

**PLACAS LAMINADAS EM MATERIAIS COMPOSTOS DE
FIBRAS LONGAS:**

**PROPRIEDADES TERMOELÁSTICAS DOS MATERIAIS
CONSTITUINTES; PROPRIEDADES EQUIVALENTES DAS LÂMINAS;
CRITÉRIOS DE RUPTURA E ANÁLISE PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS**

NILSON MAGAGNIN FILHO

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

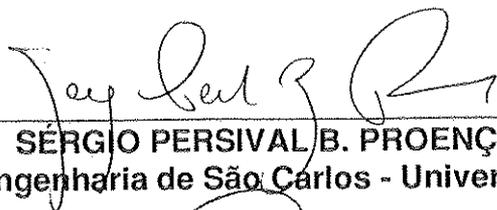
ORIENTADOR: Prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença

**São Carlos
1996**

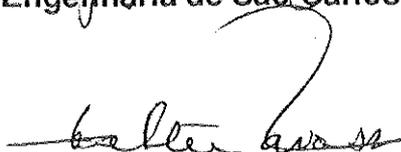
**DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

FOLHA DE APROVAÇÃO

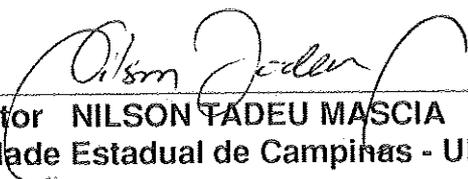
Dissertação defendida e aprovada em 29-4-1996
pela Comissão Julgadora:



Prof. Doutor SÉRGIO PERSIVAL B. PROENÇA - Orientador
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor WALTER SAVASSI
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor NILSON TADEU MASCIA
(Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP)



Presidente da Comissão de Pós-Graduação
Prof. Dr. EDUARDO CLETO PIRES



Coordenador da Área Engenharia de Estruturas
Prof. Dr. MOUNIR KHALIL EL DEBS

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Sérgio, pela paciência.

À CAPES, pelo financiamento.

Ao Departamento de Estruturas da EESC, pela oportunidade.

Ao Departamento de Estruturas da UEL, pela licença concedida.

À Lúcia do NTE da UEL, pela confecção dos desenhos.

À Rose, professora de inglês, pela ajuda com o *abstract*.

Aos amigos, pelo entusiasmo.

Aos meus pais, pelo incentivo.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiv
RESUMO	xv
<i>ABSTRACT</i>	xvi
1 - INTRODUÇÃO	01
1.1 - Origens dos Materiais Compostos	01
1.2 - Objetivos e Descrição desse Texto	02
2 - MATERIAIS COMPOSTOS - CONSIDERAÇÕES GERAIS	04
2.1 - Definição de Material Composto	04
2.2 - Tipos de Materiais Compostos	05
2.3 - Materiais Utilizados e Suas Propriedades	06
2.4 - Vantagens e Desvantagens dos Compostos	09
2.5 - Algumas Aplicações	12
3 - COMPORTAMENTO MECÂNICO DOS COMPOSTOS EM FIBRAS LONGAS	21
3.1 - Introdução	21
3.2 - Anisotropia Elástica	24
3.2.1 - Anisotropia Elástica Linear de um Meio Hiperelástico	24
3.2.2 - Ortotropia	28
3.2.3 - Componentes da Matriz de Rigidez Ortótropa	34

3.2.4 - Isotropia Transversal-----	37
3.2.5 - Isotropia -----	40
3.2.6 - Elasticidade Plana de um Meio Homogêneo e Ortótropo -----	43
4 - PROPRIEDADES TERMOELÁSTICAS DOS COMPOSTOS	
EM FIBRAS LONGAS-----	50
4.1 - Introdução -----	50
4.2 - Método Baseado em Conceitos da Resistência dos Materiais -----	52
4.3 - Método Auto-Consistente -----	58
4.4 - Método Variacional -----	62
4.5 - Aproximações Numéricas -----	68
4.6 - Regra das Misturas -----	72
5 - LAMINADOS EM MATERIAIS COMPOSTOS -----	78
5.1 - Tipos e Nomenclatura dos Laminados-----	78
5.2 - Teoria dos Laminados em Flexão-----	83
6 - RESISTÊNCIA DOS LAMINADOS EM FIBRAS LONGAS -----	93
6.1 - Introdução -----	93
6.2 - Mecanismos ou Modos Básicos de Ruptura-----	94
6.2.1 - Modos de Ruptura das Fibras -----	94
6.2.2 - Modos de Ruptura da Matriz -----	96
6.2.3 - Modos de Ruptura da Interface Fibra Matriz -----	99
6.3 - Critérios de Ruptura para Compostos Laminados em Fibras Longas -----	100
6.3.1 - Introdução -----	100
6.3.2 - Critério da Máxima Tensão-----	102
6.3.3 - Critério da Máxima Deformação-----	105
6.3.4 - Critério de Tsai-Hill -----	105
6.3.5 - Critério de Tsai-Wu-----	105
6.3.6 - Critério de Hoffman -----	110
6.3.7 - Critério de Chamis-----	112
6.4 - Análise da Resistência dos Laminados -----	113
6.4.1 - Aspectos Gerais-----	113
6.4.2 - Delaminação -----	115
6.4.3 - Critério de Delaminação -----	117
6.4.4 - Análise Progressiva da Ruptura -----	118
6.5 - Critério de Plasticidade -----	120

6.5.1 - Critério de Escoamento-----	120
6.5.2 - Parâmetros de Anisotropia-----	123
7 - EXEMPLOS -----	126
7.1 - Exemplo1-----	127
7.2 - Exemplo2-----	130
7.3 - Exemplo3-----	136
8 - CONCLUSÕES -----	142
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS -----	144
APÊNDICE: PROGRAMA PARA ANÁLISE DE PLACAS LAMINADAS ANISÓTROPAS EM LINGUAGEM FORTRAN - PLASTOSHELL	

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 01 - Tipos de Materiais Compostos-----	05
FIGURA 02 - Composto Laminado com Lâminas em Fibras Longas -----	06
FIGURA 03 - Diagramas Tensão-Deformação de Compostos e Metais-----	09
FIGURA 04 - Aplicações Típicas de Compostos em Helicópteros -----	12
FIGURA 05 - Hélice de Helicóptero em Material Composto-----	13
FIGURA 06 - Aplicações Típicas de Compostos em Aviões -----	14
FIGURA 07 - Viga em Material Composto -----	14
FIGURA 08 - Aplicações Biomédicas.-----	15
FIGURA 09 - Esquema em Perspectiva de Residência Construída em Painéis de Compostos em Argamassa Armada e Poliuretano-----	16
FIGURA 10 - Painel de Argamassa Armada e Poliuretano -----	16
FIGURA 11 - Casa em Construção-----	17
FIGURA 12 - Casa Construída em Painéis de Compostos -----	17
FIGURA 13 - Estrutura da Cobertura do Aeroporto de Dubai -----	18
FIGURA 14 - "American Express Building"-----	18
FIGURA 15 - Cúpula do Aeroporto Internacional de Sharajah -----	19
FIGURA 16 - Cúpula do Centro de Informação da Feira de Hannover-----	20
FIGURA 17 - Arranjo Quadrado e Volume Elementar Representativo -----	22
FIGURA 18 - Arranjo Hexagonal e Volume Elementar Representativo -----	22
FIGURA 19 - Análise Micromecânica-----	23
FIGURA 20 - Análise Macromecânica-----	23
FIGURA 21 - Composto com Fibras nas Direções x,y e z -----	28
FIGURA 22 - Representação das Componentes de Tensão Segundo os Eixos Defasados 180° em torno de z-----	29
FIGURA 23 - Representação das Componentes de Tensão Segundo os Eixos Defasados 180° em torno de y -----	32
FIGURA 24 - Material Transversalmente Isótropo com Fibras na Direção z -----	37
FIGURA 25 - Componentes de Tensão Considerando a Isotropia Transversal ----	37
FIGURA 26 - Estado de Cisalhamento Puro-----	40

FIGURA 27 - Representação das Componentes de Tensão Segundo os Eixos Defasados 90^0 em torno de z-----	41
FIGURA 28 - Chapa Ortótropa com Direções de Ortotropia e Sistema oxy -----	45
FIGURA 29 - Chapa Ortótropa com Direções de Ortotropia e Sistema oxy -----	47
FIGURA 30 - Solicitação Inclinada em Relação aos Eixos de Ortotropia -----	49
FIGURA 31 - Relação Tensão-Deformação da Matriz -----	52
FIGURA 32 - Modelo Equivalente de Barras Paralelas de Matriz e Fibra -----	53
FIGURA 33 - Diagrama Tensão-Deformação do Conjunto Fibra Matriz-----	54
FIGURA 34 - Seção Transversal com Arranjo Triangular das Fibras-----	54
FIGURA 35 - Modelo Equivalente de Barras Paralelas de Matriz e Fibra/Matriz	55
FIGURA 36 - Efeito do Reforço Sobre a Deformação Sob a Ação de σ_{22} -----	56
FIGURA 37 - Modelo de Geometria de Elemento Repetido no Composto -----	58
FIGURA 38 - Arranjos Hexagonal e Aleatório das Fibras na Matriz -----	62
FIGURA 39 - Cilindro Formado pela Fibra Envolta na Matriz -----	63
FIGURA 40 - Arranjo Retangular das Fibras na Matriz -----	68
FIGURA 41 - Tensões de Cisalhamento Atuando no Volume Elementar Representativo -----	69
FIGURA 42 - Malha Irregular de Diferenças Finitas Empregada-----	69
FIGURA 43 - Rigidez ao Cisalhamento para Composto Sujeito a τ_{xz} -----	70
FIGURA 44 - Arranjo Retangular das Fibras na Matriz -----	70
FIGURA 45 - Tensões Normais Atuando no Volume Elementar Representativo--	71
FIGURA 46 - Rigidez Transversal para Composto Sujeito a σ_x -----	71
FIGURA 47 - Resposta Longitudinal - Arranjo em Paralelo -----	72
FIGURA 48 - Resposta Transversal - Arranjo em Série-----	73
FIGURA 49 - Comparação Experimento-Teoria do Módulo de Elasticidade Longitudinal de Composto Vidro-Epoxi-----	74
FIGURA 50 - Comparação Experimento-Teoria do Módulo de Elasticidade Perpendicular às Fibras de Composto Vidro-Epoxi-----	75
FIGURA 51 - Laminado em Material Composto-----	78
FIGURA 52 - Laminado Simétrico-----	79
FIGURA 53 - Laminado Assimétrico -----	80
FIGURA 54 - Laminado Antissimétrico -----	80
FIGURA 55 - Laminado com Camadas em Ângulo-----	81
FIGURA 56 - Laminado com Camadas Cruzadas-----	81
FIGURA 57 - Laminado Ilustrando Sequência de Empilhamento-----	82
FIGURA 58 - Deformação de uma Seção Transversal de Placa-----	85
FIGURA 59 - Placa Laminada e Nomenclatura Utilizada-----	87

FIGURA 60 - Sentidos Positivos das Resultantes de Tensões -----	88
FIGURA 61 - Modelo de Resistência à Compressão-----	94
FIGURA 62 - Modelo Desacoplado de Resistência à Tração-----	95
FIGURA 63 - Modelo Acoplado de Resistência à Tração-----	96
FIGURA 64 - Distribuição de Tensões na Fibra e na Matriz-----	97
FIGURA 65 - Trajetória das tensões de Tração na Matriz-----	97
FIGURA 66 - Fissuras na Matriz Provocadas pela Ruptura da Fibra -----	98
FIGURA 67 - Fissura na Matriz na Região da Extremidade da Fibra-----	99
FIGURA 68 - Região da Fibra Desligada da Matriz-----	100
FIGURA 69 - Superfícies de Ruptura para os Critérios da Máxima Deformação, Maxima Tensão e Quadrático -----	101
FIGURA 70 - Situação de Solicitação Inclinada em Relação às Fibras. -----	102
FIGURA 71 - Tensão em Função da Inclinação das Fibras de um Composto Boro-Epoxi Unidirecional-----	104
FIGURA 72 - Vista Isométrica da Superfície de Ruptura para Composto em Estado Plano de Tensões -----	112
FIGURA 73 - Delaminação: Aspectos Básicos -----	115
FIGURA 74 - Delaminação: Aspectos Básicos -----	115
FIGURA 75 - Modos Básicos de Delaminação -----	116
FIGURA 76 - Tensões Interlaminares Próximo à Extremidade da Fenda -----	116
FIGURA 77 - Componentes de Tensão no Sistema de Coordenadas (L,T,z) ----	117
FIGURA 78 - Chapa Retangular Biengastada e Sistema de Eixos xy -----	127
FIGURA 79 - Chapa Retangular Discretizada -----	128
FIGURA 80 - Região Plastificada sob a Ação de (P)-----	128
FIGURA 81 - Região Plastificada sob a Ação de (ΔT) -----	129
FIGURA 82 - Região Plastificada sob a Ação Conjunta de (P) e (ΔT)-----	129
FIGURA 83 - Placa Quadrada Engastada e Sistema de Eixos xy -----	130
FIGURA 84 - Placa em Perspectiva com Carga Uniformemente Distribuída ----	130
FIGURA 85 - Diagrama Carga-Deslocamento para Fibras a 0° e $0^{\circ}/90^{\circ}$ -----	131
FIGURA 86 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras a 0° sob a Ação de (q) -----	132
FIGURA 87 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras a 0° sob a Ação Conjunta de (q) e (ΔT) -----	133
FIGURA 88 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras a $0^{\circ}/90^{\circ}$ sob a Ação de (q) -----	134
FIGURA 89 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras a $0^{\circ}/90^{\circ}$ sob a Ação Conjunta de (q) e (ΔT) -----	135

FIGURA 90 - Placa Quadrada Engastada e Sistema de Eixos xy -----	136
FIGURA 91 - Placa em Perspectiva com Carga Uniformemente Distribuída ----	136
FIGURA 92 - Diagrama Carga-Deslocamento para Fibras Simétricas e Antissimétricas -----	137
FIGURA 93 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras Simétricas sob a Ação de (q) -----	138
FIGURA 94 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras Simétricas sob a Ação Conjunta de (q) e (ΔT) -----	139
FIGURA 95 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras Antissimétricas sob a Ação de (q) -----	140
FIGURA 96 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras Antissimétricas sob a Ação Conjunta de (q) e (ΔT) -----	141
Figuras do Apêndice	
FIGURA 97 - Elemento Quadrático Sólido Tridimensional -----	2
FIGURA 98 - Elemento Degenerado Correspondente -----	2
FIGURA 99 - Deslocamentos e Rotações de Um Ponto K Genérico -----	3
FIGURA 100 - Configuração Nodal dos Três Elementos Quadráticos -----	4
FIGURA 101 - Posições para Quatro e Nove Pontos de Gauss na Integração Seletiva -----	7
FIGURA 102 - Modelo Estratificado e Correspondente Distribuição de Tensão ----	8
FIGURA 103 - Procedimento de Análise Elasto-Plástica Aproximada -----	9
FIGURA 104 - Fluxograma do Programa Plastoshell -----	12
FIGURA 105 - Módulo de Elasticidade e Resistência em Função da Temperatura	15

LISTA DE TABELAS

TABELA 01 - Reforços e Matrizes Utilizados-----	07
TABELA 02 - Propriedades de Alguns Materiais Utilizados em Compostos-----	08
TABELA 03 - Comparação em Peso do Desempenho entre Alumínio e Compostos	10

LISTA DE SÍMBOLOS PRINCIPAIS

- σ_{ij} componentes do tensor das tensões
 ε_{kl} componentes do tensor das deformações
 D_{ijkl} componentes da matriz de rigidez
 C_{ij} componentes da matriz de flexibilidade
 σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_l , σ_t tensões normais
 τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{lt} tensões tangenciais
 ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , ε_l , ε_t deformações específicas lineares
 ε_{xy} , ε_{yz} , ε_{zx} , ε_{lt} deformações específicas angulares
 W energia de deformação
 ν_{ij} , ν_{lt} coeficiente de Poisson
 E_x , E_y , E_z , E_l , E_t módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de rigidez
 G_{xy} , G_{yz} , G_{zx} , G_{lt} módulo de elasticidade transversal
 A área de seção transversal
 k , m , K módulo de elasticidade volumétrico
 α_i coeficiente de dilatação térmica
 v_i , V_i volume
 u , v , w deslocamentos segundo x, y, z
 x , y , z sistema de coordenadas ortogonais
 Δt , ΔT variação de temperatura
 k_x , k_y , k_{xy} curvaturas
 N_x , N_y , N_{xy} resultantes de tensões normais e tangenciais
 Q_x , Q_y resultantes de tensões tangenciais
 M_x , M_y , M_{xy} momentos resultantes de tensões normais e tangenciais
 X_i , Y_i , Z_i resistências normais à tração ou compressão
 R , S , T resistências ao cisalhamento
 σ_{ef} tensão efetiva de escoamento
 A_{ij} componentes da matriz de parâmetros de anisotropia
 L_{ij} componentes da matriz de transformação de coordenadas
 δ deslocamento

RESUMO

MAGAGNIN F., N. *Placas Laminadas em Materiais Compostos de Fibras Longas : Propriedades dos Materiais Constituintes ; Propriedades Equivalentes das Lâminas ; Critérios de Ruptura e Análise pelo Método dos Elementos Finitos*. São Carlos, 1996. 147p. Dissertação (Mestrado) . Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Os materiais compostos de fibras longas vêm se destacando entre o conjunto de novos materiais em desenvolvimento, com larga aplicação na indústria e também na construção civil. Elaborou-se aqui um texto introdutório no campo das placas laminadas constituídas de lâminas em compostos de fibras longas. A partir das propriedades dos materiais constituintes, fibra e matriz, são apresentadas as teorias para a determinação das propriedades equivalentes das lâminas. A teoria da anisotropia elástica é formulada e a teoria dos laminados em flexão é desenvolvida. Conclusões com respeito ao acoplamento de esforços em tais estruturas são mostradas. Os modos básicos de ruptura da fibra, matriz e da interface entre ambas são apresentados, bem como os modos básicos de delaminação. Alguns critérios de ruptura são mostrados, assim como um critério de escoamento. Ao fim alguns exemplos ilustram a análise pelo método dos elementos finitos de tais estruturas feita por programa disponível em literatura, com a implementação de subrotina para análise da temperatura.

Palavras-chave: Placas laminadas - estruturas; Materiais compostos.

ABSTRACT

MAGAGNIN F., N. *Long Fiber Composite Materials Laminated Plates : Constituent Materials Properties ; Laminae Equivalent Properties ; Failure Criteria and Finite Element Method Analysis*. São Carlos, 1996. 147p. Dissertação (Mestrado) . Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Long fiber composite materials have been standing out among the group of new materials in development with wide industrial application and also in civil construction. Here is elaborated an introductory text in laminated plates field constituted of long fiber composite laminae. Starting from constituent materials properties, fiber and matrix, the theories for determination of laminae equivalent properties are presented. Elastic anisotropy theory is formulated and the bending laminated theory is developed. Conclusions about the coupling efforts in such structures are showed. Fiber, matrix and the interface between both failure basic modes are presented, as well as delamination basic modes. Some failure criteria are showed, as well as a yielding criteria. At the end some examples illustrate the finite element method analysis of such structures made by available literature programme with temperature analysis subroutine implementation.

Keywords: Laminated Plates-structures ; Composite Materials.

1 - INTRODUÇÃO

1.1 - ORIGENS DOS MATERIAIS COMPOSTOS

Desde a Pré-história o homem vem tentando combinar materiais para alterar as propriedades ou uma determinada propriedade de um determinado material, ou mesmo para formar novos produtos, com propriedades diversas daqueles que lhes deram origem. Tal combinação adquire um significado prático especial quando, obviamente, resulta em melhoria das propriedades ou de uma propriedade específica dos materiais.

VINSON & SIERAKOWSKI (1987) relatam que já os antigos trabalhadores hebreus usavam palhas cortadas em tijolos para melhorar a sua integridade. Também os guerreiros samurais japoneses usavam metais laminados no forjamento de suas espadas para obter as propriedades desejadas. Uma espécie de tecnologia de material composto foi usada por artesãos do extremo oriente para moldar trabalhos de arte com papel estratificado em vários tamanhos para produzir formas e contornos desejados.

Também McCULLOUGH (1971) relata que, no século XX, com o desenvolvimento das indústrias aeroespacial, aeronáutica e automobilística, a demanda por materiais com propriedades específicas extremas tornou-se tão ampla e exigente que tais propriedades dificilmente podem ser reunidas em um único material. Em consequência, a antiga idéia de combinar materiais para formar um novo material composto passou a adquirir enorme importância. Os materiais compostos, "compósitos", foram, então, colocados em evidência, tornando-se uma alternativa para nossa época, a tal ponto de muitos pesquisadores e engenheiros de materiais chamarem esta a era dos compostos e acreditarem que o futuro no campo dos materiais pertença a essa nova categoria em desenvolvimento.

1.2 - OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DESSE TEXTO

Sabe-se que o Brasil elegeu o campo dos novos materiais como uma das cinco áreas estratégicas para seu desenvolvimento científico e tecnológico. Assim é que, em seu relatório final, a Comissão Parlamentar Mista de Inquérito (CPMI) do Congresso Nacional, instituída em 1991 e destinada a investigar as causas do atraso tecnológico do país, aponta a necessidade de unir a pesquisa de ponta com o aperfeiçoamento de pessoal técnico nas áreas de biotecnologia, química fina, mecânica de precisão, informática e novos materiais.

Dentro desse contexto e, sabendo que os esforços de investigação científica requerem continuidade, esse trabalho no campo dos materiais compostos tem o objetivo geral de apresentar uma introdução ao estudo das placas laminadas constituídas por lâminas de materiais compostos em fibras longas, de tal forma a ser uma referência inicial que possa servir ao desenvolvimento de uma linha de pesquisa envolvendo esse tema.

Deseja-se conhecer a distribuição das tensões e analisar a influência da orientação das fibras das lâminas na resposta global em regime linear e não-linear dessa categoria de estruturas. É necessário, então, desenvolver a modelagem matemática dos comportamentos elástico e plástico fundamentada nas teorias mecânicas desenvolvidas para analisar o comportamento das placas laminadas em materiais compostos em fibras longas. Devido à natureza heterogênea e anisótropa desses materiais, visando à aplicação da modelagem desenvolvida, é necessário fazer a caracterização de suas propriedades elásticas, baseando-se em teorias específicas. Além disso, deseja-se analisar a resposta de tais estruturas quando submetidas à variação de temperatura. Para tal deve-se considerar esse efeito no desenvolvimento da modelagem matemática, bem como proceder ao estudo das teorias existentes para a determinação dos coeficientes de expansão térmica dos compostos em fibras longas. Finalmente, deseja-se apresentar um estudo dos principais critérios de resistência existentes para a previsão e a simulação da ruptura em tais estruturas. Tais critérios devem envolver a ruptura da matriz, da fibra de reforço e da interface entre ambas, além da possibilidade de delaminação, ou seja, do desligamento das lâminas.

Após essa introdução o segundo capítulo faz algumas considerações gerais sobre os materiais compostos, definindo-os, classificando-os, abordando os principais materiais utilizados em sua confecção e suas propriedades, as vantagens e desvantagens dos compostos e apresentando algumas aplicações.

Na sequência, no terceiro capítulo introduz-se a modelagem matemática do comportamento elástico dos compostos em fibras longas. Inicialmente uma relação entre as teorias micromecânica e macromecânica é feita e, em seguida, a teoria da anisotropia elástica é apresentada, sendo particularizada para materiais ortótropos, transversalmente isótopos e isótopos.

No capítulo seguinte, o quarto, são apresentadas as teorias desenvolvidas para a determinação das propriedades termoelásticas dos compostos em fibras longas, o método baseado em conceitos da Resistência dos Materiais, o método Auto-consistente, o método Variacional e as Aproximações Numéricas. Além disso é apresentada a Regra das Misturas, um modelo mais simples para a previsão de tais propriedades.

O quinto capítulo aborda a teoria das placas laminadas em flexão. Partindo-se da definição, dos tipos e da nomenclatura utilizada para tais elementos estruturais, a teoria da laminação é apresentada. Ao final, algumas considerações são feitas quanto ao acoplamento de esforços e deformações de naturezas diferentes.

O sexto capítulo trata da resistência dos laminados em fibras longas. A plasticidade anisótropa é apresentada com base no critério de HUBER-MISES. Os modos de ruptura característicos da fibra, da matriz e da sua interface são comentados para, em seguida, introduzirem-se os critérios de ruptura para tais materiais. São expostos os critérios da máxima tensão, da máxima deformação, de Tsai-Hill, de Tsai-Wu, de Hoffman e de Chamis. Além disso, discutem-se alguns aspectos da delaminação e o critério de Lee é apresentado. Ao final é exposta a técnica de análise progressiva da ruptura para os compostos laminados.

O sétimo capítulo apresenta alguns exemplos ilustrativos da distribuição de tensões e do efeito da temperatura nos laminados.

O oitavo e último capítulo refere-se às conclusões.

Por fim, o apêndice descreve o programa utilizado para a análise de placas laminadas anisótropas, PLASTOSHELL, bem como a subrotina que leva em consideração o efeito da temperatura construída e implementada nesse programa.

2 - MATERIAIS COMPOSTOS - CONSIDERAÇÕES GERAIS

2.1 - DEFINIÇÃO DE MATERIAL COMPOSTO

VINSON & SIERAKOWSKI (1987) definem material composto, a grosso modo, como sendo simplesmente o resultado da combinação de dois ou mais materiais para obter um novo material ou uma nova propriedade específica. Entretanto, comentam que tal definição, ao mesmo tempo em que abrangente, pois engloba quaisquer materiais obtidos da reunião de dois ou mais, é também um tanto vaga, pois omite o nível ou escala de caracterização considerada, o que é importante para a escolha da ferramenta analítica a ser utilizada na modelagem teórica de tais materiais. A tal definição acrescentam-se, frequentemente, então, as palavras "microestrutural" ou "macroestrutural" para definir a escala de caracterização levada em conta na definição do composto. VAN VLACK (1970) especifica que, se microestrutural, considera-se a estrutura interna do material com heterogeneidades perceptíveis apenas ao microscópio, enquanto que se macroestrutural, tais heterogeneidades são perceptíveis à vista desarmada.

Entretanto, para propósitos de engenharia, é preciso, ainda, definir mais adequadamente essa classe de materiais. Um olhar sobre os tipos de compostos dos quais a engenharia de estruturas se serve nos leva a caracterizá-los do ponto de vista macroestrutural, pois são, em geral, materiais resultantes da combinação insolúvel de dois ou mais constituintes ou fases. Tais constituintes, como relata MANO (1991), não se dissolvem ou se descaracterizam quando reunidos no composto, formando cada um uma parte fisicamente homogênea e, portanto, mantendo suas identidades dentro do novo material. Isso implica em que as heterogeneidades resultantes da união desses dois ou mais materiais diferentes em sua composição ou forma sejam observáveis a um nível macroscópico. Em consequência, a caracterização é, portanto, macroestrutural.

As fases constituintes do composto, como relata MANO (1991), são comumente denominadas matriz (ou componente matricial), que é a fase contínua, e

reforço (ou componente estrutural), que é a fase descontínua ou dispersa. A função da matriz é envolver o reforço para protegê-lo de danos superficiais, manter sua orientação e espaçamento e transmitir a ele os esforços, que encontrarão no reforço seu principal elemento resistente. Esses dois componentes atuam conjuntamente fazendo com que as propriedades do composto sejam superiores às de cada componente individualmente.

2.2 - TIPOS DE MATERIAIS COMPOSTOS

Os materiais compostos com caracterização macroestrutural constituídos de matriz e reforço, que são os que aqui interessam, utilizam como reforço fibras curtas ou longas, flocos e partículas. Eles são classificados de acordo com o tipo de reforço utilizado, podendo ser denominados de compostos filamentosos, compostos em flocos e compostos particulados. Além disso, os componentes podem ser arranjados pela superposição de lâminas, formando os laminados. A Figura 01 ilustra esses tipos.

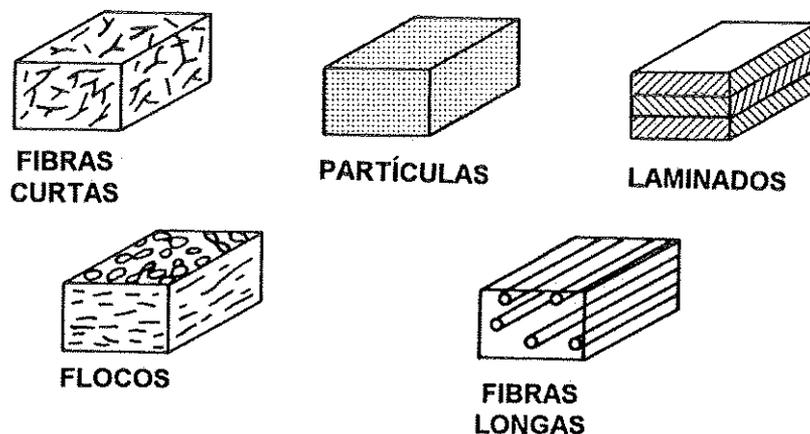


FIGURA 01 - Tipos de Materiais Compostos
VINSON & SIERAKOWSKI (1987)

Dentre esses tipos de compostos relacionados, de um ponto de vista da aplicação em estruturas, os mais importantes são os filamentos, que são aqueles constituídos por fibras longas ou curtas. Neste trabalho o estudo está restrito aos compostos com fibras longas e laminados, mais especificamente aos compostos constituídos de lâminas com fibras longas com uma ou mais camadas, como os da Figura 02.

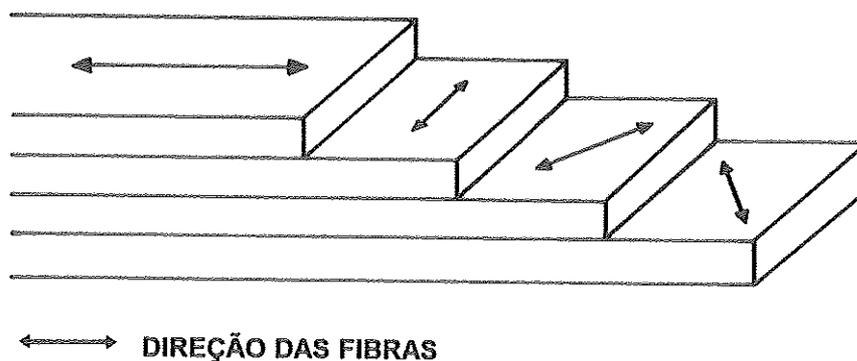


FIGURA 02 - Composto Laminado com Lâminas em Fibras Longas

2.3 - MATERIAIS UTILIZADOS E SUAS PROPRIEDADES

Os laminados, com compostos em fibras longas, possuem a característica de ter alta resistência e/ou rigidez com baixo peso específico, o que lhes confere grande eficiência estrutural. Tal fato se justifica, esclarece McCULLOUGH (1971), pela utilização em sua confecção de materiais constituídos dos elementos químicos mais leves, mais rígidos, mais fortes e mais estáveis termicamente. Compostos formados a partir desses elementos relativamente leves possuem ligações químicas covalentes estáveis termicamente, o que os torna mais rígidos e mais fortes do que aqueles formados por elementos com ligações metálicas ou iônicas. Porém, muitos dos materiais formados por esses elementos são frágeis e sua resistência só pode ser conseguida se eles estiverem livres de imperfeições. Consequentemente, as formas fibrosas são escolhidas para diminuir a probabilidade de ocorrência dessas imperfeições. Materiais usados nessas formas requerem,

obviamente, serem envolvidos por matrizes para assegurar o comportamento do conjunto.

As fibras usadas como reforço em compostos são, como discorrem VINSON & SIERAKOWSKI (1987), geralmente, de vidro, boro ou carbono. Para as matrizes utilizam-se os polímeros, como epoxi e poliamida, os metais, como níquel, alumínio e titânio, e as cerâmicas. Os compostos que se utilizam de polímeros como matrizes são chamados poliméricos, os que se utilizam de metais, metálicos e os que se utilizam das cerâmicas, cerâmicos. A Tabela 01 mostra os principais materiais usados para reforço e matriz.

REFORÇO	MATRIZ
Alumínio (Al)	Alumínio *
Boro * (B)	Epoxi *
Berílio (Be)	Grafite
Vidro * (Gl)	Níquel
Grafite * (Gr)	Nylon
Aramida (Kevlar) * (Kv)**	Poliéster
Titânio (Ti)	Polietileno
Tungstênio (W)	Poliamida *
	Titânio

* mais utilizados

** marca registrada da E. I. Du Pont Co.

TABELA 01 - Reforços e Matrizes Utilizados
VINSON & SIERAKOWSKI (1987)

As principais combinações entre fibra e matriz são grafite/epoxi, boro/epoxi, carbono/epoxi, kevlar/epoxi, vidro/epoxi, boro/alumínio, grafite/alumínio, sílica/alumínio, urânio/tungstênio, aço/tungstênio, sílica/titânio, boro/titânio e vidro/poliéster. Segundo MANO (1991) as matrizes em epoxi são compatíveis com todos os tipos de fibras e são as mais comumente utilizadas em compostos de alto desempenho, e entre as fibras o destaque é para as de carbono e aramida (Kevlar).

McCULLOUGH (1971) relata que as fibras de vidro e boro são, geralmente, consideradas como materiais isotrópicos e suas propriedades são tomadas como sendo as mesmas na direção da fibra e transversalmente a ela. Já as fibras de carbono, por causa da orientação dos cristais de grafite, não possuem as mesmas propriedades na direção transversal à fibra, sendo portanto, anisótropas. Abaixo, na Tabela 02 são mostradas diversas propriedades típicas dos materiais usados em compostos.

PROPRIE- DADES		FIBRA			MATRIZ	
		VIDRO	BORO	CARBONO	EPOXI	ALUMÍNIO
Módulo de Elasticidade (GPa)	Direção da Fibra (E_x)	75,8	413,7	344,8	3,5	70,3
	Perpendicular à Fibra (E_y)	75,8	413,7	10,3	3,5	70,3
	Transversal (G_{xy})	31,6	172,4	27,6	1,4	26,1
Coeficiente de Poisson (ν_{xy})		0,2	0,2	0,2	0,4	0,35
Resistência à Tração Longitudinal (GPa)		3,5	3,1	2,1	0,04	0,16
Deformação de Ruptura (ϵ) (%)		4,5	0,7	0,6	10	5
Densidade de (ρ) (g/cm^3)		2,3	2,7	1,7	1,1	2,7
Coeficiente de Expansão Térmica ($10^{-6}/^{\circ}F$)		2,8	2,8	1,5	32	82,5
Condutividade Térmica ($cal/cm.s.^{\circ}C$)		0,85	7,9	6,8	0,2	0,53

TABELA 02 - Propriedades de Alguns Materiais Utilizados em Compostos
McCULLOUGH (1971)

2.4 - VANTAGENS E DESVANTAGENS DOS COMPOSTOS

HOLLMANN (1986) explica que ao se fazer a escolha do material para uma aplicação estrutural diversas variáveis devem ser tomadas em conta, sendo que custo e eficiência são, normalmente, as determinantes. O custo final de uma estrutura compõe-se dos custos do material e da construção ou fabricação da estrutura. Por outro lado, a eficiência estrutural do material é a relação entre a sua resistência ou rigidez e o seu peso. Em geral, quanto mais baixo o peso do material e, conseqüentemente, maior sua eficiência estrutural, mais elevado é o custo e vice-versa. Sendo assim, a opção pelo emprego de um material com custos ainda elevados, como os compostos em alguns casos, fica condicionada a que sua eficiência estrutural compense seus custos.

A utilização de fibras leves e resistentes como reforço nos compostos confere a estes alta resistência e rigidez, com baixa densidade, quando comparados aos materiais metálicos tradicionais. A Figura 03 apresenta diagramas tensão-deformação de alguns compostos e de alguns metais para comparação.

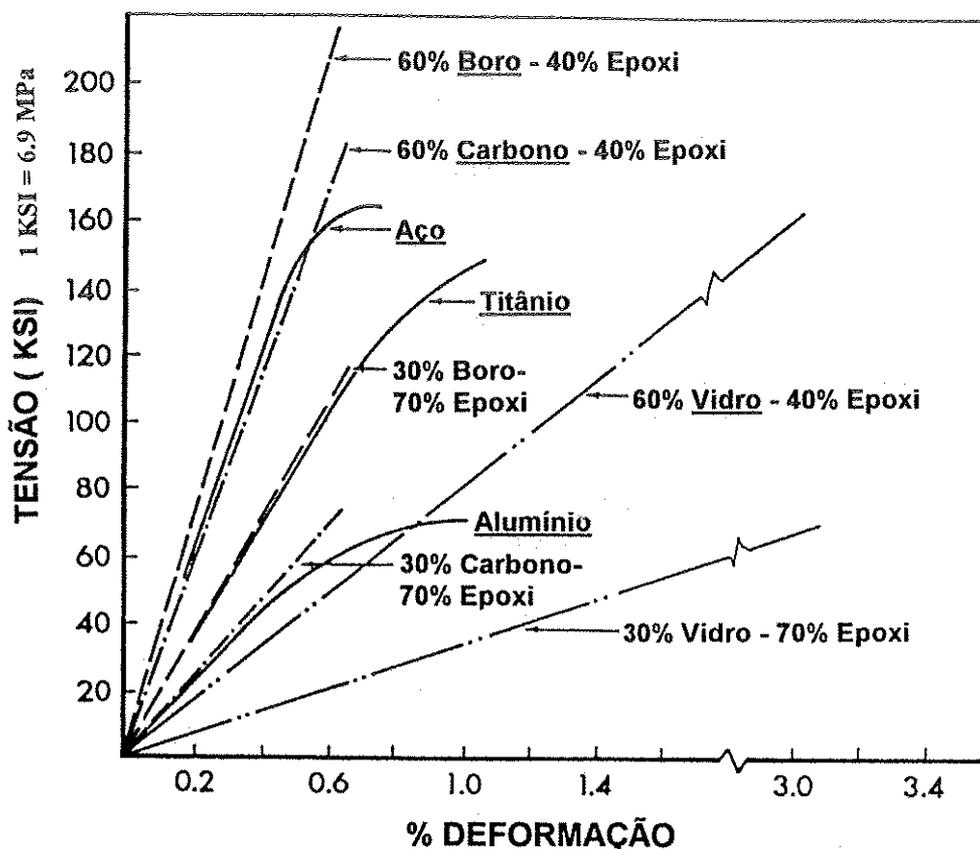


FIGURA 03 - Diagramas Tensão-Deformação de Compostos e Metais
McCULLOUGH (1971)

São comparados compostos em boro/epoxi, carbono/epoxi e vidro/epoxi, com diferentes volumes de seus componentes, com os materiais metálicos titânio, alumínio e aço.

A inclinação das curvas no diagrama está relacionada com a rigidez do material, enquanto que o valor de tensão em correspondência ao ponto onde a linha reta torna-se curva é a medida da resistência (ou resistência ao escoamento). Os diagramas mostram que, com exceção dos compostos em vidro, os demais se rompem quando atingem deformação em torno de 0,6%, sendo frágeis. Mostram ainda que os compostos em boro e o aço possuem aproximadamente a mesma rigidez, mas o composto em boro é mais resistente; os compostos em carbono são tão rígidos quanto o titânio, mas este ainda é mais resistente e os compostos em vidro são quase tão rígidos quanto o alumínio, porém muito mais resistentes. Segundo McCULLOUGH (1971) isso evidencia as vantagens dos compostos em relação aos metais.

Um outro aspecto dessa comparação é o peso dos compostos em relação ao dos materiais metálicos. A Tabela 03 ilustra o peso necessário de composto para se obter a mesma resistência ou rigidez que 100 Kg de alumínio numa mesma estrutura.

PESO NECESSÁRIO PARA OBTER O DESEMPENHO EQUIVALENTE A 100 Kg DE ALUMÍNIO		
MATERIAL	RIGIDEZ	RESISTÊNCIA
Composto em Carbono	30	30
Composto em Boro	25	20
Composto em Vidro	85	15
Titânio	110	70
Aço	120	120

TABELA 03 - Comparação em Peso do Desempenho entre Alumínio e Compostos
McCULLOUGH (1971)

Pela tabela acima, por exemplo, para se obter a mesma rigidez que 100 Kg de alumínio são necessários 30 Kg de um composto em carbono, ou 25 Kg

de um composto em boro, ou 120 Kg de aço. Ainda, para se obter a mesma resistência que 100 Kg de alumínio são necessários 30 Kg de um composto em carbono, ou 20 Kg de um composto em boro, ou 120 Kg de aço. Esse potencial para economia de peso dos compostos, mostrado pela tabela, aliado às propriedades de rigidez e resistência os torna muito eficientes quando comparados aos metais.

Algumas outras vantagens podem ser mencionadas:

- boa resistência à corrosão e outros ataques de natureza química;
- possibilidade de utilização em presença de elevadas temperaturas com polímeros de alta resistência ao calor;
- maior durabilidade;
- possibilidade, em função das técnicas de fabricação, de previsão precisa das propriedades de expansão térmica, condutividade térmica e elétrica;
- possibilidade, em função das técnicas de fabricação, de obter formas complexas para as estruturas;
- possibilidade de tirar proveito das propriedades direcionais introduzidas pelas fibras.

Mas, há também algumas desvantagens:

- altos custos de manufatura;
- maior custo quando se comparam preço/unidade de massa;
- conhecimento ainda limitado sobre as reais condições de comportamento, principalmente sobre a resposta a solicitações de impacto e fadiga;
- procedimentos de projeto ainda insuficientemente detalhados;
- problemas de fragilidade local provenientes de fratura na matriz, na fibra ou na interface entre elas.

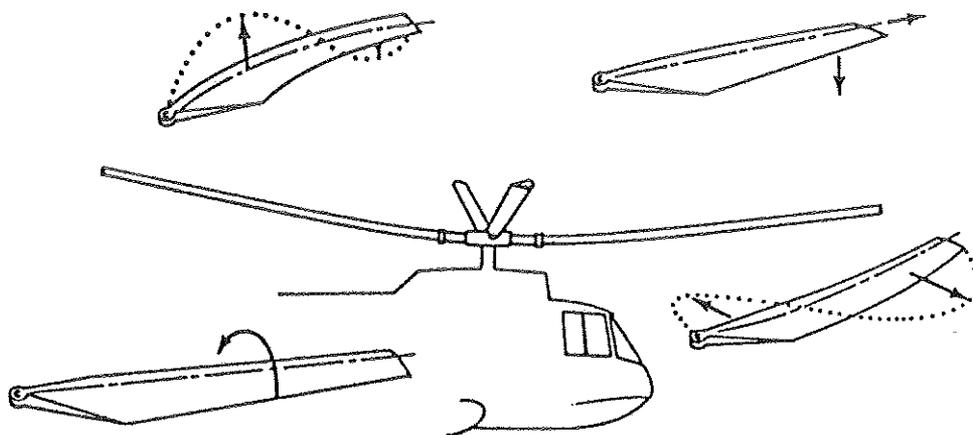
Com relação aos custos de produção e manufatura, estes tendem a diminuir com o avanço tecnológico e a produção em larga escala. Além disso, o desenvolvimento de modelos matemáticos consistentes para o estudo da resposta do material, inclusive em regime de ruptura, quando sob condições diversas de solicitação, pode oferecer importante contribuição para se tirar vantagem das possibilidades de aplicações estruturais dos compostos.

Finalmente, pode-se dizer que, além de todas essas vantagens expostas, com o advento dessa nova classe de materiais e seu enorme potencial de aplicação, o engenheiro deixa de ser meramente um "selecionador de materiais" e passa a ser um "projetista de materiais", o que lhe confere a condição de utilizar cada vez mais racionalmente os recursos à sua disposição na natureza.

2.5 - ALGUMAS APLICAÇÕES

A utilização de materiais compostos em fibras longas ou curtas impregnados por matrizes metálicas ou não metálicas vem recebendo cada vez mais atenção da indústria. Devido às propriedades únicas desses materiais, como peso reduzido, alto desempenho, aumento da vida útil, manutenção reduzida e tantas outras já citadas, os compostos vêm sendo utilizados, principalmente, nas indústrias aeronáutica, aeroespacial e automobilística. Porém, já é significativa a utilização dessa classe de materiais também para aplicações nas indústrias de mecânica de precisão, biomédica, de materiais esportivos, de materiais elétricos e de construção civil.

McCULLOUGH (1971), MANO (1991) e HOLLMANN (1986) descrevem a utilização pela indústria aeronáutica de compostos para a construção de hélices de helicópteros, estruturas internas de aviões, painéis de compressão da asa de aviões, "spoilers", etc. As Figuras 04 e 05 ilustram aplicações em estruturas de helicópteros e as Figuras 06 e 07 ilustram aplicações em estruturas de aviões.



*** As setas indicam direções dos movimentos realizados pelas peças em materiais compostos.**

FIGURA 04 - Aplicações Típicas de Compostos em Helicópteros
McCULLOUGH (1971)

Anais da INTERNATIONAL CONFERENCE ON CARBON FIBRE APPLICATIONS (1983), realizada no Brasil, apresentam a utilização pela indústria

aeroespacial de compostos em peças resistentes ao calor, em antenas e suportes de antenas de satélites, etc. A série de satélites INTELSAT V possui uma grande porcentagem do material de que é confeccionado em materiais compostos.

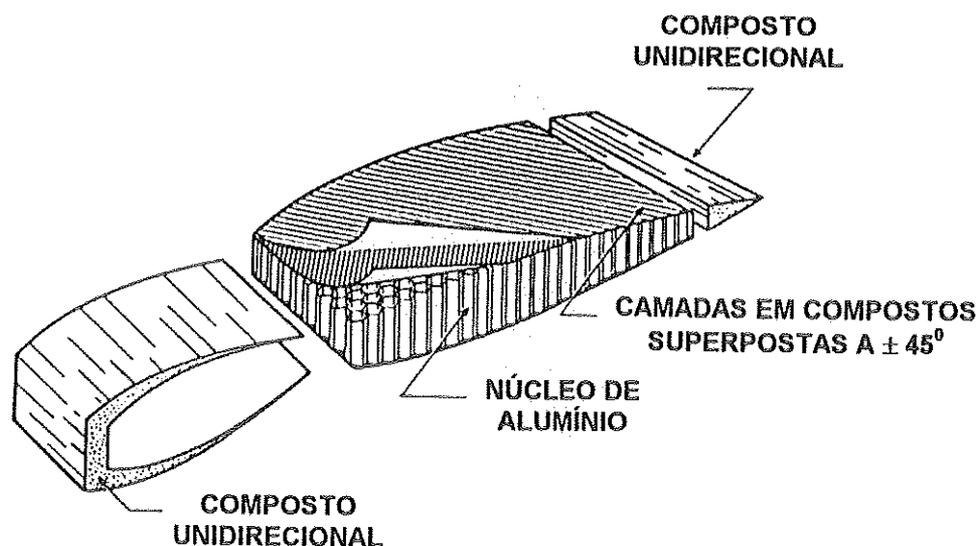


FIGURA 05 - Hélice de Helicóptero em Material Composto
McCULLOUGH (1971)

Na indústria automobilística, MANO (1991) e os anais da conferência citada relatam a utilização de compostos em aerofólios de carros de corrida, em "airbags", em peças que se movimentam em alta velocidade e têm contato com metais para evitar aglomeração de poeira resultante do desgaste dos metais, etc. A maioria dos carros da FÓRMULA 1 possui compostos como parte de sua estrutura.

Segundo MANO (1991) na mecânica de precisão utilizam-se compostos na fabricação de relógios e máquinas de costura.

NOOR (1992) e os anais da conferência citada apresentam aplicações biomédicas que se utilizam dos compostos como próteses para válvulas de coração, no reparo de tendões, ligamentos e cartilagens, no reforço de ossos humanos, em membranas internas do ouvido, etc. A Figura 08 ilustra algumas dessas aplicações.

Os mesmos anais apresentam aplicações na indústria de materiais esportivos onde os compostos são utilizados na confecção de varas de pescar,

raquetes de tênis, tacos de golfe, estruturas de bicicletas de corrida, varetas para esqui, etc.

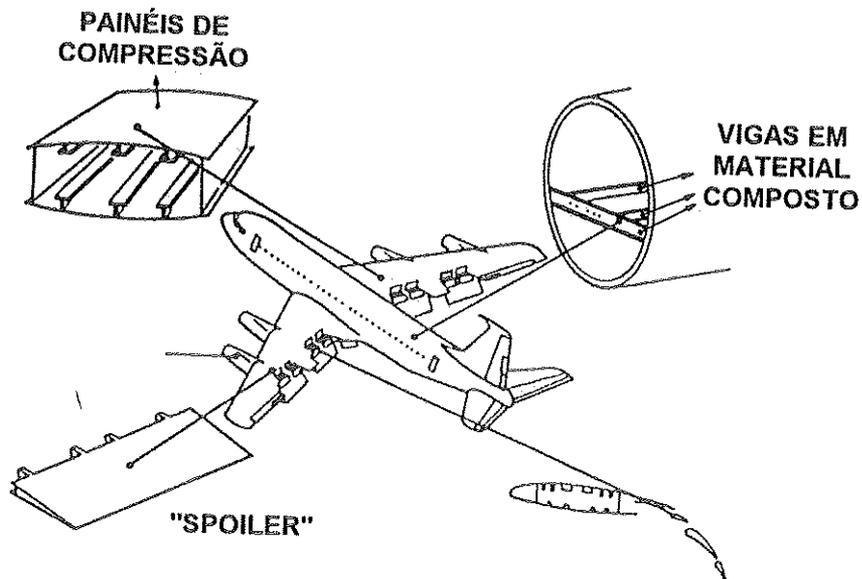


FIGURA 06 - Aplicações Típicas de Compostos em Aviões
McCULLOUGH (1971)

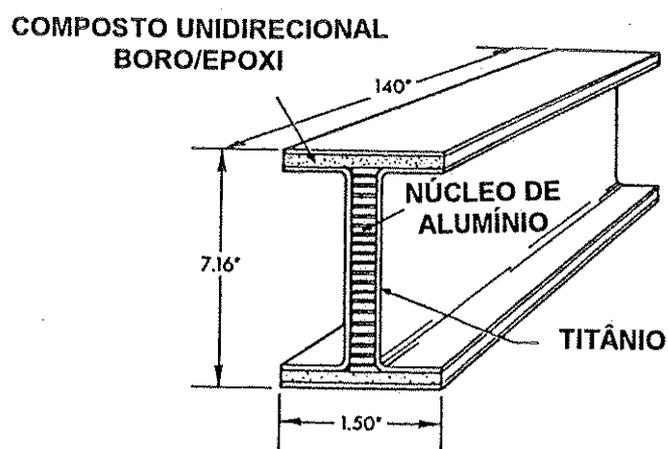


FIGURA 07 - Viga em Material Composto
McCULLOUGH (1971)

Na indústria de materiais elétricos MANO (1991) e os anais da conferência apresentam a utilização dos compostos em circuitos impressos, eletrodos, baterias, etc.

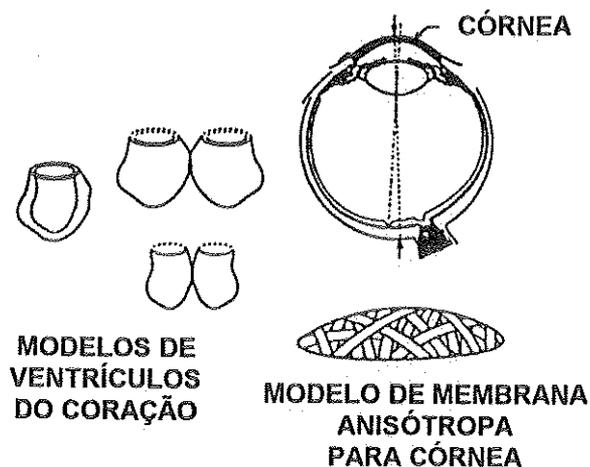


FIGURA 08 - Aplicações Biomédicas
NOOR (1992)

Na construção civil as referências acima indicam a utilização dos compostos em telhas corrugadas, piscinas, tanques, silos, reatores de pressão, laminados para revestimentos de móveis e divisórias, placas de madeira compensada, tubulações resistentes à pressão para a indústria de petróleo, painéis e cascas enrijecidas para aplicações diversas, pavimento alfáltico, estruturas em madeira (compostos naturais), concreto armado e protendido, etc. As Figuras 09, 10, 11 e 12 indicam aplicações de painéis de argamassa armada e poliuretano na construção de uma residência.

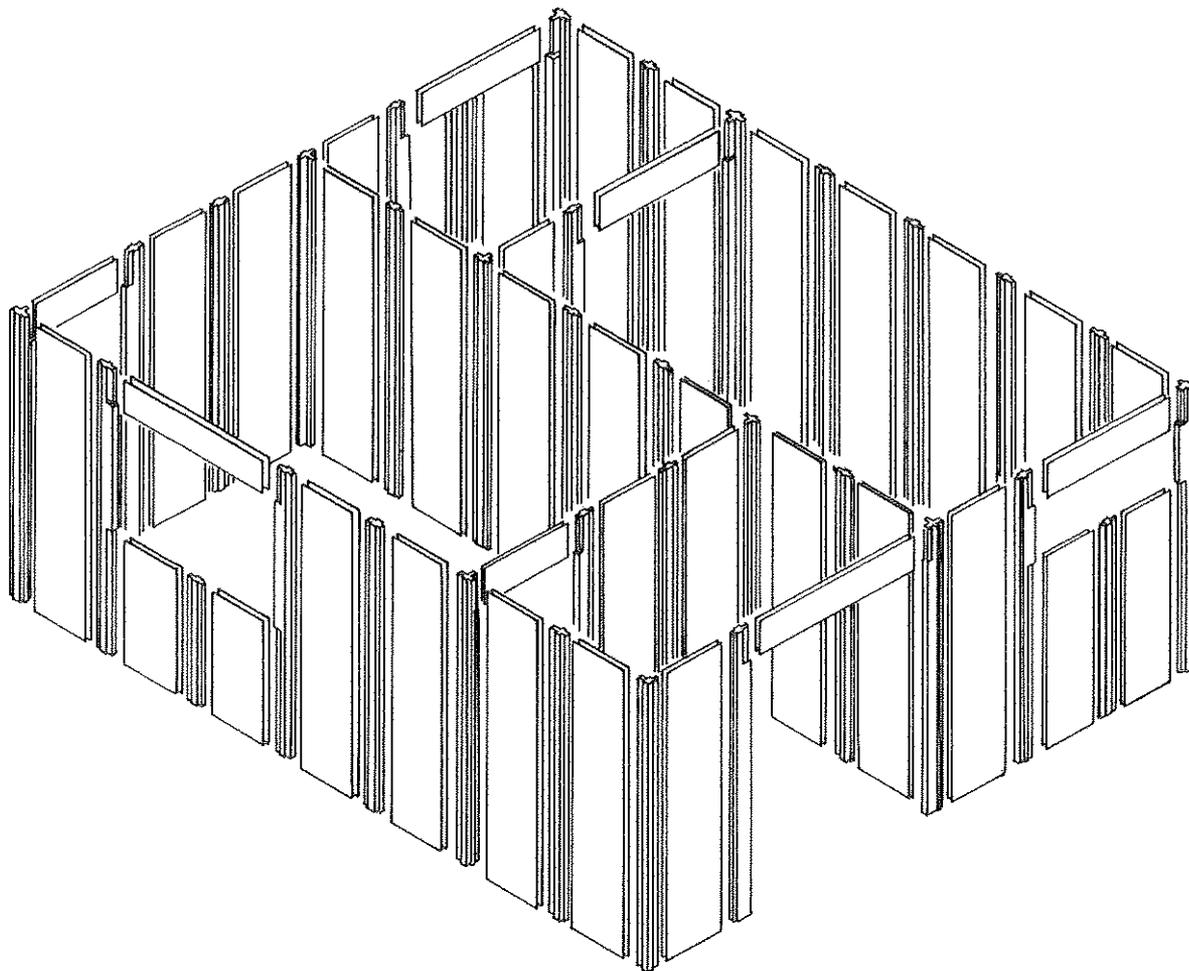


FIGURA 09 - Esquema em Perspectiva de Residência Construída em Painéis de Compostos em Argamassa Armada e Poliuretano
MACHADO (1991)

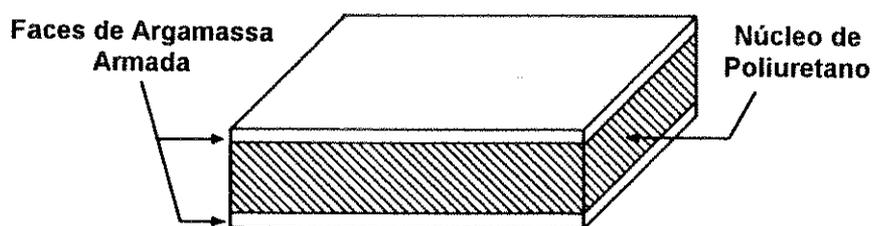


FIGURA 10 - Painel de Argamassa Armada e Poliuretano
MACHADO (1991)

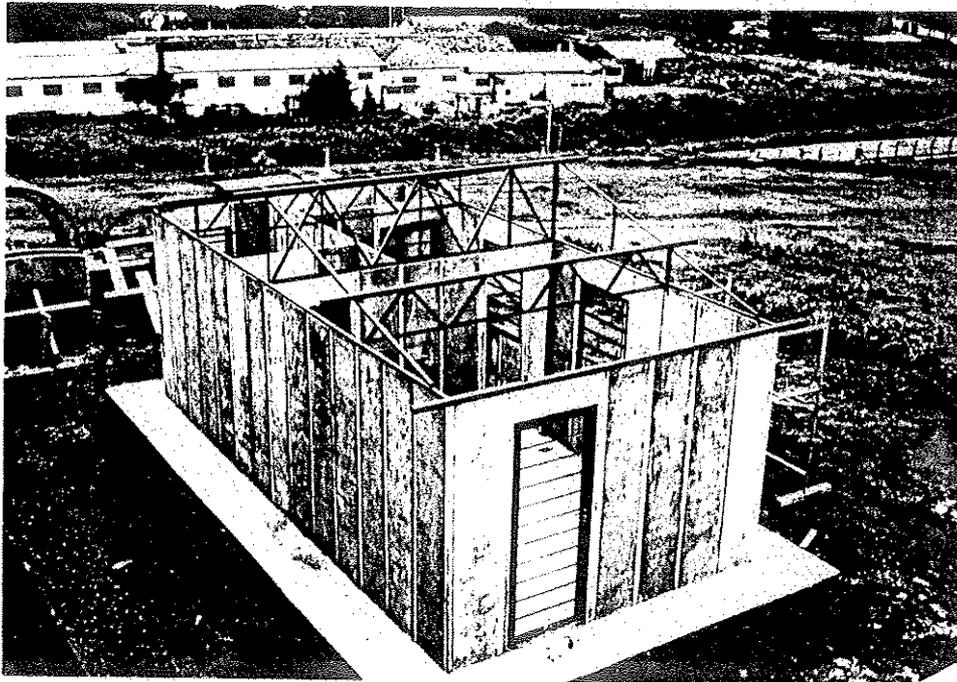


FIGURA 11 - Casa em Construção
MACHADO (1991)



FIGURA 12 - Casa Construída com Painéis de Compostos
MACHADO (1991)

HOLLAWAY (1993) cita edificações utilizando poliésteres reforçados por fibras de vidro que foram importantes para o desenvolvimento da utilização desses materiais na construção. A Figura 13 mostra a estrutura da cobertura do aeroporto de Dubai construída em 1972 e a Figura 14 o "American Express Building" construído no Reino Unido nos anos 80.



FIGURA 13 - Estrutura da Cobertura do Aeroporto de Dubai
HOLLAWAY (1993)

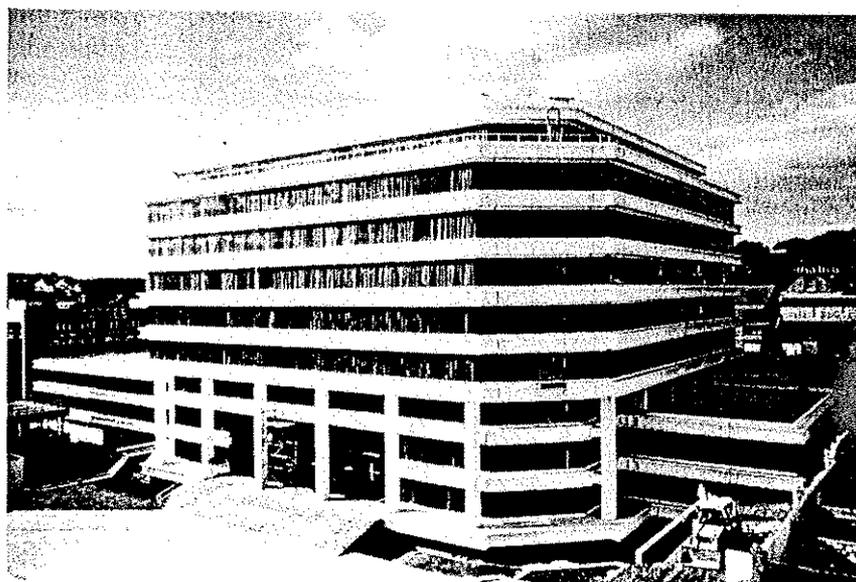


FIGURA 14 - "American Express Building"
HOLLAWAY (1993)

Ainda nos anos 80, segundo HOLLAWAY (1993), foi construída a cúpula do aeroporto internacional de Sharajah em composto polimérico, mostrada na Figura 15.

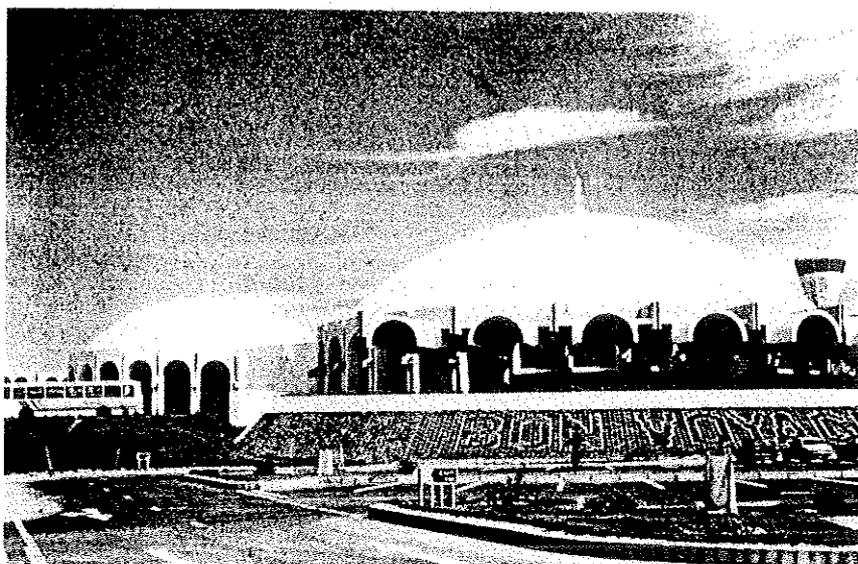


FIGURA 15 - Cúpula do Aeroporto Internacional de Sharajah
HOLLAWAY (1993)

SAECHTLING (1978) apresenta, como exemplo de utilização de compostos tipo sanduíche, com finas lâminas de material resistente envolvendo núcleo de espuma, a cúpula do centro de informação da Feira de Hannover, com 45m de vão, mostrada na Figura 16.

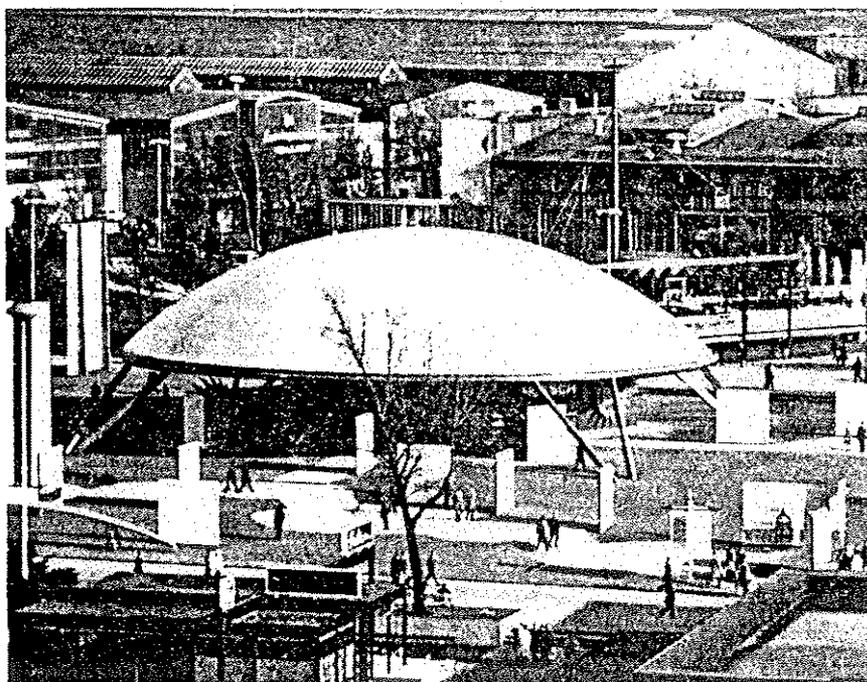


FIGURA 16 - Cúpula do Centro de Informação da Feira de Hannover
SAECHTLING (1978)

3 - COMPORTAMENTO MECÂNICO DOS COMPOSTOS EM FIBRAS LONGAS

3.1 - INTRODUÇÃO

A caracterização do comportamento mecânico dos materiais ao nível macroscópico, como explicam VINSON & SIERAKOWSKI (1987), é feita levando em consideração os seguintes tipos fundamentais: homogêneo/isótropo; homogêneo/anisótropo; não homogêneo/isótropo e não homogêneo/anisótropo.

Um material homogêneo é aquele que possui as mesmas propriedades físicas em todos os seus pontos, enquanto que em um material heterogêneo tais propriedades variam a cada ponto. Um material isótropo é aquele que possui, num ponto, as mesmas propriedades elásticas em todas as direções, enquanto que em um material anisótropo tais propriedades variam a cada direção.

Ainda segundo VINSON & SIERAKOWSKI (1987), os compostos, devido à complexidade envolvida na previsão de seu comportamento, consequência de sua própria natureza fibrosa e das heterogeneidades resultantes da combinação de materiais, costumam ser analisados sob dois pontos de vista: micromecânico e macromecânico.

A análise micromecânica reconhece a natureza não homogênea da lâmina do composto, porém ignora a estrutura interna dos constituintes básicos, fibra e matriz. Assim, a heterogeneidade da lâmina é reconhecida e levada em conta. No entanto, para desenvolver a metodologia de caracterização da resposta do material nesse nível de análise, várias hipóteses têm de ser introduzidas. A principal delas se refere à geometria do empacotamento das fibras, ou seja, à forma com que as fibras são distribuídas na matriz. As Figuras 17 e 18 mostram dois arranjos de fibras muito utilizados na modelagem micromecânica, o arranjo quadrado e o hexagonal.

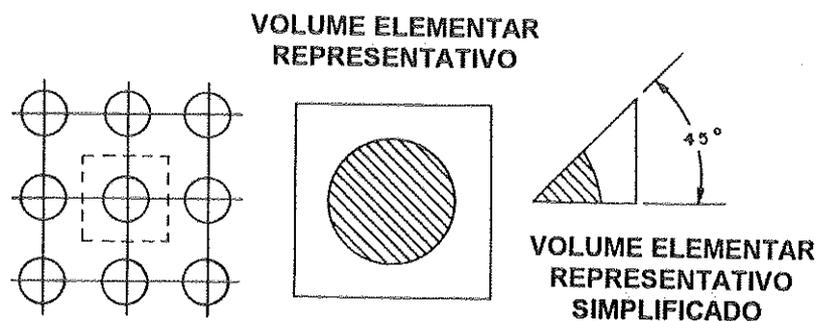


FIGURA 17 - Arranjo Quadrado e Volume Elementar Representativo
VINSON & SIERAKOWSKI (1987)

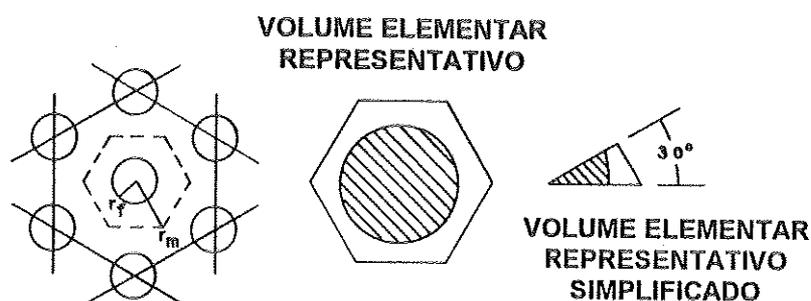


FIGURA 18 - Arranjo Hexagonal e Volume Elementar Representativo
VINSON & SIERAKOWSKI (1987)

Feita a hipótese do arranjo das fibras, introduz-se o conceito de Volume Elementar Representativo que é a menor parte simplificada capaz de representar o domínio completo da lâmina do composto. Tal volume é considerado uniforme, repetido e representativo da resposta característica do composto. A análise matemática pode, então, ser efetuada para relacionar as propriedades e concentrações de fibra e matriz com as propriedades da lâmina do composto, que servirão como valores a serem tomados para a posterior análise macromecânica. Assim, a micromecânica serve de conexão entre a análise propriamente de engenharia e as teorias que explicam a estrutura e a morfologia da matéria.

A análise macromecânica desconsidera a microestrutura da lâmina e considera somente suas propriedades médias como sendo importantes.

Consequentemente, cada lâmina é considerada homogênea e com propriedades diferentes na direção e perpendicularmente à fibra, ou seja, ortótropa. O elemento estrutural é considerado como resultante da superposição de várias lâminas para formar a estrutura desejada, uma viga, uma placa, uma casca, etc. A modelagem matemática do comportamento final da estrutura é feita, então, com as respectivas teorias clássicas existentes, como a teoria clássica de placas e cascas laminadas ortótropas, por exemplo. As Figuras 19 e 20 ilustram as análises micro e macromecânica e sua relação.

MICROMECAÂNICA

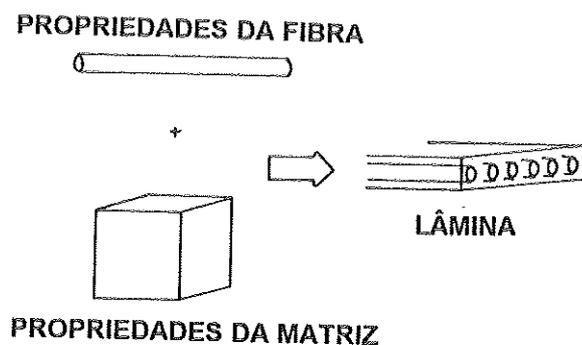


FIGURA 19 - Análise Micromecânica
VINSON & SIERAKOWSKI (1987)
McCULLOUGH (1971)

MACROMECAÂNICA

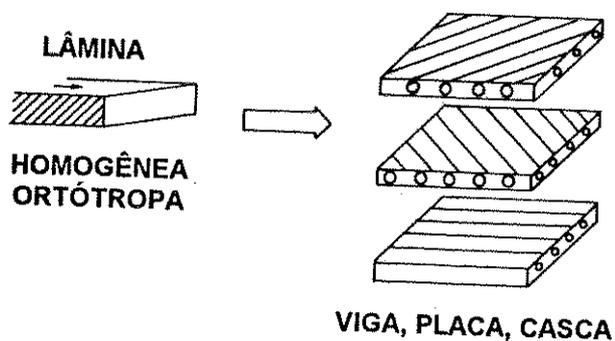


FIGURA 20 - Análise Macromecânica
VINSON & SIERAKOWSKI (1987)
McCULLOUGH (1971)

3.2 - ANISOTROPIA ELÁSTICA

3.2.1 - Anisotropia Elástica Linear de um Meio Hiperelástico

Para a modelagem do comportamento dos materiais representa-se por σ o tensor das tensões com componentes σ_{ij} as quais podem ser arranjadas em forma matricial como abaixo.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1)$$

O tensor das deformações ε com componentes ε_{kl} pode, analogamente ao caso anterior, ser arranjado em forma matricial como abaixo.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Para o caso elástico linear, a Lei de Hooke generalizada, que descreve o comportamento elástico linear dos materiais pode ser expressa, então, na seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i,j,k,l = 1,2,3) \quad (3)$$

onde D é um tensor de quarta ordem com 81 componentes, dos quais, porém, somente 36 são independentes, pois, como se sabe, os tensores de tensão e deformação σ e ε são simétricos, o que implica em:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4)$$

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad (5)$$

$$D_{ijkl} = D_{jikl} \quad D_{ijkl} = D_{ijlk} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (6)$$

Lembrando que, da equação (2) considera-se:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} \quad (7)$$

Devido a essa simetria pode-se, alternativamente, escrever os tensores de tensão e deformação da seguinte forma:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (8)$$

E, também, utilizando uma notação reduzida como abaixo:

$$\sigma_{xx} = \sigma_1 \quad \sigma_{yy} = \sigma_2 \quad \sigma_{zz} = \sigma_3 \quad \tau_{yz} = \sigma_4 \quad \tau_{zx} = \sigma_5 \quad \tau_{xy} = \sigma_6 \quad (9)$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_1 \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_2 \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_3 \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_4 \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_5 \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_6 \quad (10)$$

escrever a Lei de Hooke generalizada de uma forma também simplificada como:

$$\sigma_i = D_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j = 1, \dots, 6) \quad (11)$$

Em forma matricial a notação reduzida da Lei de Hooke é:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Considerando-se o material elástico de Green ou hiperelástico, ou seja, aquele material para o qual existe uma função energia de deformação W tal que:

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \quad (13)$$

Dáí vem:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} = \sigma_i = D_{ij} \varepsilon_j \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_j} = D_{ij} \quad (14)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_j} = \sigma_j = D_{ji} \varepsilon_i \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = \frac{\partial \sigma_j}{\partial \varepsilon_i} = D_{ji} \qquad (15)$$

Logo, da igualdade das derivadas segundas resulta a conclusão da simetria do tensor D .

$$D_{ij} = D_{ji} \qquad (i, j = 1, \dots, 6) \qquad (16)$$

Assim sendo, dentro dos limites do regime elástico de Hooke o comportamento do meio contínuo, homogêneo e anisótropo de um material hiperelástico é caracterizado por 21 coeficientes sendo 18 deles independentes:

$$D_{11} , D_{22} , D_{33} , D_{44} , D_{55} , D_{66} , D_{12} = D_{21} , D_{13} = D_{31} , D_{14} = D_{41} ,$$

$$D_{15} = D_{51} , D_{16} = D_{61} , D_{23} = D_{32} , D_{24} = D_{42} , D_{25} = D_{52} , D_{26} = D_{62} ,$$

$$D_{34} = D_{43} , D_{35} = D_{53} , D_{36} = D_{63} , D_{45} = D_{54} , D_{46} = D_{64} , D_{56} = D_{65}$$

A representação matricial D acima descrita é também denominada de matriz de rigidez do material, enquanto que sua inversa, $C = D^{-1}$ é a matriz de flexibilidade.

Procedimento semelhante ao realizado acima, bem como ao que se segue, pode ser encontrado em LEKHNITSKII (1963).

3.2.2 - Ortotropia

Os compostos em fibras longas são considerados, de um ponto de vista macromecânico, meios contínuos, homogêneos e anisótipos. Além disso, devido ao arranjo das fibras dentro da matriz eles passam a apresentar planos de simetria elástica, o que reduz seu grau de anisotropia. Esse arranjo obedece, normalmente, a uma disposição simétrica com relação a algum eixo. Devido à existência dessas simetrias o material deixa de ser completamente anisótropo e as matrizes de rigidez e de flexibilidade assumem formas mais simples, quando referenciadas a essas direções.

Em geral os compostos são ortótipos, ou seja, apresentam três planos de simetria ortogonais e com propriedades diferentes segundo cada plano. Para simplificar a análise da ortotropia os eixos coordenados são feitos coincidir com a interseção dos planos de simetria, conforme a Figura 21 abaixo.

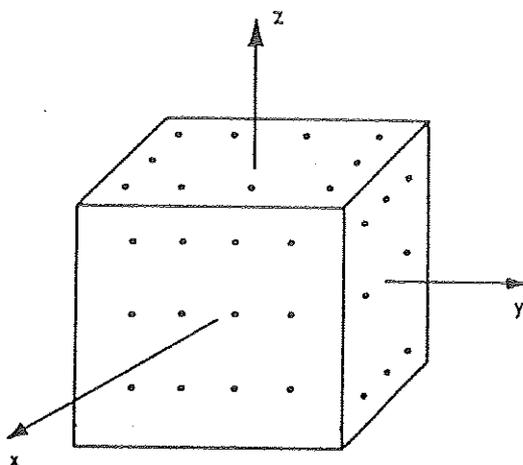


FIGURA 21 - Composto com Fibras nas Direções x, y e z

Nessa condição particular as matrizes de rigidez e de flexibilidade apresentam formas particulares, sendo que o número de componentes independentes se reduz de 18 para 9. O procedimento a seguir é demonstrativo de tal fato.

Considere-se inicialmente um primeiro plano de simetria elástica como sendo o plano xy da Figura 21 anterior. Na Figura 22 estão representadas as componentes de tensão positivas segundo convenção definida em função da

orientação dos eixos coordenados, propositadamente defasados em 180° em torno de z , de modo a caracterizar a simetria no plano xy .

Em ambas as situações, tensão e deformação se relacionam através da mesma matriz constitutiva.

$$\sigma_i = D_{ij} \varepsilon_j \qquad \sigma'_i = D_{ij} \varepsilon'_j \qquad (17)$$

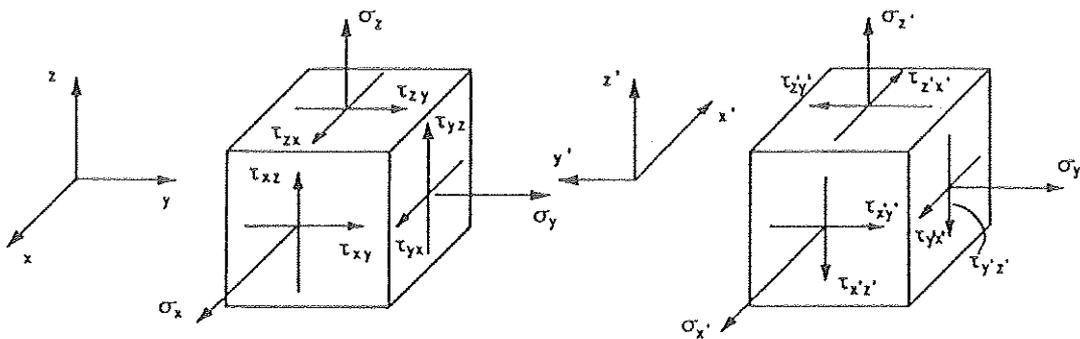


FIGURA 22 - Representação das Componentes de Tensão Segundo os Eixos Defasados 180° em Torno de z

Nessas condições pode-se escrever para os dois sistemas de coordenadas x, y, z e x', y', z' , tomando-se como referência o primeiro:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \qquad \sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{z'z'} \\ -\tau_{y'z'} \\ -\tau_{z'x'} \\ \tau_{x'y'} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{z'z'} \\ -\varepsilon_{y'z'} \\ -\varepsilon_{z'x'} \\ \varepsilon_{x'y'} \end{bmatrix} \qquad (18)$$

Comparando-se as respectivas equações para as componentes de tensões σ_{xx} e $\sigma_{x'x'}$ tem-se:

$$\sigma_{xx} = D_{11}\varepsilon_{xx} + D_{12}\varepsilon_{yy} + D_{13}\varepsilon_{zz} + D_{14}\varepsilon_{yz} + D_{15}\varepsilon_{zx} + D_{16}\varepsilon_{xy} \quad (19)$$

$$\sigma_{x'x'} = D_{11}\varepsilon_{x'x'} + D_{12}\varepsilon_{y'y'} + D_{13}\varepsilon_{z'z'} + D_{14}\varepsilon_{y'z'} + D_{15}\varepsilon_{z'x'} + D_{16}\varepsilon_{x'y'} \quad (20)$$

Lembrando que $\sigma_{xx} = \sigma_{x'x'}$ e:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{x'x'} \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{y'y'} \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{z'z'} \quad \varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{y'z'} \quad \varepsilon_{zx} = -\varepsilon_{z'x'} \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{x'y'} \quad (21)$$

resulta $2D_{14}\varepsilon_{yz} + 2D_{15}\varepsilon_{zx} = 0$ para quaisquer valores de ε_{yz} e ε_{zx} , logo:

$$D_{14} = D_{15} = 0 \quad (22)$$

Por um procedimento análogo, analisando as componentes $\sigma_{yy} = \sigma_{y'y'}$ e $\sigma_{zz} = \sigma_{z'z'}$ conclui-se que:

$$D_{24} = D_{25} = 0 \quad D_{34} = D_{35} = 0 \quad (23)$$

Levando-se em conta agora as tensões de cisalhamento resultam:

$$\tau_{yz} = D_{41}\varepsilon_{xx} + D_{42}\varepsilon_{yy} + D_{43}\varepsilon_{zz} + D_{44}\varepsilon_{yz} + D_{45}\varepsilon_{zx} + D_{46}\varepsilon_{xy} \quad (24)$$

$$\tau_{y'z'} = D_{41}\varepsilon_{x'x'} + D_{42}\varepsilon_{y'y'} + D_{43}\varepsilon_{z'z'} + D_{44}\varepsilon_{y'z'} + D_{45}\varepsilon_{z'x'} + D_{46}\varepsilon_{x'y'} \quad (25)$$

Como $\tau_{yz} = -\tau_{y'z'}$ resulta que:

$$D_{41} = D_{42} = D_{43} = D_{46} = 0 \quad (26)$$

Com relação a τ_{zx} e $\tau_{z'x'}$ pode-se escrever:

$$\tau_{zx} = D_{51}\varepsilon_{xx} + D_{52}\varepsilon_{yy} + D_{53}\varepsilon_{zz} + D_{54}\varepsilon_{yz} + D_{55}\varepsilon_{zx} + D_{56}\varepsilon_{xy} \quad (27)$$

$$\tau_{z'x'} = D_{51}\varepsilon_{x'x'} + D_{52}\varepsilon_{y'y'} + D_{53}\varepsilon_{z'z'} + D_{54}\varepsilon_{y'z'} + D_{55}\varepsilon_{z'x'} + D_{56}\varepsilon_{x'y'} \quad (28)$$

Como neste caso $\tau_{zx} = -\tau_{z'x'}$ resulta:

$$D_{51} = D_{52} = D_{53} = D_{56} = 0 \quad (29)$$

Da equação de $\tau_{xy} = \tau_{x'y'}$ resulta, após procedimento análogo:

$$D_{64} = D_{65} = 0 \quad (30)$$

Assim, a partir dessa primeira condição de simetria, a matriz de rigidez assume a forma simplificada abaixo com somente 13 componentes, das quais 12 são independentes:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & D_{36} \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{54} & D_{55} & 0 \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Considere-se agora um segundo plano de simetria elástica como sendo o plano xz da figura 21 anterior. Na figura 23 estão representadas as componentes de tensão positivas segundo convenção.

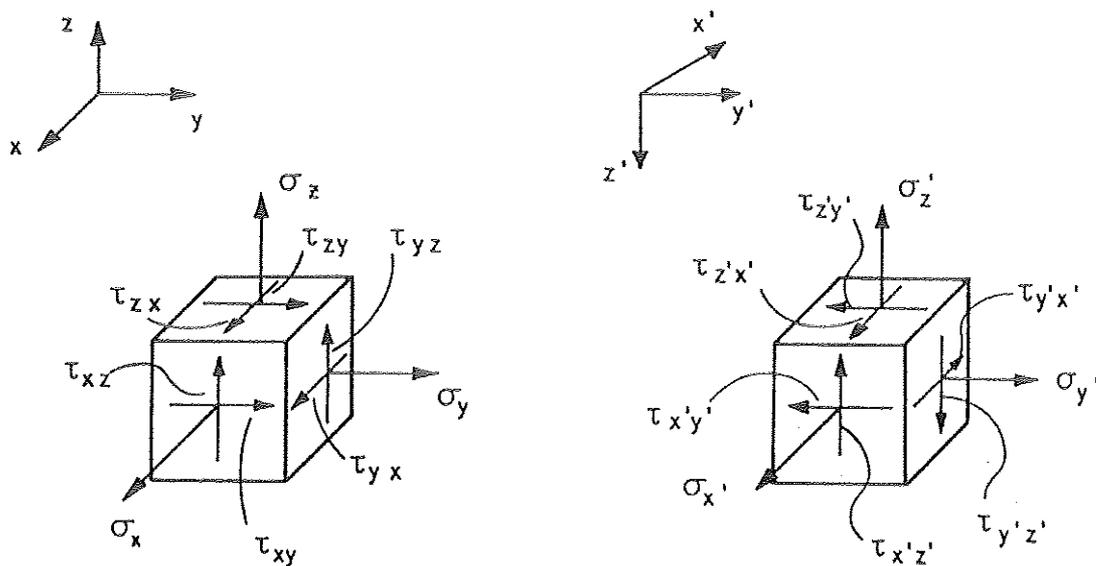


FIGURA 23 - Representação das Componentes de Tensão Segundo os Eixos Defasados 180° em Torno de y

Nessas condições pode-se escrever para os dois sistemas de coordenadas x, y, z e x', y', z' , tomando-se como referência o primeiro:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{z'z'} \\ -\tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} \\ -\tau_{x'y'} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad \varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{z'z'} \\ -\varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{z'x'} \\ -\varepsilon_{x'y'} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Nesse caso, do equacionamento de $\sigma_{xx} = \sigma_{x'x'}$, $\sigma_{yy} = \sigma_{y'y'}$ e $\sigma_{zz} = \sigma_{z'z'}$ resultam, respectivamente:

$$D_{16} = 0 \quad D_{26} = 0 \quad D_{36} = 0 \quad (33)$$

De $\tau_{yz} = -\tau_{y'z'}$, $\tau_{zx} = \tau_{z'x'}$ e $\tau_{xy} = -\tau_{x'y'}$ resultam, respectivamente:

$$D_{45} = 0 \quad D_{54} = 0 \quad D_{61} = D_{62} = D_{63} = 0 \quad (34)$$

Uma terceira condição de simetria pode ser verificada, porém não impõe novas simplificações. Assim, para o material ortótropo a matriz de rigidez passa a ser expressa por:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Esta é a matriz de rigidez para um material ortótropo com 9 componentes independentes, pois $D_{12} = D_{21}$, $D_{13} = D_{31}$ e $D_{23} = D_{32}$.

3.2.3 - Componentes da Matriz de Rigidez Ortótropa

A fim de facilitar a compreensão do significado físico e a dedução de cada um dos elementos da matriz de rigidez ortótropa analisam-se aqui os componentes da sua inversa, ou seja, da matriz de flexibilidade C .

Hooke representou sua descoberta original sob forma que, quando generalizada, pode ser expressa por:

$$\varepsilon_i = C_{ij} \sigma_j \quad (36)$$

onde, matricialmente, tem-se:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Analisando-se a matriz de flexibilidade, aos seus componentes podem ser dadas representações obtidas através de analogia com os materiais isotrópicos, pela realização de ensaios de tração e de cisalhamento.

Considere-se um ensaio de tração simples na direção x num corpo de prova do material. As componentes de tensão e deformação resultantes estão representadas nos respectivos tensores abaixo:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_{xy} \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_{xz} \varepsilon_{xx} \end{bmatrix} \quad (37)$$

onde ν_{ij} é o coeficiente de Poisson no plano ij .

Lembrando que só existem tensões segundo x pode-se escrever:

$$\varepsilon_{xx} = C_{11}\sigma_{xx} \quad \varepsilon_{yy} = C_{21}\sigma_{xx} \quad \varepsilon_{zz} = C_{31}\sigma_{xx} \quad (38)$$

Em analogia com os materiais isotrópicos, lembrando que o coeficiente de proporcionalidade entre tensão e deformação é o Módulo de Elasticidade E_i , tem-se:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_x} \quad \varepsilon_{yy} = -\nu_{xy} \frac{\sigma_{xx}}{E_x} \quad \varepsilon_{zz} = -\nu_{xz} \frac{\sigma_{xx}}{E_x} \quad (39)$$

de onde se conclui que:

$$C_{11} = \frac{1}{E_x} \quad C_{21} = \frac{-\nu_{xy}}{E_x} \quad C_{31} = \frac{-\nu_{xz}}{E_x} \quad (40)$$

Pela realização de ensaios de tração simples nas direções y e z pode-se concluir que:

$$C_{12} = \frac{-\nu_{yx}}{E_y} \quad C_{22} = \frac{1}{E_y} \quad C_{32} = \frac{-\nu_{yz}}{E_y} \quad (41)$$

$$C_{13} = \frac{-\nu_{zx}}{E_z} \quad C_{23} = \frac{-\nu_{zy}}{E_z} \quad C_{33} = \frac{1}{E_z} \quad (42)$$

Pela consideração de ensaios de cisalhamento simples, tendo respectivamente, $\tau_{xy} \neq 0$, $\tau_{yz} \neq 0$ e $\tau_{zx} \neq 0$ obtém-se:

$$C_{44} = \frac{1}{G_{yz}} \quad C_{55} = \frac{1}{G_{zx}} \quad C_{66} = \frac{1}{G_{xy}} \quad (43)$$

Portanto, a matriz de flexibilidade toma a seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_x} & -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (44)$$

com $\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}$.

Assim, para caracterizar um material ortótropo são necessários nove quantidades físicas, ou seja: E_{xx} , E_{yy} , E_{zz} , G_{xy} , G_{yz} , G_{zx} , ν_{xy} , ν_{yz} , ν_{zx} .

Além disso, vale ressaltar a simetria dos coeficientes elásticos e que a matriz de rigidez é a inversa da de flexibilidade $D = C^{-1}$.

3.2.4 - Isotropia Transversal

Um outro caso particular é o dos materiais estratificados ou transversalmente isótopos, nos quais as fibras estão dispostas segundo uma única direção, como na Figura 24.

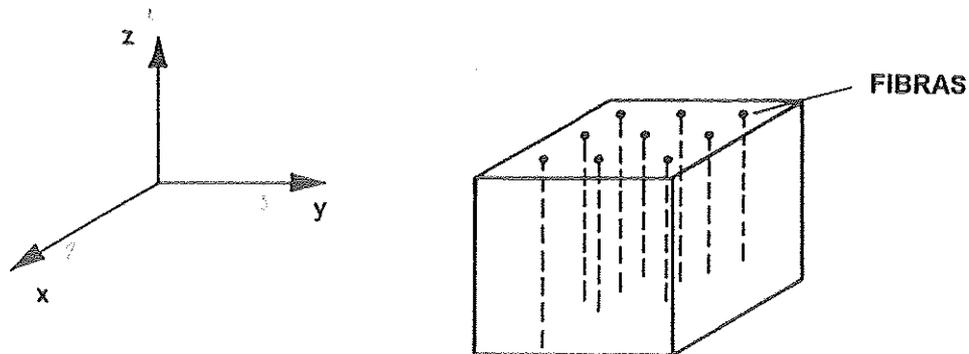


FIGURA 24 - Material Transversalmente Isótropo com Fibras na Direção z

Como a isotropia acontece no plano xy , os eixos x e y podem ser trocados sem que haja alteração na resposta do material, como na Figura 25.

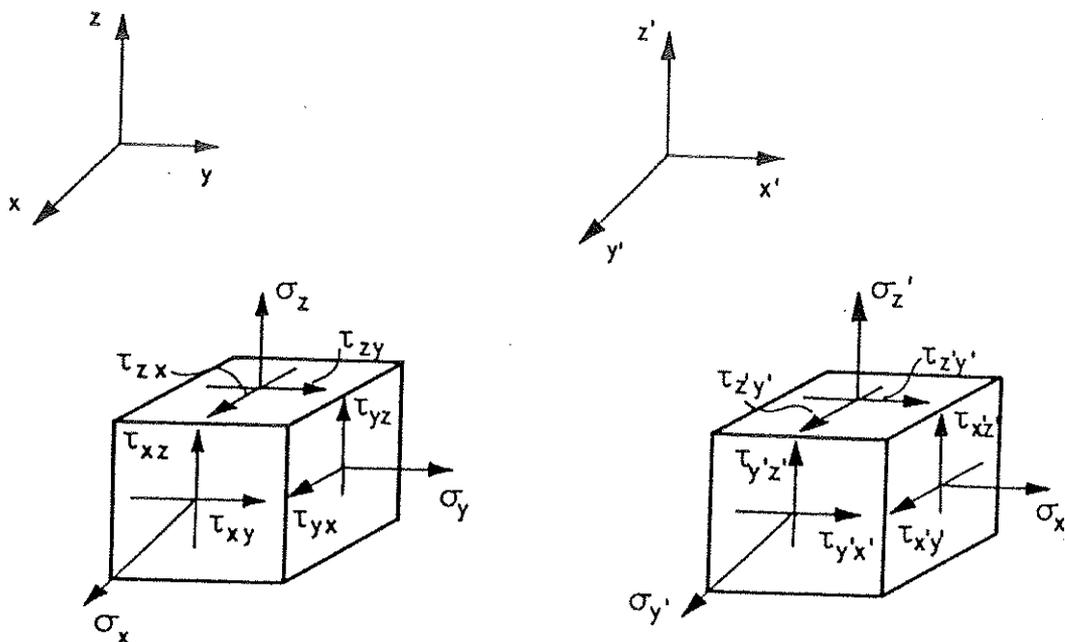


FIGURA 25 - Componentes de Tensão Considerando a Isotropia Transversal

Nessas condições pode-se escrever para os dois sistemas de coordenadas x, y, z e x', y', z' , tomando-se como referência o primeiro:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{z'z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} \\ \tau_{x'y'} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad \varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{z'z'} \\ \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{z'x'} \\ \varepsilon_{x'y'} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Equacionando as expressões de σ_{xx} e $\sigma_{y'y'}$ com a matriz de rigidez ortótropa tem-se:

$$\sigma_{xx} = D_{11}\varepsilon_{xx} + D_{12}\varepsilon_{yy} + D_{13}\varepsilon_{zz} \quad (46)$$

$$\sigma_{y'y'} = D_{21}\varepsilon_{x'x'} + D_{22}\varepsilon_{y'y'} + D_{23}\varepsilon_{z'z'} \quad (47)$$

Levando em conta que $\sigma_{xx} = \sigma_{y'y'}$, $\varepsilon_{x'x'} = \varepsilon_{yy}$ e $\varepsilon_{y'y'} = \varepsilon_{xx}$ e impondo que $\sigma_{xx} = \sigma_{y'y'}$ resultam:

$$D_{12} = D_{21} \quad D_{13} = D_{23} \quad D_{11} = D_{22} \quad (48)$$

Equacionando as expressões de τ_{zx} e $\tau_{y'z'}$ com a matriz de rigidez ortótropa tem-se:

$$\tau_{zx} = D_{55}\varepsilon_{zx} \quad (49)$$

$$\tau_{y'z'} = D_{44}\varepsilon_{y'z'} \quad (50)$$

E, levando-se em conta que $\tau_{zx} = \tau_{yz}$ e $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz}$, tem-se:

$$D_{44} = D_{55} \quad (51)$$

Portanto, a matriz de flexibilidade passa a ser representada nesse caso como:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu_{xy}}{E} & \frac{-\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{yx}}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{zx}}{E} & \frac{-\nu_{zy}}{E} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Como se vê, nesse caso, tem-se 5 componentes independentes, ou seja, E , E_z , ν_{xy} , $G_{yz} = G_{xz}$ e ν_{yz} . Deve-se ainda observar que a isotropia no plano xy induz ainda à relação:

$$G_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu_{xy})} \quad (53)$$

obtida a partir da igualdade, na invariância, da densidade de energia quando se consideram as duas situações equivalentes indicadas na Figura 26.

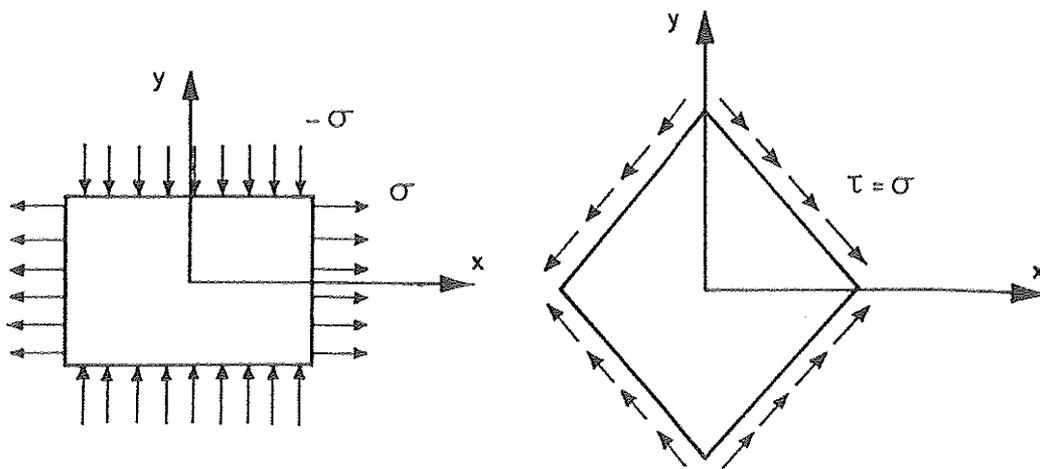


FIGURA 26 - Estado de Cisalhamento Puro

3.2.5 - Isotropia

O procedimento para análise da isotropia pode ser encontrado em MALVERN (1979). Um material isótropo é aquele que possui as mesmas características em todas as direções, o que implica em que as constantes elásticas sejam independentes da orientação dada aos eixos coordenados.

Tome-se, então, um sistema de eixos defasados por uma rotação de 90° em torno de z , como mostra a Figura 27.

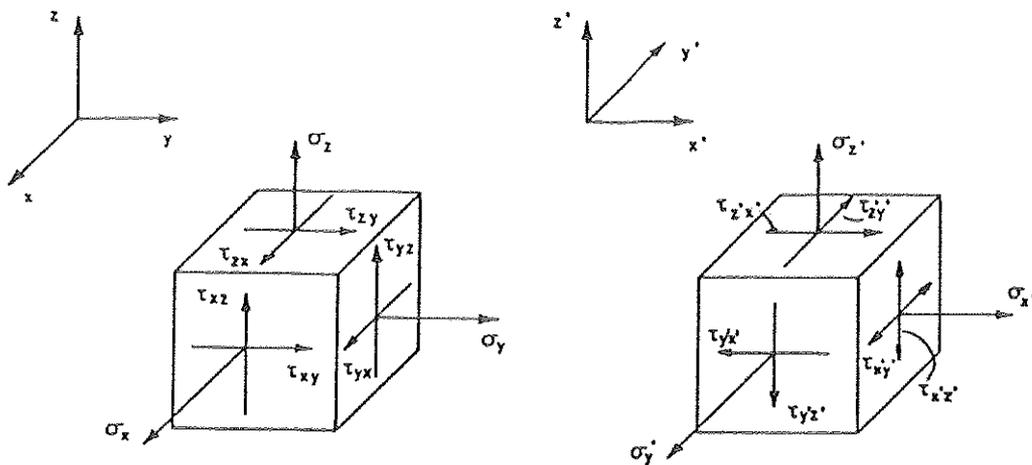


FIGURA 27 - Representação das Componentes de Tensão Segundo os Eixos Defasados em 90° em Torno de z

Nessas condições pode-se escrever para os dois sistemas de coordenadas x, y, z e x', y', z' , tomando-se como referência o primeiro:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{z'z'} \\ \tau_{z'x'} \\ -\tau_{y'z'} \\ -\tau_{x'y'} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad \varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{z'z'} \\ \varepsilon_{z'x'} \\ -\varepsilon_{y'z'} \\ -\varepsilon_{x'y'} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Sendo um material isótropo, obviamente, também ortótropo, pode-se aplicar a matriz de rigidez ortótropa a esse caso. Daí:

$$\sigma'_i = D_{ij} \varepsilon'_{ij} \quad (55)$$

Pode-se escrever, então:

$$\sigma_{xx} = D_{11}\varepsilon_{xx} + D_{12}\varepsilon_{yy} + D_{13}\varepsilon_{zz} \quad (56)$$

$$\sigma_{y'y'} = D_{21}\varepsilon_{x'x'} + D_{22}\varepsilon_{y'y'} + D_{23}\varepsilon_{z'z'} \quad \text{ou} \quad \sigma_{y'y'} = D_{21}\varepsilon_{yy} + D_{22}\varepsilon_{xx} + D_{23}\varepsilon_{zz} \quad (57)$$

Daí, como $\sigma_{xx} = \sigma_{y'y'}$ tem-se:

$$D_{11}\varepsilon_{xx} + D_{12}\varepsilon_{yy} + D_{13}\varepsilon_{zz} = D_{21}\varepsilon_{yy} + D_{22}\varepsilon_{xx} + D_{23}\varepsilon_{zz} \quad (58)$$

o que implica em $(D_{12} - D_{21})\varepsilon_{yy} + (D_{11} - D_{22})\varepsilon_{xx} + (D_{13} - D_{23})\varepsilon_{zz} = 0$ para todos os valores de ε_{xx} , ε_{yy} e ε_{zz} não simultaneamente nulos, logo:

$$D_{12} = D_{21} \quad D_{11} = D_{22} \quad D_{13} = D_{23} \quad (59)$$

Procedimentos análogos com as outras componentes de tensão mostram que:

$$D_{22} = D_{33} \quad (60)$$

$$D_{12} = D_{21} = D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32} = \lambda \quad D_{44} = D_{55} = D_{66} = \mu \quad (61)$$

E, considerando eixos defasados em 45° , obtém-se:

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = \lambda + 2\mu \quad (62)$$

A matriz de rigidez para um material isótropo pode ser expressa, então, como:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (63)$$

Como se vê acima, para o caso isotrópico a matriz de rigidez é função somente de dois coeficientes elásticos independentes, μ e λ , dados por:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (64)$$

3.2.6 - Elasticidade Plana de um Meio Homogêneo e Ortótropo

Para estados planos de tensão, tomando os eixos x e y como sendo os que contêm as componentes de tensões, tem-se:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (65)$$

O tensor das tensões σ passa a ser representado como:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (66)$$

Para o tensor de deformações ε considera-se que um deslocamento w segundo o eixo z perpendicular ao plano é desprezível comparado aos deslocamentos u e v segundo x e y , respectivamente. Além disso, admite-se que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) \quad (67)$$

Nessas condições resulta que $\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ e o tensor das deformações é representado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad (68)$$

A Lei de Hooke pode ser representada, considerando os eixos de ortotropia do material como sendo **l** (longitudinal) e **t** (transversal), sob a forma :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_l} & -\frac{\nu_{lt}}{E_l} & 0 \\ -\frac{\nu_{tl}}{E_t} & \frac{1}{E_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{lt}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{bmatrix} \quad (69)$$

Ou, de modo inverso:

$$\begin{bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_l}{(1-\nu_{lt}\nu_{tl})} & \frac{E_l\nu_{lt}}{(1-\nu_{lt}\nu_{tl})} & 0 \\ \frac{E_t\nu_{tl}}{(1-\nu_{lt}\nu_{tl})} & \frac{E_t}{(1-\nu_{lt}\nu_{tl})} & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{lt} \end{bmatrix} \quad (70)$$

Considere-se uma chapa ortótropa delgada com fibras na direção longitudinal em estado plano de tensão sujeita a tração ou compressão segundo seus

eixos de simetria e um sistema (o,x,y) ortogonal não coincidente com as direções de ortotropia l e t como indica a Figura 28 abaixo.

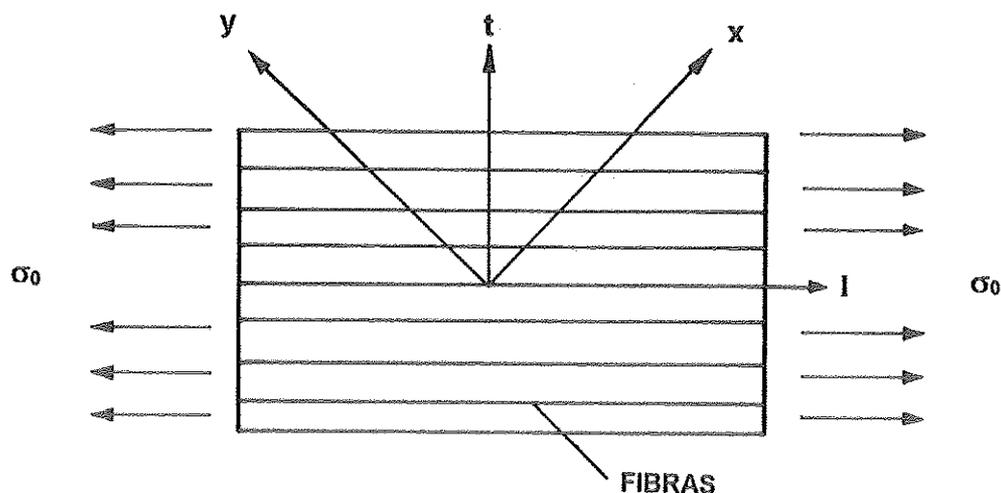


FIGURA 28 - Chapa Ortótropa com Direções de Ortotropia e Sistema oxy

Nessas condições tem-se $\tau_{lt} = 0$ e o tensor das tensões se escreve como:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Sendo $\tau_{lt} = 0$, da expressão $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ que dá as direções principais de tensão obtém-se o ângulo $\theta = 0^\circ$ coincidente com as direções dos eixos de ortotropia.

Empregando a Lei de Hooke escrita conforme abaixo:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_l} & -\nu_{lt} & 0 \\ -\nu_{tl} & \frac{1}{E_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{tt}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

obtêm-se as componentes de deformação que são:

$$\varepsilon_l = \frac{\sigma_l}{E_l} - \nu_{lt} \frac{\sigma_t}{E_t} \quad (73)$$

$$\varepsilon_t = -\nu_{tl} \frac{\sigma_l}{E_l} + \frac{\sigma_t}{E_t} \quad (74)$$

$$\varepsilon_{tt} = 0 \quad (75)$$

e, como $\varepsilon_{tt} = 0$, as direções principais de deformação também coincidirão com os eixos de ortotropia do material. Portanto, nesse caso, as direções principais de tensão e deformação coincidem ambas com os eixos de ortotropia.

Considere-se agora uma chapa ortótropa delgada com fibras em direção não coincidente com a longitudinal em estado plano de tensão sujeita a tração ou compressão segundo eixo principal x diverso dos de simetria do material e um sistema (o,x,y) ortogonal não coincidente com as direções de ortotropia l e t como indica a Figura 29 abaixo.

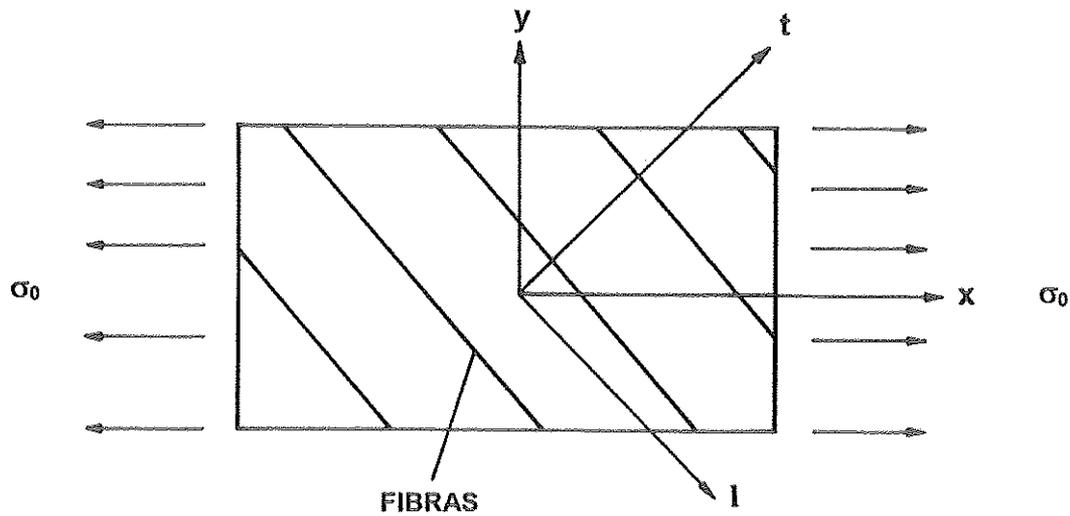


FIGURA 29 - Chapa Ortótropa com Direções de Ortotropia e Sistema oxy

As direções principais de tensão são as coincidentes com os eixos x e y . As deformações segundo as direções x e y podem ser obtidas de:

$$\varepsilon_i = C_{ij} \sigma_j \quad (76)$$

Em forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

de onde se obtém:

$$\varepsilon_{xx} = \bar{C}_{11} \sigma_0 \quad \varepsilon_{yy} = \bar{C}_{21} \sigma_0 \quad \varepsilon_{xy} = \bar{C}_{31} \sigma_0 \quad (78)$$

A matriz de flexibilidade \bar{C} pode ser obtida em função da matriz de flexibilidade para as direções de ortotropia C mediante a relação:

$$\bar{C} = L.C.L^{-1} \quad (79)$$

onde L é a matriz de rotação do sistema \mathbf{l}, \mathbf{t} para x, y e é dada por:

$$L = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (81)$$

sendo θ o ângulo de inclinação das fibras.

De onde se evidencia o fato de que, nessa situação de sollicitação, as direções principais de deformação são diferentes daquelas de tensão. As direções principais de deformação podem ser determinadas a partir das relações clássicas da Resistência dos Materiais, ou seja:

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}} \quad (82)$$

A Figura 30 ilustra tal situação de sollicitação e a respectiva deformação.

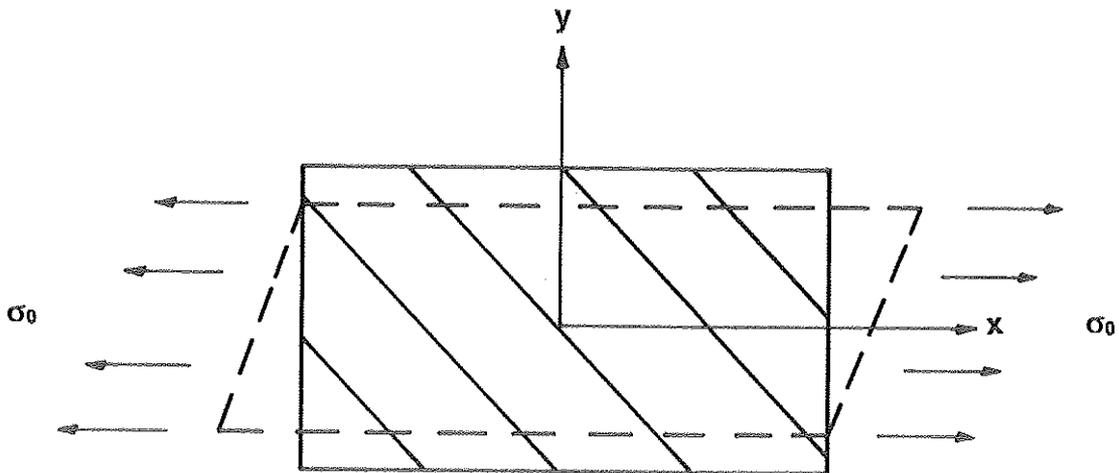


FIGURA 30 - Solicitação Inclinada em Relação aos Eixos de Ortotropia

Pelas equações das direções principais de deformação conclui-se que estas diferem das de tensão por uma rotação:

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\bar{C}_{31}}{\bar{C}_{11} - \bar{C}_{21}} \quad (83)$$

4 - PROPRIEDADES TERMOELÁSTICAS DOS COMPOSTOS EM FIBRAS LONGAS

4.1 - INTRODUÇÃO

Ao se efetuar a análise dos compostos laminados como apresentada no capítulo sobre o comportamento mecânico de tais estruturas depara-se com as já conhecidas relações tensão-deformação desses materiais tais como as deduzidas no referido capítulo. As constantes que relacionam tensão e deformação são conhecidas como propriedades termoelásticas e são características do material utilizado. No caso dos compostos em fibras longas a obtenção de tais propriedades torna-se um tanto complexa quando comparada aos casos dos materiais estruturais de uso corrente, pois naquele caso trata-se de material anisótropo e constituído da combinação de um ou mais materiais diferentes. Além disso, as combinações envolvem, frequentemente, materiais com propriedades específicas originais de valores relativos muito diferentes (matrizes com propriedades elásticas muito diferentes das das fibras).

McCULLOUGH (1971) destaca que as propriedades dos compostos em fibras longas podem ser obtidas, em princípio, a partir de médias das dos constituintes fibra e matriz, levando-se em conta a geometria e a forma da fibra utilizada, a geometria do empacotamento das fibras (ou seja, da disposição das fibras dentro da lâmina do composto), o espaçamento das fibras, a distribuição das cargas na superfície da lâmina e a ligação existente entre a fibra e a matriz. A resposta interna do composto, ou seja, uma certa propriedade, é então determinada tomando-se integrais de volume que relacionam as propriedades da fração de volume dos constituintes do composto com as propriedades médias da lâmina. McCULLOUGH (1971) define algumas das propriedades principais a serem determinadas: o Módulo de Elasticidade Longitudinal (E), o Coeficiente de Poisson (ν), o Módulo de Elasticidade Transversal (G), o Coeficiente de Expansão Térmica (α) e a Condutividade Térmica (K).

ADAMS & DONER (1967) relatam que as propriedades dos compostos podem ser determinadas experimentalmente pela simples realização de ensaios em corpos de prova, porém nos últimos anos têm se desenvolvido métodos de determinação analítica. Tais métodos constituem a chamada análise micromecânica, diferentemente da análise experimental, então dita macromecânica. Aqui fica clara a relação entre a análise micromecânica, definida em capítulo anterior, com a análise do comportamento final da estrutura. A análise micromecânica estabelece uma forma de determinação das propriedades termoelásticas que vão caracterizar o comportamento do material de que é composta a estrutura final de material composto (viga, casca, placa, etc.).

Dentro desse mesmo ponto de vista, VINSON & SIERAKOWSKI (1987) ressaltam que a micromecânica é introduzida de modo a fornecer uma ferramenta analítica capaz de modelar o comportamento do material composto para que suas propriedades possam ser introduzidas nas equações constitutivas, ou seja, nas relações tensão-deformação. A fim de que isso seja possível várias hipóteses têm de ser introduzidas, tais como:

Hipóteses Relativas ao Comportamento da Fibra : - homogeneidade;

- isotropia;
- linearidade elástica;
- espaçamento regular;
- alinhamento.

Hipóteses Relativas ao Comportamento da Matriz : - homogeneidade;

- isotropia;
- linearidade elástica.

Hipóteses Relativas ao Comportamento da Lâmina : - homogeneidade;

- ortotropia;
- linearidade elástica.

McCULLOUGH (1971) classifica os métodos de determinação das propriedades termoelásticas dos compostos em quatro tipos básicos: Método Baseado em Conceitos da Resistência dos Materiais; Método Auto-consistente; Método Variacional e Aproximações Numéricas. Tais métodos diferem entre si de acordo com as hipóteses que cada um faz em relação à especificação da geometria dos constituintes fibra e matriz e de acordo com as aproximações feitas com relação à resposta do composto. A seguir faz-se uma breve descrição dos quatro métodos e apresentam-se alguns resultados obtidos para algumas das propriedades de maior interesse. Também apresenta-se um outro método mais simples de estimativa das propriedades chamado Regra das Misturas.

4.2 - MÉTODO BASEADO EM CONCEITOS DA RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

A abordagem da Resistência dos Materiais se concentra no estabelecimento de geometrias específicas para a distribuição das fibras na matriz com a introdução do conceito de Volume Elementar Representativo que representa a menor porção do material capaz de reproduzir o comportamento do material como um todo. Arranjos hexagonais, quadrados, triangulares ou retangulares para a distribuição das fibras na matriz são propostos e o problema é formulado e resolvido com a introdução de hipóteses aproximadoras sobre o comportamento do conjunto.

SHAFFER (1964), se utilizando de tal abordagem, estuda as relações tensão-deformação na direção e normalmente às fibras, admitindo para cada situação um modelo equivalente. A matriz é considerada tendo comportamento elasto-plástico perfeito como mostra a Figura 31, enquanto as fibras são elásticas e obedecem à Lei de Hooke.

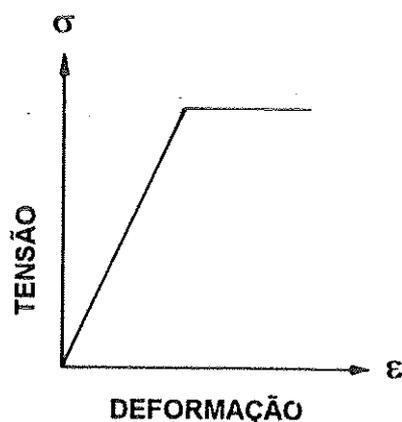


FIGURA 31 - Relação Tensão-Deformação da Matriz
SHAFFER (1964)

Para a dedução da expressão do módulo de elasticidade na direção paralela às fibras o modelo equivalente consiste em concentrar todas as fibras e toda a matriz em duas áreas separadas como duas barras paralelas, uma de matriz e

outra de fibra, com a mesma fração de volume do composto, unidas por placas rígidas na extremidade, onde é aplicada a força paralela às fibras, como mostra a Figura 32. Admite-se que as placas garantam que fibra e matriz sofram o mesmo alongamento.

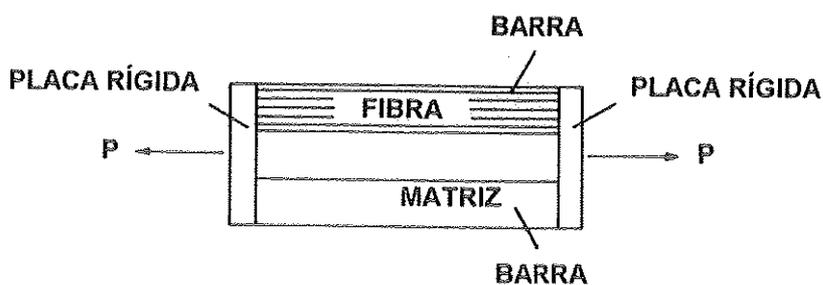


FIGURA 32 - Modelo Equivalente de Barras Paralelas de Matriz e Fibra
SHAFFER (1964)

A força aplicada é, então, distribuída entre fibra e matriz e a deformação axial é a mesma numa e noutra. Enquanto a tensão na matriz for menor ou igual que a sua tensão de escoamento o módulo de elasticidade na direção das fibras é obtido pela divisão da tensão nominal pela respectiva deformação nominal, igual à deformação da matriz, e é dado por:

$$E_t = E_m \left[\frac{A_f E_f}{A E_m} + \left(1 - \frac{A_f}{A} \right) \right] \quad (1)$$

onde E_m e E_f são os módulos de elasticidade da matriz e da fibra, respectivamente, A_f e A são as áreas da seção transversal da barra de fibra e total (fibra mais matriz), respectivamente. O valor do módulo de elasticidade E_t encontrado corresponde à inclinação do diagrama tensão-deformação do conjunto matriz e fibra, no trecho linear 0-1 mostrado na Figura 33. A expressão (1) acima corresponde à mesma encontrada pela Regra das Misturas para essa propriedade.

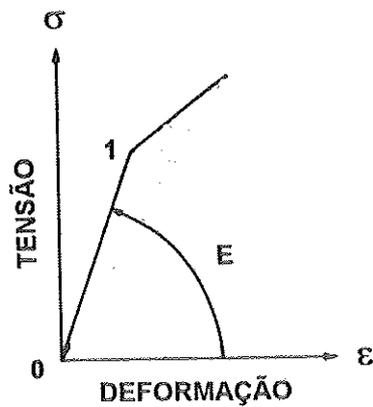


FIGURA 33 - Diagrama Tensão-Deformação do Conjunto Fibra Matriz
SHAFFER (1964)

Para a dedução da expressão do módulo de elasticidade na direção perpendicular às fibras um arranjo triangular de fibras como volume elementar representativo é suposto, como o mostrado na Figura 34.

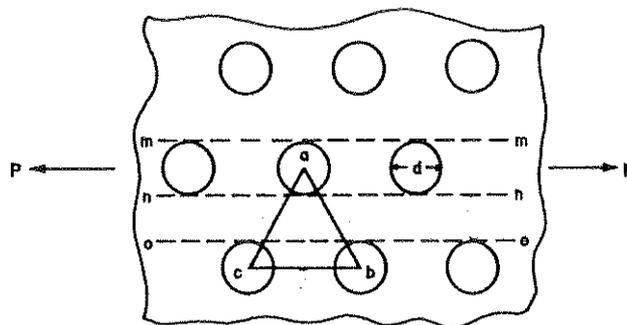


FIGURA 34 - Seção Transversal com Arranjo Triangular das Fibras
SHAFFER (1964)

O modelo equivalente é composto de duas barras paralelas, uma de matriz e outra de fibra e matriz em série, unidas por placas rígidas na extremidade, onde é aplicada a força transversal às fibras, como mostra a Figura 35. A barra de fibra e matriz é chamada barra equivalente e possui módulo de elasticidade superior à da matriz, pois $E_f > E_m$. A força aplicada é distribuída entre as duas barras, o que é garantido pelas placas rígidas, e a deformação é igual numa e noutra.

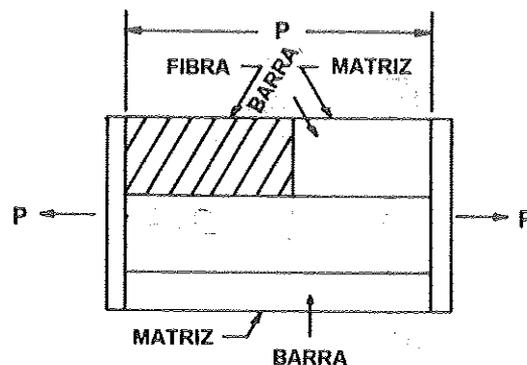


FIGURA 35 - Modelo Equivalente de Barras Paralelas de Matriz e Fibra / Matriz
SHAFFER (1964)

A tensão na barra equivalente, sendo maior do que a da matriz, por possuir módulo de elasticidade maior, provocará seu escoamento, que começará pela região composta de matriz. O módulo de elasticidade perpendicular às fibras é obtido pela divisão da tensão nominal pela respectiva deformação nominal, igual à deformação da barra equivalente, e é dado por:

$$E_t = E_m \left\{ 1 - \left(1 - \frac{E_m}{E_f} \right) \left[0.8247 \left(\frac{A_f}{A} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{A_f}{A} \right] \right\} \left[1 - 0.8247 \left(\frac{A_f}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{E_m}{E_f} \right) \right] \quad (2)$$

onde E_m e E_f são os módulos de elasticidade da matriz e da fibra, respectivamente, A_f e A são as áreas da seção transversal da barra de fibra e total (fibra mais matriz), respectivamente.

Por abordagem semelhante, ABOLIN'SH (1965) analisa o modo com que as componentes de um composto reforçado por fibras em uma direção respondem quando solicitadas. Para tanto são feitas as seguintes hipóteses: fibra e matriz são homogêneas, isotrópicas e obedecem à Lei de Hooke; as fibras de reforço são consideradas contínuas, macroscopicamente homogêneas e transversalmente isotrópicas; existe perfeita ligação entre fibras e matriz; as tensões secundárias perpendiculares às fibras, que resultam de diferentes valores do coeficiente de Poisson de matriz e fibra, quando sob a ação de σ_{11} (tensão na direção das fibras) são desprezíveis; na presença de tensões σ_{22} e σ_{33} (Figura 36) as tensões na matriz e na fibra naquelas direções são as mesmas, enquanto que a deformação total é proporcional ao volume de cada componente.

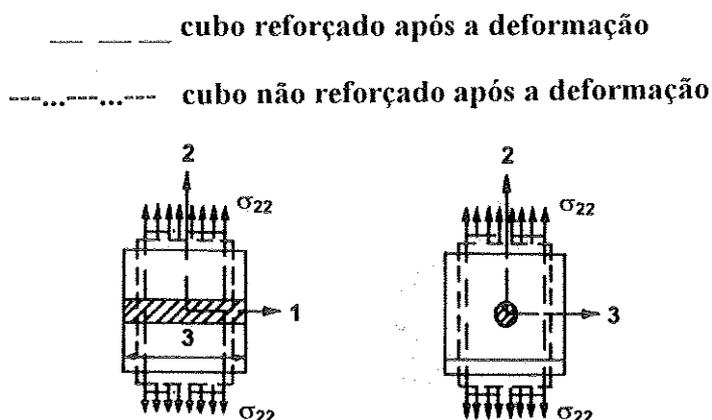


FIGURA 36 - Efeito do Reforço Sobre a Deformação Sob a Ação de σ_{22}
 ABOLIN'SH (1965)

O tensor de flexibilidade é, então, deduzido, utilizando-se de equações de equilíbrio e de superposições de efeitos aplicadas aos casos mostrados na Figura 36 e os valores a seguir, em expressões simples, para as cinco constantes elásticas independentes referidas aos eixos principais de simetria elástica são encontrados:

$$E_1 = [1 + (n-1)\mu]E_m \quad (3)$$

$$\nu_{12} = \nu_f(1-\mu) + \nu_f\mu \quad (4)$$

$$E_2 = \frac{n[1 + (n-1)\mu]E_m}{[\mu + n(1-\mu)][1 + (n-1)\mu] - (n\nu_m - \nu_f)^2 \mu(1-\mu)} \quad (5)$$

$$\nu_{23} = \frac{[\nu_f\mu + n\nu_m(1-\mu)][1 + (n-1)\mu] + (n\nu_m - \nu_f)^2 \mu(1-\mu)}{[\mu + n(1-\mu)][1 + (n-1)\mu] - (n\nu_m - \nu_f)^2 \mu(1-\mu)} \quad (6)$$

$$G_{12} = \frac{[n(1 + \nu_m)(1 + \mu) + (1 + \nu_f)(1 - \mu)]E_m}{2(1 + \nu_m)[n(1 + \nu_m)(1 - \mu) + (1 + \nu_f)(1 + \mu)]} \quad (7)$$

onde:

$$n = \frac{E_f}{E_m} \quad \mu = \frac{V_f}{V} \quad (8)$$

sendo E os módulos de elasticidade, ν os coeficientes de Poisson, V os volumes, onde os índices "f" representam a fibra e os "m" a matriz.

Em FOSTER et al. (1966) e SPRINGER & TSAI (1967) apresentam-se expressões para os valores da condutividade térmica K dos compostos em fibras longas obtidos por esse mesmo método.

4.3 - MÉTODO AUTO-CONSISTENTE

O Método Auto-consistente, em inglês "self-consistent" concentra-se sobre a solução do problema introduzindo aproximações na geometria das fases, então idealizadas como uma só fibra envolta em um meio homogêneo com propriedades da matriz ou com propriedades médias do composto. Um modelo melhorado dessa aproximação consiste de uma fibra envolta por uma casca cilíndrica de matriz que, por sua vez, está envolta por um meio cujas propriedades são as do composto. As frações de volume são determinadas pelas dimensões relativas desses cilindros.

WHITNEY & RILEY (1966) deduzem equações para a determinação das constantes elásticas de um composto reforçado por fibras em uma direção utilizando a teoria clássica da elasticidade para o modelo simplificado de uma célula unitária do composto. Funções de Airy são aplicadas à fibra e à matriz, e é feita a hipótese de perfeita ligação entre elas, o que conduz à continuidade de deslocamentos e tensões em sua interface. O modelo geométrico de distribuição das fases admitido é o de uma fibra circular envolvida pela matriz, como mostra a Figura 37.

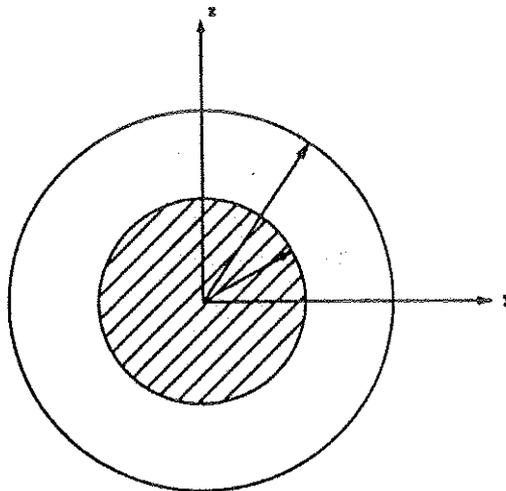


FIGURA 37 - Modelo de Geometria de Elemento Repetido no Composto
WHITNEY & RILEY (1966)

Faz-se a hipótese de que fibra e matriz têm comportamento isotrópico e as fibras são distribuídas de forma a tornar o composto transversalmente isotrópico. Além disso, o composto é considerado macroscopicamente homogêneo e obedecendo à Lei de Hooke. Assim, tem-se:

$$E_l = E_m + (E_f - E_m)\lambda \quad (9)$$

$$\nu_{ll} = \nu_m - \frac{2(\nu_m - \nu_f)(1 - \nu_m^2)E_f\lambda}{E_m(1 - \lambda)L' + [L\lambda + (1 + \nu_m)]E_f} \quad (10)$$

$$E_t = \frac{\left[2\bar{k}(1 - \bar{\nu}_{yz})E_l \right]}{\left[E_l + 4\bar{k}\nu_{ll}^2 \right]} \quad (11)$$

$$G_{ll} = \frac{\left[(G_f + G_m) + (G_f - G_m)\lambda \right] G_m}{\left[(G_f + G_m) - (G_f - G_m)\lambda \right]} \quad (12)$$

onde E_t é o módulo de elasticidade perpendicular às fibras e E_l é o módulo de elasticidade na direção das fibras do composto, G_{ll} é o módulo de elasticidade transversal e ν_{ll} é o coeficiente de Poisson no plano do composto. Nas equações acima E_m e E_f são os módulos de elasticidade da matriz e da fibra, respectivamente, λ é a fração de volume de fibra, ν_m e ν_f são os coeficientes de Poisson da matriz e da fibra, respectivamente, G_m e G_f são os módulos de elasticidade transversal da matriz e da fibra, respectivamente e L , L' , $\bar{\nu}_{yz}$ e \bar{k} são dados por:

$$L = 1 - \nu_m - 2\nu_m^2 \qquad L' = 1 - \nu_f - 2\nu_f^2 \quad (13)$$

$$\bar{\nu}_{yz} = \nu_f \lambda + \nu_m (1 - \lambda) \quad (14)$$

$$\bar{k} = \frac{E_f E_t}{2[(1 - \nu_{yz})E_t - 2E_m \nu_{tt}^2]} \quad (15)$$

HILL (1965) deduz, para um composto em fibra, os valores para as constantes elásticas E_t , k , ν_{tt} , E_f e G_{tt} sendo, respectivamente o módulo de elasticidade na direção das fibras, o módulo de elasticidade volumétrico, o coeficiente de Poisson no plano do composto, o módulo de elasticidade transversal e o módulo de elasticidade no plano do composto.

As fases fibra e matriz são consideradas transversalmente isotrópicas e um modelo de fibra circular única envolta em um meio homogêneo é idealizado. Sob carregamento a deformação da fibra é uniforme e adotada como a média de todas as fibras. Para o caso de comportamento elástico linear do composto as expressões resultantes são as que se seguem:

$$k = \left(\frac{\nu_f}{k_f + E_t} + \frac{\nu_m}{k_m + E_t} \right)^{-1} - E_t \quad (16)$$

$$E_t - \nu_f E_f - \nu_m E_m = \frac{4\nu_f \nu_m (\nu_f - \nu_m)^2}{\frac{\nu_f}{k_m} + \frac{\nu_m}{k_f} + \frac{1}{E_t}} \quad (17)$$

$$\frac{1}{2G_{tt}} = \frac{\nu_f}{G_{tt} - \mu_m} + \frac{\nu_m}{G_{tt} - \mu_f} \quad (18)$$

$$\nu_{tt} - \nu_f \nu_f - \nu_m \nu_m = \frac{\nu_f \nu_m (\nu_f - \nu_m) \left(\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_f} \right)}{\frac{\nu_f}{k_m} + \frac{\nu_m}{k_f} + \frac{1}{E_t}} \quad (19)$$

$$\frac{\nu_f k_f}{k_f + E_t} + \frac{\nu_m k_m}{k_m + E_t} = 2 \left(\frac{\nu_f G_m}{G_m - E_t} + \frac{\nu_m G_f}{G_f - E_t} \right) \quad (20)$$

onde ν_f e ν_m são as frações de volume de fibra e matriz, respectivamente, ν_f e ν_m são os coeficientes de Poisson da fibra e matriz, respectivamente, E_f e E_m são os módulos de elasticidade da fibra e matriz, respectivamente, G_f e G_m são os módulos de elasticidade transversal da fibra e da matriz, respectivamente, μ_f e μ_m são os módulos de elasticidade ao cisalhamento no plano da fibra e matriz, respectivamente, k_f e k_m são os módulos de elasticidade volumétricos da fibra e matriz, respectivamente.

WHITNEY (1967) apresenta, com base em expressões obtidas por outros pesquisadores utilizando o método auto-consistente para o regime elástico-linear, resultados para o módulo de elasticidade longitudinal E_l , para o módulo de elasticidade na direção perpendicular às fibras E_t , para o coeficiente de Poisson ν_l e para o módulo de elasticidade transversal G_t , concluindo que existe boa concordância entre resultados teóricos e experimentais.

4.4 - MÉTODO VARIACIONAL

O Método Variacional fornece limites superiores e inferiores para as propriedades do composto com base na aplicação de teoremas de energia e da teoria da elasticidade. Somente quando os limites inferior e superior de determinada propriedade coincidem é que ela é especificada como tendo um valor único. Frequentemente tais limites têm valores consideravelmente distantes um do outro e, assim, as propriedades ficam definidas somente em uma faixa de valores.

HASHIN & ROSEN (1964) deduzem expressões limites para algumas propriedades elásticas de materiais reforçados por fibras paralelas de seção transversal circular vazada. Consideram que matriz e fibra são homogêneas, isotrópicas e linearmente elásticas e que o composto resultante é macroscopicamente homogêneo e transversalmente isotrópico. A análise é baseada nos princípios da mínima energia potencial e mínima energia complementar. Utilizando o teorema da mínima energia potencial são obtidos os valores superiores e com o teorema da mínima energia complementar os valores inferiores das cinco constantes elásticas, K_{23} o módulo de elasticidade volumétrico, G_{23} o módulo de elasticidade transversal, respectivamente no plano 2-3, $G_1 = G_{12} = G_{31}$ o módulo de elasticidade transversal em qualquer plano perpendicular ao 2-3, E_1 o módulo de elasticidade longitudinal e $\nu_1 = \nu_{21} = \nu_{31}$ o coeficiente de Poisson.

Dois arranjos de distribuição das fibras na matriz são propostos, um arranjo hexagonal e um aleatório, como mostra a Figura 38.

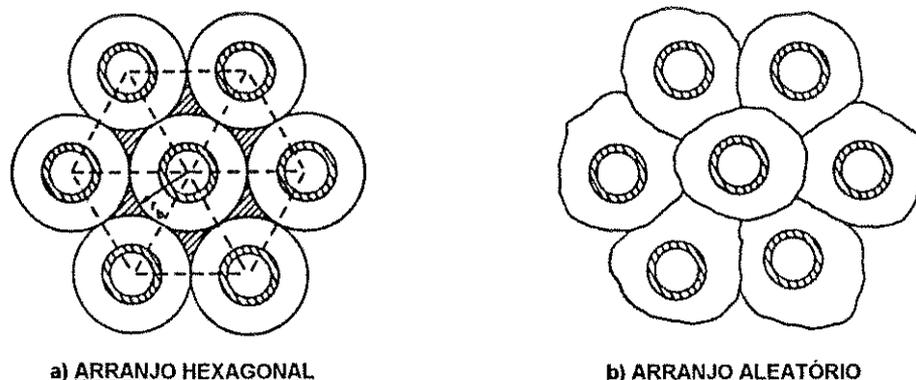


FIGURA 38 - Arranjos Hexagonal e Aleatório das Fibras na Matriz
HASHIN & ROSEN (1964)

Em cada um desses arranjos a fibra é considerada envolta pela matriz formando um cilindro como mostra a Figura 39.

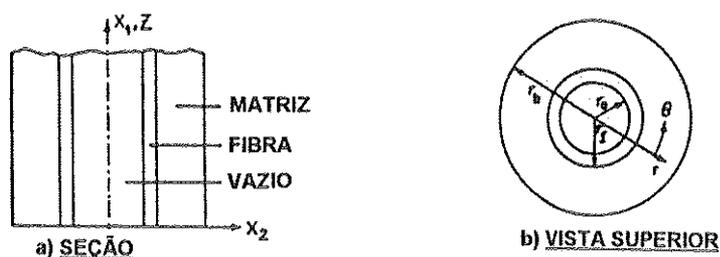


FIGURA 39 - Cilindro Formado pela Fibra Envolta na Matriz
HASHIN & ROSEN (1964)

Para o caso do arranjo hexagonal são obtidos os seguintes valores limites:

$$K_m(m_k v_1 + v_2) \leq K_{23} \leq \frac{K_m}{\frac{v_1}{m_k} + v_2} \quad (21)$$

$$\left[\frac{G_m}{1 - \frac{2(1 - \nu_m)}{1 - 2\nu_m} \nu_t \bar{A}_4} \right] \leq G_{23} \leq G_m \left[1 - \frac{2(1 - \nu_m)}{1 - 2\nu_m} \nu_t \bar{A}_4 \right] \quad (22)$$

$$\frac{G_m}{\frac{v_1}{m_g} + v_2} \leq G_1 \leq G_m(m_g v_1 + v_2) \quad (23)$$

$$E_m(m_e v_1 + p v_2) \leq E_1 \leq \frac{E_m}{\frac{v_1}{m_e} + v_2} \quad (24)$$

Para o coeficiente de Poisson obtém-se um valor exato:

$$v_1 = \frac{v_f E_f L_1 + v_m E_m L_2 v_m}{v_f E_f L_3 + v_m E_m L_2} \quad (25)$$

Para o caso do arranjo aleatório são obtidos os seguintes valores limites:

$$\left[\frac{G_m}{1 - \frac{2(1-v_m)}{1-2v_m} v_t \bar{A}_4} \sigma \right] \leq G_{23} \leq G_m \left[1 - \frac{2(1-v_m)}{1-2v_m} v_t \bar{A}_4 \varepsilon \right] \quad (26)$$

Para o módulo de elasticidade longitudinal um limite inferior é obtido:

$$E_l = v_f E_f + v_m E_m \quad (27)$$

Para as demais propriedades valores exatos são obtidos:

$$K_{23} = K_m \frac{\phi(1-\alpha^2)(1+2v_m v_t) + \left(1 + \frac{\alpha^2}{2v_f}\right) 2v_m v_m}{\phi(1-\alpha^2)v_m + \left(1 + \frac{\alpha^2}{2v_f}\right)(v_t + 2v_m)} \quad (28)$$

$$G_1 = G_m \frac{\eta(1-\alpha^2)(1+\nu_l) + (1+\alpha^2)\nu_m}{\eta(1-\alpha^2)\nu_m + (1+\alpha^2)(1+\nu_l)} \quad (29)$$

Para o coeficiente de Poisson obtém-se o mesmo valor exato:

$$\nu_1 = \frac{\nu_f E_f L_1 + \nu_m E_m L_2 \nu_m}{\nu_f E_f L_3 + \nu_m E_m L_2} \quad (30)$$

Nas expressões acima tem-se:

$$m_k = \frac{\phi(1-\alpha^2)(1+2\nu_b\beta^2) + \left(1 + \frac{\alpha^2}{2\nu_f}\right)(1-\beta^2)2\nu_b}{\phi(1-\alpha^2)(1-\beta^2) + \left(1 + \frac{\alpha^2}{2\nu_f}\right)(\beta^2 + 2\nu_b)} \quad (31)$$

$$m_s = \frac{\eta(1-\alpha^2)(1+\beta^2) + (1+\alpha^2)(1-\beta^2)}{\eta(1-\alpha^2)(1-\beta^2) + (1+\alpha^2)(1+\beta^2)} \quad (32)$$

onde:

$$\alpha = \frac{r_0}{r_f} \quad \beta = \frac{r_f}{r_b} \quad \phi = \frac{K_f}{\bar{K}_b} \quad \eta = \frac{G_f}{G_m} \quad (33)$$

$$p = \frac{1 - \nu_f - 4\nu_f\nu_1 + 2\nu_1^2}{1 - \nu_f - 2\nu_f^2} \quad (34)$$

$$m_e = \left(\nu_f \frac{E_f}{E_m} + \nu_m \right) \frac{E_m(D_1 - D_3 F_1) + E_f(D_2 - D_4 F_2)}{E_m(D_1 - D_3) + E_f(D_2 - D_4)} \quad (35)$$

$$D_1 = \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} - \nu_f \quad D_2 = \frac{1 + \nu_l}{\nu_m} + \nu_m \quad D_3 = \frac{2\nu_f^2}{1 - \alpha^2} \quad D_4 = 2\nu_m^2 \frac{\nu_l}{\nu_m} \quad (36)$$

$$F_1 = \frac{\nu_m \nu_f E_f + \nu_f \nu_m E_m}{\nu_f \nu_f E_f + \nu_m E_m} \quad F_2 = \frac{\nu_f}{\nu_m} F_1 \quad (37)$$

$$L_1 = 2\nu_f(1 - \nu_m^2)\nu_l + \nu_m(1 + \nu_m)\nu_m \quad (38)$$

$$L_2 = \nu_l[(1 + \nu_f)\alpha^2 + 1 - \nu_f - 2\nu_f^2] \quad (39)$$

$$L_3 = 2(1 - \nu_m^2)\nu_l + (1 + \nu_m)\nu_m \quad (40)$$

sendo que ν_l é a fração de volume do cilindro de composto; ν_2 é a diferença $\nu_2 = 1 - \nu_1$; K_m é o módulo de elasticidade volumétrico da matriz; K_f é o módulo de elasticidade volumétrico da fibra; ν_f é o coeficiente de Poisson da fibra; ν_l é a fração de volume total; \bar{A}_4^{ε} , \bar{A}_4^{σ} , \bar{A}_4^{ε} e \bar{A}_4^{σ} são obtidos pela solução de um sistema de equações (apresentado no Apêndice 1 de HASHIN & ROSEN (1964)); G_f é o módulo de elasticidade transversal da fibra; G_m é o módulo de elasticidade transversal da matriz; E_m é o módulo de elasticidade longitudinal da matriz; E_f é o módulo de elasticidade longitudinal da fibra.

Também HASHIN (1979), utilizando analogias matemáticas entre materiais reforçados uniaxialmente com fases isotropas e transversalmente isotropas, deduziu expressões para limites superiores e inferiores das constantes elásticas para materiais reforçados por fibras em uma direção considerando o caso geral de qualquer geometria cilíndrica transversal das fibras e isotropia transversal da fibra e da matriz. Deduziram-se expressões para o módulo de elasticidade volumétrico transversal K_{23} , o módulo de cisalhamento transversal G_{23} , o módulo de cisalhamento no plano axial G_{ll} , o módulo de elasticidade longitudinal E_l e o módulo de elasticidade na direção perpendicular às fibras E_{\perp} . Foram deduzidas também expressões para os coeficientes de expansão térmica para o caso de fibra e matriz transversalmente isotropas, cujos valores encontrados foram:

$$\alpha_l = \bar{\alpha} + \frac{\alpha_f - \alpha_m}{\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_m}} \left[\frac{3(1-2\nu_l)}{E_l} - \frac{\bar{1}}{K} \right] \quad (41)$$

$$\alpha_t = \bar{\alpha} + \frac{\alpha_f - \alpha_m}{\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_m}} \left[\frac{3}{2k} - \frac{3(1-2\nu_l)\nu_l}{E_l} - \frac{\bar{1}}{K} \right] \quad (42)$$

onde α_m e α_f são os coeficientes de expansão térmica da matriz e da fibra, respectivamente, k_m e k_f são o módulo de elasticidade volumétrico da matriz e da fibra, respectivamente, K é o módulo de elasticidade volumétrico do composto, k é o módulo de elasticidade volumétrico para deformação planar do composto, E_l é o módulo de elasticidade longitudinal do composto, ν_l é o coeficiente de Poisson no plano do composto e os valores de $\bar{\alpha}$ e $\left(\frac{\bar{1}}{K}\right)$ são dados por:

$$\bar{\alpha} = \alpha_m \nu_m + \alpha_f \nu_f \quad \left(\frac{\bar{1}}{K} \right) = \frac{\nu_m}{k_m} + \frac{\nu_f}{k_f} \quad (43)$$

sendo ν_m e ν_f as frações de volume de matriz e fibra, respectivamente.

Para o caso de fibra e matriz não possuírem isotropia transversal os coeficientes de expansão térmica passam a ser em número de três, α_{11} , α_{22} e α_{33} referidos aos eixos de simetria do composto.

Anteriormente HASHIN (1965), e utilizando dos mesmos conceitos acima, eduz limites superiores e inferiores para três constantes elásticas, K_{23} o módulo de elasticidade volumétrico no plano transversal do composto, G_{23} o módulo de elasticidade transversal no plano 2-3 e G_{ll} o módulo de elasticidade transversal no plano do composto para materiais multifásicos reforçados por fibras com geometria transversal arbitrária.

4.5 - APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS

As aproximações numéricas se utilizam de técnicas computacionais para determinar as propriedades dos compostos da mesma forma que se analisam as estruturas mais complexas. Tais técnicas se baseiam em expansão de séries ou em análise numérica. Técnicas como de diferenças finitas e de elementos finitos são utilizadas para a solução do sistema de equações diferenciais que governam o problema. Frequentemente é necessária alguma consideração quanto à simetria das fases fibra e matriz para o estabelecimento do Volume Elementar Representativo, o que torna tais técnicas úteis para geometrias específicas de distribuição das fibras na matriz, dificultando, porém a generalização dos resultados obtidos.

Assim é que ADAMS & DONER (1967) estudam o comportamento de um composto reforçado por fibras unidirecionalmente sujeito a carregamento provocando cisalhamento na direção das fibras para determinar a rigidez ao cisalhamento nessa mesma direção. Para tratar o problema analiticamente são feitas hipóteses sobre a geometria das fibras individualmente e a geometria do seu empacotamento na matriz. São admitidas seções transversais simétricas em relação aos eixos x e y para as fibras, como mostra a Figura 40, podendo, então, possuir qualquer forma, circular, elíptica, quadrada, retangular, hexagonal, etc., enquanto que um arranjo retangular periódico é considerado para a distribuição das fibras na matriz.

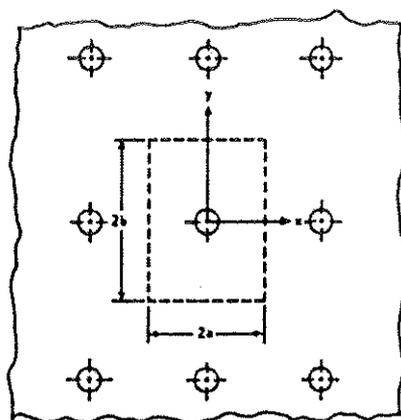


FIGURA 40 - Arranjo Retangular das Fibras na Matriz
ADAMS & DONER (1967)

Considerando fibra e matriz tendo comportamento homogêneo, isotrópico e linearmente elástico o problema é formulado em termos de equações de equilíbrio na direção z , considerando a distribuição de tensões como indicada na Figura 41, como um problema de valor de contorno.

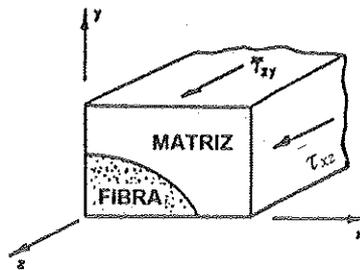


FIGURA 41 - Tensões de Cisalhamento Atuando no Volume Elementar Representativo
ADAMS & DONER (1967)

Para a solução do sistema de equações diferenciais resultante são empregadas diferenças finitas de malhas com espaçamento irregular como mostra a Figura 42, e um programa em linguagem FORTRAN. A Figura 43 mostra resultados da rigidez ao cisalhamento G/G_m , sendo $G = G_{II}$, obtidos para fibras de seção circular e arranjo quadrado de distribuição das fibras na matriz.

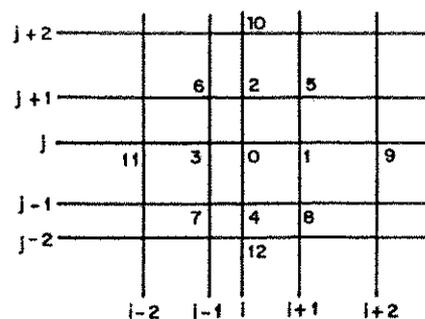


FIGURA 42 - Malha Irregular de Diferenças Finitas Empregada
ADAMS & DONER (1967)

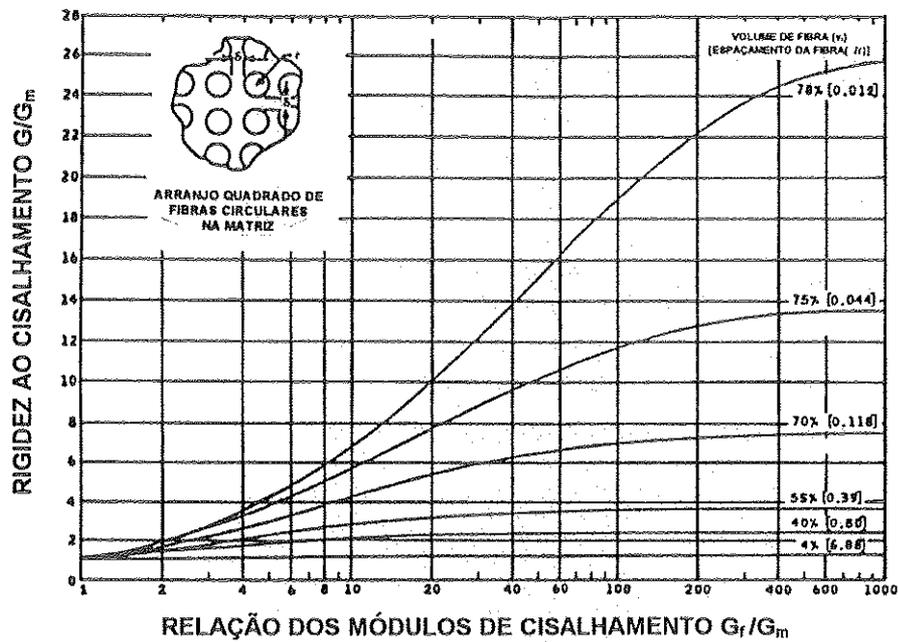


FIGURA 43 - Rigidez ao Cisalhamento para Composto Sujeito a $\bar{\tau}_{zx}$
ADAMS & DONER (1967)

Em trabalho semelhante ADAMS & DONER (1967) estudam o comportamento do mesmo composto reforçado por fibras unidirecionalmente sujeito a carregamento normal transversal. Para tratar o problema analiticamente são feitas todas aquelas hipóteses já apresentadas, bem como utilizadas as mesmas técnicas de solução. As Figuras 44 e 45 ilustram o arranjo das fibras na matriz e o volume elementar representativo, respectivamente.

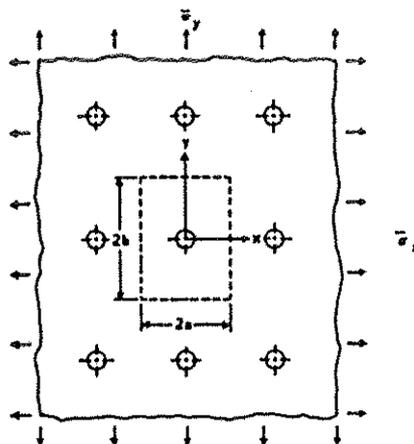


FIGURA 44 - Arranjo Retangular das Fibras na Matriz
ADAMS & DONER (1967)

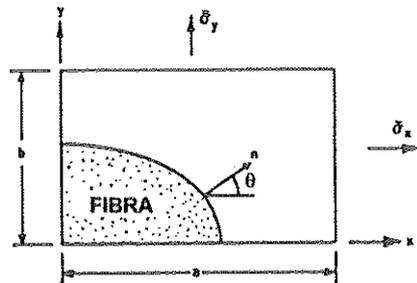


FIGURA 45 - Tensões Normais Atuando no Volume Elementar Representativo
ADAMS & DONER (1967)

A Figura 46 mostra resultados da rigidez transversal às fibras E/E_m , sendo $E = E_t$, obtidos para fibras de seção circular e arranjo quadrado de distribuição das fibras na matriz.

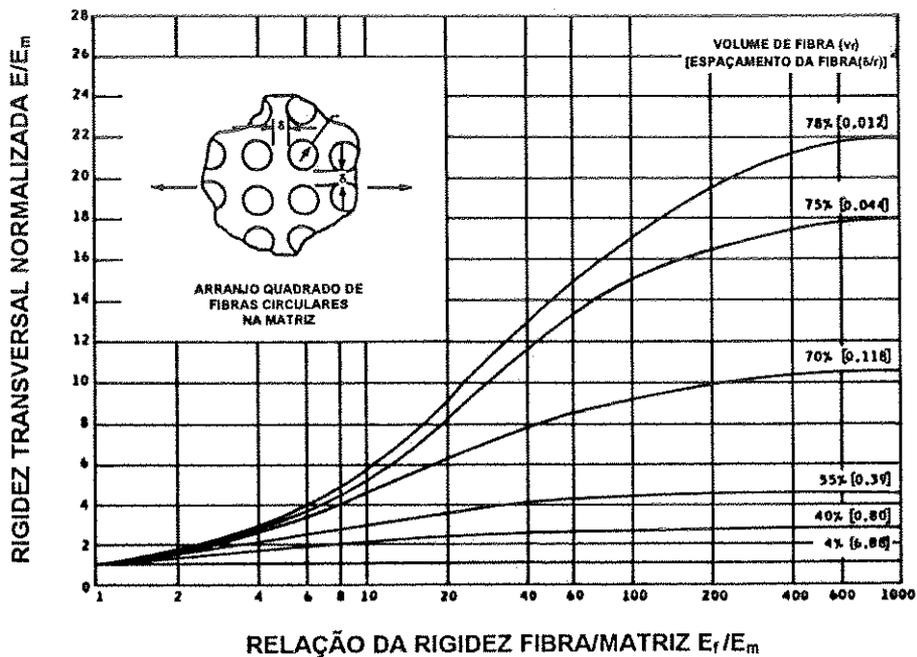


FIGURA 46 - Rigidez Transversal para Composto Sujeito a σ_x
ADAMS & DONER (1967)

4.6 - REGRA DAS MISTURAS

McCULLOUGH (1971) relata que a Regra das Misturas é o modelo mais simples para a previsão das propriedades termoelásticas dos compostos. Nesse modelo a resposta longitudinal do composto a cargas mecânicas, ações térmicas ou elétricas é idealizada como uma reação em paralelo das fibras e da matriz do composto. Para o caso das cargas mecânicas admite-se a hipótese de que as deformações da fibra e da matriz são iguais. Tal modelo conduz a relações lineares simples entre a propriedade do composto e as respectivas propriedades da fibra e da matriz, ponderadas pelas respectivas frações de volume. O modelo de reação paralelo é ilustrado pela Figura 47. Uma propriedade qualquer do composto, P é dada por:

$$P = \sum_{i=1}^n v_i P_i \quad (44)$$

onde v_i é a fração de volume e P_i a respectiva propriedade do $i^{\text{ésimo}}$ constituinte. Por essa expressão vê-se claramente que se a propriedade da fibra P_f é muito maior do que a da matriz P_m , como é o caso frequente em compostos de fibras longas unidirecionais, a contribuição da fibra é que será preponderante na direção longitudinal.

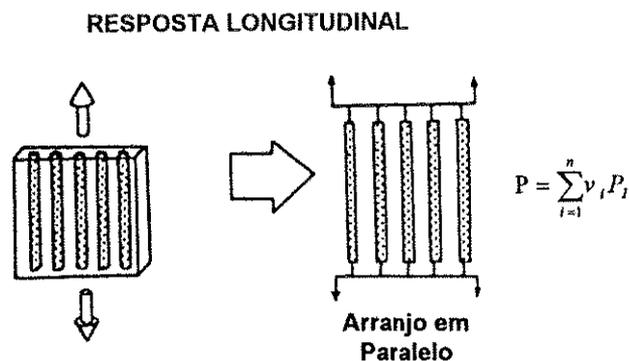


FIGURA 47 - Resposta Longitudinal - Arranjo em Paralelo
McCULLOUGH (1971)

A resposta transversal do composto a essas mesmas cargas é idealizada como uma reação em série das fibras e da matriz do composto. Para o caso das cargas mecânicas é assumida a hipótese de deformações equivalentes na fibra e na matriz. Tal modelo conduz a relações lineares simples entre a propriedade do composto e as respectivas propriedades da fibra e da matriz, ponderadas pelas respectivas frações de volume, mas agora em termos do inverso das propriedades de cada constituinte. A Figura 48 ilustra o modelo de reação em série. Uma propriedade qualquer do composto, P é dada por:

$$\frac{1}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{P_i} \quad (45)$$

onde v_i é a fração de volume e P_i a respectiva propriedade do $i^{\text{ésimo}}$ constituinte. Por essa expressão vê-se claramente que se a propriedade da fibra é muito maior do que a da matriz tem-se $\left(\frac{1}{P_f} \leq \frac{1}{P_m}\right)$ o que faz concluir que haverá predominância das propriedades da matriz na direção transversal.

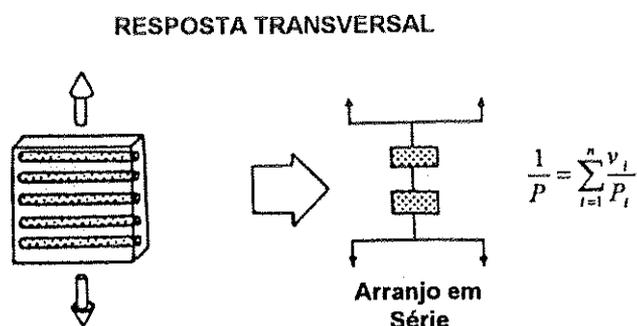


FIGURA 48 - Resposta Transversal - Arranjo em Série
McCULLOUGH (1971)

McCULLOUGH (1971) comenta que todos os outros modelos teóricos apresentam valores para as propriedades longitudinais que coincidem com os previstos pela Regra das Misturas. A Figura 49 ilustra o confronto entre valores teóricos obtidos pela Regra das Misturas e valores experimentais para um composto de vidro e epoxi.

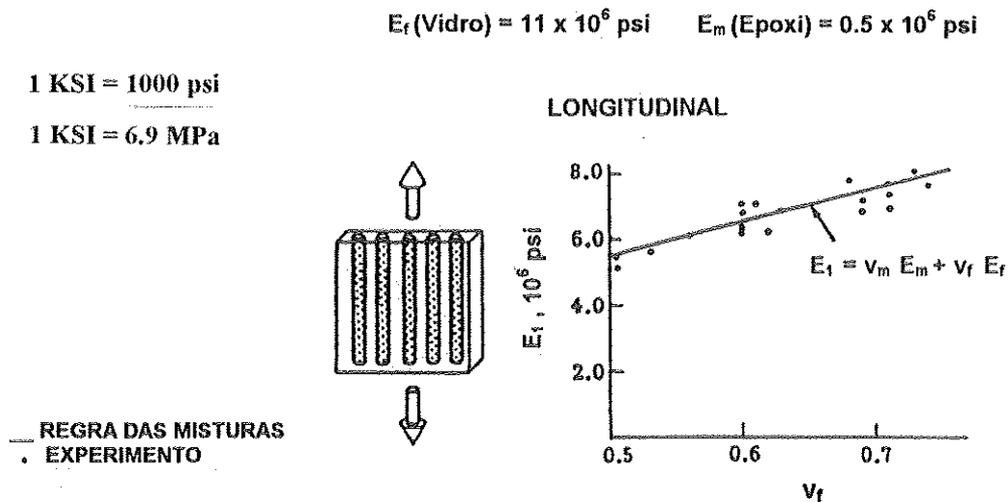


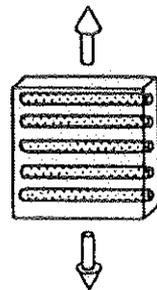
FIGURA 49 - Comparação Experimento- Teoria do Módulo de Elasticidade Longitudinal de Composto Vidro-Epoxi
McCULLOUGH (1971)

Porém, para os valores das propriedades transversais do composto a Regra das Misturas fornece valores excessivamente conservadores. A Figura 50 apresenta os valores do módulo de elasticidade na direção perpendicular às fibras do mesmo composto vidro-epoxi determinados pela Regra das Misturas, experimentalmente e pelos vários modelos teóricos já descritos.

1 KSI = 1000 psi

1 KSI = 6.9 MPa

— REGRA DAS MISTURAS
 • EXPERIMENTO
 ▨ OUTROS MODELOS



TRANSVERSAL

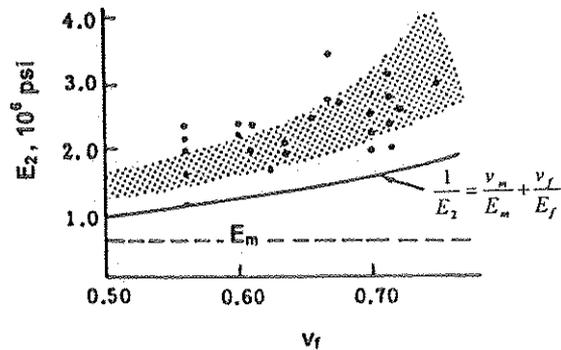


FIGURA 50 - Comparação Experimento- Teoria do Módulo de Elasticidade Perpendicular às Fibras de Composto Vidro-Epoxi McCULLOUGH (1971)

Sendo assim, as propriedades longitudinais dos compostos podem ser previstas com razoável precisão pelas simples equações abaixo:

$$E_l = \nu_f E_f + \nu_m E_m \quad (46)$$

$$\nu_{ll} = \nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m \quad (47)$$

$$\alpha_l = \frac{E_f \alpha_f \nu_f + E_m \alpha_m \nu_m}{E_f \nu_f + E_m \nu_m} \quad (48)$$

$$K_l = \nu_f K_f + \nu_m K_m \quad (49)$$

onde os índices f e m significam fibra e matriz, respectivamente e E_l é o módulo de elasticidade longitudinal do composto, ν_{ll} é o coeficiente de Poisson no plano

do composto, α_c é o coeficiente de expansão térmica longitudinal do composto, K_c é a condutividade térmica longitudinal do composto, v_f e v_m são as frações de volume de fibra e matriz, respectivamente, tal que:

$$v_f + v_m = 1 \quad (50)$$

McCULLOUGH (1971) comenta que tais equações não sugerem qualquer influência de outros parâmetros sobre as propriedades longitudinais do compostos, como forma das fibras, grau de adesão entre fibra e matriz, geometria do empacotamento e espaçamento das fibras, etc., sendo então razoável concluir que tais fatores realmente não exercem significativa influência. Por outro lado, as propriedades transversais são sensíveis a tais fatores, bem como aos modelos e hipóteses utilizados para sua previsão.

VINSON & SIERAKOWSKI (1987) indicam como valores das propriedades transversais de compostos transversalmente isotropos aquelas apresentadas por HAHN (1980). As expressões para as propriedades longitudinais são aquelas previstas pela Regra das Misturas e as para as propriedades transversais são:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{\frac{v_f}{G_{12f}} + \eta_6 \frac{v_m}{G_m}}{v_f + \eta_6 v_m} \quad (51)$$

$$\frac{1}{G_{23}} = \frac{\frac{v_f}{G_{23f}} + \eta_4 \frac{v_m}{G_m}}{v_f + \eta_4 v_m} \quad (52)$$

$$\frac{1}{K_T} = \frac{\frac{v_f}{K_f} + \eta_K \frac{v_m}{K_m}}{v_f + \eta_K v_m} \quad (53)$$

$$E_{22} = E_{33} = \frac{4K_T G_{23}}{K_T + mG_{23}} \quad (54)$$

onde os índices m e f significam as respectivas propriedades da matriz e fibra, sendo G_{12} e G_{23} os módulos de elasticidade transversais à fibra nos respectivos planos, K_T o módulo de elasticidade volumétrico de deformação no plano e $E_{22} = E_{33}$ os módulos de elasticidade longitudinais perpendiculares às fibras. As constantes η_6 , η_4 , η_K , m , K_m , K_f e G_m são dadas por:

$$\eta_6 = \frac{1 + \frac{G_m}{G_{12f}}}{2} \quad (55)$$

$$\eta_4 = \frac{3 - 4\nu_m + \frac{G_m}{G_{23f}}}{4(1 - \nu_m)} \quad (56)$$

$$\eta_K = \frac{1 + \frac{G_m}{K_f}}{2(1 - \nu_m)} \quad (57)$$

$$m = 1 + \frac{4K_T \nu_f^2}{E_f} \quad (58)$$

$$K_f = \frac{E_f}{2(1 - \nu_f)} \quad (59)$$

$$K_m = \frac{E_m}{2(1 - \nu_m)} \quad (60)$$

5 - LAMINADOS EM MATERIAIS COMPOSTOS

5.1 - TIPOS E NOMENCLATURA DOS LAMINADOS

Os laminados em materiais compostos são formados pela superposição de várias lâminas constituídas, cada uma, de uma matriz envolvendo as fibras longas. Do ponto de vista macromecânico, cada lâmina é considerada homogênea e ortótropa, sendo que o comportamento do laminado depende do número de camadas, ou seja, do número de lâminas superpostas, da espessura e da direção das fibras de cada lâmina. Além disso, a rigidez do laminado resulta da contribuição da rigidez de cada lâmina ou camada. A Figura 51 mostra um exemplo de laminado em material composto.

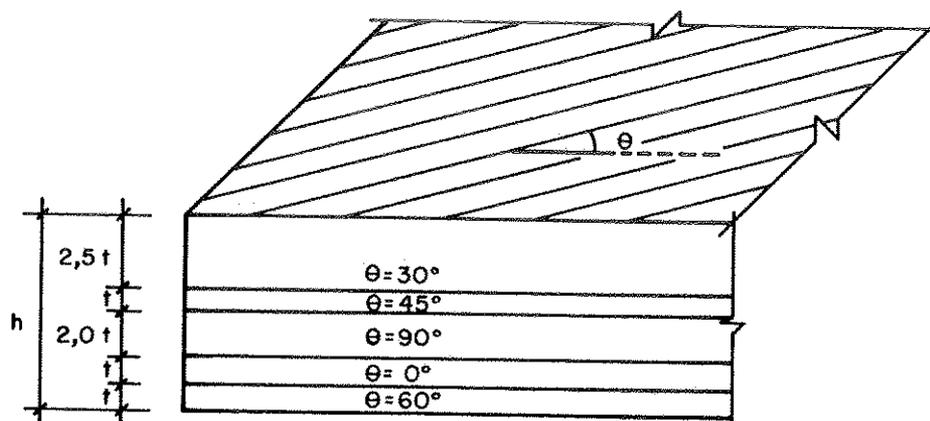


FIGURA 51 - Laminado em Material Composto
PROLA (1987)

Um laminado é dito simétrico, de acordo com PROLA (1987) , quando apresenta simetria geométrica, ou seja, de distribuição de camadas e espessuras, e de propriedades mecânicas em relação ao seu plano médio. Um laminado simétrico é mostrado na Figura 52.

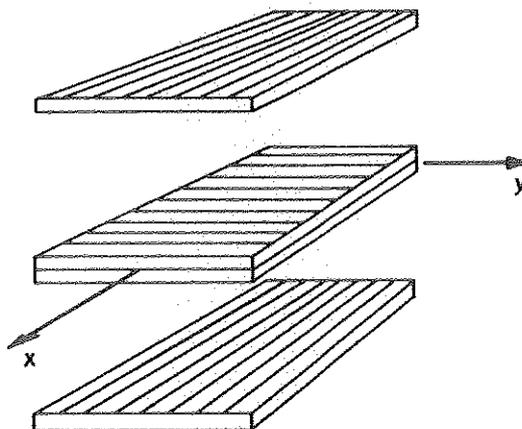


FIGURA 52 - Laminado Simétrico
PROLA (1987)

Segundo PROLA (1987), um laminado é dito assimétrico quando apresenta a geometria da distribuição das camadas e as propriedades mecânicas sem qualquer correspondência abaixo e acima da sua superfície média. Um laminado assimétrico é mostrado na Figura 53. Um laminado é dito antissimétrico quando apresenta antissimetria geométrica, de distribuição de camadas e espessuras, e de propriedades mecânicas em relação à sua superfície média. A Figura 54 ilustra um laminado antissimétrico.

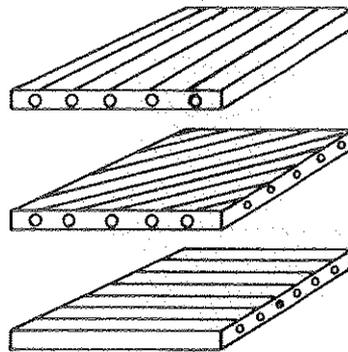


FIGURA 53 - Laminado Assimétrico
PROLA (1987)

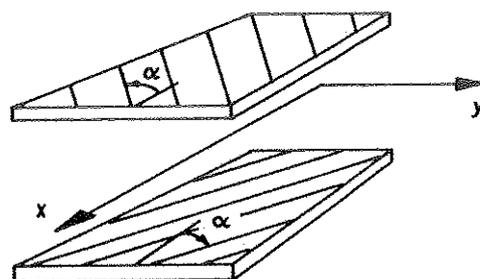


FIGURA 54 - Laminado Antissimétrico
PROLA (1987)

PROLA (1987), além dessa classificação, relata que os laminados podem ser referenciados de acordo com a disposição relativa das fibras em cada lâmina. Particularmente definem-se as sequências em ângulo, "angle-play" ou cruzada, "cross-play". Na sequência em ângulo, as lâminas são colocadas com orientação de fibras ou direções principais segundo ângulos alternados $+\theta$ e $-\theta$

em relação aos eixos do laminado. Os laminados são denominados de sequência cruzada quando as lâminas forem dispostas com orientação de fibras ou direções principais segundo ângulos alternados $+90^\circ$ e -90° em relação aos eixos x y . A Figura 55 ilustra um laminado com disposição de camadas em ângulo e a Figura 56 um laminado com disposição cruzada de camadas.

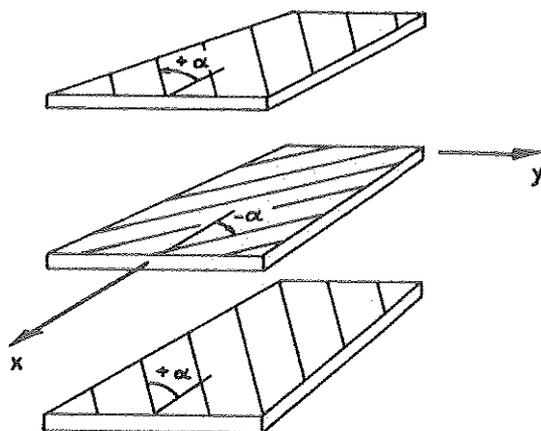


FIGURA 55 - Laminado com Camadas em Ângulo
PROLA (1987)

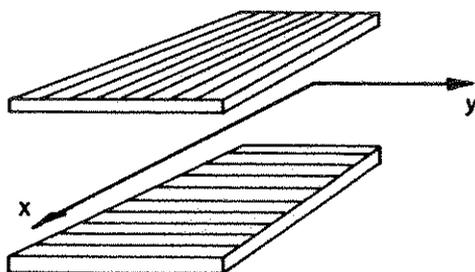


FIGURA 56 - Laminado com Camadas Cruzadas
PROLA (1987)

Na literatura corrente os laminados são nominados de acordo com sua sequência de laminação, ou seja, de acordo com os ângulos das fibras que compoem cada camada, em ordem da superior à inferior. Assim, um laminado especificado como $[0 / 45 / 90 / 90 / 45 / 0]$ será um laminado composto de seis camadas empilhadas na sequência que a Figura 57 ilustra. Quando as espessuras das lâminas que compoem o laminado forem diferentes umas das outras pode-se incluir na especificação sequencial o valor da espessura de cada camada. Assim, para o laminado exemplificado na Figura 57 ter-se-ia $[0 @ t / 45 @ 2t / 90 @ 3t / 90 @ t / 45 @ t / 0 @ t]$. Quando o laminado possui todas as lâminas com mesma espessura é chamado regular.

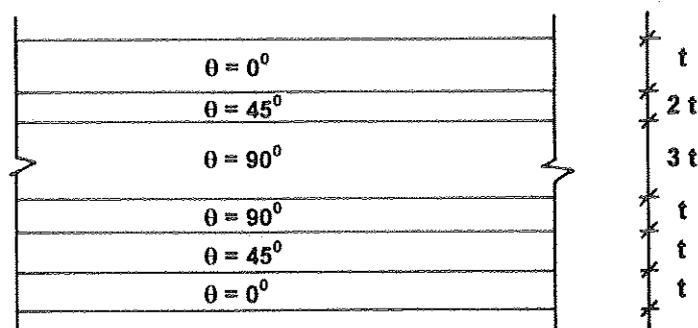


FIGURA 57 - Laminado Ilustrando Sequência de Empilhamento

5.2 - TEORIA DOS LAMINADOS EM FLEXÃO

No capítulo que tratou do comportamento mecânico dos compostos foi apresentada a formulação das equações constitutivas referentes às lâminas de compostos constituídas de fibras longas quando consideradas homogêneas e ortótropas. Para esse caso particular tem-se a matriz de flexibilidade dada por:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{xy}}{E_y} & \frac{-\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{zx}}{E_x} & \frac{-\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

A matriz de rigidez, sabe-se, é a inversa da de flexibilidade.

$$D = C^{-1} \quad (2)$$

Considere-se, então, um laminado constituído de N lâminas. Para uma lâmina qualquer k do laminado a Lei de Hooke pode ser expressa como:

$$\sigma_{ij}^k = D_{ijkl}^k \varepsilon_{kl}^k \quad (3)$$

O superescrito k é necessário para indicar a orientação, em particular, de cada lâmina com respeito aos eixos x e y da placa e sua respectiva matriz de rigidez D .

Sabe-se que para um corpo elástico as equações que relacionam os deslocamentos com as deformações elásticas consideradas pequenas são dadas por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

onde $i, j = x, y, z$ e a vírgula representa a derivada parcial. Desenvolvendo tais equações tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (6)$$

onde u , v e w são os deslocamentos respectivos em relação às direções x , y e z .

Supondo aqui serem válidas as hipóteses cinemáticas da teoria das placas delgadas (cuja razão entre a espessura e a menor dimensão não ultrapassa 1/5) de que os deslocamentos verticais w são pequenos em relação à espessura e as seções planas permanecem planas após a deformação e ortogonais ao plano médio, como ilustra a Figura 58, pode-se admitir o seguinte campo de deslocamentos para um ponto a uma distância z do plano médio da placa:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\bar{\alpha}(x, y) \quad v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\bar{\beta}(x, y) \quad (7)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (8)$$

onde u_0 , v_0 e w_0 são os deslocamentos da superfície média da placa.

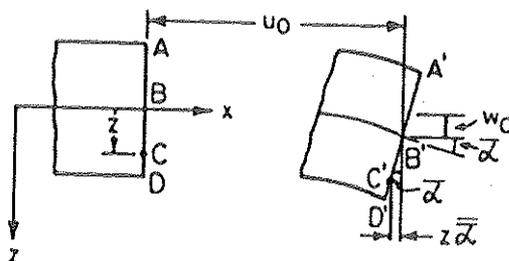


FIGURA 58 - Deformação de uma Seção Transversal de Placa
AGARWAL (1990)

Da teoria de placas $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são as inclinações do plano médio tangente à situação deslocada segundo as direções x e y respectivamente e calculadas pelas derivadas primeiras do deslocamento lateral:

$$\bar{\alpha} = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \bar{\beta} = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (9)$$

A condição $w = w_0$ implica em supor que os elementos da placa não sofrem deformação ao longo de sua espessura.

Admitindo-se esse campo de deslocamentos, como expõem VINSON & SIERAKOWSKI (1987), as deformações passam a ser dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} \quad \varepsilon_z = 0 \quad (10)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\bar{\alpha} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\bar{\beta} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (11)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{z}{2} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} \right) \quad (12)$$

A as deformações da superfície média podem ser escritas como:

$$\varepsilon_{x_0} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \varepsilon_{y_0} = \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad \varepsilon_{xy_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \quad (13)$$

E as curvaturas como:

$$k_x = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \quad k_y = \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} \quad k_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} \right) \quad (14)$$

Levando-se à equação constitutiva, agora incluindo também os possíveis efeitos devidos a variações de temperatura tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = [D]_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_0} + zk_x - \alpha_x \Delta t \\ \varepsilon_{y_0} + zk_y - \alpha_y \Delta t \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy_0} + zk_{xy} - \frac{1}{2} \alpha_{xy} \Delta t \end{bmatrix}_k \quad (15)$$

onde Δt é a variação de temperatura, α_x e α_y são os coeficientes de expansão térmica nas direções x e y, respectivamente. Os coeficientes de expansão térmica

são puramente dilatacionais no sistema 1-2 de coordenadas locais do material, mas devido à rotação para as coordenadas genéricas x - y resulta um α_{xy} .

Assim, conhecidas as deformações do plano médio da placa podem ser calculadas as componentes de tensão em cada lâmina que constitui o laminado. Tais tensões são, obviamente, descontínuas na interface entre lâminas, uma vez que cada lâmina possui sua orientação específica.

Em função da variação descontínua das tensões ao longo da espessura do laminado, é mais conveniente trabalhar com suas resultantes em termos de forças e momentos. Tomando-se, por exemplo, uma placa laminada de espessura h como indicada na Figura 59.

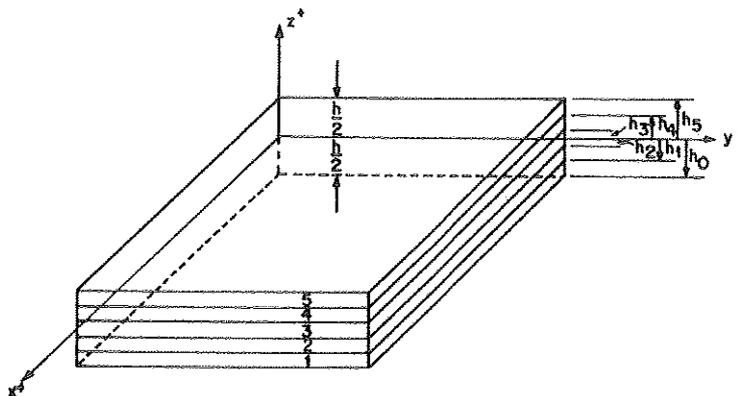


FIGURA 59 - Placa Laminada e Nomenclatura Utilizada
VINSON & SIERAKOWSKI (1987)

Definem-se vetores de forças e momentos resultantes das tensões com dimensões de força por unidade de comprimento e momento por unidade de comprimento, respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (17)$$

A Figura 60 ilustra as resultantes de tensões aplicadas no plano médio geométrico da placa e seus sentidos positivos de acordo com as expressões anteriores.

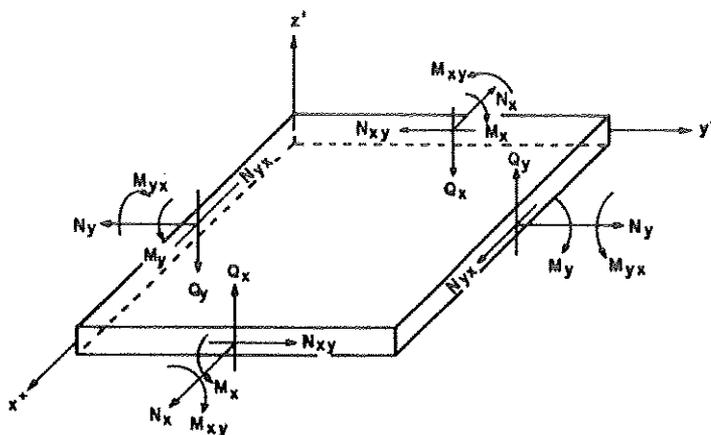


FIGURA 60 - Sentidos Positivos das Resultantes de Tensões
VINSON & SIERAKOWSKI (1987)

Para uma placa laminada composta por N camadas ortótropas as resultantes de tensões devem ser obtidas pelo somatório das integrais realizadas em cada lâmina. Assim, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} [D]_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \varepsilon_{xy_0} \end{bmatrix} dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} [D]_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} z dz \right\} \quad (18)$$

onde, obviamente, utiliza-se somente a porção da matriz de rigidez $[D]_k$ requerida para cada integração.

Observando que as derivadas dos deslocamentos u_0 e v_0 da superfície média, as rotações $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ e a matriz de rigidez $[D]_k$ não são funções de z tem-se:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left\{ [D]_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \varepsilon_{xy_0} \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + [D]_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right\} \quad (19)$$

Em uma forma reduzida pode-se escrever a equação acima como sendo:

$$[N] = [A][\varepsilon_0] + [B][K] \quad (20)$$

onde:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (D_{ij})_k [h_k - h_{k-1}] \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (21)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (D_{ij})_k [h_k^2 - h_{k-1}^2] \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (22)$$

Das expressões acima fica evidente que as tensões resultantes no plano, (N), não são somente função das deformações no plano médio $\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{y_0}, \varepsilon_{xy_0}$, mas também das curvaturas K_x, K_y, K_{xy} .

Pelo mesmo procedimento, integrando as tensões que provocam momento (M) obtém-se:

$$[M] = [B][\varepsilon_0] + [D][K] \quad (23)$$

onde:

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (D_{ij})_k [h_k^3 - h_{k-1}^3] \quad (i,j = 1,2,6) \quad (24)$$

Na determinação da resultante das tensões que provocam esforço cortante (Q) assume-se que as tensões de cisalhamento variem de forma parabólica através da espessura do laminado e, de acordo com VINSON & SIERAKOWSKI (1987) admite-se para tal uma função contínua dada por:

$$f(z) = \frac{5}{4} \left[1 - \left(\frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right] \quad (25)$$

que levada à integração fornece:

$$Q_x = 2(A_{55}\varepsilon_{xz} + A_{45}\varepsilon_{yz}) \quad (26)$$

$$Q_y = 2(A_{45}\varepsilon_{xz} + A_{44}\varepsilon_{yz}) \quad (27)$$

onde:

$$A_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^N [D_{ij}]_k \left[h_k - h_{k-1} - \frac{4}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \frac{1}{h^2} \right] \quad (i,j = 4,5) \quad (28)$$

Pode-se reunir as formas reduzidas apresentadas para [N] e [M] do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ \hline M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 2A_{16} & | & B_{11} & B_{12} & 2B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 2A_{26} & | & B_{12} & B_{22} & 2B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & 2A_{66} & | & B_{16} & B_{26} & 2B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & 2B_{16} & | & D_{11} & D_{12} & 2D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & 2B_{26} & | & D_{12} & D_{22} & 2D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 2B_{66} & | & D_{16} & D_{26} & 2D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \varepsilon_{xy_0} \\ \hline K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Analisando a matriz de rigidez acima pode-se dividi-la em três partes, segundo as quantidades que ela relaciona. A sub-matriz [A] é a matriz de rigidez extensional, que relaciona as resultantes de tensões no plano [N] com as deformações na superfície média [ε_0]. A sub-matriz [D] é a matriz de rigidez flexional que relaciona as tensões binárias [M] com as curvaturas [K]. A sub-matriz [B] é chamada matriz de acoplamento, pois relaciona tensões e deformações de diferentes naturezas, ou seja, relaciona momentos [M] a deformações normais [ε_0] e esforços normais [N] a curvaturas [K]. Isso significa que, no caso geral, no laminado todas as quantidades estáticas e cinemáticas estão relacionadas, ou seja, esforços normais induzem a curvaturas e momentos induzem a deformações normais no plano médio, o que não ocorre nas placas não-laminadas homogêneas, nas quais momentos induzem somente a curvaturas, por exemplo.

Tal acoplamento só é possível de não ocorrer se o laminado possuir simetria completa em relação ao seu plano médio, ou seja, simetria das propriedades elásticas, da orientação e da espessura das lâminas colocadas acima e

abaixo da superfície média. Nessas condições a matriz de acoplamento $[B]$ terá todos os seus elementos nulos. Mesmo assim ainda restará o fato de que acoplamento entre alongamento e cisalhamento ocorrerá quando os termos A_{16} e A_{26} forem diferentes de zero, acoplamento entre alongamento e torção ocorrerá quando os termos B_{16} e B_{26} forem diferentes de zero e acoplamento entre flexão e torção ocorrerá quando os termos D_{16} e D_{26} forem diferentes de zero.

Os acoplamentos decorrentes das matrizes $[A]$ e $[D]$ podem ser evitados se, para cada lâmina com orientação θ das fibras corresponder uma outra de orientação $-\theta$ de mesma espessura colocada simetricamente em relação ao plano médio do laminado, pois, nesse caso a soma das contribuições das lâminas para as matrizes $[A]$ e $[D]$ se anulará. Tais laminados são chamados balanceados. Num laminado balanceado desaparecem também os efeitos de interação entre momentos fletores e curvaturas de torção, porém, devido ao não obedecimento da simetria os esforços resultantes não serão totalmente desacoplados. Isso só ocorrerá quando se tiver a disposição particular de lâminas orientadas com fibras em ângulos de 0° e 90° balanceada, nos chamados laminados cruzados. Em tal caso ter-se-á o desacoplamento total dos efeitos.

6 - RESISTÊNCIA DOS LAMINADOS EM FIBRAS LONGAS

6.1 - INTRODUÇÃO

Diferentemente das propriedades termoelásticas descritas anteriormente, as propriedades que caracterizam a resistência dos materiais compostos por fibras longas não podem ser tratadas simplesmente como médias de seus elementos constituintes, uma vez que a resistência é um fenômeno de natureza estatística e, portanto, fortemente influenciada por aspectos do comportamento em níveis locais. Em se tratando de materiais constituídos de elementos com diferentes resistências, regiões com resistência inferior à de regiões vizinhas exercerão maior influência na resistência global do composto do que regiões com alta resistência, uma vez que poderá haver ruptura daquela antes desta.

A maneira mais apropriada de levar em consideração tais fenômenos nos materiais compostos é estabelecer aquilo que se convencionou chamar de Mecanismos ou Modos de Ruptura. A identificação de tais modos de ruptura é feita em nível local através de uma análise micromecânica, que leva em consideração o fato de que os elementos constituintes dos compostos, fibra e matriz, têm, em geral, características de resistência muito diferentes uns dos outros. Além disso, a interface entre esses dois elementos básicos apresenta comportamento também diverso dos da fibra e da matriz. Nesse nível de caracterização é possível também levar em conta possíveis falhas e defeitos de fabricação. Assim, identificam-se, de um modo geral, três tipos básicos ou modos de ruptura: ruptura da matriz; ruptura da fibra e ruptura da interface fibra matriz.

Os modos básicos de ruptura são considerados, do ponto de vista da resistência global do laminado, como sendo apenas iniciadores da ruptura global. Para caracterizar a ruptura do elemento estrutural laminado é necessário ainda caracterizar a ruptura da lâmina e do conjunto de lâminas. Uma tal caracterização se dá ao nível não mais da micromecânica, mas da macromecânica ou da análise estrutural.

A caracterização da ruptura da lâmina se dá com base nos conhecidos Critérios de Ruptura e é uma caracterização macroscópica. A seguir

descrevem-se os modos básicos de ruptura, os principais critérios de ruptura usados para lâminas anisótropas e o processo de análise da resistência dos laminados.

6.2 - MECANISMOS OU MODOS BÁSICOS DE RUPTURA

6.2.1 - Modos de Ruptura das Fibras

Os modos de ruptura que envolvem as fibras são: ruptura da fibra induzida por flambagem à compressão; ruptura da fibra induzida pela tração e desligamento entre a fibra e a matriz.

McCULLOUGH (1971) descreve o modo de ruptura da fibra quando comprimida proposto por ROSEN (1965) baseado na analogia com colunas imersas em um meio elástico. Por esse modelo as fibras são idealizadas como sendo colunas suportando cargas à compressão. Assim, os principais modos de ruptura da fibra, quando comprimida, ocorrem por flambagem no plano da lâmina ou transversalmente a esse plano. Esse modelo está ilustrado na Figura 61.

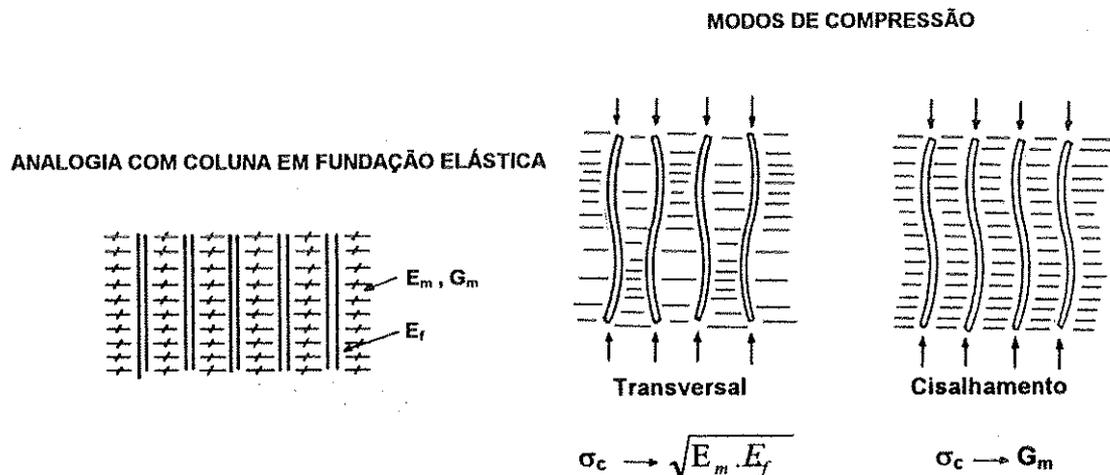


FIGURA 61 - Modelo de Resistência à Compressão
McCULLOUGH (1971)

À flambagem transversal estão associados alongamentos e encurtamentos transversais e a resistência à compressão resulta proporcional à média geométrica entre os módulos de elasticidade da fibra e da matriz. A flambagem no plano produz deformações de cisalhamento na matriz e a resistência à compressão nesse modo é proporcional ao módulo de elasticidade transversal G da matriz.

Quando sujeitas à tração o modo de ruptura das fibras depende fundamentalmente do grau de adesão entre as fibras e a matriz. McCULLOUGH (1971) descreve a ruptura quando se consideram os dois extremos, de perfeita e fraca adesão entre fibra e matriz. Quando se despreza a adesão entre fibra e matriz tem-se um modelo desacoplado de ruptura e, conseqüentemente, fibra e matriz reagem de forma paralela de tal modo que quando as fibras se rompem a carga é transferida à matriz. A Figura 62 ilustra esse modelo.

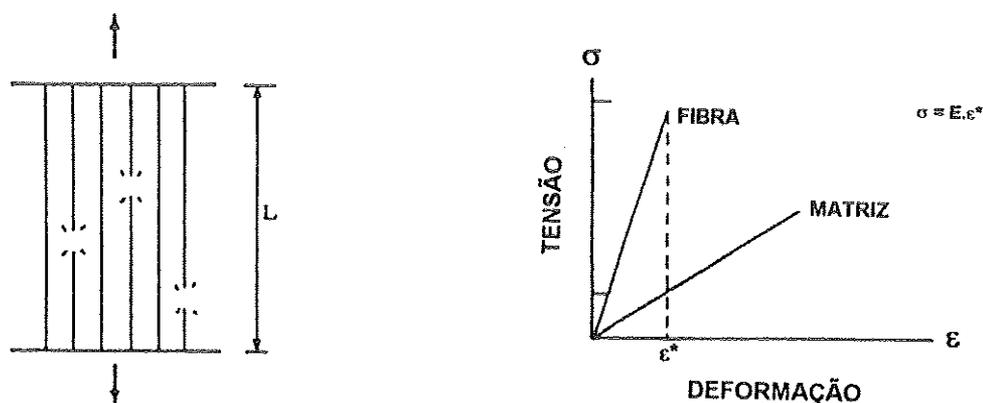


FIGURA 62 - Modelo Desacoplado de Resistência à Tração
McCULLOUGH (1971)

Quando a deformação ϵ^* é atingida as fibras se rompem e a carga é transferida à matriz no mesmo nível de deformação ϵ^* .

Quando se considera perfeita adesão entre fibra e matriz tem-se um modelo acoplado de ruptura cuja principal característica é a movimentação de tensões de cisalhamento na interface fibra matriz. A Figura 63 ilustra esse modelo.

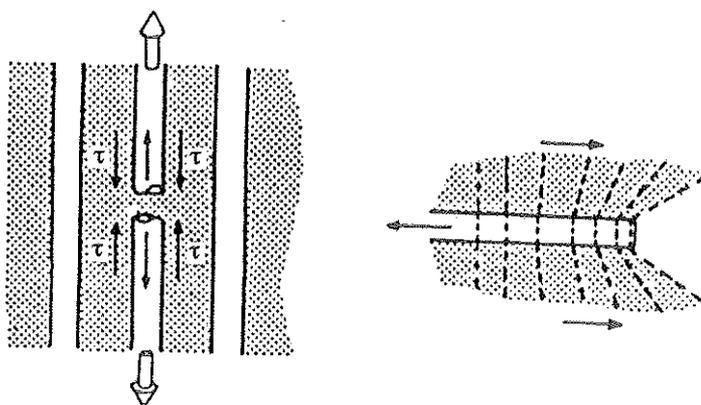


FIGURA 63 - Modelo Acoplado de Resistência à Tração
McCULLOUGH (1971)

Admitindo que algumas fibras se rompem em baixos níveis de tensão devido à presença de falhas, a força de tração atuante numa fibra individualmente passa a ser resistida localmente por tensões de cisalhamento na interface fibra matriz.

6.2.2 - Modos de Ruptura da Matriz

Os modos de ruptura da matriz são influenciados fortemente pelo modo com que a ruptura ocorre nas fibras, uma vez que estas, sendo em geral frágeis, rompem-se primeiro.

MULLIN et al. (1968) descreve os mecanismos de ruptura da matriz na vizinhança de uma fibra rompida e, a partir da análise do processo de ruptura de uma única fibra envolvida por uma matriz, são determinados os modos de ruptura. A distribuição de tensões, determinada por investigação fotoelástica, supõe tensões de cisalhamento ao longo da interface fibra matriz e um gradiente de tensões normais ao longo da fibra, como mostra a Figura 64.

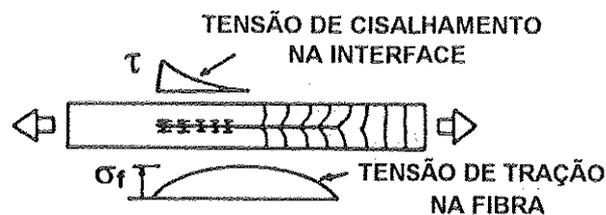


FIGURA 64 - Distribuição de Tensões na Fibra e na Matriz
MULLIN et al. (1968)

A Figura 65 ilustra as trajetórias das tensões de tração na matriz.

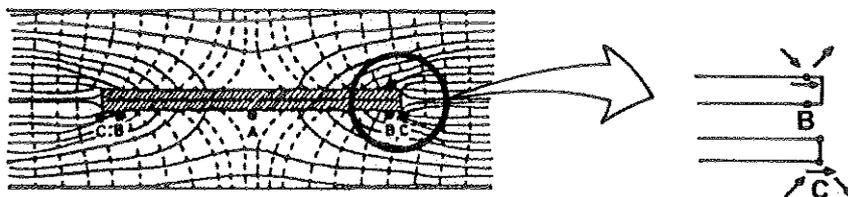


FIGURA 65 - Trajetória das Tensões de Tração na Matriz
MULLIN et al. (1968)

A direção das tensões é tangente às trajetórias e sua intensidade proporcional à proximidade dessas, sendo que as maiores intensidades de tensão ocorrem próximas às extremidades da fibra, enquanto no centro da fibra, ponto A, as tensões na matriz são baixas. No ponto B o estado de tensões é aproximadamente de cisalhamento puro e no ponto C existem, além de cisalhamento, elevadas tensões de tração paralelas ao eixo da fibra.

Tendo a matriz resistência à tração maior do que a da fibra e existindo suficiente resistência de ligação entre fibra e matriz, e sendo a distribuição de tensões máxima na região central da fibra é essa região da fibra que primeiro se rompe, transferindo repentinamente elevadas tensões para a matriz existente na vizinhança, rompendo também essa região da matriz, formando uma fissura em forma de disco perpendicular ao eixo da fibra, ou, dependendo do tipo de fibra, formando também duas fissuras em forma de cones adjacentes à fissura em forma de disco, como mostra a Figura 66.

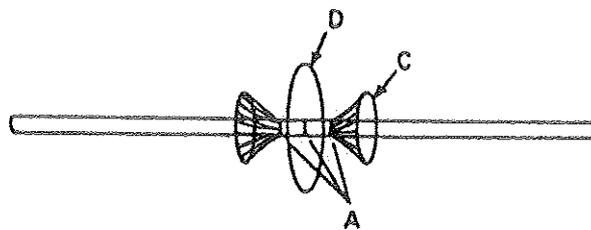


FIGURA 66 - Fissuras na Matriz Provocadas pela Ruptura da Fibra
MULLIN et al. (1968)

A extensão dessa fissura depende da capacidade de resistência da matriz nessa região. Tendo iniciado o processo de ruptura da fibra a propagação da fissura é determinada pelo novo estado de tensões existente nessa região, que é agora muito próximo daquele existente na extremidade da fibra, já que, agora, se formou uma nova extremidade de fibra. A direção de propagação da fissura quando não há outras fibras na vizinhança é aproximadamente perpendicular ao eixo da fibra. Quando a fissura em forma de disco não se superpõe às fissuras inclinadas, estas também se propagam na mesma direção, porém em algum momento dessa propagação a superposição ocorre. Quando há outras fibras nas vizinhanças da fibra rompida pode haver a propagação da fissura até as fibras adjacentes, carregando-as rapidamente. O resultado é uma rápida sequência de rupturas das fibras vizinhas, começando de uma única fissura em forma de disco ocorrida na matriz e levando à ruptura do composto.

Se a resistência de ligação entre fibra e matriz é suficiente e se a matriz possui baixa resistência à tração, pode ocorrer uma fissura na matriz, na extremidade da fibra, na região de alta tensão de cisalhamento, como ilustra a Figura 67. Essa fissura pode se propagar tomando-se perpendicular ao eixo da fibra quando ela ultrapassa a região de alta tensão de cisalhamento na matriz.



FIGURA 67 - Fissura na Matriz na Região da Extremidade da Fibra
MULLIN et al. (1968)

6.2.3 - Modo de Ruptura da Interface Fibra Matriz

MULLIN et al. (1968) relata que quando a matriz é ductil e capaz de resistir à tendência de formação da fissura e a fibra é suficientemente resistente pode aparecer uma ruptura de ligação na interface da fibra com a matriz, sendo essa uma ruptura provocada pelas tensões de cisalhamento e que não ocorre exatamente na extremidade da fibra, mas na região imediatamente próxima a ela, ou seja, naquela região em que o estado de tensão é aproximadamente aquele de cisalhamento puro descrito anteriormente. A Figura 68 ilustra a região que sofre desligamento entre fibra e matriz e a nova distribuição de tensões de cisalhamento após ocorrido o desligamento.

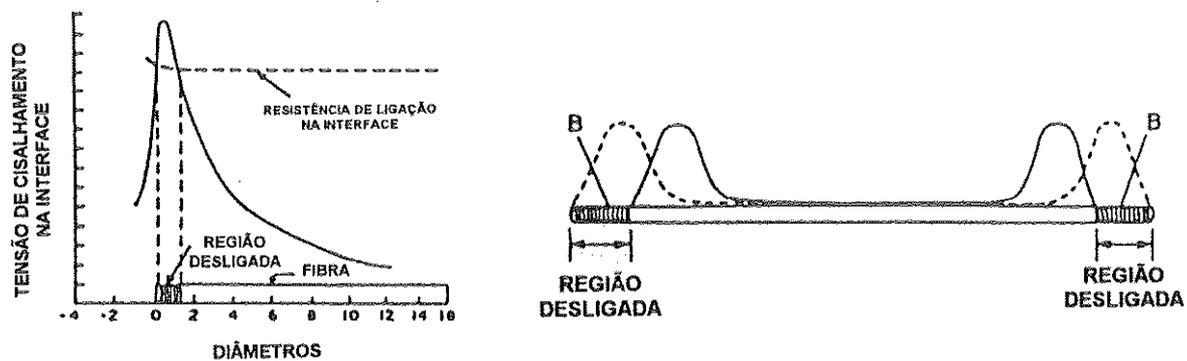


FIGURA 68 - Região da Fibra Desligada da Matriz
MULLIN et al. (1968)

6.3 - CRITÉRIOS DE RUPTURA PARA COMPOSTOS LAMINADOS EM FIBRAS LONGAS

6.3.1 - Introdução

O principal requisito para o projeto de elementos estruturais de materiais compostos é o conhecimento de sua resistência, quando sujeitos a complexas combinações de carregamentos. A resistência e a ruptura de tais materiais pode ser associada com a resistência ao escoamento ou com a resistência última ou de ruptura do material. Para materiais frágeis a resistência última é a mais adequada e para materiais dúcteis a resistência ao escoamento é a mais utilizada. No caso dos compostos em fibras longas, as fibras têm, em geral, comportamento elástico até a ruptura e as matrizes podem ser frágeis ou dúcteis. Além disso, os modos de ruptura já descritos influenciam decisivamente o processo de ruptura desses materiais.

Ao nível do elemento estrutural, a caracterização da ruptura é feita com base nos chamados Critérios de Ruptura. No caso dos materiais compostos em fibras longas, com comportamento anisótropo, esses critérios têm origem nos critérios de ruptura desenvolvidos para os materiais monolíticos. VINSON &

SIERAKOWSKI (1987) classificam os critérios como predominante de tensão, predominante de deformação e interativos. O primeiro corresponde ao critério da máxima tensão e o segundo da máxima deformação. Os critérios interativos são os polinômios de tensões. A Figura 69 ilustra as superfícies de ruptura para os critérios da máxima deformação, máxima tensão e polinomiais quadráticos.

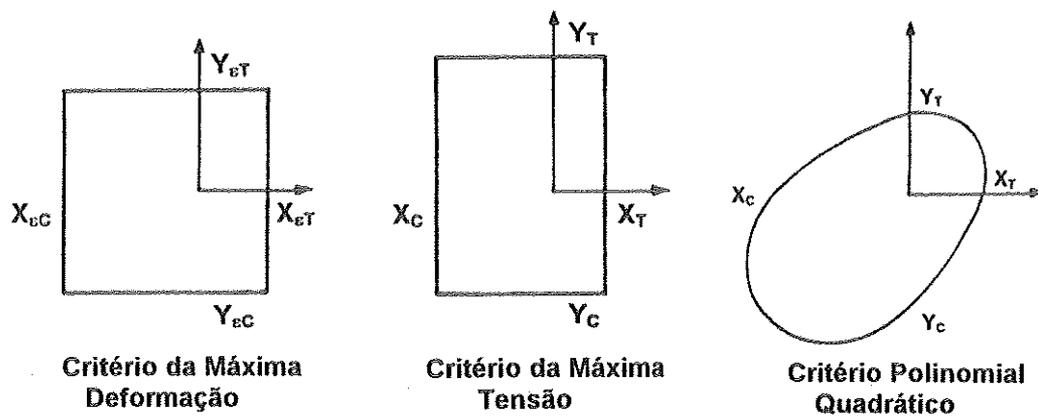


FIGURA 69 - Superfícies de Ruptura para os Critérios da Máxima Deformação, Máxima Tensão e Quadrático
REDDY & PANDEY (1987)

A seguir apresentam-se alguns dos critérios mais utilizados, critério da máxima tensão, critério da máxima deformação, critério de Tsai-Hill, critério de Tsai-Wu, critério de Chamis e critério de Hoffmann.

6.3.2 - Critério da Máxima Tensão

REDDY & PANDEY (1987) apresentam o critério da máxima tensão como aquele em que a ruptura é admitida ocorrer se qualquer uma das condições abaixo for satisfeita :

$$\sigma_1 > X_T \quad \sigma_2 > Y_T \quad \sigma_3 > Z_T \quad \sigma_4 > R \quad \sigma_5 > S \quad \sigma_6 > T \quad (1)$$

onde σ_1 , σ_2 e σ_3 são as componentes de tensão normais, σ_4 , σ_5 e σ_6 são as componentes de tensão de cisalhamento, X_T , Y_T e Z_T são as resistências normais da lâmina à tração nas direções x , y e z , respectivamente e R , S , T são as resistências ao cisalhamento nos planos yz , xz e xy , respectivamente. Quando as tensões σ_1 , σ_2 e σ_3 são de compressão elas devem ser comparadas às respectivas resistências normais à compressão X_C , Y_C e Z_C nas direções x , y e z . Tais valores de resistências são obtidos através de ensaios.

O critério da máxima tensão trata os modos de ruptura de forma independente. Assim, por exemplo, se uma lâmina atinge a condição de $\sigma_1 > X_T$ diz-se que o modo de ruptura é de resistência última da fibra na direção x .

Para exemplificar, seja o caso da sollicitação plana segundo uma direção qualquer com relação àquela das fibras, como ilustra a Figura 70.

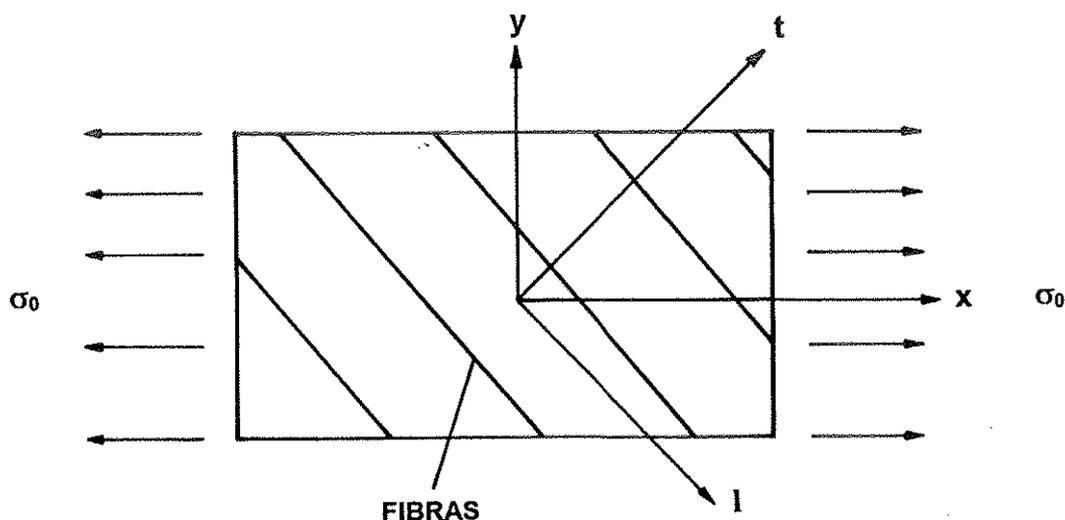


FIGURA 70 - Situação de Sollicitação Inclinada em Relação às Fibras

Nessa situação os estados de tensão admissíveis são caracterizados por:

$$\sigma_l \leq R_t \qquad \sigma_t \leq R_t \qquad \tau_{tt} \leq R_{tt} \qquad (2)$$

E a condição de ruptura, sendo $\sigma_0 = \sigma_x$, fica caracterizada por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

ou ainda:

$$\sigma_l = \cos^2 \theta \sigma_x \leq R_t \qquad \sigma_x \leq \frac{R_t}{\cos^2 \theta} \qquad (4)$$

$$\sigma_t = \sin^2 \theta \sigma_x \leq R_t \qquad \sigma_x \leq \frac{R_t}{\sin^2 \theta} \qquad (5)$$

$$\tau_{tt} = -\sin \theta \cos \theta \sigma_x \leq R_{tt} \qquad |\sigma_x| \leq \frac{R_{tt}}{|\sin \theta \cos \theta|} \qquad (6)$$

Desse modo, entre as relações acima, a menor delas (em valor numérico) indicará a condição de ruptura para o ângulo θ correspondente. Assim, para ângulos pequenos a relação (4) resulta a menor entre todas e pode-se dizer que, nesse caso, a resistência é controlada pelas fibras. Por outro lado, para ângulos próximos a 90° a segunda relação (5) produz o menor valor e, nesse caso, diz-se que a ruptura é dependente da resistência à tração (ou compressão) da

matriz. Em situações intermediárias a ruptura é associada ao cisalhamento paralelo ao reforço.

A Figura 71 apresenta um gráfico ($\sigma_x - \theta$) de um composto unidirecional boro-epoxi com $R_f = 210 \text{ GPa}$, $R_t = 18 \text{ GPa}$ e $R_m = 4.5 \text{ GPa}$ submetido à tensão uniaxial. As zonas 1, 2 e 3 representam predominância sobre a ruptura de σ_f , τ_{ft} e σ_m , respectivamente. Os pontos angulosos evidenciados no gráfico são devidos à independência admitida para os fenômenos de ruptura.

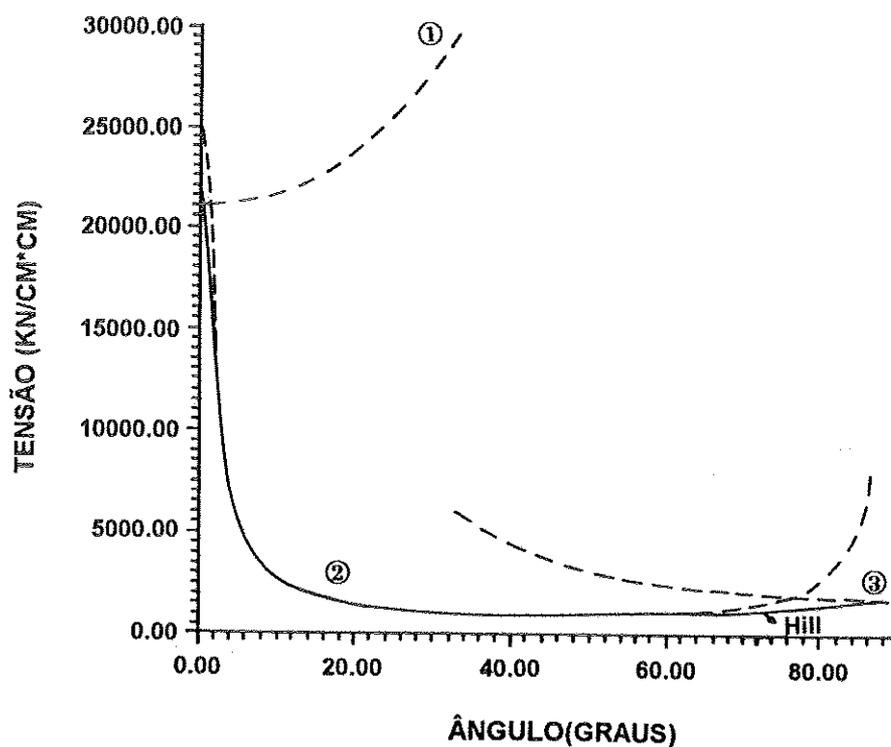


FIGURA 71 - Tensão em Função da Inclinação das Fibras de um Composto Boro-Epoxi Unidirecional

Na região 2 do gráfico há coincidência entre o Critério de Hill, a ser visto adiante, e o critério da máxima tensão.

6.3.3 - Critério da Máxima Deformação

REDDY & PANDEY (1987) apresentam o critério da máxima deformação como aquele em que a ruptura é admitida ocorrer se qualquer uma das condições abaixo for satisfeita:

$$\varepsilon_1 > X_{\varepsilon T} \quad \varepsilon_2 > Y_{\varepsilon T} \quad \varepsilon_3 > Z_{\varepsilon T} \quad \varepsilon_4 > R_{\varepsilon} \quad \varepsilon_5 > S_{\varepsilon} \quad \varepsilon_6 > T_{\varepsilon} \quad (7)$$

onde ε_1 , ε_2 e ε_3 são as componentes de deformação à tração normais nas direções x, y e z, respectivamente, ε_4 , ε_5 e ε_6 são as componentes de deformação por cisalhamento nos planos yz, xz e xy, respectivamente, $X_{\varepsilon T}$, $Y_{\varepsilon T}$ e $Z_{\varepsilon T}$ são as resistências à deformação por tração nas direções x, y e z, respectivamente e R_{ε} , S_{ε} , T_{ε} são as resistências à deformação por cisalhamento nos planos yz, xz e xy, respectivamente. Quando as deformações ε_1 , ε_2 e ε_3 são de compressão elas devem ser comparadas às respectivas resistências à deformação por compressão $X_{\varepsilon C}$, $Y_{\varepsilon C}$ e $Z_{\varepsilon C}$ nas direções x, y e z respectivamente. Os valores das resistências são obtidos através de ensaios.

6.3.4 - Critério de Tsai-Hill

HASHIN (1980) relata que o problema da previsão da ruptura de materiais compostos anisótropos é semelhante ao da construção de um critério de escoamento para um material elasto-plástico. Assim, TSAI, S. W. admitiu que o critério de ruptura de um composto de fibra unidirecional tem a mesma forma matemática do critério de escoamento de um material idealmente plástico como o proposto por HILL, R. em que a ruptura é associada à tensão de cisalhamento e insensível à tensão hidrostática.

VINSON & SIERAKOWSKI (1987) descrevem o critério proposto por HILL com a seguinte forma, quando os eixos de anisotropia são os de referência:

$$F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1 \quad (8)$$

em que os parâmetros F, G, H, L, M, N são característicos do corrente estado de anisotropia.

Para compostos reforçados unidirecionalmente tem-se $M = N$, $G = H$ e obtém-se assim:

$$F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + G(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M(\sigma_{13} + \sigma_{12})^2 = 1 \quad (9)$$

Para uma lâmina de composto ou laminado em estado plano de tensão tem-se $\sigma_{33} = 0$ e obtém-se, assim:

$$F\sigma_{22}^2 + G\sigma_{11}^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1 \quad (10)$$

HILL (1950) descreve os valores dos parâmetros F, G, H, L, M, N como sendo função das tensões de escoamento à tração X, Y, Z nas direções de simetria elástica e de R, S, T as tensões de escoamento ao cisalhamento com respeito aos mesmos eixos:

$$\frac{1}{X^2} = G + H \quad \frac{1}{Y^2} = H + F \quad \frac{1}{Z^2} = F + G \quad (11)$$

$$2F = \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} \quad 2G = \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} \quad 2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \quad (12)$$

$$2L = \frac{1}{R^2} \quad 2M = \frac{1}{S^2} \quad 2N = \frac{1}{T^2} \quad (13)$$

Para exemplificar, seja o caso da solicitação plana segundo uma direção qualquer com relação àquela das fibras, como ilustra a Figura 70. Nessas condições o critério se simplifica e pode ser escrito como:

$$\left(\frac{\sigma_l}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{Y}\right)^2 - \frac{(\sigma_l \sigma_t)}{X^2} + \left(\frac{\tau_{lt}}{T}\right)^2 = 1 \quad (14)$$

Nesse caso tem-se:

$$\sigma_l = \cos^2 \theta \sigma_x \quad (15)$$

$$\sigma_t = \sin^2 \theta \sigma_x \quad (16)$$

$$\tau_{lt} = -\sin \theta \cos \theta \sigma_x \quad (17)$$

que, aplicados na eq.(14) levam a:

$$\sigma_x = \frac{X}{\left[\cos^4 \theta + \frac{X^2 \sin^4 \theta}{Y^2} + \left(\left(\frac{X^2}{T^2} \right) - 1 \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right]} \quad (18)$$

Para o caso de uma lâmina de um composto unidirecional boro-epoxi com $R_l = 210 \text{ GPa}$, $R_t = 18 \text{ GPa}$ e $R_{lt} = 4.5 \text{ GPa}$ submetido à tensão uniaxial, como a do ítem 6.3.3 anterior tem-se o gráfico $(\sigma_x - \theta)$ apresentado na Figura 71.

6.3.5 - Critério de Tsai-Wu

TSAI & WU (1971) propuseram um critério cuja hipótese básica é que existe uma superfície de ruptura no espaço das tensões com a seguinte forma escalar:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, 6) \quad (19)$$

cuja equação desenvolvida toma a forma:

$$\begin{aligned} & F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + F_4 \sigma_4 + F_5 \sigma_5 + F_6 \sigma_6 \\ & + F_{11} \sigma_1^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 2F_{14} \sigma_1 \sigma_4 \\ & + 2F_{15} \sigma_1 \sigma_5 + 2F_{16} \sigma_1 \sigma_6 + F_{22} \sigma_2^2 + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 \\ & + 2F_{24} \sigma_2 \sigma_4 + 2F_{25} \sigma_2 \sigma_5 + 2F_{26} \sigma_2 \sigma_6 + F_{33} \sigma_3^2 \\ & + 2F_{34} \sigma_3 \sigma_4 + 2F_{35} \sigma_3 \sigma_5 + 2F_{36} \sigma_3 \sigma_6 + F_{44} \sigma_4^2 \\ & + 2F_{45} \sigma_4 \sigma_5 + 2F_{46} \sigma_4 \sigma_6 + F_{55} \sigma_5^2 + 2F_{56} \sigma_5 \sigma_6 \\ & + F_{66} \sigma_6^2 = 1 \end{aligned} \quad (20)$$

Os termos lineares σ_i levam em conta tensões que descrevem rupturas induzidas por diferenças entre tensões positivas e negativas, enquanto os termos quadráticos $\sigma_i \sigma_j$ definem uma elipsóide no espaço das tensões. A intensidade dos termos de interação F_{ij} é restrita à seguinte desigualdade:

$$F_{ii} F_{jj} - F_{ij}^2 \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (21)$$

Geometricamente essa desigualdade implica em que a superfície de ruptura intercepte cada eixo de tensão e que sua forma seja a de uma elipse.

Os tensores de resistência F_i e F_{ij} seguem as mesmas propriedades de simetria que aquelas desenvolvidas para as propriedades elásticas de materiais compostos e o número de componentes independentes e não-nulas pode ser descrito

de forma similar àquela estabelecida para tais propriedades, de tal forma que os parâmetros de resistência tomam a forma abaixo:

$$F_1 = \frac{1}{X} - \frac{1}{X'} \quad F_2 = \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \quad F_3 = \frac{1}{Z} - \frac{1}{Z'} \quad (22)$$

$$F_4 = \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q'} \quad F_5 = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \quad F_6 = \frac{1}{S} - \frac{1}{S'} \quad (23)$$

$$F_{11} = \frac{1}{XX'} \quad F_{22} = \frac{1}{YY'} \quad F_{33} = \frac{1}{ZZ'} \quad (24)$$

$$F_{44} = \frac{1}{QQ'} \quad F_{55} = \frac{1}{RR'} \quad F_{66} = \frac{1}{SS'} \quad (25)$$

onde X, X' são as resistências à tração e compressão na direção 1, Y, Y' são as resistências à tração e compressão na direção 2, Z, Z' são as resistências à tração e compressão na direção 3, Q, Q' são as resistências positiva e negativa ao cisalhamento puro no plano 2-3, R, R' são as resistências positiva e negativa ao cisalhamento puro no plano 3-1, S, S' são as resistências positiva e negativa ao cisalhamento puro no plano 1-2, obtidas, todas, através de ensaios.

TSAI & WU (1971) relatam que esse critério, sendo geral e operacionalmente simples, não pode interpretar aqueles mecanismos de ruptura descritos para os compostos, sendo somente uma ferramenta útil para a caracterização da resistência de tais materiais e para projetos que requerem métodos relativamente simples de estimativa da capacidade de carga da estrutura.

6.3.6 - Critério de Hoffman

HOFFMAN (1967) propôs uma condição de ruptura para materiais frágeis ortótropos, ressaltando que, em baixas temperaturas e/ou sob carregamento de curta duração, fibra e matriz são frágeis e os compostos podem sofrer ruptura frágil.

Sendo a fragilidade caracterizada por grandes diferenças entre as resistências à compressão e à tração, o critério leva em conta nove parâmetros do material e as resistências à compressão e tração em várias direções. A condição de ruptura é representada pela equação:

$$C_1(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C_2(\sigma_z - \sigma_x)^2 + C_3(\sigma_x - \sigma_y)^2 + C_4\sigma_x + C_5\sigma_y + C_6\sigma_z + C_7\tau_{yz}^2 + C_8\tau_{zx}^2 + C_9\tau_{xy}^2 = 1 \quad (26)$$

onde $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ e C_9 são parâmetros que variam com o tipo do material, determinados dos nove dados básicos de resistência, $F_{t_x}, F_{t_y}, F_{t_z}$ as resistências à tração uniaxiais segundo x, y e z , F_{c_x}, F_{c_y} e F_{c_z} as resistências à compressão uniaxiais segundo x, y e z e $F_{s_{yz}}, F_{s_{zx}}$ e $F_{s_{xy}}$ as resistências ao cisalhamento puro nos planos yz, zx e xy . Assim, as expressões para os nove parâmetros tornam-se as seguintes:

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[(F_{t_y} F_{c_y})^{-1} + (F_{t_z} F_{c_z})^{-1} - (F_{t_x} F_{c_x})^{-1} \right] \quad (27)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[(F_{t_z} F_{c_z})^{-1} + (F_{t_x} F_{c_x})^{-1} - (F_{t_y} F_{c_y})^{-1} \right] \quad (28)$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \left[(F_{t_x} F_{c_x})^{-1} + (F_{t_y} F_{c_y})^{-1} - (F_{t_z} F_{c_z})^{-1} \right] \quad (29)$$

$$C_4 = (F_{t_x})^{-1} - (F_{c_x})^{-1} \quad C_5 = (F_{t_y})^{-1} - (F_{c_y})^{-1} \quad C_6 = (F_{t_z})^{-1} - (F_{c_z})^{-1} \quad (30)$$

$$C_7 = (F_{s_{yz}})^{-2} \quad C_8 = (F_{s_{zx}})^{-2} \quad C_9 = (F_{s_{xy}})^{-2} \quad (31)$$

Para uma lâmina de composto colocada no plano xy em que as fibras estão na direção do eixo x e para a qual exista isotropia transversal tem-se, em estado plano de tensão:

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (32)$$

Devido à isotropia transversal tem-se também:

$$F_{c_y} = F_{c_z} \quad F_{t_y} = F_{t_x} \quad F_{s_{zx}} = F_{s_{xy}} \quad (33)$$

A condição de ruptura torna-se, então:

$$\frac{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y}{F_{c_x} F_{t_x}} + \frac{\sigma_y^2}{F_{c_y} F_{t_y}} + \frac{F_{c_x} - F_{t_x}}{F_{c_x} F_{t_x}} \sigma_x + \frac{F_{c_y} - F_{t_y}}{F_{c_y} F_{t_y}} \sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{F_{s_{xy}}^2} = 1 \quad (34)$$

que é geometricamente representada no espaço tridimensional das tensões $\sigma_x - \sigma_y - \tau_{xy}$ por uma superfície de ruptura em forma de elipse, como mostra a Figura 72, cujo centro tem as seguintes coordenadas:

$$x_c = \frac{(F_{t_x} - F_{c_x})}{2} + \frac{(F_{t_y} - F_{c_y})}{4} \quad (35)$$

$$y_c = \frac{(F_{t_y} - F_{c_y})}{2} + \frac{(F_{t_x} - F_{c_x})(F_{t_y} F_{c_y})}{4F_{t_x} F_{c_x}} \quad (36)$$

$$z_c = 0 \quad (37)$$

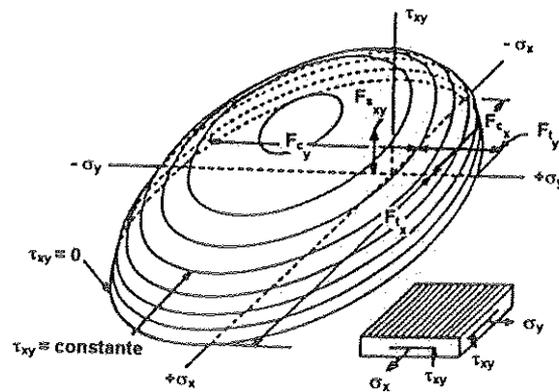


FIGURA 72 - Vista Isométrica da Superfície de Ruptura para Composto em Estado Plano de Tensões
HOFFMAN (1967)

6.3.7 - Critério de Chamis

REDDY & PANDEY (1987) descrevem o critério de Chamis como sendo expresso por:

$$F_{ij} \sigma_i \sigma_j \geq 1 \quad (38)$$

ou, sob outra forma:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{Z}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_4}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_5}{S}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{T}\right)^2 - K_{12} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{XY} - K_{13} \frac{\sigma_1 \sigma_3}{XZ} - K_{23} \frac{\sigma_2 \sigma_3}{YZ} \geq 1 \quad (39)$$

onde K_{12}, K_{13}, K_{23} são coeficientes de resistência que dependem e variam de acordo com o tipo de material. Em termos dos tensores de resistência polinomiais pode-se escrever, para o critério de Chamis:

$$F_i = 0 \quad (40)$$

$$F_{11} = \frac{1}{X^2} \quad F_{22} = \frac{1}{Y^2} \quad F_{33} = \frac{1}{Z^2} \quad (41)$$

$$F_{44} = \frac{1}{R^2} \quad F_{55} = \frac{1}{S^2} \quad F_{66} = \frac{1}{T^2} \quad (42)$$

$$F_{12} = -\frac{K_{12}}{XY} \quad F_{13} = -\frac{K_{13}}{XZ} \quad F_{23} = -\frac{K_{23}}{YZ} \quad (43)$$

com todos os outros coeficientes nulos e os parâmetros X, Y, Z e R, S, T tendo o mesmo significado que no critério de HILL.

6.4 - ANÁLISE DA RESISTÊNCIA DOS LAMINADOS

6.4.1 - Aspectos Gerais

Os modos de ruptura previstos pela teoria micromecânica servem de ponto de partida para a análise da resistência global dos laminados, uma vez que são considerados os iniciadores da ruptura. Para caracterizar a resistência dos laminados é necessário caracterizar a resistência de cada lâmina e do conjunto de lâminas como um todo, quando sujeitos a complexas condições de carregamento.

A caracterização da resistência da lâmina se dá admitindo que ela está sob um estado plano de tensões. A partir daí tal estado de tensões deve ser

determinado para cada lâmina e, com a escolha de um critério de ruptura adequado tal como um daqueles já descritos, verificar a integridade de cada lâmina em todos os seus pontos. A ruptura inicial de uma lâmina é identificada quando o efeito provocado pelo carregamento dado ou calculado (dependendo do procedimento, se dimensionamento ou verificação do elemento estrutural) excede os limites do critério de ruptura adotado. Quando isso ocorre diz-se que houve a ruptura inicial da primeira lâmina (em inglês "first ply failure", FPF) do laminado. Após ocorrida a ruptura inicial a questão que se coloca é saber se a lâmina inicialmente rompida é capaz de suportar cargas adicionais. Duas hipóteses podem ser feitas. A primeira é desprezar totalmente a camada rompida, considerando que ela já não é capaz de resistir, o que representa uma atitude conservadora em relação à análise da ruptura. A segunda é investigar a causa da ruptura inicial, o que para os compostos em fibra longa representa conhecer o modo de ruptura ocorrido, de tal forma a se desprezar somente a resistência que, de fato, deixou de existir. Assim, se ocorreu a ruptura da matriz em uma camada conhecida, as propriedades de resistência da matriz naquela camada podem ser desprezadas na sequência da análise. Ao contrário, se ocorreu a ruptura das fibras em uma camada conhecida, as propriedades de resistência das fibras naquela camada podem ser desprezadas na sequência da análise.

A ruptura de um laminado consistindo de um número de camadas empilhadas com fibras em diferentes orientações ocorre gradualmente. Isso é devido ao fato de que quando uma lâmina se rompe ocorre uma redistribuição das tensões nas lâminas que ainda permanecem intactas. A ruptura final do laminado ocorre quando o elemento estrutural composto do conjunto de lâminas já se degradou o suficiente a tal ponto de não conseguir resistir a cargas adicionais. Quando isso ocorre diz-se que houve a ruptura última (em inglês "last ply failure", LPF) do laminado. Tal ruptura final pode ocorrer por progressiva degradação das camadas individualmente, rompidas de acordo com os modos de ruptura já descritos, ou por um outro modo de ruptura característico dos laminados, chamado delaminação.

6.4.2 - Delaminação

Delaminação é o processo de separação das lâminas de um laminado.

HAUG et al. (1991) define a delaminação como sendo o avanço de macro fissuras na matriz na região próxima à interface entre as lâminas provocada pelas tensões de cisalhamento interlaminares e tensões normais que provocam a separação das lâminas adjacentes. As Figuras 73 e 74 ilustram o fenômeno da delaminação em laminados simétricos.

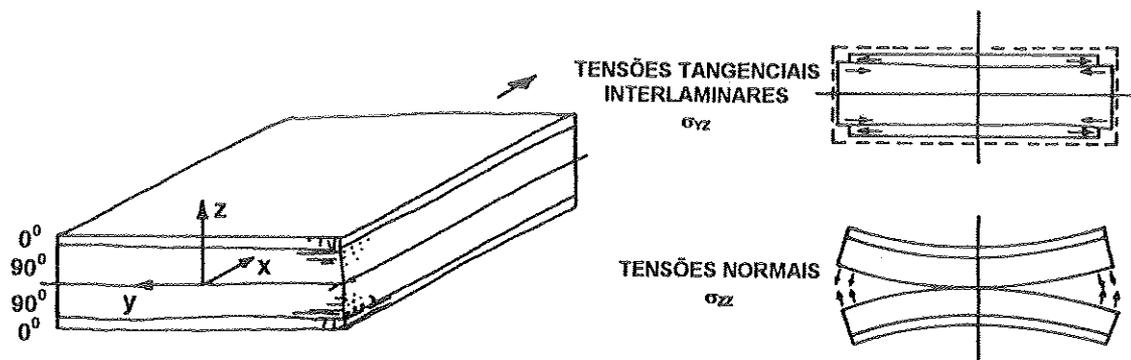


FIGURA 73 - Delaminação: Aspectos Básicos
HAUG et al. (1991)

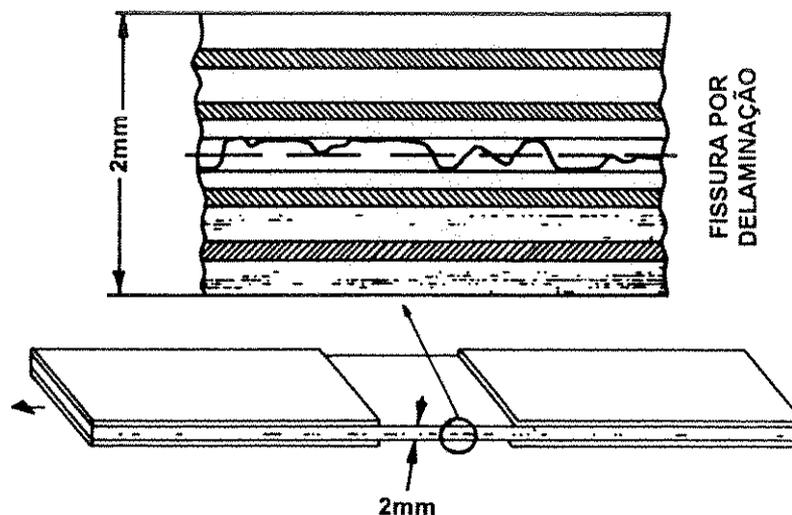


FIGURA 74 - Delaminação: Aspectos Básicos
HAUG et al. (1991)

ROTHSCHILDS et al. (1988) relata que delaminações podem aparecer em estruturas de materiais compostos como resultados de defeitos de confecção e de condições de serviço. Cargas repetidas em estruturas laminadas de materiais compostos podem iniciar a delaminação em regiões de concentração de tensões interlaminares, tais como juntas parafusadas, variação de seção e recortes. A delaminação, para efeito da análise de propagação e crescimento das fissuras resultantes, é admitida ser de, basicamente, dois tipos, chamados de Modo I e Modo II. A delaminação pelo modo I é uma abertura de fenda em forma de cunha e a do modo II é o deslizamento de duas camadas adjacentes. A Figura 75 ilustra os modos I e II e a Figura 76 as tensões interlaminares na região de delaminação.

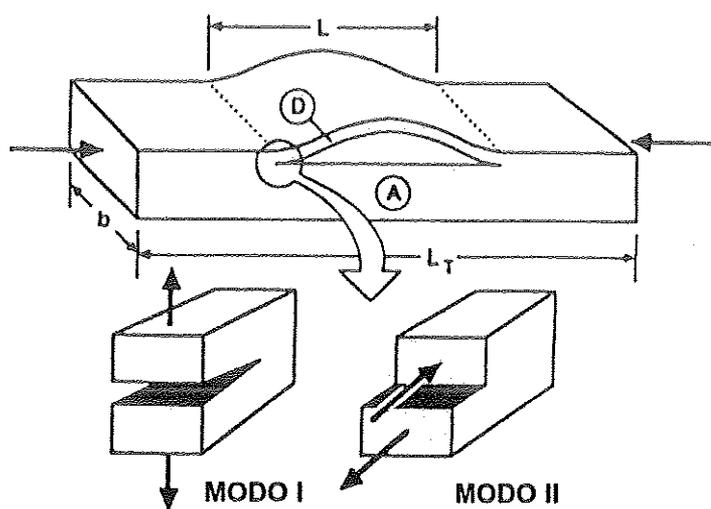


FIGURA 75 - Modos Básicos de Delaminação
ROTHSCHILDS et al. (1988)

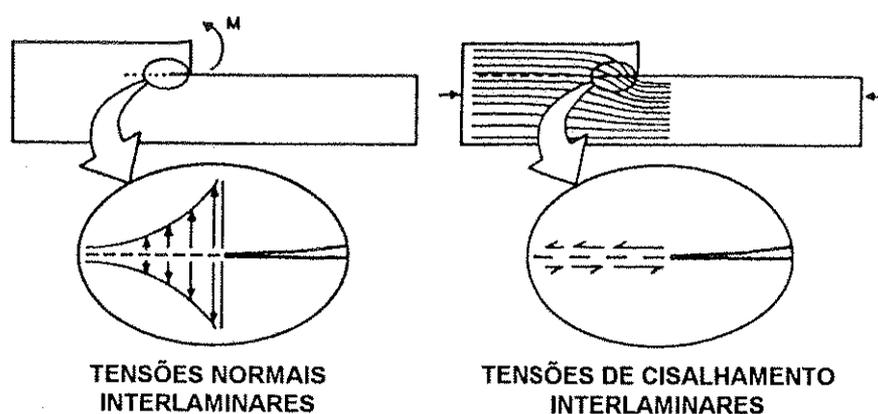


FIGURA 76 -Tensões Interlaminares Próximo à Extremidade da Fenda
ROTHSCHILDS et al. (1988)

O crescimento e a propagação da delaminação dependem do tipo de carga a que está sujeito o laminado.

6.4.3 - Critério de Delaminação

TOLSON & ZABARAS (1991) e HWANG & SUN (1989) utilizam o critério proposto por LEE (1982) para levar em conta a delaminação.

Por esse critério as tensões no centro da interface entre duas camadas são tomadas como representativas para a interface de duas lâminas adjacentes. A lâmina é modelada com comportamento elástico linear e a interface entre cada camada é considerada perfeitamente ligada até ocorrer a delaminação. Uma interface é identificada como zona danificada por delaminação se as tensões atingirem os valores:

$$\sigma_z \geq \sigma_{DN} \quad \sqrt{(\sigma_{Lz}^2 + \sigma_{Tz}^2)} \geq \sigma_{DS} \quad (44)$$

onde as componentes de tensão são as indicadas na Figura 77.

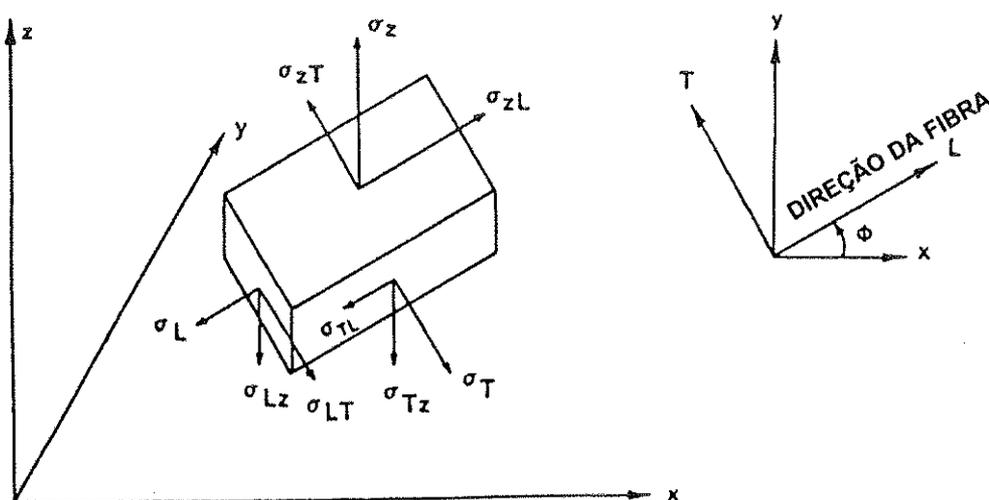


FIGURA 77 - Componentes de Tensão no Sistema de Coordenadas (L,T,z)
LEE (1982)

As tensões σ_{DS} e σ_{DN} são a resistência ao cisalhamento entre as lâminas e a resistência à tração na direção transversal às fibras, respectivamente, ambas obtidas experimentalmente.

6.4.4 - Análise Progressiva da Ruptura

A análise dos materiais compostos, devido às características já descritas, em modelos reduzidos ou de protótipos é muito mais difícil do que a análise dos materiais homogêneos e isotrópicos correntes. As técnicas de análise numérica, aliadas à crescente capacidade de memória e velocidade dos computadores tornou possível a análise de elementos estruturais, tais como os laminados reforçados por fibras longas, em detalhes. A técnica de discretização em elementos finitos vem se destacando entre as técnicas numéricas pela obtenção de resultados muito próximos àqueles do comportamento real de tais estruturas.

Como já foi visto, a ruptura de laminados compostos de fibras longas ocorre de modo progressivo devido à redistribuição de tensões que se dá durante o processo de ruptura. Isso sugere que a análise computacional de tal processo deva ser incremental, para a simulação da progressão do dano acumulado, e iterativa, para obtenção de configurações de equilíbrio durante o processo de redistribuição das tensões.

Em linhas gerais o processo de análise da ruptura progressiva de laminados em compostos de fibras longas pode ser tal como se descreve a seguir.

Para uma conhecida carga aplicada, as tensões em cada lâmina devem ser calculadas e inseridas no critério de ruptura adotado, tal como aqueles descritos, para determinar se a ruptura ocorreu em cada uma das lâminas (determinar FPF). Se a ruptura não ocorreu, novo incremento de carga pode ser dado e o processo repetido. Se ocorreu a ruptura deve-se proceder à identificação do modo de ruptura ocorrido, se da matriz, da fibra ou delaminação. Identificado o modo de ruptura é possível proceder à redução ou eliminação da rigidez correspondente ao modo de ruptura identificado de tal modo a obter nova configuração de equilíbrio com a redistribuição de tensões sem novo incremento de carga. Estabelecida nova configuração de equilíbrio determina-se se a ruptura em qualquer outro ponto de qualquer lâmina ocorreu. Se ocorreu nova ruptura o processo de penalização da rigidez e redistribuição das tensões se repete. Se a ruptura não ocorreu novo incremento de carga pode ser dado. A análise prossegue

dessa forma até que a estrutura não seja mais capaz de suportar carga adicional e, nesse instante, diz-se ter ocorrido a ruptura final da estrutura (atingiu-se LPF).

LEE (1982) sugere que, a partir da matriz de rigidez de um elemento finito já conhecida, como abaixo, seja anulada a rigidez na lâmina do elemento de acordo com o modo de ruptura identificado:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Assim, se o modo de ruptura identificado é da fibra, a matriz de rigidez do elemento é reduzida a zero:

$$D = [0] \quad (46)$$

Se o modo de ruptura identificado é da matriz, a matriz de rigidez da lâmina do elemento é reduzida a:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & D_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{13} & 0 & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

o que significa que σ_T , σ_{TZ} e σ_{LT} do elemento serão anulados.

Se o modo de ruptura identificado é de delaminação, a matriz de rigidez de cada elemento adjacente é reduzida a:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{12} \end{bmatrix} \quad (48)$$

o que significa que σ_z , σ_{tz} e σ_{zl} do elemento serão anulados.

6.5 - CRITÉRIO DE PLASTICIDADE

6.5.1 - Critério de Escoamento

Um critério largamente aplicado e que descreve adequadamente o escoamento dos materiais isotrópicos e seu comportamento plástico é o bem conhecido Critério de Von Mises. Esse critério baseia-se no fato de que as tensões hidrostáticas a que está submetido o material não provocam escoamento, indicando as tensões de desvio como as responsáveis pelo escoamento do material. Para tais materiais a expressão matemática desse critério, por exemplo apresentada em BRANCO (1985), quando os eixos coordenados são feitos coincidir como os principais, é:

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (49)$$

onde σ_{ef} é a tensão efetiva que provoca o escoamento e σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões principais nas direções 1, 2 e 3, respectivamente.

Quando os eixos coordenados não são coincidentes com os principais tem-se a equação desse critério dada por:

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (50)$$

As equações desse critério são equivalentes a considerar a energia de distorção, ou seja, a parcela da energia total específica de deformação relacionada apenas com as tensões de desvio (aquelas obtidas pelas tensões totais menos as médias em cada direção) que provocam apenas mudança de forma e não de volume, como um valor crítico para o material. Por isso tal critério é também conhecido como critério da energia de distorção.

A partir do critério acima definido HILL (1950) generalizou para os materiais anisótropos um critério de escoamento conhecido como Critério de Huber-Mises ou Lei Generalizada de Huber-Mises, tornando-se esse um critério vastamente empregado para a previsão do comportamento plástico de materiais anisótropos, como, por exemplo os compostos laminados em fibras longas. OWEN & FIGUEIRAS (1983) apresentam a Lei Generalizada de Huber-Mises como:

$$\sigma_{ef}^2 = \left[\alpha_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \alpha_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \alpha_{31}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 3\alpha_{44}\tau_{12}^2 + 3\alpha_{55}\tau_{23}^2 + 3\alpha_{66}\tau_{13}^2 \right] \quad (51)$$

onde os valores de σ e τ são as respectivas componentes de tensão, enquanto que os valores de α são chamados parâmetros de anisotropia e os subscritos 1, 2 e 3 referem-se às direções dos três eixos principais de anisotropia.

Desenvolvendo a expressão acima e particularizando para o caso de $\sigma_{33} = 0$, de particular interesse para o estudo das placas laminadas tem-se, como apresentado por HINTON & OWEN (1984):

$$\sigma_{ef}^2 = a_1\sigma_1^2 + 2a_{12}\sigma_1\sigma_2 + a_2\sigma_2^2 + a_3\tau_{12}^2 + a_4\tau_{13}^2 + a_5\tau_{23}^2 \quad (52)$$

onde $\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\sigma_2 = \sigma_{22}$, τ_{12} , τ_{13} e τ_{23} são as componentes de tensão, as constantes a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 e a_{12} são os parâmetros de anisotropia obtidos experimentalmente e dados por:

$$a_1 = \alpha_{12} + \alpha_{13} \qquad a_2 = \alpha_{12} + \alpha_{23} \qquad (53)$$

$$a_3 = 3\alpha_{44} \qquad a_4 = 3\alpha_{55} \qquad (54)$$

$$a_5 = 3\alpha_{66} \qquad a_{12} = -\alpha_{12} \qquad (55)$$

Denominando de A a matriz dos parâmetros de anisotropia tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix} \qquad (56)$$

Em forma matricial pode-se escrever:

$$\sigma_{ef}^2 = \sigma^T A \sigma \qquad (57)$$

onde:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} \qquad \sigma^T = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \tau_{12} \quad \tau_{13} \quad \tau_{23}] \qquad (58)$$

Se os eixos de anisotropia não coincidem com os de referência x , y os parâmetros de anisotropia para o novo sistema podem ser alterados de acordo com a conhecida matriz de transformação L aplicando:

$$A = L^T A L \qquad (59)$$

sendo:

$$L = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (60)$$

6.5.2 - Parâmetros de Anisotropia

Os seis parâmetros de anisotropia são determinados por seis ensaios independentes.

Para um ensaio de tração uniaxial na direção 1 tem-se:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

e, da equação (52) obtém-se:

$$a_1 = \frac{\sigma_{ef}^2}{\sigma_1^2} \quad (62)$$

onde σ_1 é a tensão de plastificação na direção 1 e σ_{ef} é a tensão uniaxial de escoamento na direção de referência. Quando se toma a própria direção 1 como referência tem-se $a_1 = 1$.

Para um ensaio de tração uniaxial na direção 2 tem-se:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

e, da equação (52) obtém-se:

$$a_2 = \frac{\sigma_{ef}^2}{\sigma_2^2} \quad (64)$$

onde σ_2 é a tensão de plastificação na direção 2 e σ_{ef} é a tensão uniaxial de escoamento na direção de referência. Quando se toma a própria direção 2 como referência tem-se $a_2 = 1$.

Analogamente os outros parâmetros de anisotropia são dados por:

$$a_3 = \frac{\sigma^2}{\tau_{12}^2} \quad (65)$$

$$a_4 = \frac{\sigma^2}{\tau_{13}^2} \quad (66)$$

$$a_5 = \frac{\sigma^2}{\tau_{23}^2} \quad (67)$$

onde τ_{12} , τ_{13} e τ_{23} são as tensões de plastificação nos respectivos planos de referência.

A obtenção de a_{12} é feita através de um ensaio de tração uniaxial no qual a direção 1 do material está inclinada de um ângulo de 45° com relação à direção da sollicitação. Nessas condições tem-se:

$$\sigma_1 = \sigma_\theta \cos^2 \theta \quad \sigma_2 = \sigma_\theta \sin^2 \theta \quad (68)$$

$$\tau_{12} = \sigma_\theta \sin \theta \cos \theta \quad \tau_{13} = \tau_{23} = 0 \quad (69)$$

onde $\theta = 45^\circ$. Da aplicação da equação (52) vem:

$$a_{12} = 2\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_{45^\circ}}\right)^2 - \frac{1}{2}(1 + a_2 + a_3) \quad (70)$$

7 - EXEMPLOS

Para ilustrar o comportamento das placas em materiais compostos são apresentados alguns exemplos processados pelo programa PLASTOSHELL descrito no Apêndice.

Os exemplos processados foram idealizados como sendo compostos de fibras de boro e matriz de epoxi, com valores de propriedades termoelásticas características sendo aqueles dados pela Tabela 02 do capítulo sobre considerações gerais, ou seja:

Boro: $E_x = E_y = 413,7 \text{ GPa}$ $G_{xy} = 172,4 \text{ GPa}$

$\nu_{xy} = 0,2$ $\alpha = 2,8 \cdot 10^{-6} / ^\circ F$

Epoxi : $E_x = E_y = 3,5 \text{ GPa}$ $G_{xy} = 1,4 \text{ GPa}$

$\nu_{xy} = 0,4$ $\alpha = 32 \cdot 10^{-6} / ^\circ F$

Frações de Volume : $\nu_f = 0,35$ $\nu_m = 0,65$

Pela aplicação das equações expostas no capítulo sobre propriedades termoelásticas obtêm-se as propriedades do composto proposto segundo as direções das fibras e perpendicularmente a elas.

Propriedades na Direção das Fibras: Usando a Regra das Misturas tem-se:

pela aplicação da equação (46), $E_1 = 147,07 \text{ GPa}$
 pela aplicação da equação (47), $\nu_{12} = 0,33$
 pela aplicação da equação (48), $\alpha_1 = 3,25 \cdot 10^{-6} / ^\circ F$

Propriedades na Direção Perpendicular às Fibras: Usando as equações propostas por VINSON & SIERAKOWSKI (1987) e HASHIN (1979) tem-se:

pela aplicação da equação (59),	$K_f = 258,56 \text{ GPa}$
pela aplicação da equação (60),	$K_m = 2,92 \text{ GPa}$
pela aplicação da equação (55),	$\eta_6 = 0,504$
pela aplicação da equação (56),	$\eta_4 = 0,587$
pela aplicação da equação (57),	$\eta_k = 0,838$
pela aplicação da equação (58),	$m = 1,01$
pela aplicação da equação (53),	$K_T = 4,76 \text{ GPa}$
pela aplicação da equação (43),	$\bar{\alpha} = 21,78 \cdot 10^{-6} / ^\circ F$
pela aplicação da equação (43),	$\left(\frac{\bar{1}}{k} \right) = 0,224$, com $v_A^* = v_{12}$, $E_A^* = E_{11}$, $K^* = K_T$
pela aplicação da equação (52),	$G_{23} = 2,66 \text{ GPa}$
pela aplicação da equação (51),	$G_{12} = 2,87 \text{ GPa}$
pela aplicação da equação (54),	$E_{22} = E_{33} = 6,80 \text{ GPa}$
pela aplicação da equação (48),	$\alpha_T^* = 29,44 \cdot 10^{-6} / ^\circ F$ ($\alpha_T^* = \alpha_2$)

7.1 - EXEMPLO 1 - CHAPA SUJEITA A CARGA CONCENTRADA E VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

A Figura 78 ilustra a chapa processada. Trata-se de uma chapa retangular biengastada sujeita a carga concentrada (P) segundo x no valor de 1 MN e variação de temperatura (ΔT) no valor de $-60^\circ F = -33,3^\circ C$. A carga (P) foi aplicada em cinco passos iguais. A chapa tem espessura de 20 cm divididos em duas camadas com fibras a 0° , ou seja, na direção de x .

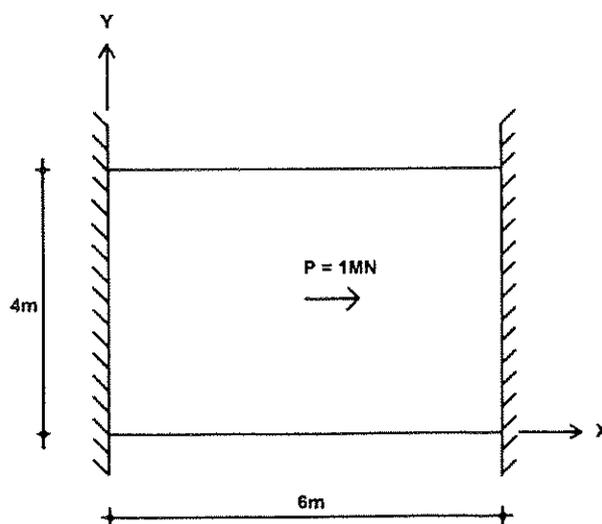


FIGURA 78 - Chapa Retangular Biengastada e Sistema de Eixos xy

A Figura 79 ilustra a discretização em elementos finitos utilizada. Foram utilizados seis elementos heterosis com a técnica da integração seletiva.

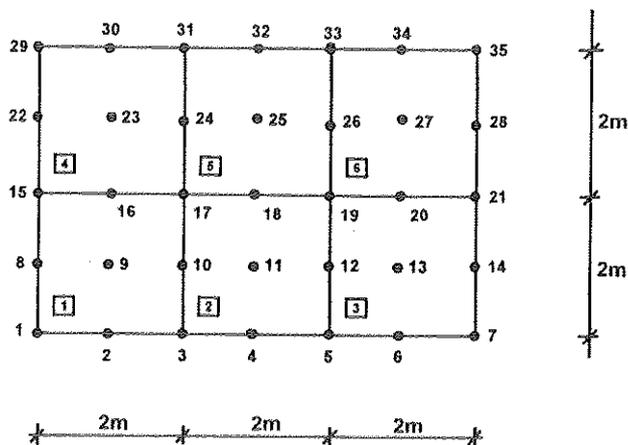
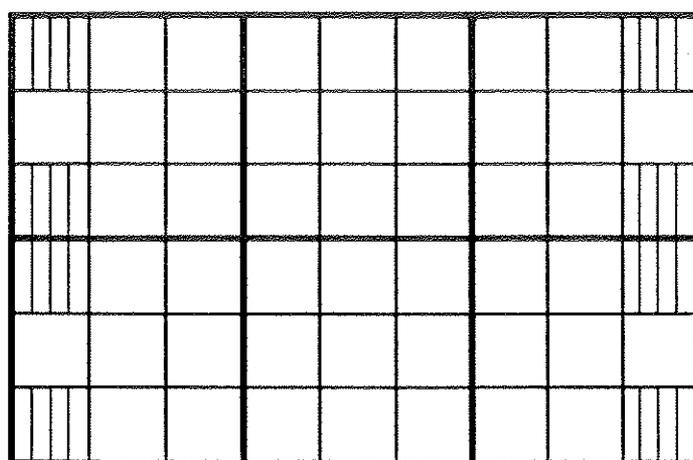


FIGURA 79 - Chapa Retangular Discretizada

As Figuras 80, 81 e 82 ilustram as regiões plastificadas quando atuam somente a carga (P), somente a variação de temperatura (ΔT) e a atuação conjunta da duas ações. Os elementos finitos estão divididos em nove partes que são as regiões de influência de cada Ponto de Gauss. Assim, se a tensão no ponto é maior que a efetiva, o ponto é considerado como plastificado.



máximas tensões:

elemento 1 Ponto de Gauss 3

elemento 4 Ponto de Gauss 1

$$\sigma_x = 0,239 \text{ MN} / \text{m}^2$$

elemento 3 Ponto de Gauss 9

elemento 6 Ponto de Gauss 7

$$\sigma_x = -0,239 \text{ MN} / \text{m}^2$$

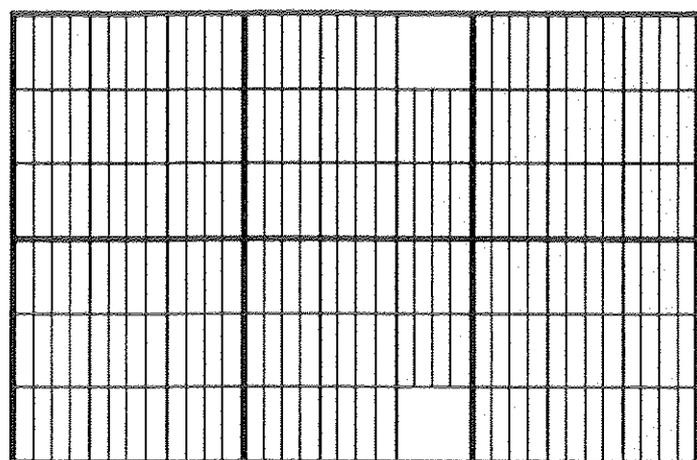


REGIÃO PLASTIFICADA

deslocamento na direção x do nó 18 = 0,062 mm

FIGURA 80 - Região Plastificada sob a Ação de (P)

Note-se a importância da temperatura, uma vez que sob sua ação a chapa fica sujeita a tensões que a plastificam quase integralmente.



deslocamento na direção x do nó 18 = 0

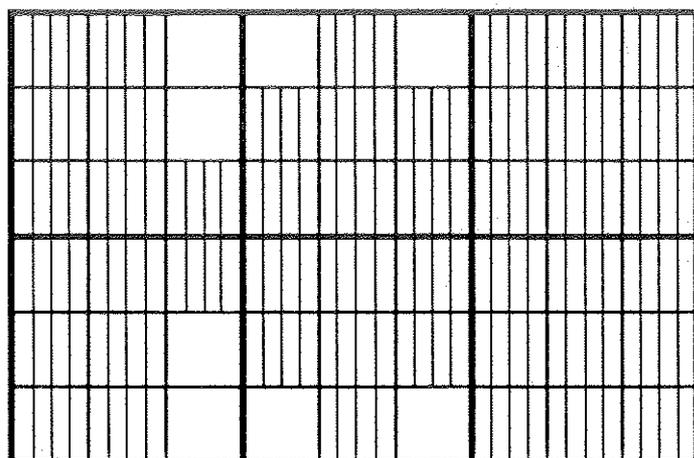
máxima tensão:
elemento 3 Ponto de Gauss 7

$$\sigma_x = 2,899 \text{ MN} / \text{m}^2$$



REGIÃO PLASTIFICADA

FIGURA 81 - Região Plastificada sob a Ação de (ΔT)



deslocamento na direção x do nó 18 = 0,061 mm

máximas tensões:
elemento 1 Ponto de Gauss 3

$$\sigma_x = 3,015 \text{ MN} / \text{m}^2$$

elemento 4 Ponto de Gauss 1

$$\sigma_x = 3,016 \text{ MN} / \text{m}^2$$



REGIÃO PLASTIFICADA

FIGURA 82 - Região Plastificada sob a Ação Conjunta de (P) e (ΔT)

7.2 - EXEMPLO 2 - PLACA QUADRADA ENGASTADA SUJEITA A CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA E VARIAÇÃO DE TEMPERATURA COM QUATRO LÂMINAS

A Figura 83 ilustra a placa processada e a discretização em elementos finitos utilizada. Foram utilizados nove elementos heterosis com a técnica da integração seletiva. Para facilitar o processamento tirou-se proveito da simetria, processando somente um quarto da placa.

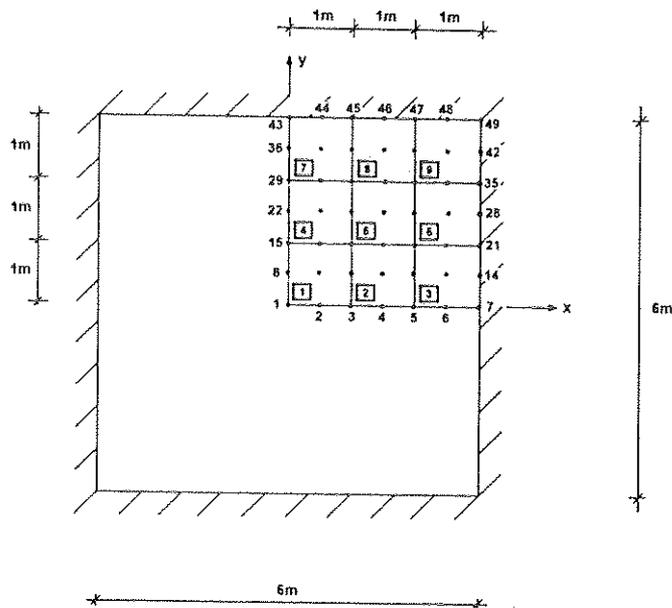


FIGURA 83 - Placa Quadrada Engastada e Sistema de Eixos xy

A Figura 84 ilustra uma perspectiva da placa.

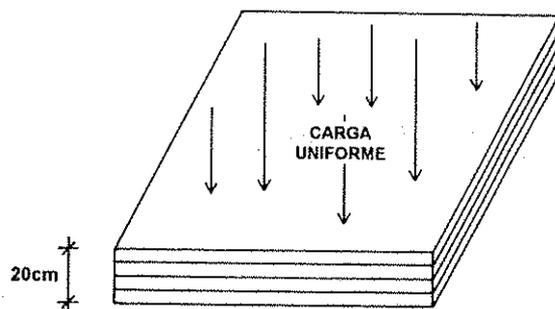


FIGURA 84 - Placa em Perspectiva com Carga Uniformemente Distribuída

Trata-se de uma placa quadrada engastada nos quatro bordos sujeita a carga uniformemente distribuída (q) perpendicular ao seu plano médio no valor de $0,25 \text{ MN/m}^2$ e variação de temperatura (ΔT) no valor de $-60^\circ\text{F} = -33,3^\circ\text{C}$. A carga (q) foi aplicada em cinco passos iguais. A placa tem espessura de 20 cm divididos em quatro camadas. Foram processados exemplos com fibras a 0° , ou seja, na direção de x , nas quatro camadas e exemplos com fibras a $0^\circ/90^\circ$ simétricos.

A Figura 85 mostra um diagrama da evolução dos deslocamentos verticais no centro da placa com a aplicação da carga (q) para os casos de fibras a 0° e $0^\circ/90^\circ$ evidenciando o fato de não haver grandes diferenças nos deslocamentos entre os dois casos. Nos casos de atuação conjunta da carga distribuída com a variação de temperatura (ΔT) os deslocamentos permanecem praticamente constantes ao longo da aplicação da carga, provocados pela introdução do grande estado de tensões iniciais introduzido pela variação de temperatura. A variação total da temperatura é dada antes de qualquer aplicação de carga.

As Figuras 86, 87, 88 e 89 ilustram as regiões plastificadas quando atua somente a carga distribuída (q) e para a atuação conjunta da carga distribuída e da variação de temperatura (ΔT), para os casos de fibras em uma única direção e fibras nas duas direções. São mostradas as regiões plastificadas ao final da atuação da respectiva ação (carga distribuída ou carga distribuída mais variação de temperatura) na região discretizada da placa (somente o quarto da placa processado, pois os outros três quartos são simétricos), ilustrando a quantidade de camadas plastificadas em cada região. Também é mostrada a evolução da plastificação através da espessura da placa ao longo do eixo x e $y=0$ para cada caso processado.

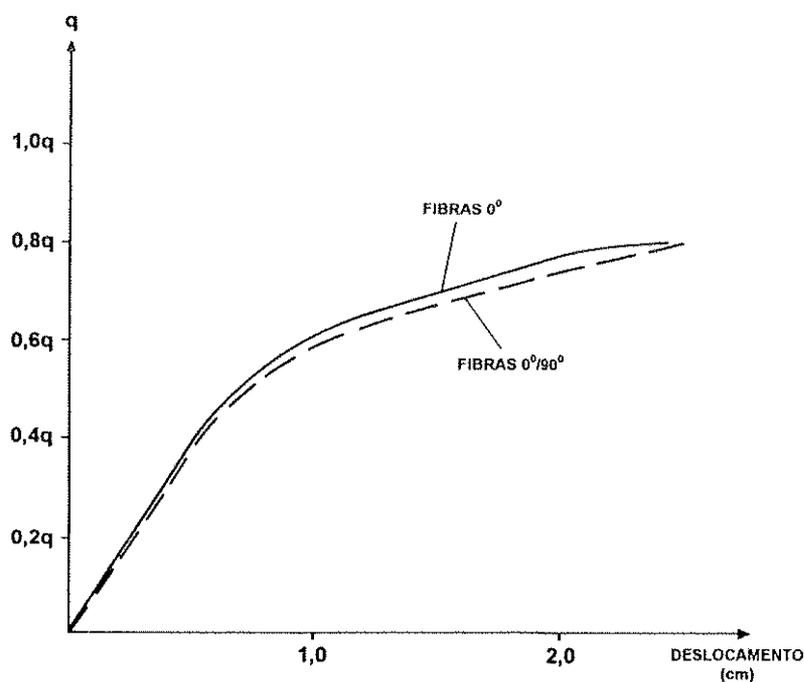


FIGURA 85 - Diagrama Carga-Deslocamento para Fibras a 0° e $0^\circ/90^\circ$.

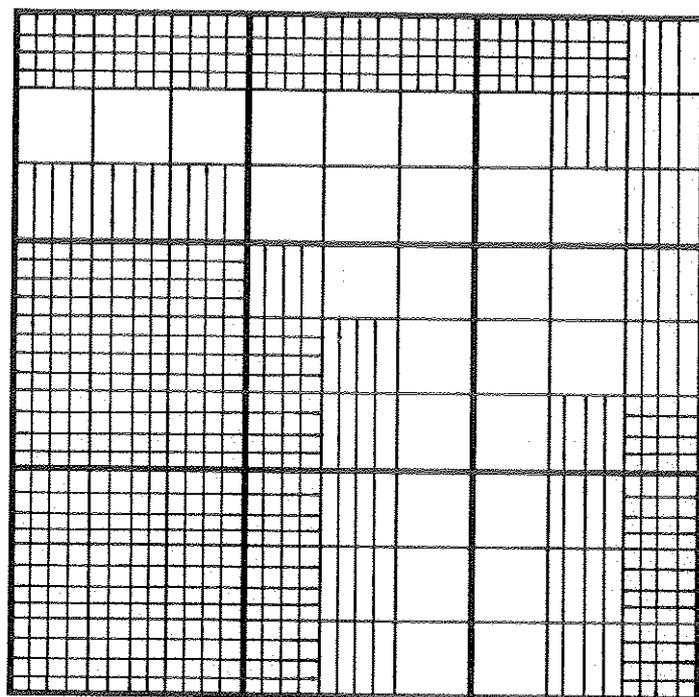
deslocamento na direção z do nó 1 = 2,437 cm

máximas tensões:

elemento 1 Ponto de Gauss 1

camada 1 $\sigma_x = -3,263 \text{ MN/m}^2$

camada 4 $\sigma_x = 3,263 \text{ MN/m}^2$



NENHUMA CAMADA PLASTIFICADA



UMA OU DUAS CAMADAS PLASTIFICADAS



TRÊS OU QUATRO CAMADAS PLASTIFICADAS

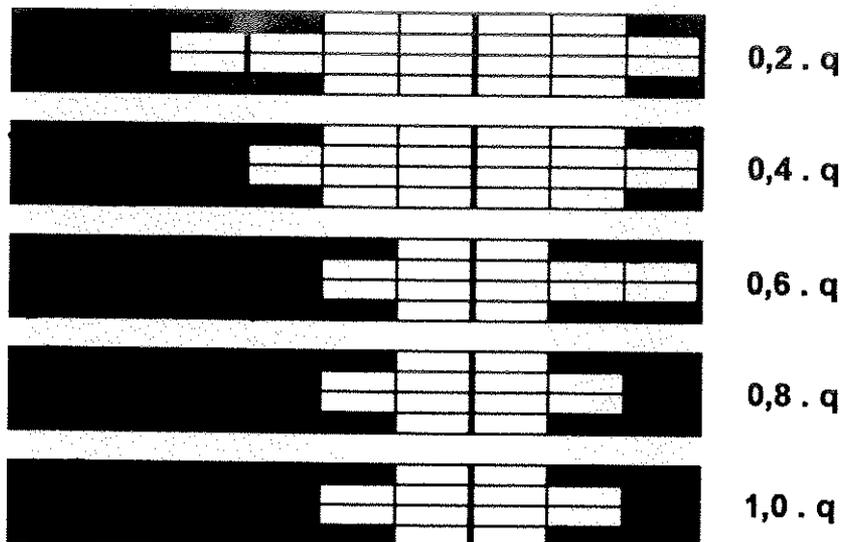


FIGURA 86 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras a 0° sob a Ação de (q)

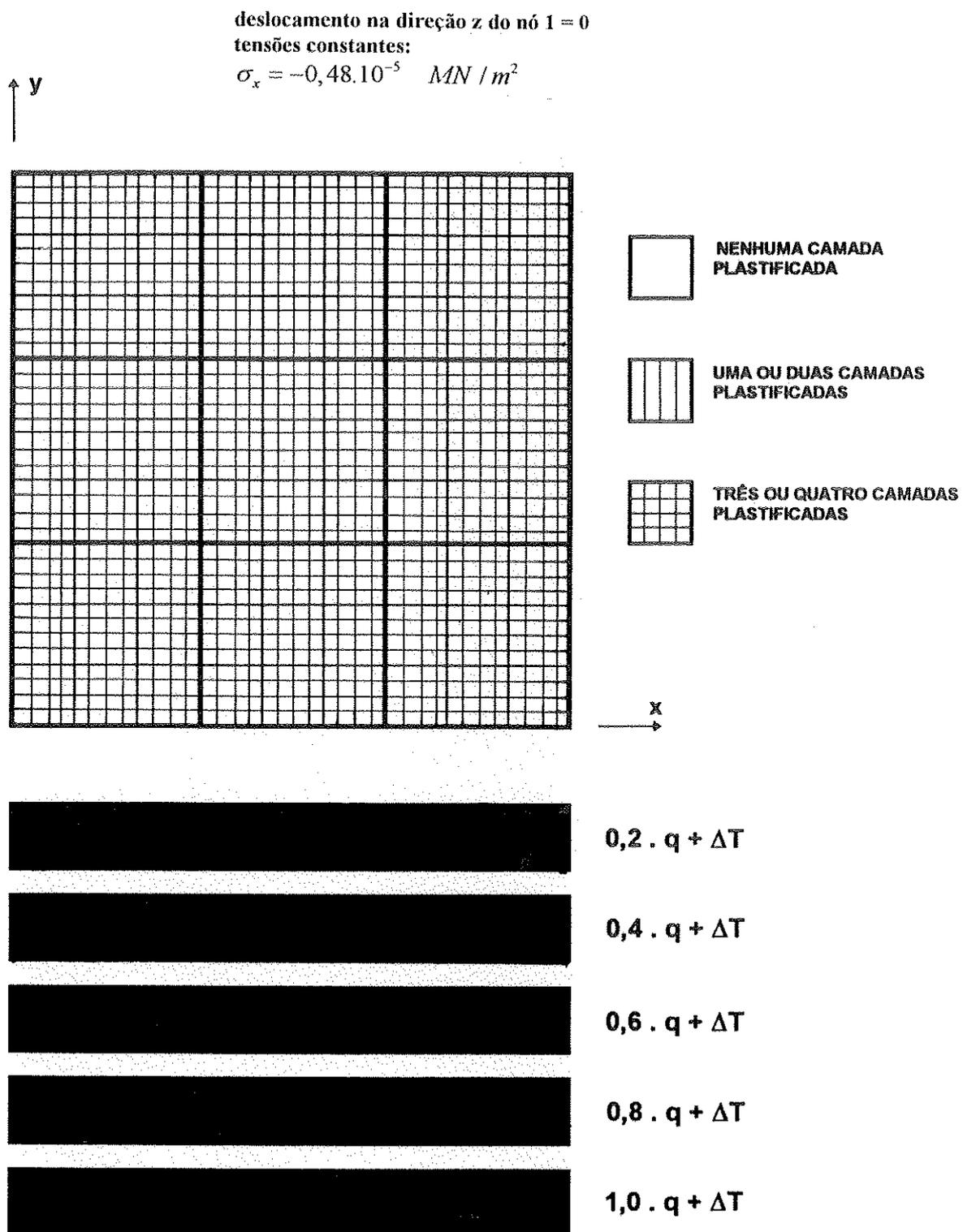


FIGURA 87 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras a 0° sob a Ação Conjunta de (q) e (ΔT)

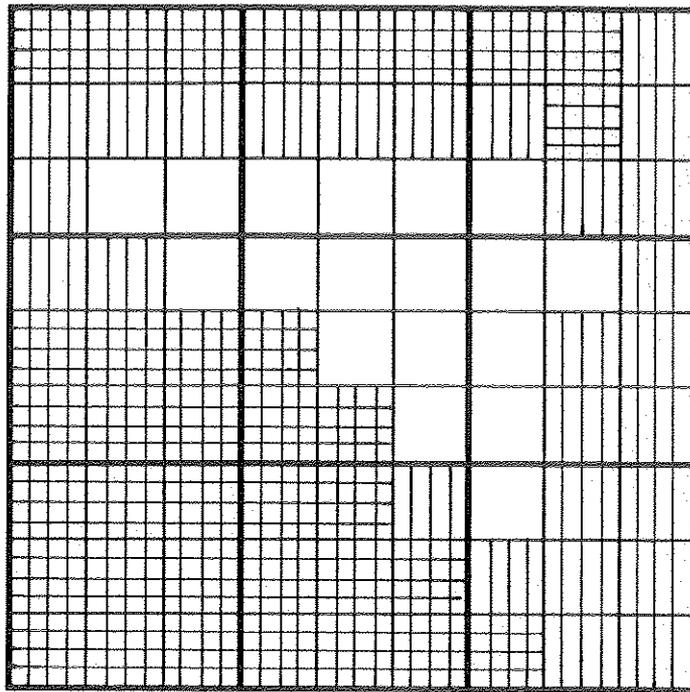
deslocamento na direção z do nó 1 = 5,136 cm
 máximas tensões:

elemento 1 Ponto de Gauss 1

camada 1 $\sigma_x = -3,512 \text{ MN/m}^2$

camada 4 $\sigma_x = 3,512 \text{ MN/m}^2$

y ↑



NENHUMA CAMADA
 PLASTIFICADA



UMA OU DUAS CAMADAS
 PLASTIFICADAS



TRÊS OU QUATRO CAMADAS
 PLASTIFICADAS

x →

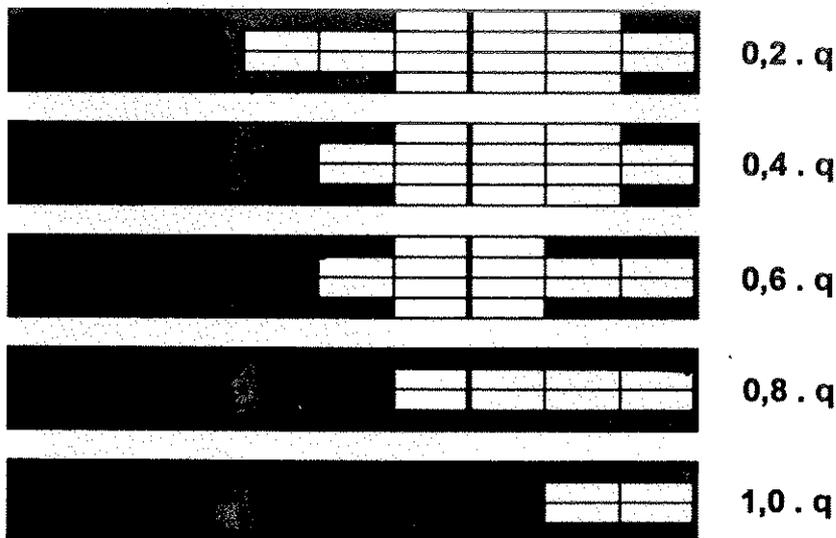
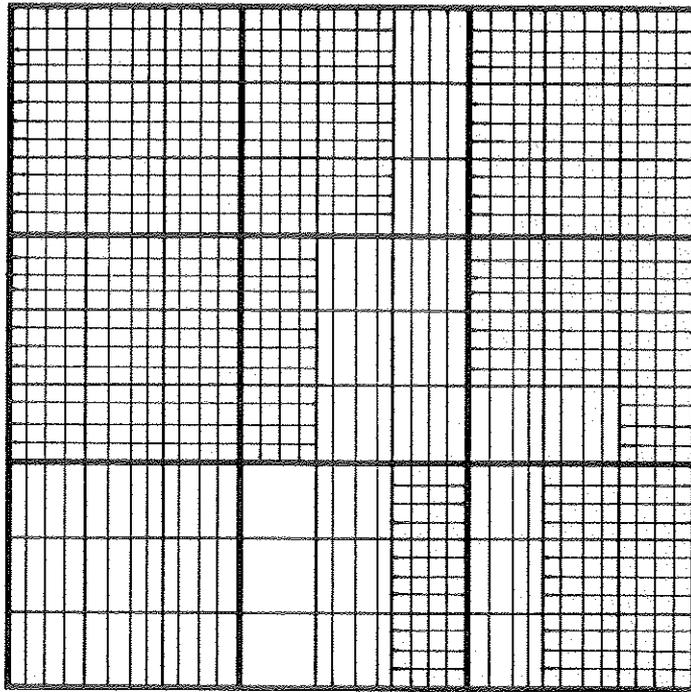


FIGURA 88 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras a $0^\circ / 90^\circ$ sob a Ação de (q)

deslocamento na direção z do nó 1 = 0
 máximas tensões:
 elemento 1 Ponto de Gauss 6
 camada 3 $\sigma_y = 0,286 \text{ MN} / \text{m}^2$

y ↑



NENHUMA CAMADA
PLASTIFICADA



UMA OU DUAS CAMADAS
PLASTIFICADAS



TRÊS OU QUATRO CAMADAS
PLASTIFICADAS

x →



$0,2 \cdot q + \Delta T$



$0,4 \cdot q + \Delta T$



$0,6 \cdot q + \Delta T$



$0,8 \cdot q + \Delta T$



$1,0 \cdot q + \Delta T$

FIGURA 89 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras a $0^\circ / 90^\circ$ sob a Ação Conjunta de (q) e (ΔT)

7.3 - EXEMPLO 3 - PLACA QUADRADA ENGASTADA SUJEITA A CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA E VARIAÇÃO DE TEMPERATURA COM SEIS LÂMINAS

A Figura 90 ilustra a placa processada e a discretização em elementos finitos utilizada. Foram utilizados nove elementos heterosis com a técnica da integração seletiva. Para facilitar o processamento tirou-se proveito da simetria, processando somente um quarto da placa.

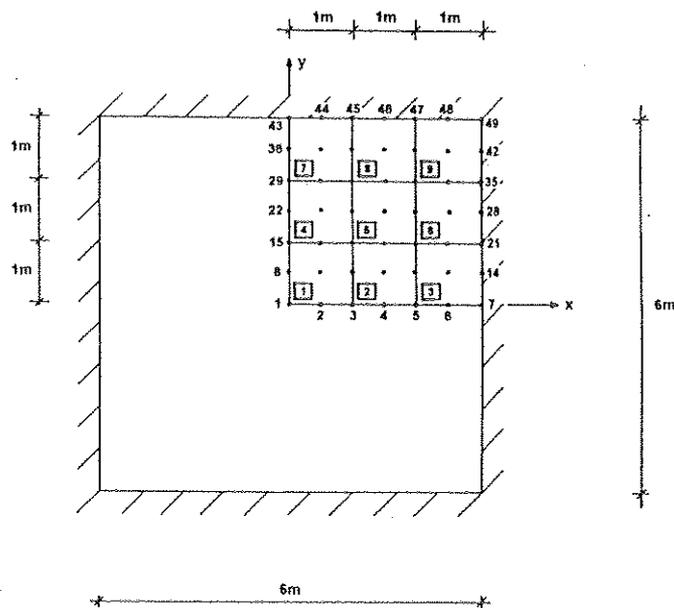


FIGURA 90 - Placa Quadrada Engastada e Sistema de Eixos xy

A Figura 91 ilustra uma perspectiva da placa.

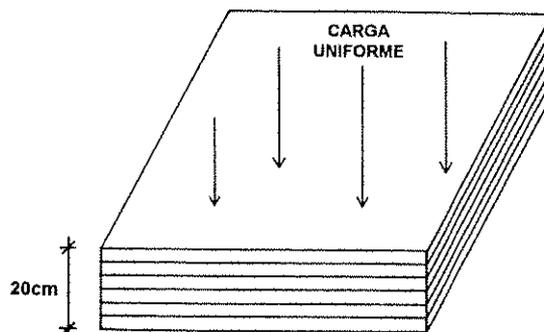


FIGURA 91 - Placa em Perspectiva com Carga Uniformemente Distribuída

Trata-se de uma placa quadrada engastada nos quatro bordos sujeita a carga uniformemente distribuída (q) perpendicular ao seu plano médio no valor de $0,25 \text{ MN} / \text{m}^2$ e variação de temperatura (ΔT) no valor de $-60^\circ \text{F} = -33,3^\circ \text{C}$. A carga (q) foi aplicada em cinco passos iguais. A placa tem espessura de 20 cm divididos em seis camadas. Foram processados exemplos com fibras a $0^\circ / 45^\circ / 90^\circ$ simétricos e antissimétricos.

A Figura 92 mostra um diagrama da evolução dos deslocamentos verticais no centro da placa com a aplicação da carga (q) para os casos de fibras simétricas e antissimétricas evidenciando o fato de não haver grandes diferenças nos deslocamentos entre os dois casos. Nos casos de atuação conjunta da carga distribuída com a variação de temperatura (ΔT) os deslocamentos permanecem praticamente constantes ao longo da aplicação da carga, provocados pela introdução do grande estado de tensões iniciais introduzido pela variação de temperatura. A variação total da temperatura é dada antes de qualquer aplicação de carga.

As Figuras 93, 94, 95 e 96 ilustram as regiões plastificadas quando atua somente a carga distribuída (q) e para a atuação conjunta da carga distribuída e da variação de temperatura (ΔT), para os casos de fibras simétricas e antissimétricas. São mostradas as regiões plastificadas ao final da atuação da respectiva ação (carga distribuída ou carga distribuída mais variação de temperatura) na região discretizada da placa (somente o quarto da placa processado, pois os outros três quartos são simétricos), ilustrando a quantidade de camadas plastificadas em cada região. Também é mostrada a evolução da plastificação através a espessura da placa ao longo do eixo x e $y=0$ para cada caso processado.

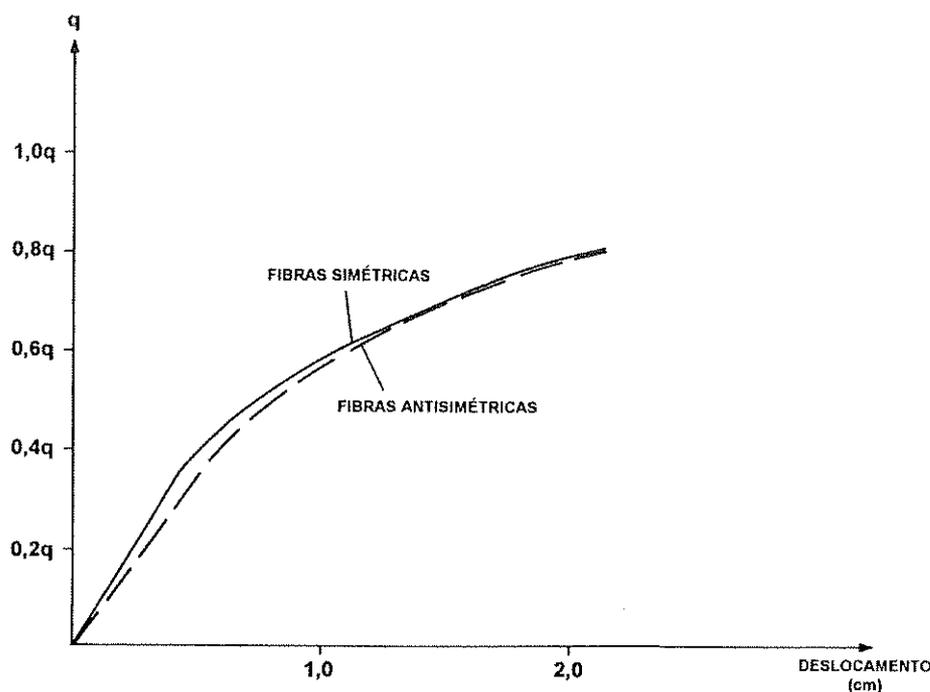


FIGURA 92 - Diagrama Carga-Deslocamento para Fibras Simétricas e Antissimétricas

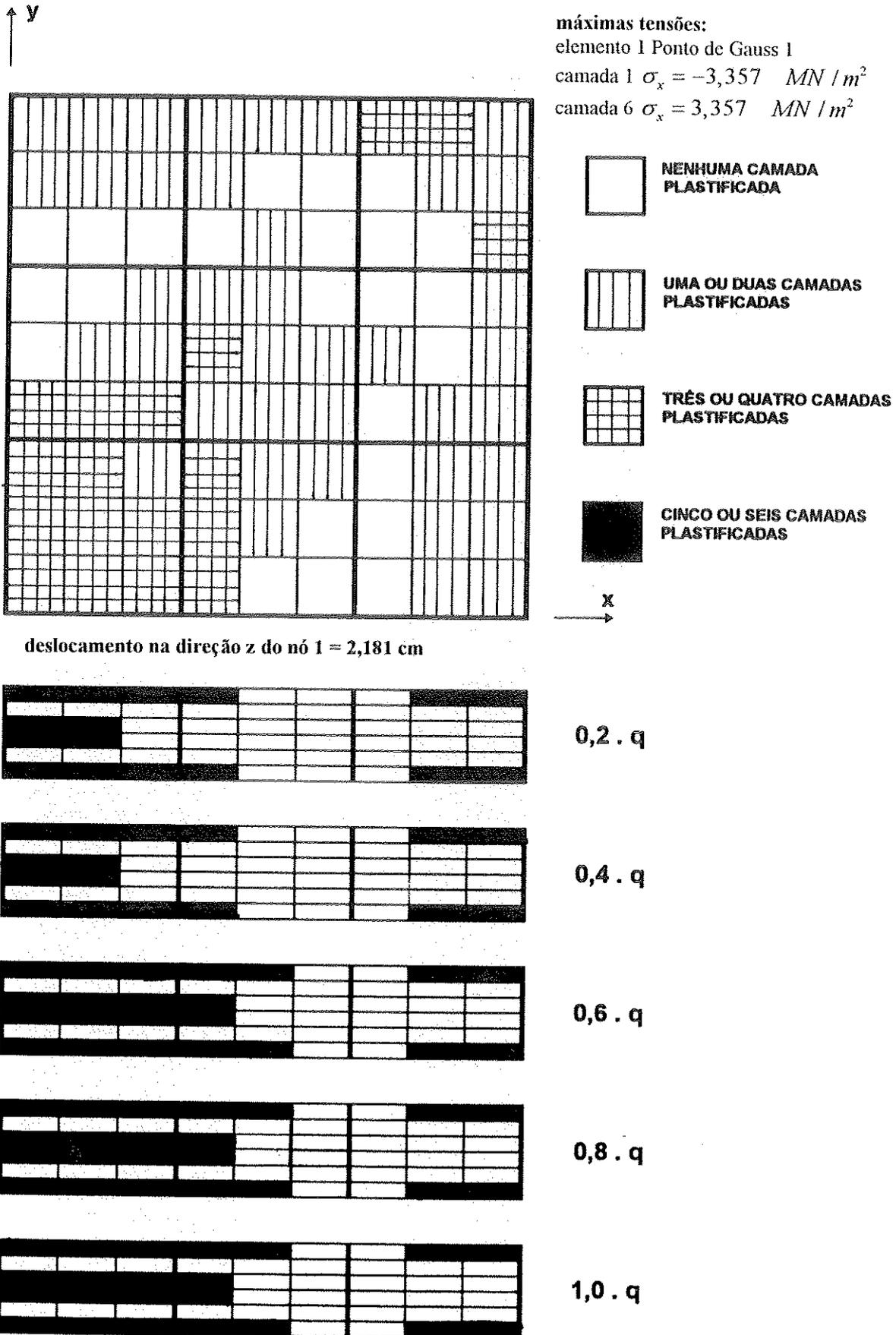
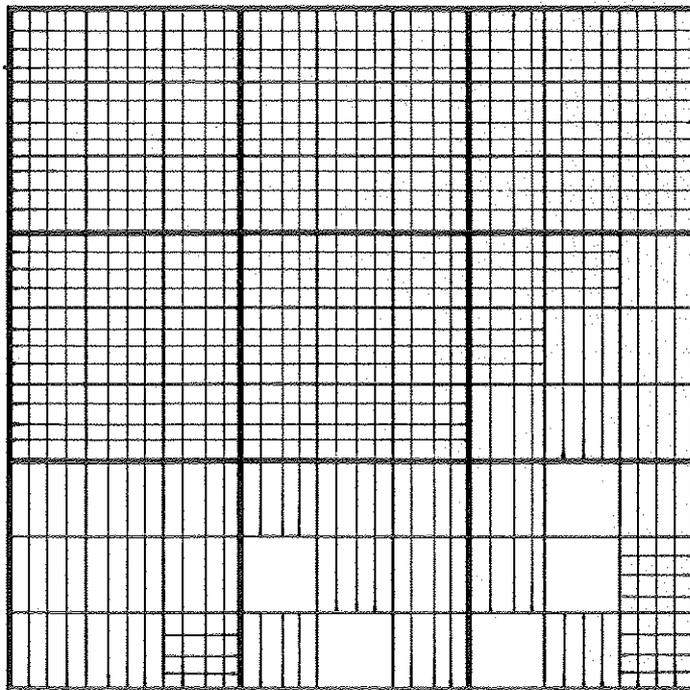


FIGURA 93 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras Simétricas sob a Ação de (*q*)

y



deslocamento na direção z do nó 1 = 0

máximas tensões:
 elemento 1 Ponto de Gauss 7
 camada 6 $\sigma_y = 0,299 \text{ MN/m}^2$



NENHUMA CAMADA
 PLASTIFICADA



UMA OU DUAS CAMADAS
 PLASTIFICADAS



TRÊS OU QUATRO CAMADAS
 PLASTIFICADAS



CINCO OU SEIS CAMADAS
 PLASTIFICADAS

x

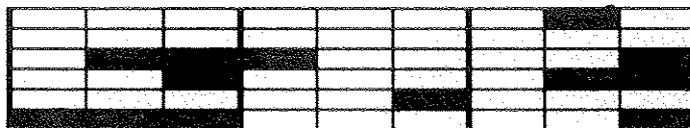
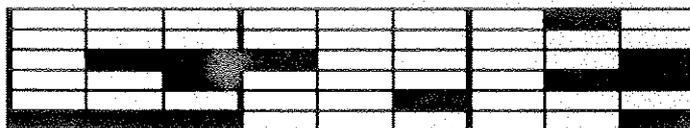
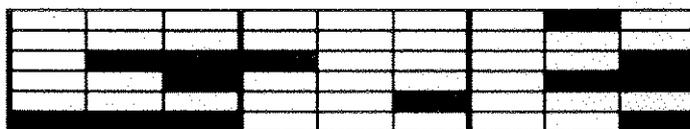
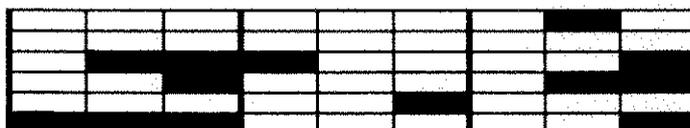
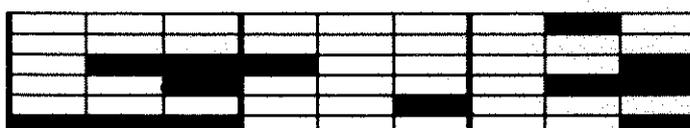
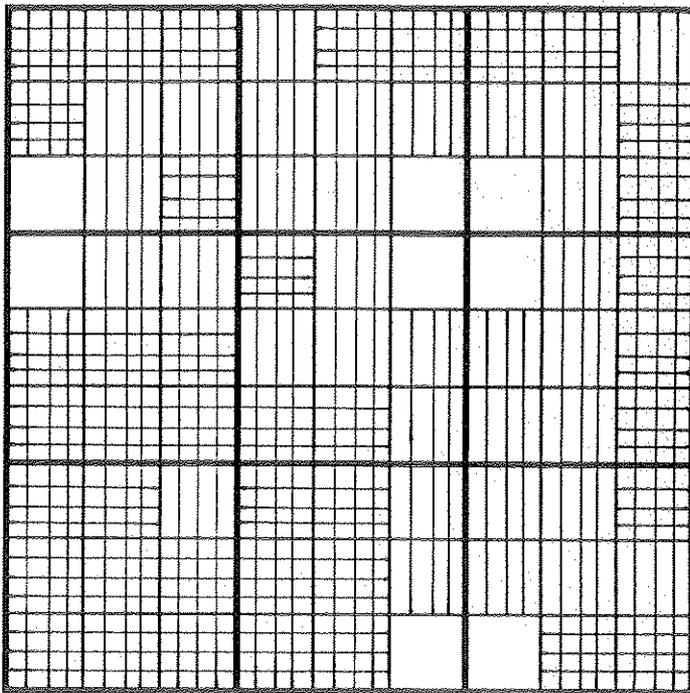

 $0,2 \cdot q + \Delta T$

 $0,4 \cdot q + \Delta T$

 $0,6 \cdot q + \Delta T$

 $0,8 \cdot q + \Delta T$

 $1,0 \cdot q + \Delta T$

FIGURA 94 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras Simétricas sob a Ação Conjunta de (q) e (ΔT)

y ↑



máximas tensões:
 elemento 1 Ponto de Gauss 1
 camada 1 $\sigma_x = -3,359 \text{ MN/m}^2$
 camada 6 $\sigma_y = 3,359 \text{ MN/m}^2$



NENHUMA CAMADA PLASTIFICADA



UMA OU DUAS CAMADAS PLASTIFICADAS



TRÊS OU QUATRO CAMADAS PLASTIFICADAS



CINCO OU SEIS CAMADAS PLASTIFICADAS

x →

deslocamento na direção z do nó 1 = 2,091 cm



0,2 . q



0,4 . q



0,6 . q



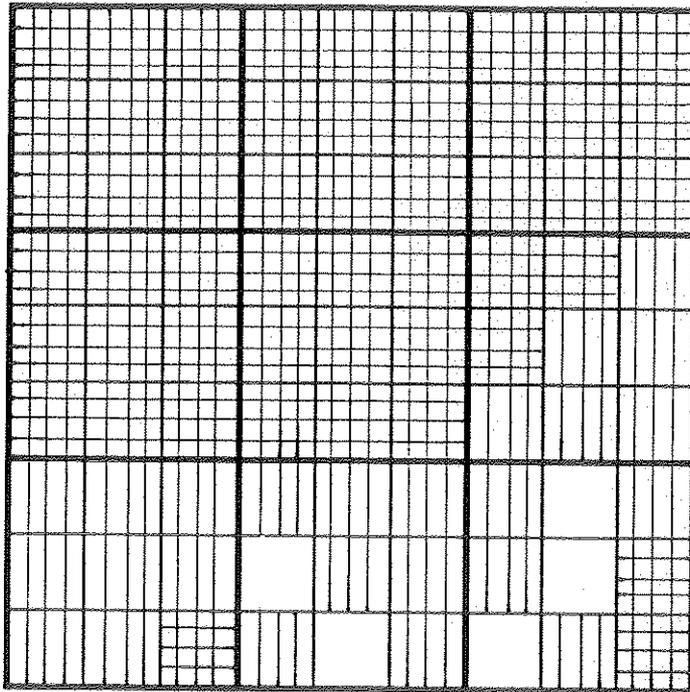
0,8 . q



1,0 . q

FIGURA 95 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras Antissimétricas sob a Ação de (q)

y ↑



máximas tensões:
 elemento 1 Ponto de Gauss 7
 camada 6 $\sigma_y = 0,299 \text{ MN} / \text{m}^2$

-  NENHUMA CAMADA PLASTIFICADAS
-  UMA OU DUAS CAMADAS PLASTIFICADAS
-  TRÊS OU QUATRO CAMADAS PLASTIFICADAS
-  CINCO OU SEIS CAMADAS PLASTIFICADAS

x →

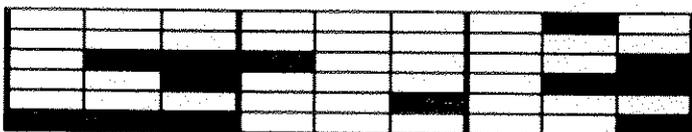
deslocamento na direção z do nó 1 = 0



$0,2 \cdot q + \Delta T$



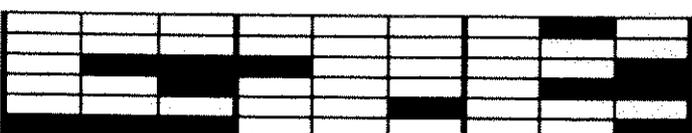
$0,4 \cdot q + \Delta T$



$0,6 \cdot q + \Delta T$



$0,8 \cdot q + \Delta T$



$1,0 \cdot q + \Delta T$

FIGURA 96 - Regiões e Camadas Plastificadas da Placa com Fibras Antissimétricas sob a Ação Conjunta de (q) e (ΔT)

8 - CONCLUSÕES

O objetivo geral desse trabalho, de elaborar um texto introdutório no campo das placas laminadas em compostos de fibras longas, foi atingido. O texto apresentado é abrangente, dando uma visão geral dos principais aspectos que envolvem essa nova classe de materiais em desenvolvimento.

Apresentou-se a definição mais apropriada para os materiais compostos de fibras longas, bem como algumas propriedades dos materiais que são utilizados na sua confecção, evidenciando-se, a partir dessas propriedades individuais, o enorme potencial das placas compostas de fibras e matriz, uma vez que tais materiais possuem grande rigidez com baixo peso quando comparados aos materiais de uso corrente mais eficientes. Ficou também evidente que as desvantagens relacionadas aos compostos estão ligadas aos custos.

Mostrou-se, no que se refere ao comportamento mecânico dos compostos em fibras longas, a importância da análise micromecânica e sua relação com a análise macromecânica, que é a análise mais apropriada para a engenharia. A teoria da anisotropia elástica foi desenvolvida, partindo-se do caso geral de anisotropia para o particular de isotropia completa do material, passando-se pela ortotropia e pela isotropia transversal. Particularizações foram feitas para o caso de chapas sujeitas à tração ou compressão com fibras não coincidentes e coincidentes com as direções de atuação das tensões, mostrando que para o primeiro caso as direções principais de tensão e deformação coincidem ambas com os eixos de ortotropia, o que não ocorre no segundo caso.

No tocante à determinação das propriedades termoelásticas dos compostos em fibras longas discorreu-se sobre cinco métodos utilizados, apresentando-se alguns resultados e expressões obtidos e publicados por pesquisadores em artigos de revistas. A ênfase foi dada à Regra das Misturas, um método mais simples de obtenção de tais propriedades baseado na ponderação das propriedades de fibra e matriz pelas respectivas frações de volume. Tal método é aplicável com boa precisão às propriedades longitudinais.

Também classificaram-se os laminados de acordo com sua sequência de empilhamento e desenvolveu-se a teoria dos laminados quando sujeitos à flexão, incluindo-se aí os efeitos da variação de temperatura. Conclusões foram tiradas quanto ao acoplamento das quantidades estáticas e cinemáticas para o caso geral e particularizadas para os casos em que tais acoplamentos podem deixar de existir. No caso geral todas essas quantidades estarão relacionadas e no caso particular dos laminados balanceados com camadas com fibras em zero e noventa graus tal acoplamento desaparecerá.

A resistência dos laminados também foi analisada. Foram apresentados os modos básicos de ruptura da fibra, da matriz e da interface entre ambas, bem como alguns critérios de ruptura mais utilizados para a análise da resistência dos compostos em fibras longas. Um exemplo de um caso de solitação plana segundo uma direção qualquer em relação à das fibras foi analisado segundo critérios da máxima tensão e de Tsai-Hill, indicando predominância da ruptura devida às tensões normais na direção longitudinal para ângulos pequenos de inclinação das fibras, predominância da ruptura devida às tensões normais transversalmente às fibras para ângulos grandes de inclinação das fibras e predominância da ruptura devida às tensões tangenciais para ângulos intermediários.

A análise dos exemplos processados pelo programa Plastoshell indicou a real importância da variação da temperatura em tais estruturas, bem como ilustrou a distribuição de tensões em placas e chapas, como havia sido proposto como objetivo desse trabalho. A subrotina para análise da variação de temperatura implementada mostrou-se eficiente e importante no contexto geral dessa dissertação.

Trabalhos futuros relativos ao tema poderão incluir a implementação de nova subrotina no programa Plastoshell, agora para análise da ruptura com base em um ou mais dos critérios propostos aqui. Também poderão ser realizados estudos teóricos e experimentais mais aprofundados com relação aos métodos de determinação das propriedades termoelásticas, mais abrangentes ou mais específicos em relação a cada método, bem como para os critérios de ruptura aqui expostos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABOLIN'SH, D.S. Compliance Tensor for an Elastic Material Reinforced in One Direction. *Mekhanika Polimerov*, v.1, n.4, p.52-59, 1965.
- ADAMS, D.F. ; DONER, D.R. Longitudinal Shear Loading of a Unidirectional Composite. *Journal of Composite Materials*, v.1, p.4-17, 1967.
- ADAMS, D.F. ; DONER, D.R. Transverse Normal Loading of a Unidirectional Composite. *Journal of Composite Materials*, v.1, p.152-164, 1967.
- AGARWAL, B.D.; BROUTMAN, L.J. *Analysis and Performance of Fiber Composites*. John Wiley and Sons, Inc., 1990.
- BRANCO, C.A.G. de M. *Mecânica dos Materiais*. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 1985.
- FOSTER, J.M. ; SMITH, C.B. ; VACHON, R.I. On Predicting Thermal Conductivity of a Binary Mixture of Solids. *Journal of Spacecraft and Rockets*, v.3, n.2, p.287-288, 1966.
- HAHN, H.T. Simplified Formulas for Elastic Moduli of Unidirectional Continuous Fiber Composites. *Composites Technology Review*, Fall 1980.
- HASHIN, Z. ; ROSEN, B.W. The Elastic Moduli of Fiber Reinforced Materials. *Journal of Applied Mechanics*, v.31, p.223-232, 1964.
- HASHIN, Z. On Elastic Behavior of Fiber-Reinforced Materials of Arbitrary Transverse Phase Geometry. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, v.13, p.119-134, 1965.
- HASHIN, Z. Analysis of Properties of Fiber Composites with Anisotropic Constituents. *Journal of Applied Mechanics*, v.46, p.543-550, 1979.
- HASHIN, Z. Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. *Journal of Applied Mechanics*, v.47, p.329-334, 1980.
- HAUG, E.A.R., ; DOWLATYARI, P. Delamination Criterion Identification for Multilayered Composite Laminates. p.336-355, 1991.
- HILL, R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. London, Oxford University Press, 1950.

HILL, R. Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials - III. Self-Consistent Model. *Journal of Composite Materials*, v.13, p.189-198, 1965.

HINTON, E.; OWEN, D.R.J. *Finite Element Software for Plates and Shells*. Swansea, Pineridge Press, 1984.

HOFFMAN, O. The Brittle Strength of Orthotropic Materials. *Journal of Composite Materials*, v.1, p.200-206, 1967.

HOLLAWAY, L. *Polymer Composites for Civil and Structural Engineering*. Chapman & Hall, 1993.

HOLLMANN, M. *Composite Aircraft Design*. Cupertino, U.S.A., 1986.

HWANG, W.C. ; SUN, C.T. Failure Analysis of Laminated Composites by Using Iterative Three-Dimensional Finite Element Method. *Computers and Structures*, v.33, n.1, p.41-47, 1989.

INTERNATIONAL CONFERENCE ON CARBON FIBRE APPLICATIONS, São José dos Campos. *Carbon Fibres and their Composites*. Edited by Erich Fitzer, 1983.

LECTURES DELIVERED AT THE INSTITUTION OF METALLURGISTS REFRESHER COURSE .*Composite Materials*. London, Iliffe Books Ltd, 1965.

LEE, J.D. Three-Dimensional Finite Element Analysis of Damage Accumulation in Composite Laminate. *Computers and Structures*, v.15, n.3, p.335-350, 1982.

LEKHNITSKII, S.G. *Theory of an Anisotropic Body*. Holden-Day, San Francisco, 1963.

MACHADO Jr., E.F. (1991). *Casas Populares Pré-Moldadas em Argamassa Armada : Procura de Uma Solução Econômica e Confortável*. São Carlos. Tese (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

MALVERN, L.E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Inc., 1969.

MANO, E.B. *Polímeros como Materiais de Engenharia*. São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda, 1991.

McCULLOUGH, R.L. *Concepts of Fiber-Resin Composites*. New York, Marcel Dekker, Inc., 1971.

MULLIN, J. ; BERRY, J.M. ; GATTI, A. Some Fundamental Mechanisms Applicable to Advanced Filament Reinforced Composites. *Journal of Composite Materials*, v.2, n.1, p.82-103, 1968.

NOOR, A.K. Mechanics of Anisotropic Plates and Shells - A New Look at an Old Subject. *Computers and Structures*, v.44, n.3, p.499-514, 1992.

OWEN, D.R.J.; FIGUEIRAS, J.A. Elasto-Plastic Analysis of Anisotropic Plates and Shells by Semilof Element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.19, p.521-539, 1983.

PROLA, L.C. (1987). *Comportamento de Pós-flambagem de Placas Laminadas de Materiais Compostos Dispostos Simetricamente*. Porto Alegre. Dissertação (mestrado) -Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

REDDY, J.N. ; PANDEY, A.K. A First-Play Failure Analysis of Composite Laminates. *Computers and Structures*, v.25, n.3, p.371-393, 1987.

ROSEN, B.W. Mechanics of Composite Strengthening. *Fiber Composite Materials*, American Society for Metals, Ohio, 1965.

ROTSCHILDS, R.J. ; GILLESPIE, R.J. ; CARLSSON, L.A. Instability-Related Delamination Growth in Thermoset and Thermoplastic Composites. *Composite Materials : Testing and Design (Eighth Conference)*, 1988.

SHAFFER, B.W. Stress-Strain Relations of Reinforced Plastics Parallel and Normal to their Internal Filaments. *AIAA Journal*, v.2, n.2, p.348-352, 1964.

SPRINGER, G.S. ; TSAI, S.W. Thermal Conductivities of Unidirectional Materials. *Journal of Composite Materials*, v.1, p.166-173, 1967.

TOLSON, S. ; ZABARAS, N. Finite Element Analysis of Progressive Failure in Laminated Composite Plates. *Computers and Structures*, v.38, n.3, p.361-376, 1991.

TSAI, S.W. ; WU, E.M. A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. *Journal of Composite Materials*, v.5, p.58-80, 1971.

VAN VLACK, L.H. *Princípios de Ciência dos Materiais*. São Paulo, Editora Edgard Blücler Ltda, 1970.

VINSON, J.R.; SIERAKOVSKI, R.L. *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*. Dordrecht, Martinus Nijhoff Publishers, 1987.

WHITNEY, J.M. ; RILEY, M.B. Elastic Properties of Fiber Reinforced Composite Materials. *AIAA Journal*, v.4, n.9, p.1537-1542, 1966.

WHITNEY, J.M. Elastic Moduli of Unidirectional Composites with Anisotropic Filaments. *Journal of Composite Materials*, v.1, p.188-193, 1967.

APÊNDICE

PROGRAMA PARA ANÁLISE DE PLACAS LAMINADAS ANISÓTROPAS EM LINGUAGEM FORTRAN PLASTOSHELL

INTRODUÇÃO

O programa utilizado para a análise de placas laminadas está disponível em bibliografia. HINTON & OWEN (1984) apresentam o programa chamado PLASTOSHELL para a análise elasto-plástica de placas e cascas laminadas anisótropas, escrito em linguagem FORTRAN, que utiliza o método dos elementos finitos com elementos quadráticos isoparamétricos e técnicas de integração numérica por pontos de Gauss. É assumido um modelo estratificado em que cada elemento finito é composto por camadas. As componentes de tensão computadas nos pontos de Gauss são admitidas como constantes através da espessura de cada camada, sendo que os esforços solicitantes resultantes são obtidos por integração ao longo da altura do laminado. Para as tensões de cisalhamento é feita uma correção. Para simular a plasticidade anisótropa é utilizado o critério de escoamento de Huber-Mises em que as componentes de tensão são modificadas pela introdução de parâmetros anisotrópicos. A regra de fluência do tipo associada, em que o potencial plástico tem a mesma expressão da função de escoamento anisótropa, é usada para definir a relação constitutiva incremental elasto-plástica. Para o procedimento iterativo de solução numérica pode-se adotar a atualização ou não da rigidez inicial, dependendo da escolha do usuário.

ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS DEGENERADOS

Elementos e Hipóteses

Baseado em um elemento tridimensional sólido com um campo quadrático de deslocamentos, como o mostrado na Figura 97, é utilizado um elemento degenerado quadrático correspondente como o da Figura 98. Duas hipóteses básicas são feitas: a primeira é a de que as normais à superfície média da

placa permanecem retas após a deformação, ou seja, as seções planas permanecem planas após a deformação; a segunda é a de que a componente de tensão normal à superfície média é nula.

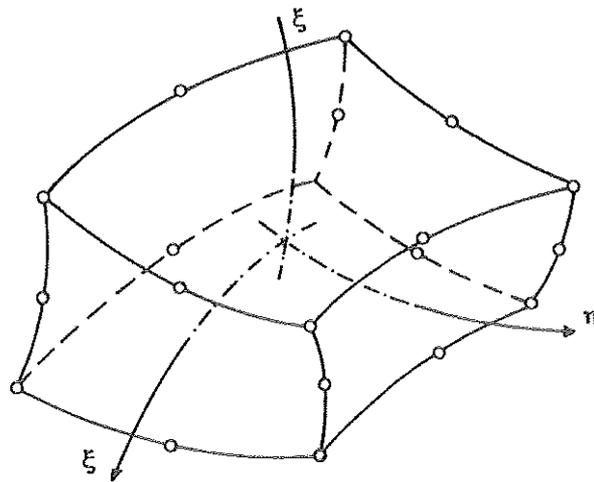


FIGURA 97 - Elemento Quadrático Sólido Tridimensional
HINTON & OWEN (1984)

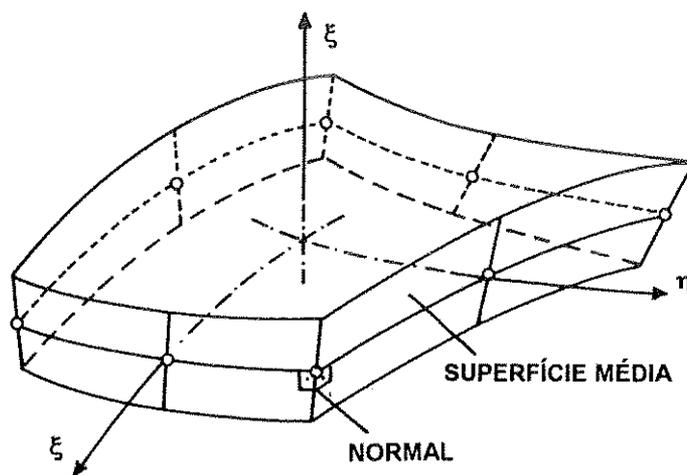


FIGURA 98 - Elemento Degenerado Correspondente
HINTON & OWEN (1984)

Campo de Deslocamentos

Cinco graus de liberdade são especificados em cada ponto nodal, correspondendo a três deslocamentos e duas rotações da normal ao nó. A definição dos graus de liberdade de deslocamentos e rotações independentes permite levar em conta a deformação por cisalhamento transversal, pois as rotações não estão vinculadas à inclinação da superfície média. Essa abordagem do campo de deslocamentos é equivalente à teoria geral de cascas e reduz-se às hipóteses de Reissner e Mindlin quando aplicadas a placas.

A Figura 99 ilustra os deslocamentos e rotações de um ponto nodal K genérico.

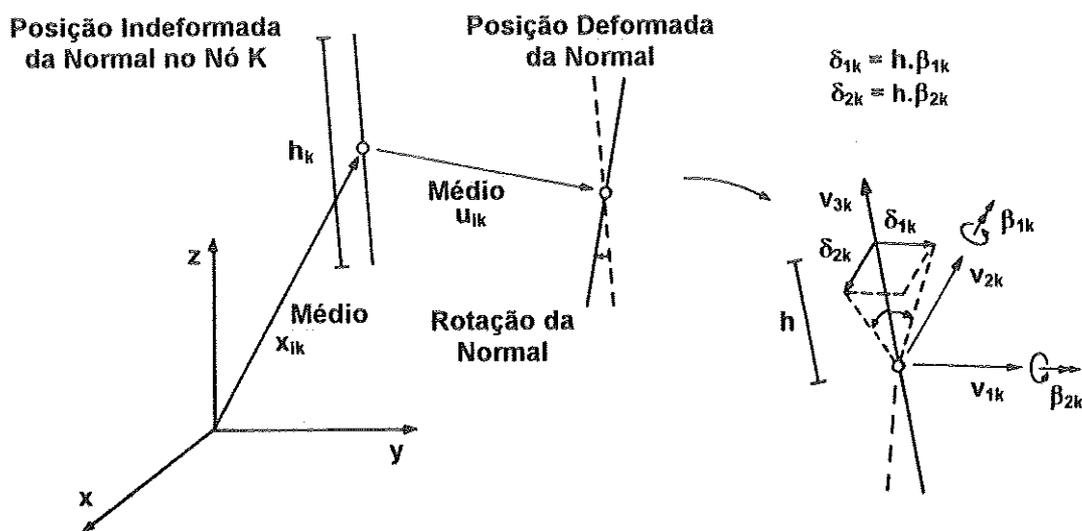
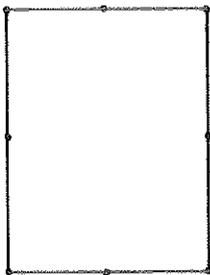


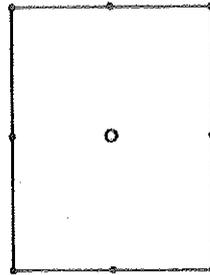
FIGURA 99 - Deslocamentos e Rotações de Um Ponto K Genérico
HINTON & OWEN (1984)

São utilizados, a partir daí, três elementos quadráticos isoparamétricos, o serendipito de oito nós, o lagrangeano de nove nós e o heterosis, como ilustra a Figura 100.

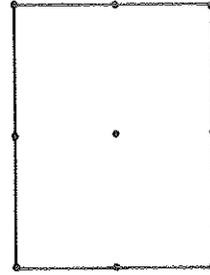
8 - N SERENDIPITO



HETEROSIS



9 - N LAGRANGEANO



- Nó com $u, v, w, \beta_1, \beta_2$, graus de liberdade
- Nó com β_1, β_2 , graus de liberdade

FIGURA 100 - Configuração Nodal dos Três Elementos Quadráticos
HINTON & OWEN (1984)

Deformações

As componentes de deformação são, então, tomadas como:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy'} \\ \gamma_{xz'} \\ \gamma_{yz'} \end{bmatrix} \quad (1)$$

sendo:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v'}{\partial y'} \quad (2)$$

$$\gamma_{xy'} = \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \quad \gamma_{xz'} = \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \quad \gamma_{yz'} = \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \quad (3)$$

onde u' , v' e w' são as componentes de deslocamento.

Tensões

Sendo a tensão perpendicular à superfície média nula ($\sigma_z = 0$), as cinco componentes de tensão serão dadas por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Relação Constitutiva Elástica

É admitido o caso de anisotropia em que há três planos ortogonais de simetria, ou seja ortotropia. Quando os eixos de ortotropia não coincidem com os de referência a matriz de rigidez é dada por:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (5)$$

e a relação constitutiva será:

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (6)$$

onde ε já está definido e ε_0 é um vetor deformação inicial, por exemplo, devido a cargas térmicas e D a matriz de rigidez.

Correção do Cisalhamento

Quando se admite que as normais à superfície média permanecem retas, mas não necessariamente normais após a deformação, tem-se garantida a continuidade de deslocamentos na interface das camadas, mas não a continuidade de tensões de cisalhamento. Tal hipótese faz com que a deformação de cisalhamento transversal seja constante através a espessura, o que é uma aproximação grosseira. Para corrigir tal imprecisão aceita-se comumente uma função parabólica de z' . Por isso introduz-se o fator de correção K .

Os termos D_{55} e D_{66} da matriz de rigidez que expressam o cisalhamento nos planos 13 e 23 devem ser corrigidos, respectivamente, pelos fatores K_1 e K_2 como abaixo:

$$D_{55} = K_1 G_{13} \qquad D_{66} = K_2 G_{23} \qquad (7)$$

sendo K_1 e K_2 obtidos a partir da função que determina a forma do diagrama de tensão de cisalhamento e dada por:

$$g(z) = \left[\frac{(D_1 h^2)}{8} \right] \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \qquad (8)$$

Integração Numérica

O tipo de integração numérica é um importante aspecto para a eficiência do elemento finito utilizado. São utilizadas a "técnica de integração normal", a "técnica de integração reduzida" e a "técnica de integração seletiva", realizadas por pontos de Gauss.

A integração normal consiste de (3 x 3) pontos de Gauss. A integração reduzida consiste de (4 x 4) pontos de Gauss e tem melhores efeitos sobre elementos isoparamétricos, principalmente sobre as deformações de cisalhamento transversal. É recomendada a utilização do elemento heterosis com esse tipo de integração.

Na integração seletiva, a flexão é integrada usando a técnica de integração normal em nove pontos de Gauss (3 x 3), enquanto que o cisalhamento é integrado utilizando a técnica de integração reduzida em quatro pontos de Gauss (2 x 2). A Figura 101 ilustra os pontos de Gauss e suas posições.

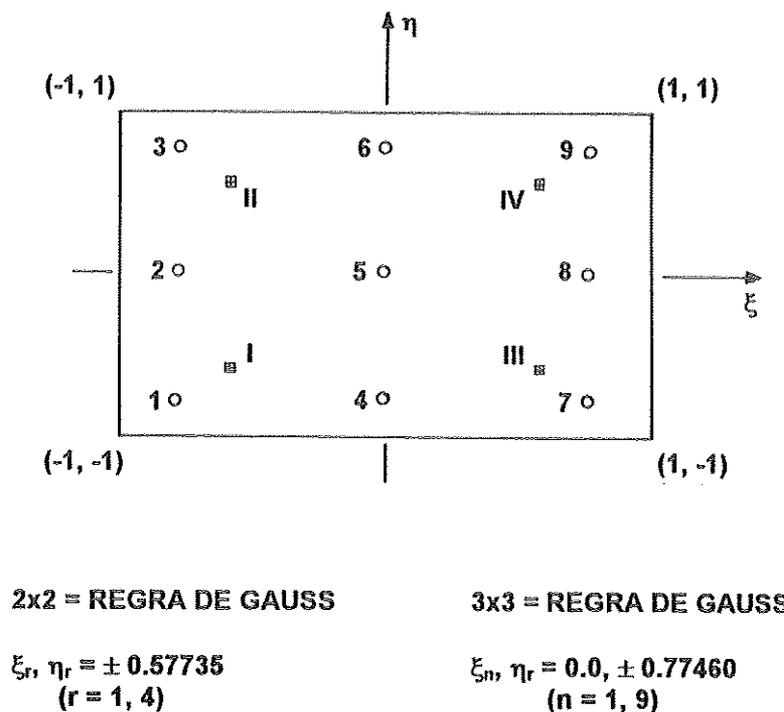


FIGURA 101 - Posições para Quatro e Nove Pontos de Gauss na Integração Seletiva
 HINTON & OWEN (1984)

Modelo Estratificado

É utilizado um modelo estratificado para a integração das tensões através a espessura de cada camada. Cada camada contém pontos de tensão sobre sua superfície média. As componentes de tensão no ponto médio de cada camada em uma certa seção são computadas e assumidas constantes através a espessura, tal que a distribuição de tensão ao longo da espessura é modelada por uma aproximação da distribuição constante, tal como ilustra a Figura 102.

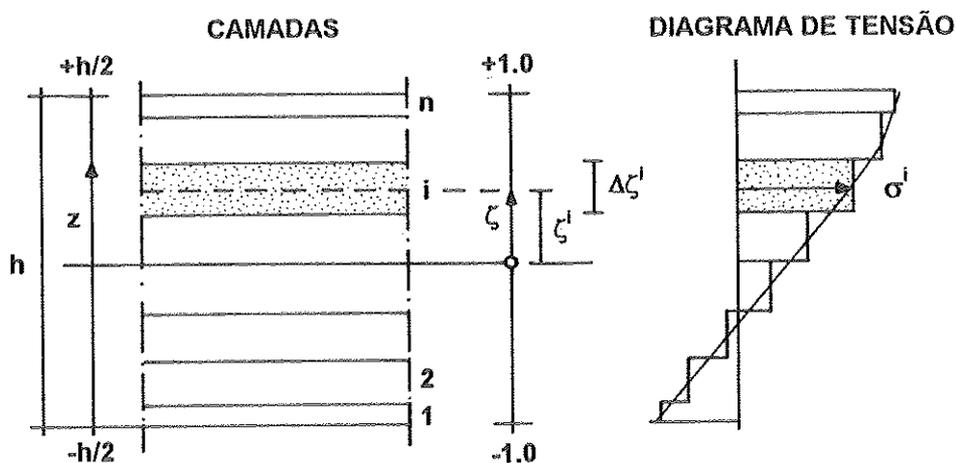


FIGURA 102 - Modelo Estratificado e Correspondente Distribuição de Tensão
HINTON & OWEN (1984)

Sendo assim, podem-se empregar camadas de diferentes espessuras e diferentes números de camadas por elemento finito, além da possibilidade de utilizar diferentes materiais em cada camada. Ainda, a especificação da espessura da camada em termos normalizados permite a variação de sua espessura, com a variação da espessura total do laminado.

COMPORTAMENTO NÃO LINEAR FÍSICO

Análise Elasto-Plástica

De um modo geral, a estratégia de solução de um problema elasto-plástico pode ser visualizada através dos diagramas ilustrados na Figura 103. O primeiro diagrama ilustra a relação carga-deslocamento num ponto da estrutura e o segundo a relação constitutiva unidimensional.

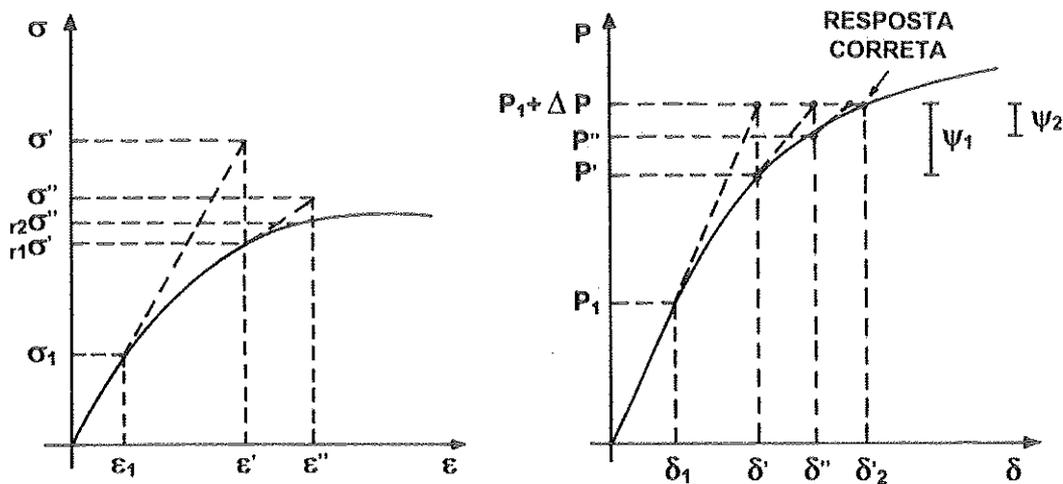


FIGURA 103 - Procedimento de Análise Elasto-Plástica Aproximada
HINTON & OWEN (1984)

Na fase elástica o sistema é linear e o procedimento usual de solução fornece, por exemplo, para uma carga P_1 , um deslocamento δ_1 . Por compatibilidade, calcula-se ε_1 e da relação constitutiva, σ_1 .

Aplicando-se um ΔP suficiente para passar do regime elástico para o plástico, o cálculo elástico fornece δ' , ε' e σ' . Entretanto, σ' deve ser corrigido para $r_1\sigma'$, valor este compatível com a relação elasto-plástica. Por outro lado, $r_1\sigma'$ não está mais em equilíbrio com $P_1 + \Delta P$, mas sim com um valor P' , portanto, gera-se um resíduo ψ_1 , aplicado novamente como carga sobre a estrutura.

Novamente o efeito de ψ_1 é determinado através de uma análise elástica, tomando-se, por exemplo, a rigidez em δ . Como resultado dessa nova etapa, obtém-se δ'' , ε'' , σ'' e $r_2\sigma''$, este último compatível com a relação constitutiva. Gera-se, em consequência, um novo resíduo ψ_2 e o procedimento iterativo se repete procurando minimizar o resíduo até um valor considerado, em termos práticos, suficientemente pequeno.

Critério de Escoamento

Para a consideração do comportamento elasto-plástico de materiais com anisotropia, o modelo empregado faz uso de uma generalização da superfície

de plastificação de von-Mises. A expressão dessa superfície, em casos complexos de tensão, é dada por

$$\sigma_{ef} = \left[\alpha_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \alpha_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \alpha_{13}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 3\alpha_{44}\tau_{12}^2 + 3\alpha_{55}\tau_{13}^2 + 3\alpha_{66}\tau_{23}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

onde σ_{ef} é a tensão efetiva, os σ_{ii} e τ_{ij} são componentes do estado de tensão e os α_{ii} e α_{ij} são parâmetros de anisotropia. Os índices 1, 2 e 3 referem-se às direções dos três eixos principais de anisotropia.

Particularmente a expressão acima para o caso de $\sigma_{33} = 0$ torna-se:

$$\sigma_{ef} = \left[a_1\sigma_{11}^2 + 2a_{12}\sigma_1\sigma_2 + a_2\sigma_2^2 + a_3\sigma_{22}^2 + a_4\tau_{13}^2 + a_5\tau_{23}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

onde $\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\sigma_2 = \sigma_{22}$, τ_{12} , τ_{13} , τ_{23} são as componentes de tensão não nulas e a_1 , a_{12} , a_2 , a_3 e a_4 são os parâmetros de anisotropia.

Relação Tensão-Deformação Elasto-Plástica

Sendo o incremento de deformação total $d\varepsilon$ dado pela soma das componentes elástica e plástica como abaixo:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (11)$$

onde o incremento de deformação elástica é dado pela forma incremental de:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (12)$$

e o incremento de deformação plástica por:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (13)$$

onde Q é chamado potencial plástico e $d\lambda$ é uma constante de proporcionalidade, obtém-se a partir daí a seguinte relação tensão-deformação incremental elasto-plástica:

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon \quad (14)$$

DESCRIÇÃO DO PROGRAMA PLASTOSHELL

A seguir são apresentadas as principais subrotinas do programa PLASTOSHELL para solução elasto-plástica de placas e cascas delgadas e espessas. Um modelo estratificado é utilizado e o comportamento não-linear geométrico também pode ser analisado. A Figura 104 mostra o fluxograma do programa.

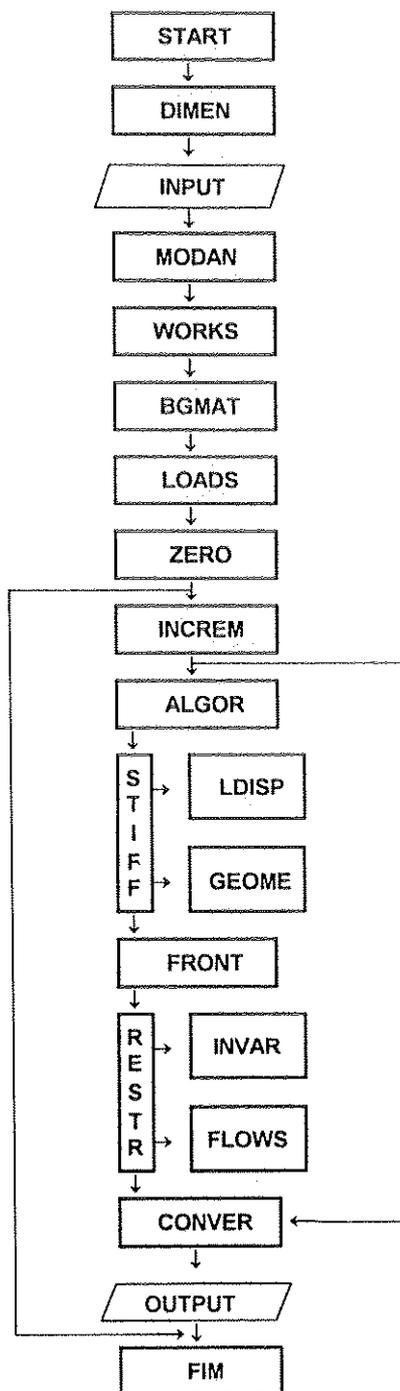


FIGURA 104 - Fluxograma do Programa Plastoshell
HINTON & OWEN (1984)

Subrotina DIMEN - Apresenta os valores das variáveis associadas ao controle do programa.

Subrotina INPUT - Entrada de dados de controle do programa, da geometria da estrutura, das condições de contorno e das propriedades dos materiais.

Subrotina MODAN - Calcula as matrizes de elasticidade D e de parâmetros anisótropos A para cada material.

Subrotina WORKS - Monta o sistema de coordenada ortogonal local e calcula a espessura em cada ponto nodal.

Subrotina BGMAT - Calcula a matriz B_0 de deformação ($\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{\delta}$) e a matriz G correspondente para grandes deslocamentos.

Subrotina LOADS - Calcula as forças nodais equivalentes devidas à pressão, força centrífuga, gravidade, cargas pontuais e variação de temperatura.

Subrotina ZERO - Inicializa várias variáveis que são usadas posteriormente para acumular quantidades quando o processo incremental e iterativo continua. Inicialmente essas variáveis são nulas e depois, quando a análise é reiniciada, contêm os últimos valores de convergência.

Subrotina INCREM - Incrementa a carga aplicada de acordo com os fatores de carga especificados em INPUT. É acessada na primeira iteração de cada incremento de carga.

Subrotina ALGOR - Controla o processo de solução não-linear, identificando o tipo de algoritmo, rigidez inicial ou tangencial.

Subrotina STIFF - Calcula a matriz de rigidez de cada elemento para comportamento elástico e elasto-plástico, levando em conta não-linearidade geométrica para grandes deslocamentos.

Subrotina FRONT - acumula as contribuições de cada elemento para formar a matriz de rigidez global e o vetor de cargas global. Resolve o sistema de equações por eliminação direta de Gauss.

Subrotina RESTR - Calcula as forças nodais equivalentes que são estaticamente equivalentes ao campo de tensão que satisfaz o critério de escoamento.

Subrotina CONVER - Verifica o processo de solução não-linear para identificar a convergência e calcula o vetor de forças residuais.

Subrotina OUTPUT - Imprime os resultados para o corrente incremento de carga.

SUBROTINA PARA A ANÁLISE DA TEMPERATURA

VINSON & SIERAKOVSKI (1987) ressaltam o efeito da temperatura nas estruturas de materiais compostos como sendo um importante modificador de suas propriedades e características. A variação de temperatura nessas estruturas é comum durante o processo de fabricação, bem como durante sua utilização.

Tais variações produzem dois efeitos. O primeiro efeito é o da expansão e contração quando tais materiais são submetidos ao aumento ou à diminuição de temperatura, respectivamente. Na maioria dos casos essa expansão ou contração é proporcional à variação da temperatura. Essa proporcionalidade, de forma geral, é dada por:

$$\varepsilon_{\text{térmico}} = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta t \quad (15)$$

onde ε é a deformação provocada pela variação de temperatura, α é o coeficiente de expansão térmica, ou seja, a constante de proporcionalidade entre a variação de temperatura e a deformação térmica ($\Delta l/l$) e ΔT é a variação de temperatura tomada de uma temperatura de referência em que não há tensões ou deformações térmicas.

O segundo efeito é relativo à rigidez e resistência dos compostos. A maioria dos materiais tornam-se mais flexíveis, mais dúcteis e menos resistentes quando aquecidos. Ao se realizar, por exemplo, uma análise de tensões de uma estrutura que seja aquecida ou resfriada dever-se-ia levar em consideração a resistência e o módulo de elasticidade do material à temperatura em que a estrutura deve ser realmente utilizada. A Figura 105 ilustra a variação que ocorre na resistência e no módulo de elasticidade quando há variação de temperatura.

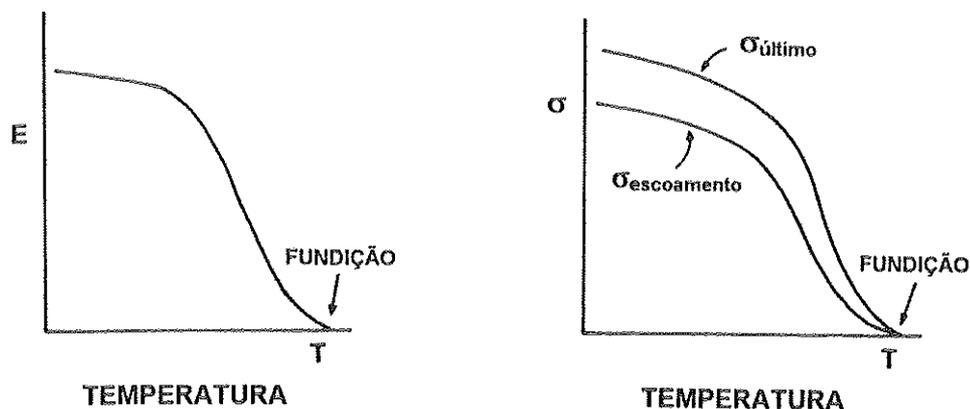


FIGURA 105 - Módulo de Elasticidade e Resistência em Função da Temperatura
HINTON & OWEN (1984)

Em materiais ortótipos como os compostos, ao invés de um coeficiente de expansão térmica e um valor de deformação térmica há três valores do coeficiente, de acordo com as direções 1,2 e 3 e, conseqüentemente, três valores da deformação provocada pela temperatura, de forma que a equação anterior torna-se:

$$\varepsilon_i = \alpha_i \Delta t \quad (i = 1,2,3) \quad (16)$$

HINTON & OWEN (1977) deduzem as expressões das equações de equilíbrio de problemas elástico-lineares visando a aplicação do método dos elementos finitos. As equações de equilíbrio que governam tais problemas podem ser obtidas pela minimização da energia potencial total do sistema, que para aplicações estruturais é dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V [\sigma]^T \varepsilon dV - \int_V [\delta]^T p dV - \int_S [\delta]^T q dS \quad (17)$$

onde σ e ε são os vetores tensão e deformação, respectivamente, δ são os deslocamentos em qualquer ponto, p as forças volumétricas e q as forças de superfície. As integrais são feitas no volume e na superfície do corpo. Na equação acima, o primeiro termo representa a energia de deformação interna e os outros dois as contribuições do peso próprio do corpo e das forças distribuídas sobre a sua superfície.

A minimização da energia potencial para um elemento finito conduz a primeira parcela da equação anterior a:

$$\int_{V_e} ([B]^T DB) \delta^e dV = K^e \delta^e \quad (18)$$

onde δ^e é o vetor de deslocamentos nodais do elemento, B é a matriz de deformação constituída das derivadas das funções de forma, D é a matriz de elasticidade que relaciona σ com ε e K^e é a matriz de rigidez do elemento finito dada por:

$$K^e = \int_{V_e} [B]^T DB dV \quad (19)$$

Ainda decorrente da minimização da energia obtém-se:

$$F^e + F_p^e + F_{\varepsilon_0}^e + F_{\sigma^0}^e = K^e \delta^e \quad (20)$$

onde:

$$K^e = \int_{V_e} [B]^T DB dV \quad F_p^e = \int_{V_e} [N]^T p dV \quad (21)$$

$$F_{\varepsilon_0}^e = \int_{V_e} [B]^T D \varepsilon^0 dV \quad F_{\sigma^0}^e = - \int_{V_e} [B]^T \sigma^0 dV \quad (22)$$

sendo F^e , F_p^e , $F_{\varepsilon_0}^e$ e $F_{\sigma^0}^e$ os vetores de forças nodais equivalentes das forças aplicadas, das forças volumétricas, das deformações iniciais (por exemplo, térmicas) e tensões iniciais.

Conhecidos, a partir daí, o vetor deslocamento dos elementos δ pode-se determinar as tensões no elemento que são dadas então por:

$$\sigma = D(B\delta - \varepsilon^0) + \sigma^0 \quad (23)$$

Seguindo essas considerações foi construída uma subrotina e implementada no programa PLASTOSHELL para calcular as deformações provocadas pela variação de temperatura, as tensões e o vetor de forças nodais equivalentes. Considerando um estado plano de deformações e o material tendo dois coeficientes de expansão térmica, um segundo a direção 1 e outro segundo a direção 2 a expressão para a determinação das deformações passa a ser:

$$\varepsilon_i^0 = \alpha_i \Delta t \quad (i = 1, 2) \quad (24)$$

com as outras componentes de deformação nulas. A parcela das tensões devida à variação de temperatura é dada por:

$$\sigma = -D\varepsilon^0 \quad (25)$$

e o vetor de forças nodais equivalentes por:

$$F_{\varepsilon_0}^e = \int_{V_e} [B]^T D\varepsilon^0 dV \quad (26)$$

A subrotina chamada THERM foi posicionada no programa dentro da subrotina LOADS, que calcula os vetores de forças nodais equivalentes para

todas as cargas aplicadas à estrutura, e de tal forma que a variação de temperatura é dada à estrutura antes da aplicação de qualquer outro carregamento, ficando esta sujeita a um estado de deformação inicial.