

CONSIDERAÇÕES SOBRE A FADIGA EM METAIS E O COMPORTAMENTO DO CONCRETO SOB SOLICITAÇÃO CÍCLICA

LARISSA DRIEMEIER

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Estruturas

ORIENTADOR: Sergio P. B. Proença

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

São Carlos

1995

Class.	TEC
PHA	C
Tombo	

D842c Driemeier, Larissa
Considerações sobre a fadiga em metais e o comportamento do concreto sob solicitação cíclica/ Larissa Driemeier. --São Carlos, 1995.
120p.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de São Carlos-
Universidade de São Paulo, 1995.

Orientador: Prof.Dr. Sergio P. B. Proença

1. Fadiga em Metais - Concreto sob Solicitação Cíclica. I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Dissertação defendida e aprovada em 25-8-1995
pela Comissão Julgadora:



Prof. Doutor SÉRGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA - Orientador
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Profa. Doutor ALOISIO ERNESTO ASSAN
(Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP)



Profa. Doutora ANA LUCIA HOMCE DE CRESCE EL DEBS
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Dr. MOUNIR KHALIL EL DEBS
Vice-Presidente da Comissão de Pós-Graduação
em exercício



Coordenador da área - Engenharia de Estruturas
Prof. Dr. MOUNIR KHALIL EL DEBS

Às pessoas da minha vida:
meu pai e minha mãe,
meus queridos irmãos Martinha e Luca,
Guto.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Sergio P. B. Proença, pela grande orientação, pela paciência e pelo apoio ao longo do desenvolvimento do trabalho.

Às queridas Maria Cristina, Adriana, Aninha e Paula pelo apoio e tolerância nas horas difíceis.

À Rosi Aparecida Jordão Rodrigues, Maria Nadir Minatel, Marta Regina Couto Faria, Rui Casale, Antonio Valdair Carneiro e Roberto dos Santos Junior pela ajuda, muito preciosa, para realização deste trabalho.

Aos colegas do departamento pelo carinho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE SÍMBOLOS	iv
RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
1. INTRODUÇÃO	1
§ A fadiga dos metais e o comportamento do concreto sob solicitação cíclica	2
O conteúdo dos capítulos desta dissertação	3
2. FUNDAMENTOS DOS MECANISMOS FÍSICOS DE DEFORMAÇÃO E RUPTURA	5
2.1. DEFORMAÇÃO E RUPTURA NOS METAIS	7
2.1.1. ESTRUTURA CRISTALINA	7
Faixas de Deslizamento	9
Imperfeições nos Cristais	9
Inclusões	14
Maclagem	15
2.1.2. RUPTURA POR CLIVAGEM	16
2.1.3. RUPTURA DÚCTIL	16
Encruamento Positivo	17
2.1.4. CONTRASTE ESQUEMÁTICO ENTRE RUPTURA FRÁGIL E DÚCTIL	18

2.1.5. DEFORMAÇÃO LENTA	19
2.2. DEFORMAÇÃO E RUPTURA NO CONCRETO	21
2.2.1. ESTRUTURA INTERNA	21
Estrutura da pasta de cimento endurecida	22
Água e vazios na pasta endurecida	23
Zona de transição	23
2.2.2. FISSURAÇÃO E RUPTURA	24
Micro-fissuração , encruamento negativo e energia de fratura na tração	25
Deformação lenta e Retração	30
Expansão e Relaxação	33
3. FADIGA NOS METAIS E COMPORTAMENTO DO CONCRETO SOB SOLICITAÇÃO CÍCLICA	34
3.1. METAIS	36
3.1.1. MECANISMO DA FADIGA EM METAIS	36
Processo de iniciação de uma trinca (nucleação)	37
Desenvolvimento da trinca	39
3.1.2. RECONHECIMENTO DA SUPERFÍCIE DE UMA RUPTURA POR SOLICITAÇÃO CÍCLICA	43
3.1.3. ANÁLISE FENOMENOLÓGICA DA FADIGA EM METAIS	45
Deformação (ou solicitação) cíclica alternada: Efeito Bauschinger e Ciclos de histerese	45
Curvas de Wöhler e limite de fadiga	48
Corrosão e fadiga	49
Efeito da frequência e temperatura	50
3.2. CONCRETO	51
3.2.1. DESENVOLVIMENTO DE FISSURAS	51
3.2.2. ANÁLISE FENOMENOLÓGICA DA FADIGA EM CONCRETO	53
Curvas de Wöhler e limite de fadiga	53

Concreto à solicitação alternada	58
3.2.4. BREVE COMENTÁRIO SOBRE A FADIGA EM ELEMENTOS ESTRUTURAIS DE CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO	60
3.3. SOBRE MODELOS USUAIS QUE INTRODUZEM A IDÉIA DE ACUMULAÇÃO DE DANO NO ESTUDO DA FADIGA	61
4. ELEMENTOS DA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO	66
4.1. CARACTERIZAÇÃO DO DANO	68
4.2. A IMPORTÂNCIA DA TERMODINÂMICA DOS PROCESSOS IRREVERSÍVEIS	71
4.3. TEORIA DO DANO APLICADA AO CONCRETO	71
4.3.1. MODELO DE MAZARS PARA O CONCRETO	72
Carregamento proporcional	72
Carregamento cíclico	78
5. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO DE DANO DE MAZARS ADAPTADO AO CASO DE CARREGAMENTO CÍCLICO	84
5.1. REFORMULAÇÃO DAS RELAÇÕES QUE ENVOLVAM TAXAS DE VARIÁVEIS VISANDO A INTEGRAÇÃO EM PASSO FINITO	84
Variável dano	84
Comentário sobre o vetor de tensões	86
5.2. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO COM MODELO CONSTITUTIVO DE DANO	87
5.3. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	91
Esquema geral da subrotina que calcula o valor do dano considerando carregamento cíclico	92
6. EXEMPLOS	95

6.1. EXEMPLO 01 - VIGA PAREDE EM CONCRETO	96
6.2. EXEMPLO 02 - VIGA EM CONCRETO ARMADO COM CARGAS CONCENTRADAS	99
Características da viga	99
Parâmetros do modelo	101
6.3. EXEMPLO 3 - VIGA SUPER ARMADA COM CARGA CONCENTRADA NO MEIO DO VÃO	105
Parâmetros do modelo	106

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Comportamento dos materiais sujeitos à solicitação.	6
Figura 2.2 - Tipos de ruptura: (a) Frágil e (b) Dúctil.	7
Figura 2.3 - Arranjo dos átomos dos metais.	8
Figura 2.4 - Estrutura policristalina dos metais.	8
Figura 2.5 - Natureza imperfeita de um cristal metálico.	10
Figura 2.6 - Movimento de uma discordância em aresta.	11
Figura 2.7 - Discordância helicoidal.	12
Figura 2.8 - Formação de discordâncias por cisalhamento. Figura adaptada de VAN VLACK [54].	12
Figura 2.9 - Discordâncias de 'mesmo sinal'.	13
Figura 2.10 - Discordâncias de 'sinais opostos'.	13
Figura 2.11 - Discordâncias em planos de deslizamento separados.	14
Figura 2.12 - Deformação por: (a) deslizamento e (b) maclagem.	15
Figura 2.13 - Clivagem se propagando através dos grãos.	16
Figura 2.14 - Ruptura por cisalhamento em metal puro.	17
Figura 2.15 - Ruptura frágil e dúctil.	18
Figura 2.16 - Diagrama de deformação lenta.	20
Figura 2.17 - (a) Ensaio de tração uniaxial, (b) Curva 'softening'. Figura adaptada de CARPINTERI [12].	26
Figura 2.18 - Fenômeno do 'snap-back'. Diagrama $F \times \Delta L$ e Diagrama $\sigma \times \epsilon$. Figura adaptada de CARPINTERI [12].	27
Figura 2.19 - Formação e propagação da fissura para curva 'softening'. Figura adaptada de PROENÇA [46].	28
Figura 2.20 - Zona de Processo.	29
Figura 2.21 - Retração e Deformação lenta no concreto. Figura adaptada de MEHTA & MONTEIRO [38].	33
Figura 3.1 - Estágios de desenvolvimento de trinca por fadiga.	37

Figura 3.2 - Modelo de Wood para iniciação de trinca.	38
Figura 3.3 - Estágios I (a) e II (b) de desenvolvimento de trinca.	40
Figura 3.4 - Ondulações por fadiga na superfície de ruptura de uma liga de alumínio 2024-T3. Figura adaptada de SURESH [51].	41
Figura 3.5 - Desenvolvimento de trinca por carregamento cíclico.	42
Figura 3.6 - Esquema de ruptura por fadiga nos metais.	44
Figura 3.7 - (a) Esquema da curva $\sigma \times \epsilon$ para deformação cíclica alternada. (b) Ilustração do efeito Bauschinger.	45
Figura 3.8 - Fenômeno do encruamento positivo e negativo, respectivamente, para deformação controlada e tensão controlada.	46
Figura 3.9 - Representação esquemática de um ciclo de histerese estabilizado. Figura adaptada de SURESH [51].	47
Figura 3.10 - Curvas S-N para metais CFC e metais CCC.	48
Figura 3.11 - Diagrama típico tensão x abertura de fissura para o concreto. Figura adaptada de HORII et al. [26].	52
Figura 3.12 - Curva S-N para concreto à compressão.	54
Figura 3.13 - Diagrama de Goodman (a) e Diagrama de Smith (b). Figura adaptada do CEB [16].	55
Figura 3.14 - Curva S-N para concreto simples em tração.	56
Figura 3.15 - Diagrama de Goodman modificado.	59
Figura 3.16 - Regra linear para acumulação de dano por fadiga.	62
Figura 3.17 - Níveis padrões de tensão em testes.	63
Figura 3.18 - Modelo de acumulação de dano linear e não-linear aplicados a dois carregamentos cíclicos com amplitudes diferentes. Figura adaptada de BUCH [11].	64
Figura 4.1 - Mecânica do Dano x Mecânica da Fratura.	67
Figura 4.2 - Representação de um elemento de volume com dano.	68
Figura 4.3 - Deformação equivalente.	70
Figura 4.4 - Representação de ϵ_{do} no gráfico σ - ϵ de um ensaio de tração uniaxial.	73

Figura 4.5 - Superfície envoltória de dano nulo.	74
Figura 4.6 - Curvas experimentais e constitutivas de tração e compressão	76
Figura 5.1 - Valor da rigidez secante da curva $\sigma - \epsilon$	87
Figura 5.2 - Processo iterativo para o caso uniaxial. Figura adaptada de ÀLVARES [2].	90
Figura 5.3 - Cálculo das variáveis dano de tração e de compressão.. . . .	91
Figura 5.4 - Fluxograma para cálculo da variável escalar do dano e do vetor de tensões.	94
Figura 6.1 - Esquema da viga-parede de concreto.	96
Figura 6.2 - Viga discretizada em malha de 60 elementos finitos de 4 nós.	97
Figura 6.3 - Distribuição de dano na viga para carregamento de colapso.	98
Figura 6.4 - Distribuição de dano para o primeiro e último ciclo de carregamento.	98
Figura 6.5 - Gráfico Flecha (m) x Número de Ciclos N.	99
Figura 6.6 - Geometria da viga ensaiada em ÀLVARES [02].	100
Figura 6.7 - Armação da viga. Viga super armada ensaiada em ÀLVARES [02].	100
Figura 6.8 - Curva Tensão x Deformação para caso de compressão monoaxial.	101
Figura 6.9 - Curva Tensão x Deformação para o caso de tração uniaxial.	102
Figura 6.10 - Discretização da viga em 108 elementos finitos bidimensionais de 4 nós.	103
Figura 6.11 - Diagrama Flecha x Carga Aplicada para carregamento crescente. Figura adaptada de ÀLVARES [02].	104
Figura 6.12 - Flecha x Número de Ciclos.	105
Figura 6.13 - Geometria da viga ensaiada em BRAGUIM [09].	105
Figura 6.14 - Armação da viga. Viga super armada ensaiada em BRAGUIM [09].	106
Figura 6.15 - Discretização da viga em 84 elementos finitos bidimensionais de 4 nós.	107
Figura 6.16 -Resultado experimental e fornecido pelo modelo: Flecha x Número de ciclos.	107

LISTA DE SÍMBOLOS

Gregos

α_T, α_C	Componentes da combinação linear, $\alpha_T + \alpha_C = 1$
$\Delta \epsilon$	Variação de deformação
$\Delta \epsilon_e$	Variação de deformação elástica
$\Delta \epsilon_p$	Variação de deformação plástica
$\Delta \epsilon_b$	Efeito Bauschinger em termos de deformação
$\Delta \sigma$	Variação de tensão
$\Delta \sigma_b$	Efeito Bauschinger em termos de tensão
δ	Deslocamento em um ponto
ϵ_a	Amplitude de deformação
$\epsilon_{\text{máx}}$	Valor máximo da amplitude de deformação
$\epsilon_{\text{mín}}$	Valor mínimo da amplitude de deformação
ϵ_i	Deformação segundo a direção i
$\langle \epsilon_i \rangle_+$	Componente positiva da deformação principal na direção i
$\bar{\epsilon}$	Deformação equivalente
ϵ_{do}	Deformação correspondente ao esforço máximo em uma prova de tração uniaxial
$\epsilon_{Ti}, \epsilon_{Ci}$	Componentes de tração e compressão da deformação principal
ϵ_V^+	Variável cinemática representativa do estado local de extensão
ζ	Volume total do corpo estudado
$\partial \zeta$	Superfície que limita a região ζ
ν	Coefficiente de Poisson
ρ	Densidade do corpo estudado
σ_i	Tensão normal segundo a direção i
σ_a	Amplitude de tensão

σ_d	Tensão máxima admissível para que não ocorra ruptura sob carregamento cíclico
σ_{\max}	Valor máximo da amplitude de tensão
σ_{\min}	Valor mínimo da amplitude de tensão
$\underline{\sigma}$	Tensor de tensões
$\langle \underline{\sigma} \rangle_+$, $\langle \underline{\sigma} \rangle_-$	Componentes positiva e negativa de $\underline{\sigma}$
$\bar{\sigma}$	Tensão efetiva
$\bar{\underline{\sigma}}$	Tensor das tensões efetivas
σ_t	Resistência à tração
Φ	Potencial de dissipação
Φ^*	Potencial de dissipação dual de Φ
ψ	Potencial de energia específica livre (por unidade de volume)
Ω	Volume de ζ do corpo estudado
$\partial\Omega$	Superfície que limita a região Ω

Romanos

A_T, B_T	Parâmetros do modelo relativos à tração uniaxial
A_C, B_C	Parâmetros do modelo relativos à compressão uniaxial
\underline{D}_0	Tensor constitutivo elástico de quarta ordem do material íntegro
D	Variável escalar de dano
E_0	Módulo de elasticidade do material íntegro
\tilde{E}	Módulo de elasticidade do material com dano
\dot{E}	Taxa da energia cinética
$f(\tilde{\epsilon}, D)$	Função de dano para carregamento proporcional
$\hat{f}(\tilde{\epsilon}, D)$	Função de dano para carregamento cíclico
$F(\tilde{\epsilon})$	Função contínua e positiva da deformação equivalente $\tilde{\epsilon}$
f_{cm}	Resistência média do concreto à compressão
f_{ctm}	Resistência média do concreto à tração

G_f	Energia de fratura por unidade de área
\underline{h}	Vetor fluxo de calor através da unidade de superfície
\underline{I}	Matriz identidade
\underline{K}	Matriz de rigidez secante da estrutura
n	Parâmetro do modelo para caso de carregamento cíclico
n	Número de ciclos aplicados
N	Número de ciclos que levam à ruptura
P	Probabilidade de ruptura
$P_{(e)}$	Potência externa introduzida ao sistema
\underline{q}	Vetor das variáveis internas
$Q_{(e)}$	Taxa de calor introduzida ao sistema
R	Relação entre σ_{\min} e σ_{\max}
s	Entropia específica por unidade de massa
S	Área de uma seção do domínio
\tilde{S}	Área resistente efetiva
S_0	Área total de defeitos
T	Temperatura local absoluta
\dot{U}	Taxa da energia interna
\underline{u}	Vetor de deslocamentos
Y_K	Variável termodinâmica associada à variável interna q_K

RESUMO

A microestrutura dos metais e concreto é estudada com o objetivo de caracterizar os mecanismos físicos elementares de deformação e ruptura abordados em modelos constitutivos dedicados à simulação da resposta desses materiais.

A fadiga em metais é comentada enfatizando-se o estudo microscópico dos processos de iniciação e propagação de trincas. Um estudo à nível fenomenológico do comportamento do material sob solicitação cíclica é acrescentado.

Para o concreto, dá-se ênfase ao estudo da fissuração e das características de comportamento do material sob a ação de solicitação cíclica. Apresenta-se um modelo constitutivo não-linear baseado na mecânica do dano contínuo. O modelo de dano isotrópico adotado é analisado em seus aspectos fundamentais: hipóteses básicas, critério de início e propagação de dano, lei de evolução da variável escalar representativa do processo de deterioração. Como o modelo original é limitado ao caso de carregamento proporcional, é apresentada uma extensão para o caso de carregamento cíclico.

Destaca-se a implementação numérica do modelo em combinação com a técnica dos elementos finitos. Os resultados fornecidos pelo modelo são apresentados em relação a exemplos teóricos e em vigas de concreto armado das quais se dispõe de resultados experimentais.

ABSTRACT

Metals and concrete microstructure are studied aiming at characterization of the deformation and failure elementary physical mechanisms that are approached by constitutive models dedicated to simulate the response of these materials.

Fatigue of metals is commented with emphasis on microscopic study of both the crack initiation and the crack propagation processes. A study at phenomenological level of the behaviour of the material under cyclic loading is added.

With reference to concrete, emphasis is given to the study of both cracking and behaviour of the material under cyclic loading. A nonlinear constitutive model based on the Continuum Damage Mechanics is presented. The adopted isotropic damage model is analyzed with respect to its fundamental aspects: basics' hypothesis, damage threshold, evolution law of the scalar variable representing degradation process. Since the original model is limited to proportional loading an extension for cyclic loading case is presented.

The numerical implementation of the model, combined with the finite element technique, is emphasized. Results obtained with the damage model are showed through theoretical examples and reinforced concrete beams for which experimental results are known.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O aprimoramento das técnicas experimentais que permitem a observação do comportamento microestrutural têm permitido o desenvolvimento de modelos constitutivos específicos para diferentes materiais, os quais permitem descrever com boa precisão o comportamento de uma estrutura, desde sua fase elástica até a fase não-linear que antecede a ruptura.

De fato, fenômenos que conduzem a um comportamento diferenciado da estrutura podem ser mais facilmente modelados quando se entendem as alterações que ocorrem no material à nível microscópico. Por exemplo, explicações para deformações plásticas, efeito 'Bauschinger', deformação lenta, rupturas frágil e dúctil, encruamento dos metais e o fraturamento do concreto são encontradas no estudo da microestrutura.

Este trabalho tem por objetivo tratar alguns aspectos de importância na formulação de modelos constitutivos para materiais de uso corrente em engenharia civil (os metais e o concreto), destacando-se a caracterização de certos fenômenos a partir do estudo da microestrutura e teorias macroscópicas existentes que permitem incorporá-los nos modelos.

Como a teoria em si é bastante vasta, optou-se por tratar mais detalhadamente da fadiga em metais e da deformabilidade do concreto sob solicitação periódica ondulada (sem inversão de sinal) aqui referenciada como cíclica.

A fadiga dos metais e o comportamento do concreto sob solicitação cíclica

A palavra fadiga, originada do Latim *fatigare*, que significa 'cansar'; tem sido amplamente aceita no vocabulário do engenheiro para conceituar a ruptura de materiais sob tensão (ou deformação) cíclica.

Percebe-se grande diferença entre as publicações à respeito do comportamento dos metais e do concreto sob solicitação cíclica. Sobre os metais, material praticamente homogêneo, fabricado dentro de padrões rígidos de controle de qualidade, encontra-se grande quantidade de referências bibliográficas voltadas ao estudo da fadiga. Um importante motivo para a grande ênfase dada à fadiga em metais é o fato de que, também na engenharia mecânica, este fenômeno é de grande importância.

Já o concreto, por ser material heterogêneo de natureza complexa, o estudo da fadiga é feito a partir de uma análise da deformabilidade apresentada pelo material em consequência do tipo de solicitação. Pelo que se pôde constatar, o assunto ainda não foi tratado com profundidade, uma vez que ao fenômeno só é dado destaque no caso de obras especiais.

O histórico da fadiga, portanto, está relacionado com os metais. Acredita-se que o primeiro estudo em fadiga tenha sido conduzido pelo engenheiro alemão W. A. J. Albert, em torno de 1829, que fez testes em correntes de guindastes usados em minas. A primeira pesquisa detalhada sobre o assunto, entretanto, só foi iniciada em 1842, devido a um acidente em trilhos de trem na França.

Wöhler, em 1860, caracterizou o comportamento do material sob solicitação cíclica com as 'curvas S-N' (relacionando tensão máxima com número de ciclos para ruptura), que serão apresentadas neste trabalho.

Em 1874, o engenheiro alemão H. Gerber, iniciou o desenvolvimento de métodos para projeto considerando a ocorrência de solicitação cíclica. Sua contribuição incluiu o desenvolvimento de métodos para cálculo de vida à fadiga para diferentes níveis médios de tensão. Problemas similares foram tratados por Goodman (1899).

Seguiu-se, com o tempo, estudos dos efeitos de fatores mecânicos, microestruturais e ambientais na deformação cíclica e iniciação e desenvolvimento de trincas. Segundo SURESH [51], este assunto têm sido objeto de considerável pesquisa nas últimas quatro décadas.

Neste trabalho, em nível de microestrutura dos metais, dá-se ênfase à iniciação e propagação de trincas até a ocorrência da fadiga. Em seguida, comentam-se alguns modelos em nível macroscópico, dedicados à previsão de vida à fadiga. Observa-se que existe uma grande quantidade de modelos de propagação de trincas por solicitação cíclica, cuja base é a mecânica da fratura, os quais, porém, não serão tratados neste trabalho.

Por outro lado, para o concreto, a ênfase é dada ao estudo da deformabilidade decorrente de solicitação cíclica, isto é, a evolução do processo de microfissuração. Fenômenos como as perdas de resistência e rigidez são típicas deste material e podem ser convenientemente abordados através da mecânica do dano contínuo.

O conteúdo dos capítulos desta dissertação

No capítulo 1, procura-se, inicialmente, mostrar um pouco do vasto campo da microestrutura em dois materiais de grande uso na engenharia: metais e concreto. Nos

metais, com o objetivo de caracterizar os tipos de deformação e ruptura observados experimentalmente, estuda-se a estrutura cristalina e suas imperfeições, com ênfase no estudo das deslocamentos (responsáveis pela ductilidade do material). Para o concreto o estudo da fissuração permite o entendimento das principais características associadas ao material.

O segundo capítulo trata em particular do fenômeno da fadiga, novamente em metais e concreto. Este capítulo tem como objetivo ser a ponte de ligação entre o estudo da microestrutura em geral e a análise fenomenológica.

O terceiro capítulo trata dos elementos da mecânica do dano contínuo. Inicialmente, breves comentários históricos são feitos em relação ao assunto, com exposição da diferença entre mecânica do dano e mecânica da fratura. Segue-se a caracterização geral do dano e um modelo constitutivo específico para o concreto para o caso de solitação cíclica.

No capítulo 4 comentam-se alguns aspectos relativos à implementação computacional do modelo de dano. Discute-se em particular a integração do modelo constitutivo e o processo incremental-iterativo de resolução do problema de análise estrutural com o emprego do método dos elementos finitos.

O capítulo 5 apresenta três exemplos de aplicação do modelo no estudo do comportamento de estruturas em concreto, destacando-se o aumento da flecha com o número de ciclos.

O trabalho reúne em apêndice alguns fundamentos da mecânica do contínuo e da termodinâmica dos processos irreversíveis. Trata-se de um resumo que inclui o princípio das potências virtuais, os conceitos e as leis da termodinâmica e o método do estado local. Estes assuntos são considerados de grande importância no estudo da mecânica do dano contínuo. Porém, como é um assunto longo, optou-se por inseri-lo neste trabalho em forma de apêndice.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS DOS MECANISMOS FÍSICOS DE DEFORMAÇÃO E RUPTURA

O estudo dos mecanismos físicos elementares de deformação e ruptura é importante para o estabelecimento de hipóteses coerentes sobre as quais se baseiam teorias que, em âmbito macroscópico, procuram modelar a resposta de estruturas submetidas a diferentes tipos de solicitações.

É importante lembrar que nos modelos teóricos o sólido, ou porção dele, é considerado um meio contínuo e os modelos constitutivos (relações tensão-deformação) para esse meio são formulados pela Mecânica dos Meios Contínuos, de modo que uma boa aproximação depende do conhecimento mais detalhado do fenômeno observado.

Os materiais de uso mais frequente em engenharia - metais, ligas, polímeros, compostos, cerâmicas, rochas, concreto e madeira - apresentam grande diferença na sua estrutura física, mas apresentam fenômenos comuns quando se observa seu comportamento mecânico macroscópico. Isto é, identificam-se em todos: elasticidade, deformações plásticas, ciclos de histerese, fraturamento, etc. Portanto, o entendimento dos mecanismos elementares responsáveis pela elasticidade, plasticidade e rupturas frágil e dúctil já é suficiente para formulação de modelos coerentes.

De um modo geral, todos os materiais sofrem mudança de forma quando sujeitos a solicitações mecânicas (figura 2.1). Na resposta elástica (figura 2.1 (a)), em correspondência à uma força aplicada, os íons e moléculas que compõem o material deslocam-se uma pequena distância das suas posições de equilíbrio e retornam às posições originais quando a força é removida.

Quando o material atinge seu limite de elasticidade, o aumento de tensão leva a uma das seguintes alternativas:

- o material permanece como um todo coerente, mas não retorna à sua posição inicial quando as forças são removidas (deformação plástica), ilustrado na figura 2.1 (b).
- o material decompõe-se em fragmentos (figura 2.1 (c)).

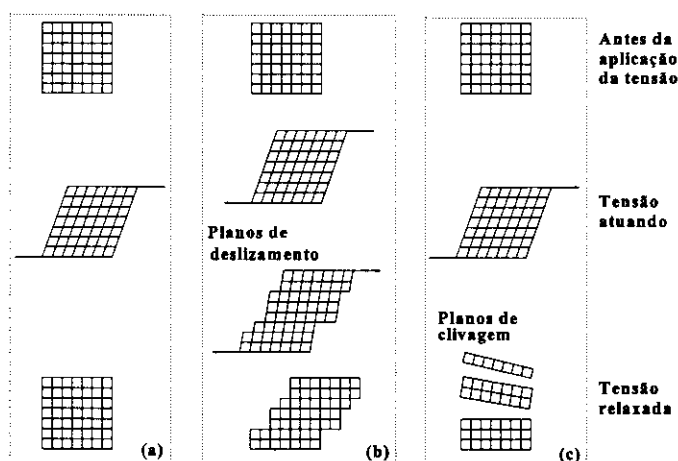


Figura 2.1 - Comportamento dos materiais sujeitos à solicitação.

Se a solicitação geradora de deformação elástica e/ou plástica for progressivamente aumentada ocorrerá o desenvolvimento de fissuras, que a partir de uma certa dimensão propagam-se de uma maneira instável.

Assim, a ruptura pode ser frágil ou dúctil, como ilustra a figura 2.2, e o tipo de ruptura

produzida depende do nível de sollicitação e das propriedades elásticas/plásticas do material. Em materiais frágeis como ferro-fundido, vidro e concreto a ruptura ocorre antes que qualquer deformação plástica significativa tenha ocorrido; na ruptura dúctil algum fluxo plástico a precede.

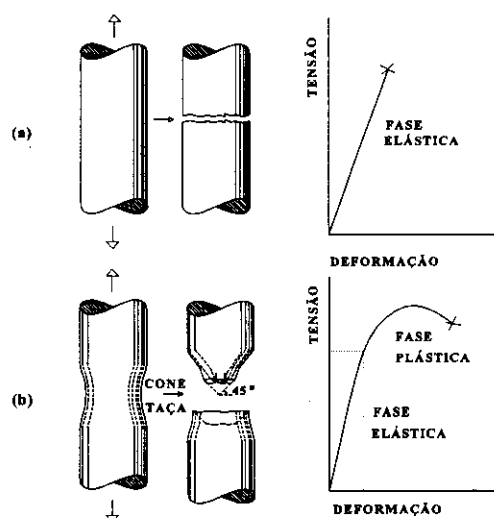


Figura 2.2 - Tipos de ruptura: (a) Frágil e (b) Dúctil.

2.1. DEFORMAÇÃO E RUPTURA NOS METAIS

2.1.1. ESTRUTURA CRISTALINA

Os metais, bem como todas as verdadeiras estruturas sólidas, têm estrutura cristalina quando se solidificam, ou seja, os átomos se arranjam num modelo tridimensional, ordenado e repetido. Esta estrutura cristalina subdivide-se em células unitárias, que são pequenos volumes, cada um contendo as características encontradas no cristal inteiro.

Segundo HIGGINS [24], as forças de ligação dos átomos não são direcionadas e, como no metal puro todos os átomos são da mesma espécie e tamanho, eles irão se agrupar

numa estrutura o mais compacta possível, em correspondência a uma energia potencial mínima.

A maioria dos metais empregados na engenharia apresentam o arranjo dos átomos das células unitárias segundo um dos três tipos de estrutura apresentados na figura 2.3: estrutura hexagonal compacta - HC (zinco, titânio), estrutura cúbica de faces centradas - CFC (cobre, alumínio), estrutura cúbica de corpo centrado - CCC (ferro).

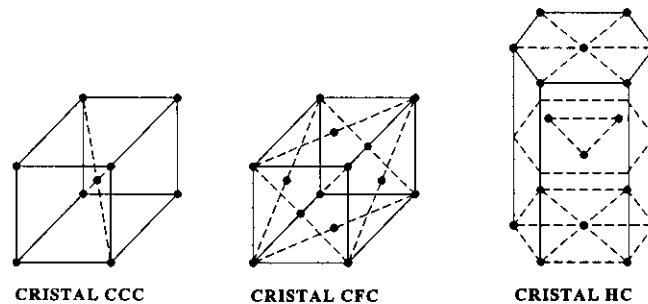


Figura 2.3 - Arranjo dos átomos dos metais.

Os metais e ligas tem uma estrutura policristalina, isto é, são formados por um mosaico de cristais de uma mesma célula unitária básica, porém cada um deles tendo um desenvolvimento aleatório segundo diferentes direções. Cada cristal deste mosaico é um monocristal ou grão e o mosaico um policristal (figura 2.4). O limite de um grão é conhecido como contorno de grão e possui influência na deformação dos metais.

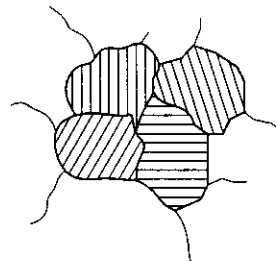


Figura 2.4 - Estrutura policristalina dos metais.

Faixas de Deslizamento

Em ensaios de tração, onde o corpo de prova é tracionado até a ruptura observa-se, macroscopicamente, que o metal passa por uma fase de deformação elástica e por outra de deformação plástica. De um ponto de vista microestrutural, a deformação plástica dos metais se dá por um processo de deslizamento, isto é, as camadas de átomos deslizam umas sobre as outras, formando faixas de deslizamento.

Tais deslizamentos ocorrem segundo planos cristalográficos específicos, de maior distância interplanar. Dentro desses planos, a densidade de átomos é a maior possível, e assim sendo, a direção mais compacta é aquela que oferece menor resistência ao cisalhamento. Essas faixas de deslizamento são as primeiras a serem ativadas durante a deformação e são chamadas de faixas (ou planos) de deslizamento primárias.

Imperfeições nos Cristais

As estruturas descritas anteriormente estão sujeitas à presença de alguma desordem. Em geral, as imperfeições são minoria - segundo VAN VLACK [54], 1 átomo em cada 10^{10} fora do lugar esperado - porém, embora raras, possuem influência sobre a ductilidade observada.

O que levou os metalurgistas a não considerarem os cristais metálicos como sendo relativamente perfeitos foi o fato de o valor prático obtido para a tensão crítica de cisalhamento de um metal ser significativamente menor que o valor deduzido de considerações teóricas, baseadas no deslizamento instantâneo e em bloco.

Por outro lado, admitindo-se os metais formados por cristais e policristais perfeitos, é possível explicar somente deformação elástica e ruptura frágil, esta última resultante da perda de coesão. Porém, a deformação plástica e ruptura dúctil não são compatíveis com

a hipótese de arranjo perfeito de cristais e somente se explicam pela presença de defeitos que perturbam a rede cristalina.

Desse modo, o cristal metálico consiste de átomos que se agrupam de acordo com alguma configuração geral, na qual existem vários tipos de defeitos e falhas (esquematizados na figura 2.5) que causam distorções e irregularidades na rede cristalina.

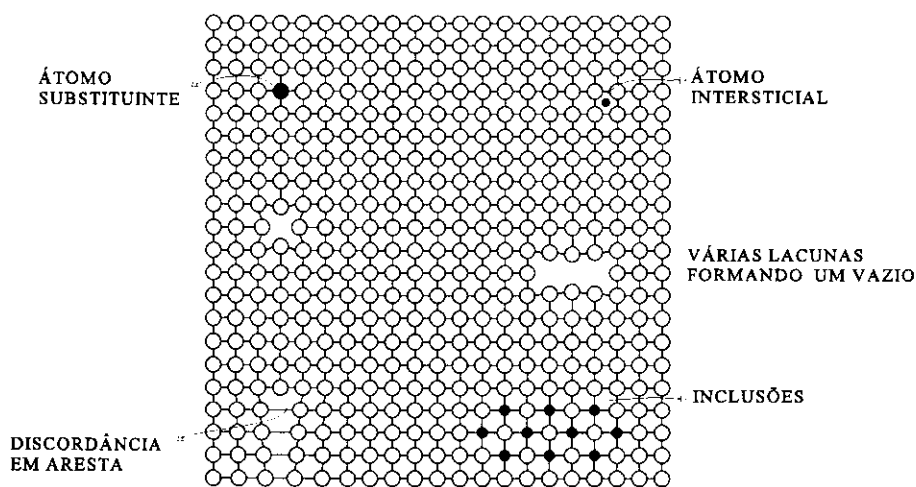


Figura 2.5 - Natureza imperfeita de um cristal metálico.

O defeito puntual mais simples é uma lacuna ou vacância, ou seja, a falta de um átomo na estrutura. Resultantes de empacotamento imperfeito durante a cristalização, ou decorrentes das vibrações térmicas dos átomos a elevadas temperaturas, as lacunas podem ser simples, bilacunas ou trilacunas.

O defeito intersticial ou inserção ocorre quando um átomo extra de outro elemento é abrigado em uma estrutura cristalina, produzindo distorção atômica. Tal defeito ocorre principalmente se o fator de empacotamento for baixo.

As lacunas são defeitos mais comuns em estruturas compactas do que as inserções, pois se torna necessária uma energia adicional para forçar os átomos para posições

intersticiais.

Um dos defeitos mais importantes, na sua forma mais simples, consiste na aresta de um plano extra de átomos na estrutura cristalina. Um defeito desse tipo chama-se deslocação ou discordância em aresta, sendo responsável pela plasticidade dos metais.

A figura 2.6 ilustra a distribuição de átomos ao redor de uma discordância em aresta, onde o sinal (\perp) representa a presença das discordâncias. Sob a ação de uma solicação, como indicado na figura, a discordância 'salta' progressivamente através do cristal para novas posições estáveis (figuras 2.6 (a), (b) e (c)). Uma vez retirada a solicação (figura 2.6 (d)), forma-se um degrau de deslizamento irreversível - conhecido como vetor de Burgers, b - configurando-se uma deformação plástica.

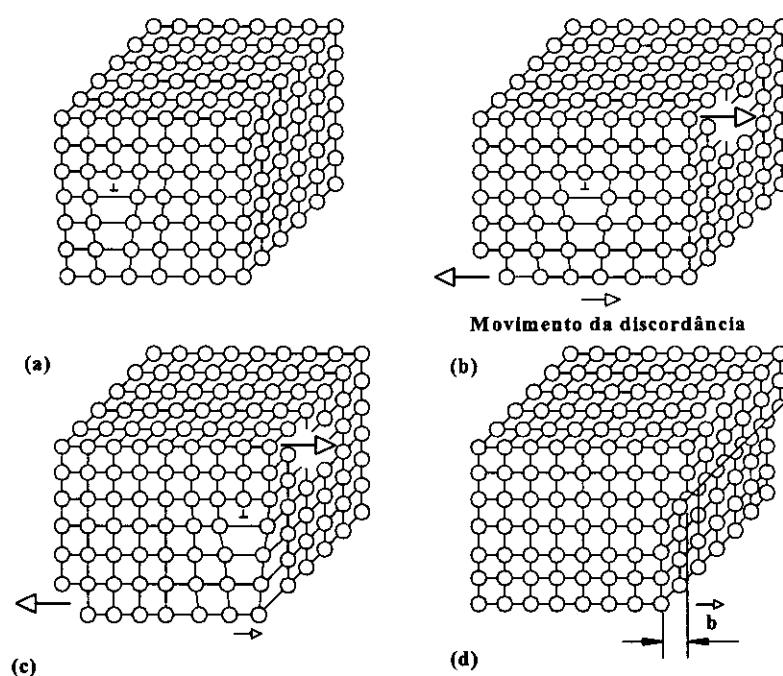


Figura 2.6 - Movimento de uma discordância em aresta.

Na prática, o movimento da discordância pode ser interrompido por outro defeito ou descontinuidade dentro do cristal, o que pode provocar o início de um processo de ruptura.

A figura 2.7 ilustra uma discordância do tipo helicoidal.

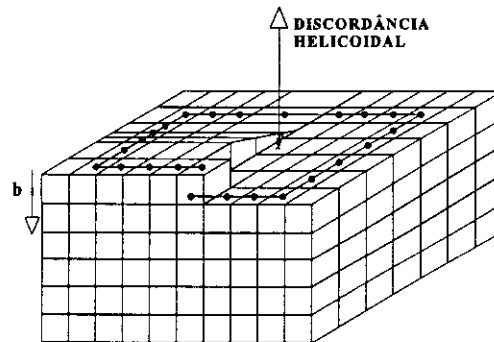


Figura 2.7 - Discordância helicoidal.

As discordâncias citadas anteriormente podem ser formadas durante a cristalização. Entretanto, a origem mais comum é durante a deformação. O cisalhamento, por exemplo, pode introduzir tanto a discordância em aresta quanto helicoidal, como ilustra a figura 2.8.

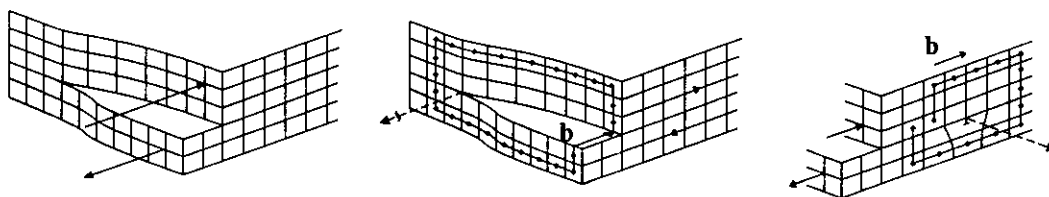


Figura 2.8 - Formação de discordâncias por cisalhamento.

Figura adaptada de VAN VLACK [54].

A interação entre discordâncias que se movem no mesmo plano ou em planos vizinhos afeta o processo de deformação em função da consequente distribuição de energia que envolve. Na região vizinha à discordância em aresta, por exemplo, há um incremento de energia devido à presença do plano extra de átomos. Nessas condições, duas discordâncias ditas de 'mesmo sinal', movendo-se em planos vizinhos ou no mesmo

plano, como ilustra a figura 2.9, tendem a se repelir mutuamente no sentido de reduzir a concentração de energia que resultaria de sua aproximação. Naturalmente, a tensão necessária para movê-las conjuntamente aumenta, crescendo, também, a resistência ao deslizamento. Nos casos que a tensão aplicada é bastante elevada, as discordâncias de mesmo sinal tendem a empilhar-se em obstáculos como os contornos de grão.

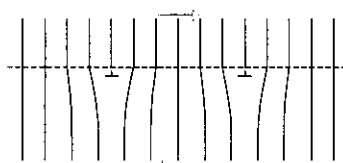


Figura 2.9 - Discordâncias de 'mesmo sinal'.

Ao contrário, as discordâncias ditas de 'sinais opostos' que se movem próximas umas das outras, tendem a se atrair mutuamente. Considerando uma situação em que as discordâncias estão no mesmo plano de deslizamento, sua aproximação levará a um aniquilamento mútuo, com a conseqüente diminuição da energia de deformação (figura 2.10). Se as discordâncias estão em planos de deslizamento separados de alguns espaços atômicos (figura 2.11 (a)), haverá a formação de lacunas, como ilustra a figura 2.11 (b), mas a energia total diminuirá devido ao aniquilamento de discordâncias. Às vezes aniquilações de discordâncias conduzem a uma relaxação do processo de deformação produzindo o chamado efeito 'softening'.

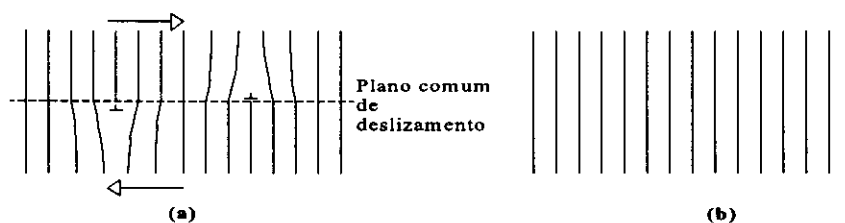


Figura 2.10 - Discordâncias de 'sinais opostos'.

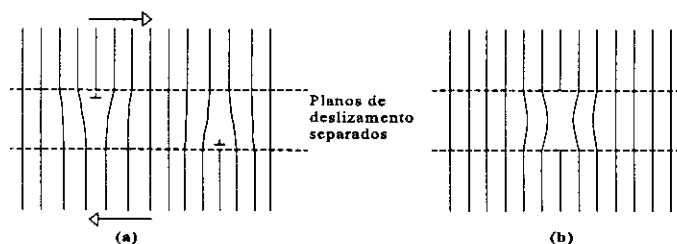


Figura 2.11 - Discordâncias em planos de deslizamento separados.

A superfície externa é o término da estrutura cristalina, portanto, os átomos superficiais, por terem vizinhos apenas de um lado, estão menos firmemente ligados que os átomos internos, permitindo que deslizamentos se iniciem com maior facilidade.

A fronteira entre dois grãos adjacentes se apresenta de forma irregular devido ao ajuste necessário entre monocristais, de forma que os átomos do contorno do grão possuem maior energia que os do interior, além disso, a região de fronteira tem influência sobre a progressão dos movimentos de discordância. Logo, o contorno de grão interfere na deformação plástica de um material. Um material de grãos finos é mais resistente que outro de grãos grossos, pelas dimensões menores de trinca que podem ocorrer devido ao acúmulo de discordâncias.

Inclusões

Ligas são metais de engenharia que contém grande quantidade de partículas ditas de segunda-fase ou inclusões, que são adicionadas durante a fase de cristalização com o objetivo de mudança em qualidades específicas do metal. Estas desempenham papel importante na ruptura dúctil do material.

Dependendo das características de dureza da inclusão elas apresentam uma importante divisão: (i) aquelas consideradas semi-coerentes ou incoerentes que não são penetráveis

por discordâncias, e (ii) aquelas consideradas coerentes com a matriz que permitem a progressão do caminhamento das discordâncias. Os dois tipos de discordâncias podem levar a diferentes tipos de encruamento.

Maclagem

O processo mais significativo e gerador de deformação plástica dos metais é o deslizamento. Todavia, a deformação residual pode ter origem num fenômeno conhecido como *maclagem*.

Enquanto que o deslizamento é um processo associado a um defeito de linha (a discordância), a maclagem está associada a um defeito de plano. Este tipo de defeito é mais comum à cerâmica do que aos metais.

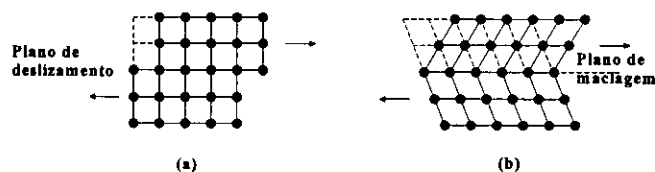


Figura 2.12 - Deformação por: (a) deslizamento e (b) maclagem.

No final do deslizamento, os átomos em bloco se moveram da mesma distância, como ilustra a figura 2.12 (b). Quando a maclagem está completa, a rede cristalina se altera de tal maneira que uma metade da macla é a imagem especular da outra metade, sendo que a linha de maclagem corresponde a posição do espelho.

A tensão necessária para produzir deformação por maclagem tende a ser maior que a necessária para produzir deformação por deslizamento.

2.1.2. RUPTURA POR CLIVAGEM

Ruptura frágil, ou por clivagem, ocorre preferencialmente em todos os metais de estruturas CCC ou HC em relação aos metais CFC. Os metais CFC são geralmente mais dúcteis devido ao número de planos de deslizamento possíveis da estrutura.

Ruptura por clivagem é a mais frágil forma de ruptura que pode ocorrer em materiais cristalinos. Este tipo de ruptura em metais ocorre pela separação direta ao longo dos planos cristalográficos devido a uma quebra simples das ligações atômicas. A sua principal característica é que está usualmente associada a um plano cristalográfico particular do grão. Uma vez que os grãos vizinhos subsequentes possuem orientações cristalográficas ligeiramente diferentes, as fissuras por clivagem mudam a direção ao atingir o contorno e continuam se propagando segundo um novo plano de clivagem, como ilustra a figura 2.13.

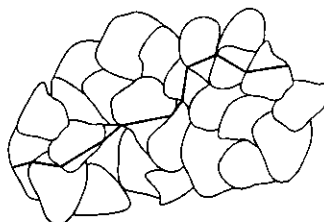


Figura 2.13 - Clivagem se propagando através dos grãos.

2.1.3. RUPTURA DÚCTIL

O mais familiar tipo de ruptura dúctil é observado no caso de tração uniaxial de barras e se apresenta na forma da clássica taça e cone de ruptura. Alcançado um máximo nível de sollicitação, o alongamento plástico torna-se não homogêneo e se concentra em uma pequena porção do corpo de prova prismático, gerando uma zona de estrangulamento da seção (figura 2.14).

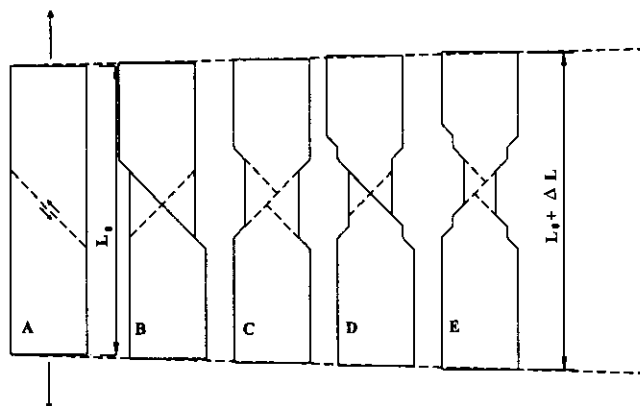


Figura 2.14 - Ruptura por cisalhamento em metal puro.

Em materiais extremamente puros, é possível que a deformação plástica em planos de deslizamento conjugados continue até que a seção tenha cem por cento de sua área reduzida. Como metais de engenharia contêm defeitos e partículas de segunda fase, a 'nucleação' ou concentração de defeitos ocorre mais facilmente. A união das cavidades que tenham sido formadas gera uma trinca normal à direção da solitação. A propagação da trinca ocorre então segundo um ângulo de 45° com o eixo de tensão, já que a tensão cisalhante é máxima nesta direção (figura 2.2 (b)).

Encruamento Positivo

À medida que a deformação prossegue o metal torna-se mais duro e mais resistente, até que atinge um ponto em que é impossível uma deformação adicional, ou seja, qualquer aumento de tensão leva apenas à ruptura. Neste estágio em que a resistência à tração e a dureza atingem um valor máximo e a ductilidade um valor mínimo, diz-se que o material está encruado.

O processo de encruamento em si, pode ser, em linhas gerais, explicado do modo que segue. Admite-se que seja aplicada uma solitação com intensidade suficiente para que

ocorram deslizamentos nos grãos do metal. O processo de deformação diminui na medida em que as discordâncias se localizam em posições nas quais é impedida a continuidade do movimento. O movimento de discordâncias pode ser interrompido por obstáculos como os contornos de grão, outros grupos de discordâncias e imperfeições ao longo do plano de deslizamento. É necessário, então, um aumento de tensão, para que sejam formadas novas discordâncias que se movimentem, até que estas também sejam ancoradas. Finalmente atinge-se um ponto em que não há mais discordâncias disponíveis. Este ponto coincide com o ponto de resistência máxima ao deslizamento (máxima resistência e máxima dureza).

2.1.4. CONTRASTE ESQUEMÁTICO ENTRE RUPTURA FRÁGIL E DÚCTIL

A figura 2.15 mostra as tensões relativas necessárias para ambos os tipos de ruptura. A ruptura dúctil ocorre quando a tensão necessária para a ruptura é maior que a resistência ao deslizamento - é o caso dos metais CFC (figura 2.15(a)). A ruptura antes da deformação por deslizamento, figura 2.15 (c), é o caso da mica, do vidro, do ferro-fundido.

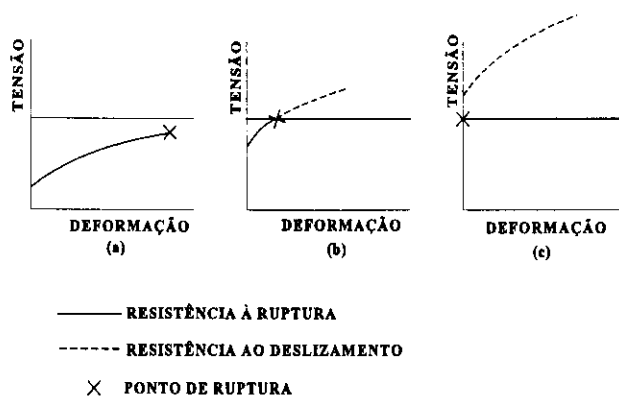


Figura 2.15. - Ruptura frágil e dúctil.

No caso ilustrado na figura 2.15 (b) há uma superposição típica para muitos metais. A deformação plástica se inicia, mas o encruamento aumenta a tensão tolerável até que a resistência a ruptura seja ultrapassada. Consequentemente, é comum encontrar metais que sofram alguma estrição antes de se romperem de forma frágil.

2.1.5. DEFORMAÇÃO LENTA

Quando o metal é solicitado por uma carga de certa intensidade, imediatamente manifesta-se uma deformação elástica e, num curto período de tempo, ocorrem ajustamentos plásticos adicionais nos pontos de concentração de tensão ao longo dos contornos de grão e de defeitos. Este processo de deformação pode ser considerado independente do tempo, já que a força causou uma deformação dita instantânea. Porém, se a solitação for aumentada e mantida constante, para muitos metais, o processo passa a ser dependente do tempo, gerando uma deformação que progride com solitação constante denominada *deformação lenta*. O fenômeno é influenciado pela presença de altas temperaturas, pois a energia adicional permite aos contornos de grãos 'acomodarem' as discordâncias, diminuindo o impedimento ao seu caminhamento causado pelas fronteiras.

Microscopicamente, investigações em monocristais e policristais revelaram que a deformação lenta é o resultado de diferentes mecanismos de movimento. Basicamente dois tipos de deformação podem ser observados em um material policristalino: deformações internas aos grãos de cristais separadamente e movimentos de corpo-rígido dos grãos. Os últimos, conhecidos como deslizamentos entre contornos de grãos, são a principal causa da deformação lenta secundária ou estacionária, que será comentada a seguir.

Uma curva de deformação lenta pode ser dividida em estágios conforme a velocidade de deformação, consequência de diferentes mudanças na estrutura cristalina. A figura

2.16 ilustra esta divisão para um caso de tração monoaxial.

A deformação inicial instantânea, geralmente elástica, é representada pela reta OA da figura. O trecho AB representa o período conhecido como 'deformação lenta primária', onde as deformações ocorrem exclusivamente devido ao movimento das discordâncias. Neste período ocorre o encruamento, levando à desaceleração da velocidade de deformação com o tempo. O trecho BC é conhecido como 'deformação lenta secundária' ou 'estado-estável', onde a velocidade de deformação é constante e mínima. Neste período ocorre o deslizamento entre contornos de grãos, sendo que a contribuição para deformação total é pequena, de aproximadamente 10%. A elevadas temperaturas, entretanto, os movimentos atômicos permitem que as discordâncias passem de um grão para outro, isto é, permitem a continuação da deformação plástica, reduzindo significativamente a deformação lenta secundária. A curva CD representa o período de aceleração da velocidade de deformação, culminando na ruptura, conhecido como 'deformação lenta terciária'. Essa aceleração é associada com a formação de microtrincas. O estágio terciário não deve ocorrer durante a vida útil de uma estrutura, sendo a velocidade de deformação no segundo estágio o fator determinante da vida útil.

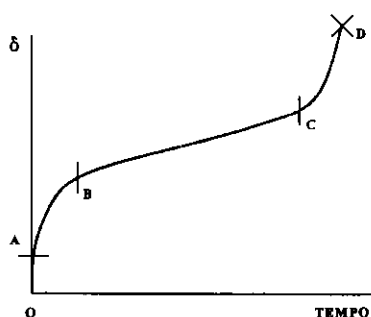


Figura 2.16 - Diagrama de deformação lenta.

De maneira geral, a curva ilustrada na figura 2.16 é representativa do fenômeno de deformação, porém o material pode ou não exibir os três estágios, dependendo dos níveis de tensão e temperatura.

2.2. DEFORMAÇÃO E RUPTURA NO CONCRETO

2.2.1. ESTRUTURA INTERNA

Considera-se que o concreto é constituído por três fases: agregado graúdo, matriz de argamassa e zona de transição.

O agregado graúdo é o material inerte envolvido pela argamassa, predominantemente responsável pela massa unitária, módulo de elasticidade e estabilidade dimensional do concreto.

A matriz de argamassa é constituída pelo agregado miúdo envolvido por uma pasta de cimento e água.

A nível microscópico, as duas fases da estrutura não são distribuídas homogeneamente, nem são homogêneas em si. Em algumas áreas, por exemplo, a argamassa se encontra tão densa quanto o agregado, enquanto em outras é altamente porosa.

Muitos aspectos do comportamento do concreto sob tensão podem ser explicados somente quando a interface agregado-cimento é tratada como uma terceira fase da estrutura do concreto, chamada *zona de transição*. Sendo uma camada delgada, aproximadamente 10 a 50 μm de espessura ao redor do agregado graúdo, a zona de transição é geralmente mais fraca do que os outros dois componentes principais do concreto, e, conseqüentemente, exerce uma influência maior do que se poderia esperar visto sua espessura.

Outros aspectos singulares da estrutura do concreto são que cada uma das fases é de natureza multifásica - cada partícula de agregado pode conter vários minerais,

microfissuras e vazios. Analogamente, tanto a matriz como a zona de transição contêm uma distribuição heterogênea, de diferentes tipos e quantidades de fases sólidas, poros e microfissuras, sujeitas a modificações com o carregamento, tempo, umidade e temperatura.

Estrutura da pasta de cimento endurecida

Uma vez que não é objetivo deste trabalho o aprofundamento no estudo dos elementos que contituem a microestrutura do concreto, somente serão citados, a título de curiosidade, os principais componentes da pasta. Maiores detalhes podem ser encontrados em MEHTA & MONTEIRO [38].

Além do cimento Portland anidro, quatro fases sólidas principais geralmente estão presentes na pasta hidratada:

-Silicato de cálcio hidratado (C-S-H): constitui de 50 a 60% do volume de sólidos de uma pasta de cimento Portland completamente hidratado e é, conseqüentemente, importante na determinação das propriedades da pasta.

-Hidróxido de cálcio: constituem 20 a 25% do volume de sólidos na pasta hidratada.

-Sulfoaluminatos de cálcio: ocupam de 15 a 20% do volume de sólidos na pasta endurecida e desempenham um papel menor nas relações estrutura-propriedade.

- Grãos de clínquer não hidratado: dependendo da distribuição e do tamanho das partículas de cimento anidro e do grau de hidratação, alguns grãos de clínquer não hidratado podem ser encontrados na microestrutura.

Água e vazios na pasta endurecida

Ocorrendo a reação química entre a água e o cimento tem-se o gel de cimento, que corresponde à massa coesiva. Essa parcela de água fixada quimicamente, denominada água não-evaporável, sofre uma contração de volume, originando poros cheios de ar. Essa contração é conhecida como retração plástica, pois ocorre quando o concreto ainda está em estado plástico.

A quantidade de água usada no concreto é geralmente maior que a necessária na reação química, buscando maior trabalhabilidade. Uma parte do excesso de água, chamada água evaporável, é fixada por adsorção aos micro-cristais, e o restante, chamada de água capilar, permanece dispersa nos vazios capilares, formando uma rede capilar.

Os vazios capilares constituem os espaços não preenchidos pelos componentes sólidos da pasta, que se formam devido ao fato de que a densidade média dos produtos da hidratação é consideravelmente menor do que a densidade do cimento Portland anidro.

Quanto ao espaço interlamelar no C-S-H, apesar de muito pequeno para ter um efeito desfavorável sobre a resistência e permeabilidade da pasta, a água retida nestes pequenos vazios pode contribuir para a retração por secagem e para a deformação lenta.

O concreto pode apresentar ar incorporado. Por várias razões, os aditivos incorporadores de ar podem ser adicionados propositadamente ao concreto.

Zona de transição

Segundo MASO (1980), citado em MEHTA & MONTEIRO [38], em um concreto recentemente compactado, um filme de água forma-se ao redor das partículas grandes de agregado (exsudação). Isto leva a uma relação água/cimento mais elevada na

proximidade do agregado graúdo do que longe dele. Daí origina-se a região denominada zona de transição, considerada o *elo mais fraco da corrente*, a fase de resistência limite no concreto. A existência da zona de transição é responsável por algumas particularidades do concreto.

É devido à presença da zona de transição que o concreto, por exemplo, rompe a níveis de tensão consideravelmente mais baixos do que a resistência dos dois principais constituintes: agregado e matriz.

A estrutura da zona de transição, especialmente o volume de vazios e microfissuras presentes, tem grande influência sobre a rigidez e o módulo de elasticidade, além de influenciar a durabilidade do concreto.

2.2.2. FISSURAÇÃO E RUPTURA

No concreto é difícil separar os fenômenos de deformação e ruptura por causa das microfissuras e cavidades iniciais existentes mesmo antes de qualquer solicitação, principalmente na zona de transição. O número e a abertura destas fissuras em uma peça de concreto dependeriam, entre outros fatores, das características de exsudação, resistência da zona de transição e da história de cura do concreto.

Segundo MEHTA & MONTEIRO [38], sob condições normais de cura, existe uma fase inicial em que a deformação pode ser considerada como o resultado de movimentos quase reversíveis de átomos e, portanto, elástica. Durante este período, as fissuras da zona de transição permanecem estáveis.

Além do limite elástico, na medida em que a tensão aumenta, as microfissuras na zona de transição começam a progredir, produzindo deformações permanentes que se superpõem às elásticas, fazendo com que a curva tensão-deformação desvie de uma

linha reta. Este desvio é sensível até a formação de microfissuras na matriz. Em estágio mais avançado, fissuras macroscópicas, resultantes da localização das microfissuras, também passam a colaborar nos mecanismos de deformação irreversível e de ruptura, caracterizando o ramo 'softening' do diagrama tensão-deformação.

Assim, no concreto, com o objetivo de formular leis constitutivas mais coerentes, é importante conhecer melhor os fenômenos, observados na microestrutura, relacionados à formação e evolução de fissuras.

Micro-fissuração , encruamento negativo e energia de fratura na tração

Como é necessária uma energia considerável para formação e propagação de fissuras na matriz sob carga de compressão, o concreto tem uma resposta relativamente dúctil à compressão e frágil à tração, possuindo resistência última à compressão de cerca de uma ordem de grandeza maior que à tração.

Os ensaios de tração do concreto com carregamento controlado apresentam uma resposta linear até um certo nível a partir do qual segue-se uma brusca queda na tensão, em correspondência à repentina formação de uma fissura. Com testes de deformação controlada, torna-se possível a caracterização do ramo de encruamento negativo pós-ruptura ('softening') associado à dissipação de uma significativa quantidade de energia por unidade de volume.

Entretanto, em tração o trecho de encruamento negativo no diagrama σ - ϵ não mais representa uma característica do material pois a energia não é dissipada uniformemente no volume do corpo de prova, e sim em uma região localizada, denominada zona de fratura, onde se encontra a fissura. Pode-se imaginar, no caso limite de uma ruptura ocasionada por uma única fratura localizada, que a função representativa dessa energia

seja um δ de Dirac, sendo infinita onde se verifica descontinuidade da função deslocamento axial. Convém ressaltar, no caso geral, que fora da zona de fratura o material sofre uma descarga elástica, onde eventuais microfissuras existentes tendem a parar de crescer ou se fechar total ou parcialmente.

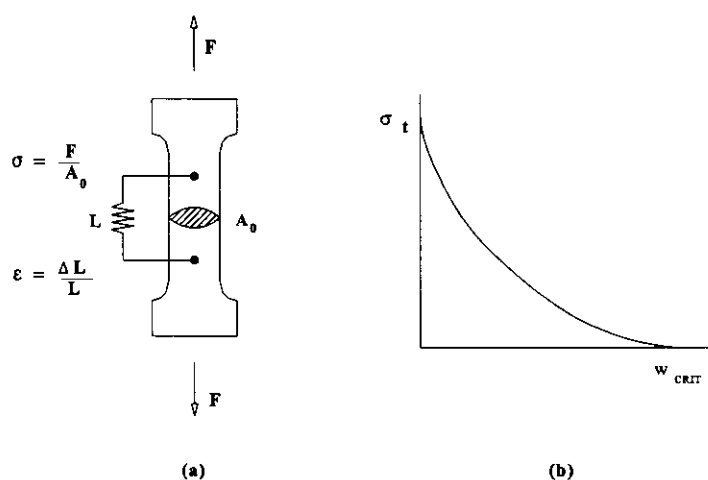


Figura 2.17 - (a) Ensaio de tração uniaxial, (b) Curva 'softening'.
Figura adaptada de CARPINTERI [12].

Em consequência da localização, o ramo decrescente da curva $\sigma(\epsilon)$ passa a depender do tamanho adotado para L em virtude do cálculo de ϵ ($=\Delta L/L$) como ilustra a figura 2.17 (a), CARPINTERI [12]. Uma maneira mais adequada de caracterizar o material, no caso ideal de uma fratura localizada, é o diagrama da tensão transmitida por abertura da fissura. A lei 'softening' resultante indica uma diminuição da tensão máxima resistente com o aumento da distância w entre as faces da fissura. Quando w atinge um valor limite w_{crit} (figura 2.17 (b)) ocorre separação completa da fissura. A área abaixo da curva $\sigma(w)$ representa a energia dissipada pela superfície unitária de fratura. Sendo $\sigma(w)$ uma característica do material, que depende da composição do concreto, a energia de fratura G_f resulta também uma propriedade intrínseca do material:

$$G_f = \int_0^{w_{crit}} \sigma(w) dw \quad (2.1)$$

A energia de fratura é, dimensionalmente, um trabalho por unidade de superfície e, portanto, uma força por unidade de comprimento. A energia dissipada pela superfície da fissura vale então $G_f A_0$, sendo A_0 a seção transversal do espécime. Por outro lado, se é suposto que a dissipação energética se dê somente através da superfície fraturada então a energia dissipada globalmente no volume $A_0 L$ é ainda igual a $G_f A_0$. As consequências disto se manifestam nos gráficos obtidos para as relações força (F) - variação de comprimento (ΔL) e tensão (σ) - deformação (ϵ).

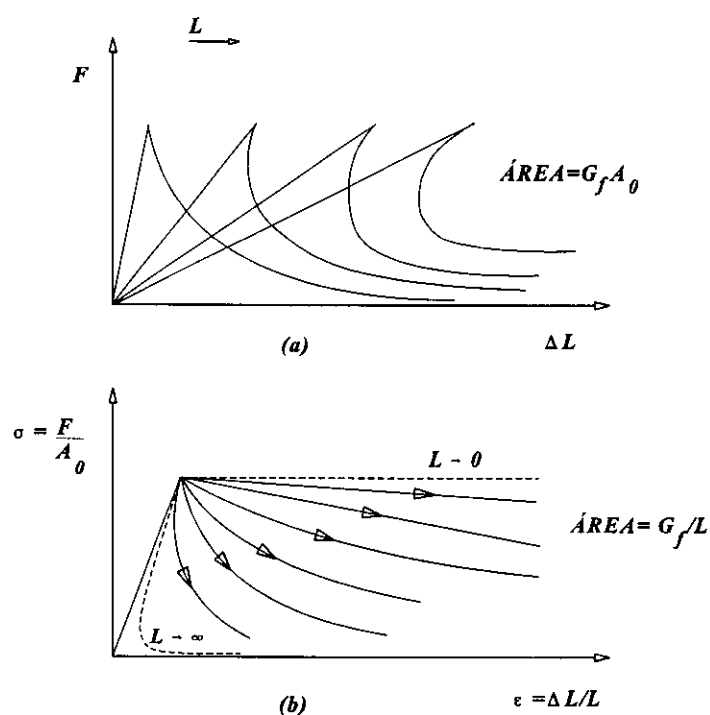


Figura 2.18 - Fenômeno do 'snap-back'. (a) Diagrama F x ΔL e (b) Diagrama $\sigma - \epsilon$.
Figura adaptada de CARPINTERI [12].

Fazendo-se referência à curva F- ΔL , ao se aumentar o comprimento L a figura 2.18 (a) mostra trechos elásticos com diminuição de rigidez e trechos 'softening', alguns dos quais mostrando uma recuperação súbita de alongamento (fenômeno conhecido como 'snap-back') que ocorre quando o comprimento L é suficientemente grande para que a contração elástica prevaleça sobre a dilatação da zona fissurada. Neste caso a área

abaixo da curva descendente deve ser constante e igual a $G_f A_0$. Por outro lado, o diagrama σ - ϵ , figura 2.18 (b), apresenta um único trecho elástico seguido de uma ramificação com curvas de encruamento negativo que dependem do comprimento L adotado. A área abaixo da curva varia com L , sendo igual a G_f/L . Para L tendendo a zero, tem-se a resposta estrutural perfeitamente elástica. Por outro lado, com L tendendo ao infinito a área sob a curva cai a zero e o ramo 'softening' tende a coincidir com o elástico.

Ao transferir as conclusões do modelo idealizado para o caso real observado do concreto algumas considerações adicionais devem ser feitas. A primeira, e mais importante, diz respeito à formação de uma zona de microfissuração prévia à fratura discreta. Desse modo, ao w_{crit} do modelo ideal (figura 2.17 (b)) corresponde uma largura crítica de zona microfissurada, w_c , conforme ilustra a figura 2.19.

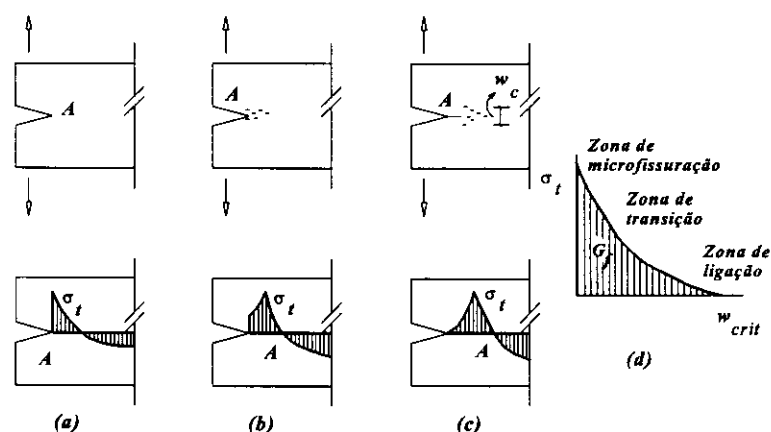


Figura 2.19 - Formação e propagação da fissura para curva 'softening'.
Figura adaptada de PROENÇA [46].

Uma vez alcançada a resistência máxima à tração no ponto A na ponta da fratura (figura 2.19 (a)), forma-se uma zona adjacente de microfissuração, a qual ainda possui capacidade de transferir esforços (figura 2.19 (b)). Atendida uma largura limite w_c da zona microfissurada, a fissura inicial se propaga como resultado da localização e interação das microfissuras (figura 2.19 (c)).

De fato, observa-se que a capacidade de transferência de tensões num ponto decresce progressivamente com o aumento da largura da zona de microfissuração adjacente. Porém essa capacidade residual é maior do que se poderia imaginar a princípio devido à presença das pontes de ligação entre as faces da fissura. Este fato conduz a uma proposta razoável para a associação entre o diagrama $\sigma-w$ e o que acontece com um ponto localizado na zona adjacente à ponta da fissura inicial, como ilustra a figura 2.19 (d).

Assim, admite-se que no início da curva descendente $\sigma-w$ o mecanismo dominante é a formação e interação entre microfissuras, sendo que as pontes de ligação da fissura passam a ser responsáveis pela tensão remanescente antes da separação completa entre as faces.

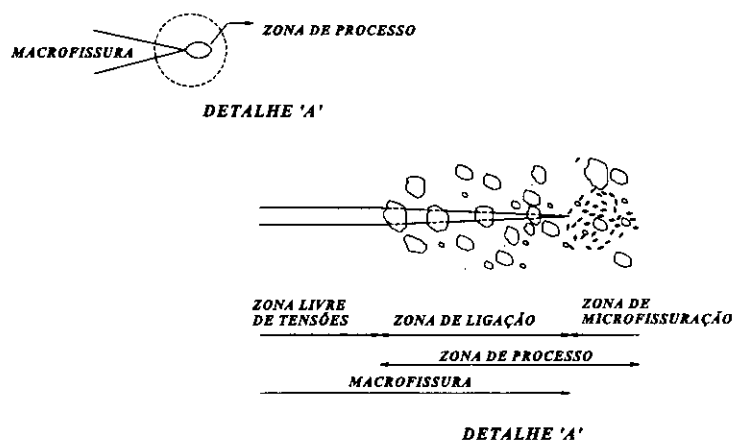


Figura 2.20 - Zona de Processo.

Descendo um pouco mais a nível de microestrutura, considera-se que o desenvolvimento de fissuras em materiais heterogêneos como o concreto é consequente ao que acontece na região não linear em frente à extremidade da macrofissura em desenvolvimento, usualmente chamada de zona de processo ('fracture process zone') e ilustrada na figura 2.20.

A zona de processo consiste em uma zona de microfissuração e uma zona de ligação. Na zona de ligação a macrofissura é interrompida em pontos discretos pela presença de agregados, o que lhe confere uma capacidade residual de transmissão de tensão normal ao seu plano. A zona de microfissuração é uma região de microfissuras distribuídas que também apresenta capacidade de transmissão de tensões.

Modelos constitutivos que levem em conta as deformações do concreto podem ser formulados pela teoria do dano, assunto do capítulo 3 deste trabalho.

Deformação lenta e Retração

Os fenômenos de retração e deformação lenta devem ser discutidos conjuntamente porque fundamentalmente ambos originam-se da mesma fonte: a pasta de cimento endurecida. Além disso, suas curvas ϵ - t são semelhantes, os fatores que influenciam a retração por secagem também influenciam a deformação lenta (geralmente, do mesmo modo) e, por último, ambos são parcialmente reversíveis.

Para justificar a maioria dos fenômenos ligados à ruptura do concreto observados nos chamados ensaios rápidos é suficiente imaginar a sua estrutura interna formada de partículas de agregado dispersas em uma matriz homogênea de cimento. No estudo de alguns fenômenos como deformação lenta ou retração, porém, deve ser considerada a heterogeneidade da argamassa.

Em estruturas de grande porte onde a retração por secagem é desprezada, a aplicação de uma tensão constante leva a um aumento de deformação ao longo do tempo, que é a chamada *deformação lenta básica*. Por outro lado, quando uma estrutura não carregada é sujeita a variação de umidade (secagem) observa-se a *deformação por retração livre*. Quando o concreto está sob ação de carregamento externo e simultaneamente exposto a ambientes de baixa umidade relativa, a deformação total é

maior do que a soma da deformação elástica, da deformação por retração livre e da deformação lenta básica.

Existem várias teorias formuladas para explicar a deformação lenta do concreto observando-se a microestrutura, sendo que os autores divergem em suas explicações. Segundo NEVILLE et all. [41], nenhuma definição de deformação lenta é mais correta que qualquer outra. Não se pode isolar a deformação lenta das outras deformações que estão ocorrendo durante o período em que o carregamento atua. Entretanto, uma definição fisicamente incorreta impede a identificação e associação de mecanismos específicos com fenômenos dependentes do tempo.

O mesmo autor cita VAISHNAV e KESLER (1961), que sugerem que à baixas tensões, a percolação participa do mecanismo de deformação lenta, caracterizado como visco-elástico. A altas tensões (próximas da ruptura), deslizamentos entre planos cristalográficos e ruptura interna de ligações devem contribuir para a deformação lenta.

Segundo alguns autores, dentre eles HULT [28] cita ISHAI (1964) e LYNAM (1934), a velocidade rápida inicial de deformação é devida à percolação - uma parte da água adsorvida é liberada, movendo-se para poros vazios ou se evaporando - ocorrendo uma diminuição do volume do espécime. Isto resulta na redistribuição de tensões do 'componente viscoso' argamassa para os agregados.

Desse modo, tanto a retração quanto a deformação lenta estão relacionadas principalmente à remoção da água adsorvida da pasta de cimento endurecida. Porém, na primeira, uma umidade relativa diferencial entre o concreto e o ambiente é o agente causador, enquanto que na segunda, é uma tensão aplicada de forma constante que altera o equilíbrio.

A ocorrência de uma resposta elástica retardada no agregado é, segundo alguns autores, outra causa da deformação lenta no concreto. A consideração da viscosidade no mecanismo de deformação lenta foi primeiramente postulado por THOMAS (1937), que

considera o concreto constituído de duas partes: material cimentício, que se comporta de maneira viscosa quando carregado, e agregado inerte que não escoar sob ação de carregamento. Com o surgimento de tensões devido a aplicação de solicitações externas a pasta de cimento passa a ter uma tendência de escoamento parcialmente impedida pela presença do agregado. Como resultado dessa resistência o agregado torna-se mais solicitado, enquanto a tensão na pasta de cimento diminui com o tempo. Uma vez que a deformação lenta da pasta de cimento é proporcional à tensão aplicada, a velocidade da deformação lenta irá ser progressivamente reduzida enquanto o carregamento é transferido do material viscoso para o inerte.

Tanto o fenômeno da retração por secagem quanto o de deformação lenta apresentam um certo grau de irreversibilidade. A retração por secagem irreversível se deve ao desenvolvimento de ligações químicas dentro da estrutura em consequência da secagem.

Quanto à percolação, pode-se considerar como sendo um processo parcialmente reversível, desde que se tenha água disponível para reabsorção. Quando ocorrem mudanças no arranjo das partículas do gel, com a formação de novas ligações devido à hidratação, parte deste processo é irreversível.

A curva da deformação lenta para o concreto sujeito a uma compressão uniaxial durante 90 dias seguido de um descarregamento é mostrada na figura 2.21 (b). Quando uma amostra é descarregada, a recuperação instantânea ou elástica é aproximadamente da mesma ordem de grandeza da deformação elástica quando da primeira aplicação da carga. Em seguida ocorre a chamada *recuperação por deformação lenta* que, embora ocorra mais rapidamente do que a deformação lenta propriamente dita, não é total. Uma causa da reversibilidade pode ser atribuída à deformação elástica retardada do agregado.

Pode-se notar a semelhança entre o comportamento do concreto em carregamento e descarregamento sob condições de secagem e molhagem. A figura 2.21 (a) mostra a curva de retração por secagem para o concreto sujeito a um ambiente mais seco durante 50 dias seguido de uma molhagem.

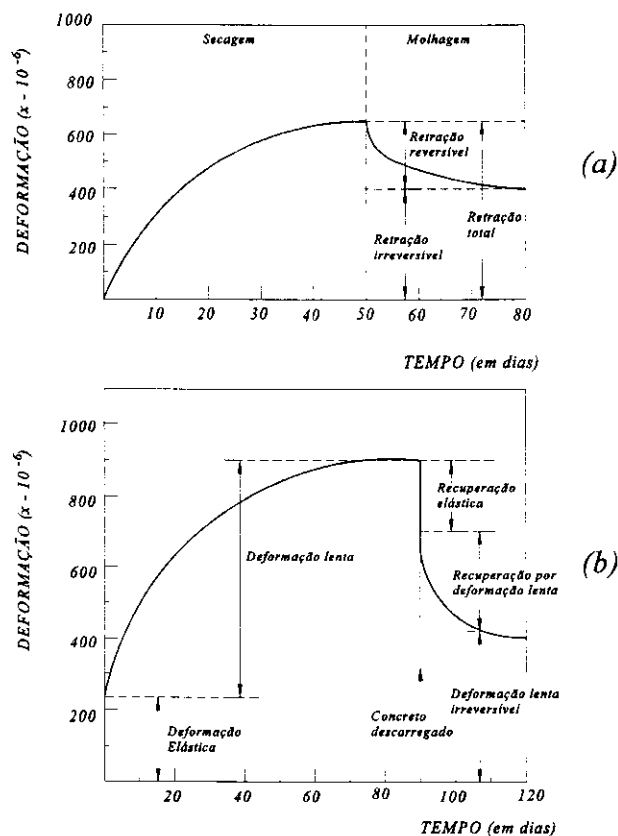


Figura 2.21 - Retração e Deformação lenta no concreto.
 Figura adaptada de MEHTA & MONTEIRO [38].

Expansão e Relaxação

No caso de peças curadas embaixo d'água, a expansão pode ser justificada pela absorção de água pelo gel de cimento; as moléculas de água atuam contra as forças de coesão e tendem a afastar as partículas do gel.

Sob algumas condições, a deformação de uma estrutura de concreto é mantida constante ou varia de maneira pré determinada. Neste caso ocorre o fenômeno da diminuição da tensão ao longo do tempo, a qual é definida como relaxação.

CAPÍTULO III

FADIGA NOS METAIS E COMPORTAMENTO DO CONCRETO SOB SOLICITAÇÃO CÍCLICA

Se em uma estrutura, sujeita a um carregamento estável, estático e abaixo do limite de resistência do material, forem tomadas as precauções corretas contra deformação lenta e corrosão, esta pode teoricamente resistir para sempre. Por outro lado, se a estrutura é sujeita a carregamento cíclico, repetido ou flutuante, irá romper a níveis de tensão mais baixos que aqueles que causariam ruptura sob carregamento estático.

Este fenômeno é uma forma perigosa de ruptura, conhecido como fadiga. Tecnicamente, fadiga é a diminuição gradual da resistência de um material por efeito de solicitações periódicas. A perda de resistência vem normalmente acompanhada de perda de rigidez, o que não é em geral considerado nos modelos matemáticos.

No âmbito da Engenharia Civil as estruturas são construídas com uma variedade de finalidades, em localidades diversas. Portanto, estão expostas a diferentes carregamentos e condições ambientais. Ventos e ondas, tráfego, maquinário em trabalho, guindastes em movimento, efeitos de temperatura e umidade são alguns exemplos de solicitações periódicas que podem fadigar uma estrutura.

Segundo CHARLES & CRANE [12], a ruptura ocorre pelo desenvolvimento e aumento progressivo de fissuras resultantes da deformação plástica cíclica. Mesmo que a tensão nominal seja bem menor que o limite elástico, localmente as tensões podem estar acima do escoamento devido à concentração de tensões em torno de inclusões ou entalhes mecânicos. Conseqüentemente, a deformação plástica ocorre localmente em uma microescala.

As duas características e pontos igualmente desastrosos são: primeiro, que ela pode ocorrer para carregamentos menores que aqueles necessários para que ocorra a ruptura por carregamento estático; e segundo, que mesmo o mais dúctil dos materiais rompe sem revelar deformação plástica macroscópica, com o agravante que a dimensão e localização das fissuras formadas pelo processo de solitação cíclica frequentemente fazem de sua detecção durante a inspeção de rotina uma tarefa difícil.

Apesar da fadiga ser mais familiar quando ocorre em metais, provavelmente nenhum material é imune a este fenômeno. De fato, a fadiga ocorre em metais dúcteis e frágeis, concreto, plástico, compostos, materiais amorfos ou cristalinos.

A ruptura por fadiga pode ocorrer de diversas formas. Flutuações de tensões ou deformações aplicadas podem resultar em *fadiga mecânica*. Quando a temperatura do corpo carregado ciclicamente também flutua, induz-se à *fadiga termo-mecânica*. Além disso, quando a solitação se dá na presença de meios quimicamente agressivos pode ocorrer a *fadiga com corrosão*. A aplicação repetida de tensões com movimento relativo no contato entre materiais produz a *fadiga por atrito*.

Por outro lado, é importante observar que a resistência de uma estrutura à fadiga é grandemente influenciada por detalhes de projeto como, por exemplo, irregularidades geométricas que causam concentração de tensões. Portanto, embora seja possível estimar a resistência à fadiga de um material e até encontrar meios de aumentá-la, estas realizações não significam necessariamente uma melhoria no comportamento estrutural.

3.1. METAIS

3.1.1. MECANISMO DA FADIGA EM METAIS

Segundo VAN VLACK [54], a diminuição na tensão máxima admissível com a aplicação de carregamento cíclico se deve ao fato do material não ser um sólido idealmente homogêneo, isto é, livre de imperfeições ou defeitos. Em cada meio ciclo, são produzidas localmente pequeníssimas deformações que não são totalmente reversíveis. Portanto, a ruptura por sollicitação cíclica está relacionada com o fato de que, ao invés de se ter um comportamento elástico ideal e reversível do material, têm-se deformação plástica não uniforme. Estas deformações não-reversíveis, como foi explicado no capítulo anterior, se localizam ao longo dos planos de deslizamento, nos contornos de grão e ao redor de irregularidades de superfícies devido a defeitos geométricos. Portanto, pode ocorrer ruptura do material mesmo que este esteja sendo sollicitado a um nível de tensão abaixo da tensão de escoamento.

A gradual redução de ductilidade nas regiões encruadas resulta na formação de trincas microscópicas (nucleação). O efeito de entalhe das trincas concentra tensões permitindo sua propagação, até que a ligação residual não suporte mais o carregamento, ocorrendo a ruptura final.

Portanto, de maneira geral, a ruptura se desenvolve em (figura 3.1):

- Mudanças microestruturais que causam dano permanente na estrutura;
- Nucleação de trincas microscópicas;
- Formação de uma trinca 'dominante', que pode, eventualmente, levar à ruptura catastrófica;
- Propagação estável da trinca 'dominante';
- Instabilidade estrutural ou ruptura final.

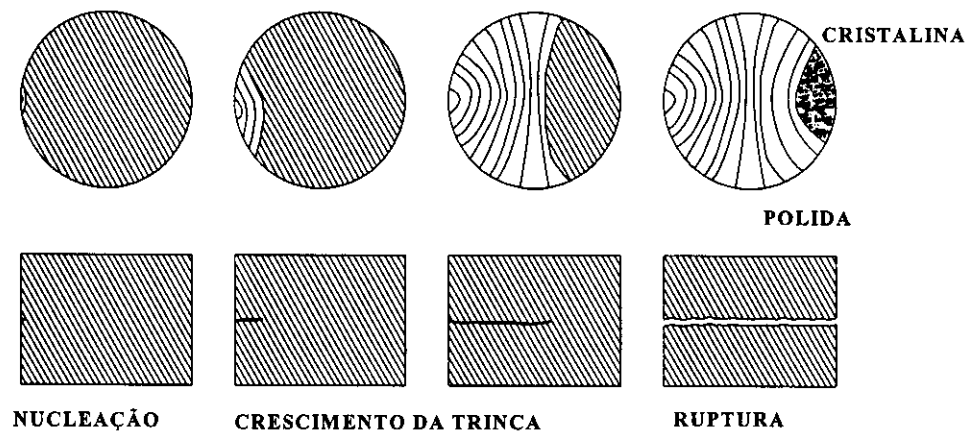


Figura 3.1 - Estágios de desenvolvimento de trinca por fadiga.

As condições para a nucleação de microdefeitos e a velocidade de avanço de uma trinca dominante são influenciadas por fatores mecânicos, microestruturais e ambientais. As principais diferenças entre as teorias existentes frequentemente estão em como a iniciação da trinca e os estágios de propagação são tratados.

Processo de iniciação de uma trinca (nucleação)

A iniciação das trincas por fadiga ocorre próxima ou na superfície, devido ao fato de que metais usados na engenharia são geralmente policristalinos, de modo que os grãos de superfície não são completamente rodeados por outros grãos, estando mais livres para se deformar. Portanto, grãos favoravelmente orientados da superfície iniciam deslizamento localmente a tensões menores que a tensão necessária para gerar escoamento total. Grãos internos ao material, mesmo favoravelmente orientados, não podem se deformar a baixos carregamentos devido ao suporte e restrição dado pelo material que os circunda.

Muitos modelos têm sido propostos para esclarecer a iniciação de trincas por fadiga pela deformação plástica local. O modelo de Wood, proposto em 1958, é mostrado

na figura 3.2. Durante a parte do ciclo em que ocorre aumento de carga, o deslizamento ocorre em um plano favoravelmente orientado, figuras 3.2 (a) e (b). Durante o descarregamento, o deslizamento ocorre na direção inversa, em um plano de deslizamento paralelo, uma vez que o deslizamento no primeiro plano é inibido pelo encruamento, figura 3.2 (c). Este primeiro deslizamento cíclico pode formar uma intrusão ou uma extrusão na superfície do metal, figura 3.2 (d). Uma intrusão pode se desenvolver para uma trinca pelo escoamento plástico contínuo durante ciclos subsequentes.

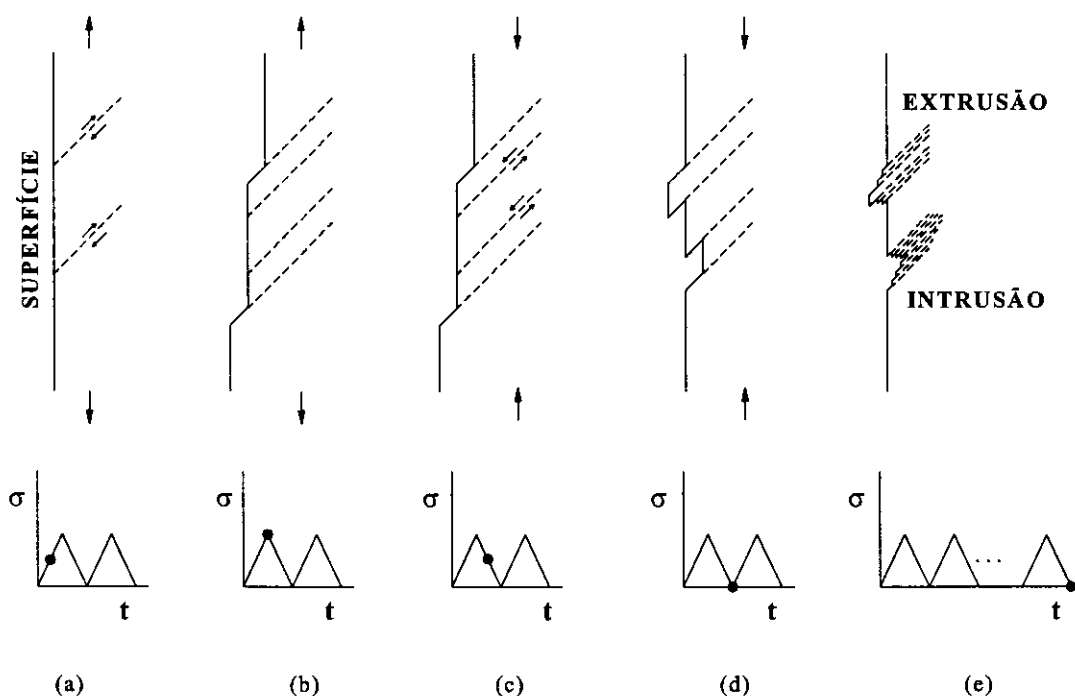


Figura 3.2 - Modelo de Wood para iniciação de trinca.

O modelo de Wood, entretanto, não explica o aprofundamento progressivo das intrusões ou das extrusões, figura 3.2(e). SURESH [51] cita vários outros modelos - MOTT (1958), MAY (1960), LIN & LIN (1979) - cuja idéia central consiste na

ocorrência de deslizamento em planos paralelos para formação de intrusão. Porém, objetivando complementar o modelo de Wood, estes modelos apresentam teorias que tentam explicar as novas posições estáveis dos planos de deslizamento durante os ciclos subsequentes. Maiores detalhes são encontrados em SURESH [51].

Outra razão para o início da trinca por fadiga seria o dano por corrosão ou erosão, que torna áspera a superfície e introduz poros que, funcionando como intrusões, provocam concentração de tensões quando sob ação de carregamento.

A iniciação da trinca pode ser, casualmente, o resultado de uma incompatibilidade de deformação entre inclusões ou outra imperfeição e a matriz cristalina. Este processo tende a ocorrer em ligas endurecidas metalurgicamente, nas quais a matriz é resistente ao deslocamento cristalográfico requerido para formar uma intrusão.

Uma vez que as trincas usualmente se iniciam na superfície, o fator mais significativo para aumento da resistência é a superfície de acabamento, além da proteção química.

Desenvolvimento da trinca

Em grandes estruturas, a existência de uma trinca não implica necessariamente na ruptura iminente. Uma significativa vida útil - aproximadamente 90% da vida total - pode existir após a iniciação da trinca. Se na estrutura são encontrados, por exemplo, pontos de solda, rebites ou entalhes o tempo de vida até a iniciação de uma trinca pode ser desprezado e a vida útil é determinada em função da velocidade de propagação da trinca.

O modelo microscópico de desenvolvimento de trinca por carregamento cíclico é grandemente afetado pelas características de deslizamento do material, dimensões microestruturais, nível de tensão aplicada e extensão da vizinhança plastificada na ponta da trinca.

Quando a trinca e a zona de deformação plástica ao redor de sua extremidade estão confinadas em um grão específico, esta se desenvolve predominantemente por cisalhamento simples, na direção do plano de deslizamento primário. Para este mecanismo simples, levando a uma trajetória 'zig-zag', SURESH [51] usa o nome dado por FORSYTH (1962) de *estágio I* de desenvolvimento de trinca (figura 3.3(a)).

Para valores de tensão mais altos, a zona plástica da extremidade da trinca abrange vários grãos. O desenvolvimento da trinca envolve escoamento simultâneo ou alternado ao longo de dois planos de deslizamento. Este mecanismo de deslizamento duplo, *estágio II*, resulta em uma trajetória plana e normal ao eixo de tração (figura 3.3 (b)).

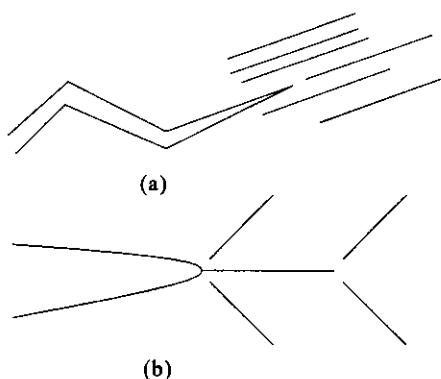


Figura 3.3 - Estágios I (a) e II (b) de desenvolvimento de trinca.

Enquanto a superfície de ruptura criada pelo estágio I exibe um perfil 'facetado' ou 'serrilhado', o estágio II, em muitos elementos, leva à formação de 'ondulações'. Segundo BUCH [11], essas ondulações, também conhecidas como 'estrias', são protuberâncias na superfície de ruptura, e foram primeiramente observadas por ZAPPE & WORDEN (1951). É importante ressaltar que não são todos os materiais de engenharia que apresentam estrias. Estas são observadas em metais puros e muitas ligas dúcteis, mas são pouco frequentes no aço e em ligas trabalhadas à frio. A figura 3.4 ilustra ondulações formadas em tração cíclica em uma liga de alumínio.



Figura 3.4 - Ondulações por fadiga na superfície de ruptura de uma liga de alumínio 2024-T3.

Figura adaptada de SURESH [51].

O mesmo autor detalha o mecanismo proposto por LAIRD (1967) de deslizamento cristalográfico reverso para o desenvolvimento de trincas pelo estágio II e a formação das ondulações. As várias fases do modelo são mostradas na figura 3.5.

Uma trinca pontiaguda no campo de tração causa uma grande concentração de tensões em sua extremidade, onde deslizamentos podem ocorrer muito facilmente. O material acima da trinca (fases 1 e 2 da figura 3.5) desliza ao longo de um plano de deslizamento favorável (plano primário). Devido a este deslizamento, a trinca abre, mas também aumenta seu comprimento. O deslizamento pode ocorrer em outro plano (fase 3). O encruamento e o aumento de tensão irão finalmente ativar outros planos paralelos de deslizamento, levando a extremidades de trincas mais brandas (fase 4). Quando a ponta da trinca abrange vários grãos com planos de deslizamento diferentemente orientados, o abrandamento da extremidade da trinca é facilmente explicável pela ativação destes planos de deslizamento.

Durante a parte do ciclo em que ocorre um aumento de carga, a trinca alonga Δa .

Ocorre a deformação plástica em uma região adjacente à ponta da trinca. Durante o descarregamento, a vizinhança elástica irá se contrair, exercendo tensões de compressão na região plástica. Estas tensões de compressão, ao menos na extremidade da trinca, serão novamente acima do escoamento. Portanto, ocorre deformação plástica reversa, que irá fechar e tornar a extremidade da trinca novamente pontiaguda (fase 5).

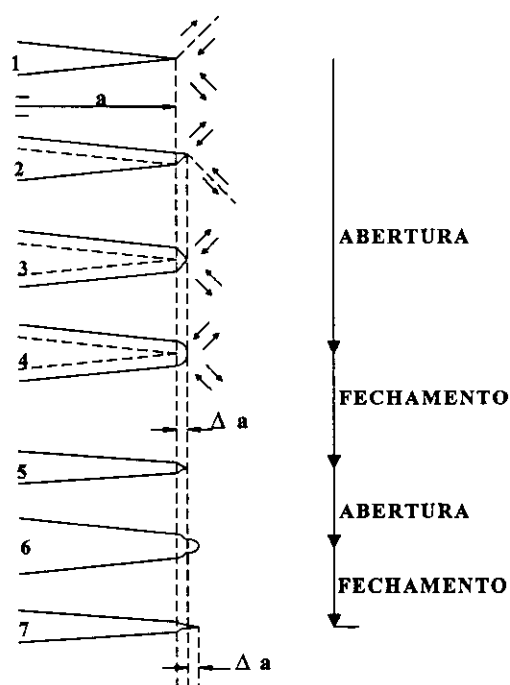


Figura 3.5 - Desenvolvimento de trinca por carregamento cíclico.

O ciclo de abertura e fechamento de trinca (fases 1-5 e 6-7) irá desenvolver um típico padrão de ondulações, sendo que todo novo ciclo adiciona uma nova ondulação. O estriamento representa as sucessivas posições da trinca durante sua propagação e em geral, este indica também a variação na sua velocidade de propagação. Segundo SURESH [51], esta relação (estriamento-velocidade) foi mostrada primeiramente por FORSYTH & RYDER em 1960.

Num estágio próximo à ruptura final, a trinca alcança dimensão tal que a ligação remanescente não é capaz de suportar a concentração de tensão na sua extremidade. A trinca, então, se propaga de maneira instável ao longo dos planos de clivagem, mantendo uma direção geral perpendicular à tensão máxima de tração.

Fazendo referência à superfície que corresponde à ruptura final ilustrada na figura 3.1, esta mostra a superfície polida, apresentando as ondulações características do desenvolvimento de uma trinca por fadiga, e a superfície cristalina, onde ocorre a ruptura frágil.

3.1.2. RECONHECIMENTO DA SUPERFÍCIE DE UMA RUPTURA POR SOLICITAÇÃO CÍCLICA

A superfície de ruptura de um espécime solicitado ciclicamente possui características já bastante conhecidas e estudadas, MADAYAG [35], ANDERSON et al. [03]. Aparências típicas deste tipo de ruptura são mostradas na figura 3.6.

Na investigação de uma superfície rompida por solicitação cíclica, duas zonas são evidentes: a chamada zona de fadiga, área de desenvolvimento de fissuras onde podem ser observadas as estrias, e a área de ruptura final, chamada de zona de ruptura ou zona instantânea, região de aparência cristalina onde ocorre propagação da trinca de maneira instável.

A dimensão relativa da zona de ruptura comparada com a zona de fadiga revela o nível da tensão aplicada na estrutura: se a zona de fadiga for relativamente pequena a estrutura foi sujeita a tensões elevadas; as duas zonas praticamente da mesma dimensão indicam uma tensão média; e uma pequena zona de ruptura revela que a estrutura estava sob tensões mais baixas.

A zona de fadiga apresenta um núcleo - ou origem de ruptura - usualmente na extremidade da fratura, onde a trinca se iniciou. Este núcleo não é necessariamente único, pois para tensões nominais relativamente altas ou materiais não-homogêneos a fissuração se origina em vários pontos simultaneamente.

Em peças que apresentam descontinuidades geométricas ou defeitos (inclusão não-metálica, vazios, falha em solda, superfície riscada) é fácil encontrar o núcleo, que está associado às altas concentrações de tensão nestes pontos.

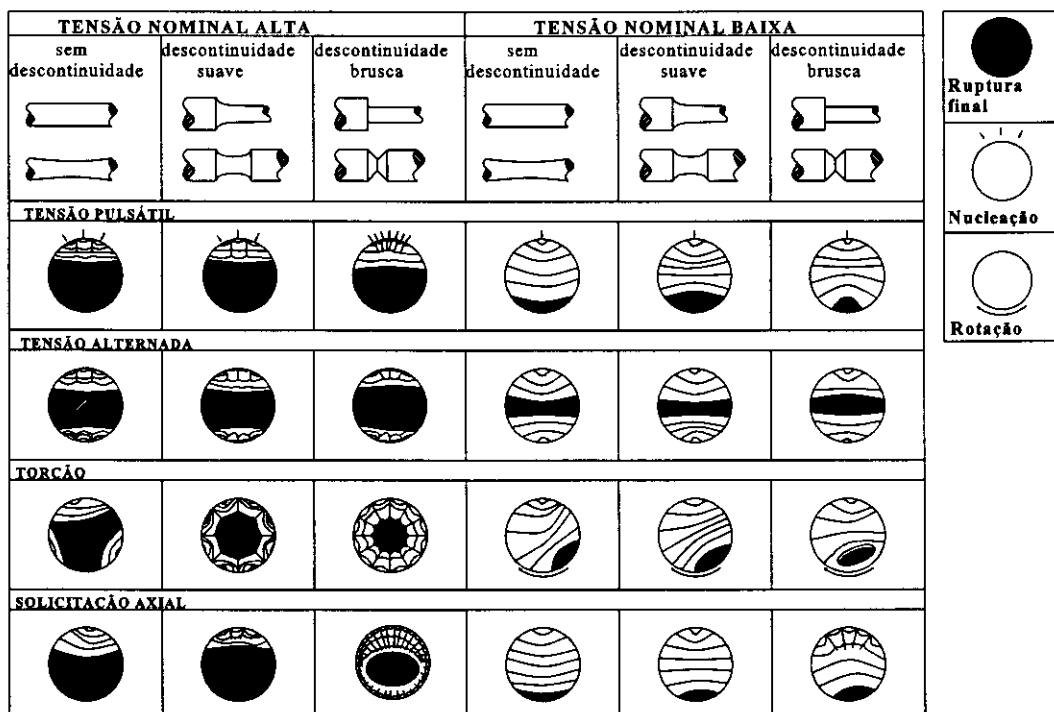


Figura 3.6 - Esquema de ruptura por fadiga nos metais.

No caso de torção (ilustrado na figura 3.6) em espécimes que apresentem uma descontinuidade geométrica, levando a altas tensões locais, a nucleação de fissuras tende a ocorrer rapidamente por toda sua volta, levando a uma zona de ruptura interna à seção

transversal.

3.1.3. ANÁLISE FENOMENOLÓGICA DA FADIGA EM METAIS

Deformação (ou tensão) cíclica alternada:

Efeito Bauschinger e Ciclos de histerese

Entende-se por deformação cíclica alternada à deformação resultante da variação da tensão imposta entre dois valores de sinais opostos. Analogamente, tensão cíclica alternada corresponde à tensão resultante da variação do deslocamento imposto entre dois valores extremos.

Apesar das rupturas ocorrerem de maneira frágil, como já mencionado, observações da estrutura do metal durante testes de tensão (ou deformação) cíclica alternada frequentemente mostram a existência de alguma deformação plástica. A nível fenomenológico, nos diagramas σ - ϵ , a influência da deformação plástica é evidenciada pelo efeito Bauschinger e pelos ciclos de histerese.

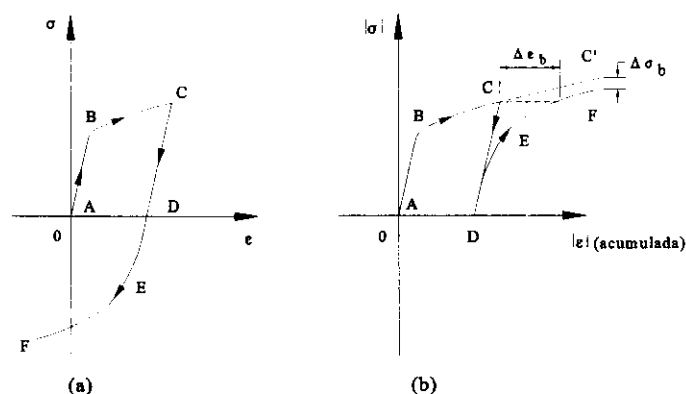


Figura 3.7 - (a) Esquema da curva σ - ϵ para deformação cíclica alternada. (b) Ilustração do efeito Bauschinger.

Num ensaio em carregamento cíclico, considerando-se somente a fase inicial de tração

do primeiro ciclo, a curva representativa da relação σ - ϵ é similar à curva estática. Durante a compressão subsequente, a deformação plástica inicia-se com um valor de tensão em módulo menor que o limite elástico em tração (figura 3.7 (a)). A redução do limite elástico é conhecida como efeito Bauschinger (Bauschinger, 1886). Na figura 3.7 (b) $\Delta \sigma_b$ caracteriza o efeito em termos de tensão, enquanto $\Delta \epsilon_b$ caracteriza a chamada deformação de Bauschinger.

O entendimento do efeito Bauschinger é essencial no desenvolvimento de modelos constitutivos para caso de deformações (ou tensões) cíclicas alternadas, onde a teoria do encruamento deve ser capaz de envolver quantitativamente este efeito.

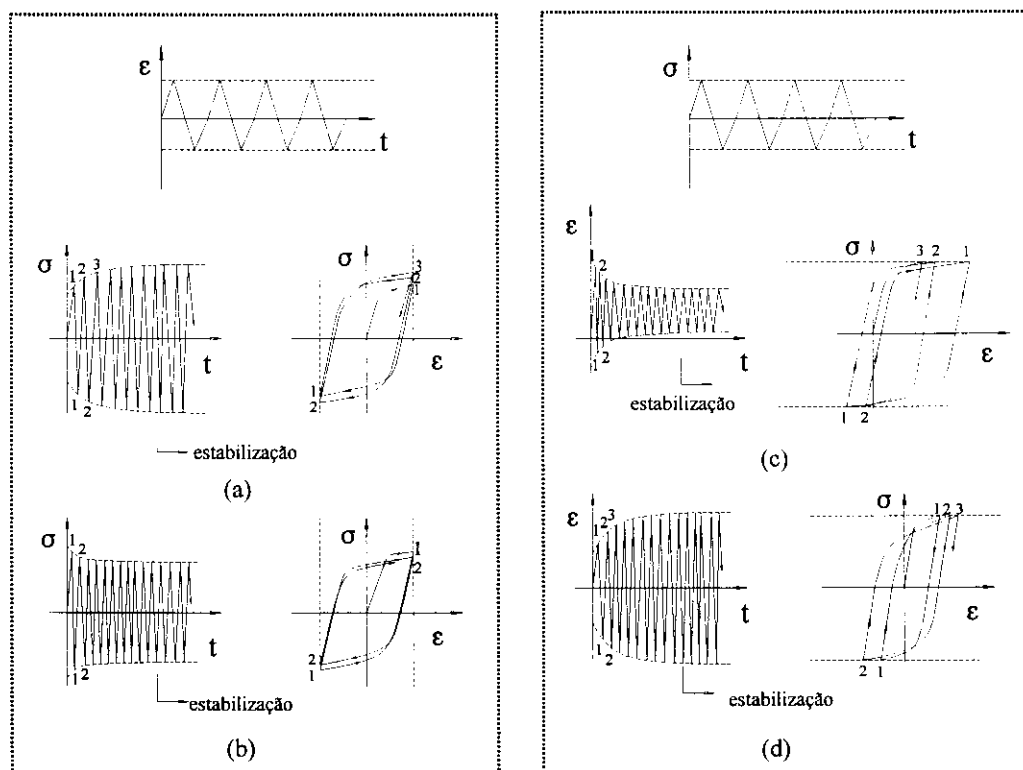


Figura 3.8 - Fenômeno do encruamento positivo e negativo, respectivamente, para: (a), (b) deformação controlada e (c),(d) tensão controlada.

A deformação uniaxial de metais sujeitos a ações cíclicas é usualmente caracterizada por curvas cíclicas σ - ϵ . No caso de deformação controlada alternada sob amplitude constante, o encruamento positivo ou negativo do material está associado a um aumento ou redução, respectivamente, na amplitude de tensão axial, figuras 3.8(a) e (b). Similarmente, no caso de tensão controlada alternada com amplitude constante, o encruamento cíclico positivo ou negativo do material é caracterizado conforme haja uma redução ou um aumento, respectivamente, na amplitude de deformação axial, figuras 3.7 (c) e (d).

De um modo geral, durante um certo número de ciclos, os ciclos de histerese, ocorre não só a alteração dos níveis de tensão de escoamento mas também uma certa redução de rigidez inicial. No carregamento cíclico tanto com tensão quanto com deformação controlada, a respectiva amplitude de tensão ou deformação alcança valor estável depois de um período inicial de acomodação, a partir do qual os ciclos de histerese são ditos estáveis (figura 3.9).

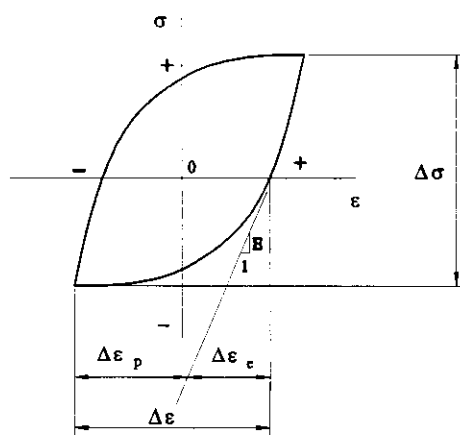


Figura 3.9 - Representação esquemática de um ciclo de histerese estabilizado.
 Figura adaptada de SURESH [51].

Não é objetivo deste trabalho o aprofundamento no estudo do caso particular de tensão

ou deformação cíclica alternada, um assunto complexo e extenso. Maiores detalhes podem ser encontrados em SURESH [51], LEIMATRE & CHABOCHE [30], MADAYAG [35].

Curvas de Wöhler e limite de fadiga

Desde os primeiros testes de solitação cíclica alternada realizados por Wöhler em 1858, as curvas S-N (amplitude de tensão por número de ciclos na ruptura) têm servido de base para a interpretação da fadiga, sendo muito usadas em projetos que envolvam o fenômeno. Estas curvas resultam de uma análise estatística sobre dados de inúmeros testes experimentais realizados em materiais sob tensão repetida e são em geral construídas usando-se representação (mono-log) ou (log-log).

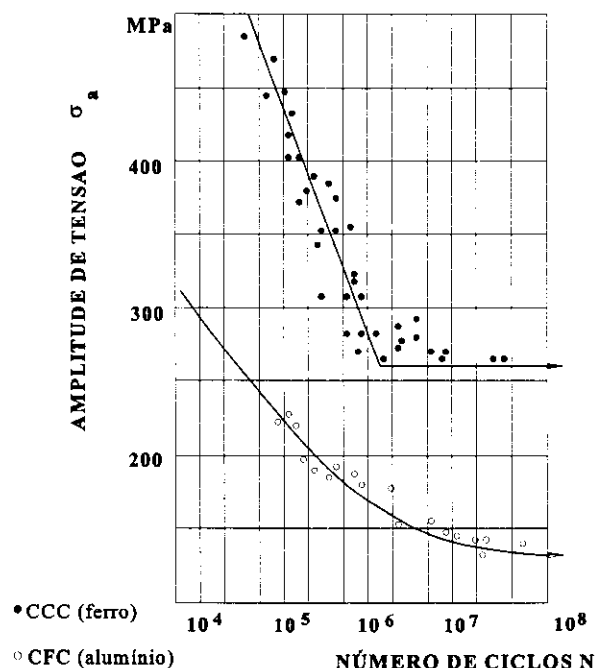


Figura 3.10 - Curvas S-N para metais CFC e metais CCC.

Segundo BUCH [11], no caso de metais, a curva mono-log é praticamente linear de 10^4 a 10^6 ciclos. Acima de 10^7 ciclos, a curva é horizontal indicando que, se um espécime CCC não romper antes de serem alcançados 10^7 ciclos, então ele não irá romper depois de um número infinito de ciclos (figura 3.10).

Deste modo, a curva S-N é usada para determinar o limite de fadiga σ_d , nível de tensão máximo que se pode admitir de modo a não haver ruptura mesmo depois de um grande número de ciclos. O número de ciclos de referência para o cálculo de σ_d é conhecido como número básico N_b .

O número básico mais usado comumente é 10^7 ciclos. Para ensaios de protótipos de grandes estruturas de aço, o número básico 2×10^6 é usado para economizar no caro tempo de teste, especialmente nos testes usando máquinas de baixa frequência.

Uma curva S-N completa pode ser dividida em duas porções: faixa de baixo ciclo e faixa de alto ciclo. Não há uma linha de separação definida entre as duas, devendo portanto, ser estabelecido um limite arbitrário: de 0 a aproximadamente 10^4 ciclos considera-se de baixo ciclo e de 10^4 ciclos até 10^7 ou mais considera-se de alto ciclo.

Na faixa de baixo ciclo a resistência à fadiga do material está perto da resistência estática. Em faixas de alto ciclo a resistência à fadiga cai progressivamente em relação à resistência estática e é também conhecida como *fadiga real* ('true fatigue').

Corrosão e fadiga

Caso uma estrutura esteja sujeita a esforços cíclicos em um meio capaz de atacar quimicamente o material exposto, verificam-se as condições necessárias para a combinação da corrosão e fadiga.

Meios usados no combate ao ataque químico, como pintura ou adição de agentes para estimular a formação de uma película protetora no metal, são pouco eficazes quando a estrutura está sob tensão cíclica. Na área de tração, há quebra da camada protetora com exposição do metal à ação do ambiente corrosivo. A ocorrência de reação química regenera a camada protetora, porém consome parte do metal. Esta camada será quebrada novamente nos sucessivos ciclos de esforços.

O efeito da corrosão pode ser agravado quando a sollicitação cíclica provoca movimento relativo com atrito entre duas superfícies em contato. Convém citar que os efeitos deste fenômeno são determinantes, por exemplo, no comportamento à fadiga de cabos de protensão. A resposta estrutural combinando sollicitação cíclica e corrosão se caracterizam pelo desaparecimento do limite de fadiga, havendo, mesmo a baixas tensões, um número de ciclos que conduz à ruptura, POPE [45].

Estudos experimentais da contribuição de cada fator - mecânico ou de corrosão - à degradação e conseqüente ruptura final do material comprovaram que a soma do dano causado por cada fator computado separadamente é geralmente menor do que o dano gerado quando ambos agem conjuntamente.

Cabe também observar que quando em ambiente corrosivo, a resposta estrutural torna-se influenciada pela frequência das sollicitações. Isto porquê um mesmo número de ciclos com diferentes frequências representa tempos diferentes de exposição ao meio corrosivo.

Efeito da frequência e temperatura

Tanto a frequência quanto a temperatura têm alguma influência na vida à fadiga. De uma forma geral, o aumento da temperatura e a diminuição da frequência diminuem a vida por fadiga ou a resistência, MADAYAG [35].

A frequência tem efeito insignificante quando em condições normais ambientais, sem presença de meio corrosivo.

Do ponto de vista microestrutural, o aumento de temperatura pode causar instabilidade do metal, dependendo da liga, da intensidade de temperatura e do tempo de exposição.

Por outro lado, do ponto de vista macroscópico, a iniciação e progressão de trincas são, geralmente, causadas por deformação excessiva ou fluência ao invés de fratura progressiva pura frequentemente observada em testes de fadiga a temperatura ambiente. Há, portanto, uma relação entre fadiga à alta temperatura e deformação lenta que deve ser considerada.

3.2. CONCRETO

Para muitas aplicações o concreto é sujeito a cargas estáticas com pouca ou nenhuma flutuação, mas quando variações apreciáveis na carga ocorrem, a fadiga é um dos prováveis fenômenos associados à ruptura.

As fissuras consequentes à solicitação repetida no concreto não apresentam superfície identificável, uma vez que na maioria dos casos práticos o que se observa é uma deterioração progressiva do material desde a iniciação de microfissuras, sua propagação até a formação das macrofissuras.

3.2.1. DESENVOLVIMENTO DE FISSURAS

Poucos estudos têm sido feitos em relação a modelos de desenvolvimento de fissuras objetivando-se estudar a fadiga no concreto, a bibliografia é escassa, HORII et al. [26], e o assunto não foi ainda tratado com profundidade.

Analogamente ao estudo do problema em metais, a identificação do mecanismo governante e seu modelamento são indispensáveis para o entendimento do fenômeno.

Os autores mencionados anteriormente citam investigações feitas por REINHARDT et al. (1992) no comportamento cíclico pós-pico do concreto. A figura 3.11 mostra uma curva típica tensão-abertura de fissura, evidenciando-se particularmente características como abertura residual e perdas de resistência e rigidez.

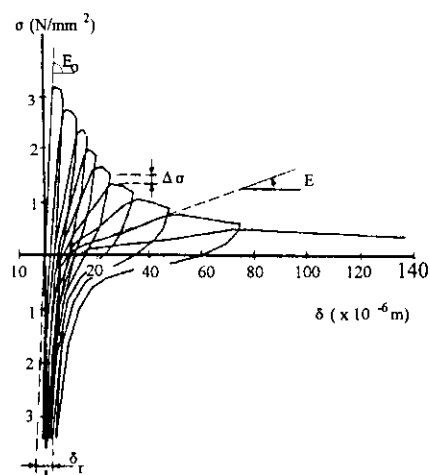


Figura 3.11 - Diagrama típico tensão x abertura de fissura para o concreto.

Figura adaptada de HORII et al. [26].

Um aspecto de importância é a resposta do material comparando-se as etapas de recarregamento em ciclos sucessivos. A abertura de fissura e a tensão transmitida são proporcionais, com redução de rigidez. Além disso, HORII et al. [26], a tensão máxima durante o recarregamento é diminuída de 15% em média em relação à anterior ($\Delta\sigma$ na figura 3.11). Esta degradação no processo de recarregamento é considerada, pelos autores, como fundamental no desenvolvimento da fissura.

Esses aspectos devem estar incorporados na modelagem matemática do fenômeno. Um exemplo, segundo FATIGUE of concrete structures - CEB [16], é o trabalho de GYLLTOF (1983), que modela o fenômeno através de um critério de energia.

Uma outra maneira de modelar alguns dos fenômenos observados na figura 3.11 será descrita mais adiante através da mecânica do dano.

3.2.2. ANÁLISE FENOMENOLÓGICA DA FADIGA EM CONCRETO

Segundo FORREST [20], se um espécime de concreto é sujeito a uma história de carregamento repetido com amplitude constante, tanto a deformação total quanto a deformação permanente aumentam gradualmente, tendendo a valores estáveis em baixos níveis de tensão, mas aumentando continuamente até a ruptura em níveis mais altos de tensão.

Testes comprovam que a resistência à fadiga pode ser aumentada pelo alívio dos níveis de tensão ou pelos 'períodos de folga', períodos em que a estrutura não está sujeita a carregamentos cíclicos. A frequência do ciclo de tensão, porém, tem efeito insignificante no aumento da resistência.

Curvas de Wöhler e limite à fadiga

Segundo FATIGUE of concrete structures -CEB [16], um estudo objetivando estimar a vida à fadiga de estruturas ou elementos estruturais pode ser feita baseando-se na mecânica da fratura, que considera a propagação da fissura para um dado estágio de carregamento. Porém, tendo-se em vista a necessidade prática de um método simples de avaliação do fenômeno, vêm sendo utilizadas as curvas de Wöhler.

Como no caso dos metais, no concreto subdivide-se a fadiga como de baixo ou alto ciclo. Fadiga de baixo ciclo, que ocorre, por exemplo, em estruturas submetidas a sismo, manifesta-se numa faixa entre $0-10^3$ ciclos; fadiga de alto ciclo, para o caso de

pavimentos de aeroportos, pontes, base de máquinas, varia entre 10^3 - 10^7 ciclos, e para o caso de estruturas marítimas ('off-shore') varia entre 10^7 - 5×10^8 ciclos. Normalmente, os maiores problemas ocorrem para situações com elevado número de ciclos, de 10^3 a 10^8 .

Diferentemente dos metais, não há evidência experimental de um limite para redução da resistência com o número de ciclos. A resistência em correspondência à 10 milhões de ciclos, para compressão, tração ou flexão, é aproximadamente 55% a 60% da resistência sob solicitação estática. Poucos testes além deste número de ciclos têm sido feitos pois a natureza não homogênea do material e as dimensões dos agregados exigem grandes espécimes e naturalmente grandes máquinas de testes, as quais operam de forma relativamente lenta.

Concreto em compressão uniaxial

A curva S-N típica é uma representação semi-logarítmica com valores de σ_{\max} / f_{cm} ao longo das ordenadas (sendo f_{cm} a resistência média a compressão do concreto) e o número de ciclos N em escala logarítmica no eixo das abscissas.

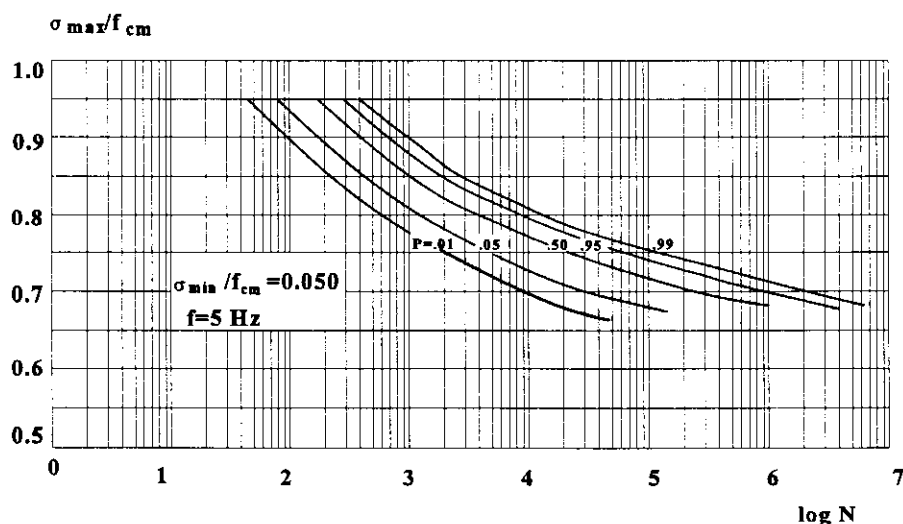


Figura 3.12 - Curva S-N para concreto à compressão.

Como testes de fadiga exibem uma razoável dispersão na determinação do número N de ciclos que causam a ruptura, com dependência sobre o tipo particular de concreto estudado, normalmente às curvas está associada uma probabilidade P de ruptura em relação ao número de ciclos (figura 3.12).

A resistência à fadiga depende das tensões máximas e mínimas do ciclo. Esse efeito é comumente representado pelos diagramas de Goodman e de Smith, mostrados na figura 3.13. Observa-se que um aumento no nível de tensão mínima, com conseqüente diminuição da amplitude de tensão do ciclo, resulta num aumento da resistência em correspondência a um dado número de ciclos.

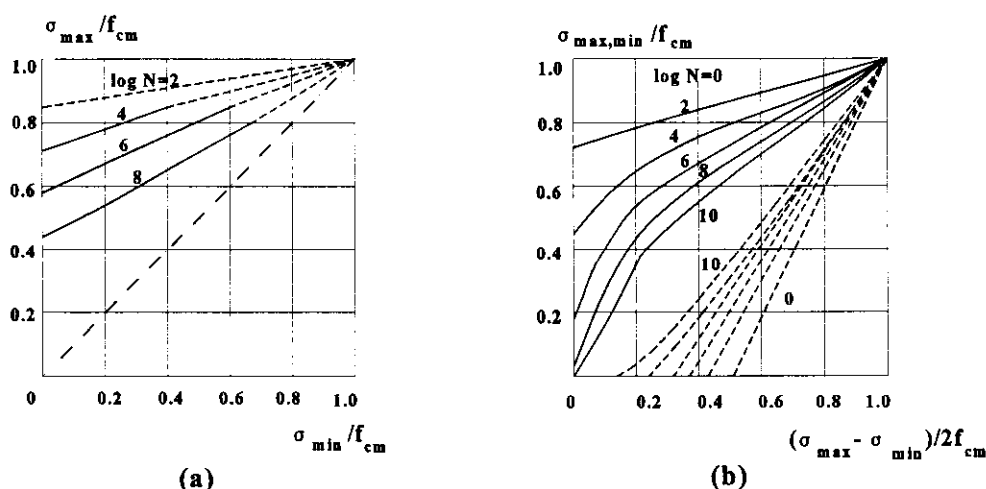


Figura 3.13 - Diagrama de Goodman (a) e Diagrama de Smith (b).
Figura adaptada do FATIGUE of concrete structures - CEB [16].

Incluindo-se a relação entre os níveis mínimo e máximo como uma terceira variável na relação S-N, pode-se expressar o número de ciclos para ruptura em função da tensão máxima de modo que (TEPFERS & KUTTI [53]):

$$\frac{\sigma_{max}}{f_{cm}} = 1 - \beta(1 - R) \log N \quad (3.1)$$

onde $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$ e β é uma constante do material que varia entre 0.064-0.080.

O FATIGUE of concrete structures - CEB [16] cita que através de ensaios, HOLMEN (1979) concluiu que, a cada etapa de recarregamento, a deformação elástica aumenta progressivamente através da redução do módulo secante de elasticidade. Segundo o pesquisador, a deformabilidade transversal também é afetada, pois o coeficiente de Poisson aumentou a cada ciclo para todos os espécimes ensaiados até a ruptura.

Concreto em tração uniaxial

É através da análise das propriedades do concreto exposto a tensões de tração pura que se estuda o comportamento da estrutura e sua tendência à fissuração sob sollicitação cíclica.

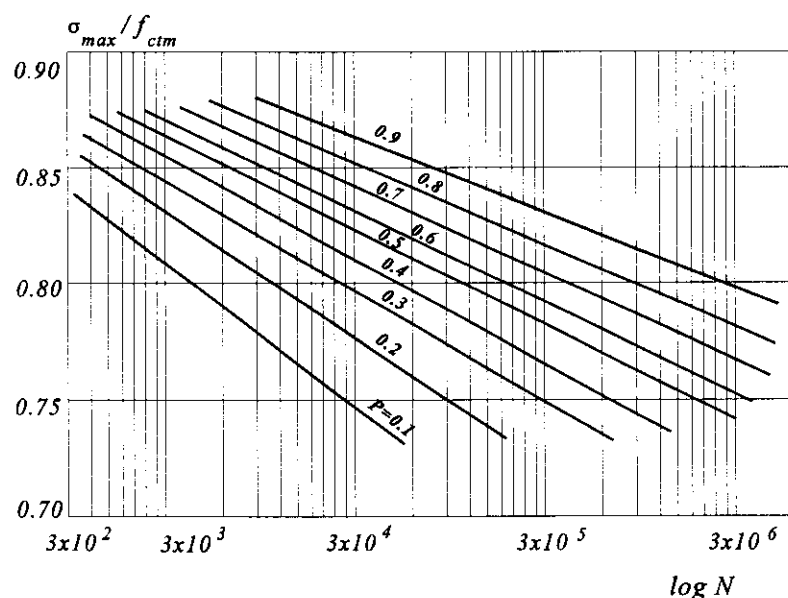


Figura 3.14 - Curva S-N para concreto simples em tração.

Segundo FATIGUE of concrete structures - CEB [16], os testes têm mostrado que o concreto sujeito à tração obedece também à equação 3.1. Porém, as curvas S-N ilustradas na figura 3.14 referem-se a testes feitos por SAITO & IMAI (1983), cujos resultados seguem a equação:

$$\frac{\sigma_{max}}{f_{ctm}} = - A \log N + B \quad (3.2)$$

onde $\sigma_{min} = 0.08f_{ctm}$. Os valores de A e B (tabela 3.1) variam de acordo com a probabilidade de ruptura.

Probabilidade P (%)	A	B
0.1	5.94	98.46
0.2	5.26	98.90
0.3	4.79	98.94
0.4	4.43	98.86
0.5	4.12	98.73
0.6	3.85	98.56
0.7	3.85	98.40
0.8	3.31	98.17
0.9	3.00	97.88

Tabela 3.1 - Valores das constantes A e B em função da probabilidade de ruptura P.

Ainda de acordo com as pesquisas de SAITO & IMAI (1983), citadas no FATIGUE of concrete structures - CEB [16], as declividades (rigidez) variam pouco nas curvas σ - ϵ para ensaios de tração cíclica com baixo nível de tensão máxima, levando a um aumento pequeno na deformação em ciclos sucessivos. Pode-se concluir que a resposta do material se caracteriza por um aumento na deformação total e residual, enquanto a deformação elástica permanece constante. Segundo os autores, este é o comportamento

esperado para baixos níveis de tensão em ensaios onde não ocorre ruptura do corpo de prova.

Concreto à solicitação alternada

Segundo FATIGUE of concrete structures - CEB [14], poucas investigações têm sido feitas em relação ao concreto exposto a tensões cíclicas de tração-compressão. Dentre os trabalhos existentes, CORNELISSEN & REINHARDT (1984), com base em resultados de ensaios sobre espécimes de concreto seco uniaxialmente carregados e testados a uma frequência de 6 Hz, consideram que tensões alternadas são prejudiciais para vida à fadiga em tração. Os resultados da investigação mostram que mesmo baixos níveis de σ_{min} em compressão reduzem o número de ciclos para ruptura significativamente. Para estados de tensão resultando em ruptura por tração, foi encontrada a seguinte equação:

$$\log N = 8.94 - 7.68 \frac{\sigma_{max}}{f_{ctm}} - 0.37 \frac{\sigma_{min}}{f_{cm}} \quad (3.3)$$

Para o caso de altas tensões de compressão, é sugerida a relação:

$$\log N = 1.58 \left(\frac{\sigma_{min}}{f_{cm}} \right)^{-3.14} \quad (3.4)$$

Os resultados obtidos para tração repetida e tração-compressão são sumarizados no diagrama modificado de Goodman, ilustrado na figura 3.15. O diagrama mostra que baixos níveis de tensão de compressão agem em detrimento à ruptura em tração. No caso de ruptura em compressão, as tensões de tração também diminuem a vida à fadiga, porém seu efeito é menor.

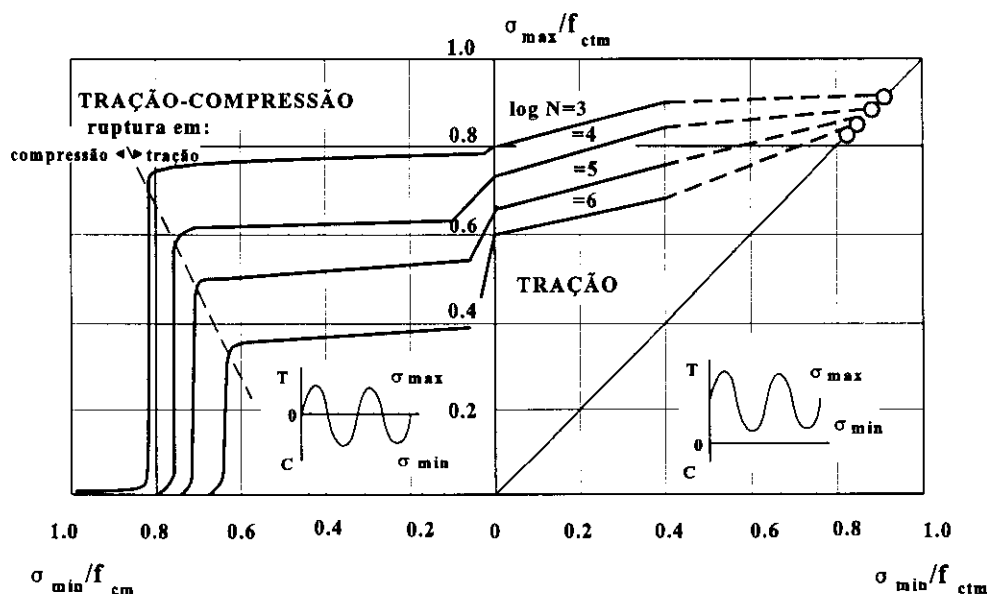


Figura 3.15 - Diagrama de Goodman modificado.

Segundo o diagrama de Goodman, para romper um espécime de concreto à tração após 1 milhão de ciclos ($\log N = 6$), por exemplo, é necessária uma amplitude de tensão dada por $\sigma_{\max}/f_{ctm} = 0.6$ e $\sigma_{\min} = 0$. Porém, caso a tensão mínima aplicada seja $0.2 \sigma_{\min}/f_{ctm}$, o valor da tensão máxima cai para, aproximadamente, $0.4 \sigma_{\max}/f_{ctm}$. Quando a sollicitação não é alternada (lado direito do diagrama) um aumento da tensão mínima permitiria também um aumento da tensão máxima de modo a se obter o mesmo número de ciclos para ruptura.

Caso a ruptura do espécime, após os mesmos 1 milhão de ciclos, seja à compressão, tem-se uma tensão de compressão de $0.65 \sigma_{\min}/f_{ctm}$ para uma resistência à tração variando entre 0.15 e $0.35 \sigma_{\max}/f_{ctm}$. Para valores mais baixos de tensão de tração, inferiores a $0.15 \sigma_{\max}/f_{ctm}$, pode-se aumentar a tensão de compressão até aproximadamente $0.68 \sigma_{\min}/f_{ctm}$.

Como para o caso de metais, não será objeto de estudo neste trabalho o caso de tensão alternada em concreto.

3.2.4. BREVE COMENTÁRIO SOBRE A FADIGA EM ELEMENTOS ESTRUTURAIS DE CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO

A fadiga de estruturas de concreto armado está intimamente relacionada com as propriedades de seus materiais componentes, concreto e aço e a interação entre eles. Assim, para elementos sub-armados sob a ação cíclica de momento fletor o comportamento à fadiga está diretamente relacionado com a resistência à fadiga da armadura. Para elementos super-armados ou aqueles em que o cisalhamento e a aderência são fatores determinantes, a previsão do comportamento é mais complicada.

Em vigas de concreto armado, a fissuração é produzida pela aplicação repetida de aproximadamente metade da carga estática de fissuração, mas a ruptura completa não ocorre a menos que a carga cíclica esteja entre 60% e 70% da carga estática.

Existem vários estudos onde a fadiga é tratada exclusivamente em função da ligação entre concreto e armadura. Nas referências bibliográficas deste trabalho, apresentam-se alguns artigos lidos que tratam do assunto, CLEARY & RAMIREZ [13], NEVILLE et al. [39], TASSIOS & YANNOPOULOS [50], WITTMANN [53].

Por outro lado, resistências mais altas podem ser obtidas com vigas de concreto protendido em relação às vigas simplesmente armadas. A ruptura por solicitação cíclica em vigas protendidas ocorre quase sempre pela fadiga dos cabos e apenas raramente pelo esmagamento do concreto.

Diferentemente da caracterização dada para ruptura devido à solicitação cíclica, no caso dos cabos, esta é sempre precedida por trincas e deformações grandes, de modo que há um aviso claro antes do colapso iminente. Isto é devido ao fato de que mesmo que um dos cabos se rompa, a viga é usualmente capaz de sustentar um apreciável número de cargas cíclicas posteriores.

Segundo FORREST [20], fissuração por solicitação cíclica do concreto pode ser evitada limitando-se a tensão máxima para metade da tensão estática requerida para produzir fissuração. A resistência à fadiga não é melhorada por redução na pré-tensão.

3.3. SOBRE MODELOS USUAIS QUE INTRODUZEM A IDÉIA DE ACUMULAÇÃO DE DANO NO ESTUDO DA FADIGA

As estruturas não são, em geral, solicitadas repetidamente por um único nível de carregamento. Na realidade, a ruptura da estrutura, em relação à fadiga, é o resultado da acumulação de dano causada por uma multiplicidade de ciclos de carregamento, com diferentes frequências e amplitudes.

O tratamento do dano acumulado nos estudos da fadiga tem recebido uma larga atenção nos últimos anos. Entretanto o dano não está associado diretamente com a perda de rigidez do material mas sim, como se verá, com uma diminuição, por assim dizer, da vida à fadiga. PALMGREN (1924) foi quem primeiro sugeriu o que é conhecido como "modelo linear de dano", seguindo-se estudos feitos por LANGER (1937) e MINER (1945). Porém, sabe-se que, apesar do mérito de um tratamento simples para histórias complexas de carregamento, as previsões realizadas com o modelo linear são frequentemente pessimistas.

No modelo linear, dano é definido como sendo proporcional à relação de ciclos n_i/N_i , onde n_i é o número de ciclos de tensão σ_i realizados durante o período em análise, e N_i é o número de ciclos correspondente à ruptura para um mesmo nível de tensão (figura 3.16). Como critério geral, assume-se que a ruptura em consequência de vários níveis de carregamento deve ocorrer quando a soma das relações entre número de ciclos realizados e o número de ciclos correspondentes à ruptura para cada nível de tensão atuante for igual a unidade:

$$D_f = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots + \frac{n_k}{N_k} = \sum_i \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (3.5)$$

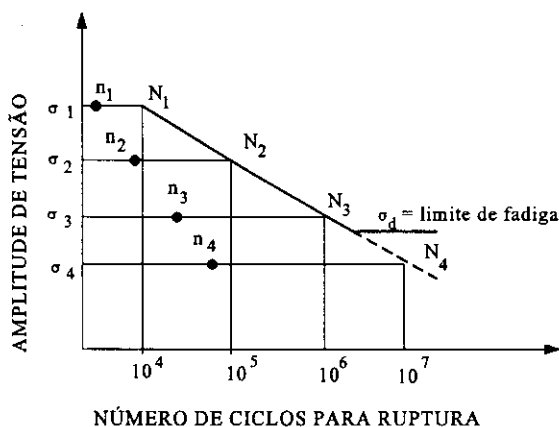


Figura 3.16 - Regra linear para acumulação de dano por fadiga.

A relação de ciclos, n_i / N_i é também chamada de vida relativa à fadiga. Desse modo, de acordo com a relação 3.5 (regra de Miner), a soma das vidas relativas é igual a unidade para ruptura.

Este critério de ruptura não pode ser considerado como uma regra matematicamente exata, mas para amplitudes de tensão não tão diferentes entre si, a aproximação obtida é suficiente para a previsão de vida. Por outro lado, eventuais altos picos de tensão em meio a pequenos ciclos podem provocar uma considerável variação em relação à unidade na soma das relações n_i/N_i .

A figura 3.17 mostra exemplos de vários níveis de tensão padrão usados em testes para simulação de várias histórias de tensão, BUCH [11]. No caso (a) há grupos de ciclos de mesmo nível de tensão formando blocos que se repetem na mesma sequência até a ruptura. Às vezes a sequência de grupos é casual e diferente em cada bloco (b). O caso (c) mostra padrões repetidos de ciclos de tensões casuais. E, finalmente, o caso (d) não apresenta nenhum tipo de padrão que se repete em intervalos de tempo.

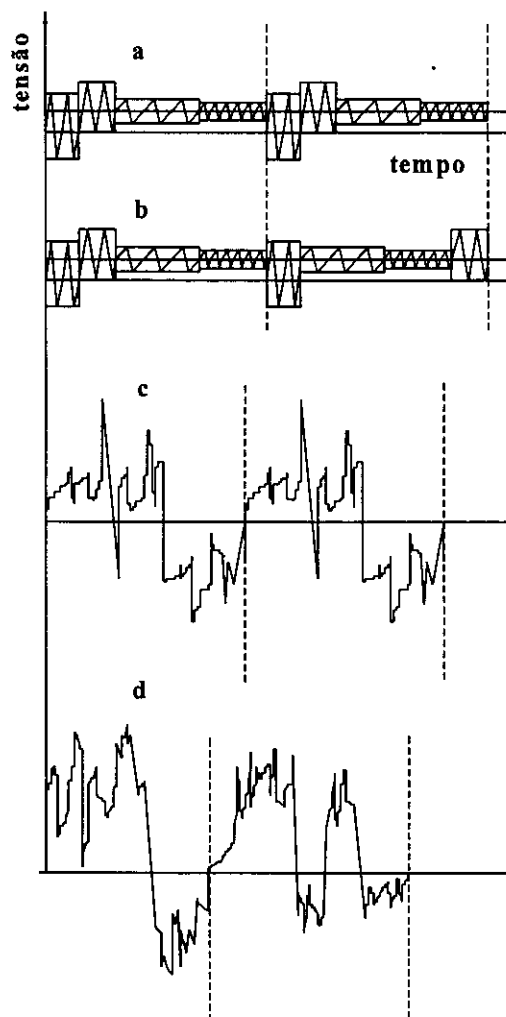


Figura 3.17 - Níveis padrões de tensão em testes.

Numerosos testes usando os níveis padrões citados têm mostrado que a média da soma das relações de ciclos para ruptura, D_f , possui um desvio considerável da unidade e a relação entre vida medida no teste e vida prevista pela regra de Miner está dispersa entre 0.1 e 10.

Uma boa razão para o desvio de D_f da unidade é o efeito da sequência de carregamento. De acordo com o modelo de acumulação de dano de Miner, o dano causado por n_i independe da história do carregamento. Entretanto, mesmo testes simples de dois níveis de solicitação têm mostrado que a soma de dano para ruptura depende da sequência de carregamento e não é a mesma para uma sequência H-L (aplicando-se primeiro o nível

mais alto de carregamento) e uma sequência L-H (primeiro o nível mais baixo).

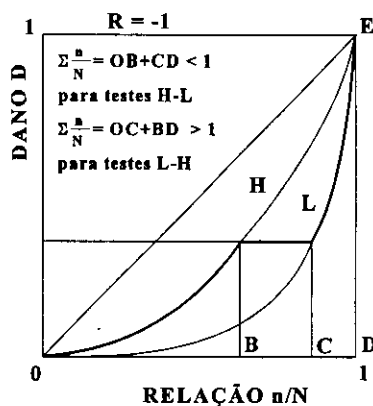


Figura 3.18 - Modelo de acumulação de dano linear e não-linear aplicados a dois carregamentos cíclicos com amplitudes diferentes.
Figura adaptada de BUCH [11].

A título de ilustração, a figura 3.18 mostra o efeito da sequência de carregamento para o caso de testes tração-compressão ($R = -1$) aplicando-se dois níveis de solicitação:

$$\sum (n/N)_{H-L} < \sum (n/N)_{L-H} \quad (3.6)$$

A literatura contém grande número de teorias complicadas à respeito do assunto, que tentam explicar a não-linearidade da acumulação do dano, o efeito da sequência de carregamento, as tensões residuais e alguns outros efeitos não considerados pelo modelo de dano linear. Dentre os métodos, BUCH [11] destaca os trabalhos de NEWMARK (1952), KAECHLE (1963), MANSON (1964), O'NEILL (1970) e SCHIVE (1972), SHAH (1984). MANSON & HALFORD [37] propuseram um método para acumulação de dano em metais.

Entretanto, considerando a complexidade dessas teorias, não há maior precisão. BUCH [11], usa as palavras de O'NEILL (1970), que resumiu uma extensiva pesquisa de várias teorias de dano como segue:

"Não há evidência de que algumas das mais complexas teorias sejam superiores à regra linear em situações de interesse prático, e todas requerem mais dados experimentais."

Essa opinião é apoiada por muitos outros autores cujo objetivo são regras menos precisas mas de grande praticidade. Para estes, apesar da relação de ciclos não ser sempre igual a unidade na ruptura, esta ainda é a melhor medida de perigo de ruptura por solicitação cíclica tanto em metais quanto em concreto.

CAPÍTULO IV

ELEMENTOS DA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

Introduzida em 1958 nos trabalhos pioneiros de KACHANOV & RABOTNOV, com o propósito de estudar a ruptura associada à deformação lenta em metais, a teoria do dano tem sido usada - BROBERG (1974), LEMAITRE & CHABOCHE (1978), PAPA (1990) - para descrever a deterioração progressiva de materiais sob ação de carregamento monotônico ou repetido.

Em 1977, JANSON & HULT sugeriram a terminologia 'Mecânica do Dano Contínuo' ('Continuum Damage Mechanics') para designar modelos em Mecânica do Contínuo destinados ao estudo da resposta de materiais em regime de ruptura considerando-se o processo de danificação. Em 1985, LEMAITRE & CHABOCHE deram bases teóricas à mecânica do dano contínuo em conformidade com os princípios da Termodinâmica dos Processos Irreversíveis.

O *dano* tem correspondência com níveis locais de degradação progressiva irreversível do material, conseqüente à evolução de fissuração, desde a escala microscópica até a ruptura de um volume representativo (suficientemente grande para que a quantidade de material nele envolvida possa ser considerada homogênea e suficientemente pequeno

para evitar grandes gradientes de deformação).

Essencialmente, a diferença entre Mecânica do Dano e Mecânica da Fratura pode ser colocada, segundo JANSON & HULT (1977), nos seguintes termos (figura 4.1):

- na Mecânica do Dano, a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um campo de defeitos continuamente distribuído;
- na Mecânica da Fratura, a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um defeito em particular, como uma fissura pontiaguda pré-definida. O meio em volta da fissura é assumido como mecanicamente intacto.

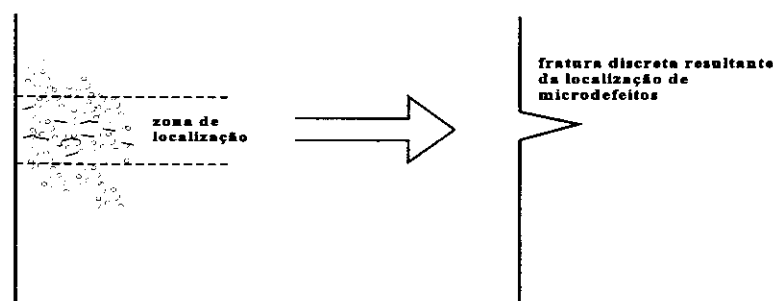


Figura 4.1 - Mecânica do Dano x Mecânica da Fratura.

Um estudo mais realístico sugeriria a combinação das duas teorias - JANSON e HULT (1977), LOLAND e GJORV (1980) e LOLAND (1981). Entretanto tal modelagem deveria incorporar condições matemáticas capazes de simular o processo de instabilidade pelo qual passa o material na fase de localização das microfissuras e geração da macrofissura.

Dentre os modelos de dano existentes, destacam-se o modelo de KRAJČINOVIC & FONSECA (1981), ORTIZ (1985), RESENDE (1985) e MAZARS (1984). Esse último será objeto de estudo neste trabalho.

4.1. CARACTERIZAÇÃO DO DANO

Como ilustra a figura 4.2, em um elemento de volume representativo, uma seção S , definida em função do versor normal \underline{n} , apresenta microfissuras e microdefeitos de distribuição aleatória que contribuem para o dano.

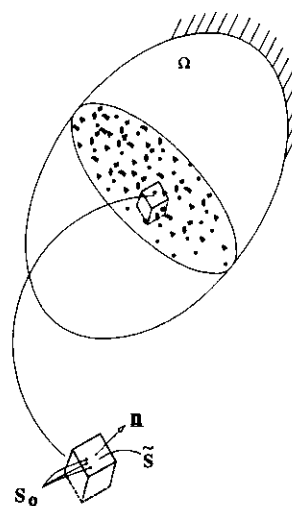


Figura 4.2 - Representação de um elemento de volume com dano.

Pode-se definir o dano pela razão entre a área de defeitos S_0 e a área normal S :

$$D = \frac{S_0}{S} \quad (4.1)$$

Por outro lado, sendo:

$$\tilde{S} = S - S_0 \quad (4.2)$$

a área sem defeitos da seção transversal, a relação (4.1) passa a ser escrita na forma:

$$D = \frac{S - \tilde{S}}{S} \quad (4.3)$$

Considerando-se que os microdefeitos tenham uma distribuição uniforme independente da orientação da normal \underline{n} , a variável de dano pode ser caracterizada por um parâmetro escalar, D , que quantifica localmente o estado de deterioração do material. $D=0$ corresponde ao material sem deterioração (este é o estado de referência); $D=1$ corresponde à ruptura do volume representativo do material.

Considere-se o caso unidimensional, por simplicidade, onde F é a força agindo na seção S e $\sigma = F/S$ a distribuição de tensões que satisfaz o equilíbrio. A tensão efetiva é definida por:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} \quad (4.4)$$

e representa a tensão média atuante na parte resistente de S .

Segue de (4.3) e (4.4) que:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (4.5)$$

Em particular, se $D = 0$ então $\tilde{\sigma} = \sigma$ e com $D \rightarrow 1$ $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$.

LEMAITRE & CHABOCHE, em 1985, estabeleceram a hipótese da equivalência de deformação, de grande importância para a formulação de uma relação constitutiva para um meio com dano, tratado como um meio contínuo. Tal hipótese diz que o estado de deformações de um material com dano pode ser obtido de um material íntegro onde a tensão atuante é a tensão efetiva (figura 4.3).

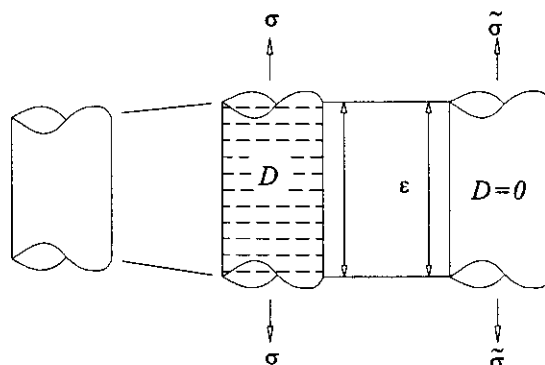


Figura 4.3 - Deformação equivalente.

Portanto:

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1 - D)E} \quad (4.6)$$

onde E é o módulo de Young do material sem dano.

A mesma deformação pode ser expressa em função do módulo de Young do material com dano:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\tilde{E}} \quad (4.7)$$

Das equações (4.6) e (4.7):

$$\tilde{E} = (1 - D)E \quad (4.8)$$

A relação (4.8) evidencia uma medida indireta do dano, por meio de mudanças de uma propriedade elástica.

4.2. A IMPORTÂNCIA DA TERMODINÂMICA DOS PROCESSOS IRREVERSÍVEIS

Fenômenos como plastificação e danificação possuem um caráter permanente, no sentido de que não são restituíveis em ciclos de tensão ou deformação. Os modelos constitutivos que levem em conta esses fenômenos devem preservar a irreversibilidade e é a Termodinâmica dos Processos Irreversíveis que permite formulá-los de forma consistente com os princípios fundamentais.

De modo resumido, via a formulação termodinâmica, postula-se a existência de potenciais de energia livre e de dissipação dos quais derivam as variáveis associadas às 'variáveis de estado' (por exemplo tensão relacionada à deformação) e as leis de evolução das variáveis internas (por exemplo, a variável de dano) as quais caracterizam a irreversibilidade.

Discorrer sobre maiores detalhes da Termodinâmica dos Processos Irreversíveis neste ponto do trabalho não é necessário, entretanto devido à importância do assunto optou-se por inseri-lo no apêndice.

Será apresentado no apêndice um resumo dos conceitos fundamentais empregados por LEMAITRE & CHABOCHE para formalizar a Mecânica do Dano Contínuo. Para um estudo complementar são sugeridos os textos apresentados na bibliografia, MALVERN [36], LEMAITRE & MARQUIS [31], GERMAIN [22], entre outros.

4.3. TEORIA DO DANO APLICADA AO CONCRETO

O conceito de dano foi inicialmente usado para análise e descrição do comportamento de metais sob carregamentos monotônicos ou cíclicos. Porém, o mesmo conceito aplica-se bem ao concreto uma vez que:

- o desenvolvimento do dano no concreto, associado à microfissuração, pode ser considerado contínuo e se inicia com baixas tensões ou deformações;
- as deformações permanentes são também devidas ao processo de evolução de microfissuras, podendo-se acoplar os efeitos de plastificação e danificação.

Além disso, é possível levar em conta o dano inicial existente na forma de defeitos (microfissuras ou vazios) que precedem a deterioração mecânica causada por carregamentos externos.

4.3.1. MODELO DE MAZARS PARA O CONCRETO

Carregamento proporcional

O modelo constitutivo proposto por MAZARS em 1984, permite uma representação aceitável de algumas evidências experimentais do concreto.

Este modelo utiliza uma variável escalar D para representar e quantificar o estado local de degeneração do material.

Outras simplificações adotadas nesse modelo consistem em desprezar deformações permanentes, sejam elas de origem plástica, viscosa, ou induzidas pelo próprio processo de danificação em si e considerar apenas carregamento radial (proporcionalmente crescente), para simplificar a análise. Além disso, admite-se que o aparecimento e a evolução do dano sejam exclusivamente devido à existência de alongamentos, caracterizados localmente por valores positivos das deformações principais.

A expressão proposta para a variável representativa do estado local de extensão,

definida como *deformação equivalente* é:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (4.9)$$

onde $\langle \varepsilon_i \rangle_+$ é a i -ésima componente positiva do vetor de deformações principais, sendo o valor da componente se esta for positiva e nula se a componente for negativa:

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \frac{1}{2} [\varepsilon_i + |\varepsilon_i|] \quad (4.10)$$

Exemplificando:

- caso de tração em uma direção i : $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_i$ ($\varepsilon_i > 0$)

- caso de compressão na direção 1: $\tilde{\varepsilon} = -\nu \varepsilon_1 \sqrt{2}$ ($\varepsilon_1 < 0$)

- compressão biaxial nas direções 1 e 2: $\tilde{\varepsilon} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ ($\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_2 < 0$)

- compressão hidrostática: $\tilde{\varepsilon} = 0$

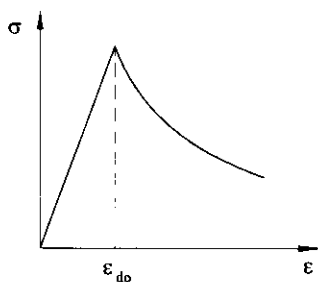


Figura 4.4 - Representação de ε_{d0} no gráfico σ - ε de um ensaio de tração uniaxial.

O dano se inicia quando um valor particular da deformação equivalente é alcançado. Por convenção, considera-se a deformação ε_{d0} , associada à tensão máxima em ensaios de

tração uniaxial (figura 4.4).

De maneira geral, o critério de dano é expresso da seguinte forma:

$$f(\tilde{\epsilon}, D) = \tilde{\epsilon} - S(D) \leq 0 \quad \text{com} \quad S(0) = \epsilon_{do} \quad (4.11)$$

onde D representa a variável escalar do dano.

Para o caso onde a função f vale zero (limite da superfície de dano nulo), tem-se que:

$$\tilde{\epsilon} = S(D) = \sqrt{\langle \epsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_3 \rangle_+^2} \quad (4.12)$$

Tal expressão caracteriza uma superfície de um quarto de uma esfera de raio $S(D)$, dentro da qual não existe dano (figura 4.5). Quando atingido um valor máximo da deformação equivalente, esta superfície se expande, de modo que, para que volte a ocorrer dano o novo valor da deformação equivalente deve superar o valor máximo já alcançado. Isto torna o descarregamento e recarregamento da estrutura perfeitamente elásticos, o que não representa a realidade que é observada em ensaios experimentais. Daí a limitação do modelo para carregamento crescente.

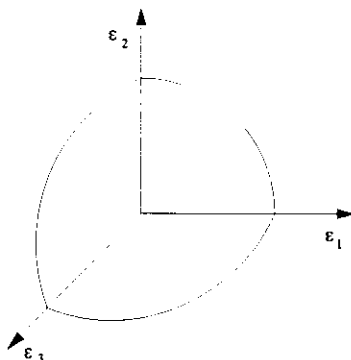


Fig. 4.5 - Superfície envoltória de dano nulo.

A lei de evolução do dano proposta por Mazars é um modelo termodinamicamente admissível, de modo que sua forma geral é:

$$\begin{aligned} \dot{D} &= 0 && \text{se } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ e } \dot{f} < 0 \\ \dot{D} &= F(\tilde{\epsilon}) \langle \dot{\tilde{\epsilon}} \rangle_+ && \text{se } f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Onde $F(\tilde{\epsilon})$ é uma função contínua e positiva da deformação equivalente, de modo que:

$$\dot{D} \geq 0 \quad \text{para qualquer } \dot{\tilde{\epsilon}} \geq 0 \quad (4.14)$$

A função $F(\tilde{\epsilon})$ é definida com base em resultados experimentais de modo a reproduzir as curvas obtidas em ensaios uniaxiais, biaxiais ou triaxiais.

Devido à não simetria de resposta do concreto à tração e à compressão, têm-se duas variáveis escalares independentes D_T e D_C , que representam, analiticamente as curvas 'softening' obtida em ensaios uniaxiais de tração e compressão.

$$\begin{aligned} \dot{D}_T &= F_T(\tilde{\epsilon}) \langle \dot{\tilde{\epsilon}} \rangle_+ && \text{para tração} \\ \dot{D}_C &= F_C(\tilde{\epsilon}) \langle \dot{\tilde{\epsilon}} \rangle_+ && \text{para compressão} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nos casos de carregamento proporcional e radial, é possível calcular diretamente o valor total do dano. Neste caso, o modelo propõe para o cálculo de D_T e D_C :

$$D_T(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{do}(1-A_T)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_T}{\exp [B_T(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{do})]} \quad (4.16)$$

$$D_C(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{do}(1-A_C)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_C}{\exp [B_C(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{do})]} \quad (4.17)$$

A figura 4.6 ilustra curvas experimentais e constitutivas para os casos uniaxiais,

mostrando a simplificação do exemplo que desconsidera a deformação residual. A figura mostra também a penalização da rigidez pelo dano.

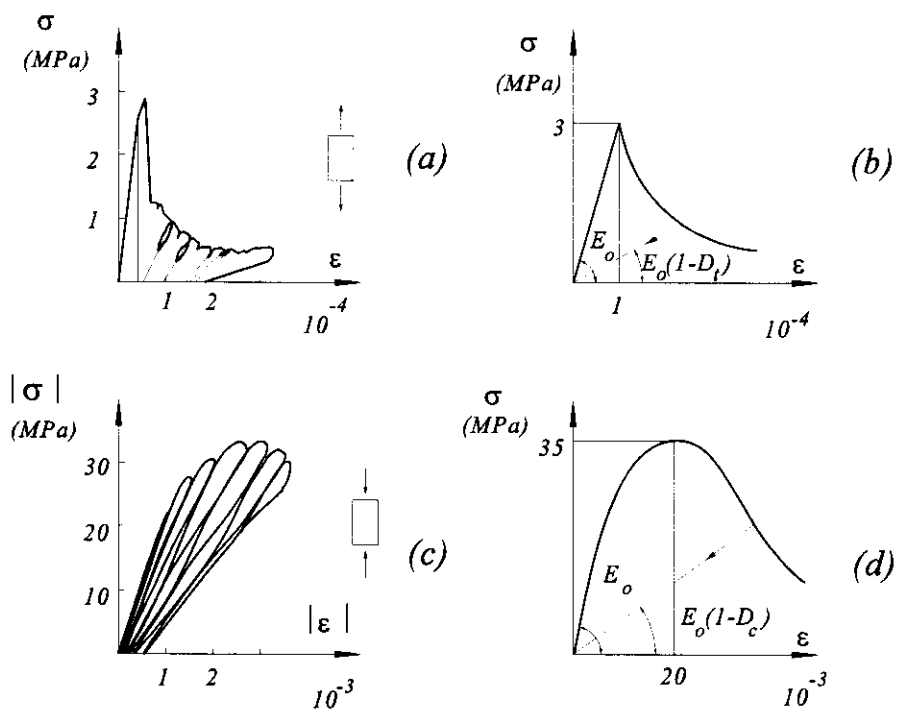


Figura 4.6 - Curvas experimentais e constitutivas de tração (a, b) e compressão (c, d).

Quando o estado de tensões é pluriaxial, Mazars propõe uma combinação linear entre D_T e D_C de modo que:

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (4.18)$$

$$\alpha_T + \alpha_C = 1 \quad (4.19)$$

onde α_T e α_C representam a contribuição da tração e da compressão para o estado local de extensão, de modo que:

$$\alpha_T = \frac{\sum_i \langle \epsilon_{T_i} \rangle_+}{\epsilon_V^+} \quad (4.20)$$

$$\alpha_C = \frac{\sum_i \langle \epsilon_{C_i} \rangle_+}{\epsilon_V^+} \quad (4.21)$$

Nas relações (4.20) e (4.21), ϵ_{T_i} e ϵ_{C_i} são componentes de deformação determinadas pelas partes positiva e negativa, respectivamente, do vetor de tensões principais $\underline{\sigma}^*$ associado a $\underline{\epsilon}$ pela relação elástica isotrópica:

$$\underline{\sigma}^* = \underline{D}_0 \underline{\epsilon} \quad (4.22)$$

$$\underline{\epsilon}_T = \frac{1+\nu}{E} \langle \underline{\sigma} \rangle_+ - \frac{\nu}{E} \langle \sum_i \sigma_i \rangle_+ \underline{I} \quad (4.23)$$

$$\underline{\epsilon}_C = \frac{1+\nu}{E} \langle \underline{\sigma} \rangle_- - \frac{\nu}{E} \langle \sum_i \sigma_i \rangle_- \underline{I} \quad (4.24)$$

onde $\langle \underline{\sigma} \rangle_+$ é a parte positiva e $\langle \underline{\sigma} \rangle_-$ a parte negativa do vetor de tensões $\underline{\sigma}^*$.

E define-se também:

$$\epsilon_V^+ = \sum_i \langle \epsilon_{T_i} \rangle_+ + \sum_i \langle \epsilon_{C_i} \rangle_+ \quad (4.25)$$

De modo que o tensor de tensões é calculado como:

$$\underline{\sigma} = (1-D) \underline{D}_0 \underline{\varepsilon} \quad (4.26)$$

onde \underline{D}_0 é o tensor elástico do material íntegro.

Nas expressões anteriores A_T e B_T são parâmetros característicos do material em tração uniaxial, A_C e B_C são parâmetros do material em compressão uniaxial e ε_{do} é a deformação elástica limite.

De um modo geral, para os parâmetros A_T , B_T , A_C , B_C e ε_{do} , Mazars propôs os seguintes limites de variação, obtidos a partir da calibração com resultados experimentais:

$$\begin{aligned} 0.7 \leq A_T \leq 1 & \quad 10^4 \leq B_T \leq 10^5 \\ 1 \leq A_C \leq 1.5 & \quad 10^3 \leq B_C \leq 2 \cdot 10^3 \\ 10^{-5} \leq \varepsilon_{do} \leq 10^{-4} & \end{aligned}$$

Uma análise desses parâmetros é apresentada em ÁLVARES [02]. No mesmo trabalho, sugere-se que B_T seja obtido em função da energia de fratura G_f de modo a eliminar o problema numérico da perda de objetividade dos resultados - maior discretização associada à piora nos resultados - na análise em elementos finitos. Uma consequência disto é que a parte de encruamento negativo da relação σ - ε deixa de ser constante, e sim, dependente do tamanho da malha adotada, na discretização.

Carregamento cíclico

A aplicação do modelo anterior é limitada ao caso de carregamento monotônico crescente. De fato, o modelo não pode levar em conta a acumulação de dano devido a sollicitação cíclica. PAPA (1990), propôs uma extensão da lei de dano, apresentada em

MAIER et al. [34].

A característica básica da solitação cíclica é a perda de resistência e rigidez durante o recarregamento. O modelo proposto por Papa considera esta perda de resistência pela progressão do dano durante o recarregamento, lembrando que para o modelo anterior o dano só progride quando ultrapassado o último maior estado de alongamento.

A lei para controlar a evolução do dano para carregamento proporcional pode ser reescrita de modo que:

$$\hat{f}(\tilde{\epsilon}, D_H) = (1-D_H)[\epsilon_{do}(1-A_H)\tilde{\epsilon}^{-1} + A_H e^{-B_H(\tilde{\epsilon}-\epsilon_{do})}]^{-1} \leq 1 \quad (4.27)$$

onde $\mathbf{H}=\mathbf{T}$ para tração uniaxial e $\mathbf{H}=\mathbf{C}$ para compressão uniaxial. Na equação \hat{f} varia entre 0 e 1, de modo que a correspondência entre f e \hat{f} apresenta-se na seguinte forma: $f < 0 \rightarrow \hat{f} < 1$ e $f = 0 \rightarrow \hat{f} = 1$.

E a lei de evolução do dano, baseando-se, como já foi citado, na termodinâmica dos processos irreversíveis, pode ser expressa na forma:

$$\dot{D}_H = \begin{cases} \lambda \frac{\partial \hat{f}}{\partial \tilde{\epsilon}} & \text{se } \hat{f} = 1 \\ 0 & \text{se } \hat{f} < 1 \end{cases} \quad (4.28)$$

onde λ é determinado pela condição de consistência $\dot{\hat{f}} = 0$, ou seja:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \tilde{\epsilon}} \dot{\tilde{\epsilon}} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial D} \dot{D} = 0$$

Daí resulta:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \tilde{\epsilon}} = (1 - D_H) [-\epsilon_{do}(1 - A_H) \tilde{\epsilon}^{-1} - A_H e^{B_H(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{do})}]^{-2} [-\epsilon_{do}(1 - A_H) \tilde{\epsilon}^{-2} - A_H B_H e^{-B_H(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{do})}] \dot{\tilde{\epsilon}}$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial D} = -[\epsilon_{do}(1 - A_H) \tilde{\epsilon}^{-1} - A_H e^{B_H(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{do})}] \dot{D}$$

Considerando-se que:

$$F_H(\tilde{\epsilon}) = [\epsilon_{do}(1 - A_H) \tilde{\epsilon}^{-2} + A_H B_H e^{-B_H(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{do})}] \quad (4.29)$$

e fazendo-se uso da equação (4.27) a condição (4.28) passa a ser dada por:

$$\dot{D}_H = \begin{cases} \hat{f} F_H(\tilde{\epsilon}) < \dot{\tilde{\epsilon}} >_+ & \text{se } \hat{f} = 1 \\ 0 & \text{se } \hat{f} < 1 \end{cases} \quad (4.30)$$

onde $\mathbf{H}=\mathbf{T}$ para tração uniaxial e $\mathbf{H}=\mathbf{C}$ para compressão uniaxial.

No caso de solitação cíclica, a expressão proposta para \dot{D}_H assume a forma:

$$\dot{D}_H = \hat{f}^{(n+1)} F_H(\tilde{\epsilon}) < \dot{\tilde{\epsilon}} >_+ \quad \text{se } \hat{f} = 1 \quad (4.31)$$

onde n é um parâmetro do material.

Isto é, uma vez que tenha sido verificada pela primeira vez $\hat{f} = 1$ a evolução do dano é possível em sucessivos ciclos de recarregamento mesmo quando $\hat{f} < 1$. É o equivalente a supor que a superfície limite de propagação de dano, representada inicialmente por $\hat{f} = 1$, tivesse por correspondência valores inferiores à unidade. No modelo proposto para carregamento monotônico crescente a superfície de dano não nulo tende somente a aumentar, como já foi explicado naquele item.

De acordo com a lei proposta, se o material está em fase de carregamento o dano evolui, enquanto que, se o material está em fase de descarregamento, o dano permanece constante.

Para leis de solitação cíclica, o carregamento não é mais aplicado monotonicamente, mesmo que a hipótese de carregamento radial permaneça válida. Portanto, a variável dano deve ser expressa em taxas e seu valor total determinado ao longo do período de tempo considerado.

$$D = \int_0^t \dot{D} dt \quad \text{com} \quad \dot{D} = \alpha_T \dot{D}_T + \alpha_C \dot{D}_C \quad (4.32)$$

Em resumo, para detectar o início do processo de danificação um valor de referência deve ser excedido ($\tilde{\epsilon} > \epsilon_{do}$); após isso, a existência de uma variação positiva de $\tilde{\epsilon}$ é suficiente para evolução do dano.

O modelo envolve seis parâmetros, dos quais cinco foram mencionados anteriormente: A_T , G_F , A_C , B_C , e ϵ_{do} . Como se mostrará no capítulo de exemplos, o parâmetro n pode ser obtido pela calibração da curva de carregamento cíclico de modo que seja reproduzida a envoltória da curva σ - ϵ obtida com carregamento monotônico.

Uma última observação importante sobre os modelos apresentados, é que os mesmos não levam em conta a característica unilateral do concreto solicitado por uma tensão de tração e sequencialmente por uma tensão de compressão. De fato, sob tensão de tração, o concreto usualmente exhibe microfissuras perpendiculares à direção da tensão com consequente perda de rigidez. Entretanto, se o sentido da solitação se inverter passando a compressão as microfissuras se fecham e a rigidez inicial é recuperada. Com o modelo anterior, o dano aumenta, propagando-se os efeitos da tração anterior para a resposta em compressão.

Finalmente, as relações que expressam a lei constitutiva completa estão resumidas no quadro 4.1.

LEI CONSTITUTIVA COMPLETA PARA SOLICITAÇÃO CÍCLICA
$\underline{\sigma} = (1 - D) \underline{\underline{D}}_0 \underline{\varepsilon}$
$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2}$
$\hat{f}(\tilde{\varepsilon}, D_H) = (1 - D_H) [\varepsilon_{do} (1 - A_H) \tilde{\varepsilon}^{-1} + A_H e^{-B_H(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{do})}]^{-1} \leq 1$
$D = \int \dot{D} dt \quad \text{com} \quad \dot{D} = \alpha_T \dot{D}_T + \alpha_C \dot{D}_C$
$\dot{D}_H = \hat{f}^{n+1} F_H(\tilde{\varepsilon}) \langle \dot{\tilde{\varepsilon}} \rangle_+ \quad \text{se} \quad \hat{f} = 1$
$F_H(\tilde{\varepsilon}) = \varepsilon_{do} (1 - A_H) \tilde{\varepsilon}^{-2} + A_H B_H e^{-B_H(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{do})}$
$\alpha_T = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{Ti} \rangle_+}{\varepsilon_V^+}$

$\alpha_C = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{Ci} \rangle_+}{\varepsilon_V^+}$
$\varepsilon_V^+ = \sum_i \langle \varepsilon_{Ti} \rangle_+ + \langle \varepsilon_{Ci} \rangle_+$
$\underline{\varepsilon}_T = \frac{1+\nu}{E} \langle \underline{\sigma} \rangle_+ - \frac{\nu}{E} \langle \sum_i \sigma_i \rangle_+ \underline{I}$
$\underline{\varepsilon}_C = \frac{1+\nu}{E} \langle \underline{\sigma} \rangle_- - \frac{\nu}{E} \langle \sum_i \sigma_i \rangle_- \underline{I}$

Quadro 4.1 - Lei constitutiva completa para o caso de solicitação cíclica. Modelo de dano de Mazars.

CAPÍTULO V

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO DE DANO DE MAZARS ADAPTADO AO CASO DE CARREGAMENTO CÍCLICO

5.1. REFORMULAÇÃO DAS RELAÇÕES QUE ENVOLVAM TAXAS DE VARIÁVEIS VISANDO A INTEGRAÇÃO EM PASSO FINITO

A implementação numérica do modelo descrito no capítulo anterior requer incrementos finitos de carga. Nesse sentido, as relações que envolvem taxas das variáveis precisam ser reformuladas em termos de variações finitas.

Variável dano

A taxa da variável escalar dano é reescrita em passo finito da seguinte maneira:

$$\Delta D = \alpha_T \Delta D_T + \alpha_C \Delta D_C \quad (5.1)$$

onde:

$$\Delta D_T = \hat{f}_T^{(n+1)} F_T(\tilde{\epsilon}) < \Delta \tilde{\epsilon} >_+ \quad (5.2)$$

$$\Delta D_C = \hat{f}_C^{(n+1)} F_C(\tilde{\epsilon}) < \Delta \tilde{\epsilon} >_+ \quad (5.3)$$

Os valores de ΔD_T e ΔD_C são calculados segundo um procedimento implícito na iteração K através da seguinte expressão:

$$D_{H_K} = D_{H_{K-1}} + \hat{f}^{n+1}(\tilde{\epsilon}_K, D_{H_K}) F(\tilde{\epsilon}_K) \Delta \tilde{\epsilon} \quad (5.4)$$

onde $H = T$ para tração e $H = C$ para compressão. O valor de f^{n+1} é obtido em função de um desenvolvimento em primeira ordem em torno do seu valor de D_{H_K} :

$$\hat{f}^{n+1}(\tilde{\epsilon}_K, D_{H_K}) = \left[\hat{f}(\tilde{\epsilon}_K, D_{H_{K-1}}) + \frac{\partial \hat{f}(\tilde{\epsilon}_K, D_{H_K})}{\partial D_{H_K}} \Delta D_{H_K} \right]^{n+1} \quad (5.5)$$

Sabendo-se que:

$$\Delta D_H = D_{H_K} - D_{H_{K-1}} \quad (5.6)$$

Substituindo-se as equações (5.4) e (5.5) em (5.6) resulta a relação:

$$\Delta D_H = \left[\hat{f}(\tilde{\epsilon}_K, D_{H_{K-1}}) + \frac{\partial \hat{f}(\tilde{\epsilon}_K, D_{H_K})}{\partial D_{H_K}} \Delta D_H \right]^{n+1} F(\tilde{\epsilon}_K) \Delta \tilde{\epsilon} \quad (5.7)$$

Como ΔD_H aparece em forma implícita na (5.7) seu valor deve ser calculado por um processo iterativo, cujos detalhes são mostrados no item 5.3.

Devido a alguns aspectos relativos à implementação computacional, optou-se por calcular $\Delta \tilde{\epsilon}$ pela seguinte relação:

$$\Delta \tilde{\epsilon} = \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \left(\sum_i \langle \epsilon_i \rangle_+ \langle \Delta \epsilon_i \rangle_+ \right) + \frac{1}{2\tilde{\epsilon}} \left\{ \sum_i \left(1 - \left(\langle \epsilon_i \rangle_+ / \tilde{\epsilon} \right)^2 \right) \langle \Delta \epsilon_i \rangle_+^2 \right\} \quad (5.8)$$

obtida por um desenvolvimento em série até segunda ordem de $\tilde{\epsilon}_K$, o qual exige o cálculo das seguintes derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\epsilon}}{d\epsilon} &= \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \epsilon_1} d\epsilon_1 + \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \epsilon_2} d\epsilon_2 + \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \epsilon_3} d\epsilon_3 \\ &= \frac{1}{2\tilde{\epsilon}} 2\epsilon_1 d\epsilon_1 + \frac{1}{2\tilde{\epsilon}} 2\epsilon_2 d\epsilon_2 + \frac{1}{2\tilde{\epsilon}} 2\epsilon_3 d\epsilon_3 \\ &= \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \sum_{i=1}^3 \epsilon_i d\epsilon_i \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para derivada de ordem dois:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}}{\partial \epsilon_i^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}}{\partial \epsilon_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}}{\partial \epsilon_2^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}}{\partial \epsilon_3^2} \\ &= \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \sum_{i=1}^3 \left[1 - \left(\frac{\epsilon_i}{\tilde{\epsilon}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Comentário sobre o vetor de tensões

O vetor de tensões totais na k-ésima iteração é calculado em função dos valores obtidos da variável de dano e do vetor de deformações totais:

$$\underline{\sigma}_K = (1 - D_K) \underline{D}_0 \underline{\epsilon}_K \quad (5.11)$$

onde \underline{D}_0 é a matriz de rigidez do material íntegro.

Deve-se observar que a formulação em taxas é usada apenas como referência à evolução da variável dano. A relação constitutiva $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\epsilon})$ deve ser expressa na forma secante, figura 5.1, que é mais conveniente para as aplicações.

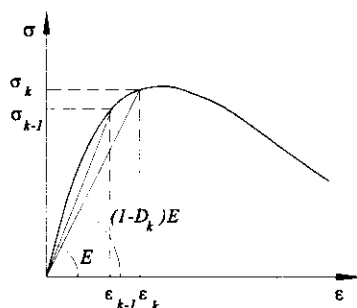


Figura 5.1 - Valor da rigidez secante da curva σ x ϵ

De qualquer modo, é interessante esclarecer que a atualização do vetor de tensões a partir da relação constitutiva expressa em taxas:

$$\dot{\underline{\sigma}} = (1-D)\underline{D}_0\dot{\underline{\epsilon}} - \underline{D}_0\underline{\epsilon}\dot{D} \quad (5.12)$$

poderia ser realizada, em passo finito, por:

$$\Delta\underline{\sigma}_K = (1-D_K)\underline{D}_0\Delta\underline{\epsilon}_K - \underline{D}_0\underline{\epsilon}_K\Delta D_K \quad (5.14)$$

5.2. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO COM MODELO CONSTITUTIVO DE DANO

Como resultado da combinação do modelo constitutivo de dano com as relações de

equilíbrio e compatibilidade, e a partir do emprego do método dos elementos finitos, gera-se um sistema não-linear cuja solução pode ser obtida mediante um procedimento incremental-iterativo ao longo da história do carregamento. Optou-se pelo método explícito para solução do problema, usado em ÁLVARES [2].

O sistema apresenta a seguinte forma geral:

$$\underline{\underline{K}}(D_{j+1}) \underline{q}_{j+1} = \underline{R} \quad (5.16)$$

onde $\underline{\underline{K}}$ é a matriz de rigidez secante da estrutura (assumida inicialmente igual à matriz de rigidez elástica inicial), \underline{q} é o vetor de deslocamentos nodais e \underline{R} é o vetor de cargas nodais equivalentes.

Dentro do procedimento de resolução, admitindo-se conhecidas ao final de um passo j de carregamento as variáveis $\underline{\sigma}_j$ (em equilíbrio com a carga total \underline{R}_j) e $\underline{\epsilon}_j$ (compatível com \underline{q}_j e com o modelo constitutivo), para o próximo passo de carga as seguintes relações devem ser verificadas:

$$\underline{\underline{K}}(D_{j+1}) \underline{q}_{j+1} = \underline{R}_j + \Delta \underline{R} = \underline{R}_{j+1} \quad (5.17)$$

$$\underline{\sigma}_{j+1} = (1 - D_{j+1}) \underline{D}_0 \underline{\epsilon}_{j+1} \quad (5.18)$$

$$\underline{\Psi}_{j+1} = \sum_n \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{\sigma}_{j+1} d\Omega - \underline{R}_{j+1} \quad e \quad \|\underline{\Psi}\| \leq \delta \quad (5.19)$$

onde n é o número de elementos finitos da malha, $\underline{\Psi}$ o vetor resíduo, \underline{B} um operador de derivadas em primeira ordem e δ uma tolerância pré-definida.

Ao se aplicar um incremento de carregamento calcula-se, com a matriz de rigidez anterior, o vetor de deslocamentos nodais. Segue-se a obtenção do vetor de deformações, do valor da deformação equivalente e do novo valor de dano. Com estes valores conhecidos calcula-se o vetor de tensões. A função do vetor resíduo é comparar as cargas nodais equivalentes obtidas com base no vetor de tensões com as cargas nodais equivalentes ao carregamento real aplicado. O resíduo é reaplicado em forma de carregamento de modo que, com a matriz de rigidez atualizada, um novo valor para o vetor de deslocamentos nodais é encontrado, fechando o ciclo.

A gradual redução do resíduo pelo processo iterativo ocorre até que a tolerância admissível seja alcançada. A figura 5.2 ilustra o procedimento iterativo descrito acima para o caso uniaxial.

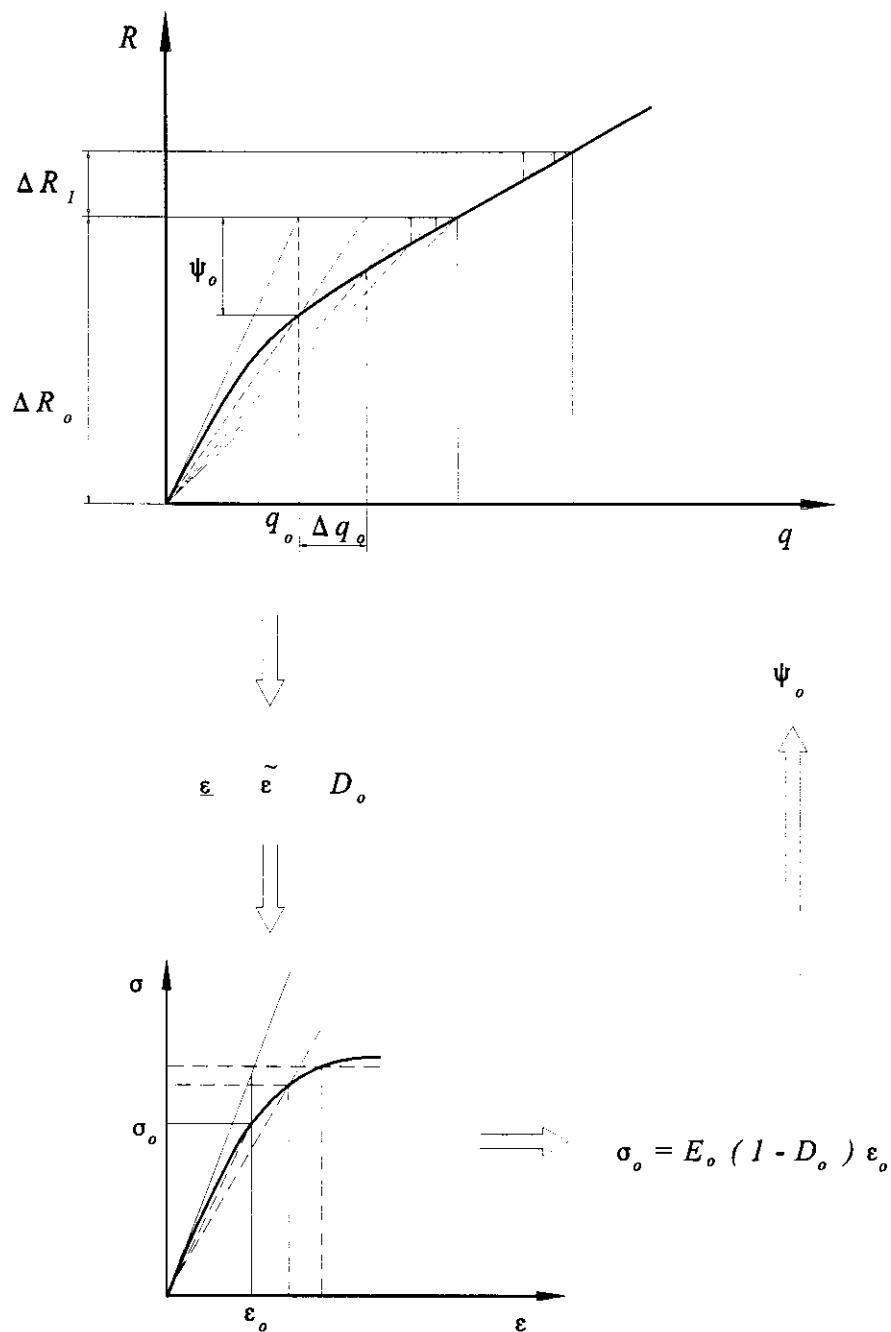


Figura 5.2 - Processo iterativo para o caso uniaxial.
 Figura adaptada de ALVARES [2].

5.3. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Cálculo da taxa da variável escalar dano

A figura 5.3 mostra o esquema de cálculo das variáveis escalares dano no incremento K.

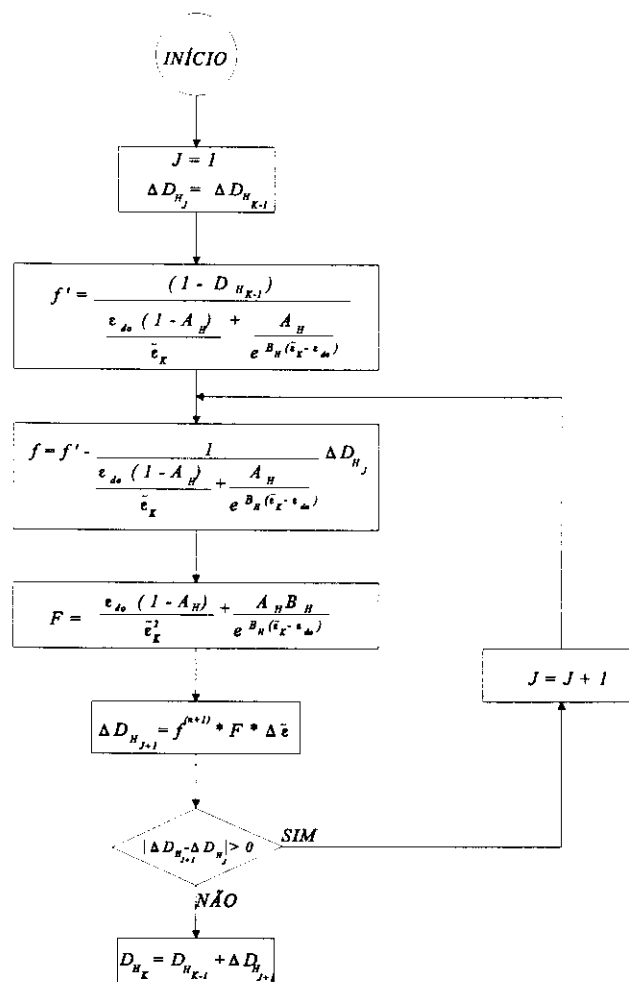


Figura 5.3 - Cálculo das variáveis dano de tração e de compressão..

Esquema geral da subrotina que calcula o valor do dano considerando carregamento cíclico

Na figura 5.4 é apresentado o fluxograma da subrotina que calcula o valor da variável escalar do dano e o vetor de tensões.

Alguns itens merecem comentário para melhor entendimento da subrotina:

1 ■ Deve-se ressaltar que as variáveis do modelo matemático são incrementadas com valores finitos e, para que essa aproximação seja razoável e conduza a resultados satisfatórios, os seus valores devem ser relativamente pequenos. Sendo assim, a subrotina redivide cada incremento de deformação em M sub-incrementos.

2 ■ Para o caso de descarregamento, o programa mantém, como já foi dito, o dano constante. Portanto, o vetor de tensões é calculado com o último valor do dano, o que resulta em um descarregamento elástico com perda de rigidez, sem deformação residual.

3 ■ Caso o valor do estado de alongamento não tenha atingido o valor inicial ϵ_{do} , mesmo quando se refere a um caso de recarregamento com anterior ultrapassagem desse limite (para fins de implementação), mantém-se o dano constante de modo a se ter um recarregamento elástico. Ao ultrapassar ϵ_{do} , o recarregamento não é mais elástico e haverá evolução do dano.

4 ■ O valor total do dano, combinando o dano de tração com o dano de compressão por meio dos alfas, só é calculado ao final dos M sub-incrementos. Sob este aspecto, a implementação numérica difere da teoria apresentada no capítulo 3.

Um aspecto importante é relativo aos valores dos alfas, os quais devem ser determinados em função das direções principais. E estas são constantes, pois a estrutura é solicitada radialmente. Deste modo, supõe-se que os valores de α_T e α_C permanecem constantes

ao longo da história do carregamento. Porém, dentro de cada iteração a aplicação do resíduo não é necessariamente radial, o que torna necessário o recálculo daqueles parâmetros. Optou-se por calcular o dano de modo que os alfas fossem relacionados somente ao carregamento total.

5■ O vetor de tensões $\underline{\sigma}$ é o vetor secante calculado com referência ao dano total, e não à taxa de dano (figura 5.1).

6■ Ao final dos M passos, retorna-se ao programa principal com o vetor de tensões, onde será calculado o resíduo e testada a convergência, como foi explicado no item 5.2.

O modelo foi implementado num código de cálculo por elementos finitos elaborado com base em OWEN et al [42] e sua resposta foi analisada através de exemplos.

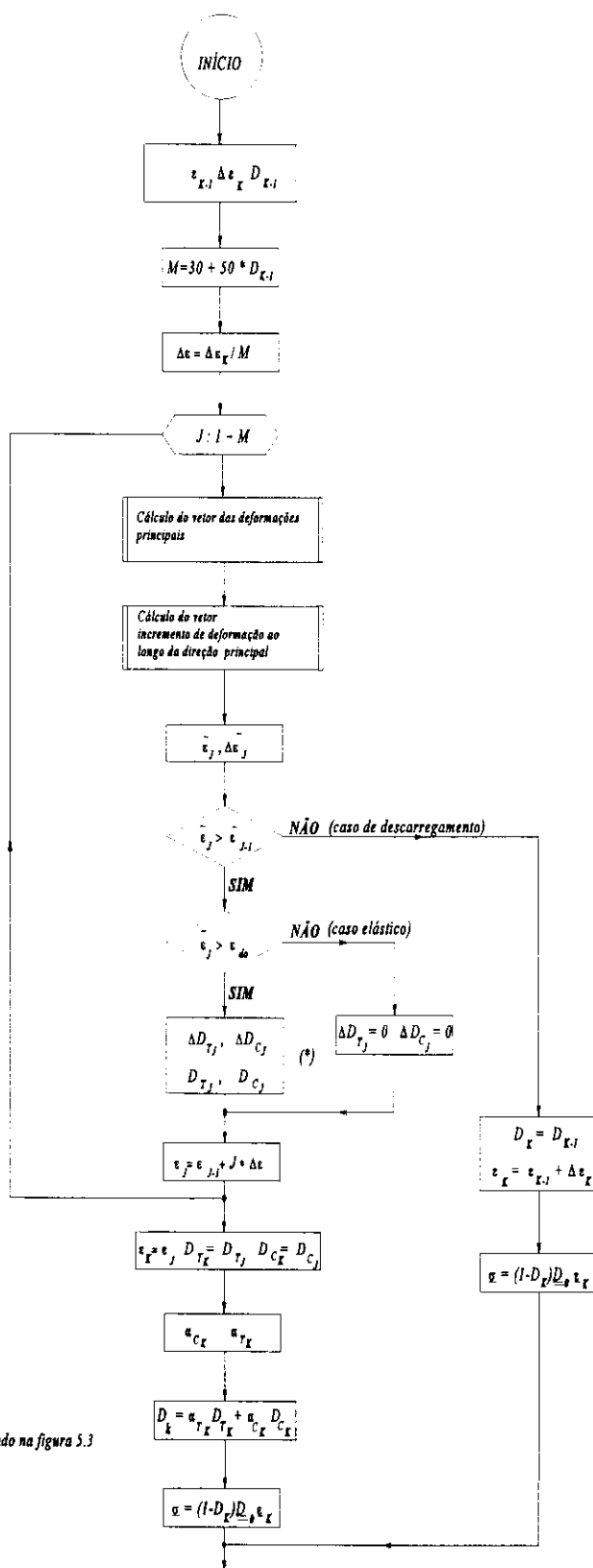


Figura 5.4 - Fluxograma para cálculo da variável escalar do dano e do vetor de tensões.

CAPÍTULO VI

EXEMPLOS

Para análise dos resultados obtidos da implementação computacional do modelo serão apresentados três exemplos. O primeiro exemplo tem como objetivo recuperar os resultados obtidos por MAIER et al. [34]. O segundo exemplo refere-se à uma viga ensaiada em laboratório por ÁLVARES [02], cujos materiais (aço e concreto) foram caracterizados de modo a calibrar os parâmetros do modelo. O terceiro exemplo refere-se à uma viga sob carregamento cíclico ensaiada em laboratório por BRAGUIM [09]. Neste caso, não foi possível a realização de ensaios para a caracterização completa do concreto utilizado, de modo que os parâmetros foram adotados de acordo com indicações encontradas em ÁLVARES [02].

No caso dos dois últimos exemplos, que se referem a vigas em concreto armado, considera-se que apenas o concreto possui comportamento não-linear, enquanto o aço trabalha dentro de seu limite elástico. Outra simplificação consiste em considerar a aderência entre aço e concreto como perfeita.

Deve-se ressaltar que, em função do número de operações realizadas a cada ciclo e do algoritmo empregado na implementação, os processos são demorados, mesmo em equipamentos de bom desempenho como os disponíveis na USP. Em um computador

do tipo pessoal PC, DX4 100 MHZ, o primeiro exemplo, que processou 31 ciclos, levou aproximadamente uma hora. Já para o segundo exemplo, foram necessárias mais de oito horas de processamento, não só pelo aumento no número de ciclos (100) como também pela discretização da malha, que deve ser mais refinada pela presença da camada de aço. Para o terceiro exemplo, porém, numa estação de trabalho do tipo SUN-SPARC20, o processamento de 10000 ciclos demorou aproximadamente 125 horas ininterruptas. Através de testes pode-se concluir que a estação trabalha praticamente duas vezes mais rápido que o computador usado para os exemplos anteriores.

6.1. EXEMPLO 01 - VIGA EM CONCRETO

A viga em concreto apresentada no trabalho de MAIER et al. [34] possui 2.7m de comprimento, seção transversal de 50x20cm e está sujeita a duas cargas concentradas simétricas localizadas à 0.225m do eixo vertical de simetria, como mostra a figura 6.1.

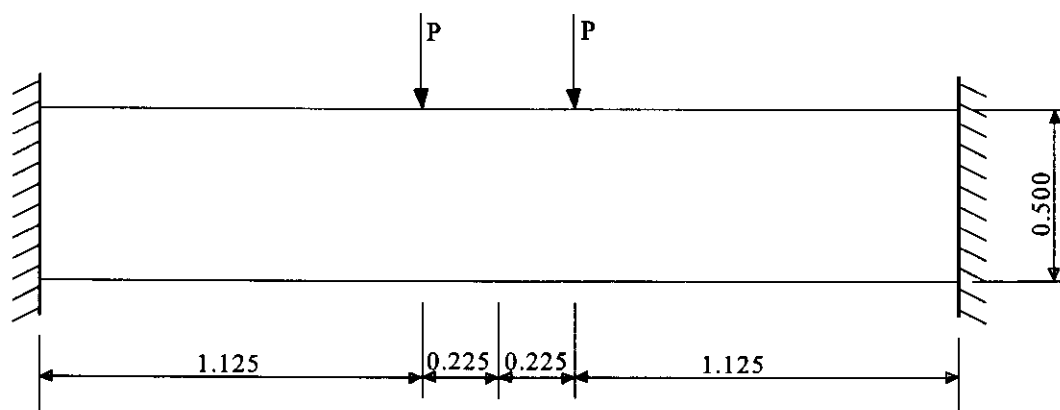


Figura 6.1 - Esquema da viga de concreto.

O objetivo deste exemplo, como já mencionado, foi recuperar os resultados obtidos na bibliografia citada anteriormente, de modo a aferir o programa.

Os valores das constantes, usadas por MAIER et al. [34], que definem o concreto

usado são:

$$E = 2470 \text{ kN/cm}^2$$

$$v = 0.2 \quad \epsilon_{do} = 0.000067$$

$$A_c = 1.13 \quad B_c = 1250$$

$$A_T = 0.7 \quad G_f = 0.007 \text{ kN/cm}$$

$$n = 21.5$$

A discretização usada é apresentada na figura 6.2, e consiste de uma rede de 78 nós, com 60 elementos finitos de 4 nós. A viga foi analisada considerando-se um carregamento cíclico entre 0 e 49 kN, o que equivale à 95% da carga de colapso.

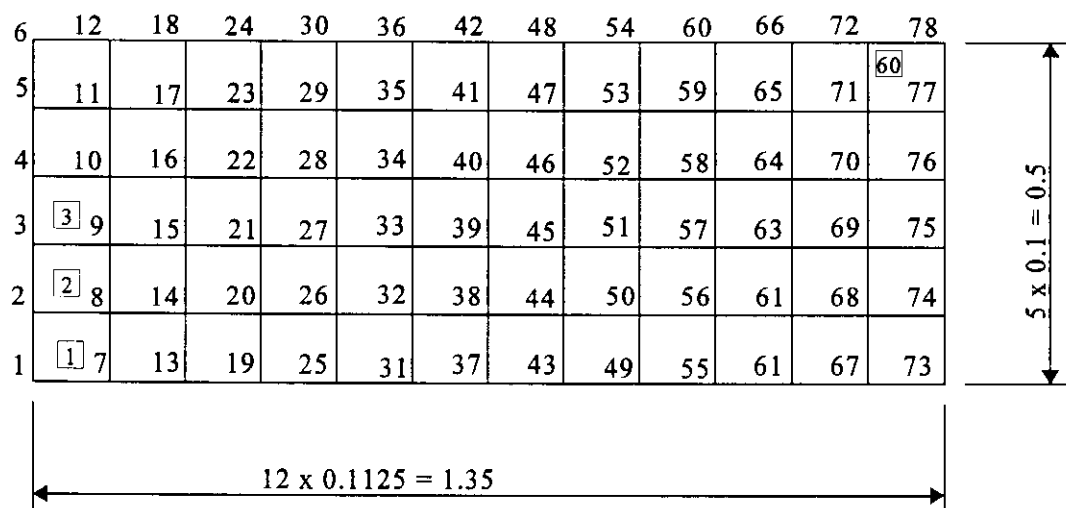


Figura 6.2 - Viga discretizada em rede de 60 elementos finitos de 4 nós.

A partir de uma análise da distribuição dos valores de dano listados ao longo da viga, observa-se que com 31 ciclos esses valores já se aproximam bastante daqueles da viga com carregamento proporcional máximo, sugerindo que tivesse sido alcançado o colapso. A figura 6.3 mostra a distribuição do dano quando o carregamento máximo é aplicado na estrutura monotonicamente. Pela figura 6.4 pode-se comparar a distribuição de dano do primeiro e do último ciclo.

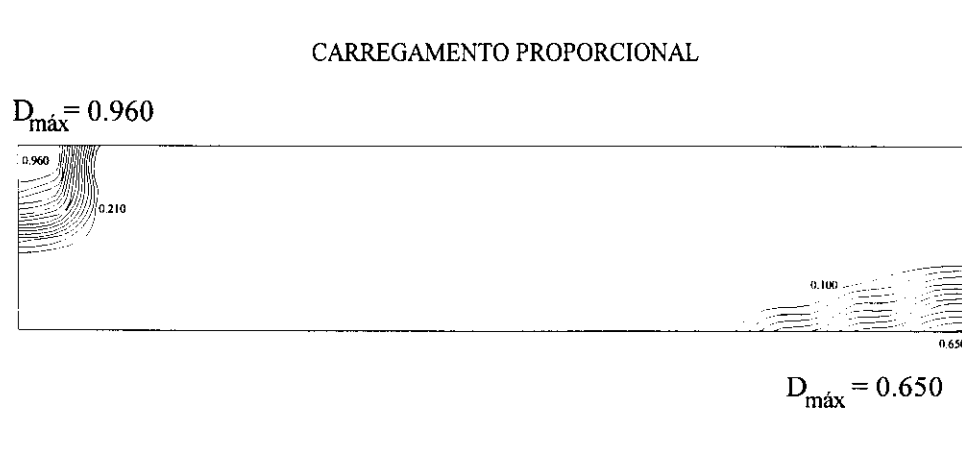


Figura 6.3 - Distribuição de dano na viga para carregamento de colapso.

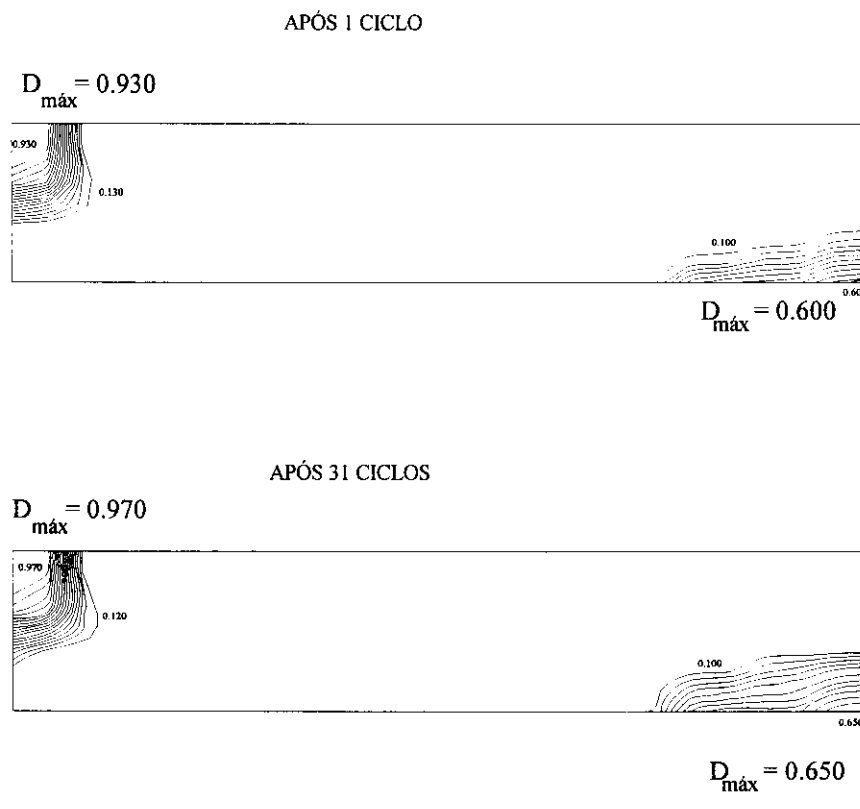


Figura 6.4 - Distribuição de dano para o primeiro e último ciclo de carregamento.

A figura 6.5 mostra o deslocamento do nó central (73) em função do número de ciclos. Os resultados obtidos reproduzem aqueles da bibliografia consultada.

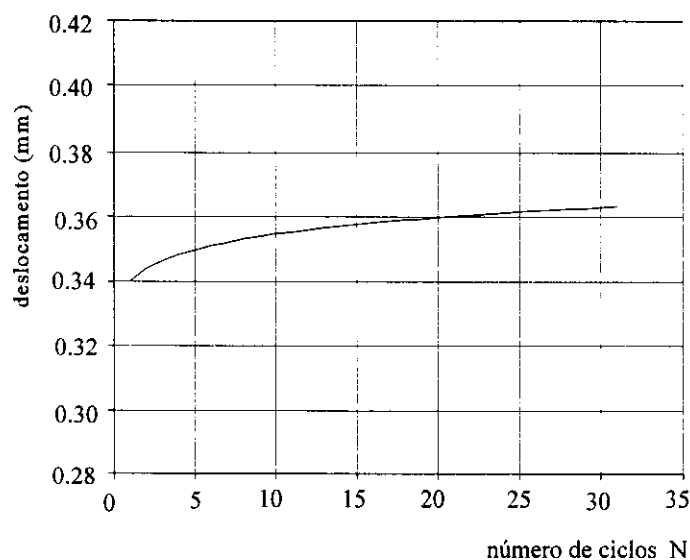


Figura 6.5 - Gráfico Flecha (mm) x Número de Ciclos N.

6.2. EXEMPLO 02 - VIGA EM CONCRETO ARMADO COM CARGAS CONCENTRADAS

Características da viga

O elemento estrutural ensaiado em ÁLVARES [02] foi uma viga em concreto armado de 2.40m de comprimento, seção transversal de 12x30cm, apoiada nas duas extremidades e com carregamento constituído por duas forças concentradas aplicadas nos terços do vão (figura 6.6). A armadura longitudinal superior é constituída por

2 ϕ 5mm e a inferior por 7 ϕ 10mm. Além disso foi utilizada uma armadura transversal, estribos de ϕ 5mm a cada 12cm, ao longo do comprimento para suportar a ação do cisalhamento na zona compreendida entre a carga e o apoio. A figura 6.7 mostra um corte transversal da viga, com o detalhamento da armadura.

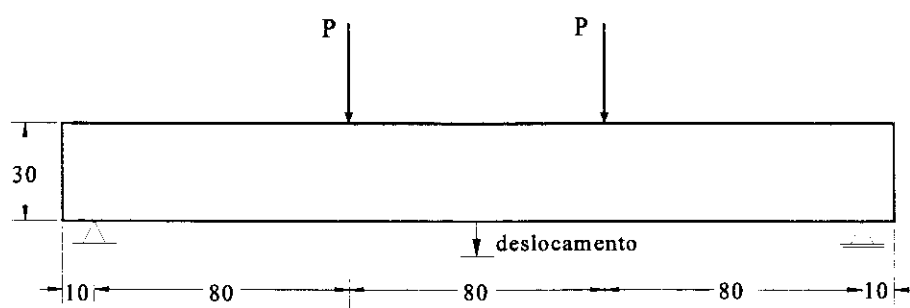


Figura 6.6 - Geometria da viga ensaiada em ÁLVARES [02].

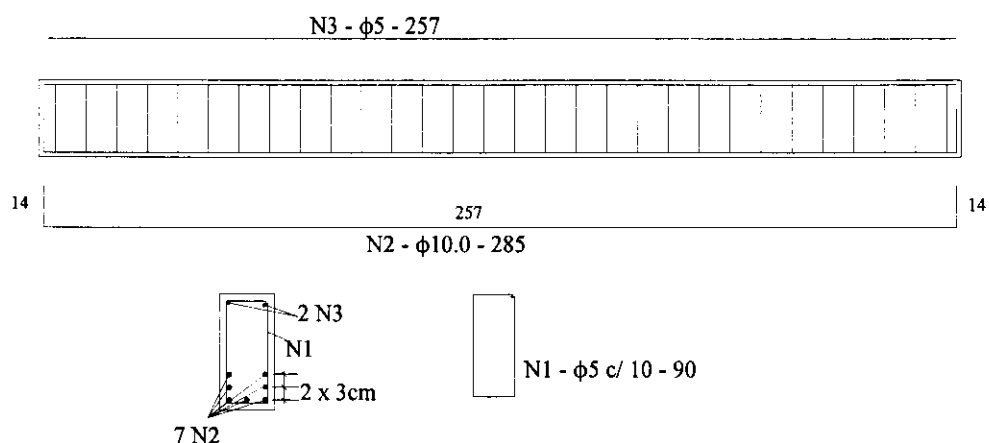


Figura 6.7 - Armadura da viga.
Viga super armada ensaiada em ÁLVARES [01].

Parâmetros do modelo

Para o exemplo os parâmetros usados valem:

$$E_c = 2920 \text{ kN/cm}^2 \quad E_a = 19600 \text{ kN/cm}^2$$

$$\varepsilon_{do} = 0.00010 \quad \nu = 0.22$$

$$A_T = 0.995 \quad G_f = 0.0016 \text{ kN/cm}$$

$$A_C = 0.85 \quad B_C = 1620$$

$$n = 21.5$$

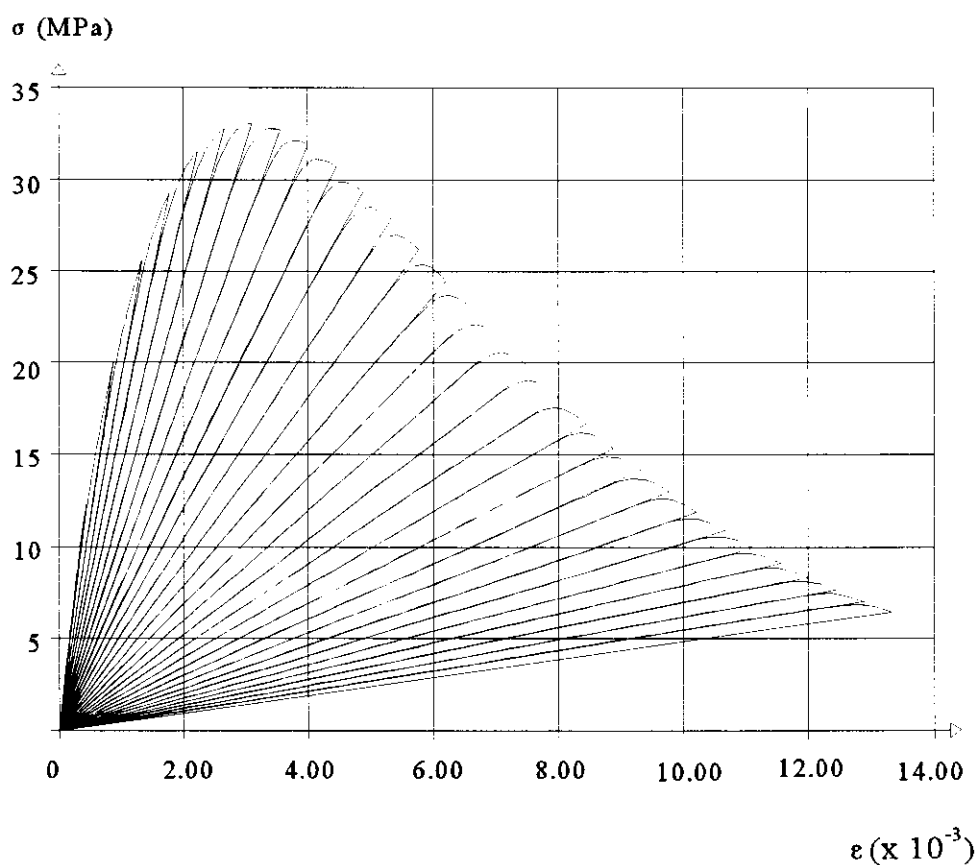


Figura 6.8 - Curva Tensão x Deformação para caso de compressão monoaxial.

Com os parâmetros do modelo já definidos por ensaio experimental no trabalho citado anteriormente, procurou-se recuperar a envoltória da curvas σ - ϵ do ensaio uniaxial de compressão, de modo a calibrar o valor de n , através de uma solitação cíclica de deformação controlada crescente. A resposta do programa para a compressão é mostrada na figura 6.8.

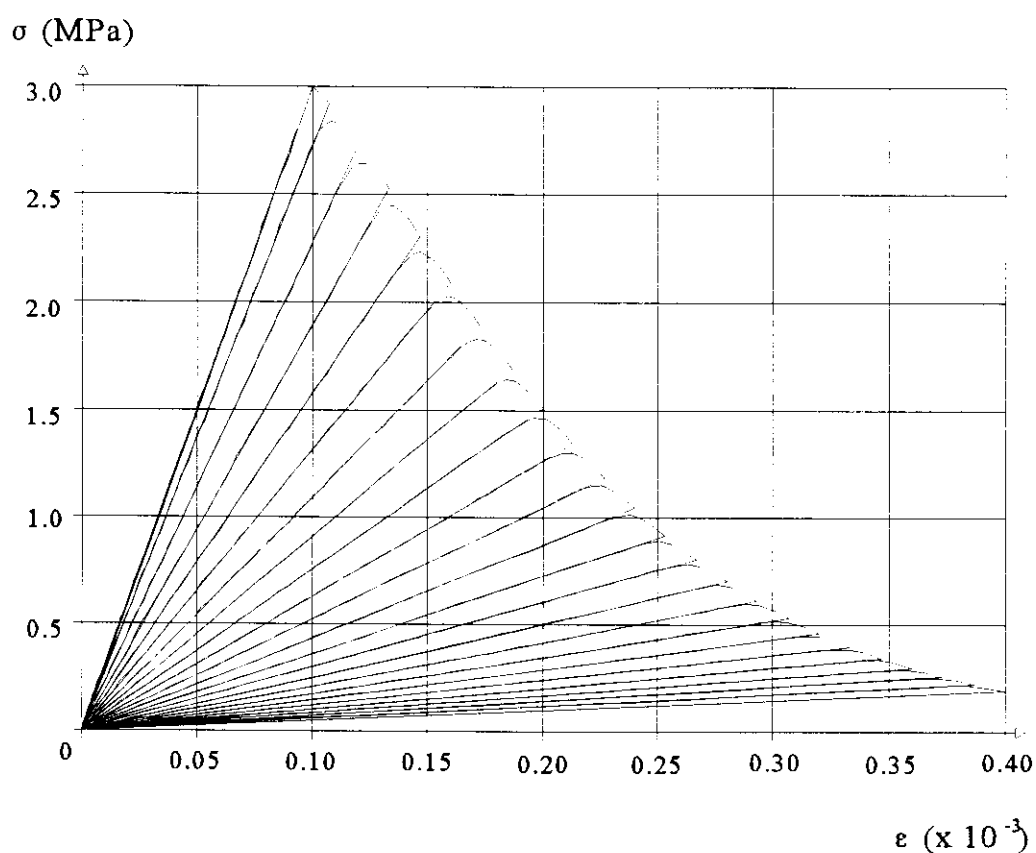


Figura 6.9 - Curva Tensão x Deformação para o caso de tração uniaxial.

A figura 6.9 apresenta a curva σ - ϵ em tração uniaxial obtida a partir dos parâmetros adotados A_T , G_p , ϵ_{do} e n , lembrando-se que B_T é calibrado de acordo com as dimensões da rede de elementos finitos.

Viga super-armada submetida à carregamento cíclico

A discretização usada na viga, ilustrada na figura 6.10, é composta de 130 nós e 108 elementos finitos de 4 nós. A discretização é a mesma usada na bibliografia, com refinamento da malha nas proximidades da interface aço-concreto, de modo a minimizar os erros causados nesta região, onde o dano alcança rapidamente valores próximos à unidade.

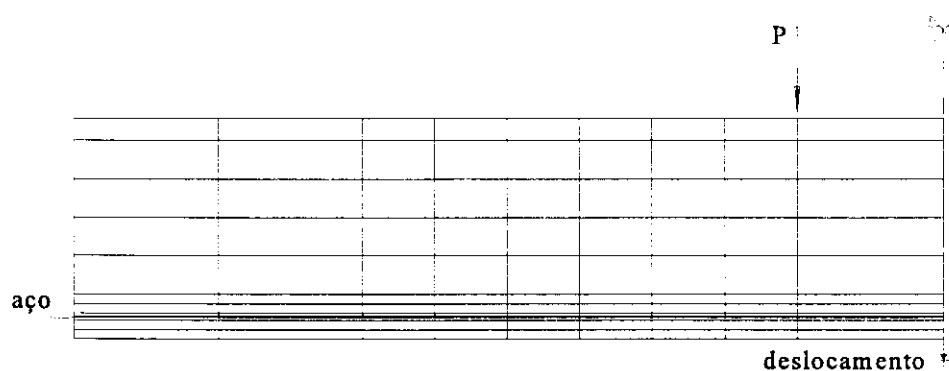


Figura 6.10 - Discretização da viga em 108 elementos finitos bidimensionais de 4 nós.

A figura 6.11 mostra a recuperação dos resultados obtidos em ÁLVARES [02] para carregamento proporcional crescente. A carga de ruptura alcançada nos ensaios experimentais foi de 65 kN.

A mesma viga foi analisada considerando uma variação da carga cíclica entre 0 e 50 kN, que equivale a 76% da carga de ruptura. Os resultados obtidos para 100 ciclos estão ilustrados na figura 6.12.

Observa-se que aos 100 ciclos o aumento de flecha foi da ordem de 12%, havendo a partir deste ponto, uma tendência à estabilização do processo.

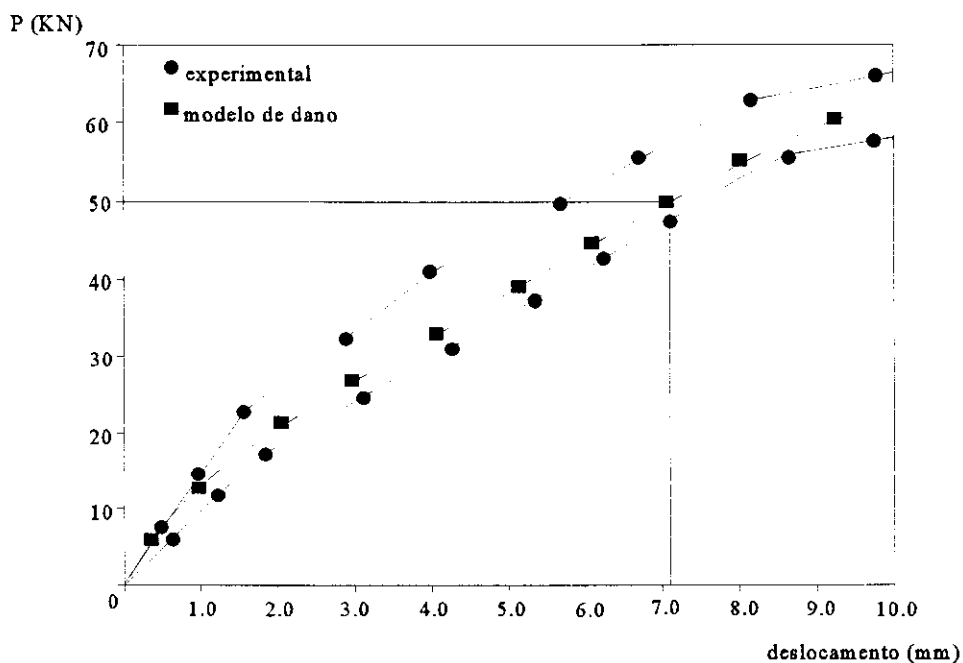


Figura 6.11 - Diagrama Flecha x Carga Aplicada para carregamento crescente.
 Figura adaptada de ÁLVARES [02].

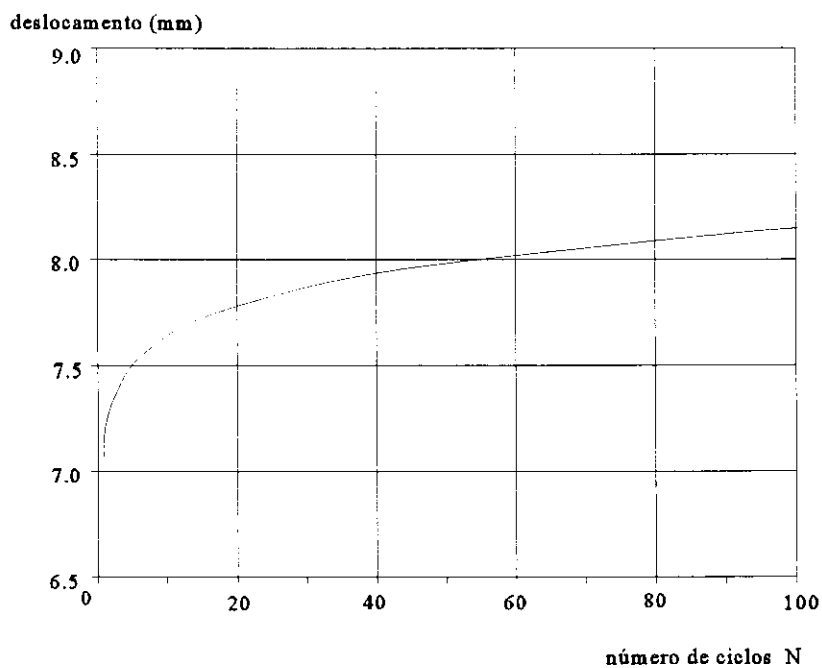


Figura 6.12 - Flecha x Número de Ciclos.

6.3. EXEMPLO 3 - VIGA SUPER ARMADA COM CARGA CONCENTRADA NO MEIO DO VÃO

O exemplo refere-se a uma viga de concreto armado submetida a carregamento cíclico ensaiada em laboratório por BRAGUIM [09].

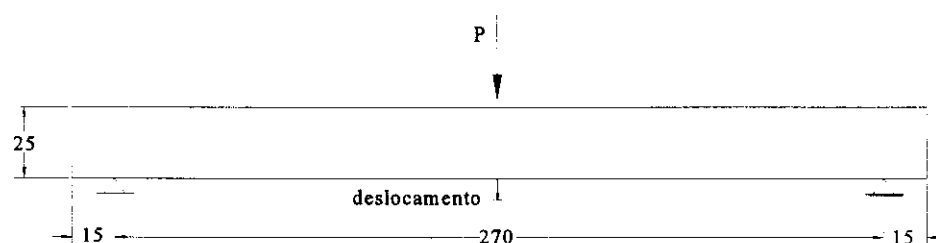


Figura 6.13 - Geometria da viga ensaiada em BRAGUIM [09].

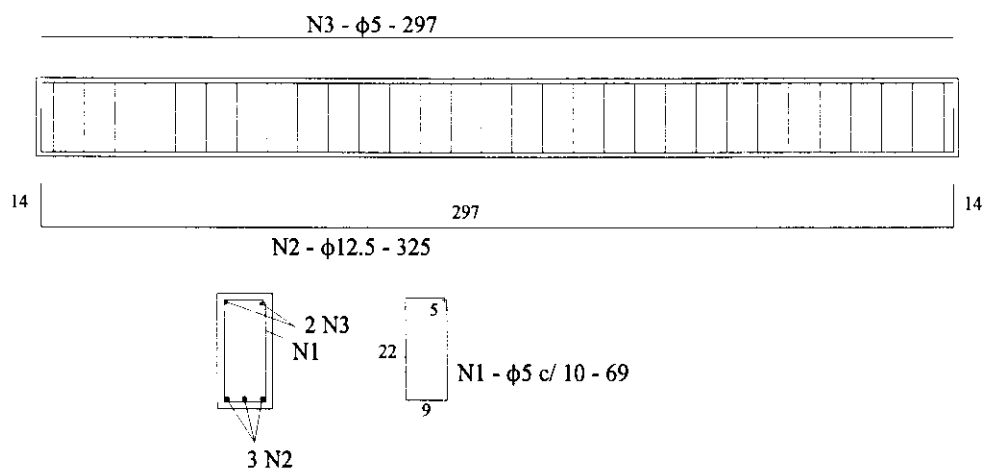


Figura 6.14 - Armadura da viga.
Viga super armada ensaiada em BRAGUIM [09].

A viga possui 2.70m de comprimento, seção transversal de 12x25cm, apoiada nas duas

extremidades e com carregamento constituído por uma força concentrada aplicada no meio do vão (figura 6.13). A armadura longitudinal superior é constituída por $2\phi 5\text{mm}$ e a inferior por $3\phi 12.5\text{mm}$. Além disso foi utilizada uma armadura transversal de $\phi 5\text{mm}$ cada 10cm ao longo do comprimento. A figura 6.14 mostra um corte transversal da viga, com o detalhamento da armadura. Maiores detalhes da experimentação são encontrados em BRAGUIM [09].

Parâmetros do modelo

Os parâmetros do modelo foram adotados de acordo com indicações encontradas em ÁLVARES [02] e MAIER et al. [34]. Posteriormente corrigidos por resultados de ensaios de compressão uniaxial fornecidos por BRAGUIM [09]. Os parâmetros adotados são:

$E_c = 2400 \text{ kN/cm}$	$E_a = 19000 \text{ kN/cm}^2$
$A_T = 1.0$	$G_f = 0.0011 \text{ kN/cm}$
$A_C = 1.2$	$B_C = 1700.00$
$\nu = 0.20$	$\varepsilon_{do} = 0.00007$
$n = 21.5$	

Viga super-armada submetida à carregamento cíclico

A discretização usada está ilustrada na figura 6.15, constituindo-se de 104 nós e 84 elementos finitos bidimensionais de 4 nós. A camada de concreto usada no cobrimento da armadura foi desprezada na geração da malha.

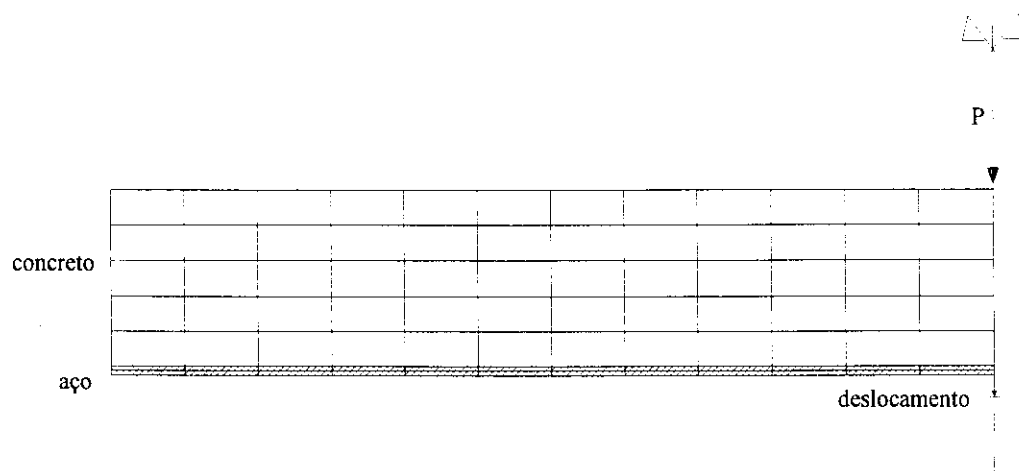


Figura 6.15 - Discretização da viga em 84 elementos finitos bidimensionais de 4 nós.

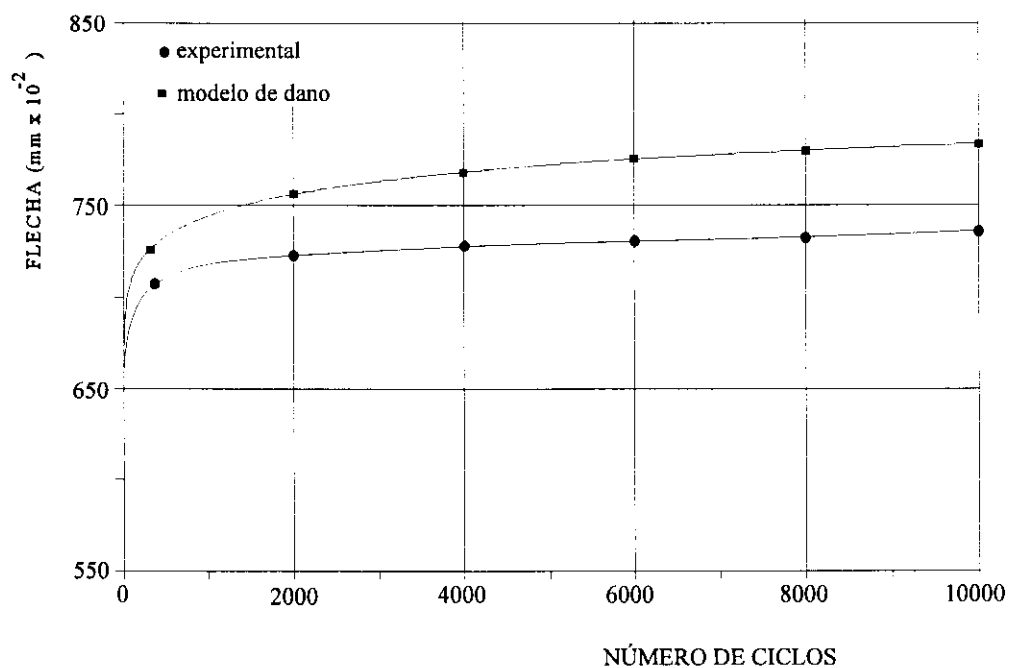


Figura 6.16 - Resultado experimental e fornecido pelo modelo: Flecha x Número de ciclos.

A viga foi analisada considerando-se uma variação cíclica da carga entre 20.5 e 33.5 kN,

o que corresponde a 66% da carga de ruptura. Os resultados obtidos para 10000 ciclos estão ilustrados na figura 6.16. A figura mostra também os resultados experimentais obtidos por BRAGUIM [09].

Observa-se um aumento de flecha da ordem de 18% para 10000 ciclos de acordo com o modelo teórico. A média de ganho de flecha das vigas ensaiadas por BRAGUIM [09] é da ordem de 12%.

CAPÍTULO VII

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho dedica um capítulo à microestrutura dos materiais: metais e concreto. Como o assunto é vasto e complexo, não se teve a pretensão de apresentar um estudo completo e sim, uma abordagem de alguns aspectos interessantes e essenciais ao desenvolvimento de modelos constitutivos, particularmente àqueles dedicados à resposta do material sob solicitação repetida.

Seguindo essa idéia, o assunto apresentado foi direcionado à fadiga de metais e comportamento do concreto sob solicitação cíclica.

Com relação aos metais, a bibliografia é farta e o assunto já foi amplamente desbravado. Procurou-se chamar a atenção para certas características do metal relacionadas com a fratura. Por exemplo, modelos para iniciação e propagação de trincas em espécimes sujeitos a carregamento cíclico e o reconhecimento da superfície de um metal rompido. Um estudo fenomenológico do assunto foi acrescentado com a finalidade de ligar a microestrutura às observações macroscópicas do comportamento do metal.

Para o concreto, porém, o tema fadiga é encontrado em apenas alguns trabalhos que o

tratam com profundidade. É difícil separar o que ocorre devido exclusivamente à solicitação cíclica dos outros fenômenos, uma vez que o rompimento de uma estrutura se dá por vários fatores que agem conjuntamente. A composição heterogênea do concreto é responsável por algumas de suas particularidades, como o fato de ser aproximadamente uma ordem de grandeza mais resistente à compressão do que à tração. Entretanto, o estudo da fissuração é que possui um papel fundamental para o entendimento do comportamento do material quando sob ação de carregamento. Em nível macroscópico, os modelos baseados na mecânica do dano contínuo são os mais usados para tratar este material.

No capítulo IV passou-se à apresentação dos elementos da mecânica do dano contínuo com a caracterização do dano, visando sua aplicação à formulação de modelos constitutivos para o concreto.

Neste mesmo capítulo foi, então, descrito o modelo de dano isotrópico de Mazars. Este modelo relaciona o processo de evolução da microfissuração (dano) com a presença de deformações por alongamento. Reúnem-se as hipóteses básicas assumidas pelo modelo, o critério de início e propagação de dano, a lei de evolução da variável escalar representativa do processo de deterioração e os parâmetros usados pelo modelo.

Como o modelo original é limitado ao caso de carregamento crescente, foi apresentada uma extensão da lei de dano proposta por PAPA em 1990, para carregamento cíclico. Caracterizado por proporcionar perdas de resistência e rigidez no recarregamento, o modelo tem o mérito de ser simples, com o acréscimo de apenas um parâmetro ao modelo original.

No capítulo V, comentou-se a implementação numérica do modelo destacando-se a reformulação das relações escritas em termos de taxas para incrementos finitos, além de alguns ajustes nos cálculos dos alfas e da superfície limite da região de dano não-nulo.

O modelo constitutivo combinado com as relações de equilíbrio e compatibilidade geraram, para estrutura discretizada pelo emprego do método dos elementos finitos, um sistema não-linear cuja solução foi obtida por um processo incremental-iterativo. Optou-se pelo método explícito para solução do problema.

Os resultados obtidos pelo programa foram resumidos em três exemplos apresentados no capítulo VI.

Para o primeiro exemplo procurou-se obter resultados semelhantes aos encontrados por MAIER et al. [34] para uma viga parede de concreto.

O segundo exemplo apresenta uma viga super armada cujos parâmetros necessários para calibração do modelo foram obtidos com base em ensaios experimentais. É apresentada a recuperação da curva experimental σ - ϵ no caso de compressão uniaxial do concreto e, também, a curva σ - ϵ do modelo para o caso de tração uniaxial. Para o carregamento proporcional crescente, obteve-se resultados semelhantes aos encontrados em ÁLVARES [02]. A partir daí, com 76% da carga de ruptura, a viga foi ensaiada ciclicamente e o aumento da flecha em função do número de ciclos é mostada em gráfico.

O terceiro exemplo apresenta uma viga super armada sujeita à sollicitação cíclica ensaiada em laboratório, BRAGUIM [09]. A falta de ensaios de caracterização do concreto impediu a calibração dos parâmetros, agindo em detrimento à precisão dos resultados. Para este exemplo, apresenta-se o aumento da flecha em função do número de ciclos para uma carga equivalente a 66% da carga de ruptura.

Conclusões gerais e perspectivas

Modelos constitutivos em geral incorporam fenômenos que são comuns ao vocabulário

do engenheiro, como por exemplo, 'encruamento' dos metais, deformação plástica, rupturas frágil e dúctil, além de outros mais específicos, como 'efeito Bauschinger'. É à nível microscópico que são encontradas explicações para a ocorrência destes fenômenos. O estudo da microestrutura é, portanto, de grande valia para a formulação de teorias macroscópicas que permitem descrever com boa precisão o comportamento de uma estrutura.

Particularmente para o concreto é importante que se considerem as perdas de resistência e rigidez devidas à solitação repetida, as quais podem se traduzir em ganhos de flecha significativos. Nesse sentido, os modelos de dano, que considerem a influência da evolução da microfissuração, distribuída em forma contínua, parecem ser os mais adequados para as simulações do comportamento estrutural em serviço.

A implementação do modelo proposta por PAPA é simples e apresenta bons resultados, porém alguns aspectos com respeito ao modelo e à sua implementação numérica devem ser reavaliados, de modo a aprimorar os resultados apresentados neste trabalho.

É preciso lembrar que a extensão do modelo para os estados mais complexos de tensão pressupõe que estes possam ser estudados a partir de uma combinação linear dos modelos uniaxiais de tração e compressão. Naturalmente é de se esperar que a precisão obtida na simulação numérica seja maior ou menor dependendo do caso em questão.

Por outro lado, o uso do método explícito para solução do sistema não-linear é limitado e leva a um grande número de iterações e conseqüente perda de precisão.

Além disso, para que o programa forneça resultados mais satisfatórios quando aplicado a estruturas de concreto armado, devem ser levados em consideração aspectos como a interação entre concreto e armadura e a plastificação das armaduras.

É possível que o modelo limitado para carregamento cíclico controlado (ou deformação cíclica controlada) sem inversão de sinal possa ser ampliado para um caso mais geral

de solicitação alternada. Neste caso deve ser considerado o comportamento unilateral do concreto caracterizado por um ganho de rigidez quando ocorre o fechamento de fissuras na inversão da solicitação.

Todos estes argumentos e outros de igual importância, como a consideração das deformações residuais, constituem um amplo campo de pesquisas.

CAPÍTULO VIII

BIBLIOGRAFIA

- [01]ACI COMMITTEE 408 Abstract of: state-of-the art-report: bond under cyclic loads. *ACI materials journal*, v.88, n. 6, p. 669-673, 1991.
- [02]ÁLVARES, M.S. *Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com emprego do método dos elementos finitos*. São Paulo, 1993. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos - USP.
- [03]ANDERSON, J.C.; LEAVER, K.D.; ALEXANDER, J.M.; RAWLINGS, R.D. *Materials science*. London, Thomas Nelson and Sons, 1974.
- [04]ASHBY, M.F.; JONES, D.R.H. *Engineering materials: an introduction to their properties and applications*, v.1. Oxford, Pergamon press, 1989.
- [05]BALÁZS, G.L. Fatigue of bond. *ACI materials journal*, v. 88, n. 6, p. 620-628, 1991.
- [06]BAŽANT, Z.P.; KAZEMI, M.T. Determination of fracture energy, process zone

length and brittleness number from size effect, with application to rock and concrete. *International journal of fracture*, v.44, p. 111-131, 1990.

[07]BAŽANT, Z.P.; SCHELL, W.F. Fatigue fracture of high-strength concrete and size-effect. *ACI materials journal*, v. 90, n. 5, p. 472-479, 1993.

[08]BRADY, G.S. *Materials handbook*. San Francisco, Mc Graw-Hill, 1979.

[09]BRAGUIM, J.R. *O comportamento em serviço de vigas de concreto armado sob carregamento cíclico*. São Paulo, 1994. Tese de Doutorado - Departamento de Estruturas, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

[10]BROEK, D. *Elementary engineering fracture mechanics*. Martinus Nijhoff, 1982.

[11]BUCH, A. *Fatigue strength calculation*. Trans Tech Publications, Inglaterra, 1988.

[12]CARPINTERI, A. *Meccanica dei materiali e della frattura*. Bologna, Pitagora, 1992.

[13]CHARLES, J.A.; CRANE, F.A.A. *Selection and use of engineering materials*. Courier International Ltda., 1991.

[14]CLEARY, D.B.; RAMIREZ, J.A. Epoxy-coated reinforcement under repeated loading. *ACI structural journal*, v. 90, n. 4, p. 451-458, 1993.

[15]COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON. CEB-FIP model code 1990: final draft, *Bulletin D'Information*, n. 203-205, 1991.

- [16]COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON. Fatigue of Concrete Structures, *Bulletin D'Information*, n.188, 1988.
- [17]CRAIG, H.L. Stress corrosion cracking of metals- a state of the art. *ASTM special technical publication 518*. Philadelphia, American Society for testing and materials, 1971.
- [18]CURBACH, M.; EIBL, J. Nonlinear behaviour of concrete under high compressive loading rates. In: SHAH, S.P.; SWARTZ, S.E.; BARR, B., eds. *Fracture of concrete and rock: recent developments*. Cambridge, Springer-Verlag, 1989, p.193-202.
- [19]FORESTER, T. *The material revolution*. United States, Graphic composition, 1988.
- [20]FORREST, P.G. *Fatigue of metals*. Oxford, Headington Hill Hall, 1970.
- [21]GENTIL, V. *Corrosão*. Rio de Janeiro, GB Almeida Neves, 1970.
- [22]GERMAIN, P. *Cours de mécanique des milieux continus*. Tome I, 1973, Universidade de Paris.
- [23]HERTZBERG, R.W. *Deformation and fracture mechanics of engineering materials*. New York, John Wiley & Sons, 1976.
- [24]HIGGINS,R.A. *Propriedades e estruturas dos materiais de engenharia*. Difel, 1982.
- [25]HORDIJK, D. A.; REINHARDT H. W. Growth of discrete cracks in concrete under fatigue loading. In: SHAH, S. P., ed. *Toughening mechanisms in quasi-brittle materials*. Kluwer Academic Pub., Dordrecht, Netherlands,

1991, p. 541-554.

- [26]HORII, H.; SHIN, H.C.; PALLEWATTA, M.T. Mechanism of fatigue crack growth in concrete. *Cement & Concrete Composites*, v.14, p.83-89, 1992.
- [27]HORII, H.; HASEGAWA, A.; NISHINO, F. Fracture process and bridging zone model and influencing factors in fracture of concrete. In: SHAH, S.P.; SWARTZ, S.E., eds. *Fracture of concrete and rock*. New York, Springer-Verlag, 1989, p.205-219.
- [28]HULT, J.A.H. *Creep in engineering structures*. Waltham, Blaisdell publishing company, 1966.
- [29]KOCH, R.; BALÁZS G.L. Slip increase under cyclic loading and long term loads. *Otto Graf journal*, v.4, p.160-191, 1993.
- [30]LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [31]LEMAITRE, J.; MARQUIS, D. Modelling elasto-plasticity, damage and ageing as coupled behaviours in engineering materials. p. 277-302.
- [32]LORRAIN, M.; LOLAND, K.E. Damage theory applied to concrete. *Fracture mechanics of concrete*. p. 341-369,1983.
- [33]LYNCH, C.T. *Practical handbook of materials science*. United States, CRC press, 1989.
- [34]MAIER, G.; PAPA, E.; PROENÇA, S.P.B. *Meccanica del danneggiamento di materiali e strutture: applicazioni al calcestruzzo*. Milano, Politecnico di Milano, 1991. v.1.

- [35]MADAYAG, A.F. *Metal fatigue: theory and design*. New York, John Wiley & Sons, 1969.
- [36]MALVERN, L.E. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall. New Jersey, 1969.
- [37]MANSON, S.S.; HALFORD, G.R. Re-examination of cumulative fatigue damage analysis: an engineering perspective. *Engineering Fracture Mechanics*, v.25, p.539-571, 1986.
- [38]MEHTA, P.K.; MONTEIRO, P.J.M. *Concreto: estrutura, propriedades e materiais*. Pini, São Paulo-SP, 1994.
- [39]MIHASHI, H.; NOMURA,N. Microcracking and tension-softening properties of concrete. *Cement & Concrete Composites*, v.14, p.91-103, 1992.
- [40]MILLER, K.J. The behaviour of short fatigue cracks and their initiation: Part I - A review of two recent books. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, v.10, n.1, p.75-91, 1987.
- [41]NEVILLE, A.M.; DILGER, W.H.; BROOKS, J.J. *Creep of plain and structural concrete*. London, Construction press, 1983.
- [42]NEVILLE, A.M. *Propriedades do concreto*. São Paulo, PINI, 1982.
- [43]OWEN, D.R.J.; HINTON, E. *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Swansea, Pineridge Press , 1980.
- [44]OWEN, D.R.J.; FIGUEIRAS, J.A.; DAMJANIC, F. Finite elements analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal Loading. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.41, p.323-366,

1983.

- [45] POPE, J.A. *Metal fatigue*. London, William Clowes and Sons, 1959.
- [46] PROENÇA, S.P.B. *Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuição*. São Paulo, 1988. Tese de Doutorado - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos - USP.
- [47] SCHIESSL, P. Corrosion of steel in concrete. *Report of the technical committee 60 - CSC, RILEM*. London, Chapman and Hall, 1988.
- [48] SCHALANGEN, E.; VAN MIER, G.J.M. Experimental and numerical analysis of micromechanisms of fracture of cement-based composites. *Cemente & Concrete Composites*, v.14, p. 105-118, 1992.
- [49] SCHIJVE, J. Fatigue predictions and scatter. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, v.17, No.4, p. 381-396, 1994.
- [50] SMITH, C.O. *The science of engineering materials*. Prentice-Hall, New Jersey, 1986.
- [51] SURESH, S. *Fatigue of materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [52] TASSIOS, T.P.; YANNOPOULOS, P.J. Analytical studies on reinforced concrete members under cyclic loading based on bond stress-slip relationships. *ACI journal*, p. 206-216, Maio-Junho, 1981.
- [53] TEPFERS, R.; KUTTI, T. Fatigue strength of plain, ordinary and lightweight concrete. *ACI journal*, p. 635-652, Maio, 1979.

- [54]VAN VLACK, L.H. *Princípios de ciência e tecnologia dos materiais*. Rio de Janeiro, Campus, 1984.
- [55]WITTMANN, F.H. *Fracture Mechanics of Concrete*. Amsterdam, Elsevier Applied Science, 1983.
- [56]YANNOPOULOS, P.J.; TASSIOS, T.P. Reinforced concrete axial elements analyzed under monotonic and cyclic actions. *ACI structural journal*, v. 88, n. 1, p. 3-11, 1991.

APÊNDICE:

ALGUNS FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO E DA TERMODINÂMICA

1. TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Seja uma região Ω do espaço puntual euclidiano limitada por um contorno $\partial\Omega$, particularizado pelo versor normal n . Sejam, ainda, os seguintes campos regulares:

$$\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{campo escalar})$$

$$v : \Omega \rightarrow V \quad (\text{campo vetorial})$$

$$S : \Omega \rightarrow \text{Lin} \quad (\text{campo tensorial})$$

O teorema da divergência ou teorema de Gauss estabelece que a integral da componente normal de um vetor sob uma superfície fechada é igual a integral do divergente do vetor sob o volume limitado pela superfície.

Portanto:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} \phi n \, d\partial\Omega &= \int_{\Omega} \nabla\phi \, d\Omega \\
 \int_{\partial\Omega} v \cdot n \, d\partial\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div} v \, d\Omega \\
 \int_{\partial\Omega} S n \, d\partial\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div} S \, d\Omega
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

2. FUNDAMENTOS DO PRINCÍPIO DAS POTÊNCIAS VIRTUAIS

Referencial e Derivada material

Movimento pode ser descrito em termos de variáveis Eulerianas ou Lagrangianas:

As variáveis Eulerianas são o corrente instante t e as coordenadas x_i da corrente posição do ponto material X . A velocidade do ponto é expressa por:

$$\underline{v}(X) = \underline{v}(x_1(X,t), x_2(X,t), x_3(X,t), t)
 \tag{2}$$

Neste caso, o campo \underline{v} é dito um campo espacial.

As variáveis Lagrangianas são o corrente instante de tempo t e as coordenadas da posição inicial X_0 do ponto material X . A velocidade do ponto é expressa por:

$$\underline{\hat{v}}(X) = \underline{\hat{v}}(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)
 \tag{3}$$

e $\underline{\hat{v}}$ é dito um campo material.

A derivada material de um campo é calculada mantendo-se fixa a posição da partícula X. Em termos de variáveis Lagrangianas, a derivada material é idêntica à derivada parcial com respeito ao tempo. Por exemplo, a aceleração de um ponto X, cuja velocidade é expressa por um campo material, é dada por:

$$\underline{\gamma} = \frac{d\underline{\hat{v}}}{dt} = \frac{\partial \underline{\hat{v}}}{\partial t} \Bigg|_{X=cte.} \quad (4)$$

Já a derivada material de um campo vetorial deve ser calculada tendo-se em vista que as coordenadas atuais de X dependem do tempo, de modo que:

$$\underline{\gamma} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \text{grad } \underline{v} \quad (5)$$

Movimento virtual e potência virtual

Para obter uma caracterização das forças envolvidas num certo fenômeno em estudo, um procedimento conveniente consiste em imaginar movimentos fictícios ou virtuais, ou suas taxas, e analisar o trabalho ou potência resultante.

A velocidade virtual de um meio material com respeito a um referencial é definida em qualquer instante por um vetor velocidade dependente do ponto material (X):

$\underline{\hat{v}}(X)$.

A potência virtual de um sistema de forças em uma dada velocidade virtual $\hat{P}(\hat{v}(X))$ é, por definição, uma função de \hat{v} linear, contínua e de valor escalar.

Princípio das potências virtuais

Em um meio material isolado é possível distinguir entre as forças externas atuantes e as forças internas que representam as ligações existentes entre todas as partes do meio.

Axioma da objetividade: A potência virtual das forças internas em qualquer movimento rígido do corpo é zero.

Axioma do equilíbrio (estático ou dinâmico): Para um corpo qualquer posicionado com relação a um referencial, em todo instante e para qualquer movimento (velocidade) virtual, o trabalho (potência) virtual das forças de inércia ('quantidade de aceleração') é igual a soma do trabalho (potência) virtual das forças internas e das forças externas.

$$\hat{P}_{(i)} + \hat{P}_{(e)} = \hat{P}_{(a)} \quad (6)$$

Método da potência virtual

Considere-se uma sub-região Ω de contorno $\partial\Omega$ no interior do volume ζ de contorno $\partial\zeta$ e n o versor normal a um ponto X de $\partial\Omega$ posicionado em um referencial ortogonal $(0, X_1, X_2, X_3)$, como ilustra a figura A.1.

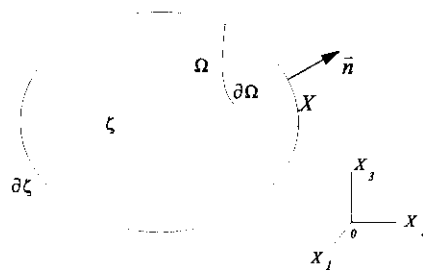


Figura A.1 - Volume no espaço limitado pela superfície $\partial\Omega$.

Escolha de um movimento virtual - teoria do primeiro gradiente. Para descrever o comportamento de corpos deformáveis um único termo em \hat{v} é insuficiente na caracterização da potência virtual. A idéia mais simples consiste em adicionar o gradiente de velocidade. Deste modo, pela teoria do primeiro gradiente, o movimento virtual é dado por:

$$\hat{v}(X) \text{ e } \text{grad } \hat{v}.$$

Sabendo-se que o gradiente de um vetor é sempre um tensor e que todo tensor admite uma decomposição única em uma parte simétrica (associada à taxa de deformação) e outra anti-simétrica (associada à taxa de rotação de corpo rígido), valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \frac{1}{2}[\text{grad } \hat{v} + \text{grad }^T \hat{v}] \\ \hat{W} &= \frac{1}{2}[\text{grad } \hat{v} - \text{grad }^T \hat{v}] \end{aligned} \quad (7)$$

Potência virtual das forças internas. A potência virtual das forças internas é definida pela integral sobre todo domínio Ω de uma densidade de volume que *a priori* supõe-se que contém três termos em \hat{v} , \hat{D} e \hat{W} associados respectivamente a um vetor f^* , e

dois tensores de segunda ordem, σ que é simétrico, e Γ que é anti-simétrico:

$$\hat{P}_{(i)} = - \int_{\Omega} (\mathcal{F}^* \cdot \hat{\underline{v}} + \sigma \cdot \hat{D} + \Gamma \cdot \hat{W}) d\Omega \quad (8)$$

onde o sinal negativo está em concordância com a convenção usada na termodinâmica.

Segundo o primeiro axioma do princípio da potência virtual, para um movimento rígido do sólido a potência das forças internas é igual a zero. Nos casos particulares de movimentos rígidos de translação e rotação valem as seguintes condições:

em translação: $\hat{\underline{v}} \neq 0$, $\hat{D} = 0$, $\hat{W} = 0$

em rotação : $\hat{\underline{v}} \neq 0$, $\hat{D} = 0$, $\hat{W} \neq 0$

Para valores arbitrários de $\hat{\underline{v}}$ e \hat{W} têm-se que: $\mathcal{F}^* = 0$ e $\Gamma = 0$.

Portanto:

$$\hat{P}_{(i)} = - \int_{\Omega} \sigma \cdot \hat{D} d\Omega \quad (9)$$

Potência virtual das forças externas. As forças externas consistem em: forças f exercidas por sistemas externos, supostamente definidas por unidade de volume, e por forças de contato T definidas por unidade de superfície. Nessas condições a potência das forças externas pode ser expressa por:

$$\hat{P}_{(e)} = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \hat{\underline{v}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \hat{\underline{v}} d\partial\Omega \quad (10)$$

Potência virtual das forças de inércia. A potência virtual das forças de inércia, por sua vez, pode ser representada como:

$$\hat{P}_{(a)} = \int_{\Omega} \underline{\gamma} \cdot \hat{\underline{v}} \rho \, d\Omega \quad (11)$$

Equações de equilíbrio

Pela aplicação do axioma de equilíbrio, tem-se que:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{(a)} &= \hat{P}_{(e)} + \hat{P}_{(i)} \\ - \int_{\Omega} \sigma \cdot \hat{\underline{D}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \hat{\underline{v}} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \hat{\underline{v}} \, d\partial\Omega &= \int_{\Omega} \underline{\gamma} \cdot \hat{\underline{v}} \rho \, d\Omega \end{aligned} \quad (12)$$

Considerando-se que:

$$\sigma \cdot \text{grad} \hat{\underline{v}} = \text{div}(\sigma \hat{\underline{v}}) - \text{div} \sigma \cdot \hat{\underline{v}} \quad (13)$$

e aplicando-se o teorema da divergência sobre a primeira parcela da (12), segue que:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sigma \cdot \hat{\underline{D}} \, d\Omega &= - \int_{\Omega} \sigma \cdot \text{grad} \hat{\underline{v}} \, d\Omega \\ &= - \int_{\partial\Omega} \hat{\underline{v}} \cdot \sigma \underline{n} \, d\partial\Omega + \int_{\Omega} \text{div} \sigma \cdot \hat{\underline{v}} \, d\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

Assim sendo, a equação (12) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (\text{div } \sigma + f - \rho \gamma) \cdot \hat{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\underline{T} - \sigma \underline{n}) \cdot \hat{v} d\partial\Omega = 0 \quad \forall \hat{v} \quad (15)$$

Para que esta identidade seja satisfeita para qualquer campo de velocidades:

$$\text{div } \sigma + f - \rho \gamma = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (16)$$

e

$$\underline{T} = \sigma \underline{n} \quad \text{em } \partial\Omega \quad (17)$$

A primeira equação expressa o equilíbrio estático ou dinâmico. No caso de equilíbrio estático, a aceleração é zero, isto é, o vetor das forças aplicadas não provoca variação na quantidade de movimento.

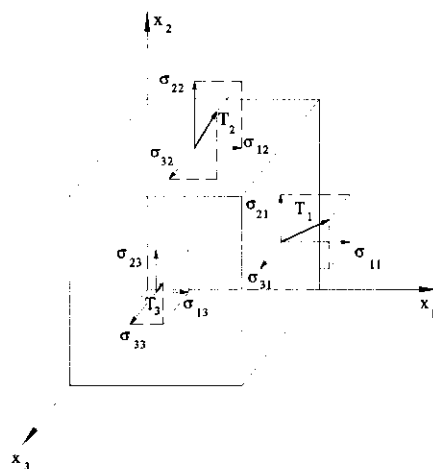


Figura A.2 - Componentes do tensor de tensões.

A segunda equação define o vetor de tensão como força de superfície introduzida,

mostrando que σ é o tensor de tensões de Cauchy: um tensor simétrico de segunda ordem. A representação esquemática das componentes deste tensor é apresentada na figura A.2.

Deformações e deslocamentos

O estudo completo de um sólido contínuo requer a caracterização de seu estado atual de deformação com respeito a uma configuração de referência.

No caso de pequenas deformações, a distinção entre as variáveis Eulerianas e Lagrangianas pode ser ignorada.

Seja \underline{u} o vetor deslocamento definido por:

$$\underline{u} = \int_0^t \underline{v} dt \quad \text{ou} \quad \underline{v} = \dot{\underline{u}} \quad (18)$$

onde $t=0$ corresponde à configuração de referência. Seja ε o tensor de deformações definido por:

$$\varepsilon = \int_0^t D dt \quad \text{ou} \quad D = \dot{\varepsilon} \quad (19)$$

Substituindo D :

$$\varepsilon = \int_0^t \frac{1}{2} [\text{grad } \underline{v} + (\text{grad } \underline{v})^T] dt \quad (20)$$

Como já foi dito, pequenas deformações resultam em equivalência entre variáveis Lagrangianas e Eulerianas, e portanto, a derivada material é uma derivada parcial e as operações de gradiente e integração se tornam comutativas:

$$\int_0^t \text{grad } \underline{v} \, dt = \text{grad} \left(\int_0^t \underline{v} \, dt \right) = \text{grad } \underline{u} \quad (21)$$

Donde se tem que:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [\text{grad } \underline{u} + (\text{grad } \underline{u})^T] \quad (22)$$

3. FUNDAMENTOS DA TERMODINÂMICA

Fluxo através de uma superfície

Considere-se uma superfície imaginária identificada no espaço pelo versor normal \underline{n} com um certo fluxo através dessa superfície com velocidade \underline{v} . O volume de material fluindo através de uma área infinitesimal da superfície $d\partial\Omega$ no intervalo de tempo dt é igual ao volume do cilindro com base $d\partial\Omega$ e altura $\underline{v}dt$ paralela ao vetor velocidade \underline{v} . Ver figura A.3.

A altura do cilindro é $v_n dt = \underline{v} \cdot \underline{n} \, dt$. Portanto, o volume em dt é $v_n dt \, d\partial\Omega = \underline{v} \cdot \underline{n} \, dt \, d\partial\Omega$ e o fluxo de volume ou volume por unidade de tempo vale $v_n \, d\partial\Omega = \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\partial\Omega$. O fluxo total através de uma superfície finita $\partial\Omega$ é dado pela integral sobre a superfície $\int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\partial\Omega$.

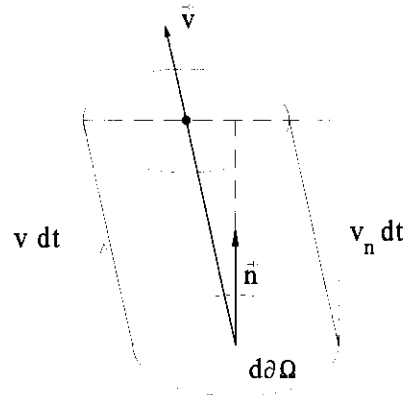


Figura A.3 - Fluxo através de $d\partial\Omega$.

O fluxo de massa por unidade de área através de $d\partial\Omega$ é obtido pela multiplicação do fluxo de volume pela densidade local e o fluxo total de massa sobre $\partial\Omega$ resulta:

$$M = \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega \quad (23)$$

Analogamente, a quantidade ou taxa de calor que passa pela superfície $\partial\Omega$ por unidade de tempo é dada por:

$$Q = \int_{\partial\Omega} \underline{h} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega \quad (24)$$

onde \underline{h} é o vetor fluxo de calor através da unidade de superfície.

Conservação de massa e equação da continuidade

Se um meio contínuo de densidade ρ ocupa o volume $d\Omega$ no instante t , a massa total em Ω é:

$$m = \int_{\Omega} \rho \, d\Omega. \quad (25)$$

A densidade ρ varia, em geral, com a posição e o tempo:

$$\rho = \rho(x,y,z,t) \quad (26)$$

A existência de uma função densidade contínua associada a um volume representativo dando a massa total como mostra a equação (25) é postulada como parte da definição de um meio contínuo. A variação no tempo da massa total no volume Ω é:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\Omega \quad (27)$$

Se não há massa sendo criada ou destruída no volume Ω , o princípio da conservação de massa afirma que a taxa de massa total do volume Ω deve ser igual à taxa de massa fluindo através da superfície $\partial\Omega$.

Levando-se em conta primeiramente a aplicação do teorema da divergência na equação (23) com sinal trocado para indicar fluxo de massa entrante sobre $\partial\Omega$:

$$- \int_{\partial\Omega} \rho \underline{v} \cdot \underline{n} \, d\partial\Omega = - \int_{\Omega} \text{div}(\rho \underline{v}) \, d\Omega \quad (28)$$

o princípio passa a ser expresso reunindo-se as equações (27) e (28) na forma:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) \right] \, d\Omega = 0 \quad (29)$$

Uma vez que a equação (29) se anula para uma escolha arbitrária do volume Ω , o integrando deve se anular. A equação resultante, uma consequência da conservação de massa, é conhecida como equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad (30)$$

Como:

$$\text{div}(\rho \underline{v}) = \rho \text{div} \underline{v} + \text{grad} \rho \cdot \underline{v} \quad (31)$$

a equação da continuidade pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div} \underline{v} + \text{grad} \rho \cdot \underline{v} = 0 \quad (32)$$

A equação (32) pode ser reescrita como:

$$\rho' + \rho \text{div} \underline{v} = 0 \quad (33)$$

onde:

$$\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad} \rho \cdot \underline{v} \quad (34)$$

é a derivada material de ρ .

Balanco de energia

Para os propósitos da mecânica do dano contínuo um sistema termodinâmico é assumido como uma dada quantidade de matéria contínua, isto é, o sistema é fechado não trocando

matéria com a vizinhança.

A equação já deduzida anteriormente da taxa de trabalho mecânico, ou a potência externa introduzida ao sistema $P_{(e)}$, realizada sobre uma certa quantidade de massa que ocupa o volume Ω limitado pela superfície $\partial\Omega$ é expressa como:

$$\hat{P}_{(e)} = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{v} d\partial\Omega \quad (35)$$

onde:

\underline{v} é o vetor velocidade do ponto material que ocupa a posição x na configuração atual
 \underline{f} : vetor de força por unidade de volume

Como $\underline{T} = \underline{\sigma} \underline{n}$ (Teorema de Cauchy) em $\partial\Omega$ e transformando a integral de superfície em integral de volume pelo teorema da divergência, resulta:

$$P_{(e)} = \int_{\partial\Omega} \underline{n} \cdot \underline{\sigma}^T \underline{v} d\partial\Omega + \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega = \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\sigma}^T \underline{v}) d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega \quad (36)$$

Considerando-se novamente a relação:

$$\text{div}(\underline{\sigma}^T \underline{v}) = \text{div} \underline{\sigma} \cdot \underline{v} + \underline{\sigma} \cdot \text{grad} \underline{v} \quad (37)$$

Tem-se que:

$$P_{(e)} = \int_{\Omega} [(\text{div} \underline{\sigma} + \underline{f}) \cdot \underline{v} + \underline{\sigma} \cdot \text{grad} \underline{v}] d\Omega \quad (38)$$

Substituindo-se o primeiro termo entre parênteses da equação anterior pela equação (16)

da conservação da quantidade de movimento:

$$\int_{\Omega} \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \sigma \cdot \text{grad}\mathbf{v} \right) d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \cdot D d\Omega \quad (39)$$

ou ainda:

$$P_{(e)} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \cdot D d\Omega \quad (40)$$

Considerando o segundo termo da equação, a última parcela é denominada potência das tensões (por unidade de volume), que é a parte que não contribui para a energia cinética do sistema. A energia cinética é representada pela primeira parcela.

A taxa de calor $Q_{(e)}$ é introduzida no sistema através da superfície $\partial\Omega$ ou através de uma fonte de calor r internamente distribuída por unidade de massa:

$$Q_{(e)} = - \int_{\partial\Omega} \underline{h} \cdot \underline{n} d\partial\Omega + \int_{\Omega} \rho r d\Omega \quad (41)$$

onde \underline{h} é o fluxo de calor e o sinal negativo representa o fluxo entrando.

Primeira lei da termodinâmica

Por observação experimental, sabe-se que quando se realizam sobre um sistema ciclos isolados de carregamento ou de calor de modo a retornar ao seu estado inicial, obtém-se:

$$\oint P_{(e)} dt \neq 0 \quad \oint Q_{(e)} dt \neq 0 \quad (42)$$

onde $\oint dt$ é a integral no ciclo. Porém, sabe-se também que:

$$\oint [P_{(e)} + Q_{(e)}] dt = 0 \quad (43)$$

o que mostra que existe uma função, chamada *energia total do sistema*, E_T , de modo que:

$$\dot{E}_T = P_{(e)} + Q_{(e)} \quad (44)$$

e

$$dE_T = (P_{(e)} + Q_{(e)}) dt \quad (45)$$

é uma diferencial exata. Esta, aliás, é a expressão da primeira lei de balanço de energia: a potência introduzida é igual à taxa de variação da energia total do sistema. Por outro lado, postula-se que \dot{E}_T seja composta da soma das taxas de energia interna e de energia cinética.

Desse modo, a primeira lei da termodinâmica iguala a taxa de energia cinética mais a taxa de energia interna do sistema à taxa de trabalho mecânico ou potência das cargas externas mais taxa de calor introduzido:

$$P_{(e)} + Q_{(e)} = \dot{U} + \dot{E} \quad (46)$$

onde:

\dot{U} é a taxa de energia cinética

\dot{E} é a taxa de energia interna

Substituindo-se as expressões das diversas energias na equação (46):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \underline{v} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \cdot D d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{h} \cdot \underline{n} d\partial\Omega + \int_{\Omega} \rho r d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \underline{v} + \rho u \right] d\Omega \quad (47)$$

onde u é a energia interna por unidade de massa.

Assumindo-se, por um lado, o estudo no campo das pequenas deformações:

$$\sigma \cdot D = \sigma \cdot \dot{\epsilon} \quad (48)$$

e, por outro lado, aplicando-se o teorema da divergência à parcela:

$$\int_{\partial\Omega} \underline{h} \cdot \underline{n} d\partial\Omega = \int_{\Omega} \text{div} \underline{h} d\Omega \quad (49)$$

as expressões (48) e (49) substituídas em (47) permitem reescrever a primeira lei em forma local do seguinte modo:

$$\rho \dot{u} = \sigma \cdot \dot{\epsilon} - \text{div} \underline{h} + \rho r \quad (50)$$

Entropia

Enquanto a primeira lei da termodinâmica introduz o conceito de energia interna, a segunda lei apresenta a temperatura e outro conceito não incluso na mecânica clássica, a *entropia*.

Na mecânica estatística a entropia de um estado está relacionada com a probabilidade de ocorrência deste estado entre todos os possíveis. Sabe-se que a mudança de estado ocorre preferencialmente na direção da maior desordem, portanto, o aumento da entropia está associado ao aumento do grau de desordem de um sistema. A segunda lei da termodinâmica impõe à primeira que a mudança de estado ocorra preferencialmente para desordem.

A entropia S de um dado volume Ω , a cada instante t é definida por:

$$S = \int_{\Omega} \rho s d\Omega \quad (51)$$

onde $s = s(x,t)$ é a entropia específica por unidade de massa da partícula que ocupa a posição x no instante t .

Segunda lei da termodinâmica

A segunda lei impõe que num processo qualquer de transformação de um sistema a variação total de entropia deve ser igual ou superar a variação provocada pela transferência de calor, em particular num processo irreversível existe produção de entropia interna positiva. Em forma geral, a lei se exprime por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} s \rho d\Omega \geq \int_{\Omega} \frac{r}{T} \rho d\Omega + \int_{\partial\Omega} -\frac{h}{T} \cdot \underline{n} d\partial\Omega \quad (52)$$

onde a segunda parcela do segundo termo da inequação é a taxa de entropia correspondente à transferência de calor.

Em forma local a expressão anterior passa a:

$$\rho \dot{s} - \rho r/T + \text{div}(\underline{h}/T) \geq 0 \quad (53)$$

onde \underline{h} é o vetor de fluxo de calor por unidade de superfície e T é a temperatura local absoluta.

A primeira lei exprime a interconvertibilidade de calor e trabalho mantendo um balanço de energia, mas não impõe nenhuma restrição sobre o sentido em que a troca de energia possa se dar. A segunda lei da termodinâmica restringe o sentido do processo, sempre que se manifeste algum processo dissipativo, através da variação positiva da entropia.

Para que um processo seja termodinamicamente admissível, a desigualdade obtida pela combinação entre as duas leis deve ser observada.

3.1. MÉTODO DO ESTADO LOCAL

A formulação de modelos constitutivos de dano de acordo com os princípios da Termodinâmica dos Processos Irreversíveis, leva em conta os efeitos microscópicos de deterioração do material por meio de variáveis internas macroscópicas.

O método do estado local, GERMAIN [22], postula que, num certo instante, o estado termodinâmico de um meio material é completamente definido pelo conhecimento dos valores de um certo número de variáveis, que dependem apenas do ponto considerado. Como as derivadas no tempo destas variáveis não estão envolvidas na definição do estado, esta postulação implica em admitir que qualquer evolução possa ser considerada como uma sucessão de estados em equilíbrio.

A escolha das variáveis de estado permite que a formulação das teorias seja adaptada ao estudo de um ou mais fenômenos, acoplados ou não. Entretanto, porque essa escolha

é parcialmente subjetiva, pode resultar em diferentes modelos dependendo da inclinação do autor.

De um modo geral, em um sistema irreversível, no âmbito das pequenas deformações, o estado termodinâmico local é definido pelas variáveis ditas observáveis, o tensor de deformações $\underline{\epsilon}$ e a temperatura T , e por um conjunto de variáveis internas q_k associadas aos processos dissipativos.

As variáveis internas q_k podem ser componentes de tensores de segunda ordem, vetores ou escalares. Em particular para o caso dos modelos de dano, estes serão de natureza escalar ou tensorial de ordem igual ou superior a um.

Uma vez definidas as variáveis de estado - observáveis e internas - postula-se a existência de um potencial termodinâmico do qual as leis de estado podem ser derivadas. Um potencial possível é o potencial da energia específica livre ψ (por unidade de volume), dito de Helmholtz:

$$\psi = \psi(\underline{\epsilon}, T, \underline{q}) \quad (54)$$

onde $\underline{q}^T = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ representa um grupo de variáveis internas.

Esse potencial guarda a seguinte relação com a energia interna específica u :

$$\psi = \rho u - \rho s T \quad (55)$$

onde ρ é a massa específica e ρs a entropia por unidade de volume.

A primeira e a segunda equação da termodinâmica podem ser reescritas de modo que:

$$\text{div } \underline{h} = \sigma \cdot \dot{\underline{\epsilon}} + \rho r - \rho \dot{u} \quad (56)$$

$$\rho \dot{s} \geq \frac{r}{T} \rho - \frac{1}{T} \operatorname{div} \underline{h} + \underline{h} \cdot \frac{1}{T^2} \nabla T \quad (57)$$

Da combinação das equações (56) e (57) resulta:

$$T \rho \dot{s} - \rho \dot{u} \geq \underline{h} \cdot \frac{1}{T} \nabla T - \sigma \cdot \dot{\epsilon} \quad (58)$$

Da definição do potencial de Helmholtz segue:

$$\dot{\psi} = \rho \dot{u} - \rho T \dot{s} - \rho s \dot{T} \quad (59)$$

Combinando as equações (58) e (59) resulta a seguinte expressão:

$$\dot{\psi} \leq \sigma \cdot \dot{\epsilon} - \rho s \dot{T} - \underline{h} \cdot \frac{1}{T} \nabla T \quad (60)$$

denominada de relação de Clausius-Duhem. Processos nos quais a desigualdade de Clausius - Duhem é verificada a cada instante são denominados 'termodinamicamente admissíveis'.

Tendo em vista a (54), a derivada do potencial pode ser reescrita na forma:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \cdot \dot{\epsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{q}} \cdot \dot{\underline{q}} \quad (61)$$

Relacionando as equações (60) e (61) obtém-se:

$$(\sigma - \partial\psi/\partial\varepsilon) \cdot \dot{\varepsilon} - (\rho s + \partial\psi/\partial T) \dot{T} - (\partial\psi/\partial q) \cdot \dot{q} - (1/T) \underline{h} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (62)$$

Pode-se imaginar, por exemplo, um estado termodinâmico em que não haja variação de temperatura, nem presença de variáveis internas, de modo que, garante-se a verificação da (62) para uma variação genérica de deformação se:

$$\sigma = \partial\psi/\partial\varepsilon \quad (63)$$

Numa outra situação, para um processo puramente térmico, sem presença de variáveis internas ou variações de deformação, a (62) é verificada para uma variação de temperatura qualquer se:

$$\rho s = - \partial\psi/\partial T \quad (64)$$

Por outro lado, sabe-se, por evidências experimentais, que o vetor de fluxo de calor é orientado no sentido da diminuição da temperatura ($\underline{h} \cdot \nabla T \leq 0$). Na hipótese de desacoplamento entre dissipação mecânica e térmica é necessário que:

$$(\partial\psi/\partial q) \dot{q} \leq 0 \quad (65)$$

Observando-se as relações (63) e (64) que caracterizam as variáveis associadas (T,S) e (σ, ε), pode-se definir, analogamente, uma variável termodinâmica associada à variável interna:

$$-Y_k = \partial\psi/\partial q_k \quad (66)$$

As relações (63), (64) e (66) configuram as leis de estado.

No caso de modelos de dano ditos escalares ou isotrópicos ($\underline{D} = \underline{ID}$), relativos a processos puramente mecânicos (isotérmicos) uma hipótese comum consiste em desprezar as deformações residuais devido à plastificação do material. Nessas condições, a energia específica Ψ associada a um comportamento elástico com danificação, passa a ser expressa na forma:

$$\psi = 1/2(1-D)\underline{D}_0 \varepsilon \cdot \varepsilon \quad (67)$$

onde D é um parâmetro escalar consistindo na única variável interna considerada e \underline{D}_0 é o tensor de rigidez elástica inicial do material íntegro.

Essa expressão é uma consequência direta da hipótese de que o tensor de rigidez elástica, obtido derivando-se duas vezes Ψ em relação ao tensor de deformações ε , é uma função da variável interna de dano:

$$\underline{\psi}_{\varepsilon\varepsilon} = \underline{D}(D) = (1-D)\underline{D}_0 \quad (68)$$

Das equações (63) e (67), obtêm-se a lei constitutiva:

$$\underline{\sigma} = (1-D)\underline{D}_0 \varepsilon \quad (69)$$

Por outro lado, a equação (65) fornece:

$$(\underline{D}_0 \varepsilon \cdot \varepsilon) \dot{D} \geq 0 \quad (70)$$

Observando-se que o termo entre parênteses é quadrático definido positivo, resulta que:

$$\dot{D} \geq 0 \quad (71)$$

Essa condição mostra que os processos de danificação são termodinamicamente admissíveis se conduzem à uma evolução positiva ou nula da variável representativa do dano.

Potenciais de dissipação

Como foi visto, o potencial termodinâmico permite obter relações entre as variáveis de estado, observáveis e internas e suas respectivas variáveis associadas. Entretanto, para completar o modelo constitutivo é necessário que se estabeleça uma lei de evolução para as variáveis internas. O objetivo dos potenciais de dissipação é justamente proporcionar a obtenção das leis complementares relacionadas à evolução das variáveis internas.

Tendo-se em vista a validade das leis de estado - (63),(64), (66) - a desigualdade de Clausius - Duhem passa a exprimir o fato de que a dissipação é necessariamente positiva:

$$Y\dot{D} - \underline{h} \cdot \frac{1}{T} \nabla T \geq 0 \quad (72)$$

sendo $Y = -Y_K$.

O primeiro termo é chamado de dissipação intrínseca ou mecânica associada à evolução da variável interna de dano. O último termo representa a dissipação térmica devida à condução de calor.

Para definir as leis complementares, postula-se a existência de um potencial de dissipação, expresso matematicamente por uma função escalar contínua e convexa Φ das variáveis de fluxo, sendo que as variáveis de estado podem aparecer como parâmetros:

$$\Phi = \Phi (\dot{D}, \underline{h}/T) \quad (73)$$

É assumida válida, para um material padrão, a lei da normalidade, de modo que as leis complementares podem ser expressas, neste caso, como:

$$\begin{aligned} Y &= \partial\Phi/\partial\dot{D} \\ \nabla T &= -\partial\Phi/\partial(\underline{h}/T) \end{aligned} \quad (74)$$

Entretanto, de maior interesse seria poder exprimir \dot{D} e \underline{h}/T em forma explícita. Para este fim, um potencial conjugado ao potencial Φ de dissipação é obtido por meio da transformação de Legendre-Fenchel. O potencial, $\Phi^*(Y, \nabla T)$, dual de Φ com respeito às variáveis \dot{D} e \underline{h}/T vale, por definição:

$$\Phi^*(Y, \nabla T) = \underset{(\dot{D}, \underline{h}/T)}{\text{Sup}} ((Y\dot{D} - \underline{h}/T \cdot \nabla T) - \Phi(\dot{D}, \underline{h}/T)) \quad (75)$$

A transformação é ilustrada graficamente na figura A.4, onde, por simplificação, apenas a variável interna \dot{D} é considerada. Na figura, fixar Y implica em fixar uma inclinação para uma reta (hiperplano) no espaço $\Phi - \dot{D}$. A partir daí, o valor de Φ^* resulta do supremo da diferença entre $Y\dot{D}$ e Φ .

Pode-se demonstrar que, se a função Φ^* é diferenciável, a propriedade de normalidade pode ser aplicada para as variáveis \dot{D} e $-\underline{h}/T$ e as leis complementares escritas como:

$$\begin{aligned} \dot{D} &= \partial\Phi^*/\partial Y \\ -\frac{\underline{h}}{T} &= \partial\Phi^*/\partial \nabla T \end{aligned} \quad (76)$$

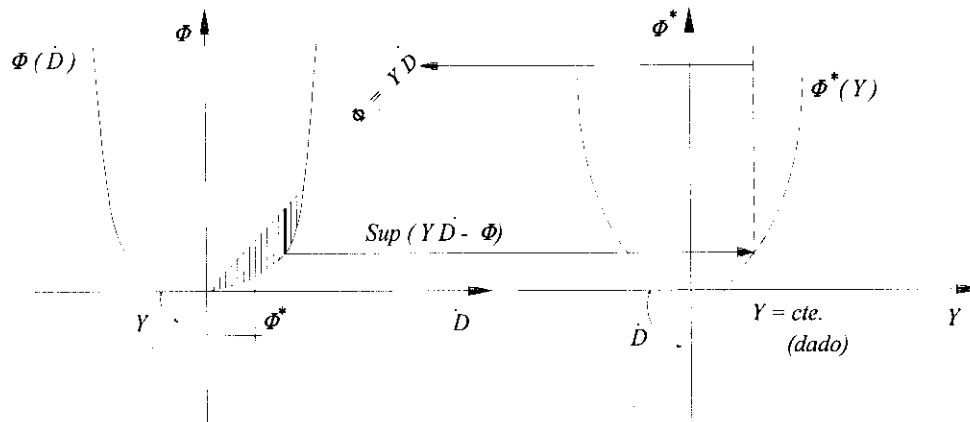


Figura A.4 - Representação geométrica da transformação de Legendre-Fenchel.
 Figura adaptada de LEIMATRE & CHABOCHE [30]

Valendo a normalidade e as funções Φ e Φ^* sendo não-negativas, convexas e de valor nulo na origem o segundo princípio da termodinâmica resulta satisfeito automaticamente.

Em certas situações em correspondência a um Φ a conjugada Φ^* pode resultar não diferenciável. Nesses casos, as leis de evolução das variáveis internas são obtidas a partir do conceito de sub-diferenciabilidade.

Assim, considerando-se a variável de dano D , por exemplo, diz-se que \dot{D} pertence ao sub-diferencial de Φ^* em Y_0 (figura A.5), o qual é definido por:

$$\partial\Phi^*(Y_0) = \{ \dot{D} / \Phi^*(Y) \geq \Phi^*(Y_0) + \dot{D}(Y - Y_0), \forall Y \} \quad (77)$$

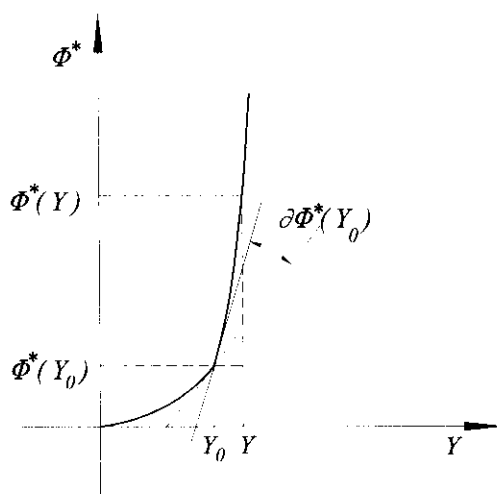


Figura A.5 - O conceito de sub-diferencial.

Uma situação particular característica é aquela em que a função Φ é positiva e homogênea de grau 1. Neste caso a conjugada Φ^* resulta de valor nulo se Y pertence ao conjunto dos Y de interesse e de valor infinito em caso contrário (ver figura A.6).

Pode-se observar na figura A.6 que para $Y = Y_1$ o supremo se alcança em $\dot{D} = 0$ no gráfico $\Phi - \dot{D}$; em $Y = Y$ o supremo é obtido em $\dot{D} \rightarrow \infty$ e em $Y = \bar{Y}$ o supremo independe de \dot{D} (de zero até infinito). Em $Y = \bar{Y}$, portanto, \dot{D} pertence ao sub-diferencial de Φ^* .

Um caso teórico de modelo constitutivo em que as funções Φ e Φ^* aparecem como indicado na figura A.6 é o rígido-plástico perfeito, em que, em campo unidimensional, a variável interna observável é a deformação plástica e a variável associada é a tensão σ . Situação análoga ocorre nos modelos elásticos com danificação.

Ainda com relação à situação ilustrada na figura A.6, como \dot{D} pertence ao sub-diferencial de Φ^* em \bar{Y} , para calculá-lo neste ponto é suficiente admitir que exista uma função F , por exemplo, de valor nulo no intervalo $-\bar{Y} \leq Y \leq \bar{Y}$ e com derivada contínua em \bar{Y} .

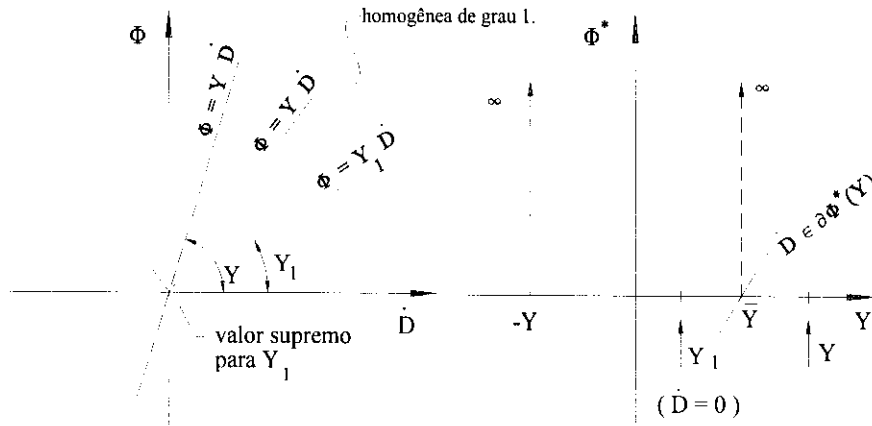


Figura A.6 - Caso particular de Φ homogênea de grau 1.

Fazendo-se algum rigor matemático, definindo-se o conjunto I tal que:

$$I = \{ Y / -\bar{Y} \leq Y \leq \bar{Y} \} \tag{78}$$

então:

$$\begin{aligned} \dot{D} &= 0 \quad \text{se } Y \in I \\ \dot{D} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial Y} \quad \text{se } |Y| = \bar{Y} \end{aligned} \tag{79}$$

onde λ tem valor escalar positivo.

De modo ainda mais específico, no âmbito dos modelos de dano escalar é comum se empregar um critério de danificação expresso através de uma função convexa $f(Y,D)$, de valor negativo ou nulo, tal que:

$$\begin{aligned}
 f < 0 & \quad \text{se } Y \in \text{int}I \quad \text{onde } \text{int}I = \{ Y \mid -\bar{Y}(\bar{D}) < Y < \bar{Y}(D) \} \\
 f = 0 & \quad \text{se } |Y| = \bar{Y}(D)
 \end{aligned}
 \tag{80}$$

A função representativa do critério é tal que \dot{D} pode ser diferente de zero se $f = 0$ e neste caso o novo valor de f é também nulo. Surge, então, uma nova condição de consistência dada pelo produto $\dot{f}\dot{D} = 0$.

Portanto, as expressões de \dot{D} passam a ser escritas na forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{D} &= 0 \quad \text{se } f < 0 \\
 \dot{D} &= \dot{\lambda} \partial f / \partial Y \quad \text{se } f = 0 \quad \text{e } \dot{f} = 0
 \end{aligned}
 \tag{81}$$

O escalar $\dot{\lambda}$ é determinado pela condição de consistência $\dot{f} = 0$.

Tendo-se em vista as características das funções F e f uma teoria denominada associada emprega nas relações anteriores f em lugar de F .