

# **ANÁLISE DO PROCESSO DE FRATURAMENTO EM VIGAS DE PONTES DE AÇO SOB EFEITO DE FADIGA**

Enio Pontes de Deus

Tese apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos, da Universidade de São  
Paulo, como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Doutor em  
Engenharia de Estruturas

ORIENTADOR : Prof. Tit. Dr. Wilson Sergio Venturini

São Carlos

1997



Class. TESE  
FHA D495a  
Tombo 540/98 - SET

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca - EESC-USP

D486a Deus, Enio Pontes de  
Análise do processo de fraturamento em vigas  
de pontes de aço sob efeito de fadiga / Enio  
Pontes de Deus. -- São Carlos, 1997.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia  
de São Carlos-Universidade de São Paulo, 1997.  
Área: Engenharia de Estruturas  
Orientador: Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini

1. Pontes de aço. 2. Fissuras devido à fadiga.  
3. Mecânica da fratura. 4. Técnica inversa.  
I. Título.

## FOLHA DE APROVAÇÃO

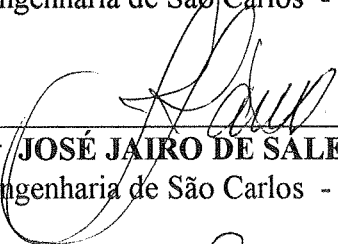
Candidato: Engenheiro **ENIO PONTES DE DEUS**

Tese defendida e aprovada em 29-10-1997  
pela Comissão Julgadora:



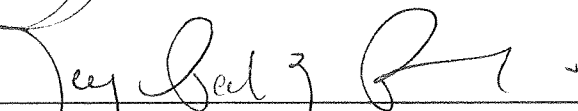
---

Prof. Titular **WILSON SERGIO VENTURINI (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



---

Prof. Doutor **JOSÉ JAIRO DE SALES**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



---

Prof. Doutor **SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



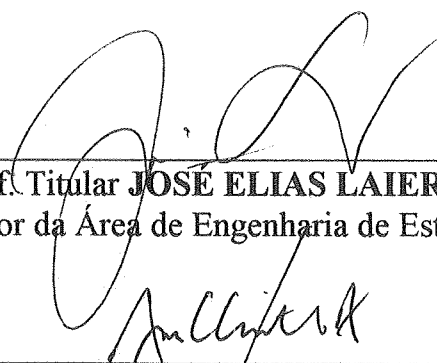
---

Prof. Doutor **JULIO FRUCHTENGARTEN**  
(Escola Politécnica - Universidade de São Paulo)



---

Prof. Doutor **RICARDO HALLAL FAKURY**  
(Universidade Federal de Minas Gerais)



---

Prof. Titular **JOSÉ ELIAS LAIER**  
Coordenador da Área de Engenharia de Estruturas



---

**JOSÉ CARLOS A CINTRA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*“ Há homens que lutam um dia, e são bons.  
Há os que lutam um ano, e são melhores.  
Há os que lutam muitos anos, e são muito bons.  
Porém, há aqueles que lutam toda vida, estes são imprescindíveis.”*

**Aos meus pais Dr. Carmênio e Maria Tereza,  
aos meus irmãos Glen e Fran  
e minha esposa Valéria**

**por todo incentivo e apoio que tornaram esse objetivo e tantos outros realidade**



---

# Prólogo

Essa tese de doutorado foi desenvolvida durante a minha estada como pesquisador do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo (EESC - USP).

Uma fase de relevante importância e decisiva na complementação do projeto foi a cooperação do *Institut für Stahlbau da Technische Universität - Braunschweig* - Alemanha, onde tive a excelente e inesquecível oportunidade de aumentar meus conhecimentos de vida e profissional.

Lógico que uma pesquisa como essa foi enriquecida com valiosas sugestões e por pessoas que de uma forma ou de outra acreditaram e apoiaram na concretização dessa obra. Em particular, sinto-me profundamente agradecido as seguintes pessoas e órgãos:

Ao Prof. Dr. Tit. **Wilson Sergio Venturini**, exemplo de engenheiro e pesquisador, pelos conhecimentos transmitidos, valiosas sugestões, estímulo, orientação segura e objetiva sempre presentes na orientação dessa pesquisa e pela amizade desenvolvida no decorrer do trabalho.

Ao Prof. Dr. Dipl.- Ing. **Udo Peil**, orientador na Alemanha, pela excelente recepção, sugestões e oportunidades que muito enriqueceram a minha vida profissional.

Aos Professores do curso de Pós-Graduação do Departamento de Estruturas - SET da Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP, pelos conhecimentos transmitidos, relevantes contribuições, em particular ao Prof. Dr. **Sérgio P.B. Proença**, Prof. Dr. **José Jairo Sáles** e Prof. Dr. **Mounir Rachid**.

Ao Prof. Dr. Rer. nat. **Heinz Antes** do Institut für Angewandte Mechanik, pela importante cooperação e disposição do seu instituto ao bom andamento desse trabalho.

Ao Amigo Dr. Dipl.-Ing. **Richard Degenhardt**, Institut für Angewandte Mechanik, pelo

---

---

excelente apoio e consultorias prestadas.

Aos meus **Pais Dr. Carmênio e Maria Tereza** e aos meus **irmãos Glen e Fran**, pela forma que sempre me incentivaram, contribuíram, apoiaram, sugeriram, acreditaram e o mais importante a presença sincera em todos momentos de realização dessa jornada.

À minha **Esposa** e companheira **Valéria**, que sempre e muito me apoiou, com sua incrível credibilidade e determinação, valiosas sugestões, incentivo em todos os momentos e dedicação na revisão e edição dessa obra.

Aos amigos da Pós-Graduação no Brasil: Prof. **Antônio R. Balbo** (ACDC), Engº. **Carlos A. Fudoli**, Prof. **João Augusto L. Rocha**, Prof. **Moacir Kripka** pela presença nas horas difíceis, imprescindível companherismo e agradável convívio.

Aos amigos do Institut für Stahlbau- Alemanha: Dipl.-Ing. **Olaf Einsiedler** (*O Companheiro*), Dipl.-Ing **Martin Kaldenhoff** (008), **Half Hildebrandt** pelo apoio, convivência e responsáveis pelos melhores momentos na Alemanha.

À **Dra. Nireida M. de Deus** e à **Família Bianco** pelo incentivo e colaborações nos momentos mais difíceis dessa jornada.

Aos Funcionários da Secretaria, Biblioteca e Desenho do Departamento de Estruturas da USP-EESC (Brasil) e do IS.TU-BS (Alemanha), que souberam dar sua parcela de contribuição nessa jornada e procuraram na amizade o tempo comum de diálogo.

À **CAPES** - Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo auxílio financeiro na Alemanha e ao **CNPq** - Conselho Nacional de Pesquisa, pela concessão da bolsa de estudos no Brasil.

Ao folhear as páginas, contemplar as imagens e analisar o texto dessa obra espera-se que o leitor possa ingressar num percurso que permita-o com segurança idealizar e até imaginar o universo das pontes junto com uma importante formulação de modelos cujo objetivo final é prolongar sua vida útil.

À Deus que me deu o dom da vida e me abençoou com a inteligência só cabe ... agradecer.

---

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	i
LISTA DE TABELAS.....	vii
LISTA DE SÍMBOLOS .....	viii
RESUMO .....	x
ABSTRACT.....	xi
1- INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Considerações Gerais .....	1
1.2 Objetivos .....	6
1.3 Objetivos Específicos.....	7
2 - EVOLUÇÃO HISTÓRICA .....	12
2.1 A História das Pontes .....	12
2.2 As Pontes de Aço no Brasil .....	25
2.3 Desenvolvimento Histórico da Fadiga nos Metais .....	31
2.4 A Teoria da Mecânica da Fratura .....	35
3 - FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DA FRATURA .....	47
3.1 Mecanismos de Fratura em Metais.....	47
3.2 Fratura Mecânica Linear Elástica - FMLE.....	52
3.2.1 Energia de Ruptura .....	52
3.2.2 Fator de Intensidade de Tensões.....	54
3.2.2.1 Métodos de Análise através de Função de Tensão.....	62
3.2.2.2 Princípio da Superposição .....	67
3.2.2.3 Plastificação no <i>Crack Tip</i> .....	69
3.2.3 O Fator de Intensidade de Tensões Crítico $K_c$ .....	72
3.3.4 Conceito Energético de Fratura.....	79
3.3 Fratura Mecânica Elasto-Plástica - FMEP .....	82
3.3.1 <i>Crack Opening Displacement</i> (C.O.D.).....	82
3.3.2 Integral - J .....	84

3.3.2.1 A integral- J Associada à Velocidade de Liberação de Energia Elástica Não - Linear .....	88
3.3.2.2 A Integral - J no Campo de Tensões Plásticas .....	90
4 - INSPEÇÃO E ACIDENTES DEVIDO A FALHA POR FADIGA.....	94
4.1 Inspeção em Pontes de Aço.....	94
4.1.1 Classificação dos Detalhes .....	97
4.2 Detalhes Suscetíveis ao Aparecimento de Fissuras.....	106
4.3 Casos de Acidentes em Pontes de Aço .....	111
4.3.1 Ponte sobre o Canal de Dortmund - Ems (Alemanha) .....	112
4.3.2 Ponte sobre o Rio Aguasabon - Ontário.....	113
4.3.3 Ponte Dekorra ( <i>Dekorra Bridge</i> ).....	115
4.3.4 Kings Bridge - Austrália .....	116
4.4 Modelos de Fadiga para Estruturas de Aço.....	118
4.4.1 Abertura de Fissura por Fadiga.....	118
4.4.2 Modelos que Consideram o Fechamento da Trinca ( <i>Crack         Closure Models</i> ).....	124
5 - ELEMENTO DE VIGA COM FRATURA .....	126
5.1 Introdução.....	126
5.2 Modelo de Rigidez Elástica.....	127
5.2.1 Viga Submetida ao Momento Fletor M.....	132
5.2.2 Consideração do Esforço Combinado M-N através do Método da Energia.....	147
5.3 Modelo de Rigidez Elasto - Plástico .....	149
5.3.1 Critério de Plastificação.....	153
5.3.2 Cálculo da Integral - J.....	157
5.4 Consideração do Efeito de Fadiga .....	161
5.5 Programa RAST .....	169
5.6 Modelo Comparativo - MEF .....	172
5.6.1 Calibração do Modelo de Viga com Fratura (M.V.F.) .....	174
6 - MODELO DINÂMICO PARA DETECTAR FRATURA NUMA VIGA DE PONTE .....	178
6.1 Método de Análise Inversa .....	178

6.2 Vibração Livre - Viga Simplesmente Apoiada.....	180
6.3 Modelo Teórico com Fratura.....	184
7 - EXEMPLOS .....	195
7.1 Ponte Modelo.....	195
7.2 Desenvolvimento de Fratura na Viga.....	200
7.3 Análise da Fratura na Viga de Ponte com o Programa RAST.....	201
7.4 Localização da Fratura .....	214
8 - CONCLUSÕES.....	216
8.1 Sugestões.....	219
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	220
APÊNDICE A .....	235
APÊNDICE B .....	240
APÊNDICE C .....	261

## LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1	
Figura 1.1 - Representação Medieval .....	2
Figura 1.2 - Ponte Firth of Forth .....	4
CAPÍTULO 2	
Figura 2.1 - Pont d'Arc .....	13
Figura 2.2 - Pont du Gard .....	15
Figura 2.3 - Ponte Angelo .....	15
Figura 2.4 - Ponte Coalbrookdale .....	17
Figura 2.5 - Ponte Brooklyn.....	19
Figura 2.6 - Ponte Golden-Gate.....	19
Figura 2.7 - Ponte Imperial D. Pedro II.....	27
Figura 2.8 - Ponte de São Vicente .....	29
Figura 2.9 - Ponte Francisco de Sá.....	29
Figura 2.10 - Ponte sobre o Rio Doce.....	29
Figura 2.11 - Ponte Hercílio Luz.....	29
Figura 2.12 - Ponte Presidente Costa e Silva -Rio-Niteroi .....	30
Figura 2.13 - Modelo de Fissura de Griffith.....	39
Figura 2.14 - Modos de Fratura.....	42
Figura 2.15 - Modelos de Fratura.....	44
Figura 2.16 - Integral de Linha J .....	45
CAPÍTULO 3	
Figura 3.1 - Clivagem.....	48
Figura 3.2 - Fratura Intergranular .....	49
Figura 3.3 - Fratura Dúctil .....	49
Figura 3.4 - Mecanismos de Formação de Microcavidades :	

(a) Ruptura Normal; (b) Ruptura por Cisalhamento; (c) Ruptura por Rasgamento .....	50
Figura 3.5 - Energia Potencial e Tensão de Ligação em Função da Distância Atômica .....	53
Figura 3.6 - Chapa com Trinca Elíptica.....	55
Figura 3.7 - Campo de Tensões na Ponta da Trinca quando $\rho$ é muito pequeno ( $\rho = 0$ ).....	56
Figura 3.8a - Modos básicos de Carregamento .....	58
Figura 3.8b - Efeito de Diferentes Fatores KI sob Tensão $\sigma_y$ no crack tip ( $\theta=0$ ).....	58
Figura 3.9 - Descrição do Campo de Tensões na Extremidade da Fissura .....	59
Figura 3.10 - Tensão Normal ao Plano de Fissura da Fratura para o Modo I.....	61
Figura 3.11 - Representação do Campo de Tensões Próxima à Zona Plastificada .....	69
Figura 3.12 - Correção da Zona de Plastificação.....	71
Figura 3.13 - Modelo de Dugdale para Zona de Plastificação no <i>crack tip</i> ..	72
Figura 3.14 - Influência da Espessura no Fator de Intensidade de Tensões - Modo I.....	74
Figura 3.15 - Corpo de Prova Padrão : Flexão em 3 Pontos .....	75
Figura 3.16 - Corpo de Prova Padrão : Tração Compacta.....	75
Figura 3.17 - Curvas Carga - Deslocamento para Teste de $K_{Ic}$ .....	76
Figura 3.18 - Identificação dos Planos de Fratura Básicos para Seção Retangular Segundo as Normas ASTM 1981 e BS 1977 .....	78
Figura 3.19 - (a) Placa Fraturada com carga P Fixa; (b) Placa Fraturada com Deslocamento $\Delta$ Fixo .....	81
Figura 3.20 - Arredondamento da Ponta da Trinca sob Deformações Plásticas Resultando num Deslocamento Finito $\delta$ na Extremidade ( <i>crack open displacement</i> ).....	83
Figura 3.21 - Curva Qualquer Determinando uma Região sem	

Singularidades .....	84
Figura 3.22 - Contorno no <i>Crack Tip</i> .....	86
Figura 3.23 - Definição da Integral J (a).....	87
Figura 3.24 - Definição da Integral J (b).....	88
Figura 3.25 - Corpo Fraturado Bi - dimensional com Contorno $\Omega^0$ .....	89
Figura 3.26 - Relação Tensão x Deformação na Área Plastificada .....	91
Figura 3.27 - Região de Domínio de K.....	92
Figura 3.28 - Curva R para Material Dútil.....	93
CAPÍTULO 4	
Figura 4.1 - Tipos de Elementos e Ligações que se Classificam como Categoria A .....	98
Figura 4.2 - Ligação de Topo e Solda de Entalhe e Remoção do Excesso - Categoria B .....	99
Figura 4.3 - Ligação de Topo e Solda de Entalhe na Mesa na Região de Transição .....	99
Figura 4.4 - Ligação de Topo e Solda de Entalhe na Mesa na Região de Transição - $R > 0,6m$ .....	100
Figura 4.5 - Ligações na Mesa e na Alma com Curva de Transição - Categoria B.....	100
Figura 4.6 - Enrijecedores Transversais Soldados na Alma (e Flange) da Viga.....	101
Figura 4.7 - Placa de Gusset Ligada Transversalmente à Alma.....	101
Figura 4.8 - Solda de Entalhe na Alma e na Mesa.....	101
Figura 4.9 - Chapa de Gusset Ligada à Alma - $L < 101,6mm$ .....	102
Figura 4.10 - Chapa de Gusset Ligada à Mesa - $L \leq 101,6mm$ .....	102
Figura 4.11 - Enrijecedores Longitudinais.....	103
Figura 4.12 - Chapa de Gusset Ligada à Mesa .....	103
Figura 4.13 - Chapa de Gusset Ligada à Alma.....	103
Figura 4.14 - Chapa de Gusset Soldada sobre a Mesa .....	103
Figura 4.15 - Ligação para Contraventamento.....	104
Figura 4.16 - Chapa de Reforço com Cantos Retos .....	104



Figura 4.17 - Interseção de Vigas .....	104
Figura 4.18 - Ligação de Viga Perpendicular à Alma da Longarina.....	104
Figura 4.19 - Ligação de Viga na Mesa e Alma da Longarina .....	104
Figura 4.20 - Localização da Fratura por Fadiga na Extremidade da Chapa de Reforço.....	107
Figura 4.21 - Fissura no Enrijecedor Transversal .....	108
Figura 4.22 - Transição de Chapas.....	108
Figura 4.23 - Ligação Viga - Coluna.....	109
Figura 4.24 - Detalhe da Interseção das Soldas .....	110
Figura 4.25 - Mesa da Viga Atravessando a Alma de uma Segunda Viga ..	110
Figura 4.26 - Sistema Estrutural da Ponte Dortmund-Ems e Localização da Fissura .....	112
Figura 4.27 - Ponte sobre o Rio Aguasabon.....	113
Figura 4.28 - Estágios de Aberturas Assumidos .....	115
Figura 4.29 - Localização da Fratura na Dekorra Bridge .....	116
Figura 4.30 - Representação Esquemática da Propagação da Trinca nas Vigas Principais da Kings Bridge .....	117
Figura 4.31 - Estágios de Propagação por Fadiga.....	118
Figura 4.32 - Modelo para Formação e Propagação da Trinca por Escorregamento. Esquerda: Estágio Tracionado; Direita: Descarregamento. HERTZBERG [1976].....	122
Figura 4.33 - Representação da Superfície de Fissuração na Região Soldada.....	125

## CAPÍTULO 5

Figura 5.1 - Esforços Conjugados N e M e Deformações Associadas .....	128
Figura 5.2 - Forças Generalizadas.....	129
Figura 5.3 - Forma da Fissura.....	132
Figura 5.4 - Formação da Rigidez Total.....	135
Figura 5.5 - Graus de Liberdade Nodais nos Elementos - Esquerdo e Direito .....	136

Figura 5.6 - Graus de Liberdade Nodal.....	138
Figura 5.7 - Associação com a Rigidez da Mola.....	139
Figura 5.8 - Abertura do Zipper.....	141
Figura 5.9 - Zonas de Energia no Crack Tip - A) Extensão e B) Alargamento da Fissura .....	142
Figura 5.10 - Seção Retangular .....	143
Figura 5.11 - Fratura na Mesa Inferior da Seção .....	144
Figura 5.12 - Fratura na Alma da Viga.....	145
Figura 5.13 - Fratura na Mesa Superior.....	146
Figura 5.14 - Desenvolvimento da Fissura na Viga.....	146
Figura 5.15 - Composição de Esforços na Viga Fraturada .....	147
Figura 5.16 - Representação Geométrica da Regra de Normalização Associada com as Tensões Principais.....	150
Figura 5.17 - Gráfico - Tensão x Deformação.....	153
Figura 5.18 - Plastificação na Seção Fraturada.....	154
Figura 5.19 - Solução Iterativa pelo Método de Rigidez Inicial .....	156
Figura 5.20 - Relação $N/N_p$ x $M/M_p$ .....	157
Figura 5.21 - Representação Esquemática da Taxa de Propagação de Fissura por Fadiga ( $da/dN$ ) versus Amplitude do Fator de Intensidade de Tensões $\Delta K$ e os Respectiveos Estágios Observados Durante o Processo .....	161
Figura 5.22 - Barra Sujeita a Carregamento Cíclico .....	164
Figura 5.23 - Representação do Modelo de Propagação da Trinca .....	164
Figura 5.24 - Comportamento da Fissura .....	165
Figura 5.25 - Definição de $\Delta K_{ef}$ .....	166
Figura 5.26 - Região de Plastificação na Extremidade da Trinca .....	168
Figura 5.27 - Shell43 - Plastic Shell .....	172
Figura 5.28 - Propagação Simulada Através de Liberação Gradual de Vínculos .....	173
Figura 5.29 - Modelagem da Viga de Aço no Programa Ansys .....	173

## CAPÍTULO 6

Figura 6.1 - Método para Identificação da Fratura na Viga de Ponte .....	179
Figura 6.2 - Modelo de Viga Biapoiada.....	180
Figura 6.3 - Modos de Vibração .....	182
Figura 6.4 - Modelo Numérico de Viga com Fratura Simples em $x_c = \beta.l$ ...	184
Figura 6.5 - $\Omega(\beta)$ versus $\beta$ para o Caso de Viga Biapoiada .....	191
Figura 6.6 - Viga Apresentando Duas Fraturas .....	192
Figura 6.7 - Exemplo de Resposta Típica de Frequência de Ponte Rodoviária .....	194

## CAPÍTULO 7

Figura 7.1 - Seção Transversal da Viga-Mista .....	196
Figura 7.2 - Elevação .....	196
Figura 7.3 - Largura Efetiva e Detalhe do Contraventamento Adotado .....	199
Figura 7.5 - Viga Fraturada .....	201

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1a -Pontes em Viga .....	20
Tabela 2.1b -Pontes em Arco .....	21
Tabela 2.1c -Pontes Suspensas .....	22
Tabela 2.1d -Pontes Estaiadas .....	23
Tabela 4.1 - Tensões Admissíveis de Fadiga - Estruturas Hiperestáticas (AASHTO) .....	105
Tabela 4.2 - Tensões Admissíveis de Fadiga - Estruturas Isostáticas (AASHTO) .....	105
Tabela 6.1 - Valores de $\lambda$ para as Condições de Contorno .....	183
Tabela 7.1 -Resultados Obtidos no Programa Ansys para Calibração do Modelo .....	208

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Gregos

$\delta$	deformação axial
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\varepsilon$	deformação específica
$\Phi$	função de tensão
$\gamma_s$	energia específica de superfície
$\theta$	rotação
$\rho$	raio de curvatura
$\sigma_{ij}$	componente do tensor tensão
$\sigma_{m\acute{a}x}$	tensão máxima na extremidade da fissura
$\sigma_y$	tensão de escoamento
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\psi_{ij}$	matriz de flexibilidade
$\nabla$	operador gradiente
$r, \theta$	coordenadas polares

### Latinos

$A$	área
$a$	comprimento de uma fissura
$b, t$	espessura
$E_l$	energia de ligação
$E$	módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young
$f_{ij}$	função adimensional de $\theta$
$G$	módulo de elasticidade transversal ou módulo de cisalhamento. Também velocidade de liberação de energia.

Ger	velocidade crítica de liberação de energia.
I	momento de inércia
J	integral independente do caminho
KI, KII, KIII	fatores de intensidade de tensão nos modos I, II e III respectivamente
Kc	fator de intensidade de tensão crítico
L	comprimento
M	momento
Mp	momento plástico
N	esforço normal ou número de ciclos
n	normal à superfície
P	força concentrada
q	deformação
r <sub>p</sub>	comprimento da zona plastificada
t <sub>f</sub>	espessura da mesa
t <sub>w</sub>	espessura da alma
U	energia elástica
W	trabalho
x <sub>o</sub>	distância de equilíbrio entre os átomos
x,X	coordenada cartesiana (abscissa)
y,Y	coordenada cartesiana (ordenada)
z,Z	coordenada cartesiana (cota)
z	número complexo

---

# Prólogo

Essa tese de doutorado foi desenvolvida durante a minha estada como pesquisador do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo (EESC - USP).

Uma fase de relevante importância e decisiva na complementação do projeto foi a cooperação do *Institut für Stahlbau da Technische Universität - Braunschweig - Alemanha*, onde tive a excelente e inesquecível oportunidade de aumentar meus conhecimentos de vida e profissional.

Lógico que uma pesquisa como essa foi enriquecida com valiosas sugestões e por pessoas que de uma forma ou de outra acreditaram e apoiaram na concretização dessa obra. Em particular, sinto-me profundamente agradecido as seguintes pessoas e órgãos:

Ao Prof. Dr. Tit. **Wilson Sergio Venturini**, exemplo de engenheiro e pesquisador, pelos conhecimentos transmitidos, valiosas sugestões, estímulo, orientação segura e objetiva sempre presentes na orientação dessa pesquisa e pela amizade desenvolvida no decorrer do trabalho.

Ao Prof. Dr. Dipl.- Ing. **Udo Peil**, orientador na Alemanha, pela excelente recepção, sugestões e oportunidades que muito enriqueceram a minha vida profissional.

Aos Professores do curso de Pós-Graduação do Departamento de Estruturas - SET da Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP, pelos conhecimentos transmitidos, relevantes contribuições, em particular ao Prof. Dr. **Sérgio P.B. Proença**, Prof. Dr. **José Jairo Sáles** e Prof. Dr. **Mounir Rachid**.

Ao Prof. Dr. Rer. nat. **Heinz Antes** do Institut für Angewandte Mechanik, pela importante cooperação e disposição do seu instituto ao bom andamento desse trabalho.

Ao Amigo Dr. Dipl.-Ing. **Richard Degenhardt**, Institut für Angewandte Mechanik, pelo

---

---

excelente apoio e consultorias prestadas.

Aos meus **Pais Dr. Carmênio e Maria Tereza** e aos meus **irmãos Glen e Fran**, pela forma que sempre me incentivaram, contribuíram, apoiaram, sugeriram, acreditaram e o mais importante a presença sincera em todos momentos de realização dessa jornada.

À minha **Esposa** e companheira **Valéria**, que sempre e muito me apoiou, com sua incrível credibilidade e determinação, valiosas sugestões, incentivo em todos os momentos e dedicação na revisão e edição dessa obra.

Aos amigos da Pós-Graduação no Brasil: Prof. **Antônio R. Balbo** (ACDC), Eng<sup>o</sup>. **Carlos A. Fudoli**, Prof. **João Augusto L. Rocha**, Prof. **Moacir Kripka** pela presença nas horas difíceis, imprescindível companherismo e agradável convívio.

Aos amigos do Institut für Stahlbau- Alemanha: Dipl.-Ing. **Olaf Einsiedler** (*O Companheiro*), Dipl.-Ing **Martin Kaldenhoff** (008), **Half Hildebrandt** pelo apoio, convivência e responsáveis pelos melhores momentos na Alemanha.

À **Dra. Nireida M. de Deus** e à **Família Bianco** pelo incentivo e colaborações nos momentos mais difíceis dessa jornada.

Aos Funcionários da Secretaria, Biblioteca e Desenho do Departamento de Estruturas da USP-EESC (Brasil) e do IS.TU-BS (Alemanha), que souberam dar sua parcela de contribuição nessa jornada e procuraram na amizade o tempo comum de diálogo.

À CAPES - Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo auxílio financeiro na Alemanha e ao CNPq - Conselho Nacional de Pesquisa, pela concessão da bolsa de estudos no Brasil.

Ao folhear as páginas, contemplar as imagens e analisar o texto dessa obra espera-se que o leitor possa ingressar num percurso que permita-o com segurança idealizar e até imaginar o universo das pontes junto com uma importante formulação de modelos cujo objetivo final é prolongar sua vida útil.

À Deus que me deu o dom da vida e me abençoou com a inteligência só cabe ... agradecer.

---



# RESUMO

**DE DEUS, E.P.** *Análise do Processo de Fraturamento em Vigas de Pontes de Aço sob Efeito de Fadiga.* São Carlos, 1997. 263p. Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O aparecimento e a propagação de fissuras nos elementos estruturais de uma ponte de aço podem ser resultantes de flutuações de carregamento. Os elementos soldados são suscetíveis ao aparecimento de descontinuidades internas localizadas nas soldas e são bem sensíveis às variações de tensões. A consideração da redistribuição dos esforços entre os elementos da estrutura têm importância relevante no planejamento do custo de recuperação.

Desenvolve-se um modelo de análise em vigas de pontes de aço para simulação de abertura de fissuras ocasionadas por carregamento cíclico. Esse modelo considera duas alternativas possíveis para governar a propagação da fissura. A fase inicial é baseada na formulação da mecânica da fratura linear elástica a qual é geralmente utilizada na análise de fissuras devido à fadiga em estruturas de aço. O modelo é expandido para consideração dos conceitos de mecânica da fratura elasto-plástica.

Durante inspeções de pontes de aço é possível aplicar uma técnica não destrutiva na determinação de variações de frequências naturais e com esse artifício auxiliar na localização e verificação da amplitude de fissuras. A diminuição da rigidez do elemento estrutural é obtida através de uma técnica inversa.

São desenvolvidos algoritmos correspondentes aos modelos simplificados para implementação em microcomputadores, sendo os resultados numéricos obtidos, comparados com as soluções calculadas através de um código de cálculo largamente utilizado em análises numéricas.

**Palavras-chave:** Pontes de Aço, Fissuras devido à Fadiga, Mecânica da Fratura, Técnica Inversa.

## **ABSTRACT**

**DE DEUS, E. P.**, Fracturing Process Analysis for Steel Bridge Beams Under Fatigue Effects São Carlos, 1997. 263p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Crack formation and growth in steel bridge structural elements may be due to loading oscillations. The welded elements are liable to internal discontinuities along welded joints and sensible to stress variations. The effort redistribution among the structural elements are very important to evaluate repairing costs.

In this work a steel bridge beam model has been proposed to simulate crack openings due to cyclic loads. Two possibilities have been considered to model crack propagation. The initial phase is based on the linear fracture mechanics which is often adopted to analyse fracture formation in steel structure due to fatigue. The model is extended to incorporate elastoplastic fracture mechanic concepts.

For steel bridge inspections, it is possible to adopt a non destructive technique to quantify the structure eigenvalue variation that will be used to help the localisation and size evaluation of the grown fracture. The structural element stiffness reduction is obtained by inverse analysis.

The corresponding numerical algorithms to be implemented in microcomputers are proposed for those simplified models. Numerical results obtained by applying those developed codes are compared with the solutions achieved by using other well known computer software.

Key-words: Steel bridges, Fatigue, Fracture mechanics, Inverse techniques.

---

*“Não importa quantas vezes os resultados de experiências concordem com uma teoria, não se pode ter certeza de que, da próxima vez, o resultado não vá contradizê-la.”*  
*Stephen W. Hawking*

# 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A formação geológica do planeta Terra foi sem dúvida imaginada por um **criador** que muito se identifica com o espírito humano e sua genialidade em superar os desafios. Os acidentes geográficos como as montanhas, vales, rios, lagos, e abismos, formaram-se cautelosamente durante a grande criação *Divina* para que o homem cumprisse sua tarefa de

*união* e conciliação com a natureza.

Esta *união*, porém, não seria propiciada apenas no plano físico. Foi algo mais inerente ao espírito humano que induziu a procura constante de uma **ponte** que possibilitasse um grande encontro com o seu mestre e criador. Na bíblia hebraica tem-se relatos sobre a famosa *Torre de Babel*, conhecida como a ponte cuja finalidade seria encontrar o *senhor* nos céus.

Para o islamismo e várias outras religiões do extremo oriente a ponte tem um importante papel no *outro lado da vida*. Segundo estas religiões, existe uma estreita ponte "leitosa", em forma de arco e que liga a rota do sol, onde os mortos devem atravessá-la afim de alcançarem a *vida pós-morte*. Nesta ponte, apenas os bons conseguem chegar ao destino enquanto que os maus caem num precipício. Os povos germânicos interpretavam o arco-íris como sendo o *caminho dos escolhidos e dos deuses no céu*.

Os cristãos também acreditam na existência de uma ponte entre Deus e os homens. Na figura 1.1 tem-se uma representação medieval onde *Cristo* está sentado sobre o arco-íris como o *juiz da terra*. O Papa em Roma recebe o título de "*Pontifex Maximus*" que significa: "o maior construtor de pontes", uma espécie de intermediário entre o Céu e a Terra. A imortalizada obra de *Michelângelo* na Capela Sixtina, onde *Adão* estende sua mão para o criador, é um exemplo de ponte que liga o espaço celestial e o terrestre.



Figura 1.1 - Representação Medieval.

O objetivo do escritor é criar um caminho, ou uma ponte, tornando seus pensamentos e idéias reais e imagináveis ao leitor. Ao atravessar o percurso histórico e nossa acidentada geografia encontramos o conhecimento

## 1 Introdução

de técnicas e talentos impressionantes de Arquitetura e Engenharia. As pontes surgiram numa época em que não existiam sequer idiomas e atravessando o tempo e o espaço fala-se hoje das *pontes interplanetares* que ligam a tecnologia humana ao Cosmo.

Nos dicionários e enciclopédias encontram-se várias definições e sentidos para o substantivo *pontes*. No sentido técnico/estrutural, "**pontes**" são obras de arte que estabelecem comunicação entre dois pontos separados por um curso de água ou qualquer obstáculo sendo ainda sujeitas a carregamentos e portadoras de perfeito equilíbrio. Antigamente os romanos chamavam suas pontes de pedra e madeira de *pons* (latim), com significado análogo à palavra grega *patos* e alemã *Pfad*. De *pons* originou-se *pont* em francês, *puente* em espanhol e *ponte* em italiano e português. A raiz etmológica da palavra latina é *phanthah*, que significa imigração, passagem. A palavra alemã *Brücke* origina-se de *Prügel*, que significa estaca de madeira. Em chinês os antigos símbolos que compõem o substantivo *pontes* (a pronuncia é *Qiao*) representam uma *passagem imponente de madeira*.

As pontes também servem como referência e demonstração do grau de desenvolvimento de um povo ou nação. No passado, a ponte era sempre um cenário predileto para formar alianças entre povos, inaugurações e ponto estratégico durante os tempos de guerra. Atualmente, as pontes são elos vitais nos sistemas viários, possibilitando o trânsito de bens e pessoas para as mais diversas localidades.

As pontes de aço têm provado sua boa durabilidade funcional, algumas chegando até aos 100 anos de idade, como a famosa *Ponte de Brooklyn* na cidade de Nova York e a ponte ferroviária *Firth of Forth* na Escócia (Figura 1.2). Entretanto, o conceito de durabilidade para qualquer que seja a ponte tem um preço. Este preço é uma manutenção planejada e eficiente, que envolve inspeções e recuperações necessárias.



Figura 1.2 - Ponte Firth of Forth.

Em algumas circunstâncias, pode-se verificar a presença de fissuras nos elementos ou ligações da ponte, oriundas de um carregamento cíclico sob o qual a estrutura está submetida. A fadiga do metal é um dos principais fatores que limitam a vida de uma ponte de aço.

As pontes compostas de vigas soldadas são propícias à ocorrência de fratura por fadiga severas. Os elementos soldados podem certamente sofrer uma falha devido às tensões existentes em detalhes com baixa resistência à fadiga ou ainda em regiões de tração elevada. A inexistência de um caminho alternativo para o carregamento atuante certamente conduzirá ao colapso total da estrutura.

A segurança estrutural está associada à resistência local de seus elementos ou ligações, que podem estar próximos de seu estado limite último. Portanto, detectar uma fissura durante uma inspeção permite ao engenheiro determinar sua velocidade de propagação, constatar a gravidade do problema e tomar as seguintes providências:

- ① restringir o tráfego a uma sobrecarga definida;
- ② restringir a velocidade dos veículos (verificação do fator de impacto);
- ③ interromper o tráfego devido à ruína (estado limite último).

Os principais fatores que podem conduzir ao desenvolvimento de trincas em pontes de aço são: frequência do tráfego, tipo de detalhe, idade da ponte, variação de tensões, qualidade de fabricação e tenacidade à fratura do material.

A aplicação dos conceitos da **Mecânica da Fratura** oferece uma boa referência ao projetista sobre o aparecimento e propagação de trincas ocasionadas por carregamentos cíclicos em pontes de aço. Através da aplicação dessa teoria pode-se quantificar e prever a resistência, durabilidade e segurança dos elementos da estrutura que sejam portadores de fissuras.

A análise das causas de ruptura pode ser realizada através da interpretação e caracterização da superfície da trinca cuja apresentação assemelha-se com um mapa topográfico. Quando se estuda este mapa se obtém com frequência a história dos eventos que ocorreram no elemento antes da falha final. Uma vez descoberta a causa da falha do componente é possível fazer-se a prevenção de novas ocorrências.

Na **Mecânica da Fratura Linear-Elastica** o parâmetro utilizado para medir a tenacidade à fratura do material permite controlar a tolerância de tamanho da trinca antes da ocorrência da falha final do elemento. Qualquer fissura previamente detectada deve ser imediatamente comunicada a um especialista afim de ser determinado o grau de severidade da mesma.

No caso da utilização da teoria de **Mecânica da Fratura Elasto-Plástica** os parâmetros utilizados passam a considerar a região plastificada na ponta da trinca.

A representação de uma estrutura e de um carregamento através de modelos matemáticos ou físicos, é chamada de *idealização*. O modelo matemático pode aproximar-se bastante da estrutura real, sendo que desta forma irá necessariamente conduzir a cálculos mais complexos. Excluindo alguns casos simples, é difícil, senão impossível, encontrar uma solução exata ou analítica para um problema definido desta forma. Muitas vezes esse

## 1 Introdução

---

aumento de complexidade pode ser justificado se houver uma maior quantidade de detalhes na estrutura.

Devido à dificuldade em obter-se a solução precisa do modelo, uma alternativa viável para a sua análise consiste na utilização de métodos numéricos. Esses métodos, que exigem técnicas computacionais sofisticadas são responsáveis diretos pela determinação das soluções aproximadas.

Na última década, um método que tem se mostrado eficiente para a solução de problemas práticos de fratura é o Método dos Elementos Finitos e um grande número de técnicas computacionais tem sido sugeridas para o cálculo dos parâmetros relativos aos modelos de mecânica da fratura.

### 1.2. OBJETIVOS

- Desenvolvimento de um projeto cuja finalidade é a obtenção de formulações teóricas e modelos simplificados para análise de fratura por fadiga em vigas de pontes de aço. O principal recurso para o desenvolvimento de tais modelos é a utilização do método de análise inversa. Esse método deve funcionar como uma ferramenta auxiliar à localização e verificação da amplitude de fissuras em pontes metálicas sem, entretanto, utilizar processos destrutivos. Assim, a avaliação proposta ocorrerá através de alterações na frequência natural do elemento. Lembrando-se que modelos como esse são baseados em diminuição de rigidez do elemento estrutural na presença de fissura, deve-se portanto, selecionar e elaborar modelos associados a flexibilidade, por exemplo, elementos de viga onde a perda de rigidez devido ao dano é admitida concentrada em uma determinada seção. Com auxílio da mecânica da fratura, deve-se elaborar tal modelo levando-se em conta também carregamentos cíclicos capazes de levar a estrutura a atingir sua capacidade limite, considerando-se inicialmente o modelo elástico e



posteriormente um modelo elasto-plástico.

### 1.3. Objetivos Específicos

- Estudo do comportamento, critérios de dimensionamento segundo as diversas normas para elaboração de projetos de pontes (UK, USA, CAN, DIN, EUROCODE), tipologia e sistemas construtivos de pontes metálicas.

- Estudo referente ao comportamento de fratura ocasionado por carregamentos cíclicos, onde procura-se detectar defeitos críticos que podem ser importantes na vida útil das vigas de pontes, classificando-se os problemas segundo os critérios de segurança.

- Estudo sobre modelos matemáticos, técnicas e análises propostos para propagação de fissuras em metais. Nesse item estudou-se o comportamento e propagação de uma determinada fissura na estrutura, quando solicitada por carregamentos monotônicos ou cíclicos.

- Programa de análise numérica utilizado. Para auxiliar o estudo do comportamento de trincas apresentadas em vigas metálicas utiliza-se o programa ANSYS. Este conhecido programa, permite realizar análises estruturais baseada no método dos elementos finitos. \*A orientação para utilização do programa para os fins especificados teve como principais responsáveis :

- Institut für Stahlbau - TU.BS.
- Institut für Angewandte Mechanik - TU.BS.
- CADFEM - Hannover.

- Modelagem de uma viga I , metálica, 3D, utilizando o programa ANSYS como ferramenta básica. Foram realizadas análises numéricas em vigas que apresentavam na região central, o início de uma fissura com tamanho e abertura pré-determinada, sendo esta integralmente localizada na mesa inferior. As análises foram continuadas, considerando-se a possibilidade do avanço da fratura ao longo da alma até a mesa superior da viga, para simular com bastante precisão o fraturamento em modelos reais. Deve-se ainda salientar que esta fase foi realizada para a melhor compreensão sobre o funcionamento “software”, além de detectar seus limites.

- Desenvolver um modelo em elementos finitos de viga que possa representar a propagação de fraturas ocasionadas por carregamentos cíclicos. São elaborados os seguintes modelos:

i) **Modelo Elástico.** Este modelo considera o caso mais comum de uma viga bi-apoiada, com a presença de uma fratura única ocasionada por tensões cíclicas que conduzem a deformações adicionais no elemento;

ii) **Modelo Elasto-Plástico.** A formulação deste modelo segue a teoria clássica da plasticidade. O conceito de FLE (Fratura Linear Elástica) perde sua validade após uma determinada fase de carregamento quando ocorre um alargamento considerável da região plástica na ponta da trinca, sendo este relacionado com o tamanho da fratura.

- Elaboração de um programa para fins de determinação da frequência natural da viga e das respectivas mudanças associadas ao efeito de propagação da fratura. O objetivo é detectar trincas na viga utilizando o estudo de **análise inversa** no cálculo de  $K$  (fator de intensidade de tensões).

Os demais capítulos do trabalho têm a seguinte apresentação:

## **CAPÍTULO 2**

Apresenta-se uma evolução histórica do tema, onde inicialmente procura-se situar o leitor sobre a importância das pontes no Brasil e no mundo. A história da fadiga é descrita a partir de 1829 até o presente, relacionando cientistas e engenheiros que se dedicaram ao desenvolvimento de técnicas e análises de falhas em estruturas ocasionadas por carregamentos cíclicos. A mecânica da fratura apesar de ser há muito uma preocupação dos povos antigos tem sua base teórica fundamentada em 1920 pelo inglês A.A. Griffith. É ainda apresentado o fato de que o primeiro trabalho de Griffith seria posteriormente corrigido e apresentado de forma mais clara pelo alemão K. Wolf. A história se desenrola mostrando os principais aspectos do mecanismo de fratura até a introdução e definição dos parâmetros hoje utilizados para material com comportamento não-linear.

## **CAPÍTULO 3**

Nesse capítulo são tratados os fundamentos teóricos da mecânica da fratura. Primeiramente, são discutidos os mecanismos de ruptura que geralmente se desenvolvem nos metais. Em seguida, apresenta-se a teoria linear-elástica, enfatizando o conceito de fator de intensidade de tensão, sendo que, para o caso de materiais metálicos, é discutida a importância da representação de uma zona plastificada na extremidade da fissura. A teoria elasto-plástica passa a ser considerada quando na extremidade da trinca tem-se uma região plastificada com tamanho considerável. Quanto aos testes de laboratório, apresenta-se o procedimento padrão constante nas diversas normas internacionais, como a inglesa e a americana, necessário à

determinação dos parâmetros críticos.

#### **CAPÍTULO 4**

Os métodos utilizados nas inspeções de pontes de aço assim como a discussão dos detalhes suscetíveis ao desenvolvimento de trincas provenientes do efeito de fadiga são apresentados nesse capítulo. São também abordados alguns casos de acidentes e os métodos de cálculo atualmente utilizados para determinação da falha por fadiga.

#### **CAPÍTULO 5**

Esse capítulo oferece um desenvolvimento de um modelo teórico capaz de simular a abertura de trincas em vigas de pontes de aço, sendo esse modelo baseado na diminuição da rigidez do elemento estrutural. Inicialmente, assume-se a hipótese de fratura mecânica linear a qual é geralmente utilizada na descrição da propagação da fratura em estruturas de aço ocasionada por cargas monotônicas ou cíclicas. Em seguida, faz-se uma extensão do modelo afim de considerar-se os conceitos da teoria elasto-plástica no problema de abertura de fissura. Para este procedimento teórico é elaborado o programa *RAST* (*Rissausbreitung in Stahlträger* - propagação de fratura em vigas de aço), que será oportunamente discutido neste capítulo. O programa ANSYS é utilizado como ferramenta para elaboração de um modelo comparativo.

#### **CAPÍTULO 6**

Nas inspeções realizadas em pontes de aço, através da aplicação de testes não-destrutivos, observa-se que uma simples mudança na

freqüência natural possibilita a localização e determinação da amplitude de *cracks*. Neste capítulo, propõe-se uma *técnica inversa* onde a rigidez da viga previamente calculada pela mecânica da fratura é agora aplicada à determinação da nova freqüência. O cálculo da freqüência natural do elemento estrutural sem fratura pode ser feito através do programa **FREQUENZ**. O programa **EIGFRISS** (*Eigenfrequenz für Rissmodelle* - freqüência para modelos de fratura) tem a função de detectar e/ou fornecer informações relativas ao grau de severidade de uma fratura numa viga de ponte de aço.

## CAPÍTULO 7

Nesse capítulo são mostrados os exemplos de aplicação da formulação teórica. Os resultados numéricos calculados através dos modelos simplificados de fratura são comparados com as soluções obtidas com o modelo elaborado no programa ANSYS.

## CAPÍTULO 8

No capítulo 8 encontram-se as conclusões obtidas e sugestões para continuidade da pesquisa.

## APÊNDICE

No Apêndice A encontra-se uma lista para análise de elementos com fratura; no Apêndice B são fornecidos os programas Fonte RAST e EIGFRISS; no Apêndice C encontram-se diversas fórmulas para cálculo do fator de intensidade de tensões para diferentes tipos de fraturas e elementos.

---

*“Que nossos esforços desafiem as impossibilidades.  
Lembrai-vos de que as grandes proezas da história  
foram conquistas do que parecia impossível.”  
Charles Chaplin*

## **2** **EVOLUÇÃO HISTÓRICA**

### **2.1. A HISTÓRIA DAS PONTES**

*“De tudo que o Homem inventou e construiu durante a sua existência , nada brilha e tem tanto valor aos meus olhos, como as Pontes “, escreveu o poeta iugoslavo Ivo Andrić. De fato, a imposição de uma ponte supera com toda sua majestade e notoriedade outros tipos de estruturas. Desde alguns milênios o ser humano reconhecia a facilidade de se atravessar um riacho utilizando talvez um acidente geográfico ou até mesmo um tronco de árvore*

que casualmente era levado pela correnteza até fixar-se e ligar-se às margens em algum ponto do percurso. Com a evolução, o homem precisou procurar novos horizontes e garantir a continuidade da sua espécie, surgindo assim, a necessidade de aprimorar a técnica de superar os obstáculos naturais acentuados. As pontes em arco, construídas com pedras, são as mais antigas e por muito tempo foram a única alternativa para superar longos vãos. Na cidade *Nîmes* localizada no sul da França, por exemplo, encontra-se sobre o *Rio Ardèche* uma ponte formada naturalmente e conhecida por *Pont d'Arc*, apresentando 59 metros de vão e 34 metros de altura (Figura 2.1). Foram os Sumérios e os Egípcios que a aproximadamente 5.000 anos construíram arcos de alvenaria.

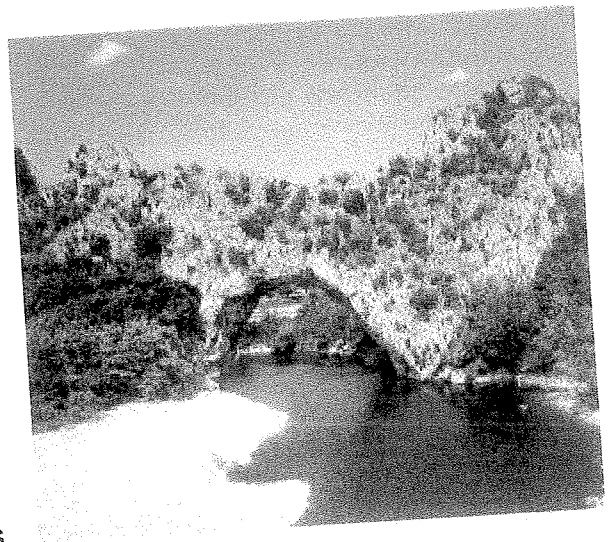


Figura 2.1 - Pont d'Arc

No ano 490 a.C., na cidade grega Marathon, 100.000 persas comandados pelo rei Dario encontraram-se com 11.000 gregos para uma possível batalha. Como estavam em grande desvantagem, os gregos elaboraram uma estratégia: construíram uma ponte de 42 metros com os barcos de guerra, formando uma passagem sobre o Bósforo com destino a capital Atenas, e finalmente recuaram com passos acelerados do poderoso inimigo. Este evento ficou conhecido como a primeira corrida de Maratona no mundo.

O império Romano preocupou-se principalmente com a formação de estradas para expansão dos seus domínios. Graças a estas ligações, Roma centralizou tão amplo governo mobilizando rapidamente as tropas de um lugar para outro quando necessário. Uma parte importante desta malha com um

total aproximado de 300.000 quilômetros, foram sem dúvida as pontes. Estas obras foram construídas com tão perfeita estabilidade que até hoje, 2.000 anos depois, quase 300 ainda existem e mais importante: são utilizadas. A ponte Milvische no norte de Roma, com 2.100 anos, suportou até mesmo o carregamento de carros tanques durante a segunda guerra mundial.

A mais conhecida ponte utilizada para operações militares é a ponte de madeira construída pelo imperador romano Júlio César, sobre o Rio Reno no ano 55 a.C, nas proximidades de Bonn (Alemanha). Em sua obra "A Guerra dos Gállos" ( ainda hoje leitura padrão em cursos de Latim) tem-se uma perfeita visão da grandeza desta estrutura, com a particularidade de ter sido edificada pelos soldados em apenas 10 dias.

As maiores pontes romanas não foram aquelas utilizadas para tráfego e sim para condução de água, bem conhecidas como Aquedutos. O mais impressionante é o " Pont du Gard " , próximo a cidade francesa Nîmes, antiga cidade romana Nemausus. Pont du Gard foi construída entres os anos 63 - 13 a.C. tendo portanto mais de 2.000 anos (Figura 2.2).

Outro belo exemplo de ponte executada pelos romanos em aproximadamente 136 d.C., é a famosa " Ponte Angelo " ,em arco, localizada sobre o Rio Tiber em Roma (Figura 2.3).

No século V d.C. ocorreu a queda do império romano e com ele entrou em decadência o mercado, a construção de estradas - e pontes. Os anos seguintes foram marcados por guerras e pelo esquecimento da arquitetura de Roma. No ano 800 d.C., o imperador alemão *Karl der Groß* (Carlos Magno) tentou implantar novamente a rede de tráfego romana, mas o tempo e a pobreza da época impediram que surgissem grandes obras. Assim, durante quase 800 anos não verificou-se qualquer marco significativo sobre inovações técnicas e construção de pontes.



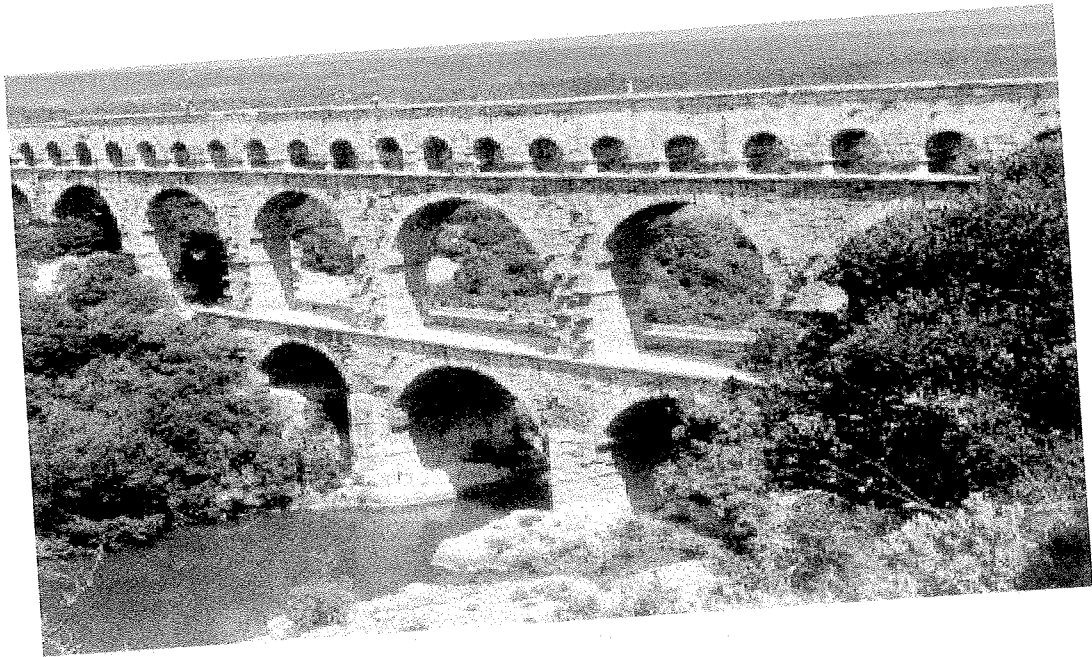


Figura 2.2 - Pont du Gard

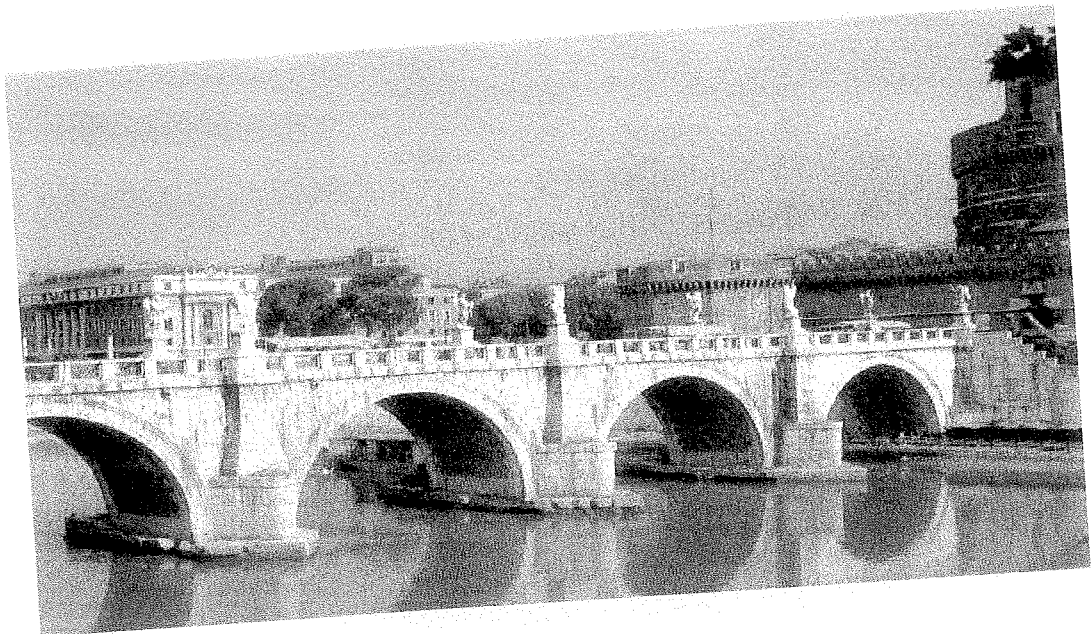


Figura 2.3 - Ponte Angelo

## 2 Evolução Histórica

---

O século XII foi o marco de uma nova era. O mercado europeu fortalecido conduziu à abertura de novas rotas e conseqüentemente à execução de novas pontes. O material utilizado continuava sendo a pedra. Marcaram a época: a ponte localizada sobre o rio Meno, em Würzburg (1146); Regensburg sobre o Rio Danúbio (1146); em Praga sobre o Rio Moldau (1172); sobre o Rio Rhône em Avignon (1188); em Londres, sobre o Rio Tâmisa (1209); em Dresden sobre o Rio Elba (1260).

Os projetistas de pontes da idade média se orientaram pela imagem deixada pelos romanos, e foi apenas no Renascimento, iniciado no século XV na Itália, que a engenharia de pontes adquiriu fundamentos científicos. Os sábios estudaram a tradição herdada dos árabes, gregos e romanos e começaram a restaurar obras antigas com o auxílio de experimentos.

Leonardo da Vinci (1452 - 1519) estudou a influência do movimento das águas sobre os pilares e até projetou uma ponte em arco no Bósforo, com um único vão de 250 metros, que servia de ligação entre as cidades de Constantinopla e Pera (hoje Istanbul). Infelizmente, este projeto foi muito ousado para a época. Da Vinci o manteve em segredo sendo fundamentado um século depois por Galileo Galilei (1564 - 1642). Galileo foi o primeiro a calcular os esforços numa estrutura. Os métodos construtivos passavam a ser cada vez mais aprimorados.

No período compreendido entre os séculos XVI e XVIII, a França se revelou como um país de engenhosos construtores que contribuíram fortemente para o desenvolvimento das pontes de pedras. Uma das mais notáveis é a *Pont Neuf* no Sena (1607), construída por Jacques Ange Gabriel. Não muito distante da *Pont Neuf* encontra-se a *Pont de la Concorde* (1791), a última maior obra de Jean Rudolphe Perronet (fundador da *Ecole des Ponts et Chaussées*).

No início do século XVI o ferro fundido e a madeira surgiram como novas opções de material para execução de pontes. Estes materiais

proporcionaram o aparecimento de formas geométricas inovadoras como as treliças de madeira do arquiteto Palladio (1570).

O alto custo do ferro induziu tanto os europeus como os norte-americanos a continuarem utilizando a madeira e a pedra na construção de pontes. Enquanto isso a Inglaterra era uma exceção e exportava ferro em grande quantidade.

Na cidade Inglesa de Coalbrookdale surge a primeira ponte de ferro fundido, construída em 1779 sobre o Rio Severn pelo engenheiro Joseph Wilkinson (Figura 2.4). Como este material era frágil e suportava bem apenas esforços de compressão, Wilkinson idealizou a estrutura da ponte em forma de arco, como aquele utilizado nas pontes de pedra. Esta obra tem um vão de 59 metros, dividido em três tramos onde cada um destes tramos é constituído de cinco arcos paralelos.

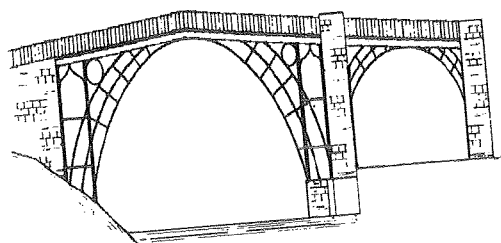


Figura 2.4 - Ponte Coalbrookdale.

Um dos melhores construtores de pontes da Inglaterra foi Robert Stephenson (1803 - 1859), filho do pioneiro nas construções de estrada de ferro George Stephenson. Sua obra mais famosa é a ponte ferroviária *Britannia*, situada no estreito de Menai, entre o País de Gales e a ilha Anglesey. O projeto teve como princípio a utilização racional de metal na construção da ponte. O uso do ferro laminado e o sistema estrutural em forma de viga-caixão com vãos de 70-140-70 metros foram inovações na época.

No século XIX ocorreu a revolução industrial e com isto uma explosão de novas técnicas de execução e projeto além do aparecimento de materiais como o aço, cimento, concreto armado e protendido. As pontes passaram a apresentar vãos e sobrecargas cada vez maiores acompanhados dos mais diversos sistemas estruturais. O Francês Gustave Eiffel (1832-1923) já era

notável pela construção de pontes de ferro bem antes de construir o símbolo de Paris : a famosa *Torre Eiffel*. É de sua autoria o *Viaduto Rouzat*, sobre o Rio Sioule, feito de ferro laminado, em Gannat, França (1869).

Desde a antiguidade tinha-se conhecimento do aço, mas seu preço sempre o deixava fora do mercado competitivo, devido a falta de um processo industrial para sua fabricação. Em 1856, o inglês Henry Bessemer inventou um forno que possibilitou a produção do aço em alta escala permitindo desde então a redução dos custos e a popularização deste material, substituindo rapidamente o ferro fundido e o laminado na construção civil.

Foi o alemão Joahann August Roebling quem projetou a *Ponte Brooklyn*, sobre o Rio East, em Nova York, nos Estados Unidos, cuja estrutura é suspensa e apresenta um vão de 486 metros (Figura 2.5). A fase construtiva se estendeu por um período de 14 anos, sendo concluída em 1883. Por vinte anos foi a maior ponte e também considerada a oitava maravilha do mundo.

Em 1937 é concluída a *Ponte Golden-Gate* situada em San Francisco, nos Estados Unidos (Figura 2.6). É considerada por muitos como a mais bonita do mundo. A idéia de sua construção surgiu em 1872 com o empresário de ferrovias Charles Crocker. Mas foi apenas em 1916, pelas campanhas do editor James Wilkins, do *San Francisco Call Bulletin*, que essa idéia despertou o interesse pela construção da obra.

Os últimos anos do nosso século serão ainda determinados por mais algumas grandes construções de pontes. As ilhas japonesas Honshu e Shikoku serão interligadas em 1998 pela *Ponte Pensil Akashi-Kaikyo*, de aço, com um vão de 1990 metros e será a maior ponte pênsil do mundo. Em 1999, uma ponte de 11.000 metros para uso rodoviário e ferroviário, sobre o mar de Öresund, interligando Copenhage(Dinamarca) e Malmö(Suécia) reduzirá o tempo de viagem de 100 minutos para 30 minutos.

A tabela 2.1 apresenta uma lista de algumas pontes de aço mais conhecidas no mundo.



Figura 2.5 - Ponte Brooklyn

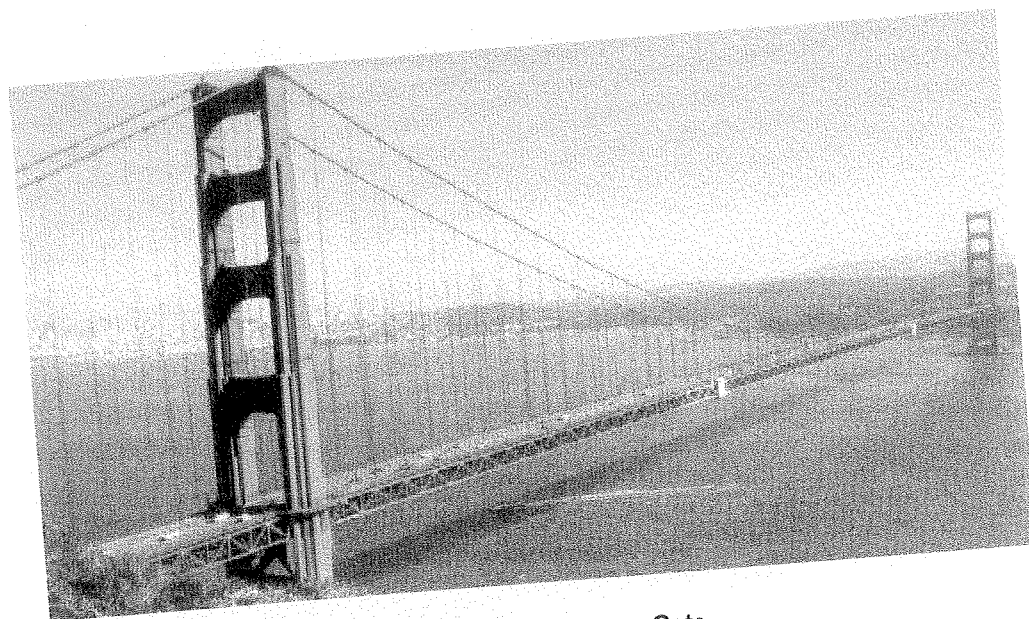


Figura 2.6 - Ponte Golden Gate

## 2 Evolução Histórica

Pontes em Viga	País	VãoMáx/Compr.(m)	Ano	Tipo
Quebec	Canadá	549	1917	Treliça
Firth of Forth	Escócia	521	1890	Treliça
Minato Nanko Osaka	Japão	510	1973	Treliça
Chester-Bridgeport	USA	501	1972	Treliça
Greater New Orleans	USA	480	1958	Treliça
Howrah Calcutta	Índia	457	1943	Treliça
Baybridge Frisco	USA	427/3600	1936	Treliça
Baton Rouge	USA	376	1968	Treliça
Astoria OR	USA	376	1966	Treliça Contínua
Kuronoseto Kaikyō	Japão	376	1974	Treliças
Tappan Zee NY	USA	369	1955	Treliças
Longview WA	USA	366	1930	Treliças
Francis Scott Key	USA	366	1977	Treliças
Queensboro NY	USA	360	1908	Treliças
Oshima Ohashi	Japão	325	1976	Treliças
Tenmon	Japão	300	1966	Treliça Contínua
P Costa e Silva	Brasil	300/7400	1974	Viga Contínua
Sava 1	Iugoslávia	261	1956	Viga Contínua
Zoo Köln	Alemanha	259/597	1966	Viga Contínua
Braga Memorial MA	USA	256	1966	Treliça Contínua
Auckland Harbor	N. Zelândia	244	1969	Viga Contínua
Koblenz-Sued	Alemanha	236	1973	Viga Contínua
Urado	Japão	230	1972	-
San Mateo-Hayward	USA	229/11270	1967	Viga Contínua
Lilla Bält I	Dinamarca	220	1935	Treliça Contínua
Eldebron Wittenb	Alemanha	160/1110	1978	Viga Contínua
Foxenbron	Suécia	125/180	1988	Viga Contínua
Vejlebron	Dinamarca	114/1720	1978	Viga Contínua
Vindeln	Suécia	100/170	1922	Viga Contínua
Ekolsundsbron	Suécia	74/430	1989	Viga Contínua

Tabela 2.1a. - Pontes em Viga

Pontes em Arco	País	Vão Máx/Comr.(m)	Ano
New River Gorge	USA WV	518	1976
Bayonne Kill van Kull	USA NN	504	1931
Sidney Harbor	Austrália	503	1932
Fremont Portland	USA	383	1973
Zdakov	Tchecoslováquia	380	1967
Port Mann	Canadá Vanc	366	1964
Thatcher	Panamá	344	1962
Trois-Rivers	Canadá St L	335	1967
Runcorn-Widnes	Inglaterra	330	1961
Birchenough	Zimbábue	329	1935
Nagasaki-Sasbo	Japão	317	1955
Glen Canyon	USA Colorado	313	1959
Lewiston-Queenston	USA-Canadá	305	1962
Hell Gate	NY USA	298	1916
Ohmishima	Japão	297	1979
Tjörnbro 1	Suécia	288	1960
Femarnsund	Alemanha	248/964	1963
Viaur	França	220	1902
Västerbron Stockholm	Suécia	204/602	1935
Karmsund	Noruega	184/690	1955
Wupper Bridge	Alemanha	180	1890
Svinesundsbron	Suécia	155	1946
Ärstabron	Suécia	151	1929
Coalbrookdale	Inglaterra	30	1776

Tabela 2.1b - Pontes em Arco



Pontes Suspensas	País	Vão Máximo (m)	Largura (m)	Ano
Akashi Kaikyo	Japão	1990	30	1998
Stora Bält	Dinamarca	1624	23.6	1995
Humber	Inglaterra	1410	18.2	1981
Verrazano	USA	1298	25.3	1964
Golden Gate	USA	1280	25	1937
Höga Kusten	Suécia	1210	17.8	1997
Mackinac	USA	1158	16	1957
Minami Bisan-Seto	Japão	1100	22.5	1988
Bosporen II	Turquia	1090	30.8	1988
Bosporen I	Turquia	1074	28	1973
G Washington	USA	1067	-	1931
Tejo Lissabon	Portugal	1013	16	1966
Firth of Forth	Inglaterra	1006	-	1964
Kita Bisan-Seto	Japão	990	22.5	1988
Severn	Inglaterra	988	-	1966
Shimotsui-Seto	Japão	940	22.5	1988
Pierre-Laporte	Canadá	908	-	1970
Noruto Ohashi	Japão	876	-	1983
Tacoma Narrows II	USA	853	-	1950
Askøy	Noruega	850	12.2	1993
Innoshima	Japão	770	-	1982
Angostura	Venezuela	712	-	1967
Kanmon	Japão	712	-	1973
Transbay Frisco	USA	704	-	1936
Gjemmesund	Noruega	623	-	1993
Lilla Bält	Dinamarca	600	-	1971
Hakata-Ohshima	Japão	560	-	1979
Kvalsund	Noruega	525	-	1977
Skjomen	Noruega	525	-	1972
Brooklyn	USA	486	-	1883
Älvsborgsbron	Suécia	417	-	1966

Tabela 2.1c - Pontes Suspensas



## 2 Evolução Histórica

Ponte Estaiada	País	Vão Máximo /compr. (m)	Ano
Pont de Normandie	França	856/2141	1994
Skarnsund	Noruega	530/1010	1991
Ikuchi	Japão	490/790	1993
Annacis Island	Canadá	465	1986
Yokohama Bay	Japão	460/860	1989
Hoogly Calcutta	Índia	457	1983
Queen Elisabeth II	Inglaterra	450	1992
Helgoland	Noruega	425/1064	1991
Hitsushijima	Japão	420	1988
Iwagurujima	Japão	420	1988
Meiko-Nishi Ohashi	Japão	405	1986
St. Nazarine	França	404	1975
Vigo-Rande	Espanha	400	1978
Napoleon Bonaparte Bridge, Jacksonville	USA Flórida	400/800	1989
Houston Ship Channel	USA Texas	381	1994
Luling	Mississipi USA	372	1982
Nya Tjörnbron	Suécia	366/665	1981
Yamatogawa	Japão	355	1982
Tempozan	Japão	350	1990
Neuenkamp Duisburg	Alemanha	350	1970
West Gate Melbourne	Austrália	336	1974
Rio Paraná (2)	Argentina	330	1978
Flehe Düsseldorf	Alemanha	328	1979
Köhlbrand Hamburg	Alemanha	325	1974
Kniebrücke Düsseldorf	Alemanha	320	1969
Daugava	Latvia	312	-

Tabela 2.1d - Pontes Estaiadas

Erskine	Escócia	305	1971
Bratislava	Eslováquia	305	1972
Severin Köln	Alemanha	302	1959
Kiev	Bielorussia	300	1976
Farö	Dinamarca	290	1985
Mannheim	Alemanha	287	1971
Leverkusen	Alemanha	280	1965
Bonn Nord	Alemanha	280	1967
Speyer	Alemanha	275	1974
Quincey	USA III	274	1990
Theodor Huss Düsseldorf	Alemanha	260	1958
Oberkassel	Alemanha	258	1975
Ress-Kalkar	Alemanha	255	1967
Weirton-Steubenville	USA	250	1986
Papineau-Leblanc	Canadá	241	1971
Wye Chepstow	Inglaterra	235	-
Toyosato-Ohashi Osaka	Japão	216	1970
Onomichi Ohashi	Japão	215	1968
Batman	Austrália	210	-
Kemijoki	Finlândia	210	1990
Strömsund	Suécia	183/333	1955

Tabela 2.1d -continuação.

## 2.2. AS PONTES DE AÇO NO BRASIL

A primeira ponte de metal no Brasil foi construída pelo Barão de Mauá em 1857, localizada sobre o Rio Paraíba do Sul, no estado do Rio de Janeiro. Esta obra que ainda hoje está em funcionamento é feita de ferro fundido, tem 30 metros de comprimento, subdividida em 5 tramos e 15 metros de largura. Foi também a primeira ponte brasileira a cobrar pedágio. Eram exigidos cem réis por pessoa e sessenta réis por cabeça de gado.

O rápido desenvolvimento industrial na Europa e Estados Unidos no século XIX influenciou o desenvolvimento de outros países como o Brasil, que na época caracterizava-se pela exportação agrícola e o café era o seu principal produto. A necessidade de viabilizar e modernizar o transporte conduziu ao aparecimento de novas vias e pontes. A principal responsável por esta modernização foi a implantação de novas ferrovias importadas pelas empresas estrangeiras. As pontes eram então encomendadas no exterior, em países como: Alemanha, Inglaterra, Bélgica e Estados Unidos, e montadas no Brasil. Os esquemas estruturais, perfis e as sobrecargas de cálculo respeitavam os regulamentos dos países de origem ocasionando uma grande diversificação dos sistemas implantados no Brasil. Além disto, as pontes eram importadas com gabaritos pré-definidos e o traçado da estrada deveria respeitar também os vãos enviados. Em 1874 surgiu a primeira ponte em treliça de aço com banzos paralelos, chamada de *Ponte Barão de Juparanã*, com vão de 170 metros, em curva e dividido em 11 tramos.

A *Ponte Benjamin Constant*, foi construída em 1880 em Manaus, com vão central de 60 metros e dois vãos de 30 metros em sistema de treliça Gerber do tipo Pratt. A largura total é igual a 14,5m, onde 4m são para o passeio e 10,5m para a pista de rolamento. O projeto e execução foram realizados na Inglaterra.

Uma das mais importantes pontes construídas no Brasil é a *Ponte Imperial D. Pedro II*, na Bahia, localizada entre as cidades Cachoeira e São

Félix (Figura 2.7). Fabricada na Inglaterra e inaugurada em 1885, ela atravessa o rio Paraguaçu com seus 365 metros distribuídos em 4 tramos, sendo dois centrais de 91,5 metros e dois laterais de 86 metros cada um. Na época foi considerada a mais importante ponte ferroviária da América do Sul.

Em 1896 foi erguida em São José do Rio Pardo, São Paulo, a ponte *Euclides da Cunha*, cujo engenheiro responsável era o famoso escritor com o mesmo nome. Esta ponte foi reconstruída em 1901, depois de cair, e reformada em 1985.

Em 1913 foi inaugurado na cidade de São Paulo, o *Viaduto de Santa Efigênia*, em arco treliçado importado da Bélgica. Esta obra tem uma história repleta de polêmicas e disputas políticas e por isto foram necessários 20 anos para sua execução. A estrutura foi feita em estilo *art-nouveau*, conforme projeto executado no Brasil pelo italiano Giulio Micheli, tendo um comprimento total de 225 metros.

A *Ponte de São Vicente* é uma das primeiras pontes pênseis construídas no Brasil. Sua execução data de 1914, tendo sido importada da Alemanha e projetada pelo engenheiro August Kloenne da firma *Brückenbauanstalt*, de Dortmund. A ponte tem apenas um tramo de 180 metros entre eixos das torres e é feita com aço alemão denominado de *Holder32* (Figura 2.8).

Uma das maiores pontes metálicas do Brasil é a *Ponte Francisco de Sá*, sobre o Rio Paraná, com um comprimento total de 1024 metros, ligando os Estados de São Paulo e Mato Grosso do Sul, em Três Lagoas. Na época de sua construção, em 1926, era a maior ponte da América do Sul (Figura 2.9).

A ponte ferroviária sobre o *Rio Doce* em Colatina, Espírito Santo, foi projetada em 1926 pelo engenheiro Oscar Machado da Costa. Esta estrutura tem mais de 700 metros de comprimento, composta de 26 tramos simplesmente apoiados com vigas de alma cheia de 26 metros cada. Foi construída pela empresa Soares de Sampaio & Cia. Ltda, representante no

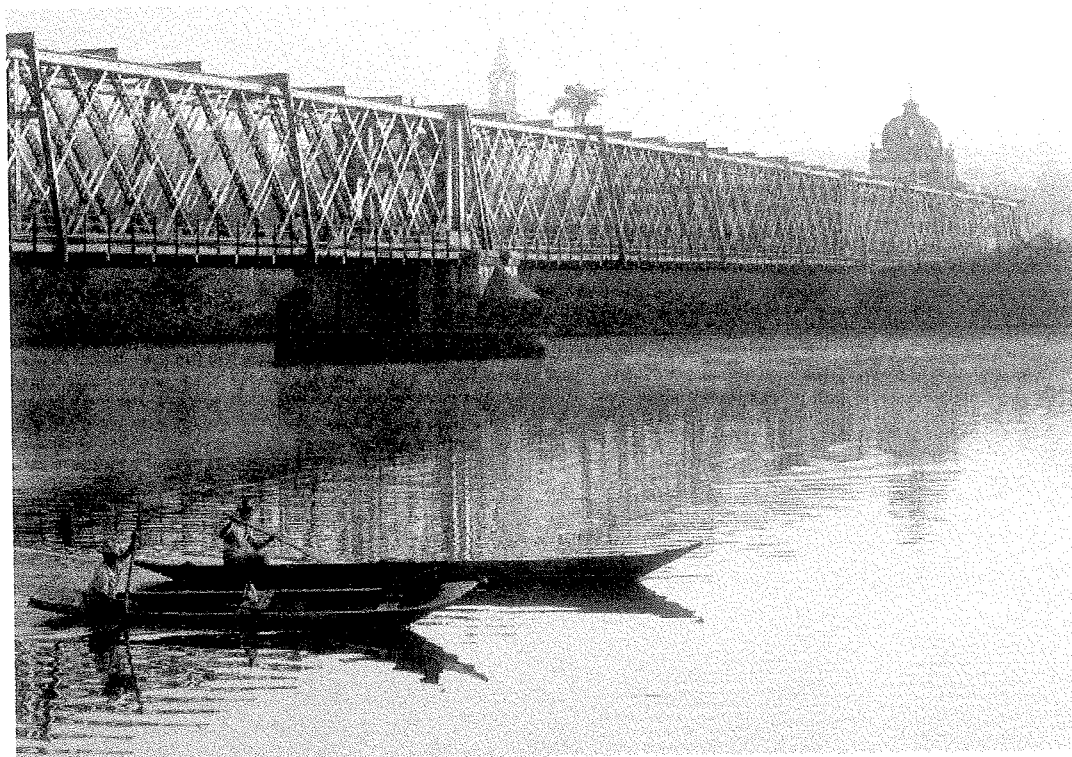


Figura 2.7 - Ponte Imperial D. Pedro II.

Brasil da firma belga Dyle & Bacalan (Figura 2.10).

Ainda em 1926, a firma Byington & Sundstrom construiu a obra que tem o maior vão do mundo em ponte pênsil de correntes: a *Ponte Hercílio Luz*, em Florianópolis (Figura 2.11). David Barnard Steinman, construtor de pontes dos Estados Unidos foi o projetista desta ponte de 822 metros de comprimento, que liga Florianópolis, na ilha de Santa Catarina ao continente.

Depois da Segunda Guerra Mundial, apareceram pontes com diferentes formas, como as pontes mistas de aço e concreto, onde a viga é de aço, com perfil laminado ou viga-caixão. A ponte *Presidente Costa e Silva*, mais conhecida por *Ponte Rio Niterói*, foi inaugurada em 4 de março de 1974. É assinalada no Guinness Book de Estruturas de 1976 como recordista do maior vão em viga reta metálica do mundo ( item: *Platé Girder Bridges*). A parte metálica é uma viga contínua em caixão com vão central de 300 metros. O comprimento total da ponte é de 13,29 Km sobre a Baía de Guanabara, ligando as cidades de Niterói e Rio de Janeiro. É também uma das sete maiores pontes do mundo e faz parte da BR-101 que parte do nordeste do país e corre ao longo da costa atlântica em direção ao sul (Figura 2.12).

A *Ponte de Vitória*, em Vila Velha, no Estado do Espírito Santo foi construída em sistema protendido Freyssinet e aço SAC- 50 e foi entregue ao tráfego em 1989. A ponte completa junto com os acessos atinge 3,339 Km de comprimento total, sendo portanto uma das mais longas do Brasil. O trecho em estrutura metálica está dividido em três tramos de 175, 260 e 175 metros, em viga caixão, e se assemelha muito à *Ponte Rio Niterói*.

Em 1992 foi inaugurada no Rio de Janeiro a maior ponte auto-estrada do Brasil, com 23 Km ao longo do perímetro da cidade. Esta estrutura é chamada de *Linha Vermelha* e sua superestrutura consiste principalmente de uma viga-mista, uma viga-caixão e treliça. O órgão responsável pela fabricação e transporte ao local foi a FEM, Fábrica de Estruturas Metálicas.

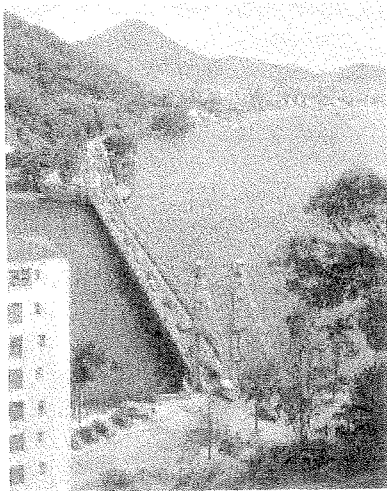


Figura 2.8 - Ponte de São Vicente.



Figura 2.9 - Ponte Francisco de Sá.



Figura 2.10 - Ponte sobre o Rio Doce.

Figura 2.11 - Ponte Hercílio Luz.





Figura 2.12 - Ponte Presidente Costa e Silva - Rio-Niterói.



### 2.3. DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA FADIGA NOS METAIS

No decorrer de sua existência as pontes podem apresentar alguns problemas que possivelmente são oriundos da forma em que estão sendo solicitadas, condições ambientais e acidentes. Uma das grandes preocupações dos projetistas de pontes de aço é, então, o problema de dano ocasionado por *fadiga* do material.

*Fadiga* é o fenômeno que representa o prejuízo ou falha do material sob transformações no tempo, quando ele estiver sujeito a flutuações de carregamento. Na verdade, pode ser observado na maioria dos materiais existentes na natureza e até mesmo nos seres vivos. O termo é derivado da palavra latina *Fatigare* que significa “cansar-se”.

A história da fadiga teve início em 1829, quando W.A.S. Albert, um engenheiro de minas de Hannover (Alemanha), publicou os primeiros resultados obtidos em testes de uma corrente de ferro dos equipamentos da mina Oberharz, na Alemanha, submetida a carregamento cíclico.

RANKINE[1843], engenheiro britânico, conhecido na termodinâmica pelo *Processo de Rankine*, discutiu o processo de resistência à fadiga de eixos de carros ferroviários. Nesta época, os sistemas ferroviários estavam no auge do desenvolvimento e os problemas de fraturas dos eixos dos trens após alguns anos de uso passaram a ser bastante difundidos. Rankine observou que as fraturas iniciavam de pequenas fissuras que gradualmente penetravam na peça até chegar um ponto onde esta não conseguia mais suportar o carregamento aplicado. Como solução, ele sugeriu que os eixos tivessem dimensões maiores. Assim, os grãos utilizados na fabricação não poderiam cortar o perfil mais do que necessário e evitariam as fissuras iniciais.

August Wöhler, engenheiro mecânico e membro da companhia ferroviária alemã *Niederschlesisch-Mährische* de *Frankfurt an der Oder*, é o pai do pensamento moderno sobre fadiga em metais. Em 1858, ele projetou

aparelhos e desenvolveu métodos para medições das cargas de serviço em linhas ferroviárias. O teste foi realizado em vagões de carga e passageiros entre as cidades de Berlim e Breslau e ainda Frankfurt an der Oder e Berlim totalizando 22.000 km de percurso. Wöhler determinou a maior deflexão nos eixos por viagem com as correspondentes cargas de serviço e calculou as tensões de flexão e torção. Quando comparou os esforços de flexão obtidos entre as situações dinâmica e estática encontrou um fator, que hoje é conhecido como fator de impacto. Em 1870 Wöhler apresentou um trabalho contendo as conclusões dos testes realizados, que posteriormente foram conhecidas como as *Leis de Wöhler* :

☛ “(1) A Falha do Material solicitado dinamicamente pode ocorrer sob tensões bem abaixo da tensão de falha sob carregamento estático; (2) A amplitude de tensões é decisiva para a destruição da força de coesão do material; (3) A amplitude de tensão é o parâmetro mais importante para determinação da falha, mas a tensão de tração também tem grande influência”.

Incidentalmente ele representou os resultados de seus testes em forma de tabelas. Foi seu sucessor, L. Spangenberg (1874), diretor do *Mechanisch Technische Versuchsanstalt*, em Berlim, quem plotou o conhecido gráfico SN, ficando este gráfico conhecido como as *curvas de Wöhler* desde 1936.

Outra contribuição de Wöhler foi a introdução do *limite de fadiga em metais* - tensão abaixo da qual não ocorre falha por fadiga. Posteriormente, este limite foi popularizado por Bauschinger (1886), professor de mecânica na Escola Politécnica de Munique.

Os ingleses Ewing e Humfrey (1903) fizeram a primeira descrição do processo metalúrgico de fadiga. Através de estudo microscópico eles observaram o chamado *slip* (escorregamento) na superfície de espécimes submetidos a esforços de flexão e torção.

Em 1910, o americano O.H. Basquin representou a *curva de Wöhler* em forma logarítmica, com  $\log \sigma_a$  na ordenada e  $\log N$  na abscissa e propôs a fórmula:  $\sigma_a = C K^n$ , ainda hoje utilizada.

A partir de 1931 a NACA, antecessor da NASA, realizou medições de cargas de vento em aviões utilizando o aparelho NACA VG - recorder.

A lei de Palmgren-Miner para acumulação de dano foi apresentada em 1945. Esta lei afirma que a fratura ocorrerá quando:

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad [2.1]$$

onde  $N_i$  é o número de ciclos necessários para romper o material e  $n_i$  é o número de ciclos a que o material foi submetido sob uma tensão  $\sigma_i$ . Essa Lei sugere, que o dano acumulado pela atuação de  $n$  ciclos de tensão seja igual a 1,0 quando o material atingir a ruptura por fadiga.

Depois da 2a. Guerra Mundial os estudos sobre fadiga aumentaram consideravelmente. Passou-se a estudar os problemas relacionados com acidentes aéreos e o grande número de falhas em componentes automobilísticos. Em 1951, foi fundado o Comitê Internacional em Fadiga Aeronáutica (ICAF), trazendo consigo praticamente todos os *experts* em fadiga aeronáutica da época. Os fundadores deste comitê foram a Holanda, Inglaterra, Suécia e Bélgica; mais tarde participaram a Alemanha, Itália, Estados Unidos, Austrália, França, Israel e Japão.

Entre os anos 1945 e 1960 foram organizados vários encontros sobre fadiga. Como exemplo, a AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (ASTM), apresentou testes, aplicações estatísticas, fadiga em estruturas de avião, fadiga de baixo ciclo (*low cycle fatigue*), e vários outros assuntos específicos.

O alemão Gassner introduziu fortes contribuições no estudo de fadiga devido à carregamentos com amplitudes variáveis e introduziu o termo

*Betriebsfestigkeit* (resistência à fadiga). Em 1954, ele descreveu o estado da arte dos testes de fadiga no campo automobilístico e aeronáutico.

Coffin e Manson, trabalhando independentemente em problemas de ciclagem térmica, apresentaram também em 1954 uma hipótese, que considerou as deformações plásticas em metais submetidos a carregamento cíclico, como responsáveis na falha devido à fadiga.

Em 1958, Irwin, engenheiro da Força Aérea Americana, apresentou uma relação matemática onde a variação da tensão é expressa em termos de fator conhecido como *Fator de Intensidade de Tensões K*. É o início da *Fratura Mecânica Linear Elástica* (FMLE). Este fator possibilitou caracterizar a abertura de fissuras por fadiga.

No início dos anos 60, o trabalho de FORSYTH [1962] conduziu ao conceito de dois diferentes estágios para o processo de abertura de fissura por fadiga. O primeiro estágio (estágio I) seria o estágio de início de fissuração, enquanto que o segundo seria o estágio macroscópico de abertura (estágio II).

Nesta mesma época foram desenvolvidas técnicas diretas para estudo de superfícies fraturadas utilizando-se o microscópio. Observou-se que durante a propagação de uma trinca algumas vezes se formavam umas marcas na superfície de fratura. Estas marcas receberam o nome de estrias (*striations*). O mecanismo de formação de estrias foi estudado em 1942 por LAIRD E SMITH [1962]. Eles descobriram que a deformação plástica na ponta da fissura (*crack tip*) altera a geometria desta mesma ponta durante cada ciclo de carga.

Paris, da Lehigh University (EUA), sugeriu na sua tese de doutorado (1960), que a propagação de fratura por fadiga poderia ser descrita pela seguinte lei:

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^n \quad [2.2]$$

onde  $da/dN$  é o avanço da fissura por fadiga em relação ao número de ciclos,  $\Delta K$  é a variação do fator de intensidade de tensões,  $C$  e  $n$  são constantes do material.

Outra contribuição importante para o cálculo de propagação de fratura foram os resultados experimentais obtidos pelo alemão Elber. Ele apresentou em 1968, na sua tese de doutorado na University of New South Wales, que fissuras ocasionadas por fadiga poderiam permanecer fechadas mesmo quando submetidas a carregamento cíclico de tração. Esse resultado também implicou em dizer, que a taxa de abertura de fissura por fadiga seria calculada agora por um valor efetivo  $\Delta K_{ef}$  que considera os detalhes de avanço e fechamento da fissura (*crack closure*).

A primeira especificação orientada diretamente para problemas de falhas por fadiga em pontes foi a DIN 50100, apresentada em 1951 pela Alemanha Oriental (antiga DDR). A norma americana AMERICAN ASSOCIATION OF STATE HIGHWAY AND TRANSPORTATION OFFICIALS (AASHTO) abordou pela primeira vez este assunto em 1973. Atualmente, as normas mais utilizadas para verificação do efeito de fadiga em pontes de aço são: Eurocode EC3 (pertencente à comunidade européia), Norma Alemã DIN 18800 parte 1, Normas Americanas AASHTO (para pontes rodoviárias) e AREA (*American Railway Engineering Association*) para pontes ferroviárias, Norma Canadense *Canadian Standard CAN/CSA -S6* e Inglesa BS 5400.

## 2.4. A TEORIA DA MECÂNICA DA FRATURA

Na verdade, os problemas relacionados a fratura em estruturas preocupam os projetistas desde à antiguidade. Apesar das obras do antigo Egito e dos Césares Romanos serem testemunhas da capacidade dos engenheiros e arquitetos daquela época, com certeza muitos outros projetos tiveram menos sucesso e resistiram muito menos tempo. Surgiu então, um dos

primeiros testes de prevenção de acidentes imposto pelos romanos. Este teste consistia em colocar o projetista embaixo da ponte enquanto o veículo passava por cima. Como na teoria da *selecção natural de Darwin*, esta prática incentivava a formação de bons projetistas e ainda eliminava os piores do mercado competitivo.

Leonardo da Vinci foi um dos primeiros estudiosos sobre o fenômeno da fratura em metais. Ele realizou (500 anos atrás!) medições em lâminas de ferro e verificou que a resistência variava inversamente proporcional ao comprimento da lâmina. Ele observou também, que uma lâmina longa apresentava uma grande probabilidade de conter regiões com fissuras. Entretanto estes resultados foram apenas qualitativos.

A durabilidade das estruturas antigas é surpreendente, especialmente quando se considera que a escolha dos materiais de construção até antes da Revolução Industrial era bem limitada. Os metais, por exemplo, não podiam ser produzidos em quantidades suficientes para construção de uma ponte. Antes do século XIX, os materiais mais utilizados na construção civil eram a madeira, o tijolo e a argamassa. Estes dois últimos materiais, apesar de serem mais práticos, eram relativamente frágeis e duvidosos quanto a resistência à tensões de tração. Por este motivo as estruturas eram projetadas de modo que a carga de compressão fosse predominante.

Com a Revolução Industrial o ferro e o aço passaram a ser produzidos em larga escala inovando sua utilização em projeto como elementos tracionados. Não durou muito para que fossem observados os primeiros problemas. As estruturas de aço falhavam inesperadamente sob tensões inferiores à carga de ruptura.

As primeiras aproximações matemáticas no campo da Teoria de Fratura foram apresentadas pelo Inglês INGLIS[1913]. Ele mostrou, através da Teoria Clássica da Elasticidade, que se fosse aplicada uma tensão  $\sigma_a$  numa placa com um orifício elíptico, esta tensão seria ampliada das pontas do eixo maior,

de modo que:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_a} = 1 + \frac{2a}{b} \quad [2.3]$$

onde :

$\sigma_{\max}$  = tensão máxima na ponta do maior eixo;

$\sigma_a$  = tensão aplicada normal ao maior eixo;

$2a$  = eixo maior;

$2b$  = eixo menor.

Se  $\rho$  for o raio de curvatura no final do eixo maior, então:

$$\rho = \frac{b^2}{a} \quad [2.4]$$

Combinando as equações [2.3] e [2.4] obtém-se:

$$\sigma_{\max} = \sigma_a \left[ 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right] \quad [2.5]$$

Na maioria dos casos  $a \gg \rho$ , portanto:

$$\sigma_{\max} \approx 2\sigma_a \sqrt{a/\rho} \quad [2.6]$$

O termo  $2\sqrt{a/\rho}$  é definido como *fator de concentração de tensão*  $K_t$  e descreve o efeito da geometria sobre a tensão na ponta da fissura.

A base quantitativa e fundamental para a formação da Teoria da Mecânica da Fratura foi apresentada pela primeira vez pelo Inglês GRIFFITH [1920] na publicação "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids" - em: Phil. Trans. of the Roy. Soc. . Esta teoria foi desenvolvida para materiais perfeitamente elásticos, que sofriam fratura sem ocorrência de

deformação plástica, ou seja, materiais frágeis. Um exemplo deste tipo de material é o vidro. De acordo com Griffith, o material deve conter inicialmente defeitos (trincas). O problema consiste em determinar o valor crítico de tensão na qual a trinca deve propagar numa placa. A propagação ocorrerá sob o efeito de tensões externas, quando a diminuição de energia elástica armazenada no corpo for no mínimo igual à energia necessária para a formação de novas superfícies de fissuras (*surface energy of the crack*). A trinca propagará sob uma tensão constante  $p_o$ , quando um aumento no comprimento desta trinca não produzir variação na energia total do corpo, ou melhor, o aumento na energia superficial se equilibra pela diminuição na energia elástica armazenada no sistema (figura 2.13). O modelo tem como base o balanço das energias envolvidas. Griffith estimou a parcela relativa à energia superficial como sendo o produto da superfície total de fissuras ( $2a.2.t$ ) pela densidade de energia superficial  $\gamma_s$  (energia/área). Para o cálculo da energia elástica, ele utilizou a análise de tensão proposta anteriormente por Inglis para o caso de uma placa com fissura elíptica. Deste modo ele obteve:

$$U_e = \frac{\pi \sigma^2 a^2 t}{E} \quad [2.7]$$

onde :  $U_e$  = energia elástica  
 $\sigma$  = tensão aplicada  
 $a$  = meio comprimento da trinca  
 $t$  = espessura  
 $E$  = módulo de Elasticidade

Segundo o critério adotado por Griffith, haverá propagação quando:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[ -\frac{\pi \sigma^2 a^2 t}{E} + 4at\gamma_s \right] = 0 \quad [2.8]$$



e portanto:

$$2\gamma_s = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \quad [2.9]$$

sendo :

$\gamma_s$  = densidade de energia superficial

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}} \quad [2.10]$$

Esta tensão é conhecida como tensão crítica de abertura de fissura.

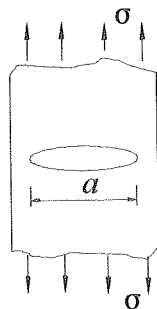


Figura 2.13 - Modelo de Fissura de Griffith.

Na verdade, o primeiro trabalho de Griffith apresentava uma falha na parte teórica que posteriormente foi encontrada pelo alemão WOLF[1923] apud GRIFFITH. Wolf apresentou os resultados de Griffith de forma mais clara e fez a correção do erro na publicação: “*Zur Bruchtheorie von A. Griffith*” do *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. GRIFFITH[1924] apresentou outro trabalho com as respectivas correções. No cálculo da energia elástica, Griffith utilizou os resultados de Inglis e calculou esta energia como sendo:  $U_e = \frac{\pi \sigma^2 a^2 t}{2E}$ . É importante lembrar que o modelo de Griffith foi obtido para material elástico que contenha uma fissura alongada. Este modelo

não é adequado no tratamento de fratura em aço, pois nas extremidades da fissura, região onde ocorre maior tensão, o material já se encontra em regime de plastificação. A aplicação da equação [2.10] para o caso de monocristais metálicos conduzia a valores de  $\sigma$  excessivamente baixos em relação aos observados experimentalmente. Contudo, o trabalho de Griffith é a maior contribuição apresentada até hoje à literatura da mecânica da fratura. A modificação do seu modelo para aplicação nos metais só apareceu em 1948.

Segundo OROWAN[1950], a teoria de Griffith poderia ser aplicada para os metais, desde que a energia superficial considerada incluísse a energia dispendida na deformação plástica superficial  $\gamma_p$ . A equação [2.10] poderia ser escrita como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a}} = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \left(1 + \frac{\gamma_p}{\gamma_s}\right)} \quad [2.11]$$

onde  $\gamma_p$  = energia dispendida na deformação plástica superficial e  $\gamma_p \gg \gamma_s$ .

Sob estas condições :

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \left(\frac{\gamma_p}{\gamma_s}\right)} \quad [2.12]$$

IRWIN[1956] desenvolveu o conceito de “*energy release rate*” ( taxa de liberação de energia), aplicando a teoria de Griffith para o caso de materiais com deformação plástica. Segundo Irwin essa taxa de liberação de energia é definida como:

$$\mathcal{G} = \frac{\partial U}{\partial a} \quad [2.13]$$

Irwin mostrou que :

$$\sigma = \sqrt{\frac{E\mathcal{G}}{\pi a}} \quad [2.14]$$

Comparando as Equações [2.11] e [2.14] pode-se observar que:

$$\mathcal{G} = 2 (\gamma_s + \gamma_p) \quad [2.15]$$

No ponto de instabilidade a taxa de energia liberada  $\mathcal{G}$  (também referida na literatura como força de direcionamento de fissura), atinge o valor crítico  $\mathcal{G}_{cr}$  acima do qual ocorre a fratura. Este valor crítico pode ser interpretado como uma propriedade do material e pode ser encontrado através de testes de laboratório.

Logo depois, Irwin utilizou as aproximações publicadas por WESTERGAARD[1939] para mostrar que as tensões e deslocamentos na vizinhança do extremo da fissura (*crack tip*) poderiam ser descritas por uma simples constante que mais tarde ficou conhecida como *fator de intensidade de tensões* ( $K$ ). A descrição do campo de tensões na ponta da trinca é associada a três modos básicos de carregamento, com consequentes deslocamentos (Figura 2.14):

- Modo I** **Modo de Abertura** - carregamento em tração com deslocamentos das superfícies da trinca perpendiculares a esta mesma superfície.
- Modo II** **Modo de Cisalhamento** - carregamento em cisalhamento onde as superfícies da fissura escorregam uma sobre a outra numa direção perpendicular à frente de propagação.
- Modo III** **Modo de Rasgamento** - carregamento em cisalhamento onde as superfícies da fissura movem-se uma em relação a outra e paralelas à frente de propagação.

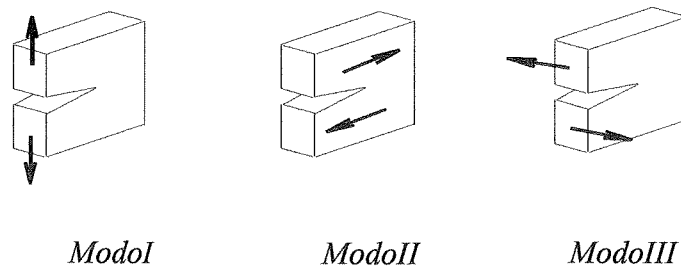


Figura 2.14 - Modos de Fratura

O modo I é encontrado na maioria das situações de fratura e é o modo que apresenta maior interesse prático. O modo II raramente é encontrado na prática. Um exemplo de combinação dos Modos I - II é o caso de carregamento à tração de uma trinca inclinada em relação ao eixo de tração (rotação em torno do eixo -z). O Modo III pode ser considerado como um problema de cisalhamento puro, como ocorre numa barra entalhada circunferencialmente quando submetida a torção. Qualquer caso de carregamento pode ser representado pela decomposição destes três modos básicos. Irwin mostrou que as equações que descrevem o seguinte campo de tensões numa trinca:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left[ 1 + \text{sen}\frac{\theta}{2} \text{sen}\frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left[ 1 - \text{sen}\frac{\theta}{2} \text{sen}\frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \text{sen}\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \right]\end{aligned}\quad [2.16]$$

Pode-se observar nas equações [2.16], que as tensões podem atingir valores extremamente elevados à medida que se aproximam da ponta da fissura, ou seja:  $r \rightarrow 0$ . Isto não ocorre pois o material deve escoar plasticamente no *crack tip*. WILLIAMS[1957] foi o primeiro a demonstrar a natureza da singularidade  $1/r$  para problemas de fratura elástica.

O valor de  $K$  define a intensidade do campo de tensões e deste modo pode-se determinar o valor crítico  $K_c$  para o qual a trinca se propaga instavelmente. Este valor crítico  $K_c$  é considerado como uma propriedade do material e é conhecido como tenacidade à fratura (*fracture toughness*).

IRWIN[1957] apresentou em outro trabalho uma importante relação entre a velocidade de energia liberada com a propagação da fissura  $\dot{a}$  e o fator de intensidade de tensões  $K$ :

$$K = \sqrt{E\dot{a}}$$

[2.17]

WELLS[1961] deu continuidade ao estudo de plastificação na ponta da fratura e propôs que o deslocamento das superfícies da fissura fosse um critério alternativo para este caso. Anteriormente, Wells trabalhou com Irwin no *Naval Research Laboratory*. Quando ele retornou para o *British Welding Research Association*, tentou aplicar FMLE para aços de baixa e média resistência. Esses materiais apresentaram comportamento bastante dúctil para aplicação da FMLE, mas Wells notou que as faces da trinca se deslocaram independentemente da deformação plástica. Esta observação conduziu a elaboração do conceito de *crack opening displacement* (COD) (figura 2.15).

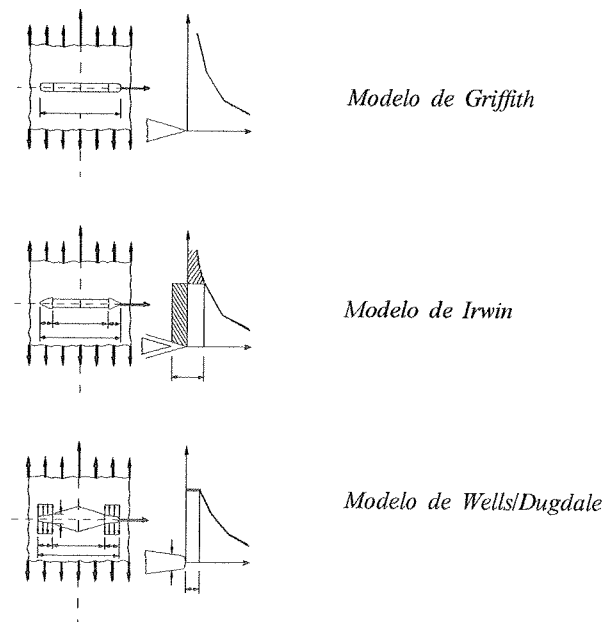


Figura 2.15 - Modelos de Fratura.

RICE[1968] introduziu um novo parâmetro para definir as condições de fratura em material com comportamento não-linear. Ele resolveu problemas bidimensionais de fratura na presença de deformações plásticas, utilizando uma integral de linha relacionada à energia na vizinhança da fratura. Esta integral, conhecida como integral- $J$ , tem a seguinte forma:

$$J = \int_C \left( W dy - T \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) \quad [2.18]$$

onde:

$x, y$  = coordenadas retangulares (veja Figura 2.16 )

$dx$  = incremento ao longo do contorno  $C$

- $W$  = energia de deformação  
 $u$  = vetor de deslocamentos  
 $ds$  = incremento ao longo do contorno  
 $T$  = vetor de tensões agindo no contorno  
 $C$  = caminho de integração em torno do crack tip  
com sentido anti-horário iniciando na parte inferior da fissura e finalizando na parte superior.

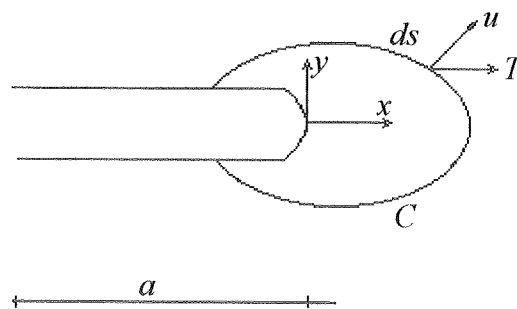


Figura 2.16 - Integral de Linha J.

A integral de linha- $J$  é independente do caminho. Se não houver singularidade na região de integração, a integral- $J$  é nula. Na presença de fissuras  $J$  é diferente de zero e independente do caminho de integração escolhido podendo ser determinada através de análise de tensões onde são definidos sem um contorno arbitrário em torno do *crack tip*.

Quando Rice desenvolveu a integral- $J$  ele tinha conhecimento de que ESHELBY[1951] havia publicado trabalhos sobre uma integral de conservação

equivalente àquela por ele elaborada. Entretanto, Eshelby não havia aplicado suas deduções para problemas de fratura.

Rice também mostrou que a integral- $J$  pode ser vista como um parâmetro não-linear de intensidade de tensões  $J$  e correlacionou este parâmetro com a velocidade de liberação de energia ( $\dot{G}$ ). Em 1971, os engenheiros pesquisadores da *Westinghouse* BEGLEY E LANDES[1971] utilizaram o trabalho de Rice para determinar através de estudos experimentais em aço o fator não-linear de intensidade de tensões crítico  $J_{Icr}$ . Eles verificaram que:  $J_{Icr} = \dot{G}_{Icr}$ . A integral- $J$  generaliza o estudo de fratura podendo ser utilizada para caso elástico ou elásto-plástico.



---

*“Quando uma estrutura de qualquer tipo depende de duas partes e se uma dessas partes falha, e a outra não é totalmente competente para suportar todo o conjunto, deve suceder o colapso total.”*

*- Thomas Pope, 1811*

# 3

## FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DA FRATURA

### 3.1. MECANISMOS DE FRATURA EM METAIS

O aspecto mais comum visualizado na superfície de uma fratura em metais é a CLIVAGEM. Nesse mecanismo a fratura caminha rápido e continuamente, como os rios, ao longo de planos cristalinos paralelos.

### 3 Fundamentos da Mecânica da Fratura

---

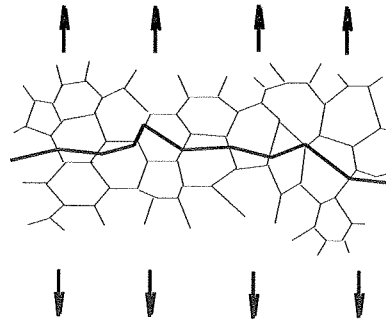


Figura 3.1 - Clivagem

Esses planos ficam unidos e formam degraus que acabam convergindo para o sentido em que ocorre a propagação da trinca. A clivagem de um material perfeito deveria produzir uma superfície plana, ou seja, sem acidentes topográficos. Como os cristais reais não são perfeitos tem-se que a propagação ocorre com o avanço simultâneo de várias trincas em planos cristalográficos paralelos. A Figura 3.1 mostra como os caminhos de fratura geralmente são formados. A clivagem inicia quando existem descontinuidades locais suficientes para exceder a tensão de coesão entre os grãos. A natureza do traço microestrutural depende do tipo de liga e do tratamento térmico do aço. Vários modelos foram desenvolvidos para explicar a relação entre as tensões de fratura por clivagem e a microestrutura do material. A maioria destes modelos resultam da tensão de fratura obtida na teoria de Griffith. Para o caso de clivagem pura, a energia liberada com o avanço da trinca é diretamente proporcional a energia requerida para romper as ligações atômicas e formar novas superfícies de fratura.

Outro mecanismo encontrado em circunstâncias especiais nos metais é a FRATURA INTERGRANULAR (Figura 3.2). Este mecanismo de fratura ocorre quando a fissura prefere contornar as superfícies dos grãos do material. Normalmente a ocorrência deste processo está associada às trincas de têmpera em aços, à presença de impurezas nos contornos dos grãos, aos carregamentos cíclicos, à insuficiência de escorregamento entre os grãos

para possível acomodação de deformações plásticas, à influência do meio, como na fragilização por hidrogênio e corrosão-sob-tensão.

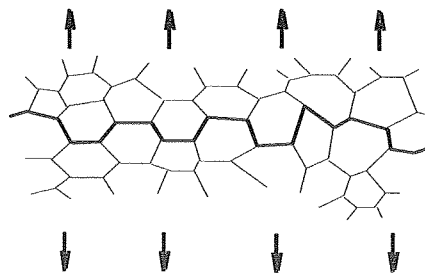


Figura 3.2 - Fratura Intergranular

A FRATURA DÚCTIL é outro mecanismo resultante da nucleação, abertura e coalescência de micro-cavidades, formando uma superfície com cavidades hemisféricas ou parabólicas conhecidas como *dimples*, ilustrado na Figura 3.3.

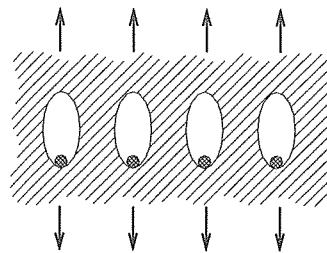


Figura 3.3 - Fratura Dúctil

Os *dimples* se caracterizam pela sua forma e seu tamanho médio. A forma parece depender da distribuição das deformações plásticas nas regiões onde as cavidades crescem e coalescem. O tamanho está diretamente relacionado com as propriedades mecânicas do material. Normalmente são observados três processos para formação das cavidades (Figura 3.4):

○ **Ruptura Normal:** neste caso a tensão principal  $\sigma_1$  é uniforme ao longo da seção transversal resistente, enquanto  $\sigma_2$  é aproximadamente igual a  $\sigma_3$ . A tensão que tende a cisalhar o material acima das cavidades em relação ao material abaixo destas cavidades é praticamente desprezível. A topografia das superfícies de fraturas produzidas por esses processo consiste de *dimples* equiaxiais;

○ **Ruptura por Cisalhamento:** o material acima das cavidades sofre cisalhamento em relação ao material abaixo dessas cavidades. Os *dimples* são formados com uma forma parabólica apontando na direção do cisalhamento, em ambas as superfícies de fratura. Os sentidos de escorregamento são opostos e por isso, os *dimples* apontam em sentidos opostos, nas regiões correspondentes às duas metades da fratura;

○ **Ruptura por Rasgamento:** neste processo o estado de tensões é semelhante ao primeiro caso diferindo apenas no fato de que a tensão  $\sigma_1$  não é uniforme ao longo de toda seção transversal. Os *dimples* produzidos são alongados nas duas metades da fratura e apontam para o vértice da fissura.

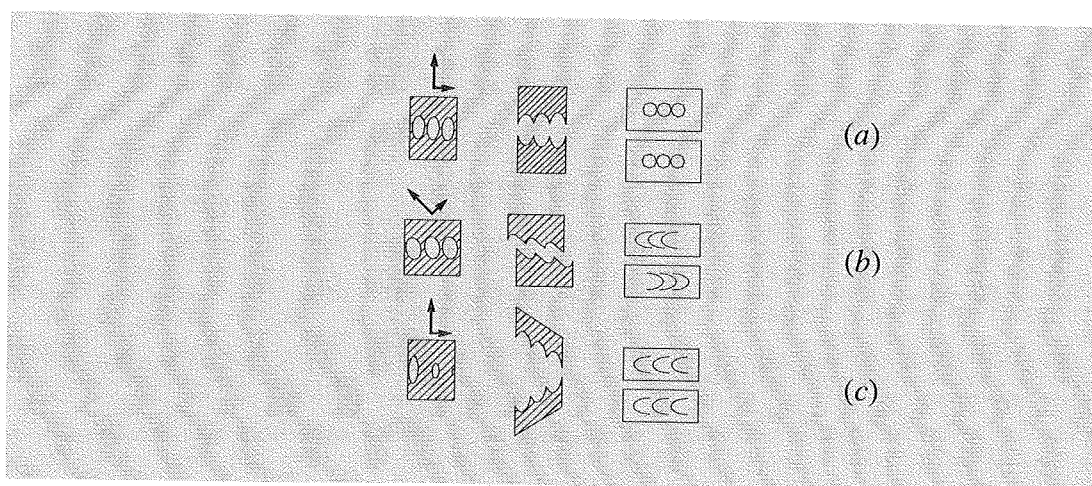


Figura 3.4 - Mecanismos de Formação de Microcavidades; (a) Ruptura Normal; (b) Ruptura por Cisalhamento; (c) Ruptura por Rasgamento.

A ocorrência de dois processos simultâneos depende da natureza, tamanho e distribuição das chamadas *partículas de segunda fase* (diâmetro superior a 1  $\mu\text{m}$ ). Quando ocorre apenas um processo observa-se que o tamanho dos *dimples* é uniforme; combinando-se dois processos, formam-se duas *famílias de dimples* com tamanhos nítidamente diferentes.

Enquanto a fratura dútil ocorre com apreciável deformação plástica macroscópica, verifica-se que nos metais também é possível ocorrer fratura FRÁGIL. Este processo ocorre quando uma trinca se propaga instavelmente a uma velocidade que se aproxima da velocidade de propagação do som no material através da seção resistente. Durante a propagação, a zona de deformação plástica formada na ponta da trinca fica confinada por uma região com deformações elásticas, ou seja, a fratura ocorre sem deformação plástica macroscópica. Uma fratura deste tipo ocorre sob tensões inferiores à tensão de escoamento generalizado. Além deste agravante, a trinca é instável, ou seja, propaga-se sem necessidade de acréscimo de tensão e com velocidade elevada ( pode atingir cerca de 2.000 m/s no aço). Este tipo de fratura geralmente é grave, muitas vezes com proporções catastróficas, principalmente em elementos estruturais que permitem um caminho contínuo para a fissura, como as estruturas soldadas.

Outro importante mecanismo de fratura em metais é a FADIGA. Neste caso, a fratura se desenvolve devido a variações repetidas de tensões, sendo estas tensões inferiores àquelas capazes de provocar fratura sob carregamento monotônico crescente ou mesmo inferior ao limite de escoamento do material. Quando a fratura ocorre após um grande número de ciclos de tensões (superior a  $10^3$  ciclos) tem-se o caso de *fadiga de alto ciclo (high cycle fatigue)*. Para tensões superiores ao limite de escoamento generalizado, verifica-se que a fratura ocorre em menos de  $10^3$  ciclos, sendo este o caso de *fadiga de baixo ciclo (low cycle fatigue)*.

### 3.2. FRATURA MECÂNICA LINEAR ELÁSTICA - FMLE

Seguindo-se o conceito de FMLE admite-se que a propagação da fratura ocorre a partir de uma trinca pré-existente, quando o campo de tensões na ponta desta trinca (*crack tip*), analisado pelos conceitos da Teoria da Elasticidade, atinge um determinado valor crítico ( $\sigma \rightarrow \infty$ ). A energia elástica liberada é outro critério utilizado para o controle de propagação da trinca. Para aplicação deste conceito nos metais considera-se que nas vizinhanças do *crack tip* desenvolve-se uma zona deformada plasticamente.

#### 3.2.1. Energia de Ruptura

A fratura de um metal ocorrerá quando forem aplicadas tensões capazes de quebrar as ligações existentes entre os átomos. A Figura 3.5 apresenta os gráficos da energia potencial e da tensão aplicada versus distância entre os átomos. Observa-se nesse gráfico que o espaçamento de equilíbrio ocorre quando a energia potencial é mínima. Para aumentar-se a distância entre os átomos, além do ponto de equilíbrio, é necessário a presença de uma tensão de tração. Esta tensão deve exceder a tensão de coesão afim de cortar completamente a ligação atômica. A energia de ligação  $E_l$  é dada pela área da curva tensão x distância atômica e é igual a:

$$E_l = \int_{x_0}^{\infty} \sigma dx \quad [3.2]$$

onde  $x_0$  é o espaçamento de equilíbrio e  $\sigma$  a tensão aplicada.

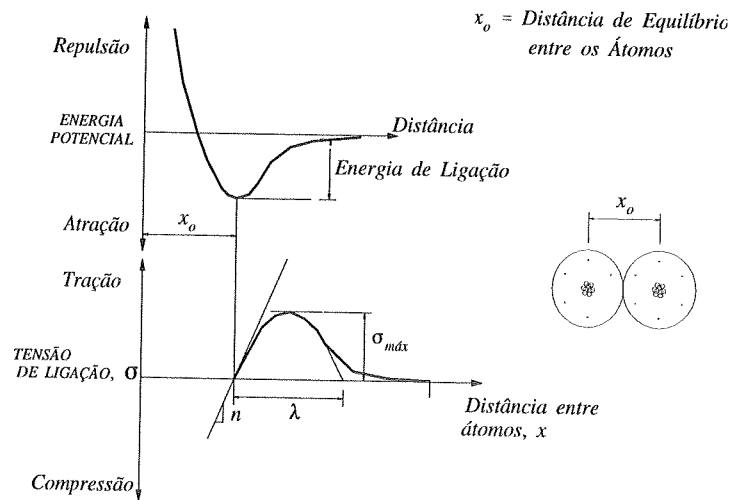


Figura 3.5 - Energia Potencial e Tensão de Ligação em Função da Distância Atômica.

É possível aproximar a tensão coesiva no nível atômico pela senóide:

$$\sigma = \sigma_{máx} \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi x}{\lambda} \right) \quad [3.3]$$

sendo  $\lambda$  definido na figura 3.5. Para pequenos deslocamentos tem-se a seguinte relação linear:

$$\sigma = \sigma_{máx} \cdot \left( \frac{\pi x}{\lambda} \right) \quad [3.4]$$

Utilizando-se a Lei de Hooke obtém-se que :

$$\sigma = E \cdot \frac{x}{x_0} \quad [3.5]$$

Levando-se a equação [3.5] em [3.4], pode-se escrever:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{\lambda E}{\pi x_0} \quad [3.6]$$

O trabalho dispendido na ocorrência da fratura é aquele necessário ao surgimento de duas novas superfícies. Cada uma dessas superfícies tem uma energia superficial  $\gamma_s$  por unidade de área. Como o trabalho necessário para criar a fratura também é dado pela equação [3.2], então:

$$\gamma_s = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \sigma_{m\acute{a}x} \text{sen}(\pi x/\lambda) dx = \sigma_{m\acute{a}x} \frac{\lambda}{\pi} \quad [3.7]$$

Substituindo-se agora a equação [3.6] em [3.7], chega-se a:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{x_0}} \quad [3.8]$$

### 3.2.2. Fator de Intensidade de Tensões

Resultados de tensões de ruptura obtidos experimentalmente demonstraram que a expressão [3.8] conduz a valores muito altos quando calculada para os materiais importantes à aplicação tecnológica. Nos casos estudados, essa divergência ocorreu porque os materiais apresentaram defeitos que reduziram a resistência global e aumentaram a tensão local. Por isso, uma eventual concentração de tensões pode fazer com que a resistência teórica de coesão  $\sigma_{m\acute{a}x}$  seja atingida.

Considerando-se, por exemplo, uma chapa plana com uma trinca elíptica e comprimento igual a  $2a$ , como a apresentada na figura [3.6], a tensão na ponta da trinca para este caso é:



$$\sigma_0 = \sigma_f \left[ 1 + 2 \left( \frac{a}{\rho} \right)^{1/2} \right] \approx 2\sigma_f \left( \frac{a}{\rho} \right)^{1/2} \quad [3.9]$$

sendo  $\rho$  o raio de curvatura no final do eixo maior.

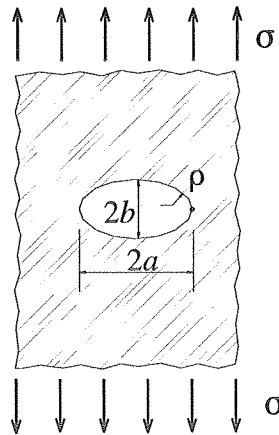


Figura 3.6 - Chapa com Trinca Elíptica

Se o valor de  $\sigma_0$  atingir o valor de  $\sigma_{m\acute{a}x}$  (equação 3.8) ocorre a fratura.

Portanto:

$$2\sigma_f \left( \frac{a}{\rho} \right)^{1/2} = \left( \frac{E\gamma_s}{x_0} \right)^{1/2} \quad [3.10]$$

Resultando na seguinte expressão para a falha:

$$\sigma_f = \left( \frac{E\gamma_s \rho}{4x_0 a} \right)^{1/2} \quad [3.11]$$

sendo  $\sigma_f$  a tensão externa necessária para causar a fratura no material.

A equação [3.11] está mais próxima dos resultados experimentais, o que comprova que a resistência à fratura é bem reduzida pela presença de

trincas. Entretanto, com a passagem da trinca elíptica para valores de  $\rho$  muito baixos ( $\rho \approx 0$ ),  $\sigma_f$  deve também tender a zero, o que na prática não ocorre. Para que ocorra fratura é necessário a presença de uma tensão finita. Porém, verifica-se na equação [3.9] que valores pequenos de  $\rho$  (*sharp crack*) conduzem a tensão  $\sigma_{máx}$  a valores infinitos ( $\sigma_{máx} \rightarrow \infty$ ), e por este motivo existe uma singularidade matemática no *crack tip* (Figura 3.7). Então, um material contendo uma fissura (*sharp crack*) deveria, pelo menos teoricamente, falhar quando submetido a tensões infinitesimais. Além disto, não existe um material capaz de suportar tensão infinita. Este paradoxo (*sharp crack/ ideal scharfen Riss*) motivou Griffith a desenvolver a teoria de fratura que leva em conta considerações energéticas.

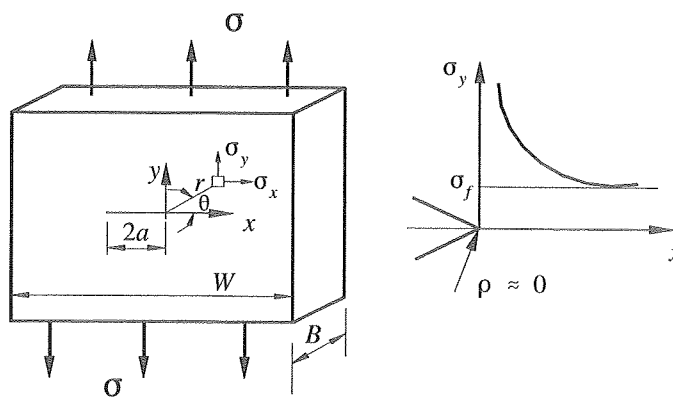


Figura 3.7 - Campo de Tensões na Ponta da Trinca quando  $\rho$  é muito Pequeno ( $\rho \approx 0$ ).

A descrição do campo de tensões no corpo fraturado também pode ser feita utilizando-se os conceitos da teoria da elasticidade. Definindo um eixo de coordenadas polares com a origem no *crack tip*, é possível mostrar matematicamente que este campo de tensões é :

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = \left( \frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + T_{ij} \quad [3.12]$$

onde  $\sigma_{ij}$ , é o campo de tensões,  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares como definido na figura 3.7,  $k$  é uma constante e  $f_{ij}$  é uma função adimensional de  $\theta$ . O segundo termo  $T_{ij}$  depende da geometria, porém, para uma determinada configuração, quando  $r \rightarrow 0$ , verifica-se que o primeiro termo aproxima-se do infinito, enquanto  $T_{ij}$  permanece finito ou aproxima-se de zero. Deste modo,  $T_{ij}$  pode ser desprezado, observando-se que na vizinhança do *crack tip* a tensão varia com o termo  $1/\sqrt{r}$ . A equação [3.12] conduz a uma singularidade de tensão a proporção que se aproxima da ponta da trinca: ( $r \rightarrow 0$ ).

As constantes  $k$  e  $f_{ij}$  dependem do modo básico de carregamento: I, II e III (figura 3.8). É conveniente agora substituir  $k$  por um parâmetro conhecido por *Fator de Intensidade de Tensões*  $K$ , onde  $K = k\sqrt{2\pi}$ . O fator de intensidade de tensões é um parâmetro que caracteriza o campo na ponta da trinca e inclui os efeitos de carregamento e geometria no *crack tip*. Normalmente, este fator é escrito com um índice que denota o modo de carregamento. Assim, o campo total de tensões próximo a ponta da trinca para um material linear - elástico pode ser escrito como:

$$\lim \sigma_{ij}(r,\theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) \quad [3.13]$$

onde  $r$  é a distância do *crack tip*,  $\theta = \arctg(y/x)$ ,  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  são respectivamente os fatores de intensidade de tensões para o modo I (*opening*), modo II (*in-plane shear*) e modo III (*transverse shear*).

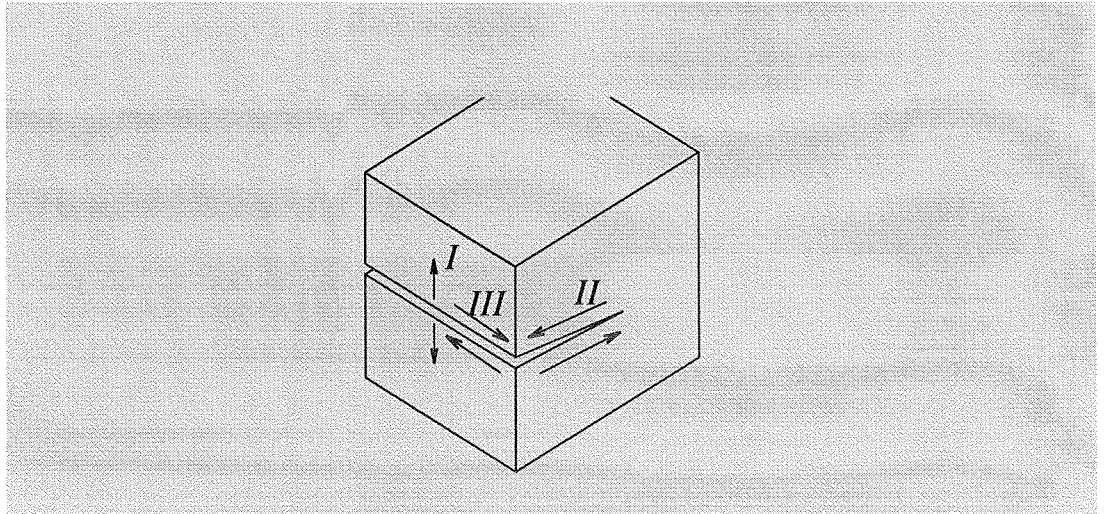
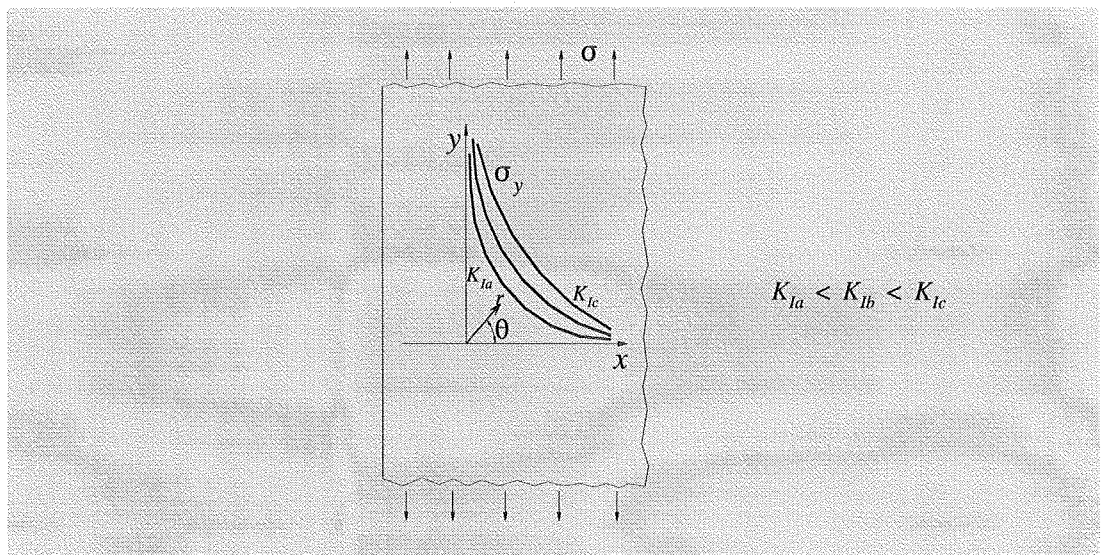


Figura 3.8 - Modos Básicos de Carregamento.

Figura 3.8a - Efeito de Diferentes Fatores  $K_I$  Sob Tensão  $\sigma_y$  no Crack Tip ( $\theta = 0$ ).

Considerando-se apenas o **modo I** (Figura 3.9), tem-se que as componentes de tensões são (para condição de tensão plana):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\end{aligned}\quad [3.14a]$$

Para condição de deformação plana:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad [3.14b]$$

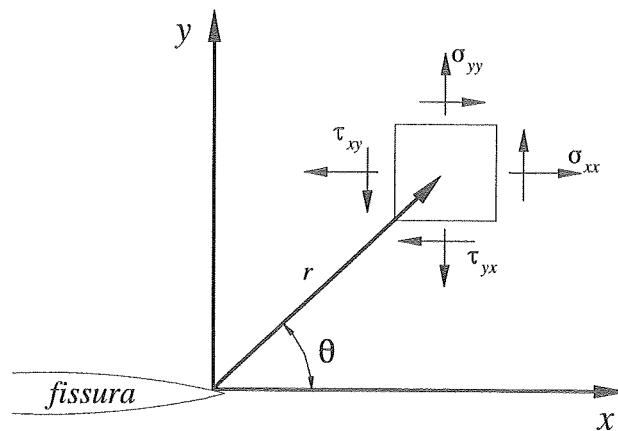


Figura 3.9 - Descrição do Campo de Tensões na Extremidade da Fissura.

Para o modo II:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]\end{aligned}\quad [3.15a]$$

e para condição de deformação plana:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad [3.15b]$$

Para o modo III :

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0\end{aligned}\quad [3.16]$$

A distribuição de tensões em torno de qualquer trinca numa estrutura é semelhante e depende apenas dos valores de  $r$  e  $\theta$ . A diferença entre trincas é dada pelo parâmetro  $K$  que serve como uma escala para definir a intensidade do campo de tensões linear-elásticas.

Seja o caso correspondente ao modo I, onde  $\theta = 0$ . De acordo com a equação [3.14], as tensões nas direções  $x$  e  $y$  são:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad [3.17]$$

Quando  $\theta = 0$  a tensão de cisalhamento também é igual a zero, o que significa que o plano de fratura é um plano principal para o modo I. A figura 3.10 ilustra o gráfico da tensão normal ao plano de fratura ( $\sigma_y$ ), pela distância ao *crack tip*. A equação [3.17] só é válida próximo à trinca (*Rißpitze*), região esta em que a singularidade  $1/\sqrt{r}$  domina o campo de tensões.

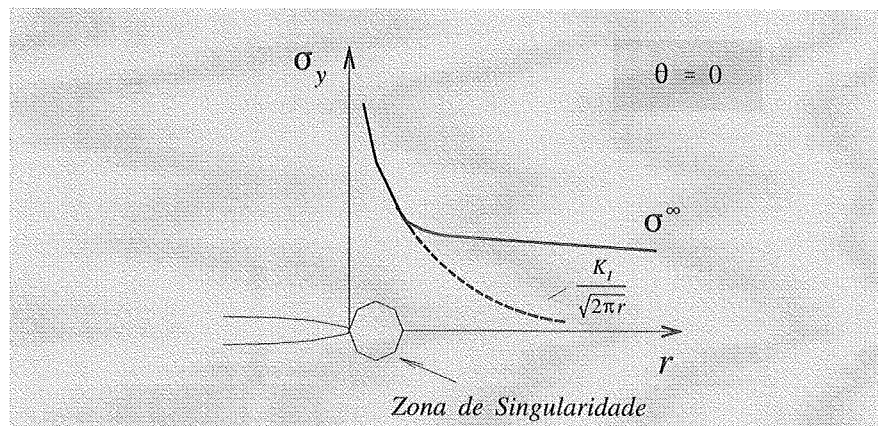


Figura 3.10 - Tensão Normal ao Plano de Fratura para o Modo I

A dimensão de  $K$  é sempre uma tensão multiplicada pela raiz quadrada de um comprimento ( $\text{MPa}\cdot\text{mm}^{1/2}$ ,  $\text{Ksi}\cdot\text{in}^{1/2}$ ). Como visto nas equações [3.14] a [3.16], o conhecimento de  $K$  e da tensão atuante  $\sigma$  são condições suficientes para decrever uma análise de tensões em um corpo fraturado. Várias expressões foram obtidas para  $K$  considerando diferentes geometrias para a fratura. Para situações mais complexas o fator de

intensidade de tensões pode ser estimado experimentalmente. O caso mais simples é aquele já visto sobre a fratura de Griffith, onde uma placa infinita é submetida a uma tensão  $\sigma$  perpendicular ao plano de fratura (modo I) e a fratura tem comprimento igual a  $2a$ . O fator de intensidade de tensões para esta geometria é obtido utilizando-se a *função de tensão de Westergaard*.

### 3.2.2.1. Métodos de Análise através de Função de Tensão

Como visto até agora, o objetivo primário da análise do campo de tensões em regiões fraturadas é obter uma caracterização da região do *Rißpitze*. Uma caracterização em função dos valores de  $K$ , requer apenas o conhecimento de tensões e deformações na vizinhança da extremidade da trinca. O cálculo do valor de  $K$  para o caso de placas finitas pode ser feito utilizando-se aproximações numéricas e um método eficiente para esse cálculo é a *função de tensão*.

Escolhendo um sistema cartesiano  $\langle x,y \rangle$  arbitrário, pode-se escrever as **equações de equilíbrio** de tensões como:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad [3.18]$$

Estas equações serão satisfeitas se assumirmos:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad [3.19]$$

Sendo as equações da **Lei de Hooke**:



$$\begin{cases} E\epsilon_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ E\epsilon_y = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \\ E\gamma_{xy} = 2(1 + \nu)\tau_{xy} \end{cases} \quad [3.20]$$

onde  $\sigma_z = 0$  para condições de tensões planas e  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$  para deformações planas.

A equação de compatibilidade é igual a:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad [3.21]$$

Substituindo-se a equação [3.19] na [3.20] e ainda utilizando a equação [3.21], obtém-se:

$$\nabla^2(\nabla^2 \Phi) = 0 \quad [3.22]$$

onde: 
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \quad [3.23]$$

e  $\Phi$  é a função de tensão de Airy.

MUSKHELISHVILI [1933] assumiu que a solução da equação [3.22] poderia ser a parte real ou a imaginária de:

$$F = z^* \Phi(z) + \bar{X}(z) \quad [3.24]$$

onde  $z$  é um número complexo escrito na forma:  $z = x + yi$ , com seu conjugado:  $z^* = x - yi$  e  $i = \sqrt{-1}$

WESTERGAARD [1939] mostrou que vários casos de modo I de fratura poderiam ser resolvidos fazendo :

$$\Phi = \operatorname{Re}\{\bar{\bar{Z}}(z)\} + y\operatorname{Im}\{\bar{Z}(z)\} \quad [3.25]$$

onde  $\operatorname{Re}$  e  $\operatorname{Im}$  são respectivamente as partes real e imaginária da função e as barras sobre  $Z$  representam a integração com relação a  $z$ , ou melhor:

$$\bar{\bar{Z}} = \frac{d}{dz} \bar{Z}, \quad Z = \frac{d}{dz} \bar{Z}, \quad Z' = \frac{d}{dz} Z \quad [3.26]$$

Aplicando-se agora as equações [3.25] e [3.19] :

$$\begin{cases} \sigma_x = \operatorname{Re}Z - y\operatorname{Im}Z' \\ \sigma_y = \operatorname{Re}Z + y\operatorname{Im}Z' \\ \tau_{xy} = -y\operatorname{Re}Z' \end{cases} \quad [3.27]$$

Para o caso da fratura de Griffith, onde  $y = 0$ , a parte imaginária de [3.27] desaparece. A tensão de cisalhamento  $\tau_{xy}$  é também igual a zero o que implica dizer que o plano de fratura é um plano principal, correspondendo ao modo I de carregamento. Os deslocamentos, assumindo-se deformação plana, são dados por:

$$\begin{aligned} 2Gu &= (1 - 2\nu)\operatorname{Re}\bar{\bar{Z}} - y\operatorname{Im}Z \\ 2Gv &= 2(1 - \nu)\operatorname{Im}\bar{\bar{Z}} - y\operatorname{Re}Z \end{aligned} \quad [3.28]$$

Para condição de tensão plana,  $\nu$  pode ser substituído nas equações acima por  $\nu / (1 + \nu)$ . A solução para o problema é a função de tensão de Westergaard:

$$Z(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{z}\right)^2}} \quad [3.29]$$

Sendo os vetores :

$$z = r e^{i\theta} \quad , \quad z - a = r_1 e^{i\theta_1} \quad , \quad z + a = r_2 e^{i\theta_2} \quad [3.30]$$

é possível reescrever a expressão [3.29] como:

$$Z = \frac{\sigma r}{\sqrt{r_1 r_2}} e^{i\left\{\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right\}} \quad [3.31]$$

Diferenciando-se ainda [3.29], obtém-se :

$$Z'(z) = - \frac{\sigma a^2}{\{z^2 - a^2\}^{3/2}} \quad [3.32]$$

e portanto:

$$Z = - \frac{\sigma a^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} e^{-i\frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)} \quad [3.33]$$

Para calcular  $\bar{Z}$  deve-se integrar [3.29] :

$$\bar{Z}(z) = \sigma \sqrt{z^2 - a^2} \quad [3.34]$$

que também pode ser expresso como:

$$\bar{Z} = \sigma \sqrt{r_1 r_2} e^{i \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)} \quad [3.35]$$

As equações [3.31] , [3.33] e [3.35] auxiliam na formação das partes real e imaginária das funções de tensão e deslocamento, onde:  $e^{i\phi} = \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi$  . Pode-se verificar que  $\operatorname{Re}Z$  ,  $y \operatorname{Re} Z'$  e  $\operatorname{Im}Z'$  são todos nulos sobre o segmento que representa a fratura:  $|x| < a$  e  $y = 0$ . Para  $|x| > |a|$  ,  $y \operatorname{Re}Z'$  e  $y \operatorname{Im}Z'$  são novamente nulos enquanto que  $\operatorname{Re} Z = \sigma$ . As tensões são:  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$  e  $\tau_{xy} = 0$ . Quando  $r_1 \ll a$  e ainda com  $r = a$ ,  $r_2 = 2a$  ,  $\theta = 0$  e  $\theta_2 = 0$ , a equação [3.31] fica igual a:

$$Z = \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2r_1}} e^{-i \frac{\theta_1}{2}} \quad [3.36]$$

ou ainda :

$$Z(\xi) = \frac{K}{\sqrt{2\pi\xi}} \quad [3.37]$$

$$\text{onde } \xi = r_1 e^{i\theta_1} = z - a \quad [3.38]$$

$$\text{e } K = KI = \sigma \sqrt{\pi a} \quad [3.39]$$

A equação [3.39] é uma forma prática para o caso bidimensional onde o fator de intensidade de tensões  $K_I$ , para a configuração apresentada é diretamente proporcional à tensão aplicada e à raiz quadrada do comprimento da fissura. Para obtenção do modo II de carregamento é possível substituir  $\sigma$  em [3.39] pela tensão de cisalhamento. As tensões e deslocamentos nas proximidades do crack tip podem ser obtidos da equação

[3.37], dos valores de  $Z'$  e  $\bar{Z}$  e da substituição das partes real e imaginária nas equações [3.27] e [3.28].

Uma placa semi-infinita apresentando uma fratura simples (placa de Griffith cortada ao meio) tem como solução o seguinte fator de intensidade de tensão:

$$K_I = 1.12\sqrt{\pi a} \quad [3.40]$$

que é idêntica à equação [3.39]. Os 12% de acréscimo ocorrem devido à alteração nas condições de contorno que causam por esse motivo uma maior abertura de fissura.

Para configurações geométricas normalmente utilizadas na prática, é possível calcular o fator de intensidade de tensão  $K$  aplicando-se um fator de correção apropriado, de tal forma que:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} F \quad [3.41]$$

onde  $F$  é uma constante adimensional que depende da geometria e do modo de carregamento. Este fator pode ser encontrado em manuais como o “*The Stress Analysis of Cracks Handbook*” TADA [1985]. Os casos mais comuns serão apresentados no Apêndice C.

### 3.2.2.2. Princípio da Superposição

Os materiais elásticos permitem a superposição de componentes individuais de tensão, deformação e deslocamentos. Por exemplo: duas tensões normais na direção do eixo  $y$  e oriundas de forças externas diferentes podem ser adicionadas a fim de obter-se a tensão total  $\sigma_y$ . Porém,

a tensão normal não deve ser adicionada às tensões cisalhantes. De modo semelhante, **o fator de intensidade de tensões pode ser combinado de acordo com o modo de carregamento aplicado**, ou melhor:

$$K_I^{(total)} = K_I^{(a)} + K_I^{(b)} + K_I^{(c)} + \dots$$

mas

$$K^{(total)} \neq K_I + K_{II} + K_{III}$$

Em algumas situações complexas, é possível utilizar o princípio da superposição para determinação do fator de intensidade de tensões. Seja o caso de um elemento com fratura simples, submetido a uma carga axial de membrana  $P_m$  e uma carga concentrada no centro da viga originando um efeito de flexão  $P_b$ . Como estas duas situações implicam em condições de modo I de fratura, pode-se calcular  $K_I$  como:

$$K_I^{(total)} = K_I^{(membrana)} + K_I^{(flexão)}$$

e portanto,

$$K_I = \frac{1}{t\sqrt{b}} P_m f_m \left( \frac{a}{b} \right) + \frac{1}{t\sqrt{b}} P_b f_b \left( \frac{a}{b} \right) \quad [3.42]$$

onde  $t$  é a espessura e  $b$  a altura do elemento;  $f_m$  e  $f_b$  são respectivamente fatores de correção geométricos para os casos carregamento de membrana e de flexão.

### 3.2.2.3. Plastificação no *Crack Tip*

Como visto anteriormente, à proporção que se aproxima da ponta da trinca ( $r \rightarrow 0$ ) as tensões atingem valores extremamente altos. Entretanto, na prática isto não ocorre pois o material escoá plasticamente nesta região formando uma zona de alívio de tensões (zona deformada plasticamente).

O tamanho desta zona pode ser estimado do seguinte modo: no plano da trinca ( $\theta=0$ ) a tensão normal  $\sigma_y$ , para material linear-elástico é dada pela equação [3.17]. Supondo-se estado plano de tensões, verifica-se que o material escoá quando:

$$\sigma_y = \sigma_e \quad [3.43]$$

onde  $\sigma_e$  é o limite de escoamento em tração uniaxial. Substituindo-se em [3.17], tem-se que a zona plastificada se estende à frente da ponta da trinca por uma distância igual à:

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2 \quad [3.44]$$

Desprezando-se a deformação por endurecimento (*strain hardening*), a distribuição de tensão fica representada por uma reta em  $\sigma = \sigma_e$  e  $r \leq r_y$ , como ilustrado na figura (3.11).

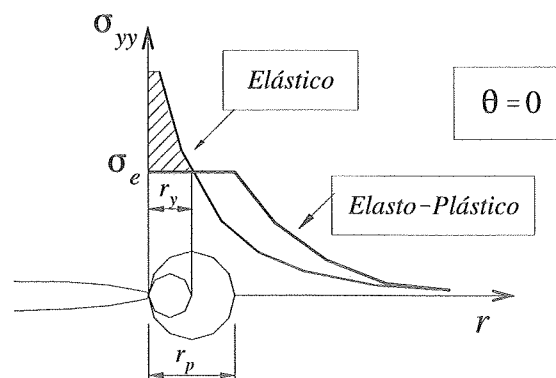


Figura 3.11 - Representação Do Campo de Tensões Próxima à Zona Plastificada.

Esta primeira análise está baseada em solução elástica no *crack tip* e deve ser modificada para considerar a redistribuição de tensões que ocorre devido ao escoamento do material. Deste modo, o raio da zona plástica deve aumentar passando para  $r_p$  a fim de acomodar estas tensões. Seja portanto o seguinte equilíbrio:

$$\sigma_e r_p = \int_0^{r_y} \sigma_y dr = \int_0^{r_y} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr \quad [3.45]$$

que integrando-se e resolvendo-se para  $r_p$  obtém-se:

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2 \quad [3.46]$$

O novo valor estimado  $r_p$  se estende agora à frente da trinca por uma distância igual a  $2r_y$ . A redistribuição de tensão na região elástica passa a ser maior que aquela prevista pela equação [3.17], e portanto haverá um acréscimo no fator de intensidade de tensão efetivo  $K_{ef}$ . Esse aumento em  $K$  conduz a definição de um comprimento de fissura efetivo  $a_{ef}$ , tal que:

$$a_{ef} = a + r_y \quad [3.47]$$

Uma boa aproximação para  $K_{ef}$  pode ser obtida quando o *crack tip* se encontra no centro da região plástica (Figura 3.12). A determinação de  $K_{ef}$  é feita por meio de processo iterativo, onde o valor inicial é calculado sem consideração da região plástica. Em seguida, calcula-se um valor para  $a_{ef}$  através da equação [3.44] e aplica-se em:

$$K_{ef} = F(a_{ef}) \sigma \sqrt{\pi a_{ef}} \quad [3.48]$$



Calculado  $K_{ef}$ , determina-se um novo valor para  $a_{ef}$ , repetindo o processo sucessivamente até a convergência de  $K_{ef}$ . Em alguns casos pode-se encontrar  $K_{ef}$  sem processo iterativo, como exemplo, para o caso de fratura de Griffith em placa infinita:

$$K_{ef} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_e}\right)^2}} \quad [3.49]$$

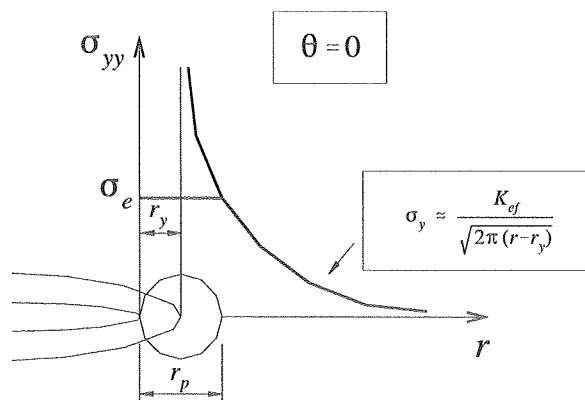


Figura 3.12 - Correção da Zona de Plastificação.

DUGDDALE [1960] e depois BARENBLATT [1962] desenvolveram outro modelo para estimar a zona de plastificação, sendo este válido para tensão plana. Neste modelo, considera-se novamente uma placa infinita onde a fratura é central com comprimento  $2a + 2\rho$ , e  $\rho$  é a distância da interface da zona plástica à ponta da trinca. Uma tensão limite  $\sigma_e$  é aplicada em cada *crack tip* como ilustra a figura (3.13). O tamanho de  $\rho$  é determinado pela seguinte expressão:

$$\rho = \frac{\pi^2 a}{8} \left( \frac{\sigma}{\sigma_e} \right)^2 \quad [3.50]$$

No cálculo do fator de intensidade de tensão efetivo deve-se substituir  $a_{ef}$  por  $a + \rho$ . Este modelo serve como base para um dos métodos de avaliação da tenacidade em estado plano de tensões, e é conhecido como *crack opening displacement (C.O.D.)*.

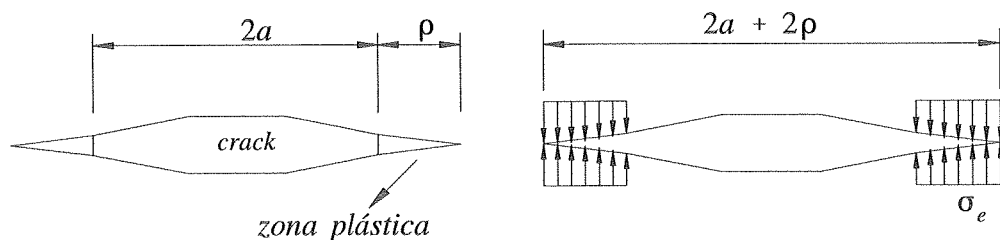


Figura 3.13 - Modelo de Dugdale para Zona de Plastificação no *Crack Tip*.

### 3.2.3. O Fator de Intensidade de Tensões Crítico $K_c$

A falha local de um elemento ocorre quando este é submetido a uma determinada combinação de tensões e deformações atingindo um valor crítico de  $K$  para o qual a trinca se propaga instavelmente. Este valor crítico designado por  $K_c$  é uma medida da tenacidade à fratura (*fracture toughness*). Enquanto a expressão que relaciona  $K$  com o valor da tensão nominal aplicada e o tamanho da trinca depende da geometria e da forma de carregamento, o valor crítico  $K_c$  independe destes parâmetros, sendo uma característica do material e determinado em laboratório quando submetido a determinada temperatura e velocidade de sollicitação.

Para melhor compreensão, pode-se “dizer” que o tratamento para  $K_c$  é análogo ao limite de escoamento, ou seja: o cálculo da tensão normal depende da geometria do corpo, porém o valor crítico para qual ocorre o escoamento do material (limite de escoamento) é uma característica do material. Pensando deste modo, *K está relacionado à tensão assim como  $K_c$  está para o limite de escoamento.*

É necessário cuidado quando se diz que  $K_c$  é uma constante do material, pois este fator geralmente varia com o modo de carregamento, ou seja:

$$K_{Ic} \neq K_{IIc} \neq K_{IIIc}$$

sendo  $K_{Ic}$  de maior interesse prático.

A determinação da resistência à fratura com  $K_{Ic}$  está relacionada à intensidade crítica do campo de tensões elásticas próximo ao *crack tip*. A existência da zona plástica que sempre ocorre nos metais, permite que este critério seja válido se e somente se as deformações plásticas estiverem envolvidas por uma região elástica com dimensões bem maiores que a região plastificada. Isto ocorre quando o material está sob condições de deformação plana. A figura 3.14 ilustra o efeito da espessura no modo crítico  $K_{Ic}$ . **Para espessuras pequenas** (comparada com a zona plástica) o fator crítico  $K_I$  varia sendo definido como **fratura sob condição de tensão plana**. A tenacidade à fratura diminui gradualmente com o aumento da espessura até atingir um patamar. O motivo dessa diminuição é o efeito de confinamento crescente, quando a espessura aumenta. O ponto crítico a partir do qual  $K_I$  atinge um valor constante é definido como *tenacidade à fratura sob condições de deformação plana* ou simplesmente  $K_{Ic}$ .

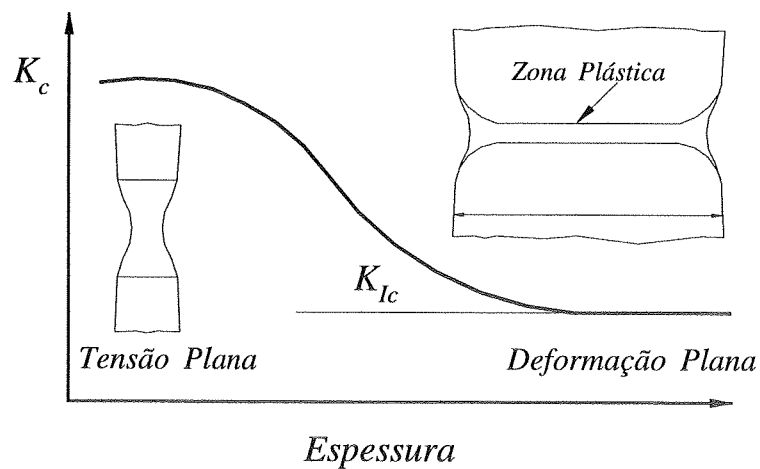


Figura 3.14 - Influência da Espessura no Fator de Intensidade de Tensões - Modo I.

Voltando à equação [3.46], pode-se observar que o comprimento da zona plasticada depende de  $(K / \sigma_e)^2$ . Portanto, na instabilidade verifica-se que o máximo valor desta zona depende da razão:

$$\text{razão crítica} = \frac{K_{Ic}}{\sigma_e} \quad [3.51]$$

O teste para determinação de  $K_{Ic}$  é apresentado por várias normas internacionais, sendo as mais referidas a norma inglesa *British Standards Institution* BS 5447, BS [1977], e a *American Society for Testing and Materials* ASTM E 399, ASTM [1990]. A condição de deformação plana é necessária para realização do teste de  $K_{Ic}$ . Os corpos de prova recomendados são o de flexão em três pontos e o de tração compacto, como indicados nas figuras (3.15) e (3.16). Nestes espécimes desenvolve-se uma trinca de fadiga a partir do entalhe usinado, sob condições controladas a fim de evitar deformação plástica excessiva no *crack tip*. Coloca-se um

extensômetro através da abertura do entalhe e finalmente carrega-se o corpo de prova monitorando a carga e o deslocamento até à ruína.

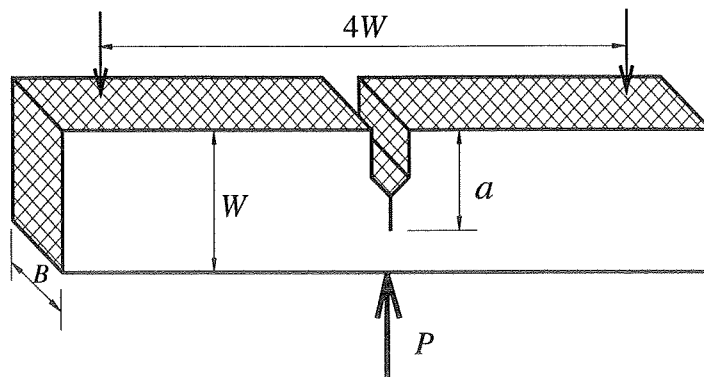


Figura 3.15 - Corpo de Prova Padrão : Flexão em 3 Pontos

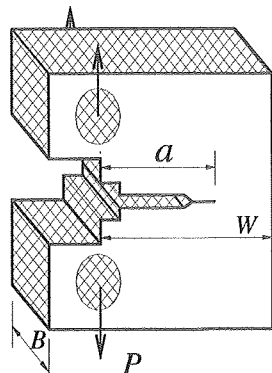


Figura 3.16 - Corpo de Prova Padrão : Tração compacto.

Na figura (3.17) são apresentadas três tipos de curvas carga-deslocamento, sendo a carga crítica  $P_Q$  dependente do tipo de curva monitorada. Nesta curva é traçada uma secante  $OP_5$  partindo da origem e com inclinação igual a 5% inferior à tangente inicial  $OA$ , correspondendo à uma porcentagem de crescimento da trinca inicial. Para o comportamento I, observa-se que a curva desvia suavemente da linearidade antes da ruptura

final que ocorre no ponto  $P_{m\acute{a}x}$ . Esta não-linearidade pode ser causada pela plasticidade, abertura da fratura ou ambos. Neste caso,  $P_Q = P_5$ . Se houver abertura da fratura antes do desvio de 5% tem-se o comportamento II e  $P_Q$  é definido no ponto de alteração da curva. Um espécime que apresenta o comportamento III tem a ruína total antes de atingir o desvio de 5% e neste caso  $P_Q = P_{m\acute{a}x}$ .

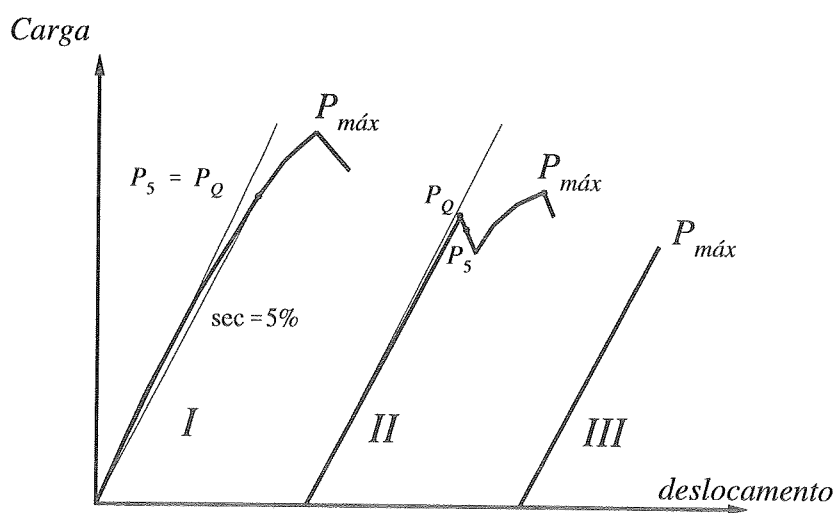


Figura 3.17 - Curvas Carga-Deslocamento para Teste de  $K_{Ic}$

Uma vez determinados  $P_Q$  e  $a$ , calcula-se um valor provisório  $K_Q$  utilizando a seguinte relação:

$$K_Q = \frac{P_Q}{BW^{1/2}} f(a/W) \quad [3.52]$$

onde  $f(a/W)$  é uma função adimensional dada na seguinte forma polinomial:

a. Flexão em três pontos (ASTM E 399- 90):

$$f(a/W) = 3L \left[ 1,93 \left( \frac{a}{w} \right)^{\frac{1}{2}} - 3,07 \left( \frac{a}{w} \right)^{\frac{3}{2}} + 14,53 \left( \frac{a}{w} \right)^{\frac{5}{2}} - 25,11 \left( \frac{a}{w} \right)^{\frac{7}{2}} + 25,80 \left( \frac{a}{w} \right)^{\frac{9}{2}} \right] \quad [3.53]$$

b. Tração compacto (ASTM E 399- 90):

$$f(a/W) = \left[ 29,6 \left( \frac{a}{w} \right)^{\frac{1}{2}} - 185,5 \left( \frac{a}{w} \right)^{\frac{3}{2}} + 655,7 \left( \frac{a}{w} \right)^{\frac{5}{2}} - 1017 \left( \frac{a}{w} \right)^{\frac{7}{2}} + 638,9 \left( \frac{a}{w} \right)^{\frac{9}{2}} \right] \quad [3.54]$$

O resultado de  $K_Q$  é válido como  $K_{Ic}$  apenas quando forem atendidas as seguintes recomendações empíricas:

$$\begin{cases} 0,45 \leq a/W \leq 0,55 \\ B, a \geq 2,5 \left( \frac{K_Q}{\sigma_e} \right)^2 \\ P_{máx} \leq 1,10 P_Q \end{cases} \quad [3.55]$$

Quando  $K_Q$  satisfizer as condições acima, então pode-se dizer que :

$$K_Q = K_{Ic} \quad [3.56]$$

caso contrário, deve-se utilizar um corpo de prova mais espesso e com uma fissura maior. Deste modo, o conhecimento de  $K_I$ ,  $K_{Ic}$  e das tensões atuantes

permitiram definir a maior fissura possível no elemento antes do início da fratura instável.

O sistema de identificação do plano de fissura é descrito com base no arranjo de três eixos de referência relacionados com a direção principal de tensão, onde:

X = longitudinal,	paralelo ao escoamento dos grãos.
Y = transversal,	normal aos eixos X e Z.
Z = transversal menor,	coincidente com a direção da força de trabalho principal.

Adota-se um código de duas letras, sendo que a primeira letra indica a direção perpendicular ao plano de fissura e a segunda é a direção da propagação. A figura 3.18 ilustra o sistema aplicado à uma seção retangular.

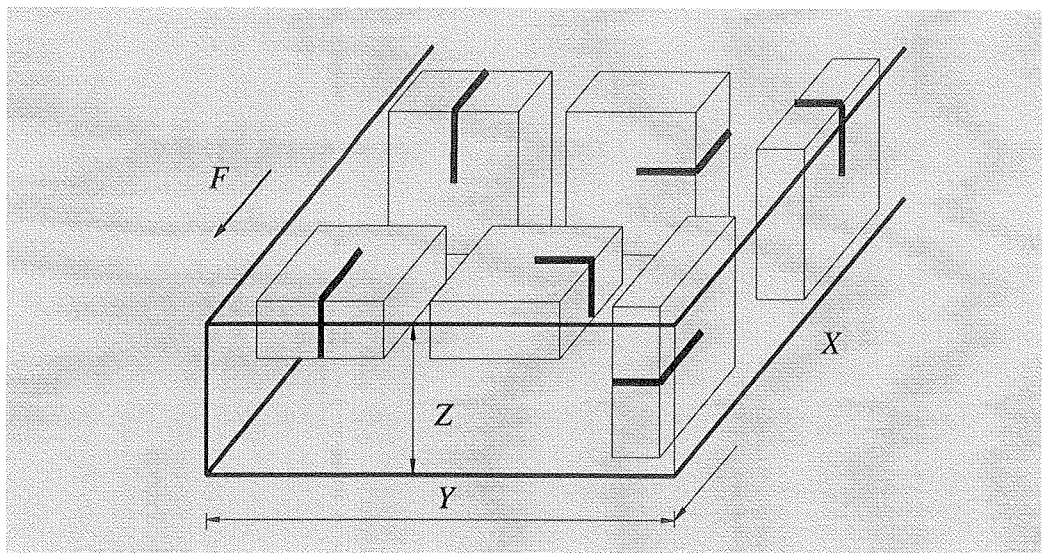


Figura 3.18 - Identificação dos Planos de Fratura Básicos para Seção Retangular Segundo as Normas ASTM 1981 e BS 1977.



A aplicação de  $K_{Ic}$  em projeto pode ser entendida a partir de uma chapa infinita e larga, que apresenta uma trinca de comprimento igual a  $2a$  na região central e atravessa toda a espessura desta chapa. A condição de fratura neste caso será :

$$K = K_c = \sigma\sqrt{\pi a} \quad [3.57]$$

The diagram shows the equation  $K = K_c = \sigma\sqrt{\pi a}$  with three arrows pointing downwards from the terms  $K$ ,  $K_c$ , and  $\sigma\sqrt{\pi a}$  respectively. The arrow from  $K$  points to the text "seleção do material". The arrow from  $K_c$  points to the text "tensão de projeto". The arrow from  $\sigma\sqrt{\pi a}$  points to the text "tamanho admissível da trinca ou limite de detecção da trinca em testes não-destrutivos".

Esta relação apresenta os fatores que devem ser considerados na análise de falhas em projetos. Por exemplo, se o material for definido para condições onde se verifique resistência à corrosão, tem-se que  $K_c$  é fixo. Se ainda for permitida a presença de uma trinca que possa ser percebida e possível de ser reparada, a tensão de projeto também será fixada tendo em vista a sensibilidade dos ensaios não destrutivos. Para um exemplo onde a tensão é fixa por considerações de peso, a seleção do material pode ser feita em função da trinca admissível. Portanto, quando duas variáveis são pré-fixadas para o componente considerado, a terceira fica também determinada por intermédio da mecânica da fratura.

### 3.2.4. Conceito Energético de Fratura

A mecânica da fratura também pode ser desenvolvida pelo critério de energia elástica liberada com o avanço da trinca. A energia necessária para propagar uma trinca é definida como :

$$g = - \frac{\partial U}{\partial a} \quad [3.58]$$

Considerando-se uma placa fraturada submetida ao peso próprio e a uma carga  $P$  constante, como ilustra a figura 3.18a, tem-se que:

$$W = P\Delta \quad \text{e} \quad U = \int_0^\Delta P d\Delta = \frac{P\Delta}{2}$$

e portanto:

$$g = \frac{P}{2} \left( \frac{d\Delta}{da} \right)_P \quad [3.59]$$

Quando do deslocamento é fixo (figura 3.18b),  $W=0$  e :

$$g = - \frac{\Delta}{2} \left( \frac{dP}{da} \right)_\Delta \quad [3.60]$$

Introduz-se agora a Constante  $C$ , a qual é inversa à rigidez da placa:

$$C = \frac{\Delta}{P} \quad [3.61]$$

que substituindo-se nas equações [3.59] e [3.60], obtém-se:

$$g = \frac{P^2}{2} \frac{dC}{da} \quad [3.62]$$

idêntica para ambos os casos de controle de carga ou deslocamento. Portanto:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)_P = - \left( \frac{\partial U}{\partial \Delta} \right)_a \quad [3.63]$$

A equação [3.63] também pode ser demonstrada graficamente, como ilustram as figuras 3.19a e 3.19b. Agora, a propagação ocorre quando a velocidade de liberação de energia atinge um valor limite  $G_{cr}$  possível de ser relacionado com o fator de intensidade de tensões.

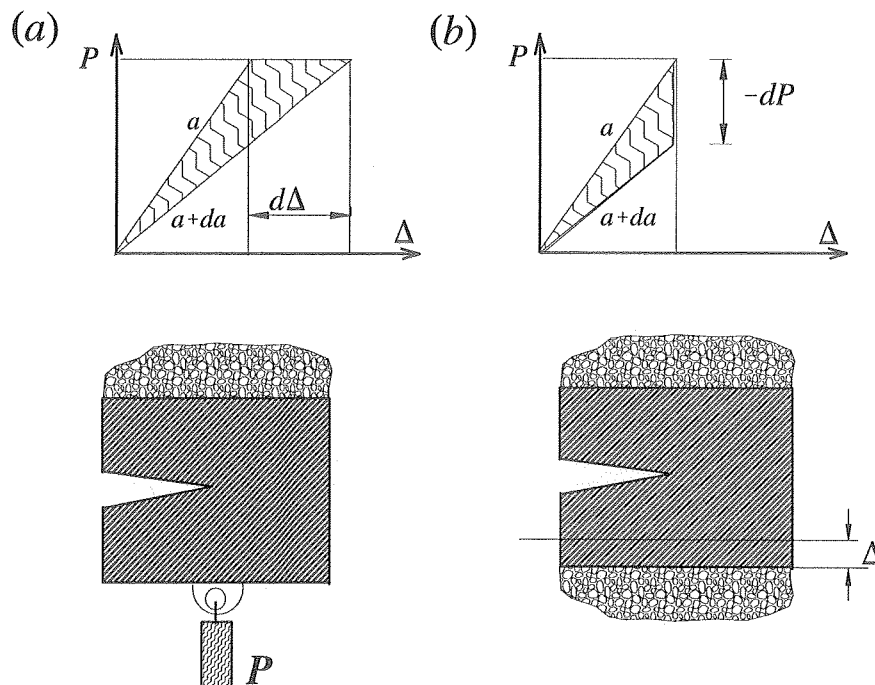


Figura 3.19 - (a) Placa Fraturada com Carga  $P$  fixa; (b) Placa Fraturada com Deslocamento

### 3.3. FRATURA MECÂNICA ELASTO-PLÁSTICA - FMEP

O conceito de fratura elástica linear perde sua validade quando se desenvolve uma região plástica considerável na extremidade da trinca, ou seja, quando o raio da zona plastificada tem valor representativo quando comparado com o comprimento  $a$  da fratura. A aplicação da fratura mecânica Elasto-plástica se estende aos materiais que apresentam durante sua história de carregamento um comportamento não-linear (deformações plásticas). Dois conceitos de grande importância são utilizados para descrever as condições na extremidade da trinca de materiais elasto-plásticos. Estes conceitos são: *crack tip opening displacement* (C.T.O.D) e a Integral-  $J$ , ambos utilizados atualmente como critério de fraturamento.

#### 3.3.1. *Crack Opening Displacement* (C.O.D.)

WELLS [1961] fez uma série de medições do fator de intensidade de tensões crítico em determinados aços estruturais e concluiu que estes materiais não podiam ser tratados pela teoria convencional de fratura elástica. Verificou-se que as faces da trinca se deslocavam plasticamente antes de ocorrer propagação, resultando um deslocamento finito  $\delta$  na ponta da trinca, como pode ser visto na figura (3.20). Este parâmetro é conhecido como *crack opening displacement*. Como visto anteriormente, o modelo de Barenblatt-Dugdale sugere que a ponta da trinca numa placa infinita seja submetida a uma tensão de escoamento  $\sigma_e$ , enquanto que a distância de separação é dada por:

$$\delta = \frac{8\sigma_e a}{\pi E} \ln \left( \sec \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_e} \right) \quad [3.64]$$

ou ainda por expansão em série do termo  $\ln \sec$  :

$$\delta = \frac{8\sigma_e a}{\pi E} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\pi \cdot \sigma}{2 \cdot \sigma_e} \right)^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{\pi \cdot \sigma}{2 \cdot \sigma_e} \right)^4 + \dots \right\} \quad [3.65]$$

que para  $\sigma/\sigma_e < 0,6$  conduz à seguinte aproximação:

$$\delta = \frac{\pi \sigma^2 a}{E \sigma_e} \quad [3.66]$$

Segundo BURDEKIN e STONE [1966], o conceito de C.O.D. é apresentado como um critério de deformação, sendo portanto introduzido:

$$\Phi = \frac{\delta}{2\pi \epsilon_e a} \quad [3.67]$$

onde  $\epsilon_e$  é a deformação correspondente à tensão de escoamento.

Como critério de propagação fica estabelecido que:

$$\rightarrow \delta > \delta_{cr} \quad \dots$$

tem-se o avanço da fissura plástica. O problema de utilizar-se o conceito de C.O.D. está na dificuldade do cálculo exato de  $\delta$  e na determinação experimental de  $\delta_{cr}$ .

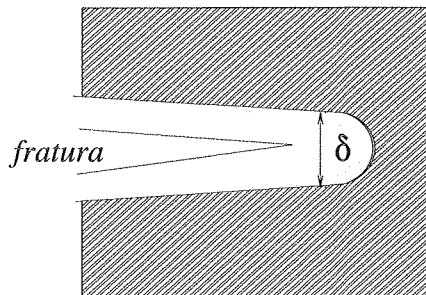


Figura 3.20 - Arredondamento da Ponta da Trinca sob Deformações Plásticas Resultando num Deslocamento Finito  $\delta$  na Extremidade (*Crack Open Displacement*).

### 3.3.2. Integral- J

Um desenvolvimento fundamental na teoria da fratura mecânica elasto - plástica foi a introdução da integral independente do caminho  $J$  cuja metodologia foi apresentada inicialmente por CHEREPANOV [1967] e RICE [1969]. A aplicação dessa integral permite o cálculo da energia associada à propagação de uma trinca além do conhecimento do estado tensional do corpo fissurado. O procedimento matemático para obtenção da integral-  $J$  será analisado a seguir.

Considere-se a seguinte integral:

$$I = \oint_{\Omega} \left( Wn_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds \quad [3.68]$$

onde  $\Omega$  é o contorno de uma determinada região onde não existam singularidades e sobre o qual está localizada a normal  $\bar{n}$ , como ilustrado na figura 3.21:

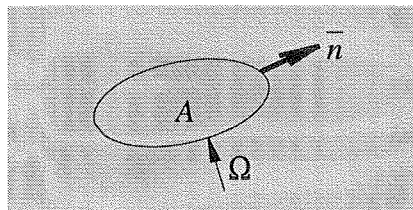


Figura 3.21 - Curva Qualquer Determinando uma Região sem Singularidades.

e  $W$  é definido como densidade de energia de deformação e é dado pela seguinte expressão:

$$W = W(x,y) = W(\bar{\epsilon}) = \int_0^{\epsilon} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad [3.69]$$

sendo:  $\epsilon = [\epsilon_{ij}]$  é o vetor de deformações,  $\mathbf{u} = u_i$  o vetor de deslocamentos e  $ds$  o incremento ao longo da curva. Para demonstrar que  $I$  é independente do caminho aplica-se o **teorema da divergência** para o contorno  $\Omega$  envolvendo a área  $A$  com um campo de deformação bi-dimensional :

$$I = \oint_{\Omega} \left( W \delta_{1j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} \right) n_j ds = \int_A \frac{\partial}{\partial x_j} \left( W \delta_{1j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} \right) dA \quad [3.70]$$

onde  $\delta_{ij}$  é o **delta de Kronecker** sendo definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad [3.71]$$

Diferenciando-se agora a energia de deformação (assumindo material não-linear elástico):

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \cdot \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1} \quad [3.72]$$

E ainda:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} \right) = \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_j} \sigma_{ij} \right] = \sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_j} \quad [3.73]$$

pois pelas condições de equilíbrio  $\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$

$\therefore$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1}$$

e portanto,  $I = 0$  (c.q.d.).

Utiliza-se agora a **integral - I** para definir a **integral - J** em torno do *crack tip*. Seja portanto, o contorno  $\Omega$  formado pelas curvas:  $\Omega^+$ ,  $\Omega^o$ ,  $\Omega^-$ , e  $\Omega^t$ , segundo ilustra a figura (3.22).

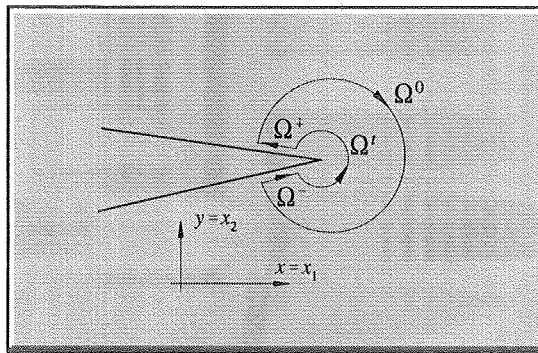


Figura 3.22 - Contorno no *Crack Tip*

Como a integral  $I$  é independente do caminho, então:

$$I = \oint_{\Omega^t + \Omega^+ + \Omega^o + \Omega^-} \left( W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds = 0 \quad [3.74]$$

Na superfície da fissura, ao longo dos contornos  $\Omega^+$  e  $\Omega^-$ ,  $n_1 = 0$  pois a normal a estas linhas está localizada na direção  $y$ . O vetor de tração  $T$  nas faces da fissura será então:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = 0 \quad [3.75]$$



Portanto, os contornos  $\Omega^+$  e  $\Omega^-$  não contribuem para a integral-  $I$ , resultando na seguinte expressão:

$$\oint_{\Omega'} \left( W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds + \oint_{\Omega^o} \left( W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds = 0 \quad [3.76]$$

Observando a figura (3.23), escreve-se ainda que :

$$\begin{aligned} \oint_{\Omega^o} \left( W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds &= - \oint_{\Omega'} \left( W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds \\ &= \oint_{\Omega'} \left( W v_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} v_j \right) ds \end{aligned} \quad [3.77]$$

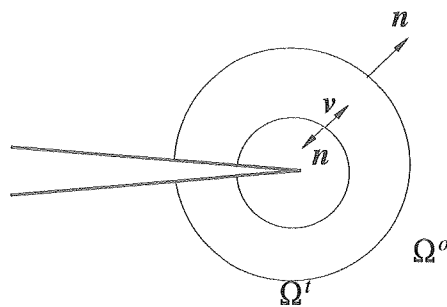


Figura 3.23 - Definição da Integral- J (a).

A normal  $v_j$  pode ser novamente chamada de  $n_j$  e então define-se:

$$J = \oint_{\Omega'} \left( W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds \quad [3.78]$$

Esta integral **J** é independente do caminho  $\Omega'$  e é calculada para a extremidade da trinca (figura 3.24). Com a ausência de singularidade tem-se uma região fechada e portanto  $J = 0$ .

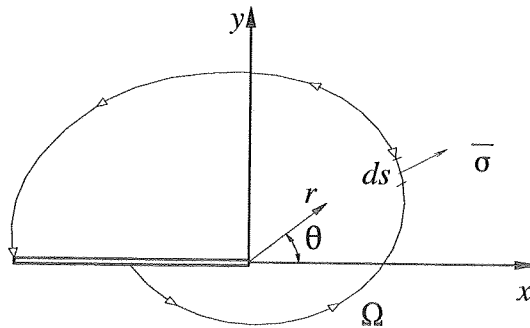


Figura 3.24 - Definição da Integral - J (b).

### 3.3.2.1. A Integral- J Associada à Velocidade de Liberação de Energia Elástica Não - Linear

Para um corpo bi-dimensional fraturado submetido a um campo de tração  $t_i$ , como indicado na figura 3.25, a energia potencial do sistema é dada por:

$$\Pi = \int_A W dA - \int_{\Omega'} t_i u_i ds \quad [3.79]$$

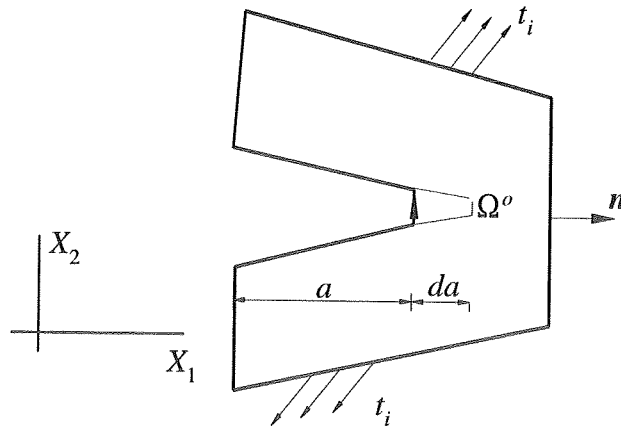


Figura 3.25 - Corpo Fraturado Bi-dimensional com Contorno  $\Omega^\circ$ .

Na equação [3.79]  $A$  é a área do corpo e  $\Omega''$  é a parte do contorno onde o campo de tração está definido. A variação da energia potencial em relação ao avanço da fissura é calculada como:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = - \int_{\Omega^\circ} W n_1 ds + \int_A \frac{\partial W}{\partial a} dA - \int_{\Omega''} t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds \quad [3.80]$$

sendo:

$$\int_A \frac{\partial W}{\partial a} dA = \int_A \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial a} dA = \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial a} dA \quad [3.81]$$

Aplicando o Princípio do Trabalho Virtual obtém-se:

$$\int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial a} dA = \int_A t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds \quad [3.82]$$

e finalmente:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = - \int_{\Omega^o} W n_1 ds \quad [3.83]$$

Pode-se ainda reescrever a equação [3.83] na seguinte forma:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = - \int_{\Omega^o} \left( W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds \quad [3.84]$$

desde que a segunda parte da integral seja sempre nula, pois na extremidade da fissura  $\Omega^o$  é livre de tensões de tração. Deste modo, fica mostrado que a Integral -  $J$  é uma versão geral da *energy release rate* para casos de material linear ou não-linear elástico. Para o caso especial de material linear-elástico, a interpretação energética da Integral -  $J$  é idêntica a  $\mathcal{G}$ , e portanto, para o Modo I de fratura pode-se escrever:

$$J_I \equiv \mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E} \quad [3.85]$$

### 3.3.2.2. A Integral - $J$ no Campo de Tensões Plásticas

Considere-se um material que apresente a relação de *Ramberg-Osgood* (Figura 3.26):

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_o} = \frac{\sigma}{\sigma_o} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^n \quad [3.86]$$

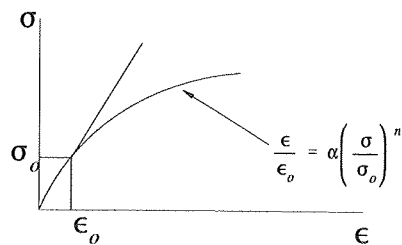


Figura 3.26 -Relação TensãoxDeformação na Área Plastificada.

onde  $\sigma_o$  é a tensão de escoamento,  $\epsilon_o = \sigma_o/E$ ,  $E$  é o módulo de Young e  $\alpha$ ,  $n$  são valores determinados para o material. Quando se aproxima do *crack tip* o campo de deformação tem maior contribuição devido à região plástica e portanto:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_o} = \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^n \quad [3.87]$$

HUTCHINSON, RICE e ROSENGREN [1968] demonstraram que próximo à extremidade da trinca o campo de tensão tem a seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \sigma_o \left( \frac{EJ}{\sigma_o^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} f_{ij}(\theta, n) \quad [3.88]$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{\sigma_o}{E} \left( \frac{EJ}{\sigma_o^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} g_{ij}(\theta, n) \quad [3.89]$$

As funções  $f_{ij}$  e  $g_{ij}$  são adimensionais e fornecem a variação da solução de acordo com a posição angular em torno do crack tip.  $I_n$  é uma constante de integração que depende de  $n$ . Para material linear-elástico  $n=1$  e as equações [3.88], [3.89] indicam uma singularidade  $1/\sqrt{r}$ , o que é consistente com a teoria de fratura mecânica linear-elástica. As equações acima são chamadas de *singularidade de HRR (Hutchinson, Rice e Rosengren)*.

A integral-  $J$  caracteriza a amplitude da singularidade de HRR, assim como o fator de intensidade de tensões caracteriza a amplitude da singularidade linear-elástica. O valor de  $J$  descreve completamente as condições dentro da zona plastificada. Quando a extremidade da fissura apresenta uma pequena região plastificada existem duas zonas de domínio de singularidades: uma parte elástica, onde as tensões variam com  $1/\sqrt{r}$  e outra parte plástica onde as tensões variam com  $r^{-1/(n+1)}$ .

Seja portanto, um contorno  $\Gamma$  para  $J$ , estando esta região sob domínio de  $K$ , como ilustra a figura 3.27.

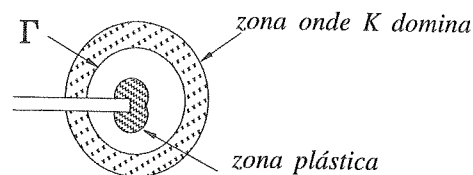


Figura 3.27 -Região de Domínio de K

Neste caso a integral-  $J$  pode ser calculada em termos  $K$ , bastando para isto o conhecimento do campo de tensões. Para o Modo I de carregamento aplica-se diretamente a expressão [3.85].

A propagação da fratura é controlada por intermédio de uma curva crescente, denominada de *curva R*, onde nesta curva o valor de  $J$  aumenta com o avanço da trinca. Nos metais, a *curva R* é normalmente associada ao crescimento e coalescência de micro-vazios.

A figura 3.28 ilustra uma *curva R* típica para materiais dúteis. No estágio inicial de deformação tem-se uma relação linear e o crescimento aparente da trinca devido ao arredondamento formado no *crack tip*. Com o aumento de  $J$  ocorre a falha local no *crack tip* seguido do avanço da trinca. Quando o valor crítico  $J_{Ic}$  é atingido é introduzido uma variação no comprimento da trinca. A norma americana ASTM E813 [1981] apresenta a

curva  $J$ - $R$  padrão e apresenta ainda métodos experimentais para determinar o valor crítico de  $J$ .

A curva  $R$  pode ser gerada através de carregamento e descarregamento de uma série de espécimes, onde o carregamento deve atingir diferentes níveis. Durante este processo ocorre propagação de fratura proveniente de efeitos de fadiga. Para cada espécime mede-se a variação de fratura  $\Delta a$ . A abertura de fissura é inicialmente estável, porém pode ocorrer posteriormente abertura instável. Segundo Paris, o ângulo formado pela curva  $R$ , determina o módulo de ruptura:

$$T_J = \frac{dJ_R}{da} \frac{E}{\sigma_e^2} \quad [3.90]$$

Este módulo é uma propriedade do material e é utilizado para estabelecer a ocorrência de abertura de fratura plástica instável quando:  $T > T_J$ .

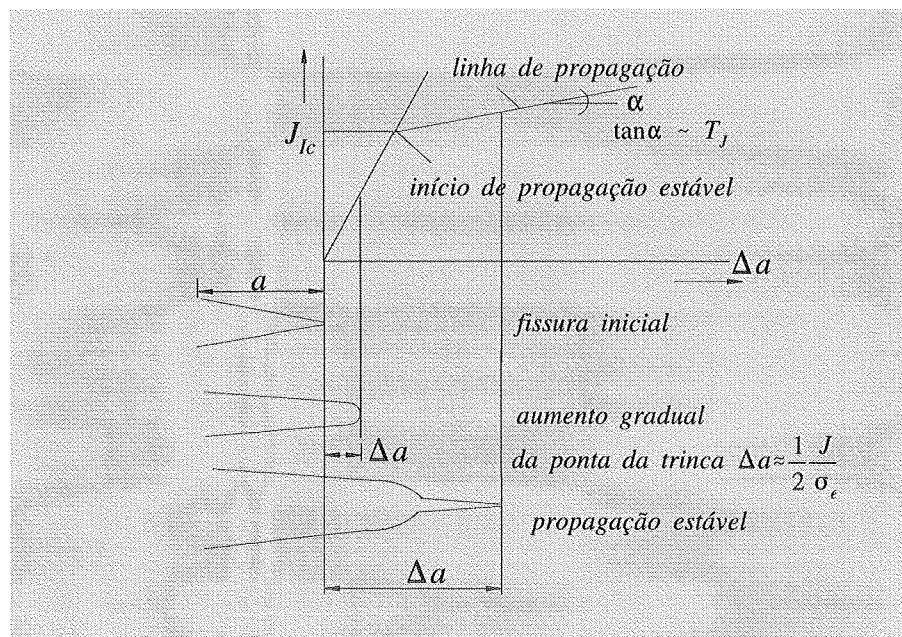


Figura 3.28 - Curva R para Material Dútil.

---

*“A primeira regra de um pensamento inteligente é salvar todas as partes.”*  
*Paul Ralf Erlich*

# 4

## INSPEÇÃO E ACIDENTES DEVIDO A FALHA POR FADIGA

### 4.1. INSPEÇÃO EM PONTES DE AÇO

O desenvolvimento de trincas nos elementos estruturais de uma ponte de aço pode ser resultante de várias causas, como por exemplo: *falhas durante o processo de fabricação, fadiga, corrosão, impacto de veículos, ocorrências naturais (terremotos, fogo)*. As falhas devido à *fadiga* e à *ruptura frágil* são problemas especiais para o caso das estruturas de aço. Os principais fatores reponsáveis por essas falhas são: carregamento alternado,



idade da ponte, ligações, tipos de detalhes, frequência de tráfego, qualidade de fabricação e tenacidade à fratura do material.

As estruturas soldadas apresentam uma inclinação favorável ao aparecimento de pequenas descontinuidades localizadas nas soldas e são bem sensíveis às variações de tensões. Os detalhes com baixa resistência à fadiga ou as regiões de tração elevada são propícios à ocorrência de falhas.

Ao contrário das estruturas rebitadas ou parafusadas, a estrutura soldada não permite um caminho alternativo para o carregamento atuante o que pode conduzir ao colapso total da estrutura. As fissuras que se formam na mesma direção das tensões atuantes geralmente não são demasiadamente sérias. Entretanto, a formação de uma fissura com direção perpendicular às tensões são críticas.

Existem várias normas estrangeiras que apresentam recomendações sobre segurança, manutenção, inspeção e reabilitação de pontes, como por exemplo:

- ▶ AASHTO *Manual for Maintenance Inspection of Bridges* (E.U.A);
- ▶ OECD *Bridge Inspection* (França);
- ▶ DS 805 *Bestehende Eisenbahnbrücken - Bewertung der Sicherheit und Konstrutive Hinweise* (Alemanha);

Entre os vários métodos utilizados para inspecionar pontes de aço o mais elementar e utilizado é a **inspeção visual**. A fadiga nessas estruturas é caracterizada pelo aparecimento e propagação de trincas. A identificação das trincas é uma tarefa delicada e exige do engenheiro responsável uma familiarização com as características gerais da estrutura. Os principais pontos a serem observados devem ser: locais de concentração de tensões, cordões de solda, detalhes e conectores. A técnica de identificação visual, embora prática, fornece dados subjetivos ou às vezes impossíveis de serem determinados.

É possível detectar pequenas fissuras em aços, devido à fadiga,

através de técnicas não destrutivas. Essas técnicas podem diminuir a subjetividade apresentada nos dados de inspeção da ponte, onde o objetivo principal é a localização de defeitos que possam eventualmente prejudicar seriamente a função da estrutura. As mais utilizadas são:

- Líquido penetrante;
- Raio X;
- Partículas magnéticas (*magnaflux*);
- Ultra-som

A identificação de fraturas através do emprego do **líquido penetrante** é uma técnica simples, de baixo custo e bastante utilizada nos trabalhos de inspeção. O método consiste em limpar a superfície a ser examinada e aplicar um *spray* com líquido vermelho. O excesso do líquido deve ser retirado e novamente aplica-se outro *spray* com líquido branco que deve realçar a localização e extensão da fissura.

A técnica de identificação de fissuras com **Raio X** consiste em posicionar-se um filme sobre a superfície do elemento a ser examinado e aplicar-se radiação contra esse filme. Depois de revelado o filme, tem-se uma imagem que permite a identificação dos possíveis defeitos na superfície.

O exame com **partícula magnética** consiste em magnetizar o elemento e espalhar uma fina camada de partículas de ferro sobre a superfície examinada. A concentração das partículas acusa a existência de fraturas.

A técnica do **Ultra-som** é baseada na emissão e propagação de ondas nos metais. Os defeitos são identificados pela mudança na propagação das ondas refletidas na superfície analisada. A vantagem de utilizar-se uma técnica de *emissão acústica* é a possibilidade de detectar a propagação da fratura no tempo real. Todos esses métodos de localização de defeitos devem ser operados por técnicos especializados.

A consideração da redistribuição dos esforços entre os elementos que compõem uma ponte de aço e que apresentam falha por fadiga têm

importância relevante nos custos de reparação. Essa redistribuição pode permitir que a ponte continue em serviço, sendo possível a constatação do problema e a adoção das devidas providências para a recuperação.

Os elementos secundários podem reduzir as tensões na viga principal devido a redistribuição do carregamento que eles próprios proporcionam, e ainda promover um meio de transferência de tensões da viga danificada para as vigas adjacentes. Desse modo, dependendo da gravidade do problema, a ponte pode continuar em serviço.

Em geral, obtém-se durante uma inspeção a natureza das falhas e as alternativas para possível correção. É importante para a obtenção de bons resultados, que durante uma inspeção se forneça também os motivos dos aparecimentos dos defeitos. Dessa forma, pode-se corrigir os problemas ocasionados por deficiências de projeto e por erros originados nas etapas de construção.

#### 4.1.1. Classificação dos Detalhes

Os elementos e detalhes que formam as pontes de aço são definidos segundo a AASHTO em termos de classes ou categorias de fadiga. Essas categorias são descritas a seguir:

##### ■ Categoria A

Os elementos ou ligações que se classificam na Categoria A são aqueles compostos de perfis laminados e superfícies livres de soldas. Essas condições garantem ao detalhe estrutural máxima resistência à fadiga. Nas vigas de perfis laminados, a fissura por fadiga tem origem na superfície da mesa tracionada. Nos testes de chapas isoladas, a fissura surge também na

superfície do espécime. O ponto de início da fissura é uma micro-descontinuidade na superfície do material.

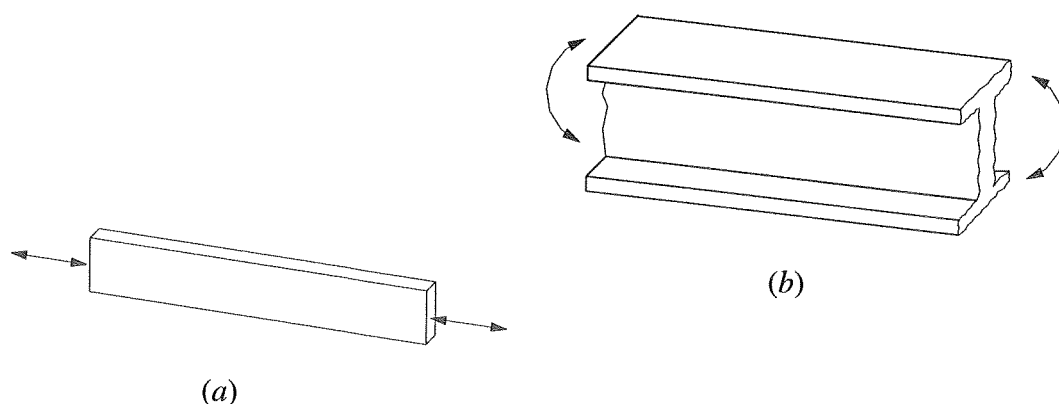


Figura 4.1 - Tipos de Elementos e Ligações que se Classificam como Categoria A

#### ■ Categoria B

A Categoria B se aplica a uma grande variedade de detalhes em vigas soldadas. Os detalhes de pontes típicos que se enquadram nessa categoria são apresentados nas figuras 4.2 a 4.5.

As soldas de entalhe (*groove weld*) em ligação de topo, localizadas na alma e nas mesas das vigas I, são ilustradas nas figuras 4.2 e 4.4. As soldas em transições de detalhes com inclinações não maiores que 25,4 e 63,5 mm são indicadas nas figuras 4.3 e 4.4. Aplica-se também a Categoria B quando houver remoção de soldas na superfície da chapa com determinação de sua profundidade através de testes não destrutivos (figuras 4.2, 4.3, 4.4).

O caso de soldas longitudinais contínuas e paralelas à direção da tensão aplicada também pertencem à Categoria B. Esse caso inclui as soldas de entalhe e de filete seguindo da alma até as mesas das vigas e são ilustradas nas figuras 4.2 a 4.4. Os fatores que influenciam a resistência à

fadiga são o tamanho e localização das imperfeições existentes na parte soldada.

A Categoria B também é aplicável quando a viga apresenta enrijecedores longitudinais e chapas de *Gusset* (Figura 4.5) .

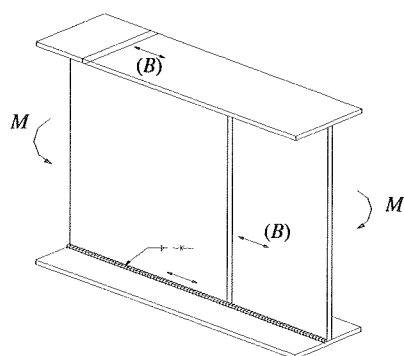
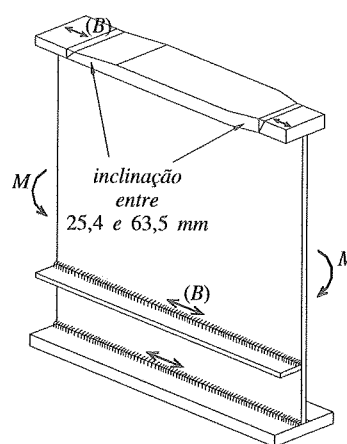


Figura 4.2 - Ligação de Topo e Solda de Entalhe e Remoção do Excesso - Categoria B.

Figura 4.3 - Ligação de Topo e Solda de Entalhe na Mesa na Região de Transição.



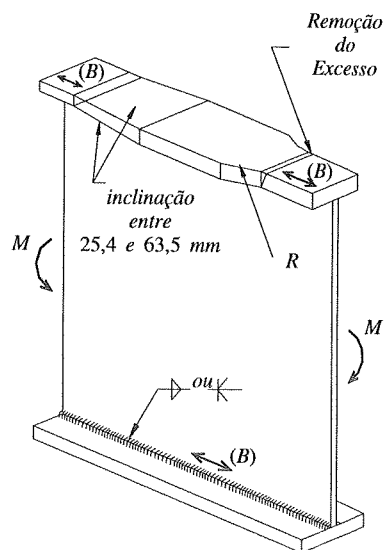


Figura 4.4 - Ligação de Topo e Solda de Entalhe na Mesa na Região de Transição -  $R > 0,6 m$

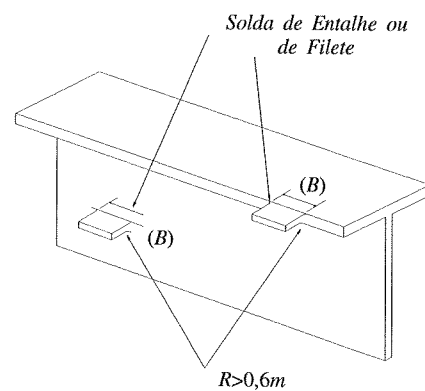


Figura 4.5 - Ligações na Mesa e na Alma com Curva de transição - Categoria B.

**■ Categoria C**

A Categoria C é aplicável quando há presença de enrijecedores e outros acessórios, como pode ser observado nas figuras 4.6 e 4.7. Se enquadram também na Categoria C os casos de soldas sem remoção de excesso na superfície livre da chapa (Figura 4.8).

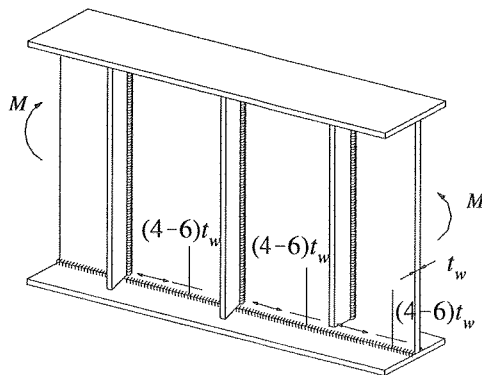


Figura 4.6 - Enrijecedores Transversais Soldados na Alma (e Flange) da Viga.

Figura 4.7 - Chapa de Gusset Ligada Transversalmente à Alma.

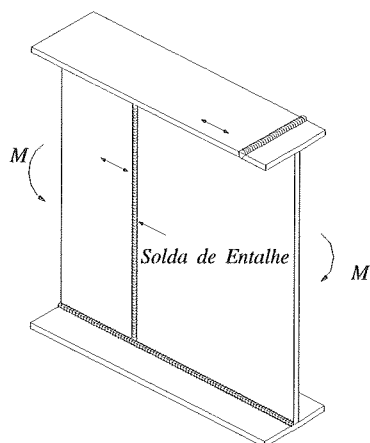
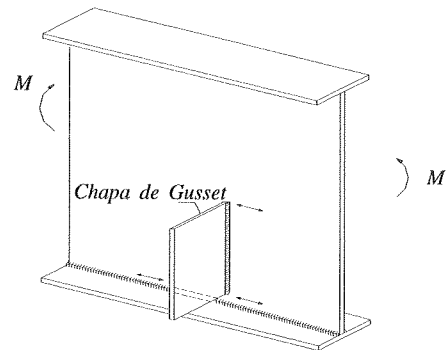


Figura 4.8 - Solda de Entalhe na Alma e na Mesa.



### ■ Categoria D

A Categoria D apresenta um nível intermediário com soldas de filete ou soldas de entalhe em detalhes que compõem a viga. O comprimento do detalhe  $L$  na direção das tensões aplicadas deve estar compreendido entre 50.8mm e 101.6mm (Figuras 4.9 e 4.10).

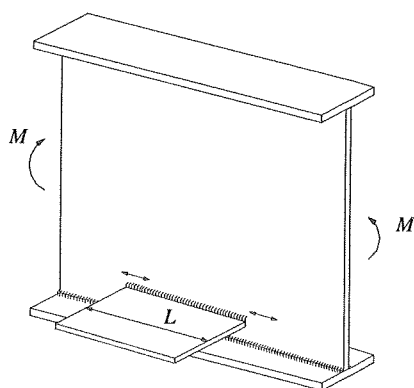


Figura 4.9 - Chapa de Gusset Ligada à Alma -  $L < 101,6$  mm.

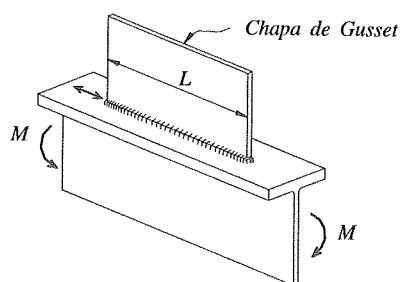


Figura 4.10 - Chapa de Gusset Ligada à Mesa -  $L \leq 101,6$  mm.

### ■ Categorias E e E'

A Categoria E abrange uma grande variedade de casos de soldas de filete ou de entalhe. Nessa categoria as tensões de fadiga são relativamente baixas nos detalhes soldados. Estão incluídos nesse caso:

- └ os enrijecedores longitudinais como ilustrados na Figura 4.11;
- └ detalhe com comprimento maior do que 101.6mm na direção da tensão aplicada (Figuras 4.12, 4.13);
- └ chapas de Gusset ligadas à mesa ou elementos estruturais (Figuras 4.14 e 4.15);

As Categorias E ou E' também se aplicam para o metal base nas extremidades das *cover plates*. Quando extremidade do *cover plate* for livre e sua distância à extremidade da mesa exceder 25mm, aplica-se a categoria E' (Figura 4.16). As interseções de vigas também são pontos de baixa resistência à



fadiga e por esse motivo se enquadram nessa classe (figuras 4.17, 4.18 e 4.19).

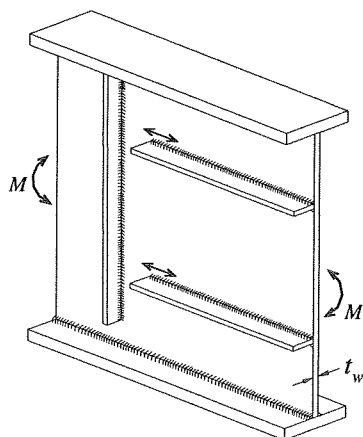


Figura 4.11 - Enrijecedores Longitudinais.

Figura 4.12 - Chapa de Gusset Ligada à Mesa.

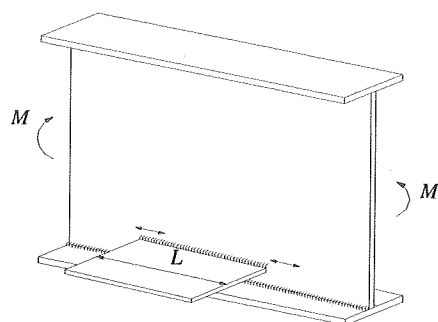
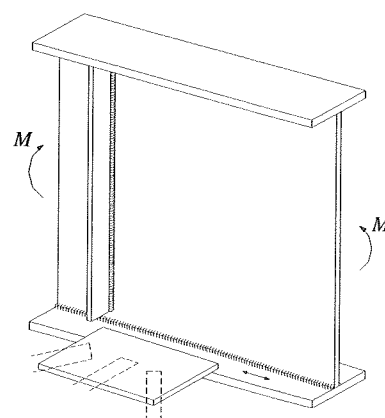
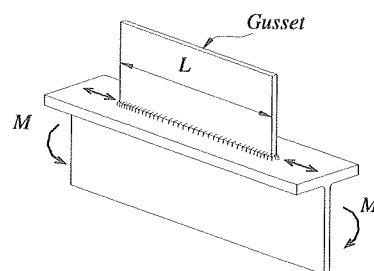


Figura 4.13 - Chapa de Gusset Ligada à Alma.

Figura 4.14 - Chapa de Gusset Soldada sobre a Mesa.



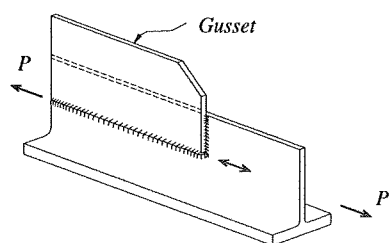


Figura 4.15 - Ligação para Contraventamento.

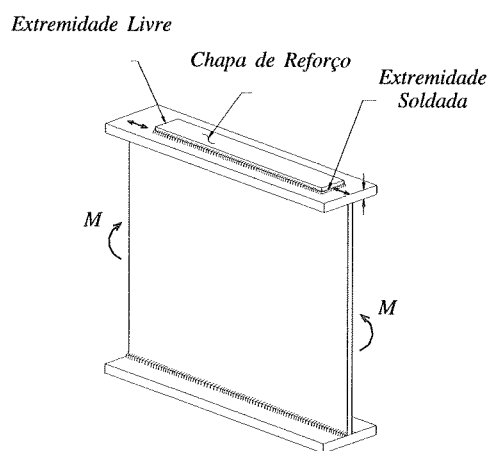


Figura 4.16 - Chapa de Reforço com Cantos Retos.

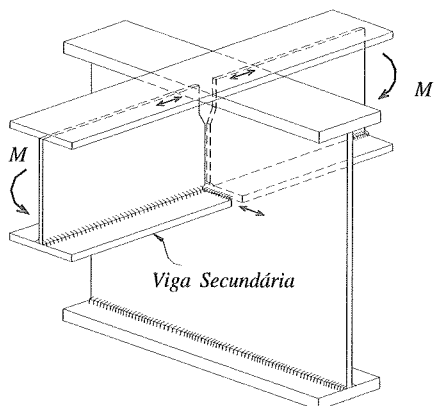
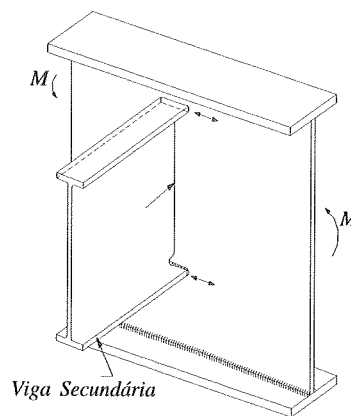


Figura 4.17- Intersecção de Vigas.



4.18 - Ligação de Viga Perpendicular à Alma da Longarina.

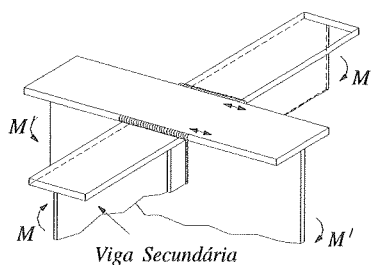


Figura 4.19 - Ligação de Viga na Mesa e Alma da Longarina.

Nas tabelas 4.1 e 4.2 são apresentados os valores das tensões admissíveis para ciclos e categorias, segundo os detalhes construtivos. Observa-se que a verificação de fadiga deve ser feita com tensões nominais, independente do método de verificação de resistência. Nessa tabela tem-se ainda uma divisão em **estruturas hiperestáticas e isostáticas**. As estruturas redundantes são aquelas que apresentam vários caminhos de transmissão de esforços, onde a falha de um simples elemento não conduz ao colapso total. Em contrapartida, estruturas não redundantes são tipos de estruturas onde a falha de um simples elemento pode causar colapso total da superestrutura.

Estruturas Hiperestáticas ( $\Delta F_{sr}$ ) MPa				
Categoria	100000 ciclos	500000 ciclos	2000000 ciclos	acima de 2000000 ciclos
A	435	256	166	166
B	338	200	124	111
C	245	145	90	69
D	193	110	69	48
E	152	90	55	31
E'	110	64	40	18

Tabela 4.1 - Tensões Admissíveis de Fadiga - Estruturas Hiperestáticas (AASHTO).

Estruturas Isostáticas ( $\Delta F_{sr}$ ) MPa				
Categoria	100000 ciclos	500000 ciclos	2000000 ciclos	acima de 2000000 ciclos
A	345	200	166	166
B	269	159	110	110
C	193	110	69	62
D	152	90	55	35
E	117	69	41	16
E'	83	48	28	9

Tabela 4.2 - Tensões Admissíveis de Fadiga - Estruturas Isostáticas (AASHTO).

## 4.2. DETALHES SUSCETÍVEIS AO APARECIMENTO DE FISSURAS

Entre os detalhes discutidos no item anterior, os que se enquadram nas categorias E e E' são os mais propícios ao aparecimento de fissuras por fadiga em pontes de aço. A ocorrência de *cracks* críticos é uma característica das áreas tracionadas, mas atualmente pode-se dizer, que há problemas para os casos de detalhes localizados em zonas comprimidas, onde exista a probabilidade de variação de tensão.

Os pontos de oxidação ou ferrugem, que se desenvolvem após a fissuração da pintura de proteção, são os sinais mais comuns e confiáveis da ocorrência de fissura por fadiga. A trinca geralmente propaga até  $\frac{1}{2}$  da espessura da chapa, antes que ocorra a quebra da pintura permitindo a oxidação. Os pequenos *cracks* são mais difíceis de serem detectados por inspeção visual e portanto, deve-se remover a pintura e limpar a área suspeita.

Existem outros três fatores importantes que contribuem para a formação de fissuras por fadiga como o tipo de detalhe, a variação de tensões e a frequência de tráfego.

A frequência de tráfego é medida em termos de uma média diária. Os dados são obtidos através de instrumentação da ponte e podem posteriormente através de monitoração estatística ser utilizados como dados de entrada em programas de manipulação.

A amplitude de tensões é um resultado das diferentes configurações e pesos de veículos, além de sua localização sobre a ponte e efeitos de impacto. Essa amplitude é melhor representada em termos de um *spectrum da variação de tensões*. As pontes solicitadas por um grande número de veículos pesados são bem mais suscetíveis à formação de trincas, se elas apresentarem detalhes com baixa resistência à fadiga.

### □ Fissuras nas Extremidades das Chapas de Reforço

As chapas de reforço em vigas de pontes submetidas a elevado número de ciclos de tensões e com espessura da mesa maior do que 25mm, podem apresentar falhas por fadiga e enquadram-se na Categoria E'. A figura 4.20 ilustra esse caso onde a fissura surge no perfil próximo a solda de filete e atinge a extremidade da chapa.

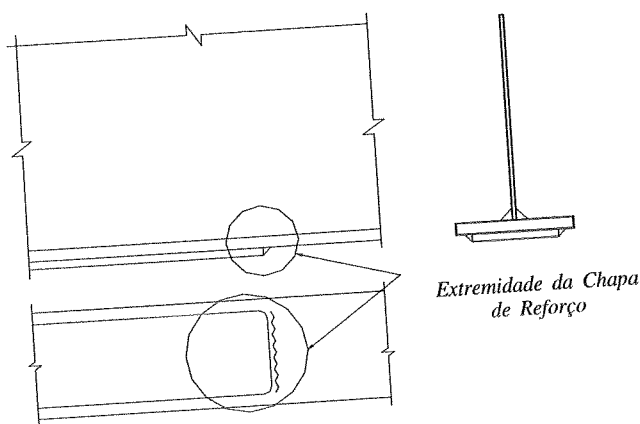


Figura 4.20 - Localização da Fratura por Fadiga Na Extremidade da Chapa de Reforço.

### □ Chapas de Gusset Soldadas em Enrijecedores Transversais

A figura 4.21 ilustra um exemplo de contraventamento lateral de uma ponte composta de duas vigas principais, onde as chapas de ligação são soldadas diretamente nos enrijecedores transversais. Estando a viga submetida a elevadas deflexões, ocorre a transmissão de esforços para a conexão transversal podendo resultar na formação de uma fissura por fadiga na solda de entalhe, que faz a ligação entre o enrijecedor e a chapa de Gusset.

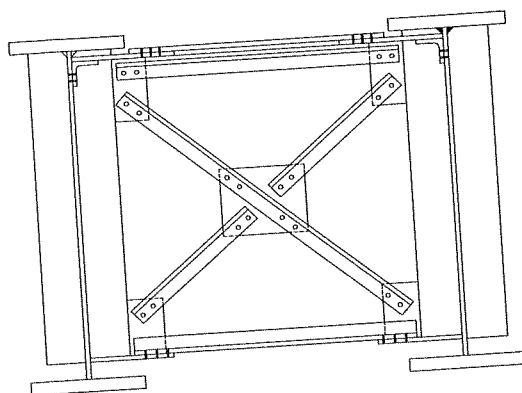


Figura 4.21 - Fissura no Enrijecedor Transversal

□ Transição entre Chapa de Reforço e a Mesa com Solda de Entalhe

Nesse caso a fissura inicia na solda, pode penetrar no metal base e se localizada junto à extremidade do reforço. Essa fissura só é detectada quando a pintura for removida da mesa e a superfície totalmente polida. A figura 4.22 ilustra bem esse caso.

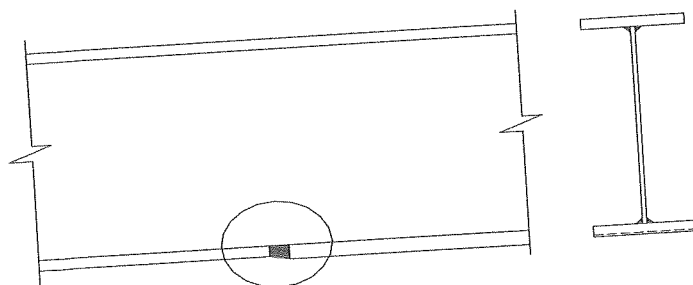


Figura 4.22 - Transição de Chapas

### □ conexões em Viga-Coluna

Na intersecção de vigas e colunas (figura 4.23) podem ocorrer dois tipos de problemas que induzem a formação de fissuras. Quando a mesa da viga ou da coluna são interrompidas na ligação, deve-se soldar a mesa de uma de forma que se posicione perpendicular a outra. A mesa superior da viga apresenta tensões de tração na intersecção. Nesse caso, tem-se uma alta concentração de tensões na extremidade da solda de entalhe e deve-se enquadrar como Categoria E. O detalhe "a" apresenta maiores condições de desenvolvimento de trinca nesse tipo de conexão, enquanto que o detalhe "b" geralmente não é sério devido as forças de compressão nessa região.

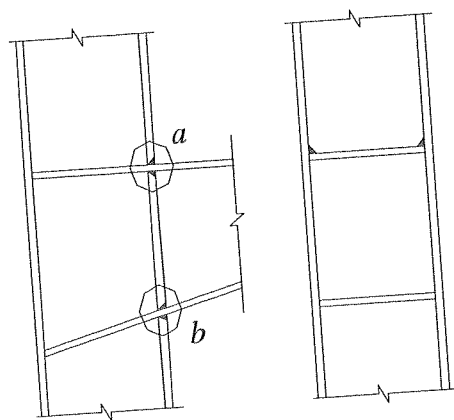


Figura 4.23 - Ligação Viga-Coluna

### □ Intersecção de Soldas em Enrijecedores Laterais

Geralmente ocorre fissuras nesse caso devido a má execução das soldas que fazem união entre as chapas, como por exemplo: falta de fusão do material ou comprimento inadequado da solda de filete. Pode acontecer, que a propagação da fratura dentro da alma da viga resulte na ocorrência de

ruptura frágil da viga (figura 4.24).

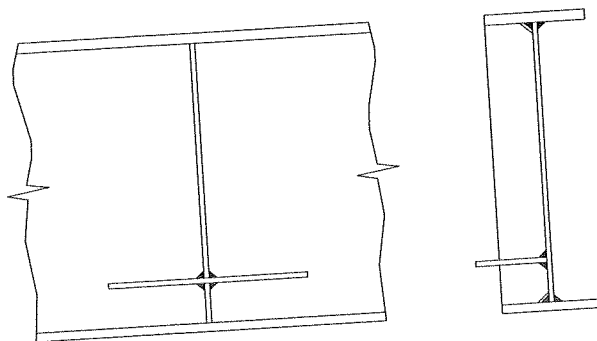


Figura 4.24 - Detalhe da Intersecção das Soldas

#### □ Mesas ou Chapas que Ultrapassam as Almas das Vigas

Quando uma mesa de uma viga intercepta a alma de uma outra viga deve-se fechar os vazios com solda de entalhe. Esse tipo de detalhe pode apresentar condições severas de fadiga e sua resistência pode ficar reduzida de 50% dos casos que se enquadram na categoria E'. O grau de variação da resistência depende da espessura da alma e da configuração da solda que conecta a alma à mesa. Os vazios deixados na solda neste caso induzem numa grande redução de resistência à fadiga (figura 4.25).

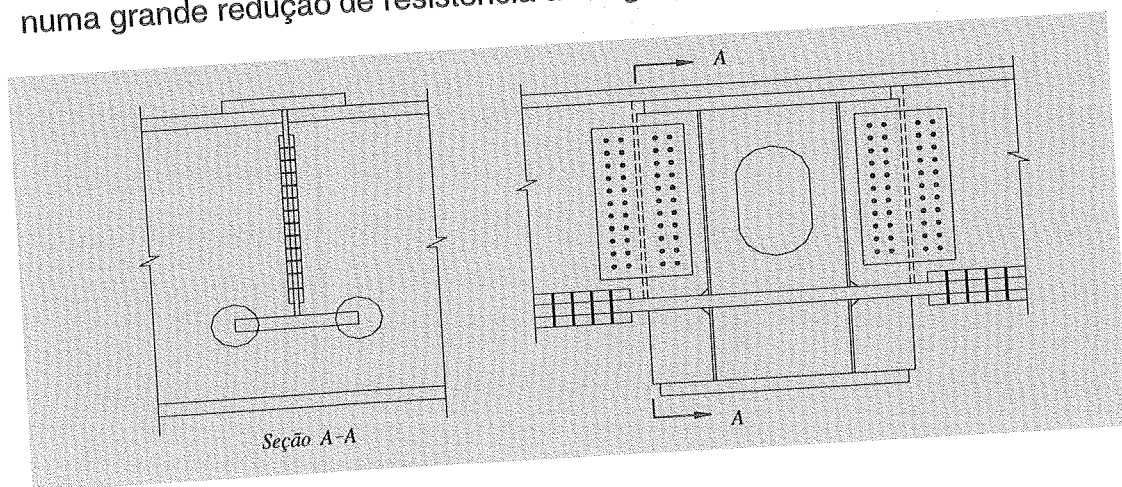


Figura 4.25 - Mesa da Viga Atravessando a Alma de uma Segunda Viga.



### 4.3. CASOS DE ACIDENTES EM PONTES DE AÇO

Em dezembro de 1967 ocorreu nos Estados Unidos o colapso da *Silver Bridge*, uma ponte situada entre o oeste da Virgínia e o Estado de Ohio. Nesse acidente faleceram 46 pessoas e 9 ficaram seriamente feridas, resultando no maior desastre de pontes americanas no século XX. Foi através desse colapso que se percebeu a inexistência de um inventário de pontes nacional e que as normas de inspeção variavam de Estado para Estado.

Esse fato conduziu o governo americano a dar origem ao sistema de gerenciamento de pontes e a criar na década de 70, por ato do congresso, o Inventário de Pontes dos Estados Unidos (NBI - *National Bridge Inventory*). Os resultados desse inventário mostraram a necessidade de uma monitoração frequente das condições em que se encontravam as pontes.

Em 1988, cerca de 40% das 600.000 pontes existentes nos Estados Unidos foram classificadas pela *Federal Highway Administration* (FHWA) como deficientes e com necessidade de reabilitação. Cerca da metade dessas pontes foram construídas antes de 1940 e eram consideradas deficientes porque sua capacidade de carregamento não estava adequada ao novo tipo de tráfego.

Na Alemanha, o Instituto Federal de Pesquisa e teste de Materiais (*Bundesanstalt für Materialforschung und Prüfung* -BAM) fez uma investigação nas pontes de aço (rebitadas) construídas no período de 1875 a 1955. Através de medições realizadas em campo conseguiu-se detectar a reserva de carregamento dessas pontes antigas e ainda resolver os problemas existentes. Dois importantes casos registrados pelo BAM são: a ponte treliçada sobre o canal de Dortmund-Ems e a ponte ferroviária em vigas em Berlim.

O Brasil tem cerca de 5.000 pontes pertencentes a rede rodoviária federal sob jurisdição do DNER (Departamento Nacional de Obras e Rodagem). Como um país que move a maior parte de sua produção agrícola através de transporte rodoviário, persiste o problema de manter suas pontes a um nível aceitável de serviço e administrar os recursos envolvidos.

A *Ponte dos Remédios*, construída no Estado de São Paulo entre os anos 1968 e 1970, foi nesse período um marco na engenharia nacional. Essa ponte de 360 metros de comprimento foi edificada com uma tecnologia inovadora para a época, o concreto protendido. Em Junho de 1997, surgiu uma trinca de 150 mm em toda a altura da seção da laje caracterizando a formação de uma rótula plástica no apoio central. Os cabos dispostos na face superior e inferior da laje foram rompidos por oxidação. O principal motivo apontado pelos engenheiros que inspecionaram o problema foi a falta de manutenção.

#### 4.3.1. Ponte sobre o Canal de Dortmund - Ems (Alemanha) (*Brücke über den Dortmund-Ems -Kanal - Deutschland*)

A ponte sobre o Canal de Dortmund-Ems foi construída nos anos 50 com um sistema estrutural composto de treliças de 59 metros de comprimento (figura 4.26). Durante as inspeções realizadas pelo BAM constatou-se a presença de uma fissura crítica numa viga transversal dessa ponte. A maior causa da formação desta trinca foi a mudança no tráfego de veículos no decorrer dos anos, ficando portanto a ponte sub-dimensionada.

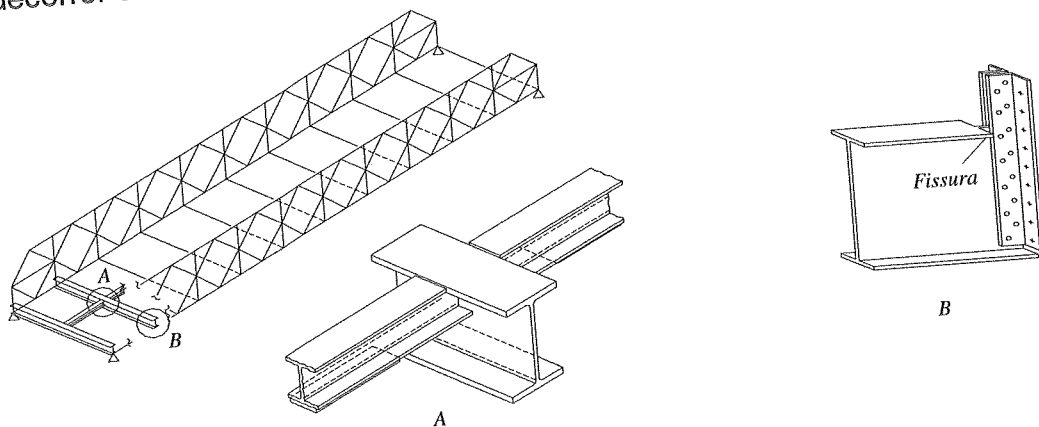


Figura 4.26 - Sistema Estrutural da Ponte Dortmund-Ems e Localização da Fissura.

### 4.3.2. Ponte Sobre o Rio Aguasabon - Ontário

A ponte sobre o rio Aguasabon é uma estrutura constituída por vigas contínuas, em três vãos, construída em 1948 em sistema misto e projetada pelo Departamento de Estradas de Ontário para um trem tipo H20 (o trem tipo H corresponde a um caminhão com dois eixos - AASHTO).

A estrutura tem 61 metros de comprimento e consiste de quatro vigas principais (longarinas) com mísulas nos apoios. Essas mísulas foram fabricadas através de corte da mesa e parte da alma sendo depois inserido um trecho parabólico com uso de soldas de filete (Figura 4.27).

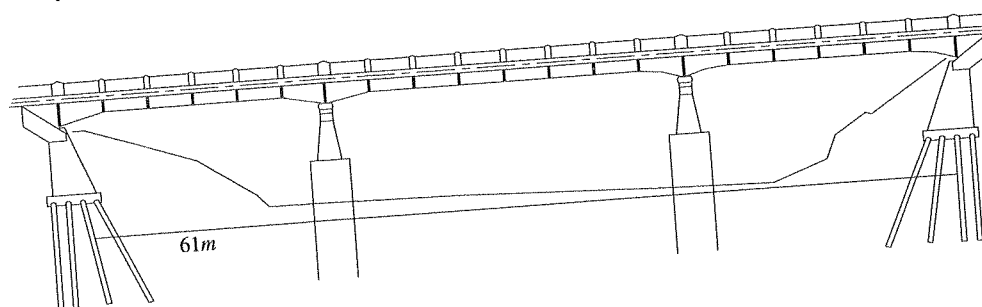
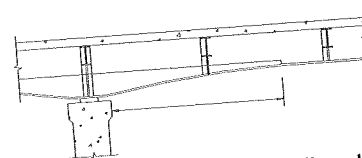


Figura 4.27 - Ponte sobre o Rio Aguasabon.



Detalhe da Mísula.

Em 1973, verificou-se que essa ponte apresentava fissuras severas nas soldas localizadas em três diferentes pontos de uma das vigas principais. As fissuras se encontravam na alma da viga, nas soldas verticais dos trechos parabólicos, e uma delas tinha 1,12 metros de comprimento ao longo de uma linha em diagonal.

Depois de recuperados todos os danos, foi feita uma prova de carga utilizando-se dois veículos, cada um com carregamento máximo de 69.400 Kg e peso bruto GW (*Gross Vehicle Weight*) de 89.350 Kg distribuídos em cinco eixos. Essas cargas foram aplicadas em quatro incrementos enquanto as

tensões foram monitoradas nas áreas críticas. Para determinar o comportamento da fissura por fadiga foram feitos registros de deformações dinâmicas enquanto um veículo de teste atravessava a ponte com a velocidade de 48 a 80 Km/h.

A vida útil da estrutura foi estimada aplicando-se a Lei de Paris e os conceitos da mecânica da fratura linear-elástica. Assim, a equação diferencial que determina a velocidade de abertura da trinca foi dada como:

$$da/dN = 2.10^{-10} \Delta K^3$$

[4.1]

O fator de intensidade de tensões foi estimado para dois estágios de abertura de fissuras (Figura 4.28). O primeiro corresponde a uma descontinuidade interna da solda no entalhe vertical. Admitiu-se essa descontinuidade para produzir uma condição de fissura inicial e foi suposto que sua ação seria idêntica a uma fissura elíptica, perpendicular ao campo de tensões de flexão.

É possível calcular  $K$  para várias configurações geométricas aplicando-se um fator de correção apropriado, de modo que:  $K = \sigma \sqrt{\pi a} * F$ . O fator  $F$  é uma função que depende da geometria e do modo de carregamento e pode ser encontrado em TADA [1985]. Feddersen [1967] mostrou que as expressões polinomiais obtidas para  $F$  podem ser descritas com igual precisão, porém de utilização mais conveniente, por uma expressão em forma de secante. Para o primeiro estágio o valor de  $K$  foi calculado por:

$$K = \frac{\sigma}{\phi_o} \sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{t}}$$

[4.2]

onde:

- $\sigma$  = tensão de flexão;
- $a$  = semi-eixo do menor diâmetro da fissura elíptica;
- $t$  = espessura da solda (20mm);
- $\phi_o$  = integral elíptica função dos eixos da fissura.

No segundo estágio foi suposta a propagação e que a fissura atingia a mesa inferior. O valor de  $K$  foi calculado pela expressão:

$$K = \frac{2\sigma}{\pi} \sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2r}} \quad [4.3]$$

sendo  $r$  a distância da origem à parte inferior da mesa.

Estimou-se que para a descontinuidade introduzida penetrar até a mesa inferior seriam necessários 3,5 anos. Para o segundo estágio seriam necessários 20 anos adicionais antes da penetração na mesa.

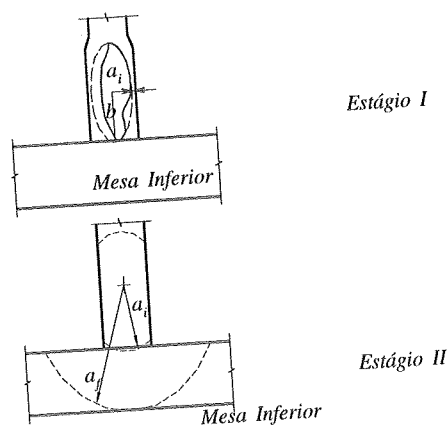


Figura 4.28 - Estágios de Abertura Assumidos.

#### 4.3.3. PONTE DEKORRA (*Dekorrra Bridge*)

A ponte Dekorrra está localizada na cidade Madison, E.U.A. Essa ponte foi construída em 1965 e consiste de um sistema de duas vigas contínuas, como ilustra a figura 4.29. Dez anos após sua construção descobriu-se fraturas verticais no vão intermediário e extremo da ponte. No vão intermediário a trinca ocorreu inicialmente na solda longitudinal sob uma chapa

de gusset e percorrendo até a mesa inferior. No vão extremo a trinca teve início na solda de uma ligação de topo na alma da viga.

Para prevenção de aparecimento de novas trincas na mesa inferior do vão central anexou-se tirantes às vigas principais com o objetivo de reduzir as vibrações verticais no contraventamento inferior. Esses tirantes romperam em pouco tempo e a fratura na viga continuou propagando até atingir um nível de deterioração acentuado.

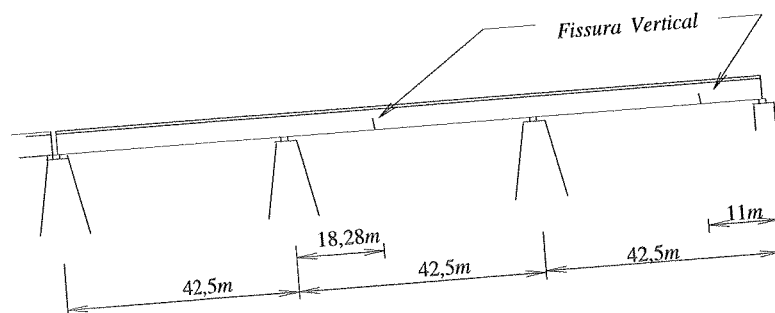


Figura 4.29 - Localização da Fratura na Dekorra Bridge.

#### 4.3.4. KINGS BRIDGE - AUSTRÁLIA

Em julho de 1962, enquanto um caminhão de 445 KN (peso total) atravessava a ponte *Kings Bridge* de 700 metros de comprimento em Melbourne, Austrália, ocorreu a fratura simultânea das quatro vigas principais provocando um desnível de 460 mm numa parte do vão. Através de testes verificou-se que as quatro vigas danificadas apresentaram fraturas iniciais na fase de fabricação. A causa maior foi o baixo padrão dos procedimentos de soldagem nas chapas que formam a viga (figura 4.30). Em três vigas, a fratura apresentava 100 mm antes da montagem e nunca foram descobertas nas inspeções anteriores. Verificou-se ainda, que uma das vigas intermediárias fraturou totalmente antes do colapso total. Determinou-se que o fator de intensidade de tensões seria aproximado pela superposição de uma parte

atribuída a flexão da viga e outra parte devido as tensões residuais, e portanto:

$$K_{Total} = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \sqrt{\sec \pi a / W} + \frac{\sigma_1 \sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sin^{-1} \frac{c}{a} - \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right)^{1/2} + 1 \right\} \quad [4.4]$$

onde:  $\sqrt{\sec \pi a / W}$  é um fator de correção;  $\sigma$  é a tensão de flexão na mesa inferior;  $\sigma_1$  é a tensão residual;  $2a$  é o comprimento da fissura;  $W$  é a largura da mesa;  $2c$  é o comprimento que localiza a tensão residual.

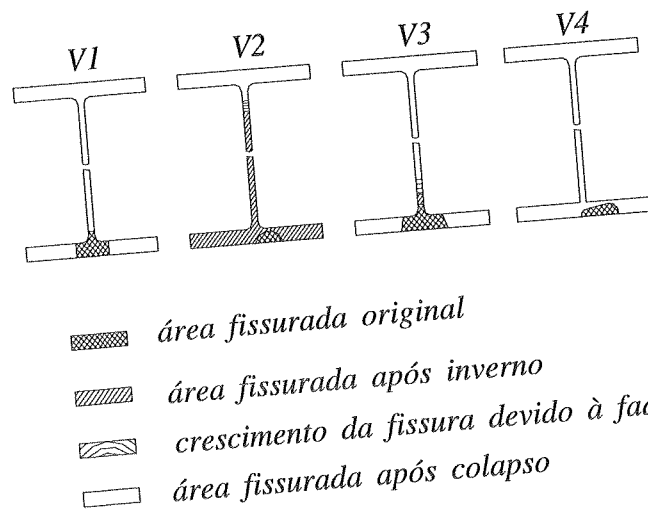


Figura 4.30 - Representação Esquemática da Propagação da Trinca nas Vigas Principais da Kings Bridge.

## 4.4. MODELOS DE FADIGA PARA ESTRUTURAS DE AÇO

### 4.4.1. Abertura de Fissura por Fadiga

A propagação de uma fissura inicia com a nucleação de microfissuras existentes no material. Num primeiro estágio (I), essas microfissuras percorrem um plano de escorregamento na direção da máxima tensão de cisalhamento, ou seja,  $45^\circ$  com a direção da tensão aplicada. Com o aumento do comprimento, a fissura tende a seguir um caminho perpendicular a tensão aplicada e inicia o estágio de macrofissuras (II) (figura 4.31).

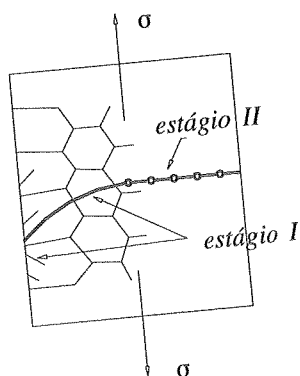


Figura 4.31 - Estágios de Propagação por fadiga.

De acordo com os conceitos da mecânica da fratura linear-elástica, a variação do fator de intensidade de tensões ( $\Delta K$ ) deve ser o parâmetro de controle do processo de abertura da fissura. Como visto anteriormente, deve-se considerar uma pequena região plastificada em torno do *crack tip*.

Se o material não apresentar fissuras iniciais o número de ciclos de carregamento necessários para propagar uma fissura será maior no estágio I do que no estágio II. Caso o material apresente fissura inicial, o estágio I passa a ser desprezível e a propagação por fadiga ocorrerá praticamente no estágio II.

Atualmente os projetos que consideram o efeito de fadiga são



baseados na hipótese de que no material já existem fissuras de certos tamanhos e em locais críticos da estrutura. Pensando assim, é essencial estabelecer os limites a partir do qual começam as macrofissuras.

Os dados obtidos em testes de propagação de fissura por fadiga são usualmente plotados como uma velocidade de abertura de fissura ( $da/dN$ ) versus  $\Delta K$ . A Lei de Paris é válida para uma região intermediária desse gráfico correspondente ao crescimento da trinca. Vários modelos teóricos foram desenvolvidos na tentativa de relacionar a abertura de fissuras por fadiga com as propriedades do material. A seguir serão apresentados alguns desses modelos.

#### a. Modelos com Abrandamento e Plastificação do *Crack Tip* (*Plastic Blunting Models*)

Nesse modelo assume-se a hipótese de que se a fratura propagava com deformações plásticas irreversíveis na extremidade da fissura deve-se esperar que a velocidade de propagação seja uma fração da abertura existente na ponta da trinca, ou melhor:

$$da/dN = \eta \cdot CTOD$$

[4.5]

onde  $\eta$  é a fração da abertura formada na ponta da trinca ( $CTOD$  - *crack tip opening displacement*) que contribui para o avanço da fissura.

DONAHUE et al. [1972] introduziram o limite de início de propagação (*fatigue crack growth threshold*) na expressão [4.1]. Nesse modelo, a velocidade de propagação da trinca é diretamente proporcional à diferença entre o  $CTOD$  para um determinado fator de intensidade de tensões  $K$  e o  $CTOD_{th}$  que determina o início de propagação. Escrevendo:  $CTOD = (4K^2) / (\sigma_y E)$ , obtem-se a seguinte relação:

$$da/dN = [4A (K^2 - K_{th}^2)] / (\pi \sigma_y E)$$

[4.6]

Na equação [4.6]  $A$  é uma constante numérica. Deve-se lembrar que a geometria do *crack tip* é mais complexa do que esta idealização.

FROST & DIXON [1967] estabeleceram um critério alternativo onde o *CTOD* é substituído pelo raio de curvatura obtido no modelo de Griffith. Desse modo foi obtida a seguinte expressão:

$$da/dN = (8/\pi) (\Delta K / E)^2$$

[4.7]

De acordo com esse modelo a propagação da fratura é independente de qualquer outro parâmetro do material a não ser o módulo de elasticidade de Young ( $E$ ). Também não é claro nesse modelo a relação entre a fissura e o raio de curvatura no *crack tip*.

### c. Modelos com Dano Acumulativo (Cumulative Damage Models)

O modelo de dano acumulativo associado à fadiga foi introduzido por MINER [1945]. Esse modelo ficou internacionalmente conhecido como “regra de Miner” e é adotado nas especificações da AASHTO. O modelo consiste em considerar-se uma relação linear entre o dano acumulado e o número de ciclos aplicado para um determinado nível de carregamento. Supondo que ocorra um número finito ( $nf$ ) de variações do nível de tensão, então o dano acumulado  $D$  é dado pela expressão:

$$D = \sum_{i=1}^{nf} \left( \frac{n_i}{N_i} \right) = 1$$

[4.8]

-O critério de ruptura do material, por definição, é dado pela expressão [4.4], onde:

$N_i$  = número de ciclos de tensão que resulta na ruptura num teste de amplitude constante;  
 $n_i$  = número de ciclos aplicados.

Se o material atingir a ruptura com um número de ciclos igual  $N_i$  então  $D = 1$ .

FISHER<sup>1</sup> apud SWENSON & FRANK [1984] demonstraram para os aços que  $N_i$  se relaciona com a tensão de ruptura  $S_{RI}$  pela seguinte equação:

$$N_i = A \cdot S_{RI}^{-3}$$

[4.9]

onde  $A$  é o ponto que intercepta o eixo dos números de ciclos  $N$  numa curva logarítmica  $S_R$  versus  $N$  para um detalhe específico.

#### d. Modelos com Faixas de Deslizamento (*Slip Bands Models*)

NEUMANN [1969] propôs um modelo cristalográfico para a formação de fissuras segundo planos de deslizamentos paralelos e alternados. Como pode ser observado na figura 4.32, a fissura propaga em passos "grosseiros" de deslizamento. O plano de deslizamento 1 é ativado em tração (Figura 4.32a) e o excesso de deslocamentos do movimento permanece nesse plano. Esse passo produzido atua elevando a tensão a qual ajuda a ativar um plano de deslizamento 2 sob o mesmo carregamento de tração. Na próxima compressão o excesso de deslocamento em 1 e 2 retornam formando a

<sup>1</sup> FISHER, J.W.; YEN, B.T.; FRANK, K.H [1980]. *Minimizing Fatigue and Fracture in Steel Bridges*. Vozes apud SWENSON, K.D.; FRANK, K.H. [1984]. Research Report 306-2F. Center for Transportation Research. Texas, p. 8.

configuração indicada na figura 4.32c. Assume-se que a superfície A continua trincada (não se recompõe) e apenas forma um contato macroscópico. Essa configuração já representa um núcleo de fissuração em A. A repetição desse processo promove na mesma ordem novos planos de deslizamento o que representa a propagação da trinca. A grande vantagem desse modelo é sua natureza geral, o que possibilita a introdução de outros detalhes (como por exemplo, o tipo de deslocamento) na sua concepção.

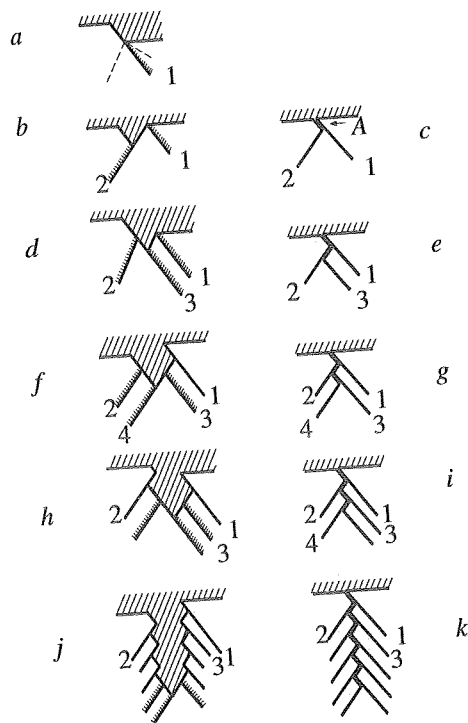


Figura 4.32 - Modelo para Formação e Propagação da Trinca por Escorregamento. Esquerda: Estágio Tractionado. Direita: Descarregamento. HERTZBERG [1976].

### e. Modelos Baseados em Aproximações de Energia

Os modelos de aproximações de energia assumem que a fissura propaga quando a energia total absorvida é igual a um determinado valor crítico por unidade de área de fissura criada. RICE [1967] e depois WEERTMAN [1979] se dedicaram ao estudo desses modelos e chegaram a seguinte relação:

$$da/dN = (D\Delta K^4) / (G\sigma_{cy}^2 U)$$

[4.10]

onde  $U$  é o trabalho total plástico por unidade de superfície de fissura.  $D$  é uma constante universal e demonstrada experimentalmente, independente do material e igual a 2. Demonstrou-se experimentalmente que  $U$  não depende de  $\Delta K$  quando o valor de  $m$  na Lei de Paris é igual a 4. Entretanto, se  $m$  for menor do que 4,  $U$  é uma função de  $\Delta K$  de acordo com a seguinte relação:

$$U = A \cdot \Delta K^{(4-m)}$$

[4.11]

$A$  é uma constante numérica. Existem várias pesquisas que sugerem a independência do produto  $da/dN$  por  $\Delta K$  na microestrutura e propriedades mecânicas nos aços (RITCHARDS [1972]). A explicação para essa independência consiste no fato de que existe uma relação inversa entre a tensão de escoamento  $\sigma_y$  e  $U$ , ou melhor, materiais com elevada tensão de escoamento geralmente apresentam uma pequena zona plástica e portanto pequenos valores para  $U$ . Entretanto, esse modelo só pode ser utilizado para explicar a região intermediária de propagação da fratura, pois vários estudos têm demonstrado que para o caso de aços com mesma tensão nominal em diferentes microestruturas o valor de  $U$  é diferente.

#### 4.4.2. Modelos que Consideram o Fechamento da Trinca (Crack Closure Models)

Esse modelo supõe que durante a propagação as superfícies da fissura podem permanecer fechadas durante um ciclo de carregamento mesmo quando submetida a tensões de tração. ELBER [1971] foi o primeiro a notificar esse fenômeno e relacionar uma variação do fator de intensidade de tensões efetivo para a propagação de fissura por fadiga. A fissura não propaga enquanto estiver fechada e portanto o fator de intensidade de tensões  $K$  fica reduzido pela seguinte expressão:

$$\Delta K_{eff} = K_{m\acute{a}x} - K_{ab} \quad [4.12]$$

onde  $K_{ab}$  é o fator de intensidade de tensões que considera a fissura totalmente aberta e  $K_{m\acute{a}x}$  é o valor máximo para  $K$  durante o ciclo de carregamento.

IBSØ & AGERSKOV [1996] desenvolveram um modelo de propagação por fadiga tomando como base o modelo de escoamento desenvolvido por Dugdale-Barenblatt. Esse modelo foi elaborado para análise de fissuras em chapas soldadas sob carregamento com amplitude constante, sendo também incluída a influência das tensões residuais da solda na abertura e fechamento da trinca. Assume-se que a fissura propaga-se numa forma semi-elíptica, como ilustra a figura 4.33. O fator de intensidade de tensões  $K$  devido às solicitações é dado por:

$$K = F_S \cdot F_E \cdot F_T \cdot F_G \cdot S \cdot \sqrt{\pi a} \quad [4.13]$$

onde:  $F_S$  é o fator de correção de superfície livre;  $F_E$  é o fator de correção para a forma elíptica da trinca,  $F_T$  é o fator de correção da espessura (ou largura) da chapa;  $F_G$  é o fator de correção geométrico;  $S$  é a tensão aplicada e  $a$  o

comprimento da trinca.

O fator de intensidade de tensões devido as tensões residuais pode ser calculado como:

$$K_r = F_S \cdot F_E \cdot F_T \cdot 2 \sqrt{\frac{a}{\pi} \int_0^a \frac{\sigma_r(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx} \quad [4.14]$$

onde  $\sigma_r(x)$  é a distribuição de tensões residuais na solda no momento de abertura da trinca. Para considerar o efeito de abertura e fechamento da trinca deve-se transformar a tensão residual numa tensão equivalente aplicada  $S_{eq}$  que resulte no mesmo fator de intensidade de tensões para a tensão residual. Das equações 4.9 e 4.10 obtém-se a tensão residual equivalente:

$$S_{eq} = \frac{2}{F_G \pi} \int_0^a \frac{\sigma_r(x) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad [4.15]$$

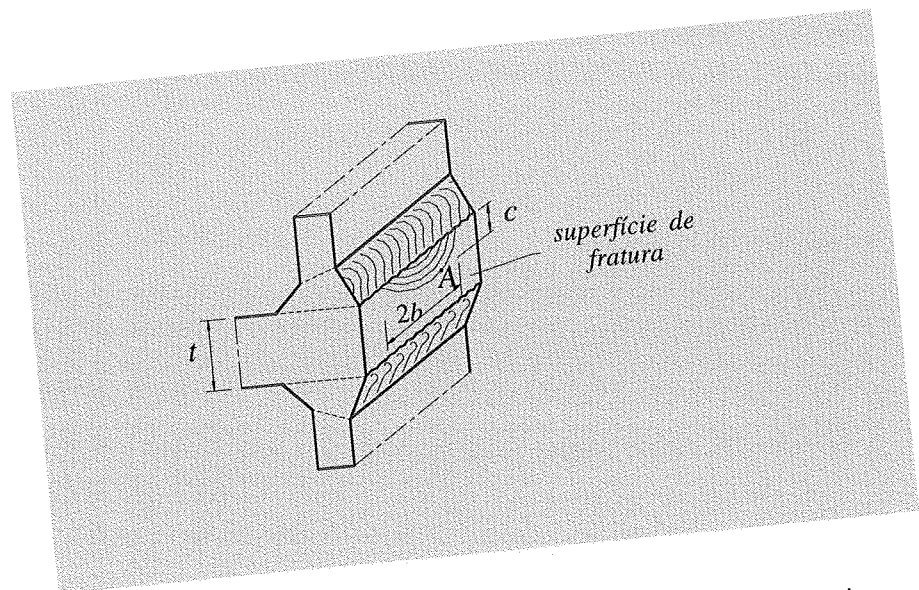


Figura 4.33 - Representação da Superfície de Fissuração na Região Soldada.

---

*“Os problemas importantes que enfrentamos não podem ser resolvidos no mesmo nível de pensamento em que estávamos quando foram criados”*  
A. Einstein.

# 5

## ELEMENTO DE VIGA COM FRATURA

### 5.1. INTRODUÇÃO

A fratura por fadiga é resultante do desenvolvimento progressivo de uma trinca sob a influência de aplicações repetidas de tensões, sendo estas inferiores à tensão capaz de provocar fratura sob carga monotônica e crescente ou ainda com valor nominal inferior ao limite de escoamento do material.

Quando uma fissura é descoberta em uma inspeção, torna-se importante a capacidade de previsão de propagação da mesma afim de determinar um tempo conveniente de reparo. A princípio, é necessário a



previsão desta propagação. Nesta ordem, devem ser aplicados os conceitos de Fratura Mecânica Linear Elástica (FMLE). Este método é empregado com frequência para a descrição do início e desenvolvimento de fissuras por fadiga em estruturas metálicas. O comportamento da fissura durante um determinado ciclo de cargas deve ser conhecido para uma possível previsão de ocorrência de fratura frágil ou dúctil. No caso de fratura frágil em juntas pode-se ter como resultado uma segurança estrutural insuficiente e um possível colapso global.

Embora os programas baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF) sejam capazes de resolver os problemas elasto-plásticos de forma geral, verifica-se a necessidade de grande memória, tempo computacional extensivo e por fim a preparação dos dados de entrada associados à geometria e às características do material. Um caminho bastante eficiente para análise e solução destes problemas nas estruturas de barras, como as vigas de pontes, é a utilização de um elemento finito de viga que considere a fratura existente.

Neste elemento utiliza-se uma mola para representar a parte danificada onde observa-se uma redução considerável no número de incógnitas no sistema de equações reduzindo problemas tridimensionais complexos para um tratamento bidimensional. O modelo proposto se refere ao caso de fratura com abertura simples onde é feito inicialmente o tratamento elástico e em seguida o elasto-plástico.

## 5.2. MODELO DE RIGIDEZ ELÁSTICA

Este modelo considera o caso mais comum de uma viga biapoiada, com a presença de uma fratura simples ocasionada por tensões cíclicas e conduzindo a deformações adicionais no elemento, denominadas por  $\delta$  e  $\theta$  para as deformações axial e de rotação, respectivamente. Os esforços conjugados  $N$  e  $M$  assim como as deformações associadas são ilustrados na

figura 5.1. Em situações mais complexas devido a geometria ou ainda casos de abertura não uniforme de fissura prefere-se utilizar o parâmetro  $G$  "energy release rate" do que o Fator de Intensidade de Tensões  $K$ , pois é menor a dificuldade em obtê-lo.

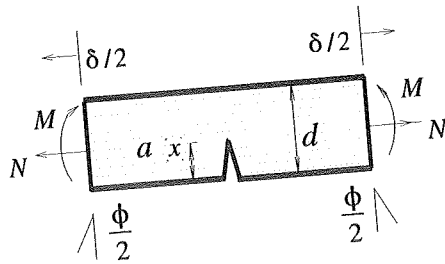


Figura 5.1- Esforços Conjugados  $N$  e  $M$  e Deformações Associadas.

Este parâmetro mede a velocidade com que a energia elástica é liberada com a propagação da trinca. Por definição,  $G$  está relacionado à variação de energia elástica  $\partial U_{el}$  causada por um incremento  $\partial A$  de área fissurada, ou melhor :

$$G = \frac{\partial U_{el}}{\partial A} \quad [5.1]$$

A extensão da trinca ocorre quando  $G$  atinge um valor crítico,  $G_{Ic}$  para o modo I, característico do material. Além disso, os fatores  $K$  e  $G$  são diretamente relacionados pela relação de Irwin :

$$G = \frac{K^2}{E^*} \quad [5.2]$$

onde  $E^*$  é igual ao módulo de elasticidade de Young  $E$  para condições de tensão plana e igual a  $E/(1-\nu^2)$ , sendo  $\nu$  o coeficiente de Poisson, para o caso de deformação plana.

Considera-se agora as seguintes relações preliminares para desenvolvimento do argumento teórico:

■ sejam  $Q_i$  as forças generalizadas e  $q_i$  os deslocamentos associados a essas forças. Para o caso em análise, Modo I, considera-se que uma peça plana A, com contorno  $\Gamma$ , fraturada, submetida a esforços de tração e momento fletor (Figura 5.2).

■ chamando as forças generalizadas de:  $Q_1 = N$ ,  $Q_2 = M$  e os respectivos deslocamentos de:  $q_1 = \delta$ ,  $q_2 = \theta$ , pode-se fazer uma associação, na região elástica, utilizando a matriz de flexibilidade definida por  $\psi_{ij}$ , ou seja:

$$q_i = \psi_{ij} \cdot Q_j \quad [5.3]$$

onde a matriz  $\psi_{ij}$  pode ser determinada, ou através da calibração do fator de intensidade de tensões com o espécime padrão submetido ao Modo - I de fratura ou mediante a utilização da relação energia/constante de deformação, de RICE [1972]:

$$\frac{d\psi_{ij}}{da} = \frac{2}{E^*} F_i(a) F_j(a) \quad [5.4]$$

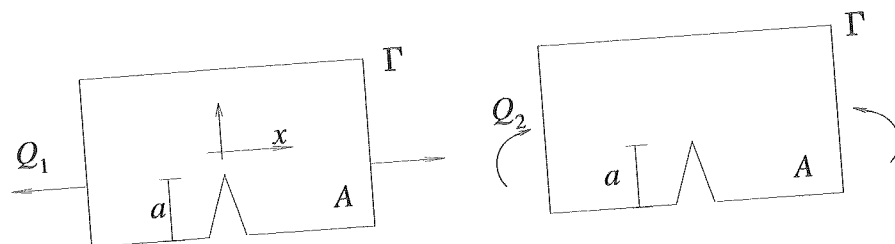


Figura 5.2 - Forças Generalizadas.

Para situações de combinação de tensão normal  $N$  e momento fletor  $M$  a energia complementar do espécime fraturado é dada por:

$$U^c = \frac{1}{2} Q_i \cdot \psi_{ij} \cdot Q_j \quad [5.5]$$

Combinando a expressão [5.2] que relaciona o fator de intensidade de tensões com a "energy release rate" e as expressões [5.3] e [5.5], obtém-se:

$$G = \frac{1}{2} Q_i \frac{\partial q_i}{\partial a} \quad (i=1,2) \quad [5.6]$$

onde  $Q = [N \ M]^T$  e  $q = [\delta \ \theta]^T$

A relação [5.3] pode ainda ser escrita como:

$$\begin{aligned} \delta &= \psi_{NN} N + \psi_{NM} M \\ \theta &= \psi_{MN} N + \psi_{MM} M \end{aligned} \quad [5.7]$$

com  $\psi_{MN} = \psi_{NM}$

E agora a expressão de  $G$  "energy release rate" pode ser relacionada diretamente com a matriz de rigidez elástica sabendo de [5.6] que :

$$G = \frac{1}{2} \left( N \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial a} + M \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial a} \right)$$

e ainda,

$$\frac{\partial \delta}{\partial a} = N \frac{\partial \psi_{NN}}{\partial a} + M \frac{\partial \psi_{NM}}{\partial a}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} = N \frac{\partial \psi_{MN}}{\partial a} + M \frac{\partial \psi_{MM}}{\partial a}$$

obtendo-se :

$$G = \frac{1}{2} \left( N^2 \frac{\partial \Psi_{NN}}{\partial a} + 2NM \frac{\partial \Psi_{NM}}{\partial a} + M^2 \frac{\partial \Psi_{MM}}{\partial a} \right) \quad [5.8]$$

Os coeficientes  $\Psi_{ij}$  podem agora ser estabelecidos pela relação entre  $G$  e  $K$  [5.2], onde  $K$  fica determinado segundo expressões aproximadas para  $F_N$  e  $F_M$  dadas por TADA [1985] :

$$K_{I,N} = \sigma_N \sqrt{\pi a} F_N \quad [5.9]$$

$$K_{I,M} = \sigma_M \sqrt{\pi a} F_M$$

e  $G$  assume agora a seguinte expressão :

$$G = (\sigma_N^2 F_N^2 + 2\sigma_N \sigma_M F_N F_M + \sigma_M^2 F_M^2) \frac{\pi a}{E^*} \quad [5.10]$$

que comparando com [5.8] tem-se como resultado:

$$\Psi_{NN} = \frac{2\pi}{d^2 E^*} \int_0^a a F_N^2 da \quad [5.11a]$$

$$\Psi_{MM} = \frac{2\pi}{(d^4 E^*) \frac{1}{36}} \int_0^a a F_M^2 da \quad [5.11b]$$

$$\Psi_{NM} = \frac{2\pi}{(d^3 E^*) \frac{1}{6}} \int_0^a a F_N F_M da \quad [5.11c]$$

lembrando que  $\Psi_{NM} = \Psi_{MN}$  e que as deformações  $q$  ficam agora determinadas segundo [5.4], ou melhor:  $q = \Psi Q$ .

### 5.2.1 Viga Submetida ao Momento Fletor M

Seja inicialmente uma viga de comprimento  $L$ , sem fratura, apresentando um momento de inércia  $I_0$  e submetida a um momento  $M$  nos apoios. Supõe-se a formação de uma fissura na região central, segundo a situação apresentada na figura 5.3. Dessa forma, sendo a estrutura estaticamente determinada, a abertura da fissura não influencia na distribuição de momentos da viga, mas ocasiona uma redução na rigidez.

É possível imaginar a formação desse tipo de fissura, com a dissipação total da energia de deformação na região formada pelo triângulo que tem como limite as linhas de propagação de tensão. O tamanho dessas linhas depende do comprimento da trinca, ou melhor, tem-se uma função do tipo:  $\xi(a)$  cujo valor máximo é  $\xi(a) = a$  (Saint Venant). Assumindo que a parte da viga sob essa linha não contribui com a inércia das seções correspondentes, pode-se escrever:

$$EI(x,a) = \begin{cases} EI_0[1 - \phi(x,a)] & \text{para } 0 \leq x \leq \xi(a) \\ EI_0 & \text{para } x > \xi(a) \end{cases} \quad [5.12]$$

onde  $\phi(x,a)$  é uma função que depende da forma da seção transversal e está definida no intervalo:  $0 \leq \phi(x,a) \leq 1$ .

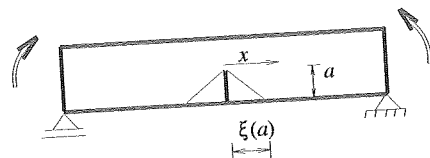


Figura 5.3 - Forma da Fissura.

#### a) Seção Retangular

Para o caso de uma seção transversal retangular ( $b \times d$ ) contendo uma fissura vertical central, o momento de inércia  $I$  para a seção não-fraturada e fraturada respectivamente, é calculado como:

$$I_o = d^3 \frac{b}{12} \quad e \quad I^f = I_o \left(1 - \frac{a}{d}\right)^3 \quad [5.13]$$

Seja  $U^*$  a energia complementar da viga compreendendo a região correspondente à seção fraturada e um dos apoios, de comprimento  $l = L/2$ , calculada segundo a teoria elementar de vigas como:

$$U^* = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI} dx \quad [5.14]$$

e que considerando [5.12] obtém-se :

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{EI_o [1 - \phi(x,a)]} dx = U_o^* + \frac{1}{2} \int_0^{\xi(a)} \frac{M^2(x)}{EI_o} \eta(x,a) dx \quad [5.15]$$

onde  $U_o^*$  é a energia complementar para a parte da viga não-danificada e ainda

$$\eta(x,a) = \frac{\phi(x,a)}{1 - \phi(x,a)} \quad [5.16]$$

Quando uma seção estiver localizada no ponto  $x=x_d$ , onde  $x_d \leq \xi(a)$ , a função  $\phi(x,a)$  pode ser explícita por uma função polinomial do tipo:

$$\phi(u) = u^3 - 3u^2 + 3u, \text{ onde: } u = a/d.$$

Para um caso simples de distribuição linear de momentos tem-se:

$$M(x) = Mi + \left( \frac{Me - Mi}{l} \right) x \quad [5.17]$$

e agora a equação [5.15] pode ser escrita como :

$$U^* = U_o^* + \frac{M_i^2}{2EI_o} \left[ \Theta_1 + 2l^{-1}(\kappa - 1) \Theta_2 + l^{-2}(\kappa - 1)^2 \Theta_3 \right] \quad [5.18]$$

sendo  $Me = \kappa.Mi$  ( $\kappa = \text{cte.}$ ) e  $\Theta_i$  dado pelas seguintes integrais :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_1 = \int_0^{\xi(a)} \eta(x,a) dx \\ \Theta_2 = \int_0^{\xi(a)} x \eta(x,a) dx \\ \Theta_3 = \int_0^{\xi(a)} x^2 \eta(x,a) dx \end{array} \right. \quad [5.19]$$

Segundo o princípio da energia complementar verifica-se que para o caso de uma mola espiral com rigidez rotacional  $k$  localizada na seção danificada, determina-se :

$$U_m^c = \frac{M^2}{2k} \quad [5.20]$$

Comparando agora com o segundo termo da equação [5.18], conclui-se que a rigidez da seção degradada é:

$$k = \frac{EI_o}{\Gamma(x,a)} \quad [5.21]$$

sendo  $\Gamma(x,a)$  dado pela expressão abaixo :

$$\Gamma(x,a) = \left[ \Theta_1 + 2l^{-1}(\kappa - 1) \Theta_2 + l^{-2}(\kappa - 1)^2 \Theta_3 \right] \quad [5.22]$$

### a.1. Formulação Direta da Matriz de Rigidez

Para formação do elemento de viga com fratura onde a falha é representada por uma mola, aplicam-se agora os princípios básicos do Método dos Elementos Finitos (MEF). A Matriz de Rigidez constitui a chave de



informações requeridas na análise estrutural do elemento. Deve-se observar, que o efeito da mola  $k$  representa apenas uma parte da viga. Entretanto, a parte restante também apresenta uma contribuição como pode ser verificado na figura 5.4:

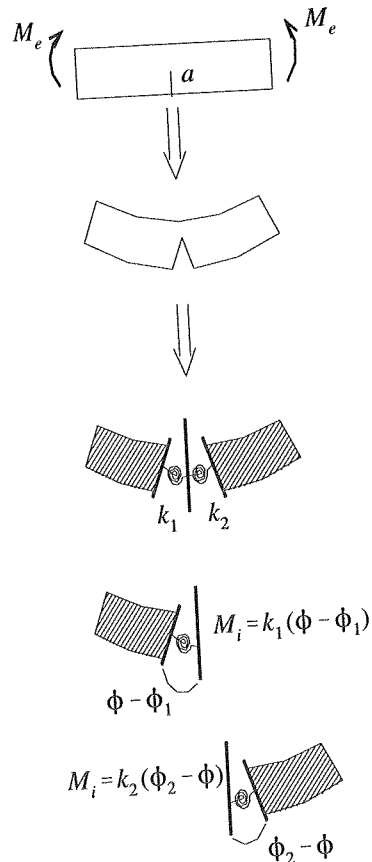


Figura 5.4 - Formação da Rigidez Total.

Para o cálculo do efeito total da mola tem-se que:

$$\begin{cases} \frac{M_i}{k_1} = (\phi - \phi_1) \\ \frac{M_i}{k_2} = (\phi_2 - \phi) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad M_i = k^* (\phi_2 - \phi_1) \quad [5.23]$$

onde  $k^*$  é a rigidez equivalente da mola sendo definida como :

$$k^* = \left( \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \right) \quad [5.24]$$

A matriz de rigidez global deve agora apresentar os fatores relacionados às duas metades da viga. Pode-se estabelecer que o modelo numérico segue segundo a figura 5.5:

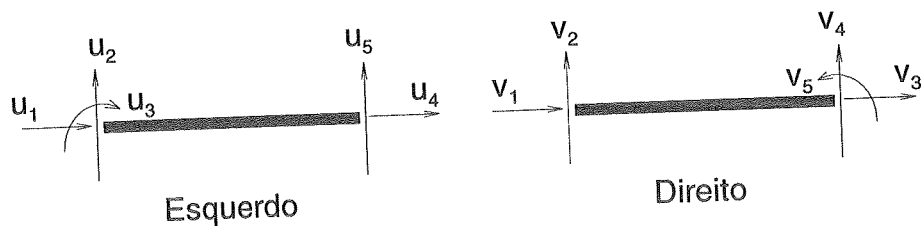


Figura 5.5 - Graus de Liberdade Nodais nos Elementos - Esquerdo e Direito.

Nesta figura existem dois elementos, ou seja, elemento esquerdo e direito. O sistema de equações lineares que representam estes elementos ( $\psi^{-1} \cdot q = Q$ ) podem agora ser escritos como:

$$\begin{bmatrix} [K^{(1)}]_{5 \times 5} & \{k^{(1)}\}_{5 \times 1} \\ \{k^{(1)}\}_{1 \times 5}^T & k^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u^{(1)} \\ \phi^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P^{(1)} \\ k^* (\phi^{(2)} - \phi^{(1)}) \end{Bmatrix} \quad [5.25]$$

$$\begin{bmatrix} k^{(2)} & \{k^{(2)}\}_{1 \times 5}^T \\ \{k^{(2)}\}_{5 \times 1} & [K^{(2)}]_{5 \times 5} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi^{(2)} \\ u^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k^* (\phi^{(1)} - \phi^{(2)}) \\ P^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Os elementos das matrizes de rigidez acima ( $[K^{(i)}]$ ,  $\{k^{(i)}\}$ ,  $k^{(i)}$ ,  $i=1,2$ ) são obtidos a partir da matriz de rigidez K para elementos de vigas convencionais.

Para a parte esquerda, a matriz é dada por :

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L^2} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L^2} \end{bmatrix} \quad [5.26]$$

De [5.25] obtém-se :

$$\begin{cases} \phi^{(1)} = \frac{1}{k^* \cdot \alpha} \{k^{(1)}\}^T \{u^{(1)}\} + \frac{1}{\alpha(k^{(2)} + k^*)} \{k^{(2)}\}^T \{u^{(2)}\} \\ \phi^{(2)} = \frac{1}{k^* \cdot \beta} \{k^{(2)}\}^T \{u^{(2)}\} + \frac{1}{\beta(k^{(1)} + k^*)} \{k^{(1)}\}^T \{u^{(1)}\} \end{cases} \quad [5.27]$$

e finalmente a combinação que forma o elemento fraturado:

$$\begin{cases} \left[ [K^{(1)}] + \{k^{(1)}\} \cdot \{k^{(1)}\}^T \cdot \frac{1}{\alpha k^*} \right] \{u^{(1)}\} + \left[ \frac{1}{\alpha(k^{(2)} + k^*)} \cdot [k^{(1)}] \cdot [k^{(2)}]^T \right] \{u^{(2)}\} = \{P^{(1)}\} \\ \left[ [K^{(2)}] + \{k^{(2)}\} \cdot \{k^{(2)}\}^T \cdot \frac{1}{\beta k^*} \right] \{u^{(2)}\} + \left[ \frac{1}{\beta(k^{(1)} + k^*)} \cdot [k^{(2)}] \cdot [k^{(1)}]^T \right] \{u^{(1)}\} = \{P^{(2)}\} \end{cases} \quad [5.28]$$

sendo  $\{P^{(i)}\}$ ,  $i=1,2$  a contribuição de carregamento aplicado devido a cada parte (1,2) do elemento e ainda :

$$\alpha = \left( -\frac{k^{(1)} + k^*}{k^*} + \frac{k^*}{k^{(2)} + k^*} \right) \quad \beta = \left( -\frac{k^{(2)} + k^*}{k^*} + \frac{k^*}{k^{(1)} + k^*} \right) \quad [5.29]$$

O elemento, agora de forma globalizada, apresenta a configuração como a apresentada na figura 5.6 e uma matriz de rigidez  $K_T(8 \times 8)$  :

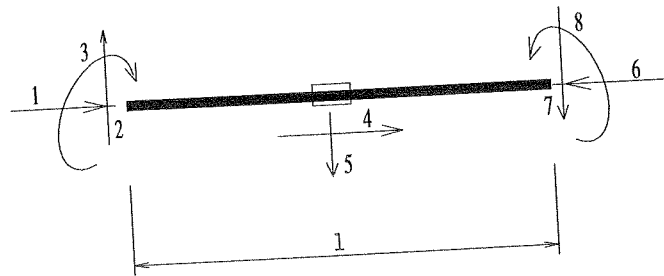


Figura 5.6 - Graus de Liberdade Nodal

A união dos dois elementos (esquerdo e direito- Figura 5.5) com incógnitas nodais:

$$U = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5]^T \quad V = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5]^T$$

resulta em (figura 5.6):

$$W = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ w_5 \ w_6 \ w_7 \ w_8]^T$$

O deslocamento  $u_4$  do elemento esquerdo e  $v_1$  no elemento direito são idênticos e podem ser expressos na equação total por  $w_4$ . Enquanto o deslocamento  $u_5$  pertencente ao elemento esquerdo e  $v_2$  do direito são também idênticos podem ser expressos como  $w_5$  na equação final. Portanto, o resultado para a viga fissurada não é uma matriz  $10 \times 10$  e sim  $8 \times 8$ .

### a.2. Fator Intensidade de Tensões $K_I$

O parâmetro de intensificação de tensões  $K_I$  é obtido segundo a geometria do elemento fraturado e das forças externas atuantes. Como visto anteriormente, esse fator também pode ser relacionado com a taxa de energia

dissipada com a fissura  $G$ , onde segundo a lei de Irwin:  $G = f(K, E^*)$ . Neste caso, como a viga apresenta uma redução de rigidez ocasionada pela fratura e esta rigidez é representada por uma mola de constante elástica  $k$ , faz-se uma associação com um modelo constituído de duas partes como na figura 5.7. Agora o segmento de comprimento  $2r$  representa a rigidez reduzida  $EI_f$  ou melhor:

$$EI(x) = \begin{cases} EI_0 = cte & \text{p/ } 0 \leq x < \beta - r \text{ e } \beta + r < x \leq l \\ EI_f < EI_0 & \text{p/ } \beta - r < x < \beta + r \end{cases} \quad [5.30]$$

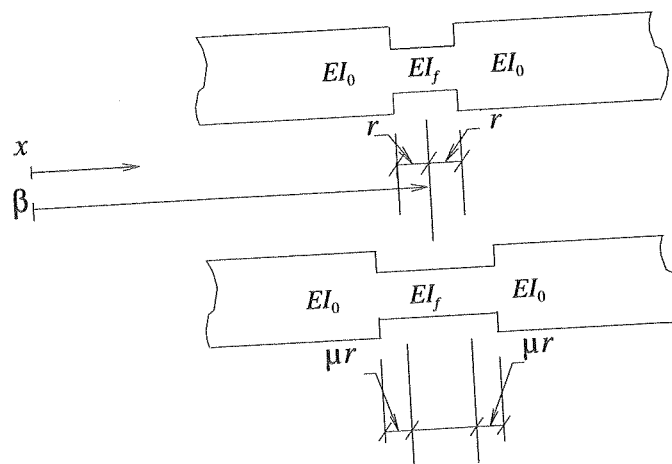


Figura 5.7 - Associação com a Rigidez da Mola.

Um aumento no comprimento da rigidez reduzida  $r \rightarrow r(1+\mu)$  permite o cálculo da taxa de liberação de energia  $\check{g}$ , que neste caso é dada por:

$$\check{g} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{U|_{r+\mu r} - U|_r}{\mu r} = \frac{\partial U}{\partial \mu r} \quad [5.31]$$

onde  $\partial U$  é a energia dissipada durante o processo de propagação. Seja  $D$  o salto na constante de deformação  $D = l/EI$ :

$$D = \frac{1}{EI_f} - \frac{1}{EI_0} \quad [5.32]$$

observando-se ainda que :

$$\mu = 0 \Rightarrow U_a = \frac{M^2(\beta - r)}{EI_0} + \frac{M^2 r}{EI_f} \quad [5.33]$$

$$\mu \neq 0 \Rightarrow U_b = \frac{M^2(\beta - r - \mu r)}{EI_0} + \frac{M^2(\mu r + r)}{EI_f}$$

$$\therefore \Delta U = \mu r M^2 D \quad [5.34]$$

a energia para transformação  $r \rightarrow r(1+\mu)$  pode portanto ser dada como:

$$\check{g} = \frac{\partial U}{\partial \mu r} = M^2 D \quad [5.35]$$

lembrando que neste caso  $\check{g}$  está relacionada com a extensão da fratura . Como a taxa de energia dissipada  $G$  (*energy release rate*) corresponde à abertura da fissura e não à sua extensão, deve-se obter uma correspondência entre essas duas grandezas. KIENZLER [1986] apresenta uma hipótese que consiste de uma aproximação com base na teoria elementar de vigas, onde:

$$\check{g} \approx G / 2 \quad [5.36]$$

Seja feita uma analogia com o procedimento de abertura de um *zipper* apresentado na figura 5.8. Para que a abertura seja possível, é necessário aplicar-se uma força  $f$  no sentido da mesma, sendo esta capaz de romper a coesão existente entre os elementos. A energia correspondente a esta força  $f$  chamaremos de  $G$ . Outro procedimento é aplicar duas forças  $f'$  idênticas, porém, de sentido contrário no ponto inicial, mas com a

mesma intenção de abrir o *zipper*.

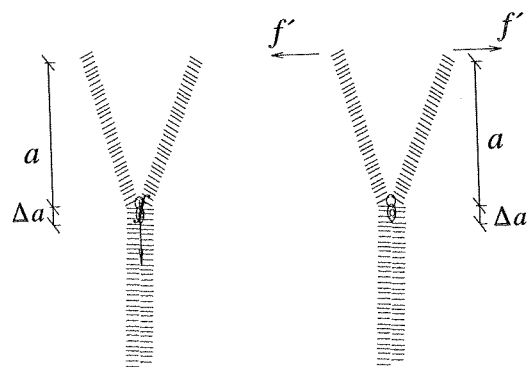


Figura 5.8 - Abertura do Zipper.

Pode-se então associar os dois efeitos na tentativa de aproximá-los. Considere novamente a viga fraturada com uma fissura inicial  $a$  podendo esta se estender para  $a + \delta a$  ou então ter um distanciamento  $\delta r$  entre as superfícies fissuradas. Seguindo BAŽANT[1990], a formação de uma fissura pode ser imaginada como um alívio de energia representada pelos triângulos 021 e 023, apresentados na figura 5.9. Quando a fissura propaga, a taxa de energia adicional estende para a fissura para  $a + \Delta a$ , que é dada pelas regiões 2683 e 2641. No caso do alongamento ( $r \rightarrow r + \Delta r$  e  $r \ll \Delta r$ ), a zona 1231 altera para 45784. Como ainda pode ser visto, o alívio proporcionado pela região 123876541 devido a extensão da fissura difere de 12387541 segundo o alongamento, apenas por uma pequena zona 56725, desde que  $\Delta a$  seja também pequeno. Quando  $\Delta r = 2\Delta a$  e  $\lim \Delta a, \Delta r \rightarrow 0$  pode-se dizer então que os incrementos para os dois casos são idênticos e isto significa ainda dizer que:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial a} \quad [5.37]$$

Considerando-se que  $\Delta r = \mu r$ , pode-se dizer que a relação [5.37] é a mesma indicada em [5.36]. Segundo HUAJ [1992], o fator de correção entre os dois efeitos é mínimo e até mesmo desprezível embora BAŽANT [1990] tenha sugerido um fator  $\beta$  para esta associação. A essa teoria chamaremos de *theorie des Reißverschluß* ou ainda *Zipper's Theory*.

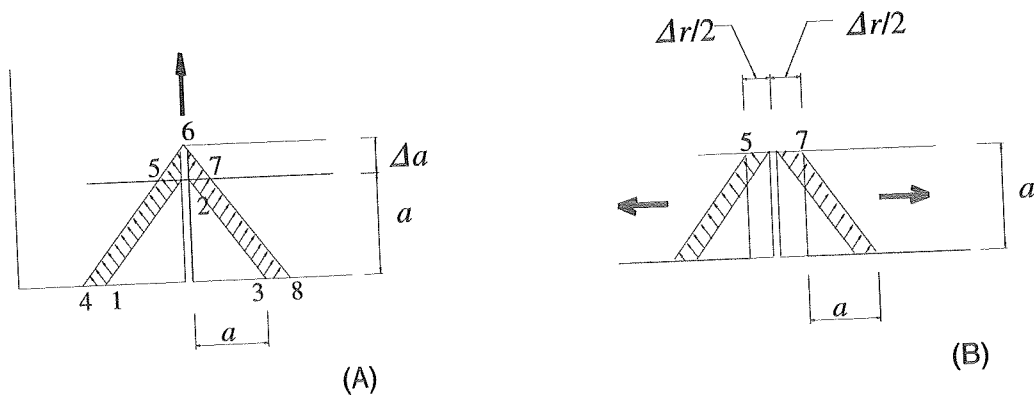


Figura 5.9 - Zonas de Energia no Crack Tip - A) Extensão e B) Alargamento da Fissura

Os elementos de ligação presentes no *zipper* representam a força molecular de coesão e a fissura expande ou alonga somente quando atinge um determinado valor máximo capaz de superar esta força. Neste caso, a área hachurada na Figura 5.9 representa a zona de variação de energia e está aproximada por uma função do tipo:  $y = g(a) = ka$ , com  $k=1$ .

A dedução do Fator de Intensidade de Tensões é agora imediato. Seguindo as relações [5.35] e [5.37] e mais uma vez a equação de Irwin [5.2], obtém-se :



$$K^2 = \frac{E^*}{b} \frac{\partial U}{\partial a} \Rightarrow K^2 = \frac{E^*}{b} M^2 D$$

$$\therefore K = M \sqrt{\frac{E^*}{b} D} \quad [5.38]$$

Para o caso de condições de tensão plana,  $E^*$  é igual ao módulo de Young  $E$ . Utilizando-se [5.13] e [5.32] pode-se ainda simplificar a relação acima e então  $K$  pode ser determinado como:

$$K = p \cdot \phi(a,d) \quad [5.39]$$

onde (figura 5.10):

$$p = \frac{6M}{bd^{3/2}},$$

$$\phi(a,d) = \sqrt{\frac{1}{3} \left( \left( 1 - \frac{a}{d} \right)^{-3} - 1 \right)}$$

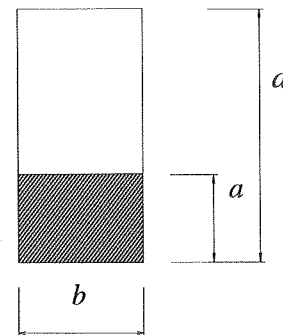


Figura 5.10 - Seção Retangular.

### b) Seção - I

Quando a seção considerada apresenta uma geometria mais complexa, como é o caso da seção-I, o efeito de dano na barra deve ser verificado segundo as alterações geométricas encontradas na seção durante a propagação da fissura. Assim, divide-se uma seção I genérica segundo os casos apresentados a seguir:

#### b.1) Caso 1 - Fissura Localizada na Mesa Inferior da Viga (Fig. 5.11)

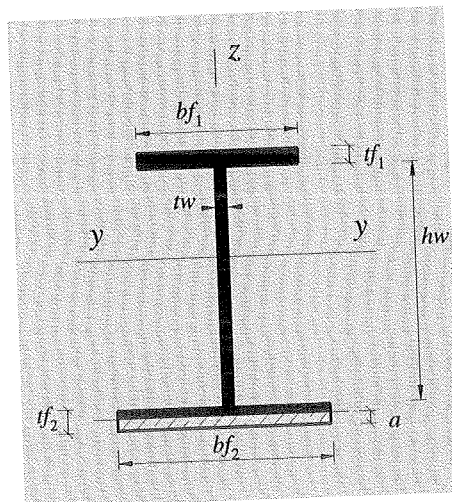


Figura 5.11 - Fratura na Mesa Inferior da Seção.

$$0 \leq a < tf_2$$

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{A_1} \sum A_i y_i$$

onde :

$$A_1 = bf_1 \cdot tf_1 + hw \cdot tw + (tf_2 - a) \cdot bf_2$$

$$\sum A_i y_i = bf_1 \cdot tf_1 \left( \bar{s} + \frac{tf_1}{2} \right) + hw \cdot tw \left( \bar{s} - \frac{hw}{2} \right)$$

$$\text{com } \bar{s} = tf_2 - a + hw$$

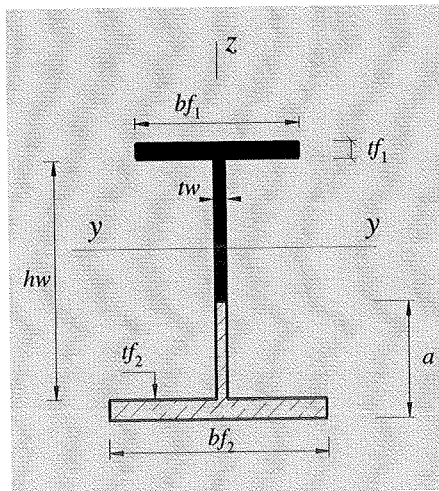
E agora calcula-se o momento de Inércia da seção fraturada :

$$I_{y_1} = \frac{1}{12} bf_1 \cdot tf_1^3 + bf_1 \cdot tf_1 \cdot \left( \frac{tf_1}{2} + \bar{s} - \bar{y}_1 \right)^2 + \frac{tw}{12} \bar{s}^3 + tw \cdot \bar{s} \cdot \left( \frac{\bar{s}}{2} - \bar{y}_1 \right)^2 \quad [5.40]$$

Lembrando das Equações [5.12] e [5.16], assumindo que  $\eta(x, a) = \eta(a(x))$  e ainda utilizando as demais equações apresentadas no item 5.2.1.a obtêm-se a rigidez da seção danificada:

$$k_1 = \frac{EI_o}{\Gamma_1(a(x))} \quad [5.41]$$

**b.2) Caso 2 - Fissura Localizada na Alma da viga (Figura 5.12)**



$$tf_2 \leq a < tf_2 + hw$$

$$A_1 = bf_1 \cdot tf_1 + tw \cdot \bar{s}$$

$$\bar{y}_2 = \frac{[bf_1 \cdot tf_1 \cdot (\bar{s} + tf_1/2) + \bar{s}^2 \cdot tw/2]}{(bf_1 \cdot tf_1 + \bar{s} \cdot tw)}$$

Figura 5.12 - Fratura na Alma da Viga.

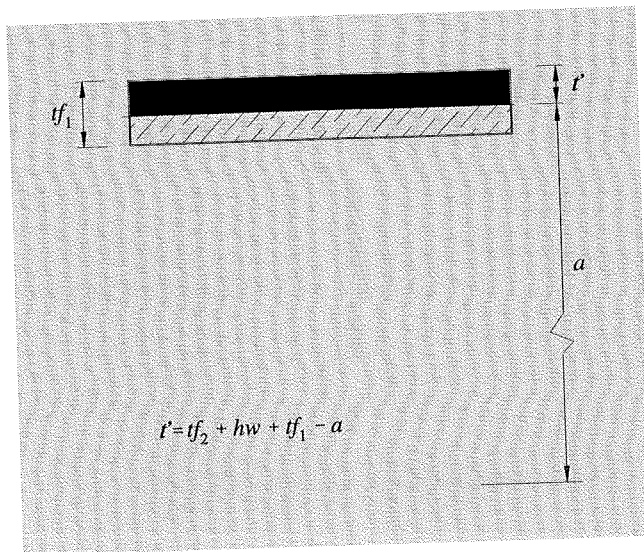
$$I_{y_2} = \frac{1}{12} bf_1 \cdot tf_1^3 + bf_1 \cdot tf_1 \cdot \left(\frac{tf_1}{2} + \bar{s} - \bar{y}_2\right)^2 + \frac{tw}{12} \bar{s}^3 + tw \cdot \bar{s} \cdot \left(\frac{\bar{s}}{2} - \bar{y}_2\right)^2 \quad [5.42]$$

E desta vez a rigidez da mola degradada deve ser dada por :

$$k_2 = \frac{EI_o}{\Gamma_2(a(x))} \quad [5.43]$$

**b.3) Caso 3 - Fissura Localizada na Mesa Superior (Figura 5.13)**

$$a \geq tf_2 + hw$$



Resultando em:

$$\bar{y}_3 = \frac{(\bar{s} + tf_1)}{2} \quad [5.44]$$

$$I_{y_3} = \frac{bf_1}{12} (\bar{s} + tf_1)^3 \quad [5.45]$$

Figura 5.13 - Fratura na Mesa Superior.

Para cada caso verifica-se que a fissura abre conforme indicado na Figura [5.14]. A fissura  $a$  progride em função de  $x$  enquanto que  $\xi$  depende de  $a$  :

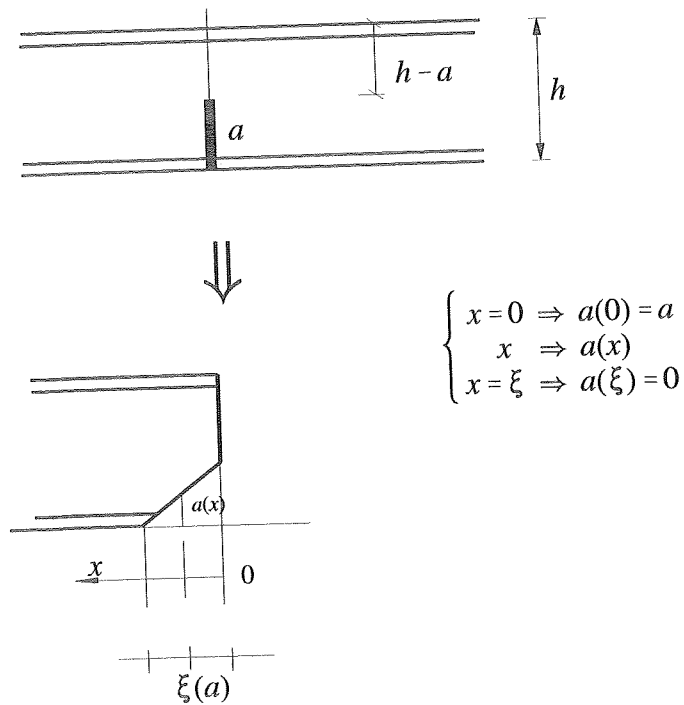


Figura 5.14 -Desenvolvimento da Fissura na Viga.

### 5.2.2 Consideração do Esforço Combinado M - N Através do Método da Energia

Seja agora um elemento fraturado onde se verifica a presença de momento fletor e esforço normal, como pode ser observado na figura abaixo (Figura 5.15):

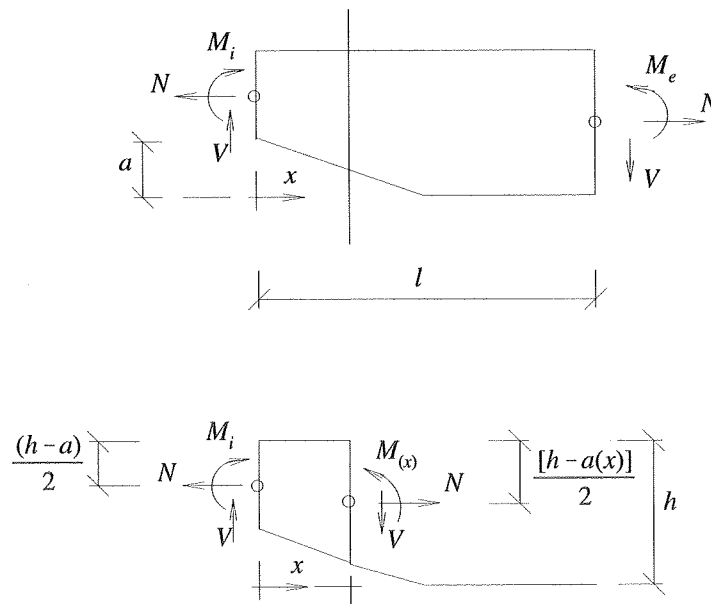


Figura 5.15 - Composição de Esforços na Viga Fraturada

Neste caso a distribuição de momentos será:

$$M(x) = Mi + \left( \frac{Me - Mi}{l} \right) x + \left( \frac{N \cdot a}{2l} \right) x - \frac{N}{2} (a - a(x)) \quad [5.46]$$

A equação da energia complementar  $U^*$  da viga danificada pode então ser calculada como:

$$U^* = U_o^* + \frac{1}{2} \int_0^{\xi(a)} \frac{M^2(x)}{EI_o} \eta_M(x,a) dx + \frac{N^2}{2EA_o} \int_0^{\xi(a)} \eta_N(x,a) dx \quad [5.47]$$

onde  $A_o$  é a área da seção transversal não fraturada da viga.

A função  $\eta_N(a(x))$  pode ser encontrada procedendo-se com a mesma análise utilizada para o cálculo de  $\eta_M(a(x))$ . Pode-se verificar também que:

$$\eta_N(a(o)) = \frac{A_o - A}{A} \quad [5.48]$$

$$\begin{cases} A = A_o [1 - \phi_N(x,a)] , & 0 \leq x \leq \xi(a) \\ A = A_o & , \quad x > \xi(a) \end{cases} \quad [5.49]$$

com  $\phi_N(x,a)$  dependente da seção transversal e :  $0 \leq \phi_N(x,a) \leq 1$

Para os diferentes casos da seção I tem-se que o valor da expressão  $\eta_M(a(o))$  é calculada como:

**a) Caso 1:**  $0 \leq a \leq tf_2$

$$\eta_{N1}(a,o) = \frac{a \cdot bf_2}{bf_1 \cdot tf_1 + hw \cdot tw + (tf_2 - a)bf_2} \quad [5.50]$$

**b) Caso 2:**  $tf_2 \leq a \leq tf_2 + hw$

$$\eta_{N2}(a,o) = \frac{tf_2 \cdot bf_2 + tw(a - tf_2)}{bf_1 \cdot tf_1 + tw \cdot \bar{s}} \quad [5.51]$$

**c) Caso 3:**  $a \geq hw + tf_2$

$$\eta_{N3}(a,o) = \frac{hw(tw - bf_1) + bf_1(a - tf_2) + tf_2 \cdot bf_2}{bf_1(tf_1 + \bar{s})} \quad [5.52]$$

### 5.3. MODELO DE RIGIDEZ ELASTO - PLÁSTICO

A formulação do modelo de mola elasto-plástico segue a teoria clássica da plasticidade onde deve-se atender necessariamente aos seguintes requerimentos:

- relação tensão/deformação descrevendo o comportamento do material linear- elástico (Lei de Hooke -  $\sigma = D\epsilon$ );
- critério de escoamento indicando o nível de tensão no qual o início de plastificação pode ser admitido;
- relação tensão/deformação para comportamento pós-escoamento.

O conceito de Fratura Linear Elástica (FEL) perde sua validade quando a partir de uma determinada fase de carregamento ocorre o alargamento considerável da região plástica na ponta da trinca, sendo este alargamento relacionado com o tamanho da fratura.

Seja então, o caso de um espécime onde a parte ainda não fraturada tem comportamento plástico perfeito. Iniciado o escoamento, as deformações ocasionadas pela força generalizada  $Q$  podem ser decompostas numa parte elástica e outra plástica, ou seja:

$$dq = dq_e + dq_p \quad [5.53]$$

onde  $dq_e$  é a deformação elástica definida como àquela possível de ser recuperada logo depois do descarregamento e dada como na relação [5.3] por:

$$dq_e = \psi \cdot Q \quad [5.54]$$

sendo  $\psi$  a conhecida matriz de constantes elásticas.

Quando um determinado critério de escoamento é atingido surgem incrementos de deformações plásticas e para obter uma relação entre esta deformação e a tensão atuante (plasticidade associada) assume-se que :

$$dq_p = \{d\delta, d\theta\}_p = d\Lambda \{\partial f / \partial N, \partial f / \partial M\} \quad [5.55]$$

onde  $d\Lambda$  é uma constante de proporcionalidade denominada de *multiplicador plástico*. A função  $f(N, M, \alpha_y, a)$  determina o critério de plastificação na análise elasto-plástica da abertura da fissura na viga. Pode-se dizer que no limite onde este escoamento deve ser iniciado tem-se a seguinte forma:

$$f(Q, \alpha_y, a) = 0 \quad [5.56]$$

Numa formulação simplificada pode-se dizer que o regime é elástico quando  $f < 0$ , o implica dizer que a variação da deformação plástica deve ser nula. A *Lei de Fluência* [5.55] é também denominada de *Condição de Normalidade* quando o vetor  $\{\partial f / \partial Q\}$ , observado na figura [5.16], é normal à superfície que estabelece o critério de plastificação.

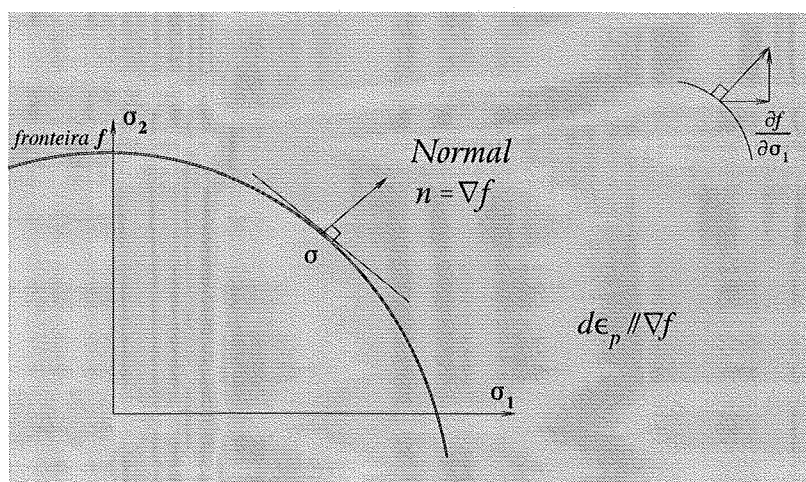


Figura [5.16] Representação Geométrica da Regra de Normalização Associada com as Tensões Principais.



A condição de consistência ( $d\Lambda \cdot df = 0$ ,  $df \leq 0$ ) possibilita a obtenção de uma relação para  $d\Lambda$ . Impondo-se  $df = 0$ , condição que garante  $d\Lambda \geq 0$ , obtém-se:

$$df = \frac{\partial f}{\partial Q} dQ + \frac{\partial f}{\partial \alpha_y} d\alpha_y = 0 \quad [5.57]$$

O processo de encruamento isotrópico é associado a variável interna  $\alpha_y \geq 0$ , cuja evolução é proporcional à evolução da deformação plástica. Agora escreve-se  $Q$  em função da rigidez elástica e  $q_e$  (lei constitutiva) obtendo-se:

$$dQ = \psi (dq - dq_p) = \psi dq - \psi d\Lambda (\partial f / \partial Q) \quad [5.58]$$

No encruamento por trabalho (*work hardening*) o incremento de trabalho de plastificação  $dW_p$  das forças generalizadas  $Q$ , é dado por :

$$dW_p = Q \cdot dq_p = Q \cdot d\Lambda (\partial f / \partial Q) \quad [5.59]$$

Esta variação de trabalho plástico é também postulado como *incremento de trabalho contínuo integrado sobre a área de plastificação da fissura  $A_{pl}$* , ou seja:

$$dW_p = \int_{A_{pl}} \sigma_{eq} \cdot d\epsilon_{p,eq} \cdot dA \quad [5.60]$$

onde  $\sigma_{eq}$  e  $\epsilon_{p,eq}$  são valores locais de tensão e deformação equivalentes na seção  $A_{pl}$ . No caso :  $d\epsilon_p = d\alpha_y / E_p$ . PARKS [1982] aproximou o cálculo da equação acima por :

$$dW_p = \kappa \cdot \sigma_y \cdot d\epsilon_p \cdot \eta^2 \quad [5.61]$$

onde  $\kappa$  é uma fator de proporcionalidade, devendo ser calibrado pela observação do comportamento do modelo utilizando-se o MEF (Método dos

Elementos Finitos) e  $\eta$  é o comprimento plástico não-fraturado do ligamento ( $\eta = d-a$ ). E agora :

$$dW_p = Q \cdot d\Lambda \frac{\partial f}{\partial Q} = \kappa \cdot \sigma_y \cdot d\epsilon_p \cdot \eta^2 \quad [5.62]$$

Conhecendo-se o Módulo Plástico  $E_p$ , pré-multiplicando os dois lados da equação [5.62] por  $(\partial f / \partial Q) \cdot dq$ , expressando  $d\alpha_y$  em função de  $d\Lambda$  e ainda utilizando [5.57], pode-se obter o multiplicador plástico :

$$d\Lambda = \frac{\left( \frac{\partial f^T}{\partial Q} \cdot \Psi \right)^T \cdot dq}{\left( \frac{\partial f^T}{\partial Q} \cdot \Psi \cdot \frac{\partial f}{\partial Q} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \cdot \frac{E_p}{\sigma_y \kappa \eta} \cdot Q \cdot \frac{\partial f^T}{\partial Q} \right)} \quad [5.63]$$

Substituindo-se agora [5.63] em [5.58] obtém-se a relação completa de tensão-deformação elasto-plástica:

$$dQ = \Psi_{ep} \cdot dq \quad [5.64]$$

sendo:

$$\Psi_{ep} = \left[ \Psi - \frac{\left( \frac{\partial f^T}{\partial Q} \cdot \Psi \right)^T \cdot \left( \frac{\partial f^T}{\partial Q} \right)}{\left( \frac{\partial f^T}{\partial Q} \cdot \Psi \cdot \frac{\partial f}{\partial Q} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \cdot \frac{E_p}{\sigma_y \kappa \eta} \cdot Q \cdot \frac{\partial f^T}{\partial Q} \right)} \right] \quad [5.65]$$

### 5.3.1 Critério de Plastificação

O critério de plastificação determina o nível de tensão no qual a deformação plástica inicia e pode ser escrito na forma geral:

$$f(\sigma) = K(\alpha) \quad [5.66]$$

sendo  $\sigma$  o vetor de tensões e  $\alpha$  o parâmetro de encruamento cuja evolução é proporcional à evolução da deformação plástica. Quando a tensão em valor absoluto atinge um determinado ponto  $\sigma_y$ , denominado de *tensão de escoamento do material*, tem-se o desenvolvimento de deformações plásticas (Figura 5.17).

Portanto, quando o estado de tensão for menor do que  $\sigma_y$  diz-se que o material tem comportamento elástico e apresenta uma relação tensão/deformação linear:  $\sigma = E\epsilon$  (Lei de Hooke). Deve-se notar que  $\sigma_y$  é a fronteira correspondente ao início da plastificação e que o estado de tensão não deve ultrapassar este valor.

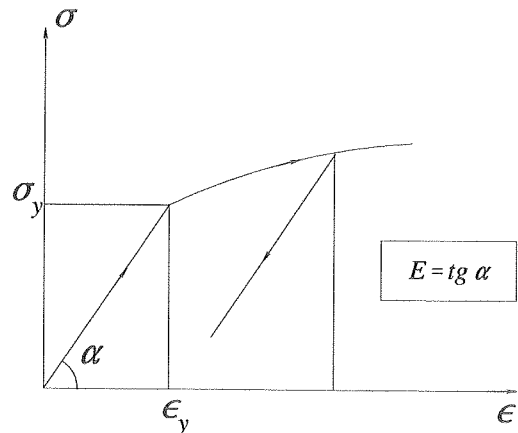


Figura 5.17 - Gráfico -Tensão x Deformação.

Resumindo:

- $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y < 0 \Rightarrow$  comportamento elástico
- $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y = 0 \Rightarrow$  comportamento plástico
- $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y > 0 \Rightarrow$  Situação Impossível (!)

Consideremos agora o caso da seção I, submetida a um momento fletor  $M$ , com uma abertura de fissura inicial  $a$ , admitindo-se um modelo elasto-plástico perfeito, como pode ser observado na figura 5.18. O elemento de viga é baseado na hipótese de que as seções transversais permanecem planas durante as deformações de flexão. Portanto, para análise do comportamento de um elemento de viga com fratura deve-se acrescentar o efeito de uma mola.

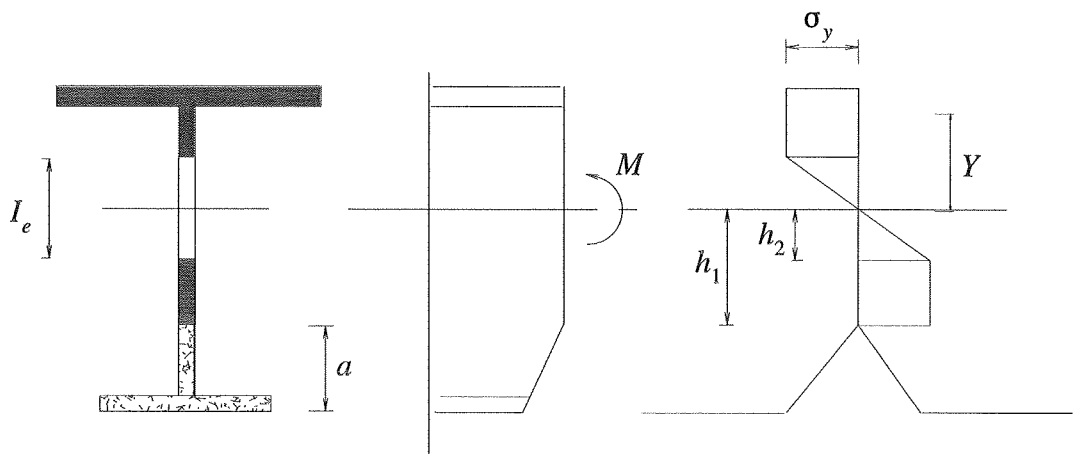


Figura 5.18 - Plastificação na Seção Fraturada.

Desta forma:

$$\begin{aligned}
 M &= \int \sigma Y dA \\
 &= \int_{h_1}^{h_2} \sigma_e Y dA + 2 \int_{h_1}^{h_2} \sigma_y Y dA \\
 &= \int_{h_1}^{h_2} E \epsilon Y dA + 2 \int_{h_1}^{h_2} E \epsilon_y Y dA \\
 &= \int_{h_1}^{h_2} E \phi Y^2 dA + 2 \int_{h_1}^{h_2} E \phi h_1 Y dA \\
 &= EI_e \phi + 2Eh_1 S_1 \phi \\
 \Rightarrow & \quad \boxed{M = (k_e + k_p) \phi} \quad [5.68]
 \end{aligned}$$

Pode-se dizer que de forma aproximada a rigidez da seção adquire uma nova parcela  $k_p$  e a rigidez total é dada agora como a soma de duas partes, ou seja, uma elástica e outra plástica:  $k = k_e + k_p$ .

#### ◦ Condição de Plastificação

Seja  $\dagger$  uma função que estabelece a regra de escoamento do material como aquela apresentada por [5.66] e neste caso dada por:

$$\dagger = \frac{M_c}{M_p} - 1 \quad [5.69]$$

onde  $M_c$  é o momento atuante e  $M_p$  o momento de plastificação da seção fraturada. Assim fica estabelecido que :

⇒ para  $\dagger = 0 \Rightarrow$  início de plastificação.

#### ◦ Cálculo da Rigidez Plástica $K_p$

Para a obtenção da Rigidez Plástica aplica-se um processo iterativo, que neste caso consiste na utilização do *método de rigidez inicial*  $K_o$ . A solução completa do sistema de equações é determinada a partir de uma primeira iteração e aproximações subseqüentes como pode ser verificado na figura 5.19. Lembrando-se que inicialmente o processo é elástico e  $M_c = k^*(\phi_2 - \phi_1)$  adota-se  $k^*$  como rigidez inicial. A solução final fica controlada pelo momento  $M_p$  e então:

$$k_p = \frac{M_p}{(\phi_n - \phi_{n-1})} \quad [5.70]$$

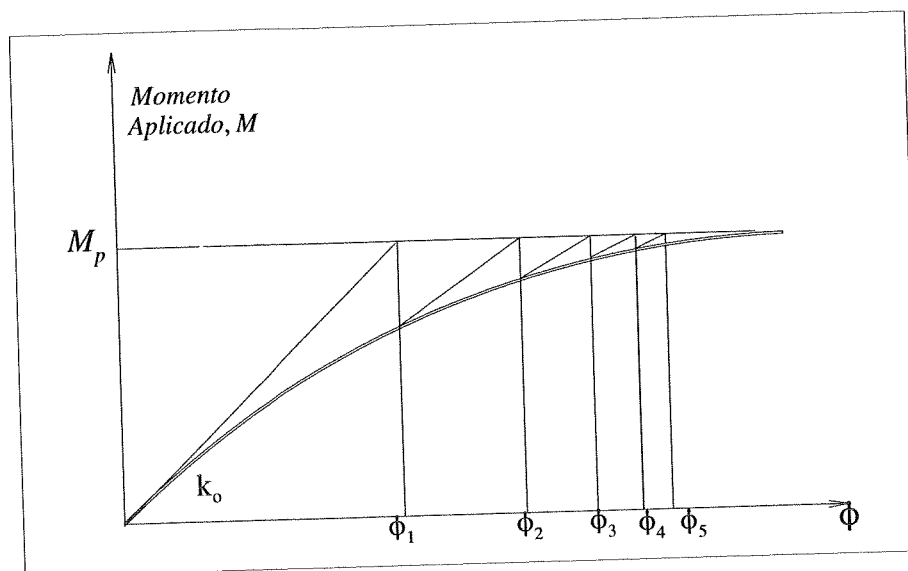


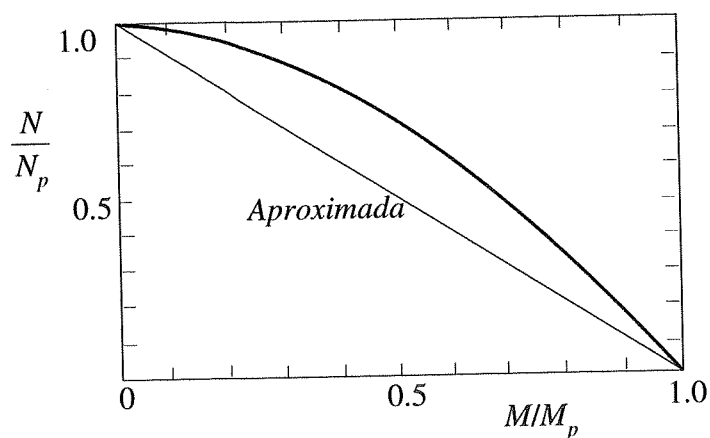
Figura 5.19 - Solução Iterativa pelo Método de Rigidez Inicial.

#### ◦ Interação M - N

Em muitas situações é necessário a consideração de carregamento combinado no comportamento da estrutura. Consideremos então o caso de uma falha causada agora não apenas pelo momento fletor  $M$ , mas também, por um esforço normal de tração  $N$ . A situação limite de projeto para estes casos analisados separadamente é:  $M/M_p \leq 1$  e  $N/N_p \leq 1$ . Desta forma, pode-se aproximar a equação de interação para o caso combinado  $N, M$  como (figura 5.20):

$$\left( \frac{N}{N_p} \right)^2 + \left( \frac{M}{M_p} \right)^2 \leq 1$$

[5.71]

Figura 5.20 - Relação  $N/N_p$  x  $M/M_p$ 

### 5.3.2 Cálculo da Integral - J

Para consideração de fratura em problema não-linear calcula-se o parâmetro de intensidade de deformação no *crack-Tip* - J. Para obter esse fator deve-se supor que este é dividido em uma parte elástica e outra plástica, ou seja:

$$J = J_{el} + J_{pl} \quad [5.72]$$

A parte elástica pode ser determinada diretamente de :

$$J_{el} = \frac{K_I^2}{E^*} \quad [5.73]$$

A determinação do incremento plástico segue a relação proposta por RICE[1968], considerando o elemento de viga com mola, onde:

$$J_{pl} = - \int_0^{q_p} \left( \frac{\partial Q}{\partial a} \right)_{q_p} \cdot dq_p = \int_0^{q_p} \left( \frac{\partial Q}{\partial l} \right)_{q_p} \cdot dq_p \quad [5.74]$$

$$\Rightarrow dJ_{pl} = \frac{\partial Q_i}{\partial l} d\Lambda \frac{\partial f}{\partial Q_i} \quad [5.75]$$

Para determinar  $Q_{i,l}$  pode-se partir da derivação da condição de escoamento  $f(N, M, l) = 0$  em relação a  $l$ , obtendo:

$$\left. \frac{df}{dl} \right|_{q_i} = 0 \quad [5.76]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial l} = 0 \quad [5.77]$$

Seja agora utilizada a hipótese de que a razão entre as deformações plásticas durante a abertura da fissura é constante, ou seja:

$$d\theta_p = k \cdot d\delta_p, \quad k = \text{cte} \quad [5.78]$$

$$\therefore \frac{\partial(d\delta_p/d\theta_p)}{\partial l} = \frac{\partial \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial N}}{\frac{\partial f}{\partial M}} \right)}{\partial l} \bigg|_{dq_p} = 0 \quad [5.79]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left( \frac{\partial f}{\partial M} \right)^2} \left[ \frac{\partial f}{\partial M} \left( \frac{\partial f}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial l} + \frac{\partial f_1}{\partial l} \right) - \frac{\partial f}{\partial N} \left( \frac{\partial f}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial l} + \frac{\partial f_2}{\partial l} \right) \right] = 0 \quad [5.80]$$



sendo :

$$\frac{\partial f_1}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{\partial f}{\partial N} \right) \quad \frac{\partial f_2}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{\partial f}{\partial M} \right) \quad [5.81]$$

A ocorrência da deformação  $d\theta_p$  está associada à condição:

$$d\theta_p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial M} \neq 0 \quad [5.82]$$

o que permite desprezar o denominador da expressão [5.80]. Pode-se agora através das equações lineares, [5.76] e [5.80], determinar  $Q_{i,l}$  e aplicá-lo diretamente em [5.75].

A contribuição plástica da Integral -J também pode ser expressa em função do deslocamento ocasionado pela separação total da fissura no *crack tip*,  $d\delta_{pl}^t$ :

$$\Delta J_{pl} = m \sigma_y \Delta \delta_{pl}^t \quad [5.83]$$

sendo  $d\delta_{pl}^t$  obtido através do incremento plástico da extensão combinado com a rotação e determinado por PARKS[1982] como:

$$d\delta_{pl}^t = d\delta_p + \left( \frac{t}{2} - a \right) d\theta_p \quad [5.84]$$

Igualando-se agora as equações [5.75] e [5.70] e substituindo-se a equação [5.71] determina-se o escalar  $m$ , tendo como resultado a seguinte expressão:

$$m = \frac{1}{\sigma_y} \frac{\left[ \frac{\partial \phi}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial l} + \frac{\partial \phi}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial l} \right]}{\left[ \frac{\partial \phi}{\partial N} + \left( \frac{t}{2} - a \right) \frac{\partial \phi}{\partial M} \right]} \quad [5.85]$$

Pode-se verificar que  $m$  assume valores dependentes da função de escoamento  $\phi$  para os casos de :

a. Tração Pura: 
$$m = \frac{1}{\sigma_y} \left( \frac{\partial N}{\partial l} \right) \quad [5.86]$$

b. Flexão Simples: 
$$m = \frac{1}{\sigma_y (t/2 - a)} \left( \frac{\partial M}{\partial l} \right) \quad [5.87]$$

Agora é possível encontrar o valor de  $J$  do elemento fraturado. Uma vez desenvolvida a plasticidade total é possível desprezar a parte elástica  $J_e$ , pois sua contribuição é pequena quando comparada com  $J_p$ .

#### 5.4. CONSIDERAÇÃO DO EFEITO DE FADIGA

O processo de fissura ocasionada por efeito de fadiga em aço é dividido em fases que consistem na sua abertura e propagação. Uma vez iniciado, o comprimento da trinca aumenta de acordo com o número de ciclos de carregamento proporcionando uma queda na vida útil do elemento até que seja verificada sua ruína (figura 5.21). O crescimento da trinca é caracterizado pela "taxa de propagação da fissura" sendo definido como a mudança do seu comprimento dividido pelos números de ciclos correspondentes:  $da/dN$ . Esta taxa pode ser relacionada com a variação do fator de intensidade de tensões  $\Delta K$ , onde:

$$\Delta K = K_{m\acute{a}x} - K_{m\acute{i}n} = \Delta \sigma (\pi a)^{1/2} f_g \quad [5.88]$$

$\Delta \sigma$ : variação de tensões

$f_g$ : fator que depende da geometria

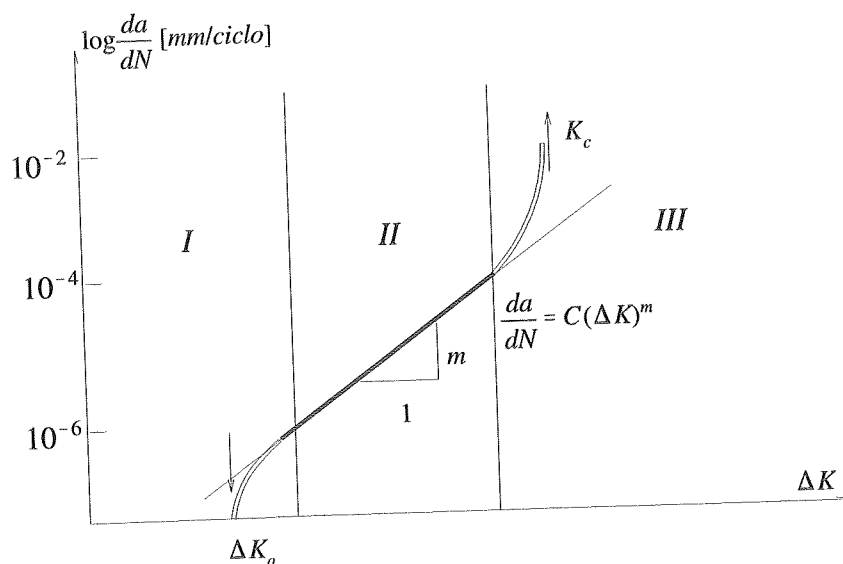


Figura 5.21 - Representação Esquemática da Taxa de Propagação de Fissura por Fadiga ( $da/dN$ ) Versus Amplitude do Fator de Intensidade de Tensões  $\Delta K$  e os Respetivos Estágios Observados Durante o Processo.

A taxa de abertura da fissura é representada segundo o diagrama da figura 5.21. Nesta curva verifica-se que o processo de fadiga está dividido em três tipos distintos de comportamento que são correspondentes aos estágios I, II e III :

Estágio I - corresponde à nucleação da trinca por deformação plástica localizada e o seu crescimento inicial. Nesta região  $da/dN$  aproxima-se de um limite,  $\Delta K_0$ , abaixo do qual a fissura não propaga.

Estágio II - está relacionado ao crescimento da trinca. Tem seu comportamento representado por uma linha reta e descrito pela equação básica de *Paris-Erdogan* :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad [5.89]$$

onde:

$a$  = comprimento da fissura

$N$  = número de ciclos

$C$  e  $m$  são constantes para um determinado material e  $m$  varia entre 2 e 4

$\Delta K$  = variação do fator de intensidade de tensões

Estágio III - Corresponde à fratura final que ocorre no último ciclo de tensões quando a trinca desenvolvida progressivamente atinge o valor crítico  $K_c$  para propagação instável. Em princípio é possível que o material se deforme antes da ruptura final sendo que na maioria dos casos as fraturas ocasionadas por fadiga são macroscopicamente frágeis, ou seja, não apresentam

deformações macroscópicas. Nesta região  $da/dN$  aumenta assintoticamente de forma que  $K_{máx}$  aproxima-se do fator de tenacidade à fratura (fracture toughness),  $KI_c$ .

Uma vez que a trinca tenha iniciado no elemento, pode-se fazer uma previsão de sua vida útil utilizando a eq.[5.76] com limites de integração correspondentes ao comprimento inicial da fissura  $a_i$  e final  $a_f$  (ponto onde  $K_{máx} = KI_c$ ):

$$N = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C \Delta K^m} \quad [5.90]$$

A partir da Lei de Paris-Erdogan surgiram variações tentando aproximar o máximo possível da curva total incluindo o fator limite  $\Delta K_o$ , o valor crítico de propagação instável  $K_c$  e a razão de tensões  $R$  ( $R = \sigma_{mín}/\sigma_{máx}$ ). A equação de Forman [FORM67] é a que mais se aproxima utilizando estes fatores:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K^m - \Delta K_o^m)}{[(1-R)K_c] - \Delta K} \quad [5.91]$$

Para consideração do efeito de fadiga é acoplado ao elemento de viga com fratura um modelo que se aproxime das considerações citadas anteriormente. Seja então uma barra sujeita a um carregamento cíclico como ilustrado na figura 5.22. Durante cada ciclo de carregamento a fissura avança para um tamanho onde a tensão  $\sigma$  excede o valor crítico  $\sigma_c$  do metal.

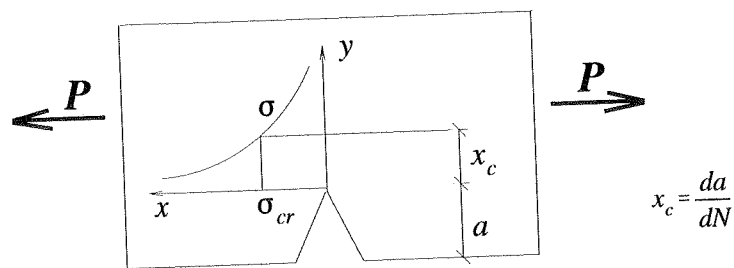


Figura 5.22- Barra Sujeita a Carregamento Cíclico.

Quando observado através de microscópio eletrônico verifica-se que para valores onde  $\Delta K < \Delta K_o$ , a fissura não avança, mas ocorre um abrandamento da ponta do crack-tip. Tomando como base este conhecimento idealiza-se a propagação de acordo com a ilustração seguinte, Figura 5.23 :

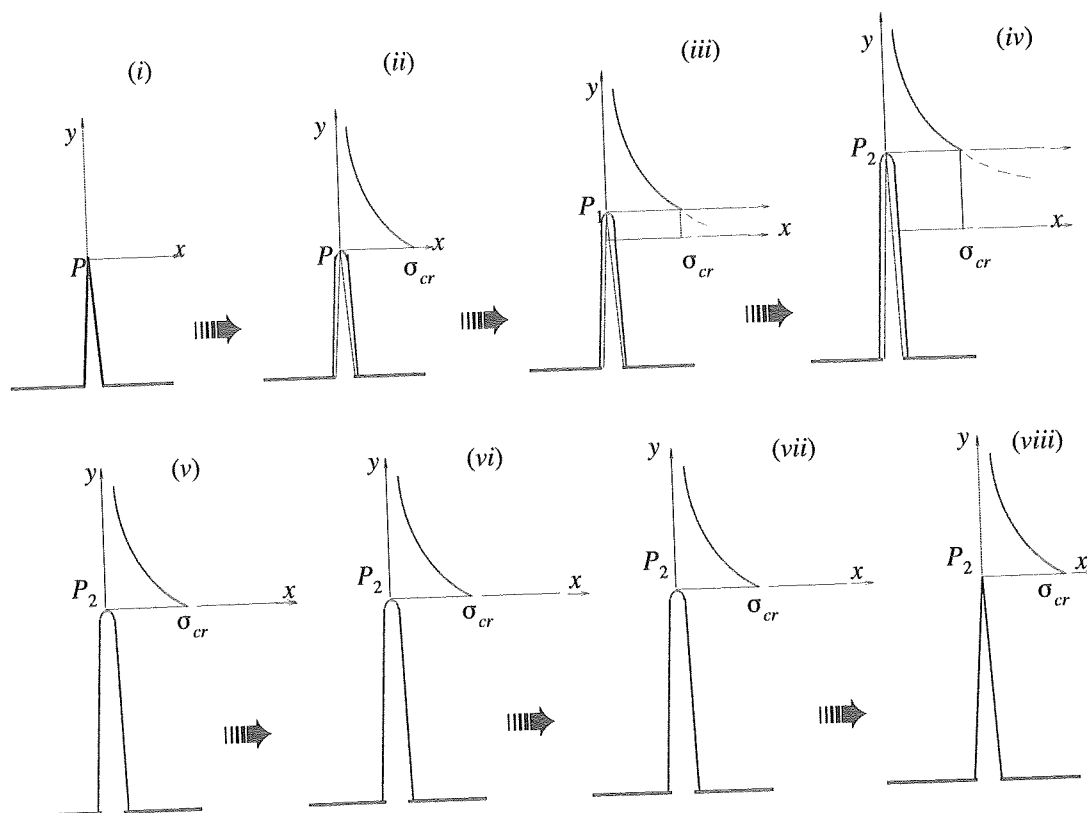


Figura 5.23 - Representação do Modelo de Propagação da Trinca.

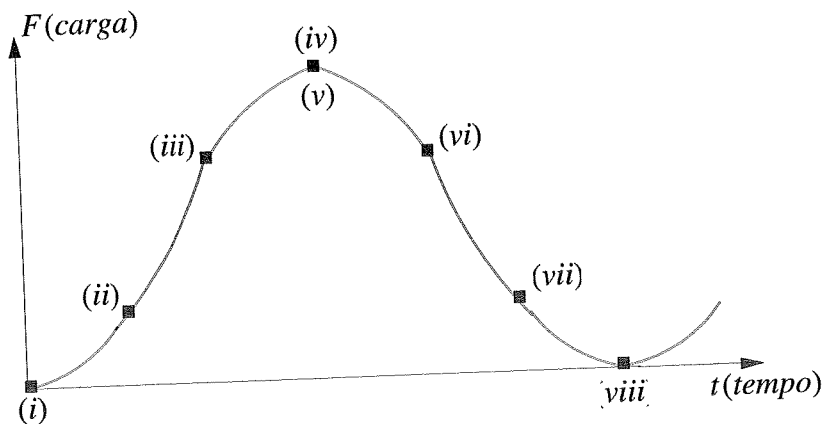
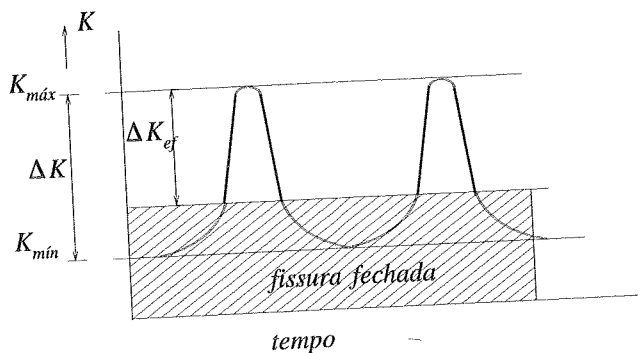


Figura 5.24 - Comportamento da Fissura.

Na ausência de carregamento, a fissura permanece fechada e o raio do crack-tip tende a ser pequeno (Fig. 5.24-i). Quando é aplicada a solicitação que leva o fator de intensidade de tensões a atingir o valor limite  $\Delta K_o$ , verifica-se que a fratura abre elasticamente e ocorre o abrandamento do crack-tip. Essa ação alivia a tensão na ponta da trinca sendo esta mantida abaixo da tensão crítica de fratura do metal ( $\sigma_{cr}$ ) como pode ser visto na Fig.24-ii. Aumentando-se a carga verifica-se um avanço do *crack tip* e ainda mais seu abrandamento (Fig. 24-iii). Finalmente quando o carregamento atinge o valor máximo, a ponta da trinca chega ao ponto  $P_2$  e ganha um incremento no seu raio (Fig. 24-iv). Iniciado o descarregamento o *crack-tip* permanece na nova posição mas torna-se outra vez pontudo e a fissura fecha (Fig.24-v). Durante toda a fase de descarregamento a tensão  $\sigma$  deve ser menor do que  $\sigma_{cr}$  ( $\sigma \leq \sigma_{cr}$ ) (Fig. 24-v-viii). Pode-se perceber que no processo descrito a diferença entre o fator de intensidade máximo e o de limite de propagação ( $\Delta K_{máx} - \Delta K_o$ ) controla todo o processo de expansão da trinca. Segundo ELBER[1971] esta diferença pode ser chamada de fator de intensidade de tensão efetivo  $\Delta K_{ef}$  e pode ser expresso como (Fig. 25):

$$\Delta K_{ef} = \Delta \sigma_{ef} f \sqrt{\pi c} \quad [5.92]$$

$$\begin{cases} \Delta \sigma_{ef} = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{cr} & \text{se } \sigma_{m\acute{i}n} < \sigma_{cr} \\ \Delta \sigma_{ef} = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n} & \text{se } \sigma_{m\acute{i}n} \geq \sigma_{cr} \end{cases} \quad \text{com } c = \frac{a}{2}$$

Figura 5.25 - Definição de  $\Delta K_{ef}$ .

Em cada ciclo de carregamento a fissura avança de  $x_c$ , ou melhor:

$$\frac{da}{dN} = x_c \quad (\sigma = \sigma_{cr}) \quad [5.93]$$

Para o caso de Fratura Mecânica Linear Elástica:

$$\sigma_{cr} = \frac{K}{\sqrt{2\pi x_c}} \quad [5.94]$$

Como  $K_{ef}$  é o parâmetro que governa a propagação tomaremos seu valor no lugar de  $K$ :

$$\frac{da}{dN} = C' \cdot \Delta K_{ef}^2 \quad [5.95]$$

onde:



$$C' = \frac{1}{2\pi \sigma_{cr}^2} \quad [5.96]$$

No Estágio III, o nível de tensão é bem elevado e na extremidade da trinca surge uma zona de plastificação considerável quando comparada com a geometria do espécime (Figura 5.26). A amplitude do Fator de Intensidade de Tensões ( $\Delta K$ ) atinge o valor crítico  $KI_C$  e a partir desse ponto a fratura passa a abrir de modo instável. A análise agora parte para Fratura Mecânica Não-Linear. Uma possibilidade de analisar este fenômeno é utilizar a Integral-J e aplicar os princípios citados no item 5.3 para representar a nova situação. Depois de cada ciclo a região do “*crack-tip*” acumula energia plástica sendo que a parte elástica dissipa. Quando a energia plástica acumulada exceder o valor limite :

$$J_C = \int_0^{\delta_c} \sigma d\delta \quad [5.97]$$

Integral-J pode ser dividida em duas parcelas, conhecidas como  $J_e$  (elástico) e  $J_p$  (plástico). Quando a energia de fratura do sistema altera de  $J_{máx}$  para  $J_{mín}$ , a amplitude desta energia será representada por :

$$\Delta J = J_{máx} - J_{mín} \quad [5.98]$$

Se  $J_{mín}$  excede o limite elástico então esta diferença será :  $J_{pl_{máx}} - J_{pl_{mín}}$ . Caso  $J_{mín}$  seja menor que o limite elástico a diferença agora será o próprio  $J_{pl_{máx}}$ . Resumindo, a energia de fratura plástica acumulada em um ciclo de carregamento deve ser:

$$J_{pl,acum} = \begin{cases} J_{máx} - J_{mín} & , \text{ se } J_{mín} \geq \frac{K^2}{E} \\ J_{máx} - J_e & , \text{ se } J_{mín} < \frac{K^2}{E} \end{cases} \quad [5.99]$$

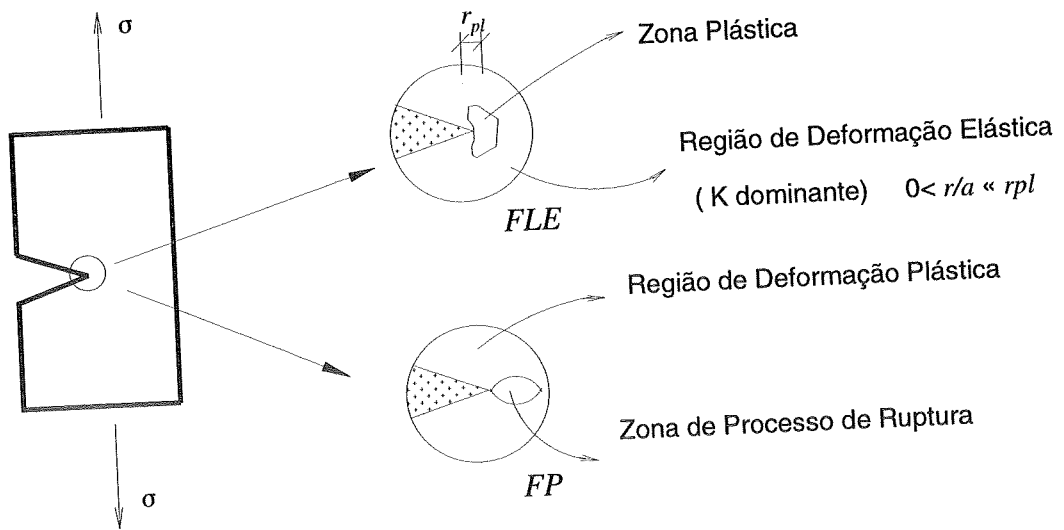


Figura 5.26 - Região de Plastificação na Extremidade da Trinca.

### 5.5. PROGRAMA RAST

O programa RAST (*Rißausbreitung in Stahlträger*) foi desenvolvido para estudo de problemas de fratura em vigas de aço. Sua elaboração segue a teoria desenvolvida neste trabalho, onde são considerados os conceitos da teoria elástica e elasto-plástica para formação de um elemento de viga com fratura (BEAM-FRAT).

Este programa, desenvolvido em linguagem FORTRAN, é constituído de duas fases. A primeira determina a constante  $k^*$  (rigidez associada a mola) para cada valor de comprimento de fratura  $a$  e este servirá como dado de entrada para a segunda parte. A fase seguinte consiste na formação da rigidez global e determina os deslocamentos e rotações originados em cada nó do elemento (BEAM-FRAT). A seguir apresenta-se a seqüência estruturada dos passos que determinam a estrutura do código computacional.

#### RAST (Algoritmo - Elemento de Viga com Fratura)

##### Parte 1 - FracM (Viga -I)

Calcula o valor do efeito de dano  $k^*$  no elemento quando este é submetido a uma fratura de comprimento  $a$ .

##### Subrotinas

Findj1 - Cálculo do Momento de Inércia quando a fratura está localizada na Mesa Inferior.

$$y_1 = [b_n * t_n * (t_w + h_w + t_n / 2) + h_w * t_w * (h_w / 2 + t_w) + t_w * b_w * t_w / 2] / (b_n * t_n + h_w * t_w + t_w * b_w)$$

$$e_{j1} = (b_n * t_n ** 3) / 12 + [b_n * t_n * (h_w + t_w + t_n / 2 - y_1) ** 2] + (t_w * h_w ** 3) / 12 + [t_w * h_w * (h_w / 2 + t_w - y_1) ** 2] + (b_w * t_w ** 3) / 12 + [b_w * t_w * (y_1 - t_w / 2) ** 2]$$

Findj2 - Cálculo do Momento de Inércia quando a fratura está localizada na Alma da Viga.

$$y_2 = [b_n * t_n * (h_w + t_n / 2) + h_w * t_w * (h_w / 2)] / (b_n * t_n + h_w * t_w)$$

$$e_{j2} = (b_n * t_n ** 3) / 12 + [b_n * t_n * (h_w + t_n / 2 - y_2) ** 2] + (t_w * h_w ** 3) / 12 + [t_w * h_w * (h_w / 2 - y_2) ** 2]$$

Findj3 - Cálculo do Momento de Inércia quando a fratura está localizada na Alma da Viga.

$$y_3 = [b_n * t_n * (t_n / 2) + (b_n * t_n)] / (b_n * t_n)$$

$$e_{j3} = (b_n * t_n ** 3) / 12 + [b_n * t_n * (t_n / 2 - y_3) ** 2]$$

Início

1. Entrada de Dados

1.1. Parâmetros Básicos: bf1, bf2, tf1, tf2, hw, tw, ei, emc, eme, ee0

1.2. Fratura: a

2. Calcule  $\Gamma$

emiv = eme/emc

r = 0.8\*a

chame findj1 para calcular ei (momento de inércia da viga não-fraturada)

Faça i variar de 1 a n (ex.: n = 15.000)

xi = (i-1)\*r/n+dx

ax = a\*(r-xi)/r

Localização da Fratura na Seção Transversal

Se ax ≤ tf2

tff2 = tf2 - ax

chame findj1

Se tf2 ≤ ax e ax < hw+tf2

hhw = hw+tf2-ax

chame findj2

Se ax > tf2+hw

tff1 = hw+tf2+tf1-ax

chame findj3

Fim de Se

Calcule a função gx

gx = (ei - ej)/ej

Calcule  $\Theta_i$  (i=1,3)

$\Theta_i = \Theta_i + xi^{**}(i-1)*gx*dx$

Fim - Faça

$\Gamma = \Theta_1 + 2*(emiv-1)/ei * \Theta_2 + (emiv-1)**2/ei**2 * \Theta_3$

3. Calcule de k\*

k\* = ee0\*ej/t

4. Imprima os Dados

bf1, bf2, tf1, tf2, hw, tw, ei, a, k\*

5. Fim

## Parte 2 - RAST (Viga -I)

Forma a matriz de rigidez do elemento de viga com fratura (BEAM-FRAT) a partir do valor de k\* correspondente a abertura da trinca.

Início

1. Entrada de Dados

1.1. Parâmetros Básicos: ea, eiy, ee, el1, el2, xmp, ek1, ek2, nb

bb(j), pp(i)

2. Calcule a Rigidez Equivalente ek

$$ek \leftarrow 1 / (1/ek1 + 1/ek2)$$

3. Forme a Matriz de Rigidez dos Elementos Esquerdo e Direito

chame ks

$$ai \leftarrow ek / (uk2 + ek) - (uk1 + ek) / ek$$

$$bi \leftarrow ek / (uk1 + ek) - (uk2 + ek) / ek$$

escreva ai, bi, ek

4. Chame a Subrotina Rast para Composição da Matriz Global (esquerdo + direito)

5. Chame klein para obter as rotações dfi1, dfi2

6. Calcule o momento xmc

$$xmc \leftarrow ek * [abs(df2) - df1]$$

Critério de Plastificação

$$f \leftarrow [abs(xmc) / xmp] - 1$$

Se  $f \leq 0$

escreva uu, pp (carga, deslocamento) e depois PARE

Se  $f > 0$

$$ek \leftarrow xmp / abs(df2 - df1)$$

Retorne para 3

Fim - Se

7. Fim.

A subrotina ks, que forma a matriz de rigidez dos elementos esquerdo e direito e a subrotina Rast, que faz a composição destes elementos estão descritas no programa fonte cuja listagem se encontra no apêndice B.

### 5.6. MODELO COMPARATIVO - MEF

Existem várias formas de modelagem de fissuras. O Método dos Elementos Finitos (MEF) permite a solução numérica e estabelece procedimentos padrões para a solução de problemas práticos no campo da mecânica da fratura. O programa ANSYS é utilizado aqui como ferramenta básica para a elaboração do modelo de viga - I, metálica, que apresenta uma fratura proveniente de carregamentos cíclicos.

Supõe-se um modelo padrão, de uma viga de ponte, sendo este tridimensional, apresentando uma única fissura numa posição qualquer ao longo do vão. Esta fissura deve atravessar a mesa inferior e toda a alma da viga, com exceção da mesa superior. Para isto, inicia-se uma fissura com tamanho e abertura pré-determinada, sendo precisamente localizada na mesa inferior. Na etapa seguinte, torna-se cada vez maior o comprimento da fratura até esta atingir a borda inferior da mesa superior da viga, exatamente como deve ocorrer em modelos reais. A finalidade deste modelo é servir como base comparativa ao elemento de viga com fratura desenvolvido.

A modelagem da viga é feita utilizando-se o elemento finito *SHELL43 (Plastic Shell)*. (Figura 5.27). Este elemento apresenta 6 graus de liberdade por nó ( $u_x, u_y, u_z, Rot_x, Rot_y, Rot_z$ ) e foi indicado pelo CADFEM (*Gesellschaft für Computer unterstützte Konstruktion und Berechnung GmbH*), como adequado à modelagem da fratura e formação do *crack tip*

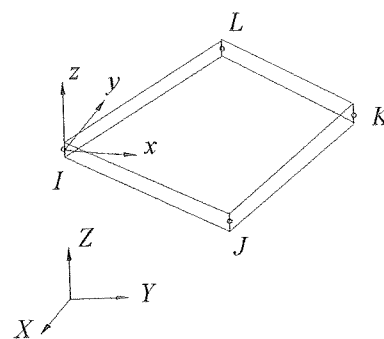


Figura 5.27 - Shell43 -Plastic Shell.

(zona de platificação). Assim, preparou-se um modelo onde a fratura propaga desde a mesa inferior da viga até uma altura correspondente à  $(h - bf_1)$ , onde  $h$  é a altura da viga e  $bf_1$  a espessura da mesa inferior.

A simulação da propagação da fissura exige a verificação contínua de um critério de abertura. Inicialmente deve-se estabelecer uma abertura artificial  $a_0$ . A etapa seguinte consiste na eliminação gradual dos vínculos (Figura 5.28) cuja condição adotada será a avaliação da reação  $R$  neste vínculo a ser liberado quando:  $R = R_y$ . A figura 5.29 apresenta uma vista bidimensional da viga I modelada no programa Ansys e a formação da extremidade da fissura com o comando KSCON para  $a = 600\text{mm}$ .

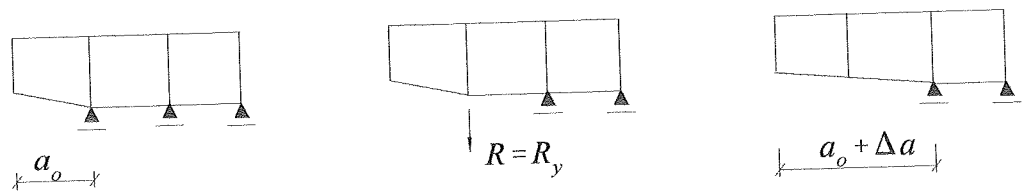


Figura 5.28 - Propagação Simulada Através de Liberação Gradual de Vínculos.

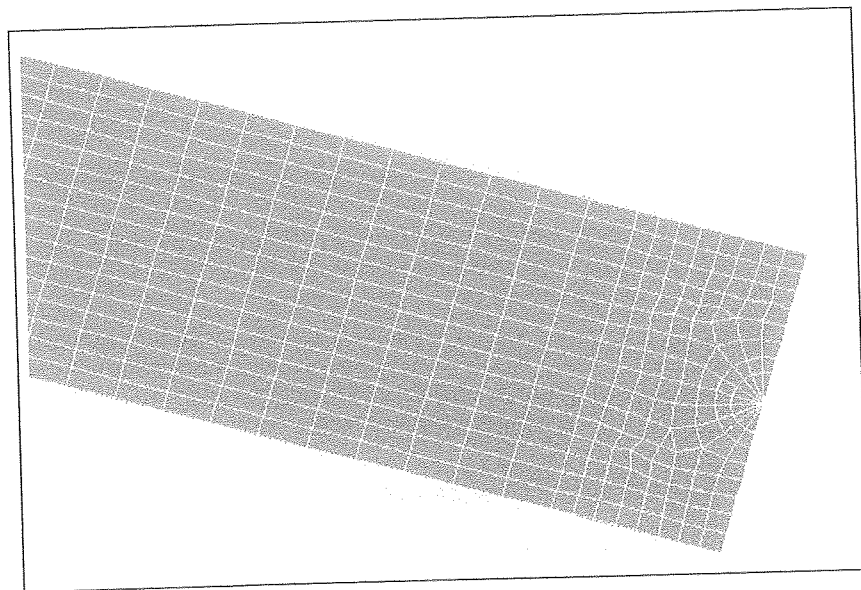


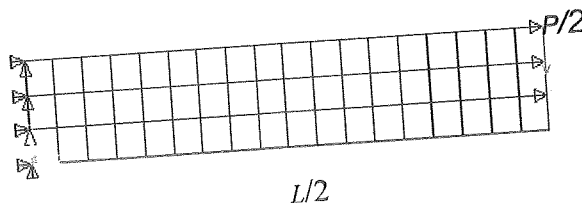
Figura 5.29 - Modelagem da Viga de Aço no Programa Ansys.

### 5.6.1. Calibração do Modelo de Viga com Fratura (M.V.F)

Os resultados obtidos com o M.V.F. (modelo de viga com fratura - programa RAST) foram comparados com os resultados dos modelos elaborados no programa Ansys.

O primeiro modelo consiste de uma viga-2D, de seção retangular, simplesmente apoiada e solicitada por uma carga concentrada  $P$  no meio do vão. Para simular a fratura divide-se a viga em duas metades e aplica-se as condições de contorno como indicado na figura a seguir.

ANSYS Graphics  
CASO 01 CARGA CONCENTRADA P NO MEIO DO VÃO



$$\Delta_{\max(a=0)} = \frac{PL^3}{192EI}$$



SEÇÃO RETANGULAR

$H/b$	$L/H$	$A \text{ (mm}^2\text{)}$	$I \text{ (mm}^4\text{)}$	$\sigma_v \text{ (kN/mm}^2\text{)}$	$E \text{ (kN/mm}^2\text{)}$	$P \text{ (kN)}$
4,50	44,44	1.800,00	$1,215 \times 10^6$	0,25	205,00	1,00



## 5 Elemento de Viga com Fratura

ANSYS				RAST		
$a/H$	0,0	0,333	0,666	0,0	0,333	0,666
$\Delta$	1,336	1,390	1,750	1,340	1,390	1,800

$k^*$	$0,149 \times 10^{21}$	$0,957 \times 10^7$	$0,840 \times 10^6$
-------	------------------------	---------------------	---------------------

$H/b$	$L/H$	$A(\text{mm}^2)$	$I(\text{mm}^4)$	$\sigma_y(\text{kN/mm}^2)$	$E(\text{kN/mm}^2)$	$P(\text{kN})$
2,00	20,00	20.000,00	$0,667 \times 10^8$	0,25	205,00	1,00
ANSYS				RAST		
$a/H$	0,0	0,333	0,666	0,0	0,333	0,666
$\Delta$	0,0248	0,0275	0,0390	0,0244	0,0264	0,0420

$k^*$	$0,182 \times 10^{23}$	$0,120 \times 10^9$	$0,107 \times 10^8$
-------	------------------------	---------------------	---------------------

$H/b$	$L/H$	$A(\text{mm}^2)$	$I(\text{mm}^4)$	$\sigma_y(\text{kN/mm}^2)$	$E(\text{kN/mm}^2)$	$P(\text{kN})$
2,00	33,33	7.200,00	$0,864 \times 10^7$	0,25	205,00	1,00
ANSYS				RAST		
$a/H$	0,0	0,333	0,666	0,0	0,333	0,666
$\Delta$	0,0188	0,199	0,262	0,0188	0,198	0,280

$k^*$	$0,142 \times 10^{20}$	$0,512 \times 10^8$	$0,450 \times 10^7$
-------	------------------------	---------------------	---------------------

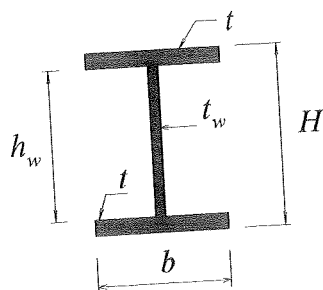
## 5 Elemento de Viga com Fratura

$H/b$	$L/H$	$A(\text{mm}^2)$	$I(\text{mm}^4)$	$\sigma_y(\text{kN/mm}^2)$	$E(\text{kN/mm}^2)$	$P(\text{kN})$
1,50	44,44	5.400,00	$0,365 \times 10^7$	0,25	205,00	1,00
<b>ANSYS</b>				<b>RAST</b>		
$a/H$	0,0	0,333	0,666	0,0	0,333	0,666
$\Delta$	0,444	0,464	0,590	0,445	0,463	0,618

$k^*$	$0,448 \times 10^{19}$	$0,287 \times 10^8$	$0,252 \times 10^7$
-------	------------------------	---------------------	---------------------

$H/b$	$L/H$	$A(\text{mm}^2)$	$I(\text{mm}^4)$	$\sigma_y(\text{kN/mm}^2)$	$E(\text{kN/mm}^2)$	$P(\text{kN})$
1,00	13,33	90.000,00	$0,675 \times 10^9$	0,25	205,00	1,00
<b>ANSYS</b>				<b>RAST</b>		
$a/H$	0,0	0,333	0,666	0,0	0,333	0,666
$\Delta$	0,00252	0,00296	0,00429	0,00241	0,00270	0,00475

$k^*$	$0,277 \times 10^{22}$	$0,163 \times 10^{10}$	$0,144 \times 10^9$
-------	------------------------	------------------------	---------------------



SEÇÃO I

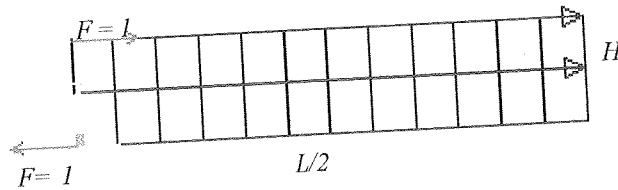
$H/b$	$L/H$	$A(\text{mm}^2)$	$I(\text{mm}^4)$	$\sigma_y(\text{kN/mm}^2)$	$E(\text{kN/mm}^2)$	$P(\text{kN})$
2,18	3,33	61.920,00	$0,167 \times 10^{11}$	0,25	205,00	1,00

ANSYS			RAST	
$a/H$	0,0	0,499	0,0	0,499
$\Delta$	$0,092 \times 10^{-4}$	$0,280 \times 10^{-3}$	$0,097 \times 10^{-4}$	$0,275 \times 10^{-3}$

$k^*$	$0,576 \times 10^{23}$	$0,595 \times 10^9$
-------	------------------------	---------------------

ANSYS Graphics

## Caso 02 Momento Aplicado M



$$M = K_m \cdot \theta, \quad \sigma_x = 3M / 2H^2$$

$$M = F \cdot H, \quad \theta = \Delta / (H/2)$$

$$\text{Para: } L = 1.000,00\text{mm}, H = 120,00\text{mm}$$

$$E = 205 \text{ kN/mm}^2, \sigma_y = 0,250 \text{ kN/mm}^2$$

ANSYS			RAST	
$a/H$	0,0	0,333	0,0	0,333
$\Delta$	0,1213	0,5120	0,1270	0,5760

---

*“ Eu nunca me satisfaço até que eu possa fazer um modelo mecânico de uma coisa”  
Lord Kelvin.*

# 6

## MODELO DINÂMICO PARA DETECTAR FRATURA NUMA VIGA DE PONTE

### 6.1. MÉTODO DE ANÁLISE INVERSA

A presença de uma fissura numa viga de ponte tem como consequência a redução gradativa da sua rigidez  $K$  associada à propagação, que afeta consideravelmente a resposta dinâmica de todo o conjunto estrutural. A partir dessa característica pode-se chegar a um procedimento inverso para o problema que consiste em localizar e determinar a amplitude da fissura no aço

utilizando um método eficiente e não-destrutivo.

Uma das características que a mudança de rigidez do elemento estrutural conduz são as alterações na sua frequência natural o que pode ser considerado como parâmetro no processo de localização da falha. Assim, as medições de frequência em dois estágios diferentes da vida de uma viga possibilitam a localização do dano e ainda determinam o grau de severidade do mesmo.

Supõe-se agora um modelo no qual a frequência natural e os modos de vibração são obtidos antes de surgir qualquer fissura e que seja possível detectar a inclusão de fissuras no elemento através de medidas de frequências posteriores. Para elaboração do modelo dinâmico é necessário recorrer aqui ao **Método Inverso de Análise** uma vez que para a determinação da frequência da viga fraturada precisa-se de início ter em mãos a redução de rigidez associada a um comprimento de fissura " $a$ ". Em outras palavras, uma mudança da frequência natural na viga da ponte está diretamente interligada a reduções no seu momento de inércia  $I$  e portanto na sua rigidez  $K$  na ocasião de abertura da trinca. Deve-se portanto, encontrar primeiramente a perda desta rigidez para em seguida analisar o processo dinâmico (Figura 6.1).

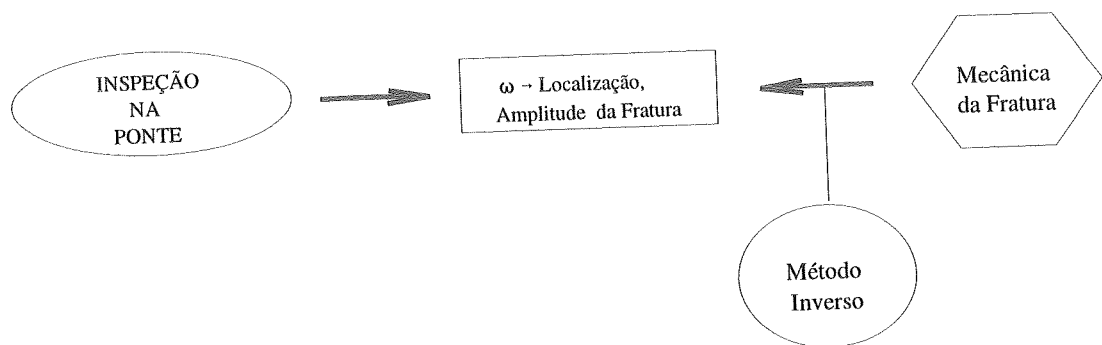


Figura 6.1 - Método Para Identificação da Fratura na Viga de Ponte.

## 6.2. VIBRAÇÃO LIVRE - VIGA SIMPLEMENTE APOIADA

Seja o caso de uma viga de ponte de aço com propriedades uniformes ao longo do comprimento e ilustrada na Figura 6.2:

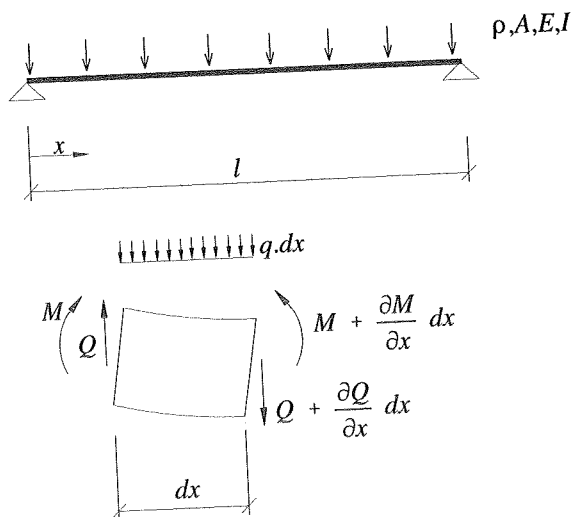


Figura 6.2.- Modelo de Viga Biapoiada.

onde :

$$M = -EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad q = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \quad [6.1]$$

Aplicando-se o Princípio de D'Alembert :

$$q = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad [6.2]$$

Substituindo-se a equação anterior [6.1] em [6.2] obtém-se a equação diferencial de movimento da viga:

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 0 \quad [6.3]$$

onde  $\rho$  é a densidade do material,  $A$  é a área da seção transversal da viga e  $u$  a deflexão.

A solução da equação [6.3] é dada na seguinte forma:

$$u(x,t) = \varphi(x) \cdot \sin(\omega t) \quad [6.4]$$

que substituindo em [6.3], obtém-se depois de simples transformações algébricas:

$$\rho A \omega^2 \varphi(x) - EI \varphi(x)^{iv} = 0 \quad [6.5]$$

$$\Rightarrow \varphi(x)^{iv} + \beta \varphi(x) = 0 \quad [6.6]$$

$$\text{sendo: } \beta = - \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

A solução geral desta equação para o caso em que  $EI$  e  $\rho A$  são constantes é escrita como:

$$\varphi(x) = C_1 \cos \lambda \xi + C_2 \sin \lambda \xi + C_3 \cosh \lambda \xi + C_4 \sinh \lambda \xi \quad [6.7]$$

$$\text{com: } \xi = \frac{x}{l} \quad \text{e} \quad \lambda = l \sqrt[4]{\beta}$$

$C_1, C_2, C_3, C_4$  são as constantes de integração dadas pelas condições de contorno.

No caso do problema proposto as condições de contorno são:

$$\text{i: } \varphi(0) = 0 = C_1 + C_3$$

$$\text{ii: } \varphi''(0) = 0 = -C_1 + C_3$$

$$\text{iii: } \varphi(l) = 0 = C_2 \sin \lambda + C_4 \sinh \lambda$$

$$\text{iv: } \varphi''(l) = 0 = -C_2 \sin \lambda + C_4 \sinh \lambda$$

As duas primeiras equações indicam imediatamente que  $C_1 = C_3 = 0$ .  
Resolvendo-se as equações (iii) e (iv), obtem-se:

$$C_4 = 0, \quad \sinh \lambda = 0 \quad \text{somente para } \lambda = 0$$

portanto, a solução do sistema fica dado por:

$$\sin \lambda = 0, \quad \lambda = \pi, 2\pi \dots, i\pi$$

Assim obtém-se um conjunto de possíveis valores  $\omega$  onde estes são dados pela seguinte fórmula:

$$\Rightarrow \omega_i = i^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{l^4 \rho A}} \quad [6.8]$$

A equação [6.8] fornece as frequências  $\omega_i$  associadas aos modos de vibração ( $i = 1, 2, \dots$ ). Substituindo-se as constantes  $C_1, C_2, C_3, C_4$  na equação [6.7] encontra-se os modos de vibração  $\varphi$  (Figura 6.3), onde:

$$\varphi_i = C \sin(i \pi \xi) \quad [6.9]$$

sendo  $C$  uma constante arbitrária.

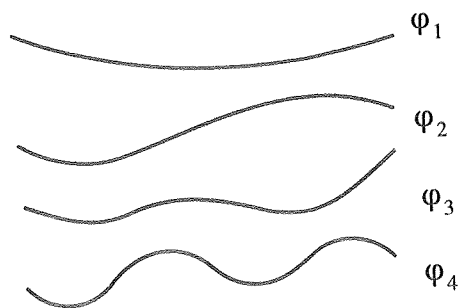


Figura 6.3 - Modos de Vibração.

Na tabela 6.1 são apresentados os valores de  $\lambda$  para as respectivas condições de contorno.



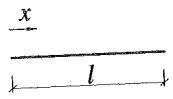








	Sistema	Condições de contorno	valores de $\lambda$			
			$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n > 3$
1		$u''(0) = 0 \quad u'''(0) = 0$ $u''(l) = 0 \quad u'''(l) = 0$	0,000	4,730	7,853	$\frac{2n-1}{2}\pi$
2		$u''(0) = 0 \quad u'''(0) = 0$ $u'(l) = 0 \quad u'''(l) = 0$	0,000	2,365	5,498	$\frac{4n-5}{4}\pi$
3		$u'(0) = 0 \quad u'''(0) = 0$ $u'(l) = 0 \quad u'''(l) = 0$	0,000	3,142	6,283	$n-1\pi$
4		$u'(0) = 0 \quad u'''(0) = 0$ $u(l) = 0 \quad u''(l) = 0$	1,571	4,712	7,852	$\frac{2n-1}{2}\pi$
5		$u(0) = 0 \quad u'(0) = 0$ $u''(l) = 0 \quad u'''(l) = 0$	1,875	4,694	7,855	$\frac{2n-1}{2}\pi$
6		$u(0) = 0 \quad u'(0) = 0$ $u(l) = 0 \quad u''(l) = 0$	3,142	6,283	9,425	$n\pi$
7		$u(0) = 0 \quad u'(0) = 0$ $u(l) = 0 \quad u''(l) = 0$	3,927	7,069	10,210	$\frac{4n+1}{4}\pi$
8		$u(0) = 0 \quad u'(0) = 0$ $u'(l) = 0 \quad u'''(l) = 0$	2,365	5,498	8,639	$\frac{4n-1}{4}\pi$
9		$u(0) = 0 \quad u'(0) = 0$ $u(l) = 0 \quad u'(l) = 0$	4,730	7,853	10,996	$\frac{2n+1}{2}\pi$

Tabela 6.1 - Valores de  $\lambda$  para as Condições de Contorno.

### 6.3. MODELO TEÓRICO COM FRATURA

No modelo físico de uma viga que apresenta uma fratura Modo I, Figura 6.4, pode-se representar a flexibilidade local introduzida por uma mola rotacional sem massa e de constante  $K_m$ .

De acordo com a teoria básica de vibração o movimento harmônico da viga nos dois lados da mola pode ser descrito como:

$$\begin{cases} u_1(\beta) = A_1 \sin \lambda \beta + A_2 \cos \lambda \beta + A_3 \sinh \lambda \beta + A_4 \cosh \lambda \beta \\ u_2(\beta) = B_1 \sin \lambda \beta + B_2 \cos \lambda \beta + B_3 \sinh \lambda \beta + B_4 \cosh \lambda \beta \end{cases} \quad [6.10]$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são os deslocamentos nos dois lados, direito e esquerdo, da fissura,  $\beta$  é um parâmetro de posição da fissura dado como  $\beta = x_c / l$  e

$\lambda^4 = \frac{\omega^2 A \rho}{EI}$ , quando  $\omega$  é a frequência natural de vibração da viga,  $\rho$  é a densidade do material,  $I$  o momento de Inércia e a  $A$  a área da seção transversal.

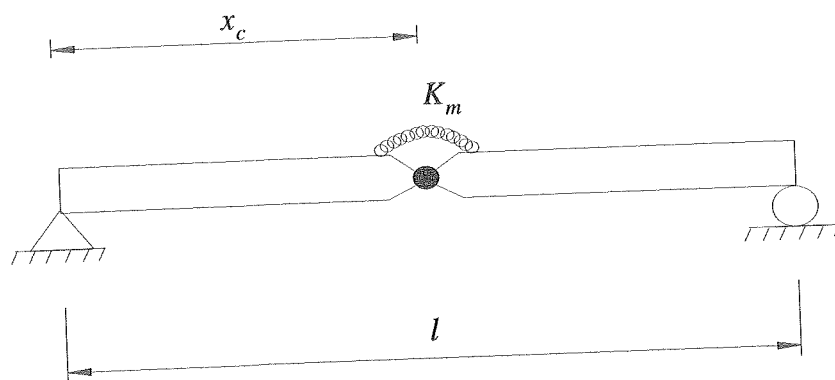


Figura 6.4 - Modelo Numérico de Viga com Fratura Modo I em  $x_c = \beta.l$

□ Para o caso de viga simplesmente apoiada:

i) Condições de Contorno:

$$\begin{cases} u_1(0)=0 \\ u_1''(0)=0 \\ u_2(l)=0 \\ u_2''(l)=0 \end{cases} \quad [6.11]$$

ii) Condições Para Continuidade na Região da Fissura:

$$\begin{cases} u_1(\beta) = u_2(\beta) \\ u_1''(\beta) = u_2''(\beta) \\ u_1'''(\beta) = u_2'''(\beta) \end{cases} \quad [6.12]$$

iii) Condição de Compatibilidade devido a Rigidez da Mola:

$$u_1'(\beta) + \left( \frac{EI}{K_m} \right) u_1''(\beta) = u_2'(\beta) \quad [6.13]$$

O comportamento da viga danificada é representado por uma constante de mola torcional  $K_m$  em um determinado ponto  $\beta$ , e caracterizado pelo parâmetro adimensional  $K$ , onde:  $K = K_m \cdot L/EI$ .

Após o equacionamento completo, deve-se aplicar o *método inverso*. Este método permite recorrer à mecânica da fratura e determinar a rigidez da mola  $K_m$ , quando ocorrer uma fratura  $a$  no elemento. Com esse recurso é possível conhecer primeiramente a rigidez que será associada à variação da frequência natural da estrutura avaliada. Uma vez obtida a rigidez, procede-se com a técnica de avaliação verificando as mudanças de frequência. A consideração da fratura conduz a uma nova frequência natural na viga de tal modo que:  $\omega_f = \omega_n - \Delta\omega$  e ainda:  $\kappa^4 = \omega_f^2(A\rho/EI)$ . Combinando-se as equações [6.11], [6.12] e [6.13], obtém-se a equação característica da viga fraturada:

6 Modelo Dinâmico Para Detectar Fratura Numa Viga de Ponte

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cosh(\kappa\beta) & \sinh(\kappa\beta) & \cos(\kappa\beta) & \sin(\kappa\beta) & -\cosh(\kappa\beta) & -\sinh(\kappa\beta) & -\cos(\kappa\beta) & -\sin(\kappa\beta) \\
 \sinh(\kappa\beta) & \cosh(\kappa\beta) & \sin(\kappa\beta) & -\cos(\kappa\beta) & -\sinh(\kappa\beta) & -\cosh(\kappa\beta) & -\sin(\kappa\beta) & \cos(\kappa\beta) \\
 \cosh(\kappa\beta) & \sinh(\kappa\beta) & -\cos(\kappa\beta) & -\sin(\kappa\beta) & \cosh(\kappa) & \sinh(\kappa) & \cosh(\kappa) & \sinh(\kappa) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh(\kappa) & \sinh(\kappa) & -\cosh(\kappa) & -\sinh(\kappa) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\kappa}{k}\right)\cosh(\kappa\beta) + \sinh(\kappa\beta) & \left(\frac{\kappa}{k}\right)\cosh(\kappa\beta) & \left(\frac{\kappa}{k}\right)\sinh(\kappa\beta) & \left(\frac{\kappa}{k}\right)\sinh(\kappa\beta) \\
 \left(\frac{\kappa}{k}\right)\sin(\kappa\beta) + \cos(\kappa\beta) & \left(\frac{\kappa}{k}\right)\cosh(\kappa\beta) + \sinh(\kappa\beta) & \left(\frac{\kappa}{k}\right)\sin(\kappa\beta) - \cos(\kappa\beta) & \left(\frac{\kappa}{k}\right)\cos(\kappa\beta) - \sin(\kappa\beta) & -\left(\frac{\kappa}{k}\right)\sinh(\kappa\beta) & -\left(\frac{\kappa}{k}\right)\cosh(\kappa\beta) & \left(\frac{\kappa}{k}\right)\sin(\kappa\beta) & -\left(\frac{\kappa}{k}\right)\cos(\kappa\beta)
 \end{array}
 \end{array}
 = 0$$

[6.14]

Simbolicamente pode-se dizer que :

$$\Delta = 0$$

[6.15]

Para solução de [6.14], seja dado o seguinte determinante :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \\ f' \\ \mu g' + h' \end{vmatrix} \quad [6.16]$$

e assim:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \\ f' \\ h' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \\ f' \\ \mu g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \\ f' \\ h' \end{vmatrix} + \mu \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \\ f' \\ g' \end{vmatrix} \quad [6.17]$$

É possível escrever  $\Delta$  utilizando-se o artifício indicado em [6.17], e portanto :

$$\Delta = \Delta_2 + \mu \Delta_1 = 0$$

[6.18]

onde:  $\mu = K / \kappa$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sinh(\kappa\beta) & \sin(\kappa\beta) & -\cosh(\kappa\beta) & -\sinh(\kappa\beta) & -\cos(\kappa\beta) & -\sin(\kappa\beta) \\ \cosh(\kappa\beta) & -\cos(\kappa\beta) & -\sinh(\kappa\beta) & -\cosh(\kappa\beta) & -\sin(\kappa\beta) & \cos(\kappa\beta) \\ \sinh(\kappa\beta) & -\sin(\kappa\beta) & -\cosh(\kappa\beta) & -\sinh(\kappa\beta) & \cos(\kappa\beta) & \sin(\kappa\beta) \\ 0 & 0 & \cosh(\kappa) & \sinh(\kappa) & \cos(\kappa) & \sin(\kappa) \\ 0 & 0 & \cosh(\kappa) & \sinh(\kappa) & -\cos(\kappa) & -\sin(\kappa) \\ \cosh(\kappa\beta) & \cos(\kappa\beta) & -\sinh(\kappa\beta) & -\cosh(\kappa\beta) & \sin(\kappa\beta) & -\cos(\kappa\beta) \end{vmatrix} \quad [6.19]$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sinh(\kappa\beta) & \sin(\kappa\beta) & -\cosh(\kappa\beta) & -\sinh(\kappa\beta) & -\cos(\kappa\beta) & -\sin(\kappa\beta) \\ \cosh(\kappa\beta) & -\cos(\kappa\beta) & -\sinh(\kappa\beta) & -\cosh(\kappa\beta) & -\sin(\kappa\beta) & \cos(\kappa\beta) \\ \sinh(\kappa\beta) & -\sin(\kappa\beta) & -\cosh(\kappa\beta) & -\sinh(\kappa\beta) & \cos(\kappa\beta) & \sin(\kappa\beta) \\ 0 & 0 & \cosh(\kappa) & \sinh(\kappa) & \cos(\kappa) & \sin(\kappa) \\ 0 & 0 & \cosh(\kappa) & \sinh(\kappa) & -\cos(\kappa) & -\sin(\kappa) \\ \sinh(\kappa\beta) & -\sin(\kappa\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad [6.20]$$

Considerando-se que a viga não esteja fraturada, pode-se dizer que :

$K \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta_2$  é muito pequeno quando comparado com a segunda parcela da equação [6.18]. Pode-se ainda dizer que  $\Delta_2 \approx 0$ , restando:  $\frac{K}{\kappa} \Delta_1 = 0$ .

Se  $K \neq 0$ , pode-se dizer que:

$$\Delta_1 = 0 \quad [6.21]$$

A equação [6.21] é a equação característica da viga não-fraturada e neste caso  $\omega = \omega_n$  é a frequência natural da viga.

Escrevendo-se novamente a equação [6.18] para o caso de uma viga fraturada, obtém-se:

$$\frac{1}{K} = -\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \cdot \frac{1}{\kappa} = -\Gamma(\omega_f, \beta) \quad [6.22]$$

sendo :  $\omega_f = \omega_n - \Delta \omega_n$  e ainda aproximando-se  $\Gamma$  a partir da série de Taylor, pode-se então expressar a função  $\Gamma(\omega_f, \beta)$  como:

$$\Gamma(\omega_f, \beta)|_{\omega_f} = \Gamma(\omega_f, \beta)|_{\omega_n} - \frac{\partial \Gamma(\omega_f, \beta)|_{\omega_n}}{\partial \omega_f} \Delta \omega_n \quad [6.23]$$

Aplicando-se agora as equações [6.21], [6.22] e [6.23], tem-se finalmente que:

$$\Delta \omega_n = \frac{2\omega_n \cdot \Omega_n(\beta)}{K} \quad [6.24]$$

onde  $\Omega_n$  é uma função determinada segundo a posição da fratura e é calculada utilizando-se a seguinte expressão resultante do desenvolvimento de [6.23]:

$$\Omega_n(\beta) = \left[ \frac{\partial}{\partial \kappa} \left( -\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right)_{\omega_n} \right]^{-1} \quad [6.25]$$

A equação [6.24] fornece uma relação teórica onde é possível verificar as mudanças na frequência do elemento como uma função da frequência natural da viga não fraturada, da função  $\Omega_n$  e da constante adimensional  $K$ .

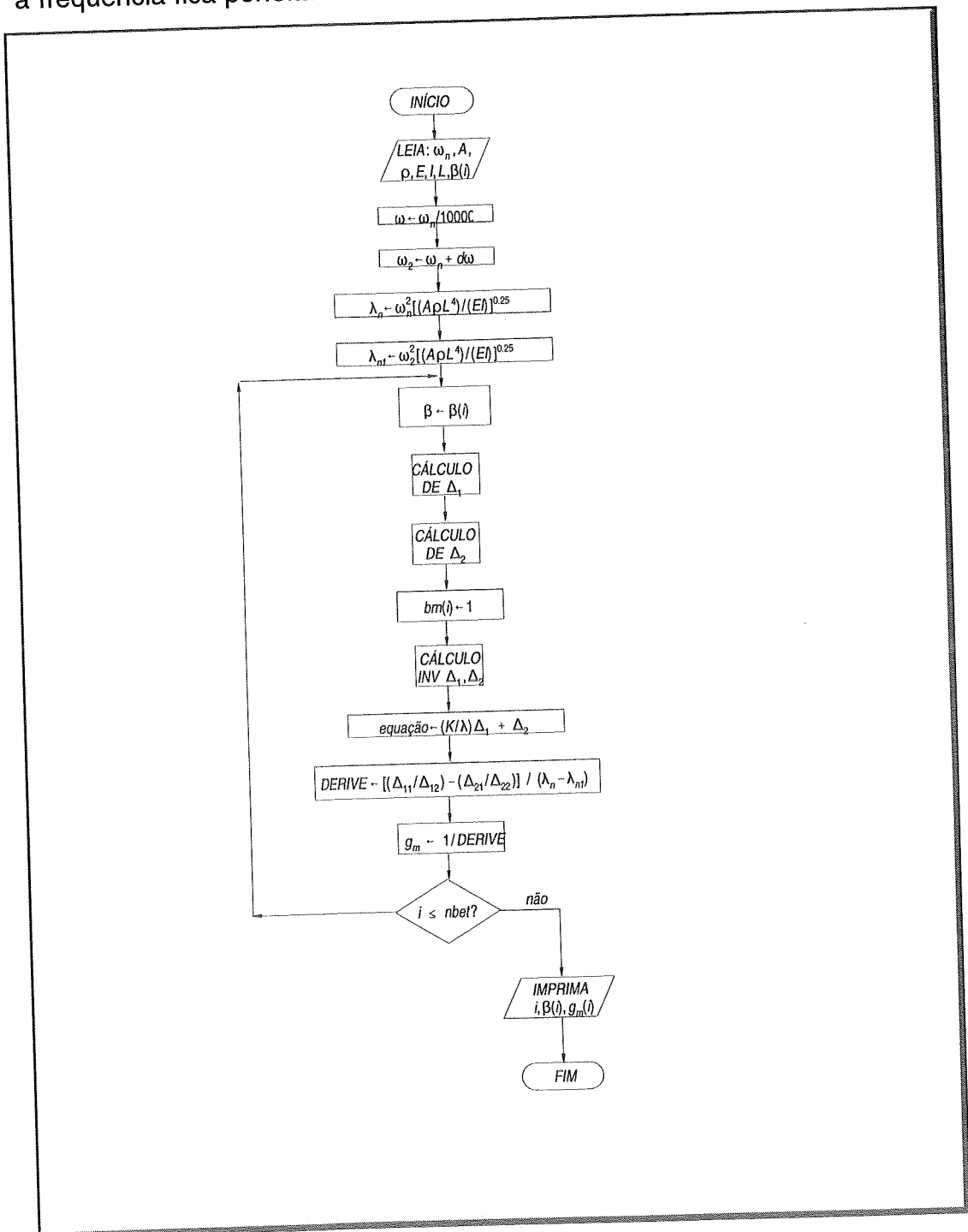
Com base neste desenvolvimento teórico elaborou-se o programa **EIGFRISS** (*Eigenfrequenz für Rißmodelle*), sendo escrito na linguagem FORTRAN. **EIGFRISS** é capaz de detectar e/ou fornecer informações sobre o grau de severidade de fratura numa viga de ponte, tendo como dados iniciais suas propriedades geométricas. Assim, quando realizada uma inspeção na estrutura, pode-se seguramente verificar através desta análise modal a dependência de alterações de frequência como:

$$\Delta \omega^2 = \omega^2(\alpha_d, \beta) \quad [6.26]$$

onde  $\omega$  é a frequência natural da viga,  $\alpha_d$  magnitude da fratura, e  $\beta$  a localização da fratura.

O fluxograma do programa **EIGFRISS** é ilustrado pela figura [6.5]. Como esse estudo numérico é extensivo, a vantagem de utilizar-se o software desenvolvido é representado pela possibilidade de cálculo imediato da função  $\Omega_n$ , facilitando deste modo a obtenção da frequência da viga.

O cálculo da frequência natural do elemento estrutural sem fratura, pode ser feito através do programa **FREQUENZ**, também escrito em FORTRAN. O princípio utilizado nesta análise é aquele proposto pela equação [6.21], onde a frequência fica perfeitamente determinada quando utiliza-se este artifício.





A figura 6.5 apresenta  $\Omega_1(\beta)$  e  $\Omega_2(\beta)$ , processados pelo **EIGFRISS**, correspondentes ao primeiro e segundo modo de vibração, respectivamente.

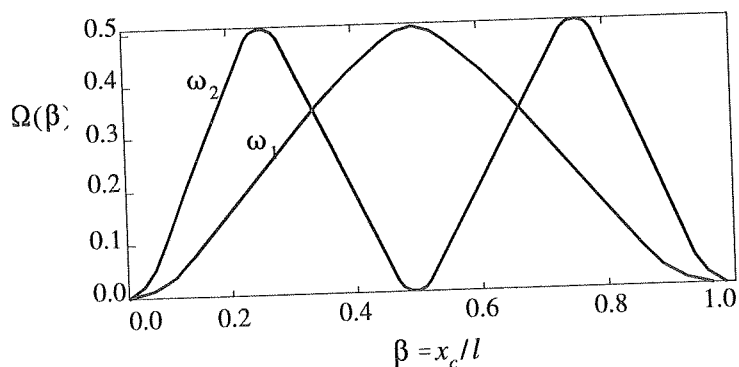


Figura 6.5 -  $\Omega(\beta)$  versus  $\beta$  para o Caso de Viga Bi-apoiada.

O procedimento para localização de fratura em vigas de pontes de aço pode ser o seguinte:

- durante uma inspeção, identifica-se a presença de fratura devido a mudança na frequência natural da viga ( $\Delta\omega_n$ );
- determina-se a função  $\Omega(\beta)$  a partir da equação [6.25];
- a posição  $\beta$  fica determinada pela solução de [6.24] quando se utiliza dois modos de vibração ( $\omega_1, \omega_2$ ).

Assim:

Para o primeiro modo natural a equação [6.24] é dada por:

$$\Delta\omega_1 = 2\omega_1 \cdot \Omega_1(\beta) \frac{1}{K} \quad [6.27]$$

e para o segundo :

$$\Delta\omega_2 = 2\omega_2 \cdot \Omega_2(\beta) \frac{1}{K} \quad [6.27a]$$

A rigidez  $K$  de uma seção fraturada é uma propriedade estática e portanto, idêntica para todos os modos. Dividindo a equação [6.27] por [6.27a], obtém-se:

$$\frac{\left(\frac{\Delta \omega_1}{\omega_1}\right)}{\left(\frac{\Delta \omega_2}{\omega_2}\right)} = \frac{\Omega_1(\beta)}{\Omega_2(\beta)} \quad [6.28]$$

Segundo a equação [6.28], a localização da fratura depende apenas da variação relativa de dois modos de frequência. Não é necessário portanto, qualquer informação sobre a fissura. Pode-se então, determinar  $\beta$ , que define a posição da fissura através das equações [6.27] e [6.27a].

#### ▣ Caso de viga com mais de uma fratura

Quando a viga apresenta mais de uma fratura é possível proceder com uma extensão do estudo anterior (caso de viga biapoiada com uma fratura Modo I) e representar cada região danificada por uma mola espiral com constante rotacional  $K_{mi}$ , como ilustrado na figura 6. 6.

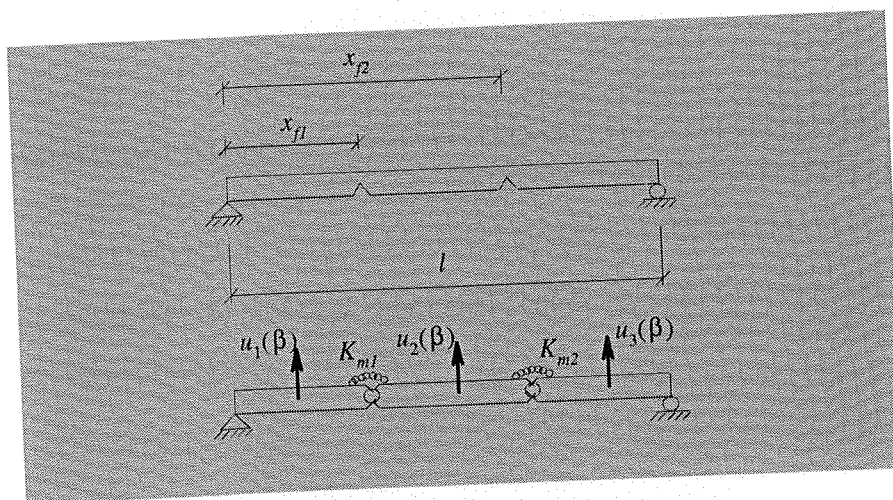


Figura 6.6 - Viga Apresentando Duas Fraturas

A função  $u(\beta)$  deve ser dividida em três partes, como ilustrado na figura 6.6:

$$\begin{cases} u_1(\beta) = A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 + A_4 v_4 \\ u_2(\beta) = B_1 v_1 + B_2 v_2 + B_3 v_3 + B_4 v_4 \\ u_3(\beta) = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3 + C_4 v_4 \end{cases} \quad [6.29]$$

$$v_1 = \sin(\lambda \beta) \quad v_2 = \cos(\lambda \beta) \quad v_3 = \sinh(\lambda \beta) \quad v_4 = \cosh(\lambda \beta)$$

Considerando-se as condições de contorno obtém-se a equação característica que através da sua solução e ainda das considerações aplicadas para o caso de uma fratura Modo I encontra a frequência da viga:

$$\Delta \omega_n = 2\omega_n \sum_{j=1}^2 \frac{\Omega_n(\beta_j)}{K_j} \quad [6.30]$$

onde o subíndice  $j$  refere-se a uma determinada fissura presente no elemento.

#### □ Assinatura de uma Ponte

A assinatura de uma ponte é o seu traço característico obtido de uma resposta dinâmica. Geralmente, essa identificação se processa através de funções ou espectros de frequência e dos modos de vibração.

As pontes de aço podem apresentar fissuras resultantes de uma grande variedade de causas nos seus elementos estruturais. Essas fissuras podem, por exemplo, ser oriundas do processo de fabricação ou ainda de danos provenientes de carregamento cíclico. Com a assinatura da ponte pode-se durante uma inspeção fazer o diagnóstico identificando ou não a presença de fraturas garantindo a segurança e o funcionamento adequado ao tráfego. O reconhecimento é garantido quando através de cálculos ou medições verifica-

se que não há variação na resposta dinâmica. No caso do modelo de fratura, uma simples mudança em :  $\Delta \omega_n / \omega_n$  , onde  $\Delta \omega_n$  é a variação do enésimo modo de frequência devido a presença de fratura e  $\omega_n$  é a frequência natural da viga não-fraturada, é diretamente associada a uma variação na inércia  $\Delta I$  e conseqüentemente a perda de rigidez  $\Delta K$ . Resumindo, uma variação na resposta de frequência significa descaracterização da assinatura da ponte e portanto do aparecimento de fratura.

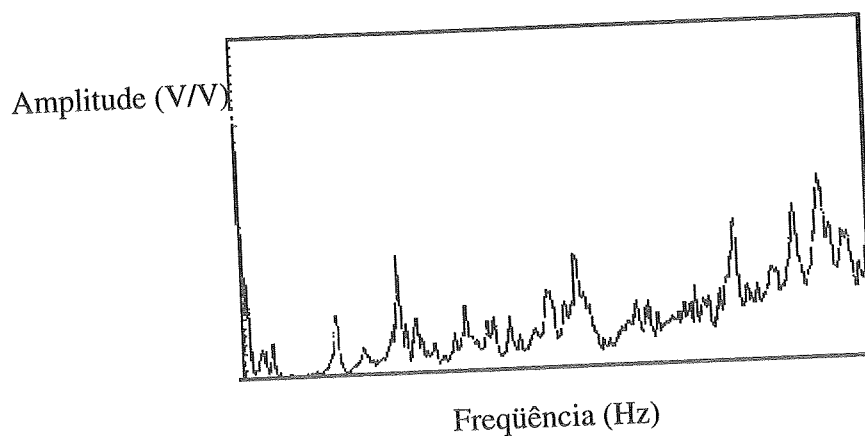


Figura 6.7 - Exemplo de Resposta Típica de Frequência de Ponte Rodoviária.

*Ponte* *Brücke* *Bridge* **PONT** *Brug* *Puente* 橋

Assinaturas de Pontes

---

# 7

## EXEMPLOS

### 7.1. PONTE MODELO

Para aplicação dos modelos de fratura e aferição dos aspectos qualitativos, utilizou-se o exemplo de uma ponte-mista bi-apoiada com vão de 24.000 mm. Como as normas brasileiras em certos casos são inexistentes ou omissas adota-se os procedimentos da norma americana AASHTO [1989]. A viga-mista consiste de uma seção transversal em forma de T, onde a mesa é constituída por uma laje de concreto com altura de 200 mm, largura de 2.400 mm e alma composta por uma viga metálica com altura de 1.400mm.

Os contraventamentos verticais e horizontais são cantoneiras com área correspondente a  $15.500 \text{ mm}^2$  e para os diafragmas, também compostos por cantoneiras, a área calculada foi de  $3.065 \text{ mm}^2$ .

A ponte é formada por duas vigas principais de aço, espaçadas de  $4.250 \text{ mm}$ , com uma seção transversal típica como pode ser observado na figura 7.1 e uma vista de elevação como ilustra a figura 7.2.

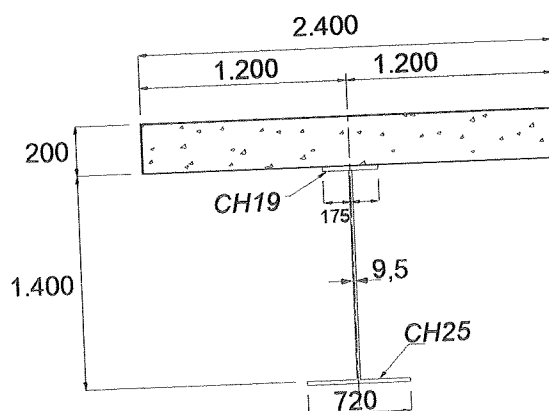


Figura 7.1 - Seção Transversal da Viga-Mista.

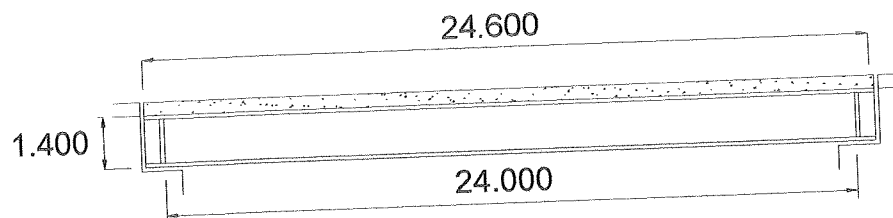


Figura 7.2 - Elevação.

As propriedades geométricas das vigas principais são as seguintes:

**VI 1400 x 295**

Mesa Inferior	: tf1 = 25mm -	bf1 = 720 mm -	Área = 18.800 mm <sup>2</sup>
Alma	: tw = 9,5mm-	hw = 1356mm -	Área = 12.882 mm <sup>2</sup>
Mesa Superior	: tf2 = 19mm-	bf2 = 350 mm -	Área = 6.650 mm <sup>2</sup>

$$\text{Área Total} = 38.332 \text{ mm}^2$$

$$L = 24.000 \text{ mm}$$

$$\text{Centro de Gravidade C.G.} = 493,7 \text{ mm}$$

$$\text{Momento de Inércia } I = 0,121 \times 10^{11} \text{ mm}^4$$

$$E = 205 \text{ kN/mm}^2$$

$$F_y = 0,350 \text{ kN/mm}^2$$

$$Z = 13.589.379,5 \text{ mm}^3$$

$$M_{pl} = 4,75 \times 10^6 \text{ kN.mm}$$

• **Verificação da Altura Mínima da Viga (AASHTO- item 10.5.2):**

Para as Vigas-Mistas , a razão entre a altura total da viga (aço + concreto) e o comprimento total deve ser de tal forma que:

$$H_{\text{total}} / L \geq 1/25 \Rightarrow H_{\text{total}} \geq 960 \text{ mm}$$

Para Vigas de Aço :

$$h / L \geq 1/30 \Rightarrow h \geq 800 \text{ mm}$$

## 7 Exemplos

- **Esbeltez Máxima da Alma sem Enrijecimento Longitudinal** (AASHTO- item 10.34.3.1):

$$tw \geq \frac{D\sqrt{f_b}}{1909}$$

onde:  $D$  é a altura da alma (1356 mm);

$f_b = 0,55F_y$  (tensão na mesa → tab. 10.32.1A);

$F_y = 0,350 \text{ kN/mm}^2 \rightarrow f_b = 0,1925 \text{ kN/mm}^2$

$\therefore tw \geq 9,87 \text{ mm}$

Como é possível utilizar-se enrijecedores longitudinais e portanto aumentar a esbeltez, então:

$tw = 9,5 \text{ mm}$

- **Espesura da Mesa Comprimida  $t_f$**  (AASHTO- item 10.34.2.1.3):

$$\frac{b}{t} \leq \frac{270}{\sqrt{f_b}} = 19,4 < 24$$

Para  $b=350 \text{ mm} \rightarrow t_f = 18,04 \text{ mm}$ .

- **Cálculo da Largura Efetiva** (AASHTO 10.38.3):

$$b_{ef} \leq \begin{cases} \frac{L}{4} = 6.000 \text{ mm} \\ a = 4.250 \text{ mm} - \text{espaçamento entre vigas} \end{cases}$$



O último item controla o valor da largura útil e portanto:  $b_{ef} = 4.250\text{mm}$

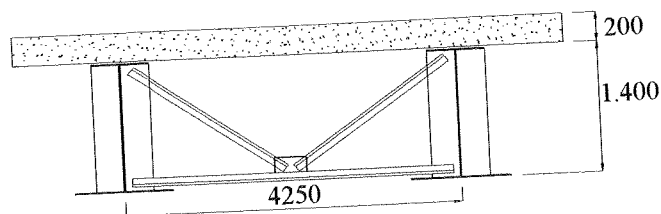


Figura 7.3 - Largura Efetiva e Detalhe do Contraventamento Adotado.

#### • Verificação da Fadiga

A norma Americana AASHTO no item 10.3 estabelece os limites necessários para a verificação da fadiga em estruturas isostáticas e hiperestáticas. As tensões admissíveis de fadiga ficam determinadas a partir da categoria de tensões apresentada na tabela 10.3.1.B. No presente caso, tem-se:

- i) Enrijecedores transversais soldados à alma ou às mesas (categoria C);
- ii) Metal base nas vigas soldadas com filetes longitudinais (categoria B);
- iii) Metal Base na seção bruta de ligações com parafusos de alta resistência (categoria B).

Determinação das Tensões Admissíveis (Tabela 10.3.1.A - AASHTO e Tabela 9.8 Eurocode 3):

1) Estruturas Hiperestáticas:

Categoria B :  $F_r = 0,200 \text{ kN/mm}^2$

Categoria C :  $F_r = 0,145 \text{ kN/mm}^2$

## 2) Estruturas Isostáticas:

Categoria B :  $Fr = 0,159 \text{ kN/mm}^2$ Categoria C :  $Fr = 0,110 \text{ kN/mm}^2$ 

$$\sigma_r = \frac{M_{cm}}{W_m} = \frac{1910}{34881} = 5,475 \times 10^{-2} \text{ kN/mm}^2 < Fr$$

$W_m$  é o módulo de resistência da seção mista.

$M_{cm}$  é o momento proveniente da carga móvel (CM):

Trem-tipo : **Classe 45** - NBR7188/84

Coefficiente de Impacto: 1,26 (NBR 7187/87)

Número de ciclos de tensões: 500.000 (tab.:10.3.2 A - AASHTO)

## 7.2 DESENVOLVIMENTO DE FRATURA NA VIGA

Supondo-se que uma fratura resultante de carregamentos cíclicos se desenvolve no vão central de uma das longarinas da ponte em estudo, deve-se verificar o comportamento desta viga em dois estágios:

- Deflexão Máxima devido à carga permanente;
- Deflexão Máxima ocasionada pelo carregamento total.

A deflexão depois de ocorrida a fratura é proporcional ao nível de tensão permitido na região danificada e pode ser efetivamente controlada pelo sistema de contraventamento. O estado limite de utilização pode ser determinado segundo uma simples relação entre a deflexão máxima da viga e seu comprimento. Quando submetida apenas ao peso próprio um aumento considerável em  $\Delta / L$  pode indicar a ocorrência de fraturamento. No caso de

carregamento total, essa relação deve ser suficientemente pequena quando um veículo pesado atravessa a ponte em velocidade normal em perfeitas condições de segurança.

Supondo-se que a viga não- fraturada permanece na posição inicial e que a fraturada tem deflexão como ilustra a figura 7.5, pode-se escrever a seguinte relação:

$$\frac{\Delta}{L} = \frac{h}{2d}$$

onde  $h$  representa a metade da abertura da fissura e  $d$  é a altura da viga.

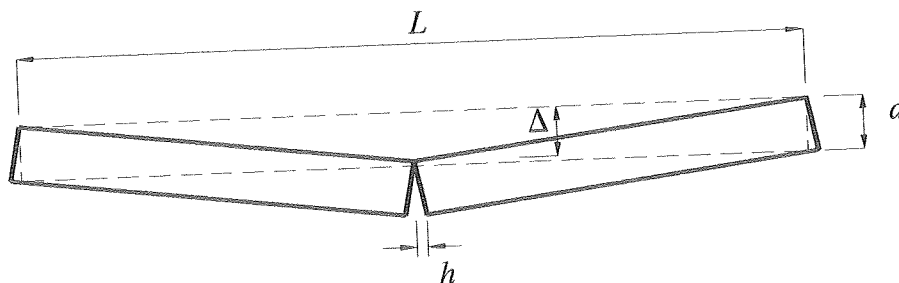


Figura 7.5 - Viga Fraturada (Elevação).

### 7.3. ANÁLISE DA FRATURA NA VIGA DE PONTE COM O PROGRAMA RAST

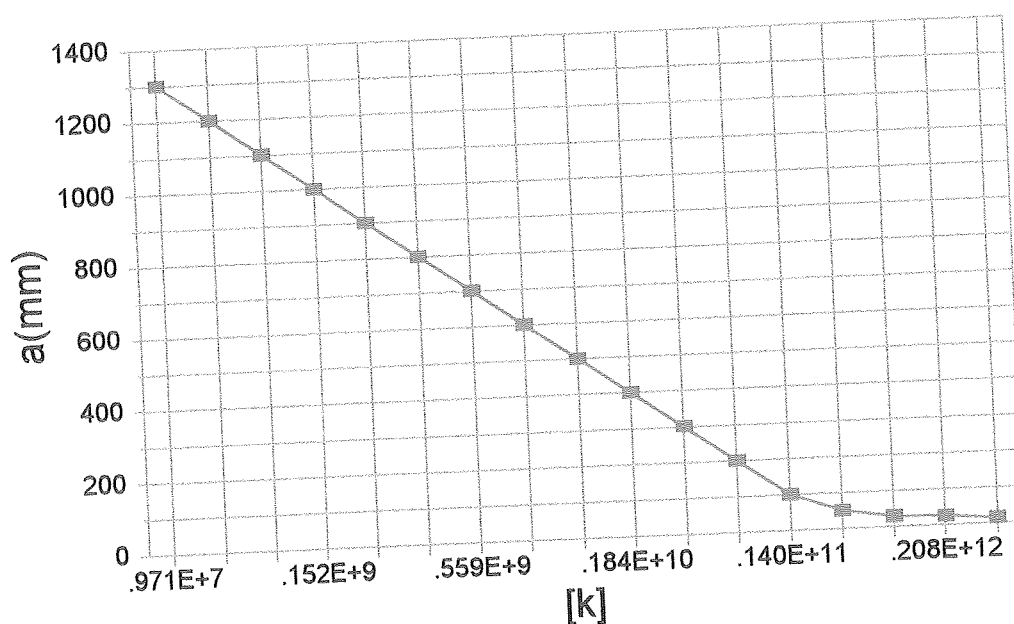
A fratura na viga de aço do exemplo anterior foi analisada com o programa RAST. A análise agora é bidimensional, onde a fratura  $a$  deve propagar desde a mesa inferior até a mesa superior.



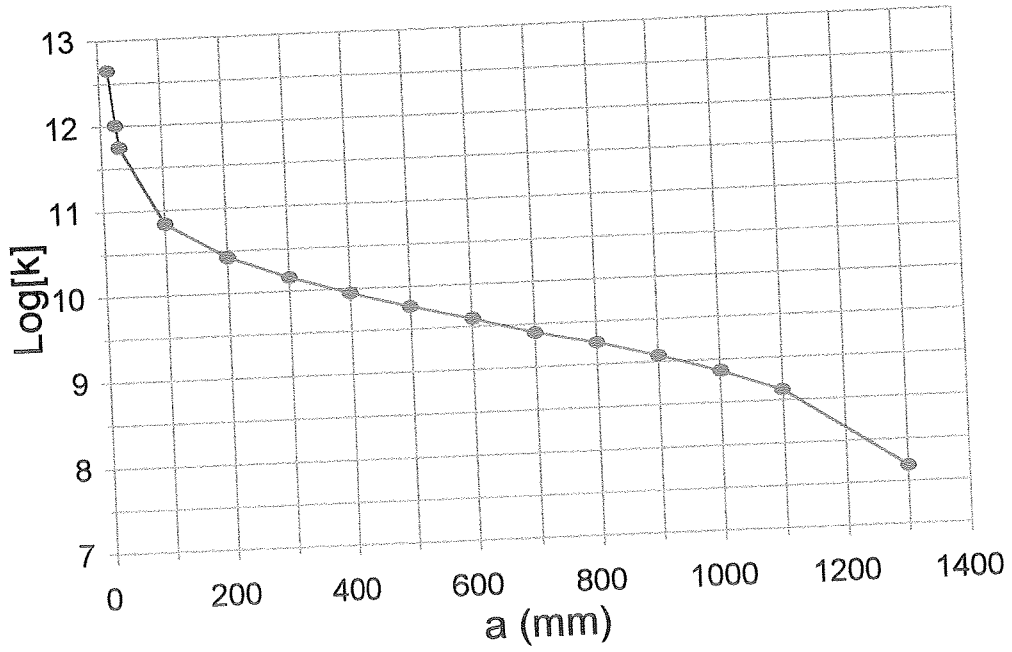
## 7 Exemplos

Para iniciar a análise são dadas as propriedades geométricas da seção I e o valor de  $a$  desejado. Para cada valor de  $a$ , obtém-se uma rigidez rotacional da mola  $k^*$ , como pode ser observado nos gráficos a seguir. Nesses gráficos verifica-se uma redução gradativa de  $k^*$  a proporção que a fratura se aproxima da mesa superior. Observa-se também que a forma da fissura influencia bastante na rigidez do elemento. A função quadrática tende para o infinito mais rápido do que a função linear. A forma da fissura pode ser controlada através da modificação da função  $r = \xi(a)$ .

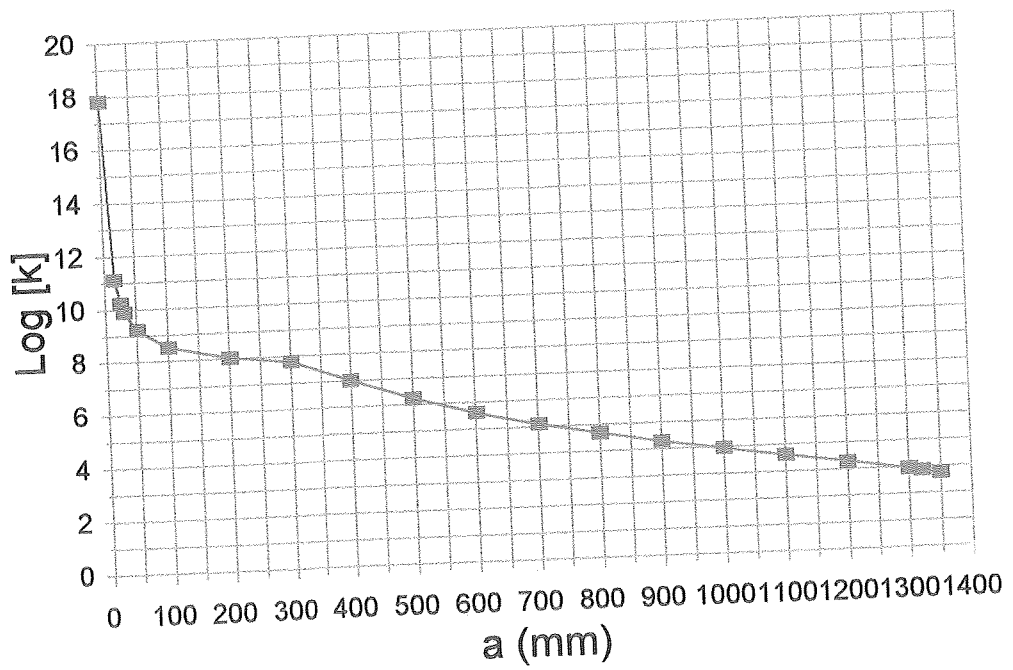
$$r = a$$



$$r = 0.2a$$



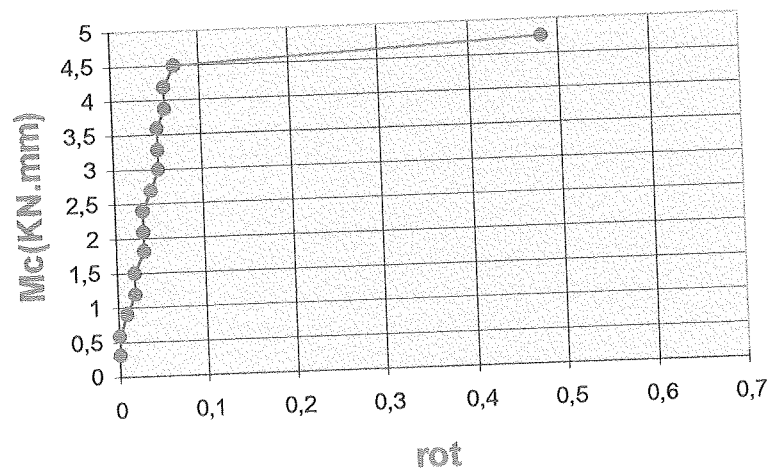
$$r = 0.5a^2$$



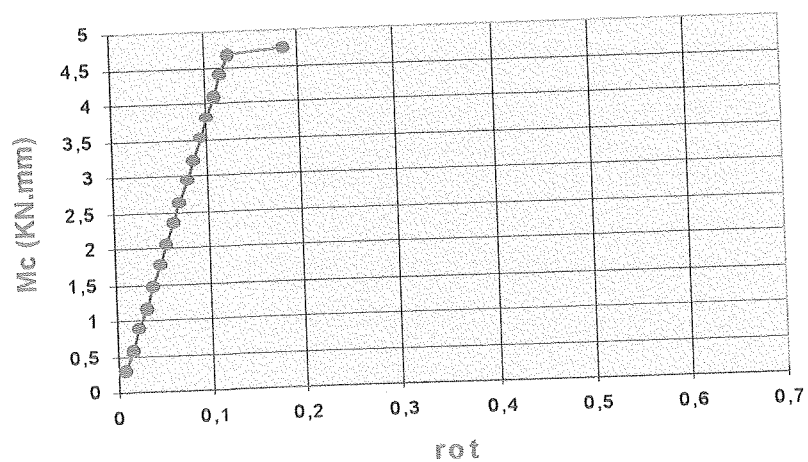
Uma vez obtidos os valores de  $k^*$ , para cada  $a$  associado prossegue-se com a segunda parte do programa que consiste na formação dos modelos de viga elástico e elasto-plástico. Os gráficos  $M_c \times \phi$  e  $P \times u$  serão ilustrados a seguir. Nesses gráficos, os valores da forma da fissura são variados para possível comparação dos resultados obtidos. São ainda variados os valores do tamanho da fissura ( $a$ ).

Caso 1 :  $\xi(a) = 0,5 a^2$

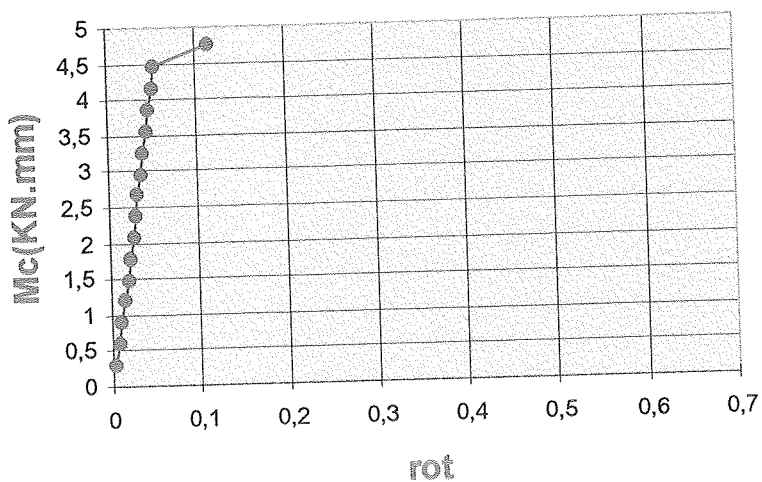
$a = 15$   $k = 0.133e12$



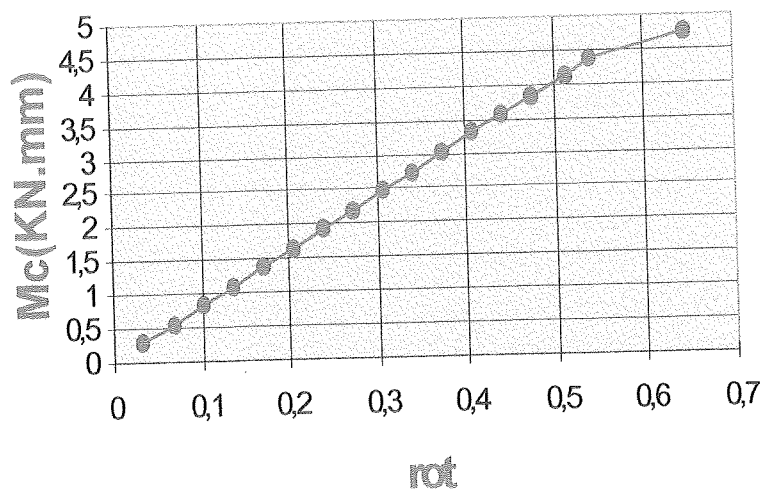
$a = 30$   $k = 0.762e10$



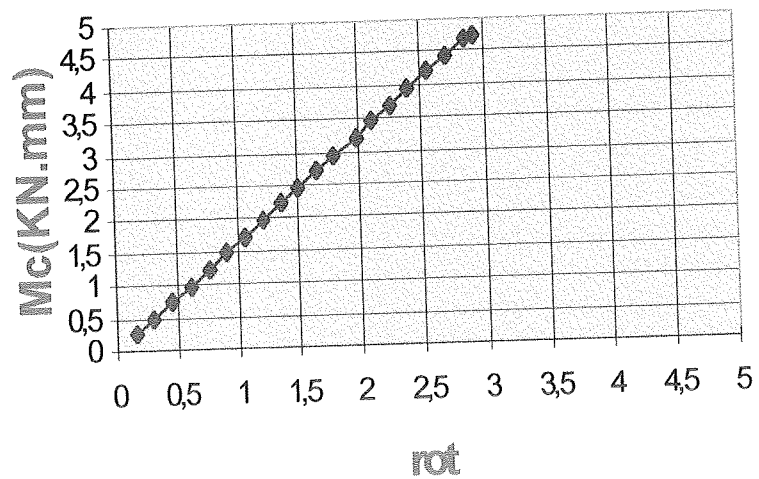
$a = 25$     $k = 0.168e11$



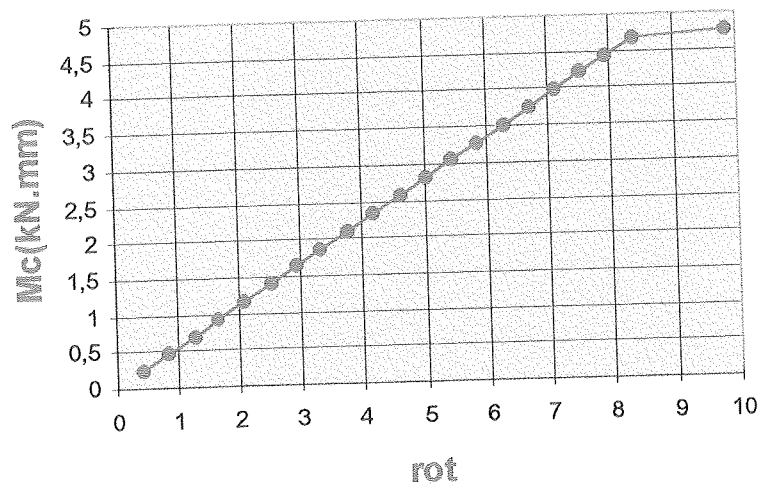
$a = 50$     $k = 0.162e10$



$$a=100 \quad k=0.329e9$$

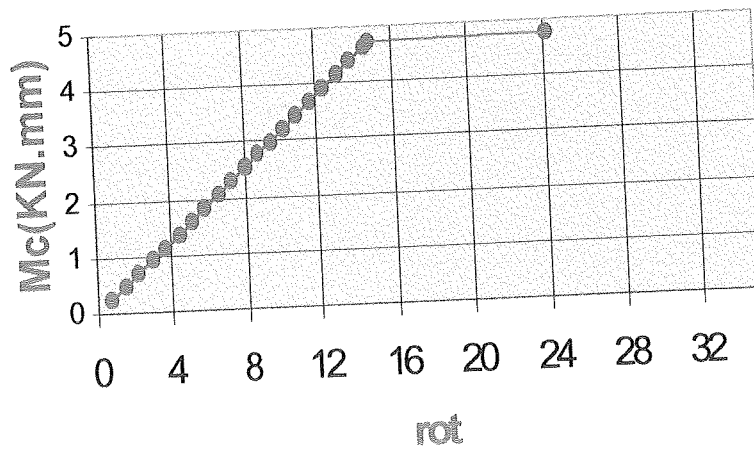


$$a = 200 \quad k = 0.112e9$$

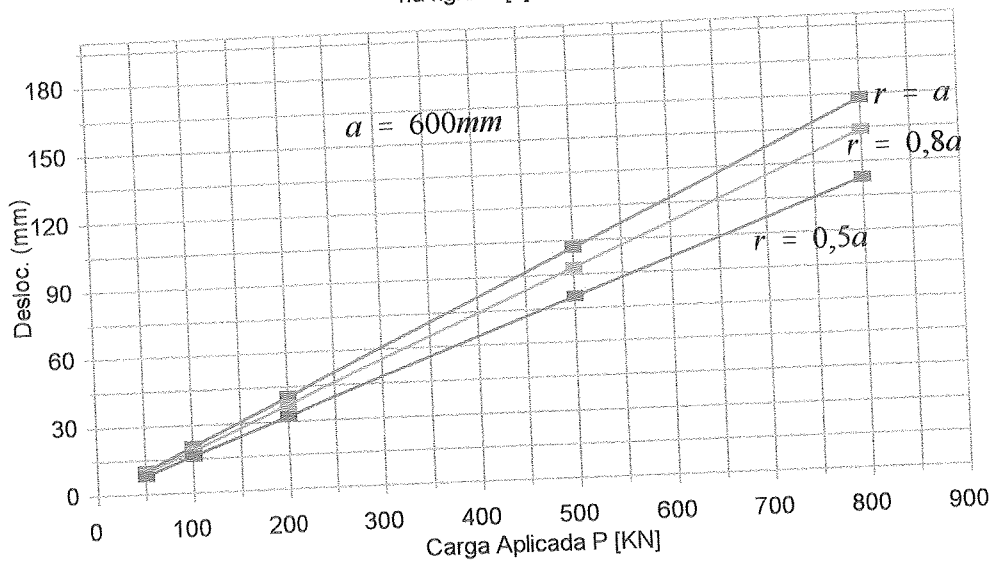




$a = 300$   $k = 0,635e8$



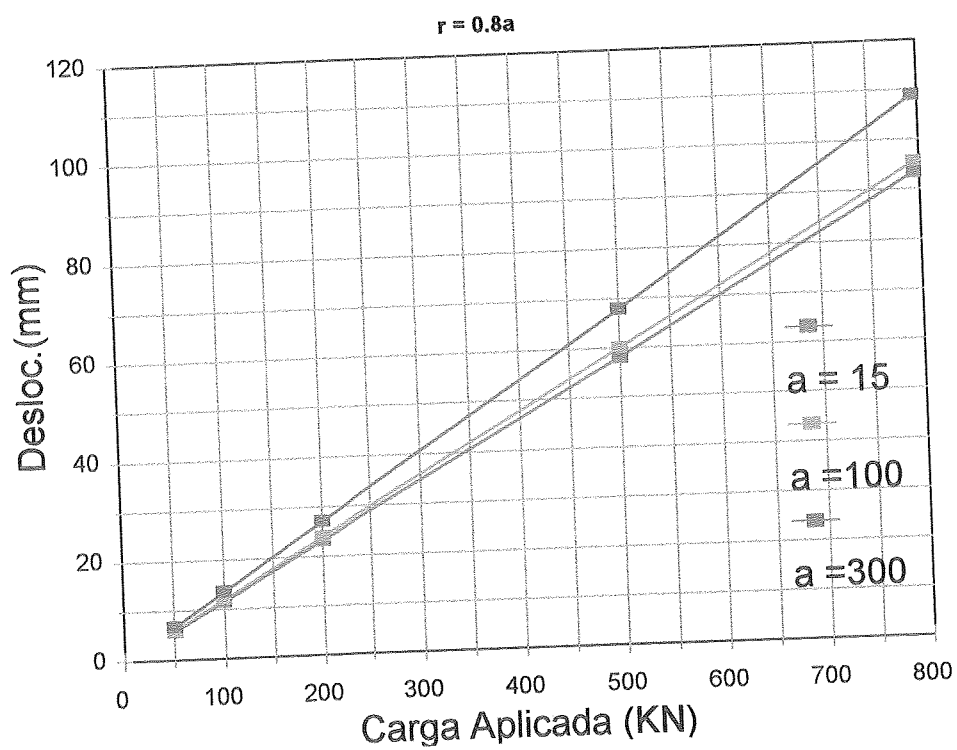
Influência da Forma da Fissura na rigidez [k]



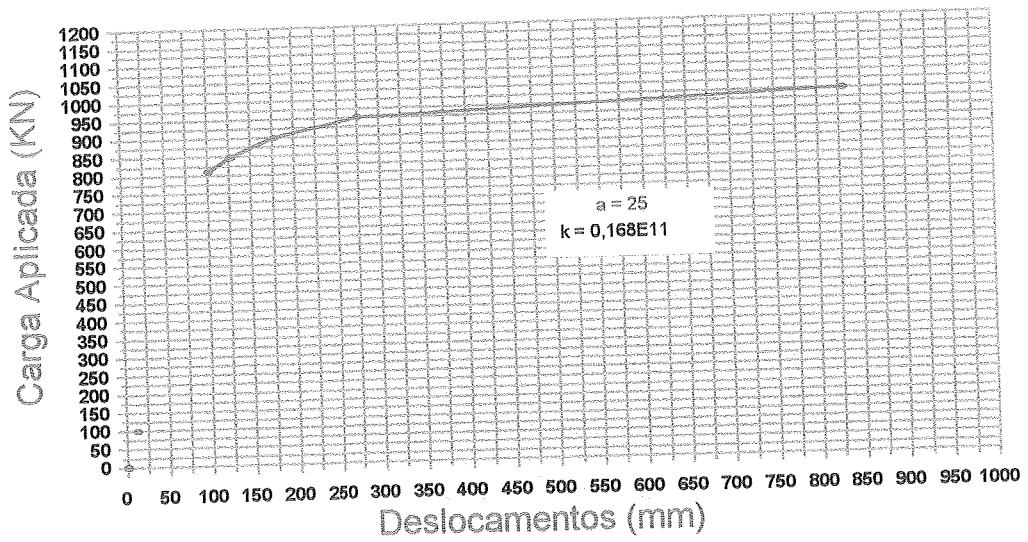
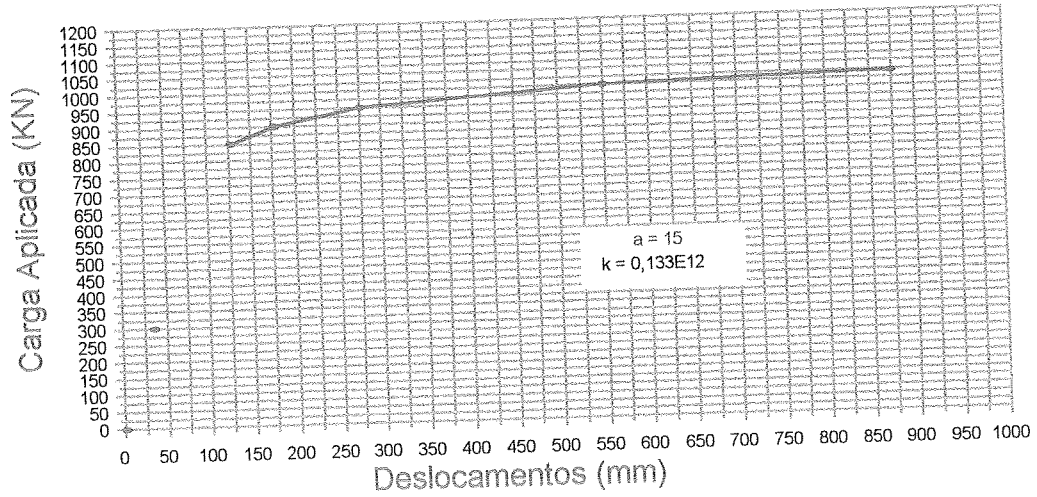
## 7 Exemplos

$u(a=600)$ (mm)	$u(a=400)$ (mm)	$u(a=15)$ (mm)	$u(a=0)$ (mm)	Carga Aplicada P(KN)
18,699	16,34	12,554	11,69	100
37,4	32,68	25,109	23,389	200
93,5	81,701	62,772	58,472	500
149,59	130,72	100,44	93,556	800

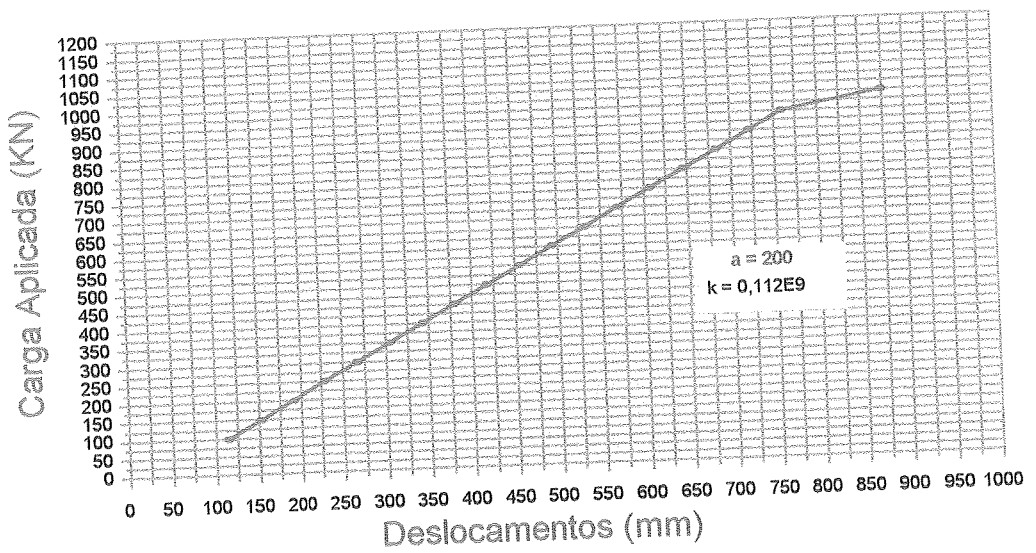
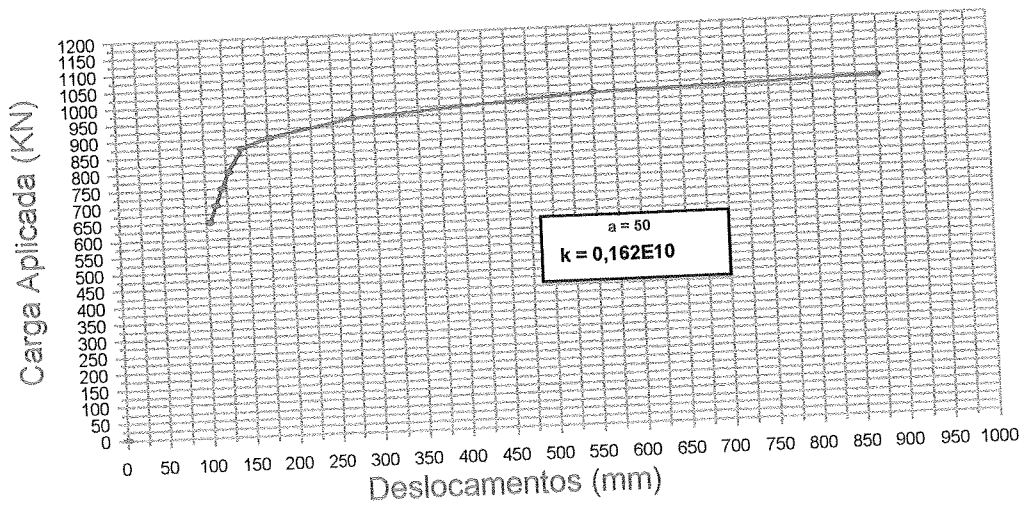
Tabela - 7.1 - Resultados Obtidos no Programa Ansys para Calibração do Modelo.



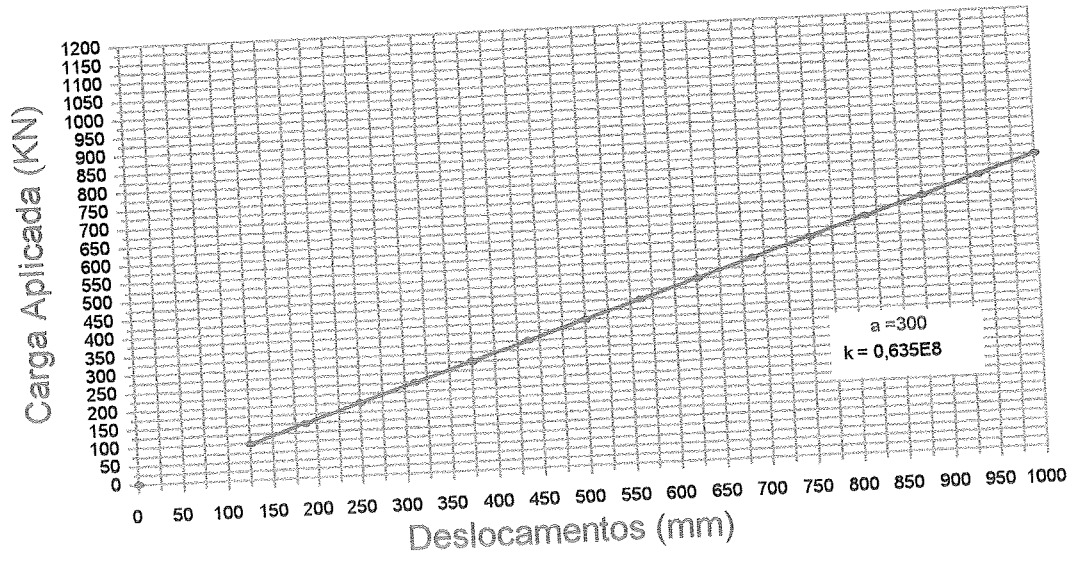
$$r = 0.5a^2$$



7 Ejemplos

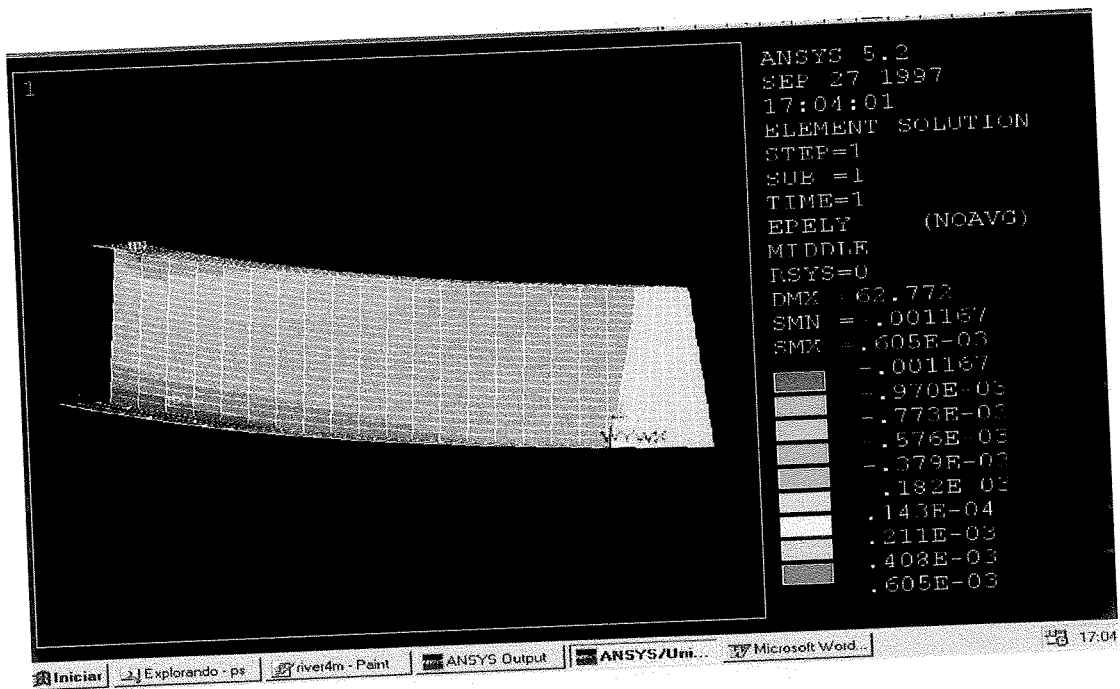


7 Exemplos

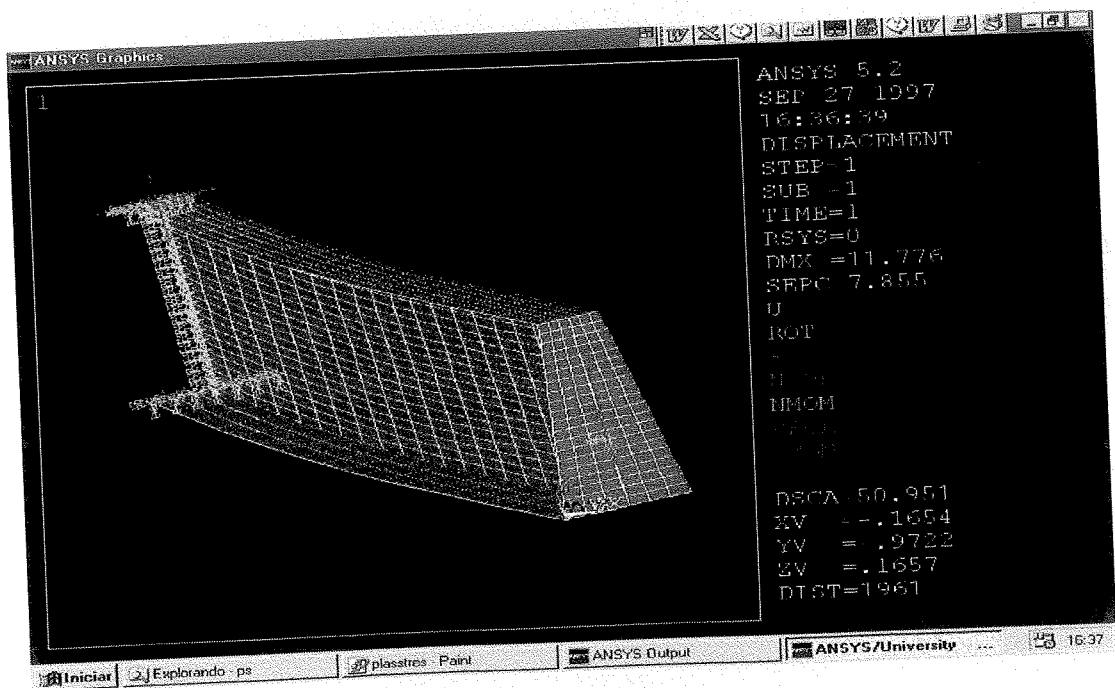


◆ Exemplos Modelados no Programa Ansys

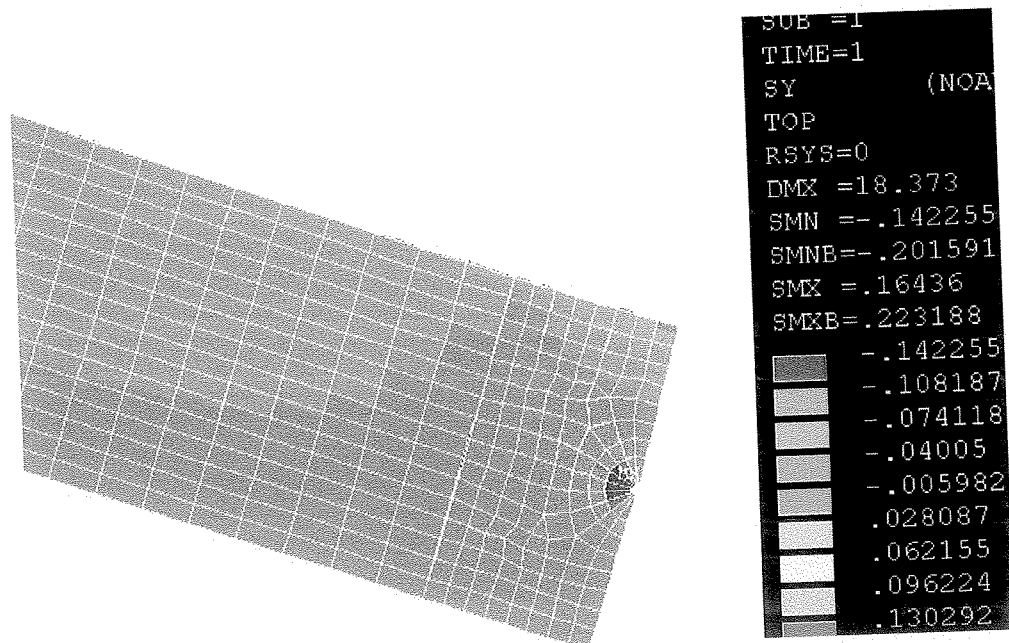
Tensões  $\sigma_y$  na Viga Sem Fratura



Simulação da Fratura (nesse caso  $a=0$ )



## ◆ Simulação da Região Plastificada no Crack Tip.



## 7.4. LOCALIZAÇÃO DA FRATURA

Determinação da Variação da Freqüência Natural da Viga Pelo Método Inverso.

Parâmetros de Entrada Para o Programa Frequenz -

$$A = 0,03753 \text{ m}^2, \quad \rho = 7,8 \times 10^3 \text{ N/m}^3, \quad E = 205.000 \times 10^6 \text{ N/m}^2, \\ I = 120553 \times 10^{-8} \text{ m}^4, \quad L = 24 \text{ m}.$$

Freqüência Natural :  $\omega = 15,7 \text{ rad/s}$  (Modo I)

$$\text{onde: } f = \omega / 2\pi$$

Variação de freqüência segundo Programa EIGFRIS:

$$i = \omega, \beta \quad .157\text{D}+02 \quad .920\text{D}+00$$

$\beta$	.100D+00	.200D+00	.300D+00
$\beta$	.400D+00	.500D+00	.600D+00
$\beta$	.700D+00	.800D+00	.900D+00
$\beta$	.910D+00	.920D+00	

$\Omega(\beta)$	.700D-05	.221D-04	.381D-04
$\Omega(\beta)$	.498D-04	.540D-04	.498D-04
$\Omega(\beta)$	.381D-04	.221D-04	.700D-05
$\Omega(\beta)$	.580D-05	.468D-05	

Utilizando-se a função e o valor de  $k$ , para um determinado valor de  $a$  obtido no programa RAST, obtém-se a variação da freqüência natural.



## 7 Exemplos

Frequência Natural :  $\omega = 63.0 \text{ rad /s (Modo IV)}$

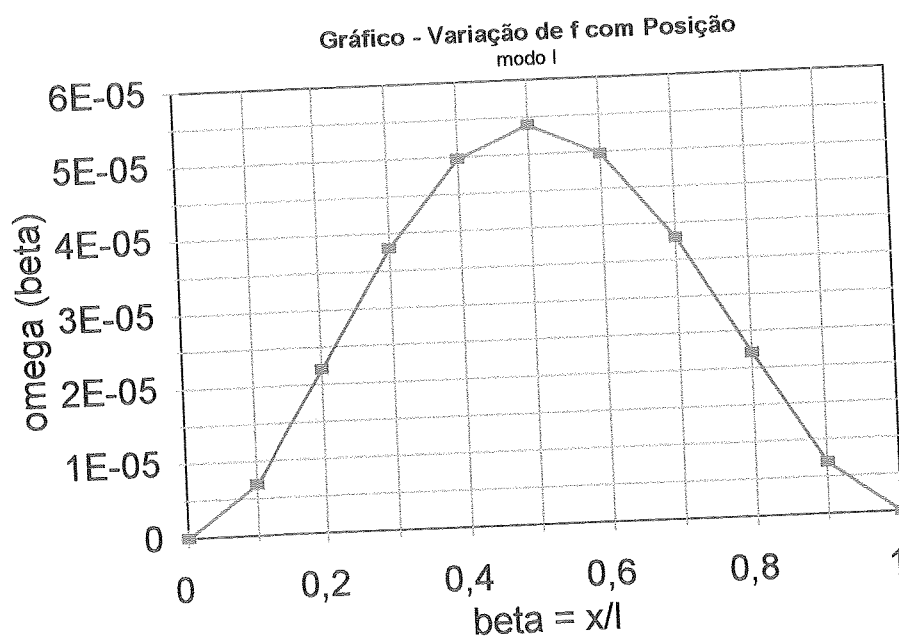
onde  $f = \omega / 2\pi$

Variação de frequência segundo Programa EIGRIS

$i = \omega, \beta \quad .630D+02 \quad .940D+00$

$\beta$	.100D+00	.200D+00	.300D+00
$\beta$	.400D+00	.500D+00	.600D+00
$\beta$	.700D+00	.800D+00	.900D+00
$\beta$	.920D+00	.940D+00	

$\Omega(\beta)$	.113D-03	.356D-03	.614D-03
$\Omega(\beta)$	.801D-03	.870D-03	.801D-03
$\Omega(\beta)$	.614D-03	.356D-03	.113D-03
$\Omega(\beta)$	.754D-04	.443D-04	



---

# 8

## CONCLUSÕES

Nesse estudo, procurou-se observar o comportamento das pontes de aço quando nelas se desenvolvem fissuras provenientes de flutuações de carregamento. Pesquisou-se cuidadosamente os trabalhos relacionados com esse tema, visando também um bom entendimento sobre o processo construtivo das pontes e sua evolução desde os tempos remotos, em que o homem ensaiava seus primeiros passos na engenharia estrutural, até a época atual. O desenvolvimento histórico tem a intenção de permitir ao leitor que se enquadre gradativamente no assunto e finalmente entenda a importância da

elaboração de um modelo capaz de verificar falhas nos elementos de uma ponte de aço.

Constatou-se que os elementos soldados apresentam fatores na sua constituição, como as microfissuras nas soldas, que se submetidos a um determinado carregamento cíclico podem conduzir a interdição ou colapso total da ponte.

Estudou-se as causas de colapsos em diferentes estruturas, como a *Kings Bridge*, e até mesmo em exemplos nacionais como a Ponte dos Remédios no estado de São Paulo. Além dos fatores inerentes ao material, notou-se que os aspectos político e sociais sustentados nos programas de manutenção e reparos também são responsáveis pela conservação das pontes do país. A deterioração prematura das pontes pode ser evitada através de uma manutenção planejada e eficiente. É importante que, durante uma inspeção se forneça também os motivos do aparecimento dos defeitos. Desse modo, é possível corrigir os problemas originados por deficiência de projetos ou ainda etapas de construção.

Nessa pesquisa, desenvolveu-se um modelo representativo dessas falhas, com base na Teoria da Mecânica da Fratura. Inicialmente, a teoria de Griffith e hoje a teoria de Rice proporcionaram o conhecimento básico e o direcionamento que induziu a concretização desse modelo.

O modelo proposto permitiu analisar a perda de rigidez de uma viga fraturada sensível às variações de tensões que foi observada na análise de pontes de aço. Pela generalidade de sua formulação, esse modelo também pode ser aplicado na solução de problemas estruturais que possam ser adaptados à sua utilização. O cálculo da rigidez da mola degradada pode ser feito para qualquer tipo de seção transversal, sendo suficiente que a fratura seja verificada, segundo as alterações geométricas encontradas na seção durante a propagação.

As expressões para o cálculo do fator de intensidade de tensões podem ser obtidas através de uma associação com um modelo de abertura de um

zipper. Nesse modelo, os elementos de ligação presentes no zipper representam a força molecular de coesão e a fissura deve expandir ou alongar, quando atingir um valor máximo capaz de superar essa força.

A consideração do efeito de fadiga no modelo consiste essencialmente em incluir os parâmetros de propagação de fratura  $\Delta K$  e  $\Delta K_0$  (determinado experimentalmente) e as constantes dependentes do tipo de material utilizado. Durante o carregamento considerou-se o fenômeno de abrandamento da extremidade da trinca como nos modelos reais observados em microscópio eletrônico.

Observou-se que, a aplicação da técnica inversa é uma boa ferramenta para resgatar a rigidez da viga e utilizá-la no cálculo das variações de freqüências e portanto, localizar a fratura e determinar sua amplitude. A região com fratura é uma incógnita possível de ser conhecida quando houver um distúrbio na rigidez, pois pode ser determinada em qualquer posição. Associando a rigidez da viga com a sua freqüência natural pode-se verificar numa ponte os problemas de fratura simplesmente aplicando uma técnica não destrutiva que se resume na identificação de variações na sua freqüência natural. No modelo proposto, utiliza-se uma equação característica como ponto inicial e que eventualmente conduz à derivação das relações teóricas entre as variações de freqüência da viga, localização e o tamanho da trinca formada. A função  $\Omega(\beta)$  é obtida através do programa RAST e deve ser diretamente relacionada ao cálculo de  $\Delta\omega_n$ .

A implementação computacional do modelo possibilitou testá-lo, avaliá-lo e compará-lo com outro código internacionalmente conhecido (ANSYS). Concluiu-se através dos exemplos executados que o modelo é bastante eficiente e gera resultados que se aproximam das condições impostas na prática.

A variação das curvas  $\xi(a)$  que representam a forma da fissura, indicaram uma perda de rigidez maior quando a fissura variava não-linearmente, o que foi comprovado com a análise de fissuras lineares e

quadráticas. Os testes numéricos mostraram também, que o aumento da fissura ocasionava uma redução na rigidez da estrutura e nos momentos plásticos, concordando assim, com as condições reais dos problemas estruturais.

### 8.1. SUGESTÕES

Essa pesquisa vem para abrir novas diretrizes na área de engenharia estrutural, inteligando principalmente os seguintes temas: Mecânica da Fratura, Pontes de Aço, Problemas de Fadiga e Dinâmica das Estruturas. Por esse motivo sugere-se algumas possibilidades para sua continuidade:

- Adaptação dos modelos para o caso de uma fratura inclinada e portanto, consideração dos modos I/II acoplados;
- Ampliar o modelo de vigas com fratura por fadiga introduzindo o tratamento tridimensional da ponte;
- Consideração de carregamento randômico no modelo e verificação experimental da influência da tensão residual na abertura de fissuras por fadiga;
- Estudo experimental de uma ponte, onde uma fratura é simulada em uma das vigas principais, e verificação da importância dos elementos de contraventamento;
- Consideração da fratura em vigas com furos na alma e também nas juntas e ligações, observando o caminho da fissura e o grau de redistribuição dos esforços.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AASHTO. (1989). Standard Specifications for highway bridges. *American Association of state highway and transportation officials*, 14th edition.
- ANDERSON, T.L. (1995). *Fracture Mechanics Fundamentals and Applications*, 2a. ed, CRC Press.
- AKESSON, B.; EDLUND, B. (1996). Remaining fatigue life of riveted railway bridges. *Stahlbau* 65, Heft 11.
- ALBRECHT, P. YAMADA, K. (1977). Rapid calculation of stress intensity factors. *Journal of the Structural Division*, vol.103, n.ST2, p.377-389, Feb.
- ASTM - E 399. (1990). *Standard Test Method for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials*.
- ASTM - E 647. (1991). *Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates*, p.654-681, June.
- BARENBLATT, G.I. (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, vol. 7, Academic press Inc, p.55-129.

- BARSOM, J.M.; NOVAK, S.R. (1977). Subcritical crack growth and fracture of bridge steels. *National Cooperative Highway Research Program Report 181*.
- BASQUIN, O. H. (1910). The exponential law of endurance tests. *Proc. Annual Meeting, American Society for Testing Materials*, vol.10, p.625-630.
- BAUSCHINGER, J. (1886). Über die Veränderung der Elastizitätsgrenze und der Festigkeit des Eisens und Stahls durch Strecken und Quetschen, durch Erwärmen und Abkühlen und durch oftmals wiederholte Beanspruchung. *Mitt. Mech.-Tech. Lab. München*, vol.13, p.1-115.
- BAŽANT, Z.P. (1990). Justification and improvement of Kienzler and Herrmann's estimate of stress intensity factors of cracked beam. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.36, n.3, p.523-525.
- BILLARDON, R.; ADAM, C.; LEMAITRE, J. (1986). Study of the non-uniform growth of a plane crack in a three-dimensional body subjected to non-proportional loadings. *Int. J. Solids Structures*, vol.22, n.7, p.677-692.
- BLOOM, J.M.; HECHMER, J.L. (1984). Limits of linear elastic fracture mechanics. *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol.106, May, p.196-200.
- BLUMENAUER, H.; PUSCH, G. (1982). *Technische Bruchmechanik*. Springer-Verlag.
- BOYCE, C.; HUDSON, W.R.; BURNS, N.H. (1987). Improved safety indices for prioritizing bridge projects, research report 439-2. *Center for Transportation Research*, Jan.
- BRANDES, K.; KNAPP, J.; HERTER, J. (1996). Messungen an älteren Stahlbrücken zur Zustandsanalyse und Ermüdungsbeurteilung *Stahlbau* 65, Heft 11, p.421-428.
- BRIDGES ON SECONDARY HIGHWAY AND LOCAL ROAD REHABILITATION AND REPLACEMENT. (1980). University of Virginia, civil engineering department, Charlottesville, Virginia. *National co-*

- operative highway research program, report 101*, Washington D.C, may.
- BRINCKERHOFF, P. (1992). *Bridge Inspection and Rehabilitation : A Practical Guide*. Edited by Louis G. Silano. John Wiley & Sons, Inc.
- BROCKS, W.; OLSCHESKI, J. (1986). On *J*-dominance of crack-tip fields in largely yielded 3D structures. *Int. J. Solids Structures*, vol.22, n.7, p.693-708.
- BS 5447. (1977). Methods of test for plane strain fracture toughness ( $K_{Ic}$ ) of metallic materials. *British Standards Institution*.
- BS 5400. (1982). Steel, concrete and composite bridges - Part 3. Code of practice for design of steelbridges. *British Standards Institution*.
- BUCH, A. (1988). Fatigue Strength Calculation. Materials Science Surveys No.6, Trans Tech Publications.
- BUCKLAND, P.G. (1993). The use of highway bridge design codes for fatigue aspects of transit-only bridges. *Journal of Construction Steel Research*, vol.25, p.83-94.
- BUDIANSKY, B. RICE, J.R.; (1973). Conservation laws and energy-release rates. *Journal of Applied Mechanics*, p.201-203, Mar.
- BURDEKIN, F.M.; STONE, D.E.W. (1966). The crack opening displacement approach to fracture mechanics in yielding materials. *Journal of Strain Analysis*, vol.1, p.145-153.
- BURDETTE, E.G.; GOODPASTURE, D.W. (1988). Correlation of bridge load capacity Estimates with test data. The university of Tennessee, Knoxville, Tennessee. *National co-operative highway research program, report 306*, Washington D.C., June.
- CAMINHA JR., H.M.; BASTIAN, F.L. (1983). A new method for calculating the elastic component of the crack opening displacement (COD). *Engineering Fracture Mechanics*, vol.18, n.3, p.717-723.
- CAN3-S6-M. (1986). Design of highway bridges. *Canadian Standards Association*, Apr.



- CAN3-S16.1-M. (1989). Steel structures for building. *Canadian Standards Association*.
- CARMELIET, J.; HENS, H. (1994). Probabilistic nonlocal damage model for continua with random field properties. *Journal of Engineering Mechanics*, vol.120, n.10, Oct.
- CASAGRANDE, F. (1997). E tudo parou. *Revista Veja*, p.12-18, jun.
- CASAS, J.R.; APARICIO, A.C. (1994). Structural damage identification from dynamic-test data. *Journal of Structural Engineering*, vol.120, n.8, Aug.
- CHAMBERLIM, W.P. (1983). Historic bridges - criteria for decision making. *National co-operative highway research program, report 101*, Washington D.C, Oct.
- COFFIN, L.F. (1954). A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, vol.76, p.931-950.
- COZZA, E. (1997). Faltou remédio. *Rev. Construção*, São Paulo, junho, p.4-9.
- DANIELS, J.H.; KIM, W.; WILSON, J.L. (1989). Recommended guidelines for redundancy design and rating of two-girder steel bridges. *National co-operative highway research program, report 319*, Washington D.C, Oct.
- DANIELS, J.H. (1992). Fatigue reliability and redundancy in two girder steel highway bridges. *ATLSS report n.92-01*, Lehigh University, Jan.
- DERBALIAN, G. (1983). J- integral estimation procedures. *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol. 105, p.299-308, Nov.
- DIN 18 800. (1990). *Stahlbauten - Teil 1bis Teil 4* (Sonderdruck). Beuth, Nov.
- DIN V ENV TEIL 1-1 (1993). Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten. Apr.
- DOLINSKI, K. (1992). Continuous stochastic models of fatigue crack growth state-of-the-art review. *Sonderforschungsbereich 210*. Juni, p.1-26.
- DUGDALE, D.S. (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol.8, p.100-108.

- ELBER, W. (1968). Fatigue crack propagation : some effects of crack closure on the mechanisms of fatigue crack propagation and cyclic tensile loading. *Ph.D. Thesis, University of New South Wales.*
- ELBER, W. (1971). The significance of fatigue crack closure. In *Damage Tolerance in Aircraft Structures*, Special Technical Publication 486, p.230-242. Philadelphia: American Society for Testing and Materials.
- ERNST & SOHN - *Terms for Civil Engineers* (deutsch-englisch / english-german), Ernst & Sohn ed.
- EWING, J.A.; HUMFREY, J.C. (1903). The fracture of metals under rapid alterations of stress. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, London, A200, p.241-250.
- FORMAN, R.G.; KEARNEY, V.E.; ENGLE, R.M. (1967). Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. *Journal of Basic Engineering*, vol.89, p.459-464.
- FORSYTH, P.J.E. (1962). A two stage process of fatigue crack growth. In *Crack Propagation: Proceedings of Cranfield Symposium*, London: Her Majesty's Stationery Office, p.76-94.
- FRANGOPOL, D.M.; NAKIB, R. (1991). Effects of damage and redundancy on the safety of existing bridges. *Third Bridge Engineering Conference - Transportation Research Record*, vol.1, n.1290, Denver, Colorado, Mar.
- FREIRE, J.L.F.; CASTRO, J.T.P. (1993). Avaliação de integridade estrutural e monitoração de estruturas civis. *Conferência internacional sobre avaliação de integridade e extensão de vida de equipamentos industriais, IEV93*, Pouso Alto, MG, Brasil.
- FRITSCHER, T; ZAMMERT, W. (1993). *FEM-Praxis mit ANSYS® - Grundkurs*. Studium Technik, Vieweg.
- GASSNER, E. (1954). Betriebsfestigkeit eine Bemessungsgrundlage für Konstruktionsteile mit statistisch wechselnden Betriebsbeanspruchungen. *Konstruktion*, 6. Jahrgang, Heft 3, p.97-104.
- GAYLORD JR., E.H.; GAYLORD, C.N.; STALLMEYER, J.E. (1992). *Design of*

- Steel Structures*, 3rd ed, McGraw-Hill Intern. Ed.
- GERMAN, M.D.; KUMAR, V. (1983). Elastic-plastic analysis of crack opening, stable growth and instability behavior in flawed 304 SS piping. *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol.105, p.290-298, Nov.
- GHONEM, H.; DORE, S. (1987). Experimental study of the constant-probability crack growth curves under constant amplitude loading. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.27, n.1, p.1-25.
- GRIFFITH, A.A. (1920). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, London A221, 163-197.
- GRIFFITH, A.A. (1924). The theory of rupture. *Proc. 1st. Intern. Congress. Appl. Mech.*, Delft, p.55-63.
- GROSS, B.; SRAWLEY, J.; BROWN JR., W.F. (1964). Stress-intensity factors for a single-edge-notch tension specimen by boundary collocation of a stress function. NASA TN D 2395, Aug.
- GROSS, B.; SRAWLEY, J. (1965). Stress-intensity factors for single-edge-notch specimens in bending or combined bending and tension by boundary collocation of a stress function, NASA TN D-2603, p.1-15, Jan.
- HAIBACH, E. (1989). Betriebsfestigkeit - Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung. VDI-Verlag, p.481.
- HARIK, I.E. et al. (1990). United States bridge failures, 1951-1988. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, vol.4, n.4, p.272-277, Nov.
- HERING, K. (1996). Grundlagen des brückenentwurfs (princípios fundamentais do cálculo de pontes), *Vorlesungshilfen Stahlbrückenbau*. Institut für Stahlbau, TU-Braunschweig.
- HERRMANN, G. (1992). On Estimates of Stress Intensity Factors for cracked Beams and Pipes. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.41, n.5, p.695-706.
- HERTZBERG, R.W.; MILLS, W.J. (1976). Character of fatigue fracture surface micromorphology in ultra-low growth rate regime. In *Fractography-*

- Microscopic Cracking Processes*, Special Technical Publication 600, p.220-234. Philadelphia: American Society for Testing and Materials.
- HERTZBERG, R. W.; MANSON, J. A. (1980). *Fatigue of Engineering Plastics*. Academic Press.
- HERTZBERG, R.W. (1983). *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*. 2nd edition. John Wiley & Sons.
- HIGHWAY BRIDGE FIELD TESTS IN THE UNITED STATES, 1948-70. (1972). *Public Roads*, vol.36, n.12, p.271-291, Feb.
- HODGE, J. (1959). *Plastic analysis of structures*, McGraw-Hill Book Comp. Inc.
- HUTCHINSON, J.W. (1968). Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol.16, p.13-31.
- IBSØ, J.B.; AGERSKOV, H. (1996). An analytical model for fatigue life prediction based on fracture mechanics and crack closure. *Department of Structural Engineering, Technical University of Denmark*.
- INGLIS, C.E. (1913). Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Transactions of the Institution of Naval Architects*, vol.55, p.219-230.
- INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON STEEL BRIDGES, London, 1988, The Institution of Civil Engineers, Feb.
- IRWIN, G.R. (1947). Fracture dynamics. 29. *National Metal Congress and Exposition*, Cleveland, Ohio, p.147-166.
- IRWIN, G.R. (1956). Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminium alloys. *Sagamore Research Conference Proceedings*, vol.2, p.289-305.
- IRWIN, G.R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, vol.24, p.361-364.
- IRWIN, G.R. (1958). *Handbuch der Physik*, vol.IV, p.551-590. Springer.
- JOHNSON, W.S. (1981). Multi-parameter yield zone model for predicting

- spectrum crack growth. *Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth under Random Loading*, ASTM STP748, p.85-102.
- JONES, D.L. (1982). Practical applications of fracture mechanics part one: basic concepts. *Metal Progress*, p.26-29, Feb.
- JONES, D.L. (1982). Practical applications of fracture mechanics. *Metal Progress*, p.64-68, Mar.
- JUNIOR, B.; ALVES, C. (1986). Manual de construção de pontes metálicas. *FEM-Fábrica de Estruturas Metálicas S/A*, Rio de Janeiro.
- KEATING, P.B.; FISHER, J.W. (1986). Evaluation of fatigue tests and design criteria on welded details. *National Cooperative Highway Research Program Report 286*, Sep.
- KIENZLER, R. (1986). On existence and completeness of conservation laws associated with elementary beam theory. *Int. J. Solids Structures*, vol.22, n.7, p.789-796.
- KIENZLER, R.; HERRMANN, G. (1986). An elementary theory of defective beams. *Acta Mechanica*, vol.62, p.37-46.
- KING, J.P.C.; CSAGOLY, F.; FISHER, J.W. (1976). Field testing of Aguasabon river bridge in Ontario. *Transportation Research Board 579 - Earthquake induced dynamic response of bridges and bridge measurements*, p.48-60.
- KING, R.B. (1983). Elastic-plastic analysis of surface flaws using a simplified line-spring model. *Eng. Fracture Mechanics*, vol.18, n.1, p.217-231.
- KLAIBER, F.W.; DUNKER, T.J.; WIPF, T.J.; SANDERS, W.W. (1987). Methods of strengthening existing highway bridges. *National Cooperative Highway Research Program Report 293*, Sep.
- KLESNIL, M.; LUKÁS, P. (1992). Fatigue of metallic materials. *Institute of physical metallurgy of the Czechoslovak academy of sciences*, Berno, Czechoslovakia.
- KNOWLES, J.K. (1968). On the dynamic response of a beam to a randomly moving load. *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, p.1-6, Mar.

- KOMSKY, I.N.; ACHENBACH, J.D.; STOLARSKI, P.J. (1994). A self-compensating ultrasonic system for flaw characterization in steel bridge structures. *Structural Materials Technology - NDT Conference*.
- KULAK, G.L. (1996). Fatigue strength of riveted connections. *Stahlbau* 65, Heft 11, p.445-450.
- KUMAR, V.; GERMAN, M.D. (1985). Studies of the line-spring model for nonlinear crack problems. *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol.107, p.412-420, Nov.
- KUMAR, V.; GERMAN, M.D.; SCHUMACHER, B.I. (1985). Analysis of elastic surface cracks in cylinders using the line-spring model and shell finite element method. *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol.107, p.403-411, Nov.
- LAIRD, C.; SMITH, G.C. (1962). Crack propagation in high stress fatigue. *Philosophical Magazine*, vol.8, p.847-857.
- LEE, H.; PARKS, D. M. (1995). Enhanced Elastic-Plastic Line-Spring Finite Element. *Int. J. Solids Structures*, vol.32, n.16, p.2393-2418.
- LEONHARDT, F. (1982). *Brücken : Ästhetik und Gestaltung*. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart.
- LEVY, C. (1983). Effect of bending moment on the dynamic fracture of a beam or plate under tensile loading. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.18, n.1, p.39-48.
- LEXICON. (1985). *Technical Terms for Steel Construction and Related Fields*. ECCS - European Convention for Constructional Steelwork. n.46.
- LIANG, R. Y.; HU, J.; CHOY, F. (1992). Theoretical study of crack-induced eigenfrequency changes on beam structures. *Journal of Engineering Mechanics*, vol.118, n.2, p.384-396, Feb.
- LIN, Y.K.; YANG, J.N. (1983). On statistical moments of fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.18, n.2, p.243-256.
- LIU, H.W. (1963). Fatigue crack propagation and applied stress range - an energy approach. *Transactions of the ASME*, p.116-122, mar.

- LIU, H.W. (1991). A review of fatigue crack growth analyses. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol.16, p.91-108.
- LÓPEZ, J.F. (1993). Calcul simplifié de portiques endommageables. *Revue européenne des éléments finis*, vol.2, n.1, p.47-74.
- MANSON, S.S. (1954). Behavior of materials under conditions of thermal stress. *National Advisory Commission on Aeronautics: Report 1170*. Cleveland: Lewis Flight Propulsion Laboratory.
- MELHEM, H.G.; KLIPPSTEIN, K.H. (1993). An expert system/training aid for fatigue of steel bridges. *J. Construct. Steel Research*, p.23-49.
- MERKLE, J.G.; CORTEN, H.T. (1974). A J integral analysis for the compact specimen, considering axial force as well as bending effects. *Journal of Pressure Vessel Technology*, p.286-292, Nov.
- MINER, M.A. (1945). Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, vol.67, p.A159-A164, Sept.
- MIYOSHI, T.; SHIRATORI, M.; YOSHIDA, Y. (1986). Analysis of J-integral and crack growth for surface cracks by line spring method. *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol.108, p.305-311, Aug.
- MOSES, F.; SCHILLING, C.G.; RAJU, K.S. (1987). Fatigue evaluation procedures for steel bridges. *National cooperative highway research program, report 299*, Washington D.C, Nov.
- MÜLLER, W.H.; HERRMANN, G.; GAO, H. (1993). Elementary strength theory of cracked beams. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol.18, p.163-177.
- MUSKHELISHVILI, N.I. (1919). Sur l'intégration de l'équation biharmonique. *Izvestija Rossijskoj Akademii Nauk.*, Serija 6, Leningrad, p.663-686.
- MUSKHELISHVILI, N.I. (1935). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, 2nd ed. *Izd. AN SSSR, M.-L.*, (in Russian).
- NEUMANN, P. (1969). Coarse slip model of fatigue. *Acta Metallurgica*, vol.17, p.1219-1225.
- NEWMAN JR, J.C.; RAJU, I.S. (1979). Analyses of surface cracks in finite

- plates under tension or bending loads, *NASA-1578*, Dec.
- O'DONNELL, T. P. (1996). Stress Intensity Factors for Cracks in Conventional S-N Fatigue Specimens. *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol.118, p.203-207, May.
- OEHLERS, D.J.; GHOSH, A.; WAHAB, M. (1995). Residual strength approach to fatigue design and analysis. *Journal of Structural Engineering*, vol.121, n.9, p.1271-1279, Sept.
- OKAMURA, H.; OGURA, K. (1991). Fracture mechanics, *Current Japanese Materials Research*, vol.8, London.
- ORBISON, J.G.; PETEREC, R.H.; CARHART, J.A.; RICH, T.P. *Development of a fatigue crack initiation test specimen*. Bucknell University.
- OROWAN, E.O. (1950). Fundamentals of brittle behavior of metals. *Fatigue and Fracture of Metals*, W. M. Murray ed., Wiley, New York, p.139-167.
- OWEN, D.R.J.; HINTON, E. (1980). *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Pineridge Press Limited.
- OWEN, D.R.J.; FAWKES, A.J. (1993). *Engineering fracture mechanics: Numerical Methods and Applications*, Swansea, U.K.,
- PARIS, P.C. (1960). *The Growth of Cracks Due to Variations in Loads*. Ph.D. Thesis, Bethlehem: Lehigh University.
- PARKS, D.M.; WHITE, C.S. (1982). Elastic-plastic line-spring finite elements for surface-cracked plates and shells. *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol.104, p.287-292, Nov.
- PARSONS, B. (1993). Bridge inspection and rehabilitation. *A practical guide*, John Wiley & Sons, Inc..
- PEIL, U.; HOSSER, D. - Konstruktiver Ingenieurbau Entwerfen und Konstruieren. TU - Braunschweig.
- PETER, J.; KING, C.; CSAGOLY, P.F. (1976). Field testing of Aguasabon River bridge in Ontario. *Transportation Research Board 579*. Earthquake induced dynamic response of bridges and bridge measurements.



- PETERSEN, C. (1993). *Stahlbau - Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten*, vierweg, Deutschland.
- PONTES E VIADUTOS - BRASIL (1992). Mercedes-Benz do Brasil S.A., São Bernardo do Campo, São Paulo.
- PROENÇA, S.P.B. Análise não linear de estruturas. *Notas de Aula, EESC-USP. /no prelo/*.
- RADAJ, D. (1995). *Ermüdungsfestigkeit*. Springer-Verlag.
- RANKINE, W.J.M. (1843). On the causes of unexpected breakage of the journals of railway axles and the means of preventing such accidents by observing the law of continuity in their construction. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, London, vol.2, p.105-108.
- RICE, J.R. (1967). Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue. In *Fatigue Crack Propagation*, Special Technical Publication 415, p.247-309. Philadelphia: American Society for Testing and Materials.
- RICE, J.R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, vol.35, p.379-386, June.
- RICE, J.R.; ROSENGREN, G.F. (1968). Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol.16, p.1-12.
- RICE, J.R.; TRACEY, D.M. (1969). *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. Vol.17, p.201-217.
- RICE, J.R. (1972). Some remarks on elastic crack-tip stress fields. *Int. J. Solids Structures*, vol.8, p.751-758.
- RICE, J.R. (1972). The line spring model for surface flaws. In *The Surface Crack*. Phys. Problems and Comp. Solutions, J.L. Swedlow, ASME.
- RICE, J.R.; LEVY, N. (1972). The part-through surface crack in an elastic plate. *Journal of Applied Mechanics*, p.185-194, Mar.
- RICE, J.R. (1975). Models for stable crack growth. In *Mechanics and*

- Mechanisms of Crack Growth*, ed., M.J. May, British Steel Corporation Physical Metallurgy Centre Publication.
- RITCHARDS, C.E.; LINDLEY, T.C. (1972). The influence of stress intensity and microstructure on fatigue crack propagation in ferritic materials. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.4, p.951-978.
- ROING, J. (1996). Neue Brücken. Duetsche Verlags - Anstalt, Stuttgart.
- SC SOLUTIONS. (1997). Bridge Engineering Home Page.  
Webmaster@scsolutions.com (9 may.).
- SCHEER, J. (1987). *Festschrift - zu seinem Sechzigsten Geburtstag*, März.
- SCHÜTZ, W. (1996). A history of fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.54, n.2, p.263-300.
- SEDLACEK, G. (1996). Die Tragsicherheit, die Ermüdungssicherheit und das Sprödbruchproblem. *Sthalbau 65*, Heft 11, p.407-413.
- SHEN, M.-H.H.; PIERRE, C. (1990). Natural modes of Bernoulli-Euler beams with symmetric cracks. *Journal of Sound and Vibration*, vol.138(1), p.115-134.
- SHEN, M.-H.H.; TAYLOR, J.E. (1991). An identification problem for vibrating cracked beams. *Journal of Sound and Vibration*, 150(3), p.457-484.
- SHIRIMA, L.M.; GIGER, M.W. (1992). Timoshenko beam element resting on two-parameter elastic foundation. *Journal of Engineering Mechanics*, vol.118, n.2, p.280-295, Feb.
- SIH, G.C.; MADENCI, E. (1983). Fracture initiation under gross yielding: strain energy density criterion. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.18, n.3, p.667-677.
- SMITH, I. F. C.; SMITH, R. A. (1983). Fatigue Crack Growth in a Fillet Welded Joint. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.18, n.4, p.861-869.
- SPANGENBERG, L. (1874). Über das Verhalten der Metalle bei wiederholten Anstrengungen. *Z. Bauw.*, vol.24, p.473-495 e vol.25, p.78-98.
- SPRAWLEY, J.E.; JONES, M.H.; GROSS, B. (1964). Experimental determination of the dependence of crack extension force on crack

- length for a single-edge-notch tension specimen. *NASA TN D-2396*, Aug.
- STAVROULAKIS, G.E.; PANAGIOTOPOULOS, P.D.; AL-FAHED, A.M. (1991). On the rigid body displacements and rotations in unilateral contact problems and applications. *Computers & Structures*, vol.40, n.3, p.599-614.
- SURESH, S. (1991). *Fatigue of Materials*. Cambridge Solid State Science Series.
- SWENSON, K.D.; FRANK, K.H. (1984). The application of cumulative damage fatigue theory to highway bridge fatigue design. *Center for transportation research bureau of engineering research*, The University of Texas at Austin, Nov.
- TADA, H.; PARIS, P.C.; IRWIN, G.R. (1985). *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. (2nd Ed), Paris Productions, Inc, St. Louis.
- TAROCO, E. (1983). Leyes de conservacion e integrales independientes del camino en mecanica de la fractura. *Lab. Nac. Computação Científica*, LNCC/ CNPq, Rio de Janeiro.
- THEOCARIS, P.S. (1983). Dugdale models for two collinear unequal cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.18, n.3, p.545-559.
- VASCONCELOS, A.C. (1993). *Pontes Brasileiras - viadutos e passagens notáveis*. São Paulo, Pini.
- WANG, W.; THOMAS HSU, C. (1994). Fatigue Crack Growth Rate of Metal by Plastic Energy Damage Accumulation Theory. *Journal of Engineering Mechanics* vol.120, n.4, p.776-795, Apr.
- WAS IST WAS - Brücken. Rainer Köthe. Band 91, Tessloff Verlag, Nürnberg.
- WEERTMAN, J. (1979). Fatigue crack propagation theories. In *Fatigue and Microstructure*, Asm, Metals Park, p.279-306.
- WELLS, A.A. (1961). Unstable crack propagation in metals : cleavage and fast fracture. *Proceedings of the Crack Propagation Symposium*, vol.1, paper 84, Cranfield,UK.

- WESTERGAARD, H.M. (1939). Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, vol.6, n.2, p.A-49-A-53.
- WILLIAMS, M.L. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, vol.24, p.109-114.
- WRIGHT, W.J.; ALBRECHT, P. (1991). Fatigue crack growth rates in bridge steels. *Third Bridge Engineering Conference - Transportation Research Record*, vol.1, n.1290, Denver, Colorado, Mar.
- WOLF, K. (1923). Zur bruchtheorie von A. Griffith. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol.3, p.107-112, Berlin.
- WÖHLER, A. (1858). Bericht über die Versuche, welche auf der Könige Niederschlesisch - Märkischen Eisenbahn mit Apparaten zum Messen und Biegung und Verdehnung von Eisenbahnwagenachsen während der Fahrt angestellt wurden. *Zeitschrift für Bauwesen*, vol.7, p.641-652.
- ZHAO, Z. et al. (1994). Fatigue-reliability evaluation of steel bridges. *Journal of Structural Engineering*, vol.120, n.5, p.1608-1623, May.

## APÊNDICE A

SUGGESTED CHECKLIST OF DATA DESIRABLE  
FOR COMPLETE FAILURE ANALYSIS

I. Description of Component Size, Shape and Use \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

A. Specify areas of design stress concentrations \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

1. Magnitude of stress concentration at failure site \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

II. Stress State for Component

A. Type of stresses

1. Magnitude of design stress levels

a. Mean stress \_\_\_\_\_

b. Stress range \_\_\_\_\_

2. Type of stress (e.g., Mode I, II, III, or combinations) \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

3. Presence of stress gradient \_\_\_\_\_

B. State of stress: plane strain vs. Plane stress

1. Fracture surface appearance: percent shear lip \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

2. Estimation from calculated plastic zone size to thickness ratio \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

C. Nature of load variations

1. Hours of component operation \_\_\_\_\_

2. Load cycle frequency \_\_\_\_\_

3. Type of loading pattern

a. Random loading \_\_\_\_\_

b. Existence of overloads resulting from abnormal service life  
events \_\_\_\_\_

### III. Details of Critical Flaw

- A. Date of previous inspection \_\_\_\_\_
1. Findings of previous inspection \_\_\_\_\_
- B. Nature of critical flaw leading to fracture (make use of clearly labeled sketches and/or macrophotographs with accurate magnifications)
1. Location of critical flaw by macroscopic examination \_\_\_\_\_
2. Critical flaw size, shape, and orientation at instability \_\_\_\_\_
3. Surface or imbedded flaw \_\_\_\_\_
4. Direction of crack propagation as determined by  
 Chevron markings \_\_\_\_\_ Pop-in \_\_\_\_\_  
 Beach markings \_\_\_\_\_  
 Direction \_\_\_\_\_
- C. Manufacturing flaws related to crack initiation
- Scratches \_\_\_\_\_ Misfits \_\_\_\_\_
- Undercuts \_\_\_\_\_ Others \_\_\_\_\_
- Weld defects \_\_\_\_\_
- D. Metallurgical flaws related to crack initiation
- Inclusions \_\_\_\_\_ Voids \_\_\_\_\_
- Second-phase particles \_\_\_\_\_ Weak interfaces \_\_\_\_\_
- Entrapped slag \_\_\_\_\_ Others \_\_\_\_\_
- E. Fractographic observations
1. Qualitative observations
- Dimpled rupture \_\_\_\_\_ Fatigue striations \_\_\_\_\_
- Cleavage \_\_\_\_\_ Corrosion \_\_\_\_\_
- Intercrystalline \_\_\_\_\_ Fretting \_\_\_\_\_
2. Quantitative observations
- a. Striation spacings at know crack length positions \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_
- b. Striation spacing evidence of uniform or random loading \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

c. Stretch zone width at onset of unstable crack extension\_\_\_\_\_

#### IV. Component Material Specifications

A. Alloy designation\_\_\_\_\_

#### B. Mechanical Properties

	$\sigma_{ys}$	$\sigma_{ts}$	% elong	% R.A.	$K_{IC}$	$K_{IEAC}$	Fatigue Characterization
Specified							
Actual							

#### C. Alloy Chemistry

##### *Elements*

	A	B	C	D	E	F	G
Specified							
Actual							

#### D. Melting practice:

Air melted\_\_\_\_\_

Vacuum melted\_\_\_\_\_

Other\_\_\_\_\_

#### E. Ingot breakdown

Hot rolled\_\_\_\_\_

Cold rolled\_\_\_\_\_

Cross rolled\_\_\_\_\_

#### F. Thermomechanical treatment

1. Annealing or solution treatment condition\_\_\_\_\_

2. Tempering or aging treatment\_\_\_\_\_

3. Intermediate mechanical working\_\_\_\_\_

#### G. Component manufacture

1. Forged\_\_\_\_\_ cast\_\_\_\_\_ machined\_\_\_\_\_



Spun \_\_\_\_\_ extruded \_\_\_\_\_ other \_\_\_\_\_

2. Joint detail

Welded \_\_\_\_\_

Bolted \_\_\_\_\_

Brazed \_\_\_\_\_

Other \_\_\_\_\_

Adhesive bonded \_\_\_\_\_

H. Surface treatment

Shot peened \_\_\_\_\_

Flame or induction

Cold rolled \_\_\_\_\_

hardened \_\_\_\_\_

Carburized \_\_\_\_\_

Plated \_\_\_\_\_

Nitrided \_\_\_\_\_

Pickled \_\_\_\_\_

Other \_\_\_\_\_

I. Component microstructure

1. Presence of mechanical fibering and/or banding from chemical segregation \_\_\_\_\_

2. Grain size and shape \_\_\_\_\_

a. Elongated with respect to stress axis \_\_\_\_\_

b. Grain run-out in forgings \_\_\_\_\_

3. Inclusion count and classification \_\_\_\_\_

**APÊNDICE B**

## C RAST - RISSAUSBREITUNG IN STAHLTRAGER

*Enio Pontes de Deus (USP.EESC/TU.BS.DE)*

### C PROGRAMA ELEMENTO DE VIGA COM FRATURA

Procedimentos Gerais -

Secao Transversal da Viga Fraturada : I (qualquer)

A primeira etapa deste programa consiste em determinar o valor de k da mola que representa o efeito de dano na barra. O segundo passo consiste na determinacao da matriz de rigidez total ou seja que considera a implementacao da mola.

#### C PARTE 1 Fratura na mesa inferior

```

subroutine findj1(bf1,bf2,tf1,tf2,hw,tw,ej1)
  implicit real*8 (a-h,o-z)
  y1=(bf1*tf1*(tf2+hw+tf1/2)+hw*tw*(hw/2+tf2)+tf2*bf2*tf2
& /2)/(bf1*tf1+hw*tw+tf2*bf2)
  ej1= (bf1*tf1**3)/12+(bf1*tf1*(hw+tf2+tf1/2-y1)**2)+(tw*hw**3)
& /12+(tw*hw*(hw/2+tf2-y1)**2)+(bf2*tf2**3)/12+(bf2*tf2*(
& y1-tf2/2)**2)
  return
end

```

#### C PARTE 2 Fratura na alma da viga

```

subroutine findj2(bf1,tf1,hw,tw,ej2)
  implicit real*8 (a-h,o-z)
  y2=(bf1*tf1*(hw+tf1/2)+hw*tw*(hw/2))
& /(bf1*tf1+hw*tw)
  ej2= (bf1*tf1**3)/12+(bf1*tf1*(hw+tf1/2-y2)**2)+(tw*hw**3)
& /12+(tw*hw*(hw/2-y2)**2)
  return
end

```

## C PARTE 3 Fratura na mesa superior

```

subroutine findj3(bf1,tf1,ej3)
implicit real*8 (a-h,o-z)
y3=(bf1*tf1*(tf1/2))
& /(bf1*tf1)
ej3= (bf1*tf1**3)/12+(bf1*tf1*(tf1/2-y3)**2)
return
end

```

```

program findk
implicit real*8 (a-h,o-z)
open(1,file='input.dat')
open(10,file='out')
read(1,*) bf1,bf2,tf1,tf2,hw,tw
read(1,*) el,emc,eme,ee0
write(*,'(3x,"Please input a")')
read(*,*) a

```

```

emiv=eme/emc
r=a

```

## C obs. variar valores de n (100 a 1000 e verificar alteracoes)

```

n=15000
dx=r/n
ss1=0.
ss2=0.
ss3=0.
call findj1(bf1,bf2,tf1,tf2,hw,tw,ei)
write(*,'(3x,"Section I",1d12.3)') ei
do 10 i=1,n
xi=(i-1)*r/n+dx
ax=a*(r-xi)/r

```

## C localizacao da fratura na secão transversal

```

if(ax.LT.tf2) then
ttf2=tf2-ax
call findj1(bf1,bf2,tf1,ttf2,hw,tw,ej)
else if ((tf2.LE.ax).and.(ax.LT.hw+tf2)) then
hhw=hw+tf2-ax
call findj2(bf1,tf1,hhw,tw,ej)
else if(ax.Ge.tf2+hw) then

```

```

tff1=hw+tf2+tf1-ax
call findj3(bf1,tff1,ej)
endif

c   ei= (bf1*tf1**3)/12+(bf1*tf1*(hw+tf2+tf1/2-y1)**2)+(tw*hw**3)
c   &   /12+(tw*hw*(hw/2+tf2-y1)**2)+(bf2*tf2**3)/12+(bf2*tf2*(
c   &   y1-tf2/2)**2)
if(ej.eq.0d0) write(*,'(3x,"i,n",2i7)') i,n
gx=(ei - ej)/ej
ss1=ss1+gx*dx
ss2=ss2+xi*gx*dx
ss3=ss3+xi**2*gx*dx
10 continue

t=ss1+2.*(emiv-1)/el*ss2+(emiv-1)**2/el**2*ss3
write(*,'(3x,"ss1,ss2,ss3,t",4d12.3)') ss1,ss2,ss3,t
if(t.EQ.0) then

write(*,'(1x,"K eh INFINITO")')
write(10,'(1x,"K eh INFINITO")')

stop
else
sk=ee0*ej/t

write(*,'(3x,"k",1d12.3)') sk
write(10,'(3x,"bf1,bf2,tf1,tf2",4d12.3)') bf1,bf2,tf1,tf2
write(10,'(3x,"hw,tw,ej,a",4d12.3)') hw,tw,ej,a
write(10,'(3x,"k",1d12.3)') sk
endif
stop
end

```

### C Programa RAST- ELASTO-PLASTO CONSIDERANDO O EFEITO DE M

```

program RAST
implicit real*8 (a-h,o-z)
  dimension sk1(5,5),vk1(5),sk2(5,5),vk2(5),bb(8),uu(8),
&  pp(8)

  open(1,file='bbs.d')
  read(1,*) ea,eiy,ee,el1,el2,xmp
  read(1,*) ek1,ek2
  read(1,*) nb
  read(1,*) (bb(j),j=1,nb)
  read(1,*) (pp(i),i=1,8)

  ek=1./(1./ek1+1./ek2)
  call ks(sk1,vk1,uk1,ea,eiy,ee,el1,1)
  call ks(sk2,vk2,uk2,ea,eiy,ee,el2,2)
15  ai=ek/(uk2+ek)-(uk1+ek)/ek
  bi=ek/(uk1+ek)-(uk2+ek)/ek
  write(*,'(3x,"ek,ai,bi",3d12.3)') ek,ai,bi
  call test(uu,pp,bb,nb,ek,ea,eiy,ee,el1,el2,sk1,sk2,
&  vk1,vk2,uk1,uk2,ai,bi)
  call klein(uu,vk1,vk2,uk1,uk2,ek,ai,bi,dfi1,dfi2)

  xmc=ek*(dabs(dfid2-dfi1))
  f= (dabs(xmc)/xmp)-1

  write(*,'(3x,"xmc,xmp,Yield f",3d12.3)') xmc,xmp,f
  if(f.LE.1d-4) then
    go to 100
  else
    ek=xmp/dabs(dfid2-dfi1)
    go to 15
  endif

100  write(*,'(3x,"uu,pp"')
  stop

```

end

```
subroutine klein (uu,vk1,vk2,uk1,uk2,ek,ai,bi,dfi1,dfi2)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension vv1(5),vv2(5),vk1(5),vk2(5),uu(8)
```

```
write( *,'(3x,"uu",4d12.3)') (uu(i),i=1,8)
vv1(1)=uu(1)
vv1(2)=uu(2)
vv1(3)=uu(3)
vv1(4)=uu(4)
vv1(5)=uu(5)
vv2(1)=uu(4)
vv1(2)=uu(5)
vv1(3)=uu(6)
vv1(4)=uu(7)
vv1(5)=uu(8)
```

```
call multt(vk1,vv1,s1)
call multt(vk2,vv2,s2)
```

```
dfi1=(1/(ek*ai))*s1+(1/(ai*uk2+ai*ek))*s2
dfi2=(1/(ek*bi))*s2+(1/(bi*uk1+bi*ek))*s1
write( *,'(3x,"dfi1,dfi2",2d12.3)') dfi1,dfi2
return
end
```

```
subroutine test(uu,pp,bb,nb,ek,ea,eiy,ee,el1,el2,sk1,sk2,
& vk1,vk2,uk1,uk2,ai,bi)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension sk1(5,5),vk1(5),sk2(5,5),vk2(5),bb(8),uu(8),
& bk1(5,5),bk2(5,5),bk12(5,5),bk21(5,5),dk(8,8),pp(8)
do 10 i=1,8
do 10 j=1,8
10 dk(i,j)=0.
call multi(vk1,vk1,bk1,5)
call multi(vk2,vk2,bk2,5)
call plus(sk1,bk1,ai,ek)
call plus(sk2,bk2,bi,ek)
call multi(vk1,vk2,bk12,5)
do 30 i=1,5
```

```

do 30 j=1,5
30  bk12(i,j)=bk12(i,j)/ai/(ek+uk2)

    call multi(vk2,vk1,bk21,5)
    do 40 i=1,5
    do 40 j=1,5
40  bk21(i,j)=bk21(i,j)/bi/(ek+uk1)

    do 50 i=1,5
    do 50 j=1,5
50  dk(i,j)=bk1(i,j)
    do 60 i=1,5
    do 60 j=1,5
60  dk(i,3+j)=dk(i,3+j)+bk12(i,j)
    do 70 i=1,5
    do 70 j=1,5
70  dk(i+3,j)=dk(i+3,j)+bk21(i,j)
    do 80 i=1,5
    do 80 j=1,5
80  dk(3+i,j+3)=dk(3+i,3+j)+bk2(i,j)

    do 100 i=1,nb
    i0=bb(i)
    dk(i0,i0)=dk(i0,i0)*1.0d10
100  continue
C    do 90 i=1,8
C    write*,'(3x,"dk",5d12.3)' (dk(i,j),j=1,8)
C  90  continue
    call invers(dk,8)
C    do 95 i=1,8
C    write*,'(3x," dk",5d12.3)' (dk(i,j),j=1,8)
C  95  continue
    do 120 i=1,8
    s=0.
    do 110 j=1,8
    s=s+dk(i,j)*pp(j)
110  continue
    uu(i)=s
120  continue
    write*,'(3x,"uu",4d12.3)' (uu(i),i=1,8)
    return
    end

    subroutine multi(sk1,sk2,bk,m)
    implicit real*8 (a-h,o-z)

```



```

        dimension sk1(5),sk2(5),bk(5,5)
        do 10 i=1,m
        do 10 j=1,m
        bk(i,j)=sk1(i)*sk2(j)
10    continue
    return
end

subroutine plus(sk,bk,ab,ek)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension sk(5,5),bk(5,5)
do 10 i=1,5
do 10 j=1,5
bk(i,j)=sk(i,j)+bk(i,j)/ab/ek
10    continue
return
end

subroutine multt(fm1,fm2,s)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension fm1(5),fm2(5)

s=0
do 100 i=1,5
s=s+ fm1(i)*fm2(i)

100    continue
return
end

SUBROUTINE INVERS(SK0,N)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION SK0(8,8)
DO 10 I=1,N
DO 10 J=I,N
DO 20 K=1,I-1
20  SK0(I,J)=SK0(I,J)-SK0(K,I)*SK0(K,J)/SK0(K,K)
IF(J-I) 40,30,40
30  SK0(I,J)=1./SK0(I,J)
GOTO 10
40  SK0(I,J)=SK0(I,J)*SK0(I,I)
10  CONTINUE
DO 50 I=1,N-1
DO 50 J=I+1,N
SK0(I,J)=-SK0(I,J)

```

```

      DO 50 K=I+1,J-1
      SK0(I,J)=SK0(I,J)-SK0(K,J)*SK0(I,K)
50  CONTINUE
      DO 60 I=1,N-1
      DO 60 J=I,N
      IF(J-I) 70,80,70
70  SK0(I,J)=SK0(I,J)*SK0(J,J)
80  DO 60 K=J+1,N
      SK0(I,J)=SK0(I,J)+SK0(K,K)*SK0(J,K)*SK0(I,K)
60  CONTINUE
      DO 90 I=1,N
      DO 90 J=I,N
90  SK0(J,I)=SK0(I,J)
      RETURN
      END

```

```

      subroutine ks(sk0,vk0,uk0,ea,eiy,ee,el,kind)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      dimension sk(6,6),sk0(5,5),vk0(5)
      do 10 i=1,6
      do 10 j=1,6
10  sk(i,j)=0.
      sk(1,1)=ee*ea/el

      sk(2,2)=12.*ee*eiy/el**3

      sk(3,2)=-6.*ee*eiy/el**2
      sk(3,3)=4*ee*eiy/el

      sk(4,1)=-ee*ea/el
      sk(4,4)=ee*ea/el

      sk(5,2)=-12.*ee*eiy/el**3
      sk(5,3)=6.*ee*eiy/el**2
      sk(5,5)=12.*ee*eiy/el**3

      sk(6,2)=-6.*ee*eiy/el**2
      sk(6,3)=2*ee*eiy/el
      sk(6,5)=6*ee*eiy/el**2
      sk(6,6)=4*ee*eiy/el

```

```
      do 20 i=1,6
      do 20 j=i,6
20    sk(i,j)=sk(j,i)

      if(kind.eq.1) then
      do 30 i=1,5
      vk0(i)=sk(i,6)
      do 30 j=1,5
30    sk0(i,j)=sk(i,j)
      uk0=sk(6,6)
      else

      do 40 i=1,6

      if(i.eq.3) goto 40
      i1=i
      if(i.gt.3) i1=i-1
      vk0(i1)=sk(i,3)
      do 50 j=1,6
      if(j.eq.3) goto 50
      j1=j
      if(j.gt.3) j1=j-1
      sk0(i1,j1)=sk(i,j)
50    continue
40    continue
      uk0=sk(3,3)
      endif

      return
      end
```

## C PROGRAMA 01- FREQUENZ (Eigenfrequenz)

*USP.EESC/TU.BS.DE*

*E.P.de Deus*

- Cálculo da Frequência Natural da Viga

Este Programa foi desenvolvido na Alemanha com o objetivo de auxiliar no tratamento de localização de fratura em vigas de pontes metálicas.

```

C
C Eigenfrequenz Suchen - (delta 1 = 0)
C
  subroutine detm(aa,ro,ee,smi,beta,v,wn,ded)
  implicit real*8 (a-h,o-z)
  dimension det11(6,6)
  dimension bm(6)
C   wn=((ome**2)*((aa*ro*v**4)/(ee*smi)))**.25)
C
C   write(*,'(3x,"w,b",3d12.3)') wn,ome,beta
  det11(1,1)=sinh(wn*beta)
  det11(1,2)=sin(wn*beta)
  det11(1,3)=-cosh(wn*beta)
  det11(1,4)=-sinh(wn*beta)

```

```

det11(1,5)=-cos(wn*beta)
det11(1,6)=-sin(wn*beta)
det11(2,1)=cosh(wn*beta)
det11(2,2)=-cos(wn*beta)
det11(2,3)=-sinh(wn*beta)
det11(2,4)=-cosh(wn*beta)
det11(2,5)=-sin(wn*beta)
det11(2,6)=cos(wn*beta)
det11(3,1)=sinh(wn*beta)
det11(3,2)=-sin(wn*beta)
det11(3,3)=-cosh(wn*beta)

```

```

det11(3,4)=-sinh(wn*beta)
det11(3,5)=cos(wn*beta)
det11(3,6)=sin(wn*beta)
det11(4,1)=0.
det11(4,2)=0.
det11(4,3)=cosh(wn)
det11(4,4)=sinh(wn)
det11(4,5)=cos(wn)
det11(4,6)=sin(wn)
det11(5,1)=0.
det11(5,2)=0.
det11(5,3)=cosh(wn)
det11(5,4)=sinh(wn)
det11(5,5)=-cos(wn)
det11(5,6)=-sin(wn)
det11(6,1)=cosh(wn*beta)
det11(6,2)=cos(wn*beta)
det11(6,3)=-sinh(wn*beta)
det11(6,4)=-cosh(wn*beta)
det11(6,5)=sin(wn*beta)
det11(6,6)=-cos(wn*beta)

```

```

bm(1)=1
bm(2)=1
bm(3)=1
bm(4)=1
bm(5)=1
bm(6)=1

```

```

call ivsnr(det11,bm,ded,6,6)

```

```

return
end

```

```

program SOROT
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
open(1,file='ineig')
read(1,*) aa,ro,ee,smi,v
read(*,*)beta
c  A wird die moden kontrollieren (A=modo)
A=1.0
B=10000000.
DX=1
EPS1=0.1D-2
EPS2=0.1D-2
XZ=a
call detm(aa,ro,ee,smi,beta,v,xz,fz)
10  IF(XZ+DX.LT.B) THEN
XU=XZ+DX
XU1=XZ+DX
ELSE
XU=B
XU1=B
ENDIF

call detm(aa,ro,ee,smi,beta,v,xu,fu)
c  write(*,'(3x,"xz,fz,xu,fu",4d12.3)') xz,fz,xu,fu
IF(FU*FZ.GT.0.) THEN
20  IF(XU1.LT.B) THEN
XZ=XU1
FZ=FU
GOTO 10
ELSE
GOTO 50
ENDIF
ENDIF
30  X0=(XZ+XU)/2.
call detm(aa,ro,ee,smi,beta,v,x0,f0)
write(*,'(3x,"x0,f0",2d12.3)') x0,f0
IF(DABS(F0).LE.EPS1) THEN
40  X=X0
GOTO 50
ELSEIF((XU-X0).LE.EPS2) THEN
x=x0
goto 50
ELSEIF(FZ*F0.GT.0.) THEN

```

```

FZ=F0
XZ=X0
GOTO 30
ELSE
XU=X0
GOTO 30
ENDIF
50 wn=x
ome=wn**2*(ee*smi/aa/ro/v**4)**0.5
write(*,'(3x,"wn und Eigenfrequenz ist :",2d12.3)') wn,ome
stop
END

SUBROUTINE IVSNR(EEK,BE,DED,n,nx)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION BE(nx),EEK(nx,nx)
C
EP=0.000001
C
N1=N-1

DO 100 k=1,N1
k1=k+1
YB=EEK(k,k)
IF(dABS(YB)-EP)1,1,3
1 DO 7 j=k1,N
C
IF(dABS((EEK(j,k)))-EP)7,7,5
5 DO 6 l=k,n
YB=EEK(k,l)
EEK(k,l)=EEK(j,l)
6 EEK(j,l)=YB
YB=BE(k)
BE(k)=BE(j)
BE(j)=YB
YB=EEK(k,k)
GOTO 3
7 CONTINUE
GOTO 8
C
3 YB=EEK(k,k)
DO 4 j=k1,n

```

```

4  EEK(k,j)=EEK(k,j)/yb
   BE(k)=BE(k)/YB
C
   DO 10 i=k1,n
   YB=EEK(i,k)
   DO 9 j=k1,n
9  EEK(i,j)=EEK(i,j)-YB*EEK(k,j)
10 BE(i)=BE(i)-YB*BE(k)
100 CONTINUE
C
   IF(dABS((EEK(n,n)))-EP)8,8,101
101 BE(n)=BE(N)/EEK(N,N)
C
   DO 200 l=1,n1
   k=n-l
   k1=k+1
   DO 200 j=k1,N
200 BE(k)=BE(k)-EEK(k,j)*BE(j)
C
   DED=1.0
   DO 250 i=1,n
250 DED=DED*EEK(i,i)
   GOTO 300
8  WRITE(*,'(3x,"SINGULARITY IN ROW",i5)') k

   DED=0.
300 RETURN
END

```

**TECNICAL UNIVERSITY OF BRAUNSCHWEIG**  
**INSTITUT OF STEEL CONSTRUCTIONS**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS - USP.**  
**DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS.**  
*E.P.de Deus*

**Programa 02 - EIGFRISS (*Eigenfrequenz für Riβmodelle*)**

```

program Frequenz
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension det11(6,6)
dimension det12(6,6)
dimension det21(6,6)
dimension det22(6,6),betam(11),gm(11),gm1(11)
dimension bm(6)
open(10,file='outfreq')
open(1,file='infreq')

```



```

write(*,(3x,"Please input Natural Frequenz:"))
read(*,*) ome
write(*,(3x,"Please input A,ro,E,I,L:"))
c   read(1,*) a,ek
    read(1,*) ro
    read(1,*) e
    read(1,*) smi
    read(1,*) v,nbet
write(*,(3x,"Please input BETA:"))
read(*,*) (betam(i), i=1,nbet)
c   read(1,*) beta

dome=ome/100000
ome2=ome+dome
wn=((ome**2)*((a*ro*v**4)/(e*smi)))**.25
wn1=((ome2**2)*((a*ro*v**4)/(e*smi)))**.25

do 100 i=1,nbet
c   write(*,(3x,"i= ome,beta",2d12.3)) ome,beta
    beta=betam(i)
write(*,(3x,"i= ome,beta",2d12.3)) ome,beta
det11(1,1)=sinh(wn*beta)
det11(1,2)=sin(wn*beta)
det11(1,3)=-cosh(wn*beta)
det11(1,4)=-sinh(wn*beta)
det11(1,5)=-cos(wn*beta)
det11(1,6)=-sin(wn*beta)
det11(2,1)=cosh(wn*beta)
det11(2,2)=-cos(wn*beta)
det11(2,3)=-sinh(wn*beta)
det11(2,4)=-cosh(wn*beta)
det11(2,5)=-sin(wn*beta)
det11(2,6)=cos(wn*beta)
det11(3,1)=sinh(wn*beta)
det11(3,2)=-sin(wn*beta)
det11(3,3)=-cosh(wn*beta)
det11(3,4)=-sinh(wn*beta)
det11(3,5)=cos(wn*beta)
det11(3,6)=sin(wn*beta)
det11(4,1)=0.
det11(4,2)=0.
det11(4,3)=cosh(wn)
det11(4,4)=sinh(wn)

```

$\det_{11}(4,5)=\cos(\omega n)$   
 $\det_{11}(4,6)=\sin(\omega n)$   
 $\det_{11}(5,1)=0.$   
 $\det_{11}(5,2)=0.$   
 $\det_{11}(5,3)=\cosh(\omega n)$   
 $\det_{11}(5,4)=\sinh(\omega n)$   
 $\det_{11}(5,5)=-\cos(\omega n)$   
 $\det_{11}(5,6)=-\sin(\omega n)$   
 $\det_{11}(6,1)=\cosh(\omega n \beta)$   
 $\det_{11}(6,2)=\cos(\omega n \beta)$   
 $\det_{11}(6,3)=-\sinh(\omega n \beta)$   
 $\det_{11}(6,4)=-\cosh(\omega n \beta)$   
 $\det_{11}(6,5)=\sin(\omega n \beta)$   
 $\det_{11}(6,6)=-\cos(\omega n \beta)$

$\det_{12}(1,1)=\sinh(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(1,2)=\sin(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(1,3)=-\cosh(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(1,4)=-\sinh(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(1,5)=-\cos(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(1,6)=-\sin(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(2,1)=\cosh(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(2,2)=-\cos(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(2,3)=-\sinh(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(2,4)=-\cosh(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(2,5)=-\sin(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(2,6)=\cos(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(3,1)=\sinh(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(3,2)=-\sin(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(3,3)=-\cosh(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(3,4)=-\sinh(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(3,5)=\cos(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(3,6)=\sin(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(4,1)=0.$   
 $\det_{12}(4,2)=0.$   
 $\det_{12}(4,3)=\cosh(\omega n)$   
 $\det_{12}(4,4)=\sinh(\omega n)$   
 $\det_{12}(4,5)=\cos(\omega n)$   
 $\det_{12}(4,6)=\sin(\omega n)$   
 $\det_{12}(5,1)=0.$   
 $\det_{12}(5,2)=0.$   
 $\det_{12}(5,3)=\cosh(\omega n)$   
 $\det_{12}(5,4)=\sinh(\omega n)$   
 $\det_{12}(5,5)=-\cos(\omega n)$   
 $\det_{12}(5,6)=-\sin(\omega n)$

$\det_{12}(6,1)=\sinh(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(6,2)=-\sin(\omega n \beta)$   
 $\det_{12}(6,3)=0.$   
 $\det_{12}(6,4)=0.$   
 $\det_{12}(6,5)=0.$   
 $\det_{12}(6,6)=0.$

$\det_{21}(1,1)=\sinh(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(1,2)=\sin(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(1,3)=-\cosh(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(1,4)=-\sinh(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(1,5)=-\cos(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(1,6)=-\sin(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(2,1)=\cosh(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(2,2)=-\cos(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(2,3)=-\sinh(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(2,4)=-\cosh(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(2,5)=-\sin(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(2,6)=\cos(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(3,1)=\sinh(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(3,2)=-\sin(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(3,3)=-\cosh(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(3,4)=-\sinh(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(3,5)=\cos(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(3,6)=\sin(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(4,1)=0.$   
 $\det_{21}(4,2)=0.$   
 $\det_{21}(4,3)=\cosh(\omega n)$   
 $\det_{21}(4,4)=\sinh(\omega n)$   
 $\det_{21}(4,5)=\cos(\omega n)$   
 $\det_{21}(4,6)=\sin(\omega n)$   
 $\det_{21}(5,1)=0.$   
 $\det_{21}(5,2)=0.$   
 $\det_{21}(5,3)=\cosh(\omega n)$   
 $\det_{21}(5,4)=\sinh(\omega n)$   
 $\det_{21}(5,5)=-\cos(\omega n)$   
 $\det_{21}(5,6)=-\sin(\omega n)$   
 $\det_{21}(6,1)=\cosh(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(6,2)=\cos(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(6,3)=-\sinh(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(6,4)=-\cosh(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(6,5)=\sin(\omega n \beta)$   
 $\det_{21}(6,6)=-\cos(\omega n \beta)$

$\det_{22}(1,1)=\sinh(\omega n \beta)$

```

det22(1,2)=sin(wn1*beta)
det22(1,3)=-cosh(wn1*beta)
det22(1,4)=-sinh(wn1*beta)
det22(1,5)=-cos(wn1*beta)
det22(1,6)=-sin(wn1*beta)
det22(2,1)=cosh(wn1*beta)
det22(2,2)=-cos(wn1*beta)
det22(2,3)=-sinh(wn1*beta)
det22(2,4)=-cosh(wn1*beta)
det22(2,5)=-sin(wn1*beta)
det22(2,6)=cos(wn1*beta)
det22(3,1)=sinh(wn1*beta)
det22(3,2)=-sin(wn1*beta)
det22(3,3)=-cosh(wn1*beta)
det22(3,4)=-sinh(wn1*beta)
det22(3,5)=cos(wn1*beta)
det22(3,6)=sin(wn1*beta)
det22(4,1)=0.
det22(4,2)=0.
det22(4,3)=cosh(wn1)
det22(4,4)=sinh(wn1)
det22(4,5)=cos(wn1)
det22(4,6)=sin(wn1)
det22(5,1)=0.
det22(5,2)=0.
det22(5,3)=cosh(wn1)
det22(5,4)=sinh(wn1)
det22(5,5)=-cos(wn1)
det22(5,6)=-sin(wn1)
det22(6,1)=sinh(wn1*beta)
det22(6,2)=-sin(wn1*beta)
det22(6,3)=0.
det22(6,4)=0.
det22(6,5)=0.
det22(6,6)=0.

```

```

bm(1)=1
bm(2)=1
bm(3)=1
bm(4)=1
bm(5)=1
bm(6)=1

```

```

call ivsnr(det11,bm,ded11,6,6)
call ivsnr(det12,bm,ded12,6,6)

```

```

call ivsnr(det21,bm,ded21,6,6)
call ivsnr(det22,bm,ded22,6,6)

c   equa=(ek/wn)*ded11+ded12

   derive=((ded11/ded12)-(ded21/ded22))/(wn-wn1)

   gm(i)=1/derive
   derive1=(ded11/ded12/(-wn)-ded21/ded22/(-wn1))/(-dome)
   gm1(i)=1/derive1/2./ome
   write(*,'(3x,"delta1,ded2,equa",3d12.3)') ded11,ded12
100 continue

   write(10,'(3x,"beta",3d12.3)') (betam(i),i=1,11)

   write(10,'(3x,"g(beta)",3d12.3)') (gm(i),i=1,11)
   write(*,'(3x,"beta",3d12.3)') (betam(i),i=1,11)
   write(*,'(3x,"g(beta)",3d12.3)') (gm(i),i=1,11)
   write(*,'(3x,"g1(beta)",3d12.3)') (gm1(i),i=1,11)
stop
end

SUBROUTINE IVSNR(EEK,BE,DED,n,nx)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION BE(nx),EEK(nx,nx)
C
   EP=0.000001
C
   N1=N-1

   DO 100 k=1,N1
   k1=k+1
   YB=EEK(k,k)
   IF(dABS(YB)-EP)1,1,3
1   DO 7 j=k1,N
C
   IF(dABS((EEK(j,k)))-EP)7,7,5
5   DO 6 l=k,n
   YB=EEK(k,l)
   EEK(k,l)=EEK(j,l)
6   EEK(j,l)=YB
   YB=BE(k)
   BE(k)=BE(j)

```

```

    BE(j)=YB
    YB=EEK(k,k)
    GOTO 3
7  CONTINUE
    GOTO 8
C
3  YB=EEK(k,k)
    DO 4 j=k1,n
4  EEK(k,j)=EEK(k,j)/yb
    BE(k)=BE(k)/YB
C
    DO 10 i=k1,n
    YB=EEK(i,k)
    DO 9 j=k1,n
9  EEK(i,j)=EEK(i,j)-YB*EEK(k,j)
10 BE(i)=BE(i)-YB*BE(k)
100 CONTINUE
C
    IF(dABS((EEK(n,n)))-EP)8,8,101
101 BE(n)=BE(N)/EEK(N,N)
C
    DO 200 l=1,n1
    k=n-l
    k1=k+1
    DO 200 j=k1,N
200 BE(k)=BE(k)-EEK(k,j)*BE(j)
C
    DED=1.0
    DO 250 i=1,n
250 DED=DED*EEK(i,i)
    GOTO 300
    8 WRITE(*,'(3x,"SINGULARITY IN ROW",i5)') k

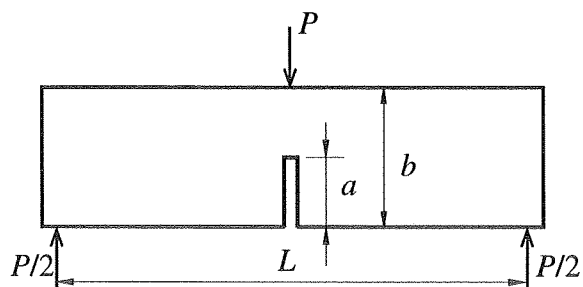
    DED=0.
300 RETURN
    END

```

## APÊNDICE C

### ESPÉCIME BIAPOIADO COM CARGA CONCENTRADA P EM L/2

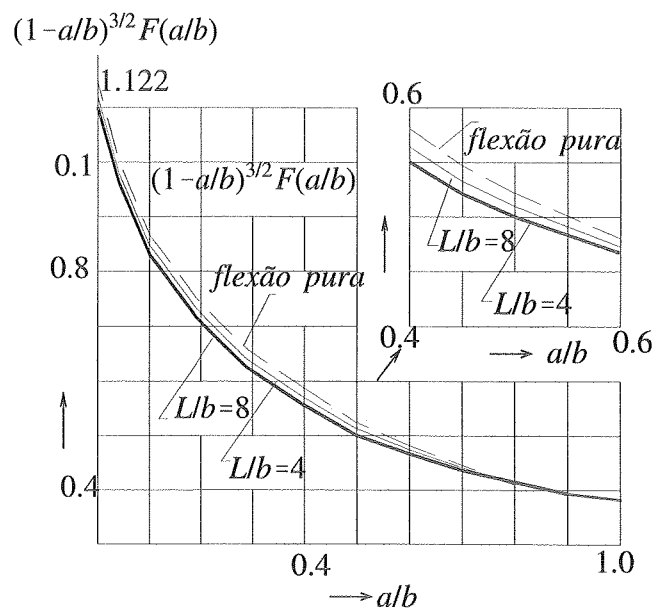
a. Fator de Intensidade de Tensão  $K_I$



$$\sigma = \frac{6M}{b^2} \quad (M = \frac{PL}{4})$$

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(a/b)$$

Valores de  $F(a/b)$





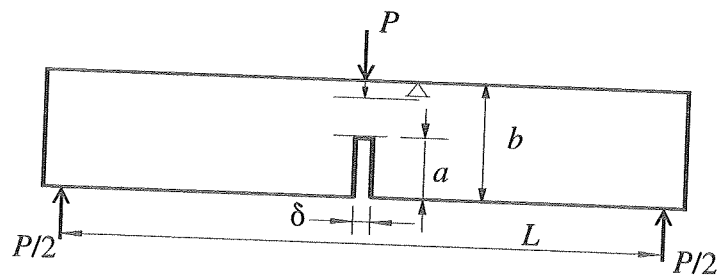
Para  $L/b = 4$  e  $a/b = A$ :

$$F(a/b) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1,99 - A(1-A)(2,15 - 3,93A + 2,7A^2)}{(1+2A)(1-A)^{3/2}}$$

Para  $L/b = 8$ :

$$F(a/b) = 1.106 - 1.552(a/b) + 7.71(a/b)^2 - 13.53(a/b)^3 + 14.23(a/b)^4$$

### b. Deslocamentos



$$\delta = \frac{4\sigma a}{E'} VI(a/b)$$

$$VI(a/b) = 0.76 - 2,28(a/b) + 3,87(a/b)^2 - 2,04(a/b)^3 + 0,66/(1 - a/b)^2$$

$$\Delta_{\text{crack}} = \Delta_{\text{total}} - \Delta_{\text{nocrack}}$$

Referência: Tada[1973]