

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS**

**SOBRE O USO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO-MEC PARA O ESTUDO DE INTERAÇÃO DE
PLACAS COM O MEIO CONTÍNUO**

ENG. EDSON TEJERINA CALDERÓN

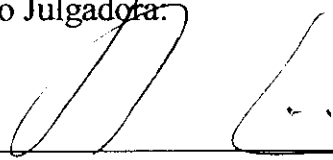
ORIENTADOR: PROF. DR. WILSON SÉRGIO VENTURINI

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

**São Carlos
1996**

FOLHA DE APROVAÇÃO

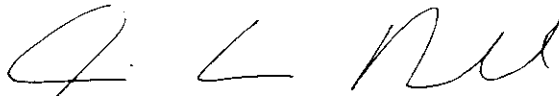
Tese defendida e aprovada em 25-11-1996
pela Comissão Julgadora.



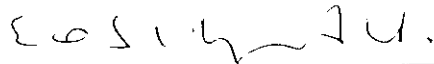
Prof. Tit. **WILSON SERGIO VENTURINI (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



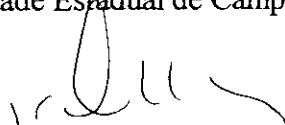
Prof. Doutor **HUMBERTO BREVES CODA**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor **MARCIO ANTONIO RAMALHO**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



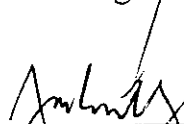
Prof. Doutor **EUCLIDES DE MESQUITA NETO**
(Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP)



Prof. Doutor **JOSÉ CLÁUDIO DE FARIA TELLES**
(COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro)



Prof. Assoc. **MOUNIR KHALIL EL DEBS**
Coordenador da área - Engenharia de Estruturas



JOSE CARLOS A. CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Aos meus pais,
Eduardo e M. Luisa,
e aos meus irmãos,
Hector, Edgar e Eva.*

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Wilson Sérgio Venturini pela disponibilidade e paciência que teve para orientar-me na elaboração deste trabalho.

Ao Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás, pela oportunidade que me deu para concluir este trabalho.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela bolsa de estudos concedida.

Ao Sr. Francisco Carlos G. de Brito pelos desenhos.

Aos colegas, professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC/USP pela amizade.

Ao meu Pai e a minha Mãe, que estão sempre comigo, embora eu me encontre longe deles.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE TABELAS	viii
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
1 INTRODUÇÃO	1
2 SÓLIDOS TRIDIMENSIONAIS E PLACAS	8
2.1 Introdução	8
2.2 Relações básicas da teoria da elasticidade	8
2.2.1 Equações de equilíbrio	8
2.2.2 Relação deformação-deslocamento	10
2.2.3 Relação tensão-deformação	10
2.3 Equação diferencial governante para um sólido tridimensional	10
2.4 Relações básicas para placas delgadas	11
2.5 Equações de placas em coordenadas polares	18
2.6 Soluções fundamentais	23
2.6.1 Soluções fundamentais para sólidos tridimensionais	24
2.6.1.1 Solução fundamental de Kelvin	26
2.6.1.2 Solução fundamental de Mindlin	27
2.6.1.3 Solução de Boussinesq-Cerruti	34
2.6.2 Soluções fundamentais para placas	36
3 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO	40
3.1 Introdução.....	40
3.2 Equações integrais para sólidos tridimensionais	40
3.2.1 Equação integral para pontos do domínio	40
3.2.2 Equação integral para pontos do contorno	43

3.3 Equações integrais para placas	46
3.3.1 Equação integral para pontos do domínio	46
3.3.2 Equação integral para pontos do contorno	53
3.4 Transformação da integral de domínio do carregamento	58
4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA SÓLIDOS TRIDIMENSIONAIS	61
4.1 Introdução	61
4.2 Discretização do contorno	61
4.3 Geometria dos elementos	66
4.4 Funções de interpolação para as variáveis	70
4.4.1 Elemento triangular constante	70
4.4.2 Elemento triangular linear	71
4.4.2.1 Elemento triangular linear contínuo	72
4.4.2.2 Elemento triangular linear descontínuo	74
4.4.2.3 Elemento triangular linear de transição	78
4.5 Integração sobre os elementos	78
4.5.1 Integração não singular	79
4.5.2 Integração singular	85
4.6 Montagem do sistema de equações	91
4.7 Deslocamentos e tensões em pontos do domínio	96
4.8 Aplicações numéricas	97
4.8.1 Exemplo 1: Área circular uniformemente carregada	97
4.8.2 Exemplo 2: Área retangular uniformemente carregada	99
4.8.3 Exemplo 3: Cavidade cilíndrica no interior do solo	103
5 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS	106
5.1 Introdução	106
5.2 Discretização do contorno	106
5.3 Aproximação das variáveis	109
5.3.1 Elemento linear contínuo	110
5.3.2 Elemento linear descontínuo	112
5.3.3 Elemento linear misto	113
5.4 Transformação das equações integrais	114
5.5 Condições de contorno	118
5.6 Montagem do sistema de equações	120
5.7 Integração sobre os elementos	122
5.8 Propriedades da matriz \tilde{H}	126
5.9 Deslocamentos e esforços para pontos internos	128

5.9.1	Deslocamento transversal $w(q)$ e sua derivada $\frac{\partial w}{\partial m}(q)$	128
5.9.2	Momento fletor e força cortante para pontos internos	130
5.10	Aplicações numéricas	137
5.10.1	Exemplo 1: Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada	137
5.10.2	Exemplo 2: Placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada	138
5.10.3	Exemplo 3: Placa quadrada engastada em dois lados opostos e apoiada nos outros dois com carregamento uniformemente distribuído	139
5.10.4	Exemplo 4: Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois com carregamento uniformemente distribuído total e parcial	140
5.10.5	Exemplo 5: Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno com carregamento distribuído em pequena área central	142
5.10.6	Exemplo 6: Placa quadrada simplesmente nos quatro cantos e uniformemente carregada	144
6	INTERAÇÃO PLACA-SOLO. TEORIA DE WINKLER	145
6.1	Introdução	145
6.2	Equações básicas	145
6.3	Integração sobre células internas	147
6.4	Processo da reciprocidade dual	154
6.5	Formulação alternativa	160
6.6	Comportamento não-linear para a resposta do solo	171
6.7	Aplicações numéricas	174
6.7.1	Exemplo 1: Placa com carga centrada	176
6.7.2	Exemplo 2: Placa com carga excêntrica	179
6.7.3	Exemplo 3: Placa com carga excêntrica considerando-se a não-linearidade para a reação do solo	186
7	INTERAÇÃO PLACA-SOLO. DOMÍNIO TRIDIMENSIONAL ...	190
7.1	Introdução	190
7.2	Equações fundamentais	190
7.3	Integração sobre células internas	192
7.4	Processo da reciprocidade dual	193
7.5	Formulação alternativa	197
7.6	Interação placa-solo	199
7.7	Comportamento não-linear para a resposta do solo	203

7.8 Aplicações numéricas	206
7.8.1 Placa na superfície do solo (Boussinesq-Cerruti)	207
7.8.1.1 Exemplo 1: Placa com carga centrada	207
7.8.1.2 Exemplo 2: Placa com carga excêntrica	209
7.8.1.3 Exemplo 3: Placa com carga excêntrica considerando-se a não-linearidade para a reação do solo	217
7.8.2 Placa em uma cavidade do solo (Mindlin)	220
7.8.2.1 Exemplo 4: Placa com carga centrada	221
7.8.2.2 Exemplo 5: Placa com carga excêntrica	223
7.8.2.3 Exemplo 6: Placa com carga excêntrica considerando-se a não-linearidade para a reação do solo	230
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	234
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	238
OBRAS CONSULTADAS	246

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Corpo tridimensional	09
Figura 2.2 - Forças de superfície em um tetraedro	09
Figura 2.3 - Esforços em um elemento de placa	14
Figura 2.4 - Sistema de coordenadas (x,y) e (n,s)	16
Figura 2.5 - Sistema de coordenadas cartesianas e polares	18
Figura 2.6 - Relação das coordenadas (n,s) de um ponto P do contorno da placa, com as coordenadas cartesianas e polares	21
Figura 2.7 - Resposta em p devida a uma força unitária em q	24
Figura 2.8 - Componentes dos tensores u_{ji}^* e p_{ji}^*	26
Figura 2.9 - Problema fundamental de Kelvin	27
Figura 2.10 - Problema fundamental de Mindlin	28
Figura 2.11 - Problema fundamental de Boussinesq-Cerruti	34
Figura 2.12 - Pontos de carregamento q e de deslocamento p	36
Figura 2.13 - Sistemas de coordenadas (n,s) e (m,u)	38
Figura 3.1 - Definição das condições de contorno	41
Figura 3.2 - a) Acréscimo do domínio Ω no ponto Q; b) corte AA'	43

Figura 3.3 - Placa finita contida em uma placa infinita	46
Figura 3.4 - Sistema de coordenadas (n,s) , normal e tangente ao contorno	48
Figura 3.5 - Canto "i" da placa	51
Figura 3.6 - Contorno circular acrescido a um canto "Q" da placa	53
Figura 3.7 - Região carregada Ω_g	57
Figura 4.1 - Tipos de elementos utilizados para aproximar o contorno: a) triangulares; b) quadrilaterais	62
Figura 4.2 - Tipos de células utilizadas para aproximar o domínio: a) tetraedros; b) hexaedros	63
Figura 4.3 - Aproximação das variáveis do contorno: a) constante; b) linear; c) quadrática	63
Figura 4.4 - Coordenadas globais e locais para o elemento triangular plano	66
Figura 4.5 - Coordenadas homogêneas (ξ_1, ξ_2, ξ_3)	68
Figura 4.6 - Elemento triangular constante	70
Figura 4.7 - Elementos triangulares lineares: a) contínuo; b) e c) de transição; d) descontínuo	72
Figura 4.8 - Funções de interpolação nos pontos nodais do elemento triangular linear contínuo	73
Figura 4.9 - Funções de interpolação nos pontos nodais do elemento triangular linear descontínuo	74
Figura 4.10 - Sistemas de coordenadas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) e $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$	75
Figura 4.11 - Descontinuidade do contorno	77

Figura 4.12 - Elementos triangulares lineares contínuos e de transição	78
Figura 4.13 - Coordenadas triangulares homogêneas do elemento e do subelemento	81
Figura 4.14 - Divisão de um elemento em subelementos	82
Figura 4.15 - Elemento dividido e quatro subelementos	83
Figura 4.16 - Coordenadas locais cartesianas e cilíndricas	85
Figura 4.17 - Esquema de integração em r	88
Figura 4.18 - Integração sobre os lados do elemento triangular	89
Figura 4.19 - Ponto de colocação não nodal	91
Figura 4.20 - Nós múltiplos	92
Figura 4.21 - Área circular uniformemente carregada	97
Figura 4.22 - Discretização da área circular carregada	98
Figura 4.23 - Deslocamentos verticais ao longo do eixo x_1	98
Figura 4.24 - Deslocamentos verticais ao longo do eixo x_3	99
Figura 4.25 - Área retangular uniformemente carregada	100
Figura 4.26 - Discretização da área retangular carregada	100
Figura 4.27 - Deslocamentos verticais ao longo do eixo x_1	101
Figura 4.28 - Deslocamentos verticais ao longo do eixo x_2	101
Figura 4.29 - Deslocamentos verticais ao longo do eixo x_3	102
Figura 4.30 - Deslocamentos verticais ao longo de um eixo paralelo ao eixo x_3 que passa pelo vértice	102

Figura 4.31 - Cavidade cilíndrica no interior do solo	103
Figura 4.32 - Discretização da cavidade cilíndrica	104
Figura 4.33 - Deslocamentos verticais ao longo do eixo x_2	104
Figura 4.34 - Deslocamentos verticais ao longo do eixo x_3	105
Figura 4.35 - Deslocamentos verticais ao longo de um eixo paralelo ao eixo x_3 que passa pela geratriz	105
Figura 5.1 - Discretização do contorno da placa	107
Figura 5.2 - Descrição geométrica do elemento linear	108
Figura 5.3 - Contorno de uma placa e sem angulosidades	110
Figura 5.4 - Elemento linear contínuo	111
Figura 5.5 - Descontinuidades do contorno de uma placa	111
Figura 5.6 - Definição de nós duplos	112
Figura 5.7 - Elemento linear descontínuo	113
Figura 5.8 - Elementos lineares mistos	113
Figura 5.9 - Discretização de uma placa com elementos lineares	114
Figura 5.10 - Canto "i" da placa com os nós anteriores e posteriores necessários às contribuições da reação de canto da matriz \tilde{H}	117
Figura 5.11 - Placa quadrada com pontos singulares nos cantos, sobre o contorno e fora do domínio	121
Figura 5.12 - Nós j e k, anterior e posterior ao canto "i"	122
Figura 5.13 - Posição de : a) nós e b) pontos singulares em um elemento linear misto	126

Figura 5.14 - Placa com carregamento transversal nulo	127
Figura 5.15 - Representação do vetor posição $r(q,P)$	134
Figura 5.16 - Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada	137
Figura 5.17 - Placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada	138
Figura 5.18 - Placa quadrada engastada em dois lados opostos e apoiada nos outros dois com carregamento uniformemente distribuído	139
Figura 5.19 - Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois	140
Figura 5.20 - Placa parcialmente carregada	141
Figura 5.21 - Placa quadrada com carregamento distribuído em pequena área central	143
Figura 5.22 - Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro cantos	144
Figura 6.1 - Placa apoiada sobre o solo	146
Figura 6.2 - a) Domínio de uma placa discretizada em células; b) definição do sistema de coordenadas homogêneas de uma célula triangular "i"	147
Figura 6.3 - Célula interna e sistemas de coordenadas (x_1, x_2) , (ξ_1, ξ_2) e (r, θ)	149
Figura 6.4 - a) Célula "i" subdividida nas células "i ₁ " e "i ₂ "; b) célula "i ₂ "; c) célula "i ₁ "	152
Figura 6.5 - Superfícies cônicas correspondentes a dois pseudo carregamentos, usadas para a aproximação de $w(p)$	156
Figura 6.6 - Ponto dual "m" e ponto de deslocamento "P"	158

Figura 6.7 - Gráfico da função $f(m,p)$	161
Figura 6.8 - Relação entre os sistemas de coordenadas (n,Γ) e (r,θ)	163
Figura 6.9 - Divisão do domínio em subdomínios para um ponto base "m" do contorno	164
Figura 6.10 - Descontinuidade da função $f(m,p)$	165
Figura 6.11 - Aproximação linear da função $f(m,p)$	166
Figura 6.12 - Posições adequadas de pontos base internos e do contorno	167
Figura 6.13 - Posições não adequadas de pontos base	167
Figura 6.14 - Relação reação-deslocamento	171
Figura 6.15 - Representação de um processo iterativo para um problema não-linear com equilíbrio	173
Figura 6.16 - Representação de um processo iterativo para um problema não-linear sem equilíbrio	174
Figura 6.17 - Definição dos pontos base e os pontos duais	175
Figura 6.18 - Definição das células e dos pontos em análise	175
Figura 6.19 - Geometria da placa para carga concentrada	176
Figura 6.20 - Geometria da placa para carga com uma excentricidade	178
Figura 6.21 - Distribuição de tensões no solo: a) $e_x=30\text{cm}$; b) $e_x=50\text{cm}$	182
Figura 6.22 - Geometria da placa para carga com duas excentricidades	182

Figura 6.23 - Distribuição de tensões no solo para $e_x = e_y = 50\text{cm}$	185
Figura 7.1 - Placa apoiada sobre o solo	191
Figura 7.2 - Reação do solo para carga centrada	209
Figura 7.3 - Reação do solo para carga com $e_x = 30\text{cm}$	213
Figura 7.4 - Reação do solo para carga com $e_x = 50\text{cm}$	213
Figura 7.5 - Reação do solo para carga com $e_x = e_y = 50\text{cm}$	216
Figura 7.6 - Reação não-linear do solo para carga $e_x = 50\text{cm}$	219
Figura 7.7 - Discretização e forma da cavidade	220
Figura 7.8 - Reação do solo para carga centrada	222
Figura 7.9 - Reação do solo para carga com $e_x = 30\text{cm}$	226
Figura 7.10 - Reação do solo para carga com $e_x = 50\text{cm}$	226
Figura 7.11 - Reação do solo para carga com $e_x = e_y = 50\text{cm}$	229
Figura 7.12 - Reação não-linear do solo para carga $e_x = 50\text{cm}$	232

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Resultado do exemplo 1	138
Tabela 5.2 - Resultado do exemplo 2	139
Tabela 5.3 - Resultado do exemplo 3	140
Tabela 5.4 - Resultado do exemplo 4, para carregamento total	141
Tabela 5.5 - Resultado do exemplo 4, para carregamento parcial	142
Tabela 5.6 - Resultado do exemplo 4. Deslocamentos máximos	143
Tabela 5.7 - Resultado do exemplo 4. Momentos fletores máximos ...	143
Tabela 5.8 - Resultado do exemplo 6	144
Tabela 6.1 - Reações do solo para carga centrada	177
Tabela 6.2 - Reações do solo para carga centrada	177
Tabela 6.3 - Reações do solo para carga centrada	178
Tabela 6.4 - Reações do solo para carga com uma excentricidade	179
Tabela 65 - Reações do solo para carga com uma excentricidade	180
Tabela 6.6 - Reações do solo para carga com uma excentricidade	181
Tabela 6.7 - Reações do solo para carga com duas excentricidade	183
Tabela 6.8 - Reações do solo para carga com duas excentricidade	184

Tabela 6.9 - Reações do solo para carga com duas excentricidade	185
Tabela 6.10 - Reações do solo para carga com uma excentricidade	186
Tabela 6.11 - Reações do solo para carga com uma excentricidade	187
Tabela 6.12 - Reações do solo para carga com uma excentricidade	187
Tabela 6.13 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com a limitação da tensão	188
Tabela 6.14 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com a limitação da tensão	188
Tabela 6.15 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com a limitação da tensão	189
Tabela 7.1 - Reações do solo para carga centrada	207
Tabela 7.2 - Reações do solo para carga centrada	208
Tabela 7.3 - Reações do solo para carga centrada	208
Tabela 7.4 - Reações do solo para carga com uma excentricidade	210
Tabela 7.5 - Reações do solo para carga com uma excentricidade	211
Tabela 7.6 - Reações do solo para carga com uma excentricidade	212
Tabela 7.7 - Reações do solo para carga com duas excentricidade	214
Tabela 7.8 - Reações do solo para carga com duas excentricidade	215
Tabela 7.9 - Reações do solo para carga com duas excentricidade	216
Tabela 7.10 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com a limitação da tensão	217
Tabela 7.11 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com a limitação da tensão	218

Tabela 7.12 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com a limitação da tensão	219
Tabela 7.13 - Reações do solo para carga centrada	221
Tabela 7.14 - Reações do solo para carga centrada	221
Tabela 7.15 - Reações do solo para carga centrada	222
Tabela 7.16 - Reações do solo para carga com uma excentricidade	223
Tabela 7.17 - Reações do solo para carga com uma excentricidade	224
Tabela 7.18 - Reações do solo para carga com uma excentricidade	225
Tabela 7.19 - Reações do solo para carga com duas excentricidade ...	227
Tabela 7.20 - Reações do solo para carga com duas excentricidade ...	228
Tabela 7.21 - Reações do solo para carga com duas excentricidade ...	229
Tabela 7.22 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com a limitação da tensão	230
Tabela 7.23 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com a limitação da tensão	231
Tabela 7.24 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com a limitação da tensão	232

RESUMO

Neste trabalho a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno é utilizada para o estudo da interação de placas com o meio contínuo. O solo, considerado como um meio contínuo, tem a sua reação representada pelo acréscimo de uma integral de domínio nas equações integrais usuais de placas. Essa integral de domínio é tratada utilizando-se células internas, o processo da reciprocidade dual e uma formulação alternativa. Inicialmente a reação do solo é aproximada utilizando-se a teoria de Winkler. Em seguida, o solo é considerado como sendo um sólido tridimensional elástico de domínio semi-infinito, e analisado pelo Método dos Elementos de Contorno utilizando-se as soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti e Mindlin, neste caso a interação entre a placa e o solo, é feita impondo-se o equilíbrio dos esforços e a compatibilidade de deslocamentos transversais, em todos os pontos da interface. Adotando-se um critério de plastificação simples e bilinear, é considerada a não-linearidade da reação do solo. Em cada caso, são apresentadas aplicações numéricas utilizando-se as três formulações, cujos resultados são comparados entre si e com valores teóricos, mostrando a eficiência das mesmas.

ABSTRACT

In this work the direct formulation of Boundary Element Method is adopted to study interaction of plates in bending with the continuum medium. The soil material, assumed as a continuum medium, applies on the plate surface what is represented in the usual integral equations by a domain integral. That domain integral is treated by approaching the subgrade reaction using cells, the dual reciprocity method or an alternative procedure. Initially, the reaction of soil is given by assuming the Winkler's theory. Then, the soil is assumed as a semi-infinite three-dimensional elastic solid for which the Boundary Element Method is applied using the Boussineq-Cerruti and Mindlin's fundamental solutions. In this case, the interaction of the plate with the soil is made by enforcing displacement compatibility and equilibrium at all interface points define by the plate surface discretization. Non-linear behaviour is also assumed to govern the interaction reaction between plate and the soil medium. For that, a simple non symmetric stress-strain curve is taken to represent the elastoplastic responses. In each case, numerical examples, using the three subgrade reaction approximations discussed here, are shown to illustrate the accuracy and efficiency of the proposed models.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Na análise de diversos problemas de engenharia, a teoria da elasticidade, utilizando modelos contínuos, determina soluções analíticas apenas para casos muito particulares. Nos demais casos, a solução só é possível através de métodos numéricos, dentre os quais se destacam o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

No período em que os avanços na eletrônica dão origem aos computadores, o Método dos Elementos Finitos começa a ser divulgado (TURNER et al., 1956 e ARGYRIS, 1960), e sua intensa pesquisa e utilização nas mais diversas áreas da engenharia o levaram a um estágio de desenvolvimento muito avançado. O Método das Diferenças Finitas, cuja origem, segundo a literatura especializada, é relacionado ao trabalho de SOUTHWELL (1946), surgiu em uma época anterior ao advento dos computadores e apesar das suas restrições, ainda é utilizado na solução de diversos problemas de engenharia. O Método dos Elementos Finitos e Método das Diferenças Finitas, aproximam a solução da equação diferencial que rege o problema físico, utilizando valores de domínio, isto é, os valores das variáveis estão associadas a pontos internos e de contorno do espaço em análise, por isso, são também denominados “métodos de domínio”.

O Método dos Elementos de Contorno (BREBBIA, 1978), é um método recente no qual as equações diferenciais que regem o problema, são escritas em forma de equações integrais cujo domínio de integração é o contorno da região em estudo, sendo esta a sua principal característica, que lhe permite reduzir a dimensão do problema, uma vez que a discretização pode ser feita apenas no contorno. Este método vem sendo utilizado por pesquisadores das mais diversas áreas, apresentando-se como uma alternativa promissora para a resolução de diversos problemas físicos usuais no campo da engenharia.

O rápido crescimento destas técnicas, nestas últimas décadas, está sem dúvida aliado aos avanços tecnológicos da eletrônica. Os grandes sistemas de equações, decorrentes da utilização dessas técnicas numéricas, assim como o tempo de processamento ou o espaço de memória disponível, não serão mais obstáculos para a sua utilização e desenvolvimento, tornando-se práticas ferramentas de cálculo.

No presente trabalho, o Método dos Elementos de Contorno é empregado no estudo de interação de placas com o meio contínuo. Devido a sua boa adaptação em regiões infinitas e semi-infinitas, torna-se bastante apropriado para a análise de meios contínuos, como por exemplo o solo, considerado um sólido tridimensional de domínio semi-infinito. A formulação das placas e dos sólidos tridimensionais é feita inicialmente de forma separada, realizando-se posteriormente o seu acoplamento.

A seguir, é apresentado um breve histórico do Método dos Elementos de Contorno, destacando-se apenas os trabalhos que mudaram as suas bases matemáticas desde sua origem, e contribuíram para seu desenvolvimento. Uma descrição mais abrangente, sobre a evolução do método, encontra-se no trabalho de VENTURINI (1988).

O Método dos Elementos de Contorno, embora seja considerado um método numérico recente, tem sua origem ligada à evolução das técnicas de resolução de equações integrais, conhecidas desde 1823, quando ABEL (1823), segundo ELLIOT apud ANDERSEN (1980), deduziu uma equação integral para resolver o problema do pêndulo isócrono. Posteriormente muitos outros trabalhos foram realizados para resolver diversos problemas como os da teoria do potencial e da elasticidade, que contribuíram para o desenvolvimento das equações integrais. Entretanto, é atribuída a FREDHOLM (1903) a primeira teoria clássica das equações integrais onde as integrais apresentavam núcleos definidos e integráveis. KUPRADZE (1965), propôs a primeira formulação dos chamados então métodos de contorno, utilizando uma técnica indireta no equacionamento de problemas de elastostática, cujas soluções físicas eram determinadas a partir de valores provenientes de fontes fictícias aplicadas no contorno.

JASWON (1963) e SYMM (1963), empregando equações integrais para a resolução de problemas potenciais, utilizaram variáveis reais, além de mater uma função de tensão auxiliar, caracterizando assim, o denominado método semi-direto.

Em 1967, RIZZO (1967) apresenta no seu trabalho, a primeira formulação para problemas de elasticidade através do método das equações integrais de contorno - BIEM em sua forma direta, com características similares à dos outros métodos numéricos, pois até então,

todos os trabalhos anteriores, embora de grande importância, não eram interpretados como métodos numéricos para a resolução de problemas de engenharia. Nesta formulação direta, as incógnitas que aparecem nos integrandos são as próprias variáveis físicas do problema. Seguindo esta técnica, diversos trabalhos foram apresentados, dentre os quais podem-se destacar CRUSE (1969, 1973 e 1974), RIZO & SHIPPY (1968), LACHAT (1975), e outros.

Em 1978, uma nova interpretação das técnicas de resolução das equações integrais é apresentada no trabalho de BREBBIA (1978), quem demonstra a sua formulação a partir da técnica dos resíduos ponderados, dando uma generalização ainda maior ao método, que passa a ser denominado de "Método dos Elementos de Contorno", começando a ser intensamente estudado em diversos centros de pesquisa, na análise dos mais variados problemas de engenharia como: plasticidade, viscoplasticidade, viscoelasticidade, não-linearidade física e geométrica, mecânica da fratura, mecânica das rochas e dos solos, adensamento, percolação, efeitos dinâmicos, vibração, radiação, propagação de ondas, placas, cascas, concentração de tensões, iteração solo-estrutura, fluido-estrutura e acústica-estrutura, e outros. O M.E.C. é também utilizado em combinação com outros métodos numéricos, como o M.E.F. na análise de diversos problemas.

A utilização de equações integrais de contorno, em problemas de flexão de placas, tem seu início com JASWON et al. (1967), que propôs a solução da equação bi-harmônica por meio de equações integrais e aplicou-a na solução de placas (JASWON et al., 1968). HANSEN (1976), propôs uma formulação direta para a análise de placas infinitas com furos de contorno não carregado utilizando duas equações integrais, a do deslocamento transversal e a da sua derivada direcional. Formulações indiretas foram propostas por ALTIERO & SIKARKIE (1978), analisando apenas placas engastadas, devido à complexidade da técnica utilizada, a qual foi estendida posteriormente por WU & ALTIERO (1979), para incluir condições arbitrárias de contorno. Mas, foram BEZINE (1978a e 1978b) e STERN (1979, 1983), os que introduziram a formulação direta para análise de placas finitas com vinculação qualquer no contorno. Outros trabalhos importantes foram apresentados também por BEZINE (1980), que propôs uma formulação mista para análise de vibrações envolvendo contorno e domínio, e KAMIYA et al. (1982), que aplicou o método a placas sujeitas a efeitos de temperatura. TANAKA (1984) e KAMIYA & SAWAKY (1982), consideram nos seus trabalhos, os efeitos dos deslocamentos transversais na análise de placas. VAN DER WEEËN (1982), propôs uma formulação para análise de placas

espessas, baseada na teoria de REISSNER (1945). Várias alternativas de montagem do sistema de equações, são apresentadas por PAIVA (1987), para a análise de placas baseadas nas hipóteses de Kirchhoff, visando a sua interação com outros elementos estruturais.

Problemas de placas sobre fundação elástica, também foram formuladas utilizando-se equações integrais, sendo TOTTENHAM (1979), o primeiro em apresentar um trabalho neste campo. KATSIKADELIS & ARMENAKAS (1984a, 1984b), baseados na teoria de WINKLER (1867), apresentaram duas formulações diferentes para analisar placas sobre fundação elástica, utilizando soluções fundamentais específicas onde a reação do solo já é considerada. Nos trabalhos de COSTA & BREBBIA (1985a, 1985b), as reações da fundação são consideradas elásticas e sua integral de domínio é calculada utilizando-se células internas (COSTA & BREBBIA, 1986). SILVA, N. (1988), trata a integral de domínio proveniente da reação da fundação utilizando células internas e o processo da reciprocidade dual, considerando inclusive, o comportamento não-linear da fundação. KATSIKADELIS (1991), analisa grandes deslocamentos em placas sobre fundação elástica considerando a não-linearidade da reação da fundação.

As integrais de domínio, decorrentes da própria formulação do método, também tem sido objeto de estudo, especialmente das integrais de domínio cuja densidade é função da resposta do problema. O tratamento usual destas integrais é feito através da subdivisão do domínio em células. Um tratamento diferente, foi proposto por NARDINI & BREBBIA (1982, 1983), denominado Processo da Reciprocidade Dual, no qual, a integral de domínio é substituída por uma aproximação baseada em integrais de contorno, sendo aplicado inicialmente na análise de vibrações e de elastodinâmica, foi posteriormente estendido para problemas de potencial (NARDINI & BREBBIA 1985). Uma outra alternativa foi proposta por VENTURINI (1988), que consiste na escolha de uma função adequada para a aproximação da densidade da integral de domínio, a qual é transformada em integrais de contorno utilizando-se sucessivas integrais por partes, esta alternativa, com algumas modificações, foi utilizada por CODA (1990), na análise da vibração livre de meios elásticos bidimensionais, e por TEJERINA CALDERÓN (1991), em placas sobre fundação elástica, obtendo-se resultados satisfatórios. Fórmulas explícitas para integrais de domínio sobre áreas trapezoidais são apresentadas por ABDEL-AKHER et al. (1989). TAKHTEYEV & BREBBIA (1990), propoem a transformação de integrais de domínio em integrais sobre o contorno de subdomínios ou células, utilizando soluções particulares. PATRIDGE & BREBBIA

(1990), aplicam o método da reciprocidade dual em problemas governados pela equação de Poisson, mostrando a sua fácil adaptação na análise de outros tipos de problemas (PATRIDGE et al., 1991). NOWAK & BREBBIA (1989) e NEVES & BREBBIA (1991), apresentam novos tratamentos para transformar integrais de domínio em integrais de contorno utilizando o Método da Reciprocidade Múltipla.

A formulação do método para o estudo de sólidos tridimensionais começa com CRUSE (1969), que utiliza a solução fundamental de Kelvin em problemas gerais de elasticidade, adotando uma discretização linear para a geometria e uma aproximação constante para as variáveis. LACHAT (1975), também utilizando a solução fundamental de Kelvin, aplica o método em problemas de elasticidade bi e tridimensional, adotando elementos curvos de segunda ordem, onde a aproximação das variáveis poderia ser linear, quadrática ou cúbica. Um trabalho muito importante é o apresentado por NAKAGUMA (1979), quem mostra a vantagem da utilização das soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti e Mindlin, no estudo de sólidos tridimensionais de domínio semi-infinito, como interação solo-estrutura, escavações e outros, onde a sua aplicação se torna bastante apropriada, uma vez que dispensa a discretização da superfície livre do semi-infinito. A solução fundamental de Kelvin, é também utilizada no trabalho de CUROTO (1981), que considera na formulação, os efeitos de forças de volume e temperatura, e utiliza elementos isoparamétricos triangulares planos de variação linear. SÁ & TELLES (1986), utilizando as soluções de Kelvin e Mindlin, ambas em notação indicial, apresentam uma análise numérica de problemas de elasticidade linear tridimensional. SILVA, J. (1989), apresenta um trabalho que possibilita o emprego de elementos triangulares e quadrilaterais; constantes, lineares e quadráticos; contínuos, descontínuos e de transição, permitindo qualquer combinação entre eles. Ainda utilizando a solução de Kelvin, FERREIRA (1990), apresenta a técnica do elemento de colocação não nodal, para tratar descontinuidades de forças de superfície em domínios tridimensionais. BARBIRATO (1991), utilizando as soluções de Kelvin, Boussinesq-Cerruti e Mindlin, analisa sólidos tridimensionais, discretizando-os com elementos triangulares planos, onde as variáveis são aproximadas por funções de interpolação constante e linear, apresenta também uma formulação para o elemento linear descontínuo. Entre outros autores que trabalharam com sólidos tridimensionais, destacam-se BREBBIA (1978), BANERJEE (1969) e BUTTERFIELD & BANERJEE (1971).

O presente trabalho tem como objetivo principal, apresentar o uso do Método dos Elementos de Contorno para o estudo de interação de

placas com o meio contínuo. A placa, baseada na teoria de KIRCHHOFF (1850), inclui na sua equação integral de deslocamento, uma integral de domínio, para representar a reação do solo. Esta integral de domínio é tratada utilizando-se células internas, o processo da reciprocidade dual e uma formulação alternativa. Inicialmente, a reação do solo é aproximada utilizando-se a teoria de WINKLER (1867), posteriormente, o solo é considerado como sendo um sólido tridimensional elástico de domínio semi-infinito, assim, ele pode ser analisado pelo Método dos Elementos de Contorno utilizando-se as soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti e Mindlin. É considerada também, a não-linearidade da reação do solo, adotando-se um critério de plastificação simples e bilinear. Em cada caso, são comparados entre si, os resultados obtidos pelas três formulações já mencionadas.

Inicialmente, no capítulo II, são apresentadas as relações básicas da teoria da elasticidade para sólidos tridimensionais e placas, estas últimas, baseadas na teoria de KIRCHHOFF (1850). A partir dessas relações são determinadas as equações diferenciais governantes para cada problema. São também apresentadas, as soluções fundamentais para sólidos tridimensionais e placas.

No capítulo III, são apresentadas as equações integrais de contorno para sólidos tridimensionais e placas, que relacionam o deslocamento de um ponto qualquer do domínio ou do contorno, com deslocamentos e esforços no contorno dos mesmos. A obtenção dessas equações integrais, é feita utilizando-se a técnica dos resíduos ponderados e o teorema da reciprocidade de BETTI (1872), respectivamente. A integral de domínio correspondente ao carregamento transversal da placa é transformada em integrais sobre o contorno da região carregada.

No capítulo IV, o contorno do sólido tridimensional é discretizado em elementos, cuja geometria é aproximada em função dos seus nós geométricos através de funções de interpolação. Sobre esses elementos, são também aproximados os deslocamentos e forças de superfície, em função dos seus valores nodais. Aplicando-se as equações integrais em uma quantidade igual às incógnitas, são transformadas em um sistema de equações algébricas lineares que pode ser resolvido após a imposição das condições de contorno, fornecendo as incógnitas no contorno, com as quais podem ser determinados esforços e deslocamentos em pontos do domínio. Finalmente, são apresentadas algumas aplicações numéricas mostrando a validade da formulação adotada neste capítulo.

No capítulo V, as equações integrais de deslocamento, aplicadas em pontos do contorno, nos cantos e fora do domínio da placa, são transformadas em equações algébricas lineares, através da discretização

do contorno em elementos, nos quais as variáveis são aproximadas por funções lineares. Tal sistema de equações algébricas, é resolvido após a imposição das condições de contorno, obtendo-se assim as incógnitas (esforços e deslocamentos), nos nós e cantos da placa, úteis para a determinação de esforços e deslocamentos em pontos do domínio. Na montagem do sistema de equações, os termos relacionados com os cantos da placas são tratados como variáveis do problema. No final do capítulo, são apresentadas aplicações numéricas, cujos resultados são comparados com resultados obtidos com uma técnica numérica diferente ou com a solução analítica da equação diferencial de placas.

A equação integral de deslocamento utilizada para a resolução de placas, no capítulo V, é estendida para a análise de placas apoiadas sobre o solo, no capítulo VI, acrescentando-se uma integral de domínio proveniente da reação do solo, sendo esta, aproximada segundo a teoria de WINKLER (1867). Essa integral de domínio, é tratada utilizando-se células internas, o processo da reciprocidade dual e uma formulação alternativa, que consiste em aproximar a densidade dessa integral de domínio por uma função apropriada e transforma-la em integrais de contorno pela aplicação sucessiva de integrações por partes. É considerada também, a não-linearidade da reação do solo adotando-se um critério de plastificação simples e bilinear. Finalmente, são comparados os resultados obtidos pelas três formulações, mostrando a eficiência de cada uma delas, em relação a resultados teóricos.

No capítulo VII, a formulação proposta no capítulo V, para a resolução de placas, é também estendida para a análise da interação placa-solo, acrescentando-se uma integral de domínio proveniente da reação do solo, na equação integral de deslocamento. Essa integral de domínio, que contém como variável do problema a própria reação do solo, é também tratada utilizando-se células internas, o processo da reciprocidade dual e uma formulação alternativa. O solo, é considerado como sendo um sólido tridimensional de domínio semi-infinito e é analisado pela formulação do Método dos Elementos de Contorno para sólidos tridimensionais, utilizando-se as soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti e Mindlin. A interação placa-solo, é realizada utilizando-se as formulações da placa e o solo, estabelecendo-se equações de equilíbrio de forças de contato e compatibilidade de deslocamentos transversais, em todos os pontos da interface. A não-linearidade da reação do solo, é também considerada, adotando-se o mesmo critério do capítulo VI. No final do capítulo, são apresentadas aplicações numéricas, comparando-se os resultados obtidos entre as três formulações.

CAPÍTULO II

SÓLIDOS TRIDIMENSIONAIS E PLACAS

2.1 Introdução

No presente capítulo serão apresentadas as relações básicas da teoria da elasticidade para sólidos tridimensionais, considerando-se as hipóteses de homogeneidade, isotropia e comportamento linear físico e geométrico. Serão apresentadas também relações básicas para placas delgadas segundo a teoria de KIRCHHOFF(1850).

Utilizando-se tais relações serão determinadas as equações diferenciais governantes para cada problema assim como as suas soluções fundamentais.

2.2 Relações básicas da teoria da elasticidade

2.2.1 Equações de equilíbrio

O equilíbrio estático de um elemento infinitesimal de um corpo tridimensional, elástico-linear e homogêneo (Figura 2.1), definido por um domínio Ω e contorno Γ , onde atuam forças de volume b_i e forças de superfície p_i , é dado pela equação diferencial a seguir:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.1)$$

onde:

σ_{ij} : é o tensor de tensões

b_i : é o vetor das forças volumétricas

As equações de equilíbrio dos momentos mostram a simetria existente no tensor das tensões, ou seja:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.2)$$

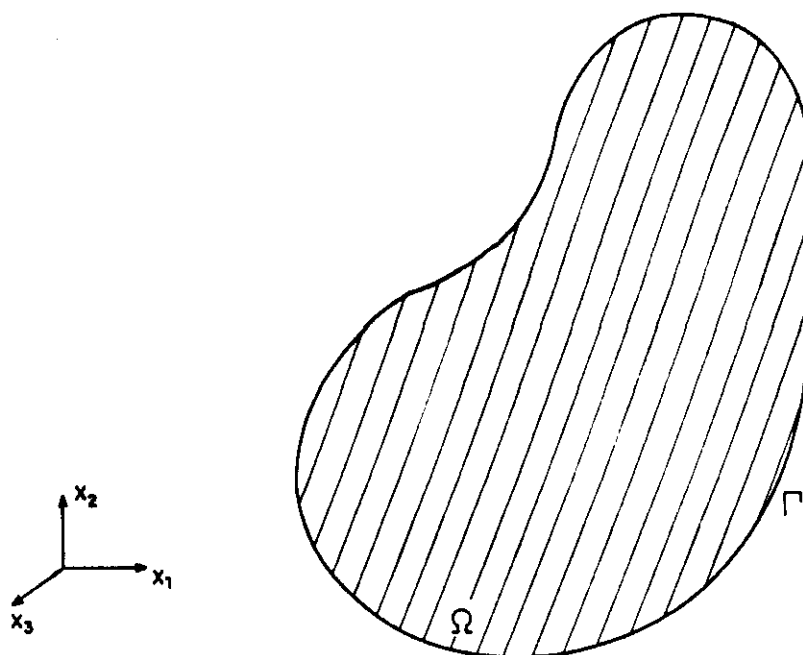


FIGURA 2.1 - Corpo tridimensional

As componentes das forças de superfície, podem ser expressas em função das componentes de tensão de um ponto da superfície :

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.3)$$

onde : n_j são os co-senos diretores dos ângulos entre a normal n , da face inclinada de um tetraedro em equilíbrio (Figura 2.2), e o eixo x_j .

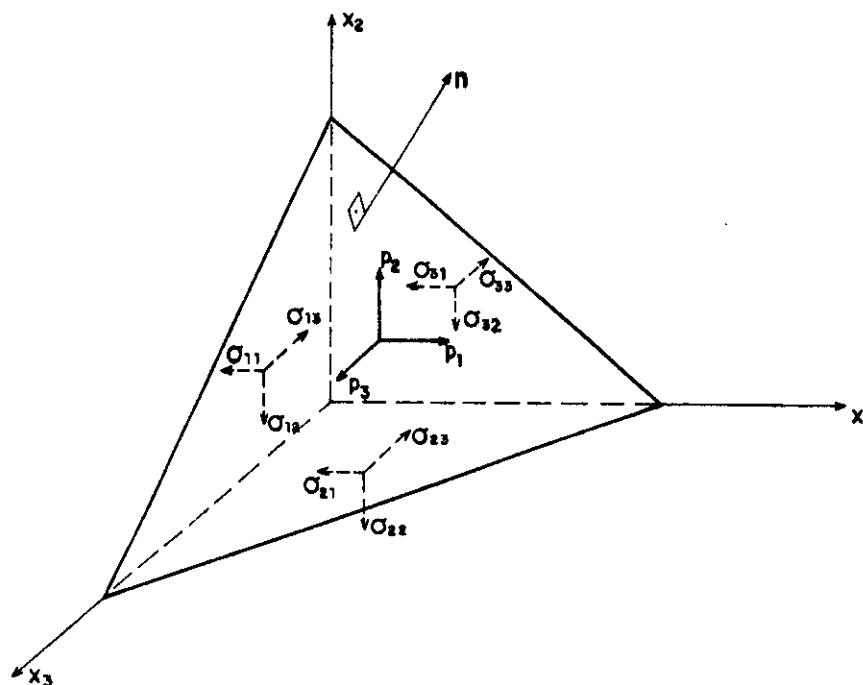


FIGURA 2.2 - Forças de superfície num tetraedro

2.2.2 Relação deformação-deslocamento

Considerando-se apenas pequenas deformações, a relação entre o tensor das deformações e os deslocamentos é dada por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

2.2.3 Relação tensão-deformação

As relações entre os tensores das tensões e das deformações, para um corpo homogêneo, isotrópico e linearmente elástico, são dadas pela lei de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.6)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.7)$$

onde:

E : módulo de elasticidade longitudinal

G : módulo de elasticidade transversal

ν : coeficiente de Poisson

δ_{ij} é o delta de Kronecker, que assume os seguintes valores:

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{se } i = j$$

2.3 Equação diferencial governante para um sólido tridimensional

Substituindo-se a equação (2.4) na (2.5) e esta na (2.1), obtém-se a equação diferencial do problema elástico em termos de deslocamentos, conhecida como equação de Navier :

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ii} + \frac{b_i}{G} = 0 \quad (2.8)$$

2.4 Relações básicas para placas delgadas

No estudo de placas delgadas submetidas a carregamentos ortogonais ao plano médio inicial, segundo a Teoria de KIRCHHOFF(1850), são consideradas as seguintes hipóteses:

a) o material da placa é considerado elástico-linear homogêneo e isótropo;

b) os deslocamentos transversais são pequenos se, comparados com a espessura "h" da placa;

c) uma reta inicialmente normal ao plano médio da placa, depois da flexão, permanece reta e perpendicular ao plano médio deformado;

d) as tensões de cisalhamento atuantes nas superfícies limitrofes da placa são desprezíveis.

A hipótese a) corresponde à Lei de Hooke, expressa na equação (2.5) ou (2.6).

A hipótese d) considera que:

$$\sigma_{zx} \cong 0 \quad (2.9.a)$$

$$\sigma_{zy} \cong 0 \quad (2.9.b)$$

$$\sigma_{zz} \cong 0 \quad (2.9.c)$$

Igualando-se as equações (2.4) e (2.6) nas direções das tensões dadas nas expressões (2.9), tem-se:

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.12)$$

A hipótese c), considera que as tensões paralelas ao plano médio da placa, variam linearmente com sua espessura, isto é:

$$\sigma_{xx} = a_1(x,y) + b_1(x,y)z \quad (2.13.a)$$

$$\sigma_{yy} = a_2(x,y) + b_2(x,y)z \quad (2.13.b)$$

Substituindo-se (2.13) em (2.12) e integrando-se em z obtém-se:

$$u_z = w(x,y) - \frac{\nu}{E} [a_1(x,y) + a_2(x,y)]z + \frac{\nu}{E} [b_1(x,y) + b_2(x,y)] \frac{z^2}{2} \quad (2.14)$$

Os dois últimos termos podem ser desprezados em comparação com $w(x,y)$, que representa o deslocamento transversal do plano médio, onde a coordenada z vale zero, ficando:

$$u_z = w(x,y) \quad (2.15)$$

De (2.10) e (2.11) obtém-se respectivamente:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.16.a)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.16.b)$$

Substituindo-se (2.15) nas equações (2.16) e integrando-se em relação a z , obtém-se:

$$u_x = u(x,y) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) \quad (2.17.a)$$

$$u_y = v(x,y) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x,y) \quad (2.17.b)$$

Os termos $u(x,y)$ e $v(x,y)$, que são os deslocamentos tangenciais dos pontos do plano médio da placa, bem como $w(x,y)$, serão escritos por simplicidade, como u , v e w .

Com as expressões dadas em (2.17) e a equação (2.4) podem ser determinadas as deformações, e com estas, as tensões no plano médio da placa, utilizando-se as equações (2.5) e (2.9):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.18.a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.18.b)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.18.c)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (2.19.a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \quad (2.19.b)$$

$$\sigma_{xy} = 2G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (2.19.c)$$

Na solução de placas, são definidos os esforços solicitantes por unidade de comprimento (Figura 2.3), correspondentes às tensões que atuam ao longo da espessura de um elemento genérico de placa, isto é:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx} z dz \quad (2.20.a)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yy} z dz \quad (2.20.b)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xy} z dz \quad (2.20.c)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xz} dz \quad (2.21.a)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yz} dz \quad (2.21.b)$$

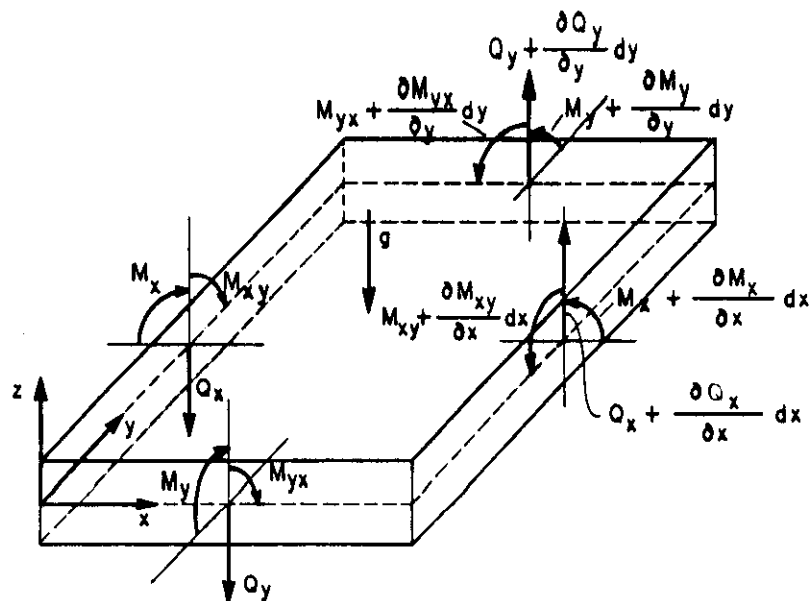


FIGURA 2.3 - Esforços em um elemento de placa

Substituindo-se as equações (2.19) nas equações (2.20) respectivamente, obtém-se:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.22.a)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.22.b)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.22.c)$$

onde:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.23)$$

é a rigidez da placa à flexão.

Fazendo-se o equilíbrio dos esforços atuantes no elemento de placa da figura 2.3 obtém-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (2.24.a)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (2.24.b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + g = 0 \quad (2.25)$$

onde, g é a resultante total das cargas transversais.

Substituindo-se os valores de Q_x e Q_y de (2.24) em (2.25), e considerando-se que $M_{xy} = M_{yx}$, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -g \quad (2.26)$$

A expressão (2.26), representa a equação diferencial de placas escrita em termos de esforços, substituindo-se as expressões (2.22) na mesma, fica expressa apenas em função do deslocamento transversal w :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{g}{D} \quad (2.27)$$

que também pode ser escrita como:

$$\Delta \Delta w = \frac{g}{D} \quad (2.28)$$

sendo:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.29)$$

Substituindo-se as expressões (2.22) nas equações (2.24), obtém-se as forças cortantes Q_x e Q_y em termos do deslocamento transversal w :

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y^2} \Delta w \quad (2.30.a)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \quad (2.30.b)$$

As equações (2.22) e (2.30) escritas indicialmente ficam:

$$M_{ij} = -D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_\ell \partial x_\ell} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (2.31)$$

$$Q_i = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_\ell \partial x_\ell} \quad (2.32)$$

Devido à formulação do método, é necessário que os momentos fletores e forças cortantes sejam referidas a um outro sistema de coordenadas n e s ortogonais (Figura 2.4), situadas no contorno da placa.

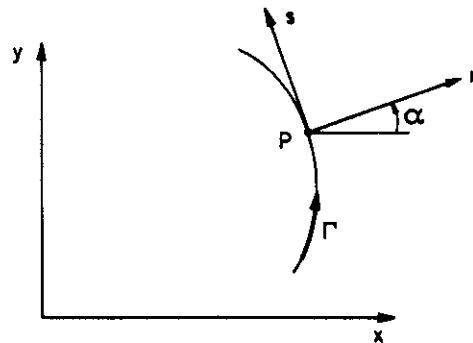


FIGURA 2.4 - Sistemas de coordenadas (x,y) e (n,s)

A relação entre os sistemas de coordenadas (x,y) e (n,s) , escrita em forma matricial fica:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} \quad (2.33.a)$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} = [T]^T \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2.33.b)$$

onde, $[T]$ é a matriz de transformação dada por:

$$[T] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Utilizando-se convenientemente a relação (2.33.b), podem ser obtidos os momentos fletores e forças cortantes, nas novas coordenadas (n,s), da seguinte maneira:

$$[M_{(n,s)}] = [T]^T [M_{(x,y)}] [T] \quad (2.35)$$

$$\{Q_{(n,s)}\} = [T]^T \{Q_{(x,y)}\} \quad (2.36)$$

que escritas em forma explícita ficam:

$$M_n = M_x \cos^2 \alpha + 2M_{xy} \sin\alpha \cos\alpha + M_y \sin^2 \alpha \quad (2.37.a)$$

$$M_{ns} = (M_y - M_x) \sin\alpha \cos\alpha + M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (2.37.b)$$

$$M_s = M_x \sin^2 \alpha - 2M_{xy} \sin\alpha \cos\alpha + M_y \cos^2 \alpha \quad (2.37.c)$$

$$Q_n = Q_x \cos\alpha + Q_y \sin\alpha \quad (2.38.a)$$

$$Q_s = -Q_x \sin\alpha + Q_y \cos\alpha \quad (2.38.b)$$

Para a resolução da equação diferencial de placas, será necessário impor as condições de contorno com relação ao deslocamento w , à sua derivada $\partial w / \partial n$ e aos esforços M_n , M_{ns} e Q_n . Entretanto, segundo KIRCHHOFF (1850), as condições de contorno relativas a cortante, Q_n , e ao momento volvente, M_{ns} , podem ser agrupadas em uma única, dando origem a um esforço denominado cortante equivalente, cuja intensidade por unidade de comprimento é:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (2.39)$$

Ficando assim, compatível com a ordem da equação diferencial, que só pode ter quatro valores independentes no contorno.

Quando n coincide com os eixos x ou y , obtém-se:

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (2.40.a)$$

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2.40.b)$$

2.5 Equações de placas em coordenadas polares

Na análise de placas pelo método dos elementos de contorno, são empregadas equações integrais envolvendo soluções fundamentais, as mesmas que serão tratadas posteriormente, e que são geralmente expressas em coordenadas polares, portanto, é necessário escrever a equação diferencial de placas, referida a este sistema de coordenadas.

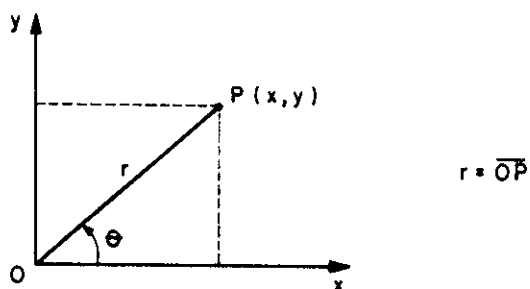


FIGURA 2.5 - Sistemas de coordenadas cartesianas e polares

As relações existentes entre os sistemas de coordenadas cartesianas e polares de um ponto P (Figura 2.5), são as seguintes:

$$x = r \cos \theta \quad (2.41.a)$$

$$y = r \sin \theta \quad (2.41.b)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.42.a)$$

$$\theta = \arctg \frac{y}{x} \quad (2.42.b)$$

A partir de (2.42) e (2.41) podem-se obter as derivadas parciais de r e θ em relação a x e y :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta \quad (2.43.a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \text{sen}\theta \quad (2.43.b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{y}{r^2} = -\frac{\text{sen}\theta}{r} \quad (2.43.c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = -\frac{\cos\theta}{r} \quad (2.43.d)$$

Sendo r e θ funções de x e y , pode-se escrever:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.44)$$

Substituindo-se (2.43.a) e (2.43.c) em (2.44), obtém-se:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\text{sen}\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (2.45)$$

A partir de (2.45) pode-se definir o operador diferencial $\frac{\partial}{\partial x}$, escrito em função das coordenadas polares:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\text{sen}\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.46)$$

Aplicando-se este operador diferencial em (2.45), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \cos^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - 2\text{sen}\theta \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \text{sen}^2\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Analogamente a (2.45) e (2.47) podem-se obter, em relação a y , as seguintes expressões:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \text{sen}\theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \text{sen}^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2 \text{sen}\theta \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \cos^2\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Somando-se (2.47) e (2.49), obtém-se o operador diferencial de Laplace em coordenadas polares:

$$\Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w \quad (2.50)$$

Portanto, a equação diferencial de placas (2.28), em coordenadas polares, fica dada por:

$$\Delta \Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{g}{D} \quad (2.51)$$

Derivando-se (2.45) em relação a y , obtém-se a derivada mista em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \text{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\ &+ (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Assim, os momentos fletores e forças cortantes dadas nas equações (2.22) e (2.30) respectivamente, podem ser expressas em coordenadas polares, utilizando-se as relações (2.47), (2.49) e (2.52), isto é:

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.53.a)$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.53.b)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \left[\sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.53.c)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w = -D \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w \right] \quad (2.54.a)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w = -D \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \Delta w + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w \right] \quad (2.54.b)$$

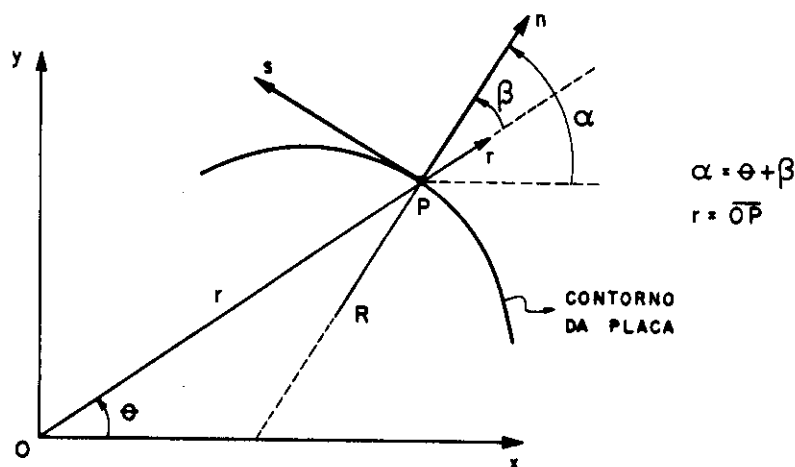


FIGURA 2.6 - Relação das coordenadas (n,s) de um ponto P do contorno da placa, com as coordenadas cartesianas e polares

Como se mostra na figura 2.6, β é o ângulo formado pelos versores \bar{r} e \bar{n} , que somado a θ , formam o ângulo α .

Substituindo-se em (2.37) o valor de $\alpha = \theta + \beta$ e os valores dados em (2.53), obtêm-se M_n , M_s e M_{ns} em coordenadas polares:

$$M_n = -D \left[(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w^2}{\partial \theta^2} \right) + 2(1 - \nu) \sin \beta \cos \beta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.55.a)$$

$$M_s = -D \left[(\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w^2}{\partial \theta^2} \right) - 2(1 - \nu) \sin \beta \cos \beta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.55.b)$$

$$M_{ns} = -D(1 - \nu) \left[\sin \beta \cos \beta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.56)$$

Pode-se obter também Q_n em coordenadas polares, substituindo-se (2.54) e o valor de α em (2.38.a):

$$Q_n = -D \left(\frac{\partial}{\partial r} \Delta w \cos \beta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w \sin \beta \right) \quad (2.57)$$

Derivando-se (2.56), que é função de r , θ e β , em relação à coordenada s , obtém-se:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} \quad (2.58)$$

As derivadas de r , θ e β , em relação a s , são:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = -\text{sen}\beta \quad (2.59.a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\text{cos}\beta}{r} \quad (2.59.b)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(\alpha - \theta) = \frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{R} - \frac{\text{cos}\beta}{r} \quad (2.59.c)$$

onde, R é o raio de curvatura do contorno no ponto P (Figura 2.6).

Substituindo-se em (2.58) os valores de (2.59), obtém-se:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = -\frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \text{sen}\beta + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \text{cos}\beta + \left(\frac{1}{R} - \frac{\text{cos}\beta}{r} \right) \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \quad (2.60)$$

Somando-se as expressões de Q_n e $\partial M_{ns} / \partial s$ dadas em (2.57) e (2.60) respectivamente, obtém-se a cortante equivalente V_n em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} V_n = & \left(-D \frac{\partial}{\partial r} \Delta w + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \right) \text{cos}\beta - \left(D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w + \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \right) \text{sen}\beta + \\ & + \left(\frac{1}{R} - \frac{\text{cos}\beta}{r} \right) \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (2.61)$$

2.6 Soluções fundamentais

Na análise de problemas físicos pelo Método dos Elementos de Contorno, são utilizadas equações integrais envolvendo soluções fundamentais, sendo estas, determinadas de forma particular de acordo com o tipo de problema a ser analisado. A solução fundamental, é definida como sendo a resposta em um ponto genérico "p" de um domínio (infinito ou semi-infinito), denominado domínio fundamental, devido a aplicação de uma carga unitária em outro ponto "q" deste domínio.

Uma definição muito importante, utilizada na determinação das soluções fundamentais, é a chamada distribuição delta de Dirac $\delta(q,p)$, que tem as seguintes propriedades:

$$\delta(q,p) = 0 \quad \text{se } p \neq q \quad (2.62.a)$$

$$\delta(q,p) = \infty \quad \text{se } p = q \quad (2.62.b)$$

$$\int_{\Omega} \phi(p) \delta(q,p) d\Omega = \phi(q) \quad (2.63)$$

onde, $\phi(p)$ representa uma função qualquer definida no domínio Ω .

Pode-se concluir, a partir de (2.63) que:

$$\int_{\Omega} \delta(q,p) d\Omega = 1 \quad (2.64)$$

ou seja, a integral da distribuição delta de Dirac sobre o domínio Ω , é uma ação unitária aplicada no ponto "q".

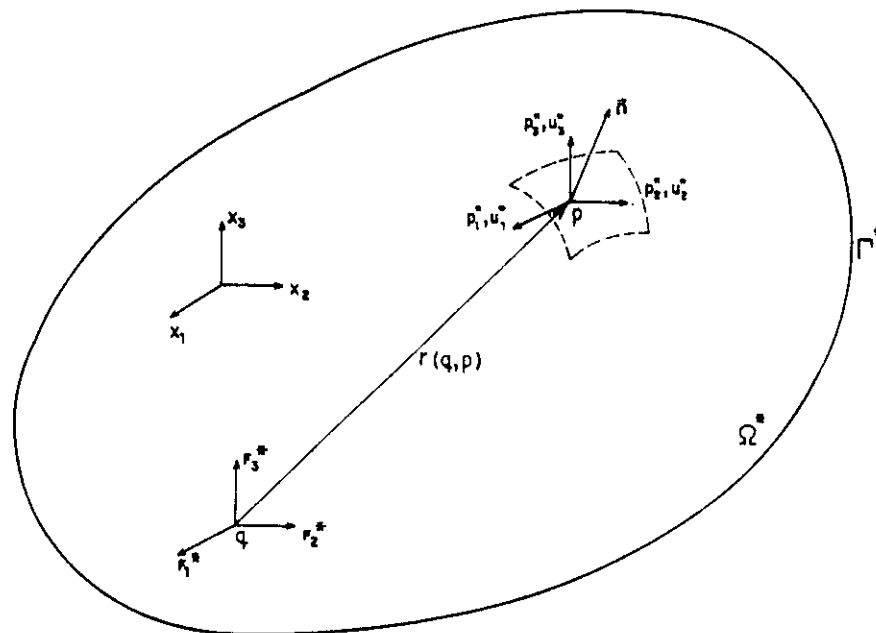


FIGURA 2.7 - Resposta em p devida a uma força unitária em q

2.6.1 Soluções fundamentais para sólidos tridimensionais

Para a determinação da solução fundamental de um sólido tridimensional finito de domínio Ω e contorno Γ , considera-se que o mesmo está contido em outro, de domínio infinito Ω^* e contorno Γ^* (Figura 2.7), assim, a sua solução fundamental é definida como sendo as respostas em um ponto "p", devido à aplicação de uma força unitária

$F_i^*(q)$ em um ponto "q", na direção de um dos eixos coordenados. O símbolo *, significa que se trata de um problema fundamental.

A partir de (2.1), pode ser obtida a equação de equilíbrio para o problema fundamental:

$$\sigma_{ij,j}^* + \delta(q,p)F_i^*(q) = 0 \quad (2.65)$$

onde:

$$\delta(q,p)F_i^*(q) = b_i^*(p) \quad (2.66)$$

A equação (2.65), em termos de deslocamentos, fica:

$$u_{i,ij}^*(p) + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ij}^*(p) + \frac{\delta(q,p)F_i^*(q)}{G} = 0 \quad (2.67)$$

Determinando-se os deslocamentos $u_i^*(p)$ da equação (2.67) e com ajuda das relações (2.4), (2.5) e (2.3), obtém-se as forças de superfície para o problema fundamental:

$$p_i^*(p) = G \left(u_{i,n}^*(p) + u_{j,i}^*(p)n_j + \frac{2\nu}{1-2\nu} u_{j,j}^*(p)n_i \right) \quad (2.68)$$

Os deslocamentos $u_i^*(p)$ e as forças de superfície $p_i^*(p)$, podem ser definidos como:

$$u_i^*(p) = u_{ji}^*(q,p)F_j^*(q) \quad (2.69.a)$$

$$p_i^*(p) = p_{ji}^*(q,p)F_j^*(q) \quad (2.69.b)$$

onde, os índices j e i dos tensores de segunda ordem u_{ji}^* e p_{ji}^* , indicam as direções da força unitaria e da sua resposta (deslocamento ou força de superfície) respectivamente (Figura 2.8).

As soluções fundamentais, dependem das características do domínio, o qual pode ser considerado infinito ou semi-infinito, devendo existir assim, uma solução fundamental para cada problema fundamental, algumas delas são comentadas nos itens a seguir.

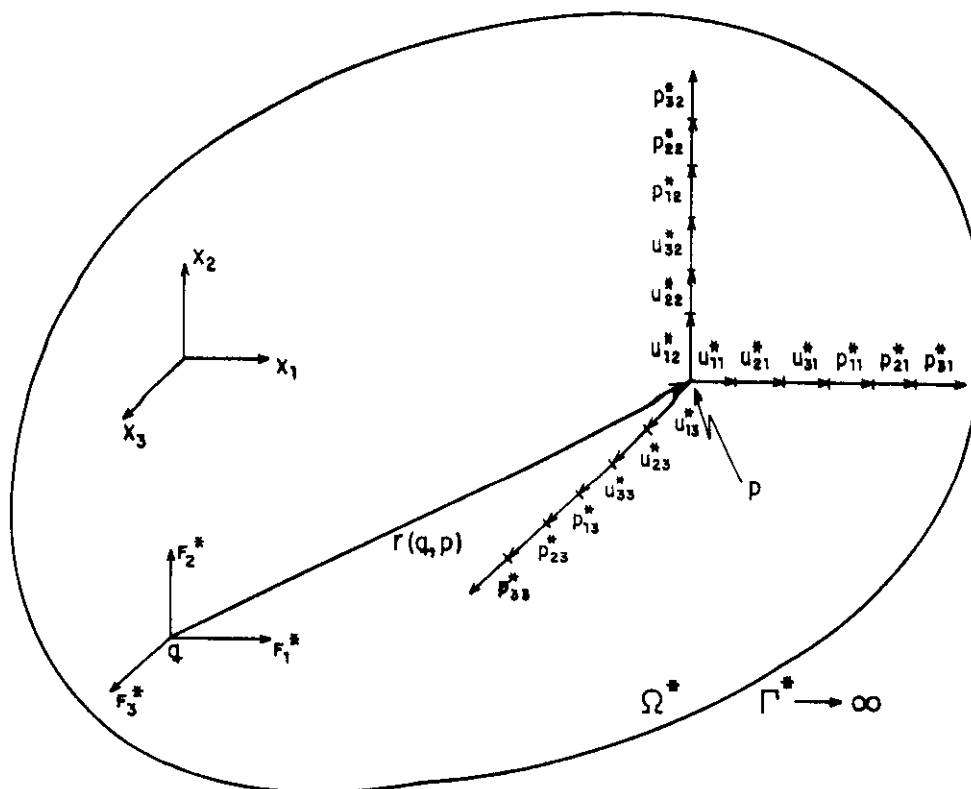


FIGURA 2.8 - Componentes dos tensores u_{ji}^* e p_{ji}^*

2.6.1.1 Solução fundamental de Kelvin

A solução fundamental de Kelvin (LOVE, 1944), é determinada considerando-se o domínio Ω^* , como um sólido elástico, homogêneo e infinito (Figura 2.9).

As expressões fundamentais para deslocamentos e forças de superfície, escritas indicialmente, são dadas por:

$$u_{ij}^*(q, p) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (2.70)$$

$$p_{ij}^*(q, p) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j} \right] r_{,n} + \right. \\ \left. -(1-2\nu)(r_{,i} n_{,j} + r_{,j} n_{,i}) \right\} \quad (2.71)$$

onde:

$$r = (r_i r_i)^{1/2} = |q - p| \quad (2.72.a)$$

$$r_i = x_i(p) - x_i(q) \quad (2.72.b)$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(q)} = \frac{r_i}{r} \quad (2.72.c)$$

$$r_{,n} = r_{,i} n_i(q) \quad (2.72.d)$$

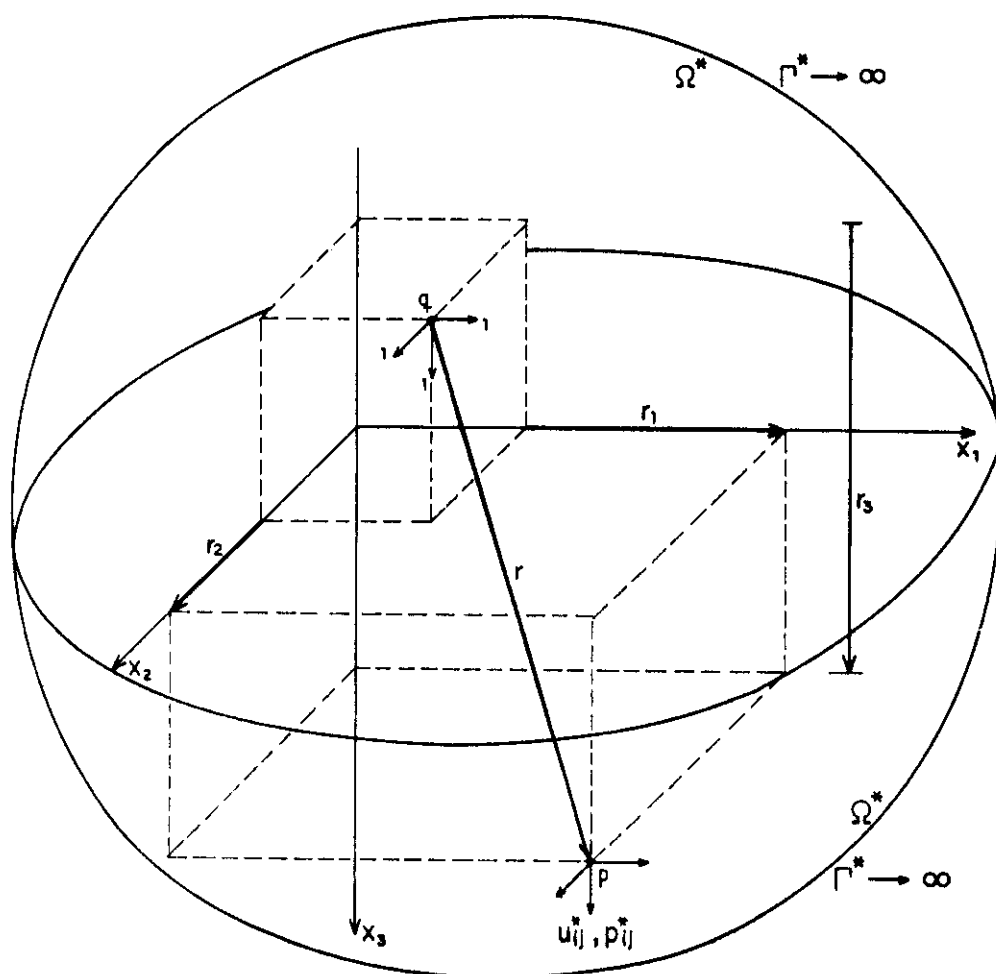


FIGURA 2.9 - Problema fundamental de Kelvin

2.6.1.2 Solução fundamental de Mindlin

No problema fundamental de Mindlin (MINDLIN, 1936), o domínio Ω^* é considerado como sendo um sólido semi-infinito, elástico e homogêneo (Figura 2.10), no qual existe um plano $x_3 = 0$, livre de forças

$$\begin{aligned}
u_{12}^* &= K_d r_1 r_2 \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{3-4\nu}{R^3} - \frac{6cz}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \right\} \\
u_{13}^* &= K_d r_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} - \frac{6czR_3}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right\} \\
u_{21}^* &= u_{12}^* \\
u_{22}^* &= K_d \left\{ \frac{3-4\nu}{r} + \frac{1}{R} + \frac{r_2^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_2^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left[1 - \frac{3r_2^2}{R^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R+R_3} \left[1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_3)} \right] \right\} \\
u_{23}^* &= \frac{r_2}{r_1} u_{23}^* \\
u_{31}^* &= K_d r_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} + \frac{6czR_3}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right\} \\
u_{32}^* &= \frac{r_2}{r_1} u_{31}^* \\
u_{33}^* &= K_d \left\{ \frac{3-4\nu}{r} + \frac{8(1-\nu)^2(3-4\nu)}{R} + \frac{r_3^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)R_3^2}{R^3} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{2cz}{R^3} \left[1 - \frac{3R_3^2}{R^2} \right] \right\} \tag{2.73}
\end{aligned}$$

As expressões para as forças de superfície são determinadas com:

$$p_{ij}^* = \sigma_{jk}^* n_k \tag{2.74}$$

onde, n_k é o vetor normal á superfície no ponto p , e σ_{jk}^{*i} é o tensor de terceira ordem das tensões, cujos componentes são dados de forma explícita a seguir:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{*1} = K_s r_1 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[3 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{6c}{R^5} \left[3c - (3-2\nu)R_3 + \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{*1} = K_s r_1 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] - \frac{6cz}{R^5} \left[1 - \frac{5r_1^2}{R^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{*1} = K_s \left\{ -\frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} + \frac{(1-2\nu)r_3}{R^3} - \frac{3r_1^2 r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2 R_3}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{6c}{R^5} \left[zR_3 - (1-2\nu)r_1^2 - \frac{5r_1^2 z R_3}{R^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{*1} = K_s r_1 \left\{ \frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{6c}{R^5} \left[c - (1-2\nu)R_3 + \frac{5r_2^2 z}{R^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\sigma_{23}^{*1} = K_s r_1 r_2 \left\{ -\frac{3r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)R_3}{R^5} + \frac{6c}{R^5} \left[1 - 2\nu + \frac{5zR_3}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{33}^{*1} = K_s r_1 \left\{ \frac{1-2\nu}{r^3} - \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)R_3^2}{R^5} + \right. \\ \left. + \frac{6c}{R^3} \left[c + (1-2\nu) + \frac{5R_3^2 z}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{11}^{*2} = K_s r_2 \left\{ \frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{6c}{R^5} \left[c - (1-2\nu)R_3 + \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{12}^{*2} = K_s r_1 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] - \frac{6c}{R^5} \left[1 + \frac{5r_2^2}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{13}^{*2} = \sigma_{23}^{*1}$$

$$\sigma_{22}^{*2} = K_s r_2 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[3 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \right.$$

$$+ \frac{6c}{R^5} \left[3c - (3 - 2\nu)R_3 + \frac{5r_2^2 z}{R^2} \right]$$

$$\sigma_{23}^{*2} = K_s \left\{ -\frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} + \frac{(1-2\nu)r_3}{R^3} - \frac{3r_2^2 r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2 R_3}{R^5} + \right.$$

$$\left. -\frac{6c}{R^5} \left[zR_3 - (1-2\nu)r_2^2 - \frac{5r_2^2 z R_3}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{33}^{*2} = \frac{r_2}{r_1} \sigma_{33}^{*1}$$

$$\sigma_{11}^{*3} = K_s \left\{ \frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(3r_3 - 4\nu R_3)}{R^3} - \frac{3r_1^2 r_3}{r^5} + \right.$$

$$\left. -\frac{3(3-4\nu)r_1^2 r_3 - 6cR_3[(1-2\nu)z - 2\nu c]}{R^5} - \frac{30cr_1^2 z R_3}{R^7} + \right.$$

$$\left. -\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \left[1 - \frac{r_1^2}{R(R+R_3)} - \frac{r_1^2}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{12}^{*3} = K_s r_1 r_2 \left\{ -\frac{3r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_3}{R^5} - \frac{30czR_3}{R^7} + \right.$$

$$\left. -\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R^2(R+R_3)} \left[\frac{1}{R+R_3} + \frac{1}{R} \right] \right\}$$

$$\sigma_{13}^{*3} = K_s r_1 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)zR_3 - 3c(3z+c)}{R^5} + \right.$$

$$\left. -\frac{30czR_3^2}{R^7} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{22}^{*3} = & K_s \left\{ \frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(3r_3 - 4\nu R_3)}{R^3} - \frac{3r_2^2 r_3}{r^5} + \right. \\
& - \frac{3(3-4\nu)r_2^2 r_3 - 6cR_3[(1-2\nu)z - 2\nu c]}{R^5} - \frac{30cr_2^2 z R_3}{R^7} + \\
& \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \left[1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_3)} - \frac{r_2^2}{R^2} \right] \right\} \\
\sigma_{23}^{*3} = & K_s r_2 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)zR_3 - 3c(3z+c)}{R^5} + \right. \\
& \left. - \frac{30czR_3^2}{R^7} \right\} \\
\sigma_{33}^{*3} = & K_s \left\{ -\frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} + \frac{(1-2\nu)r_3}{R^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} + \right. \\
& \left. - \frac{3(3-4\nu)zR_3^2 - 3cR_3(5z-c)}{R^5} - \frac{30czR_3^3}{R^7} \right\} \tag{2.75}
\end{aligned}$$

Nas soluções fundamentais (2.73) e (2.75), além das expressões dadas em (2.72), são também válidas as seguintes:

$$R = (R_1 R_2)^{1/2}$$

$$R_1 = x_1(p) - x_1(q')$$

$$c = x_3(q) > 0$$

$$z = x_3(p) > 0$$

$$K_d = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)}$$

$$K_s = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad (2.76)$$

Na figura 2.10, o parâmetro c , representa a distância entre o ponto de carregamento q e o plano $x_3 = 0$ do contorno. Pode-se observar que se $c \rightarrow \infty$, a influência desse plano desaparece, caracterizando assim o problema fundamental de Kelvin.

2.6.1.3 Solução fundamental de Boussinesq-Cerruti

A solução fundamental de Boussinesq-Cerruti (MINDLIN, 1936), pode ser considerada como um caso particular da solução fundamental de Mindlin, embora ela tenha sido primeiramente determinada a partir das soluções clássicas de Boussinesq e Cerruti, as quais só admitem que a força unitária seja aplicada no plano livre de forças de superfície $x_3 = 0$ (Figura 2.11), na direção normal e tangente ao mesmo, respectivamente.

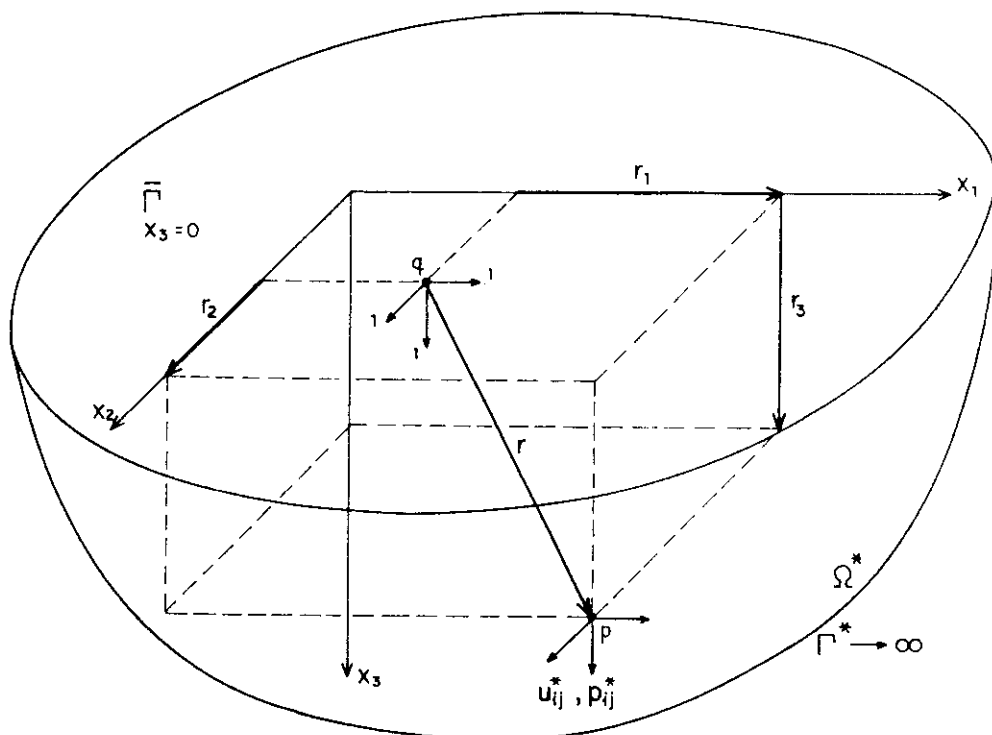


FIGURA 2.11 - Problema fundamental de Boussinesq-Cerruti

Como os pontos de aplicação da força unitária e da resposta, estão no plano livre de forças de superfície $x_3 = 0$, as forças de superfície

fundamentais são nulas. Os deslocamentos fundamentais podem ser obtidos fazendo-se com que $c \rightarrow 0$, nas soluções fundamentais de Mindlin, dadas em (2.73), ficando assim:

$$\begin{aligned}
 u_{11}^* &= k[(1 - \nu) + \nu r_{,1}^2] \\
 u_{12}^* &= k\nu r_{,1} r_{,2} \\
 u_{13}^* &= k(0.5 - \nu)r_{,1} \\
 u_{21}^* &= u_{12}^* \\
 u_{22}^* &= k[(1 - \nu) + \nu r_{,2}^2] \\
 u_{23}^* &= k(0.5 - \nu)r_{,2} \\
 u_{31}^* &= -u_{13}^* \\
 u_{32}^* &= -u_{23}^* \\
 u_{33}^* &= k(1 - \nu)
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

onde:

$$k = \frac{1}{2\pi Gr} \tag{2.78}$$

Observa-se então, que as soluções fundamentais de Kelvin e Boussinesq-Cerruti, podem ser obtidas a partir da solução fundamental de Mindlin, considerando-se assim como casos particulares desta.

No presente trabalho, serão utilizadas as soluções de Boussinesq-Cerruti e Mindlin, para a análise do solo, devido às características adequadas que apresentam na interação com a estrutura, que neste caso será a placa.

2.6.2 Soluções fundamentais para placas

No caso particular de placas, é considerado um domínio bidimensional infinito (Figura 2.12), onde a solução fundamental básica é o deslocamento transversal w^* , obtido em um ponto p , denominado ponto de deslocamento, devido à ação de uma força unitária aplicada em um ponto q , denominado ponto de carregamento, a partir da equação diferencial de placas (2.28), na qual a carga transversal g , foi substituída pela função delta de Dirac $\delta(q,p)$, ficando:

$$\Delta\Delta w^* = \delta(q,p) / D \quad (2.79)$$

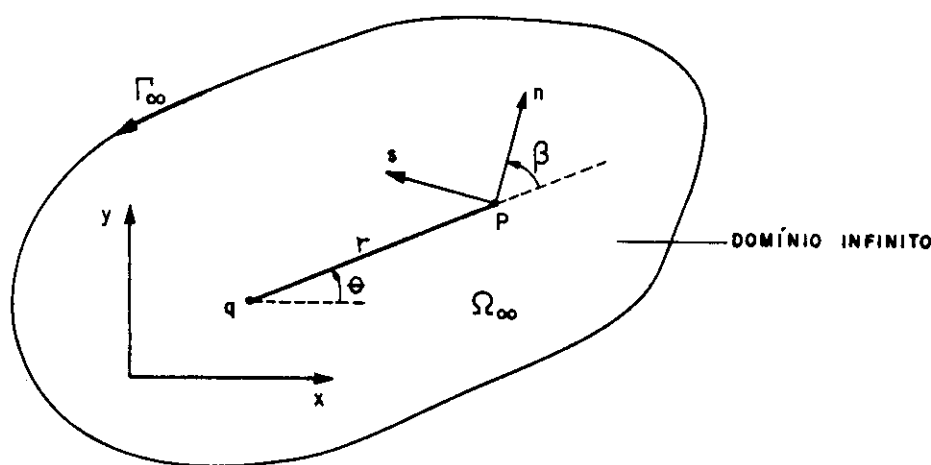


FIGURA 2.12 - Pontos de carregamento q e de deslocamento p

Aplicando-se a equação (2.79), a todos os pontos do domínio, exceto ao ponto de carregamento q , tem-se:

$$\Delta\Delta w^* = 0 \quad (2.80)$$

Escrevendo-se (2.80) em coordenadas polares, cuja origem seja o ponto q (Figura. 2.12), e considerando-se a simetria existente em relação ao mesmo (domínio infinito), w^* só dependerá de r , isto é:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right) = 0 \quad (2.81)$$

Procedendo-se como PAIVA (1987), chega-se a seguinte solução da equação 2.81:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (2.82)$$

onde:

$$r = \left\{ [x(p) - x(q)]^2 + [y(p) - y(q)]^2 \right\}^{1/2} \quad (2.83)$$

A partir do deslocamento fundamental w^* , podem ser determinados também, a solução fundamental da sua derivada e dos esforços, referidos ao sistema de coordenadas (n,s) , localizado no ponto p (Figura 2.12), assim:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r \cos \beta \quad (2.84)$$

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi} [(1 + \nu) \ln r + (1 - \nu) \cos^2 \beta + \nu] \quad (2.85)$$

$$M_{ns}^* = \frac{1 - \nu}{8\pi} \sin 2\beta \quad (2.86)$$

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4\pi r} [2(1 + \nu) \sin^2 \beta - 3 + \nu] + \frac{1 - \nu}{4\pi R} \cos^2 \beta \quad (2.87)$$

onde:

$$\cos \beta = r_{,i} n_i \quad (2.88.a)$$

$$\sin \beta = -r_{,i} s_i \quad (2.88.b)$$

De forma análoga, poderão ser determinadas as soluções fundamentais das derivadas de w^* , $\frac{\partial w^*}{\partial n}$, M_n^* , M_{ns}^* e V_n^* , definidas no ponto "q" (Figura 2.13), em relação à coordenada m de um sistema de eixos cartesianos (m,u) , cuja origem é o ponto "q".

onde:

$$r_i m_i = \cos \phi \quad (2.94)$$

$$m_x = \cos \gamma \quad (2.95.a)$$

$$m_y = \text{sen } \gamma \quad (2.95.b)$$

$$n_x = \cos \alpha \quad (2.96.a)$$

$$n_y = \text{sen } \alpha \quad (2.96.b)$$

CAPÍTULO III

EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

3.1. Introdução

Neste capítulo, serão apresentadas as equações integrais que relacionam o deslocamento de um ponto qualquer do domínio ou do contorno do corpo (sólido tridimensional ou placa), com deslocamentos e esforços no contorno do mesmo. Tais equações, compostas por integrais que envolvem soluções fundamentais, são necessárias na formulação do método dos elementos de contorno e sua obtenção pode ser feita de varias maneiras, dentre as quais se destacam a técnica dos resíduos ponderados e o teorema da reciprocidade de Betti.

3.2 Equações integrais para sólidos tridimensionais

Na determinação de equações integrais, é utilizada a distribuição Delta de Dirac, vista no capítulo anterior, e a condição de Hölder, dada pela seguinte desigualdade:

$$|\phi(t_2) - \phi(t_1)| \leq A |t_2 - t_1|^\mu \quad (3.1)$$

onde: $\phi(t)$ é uma função definida e contínua em uma determinada curva, t_1 e t_2 são dois pontos desta curva, A e μ são constantes positivas, sendo que $0 \leq \mu \leq 1$.

3.2.1 Equação integral para pontos do domínio

Considere-se um corpo de domínio infinito (Kelvin) ou semi-infinito (Mindlin e Boussinesq-Cerruti), que contém um sólido tridimensional de domínio Ω e contorno Γ dividido em Γ_1 e Γ_2 , onde se encontram prescritos os deslocamentos e forças de superfície, respectivamente (Figura 3.1), isto é:

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i & \text{em } \Gamma_1 \\ p_i &= \bar{p}_i & \text{em } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

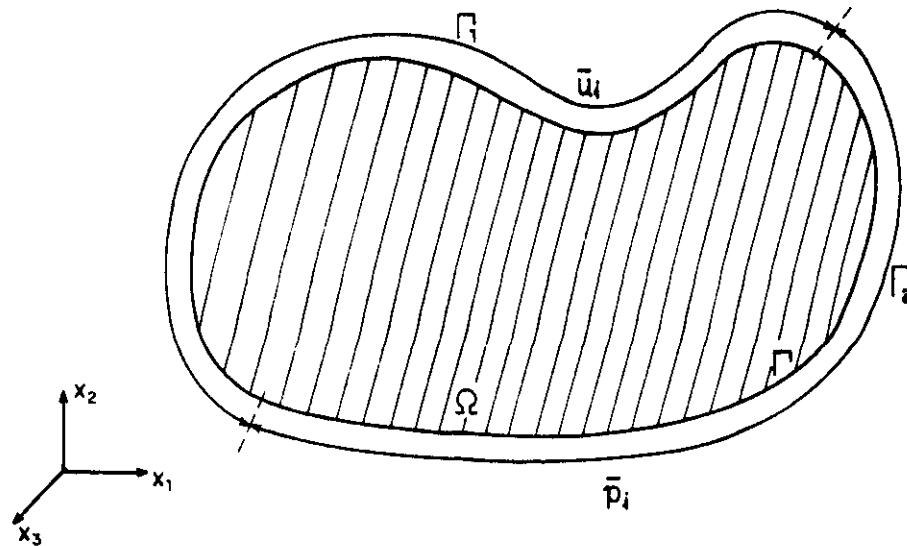


FIGURA 3.1 - Definição das condições de contorno

Utilizando-se a técnica dos Resíduos Ponderados (BREBIA, 1978) na equação (2.1), e considerando-se como funções ponderadoras as soluções fundamentais u_i^* e p_i^* , obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_i - \bar{p}_i) u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_i - u_i) p_i^* d\Gamma \quad (3.3)$$

Integrando-se por partes duas vezes a integral do primeiro membro de (3.3), afim de se eliminar o diferencial em j do tensor das tensões, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega &= - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_i u_i^* d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_2} u_i p_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_i p_i^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.4)$$

Agrupando-se as integrais dos contornos Γ_1 e Γ_2 , da equação 3.4, ela pode ser reescrita de uma forma mais geral, como:

$$- \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma = \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma \quad (3.5)$$

Substituindo-se na equação 3.5 o diferencial do tensor das tensões por (2.65), utilizando-se a propriedade (2.63) da função delta de Dirac, e tomando-se independentemente cada direção cartesiana, tem-se:

$$\begin{aligned} u_i(q) = & - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(q, P) u_j(P) d\Gamma(P) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(q, P) p_j(P) d\Gamma(P) + \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(q, p) b_j(p) d\Omega(p) \end{aligned} \quad (3.6)$$

A expressão (3.6), conhecida como identidade Somigliana, fornece os deslocamentos para pontos q no interior do domínio Ω , em termos de valores de contorno u_j e p_j , e forças de volume b_j .

A partir da equação (3.6), e utilizando-se as relações (2.4) e (2.5), podem ser determinadas também, as componentes de tensão para um ponto q do domínio Ω , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(q) = & - \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(q, P) u_k(P) d\Gamma(P) + \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(q, P) p_k(P) d\Gamma(P) + \\ & + \int_{\Omega} D_{ijk}^*(q, p) b_k(p) d\Omega(p) \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde, os tensores S_{ijk}^* e D_{ijk}^* dependem do tipo de problema fundamental a ser adotado. Para o problema fundamental de Kelvin (BREBBIA, 1978), eles são dados por:

$$\begin{aligned} S_{ijk}^* = & \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^3} \left\{ 3r_{,n} \left[(1-2\nu) + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] + \right. \\ & + 3\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(3n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - \\ & \left. -(1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$D_{ijk}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} + \delta_{ij}r_{,k}) + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \quad (3.9)$$

As expressões de S_{ijk}^* e D_{ijk}^* , para o problema fundamental de Mindlin, são citadas por BARBIRATO (1991).

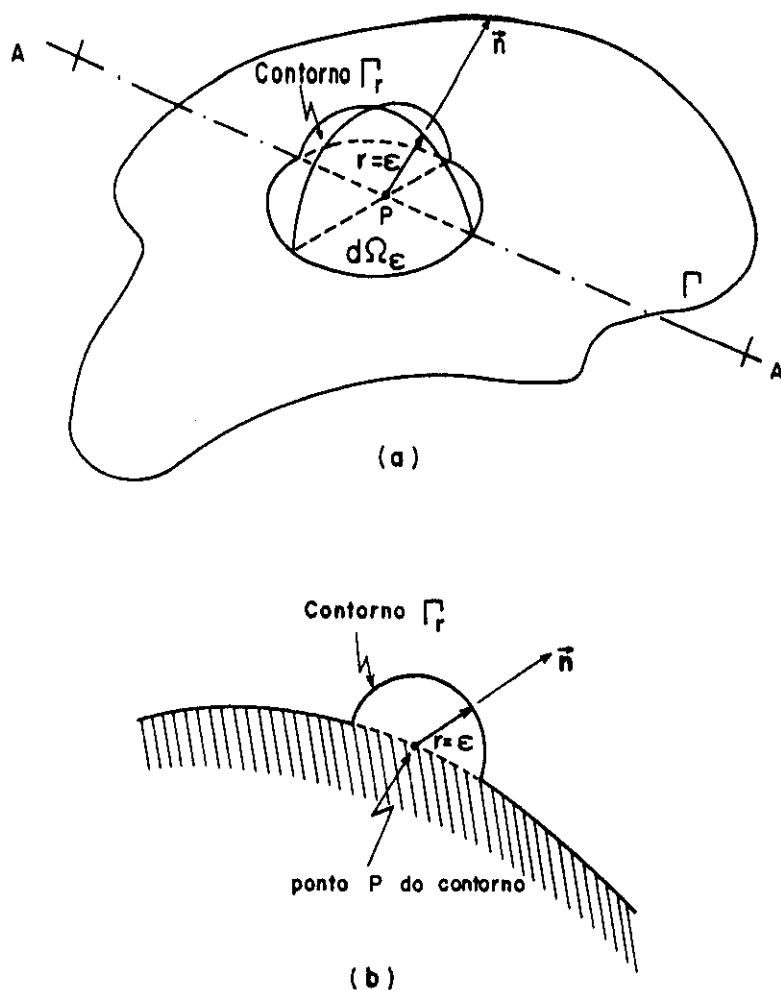


FIGURA 3.2 - a) Acréscimo do domínio Ω no ponto Q;
b) corte AA'

3.2.2 Equação integral para pontos do contorno

A determinação da equação integral para pontos situados no contorno Γ do corpo, é necessária para a formulação do Método dos Elementos de Contorno, isto é feito utilizando-se um artifício (DOMINGUEZ & BREBBIA, 1984), que consiste em considerar que o ponto Q do contorno Γ , é o centro de uma semi esfera, de domínio Ω_ϵ e raio ϵ , que foi acrescentada ao domínio Ω (Figura 3.2), desta maneira, o ponto Q do contorno se transforma em um ponto q do domínio, onde a identidade Somigliana (3.6) é válida, isto é:

$$\begin{aligned}
u_i(Q) = & - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(Q, P) u_j(P) d\Gamma(P) + \int_{\Gamma - \Gamma + \Gamma_\varepsilon} u_{ij}^*(Q, P) p_j(P) d\Gamma(P) + \\
& + \int_{\Omega + \Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(Q, p) b_j(p) d\Omega(p)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

onde, Γ_ε é o contorno do domínio Ω_ε que foi acrescentado, e $\bar{\Gamma}$ é a projeção do mesmo sobre o domínio Ω .

Separando-se em (3.10), as integrais que contem os acréscimos de contorno e domínio, tem-se:

$$\begin{aligned}
u_i(Q) = & - \int_{\Gamma - \Gamma} p_{ij}^*(Q, P) u_j(P) d\Gamma(P) - \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(Q, P) u_j(P) d\Gamma(P) + \\
& + \int_{\Gamma - \Gamma} u_{ij}^*(Q, P) p_j(P) d\Gamma(P) + \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ij}^*(Q, P) p_j(P) d\Gamma(P) + \\
& + \int_{\Omega} u_{ij}^*(Q, p) b_j(p) d\Omega(p) + \int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(Q, p) b_j(p) d\Omega(p)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Para fazer com que o ponto q pertença novamente ao contorno Γ , aplicam-se os limites nas integrais de (3.11), quando $\varepsilon \rightarrow 0$, conseqüentemente $\Omega_\varepsilon \rightarrow 0$ e $\bar{\Gamma} \rightarrow 0$, assim:

$$\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} p_{ij}^*(Q, P) u_j(P) d\Gamma(P) = \int_{\Gamma} p_{ij}^*(Q, P) u_j(P) d\Gamma(P) \tag{3.12}$$

$$\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} u_{ij}^*(Q, P) p_j(P) d\Gamma(P) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(Q, P) p_j(P) d\Gamma(P) \tag{3.13}$$

O valor da integral (3.12) deve ser determinado no sentido de valor principal, devido à singularidade que apresenta a função p_{ij}^* .

Conforme demonstra NAKAGUMA (1979), na equação (3.11), os limites das integrais sobre Γ_ε e Ω_ε , para a função u_{ij}^* , são nulos quando $\varepsilon \rightarrow 0$, isto é:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ij}^*(Q, P) p_j(P) d\Gamma(P) = 0 \tag{3.14}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(Q, p) b_j(p) d\Omega(p) = 0 \quad (3.15)$$

O limite da integral sobre Γ_ε para a função p_{ij}^* , pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(Q, P) u_j(P) d\Gamma(P) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(Q, P) [u_j(P) - u_j(Q)] d\Gamma(P) + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_j(Q) \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(Q, P) d\Gamma(P) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dos limites das integrais do segundo membro de (3.15), o primeiro é nulo, devido à condição de Hölder dada pela expressão (3.1), e o segundo, para o caso em que o contorno tem uma única derivada no ponto Q, fica:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_j(Q) \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(Q, P) d\Gamma(P) = -\frac{1}{2} \delta_{ij} u_j(Q) \quad (3.17)$$

Calculados todos os limites das integrais da equação (3.11), ela pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_{ij}(Q) u_j(Q) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(Q, P) u_j(P) d\Gamma(P) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(Q, P) p_j(P) d\Gamma(P) + \\ &+ \int_{\Omega} u_{ij}^*(Q, p) b_j(p) d\Omega(p) \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde:

$$C_{ij}(Q) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.19)$$

Uma expressão semelhante à (3.18) é obtida para pontos fora do domínio, na qual o coeficiente $C_{ij}(Q)$ é nulo. Portanto, a equação (3.18), pode ser considerada como uma equação geral, onde o coeficiente $C_{ij}(Q)$ assume os seguintes valores:

$$C_{ij}(Q) = \delta_{ij} \quad \text{para pontos internos}$$

$$C_{ij}(Q) = \frac{\delta_{ij}}{2} \quad \text{para pontos do contorno sem angulosidade}$$

$$C_{ij}(Q) = 0 \quad \text{para pontos externos}$$

A equação (3.18), é também válida para corpos infinitos ou semi-infinitos com cavidades (NAKAGUMA, 1979), tomando-se o cuidado de que o vetor normal ao contorno aponte para fora domínio do corpo.

3.3 Equações integrais para placas

3.3.1 Equação integral para pontos do domínio

Seja uma placa isótropa de domínio finito Ω e contorno Γ , submetida a um carregamento g distribuído em uma área Ω_g (Figura 3.3), e contida em outra de domínio infinito Ω_∞ e contorno Γ_∞ .

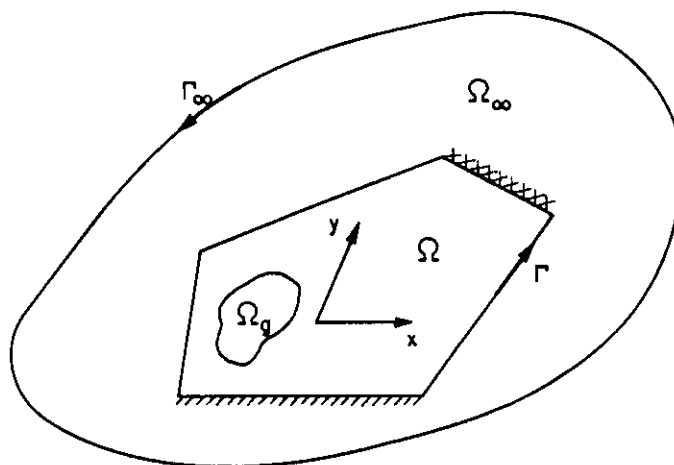


FIGURA 3.3 - Placa finita contida em uma placa infinita

Considerando-se que a placa de domínio finito submetida a dois carregamentos não simultâneos g e g^* , associados a superfícies elásticas w e w^* , respectivamente, produz dois estados de tensão σ_{ij} e σ_{ij}^* , com seus respectivos estados de deformação ε_{ij} e ε_{ij}^* , pode-se escrever o teorema da reciprocidade de BETTI (1872) da seguinte forma:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV \quad (3.20)$$

$i,j=1,2,3$

Desprezando-se as tensões relativas à direção normal ao plano da placa, a integral do segundo membro de (3.20), que a denominaremos de U , escrita em notação clássica, fica:

$$U = \int_V [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}^* + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy}^* + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy}^*] dV \quad (3.21)$$

Substituindo-se em (3.21) as expressões dadas em (2.18) e (2.19), e integrando-se ao longo da espessura da placa, obtém-se:

$$U = \int_{\Omega} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + 2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right] d\Omega \quad (3.22)$$

Observando-se (2.22), a expressão (3.22) pode ser escrita como:

$$U = \int_{\Omega} \left[-M_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right] d\Omega \quad (3.23)$$

Para facilitar a transformação da integral sobre o domínio Ω (3.23), em integral sobre o contorno Γ , as suas três parcelas serão denominadas de u_1 , u_2 e u_3 respectivamente.

Integrando-se por partes a primeira, na direção x , obtém-se:

$$u_1 = - \int_{\Omega} M_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = - \int_{\Gamma} M_x \frac{\partial w^*}{\partial x} n_x d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial M}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} d\Omega \quad (3.24)$$

onde, n_x é o coseno diretor do vetor normal ao contorno na direção x . Conforme a figura 3.4, os cosenos diretores em um ponto P do contorno, são:

$$n_x = \cos\alpha \quad (3.25.a)$$

$$n_y = \sin\alpha \quad (3.25.b)$$

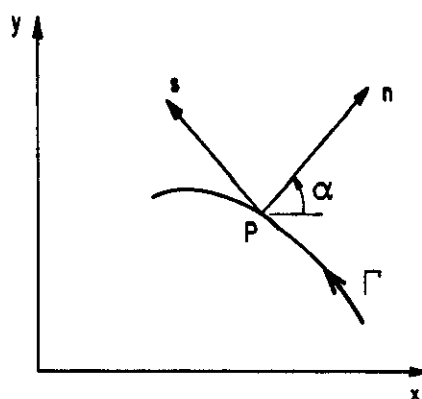


FIGURA 3.4 - Sistema de coordenadas (n,s), normal e tangente ao contorno

Integrando-se novamente por partes a segunda parcela de (3.24), obtém-se:

$$u_1 = \int_{\Gamma} \left(-M_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial M_x}{\partial x} w^* \cos\alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} w^* d\Omega \quad (3.26)$$

Procedendo-se de forma análoga, deduz-se:

$$u_2 = \int_{\Gamma} \left(-M_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin\alpha + \frac{\partial M_y}{\partial y} w^* \sin\alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} w^* d\Omega \quad (3.27)$$

A terceira parcela pode ser escrita da seguinte forma:

$$u_3 = - \int_{\Omega} M_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega - \int_{\Omega} M_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega \quad (3.28)$$

Integrando-se por partes duas vezes cada integral de (3.28), a primeira em relação a x e a segunda em relação a y, obtém-se:

$$u_3 = \int_{\Gamma} \left(-M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha - M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} w^* \cos \alpha + \right. \\ \left. + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} w^* \sin \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} w^* d\Omega \quad (3.29)$$

Substituindo-se os valores de u_1 , u_2 e u_3 em (3.23), obtém-se o valor de U :

$$U = - \int_{\Gamma} \left(-M_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + M_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + \right. \\ \left. + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \sin \alpha \right] w^* d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) w^* d\Omega \quad (3.30)$$

Observando-se as expressões (2.24), (2.26) e (2.38.a), o valor de U fica:

$$U = - \int_{\Gamma} \left(M_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + M_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + \right. \\ \left. + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.31)$$

A partir de (2.33.a) pode-se escrever:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \quad (3.32.a)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial y} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \quad (3.32.b)$$

Substituindo-se os valores de (3.32) em (3.31) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 U = & - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial n} (M_x \cos^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + M_y \sin^2 \alpha) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial w^*}{\partial s} [(M_y - M_x) \sin \alpha \cos \alpha + M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \right\} d\Gamma + \\
 & \int_{\Gamma} Q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Observando-se (2.37), a expressão (3.33) fica:

$$U = - \int_{\Gamma} (M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - Q_n w^*) d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.34)$$

Integrando-se por partes o segundo termo da integral de contorno de (3.34), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} (M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s}) d\Gamma = M_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.35)$$

onde, Γ_1 e Γ_2 são as coordenadas dos limites do contorno no qual se realiza a integração.

A primeira parcela do segundo membro de (3.35) é nula para o caso de um contorno fechado, cuja representação paramétrica e a respectiva derivada sejam contínuas, caso contrário, ela dará origem a reações nas angulosidades (cantos) da placa. Neste caso (3.35) fica:

$$\int_{\Gamma} (M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s}) d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.36)$$

onde:

N_c : é o número total de cantos do contorno da placa

w_{ci}^* : é o deslocamento fundamental do canto i da placa

$$R_{ci} = M_{nsi}^+ - M_{nsi}^- \quad (3.37)$$

sendo, M_{nsi}^+ e M_{nsi}^- , respectivamente, os momentos volventes posterior e anterior ao canto i da placa (Figura 3.5). R_{ci} pode também ser interpretado como uma reação de canto da placa.

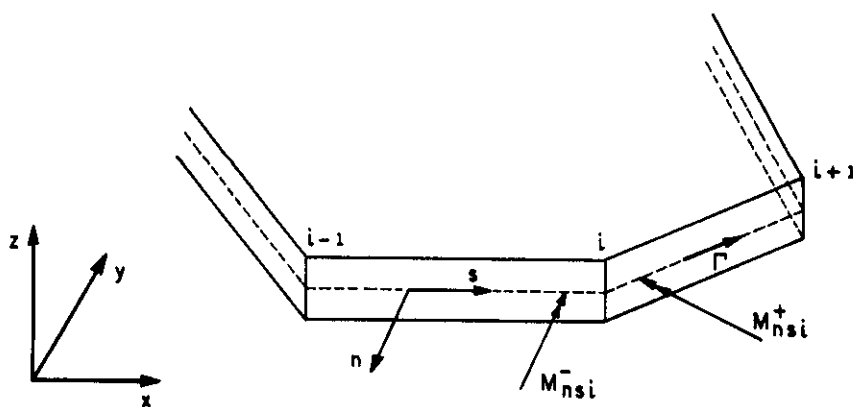


FIGURA. 3.5.- Canto "i" da placa

Levando-se o valor obtido em (3.36) para a expressão (3.34), tem-se:

$$U = \int_{\Gamma} (Q_n w^* + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.38)$$

Utilizando-se a equação (2.39) em (3.38) e levando-se em conta que g está distribuída em Ω_g , obtém-se:

$$U = \int_{\Gamma} (V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega \quad (3.39)$$

O termo do primeiro membro de (3.20), pode ser desenvolvido de modo análogo, chegando-se a:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} = \int_{\Gamma} (V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} g^* w d\Omega \quad (3.40)$$

Portanto, a partir das expressões (3.39) e (3.40), o teorema de Betti aplicado às placas fica:

$$\int_{\Gamma} (V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega =$$

$$\int_{\Gamma} (V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (3.41)$$

Substituindo-se em (3.41) g^* pela distribuição delta de Dirac, $\delta(q,p)$, e escrevendo-se cada variável em função dos pontos de carregamento q e deslocamento p (P se estiver no contorno), quando se tratar de soluções fundamentais, e de apenas um ponto (p ou P) caso contrário, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \delta(q,p) w(p) d\Omega(p) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(q,P) w(P) - M_n^*(q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q,P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] d\Gamma(P) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q,P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega(p) \quad (3.42)$$

Aplicando-se a propriedade da função delta de Dirac (2.63), ao primeiro termo de (3.42), obtém-se a equação integral do deslocamento w , de um ponto q do domínio da placa:

$$w(q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(q,P) w(P) - M_n^*(q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q,P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(q,P) + \right.$$

$$\left. - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q,P) +$$

$$+ \int_{\Omega} g(p) w^*(q, p) d\Omega(p) \quad (3.43)$$

3.3.2 Equação integral para pontos do contorno

Para a formulação do problema de flexão de placas pelo método dos elementos de contorno, é também necessário obter-se a equação integral para pontos "Q" do contorno, para isso, considere-se uma placa (Figura 3.6), onde o ponto "Q", inicialmente do contorno, agora pertence ao domínio, devido ao acréscimo de um contorno circular Γ_{ξ} , de centro em "Q" e raio ξ .

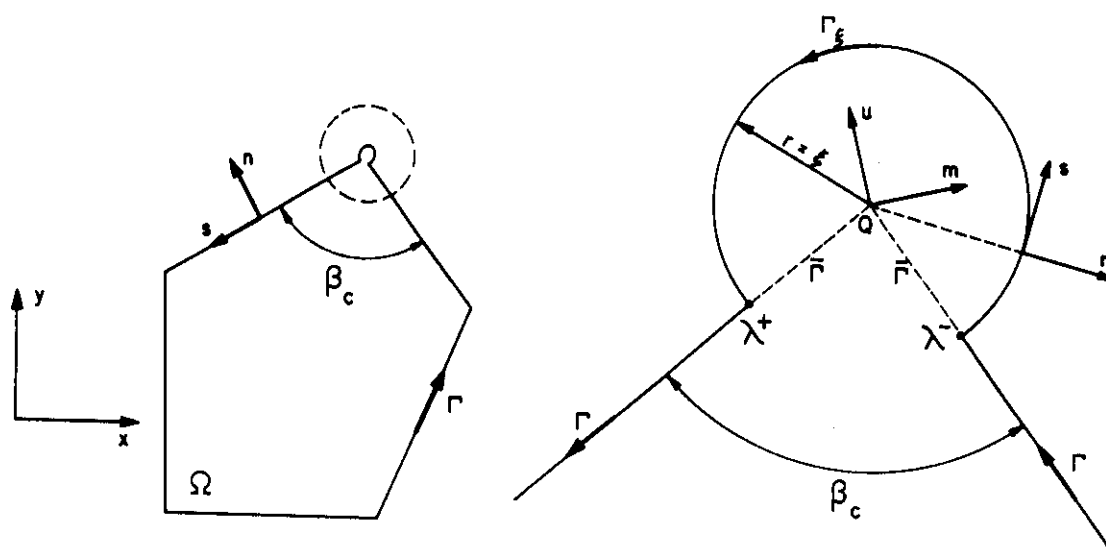


FIGURA 3.6 - Contorno circular acrescido a um canto "Q" da placa

Considerando-se o aparecimento dos cantos λ^- e λ^+ , Após a modificação do domínio da placa, a equação integral (3.43) para o ponto "Q" fica:

$$w(Q) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) +$$

$$+ \int_{\Gamma_{\xi}} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_{\xi}(P) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}^*(Q,P)w_{ci}(P) + R_{c\lambda^-}^*(Q,P)w_{c\lambda^-}(P) + \\
& + R_{c\lambda^+}^*(Q,P)w_{c\lambda^+}(P) = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n(P)w^*(Q,P) + \right. \\
& \left. - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(P)w^*(Q,P) + \right. \\
& \left. - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q,P) + \\
& + R_{c\lambda^-}(P)w_{c\lambda^-}^*(Q,P) + R_{c\lambda^+}(P)w_{c\lambda^+}^*(Q,P) + \\
& \int_{\Omega_b} g(p)w^*(Q,p)d\Omega(p) \tag{3.44}
\end{aligned}$$

Quando o raio ξ se aproxima de zero, $\bar{\Gamma} \rightarrow 0$, $\Gamma_\xi \rightarrow 0$ e o ponto Q se aproxima do contorno, logo, na condição limite tem-se:

$$\begin{aligned}
& w(Q) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
& \sum_{i=1}^{Nc-1} R_{ci}^*(Q,P)w_{ci}(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[R_{c\lambda^-}^*(Q,P)w_{c\lambda^-}(P) + \right. \\
& \left. + R_{c\lambda^+}^*(Q,P)w_{c\lambda^+}(P) \right] = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n(P)w^*(Q,P) + \right. \\
& \left. - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(P)w^*(Q,P) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(Q, P) + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[R_{c\lambda^-}(P) w_{c\lambda^-}^*(Q, P) + R_{c\lambda^+}(P) w_{c\lambda^+}^*(Q, P) \right] + \\
& + \int_{\Omega_q} g(p) w^*(Q, P) d\Omega(p) \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Segundo PAIVA (1987), os limites das integrais sobre $\Gamma - \bar{\Gamma}$ indicadas em (3.45), por definição, representam o valor principal das mesmas. Assim:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) = \\
& = \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) \tag{3.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) = \\
& = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Todos os limites das integrais para $\xi \rightarrow 0$ conduzem a valores nulos, exceto o que contem $w(P)$ e $\frac{\partial w}{\partial n}(P)$, como é mostrado por PAIVA (1987), cujo valor é:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) = \\
& = -\frac{2\pi - \beta_c}{2\pi} w(Q) \tag{3.48}
\end{aligned}$$

onde, β_c (Figura 3.6), é o ângulo do canto "Q" da placa.

Portanto, a equação para um ponto do contorno fica:

$$\begin{aligned}
 C(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 + \sum_{i=1}^{Nc-1} R_{ci}^*(Q,P)w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P)w^*(Q,P) + \right. \\
 \left. - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{nc-1} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q,P) + \\
 + \int_{\Omega} g(p)w^*(Q,p)d\Omega(p) \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

onde:

$$C(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \tag{3.50}$$

Quando o ponto Q do contorno não pertence a um canto da placa, (3.50) fica:

$$C(Q) = \frac{1}{2} \tag{3.51}$$

Analogamente pode-se calcular a derivada do deslocamento $\frac{\partial w}{\partial m}(Q)$, considerando-se que m coincida com a direção normal ao contorno no ponto "Q", assim:

$$\begin{aligned}
 C_m(Q) \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P)w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q,P)w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. -M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega(p) \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

onde:

$$C_m(Q) = \frac{1}{2} \quad \text{para pontos do contorno sem} \quad (3.53) \\
 \text{angulosidades}$$

$$C_m(Q) = 1 \quad \text{para pontos internos} \quad (3.54)$$

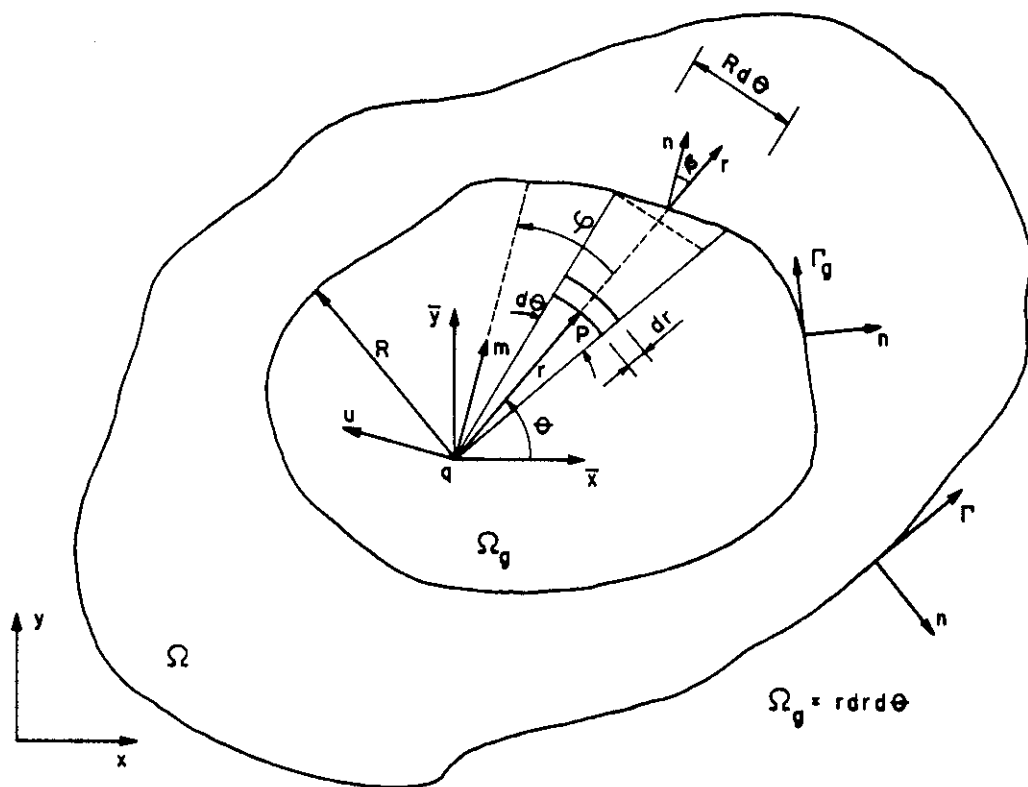


FIGURA. 3.7 - Região carregada Ω_g

3.4 Transformação da integral de domínio do carregamento

A integral de domínio que aparece nas equações integrais de deslocamento (3.43) e (3.49), para pontos do domínio e do contorno, respectivamente, representa a influência do carregamento distribuído em uma região Ω_g do domínio da placa, e pode ser transformada em uma integral sobre o contorno Γ_g , dessa região.

Considere-se a placa da figura 3.7, submetida a um carregamento "g" distribuído em uma região Ω_g , de contorno Γ_g , onde, o ponto de carregamento "q", está representado.

A integral de domínio a ser transformada, é a seguinte:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.55)$$

Admitindo-se uma variação linear para o carregamento g, na região Ω_g , ele pode ser escrito em função das coordenadas (x,y) da seguinte forma:

$$g(p) = Ax(p) + By(p) + C \quad (3.56)$$

As coordenadas do ponto de deslocamento p, relacionadas com o sistema (\bar{x}, \bar{y}) , de origem em q, são:

$$x(p) = x(q) + \bar{x}(p) \quad (3.57.a)$$

$$y(p) = y(q) + \bar{y}(p) \quad (3.57.b)$$

Substituindo-se (3.57) em (3.56) fica:

$$g(p) = g(q) + A\bar{x}(p) + B\bar{y}(p) \quad (3.58)$$

onde, $g(q)$ é o valor da intensidade da carga no ponto "q".

Escrevendo-se (3.58) em coordenadas polares e substituindo-se em (3.55), obtem-se:

$$\int_{\Omega_g} g(p)w^*(q,p)d\Omega_g(p) = \int_{\Omega_g} [g(q) + Ar \cos\theta + Br \sin\theta]w^*(q,p)d\Omega_g(p) \quad (3.59)$$

Com o valor de $w^*(q,p)$ dado em (2.82) e lembrando-se que $g(q)$ é uma constante, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} g(p)w^*(q,p)d\Omega_g(p) &= \frac{g(q)}{8\pi D} \int_{\theta} \left[\int_0^R r^3 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) dr \right] d\theta + \\ &+ \frac{1}{8\pi D} \int_{\theta} \left[\int_0^R (A \cos\theta + B \sin\theta) r^4 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) dr \right] d\theta \end{aligned} \quad (3.60)$$

Integrando-se (3.60) em relação a r , obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} g(p)w^*(q,p)d\Omega_g(p) &= \frac{g(q)}{32\pi D} \int_{\theta} R^4 \left(\ln R - \frac{3}{4} \right) d\theta + \\ &+ \frac{1}{40\pi D} \int_{\theta} R^5 \left(\ln R - \frac{7}{10} \right) (A \cos\theta + B \sin\theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.61)$$

A partir da figura 3.7 pode-se escrever:

$$d\Gamma_g \cos\beta = R d\theta \quad (3.62.a)$$

$$d\theta = \frac{d\Gamma_g \cos\beta}{R} \quad (3.62.b)$$

Substituindo-se (3.62.b) em (3.61) obtém-se a integral de domínio (3.55), transformada em uma integral sobre o contorno Γ_g .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} g(p)w^*(q,p)d\Omega_g(p) &= \frac{g(q)}{32\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 \left(\ln R - \frac{3}{4} \right) \cos\beta d\Gamma_g + \\ &+ \frac{1}{40\pi D} \int_{\Gamma_g} R^4 \left(\ln R - \frac{7}{10} \right) (A \cos\theta + B \sin\theta) \cos\beta d\Gamma_g \end{aligned} \quad (3.63)$$

Procedendo-se de forma análoga, obtém-se:

$$\int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega_g(p) = -\frac{g(q)}{12\pi D} \int_{\Gamma_g} R^2 \left(\ln R - \frac{1}{3}\right) \cos\phi \cos\beta d\Gamma_g +$$

$$-\frac{1}{16\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 \left(\ln R - \frac{1}{4}\right) (A \cos\theta + B \sin\theta) \cos\phi \cos\beta d\Gamma_g \quad (3.64)$$

As expressões dadas em (3.63) e (3.64) são também válidas para pontos "Q" do contorno. Desta forma, a equação integral do deslocamento e da sua derivada, ficam representadas apenas por integrais sobre o contorno.

CAPÍTULO IV

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA SÓLIDOS TRIDIMENSIONAIS

4.1 Introdução

As equações integrais para um sólido tridimensional elástico linear isotrópico, determinadas no capítulo anterior, não têm uma aplicação imediata na resolução de problemas de engenharia, devido à descontinuidade geométrica que os mesmos apresentam na maioria dos casos, tornando-se assim, muito difícil e inviável a sua análise. Por esta razão, é necessário utilizar um procedimento numérico que nos permita reproduzir o problema real da melhor forma possível, isto é feito discretizando-se o contorno do sólido em uma série de elementos de superfície, cuja geometria é aproximada em função dos seus nós geométricos, através de funções de interpolação. Sobre estes elementos, os deslocamentos e forças de superfície são também aproximados em função dos seus valores nodais.

4.2 Discretização do contorno

A discretização do contorno de um sólido tridimensional, é feita dividindo-se o mesmo em um número finito de elementos de superfície, que podem ser planos ou curvos (Figura 4.1), denominados também elementos lineares ou quadráticos, sendo os de forma triangular e quadrilateral os mais utilizados.

As coordenadas cartesianas x_i de um ponto P qualquer de um elemento, ficam definidas por:

$$x_i = \Psi_k X_i^k \quad (4.1)$$

ou em forma matricial:

$$\tilde{x} = \tilde{\Psi}^T \tilde{X}^N \quad (4.2)$$

onde:

\tilde{x} : são as coordenadas cartesianas do ponto P

\tilde{X}^N : são as coordenadas cartesianas dos pontos nodais

$\tilde{\Psi}^T$: são as funções aproximadoras ou interpoladoras

As funções aproximadoras são geralmente polinômios previamente escolhidos, expressos em coordenadas adimensionais, que permitem, junto com as coordenadas cartesianas dos pontos nodais, a definição adequada da geometria do elemento.

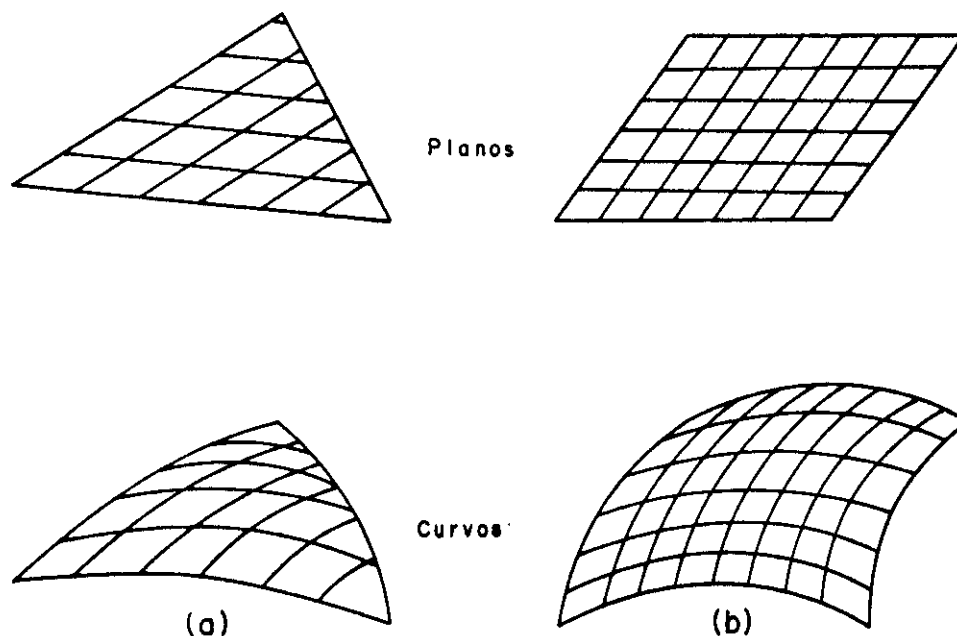


FIGURA 4.1 - Tipos de elementos utilizados para aproximar o contorno: a) triangulares; b) quadrilaterais

Da mesma forma, pode-se discretizar o domínio do sólido em elementos de volume, denominados células, do tipo tetraedros e hexaedros (Figura 4.2), por exemplo.

As coordenadas cartesianas \tilde{x} de um ponto qualquer de uma célula, ficam definidas em termos de funções interpoladoras $\tilde{\Psi}_c$ e das coordenadas nodais \tilde{X}_c^N da célula, isto é:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\Psi}_c^T \tilde{\mathbf{X}}_c^N \quad (4.3)$$

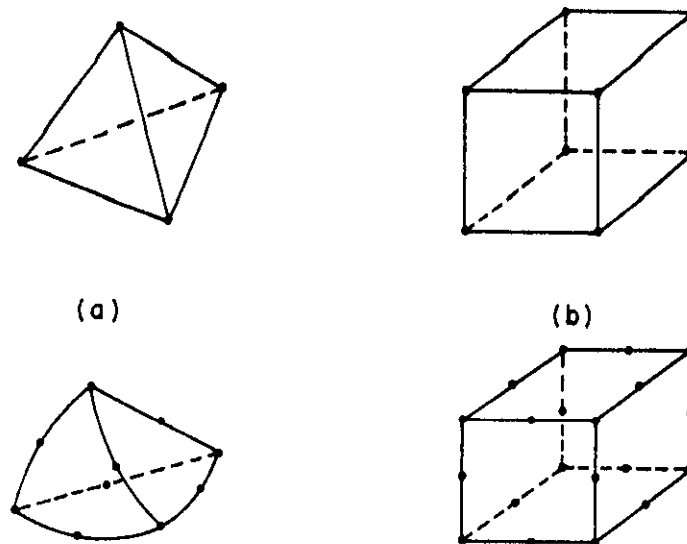


FIGURA 4.2 - Tipos de células utilizadas para aproximar o domínio: a) tetraedros; b) hexaedros

Sobre cada um dos elementos do contorno, são também aproximadas as variáveis, neste caso deslocamentos e forças de superfície, em função de seus valores nos nós funcionais, utilizando-se funções polinomiais com variação constante, linear, quadrática ou de ordem superior, como se mostra na figura 4.3.

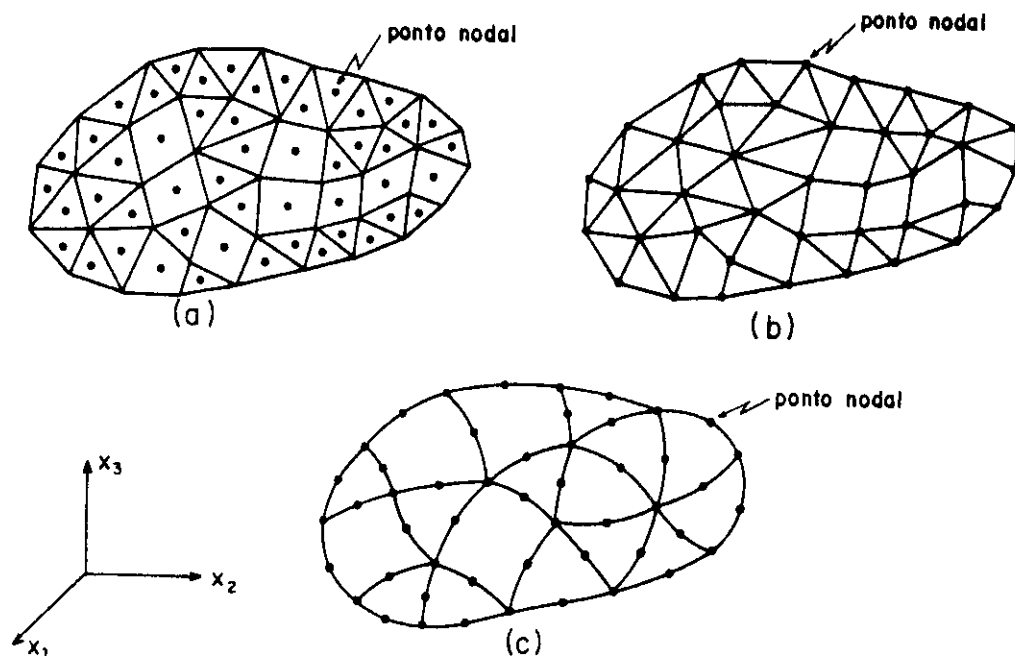


FIGURA 4.3 - Aproximação das variáveis do contorno: a) constante; b) linear; c) quadrática

Escrevendo-se a equação integral (3.18) na forma matricial, fica:

$$\begin{aligned} \underline{C}(Q) \underline{u}(Q) + \int_{\Gamma} \underline{p}^*(Q, P) \underline{u}(P) d\Gamma(P) &= \int_{\Gamma} \underline{u}^*(Q, P) \underline{p}(P) d\Gamma(P) \\ + \int_{\Omega} \underline{u}^*(Q, p) \underline{b}(p) d\Omega(p) & \end{aligned} \quad (4.4)$$

De maneira análoga à geometria, os deslocamentos \underline{u} e forças de superfície \underline{p} , são aproximados através de funções interpoladoras $\underline{\Phi}$ e valores nodais \underline{U}^N e \underline{P}^N respectivamente, isto é:

$$\underline{u} = \underline{\Phi}^T \underline{U}^N \quad (4.5)$$

$$\underline{p} = \underline{\Phi}^T \underline{P}^N \quad (4.6)$$

As forças volumétricas \underline{b} , também podem ser aproximadas sobre cada célula por funções interpoladoras $\underline{\Phi}_c$ e valores nodais \underline{B}^N , da seguinte forma:

$$\underline{b} = \underline{\Phi}_c^T \underline{B}^N \quad (4.7)$$

Discretizando-se o contorno de um sólido em J elementos e seu domínio em M células, a equação integral para um nó Q qualquer do contorno fica:

$$\begin{aligned} \underline{C}(Q) \underline{u}(Q) + \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \underline{p}^*(Q, P) \underline{\Phi}^T(P) d\Gamma(P) \right] \underline{U}^N(P) &= \\ = \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \underline{u}^*(Q, P) \underline{\Phi}^T(P) d\Gamma(P) \right] \underline{P}^N(P) + & \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega_m} \underline{u}^*(Q, p) \underline{\Phi}_c^T(p) d\Omega(p) \right] \underline{B}^N(p) \quad (4.8)$$

Aplicando-se a equação (4.8) aos N nós do contorno do sólido, será possível estabelecer um sistema de equações, que escrito em forma matricial, resulta:

$$\underline{\underline{C}}\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{H}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{D}}\underline{\underline{B}} \quad (4.9)$$

onde, as matrizes $\underline{\underline{H}}$, $\underline{\underline{G}}$ e $\underline{\underline{D}}$, resultam do cálculo das integrais da equação (4.8), que serão tratadas posteriormente.

Somando-se as matrizes $\underline{\underline{C}}$ e $\underline{\underline{H}}$ da equação (4.5), tem-se:

$$\underline{\underline{H}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{D}}\underline{\underline{B}} \quad (4.10)$$

Sendo conhecidos os valores prescritos dos deslocamentos $\underline{\underline{U}}$, das forças de superfície $\underline{\underline{P}}$ e das forças volumétricas $\underline{\underline{B}}$, as colunas das matrizes $\underline{\underline{H}}$ e $\underline{\underline{G}}$ da equação (4.10), podem ser trocadas entre si de forma que todas as incógnitas fiquem no primeiro membro, chegando-se assim, a um sistema de equações algébricas com 3N incógnitas, do tipo:

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{F}} \quad (4.11)$$

onde, $\underline{\underline{X}}$ é o vetor das incógnitas composto por deslocamentos e força de superfície, $\underline{\underline{A}}$ é uma matriz cheia e não simétrica composta por colunas das matrizes $\underline{\underline{H}}$ e $\underline{\underline{G}}$, e $\underline{\underline{F}}$ é formado pela multiplicação dos valores prescritos com as colunas de $\underline{\underline{H}}$ e $\underline{\underline{G}}$ correspondentes mais a contribuição das forças volumétricas.

A solução do sistema de equações (4.11) é dado por:

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{F}} \quad (4.12)$$

onde, $\underline{\underline{A}}^{-1}$ é a matriz inversa de $\underline{\underline{A}}$.

4.3 Geometria dos elementos

Neste trabalho, serão utilizados apenas elementos triangulares planos, para discretizar o contorno do sólido.

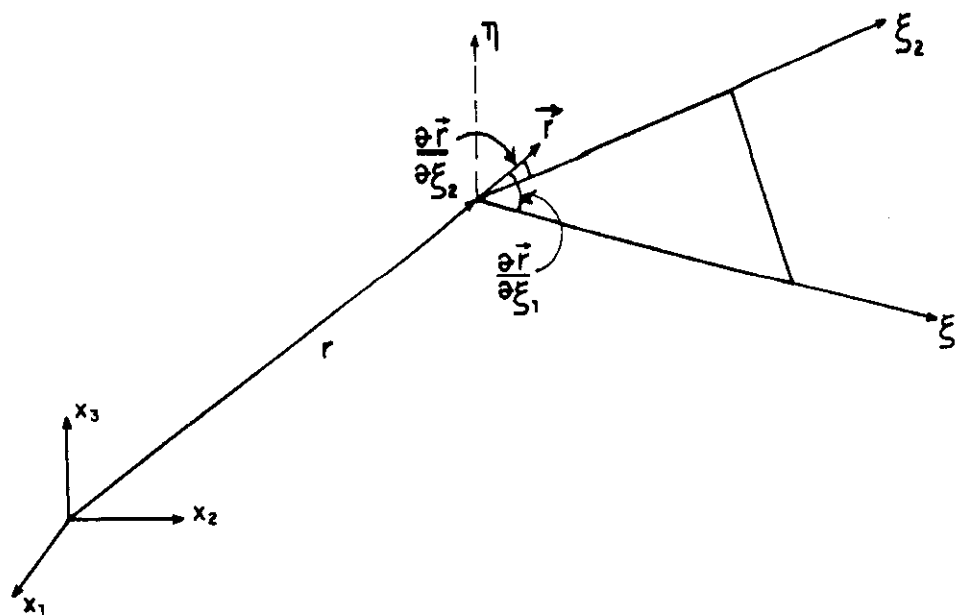


FIGURA 4.4 - Coordenadas globais e locais para o elemento triangular plano

O elemento triangular linear, fica definido pelas coordenadas cartesianas dos pontos nodais localizados nos seus vértices (Figura 4.4), e pelas funções aproximadoras escritas em coordenadas homogêneas. A partir de (4.2), tem-se:

$$\underline{\tilde{x}} = \underline{\tilde{\Psi}}^T(\underline{\xi}) \underline{\tilde{X}}^N \quad (4.13)$$

onde:

$$\underline{\tilde{x}} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\tilde{\Psi}^T(\xi) = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}^T & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{\psi}^T & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{\psi}^T \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}^N = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1^N \\ \mathbf{X}_2^N \\ \mathbf{X}_3^N \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

sendo:

$$\tilde{\psi} = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2 \quad (4.18)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_i^N = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_i^1 \\ \mathbf{X}_i^2 \\ \mathbf{X}_i^3 \end{Bmatrix} \quad i = 1,2,3 \quad (4.19)$$

Escrita explicitamente, a equação (4.13) fica:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_1^2 \\ X_1^3 \\ X_2^1 \\ X_2^2 \\ X_2^3 \\ X_3^1 \\ X_3^2 \\ X_3^3 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

As coordenadas homogêneas variam de 0 a 1, conforme mostra a figura 4.5.

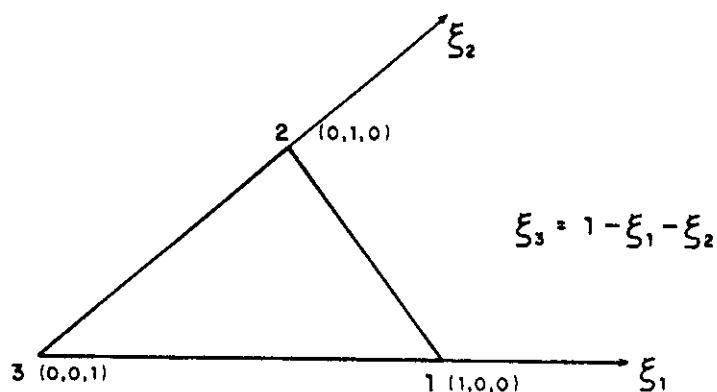


FIGURA 4.5 - Coordenadas homogêneas (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

As equações integrais, definidas originalmente em termos de coordenadas cartesianas, precisam ser transformadas em termos de coordenadas homogêneas, pois estas são utilizadas na aproximação tanto da geometria dos elementos como das variáveis pertinentes. Isto é feito através da seguinte transformação, válida para qualquer função r :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial r}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \underset{\sim}{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial r}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

onde, $\underset{\sim}{J}$ é o Jacobiano que relaciona a diferenciação em coordenadas homogêneas com a diferenciação em coordenadas cartesianas.

Assim, o diferencial de volume $d\Omega$ pode ser escrito como:

$$d\Omega = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| d\xi_1 d\xi_2 d\eta = \left| \underset{\sim}{J} \right| d\xi_1 d\xi_2 d\eta \quad (4.22)$$

Para o diferencial de área $d\Gamma$, tem-se:

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = \left| \underset{\sim}{G} \right| d\xi_1 d\xi_2 \quad (4.23)$$

onde:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right) \quad (4.25)$$

$$\left| \underset{\sim}{G} \right| = 2A \quad (4.26)$$

sendo, $\left| \underset{\sim}{G} \right|$ o módulo do vetor normal ao elemento, no caso do elemento triangular plano é numericamente igual ao dobro da sua área "A".

A equação (4.13) escrita em forma indicial, fica:

$$x_i = \xi_k X_i^k \quad (4.27)$$

Diferenciando-se a equação (4.27) em relação às coordenadas ξ_1 e ξ_2 , e levando-se em conta (4.18), obtém-se:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} = X_i^1 - X_i^3 \quad (4.28)$$

$$i=1,2,3$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} = X_i^2 - X_i^3 \quad (4.29)$$

4.4 Funções de interpolação para as variáveis

As variáveis envolvidas nas equações integrais para sólidos tridimensionais são os deslocamentos e forças de superfície, e podem ser aproximadas de forma análoga à geometria do elemento, por funções de interpolação, que dependem do número e da posição dos seus valores nodais sobre o elemento.

As funções de interpolação, podem ser constantes, lineares, quadráticas ou de ordem superior (Figura 4.3). A continuação serão apresentadas apenas as funções de interpolação constante e linear, utilizadas em elementos triangulares.

4.4.1 Elemento triangular constante

O elemento constante considera apenas um ponto nodal localizado geralmente no centroide do elemento (Figura 4.6), onde as variáveis são aproximadas pela função aproximadora Φ .

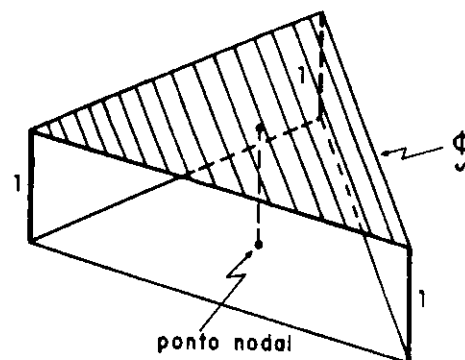


FIGURA 4.6 - Elemento triangular constante

Os deslocamentos e forças de superfície são dados por:

$$\underline{\tilde{u}} = \underline{\tilde{\Phi}}^T \underline{\tilde{U}}^N \quad (4.5)$$

$$\underline{\tilde{p}} = \underline{\tilde{\Phi}}^T \underline{\tilde{P}}^N \quad (4.6)$$

onde:

$$\underline{\tilde{u}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \underline{\tilde{p}} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\underline{\tilde{\Phi}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\underline{\tilde{U}}^N = \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{Bmatrix} \quad \underline{\tilde{P}}^N = \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_3^1 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

O elemento constante, possibilita a sua aplicação em problemas com qualquer tipo de descontinuidade, apresentando resultados satisfatórios, como por exemplo nos trabalhos de LACHAT (1975) NAKAGUMA (1979), e SILVA(1989). Uma desvantagem deste elemento é que para se obter resultados mais precisos, é necessário de uma discretização mais refinada, o que implica na utilização de um grande número de elementos

4.4.2 Elemento triangular linear

O elemento linear, possui três pontos nodais que permitem uma melhor aproximação das variáveis do que o elemento constante, embora ele apresente problemas de descontinuidade especialmente em relação às forças de superfície. Quanto à descontinuidade, os elementos lineares podem ser classificados em contínuos, descontínuos e de transição (Figura 4.7).

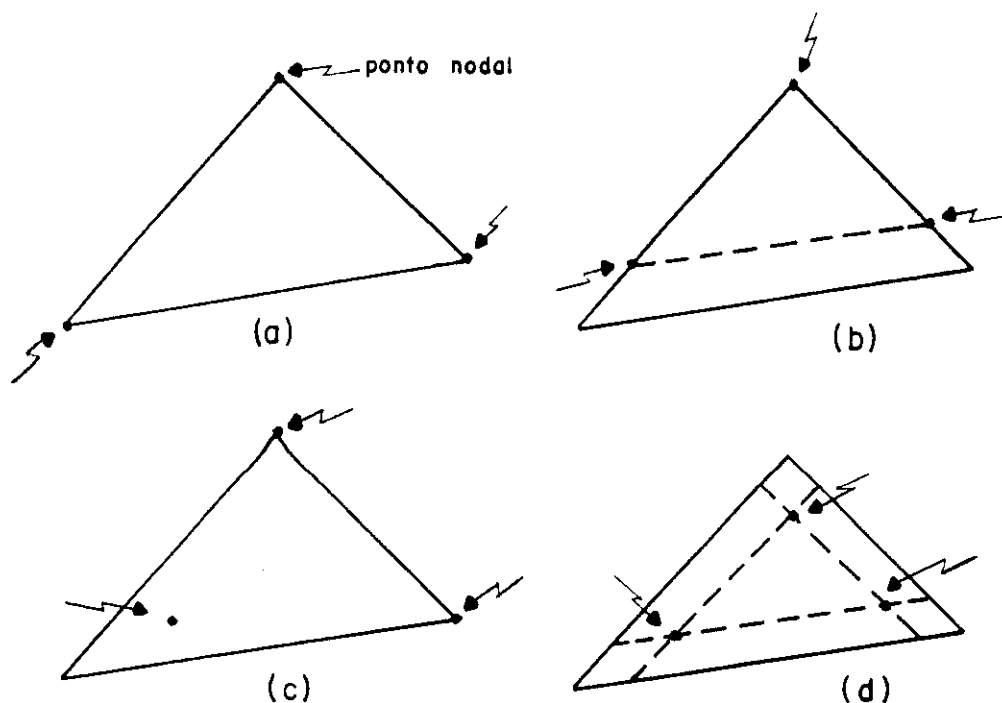


FIGURA 4.7 - Elementos triangulares lineares: a) contínuo; b) e c) de transição; d) descontínuo

4.4.2.1 Elemento triangular linear contínuo

No elemento triangular linear contínuo, os pontos nodais coincidem com os nós geométricos localizados nos vértices 1,2 e 3 do elemento, onde as variáveis são aproximadas por funções de interpolação ϕ^1 , ϕ^2 e ϕ^3 , respectivamente (Figura 4.8).

Cada função de interpolação ϕ^i , tem valor unitário no ponto nodal i correspondente e zero nos outros, assim:

$$\begin{aligned}\phi^1 &= \xi_1 \\ \phi^2 &= \xi_2 \\ \phi^3 &= \xi_3\end{aligned}\tag{4.33}$$

onde, ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , são as coordenadas homogêneas utilizadas para aproximar a geometria dos elementos, já vistas anteriormente.

O elemento linear contínuo, não possibilita a inclusão de descontinuidade, por este motivo, ele só poderá ser utilizado em contornos onde não existam angulosidades.

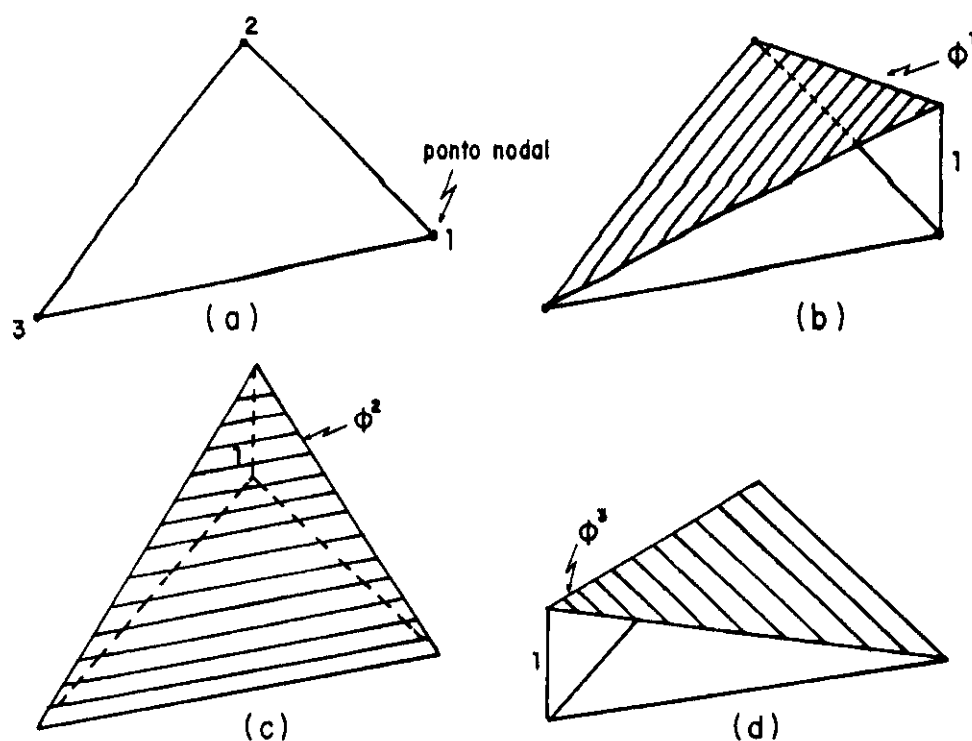


FIGURA 4.8 - Funções de interpolação nos pontos nodais do elemento triangular linear contínuo

Neste caso, os deslocamentos e forças de superfície são dados por:

$$\underline{\tilde{u}} = \underline{\tilde{\Phi}}^T(\xi) \underline{\tilde{U}}^N \quad (4.34)$$

$$\underline{\tilde{p}} = \underline{\tilde{\Phi}}^T(\xi) \underline{\tilde{P}}^N \quad (4.35)$$

onde:

$$\underline{\tilde{u}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \underline{\tilde{p}} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\underline{\tilde{\Phi}}^T = \begin{bmatrix} \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\tilde{U}^N = \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_1^3 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \\ U_2^3 \\ U_3^1 \\ U_3^2 \\ U_3^3 \end{Bmatrix} \quad \tilde{P}^N = \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_1^3 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \\ P_2^3 \\ P_3^1 \\ P_3^2 \\ P_3^3 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

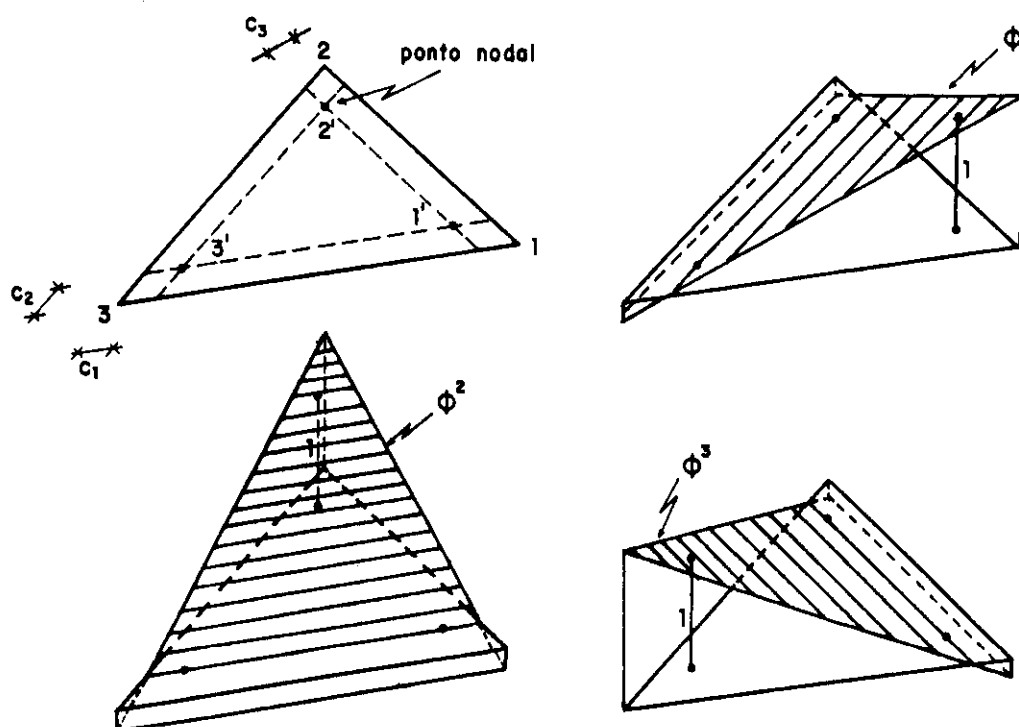


FIGURA 4.9 - Funções de interpolação nos pontos nodais do elemento triangular linear descontínuo

4.4.2.2 Elemento triangular linear descontínuo

Os pontos nodais do elemento triangular linear descontínuo, não coincidem com os seus nós geométricos localizados nos vértices do elemento, eles podem estar posicionados sobre as mediatrizes dos lados opostos, a uma determinada distância dos vértices correspondentes, onde

as variáveis são aproximadas por funções de interpolação ϕ^1 , ϕ^2 e ϕ^3 , respectivamente (Figura 4.9).

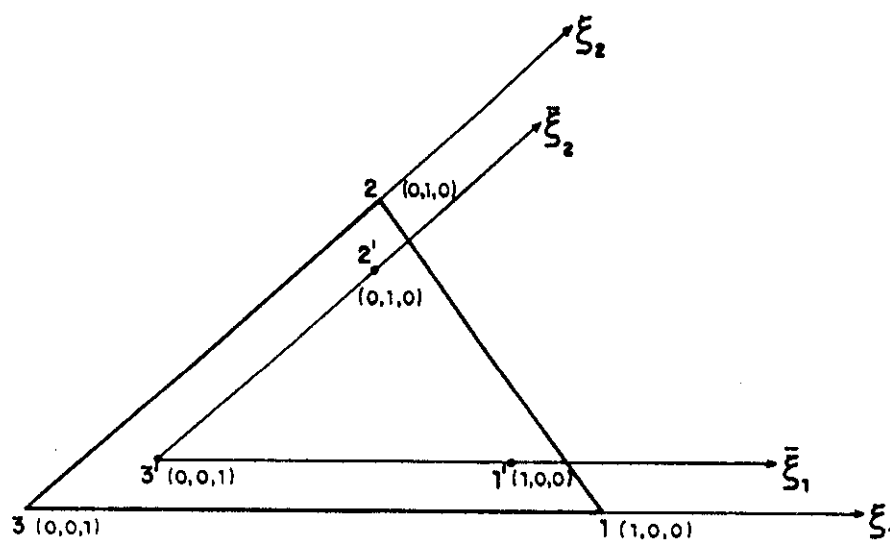


FIGURA 4.10 - Sistemas de coordenadas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) e $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$

A posição dos pontos nodais ($1'$, $2'$ e $3'$), no interior do elemento (Figura 4.10), também pode ser determinada em função de parâmetros c_1 , c_2 e c_3 , definidos como frações das coordenadas homogêneas ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , respectivamente, formando assim, um novo sistema de coordenadas homogêneas $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ e $\bar{\xi}_3$, dadas por:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_1 &= \frac{\xi_1 - c_1}{c_4} \\ \bar{\xi}_2 &= \frac{\xi_2 - c_2}{c_4} \\ \bar{\xi}_3 &= \frac{\xi_3 - c_3}{c_4}\end{aligned}\tag{4.39}$$

onde:

$$c_4 = 1 - c_1 - c_2 - c_3\tag{4.40}$$

BARBIRATO (1991), baseado no trabalho de GIL RODRIGUEZ (1986), adotou:

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.1625\tag{4.41}$$

Observa-se que as funções de interpolação ϕ^1 , ϕ^2 e ϕ^3 (Figura 4.9), possuem valores unitários nos pontos nodais correspondentes 1', 2' e 3', e zero nos outros, portanto:

$$\begin{aligned}\phi^1 &= \bar{\xi}_1 \\ \phi^2 &= \bar{\xi}_2 \\ \phi^3 &= \bar{\xi}_3\end{aligned}\tag{4.42}$$

Desta forma, os deslocamentos e forças de superfície em um elemento triangular linear descontínuo, são dados por:

$$\underline{u} = \underline{\Phi}^T(\bar{\xi}) \underline{U}^N\tag{4.43}$$

$$\underline{p} = \underline{\Phi}^T(\bar{\xi}) \underline{P}^N\tag{4.44}$$

onde:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \underline{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}\tag{4.45}$$

$$\underline{\Phi}^T = \begin{bmatrix} \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 \end{bmatrix}\tag{4.46}$$

$$\tilde{U}^N = \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_1^3 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \\ U_2^3 \\ U_3^1 \\ U_3^2 \\ U_3^3 \end{Bmatrix} \quad \tilde{P}^N = \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_1^3 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \\ P_2^3 \\ P_3^1 \\ P_3^2 \\ P_3^3 \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

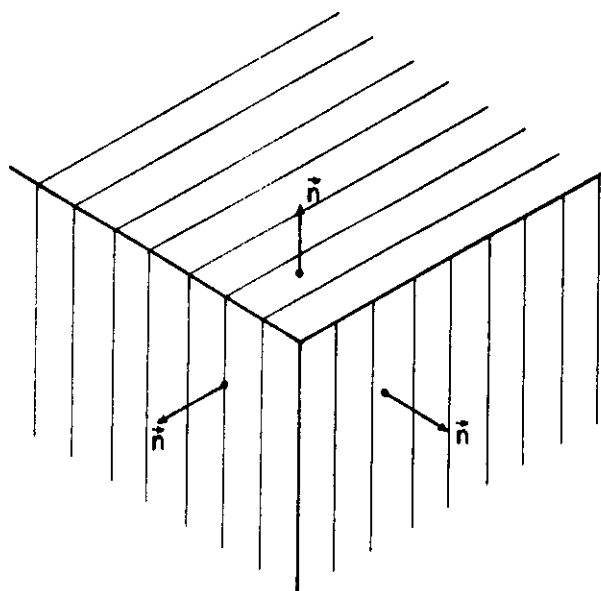


FIGURA 4.11 - Descontinuidade do contorno

O elemento triangular linear descontínuo, é utilizado com bastante eficiência, para resolver problemas de descontinuidade em regiões do contorno que apresentam concentração de tensões ou em locais onde existam angulosidades, chamadas de cantos, nos quais os pontos têm mais de uma tangente (Figura 4.11). Porém, a utilização exclusiva deste elemento em todo o contorno, faz com que o sistema de equações aumente (três incógnitas por elemento), e isto implica em aumento do espaço da memória do computador e do tempo de execução do programa.

4.4.2.3 Elemento triangular linear de transição

Uma forma de aprimorar a discretização de um sólido, é utilizar o elemento de transição (Figura 4.7.b e c), no qual só alguns pontos nodais não coincidem com os nós geométricos, característica que lhe permite conectar elementos triangulares lineares contínuos e descontínuos (Figura 4.12), evitando assim, o aumento de incógnitas, muitas vezes desnecessário.

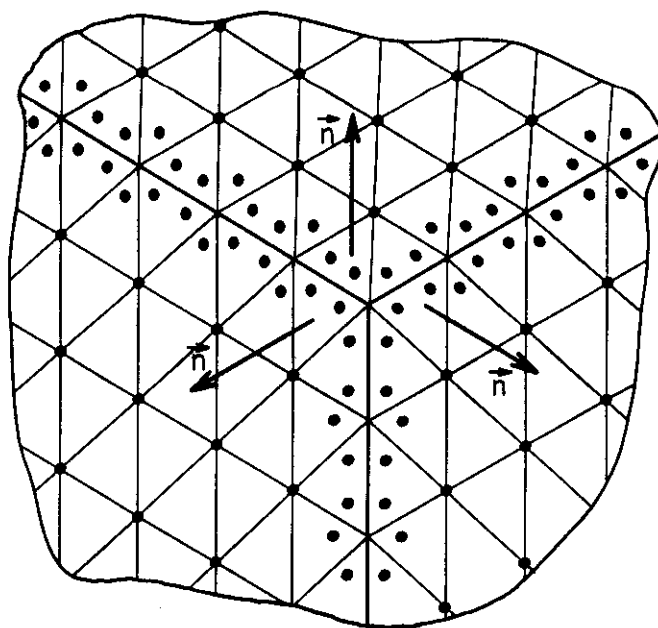


FIGURA 4.12 - Elementos triangulares lineares contínuos e de transição

Neste trabalho, as forças volumétricas \underline{b} , embora apresentem valores geralmente conhecidos, não serão consideradas, restando apenas as variáveis do contorno do sólido, as quais serão aproximadas especificamente por funções interpoladoras lineares, visando-se o acoplamento com a placa, como se poderá mostrar posteriormente.

4.5 Integração sobre os elementos

Na equação (4.10), os coeficientes das matrizes \underline{H} e \underline{G} , correspondem a integrais sobre cada elemento j do contorno, provenientes da aplicação da equação integral do deslocamento (4.4), em todos os nós do contorno. Essas integrais podem ser definidas como:

$$\tilde{g} = \int_{\tilde{\Gamma}_j} \tilde{u}^*(Q,P) \tilde{\Phi}^T(P) d\Gamma(P) \quad (4.48)$$

$$\tilde{h} = \int_{\tilde{\Gamma}_j} \tilde{p}^*(Q,P) \tilde{\Phi}^T(P) d\Gamma(P) \quad (4.49)$$

As soluções analíticas das integrais (4.48) e (4.49), são de difícil obtenção, devido à complexidade dos seus integrandos \tilde{u}^* e \tilde{p}^* , respectivamente, sendo uma solução alternativa a integração numérica.

As posições do ponto de aplicação Q (ponto fonte) e do ponto resposta P (ponto campo), em relação ao elemento a ser integrado, definem o tipo de integração que deve ser adotado, podendo acontecer duas situações: quando os pontos Q e P pertencem a elementos diferentes e quando pertencem ao mesmo elemento, denominadas de integração não singular e integração singular, respectivamente.

4.5.1 Integração não singular

Como na integração não singular os pontos Q e P pertencem a elementos diferentes, pode ser utilizada a integração numérica para elementos triangulares dada por HAMER et ali (1956), a qual é efetuada em função das coordenadas triangulares homogêneas ξ_i . Assim, a integral (4.48) pode ser escrita como:

$$\tilde{g} = |G| \int_0^1 \left(\int_0^{1-\xi_2} \tilde{f}_{\tilde{g}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 \right) d\xi_2 \quad (4.50)$$

que em forma de somatória fica:

$$\tilde{g} = |G| \sum_{i=1}^n \tilde{f}_{\tilde{g}}(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i) w_i \quad (4.51)$$

onde:

- n : número de pontos de integração
- $\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i$: coordenadas homogêneas dos pontos de integração
- w_i : pesos dos pontos de integração
- |G| : jacobiano de transformação

sendo, $f_{\tilde{g}}(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i)$ o integrando da integral (4.48).

De forma análoga para a integral (4.49), tem-se:

$$\tilde{h} = |G| \sum_{i=1}^n f_{\tilde{h}}(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i) w_i \quad (4.52)$$

sendo, $f_{\tilde{h}}(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i)$ o integrando da integral (4.49).

As coordenadas cartesianas \underline{x} dos pontos de integração podem ser facilmente calculadas com a equação (4.13).

Este processo de integração, permite utilizar até treze pontos de integração, com os quais obtêm-se valores exatos para funções polinomiais de sétimo grau. Apesar desta limitação, ele apresenta resultados satisfatórios, especialmente quando os pontos Q e P ficam suficientemente afastados. Mas, há casos em que estes pontos ficam próximos, embora pertençam a elementos diferentes, o que faz com que sejam necessários mais pontos de integração para obter-se uma integração eficiente.

Uma alternativa para aumentar o número de pontos de integração (NAKAGUMA, 1979), consiste em dividir o elemento triangular em subelementos, em cada um dos quais poderiam ser utilizados até treze pontos de integração, com isto, o aumento de pontos de integração variará de acordo com o número de subelementos em que for dividido o elemento. É claro que com essa divisão não serão criados outros nós adicionais no elemento, eles só serão utilizados para o cálculo das integrais dos subelementos, sem modificar o número total de incógnitas do contorno.

Para realizar a divisão do elemento, é necessário definir duas coordenadas triangulares homogêneas diferentes (Figura 4.13): ξ_i , associada ao elemento e $\bar{\xi}_i$, associada ao subelemento.

Assim, as coordenadas cartesianas \underline{x} de um ponto P do elemento (Figura 4.13), em função das coordenadas triangulares homogêneas ξ_i , são dadas pela relação (4.13), já vista anteriormente, isto é:

$$\underline{x} = \underline{\Psi}^T(\xi) \underline{X}^N \quad (4.13)$$

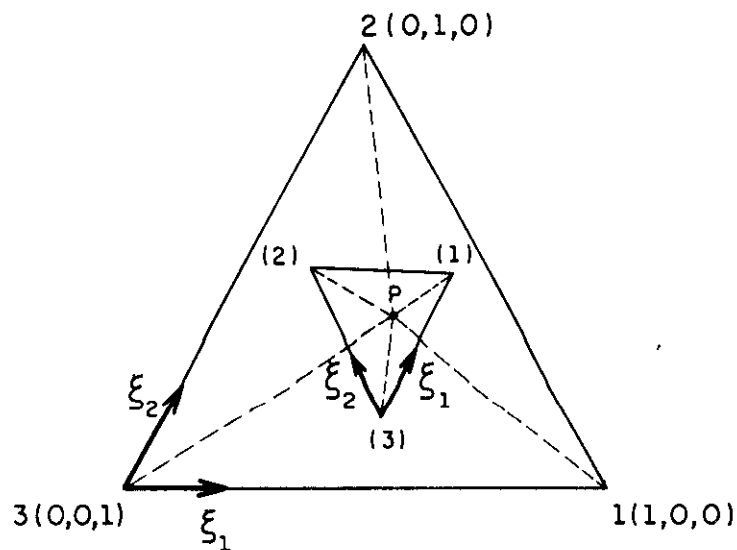


FIGURA 4.13 - Coordenadas triangulares homogêneas do elemento e do subelemento

Analogamente, as mesmas coordenadas cartesianas \underline{x} do ponto P do elemento (Figura 4.13), em função das coordenadas triangulares homogêneas $\bar{\xi}_i$, fica:

$$\underline{x} = \bar{\Psi}^T(\bar{\xi}) \underline{x}^{\bar{N}} \quad (4.53)$$

onde:

$\bar{\Psi}^T(\bar{\xi})$: são as funções de interpolação do subelemento

$\underline{x}^{\bar{N}}$:são as coordenadas cartesianas dos nós do subelemento

Utilizando-se a equação (4.13), $\underline{x}^{\bar{N}}$ pode ser escrito em termos de \underline{X}^N como:

$$\underline{x}^{\bar{N}} = \Psi^T(\xi^{\bar{N}}) \underline{X}^N \quad (4.54)$$

onde, $\xi^{\bar{N}}$ são as coordenadas ξ dos nós do subelemento.

Substituindo-se (4.54) em (4.53), tem-se:

$$\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{\Psi}}^T(\underline{\underline{\xi}}) \underline{\underline{\Psi}}^T(\underline{\underline{\xi}}^{\bar{N}}) \underline{\underline{X}}^N \quad (4.55)$$

Igualando-se as coordenadas cartesianas $\underline{\underline{x}}$ das equações (4.13) e (4.55), obtém-se:

$$\underline{\underline{\Psi}}(\underline{\underline{\xi}}) = \underline{\underline{\Psi}}(\underline{\underline{\xi}}^{\bar{N}}) \underline{\underline{\Psi}}(\underline{\underline{\xi}}) \quad (4.56)$$

que escrita em forma explícita fica:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \xi_1^{(3)} \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \xi_2^{(3)} \\ \xi_3^{(1)} & \xi_3^{(2)} & \xi_3^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \\ \bar{\xi}_3 \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

onde, ξ_i e $\bar{\xi}_i$, são as coordenadas homogêneas do elemento e subelemento, respectivamente, e $\xi_i^{(j)}$ são as coordenadas ξ_i dos nós j do subelemento.

As coordenadas $\bar{\xi}_i$, serão dadas pelas coordenadas homogêneas dos pontos de integração para cada subelemento e a matriz $\underline{\underline{\Psi}}(\underline{\underline{\xi}}^{\bar{N}})$, será formada pelas coordenadas ξ_i dos nós de cada subelemento.

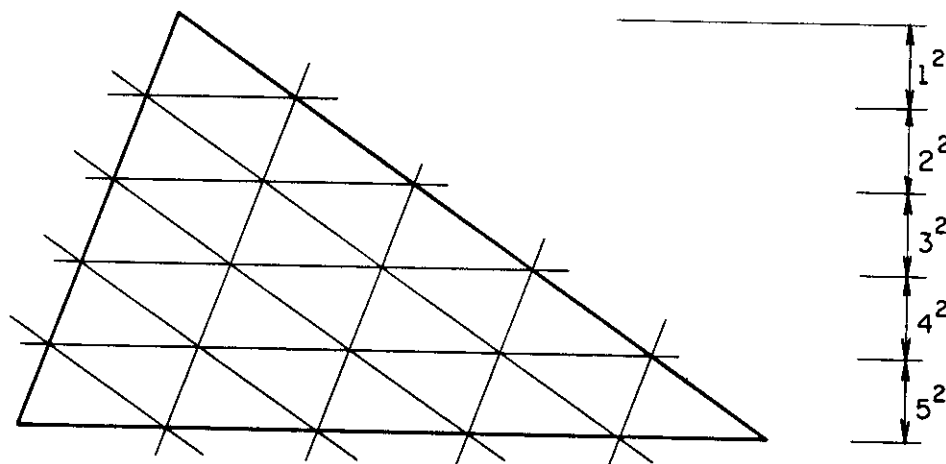


FIGURA 4.14 - Divisão de um elemento em subelementos

A divisão do elemento pode ser feita de tal forma que se obtenham subelementos com as mesmas características geométricas do mesmo, como se mostra na figura 4.14, isto se consegue unindo os pontos que dividem os lados do elemento em partes iguais, por linhas paralelas aos mesmos. Dividindo-se os lados do elemento em duas partes iguais, serão obtidos quatro subelementos, para três partes iguais serão obtidos nove subelementos, para quatro partes iguais serão obtidos dezesseis subelementos, e assim sucessivamente, pode-se observar uma variação quadrática do número de subelementos em relação ao número de subdivisões dos lados do elemento.

As matrizes $\Psi(\xi^{\bar{N}})$, por exemplo, de um elemento dividido em quatro subelementos (Figura 4.15), são determinadas da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Subelemento ①

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Subelemento ②

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Subelemento ③

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Subelemento ④

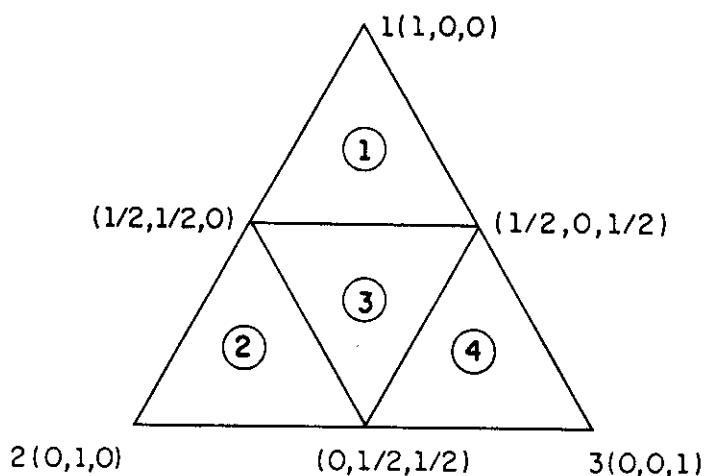


FIGURA 4.15 - Elemento dividido em quatro subelementos

O número de subelementos pode ser determinado em função da distância entre o ponto fonte e o elemento a ser integrado ou seu centroide, quanto menor for essa distância maior será o número de subelementos a serem utilizados. NAKAGUMA (1979), utilizou sete pontos de integração em cada subelemento e adotou os seguintes intervalos para determinar o número de subelementos:

$$0 \leq \bar{R} \leq \bar{L} \quad 9 \text{ subelementos}$$

$$\bar{L} < \bar{R} \leq 2\bar{L} \quad 6 \text{ subelementos}$$

$$\bar{R} > 2\bar{L} \quad 3 \text{ subelementos}$$

onde, \bar{R} é a distância entre o ponto fonte e o centroide do elemento, e \bar{L} é a média dos comprimentos dos lados do elemento.

Procurando-se obter resultados mais precisos, neste trabalho, também serão utilizados sete pontos de integração em cada subelemento, mas adotando-se os seguintes intervalos para determinar o número de subelementos:

$$0 \leq \bar{R} \leq \bar{L} \quad 25 \text{ subelementos}$$

$$\bar{L} < \bar{R} \leq 2\bar{L} \quad 16 \text{ subelementos}$$

$$2\bar{L} < \bar{R} \leq 4\bar{L} \quad 9 \text{ subelementos}$$

$$\bar{R} > 4\bar{L} \quad 4 \text{ subelementos}$$

Tendo sido dividido o elemento em subelementos, as integrais (4.51) e (4.52) ficam:

$$\tilde{g} = \sum_{k=1}^{N_s} |G| \sum_{i=1}^n \tilde{f}_g(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i) w_i \quad (4.58)$$

$$\tilde{h} = \sum_{k=1}^{N_s} |G| \sum_{i=1}^n \tilde{f}_h(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i) w_i \quad (4.59)$$

onde, N_s é o número de subelementos.

Outra alternativa para aumentar o número de pontos de integração foi sugerida por TELLES (1986), que consiste em transformar o elemento

de domínio triangular em quadrangular, podendo-se recorrer assim, aos pontos de integração já conhecidos da quadratura de Gauss aplicados em duas direções.

4.5.2 Integração singular

É denominada assim, quando os pontos Q (ponto fonte) e P (ponto campo) pertencem ao mesmo elemento, neste caso a integração numérica dada por Hamer não permite uma boa aproximação, devido à singularidade existente, sendo necessário recorrer a um procedimento alternativo.

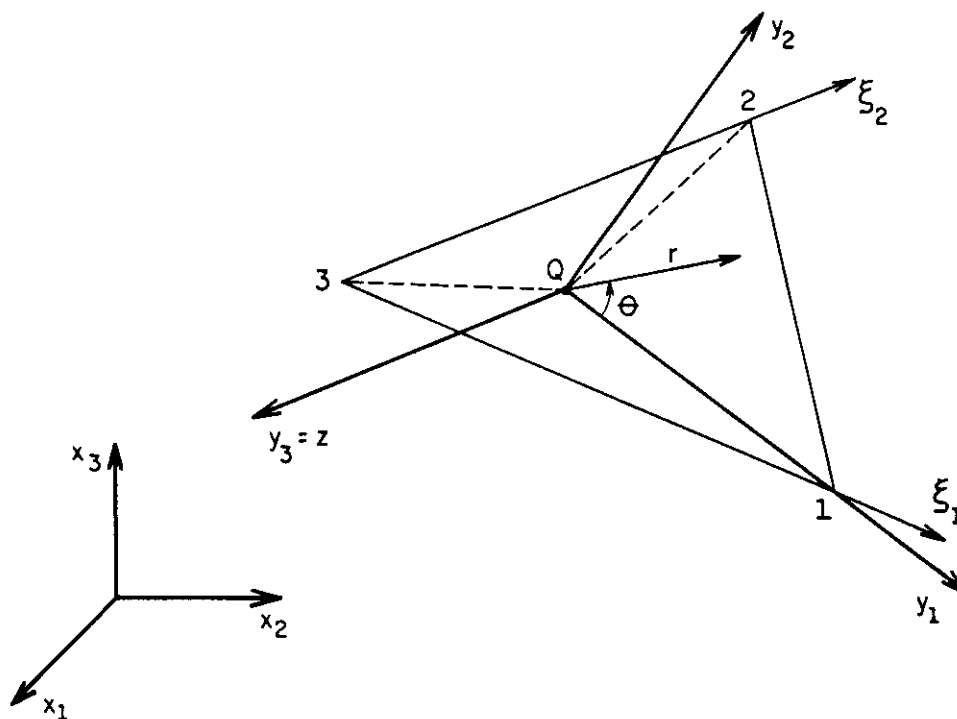


FIGURA 4.16 - Coordenadas locais cartesianas e cilíndricas

Uma forma de solucionar esse problema é reduzindo-se a ordem da singularidade nas integrais das submatrizes \underline{g} e \underline{h} , que são $1/r$ e $1/r^2$, respectivamente, utilizando-se coordenadas locais cilíndricas (r, θ, z) , com origem no ponto Q e o eixo z perpendicular ao plano do elemento (Figura 4.16), assim, o elemento a ser integrado ficará apenas em função de r e θ , isto é:

$$\underline{g} = \int_{\theta} \int_r \underline{u}^*(Q, P) \underline{\Phi}^T(P) r dr d\theta(P) \quad (4.60)$$

$$\underline{\underline{h}} = \int_{\theta} \int_r \underline{\underline{p}}^*(Q, P) \underline{\underline{\Phi}}^T(P) r dr d\theta(P) \quad (4.61)$$

onde:

$$d\Gamma = r dr d\theta \quad (4.62)$$

Tratando-se das soluções fundamentais de Mindlin, $\underline{\underline{u}}^*$ e $\underline{\underline{g}}^*$ são do seguinte tipo:

$$\underline{\underline{u}}^* = k_d \frac{k_1 + k_2 r_{,i} r_{,j}}{r} + k_d f_u(R) \quad (4.63)$$

$$\underline{\underline{g}}^* = k_s \frac{k_3 r_{,i} + k_4 r_{,i} r_{,j} r_{,k}}{r^2} + k_s f_g(R) \quad (4.64)$$

onde, todos os coeficientes k , são constantes, $r_{,i}$, $r_{,j}$ e $r_{,k}$ são os cossenos diretores do vetor \bar{r} , $f_u(R)$ e $f_g(R)$, são funções relacionadas com a distância do ponto campo P e o ponto Q' , sendo este último simétrico ao ponto fonte Q , em relação ao plano $x_3 = 0$ (ver Figura 2.10).

As integrais que contêm as funções $f_u(R)$ e $f_g(R)$, são integrais não singulares, por que o ponto Q' fica sempre fora dos elementos, portanto poderão ser calculadas da forma indicada no item anterior.

Considerando-se apenas os termos em r das soluções fundamentais (4.63) e (4.64), as integrais (4.60) e (4.61) ficam:

$$\underline{\underline{g}} = \int_{\theta} \int_r \underline{\underline{k}}_g \underline{\underline{\Phi}}^T(P) r dr d\theta(P) \quad (4.65)$$

$$\underline{\underline{h}} = \int_{\theta} \int_r \underline{\underline{k}}_h \frac{1}{r} \underline{\underline{\Phi}}^T(P) r dr d\theta(P) \quad (4.66)$$

onde:

$$\underline{\underline{k}}_g = k_d (k_1 + k_2 r_{,i} r_{,j}) \quad (4.67)$$

$$\underline{\underline{k}}_h = k_s (k_3 r_{,i} + k_4 r_{,i} r_{,j} r_{,k}) \quad (4.68)$$

As funções de interpolação Φ^T para um elemento linear descontínuo, calculadas em função das coordenadas cartesianas locais \underline{y} , podem ser escritas como:

$$\xi_i = a_i y_1 + b_i y_2 + c_i \quad i=1,2,3 \quad (4.69)$$

onde:

$$a_i = \frac{y_2^j - y_2^k}{2A} \quad (4.70)$$

$$i=1,2,3$$

$$b_i = \frac{y_1^k - y_1^j}{2A} \quad (4.71)$$

$$j=2,3,1$$

$$k=3,1,2$$

$$c_i = \frac{y_1^j y_2^k - y_1^k y_2^j}{2A} \quad (4.72)$$

sendo, "A" a área do elemento.

Transformado-se as coordenadas cartesianas \underline{y} em coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$y_1 = r \cos \theta \quad (4.73)$$

$$y_2 = r \sin \theta \quad (4.74)$$

$$y_3 = z = 0 \quad (4.75)$$

Escrevendo-se (4.69) em função das coordenadas cilíndricas e substituindo-se nas integrais (4.65) e (4.66), obtém-se:

$$\underline{g} = \int_{\theta} \int_r k_g (a_i r \cos \theta + b_i r \sin \theta + c_i) dr d\theta (P) \quad (4.76)$$

$$\underline{h} = \int_{\theta} \int_r k_h \frac{1}{r} (a_i r \cos \theta + b_i r \sin \theta + c_i) dr d\theta (P) \quad (4.77)$$

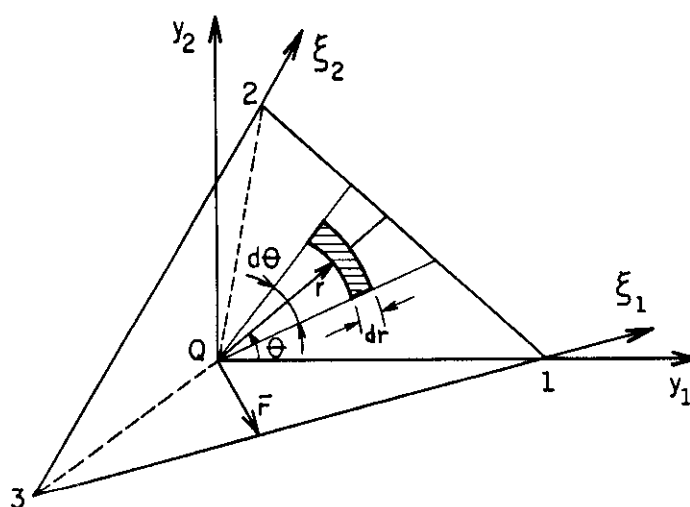


FIGURA 4.17- Esquema de integração em r

Observa-se que a utilização das coordenadas cilíndricas eliminou a singularidade nas integrais da submatriz \underline{g} , podendo-se agora, integrar analiticamente em r (Figura 4.17), isto é:

$$\underline{g} = \int_{\theta} k_g \left(a_i \frac{\bar{r}_k^2}{2} \cos\theta + b_i \frac{\bar{r}_k^2}{2} \sin\theta + c_i \bar{r}_k \right) d\theta(P) \quad (4.78)$$

onde, \bar{r}_k é a equação do lado k do elemento triangular dado por:

$$\bar{r}_k = \frac{c_k}{a_k \cos\theta + b_k \sin\theta} \quad (4.79)$$

A singularidade nas integrais da submatriz \underline{h} , foi reduzida de $1/r^2$ para $1/r$, portanto será necessário que a integração seja feita no sentido de valor principal, como a seguir:

$$\underline{h} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta} \int_{\epsilon}^{\bar{r}} k_h \left(a_i \cos\theta + b_i \sin\theta + \frac{c_i}{r} \right) dr d\theta(P) \right] \quad (4.80)$$

$$\underline{h} = \int_{\theta} k_h \left(a_i \bar{r}_k \cos\theta + b_i \bar{r}_k \sin\theta + c_i \ln \bar{r}_k \right) d\theta(P) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta} k_h c_i \ln \epsilon d\theta(P) \right] \quad (4.81)$$

Integrando-se em relação a θ o termo com o limite, obtém-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\theta} k_h c_i \ln \varepsilon d\theta(P) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[c_i \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} k_h d\theta(P) \right] \quad (4.82)$$

O cálculo da integral em θ , conduz a valores nulos, devido ao integrando k_h que contem uma combinação de funções de seno e coseno de θ . Portanto, rescrevendo-se (4.81), fica:

$$\underline{h} = \int_{\theta} k_h (a_i \bar{r}_k \cos\theta + b_i \bar{r}_k \sin\theta + c_i \ln \bar{r}_k) d\theta(P) \quad (4.83)$$

Depois da integração em r , normalmente as integrais (4.78) e (4.83), são integradas numericamente em θ , utilizando-se o processo de Gauss.

Outra forma de calcular as integrais (4.78) e (4.83) pode ser feita transformando-as em integrais sobre os três lados do elemento (Figura 4.18), através da seguinte relação:

$$d\hat{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} = \bar{r} d\theta \quad (4.84)$$

onde, $d\hat{\Gamma}$ e $\frac{\partial r}{\partial \hat{n}}$ são relativos aos lados que formam o elemento triangular.

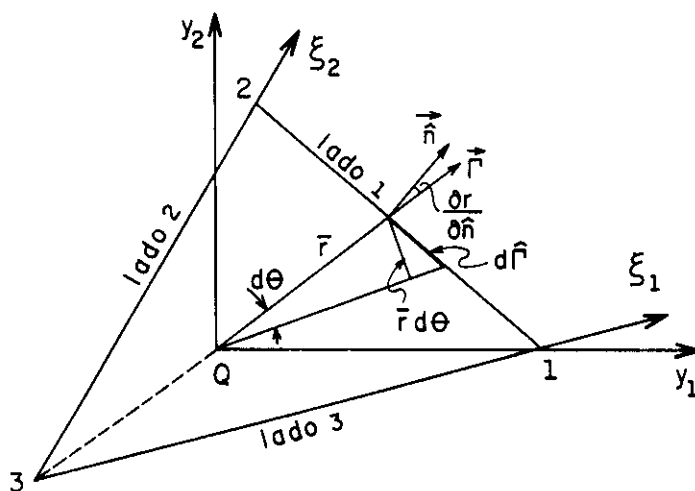


FIGURA 4.18 - Integração sobre os lados do elemento triangular

Os lados do elemento triangular formam o "contorno fictício" do mesmo, e podem ser considerados como se fossem "elementos de contorno lineares". Assim, as integrais (4.78) e (4.83), ficam:

$$\tilde{g} = \int_{\hat{\Gamma}} k_g \left(a_i \frac{\bar{y}_{1k}}{2} + b_i \frac{\bar{y}_{2k}}{2} + c_i \right) \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} d\hat{\Gamma}(P) \quad (4.85)$$

$$\tilde{h} = \int_{\hat{\Gamma}} k_h \frac{1}{\bar{r}_k} \left(a_i \bar{y}_{1k} + b_i \bar{y}_{2k} + c_i \ln \bar{r}_k \right) \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} d\hat{\Gamma}(P) \quad (4.86)$$

Integrando-se (4.85) e (4.86) ao longo dos três lados do elemento triangular, utilizando a quadratura de Gauss, tem-se:

$$\tilde{g} = \sum_{k=1}^3 |\hat{J}| \sum_{i=1}^n \hat{f}_{\tilde{g}}(\hat{\xi}_i) w_i \quad (4.87)$$

$$\tilde{h} = \sum_{k=1}^3 |\hat{J}| \sum_{i=1}^n \hat{f}_{\tilde{h}}(\hat{\xi}_i) w_i \quad (4.88)$$

onde:

- n : número de pontos de integração
- $\hat{\xi}_i$: coordenadas homogêneas dos pontos de integração
- w_i : pesos dos pontos de integração
- $|\hat{J}|$: jacobiano de transformação

sendo, $\hat{f}_{\tilde{g}}(\hat{\xi}_i)$ e $\hat{f}_{\tilde{h}}(\hat{\xi}_i)$ os integrandos das integrais (4.85) e (4.86) respectivamente, em função da coordenada homogênea $\hat{\xi}_i$.

O processo de integração de elementos de contorno lineares, será apresentado com mais detalhe no próximo capítulo.

As operações realizadas neste item, embora tenha sido considerado que o ponto Q (ponto fonte) estivesse situado no interior do elemento triangular, são também válidas para pontos Q situados nos lados ou nos vértices do mesmo, desde que os elementos aos quais pertence o ponto Q fiquem em um mesmo plano e tenham as mesmas condições de contorno, ou seja, deverá existir continuidade tanto na geometria quanto nas condições de contorno nos elementos envolvidos.

4.6 Montagem do sistema de equações

Desprezando-se as forças volumétricas $\underline{\underline{B}}$, a equação (4.8) fica:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}(Q)\underline{\underline{u}}(Q) + \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \underline{\underline{p}}^*(Q,P)\underline{\underline{\Phi}}^T(P)d\Gamma(P) \right] \underline{\underline{U}}^N(P) = \\ = \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \underline{\underline{u}}^*(Q,P)\underline{\underline{\Phi}}^T(P)d\Gamma(P) \right] \underline{\underline{P}}^N(P) \end{aligned} \quad (4.89)$$

A equação (4.89), será aplicada em número igual aos pontos nodais do contorno, para formar um sistema de equações compatível com o número de incógnitas, porém, ela não precisa ser aplicada nos próprios pontos nodais necessariamente. Por exemplo, no caso de um elemento linear contínuo, onde os pontos nodais estão situados nos vértices, ela pode ser aplicada em um ponto Q situado no interior do elemento (Figura 4.19), dando origem assim, ao "ponto de colocação não nodal" e ao "elemento de colocação não nodal" (FERREIRA, 1990). Este tipo de aplicação, é utilizada para vencer eventuais descontinuidades nos pontos nodais de elementos adjacentes a contornos com angulosidade.

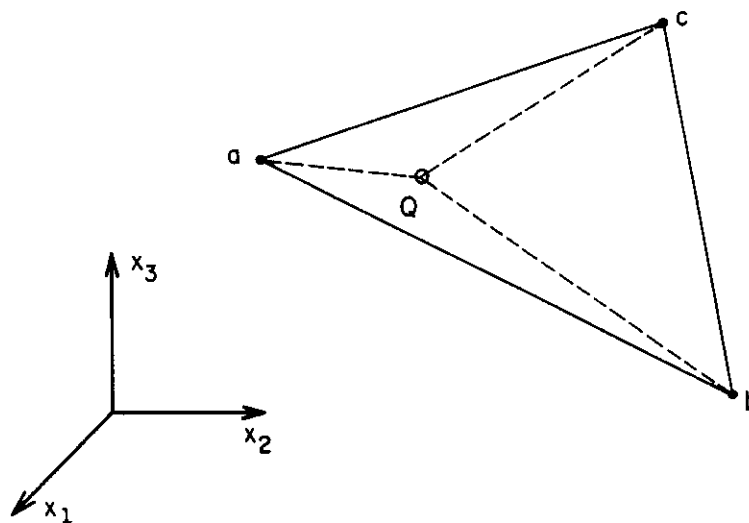


FIGURA 4.19 - Ponto de colocação não nodal

Vários nós do contorno com exatamente as mesmas coordenadas, porém cada um pertencendo a elementos diferentes, representam o nó múltiplo (Figura 4.20).

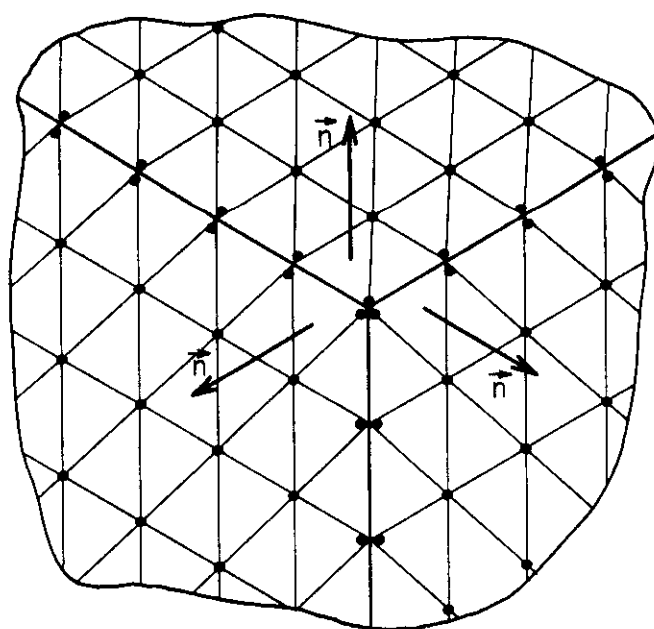


FIGURA 4.20 - Nós múltiplos

Após a integração do elemento de colocação não nodal (integração singular) e dos demais elementos (integração não singular), os deslocamentos do ponto de colocação não nodal são interpolados em função dos valores nodais situados nos vértices do elemento, através das funções de interpolação, isto é:

$$\underline{u}(Q) = \underline{\Phi}^T(Q) \underline{U}^N(P) \quad (4.90)$$

Supondo-se que a, b e c, sejam os pontos nodais do elemento (Figura 4.19), a equação (4.90) escrita explicitamente fica:

$$\begin{Bmatrix} u_1(Q) \\ u_2(Q) \\ u_3(Q) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^1 & 0 & 0 & \phi^2 & 0 & 0 & \phi^3 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^1 & 0 & 0 & \phi^2 & 0 & 0 & \phi^3 & 0 \\ 0 & 0 & \phi^1 & 0 & 0 & \phi^2 & 0 & 0 & \phi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}^a \\ \underline{U}^b \\ \underline{U}^c \end{Bmatrix} \quad (4.91)$$

A equação (4.89) escrita explicitamente para um ponto Q situado no interior do elemento e relacionado ao ponto nodal "a" do mesmo, fica:

$$\begin{aligned}
 & \left[\underline{c}(Q)\phi^1(Q) \quad \underline{c}(Q)\phi^2(Q) \quad \underline{c}(Q)\phi^3(Q) \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{U}^a \\ \tilde{U}^b \\ \tilde{U}^c \end{array} \right\} + \\
 & + \left[\hat{h}_{a1} \quad \dots \quad \hat{h}_{aa} \quad \dots \quad \hat{h}_{ab} \quad \dots \quad \hat{h}_{ac} \quad \dots \quad \hat{h}_{aN} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{U}^1 \\ \vdots \\ \tilde{U}^a \\ \vdots \\ \tilde{U}^b \\ \vdots \\ \tilde{U}^c \\ \vdots \\ \tilde{U}^N \end{array} \right\} = \\
 & = \left[\tilde{\sigma}_{a1} \quad \dots \quad \tilde{\sigma}_{aa} \quad \dots \quad \tilde{\sigma}_{ab} \quad \dots \quad \tilde{\sigma}_{ac} \quad \dots \quad \tilde{\sigma}_{aN} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{P}^1 \\ \vdots \\ \tilde{P}^a \\ \vdots \\ \tilde{P}^b \\ \vdots \\ \tilde{P}^c \\ \vdots \\ \tilde{P}^N \end{array} \right\} \quad (4.92)
 \end{aligned}$$

Somando-se os coeficientes correspondentes aos deslocamentos \underline{U}^a , \underline{U}^b e \underline{U}^c , obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccccc} \hat{h}_{a1} & \dots & h_{aa} & \dots & h_{ab} & \dots & h_{ac} & \dots & \hat{h}_{aN} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{U}^1 \\ \vdots \\ \underline{U}^a \\ \vdots \\ \underline{U}^b \\ \vdots \\ \underline{U}^c \\ \vdots \\ \underline{U}^N \end{array} \right\} = \\
 & = \left[\begin{array}{cccccc} \sigma_{a1} & \dots & \sigma_{aa} & \dots & \sigma_{ab} & \dots & \sigma_{ac} & \dots & \sigma_{aN} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{P}^1 \\ \vdots \\ \underline{P}^a \\ \vdots \\ \underline{P}^b \\ \vdots \\ \underline{P}^c \\ \vdots \\ \underline{P}^N \end{array} \right\} \quad (4.93)
 \end{aligned}$$

onde:

$$\underline{h}_{aa} = \hat{h}_{aa} + \underline{C}(Q)\phi^1(Q) \quad (4.94)$$

$$\underline{h}_{ab} = \hat{h}_{ab} + \underline{C}(Q)\phi^2(Q) \quad (4.95)$$

$$\underline{\underline{h}}_{ac} = \underline{\underline{\hat{h}}}_{ac} + \underline{\underline{C}}(Q)\phi^3(Q) \quad (4.96)$$

As equações (4.92) e (4.93) escritas em forma matricial para todos os pontos nodais, respectivamente ficam:

$$\underline{\underline{C}}\underline{\underline{\Phi}}\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{H}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}\underline{\underline{P}} \quad (4.97)$$

$$\underline{\underline{H}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}\underline{\underline{P}} \quad (4.98)$$

Aplicando-se as condições de contorno à equação (4.98) e efetuando-se a troca de colunas das matrizes $\underline{\underline{H}}$ e $\underline{\underline{G}}$, de forma que todas as incógnitas fiquem no primeiro membro, será obtido um sistema de equações algébricas semelhante ao dado pela equação (4.11), cuja solução fornecerá as incógnitas do problema.

A utilização do elemento de colocação não nodal em elementos adjacentes a angulosidades (elementos de canto), facilita a montagem do sistema de equações, devido a que o ponto fonte, situado no interior do elemento, ficará sempre em um contorno sem angulosidades, portanto os coeficientes não nulos da matriz $\underline{\underline{C}}$ valerão 0.5, isto é:

$$\underline{\underline{C}}(Q) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

No caso em que a equação (4.89) seja aplicada em pontos nodais de um elemento de canto, uma alternativa para calcular indiretamente as submatrizes $\underline{\underline{h}}$ da diagonal principal da matriz $\underline{\underline{H}}$, é por movimento de corpo rígido (NAKAGUMA, 1979). Por exemplo, para o ponto nodal "a" (Figura 4.19), tem-se:

$$\underline{\underline{h}}_{aa} = -\sum_{j=1}^N \underline{\underline{\hat{h}}}_{aj} \quad j \neq a \quad (4.100)$$

A expressão (4.100) é válida para regiões finitas. Para regiões infinitas (solução fundamental de Kelvin) e semi-infinitas (soluções fundamentais de Mindlin e Boussinesq-Cerruti), tem-se:

$$\tilde{h}_{aa} = -\sum_{j=1}^N \hat{h}_{aj} + I \quad j \neq a \quad (4.101)$$

Neste trabalho, será utilizado o elemento linear contínuo em todos os elementos do contorno, exceto nos elementos de canto, onde será utilizado o elemento de colocação não nodal.

4.7 Deslocamentos e tensões em pontos do domínio

Os deslocamentos em pontos do domínio, são determinados em função dos deslocamentos e forças de superfície, já calculados no item anterior, no contorno do sólido discretizado em elementos, utilizando-se a identidade Somigliana, equação (3.6), isto é:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(q) = & -\sum_{j=1}^J \left[\int_{\tilde{\Gamma}_j} \tilde{p}^*(q, P) \tilde{\Phi}^T(P) d\Gamma(P) \right] \tilde{U}^N(P) + \\ & + \sum_{j=1}^J \left[\int_{\tilde{\Gamma}_j} \tilde{u}^*(q, P) \tilde{\Phi}^T(P) d\Gamma(P) \right] \tilde{P}^N(P) + \\ & + \sum_{m=1}^M \left[\int_{\tilde{\Omega}_m} \tilde{u}^*(q, p) \tilde{\Phi}_c^T(p) d\Omega(p) \right] \tilde{B}^N(p) \end{aligned} \quad (4.102)$$

Como o ponto fonte q agora pertence ao domínio, todas as integrais de contorno serão calculadas numericamente como integrais não singulares (item 4.3.1). As forças volumétricas, como foi dito, não serão consideradas neste trabalho, portanto não será necessário calcular as integrais de domínio correspondentes as mesmas.

De forma análoga, a partir da equação (3.7), podem ser determinadas as tensões em um ponto do domínio do sólido:

$$\tilde{\sigma}(q) = -\sum_{j=1}^J \left[\int_{\tilde{\Gamma}_j} \tilde{S}^*(q, P) \tilde{\Phi}^T(P) d\Gamma(P) \right] \tilde{U}^N(P) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \tilde{D}^*(q, P) \tilde{\Phi}^T(P) d\Gamma(P) \right] \tilde{P}^N(P) + \\
& + \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega_m} \tilde{D}^*(q, p) \tilde{\Phi}_c^T(p) d\Omega(p) \right] \tilde{B}^N(p)
\end{aligned} \tag{4.103}$$

4.8 Aplicações numéricas

Neste item, são apresentadas algumas aplicações da formulação do Método dos Elementos de Contorno para sólidos tridimensionais utilizando-se as soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti e Mindlin.

4.8.1 Exemplo 1: Área circular uniformemente carregada

Neste exemplo, como se mostra na figura 4.21, uma área circular situada na superfície de um solo, de módulo de elasticidade longitudinal igual a 10 kN/cm^2 e coeficiente de Poisson $0,3$, está submetida a um carregamento uniforme $q=10 \text{ N/cm}^2$. A figura 4.22, mostra a discretização da área circular.

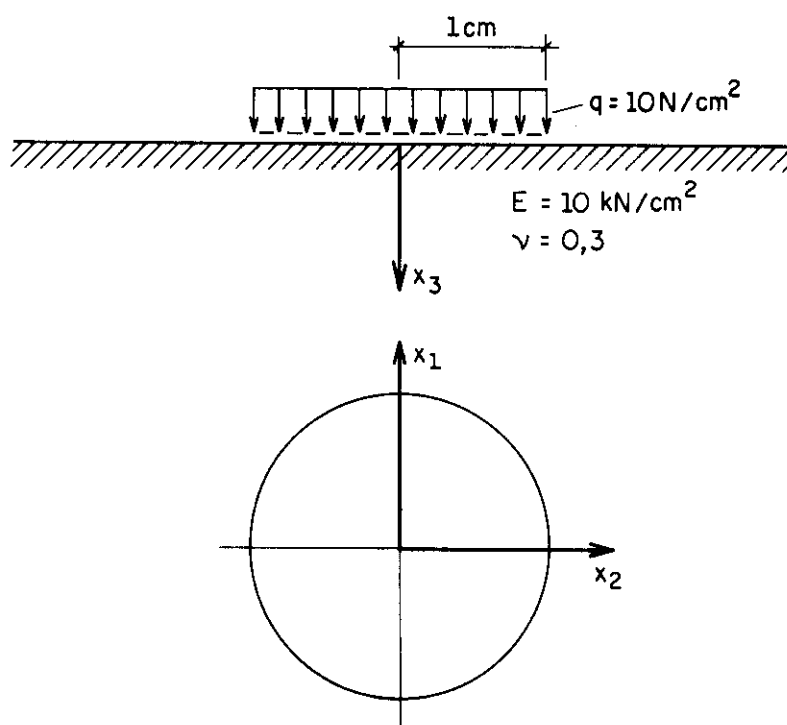


FIGURA 4.21 - Área circular uniformemente carregada

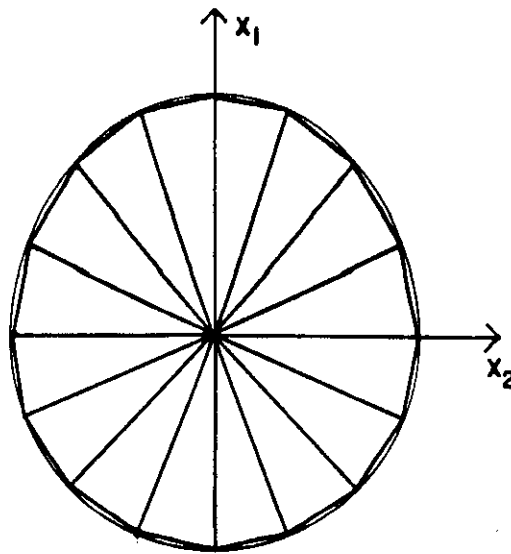


FIGURA 4.22 - Discretização da área circular carregada

As figuras 4.23 e 4.24, mostram os deslocamentos verticais ao longo do eixo x_1 e do eixo x_3 , respectivamente, obtidos utilizando-se as soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti, os quais são comparados com valores exatos (TIMOSHENKO, 1980).

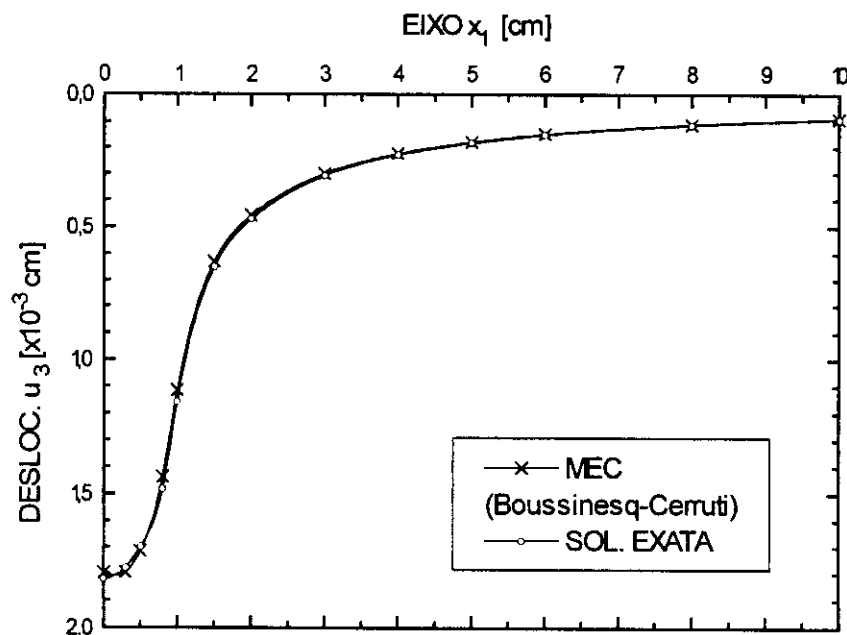


FIGURA 4.23 - Deslocamentos verticais aos longo do eixo x_1

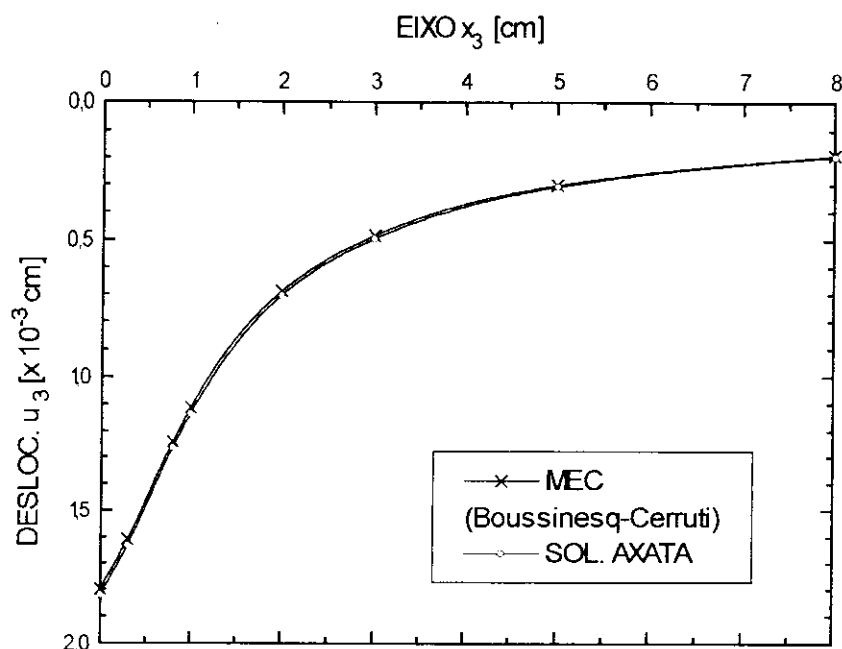


FIGURA 4.24 - Deslocamentos verticais ao longo do eixo x_3

4.8.2 Exemplo 2: Área retangular uniformemente carregada

Neste exemplo, como mostra a figura 4.25, uma área retangular situada na superfície do um solo, esta submetida a um carregamento uniforme $q=95,6 \text{ N/m}^2$. O solo tem módulo de elasticidade longitudinal igual a $44,42 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson 0,3. A figura 4.26, mostra a discretização da área retangular.

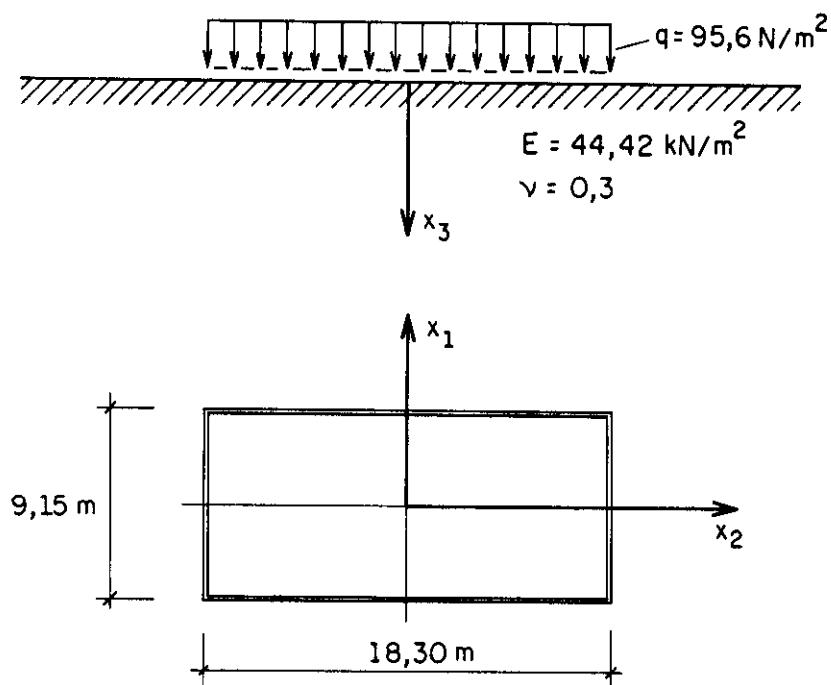


FIGURA 4.25 - Área retangular uniformemente carregada

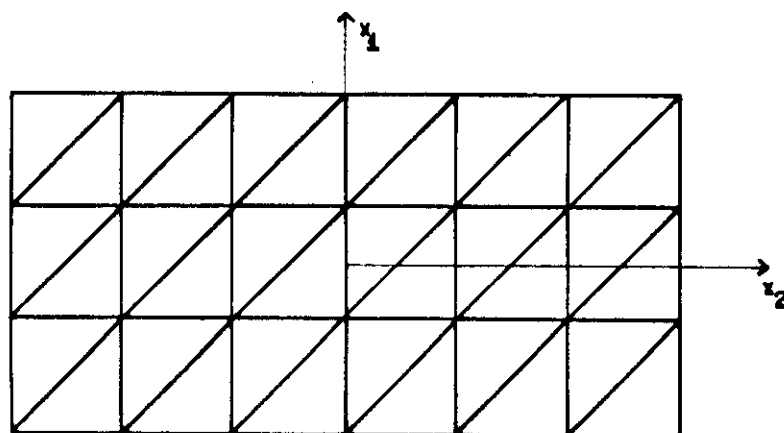
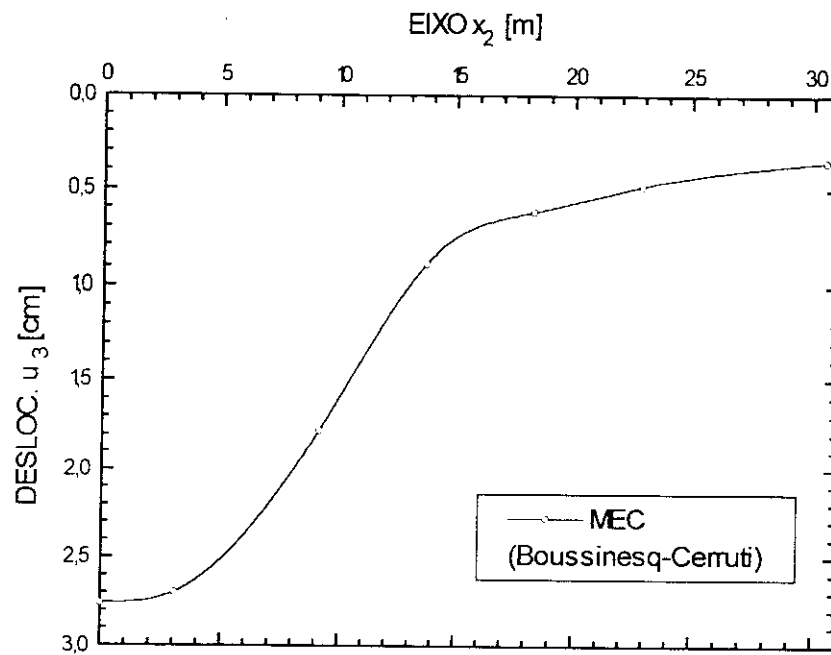
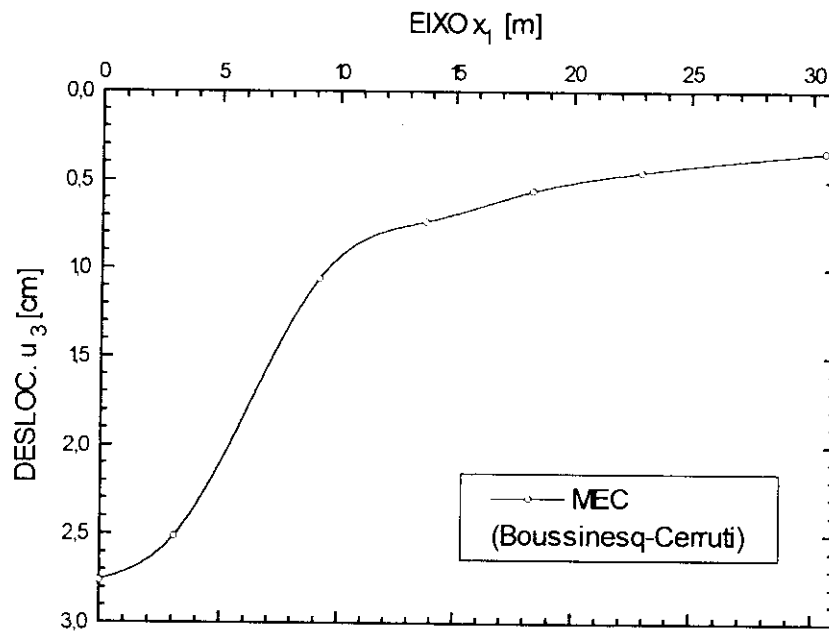
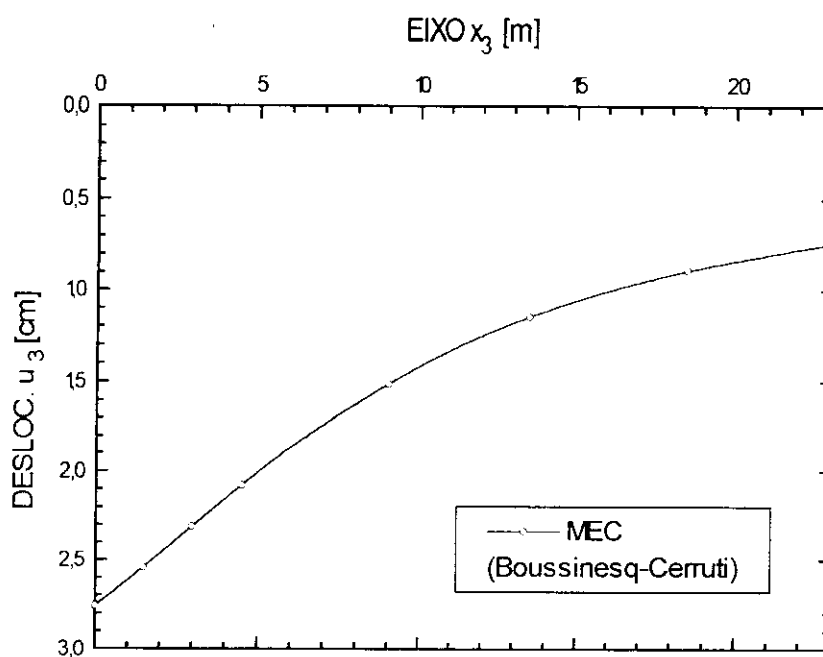
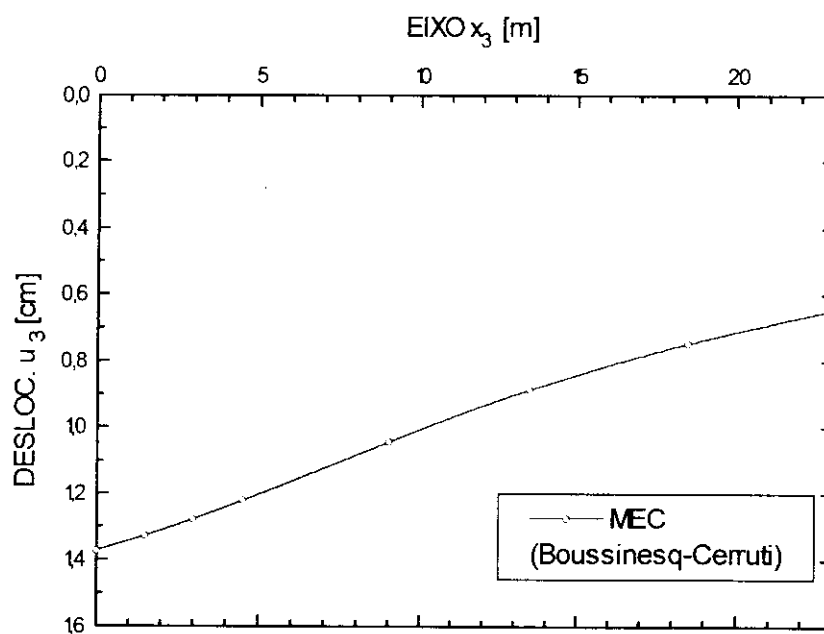


FIGURA 4.26 - Discretização da área retangular carregada

Utilizando-se as soluções fundamentais de Boussinesq-Cerrut, são determinados os deslocamentos verticais na superfície do solo, ao longo do eixo x_1 e do eixo x_2 , mostrados nas figuras 4.27 e 4.28, respectivamente. Os deslocamentos verticais ao longo do eixo x_3 e de um eixo paralelo a este, que passa por um dos vértices da área retangular, são mostrados nas figuras 4.29 e 4.30, respectivamente.

FIGURA 4.27 - Deslocamentos verticais aos longo do eixo x_1 FIGURA 4.28 - Deslocamentos verticais aos longo do eixo x_2

FIGURA 4.29 - Deslocamentos verticais aos longo do eixo x_3 FIGURA 4.30 - Deslocamentos verticais aos longo de um eixo paralelo ao eixo x_3 que passa pelo vértice

4.8.3 Exemplo 3: Cavidade cilíndrica no interior do solo

A figura 4.31, mostra uma cavidade cilíndrica de 1m de diâmetro e altura, situada a uma profundidade de 4m da superfície do um solo. Na sua base atua uma carga uniforme $q=100 \text{ kN/cm}^2$. O solo tem módulo de elasticidade longitudinal igual a 100 kN/cm^2 e coeficiente de Poisson 0,4. A figura 4.32, mostra a discretização da cavidade cilíndrica.

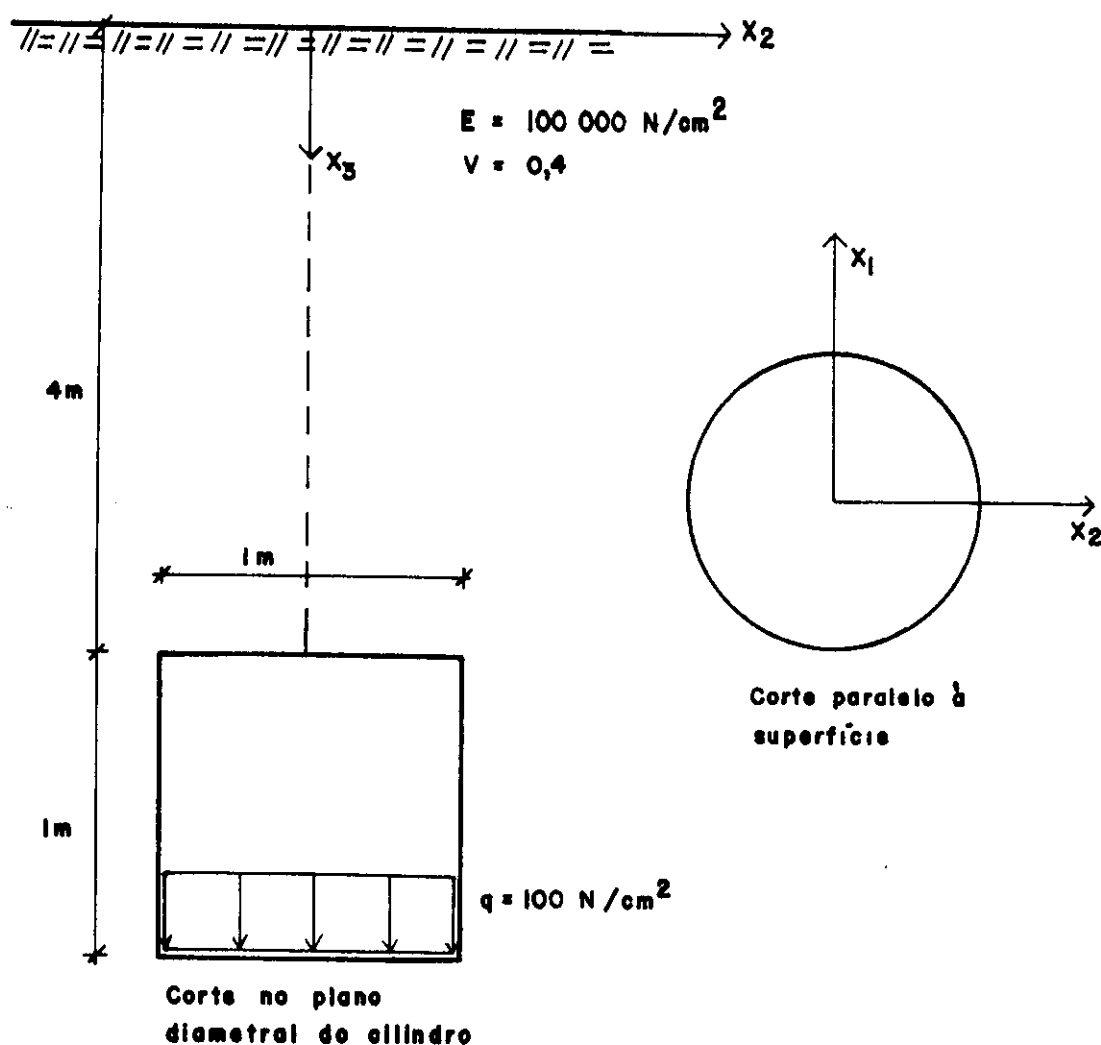


FIGURA 4.31 - Cavidade cilíndrica no interior do solo

Utilizando-se a solução fundamental de Mindlin, são determinados os deslocamentos verticais na superfície do solo ao longo do eixo x_2 , mostrados na figura 4.33. Os deslocamentos verticais ao longo do eixo x_3 e de um eixo paralelo a este, que passa pela geratriz da cavidade cilíndrica, são mostrados nas figuras 4.34 e 4.35, respectivamente.

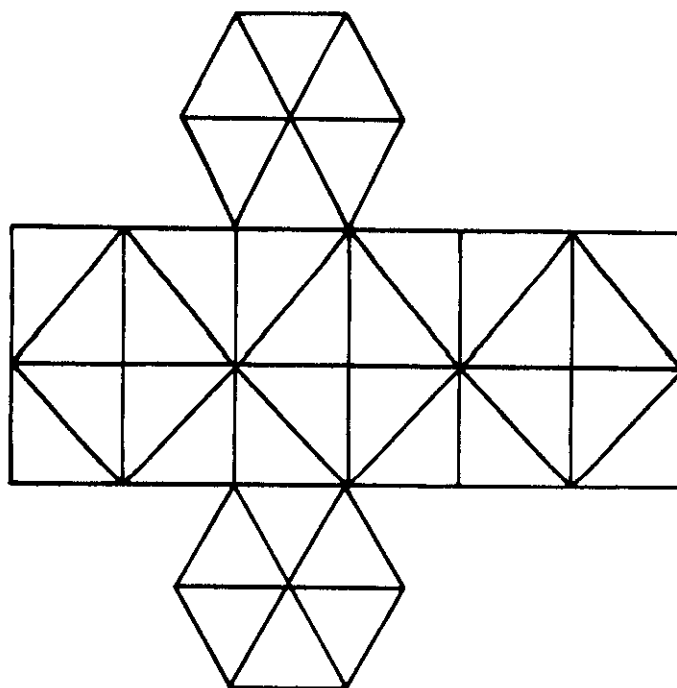


FIGURA 4.32 - Discretização da cavidade cilíndrica

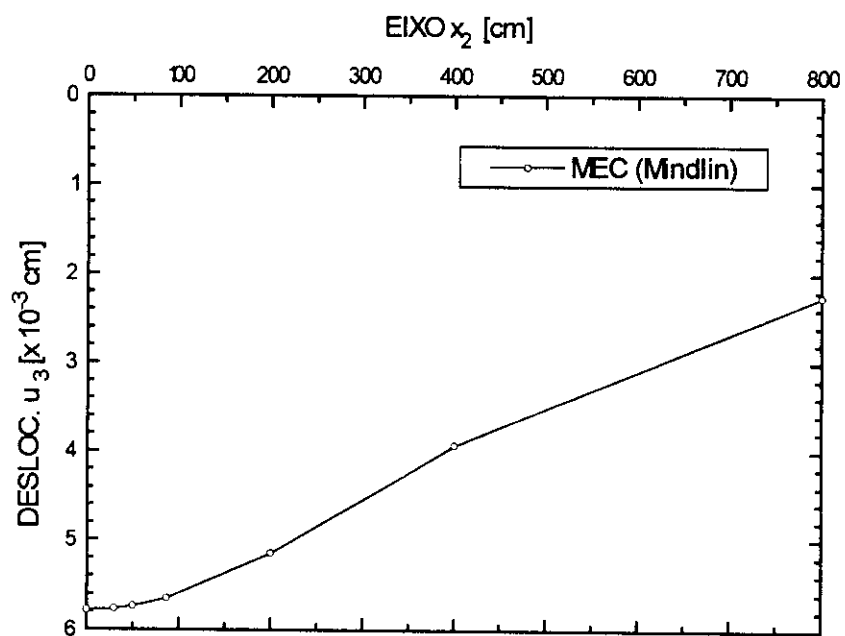


FIGURA 4.33 - Deslocamentos verticais ao longo do eixo x_2

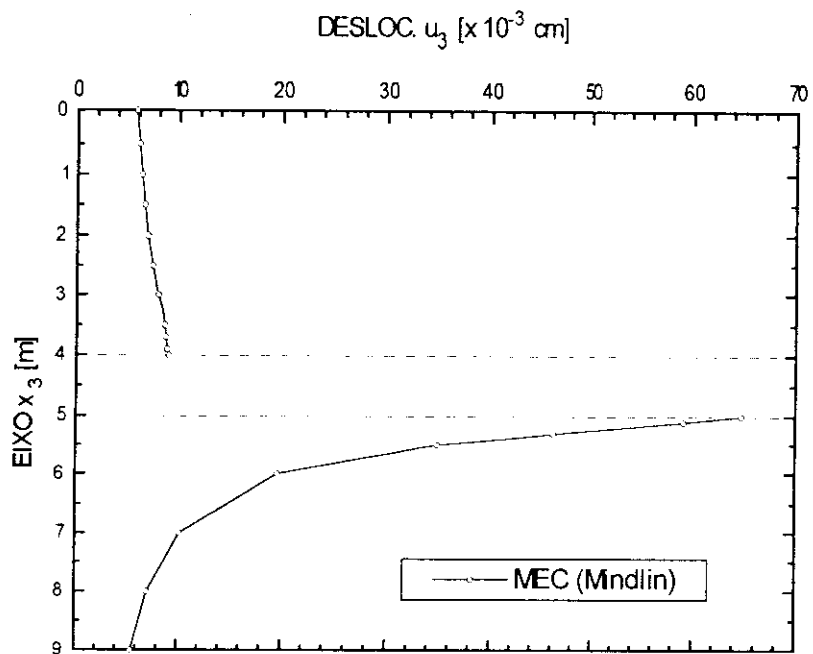


FIGURA 4.34 - Deslocamentos verticais aos longo do eixo x_3

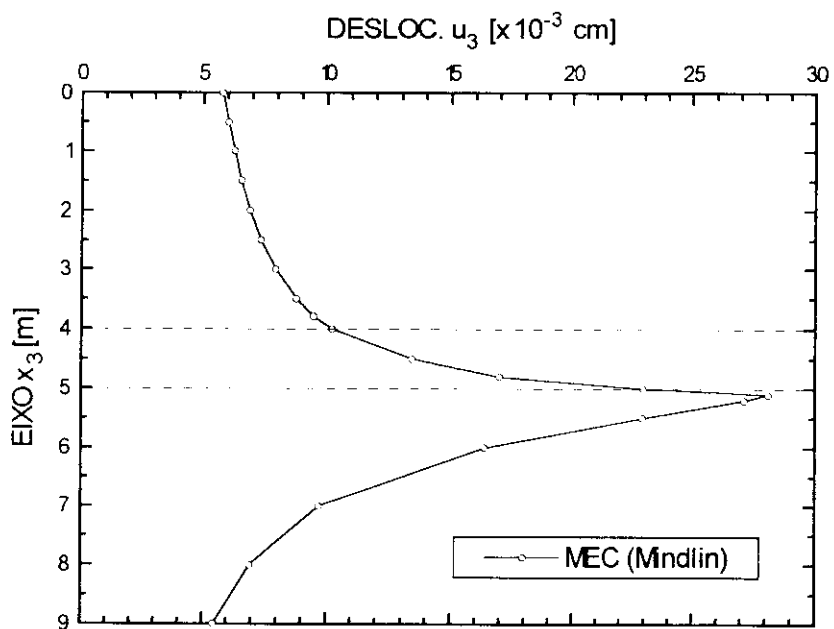


FIGURA 4.35 - Deslocamentos verticais aos longo de um eixo paralelo ao eixo x_3 que passa pela geratriz

CAPÍTULO V

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS

5.1 Introdução

De forma análoga aos sólidos tridimensionais, estudados no capítulo anterior, a equação integral de deslocamento para placas, devido à dificuldade da sua resolução analítica na maioria dos casos de interesse estrutural prático, também será transformada em equações algébricas, através da divisão do contorno da placa em elementos de contorno, que poderão ser segmentos retos ou curvos, onde os deslocamentos e esforços serão aproximados por funções aproximadoras.

Para cada equação integral será obtida uma equação algébrica, definindo-se assim um sistema de equações lineares, onde as incógnitas serão deslocamentos e esforços situados em pontos do contorno da placa, denominados pontos nodais ou simplesmente nós. Impondo-se as condições de contorno à placa, será possível resolver o sistema de equações, determinando-se assim, as incógnitas no contorno, e através destas poderão ser determinados deslocamentos e esforços no domínio da placa.

5.2 Discretização do contorno

Seja uma placa (Figura 5.1), cujo contorno foi aproximado por um número finito de segmentos ou elementos de contorno Γ_j , os quais são escolhidos de modo que possam representar adequadamente o contorno real da placa.

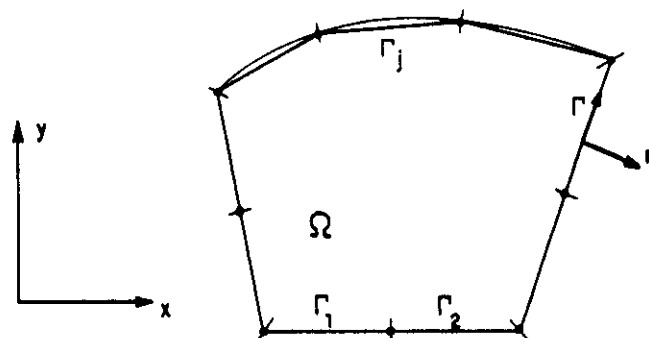


FIGURA 5.1 - Discretização do contorno da placa

Na aproximação da geometria do contorno da placa, podem ser utilizados elementos retos ou curvos, os quais ficam definidos pelas coordenadas cartesianas dos seus pontos nodais $\underline{\tilde{X}}^N$. As coordenadas cartesianas $\underline{\tilde{x}}$ de um ponto P qualquer destes elementos, são expressas em termos de funções aproximadoras $\underline{\tilde{\psi}}$ e de suas coordenadas nodais $\underline{\tilde{X}}^N$, isto é:

$$\underline{\tilde{x}}(P) = \underline{\tilde{\psi}}^T(P) \underline{\tilde{X}}^N \quad (5.1)$$

Neste trabalho, serão utilizados apenas elementos retos ou lineares (Figura 5.2), para aproximar a geometria do contorno da placa, assim:

$$\underline{\tilde{x}}(P) = \begin{Bmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\underline{\tilde{\psi}}^T(P) = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{\phi}}^T(P) & 0 \\ 0 & \underline{\tilde{\phi}}^T(P) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\underline{\tilde{X}}^N = \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_1^2 \\ X_2^1 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

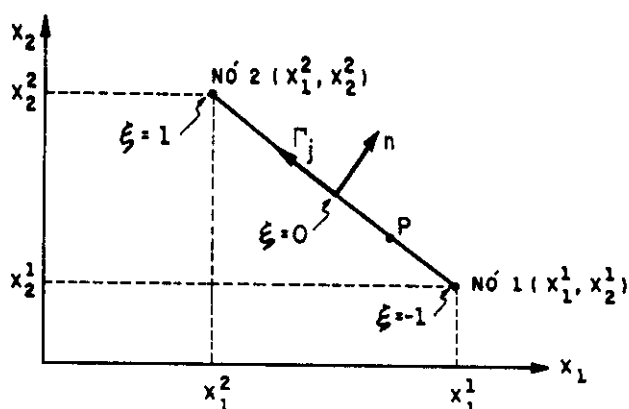


FIGURA 5.2 - Descrição geométrica do elemento linear

O vetor das funções aproximadoras $\tilde{\varphi}(P)$ é dado por:

$$\tilde{\varphi}(P) = \begin{Bmatrix} \varphi_1(P) \\ \varphi_2(P) \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

onde:

$$\varphi_1(P) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (5.6.a)$$

$$\varphi_2(P) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5.6.b)$$

sendo ξ a coordenada local homogênea de um ponto P do elemento (Figura 5.2).

A expressão (5.1) escrita explicitamente para o caso de um elemento reto, fica:

$$\begin{Bmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(P) & \varphi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(P) & \varphi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_1^2 \\ X_2^1 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

5.3 Aproximação das variáveis

Em cada elemento Γ_j , os deslocamentos e esforços podem ser aproximados por funções polinomiais, as quais estão associadas ao número de nós ou pontos nodais do elemento. Os valores das variáveis associados aos nós são denominados "valores nodais".

As funções polinomiais normalmente utilizadas são a constante, a linear e a quadrática, o que implica em elementos com um, dois e três pontos nodais.

Neste trabalho, as variáveis serão aproximadas por funções lineares, de maneira análoga a geometria, portanto as variáveis \underline{u} e \underline{p} (deslocamentos e esforços) sobre cada elemento, podem ser expressas através de funções aproximadoras $\underline{\phi}$ e valores nodais \underline{U}^N e \underline{P}^N .

$$\underline{u}(P) = \underline{\phi}^T(P) \underline{U}^N \quad (5.8)$$

$$\underline{p}(P) = \underline{\phi}^T(P) \underline{P}^N \quad (5.9)$$

ou escritas explicitamente:

$$\begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\begin{Bmatrix} p_1(P) \\ p_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

onde:

$$\begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(P) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(P) \end{Bmatrix} \quad (5.12.a)$$

$$\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \frac{\partial w^1}{\partial n} \\ \frac{\partial w^2}{\partial n} \end{Bmatrix} \quad (5.12.b)$$

$$\begin{Bmatrix} p_1(P) \\ p_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_n(P) \\ M_n(P) \end{Bmatrix} \quad (5.13.a)$$

$$\begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_n^1 \\ V_n^2 \\ M_n^1 \\ M_n^2 \end{Bmatrix} \quad (5.13.b)$$

As funções aproximadoras ϕ , estão relacionadas diretamente com a posição dos pontos nodais no elemento, e determinam que este seja contínuo, descontínuo ou misto.

5.3.1 Elemento linear contínuo

Um elemento linear é contínuo quando os pontos nodais das variáveis coincidem com os nós geométricos do elemento, assumindo nestes nós valores únicos. Este elemento é geralmente utilizado em contornos sem angulosidades e sem variação da vinculação (Figura 5.3).

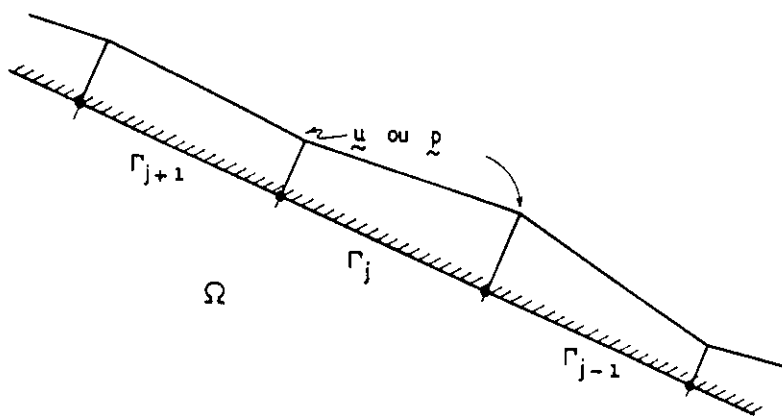


FIGURA 5.3 - Contorno de uma placa apoiada e sem angulosidades

Como os valores nodais \underline{U}^N e \underline{P}^N estão situados no nós geométricos do elemento, a aproximação das variáveis pode ser feita por funções ϕ idênticas a da geometria (Figura 5.4), isto é:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (5.14.a)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5.14.b)$$

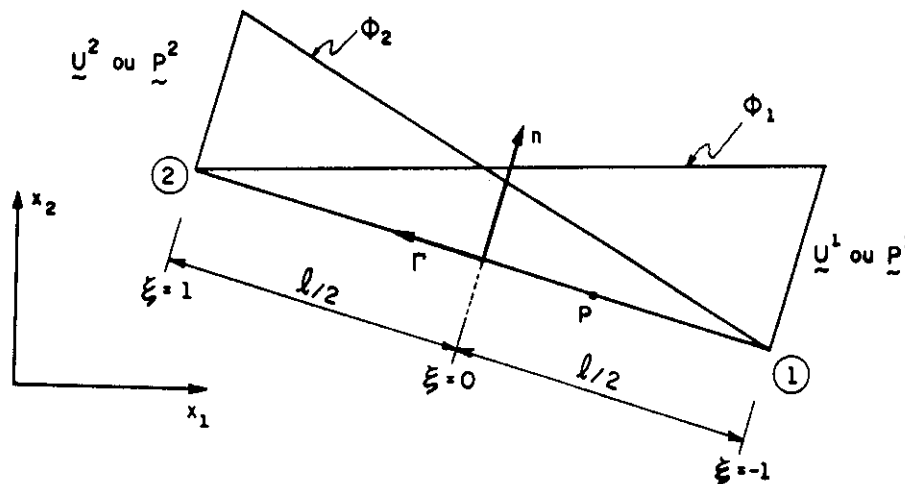


FIGURA 5.4 - Elemento linear contínuo

A presença de angulosidades e vinculações diferentes no contorno de uma placa (Figura 5.5), é inevitável e torna necessária a definição de outros tipos de elementos que permitam expressar tais discontinuidades.

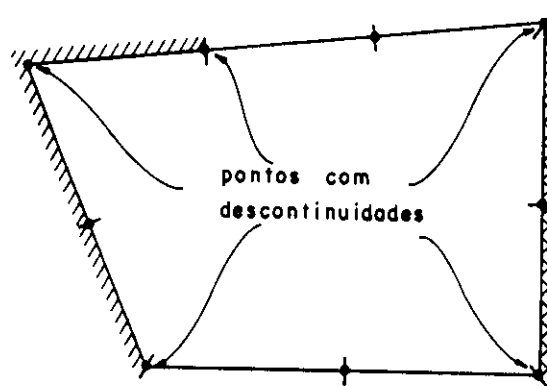


FIGURA 5.5 - Descontinuidades do contorno de uma placa

Uma forma de representar descontinuidades de esforços e deslocamentos, utilizando-se elementos lineares contínuos, é definindo-se dois nós com as mesmas coordenadas, denominado nó duplo (Figura 5.6).

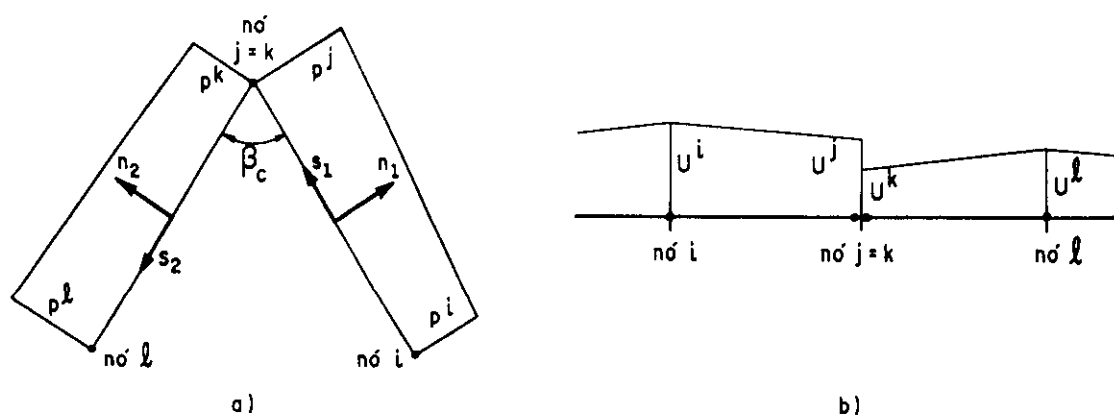


FIGURA 5.6 - Definição de nós duplos

5.3.2 Elemento linear descontínuo

O elemento linear descontínuo se caracteriza por ter definidos seus pontos nodais no interior do elemento, ou seja, eles não coincidem com os nós geométricos do elemento (Figura 5.7), permitindo que haja descontinuidade das variáveis entre elementos adjacentes. Neste caso, as funções ϕ são dadas por:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} (\xi_2 - \xi) \quad (5.15.a)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{\xi_1 - \xi_2} (\xi_1 - \xi) \quad (5.15.b)$$

onde:

- ξ_1 e ξ_2 : posições dos nós com relação ao centro do elemento, em coordenadas homogêneas.
- ξ : coordenada homogênea.

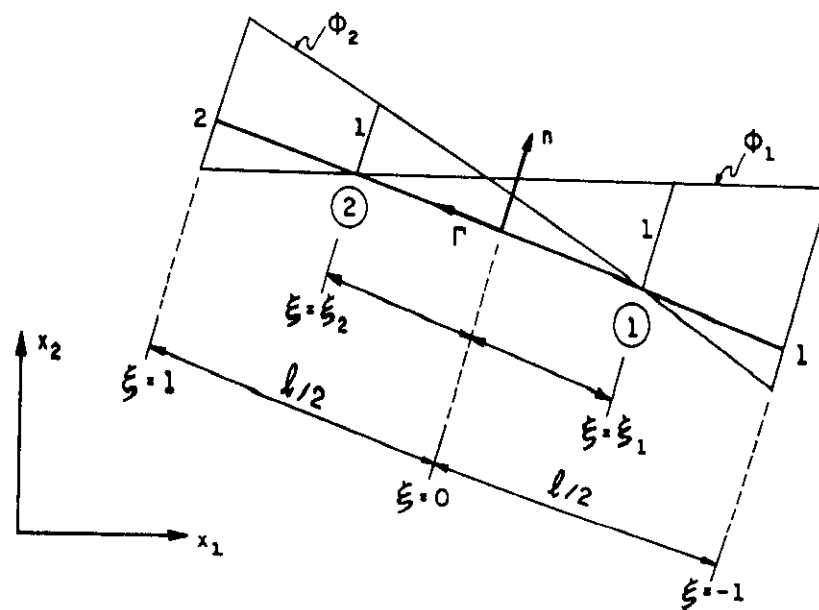


FIGURA 5.7 - Elemento linear descontínuo

Pode-se observar que no caso em que os pontos nodais ① e ② coincidirem com os nós geométricos 1 e 2 do elemento respectivamente (Figura 5.7), isto é, $\xi_1 = -1$ e $\xi_2 = 1$, são obtidas as funções aproximadoras do elemento linear contínuo.

5.3.3 Elemento linear misto

A utilização de apenas elementos descontínuos na discretização do contorno de uma placa, embora possa interpretar qualquer tipo de descontinuidade, aumenta significativamente o número de nós e por consequência o número de equações do sistema. Uma alternativa para diminuir o número de nós do contorno, é a utilização do elemento misto.

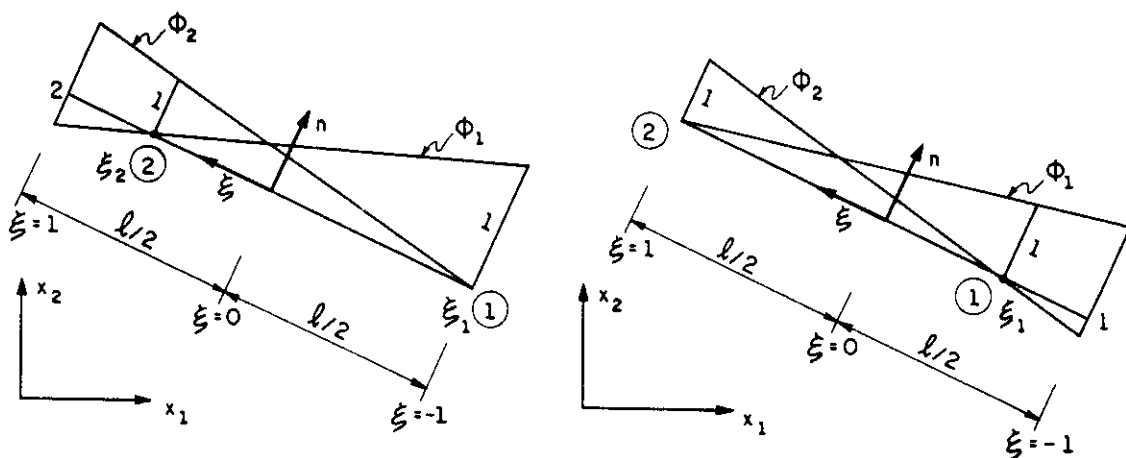


FIGURA 5.8 - Elementos lineares mistos

No elemento linear misto apenas um dos pontos nodais coincide com um dos nós geométricos do elemento (Figura 5.8), podendo expressar assim, descontinuidade em uma das extremidades. Esta propriedade lhe permite conectar elementos contínuos e descontínuos como se mostra na figura 5.9.

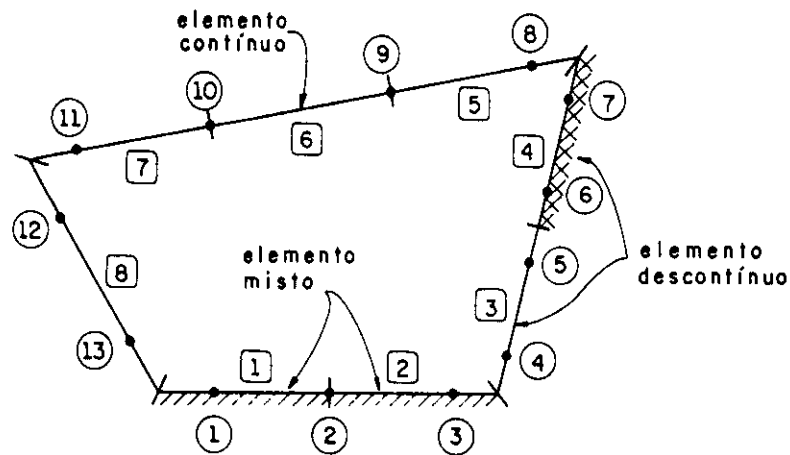


FIGURA 5.9 - Discretização de uma placa com elementos lineares

5.4 Transformação das equações integrais

A equação integral do deslocamento (3.49), para um ponto Q qualquer do contorno, pode ser escrita de forma genérica como:

$$\begin{aligned}
 C(Q)u(Q) + \int_{\Gamma} \tilde{p}^*(Q,P) \underline{u}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} p_{ci}^*(Q,P) w_{ci}(P) = \\
 = \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(Q,P) \underline{p}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} u_{ci}^*(Q,P) R_{ci}(P) + \\
 + \int_{\Omega_g} g(p) u_g^*(Q,p) d\Omega_g(p) \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

onde:

$$\underline{u}(P) = \left\{ \begin{array}{l} w(P) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(P) \end{array} \right\} \quad (5.17)$$

$$\underline{\tilde{p}}(P) = \begin{Bmatrix} V_n(P) \\ M_n(P) \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\underline{\tilde{p}}^*(Q, P) = \{V_n^*(Q, P) \quad -M_n^*(Q, P)\} \quad (5.19)$$

$$\underline{\tilde{u}}^*(Q, P) = \left\{ w^*(Q, P) \quad -\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right\} \quad (5.20)$$

$$p_{ci}^*(Q, P) = R_{ci}^*(Q, P) \quad (5.21)$$

$$u_{ci}^*(Q, P) = w_{ci}^*(Q, P) \quad (5.22)$$

$$u_g^*(Q, P) = w^*(Q, P) \quad (5.23)$$

$$u(Q) = w(Q) \quad (5.24)$$

$$C(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \quad (5.25)$$

Discretizando-se o contorno da placa em "Ne" elementos e substituindo-se as variáveis por suas aproximações (5.8) e (5.9), a equação (5.16) fica:

$$\begin{aligned} C(Q)u(Q) + \sum_{j=1}^{Nc} \int_{\Gamma_j} \underline{\tilde{p}}^*(Q, P) \underline{\tilde{\phi}}^T(P) d\Gamma(P) \underline{U}_j^N + \sum_{i=1}^{Nc} P_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \\ = \sum_{j=1}^{Nc} \int_{\Gamma_j} \underline{\tilde{u}}^*(Q, P) \underline{\tilde{\phi}}^T(P) d\Gamma(P) \underline{P}_j^N + \sum_{i=1}^{Nc} \underline{\tilde{u}}_{ci}^*(Q, P) R_{ci}(P) + \\ + \int_{\Omega_g} g(p) u_g^*(Q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Calculando-se as integrais de contorno da equação (5.26) sobre um elemento genérico Γ_j , ficam:

$$\tilde{h}^j(Q) = \int_{\tilde{\Gamma}_j} \tilde{p}^*(Q,P) \tilde{\phi}^T(P) d\Gamma(P) \quad (5.27)$$

$$\tilde{g}^j(Q) = \int_{\tilde{\Gamma}_j} \tilde{u}^*(Q,P) \tilde{\phi}^T(P) d\Gamma(P) \quad (5.28)$$

Calculando-se também a integral de domínio, correspondente ao carregamento transversal, uma vez transformada em uma integral de contorno, conforme o item 3.4, fica:

$$t(Q) = \int_{\Omega_g} g(p) u_g^*(Q,p) d\Omega_g(p) \quad (5.29)$$

Assim, a equação (5.26) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C(Q)u(Q) + \sum_{j=1}^{Nc} \tilde{h}^j(Q) \tilde{U}_j^N + \sum_{i=1}^{Nc} \tilde{p}_{ci}^*(Q,P) \tilde{w}_{ci}(P) = \\ = \sum_{j=1}^{Nc} \tilde{g}^j(Q) \tilde{P}_j^N + \sum_{i=1}^{Nc} \tilde{u}_{ci}^*(Q,P) \tilde{R}_{ci}(P) + t(Q) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Somando-se as influências $\tilde{h}^j(Q)$ e $\tilde{g}^j(Q)$ de todos os "Ne" elementos nos "Nn" nós do contorno, a equação (5.30) pode ser escrita da seguinte forma:

$$C(Q)u(Q) + \hat{H}(Q) \tilde{U} + \tilde{H}_c(Q) \tilde{W}_c = \tilde{G}(Q) \tilde{P} + \tilde{G}_c(Q) \tilde{R}_c + T(Q) \quad (5.31)$$

O deslocamento $u(Q)$ pode ser escrito em função dos deslocamentos \tilde{U} do elemento ao qual pertence o ponto "Q". Desta forma (5.31) fica:

$$\tilde{H}(Q) \tilde{U} + \tilde{H}_c(Q) \tilde{W}_c = \tilde{G}(Q) \tilde{P} + \tilde{G}_c(Q) \tilde{R}_c + T(Q) \quad (5.32)$$

onde:

$$\tilde{U}^T = \left\{ w^1 \frac{\partial w^1}{\partial n} \dots \dots \dots w^{Nn} \frac{\partial w^{Nn}}{\partial n} \right\}$$

$$\tilde{P}^T = \left\{ V_n^1 \quad M_n^1 \dots \dots \dots V_n^{Nn} \quad M_n^{Nn} \right\}$$

$$\tilde{W}_c^T = \left\{ w_{c1} \quad w_{c2} \dots \dots \dots w_{cNc} \right\}$$

$$\tilde{R}_c^T = \left\{ R_{c1} \quad R_{c2} \dots \dots \dots R_{cNc} \right\}$$

$\tilde{H}(Q)$ e $\tilde{G}(Q)$: são os vetores de influência, que dependem apenas da geometria do problema.

$\tilde{H}_c(Q)$ e $\tilde{G}_c(Q)$: são os vetores formados pelos coeficientes dos deslocamentos e reações dos "Nc" cantos da placa, respectivamente.

$T(Q)$: é o valor resultante da integração da região Ω_g .

A equação (5.32), representa a transformação da equação integral do deslocamento de um ponto do contorno em uma equação algébrica do tipo:

$$a_{ij}(w)_j + b_{ij} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_j + c_{ik}(w_c)_k = d_{ij}(V_n)_j + e_{ij}(M_n)_j + f_{ik}(R_c)_k + t_i$$

$j=1, Nn$ $k=1, Nc$ (5.33)

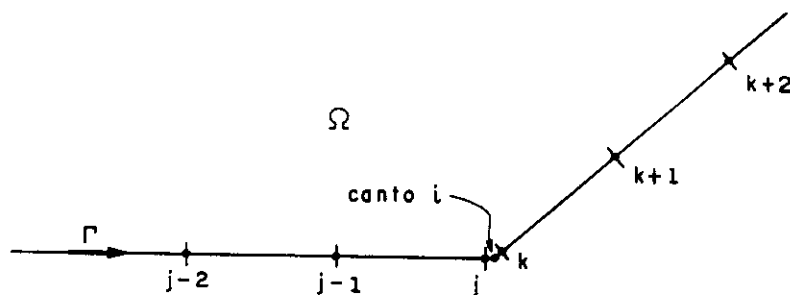


FIGURA 5.10 - Canto "i" da placa com os nós anteriores e posteriores necessários às contribuições da reação de canto na matriz \tilde{H}

Os termos relacionados com os cantos da placa, w_c e R_c , são transformados normalmente em deslocamentos e rotações (PAIVA, 1987 e SILVA, 1988), cujos coeficientes são distribuídos nos nós anteriores e posteriores do canto considerado (Figura 5.10), ou seja, as parcelas assim obtidas são somadas aos correspondentes coeficientes da matriz \underline{H} , desta forma a equação (5.33) fica:

$$a'_{ij}(w)_j + b'_{ij} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_j = d_{ij}(v_n)_j + e_{ij}(M_n)_j + t_i \quad (5.34)$$

ou simplesmente:

$$\underline{H}(Q)\underline{U} = \underline{G}(Q)\underline{P} + T(Q) \quad (5.35)$$

De forma análoga a (5.32) ou (5.35), poderá ser obtida uma equação algébrica para a equação integral da derivada direcional do deslocamento de um ponto "Q" qualquer do contorno (PAIVA, 1987), mudando apenas os valores dos vetores $\underline{H}(Q)$, $\underline{G}(Q)$, $\underline{H}_c(Q)$, $\underline{G}_c(Q)$ e o termo $T(Q)$, em função das correspondentes soluções fundamentais.

5.5 Condições de contorno

Com a discretização do contorno da placa, quatro variáveis são associadas a cada nó, $w(P)$, $\frac{\partial w}{\partial n}(P)$, $V_n(P)$ e $M_n(P)$, das quais duas são conhecidas devido às condições de contorno da placa. Nos casos de vinculações clássicas, tem-se:

a) Borda engastada

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

V_n e M_n desconhecidos

b) Borda simplesmente apoiada

$$w = M_n = 0$$

$$V_n \text{ e } \frac{\partial w}{\partial n} \text{ desconhecidos}$$

c) Borda livre

$$V_n = M_n = 0$$

$$w \text{ e } \frac{\partial w}{\partial n} \text{ desconhecidos}$$

Impondo-se as condições de contorno a todos os "Nn" nós do contorno da placa, a equação (5.35) apresentará "2Nn" incógnitas, o que torna necessário a utilização de duas equações para cada nó, para definir um sistema de equações lineares.

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}} \quad (5.36)$$

Na equação (5.32), os termos w_c e R_c são considerados variáveis, sendo que um deles será conhecido nos casos clássicos de vinculação. Portanto, para a definição do sistema de equações lineares será necessário utilizar duas equações para cada nó e uma para cada canto, desta forma obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{H}} & \underline{\underline{H}}_c \\ \underline{\underline{H}} & \underline{\underline{H}}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{W}}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{G}}_c \\ \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{G}}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{P}} \\ \underline{\underline{R}}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{T}}_c \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

onde, $\underline{\underline{H}}_c$, $\underline{\underline{G}}_c$ são as submatrizes formadas pelos coeficientes correspondentes a w_c e R_c respectivamente, e têm dimensões $2(Nn) \times (Nc)$; $\underline{\underline{H}}$, $\underline{\underline{H}}_c$, $\underline{\underline{G}}$ e $\underline{\underline{G}}_c$ são submatrizes semelhantes a $\underline{\underline{H}}$, $\underline{\underline{H}}_c$, $\underline{\underline{G}}$ e $\underline{\underline{G}}_c$ respectivamente, provenientes das equações integrais de deslocamento aplicadas nos cantos da placa; o subvetor $\underline{\underline{T}}_c$ é também semelhante a $\underline{\underline{T}}$.

As submatrizes $\underline{\underline{H}}$ e $\underline{\underline{G}}$ têm dimensões $(Nc) \times 2(Nn)$ e as submatrizes $\underline{\underline{H}}_c$ e $\underline{\underline{G}}_c$ são quadradas de ordem (Nc) .

O sistema de equações lineares (5.36) pode ser resolvido levando-se todas as incógnitas para o primeiro membro, obtendo-se:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}} \quad (5.38)$$

onde, $\underline{\underline{A}}$ é a matriz dos coeficientes de $\underline{\underline{H}}$ e $\underline{\underline{G}}$ correspondentes a valores de $\underline{\underline{U}}$ e $\underline{\underline{P}}$ desconhecidos, e $\underline{\underline{B}}$ é o vetor obtido a partir da soma do vetor $\underline{\underline{T}}$ com o vetor formado pelo produto dos coeficientes de $\underline{\underline{H}}$ e $\underline{\underline{G}}$ multiplicados pelos correspondentes valores de $\underline{\underline{U}}$ e $\underline{\underline{P}}$ conhecidos.

A solução de (5.38) é dada por:

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} \quad (5.39)$$

onde, $\underline{\underline{X}}$ é o vetor das incógnitas procuradas, composto por deslocamentos e esforços nodais.

O sistema de equações (5.37), pode ser resolvido de forma análoga a (5.36), obtendo-se:

$$\underline{\underline{A}}_c \underline{\underline{X}}_c = \underline{\underline{B}}_c \quad (5.40)$$

$$\underline{\underline{X}}_c = \underline{\underline{A}}_c^{-1} \underline{\underline{B}}_c \quad (5.41)$$

onde, $\underline{\underline{X}}_c$ é o vetor das incógnitas procuradas, composto por deslocamentos e esforços nos nós e cantos da placa.

5.6 Montagem do sistema de equações

Existem varias alternativas para a montagem do sistema de equações lineares (TEJERINA CALDERÓN, 1991), cujas características de algumas delas são baseadas nas seguintes considerações:

a) Os termos dos cantos w_c e R_c , podem ser tratados como variáveis ou como contribuições nos nós adjacentes aos mesmos.

b) Podem ser utilizadas a equação integral do deslocamento e a da sua derivada direcional, ou apenas a equação integral do deslocamento.

c) As equações integrais podem ser aplicadas no contorno ou fora do domínio da placa.

No presente trabalho, será utilizada apenas a equação integral do deslocamento e os termos dos cantos serão considerados variáveis.

Como são necessárias duas equações para cada nó, uma equação integral de deslocamento será aplicada no próprio nó e outra em um ponto "A", localizado fora do domínio na direção normal ao elemento (Figura 5.11), a uma distância do nó dada por:

$$d = a \ell_m \quad (5.42)$$

onde:

a : coeficiente maior que zero;

ℓ_m : media dos comprimentos dos elementos concorrentes no nó, ou simplesmente o comprimento do elemento, no caso do nó adjacente ao canto.

O valor de "a" pode estar situado convenientemente (SILVA, 1988) entre 0,5 e 1,5. Neste trabalho será adotado $a=0,5$.

Quando o ponto de carregamento "A", esta situado fora do domínio, o primeiro termo da equação (5.16) é anulo, ou seja:

$$\int_{\Omega} \delta(A, P) w(P) d\Omega(P) = 0 \quad (5.43)$$

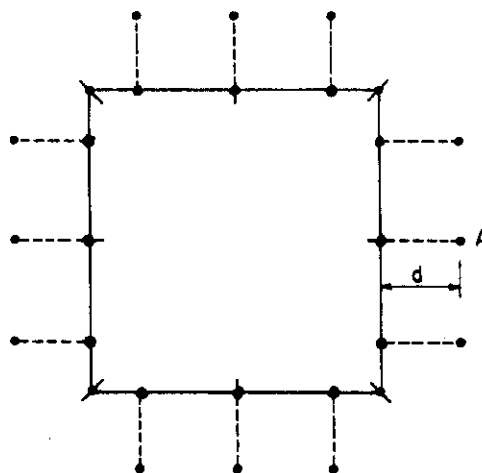


FIGURA 5.11 - Placa quadrada com pontos singulares nos cantos, sobre o contorno e fora do domínio

Para obter-se o mesmo número de equações e incógnitas no sistema de equações (5.37), é necessário aplicar-se equações integrais de deslocamento adicionais nos "Nc" cantos. Portanto, os nós adjacentes aos cantos devem ser levados para o interior de seus respectivos elementos (Figura 5.12), a uma distância aproximadamente igual a 1/3 do comprimento do elemento, isto para evitar que a matriz \tilde{A}_c do sistema de equações (5.40) se torne singular.

Os nós adjacentes aos cantos, dependendo do caso, serão aproximados por elementos lineares descontínuos ou mistos.

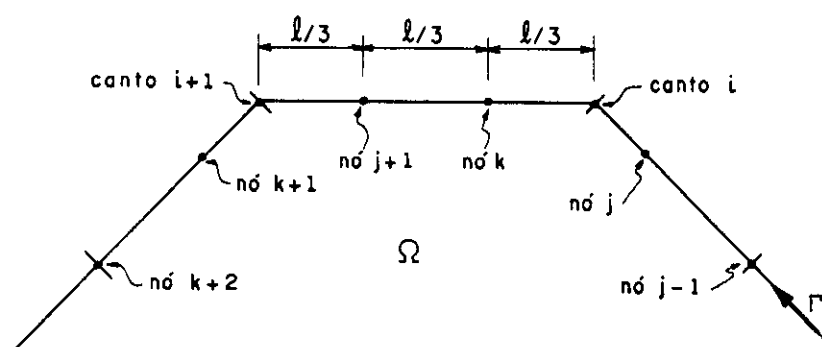


FIGURA 5.12 - Nós j e k, anterior e posterior ao canto "i"

Aplicando-se a equação integral de deslocamento nos pontos nodais "Q" do contorno, nos pontos "A" correspondentes aos pontos nodais localizados fora do domínio e nos cantos (Figura 5.11), será obtido o sistema de equações (5.40), a partir do qual serão determinadas as incógnitas do problema.

5.7 Integração sobre os elementos

A equação (5.26) apresenta integrais de contorno (5.27) e (5.28), que podem ser escritas da seguinte forma:

$$h_k^n(Q) = \int_{\Gamma_j} p_k^*(Q, P) \phi_n(P) d\Gamma(P) \quad (5.44)$$

$$g_k^n(Q) = \int_{\Gamma_j} u_k^*(Q, P) \phi_n(P) d\Gamma(P) \quad (5.45)$$

Quando o ponto de carregamento "Q", não pertence ao elemento a ser integrado, as integrais (5.44) e (5.45) podem ser calculadas numericamente empregando-se a quadratura de Gauss (STROUD & SECREST, 1966), que tem a seguinte expressão:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi(P) = \sum_{i=1}^N w_i f(\xi_i) \quad (5.46)$$

onde:

$f(\xi)$: função a ser integrada, escrita em termos da coordenada adimensional ξ ;

N : número de pontos de integração;

ξ_i : coordenada adimensional do i -ésimo ponto de integração;

w_i : fator ponderador do i -ésimo ponto de integração.

As integrais calculadas numericamente são efetuadas em função da variável adimensional ξ , a qual está relacionada com a variável Γ (Figura 5.4), através da seguinte relação:

$$\Gamma = \frac{\ell}{2} \xi \quad (5.47)$$

O Jacobiano da transformação (5.47), necessário para fazer a mudança de variável nas integrais numéricas, é dado por:

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{\ell}{2} \quad (5.48)$$

ou seja:

$$d\Gamma = \frac{\ell}{2} d\xi \quad (5.49)$$

Assim, as integrais (5.44) e (5.45), escritas em função da variável adimensional " ξ ", ficam:

$$h_k^n(Q) = \int_{-1}^{+1} |J| p_k^*(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (5.50)$$

$$g_k^n(Q) = \int_{-1}^{+1} |J| u_k^*(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (5.51)$$

$$k,n = 1,2$$

onde:

n : representa o nó local do elemento onde se mede a resposta do carregamento unitário aplicado.

Q : é o ponto singular situado sobre o contorno, será "A" se estiver fora do domínio da placa

k : indica a natureza da resposta medida em P , relativa aos esforços fundamentais V_n^* e M_n^* ou a seus correspondentes deslocamentos w^* e $\frac{\partial w^*}{\partial n}$.

Escrevendo-se as integrais (5.50) e (5.51) para um nó local "n" de um elemento qualquer, tem-se:

$$h_1^n(Q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} V_n^*(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (5.52)$$

$$h_2^n(Q) = -\frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} M_n^*(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (5.53)$$

$$g_1^n(Q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} w^*(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (5.54)$$

$$g_2^n(Q) = -\frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (5.55)$$

O cálculo numérico das integrais (5.50) e (5.51), é efetuado em função do número de pontos de integração "N", cuja escolha, para se obter resultados satisfatórios, é feita geralmente em relação à distância do ponto de carregamento ao elemento, embora outros fatores como a função a ser integrada, o comprimento do elemento e os ângulos formados entre os vetores posição e o elemento, poderiam ser também considerados.

Quando o ponto de carregamento "Q" pertence ao elemento a ser integrado, as integrais (5.44) e (5.45) tornam-se singulares e sua resolução é feita no sentido de valor principal. Procedendo-se desta forma,

em um elemento de comprimento ℓ , onde são utilizadas as funções aproximadoras do elemento linear descontínuo (5.15), obtém-se:

$$h_1^n(Q) = 0 \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} h_2^n(Q) = & \frac{\ell}{4\pi} \left\{ C_1^n (1 + \nu) [\phi_2 \ln(\ell \phi_2) + \phi_1 \ln(\ell \phi_1) - 1] + \right. \\ & + \frac{(1 + \nu)}{C_2^n} \left[(\phi_2)^2 \ln(\ell \phi_2) - (\phi_1)^2 \ln(\ell \phi_1) - \frac{1}{2} (\phi_2 - \phi_1) \right] + \\ & \left. + \nu \left[\frac{(\phi_2 - \phi_1)}{C_2^n} + C_1^n \right] \right\} \quad (5.57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1^n(Q) = & \frac{\ell^3}{8\pi D} \left\{ \frac{C_1^n}{3} \left[(\phi_2)^3 \left[\ln(\ell \phi_2) - \frac{5}{6} \right] + (\phi_1)^3 \left[\ln(\ell \phi_1) - \frac{5}{6} \right] \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2C_2^n} \left[(\phi_2)^4 \left[\ln(\ell \phi_2) - \frac{3}{4} \right] - (\phi_1)^4 \left[\ln(\ell \phi_1) - \frac{3}{4} \right] \right] \right\} \quad (5.58) \end{aligned}$$

$$g_2^n(Q) = 0 \quad (5.59)$$

onde, ϕ_1 e ϕ_2 são dados por (5.14) e:

$$C_1^n = \frac{\xi_{3-n} - \xi}{\xi_{3-n} - \xi_n} \quad (5.60)$$

$$C_2^n = \xi_{3-n} - \xi_n \quad (5.61)$$

$$n=1,2$$

As coordenadas ξ_1 e ξ_2 definem a posição dos nós, situados nas extremidades ou dentro do elemento, como é mostrado na figura 5.13. A posição dos pontos singulares fica definida pelas coordenadas adimensionais " ξ " de cada elemento, assim, o ponto singular estará localizado no interior do elemento para $\xi = -\bar{\xi}$ ou $\xi = \bar{\xi}$, sendo adotado

$\bar{\xi} = 0,35$ no presente trabalho. Para $\xi = +1$ ou $\xi = -1$, o ponto singular estará em uma das extremidades do elemento e neste caso as expressões (5.57) e (5.58) ficam:

$$h_2^n(Q) = \frac{\ell}{4\pi} \left\{ C_1^n (1 + \nu) \left[(\phi_2 + \phi_1) \ln \ell - 1 \right] + \frac{(1 + \nu)}{C_2^n} \left[(\phi_2 - \phi_1) \left(\ln \ell - \frac{1}{2} \right) \right] + \nu \left[\frac{(\phi_2 - \phi_1)}{C_2^n} + C_1^n \right] \right\} \quad (5.62)$$

$$g_1^n(Q) = \frac{\ell^3}{8\pi D} \left\{ \frac{C_1^n}{3} \left[(\phi_2 + \phi_1) \left(\ln \ell - \frac{5}{6} \right) \right] + \frac{1}{2C_2^n} \left[(\phi_2 - \phi_1) \left(\ln \ell - \frac{3}{4} \right) \right] \right\} \quad (5.63)$$

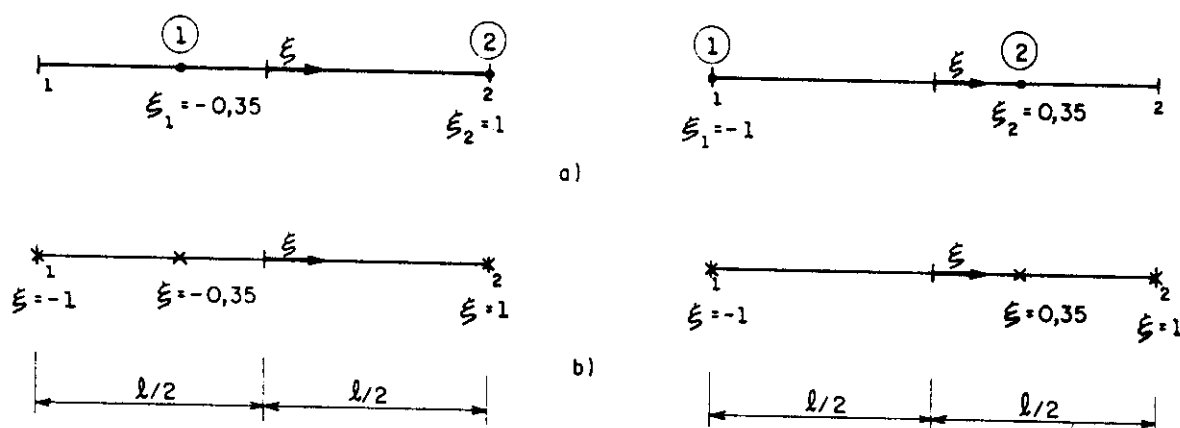


FIGURA 5.13 - Posição de : a) nós e b) pontos singulares; em um elemento linear misto

5.8 Propriedades da matriz \underline{H}

Admitindo-se um carregamento transversal nulo, em uma placa qualquer (Figura 5.14), os vetores dos esforços nodais \underline{P} e das integrações sobre a região carregada \underline{T} , no sistema de equações (5.36), são também nulos, isto é:

$$\underline{\underline{H}}\underline{\underline{U}} = 0 \tag{5.64}$$

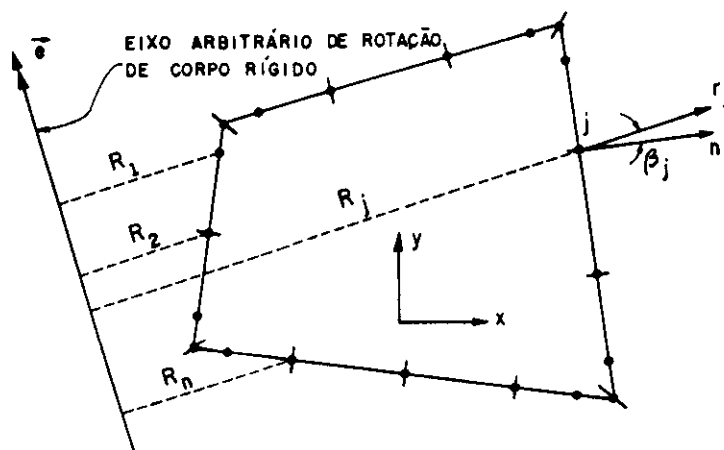


FIGURA 5.14 - Placa com carregamento transversal nulo

O sistema de equações resultante (5.64), admite soluções não triviais, correspondentes aos movimentos de corpo rígido, isto é, deslocamento vertical e rotação em torno de um eixo arbitrário (PAIVA, 1987).

O deslocamento de corpo rígido w_0 , correspondente ao movimento vertical da placa, é dado por:

$$\underline{\underline{U}}^T = \{w_0 \quad 0 \quad w_0 \quad 0 \quad \dots \quad w_0 \quad 0\} \tag{5.65}$$

que, substituído em (5.64), permite escrever a seguinte propriedade da matriz $\underline{\underline{H}}$:

$$\sum_{j=1}^{Nn} h_{i,2j-1} = 0 \tag{5.66}$$

$$i = 1, 2Nn$$

Considerando-se agora uma rotação de corpo rígido α , no sentido indicado pelo eixo arbitrário \vec{e} (Figura 5.14), o vetor deslocamento fica:

$$\underline{\underline{U}}^T = \alpha \{R_1 \quad \cos\beta_1 \quad R_2 \quad \cos\beta_2 \quad \dots \quad R_n \quad \cos\beta_{Nn}\} \tag{5.67}$$

Substituindo-se (5.67) no sistema (5.64), obtém-se a seguinte propriedade para uma linha qualquer da matriz \tilde{H} :

$$\sum_{j=1}^{N_n} (h_{i,2j-1} R_j + h_{i,2j} \cos \beta_j) = 0 \quad (5.68)$$

As propriedades (5.66) e (5.68) da matriz \tilde{H} , são normalmente utilizadas para obter os elementos da diagonal principal, correspondentes a integrais singulares, ou para simples verificação da mesma.

5.9 Deslocamentos e esforços para pontos internos

5.9.1 Deslocamento transversal $w(q)$ e sua derivada $\frac{\partial w}{\partial m}(q)$

Após a determinação das incógnitas no contorno, pode-se obter os deslocamentos $w(q)$ e $\frac{\partial w}{\partial m}(q)$ em pontos internos da placa, aplicando-se as equações (3.49) e (3.51) em todos eles, formando assim, uma equação matricial semelhante a (5.37):

$$\tilde{w}(q) + \begin{bmatrix} \tilde{H}' & \tilde{H}'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{W}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}' & \tilde{G}'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{R}_c \end{Bmatrix} + \tilde{T}' \quad (5.69)$$

onde:

$$\tilde{w}(q) = \begin{Bmatrix} w_{\tilde{1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{\tilde{N}_i} \end{Bmatrix} \quad \text{com} \quad w_{\tilde{1}} = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial m} \end{Bmatrix}_1$$

N_i : número de pontos internos;

\tilde{H}' e \tilde{G}' : são matrizes de influência dos pontos internos

semelhantes a \tilde{H} e \tilde{G} ;

$\underline{\underline{H}}'_c$ e $\underline{\underline{G}}'_c$: são matrizes formadas pelos coeficientes dos termos provenientes da reação de canto, semelhantes a $\underline{\underline{H}}_c$ e $\underline{\underline{G}}_c$;

$\underline{\underline{T}}'$: vetor resultante da integração sobre a região Ω_g , dos pontos internos, semelhante a $\underline{\underline{T}}$;

$\underline{\underline{U}}$ e $\underline{\underline{P}}$: vetores dos deslocamentos e esforços dos nós do contorno, já determinados;

$\underline{\underline{W}}_c$ e $\underline{\underline{R}}_c$: vetores dos deslocamentos e reações dos cantos da placa, também já determinados.

As matrizes $\underline{\underline{H}}'$, $\underline{\underline{G}}'$, $\underline{\underline{H}}'_c$ e $\underline{\underline{G}}'_c$ poderão ter duas ou três linhas para cada ponto interno, desde que se escreva uma ou duas equações integrais da derivada direcional, podendo ser nas direções dos eixos x ou y , ou nas duas.

Na determinação dos deslocamentos em pontos internos, todas as integrais sobre os elementos são calculadas numericamente, assim, as submatrizes de $\underline{\underline{H}}'$ e $\underline{\underline{G}}'$ para um nó local "n" de um elemento qualquer ficam:

$$h_{11}^n(q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} V_n^*(q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (5.70)$$

$$h_{12}^n(q) = -\frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} M_n^*(q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (5.71)$$

$$h_{21}^n(q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (5.72)$$

$$h_{22}^n(q) = -\frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (5.73)$$

$$g_{11}^n(q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} w^*(q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (5.74)$$

$$g_{12}^n(q) = -\frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (5.75)$$

$$g_{21}^n(q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (5.76)$$

$$g_{22}^n(q) = -\frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \phi_n(P) d\xi(P) \quad (5.77)$$

5.9.2 Momento fletor e força cortante para pontos internos

O momento fletor e a força cortante são dados na forma indicial pelas seguintes expressões:

$$M_{ij} = -D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_i} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (2.31)$$

$$Q_i = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_i \partial x_i} \quad (2.32)$$

Substituindo-se o valor de $w(q)$ da equação (3.49) em (2.31) e (2.32), obtém-se:

$$\begin{aligned} M_{ij}(q) = & - \int_{\Gamma} \left[V_{nij}^*(q, P) w(P) - M_{nij}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ & - \sum_{c=1}^{Nc} R_{cij}^*(q, P) w_c(P) + \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w_{ij}^*(q, P) + \right. \\ & \left. - M_n(P) \frac{\partial w_{ij}^*}{\partial n}(q, p) \right] d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{Nc} R_c(P) w_{cij}^*(q, P) + \\ & + \int_{\Omega_g} g(p) w_{ij}^*(q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned}
Q_i(q) = & - \int_{\Gamma} \left[V_{ni}^*(q, P) w(P) - M_{ni}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
& - \sum_{c=1}^{Nc} R_{ci}^*(q, P) w_c(P) + \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w_i^*(q, P) + \right. \\
& \left. - M_n(P) \frac{\partial w_i^*}{\partial n}(q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{Nc} R_c(P) w_{ci}^*(q, P) + \\
& + \int_{\Omega_g} g(p) w_i^*(q, p) d\Omega_g(p) \tag{5.79}
\end{aligned}$$

onde:

$$V_{nij}^*(q, P) = -D \left[v \delta_{ij} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q, P) + \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \tag{5.80}$$

$$M_{nij}^*(q, P) = -D \left[v \delta_{ij} \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q, P) + (1 - v) \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \tag{5.81}$$

$$w_{ij}^*(q, P) = -D \left[v \delta_{ij} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q, P) + (1 - v) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \tag{5.82}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_{ij}^*}{\partial n}(q, P) = & -D \left\{ v \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial n}(q, P) \right] + \right. \\
& \left. + (1 - v) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \right\} \tag{5.83}
\end{aligned}$$

$$V_{ni}^*(q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q, P) \right] \tag{5.84}$$

$$M_{ni}^*(q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q, P) \right] \tag{5.85}$$

$$w_i^*(q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) \right] \quad (5.86)$$

$$\frac{\partial w_i^*}{\partial n} (q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right] \right\} \quad (5.87)$$

$$R_{cij}^*(q, P) = -D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) + (1 - \nu) \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_i \partial x_j} (q, P) \right] \quad (5.88)$$

$$R_{ci}^*(q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) \right] \quad (5.89)$$

Discretizando-se o contorno, as variáveis, aproximadas conforme o item 5.3, são substituídas nas equações (5.78) e (5.79), as quais expressas em função da variável adimensional "ξ", ficam:

$$\begin{aligned} M_{ij}(q) = & - \sum_{k=1}^{Nc} \int_{-1}^{+1} |J| \left[V_{nij}^*(q, P) - M_{nij}^*(q, P) \right] \phi^T(P) d\xi(P) \underline{U}_k^N + \\ & - \sum_{c=1}^{Nc} R_{cij}^*(q, P) w_c(P) + \sum_{k=1}^{Nc} \int_{-1}^{+1} |J| \left[w_{ij}^*(q, P) + \right. \\ & \left. - \frac{\partial w_{ij}^*}{\partial n} (q, P) \right] \phi^T(P) d\xi(P) \underline{P}_k^N + \sum_{c=1}^{Nc} R_c(P) w_{cij}^*(q, P) + \\ & + \int_{\Omega_g} g(p) w_{ij}^*(q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} Q_i(q) = & - \sum_{k=1}^{Nc} \int_{-1}^{+1} |J| \left[V_{ni}^*(q, P) - M_{ni}^*(q, P) \right] \phi^T(P) d\xi(P) \underline{U}_k^N + \\ & - \sum_{c=1}^{Nc} R_{ci}^*(q, P) w_c(P) + \sum_{k=1}^{Nc} \int_{-1}^{+1} |J| \left[w_i^*(q, P) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\hat{\partial} w_i^*}{\partial n}(q, P) \left] \phi^T(P) d\xi(P) P_{\sim k}^N + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P) w_{ci}^*(q, P) + \right. \\
& \left. + \int_{\Omega_g} g(p) w_i^*(q, p) d\Omega_g(p) \right. \quad (5.91)
\end{aligned}$$

Aplicando-se as equações (5.90) e (5.91) a todos os pontos internos "Ni", obtém-se o vetor de esforços que escrito matricialmente fica:

$$\tilde{E} = - \begin{bmatrix} \tilde{S} & \tilde{S}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{W}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{F} & \tilde{F}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{R}_c \end{Bmatrix} + \tilde{T}_e \quad (5.92)$$

onde:

$$\tilde{E} = \begin{Bmatrix} \tilde{E}_1 \\ \vdots \\ \tilde{E}_i \\ \vdots \\ \tilde{E}_{Ni} \end{Bmatrix} \quad \tilde{E}_i = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_{xy} \\ M_y \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}$$

\tilde{S} e \tilde{F} : são matrizes semelhantes a \tilde{H} e \tilde{G} , determinadas a partir das soluções fundamentais (5.80) a (5.87).

\tilde{S}_c e \tilde{F}_c : são as matrizes formadas pelos coeficientes dos termos provenientes da reação de canto, semelhantes a \tilde{S} e \tilde{F} .

\tilde{T}_e : é o vetor resultante das integrais de domínio, semelhante a \tilde{T} .

\tilde{U} e \tilde{P} : vetores dos deslocamentos e esforços dos nós do contorno.

\tilde{W}_c e \tilde{R}_c : vetores dos deslocamentos e reações dos cantos da placa.

As derivadas das soluções fundamentais (5.80) à (5.89), apresentadas a seguir, são determinadas em relação a um eixo particular x_i definido no ponto "q" (Figura 5.15).

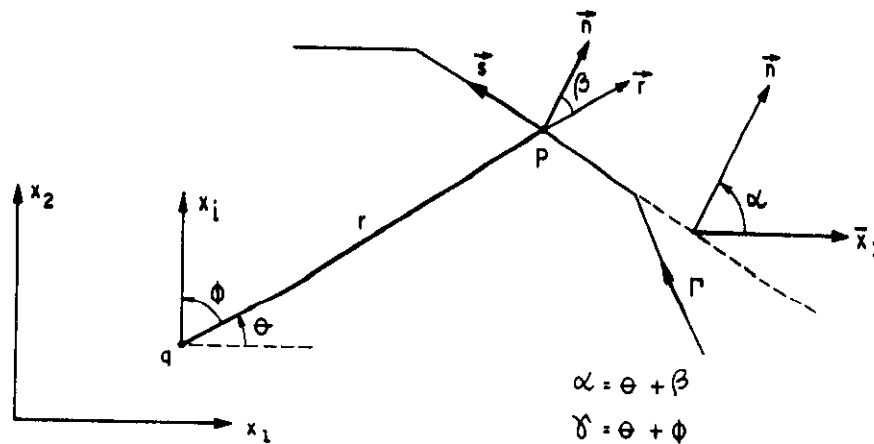


FIGURA 5.15 - Representação do vetor posição $r(q,P)$

$$\frac{\partial w^*}{\partial x_i}(q,P) = -\frac{r}{4\pi D} \ln r r_i \quad (5.93.a)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,P) = \frac{r}{4\pi D} (r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \ln r) \quad (5.93.b)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q,P) = \frac{r}{4\pi D} (1 + 2 \ln r) \quad (5.93.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q,P) \right] = -\frac{r}{2\pi D} r_i \quad (5.93.d)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] = -\frac{r}{4\pi D} [r_{,i} (r_{,k} n_k) + n_i \ln r] \quad (5.94.a)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] = -\frac{1}{4\pi r D} [(2r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij})(r_{,k} n_k) - r_{,i} n_j - r_{,j} n_i] \quad (5.94.b)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right] = \frac{1}{2\pi r D} (r, \ell n_\ell) \quad (5.94.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right] \right\} = \frac{1}{2\pi r^2 D} [2r_i (r, \ell n_\ell) - n_i] \quad (5.94.d)$$

$$-4(1-\nu)(r, k s_k)(r, k n_k) s_i + (3-\nu)[n_i - 2r_{,i} (r, k n_k)] \quad (5.95.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j} (q, P) &= \frac{1}{4\pi r^3} \{ 2(1-\nu)(r, k s_k)^2 [24r_{,i} r_{,j} (r, k n_k) + \\ &-4[r_{,i} n_j + r_{,j} n_i + \delta_{ij} (r, k n_k)]] + \\ &+ 2(1-\nu)(r, k s_k) [2(n_i s_j + n_j s_i) - 8(r, k n_k)(r_{,i} s_j + r_{,j} s_i)] + \\ &+ 4(1-\nu)(r, k n_k)(s_i s_j) + (3-\nu) [2\delta_{ij} (r, k n_k) + \\ &+ 8r_{,i} r_{,j} (r, k n_k) + 2(r_{,i} n_j + r_{,j} n_i)] \} \quad (5.95.b) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) = -\frac{1-\nu}{\pi r^3} (r, \ell s_\ell) [4(r, k s_k)^2 - 1] \quad (5.95.c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) \right] &= -\frac{1-\nu}{\pi r^4} \{ (r, k s_k)^2 [24r_{,i} (r, \ell n_\ell) - 4n_i] + \\ &-(r, \ell n_\ell) [8s_i (r, k s_k) - 4r_{,i}] + n_i \} \quad (5.95.d) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial x_i} (q, P) = \frac{1}{4\pi r} \{ (1+\nu)r_{,i} - 2(1-\nu)(r, k n_k) [r_{,i} (r, k n_k) - n_i] \} \quad (5.96.a)$$

$$\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j} (q, P) = -\frac{1}{4\pi r^2} \{ (1+\nu)(\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) +$$

$$+2(1-\nu)\left\{n_i n_j - 2r_{,j} n_i (r_{,k} n_k) + (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j})(r_{,k} n_k)^2 + \right. \\ \left. - 2r_{,i} (r_{,k} n_k) [n_j - r_{,j} (r_{,k} n_k)]\right\} \quad (5.96.b)$$

$$\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q, P) = -\frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu) [1 - 2(r_{,k} n_k)^2] \right\} \quad (5.96.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q, P) \right] = -\frac{1-\nu}{\pi r^3} [r_{,i} + 2r_{,i} (r_{,k} n_k) - 4r_{,i} (r_{,k} n_k)^2] \quad (5.96.d)$$

$$\frac{\partial M_{ns}^*}{\partial x_i}(q, P) = -\frac{1-\nu}{4\pi r} [2r_{,i} (r_{,k} n_k)(r_{,k} s_k) - n_i (r_{,k} s_k) - s_i (r_{,k} n_k)] \quad (5.97.a)$$

$$\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) = \frac{1-\nu}{4\pi r^2} \left\{ 2[(r_{,k} s_k)(r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) + \right. \\ \left. + (r_{,k} n_k)(r_{,i} s_j + r_{,j} s_i) + (r_{,k} n_k)(r_{,k} s_k)(\delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j})] + \right. \\ \left. - (n_i s_j + n_j s_i) \right\} \quad (5.97.b)$$

$$\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q, P) = \frac{1-\nu}{\pi r^2} [(r_{,k} s_k)(r_{,\ell} n_\ell)] \quad (5.97.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q, P) \right] = \frac{1-\nu}{\pi r^3} [4r_{,i} (r_{,k} s_k)(r_{,\ell} n_\ell) + \\ - n_i (r_{,k} s_k) - s_i (r_{,\ell} n_\ell)] \quad (5.97.d)$$

$$i, j, k, \ell = 1, 2$$

5.10. Aplicações numéricas

Neste item, são apresentadas algumas aplicações numéricas da formulação do método dos elementos de contorno para problemas de flexão de placas, utilizando-se para montagem do sistema de equações lineares, equações integrais de deslocamento aplicadas nos cantos, nos nós e fora do domínio. Os resultados obtidos utilizando-se esta alternativa proposta (A. P.), são comparados com os resultados obtidos analiticamente (TIMOSHENKO, 1959) e por PAIVA (1987), que serão designados como REF. A e REF. B, respectivamente.

Em todos os exemplos analisados, as variáveis são aproximadas por elementos lineares contínuos, exceto nos nós adjacentes aos cantos, onde são utilizados elementos lineares mistos ou descontínuos com $\bar{\xi} = 0,35$. Para os pontos fonte situados fora do domínio é adotado $a=0,5$. Em todos os exemplos a placa tem $\nu=0,3$ e $E=2500000 \text{ kN/cm}^2$.

5.10.1 Exemplo 1: Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada.

Neste exemplo é analisada uma placa quadrada apoiada no contorno com carregamento uniformemente distribuído (Figura 5.16), cujo contorno é discretizando em 8, 16, 32 e 40 elementos.

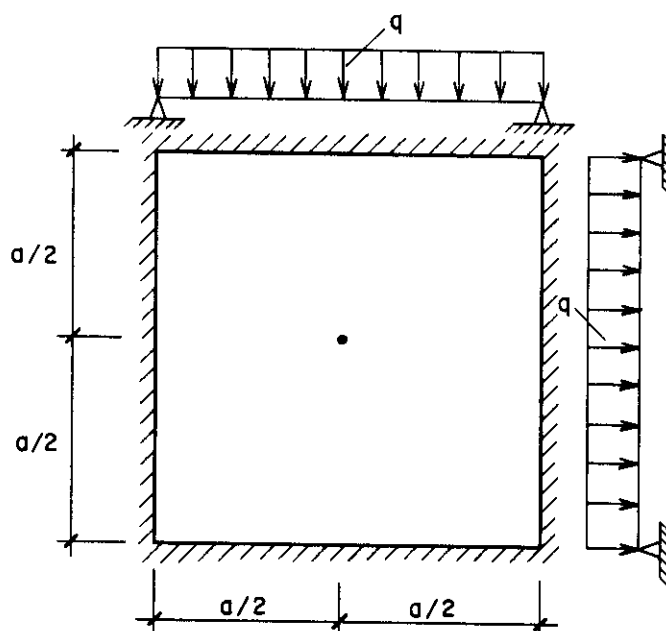


FIGURA 5.16 - Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada

TABELA 5.1 - Resultados do exemplo 1

NÚMERO	w_{\max}	M_{\max}	V_{\max}	R_c
ELEMEN	0,00406 *	0,0479 *	0,42 *	0,065 *
8	0,00393	0,0467	0,41	0,142
16	0,00404	0,0476	0,45	0,087
32	0,00406	0,0478	0,43	0,072
40	0,00406	0,0479	0,42	0,070
FATOR	qa^4 / D	qa^2	qa	qa^2

* Valores teóricos (REF. A).

5.10.2 Exemplo 2: Placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada.

A placa analisada neste exemplo é quadrada, engastada no seu contorno e com carregamento uniformemente distribuído, conforme a figura 5.17. Aqui também o contorno é discretizado em 8, 16, 32 e 40 elementos e os seus resultados obtidos são comparados com os resultados exatos (REF. A), na tabela 5.2.

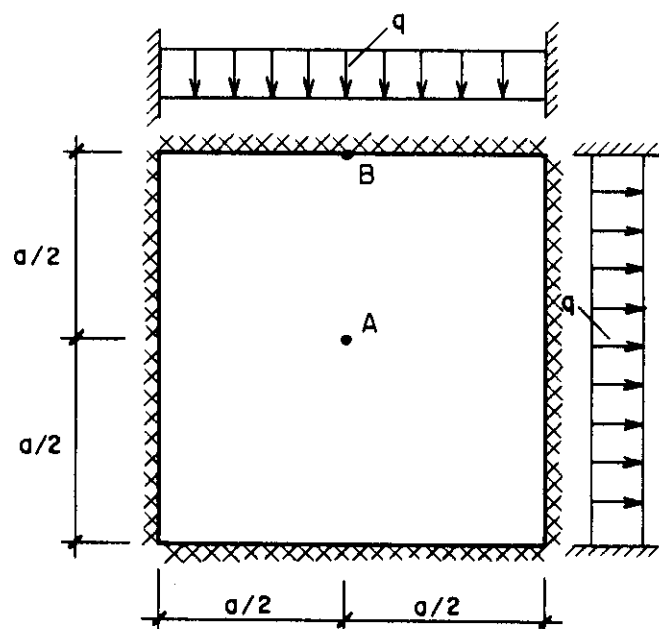


FIGURA 5.17 - Placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada

TABELA 5.2 - Resultados do exemplo 2

NÚMERO	w_A	M_{xA}	M_{yB}	R_c
ELEMEN	0,00126 *	0,0231 *	-0,0513 *	0,000 *
8	0,00128	0,0230	-0,0600	0,014
16	0,00127	0,0229	-0,0555	0,002
32	0,00127	0,0229	-0,0522	0,002
40	0,00127	0,0229	-0,0518	0,002
FATOR	qa^4 / D	qa^2	qa^2	qa^2

* Valores teóricos (REF. A).

4.10.3 Exemplo 3: Placa quadrada engastada em dois lados opostos e apoiada nos outros dois com carregamento uniformemente distribuído.

Esta placa (Figura 5.18), é discretizada com 40 elementos iguais. Os resultados obtidos utilizando-se a alternativa proposta (A. P.), são comparados com os da referência A (REF.A).

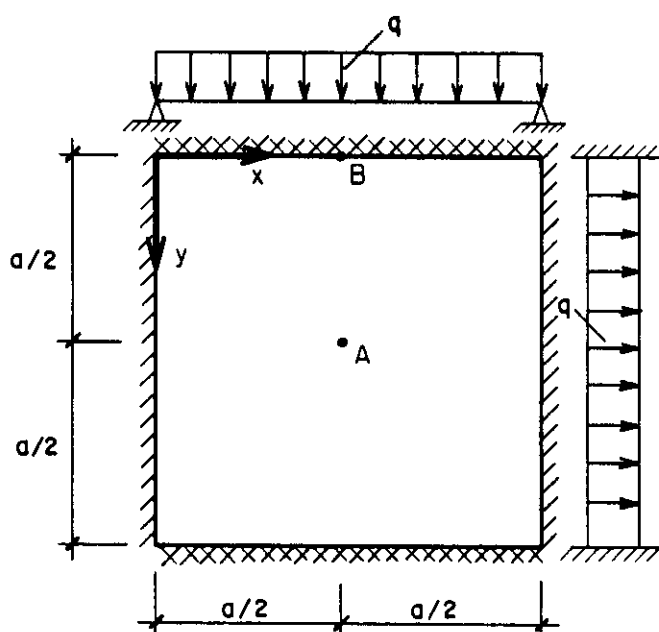


FIGURA 5.18 - Placa quadrada engastada em dois lados opostos e, apoiada nos outros dois com carregamento uniformemente distribuído

uniformemente distribuído
TABELA 5.3 - Resultados do exemplo 3

PONTO	w		M_x		M_y	
	A.P.	REF.A	A.P.	REF.A	A.P.	REF.A
A	0,00192	0,00192	0,0244	0,0244	0,0332	0,0332
B	0	0	-0,0203	-0,0209	-0,0701	-0,0697
FATOR	qa^4 / D		qa^2		qa^2	

5.10.4 Exemplo 4: Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois com carregamento uniformemente distribuído total e parcial.

Esta placa submetida a um carregamento uniformemente distribuído total e parcial, mostrada nas figuras 5.19 e 5.20 respectivamente, é discretizada com 40 elementos iguais. Os resultados obtidos com a alternativa proposta (A. P.) são comparados com os da referência B (REF.B), que apresenta um resultado pelo M.E.C. e outro pelo M.E.F., neste último para uma divisão do domínio em 144 elementos triangulares de seis parâmetros por nó (T-18).

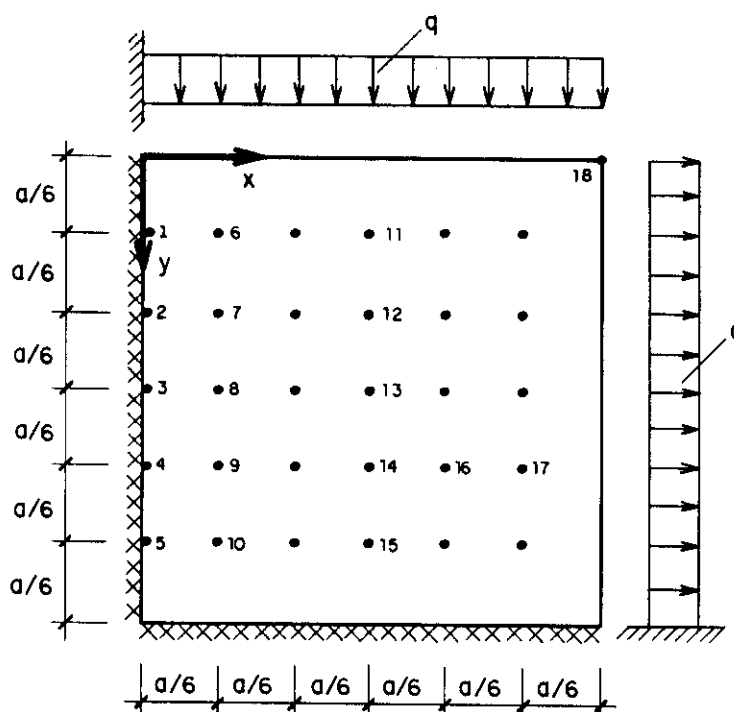


FIGURA 5.19 - Placa quadrada engastada em dois lados

TABELA 5.4 - Resultados do exemplo 4, para carregamento total

VALORES	REF.B M.E.C.	A.P.	REF.B M.E.F.	FATOR
w_{18}	0,0458	0,0415	0,0407	qa^4 / D
w_{11}	0,0171	0,0159	0,0156	
w_{12}	0,0131	0,0123	0,0121	
M_{x3}	-0,1318	-0,1276	-0,1268	qa^2
M_{x6}	-0,1185	-0,1124	-0,1123	
M_{x7}	-0,0941	-0,0896	-0,0883	
M_{x8}	-0,0652	-0,0619	-0,0608	
M_{y6}	-0,0162	-0,0201	-0,0230	
M_{y2}	-0,0204	-0,0180	-0,0177	
M_{y10}	-0,0141	-0,0133	-0,0130	
M_{y14}	-0,0229	-0,0197	-0,0191	
M_{y15}	-0,0652	-0,0619	-0,0608	
M_{y16}	-0,0318	-0,0277	-0,0269	
M_{y17}	-0,0418	-0,0349	-0,0337	

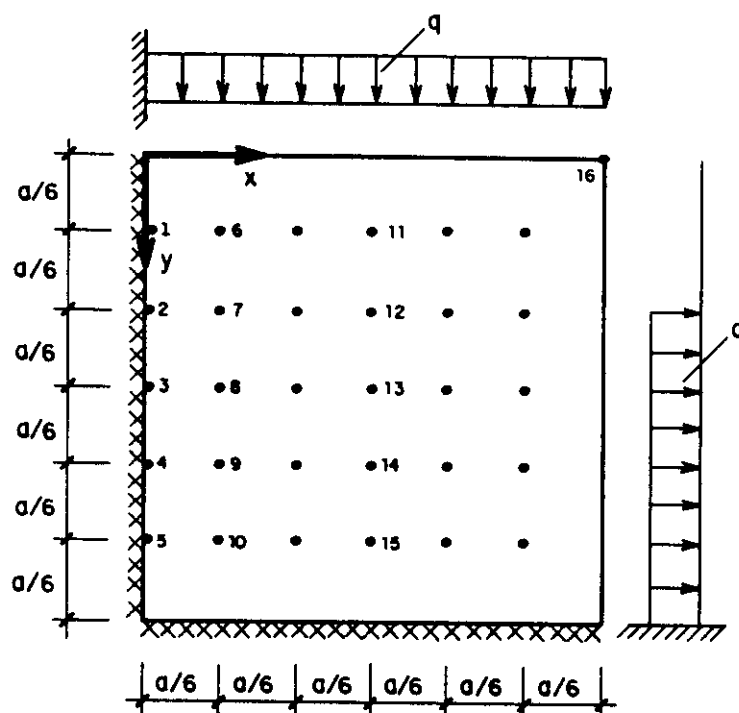


FIGURA 5.20 - Placa parcialmente carregada

TABELA 5.5 - Resultados do exemplo 4, para carregamento parcial

VALORES	REF.B M.E.C.	A.P.	REF.B M.E.F.	FATOR
w_6	0,0009	0,0009	0,0009	qa^4 / D
w_7	0,0009	0,0009	0,0009	
w_{11}	0,0059	0,0055	0,0054	
w_{13}	0,0041	0,0039	0,0039	
w_{14}	0,0026	0,0025	0,0024	
w_{16}	0,0154	0,0139	0,0137	
M_{x3}	-0,0762	-0,0747	-0,0732	qa^2
M_{x6}	-0,0422	-0,0408	-0,0409	
M_{x7}	-0,0354	-0,0340	-0,0337	
M_{x8}	-0,0252	-0,0242	-0,0238	
M_{x9}	-0,0146	-0,0140	-0,0138	
M_{y12}	0,0126	0,0138	0,0137	
M_{y13}	0,0187	0,0199	0,0200	
M_{y14}	0,0066	0,0080	0,0081	
M_{y15}	-0,0265	-0,0249	-0,0244	

5.10.5 Exemplo 5: Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno com carregamento distribuído em pequena área central.

Neste exemplo a placa é analisada discretizando-se o contorno em 8, 16, 32 e 40 elementos iguais (Figura 5.21). Nas tabelas 5.6 e 5.7, são apresentados resultados obtidos pela alternativa proposta (A.P.) e a referência A (REF.A), para deslocamentos e momentos fletores máximos respectivamente.

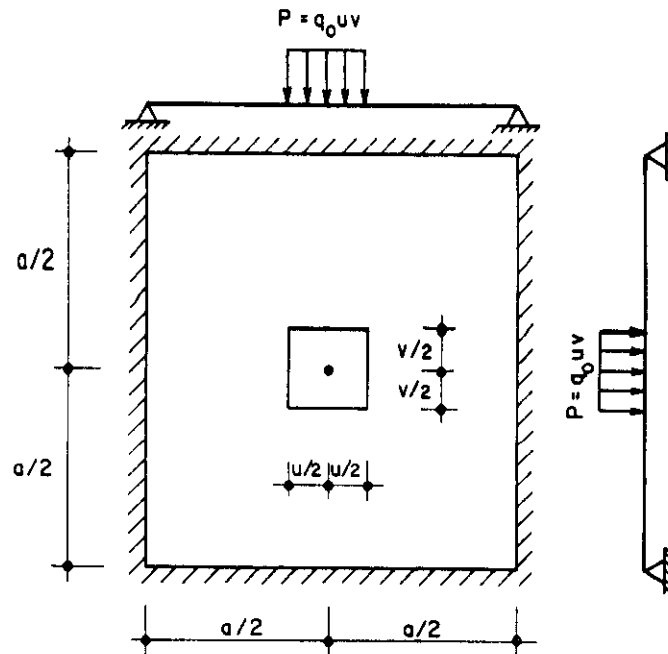


FIGURA 5.21- Placa quadrada com carregamento distribuído em pequena área central

TABELA 5.6 - Resultados do exemplo 5. Deslocamentos máximos

u/a=v/a	$w_{\max} = \alpha Pa^2 / D$				REF.A
	8	16	32	40	
0,005	0,01138	0,01157	0,01159	0,01160	0,01160
0,01	0,01138	0,01157	0,01159	0,01159	---
0,10	0,01115	0,01134	0,01136	0,01137	---

TABELA 5.7 - Resultados do exemplo 5. Momentos fletores máximos

u/a=v/a	$M_{\max} = \beta P$				REF.A
	8	16	32	40	
0,005	0,592	0,594	0,594	0,594	---
0,01	0,520	0,522	0,522	0,522	---
0,10	0,282	0,284	0,284	0,284	0,284

5.10.6 Exemplo 6: Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro cantos e uniformemente carregada.

A placa da figura 5.22, apoiada apenas nos seus cantos, é discretizada com 40 elementos iguais. Os resultados obtidos pela alternativa proposta, são comparados na tabela 5.8, com os resultados das referências A e B.

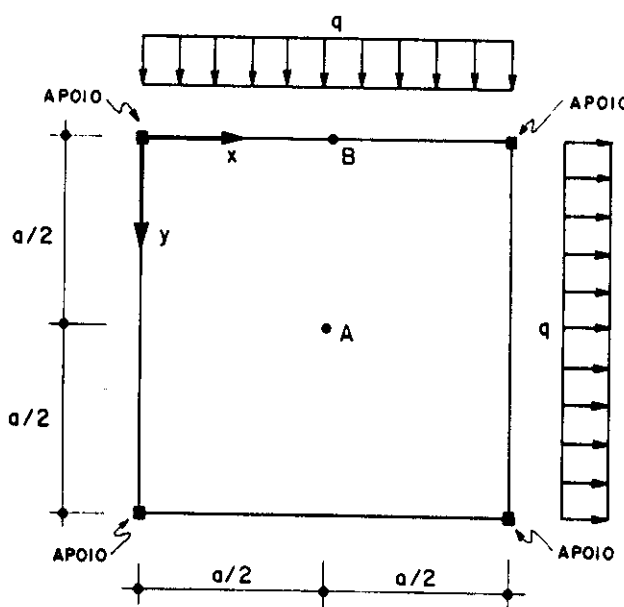


FIGURA 5.22 - Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro cantos

TABELA 5.8 - Resultados do exemplo 6

VALORES	REF.B	A.P.	REF.A
$w_B / qa^4 / D$	0,0246	0,0271	0,0249
M_{xB} / qa^2	0,1100	0,1139	0,1090
M_{yB} / qa^2	0,1100	0,1139	0,1090
$w_A / qa^4 / D$	0,0163	0,0194	---

Pode-se observar, que os resultados obtidos nos exemplos deste capítulo, são satisfatórios e mostram a eficiência da alternativa proposta para flexão de placas pelo Método dos Elementos de Contorno.

CAPÍTULO VI

INTERAÇÃO PLACA-SOLO

TEORIA DE WINKLER

6.1 Introdução

A alternativa proposta no capítulo anterior, para o problema de flexão de placas, será utilizada neste capítulo, para a análise da interação placa-solo, baseada na teoria de WINKLER (1867), para isto, é acrescentada uma integral de domínio na equação integral de deslocamento, para representar a reação do solo.

A integral de domínio correspondente a reação do solo, cujo integrando contém uma variável do problema, especificamente o deslocamento transversal w , é tratada discretizando-se o domínio em células e utilizando-se o processo da reciprocidade dual (SILVA, 1988). Outra alternativa de tratamento, proposta neste trabalho, consiste em aproximar a densidade da integral de domínio, utilizando-se uma função aproximadora conveniente e transforma-la em integrais de contorno (VENTURINI, 1988).

As formulações a serem apresentadas, não ficam restritas à análise de placas inteiramente apoiadas sobre o solo, podendo-se considerar diferentes condições de vinculação no seu contorno assim como efeitos não-lineares na interface.

No final do capítulo são apresentadas algumas aplicações numéricas, comparando-se os resultados obtidos pelas formulações já mencionadas com valores teóricos.

6.2 Equações básicas

O modelo simplificado de WINKLER (1867), considera que cada ponto da placa esta ligado a um elemento de mola para representar a reação do solo (Figura 6.1). Assim, a equação diferencial de uma placa submetida a um carregamento transversal g_a , apoiada sobre o solo, considerado elástico, pode ser escrita como:

$$\nabla^4 w(q) = [g_a(p) - g_s(p)] / D \quad (6.1)$$

onde, $g_s(p)$ é a reação do solo no ponto "p" dada por:

$$g_s(p) = Kw(p) \quad (6.2)$$

sendo K o coeficiente de recalque do solo.

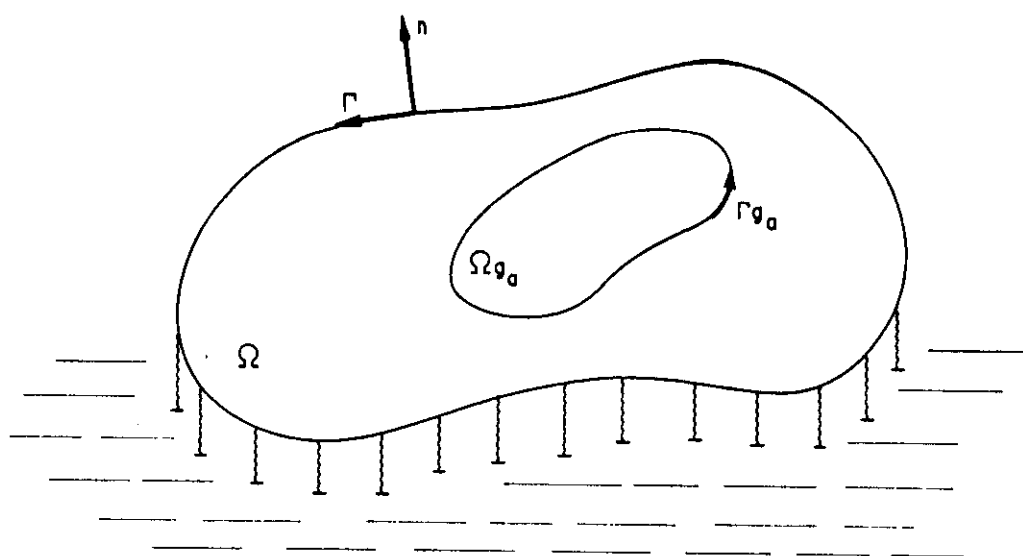


FIGURA 6.1 - Placa apoiada sobre o solo

Substituindo-se o carregamento transversal $g(p)$ por $[g_a(p) - g_s(p)]$, na equação integral de deslocamento (3.49), obtém-se:

$$\begin{aligned} C(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}^*(Q,P)w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P)w^*(Q,P) + \right. \\ \left. - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q,P) + \\ + \int_{\Omega_{ga}} w^*(Q,p)g_a(p) d\Omega_{ga}(p) - \int_{\Omega_{gs}} Kw^*(Q,p)w(p) d\Omega_{gs}(p) \quad (6.3) \end{aligned}$$

A diferença que existe entre as equações (3.49) e (6.3), é que nesta última aparece uma integral de domínio, envolvendo o deslocamento transversal w , variável do problema, que corresponde à reação do solo, dada por:

$$\int_{\Omega_{gs}} K w^*(Q,p) w(p) d\Omega_{gs}(p) \quad (6.4)$$

a mesma que será objeto de estudo nos próximos itens.

6.3 Integração sobre células internas

Um procedimento para se levar em conta a integral (6.4), é a discretização do domínio da placa em células internas (Figura 6.2.a), sobre os quais os deslocamentos são aproximados. Desta forma, a integral é transformada em somatórios de integrais sobre estas células, para todos os pontos do domínio e contorno da placa, isto é:

$$\sum_{i=1}^{N_{cel}} \int_{\Omega_{gs}} K w^*(Q,p) w(p) d\Omega_{gs}(p) \quad (6.5)$$

onde, N_{cel} é o número de células.

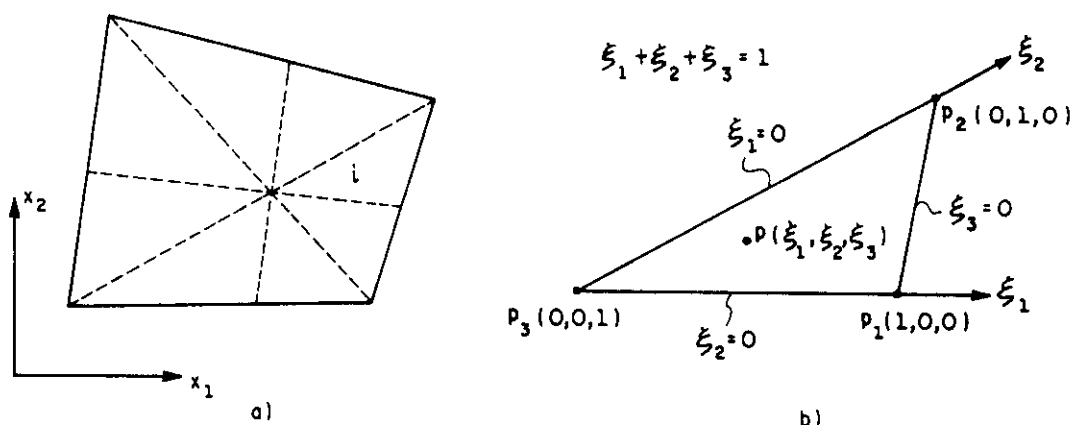


FIGURA 6.2 - a) Domínio de uma placa discretizada em células;
b) definição do sistema de coordenadas homogêneas de uma célula triangular "i"

Um ponto "p" de coordenadas (x_1^p, x_2^p) , definido em função das coordenadas dos vértices p_1, p_2 e p_3 de uma célula triangular "i" (Figura 6.2.b), fica:

$$\tilde{x}^p = \tilde{\psi}^T \tilde{X}^N \quad (6.6)$$

onde:

$$\tilde{x}^p = \begin{Bmatrix} x_1^p \\ x_2^p \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

$$\tilde{\psi}^T = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}^T & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{\phi}^T \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$\tilde{X}^N = \begin{Bmatrix} X^N \\ \tilde{x}_1^N \\ X^N \\ \tilde{x}_2^N \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

sendo:

$$\tilde{\phi} = \begin{Bmatrix} \xi_1^p \\ \xi_2^p \\ \xi_3^p \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

$$\tilde{x}_i^N = \begin{Bmatrix} X_i^1 \\ X_i^2 \\ X_i^3 \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

A coordenada x_i do ponto "p" escrita explicitamente fica:

$$x_i^p = \xi_1^p X_i^1 + \xi_2^p X_i^2 + \xi_3^p X_i^3 \quad (6.12)$$

Escrevendo-se a variável adimensional ξ_α^p em função das coordenadas X_i^p do ponto "p", tem-se:

$$\xi_\alpha^p = \frac{1}{2A} (2A_0^\alpha + b^\alpha X_i^p + a^\alpha X_i^p) \quad (6.13)$$

onde:

$$a^\alpha = X_1^k - X_1^j \quad (6.14)$$

$$b^\alpha = X_2^j - X_2^k \quad (6.15)$$

$$2A_0^\alpha = X_1^j X_2^k - X_1^k X_2^j \quad (6.16)$$

$$A = \frac{1}{2} (b^1 a^2 - b^2 a^1) \quad (6.17)$$

$$\alpha=1,2,3 \quad j=2,3,1 \quad k=3,1,2$$

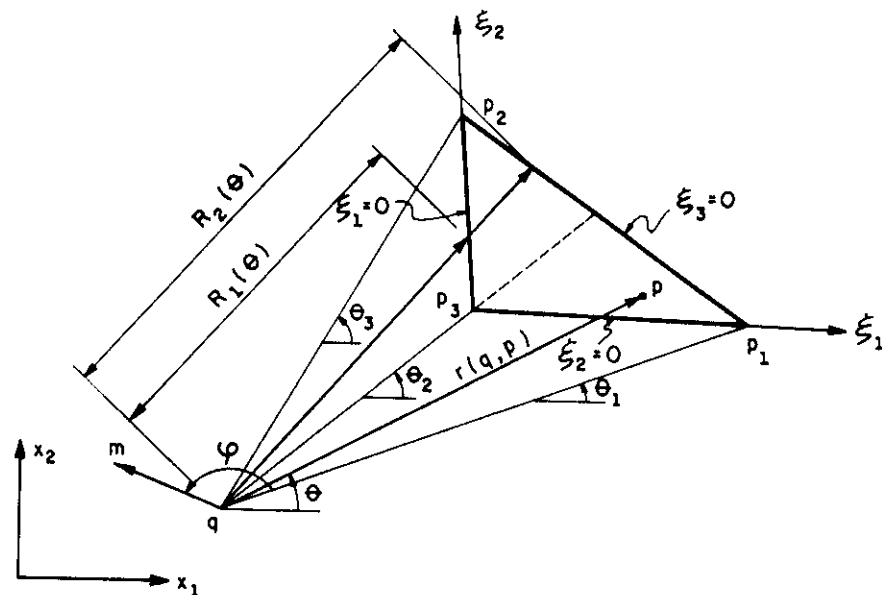


FIGURA 6.3 - Célula interna e sistemas de coordenadas (x_1, x_2) , (ξ_1, ξ_2) e (r, θ)

Devido à solução fundamental que envolve a integral (6.4), é conveniente expressar a equação (6.13) em coordenadas polares (r, θ) , com origem no ponto "q" (Figura 6.3).

$$\xi_{\alpha}^p = \xi_{\alpha}^q + \frac{r}{2A} (b^{\alpha} \cos\theta + a^{\alpha} \sin\theta) \quad (6.18)$$

onde, ξ_{α}^q é obtido com a equação (6.13), para o ponto "q".

De forma análoga a expressão (6.6), pode-se escrever o deslocamento transversal $w(p)$ de um ponto qualquer da célula, em função dos deslocamentos verticais dos vértices da mesma, isto é:

$$w(p) = \underline{\phi}^T \underline{\tilde{w}}^N \quad (6.19)$$

onde, $\underline{\phi}$ é dada por (6.10) e $\underline{\tilde{w}}^N$, representa os deslocamentos verticais w^1 , w^2 e w^3 nos vértices da célula.

Substituindo-se em (6.5) o valor de $w(p)$ dado em (6.19), e considerando-se apenas uma célula genérica "i" de domínio Ω_i , obtém-se:

$$\int_{\Omega_i} K w^*(Q,p) w(p) d\Omega_i(p) = \left\{ \int_{\Omega_i} \xi_1^p w^*(Q,p) d\Omega_i(p) \right. \\ \left. \int_{\Omega_i} \xi_2^p w^*(Q,p) d\Omega_i(p) \quad \int_{\Omega_i} \xi_3^p w^*(Q,p) d\Omega_i(p) \right\} K \begin{Bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

Substituindo-se as expressões de $w^*(Q,p)$ e ξ_{α}^p nas integrais do segundo membro de (6.20), as quais transformadas em integrais sobre r e θ , podem ser integradas em relação a r , obtendo-se:

$$\int_{\Omega_i} \xi_{\alpha}^p w^*(Q,p) d\Omega_i(p) = \frac{1}{32\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_3} \xi_{\alpha}^q \left[R_2^4 \left(\ln R_2 - \frac{3}{4} \right) + \right. \\ \left. - R_1^4 \left(\ln R_1 - \frac{3}{4} \right) \right] d\theta + \frac{1}{80\pi A D} \int_{\theta_1}^{\theta_3} (b^{\alpha} \cos\theta +$$

$$+a^\alpha \sin\theta) \left[R_2^5 \left(\ln R_2 - \frac{7}{10} \right) - R_1^5 \left(\ln R_1 - \frac{7}{10} \right) \right] d\theta \quad (6.21)$$

onde, R_1 e R_2 são funções do ângulo θ , determinados a partir de (6.18) para $\xi_\alpha^p = 0$.

Conforme a Figura 6.3, observa-se que para intervalos diferentes de variação do ângulo θ , obtém-se duas expressões para R_1 e uma para R_2 , dadas por:

$$R_1 = \frac{2A\xi_2^q}{b^2 \cos\theta + a^2 \sin\theta} \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad (6.22)$$

$$R_1 = \frac{2A\xi_1^q}{b^1 \cos\theta + a^1 \sin\theta} \quad \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3 \quad (6.23)$$

$$R_2 = \frac{2A\xi_3^q}{b^3 \cos\theta + a^3 \sin\theta} \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_3 \quad (6.24)$$

Para evitar esse problema, a célula "i" pode ser dividida em duas, "i₁" e "i₂" (Figura 6.4.a), as quais serão integradas nos intervalos $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ e $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$ respectivamente. Considerando-se apenas uma delas, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \xi_\alpha^p w^*(Q,p) d\Omega_i(p) &= \frac{1}{32\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi_\alpha^q \left[R_2^4 \left(\ln R_2 - \frac{3}{4} \right) + \right. \\ &\quad \left. - R_1^4 \left(\ln R_1 - \frac{3}{4} \right) \right] d\theta + \frac{1}{80\pi AD} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (b^\alpha \cos\theta + \\ &\quad + a^\alpha \sin\theta) \left[R_2^5 \left(\ln R_2 - \frac{7}{10} \right) - R_1^5 \left(\ln R_1 - \frac{7}{10} \right) \right] d\theta \end{aligned} \quad (6.25)$$

onde, o índice "i" representa uma das células "i₁" ou "i₂", R_1 e R_2 são obtidos para $\xi_2^p = 0$ e $\xi_3^p = 0$ respectivamente (Figura 6.4.b e 6.4.c), sendo que $R_2 > R_1$.

A divisão da célula não será necessária se θ_2 for igual a θ_1 ou θ_3 .

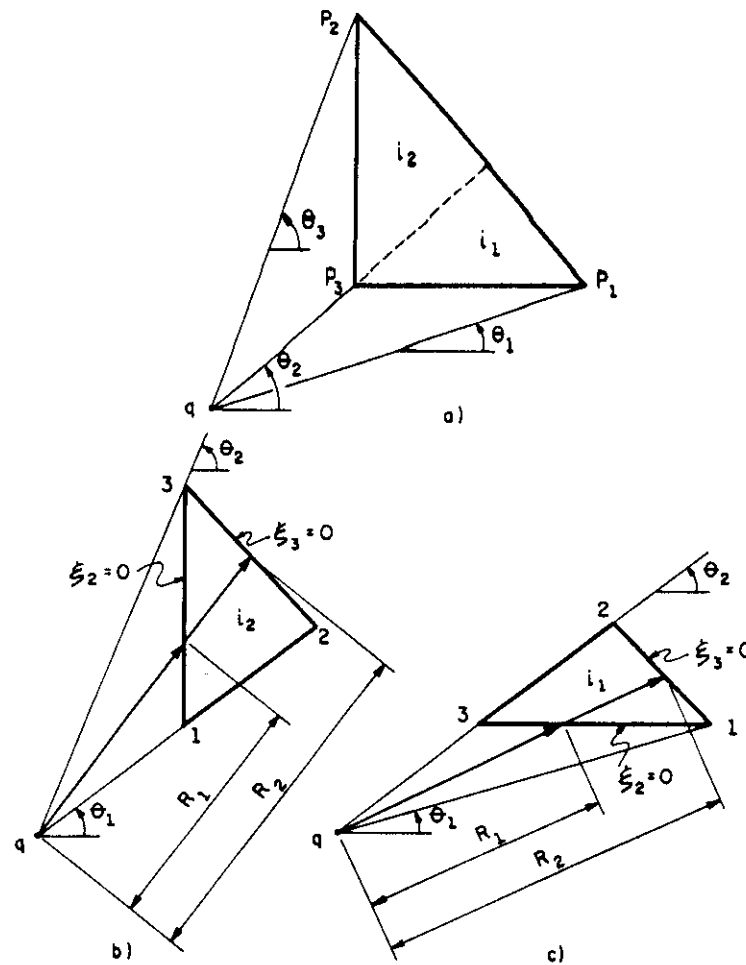


FIGURA 6.4 - a) Célula "i" subdividida nas células "i₁" e "i₂";
b) célula "i₂"; c) célula "i₁"

A integral (6.25) pode ser transformada em integrais numéricas, fazendo-se a mudança da variável θ para uma variável adimensional η , definida como:

$$\eta = \frac{2}{\theta_2 - \theta_1} \left(\theta - \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \right) \quad (6.26)$$

onde, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ e $-1 \leq \eta \leq +1$.

A partir de (6.26), obtém-se:

$$d\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} d\eta \quad (6.27)$$

Substituindo-se (6.27) na equação (6.25) obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \xi_\alpha^p w^*(Q,p) d\Omega_i(p) &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{64\pi D} \int_{-1}^{+1} \xi_\alpha^q \left[R_2^4 \left(\ln R_2 - \frac{3}{4} \right) + \right. \\ &- R_1^4 \left(\ln R_1 - \frac{3}{4} \right) \left. \right] d\eta + \frac{\theta_2 - \theta_1}{160\pi AD} \int_{-1}^{+1} (b^\alpha \cos\theta + \\ &+ a^\alpha \sin\theta) \left[R_2^5 \left(\ln R_2 - \frac{7}{10} \right) - R_1^5 \left(\ln R_1 - \frac{7}{10} \right) \right] d\eta \end{aligned} \quad (6.28)$$

Substituindo-se a integral (6.28), escrita para as duas células "i₁" e "i₂", na expressão (6.20), tem-se:

$$\int_{\Omega_i} K w^*(Q,p) w(p) d\Omega_i(p) = \{A^1 \quad A^2 \quad A^3\} K \begin{Bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{Bmatrix} \quad (6.29)$$

onde:

$$A^\alpha = \int_{\Omega_{i1}} \xi_\alpha^p w^*(Q,p) d\Omega_{i1}(p) + \int_{\Omega_{i2}} \xi_\alpha^p w^*(Q,p) d\Omega_{i2}(p) \quad (6.30)$$

$$\alpha=1,2,3$$

A integral (6.4), transformada em termos algébricos dados pelo produto entre os coeficientes KA^α e os deslocamentos verticais w , correspondentes aos vértices " α " da célula "i", poderá ser aplicada a todas as células da placa, representando assim, a influência da reação do solo, que somada na equação matricial (5.37), escrita de maneira simples, fica:

$$\underline{\underline{H}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}}^c & \underline{\underline{S}}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} \quad (6.31)$$

onde, $\underline{\underline{S}}^c$ e $\underline{\underline{S}}^i$ são submatrizes formadas pelos coeficientes A^α , para pontos do contorno e internos, respectivamente.

As novas incógnitas internas $\underline{\underline{U}}^i$, incluídas na equação (6.31), tornam necessária a aplicação de novas equações nos pontos internos, para a resolução do problema. Utilizando-se a equação (5.69) em cada um dos pontos internos "i", apenas para o deslocamento transversal $w(q)$, obtém-se:

$$\underline{\underline{U}}^i + \underline{\underline{H}}^i \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}^i \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}}^i - \underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}}^{c'} & \underline{\underline{S}}^{i'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} \quad (6.32)$$

Reunindo-se (6.31) e (6.32) em um só sistema, tem-se:

$$\begin{bmatrix} [\underline{\underline{H}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{S}}^c] & [\underline{\underline{K}}\underline{\underline{S}}^i] \\ [\underline{\underline{H}}^i + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{S}}^{c'}] & [\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{S}}^{i'}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{G}}^i \end{bmatrix} \underline{\underline{P}} + \begin{Bmatrix} \underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{T}}^i \end{Bmatrix} \quad (6.33)$$

que pode ser escrita simplesmente como:

$$\underline{\underline{H}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}} \quad (6.34)$$

Após a imposição das condições de contorno, o sistema de equações (6.34) poderá ser resolvido.

6.4 Processo da reciprocidade dual

O processo da reciprocidade dual, já aplicado em outros tipos de problemas por BREBBIA & NARDINI, 1986, é utilizado neste item para transformar a integral de domínio (6.4), proveniente da reação do solo, em integrais sobre o contorno da placa, a partir de uma aproximação para o deslocamento $w(p)$, dada por:

$$w(p) = f(m,p)\alpha^m \quad (6.35)$$

onde, $f(m,p)$ representa um grupo de funções linearmente independentes e válidas sobre toda a placa, relacionadas a "m" pontos ou nós duais, e α^m , são coeficientes a serem determinados posteriormente.

Supondo-se que cada função $f(m,p)$ seja uma carga distribuída fictícia ou pseudo carregamento da placa, a equação diferencial (2.28) para este caso fica escrita na seguinte forma:

$$\Delta\Delta\hat{w}(q) = f(m,p) / D \quad (6.36)$$

onde, $f(m,p)$ é o pseudo-carregamento vertical, associado a pseudo-deslocamentos $\hat{w}(m,p)$.

Uma função particular $f(m,p)$, pode ser obtida a partir da adoção de um campo de pseudo-deslocamentos $\hat{w}(m,p)$, que satisfaça a equação diferencial (6.36), dado por :

$$\hat{w}(m,p) = \frac{1}{225D} R^5(m,p) \quad (6.37)$$

onde:

$$R(m,p) = \left\{ [x_1(p) - x_1(m)]^2 + [x_2(p) - x_2(m)]^2 \right\}^{1/2} \quad (6.38)$$

Substituindo-se (6.37) na equação (6.36) e após derivações necessárias chega-se a:

$$f(m,p) = R(m,p) \quad (6.39)$$

cuja representação gráfica é mostrada na Figura 6.5.

A equação integral para os pseudo-deslocamentos, ou deslocamentos duais $\hat{w}(m,p)$, pode ser escrita a partir da equação diferencial (6.36), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{w}(q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(q,P) \hat{w}(m,P) - M_n^*(q,P) \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(m,P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q,P) \hat{w}_{ci}(m,P) = \int_{\Gamma} w^*(q,P) \left[\hat{V}_n(m,P) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P)\widehat{M}_n(m, P) \Big] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} w_{ci}^*(q, P)\widehat{R}_{ci}(m, P) + \\
& + \int_{\Omega_f} w^*(q, p)f(m, p)d\Omega_f(p) \tag{6.40}
\end{aligned}$$

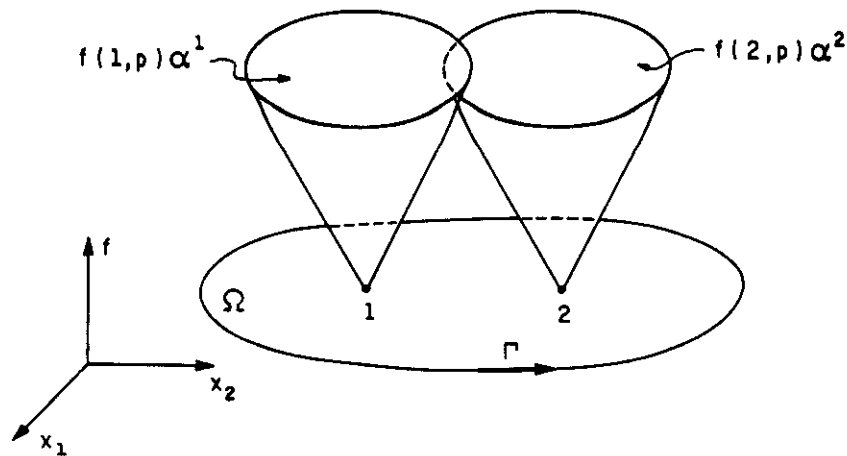


FIGURA 6.5 - Superfícies cônicas correspondentes a dois pseudo carregamentos, usadas para a aproximação de $w(p)$

Isolando-se no primeiro membro a integral de domínio da equação (6.40), tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_f} w^*(q, p)f(m, p)d\Omega_f(p) &= \widehat{w}(q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(q, P)\widehat{w}(m, P) + \right. \\
& \left. - M_n^*(q, P)\frac{\partial \widehat{w}}{\partial n}(m, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}^*(q, P)\widehat{w}_{ci}(m, P) + \\
& - \int_{\Gamma} \left[w^*(q, P)\widehat{V}_n(m, P) - \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P)\widehat{M}_n(m, P) \right] d\Gamma(P) + \\
& - \sum_{i=1}^{Nc} w_{ci}^*(q, P)\widehat{R}_{ci}(m, P) \tag{6.41}
\end{aligned}$$

A partir do pseudo-deslocamento $\hat{w}(m,p)$ dado por (6.37), podem ser determinados $\frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(m,P)$, $\hat{M}_n(m,P)$, $\hat{M}_{ns}(m,P)$ e $\hat{V}_n(m,P)$, utilizando-se as definições de deslocamentos e esforços já vistas no capítulo 2, desta forma obtém-se:

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(m,P) = \frac{R^4}{45D} \cos \hat{\beta} \quad (6.42)$$

$$\hat{M}_n(m,P) = -\frac{R^3}{45} [3(\cos^2 \hat{\beta} + \nu \sin^2 \hat{\beta}) + (1 + \nu)] \quad (6.43)$$

$$\hat{M}_{ns}(m,P) = \frac{R^3}{15} (1 - \nu) (\sin \hat{\beta} \cos \hat{\beta}) \quad (6.44)$$

$$\hat{V}_n(m,P) = -\frac{R^2}{15} \cos \hat{\beta} [5 + (1 - \nu) (\sin^2 \hat{\beta} + 1)] \quad (6.45)$$

onde:

$$\cos \hat{\beta} = R_{,x} n_x + R_{,y} n_y \quad (6.46.a)$$

$$\sin \hat{\beta} = -(R_{,x} s_x + R_{,y} s_y) \quad (6.46.b)$$

sendo, conforme a Figura 6.6:

$$R_{,x} = \cos \hat{\theta} \quad (6.47.a)$$

$$R_{,y} = \sin \hat{\theta} \quad (6.47.b)$$

$$n_x = \cos \hat{\alpha} \quad (6.48.a)$$

$$n_y = \sin \hat{\alpha} \quad (6.48.b)$$

$$s_x = -n_y \quad (6.49.a)$$

$$s_y = n_x \quad (6.49.b)$$

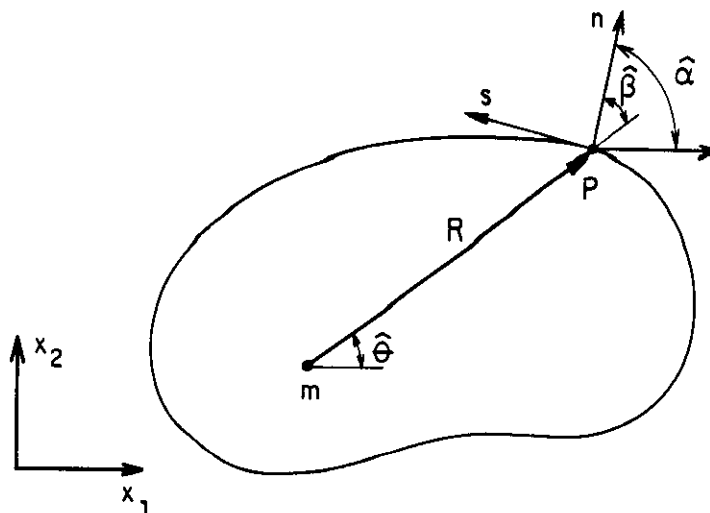


FIGURA 6.6- Ponto dual "m" e ponto de deslocamento "P"

Os deslocamentos duais $\hat{w}(m,P)$ e $\frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(m,P)$, assim como os esforços duais $\hat{M}_n(m,P)$ e $\hat{V}_n(m,P)$, da equação (6.41), embora sejam conhecidos, podem ser aproximados nos elementos do contorno da placa, pelas mesmas funções aproximadoras usadas para as variáveis reais, para facilitar e simplificar o equacionamento. Assim, as integrações sobre os elementos darão origem as matrizes \underline{H} e \underline{G} , já conhecidas. Considerando-se todos os nós do contorno, a equação (6.41), escrita matricialmente, fica:

$$\{M\}_m = \underline{H}\{\hat{U}\}_m - \underline{G}\{\hat{P}\}_m \quad (6.50)$$

Na expressão (6.50), $\{M\}_m$, representa uma coluna da matriz \underline{M} correspondente ao nó dual "m". Considerando-se todos os nós duais obtem-se:

$$\underline{M} = \underline{H}\hat{U} - \underline{G}\hat{P} \quad (6.51)$$

onde, as matrizes \hat{U} e \hat{P} contem, respectivamente em cada linha, os deslocamentos e esforços duais correspondentes aos "m" pontos duais escolhidos.

Substituindo-se a aproximação do deslocamento $w(p)$, dada em (6.35), na integral de domínio (6.4), obtém-se:

$$K \left[\int_{\Omega_{gs}} w^*(Q,p) f(m,p) d\Omega_{gs}(p) \right] \alpha^m \quad (6.52)$$

A integral de domínio (6.52), obtida de forma dual para todos os pontos duais e do contorno, analogamente a (6.41), pode ser escrita matricialmente como:

$$K \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\alpha}} \quad \text{ou} \quad K[\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}}] \underline{\underline{\alpha}} \quad (6.53)$$

onde, $\underline{\underline{\alpha}}$ é o vetor que contém os coeficientes α^m .

Desta forma, a influencia da reação do solo, representada por (6.53), pode ser acrescentada na equação matricial (5.37), escrita de maneira simples, isto é:

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}} - K \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\alpha}} \quad (6.54)$$

Os coeficientes do vetor $\underline{\underline{\alpha}}$, são obtidos aplicando-se a equação (6.54) a todos os pontos duais do contorno e do domínio da placa, para $f(m,p)$ dado na equação (6.39), assim:

$$\left\{ \begin{array}{c} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{array} \right\} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{\alpha}} \quad (6.55)$$

ou seja:

$$\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{array} \right\} \quad (6.56)$$

Substituindo-se na equação (6.54) o vetor $\underline{\underline{\alpha}}$, dado em (6.56), obtém-se:

$$\underline{\underline{H}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}^c & \underline{\underline{M}}^i \end{bmatrix} \underline{\underline{F}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} \quad (6.57)$$

onde, $\underline{\underline{M}}^c$ e $\underline{\underline{M}}^i$ são submatrizes de $\underline{\underline{M}}$, para pontos do contorno e internos respectivamente.

A equação (6.57), estendida para pontos internos, fica:

$$\underline{\underline{U}}^i + \underline{\underline{H}}'\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}'\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}}' - \underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}'^c & \underline{\underline{M}}'^i \end{bmatrix} \underline{\underline{F}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} \quad (6.58)$$

Agrupando-se as equações (6.57) e (6.58), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} [\underline{\underline{H}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{M}}^c\underline{\underline{F}}^{-1}] & [\underline{\underline{K}}\underline{\underline{M}}^i\underline{\underline{F}}^{-1}] \\ [\underline{\underline{H}}' + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{M}}'^c\underline{\underline{F}}^{-1}] & [\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{M}}'^i\underline{\underline{F}}^{-1}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{G}}' \end{bmatrix} \underline{\underline{P}} + \begin{Bmatrix} \underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{T}}' \end{Bmatrix} \quad (6.59)$$

A equação (6.59), escrita de uma forma mais simples, fica semelhante a equação (6.34), e após a imposição das condições de contorno poderá ser resolvida.

6.5 Formulação alternativa

Esta formulação, consiste em transformar a integral de domínio, proveniente da reação do solo, em integrais de contorno, aproximando-se o deslocamento $w(p)$, como no processo da reciprocidade dual, isto é:

$$w(p) = f(m,p)\alpha^m \quad (6.60)$$

onde, α^m são coeficientes relacionados a "m" pontos base, que serão determinados posteriormente.

Uma função $f(m,p)$, que represente uma superfície composta por trechos planos, similar ao processo de aproximação por células, mas que não precise satisfazer necessariamente a equação diferencial de placas, seria recomendável para aproximar o deslocamento $w(p)$. Considerando estas características, VENTURINI (1988) sugeriu a seguinte:

$$f(m,p) = |x_1(p) - x_1(m)| + |x_2(p) - x_2(m)| +$$

$$+|x_1(p) - x_1(m)||x_2(p) - x_2(m)| \quad (6.61)$$

Posteriormente, a função $f(m,p)$ foi modificada por CODA (1990), ficando da seguinte forma:

$$f(m,p) = |x_1(p) - x_1(m)||x_2(p) - x_2(m)| \quad (6.62)$$

cuja forma gráfica é mostrada na Figura 6.7.

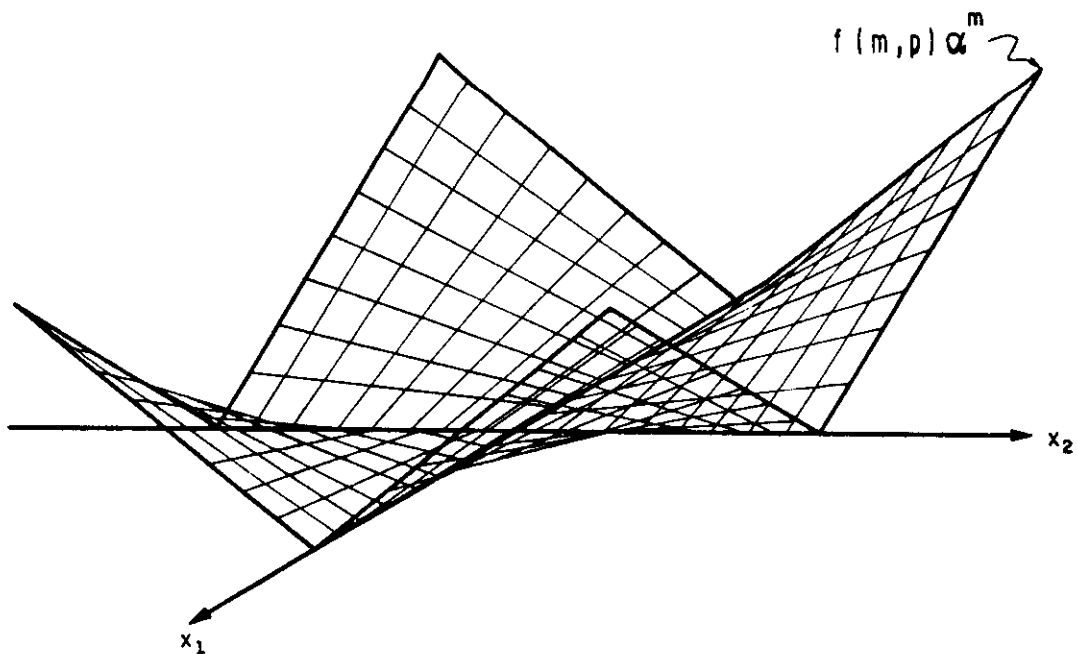


FIGURA 6.7 - Gráfico da função $f(m,p)$

Adotando-se a função $f(m,p)$, dada em (6.62), para aproximar o deslocamento $w(p)$, a integral de domínio (6.4), fica:

$$\int_{\Omega_{gs}} K w^*(Q,p) w(p) d\Omega_{gs}(p) = \int_{\Omega_{gs}} K w^*(Q,p) f(m,p) \alpha^m d\Omega_{gs}(p) \quad (6.63)$$

A integral de domínio do segundo membro, pode ser transformada em integrais de contorno, efetuando-se sucessivas integrais por partes até a eliminação completa das integrais de domínio residuais, isto é:

$$K \int_{\Omega_{gs}} f(m,p) w^*(Q,p) d\Omega_{gs}(p) \alpha^m = K \left[\int_{\Gamma_{gs}} f(m,p) C_\ell^*(Q,P) n_\ell d\Gamma_{gs}(P) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma_{gs}} f(m, p)_{,\ell} D_{\ell s}^*(Q, P) n_s d\Gamma_{gs}(P) + \\
& + \int_{\Gamma_{gs}} f(m, p)_{,\ell s} E_{\ell st}^*(Q, P) n_t d\Gamma_{gs}(P) \Big] \alpha^m \\
& \ell, s, t = 1, 2
\end{aligned} \tag{6.64}$$

onde:

$$f(m, P)_{,\ell} = \text{sign}(m, P)_{,\ell} |x_{3-\ell}(P) - x_{3-\ell}(m)| \tag{6.65}$$

$$f(m, P)_{,\ell s} = (1 - \delta_{\ell s}) \text{sign}(m, P)_{,\ell} \text{sign}(m, P)_{,s} \tag{6.66}$$

sendo:

$$\text{sign}(m, P)_{,\ell} = \frac{x_{\ell}(P) - x_{\ell}(m)}{|x_{\ell}(P) - x_{\ell}(m)|} \tag{6.67}$$

$$f(m, P)_{,\ell st} = 0 \tag{6.68}$$

O termo $C_{\ell}^*(Q, P)$, pode ser determinado a partir da integral de domínio do deslocamento fundamental $w^*(Q, P)$ dado em (2.82), da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} w^*(Q, p) d\Omega(p) = \int_{\theta} \int_r \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) r dr d\theta \tag{6.69}$$

Integrando-se em relação a r , o segundo membro de (6.69) fica:

$$\int_{\Omega} w^*(Q, p) d\Omega(p) = \int_{\theta} \frac{1}{32\pi D} r^3 \left(\ln r - \frac{3}{4} \right) r d\theta \tag{6.70}$$

A partir da figura 6.8, obtém-se a seguinte relação necessária para a mudança de variável:

$$d\Gamma \frac{\partial r}{\partial n} = r d\theta \quad (6.71)$$

sendo:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} = r_{,\ell} n_{\ell} \quad (6.72)$$

Substituindo-se (6.71) em (6.70), obtém-se:

$$\int_{\Omega} w^*(Q,p) d\Omega(p) = \int_{\Gamma} C_{\ell}^*(Q,P) n_{\ell} d\Gamma(P) \quad (6.73)$$

onde:

$$C_{\ell}^*(Q,P) = \frac{r^3}{32\pi D} \left(\ln r - \frac{3}{4} \right) r_{,\ell} \quad (6.74)$$

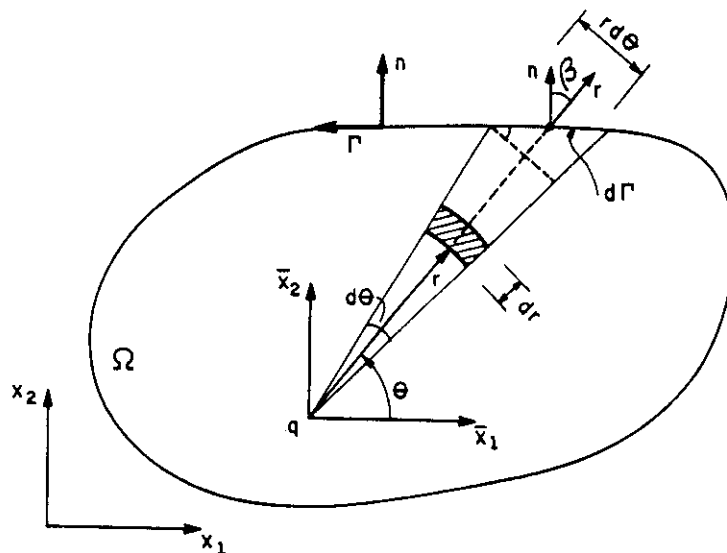


FIGURA 6.8 - Relação entre os sistemas de coordenadas (n, Γ) e (r, θ)

Procedendo-se forma análoga à determinação de $C_{\ell}^*(Q,P)$, os termos $D_{\ell s}^*(Q,P)$ e $E_{\ell st}^*(Q,P)$ poderão ser obtidos:

$$D_{\ell s}^*(Q,P) = \frac{r^4}{160\pi D} \left(\ln r - \frac{19}{20} \right) r_{,\ell} r_{,s} \quad (6.75)$$

$$E_{\text{est}}^*(Q,P) = \frac{r^5}{960\pi D} \left(\ln r - \frac{67}{60} \right) r_{,\ell} r_{,s} r_{,t} \quad (6.76)$$

É importante observar-se que as derivadas da função $f(m,p)$, dadas em (6.65) e (6.66) respectivamente, não são contínuas em todo o domínio, portanto, não seria válida a aplicação direta da integração por partes na integral do segundo membro de (6.63). Essas discontinuidades, ocorrem nos eixos paralelos aos eixos coordenados que se cruzam nos pontos base "m" (Figura 6.9), e podem ser evitadas (CODA, 1990), dividindo-se o domínio em subdomínios, nos quais as derivadas da função $f(m,p)$ são contínuas e a integração por partes é válida.

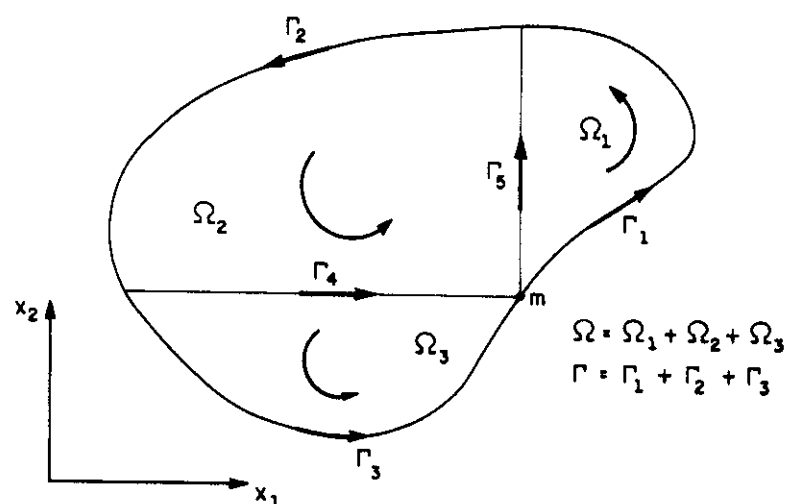


FIGURA 6.9 - Divisão do domínio em subdomínios para um ponto base "m" do contorno

Utilizando-se a Figura 6.9 como exemplo, a integral do primeiro membro de (6.63) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} K w^*(Q,p) w(p) d\Omega(p) = K \left[\int_{\Omega_1} w^*(Q,p_1) w(p_1) d\Omega(p_1) + \int_{\Omega_2} w^*(Q,p_2) w(p_2) d\Omega(p_2) + \int_{\Omega_3} w^*(Q,p_3) w(p_3) d\Omega(p_3) \right] \quad (6.77)$$

Integrando-se por partes, as integrais sobre os subdomínios Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 , da equação (6.77), nas quais o deslocamento $w(p)$ é aproximado por (6.60), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 K \int_{\Omega} f(m, p) w^*(Q, p) d\Omega(p) \alpha^m = & K \left\{ \int_{\Gamma} f(m, P) C_{\ell}^*(Q, P) n_{\ell} d\Gamma(P) + \right. \\
 & - \int_{\Gamma} f(m, p)_{,\ell} D_{\ell s}^*(Q, P) n_s d\Gamma(P) + \int_{\Gamma} f(m, p)_{,\ell s} E_{\ell st}^*(Q, P) n_t d\Gamma(P) + \\
 & + \int_{\Gamma_4} [f(m, P_2)_{,\ell} - f(m, P_3)_{,\ell}] D_{\ell s}^*(Q, P) n_s d\Gamma(P) + \\
 & + \int_{\Gamma_5} [f(m, P_1)_{,\ell} - f(m, P_2)_{,\ell}] D_{\ell s}^*(Q, P) n_s d\Gamma(P) + \\
 & + \int_{\Gamma_4} [f(m, P_2)_{,\ell} - f(m, P_3)_{,\ell}] E_{\ell st}^*(Q, P) n_t d\Gamma(P) + \\
 & \left. + \int_{\Gamma_5} [f(m, P_1)_{,\ell s} - f(m, P_2)_{,\ell s}] E_{\ell st}^*(Q, P) n_t d\Gamma(P) \right\} \alpha^m \quad (6.78)
 \end{aligned}$$

onde, o índice do ponto "P" indica o subdomínio ao qual pertence a função (Figura 6.10); Γ_4 e Γ_5 , são "contornos auxiliares" que separam os subdomínios Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 .

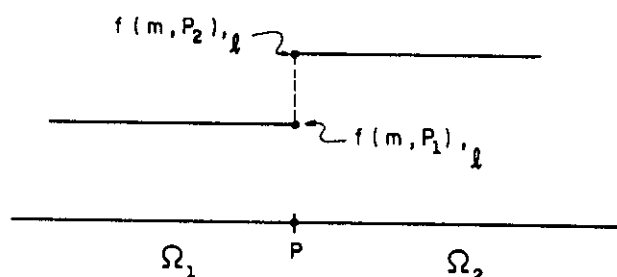


FIGURA 6.10 - Descontinuidade da função $f(m, P)_{,\ell}$

O domínio Ω , poderá ser dividido em até 4 subdomínios, dependendo da posição do ponto base "m", obtendo-se expressões análogas a (6.78) em cada caso.

Uma vez transformada a integral de domínio (6.4) em integrais de contorno, as funções $f(m,P)$, $f(m,P)_{,\ell}$, e $f(m,P)_{,\ell s}$, embora sejam conhecidas, podem ser aproximadas linearmente sobre os elementos do contorno, de forma análoga aos esforços e deslocamentos reais. Assim, para a função $f(m,P)$, tem-se:

$$f(m,P) = \phi_1(P)f(m,P_1) + \phi_2(P)f(m,P_2) \quad (6.79)$$

onde, as funções aproximadoras $\phi_1(P)$ e $\phi_2(P)$ são dadas por (5.15.a) e (5.15.b) respectivamente; $f(m,P_1)$ e $f(m,P_2)$ são valores que a função $f(m,P)$, com base no ponto "m", assume nos nós locais ① e ② respectivamente, de um elemento Γ_j (Figura 6.11).

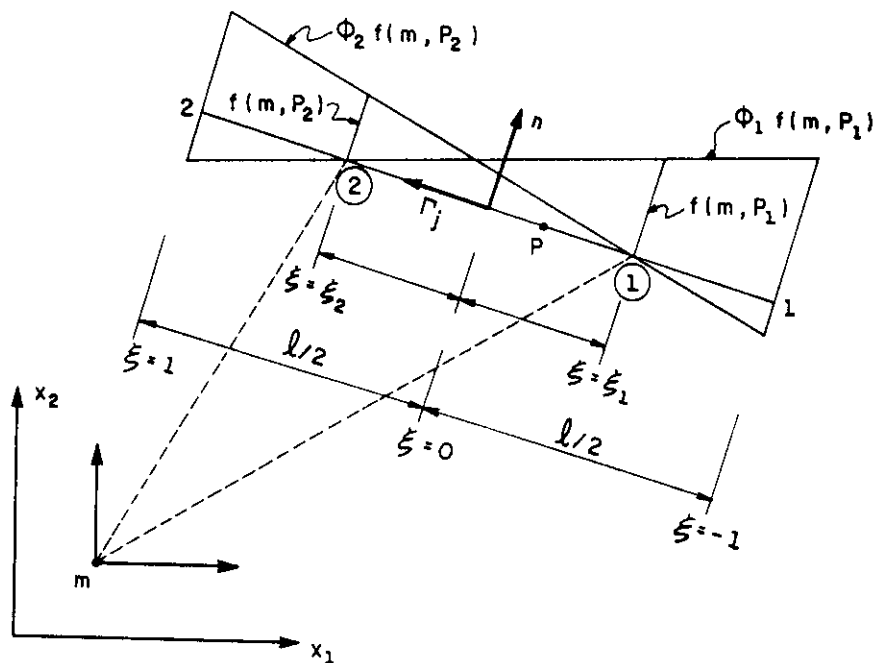


FIGURA 6.11 - Aproximação linear da função $f(m,P)$

As derivadas de $f(m,P)$, são aproximadas de forma análoga a (6.79), isto é:

$$f(m,P)_{,\ell} = \phi_1(P)f(m,P_1)_{,\ell} + \phi_2(P)f(m,P_2)_{,\ell} \quad (6.80)$$

$$f(m,P)_{,\ell s} = \phi_1(P)f(m,P_1)_{,\ell s} + \phi_2(P)f(m,P_2)_{,\ell s} \quad (6.81)$$

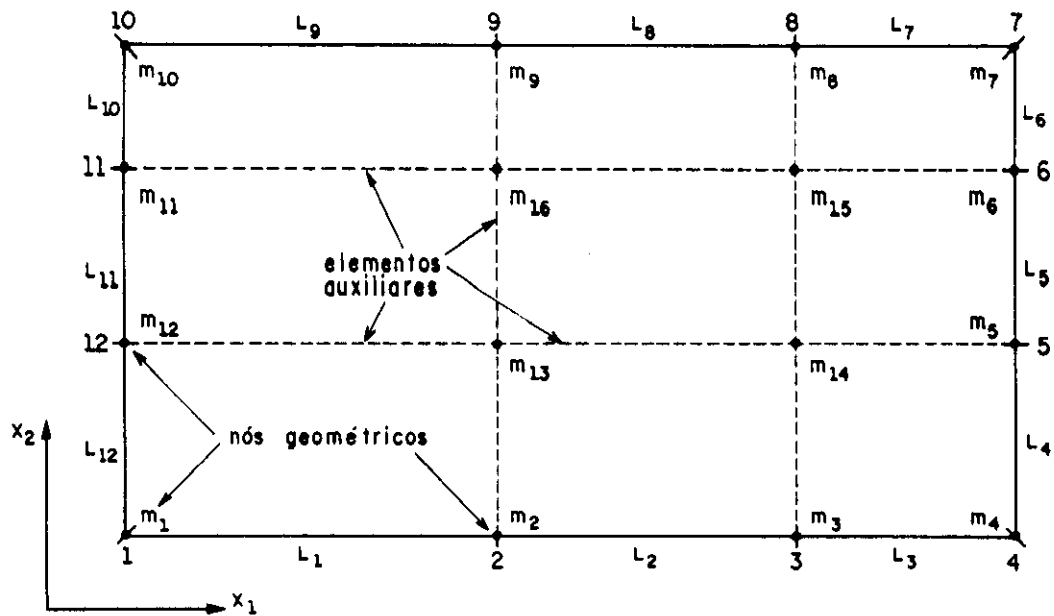


FIGURA 6.12 - Posições adequadas de pontos base internos e do contorno

Os pontos base "m", como se mostra na Figura 6.12, devem estar situados na interseção de linhas retas, paralelas aos eixos coordenados, que unem nós geométricos dos elementos do contorno (CODA, 1990). Caso contrário, podem ser introduzidos erros de aproximação da função $f(m,P)$ e de suas derivadas, na integração de alguns elementos (Figura 6.13).

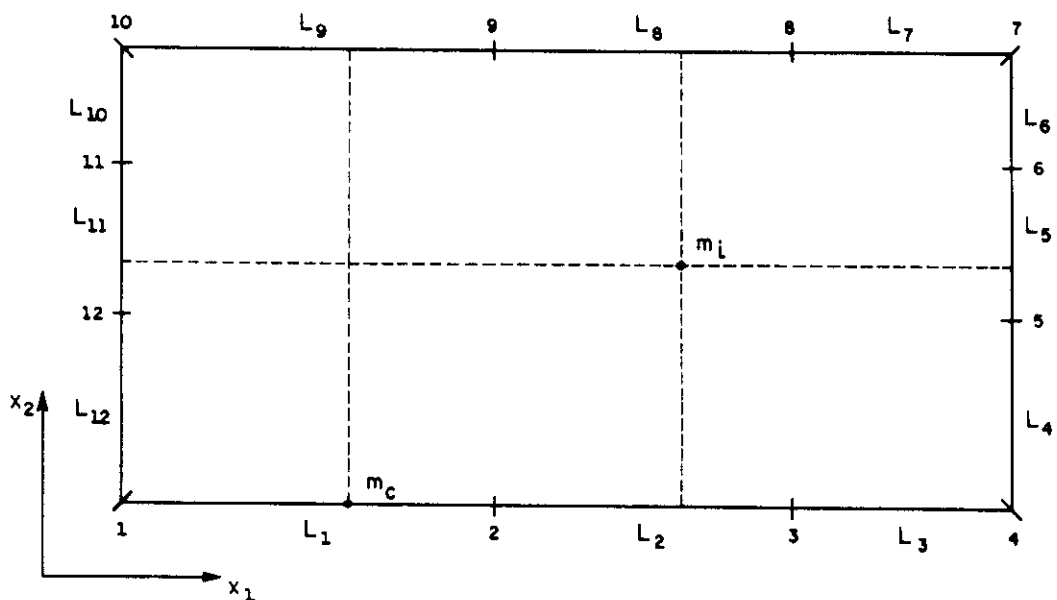


FIGURA 6.13 - Posições não adequadas de pontos base

Os elementos L_2 , L_5 , L_8 e L_{11} da Figura 6.13, ficam em regiões onde as derivadas da função $f(m,P)$ são descontínuas, devido à posição não adequada do ponto base interno " m_i ". O mesmo acontece com os elementos L_1 e L_9 , em relação ao ponto base " m_c " situado no contorno da placa.

Na figura 6.12, observa-se que os pontos base " m ", dividem o domínio da placa em subdomínios, os quais são separados por "elementos auxiliares", necessários na transformação das integrais desses subdomínios em integrais de contorno.

As integrais de contorno correspondentes a reação do solo (6.64), podem ser calculadas numericamente, efetuando-se a mudança da variável Γ para ξ , e aproximando-se a função $f(m,P)$ e suas derivadas, da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} f(m,P) C_{\ell}^*(Q,P) n_{\ell} d\Gamma(P) = \sum_{j=1}^{Nte} \int_{-1}^{+1} \frac{\ell}{2} [\phi_1(P) f(m, P_1) + \phi_2 f(m, P_2)] C^*(Q,P) d\xi(P) \quad (6.82)$$

$$\int_{\Gamma} f(m,p)_{,\ell} D_{\ell s}^*(Q,P) n_s d\Gamma(P) = \sum_{j=1}^{Nte} \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\ell}{2} [\phi_1(P) f(m, P_1)_{,1} + \phi_2 f(m, P_2)_{,1}] D_1^*(Q,P) d\xi(P) + \int_{-1}^{+1} \frac{\ell}{2} [\phi_1(P) f(m, P_1)_{,2} + \phi_2 f(m, P_2)_{,2}] D_2^*(Q,P) d\xi(P) \right\} \quad (6.83)$$

$$\int_{\Gamma} f(m,p)_{,\ell s} E_{\ell st}^*(Q,P) n_t d\Gamma(P) = \sum_{j=1}^{Nte} \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\ell}{2} [\phi_1(P) f(m, P_1)_{,12} + \phi_2 f(m, P_2)_{,12}] E_{12}^*(Q,P) d\xi(P) + \int_{-1}^{+1} \frac{\ell}{2} [\phi_1(P) f(m, P_1)_{,21} + \phi_2 f(m, P_2)_{,21}] E_{21}^*(Q,P) d\xi(P) \right\} \quad (6.84)$$

onde:

$$C^*(Q,P) = C_{\ell}^*(Q,P) n_{\ell} \quad (6.85)$$

$$D_{\ell}^*(Q,P) = D_{\ell s}^*(Q,P) n_s \quad (6.86)$$

$$E_{\ell s}^*(Q,P) = E_{\ell st}^*(Q,P) n_t \quad (6.87)$$

Integrando-se todos os elementos "Nte" das integrais (6.82), (6.83) e (6.84), em relação a todos os pontos "Q" e todas as bases "m", a expressão (6.64) escrita matricialmente fica:

$$K \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\alpha}} = K [\underline{\underline{C}} \underline{\underline{f}} - \underline{\underline{D}}_1 \underline{\underline{f}}_1 - \underline{\underline{D}}_2 \underline{\underline{f}}_2 + \underline{\underline{E}}_{12} \underline{\underline{f}}_{12}] \underline{\underline{\alpha}} \quad (6.88)$$

onde, as matrizes $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{D}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2$ e $\underline{\underline{E}}_{12}$ têm dimensões $(2N_n + N_c) \times (N_{te})$ e são obtidas a partir da integração de $C_{\ell}^*(Q,P)$, $D_{\ell s}^*(Q,P)$ e $E_{\ell st}^*(Q,P)$, sobre todos os elementos "Nte" em relação a todos os pontos de carregamento "Q"; as matrizes $\underline{\underline{f}}$, $\underline{\underline{f}}_1$, $\underline{\underline{f}}_2$ e $\underline{\underline{f}}_{12}$ têm dimensões $(N_{te}) \times (N_b)$ e são obtidas aplicando-se as funções $f(m,P)$, $f(m,P)_{,\ell}$ e $f(m,P)_{,\ell s}$, de todas as bases "Nb" em relação a todos os elementos "Nte".

O vetor $\underline{\underline{\alpha}}$ é obtido de forma análoga ao processo da reciprocidade dual, ou seja:

$$\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} \quad (6.89)$$

onde, a matriz $\underline{\underline{F}}$ tem dimensões $(N_b) \times (N_b)$ e é obtida a partir da função $f(m,P)$ dada em (6.62), relacionando-se os pontos base entre si.

Desta forma, poderá ser incluída a influencia da reação do solo, representada por (6.88), na equação matricial (5.37), que escrita de maneira simples, fica:

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}} - K \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\alpha}} \quad (6.90)$$

Substituindo-se na equação (6.90) o vetor $\underline{\underline{\alpha}}$ dado em (6.89), tem-se:

$$\underline{\underline{H}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}^c & \underline{\underline{M}}^i \end{bmatrix} \underline{\underline{F}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} \quad (6.91)$$

Estendendo-se a equação (6.91) para pontos internos, obtém-se:

$$\underline{\underline{U}}^i + \underline{\underline{H}}'\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}'\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}}' - \underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}'^c & \underline{\underline{M}}'^i \end{bmatrix} \underline{\underline{F}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} \quad (6.92)$$

Agrupando-se as equações (6.91) e (6.92), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} [\underline{\underline{H}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{M}}^c\underline{\underline{F}}^{-1}] & [\underline{\underline{K}}\underline{\underline{M}}^i\underline{\underline{F}}^{-1}] \\ [\underline{\underline{H}}' + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{M}}'^c\underline{\underline{F}}^{-1}] & [\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{M}}'^i\underline{\underline{F}}^{-1}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{G}}' \end{bmatrix} \underline{\underline{P}} + \begin{Bmatrix} \underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{T}}' \end{Bmatrix} \quad (6.93)$$

A equação matricial (6.93), é idêntica à obtida no processo da reciprocidade dual, elas diferem apenas na forma em que foram definidas as matrizes $\underline{\underline{M}}$ e $\underline{\underline{F}}$.

Na formulação alternativa proposta neste item, verificou-se que, a definição de bases internas não é necessária para aproximar o deslocamento no domínio da placa, pois a aproximação com bases tomadas apenas no contorno, já oferece uma boa aproximação. Assim, considerando-se apenas pontos base no contorno, a equação (6.93) fica:

$$\begin{bmatrix} [\underline{\underline{H}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{M}}^c\underline{\underline{F}}^{-1}] & [0] \\ [\underline{\underline{H}}' + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{M}}'^c\underline{\underline{F}}^{-1}] & [\underline{\underline{I}}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{G}}' \end{bmatrix} \underline{\underline{P}} + \begin{Bmatrix} \underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{T}}' \end{Bmatrix} \quad (6.94)$$

A equação (6.93) ou (6.94), escrita de uma forma mais simples, fica semelhante a equação (6.34), e após a imposição das condições de contorno poderá ser resolvida em termos de deslocamentos e esforços do contorno.

6.6 Comportamento não-linear para a resposta do solo

As formulações apresentadas nos itens 6.3, 6.4 e 6.5, consideram apenas comportamento elástico para a reação do solo. Esta reação, que atua na interface da placa e o solo, pode-se considerar governada por uma relação reação-deslocamento bi-linear simples e sem resistência à tração (Figura 6.14), desta forma, a reação real do solo fica definida como:

$$g_s(p) = g_s^e(p) - g_s^p(p) \quad (6.95)$$

onde, $g_s^e(p)$ e $g_s^p(p)$ são respectivamente as componentes elástica e plástica da resposta do solo no ponto "p".

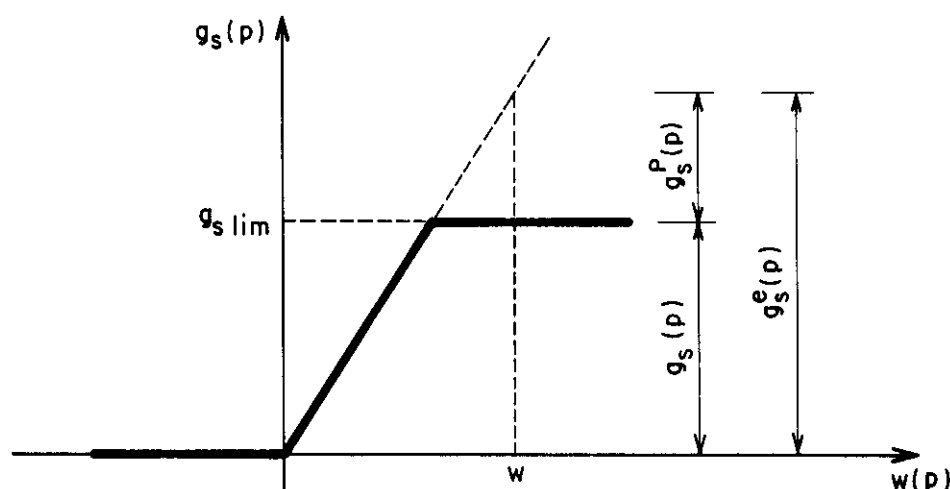


FIGURA 6.14 - Relação reação-deslocamento

Deste modo, a integral (6.4), correspondente à reação do solo, pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega_{gs}} K w^*(Q, p) w(p) d\Omega_{gs}(p) - \int_{\Omega_{gs}} w^*(Q, p) g_s^p(p) d\Omega_{gs}(p) \quad (6.96)$$

De forma análoga ao caso da integral de domínio (6.4), os termos de (6.96) podem ser tratados discretizando-se o domínio em células, com o processo da reciprocidade dual ou com a formulação alternativa proposta.

Utilizando-se o processo da discretização do domínio em células, as integrais de (6.96), escritas matricialmente para todos os pontos do contorno ficam:

$$K \begin{bmatrix} \underline{S}^c & \underline{S}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U} \\ \underline{U}^i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{S}^c & \underline{S}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{Q}^p \\ \underline{Q}^{ip} \end{Bmatrix} \quad (6.97)$$

onde: \underline{Q}^p e \underline{Q}^{ip} são os vetores da componente plástica $g_s^p(p)$ da reação do solo, correspondentes ao contorno e domínio respectivamente.

Incluindo-se (6.97) na equação matricial (5.37), escrita de maneira simples para pontos do contorno e do domínio, do mesmo modo que a equação (6.33), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} [\underline{H} + \underline{K}\underline{S}^c] & [\underline{K}\underline{S}^i] \\ [\underline{H}' + \underline{K}\underline{S}'^c] & [\underline{I} + \underline{K}\underline{S}'^i] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U} \\ \underline{U}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G} \\ \underline{G}' \end{bmatrix} \underline{P} + \begin{Bmatrix} \underline{T} \\ \underline{T}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{S}^c & \underline{S}^i \\ \underline{S}'^c & \underline{S}'^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{Q}^p \\ \underline{Q}^{ip} \end{Bmatrix} \quad (6.97)$$

Para a reciprocidade dual e a formulação alternativa, a representação algébrica do caso não-linear é similar, bastando para isso, substituir as matrizes \underline{S} e \underline{S}' por $\underline{M}\underline{F}^{-1}$ e $\underline{M}'\underline{F}'^{-1}$ respectivamente, na equação (6.97).

Assim, a equação matricial (6.97), pode ser escrita de uma forma generalizada como:

$$\underline{H}\underline{U} = \underline{G}\underline{P} + \underline{T} + \underline{S}\underline{Q}^p \quad (6.98)$$

Calculando-se os valores referentes à carga aplicada g_a e impondo-se as condições de contorno em termos de deslocamentos e esforços, a equação (6.98) fica:

$$\underline{A}\underline{X} = \underline{B} + \underline{S}\underline{Q}^p \quad (6.99)$$

onde, \underline{X} é o vetor das incógnitas e \underline{A} é a matriz definida pelos coeficientes de influência dos deslocamentos e esforços.

Multiplicando-se (6.99) por \underline{A}^{-1} , obtém-se:

$$\underline{X} = \underline{N} + \underline{R}\underline{Q}^p \quad (6.100)$$

onde:

$$\tilde{N} = \tilde{A}^{-1} \tilde{B} \quad (6.101)$$

$$\tilde{R} = \tilde{A}^{-1} \tilde{S} \quad (6.102)$$

sendo, \tilde{N} e \tilde{R} respectivamente, a resposta elástica e a influência da não-linearidade para a reação do solo.

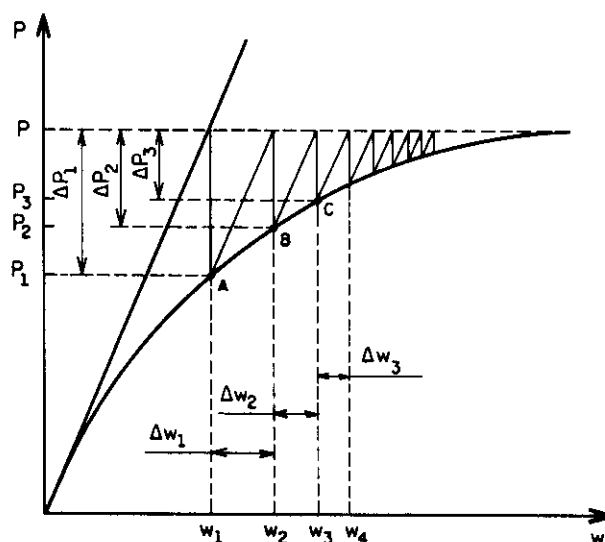


FIGURA 6.15 - Representação de um processo iterativo para um problema não-linear com equilíbrio

O comportamento não-linear para a resposta do solo, apresentado neste item, é modelado por um processo iterativo, ilustrado na Figura 6.15, onde as abscissas são representadas pelo deslocamento genérico w de um ponto da placa e as ordenadas pela carga total P aplicada à placa. A linha curva representa o comportamento real da resposta do solo, considerando-se a não-linearidade física, e a linha reta o comportamento elástico linear.

Inicialmente, é obtida a resposta elástica correspondente aos deslocamentos genéricos w_1 , aplicando-se a carga P à placa, a seguir é determinada a resposta real do solo através da relação reação-deslocamento adotada, a qual corresponde ao ponto "A" da Figura 6.15 e a uma carga real P_1 . A diferença $\Delta P_1 = P - P_1$, que é a componente

plástica da reação do solo representada pelo vetor \tilde{Q}^P , é aplicada à placa a partir do ponto "A", obtendo-se deslocamentos elásticos Δw_1 , que somados a w_1 , determinam os deslocamentos reais w_2 , com os quais se estabelece a nova posição real para a resposta do solo, o ponto "B". Este procedimento, será repetido até que a diferença ΔP_n , correspondente à n-ésima iteração, seja menor que uma tolerância previamente adotada.

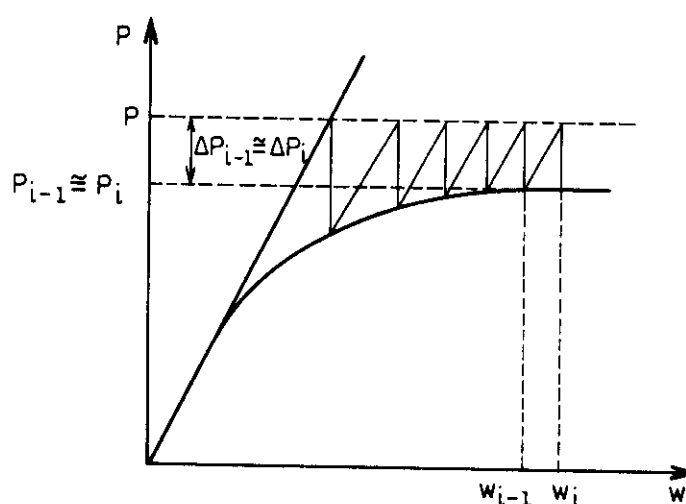


FIGURA 6.16 - Representação de um processo iterativo para um problema não-linear sem equilíbrio

Na Figura 6.16, é mostrado um problema, no qual o equilíbrio final não é possível devido a que o carregamento aplicado excede o crítico, isto é equivalente a se ter $\Delta P_i = P - P_i$ maior que a tolerância adotada e $\Delta P_i - \Delta P_{i-1} \cong 0$, para todos os pontos. Neste caso o processo iterativo é paralizado.

6.7 Aplicações numéricas

Neste item são apresentadas algumas aplicações das formulações tratadas neste capítulo, para análise da interação placa-solo, utilizando a teoria de Winkler, pelo método dos elementos de contorno.

Nos casos lineares, o contato entre a placa e o solo é admitido perfeito, permitindo-se tensões de tração na interface.

Foram adotadas para a placa, as mesmas constantes adotadas no item 5.10 do capítulo anterior. O módulo da reação do solo K , foi adotado igual a 10 N/cm^3 para todos os exemplos.

Com objetivo de comparar as três formulações apresentadas, foi utilizada uma placa discretizada com 16 elementos de contorno, e foram adotados 25 pontos base idênticos aos pontos duais (Figura 6.17), localizados no contorno e no domínio da placa, os quais coincidem com os vértices das 32 células (Figura 6.18).

Na figura 6.18, são mostrados também os pontos da placa em análise.

As tensões de tração, em todos os exemplos, são indicadas com sinal positivo.

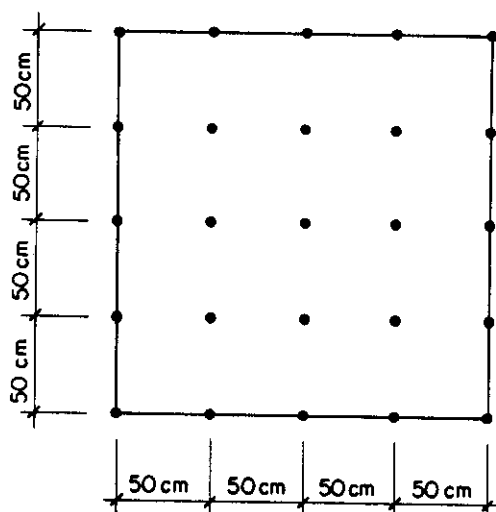


FIGURA 6.17 - Definição dos pontos base e os pontos duais

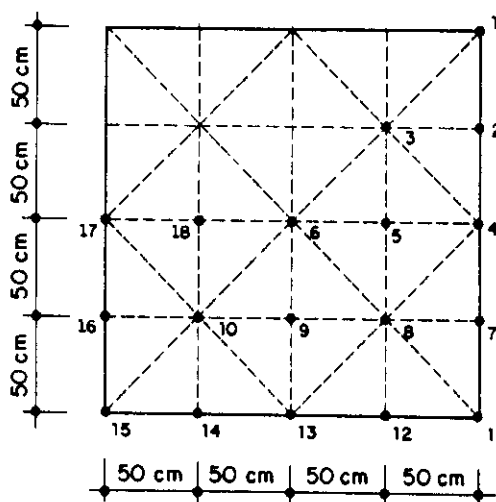


FIGURA 6.18 - Definição das células e dos pontos em análise

6.7.1 Exemplo1: Placa com carga centrada

Neste exemplo é analisada uma placa quadrada (Figura 6.19), submetida a uma carga vertical de 400 kN, distribuída em uma pequena área central. Os resultados das reações do solo obtidas pelas três formulações, ou seja, usando-se células internas, o processo da reciprocidade dual e a formulação alternativa, são apresentados nas tabelas 6.1 6.2 e 6.3 respectivamente, para diferentes valores da espessura h da placa e para duas relações de u/a . Estes resultados são comparados com valores teóricos, considerando-se a rigidez da placa infinita.

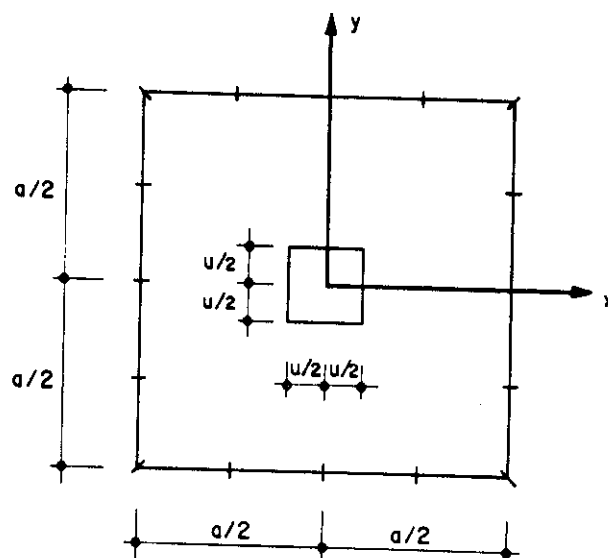


FIGURA 6.19 - Geometria da placa para carga centrada

TABELA 6.1 - Reações do solo para carga centrada

PT	u/a	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					
		CÉLULAS					V.TEO
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	C.RIG
1	0,1	-5,24	-9,34	-9,81	-9,92	-9,97	-10,00
	0,2	-5,38	-9,36	-9,81	-9,93	-9,97	-10,00
2	0,1	-7,99	-9,73	-9,93	-9,97	-9,99	-10,00
	0,2	-8,07	-9,74	-9,93	-9,98	-9,99	-10,00
3	0,1	-10,53	-10,08	-10,03	-10,02	-10,01	-10,00
	0,2	-10,53	-10,08	-10,03	-10,02	-10,01	-10,00
4	0,1	-9,22	-9,91	-9,98	-10,00	-10,00	-10,00
	0,2	-9,27	-9,91	-9,98	-10,00	-10,00	-10,00
5	0,1	-12,00	-10,28	-10,09	-10,04	-10,03	-10,00
	0,2	-11,94	-10,28	-10,09	-10,04	-10,03	-10,00
6	0,1	-14,32	-10,59	-10,18	-10,08	-10,05	-10,00
	0,2	-14,02	-10,55	-10,17	-10,08	-10,04	-10,00

TABELA 6.2 - Reações do solo para carga centrada

PT	u/a	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					
		RECIPROCIDADE DUAL					V.TEO
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	C.RIG
1	0,1	-6,48	-9,52	-9,90	-10,00	-10,03	-10,00
	0,2	-6,62	-9,54	-9,91	-10,00	-10,04	-10,00
2	0,1	-7,89	-9,77	-9,98	-10,03	-10,05	-10,00
	0,2	-7,96	-9,78	-9,98	-10,03	-10,05	-10,00
3	0,1	-10,51	-10,13	-10,09	-10,08	-10,07	-10,00
	0,2	-10,51	-10,13	-10,09	-10,08	-10,07	-10,00
4	0,1	-8,88	-9,92	-10,03	-10,05	-10,06	-10,00
	0,2	-8,93	-9,93	-10,03	-10,05	-10,06	-10,00
5	0,1	-11,91	-10,32	-10,15	-10,10	-10,09	-10,00
	0,2	-11,85	-10,32	-10,14	-10,10	-10,09	-10,00
6	0,1	-14,22	-10,63	-10,24	-10,14	-10,11	-10,00
	0,2	-13,92	-10,59	-10,23	-10,14	-10,10	-10,00

TABELA 6.3 - Reações do solo para carga centrada

PT	u/a	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					
		FORMULAÇÃO ALTERNATIVA					V.TEO
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	C.RIG
1	0,1	-5,24	-9,34	-9,81	-9,92	-9,97	-10,00
	0,2	-5,38	-9,36	-9,81	-9,93	-9,98	-10,00
2	0,1	-7,99	-9,73	-9,93	-9,97	-9,99	-10,00
	0,2	-8,06	-9,74	-9,93	-9,98	-9,99	-10,00
3	0,1	-10,54	-10,08	-10,03	-10,02	-10,01	-10,00
	0,2	-10,53	-10,08	-10,03	-10,02	-10,01	-10,00
4	0,1	-9,22	-9,91	-9,98	-10,00	-10,00	-10,00
	0,2	-9,26	-9,91	-9,98	-10,00	-10,00	-10,00
5	0,1	-12,00	-10,28	-10,09	-10,04	-10,03	-10,00
	0,2	-11,95	-10,28	-10,09	-10,04	-10,03	-10,00
6	0,1	-14,33	-10,59	-10,18	-10,08	-10,05	-10,00
	0,2	-14,02	-10,55	-10,17	-10,08	-10,04	-10,00

Pode-se observar nas tabelas 6.1, 6.2 e 6.3, que a distribuição de tensões no solo é praticamente constante e próxima do valor teórico a partir de $h=40\text{cm}$ para as duas relações u/a .

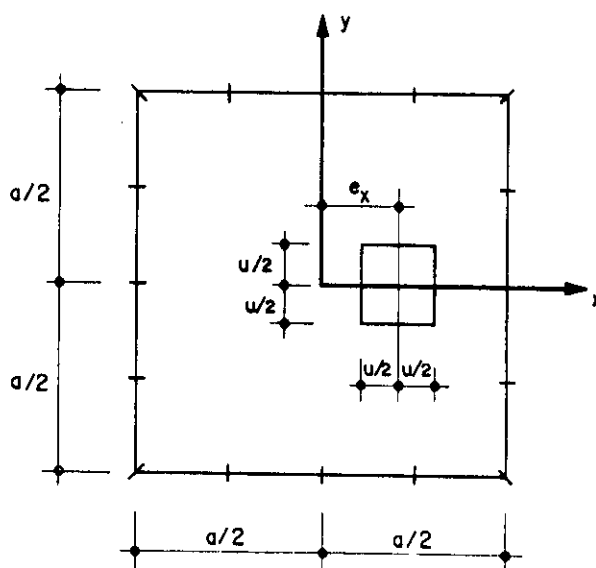


FIGURA 6.20 - Geometria da placa para carga com uma excentricidade

6.7.2 Exemplo 2: Placa com carga excêntrica

Utilizando-se a mesma geometria e discretização do exemplo anterior, neste caso a carga vertical de 400 kN é excêntrica (Figura 6.20) e a relação $u/a=0,2$.

Nas tabelas 6.4, 6.5 e 6.6, são apresentados resultados das reações do solo obtidas pelas três formulações já mencionadas, para excentricidades de $e_x=30\text{cm}$ e $e_x=50\text{cm}$ da carga vertical, e para diferentes valores da espessura h da placa.

TABELA 6.4 - Reações do solo para carga com uma excentricidade

e_x	PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]						
		CÉLULAS					V.TEO	
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	C.RIG.	
30cm	1	-13,85	-18,29	-18,79	-18,91	-18,95	-19,00	
	2	-17,81	-18,85	-18,95	-18,98	-18,99	-19,00	
	3	-15,25	-14,60	-14,53	-14,52	-14,51	-14,50	
	4	-19,84	-19,13	-19,04	-19,02	-19,01	-19,00	
	5	-17,42	-14,90	-14,62	-14,55	-14,53	-14,50	
	6	-13,07	-10,43	-10,13	-10,06	-10,04	-10,00	
	9	-11,29	-10,18	-10,06	-10,03	-10,02	-10,00	
	10	-5,74	-5,55	-5,52	-5,52	-5,51	-5,50	
	12	-11,84	-14,13	-14,39	-14,46	-14,48	-14,50	
	13	-8,50	-9,80	-9,94	-9,98	-9,99	-10,00	
	14	-3,69	-5,25	-5,43	-5,48	-5,49	-5,50	
	15	+1,86	-0,60	-0,89	-0,96	-0,99	-1,00	
	50cm	1	-20,18	-24,34	-24,80	-24,91	-24,95	-25,00
		2	-25,44	-25,07	-25,02	-25,00	-25,00	-25,00
		3	-18,12	-17,58	-17,52	-17,51	-17,50	-17,50
4		-28,49	-25,49	-25,14	-25,06	-25,02	-25,00	
5		-20,76	-17,94	-17,63	-17,56	-17,53	-17,50	
6		-11,84	-10,26	-10,08	-10,04	-10,02	-10,00	
9		-10,27	-10,04	-10,02	-10,01	-10,01	-10,00	
10		-2,61	-2,53	-2,52	-2,52	-2,52	-2,50	
12		-13,85	-16,99	-17,35	-17,43	-17,47	-17,50	
13		-7,20	-9,60	-9,88	-9,96	-9,98	-10,00	
14		-0,56	-2,23	-2,43	-2,48	-2,50	-2,50	
15		+6,21	+5,16	+5,03	+5,00	+4,99	+5,00	

TABELA 6.5 - Reações do solo para carga com uma excentricidade

e_x	PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]						
		RECIPROCIDADE DUAL					V.TEO	
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	C.RIG.	
30cm	1	-15,56	-18,39	-18,74	-18,83	-18,86	-19,00	
	2	-17,40	-18,70	-18,83	-18,87	-18,88	-19,00	
	3	-15,14	-14,57	-14,51	-14,49	-14,49	-14,50	
	4	-19,06	-18,94	-18,91	-18,90	-18,89	-19,00	
	5	-17,22	-14,85	-14,59	-14,53	-14,50	-14,50	
	6	-12,99	-10,47	-10,19	-10,12	-10,10	-10,00	
	9	-11,21	-10,23	-10,12	-10,09	-10,08	-10,00	
	10	-5,82	-5,68	-5,67	-5,66	-5,66	-5,50	
	12	-11,49	-14,07	-14,36	-14,43	-14,45	-14,50	
	13	-8,22	-9,82	-9,99	-10,04	-10,05	-10,00	
	14	-3,91	-5,41	-5,58	-5,63	-5,64	-5,50	
	15	+1,19	-0,86	-1,13	-1,20	-1,22	-1,00	
	50cm	1	-22,23	-24,40	-24,66	-24,72	-24,74	-25,00
		2	-24,82	-24,81	-24,78	-24,77	-24,77	-25,00
		3	-17,98	-17,49	-17,44	-17,43	-17,42	-17,50
4		-27,40	-25,17	-24,89	-24,82	-24,79	-25,00	
5		-20,50	-17,84	-17,54	-17,47	-17,45	-17,50	
6		-11,78	-10,30	-10,14	-10,10	-10,08	-10,00	
9		-10,23	-10,08	-10,07	-10,07	-10,07	-10,00	
10		-2,76	-2,73	-2,72	-2,72	-2,72	-2,50	
12		-13,39	-16,85	-17,25	-17,35	-17,38	-17,50	
13		-7,04	-9,63	-9,93	-10,01	-10,04	-10,00	
14		-1,05	-2,46	-2,64	-2,69	-2,70	-2,50	
15		+5,99	+4,86	+4,70	+4,66	+4,65	+5,00	

TABELA 6.6 - Reações do solo para carga com uma excentricidade

e_x	PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]						
		FORMULAÇÃO ALTERNATIVA					V.TEO	
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	C.RIG.	
30cm	1	-13,83	-18,29	-18,79	-18,91	-18,95	-19,00	
	2	-17,79	-18,84	-18,95	-18,98	-18,99	-19,00	
	3	-15,24	-14,60	-14,53	-14,52	-14,51	-14,50	
	4	-19,82	-19,13	-19,04	-19,02	-19,01	-19,00	
	5	-17,42	-14,90	-14,62	-14,55	-14,53	-14,50	
	6	-13,07	-10,42	-10,13	-10,06	-10,04	-10,00	
	9	-11,29	-10,18	-10,06	-10,03	-10,02	-10,00	
	10	-5,74	-5,55	-5,52	-5,52	-5,51	-5,50	
	12	-11,82	-14,13	-14,39	-14,46	-14,48	-14,50	
	13	-8,49	-9,80	-9,94	-9,98	-9,99	-10,00	
	14	-3,69	-5,25	-5,43	-5,48	-5,50	-5,50	
	15	+1,86	-0,60	-0,89	-0,96	-0,99	-1,00	
	50cm	1	-20,16	-24,34	-24,80	-24,91	-24,95	-25,00
		2	-25,42	-25,07	-25,02	-25,00	-25,00	-25,00
		3	-18,11	-17,58	-17,52	-17,51	-17,50	-17,50
4		-28,47	-25,49	-25,14	-25,06	-25,02	-25,00	
5		-20,75	-17,94	-17,63	-17,56	-17,53	-17,50	
6		-11,83	-10,26	-10,08	-10,04	-10,02	-10,00	
9		-10,26	-10,04	-10,02	-10,01	-10,01	-10,00	
10		-2,61	-2,53	-2,52	-2,52	-2,52	-2,50	
12		-13,83	-16,98	-17,35	-17,43	-17,47	-17,50	
13		-7,20	-9,60	-9,88	-9,96	-9,98	-10,00	
14		-0,56	-2,23	-2,43	-2,48	-2,50	-2,50	
15		+6,21	+5,16	+5,03	+5,00	+4,99	+5,00	

Com uma excentricidade de $e_x=30\text{cm}$ para a carga vertical, resultam apenas tensões de compressão no solo. Já para uma excentricidade de $e_x=50\text{cm}$, aparecem tensões de tração e compressão no solo. Nos dois casos, os resultados obtidos pelas três formulações se aproximam dos valores teóricos, conforme a espessura da placa aumenta.

Nas figuras 6.21.a e 6.21.b, são mostradas as distribuições das tensões no solo para $e_x=30\text{cm}$ e $e_x=50\text{cm}$, respectivamente, considerando-se a rigidez da placa teoricamente infinita.

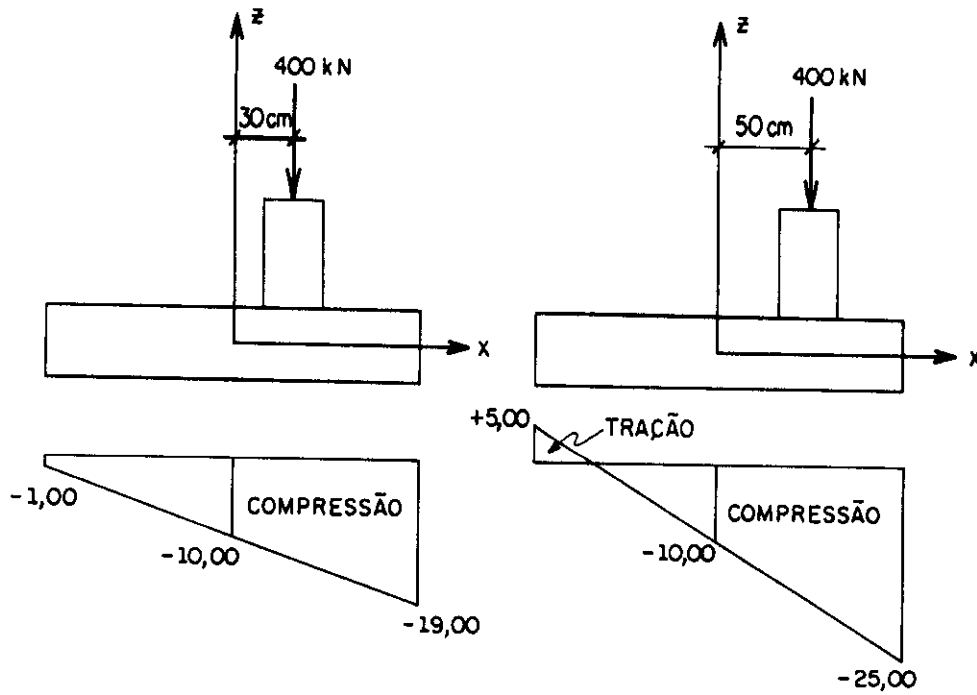


FIGURA 6.21 - Distribuição de tensões no solo
a) $e_x=30\text{cm}$; b) $e_x=50\text{cm}$

Na figura 6.22, é mostrada a mesma placa submetida a uma carga vertical de 400 kN com duas excentricidades $e_x=e_y=50\text{cm}$.

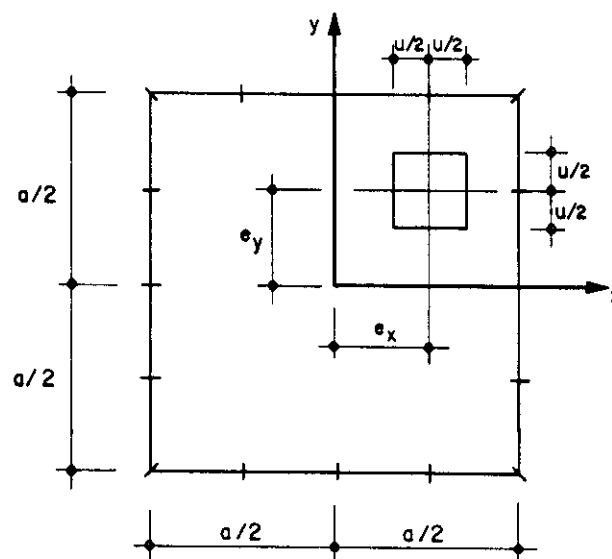


FIGURA 6.22 - Geometria da placa para carga com duas excentricidades

Os resultados das reações do solo obtidas para uma carga vertical de 400kN com duas excentricidades, utilizando-se células internas, o processo da reciprocidade dual e a formulação alternativa, são apresentados nas tabelas 6.7, 6.8 e 6.9 respectivamente, e são também comparados com os valores teóricos.

TABELA 6.7 - Reações do solo para carga com duas excentricidades

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					
	CÉLULAS					V.TEO
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	C.RIG
1	-43,49	-40,66	-40,21	-40,09	-40,05	-40,00
2	-35,72	-33,04	-32,67	-32,57	-32,54	-32,50
3	-28,03	-25,46	-25,14	-25,06	-25,03	-25,00
4	-24,55	-24,95	-24,99	-25,00	-25,00	-25,00
5	-17,98	-17,57	-17,52	-17,51	-17,51	-17,50
6	-10,32	-10,05	-10,01	-10,01	-10,00	-10,00
7	-13,26	-16,83	-17,30	-17,41	-17,46	-17,50
8	-8,09	-9,69	-9,90	-9,96	-9,98	-10,00
9	-2,51	-2,50	-2,50	-2,50	-2,50	-2,50
10	+3,27	+4,71	+4,91	+4,96	+4,98	+5,00
11	-3,78	-8,98	-9,69	-9,87	-9,93	-10,00
12	+0,88	-1,93	-2,33	-2,43	-2,46	-2,50
13	+4,92	+4,99	+5,00	+5,00	+5,00	+5,00
14	+9,18	+11,95	+12,34	+12,43	+12,47	+12,50
15	+14,40	+19,08	+19,72	+19,88	+19,94	+20,00

TABELA 6.8 - Reações do solo para carga com duas excentricidades

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					
	RECIPROCIDADE DUAL					V.TEO
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	C.RIG
1	-46,33	-40,60	-39,83	-39,64	-39,57	-40,00
2	-34,80	-32,60	-32,28	-32,20	-32,17	-32,50
3	-27,81	-25,23	-24,92	-24,84	-24,81	-25,00
4	-23,62	-24,63	-24,73	-24,76	-24,77	-25,00
5	-17,82	-17,47	-17,43	-17,43	-17,42	-17,50
6	-10,34	-10,10	-10,07	-10,07	-10,06	-10,00
7	-13,22	-16,76	-17,22	-17,33	-17,38	-17,50
8	-8,18	-9,75	-9,97	-10,02	-10,04	-10,00
9	-2,71	-2,71	-2,70	-2,70	-2,70	-2,50
10	+2,97	+4,37	+4,57	+4,62	+4,64	+5,00
11	-5,12	-9,17	-9,79	-9,94	-10,00	-10,00
12	+0,93	-2,11	-2,52	-2,63	-2,66	-2,50
13	+4,31	+4,62	+4,64	+4,65	+4,65	+5,00
14	+8,18	+11,40	+11,83	+11,93	+11,97	+12,50
15	+15,95	+18,66	+19,15	+19,28	+19,32	+20,00

TABELA 6.9 - Reações do solo para carga com duas excentricidades

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					V.TEO
	FORMULAÇÃO ALTERNATIVA					
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	C.RIG
1	-43,35	-40,67	-40,22	-40,11	-40,07	-40,00
2	-35,67	-33,05	-32,68	-32,58	-32,55	-32,50
3	-28,04	-25,47	-25,15	-25,07	-25,04	-25,00
4	-24,55	-24,95	-24,99	-25,00	-25,00	-25,00
5	-17,99	-17,57	-17,52	-17,51	-17,51	-17,50
6	-10,33	-10,05	-10,01	-10,01	-10,00	-10,00
7	-13,31	-16,82	-17,29	-17,41	-17,45	-17,50
8	-8,09	-9,68	-9,90	-9,95	-9,97	-10,00
9	-2,49	-2,49	-2,49	-2,49	-2,49	-2,50
10	+3,29	+4,72	+4,92	+4,97	+4,99	+5,00
11	-3,93	-8,97	-9,67	-9,85	-9,91	-10,00
12	+0,90	-1,91	-2,31	-2,41	-2,44	-2,50
13	+4,99	+5,02	+5,02	+5,02	+5,02	+5,00
14	+9,25	+11,97	+12,35	+12,45	+12,48	+12,50
15	+14,40	+19,08	+19,73	+19,90	+19,96	+20,00

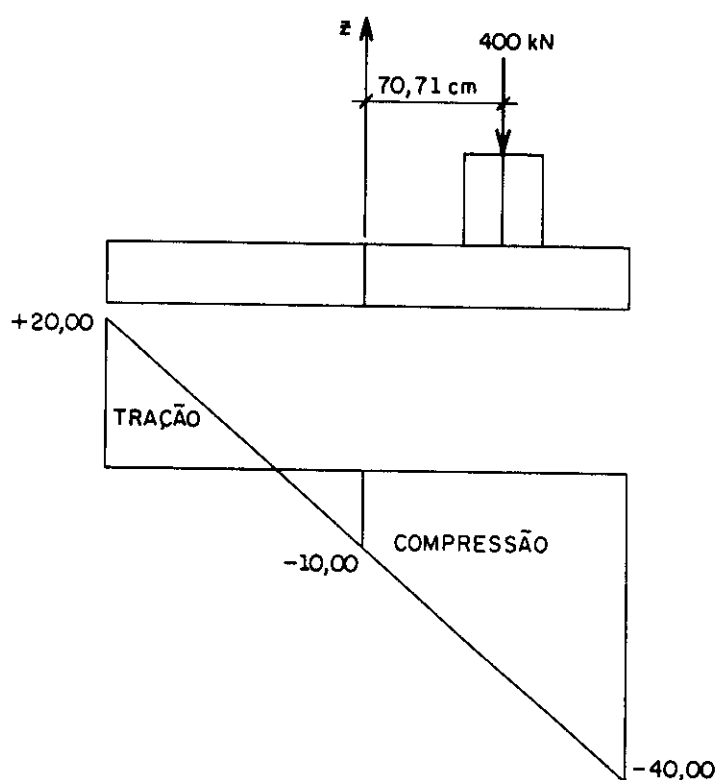
FIGURA 6.23 - Distribuição de tensões no solo para $e_x=e_y=50\text{cm}$

TABELA 6.11 - Reações do solo para carga com uma excentricidade

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					
	RECIPROCIDADE DUAL					V.TEO
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	C.RIG.
1	-22,78	-25,77	-26,12	-26,20	-26,23	-26,67
2	-26,12	-26,25	-26,26	-26,27	-26,27	-26,67
3	-18,29	-17,80	-17,74	-17,73	-17,72	-17,78
4	-28,84	-26,62	-26,37	-26,31	-26,29	-26,67
5	-20,82	-18,14	-17,84	-17,77	-17,75	-17,78
6	-10,97	-9,43	-9,25	-9,21	-9,19	-8,89
9	-9,45	-9,22	-9,19	-9,18	-9,18	-8,89
10	-0,48	-0,64	-0,63	-0,63	-0,63	0,00
12	-13,97	-17,19	-17,56	-17,65	-17,69	-17,78
13	-6,50	-8,81	-9,06	-9,13	-9,15	-8,89
14	0,00	-0,39	-0,55	-0,59	-0,61	0,00
15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

TABELA 6.12 - Reações do solo para carga com uma excentricidade

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					
	FORMULAÇÃO ALTERNATIVA					V.TEO
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	C.RIG.
1	-21,63	-25,93	-26,42	-26,54	-26,58	-26,67
2	-26,90	-26,66	-26,63	-26,63	-26,63	-26,67
3	-18,39	-17,85	-17,80	-17,78	-17,78	-17,78
4	-29,94	-27,07	-26,76	-26,68	-26,65	-26,67
5	-21,03	-18,21	-17,90	-17,83	-17,80	-17,78
6	-10,76	-9,19	-9,00	-8,95	-8,94	-8,89
9	-9,19	-8,97	-8,94	-8,96	-8,92	-8,89
10	0,00	-0,08	-0,08	-0,07	-0,07	0,00
12	-14,17	-17,27	-17,62	-17,71	-17,74	-17,78
13	-6,20	-8,56	-8,81	-8,88	-8,90	-8,89
14	0,00	0,00	0,00	-0,03	-0,05	0,00
15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Nas tabelas 6.13, 6.14 e 6.15, são apresentadas resultados para a reação do solo, onde além de se considerar nulas as tensões de tração, a máxima tensão de compressão foi limitada em 25 N/cm².

TABELA 6.15 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com limitação da tensão máxima de compressão

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					
	FORMULAÇÃO ALTERNATIVA					V.TEO
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	C.RIG.
1	-23,69	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
2	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
3	-19,47	-18,76	-18,71	-18,70	-18,70	-17,91
4	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
5	-22,17	-19,12	-18,82	-18,75	-18,72	-17,91
6	-10,81	-9,28	-9,10	-9,06	-9,04	-8,89
9	-9,20	-9,07	-9,04	-9,03	-9,02	-8,89
10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
12	-15,09	-18,17	-18,54	-18,63	-18,67	-17,91
13	-6,10	-8,64	-8,91	-8,97	-9,00	-8,89
14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Pode-se observar que os resultados obtidos pelas três formulações, convergem para os resultados teóricos (placa com rigidez infinita), a medida que aumenta a altura da placa.

CAPÍTULO VII

INTERAÇÃO PLACA-SOLO DOMÍNIO TRIDIMENSIONAL

7.1 Introdução

Neste capítulo, a alternativa proposta no capítulo V, para o problema de flexão de placas, também será utilizada para a análise da interação placa-solo, acrescentando-se uma integral de domínio, proveniente da reação do solo, na equação integral de deslocamento.

A integral de domínio correspondente à reação do solo, que agora contem como variável do problema a própria reação do solo, será tratada utilizando-se as formulações abordadas no capítulo anterior, conservando todas as suas características.

O solo será considerado como sendo um sólido tridimensional, de domínio semi-infinito, podendo ser analisado desta forma, pela formulação do método dos elementos de contorno para sólidos tridimensionais, baseados nas soluções de Boussinesq-Cerruti e Mindlin, tratadas no capítulo IV.

A interação placa-solo, será feita utilizando-se as formulações da placa e do solo, já tratados anteriormente, estabelecendo-se equações de equilíbrio de esforços e compatibilidade de deslocamentos transversais, em todos os pontos da interface.

No final do capítulo são apresentadas algumas aplicações numéricas, comparando-se os resultados obtidos pelas formulações já mencionadas.

7.2 Equações fundamentais

A equação diferencial de uma placa submetida a um carregamento transversal g_a , apoiada sobre o solo (Figura 7.1), considerado elástico, pode ser escrita como:

$$\nabla^4 w(q) = [g_a(p) - g_s(p)] / D \quad (7.1)$$

onde, $g_s(p)$ é a reação do solo no ponto "p".

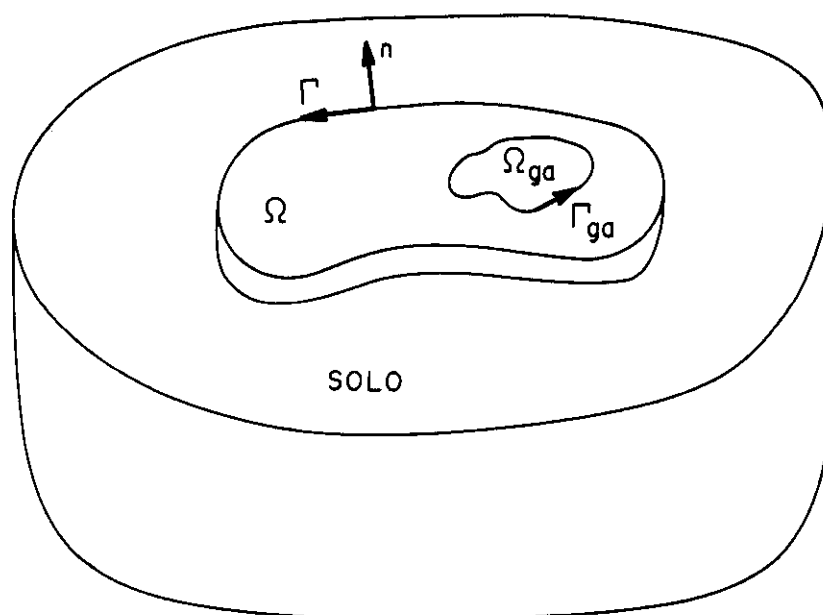


FIGURA 7.1 - Placa apoiada sobre o solo

Substituindo-se o carregamento transversal $g(p)$ por $[g_a(p) - g_s(p)]$, na equação integral de deslocamento (3.49), obtém-se:

$$\begin{aligned} C(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}^*(Q,P)w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P)w^*(Q,P) + \right. \\ \left. - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q,P) + \\ + \int_{\Omega_{ga}} w^*(Q,p)g_a(p)d\Omega_{ga}(p) - \int_{\Omega_{gs}} w^*(Q,p)g_s(p)d\Omega_{gs}(p) \end{aligned} \quad (7.2)$$

A última integral de domínio da equação (7.2), objeto de estudo nos próximos itens, contém a nova variável do problema, correspondente à reação do solo:

$$\int_{\Omega_{g_s}} w^*(Q,p) g_s(p) d\Omega_{g_s}(p) \quad (7.3)$$

7.3 Integração sobre células internas

Como foi visto no capítulo anterior, discretizando-se o domínio da placa em células internas, as reações do solo são aproximadas, transformando-se a integral de domínio (7.3), em somatórios de integrais sobre estas células, para todos os pontos do domínio e contorno da placa, isto é:

$$\sum_{i=1}^{N_{cel}} \int_{\Omega_{g_s}} w^*(Q,p) g_s(p) d\Omega_{g_s}(p) \quad (7.4)$$

onde, N_{cel} é o número de células.

De forma análoga a expressão (6.6), a reação do solo $g_s(p)$ de um ponto qualquer da célula, pode ser escrita em função das reações do solo dos vértices da mesma, isto é:

$$g_s(p) = \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{g}_s^N \quad (7.5)$$

onde, $\underset{\sim}{\phi}$ é dada por (6.10) e $\underset{\sim}{g}_s^N$, representa as reações do solo g_s^1 , g_s^2 e g_s^3 nos vértices da célula.

Substituindo-se em (7.3) o valor de $g_s(p)$ dado em (7.5), e considerando-se apenas uma célula genérica "i" de domínio Ω_i , obtém-se:

$$\int_{\Omega_i} w^*(Q,p) g_s(p) d\Omega_i(p) = \left\{ \int_{\Omega_i} \xi_1^p w^*(Q,p) d\Omega_i(p) \right. \\ \left. \int_{\Omega_i} \xi_2^p w^*(Q,p) d\Omega_i(p) \quad \int_{\Omega_i} \xi_3^p w^*(Q,p) d\Omega_i(p) \right\} \begin{Bmatrix} g_s^1 \\ g_s^2 \\ g_s^3 \end{Bmatrix} \quad (7.6)$$

Procedendo-se de forma idêntica ao capítulo anterior, as integrais do segundo membro de (7.6), são transformadas, obtendo-se:

$$\int_{\Omega_i} w^*(Q,p) g_s(p) d\Omega_i(p) = \left\{ A^1 \quad A^2 \quad A^3 \right\} \left\{ \begin{array}{c} g_s^1 \\ g_s^2 \\ g_s^3 \end{array} \right\} \quad (7.7)$$

onde:

$$A^\alpha = \int_{\Omega_{i1}} \xi_\alpha^p w^*(Q,p) d\Omega_{i1}(p) + \int_{\Omega_{i2}} \xi_\alpha^p w^*(Q,p) d\Omega_{i2}(p) \quad (7.8)$$

$$\alpha=1,2,3$$

A integral (7.3), transformada em termos algébricos dados pelo produto entre os coeficientes A^α e as reações do solo $g_s(p)$, correspondentes aos vértices " α " da célula " i ", poderá ser aplicada a todas as células da placa, representando assim, a influência da reação do solo.

Escrevendo-se matricialmente a equação (7.2), para pontos do contorno e para pontos internos, respectivamente, obtém-se:

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{S}} \left\{ \begin{array}{c} \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{Q}}^i \end{array} \right\} \quad (7.9)$$

$$\underline{\underline{U}}^i + \underline{\underline{H}}' \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}' \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}}' - \underline{\underline{S}}' \left\{ \begin{array}{c} \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{Q}}^i \end{array} \right\} \quad (7.10)$$

onde, $\underline{\underline{S}}$ e $\underline{\underline{S}}'$ são as matrizes provenientes da reação do solo formadas pelos coeficientes A^α ; $\underline{\underline{Q}}$ e $\underline{\underline{Q}}^i$ são as próprias reações do solo, para pontos do contorno e pontos internos, respectivamente.

7.4 Processo da reciprocidade dual

Utilizando-se o processo da reciprocidade dual, a integral de domínio (7.3), proveniente da reação do solo, pode ser transformada em integrais sobre o contorno da placa, a partir de uma aproximação para a reação do solo $g_s(p)$, dada por:

$$g_s(p) = f(m,p)\alpha^m \quad (7.11)$$

onde, $f(m,p)$ representa as mesmas funções do item 6.4 do capítulo anterior, relacionadas a "m" pontos ou nós duais, e α^m são coeficientes a serem determinados posteriormente.

A função $f(m,p)$, suposta como uma carga distribuída fictícia, é associada a pseudo-deslocamentos $\hat{w}(m,p)$ através da equação diferencial de placas:

$$\Delta\Delta\hat{w}(q) = f(m,p) / D \quad (7.12)$$

Um campo de pseudo-deslocamentos que satisfaz (7.12) é:

$$\hat{w}(m,p) = \frac{1}{225D} R^5(m,p) \quad (7.13)$$

onde:

$$R(m,p) = \left\{ [x_1(p) - x_1(m)]^2 + [x_2(p) - x_2(m)]^2 \right\}^{1/2} \quad (7.14)$$

Substituindo-se (7.13) na equação (7.12) e após derivações necessárias chega-se a:

$$f(m,p) = R(m,p) \quad (7.15)$$

A equação integral para os deslocamentos duais $\hat{w}(m,p)$, pode ser escrita a partir da equação diferencial (7.12), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{w}(q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(q,P)\hat{w}(m,P) - M_n^*(q,P)\frac{\partial\hat{w}}{\partial n}(m,P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}^*(q,P)\hat{w}_{ci}(m,P) = \int_{\Gamma} w^*(q,P) \left[\hat{V}_n(m,P) + \right. \\ \left. - \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P)\hat{M}_n(m,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} w_{ci}^*(q,P)\hat{R}_{ci}(m,P) + \\ + \int_{\Omega_f} w^*(q,p)f(m,p)d\Omega_f(p) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Isolando-se no primeiro membro a integral de domínio da equação (7.16), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_f} w^*(q,p) f(m,p) d\Omega_f(p) = \hat{w}(q) + \int_{\Gamma} [V_n^*(q,P) \hat{w}(m,P) + \\
 - M_n^*(q,P) \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(m,P)] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q,P) \hat{w}_{ci}(m,P) + \\
 - \int_{\Gamma} [w^*(q,P) \hat{V}_n(m,P) - \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \hat{M}_n(m,P)] d\Gamma(P) + \\
 - \sum_{i=1}^{N_c} w_{ci}^*(q,P) \hat{R}_{ci}(m,P) \tag{7.17}
 \end{aligned}$$

Os deslocamentos duais $\hat{w}(m,P)$ e $\frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(m,P)$, assim como os esforços duais $\hat{M}_n(m,P)$ e $\hat{V}_n(m,P)$, da equação (7.17), determinados no capítulo anterior, são aproximados nos elementos do contorno da placa, pelas mesmas funções aproximadoras usadas para as variáveis reais, dando origem, após as integrações sobre os elementos, às matrizes $\underline{\hat{H}}$ e $\underline{\hat{G}}$, já conhecidas.

Considerando-se todos os nós do contorno e todos os nós duais da placa, a equação (7.17), escrita matricialmente, fica:

$$\underline{\hat{M}} = \underline{\hat{H}} \underline{\hat{U}} - \underline{\hat{G}} \underline{\hat{P}} \tag{7.18}$$

onde, as matrizes $\underline{\hat{U}}$ e $\underline{\hat{P}}$ contêm, respectivamente em cada linha, os deslocamentos e esforços duais correspondentes aos "m" pontos duais escolhidos.

Substituindo-se a aproximação a reação do solo $g_s(p)$, dada em (7.11), na integral de domínio (7.3), obtém-se:

$$\left[\int_{\Omega_{gs}} w^*(Q,p) f(m,p) d\Omega_{gs}(p) \right] \alpha^m \tag{7.19}$$

A integral de domínio (7.19), obtida de forma dual para todos os pontos duais e do contorno, pode ser escrita matricialmente como:

$$\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\alpha}} \quad \text{ou} \quad [\underline{\underline{H}}\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{G}}\underline{\underline{P}}]\underline{\underline{\alpha}} \quad (7.20)$$

onde, $\underline{\underline{\alpha}}$ é o vetor que contem os coeficientes α^m .

Os coeficientes do vetor $\underline{\underline{\alpha}}$, são obtidos aplicando-se a equação (7.11) a todos os pontos duais do contorno e do domínio da placa, para $f(m,p)$ dado na equação (7.15), assim:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{Q}}^i \end{Bmatrix} = \underline{\underline{F}}\underline{\underline{\alpha}} \quad (7.21)$$

ou seja:

$$\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{Q}}^i \end{Bmatrix} \quad (7.22)$$

Desta forma, a influencia da reação do solo, representada por (7.3), pode ser escrita matricialmente como:

$$\int_{\Omega_{gs}} w^*(Q,p) g_s(p) d\Omega_{gs}(p) = \underline{\underline{M}}\underline{\underline{F}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{Q}}^i \end{Bmatrix} \quad (7.23)$$

Escrevendo-se matricialmente a equação (7.2), para pontos do contorno e para pontos internos, respectivamente, obtém-se:

$$\underline{\underline{H}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{M}}\underline{\underline{F}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{Q}}^i \end{Bmatrix} \quad (7.24)$$

$$\underline{\underline{U}}^i + \underline{\underline{H}}' \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}' \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}}' - \underline{\underline{M}}' \underline{\underline{F}}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{Q}}^i \end{array} \right\} \quad (7.25)$$

onde, $\underline{\underline{M}}$ e $\underline{\underline{M}}'$ são matrizes obtidas a partir de (7.18), para pontos do contorno e internos respectivamente.

7.5 Formulação alternativa

Semelhante ao processo da reciprocidade dual, esta formulação que transforma a integral de domínio, proveniente da reação do solo, em integrais de contorno, aproxima a reação do solo $g_s(p)$ por:

$$g_s(p) = f(m,p)\alpha^m \quad (7.26)$$

onde, α^m são coeficientes relacionados a "m" pontos base, que serão determinados posteriormente.

A função $f(m,p)$, é a mesma utilizada no item 6.5 do capítulo anterior, dada por:

$$f(m,p) = |x_1(p) - x_1(m)| |x_2(p) - x_2(m)| \quad (7.27)$$

Adotando-se a função $f(m,p)$ dada em (7.27), a integral de domínio (7.3), fica:

$$\int_{\Omega_{gs}} w^*(Q,p) g_s(p) d\Omega_{gs}(p) = \int_{\Omega_{gs}} w^*(Q,p) f(m,p) \alpha^m d\Omega_{gs}(p) \quad (7.28)$$

Efetuando-se sucessivas integrais por partes até a eliminação completa das integrais de domínio residuais, a integral de domínio do segundo membro, fica:

$$\int_{\Omega_{gs}} f(m,p) w^*(Q,p) d\Omega_{gs}(p) \alpha^m = \left[\int_{\Gamma_{gs}} f(m,p) C_{\ell}^*(Q,P) n_{\ell} d\Gamma_{gs}(P) + \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_{gs}} f(m,p)_{,\ell} D_{\ell s}^*(Q,P) n_s d\Gamma_{gs}(P) + \right]$$

$$+ \int_{\Gamma_{gs}} f(m,p)_{,\ell s} E_{\ell st}^*(Q,P) n_t d\Gamma_{gs}(P) \Big] \alpha^m \quad (7.29)$$

$$\ell, s, t = 1, 2$$

onde: $f(m,P)_{,\ell}$, $f(m,P)_{,\ell s}$, $f(m,P)_{,\ell st}$, $C_\ell^*(Q,P)$, $D_{\ell s}^*(Q,P)$ e $E_{\ell st}^*(Q,P)$, são as expressões determinadas no item 6.5 do capítulo anterior.

Procedendo-se de forma análoga ao item 6.5, podem ser integrados todos os elementos "Nte" da placa em relação a todos os pontos "Q" e todas as bases "m", assim a expressão (7.29) escrita matricialmente fica:

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{f}} - \underline{\underline{D}}_1 \underline{\underline{f}}_1 - \underline{\underline{D}}_2 \underline{\underline{f}}_2 + \underline{\underline{E}}_{12} \underline{\underline{f}}_{12} \quad (7.30)$$

onde, as matrizes $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{D}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2$ e $\underline{\underline{E}}_{12}$ assim como $\underline{\underline{f}}$, $\underline{\underline{f}}_1$, $\underline{\underline{f}}_2$ e $\underline{\underline{f}}_{12}$ já foram determinadas anteriormente.

O vetor $\underline{\underline{\alpha}}$ é obtido de forma análoga ao processo da reciprocidade dual, ou seja:

$$\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{Q}}^i \end{Bmatrix} \quad (7.31)$$

onde, a matriz $\underline{\underline{F}}$ é obtida a partir da função $f(m,P)$ dada em (7.27).

Desta forma, a influência da reação do solo representada por (7.3), escrita matricialmente fica:

$$\int_{\Omega_{gs}} w^*(Q,p) g_s(p) d\Omega_{gs}(p) = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{F}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{Q}}^i \end{Bmatrix} \quad (7.32)$$

Escrevendo-se matricialmente a equação (7.2), para pontos do contorno e para pontos internos, respectivamente, obtém-se:

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{M}} \underline{\underline{F}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{Q}}^i \end{Bmatrix} \quad (7.33)$$

$$\underline{\underline{U}}^i + \underline{\underline{H}}' \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}' \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}}' - \underline{\underline{M}}' \underline{\underline{F}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{Q}}^i \end{Bmatrix} \quad (7.34)$$

onde, $\underline{\underline{M}}$ e $\underline{\underline{M}}'$ são matrizes obtidas a partir de (7.30), para pontos do contorno e internos, respectivamente.

7.6 Interação placa-solo

As equações matriciais (7.9) e (7.10), determinadas a partir da discretização do domínio da placa em células internas, representam a equação (7.2) escrita matricialmente, para pontos do contorno e para pontos internos, respectivamente, e contêm a nova incógnita correspondente à reação do solo.

O solo, considerado como sendo um sólido tridimensional de domínio semi-infinito, em contato com a placa, pode ser representado de modo geral a partir da equação integral (4.4), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}(\underline{\underline{Q}}) \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{Q}}) + \int_{\Gamma} \underline{\underline{p}}^*(\underline{\underline{Q}}, \underline{\underline{P}}) \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{P}}) d\Gamma(\underline{\underline{P}}) &= \int_{\Gamma_c} \underline{\underline{u}}^*(\underline{\underline{Q}}, \underline{\underline{P}}) \underline{\underline{p}}^c(\underline{\underline{P}}) d\Gamma(\underline{\underline{P}}) \\ + \int_{\Gamma_i} \underline{\underline{u}}^*(\underline{\underline{Q}}, \underline{\underline{P}}) \underline{\underline{p}}(\underline{\underline{P}}) d\Omega(\underline{\underline{p}}) + \int_{\Omega} \underline{\underline{u}}^*(\underline{\underline{Q}}, \underline{\underline{p}}) \underline{\underline{b}}(\underline{\underline{p}}) d\Omega(\underline{\underline{p}}) & \quad (7.35) \end{aligned}$$

onde, Γ_c e Γ_i , são partes do contorno $\Gamma = \Gamma_c + \Gamma_i$ do solo, sendo que só Γ_c esta em contato com a placa.

Desprezando-se as forças volumétricas, a equação (7.35) escrita matricialmente fica:

$$\underline{\underline{H}}_s \underline{\underline{U}}_s = \underline{\underline{G}}_s \begin{Bmatrix} \underline{\underline{P}}^c \\ \underline{\underline{P}}_s \end{Bmatrix} \quad (7.36)$$

onde, $\underline{\underline{P}}_s^c$ é o vetor correspondente ao contorno do solo em contato com a placa.

No caso em que o contorno do solo a ser analisado for igual à superfície em contato com a placa, a equação (7.36) fica:

$$\tilde{H}_s \tilde{U}_s = \tilde{G}_s \tilde{P}_s^c \quad (7.37)$$

A placa e solo são corpos que possuem características diferentes e podem ser analisadas de forma separada.

Quando a placa esta apoiada sobre o solo, os pontos da superfície de contato ou interface, devem obedecer as condições de equilíbrio de esforços e de compatibilidade de deslocamentos.

Em cada ponto da interface o solo tem os seguintes deslocamentos e esforços:

$$\tilde{U}_s = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \tilde{P}_s = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (7.38)$$

O domínio e contorno da placa ficam em contato com o solo. Em cada ponto do contorno da placa, tem-se:

$$\tilde{U} = \begin{Bmatrix} w \\ \partial w / \partial n \end{Bmatrix} \quad \tilde{P} = \begin{Bmatrix} V_n \\ M_n \end{Bmatrix} \quad (7.39)$$

$$\tilde{W}_c = \{w_c\} \quad \tilde{R}_c = \{R_c\} \quad (7.40)$$

No domínio da placa, tem-se:

$$\tilde{U}^i = \{w^i\} \quad \tilde{Q} = \{g_s\} \quad (7.41)$$

Os deslocamentos na interface entre a placa e o solo, devem obedecer a condição de compatibilidade, isto é:

$$u_3 = w \quad (7.42)$$

E os esforços devem obedecer a condição de equilíbrio, ou seja:

$$p_3 = -g_s \quad (7.43)$$

A partir da equação (7.36), obtém-se:

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{M}^{-1} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{P}^c \\ \underset{\sim}{P} \\ \underset{\sim}{P} \end{Bmatrix} \quad (7.44)$$

onde:

$$\underset{\sim}{M}^{-1} = \underset{\sim}{H}^{-1} \underset{\sim}{G} \quad (7.45)$$

Considerando-se apenas ações verticais provenientes da placa, ou seja, em todos os pontos da interface $p_1 = p_2 = 0$, pode-se determinar a relação entre os deslocamentos e esforços na direção vertical (eixo x_3), a partir da equação (7.44), isto é:

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{U} \end{Bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{M}^{-1} \\ \underset{\sim}{M}^{-1} \\ \underset{\sim}{M}^{-1} \end{bmatrix}_3 \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{P}^c \\ \underset{\sim}{P} \\ \underset{\sim}{P} \end{Bmatrix}_3 \quad (7.46)$$

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{P}^c \\ \underset{\sim}{P} \\ \underset{\sim}{P} \end{Bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{M}^{-1} \\ \underset{\sim}{M}^{-1} \\ \underset{\sim}{M}^{-1} \end{bmatrix}_3^{-1} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{U} \end{Bmatrix}_3 \quad (7.47)$$

Para facilitar o equacionamento:

$$\underset{\sim}{M}_c = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{M}^{-1} \\ \underset{\sim}{M}^{-1} \\ \underset{\sim}{M}^{-1} \end{bmatrix}_3^{-1} \quad (7.48)$$

Pelas condições de equilíbrio dos esforços e compatibilidade dos deslocamentos na interface, tem-se:

$$-\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{Q} \\ \underset{\sim}{Q} \\ \underset{\sim}{Q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{P}^c \\ \underset{\sim}{P} \\ \underset{\sim}{P} \end{Bmatrix}_3 \quad (7.49)$$

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{U} \end{Bmatrix}_3 \quad (7.50)$$

Portanto:

$$-\begin{Bmatrix} \tilde{Q} \\ \tilde{Q}' \end{Bmatrix} = \tilde{M}_c \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}' \end{Bmatrix} \quad (7.51)$$

Sustituindo-se a equação (7.51) nas equações (7.9) e (7.10) obtém-se:

$$\tilde{H}\tilde{U} = \tilde{G}\tilde{P} + \tilde{T} - \tilde{S}\tilde{M}_c \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}' \end{Bmatrix} \quad (7.52)$$

$$\tilde{U}' + \tilde{H}'\tilde{U} = \tilde{G}'\tilde{P} + \tilde{T}' - \tilde{S}'\tilde{M}_c \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}' \end{Bmatrix} \quad (7.53)$$

Agrupando-se as equações (7.52) e (7.53), tem-se:

$$\begin{bmatrix} [\tilde{H} + \tilde{S}^c \tilde{M}_c^c] & [\tilde{S}^i \tilde{M}_c^i] \\ [\tilde{H}' + \tilde{S}'^c \tilde{M}_c^c] & [\tilde{I} + \tilde{S}'^i \tilde{M}_c^i] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{G}' \end{bmatrix} \tilde{P} + \begin{Bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{T}' \end{Bmatrix} \quad (7.54)$$

onde, os índices "i" e "c" indicam que as matrizes correspondem a pontos internos e do contorno, respectivamente.

A equação (7.54), pode ser escrita simplesmente como:

$$\tilde{H}\tilde{U} = \tilde{G}\tilde{P} + \tilde{T} \quad (7.55)$$

Utilizando-se a reciprocidade dual e a formulação alternativa, serão determinadas equações semelhantes a (7.54) fazendo-se:

$$\tilde{S} = \tilde{M}\tilde{F}^{-1} \quad (7.56)$$

$$\tilde{S}' = \tilde{M}'\tilde{F}^{-1} \quad (7.57)$$

onde, \tilde{M} e \tilde{F}^{-1} , serão determinadas conforme os itens 7.4 e 7.5.

Resolvendo-se o sistema de equações (7.54), serão determinados os deslocamentos na interface da placa com o solo, com os quais, através

da equação (7.51), poderão ser determinadas as reações do solo e com estas, os deslocamentos em todo o contorno do solo através de (7.44).

7.7 Comportamento não-linear para a resposta do solo

Considerando-se a reação do solo governada por uma relação reação-deslocamento bi-linear simples e sem resistência à tração (Figura 6.14), ela pode ser definida como:

$$g_s(p) = g_s^e(p) - g_s^p(p) \quad (7.58)$$

onde, $g_s^e(p)$ e $g_s^p(p)$ são respectivamente as componentes elástica e plástica da resposta do solo no ponto "p".

Assim, a integral (7.3), correspondente à reação do solo, pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega_{gs}} w^*(Q,p) g_s^e(p) d\Omega_{gs}(p) - \int_{\Omega_{gs}} w^*(Q,p) g_s^p(p) d\Omega_{gs}(p) \quad (7.59)$$

As integrais de (7.59), podem ser tratadas de forma análoga ao caso da integral de domínio (7.3), isto é, discretizando-se o domínio em células, com o processo da reciprocidade dual ou com a formulação alternativa proposta.

Discretizando-se o domínio em células, as integrais de (7.59), escritas matricialmente para todos os pontos do contorno ficam:

$$\tilde{S} \begin{Bmatrix} \tilde{Q} \\ \tilde{Q}^i \end{Bmatrix} - \tilde{S} \begin{Bmatrix} \tilde{Q}^p \\ \tilde{Q}^{ip} \end{Bmatrix} \quad (7.60)$$

ou

$$\tilde{S} \tilde{M}_c \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} - \tilde{S} \begin{Bmatrix} \tilde{Q}^p \\ \tilde{Q}^{ip} \end{Bmatrix} \quad (7.61)$$

onde: \tilde{Q}^p e \tilde{Q}^{ip} são os vetores da componente plástica $g_s^p(p)$ da reação do solo, correspondentes ao contorno e domínio da placa respectivamente.

Incluindo-se (7.61) na equação (7.2), escrita matricialmente para pontos do contorno e do domínio, respectivamente, obtém-se:

$$\tilde{H}\tilde{U} = \tilde{G}\tilde{P} + \tilde{T} - \tilde{S}\tilde{M}_c \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} + \tilde{S} \begin{Bmatrix} \tilde{Q}^p \\ \tilde{Q}^{ip} \end{Bmatrix} \quad (7.62)$$

$$\tilde{U}^i + \tilde{H}'\tilde{U} = \tilde{G}'\tilde{P} + \tilde{T}' - \tilde{S}'\tilde{M}_c \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} + \tilde{S}' \begin{Bmatrix} \tilde{Q}^p \\ \tilde{Q}^{ip} \end{Bmatrix} \quad (7.63)$$

Agrupando-se as equações (7.62) e (7.63), tem-se:

$$\begin{bmatrix} [\tilde{H} + \tilde{S}^c \tilde{M}_c^c] & [\tilde{S}^i \tilde{M}_c^i] \\ [\tilde{H}' + \tilde{S}'^c \tilde{M}_c^c] & [\tilde{I} + \tilde{S}'^i \tilde{M}_c^i] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{G}' \end{bmatrix} \tilde{P} + \begin{Bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{T}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{S}^c & \tilde{S}^i \\ \tilde{S}'^c & \tilde{S}'^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Q}^p \\ \tilde{Q}^{ip} \end{Bmatrix} \quad (7.64)$$

Considerando-se (7.56) e (7.57), serão determinadas equações semelhantes a (7.64), para o processo da reciprocidade dual e a formulação alternativa.

De uma forma geral, a equação matricial (7.64), pode ser escrita como:

$$\tilde{H}\tilde{U} = \tilde{G}\tilde{P} + \tilde{T} + \tilde{S}\tilde{Q}^p \quad (7.65)$$

Impondo-se as condições de contorno em termos de deslocamentos e esforços, a equação (7.65) fica:

$$\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{B} + \tilde{S}\tilde{Q}^p \quad (7.66)$$

onde, $\underline{\underline{A}}$ é a matriz definida pelos coeficientes de influência dos deslocamentos e esforços, $\underline{\underline{X}}$ é o vetor das incógnitas e $\underline{\underline{B}}$ é o vetor dado pelo vetor $\underline{\underline{T}}$ adicionado ao produto dos valores prescritos dos esforços e deslocamentos com a matriz $\underline{\underline{G}}$.

Multiplicando-se (7.66) por $\underline{\underline{A}}^{-1}$, obtém-se:

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{N}} + \underline{\underline{R}} \underline{\underline{Q}}^p \quad (7.67)$$

onde:

$$\underline{\underline{N}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} \quad (7.68)$$

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{S}} \quad (7.69)$$

sendo, $\underline{\underline{N}}$ e $\underline{\underline{R}}$ respectivamente, a resposta elástica e a influência da não-linearidade para a reação do solo.

O comportamento não-linear para a resposta do solo, será modelado pelo processo iterativo apresentado no item 6.6, no qual são ilustrados os problemas com equilíbrio e sem equilíbrio, nas figuras 6.15 e 6.16 respectivamente.

Considerando-se o efeito da não-linearidade da reação do solo, os deslocamentos em todo o contorno do solo $\underline{\underline{U}}_s^p$, serão determinados também, através das sucessivas iterações em função das reações do solo $\underline{\underline{P}}_s^{cp}$, obtidas a partir dos deslocamentos $\Delta \underline{\underline{U}}$, provocados pelo vetor $\underline{\underline{Q}}^p$ da equação (7.67), isto é:

$$\Delta \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{Q}}^p \quad (7.70)$$

Aplicando-se $\Delta \underline{\underline{U}}$, na equação (7.51), obtém-se:

$$\underline{\underline{P}}_s^{cp} = \underline{\underline{M}}_c \Delta \underline{\underline{U}} \quad (7.71)$$

Aplicando-se \tilde{P}^{cp} , na equação (7.44), obtém-se:

$$\Delta \tilde{U}_s = \tilde{M}_s^{-1} \tilde{P}_s^{cp} \quad (7.72)$$

Para determinar-se os deslocamentos finais no contorno do solo \tilde{U}_s^p , os deslocamentos $\Delta \tilde{U}_s$, calculados em cada iteração, serão somados algebricamente aos deslocamentos elásticos \tilde{U}_s , obtidos para a carga total pela equação (7.44), isto é:

$$\tilde{U}_s^p = \tilde{U}_s - \Delta \tilde{U}_s \quad (7.73)$$

ou

$$\tilde{U}_s^p = \tilde{M}_s^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{P}_s^c \\ \tilde{P}_s \end{Bmatrix} - \tilde{M}_s^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{P}_s^{cp} \\ \tilde{P}_s \end{Bmatrix} \quad (7.74)$$

onde, \tilde{P}_s^{cp} é o vetor que representa a componente plástica da reação do solo.

7.8 Aplicações numéricas

As aplicações numéricas das formulações apresentadas neste capítulo, serão comparadas com as aplicações numéricas do item 6.7 do capítulo 6, no qual a reação do solo, aproximada pelo modelo de Winkler, é considerada diretamente proporcional a seu deslocamento, diferente do que acontece quando o solo é considerado como um sólido tridimensional elástico de domínio semi-infinito.

Inicialmente, admitindo-se que o contato entre a placa e o solo é perfeito, serão consideradas apenas tensões elásticas, posteriormente, tensões de tração ou tensões que ultrapassem a tensão limite, serão tratadas pelo processo iterativo apresentado no item anterior.

Em todos os exemplos deste item foram adotados: para a placa, as mesmas constantes adotadas no item 5.10 do capítulo 5; e para o solo, $\nu=0.3$ e $E=1000\text{N/cm}^2$, que correspondem a uma argila dura ou a uma areia siltosa. A carga aplicada à placa será de 400 kN.

A discretização da placa, assim como os pontos base, os pontos duais e as células, serão os mesmos que foram adotados no item 6.7,

mostrados nas figuras 6.17 e 6.18, isto para poder comparar as duas considerações que foram feitas para o solo, utilizando-se as três formulações, já apresentadas anteriormente.

Serão apresentadas duas situações para a placa: quando se encontra na superfície ou em uma cavidade do solo. No primeiro caso, utilizando-se as soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti e no segundo as de Mindlin.

7.8.1 Placa na superfície do solo (Boussinesq-Cerruti)

7.8.1.1 Exemplo 1: Placa com carga centrada

Neste exemplo, a placa da figura 6.19, esta submetida a uma carga vertical de 400 kN, distribuída em uma pequena área central. Os resultados das reações do solo obtidas pelas três formulações, são apresentados nas tabelas 7.1 7.2 e 7.3 respectivamente, para diferentes valores da espessura h da placa e para duas relações de u/a .

TABELA 7.1 - Reações do solo para carga centrada

PT	u/a	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
		CÉLULAS				
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	0,1	-10,70	-26,25	-28,34	-28,87	-29,06
	0,2	-11,07	-26,31	-28,36	-28,87	-29,06
2	0,1	-11,39	-14,33	-14,69	-14,76	-14,82
	0,2	-11,05	-14,35	-14,70	-14,79	-14,82
3	0,1	-8,45	-7,20	-7,03	-6,99	-6,98
	0,2	-8,42	-7,19	-7,03	-6,99	-6,98
4	0,1	-12,66	-11,58	-11,39	-11,34	-11,32
	0,2	-12,69	-11,58	-11,39	-11,34	-11,32
5	0,1	-8,66	-4,47	-3,94	-3,80	-3,76
	0,2	-8,55	-4,45	-3,93	-3,80	-3,76
6	0,1	-10,25	-4,36	-3,64	-3,46	-3,40
	0,2	-9,89	-4,31	-3,63	-3,46	-3,40

TABELA 7.2 - Reações do solo para carga centrada

PT	u/a	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
		RECIPROCIDADE DUAL				
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	0,1	-13,16	-27,69	-30,39	-31,10	-31,37
	0,2	-13,45	-27,76	-30,41	-31,11	-31,37
2	0,1	-11,33	-15,38	-15,86	-15,98	-16,02
	0,2	-11,46	-15,40	-15,86	-15,98	-16,02
3	0,1	-8,56	-7,68	-7,58	-7,55	-7,54
	0,2	-8,55	-7,68	-7,58	-7,55	-7,54
4	0,1	-12,46	-12,48	-12,31	-12,26	-12,25
	0,2	-12,52	-12,49	-12,32	-12,26	-12,25
5	0,1	-8,69	-4,76	-4,24	-4,11	-4,06
	0,2	-8,59	-4,75	-4,23	-4,10	-4,06
6	0,1	-10,32	-4,61	-3,91	-3,73	-3,67
	0,2	-9,97	-4,56	-3,89	-3,73	-3,67

TABELA 7.3 - Reações do solo para carga centrada

PT	u/a	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
		FORMULAÇÃO ALTERNATIVA				
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	0,1	-10,56	-26,71	-28,86	-29,41	-29,60
	0,2	-10,93	-26,77	-28,88	-29,41	-29,60
2	0,1	-11,37	-14,56	-14,96	-15,06	-15,09
	0,2	-11,48	-14,58	-14,96	-15,06	-15,09
3	0,1	-8,44	-7,31	-7,16	-7,12	-7,11
	0,2	-8,42	-7,30	-7,16	-7,12	-7,11
4	0,1	-12,68	-11,76	-11,59	-11,55	-11,53
	0,2	-12,71	-11,76	-11,59	-11,55	-11,53
5	0,1	-8,69	-4,53	-4,00	-3,87	-3,83
	0,2	-8,58	-4,51	-4,00	-3,87	-3,82
6	0,1	-10,28	-4,41	-3,70	-3,52	-3,46
	0,2	-9,92	-4,36	-3,69	-3,52	-3,46

Nas tabelas 7.1, 7.2 e 7.3, pode-se observar que as tensões no solo, para as relações $u/a=0,1$ e $u/a=0,2$, são praticamente iguais a partir de $h=20\text{cm}$.

Na figura 7.2, são mostradas as reações do solo ao longo das retas 17-4, 16-7 e 15-11, da figura 6.18, para a placa com carga centrada e altura $h=50\text{ cm}$. Estas reações do solo, são comparadas utilizando-se as três formulações, isto é, células internas, o processo da reciprocidade dual e a formulação alternativa, indicadas por CEL., R.D. e F.A., respectivamente.

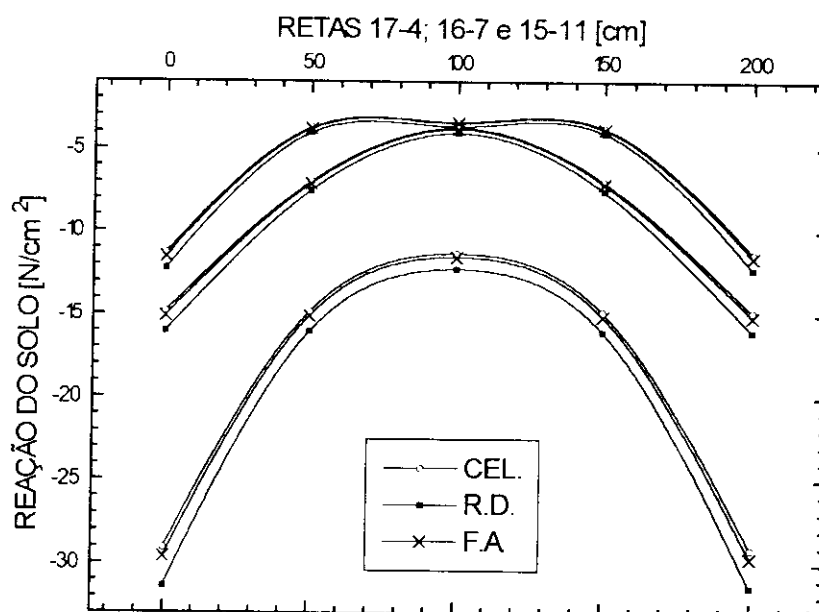


FIGURA 7.2 - Reação do solo para carga centrada

7.8.1.2 Exemplo 2: Placa com carga excêntrica

Neste exemplo, a relação $u/a=0,2$, e como se mostra na figura 6.20, a carga vertical de 400 kN , é excêntrica.

Nas tabelas 7.4, 7.5 e 7.6 são apresentados os resultados obtidos pelas três formulações, para excentricidades de $e_x=30\text{cm}$ e $e_x=50\text{cm}$.

TABELA 7.4 - Reações do solo para carga com uma excentricidade

e_x	PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					
		CÉLULAS					
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	
30cm	1	-24,76	-42,17	-44,45	-45,02	-45,22	
	2	-23,28	-24,25	-24,33	-24,35	-24,36	
	3	-11,51	-10,00	-9,82	-9,77	-9,75	
	4	-23,94	-19,49	-18,87	-18,71	-18,65	
	5	-11,79	-6,19	-5,51	-5,34	-5,27	
	6	-8,71	-4,14	-3,58	-3,44	-3,38	
	9	-7,51	-4,29	-3,88	-3,78	-3,74	
	10	-5,08	-4,34	-4,24	-4,21	-4,20	
	12	-14,09	-18,54	-19,13	-19,27	-19,33	
	13	-11,03	-11,28	-11,30	-11,30	-11,30	
	14	-6,93	-9,77	-10,15	-10,25	-10,28	
	15	-0,55	-10,97	-12,43	-12,80	-12,93	
	16	-3,44	-5,08	-5,26	-5,30	-5,32	
	17	-5,16	-4,28	-4,10	-4,05	-4,03	
	18	-5,38	-2,73	-2,36	-2,27	-2,24	
	50cm	1	-35,55	-53,02	-55,25	-55,81	-56,01
		2	-33,49	-31,23	-30,87	-30,78	-30,74
		3	-13,17	-11,82	-11,65	-11,61	-11,60
4		-34,05	-25,18	-23,98	-23,68	-23,57	
5		-13,24	-7,26	-6,53	-6,35	-6,28	
6		-7,13	-3,92	-3,51	-3,41	-3,37	
9		-5,89	-4,04	-3,81	-3,75	-3,73	
10		-2,89	-2,44	-2,37	-2,36	-2,35	
12		-14,17	-21,05	-21,99	-22,23	-22,31	
13		-8,24	-10,77	-11,14	-11,23	-11,26	
14		-3,28	-6,59	-7,07	-7,20	-7,25	
15		+5,10	-0,99	-1,88	-2,11	-2,19	
16		+0,39	+0,83	+0,95	+0,98	+0,99	
17		-1,62	+0,32	+0,68	+0,78	+0,81	
18		-3,52	-1,61	-1,33	-1,25	-1,23	

TABELA 7.5 - Reações do solo para carga com uma excentricidade

e_x	PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					
		RECIPROCIDADE DUAL					
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	
30cm	1	-35,16	-44,81	-47,07	-47,67	-47,89	
	2	-21,90	-25,32	-25,63	-25,70	-25,73	
	3	-11,70	-10,54	-10,41	-10,38	-10,37	
	4	-21,48	-20,26	-19,85	-19,74	-19,70	
	5	-11,62	-6,48	-5,83	-5,66	-5,60	
	6	-8,81	-4,40	-3,85	-3,71	-3,66	
	9	-7,59	-4,59	-4,19	-4,08	-4,05	
	10	-5,21	-4,79	-4,73	-4,72	-4,71	
	12	-12,42	-19,51	-20,33	-20,53	-20,60	
	13	-11,15	-12,20	-12,22	-12,22	-12,22	
	14	-9,04	-10,94	-11,29	-11,37	-11,41	
	15	+5,76	-11,25	-13,91	-14,62	-14,88	
	16	-4,62	-6,12	-6,29	-6,34	-6,35	
	17	-7,28	-5,35	-4,97	-4,87	-4,83	
	18	-5,67	-3,03	-2,65	-2,55	-2,51	
	50cm	1	-51,44	-56,47	-58,26	-58,75	-58,93
		2	-31,18	-32,33	-32,26	-32,24	-32,23
		3	-13,45	-12,40	-12,28	-12,26	-12,25
4		-30,02	-25,86	-25,00	-24,77	-24,69	
5		-12,95	-7,55	-6,86	-6,69	-6,63	
6		-7,27	-4,18	-3,78	-3,68	-3,65	
9		-6,05	-4,34	-4,11	-4,05	-4,03	
10		-3,05	-2,87	-2,84	-2,83	-2,83	
12		-11,61	-21,99	-23,22	-23,53	-23,64	
13		-8,88	-11,73	-12,07	-12,16	-12,19	
14		-7,20	-7,85	-8,20	-8,29	-8,32	
15		+17,94	-0,49	-3,01	-3,66	-3,90	
16		-1,55	-0,22	-0,00	+0,05	+0,08	
17		-5,30	-0,85	-0,16	+0,02	+0,09	
18		-4,01	-1,93	-1,60	-1,52	-1,49	

TABELA 7.6 - Reações do solo para carga com uma excentricidade

e_x	PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					
		FORMULAÇÃO ALTERNATIVA					
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	
30cm	1	-24,86	-42,95	-45,28	-45,86	-46,07	
	2	-23,29	-24,64	-24,77	-24,80	-24,81	
	3	-11,54	-10,16	-9,99	-9,95	-9,93	
	4	-23,95	-19,78	-19,20	-19,05	-19,00	
	5	-11,81	-6,27	-5,60	-5,43	-5,37	
	6	-8,74	-4,20	-3,64	-3,50	-3,45	
	9	-7,53	-4,35	-3,95	-3,85	-3,81	
	10	-5,08	-4,41	-4,31	-4,29	-4,28	
	12	-14,14	-18,86	-19,48	-19,63	-19,69	
	13	-11,06	-11,46	-11,50	-11,51	-11,51	
	14	-6,88	-9,92	-10,33	-10,43	-10,47	
	15	-0,23	-11,14	-12,65	-13,03	-13,17	
	16	-3,40	-5,16	-5,35	-5,40	-5,42	
	17	-5,19	-4,36	-4,17	-4,12	-4,11	
	18	-5,41	-2,76	-2,40	-2,31	-2,28	
	50cm	1	-35,92	-54,01	-56,29	-56,85	-57,06
		2	-33,59	-31,73	-31,42	-31,34	-31,31
		3	-13,23	-12,01	-11,86	-11,82	-11,81
4		-34,10	-25,54	-24,39	-24,10	-24,00	
5		-13,27	-7,36	-6,64	-6,46	-6,40	
6		-7,17	-3,97	-3,57	-3,47	-3,43	
9		-5,93	-4,10	-3,87	-3,82	-3,80	
10		-2,89	-2,48	-2,42	-2,40	-2,39	
12		-14,31	-21,44	-22,40	-22,64	-22,73	
13		-8,31	-10,95	-11,34	-11,44	-11,47	
14		-3,22	-6,68	-7,20	-7,33	-7,38	
15		+5,48	-0,96	-1,90	-2,15	-2,23	
16		+0,44	+0,84	+0,97	+1,00	+1,01	
17		-1,65	+0,32	+0,69	+0,79	+0,83	
18		-3,55	-1,63	-1,35	-1,28	-1,25	

Nas figuras 7.3 e 7.4, são apresentadas as reações do solo, para a carga com excentricidades de $e_x=30\text{cm}$ e $e_x=50\text{cm}$, respectivamente. Sendo a altura da placa 50cm e a relação $u/a=0,2$.

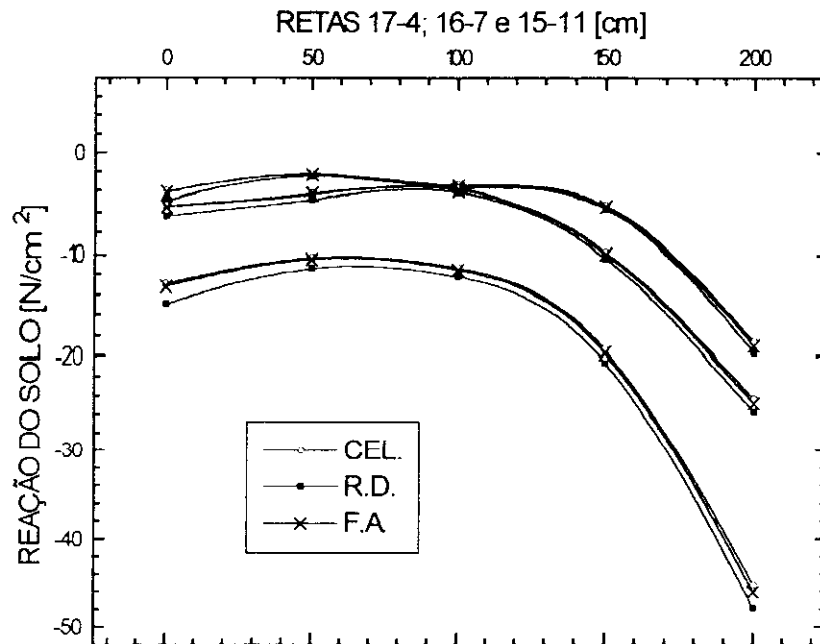


FIGURA 7.3 - Reação do solo para carga com $e_x=30\text{cm}$

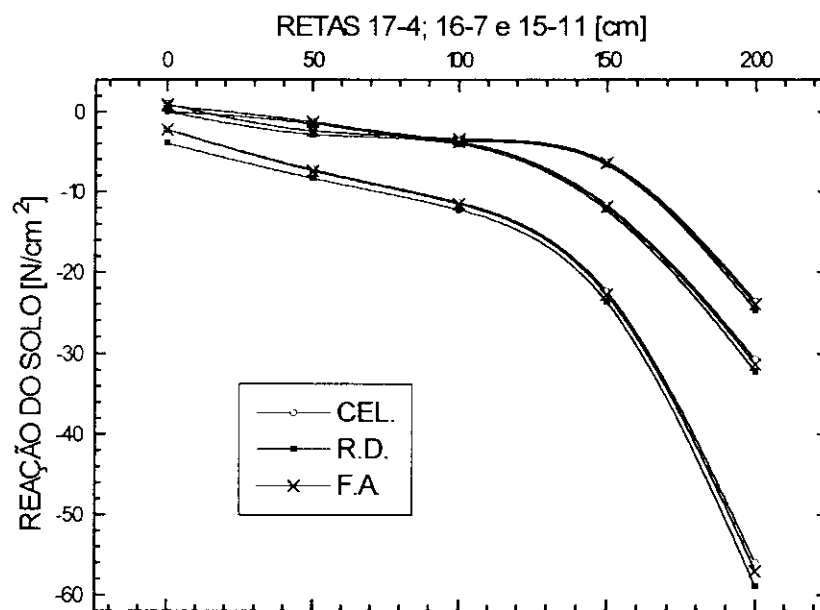


FIGURA 7.4 - Reação do solo para carga com $e_x=50\text{cm}$

Os resultados das reações do solo obtidas pelas três formulações, para uma placa submetida a uma carga vertical de 400 kN com duas excentricidades $e_x=e_y=50\text{cm}$ (Figura 6.22), são apresentados nas tabelas 7.7, 7.8 e 7.9.

TABELA 7.7 - Reações do solo para carga com duas excentricidades

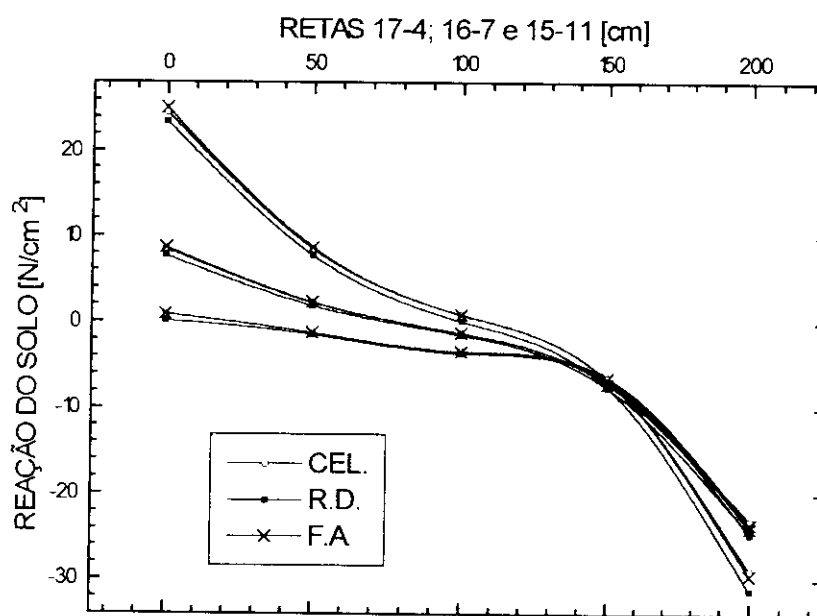
PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
	CÉLULAS				
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	-83,53	-84,66	-83,75	-83,46	-83,35
2	-44,03	-39,60	-38,71	-38,46	-38,37
3	-20,42	-16,98	-16,45	-16,31	-16,26
4	-24,92	-23,71	-23,53	-23,49	-23,47
5	-8,74	-6,59	-6,33	-6,26	-6,24
6	-5,17	-3,62	-3,42	-3,37	-3,35
7	-15,48	-21,54	-22,64	-22,93	-23,03
8	-5,26	-6,54	-6,82	-6,90	-6,93
9	-2,09	-1,35	-1,24	-1,21	-1,20
10	+0,18	+1,79	+2,13	+2,22	+2,25
11	-7,78	-24,56	-27,73	-28,58	-28,90
12	+0,27	-4,99	-6,03	-6,31	-6,42
13	+0,79	+0,84	+0,86	+0,87	+0,87
14	+3,84	+7,39	+8,20	+8,43	+8,51
15	+13,27	+21,80	+23,79	+24,35	+24,55

TABELA 7.8 - Reações do solo para carga com duas excentricidades

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
	RECIPROCIDADE DUAL				
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	-116,25	-90,17	-87,74	-87,11	-86,88
2	-39,14	-40,64	-40,18	-40,04	-40,00
3	-20,95	-17,67	-17,17	-17,05	-17,00
4	-21,02	-24,46	-24,57	-24,60	-24,60
5	-8,56	-6,89	-6,66	-6,60	-6,58
6	-5,41	-3,90	-3,69	-3,64	-3,62
7	-16,70	-22,86	-23,99	-24,29	-24,40
8	-5,65	-7,07	-7,38	-7,46	-7,49
9	-2,81	-1,69	-1,52	-1,48	-1,46
10	+0,09	+1,43	+1,74	+1,83	+1,86
11	-10,32	-26,17	-29,83	-30,84	-31,22
12	+1,27	-5,91	-7,05	-7,35	-7,46
13	-4,81	-0,40	+0,00	+0,11	+0,14
14	-3,56	+6,10	+7,29	+7,60	+7,71
15	+50,45	+24,45	+23,61	+23,49	+23,45

TABELA 7.9 - Reações do solo para carga com duas excentricidades

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
	FORMULAÇÃO ALTERNATIVA				
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	-83,93	-86,19	-85,35	-85,07	-84,96
2	-44,23	-40,27	-39,42	-39,19	-39,10
3	-20,56	-17,26	-16,75	-16,62	-16,57
4	-25,02	-24,09	-23,95	-23,92	-23,91
5	-8,79	-6,69	-6,44	-6,37	-6,35
6	-5,22	-3,68	-3,48	-3,43	-3,41
7	-15,73	-21,92	-23,04	-23,34	-23,45
8	-5,36	-6,65	-6,94	-7,02	-7,05
9	-2,10	-1,37	-1,26	-1,23	-1,22
10	+0,25	+1,84	+2,18	+2,27	+2,30
11	-9,00	-25,12	-28,24	-29,09	-29,40
12	+0,15	-5,09	-6,12	-6,41	-6,51
13	+0,87	+0,88	+0,90	+0,91	+0,91
14	+4,20	+7,61	+8,40	+8,62	+8,70
15	+14,54	+22,38	+24,32	+24,86	+25,06

FIGURA 7.5 - Reação do solo para carga com $e_x = e_y = 50\text{cm}$

Considerando-se as retas entre os pontos 17-4, 16-7 e 15-11, da figura 6.18, são mostradas na figura 7.5, as reações do solo para a carga com duas excentricidades, $e_x=e_y=50\text{cm}$, espessura da placa 50 cm e a relação $u/a=0,2$.

7.8.1.3 Exemplo 3: Placa com carga excêntrica considerando-se a não-linearidade para a reação do solo

Neste exemplo, foi escolhida a placa cuja carga tem uma excentricidade $e_x=50\text{cm}$, para considerar-se a não-linearidade da reação do solo, utilizando-se o processo iterativo já descrito anteriormente. A máxima tensão de compressão é limitada em 25 N/cm^2 .

Os resultados obtidos utilizando-se as três formulações, são apresentadas nas tabelas 7.10, 7.11 e 7.12. Para uma espessura $h=50\text{cm}$ da placa, esses resultados são mostrados na figura 7.6.

TABELA 7.10 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com limitação da tensão máxima de compressão

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
	CÉLULAS				
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
2	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
3	-19,10	-19,71	-19,86	-19,88	-19,89
4	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
5	-16,49	-11,43	-10,92	-10,80	-10,75
6	-7,68	-4,87	-4,53	-4,44	-4,41
9	-6,27	-5,10	-4,94	-4,90	-4,89
10	-0,11	0,00	0,00	0,00	0,00
12	-23,30	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
13	-9,31	-14,19	-14,66	-14,78	-14,82
14	0,00	-1,93	-1,91	-1,93	-1,94
15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
18	-2,71	0,00	0,00	0,00	0,00

TABELA 7.11 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com limitação da tensão máxima de compressão

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
	RECIPROCIDADE DUAL				
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
2	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
3	-19,03	-19,86	-20,03	-20,06	-20,08
4	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
5	-16,16	-11,48	-11,00	-10,88	-10,84
6	-7,80	-5,19	-4,91	-4,83	-4,80
9	-6,37	-5,44	-5,36	-5,33	-5,32
10	-0,96	-0,11	0,00	0,00	0,00
12	-22,62	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
13	-9,41	-15,14	-15,90	-16,07	-16,13
14	-0,71	-4,18	-4,62	-4,69	-4,71
15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
18	-2,64	-0,29	0,00	0,00	0,00

TABELA 7.12 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com limitação da tensão máxima de compressão

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
	FORMULAÇÃO ALTERNATIVA				
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
2	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
3	-19,17	-20,45	-20,69	-20,75	-20,77
4	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
5	-16,57	-11,83	-11,38	-11,26	-11,22
6	-7,72	-5,06	-4,73	-4,65	-4,62
9	-6,31	-5,30	-5,17	-5,13	-5,12
10	-0,10	0,00	0,00	0,00	0,00
12	-23,31	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
13	-9,36	-14,79	-15,34	-15,48	-15,53
14	0,00	-2,10	-2,13	-2,15	-2,16
15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
18	-2,16	0,00	0,00	0,00	0,00

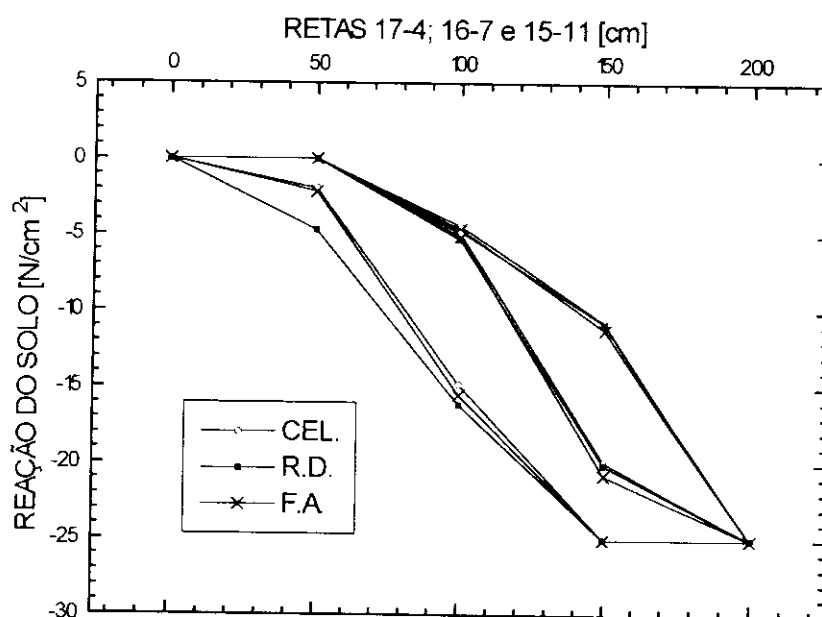


FIGURA 7.6 - Reação não-linear do solo para carga com $e_x=50$ cm

7.8.2 Placa em uma cavidade do solo (Mindlin)

A seguir, são apresentados os mesmos exemplos anteriores, sendo que desta vez a placa se encontra em uma cavidade do solo, a uma profundidade de 1m da sua superfície (Figura 7.7). Neste caso, os lados livres da cavidade, embora não estejam em contato com a placa, são também discretizados.

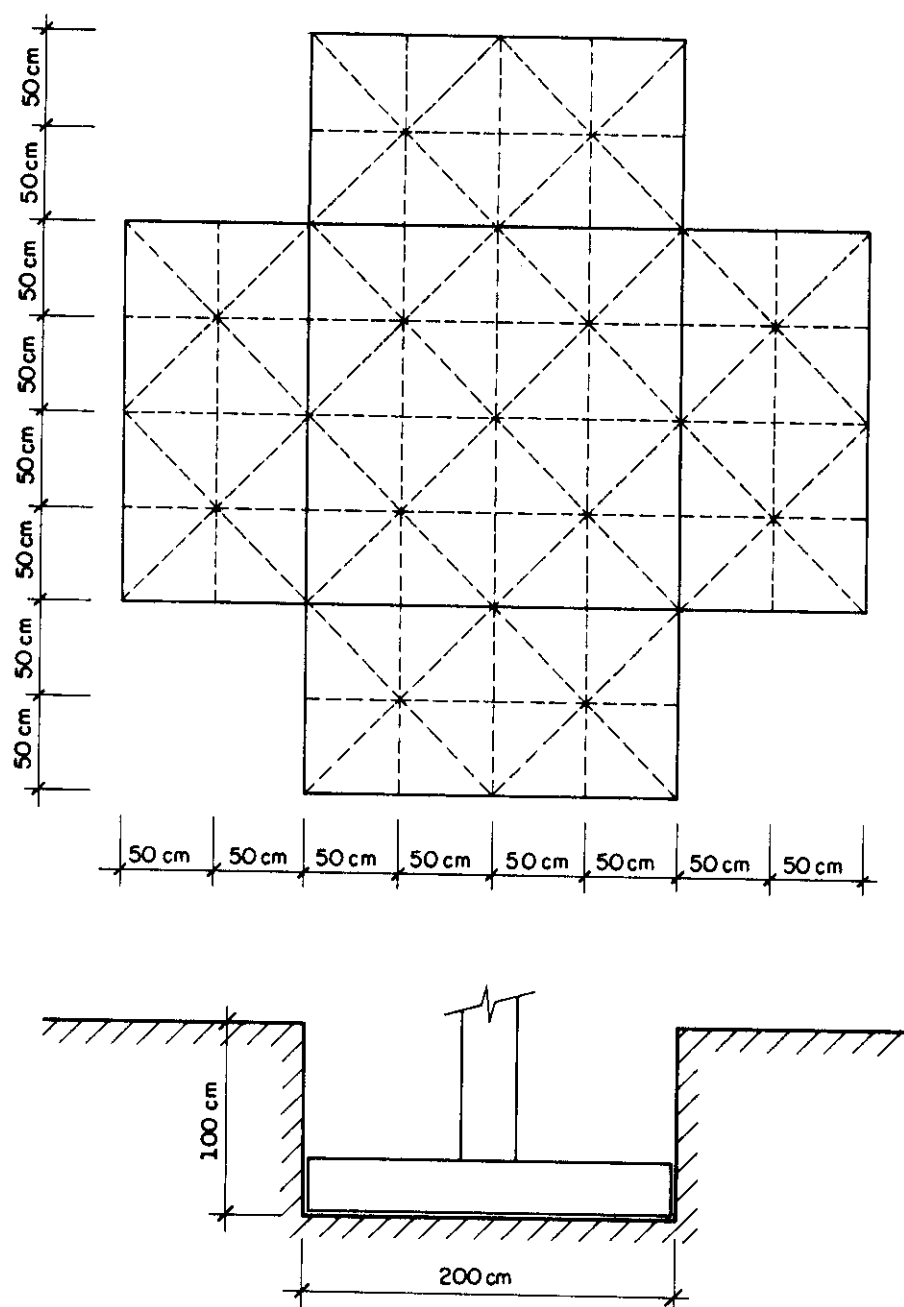


FIGURA 7.7 - Discretização e forma da cavidade

7.8.2.1 Exemplo 4: Placa com carga centrada

TABELA 7.13 - Reações do solo para carga centrada

PT	u/a	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
		CÉLULAS				
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	0,1	-8,93	-15,40	-16,18	-16,37	-16,44
	0,2	-9,13	-15,43	-10,19	-16,37	-16,44
2	0,1	-9,64	-12,40	-12,72	-12,80	-12,83
	0,2	-9,75	-12,42	-13,73	-12,80	-12,83
3	0,1	-9,42	-9,17	-9,14	-9,13	-9,13
	0,2	-9,43	-9,17	-9,14	-9,13	-9,13
4	0,1	-11,26	-10,90	-10,84	-10,83	-10,82
	0,2	-11,28	-10,90	-10,84	-10,83	-10,82
5	0,1	-10,05	-7,32	-7,00	-6,92	-6,89
	0,2	-9,97	-7,30	-6,99	-6,92	-6,89
6	0,1	-11,61	-6,81	-6,27	-6,14	-6,09
	0,2	-11,25	-6,76	-6,25	-6,13	-6,08

TABELA 7.14 - Reações do solo para carga centrada

PT	u/a	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
		RECIPROCIDADE DUAL				
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	0,1	-10,37	-15,88	-16,63	-16,82	-16,89
	0,2	-10,54	-15,91	-16,64	-16,83	-16,89
2	0,1	-9,69	-12,71	-13,06	-13,15	-13,18
	0,2	-9,80	-12,73	-13,07	-13,15	-13,18
3	0,1	-9,55	-9,40	-9,39	-9,38	-9,38
	0,2	-9,56	-9,40	-9,39	-9,38	-9,38
4	0,1	-11,07	-11,16	-11,13	-11,12	-11,12
	0,2	-11,10	-11,16	-11,13	-11,12	-11,12
5	0,1	-10,08	-7,49	-7,18	-7,11	-7,08
	0,2	-10,00	-7,48	-7,18	-7,10	-7,08
6	0,1	-11,66	-6,96	-6,43	-6,30	-6,25
	0,2	-11,30	-6,91	-6,42	-6,29	-6,25

TABELA 7.15 - Reações do solo para carga centrada

PT	u/a	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
		FORMULAÇÃO ALTERNATIVA				
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	0,1	-8,97	-15,47	-16,24	-16,43	-16,50
	0,2	-9,17	-15,50	-16,25	-16,44	-16,50
2	0,1	-9,68	-12,45	-12,77	-12,85	-12,88
	0,2	-9,79	-12,47	-12,78	-12,85	-12,88
3	0,1	-9,46	-9,21	-9,18	-9,17	-9,17
	0,2	-9,47	-9,21	-9,18	-9,17	-9,17
4	0,1	-11,31	-10,94	-10,89	-10,87	-10,87
	0,2	-11,33	-10,94	-10,89	-10,87	-10,87
5	0,1	-10,09	-7,34	-7,03	-6,95	-6,92
	0,2	-10,01	-7,33	-7,02	-6,95	-6,92
6	0,1	-11,65	-6,83	-6,29	-6,16	-6,11
	0,2	-11,29	-6,79	-6,28	-6,15	-6,11

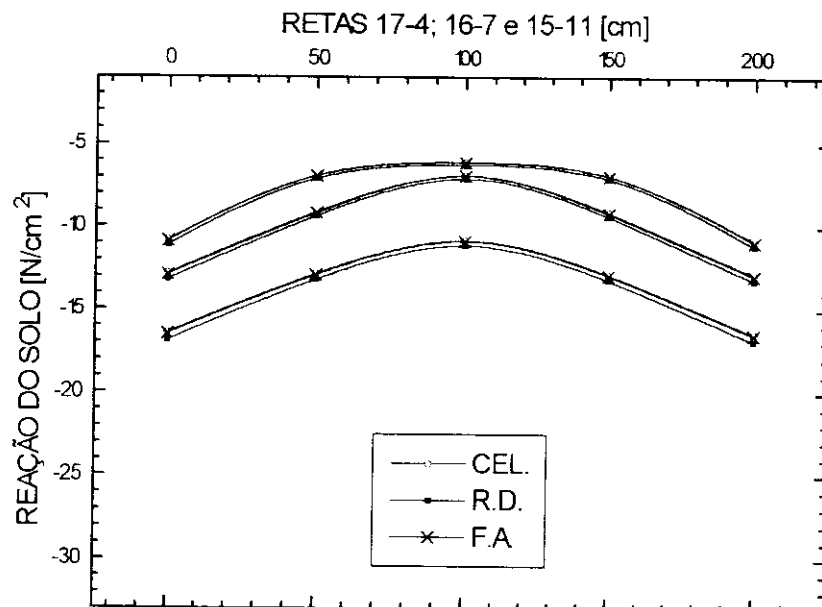


FIGURA 7.8 - Reação do solo para carga centrada

7.8.2.2 Exemplo 5: Placa com carga excêntrica

TABELA 7.16 - Reações do solo para carga com uma excentricidade

e_x	PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					
		CÉLULAS					
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	
30cm	1	-18,68	-25,82	-26,65	-26,86	-26,93	
	2	-19,83	-21,75	-21,96	-22,01	-22,03	
	3	-13,85	-13,40	-13,35	-13,34	-13,34	
	4	-22,01	-19,34	-19,01	-18,92	-18,89	
	5	-15,19	-11,10	-10,64	-10,53	-10,49	
	6	-10,12	-6,61	-6,21	-6,11	-6,07	
	9	-8,97	-7,16	-6,95	-6,90	-6,88	
	10	-5,00	-4,93	-4,92	-4,92	-4,92	
	12	-14,09	-17,58	-17,99	-18,09	-18,13	
	13	-9,93	-10,69	-10,78	-10,80	-10,81	
	14	-4,70	-7,13	-7,42	-7,49	-7,52	
	15	-1,24	-5,30	-5,79	-5,92	-5,96	
	16	-2,14	-3,46	-3,61	-3,64	-3,66	
	17	-3,60	-2,93	-2,82	-2,79	-2,78	
	18	-5,28	-3,58	-3,37	-3,32	-3,30	
	50cm	1	-25,96	-32,87	-33,66	-33,86	-33,93
		2	-28,13	-28,21	-28,18	-28,17	-28,17
		3	-16,57	-16,20	-16,15	-16,14	-16,14
4		-31,03	-25,23	-24,53	-24,35	-24,29	
5		-18,23	-13,58	-13,06	-12,92	-12,88	
6		-8,65	-6,41	-6,15	-6,08	-6,06	
9		-7,44	-6,93	-6,88	-6,87	-6,86	
10		-2,15	-2,12	-2,12	-2,11	-2,11	
12		-16,24	-20,90	-21,46	-21,60	-21,65	
13		-7,74	-10,33	-10,67	-10,75	-10,78	
14		-1,13	-3,55	-3,87	-3,95	-3,98	
15		+3,38	+1,36	+1,10	+1,04	+1,02	
16		+1,96	+2,35	+2,42	+2,44	+2,45	
17		+0,34	+2,20	+2,47	+2,53	+2,56	
18		-2,57	-1,16	-0,97	-0,93	-0,91	

TABELA 7.17 - Reações do solo para carga com uma excentricidade

e_x	PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					
		RECIPROCIDADE DUAL					
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	
30cm	1	-21,06	-26,27	-26,96	-27,13	-27,19	
	2	-19,46	-21,86	-22,11	-22,18	-22,20	
	3	-13,90	-13,55	-13,52	-13,51	-13,51	
	4	-21,17	-19,37	-19,12	-19,05	-19,03	
	5	-15,09	-11,20	-10,75	-10,64	-10,60	
	6	-10,18	-6,76	-6,37	-6,27	-6,24	
	9	-9,02	-7,33	-7,13	-7,09	-7,07	
	10	-5,22	-5,26	-5,25	-5,25	-5,25	
	12	-13,76	-17,75	-18,22	-18,33	-18,38	
	13	-9,85	-10,95	-11,07	-11,09	-11,11	
	14	-5,26	-7,59	-7,88	-7,95	-7,98	
	15	-1,53	-5,80	-6,40	-6,55	-6,61	
	16	-2,53	-3,98	-4,14	-4,17	-4,19	
	17	-4,02	-3,41	-3,28	-3,25	-3,24	
	18	-5,44	-3,83	-3,63	-3,58	-3,56	
	50cm	1	-29,02	-33,31	-33,87	-34,01	-34,07
		2	-27,48	-28,18	-28,21	-28,22	-28,22
		3	-16,61	-16,30	-16,27	-16,26	-16,25
4		-29,75	-25,12	-24,52	-24,37	-24,32	
5		-18,07	-13,63	-13,12	-12,99	-12,95	
6		-8,74	-6,56	-6,31	-6,25	-6,23	
9		-7,54	-7,11	-7,07	-7,06	-7,05	
10		-2,43	-2,49	-2,50	-2,50	-2,50	
12		-15,74	-20,98	-21,61	-21,77	-21,83	
13		-7,84	-10,60	-10,96	-11,05	-11,08	
14		-2,15	-4,12	-4,41	-4,48	-4,50	
15		+4,00	+0,84	+0,39	+0,28	+0,24	
16		+1,41	+1,70	+1,77	+1,79	+1,80	
17		-0,45	+1,57	+1,89	+1,97	+2,00	
18		-2,81	-1,47	-1,28	-1,23	-1,22	

TABELA 7.18 - Reações do solo para carga com uma excentricidade

e_x	PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]					
		FORMULAÇÃO ALTERNATIVA					
		h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm	
30cm	1	-18,66	-25,85	-26,69	-26,89	-26,97	
	2	-19,82	-21,77	-21,98	-22,03	-22,05	
	3	-13,86	-13,43	-13,38	-13,37	-13,36	
	4	-22,01	-19,36	-19,03	-18,95	-18,92	
	5	-15,20	-11,12	-10,66	-10,54	-10,50	
	6	-10,15	-6,63	-6,23	-6,13	-6,10	
	9	-8,99	-7,18	-6,98	-6,93	-6,91	
	10	-5,05	-4,98	-4,97	-4,97	-4,97	
	12	-14,09	-17,61	-18,03	-18,13	-18,17	
	13	-9,97	-10,73	-10,82	-10,84	-10,85	
	14	-4,75	-7,19	-7,48	-7,56	-7,58	
	15	-1,31	-5,38	-5,88	-6,01	-6,05	
	16	-2,21	-3,53	-3,68	-3,72	-3,73	
	17	-3,67	-2,99	-2,88	-2,86	-2,85	
	18	-5,32	-3,62	-3,41	-3,36	-3,34	
	50cm	1	-25,92	-32,89	-33,68	-33,88	-33,95
		2	-28,12	-28,21	-28,19	-28,18	-28,18
		3	-16,58	-16,21	-16,17	-16,16	-16,16
4		-31,03	-25,24	-24,54	-24,36	-24,30	
5		-18,24	-13,60	-13,07	-12,94	-12,89	
6		-8,68	-6,43	-6,17	-6,11	-6,08	
9		-7,46	-6,96	-6,91	-6,90	-6,89	
10		-2,20	-2,18	-2,17	-2,17	-2,17	
12		-16,23	-20,92	-21,49	-21,63	-21,68	
13		-7,77	-10,37	-10,71	-10,80	-10,83	
14		-1,19	-3,63	-3,94	-4,02	-4,05	
15		+3,30	+1,26	+1,00	+0,93	+0,91	
16		+1,89	+2,27	+2,33	+2,35	+2,36	
17		+0,27	+2,12	+2,39	+2,46	+2,49	
18		-2,61	-1,20	-1,02	-0,97	-0,95	

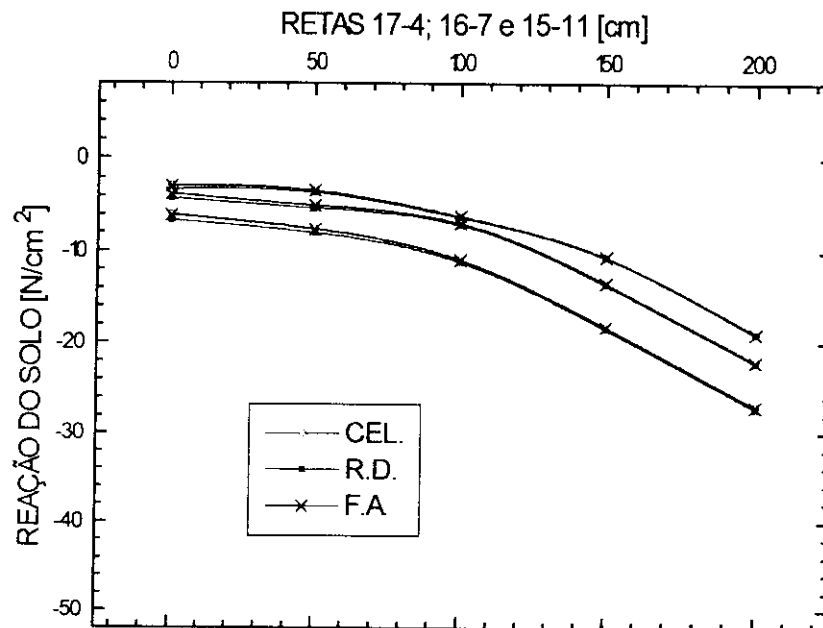


FIGURA 7.9 - Reação do solo para carga com $e_x=30\text{cm}$

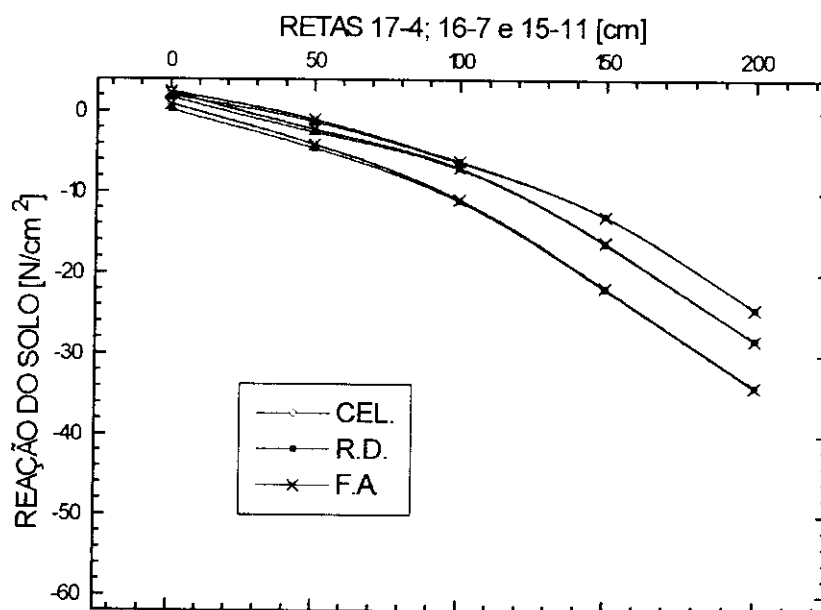


FIGURA 7.10 - Reação do solo para carga com $e_x=50\text{cm}$

TABELA 7.19 - Reações do solo para carga com duas excentricidades

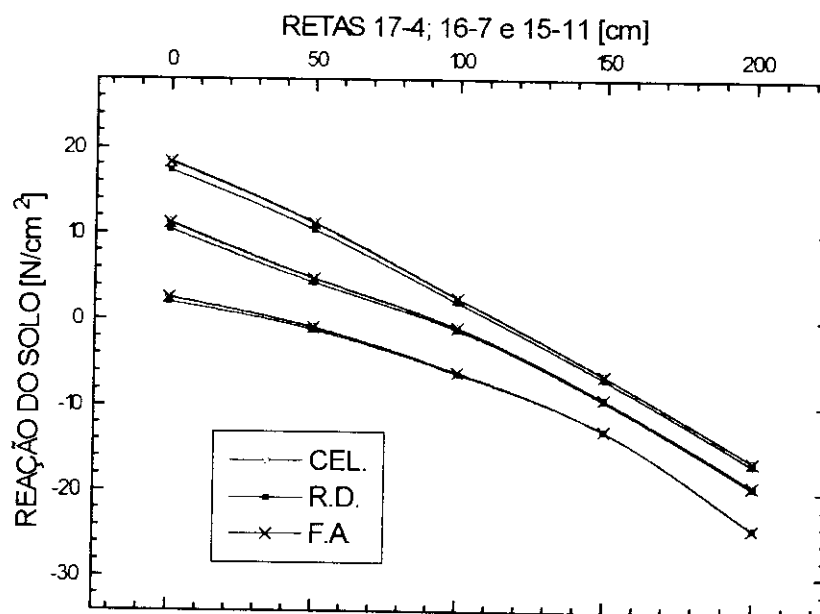
PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
	CÉLULAS				
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	-55,37	-52,49	-51,84	-51,66	-51,60
2	-41,61	-37,90	-37,31	-37,15	-37,09
3	-26,84	-23,77	-23,35	-23,24	-23,20
4	-24,12	-24,22	-24,23	-24,23	-24,23
5	-13,97	-12,99	-12,88	-12,85	-12,84
6	-6,93	-6,16	-6,07	-6,05	-6,04
7	-12,89	-18,19	-18,97	-19,17	-19,24
8	-6,62	-8,66	-8,97	-9,06	-9,09
9	-1,19	-0,93	-0,90	-0,89	-0,88
10	+2,59	+4,48	+4,78	+4,86	+4,89
11	-6,70	-14,71	-15,94	-16,26	-16,37
12	-1,17	-5,41	-6,08	-6,25	-6,31
13	+2,43	+2,59	+2,60	+2,61	+2,61
14	+6,89	+10,48	+11,07	+11,23	+11,28
15	+11,30	+17,14	+18,10	+18,35	+18,44

TABELA 7.20 - Reações do solo para carga com duas excentricidades

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
	RECIPROCIDADE DUAL				
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	-60,02	-52,88	-51,80	-51,52	-51,41
2	-40,42	-37,66	-37,15	-37,02	-36,97
3	-26,78	-23,75	-23,32	-23,22	-23,18
4	-23,00	-24,13	-24,23	-24,25	-24,26
5	-13,90	-13,04	-12,94	-12,92	-12,91
6	-7,08	-6,32	-6,24	-6,21	-6,21
7	-13,14	-18,42	-19,20	-19,40	-19,47
8	-6,89	-8,90	-9,22	-9,31	-9,34
9	-1,55	-1,24	-1,20	-1,19	-1,19
10	+2,21	+3,97	+4,26	+4,34	+4,37
11	-8,35	-15,22	-16,41	-16,72	-16,83
12	-1,18	-5,84	-6,54	-6,72	-6,79
13	+1,10	+1,93	+2,02	+2,04	+2,05
14	+5,14	+9,57	+10,22	+10,39	+10,45
15	+15,52	+16,59	+17,14	+17,29	+17,35

TABELA 7.21 - Reações do solo para carga com duas excentricidades

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
	FORMULAÇÃO ALTERNATIVA				
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	-55,02	-52,46	-51,83	-51,66	-51,59
2	-41,43	-37,89	-37,30	-37,15	-37,09
3	-26,79	-23,78	-23,35	-23,25	-23,21
4	-24,10	-24,23	-24,24	-24,24	-24,24
5	-13,97	-13,00	-12,89	-12,86	-12,85
6	-6,96	-6,19	-6,09	-6,07	-6,06
7	-12,99	-18,21	-18,99	-19,19	-19,26
8	-6,67	-8,68	-9,00	-9,08	-9,11
9	-1,21	-0,96	-0,93	-0,92	-0,92
10	+2,54	+4,41	+4,72	+4,80	+4,83
11	-6,98	-14,77	-15,99	-16,30	-16,42
12	-1,24	-5,45	-6,12	-6,30	-6,36
13	+2,43	+2,53	+2,55	+2,55	+2,55
14	+6,87	+10,40	+10,98	+11,13	+11,19
15	+11,19	+17,00	+17,97	+18,22	+18,31

FIGURA 7.11 - Reação do solo para carga com $e_x = e_y = 50$ cm

7.8.2.3 Exemplo 6: Placa com carga excêntrica considerando-se a não-linearidade para a reação do solo

TABELA 7.22 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com limitação da tensão máxima de compressão

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
	CÉLULAS				
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
2	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
3	-18,99	-18,79	-18,76	-18,76	-18,76
4	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
5	-20,39	-15,75	-15,25	-15,12	-15,08
6	-8,82	-6,58	-6,32	-6,25	-6,23
9	-7,53	-7,13	-7,08	-7,06	-7,06
10	-0,20	-0,09	-0,03	-0,02	-0,01
12	-19,00	-24,22	-24,80	-24,95	-25,00
13	-7,72	-10,66	-10,98	-11,06	-11,09
14	0,00	-1,05	-1,28	-1,34	-1,36
15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
18	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00

TABELA 7.23 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com limitação da tensão máxima de compressão

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
	RECIPROCIDADE DUAL				
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
2	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
3	-18,68	-18,39	-18,34	-18,33	-18,33
4	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
5	-19,88	-15,37	-14,85	-14,73	-14,69
6	-8,95	-6,73	-6,47	-6,25	-6,38
9	-7,71	-7,29	-7,24	-7,23	-7,22
10	-1,11	-0,94	-0,90	-0,89	-0,88
12	-18,45	-23,70	-24,28	-24,43	-24,48
13	-7,96	-10,87	-11,23	-11,32	-11,35
14	-0,11	-2,16	-2,42	-2,47	-2,49
15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
18	-1,70	-0,10	0,00	0,00	0,00

TABELA 7.24 - Reações do solo para carga com uma excentricidade e com limitação da tensão máxima de compressão

PT	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO [N/cm ²]				
	FORMULAÇÃO ALTERNATIVA				
	h=10cm	h=20cm	h=30cm	h=40cm	h=50cm
1	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
2	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
3	-18,93	-18,73	-18,70	-18,70	-18,70
4	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00	-25,00
5	-20,33	-15,70	-15,19	-15,07	-15,03
6	-8,82	-6,58	-6,31	-6,25	-6,22
9	-7,53	-7,13	-7,07	-7,06	-7,05
10	-0,25	-0,16	-0,08	-0,06	-0,06
12	-18,93	-24,13	-24,72	-24,86	-24,92
13	-7,73	-10,66	-10,97	-11,05	-11,08
14	0,00	-1,14	-1,35	-1,40	-1,42
15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
18	-1,04	0,00	0,00	0,00	0,00

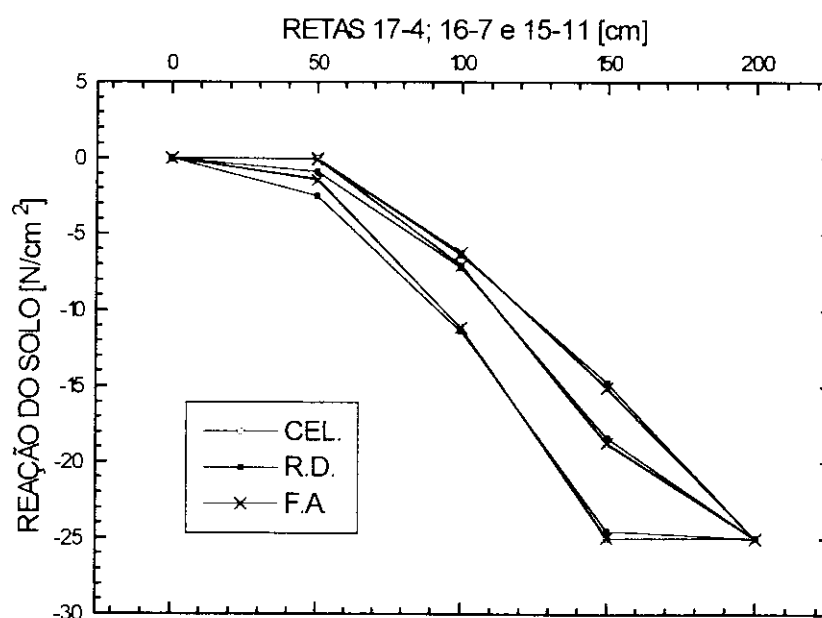


FIGURA 7.12 - Reação não linear do solo para carga com $e_x=50$ cm

Nos gráficos apresentados para placas de 50cm de espessura, pode-se observar que a distribuição das reações do solo de uma placa situada na superfície do solo, apresenta curvaturas mais proeminentes em relação a uma placa situada no interior do mesmo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal deste trabalho foi apresentar formulações alternativas do Método dos Elementos de Contorno - MEC, para o estudo de interação de placas com o meio contínuo.

A formulação para a análise das placas, foi feita a partir da teoria de KIRCHHOFF (1850). Na montagem do sistema de equações algébricas, foram utilizadas apenas equações integrais de deslocamento transversal, aplicadas no contorno e fora do domínio da placa. Os termos relacionados com os cantos, considerados variáveis, tornaram a formulação mais geral, possibilitando a análise de placas submetidas a diversos tipos de carregamentos e condições de contorno. As descontinuidades das variáveis principais, em pontos especiais do contorno, foram introduzidas para evitarem-se singularidades, através do uso adequado de funções aproximadoras lineares descontínuas.

A utilização das soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti e Mindlin, na análise de sólidos tridimensionais de domínio semi-infinito, pelo Método dos Elementos de Contorno, torna-se adequada, uma vez que a discretização da superfície livre não carregada pode ser dispensada, possibilitando maior eficiência ao método, especialmente em problemas de interação solo-estrutura e aqueles que envolvem escavações no interior ou na superfície do solo.

Na aproximação das variáveis do contorno do sólido tridimensional, foram utilizados elementos triangulares lineares contínuos, com a implementação da técnica do elemento de colocação não nodal (FERREIRA, 1990), para o tratamento das descontinuidades das forças de superfície, na qual os pontos de colocação deslocam-se para dentro do elemento, enquanto que os nós funcionais permanecem nos vértices do elemento. Esta técnica mostra nítida vantagem sobre a técnica do nó múltiplo e também em relação à utilização de elementos lineares descontínuos, quando deseja-se fazer a interação com uma estrutura, como por exemplo a placa, a qual pode estar formulada inclusive pelo Método dos Elementos Finitos.

As integrais singulares, expressas em coordenadas cartesianas, foram transformadas em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , e em seguida integradas analiticamente em r . A integral em θ remanescente, é transformada em integrais sobre os três lados do elemento, as quais são calculadas numericamente pelo processo de Gauss.

No cálculo das integrais não singulares, embora existirem outros procedimentos (TELLES, 1986 e 1987), optou-se pela divisão do elemento em subelementos, os quais são determinados em função da distância entre o ponto fonte e o centroide do elemento, e integrados utilizando-se sete pontos de Hammer.

Os procedimentos adotados no cálculo das integrais singulares e não singulares, provaram ser eficientes através das aplicações apresentadas, cujos resultados são bastante satisfatórios.

A análise de placas apoiadas sobre o solo, segundo o modelo simplificado de WINKLER (1867), é feita através do acréscimo de uma integral de domínio, que representa a reação do solo, nas equações integrais usuais de placas. Essa integral de domínio, é tratada utilizando-se células internas, o processo da reciprocidade dual e uma formulação alternativa. Com o objetivo de comparar estas três formulações, utilizou-se pontos base idênticos aos pontos duais, localizados no contorno e domínio da placa, e coincidentes com os vértices das células. Nestas condições pode-se observar que os resultados obtidos utilizando-se células internas e a formulação alternativa, são praticamente iguais em todos os casos, com uma diferença em torno de 0,5 %, em relação aos resultados obtidos utilizando-se o processo da reciprocidade dual, especialmente quando a rigidez da placa tende a aumentar. Para espessuras da placa menores que 30cm essa diferença aumenta consideravelmente.

O processo da integração sobre células internas, proporciona uma ótima aproximação das integrais de domínio, embora se afaste de uma das características básicas do Método dos Elementos de Contorno, devido a que a discretização do domínio é inevitável.

Os resultados obtidos pelo processo da reciprocidade dual, não deixam de ser satisfatórios, mesmo utilizando-se uma função linear $f(m,p)$, não muito apropriada para aproximar-se o deslocamento transversal w , no domínio, o que dificulta a definição de superfícies resultantes suaves. A utilização de mais pontos duais no domínio da placa, assim como a adoção de uma função $f(m,p)$ mais adequada para o problema, poderão melhorar os resultados.

A formulação alternativa, mostra-se mais eficiente que as anteriores, uma vez que pode dispensar a discretização interna, isto é, a

aproximação com pontos base tomados apenas no contorno da placa (TEJERINA CALDERÓN, 1992), oferecem praticamente os mesmos resultados que se obtiveram utilizando-se pontos base no domínio e no contorno da placa. A transformação de integrais de domínio em integrais de contorno, podem evitar, quando é possível, a discretização interna, e dar uma simplicidade maior à formulação do Método dos Elementos de Contorno. Testes bastante detalhados foram realizados (CODA, 1990), levando a conclusão que a aproximação proposta para aproximar a densidade da integral de domínio, no item 6.5 do capítulo VI, pode ser também utilizada em outros tipos de problemas onde aparecem integrais de domínio com densidade desconhecida.

Pela teoria de Winkler, as reações do solo obtidas pelas três formulações, apresentam uma distribuição linear a medida que aumenta a rigidez da placa, obedecendo a proporcionalidade em relação aos seus respectivos deslocamentos transversais. Deve-se considerar também que as características físicas do solo ficam representadas apenas por uma constante, o coeficiente de recalque K .

Na análise de sólidos tridimensionais de domínio semi-infinito, como o solo, pode-se observar que a distribuição de pressões em seu domínio, devida as forças aplicadas na sua superfície ou no seu interior, são calculadas admitindo-se que o elemento estrutural que transmite essas forças, seja suficientemente flexível para não influir na distribuição das pressões de contato. Mas, na prática, é necessária a presença de um elemento dotado de uma determinada rigidez (placa ou sapata, por exemplo), para transmitir ao solo os diversos tipos de solicitações que vêm da estrutura.

Analisando-se a interação da placa com o solo, sendo este considerado como um sólido tridimensional elástico-linear isotrópico, pode-se observar que a distribuição das reações do solo, dependem tanto da rigidez e forma geométrica da placa, assim como das características físicas do próprio solo. Considerando-se a placa suficientemente flexível, as reações do solo (pressões de contato), tendem a serem uniformes e próximas às que são transmitidas pela placa, os deslocamentos, ao contrário, não são uniformes. Já uma placa dotada de uma certa rigidez, tende a impor um deslocamento constante em todos os pontos da superfície de contato, e as reações do solo não são mais uniformes.

Adotando-se um critério de plastificação simples e bilinear, as tensões de compressão que excederam a tensão de compressão limite do solo e as tensões de tração que surgiram devido ao tipo e intensidade da carga aplicada, foram tratadas através de um processo iterativo, considerando-se as situações de convergência com e sem equilíbrio. A

utilização deste processo, torna a análise da interação placa-solo mais completa, visto que permite a determinação das tensões e dos deslocamentos efetivos na superfície de contato.

Algumas sugestões para a aplicação ou a continuidade do presente trabalho, são dadas a seguir:

A formulação alternativa, pode ser estendida para qualquer outra formulação que apresente integrais de domínio com densidade desconhecida.

Podem ser implementados outros tipos de elementos, utilizando-se aproximações de ordem superior, para a placa e o solo.

A associação da placa com elementos de viga, formulada segundo a teoria de Reissner, poderá ser aplicada no estudo de sapatas associadas e fundações em radier.

A determinação de tensões e deslocamentos no interior do solo, formado por varias camadas com propriedades físicas diferentes e suscetíveis ao adensamento, pode ser feita utilizando-se sub-regiões.

A adoção de um critério de plastificação multiaxial para as reações do solo, tornará a formulação mais geral possibilitando a sua aplicação em problemas mais complexos, relacionados com escavações e escoramentos.

Uma análise dinâmica também poderia ser implementada, para considerar-se efeitos de cargas dinâmicas em estruturas vizinhas.

Estas e outras sugestões seriam complementadas com a implementação de um pré-processador para facilitar a geração, a visualização e a correção dos dados de entrada, e de um pós-processador, para uma melhor análise dos resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDEL-AKHER, et al. (1989). Evaluation of boundary integrals for plate bending. *Int. J. Num. Meth. Engng*, 1: 75-93.
- ABEL, N.H. (1981). *Oeuvres complètes*. Norvégien Christiania, v.1, 621p.
- ALTIERO, N.J. & SIKARSKIE, D.L. (1978). A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. *Computer & Structures*, 9: 163-168.
- ANDERSEN, R.S. et al. (1980). *The application and numerical solution of integral equations*. Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Sijthoff & Noordhoff.
- ARGYRIS, J.H. & KELSEY, S. (1960). *Energy theorems and structural analysis*. London, Butterworths.
- BANERJEE, P.K. (1969). *A contribution to the study of axially loaded pile foundations*. Southampton. Ph. D. Thesis, University of Southampton.
- BARBIRATO, J.C.C. (1991). *Formulação do método dos elementos de contorno para sólidos elásticos tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BETTI, E. (1872). Teoria dell elasticità. *Il Nuovo Cimento*, 7-10.
- BEZINE, G. (1978a). Boundary integral formulations for plate flexure with arbitrary boundary conditions. *Mechanics Research Communications*, 5 (4): 197-206.

- BEZINE, G. & GAMBI, D.A. (1978b). A new integral equation formulation for plate bending problems. In: BREBBIA, C.A.,ed. *Recent advances in boundary element methods*. London, Pentech Press.
- BEZINE, G. (1980). A mixed boundary integral: finite element approach to plate vibration problem. *Mechanics Research Communications*, 7 (3): 141-150.
- BREBBIA, C.A. & NARDINI, D. (1986). Solution of parabolic and hiperbolic time dependent problems using boundary elements. *Compl. & Maths. with Appls.*, 12B: 1061-1072.
- BREBBIA, C.A. (1978). *The boundary element method for engineering*. London, Pentech Press.
- BUTTERFIELD, R. & BANERJEE, P.K. (1971). The elastic analysis of compressible piles and pile groups. *Geotechnique*, 21: 43-60.
- CODA, H.B. (1990). *Análise da vibração livre de meios elásticos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- COSTA JR., J.A. & BREBBIA, C.A. (1985a). The boundary element method applied to plates on elastic foundations. *Engineering Analysis*, 2 (4): 174-183.
- COSTA JR., J.A. & BREBBIA, C.A. (1985b). Bending of plates on elastic foundations using the boundary element method. In: INTERNATIONAL CONFERENCE, 2nd, Southampton, 1985. *Proc.* Berlin, Springer-Verlag.
- COSTA JR, J.A. & BREBBIA, C.A. (1986). On the reduction of domain integrals to the boundary for the BEM formulation of plates on elastic foundations. *Engineering Analysis*, 3 (2): 123-126.
- CRUSE, T.A. (1969). Numerical solutions in three dimensional elastostatics. *Int. J Solids & Structures*, 5: 1259-1274.

- CRUSE, T.A. (1973). Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis. *Computers & Structures*, 3: 509-527.
- CRUSE, T.A. (1974). An improved boundary integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. *Computers & Structures*, 4: 741-754.
- CUROTO, C.L. (1981). *Método dos elementos de contorno para elasticidade tridimensional*. Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- DOMINGUEZ, J. & BREBBIA, C.A. (1984). *Boundary elements an introductory course*. Computational Mechanics Publications, Southampton.
- FERREIRA, W.G. (1990). *Implementação de elemento de colocação não nodal para análise tridimensional pelo método dos elementos de contorno*. Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- FREDHOLM, I. (1903). Sur une classe de equations fonctionelles. *Acta Math.*, 27: 365-390.
- GIL RODRIGUEZ, J.C. (1986). *Sobre o emprego de método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- HAMMER, P.C., MARLOWE, O.J. & ATROUD, A.H. (1956). Numerical integration over simplexes and cones. *Math. Tables and Other Aids to Computation*, 10: 130-137.
- HANSEN, E.B. (1976). Numerical solution of integro-differential and singular equations for plate bending problems. *Journal of Elasticity*, 6: 39-56.
- JASWON, M.A. (1963). Integral equation methods in potencial theory I. *Proc. Royal Society, A* 275: 23-32.

- JASWON, M.A. ; MAITI, M. ; SYMM, G.T. (1967). Numerical biharmonic analysis and some applications. *Int. J. Solids & Structures*, 3: 309-332.
- JASWON, M.A. & MAITI, M. (1968). An integral formulation of plate bending problems. *J. Engng. Math.*, 2: 83-93.
- KAMIYA, N. & SAWAKY, (1982). Y. An integral equation approach to finite deflection of elastic plates. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 17 (3): 187-194.
- KAMIYA, N. et al. (1982). An approximate finite deflection analysis of a heated elastic plate by the boundary element method. *Appl. Math. Modelling*, 6 (1): 23-27.
- KATSIKADELIS, J.T. & ARMENAKAS, A.E. (1984a). Analysis of clamped plates on elastic foundation by the boundary integral method. *Journal of Applied Mechanics*, 54: 544-580.
- KATSIKADELIS, J.T. & ARMENAKAS, A.E. (1984b). Plates on elastic foundation by BIE method. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 110 (7): 1086-1104.
- KATSIKADELIS, J.T. (1991). Large deflection analysis of plates on elastic foundation by the boundary integral method. *Int. J. Solids Structures*, 15: 1867-1878.
- KIRCHHOFF, G. (1850). Uber das Gleichgewicht und die Bewegung Einer Elastischen Scheibe. *J. Math., Crelle*, 40: 51-58.
- KUPRADZE, V.D. (1965). *Potencial methods in the theory of elasticity*. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations.
- LACHAT, J.A. (1975). *A further development of the boundary integral technique for elastostatics*. Southampton. Ph.D. Thesis, University of Southampton.
- LOVE, A.E.H. (1944). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover Publications.

- NAKAGUMA, R. K. (1979). *Three dimensional elastostatics using the boundary element method*. Southampton. Ph. D. Thesis, University of Southampton.
- NARDINI, D. & BREBBIA, C.A. (1982). A new approach to free vibration analysis using boundary element. In: BREBBIA, C.A., ed. *Boundary element methods in engineering*. Springer-Verlag.
- NARDINI, D & BREBBIA, C.A. (1983). Dynamic analysis of solid mechanics by an alternative boundary element procedure. *Int. J. Soil Dynamics & Earthquake Engineering*, 2: 228-233.
- NARDINI, D. & BREBBIA, C.A. (1985). The solution of parabolic and hiperbolic problems using an alternative boundary element formulation. In: BREBBIA, C.A., ed. *Boundary element VII*. Springer-Verlag.
- NEVES, A.C. & BREBBIA, C.A. (1991). Multiple reciprocity boundary element method in elasticity. A new approach for transforming domain integrals to the boundary. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 4: 709-727.
- NOWAK, A.J. & BREBBIA, C.A. (1989). The multiple reciprocity reciprocity method. A new approach for transforming B.E.M. domain integrals to the boundary. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6: 164-168.
- PAIVA, J.B. (1987). *Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PATRIDGE, P.W. & BREBBIA, C.A. (1990). Computer implementation of the B.E.M. dual reciprocity method for the solution of general field equations. *Communications in Applied Numerical Methods*, 6: 83-92.
- PATRIDGE, P.W.; BREBBIA, C.A. & WROBEL, L.C. (1991). The dual reciprocity element method. *Comp. Mech. Publ.*

- REISSNER, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12: A69-A77.
- RIZZO, F.J. & SHIPPY, D.J.A. (1968). A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. *Int. J. Solids & Structures*, 4: 1161-1179.
- RIZZO, F.J. (1967). An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of Applied Mathematics*, 25 (1): 83-92., [21]
- SÁ, P.A.C.O. & TELLES, J.C.F. (1986). Análise de problemas de elasticidade linear tridimensional pelo método dos elementos de contorno utilizando as soluções fundamentais de Kelvin e Mindlin. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE METODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 7., Sao Carlos, EESC-USP, - *Anais*.
- SILVA, N.A. (1988). *Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas sobre fundações elásticas*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SILVA, J.J.R. (1989). *MEC3D - Um programa para análise elástica tridimensional com o método dos elementos de contorno*. Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- SYMM, G.T. (1963). Integral equation methods in potencial theory II. *Proc. Royal Society, A* 275: 33-46.
- SOUTHWELL, R.V. (1946). *Relaxation methods in theoretical physics*. London, Oxford University Press. (The Oxford Engineering Science Series).
- STERN, M. (1979). A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. *Int. J. Solids & Structures*, 15: 769-782.

- STERN, M. (1983). Boundary integral equations for bending of thin plates. In: BREBBIA, C.A. ed. *Progress in boundary element methods*. London, Pentech Press, v.2.
- STROUD, A.H. & SECREST, D. (1966). *Gaussian quadrature formulas*. New York, Prentice-Hall.
- TAKHTEYEV, V. & BREBBIA, C. A. (1990). Analytical integrations in boundary elements. *Engineering analysis*, 7: 95-100.
- TANAKA, M. (1984). Large deflection analysis of thin elastic plates. In: BANERJEE, P.K. & MUKHERJEE, S. eds. *Developments in boundary element methods - 3*. London, Elsevier.
- TIMOSHENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1959). *Theory of plates and shells*. New York, McGraw-Hill.
- TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. (1980). *Teoria da elasticidade*. Rio de Janeiro, Guanabara Dois.
- TEJERINA CALDERÓN, E. (1991). *Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- TEJERINA CALDERÓN, E. (1992). Análise de placas sobre fundação de comportamento não-linear através do Método dos Elementos de Contorno. In: CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO SOBRE METODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 13., Porto Alegre, Brasil. *Anais*. v.2, p.137-154.
- TELLES, J. C. F. (1986). Implementation of triangular elements into the Beasy System. *Internal report, Computational Mechanics*. Southampton, UK.
- TELLES, J. C. F. (1987). A self-adaptive coordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 24: 959-973.

- TOTTENHAM, H. (1979). The boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P.K. & BUTTERFIELD, R. eds. *Developments in boundary element methods*. London, Elsevier.
- TURNER, M.J. et al. (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal aero. science*, 23: 805-823.
- VAN DER WEEËN, F. (1982). Application of the direct boundary element method to Reissners plate model. In: BREBBIA, C.A. ed. *Boundary element methods in engineering*. Berlin, Springer-Verlag.
- VENTURINI, W.S. (1988). *Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia*. São Carlos. Tese (Livre-Docência) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- WINKLER, E. (1867). *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Piague, Dominicus.
- WU, B.C. & ALTIERO, N.J. (1979). A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. *Computer & Structures*, 10: 107-707.

OBRAS CONSULTADAS

- BOWLES, J.E. (1977). *Foundation analysis and design*. Tokio, McGraw-Hill.
- CODA, H.B. & VENTURINI, W.S. (1990). Alternative boundary element formulation for elastodynamics. In: BREBBIA, C.A. & HONMA, T. eds. *Boundary elements XII*. Southampton, CML; Berlin, Springer-Verlag. v.1, p.517-534.
- CODA, H.B. & VENTURINI, W.S. (1990). Vibração livre de meios elásticos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno. In: CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO SOBRE METODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 11., Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ. *Anais*. v.2.
- GIL RODRIGUEZ, J.C. & VENTURINI, W.S. (1986). Sobre a influência da discretização de domínios bidimensionais para o método dos elementos de contorno. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE METODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 7., Sao Carlos, EESC-USP. *Anais*.
- PAIVA, J.B. & VENTURINI, W.S. (1987). Uma formulação alternativa para a resolução de placas via método dos elementos de contorno. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO E IBERICO SOBRE METODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 8., Rio de Janeiro, PUC-RJ. *Anais*. v.B., p.307-314.
- SILVA, N.A. & VENTURINI, W.S. (1988). Análise de placas apoiadas em fundações elásticas pelo método dos elementos de contorno. In: CONGRESSO LATINO AMERICANO E IBERICO SOBRE METODOS COMPUTACIONALES PARA INGENIERIA, 9., Cordoba, Argentina. *Anais*.

SILVA, N.A. & VENTURINI, W.S. (1989). Aplicação do método dos elementos de contorno na determinação de cargas últimas em sapatas isoladas. In: CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO SOBRE METODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 10., Porto, Portugal,. *Anais*. v.4, p.C29-C38.

SILVA, N.A. & VENTURINI, W.S. (1988). Dual reciprocity process applied to solve bending plates on elastic foundation. In: BREBBIA, C.A. ed. *Boundary elements X*. Southampton, CML; Berlin, Springer-Verlag. v.3, p.95-105.

