

UMA FORMULAÇÃO CONSISTENTE PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS DE AÇO CONSIDERANDO IMPERFEIÇÕES INICIAIS E TENSÕES RESIDUAIS

ARMANDO CESAR CAMPOS LAVALL

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Civil.

ORIENTADORA: Prof^a Dr^a Helena M. C. Carmo Antunes

SÃO CARLOS
1996

L426f

Lavall, Armando Cesar Campos

Uma formulação consistente para análise não-linear de pórticos planos de aço considerando imperfeições iniciais e tensões residuais / Armando Cesar Campos Lavall. -- São Carlos, 1996.

265p.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, 1996.

Orientadora: Profa. Dra. Helena M.C. Carmo Antunes

1. Não-linearidade em estruturas de aço. 2. Tensões residuais. 3. Imperfeições iniciais. I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

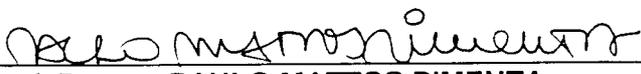
Tese defendida e aprovada em 20-3-1996
pela Comissão Julgadora:



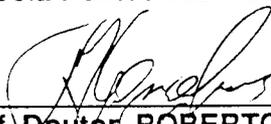
Prof. Doutora HELENA M.C. CARMO ANTUNES - Orientadora
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



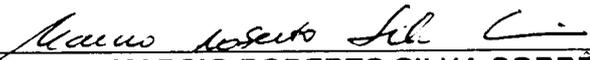
Prof. Doutor JULIO FRUCHTENGARTEN
(Escola Politécnica - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor PAULO MATTOS PIMENTA
(Escola Politécnica - Universidade de São Paulo)



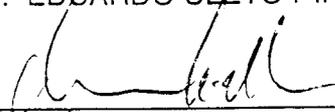
Prof. Doutor ROBERTO MARTINS GONÇALVES
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor MARCIO ROBERTO SILVA CORRÊA
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Presidente da Comissão de Pós-Graduação
Prof. Dr. EDUARDO CLETO PIRES



Coordenador da Área Engenharia de Estruturas
Prof. Dr. MOUNIR KHALIL EL DEBS

À Beatriz, Bruno e Daniel,
esposa e filhos,
aos quais, com amor,
dedico este trabalho.

À minha família.

AGRADECIMENTOS

À Prof^a Dr^a Helena M. C. Carmo Antunes, pela orientação segura e objetiva e pelo apoio e confiança demonstrados durante a realização deste trabalho.

Aos familiares e amigos, pelo apoio e incentivo recebidos durante a realização desta tese.

À Câmara do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia da UFMG, pela confiança e oportunidade.

Aos colegas, professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC/USP, pela acolhida, amizade e colaboração dispensadas durante todo o decorrer do Doutorado.

Aos professores Dr. Paulo de Mattos Pimenta, Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença e Marco Antônio de Mendonça Vecci pelo auxílio, sugestões e incentivo em vários momentos.

Ao engenheiro pós-graduando, Luiz Antonio de Souza, que com amizade e dedicação contribuiu inestimavelmente na composição final deste trabalho.

Ao Sr. Diógenes Eustáquio de Oliveira pela eficiência e dedicação na digitação deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	i
LISTA DE TABELAS.....	vii
LISTA DE SIGLAS.....	x
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xii
RESUMO.....	xix
<i>ABSTRACT</i>	xxi
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Considerações Iniciais.....	1
1.2 Descrição Sucinta dos Capítulos.....	4
2. RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DAS COLUNAS DE AÇO.....	8
2.1 Introdução.....	8
2.1.1 Considerações Iniciais.....	8
2.1.2 Flambagem Elástica ou de Euler.....	11
2.1.3 Flambagem Inelástica.....	16
2.2 Fatores que Influenciam a Resistência das Colunas.....	24
2.2.1 Considerações Iniciais.....	24
2.2.2 Tensões Residuais.....	27
2.2.3 Imperfeições Iniciais.....	37
2.3 Curvas de Resistência para o Projeto de Colunas.....	40
2.3.1 Considerações Iniciais.....	40
2.3.2 Curvas de Resistência Utilizadas nos Projetos de Colunas de Aço.....	47
3. FORMULAÇÃO TEÓRICA CONSISTENTE PARA A ANÁLISE NÃO- LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS CONSIDERANDO BARRAS COM IMPERFEIÇÕES INICIAIS E TENSÕES RESIDUAIS NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS.....	74

3.1	Considerações Iniciais. Revisão Bibliográfica	74
3.2	Introdução	83
3.3	Deformações e Tensões	84
3.4	Relações Constitutivas.....	93
3.5	Sistema de Coordenadas. Graus de Liberdade	98
3.5.1	Considerações Iniciais.....	98
3.5.2	Definição dos Sistemas de Coordenadas e Graus de Liberdade.....	99
3.6	Teoria Estrutural.....	105
3.6.1	Cinemática do Elemento.....	106
3.7	Equações de Equilíbrio	116
3.7.1	Equilíbrio do Elemento	116
3.7.2	Equilíbrio Estrutural	126
3.7.3	Equações Incrementais do Equilíbrio	128
3.8	Interpolação.....	130
3.9	Aproximações de Segunda-Ordem	136
3.9.1	Simplificações.....	140
3.9.2	Expressões Analíticas para a Matriz de Rigidez Tangente ..	147
4.	ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA.....	164
4.1	Considerações Iniciais	164
4.2	Aspectos da Análise Não-Linear para Implementação	167
4.2.1	Aspectos da Solução Numérica.....	167
4.2.2	Critérios de Convergência.....	172
4.2.3	Estabilidade do Equilíbrio e Pontos Críticos	174
4.2.4	Modelos Constitutivos - Aproximações para o Aço	177
4.2.5	Implementação Considerando o Modelo de Fatias	182
4.3	Fluxograma e Descrições.....	185
4.3.1	Fluxograma do programa principal.....	185
4.3.2	Descrição Sucinta das Subrotinas.....	189

5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DA FORMULAÇÃO	194
5.1 Introdução	194
5.2 Exemplos Considerando Apenas a NLG	196
5.3 Exemplos Considerando NLGM	205
5.4 Exemplos e Considerações Sobre as Imperfeições Iniciais nas Barras	213
5.4.1 Considerações Iniciais.....	213
5.4.2 Exemplos	218
5.5 Exemplos e Considerações sobre as Tensões Residuais nos Perfis de Aço	227
5.5.1 Considerações Iniciais.....	227
5.5.2 Exemplos	228
5.6 Exemplos Considerando a Combinação dos Dois Fatores	234
5.7 Exemplos na Análise de Pórticos Planos	238
6. CONCLUSÕES	248
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	254

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Carga de Euler (Resistência máxima das colunas elásticas)	9
Figura 2.2 - Curvas força x deslocamento em teoria de 2ª ordem e pequenos deslocamentos de: (a) coluna perfeitamente reta, (b) coluna com pequena excentricidade da força aplicada, (c) coluna com grande excentricidade da força aplicada, (d) coluna com imperfeição geométrica inicial	10
Figura 2.3 - Coluna engastada e livre	12
Figura 2.4 - Condição de equilíbrio em teoria de 2ª ordem com pequenos e grandes deslocamentos	14
Figura 2.5 - Tensões críticas acima do limite de proporcionalidade (flambagem inelástica)	16
Figura 2.6 - Teoria do módulo tangente	18
Figura 2.7 - Teoria do módulo reduzido (duplo módulo)	20
Figura 2.8 - Comportamento pós-flambagem de colunas de acordo com a teoria de Shanley	22
Figura 2.9 - Gráfico tensão x deformação para o aço	25
Figura 2.10- Comportamento de colunas perfeitas e imperfeitas	26
Figura 2.11- Esquema do mecanismo de formação das tensões residuais	27

Figura 2.12- Distribuição das tensões residuais em perfis “Wide-Flange” laminados a quente	29
Figura 2.13 - Curvas de carga crítica e de resistência máxima para os perfis laminados indicados.....	30
Figura 2.14 - Comparação qualitativa de tensões residuais entre chapas “UM” e “FC”, antes e após a soldagem no centro da chapa: (a) UM, (b) FC	31
Figura 2.15 - Comparação de curvas de resistência de colunas para um perfil soldado WW 10x62 (aço A7) feito com chapas “FC” e UM.....	32
Figura 2.16 - Distribuição de tensões residuais em perfis FC 12H79 e 14H202.....	33
Figura 2.17- Diagrama de isotensões para um perfil soldado WW 23x681(tensões em kip / in ² , sendo 1 kip / in ² = 6,895 MPa) ...	34
Figura 2.18 - Tensões residuais no perfil soldado 15H290, com chapas “UM”, aço A36: a) solda de filete (1/2”), b) solda de penetração (11/16”).....	35
Figura 2.19 - Comparação de curvas de resistência de colunas de perfis soldados, aço A36, com chapas FC, UM e com alívio de tensões.....	36
Figura 2.20- Comportamento de colunas perfeitamente retas e com imperfeição inicial.....	38

Figura 2.21- Envoltórias das curvas de resistência última para 112 colunas, considerando-se imperfeições iniciais de $L/500$, $L/1000$ e $L/2000$	39
Figura 2.22 - Curvas de resistência de colunas de perfis H com tensões residuais de compressão nas extremidades das mesas	42
Figura 2.23 - Curvas de resistência última de vários tipos diferentes de colunas	43
Figura 2.24 - Curva de nº 1 para aço estrutural (baseada na resistência última e flecha inicial de $\delta_0 = 0,001 L$) adaptação da ref. 61	44
Figura 2.25 - Curva de nº 2 para aço estrutural (baseada na resistência última e flecha inicial de $\delta_0 = 0,001 L$) adaptação da ref. 61	45
Figura 2.26 - Curva de nº 3 para aço estrutural (baseada na resistência última e flecha inicial de $\delta_0 = 0,001 L$) adaptação da ref. 61	45
Figura 2.27- Curvas múltiplas recomendadas pela ECCS, baseadas em flechas iniciais de $\delta_0 = 0,001 L$ (adaptação da ref. 61).....	46
Figura 2.28 - Curvas de flambagem para projetos	51
Figura 2.29 - Curvas múltiplas do SSRC e a equação de Rondal - Maquoi.....	56

Figura 2.30- Conjunto de curvas de flambagem de colunas com valores de flecha inicial de $L/1000$ e $L/1470$	58
Figura 2.31- Curvas de flambagem da NBR - 8800/86	72
Figura 3.1 - Configurações de uma fibra de material.....	85
Figura 3.2 - Comportamento elasto-plástico de uma fibra	96
Figura 3.3 - Elemento de pórtico plano com imperfeições iniciais em sua configuração de referência e em sua configuração corrigida	100
Figura 3.4 - Elemento diferencial de barra curva	107
Figura 3.5 - Deslocamentos de pontos de uma barra curva	111
Figura 3.6 - A rotação ($\alpha + \beta$) das seções transversais e as translações de pontos do eixo	113
Figura 3.7 - Elemento diferencial do eixo da barra nas configurações de referência e corrigida	113
Figura 4.1 - Fluxograma geral para análise não-linear incremental-iterativa.....	165
Figura 4.2 - Métodos de Newton-Raphson: a) Newton-Raphson Puro, b) Rigidez Inicial, c) Newton-Raphson Modificado.....	171
Figura 4.3 - Diagramas tensão x deformação idealizadas para o aço	178

Figura 4.4 - Comportamento elasto-plástico com endurecimento representado por um diagrama bilinear de $\sigma \times \epsilon$	179
Figura 4.5 - Sub-divisão em fatias da seção transversal de viga I	183
Figura 4.6 - Propagação do escoamento ao longo da altura da seção de uma viga fatiada	183
Figura 4.7 - Fluxograma do programa principal	188
Figura 5.1 - Viga em balanço com momento fletor aplicado na extremidade livre	197
Figura 5.2 - Configurações deformadas da viga em balanço da Fig. 5.1...	199
Figura 5.3 - Viga em balanço com duas cargas concentradas	200
Figura 5.4 - Viga bi-engastada com uma carga concentrada no meio do vão.....	202
Figura 5.5 - Curvas força x deslocamento para o pórtico simples	203
Figura 5.6 - Viga bi-engastada elasto-plástica.....	205
Figura 5.7 - Curvas parâmetro de força x deslocamento para a viga da Fig. 5.6	208
Figura 5.8 - Curva parâmetro de carga x deslocamento do pórtico do exemplo dado	211

Figura 5.9 - Coluna elástica com imperfeição inicial.....	215
Figura 5.10 - Curvas de resistência-máxima da coluna da Fig. 5.9 para $\delta_0 = L/1500, L/1000$ e $L/500$	225
Figura 5.11 - Dados para os exemplos da seção 5.5.2.....	228
Figura 5.12 - Modelos de distribuição de tensões residuais nas mesas de perfis laminados usualmente adotados.....	231
Figura 5.13 - Pórtico P3	239
Figura 5.14 - Curva força x deslocamento para o pórtico P3.....	243
Figura 5.15 - Pórtico P8; configuração e carregamento.....	244
Figura 5.16 - Ordem de formação das rótulas plásticas	246

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Valores teóricos e práticos recomendados de K para colunas ideais	15
Tabela 2.2 - Tabela de seleção de curvas de flambagem (adaptação da ref. 22)	54
Tabela 2.3 - Tabela de seleção de curvas de flambagem (adaptação da ref. 20)	64
Tabela 2.4 - Fatores de redução ρ em função dos parâmetros de esbeltez λ_c , para as curvas de flambagem (a), (b), (c) e (d) (adaptação da ref. 46)	67
Tabela 2.5 - Tabela de seleção de curvas de flambagem e tipos de perfis (adaptação da ref. 46)	68
Tabela 2.6 - Classificação de seções e curvas de flambagem (adaptação da ref. 13)	73
Tabela 5.1 - Coordenadas (x, y) e rotação (θ) da extremidade livre da viga em balanço da Fig. 5.1	198
Tabela 5.2 - Comparação entre os resultados de várias formulações do MEF para análise não-linear da viga em balanço da Fig. 5.3	200
Tabela 5.3 - Resultados da análise de viga da Fig. 5.4	202

Tabela 5.4 - Resultados da análise força x deslocamento do pórtico da Fig. 5.5	204
Tabela 5.5 - Resultados da análise da viga da Fig. 5.6 através da presente formulação.....	207
Tabela 5.6 - Resultados da análise do pórtico da Fig. 5.8 através da presente formulação.....	212
Tabela 5.7 - Resultados em deslocamentos no meio do vão da coluna da Fig. 5.9	220
Tabela 5.8 - Resultados em momentos fletores na seção central da coluna da Fig. 5.9.....	221
Tabela 5.9 - Valores de $P_{m\acute{a}x}/P_y$ da coluna da Fig. 5.9 considerando várias imperfeições iniciais δ_0	225
Tabela 5.10- Resultados da análise da resistência de colunas com tensões residuais conforme os dados da Fig. 5.11.....	229
Tabela 5.11- Resultados da análise da resistência de colunas com distribuições lineares e parabólicas das tensões residuais nas mesas dos perfis.....	232
Tabela 5.12- Resultados da análise da resistência de colunas considerando flambagem em torno dos eixos de menor e maior inércia e distribuição linear das tensões residuais nas mesas	234

Tabela 5.13- Resistências máximas relativas para várias combinações de tensões residuais e imperfeições iniciais.....	236
Tabela 5.14- Relações entre resistências máximas para várias combinações de tensões residuais e imperfeições iniciais..	236
Tabela 5.15- Deslocamentos Δ_B (in) no nível do primeiro andar do pórtico P3	241
Tabela 5.16- Momentos fletores M_B (kips x in) no topo da coluna do primeiro andar do pórtico P3	242
Tabela 5.17- Deslocamentos Δ_C (in) e momentos fletores M_B (tf x in) para o pórtico P8 da Fig. 5.15.....	245

LISTA DE SIGLAS

ABNT	-	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AISC	-	American Institute of Steel Construction
ASD	-	Allowable Stress Design
CRC	-	Column Research Council
CSA	-	Canadian Standards Association
ECCS	-	European Convention for Constructional Steelwork
EUROCODE	-	Norma Europeia para Cálculo e Projeto de Estruturas de Aço
FC	-	Flame Cut Plate
LRFD	-	Load and Resistance Factor Design
MEF	-	Método dos Elementos Finitos
NBR-8800/86	-	Norma Brasileira para Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios
NLF	-	Não-Linearidade Física
NLFG	-	Não-Linearidade Física e Geométrica

NLG	-	Não-Linearidade Geométrica
NLGM	-	Não-Linearidade Geométrica e do Material
NLM	-	Não-Linearidade do Material
PD	-	Plastic Design
PTV	-	Princípio dos Trabalhos Virtuais
SSRC	-	Structural Stability of Research Council
UM	-	Universal Mill Plate

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas

A	=	área da seção transversal
A_r	=	fator de amplificação
A_r, A_c	=	área da seção transversal de uma fibra na configuração de referência (inicial) e na configuração corrigida (atual), respectivamente
A^*	=	área transformada da seção transversal de um elemento curvo
\underline{A}	=	matriz de incidência cinemática
\underline{B}	=	matriz de mudança de coordenadas instantânea
\bar{B}	=	é a forma local de \underline{B}
C_c	=	índice de esbeltez correspondente à tensão de proporcionalidade efetiva
C_α	=	coeficientes de rigidez, onde $\alpha = 1,2,3$
$C_{\alpha m}$	=	coeficientes de rigidez médios, onde $\alpha = 1,2,3$
$\dot{d} = \frac{\dot{l}_c}{l_c}$	=	taxa instantânea de deformação
$ds_r, \bar{ds}_r,$ ds_c, \bar{ds}_c	=	comprimento de uma fibra situada a uma distância r do eixo da barra e de uma fibra situada neste eixo, respectivamente, na configuração de referência (r) e na configuração corrigida (c)
$D = D_{1/2}$	=	módulo de rigidez definido em função das tensões e deformações de engenharia
D_m	=	família de módulos de rigidez do material de uma fibra
D_m^e	=	módulo de rigidez elástica
D_m^{ep}	=	módulo de rigidez elasto-plástica

$\tilde{D} = D_{\alpha\beta}$	= matriz de rigidez constitutiva do elemento no sistema de coordenadas corrotacionais, onde $\alpha, \beta = 1,2,3$
E	= módulo de elasticidade longitudinal
E_r	= módulo reduzido ou duplo módulo
E_t	= módulo tangente
F_{cr}	= tensão crítica de flambagem
F_p	= tensão de proporcionalidade efetiva
F_r	= tensão residual de compressão
F_u	= tensão última considerando imperfeições iniciais e tensões residuais
F_y	= tensão de escoamento
\tilde{G}_α	= matriz simétrica que representa uma parcela da matriz de rigidez geométrica e vem da derivada segunda $q_{\alpha,ij}$, onde $\alpha = 1,2,3$ e $i = 1, \dots, 6$
$\bar{\tilde{G}}_\alpha$	= é a forma local de \tilde{G}_α
$\tilde{H} = H_{\alpha\beta}$	= matriz de rigidez geométrica do elemento no sistema de coordenadas corrotacionais, onde $\alpha, \beta = 1,2,3$
$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p}$	= parâmetro de endurecimento
I	= momento de inércia da seção transversal
I^*	= momento de inércia transformado da seção transversal de um elemento curvo
k_{ij}	= componentes da matriz de rigidez tangente no sistema global
$\tilde{k}_G, \bar{\tilde{k}}_G$	= matriz de rigidez geométrica no sistema global e local cartesiano, respectivamente
$\tilde{k}_M, \bar{\tilde{k}}_M$	= matriz de rigidez constitutiva no sistema global e local cartesiano, respectivamente
$\bar{\tilde{k}}_M^{ep}, \bar{\tilde{k}}_G^{ep}$	= matrizes de rigidez constitutiva e geométrica, respectivamente, no sistema local cartesiano em regime elasto-plástico

\tilde{k}_t, \bar{k}_t	= matriz de rigidez tangente do elemento no sistema global e local de coordenadas cartesianas, respectivamente
\tilde{k}_t^{ep}	= matriz de rigidez tangente do elemento no sistema local cartesiano em regime elasto-plástico
\tilde{k}_t^*	= matriz de rigidez tangente do elemento no sistema de coordenadas corrotacionais
$k_{\alpha\beta}^*$	= componentes da matriz de rigidez tangente no sistema corrotacional, onde $\alpha, \beta = 1,2,3$
K	= fator do comprimento efetivo de flambagem ou curvatura do eixo deformado
Kl	= comprimento efetivo (ou fictício) de flambagem
$\frac{Kl}{r}$	= índice de esbeltez
$\tilde{K}_t, \tilde{K}_t^*$	= matriz de rigidez tangente da estrutura elástica e elasto-plástica, respectivamente
l	= comprimento
l_r, l_c	= comprimento de uma fibra, ou da corda entre os nós da extremidade de uma barra ou elemento, na configuração de referência (inicial) e na configuração corrigida (atual), respectivamente
$\frac{l}{r}$	= índice de esbeltez
M	= momento fletor
M_{int}	= momento interno resistente da seção
N	= força normal
N_m	= força normal média
$\tilde{0}_3$	= matriz nula (3x3)
\tilde{p}, \tilde{p}_i	= vetor que contém os graus de liberdade do elemento em coordenadas globais cartesianas, ou vetor dos deslocamentos nodais do elemento, onde $i = 1, \dots, 6$
P	= força axial de compressão numa coluna

P_{cr}	=	carga crítica ou carga de bifurcação
P_e	=	carga de Euler
P_{fl}	=	carga de flambagem
P_i	=	forças nodais internas de um elemento no sistema global de coordenadas cartesianas
$P_r = \frac{E_r}{E} P_e$	=	carga do módulo reduzido ou do duplo módulo
$P_t = \frac{E_t}{E} P_e$	=	carga do módulo tangente
$P_y = A \cdot F_y$	=	força normal de escoamento
\vec{P}	=	vetor das forças internas no sistema local cartesiano
q_1	=	grau de liberdade natural que mede a mudança de comprimento da corda de um elemento
q_2, q_3	=	graus de liberdade naturais que medem o ângulo α_a da extremidade a do elemento e o ângulo α_b da extremidade b do elemento, respectivamente, na configuração corrigida, independentes da rotação de corpo rígido.
q_2^*, q_3^*	=	graus de liberdade correspondentes a q_2 e q_3 que incluem as imperfeições iniciais β_a e β_b , respectivamente
\vec{q}_α	=	vetor que contém os graus de liberdade naturais ou corrotacionais, onde $\alpha = 1, 2, 3$
Q	=	coeficiente de redução que leva em conta a flambagem local
$\vec{Q} = Q_\alpha$	=	vetor dos esforços internos naturais no sistema de coordenadas corrotacionais, onde $\alpha = 1, 2, 3$
r	=	raio de giração da seção transversal; distância entre o eixo de um elemento de barra curva e uma fibra paralela a este eixo
\vec{r}	=	vetor dos deslocamentos nodais da estrutura

R_r, R_c	= raio de curvatura da barra nas configurações de referência e corrigida, respectivamente
\tilde{R}	= vetor das forças externas concentradas aplicadas nos nós da estrutura
S^*	= momento estático de área transformado da seção transversal de um elemento curvo
\tilde{S}	= vetor dos esforços internos da estrutura
$t, \Delta t$	= tempo, intervalo de tempo
\tilde{T}	= matriz de rotação de eixos
u	= deslocamento da barra ao longo do eixo x
\bar{u}	= deslocamentos axiais dos pontos situados sobre o eixo inicialmente curvo
v	= deslocamento da barra ao longo do eixo y
\bar{v}	= deslocamentos transversais dos pontos situados sobre o eixo inicialmente curvo
V_r, V_c	= volume de uma fibra (ou elemento) na configuração de referência (inicial) e na configuração corrigida (atual), respectivamente
W	= trabalho realizado
x, y	= coordenadas cartesianas do sistema global de referência
x_a, y_a, x_b, y_b	= coordenadas nodais dos elementos na configuração de referência
$(x_r, y_r),$ (x_c, y_c)	= sistema de coordenadas local, corrotacional, na configuração de referência e na configuração corrigida, respectivamente

Letras Gregas

α	= ângulo de rotação do eixo de um elemento em relação à sua corda após a deformação; rotação da seção
α_a, α_b	= ângulos de rotação nas extremidades do eixo do elemento; $\alpha_a = q_2, \alpha_b = q_3$

α'	=	rotação específica
$\alpha + \beta$	=	ângulo entre a corda do elemento deformado e a tangente ao eixo do elemento; rotação das seções transversais de elementos com curvatura inicial, após a deformação
β	=	ângulo que define uma curvatura inicial para a barra descarregada; imperfeição inicial
β_a, β_b	=	imperfeições iniciais nas extremidades do elemento
β'	=	curvatura inicial de uma barra com imperfeição inicial
δ_0	=	flecha inicial, imperfeição inicial
$\delta\varepsilon$	=	deformação virtual de uma fibra
δ, Δ	=	deslocamento lateral de uma coluna ou parâmetro de deslocamento
$\delta p_i, \delta p$	=	vetor dos deslocamentos nodais virtuais do elemento
$\delta\omega_i$	=	trabalho virtual interno de um elemento
δW_e	=	trabalho virtual realizado pelas forças externas da estrutura
δW_i	=	trabalho virtual realizado pelas forças internas da estrutura
$\Delta \tilde{F}$	=	vetor das forças residuais
ε	=	deformação ou deformação de engenharia; campo de deformação
ε^e	=	parcela elástica da deformação total
ε_m	=	família de deformações
ε^p	=	parcela residual da deformação total; deformação plástica
$\bar{\varepsilon}$	=	deformação de engenharia de uma fibra do eixo da barra
$\bar{\varepsilon}_m = \frac{1}{l_r} \int \bar{\varepsilon} dx_r$	=	valor médio da deformação $\bar{\varepsilon}$ do eixo do elemento
$\dot{\varepsilon}_m = \frac{d\varepsilon_m}{dt}$	=	família de taxas de deformação

φ_r, φ_c	=	ângulo entre o eixo de referência global x e a corda entre os nós de extremidade do elemento na configuração de referência e na configuração corrigida, respectivamente
λ	=	estiramento de uma fibra ou auto valor de uma matriz
λ_c	=	parâmetro de esbeltez
$\bar{\lambda}$	=	parâmetro de esbeltez ou estiramento de uma fibra do eixo de uma barra
$\rho = \frac{F_u}{F_y}$	=	coeficiente adimensional, menor ou igual a 1,0, relacionado à instabilidade global de uma barra
θ	=	rotação da seção
θ_c	=	rotação de corpo rígido
σ	=	tensão normal ou tensão de engenharia
$\sigma_c = \frac{N}{A_c}$	=	tensão de Cauchy
σ_{KT}	=	tensão de Kirchhoff-Trefftz
σ_m	=	família de tensões
$\sigma_N = \frac{N}{A_r}$	=	tensão de engenharia (nominal)
σ_p	=	tensão limite de proporcionalidade
σ_r	=	tensões residuais
σ_y, σ_e	=	tensão inicial de escoamento, tensão de escoamento
$\dot{\sigma}_m$	=	família de taxas de tensionamento
ψ	=	fator de carga
$\psi_1(x_r),$ $\psi_2'(x_r),$ $\psi_3'(x_r)$	=	funções de interpolação para os deslocamentos $\bar{u}_c(x_r)$ e $\alpha(x_r)$
$\psi_2''(x_r),$ $\psi_3''(x_r)$	=	derivadas das funções de interpolação $\psi_2'(x_r)$ e $\psi_3'(x_r)$

RESUMO

LAVALL, A.C.C. *Uma formulação consistente para a análise não-linear de pórticos planos de aço considerando imperfeições iniciais e tensões residuais*. São Carlos, 1996. 265p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Neste trabalho desenvolve-se uma formulação teórica consistente para a análise não-linear, física e geométrica, de pórticos planos de aço, através do Método dos Elementos Finitos (MEF), considerando barras com imperfeições iniciais e tensões residuais nas suas seções transversais, visando analisar os critérios de resistência adotados para projeto das colunas de aço, baseados no conceito de resistência-última, e estudar o comportamento não-linear dos pórticos de aço considerando estes dois fatores. São feitas considerações qualitativas sobre a influência das imperfeições iniciais e das tensões residuais no cálculo da resistência das colunas, e é dada uma visão geral sobre a evolução dos critérios usados na prática para dimensionamento das colunas de aço. Apresenta-se o desenvolvimento da teoria geral, que leva em conta a presença das tensões residuais auto-equilibradas nas equações de equilíbrio do elemento. Este desenvolvimento é feito dentro de uma formulação Lagrangiana utilizando a técnica corrotacional para a dedução consistente da matriz de rigidez tangente do elemento de pórtico plano com imperfeição inicial. Para implementação desta formulação é desenvolvido um programa em linguagem FORTRAN para micro-computador capaz de fazer a análise não-linear elasto-plástica de pórticos planos, baseado num processo incremental-iterativo. Utiliza-se o modelo de fatias para avaliar os coeficientes de rigidez do elemento, modelo este que se mostrou bastante

adequado, permitindo o acompanhamento da plastificação ao longo da altura da seção e a consideração de qualquer modelo de distribuição das tensões residuais. Finalmente, os exemplos apresentados mostram a grande potencialidade da formulação desenvolvida. São analisados vários casos cujos resultados são comparados com os obtidos por outros autores, demonstrando a precisão e correção da teoria proposta. A aplicação na análise de pórticos de andares múltiplos confirma a validade da formulação e demonstra a sua aplicabilidade nos casos práticos.

Palavras-chave: Não-linearidade em estruturas de aço; Tensões residuais; Imperfeições iniciais.

ABSTRACT

LAVALL, A.C.C. *A consistent formulation for nonlinear analysis of steel plane frames considering initial imperfections and residual stresses*. São Carlos, 1996. 265p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

A consistent finite element formulation to consider material and geometric nonlinearities of steel plane frames is presented. Residual stresses and initial imperfections are considered to evaluate steel columns failure criteria based on the ultimate strength and also to investigate the nonlinear behavior of steel plane frames. Some qualitative considerations are made on the initial imperfections and residual stresses influence on the practical steel columns design. A general theory considering self equilibrated residual stresses is developed based on the Lagrangian formulation. Corotational technique is used to obtain the tangent stiffness matrix of plane frame taking the initial imperfection into account. A stand alone code has been written in FORTRAN and implemented on a microcomputer platform to perform incremental-iterative analysis of nonlinear elastoplastic plane frame problems. The frame element is made up of layers such that the plastic region can be readily identified and any kind of residual stresses through the cross section area can be taken into account in the analysis. Some examples are presented and their results compared to others in the literature. The multistory building analyses using the plane frame element presented in this research has shown to be very effective and useful to practical applications.

Keywords: Nonlinearities on steel structures; Residual stresses; Initial imperfections

INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

A publicação pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) da Norma Brasileira para Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifício (NBR - 8800/86) [13], representou uma notável mudança na filosofia de projeto e dimensionamento das estruturas de aço, pois ela substituiu o método das tensões admissíveis, largamente utilizado até então, pelo método dos estados limites que é um método mais racional para dimensionamento de estruturas.

Esta racionalidade do método dos estados limites e suas muitas vantagens sobre o método das tensões admissíveis, como listadas em SALMON & JOHNSON [111], indicam que a filosofia de projeto do método das tensões admissíveis estará ultrapassada em poucos anos. Cabe observar, contudo, que o conhecimento de ambos os métodos pelo calculista é ainda importante, porque muitas estruturas continuam sendo projetadas pelo método das tensões admissíveis e o calculista pode freqüentemente precisar avaliar estruturas do passado.

Dentre os vários temas abordados pela NBR-8800/86, um que chama especial atenção do autor devido à sua grande importância, principalmente no projeto de estruturas de aço, é o tema relacionado à estabilidade das barras, o qual é tratado com detalhe principalmente nos capítulos sobre

compressão e flexão. Com relação à flambagem das barras, a NBR-8800/86, que segue as recomendações do Load and Resistance Factor Design do AISC [7], baseou-se no modelo proposto pela European Convention for Constructional Steelwork (ECCS) [46, 47, 48] e adotou as “Curvas Múltiplas de Resistência”.

A introdução do conceito de “Curvas Múltiplas de Resistência” também significou uma mudança de filosofia importante no dimensionamento das colunas de aço, porque o conceito baseado no critério de “Bifurcação” foi substituído pelo conceito baseado no critério de “Resistência-Última” (problemas de força x deslocamento).

Os estudos de estabilidade em geral e das colunas em particular são bastante antigos e os resultados dos primeiros trabalhos sobre colunas [44, 45] estão, provavelmente, entre os mais conhecidos das pesquisas da engenharia estrutural. Contudo, apesar do fato de que o trabalho clássico de EULER sobre a estabilidade das colunas elásticas tenha sido completado em 1744, muita discussão continua a focalizar uma grande variedade de problemas associados com este elemento estrutural. Sendo assim, o estudo sobre as colunas, que pode parecer à primeira vista um problema simples, representa, na realidade, o fundamento de toda a teoria da estabilidade em estrutura de aço e o seu tratamento continua sendo muito importante.

Comitês europeus e americanos para estudos sobre estabilidade de estruturas, European Convention of Construction Steelworks (ECCS) e Structural Stability of Research Council (SSRC), respectivamente, têm realizado pesquisas sobre o assunto nas últimas décadas e têm fornecido orientações consistentes para projeto e dimensionamento de estruturas de aço. Estes comitês têm hoje o firme conceito de que, no mínimo, parâmetros como as tensões residuais existentes nos perfis de aço e as imperfeições

iniciais das barras devem ser considerados nos modelos para o cálculo da resistência das colunas, conseqüentemente, a filosofia da Resistência-Última das colunas é hoje o conceito mais moderno para a determinação das curvas de resistência das colunas de aço. Isto demonstra que a NBR-8800/86 adotou os critérios mais modernos e avançados na concepção filosófica para projeto, cálculo e dimensionamento de estruturas de aço.

Embora a importância de se considerar a análise da estabilidade no projeto de estruturas seja reconhecida pela maioria dos calculistas, o assunto ainda escapa ao domínio de muitos. A razão disto é que o uso da análise estrutural em teoria de primeira-ordem, no cálculo das estruturas, é ainda a prática mais comum dos escritórios de cálculo, pois seus conceitos são mais familiares para a maioria dos engenheiros. Entretanto, como é sabido, não se analisa estabilidade em teoria de primeira-ordem. Na verdade, a análise de estabilidade deve ser feita em teoria de segunda-ordem, que, fundamentalmente, considera o equilíbrio da estrutura na sua posição deslocada sob ação do carregamento. A análise em teoria de segunda-ordem é, portanto, mais complicada e sob o ponto de vista matemático pode-se dizer que as equações de equilíbrio resultantes são equações diferenciais não lineares, enquanto que na análise em teoria de primeira-ordem estas equações são diferenciais lineares.

Nas últimas décadas têm sido significativos os avanços em todas as áreas do conhecimento, em particular na engenharia, resultantes do desenvolvimento de equipamentos de teste e computacionais, permitindo melhor entendimento sobre os materiais e seus comportamentos, sobre os elementos estruturais, sobre os sistemas estruturais, sobre soluções e técnicas analíticas, sobre a análise de carregamentos, para citar alguns. Em resumo, o engenheiro está hoje numa posição em que ele pode resolver vários problemas devido aos recursos computacionais disponíveis atualmente e que anteriormente não poderiam ser colocados. Por isto e com

as perspectivas de desenvolvimento existentes para o futuro, é conveniente e realístico que se realizem, cada vez mais, pesquisas e estudos para o desenvolvimento de “softwares” que considerem as análises teóricas mais precisas e que ainda sejam fáceis de implementar nos computadores para uso prático.

Após estas considerações iniciais e constatando a importância do entendimento sobre o comportamento das colunas, o autor tem como objetivo principal neste trabalho desenvolver uma formulação teórica consistente em teoria de segunda-ordem, através do Método dos Elementos Finitos (MEF), considerando as imperfeições iniciais das barras e as tensões residuais existentes nos perfis, quando da sua fabricação. Com isto pretende-se fazer um estudo dos critérios de resistência adotados para as colunas de aço, baseados no conceito de resistência-última e, estender o estudo para a análise não-linear, física e geométrica dos pórticos planos de aço.

1.2 Descrição Sucinta dos Capítulos

No segundo capítulo é dada uma visão geral sobre a evolução dos critérios usados para a verificação da resistência à compressão das colunas de aço. Inicialmente, é descrita de forma sucinta, a evolução dos estudos sobre a estabilidade das colunas, desde os primeiros trabalhos clássicos de EULER [45] sobre o estudo da estabilidade elástica das colunas, passando por ENGESSER [44], que estuda a estabilidade das colunas no regime inelástico e introduz o conceito do módulo de rigidez tangente, e em seguida, o do módulo reduzido ou duplo-módulo, até SHANLEY [113] que esclareceu o “paradoxo” das colunas. Conforme estes conceitos a carga do módulo tangente, baseada no critério de bifurcação do equilíbrio, é então adotada na prática para representar a máxima resistência das colunas na

fase inelástica. A seguir são feitas considerações a respeito dos fatores que influenciam a resistência das colunas, dando-se ênfase às tensões residuais e às imperfeições iniciais, mostrando as suas fortes influências no cálculo da resistência destas. Na seqüência é mostrado que os estudos teóricos e experimentais desenvolvidos pelos Comitês de Estabilidade do SSRC e da ECCS, permitem afirmar que a máxima resistência das colunas deve ser calculada com base no critério da "resistência-última" e não no critério de "bifurcação do equilíbrio", considerando que as barras sempre apresentam imperfeições iniciais e tensões residuais oriundas do processo de fabricação. Finalmente, mostra-se a evolução dos critérios de resistência usados na prática para projetos de colunas de aço, segundo as normas de diversos países. Percebe-se claramente, a mudança do enfoque baseado no critério de bifurcação do equilíbrio para o critério da resistência-última e a introdução do conceito de curvas múltiplas de resistência no dimensionamento das colunas de aço.

No terceiro capítulo é apresentada uma formulação teórica consistente para a análise não-linear de pórticos planos considerando barras com imperfeições iniciais e tensões residuais na seção transversal. O Método dos Elementos Finitos, pela sua ampla utilização em praticamente todos os campos da engenharia, é adotado nesta formulação que considera ambas as não-linearidades, geométrica e do material, e um breve histórico da evolução do estudo destas não-linearidades, através do MEF, é feito. O desenvolvimento teórico é feito dentro de uma rigorosa formulação Lagrangiana, que utiliza a técnica corrotacional para a dedução consistente das matrizes do elemento do pórtico plano. É feita uma apresentação itemizada desta teoria, onde se definem as tensões e deformações conjugadas e objetivas que serão adotadas na análise. As relações constitutivas, elásticas e elasto-plásticas, são tratadas sucintamente e se introduz de forma consistente o módulo de rigidez do material. De acordo com a formulação Lagrangiana escolhe-se o sistema global de coordenadas

Lagrangiano ou Cartesiano fixo, e um sistema local de coordenadas corrotacional, ligado ao elemento, móvel, no qual levam-se em conta apenas os graus de liberdade naturais. A teoria estrutural adotada segue a hipótese atribuída a BERNOULLI-EULER, para a qual se define consistentemente toda a cinemática do elemento, onde os campos de deformação e deslocamento são deduzidos para o elemento com imperfeição inicial. Estuda-se então o equilíbrio do elemento com imperfeição inicial, via PTV, já considerando também a presença das tensões residuais auto-equilibradas na seção transversal, e deduz-se de forma consistente a matriz de rigidez tangente do elemento, que contém as parcelas constitutiva e geométrica. As interpolações usuais da Resistência dos Materiais são introduzidas no campo de deformação do elemento e a matriz \underline{k}_t pode ser explicitada. Finalmente, são introduzidas aproximações de segunda-ordem para se determinar analiticamente as matrizes de rigidez elástica e elasto-plástica que serão utilizadas no trabalho.

No quarto capítulo são descritos os aspectos principais do desenvolvimento e da implementação do programa incremental-iterativo, PPLANLEP, que foi desenvolvido para se fazer a análise elasto-plástica de pórticos planos, considerando que as suas barras tenham imperfeições iniciais e tensões residuais. São feitas algumas considerações sobre aspectos da análise não-linear de estruturas, onde se mostra a aplicação do método Newton-Raphson para a solução numérica das equações não-lineares, os critérios de convergência adotados e os critérios para verificação da estabilidade do equilíbrio. São apresentados alguns modelos constitutivos simplificados para aplicação em estruturas de aço e é mostrada a avaliação da matriz de rigidez tangente considerando a seção transversal dividida em fatias. Finalmente, apresenta-se o fluxograma do programa principal mostrando os passos principais para se fazer uma análise não-linear, incremental-iterativa, de estruturas de barras e é feita uma descrição sucinta das subrotinas que compõem este programa.

No quinto capítulo são apresentados vários exemplos onde se procura mostrar toda a potencialidade da formulação desenvolvida. Sendo assim, são primeiramente analisados problemas considerando apenas a não-linearidade geométrica para, em seguida, se estudarem problemas elasto-plásticos, em estruturas sem imperfeições. Posteriormente, analisam-se casos onde se consideram os efeitos isolados das imperfeições iniciais e das tensões residuais para, em seguida, analisar os efeitos da interação destes dois fatores. Finalmente, se estende a aplicação aos pórticos planos de aço, onde estes fatores são considerados na análise de pórticos de andares múltiplos, mostrando a grande aplicabilidade da formulação, tanto em problemas teóricos e acadêmicos, quanto em problemas práticos do dia-a-dia dos escritórios de projeto.

RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DAS COLUNAS DE AÇO

2.1 Introdução

2.1.1 Considerações Iniciais

No estudo da estabilidade das estruturas, as colunas são definidas como sendo aquelas barras submetidas somente a forças axiais de compressão através do centro de gravidade da seção transversal, admitindo-o coincidente com o centro de torção.

A estabilidade das colunas tem sido estudada há vários séculos e ainda hoje é um assunto que merece a maior atenção dos pesquisadores da área de engenharia estrutural, porque, de fato, representa o fundamento de toda a teoria da estabilidade das estruturas.

As colunas, nas estruturas usuais, raramente existem isoladas. O comportamento de uma coluna, como parte integrante de uma estrutura, é afetado pelo comportamento de outros elementos estruturais. Além das forças axiais, a estrutura impõe também às colunas restrições nas extremidades e outros esforços como momento fletor e/ou de torção, induzidos por outros elementos do arranjo estrutural. Contudo, algumas situações de projeto são idealizadas de tal forma que as restrições de extremidade sejam desprezíveis e as forças sejam aplicadas simetricamente pelos outros elementos ligados à coluna (por exemplo, as treliças), de tal forma que se possa considerá-la, seguramente, como uma coluna carregada

axialmente. Então, um profundo conhecimento da resistência das colunas individuais carregadas axialmente é necessário para o desenvolvimento de critérios de projeto para barras comprimidas em geral.

A resistência das colunas é caracterizada pela máxima força axial que pode ser suportada sem deslocamentos laterais excessivos. A Fig. 2.1a mostra uma coluna elástica, perfeitamente reta, carregada por uma força axial de compressão P .

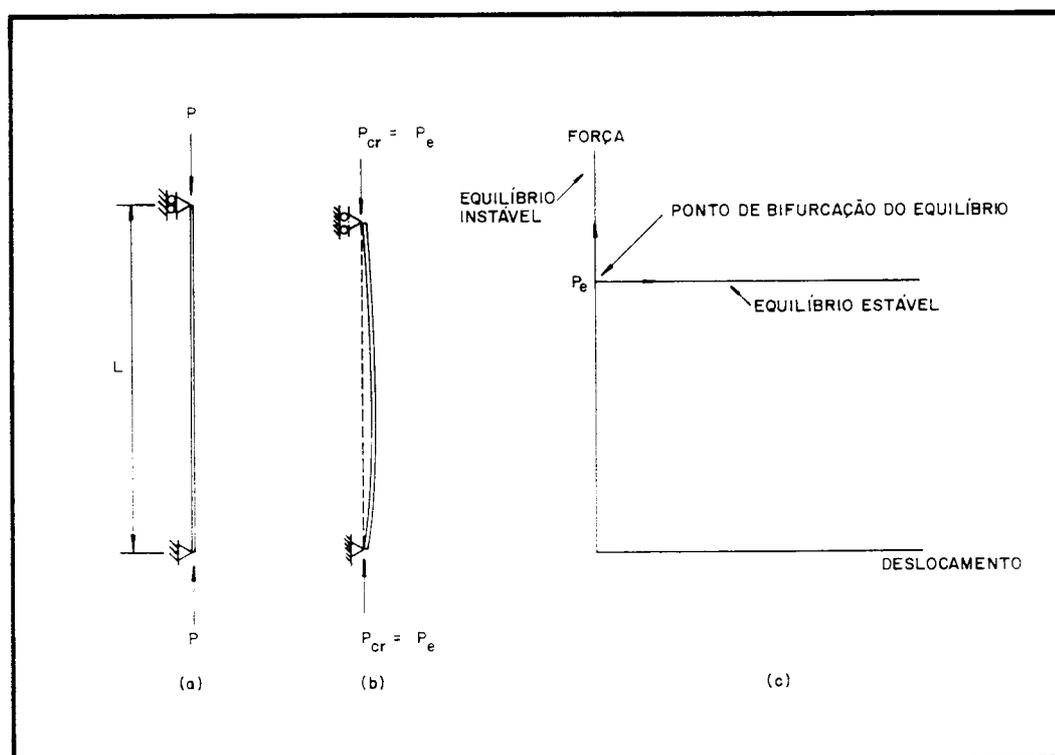


FIGURA 2.1 - CARGA DE EULER (RESISTÊNCIA MÁXIMA DAS COLUNAS ELÁSTICAS)

Se a força P for pequena, a coluna permanecerá na posição reta e sofrerá apenas deformação axial. Neste estágio de P , a coluna é dita estar em equilíbrio estável. Quando a força P é aumentada, uma condição é alcançada na qual o equilíbrio da coluna na posição reta deixa de ser estável. A forma reta passa a ser uma forma de equilíbrio instável e, nesta

condição, deslocamentos laterais excessivos tendem a aparecer. A força axial, que define este limite entre os equilíbrios estável e instável da forma reta da coluna, é conhecida como carga crítica (P_{cr}), ou carga de Euler (P_e), ou carga de flambagem (P_{fl}), Fig. 2.1b.

A carga crítica também define o ponto de bifurcação do equilíbrio da coluna elástica perfeitamente reta. Neste ponto a curva teórica, força x deslocamento lateral da coluna, bifurca em trajetórias de equilíbrio estável e instável, que correspondem às configurações deslocada e reta respectivamente (Fig. 2.1c). O fenômeno da bifurcação do equilíbrio é também conhecido como o fenômeno da flambagem.

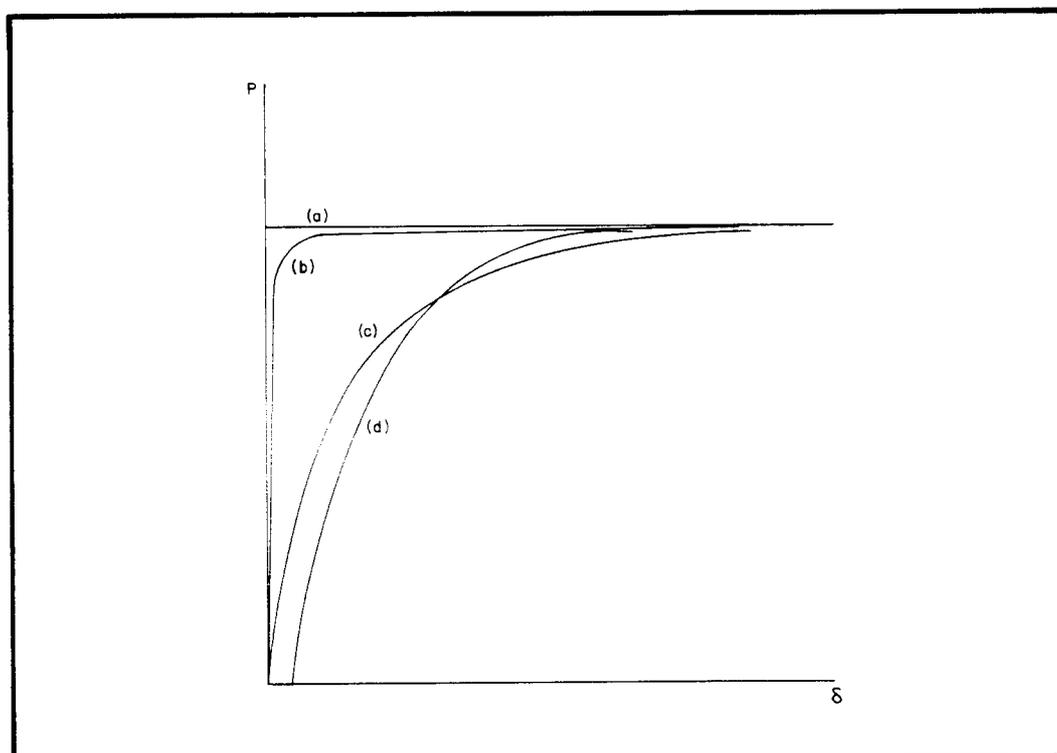


FIGURA 2.2 - CURVAS FORÇA x DESLOCAMENTO EM TEORIA DE 2ª. ORDEM E PEQ. DESLOC. :
 (a) COLUNA PERFEITAMENTE RETA, (b) COLUNA COM PEQUENA EXCENTRICIDADE DA FORÇA APLICADA, (c) COLUNA COM GRANDE EXCENTRICIDADE DA FORÇA APLICADA, (d) COLUNA COM IMPERFEIÇÃO GEOMÉTRICA INICIAL

O ponto de bifurcação existe somente para colunas perfeitamente retas e, na realidade, colunas perfeitamente retas não existem. Imperfeições

geométricas iniciais e/ou excentricidades do carregamento, que inevitavelmente estão presentes nas colunas usuais da prática, causam deslocamentos laterais na coluna desde o início do carregamento. Conseqüentemente, a curva força x deslocamento de uma coluna imperfeita se apresenta como mostrada na Fig. 2.2. As curvas (a), (b), (c) e (d) mostram, esquematicamente, o comportamento força x deslocamento lateral de uma coluna perfeitamente reta, de colunas imperfeitas com forças axiais aplicadas com pequena excentricidade e grande excentricidade, e colunas com imperfeições geométricas iniciais, respectivamente.

Se a coluna é imperfeita, com imperfeições geométricas iniciais e/ou forças aplicadas excentricamente, o critério da bifurcação do equilíbrio não pode mais ser aplicado e deve-se então adotar o critério da Resistência-Última para se determinar a carga última da coluna.

2.1.2 Flambagem Elástica ou de Euler

Atribui-se ao matemático LEONHARD EULER [45], com seus estudos de 1744, a origem da teoria da flambagem de colunas, uma vez que ele foi o primeiro a reconhecer que, a resistência destas barras era muito mais um problema de estabilidade global do que um problema de escoamento.

Considerando uma coluna perfeitamente reta, formada por um material elástico, engastada em uma extremidade e livre na outra, (Fig. 2.3), Euler usou o cálculo diferencial e integral, recentemente desenvolvido, para encontrar a equação para a forma da barra flambada, bem como a carga associada a esta configuração.

Na formulação teórica para obtenção da equação diferencial básica desta coluna, algumas hipóteses para a coluna ideal, em relação à

geometria, cinemática e material devem ser consideradas:

- a) A barra é perfeitamente reta e prismática, sem quaisquer imperfeições iniciais;
- b) A força axial é aplicada perfeitamente centrada e não muda de direção durante a sua aplicação (campo de forças conservativo);
- c) As seções planas antes das deformações, permanecem planas após as deformações;
- d) O eixo da barra é inextensível;
- e) Os deslocamentos laterais da barra são pequenos (teoria de 2ª ordem com pequenos deslocamentos);
- f) As deformações por cisalhamento podem ser desprezadas e a torção ou distorção da seção transversal não ocorre durante a flexão;
- g) O material é infinitamente elástico e obedece à lei de Hooke, é homogêneo, isótropo e isento de tensões residuais.

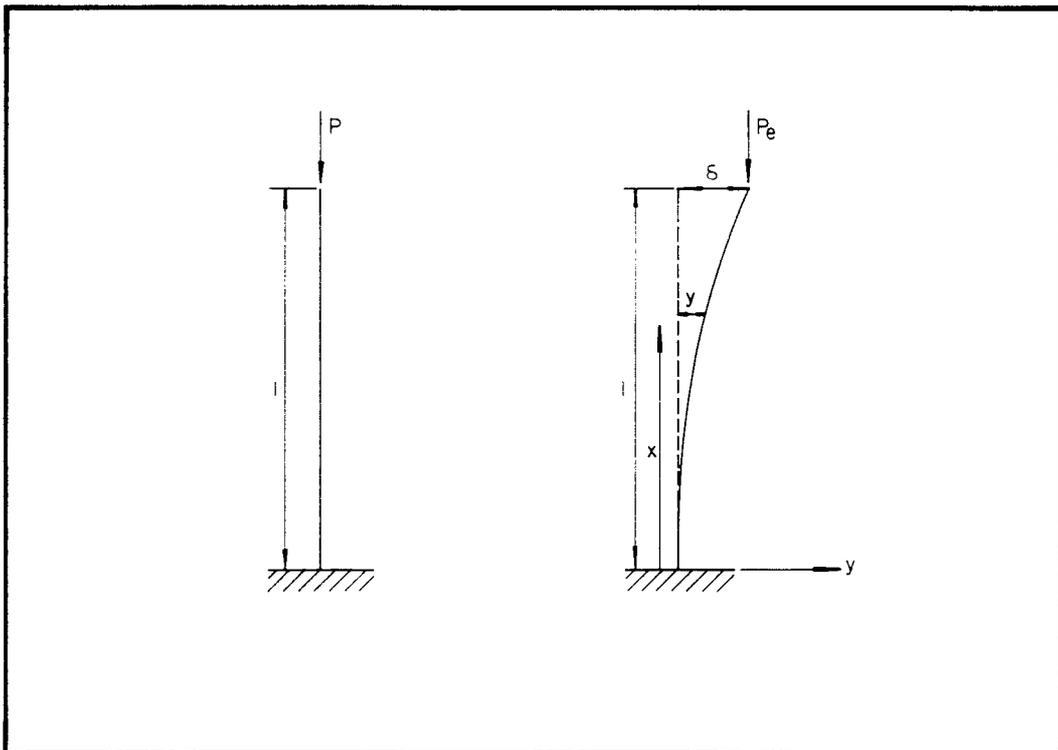


FIGURA 2.3 - COLUNA ENGASTADA E LIVRE

Admitindo-se então, válidas estas hipóteses, a equação diferencial do problema é obtida usando-se a análise de bifurcação ou análise de autovalor. A solução de autovalor para a equação característica desta equação diferencial dará a carga de flambagem da coluna. Esta carga corresponde ao estado no qual a bifurcação do equilíbrio acontece. Para esta carga, a forma reta original da barra deixa de ser estável, ou seja, sob esta carga, uma pequena perturbação lateral produzirá deslocamento lateral excessivo, que não desaparece quando a perturbação é retirada. Esta carga de flambagem, também chamada de carga crítica, ou carga de bifurcação, ou ainda, carga de Euler, é dada, para a coluna da Fig. (2.3), por:

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2} \quad (2.1)$$

onde:

E = módulo de elasticidade longitudinal

I = momento de inércia da seção transversal da coluna

l = comprimento da coluna

Deve-se observar que, numa análise de autovalor em teoria de 2ª ordem (o estudo do equilíbrio da estrutura é feito na sua posição deslocada) com pequenos deslocamentos, somente a forma e não as grandezas dos deslocamentos da coluna flambada, pode ser determinada. Isto acontece por causa das simplificações oriundas da hipótese de pequenos deslocamentos. Se o problema fosse estudado em teoria de 2ª ordem com grandes deslocamentos não mudaria o essencial dos resultados, apenas tornaria possível se obter a equação da curva pós-flambagem ($P > P_e$) com equilíbrio estável, conforme a curva tracejada da Fig. 2.4. Ou seja, as grandezas dos deslocamentos da coluna flambada poderiam ser determinadas.

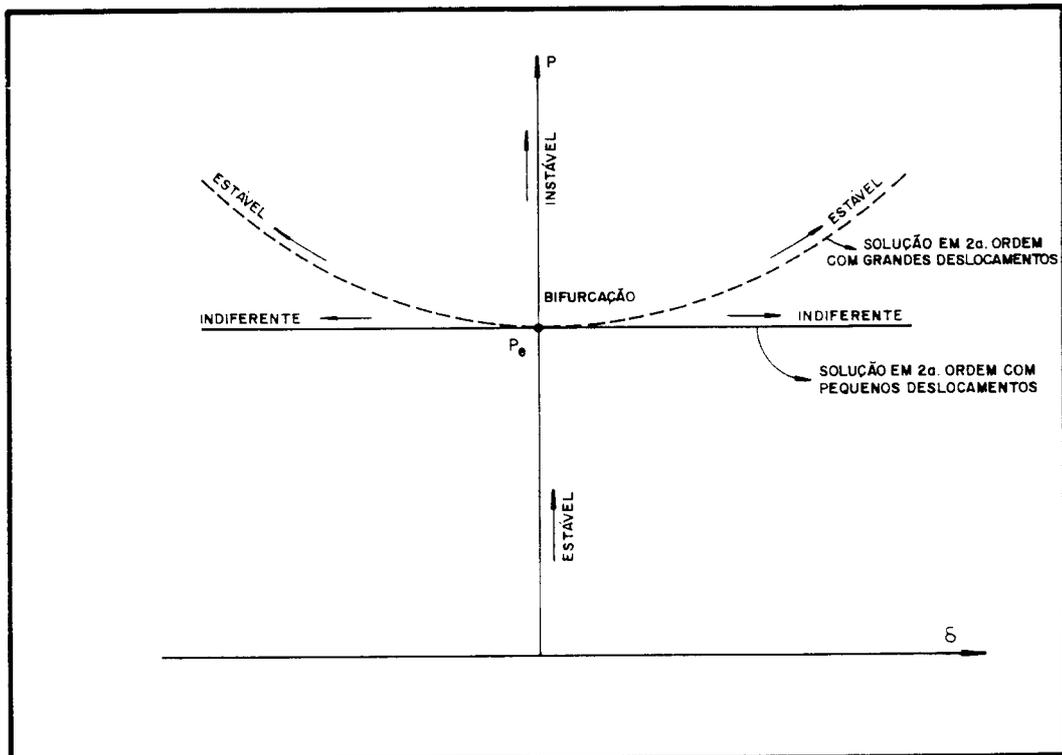


FIGURA 2.4- CONDIÇÃO DE EQUILÍBRIO EM TEORIA DE 2ª. ORDEM COM PEQUENOS E GRANDES DESLOCAMENTOS

Pensando em tornar a solução do problema mais geral, outras condições de extremidade para a coluna isolada devem ser consideradas. Usando a mesma formulação teórica anterior, pode-se mostrar que:

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2} \quad (2.2)$$

onde \$K\$ é o fator do comprimento efetivo de flambagem que depende das condições de extremidade da coluna. A Tab. 2.1, adaptada da referência [13], mostra os valores teóricos e práticos recomendados de \$K\$ para várias condições de contorno de colunas ideais. Esta recomendação ocorre porque as condições de extremidade do modelo teórico são ideais e, dificilmente, podem ser garantidas integralmente na prática.

TABELA 2.1 - VALORES TEÓRICOS E PRÁTICOS RECOMENDADOS DE K PARA COLUNAS IDEAIS						
A LINHA ELÁSTICA DE FLAMBAGEM DA COLUNA É REPRESENTADA PELA LINHA TRACEJADA	(a) 	(b) 	(c) 	(d) 	(e) 	(f)
VALORES TEÓRICOS DE K	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
VALORES PRÁTICOS DE K RECOMENDADOS PARA DIMENSIONAMENTO	0.65	0.80	1.2	1.0	2.10	2.0
CONDIÇÕES DE VINCULAÇÃO NAS EXTREMIDADES		ROTACÃO E TRANSLAÇÃO IMPEDIDAS ROTACÃO LIVRE E TRANSLAÇÃO IMPEDIDA ROTACÃO IMPEDIDA E TRANSLAÇÃO LIVRE ROTACÃO E TRANSLAÇÃO LIVRES				

Durante muitos anos a teoria de Euler foi ignorada, porque a resistência das colunas não coincidia com os resultados de testes. As colunas encontradas nas estruturas usuais da prática não apresentavam uma resistência tão elevada quanto a Eq. 2.2 previa. A Eq. 2.2 dá uma boa previsão do comportamento de colunas longas (esbeltas), enquanto as tensões normais na barra permanecem abaixo do limite de proporcionalidade, isto é, enquanto a barra permanece totalmente elástica. Para colunas curtas ou intermediárias, a hipótese de comportamento elástico não é mais válida. Sob a ação da força aplicada, algumas fibras da seção transversal escoam, conseqüentemente, somente a parte elástica da seção transversal poderá efetivamente resistir à força aplicada adicional e, neste caso, a carga de Euler superestimar a resistência da coluna. Neste

caso a flambagem ocorrerá num nível de tensão acima do limite de proporcionalidade (Fig. 2.5). Este tipo de flambagem é chamada de flambagem inelástica.

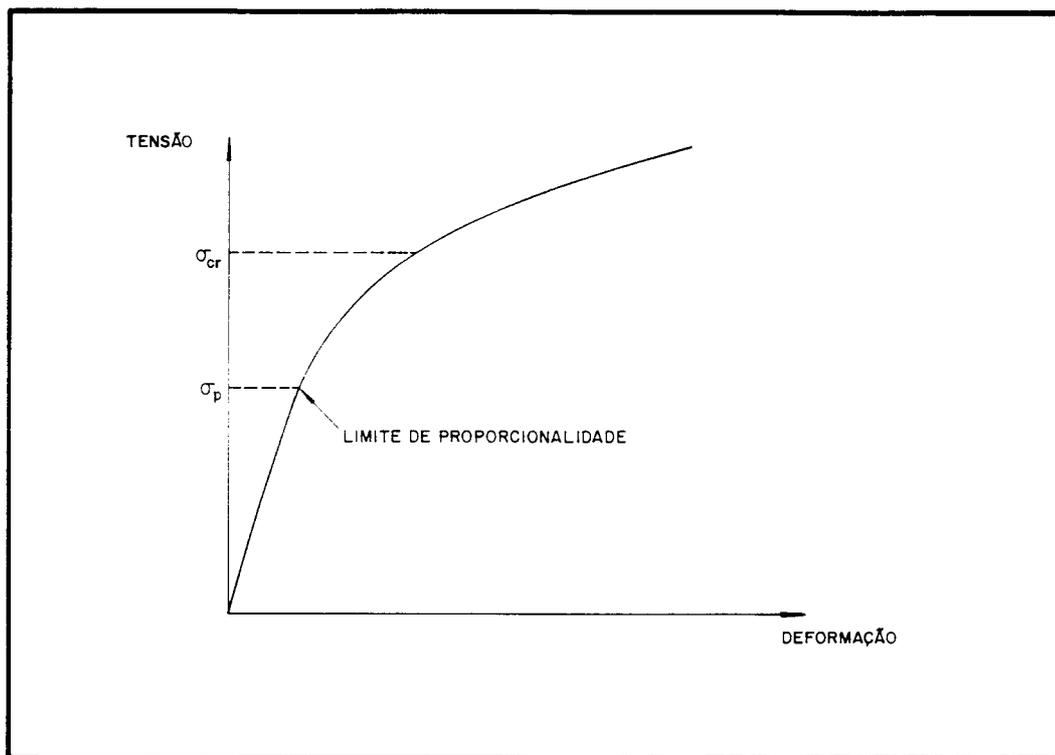


FIGURA 2.5 - TENSÕES CRÍTICAS ACIMA DO LIMITE DE PROPORCIONALIDADE (FLAMBAGEM INELÁSTICA)

De forma resumida, pode-se dizer que a flambagem elástica de Euler governa a resistência de colunas com elevados índices de esbeltez (colunas longas, esbeltas), o escoamento governa a resistência de colunas com baixos índices de esbeltez (colunas curtas) e na transição, entre as regiões elástica e plástica, a flambagem inelástica governa a resistência de colunas com índices de esbeltez intermediários.

2.1.3 Flambagem Inelástica

Observando as propriedades não-lineares de muitos materiais e os resultados de testes, que resultaram em resistências das colunas bem

abaixo daquelas previstas pela fórmula de Euler (Eq. 2.2), ENGESSER [44] e CONSIDÈRE [38] foram os primeiros a utilizar um módulo de elasticidade variável na região inelástica e duas teorias foram propostas por Engesser: a teoria do módulo tangente e a teoria do módulo reduzido.

Teoria do Módulo Tangente

Em 1889, Engesser propôs a sua teoria do módulo tangente para descrever o comportamento à flambagem de colunas cuja tensão crítica de flambagem está acima do limite de proporcionalidade do material, σ_p .

As seguintes hipóteses são feitas na teoria do módulo tangente:

- a) A coluna é perfeitamente reta;
- b) A coluna é bi-rotulada e a força de compressão é aplicada axialmente passando pelo CG da seção transversal;
- c) Os deslocamentos laterais da barra são pequenos (teoria de 2ª ordem com pequenos deslocamentos);
- d) As seções planas antes da deformação, permanecem planas após a deformação;
- e) Durante a flexão, não ocorre nenhuma inversão de deformação nas fibras da seção transversal (isto é, não há descarregamento de nenhuma fibra da seção transversal; não há deformação reversa na seção transversal).

A rigor, na primeira formulação da teoria do módulo tangente feita por Engesser, esta hipótese (e) era falaciosa. Pelo conceito clássico de flambagem em regime elástico linear, a bifurcação do equilíbrio acontecia com a força P aplicada permanecendo constante. Engesser usou o mesmo raciocínio para o regime inelástico e postulou que uma coluna homogênea, com valores de índice de esbeltez intermediário e de material obedecendo à curva tensão \times deformação ($\sigma \times \varepsilon$) mostrada na Fig. 2.6, alcançaria a

bifurcação do equilíbrio numa região acima do limite de proporcionalidade quando:

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{(kl)^2} = \frac{E_t}{E} P_e \quad (2.3)$$

onde E_t é o módulo tangente, definido como a inclinação, $d\sigma/d\varepsilon$, da curva tensão x deformação na tensão crítica $\sigma_{cr} = \sigma_t$ (Fig. 2.6).

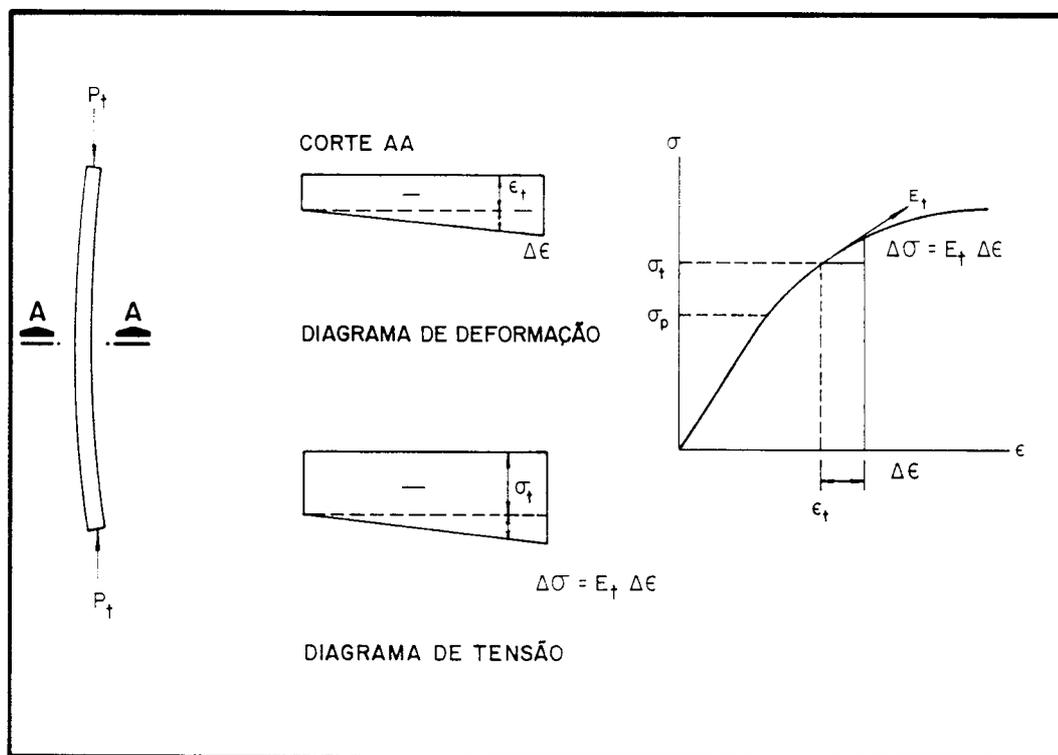


FIGURA 2.6 - TEORIA DO MÓDULO TANGENTE

O módulo tangente E_t depende apenas das propriedades do material e a carga do módulo tangente P_t , é menor do que a carga de Euler P_e , uma vez que $E_t < E$. Será mostrado mais à frente nesta seção, que a carga do módulo tangente representa a maior carga na qual a coluna ainda permanece reta.

Em 1895, Jasinky mostrou que a teoria do módulo tangente de Engesser era incorreta do ponto de vista da estabilidade clássica [51],

porque Engesser não considerava a não-reversibilidade do diagrama $\sigma \times \varepsilon$ em regime inelástico, que necessariamente devia ocorrer, se fosse mantido o raciocínio de que na bifurcação do equilíbrio a força aplicada P permanecia constante. Em 1898, Engesser corrigiu a sua teoria para incluir o efeito da não-reversibilidade do diagrama $\sigma \times \varepsilon$ na região inelástica, apresentando o conceito do módulo reduzido ou duplo módulo.

Deve ser mencionado no entanto, que a carga do módulo tangente P_t , dada pela Eq. 2.3, corresponde a valores bem próximos dos resultados de teste das colunas reais. Então, pensando em dar consistência à teoria do módulo tangente, a hipótese (e) fica correta, se for admitido que a força axial P aumenta durante a flambagem. Neste caso, a quantidade de aumento de P é tal que deformações reversas na seção transversal não ocorrerão e o módulo tangente E_t governará o comportamento $\sigma \times \varepsilon$ da seção total.

Teoria do Módulo Reduzido ou do Duplo Módulo

No desenvolvimento da teoria do módulo reduzido, também conhecida como a teoria do duplo módulo, as quatro primeiras hipóteses usadas no desenvolvimento da teoria do módulo tangente são também válidas. A quinta hipótese é diferente. A força axial é admitida ser constante durante a flambagem, como na teoria clássica da estabilidade. Como consequência desta hipótese, na flambagem, a deformação por flexão da coluna produzirá deformação reversa no lado convexo da barra, resultando que o módulo de elasticidade elástico E governará o comportamento $\sigma \times \varepsilon$ das fibras. O lado côncavo da coluna, por sua vez, continuará a ser carregado e então o módulo tangente E_t governará o comportamento $\sigma \times \varepsilon$ das fibras (Fig. 2.7). A carga crítica da coluna inelástica, baseada neste conceito, é chamada de carga do módulo reduzido ou do duplo módulo e é dada por:

$$P_r = \frac{\pi^2 E_r I}{(kl)^2} = \frac{E_r}{E} P_e \quad (2.4)$$

onde E_r é o módulo reduzido.

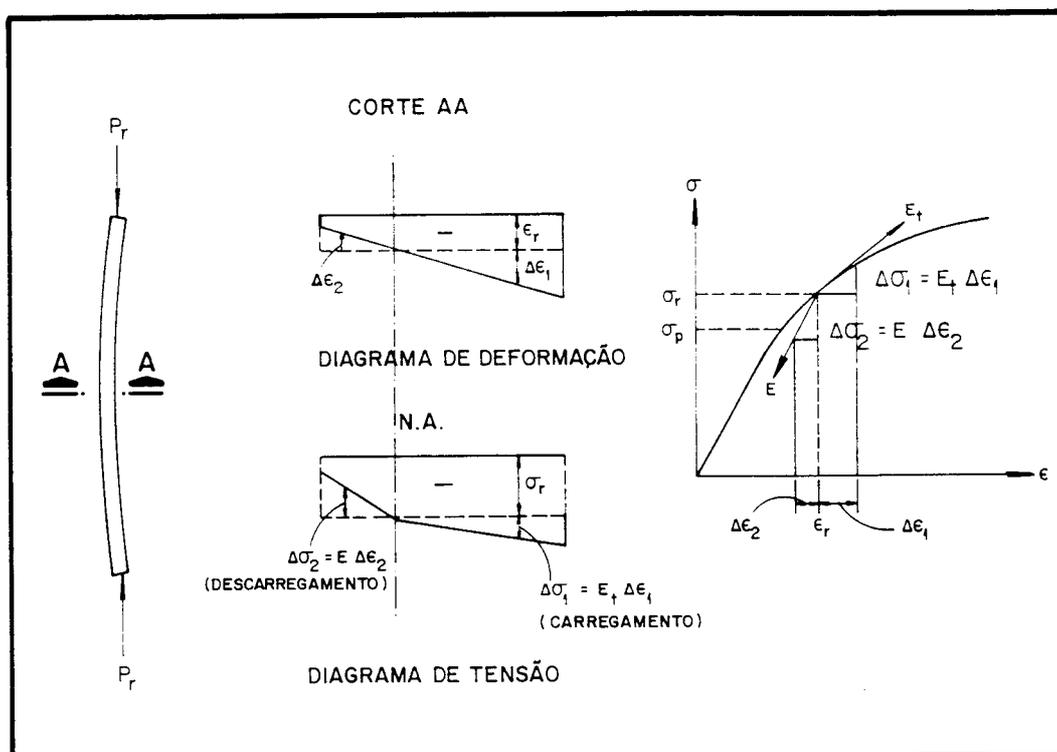


FIGURA 2.7 - TEORIA DO MÓDULO REDUZIDO (DUPLO MÓDULO)

O módulo reduzido é uma função do módulo tangente e da geometria da seção transversal, conforme mostrado em [34, 51, 107]. Conseqüentemente, a carga do módulo reduzido P_r , depende das propriedades do material e da geometria da seção transversal, ou seja, para o mesmo material, o módulo reduzido será diferente para diferentes formas da seção transversal.

Conforme mostrado em [34, 107], o módulo reduzido E_r é sempre menor do que o módulo de elasticidade E , mas é sempre maior do que o módulo tangente E_t , isto é:

$$E_t < E_r < E \quad (2.5)$$

conseqüentemente,

$$P_t < P_r < P_e \quad (2.6)$$

Conceito de Shanley para Colunas Inelásticas

Testes realizados em colunas reais, demonstraram que as suas cargas de colapso ficam mais próximas das cargas do módulo tangente do que das cargas do módulo reduzido. Isto representou, durante quase cinquenta anos, um dilema para os engenheiros, porque eles estavam convencidos de que o conceito teórico usado na teoria do módulo reduzido era mais correto do que o conceito do módulo tangente.

A justificativa teórica para este paradoxo foi dada por SHANLEY [113] que, em 1947, usou um modelo físico de coluna, simplificado, para explicar o comportamento à flambagem da coluna inelástica, acima da carga do módulo tangente.

Relembra-se que na teoria do módulo tangente, um pequeno aumento na força axial P é admitido no início da flambagem, de tal forma que nenhuma deformação reversa ocorra em qualquer seção transversal, quando a coluna flete sob a ação da força P_t . Por outro lado, na teoria do módulo reduzido, a força axial é admitida permanecer constante na flambagem, de tal forma que uma completa deformação reversa ocorra no lado convexo da coluna, quando ela flete sob a ação da força P_r . Na teoria

da coluna inelástica de Shanley, é admitido que a flambagem é acompanhada simultaneamente por um incremento na força axial P , contrariamente ao postulado na teoria do módulo reduzido, mas este incremento é tal que deformações reversas possam ocorrer no lado convexo da coluna, contrariamente ao afirmado na teoria do módulo tangente.

Shanley mostrou que a bifurcação do equilíbrio acontecerá, quando a força aplicada alcança a carga do módulo tangente P_t (Fig. 2.8). Após a bifurcação, o aumento no deslocamento lateral é acompanhado por um pequeno aumento na força acima de carga P_t e, quando este deslocamento lateral tende para o infinito, a força P tende para a carga do módulo reduzido P_r .

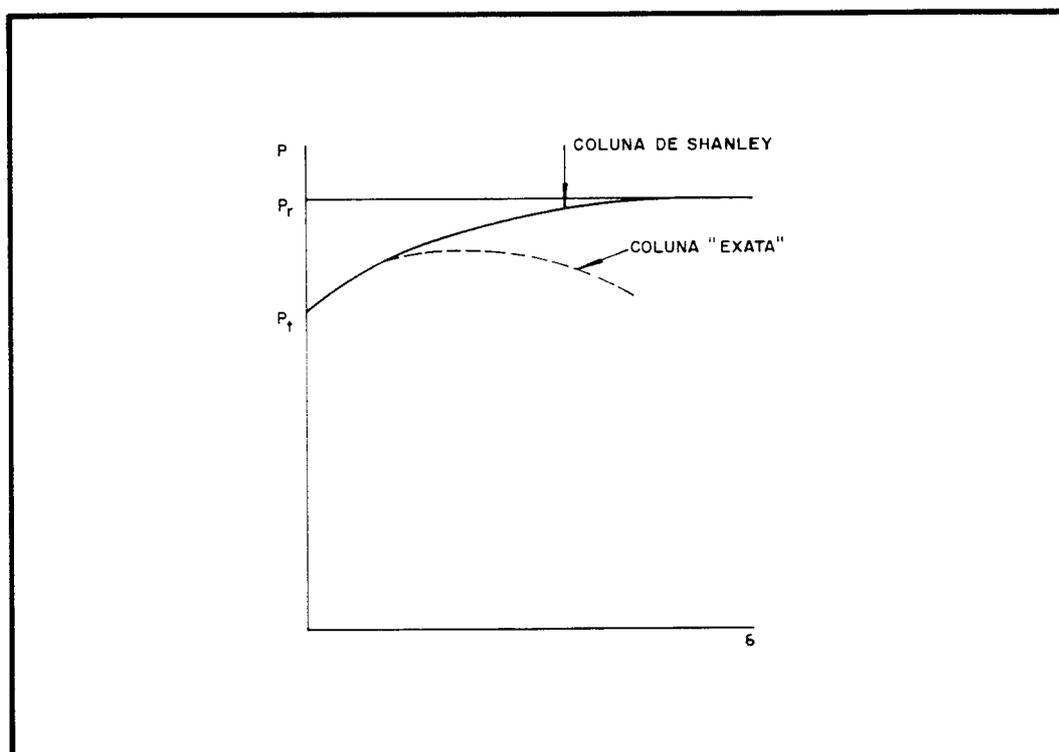


FIGURA 2.8 - COMPORTAMENTO POS-FLAMBAGEM DE COLUNAS DE ACORDO COM A TEORIA DE SHANLEY

A teoria do módulo reduzido e a teoria do módulo tangente, bem como o conceito da coluna inelástica de Shanley (baseado num modelo

físico simplificado), fornecem soluções e explicações para o comportamento de colunas inelásticas perfeitamente retas, que podem ser extrapoladas para os modelos “exatos” de colunas. Para uma coluna “exata”, na qual E_t varia através da seção transversal e ao longo do comprimento da coluna, o comportamento força x deslocamento ($P \times \delta$) da coluna é dado pela curva tracejada da Fig. 2.8.

Uma observação importante é que a máxima carga é, realmente, um pouco maior que a carga do módulo tangente, desde que a coluna seja perfeitamente reta, conseqüentemente, a carga do módulo tangente P_t representa um limite inferior e a carga do módulo reduzido P_r representa um limite superior da resistência de uma coluna inelástica, perfeitamente reta, axialmente comprimida. Deve-se ainda mencionar, [32], que a carga do módulo reduzido somente pode ser alcançada, se a coluna é artificialmente mantida numa posição reta, quando a carga do módulo tangente for ultrapassada. A carga do módulo reduzido não pode nunca ser alcançada se uma pequena imperfeição inicial está presente na coluna.

Com o auxílio do modelo de Shanley pode-se afirmar que, [51, 107]:

- a) A teoria do módulo tangente fornece a máxima carga, na qual a barra ainda permanece reta;
- b) A carga máxima real excede a carga do módulo tangente P_t , mas é inferior a carga do módulo reduzido P_r ;
- c) As cargas $P > P_t$ provocam deslocamentos laterais nas barras.

A rigor, as teorias tratadas até agora dizem respeito às colunas perfeitamente retas. De fato, as colunas usuais da prática não podem ser consideradas perfeitamente retas. As imperfeições iniciais inevitáveis estão sempre presentes nestas colunas usuais e tendem a diminuir a carga máxima das barras, aproximando-as mais das cargas do módulo tangente do que das cargas do módulo reduzido.

Acrescentando-se a isto a maior comodidade de se trabalhar com a carga do módulo tangente, esta teoria tem sido adotada na prática para representar a carga de colapso de uma coluna axialmente comprimida na fase inelástica.

2.2 Fatores que Influenciam a Resistência das Colunas

2.2.1 Considerações Iniciais

Além do comprimento da barra, cujo efeito na resistência das colunas é muito bem conhecido, outros parâmetros importantes que influenciam na resistência das colunas de aço podem ser itemizados:

- a) Limite de escoamento do aço;
- b) Forma da seção transversal;
- c) Eixos de flexão;
- d) Método de fabricação;
- e) Dimensões da seção transversal;
- f) Condição de vinculação nas extremidades;
- g) Presença das tensões residuais;
- h) Grandeza das imperfeições iniciais;

A maioria destes itens são reconhecidos como essenciais na avaliação da resistência das colunas. As influências do limite de escoamento do aço, da forma da seção transversal e dos eixos de flexão, sendo bem conhecidas, não serão tratadas neste trabalho. O método de fabricação determina a forma da seção transversal e, juntamente com as dimensões desta, influenciam na grandeza e distribuição das tensões residuais existentes nos perfis de aço. Outro fator importante cujo entendimento tem tido grandes avanços nos últimos doze anos, com extensivas pesquisas de CHEN [32], BJORHOVDE [22 a 25] e outros, é a consideração das vinculações nas extremidades das colunas numa

estrutura usual da prática. O estado da arte do conhecimento da resistência e do comportamento das colunas considera barras que contêm tensões residuais, imperfeições iniciais e cujas extremidades têm uma vinculação realista com a estrutura. Neste trabalho serão tratados, principalmente, os itens referentes às tensões residuais e às imperfeições iniciais.

Para colunas de aço, a principal causa da não-linearidade do diagrama tensão x deformação da seção transversal são as tensões residuais, conforme afirmam ALPSTEN et al [2], que aparecem como resultado do processo de fabricação (perfis laminados ou soldados, por exemplo).

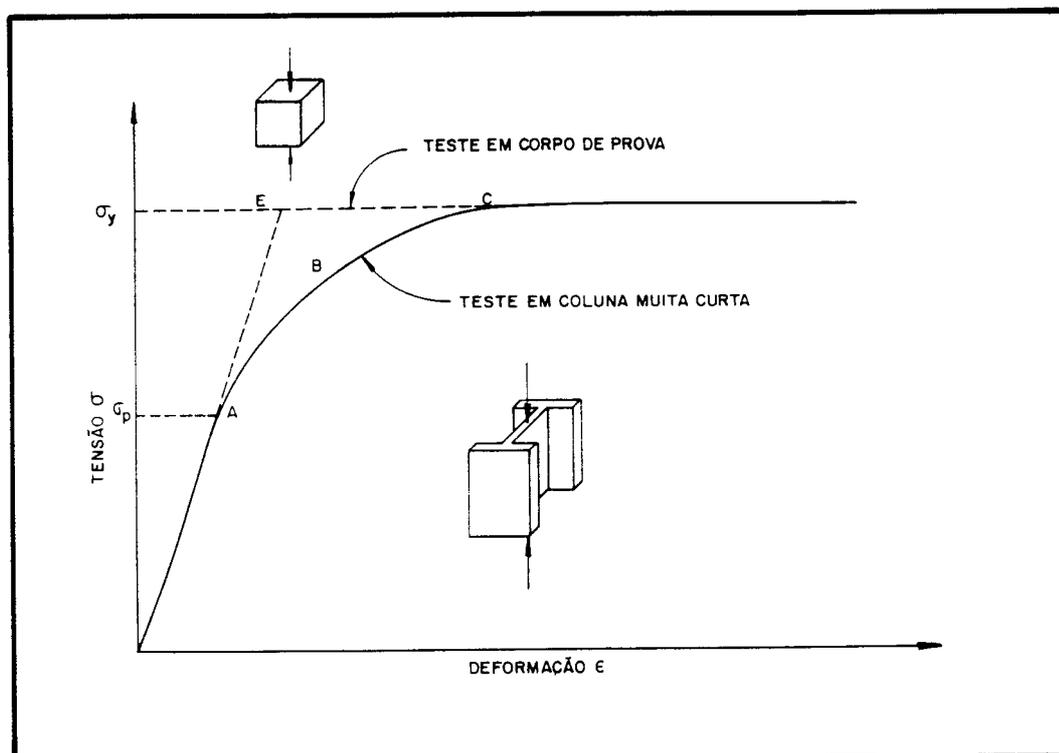


FIGURA 2.9 - GRÁFICO TENSÃO x DEFORMAÇÃO PARA O AÇO

Quando uma força axial é aplicada numa coluna muito curta, as fibras que têm tensões residuais de compressão escoarão em primeiro lugar e as

fibras que têm tensões residuais de tração escoarão depois. O resultado disto é que o escoamento na seção transversal de uma coluna é um processo gradual, ou seja, a transição entre a tensão limite de proporcionalidade σ_p , (região elástica), e a tensão de escoamento σ_y (região plástica), é feita de forma suave como mostra a Fig. 2.9, caracterizando o regime inelástico. Também está mostrado na Fig. 2.9, o comportamento tensão x deformação de um corpo de prova livre de tensões residuais, através da linha tracejada, que exhibe um comportamento elasto-plástico perfeito.

As imperfeições geométricas, vistas como as imperfeições iniciais (ou curvaturas iniciais) inevitáveis das colunas e/ou as excentricidades da força axial, introduzem flexão desde o início do carregamento, e a curva D da Fig. 2.10 mostra o comportamento destas colunas inicialmente imperfeitas. Os deslocamentos laterais (Δ) existirão desde o início do carregamento, sendo assim, a carga máxima será função destas imperfeições.

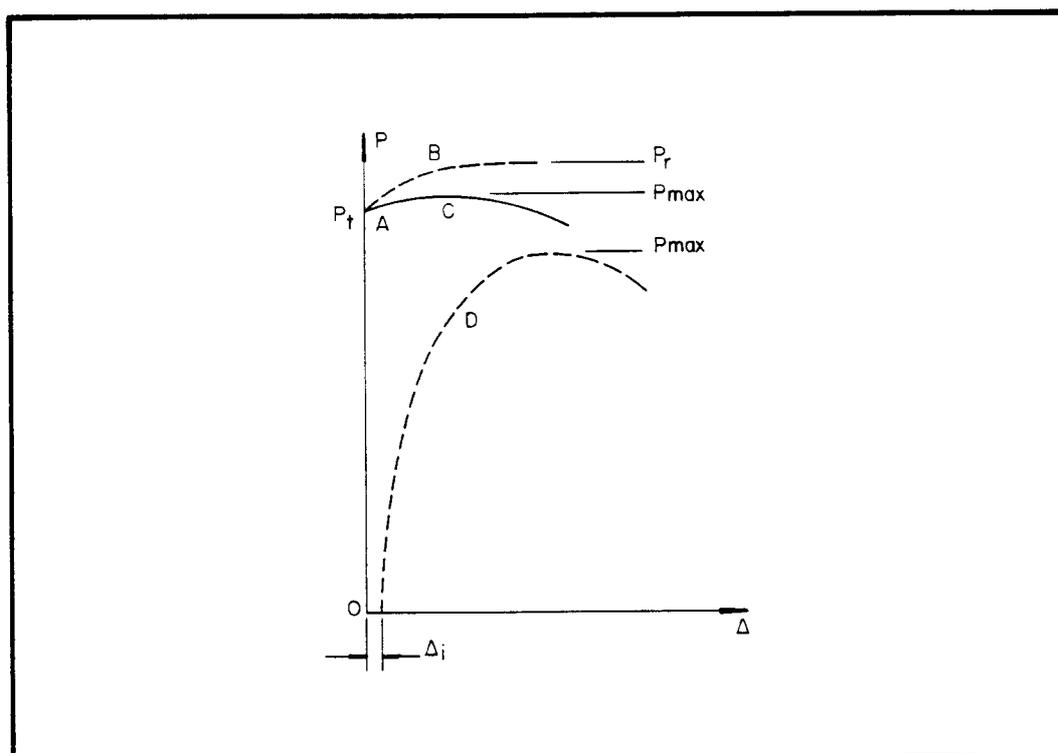


FIGURA 2.10 - COMPORTAMENTO DE COLUNAS PERFEITAS E IMPERFEITAS

A recomendação atual, [46,47, 48,50], é que a resistência das colunas deve ser determinada incluindo, pelo menos, os efeitos das tensões residuais e das imperfeições iniciais. Neste capítulo será feita uma análise qualitativa da influência desses efeitos na resistência das colunas e no decorrer do trabalho, serão feitos estudos numéricos detalhados mostrando como determinar estas máximas resistências.

2.2.2 Tensões Residuais

As tensões residuais aparecem nos perfis de aço estruturais e chapas durante o processo de fabricação e permanecem inevitavelmente, se nenhum processo de alívio de tensões é utilizado. Estas tensões residuais resultam das deformações plásticas que ocorrem durante o processo de fabricação, principalmente devido ao resfriamento não-uniforme após a laminação ou soldagem de peça.

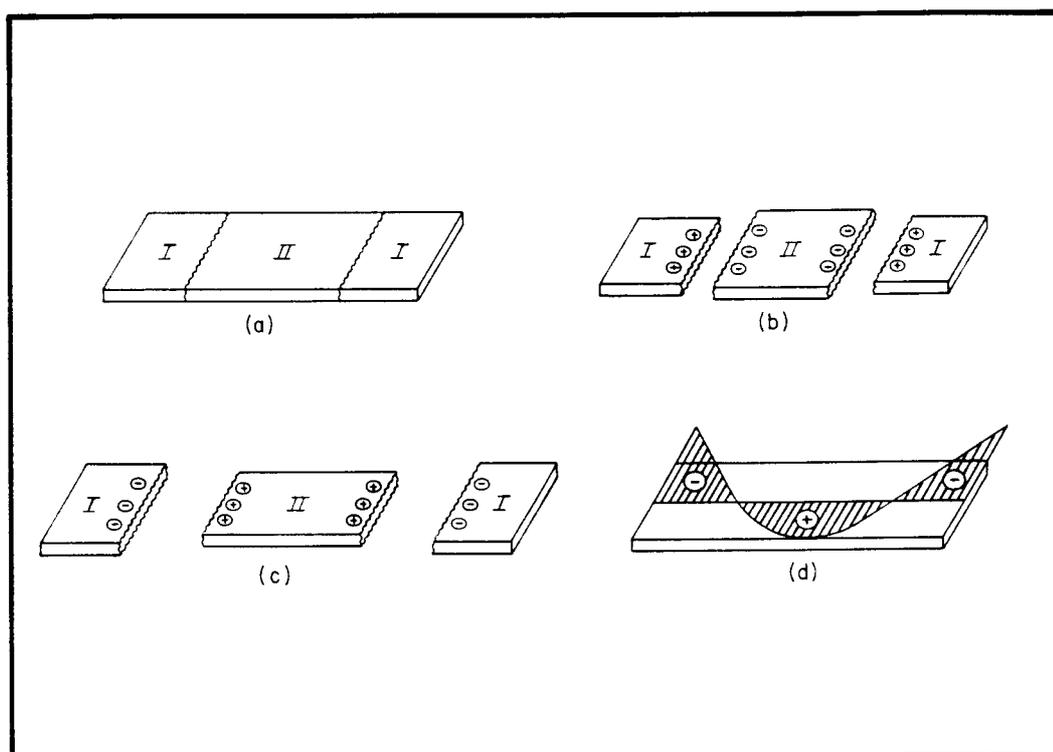


FIGURA 2.II - ESQUEMA DO MECANISMO DE FORMAÇÃO DAS TENSÕES RESIDUAIS

Na fase final de fabricação de uma chapa, por exemplo, as partes externas, mais expostas ao ar (região I da Fig. 2.11a), resfriam mais rapidamente do que as partes internas (região II da Fig. 2.11a). As regiões mais frias tendem a contrair, mas sofrem resistência das regiões mais quentes nas quais, então, aparecem tensões de compressão (-), (Fig. 2.11b). Estas regiões mais quentes, com altas temperaturas, têm tensão de escoamento mais baixa, e conseqüentemente, elas escoam por compressão. Quando o material resfria à temperatura ambiente, a região central (II) tende a ficar encurtada em relação à região (I), pois havia escoado por compressão anteriormente. Neste momento, o encurtamento da região (II) sofre restrição da região (I) que agora fica comprimida (-). Para que haja equilíbrio das tensões longitudinais na seção, a região central (II) fica tracionada (+), (Fig. 2.11c). Pode-se concluir que para perfis soldados ou laminados, a parte que resfria em primeiro lugar fica comprimida e a que resfria por último fica tracionada, (Fig. 2.11d).

Segundo GALAMBOS [50] o valor e a distribuição das tensões residuais dependem da forma da seção transversal, da temperatura de laminação ou soldagem, das condições de resfriamento, dos métodos de retificação das peças e das propriedades do material. Conforme mencionado em [2,19] a tensão de escoamento do aço não é um fator importante na formação das tensões residuais; sendo assim, o valor das tensões residuais nos perfis de alta resistência é da mesma ordem de grandeza das tensões residuais nos perfis comuns.

As tensões residuais têm, então, um papel importante no dimensionamento das colunas de aço, [2, 132], pois sendo a principal causa da não-linearidade do diagrama tensão x deformação na região inelástica, elas afetam significativamente a resistência das barras de aço na compressão.

a) Perfis Laminados à Quente

Nos perfis laminados à quente, a região das mesas resfria-se mais lentamente do que a região da alma, porque é mais espessa. Também, as partes mais expostas ao ar, como as extremidades das mesas e a região central da alma, resfriam-se mais rapidamente. Como visto anteriormente, as extremidades das mesas e a região central da alma ficarão comprimidas e as junções entre a alma e as mesas ficarão tracionadas por resfriarem mais lentamente. Exemplos de distribuições de tensões residuais em alguns perfis laminados à quente são mostrados na Fig. 2.12.

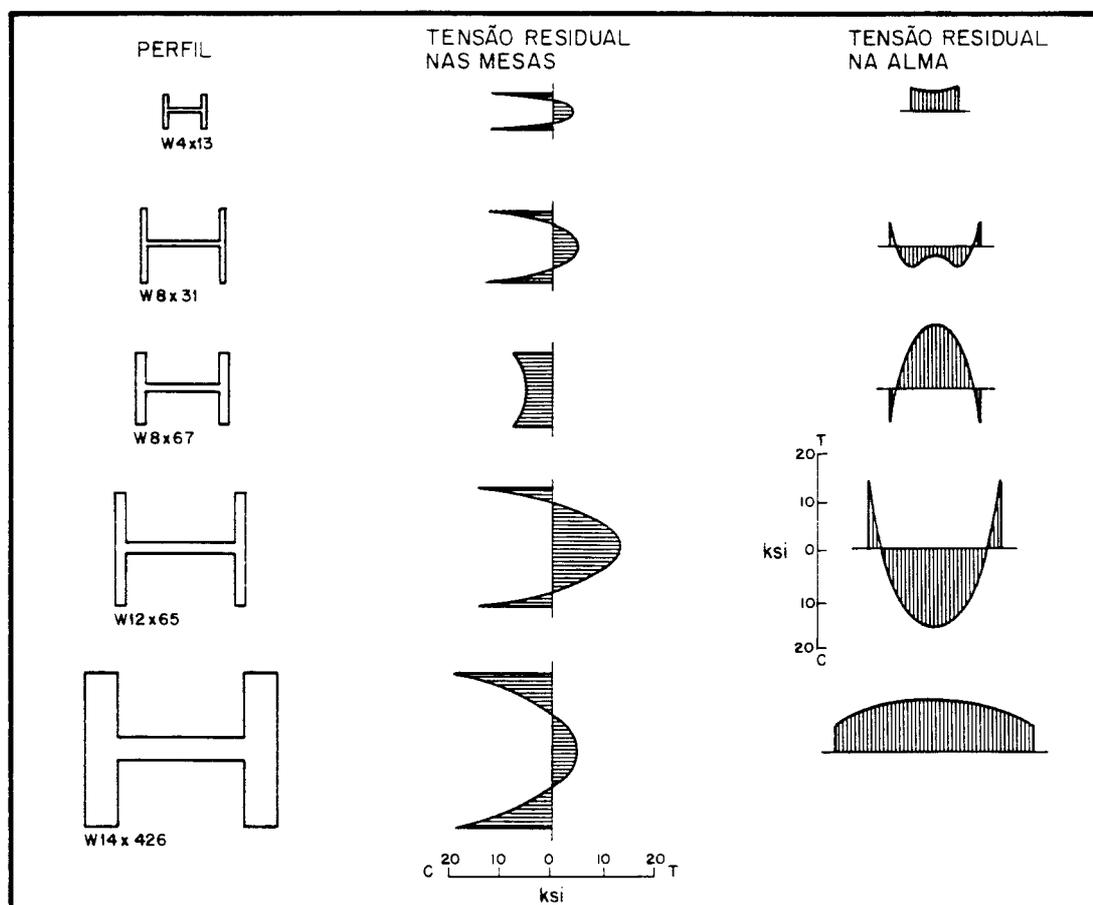


FIGURA 2.12 - DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES RESIDUAIS EM PERFIS "WIDE-FLANGE" LAMINADOS A QUENTE

A grandeza e a distribuição das tensões residuais afetam significativamente a resistência das colunas, como ilustra a Fig. 2.13, onde

são mostradas as cargas críticas das colunas, obtidas de ensaios de laboratório para flambagem em torno do eixo de menor inércia, baseadas nas tensões residuais encontradas para os cinco perfis da Fig. 2.12.

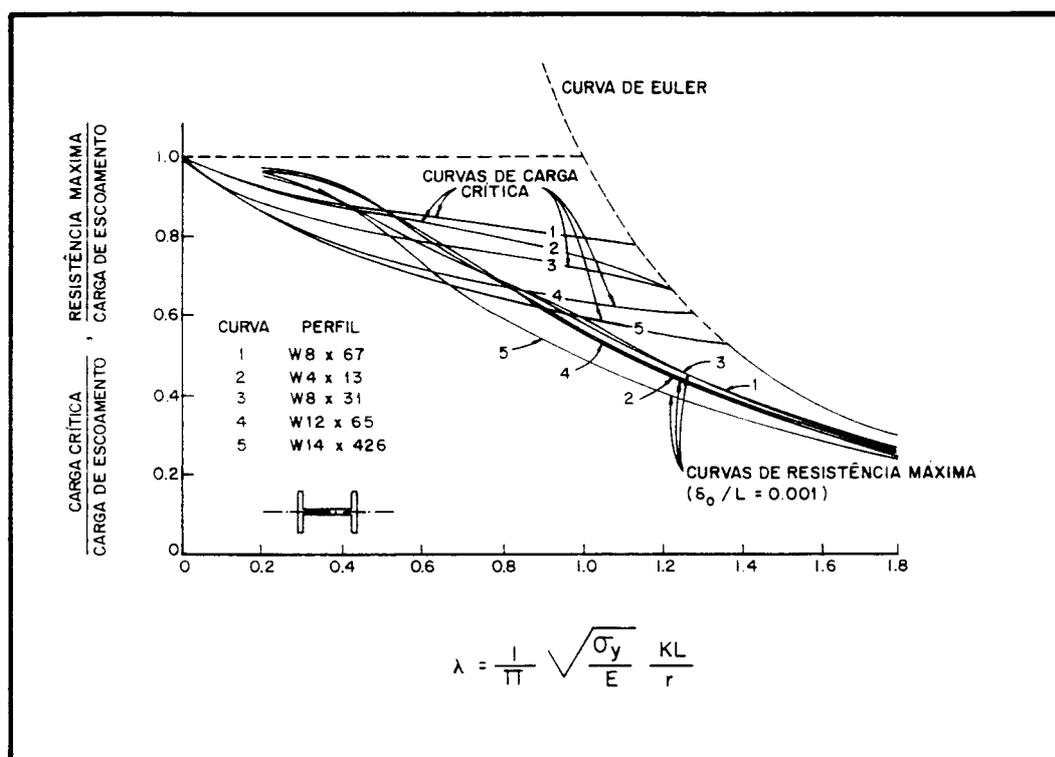


FIGURA 2.13 - CURVAS DE CARGA CRÍTICA E DE RESISTÊNCIA MÁXIMA PARA OS PERFIS LAMINADOS INDICADOS

b) Perfis Soldados

Para os perfis soldados existem dois casos a considerar, conforme classifica PIMENTA, R. J. [101]:

Perfis formados com chapas de bordas laminadas (ou cortadas mecanicamente; abreviadamente UM de “Universal Mill Plate”) - Como mostrado na Fig. 2.14a, as chapas UM tem tensões residuais de compressão nas suas extremidades. Em perfis H soldados, compostos de chapas UM, a solda de união das mesas com a alma aumenta a tensão de

compressão nas extremidades das mesas, ampliando a região das tensões residuais de compressão, o que afeta de forma adversa a resistência das colunas.

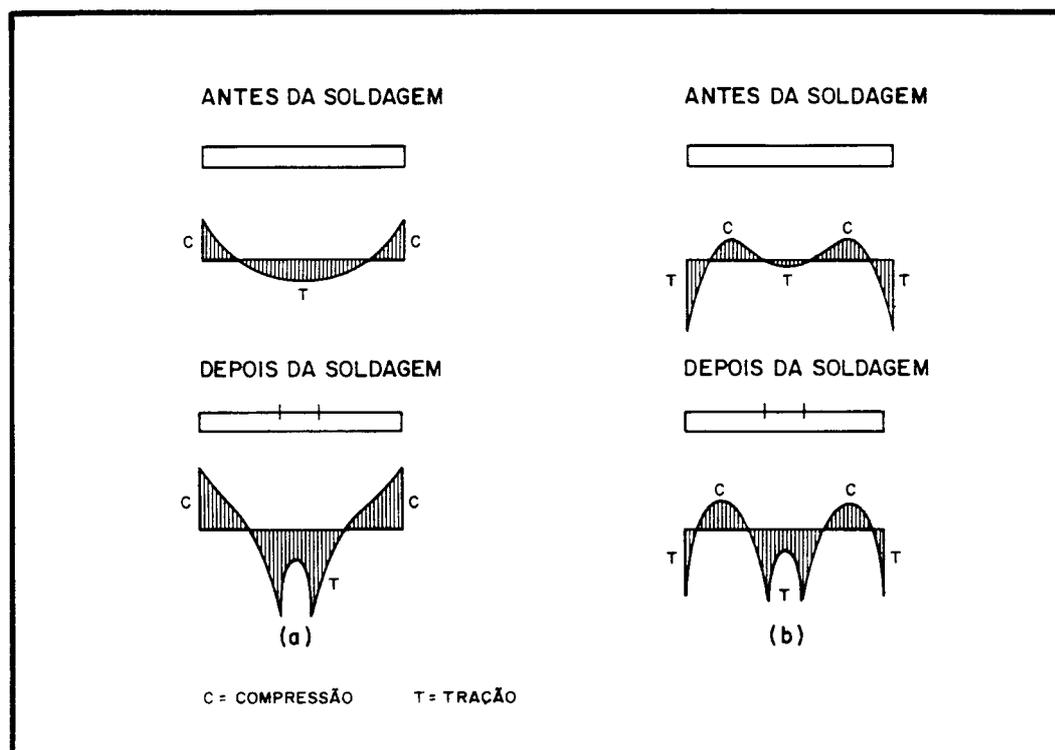


FIGURA 2.14 - COMPARAÇÃO QUALITATIVA DE TENSÕES RESIDUAIS ENTRE CHAPAS "UM" E "FC", ANTES E APÓS A SOLDAGEM NO CENTRO DA CHAPA : (a) UM, (b) FC

Perfis formados com chapas cortadas a maçarico (abreviadamente FC de "Flame Cut Plate") - A fig. 2.14b mostra que as chapas FC apresentam tensões residuais de tração nas suas extremidades, devido ao calor introduzido nas bordas das chapas pelo corte a maçarico. Um perfil H soldado, composto de chapas FC, apresentará tensões residuais de tração nas extremidades das mesas, numa distribuição que favorece a resistência das colunas.

Conforme é ilustrado na Fig. 2.15, um perfil soldado feito com chapas FC exibe uma maior resistência do que o mesmo perfil feito com chapas UM. É por esta razão que a norma canadense, [29], exige que os perfis soldados sejam feitos somente com chapas FC.

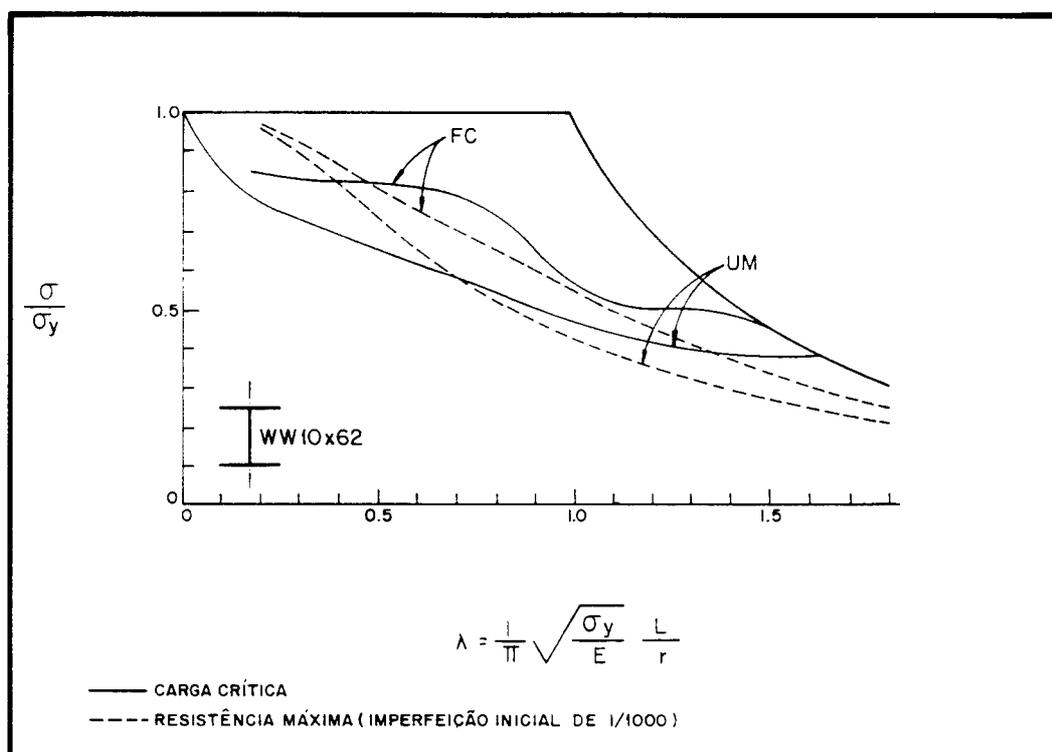


FIGURA 2.15 - COMPARAÇÃO DE CURVAS DE RESISTÊNCIA DE COLUNAS PARA UM PERFIL SOLDADO WW 10x62 (AÇO A7) FEITO COM CHAPAS FC e UM

Várias pesquisas têm sido feitas sobre o efeito da dimensão do perfil na distribuição das tensões residuais e sua conseqüente influência na resistência das colunas. Tem sido demonstrado, [2, 22, 26, 78], que a soldagem tem maior influência sobre a distribuição e grandeza das tensões residuais em perfis pequenos e médios do que em perfis pesados, relativamente. Na Fig. 2.16 são mostradas as distribuições das tensões residuais observadas em perfis FC 12H79 e 14H202 de massas 118,5 kg/m

e 332,4 kg/m, respectivamente. Nota-se que para ambos os perfis as tensões residuais têm a mesma distribuição geral, isto é, as regiões de tensões residuais de tração e compressão têm a mesma localização e têm a mesma grandeza relativa. A principal diferença entre elas está na grandeza das tensões residuais. A tensão residual de tração, nas extremidades das mesas, fica entre 28 e 30 ksi para o perfil mais leve e entre 18 e 21 ksi para o perfil mais pesado. A máxima tensão residual de compressão na mesa está por volta de 16 ksi no perfil mais leve e 12 ksi no perfil mais pesado.

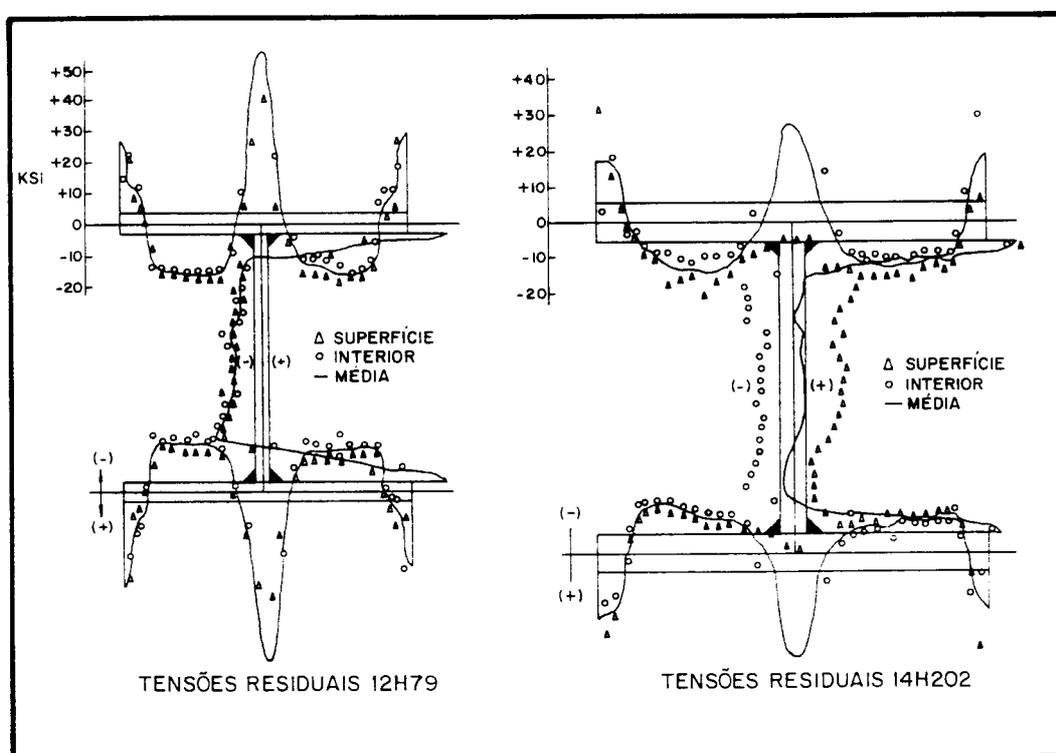


FIGURA 2.16 - DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES RESIDUAIS EM PERFIS FC 12H79 E 14H202

Na junção da mesa com a alma, o efeito da solda nas chapas mais finas do perfil 12H79 fica evidente pelo maior valor da tensão residual de tração. Pode-se dizer, de uma maneira geral, que para perfis mais pesados as soldas representam uma menor porcentagem da área total. O calor

introduzido por unidade de volume é reduzido, e então, a grandeza das tensões residuais é menor.

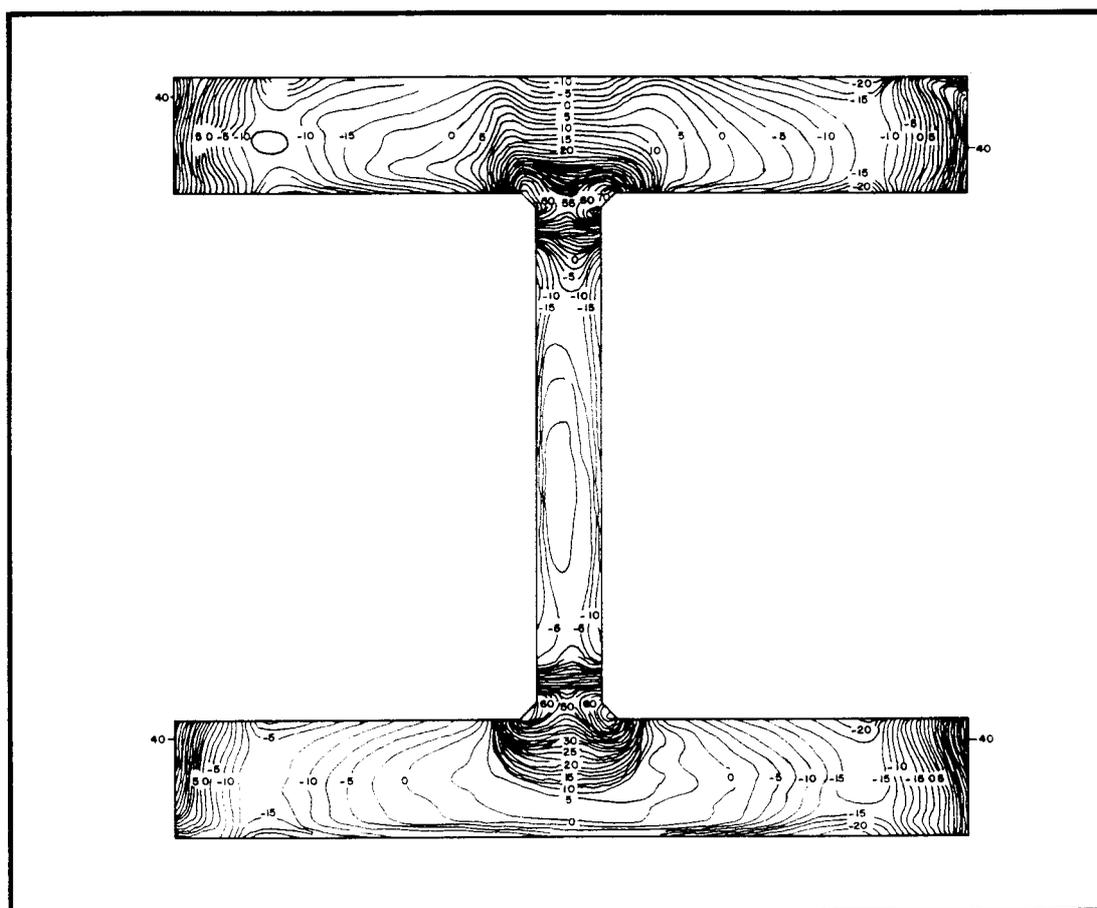


FIGURA 2.17 - DIAGRAMA DE ISOTENSÕES PARA UM PERFIL SOLDADO WW 23 x 68I
(TENSÕES EM kips/in^2 , SENDO $1 \text{ kips}/\text{in}^2 = 6,895 \text{ MPa}$)

A variação da tensão residual através da espessura de chapas maiores do que 1" (perfis pesados) pode ser considerável, [2, 50, 78]. Neste caso pode ser esperada uma diferença significativa entre as tensões na superfície e no interior das chapas componentes dos perfis pesados. Contudo, tem sido mostrado também, que o efeito desta característica sobre a resistência das colunas é, geralmente pequeno. Se os cálculos forem feitos baseados na distribuição real das tensões residuais, os resultados serão apenas pouco inferiores quando comparados com análises que admitem que a tensão é constante através da espessura e igual à tensão

residual medida na superfície. Esta conclusão tem uma influência significativa no trabalho de modelagem da seção transversal da coluna, na preparação para cálculos numéricos, uma vez que esta modelagem torna-se bastante simplificada se a variação da tensão residual, através da espessura, não tem que ser considerada. Como exemplo, a Fig. 2.17 mostra um diagrama de isotensões para um perfil soldado pesado, feito de chapas cortadas à maçarico (FC), onde se vê que a diferença entre as tensões residuais na superfície e no interior das chapas pode ultrapassar 10 ksi (68,95 MPa).

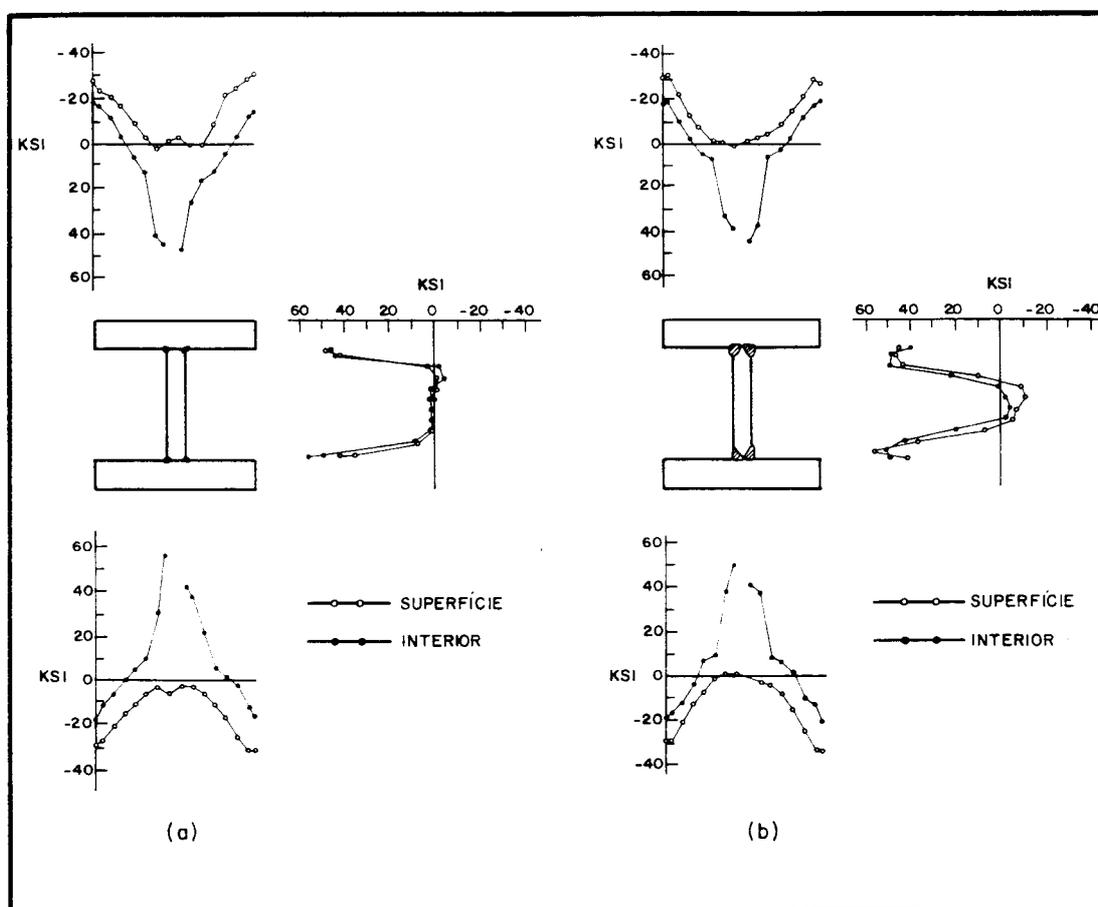


FIGURA 2.18 - TENSÕES RESIDUAIS NO PERFIL SOLDADO 15H290, COM CHAPAS "UM", AÇO A36:
a) SOLDA DE FILETE (1/2"), b) SOLDA DE PENETRAÇÃO (11/16")

A seqüência de soldagem e o número de passos de solda são fatores que influenciam a distribuição das tensões residuais, mas os resultados de

medidas comparativas no perfil 15H290, [2], indicam que o tipo de solda (penetração ou filete) não é um fator importante na formação das tensões residuais de perfis soldados, conforme mostra a Fig. 2.18, uma vez que o calor introduzido por ambos os tipos de solda não é drasticamente diferente.

O alívio de tensões por recozimento das chapas componentes, antes da soldagem dos perfis, aumenta a resistência das colunas significativamente, ao reduzir o valor das tensões residuais, mesmo diminuindo a tensão de escoamento do aço. Na Fig. 2.19 comparam-se as curvas de resistência para perfis soldados FC e UM, com as curvas para os mesmos perfis feitos com chapas que tiveram alívio de tensões.

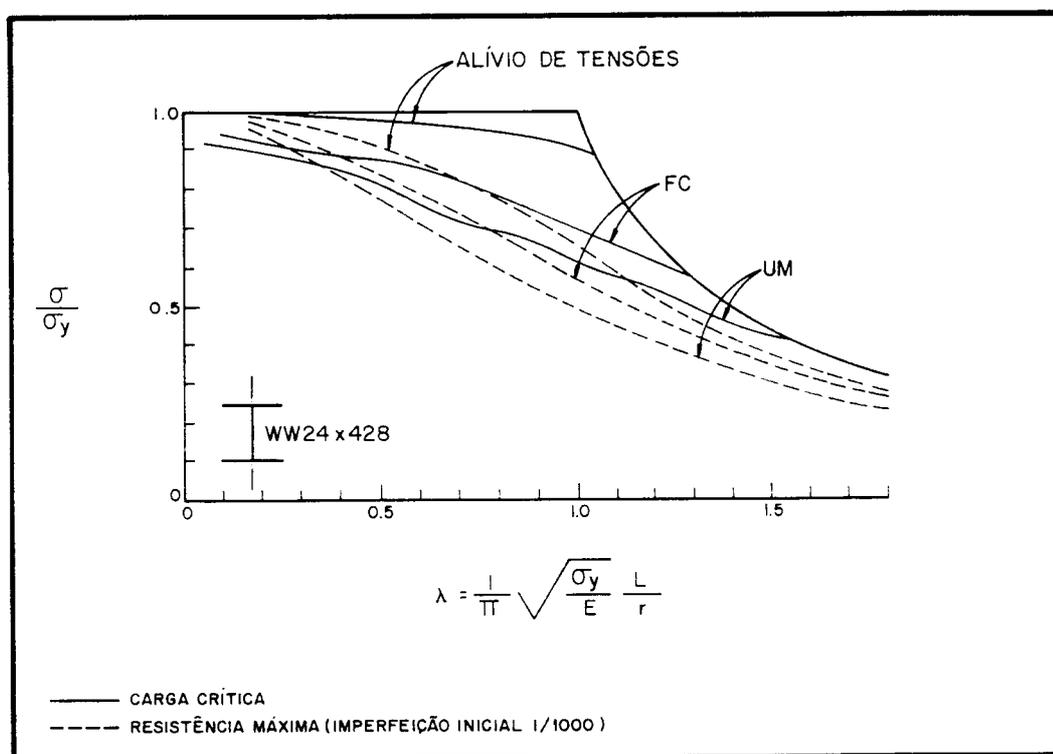


FIGURA 2.19 - COMPARAÇÃO DE CURVAS DE RESISTÊNCIA DE COLUNAS DE PERFIS SOLDADOS, AÇO A36, COM CHAPAS FC, UM E COM ALÍVIO DE TENSÕES

Desta forma, pode-se concluir que as tensões residuais são um dos principais fatores que afetam a resistência das colunas, principalmente em regiões de esbelteza intermediária ($40 \leq l/r \leq 120$), [18, 19],

conseqüentemente, as curvas para cálculo da resistência de colunas devem ser baseadas em modelos que incorporem a presença das tensões residuais na análise.

2.2.3 Imperfeições Iniciais

Outro fator importante que tem influência significativa na resistência das colunas é a imperfeição inicial das barras, também chamada curvatura inicial ou deformação inicial. Estas imperfeições aparecem durante o processo de fabricação industrial das colunas, quando ocorrem desvios significativos do eixo reto ideal das barras. Como já foi mencionado anteriormente, as colunas com imperfeições iniciais, sujeitas à força axial de compressão, apresentam flexão desde o início do carregamento, o que transforma o problema de flambagem de colunas em um problema do tipo força x deslocamento, ou seja, um problema de Resistência-Última, ao invés de um problema de Bifurcação do equilíbrio conforme a teoria clássica da estabilidade.

A Fig. 2.20 mostra o comportamento força x deslocamento, $P \times \Delta$, de uma coluna com imperfeição inicial em comparação com uma coluna perfeitamente reta. Observa-se que a força máxima tenderá assintoticamente à carga crítica de Euler, P_e , se o material permanecer elástico (curva C na Fig. 2.20b). Na fase inelástica, causada principalmente pela presença de tensões residuais nos perfis de aço, a flambagem ocorre quando parte da seção transversal da coluna não é mais elástica. A força máxima, $P_{m\acute{a}x}$, pode se aproximar da carga do módulo tangente, P_t , mas nos casos práticos, geralmente, esta força máxima fica abaixo de P_t , conforme ilustra a curva G da Fig. 2.20c, mostrando assim que $P_{m\acute{a}x}$ é função das imperfeições iniciais e que estas devem ser incluídas numa análise realista para a determinação da resistência última das colunas.

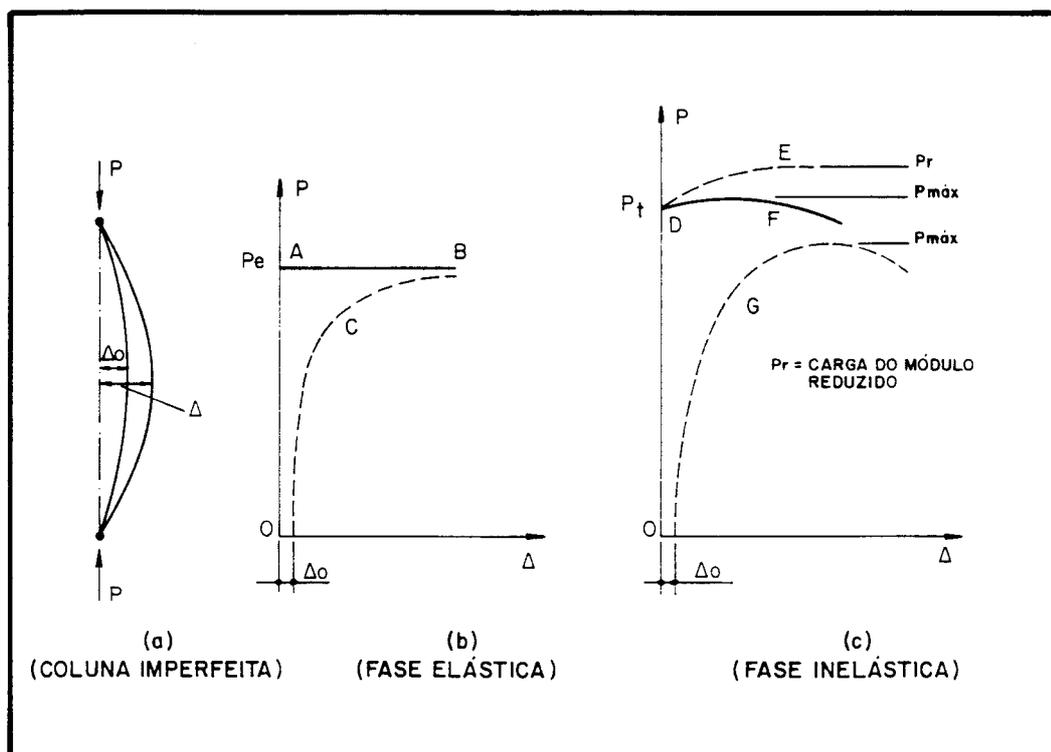


FIGURA 2.20 - COMPORTAMENTO DE COLUNAS PERFEITAMENTE RETAS E COM IMPERFEIÇÃO INICIAL

Conforme GALAMBOS [50], a configuração real da curvatura inicial de uma coluna pode ser muito complicada. Medidas feitas em laboratório, em colunas para testes, indicam uma grande variedade nas formas das curvaturas iniciais ao longo do comprimento da barra, [20, 47, 49], podendo apresentar curvaturas simples, duplas, reversas e mesmo, curvaturas em ambas as direções principais da seção transversal do perfil. Também a amplitude das imperfeições iniciais pode variar bastante ao longo da barra. Normalmente, nas análises teóricas, esta curvatura pode ser aproximada pela forma senoidal com a máxima amplitude da imperfeição inicial ocorrendo na seção central da barra. As curvas de resistência última das colunas, calculadas desta forma, têm apresentado resultados muito próximos daqueles encontrados nos ensaios realizados em laboratório.

Normalmente o valor da imperfeição inicial é expresso como uma fração do comprimento da barra e deve ter seus valores máximos limitados. Em geral, as tolerâncias máximas admissíveis são dadas nas especificações e normas de fabricação e projeto e são baseadas em análises estatísticas de dados fornecidos pelos fabricantes e firmas de construção em aço. Para perfis I ou H, por exemplo, exige-se que se tenha uma amplitude inicial máxima da ordem de $l/1000$. Valores menores do que este podem ser encontrados em medidas de laboratório mas, pode-se afirmar que é relativamente incomum se encontrar em testes de colunas valores maiores do que a máxima tolerância permitida, uma vez que tais barras não seriam aceitas logo de início.

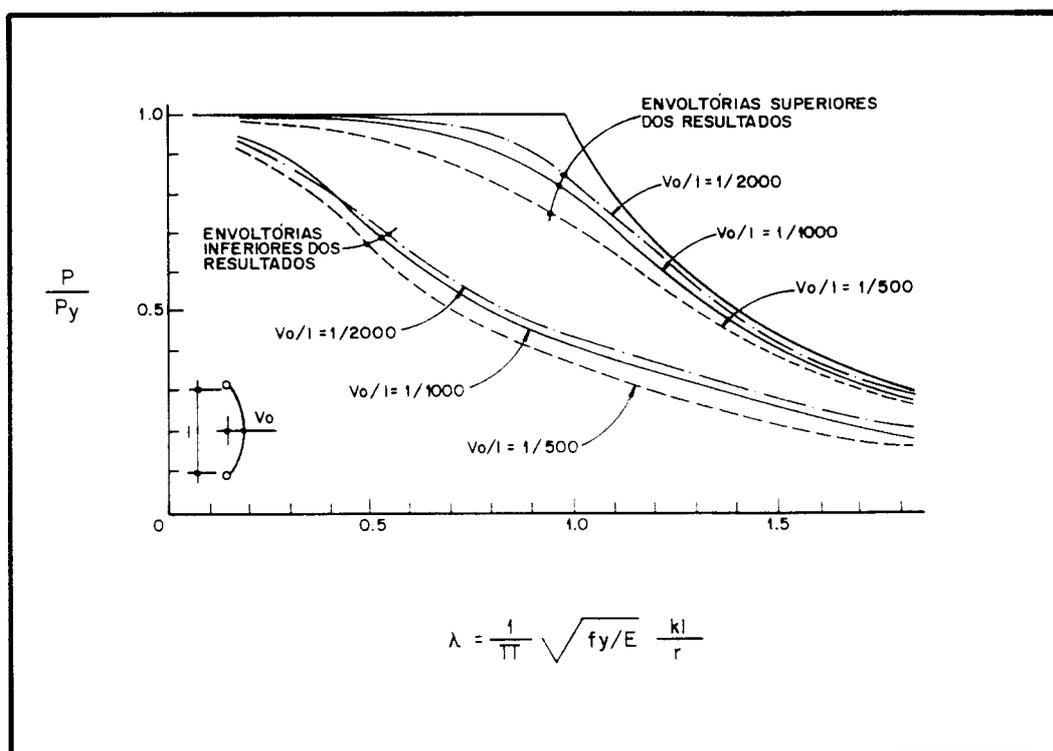


FIGURA 2.21 - ENVOLTÓRIAS DAS CURVAS DE RESISTÊNCIA ÚLTIMA PARA 112 COLUNAS, CONSIDERANDO-SE IMPERFEIÇÕES INICIAIS DE 1/500, 1/1000 e 1/2000

Em 1972, BJORHOVDE [21] estudou a influência da variação dos valores das imperfeições iniciais na resistência de 112 colunas com imperfeições iniciais da ordem de $l/500$, $l/1000$ e $l/2000$, cujos resultados

para as curvas de resistência de colunas são mostrados na Fig. 2.21. Os resultados obtidos por Bjorhovde foram a base para a determinação das curvas de flambagem do SSRC como será visto na seção 2.3.

Os resultados dos estudos sobre a resistência última de colunas deixam clara a necessidade de se incorporarem as imperfeições iniciais nos modelos para cálculo das resistências de colunas, que servem de base para a formulação de critérios de projeto.

2.3 Curvas de Resistência para o Projeto de Colunas

2.3.1 Considerações Iniciais

A conclusão de que a resistência máxima das colunas deve ser determinada considerando-se os efeitos das imperfeições iniciais e das tensões residuais nos modelos de cálculo, representa uma mudança significativa na filosofia de projeto das colunas de aço, ou seja, a resistência das colunas comprimidas axialmente deve ser baseada no critério da Resistência-Última, levando-se em conta os efeitos citados anteriormente, ao invés do conceito de Bifurcação do equilíbrio de uma coluna perfeitamente reta, considerando-se a teoria do módulo tangente. Esta mudança ocorre após, aproximadamente, quarenta anos de pesquisas, estudos e testes, feitos principalmente nos EUA e na Europa, na área de instabilidade das colunas.

O Conceito de Bifurcação no Projeto de Colunas

Em 1952 o Column Research Council (CRC), hoje chamado de Structural Stability of Research Council (SSRC), afirmou através do seu Memorando Técnico nº 1 que, [61, 101]: "É a firme opinião do CRC que a

teoria do módulo tangente deve ser a base para o estabelecimento das fórmulas de dimensionamento para carga de serviço”.

A curva de resistência de colunas do CRC, inicialmente publicada em 1960, introduziu o efeito das tensões residuais como sendo o principal fator que influenciava na determinação da resistência de uma coluna axialmente comprimida.

A Fig. 2.22 mostra as curvas de resistência para perfis H, baseadas na teoria do módulo tangente, considerando distribuições parabólicas e lineares das tensões residuais através da mesa, com tensões residuais de compressão nas suas extremidades. Para aços-carbono o valor médio da máxima tensão residual de compressão corresponde à aproximadamente 30% da tensão de escoamento F_y , ($0,3 F_y$). Para aços de alta-resistência as tensões residuais são uma fração menor da tensão de escoamento. Consideraram-se também, no traçado das curvas da Fig. 2.22, a flambagem das colunas em relação aos eixos de maior e menor inércia. Observa-se que para o mesmo índice de esbeltez, a resistência à flambagem do perfil H em relação ao eixo de maior inércia é maior do que a resistência em relação ao eixo de menor inércia, o que é atribuído ao fato de que as tensões residuais de compressão são maiores nas extremidades das mesas.

A recomendação de 1952 do CRC continua válida para projeto de colunas feitas de ligas de alumínio, aço inoxidável, aços laminados à frio ou aços tratados termicamente. Contudo, à luz das pesquisas desenvolvidas nos últimos anos, a tendência moderna no dimensionamento de colunas de aço-carbono ou de alta-resistência, laminados ou soldados, é introduzir o conceito de Resistência-Última de colunas como base de projeto considerando imperfeições iniciais e tensões residuais nos perfis.

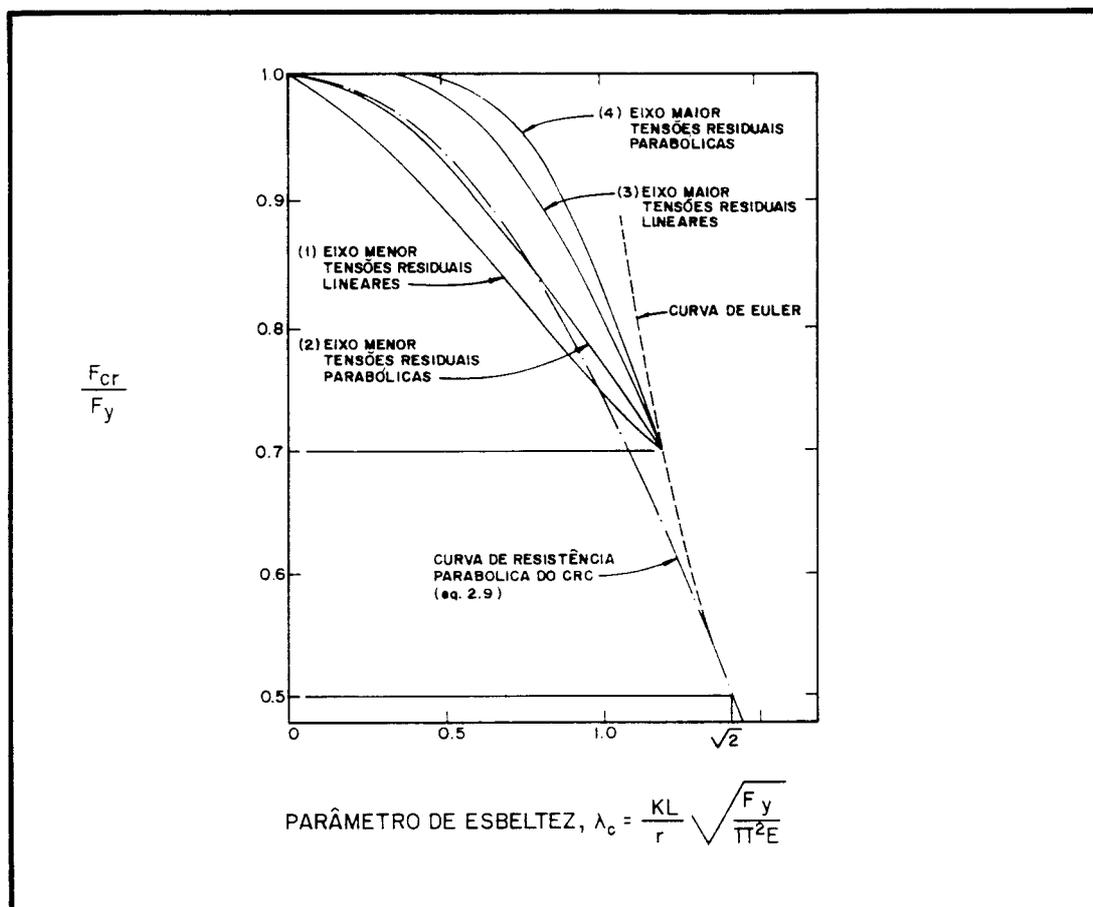


FIGURA 2.22 - CURVAS DE RESISTÊNCIA DE COLUNAS DE PERFIS H COM TENSÕES RESIDUAIS DE COMPRESSÃO NAS EXTREMIDADES DAS MESAS.

O Conceito de Resistência-Última no Projeto de Colunas

A posição atual do SSRC sobre o fundamento para o projeto de colunas é afirmado no Memorando Técnico nº 5, [51, 101]: “A resistência-última, determinada considerando-se aqueles efeitos que influenciam significativamente a capacidade máxima de carga de um pórtico, barra ou elemento, é a base apropriada para o estabelecimento de critérios de projeto”. Deve-se enfatizar que o modelo apropriado para cálculo de resistência de colunas é aquele que incorpora as tensões residuais e as imperfeições iniciais.

O método para se calcular a resistência última é bastante complexo. Deve ser feita uma análise via computador, através de um processo incremental-iterativo, onde a verificação da convergência do equilíbrio é feita por processo numérico em cada passo de carga, até se alcançar a resistência máxima da coluna. A descrição detalhada dos principais métodos para esta análise pode ser encontrada em extensa literatura, como em [14, 15, 18, 21, 34, 88, 112], para citar algumas.

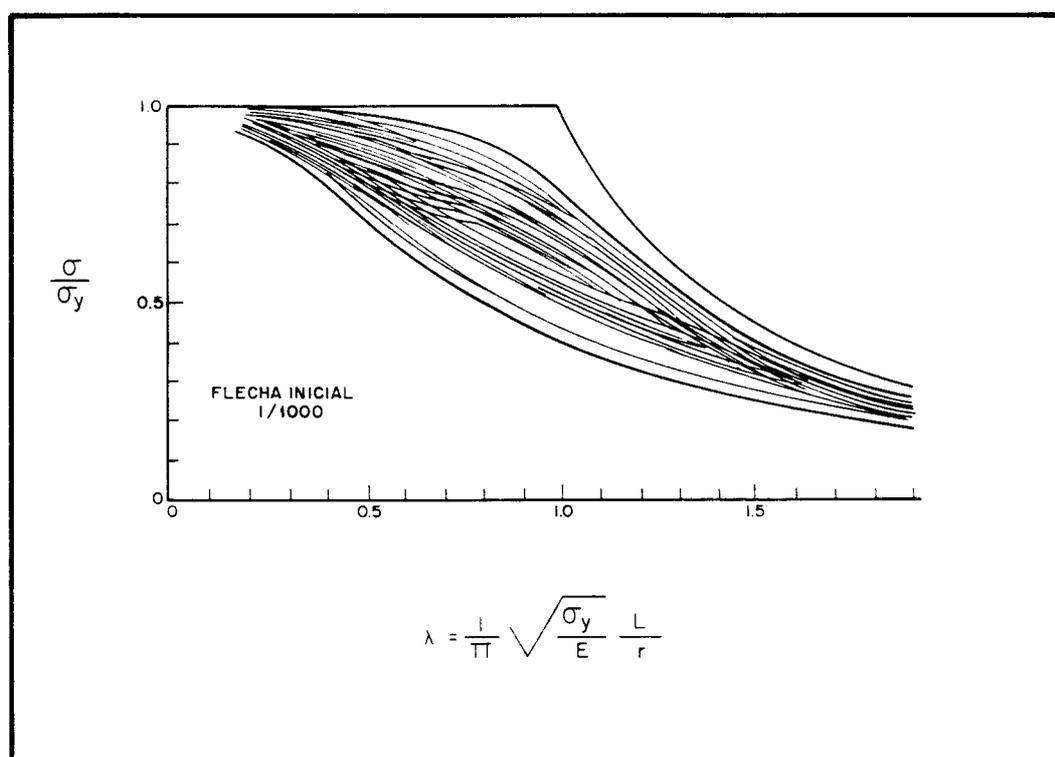


FIGURA 2.23 - CURVAS DE RESISTÊNCIA ÚLTIMA DE VÁRIOS TIPOS DIFERENTES DE COLUNAS

Uma análise cuidadosa da resistência-última de colunas, feita através de computador, ocorreu em 1972 na Universidade de Lehigh, [21], onde ficou demonstrado que o método de análise numérica previa com correção os resultados encontrados em ensaios. Um conjunto de 112 curvas foi gerado para uma grande variedade de tipos e perfis de colunas e a variação da resistência-última das colunas de aço é ilustrada na Fig. 2.23, onde se

vê o espectro do comportamento das colunas e a dispersão dos resultados. Cada curva foi baseada na distribuição real das tensões residuais medidas em laboratório e numa flecha inicial no meio do vão de $\delta_0 = l/1000$, admitindo uma forma senoidal para a elástica da curvatura inicial.

Bjorhovde observou que dentro deste espectro poderiam ser identificados três subgrupos, cada um representado por uma curva média. As três curvas resultantes são conhecidas como as curvas de resistência 1, 2 e 3 do SSRC e são reproduzidas nas Figs. 2.24 a 2.26. Estas figuras contêm:

1. O número de curvas usadas como base para análise estatística e a largura de banda de dispersão;
2. As curvas limites de probabilidade inferior e superior para cada conjunto particular de curvas;
3. Os tipos de colunas para as quais cada uma das três curvas são traçadas.

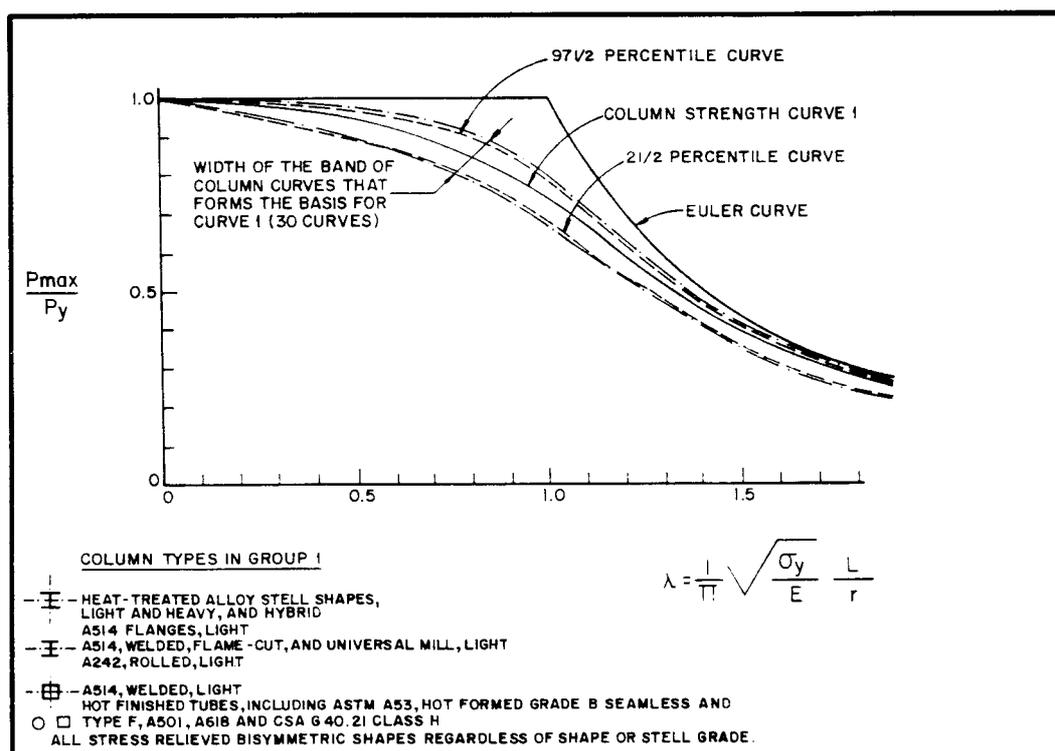


FIGURA 2.24 - CURVA N° 1 PARA AÇO ESTRUTURAL (BASEADA NA RESISTÊNCIA ÚLTIMA E FLECHA INICIAL DE $\delta_0 = 0,001 L$) ADAPTAÇÃO DA REF. 61

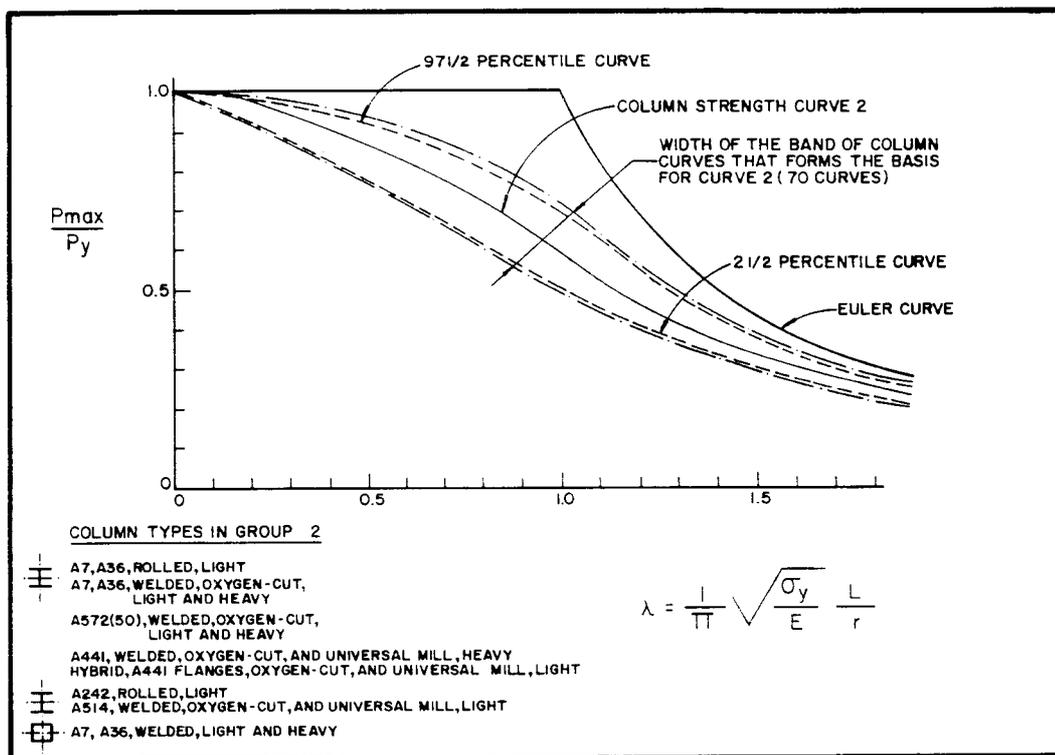


FIGURA 2.25 - CURVA Nº 2 PARA AÇO ESTRUTURAL (BASEADA NA RESISTÊNCIA ÚLTIMA E FLECHA INICIAL DE $\delta_0 = 0,001L$) ADAPTAÇÃO DA REF. 61

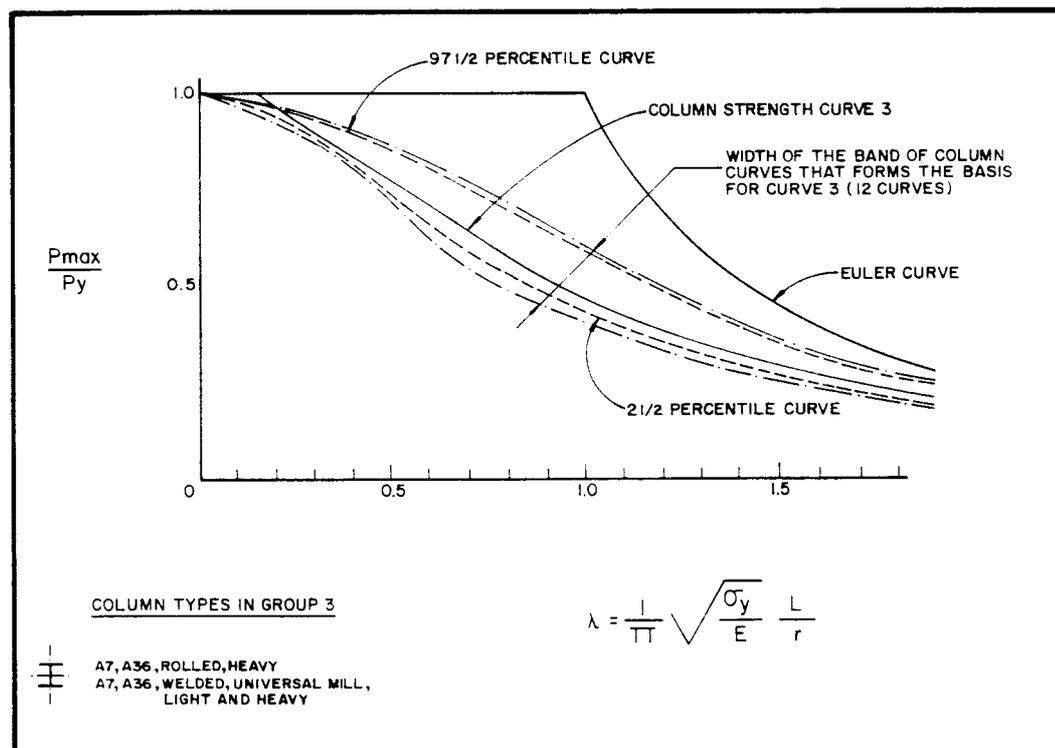


FIGURA 2.26 - CURVA Nº 3 PARA AÇO ESTRUTURAL (BASEADA NA RESISTÊNCIA ÚLTIMA E FLECHA INICIAL DE $\delta_0 = 0,001L$) ADAPTAÇÃO DA REF. 61

O Conceito de Curvas Múltiplas de Resistência

O fato de que a resistência das colunas poderia ser melhor representada por mais de uma curva introduziu o conceito de “Curvas Múltiplas de Resistência”. A rigor, pesquisas relacionadas ao uso de curvas múltiplas de resistência têm sido feitas há alguns anos. Em 1959, a norma alemã DIN 4114 introduziu uma curva especial para tubos e usou outra curva para todos os outros tipos de perfis. As pesquisas sobre curvas múltiplas na Universidade de Lehigh iniciaram-se nos anos 60 e resultaram nas curvas 1, 2 e 3 do SSRC, conforme mencionado anteriormente. Os trabalhos da European Convention for Construction Steelwork (ECCS) em 1970, [20, 59, 112], resultaram no estabelecimento de curvas múltiplas de resistência que foram adotadas em vários países da Europa e também no Brasil, [13].

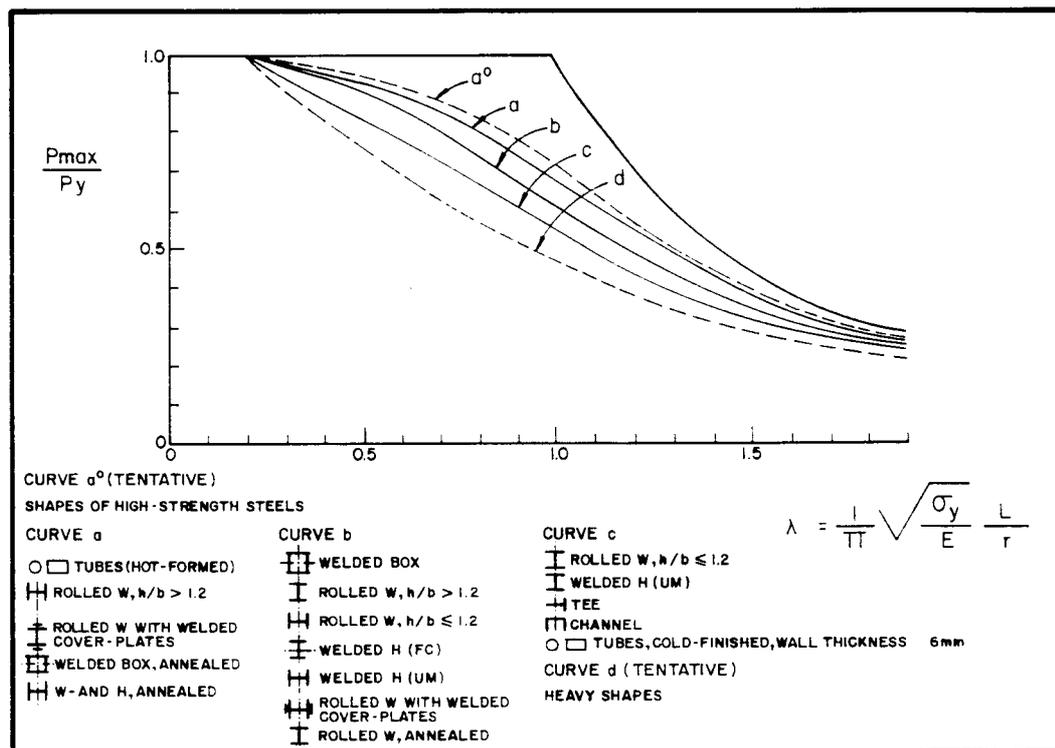


FIGURA 2.27 - CURVAS MÚLTIPLAS RECOMENDADAS PELA ECCS, BASEADAS EM FLECHAS INICIAIS DE $\delta_0 = 0,001 L$ (ADAPTAÇÃO DA REF. 61)

A princípio a ECCS propôs três curvas, designadas como (a), (b), (c) e em 1976 foram acrescentadas as curvas (a₀) e (d), [49, 61], totalizando cinco curvas. Atualmente, tanto o EUROCODE [46] quanto a NBR-8800/86 [13], adotam as quatro curvas seguintes: a, b, c, d. A Fig. 2.27, ilustra as cinco curvas mencionadas, juntamente com os tipos de colunas para as quais elas são aplicáveis.

2.3.2 Curvas de Resistência Utilizadas nos Projetos de Colunas de Aço

2.3.2.1) Curvas do CRC - AISC/ASD - AISC/PD

CURVAS DO CRC

Baseado no estudo de colunas ideais com distribuições lineares e parabólicas das tensões residuais através das mesas, bem como nos resultados de inúmeros testes de perfis H de aço-carbono, laminados à quente, de tamanhos pequenos e médios, o CRC recomendou na primeira e segunda edições do GUIDE [61] a fórmula parabólica, proposta por BLEICH [27], na seguinte forma:

$$F_{cr} = F_y - B \left(\frac{kl}{r} \right)^2 \quad (2.7)$$

onde:

- F_{cr} = tensão crítica de flambagem
- F_y = tensão de escoamento do aço
- r = raio de giração da seção transversal em relação ao eixo de flexão considerado
- Kl/r = índice de esbeltez da barra
- B = constante

para representar a resistência da coluna na região inelástica. A resistência da coluna na região elástica, entretanto, é representada pela fórmula de Euler.

A Eq. 2.7 foi escolhida porque, quando comparada na Fig. 2.22 com outras curvas traçadas para diferentes modelos de distribuição de tensões residuais e diferentes eixos de flexão, observou-se uma aproximação média satisfatória com as resistências das colunas dadas pela teoria do módulo tangente, flambadas em relação aos eixos de maior e menor inércia. Particularmente, é observado que a distribuição parabólica da tensão residual é mais representativa da situação real do que a distribuição linear.

Quando o CRC admitiu a tensão residual como o principal efeito na determinação da resistência de uma coluna, definiu também o limite efetivo de proporcionalidade como sendo:

$$F_p = F_y - F_r \quad (2.8)$$

onde:

$$\begin{aligned} F_p &= \text{tensão limite de proporcionalidade} \\ F_r &= \text{máxima tensão residual de compressão na seção transversal} \end{aligned}$$

O CRC adotou a maior tensão residual de compressão, conservativamente, como sendo $F_r = 0,5 F_y$, ao invés de $0,3 F_y$ presente nos perfis H laminados à quente, para obter uma transição suave entre a parábola (região inelástica) e a hipérbole de Euler (região elástica), bem como melhor representar a resistência das colunas à flambagem em torno dos eixos de maior e menor inércia. Para isto, a constante B na Eq. 2.7 vale $F_y^2/4\pi^2E$ e F_p , na Eq. 2.8, vale $0,5 F_y$. A Eq. 2.7 fica, então:

$$F_{cr} = F_y - \frac{F_y^2}{4\pi^2 E} \left(\frac{kl}{r} \right)^2 \quad (2.9)$$

O índice de esbeltez correspondente à tensão de proporcionalidade efetiva, $F_p = 0,5 F_y$, que define o ponto de transição entre o regime elástico e o inelástico é designado como C_c , e é dado por:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}} \quad (2.10)$$

Então, para colunas com índice de esbeltez menor ou igual a C_c , a curva do CRC assume a forma de uma parábola e para índice de esbeltez maior do que C_c , a curva do CRC assume a forma de uma hipérbole, ou seja:

$$F_{cr} = \begin{cases} F_y \left[1 - \frac{(kl/r)^2}{2C_c^2} \right] & , \text{ para } \frac{kl}{r} \leq C_c \\ \frac{\pi^2 E}{(kl/r)^2} & , \text{ para } \frac{kl}{r} > C_c \end{cases} \quad (2.11)$$

A Eq. 2.11 pode ser escrita na forma adimensional em função de P/P_y x λ_c , onde P_y é a força normal de escoamento dada por $P_y = A F_y$, sendo A a área bruta da seção transversal e λ_c é o parâmetro de esbeltez dado por:

$$\lambda_c = \frac{kl}{r} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \quad (2.12)$$

$$\frac{P}{P_y} = \begin{cases} 1 - 0,25 \lambda_c^2 & , \text{ para } \lambda_c \leq \sqrt{2} \\ \lambda_c^{-2} & , \text{ para } \lambda_c > \sqrt{2} \end{cases} \quad (2.13)$$

A curva do CRC, na sua forma adimensional, é traçada na Fig. 2.28.

CURVAS DO AISC/ASD

A curva do CRC dividida por um fator de segurança variável de:

$$\frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left(\frac{kl/r}{C_c} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{kl/r}{C_c} \right)^3 = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{2}} \right)^3 \quad (2.14)$$

na região inelástica e um fator de segurança constante de $23/12 = 1,92$, na região elástica, representa a curva de flambagem do AISC Allowable Stress Design (ASD), [5, 6].

Embora a presença das tensões residuais fosse levada em consideração, as curvas do CRC foram concebidas com base no critério de bifurcação do equilíbrio, implícito na teoria do módulo tangente, que admite que as colunas são inicialmente perfeitamente retas. Sabendo-se que estas colunas não são encontradas na vida real, o AISC introduziu estes fatores de segurança para considerar as imperfeições geométricas e excentricidades de carga, que são inevitáveis nas colunas usuais da prática.

Através da Eq. 2.14 observa-se que na região inelástica, ou seja, para $0 \leq Kl/r \leq C_c$, o fator de segurança varia de 1,67 para $Kl/r = 0$ até 1,92 para $Kl/r = C_c$. Para a região elástica, ou seja, para $Kl/r > C_c$, o fator de segurança permanece essencialmente constante e igual a $23/12 = 1,92$, reconhecendo a importância do efeito das imperfeições iniciais em colunas com alto índice de esbeltez.

Deve ser observado que embora o uso do fator de segurança variável interpretasse corretamente a tendência daqueles efeitos, não havia base científica para os números escolhidos, com exceção do valor 1,67 para esbeltez nula, que representava o caso de compressão pura, sem influência de flambagem local ou global, e então neste caso, o fator de segurança ao

escoamento na compressão pura poderia ser o mesmo para o caso da tração pura.

Finalmente, a curva de flambagem do AISC/ASD na sua forma adimensional, também traçada na Fig. 2.28, fica:

$$\frac{P}{P_y} = \begin{cases} \frac{1 - 0,25 \lambda_c^2}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{2}}\right)^3}, & \text{para } \lambda_c \leq \sqrt{2} \\ \frac{12}{23} (\lambda_c)^{-2}, & \text{para } \lambda_c > \sqrt{2} \end{cases} \quad (2.15)$$

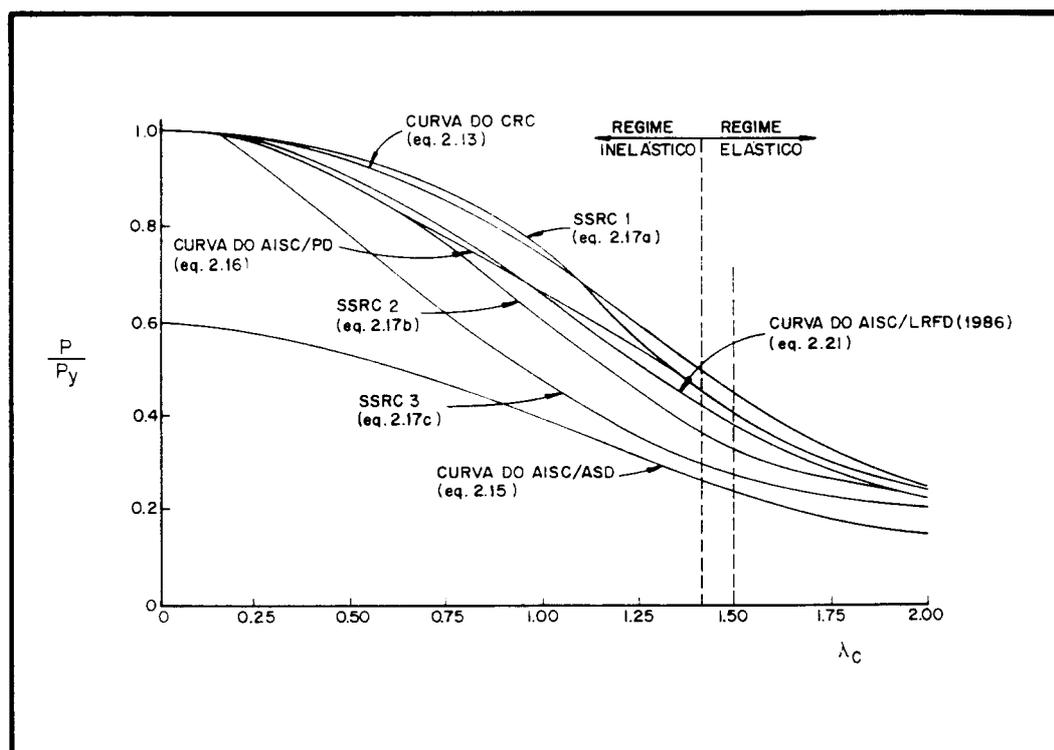


FIGURA 2.28 - CURVAS DE FLAMBAGEM PARA PROJETOS

CURVAS DO AISC/PD

A curva do ASD multiplicada pelo fator 1.7, forma a curva do AISC Plastic Design (PD), também representada na Fig. 2.28. No cálculo plástico somente o regime inelástico da curva é utilizado por causa das esbeltezes exigidas. A expressão matemática da curva de flambagem do AISC/PD fica então:

$$\frac{P}{P_y} = \frac{1,7 (1 - 0,25 \lambda_c^2)}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{2}} \right)^3}, \quad \text{para } \lambda_c \leq \sqrt{2} \quad (2.16)$$

2.3.2.2) Curvas do SSRC - CSA - AISC/LRFD

CURVAS DO SSRC

Antes de discorrer sobre este item, deve ser lembrado que ambas as curvas, AISC/ASD e AISC/PD, tiveram sua origem na curva do CRC que foi desenvolvida com base no conceito de bifurcação, o qual admite que a coluna é perfeitamente reta. Embora a tensão residual seja explicitamente levada em conta, o efeito das imperfeições iniciais é somente considerado implicitamente, ao se aplicar um fator de segurança variável à curva básica.

Uma vez que colunas perfeitamente retas não são encontradas na prática, pesquisadores têm analisado, teórica e experimentalmente, a resistência e a estabilidade de colunas que, explicitamente, consideram os efeitos das tensões residuais e imperfeições iniciais. Como já descrito anteriormente, uma análise criteriosa de resistência última de um conjunto de 112 colunas foi feito em 1972, na Universidade de Lehigh, baseada num modelo computacional desenvolvido para colunas com flecha inicial no meio do vão igual a 0,001l e com valores reais das tensões residuais medidas em

laboratório. Como resultado, foi desenvolvido um conjunto de três curvas, conhecidas como as curvas múltiplas 1, 2 e 3 do SSRC. Estas curvas foram mostradas nas Figs. 2.24 a 2.26 na seção 2.2.1.

O SSRC, nas terceira e quarta edições do GUIDE [61, 51], apresenta estas três curvas juntamente com as suas representações algébricas, que foram obtidas pelo ajustamento de curvas à uma parábola ou hipérbole e cujas equações resultantes são dadas através das Eq. 2.17a a 2.17c.

Curva 1 - SSRC

• para $0 \leq \lambda_c \leq 0,15$	$F_u = F_y$	} (2.17a)
• para $0,15 \leq \lambda_c \leq 1,20$	$F_u = F_y(0,990 + 0,122 \lambda_c - 0,367 \lambda_c^2)$	
• para $1,20 \leq \lambda_c \leq 1,80$	$F_u = F_y(0,051 + 0,801 \lambda_c^{-2})$	
• para $1,80 \leq \lambda_c \leq 2,80$	$F_u = F_y(0,008 + 0,942 \lambda_c^{-2})$	
• para $\lambda_c \geq 2,80$	$F_u = F_y \lambda_c^{-2} (= \text{Curva de Euler})$	

Curva 2 - SSRC

• para $0 \leq \lambda_c \leq 0,15$	$F_u = F_y$	} (2.17b)
• para $0,15 \leq \lambda_c \leq 1,00$	$F_u = F_y(1,035 - 0,202 \lambda_c - 0,222 \lambda_c^2)$	
• para $1,00 \leq \lambda_c \leq 2,00$	$F_u = F_y(-0,111 + 0,636 \lambda_c^{-1} + 0,087 \lambda_c^{-2})$	
• para $2,00 \leq \lambda_c \leq 3,60$	$F_u = F_y(0,009 + 0,877 \lambda_c^{-2})$	
• para $\lambda_c \geq 3,60$	$F_u = F_y \lambda_c^{-2} (= \text{Curva de Euler})$	

Curva 3 - SSRC

• para $0 \leq \lambda_c \leq 0,15$	$F_u = F_y$	} (2.17c)
• para $0,15 \leq \lambda_c \leq 0,80$	$F_u = F_y(1,093 - 0,622 \lambda_c)$	
• para $0,80 \leq \lambda_c \leq 2,20$	$F_u = F_y(-0,128 + 0,707 \lambda_c^{-1} - 0,102 \lambda_c^{-2})$	
• para $2,20 \leq \lambda_c \leq 5,00$	$F_u = F_y(0,008 + 0,792 \lambda_c^{-2})$	
• para $\lambda_c \geq 5,00$	$F_u = F_y \lambda_c^{-2} (= \text{Curva de Euler})$	

Para efeito de comparação, as três curvas do SSRC são também traçadas na Fig. 2.28, juntamente com as curvas do CRC, ASD e PD.

É evidente que usar várias curvas de resistência em projeto é mais trabalhoso do que trabalhar com uma curva única mas, também, é reconhecido atualmente, que não é possível cobrir toda a grande variação da resistência das colunas através de uma só curva.

TABELA 2.2 - Tabela de Seleção de Curvas de Flambagem (adaptação da ref. 22)

Fabrication Details		Specified Minimum Yield Stress of Steel (ksi)					
		Axis	≤ 36	37 to 49	50 to 59	60 to 89	≥ 90*
Hot-rolled	Light and medium	Major	2	2	1	1	1
	W-shapes	Minor	2	2	2	1	1
W-shapes	Heavy W-shapes (flange over 2 in.)	Major	3	2	2	2	2
		Minor	3	3	2	2	2
Welded		Major	2	2	2	1	1
Built-up	Flame-cut places	Minor	2	2	2	2	1
H-shapes	Universal Mill	Major	3	3	2	2	2
	Plates	Minor	3	3	3	2	2
Welded	Flame-cut and	Major	2	2	2	1	1
Box Shapes	Universal Mill						
	Plates	Minor	2	2	2	1	1
Square and Rectangular	Cold-formed	Major	N/A	2	2	2	2
		Minor	N/A	2	2	2	2
Tubes	Hot-formed and cold-formed heat- treated	Major	1	1	1	1	1
		Minor	1	1	1	1	1
Circular	Cold-formed	N/A	2	2	2	2	2
Tubes	Hot-formed	N/A	1	1	1	1	1
All Stress-relieved Shapes		Major					
		and Minor	1	1	1	1	1

* Quenched and tempered steels

Países da Europa Ocidental, o Canadá, o Brasil, por exemplo, adotam o conceito de curvas múltiplas em suas especificações para projeto. Com o objetivo de facilitar o uso das curvas do SSRC, elas devem ser usadas em conjunto com a Tabela de Seleção de Curvas de Flambagem, ver na Tab. 2.2, construída por BJORHOVDE [22], a qual auxilia o projetista a escolher a curva apropriada para o uso, dependendo do tipo de perfil, processo de fabricação e eixo de flexão.

Ainda pensando em facilitar o uso prático das curvas múltiplas do SSRC, seria desejável que se tivesse apenas uma única equação que representasse com bastante precisão todas aquelas curvas dadas pelas Eq. 2.17a a 2.17c. RONDAL & MAQUOI [110], em 1979 e CHEN & LUI [34], em 1984, apresentaram uma expressão matemática simples para representar estas curvas múltiplas, oriunda da equação de interação entre a força normal e o momento fletor. A expressão proposta por Rondal e Maquoi, com desvios máximos da ordem de -2,12% a 3,59%, é dada por:

$$F_u = \frac{F_y}{2\lambda_c^2} \left(Q - \sqrt{Q^2 - 4\lambda_c^2} \right) \leq F_y \quad (2.18)$$

onde:

$$Q = 1 + \alpha(\lambda_c - 0,15) + \lambda_c^2 \quad (2.19)$$

e

$$\alpha = \begin{cases} 0,103 & \text{para a curva 1} \\ 0,293 & \text{para a curva 2} \\ 0,622 & \text{para a curva 3} \end{cases}$$

A Fig. 2.29 mostra a boa concordância entre as equações do SSRC e a equação única proposta por Rondal e Maquoi, que é contínua em todo o domínio do parâmetro de esbeltez λ_c .

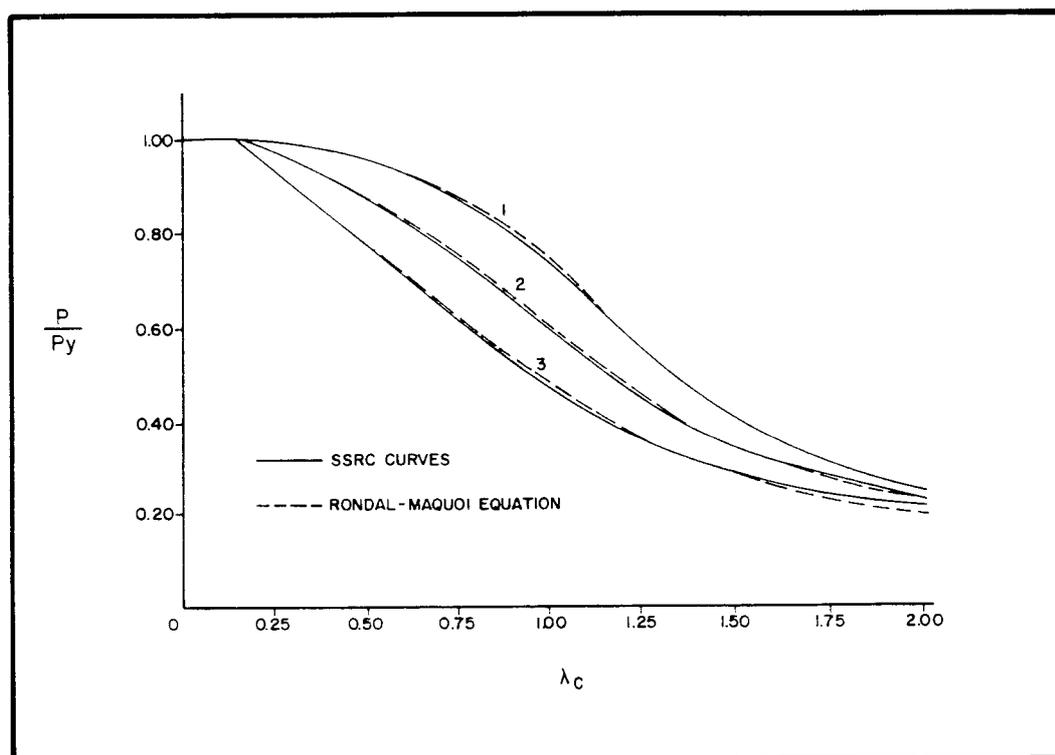


FIGURA 2.29 - CURVAS MÚLTIPLAS DO SSRC E A EQUAÇÃO DE RONDAL - MAQUOI

CURVAS DO CSA

Como um primeiro passo em direção ao uso do conceito de curvas múltiplas de resistência na América do Norte, a Canadian Standards Association (CSA) adotou a curva 2 do SSRC (Eq. 2.17b) como curva básica de projeto em sua norma CSA Standard S16. 1-74 "Steel Structures for Buildings - Limite States Design", de 1974. Em 1980 e na versão de 1984, [29], a CSA também adotou a curva 1 do SSRC para perfis tubulares conformados à quente ou a frio com alívio de tensões. Observa-se também que a norma canadense exclui, dentre os perfis que seriam projetados de acordo com a curva básica, os perfis UM, juntamente com as barras redondas com diâmetro superior a 50 mm sem alívio de tensões. Para estes perfis e para perfis pesados, a norma canadense sugere, em seus comentários, a curva 3 do SSRC.

CURVA DO AISC/LRFD

Baseando-se em análises probabilísticas da resistência de colunas, BJORHOVDE [21] também desenvolveu outras curvas de flambagem, onde a flecha inicial no meio do vão era igual a 1/1470 do comprimento da coluna. As equações matemáticas descrevendo estas curvas são dadas através das Eq. 2.20a a 2.20c e são denominadas curvas 1P, 2P e 3P do SSRC.

Curva 1P - SSRC

• para	$0 \leq \lambda_c \leq 0,15$	$F_u = F_y$	} (2.20a)
• para	$0,15 \leq \lambda_c \leq 1,20$	$F_u = F_y(0,979 + 0,205 \lambda_c - 0,423 \lambda_c^2)$	
• para	$1,20 \leq \lambda_c \leq 1,80$	$F_u = F_y(0,03 + 0,842 \lambda_c^{-2})$	
• para	$1,80 \leq \lambda_c \leq 2,60$	$F_u = F_y(0,018 + 0,881 \lambda_c^{-2})$	
• para	$\lambda_c \geq 2,60$	$F_u = F_y \lambda_c^{-2} (= \text{Curva de Euler})$	

Curva 2P - SSRC

• para	$0 \leq \lambda_c \leq 0,15$	$F_u = F_y$	} (2.20b)
• para	$0,15 \leq \lambda_c \leq 1,00$	$F_u = F_y(1,03 - 0,158 \lambda_c - 0,206 \lambda_c^2)$	
• para	$1,00 \leq \lambda_c \leq 1,80$	$F_u = F_y(-0,193 + 0,803 \lambda_c^{-1} + 0,056 \lambda_c^{-2})$	
• para	$1,80 \leq \lambda_c \leq 3,20$	$F_u = F_y(0,018 + 0,815 \lambda_c^{-2})$	
• para	$\lambda_c \geq 3,20$	$F_u = F_y \lambda_c^{-2} (= \text{Curva de Euler})$	

Curva 3P - SSRC

• para	$0 \leq \lambda_c \leq 0,15$	$F_u = F_y$	} (2.20c)
• para	$0,15 \leq \lambda_c \leq 0,80$	$F_u = F_y(1,091 - 0,608 \lambda_c)$	
• para	$0,80 \leq \lambda_c \leq 2,00$	$F_u = F_y(0,021 - 0,385 \lambda_c^{-1} + 0,066 \lambda_c^{-2})$	
• para	$2,00 \leq \lambda_c \leq 4,50$	$F_u = F_y(0,005 + 0,9 \lambda_c^{-2})$	
• para	$\lambda_c \geq 4,50$	$F_u = F_y \lambda_c^{-2} (= \text{Curva de Euler})$	

A comparação entre as curvas múltiplas originais do SSRC ($\delta_0/l = 1/1000$) e as curvas SSRC-P ($\delta_0/l = 1/1470$) é mostrada na Fig. 2.30.

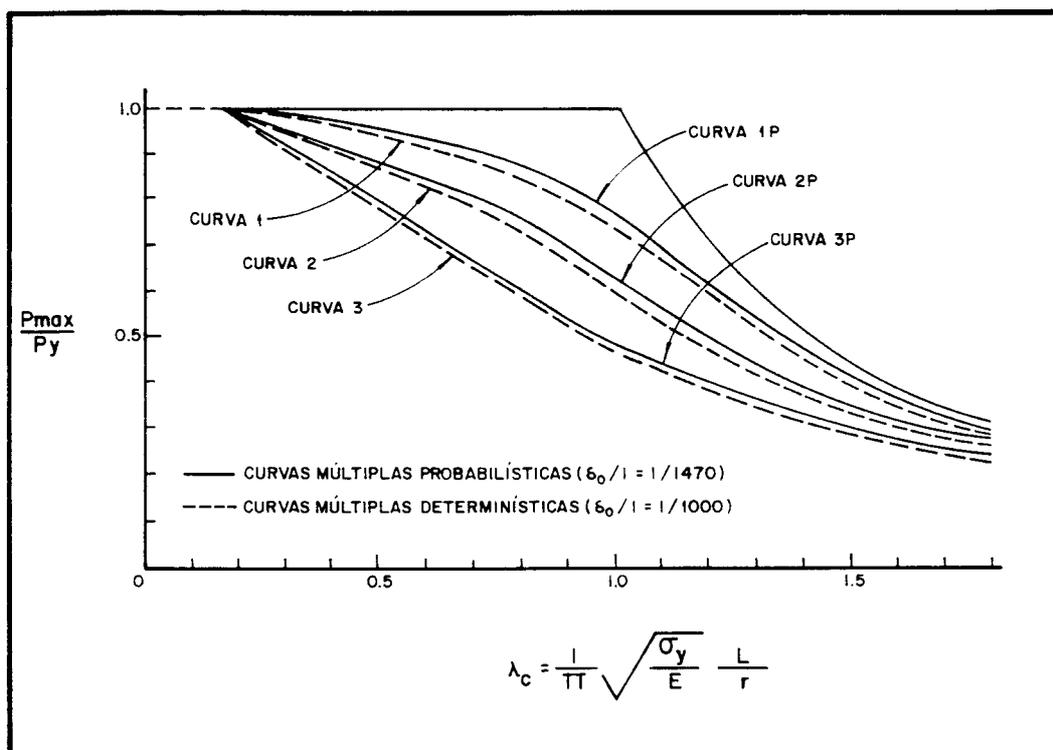


FIGURA 2.30 - CONJUNTO DE CURVAS DE FLAMBAGEM DE COLUNAS COM VALORES DE FLECHA INICIAL DE 1/1000 E 1/1470

No desenvolvimento das curvas de resistência para projeto de colunas a posição inicial, com relação à amplitude das imperfeições iniciais, era a de se adotar o valor $l/1000$ no meio do vão, considerando uma elástica semi-senoidal para a curvatura inicial da coluna. Esta flecha inicial representava basicamente a tolerância máxima de fabricação dos perfis. Ficou demonstrado porém, após as análises do SSRC, que este é um valor conservativo, sendo que o principal argumento a seu favor é que a imperfeição inicial é responsável por todas as outras imperfeições geométricas, tais como excentricidades de carga ou falta de prumo. Contudo, o SSRC em 1985 recomendou que a base para o desenvolvimento

de curvas de projeto para colunas de aço deve ser uma flecha inicial de $l/1500$. Esta recomendação está bastante próxima das medidas feitas em laboratório por Bjorhovde e reflete a posição atual do SSRC sobre esta matéria. Para todos os efeitos práticos as Eq. 2.20a a 2.20c representam esta condição.

Há, entretanto, nos Estados Unidos, certa relutância em se adotarem as curvas múltiplas de flambagem, porque elas representam mais trabalho para os projetistas comparando-se com o uso de uma curva única, e também, porque os americanos pensam que ainda são necessárias mais pesquisas sobre este assunto na área de estruturas de aço. Os pesquisadores do SSRC continuam se esforçando para que num futuro próximo esta questão esteja resolvida.

Por estas razões, no desenvolvimento das especificações do AISC na versão LRFD (Load and Resistance Factor Design), o Comitê de especificações do AISC decidiu continuar a usar somente uma única curva para o projeto de colunas de aço. A curva 2P do SSRC foi então escolhida para representar a curva básica de projeto pelo LRFD. Entretanto, a Eq. 2.20b não é a mesma para a versão LRFD, que foi modificada para apresentar uma forma matemática mais simples mas ainda assim, bem ajustada à curva 2P do SSRC.

Finalmente, a especificação do AISC/LRFD [7] adota a seguinte curva para representar a resistência básica das colunas:

$$\frac{P}{P_y} = \begin{cases} e^{-0,419\lambda_c^2} & , \text{ para } \lambda_c \leq 1,50 \\ 0,877\lambda_c^{-2} & , \text{ para } \lambda_c > 1,50 \end{cases} \quad (2.21)$$

Nota-se que somente uma curva é recomendada para todo o domínio possível do parâmetro de esbeltez λ_c .

A curva do AISC/LRFD é também mostrada na Fig. 2.28, juntamente com as outras curvas descritas anteriormente e fica entre as curvas do CRC e as curvas 2 do SSRC.

2.3.2.3) Curvas da ECCS - Eurocode - NBR 8800/86

CURVAS DA ECCS

A European Convention for Constructional Steelwork (ECCS) criou o Comitê sobre Estabilidade (Comitê nº 8) em 1959, [48], com o propósito de elaborar regras européias comuns para cálculo da estabilidade de barras e componentes estruturais em aço, a fim de acabar com as consideráveis diferenças existentes, naquela época, entre as normas nacionais dos diversos países, sobre esta matéria.

Logicamente, o primeiro objetivo deste comitê era trabalhar com o problema básico de barras rotuladas comprimidas axialmente uma vez que, depois da formulação clássica de Euler, a flambagem passou a ser objeto de numerosos estudos teóricos e experimentais. Conseqüentemente, o cálculo à flambagem é tratado em todas as normas de construção metálica, e por isto, o comitê da ECCS [20, 59, 112] supôs que uma compilação das normas nacionais existentes deveria fornecer o material necessário para estabelecer regras européias aceitáveis. A tentativa feita neste sentido foi rapidamente abandonada, por duas razões principais:

- As curvas de flambagem das diversas normas então em vigor acusavam uma dispersão que as tornavam inconciliáveis.
- Praticamente todas as normas eram fundamentadas no método das tensões admissíveis, com coeficientes de segurança arbitrariamente fixados, variáveis com a esbeltez da barra e diferentes daqueles aplicados às peças

com outro tipo de solicitação (tração, por exemplo), portanto, incompatíveis com o princípio geral de uma segurança uniforme.

Ao admitir que as tensões residuais exercem grande influência sobre a carga de bifurcação de uma barra comprimida, que cada barra possui na realidade uma curvatura inicial e que o esforço não é aplicado axialmente, o Comitê nº 8 da ECCS rejeitou claramente o princípio da bifurcação do equilíbrio e compreendeu que seus trabalhos de pesquisa deveriam ser fundamentados em uma barra possuindo imperfeições iniciais e tensões residuais.

Conforme relatado na ECCS [48] e em BEER & SCHULZ [20], J. Dutheil, membro desta comissão, tinha desenvolvido, para o cálculo da carga de colapso de barras deste tipo, uma teoria de notável simplicidade, mas que no entanto, não levava em conta completamente a influência exercida pelas imperfeições e mais particularmente, pelas tensões residuais. Esta lacuna conduziu SFINTESCO, D. [112], presidente da Sub-Comissão de Estudos Experimentais de Flambagem, à idéia de investir num grande programa de testes, inicialmente para confirmar a teoria de Dutheil mas, com o desenrolar dos trabalhos, a comissão concluiu que estes ensaios poderiam se tornar uma base essencial para a determinação das novas curvas de flambagem da ECCS.

Então, um conjunto de 1067 ensaios foram realizados em laboratórios de sete países de Europa, a saber: Alemanha, Bélgica, França, Holanda, Itália, Iugoslávia e Reino Unido, segundo os preceitos preconizados por Dutheil, para que se pudesse fazer uma análise estatística dos resultados obtidos. Para isto, os corpos de prova deveriam formar uma amostra representativa da produção Européia e das imperfeições inevitáveis encontradas na prática industrial durante o processo de fabricação (imperfeições, tensões residuais, etc.), e também, o número de ensaios

deveriam ser suficientes para permitir a determinação estatística das cargas últimas para uma dada probabilidade.

A comissão estava plenamente consciente do fato de que somente os ensaios não poderiam constituir uma base suficiente para se determinarem as novas curvas de resistência, principalmente pelas razões seguintes:

- Os ensaios só poderiam ser executados, salvo exceções, em barras com dimensões relativamente reduzidas.
- Os ensaios só poderiam ser realizados sobre certos tipos de perfis particularmente característicos, conseqüentemente a extrapolação dos resultados para todos os outros tipos de perfis, possíveis de serem utilizados na prática, só poderia ser feita através de raciocínio teórico.
- Somente a teoria poderia compreender separadamente os efeitos devidos à todas as imperfeições e fundamentar a elaboração das curvas de resistência sobre uma combinação racional destas influências, considerando-as com seus valores mais prováveis.

Como base para as análises teóricas foi considerada uma coluna bi-rotulada, carregada axialmente, possuindo imperfeições iniciais e tensões residuais. A imperfeição inicial foi definida por uma curva semi-senoidal para a curvatura inicial da barra com uma flecha central de $l/1000$. Como já mencionado anteriormente, esta hipótese é compatível com as imperfeições iniciais medidas em laboratório, bem como, os limites estabelecidos nas diversas especificações Européias. As tensões residuais consideradas são devidas aos processos de laminação e soldagem dos perfis, sendo que as suas distribuições através da seção transversal são aquelas encontradas nas barras laminadas ou soldadas "como fabricadas". A análise teórica é baseada no critério de Resistência-Última de barras estruturais com imperfeições, cuja capacidade máxima de carga é encontrada, em geral, através de cálculos computacionais, considerando-se um processo incremental-iterativo.

A pesquisa teórica matemática, baseada em dados experimentais suficientes para uma análise probabilística satisfatória, mostrou uma larga dispersão da resistência das colunas dependendo do tipo de seção transversal, do processo de fabricação e do eixo de flexão. A comissão percebeu desde o início que o estabelecimento de uma única curva de resistência iria prejudicar inutilmente a maioria dos perfis utilizados na prática e, por isto, decidiu propor o estabelecimento de curvas múltiplas. A princípio foram propostas três curvas (a), (b) e (c), e mais tarde, em 1976, este número foi aumentado para cinco com adoção das curvas (a₀) e (d).

As três curvas de resistência foram traçadas para três formas representativas de perfis possuindo tensões residuais e flecha inicial no meio do vão de $l/1000$. A curva dos tubos (a) foi calculada para os tubos circulares, a curva dos perfis caixão (b) corresponde à resistência-última dos perfis caixão soldados de seção retangular e a curva dos perfis I (c) refere-se aos perfis I tendo uma distribuição desfavorável das tensões residuais.

Para se chegar à classificação das outras formas de perfis dentro das curvas (a), (b) e (c), conforme mostra a Tab. 2.3, não somente a teoria, considerando-se os dados relativos às imperfeições e tensões residuais, se constituiu num meio indispensável, como também, os resultados dos ensaios representou uma confirmação necessária para se determinar, para cada perfil, a sua curva de resistência correspondente.

Contudo, estas curvas sofreram algumas críticas, sendo que uma delas se referia ao fato de que o efeito de strain-hardening não havia sido levado em conta nas hipóteses teóricas iniciais, o que deveria alterar os valores das tensões para baixos valores da esbeltez. Deste modo, as cinco novas curvas de flambagem, adotadas em 1976 pela ECCS, apresentavam um platô horizontal para valores de esbeltez abaixo de 0,2. Em relação às

duas novas curvas criadas, a curva (a₀) representa o comportamento das colunas com pouca presença relativa de tensões residuais, como nos perfis tratados com alívio de tensão e aço de alta-resistência e a curva (d) representa o comportamento de colunas com forte presença relativa de tensões residuais, como por exemplo os perfis H pesados (espessura > 40 mm) laminados ou soldados UM. A Fig. 2.27, no final da seção 2.3.1, ilustra as cinco curvas recomendadas pela ECCS e mostra também os perfis estruturais classificados para serem usados nas curvas (a), (b) e (c).

TABELA 2.3 - Tabela de Seleção de Curvas de Flambagem (adaptação da ref. 20)

Nº	Forme du profilé	Curve
1	Tubes laminés	A
2	Tubes soudés	A
3	Caisson soudés	B
4	Profilés I et H laminés: - Flambement à l'âme $h/b > 1,2$ $h/b \leq 1,2$	A
		B
		- Flambement aux semelles $h/b > 1,2$ $h/b \leq 1,2$
5	Profilés I et H soudés: - Flambement à l'âme: a) semelles oxycoupées b) semelles en larges-plats	A
		B
		- Flambement aux semelles: a) semelles oxycoupées b) semelles en larges-plats
6	Profilés I et H laminés, avec semelles additionnelles soudées - Flambement aux semelles - Flambement à l'âme	A
		B
7	Caissons ayant subi un recuit de détente	A
8	Profilés I ou H recuits: - Flambement à l'âme - Flambement aux semelles	A
		B
9	Profilés en T ou ½ I	C
10	Profilés U	C

Assim como para as curvas do SSRC, RONDAL & MAQUOI [110] propuseram uma expressão matemática simples para representar estas curvas múltiplas, dada por:

$$\frac{F_u}{F_y} = \frac{1}{2\lambda_c^2} \left(Q - \sqrt{Q^2 - 4\lambda_c^2} \right) \leq 1,00 \quad (2.22)$$

onde:

$$Q = 1 + \alpha \sqrt{\lambda_c^2 - 0,04} + \lambda_c^2 \quad (2.23)$$

e

$$\alpha = \begin{cases} 0,093 & \text{para a curva (a}_o\text{)} \\ 0,158 & \text{para a curva (a)} \\ 0,281 & \text{para a curva (b)} \\ 0,384 & \text{para a curva (c)} \\ 0,587 & \text{para a curva (d)} \end{cases}$$

Conforme PIMENTA, R.J. [101], estes valores de α foram calibrados de tal forma, que a mínima diferença entre os valores da Eq. 2.22 e os valores reais ocorresse dentro da faixa de trabalho mais utilizada na prática, ou seja, de $0,6 < \lambda_c < 2,1$, apresentando as seguintes variações para as cinco curvas: (a_o) $\pm 0,53\%$; (a) $\pm 0,43\%$; (b) $\pm 2,58\%$; (c) $\pm 1,79\%$; (d) $\pm 1,87\%$.

CURVAS DO EUROCODE

A norma europeia para cálculo e projeto de estruturas de aço (EUROCODE), desenvolvida pelo Comitê Europeu de Normalização, é baseada nos estudos teóricos e experimentais feitos pela ECCS. Sendo assim, o EUROCODE/83 adotou as cinco curvas prescritas pela ECCS, através de uma única equação matemática, com uma diferença na Eq. 2.23 e nos valores de α , dada por:

$$\frac{F_u}{F_y} = \frac{1}{2\lambda_c^2} \left(Q - \sqrt{Q^2 - 4\lambda_c^2} \right) \leq 1,00 \quad (2.24)$$

onde:

$$Q = 1 + \alpha(\lambda_c - 0,2) + \lambda_c^2 \quad (2.25)$$

e

$$\alpha = \begin{cases} 0,13 & \text{para a curva (a}_o\text{)} \\ 0,21 & \text{para a curva (a)} \\ 0,34 & \text{para a curva (b)} \\ 0,49 & \text{para a curva (c)} \\ 0,76 & \text{para a curva (d)} \end{cases}$$

Na sua versão mais recente, de 1992, ou EUROCODE 3º Design of Steel Structures - Prestandard [46], abandonou a curva (a_o) adotando apenas as outras quatro curvas. A equação matemática que representa estas quatro curvas é dada por:

$$\frac{F_u}{F_y} = \rho = \frac{1}{Q + (Q^2 - \lambda_c^2)^{0,5}} \leq 1,00 \quad (2.26)$$

onde:

$$Q = 0,5 \left[1 + \alpha(\lambda_c - 0,2) + \lambda_c^2 \right] \quad (2.27)$$

e

$$\alpha = \begin{cases} 0,21 & \text{para a curva (a)} \\ 0,34 & \text{para a curva (b)} \\ 0,49 & \text{para a curva (c)} \\ 0,76 & \text{para a curva (d)} \end{cases}$$

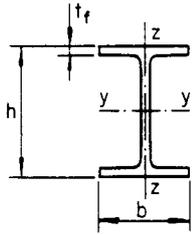
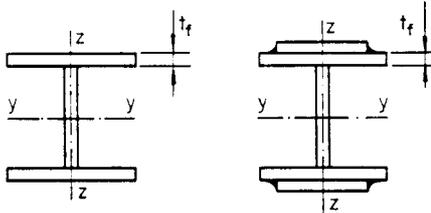
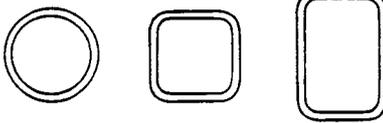
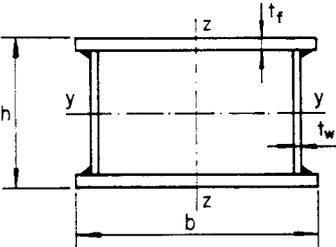
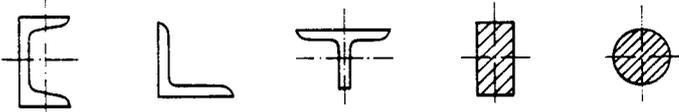
Como ilustração, a Tab. 2.4 apresenta os valores de ρ para as quatro curvas de resistência, determinados conforme as Eq. 2.26 e 2.27, em função do parâmetro de esbeltez λ_c e, a Tab. 2.5 auxilia na seleção das curvas

conforme o tipo de perfil, processo de fabricação e eixo de flexão. Observa-se também na Tab. 2.5 que o EUROCODE/92 não faz mais distinção entre os perfis I e H soldados tipos FC ou UM, e os classifica de forma única, conservativamente, conforme os perfis UM de menor resistência.

TABELA 2.4 - Fatores de redução ρ em função do parâmetro de esbeltez λ_c , para as curvas de flambagem (a), (b), (c) e (d). (adaptação da ref. 46)

λ_c	Curva de Flambagem			
	a	b	c	d
0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3	0,9775	0,9641	0,9491	0,9235
0,4	0,9528	0,9261	0,8973	0,8504
0,5	0,9243	0,8842	0,8430	0,7793
0,6	0,8900	0,8371	0,7854	0,7100
0,7	0,8477	0,7837	0,7247	0,6431
0,8	0,7957	0,7245	0,6622	0,5797
0,9	0,7339	0,6612	0,5998	0,5208
1,0	0,6656	0,5970	0,5399	0,4671
1,1	0,5960	0,5352	0,4842	0,4189
1,2	0,5300	0,4781	0,4338	0,3762
1,3	0,4703	0,4269	0,3888	0,3385
1,4	0,4179	0,3817	0,3492	0,3055
1,5	0,3724	0,3422	0,3145	0,2766
1,6	0,3332	0,3079	0,2842	0,2512
1,7	0,2994	0,2781	0,2577	0,2289
1,8	0,2702	0,2521	0,2345	0,2093
1,9	0,2449	0,2294	0,2141	0,1920
2,0	0,2229	0,2095	0,1962	0,1766
2,1	0,2036	0,1920	0,1803	0,1630
2,2	0,1867	0,1765	0,1662	0,1508
2,3	0,1717	0,1628	0,1537	0,1399
2,4	0,1585	0,1506	0,1425	0,1302
2,5	0,1467	0,1397	0,1325	0,1214
2,6	0,1362	0,1299	0,1234	0,1134
2,7	0,1267	0,1211	0,1153	0,1062
2,8	0,1182	0,1132	0,1079	0,0997
2,9	0,1105	0,1060	0,1012	0,0937
3,0	0,1036	0,0994	0,0951	0,0882

TABELA 2.5 - TABELA DE SELEÇÃO DE CURVAS DE FLAMBAGEM E TIPOS DE PERFIS
(ADAPTAÇÃO DA REF. 46)

CROSS SECTION		LIMITS	BUCKLING ABOUT AXIS	BUCKLING CURVE
ROLLED "I" SECTIONS		$h/b > 1,2$ $t_f \leq 40\text{mm}$	y - y z - z	a b
		$40\text{mm} < t_f \leq 100\text{mm}$	y - y z - z	b c
WELDED "I" SECTIONS		$t_f \leq 40\text{mm}$	y - y z - z	b c
		$t_f > 40\text{mm}$	y - y z - z	c d
HOLLOW SECTIONS		HOT ROLLED	ANY	a
		COLD FORMED -USING f_{yb}	ANY	b
		COLD FORMED -USING f_{ya}	ANY	c
WELDED BOX SECTIONS		GENERALLY (EXCEPT AS BELOW)	ANY	b
		THICK WELDS AND $b/t_f < 30$ $b/t_w < 30$	y - y z - z	c c
U-, L-, T-, AND SOLID SECTIONS			ANY	c

CURVAS DA NBR 8800/86

A NBR-8800 [13], desde 1986 não considerou a curva (a0) e adotou as curvas (a), (b), (c) e (d) da ECCS para representar a resistência à flambagem das colunas de aço. Também, desde esta época não fez distinção entre os tipos FC e UM dos perfis I ou H soldados, adotando, conservativamente, as curvas referentes aos perfis UM, que têm menor resistência.

É importante observar neste instante, que esta consideração é bastante adequada para os padrões europeus, porque a maioria dos seus perfis soldados são do tipo UM, enquanto que aqui no Brasil ocorre exatamente o contrário. A grande maioria dos perfis soldados são do tipo FC (cortados à maçarico), que, como ficou demonstrado na seção 2.2.2, tem maior resistência do que os perfis soldados tipo UM. Portanto, ao se adotar as curvas dos perfis UM, pode-se estar sendo muito conservativo, anti-econômico e penalizando desnecessariamente as estruturas. Atualmente está sendo desenvolvida uma dissertação de mestrado no Departamento de Engenharia de Estruturas da EE-UFMG [101], que visa investigar exatamente esta situação.

As expressões matemáticas que representam as curvas da NBR-8800/86 são as mesmas Eq. 2.22 e 2.23 da ECCS com um formato um pouco diferente, como mostrado a seguir:

$$\frac{F_u}{F_y} = \rho = 1,00 \quad \text{para } 0 \leq \bar{\lambda} \leq 0,2 \quad (2.28a)$$

$$\frac{F_u}{F_y} = \rho = \beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{\bar{\lambda}^2}} \quad \text{para } \bar{\lambda} \geq 0,2 \quad (2.28b)$$

onde:

$$\beta = \frac{1}{2\bar{\lambda}^2} \left(1 + \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0,04} + \bar{\lambda}^2 \right) \quad (2.29)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi} \frac{Kl}{r} \sqrt{\frac{Qf_y}{E}} \quad (2.30)$$

sendo:

$\bar{\lambda}$ = parâmetro de esbeltez;

Q = coeficiente de redução que leva em conta a flambagem local.

e

$$\alpha = \begin{cases} 0,158 & \text{para a curva (a)} \\ 0,281 & \text{para a curva (b)} \\ 0,384 & \text{para a curva (c)} \\ 0,572 & \text{para a curva (d)} \end{cases}$$

Como ilustração, a Fig. 2.31 mostra as curvas de flambagem da NBR-8800/86 que relaciona $\rho \times \bar{\lambda}$ e a Tab. 2.6 mostra a tabela de classificação de seções e curvas de flambagem.

Comentários

A NBR 8800 considera parâmetros como as tensões residuais existentes nos perfis de aço e as imperfeições iniciais das barras, nos modelos para cálculo da resistência das colunas, adotando assim o critério da Resistência-Última, que é hoje o conceito mais moderno para a determinação das curvas de resistência das colunas de aço.

As pesquisas realizadas pelos comitês europeu (ECSS) e americano (SSRC) para estudos sobre a estabilidade de estruturas, baseadas em

dados teóricos e experimentais, mostraram uma larga dispersão da resistência das colunas dependendo do tipo de seção transversal, do processo de fabricação e do eixo de flexão, indicando que o estabelecimento de várias curvas de resistência representa melhor o comportamento destas colunas, enquanto que a adoção de uma única curva pode, em muitos casos, levar a situações de projeto bastante anti-econômicos e em outros casos, ficar contra a segurança.

Pode-se afirmar então, que a NBR 8800 [13] ao optar pelas curvas múltiplas na determinação da resistência das colunas, adotou os critérios mais modernos e avançados na concepção filosófica para o projeto, cálculo e dimensionamento das estruturas de aço.

Entretanto, algumas críticas devem ser feitas, não em relação à filosofia que é considerada correta, mas em relação às curvas finais (a, b, c e d) adotadas pela NBR 8800, representadas pelas Eq. 2.28 e 2.29 com seus respectivos valores do coeficiente α .

Observa-se que estas equações são as mesmas Eq. 2.22 e 2.23 da ECCS, adotando-se inclusive os mesmos valores para o coeficiente α . Observa-se também que o próprio EUROCODE [46], já revisou as suas expressões (ver Eq. 2.26 e 2.27) e os valores do coeficiente α . Isto significa que devemos adaptar as curvas de resistência à nossa realidade, adequando as expressões matemáticas e os valores do coeficiente α às condições dos perfis fabricados e utilizados no Brasil.

Para isto, é necessária a realização de um amplo programa de testes visando determinar o número de curvas de resistência adequado à nossa realidade, estabelecer uma classificação mais correta dos perfis dentro destas curvas e obter novas expressões matemáticas para as mesmas, com os respectivos valores do coeficiente α .

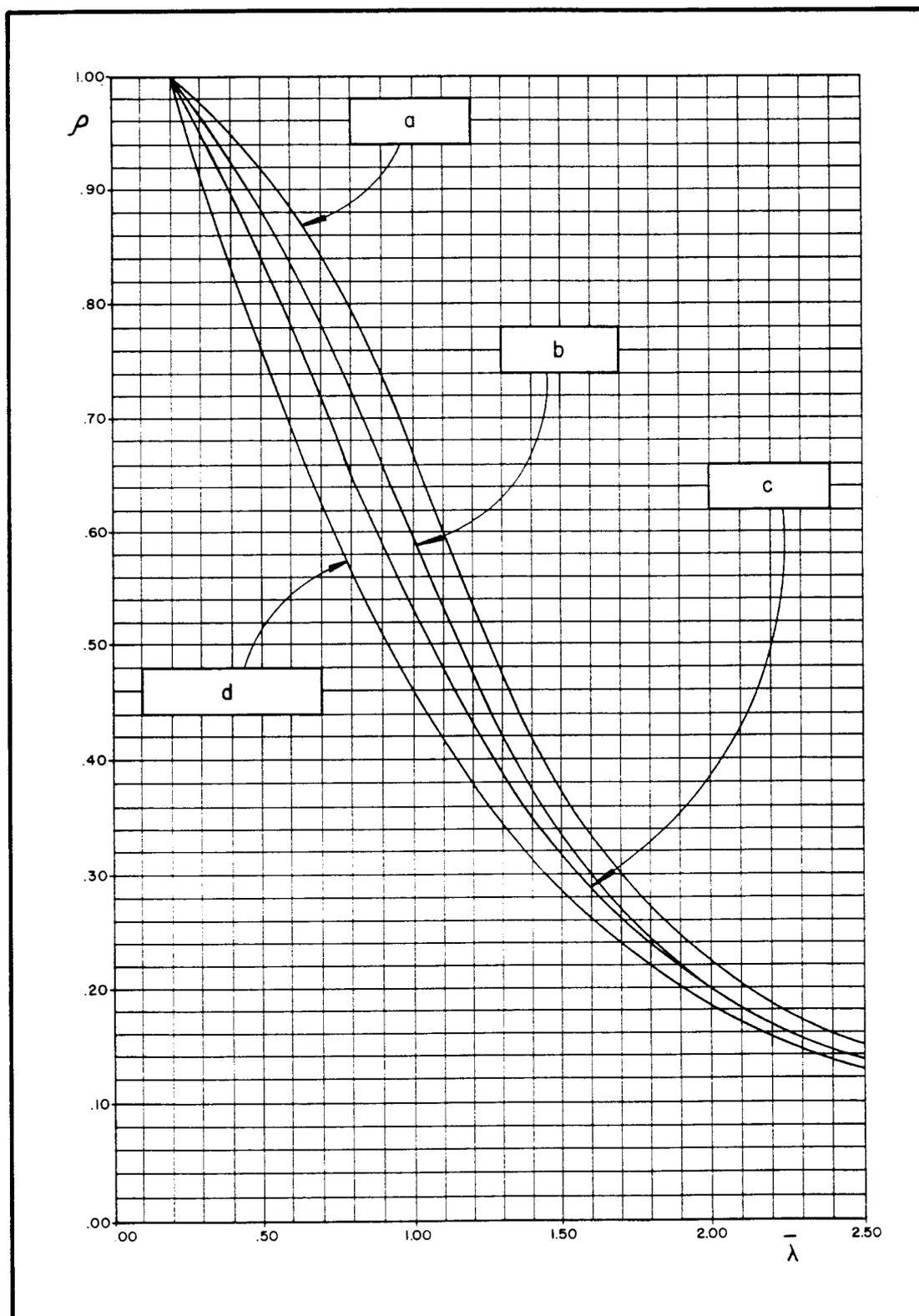
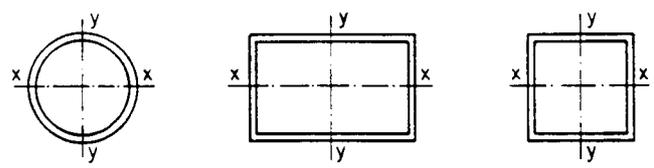
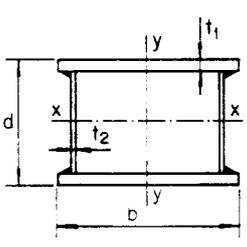
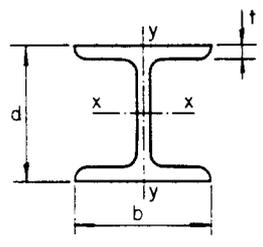
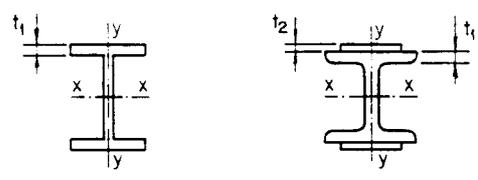
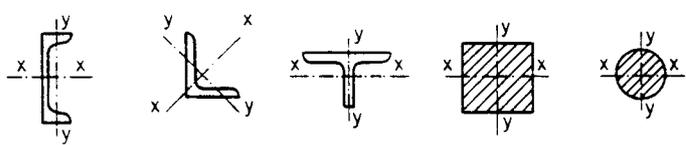


FIGURA 2.31 - CURVAS DE FLAMBAGEM DA NBR-8800/86

TABELA 2.6 - CLASSIFICAÇÃO DE SEÇÕES E CURVAS DE FLAMBAGEM (ADAPTAÇÃO DA REF. 13)

SEÇÃO TRANSVERSAL			FLAMBAGEM EM TORNO DO EIXO	CURVA DE FLAMBAGEM (A)
PERFIL TUBULAR			x - x y - y	a
PERFIL CAIXÃO SOLDADO		SOLDAS DE GRANDE ESPESSURA	$b / t_1 < 30$	x - x
			$d / t_2 < 30$	y - y
		OUTROS CASOS	x - x y - y	b
PERFIS "I" ou "H" LAMINADOS		$d / b > 1,2$ $t \leq 40\text{mm}$	x - x y - y	a b (a)
		$d / b \leq 1,2$ $t \leq 40\text{mm}$	x - x y - y	b (a) c (b)
		$t > 40\text{mm}$	x - x y - y	d d
PERFIS "I" ou "H" SOLDADOS		$t_i \leq 40\text{mm}$	x - x y - y	b c
		$t_i > 40\text{mm}$	x - x y - y	c d
"U", "L", "T" E PERFIS DE SEÇÃO CHEIA			x - x y - y	c

(A) VER FIGURA 2.3!

NOTAS :

- a) SEÇÕES NÃO INCLUÍDAS NA TABELA DEVEM SER CLASSIFICADAS DE FORMA ANÁLOGA.
b) AS CURVAS DE FLAMBAGEM INDICADAS ENTRE PARÊNTESES PODEM SER ADOTADAS PARA AÇOS DE ALTA RESISTÊNCIA, COM $f_y > 430\text{MPa}$.

FORMULAÇÃO TEÓRICA CONSISTENTE PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS CONSIDERANDO BARRAS COM IMPERFEIÇÕES INICIAIS E TENSÕES RESIDUAIS NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS

3.1 Considerações Iniciais. Revisão Bibliográfica

Após todas as considerações feitas no Capítulo 2, ficou claro que o modelo apropriado para cálculo da resistência das colunas de aço é aquele que incorpora as tensões residuais e as imperfeições iniciais, o que leva a uma mudança de filosofia no projeto das colunas de aço que deve ser baseado no critério de Resistência-Última ao invés do critério de Bifurcação.

Para colunas de aço, a presença de tensões residuais nas seções transversais de barras comprimidas axialmente provoca o aparecimento precoce do escoamento em partes desta seção, causando a não-linearidade do diagrama $\sigma \times \varepsilon$, constituindo-se na principal causa da NÃO-LINEARIDADE FÍSICA (NLF) ou NÃO-LINEARIDADE DO MATERIAL (NLM), que ocorre nas estruturas de aço.

As imperfeições iniciais inevitáveis das colunas de aço, por sua vez, provocam flexão nas barras comprimidas axialmente, causando deslocamentos laterais desde o início do carregamento. Estes deslocamentos podem ser elevados, principalmente em estruturas esbeltas, introduzindo esforços em segunda-ordem. Se os efeitos da mudança de geometria são levadas em conta na análise, ou seja, se o equilíbrio da

estrutura é feito na sua posição deslocada, as características carga x deslocamento são não-lineares, levando ao problema da NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA (NLG).

A não-linearidade oriunda do comportamento do material pode ocorrer simultaneamente com a não-linearidade devida à mudança de geometria, sendo assim, afim de prever com correção a resistência-última das estruturas, será necessário considerar ambas as não-linearidades na análise estrutural. Conseqüentemente, é útil que seja desenvolvido um método de análise que inclua tanto os efeitos da NLG quanto da NLM.

A formulação a ser adotada neste trabalho, considerando ambas NLG e NLM, será baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEF é hoje amplamente utilizado nas análises em engenharia, abrangendo praticamente todos os seus campos, como por exemplo na análise de sólidos e estruturas, em transferência de calor e fluidos, etc., e com a expectativa do uso cada vez mais crescente nos anos vindouros.

O grande desenvolvimento do MEF para a solução de problemas práticos na área de engenharia estrutural começou com o advento dos computadores, pois foi somente através do uso destes, impulsionados pela linguagem de programação FORTRAN, que o método pôde se mostrar efetivo e também mostrar sua aplicabilidade geral, de tal forma que tem encontrado grande apelo na engenharia prática.

Conforme BATHE [15], é difícil precisar exatamente a "data de invenção" do MEF, mas a sua origem advém de três grupos distintos: dos matemáticos aplicados, dos físicos e dos engenheiros. A sua raiz entre o grupo dos engenheiros pode ser encontrada em ARGYRIS & KELSEY [10]. O MEF obteve, realmente, grande impulso através dos trabalhos desenvolvidos por engenheiros, entre os quais apareceram as contribuições

originais nos artigos de ARGYRIS & KELSEY [10] já citado, TURNER et al. [126] e CLOUGH [37], sendo que o nome “elemento finito” foi cunhado por este último.

Desde o início dos anos 60, uma grande quantidade de pesquisa tem sido dedicada à técnica e um número muito grande de publicações sobre o MEF está disponível, mas o interesse neste momento é destacar, de forma sucinta, alguns artigos sobre a análise não-linear de estruturas, baseados no MEF, os quais foram importantes para o autor na compreensão do assunto.

Nos anos recentes, uma quantidade considerável de trabalhos teóricos têm sido realizados para determinar os efeitos das não-linearidades geométrica e do material sobre o comportamento das estruturas. A análise não-linear pelo MEF foi primeiro introduzida para a NLG por TURNER et al. [127] em 1960 e para a NLM por GALLAGHER et al. [52] em 1962.

Conforme WEN et al. [130] ou CORRÊA [39], a análise não-linear pelo MEF tem quatro etapas principais. A primeira etapa refere-se à escolha do modelo elemental, na qual se definem as tensões e deformações conjugadas, as relações constitutivas, as hipóteses básicas da teoria estrutural com os campos de deslocamento e de deformação consistentes e as funções de interpolação para estes campos.

Na segunda etapa, define-se o sistema de coordenadas do elemento a ser utilizado na formulação Lagrangiana. Este pode ser o sistema de coordenadas Lagrangiano, no qual os deslocamentos generalizados são medidos em relação a uma configuração indeformada do elemento e o sistema de referência é fixo, podendo ser atualizado ou não; ou o sistema de coordenadas Corrotacional, onde os deslocamentos generalizados são medidos em relação a uma configuração deformada do elemento e o

sistema de referência não é fixo, acompanhando a estrutura deformada. Muitos autores definem este sistema de coordenadas como Euleriano, entretanto, por considerar que esta definição é imprópria para a análise de estruturas dentro de uma formulação rigorosamente Lagrangiana, será usado, neste trabalho, o termo corrotacional.

A terceira etapa diz respeito às formulações usadas para obtenção das matrizes de rigidez dos elementos, que no caso não-linear pode ser através da matriz de rigidez geométrica (ou matriz de rigidez inicial) [140], ou da matriz de rigidez incremental.

Por último, a quarta etapa se refere à escolha do procedimento numérico a ser utilizado na solução do sistema de equações de equilíbrio não-lineares, podendo ser o método de iteração direta, o incremental direto (sem iteração), ou o misto, adotando-se os algoritmos de Newton-Raphson e suas variações.

Considerando inicialmente apenas a análise NLG, pode-se dizer que as décadas de 60 e 70 caracterizaram-se pelo aparecimento dos primeiros modelos formulados via MEF, pelo aperfeiçoamento destes e sua consolidação, principalmente para estruturas planas.

Em 1965, ARGYRIS [9] publica o texto clássico "Contínua and Discontínua", onde estuda os problemas não-lineares físico e geométrico pelo MEF. MALLETT & MARCAL [74] em 1968, usando o sistema de coordenadas Lagrangiano e considerando pequenas rotações, formulam três modelos gerais de análise da NLG pelo MEF, a saber: energia potencial, direta e incremental, expressando as rigidezes em termos de somente três matrizes distintas. A matriz de rigidez tangente trás de volta o conceito de rigidez tangente visto em TURNER et al. [127].

JENNINGS [60] e POWELL [102] empregam as coordenadas Eulerianas na formulação da rigidez tangente, sendo que Powell no seu desenvolvimento, separa as deformações das barras e os deslocamentos de corpo rígido dos nós, afim de tornar a formulação aplicável quando houver grandes rotações dos nós. Ele procura também identificar os tipos de não-linearidades associadas com os grandes deslocamentos de estruturas elásticas. Em 1972, EBNER & UCIFERRO [42] fazem uma comparação teórica e numérica de várias formulações para análise não-linear de estruturas via MEF. Em 1973, RAJASEKARAN & MURRAY [109] discutem com detalhes as equações incrementais de [74] e mostram os cuidados necessários que devem ser tomados na formulação, para que as equações continuem válidas.

Trabalhos importantes também foram os desenvolvidos por ORAN [85, 86] e ORAN & KASSIMALLI [87]. Em [85] Oran apresenta a matriz de rigidez tangente que é totalmente consistente com a teoria convencional de viga-coluna, para estruturas planas, considerando o sistema de coordenadas Euleriano. Em [86] o estudo é estendido para os pórticos espaciais elásticos, baseado na hipótese de pequenas deformações mas grandes rotações. É chamada a atenção para o fato de que grandes rotações no espaço tridimensional não podem ser tratadas como vetor, pois a propriedade comutativa não é satisfeita em 3D. Em [87] Oran et al. estudam grandes deslocamentos de estruturas aporticadas planas e espaciais, tanto no sistema Euleriano quanto no Lagrangiano e estendem a formulação para o caso dinâmico.

Em 1979 ARGYRIS et al. [11], sabendo da não-comutatividade de grandes rotações no espaço, apresentam considerações sobre uma formulação consistente para a rigidez geométrica de viga no espaço, onde chamam a atenção para o fato de que grandes rotações de um corpo rígido podem ser descritas de forma única pelos ângulos de Euler.

Observa-se na década de 80 a ampliação da formulação da análise da NLG via MEF para estruturas no espaço. Entre os trabalhos desta época, pode-se destacar inicialmente o de WEN & RAHINZADEH [130], onde é apresentada uma importante formulação para a análise elástica da NLG de pórticos planos e espaciais, desenvolvida no sistema de coordenadas Lagrangiano, usando as matrizes de rigidez incrementais e recomendada para problemas envolvendo pequenos e “moderados” deslocamentos. Também devem ser mencionados os trabalhos de 1987 de HSIAO & HOU [57] e HSIAO et al. [58], onde se apresenta uma formulação corrotacional não-linear combinada com a teoria de viga-coluna, na qual se retiram as restrições de pequenas rotações, podendo-se trabalhar então com as grandes rotações de estruturas planas [57] e espaciais [58].

Nesta década de 90 tem-se observado a ênfase dada às formulações geométricas não-lineares para o estudo das grandes rotações no espaço, com o objetivo de se obter formulações consistentes e geometricamente exatas. Assim, LEVY et al. [71] em 1991 apresentam uma formulação geometricamente exata para análise não-linear de treliças, usada para estudar, por exemplo, a resposta de cadeias de cabo à carga externa. LO, S.H [72], em 1992, apresenta uma formulação geometricamente não-linear para elemento de viga em 3D removendo as restrições às grandes rotações. Isto é conseguido ao definir a geometria da viga usando deslocamentos nodais e vetores tangente, ao invés de ângulos de rotação nas duas extremidades do elemento de viga.

Em 1993, KUO et al. [69] sabendo da necessidade de considerar a natureza não-comutativa das rotações no espaço tridimensional, desenvolvem expressões analíticas que são válidas para atualizar a geometria e calcular as rotações e deformações das barras do elemento de pórtico em cada passo incremental, baseadas na fórmula de rotações finitas de Euler. CHEN & AGAR [35] desenvolvem uma formulação Lagrangiana

atualizada para um elemento de viga em 3D visando uma análise puramente NLG.

Recentemente, em 1994, PAI & NAYFEH [89] publicam um trabalho interessante onde é discutida a objetividade de várias definições de tensões e deformações conjugadas, entre elas as tensões e deformações de engenharia e as tensões 2° Piola-Kirchhoff e deformações de Green-Lagrange e o uso delas na formulação de teorias estruturais não-lineares. Os resultados destas discussões os levariam a propor um novo método para a formulação de teorias estruturais não-lineares, baseado em deslocamentos locais e tensões e deformações de engenharia locais, com um significado físico mais aparente. O método proposto é usado para formular uma teoria de viga de Bernoulli-Euler, tridimensional e não-linear.

Considerando agora apenas a não-linearidade dos materiais (NLM ou NLF), pode-se admitir as mesmas etapas principais da análise NLG anterior, introduzindo relações constitutivas elasto-plásticas, baseadas na teoria clássica de Plasticidade, para modelar o comportamento não-linear dos materiais que compõem os elementos do sistema estrutural.

Como já citado anteriormente, a análise NLM via MEF foi introduzida pioneiramente por GALLAGHER et al. [52] em 1962 e depois tratada no trabalho de ARGYRIS [9] em 1965. ALVAREZ & BIRNSTIEL [3], em 1969, estudam a análise elasto-plástica de pórticos planos rígidos considerando o "spread" da zona inelástica na barra e tensões reversas, desprezando as tensões residuais e a redução do momento plástico devida às cargas axiais. RAJASEKARAN & MURRAY [108], em 1973 estendem a aplicação do MEF para a análise de vigas e vigas-colunas com seções transversais abertas e de parede fina, com base na hipótese de que não ocorrem deformações reversas.

Na década de 80, vários pesquisadores apresentaram formulações gerais para análise não-linear elasto-plástica, aplicáveis a problemas de pórticos planos. Assim, em 1983 EL-ZANATY & MURRAY [43] consideraram na análise elasto-plástica de pórticos de andares múltiplos os efeitos das tensões residuais e “strain-hardening”. O procedimento de KASSIMALY [65] é baseado na teoria de viga-coluna, numa formulação Euleriana que inclui o efeito elasto-plástico na forma de rótulas plásticas. KAM et al. [64] apresentam um método geral para formular a matriz de rigidez tangente inelástica com expressões na forma de equações integrais, para barras com forças axiais e propriedades arbitrárias dos materiais. Em 1984, CHEBL & NEALE [31] usam a formulação Lagrangiana total e obtêm as equações do problema na forma incremental e KAM [62], em 1988, apresenta a matriz de rigidez tangente para problemas inelásticos formulada no sistema Euleriano, com base na equação diferencial “exata” de barra.

Importantes referências são as publicações de OWEN & HINTON [88], onde se descreve em detalhes a aplicação do MEF na solução de problemas não-lineares físicos, envolvendo teoria da plasticidade e comportamento elasto-viscoplástico dos materiais, e as publicações de BATHE [14, 15], onde se estuda de forma bastante completa a formulação do MEF, sendo uma boa referência tanto para aqueles que desejam se introduzir na análise dos elementos finitos, como para aqueles que desejam um conhecimento mais avançado sobre as técnicas do MEF, como por exemplo, em análises dinâmicas, de transporte de calor, de escoamento de fluidos, em métodos numéricos e em análise não-linear de sólidos e estruturas.

Mais recentemente, em 1990, MEEK et al. [81] estudam o comportamento não-linear geométrico e físico de pórticos espaciais, através de uma formulação simples e eficiente de elementos de vigas-colunas. WONG et al. [133] desenvolveram um método para análise não-linear

geométrica de pórticos planos elásticos, capaz de dar solução até o ponto limite, numa formulação Lagrangiana atualizada e, em seguida [134], estendem a análise para pórticos espaciais com não-linearidades física e geométrica. Em 1991, AL-MASHARY & CHEN [1] apresentam uma interessante análise elástica em segunda-ordem, simplificada, para pórticos de aço, mostrando que a degeneração de rigidez à flexão das vigas-colunas pode ser simulada pela diminuição da rigidez de molas fictícias, que são montadas com a matriz de rigidez da viga-coluna de forma condensada. Neste método prático é levada em conta a tensão residual mas não o efeito de “strain-hardening”.

Entre os pesquisadores brasileiros, cujos trabalhos contribuíram para a formação do autor, podem ser destacados os seguintes: RACHID [106], em 1975, baseando-se no método da energia, estuda a instabilidade lateral de barras elásticas de seção transversal aberta e de parede fina, considerando os efeitos do bimomento; ANTUNES [4], em 1978, estuda a instabilidade de edifícios tridimensionais, considerando o equilíbrio de barra em 3D, numa formulação para pequenos deslocamentos e pequenas deformações, desprezando os efeitos do bimomento; SOUZA LIMA & VENÂNCIO FILHO [118] estudam a não-linearidade geométrica em estruturas reticuladas planas e, em seguida, fazem considerações sobre a noção de rigidez tangente no estudo da NLG [119]; MAZZILLI [75 a 77] faz interessantes considerações teóricas sobre a análise da NLG de pórticos planos, numa formulação consistente e obtém a matriz de rigidez tangente das barras; em 1988, PROENÇA [103] faz um estudo sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear físico de estruturas, com aplicações para o concreto armado; CORRÊA [39], em 1991 desenvolve um modelo para estruturas de edifícios altos tridimensionais que incorpora o pavimento, considerando a NLG das barras em 3D e a NLF das lajes de concreto armado.

Muito importantes foram os trabalhos apresentados por PIMENTA, P.M. [90 a 95, 98], onde é desenvolvida uma teoria geral, consistente, para análise não-linear de pórticos planos, considerando tanto a NLG quanto a NLF dos materiais, numa formulação Lagrangiana mas que utiliza a técnica corrotacional na obtenção dos vetores e matrizes elementais. Nesta teoria permite-se que os nós do pórtico sofram grandes deslocamentos e rotações, assim como suas barras sofram grandes alongamentos e curvaturas.

Após 1992, PIMENTA, P.M. et al. [96, 97, 99, 100] a partir das equações da Mecânica dos Sólidos Deformáveis, de forma totalmente consistente e usando formulações variacionais para a obtenção das equações de equilíbrio, desenvolvem um modelo de barra totalmente não-linear (NLFG) e geometricamente exato, sem nenhuma limitação tanto nos deslocamentos quanto nas rotações, muito próprio para a análise de pórticos espaciais através do MEF. Para tanto usa uma formulação puramente Lagrangiana e a rotação em 3D é trabalhada com o auxílio da fórmula de Euler-Rodrigues. Em [99, 100] é considerado o empenamento da seção transversal de barras com seção aberta e de parede fina e em [99] considera ainda o efeito de cisalhamento na formulação do elemento.

3.2 Introdução

Visando o estudo das imperfeições iniciais em colunas metálicas e das tensões residuais nos perfis de aço, é apresentada neste capítulo uma teoria geral para a análise não-linear de pórticos planos, cujas barras possuem curvaturas iniciais, pelo método dos elementos finitos. Esta formulação considera ambos os comportamentos não-lineares, físico (NLF ou NLM) e geométrico (NLG), das estruturas.

O desenvolvimento teórico é feito dentro de uma rigorosa formulação Lagrangiana, que utiliza a técnica corrotacional para a dedução consistente das matrizes do elemento de pórtico plano. A formulação apresentada pretende ser a mais geral possível, permitindo que os nós sofram grandes deslocamentos e rotações e as barras sofram grandes alongamentos e curvaturas e, além disso, estas barras podem ser não-homogêneas, não-prismáticas, possuir imperfeições iniciais e tensões residuais e podem ser constituídas de material elasto-plástico.

A seguir é feita uma apresentação itemizada desta teoria para melhor entendimento do assunto, observando que os trabalhos de PIMENTA, P.M. [90 a 95, 98], MAZZILLI [75 a 77], SOLER [116,117] e WEN & RAHIMZADEH [130], entre outros, foram importantes para este desenvolvimento teórico, possibilitando a formulação analítica inédita da matriz de rigidez tangente, elástica e elasto-plástica, de barras com imperfeições iniciais que será obtida na seção 3.9.

3.3 Deformações e Tensões

Seja uma fibra de material onde se designa por V_r , A_r e l_r o seu volume, a sua área da seção transversal e o seu comprimento, respectivamente, na configuração de referência ou inicial. Por V_c , A_c e l_c são designados o seu volume, a sua área da seção transversal e o seu comprimento, respectivamente, na configuração corrigida ou atual ou deformada, na qual atua sobre a fibra uma força normal N , conforme a Fig. 3.1.

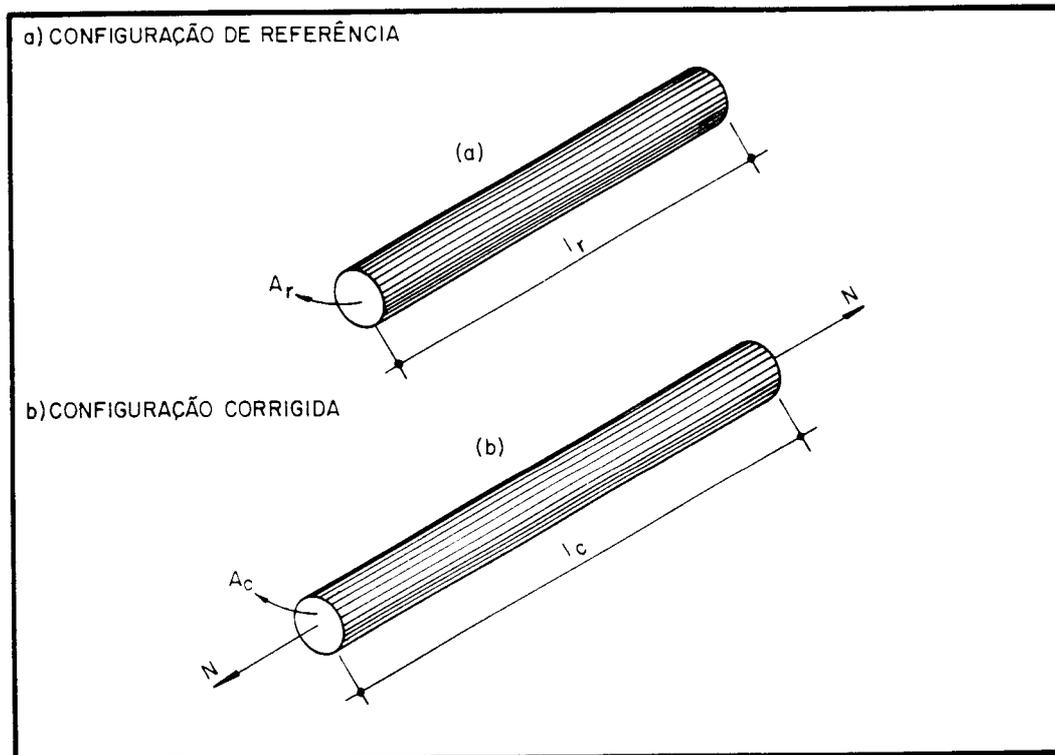


FIGURA 3.1 - CONFIGURAÇÕES DE UMA FIBRA DE MATERIAL

Evidentemente, são válidas as seguintes equações:

$$\begin{cases} V_r = A_r l_r & (3.1a) \\ V_c = A_c l_c & (3.1b) \end{cases}$$

Uma medida de deformação é definida como qualquer grandeza que compare os comprimentos da fibra nas configurações de referência e corrigida. Uma medida básica de deformação é o estiramento da fibra, dado por:

$$\lambda = \frac{l_c}{l_r} \quad (3.2)$$

Uma família de medidas de deformação ou família de deformações pode ser definida através de:

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \frac{(\lambda^{2m} - 1)}{2m} & , m \neq 0 \\ \ln \lambda & , m = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Com a ajuda da Eq. (3.2), podem ser explicitados alguns membros desta família, da seguinte maneira:

a) Deformação quadrática ou de Green-Lagrange: $m = 1$

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda^2 - 1}{2} = \frac{l_c^2 - l_r^2}{2l_r^2} \quad (3.3a)$$

b) Deformação linear ou técnica ou de engenharia: $m = 1/2$

$$\varepsilon_{1/2} = \lambda - 1 = \frac{l_c - l_r}{l_r} = \frac{\Delta l}{l_r} \quad (3.3b)$$

c) Deformação natural ou logarítmica ou de Henchy: $m = 0$

$$\varepsilon_0 = \ln \lambda = \ln \frac{l_c}{l_r} \quad (3.3c)$$

d) Deformação hiperbólica ou de Reiner: $m = -1/2$

$$\varepsilon_{-1/2} = 1 - \lambda^{-1} = \frac{l_c - l_r}{l_c} = \frac{\Delta l}{l_c} \quad (3.3d)$$

e) Deformação de Almansi: $m = -1$

$$\varepsilon_{-1} = \frac{1 - \lambda^{-2}}{2} = \frac{l_c^2 - l_r^2}{2l_c^2} \quad (3.3e)$$

Derivando-se a Eq. (3.3) no tempo obtém-se uma família de taxas de deformação:

$$\dot{\varepsilon}_m = \frac{d\varepsilon_m}{dt} = \lambda^{2m-1} \dot{\lambda}$$

Com a ajuda da Eq. (3.2) e sendo $\dot{\lambda} = \frac{\dot{l}_c}{l_r}$, fica:

$$\dot{\varepsilon}_m = \lambda^{2m} \frac{\dot{l}_c}{l_c}$$

chamando-se de taxa instantânea de deformação, que independe da configuração de referência, a relação

$$\dot{d} = \frac{\dot{l}_c}{l_c} \quad (3.4)$$

tem-se, finalmente, a família de taxas de deformação, dada por:

$$\dot{\varepsilon}_m = \lambda^{2m} \dot{d} \quad (3.5)$$

No caso de pequenas deformações, pode-se considerar que $\lambda \cong 1$ e, neste caso, todos os membros das famílias (3.3) e (3.5) se confundem.

A tensão de Cauchy e a tensão de engenharia (ou nominal) da fibra são definidas, respectivamente, por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_c = \frac{N}{A_c} \end{array} \right. \quad (3.6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_N = \frac{N}{A_r} \end{array} \right. \quad (3.6b)$$

No entanto, outras definições para as tensões são possíveis, podendo-se chegar a elas através da potência da força normal N por unidade de volume de referência. Do trabalho de N por unidade de volume de referência dado por $W = N(l_c - l_r)/V_r$, determina-se a potência de N por:

$$\dot{\omega} = \frac{N}{V_r} \dot{l}_c \quad (3.7)$$

que pode ser escrita, com o auxílio das Eq. (3.1) e (3.4), através de:

$$\dot{\omega} = \frac{V_c}{V_r} \sigma_c \dot{d} = \sigma_{KT} \dot{d} \quad (3.8)$$

onde, σ_{KT} é a tensão de Kirchhoff - Trefftz, que é dada por:

$$\sigma_{KT} = \frac{V_c}{V_r} \sigma_c \quad (3.9)$$

Para se definir a tensão σ_m conjugada com a deformação ε_m dada em (3.3), deve-se igualar a potência dos esforços externos, dada pela Eq. (3.8), com a potência dos esforços internos, dada por:

$$\dot{\omega} = \sigma_m \dot{\varepsilon}_m \quad (3.10)$$

Igualando-se (3.10) com (3.8) e com o auxílio de (3.5), tem-se que:

$$\sigma_m = \lambda^{-2m} \sigma_{KT} \quad (3.11)$$

que representa a família de tensões σ_m conjugada com a família de deformações ε_m dada por (3.3).

Alguns membros desta família podem ser definidos e expressos em função da tensão de Cauchy, com a ajuda das Eq. (3.6a) e (3.9).

$$\begin{cases} \sigma_1 = \lambda^{-2} \sigma_{KT} = \frac{V_c}{V_r} \frac{1}{\lambda} \sigma_c \frac{1}{\lambda} \\ \sigma_{1/2} = \lambda^{-1} \sigma_{KT} = \frac{V_c}{V_r} \frac{1}{\lambda} \sigma_c \\ \sigma_0 = \sigma_{KT} = \frac{V_c}{V_r} \sigma_c \end{cases} \quad (3.12)$$

onde σ_1 é a segunda tensão de Piola-Kirchhoff, $\sigma_{1/2}$ é denominada tensão de engenharia ou nominal e σ_0 é a tensão de Kirchhoff-Trefftz.

Voltando-se à Eq. (3.11) e usando as Eq. (3.1), (3.6b) e (3.9), pode-se escrever a família de tensões σ_m em função da tensão de engenharia ou nominal σ_N .

$$\sigma_m = \lambda^{-2m} \sigma_{KT} = \lambda^{-2m} \frac{V_c}{V_r} \sigma_c = \lambda^{-2m} \frac{A_c l_c}{A_r l_r} \frac{N}{A_c} = \lambda^{-2m} \frac{l_c}{l_r} \frac{N}{A_r}$$

$$\sigma_m = \lambda^{-2m} \lambda \sigma_N$$

e, finalmente:

$$\sigma_m = \lambda^{1-2m} \sigma_N \quad (3.13)$$

Aqueles mesmos membros desta família de tensões, dados pela Eq. (3.12), podem ser definidos em função de σ_N da seguinte maneira:

a) Segunda tensão de Piola-Kirchhoff

$$\sigma_1 = \lambda^{-1} \sigma_N \quad (3.13a)$$

que é conjugada com a deformação de Green-Lagrange ou quadrática, dada pela Eq. (3.3a).

b) Tensão de engenharia ou tensão nominal: $m = \frac{1}{2}$

$$\sigma_{1/2} = \sigma_N \quad (3.13b)$$

que é conjugada com a deformação de engenharia ou linear, dada pela Eq. (3.3b)

c) Tensão de Kirchhoff-Trefftz: $m = 0$

$$\sigma_0 = \lambda \sigma_N \quad (3.13c)$$

conjugada com a deformação de Henchy ou natural ou hiperbólica, dada pela Eq. (3.3c).

Derivando-se a Eq. (3.13) no tempo, obtém-se uma família de taxas de tensionamento dada por:

$$\dot{\sigma}_m = \lambda^{1-2m} \dot{\sigma}_N + (1-2m) \lambda^{-2m} \dot{\lambda} \sigma_N \quad (3.14)$$

Chamando a atenção para o caso de pequenas deformações, quando $\lambda \cong 1$, as Eq. (3.13) e (3.14) ficam:

$$\sigma_m \equiv \sigma_N \quad e \quad \dot{\sigma}_m \equiv \dot{\sigma}_N + (1 - 2m)\dot{\lambda} \sigma_N \quad (3.15)$$

ou seja, todos os membros de (3.13) se confundem mas os membros de (3.14) diferem entre si.

Numa análise teórica consistente de sólidos e estruturas, as medidas de tensões e deformações devem ser conjugadas e objetivas [14, 15, 89].

Tensões e deformações conjugadas são um par de medidas de tensão e deformação que ao se integrar o produto da tensão pela taxa de deformação em todo o volume da fibra fornece a energia interna total. Citando apenas dois exemplos, o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e o tensor das deformações de Green-Lagrange e as tensões e deformações de engenharia são pares de medidas de tensões e deformações conjugadas.

Tensões e deformações objetivas são invariantes sob movimentos de corpo rígido, ou seja, nenhuma componente dos tensores de tensão ou deformação muda, quando ocorrem rotações puras de corpo rígido. Por exemplo, as deformações de Green-Lagrange e o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff são medidas objetivas, enquanto que as tensões e as deformações de engenharia são medidas não-objetivas quando rotações finitas estão envolvidas.

O tensor das deformações de Green-Lagrange e o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff são as medidas mais usadas na análise não-linear de estruturas, porque elas são conjugadas, objetivas e medidas de tensão e deformações finitas completas, [89]. Infelizmente, elas não possuem significado físico aparente, [14, 15], sendo então, difícil compatibilizá-las com as condições de contorno naturais de um sistema estrutural. Neste caso, usa-se expressar o segundo tensor de tensões de

Piola-Kirchhoff em função das tensões de Cauchy (Eq. 3.12a), que são mensuráveis, obrigando a transformações trabalhosas.

Ao contrário das deformações de Green-Lagrange e das tensões de Piola-Kirchhoff, as tensões e deformações de engenharia são medidas geométricas, têm direções definidas, podem ser compatibilizadas facilmente com as condições de contorno naturais e podem fazer uso direto das constantes dos materiais obtidas de experimentos com pequenas deformações.

Infelizmente, as tensões e deformações de engenharia são objetivas somente se as rotações são infinitesimais. Todavia, para problemas geometricamente não-lineares, a estrutura está, de fato, submetida a rotações infinitesimais quando medidas em relação a um sistema de coordenadas fixo no elemento, e submetida a grandes translações e rotações, as quais não causam quaisquer deformações objetivas, quando medidas em relação a um sistema de coordenadas global, fora do elemento.

Para tornar as medidas de engenharia objetivas, emprega-se um sistema de coordenadas ligado ao elemento (sistema corrotacional), no qual os deslocamentos generalizados são medidos em relação a uma configuração deformada. Neste sistema não são considerados os graus de liberdade de corpo rígido, levando-se em conta apenas os graus de liberdade naturais (que são definidos em relação à corda do elemento deformado), os quais são quantidades objetivas, ou seja, a taxa de deformação depende somente deles. Aplicam-se então, as relações deformação-deslocamento da elasticidade linear no campo de deslocamento local, definido em função apenas dos graus de liberdade naturais, obtendo-se as deformações de engenharia objetivas. Para levar em conta os deslocamentos de corpo rígido, necessita-se uma transformação entre os dois sistemas de coordenadas: um que descreve a configuração

indeformada - sistema de coordenadas Lagrangiano ou cartesiano - e o outro que descreve a configuração deformada - sistema de coordenadas corrotacional.

Adotando-se todos estes procedimentos, as tensões e deformações de engenharia tornam-se um par de medidas de tensão e deformação conjugadas e objetivas. Elas serão utilizadas como referência neste trabalho, sendo designadas por:

$$\varepsilon_{1/2} = \varepsilon = \lambda - 1 \qquad \sigma_{1/2} = \sigma = \sigma_N \qquad (3.16)$$

cujas derivadas no tempo valem

$$\dot{\varepsilon}_{1/2} = \dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \qquad \dot{\sigma}_{1/2} = \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_N \qquad (3.17)$$

3.4 Relações Constitutivas

Nesta seção não se pretende apresentar um estudo detalhado sobre a reologia dos materiais e suas diversas leis constitutivas, mas tratar de forma concisa as relações tensão x deformação de uma fibra, usando as definições anteriores de ε_m (Eq. 3.3) e σ_m (Eq. 3.13), para se introduzir de forma consistente o módulo de rigidez do material de uma fibra e abordar de maneira sucinta as relações constitutivas elásticas e elasto-plásticas das fibras, as quais serão utilizadas neste trabalho.

Seja a relação entre tensão x deformação expressa por:

$$\sigma_m = \sigma_m(\varepsilon_m) \qquad (3.18)$$

Relaciona-se, neste caso, tensões e deformações conjugadas por uma questão de simplicidade e conveniência, uma vez que qualquer combinação é admissível. Se (3.18) for linear para um certo valor de m , não o será para os outros. Isto quer dizer que o conceito de linearidade física depende da definição adotada para a tensão e deformação, conforme afirma PIMENTA, P.M. [90].

Derivando-se (3.18) no tempo, vem que:

$$\dot{\sigma}_m = D_m \dot{\varepsilon}_m \quad (3.19)$$

onde:

$$D_m = \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon_m} \quad (3.20)$$

é o módulo de rigidez do material de uma fibra, introduzido por meio de (3.19), sendo portanto, o coeficiente angular da curva $\sigma_m \times \varepsilon_m$.

Da Eq. (3.14),

$$\dot{\sigma}_m = \lambda^{1-2m} \dot{\sigma}_N + (1-2m)\lambda^{-2m} \dot{\lambda} \sigma_N$$

da Eq. (3.5),

$$\dot{\varepsilon}_m = \lambda^{2m} \dot{d} = \lambda^{2m-1} \dot{\lambda}$$

em (3.19) :

$$\lambda^{1-2m} \dot{\sigma}_N + (1-2m)\lambda^{-2m} \dot{\lambda} \sigma_N = D_m \lambda^{2m-1} \dot{\lambda} \quad (3.21)$$

Escrevendo-se a Eq. (3.19) para $m = \frac{1}{2}$, que é a referência adotada neste trabalho, tem-se:

$$\dot{\sigma}_{1/2} = D_{1/2} \dot{\varepsilon}_{1/2}$$

Usando-se (3.17) e fazendo $D_{1/2} = D$, fica:

$$\dot{\sigma}_N = D \dot{\lambda} \quad (3.22)$$

Levando-se (3.22) em (3.21) e arranjando, chega-se à:

$$D_m = \lambda^{2-4m} D + (1-2m) \lambda^{1-4m} \sigma_N \quad (3.23)$$

que representa uma família de módulos de rigidez.

Da Eq. (3.23) pode-se obter uma expressão para D , dada por:

$$D = \lambda^{4m-2} D_m + (2m-1) \lambda^{-1} \sigma_N \quad (3.24)$$

Para pequenas deformações, $\lambda \cong 1$,

$$D_m = D + (1-2m)\sigma_N \quad (3.23a)$$

$$D = D_m + (2m-1)\sigma_N \quad (3.23b)$$

donde se conclui que, mesmo para pequenas deformações, os valores de D_m são diferentes para cada família mas, observa-se também que, quando D é muito maior do que σ_N , estas diferenças podem ser irrelevantes. Conforme observa PIMENTA, P.M. [90], enquanto isto é comum na elasticidade, não é verdade na elasto-plasticidade, onde D pode ser muito pequeno, nulo ou até negativo.

Pensando agora em abordar de maneira sucinta as relações constitutivas elásticas e elasto-plásticas, que serão utilizadas neste

trabalho, considere-se a Fig. 3.2, onde é mostrada a relação tensão x deformação expressa por $\sigma_m = \sigma_m(\varepsilon_m)$.

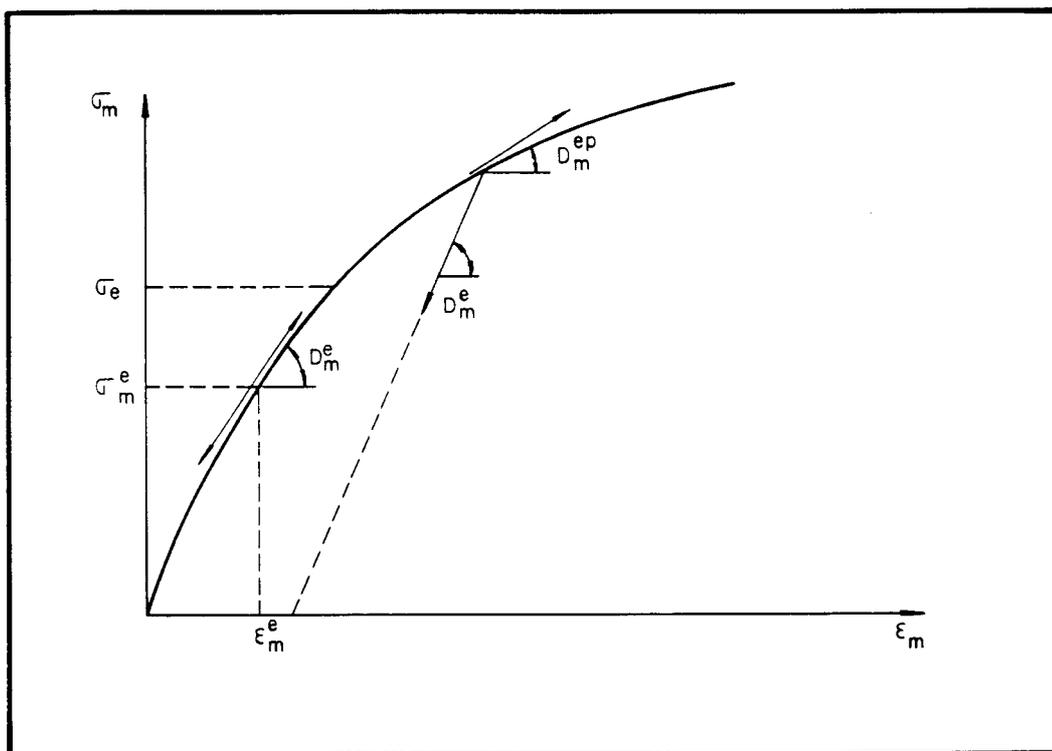


FIGURA 3.2 - COMPORTAMENTO ELASTO-PLÁSTICO DE UMA FIBRA

Diz-se que uma fibra está em regime elástico se existe uma relação que associa cada deformação a uma só tensão. Neste caso, tem-se:

$$\dot{\sigma}_m = D_m^e \dot{\varepsilon}_m \quad (3.25)$$

e tanto em carga ($\varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m > 0$), quanto em descarga ($\varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m < 0$), o módulo de rigidez elástica,

$$D_m^e = \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon_m} \quad (3.26)$$

é único e é função apenas de ε_m e independe de $\dot{\varepsilon}_m$.

$$D_m^e = D_m^e(\varepsilon_m) \quad (3.27)$$

Diz-se que uma fibra está em regime elasto-plástico se:

$$\dot{\sigma}_m = \begin{cases} D_m^e \dot{\varepsilon}_m & , \text{ se } \varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m < 0 & \text{(descarga)} \\ D_m^{ep} \dot{\varepsilon}_m & , \text{ se } \varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m > 0 & \text{(carga)} \end{cases} \quad (3.28)$$

onde D_m^{ep} é o módulo de rigidez elasto-plástica.

Pode-se escrever a Eq. (3.28), do regime elasto-plástico, de forma simplificada, através de:

$$\dot{\sigma}_m = D_m \dot{\varepsilon}_m \quad (3.29)$$

onde D_m tem dois valores, D_m^e e D_m^{ep} , e é uma função de ε_m e $\dot{\varepsilon}_m$.

$$D_m = D_m(\varepsilon_m, \dot{\varepsilon}_m) \quad (3.30)$$

Ao se analisar uma barra em regime elasto-plástico distinguem-se, conforme mostrado na Fig. 3.2, duas regiões: uma região elástica, onde σ_m é menor do que σ_e , sendo σ_e a tensão inicial de escoamento do material e uma região plástica, onde σ_m é maior do que σ_e , de tal forma que:

a) Se $(\sigma_m - \sigma_e) < 0$, a barra está na fase elástica e $D_m = D_m^e = \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon_m}$, tanto

em carga quanto em descarga.

- b) Se $(\sigma_m - \sigma_e) > 0$, a barra se encontra na fase plástica e $D_m = D_m^e$, se ela estiver em descarga, ou seja $\varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m < 0$, ou $D_m = D_m^{ep}$ se estiver em carga, ou seja $\varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m > 0$.

3.5 Sistema de Coordenadas. Graus de Liberdade

3.5.1 Considerações Iniciais

Na análise de sólidos e estruturas pelo método dos elementos finitos, a formulação Lagrangiana é a mais utilizada para a obtenção da matriz de rigidez tangente dos elementos. Nesta formulação os campos de deslocamentos dos elementos são definidos em relação a uma configuração de referência fixa, arbitrariamente escolhida (eixos cartesianos fixos). Pensando então, num desenvolvimento teórico baseado numa rigorosa formulação Lagrangiana, o sistema de referência global da estrutura escolhido neste trabalho é o sistema de coordenadas Lagrangiano ou Cartesiano.

Porém, conforme já mencionado anteriormente, as tensões e deformações de engenharia adotadas como referência neste trabalho, são energeticamente conjugadas mas não são objetivas. Para torná-las objetivas, escolhe-se inicialmente um sistema local de coordenadas corrotacional, diferente do sistema global de referência, que está ligado ao elemento, no qual os deslocamentos generalizados são medidos em relação a uma configuração deformada. Trata-se portanto de um sistema de referência móvel que acompanha a estrutura deformada.

Neste sistema os graus de liberdade de corpo rígido não são considerados, levando-se em conta apenas os graus de liberdade naturais,

que são quantidades objetivas. Escreve-se, então, as funções de interpolação para os deslocamentos locais do elemento em função destes graus de liberdade e se obtêm as deformações de engenharia objetivas. Além disso, a obtenção das matrizes de rigidez do problema é facilitada, uma vez que se trabalha com um número reduzido de graus de liberdade.

Uma transformação de coordenadas muda do sistema corrotacional local para o sistema Lagrangiano ou Cartesiano local, levando-se em conta os deslocamentos de corpo rígido. Finalmente, uma rotação de eixos coloca este último sistema paralelo ao sistema global de referência.

3.5.2 Definição dos Sistemas de Coordenadas e Graus de Liberdade

Seja um pórtico formado por barras com curvaturas iniciais em sua configuração de referência ou inicial. Suponha-se que este pórtico seja colocado no plano descrito pelas coordenadas cartesianas x, y , definindo o sistema global de referência. Os nós do pórtico possuem três graus de liberdade, a saber: os deslocamentos u e v ao longo dos eixos x e y , respectivamente e a rotação θ , positiva quando medida no sentido anti-horário, (Fig. 3.3).

Observe-se agora um elemento qualquer do pórtico na sua configuração de referência, cujo comprimento da corda entre os seus nós de extremidade, a e b , é l_r . Sobre esta corda introduz-se um sistema de coordenadas local, corrotacional (x_r, y_r) , com origem no seu centro. O ângulo entre o eixo de referência global x e a corda é φ_r , enquanto que o ângulo entre a corda e a tangente ao eixo do elemento é denominado β , que significa uma curvatura inicial para a barra descarregada, conforme é mostrado na Fig. 3.3.

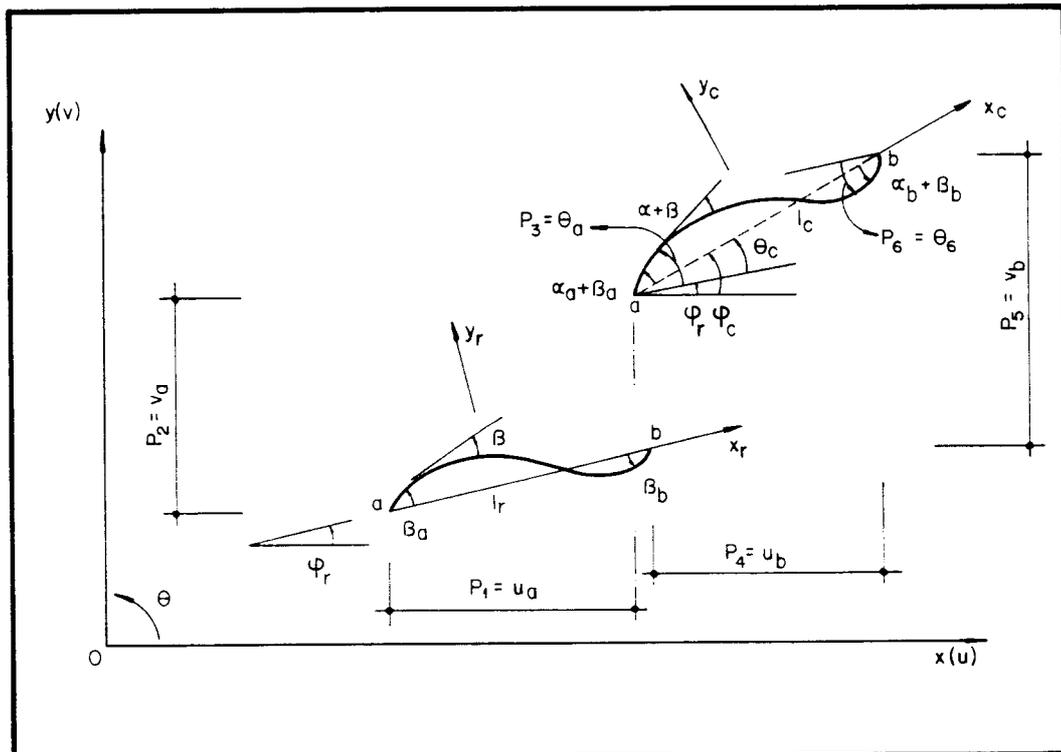


FIGURA 3.3- ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO COM IMPERFEIÇÕES INICIAIS EM SUA CONFIGURAÇÃO DE REFERÊNCIA E EM SUA CONFIGURAÇÃO CORRIGIDA

Para um determinado nível de carregamento este elemento está deformado e encontra-se em uma posição atualizada ou corrigida. Nesta configuração o comprimento da corda entre os seus nós de extremidade é l_c . Sobre esta corda introduz-se um sistema de coordenadas corrotacional (x_c, y_c), com origem no seu centro. O ângulo entre o eixo de referência global x e a corda é agora φ_c , enquanto que, nesta posição deformada, o ângulo entre a corda e a tangente ao eixo do elemento é $(\alpha + \beta)$.

Desta forma o estiramento da corda e sua deformação linear ou de engenharia são dados respectivamente por:

$$\lambda = \frac{l_c}{l_r} \quad \varepsilon = \lambda - 1 \quad (3.31)$$

Os graus de liberdade a serem adotados são aqueles referentes ao sistema corrotacional, que são quantidades objetivas, e são denominados graus de liberdade naturais ou corrotacionais. Estes graus de liberdade podem ser colecionados num vetor \underline{q}_α (3x1), onde $\alpha = 1, 2, 3$. Eles são definidos por:

$$\underline{q}_\alpha^T = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3\} \quad (3.32)$$

sendo:

$$q_1 = l_c - l_r \quad ; \quad q_2 = \alpha_a \quad ; \quad q_3 = \alpha_b \quad (3.33)$$

onde q_1 mede a mudança de comprimento da corda; q_2 mede o ângulo α_a na extremidade a do elemento e q_3 mede o ângulo α_b na extremidade b do elemento, estes dois últimos independentes da rotação de corpo rígido θ_c .

$$\theta_c = \varphi_c - \varphi_r \quad (3.34)$$

Os graus de liberdade cartesianos p_i ($i = 1, \dots, 6$), geralmente utilizados, são definidos por:

$$\begin{cases} p_1 = u_a & ; p_2 = v_a & ; p_3 = \theta_a \\ p_4 = u_b & ; p_5 = v_b & ; p_6 = \theta_b \end{cases} \quad (3.35)$$

e podem ser colecionados no vetor \underline{p}_i (6x1), denominado vetor dos deslocamentos nodais do elemento da seguinte forma:

$$\underline{p}_i^T = \{u_a \quad v_a \quad \theta_a \quad u_b \quad v_b \quad \theta_b\} \quad (3.36)$$

Os graus de liberdade em coordenadas corrotacionais, q_α ($\alpha = 1, 2, 3$), e os graus de liberdade em coordenadas globais cartesianas, p_i ($i = 1, \dots, 6$), podem ser relacionados da seguinte forma, com o auxílio da Fig. 3.3:

$$\begin{cases} q_1 = l_c - l_r \\ q_2 = \alpha_a = \theta_a - \theta_c - \beta_a = p_3 - \varphi_c + \varphi_r - \beta_a \\ q_3 = \alpha_b = \theta_b - \theta_c - \beta_b = p_6 - \varphi_c + \varphi_r - \beta_b \end{cases} \quad (3.37)$$

onde:

$$\begin{cases} l_c = \left[(x_b - x_a + p_4 - p_1)^2 + (y_b - y_a + p_5 - p_2)^2 \right]^{1/2} \\ l_r = \left[(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 \right]^{1/2} \\ \text{sen}\varphi_c = \frac{y_b - y_a + p_5 - p_2}{l_c}, \quad \text{cos}\varphi_c = \frac{x_b - x_a + p_4 - p_1}{l_c} \\ \varphi_c = \text{arctg} \left(\frac{y_b - y_a + p_5 - p_2}{x_b - x_a + p_4 - p_1} \right) \\ \varphi_r = \text{arccos} \left(\frac{x_b - x_a}{l_r} \right) \end{cases} \quad (3.38)$$

Nas equações 3.38, x_a , x_b , y_a e y_b são as coordenadas nodais dos elementos na configuração de referência.

As derivadas das coordenadas corrotacionais q_α em relação às coordenadas globais cartesianas p_i , ou seja, $\partial q_\alpha / \partial p_i$ (também escritas na forma indicial por $q_{\alpha,i}$, onde a vírgula indica diferenciação e os índices gregos variam de 1 a 3, enquanto que os latinos variam de 1 a 6), podem ser escritas numa matriz \underline{B} (3x6), da seguinte forma:

$$q_{\alpha,i} = \tilde{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_c & -\sin \varphi_c & 0 & \cos \varphi_c & \sin \varphi_c & 0 \\ -\frac{\sin \varphi_c}{l_c} & \frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 1 & \frac{\sin \varphi_c}{l_c} & -\frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 0 \\ -\frac{\sin \varphi_c}{l_c} & \frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 0 & \frac{\sin \varphi_c}{l_c} & -\frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

onde a matriz $\tilde{\underline{B}}$ é rigorosamente uma matriz de “mudança de coordenadas instantânea”, pois relaciona as variações dos deslocamentos nas coordenadas locais com as variações dos deslocamentos nas coordenadas globais. A cada instante, esta matriz faz uma mudança de coordenadas do sistema corrotacional para o sistema cartesiano, ainda em coordenadas locais e, ao mesmo tempo, faz uma rotação de eixos, colocando-os conforme a referência global. Naturalmente esta matriz não é linear, uma vez que o ângulo φ_c e o comprimento da corda l_c dependem dos deslocamentos nodais da estrutura.

Esta matriz $\tilde{\underline{B}}$ pode ser escrita como um produto:

$$\tilde{\underline{B}} = \bar{\underline{B}} \underline{\underline{T}} \quad (3.40)$$

onde:

$$\bar{\underline{B}}_{(3 \times 6)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 1 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\underline{\underline{T}}_{(6 \times 6)} = \begin{bmatrix} \tilde{t} & \underline{0}_3 \\ \underline{0}_3 & \tilde{t} \end{bmatrix} ; \quad \tilde{t}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_c & \sin \varphi_c & 0 \\ -\sin \varphi_c & \cos \varphi_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

- $\tilde{\mathbf{B}}$ é a forma local de \mathbf{B} , que relaciona os graus de liberdade naturais do sistema corrotacional, com os graus de liberdade do sistema cartesiano local. (mudança de coordenadas)
- $\tilde{\mathbf{T}}$ é a matriz de rotação de eixos, que muda as coordenadas locais no sistema cartesiano para as coordenadas globais também no sistema cartesiano ou Lagrangiano.
- $\mathbf{0}_3$ é a matriz nula (3x3).

As derivadas segundas de q_α em relação a p_i , isto é $\frac{\partial^2 q_\alpha}{\partial p_i \partial p_j}$ ($\alpha = 1, 2, 3$; $i = 1, \dots, 6$; $j = 1, \dots, 6$), serão também necessárias e podem ser colocadas em três matrizes simétricas $\tilde{\mathbf{G}}_\alpha$ (6x6), dadas por:

$$\mathbf{q}_{1,ij} = \tilde{\mathbf{G}}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{bmatrix} \text{sen}^2 \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -\text{sen}^2 \varphi_c & \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & \cos^2 \varphi_c & 0 & \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -\cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{sen}^2 \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & \text{simétrica} & & & \cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43a)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_2 = \tilde{\mathbf{G}}_3 = \frac{1}{l_c^2} \begin{bmatrix} -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & (\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 \\ & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & (\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 \\ & \text{simétrica} & & & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43b)$$

Esta derivada segunda $q_{\alpha,ij}$ é uma relação que envolve apenas geometria (deslocamentos em coordenadas corrotacionais e deslocamentos em coordenadas cartesianas), que representará uma parcela da matriz de rigidez geométrica (teoria de segunda-ordem).

Esta matriz geométrica \underline{G}_α pode ser escrita como um triplo produto matricial:

$$\underline{G}_\alpha = \underline{T}^T \overline{\underline{G}}_\alpha \underline{T} \quad (3.44)$$

onde $\overline{\underline{G}}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, é a forma local de \underline{G}_α e \underline{T} é a matriz de rotação de eixos, dada conforme a equação (3.42). Então:

$$\overline{\underline{G}}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45a)$$

Obs.: Pode-se dizer que esta é a matriz responsável pelo conhecido efeito $P \times \Delta$.

$$\overline{\underline{G}}_2 = \overline{\underline{G}}_3 = \frac{1}{l_c^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45b)$$

3.6 Teoria Estrutural

A teoria estrutural a ser desenvolvida neste trabalho segue a hipótese cinemática atribuída a BERNOULLI-EULER, onde se afirma o seguinte:

“As seções transversais planas e ortogonais ao eixo da barra permanecem planas, indeformáveis e ortogonais ao eixo, após a deformação”.

Por esta hipótese, a teoria estrutural utilizada despreza o empenamento das seções transversais, ao admitir a afirmação de que as seções planas permanecem planas após a deformação. Despreza também o efeito da deformação transversal ou de Poisson ao admitir, que as seções transversais permanecem indeformáveis e, neste caso, as deformações segundo os eixos y e z e o coeficiente de Poisson são nulos ($\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \nu = 0$). Finalmente, pela consideração de que as seções transversais permanecem ortogonais ao eixo de barra, desprezam-se as distorções no plano da barra ($\gamma_{xy} = 0$), conseqüentemente são desprezados os efeitos das tensões de cisalhamento ($\tau_{xy} = 0$). Decorre de tudo isto que a única deformação relevante é, portanto, a deformação longitudinal ε_{xx} .

3.6.1 Cinemática do Elemento

3.6.1.1) Campo de deformação

As Eq. (3.31) mostram que o estiramento da corda, assim como a sua deformação linear ou de engenharia são dados, respectivamente, por:

$$\lambda = \frac{l_c}{l_r} \quad \varepsilon = \lambda - 1$$

onde o índice c indica a configuração atualizada ou corrigida e o índice r indica a configuração inicial ou de referência.

Pensando em definir o campo de deformação consistente com a teoria estrutural apresentada e conforme a deformação linear adotada,

considere-se um elemento diferencial de uma barra curva plana na configuração inicial ou de referência, como mostrado na Fig. 3.4a. Este elemento é limitado por duas seções transversais ortogonais a um eixo arbitrariamente definido.

Chamando-se fibra a um conjunto de pontos materiais sobre uma curva paralela a este eixo, observa-se que uma fibra situada a uma distância r deste eixo e uma fibra situada neste eixo têm os comprimentos ds_r e $d\bar{s}_r$ dados, respectivamente, por:

$$ds_r = (R_r - r) d\beta \quad d\bar{s}_r = R_r d\beta \quad (3.46)$$

onde R_r é o raio de curvatura da barra naquele ponto e $d\beta$ é o ângulo interno do setor definido pelas seções transversais. Das Eq. (3.46), obtém-se:

$$ds_r = d\bar{s}_r - rd\beta \quad (3.47)$$

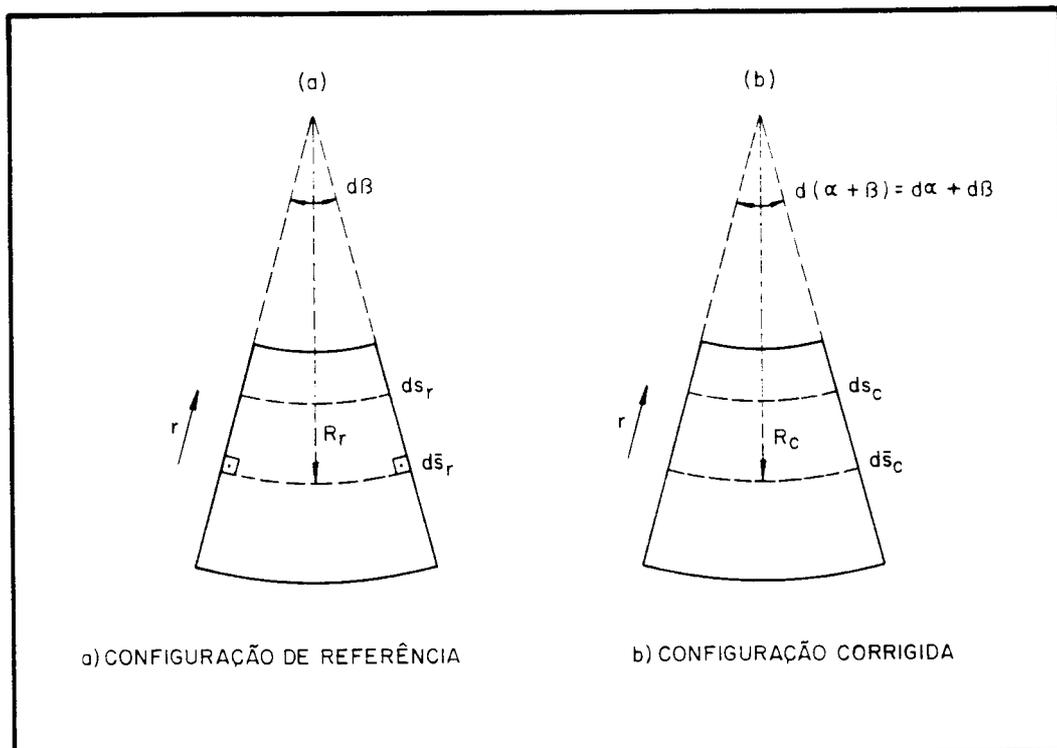


FIGURA 3.4 - ELEMENTO DIFERENCIAL DE BARRA CURVA

Seja agora este mesmo elemento diferencial na sua configuração atualizada ou corrigida, como mostrado na Fig. 3.4b. De acordo com a hipótese de Bernoulli-Euler, obtém-se para as mesmas fibras anteriores os seguintes comprimentos:

$$ds_c = (R_c - r) d(\alpha + \beta) \quad \bar{ds}_c = R_c d(\alpha + \beta) \quad (3.48)$$

onde R_c é o raio de curvatura corrigido e $d(\alpha + \beta)$ é o novo ângulo interno do setor, formado após a deformação. Das Eq. (3.48), obtém-se:

$$ds_c = \bar{ds}_c - r d(\alpha + \beta) \quad (3.49)$$

Os estiramentos destas fibras, à distância r do centro (λ) e situada no eixo ($\bar{\lambda}$), são definidos respectivamente, por:

$$\lambda = \frac{ds_c}{ds_r} \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{ds}_c}{ds_r} \quad (3.50)$$

Usando-se as Eq. (3.49) e (3.47), fica:

$$\lambda = \frac{\bar{ds}_c - r d(\alpha + \beta)}{ds_r - r d\beta}$$

Dividindo ambos, o numerador e o denominador por \bar{ds}_r , e, com o auxílio da Eq. (3.50), obtém-se:

$$\lambda = \frac{\bar{\lambda} - r \frac{d(\alpha + \beta)}{ds_r}}{1 - r \frac{d\beta}{ds_r}} \quad (3.51)$$

Das definições anteriores tem-se que a deformação de engenharia daquela fibra a uma distância r do eixo e a deformação de engenharia da fibra do eixo, são dadas, respectivamente, por:

$$\varepsilon = \lambda - 1 \qquad \bar{\varepsilon} = \bar{\lambda} - 1 \qquad (3.52)$$

Levando-se a Eq. (3.51) na primeira das Eq. (3.52) e usando a segunda de (3.52), chega-se finalmente à:

$$\varepsilon = \frac{-r \frac{d\alpha}{ds_r}}{1 - r \frac{d\beta}{ds_r}} \qquad (3.53)$$

Ao invés de \bar{ds}_r , define-se um novo parâmetro para descrever a curva do eixo, que será dx_r , conforme o eixo cartesiano. Usando-se a relação \bar{ds}_r/dx_r e a regra da cadeia, pode-se obter da Eq. (3.53) a seguinte expressão:

$$\varepsilon = \frac{\left(-r \frac{d\alpha}{ds_r}\right) \frac{d\bar{ds}_r}{dx_r}}{\left(1 - r \frac{d\beta}{ds_r}\right) \frac{d\bar{ds}_r}{dx_r}} = \frac{-\frac{d\bar{ds}_r}{dx_r} - r \frac{d\alpha}{dx_r}}{\frac{d\bar{ds}_r}{dx_r} - r \frac{d\beta}{dx_r}}$$

Denotando-se a derivada em relação a x_r por ' tem-se finalmente:

$$\varepsilon = \frac{\bar{\varepsilon} \bar{s}_r' - r \alpha'}{\bar{s}_r' - r \beta'} \qquad (3.54)$$

Esta expressão (3.54) caracteriza analiticamente a hipótese sobre o campo de deformação para barras com eixo inicialmente curvo, consistente com a teoria estrutural adotada.

Duas observações interessantes podem ser feitas:

1. No caso de barras inicialmente retas, $\beta = \beta' = 0$, $\bar{s}_r' = d\bar{s}_r/dx_r = 1$ e $r = y_r$, logo a Eq. (3.54) fica:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} - y_r \alpha' \quad (3.54a)$$

que representa o campo de deformação para barras retas, consistente com a hipótese de Bernoulli-Euler.

2. Conforme observaram PIMENTA & MAZZILLI [98], $\alpha' = d\alpha/dx_r$ não é a curvatura K do eixo deformado mas sim, a rotação específica. Portanto a rotação específica α' , e não a curvatura K , é o deslocamento generalizado conjugado energeticamente com o momento fletor. Esta rotação específica só coincide com a curvatura, quando se adota a hipótese de inextensibilidade do eixo da barra, portanto, na ausência de força normal e, se o eixo não tem curvatura inicial. A expressão da curvatura pode ser obtida com o auxílio da regra da cadeia:

$$K = \frac{d\alpha}{ds_c} = \frac{d\alpha}{dx_r} \cdot \frac{dx_r}{ds_r} \cdot \frac{d\bar{s}_r}{ds_c} = \alpha' \cdot \frac{1}{\frac{ds_r}{dx_r}} \cdot \frac{1}{\frac{ds_c}{d\bar{s}_r}} = \alpha' \cdot \frac{1}{\sec\beta} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha'}{\lambda} \cos\beta \quad (3.54b)$$

Se $\beta = 0$, $K = \frac{\alpha'}{\lambda}$, conforme mostrado em [98]

3.6.1.2) Campo de deslocamento - Considerações analíticas

Pensando em definir o campo de deslocamento consistente com a teoria estrutural apresentada neste trabalho, considere-se uma barra inicialmente curva, onde a corda que une as duas extremidades será admitida alinhada com o eixo das coordenadas x , para facilidade de interpretação, como mostrado na Fig. 3.5.

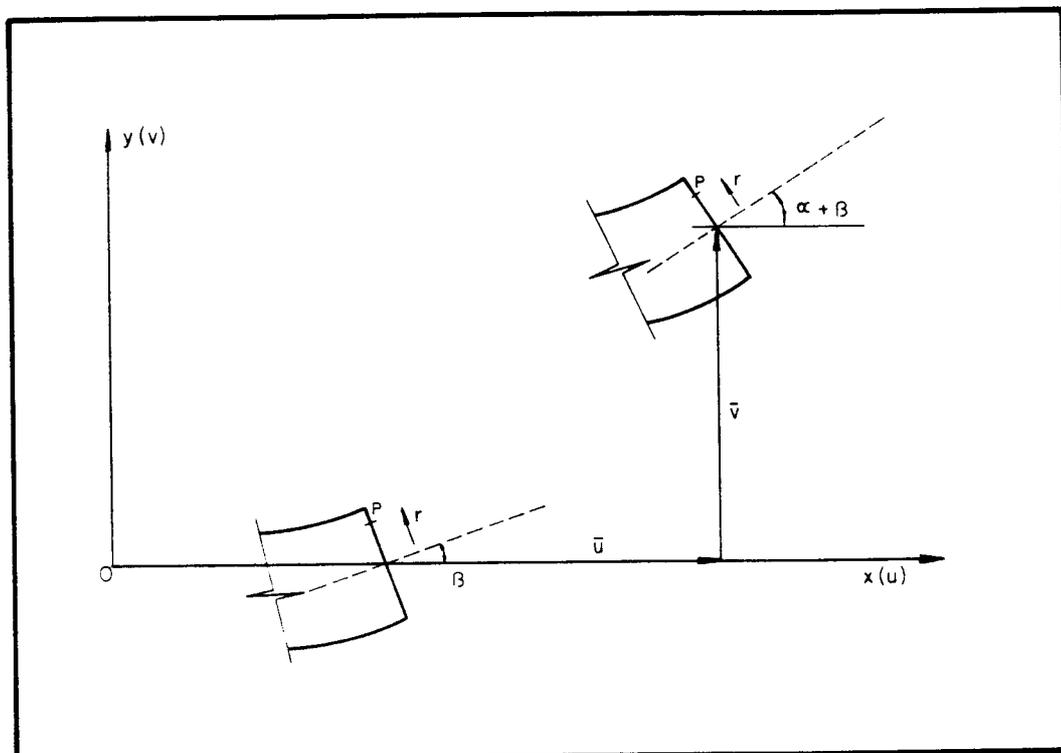


FIGURA 3.5 - DESLOCAMENTOS DE PONTOS DE UMA BARRA CURVA

Da hipótese de Bernoulli-Euler adotada neste trabalho, o campo de deslocamento dos pontos da barra fica completamente caracterizado se conhecidos os deslocamentos axiais (\bar{u}) e transversais (\bar{v}) dos pontos situados sobre eixo (inicialmente curvo do ângulo β), bem como a rotação ($\alpha + \beta$) das seções transversais.

Considerando-se então, o ponto P da seção da barra caracterizado pela distância r relativa ao seu eixo, conforme mostrado na Fig. 3.5, pode-se escrever os seus deslocamentos denotados por u_c e v_c no sistema corrotacional (x_c, y_c) , por:

$$\begin{cases} u_c(x, y) = \bar{u}_c(x) - r [\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}\beta] \\ v_c(x, y) = \bar{v}_c(x) - r [\text{cos}\beta - \text{cos}(\alpha + \beta)] \end{cases} \quad (3.55)$$

onde u_c e v_c são os deslocamentos longitudinal e transversal do ponto P da seção da barra, assim como \bar{u}_c e \bar{v}_c são estes deslocamentos para os pontos ao longo do seu eixo. Com o auxílio da Fig. 3.5, observa-se que β é o ângulo inicial entre a corda da barra e a tangente ao seu eixo, medido no sentido anti-horário e $(\alpha + \beta)$ é o ângulo final entre a corda e a tangente ao eixo da barra, medido no sentido anti-horário, após a deformação.

As figs. 3.6 e 3.7 mostram em detalhe as translações de pontos do eixo de um elemento diferencial de barra e as rotações das seções transversais.

Estudando o triângulo GG''H' das Fig. 3.6 e 3.7, observa-se que a fibra do eixo da barra tem o comprimento infinitesimal $d\bar{s}_r$, antes da deformação e $d\bar{s}_c$ após a deformação, dados por:

$$d\bar{s}_r = \left[dx^2 + (dx \text{tg}\beta)^2 \right]^{1/2} = \left[dx^2(1 + \text{tg}^2\beta) \right]^{1/2} = dx \text{sec}\beta \quad (3.56)$$

$$d\bar{s}_c = \left[(dx + d\bar{u}_c)^2 + (d\bar{v}_c + dx \text{tg}\beta)^2 \right]^{1/2} \quad (3.57)$$

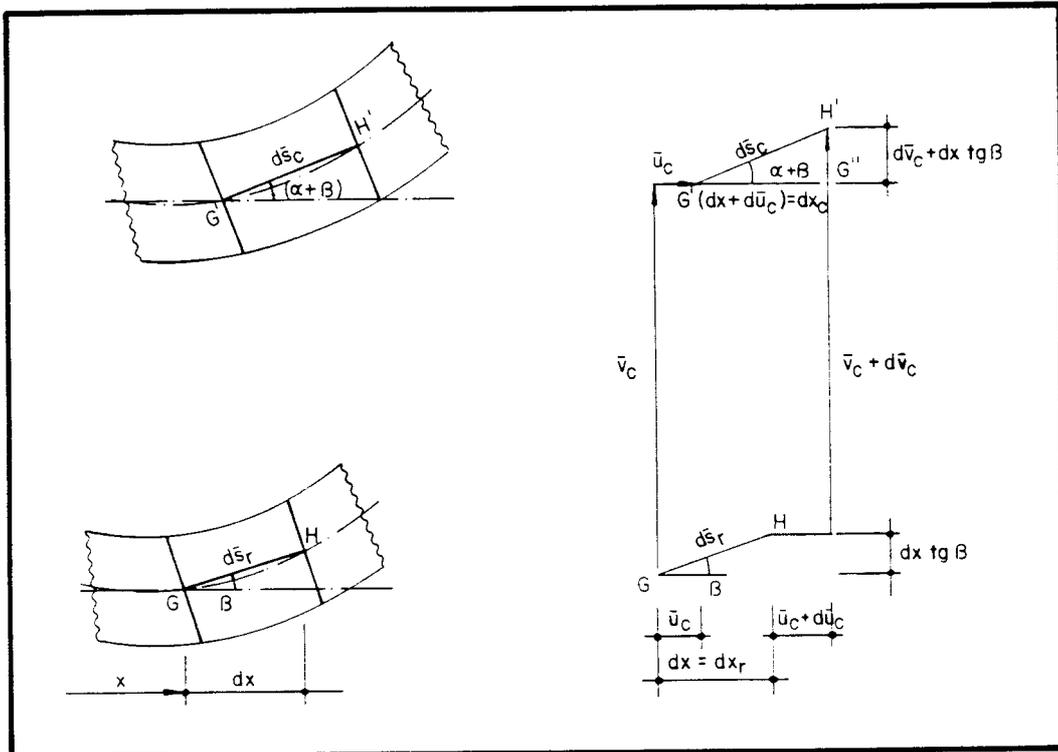


FIGURA 3.6 - A ROTAÇÃO ($\alpha + \beta$) DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS E AS TRANSLAÇÕES DE PONTOS DO EIXO

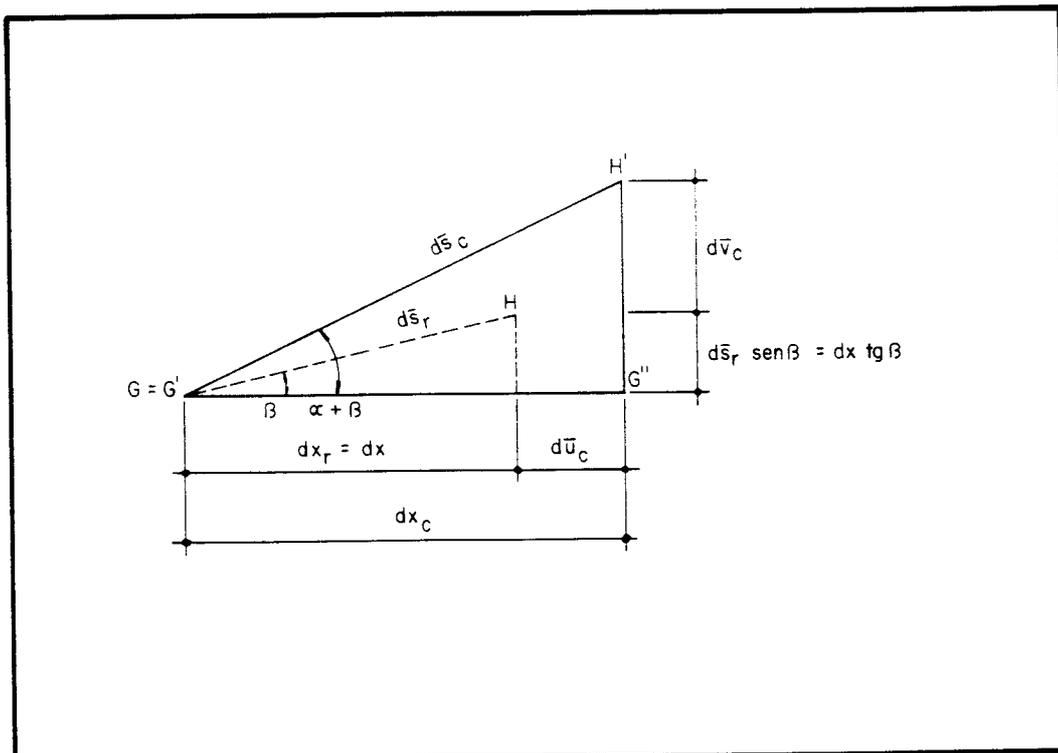


FIGURA 3.7 - ELEMENTO DIFERENCIAL DO EIXO DA BARRA NAS CONFIGURAÇÕES DE REFERÊNCIA E CORRIGIDA

O estiramento da fibra do eixo é dado por $\bar{\lambda} = d\bar{s}_c/d\bar{s}_r$. Usando a regra da cadeia, escreve-se, $\bar{\lambda} = \frac{d\bar{s}_c}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{d\bar{s}_r}{dx}}$, que com a aplicação das Eq.

(3.56) e (3.57), fornece:

$$\bar{\lambda} = \frac{\left[\left(1 + \bar{u}_c'\right)^2 + \left(\bar{v}_c' + \text{tg}\beta\right)^2 \right]^{1/2}}{\sec\beta} \quad (3.58)$$

Ainda com a ajuda da Fig. 3.7 e usando a Eq. (3.58), pode-se verificar facilmente as seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\bar{v}_c' + \text{tg}\beta}{1 + \bar{u}_c'} \quad \therefore \alpha = \text{arctg}\left(\frac{\bar{v}_c' + \text{tg}\beta}{1 + \bar{u}_c'}\right) - \beta \\ \text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\bar{v}_c' + \text{tg}\beta}{\left[\left(1 + \bar{u}_c'\right)^2 + \left(\bar{v}_c' + \text{tg}\beta\right)^2 \right]^{1/2}} = \frac{\bar{v}_c' + \text{tg}\beta}{\bar{\lambda} \sec\beta} \\ \text{cos}(\alpha + \beta) = \frac{1 + \bar{u}_c'}{\left[\left(1 + \bar{u}_c'\right)^2 + \left(\bar{v}_c' + \text{tg}\beta\right)^2 \right]^{1/2}} = \frac{1 + \bar{u}_c'}{\bar{\lambda} \sec\beta} \end{array} \right. \quad (3.59)$$

Sendo $\lambda = \frac{dx_c}{dx_r} = \frac{dx_r + d\bar{u}_c}{dx_r}$, vem que:

$$\lambda = 1 + \bar{u}_c' \quad (3.60)$$

Levando-se na última das equações (3.59), fica:

$$\bar{\lambda} = \lambda \sec(\alpha + \beta) \cos\beta \quad (3.61)$$

A expressão do campo de deformação, já deduzida anteriormente, é dada pela Eq. (3.54) que vale:

$$\varepsilon = \frac{\bar{\varepsilon} \bar{s}_r - r \alpha'}{\bar{s}_r - r \beta'}$$

Da Eq. (3.56) tira-se que:

$$\frac{d\bar{s}_r}{dx} = \bar{s}_r' = \sec\beta \quad (3.62)$$

Levando-se na Eq. (3.54), a expressão analítica do campo de deformação pode ser escrita de outra forma por:

$$\varepsilon = \frac{\bar{\varepsilon} \sec\beta - r \alpha'}{\sec\beta - r \beta'} \quad (3.63)$$

Sendo $\bar{\varepsilon} = \bar{\lambda} - 1$, usando-se a Eq. (3.61) e levando na Eq. (3.63), tem-se que:

$$\varepsilon = \frac{\lambda \sec(\alpha + \beta) - \sec\beta - r \alpha'}{\sec\beta - r \beta'} \quad (3.64)$$

Usando-se a Eq. (3.60) na Eq. (3.64), a expressão analítica do campo de deformação pode ser dada finalmente por:

$$\varepsilon = \frac{\left(1 + \bar{u}_c'\right) \sec(\alpha + \beta) - \sec\beta - r \alpha'}{\sec\beta - r \beta'} \quad (3.65)$$

Observações:

1. Este será o campo de deformação a ser utilizado neste trabalho, para barras com imperfeições iniciais β . Observa-se nesta Eq. (3.65), que para a definição do campo de deformação é necessário escolher as funções de interpolação para o deslocamento \bar{u}_c eixo da barra, assim como para o ângulo α de rotação deste eixo. Estas funções de interpolação aproximadoras serão, então, colocadas em função dos graus de liberdade naturais (objetivos), q_α ($\alpha = 1, 2, 3$) e o campo de deformação passará a ser uma função de:

$$\varepsilon = f[q_\alpha(p_i)] \quad (3.65a)$$

2. No caso de barras inicialmente retas, $\beta = \beta' = 0$, $\sec \beta = 1$ e $r = y_r$ e a expressão (3.65) fica:

$$\varepsilon = (1 + \bar{u}_c) \sec \alpha - 1 - y_r \alpha' \quad (3.65b)$$

que representa o campo de deformações para barras retas, assim como a Eq. (3.54a)

3.7 Equações de Equilíbrio

3.7.1 Equilíbrio do Elemento

Conhecido o campo de deformação, $\varepsilon = f[q_\alpha(p_i)]$, dado anteriormente pela Eq. (3.65a), o equilíbrio do elemento pode ser formulado através do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

O trabalho virtual interno de um elemento é dado por:

$$\delta\omega_i = \int_{V_r} \sigma \delta\varepsilon dv_r \quad (3.66)$$

onde V_r é o volume do elemento na configuração de referência σ é a tensão normal de uma fibra e $\delta\varepsilon$ é a deformação virtual de uma fibra.

Na formulação deste trabalho, será admitido que a tensão normal σ já leva em conta a presença de tensões residuais na seção transversal (σ_r), sendo portanto, a soma de duas parcelas:

$$\sigma = \sigma_r + D\varepsilon \quad (3.67)$$

Como é sabido, estas tensões residuais σ_r que aparecem nos perfis de aço devidas ao processo de fabricação são auto-equilibradas, isto é, elas se distribuem na seção transversal de tal forma, que as resultantes de forças e momentos fletores nesta seção são nulas:

$$N_0 = \int_{A_r} \sigma_r dA_r = 0 \quad ; \quad M_0 = -\int_{A_r} \sigma_r r dA_r = 0 \quad (3.68)$$

onde dA_r é o elemento de área da seção transversal na configuração de referência. Desta forma, a força normal N e o momento fletor M , resultantes na seção, podem ser determinados com o auxílio das Eq. (3.67) e (3.68) e valem:

$$N = \int_{A_r} \sigma dA_r = \int_{A_r} (\sigma_r + D\varepsilon) dA_r = \int_{A_r} \sigma_r dA_r + \int_{A_r} D\varepsilon dA_r$$

$$N = \int_{A_r} \sigma dA_r = \int_{A_r} D\varepsilon dA_r \quad (3.69)$$

$$M = -\int_{A_r} \sigma_r r dA_r = -\int_{A_r} (\sigma_r + D\varepsilon) r dA_r = -\int_{A_r} \sigma_r r dA_r - \int_{A_r} D\varepsilon r dA_r$$

$$M = -\int_{A_r} \sigma_r r dA_r = -\int_{A_r} D\varepsilon r dA_r \quad (3.70)$$

Voltando à expressão (3.66), a deformação virtual é dada pela variação da Eq. (3.65a) e é obtida com o emprego da regra da cadeia:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_i} = \varepsilon_{,\alpha} \cdot q_{\alpha,i}$$

$$\delta \varepsilon = \varepsilon_{,\alpha} \cdot q_{\alpha,i} \cdot \delta p_i \quad (3.71)$$

onde δp_i é o vetor dos deslocamentos nodais virtuais do elemento.

As forças nodais internas P_i são definidas de tal forma que:

$$\delta \omega_i = P_i \delta p_i \quad (3.72)$$

Igualando-se as Eq. (3.66) e (3.72) com a ajuda da Eq. (3.71), fica:

$$\int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} q_{\alpha,i} \delta p_i dV_r = P_i \delta p_i$$

onde $q_{\alpha,i}$ representa uma transformação de coordenadas (sistema corrotacional para o sistema cartesiano), portanto independente do volume de referência, assim como δp_i , logo:

$$\left(\int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r \right) q_{\alpha,i} \delta p_i = P_i \delta p_i$$

e a equação de equilíbrio do elemento é dada por:

$$P_i = \left(\int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r \right) q_{\alpha,i} \quad (3.73)$$

Chamando $Q_\alpha = \left(\int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r \right)$ (3.74)

a equação de equilíbrio do elemento é dada em notação indicial por:

$$P_i = Q_\alpha \cdot q_{\alpha,i} \quad (3.75)$$

Reunindo Q_α e P_i em dois vetores \underline{Q} e \underline{P} , respectivamente, e com o auxílio da Eq. (3.39), pode-se escrever a equação de equilíbrio do elemento na forma matricial por:

$$\underline{P} = \underline{B}^T \underline{Q} \quad (3.76)$$

sendo $\underline{B} = \underline{\bar{B}} \underline{T}$, vem que $\underline{P} = \underline{T}^T \underline{\bar{B}}^T \underline{Q}$ e, finalmente:

$$\underline{P} = \underline{T}^T \underline{\bar{P}} \quad \underline{\bar{P}} = \underline{\bar{B}}^T \underline{Q} \quad (3.77)$$

onde $\underline{\bar{P}}$ é o vetor das forças internas no sistema local cartesiano.

Observação:

No desenvolvimento anterior tinha-se que:

$$\delta \omega_i = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} q_{\alpha,i} \delta p_i dV_r = \left(\int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r \right) q_{\alpha,i} \delta p_i$$

Da relação $\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_i} = q_{\alpha j}$, vem que $\delta q_\alpha = q_{\alpha j} \delta p_j$ e com o auxílio da Eq. (3.74)

pode-se escrever δW_i de duas formas:

$$\begin{cases} \delta \omega_i = Q_\alpha \delta q_\alpha \\ \delta \omega_i = P_i \delta p_i \end{cases} \quad (3.78)$$

Donde se conclui que sendo P_i os esforços internos nas coordenadas cartesianas, $Q_\alpha = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r$ são os esforços internos naturais nas coordenadas corrotacionais. Então, para cada elemento pode-se dizer que:

$$Q = Q(\sigma, q) \quad \text{e} \quad P = P(\sigma, p) \quad (3.79)$$

sendo que q_α e p_i se relacionam através de $q_{\alpha,i}$.

3.7.1.1) Matriz de rigidez tangente do elemento - k_i

A matriz de rigidez tangente do elemento pode então ser dada de duas maneiras distintas, conforme se adote $P = P(\sigma, p)$ ou $Q = Q(\sigma, q)$, ou seja, em coordenadas cartesianas ou em coordenadas corrotacionais. Serão apresentadas as duas formulações, embora o interesse maior recaia na formulação cartesiana.

a) k_i em coordenadas cartesianas

Sendo $P = P(\sigma, p)$ e pensando numa formulação incremental do equilíbrio, a derivada no tempo de P (ou a variação de cada incremento de P) pode ser dada por:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}$$

chamando

$$\frac{\partial P}{\partial p} = k_t \quad (3.80)$$

fica, na forma matricial:

$$\underline{\dot{P}} = k_t \underline{\dot{p}} \quad \text{ou} \quad \underline{\Delta P} = k_t \underline{\Delta p} \quad (3.81)$$

onde k_t é a matriz de rigidez tangente do elemento nas coordenadas cartesianas.

As componentes k_{ij} da matriz de rigidez tangente são as derivadas de P_i em relação às coordenadas cartesianas p_j . Derivando-se a Eq. (3.75) com o auxílio da regra da cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = k_{ij} = q_{\alpha,i} Q_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_{\alpha} q_{\alpha,ij} \quad (3.82)$$

Da Eq. (3.74) onde $Q_{\alpha} = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r$ faz-se a sua derivada:

$$Q_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \left(\varepsilon_{,\alpha} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \varepsilon_{,\beta} + \sigma \varepsilon_{,\alpha\beta} \right) dV_r$$

da Eq. (3.67) tem-se que:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = D \quad (3.83)$$

concluindo:

$$Q_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} (\varepsilon_{,\alpha} D \varepsilon_{,\beta} + \sigma \varepsilon_{,\alpha\beta}) dV_r \quad (3.84)$$

Chamando

$$D_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \varepsilon_{,\alpha} D \varepsilon_{,\beta} dV_r \quad (3.85)$$

$$H_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha\beta} dV_r \quad (3.86)$$

vem que:

$$Q_{\alpha,\beta} = D_{\alpha,\beta} + H_{\alpha,\beta} \quad (3.87)$$

Levando-se na Eq. (3.82), tem-se:

$$k_{i,j} = \underbrace{q_{\alpha,i} (D_{\alpha,\beta} + H_{\alpha,\beta}) q_{\beta,j}}_{\text{parcela objetiva}} + \underbrace{Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}}_{\text{parcela do movimento de corpo r\u00edgido}} \quad (3.88)$$

$$k_{i,j} = \underbrace{q_{\alpha,i} D_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}}_{\text{parcela constitutiva}} + \underbrace{q_{\alpha,i} H_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}}_{\text{parcela geom\u00e9trica}} + Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}$$

Escrevendo em notação matricial, a matriz de rigidez constitutiva vem da parcela constitutiva da Eq. (3.88) dada por $k_M = q_{\alpha,i} D_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}$. Usando $q_{\alpha,i} = q_{\beta,j} = \underline{B}$, (3x6) e $D_{\alpha,\beta} = \underline{D}$, (3x3), simétrica, resulta em:

$$k_M = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \quad (3.89)$$

(6x6), também simétrica.

A matriz de rigidez geométrica é obtida da parcela geométrica da Eq. (3.88) dada por $k_G = q_{\alpha,i} H_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_\alpha q_{\alpha,ij}$, que com o auxílio de $H_{\alpha,\beta} = \underline{H}$, (3x3), simétrica e $q_{\alpha,ij} = \underline{G}_\alpha$, ($\alpha = 1,2,3$), (6x6), simétrica. Resulta em:

$$\underline{k}_G = \underline{B}^T \underline{H} \underline{B} + Q_\alpha \underline{G}_\alpha \quad (3.90)$$

(6x6), também simétrica.

Finalmente, escreve-se a matriz de rigidez tangente, simétrica, nas formas a seguir:

$$\underline{k}_t = \underline{k}_M + \underline{k}_G \quad (3.91a)$$

ou

$$\underline{k}_t = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} + \underline{B}^T \underline{H} \underline{B} + Q_\alpha \underline{G}_\alpha \quad (3.91b)$$

Pode-se ainda escrever de outra forma, lembrando que $\underline{B} = \underline{\bar{B}} \underline{I}$ e $\underline{G}_\alpha = \underline{I}^T \underline{\bar{G}}_\alpha \underline{I}$.

Sendo $\underline{k}_M = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} = \underline{I}^T \underline{\bar{B}}^T \underline{D} \underline{\bar{B}} \underline{I}$, então

$$\underline{k}_M = \underline{I}^T \underline{\bar{k}}_M \underline{I} \text{ e } \underline{\bar{k}}_M = \underline{\bar{B}}^T \underline{D} \underline{\bar{B}} \quad (3.92)$$

Sendo

$$\underline{k}_G = \underline{B}^T \underline{H} \underline{B} + Q_\alpha \underline{G}_\alpha = \underline{I}^T \underline{\bar{B}}^T \underline{H} \underline{\bar{B}} \underline{I} + Q_1 \underline{I}^T \underline{\bar{G}}_1 \underline{I} + Q_2 \underline{I}^T \underline{\bar{G}}_2 \underline{I} + Q_3 \underline{I}^T \underline{\bar{G}}_3 \underline{I}$$

$$\begin{cases} \underline{\tilde{k}}_G = \underline{\tilde{T}}^T \underline{\tilde{k}}_G \underline{\tilde{T}} \\ \underline{\tilde{k}}_G = \underline{\tilde{B}}^T \underline{H} \underline{\tilde{B}} + Q_1 \underline{\tilde{G}}_1 + Q_2 \underline{\tilde{G}}_2 + Q_3 \underline{\tilde{G}}_3 \end{cases} \quad (3.93)$$

finalmente:

$$\underline{k}_t = \underline{\tilde{T}}^T (\underline{\tilde{k}}_M + \underline{\tilde{k}}_G) \underline{\tilde{T}} \quad (3.94)$$

no sistema global cartesiano.

b) k_t^* em coordenadas corrotacionais.

Sendo $Q = Q(\sigma, q)$, a derivada no tempo de Q (ou a variação incremental de Q) pode ser dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{dq}{dt}$$

chamando

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = k_t^* \quad (3.95)$$

fica, na forma matricial:

$$\underline{\dot{Q}} = \underline{k}_t^* \underline{\dot{q}} \quad \text{ou} \quad \underline{\Delta Q} = \underline{k}_t^* \underline{\Delta q} \quad (3.96)$$

onde \underline{k}_t^* é a matriz de rigidez tangente do elemento nas coordenadas corrotacionais. Suas componentes $k_{\alpha\beta}^*$ são as derivadas de Q_α em relação

às coordenadas corrotacionais q_β . Da Eq. (3.74) onde $Q_\alpha = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r$, vem que:

$$k_{\alpha\beta}^* = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta} = Q_{\alpha,\beta}$$

$$Q_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \left[\underbrace{\left(\varepsilon_{,\alpha} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \varepsilon_{,\beta} \right)}_{\text{parte constitutiva}} + \underbrace{(\sigma \varepsilon_{,\alpha\beta})}_{\text{parte geométrica}} \right] dV_r \quad (3.97)$$

Com o auxílio das Eq. (3.83), (3.85), (3.86) e (3.87) pode-se escrever:

$$k_t^* = D_{\alpha,\beta} + H_{\alpha,\beta} \quad (3.98)$$

Escrevendo-se a matriz de rigidez tangente do elemento nas coordenadas corrotacionais, na forma matricial vem que:

$$\underline{k}_t^* = \underline{D} + \underline{H} \quad (3.99)$$

onde \underline{D} e \underline{H} são, respectivamente, a matriz constitutiva em coordenadas corrotacionais, (3x3), simétrica e a matriz de rigidez geométrica também nas coordenadas corrotacionais, (3x3) e simétrica.

Esta matriz pode ser escrita no sistema cartesiano usando-se a relação entre q_α e p_i e não se esquecendo da parcela não-objetiva (movimento de corpo rígido).

$$k_{ij} = q_{\alpha,j} k_{\alpha,\beta}^* q_{\beta,j} + Q_\alpha q_{\alpha,ij}$$

que fica:

$$k_{ij} = q_{\alpha,j} Q_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}$$

conforme a Eq. (3.82)

3.7.2 Equilíbrio Estrutural

Do estudo anterior concluiu-se que o equilíbrio do elemento é dado, na forma indicial ou matricial, respectivamente por:

$$P_i = Q_{\alpha} q_{\alpha,i} \quad \text{ou} \quad \underline{P} = \underline{B}^T \underline{Q}$$

sendo $P = P(\sigma, p)$.

Para escrever o equilíbrio da estrutura, os graus de liberdade cartesianos de um elemento \underline{p} , serão relacionados com os graus de liberdade da estrutura, \underline{r} , através da seguinte expressão matricial:

$$\underline{p} = \underline{A} \underline{r} \quad (3.100)$$

onde \underline{A} é a matriz de incidência cinemática, responsável pela compatibilidade dos deslocamentos nodais do elemento, p_i , com os deslocamentos nodais da estrutura, r_j . Esta matriz é composta por 0 e 1. Variando-se (3.100) vem que:

$$\delta \underline{p} = \underline{A} \delta \underline{r} \quad (3.101)$$

O trabalho virtual interno da estrutura é dado pela somatória dos trabalhos virtuais internos dos seus elementos. Assim, com o auxílio de (3.101), tem-se:

$$\delta W_i = \sum \delta \omega_i = \sum_1^{ne} \underline{P}^T \delta \underline{p} = \sum \underline{P}^T \underline{A} \delta \underline{r} = \left(\sum \underline{P}^T \underline{A} \right) \delta \underline{r}$$

chamando

$$\underline{S} = \sum \underline{A}^T \underline{P} \quad (3.102)$$

o vetor dos esforços internos da estrutura, obtido somando-se a contribuição de todos os elementos, conclui-se que:

$$\delta W_i = \underline{S}^T \delta \underline{r} \quad (3.103)$$

Como $\underline{P} = \underline{P}(\sigma, p)$ e $\underline{p} = \underline{A} \underline{r}$, então $\underline{S} = \underline{S}(\sigma, r)$.

O trabalho virtual externo, supondo-se somente forças externas concentradas aplicadas nos nós da estrutura, representadas pelo vetor \underline{R} , é dado por:

$$\delta W_e = \underline{R}^T \delta \underline{r} \quad (3.104)$$

Igualando-se as Eq. (3.103) e (3.104) pelo P.T.V, vem que:

$$\delta W_e = \delta W_i \quad \therefore \quad \underline{R}^T \delta \underline{r} = \underline{S}^T \delta \underline{r}$$

e, finalmente:

$$\underline{\dot{R}} = \underline{\dot{S}} \quad (3.105)$$

representa a equação do equilíbrio estrutural.

3.7.3 Equações Incrementais do Equilíbrio

As equações incrementais do equilíbrio da estrutura são obtidas ao se derivar a Eq. (3.105) no tempo:

$$\underline{\dot{R}} = \underline{\dot{S}} \quad (3.106)$$

Da Eq. (3.102) vem que:

$$\underline{\dot{S}} = \sum \underline{A}^T \underline{\dot{P}} \quad (3.107)$$

Levando-se a Eq. (3.81), onde $\underline{\dot{P}} = k_t \dot{p}$, em (3.107), obtém-se

$$\underline{\dot{S}} = \sum \underline{A}^T k_t \dot{p} \quad (3.108)$$

mas de (3.101), onde $\dot{p} = \underline{A} \dot{r}$, aplicada em (3.108), fica:

$$\underline{\dot{S}} = \sum \underline{A}^T k_t \underline{A} \dot{r}$$

donde, finalmente, pode-se escrever

$$\dot{\underline{S}} = \underline{K}_t \dot{\underline{r}} \quad (3.109)$$

onde

$$\underline{K}_t = \sum \underline{A}^T k_t \underline{A} \quad (3.110)$$

é a matriz de rigidez tangente da estrutura, obtida pela contribuição das matrizes de rigidez de cada elemento, através da matriz de incidência cinemática \underline{A} .

Assim, a Eq. (3.106), $\dot{\underline{R}} = \dot{\underline{S}}$, do equilíbrio incremental da estrutura, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{\underline{R}} = \underline{K}_t \dot{\underline{r}} \quad (3.111)$$

ou, de forma aproximada:

$$\Delta \underline{R} = \underline{K}_t \Delta \underline{r} \quad (3.111a)$$

onde ΔR representa os incrementos no carregamento e Δr os incrementos nos deslocamentos nodais.

É importante observar, como faz PIMENTA, P.M. [92], que no regime elástico, a Eq. (3.111) representa um sistema linear em $\dot{\underline{r}}$, enquanto no regime elasto-plástico isto não ocorre, porque \underline{K}_t é uma função de $\dot{\underline{r}}$, uma vez que \underline{D} é uma função de $\dot{\underline{\varepsilon}}$, isto é, para um certo nível de carregamento, dado um incremento de carga, é preciso saber se haverá carregamento com D^{ep} ou descarregamento com D^e , conforme visto na seção 3.4.

3.8 Interpolação

O campo de deformação que é adotado neste trabalho, para barras com imperfeição inicial β , pode ser dado pelas Eq. (3.63) e (3.64):

$$\varepsilon = \frac{\bar{\varepsilon} \sec\beta - r \alpha'}{\sec\beta - r \beta'} = \frac{\lambda \cdot \sec(\alpha + \beta) - \sec\beta - r \alpha'}{\sec\beta - r \beta'}$$

que pode ser escrito, também, em função do campo de deslocamento, conforme a Eq. (3.65), por:

$$\varepsilon = \frac{(1 + \bar{u}_c') \sec(\alpha + \beta) - \sec\beta - r \alpha'}{\sec\beta - r \beta'}$$

Para se conhecer o campo de deformação é preciso, então, definir funções aproximadoras para o deslocamento \bar{u}_c do eixo da barra, assim como para o ângulo α de rotação deste eixo. Estas funções de interpolação para os deslocamentos serão escritas em função dos graus de liberdade naturais, objetivos, q_α ($\alpha = 1,2,3$), obtendo-se finalmente:

$$\varepsilon = f(q_\alpha) \quad (3.112)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento é dada pela Eq. (3.91b):

$$\underline{k}_t = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} + \underline{B}^T \underline{H} \underline{B} + \underline{Q}_\alpha \underline{G}_\alpha$$

Neste caso, as matrizes \underline{B} e \underline{G}_α , foram definidas pelas Eq. (3.39) e (3.43a, b), enquanto que os elementos de \underline{Q}_α , \underline{D} e \underline{H} vêm, respectivamente, de:

$$\text{Eq. (3.74)} \quad Q_\alpha = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r$$

$$\text{Eq. (3.85)} \quad D_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \varepsilon_{,\alpha} D \varepsilon_{,\beta} dV_r$$

$$\text{Eq. (3.86)} \quad H_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha\beta} dV_r$$

Fica evidente que para se escrever \underline{k}_r , é necessário determinar Q_α , $D_{\alpha,\beta}$ e $H_{\alpha,\beta}$. Portanto, é preciso fazer as derivadas de ε , Eq. (3.112), em relação às coordenadas naturais ou corrotacionais q_α ($\varepsilon_{,\alpha}$, $\varepsilon_{,\beta}$, $\varepsilon_{,\alpha\beta}$).

Pode-se adotar diversas interpolações para \bar{u}_c e α , ao longo do eixo da barra, de modo que elas fiquem explicitadas em função de q_α . Serão introduzidas as interpolações usuais baseadas na Resistência dos Materiais, onde se adota uma interpolação linear para os deslocamentos \bar{u}_c e uma distribuição parabólica do segundo grau (quadrática) para os ângulos α . Escrevendo em função dos graus de liberdade naturais, tem-se:

$$\bar{u}_c(x_r) = q_1 \left(\frac{x_r}{l_r} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.113)$$

ou

$$\bar{u}_c(x_r) = q_1 \psi_1(x_r) \quad (3.114)$$

onde

$$\psi_1(x_r) = \frac{x_r}{l_r} + \frac{1}{2} \quad (3.115)$$

e

$$\alpha(x_r) = q_2 \left(\frac{3x_r^2}{l_r^2} - \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \right) + q_3 \left(\frac{3x_r^2}{l_r^2} + \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \right) \quad (3.116)$$

ou

$$\alpha(x_r) = q_2 \psi_2'(x_r) + q_3 \psi_3'(x_r) \quad (3.117)$$

onde

$$\begin{cases} \psi_2'(x_r) = \frac{3x_r^2}{l_r^2} - \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \\ \psi_3'(x_r) = \frac{3x_r^2}{l_r^2} + \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \end{cases} \quad (3.118)$$

Tendo-se em vista a Eq. (3.65), são necessárias as derivadas de $\bar{u}_c(x_r)$ e $\alpha(x_r)$, donde se determinam:

$$\bar{u}_c'(x_r) = \frac{q_1}{l_r} \quad (3.119)$$

$$\alpha'(x_r) = q_2 \psi_2''(x_r) + q_3 \psi_3''(x_r) \quad (3.120)$$

sendo

$$\begin{cases} \psi_2''(x_r) = \frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} \\ \psi_3''(x_r) = \frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r} \end{cases} \quad (3.121)$$

Levando-se as Eq. (3.117), (3.119) e (3.120) na Eq. (3.65) do campo de

deformação, $\varepsilon = \frac{\left(1 + \bar{u}_c'\right) \sec(\alpha + \beta) - \sec\beta - r \alpha'}{\sec\beta - r \beta'}$, obtém-se finalmente:

$$\varepsilon = \frac{\left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \sec\left(q_2 \psi_2' + q_3 \psi_3' + \beta\right) - \sec\beta - r \left(q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3''\right)}{\sec\beta - r \beta'} \quad (3.122)$$

Com o objetivo de se calcular Q_α , $D_{\alpha,\beta}$ e $H_{\alpha,\beta}$, conforme as Eq. (3.74), (3.85) e (3.86), respectivamente, é necessário encontrar a expressão do elemento de volume dV_r que, com o auxílio da Eq. (3.47), vale:

$$dV_r = dA_r ds_r = dA_r (d\bar{s}_r - r d\beta) = \left(\frac{d\bar{s}_r}{dx_r} - r \frac{d\beta}{dx_r} \right) dA_r dx_r$$

e, finalmente:

$$dV_r = (\sec \beta - r\beta') dA_r dx_r \quad (3.123)$$

onde A_r é a área da seção transversal na configuração de referência.

Observação:

No caso de barras inicialmente retas, $\beta = \beta' = 0$, e então:

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \sec(q_2 \psi_2' + q_3 \psi_3') - 1 - r (q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'') \quad (3.122a)$$

e

$$dV_r = dA_r dx_r \quad (3.123a)$$

Voltando-se à Eq. (3.122), com o auxílio das Eq. (3.117) e (3.118), pode-se fazer as primeira e segunda derivadas de ε em relação a q_α :

$$\begin{cases} \varepsilon_{,1} = \frac{1}{\sec \beta - r \beta'} \cdot \frac{1}{l_r} \cdot \sec(\alpha + \beta) \\ \varepsilon_{,2} = \frac{1}{\sec \beta - r \beta'} \left[\left(1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \sec(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \psi_2' - r \psi_2'' \right] \\ \varepsilon_{,3} = \frac{1}{\sec \beta - r \beta'} \left[\left(1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \sec(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \psi_3' - r \psi_3'' \right] \end{cases} \quad (3.124)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon_{,11} = 0 \\
 \varepsilon_{,12} = \frac{1}{l_r(\sec\beta - r\beta')} \sec(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \psi_2' \\
 \varepsilon_{,13} = \frac{1}{l_r(\sec\beta - r\beta')} \sec(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \psi_3' \\
 \varepsilon_{,22} = \frac{1}{\sec\beta - r\beta'} \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \psi_2' \psi_2' \left[\sec^3(\alpha + \beta) + \right. \\
 \left. \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) \sec(\alpha + \beta) \right] \\
 \varepsilon_{,23} = \frac{1}{\sec\beta - r\beta'} \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \psi_3' \psi_2' \left[\sec^3(\alpha + \beta) + \right. \\
 \left. \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) \sec(\alpha + \beta) \right] \\
 \varepsilon_{,33} = \frac{1}{\sec\beta - r\beta'} \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \psi_3' \psi_3' \left[\sec^3(\alpha + \beta) + \right. \\
 \left. \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) \sec(\alpha + \beta) \right]
 \end{array} \right. \quad (3.125)$$

Levando-se as Eq. (3.124) na Eq. (3.74) e com o auxílio da Eq. (3.123), deduz-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 Q_1 = \int \frac{N}{l_r} \sec(\alpha + \beta) dx_r \\
 Q_2 = \int \left[N \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \sec(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \psi_2' + M \psi_2'' \right] dx_r \\
 Q_3 = \int \left[N \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \sec(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \psi_3' + M \psi_3'' \right] dx_r
 \end{array} \right. \quad (3.126)$$

onde

$$N = \int \sigma dA_r \qquad M = - \int \sigma r dA_r \quad (3.127)$$

são a força normal e o momento fletor atuantes na seção transversal.

Tomando-se a Eq. (3.85) e introduzindo-se as Eq. (3.124) com o auxílio da Eq. (3.123), obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 D_{11} = \int \frac{C_1}{l_r^2} \sec^2(\alpha + \beta) dx_r \\
 D_{12} = \int \left[\frac{C_1}{l_r} \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \sec^2(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \psi_2' - \frac{C_2}{l_r} \sec(\alpha + \beta) \psi_2'' \right] dx_r \\
 D_{13} = \int \left[\frac{C_1}{l_r} \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \sec^2(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \psi_3' - \frac{C_2}{l_r} \sec(\alpha + \beta) \psi_3'' \right] dx_r \\
 D_{22} = \int \left[C_1 \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right)^2 \sec^2(\alpha + \beta) \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) \psi_2' \psi_2' - 2C_2 \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \sec(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \psi_2' \psi_2'' + C_3 \psi_2'' \psi_2'' \right] dx_r \\
 D_{23} = \int \left[C_1 \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right)^2 \sec^2(\alpha + \beta) \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) \psi_2' \psi_3' - C_2 \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \sec(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \left(\psi_2' \psi_3'' + \psi_2'' \psi_3' \right) + C_3 \psi_2'' \psi_3'' \right] dx_r \\
 D_{33} = \int \left[C_1 \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right)^2 \sec^2(\alpha + \beta) \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) \psi_3' \psi_3' - 2C_2 \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \sec(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \psi_3' \psi_3'' + C_3 \psi_3'' \psi_3'' \right] dx_r
 \end{array} \right. \quad (3.128)$$

onde os coeficientes de rigidez C_1 , C_2 e C_3 , que aparecem nas Eq. (3.128), valem:

$$C_1 = \int \frac{D}{\sec \beta - r \beta'} dA_r; \quad C_2 = \int \frac{D r}{\sec \beta - r \beta'} dA_r; \quad C_3 = \int \frac{D r^2}{\sec \beta - r \beta'} dA_r \quad (3.129)$$

Finalmente, levando-se as Eq. (3.125) na Eq. (3.86) com o auxílio das Eq. (3.123) e (3.127), chega-se a:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{11} = 0 \\ H_{12} = \int_{l_r} \frac{N}{l_r} \sec(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \psi_2' dx_r \\ H_{13} = \int_{l_r} \frac{N}{l_r} \sec(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \psi_3' dx_r \\ H_{22} = \int N \left(1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \left[\sec^3(\alpha + \beta) + \sec(\alpha + \beta) \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) \right] \psi_2' \psi_2' dx_r \\ H_{23} = \int N \left(1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \left[\sec^3(\alpha + \beta) + \sec(\alpha + \beta) \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) \right] \psi_2' \psi_3' dx_r \\ H_{33} = \int N \left(1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \left[\sec^3(\alpha + \beta) + \sec(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) \right] \psi_3' \psi_3' dx_r \end{array} \right. \quad (3.130)$$

As integrais para obtenção de Q_α , $D_{\alpha,\beta}$, $H_{\alpha,\beta}$ são feitas na direção x_r e têm como limites de integração $-l_r/2$ e $l_r/2$ e, em geral, são computadas numericamente através, por exemplo, do método de Gauss, com pelo menos dois pontos de integração.

As integrais para obtenção de N , M , C_1 , C_2 , C_3 são efetuadas sobre toda a seção transversal e podem ser calculadas nos pontos de integração de Gauss pelo método dos retângulos, com um grande número de pontos de integração para poder captar a grande variação de σ e D ao longo da altura da seção, nos problemas elasto-plásticos.

3.9 Aproximações de Segunda-Ordem

Visando simplificar as expressões obtidas anteriormente para Q_α , $D_{\alpha,\beta}$, $H_{\alpha,\beta}$ e determinar analiticamente as matrizes de rigidez do elemento,

serão utilizadas as seguintes aproximações de segunda-ordem para as funções trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \alpha; \quad \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}; \quad \sec \alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2} \quad (3.131)$$

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{tg} \beta = \beta; \quad \cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2}; \quad \sec \beta = 1 + \frac{\beta^2}{2} \quad (3.132)$$

Com estas aproximações, admite-se que os ângulos α e β são muito pequenos, correspondendo às hipóteses de pequenas rotações do eixo do elemento em relação à sua corda e de pequenas imperfeições iniciais do eixo da barra. Apesar destas hipóteses, a formulação não perde a sua generalidade graças ao sistema corrotacional adotado, podendo ocorrer grandes deslocamentos e curvaturas, desde que os elementos sejam suficientemente curtos.

A expressão do campo de deformação, dada pela Eq. (3.122), pode ser escrita da seguinte forma:

$$\varepsilon = \frac{\left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \sec(\alpha + \beta) - \sec \beta - r \alpha'}{\sec \beta - r \beta'} \quad (3.133)$$

onde α e α' são dadas pelas Eq. (3.117) e (3.120), respectivamente. Introduzindo-se as aproximações de segunda-ordem indicadas, tem-se:

$$\varepsilon = \frac{\left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left[1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2\right] - \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) - r \alpha'}{1 + \frac{1}{2}\beta^2 - r \beta'} \quad (3.134)$$

e

$$dV_r = \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - r\beta'\right) dA dx_r \quad (3.135)$$

Sendo $\lambda = 1 + q_1/l_r$, pode-se escrever as derivadas $\varepsilon_{,\alpha}$ e $\varepsilon_{,\alpha\beta}$ da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{,1} = \frac{1 + 1/2(\alpha + \beta)^2}{(1 + 1/2\beta^2 - r\beta')l_r} \\ \varepsilon_{,2} = \frac{\lambda(\alpha + \beta)\psi_2' - r\psi_2''}{1 + 1/2\beta^2 - r\beta'} \\ \varepsilon_{,3} = \frac{\lambda(\alpha + \beta)\psi_3' - r\psi_3''}{1 + 1/2\beta^2 - r\beta'} \end{array} \right. \quad (3.136)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{,11} = 0 \\ \varepsilon_{,12} = \frac{(\alpha + \beta)\psi_2'}{(1 + 1/2\beta^2 - r\beta')l_r} \\ \varepsilon_{,13} = \frac{(\alpha + \beta)\psi_3'}{(1 + 1/2\beta^2 - r\beta')l_r} \\ \varepsilon_{,22} = \frac{\lambda\psi_2'\psi_2'}{1 + 1/2\beta^2 - r\beta'} \\ \varepsilon_{,23} = \frac{\lambda\psi_2'\psi_3'}{1 + 1/2\beta^2 - r\beta'} \\ \varepsilon_{,33} = \frac{\lambda\psi_3'\psi_3'}{1 + 1/2\beta^2 - r\beta'} \end{array} \right. \quad (3.137)$$

Os esforços internos naturais nas coordenadas corrotacionais são dados pela Eq. (3.74) por $Q_\alpha = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r$, e podem ser escritos agora por:

$$Q_\alpha = \int_{-l/2}^{l/2} \int_{A_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} (1 + 1/2\beta^2 - r\beta') dA_r dx_r \quad (3.138)$$

Com o auxílio das Eq. (3.136), determina-se:

$$\begin{cases} Q_1 = \int \frac{N}{l_r} \left[1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 \right] dx_r \\ Q_2 = \int \left[N \lambda (\alpha + \beta) \psi_2' + M \psi_2'' \right] dx_r \\ Q_3 = \int \left[N \lambda (\alpha + \beta) \psi_3' + M \psi_3'' \right] dx_r \end{cases} \quad (3.139)$$

Os elementos da matriz \underline{H} são dados pela Eq. (3.86) por

$H_{\alpha\beta} = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha\beta} dV_r$, e podem ser escritos por:

$$H_{\alpha\beta} = \int_{-l/2}^{l/2} \int_{A_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha\beta} (1 + 1/2\beta^2 - r \beta') dA_r dx_r \quad (3.140)$$

Com o auxílio das Eq. (3.137), determina-se:

$$\begin{cases} H_{11} = 0 \\ H_{12} = \int \frac{N}{l_r} (\alpha + \beta) \psi_2' dx_r \\ H_{13} = \int \frac{N}{l_r} (\alpha + \beta) \psi_3' dx_r \\ H_{22} = \int N \lambda \psi_2' \psi_2' dx_r \\ H_{23} = \int N \lambda \psi_2' \psi_3' dx_r \\ H_{33} = \int N \lambda \psi_3' \psi_3' dx_r \end{cases} \quad (3.141)$$

Os elementos da matriz \underline{D} dados pela Eq. (3.85) por

$D_{\alpha\beta} = \int_{V_r} D \varepsilon_{,\alpha} \varepsilon_{,\beta} dV_r$, são agora escritos por:

$$D_{\alpha\beta} = \int_{-l/2}^{l/2} \int_{A_r} D \varepsilon_{,\alpha} \varepsilon_{,\beta} (1 + 1/2\beta^2 - r \beta') dA_r dx_r \quad (3.142)$$

Com o auxílio das Eq. (3.136), obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = \int \frac{C_1}{l_r^2} \left[1 + 1/2(\alpha + \beta)^2 \right]^2 dx_r \\ D_{12} = \int \left[C_1 \lambda(\alpha + \beta) \psi_2' - C_2 \psi_2'' \right] \frac{1}{l_r} \left[1 + 1/2(\alpha + \beta)^2 \right] dx_r \\ D_{13} = \int \left[C_1 \lambda(\alpha + \beta) \psi_3' - C_2 \psi_3'' \right] \frac{1}{l_r} \left[1 + 1/2(\alpha + \beta)^2 \right] dx_r \\ D_{22} = \int \left[\begin{array}{l} C_1 \lambda^2(\alpha + \beta)^2 \psi_2' \psi_2' - 2C_2 \lambda(\alpha + \beta) \psi_2' \psi_2'' + \\ C_3 \psi_2'' \psi_2'' \end{array} \right] dx_r \\ D_{23} = \int \left[\begin{array}{l} C_1 \lambda^2(\alpha + \beta)^2 \psi_2' \psi_3' - C_2 \lambda(\alpha + \beta) \\ \left(\psi_2' \psi_3'' + \psi_2'' \psi_3' \right) + C_3 \psi_2'' \psi_3'' \end{array} \right] dx_r \\ D_{33} = \int \left[\begin{array}{l} C_1 \lambda^2(\alpha + \beta)^2 \psi_3' \psi_3' - 2C_2 \lambda(\alpha + \beta) \psi_3' \psi_3'' + \\ C_3 \psi_3'' \psi_3'' \end{array} \right] dx_r \end{array} \right. \quad (3.143)$$

onde os coeficientes de rigidez C_1 , C_2 e C_3 são dados por:

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{A_r} \frac{D}{1 + 1/2\beta^2 - r\beta'} dA_r; & C_2 &= \int_{A_r} \frac{D r}{1 + 1/2\beta^2 - r\beta'} dA_r \\ C_3 &= \int_{A_r} \frac{D r^2}{1 + 1/2\beta^2 - r\beta'} dA_r \end{aligned} \quad (3.144)$$

3.9.1 Simplificações

As integrais obtidas para a determinação de Q_{α} , $H_{\alpha\beta}$ e $D_{\alpha\beta}$ ainda continuam complicadas, devendo ser resolvidas numericamente. Visando obter expressões mais simples e fáceis para se resolver o problema analiticamente, serão feitas algumas simplificações coerentes, mostradas a seguir.

O campo de deformação adotado pode ser expresso de uma maneira mais geral através das Eq. (3.63) e (3.64) por:

$$\varepsilon = \frac{\bar{\varepsilon} \sec\beta - r \alpha'}{\sec\beta - r \beta'} = \frac{\lambda \sec(\alpha + \beta) - \sec\beta - r \alpha'}{\sec\beta - r \beta'} \quad (3.145)$$

Nas fibras do eixo do elemento onde $r=0$, tem-se:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} = \frac{\lambda \sec(\alpha + \beta) - \sec\beta}{\sec\beta} \quad (3.146)$$

sendo $\lambda = 1 + q_1/l_r$ e usando as aproximações de segunda ordem, obtém-se para as fibras do eixo:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{(1 + q_1/l_r) \left[1 + 1/2(\alpha + \beta)^2 \right] - (1 + 1/2\beta^2)}{1 + 1/2\beta^2} \quad (3.147)$$

Admite-se neste momento que a imperfeição inicial da barra, representada pelo ângulo β , é muito pequena, o que é usual nas barras reais da prática, de tal forma que se possa fazer:

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{tg}\beta = \beta; \quad \sec\beta = \cos\beta = 1; \quad 1/(1 + 1/2\beta^2) \approx 1 - 1/2\beta^2 \quad (3.148)$$

O campo de deformação dado pela Eq. (3.145), fica então:

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - r \beta'} (\bar{\varepsilon} - r \alpha') \quad (3.149)$$

e a deformação das fibras do eixo é dada por:

$$\bar{\varepsilon} = (1 + q_1/l_r) \left[1 + 1/2(\alpha + \beta)^2 - 1/2\beta^2 \right] - 1 \quad (3.150)$$

Observa-se que a Eq. (3.150) fornece uma deformação $\bar{\varepsilon}$ variável ao longo da barra, uma vez que α e β são variáveis com x_r . Uma hipótese simplificadora importante é feita aqui, ao se adotar um valor constante para $\bar{\varepsilon}$, representado pelo seu valor médio dado por:

$$\bar{\varepsilon}_m = \frac{1}{l_r} \int \bar{\varepsilon} dx_r \quad (3.151)$$

Para se determinar $\bar{\varepsilon}_m$, sabendo-se que $\alpha = q_2 \psi_2' + q_3 \psi_3'$, admite-se que:

$$\beta = \beta_a \psi_2' + \beta_b \psi_3' \quad (3.152)$$

onde β_a e β_b são as imperfeições iniciais nas extremidades do elemento e ψ_2' e ψ_3' são dados pelas Eq. (3.118), de tal forma que pode-se escrever:

$$\alpha + \beta = (q_2 + \beta_a) \psi_2' + (q_3 + \beta_b) \psi_3' \quad (3.153)$$

Levando-se a Eq. (3.150) com o auxílio da Eq. (3.153) na Eq. (3.151) e sabendo-se que $\lambda = 1 + q_1/l_r$, escreve-se:

$$\bar{\varepsilon}_m = \frac{1}{l_r} \int_{-l/2}^{l/2} \left\{ \lambda \left[1 + \frac{1}{2} \left[(q_2 + \beta_a) \psi_2' + (q_3 + \beta_b) \psi_3' \right]^2 - \frac{1}{2} \left(\beta_a \psi_2' + \beta_b \psi_3' \right)^2 \right] - 1 \right\} dx_r \quad (3.154)$$

Resolvendo-se, chega-se a:

$$\bar{\varepsilon}_m = (\lambda - 1) + \lambda \left[\frac{(q_2 + \beta_a)^2}{15} + \frac{(q_3 + \beta_b)^2}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)(q_3 + \beta_b)}{30} - \left(\frac{\beta_a^2}{15} + \frac{\beta_b^2}{15} - \frac{\beta_a \beta_b}{30} \right) \right] \quad (3.154a)$$

E o campo de deformação dado pela Eq. (3.149), fica explicitado definitivamente por:

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - r \beta'} \left\{ \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \left[\frac{(q_2 + \beta_a)^2}{15} + \frac{(q_3 + \beta_b)^2}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)(q_3 + \beta_b)}{30} - \left(\frac{\beta_a^2}{15} + \frac{\beta_b^2}{15} - \frac{\beta_a \beta_b}{30} \right) \right] - r \left(q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'' \right) \right\} \quad (3.155)$$

considerando as aproximações de segunda-ordem e as simplificações adotadas.

a) As derivadas $\varepsilon_{,\alpha}$ e $\varepsilon_{,\alpha\beta}$, ($\alpha, \beta=1,2,3$) são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{,1} = \frac{1}{(1 - r \beta') l_r} \left[1 + \frac{(q_2 + \beta_a)^2}{15} + \frac{(q_3 + \beta_b)^2}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)(q_3 + \beta_b)}{30} - \left(\frac{\beta_a^2}{15} + \frac{\beta_b^2}{15} - \frac{\beta_a \beta_b}{30} \right) \right] \\ \varepsilon_{,2} = \frac{1}{(1 - r \beta')} \left\{ \lambda \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_3 + \beta_b)}{30} \right] - r \psi_2'' \right\} \\ \varepsilon_{,3} = \frac{1}{(1 - r \beta')} \left\{ \lambda \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right] - r \psi_3'' \right\} \end{array} \right. \quad (3.156)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon_{,11} = 0 \\
 \varepsilon_{,12} = \frac{1}{(1-r\beta')l_r} \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_3 + \beta_b)}{30} \right] \\
 \varepsilon_{,13} = \frac{1}{(1-r\beta')l_r} \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right] \\
 \varepsilon_{,22} = \frac{1}{(1-r\beta')} \cdot \frac{2\lambda}{15} \\
 \varepsilon_{,23} = -\frac{1}{(1-r\beta')} \cdot \frac{2\lambda}{30} \\
 \varepsilon_{,33} = \frac{1}{(1-r\beta')} \cdot \frac{2\lambda}{15}
 \end{array} \right. \quad (3.157)$$

b) Os esforços internos naturais nas coordenadas corrotacionais, são dados por:

$$Q_\alpha = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{A_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} (1-r\beta') dA_r dx_r \quad (3.158)$$

$$\text{onde se fez } dV_r = (1-r\beta') dA_r dx_r \quad (3.159)$$

e, sabendo-se que $N = \int_{A_r} \sigma dA_r$ e $M = -\int_{A_r} \sigma r dA_r$, tem-se com o auxílio das

Eq. (3.156) :

$$\left\{ \begin{aligned}
 Q_1 &= \int_{-l/2}^{l/2} \frac{N}{I_r} \left[1 + \frac{(q_2 + \beta_a)^2}{15} + \frac{(q_3 + \beta_b)^2}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)(q_3 + \beta_b)}{30} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{\beta_a^2}{15} + \frac{\beta_b^2}{15} - \frac{\beta_a \beta_b}{30} \right) \right] dx_r \\
 Q_2 &= \int_{-l/2}^{l/2} \left\{ N \lambda \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_3 + \beta_b)}{30} \right] + M \psi_2'' \right\} dx_r \\
 Q_3 &= \int_{-l/2}^{l/2} \left\{ N \lambda \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right] + M \psi_3'' \right\} dx_r
 \end{aligned} \right. \quad (3.160)$$

c) Os elementos da matriz \underline{H} são dados por:

$$H_{\alpha\beta} = \int_{-l/2}^{l/2} \int_{A_r} \sigma_{,\alpha\beta} (1 - r \beta') dA_r dx_r \quad (3.161)$$

Com o auxílio das Eq. (3.157), tem-se:

$$\left\{ \begin{aligned}
 H_{11} &= 0 \\
 H_{12} &= \int_{-l/2}^{l/2} \frac{N}{I_r} \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_b)}{30} \right] dx_r \\
 H_{13} &= \int_{-l/2}^{l/2} \frac{N}{I_r} \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right] dx_r \\
 H_{22} &= \int_{-l/2}^{l/2} \frac{2 N \lambda}{15} dx_r \\
 H_{23} &= - \int_{-l/2}^{l/2} \frac{N \lambda}{30} dx_r \\
 H_{33} &= \int_{-l/2}^{l/2} \frac{2 N \lambda}{15} dx_r
 \end{aligned} \right. \quad (3.162)$$

d) Os elementos da matriz \underline{D} são dados por:

$$D_{\alpha\beta} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \int_{A_r} D_{\varepsilon_{,\alpha} \varepsilon_{,\beta}} (1 - r \beta') dA_r dx_r \quad (3.163)$$

que com o auxílio das Eq. (3.156), obtém-se:

$$\left\{ \begin{aligned} D_{11} &= \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{C_1}{l_r^2} \left[1 + \frac{(q_2 + \beta_a)^2}{15} + \frac{(q_3 + \beta_b)^2}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)(q_3 + \beta_b)}{30} - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\beta_a^2}{15} + \frac{\beta_b^2}{15} - \frac{\beta_a \beta_b}{30} \right) \right]^2 dx_r \\ D_{12} &= \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left\{ C_1 \lambda \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_3 + \beta_b)}{30} \right] - C_2 \psi_2'' \right\} \cdot \\ &\quad \frac{1}{l_r} \left[1 + \frac{(q_2 + \beta_a)^2}{15} + \frac{(q_3 + \beta_b)^2}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)(q_3 + \beta_b)}{30} - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\beta_a^2}{15} + \frac{\beta_b^2}{15} - \frac{\beta_a \beta_b}{30} \right) \right] dx_r \\ D_{13} &= \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left\{ C_1 \lambda \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right] - C_2 \psi_3'' \right\} \cdot \\ &\quad \frac{1}{l_r} \left[1 + \frac{(q_2 + \beta_a)^2}{15} + \frac{(q_3 + \beta_b)^2}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)(q_3 + \beta_b)}{30} - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\beta_a^2}{15} + \frac{\beta_b^2}{15} - \frac{\beta_a \beta_b}{30} \right) \right] dx_r \\ D_{22} &= \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left\{ C_1 \lambda^2 \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_3 + \beta_b)}{30} \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. 2 C_2 \lambda \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_3 + \beta_b)}{30} \right] \psi_2'' + C_3 \psi_2'' \psi_2'' \right\} dx_r \\ D_{23} &= \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left\{ C_1 \lambda^2 \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_3 + \beta_b)}{30} \right] \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right] - \right. \\ &\quad C_2 \lambda \left\{ \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_3 + \beta_b)}{30} \right] \psi_3'' + \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right] \psi_2'' \right\} + C_3 \psi_2'' \psi_3'' \left. \right\} dx_r \\ D_{33} &= \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left\{ C_1 \lambda^2 \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. 2 C_2 \lambda \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right] \psi_3'' + C_3 \psi_3'' \psi_3'' \right\} dx_r \end{aligned} \right. \quad (3.164)$$

com os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 , dados por:

$$C_1 = \int_{A_r} \frac{D}{(1-r\beta')} dA_r; \quad C_2 = \int_{A_r} \frac{D r}{(1-r\beta')} dA_r; \quad C_3 = \int_{A_r} \frac{D r^2}{(1-r\beta')} dA_r \quad (3.165)$$

3.9.2) Expressões Analíticas para a Matriz de Rigidez Tangente

3.9.2.1) Elementos prismáticos em regime elástico linear

Deduz-se agora expressões analíticas para N , M , C_α , Q_α , $H_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta=1,2,3$), em regime elástico linear, usando-se as equações simplificadas anteriores. Conhece-se também neste caso:

$$\text{Lei de Hooke: } \sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.166)$$

O campo de deformação dado por:

$$\varepsilon = \frac{1}{1-r\beta'} (\bar{\varepsilon}_m - r\alpha') \quad (3.167)$$

onde $\bar{\varepsilon}_m$ é dado pela Eq. (3.154a) e $r\alpha'$ é dado por:

$$r\alpha' = r \left(q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'' \right) = r \left[q_2 \left(\frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} \right) + q_3 \left(\frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r} \right) \right] \quad (3.168)$$

que varia linearmente com x_r .

a) Determinação da força normal N

Com o auxílio da Eq. (3.69) e (3.167), tem-se:

$$N = \int_{A_r} \sigma dA_r = \int_{A_r} E \varepsilon dA_r = \int_{A_r} E (\bar{\varepsilon}_m - r \alpha') \frac{dA_r}{(1 - r \beta')}$$

$$N = E \bar{\varepsilon}_m \int_{A_r} \frac{1}{(1 - r \beta')} dA_r - E \alpha' \int_{A_r} \frac{r}{(1 - r \beta')} dA_r$$

Chamando

$$A^* = \int_{A_r} \frac{dA_r}{(1 - r \beta')} \quad (3.169)$$

e

$$S^* = \int_{A_r} \frac{r dA_r}{(1 - r \beta')} \quad (3.170)$$

vem que:

$$N = E A^* \bar{\varepsilon}_m - E S^* \alpha' \quad (3.171)$$

constante na seção, mas variável ao longo do elemento pois α' varia linearmente com x_r .

Nas extremidades a e b do elemento, onde $x = -l_r/2$ e $x = l_r/2$, respectivamente, determinam-se:

$$N_a = E A^* \bar{\varepsilon}_m + \frac{E S^*}{l_r} (4q_2 + 2q_3) \quad (3.172a)$$

$$N_b = E A^* \bar{\varepsilon}_m - \frac{E S^*}{l_r} (2q_2 + 4q_3) \quad (3.172b)$$

cuja convenção de sinal indica tração (+) e compressão (-), e define-se uma força normal média dada por:

$$N_m = \frac{N_a + N_b}{2} = E A^* \bar{\varepsilon}_m + \frac{E S^*}{l_r} (q_2 - q_3) \quad (3.173)$$

b) Determinação do momento fletor M

Com o auxílio das Eq. (3.70) e (3.167), tem-se:

$$M = -\int_{A_r} \sigma r dA_r = -\int_{A_r} E \varepsilon r dA_r = -\int_{A_r} E (\bar{\varepsilon}_m - r \alpha') \frac{r dA_r}{(1 - r \beta')}$$

$$M = -E \bar{\varepsilon}_m \int_{A_r} \frac{r dA_r}{(1 - r \beta')} + E \alpha' \int_{A_r} \frac{r^2 dA_r}{(1 - r \beta')}$$

Usando-se a Eq. (3.170) e chamando

$$I^* = \int_{A_r} \frac{r^2 dA_r}{(1 - r \beta')} \quad (3.174)$$

vem que:

$$M = -E S^* \bar{\varepsilon}_m + E I^* \alpha' \quad (3.175)$$

variável linearmente ao longo do elemento.

Os momentos fletores, nas extremidades a e b do elemento, na convenção clássica, valem:

$$M_a = -E S^* \bar{\varepsilon}_m - \frac{E I^*}{l_r} (4q_2 + 2q_3) \quad (3.176a)$$

$$M_b = -E S^* \bar{\varepsilon}_m + \frac{E I^*}{l_r} (2q_2 + 4q_3) \quad (3.176b)$$

c) Determinação das forças internas naturais Q_α

Usando-se as Eq. (3.160) com auxílio das Eq. (3.171), (3.173), (3.175) e (3.176a, b), determinam-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = N_m \left[1 + \frac{(q_2 + \beta_a)^2}{15} + \frac{(q_3 + \beta_b)^2}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)(q_3 + \beta_b)}{30} - \left(\frac{\beta_a^2}{15} + \frac{\beta_b^2}{15} - \frac{\beta_a \beta_b}{30} \right) \right] \\ Q_2 = \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_3 + \beta_b)}{30} \right] N_m l_c - M_a \\ Q_3 = \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right] N_m l_c - M_b \end{array} \right. \quad (3.177)$$

onde se usou $\lambda = l_c/l_r$

d) Determinação dos elementos da matriz $H_{\alpha\beta}$

Usando-se as Eq. (3.162) com o auxílio das eqs (3.171) e (3.173), chega-se à:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{11} = 0 \\ H_{12} = \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_3 + \beta_b)}{30} \right] N_m \\ H_{13} = \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right] N_m \\ H_{22} = \frac{2}{15} N_m l_c \\ H_{23} = -\frac{1}{30} N_m l_c \\ H_{33} = \frac{2}{15} N_m l_c \end{array} \right. \quad (3.178)$$

e) Determinação dos elementos da matriz $D_{\alpha\beta}$

Inicialmente determinam-se os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 dados nas Eq. (3.165), com o auxílio das Eq. (3.169), (3.170) e (3.174).

$$C_1=EA^* \quad ; \quad C_2=ES^* \quad ; \quad C_3=EI^* \quad (3.179)$$

Usando-se estas Eq. (3.179) nas Eq. (3.164), tem-se:

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= \left[1 + \frac{(q_2 + \beta_a)^2}{15} + \frac{(q_3 + \beta_b)^2}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)(q_3 + \beta_b)}{30} - \left(\frac{\beta_a^2}{15} + \frac{\beta_b^2}{15} - \frac{\beta_a\beta_b}{30} \right) \right]^2 \frac{EA^*}{l_r} \\ D_{12} &= \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_3 + \beta_b)}{30} \right] \left[1 + \frac{(q_2 + \beta_a)^2}{15} + \frac{(q_3 + \beta_b)^2}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)(q_3 + \beta_b)}{30} - \left(\frac{\beta_a^2}{15} + \frac{\beta_b^2}{15} - \frac{\beta_a\beta_b}{30} \right) \right] EA^* \lambda + \frac{ES^*}{l_r} \\ D_{13} &= \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right] \left[1 + \frac{(q_2 + \beta_a)^2}{15} + \frac{(q_3 + \beta_b)^2}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)(q_3 + \beta_b)}{30} - \left(\frac{\beta_a^2}{15} + \frac{\beta_b^2}{15} - \frac{\beta_a\beta_b}{30} \right) \right] EA^* \lambda - \frac{ES^*}{l_r} \\ D_{22} &= \lambda l_c \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_3 + \beta_b)}{30} \right]^2 EA^* + 2\lambda \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_3 + \beta_b)}{30} \right] ES^* + \frac{4EI^*}{l_r} \\ D_{23} &= \lambda l_c \left[\frac{2(q_2 + \beta_a)}{15} - \frac{(q_3 + \beta_b)}{30} \right] \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right] EA^* - \lambda \left[\frac{(q_2 + \beta_a) - (q_3 + \beta_b)}{6} \right] ES^* + \frac{2EI^*}{l_r} \\ D_{33} &= \lambda l_c \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right]^2 EA^* - 2\lambda \left[\frac{2(q_3 + \beta_b)}{15} - \frac{(q_2 + \beta_a)}{30} \right] ES^* + \frac{4EI^*}{l_r} \end{aligned} \right\} \quad (3.180)$$

f) Matriz de rigidez tangente do elemento no sistema local cartesiano em regime elástico linear.

A matriz de rigidez tangente do elemento no sistema local cartesiano deduzida na seção 3.7.1.1, pode ser explicitada na forma matricial por:

$$\bar{\mathbf{k}}_t = \bar{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha \quad (3.181)$$

onde as matrizes de rigidez, constitutiva e geométrica, no sistema local cartesiano são dadas, respectivamente, por:

$$\bar{\mathbf{k}}_M = \bar{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}} \quad (3.182)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_G = \bar{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha \quad (3.183)$$

A matriz de rigidez constitutiva pode ser escrita, tendo em vista a Eq. (3.182), com o auxílio da Eq. (3.41) que define $\bar{\mathbf{B}}$, (3x6), e com o auxílio da matriz de rigidez constitutiva em coordenadas corrotacionais, simétrica, (3x3), cujos elementos $D_{\alpha\beta}$ são dados pelas Eq. (3.180) e é mostrada esquematicamente através da Eq. (3.184).

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ \text{Sim.} & & D_{33} \end{bmatrix} \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{M}} = & \begin{bmatrix} D_{11} & -\frac{1}{l_c}(D_{12} + D_{13}) & -D_{12} & -D_{11} & \frac{1}{l_c}(D_{12} + D_{13}) & -D_{13} \\ -\frac{1}{l_c^2}(D_{22} + 2D_{23} + D_{33}) & \frac{1}{l_c}(D_{22} + D_{23}) & \frac{1}{l_c}(D_{12} + D_{13}) & -\frac{1}{l_c^2}(D_{22} + 2D_{23} + D_{33}) & \frac{1}{l_c}(D_{23} + D_{33}) \\ & D_{22} & D_{12} & -\frac{1}{l_c}(D_{22} + D_{23}) & D_{23} \\ & & D_{11} & -\frac{1}{l_c}(D_{12} + D_{13}) & D_{13} \\ & \text{simétrica} & & \frac{1}{l_c^2}(D_{22} + 2D_{23} + D_{33}) & -\frac{1}{l_c}(D_{23} + D_{33}) \\ & & & & D_{33} \end{bmatrix} \\
 & (3.185)
 \end{aligned}$$

Para simplificar as expressões, chama-se

$$(q_2 + \beta_a) = q_2^* \quad \text{e} \quad (q_3 + \beta_b) = q_3^* \quad (3.186)$$

e admite-se que podem ser desprezados os termos multiplicados por q_2^* ou q_3^* , por serem suficientemente pequenos. Os termos $D_{\alpha\beta}$ das Eq. (3.180) ficam então:

$$\begin{cases} D_{11} = \frac{EA^*}{l_r} & ; D_{12} = \frac{ES^*}{l_r} & ; D_{13} = -\frac{ES^*}{l_r} \\ D_{22} = \frac{4EI^*}{l_r} & ; D_{23} = \frac{2EI^*}{l_r} & ; D_{33} = \frac{4EI^*}{l_r} \end{cases} \quad (3.187)$$

e a matriz $\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{M}}$, simplificada, será dada pela Eq. (3.188) a seguir:

$$\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \frac{EA^*}{l_r} & 0 & -\frac{ES^*}{l_r} & -\frac{EA^*}{l_r} & 0 & \frac{ES^*}{l_r} \\ & \frac{12EI^*}{l_r l_c^2} & \frac{6EI^*}{l_r l_c} & 0 & -\frac{12EI^*}{l_r l_c^2} & \frac{6EI^*}{l_r l_c} \\ & & \frac{4EI^*}{l_r} & \frac{ES^*}{l_r} & -\frac{6EI^*}{l_r l_c} & \frac{2EI^*}{l_r} \\ \text{simétrica} & & & \frac{EA^*}{l_r} & 0 & -\frac{ES^*}{l_r} \\ & & & & \frac{12EI^*}{l_r l_c^2} & -\frac{6EI^*}{l_r l_c} \\ & & & & & \frac{4EI^*}{l_r} \end{bmatrix} \quad (3.188)$$

A Eq. (3.188) representa a matriz de rigidez constitutiva em regime elástico, no sistema local do elemento, nas coordenadas cartesianas, com as aproximações em segunda-ordem para α :

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \quad ; \quad \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} \quad ; \quad \sec \alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2}$$

e as simplificações seguintes:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \beta = \operatorname{tg} \beta = 1 & ; \quad \cos \beta = \sec \beta = 1 \\ \bar{\varepsilon}_m = \text{constante} \\ q_1^*, q_2^* \text{ e } q_3^* \text{ muito pequenos} \end{cases}$$

lembrando ainda das Eq. (3.169), (3.170) e (3.174), onde

$$A^* = \int_{A_r} \frac{dA_r}{(1-r\beta')} \quad ; \quad S^* = \int_{A_r} \frac{r dA_r}{(1-r\beta')} \quad ; \quad I^* = \int_{A_r} \frac{r^2 dA_r}{(1-r\beta')}$$

A matriz de rigidez geométrica dada pela Eq. (3.183) é composta de duas parcelas: uma devida à matriz \underline{H} e outra devida às matrizes \overline{G}_α .

A parcela da matriz de rigidez geométrica, $\overline{B}^T \underline{H} \overline{B}$, no sistema local, em coordenadas cartesianas, pode ser determinada com o auxílio da Eq. (3.41) e com o auxílio da matriz de rigidez \underline{H} , em coordenadas corrotacionais, simétricas, (3x3), cujos elementos $H_{\alpha\beta}$ são dados pelas Eq. (3.178) e é mostrada esquematicamente através da Eq. (3.189).

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ & H_{22} & H_{23} \\ \text{Sim.} & & H_{33} \end{bmatrix} \quad (3.189)$$

$$\overline{B}^T \underline{H} \overline{B} = \begin{bmatrix} H_{11} & -\frac{1}{l_c}(H_{12} + H_{13}) & -H_{12} & -H_{11} & \frac{1}{l_c}(H_{12} + H_{13}) & -H_{13} \\ \frac{1}{l_c^2}(H_{22} + 2H_{23} + H_{33}) & \frac{1}{l_c}(H_{22} + H_{23}) & \frac{1}{l_c}(H_{12} + H_{13}) & -\frac{1}{l_c^2}(H_{22} + 2H_{23} + H_{33}) & \frac{1}{l_c}(H_{23} + H_{33}) & \\ & H_{22} & H_{12} & -\frac{1}{l_c}(H_{22} + H_{23}) & H_{23} & \\ & & H_{11} & -\frac{1}{l_c}(H_{12} + H_{13}) & H_{13} & \\ \text{simétrica} & & & \frac{1}{l_c^2}(H_{22} + 2H_{23} + H_{33}) & -\frac{1}{l_c}(H_{23} + H_{33}) & \\ & & & & & H_{33} \end{bmatrix} \quad (3.190)$$

Desprezando-se os termos multiplicados por q_2^* ou q_3^* , por serem suficientemente pequenos, os termos $H_{\alpha\beta}$ das Eq. (3.178) ficam então:

$$\begin{cases} H_{11} = 0 & ; H_{12} = 0 & ; H_{13} = 0 \\ H_{22} = \frac{2}{15} N_m l_c & ; H_{23} = -\frac{1}{30} N_m l_c & ; H_{33} = \frac{2}{15} N_m l_c \end{cases} \quad (3.191)$$

e a matriz $\bar{\underline{B}}^T \underline{H} \bar{\underline{B}}$ simplificada, será dada pela Eq. (3.192) a seguir:

$$\bar{\underline{B}}^T \underline{H} \bar{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} \frac{N_m}{l_c} & \frac{1}{10} N_m & 0 & -\frac{1}{5} \frac{N_m}{l_c} & \frac{1}{10} N_m & \\ & \frac{2}{15} N_m l_c & 0 & -\frac{1}{10} N_m & -\frac{1}{30} N_m l_c & \\ & & 0 & 0 & 0 & \\ \text{simétrica} & & & \frac{1}{5} \frac{N_m}{l_c} & -\frac{1}{10} N_m & \\ & & & & \frac{2}{15} N_m l_c & \end{bmatrix} \quad (3.192)$$

A segunda parcela da matriz de rigidez geométrica é dada por:

$$Q_\alpha \bar{\underline{G}}_\alpha = Q_1 \bar{\underline{G}}_1 + Q_2 \bar{\underline{G}}_2 + Q_3 \bar{\underline{G}}_3 \quad (3.193)$$

As matrizes $\bar{\underline{G}}_\alpha$ são dadas através das Eq. (3.45a,b) e as forças internas naturais Q_α são dados pelas Eq. (3.177). Usando-se as mesmas simplificações anteriores, determina-se:

$$Q_1 = N_m \quad ; \quad Q_2 = -M_a \quad ; \quad Q_3 = M_b \quad (3.194)$$

onde N_m , M_a e M_b são dados através das Eq. (3.173) e (3.176a, b), respectivamente. Tem-se, então:

$$\begin{array}{c}
 Q_\alpha \bar{G}_\alpha = \\
 (6 \times 6)
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & \frac{1}{l_c^2}(Q_2 + Q_3) & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c^2}(Q_2 + Q_3) & 0 \\
 & \frac{1}{l_c}Q_1 & 0 & -\frac{1}{l_c^2}(Q_2 + Q_3) & -\frac{1}{l_c}Q_1 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & \frac{1}{l_c^2}(Q_2 + Q_3) & 0 \\
 & & & & \frac{1}{l_c}Q_1 & 0 \\
 & & & & & 0
 \end{array} \right] \quad (3.195)$$

simétrica

A matriz de rigidez geométrica total dada por $\bar{k}_G = \bar{B}^T \bar{H} \bar{B} + Q_\alpha \bar{G}_\alpha$, pode ser explicitada com a ajuda das Eq. (3.194) por:

$$\begin{array}{c}
 \bar{k}_G = \\
 (6 \times 6)
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & \frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 \\
 & \frac{6 N_m}{5 l_c} & \frac{1}{10} N_m & -\frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & -\frac{6 N_m}{5 l_c} & \frac{1}{10} N_m \\
 & & \frac{2}{15} N_m l_c & 0 & -\frac{1}{10} N_m & -\frac{1}{30} N_m l_c \\
 & & & 0 & \frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 \\
 & & & & \frac{6 N_m}{5 l_c} & -\frac{1}{10} N_m \\
 & & & & & \frac{2}{15} N_m l_c
 \end{array} \right] \quad (3.196)$$

simétrica

lembrando que a força cortante vale:

$$V = \frac{Q_3 + Q_2}{l_c} = \frac{M_b - M_a}{l_c} \quad (3.197)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento, em regime elástico, no sistema local em coordenadas cartesianas, é dada por:

$$\bar{\underline{k}}_I = \bar{\underline{k}}_M + \bar{\underline{k}}_G \quad (3.198)$$

onde $\bar{\underline{k}}_M$ é dada pela Eq. (3.188) e $\bar{\underline{k}}_G$ pela Eq. (3.196), com todas aquelas aproximações e simplificações adotadas.

3.9.2.2) Elementos prismáticos em regime elasto-plástico

No caso elasto-plástico adota-se a lei constitutiva dada por:

$$\sigma = D \varepsilon \quad (3.199)$$

e o campo de deformação dado pela Eq. (3.167), onde se utilizam $\bar{\varepsilon}_m$ e $r\alpha'$ dados, respectivamente, pelas Eq. (3.154a) e (3.168).

a) Determinação da força normal N

Com o auxílio das Eq. (3.69) e (3.167), tem-se:

$$N = \int_{A_r} \sigma \, dA_r = \int_{A_r} D \varepsilon \, dA_r = \int_{A_r} D (\bar{\varepsilon}_m - r \alpha') \frac{dA_r}{(1-r\beta')}$$

$$N = \bar{\varepsilon}_m \int_{A_r} \frac{D}{(1-r\beta')} \, dA_r - \alpha' \int_{A_r} \frac{D r}{(1-r\beta')} \, dA_r$$

com o auxílio das Eq. (3.165), tem-se que:

$$N = C_1 \bar{\varepsilon}_m - C_2 \alpha' \quad (3.200)$$

constante na seção mas variável ao longo do elemento. Nas extremidades a e b do elemento onde $x_r = -l_r/2$ e $x_r = l_r/2$, respectivamente, tem-se:

$$N_a = C_{1a} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{2a}}{l_r} (4 q_2 + 2 q_3) \quad (3.201a)$$

$$N_b = C_{1b} \bar{\varepsilon}_m - \frac{C_{2b}}{l_r} (2 q_2 + 4 q_3) \quad (3.201b)$$

Define-se também uma força normal média como:

$$N_m = \frac{N_a + N_b}{2} = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{2m}}{l_r} (q_2 - q_3) \quad (3.202)$$

onde foram considerados:

$$C_{1m} = \frac{C_{1a} + C_{1b}}{2} \quad \text{e} \quad C_{2m} = \frac{C_{2a} + C_{2b}}{2} \quad (3.203)$$

b) Determinação do momento fletor M

Com o auxílio das Eq. (3.70) e (3.167), tem-se:

$$M = -\int_{A_r} \sigma r dA_r = -\int_{A_r} D \varepsilon r dA_r = -\int_{A_r} D (\bar{\varepsilon}_m - r \alpha') \frac{r dA_r}{(1 - r \beta')}$$

$$M = -\bar{\varepsilon}_m \int_{A_r} \frac{D r dA_r}{(1 - r \beta')} + \alpha' \int_{A_r} \frac{D r^2 dA_r}{(1 - r \beta')}$$

Com o auxílio das Eq. (3.165), tem-se que:

$$M = -C_2 \bar{\varepsilon}_m + C_3 \alpha' \quad (3.204)$$

Nas extremidades do elemento, tem-se:

$$M_a = -C_{2a} \bar{\varepsilon}_m - \frac{C_{3a}}{l_r} (4q_2 + 2q_3) \quad (3.205a)$$

$$M_b = -C_{2b} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{3b}}{l_r} (2q_2 + 4q_3) \quad (3.205b)$$

c) Determinação das forças internas naturais Q_α

As forças Q_α são expressas através das Eq. (3.160) e são obtidas utilizando-se N e M dados pelas Eq. (3.200) e (3.204), onde C_1 , C_2 e C_3 são determinados através das Eq. (3.165).

A rigor C_1 , C_2 e C_3 são constantes em cada seção mas variam ao longo do elemento, pois D não é necessariamente constante no comprimento x_r . Para simplificar, admite-se então, que C_1 , C_2 e C_3 são constantes ao longo do elemento e iguais aos seus valores médios dados por:

$$C_{1m} = \frac{C_{1a} + C_{1b}}{2} \quad ; \quad C_{2m} = \frac{C_{2a} + C_{2b}}{2} \quad ; \quad C_{3m} = \frac{C_{3a} + C_{3b}}{2} \quad (3.206)$$

que é uma boa aproximação principalmente para elementos curtos. Sendo assim, as expressões envolvendo N serão dadas por:

$$N = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m - C_{2m} \alpha' \quad (3.207a)$$

$$N_a = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{2m}}{l_r} (4q_2 + 2q_3) \quad (3.207b)$$

$$N_b = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m - \frac{C_{2m}}{l_r} (2q_2 + 4q_3) \quad (3.207c)$$

$$N_m = \frac{N_a + N_b}{2} = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{2m}}{l_r} (q_2 - q_3) \quad (3.207d)$$

e as expressões envolvendo M serão dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = -C_{2m} \bar{\varepsilon}_m + C_{3m} \alpha' \end{array} \right. \quad (3.208a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_a = -C_{2m} \bar{\varepsilon}_m - \frac{C_{3m}}{l_r} (4 q_2 + 2 q_3) \end{array} \right. \quad (3.208b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_b = -C_{2m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{3m}}{l_r} (2 q_2 + 4 q_3) \end{array} \right. \quad (3.208c)$$

e, finalmente, usando-se a hipótese de q_2^* e q_3^* , serem muito pequenos, as forças Q_α podem ser escritas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = N_m = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{2m}}{l_r} (q_2 - q_3) \\ Q_2 = -M_a = C_{2m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{3m}}{l_r} (4 q_2 + 2 q_3) \\ Q_3 = M_b = -C_{2m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{3m}}{l_r} (2 q_2 + 4 q_3) \end{array} \right. \quad (3.209)$$

e a parcela da matriz geométrica $Q_\alpha \bar{G}_\alpha$ ficará formalmente idêntica à anterior do caso elástico, dada pela Eq. (3.195)

d) Determinação dos elementos da matriz $H_{\alpha\beta}$

Os elementos da matriz $H_{\alpha\beta}$ serão análogos aos do caso elástico dados pelas Eq. (3.191) usando-se N_m conforme a Eq. (3.207d). A parcela da matriz geométrica, $\bar{B}^T \underline{H} \bar{B}$ será formalmente idêntica à do caso elástico expressa através da Eq. (3.192).

e) Determinação dos elementos de matriz $D_{\alpha\beta}$

Os elementos da matriz $D_{\alpha\beta}$ são obtidos com a ajuda de C_{1m} , C_{2m} e C_{3m} , dados pela Eq. (3.206) e serão análogos aos obtidos para o caso elástico, conforme as Eq. (3.187), substituindo-se EA^* por C_{1m} , ES^* por C_{2m} e EI^* por C_{3m} . Neste caso, a matriz de rigidez constitutiva \bar{k}_M também é formalmente idêntica à do caso elástico apresentada segundo a Eq. (3.188).

f) Matriz de rigidez tangente do elemento no sistema local cartesiano em regime elasto-plástico

A matriz de rigidez tangente do elemento em regime elasto-plástico, no sistema local cartesiano é dado por:

$$\bar{k}_I^{ep} = \bar{k}_M^{ep} + \bar{k}_G^{ep} \quad (3.210)$$

onde \bar{k}_M^{ep} e \bar{k}_G^{ep} são expressas pelas Eq. (3.211) e (3.212) a seguir.

$$\bar{k}_M^{ep} = \begin{bmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & -\frac{C_{2m}}{l_r} & -\frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & \frac{C_{2m}}{l_r} \\ \frac{12 C_{3m}}{l_r l_c^2} & \frac{6 C_{3m}}{l_r l_c} & 0 & -\frac{12 C_{3m}}{l_r l_c^2} & \frac{6 C_{3m}}{l_r l_c} & 0 \\ \frac{4 C_{3m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r} & -\frac{6 C_{3m}}{l_r l_c} & \frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{2 C_{3m}}{l_r} & -\frac{C_{2m}}{l_r} \\ \text{simétrica} & & & \frac{12 C_{3m}}{l_r l_c^2} & -\frac{6 C_{3m}}{l_r l_c} & 0 \\ & & & & \frac{6 C_{3m}}{l_r l_c} & \frac{4 C_{3m}}{l_r} \end{bmatrix} \quad (3.211)$$

(6x6)

onde C_{1m} , C_{2m} e C_{3m} são dados pelas Eq. (3.206).

$$\bar{\tilde{k}}_G^{ep} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{l_c^2}(M_a - M_b) & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c^2}(M_a - M_b) & 0 \\ \frac{6 N_m}{5 l_c} & \frac{1}{10} N_m & -\frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & -\frac{6 N_m}{5 l_c} & \frac{1}{10} N_m & \\ & \frac{2}{15} N_m l_c & 0 & -\frac{1}{10} N_m & -\frac{1}{30} N_m l_c & \\ & & 0 & \frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 & \\ \text{simétrica} & & & \frac{6 N_m}{5 l_c} & -\frac{1}{10} N_m & \\ & & & & \frac{2}{15} N_m l_c & \end{bmatrix} \quad (3.212)$$

onde N_m , M_a e M_b são dados pelas Eq. (3.207d), (3.208b) e (3.208c), respectivamente.

ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA

4.1 Considerações Iniciais

Como foi visto no Capítulo 2, as recomendações mais modernas e atuais para o estabelecimento de critérios de projeto para estruturas de aço são baseadas no critério de resistência-última, enfatizando que o modelo apropriado para o cálculo da resistência máxima de uma barra é aquele que incorpora as tensões residuais e as imperfeições iniciais. Sendo assim, foi desenvolvido no Capítulo 3, através de uma formulação teórica consistente, um elemento finito de barra de pórtico plano, que já leva em conta as imperfeições iniciais das barras e as tensões residuais nas suas seções transversais.

Contudo, o método para se calcular a resistência última de uma estrutura é bastante complexo. Deve ser desenvolvido um programa de computador capaz de fazer uma análise considerando as não-linearidades física e geométrica envolvidas no problema, baseado num processo de solução incremental-iterativo, no qual o equilíbrio é verificado para cada incremento de carga, segundo um critério de convergência. Este processo exige a iteração sobre toda a seção transversal, para se determinar quando uma fibra individual escoar ou está em descarga.

Como ilustração, a Fig. 4.1 mostra um fluxograma, adaptado da ref. [88], que indica os passos básicos para se fazer uma análise não-linear de estruturas reticulares. Observa-se que num processo incremental-iterativo dois loops de DO são necessários: um para incrementar o carregamento aplicado e o outro para iteragir a solução até que a convergência ocorra.

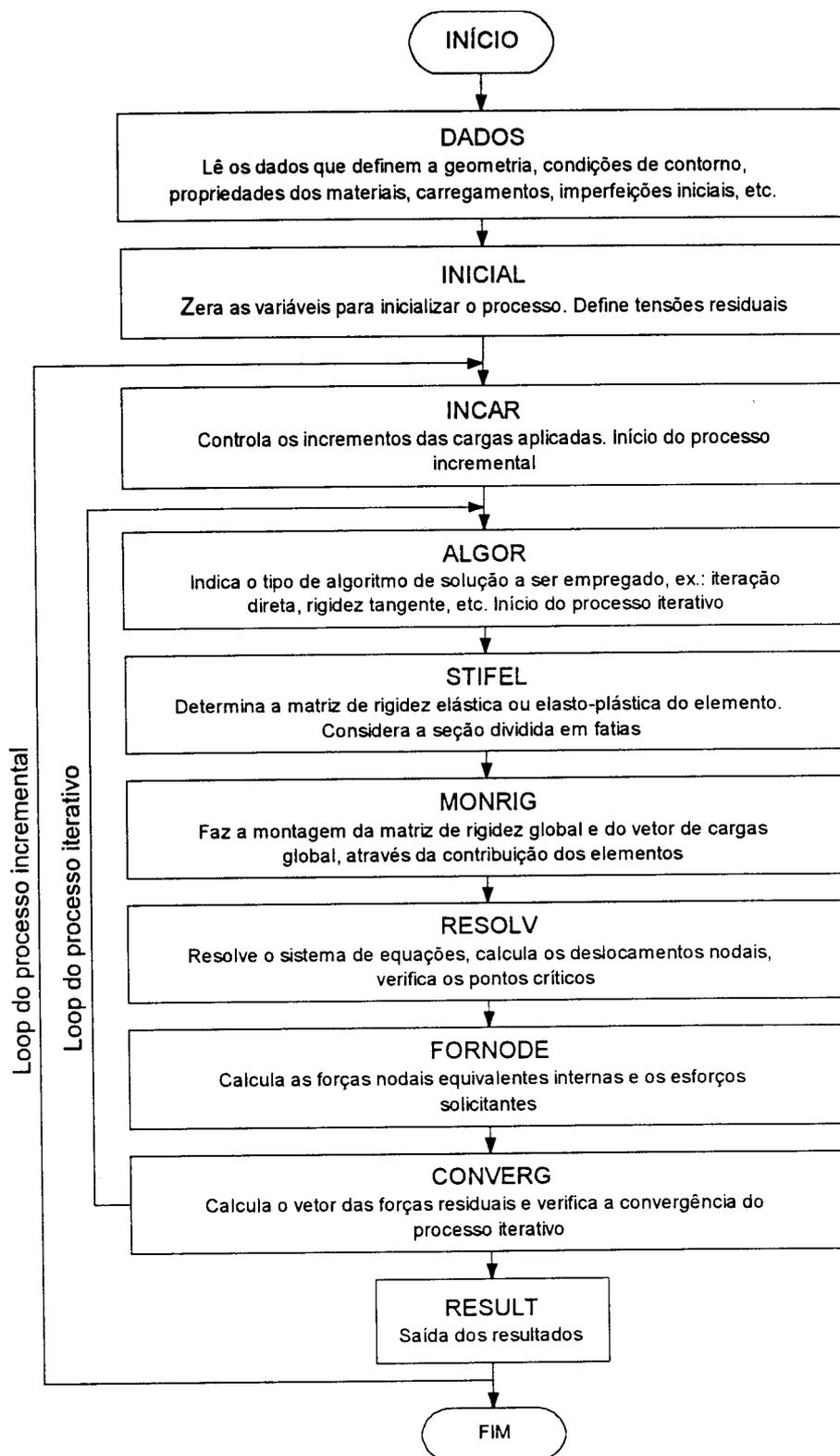


FIGURA 4.1 – Fluxograma geral para análise não-linear incremental - iterativa

Neste capítulo descrevem-se os aspectos principais do desenvolvimento e da implementação do programa de computador PPLANLEP, que foi desenvolvido durante este trabalho de pesquisa para a análise não-linear elasto-plástica de pórticos planos, considerando que as suas barras tenham imperfeições iniciais e tensões residuais.

O programa foi escrito em linguagem de programação FORTRAN de acordo com as padronizações do FORTRAN 77 ANSI, usando precisão dupla, para analisar somente problemas do tipo pórtico plano, sem limitação de memória, uma vez que foi usada a versão 1.0 do compilador FORTRAN Power Station da Microsoft, que faz o gerenciamento de memória acima de 640K. Os exemplos foram processados em microcomputador tipo PC 486 DX2 66MHz, contendo 8 MB de memória RAM e disco rígido de 341 MB. Nesta versão "acadêmica", o programa admite que todos os nós são rígidos, não havendo portanto, liberações totais ou parciais nas junções das barras ou extremidades das mesmas e os carregamentos são considerados quase-estáticos, monótonos estritamente crescentes e aplicados somente nos nós das barras dos pórticos.

Inicialmente são feitas considerações sobre alguns aspectos da análise não-linear de estruturas, visando a implementação computacional. Sendo assim, procura-se mostrar a utilização do método Newton-Raphson para a solução numérica das equações não-lineares, os critérios de convergência adotados para verificação do final do processo incremental-iterativo e a maneira de se verificar a estabilidade e os pontos críticos da estrutura. Também são feitas considerações sobre os modelos constitutivos e suas aproximações para aplicações nas estruturas de aço e, sobre a avaliação da matriz de rigidez tangente do elemento considerando a seção transversal dividida em fatias.

Posteriormente, é apresentado o fluxograma do programa principal que chama todas as outras subrotinas, as quais lêem os dados da estrutura,

determinam a matriz de rigidez tangente dos elementos e montam a matriz de rigidez tangente global da estrutura, resolvem o sistema de equações e fornecem os resultados e, ainda, controlam os incrementos de carga e o processo iterativo. Uma descrição sucinta destas subrotinas é então apresentada.

4.2 Aspectos da Análise Não-Linear para Implementação

4.2.1 Aspectos da Solução Numérica

4.2.1.1) Considerações gerais

Conforme visto no Capítulo 3, as equações de equilíbrio obtidas da formulação em teoria de segunda-ordem para problemas elasto-plásticos são altamente não-lineares. Desta forma, as respostas de uma análise de resistência-última de estruturas de aço só podem ser encontradas empregando-se um método numérico de solução para este sistema de equações, o que torna importante a escolha adequada do algoritmo a ser usado na análise.

Na análise estrutural via MEF, os métodos de análise não-linear podem ser classificados em incrementais, iterativos e mistos.

No método incremental, as variáveis estáticas e cinemáticas são atualizadas em cada passo de carga ou de tempo sucessivos, sendo computacionalmente eficiente, tanto na análise não-linear geométrica quanto na análise não-linear do material, desde que se use um grande número de incrementos, o que torna o método inconveniente, além de não garantir rigorosamente o equilíbrio na solução. Na análise de grandes deslocamentos a resposta obtida pode se afastar apreciavelmente da solução.

Os métodos iterativos, ao contrário, satisfazem as equações de equilíbrio na convergência mas exigem grande esforço computacional.

Os métodos mistos aparecem, então, unindo as vantagens dos dois métodos, ou seja, através da técnica incremental tem-se uma previsão da resposta e com a técnica iterativa esta é corrigida, apresentando resultados equilibrados, num processo de convergência mais acelerado.

Os métodos de solução numérica de sistemas de equações de equilíbrio não-lineares têm sido objeto de estudo de vários pesquisadores nas últimas décadas, entre os quais são citados aqui aqueles que auxiliaram o autor neste trabalho: ARAÚJO [8], BATHE [14, 15], BATHE & CIMENTO [16], BATHE & DVORKIN [17], BREBBIA & CONNOR [28], CILONI [36], HAISLER et al. [54], HINTON et al. [55], MEEK & LOGANATHAN [80], OWEN & HINTON [88], PROENÇA [103].

4.2.1.2) Algoritmo Newton-Raphson

Neste trabalho adota-se o método Newton-Raphson, que tem provado ser uma das mais eficientes técnicas de solução disponível para análise não-linear de estruturas via MEF.

Numa análise estrutural não-linear através de uma formulação incremental, o parâmetro de carga (ou de tempo) t é subdividido em passos e a solução é procurada passo a passo. Seja um intervalo de tempo com início em t e fim em $t + \Delta t$. A solução no instante t é totalmente conhecida e o carregamento externo, no tempo $t + \Delta t$, também é conhecido e dado pelo vetor $\mathbf{R}_{\sim t+\Delta t}$. A solução numérica do problema estático consiste em se resolver o seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\Delta \mathbf{F}(\mathbf{r}_{\sim t+\Delta t}) = \mathbf{R}_{\sim t+\Delta t} - \mathbf{S}_{\sim t+\Delta t} = 0 \quad (4.1)$$

onde $\tilde{S}_{t+\Delta t}$ é o vetor de cargas internas e $\tilde{r}_{t+\Delta t}$ é o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura, ambos no instante $t + \Delta t$, e $\tilde{\Delta F}$ é o vetor das forças residuais.

Linearizando-se o sistema, os algoritmos tipo Newton-Raphson levam a:

$$\tilde{\Delta F}(\tilde{r}_{t+\Delta t}) = \tilde{\Delta F}(\tilde{r}_t) + \frac{\partial \tilde{\Delta F}}{\partial \tilde{r}} \Big|_t (\tilde{r}_{t+\Delta t} - \tilde{r}_t) = 0 \quad (4.2)$$

Chamando \tilde{K}_{tt} à matriz de rigidez tangente correspondente aos deslocamentos \tilde{r}_t , dada por:

$$\tilde{K}_{tt} = - \frac{\partial \tilde{\Delta F}}{\partial \tilde{r}} \quad (4.3)$$

vem, da Eq. (4.2), que:

$$\tilde{\Delta F}(\tilde{r}_{t+\Delta t}) = \tilde{K}_{tt} (\tilde{r}_{t+\Delta t} - \tilde{r}_t) \quad (4.4)$$

donde:

$$\tilde{\Delta F}(\tilde{r}_t) = \tilde{K}_{tt} \tilde{\Delta r}_t \quad \text{ou} \quad \tilde{\Delta r}_t = \tilde{K}_{tt}^{-1} \tilde{\Delta F}(\tilde{r}_t) \quad (4.5)$$

e

$$\tilde{r}_{t+\Delta t} = \tilde{r}_t + \tilde{K}_{tt}^{-1} \tilde{\Delta F}(\tilde{r}_t) \quad \text{ou} \quad \tilde{r}_{t+\Delta t} = \tilde{r}_t + \tilde{\Delta r}_t \quad (4.6)$$

Imaginando-se um processo iterativo dentro do passo $t + \Delta t$, indica-se a iteração por i e se escreve as Eq. (4.5) e (4.6) de outra forma:

$$\Delta \underline{F}(\underline{r}_{\sim i}) = \underline{K}_{\sim ii} \Delta \underline{r}_{\sim i} \quad \text{ou} \quad \Delta \underline{r}_{\sim i} = \underline{K}_{\sim ii}^{-1} \Delta \underline{F}(\underline{r}_{\sim i}) \quad (4.7)$$

e

$$\underline{r}_{\sim 1+1} = \underline{r}_{\sim i} + \underline{K}_{\sim ii}^{-1} \Delta \underline{F}(\underline{r}_{\sim i}) \quad \text{ou} \quad \underline{r}_{\sim 1+1} = \underline{r}_{\sim i} + \Delta \underline{r}_{\sim i} \quad (4.8)$$

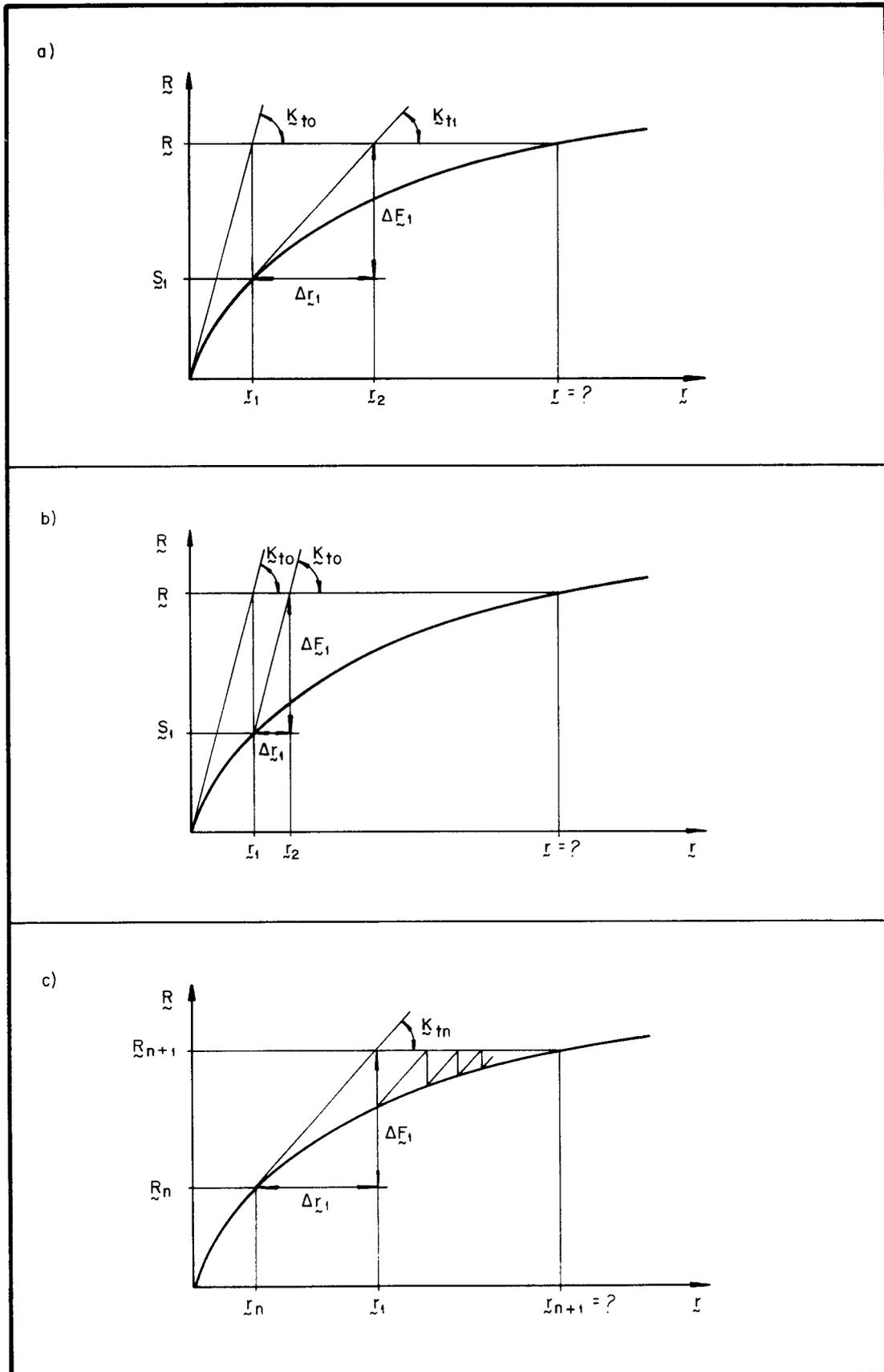
onde $\underline{K}_{\sim ii}$, coincide com a matriz de rigidez tangente em $\underline{r}_{\sim i}$, somente no caso de estruturas elásticas. No caso elastoplástico, onde o módulo de rigidez D depende de $\dot{\underline{r}}$, simplifica-se aproximando \underline{K}_t por \underline{K}_t^* , como faz PIMENTA P.M. [90, 92], e escreve-se, de forma semelhante para o caso elastoplástico:

$$\Delta \underline{F}(\underline{r}_{\sim i}) = \underline{K}_{\sim ii}^* \Delta \underline{r}_{\sim i} \quad \text{ou} \quad \Delta \underline{r}_{\sim i} = \underline{K}_{\sim ii}^{*-1} \Delta \underline{F}(\underline{r}_{\sim i}) \quad (4.9)$$

e

$$\underline{r}_{\sim 1+1} = \underline{r}_{\sim i} + \underline{K}_{\sim ii}^{*-1} \Delta \underline{F}(\underline{r}_{\sim i}) \quad \text{ou} \quad \underline{r}_{\sim 1+1} = \underline{r}_{\sim i} + \Delta \underline{r}_{\sim i} \quad (4.10)$$

A determinação de $\Delta \underline{r}_{\sim i}$, dada pela Eq. (4.7), exige que se calcule a matriz de rigidez \underline{K}_t , e o vetor das forças residuais $\Delta \underline{F}_i$ em cada passo do processo iterativo, constituindo o chamado método de Newton-Raphson Puro, mostrado esquematicamente na Fig. (4.2a).



Para se evitar os elevados custos computacionais deste modelo, usam-se alternativas que modificam o método de Newton-Raphson original. O método da rigidez inicial (Initial Stiffness Method - IS), ver na Fig. (4.2b), consiste em se adotar a matriz de rigidez tangente da primeira iteração para todos os passos do processo, evitando assim várias operações durante a resolução do problema com conseqüente redução de custos computacionais. Entretanto, a convergência deste método é linear, enquanto que a do NR-Puro é quadrática, constituindo-se num método de solução mais lento.

Um algoritmo eficiente é fornecido pela combinação dos dois métodos anteriores, no qual as rigidezes são alteradas somente em iterações previamente escolhidas, consistindo no chamado método de Newton-Raphson Modificado (MN), que é esquematizado na Fig. (4.2c). Mesmo este método, em regiões de plastificação do material, pode se tornar muito lento, sendo necessário adotar algum esquema de aceleração de convergência dentro do algoritmo.

4.2.2 Critérios de Convergência

O processo iterativo chega ao seu final quando a solução procurada, através de um método numérico, converge para uma tolerância adequada, previamente estabelecida. Esta convergência deve ser checada no final de cada iteração do processo.

A descrição de vários critérios de convergência é feita, por exemplo, por BATHE [14, 15], BATHE & CIMENTO [16], CILONI [36], CORRÊA [39], HAISLER et al. [54], OWEN & HINTON [88], entre outros. Basicamente são definidos três critérios de convergência relacionados com os deslocamentos, forças nodais e energia incremental interna.

Nos critérios envolvendo deslocamentos, a convergência do processo numérico usado na solução do sistema de equações não-lineares, deve ser

checada comparando-se, de alguma forma, os valores dos deslocamentos determinados em cada iteração. Em algumas situações, para se evitar inconsistência de dimensões, pode-se separar os deslocamentos de translação dos deslocamentos de rotação.

Um segundo critério bastante utilizado, difere do primeiro pelo fato de que a convergência é baseada na comparação dos valores das forças residuais em cada iteração. Também neste caso, alguns autores consideram componentes de força e componentes de momento separadamente, para se evitar inconsistência de dimensões. Este critério é bastante adequado na fase inicial da análise estrutural, entretanto, quando a estrutura se aproxima do colapso com pequena rigidez, o que acontece em regiões inelásticas onde para pequenas variações da força tem-se grandes variações nos deslocamentos, este critério torna-se inadequado.

Para se prevenir contra possíveis falhas quando estes critérios são aplicados isoladamente, pode-se contornar o problema com a utilização simultânea dos mesmos, ou aplicando-se o critério baseado no incremento da energia interna durante cada iteração, onde se comparam o trabalho realizado no final e no início do incremento.

Neste trabalho estão implementados dois critérios, sendo um baseado nos deslocamentos e o outro baseado nas forças residuais, os quais são aplicados isoladamente.

No critério relativo aos deslocamentos emprega-se a verificação da convergência global, ao invés da local (ponto a ponto) e o processo numérico converge se:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i^j)^2 - \sum_{i=1}^n (p_i^{j-1})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i^1)^2}} \times 100 \leq \text{TOLER} \quad (4.11)$$

onde p_i são os deslocamentos nodais, n é o número total de incógnitas do problema e $j-1$ e j são as iterações sucessivas.

A Eq. (4.11) estabelece que a convergência ocorre se a diferença na norma das incógnitas (deslocamentos), entre duas iterações sucessivas, é menor ou igual a TOLER vezes a norma do deslocamento da primeira iteração daquele incremento de carga. A literatura recomenda que o valor de TOLER igual a 1,0, isto é, 1%, é adequado para a maioria das soluções. Neste trabalho adota-se TOLER = 0,5.

No critério baseado nas forças nodais residuais, o processo converge-se:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta F_i^j)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (F_i)^2}} \times 100 \leq \text{TOLER} \quad (4.12)$$

onde ΔF_i são as forças residuais, F_i são as forças totais aplicadas, n é o número total de incógnitas do problema e j denota o número da iteração.

Este critério, dado pela Eq. (4.12), estabelece que a convergência ocorre se a norma das forças residuais torna-se menor que TOLER vezes a norma das forças totais aplicadas. Também neste caso adota-se TOLER = 0,5.

4.2.3 Estabilidade do Equilíbrio e Pontos Críticos

Seja um pórtico em equilíbrio sob a ação das forças externas designadas pelo vetor \underline{R} . Suponha-se que este equilíbrio seja perturbado por um pequeno deslocamento representado por $\delta \underline{r}$. O trabalho realizado pelas forças, admitidas constantes durante esta perturbação, é dado por:

$$\delta W_e = \delta \underline{r}^t \underline{R} \quad (4.13)$$

O trabalho realizado pelas forças internas \underline{S} , durante esta perturbação, é dado até segunda ordem por:

$$\delta W_i = \delta r^t \underline{S} + 1/2 \delta r^t \delta \underline{S} \quad (4.14)$$

Da Eq. (3.109), sabe-se que $\delta \underline{S} = \underline{K} \delta r$, que transforma a Eq. (4.14) em:

$$\delta W_i = \delta r^t \underline{S} + 1/2 \delta r^t \underline{K} \delta r \quad (4.15)$$

Uma condição de equilíbrio estável é alcançada quando se impõe que para qualquer perturbação, o trabalho das forças internas seja maior do que o trabalho das forças externas.

$$\delta W_i - \delta W_e > 0 \quad (4.16)$$

Sabendo-se que na situação de equilíbrio, $\underline{R} = \underline{S}$, e levando-se as Eq. (4.13) e (4.15) em (4.16), obtém-se:

$$\delta r^t \underline{K} \delta r > 0 \quad (4.17)$$

para qualquer $\delta r \neq 0$. Ou seja, uma condição suficiente para que o equilíbrio da estrutura seja estável, é que a matriz de rigidez tangente \underline{K} seja positiva definida.

No caso da estrutura estar em regime elasto-plástico, admite-se a simplificação $\underline{K} \cong \underline{K}^*$ e, da mesma forma, a matriz de rigidez tangente elasto-plástica \underline{K}^* deve ser positiva definida.

$$\delta \tilde{r}^t \tilde{K}_t^* \delta \tilde{r} > 0 \quad (4.18)$$

Considerando o estudo do equilíbrio da estrutura ao longo de um processo de carregamento incremental, diz-se que a estrutura atinge o ponto crítico quando sua matriz de rigidez \tilde{K}_t deixa de ser positiva definida.

Este ponto crítico é caracterizado pelo fato do menor autovalor de \tilde{K}_t ser menor ou igual a zero. A condição para que \tilde{K}_t seja positiva definida vem de:

$$\tilde{r}^t \tilde{K}_t \tilde{r} > 0 \quad , \quad \forall \tilde{r} \neq 0 \quad (4.19)$$

Da definição de autovalor e autovetor, tem-se que:

$$\tilde{K}_t \tilde{r} = \lambda \tilde{r} \quad (4.20)$$

onde λ é o autovalor de \tilde{K}_t . Levando-se na Eq. (4.19) fica:

$$\tilde{r}^t \lambda \tilde{r} > 0 \quad \text{e} \quad \lambda \tilde{r}^t \tilde{r} > 0 \quad (4.21)$$

logo, para que \tilde{K}_t não seja positiva definida

$$\lambda \leq 0 \quad (4.22)$$

Levando-se a Eq. (4.22) na Eq. (4.20), fica claro que num ponto crítico o determinante da matriz de rigidez tangente \tilde{K}_t se anula ou se torna negativo.

O autovetor associado a este autovalor nulo define direções para as quais a rigidez da estrutura é nula, caracterizando os modos de flambagem.

Conforme PIMENTA, P.M. [90,92], “um ponto crítico é considerado estável se o carregamento levar a estrutura para estados pós-críticos vizinhos de equilíbrio estável. Caso contrário ele é considerado instável”. Nos casos elásticos, este estudo pode ser feito através da Teoria da Estabilidade Elástica mas, para os casos inelásticos, este estudo só pode ser feito através da análise de estados pós-críticos, em geral, através de uma análise dinâmica.

Neste trabalho, o programa implementado define o ponto crítico verificando se a matriz de rigidez é positiva definida. Isto é feito através do monitoramento do sinal do elemento PIVOT da diagonal principal da matriz, durante a resolução do sistema de equações, no processo de triangularização, tanto na fase elástica quanto na fase elastoplástica.

4.2.4 Modelos Constitutivos - Aproximações para o Aço

A formulação teórica para a análise não-linear desenvolvida no Capítulo 3 é bastante geral, podendo ser aplicada a materiais cujas propriedades podem ser descritas por equações constitutivas elásticas, lineares ou não-lineares, elasto-plásticas, visco-elásticas ou visco-plásticas. Como a proposta principal deste trabalho é estudar o comportamento dos pórticos planos de aço, será adotado o modelo constitutivo elasto-plástico.

Considerando o diagrama tensão x deformação de um corpo de prova de aço submetido a um estado de tensão unidimensional, alguns modelos teóricos simplificados são idealizados para se estudar o comportamento elasto-plástico real deste material, conforme mostrados na Fig. (4.3).

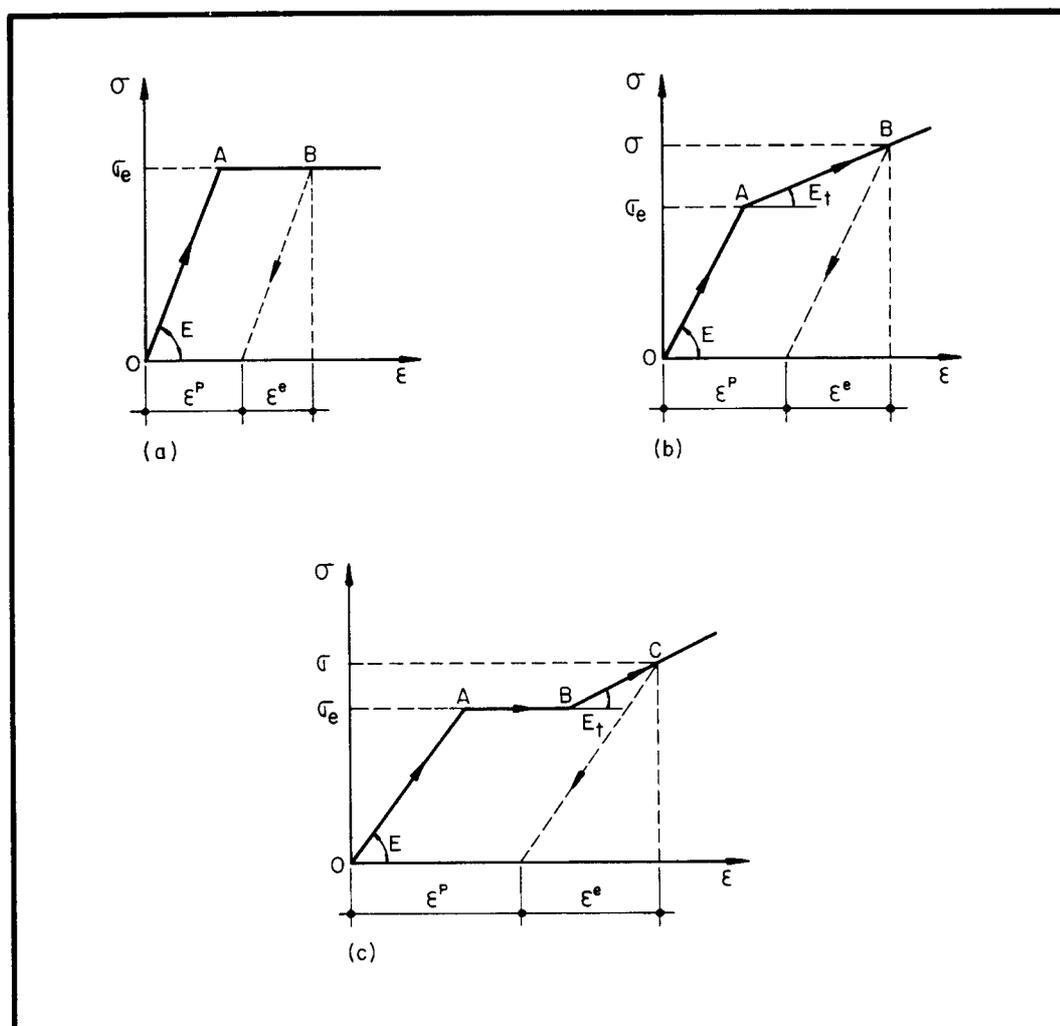


FIGURA 4.3 - DIAGRAMAS TENSÃO x DEFORMAÇÃO IDEALIZADOS PARA O AÇO

A Fig. (4.3a) mostra um modelo elástico perfeitamente plástico, no qual o material atinge a plasticidade ao alcançar a tensão de escoamento σ_e . No ponto B as fibras deste material apresentam uma deformação total ϵ , dada por:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (4.23)$$

onde ϵ^e é a parcela elástica, recuperável, da deformação total e ϵ^p é a parcela residual, ou permanente, ou irre recuperável desta deformação, que é

determinada quando se descarrega totalmente o corpo de prova, desde o ponto B, de forma elástica.

A Fig. (4.3b) idealiza o comportamento elasto-plástico através de um diagrama bilinear, onde se distingue um comportamento elástico na região OA com módulo de elasticidade E e uma região plástica AB com endurecimento linear (ou encruamento) e módulo tangente E_t . Na Fig. (4.3c) é representada uma situação mais geral, na qual a fibra de aço é elástica na região OA, perfeitamente plástica no trecho AB e apresenta endurecimento a partir do ponto B. Neste programa estão implementados apenas os modelos das Figs. (4.3a) e (4.3b) mas sabe-se que o modelo da Fig. (4.3c) pode ser facilmente incorporado ao programa.

Ampliando a Fig. (4.3b) e estudando-a dentro de um processo incremental, tem-se que em algum estágio após o escoamento inicial o acréscimo de tensão $d\sigma$ é acompanhado de um acréscimo de deformação $d\varepsilon$, conforme é ilustrado na Fig. (4.4).

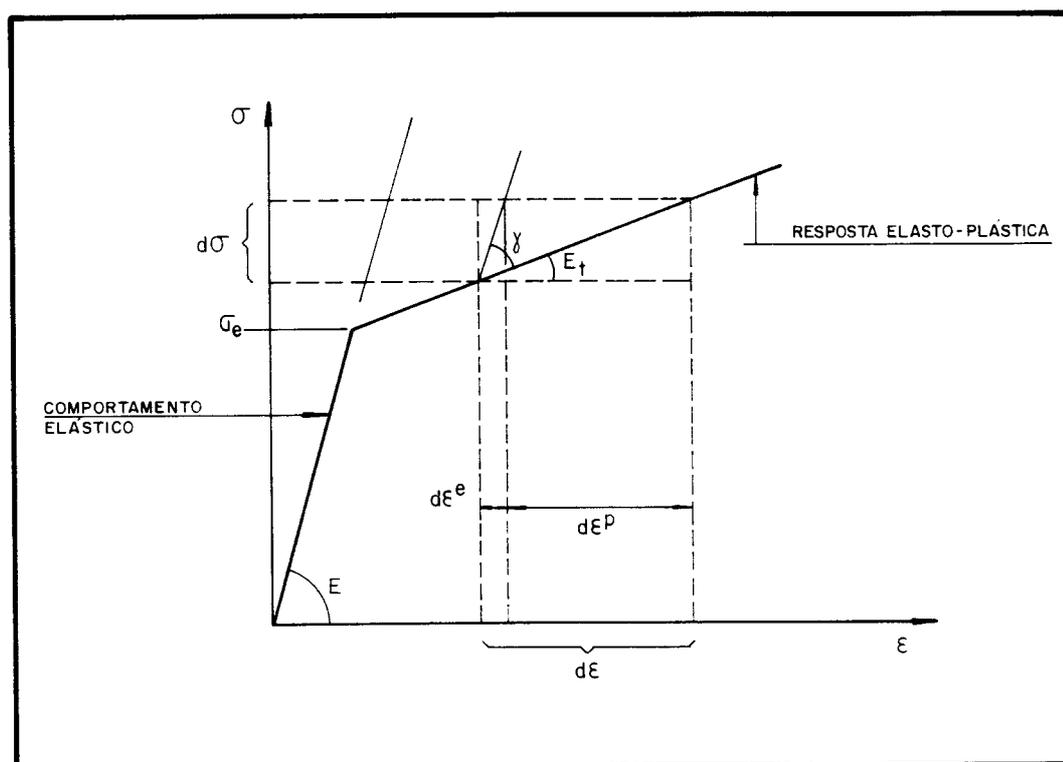


FIGURA 4.4 - COMPORTAMENTO ELASTO-PLÁSTICO COM ENDURECIMENTO REPRESENTADO POR UM DIAGRAMA BILINEAR DE $\sigma \times \varepsilon$

Admitindo-se que a deformação possa ser decomposta em uma parcela elástica e outra plástica, tem-se:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (4.24)$$

O parâmetro de endurecimento H' é definido por:

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad (4.25)$$

Desenvolvendo com o auxílio da Eq. (4.24), vem que:

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon^e} = \frac{1}{\frac{d\varepsilon}{d\sigma} - \frac{d\varepsilon^e}{d\sigma}} = \frac{1}{\frac{1}{d\sigma/d\varepsilon} - \frac{1}{d\sigma/d\varepsilon^e}} = \frac{1}{\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E}}$$

e, finalmente, chega-se à:

$$H' = \frac{EE_t}{E - E_t} = \frac{E_t}{1 - \frac{E_t}{E}} \quad (4.26)$$

É possível re-escrever a Eq. (4.24):

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} + \frac{d\sigma}{H'} \quad (4.27)$$

Desenvolvendo, vem que:

$$d\varepsilon = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H'} \right) d\sigma = \left(\frac{H'+E}{EH'} \right) d\sigma, \text{ donde}$$

$$d\sigma = \frac{EH'}{E+H'} d\varepsilon \quad (4.28)$$

Sendo $d\sigma = E_t d\varepsilon$, conclui-se que:

$$E_t = \frac{EH'}{E+H'} \quad (4.29)$$

Observando-se a Fig. (4.4), pode-se escrever $d\sigma$ do seguinte modo:

$$d\sigma = E_t d\varepsilon = (E - \gamma) d\varepsilon \quad (4.30)$$

Sendo $E_t = E - \gamma$ e com o auxílio da Eq. (4.29), determina-se:

$$\gamma = \frac{E^2}{E+H'} \quad (4.31)$$

Levando-se a Eq. (4.31) em (4.30), tem-se:

$$d\sigma = \left(1 - \frac{E}{E+H'}\right) d\varepsilon \quad (4.32)$$

e

$$E_t = E \left(1 - \frac{E}{E+H'}\right) = \frac{EH'}{E+H'} \quad (4.33)$$

Na implementação do programa é considerado que na fase elástica

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad (4.34)$$

e na fase elasto-plástica

$$d\sigma = E \left(1 - \frac{E}{E + H'} \right) d\varepsilon \quad (4.35)$$

É claro que quando $H' = 0$, $E_t = 0$ e o comportamento elástico perfeitamente plástico é contemplado.

4.2.5 Implementação Considerando o Modelo de Fatias

Para se determinarem os esforços N e M , dados de uma forma geral pelas Eq. (3.127) e os coeficientes de rigidez C_1 , C_2 e C_3 , dados pelas Eq. (3.129), é necessário realizar integração sobre toda a seção transversal do elemento. Para isto foi adotado neste trabalho o modelo das fatias, no qual a seção transversal do elemento é dividida em um grande número de fatias retangulares, para poder captar as variações de σ , D e das tensões residuais σ_r ao longo da altura da seção, bem como a propagação do escoamento na seção transversal. A Fig. (4.5) mostra um exemplo típico de uma seção transversal de um perfil I subdividida em fatias.

Observa-se que as mesas do perfil I são fatiadas na vertical para considerar a distribuição horizontal das suas tensões residuais e a alma é fatiada na horizontal, o que permite considerar a distribuição vertical das tensões residuais existentes.

Na solução do problema, admite-se que tão logo a tensão no centro de uma fatia alcance o valor de escoamento σ_e , toda a fatia se torna plástica, enquanto que aquelas outras com tensão menor do que σ_e permanecem elásticas. A Fig. (4.6) ilustra a propagação da plastificação ao longo da altura da seção, quando cada vez mais fatias se tornam plásticas.

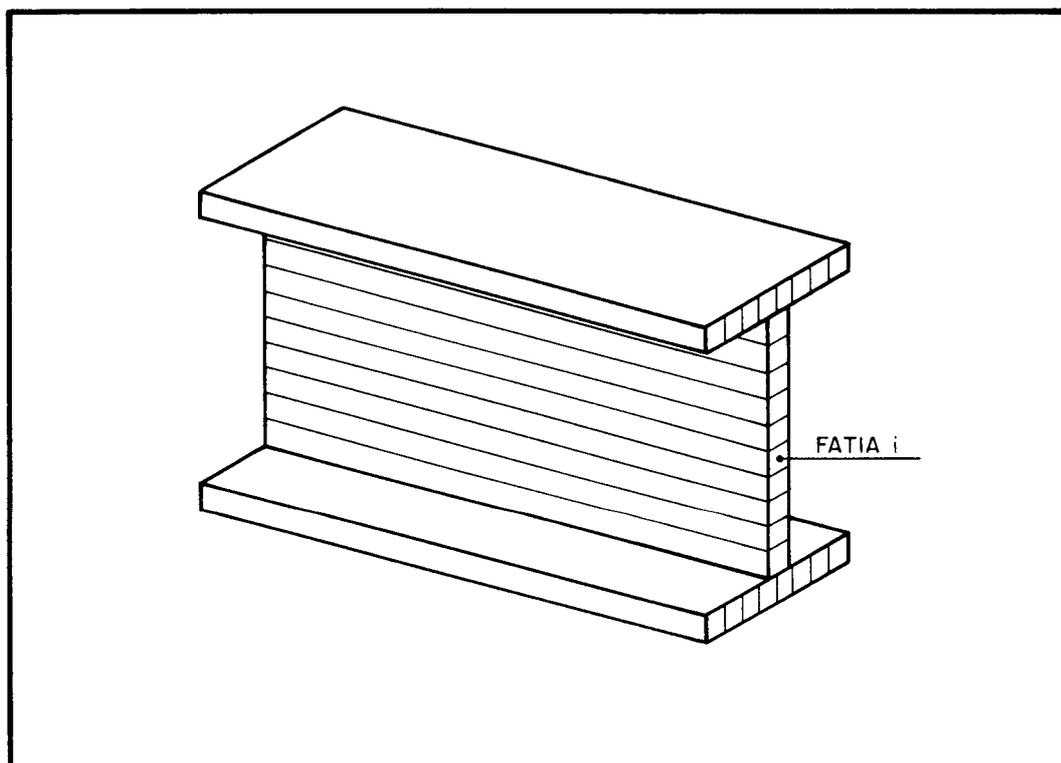


FIGURA 4.5 - SUB-DIVISÃO EM FATIAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE VIGA I

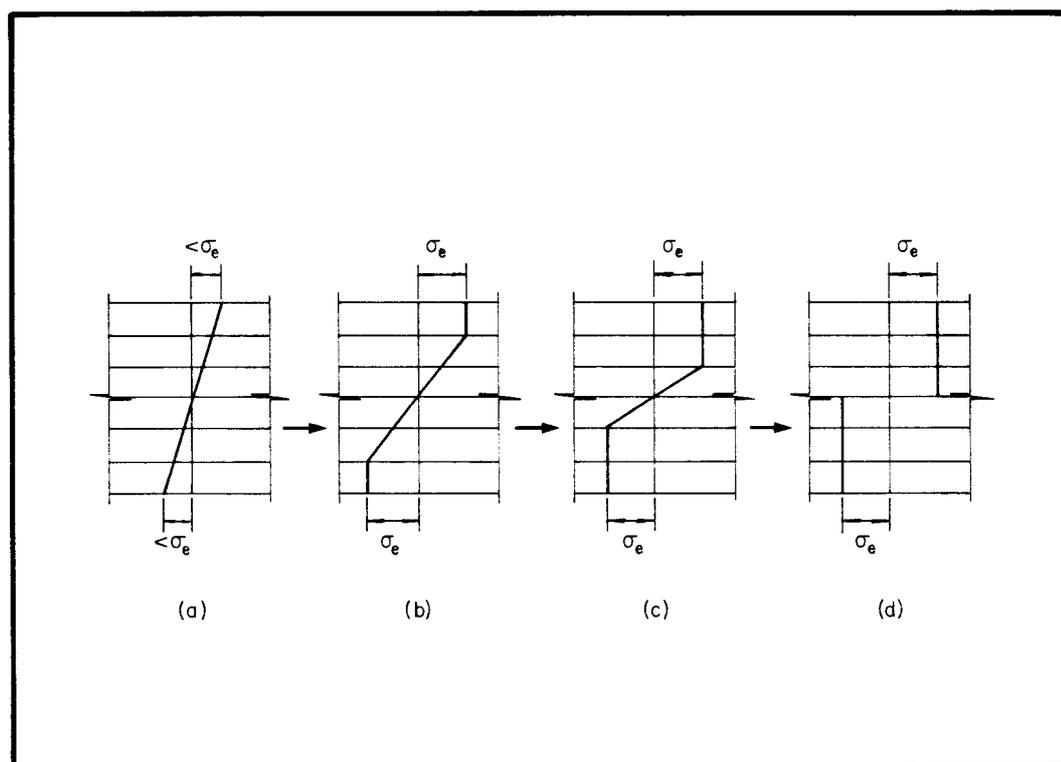


FIGURA 4.6 - PROPAGAÇÃO DO ESCOAMENTO AO LONGO DA ALTURA DA SEÇÃO DE UMA VIGA FATIADA

Na implementação da formulação por fatias deste trabalho considera-se que o estado de tensão no centro da fatia é tomado como representativo de toda ela. As contribuições para a força normal e momento fletor são encontradas para cada fatia separadamente, sendo que a força normal total e o momento fletor total são determinados somando-se as contribuições de cada uma delas. Os coeficientes de rigidez EA^* , ES^* , EI^* , necessários para a formação da matriz de rigidez tangente elástica, são também calculados somando-se as contribuições de cada fatia, usando-se as expressões (4.36).

$$\begin{cases} EA^* = \sum_f E_f b_f t_f / (1 - z_f \beta') \\ ES^* = \sum_f E_f b_f t_f z_f / (1 - z_f \beta') \\ EI^* = \sum_f E_f b_f t_f z_f^2 / (1 - z_f \beta') \end{cases} \quad (4.36)$$

onde:

b_f é a largura da fatia

t_f é a espessura da fatia

z_f é a coordenada z no centro da fatia

E_f é o módulo de elasticidade do material da fatia

β' é a curvatura da imperfeição inicial β na seção

Todavia, se a tensão no centro da fatia alcançar σ_e , toda a fatia passa a ser considerada plástica e E_f é trocado por

$$E_f \left(1 - \frac{E_f}{E_f + H'} \right)$$

conforme a Eq. (4.35), onde H' é o parâmetro de endurecimento.

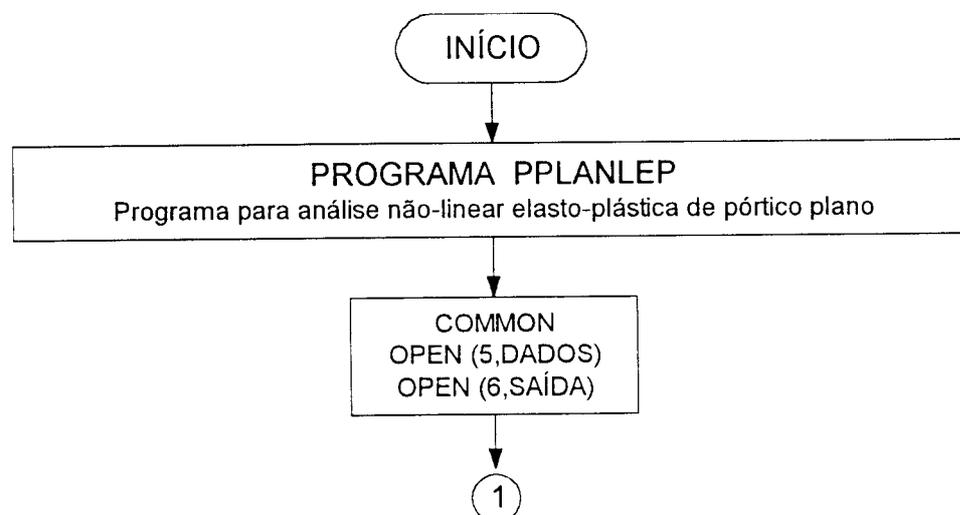
Nesta formulação é feita uma aproximação ao se desprezar a parcela $b_f t^3/12$ no cálculo do momento de inércia I^* , na última das Eq. (4.36). Porém, a divisão da altura da seção em 10 fatias, por exemplo, leva a resultados numéricos considerados excelentes.

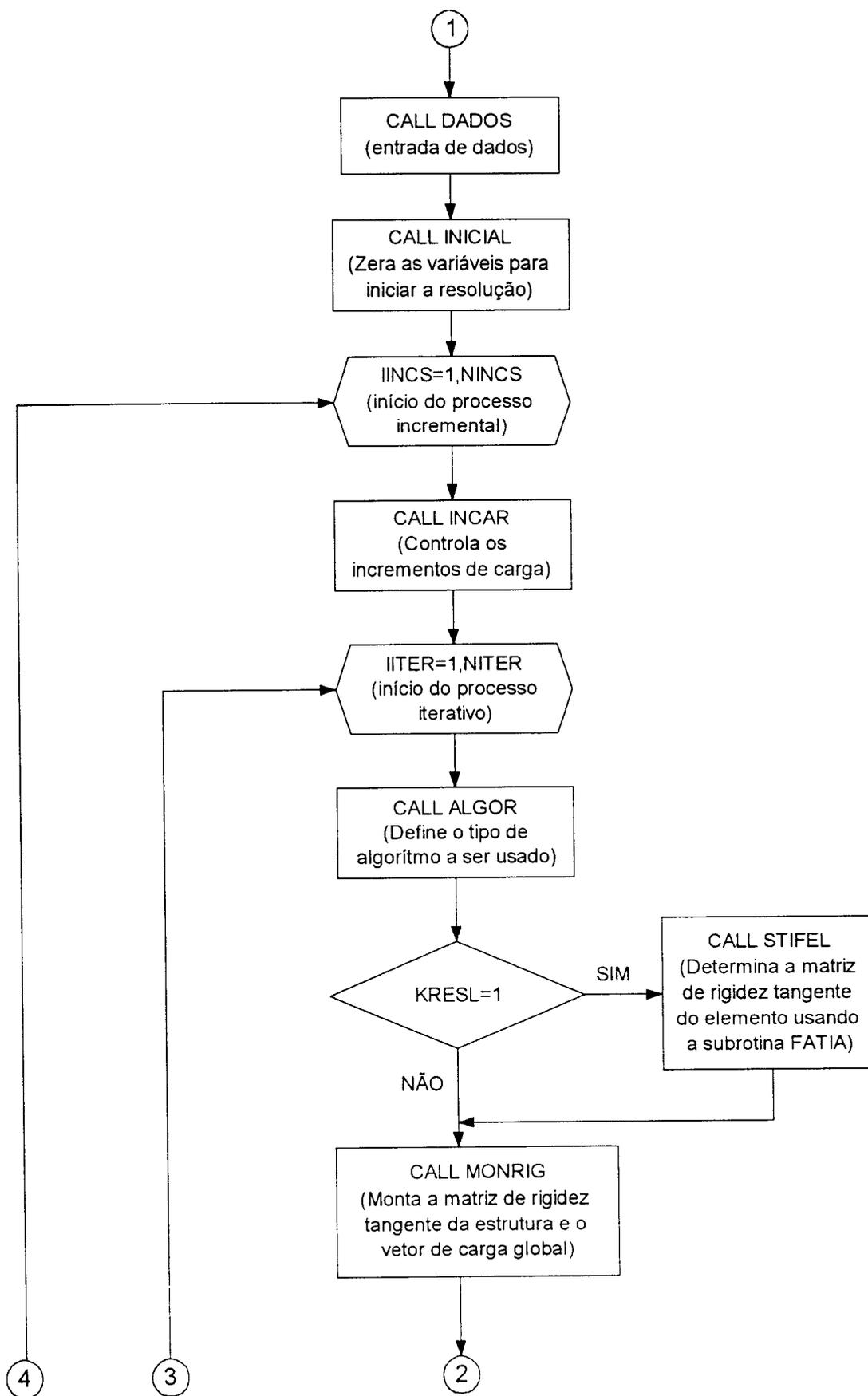
Obs.: A implementação do valor exato de I^* , embora não tenha sido feita neste instante, já está equacionada e não apresenta grandes dificuldades. Deverá ser feita posteriormente.

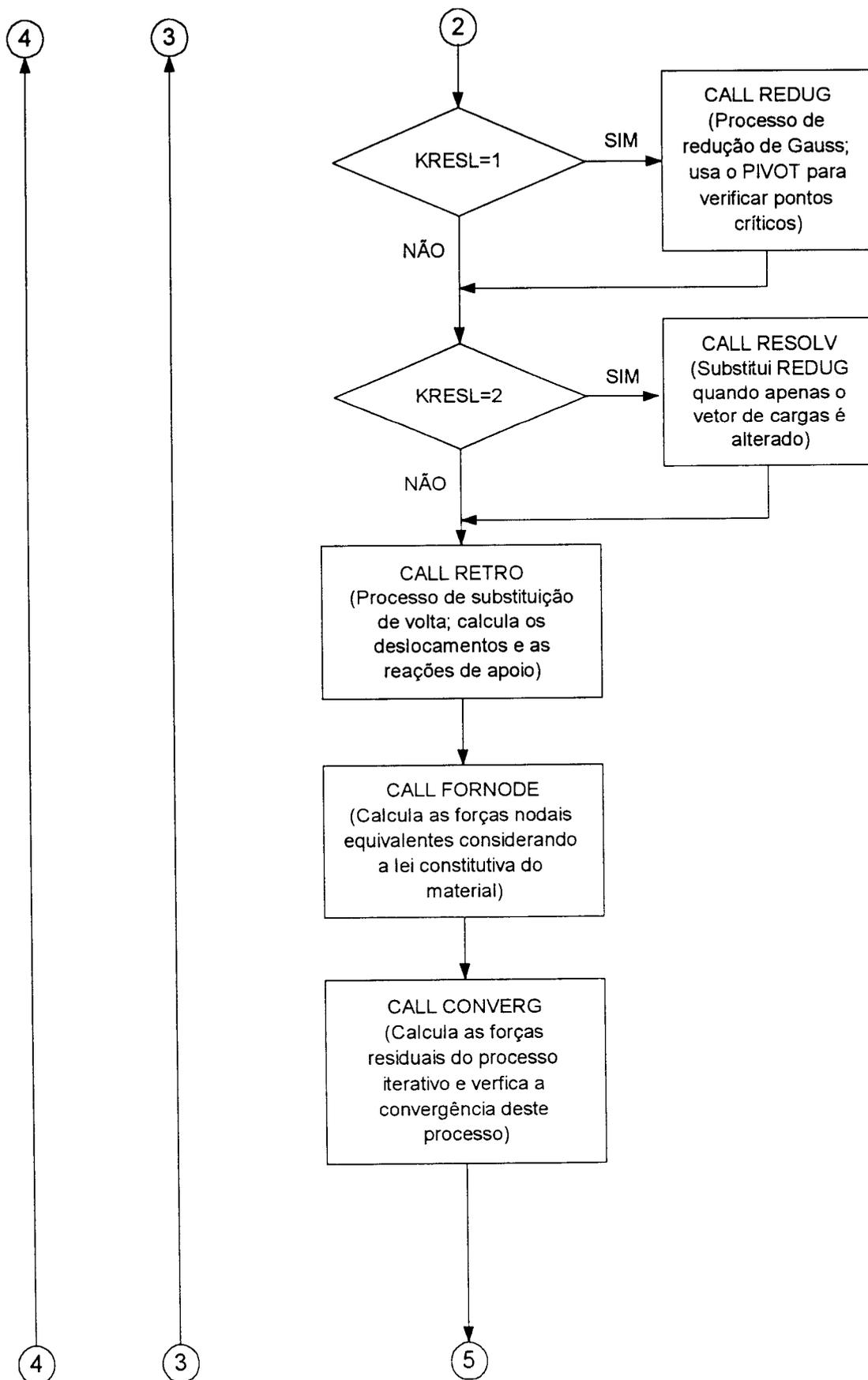
4.3 Fluxograma e Descrições

Nesta seção apresenta-se o fluxograma do programa principal PPLANLEP, que foi desenvolvido para fazer a análise de problemas de Pórticos Planos de aço, considerando a Análise Não-Linear Elasto-Plástica. Este programa leva em conta ainda as imperfeições iniciais das barras e a presença de tensões residuais na seção transversal das mesmas. Em seguida são feitas descrições sucintas das subrotinas que compõem o programa, onde se comentam objetivamente as suas principais funções.

4.3.1 Fluxograma do programa principal







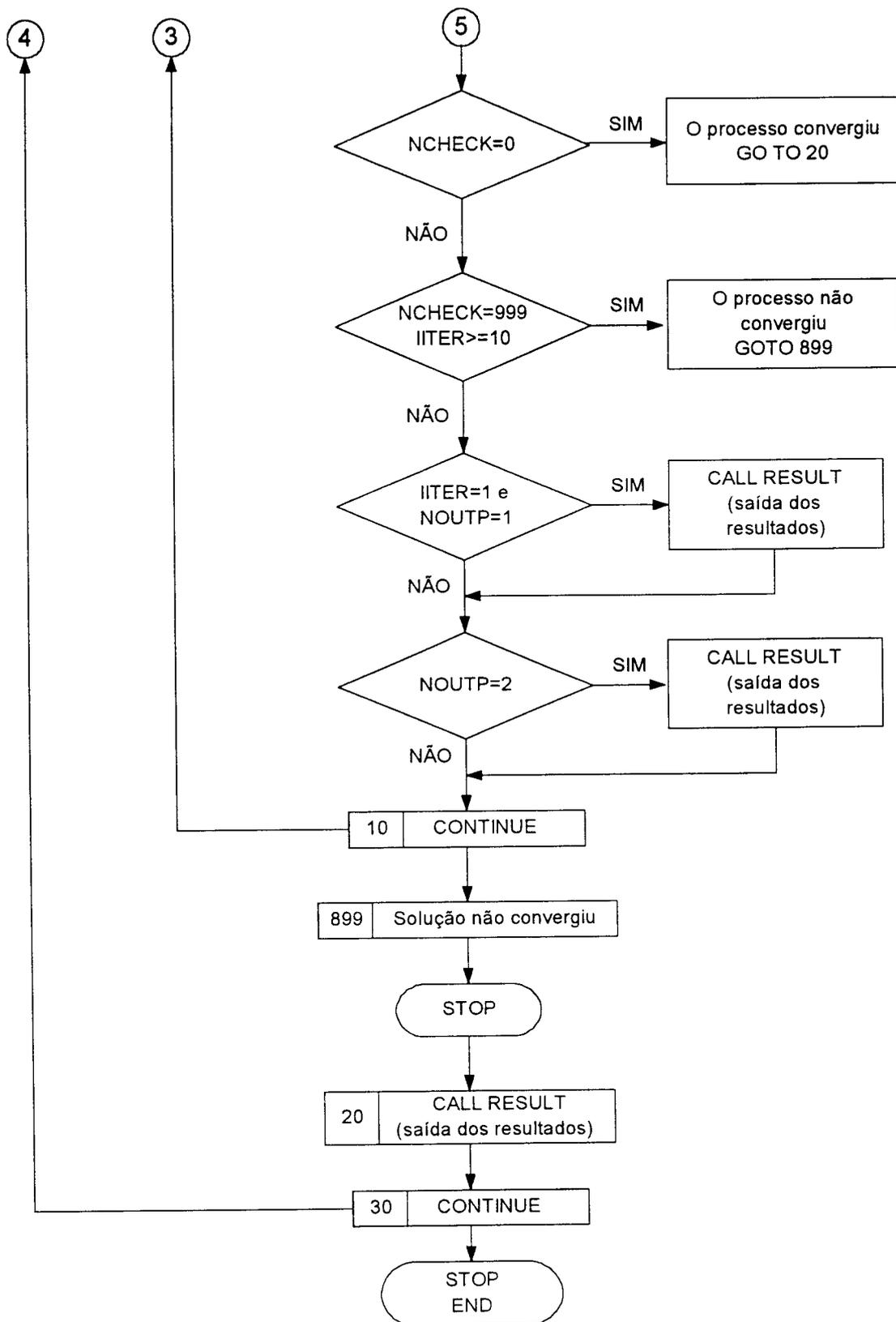


FIGURA 4.7 – Fluxograma do programa principal

4.3.2 *Descrição Sucinta das Subrotinas*

a) Subrotina DADOS

Nesta subrotina são definidos os parâmetros de controle do problema, as propriedades dos materiais dos elementos que compõem a estrutura, as imperfeições iniciais de cada barra e as condições de contorno do problema. Toda a geometria inicial da estrutura fica determinada dentro desta subrotina, com o cálculo dos comprimentos e cossenos diretores iniciais das barras. Enfim, são definidos os carregamentos nodais da estrutura.

b) Subrotina INICIAL

Nesta subrotina são zerados todos os arrays acumulativos do programa e são definidas as tensões residuais nas fatias das seções transversais das barras. Diz-se que o problema está pronto para ser inicializado.

c) Subrotina INCAR

Esta subrotina é importante dentro do processo incremental de resolução do problema, pois é através dela que se controla os incrementos de carga e se atualiza este vetor em cada passo do processo.

d) Subrotina ALGOR

Esta subrotina controla o tipo de algoritmo de solução a ser empregado na resolução do sistema de equações não-lineares do problema. Neste trabalho foi adotado o método de Newton-Raphson Puro para a solução numérica das equações de equilíbrio, onde a matriz de

rigidez tangente \underline{K}_t é avaliada em cada passo do processo incremental-iterativo. Algumas variações do método de Newton-Raphson podem ser facilmente implementadas, usando-se o método da Rigidez Inicial no qual a matriz \underline{K}_0 é calculada apenas no início do processo ou o método Newton-Raphson modificado, onde se combinam \underline{K}_0 e \underline{K}_t , avaliando-se as rigidezes na primeira ou segunda iteração de cada incremento de carga.

e) Subrotina STIFEL

Na subrotina STIFEL calcula-se a matriz de rigidez tangente dos elementos, elástica ou elasto-plástica, em teoria de segunda-ordem. Esta matriz é armazenada em disco para ser usada na montagem da matriz de rigidez tangente global da estrutura. Para este cálculo é necessário chamar a subrotina FATIA, onde são calculados os coeficientes de rigidez das seções transversais.

f) Subrotina FATIA

Na subrotina FATIA calculam-se as propriedades geométricas da seção transversal dos elementos e seus coeficientes de rigidez, levando-se em conta as imperfeições iniciais das barras. Para isto a seção é dividida em fatias e usa-se método dos retângulos associado à regra da ordenada média, descrito na seção 4.2.5. Nota-se que certas fatias podem estar em regime plástico e, portanto, apresentar o módulo de rigidez elástico E modificado para $E [1 - E / (E + H')]$.

Para os cálculos realizados nesta subrotina são utilizadas as equações definidas na seção 3.9:

$$\left\{ \begin{array}{l} A^* = \int_{A_r} \frac{dA_r}{1-r\beta'} \quad ; \quad S^* = \int_{A_r} \frac{rdA_r}{1-r\beta'} \quad ; \quad I^* = \int_{A_r} \frac{r^2dA_r}{1-r\beta'} \\ C_1 = \int_{A_r} \frac{DdA_r}{1-r\beta'} \quad ; \quad C_2 = \int_{A_r} \frac{DrdA_r}{1-r\beta'} \quad ; \quad C_3 = \int_{A_r} \frac{Dr^2dA_r}{1-r\beta'} \\ C_{1m} = \frac{C_{1a} + C_{1b}}{2} \quad ; \quad C_{2m} = \frac{C_{2a} + C_{2b}}{2} \quad ; \quad C_{3m} = \frac{C_{3a} + C_{3b}}{2} \end{array} \right. \quad (4.37)$$

g) Subrotina MONRIG

Através desta subrotina monta-se a matriz de rigidez tangente global da estrutura usando a contribuição de cada elemento, assim como o vetor de cargas global. Neste trabalho, esta matriz está armazenada na sua forma completa, podendo ser, posteriormente, adotada alguma técnica de armazenamento mais compacta para melhor performance do programa.

h) Subrotinas REDUG, RETRO e RESOLV

São as subrotinas usadas para a resolução do sistema de equações não-lineares do equilíbrio da estrutura. Inicialmente, através da subrotina REDUG, faz-se a redução gaussiana (eliminação de Gauss) do sistema de equações, e simultaneamente, verifica-se se a matriz de rigidez tangente é positiva definida através da avaliação do elemento PIVOT, na tentativa de se determinar algum ponto crítico da estrutura.

Na subrotina RETRO faz-se o processo de substituição de volta, exigido após a fase de triangularização da matriz resultante do processo de eliminação de Gauss. Nesta subrotina são calculados os deslocamentos nodais e as reações de apoio e ainda, são atualizadas as coordenadas nodais, os comprimentos dos elementos e os seus cossenos diretores.

A subrotina RESOLV atua na fase de eliminação de Gauss apenas no vetor de cargas, quando não se deseja atualizar a matriz de rigidez em cada passo do processo incremental (método de Newton-Raphson modificado).

i) Subrotina FORNODE

Através desta subrotina são calculadas as forças nodais equivalentes internas nos elementos, utilizando-se a regra da ordenada média do modelo de fatias descrito na seção 4.2.5. Nestes cálculos a lei constitutiva do material é sempre considerada, observando-se se o material está em regime elástico ou plástico, em carga ou descarga. Também nesta subrotina relacionam-se os deslocamentos nas coordenadas cartesianas \underline{p}_i , com os deslocamentos nas coordenadas corrotacionais \underline{q}_α , definem-se as rotações de corpo rígido dos elementos e calculam-se os esforços solicitantes nas extremidades de cada elemento.

j) Subrotina CONVERG

Nesta subrotina são calculadas as forças nodais residuais para cada elemento, as quais se constituirão no carregamento a ser aplicado na iteração seguinte, caso não haja convergência no processo iterativo. Sua outra função também muito importante é verificar a convergência da solução do problema, que pode ser feita utilizando-se o critério do deslocamento, onde se comparam os deslocamentos (\underline{p}_i) de duas iterações sucessivas, ou o critério das forças, onde se tenta reduzir as forças residuais a um valor previamente estabelecido. Estes critérios foram descritos na seção 4.2.2.

k) Subrotina RESULT

Sua função é fornecer a saída dos resultados desejados do problema que, neste caso, são os deslocamentos globais dos nós, as reações de apoio, os esforços solicitantes nas extremidades de cada elemento e as deformações plásticas em cada fatia das extremidades do elemento.

Estes resultados podem ser apresentados numa frequência determinada pelo parâmetro de controle NOUTP, de três maneiras distintas, a saber: NOUTP = 0 – imprime os resultados da solução não-linear já convergida, para cada incremento de carga; NOUTP = 1 – imprime os resultados da primeira iteração e após a convergência final da solução, para cada incremento de carga; NOUTP = 2 – imprime os resultados de cada iteração, para cada incremento de carga.

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DA FORMULAÇÃO

5.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados vários exemplos procurando enfatizar a grande potencialidade da formulação desenvolvida neste trabalho. Sendo assim, vários casos serão estudados. Inicialmente, serão considerados exemplos onde se levam em conta apenas a não-linearidade geométrica (NLG) e ambas as não-linearidades, geométrica e do material (NLGM), em estruturas cujas barras não possuem imperfeições iniciais e nem tensões residuais. Em seguida serão analisadas situações onde se consideram os efeitos isolados das imperfeições iniciais nas barras e das tensões residuais nos perfis de aço e posterior combinação destes efeitos. Finalmente, se estenderá a aplicação aos pórticos planos de aço onde estes efeitos serão analisados em pórticos de andares múltiplos.

Para se estudar inicialmente os casos da NLG e NLGM apenas, relembra-se que na formulação teórica desenvolvida na seção 3.9, considerando as aproximações de segunda-ordem, determinaram-se as matrizes de rigidez tangente de elementos de barras com imperfeições iniciais β . As Eq. (3.188) e (3.196) fornecem as matrizes de rigidez constitutiva e geométrica, respectivamente, no regime elástico, enquanto que as Eq. (3.211) e (3.212) apresentam estas respectivas matrizes no regime elasto-plástico.

Considerando a imperfeição inicial $\beta = 0$, a barra torna-se perfeitamente reta e as suas matrizes de rigidez têm forma análoga às anteriores, podendo ser expressas por:

a) Regime Elástico

a.1) *Matriz de rigidez constitutiva do elemento de barra reta no sistema local cartesiano.*

$$\underset{\sim}{K}_M = \begin{bmatrix} EA_r / l_r & 0 & 0 & -EA_r / l_r & 0 & 0 \\ 0 & 12EI / l_r l_c^2 & 6EI / l_r l_c & 0 & -12EI / l_r l_c^2 & 6EI / l_r l_c \\ 0 & 6EI / l_r l_c & 4EI / l_r & 0 & -6EI / l_r l_c & 2EI / l_r \\ 0 & 0 & 0 & EA_r / l_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12EI / l_r l_c^2 & -6EI / l_r l_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6EI / l_r l_c & 4EI / l_r \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

a.2) *Matriz de rigidez geométrica do elemento de barra reta no sistema local cartesiano.*

$$\underset{\sim}{K}_G = \begin{bmatrix} 0 & (M_b - M_a) / l_c^2 & 0 & 0 & -(M_b - M_a) / l_c^2 & 0 \\ 0 & 6N / 5l_c & N / 10 & -(M_b - M_a) / l_c^2 & -6N / 5l_c & N / 10 \\ 0 & N / 10 & 2Nl_c / 15 & 0 & -N / 10 & Nl_c / 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (M_b - M_a) / l_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6N / 5l_c & -N / 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N / 10 & 2Nl_c / 15 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

b) Regime Elasto-plástico

b.1) *Matriz de rigidez constitutiva do elemento de barra reta no sistema local cartesiano.*

$$\bar{\mathbf{K}}_{\sim M}^{-ep} = \begin{bmatrix} C_{1m} / l_r & 0 & -C_{2m} / l_r & -C_{1m} / l_r & 0 & C_{2m} / l_r \\ & 12C_{3m} / l_r l_c^2 & 6C_{3m} / l_r l_c & 0 & -12C_{3m} / l_r l_c^2 & 6C_{3m} / l_r l_c \\ & & 4C_{3m} / l_r & C_{2m} / l_r & -6C_{3m} / l_r l_c & 2C_{3m} / l_r \\ & & & C_{1m} / l_r & 0 & -C_{2m} / l_r \\ & & & & 12C_{3m} / l_r l_c^2 & -6C_{3m} / l_r l_c \\ & & & & & 4C_{3m} / l_r \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

b.2) *Matriz de rigidez geométrica do elemento de barra reta no sistema local cartesiano.*

$\bar{\mathbf{k}}_{\sim G}^{-ep}$, tem exatamente a mesma expressão da Eq. (5.2)

5.2 Exemplos Considerando Apenas a NLG

A seguir serão apresentados alguns exemplos clássicos, que mostram a aplicação da presente formulação em problemas não-lineares que envolvem grandes deslocamentos.

TABELA 5.1 - Coordenadas (x, y) e rotação (θ) da extremidade livre da viga em balanço da Fig. 5.1

M (kgfxcn)	SOLUÇÃO EXATA			A.N.L. (10 elem.) Ref. [116]		
	Y(cm)	θ (rad)	X (cm)	Y (cm)	θ (rad)	X (cm)
50000	1.5624	0.00625	499.997	1.56249	0.00625	499.997
141300	4.41557	0.01766	499.974	4.41551	0.01766	499.974
307950	9.62221	0.03849	499.876	9.62224	0.03849	499.877
500000	15.6199	0.0625	499.675	15.6199	0.0625	499.675
5026548	151.979	0.6283	467.745	151.98	0.6283	467.745
13802900	334.408	1.725	286.34	334.421	1.725	286.313
29098686	258.379	3.637	-65.3878	258.373	3.637	-65.3988
36749092	121.742	4.594	-108.08	121.784	4.594	-108.088
44394471	23.194	5.549	-60.3463	23.195	5.549	-60.3513
50265480	0	6.283	0	0	6.283	0

M (Kgfxcn)	NLG-V1 (10 elementos)			NLG-V1 (4 elementos)		
	Presente Trabalho			Presente Trabalho		
	Y(cm)	θ (rad)	X (cm)	Y (cm)	θ (rad)	X (cm)
50000	1.578	0.00631	499.997	1.578	0.00631	499.997
141300	4.491	0.01797	499.973	4.491	0.01797	499.973
307950	9.719	0.03888	499.874	9.719	0.03888	499.875
500000	15.776	0.06313	499.669	15.776	0.06313	499.672
5026548	153.381	0.63461	467.085	153.403	0.63461	467.151
13802900	334.924	1.74264	282.748	335.909	1.74264	283.570
29098686	254.426	3.67377	-66.982	259.829	3.67376	-68.409
36749092	118.506	4.63963	-106.371	122.824	4.63964	-110.162
44394471	23.092	5.60489	-56.946	24.489	5.60489	-59.812
50265480	2.381	6.34611	2.846	2.914	6.34611	3.569

a) NLG-V1: Viga em balanço com momento aplicado na extremidade livre.

Neste exemplo é analisada uma viga em balanço submetida a um momento fletor em sua extremidade livre. Este exemplo é estudado por vários autores, entre eles EL-ZANATY & MURRAY [43], LO [72] e SOLER [116].

Na Fig. 5.1 é mostrada a viga em balanço com os dados que foram utilizados para a resolução do problema. Na Tab. 5.1 são apresentadas as coordenadas (x e y) e a rotação (θ) da extremidade livre da viga, mostrando uma aproximação muito boa quando comparadas com os resultados da solução exata e da análise não-linear com dez elementos de SOLER [116]. A Fig 5.2 mostra as configurações deformadas para vários incrementos de M, traçadas com os resultados da análise feita com a formulação deste trabalho usando 10 elementos. O número de iterações variou 2 a 8 para os diversos incrementos de carga, sendo necessários apenas 20 segundos para realizar todo o processamento.

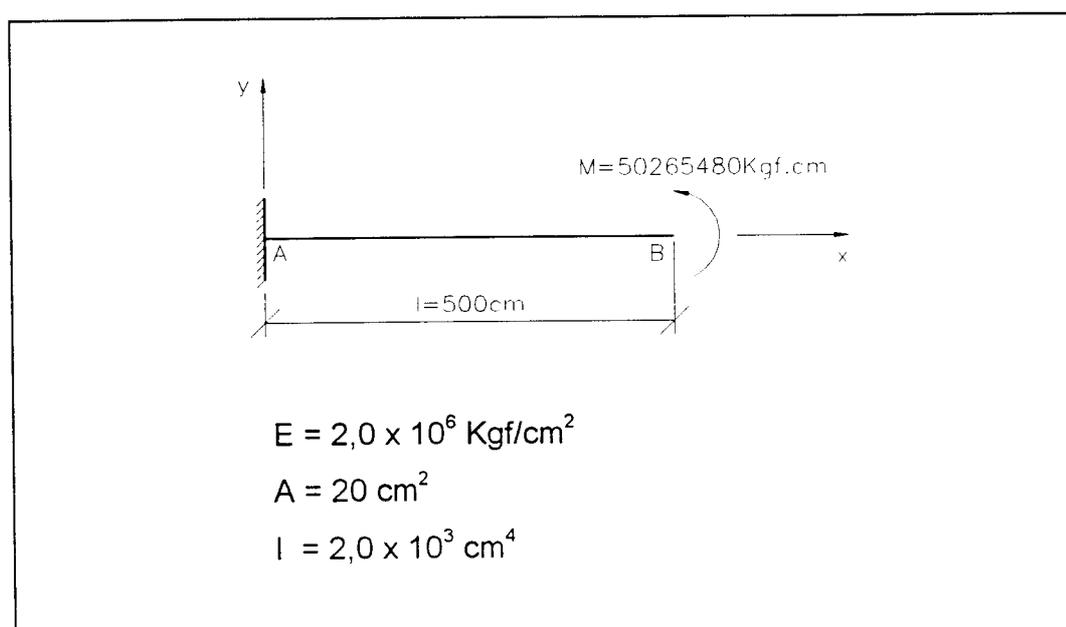


FIGURA 5.1 - Viga em balanço com momento fletor aplicado na extremidade livre

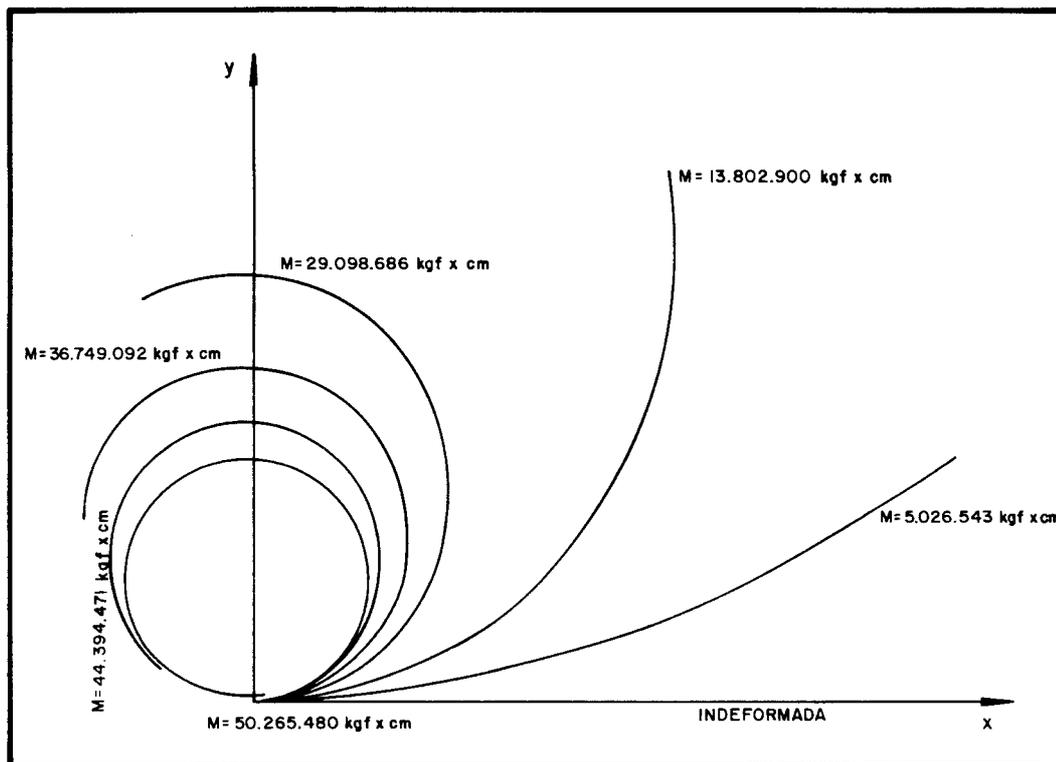


FIGURA 5.2 - CONFIGURAÇÕES DEFORMADAS DA VIGA EM BALANÇO DA FIG. 5.1

b) NLG - V2: Viga em balanço com duas cargas concentradas

A viga em balanço com duas cargas concentradas, mostrada na Fig. 5.3, foi analisada por EBNER & UCIFERRO [42], ORAN & KASSIMALI [87], WEN & RAHIMZADEH [130], entre outros.

Um estudo comparativo feito por Ebner e Uciferro em 1972, fornece resultados numéricos obtidos através de várias formulações diferentes para o MEF, para a viga da Fig. 5.3. Os resultados avaliados estão reproduzidos na Tab. 5.2, juntamente com os resultados obtidos através da presente formulação. Nota-se que a presente solução fornece excelentes resultados e, mesmo com apenas dois elementos, os resultados são tão bons quanto os de outras versões de formulação do MEF. Foram necessárias 4 iterações para a convergência da solução em todos incrementos de carga, demorando-se aproximadamente 0,8 segundos para resolver cada iteração.

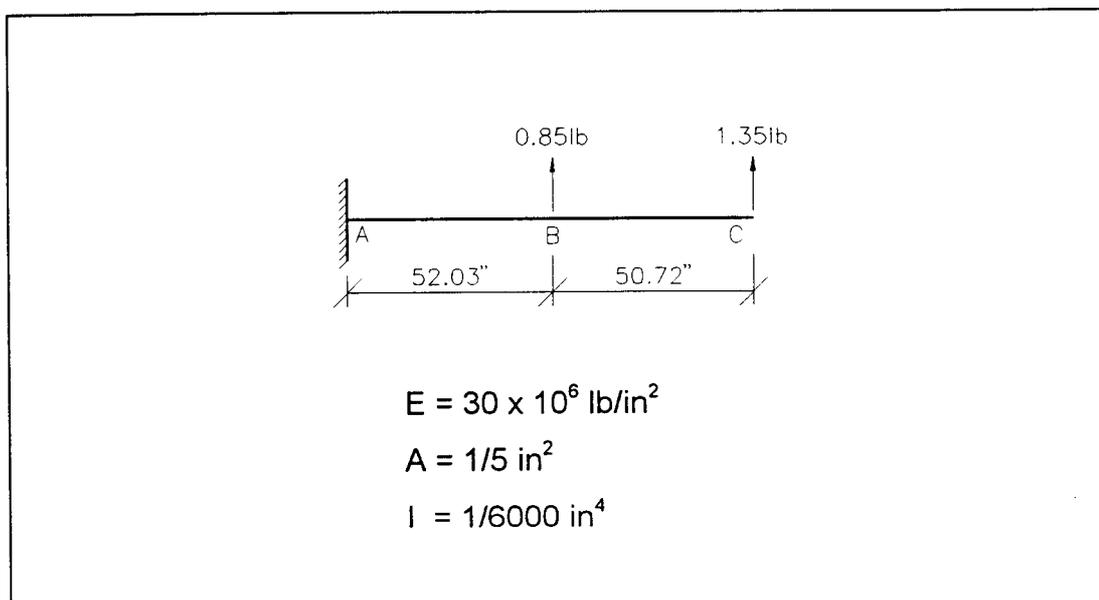


FIGURA 5.3 - Viga em balanço com duas cargas concentradas

TABELA 5.2 - Comparação entre os resultados de várias formulações do MEF para análise não-linear da viga em balanço da Fig. 5.3

Formulação	Nº de Elementos	Nº de Incrementos	Deslocamento Horizontal pt. B (in)	Deslocamento Vertical pt. B (in)	Deslocamento Horizontal pt. C (in)	Deslocamento Vertical pt. C (in)
Martin (1965)	2	20	-8.97	27.49	-36.02	74.20
	20	100	-9.11	26.29	-34.37	70.60
Argyris (1964)	2	20	-9.06	29.04	-36.20	75.20
	20	100	-9.12	26.30	-35.00	70.75
Jennings (1968)	2	20	-0.01	2.20	-0.03	6.40
	20	100	-4.94	20.60	-15.01	51.15
Presente Formulação	2	20	-7.32	26.42	-31.40	69.57
	20	100	-8.20	24.96	-31.03	67.23
Exata por Frisch-Fay (1961)	-	-	-8.3	25.10	-31.01	67.30

Obs.: Para conversão, adotar: 1 lb = 4,448 N e 1 in = 2,54 cm

c) NLG - V3: Viga bi-engastada com carga concentrada no meio do vão

A viga bi-engastada com uma carga concentrada no meio do vão, mostrada na Fig. 5.4, é analisada neste trabalho com dois objetivos principais. Primeiramente, deseja-se comparar os resultados obtidos através da presente formulação, com os resultados obtidos de um “software” comercialmente reconhecido no meio técnico da engenharia. Este problema é analisado pelo programa ANSYS, na sua versão 5.0 de 1993, na pág. 6-27 do seu manual. Em segundo lugar, deseja-se mostrar que o uso inadequado de uma teoria na análise de um problema pode levar a erros significativos.

Observa-se na Tab. (5.3) que os resultados obtidos pelas duas formulações são bastante próximos. Observa-se também que os deslocamentos e forças axiais apresentam diferenças significativas ao se analisar o problema considerando a análise não-linear geométrica (teoria de segunda-ordem) ou, simplesmente, a análise linear (teoria de primeira-ordem). Isto mostra que a definição correta do problema e a escolha adequada da teoria para a análise são bons desafios para o engenheiro.

Esta viga foi analisada através da presente formulação considerando-se 10 incrementos no carregamento, admitindo-se a seção transversal dividida em 10 fatias, contendo 10 e 20 elementos. Nos dois casos foram necessárias, no máximo, 4 iterações para a convergência e aproximadamente 30 segundos para a solução final. Os resultados foram bastante parecidos, sendo que a Tab. 5.3 apresenta os resultados para 20 elementos.

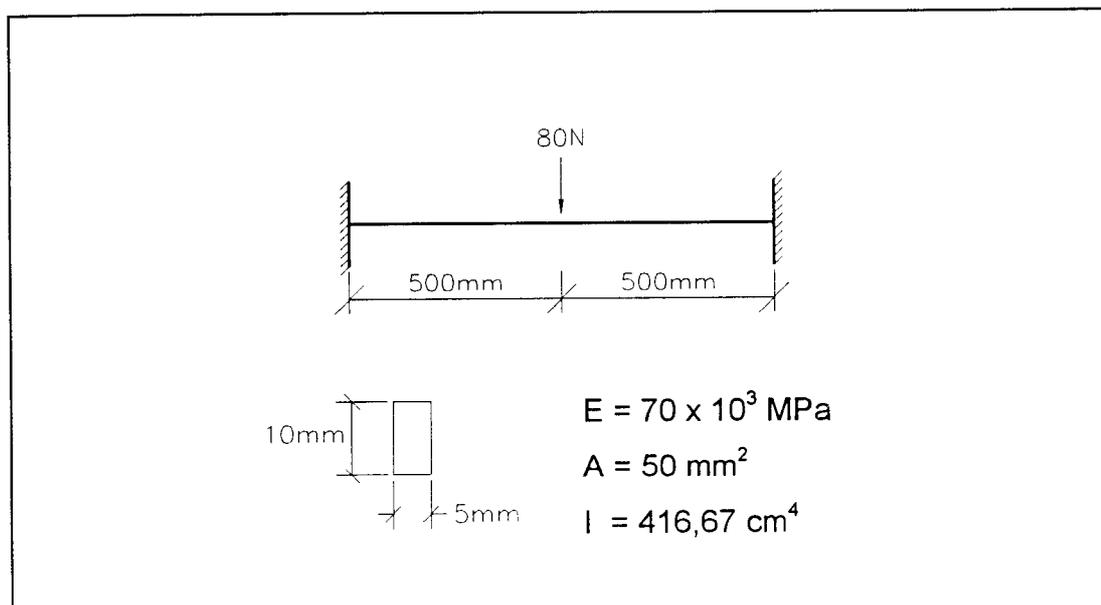


FIGURA 5.4 - Viga bi-engastada com uma carga concentrada no meio do vão

TABELA 5.3 - Resultados da análise da viga da Fig. 5.4

		ANSYS 5.0		PRESENTE TRABALHO	
		SEM NLG	COM NLG	SEM NLG	COM NLG
Máx. Desloc. Vert. (mm)		14.3	9.08	14.4	9.12
Máxima Rotação	(radianos)	0.0428	0.0266	0.0433	0.0267
	(graus)	2.45°	1.52°	2.48°	1.53°
Máx. Força Axial (N)		0	674	0	684

d) NLGP1-1: Pórtico de um andar e um vão

Os resultados obtidos para um pórtico simples de um andar e um vão, submetido a cargas verticais e a uma força horizontal são mostrados na Fig. 5.5. As propriedades geométricas indicadas se referem ao perfil W12x40, usado tanto para as colunas quanto para viga.

Este pórtico foi analisado, inicialmente, considerando cada barra da coluna ou viga composta de quatro elementos. Os resultados obtidos para os deslocamentos foram muito bons, entretanto, para $\alpha = 0,001$ e $\alpha = 0,01$

houve dificuldades de convergência para valores de P próximos à carga crítica elástica do pórtico, $P_{cr} \cong 4758$ kips. O pórtico foi, então, analisado considerando cada barra dividida em 10 elementos. Neste caso não houve nenhuma dificuldade significativa de convergência, mesmo além do limite da carga crítica. Consideraram-se 36 incrementos de carga e o número de iterações para se obter a solução do problema variou entre 3 e 6 para os diversos incrementos de carga num tempo de aproximadamente 4,5 minutos.

Os resultados são comparados com a solução aproximada apresentada por ORAN & KASSIMALI [87], através das curvas força x deslocamento da Fig. 5.5.

Os dados para traçado das curvas referentes a esta formulação estão apresentados na Tab. 5.4

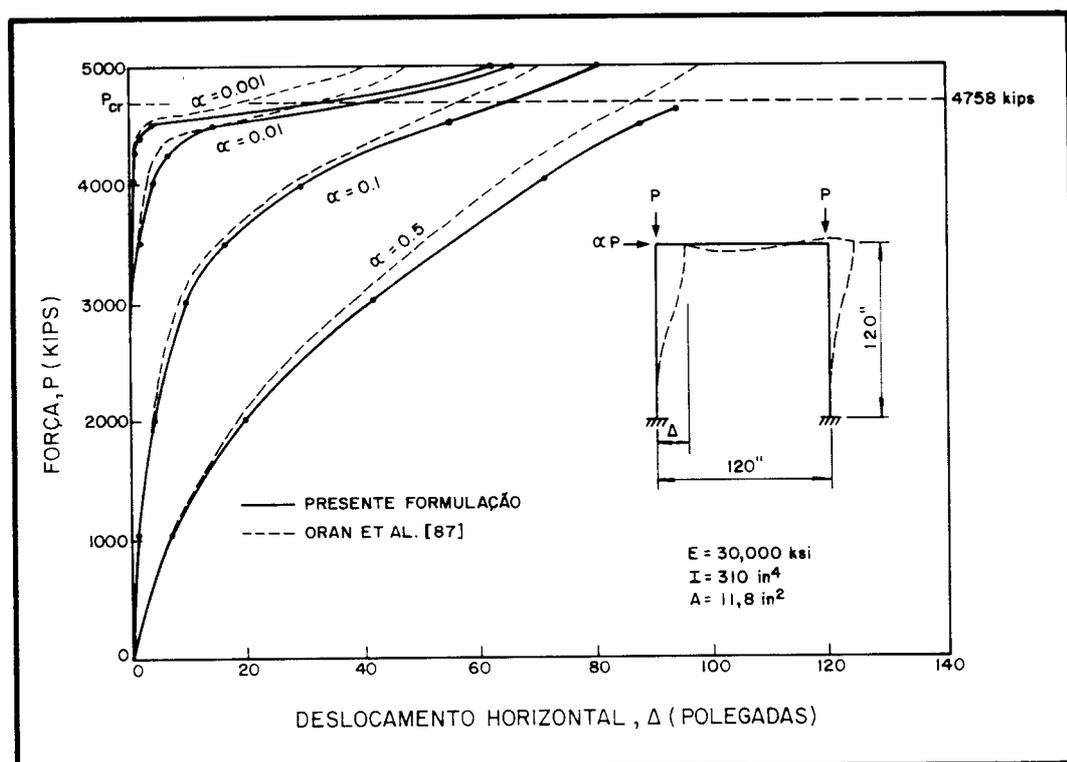


FIGURA 5.5 - CURVAS FORÇA x DESLOCAMENTO PARA O PÓRTICO SIMPLES

TABELA 5.4 - Resultados da análise força x deslocamento do pórtico da Fig. 5.5.

P (kips)	Deslocamento Horizontal em Polegadas			
	$\alpha = 0,001$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,5$
500	0.00649	0.06491	0.6492	3.2459
1000	0.01471	0.14710	1.4713	7.3427
1500	0.02548	0.25480	2.5483	12.6401
2000	0.04024	0.40239	4.0227	19.6463
2500	0.06176	0.61766	6.1660	29.0139
3000	0.09618	0.96192	9.5584	41.2483
3500	0.16025	1.60256	15.6387	55.9075
4000	0.32186	3.21527	28.3316	71.3056
4500	1.52400	13.7832	52.4669	86.9452
4650	12.9190	29.7737	60.7077	93.7353
5000	62.3310	64.8477	79.7093	-

Obs.: Para conversão, adotar: 1 kip = 4,448 kN; 1 in = 2,54 cm;

$$1 \text{ ksi} = 0,6895 \text{ kN/cm}^2$$

e) Comentários sobre os resultados

Os resultados obtidos nesta seção foram comparados com soluções exatas e aproximadas disponíveis. Os exemplos demonstraram que o programa desenvolvido para a formulação teórica deste trabalho é capaz de analisar uma grande variedade de problemas não-lineares com resultados considerados muito bons.

5.3 Exemplos Considerando NLGM

Os exemplos que serão apresentados nesta seção têm como objetivo mostrar a aplicação da presente formulação em problemas elasto-plásticos, que envolvem tanto a não-linearidade geométrica quanto a não-linearidade física dos materiais. As barras que compõem as estruturas planas são inicialmente retas e isentas de tensões residuais.

a) NLGM V-1: Viga bi-engastada com carga concentrada a 1/3 do vão

A viga bi-engastada com vão $l = 900$ cm, submetida a uma carga concentrada $P_c = 3125$ kN, situada a $l/3$ do apoio A, conforme é mostrado na Fig. 5.6, foi analisada considerando-se as hipóteses do cálculo plástico até a formação do mecanismo (rótulas plásticas-mecanismo de viga). A análise, desprezando-se a influência da força normal na formação das rótulas plásticas, foi feita passo-a-passo, estimando-se a flecha na seção B em cada etapa da resolução.

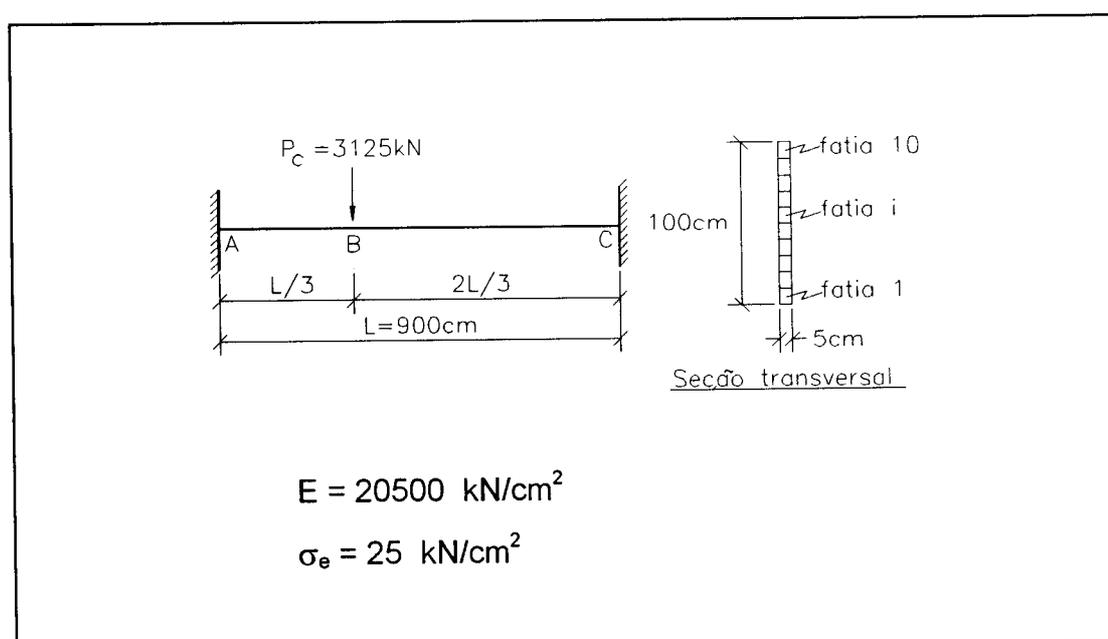


FIGURA 5.6 - Viga bi-engastada elasto-plástica

Os resultados obtidos da análise plástica são resumidos a seguir, mostrando, para cada etapa, a carga aplicada e a flecha no ponto B. O gráfico parâmetro de força x deslocamento desta análise é mostrado em linhas tracejadas na Fig. 5.7.

Cálculo Plástico - Análise Passo-a-Passo

Formação da primeira rótula plástica em A:

$$P = 0,75 P_c = 2343,75 \text{ KN} \quad \therefore \quad \Delta_b = 0,7137 \text{ cm}$$

Formação da segunda rótula plástica em B:

$$P = 0,96 P_c = 3000,00 \text{ KN} \quad \therefore \quad \Delta_b = 1,2544 \text{ cm}$$

Formação da terceira rótula plástica em C (mecanismo plástico)

$$P = 1,00 P_c = 3125,00 \text{ KN} \quad \therefore \quad \Delta_b = 2,1951 \text{ cm}$$

Em seguida esta viga foi analisada através da formulação teórica deste trabalho. Para isto, ela foi dividida em 9 elementos de comprimentos iguais a 100 cm e a seção transversal foi dividida em 10 fatias iguais, conforme mostrado na Fig. 5.6, para se ter uma boa avaliação da plastificação da seção transversal ao longo da sua altura. Quando uma fatia escoar, pode-se considerar que 10% da seção transversal está plastificada.

Os resultados obtidos desta análise, considerando 27 incrementos de carga, estão mostrados na Tab. 5.5 e representados no gráfico parâmetro de força x deslocamento da Fig. 5.7.

TABELA 5.5 - Resultados da análise da viga da Fig. 5.6 através da presente formulação.

$\frac{P}{P_c}$	Δ_B (cm)	Número de iterações	Seções Plastificadas e Percentual de Plastificação nestas Seções
0.05	0.0493	2	--
0.10	0.0985	2	--
0.15	0.1478	2	--
0.20	0.1971	2	--
0.25	0.2464	2	--
0.30	0.2956	2	--
0.35	0.3449	2	--
0.40	0.3942	2	--
0.45	0.4435	2	--
0.50	0.4927	2	--
0.55	0.5420	3	A = 10%
0.60	0.6020	7	A = 20%
0.65	0.6633	10	A = 40%
0.70	0.7405	10	A = 40%
0.75	0.8177	10	A = 40%
0.80	0.9320	16	A = 60% ; B = 20%
0.85	1.0596	18	A = 60% ; B = 40%
0.90	1.2654	26	A = 80% ; B = 40% ; C = 20%
0.95	1.7367	66	A = 80% ; B = 60% ; C = 40%
0.96	1.8694	70	A = 80% ; B = 70% ; C = 40%
0.97	2.1663	122	A = 80% ; B = 80% ; C = 40%
0.98	2.6498	234	A = 80% ; B = 80% ; C = 60%
0.99	3.1961	294	A = 90% ; B = 80% ; C = 70%
0.995	3.8343	482	A = 100% ; B = 80% ; C = 80%
1.00	4.5935	596	A = 100% ; B = 90% ; C = 80%
1.005	5.8548	962	A = 100% ; B = 100% ; C = 80%
1.01	Mecanismo Plástico :	A = 100% ; B = 100% ; C = 100%	

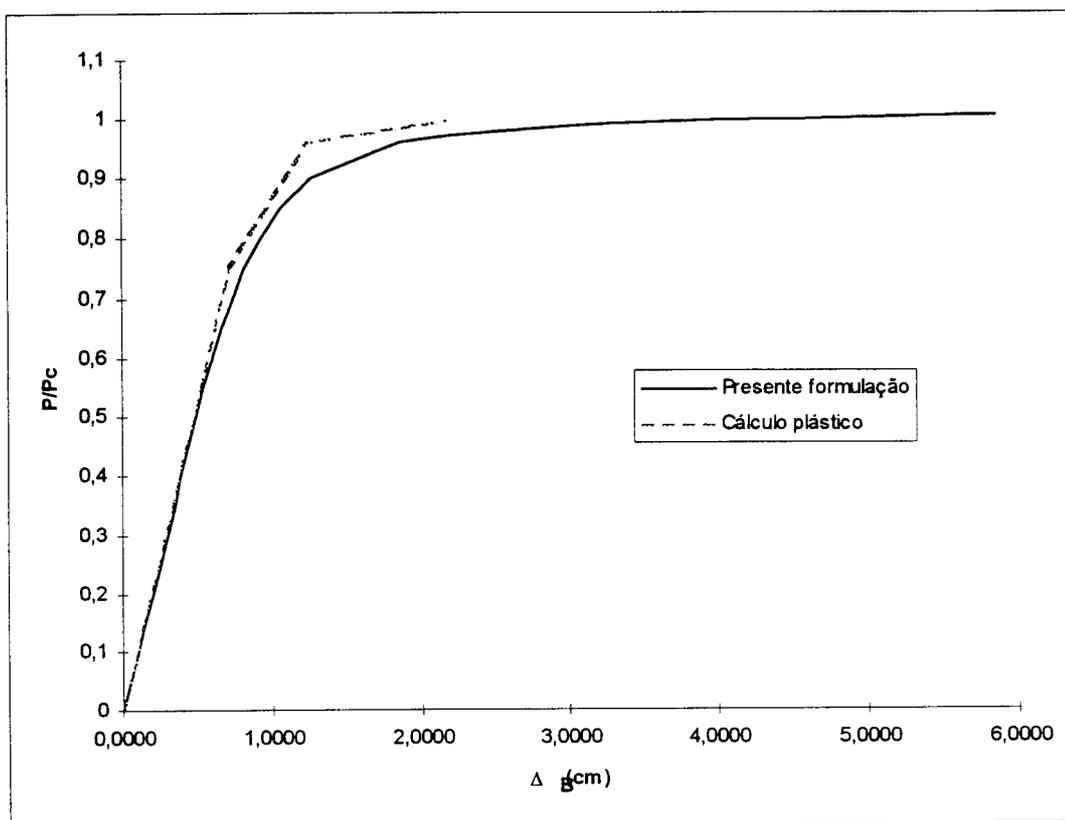


FIGURA 5.7 - Curvas parâmetro de força x deslocamento para a viga da Fig. 5.6

Observando-se a Tab. 5.5, alguns comentários podem ser feitos em relação às análises apresentadas. Em primeiro lugar, nota-se que a viga permanece totalmente elástica até o nível de 50% da carga de colapso P_c , segundo a formulação deste trabalho, enquanto que, pelo cálculo plástico, a viga é elástica até 75% da carga P_c .

No nível de carregamento de 55%, a formulação consistente mostra que a seção do engaste A tem a sua primeira fatia escoada e, que a rótula plástica não se forma instantaneamente na seção, mas há uma penetração gradual do escoamento ao longo da sua altura.

No nível de carregamento de 75%, o cálculo plástico já apresenta uma rótula completa na seção A e uma flecha de 0,7137 cm na seção B, enquanto que a presente formulação mostra que a seção A tem apenas 40% da sua seção plastificada e, que a seção B tem uma flecha 15% maior do que a flecha da análise plástica.

Quando o nível de carregamento atinge 80% de P_c , a seção B começa a escoar, antes que se forme uma rótula plástica completa na seção A, mostrando claramente que a plastificação se espalha ao longo do comprimento da viga e, portanto, as rótulas não se formam isoladamente como deixa entender o cálculo plástico.

Com 90% do carregamento a plastificação se espalha por todo o comprimento da viga, quando as seções A, B e C se encontram parcialmente plastificadas.

Ao se atingir 96% da carga de colapso, a análise plástica prevê a formação da segunda rótula plástica, desta feita, na seção B com uma flecha de 1,2544 cm. Pela análise deste trabalho, observa-se que as seções A, B e C estão parcialmente plastificadas, mas em nenhuma delas se formou uma rótula completa, e a flecha na seção B é 49% maior do que a determinada pelo cálculo plástico.

Finalmente, observa-se neste exemplo, que o mecanismo plástico se forma quase instantaneamente, ou seja, com 99% de carga as seções A, B e C apresentam praticamente o mesmo nível de plastificação; com 99,5% forma-se, na seção A, a primeira rótula completa; com 100% de carga a flecha é pelo menos 75% superior à flecha prevista pelo cálculo plástico; com 100,5% forma-se, na seção B, a segunda rótula completa para, em seguida, com 101% de carga, acontecer o mecanismo da viga.

Conclui-se destas observações, que o método do cálculo plástico prevê com boa precisão a carga de colapso de uma estrutura, mas é impreciso quando descreve a história do comportamento desta quanto à formação do mecanismo plástico e seus deslocamentos.

A coluna da Tab. 5.5 que mostra o número de iterações necessárias para a convergência do processo é também bastante elucidativa. Observa-se que no regime elástico (até 50% de P_c), a convergência é bastante fácil,

sendo necessárias apenas duas iterações para o final do processo. A partir do instante que a viga se torna inelástica, o processo de convergência fica mais demorado, como se observa claramente na Tab. 5.5 de 55% a 100% do carregamento. Nota-se ainda que quando a estrutura se aproxima do colapso (a partir de 95% de P_c), a convergência é extremamente demorada, permitindo concluir que, numa análise elasto-plástica incremental, os incrementos de carga na fase elástica podem ser maiores e quando a estrutura entra em fase inelástica, estes incrementos devem ser cada vez menores. O tempo gasto no processamento deste exemplo foi de aproximadamente 10 minutos.

b) NLGMP1-1: Pórtico de um andar e um vão numa análise elasto-plástica

O pórtico simples da Fig. 5.8 foi analisado por GALAMBOS [51] segundo vários métodos aproximados de análise, a saber: análise elástica em segunda-ordem, análise elasto-plástica em segunda-ordem e análise rígido-plástica em primeira e segunda-ordem. O gráfico $P/P_y \times \delta$ mostra o comportamento do pórtico até o colapso, conforme previsto por estas teorias, observando-se as seguintes definições para as cargas em destaque:

- $P_{p1} = 0,426 P_y$, é a carga máxima da análise rígido-plástica em primeira-ordem;
- $P_{A2} = 0,356 P_y$, é a carga limite superior que o pórtico pode suportar, limite este imposto pelas análises elástica em segunda-ordem e rígido-plástica em segunda-ordem;
- $P_{L2} = 0,332 P_y$, é a carga correspondente à formação da primeira rótula plástica;

$P_y = A \sigma_y$, é a carga de escoamento das colunas dada pelo produto da área bruta da coluna (A) pela tensão de escoamento σ_y .

Nesta análise observa-se que o mecanismo de colapso lateral acontece para uma carga bem próxima de $P_{L2} = 0,332 P_y$.

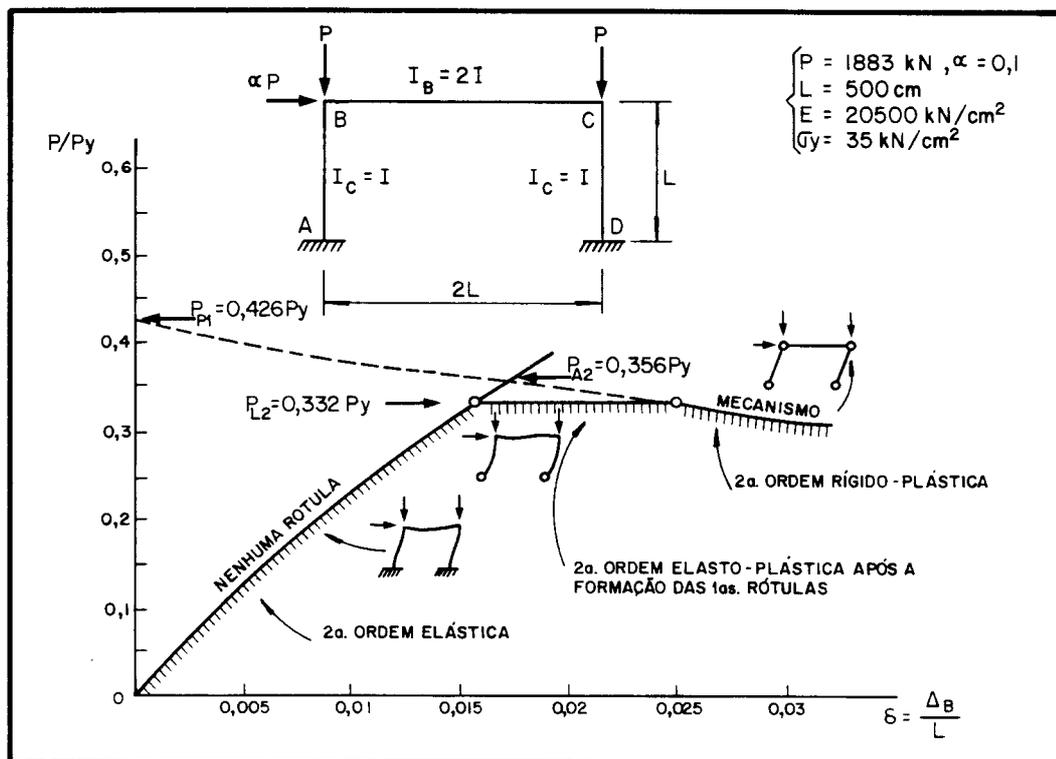


FIGURA 5.8 - CURVA PARÂMETRO DE CARGA x DESLOCAMENTO DO PÓRTICO DO EXEMPLO DADO

LAVALL [70] analisou este pórtico em teoria elástica de segunda-ordem, utilizando as funções de estabilidade, considerando perfil HPL 200 para as colunas e HPL 240 para a viga (perfis padrão europeu), que conservam, praticamente, as mesmas relações geométricas definidas por Galambos. Adotou-se também $\sigma_y = 35,00 \text{ KN/cm}^2$, $E = 20500 \text{ KN/cm}^2$, $P_y = 1883 \text{ KN}$, $L = 500 \text{ cm}$ e $\alpha = 0,1$.

Este pórtico é agora novamente analisado conforme a teoria deste trabalho considerando cada barra dividida em 4 elementos. Os resultados da análise são mostrados na Tab. 5.6, onde se verifica que a carga

correspondente ao mecanismo lateral vale $0,332P_y$, confirmando a previsão anterior. O tempo de processamento foi de aproximadamente 45 segundos.

TABELA 5.6 - Resultados da análise do pórtico da Fig. 5.8 através da presente formulação

$\frac{P}{P_y}$	Δ_B (cm)	$\delta = \frac{\Delta_B}{L}$	Número de Iterações
0.05	1.0074	0.0020	3
0.10	2.1076	0.0042	4
0.15	3.3143	0.0066	4
0.20	4.6439	0.0093	4
0.25	6.1162	0.0122	4
0.26	6.4298	0.0129	3
0.27	6.7503	0.0135	3
0.28	7.0780	0.0142	3
0.29	7.5695	0.0151	11
0.30	8.1523	0.0163	12
0.31	8.7694	0.0175	12
0.32	9.6152	0.0192	16
0.33	12.0058	0.0240	30
0.332	MECANISMO LATERAL		

Observa-se nesta tabela que na fase elástica, até $P = 0,28P_y$, o processo converge rapidamente com 3 ou 4 iterações apenas. No nível de carga $P = 0,29P_y$, há um acréscimo brusco no número de iterações, de 3 para 11. A análise do problema mostra que, neste instante, as extremidades inferiores A e D das colunas começam a se plastificar, com um aumento gradual da zona de plastificação destas seções até 31% do carregamento. Quando a carga atinge $P = 0,32 P_y$ ocorre outro aumento brusco no número de iterações. Neste instante, as extremidades superiores B e C das colunas

começam o seu processo de plastificação. Com 33% do carregamento a convergência se torna difícil (30 iterações), com as duas extremidades de cada coluna já num nível elevado de plastificação. Finalmente, quando $P = 0,332 P_y$ ocorre o mecanismo lateral de colapso da estrutura.

c) Comentários sobre os resultados

Os exemplos apresentados mostram que o método de análise incremental-iterativo, considerando-se tanto a não-linearidade geométrica quanto a não-linearidade do material (NLGM), desenvolvido neste trabalho, fornece excelentes resultados. O comportamento das estruturas, dentro da história do seu carregamento, pode ser melhor analisado tanto no aspecto da formação dos mecanismos plásticos quanto no cálculo mais preciso dos deslocamentos envolvidos. Para que não ocorram dificuldades de convergência, os incrementos de carga na fase elástica podem ser maiores, devendo decrescer quando começam a escoar as primeiras fatias das seções transversais das barras e devem ser muito pequenos quando a estrutura atinge um alto nível de plastificação.

5.4 Exemplos e Considerações Sobre as Imperfeições Iniciais nas Barras

5.4.1 Considerações Iniciais

Nas seções anteriores deste capítulo aplicou-se a formulação desenvolvida neste trabalho em problemas de vigas e pórticos planos formados de barras inicialmente retas e isentas de tensões residuais. Na realidade, todas as colunas são imperfeitas. Neste trabalho tem sido dada ênfase a dois tipos de imperfeições: as imperfeições geométricas, vistas aqui como as imperfeições iniciais ou curvaturas iniciais inevitáveis das

colunas e as imperfeições do material, causadas principalmente pelas tensões residuais presentes nas seções transversais das barras de aço. Nesta seção será estudado o comportamento de colunas imperfeitas geometricamente. O comportamento de colunas com imperfeição do material será discutido na seção seguinte.

O comportamento de colunas inicialmente curvas já foi examinado qualitativamente no contexto do Capítulo 2, notadamente na seção 2.2.3; em resumo, sabe-se que a presença de qualquer imperfeição geométrica transforma o estudo da estabilidade de colunas em um problema de cálculo de resistência-última (tipo carga x deslocamento), ao invés do problema de bifurcação.

O objetivo principal nesta seção é aplicar a formulação desenvolvida neste trabalho no estudo de barras com imperfeições iniciais, procurando mostrar a sua validade para, através dela, estudar a influência das imperfeições iniciais na resistência das colunas de aço. Sendo assim, inicialmente apresenta-se um estudo de uma coluna elástica bi-rotulada, inicialmente imperfeita, através de uma formulação analítica clássica. Em seguida os resultados deste estudo são usados para mostrar, de forma comparativa, a validade e precisão do presente método e, finalmente, aplica-se este método no estudo de colunas para se obter resultados que mostrem, quantitativamente, a influência das imperfeições iniciais nas suas resistências.

5.4.1.1) Coluna bi-rotulada com imperfeição inicial

A Fig. 5.9a mostra uma coluna elástica bi-rotulada, geometricamente imperfeita, com uma curvatura inicial apresentando uma flecha δ_0 em $x = l/2$. Admite-se, para simplificação de cálculo, que a curvatura inicial tenha a forma de meia curva do seno descrita por:

$$y_0 = \delta_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad (5.4)$$

que satisfaz as condições de contorno do problema.

Considerando-se o equilíbrio de um segmento da coluna (Fig. 5.9b), a equação de equilíbrio fica:

$$-M_{\text{int}} + P(y + y_0) = 0 \quad (5.5)$$

O momento interno resistente é:

$$M_{\text{int}} = -EI y'' \quad (5.6)$$

Este momento interno resulta da mudança na curvatura y'' e não da curvatura total $y'' + y_0''$, uma vez que é implicitamente admitido que a coluna é livre de tensão na sua posição inicialmente curva, antes da aplicação da carga P .

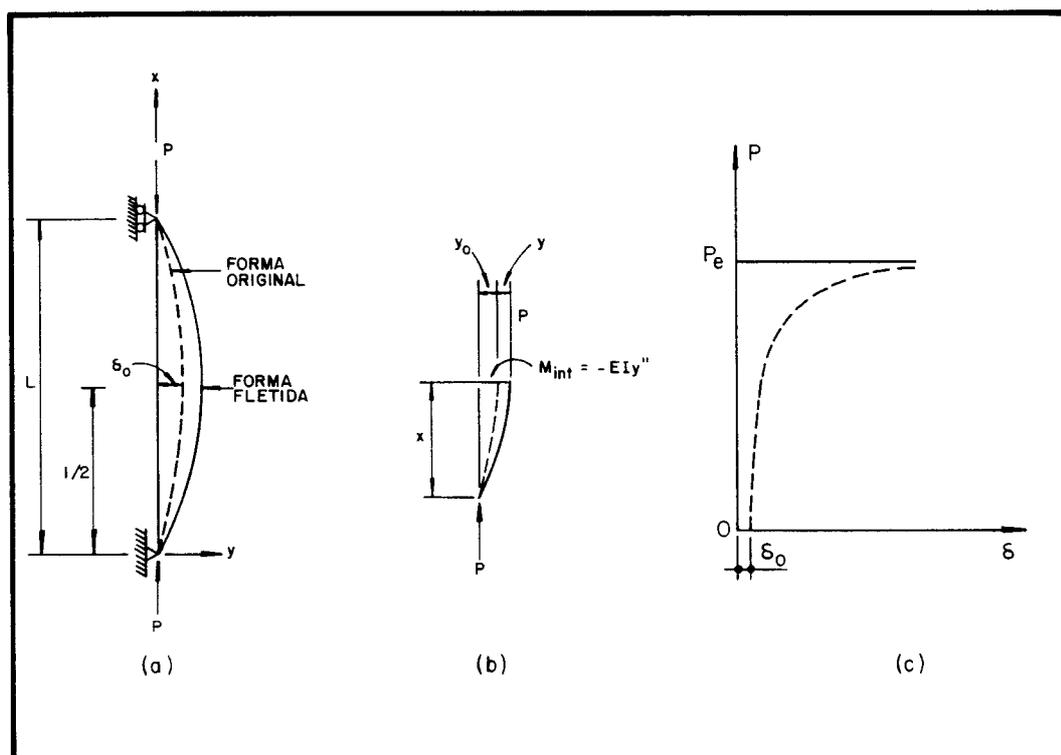


FIGURA 5.9 - COLUNA ELÁSTICA COM IMPERFEIÇÃO INICIAL

Levando-se a Eq. (5.6) na Eq. (5.5), obtém-se a equação diferencial que descreve o comportamento de uma coluna bi-rotulada com curvatura inicial.

$$EIy'' + P(y + y_0) = 0 \quad (5.7)$$

fazendo-se $k^2 = P/EI$ e usando-se a Eq. (5.4), tem-se:

$$y'' + k^2y = -k^2\delta_0^2 \text{sen} \frac{\pi x}{l} \quad (5.8)$$

A solução geral desta equação é dada por:

$$y = A \text{sen} kx + B \cos kx + \frac{P/P_e}{1-P/P_e} \delta_0 \text{sen} \frac{\pi x}{l} \quad (5.9)$$

onde $P_e = \pi^2 EI/l^2$ é a carga de Euler.

Usando-se as condições de contorno $y(0) = 0$ e $y(l) = 0$, determinam-se as constantes A e B.

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad (5.10)$$

$$y(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \text{sen} kl = 0 \quad (5.11)$$

Da Eq. 5.11 tem-se que ou $A = 0$ ou $\text{sen} kl = 0$. Adotando-se $\text{sen} kl = 0$, chega-se novamente a $P = P_e$. Logo, deve-se ter $A = 0$. Com $A = B = 0$, a Eq. (5.9) fica:

$$y = \frac{P/P_e}{1-P/P_e} \delta_0 \text{sen} \frac{\pi x}{l} \quad (5.12)$$

A Eq. (5.12) expressa a linha elástica com relação à posição inicial curva da coluna. Para se obter a equação da linha elástica total, isto é, em relação ao eixo x, deve-se somar a Eq. (5.4) à Eq. (5.12).

$$y_t = y_o + y \quad (5.13)$$

ou

$$y_t = \frac{1}{1-P/P_e} \delta_o \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad (5.14)$$

ou seja,

$$y_t = \frac{1}{1-P/P_e} y_o \quad (5.14a)$$

o que mostra que a flecha final é a flecha inicial majorada pelo fator $1/(1-P/P_e)$, denominado fator de amplificação A_f .

$$A_f = \frac{1}{1-P/P_e} \quad (5.15)$$

O momento na coluna é:

$$M = P (y + y_o) = P y_t \quad (5.16)$$

que com o auxílio das Eq. (5.14) ou (5.14a) fica:

$$M = \left(\frac{1}{1-P/P_e} \right) P \cdot \delta_o \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad \text{ou} \quad M = \left(\frac{1}{1-P/P_e} \right) P \cdot y_o \quad (5.17)$$

Chamando de momento de primeira-ordem, avaliado considerando a geometria inicial da coluna:

$$M_I = P y_o \quad (5.18)$$

tem-se que:

$$M_{II} = A_f M_I \quad (5.19)$$

onde M_{II} é o momento de segunda-ordem, avaliado com base na geometria deformada.

Na Fig. 5.9c é mostrado qualitativamente o comportamento de barras elásticas com imperfeição inicial, através das linhas tracejadas do gráfico $P \times \delta$, conforme a teoria em segunda-ordem e pequenos deslocamentos apresentada. Observa-se que quando a carga P tende à carga de Euler P_e , o deslocamento total tende para o infinito, conforme estabelece as Eq. (5.14) e (5.14a).

5.4.2 Exemplos

a) IMP1: Coluna elástica bi-rotulada com imperfeição inicial

Este exemplo é apresentado com dois objetivos principais, a saber: mostrar a influência da forma da configuração da elástica da imperfeição inicial da coluna nos resultados finais e avaliar a precisão destes resultados obtidos através da presente formulação.

Para simplificar o estudo analítico das colunas com imperfeições iniciais, é comumente admitido que a curvatura inicial tem a forma de meia curva do seno, como faz, por exemplo, CHEN et al. [34] e, é frequentemente assumido que esta curva permanece tanto na fase elástica quanto na fase plástica.

Sabendo-se que a configuração real das imperfeições iniciais de uma coluna é bastante complexa, vários pesquisadores, entre eles,

BATTERMAN et al. [18], BEER et al. [20] e BJORHOVDE [21], também utilizam em seus trabalhos a forma senoidal para descrever a elástica causada pela curvatura inicial. BATTERMAN et al. [18] e GALAMBOS [50] concluem que as resistências das colunas são levemente sub-estimadas numa análise por computador, quando baseada na hipótese de que uma imperfeição inicial na forma de uma senóide permanece durante todo o carregamento.

No desenvolvimento teórico deste trabalho, adotou-se na seção 3.8 uma interpolação parabólica quadrática para os deslocamentos de rotação α , Eq. (3.117), entre o eixo do elemento deformado e a corda que une as suas extremidades. Na seção 3.9.1.1 foi adotada a mesma função de interpolação para as imperfeições iniciais, definidas pelo ângulo β , Eq. (3.152). Sendo assim, de forma coerente com a formulação adotada, os resultados considerando a forma parabólica para a configuração da elástica da imperfeição inicial serão também determinados.

Com a finalidade de se avaliar a precisão dos resultados obtidos através desta formulação, estes são comparados com os resultados da formulação analítica anterior.

Para se alcançar estes objetivos, a coluna bi-rotulada da Fig. 5.9a foi analisada elasticamente, considerando o módulo de elasticidade $E = 20500$ kN/cm² e o vão $l = 600$ cm. A seção transversal quadrada de (12×12) cm² foi dividida em 10 fatias ao longo da altura e foi adotada a flecha inicial no meio do vão de $\delta_0 = l/1000$. A carga crítica de Euler vale $P_e = 971,17$ kN.

Inicialmente, a viga foi dividida em 10 elementos de comprimentos iguais, para ser analisada considerando ambas as formas, senoidal e parabólica, para a elástica das imperfeições iniciais. Em seguida,

considerando apenas a forma parabólica, a viga foi analisada com 6 e 8 elementos.

TABELA 5.7 - Resultados em deslocamentos no meio do vão da coluna da Fig. 5.9.

$\frac{P}{P_e}$	δ no meio do vão (cm)				
	Formulação Analítica Eq. (5.14a)	Presente Formulação			
		Senóide	Parábola		
			10 elem.	10 elem.	8 elem.
0.10	0.0667	0.0668	0.0687	0.0683	0.0676
0.20	0.1500	0.1503	0.1546	0.1538	0.1518
0.30	0.2571	0.2577	0.2653	0.2635	0.2598
0.40	0.4000	0.4010	0.4129	0.4097	0.4030
0.50	0.6000	0.6018	0.6199	0.6142	0.6021
0.55	0.7333	0.7358	0.7580	0.7503	0.7339
0.60	0.9000	0.9034	0.9309	0.9202	0.8977
0.65	1.1143	1.1190	1.1533	1.1382	1.1066
0.70	1.4000	1.4070	1.4503	1.4282	1.3821
0.75	1.8000	1.8107	1.8669	1.8327	1.7625
0.80	2.4000	2.4177	2.4932	2.4364	2.3211
0.85	3.4000	3.4330	3.5408	3.4338	3.2220
0.90	5.4000	5.4750	5.6475	5.3950	4.9165
0.95	11.4000	11.6271	11.9881	10.9729	9.2579
0.96	14.4000	14.6520	15.0977	13.5599	11.0758
0.97	19.4000	19.4643	20.0258	17.5211	13.6814
0.98	29.4000	27.6424	28.3263	24.0345	–
0.99	55.4000	40.9263	41.6045	34.9330	–
1.00	∞	57.5457	58.0492	50.3512	–
1.05	–	120.195	120.286	115.962	–

TABELA 5.8 - Resultados em momentos fletores na seção central da coluna da Fig. 5.9.

$\frac{P}{P_e}$	Momento Fletor em $x = l/2$ (KN x cm)				
	Formulação Analítica Eq. (5.17)	Presente Formulação			
		Senóide	Parábola		
			10 elem.	10 elem.	8 elem.
0.10	64.745	64.755	64.941	64.907	64.834
0.20	145.676	145.730	146.576	146.404	146.035
0.30	249.729	249.889	252.092	251.586	250.500
0.40	388.468	388.855	393.481	392.255	389.633
0.50	582.702	583.573	592.358	589.584	583.723
0.55	712.191	713.492	725.380	721.250	712.508
0.60	874.053	876.012	892.034	885.811	872.701
0.65	1082.16	1085.16	1106.80	1097.26	1077.28
0.70	1359.64	1364.37	1393.85	1378.79	1347.49
0.75	1748.11	1755.91	1796.81	1771.94	1720.76
0.80	2330.81	2344.59	2403.20	2359.07	2269.55
0.85	3301.98	3329.23	3418.17	3329.91	3155.01
0.90	5244.32	5309.85	5460.65	5239.97	4821.74
0.95	11071.3	11280.8	11613.9	10677.2	9094.99
0.96	13984.8	14219.8	14635.3	13201.6	10885.6
0.97	18840.7	18901.2	19430.2	17070.7	13453.6
0.98	28552.4	26879.6	27530.5	23445.8	—
0.99	57687.5	39925.8	40577.8	34163.5	—
1.00	∞	56469.4	56958.4	49482.2	—
1.05	—	123178.0	123271.0	118861.0	—

Os resultados desta análise estão mostrados nas Tab. 5.7 e Tab. 5.8, onde estão listados os deslocamentos no meio do vão da coluna e os

momentos fletores nesta seção central, respectivamente, em função da carga P aplicada na seção, de forma incremental, considerando as várias hipóteses de análise.

Observa-se, nestas tabelas, que os resultados da presente formulação considerando-se 10 elementos e, tanto a forma senoidal quanto a forma parabólica para a configuração da imperfeição inicial, são bastante próximos entre si e estes, por sua vez, são apenas pouco superiores aos valores obtidos pela formulação analítica, confirmando assim a boa precisão dos resultados.

Considera-se também que os resultados da presente análise são mais corretos do que os resultados da formulação analítica, principalmente para valores próximos à carga crítica, uma vez que, em se tratando de um problema de equilíbrio estável, a presente formulação fornece resultados até para valores superiores à carga P_e , enquanto que a formulação analítica não consegue prever estes resultados.

Outra constatação interessante e importante que se pode fazer observando-se as Tab. 5.7 e 5.8, é que os resultados obtidos, usando-se a forma senoidal para a elástica da imperfeição inicial, são levemente subestimados em relação aos resultados obtidos com a forma parabólica, podendo estes estarem mais próximos das conclusões de BATTERMAN et al. [18] e GALAMBOS [50] citadas anteriormente. Sendo assim, a forma parabólica para a elástica da imperfeição inicial será adotada ao longo deste trabalho, mantendo-se a coerência teórica da formulação e constituindo-se num procedimento original para se levar em conta as imperfeições iniciais das barras nas análises por computador. Pode-se concluir também, que outras funções de interpolação para expressar a elástica da imperfeição inicial podem ser adotadas através desta

formulação, esperando-se bons resultados, enquanto as imperfeições iniciais definidas pelo ângulo β forem pequenas.

Ainda em relação às Tab. 5.7 e 5.8, nota-se também que os deslocamentos e momentos fletores obtidos das análises com 10, 8 e 6 elementos, considerando-se a elástica parabólica, podem ser considerados muito bons. Apenas a partir de 90% da carga crítica, a análise com 6 elementos começa a apresentar resultados não tão próximos dos resultados obtidos com 8 e 10 elementos. No caso da análise com 6 elementos há dificuldades para a convergência dos resultados a partir de 98% de P_e , enquanto que para 8 e 10 elementos, os resultados convergem, até facilmente (7 ou 8 iterações), mesmo para cargas superiores a P_{cr} .

O número médio de iterações foi de 4 até 95% de P_e , alcançando 14 iterações para $P = 0,99 P_e$ na formulação parabólica com 10 elementos, num tempo total de processamento em torno de 1,25 minutos.

b) IMP 2: Curvas de resistência-última da coluna da Fig. 5.9

A finalidade principal deste exemplo é mostrar a influência das imperfeições iniciais na resistência das colunas, tanto no regime elástico quanto no regime plástico.

Na análise de barras que falham no regime inelástico do comportamento das colunas, os efeitos da curvatura inicial não são bastante evidentes, uma vez que nesta região as tensões residuais interagem com essas imperfeições num fenômeno mais complexo. O estudo dos efeitos isolados das imperfeições iniciais nas regiões elástica e inelástica pode ser feito através desta formulação, ao se admitir que as tensões residuais nas seções transversais são nulas.

Como já afirmado anteriormente, a maioria dos pesquisadores têm adotado a forma senoidal para a elástica das imperfeições iniciais de uma

barra, com uma flecha máxima, δ_0 , no meio do vão, dada em função do seu comprimento. Assim, no desenvolvimento das curvas de flambagem da ECCS [47, 48], BEER et al. [20] usaram a forma senoidal e adotaram a flecha $\delta_0 = l/1000$ (também adotada pela NBR-8800/86 [13]). BJORHOVDE [21] adotou a forma senoidal e a flecha $\delta_0 = l/1470$ no desenvolvimento das curvas SSRC-1P, 2P e 3P, mais tarde assimilado pelo AISC/LFRD [7].

Para se estudar a influência das imperfeições iniciais na resistência das colunas, toma-se novamente a coluna bi-rotulada da Fig. 5.9, com os mesmos dados anteriores, acrescentando-se a tensão de escoamento $\sigma_y = 25,00 \text{ kN/cm}^2$ e traçam-se os gráficos $\frac{P_{\max}}{P_y} \times \lambda$, onde λ é o índice de esbelteza da coluna.

Neste caso é adotada a função parabólica quadrática para a elástica das imperfeições iniciais. A viga é composta por 10 elementos e a seção transversal é dividida em 10 fatias. Os valores de P_{\max} serão pesquisados para os seguintes valores de λ : 20, 40, 60, 80, 100, 120, 150, 173 e 200, e para os seguintes valores de δ_0 : $l/1500$, $l/1000$ e $l/500$.

A Fig. 5.10 e a Tab. 5.9 mostram os resultados desta análise. As curvas de resistência máxima da Fig. 5.10 são traçadas com os dados da Tab. 5.9.

Os gráficos da Fig. 5.10 e os dados da Tab. 5.9 são bastante elucidativos. Observa-se com clareza a grande influência que as imperfeições iniciais têm na resistência das colunas, causando uma redução considerável nestes valores em todo o domínio das esbeltezas das colunas. Neste caso, a redução de resistência tanto na fase elástica quanto na fase inelástica, é devida ao efeito isolado das imperfeições iniciais, uma vez que a análise foi feita considerando-se nulas as tensões residuais.

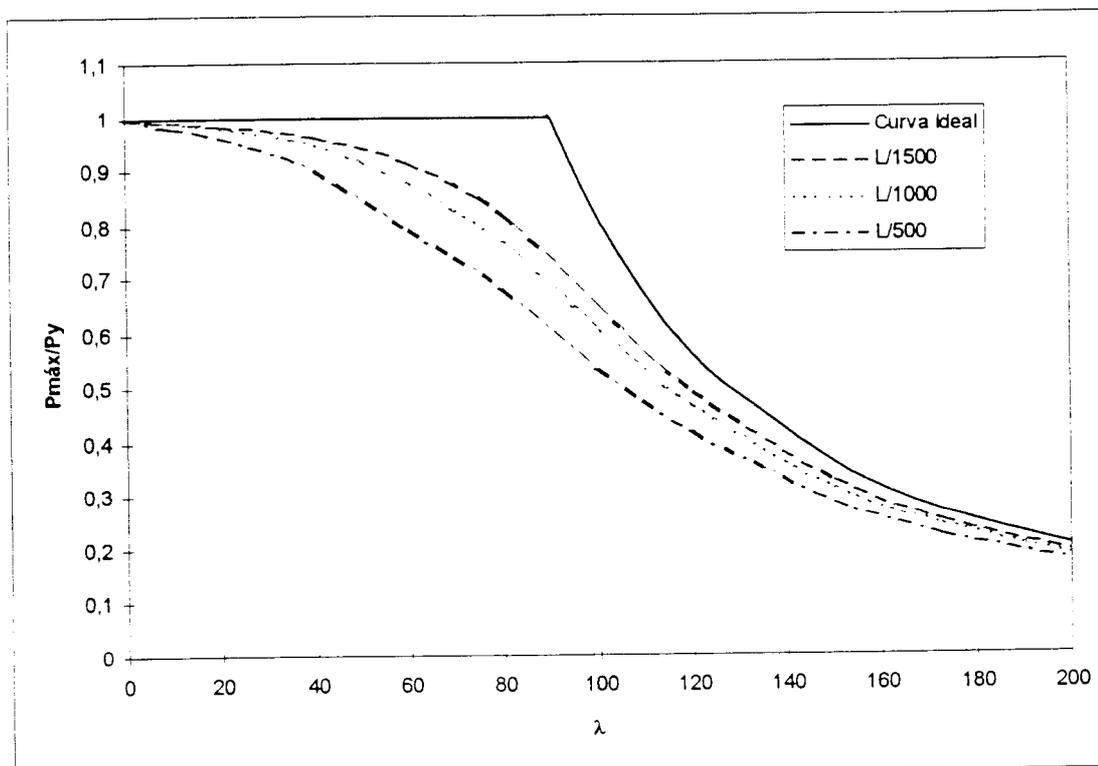


FIGURA 5.10 – Curvas de resistência máxima da coluna da Fig. 5.9 para $\delta_o = L/1500$, $L/1000$ e $L/500$

TABELA 5.9 - Valores de $P_{máx}/P_y$ da coluna da Fig. 5.9 considerando várias imperfeições iniciais δ_o .

λ	$P_{máx}/P_y$			
	$\delta_o = 0$	$\delta_o = L/1500$	$\delta_o = L/1000$	$\delta_o = L/500$
20	1.000	0.985	0.980	0.965
40	1.000	0.965	0.950	0.900
60	1.000	0.915	0.880	0.790
80	1.000	0.820	0.770	0.680
100	0.809	0.647	0.607	0.534
120	0.562	0.489	0.466	0.416
150	0.360	0.329	0.317	0.288
173	0.270	0.251	0.245	0.224
200	0.202	0.191	0.186	0.174

Algumas observações podem ser feitas para o conjunto das três imperfeições iniciais não nulas. Além de mostrar que elas reduzem a resistência das colunas, observa-se que este efeito redutor é bastante acentuado na região de $40 \leq \lambda \leq 120$, das esbeltezes intermediárias, justamente onde se encontram a maioria das colunas da prática da engenharia. Os efeitos das imperfeições iniciais na resistência das colunas alcançam um valor máximo quando $\lambda = \lambda_{lim}$. Neste caso, $\lambda_{lim} = 90$.

Numa comparação entre as várias imperfeições iniciais adotadas, observa-se claramente a redução drástica causada por $\delta_0 = L/500$. Entre as curvaturas iniciais com $\delta_0 = L/1500$ e $\delta_0 = L/1000$, as diferenças não são relevantes, sendo maiores na região entre $60 \leq \lambda \leq 100$, quando pode atingir aproximadamente 5%.

c) Comentários sobre os resultados

Os exemplos apresentados nesta seção mostram que a formulação desenvolvida no presente trabalho, para se estudar barras com imperfeições iniciais, fornece resultados muito bons quando comparados com outras formulações de vários pesquisadores.

O uso de funções parabólicas quadráticas para interpolação da elástica da curvatura inicial, que será usada ao longo deste trabalho, mantém-se coerente com a formulação teórica adotada e se constitui numa inovação no estudo das imperfeições iniciais por computador.

Os exemplos demonstraram que o programa desenvolvido é capaz de analisar problemas que envolvem barras com imperfeições iniciais, tanto na fase elástica quanto na fase inelástica, com resultados considerados muito bons.

5.5 Exemplos e Considerações sobre as Tensões Residuais nos Perfis de Aço

5.5.1 Considerações Iniciais

Nesta seção será estudado o comportamento de colunas com imperfeições do material (NLM), causadas principalmente pelas tensões residuais existentes nas seções transversais das barras de aço.

Uma descrição qualitativa sobre a influência das tensões residuais na resistência das colunas de aço foi feita no contexto do Capítulo 2, notadamente na seção 2.2.2. Em resumo, conforme afirmam ALPSTEN & TALL [2], a principal causa da não-linearidade do diagrama tensão x deformação da seção transversal das barras de aço são as tensões residuais, que aparecem como resultado do processo de fabricação dos perfis soldados ou laminados.

O objetivo principal nesta seção é aplicar a formulação deste trabalho no estudo de barras de aço cujas seções transversais contém tensões residuais. Inicialmente procura-se mostrar a validade e a precisão da formulação para, através dela, estudar de forma quantitativa, a influência das tensões residuais na resistência das colunas de aço.

Para alcançar este objetivo recorre-se a SALMON & JOHNSON [111] onde, na seção 6.6, é feita uma formulação analítica aproximada para o desenvolvimento de curvas de resistência de colunas incluindo as tensões residuais.

Com a sua formulação Salmon e Johnson estabelecem a curva de resistência de uma coluna considerando uma distribuição linear das tensões residuais nas mesas do perfil, conforme mostrada na Fig. 5.11a. É analisada a flambagem em torno do eixo de menor inércia de um perfil H de aço com tensão de escoamento $\sigma_y = 36 \text{ ksi} (\cong 250 \text{ MPa})$. Admite-se o comportamento

elasto-plástico ideal para o aço, conforme indicado na Fig. 5.11b e despreza-se o efeito da alma na análise. Os resultados desta análise são utilizados na seção seguinte para comparação de resultados. (Ver Tab. 5.10)

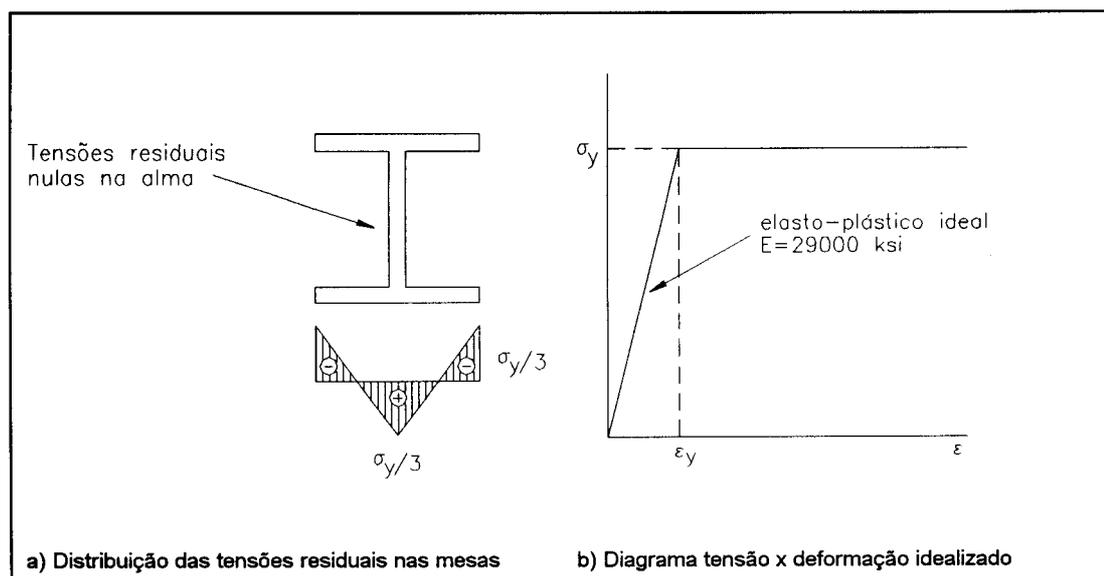


FIGURA 5.11 - Dados para os exemplos da seção 5.5.2

5.5.2 Exemplos

a) TRES 1: Resistência de colunas com tensões residuais considerando a flambagem em relação ao eixo de menor inércia.

Os objetivos principais a serem buscados com este exemplo são: avaliar a precisão da formulação deste trabalho, comparando-se os resultados com os da ref. [111]; mostrar a influência das tensões residuais na resistência das colunas de aço e avaliar a influência relativa das tensões residuais, quando se trabalha com aço de alta-resistência com tensão de escoamento $\sigma_y = 50 \text{ ksi} (\cong 345 \text{ MPa})$.

Para isto, o exemplo da ref. [111] é avaliado através da formulação do presente trabalho considerando-se os dados apresentados na Fig. 5.11

para o perfil HP 8" x 36. É considerada uma coluna bi-rotulada formada por 10 elementos de comprimentos iguais. As mesas do perfil foram divididas em 22 fatias para se representar adequadamente o modelo linear de distribuição das tensões residuais da Fig. 5.11.

Para a análise considerando-se aço de alta-resistência com $\sigma_y = 50$ ksi foram admitidos o mesmo valor e o mesmo modelo de distribuição das tensões residuais, uma vez que o efeito do limite de escoamento do aço na distribuição das tensões residuais não é tão relevante quanto os efeitos da geometria, conforme afirma GALAMBOS [50].

Os resultados desta análise estão mostrados na Tab. 5.10, onde são listados as tensões críticas relativas e o percentual da seção transversal que se torna plástica em cada análise, para cada valor do índice de esbeltez considerado.

TABELA 5.10 - Resultados da análise da resistência de colunas com tensões residuais conforme os dados da Fig. 5.11

λ	$\sigma_y = 36 \text{ ksi } (\cong 250 \text{ MPa}) ; \lambda_{lim} = 109,2$				$\sigma_y = 50 \text{ ksi } (\cong 345 \text{ MPa}); \lambda_{lim} = 86,8$	
	Ref. [111]		Presente Formulação		Presente Formulação	
	σ_{cr} / σ_y	% plast.	σ_{cr} / σ_y	% plast.	σ_{cr} / σ_y	% plast.
109.2	0.660	0	0.660	0	0.475	0
89	0.730	10	0.740	10	0.720	0
72	0.787	20	0.800	20	0.810	10
57	0.837	30	0.850	30	0.870	20
46.1	0.880	40	0.900	40	0.910	30
32.9	0.917	50	0.940	50	0.940	40
23.2	0.947	60	0.950	60	0.950	50
8.00	0.987	80	0.970	70	0.980	80

Os objetivos a serem alcançados, propostos no início do problema, podem ser avaliados observando-se os dados da Tab. 5.10.

Em primeiro lugar observa-se que os resultados da ref [111] e da presente formulação, considerando $\sigma_y = 36$ ksi, são bastante próximos, tanto para as tensões relativas quanto para o percentual de plastificação da seção transversal; sendo que os resultados da presente formulação são levemente superiores. Um dos motivos para isto reside no fato de que a formulação analítica aproximada não considera o efeito de alma na análise, a qual é levada em conta pela presente formulação.

Em segundo lugar observa-se a grande influência das tensões residuais na resistência das colunas de aço na região inelástica onde $\lambda \leq \lambda_{lim}$. Ocorre uma grande redução nas tensões críticas que alcançam um valor máximo em $\lambda = \lambda_{lim}$.

Por último, os dados da Tab. 5.10 mostram que as resistências de colunas feitas de aço de alta-resistência ($\sigma_y = 50$ ksi) são levemente menos influenciadas pelas tensões residuais do que as resistências de colunas feitas de aço comum ($\sigma_y = 36$ ksi).

Nesta análise a convergência da solução foi bastante rápida com apenas duas iterações em média.

b) TRES 2: Resistência de coluna com distribuição parabólica de tensões residuais

Este exemplo é apresentado com a finalidade de se analisar a influência na resistência das colunas dos diferentes modelos de distribuição de tensões residuais nos perfis de aço.

Os modelos de distribuição de tensões residuais nas mesas de perfis laminados que são usualmente adotados, estão entre as distribuições lineares e parabólicas conforme ilustrado na Fig. 5.12.

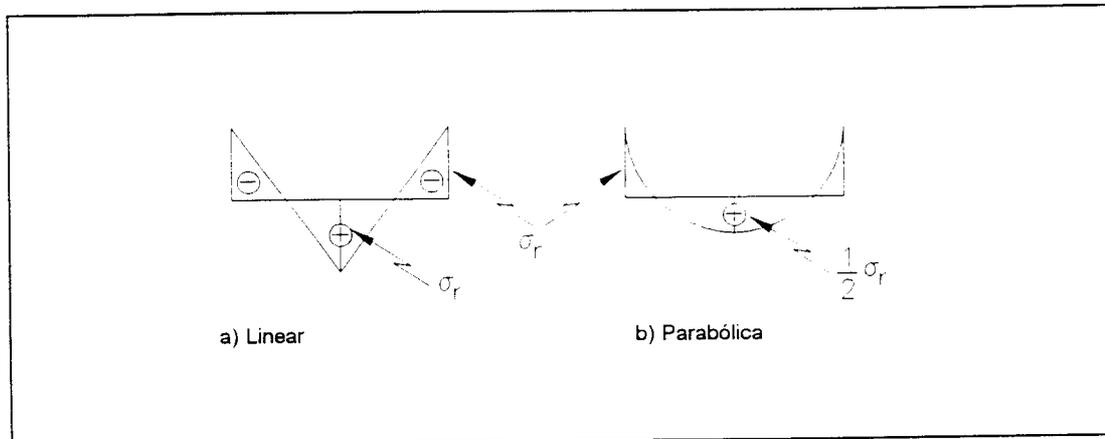


FIGURA 5.12 - Modelos de distribuição de tensões residuais nas mesas de perfis laminados usualmente adotados

Sendo assim, resolve-se novamente o problema proposto no item anterior, considerando-se a flambagem em torno do eixo de menor inércia do perfil HP 8" x 36 com $\sigma_y = 36$ ksi. A coluna tem 10 elementos, a seção transversal é dividida em 22 fatias e admite-se agora uma distribuição parabólica das tensões residuais nas mesas do perfil, conforme o modelo da Fig. 5.12b. Adotou-se neste caso o valor máximo de $\sigma_{rc} = -12$ ksi ($\cong 83$ MPa), para as tensões residuais de compressão nas extremidades das mesas do perfil e o valor máximo de $\sigma_{rt} = 6,75$ ksi ($\cong 46,5$ MPa), para as tensões residuais de tração no centro da mesa.

Os resultados da análise estão mostrados na Tab. 5.11, onde são listadas as tensões críticas relativas e o percentual da seção transversal que se torna plástica durante a análise, para cada valor do índice de esbelteza considerado. A comparação é feita considerando-se a distribuição linear das tensões residuais do exemplo anterior.

Os dados da Tab. 5.11 permitem concluir que uma coluna reta, com um modelo de distribuição linear de tensões residuais, pode ter uma resistência máxima em torno de 4% menor do que a resistência máxima considerando a distribuição parabólica das tensões residuais. Então, o uso geral do modelo linear de tensões residuais leva a resultados que são conservativos para perfis laminados à quente.

TABELA 5.11 - Resultados da análise da resistência de colunas com distribuições lineares e parabólicas das tensões residuais nas mesas dos perfis

Presente Formulação - $\sigma_y = 36 \text{ ksi} (\cong 250 \text{ MPa})$ - $\lambda_{lim} = 109,2$				
λ	Dist. Linear das T. Res.		Dist. Parabólica das T. res.	
	σ_{cr} / σ_y	% plast.	σ_{cr} / σ_y	% plast.
109.2	0.66	0	0.65	0
89	0.74	10	0.74	10
72	0.80	20	0.81	20
57	0.85	30	0.88	30
44.1	0.90	40	0.94	40
32.9	0.94	50	0.96	50
23.2	0.95	60	0.97	60
8.0	0.97	80	0.98	70

Novamente, o programa PPLANLEP desenvolvido neste trabalho levou à soluções convergentes com bastante rapidez, sendo necessárias duas iterações em média, com um máximo de três.

c) TRES 3: Resistência de colunas com tensões residuais considerando a flambagem em relação aos eixos de maior e menor inércia.

Neste exemplo procura-se analisar a influência das tensões residuais na resistência de colunas de aço formadas de perfis I ou H, quando se considera a flambagem em relação aos eixos de maior ou de menor inércia.

Para isto a coluna bi-rotulada formada pelo perfil HP 8" x 36, com $\sigma_y = 36 \text{ ksi}$ é novamente analisada, desta feita considerando-se a flambagem em torno do eixo de maior inércia. Admite-se a distribuição linear das tensões

residuais nas mesas do perfil HP e a divisão da coluna em 10 elementos de comprimento iguais.

Neste caso a seção transversal foi dividida em 60 fatias, sendo 20 para cada elemento componente do perfil (mesas e alma). A divisão de cada mesa em 20 fatias é usada para captar adequadamente a influência do modelo linear de distribuição das tensões residuais na análise na fase inelástica. Como, neste exemplo, não se consideram as tensões residuais na alma, esta poderia ter sido dividida em 10 fatias e ainda assim se alcançariam bons resultados.

Os resultados da análise são apresentados na Tab. 5.12, onde se mostram as tensões críticas relativas e o percentual da seção transversal que se torna plástica durante a análise para cada valor do índice de esbelteza considerado. A comparação é feita considerando-se os resultados dos exemplos anteriores desta seção, quando se usou esta formulação para estudar a flambagem da coluna em relação ao eixo de menor inércia e uma distribuição linear das tensões residuais.

Os dados da Tabela 5.12 mostram que para a mesma esbeltezes, colunas I ou H que possam flambar em torno do eixo de menor inércia podem suportar menor carga do que colunas que possam flambar somente na direção do eixo de maior inércia. A tensão residual de compressão, que é maior nas extremidades das mesas, é responsável por esta diferença de resistência. Observa-se que nos casos práticos da engenharia, esta é exatamente a situação do perfis I ou H laminados. Entretanto, para os perfis I ou H soldados, formados de chapas cortadas a maçarico (tipo FC), a situação é oposta, uma vez que a distribuição das tensões residuais nestes perfis favorece a flambagem em relação ao eixo y .

Foram necessárias de duas a quatro iterações para se chegar às soluções do problema.

TABELA 5.12 - Resultados da análise da resistência de colunas considerando flambagem em torno dos eixos de menor e maior inércia e distribuição linear das tensões residuais nas mesas.

Presente Formulação - $\sigma_y = 36 \text{ ksi} (\cong 250 \text{ MPa})$ - $\lambda_{lim} = 109,2$				
λ	Eixo de Menor Inércia		Eixo de Maior Inércia	
	σ_{cr} / σ_y	% plast.	σ_{cr} / σ_y	% plast.
109.2	0.66	0	0.65	0
89	0.74	10	0.80	13
72	0.80	20	0.90	27
57	0.85	30	0.93	67
44.1	0.90	40	0.97	80
32.9	0.94	50	0.97	80
23.2	0.95	60	0.98	93
8.0	0.97	80	0.98	93

d) Comentários sobre os resultados

Os resultados dos exemplos apresentados nesta seção demonstram a validade e precisão da formulação adotada neste trabalho, para se estudar a influência das tensões residuais na resistência das colunas de aço.

As várias hipóteses apresentadas nos diversos exemplos foram analisados pelo programa PPLANLEP sem problemas de convergência e os seus resultados podem ser confirmados através da literatura existente.

5.6 Exemplos Considerando a Combinação dos Dois Fatores

Nas seções 5.4 e 5.5 estudou-se o efeito isolado das imperfeições iniciais e das tensões residuais, respectivamente, com o objetivo de mostrar

a validade e precisão da formulação e entender alguns aspectos da influência destes dois fatores na resistência das colunas.

Nesta seção tem-se como objetivo principal, estudar o efeito combinado das imperfeições iniciais e tensões residuais, procurando mostrar como a interação destes dois fatores influenciam a resistência das colunas, como fizeram BATTERMAN et al. [18].

Para isto, uma coluna bi-rotulada de aço com tensão de escoamento $\sigma_y = 36$ ksi e seção transversal em perfil W 12 x 336 será analisada, considerando-se a flambagem em torno do eixo de menor inércia. Admite-se que as imperfeições iniciais têm uma elástica parabólica com uma flecha máxima no meio do vão $\delta_o = l/1000$. As tensões residuais se distribuem apenas nas mesas do perfil segundo o modelo linear com uma tensão residual σ_r máxima de $0,3 \sigma_y$, ou seja, $\sigma_r = 10$ ksi ($\cong 68,95$ MPa).

A seção transversal do perfil W 12 x 336 foi dividida em 60 fatias, sendo 20 em cada uma das mesas e 20 na alma.

Os resultados da análise são apresentados nas Tab. 5.13 e 5.14. Na Tab. 5.13 são mostradas as tensões máximas relativas em função do índice de esbeltez λ ou do parâmetro de esbeltez adimensional $\bar{\lambda}$ para as várias situações consideradas, que são: A: coluna ideal para a qual as imperfeições iniciais e as tensões residuais são nulas; B: coluna com somente imperfeições iniciais $\delta_o = l/1000$ e $\sigma_r = 0$; C: coluna com somente tensões residuais $\sigma_r = 10$ ksi e $\delta_o = 0$; D: coluna onde se consideram os efeitos combinados de $\delta_o = l/1000$ e $\sigma_r = 10$ ksi.

Na Tab. 5.14, para as mesmas esbeltezes e os mesmos casos citados, são mostradas as relações obtidas ao se dividir as resistências máximas das colunas imperfeitas (só ou combinadas) pelas resistências máximas da coluna perfeita, isto é, sem tensões residuais e imperfeições iniciais. As resistências desta coluna perfeita são dadas na Tab. 5.13 para o caso A.

TABELA 5.13 - Resistências máximas relativas para várias combinações de tensões residuais e imperfeições iniciais.

$\lambda_{lim} = 89,2$		$\sigma_{m\acute{a}x} / \sigma_v$			
λ	$-\lambda$	A $\delta_o = 0$ $\sigma_r = 0$	B $\delta_o = L/1000$ $\sigma_r = 0$	C $\delta_o = 0$ $\sigma_r = 10 \text{ ksi}$	D $\delta_o = L/1000$ $\sigma_r = 10 \text{ ksi}$
20	0.22	1.000	0.980	0.975	0.900
40	0.45	1.000	0.950	0.915	0.850
60	0.67	1.000	0.860	0.860	0.810
80	0.90	1.000	0.760	0.790	0.660
100	1.12	0.795	0.596	0.747	0.541
120	1.35	0.552	0.453	0.549	0.420
150	1.68	0.353	0.307	0.350	0.293
173	1.94	0.266	0.239	0.263	0.229
200	2.24	0.199	0.183	0.197	0.175

TABELA 5.14 - Relações entre resistências máximas para várias combinações de tensões residuais e imperfeições iniciais.

$\lambda_{lim} = 89,2$		$\sigma_{m\acute{a}x} / \sigma_{m\acute{a}x \text{ ideal}}$			
λ	$-\lambda$	A $\delta_o = 0$ $\sigma_r = 0$	B $\delta_o = l/1000$ $\sigma_r = 0$	C $\delta_o = 0$ $\sigma_r = 10 \text{ ksi}$	D $\delta_o = l/1000$ $\sigma_r = 10 \text{ ksi}$
20	0.22	1.00	0.98	0.98	0.90
40	0.45	1.00	0.95	0.92	0.85
60	0.67	1.00	0.86	0.86	0.81
80	0.90	1.00	0.76	0.79	0.66
100	1.12	1.00	0.75	0.94	0.68
120	1.35	1.00	0.82	0.99	0.76
150	1.68	1.00	0.87	0.99	0.83
173	1.94	1.00	0.90	0.99	0.86
200	2.24	1.00	0.92	0.99	0.88

Em relação à Tab. 5.14 alguns comentários podem ser feitos. A coluna A representa o caso da coluna ideal. A coluna B mostra os efeitos das imperfeições iniciais isoladamente, onde se nota que para $\lambda > \lambda_{lim}$ o efeito da curvatura inicial diminui gradativamente. A coluna C mostra os efeitos exclusivos das tensões residuais, observando-se que elas não têm praticamente nenhum efeito sobre a máxima resistência de colunas muito esbeltas, quando o índice de esbeltez ultrapassa o índice de esbeltez efetivo do aço (no caso $\lambda_{ef} = 104,9$). A coluna D mostra a resistência máxima obtida quando as imperfeições iniciais e as tensões residuais são combinadas. As resistências das colunas, reduzidas pelos efeitos das imperfeições iniciais e tensões residuais, em comparação com as resistências idealizadas (com estes fatores adversos ausentes) mostram que o máximo efeito de tais fatores, sós ou combinados, sempre ocorrem quando o índice de esbeltez, λ , é igual a λ_{lim} (ou o parâmetro de esbeltez $\bar{\lambda} = 1$).

Os dados da Tab. 5.14 mostram que os efeitos separados de redução da resistência, causados por tensões residuais apenas ou por imperfeições iniciais apenas, não podem ser somados para dar uma boa aproximação da redução da resistência considerando o efeito combinado dos dois fatores.

Na região de $60 \leq \lambda \leq 100$ (vizinhança de $\bar{\lambda} = 1$), os efeitos combinados são mais favoráveis do que a soma dos efeitos isolados. Para $\lambda \leq 40$ os efeitos são aproximadamente iguais. Para colunas esbeltas, $\lambda > 120$, o efeito da interação dos dois fatores é mais desfavorável do que os efeitos isolados somados, porque a tensão residual tem influência nula isoladamente. Isto ocorre pelo fato de que, enquanto a carga de flambagem de Euler de uma coluna reta para $\lambda > \lambda_{lim}$ não é afetada pelas tensões residuais, a resistência à flexão é eventualmente reduzida pelas tensões residuais indiferentemente do índice de esbeltez.

É importante frisar que estas conclusões não podem ser generalizadas quando se trata da combinação destes dois parâmetros, uma

vez que eles interagem de várias maneiras. Assim, variações nos modelos de distribuição de tensões residuais, diferentes limites de escoamento do aço, tipos de perfis, devem ser analisados na presença destes dois fatores. Então, a definição dos limites de índices de esbeltez e tipos de colunas, para os quais o efeito combinado de tensões residuais e imperfeições iniciais é maior do que a soma das partes, é um fenômeno complexo.

5.7 Exemplos na Análise de Pórticos Planos

A formulação apresentada no capítulo 3 deste trabalho é desenvolvida com o objetivo de se fazer a análise não-linear de pórticos planos de andares múltiplos, levando-se em conta os efeitos das imperfeições iniciais nas barras e das tensões residuais nas suas seções transversais. Sendo assim, os dois pórticos mostrados nas Fig. 5.13 e 5.15 são usados para este propósito. As propriedades do material, comprimentos das colunas e vigas são mostrados para cada pórtico, observando-se que o uso das unidades inglesas, assim como foi feito em alguns exemplos anteriores, é adotado apenas para se fazer uma comparação adequada com os resultados de outros pesquisadores. Os pórticos são designados pela letra P seguida de um numeral indicando o número de andares.

a) Pórtico P3

O pórtico de três andares mostrado na Fig. 5.13 foi analisado em teoria de segunda-ordem por McNAMEE & LU [79] considerando que o carregamento cresce proporcionalmente até o colapso. Os efeitos das imperfeições iniciais e das tensões residuais não foram considerados por aqueles pesquisadores que obtiveram a carga crítica, $P_{cr} = 24,2$ kips, e o deslocamento horizontal no nível do primeiro andar de $\Delta_B \cong 0,5$ in.

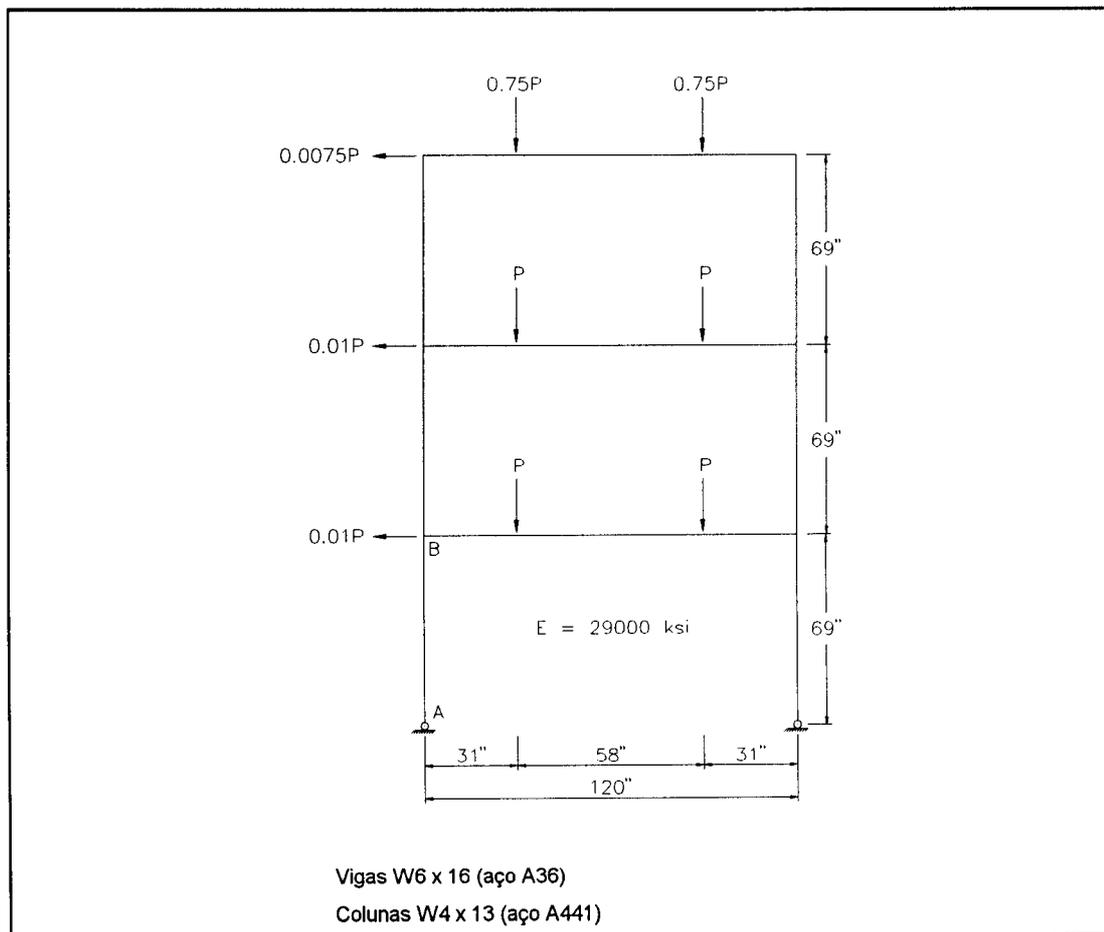


FIGURA 5.13 - Pórtico P3

Inicialmente o pórtico P3 é analisado através da presente formulação desconsiderando-se os efeitos das imperfeições iniciais e das tensões residuais, quando se comparam os resultados com os valores anteriores. Em seguida são considerados os efeitos isolados dos dois fatores e, finalmente, faz-se a análise levando-se em conta a interação dos mesmos.

Para isto, cada barra do pórtico P3 é dividida em 8 elementos chegando-se a um total de 72 elementos e 71 nós. Admite-se que as imperfeições iniciais das colunas tenham uma elástica parabólica com uma flecha máxima no meio do vão de $\delta_0 = L/1000$. As tensões residuais se distribuem nas mesas dos perfis W dados, segundo o modelo linear, com uma tensão residual σ_r máxima de $F_y/3$, considerando-se o aço A36, ou seja, $\sigma_r = 36/3 = 12$ ksi. A seção transversal dos perfis foi dividida em 50 fatias, sendo 20 em cada mesa e 10 na alma.

Os resultados da análise são apresentados nas Tab. 5.15 e 5.16 e através do gráfico $P \times \Delta$ da Fig. 5.14. Na Tab. 5.15 são mostrados os deslocamentos Δ_B , em polegadas, no nível do primeiro andar, em função da carga P (em kips), para as várias situações consideradas, que são: A – pórtico com tensões residuais e imperfeições iniciais nulas nas barras; B – pórtico com somente tensões residuais $\sigma_r = 12$ ksi e $\delta_o = 0$; C – pórtico com somente imperfeições iniciais $\delta_o = L/1000$ e $\sigma_r = 0$; D – pórtico onde se consideram ambos os fatores combinados de $\sigma_r = 12$ ksi e $\delta_o = L/1000$.

Na Tab. 5.16, para as mesmas cargas e os mesmos casos citados, são mostrados os momentos fletores M_B (em kips x in) no topo da coluna AB do primeiro andar do pórtico P3, conforme indicada na Fig. 5.13.

Na Fig. 5.14 são apresentados os gráficos $P \times \Delta$ do pórtico P3 para as várias situações analisadas, de acordo com os dados da Tab. 5.15.

Os valores mostrados nas Tab. 5.15 e 5.16 indicam que a presente formulação fornece bons resultados. A resistência máxima alcançada foi $P_{cr} = 23,00$ kips e um deslocamento máximo $\Delta_B = 0,45077$ in que são valores próximos aos alcançados por McNAMEE & LU [79]. Pode ser observado que as tensões residuais reduzem a resistência última do pórtico devido ao escoamento precoce de partes da seção transversal. De outra forma, as imperfeições iniciais consideradas na análise enrijecem o pórtico e aumentam a sua resistência última. Deve ser observado que, neste exemplo, todas as colunas apresentam a concavidade da elástica das imperfeições iniciais voltadas para a esquerda, no mesmo sentido das forças horizontais aplicadas. Isto quer dizer que uma análise dos efeitos das imperfeições iniciais num pórtico de andares múltiplos é bastante complexa, uma vez que os desvios das colunas são aleatórios. Finalmente, o efeito da ação conjunta dos dois fatores mostrado nas últimas colunas das Tab. 5.15 e 5.16 indica que o efeito favorável da imperfeições iniciais compensa o

efeito desfavorável das tensões residuais e o comportamento final fica próximo do caso A.

De uma maneira geral, foram necessárias 3 iterações na fase elástica e, a partir do início da plastificação, este número cresceu bastante, ultrapassando 90 iterações em alguns casos.

TABELA 5.15 - Deslocamentos Δ_B (in) no nível do primeiro andar do pórtico P3

P = 25 kips	Deslocamento no nível do 1º andar - Δ_B (in)			
	A $\sigma_r = 0$ $\delta_o = 0$	B $\sigma_r = 12$ ksi $\delta_o = 0$	C $\sigma_r = 0$ $\delta_o = L/1000$	D $\sigma_r = 12$ ksi $\delta_o = L/1000$
0.10	0.01715	0.01715	0.01437	0.01437
0.20	0.03610	0.03610	0.03022	0.03022
0.30	0.05718	0.05718	0.04782	0.04782
0.40	0.08079	0.08079	0.06750	0.06750
0.50	0.10744	0.10744	0.08968	0.08968
0.60	0.13781	0.13794	0.11491	0.11501
0.70	0.17274	0.17562	0.14391	0.14652
0.75	0.19227	0.19934	0.16011	0.16658
0.80	0.21340	0.22835	0.17762	0.19101
0.82	0.22337	0.24237	0.18616	0.20325
0.84	0.23696	0.25923	0.19658	0.21742
0.86	0.25979	0.28300	0.21261	0.23747
0.88	0.31125	0.33476	0.25207	0.27138
0.90	0.39223	0.48230	0.31679	0.38182
0.91	0.45077	-	0.36729	-
0.92	-	-	0.43930	-
0.93	-	-	-	-

TABELA 5.16 - Momentos fletores M_B (kips x in) no topo da coluna do primeiro andar do pórtico P3

P = 25 kips	Momento fletor no topo da coluna inferior M_B (kips x in)			
	A $\sigma_r = 0$ $\delta_o = 0$	B $\sigma_r = 12$ ksi $\delta_o = 0$	C $\sigma_r = 0$ $\delta_o = 1/1000$	D $\sigma_r = 12$ ksi $\delta_o = 1/1000$
0.10	17.3171	17.3171	17.3022	17.3022
0.20	34.7496	34.7496	34.6776	34.6776
0.30	52.3405	52.3405	52.1612	52.1612
0.40	70.1437	70.1437	69.7976	69.7976
0.50	88.2282	88.8055	87.6431	87.6431
0.60	106.683	106.7089	105.771	105.778
0.70	125.624	125.728	124.277	124.379
0.75	135.324	135.758	133.710	134.127
0.80	145.208	146.439	143.290	144.468
0.82	149.376	150.949	147.339	148.837
0.84	153.789	155.716	151.593	153.447
0.86	158.504	160.997	156.091	158.518
0.88	164.036	167.290	161.287	164.273
0.90	170.345	176.655	164.154	172.414
0.91	174.092	-	170.573	-
0.92	-	-	175.026	-
0.93	-	-	-	-

Obs.: Para conversão do sistema de unidades, adotar:

$$1 \text{ kip} = 4,448 \text{ kN};$$

$$1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm};$$

$$1 \text{ ksi} = 6,895 \text{ MPa} = 0,6895 \text{ kN/cm}^2$$

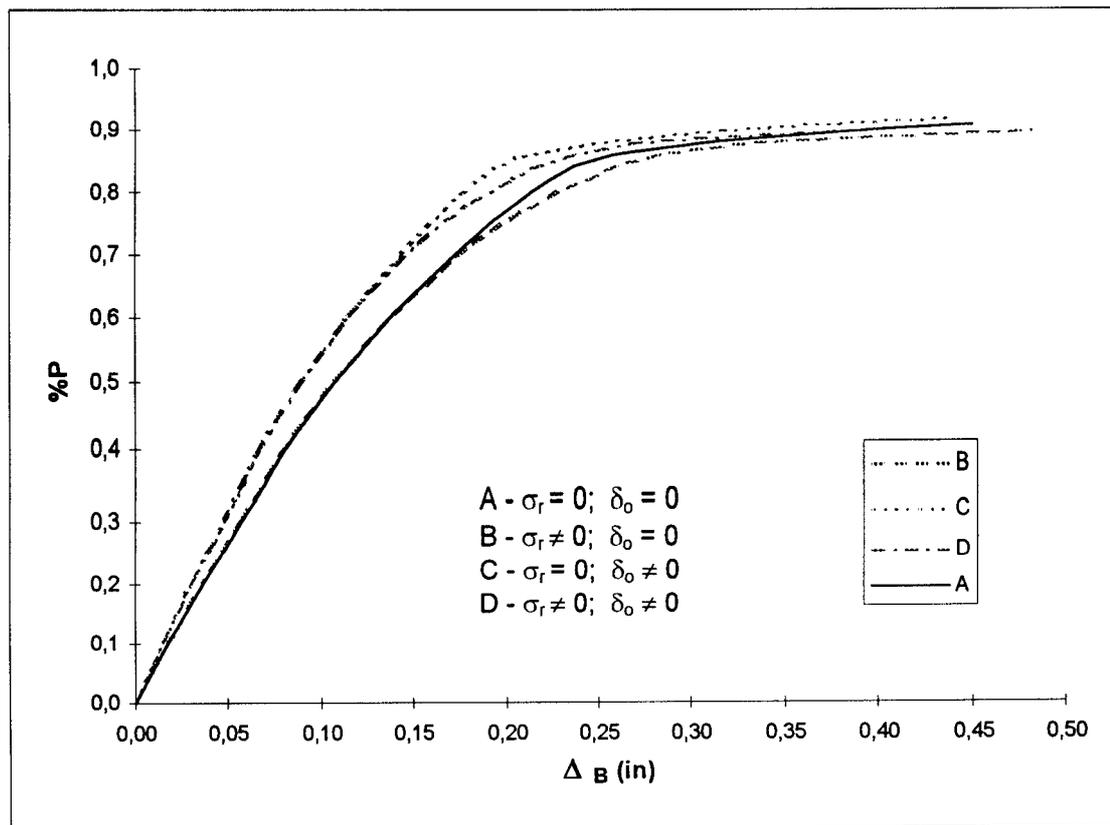


FIGURA 5.14 - Curva força x deslocamento para o pórtico P3

b) Pórtico P8

O pórtico de oito andares mostrado na Fig. 5.15, foi analisado em teoria de segunda-ordem elasto-plástica por KORN & GALAMBOS [68], considerando que o carregamento indicado representa a carga de serviço, a qual cresce proporcionalmente até o colapso.

Este exemplo, apesar de não representar uma situação muito prática, pois todos os andares são formados de colunas e vigas diferentes, foi analisado para mostrar a aplicação do programa em pórticos de andares múltiplos. As unidades são as mesmas adotadas por aqueles pesquisadores, para uma melhor comparação de resultados.

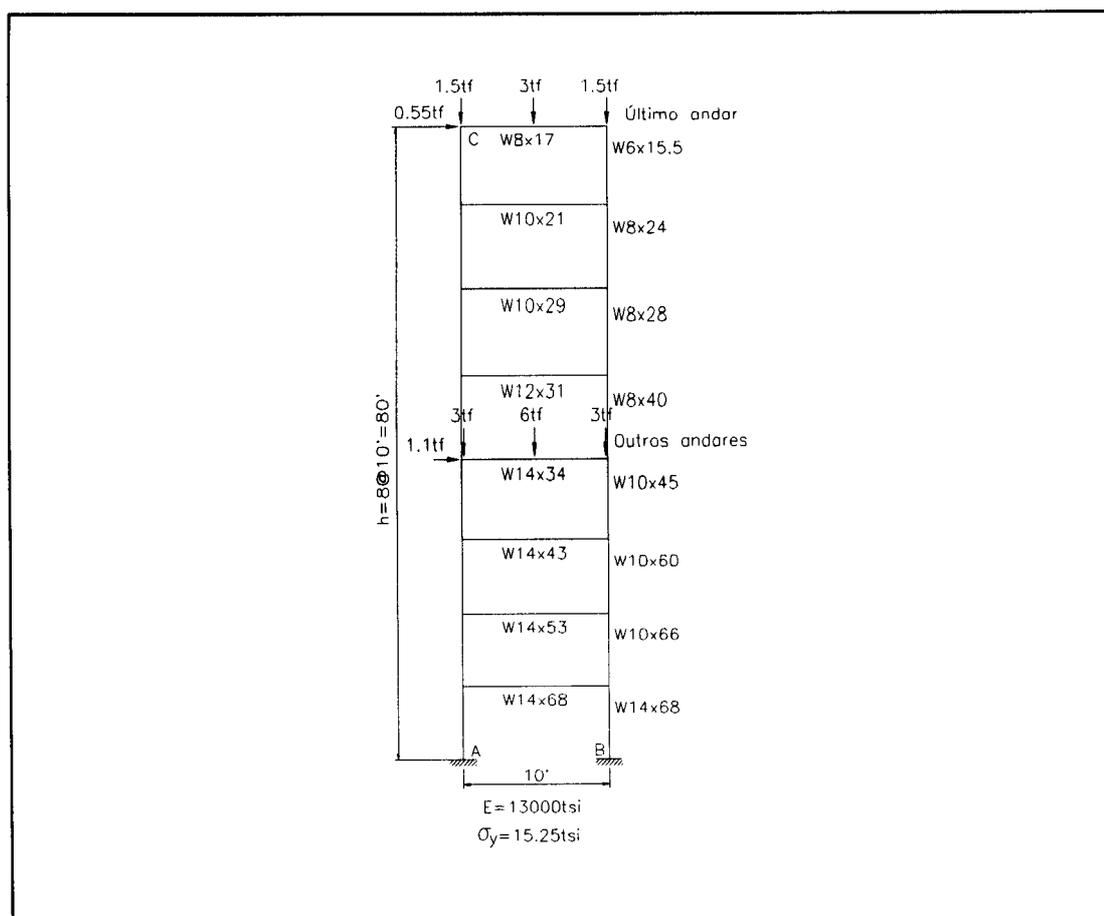


FIGURA 5.15 - Pórtico P8; configuração e carregamento

Cada barra do pórtico P8 é dividida em 8 elementos, chegando-se a um total de 192 elementos e 186 nós. Admite-se a elástica parabólica para as imperfeições iniciais das barras das colunas com a flecha máxima no meio do vão de $\delta_0 = L/1000$. Neste caso, as tensões residuais não são consideradas na análise o que permite que a seção transversal dos perfis seja dividida em apenas dez fatias, sendo uma em cada mesa e oito na alma.

Os resultados da análise são apresentados na Tab. 5.17, onde são mostrados os deslocamentos Δ_c , em polegadas, no nó esquerdo do último andar, e os momentos fletores M_B (em tf x in), no nó inferior da coluna direita do primeiro andar, em função do fator de carga ψ . Foram analisadas apenas duas situações: a primeira, quando se consideram as barras de pórtico com

imperfeições iniciais e tensões residuais nulas ($\delta_0 = 0$ e $\sigma_r = 0$) e a segunda, quando se consideram apenas imperfeições iniciais ($\delta_0 \neq 0$ e $\sigma_r = 0$).

Os valores da Tab. 5.17 mostram que os deslocamentos nas duas análises são praticamente os mesmos e, que os momentos fletores, para o caso do pórtico formado de barras imperfeitas, são levemente inferiores aos do pórtico formado por barras retas, confirmando as expectativas. Observa-se que o pórtico “imperfeito” alcança uma carga máxima superior a carga do pórtico “perfeito” e que ocorre fechamento de rótula para $\psi \geq 2,4$.

TABELA 5.17 - Deslocamentos Δ_c (in) e momentos fletores M_B (tf x in) para o pórtico P8 da Fig. 5.15

ψ	$\delta_0 = 0 ; \sigma_r = 0$		$\delta_0 = L/1000 ; \sigma_r = 0$	
	Δ_c (in)	M_B (tf x in)	Δ_c (in)	M_B (tf x in)
0.5	1.2319	175.918	1.2338	172.947
1.0	2.5022	353.735	2.5060	347.755
1.5	3.8127	533.497	3.8186	524.468
2.0	5.1656	715.252	5.1735	703.131
2.1	5.4414	751.846	5.4497	739.101
2.2	5.7445	777.923	5.7544	766.449
2.3	6.1196	789.293	6.1281	779.722
2.4	6.5938	776.965	6.6043	767.989
2.5	-	-	7.2107	740.303
2.6	-	-	-	-

Na análise elasto-plástica em segunda-ordem feita por KORN & GALAMBOS [68], não foram consideradas tensões residuais e nem imperfeições iniciais. O fator de carga ψ , para a situação de colapso, determinada por aqueles pesquisadores foi $\psi = 2,816$ com $\Delta_c = 10,3296$ in. Deve ser observado que os deslocamentos determinados através da presente formulação, sempre estiveram bastante próximos dos

deslocamentos obtidos por Korn e Galambos até ser alcançado o fator $\psi = 2,5$, quando ocorreu o colapso.

A Fig. 5.16 mostra a ordem de formação das rótulas plásticas para as análises da Ref. [68] e da presente formulação.

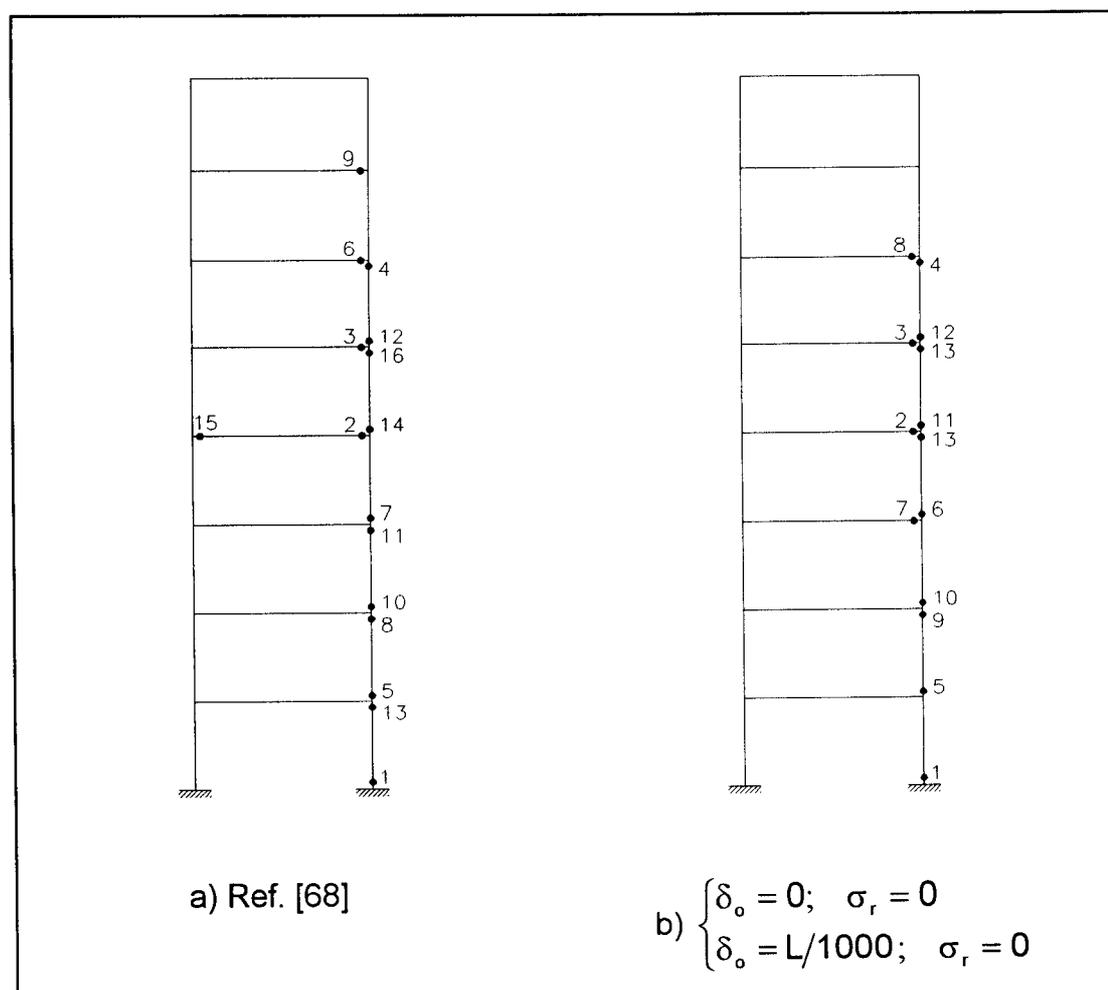


FIGURA 5.16 - Ordem de formação das rótulas plásticas

c) Comentários sobre os resultados

Os exemplos apresentados mostram que o programa elaborado conforme a formulação deste trabalho é capaz de analisar pórticos de andares múltiplos com resultados considerados muito bons, sendo portanto de grande aplicabilidade prática.

A análise considerando as tensões residuais que causam o escoamento precoce das barras pode ser feito e o modelo de fatias permite acompanhar com bastante eficiência a formação de rótulas plásticas nas seções transversais. O estudo da influência das imperfeições iniciais no comportamento global dos pórticos é bastante complexo, uma vez que as imperfeições ocorrem de forma aleatória.

Os exemplos apresentados necessitaram, em geral, de 3 iterações na fase elástica, sendo que este número cresceu bastante a partir da plastificação da primeira fatia. Para o pórtico P8 cada iteração demorou em média 30 segundos, usando-se microcomputador tipo PC 486 DX2 66 MHz, com 8 MB de memória RAM e disco rígido de 341 MB.

CONCLUSÕES

O objetivo principal deste trabalho foi desenvolver uma formulação teórica consistente para a análise não-linear, física e geométrica de pórticos planos, através do MEF, considerando barras com imperfeições iniciais e tensões residuais nas suas seções transversais, visando analisar os critérios de resistência adotados para dimensionamento das colunas de aço, baseados no conceito de resistência-última, e estudar o comportamento não-linear dos pórticos de aço considerando estes dois fatores.

A introdução do conceito de “curvas múltiplas de resistência” pela NBR-8800 [13] significou uma mudança de filosofia importante no dimensionamento das colunas de aço, porque o conceito baseado no critério de “bifurcação” foi substituído pelo conceito baseado no critério de “resistência-última”. Comitês europeus e americanos para estudos sobre estabilidade de estruturas, ECCS e SSRC respectivamente, têm hoje a firme opinião de que, no mínimo fatores como as tensões residuais existentes nos perfis de aço e as imperfeições iniciais das barras devem ser consideradas nos modelos para cálculo da resistência máxima de colunas.

O desenvolvimento teórico desta teoria geral, que considera imperfeições iniciais e tensões residuais, foi feita dentro de uma formulação Lagrangiana utilizando a técnica corrotacional para a dedução consistente das matrizes do elemento de pórtico plano. A formulação é bastante geral, permitindo-se que os nós sofram grandes deslocamentos e rotações e as barras sofram grandes alongamentos e curvaturas e, além disso, elas podem ser não-homogêneas, não-prismáticas e ser constituídas de material elasto-plástico.

As contribuições originais e relevantes deste trabalho pretende-se que sejam:

1 - O detalhamento itemizado desta formulação, oriunda principalmente dos trabalhos de PIMENTA, P.M. [90 a 95, 98].

2 - A dedução consistente da matriz de rigidez tangente para barras com imperfeições iniciais, explicitando-a de forma inédita.

3 - A consideração de forma consistente da presença das tensões residuais auto-equilibradas nos perfis, na determinação das equações de equilíbrio do elemento.

4 - A utilização da função parabólica para representar a elástica da curvatura inicial, consistindo numa maneira original para se estudar as imperfeições iniciais das barras, uma vez que toda a literatura só considera a função senoidal para esta elástica.

5 - A elaboração de um programa para micro-computador, capaz de fazer a análise não-linear elasto-plástica de pórticos planos, baseado num processo incremental-iterativo, considerando que as suas barras tenham imperfeições iniciais e tensões residuais.

Inicialmente, definiram-se as deformações e tensões energeticamente conjugadas adotadas neste trabalho e tratou-se, de uma forma geral e bastante sucinta, das relações constitutivas, elásticas e elasto-plásticas, para se introduzir de forma consistente o módulo de rigidez do material. De acordo com a formulação Lagrangiana, escolheu-se o sistema global de coordenadas Lagrangiano ou Cartesiano fixo e definiu-se um sistema local de coordenadas corrotacional, ligado ao elemento, no qual os deslocamentos generalizados são medidos em relação a uma configuração deformada. Trata-se de um sistema de referência móvel que acompanha a estrutura deformada, onde os graus de liberdade de corpo rígido não são considerados, levando-se em conta apenas os graus de liberdade naturais que são quantidades objetivas.

Toda a cinemática do elemento foi definida de forma consistente com a teoria estrutural adotada neste trabalho, que segue a hipótese atribuída a BERNOULLI-EULER, para a qual os campos de deformação e deslocamento foram deduzidos para o elemento com imperfeição inicial.

O equilíbrio deste elemento foi estudado via PTV, já considerando também a presença das tensões residuais auto-equilibradas na seção transversal. A matriz de rigidez tangente do elemento, que contém as parcelas constitutiva e geométrica, foram então obtidas através de uma derivação consistente da equação do equilíbrio do elemento. As interpolações usuais da Resistência dos Materiais foram introduzidas explicitando-se a matriz k_t que pode ser resolvida numericamente (Eq. 3.126, 3.128 e 3.130).

Finalmente, foram adotadas aproximações de segunda-ordem e a função parabólica para interpolar a elástica das imperfeições iniciais (Eq. 3.152), o que permitiu desacoplar os deslocamentos naturais dos deslocamentos causados pelas imperfeições iniciais, conseguindo-se assim explicitar, de forma consistente, simples e original, a matriz de rigidez elástica e elasto-plástica dos elementos de pórtico plano com imperfeições iniciais (Eq. 3.185, 3.190 e 3.195, ou ainda, Eq. 3.188, 3.196, 3.211, 3.212).

O programa desenvolvido neste trabalho mostrou-se bastante eficiente na análise dos vários exemplos apresentados, confirmando a expectativa da grande potencialidade da formulação adotada.

Nas seções 5.2 e 5.3 foram analisadas estruturas com NLG e NLGM respectivamente, sem imperfeições e os resultados obtidos foram comparados com aqueles de soluções existentes na literatura, sendo considerados muito bons. No caso de NLGM, o modelo de fatias adotado

para se fazer a integração na seção transversal, permitiu analisar a plastificação ao longo da sua altura.

Nos exemplos apresentados na seção 5.4 a formulação foi aplicada ao estudo de barras com imperfeições iniciais, onde se comparam as influências entre as formas parabólica e senoidal para a elástica inicial, na resistência das colunas. Cabe ressaltar que esta formulação permite considerar várias formas de curvaturas iniciais, podendo representar mais realisticamente as situações da prática. Os exemplos demonstram que o programa é capaz de analisar problemas que envolvem imperfeições iniciais nas barras, tanto na fase elástica quanto na fase inelástica, com resultados muito bons.

Na seção 5.5 foi analisada a influência quantitativa das tensões residuais na resistência das colunas de aço, quando vários casos foram considerados. Avaliou-se, por exemplo, a influência relativa das tensões residuais na resistência de perfis de aço-carbono (comum) e de perfis de alta-resistência. Também foram comparadas e avaliadas a influência das tensões residuais na resistência das colunas, quando se consideram as suas distribuições lineares e parabólicas nas seções transversais dos perfis de aço e, quando se considera a flambagem em relação aos eixos de maior ou de menor inércia. Estes resultados, juntamente com os resultados obtidos na seção 5.6, quando se considerou a combinação dos dois fatores, são confirmados através da literatura existente.

Finalmente, a aplicação do programa na análise de pórticos planos de andares múltiplos confirma a validade da formulação desenvolvida e sua aplicabilidade nos casos práticos. Os efeitos das tensões residuais, que causam escoamento precoce das seções transversais das barras, podem ser avaliados e o modelo de fatias utilizado permite acompanhar com precisão o escoamento das seções e a formação de rótulas plásticas. Os

efeitos das imperfeições iniciais podem ser avaliados em cada caso, considerando que a definição de um comportamento geral é bastante complexo devido ao caráter aleatório de ocorrência destas imperfeições.

Ao final deste trabalho surgem algumas propostas para desenvolvimento em estudos posteriores, uma vez que algumas lacunas encontradas devem ser preenchidas. Assim, a formulação poderia ser estendida para se considerar os efeitos das tensões de cisalhamento, a possibilidade de análise dinâmica e se possível, o estudo da instabilidade lateral.

O programa desenvolvido mostrou-se eficiente na análise não-linear incremental-iterativa de pórticos planos e a sua aplicabilidade prática pode ser ampliada com a adoção de alguns procedimentos adicionais.

A incorporação de pré e pós-processadores aumentaria bastante a eficiência prática de utilização do programa. Os nós e elementos da estrutura seriam gerados automaticamente de forma rápida e consistente. A implementação de barras com imperfeições seria facilitada por uma rotina que definisse os ângulos e curvaturas iniciais para cada elemento. A definição das fatias poderia estar acoplada ao modelo de distribuição das tensões residuais que já forneceria um sistema auto-equilibrado. A saída dos resultados seria melhorada com a inclusão de recursos gráficos.

Da forma como o programa está implementado, todos os carregamentos da estrutura são aumentados proporcionalmente. A possibilidade de se trabalhar com a combinação de vários carregamentos, com incrementos diferentes, é uma medida que auxilia as análises teóricas. A consideração de liberação das extremidades das barras e um possível estudo de ligações semi-rígidas devem ser levados em conta.

A aproximação no cálculo do momento de inércia das seções transversais, inerente ao método dos retângulos quando se considera o modelo de fatias, pode ser evitada introduzindo-se, por exemplo, o método dos trapézios. O efeito do endurecimento (encruamento) é bastante significativo em colunas de aço pouco esbeltas e em pórticos de andares múltiplos, sendo que o modelo constitutivo da Fig. 4.3c que considera as fases elástica, perfeitamente plástica e plástica com endurecimento pode ser facilmente implementado considerando então este efeito.

A implementação de outros algoritmos de solução numérica e métodos automáticos de incremento de cargas podem ser medidas eficientes para a melhoria da performance do programa.

Introduzindo-se estas modificações, acredita-se que o programa desenvolvido para a formulação deste trabalho tornar-se-á um instrumento bastante eficiente, tanto para as análises teóricas, acadêmicas quanto para os cálculos práticos dos escritórios de projeto. O desenvolvimento de curvas de resistência de colunas considerando as tensões residuais e as imperfeições iniciais, aferição de métodos simplificados de análise em segunda-ordem, o estudo do comportamento elasto-plástico dos pórticos são alguns dos assuntos que poderão ser melhor compreendidos com o uso da formulação apresentada neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 AL-MASHARY, F. ; CHEN, W. F. Simplified second-order inelastic analysis for steel frames. *The structural engineer*, v. 69, n. 23, p.395-399, December, 1991.
- 2 ALPSTEN, G. A. ; TALL, L. Residual stresses in heavy welded shapes. *Welding Journal/ AWS*, p.93s-105s, March, 1970.
- 3 ALVAREZ, R. J. ; BIRNSTIEL, C. Inelastic analysis of multistory multibay frames. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, v. 95, n.St 11, p. 2477-2503, November, 1969.
- 4 ANTUNES, H. M. C. C. *Carregamento crítico de instabilidade geral para estruturas tridimensionais de edifícios altos*. São Carlos, 1978. 160p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- 5 AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION (AISC). *Specification for structural steel buildings - Allowable stress design*. 8.ed., 1978.
- 6 AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION (AISC). *Specification for structural steel buildings - Allowable stress design*. 9.ed., 1979.
- 7 AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION (AISC). *Load and resistance factor design - Specification for structural steel building*. 1.ed., 1986.
- 8 ARAÚJO, J. M. Optimization of Newton-Raphson methods in RC nonlinear analysis. *Computers & Structures*, v. 33, n. 3, p. 735-741, 1989.
- 9 ARGYRIS, J. H. *Continua and discontinua*. Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson A.F.B. , Ohio , p.11-189 , October, 1965.
- 10 ARGYRIS, J. H. ; KELSEY, S. *Energy theorems and structural analysis*, v. 26/27, Part I por J.H. Argyris e Part II por J.H. Argyris e S. Kelsey, October 1954 a May 1955.

- 11 ARGYRIS, J. H. ; HILPERT, O. ; MALEJANNAKIS, G. A. ; SCHARPF, D. W. On the geometrical stiffness of a beam in space - A consistent V. W. Approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 20, p. 105-131, 1979.
- 12 ARNOLD, P. ; ADAMS, P. F. ; LU, L. W. Strength and behavior of an inelastic hybrid frame. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, v.94, n. St 1, p. 243-266, January, 1968.
- 13 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios. Método dos estados limites - NBR 8800/86* - Rio de Janeiro, 2.ed., 1986 e errata n.1 Julho, 1988.
- 14 BATHE, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1982.
- 15 BATHE, K. J. *Finite element procedures*. (Revision of : *Finite element procedures in engineering analysis*, 1982); New Jersey, Prentice-Hall, Inc. , Englewood Cliffs, 1996.
- 16 BATHE, K. J. ; CIMENTO, A. P. Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 22, p. 59-85, 1980.
- 17 BATHE, K. J. ; DVORKIN, E. N. On the automatic solution of nonlinear finite element equations. *Computer & Structures*, v. 17, n. 5/6, p.871-879, 1983.
- 18 BATTERMAN, R. H. ; JOHNSTON, B. G. Behavior and maximum strength of metal columns. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, v. 93, n. St 2, p. 205-230, April, 1967.
- 19 BEEDLE, L. S. ; TALL, L. Basic column strength. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, v. 86, n. St 7, p. 139-173, July, 1960.
- 20 BEER, H. ; SCHULZ, G. Bases théoriques des courbes européennes de flambement. *Construction Métallique*, n. 3, p. 37-57, 1970.
- 21 BJORHOVDE, R. *Deterministic and probabilistic approaches to the strength of steels columns*. Bethlehem, 1972. Thesys (Ph. D.) - Department of Civil Engineering , Lehigh University.Bethlehem.
- 22 BJORHOVDE, R. Columns: from theory to practice. *Engineering Journal (AISC)*, v. 25, n. 1, 1st Quarter, p. 21-34, 1988.

- 23 BJORHOVDE, R. Effect of end restraint on column strength - Practical applications. *Engineering Journal (AISC)*, v. 21, n. 1, 1st Quarter, p.1-13, 1984.
- 24 BJORHOVDE, R. Research needs in stability of metal structures. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, v. 106, n. St 12, p. 2425-2442, December, 1980.
- 25 BJORHOVDE, R. The safety of steel columns. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, v. 104, n. St 3, p. 463-477, March, 1978.
- 26 BJORHOVDE, R. ; BROZZETTI, J. ; ALPSTEN, G. A. ; TALL, L. Residual stresses in thick welded plates. *Welding Journal (AWS)*, v.51, n. 51, p. 329s-405s, August, 1972.
- 27 BLEICH, F. *Buckling strength of metal structures*. New York, McGraw Hill, 1952.
- 28 BREBBIA, C. A. ; CONNOR, J. J. *Fundamentals of finite element techniques*. Butter- Worths & Co.(Publishers) Ltda, 1973.
- 29 CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION (CSA): *Steel structures for building - Limit States Design*, 1984.
- 30 CHAJES, A. *Principles of structural stability theory*. New Jersey, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1974.
- 31 CHEBL, C. ; NEALE, K. W. A finite element method for elastic-plastic beams and columns at large deflections. *Computers & Structures*, v.18, n. 2, p. 255-261, 1984.
- 32 CHEN , W. F. ; LUI , E. M. Columns with end restraint and bending in load and resistance design factor. *Engineering Journal (AISC)*, v. 22, n. 3, 3rd Quarter, p. 105-131, 1985.
- 33 CHEN, W. F. ; HAN, D.J. *Plasticity for structural engineers*. New York, Spring-Verlag, 1988.
- 34 CHEN, W. F. ; LUI ; E. M. *Structural stability - Theory and implementation*. New York, Elsevier, 1987.
- 35 CHEN, Z. Q. ; AGAR, T. J. A. Geometric nonlinear analysis of flexible spatial beam structures. *Computers & Structures*, v. 49, n. 6, p.1083-1094, 1993.

- 36 CILONI, A. D. *Sobre o comportamento em serviço de estruturas planas de concreto armado*. São Carlos, 1993. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- 37 CLOUGH, R.W. *The finite element method in plane stress analysis* proceedings. In: ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, September, 1960. p. 345-378.
- 38 CONSIDÈRE, A. *Resistance des pièces comprimées*. In: Congrès International des Procédés de Construction, Paris, 1891. v. 3, p.371.
- 39 CORRÊA, M. R. S. *Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios*. São Carlos, 1991. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- 40 DAVISON, J. H. ; ADAMS, P. F. Stability of braced and unbraced frames. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, v. 100, n. St 2, p.319-334, February 1974.
- 41 DE PAULA, G. D. *Alguns aspectos da fundamentação teórica e dimensionamento de elementos comprimidos de aço*. São Carlos, 1994. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- 42 EBNER, A. M. ; UCIFERRO, J. J. A theoretical and numerical comparison of elastic nonlinear finite element methods. *Computer & Structures*, v. 2, p. 1043-1061, 1972.
- 43 EL-ZANATY, M. H. ; MURRAY, D. W. Nonlinear finite element analysis of steel frames. *Journal of the Structural Engineering (ASCE)*, v. 109, n. 2, p. 353-368, February, 1983.
- 44 ENGESSER, F. *Zeitschrift fur architektur und ingenieurwesen*, v. 35, p.455 , 1889 ; *Schweizerische bauzeitung*, v. 26, p. 24, 1895.
- 45 EULER, L. *Sur les forces des colonnes*. Berlin, 1759. Memoires de L'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres , v. 13.
- 46 EUROCODE 3. *Design of steel structures - European prestandard*, European Committee for Standardization, 1992.
- 47 EUROPEAN CONVENTION FOR CONSTRUCTIONAL STEELWORK (ECCS). *European recommendations for steel construction*. London and New York, The Construction Press, 1978.

- 48 EUROPEAN CONVENTION FOR CONSTRUCTIONAL STEELWORK (ECCS). *Manual on the stability of steel structures*. 2 ed., Brussels, 1976
- 49 FUKUMOTO, Y. ; ITOH, Y. Evaluation of multiple column curves using the experimental data-base approach. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 3, n. 3, p. 1-19, 1983.
- 50 GALAMBOS, T. V. *Guide to stability design criteria for metal structures*. 4th ed. New York, John Wiley & Sons, 1988.
- 51 GALAMBOS, T. V. *Structural members and frames*. New Jersey, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliff, 1968.
- 52 GALLAGHER, R. H. ; PADLOG, J. ; BIJLAARD, P. P. Stress analysis of heated complex shapes. *American Rocket Society Journal*, v. 32, p.700-707, May, 1962.
- 53 GOTO, Y. ; CHEN , W. F. Second-order elastic analysis for frame design. *Journal of the Structural Engineering*, v. 113, n. 7, p. 1501-1519, July, 1986.
- 54 HAISLER, W. E. ; STRICKLIN, J. A. ; STEBBINS, F. J. Development and evaluation of solution procedures for geometrically nonlinear structural analysis. *AIAA Journal*, v. 10, n. 3, p. 264-272, 1971.
- 55 HINTON, E. ; OWEN, D. R. J. ; TAYLOR, C. *Recent advances in nonlinear computational mechanics*. Swansea, U. K., Pineridge Press Limited, 1982.
- 56 HORNE, M. R. *Plastic theory of structures*. 2 ed., Pergamon Press, 1979.
- 57 HSIAO, K. M. ; HOU, F. Y. Nonlinear finite element analysis of elastic frames. *Computers & Structures*, v. 26, n. 4, p. 693-701, 1987.
- 58 HSIAO, K. M. ; HORNG, H. J. ; CHEN Y. H. A corotational procedure that handles large rotation of spatial beam structures. *Computers & Structures*, v. 27, n. 6, p. 769-781, 1987.
- 59 JACQUET, J. Essais de flambement et exploitation statistique. *Construction Métallique*, n. 3, p. 13-36, 1970.
- 60 JENNINGS, A. Frame analysis including change of geometry. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, v. 94, n. St 3, p. 627-644, March, 1968.

- 61 JOHNSTON, B. G. *Guide to stability design criteria for metal structures*. New York, 3.ed., Structural Stability Research Council - John Wiley & Sons, 1976.
- 62 KAM, T. Y. Large deflection analysis of inelastic plane frames. *Journal of Structural Engineering*, v. 184, n. 1, p. 114-197, January, 1988.
- 63 KAM, T. Y. ; LEE, F. S. Nonlinear analysis of steel plane frames with initial imperfection. *Computers & Structures*, v. 23, n. 4, p. 553-557, 1986.
- 64 KAM, T. Y. ; ROSSOW, E. C. ; COROTIS, R. B. Inelastic tangential stiffness for 2-D frames. *Journal of the Structural Engineering (ASCE)*, v. 109, n. 11, p. 2685-2697, November, 1983.
- 65 KASSIMALI, A. Large deformation analysis of elastic-plastic frames. *Journal of the Structural Engineering (ASCE)*, v. 109, n. 8, p. 1869-1886, August, 1983.
- 66 KING, W. S. ; WHITH, D. W. ; CHEN, W. F. Second-order inelastic analysis methods for steel frame design. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, v. 118, n. 2, p. 408-428, February, 1992.
- 67 KITIPORNCHAI, S. ; TRAHAIR, N. S. Buckling of inelastic I-beams under moment gradient. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, v.101, n. St 5, p. 991-1004, May, 1975.
- 68 KORN, A. ; GALAMBOS, T. V. Behavior of elastic-plastic frames. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, v. 94, n. St 5, p. 1119-1142, May, 1968.
- 69 KUO, S. R. ; YANG, Y. B. ; CHOU, J. H. Nonlinear analysis of space frames with finite rotation. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, v. 119, n. 1, p. 1-15, January, 1993.
- 70 LAVALL, A. C. C. *Análise elástica em segunda ordem de pórticos planos metálicos*. São Carlos, 1988. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- 71 LEVY, R. ; VILNAY, O. ; ACHEAMPONG, K. B. Exact geometry considerations in buckling analysis of trusses. *Computers & Structures*, v. 41, n. 6, p. 1241-1248, 1991.
- 72 LO, S. H. Geometrically nonlinear formulation of 3-D finite strain beam element with large rotations. *Computers & Structures*, v. 44, n. 1/2, p. 147-157, 1992.

- 73 LUI, E. M. Geometrical imperfections on inelastic frame behavior. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, v. 118, n. 5, p. 1408-1415, May, 1992.
- 74 MALLET, R. H. ; MARCAL, P. V. Finite element analysis of nonlinear structures. *Journal of Structural Division (ASCE)*, v. 94, n. St 9, p.2081-2105, September, 1968.
- 75 MAZZILLI, C. E. N. *A flambagem de Euler e a elástica revisitadas: uma formulação unificada para os cinco casos clássicos*. São Paulo, EPUSP, 1987. (Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8710)
- 76 MAZZILLI, C. E. N. Comportamento não-linear de pórticos planos em regime elástico linear. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO DE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA A ENGENHARIA, 7., São Carlos, Novembro de 1986.
- 77 MAZZILLI, C. E. N. *Considerações sobre não-linearidade geométrica em estruturas reticuladas planas*. São Paulo, EPUSP, 1987. (Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8701)
- 78 Mc FALLS, R. K. ; TALL, L. A study of welded columns manufactured from flame-cut plates. *Welding Journal/AWS*, p.141s-153s, Abril, 1969
- 79 Mc NAMEE, B. M. ; LU, L. W. Inelastic multistory frame buckling. *Journal of the structural division (ASCE)*, v.98, n. St 7, p. 1613-1631, 1972.
- 80 MEEK, J. L. ; LOGANATHAN, S. Large displacement analysis of space-frame structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 72, p. 57-75, 1989.
- 81 MEEK, J. L. ; LOGANATHAN, S. Geometric and material non-linear behavior of beam-columns. *Computer and structures*, v. 34, n.1, p.87-100, 1990.
- 82 MOREIRA, D. F. *Análise matricial das estruturas*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1977.
- 83 MOSES, F. Inelastic frame buckling. *Journal of the structural division (ASCE)*, v. 90, n. St 6, p.105-121, December, 1964.

- 84 NEAL, B.G. *The plastic methods of structural analysis*. 3.ed., London, Chapman and Hall Ltda, 1977.
- 85 ORAN, C. Tangent stiffness in plane frames. *Journal of the structural division (ASCE)*, v. 99, n. St 6, p. 973-985, June, 1973.
- 86 ORAN, C. Tangent stiffness in space frames. *Journal of the structural division (ASCE)*, v. 99, n. St 6, p. 987-1001, June, 1973.
- 87 ORAN, C. ; KASSIMALI, A. Large deformation of framed structures under static and dynamic loads. *Computer & Structures*, v. 6, p.539-547, 1976.
- 88 OWEN, D. R. J. ; HINTON, E. *Finite elements in plasticity : Theory and practice*. Swansea U.K., Pineridge Press Ltd, 1980.
- 89 PAI, P. F. ; NAYFEH, A. H. A new method for the modeling of geometric nonlinearities in structures. *Computer & structures*, v. 53, n. 4, p.877-895, 1994.
- 90 PIMENTA, P. M. *Análise não-linear de treliças espaciais*. São Paulo, EPUSP, 1986. (Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8604).
- 91 PIMENTA, P. M. *Análise não-linear de pórticos planos*. São Paulo, EPUSP, 1986. (Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8611).
- 92 PIMENTA, P. M. Aspectos da análise não-linear de estruturas reticuladas. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA A ENGENHARIA, 7., São Carlos, 1986. p. 449-464.
- 93 PIMENTA, P. M. *Análise não-linear de arcos*. São Paulo, EPUSP, 1988. (Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8816).
- 94 PIMENTA, P. M. *Nonlinear analysis of plane frames, I. Quasi-static analysis of plane frames with initially curved members*. São Paulo, EPUSP, 1989. (Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8910).
- 95 PIMENTA, P. M. *Derivation of tangent stiffness matrices of simple finite elements, I. Straight bar elements*. São Paulo, EPUSP, 1989. (Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8912).

- 96 PIMENTA, P. M. ; MEIRELLES, C. R. M. ; JUNIOR, P. A. Análise da estabilidade de cascas através do método dos elementos finitos. In: XIII CILAMCE. *Anais*. 1992. v.1, p. 142-151.
- 97 PIMENTA, P. M. ; FRUCHTENGARTEN, J. Carga crítica de barras com consideração de empenamento por torção - Uma formulação consistente. In: XV CILAMCE. *Anais*. 1994. v. 2, p. 1486-1495.
- 98 PIMENTA, P. M. ; MAZZILLI, C. E. N. *Mínima correctio methodi inveniendi lineas curvas elasticii*. São Paulo, EPUSP, 1986. (Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8613).
- 99 PIMENTA, P. M. ; YOJO, T. Análise geometricamente exata de pórticos espaciais através do método dos elementos finitos. In: XIII CILAMCE. *Anais*. 1992. v.1, p. 191-199.
- 100 PIMENTA, P. M. ; YOJO, T. Geometrically exact analysis of spatial frames with considerations of torsion warping. In: XIV CILAMCE. *Anais*. 1993. v.1, p. 21-30.
- 101 PIMENTA, R. J. *Resistência à compressão de perfis soldados formados por chapa cortada à maçarico*. Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da UFMG, Belo Horizonte, 1992 (não publicado).
- 102 POWELL, G. H. Theory of nonlinear elastic structures. *Journal of the structural division (ASCE)*. v. 95, n. St 12, p. 2687-2701, December, 1969.
- 103 PROENÇA, S. P. B. *Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições*. São Carlos (1988). 330p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- 104 PRZEMIENIECKI, J. S. *Theory of matrix structural analysis*. McGraw Hill, Inc., 1968.
- 105 QUEIROZ, G. *Elementos das estruturas de aço*. Belo Horizonte, Gilson Queiroz, 4.ed., 1993.
- 106 RACHID, M. *Instabilidade de Barras de seção delgada*. São Carlos, EESC-USP, 1983.
- 107 RACHID, M. ; MORI, D.D. *Instabilidade: conceitos - aplicação na flambagem por flexão*. São Carlos, EESC-USP, 1989.

- 108 RAJASEKARAN, S. ; MURRAY, D. W. Finite element solution of inelastic beam equation. *Journal of the structural division (ASCE)*. v.99, n. St 6, p. 1025-1041, June, 1973.
- 109 RAJASEKARAN, S. and MURRAY, D. W. Incremental finite element matrices. *Journal of the structural division (ASCE)*. v.99, n. St 12, p.2423-2438, December, 1973.
- 110 RONDAL, J. ; MAQUOI, R. Single equation for SSRC columns strength curves. *Journal of the structural division (ASCE)*. v. 105, n. St 1, p.247-250, January, 1979.
- 111 SALMON, C. G. ; JOHNSON, J. E. *Steel structures: design and behavior, emphasizing load and resistance factor design*. Harper & Row, Publishers, Inc., 3.ed., 1990.
- 112 SFINTESCO, D. Fondement expérimental des courbes européennes de flambement. *Construction Métallique*, n.3, p. 5-12, 1970.
- 113 SHANLEY, F. R. Inelastic column theory. *Journal of the aeronautical sciences*. v. 14, p. 261-264, May, 1947.
- 114 SHIM, Y. ; FENG, Z. ; LEE, S. ; KIM, D. ; JAEGER, J. ; PAPRITAN, J. C. ; TSAI, C. L. Determination of residual stresses in thick - section weldments. *Welding Journal (AWS)*. p. 305-312, September, 1992.
- 115 SILVA JR., J. F. *Resistência dos Materiais*. Belo Horizonte, 3.ed., 1974
- 116 SOLER, J. G. M. *Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado*. São Paulo, 1989. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- 117 SOLER, J. G. M. ; PIMENTA, P. M. Estabilidade de pórticos planos de concreto armado. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO, EPUSP, São Paulo, p. 503-527, 1989.
- 118 SOUZA LIMA, V. M. ; VENÂNCIO FILHO, F. Considerações sobre a não-linearidade geométrica em estruturas reticuladas. In: III ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA, LCC-CNPQ, Rio de Janeiro, 1982.
- 119 SOUZA LIMA, V. M. ; VENÂNCIO FILHO, F. A noção de rigidez tangente no estudo de não-linearidade geométrica de estruturas reticuladas. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 5., Salvador, 1984.

- 120 SPRINGFIELD, J. ; ADAMS, P. F. Aspects of column design in tall steel buildings. *Journal of the Structural Division (ASCE)*. v. 98. N. St 5, p.1069-1083, May, 1972.
- 121 SPUTO, T. History of steel beam-column design. *Journal of Structural Engineering*, v. 119, n. 2, p. 547-557, February, 1993.
- 122 THOMPSON, J. M. T. ; HUNT, G. W. *A general theory of elastic stability*. London, John Wiley & Sons Ltd, 1973.
- 123 TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. *Theory of elasticity*. McGraw Hill, 3.ed., 1970.
- 124 TIMOSHENKO, S. P. ; GERE, J. M. *Theory of elastic stability*. New York, McGraw Hill, 2.ed., 1961.
- 125 TRANBERG, W. ; SWANNELL , P. ; MEEK, J. L. Frame collapse using tangent stiffness. *Journal of the Structural Division (ASCE)*. v. 102, n. St 3, p. 659-675, 1976.
- 126 TURNER, M.J. ; CLOUGH, R.W. ; MARTIN, H.C. ; TOPP, L.J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of Aeronautical Sciences*, v. 23, p. 805-823, 1956.
- 127 TURNER, M. J. ; DILL, E. H. ; MARGIN, H.C. ; MELOSH, R.J. Large deflection analysis of complex structures subjected to heating and external loads. *Journal of the Aerospace Sciences*, v. 27, February, 1960.
- 128 VAN KUREN, R. C. ; GALAMBOS, T. V. Beams columns experiments. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, v. 90, n. St 2, p. 223-256, 1964.
- 129 VLASSOV, V. Z. Thin-walled elastic beams. 2.ed., Jerusalém, The National Science Foundation, Washington D.C. and The Department of Commerce, USA, by the Israel Program for Scientific Translations, 1961.
- 130 WEN, R. K. ; RAHIMZADEH, J. Nonlinear elastic frame analysis by finite element. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, v. 109, n.8, p.1952-1971, 1983.
- 131 WEN, R. K. ; SUHENDRO, B. Nonlinear curved-beam element for arch structures. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, v. 117, n.11, p.3496-3515, November, 1991.