamente aos modos

inferiores e superiores, assim denominados a partir de sua posição relativamente à frequência de corte ou "filtragem" pretendida. A experiência e sensibilidade do analista e natureza do problema enfrentado são fatores que envolvem a determinação de uma adequada frequência de corte na observação de um movimento através de um método numérico direto que apresente aniquilamento assintótico.

No presente exemplo, lembrando que os deslocamentos correspondentes ao primeiro modo são dados por:

$$\{x_{M1}\} = \begin{Bmatrix} x_{1,M1} \\ x_{2,M1} \end{Bmatrix} = [\Phi] \begin{Bmatrix} y_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

verifica-se que a presença do aniquilamento pode ser medida através de:

$$\{x_{NUM}\} - \{x_{AN}\} = \{x_{NUM}\} - (\{x_{M1}\} + \{x_{ST}\}) = \{R\}$$

onde $\{x_{NUM}\}$ contém os deslocamentos calculados numericamente pelo algoritmo e $\{R\}$ é um vetor nas diferenças indesejadas entre os deslocamentos fornecidos pelo método e os pretendidos. Há duas contribuições em $\{R\}$: a do modo inferior amortecido prematuramente e a do modo superior, ainda eventualmente presente.

Quando se busca o aniquilamento, um bom algoritmo deve ser capaz de apresentar $\{R\}$ com forte tendência a se anular, mesmo quando as frequências cuja influência se quer separar estiverem relativamente próximas. No caso em pauta, $\omega_1 \approx 0,6181 \text{ s}^{-1}$ e $\omega_2 \approx 1,6180 \text{ s}^{-1}$. A tabela 6.4 mostra o resíduo para x_1 , resultante da aplicação dos algoritmos de terceira, quarta e quinta ordens da família apresentada, para um passo $\Delta t = T_1 / 4$.

Observa-se, para quarta ordem, que o resíduo praticamente se anula após vinte passos, isto é, cinco períodos do primeiro modo, o que significa fiel representação do modo inferior e aniquilamento praticamente total do superior.

A tabela mostra ainda que para o algoritmo de quinta ordem, o aniquilamento tarda mais a efetuar-se. Isto pode ser compensado vantajosamente utilizando-se passos maiores, a fim de acelerar a presença do fenômeno. Os gráficos de raio espectral versus tamanho do passo mostrados neste trabalho mostram que o "corte" das frequências superiores é cada vez mais abrupto à medida que se tomam membros da família de algoritmos de ordem mais elevada.

Por outro lado, o uso dos métodos de ordem mais baixa pode levar à indesejável situação de, no caso de frequências próximas, não se conseguir aniquilar as superiores sem que o amortecimento numérico comece a atuar sobre os modos inferiores, no intervalo de observação do movimento.

A coluna correspondente ao resíduo do algoritmo de terceira ordem mostra isso. Assim, intervalos de observação maiores estão associados à necessidade de métodos de ordens mais elevadas, dosando-se o aniquilamento a partir do tamanho de passo adequado.

O comportamento dos valores das tabelas citadas está representado graficamente às figuras 6.8 a 6.10.

Tabela 6.4 - Deslocamentos x_1 e resíduo (R), para $\Delta t = T_1/4$

N	$x_1 M_1$	x_1	$x_1 H_3$	R3	$x_1 H_4$	R4	$x_1 H_5$	R5
0	0	0	0	-4,202	0	-4,202	0	-4,202
1	-2,598	3,971	2,938	1,334	4,064	2,46	3,579	1,975
2	-5,197	0,523	-1,013	-0,018	-1,065	-0,07	0,353	1,348
3	-2,598	-2,488	1,481	-0,123	0,034	-1,57	-1,189	-2,793
4	0	7,294	4,242	0,04	6,063	1,861	5,793	1,591
5	-2,599	2,191	1,37	-0,233	0,444	-1,159	2,231	0,628
6	-5,197	-4,763	-0,814	0,181	-0,869	0,126	-2,817	-1,822
7	-2,597	5,261	1,838	0,233	2,25	0,645	2,835	1,23
8	0	3,83	3,956	-0,246	3,32	-0,882	4,431	0,229
9	-2,6	-1,645	1,312	-0,29	2,158	0,556	0,43	-1,172
10	-5,197	3,033	-0,703	0,292	-1,029	-0,034	-0,078	0,917
11	-2,596	0,293	1,947	0,341	1,309	-0,297	1,634	0,028
12	0	1,645	3,842	-0,36	4,519	0,317	3,466	-0,736
13	-2,601	5,79	1,2	-0,401	1,361	-0,24	2,258	0,657
14	-5,197	-3,179	-0,581	0,414	-0,887	0,108	-1,064	-0,069
15	-2,596	-0,126	2,051	0,445	1,696	0,09	1,165	-0,441
16	0	8,332	3,721	-0,481	3,958	-0,244	4,666	0,464
17	-2,601	-1,342	1,101	-0,5	1,74	0,139	1,484	-0,117
18	-5,197	-1,813	-0,46	0,535	-0,944	0,051	-1,256	-0,261
19	-2,595	5,463	2,144	0,537	1,528	-0,079	1,941	0,334
20	0	0,655	3,6	-0,602	4,181	-0,021	4,084	-0,118

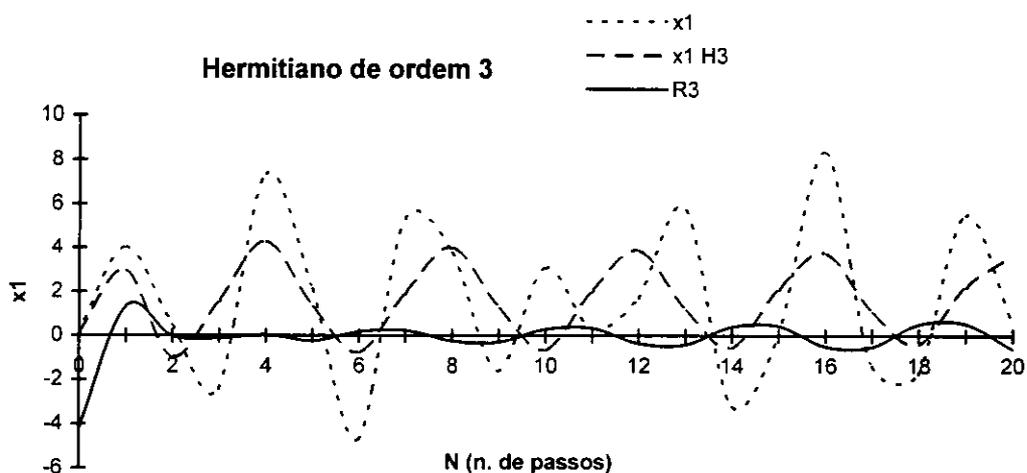


Figura 6.8 - Aniquilamento do deslocamento x_1 pelo algoritmo de terceira ordem

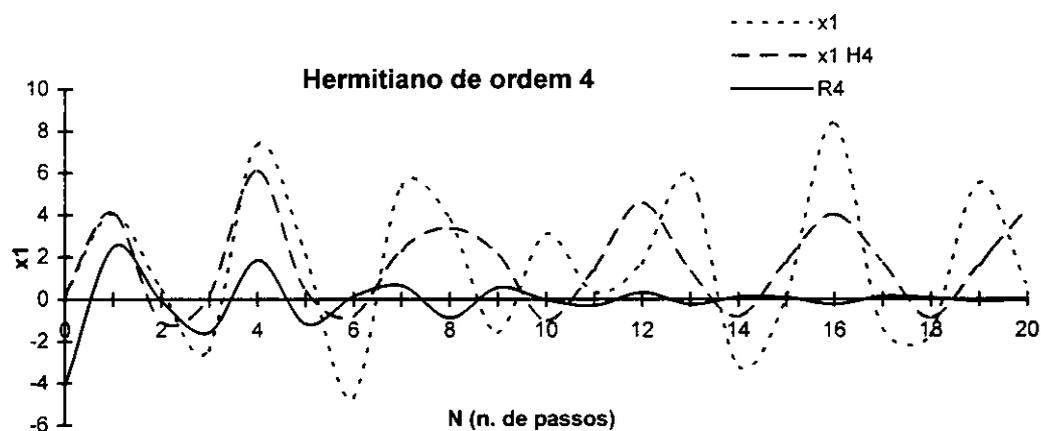


Figura 6.9 - Aniquilamento do deslocamento x_1 pelo algoritmo de quarta ordem

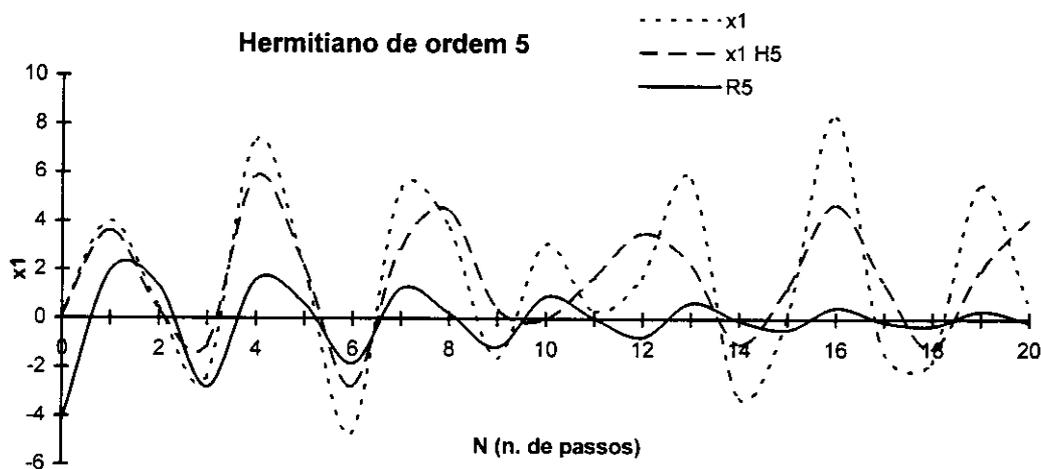


Figura 6.10 - Aniquilamento do deslocamento x_1 pelo algoritmo de quinta ordem

CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES

A revisão bibliográfica mostrou o esgotamento dos algoritmos de ordens inferiores, verificando-se que todos eles podem ser colocados sob a forma do método de Houbolt.

De fato, foi mostrado que os únicos métodos lineares de passo simples que apresentam aniquilamento assintótico são os espectralmente semelhantes ao processo em questão. Após exploradas portanto as possibilidades do método de Houbolt generalizado quanto a aniquilamento, o caminho que resta é lidar com algoritmos de ordens superiores.

A principal desvantagem de tais processos que é a geração, em situações mais gerais, de sistemas de equações de ordem maior do que o número de graus de liberdade empregados na discretização da estrutura pode ser contornada mediante a combinação de técnicas de solução de sistemas iterativas com outras que tem como resultado menor trabalho numérico envolvido, apoiado isso tudo no fato de que maior precisão permite o emprego de passos maiores na representação do intervalo de tempo de interesse.

O aniquilamento assintótico mostra-se importante nas situações em que se pretende empregar passos maiores, pois sua presença adequadamente controlada é a garantia de que os modos superiores não deteriorarão a qualidade da resposta obtida.

A formulação hermitiana é conveniente para a geração de algoritmos por apresentar congenitamente consistência e convergência, e por facilmente permitir uma análise espectral que indique a presença ou não de estabilidade e amortecimento numérico, este último associado ao aniquilamento assintótico.

A possibilidade de utilização de parâmetros de ajuste é uma outra característica positiva dos processos criados a partir dessa abordagem.

Embora o caso mais geral permita o uso de expressões hermitianas multi-passo, o presente estudo concentrou-se nos procedimentos de passo simples, o que não é obstáculo à possibilidade de criação de novos algoritmos e tem significativa vantagem pensando-se na aplicação a procedimentos não-lineares.

A família apresentada é a priori incondicionalmente estável, com aniquilamento assintótico, cuja presença era um objetivo importante por razões acima descritas e foi detalhado o caminho para obter-se a ordem de erro local que se deseje.

Embora na revisão bibliográfica seja citado um trabalho que demonstre a pouca importância da raiz espúria (real) nas propriedades espectrais do algoritmo, merece citação o fato de que a bifurcação no caso da família aqui apresentada seja na origem, isto é, para passo nulo, de modo que não se tenha na prática possibilidade sequer de existência da raiz espúria.

A regra de formação dos algoritmos da família está perfeitamente definida e é bastante clara. Aparentemente, dada uma ordem de precisão qualquer é sempre possível gerar um método incondicionalmente estável e com aniquilamento assintótico presente.

O critério de tomar um operador bastante geral combinado com o decorrente da sua derivação em relação ao tempo e a subsequente busca de requisitos para o atendimento de propriedades espectrais desejadas mostrou-se eficaz na identificação de algoritmos potencialmente viáveis. Mais do que isso, esta forma de pesquisa de novos métodos parece à primeira vista aplicável a outros operadores não aqui considerados.

Semelhantemente à maioria dos trabalhos existentes em que se efetua uma análise espectral de um determinado processo, focalizou-se o problema de vibrações livres não-amortecidas. Para vibrações forçadas, a derivação da equação

de equilíbrio para a obtenção de uma relação independente adicional entre as variáveis do problema provoca a necessidade de se expressar adequadamente a derivada da função de excitação. Entretanto, esta dificuldade não é própria ao método, nem inédita dentre os algoritmos já disponíveis.

Evidentemente, entretanto, não se trata de situação onde quanto mais preciso o método melhor, uma vez que há outras qualidades inerentes aos métodos numéricos e que devem ser ponderadas na escolha dentre aqueles disponíveis para a solução de um problema específico.

Uma análise mais detalhada dessas características ou do compromisso entre a precisão obtida e o trabalho numérico demandado na aplicação do processo que a fornece pode fazer com que o analista descarte aquele que pareceria à primeira vista o mais promissor.

Este trabalho apresenta apenas um estudo inicial, via análise espectral, dos algoritmos pertencentes à família proposta cujo potencial de utilização parece merecer um aprofundamento do conhecimento de suas características.

Embora seja importante mostrar não haver limitação para a ordem de precisão requerida, é pouco provável que sua elevação indefinida conduza a algoritmos vantajosos, se computados todos os fatores intervenientes na escolha do método a ser adotado.

Dentre os algoritmos deduzidos, observa-se que o primeiro coincide com o já obtido por Laier, em trabalho apresentado em 1995, que do ponto de vista de dissipação apresenta resultado não muito bom, apenas um pouco melhor que o do método de Houbolt. Já a distorção, representada pelo alongamento do período, mostra-se menor do que a dos métodos de Houbolt e Newmark, tradicionais paradigmas de processos de integração numérica para aplicação em análise dinâmica.

O algoritmo de segunda ordem resultante da presente abordagem utiliza também um operador empregado por Laier no trabalho citado, embora combinado diferentemente. Como resultado, obtém-se um método cujo desempenho espectral é idêntico ao de Laier, que por sua vez apresenta a mesma

dissipação do método de Hulbert, não tão brusca quanto a do processo de primeira ordem da mesma família e do método de Houbolt. O alongamento também tem mesmo comportamento do apresentado no método de Hulbert e de Laier.

Deve-se observar entretanto que algoritmos de mesmas propriedades espectrais não têm necessariamente mesmo desempenho numérico, de modo que essa afinidade com outros métodos deve ser vista com reservas, e uma análise posterior de uma implementação em um problema específico torna-se importante também para detectar as diferenças de comportamento que só então surgirão.

Os algoritmos de ordens a partir da terceira até a oitava são já "de ordens superiores", de modo que sua comparação com os métodos tradicionais fica prejudicada. Deve ser entretanto observado que o desempenho espectral da família proposta é sensivelmente superior ao daqueles, o que pode ser observado a partir dos gráficos apresentados no capítulo anterior.

Relativamente à comparação entre os membros de ordens diversas, nota-se que a dissipação surge para passos de tamanho crescente com a ordem do erro e de forma cada vez mais brusca, definindo cada vez mais nitidamente uma frequência de corte. Outra maneira de comprovar isto é através dos gráficos de raio espectral contra tamanho do passo. Secundariamente, a forma das curvas desses gráficos indica duas sub-famílias, de comportamento similar: a dos métodos de ordem par e outra referente aos métodos de ordem ímpar.

A dispersão, presente nos gráficos de alongamento versus tamanho do passo tem comportamento um pouco diverso: está praticamente ausente no início do gráfico, a partir da terceira ordem, porém aumenta abruptamente para passos de tamanho atendendo à relação: $\Delta t/T > 0,47$ aproximadamente. Este não é um valor que inviabilize a utilização do processo, sendo mesmo um limite superior ao de outros métodos existentes, porém do ponto de vista da análise espectral é a característica mais negativa da família apresentada, sendo genética, isto é, aparecendo em todos os seus membros.

Os exemplos numéricos apresentados confirmam e enfatizam as qualidades apontadas pela análise espectral. Conforme esperado, os métodos de ordens superiores permitem a utilização de passos bem maiores para precisão equivalente. Para análise transiente, o ganho em rapidez é a principal vantagem, enquanto para respostas ao fim de intervalos de tempo grandes (long-term analysis) soma-se a isto o fato da resposta manter qualidade, tardando a apresentar a deterioração provocada pelo aniquilamento assintótico, característica que pode influir precocemente no resultado no caso das ordens inferiores.

Uma comparação mais precisa do tempo demandado no processamento versus a precisão obtida, embora relevante, seria muito particular para o caso de vibrações livres. Com a presença da excitação, os métodos de ordens superiores (e não apenas os aqui tratados) exigem operações numéricas envolvendo as funções que a representam, de modo que as conclusões também são relativas ao problema específico enfrentado. Até mesmo o hardware utilizado para o processamento pode, para o mesmo problema, influir nas comparações feitas, de modo que tal estudo desvia-se do objetivo central do presente trabalho.

Com a explicitação de algoritmos incondicionalmente estáveis e com aniquilamento assintótico de ordens elevadas, abre-se a possibilidade de, introduzindo parâmetros livres de ajuste às suas expressões, aprimorar-se uma ou mais de suas características espectrais, ou mesmo introduzir propriedades nas matrizes dos coeficientes que auxiliem a solução numérica. Esta é uma seqüência possível para o presente trabalho.

Outra abordagem possível para a continuação do trabalho que se vislumbra é a implementação dos algoritmos obtidos à solução de problemas específicos, visando a confirmação de suas potencialidades indicadas pela análise espectral que aqui se fez.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARGYRIS, J.; DUNNE, P.C.; ANGELOPOULOS, L. "Non-linear oscillations using the finite element technique", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol.2, pp 203-250, 1973.
- ARGYRIS, J. H.; DOLTSINIS, J. St.; KNUDSON, W. C.; VAZ, L. E.; WILLAM, K. J. "Numerical Solution of Transient Nonlinear Problems", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol. 17/18, pp 341- 409, 1979.
- ARGYRIS, J.; MLEJNEK, H. P. "Texts on Computational Mechanics, vol.5, Dynamics of Structures", North-Holland, Amsterdam, 1991.
- ARGYRIS, J. H.; VAZ, L. E.; WILLAM, K. J. "Higher Order Methods for Transient Diffusion Analysis", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol. 12, n. 2, pp 243-278, 1977.
- AUSTIN, M. "High-Order Integration of Smooth Dynamical Systems: Theory and Numerical Experiments", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 36, pp 2107-2122, 1993.
- BATHE, K. J. ; WILSON, E. L. "Stability and Accuracy of Direct Integration Methods", *Earthqu. Eng. and Struct. Dyn.*", vol.1, pp. 283-291, 1973.
- BATHE, K. J.; WILSON, E. L. "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- BAZZI, G.; ANDERHEGGEN, E. "The ρ -Family of Algorithms for Time-Step Integration with Improved Numerical Dissipation", *Earthqu. Eng. and Struct. Dyn.*, vol 10, pp. 537-550, 1982.

- BELYTSCHKO, T.; SCHOEBERLE, D. F. "On the Unconditional Stability of an Implicit Algorithm for Nonlinear Structural Dynamics", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 42, pp. 865-869, 1975.
- BISMARCK-NASR, M. N.; OLIVEIRA, A. M. "On Enhancement of Accuracy in Direct Integration Dynamic Response Problems", *Earthquake Eng. and Struct. Dyn.*, vol. 20, pp. 699-703, 1991.
- BRUSA, L.; NIGRO, L. "A One-Step Method for Direct Integration of Structural Dynamic Equations", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 15, pp 685-699, 1980.
- CARTER, A. L.; SHIFLETT, G. R.; LAUB, A. "The solution of Higher Order Integration Formulae for Dynamic Response Equations by the Conjugate Gradient Method", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 20, pp 339-351, 1984.
- CHUNG, J.; LEE, J. M. "A New Family of Explicit Time Integration Methods for Linear and Non-Linear Structural Dynamics", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 37, pp 3961-3976, 1994.
- COLLATZ, L. "The Numerical Treatment of Differential Equations", Springer-Verlag, Berlin, 1960.
- DAHLQUIST, G. G. "A Special Stability Problem for Linear Multistep Methods", *BIT : Nordisk Tidskriff for Inform. Behandling*, n. 3, pp. 27-43, 1963.
- GIVOLI, D.; HENIGSBERG, I. "A Simple Time-Step Control Scheme", *Comm. in Numer. Methods in Eng.* ", vol. 9, pp. 873-881, 1993.
- GOUDREAU, G. L.; TAYLOR, R. L. "Evaluation of Numerical Integration Methods in Elastodynamics", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engineering*, vol. 2, pp 69-97, 1972.

- HASSAN, J. C. M.** "Sobre o Emprego dos Métodos Numéricos na Solução da Equação Diferencial da Dinâmica das Estruturas", Dissertação de Mestrado, EESC-USP, 155p., 1987.
- HILBER, H. M.** "Analysis and Design of Numerical Integration Methods in Structural Dynamics", Report n. EERC 76-29 , Earthquake Engineering Research Center, Universeity of California, Berkeley, 1976.
- HILBER, H. M. ; HUGHES, T. J. R.** "Collocation, Dissipation and Overshoot for Time Integration Schemes in Structural Dynamics", *Earthqu. Eng. and Struct. Dyn.*", vol. 6, pp. 99-117, 1978.
- HILBER, H. M. ; HUGHES, T. J. R. ; TAYLOR, L. R.** "Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics", *Earthqu. Eng. and Struct. Dyn.*", vol. 5, pp. 283-292, 1977
- HOFF, C. ; PAHL, P. J.** "Development of an Implicit Method with Numerical Dissipation from a Generalized Single-Step Algorithm for Structural Dynamics", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, n. 67, pp. 367-385, 1988.
- HOUBOLT, J. C.** "A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft", *Journ. of Aer. Sci.*, vol. 17, pp. 540-550, 1950.
- HUGHES, T. J. R. & HULBERT, G. M.** "Space-Time Finite Element Methods for Elastodynamics Formulations and Error Estimates", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol. 66, pp 339-363, 1988.
- HUGHES, T. J. R.** "Stability, Convergence and Growth and Decay of Energy of the Average Acceleration Method in Nonlinear Structural Analysis", *Comp. & Struct.*, vol.6, pp 313-324, 1976.

- HUIPING, S. "An Improved Mode Superposition Method for Linear Damped Systems", *Commun. in Appl. Num. Meth. in Eng.*, vol. 7, pp 579-580, 1991.
- HULBERT, G. M. "Time Finite Element Methods for Structural Dynamics", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 33, pp. 307-331, 1992.
- HULBERT, G. M. "A Unified Set of Single-Step Asymptotic Annihilation Algorithms for Structural Dynamics", *Computer Methods in Appl. Mech. and Engineer.*, vol. 113, pp 1-9, 1994.
- HULBERT, G. M. "Limitations on Linear Multistep Methods for Structural Dynamics", *Earthqu. Eng. and Struct. Dynamics*, vol. 20, pp 191-196, 1991.
- HULBERT, G. M.; CHUNG. J. "The Unimportance of the Spurious Root of Time Integration Algorithms for Structural Dynamics", *Commun in Num. Meth. in Engin.*, vol. 10, pp 591-597, 1994.
- HULBERT, G. M.; CHUNG, J. "A family of Single-Step Houbolt Time Integration Algorithms for Structural Dynamics", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engineering*, vol. 118, pp 1-11, 1994.
- KATONA, M. G.; ZIENKIEWICZ, O. C. "A Unified Set of Single-Step Algorithms, Part 3: The Beta-M Method, a Generalization of the Newmark Scheme", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 21, pp 1345-1359, 1985.
- KRIEG, R. D. "Unconditional Stability in Numerical Time Integration Methods", *Journ. of Appl. Mech.*, vol. 40, pp 417-421, 1973.

- KUJAWSKI, J. ; GALLAGHER, R. H.** "A Generalized Least-Squares Family of Algorithms for Transient Dynamic Analysis", *Earthqu. Eng. and Struct. Dyn.*, vol. 18, pp. 539-550, 1989.
- KUJAWSKI, J.; DESAI, C. S.** "Generalized Time Finite Element Algorithm for Non-Linear Dynamic Problems", *Engineering and Computations*, vol. 1, 247-251, 1984.
- KULKARNI, M.; BELYTSCHKO, T.; BAYLISS, A.** "Stability and Error Analysis for Time Integrators Applied to Strain-Softening Materials", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, n. 124, pp. 335-363, 1995.
- KURDI, M. A.** "Stable High Order Methods for Time Discretizations of Stiff Differential Equations", Ph. D. Dissertation, Department of Mathematics, Univ. of California, Berkeley, 1974.
- LAIER, J. E.** "Algoritmo Hermitiano de Integração Passo a Passo das Equações da Dinâmica das Estruturas", In: *Jornadas Sudamer. de Ingen. Estruct.*, nov. 1993. Anais. pp 19-29.
- LAIER, J. E.** "Asymptotic Annihilation Hermitian Algorithms for Integration in Time (submetido para publicação na revista *Computer & Structures*)
- LAX, P. D.; RICHTMYER, R. D.** "Survey of the Stability of Finite Difference Equations", *Communications of Pure Applied Mathematics*, vol. 9, pp 267-293, 1956.
- LEWIS, R. W.; BRUCH Jr., J. C.** "An Application of Least-Squares to One-Dimensional Transient Problems", *Int. Jour. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 8, pp 633-647, 1974.
- LI, X. D.; ZENG, F.; WIBERG, N. E.** "A Simple Local Error Estimator and an Adaptive Time-Stepping Procedure for

- Direct Integration Method in Dynamic Analysis", *Commun. in Appl. Num. Meth. in Eng.*, vol. 9, pp 273-292, 1993.
- MAKINSON, G. J.** "Stable High Order Implicit Methods for the Numerical Solution of Systems of Differential Equations", *The Computer Journal*, vol. 11, n. 3, pp 305-310, 1968.
- MÖLLER, P. W.** "High-Order Hierarchical A- and L-Stable Integration Methods", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 36, pp 2607-2624, 1993.
- NEWMARK, N. M.** "A Method of Computation for Structural Dynamics", *Proc. of ASCE*, vol. 85, EM3, pp. 67-94, 1959.
- NIEMI, J.** " A_0 -Stable Family of Single Step Methods for Semidiscretized Parabolic Problems", *Int. Jour. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 38, pp. 2829-2836, 1995.
- NØRSETT, S. P.** "One-Step Methods of Hermite Type for Numerical Integration of Stiff Systems", *BIT : Nordisk Tidsskrift for Inform. Behandling*, n. 14, pp. 63-77, 1974.
- OWREN, B.; SIMONSEN, H. H.** "Alternative Integration Methods for Problems in Structural Dynamics", *Computer Meth. in Appl. Mech. and Engineer.*, vol. 122, pp 1-10, 1995.
- PEZESHK, S.; CAMP, C. V.** "An Explicit Time Integration Technique for Dynamic Analyses", *Int. Jour. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 38, pp 2265-2281, 1995.
- SALAMON, N. J.; XIANG, J.** "Weighting Functions in Single-Step Algorithms for a Non-Linear Equation", *Comm. in Appl. Num. Meth.*, vol. 6, pp 447-455, 1990.
- SONNEMANS, P. J. M. ; DE GOEY, L. P. H. ; NIEUWENHUIZEN, J. K.** "Optimal Use of a Numerical Method for Solving Differential Equations Based on Taylor Series Expansions", *Int. Jour. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 32, pp. 471-499, 1991.

- WARBURTON, G. B. "The Dynamical Behaviour of Structures", Pergamon Press, Oxford, 1976.
- WARBURTON, G. B. "Assessment of Errors in the Newmark Method in Structural Dynamics", *Earthqu. Eng. and Struct. Dynam.*, vol. 19, pp 456-467, 1990.
- WILSON, E. L. "A Computer Program for the Dynamic Stress Analysis of Underground Structures", *SESM Report*, N. 68-1. Division of Struct. Eng. And Struct. Mech., Univ. of California, Barkeley, 1968.
- WOOD, W. L. "On the Zienkiewicz Four-Time Level Scheme for the Numerical Integration of Vibration Problems", *Int. Jour. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 11, pp 1519-1528, 1977.
- WOOD, W. L. "A Further Look at Newmark, Houbolt, etc. Time-Stepping Formulae", *Int. Jour. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 20, pp 1009-1017, 1984.
- WOOD, W. L. "A Unified Set of Single-Step Algorithms, Part 2: Theory", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 20, pp 2303-2309, 1984.
- WOOD, W. L.; BOSSAK, M.; ZIENKIEWICZ, O. "An Alpha Modification of Newmark's Method", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 15, pp 1562-1566, 1980.
- ZIENKIEWICZ, O. "A New Look at the Newmark, Houbolt and Other Time Stepping Formulas. A Weighted Residual Approach", *Earthqu. Eng. and Struct. Dyn.*, vol. 5, pp 413-418, 1977.
- ZIENKIEWICZ, O.; LEWIS, R. W. "An analysis of various time-stepping schemes for initial value problems", *Earthqu. Eng. Struct. Dyn.*, vol. 1, pp 407-408, 1973.

ZIENKIEWICZ, O. C.; WOOD, W. L.; TAYLOR, R. L. "An Alternative Single-Step Algorithm for Dynamic Problems", *Earthqu. Eng. and Struct. Dyn.*, vol. 3, pp 31-40, 1980.

ZIENKIEWICZ, O. C.; WOOD, W. L.; HINE, N. W.; Taylor, R. L. "A Unified Set of Single-Step Algorithms, Part 1: General Formulation and Applications", *Int. Jour. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 20, pp 1529-1552, 1984.