

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS  
DE EDIFÍCIOS ALTOS CONSIDERANDO A RIGIDEZ  
TRANSVERSAL À FLEXÃO DAS LAJES**


DERMIVAL PAULA BEZERRA


Dissertação apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos, da Universidade de São Paulo,  
como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

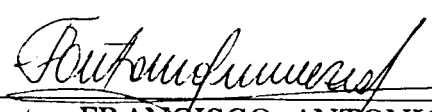
ORIENTADORA: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Helena M. C. Carmo Antunes


**FOLHA DE APROVAÇÃO**

Dissertação defendida e aprovada em 24-7-1995  
pela Comissão Julgadora:

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Doutora HELENA M. C. CARMO ANTUNES - Orientadora  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Doutor DAGOBERTO DARIO MORI  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Doutor FRANCISCO ANTONIO MENEZES  
(Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP)

  
\_\_\_\_\_  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação  
Prof. Dr. EDUARDO CLETO PIRES

  
\_\_\_\_\_  
Coordenador da área - Engenharia de Estruturas  
Prof. Dr. MOUNIR KALIL EL DEBS

Aos meus pais,

*Valdemir e Zilar,*

Aos meus irmãos,

*Miderval, Vanessa e Vlária,*

Ao meu sobrinho,

*Leonardo,*

e

*Ana Rosa.*

## AGRADECIMENTOS

À professora Helena M. C. Carmo Antunes que com seu profissionalismo permitiu uma orientação segura e objetiva.

A todos os colegas, professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC/USP, que contribuíram direto ou indiretamente na execução deste trabalho.

À CAPES, pela bolsa de estudo concedida.

# SUMÁRIO

RESUMO .....	i
ABSTRACT .....	ii
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>01</b>
1.1 GENERALIDADES .....	01
1.2 TRABALHOS DESENVOLVIDOS .....	02
1.3 OBJETIVOS .....	03
1.4 RESUMO DOS CAPÍTULOS .....	04
<b>2 SISTEMA ESTRUTURAL .....</b>	<b>05</b>
2.1 INTRODUÇÃO .....	05
2.2 ELEMENTOS HORIZONTAIS .....	05
2.2.1 VIGAS .....	05
2.2.2 LAJES .....	06
2.3 ELEMENTOS VERTICAIS .....	07
2.3.1 PILARES .....	07
2.4 SUBESTRUTURAS .....	07
2.5 SISTEMAS DE REFERÊNCIA .....	08
2.5.1 SISTEMA DE REFERÊNCIA GLOBAL DO EDIFÍCIO .....	08
2.5.2 SISTEMA DE REFERÊNCIA DAS VIGAS .....	09
2.5.3 SISTEMA DE REFERÊNCIA DAS LAJES .....	09
2.5.4 SISTEMA DE REFERÊNCIA DOS PILARES .....	11
2.6 SISTEMA DE REFERÊNCIA DA SUBESTRUTURA .....	12
2.7 COORDENADAS DESLOCAMENTOS DOS ELEMENTOS ESTRUTURAIS .....	12
2.7.1 COORDENADAS DESLOCAMENTOS DAS VIGAS .....	12
2.7.2 COORDENADAS DESLOCAMENTOS DAS LAJES .....	14
2.7.3 COORDENADAS DESLOCAMENTOS DOS PILARES .....	16
2.8 COORDENADAS DESLOCAMENTOS DA SUBESTRUTURA .....	17
<b>3 MATRIZ DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS LINEARES .....</b>	<b>19</b>
3.1 INTRODUÇÃO .....	19
3.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DAS VIGAS .....	19
3.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DOS PILARES .....	24
3.3.1 EXCENTRICIDADES ENTRE PILARES .....	30
<b>4 MATRIZ DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS DE PLACA .....</b>	<b>33</b>
4.1 INTRODUÇÃO .....	33
4.2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	34
4.3 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO .....	36
4.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO .....	40
4.5 FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES .....	55
4.6 ESFORÇOS INTERNOS NO ELEMENTO .....	56
4.7 ELEMENTO FINITO QUADRANGULAR .....	57
<b>5 MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA .....</b>	<b>60</b>
5.1 INTRODUÇÃO .....	60
5.2 NUMERAÇÃO DOS NÓS .....	61
5.3 SUBESTRUTURAÇÃO EM PARALELO .....	61
5.3.1 MÉTODO "CHOLESKI DECOMPOSITION" .....	62
5.4 CONTRIBUIÇÃO DOS PILARES À RIGIDEZ DA SUBESTRUTURA .....	66
5.5 SUBESTRUTURAÇÃO EM SÉRIE .....	69
5.6 DESLOCAMENTOS LOCAIS DOS ELEMENTOS .....	73
5.7 ESFORÇOS SOLICITANTES NOS ELEMENTOS .....	74

5.7.1	VETOR DE FORÇAS NODAIS .....	74
5.7.2	FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES DAS VIGAS .....	75
<b>6</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA .....</b>	<b>78</b>
6.1	INTRODUÇÃO .....	78
6.2	ENTRADA DE DADOS .....	79
6.3	APRESENTAÇÃO .....	82
6.4	SUBPROGRAMAS .....	83
6.5	ARQUIVO DE DADOS .....	85
6.6	RESULTADOS .....	86
6.7	LIMITES DE PROCESSAMENTO .....	87
<b>7</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>88</b>
7.1	INTRODUÇÃO .....	88
7.2	PRIMEIRO EXEMPLO .....	89
7.3	SEGUNDO EXEMPLO .....	108
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>134</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>136</b>

## RESUMO

BEZERRA, D.P. *Análise de Estruturas Tridimensionais de Edifícios Altos Considerando a Rigidez Transversal à Flexão das Lajes*. São Carlos. 1995. 138p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho apresenta o estudo do comportamento das estruturas tridimensionais de edifícios altos, sujeitos às ações verticais e laterais, considerando-se a rigidez transversal à flexão das lajes. A análise é feita pelo processo dos deslocamentos para todos elementos, onde emprega-se o Método dos Elementos Finitos na discretização das lajes e vigas em cada pavimento. O sistema estrutural não considera a presença dos núcleos estruturais, pilares ou pilares-parede submetidos à flexo-torção. As lajes também funcionam como diafragmas infinitamente rígidos em seu plano, sendo responsável pela compatibilidade dos deslocamentos correspondentes e pela transmissão das forças do vento aos pilares. Elaborou-se um programa de computador que automatiza o processo utilizado, e alguns exemplos são apresentados para comprovar sua validade.

**Palavras-chave:** Edifícios Altos - Método dos Elementos Finitos - Sistema Estrutural - Diafragmas (Lajes).

## **ABSTRACT**

BEZERRA, D.P. *Three Dimensional Analysis of Tall Buildings Considering the Transverse Bending Stiffness of Slabs*. São Carlos. 1995. 138p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This work presents a study about the behavior of three dimensional structures of tall buildings, subjected to vertical and lateral loads, considering the transverse bending stiffness of slabs. The analysis is done by stiffness method for all elements, and Finite Element Method is used in the discretization of slabs and beams of each floor. The structural system does not consider cores, columns or shear-walls that are subjected to warping effects. The slabs also act as diaphragms with an infinite stiffness in their plane, responsible for compatibility of the horizontal displacements, and so transmit the wind forces to the columns. A computer program is developed to get automatic the process utilized in the analysis, and some examples are presented to check its validity.

**Keywords:** Tall Buildings - Finite Element Method - Structural System - Diaphragms (Slabs).



## CAPÍTULO 1

---

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 GENERALIDADES

Devido ao rápido crescimento dos grandes centros urbanos e aos elevados custos dos espaços disponíveis, está aumentando consideravelmente o número de edifícios cada vez mais altos e esbeltos. Pode-se definir edifícios altos sobre o ponto de vista estrutural, como sendo aquele que, pela sua altura, os efeitos das forças laterais impostas pelos ventos não podem ser desprezados. A influência de tais ações deve portanto ser considerada durante a análise, exigindo dos engenheiros estruturais técnicas de cálculo mais precisas e sofisticadas.

Há vários modelos que estão em constante aperfeiçoamento, na tentativa de representar de uma forma mais precisa o comportamento físico real da estrutura. O modelo mais simples, ainda utilizado atualmente, divide a estrutura em lajes isoladas e vigas contínuas. Outros mais complexos, analisam de uma só vez todas as vigas que compõem o pavimento pela teoria das grelhas, e ainda quando se requer a participação das lajes no conjunto, pode-se

utilizar as técnicas do Método dos Elementos Finitos ou Método dos Elementos de Contorno.

A contribuição dos elementos verticais, como os pilares, pode ser considerada quando os edifícios são analisados como uma associação de painéis. O modelo adotado neste trabalho faz uma análise tridimensional da estrutura, onde a interação de esforços e deslocamentos é estudada nas três direções. O edifício é dividido em andares ou subestruturas, que por sua vez é formada tanto pelos elementos horizontais como pelos verticais, representando portanto um só andar, ou seja, o próprio pavimento e os pilares que se ligam ao andar subsequente. Por esta razão, esse modelo envolve um número bem maior de graus de liberdade quando comparados ao sistema tridimensional formado por conjunto de elementos no plano.

## 1.2 TRABALHOS DESENVOLVIDOS

Diferentes trabalhos desenvolvidos na área de edifícios altos, cada um com suas peculiaridades e considerações, podem ser citados: BARBOSA, J.A. (1977), estudou pela técnica do meio contínuo e discreto, os edifícios formados por paredes de seção aberta submetidos às forças laterais, contraventado por lintéis, onde comparou os resultados obtidos entre as duas técnicas utilizadas.

PRUDENTE, M. (1983), analisou estruturas tridimensionais usuais de edifícios altos, constituídos de painéis de contraventamento formado por vigas e pilares rigidamente conectados entre si, e pilares individuais que não estão sujeitos aos esforços de flexo-torção. BECKER, E.P. (1985), acrescentou os núcleos estruturais baseando-se na teoria de VLASSOV (1962), no estudo da interação tridimensional entre os diversos elementos estruturais. RIOS,

B.M.C. (1991), analisou a estrutura sem observar a formação de painéis e núcleos, entretanto considerou as excentricidades entre os elementos, e calculou ainda as envoltórias dos esforços para diferentes combinações de carregamento.

O que se observa de comum nos trabalhos citados, é que as lajes trabalham como diafragmas infinitamente rígidos em seu plano horizontal, e rigidez transversal desprezível na análise global da estrutura. Entretanto, sabe-se que devido ao seu comportamento de placa, essa rigidez à flexão terá alguma influência no comportamento estrutural.

Paralelamente ao estudo de edifícios altos, com as lajes funcionando como diafragmas, pode-se ainda citar os trabalhos de CÂMARA JR., U.F (1978) e CRUZ, A.A.V. (1979). Utilizando-se o Método dos Elementos Finitos, BRUNELLI, A.C. (1987) e BALCAZAR, E.A.S.G. (1991), analisaram estruturas tridimensionais, considerando a rigidez à flexão das lajes, porém com aplicação apenas à edifícios em plantas retangulares.

### 1.3 OBJETIVOS

Como em qualquer outro problema de análise estrutural, este trabalho objetiva basicamente determinar os esforços e deslocamentos em edifícios altos submetidos às ações laterais e verticais. As lajes geralmente admitidas como diafragmas rígidos em seu plano, também contribuirão com sua rigidez transversal à flexão na análise global da estrutura.

São utilizadas as técnicas da Análise Matricial para os elementos lineares e o Método dos Elementos Finitos propriamente dito, para os elementos de placa, ambos pelo processo dos deslocamentos.

#### 1.4 RESUMO DOS CAPÍTULOS

No capítulo seguinte descrevem-se todos os elementos considerados no sistema estrutural do edifício. Define-se ainda o sistema de referência local e global (subestrutura), de cada nó e suas coordenadas deslocamentos correspondentes.

No terceiro capítulo determinam-se as matrizes de rigidez de todos elementos de barra (vigas e pilares), nas coordenadas locais e globais, utilizando diretamente as técnicas da Análise Matricial.

No quarto capítulo estuda-se separadamente o elemento finito de placa empregado na discretização do pavimento, responsável pela consideração da rigidez transversal das lajes na análise do edifício. O elemento adotado é o DKT (Discrete Kirchhoff Theory), que segundo BATOZ *et al*(1980), trata-se de um dos elementos mais eficientes para análise de placas delgadas.

No quinto capítulo mostram-se todos os passos necessários à montagem da matriz de rigidez global da estrutura, através da contribuição de cada elemento estrutural, e ainda as técnicas de subestruturação (série e em paralelo), utilizadas para a determinação de esforços e deslocamentos na estrutura, que é o objetivo principal do trabalho.

No sexto capítulo apresenta-se uma descrição do sistema computacional implementado, dando ênfase à montagem dos arquivos de entrada de dados. E no sétimo capítulo são feitos alguns exemplos numéricos para comprovar a validade do processo, e principalmente comparar os resultados obtidos com outros modelos.

## **CAPÍTULO 2**

---

### **SISTEMA ESTRUTURAL**

#### **2.1 INTRODUÇÃO**

Devido à aplicação do processo dos deslocamentos na análise da estrutura, estuda-se individualmente cada elemento do sistema, sem esquecer portanto sua interação tridimensional de esforços e deslocamentos com o restante da estrutura, possibilitando dessa forma compreender melhor o comportamento global.

Todos os elementos são analisados em teoria de primeira ordem, e admitem-se que as deformações são suficientemente pequenas para que se tenha uma relação linear entre tensões e deformações, permitindo então o comportamento elástico-linear dos materiais.

#### **2.2 ELEMENTOS HORIZONTAIS**

##### **2.2.1 VIGAS**

As vigas estudadas no presente trabalho são compostas por elementos lineares contidas no plano

horizontal, ao nível das lajes. Suas extremidades podem estar conectadas tanto nos pilares como em outras vigas. Para cada trecho de viga são admitidas seções quaisquer, permitindo ainda variações discretas entre os diversos elementos.

Pode-se também considerar as excentricidades das vigas em relação ao centro de gravidade dos pilares, para incluir os trechos rígidos ou excentricidades reais de projeto. Dessa forma, simula-se o comportamento das vigas unidas aos pilares com grandes seções transversais, principalmente os pilares-parede.

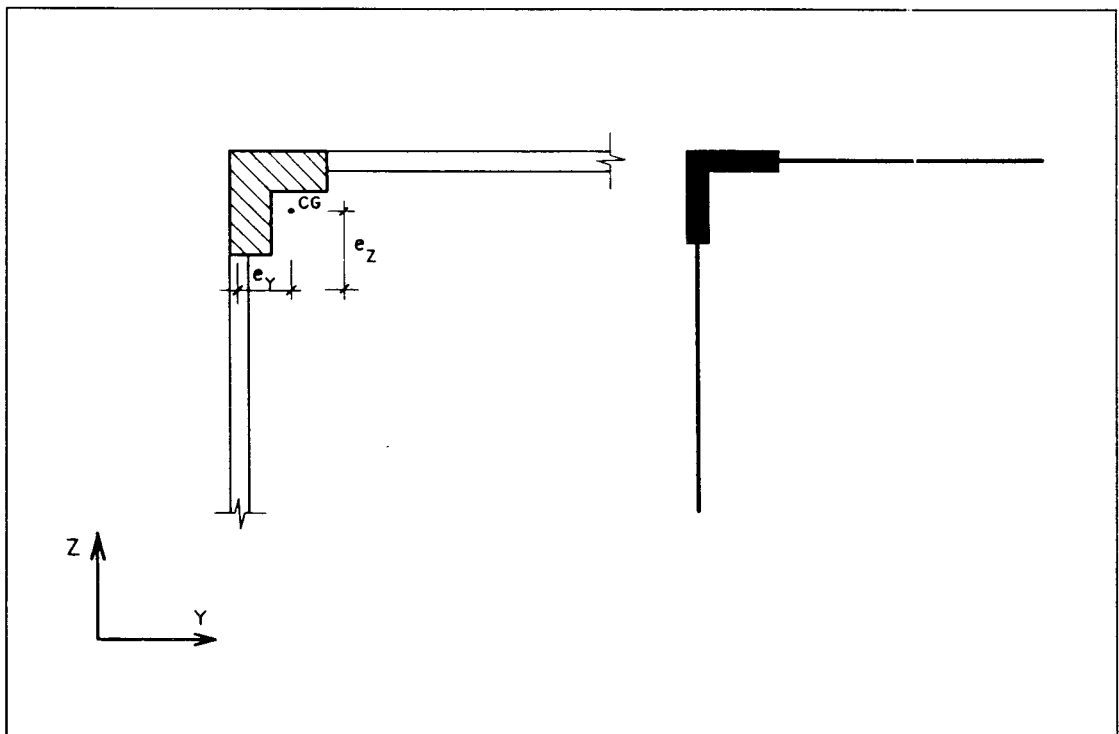


FIGURA 2.1- Excentricidades de um trecho de viga em relação ao pilar.

### 2.2.2 LAJES

Quando submetida ao carregamento proveniente das forças laterais do vento, admite-se que a laje comporta-se como corpo rígido em seu plano horizontal, onde é responsável pela transmissão de tais forças aos elementos verticais, e também pela compatibilização dos deslocamentos

correspondentes ao seu movimento de diafragma rígido, para todos os pontos pertencentes ao pavimento.

Neste trabalho, as lajes também contribuem com sua rigidez transversal à flexão na análise de cada subestrutura, comportando-se como placas. As cargas verticais atuantes nas lajes são transmitidas a todos elementos conectados a mesma, sejam eles verticais ou horizontais. Nesta etapa do estudo, utilizam-se as técnicas do Método dos Elementos Finitos, onde as lajes são discretizadas em vários elementos de placas, triangulares ou quadrangulares.

## **2.3 ELEMENTOS VERTICAIS**

### **2.3.1 PILARES**

Os pilares que interpõem-se a dois pavimentos consecutivos devem apresentar trechos lineares verticais, e também ter a mesma seção transversal, entretanto, ao longo da altura do edifício, sua seção pode variar. Por isso, admitem-se excentricidades entre pilares de mesma prumada, para simular as reduções de suas dimensões no plano transversal, comuns nos projetos de edifícios.

Como na análise do sistema, o edifício é dividido em várias subestruturas independentes, não é preciso que um mesmo pilar esteja presente em todos andares, podendo então ocorrer sua interrupção em qualquer pavimento. Não são considerados os pilares que sofrem o efeito do empenamento de suas seções transversais na torção.

## **2.4 SUBESTRUTURAS**

Como definido anteriormente, cada andar do sistema estrutural é representado pela subestrutura. Por sua vez,

cada subestrutura engloba os elementos horizontais (vigas e lajes), contidos no pavimento superior, e os elementos verticais (pilares ou pilares-parede), que se ligam ao pavimento inferior.

Os pavimentos correspondentes a cada subestrutura podem ser diferentes entre si, ocasionados por alguma variação de seus elementos constituintes, tais como: redução e interrupção dos pilares, novas disposições das vigas, alteração nas seções transversais, excentricidades, mudanças nos carregamentos, etc.

## **2.5 SISTEMAS DE REFERÊNCIA**

### **2.5.1 SISTEMA DE REFERÊNCIA GLOBAL DO EDIFÍCIO**

A topologia do sistema estrutural do edifício é definida por um sistema cartesiano de eixos globais X, Y e Z, dextrorso, sendo Y e Z eixos horizontais e X o eixo vertical, positivo para cima, com origem  $O_G$  em um ponto qualquer do plano da base do edifício. É preferível trabalhar com coordenadas positivas do sistema de referência, de forma que o plano formado pelos eixos  $O_{YZ}$  contenha o andar do edifício, em planta, no seu primeiro quadrante.

A partir do sistema de eixos globais, definem-se todos os nós das subestruturas, os nós dos elementos lineares, e os nós dos elementos finitos de placa discretizadores das lajes, visto em detalhe no capítulo 4. Definem-se nós de viga, ao encontro de dois ou mais trechos de vigas; nós de pilar, ao encontro do pilar com a laje, no centro de gravidade da seção transversal do pilar.



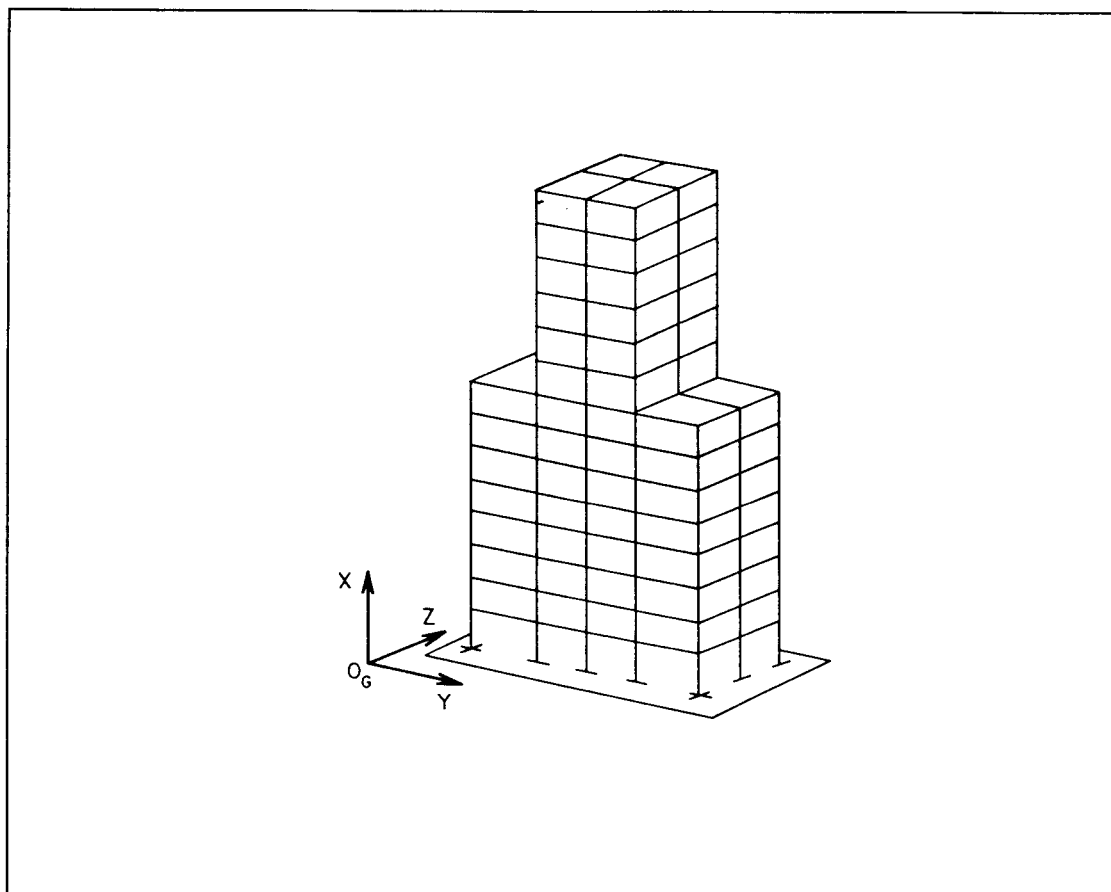


FIGURA 2.2 - Sistema de referência global.

### 2.5.2 SISTEMA DE REFERÊNCIA DAS VIGAS

Para um trecho de viga qualquer, adota-se um sistema de referência local  $x_v$ ,  $y_v$  e  $z_v$ , dextrorso, com origem  $O_v$  no centro de gravidade da seção transversal, em uma de suas extremidades. O eixo  $y_v$  é o eixo longitudinal da peça e deve coincidir com a superfície média da laje, o eixo  $x_v$  é paralelo ao eixo X do sistema global, sempre orientado para cima.

### 2.5.3 SISTEMA DE REFERÊNCIA DAS LAJES

O sistema de referência das lajes é semelhante ao sistema de referência adotado para o edifício, mas com a

origem  $O_L$  pertencente ao seu plano horizontal, também em um ponto arbitrário.

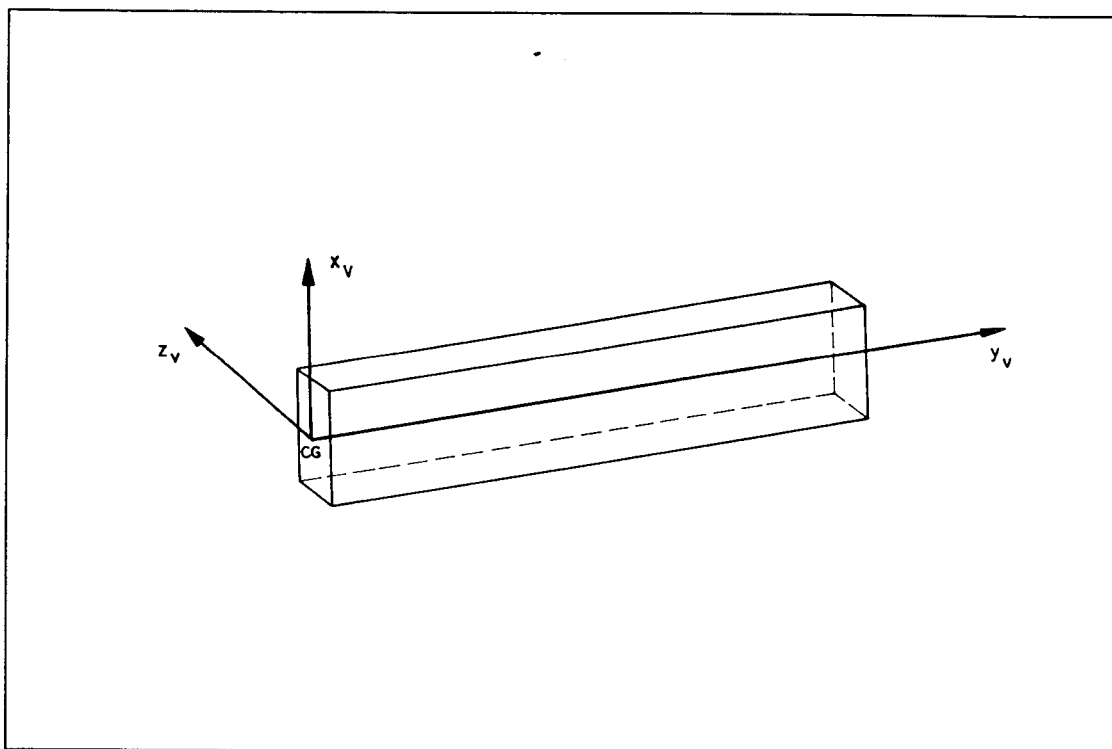


FIGURA 2.3 - Sistema de referência local das vigas.

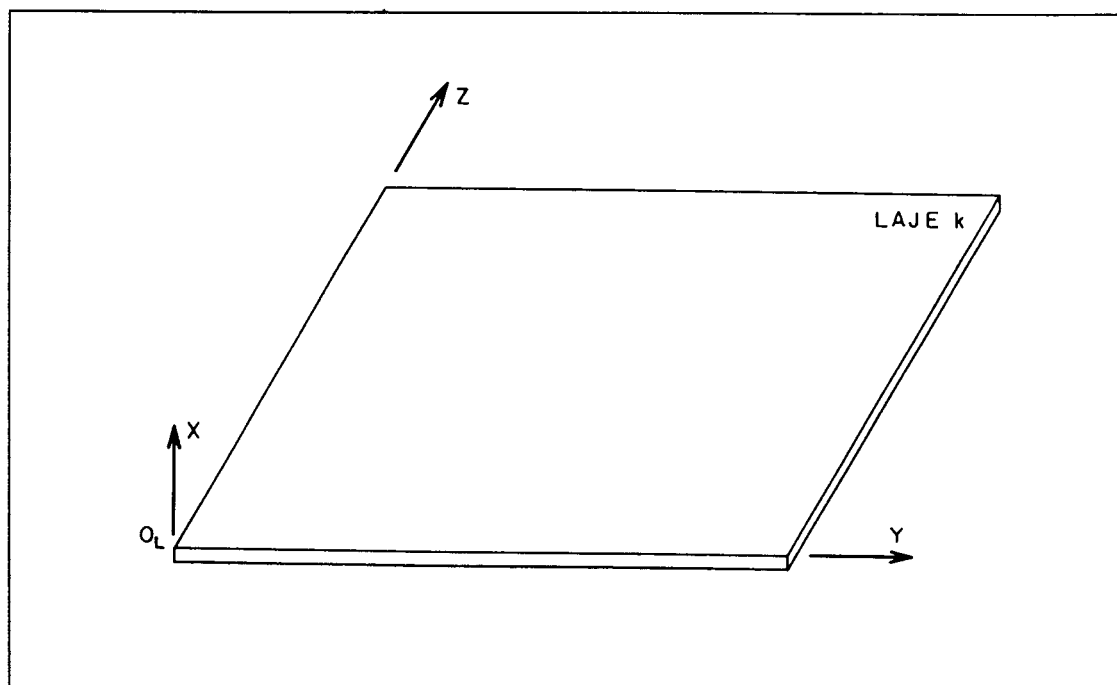


FIGURA 2.4 - Sistema de referência das lajes.

#### 2.5.4 SISTEMA DE REFERÊNCIA DOS PILARES

Cada trecho de pilar tem seu sistema de referência local cartesiano  $x_p$ ,  $y_p$  e  $z_p$ , com origem  $O_p$  no centro de gravidade da seção transversal na base inferior, sendo  $y_p$  e  $z_p$  eixos horizontais coincidentes com os eixos principais de inércia da seção, e o eixo  $x_p$  seu eixo longitudinal, positivo para cima.

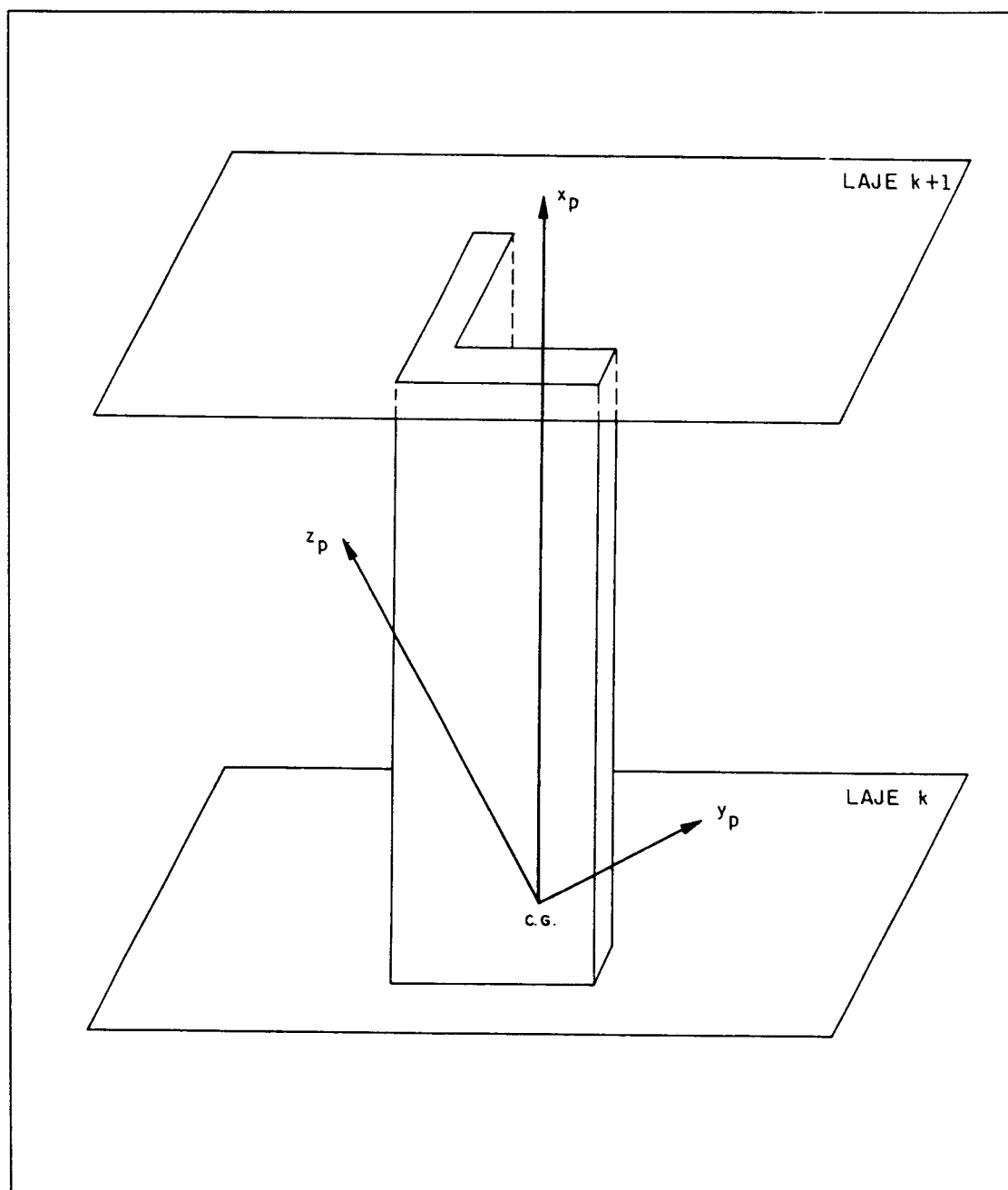


FIGURA 2.5 - Sistema de referência local dos pilares.

## 2.6 SISTEMA DE REFERÊNCIA DA SUBESTRUTURA

O sistema de referência da subestrutura é o mesmo das lajes, ou seja, com origem  $O_s$  no plano do pavimento correspondente.

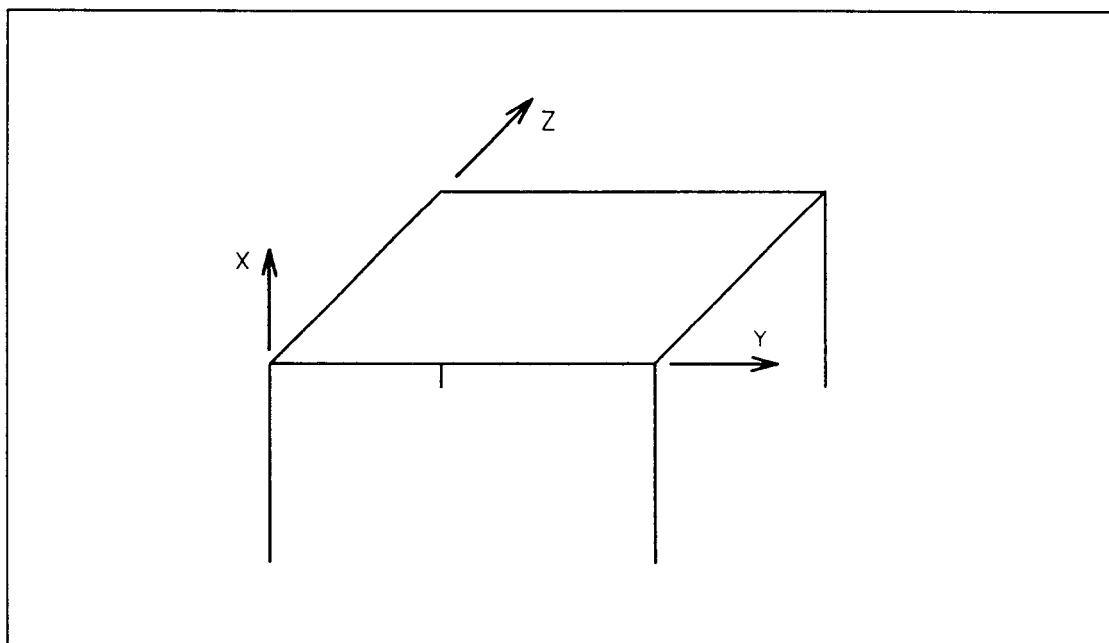


FIGURA 2.6 - Sistema de referência da subestrutura.

## 2.7 COORDENADAS DESLOCAMENTOS DOS ELEMENTOS ESTRUTURAIS

Coordenadas deslocamentos são orientações na direção dos possíveis deslocamentos independentes, associados aos nós ou extremidades de cada elemento estrutural. Os deslocamentos são convencionados de acordo com o sistema de referência adotados para os elementos.

### 2.7.1 COORDENADAS DESLOCAMENTOS DAS VIGAS

Os deslocamentos independentes nas extremidades das vigas são:

- rotação em torno dos eixos  $y_v$  e  $z_v$  do sistema local;

- translação segundo o eixo  $x_v$  do mesmo sistema.

Então, para cada trecho de viga estão associados seis coordenadas deslocamentos, sendo três em cada extremidade. Não se considerou as deformações axiais, por não apresentar esforços normais devido a hipótese das lajes trabalharem como diafragmas rígidos.

Dessa forma, a transposta do vetor de deslocamentos da viga,  $\{u_v\}^T$ , em coordenadas locais, fica:

$$\{u_v\}^T = \{\delta_{x1} \ \phi_{y1} \ \phi_{z1} \ \delta_{x2} \ \phi_{y2} \ \phi_{z2}\} \quad (2.1)$$

onde os índices 1 e 2 representam cada uma das extremidades da viga, e  $\delta$  e  $\phi$  as translações e rotações, respectivamente.

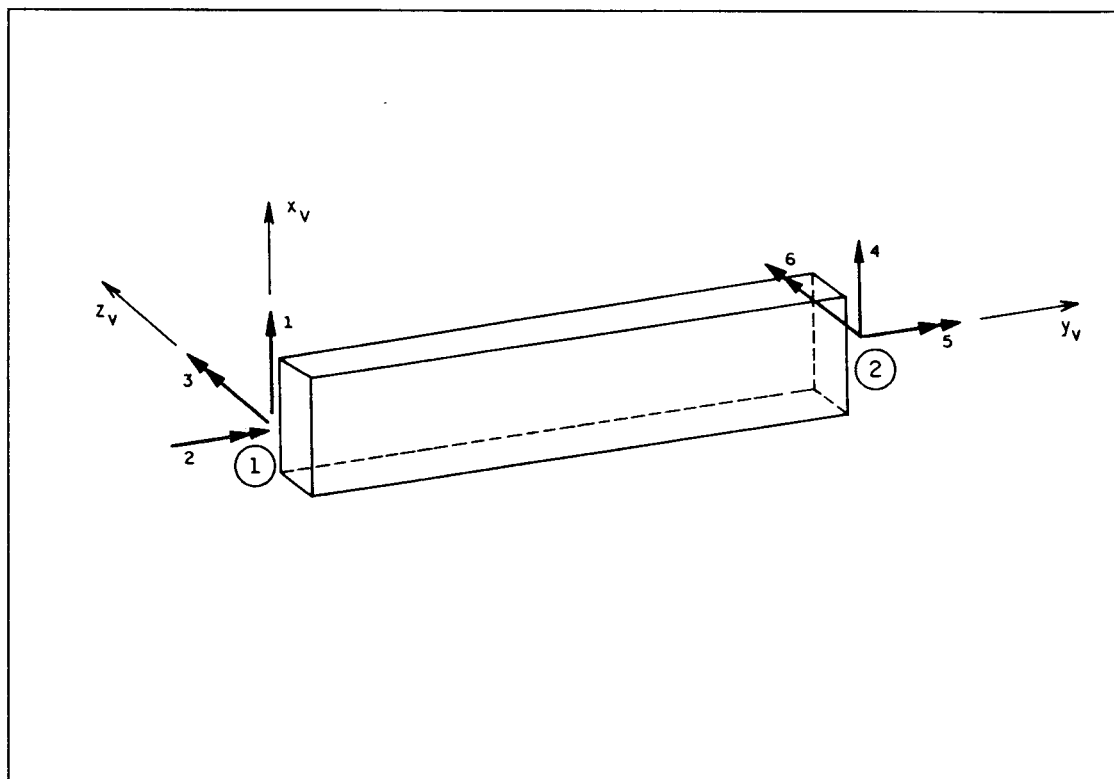


FIGURA 2.7 - Coordenadas deslocamentos locais de um trecho de viga.

### 2.7.2 COORDENADAS DESLOCAMENTOS DAS LAJES

Comportando-se como diafragma rígido em seu plano, influenciado pelas forças laterais, cada pavimento apresenta três coordenadas deslocamentos associado as lajes:

- translação segundo os eixos Y e Z do sistema de referência global ou da subestrutura;
- rotação em torno do eixo X do mesmo sistema.

Então, a transposta do vetor de deslocamentos referente ao movimento de corpo rígido das lajes  $\{u_L\}^T$ , fica:

$$\{u_L\}^T = \{\delta_Y \ \delta_Z \ \phi_X\} \quad (2.2)$$

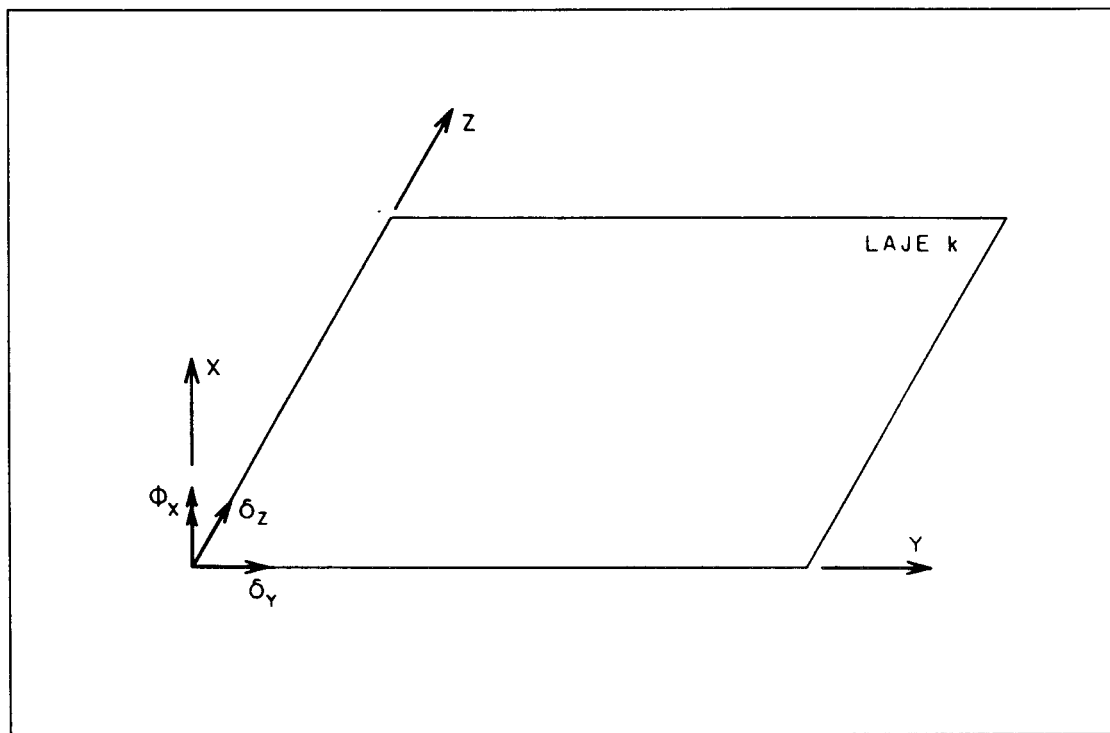


FIGURA 2.8 - Coordenadas deslocamentos de corpo rígido da laje.

Como se está considerando também a rigidez transversal à flexão da laje, tem-se ainda três coordenadas

deslocamentos por nó, pertencente a cada elemento de placa DKT (Discrete Kirchhoff Theory), que compõem a laje, que são:

- translação segundo o eixo X do sistema global;
- rotação em torno dos eixos Y e Z, também já associados ao mesmo sistema.

A transposta do vetor de deslocamentos de cada elemento finito de placa  $\{u_{DKT}\}^T$ , fica:

$$\{u_{DKT}\}^T = \{\delta_{X1} \ \phi_{Y1} \ \phi_{Z1} \ \delta_{X2} \ \phi_{Y2} \ \phi_{Z2} \ \delta_{X3} \ \phi_{Y3} \ \phi_{Z3}\} \quad (2.3)$$

onde os números 1, 2 e 3 representam os nós de vértice do elemento finito, no caso, triangular.

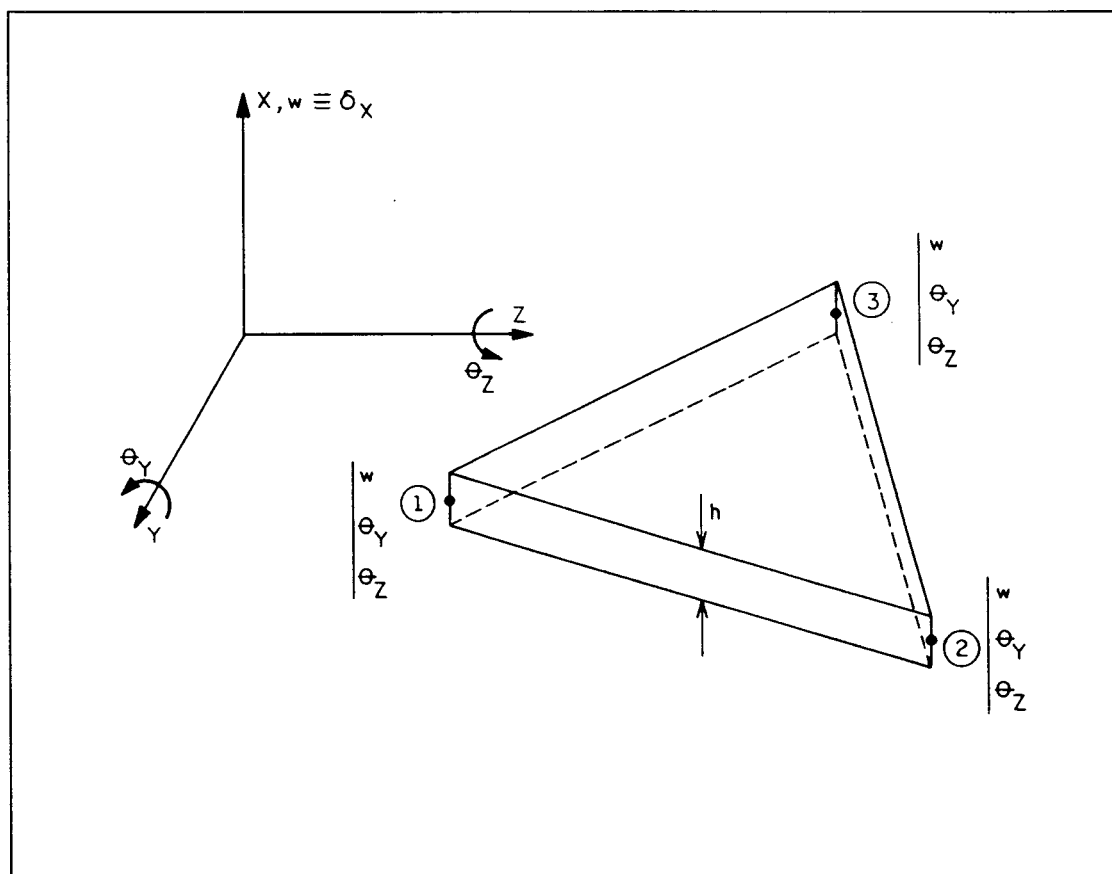


FIGURA 2.9 - Coordenadas deslocamentos do elemento finito de placa DKT.

### 2.7.3 COORDENADAS DESLOCAMENTOS DOS PILARES

Em cada extremidade do pilar, tem-se seis graus de liberdade, que são:

- translação segundo os eixos  $x_p$ ,  $y_p$  e  $z_p$  do sistema local;

- rotação em torno dos eixos  $x_p$ ,  $y_p$  e  $z_p$  do mesmo sistema.

Então cada trecho de pilar isoladamente apresenta doze coordenadas.

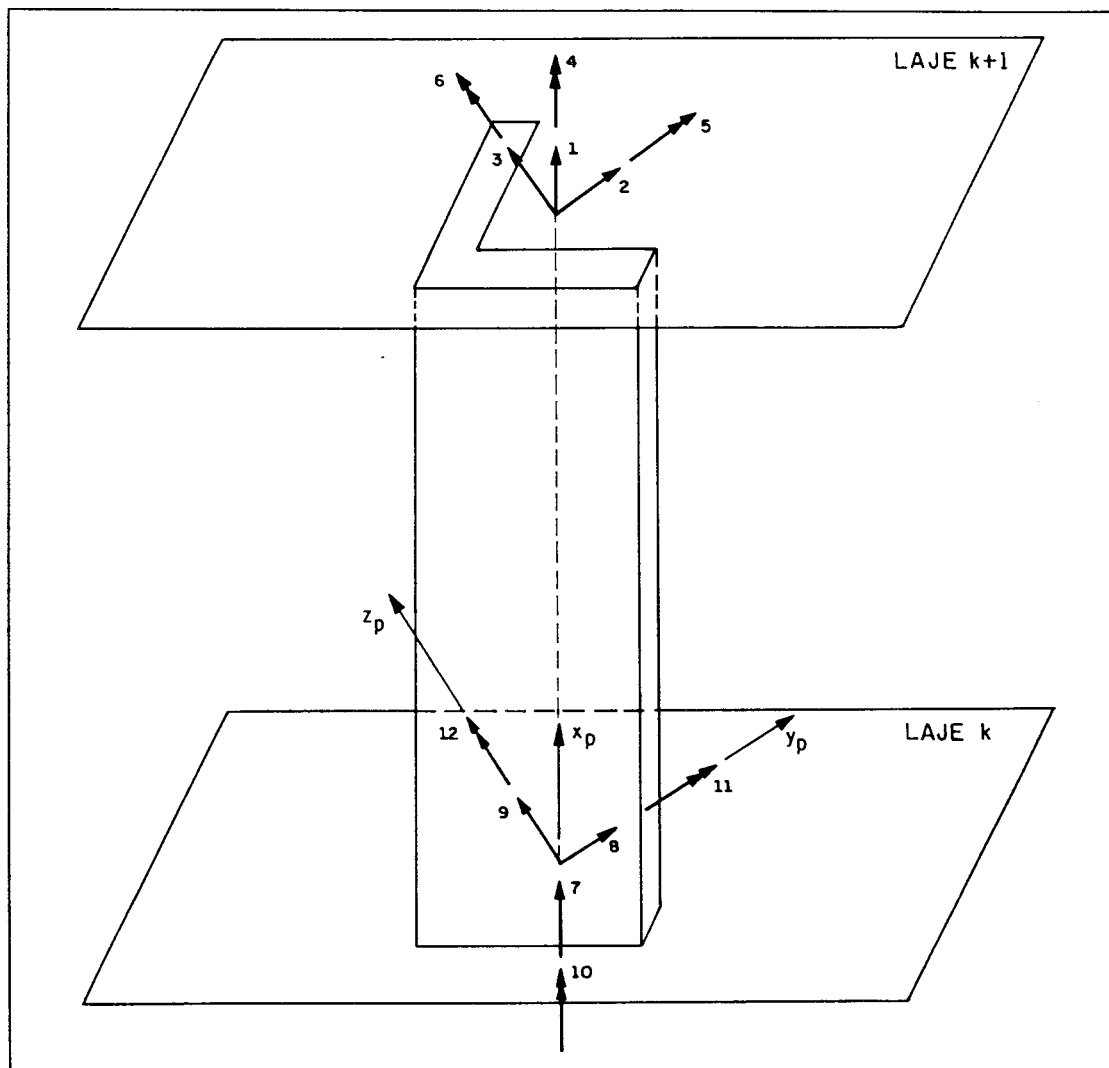


FIGURA 2.10 - Coordenadas deslocamentos locais de um trecho de pilar.



Portanto, a transposta do seu vetor de deslocamentos  $\{u_p\}^T$ , em coordenadas locais, fica:

$$\{u_p\}^T = \left\{ \delta_{xs} \quad \delta_{ys} \quad \delta_{zs} \quad \phi_{xs} \quad \phi_{ys} \quad \phi_{zs} \quad \delta_{xi} \quad \delta_{yi} \quad z_{zi} \quad \phi_{xi} \quad \phi_{yi} \quad \phi_{zi} \right\} \quad (2.4)$$

onde os índices  $s$  e  $i$  indicam as extremidades superior e inferior do pilar, respectivamente.

## 2.8 COORDENADAS DESLOCAMENTOS DA SUBESTRUTURA

Como cada subestrutura é composta de diferentes elementos, suas coordenadas são estabelecidas em função de cada elemento constituinte. As coordenadas locais de todos elementos horizontais (lajes e vigas), são colocadas em função das coordenadas independentes dos elementos verticais. Em seguida, compatibilizam-se as três coordenadas que determinam o movimento de corpo rígido das lajes, para os pilares. Então:

- para cada nó de pilar, tem-se os deslocamentos independentes que são: rotações em torno dos eixos Y e Z, e a translação segundo o eixo X do sistema de referência da subestrutura;

- para cada conjunto de lajes que formam o pavimento, suas coordenadas deslocamentos referente ao movimento de corpo rígido, constituirá também as coordenadas da subestrutura, que é único em cada pavimento.

Observa-se portanto, que as coordenadas dos elementos DKT que compõem as lajes, devem ser condensadas

para as coordenadas independentes dos pilares através da subestruturação em paralelo, visto adiante.

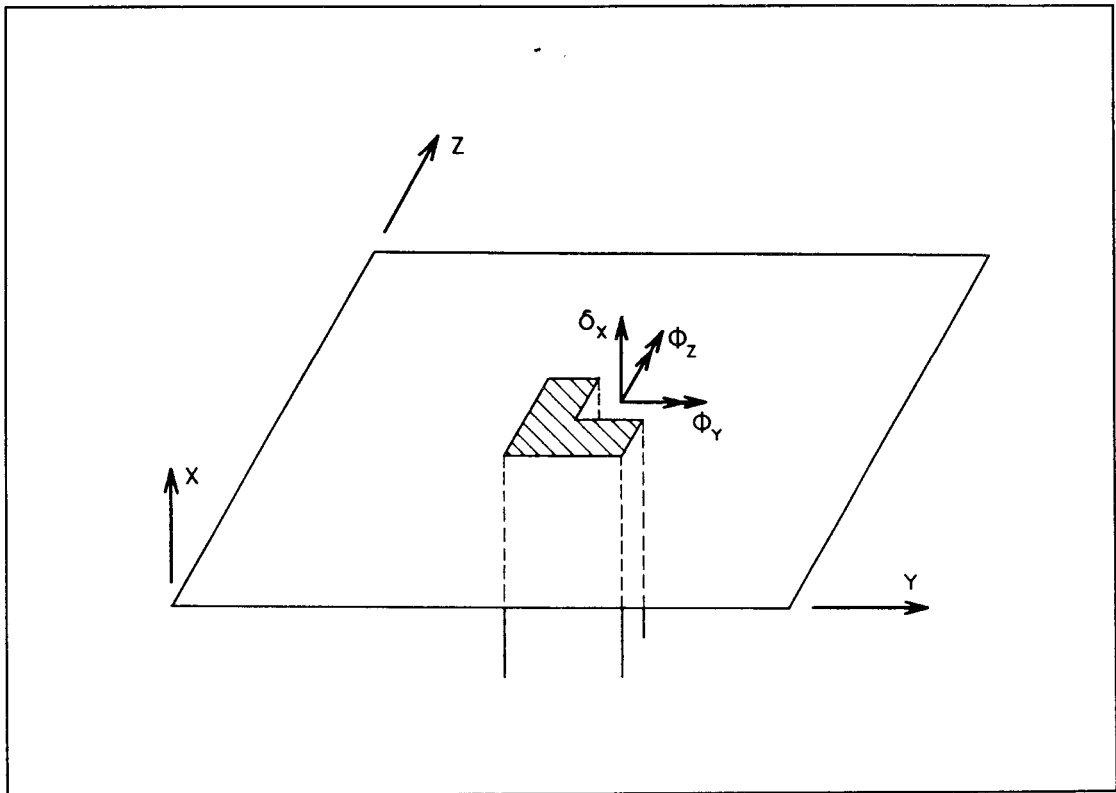


FIGURA 2.11 - Coordenadas deslocamentos do nó de pilar na subestrutura.

## CAPÍTULO 3

---

### MATRIZ DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS LINEARES

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo determina-se a matriz de rigidez de cada elemento linear (viga e pilar), referente ao sistema de coordenadas locais e globais (subestrutura), sem considerar a formação de painéis.

Sabe-se que a matriz de rigidez é obtida calculando-se os esforços necessários para manter o equilíbrio do elemento, quando impõe-se sucessivos estados de deslocamentos unitários segundo suas coordenadas. Desprezam-se os efeitos das deformações por força cortante na determinação das matrizes.

#### 3.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DAS VIGAS

Em cada elemento de viga, consideram-se a rigidez à torção, força cortante e flexão segundo o plano

vertical, mas desprezam-se a rigidez à força axial e também à flexão seu plano transversal na elaboração da matriz.

A matriz de rigidez da viga associada ao seu sistema de coordenadas locais,  $[K_v]$ , segundo a figura 2.7, é dada por:

$$[K_v] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{-12EI_z}{l^3} & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{GJ_t}{l} & 0 & 0 & \frac{-GJ_t}{l} & 0 \\ \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{4EI_z}{l} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\ \frac{-12EI_z}{l^3} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{-GJ_t}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{l} & 0 \\ \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{2EI_z}{l} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

sendo  $E$  e  $G$  o módulo de elasticidade longitudinal e transversal do material, respectivamente,  $I_z$  o momento de inércia em relação ao seu eixo  $z_v$ ,  $l$  o comprimento do trecho, e  $J_t$  o momento de inércia à torção.

Em seguida deve-se expressar essa matriz de rigidez em função das coordenadas deslocamentos independentes da subestrutura, para isso, é necessário fazer uma transformação de coordenadas através de uma matriz de incidência correspondente.

Considere um trecho de viga entre nós de pilar, esquematizado na figura 3.1 .

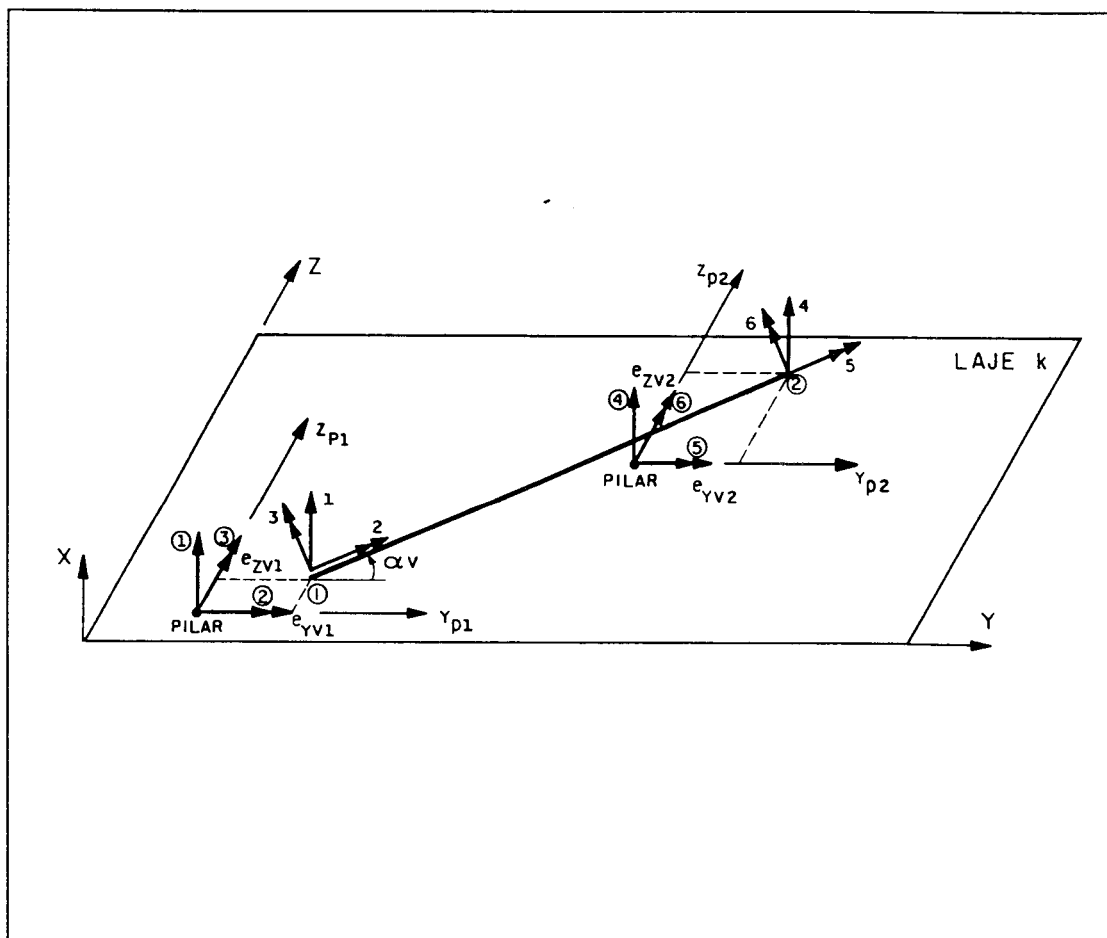


FIGURA 3.1 - Trecho de viga entre nós de pilar .

onde:

-  $e_{yv1}$  e  $e_{zv1}$  são as excentricidades do nó 1 em relação ao pilar em que se conecta;

-  $e_{yv2}$  e  $e_{zv2}$  são as excentricidades do nó 2, relação ao pilar correspondente;

-  $\alpha_v$  o ângulo formado entre o eixo Y da subestrutura e o próprio eixo da viga, positivo no sentido anti-horário;

O vetor de deslocamentos  $\{u_v\}$  do sistema local, pode ser obtido a partir do vetor de deslocamentos  $\{U_v\}$  da subestrutura, através da seguinte expressão:

$$\{u_v\} = [\beta_v] \cdot \{U_v\} \quad (3.1)$$

onde  $[\beta_v]$  é a matriz de incidência, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$[\beta_v] = \begin{bmatrix} [\beta_v]_1 & [0] \\ [0] & [\beta_v]_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

sendo  $[\beta_v]_1$  e  $[\beta_v]_2$  submatrizes de ordem 3x3, responsável pela transformação de coordenadas das extremidades 1 e 2, respectivamente, e  $[0]$  a submatriz nula de mesma ordem. Sendo os nós de extremidade, nós de pilar, então:

$$[\beta_v]_1 = \begin{bmatrix} 1 & e_{zv1} & -e_{yv1} \\ 0 & \cos(\alpha_v) & \sin(\alpha_v) \\ 0 & -\sin(\alpha_v) & \cos(\alpha_v) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$[\beta_v]_2 = \begin{bmatrix} 1 & e_{zv2} & -e_{yv2} \\ 0 & \cos(\alpha_v) & \sin(\alpha_v) \\ 0 & -\sin(\alpha_v) & \cos(\alpha_v) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Agora, se outro trecho de viga qualquer estiver compreendido entre nós de viga, as submatrizes correspondentes ficam:

$$[\beta_v]_1 = [\beta_v]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_v) & \sin(\alpha_v) \\ 0 & -\sin(\alpha_v) & \cos(\alpha_v) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

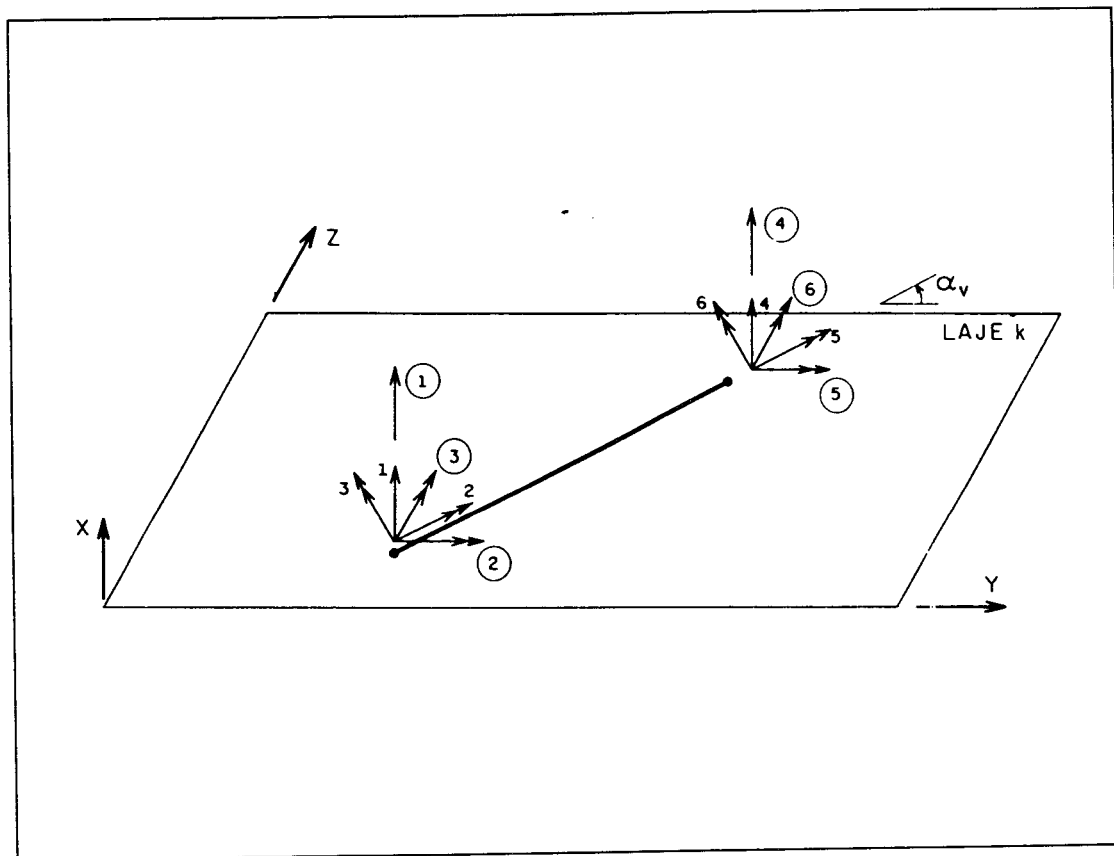


FIGURA 3.2 - Trecho de viga entre nós de viga.

Os números circunscritos na figura acima indicam as coordenadas da subestrutura. Observa-se nesse caso, que não há mais a contribuição dos trechos rígidos horizontais, devido a ausência dos pilares, conseqüentemente, são omitidas as excentricidades. Dessa forma, pode-se facilmente determinar a matriz de incidência  $[\beta_v]$ , para diferentes casos de conectividade.

Com a matriz de incidência determinada, a matriz de rigidez das vigas, em função das coordenadas da subestrutura  $[K_v]_G$ , é obtida através da seguinte expressão:

$$[K_v]_G = [\beta_v]^T \cdot [K_v] \cdot [\beta_v] \quad (3.6)$$

sendo  $[\beta_v]^T$  a transposta da matriz  $[\beta_v]$ .

### 3.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DOS PILARES

Como se está admitindo um comportamento tridimensional dos pilares, considera-se a rigidez à torção, flexão e à força axial na elaboração da matriz. Não é previsto a aplicação de carregamentos externos ao longo do seu eixo longitudinal, pois admite-se que as resultantes das forças do vento estão aplicadas apenas no plano de cada pavimento.

A matriz de rigidez do pilar, em coordenadas locais  $[K_p]$ , segundo a figura 2.10, pode ser particionada em:

$$[K_p] = \begin{bmatrix} [K_{p1}] & [K_{p2}] \\ [K_{p2}]^T & [K_{p3}] \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

onde  $[K_{p1}]$ ,  $[K_{p2}]$  e  $[K_{p3}]$  são submatrizes de ordem  $6 \times 6$ , e  $[K_{p2}]^T$ , a transposta da matriz  $[K_{p2}]$ , sendo:

$$[K_{p1}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{h^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{h^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{h^3} & 0 & \frac{6EI_y}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{h^2} & 0 & \frac{4EI_y}{h} & 0 \\ 0 & \frac{-6EI_z}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{h} \end{bmatrix}$$



$$[K_{p2}] = \begin{bmatrix} \frac{-EA}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{h^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{h^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{h^3} & 0 & \frac{6EI_y}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ_t}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{h^2} & 0 & \frac{2EI_y}{h} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{h} \end{bmatrix}$$

$$[K_{p3}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{h^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{h^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{h^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{h^2} & 0 & \frac{4EI_y}{h} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{h} \end{bmatrix}$$

onde  $h$  é a altura do pilar,  $A$  a área da seção transversal,  $I_y$  e  $I_z$  os momentos de inércia em relação aos eixos principais  $y_p$  e  $z_p$ , respectivamente. Como a matriz de rigidez está associado aos eixos principais, é necessário conhecer previamente as características geométricas da seção transversal a partir de eixos de referência quaisquer, previamente adotados.

Também deve-se relacionar as coordenadas locais do pilar com suas coordenadas na subestrutura. As translações segundo os eixos horizontais,  $\delta_y$  e  $\delta_z$ , e a rotação em torno do eixo vertical  $\phi_x$ , que a princípio se poderia considerar

para todos os pilares, são compatibilizados através de um único nó, devido a rigidez infinita admitida no plano horizontal das lajes, proporcionando portanto, os mesmos movimentos desses três graus de liberdade em cada pavimento. Assim, as coordenadas em cada pilar na subestrutura são: rotações em torno dos eixos Y e Z e a translação segundo o eixo X, (coordenadas independentes), mais as correspondentes ao movimento de corpo rígido das lajes, que são as translações segundo os eixos horizontais e a rotação em torno do eixo vertical, sendo todas associadas ao sistema global (subestrutura).

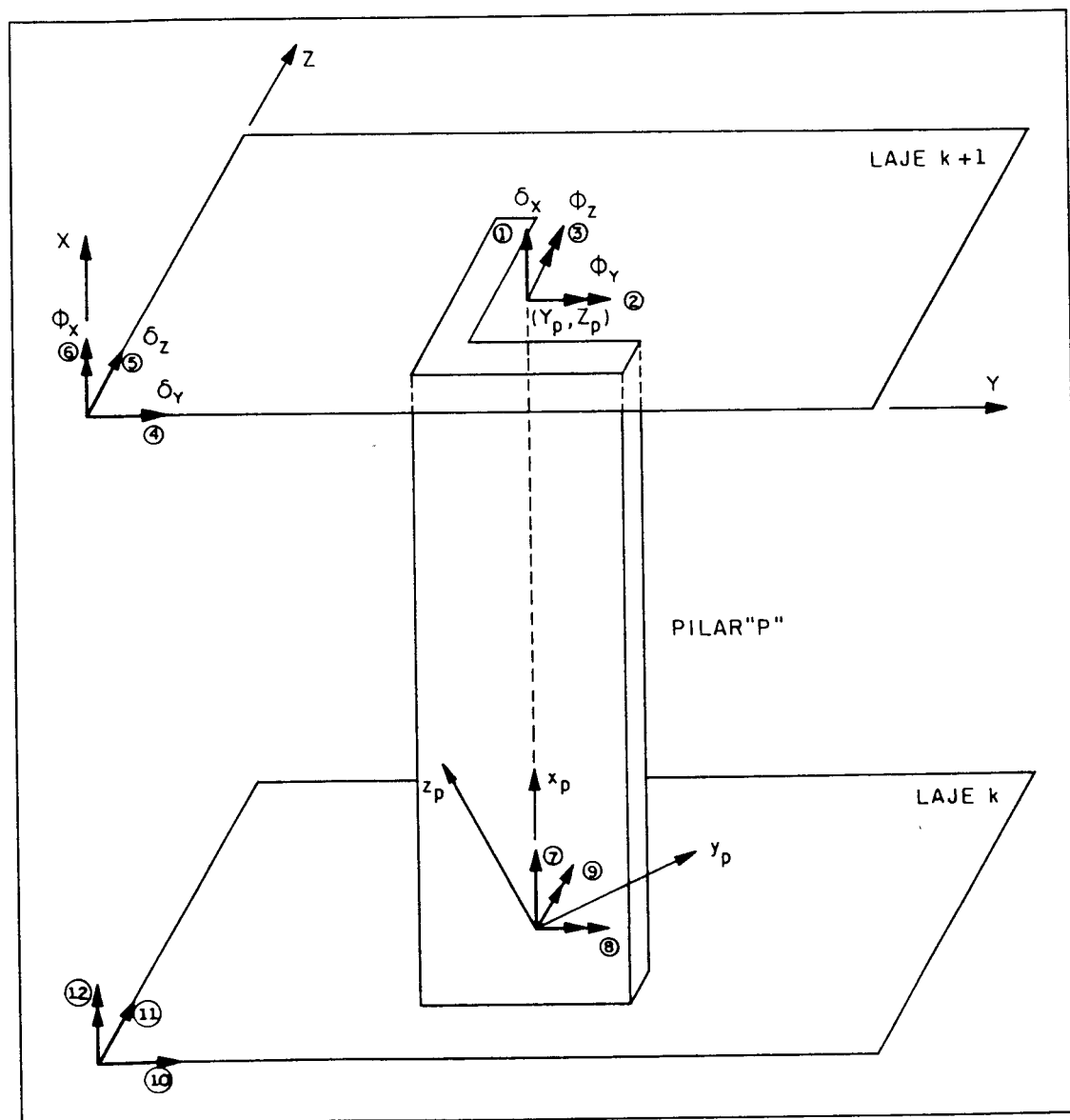


FIGURA 3.3 - Coordenadas deslocamentos do pilar na subestrutura.

sendo:

-  $Y_p$  e  $Z_p$  as coordenadas do nó do pilar P, em relação ao sistema de referência da subestrutura;

-  $\delta_x$ ,  $\phi_y$  e  $\phi_z$  os deslocamentos independentes do nó de pilar nas coordenadas da subestrutura;

-  $\delta_y$ ,  $\delta_z$  e  $\phi_x$  os deslocamentos de corpo rígido do pavimento correspondente.

Portanto, a transposta do vetor de deslocamentos do pilar,  $\{U_p\}^T$ , nas coordenadas da subestrutura, fica:

$$\{U_p\}^T = \{\delta_{xs} \ \phi_{ys} \ \phi_{zs} \ \delta_{ys} \ \delta_{zs} \ \phi_{xs} \ \delta_{xi} \ \phi_{yi} \ \phi_{zi} \ \delta_{yi} \ \delta_{zi} \ \phi_{xi}\} \quad (3.8)$$

A matriz de rigidez do pilar associada às coordenadas da subestrutura, pode ser obtida a partir de  $[K_p]$ , através de duas matrizes de incidência,  $[\beta_{pr}]$  e  $[\beta_{pt}]$ , referentes à rotação e translação dos eixos horizontais, respectivamente. Essas matrizes são escritas da seguinte forma:

$$[\beta_{pr}] = \begin{bmatrix} [\beta_{pr}]_s & [0] \\ [0] & [\beta_{pr}]_i \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

e

$$[\beta_{pt}] = \begin{bmatrix} [\beta_{pt}]_s & [0] \\ [0] & [\beta_{pt}]_i \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

onde as submatrizes  $[\beta_{pr}]_s$  e  $[\beta_{pr}]_i$ , representam as rotações dos eixos principais da extremidade superior e inferior do

pilar, respectivamente, e as submatrizes  $[\beta_{pt}]_s$  e  $[\beta_{pt}]_i$ , representam as translações.

Para extremidade superior do pilar, tem-se:

$$[\beta_{pr}]_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_p) & \sin(\alpha_p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha_p) & \cos(\alpha_p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_p) & \sin(\alpha_p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha_p) & \cos(\alpha_p) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde  $\alpha_p$  é o ângulo entre o eixo Y do sistema de referência da subestrutura e o eixo  $y_p$  do sistema local.

$$[\beta_{pt}]_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -Z_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Y_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

O mesmo acontece para extremidade inferior, caso não se tenha variação da seção transversal do pilar. Portanto, a matriz de incidência  $[\beta_p]$ , que relaciona os deslocamentos globais (subestrutura) do pilar com seus deslocamentos locais, é dado por:

$$[\beta_p] = [\beta_{pr}] \cdot [\beta_{pt}] \quad (3.13)$$

particionada em:

$$[\beta_p] = \begin{bmatrix} [\beta_p]_s & [0] \\ [0] & [\beta_p]_i \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

onde  $[\beta_p]_s$  e  $[\beta_p]_i$  são as submatrizes referente às extremidades superior e inferior do pilar, respectivamente. Efetuando-se o produto matricial da expressão (3.13), pode-se facilmente encontrar a expressão da submatriz  $[\beta_p]_s$ :

$$[\beta_p]_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_p) & \sin(\alpha_p) & d_{Yp} \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha_p) & \cos(\alpha_p) & d_{Zp} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(\alpha_p) & \sin(\alpha_p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha_p) & \cos(\alpha_p) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

A mesma expressão encontra-se para submatriz  $[\beta_p]_i$ , sendo  $d_{Yp}$  e  $d_{Zp}$  as distâncias dos eixos  $y_p$  e  $z_p$  do pilar à origem do sistema de referência da subestrutura.

$$d_{Yp} = Y_p \cdot \sin(\alpha_p) - Z_p \cdot \cos(\alpha_p) \quad (3.16)$$

$$d_{Zp} = Y_p \cdot \cos(\alpha_p) + Z_p \cdot \sin(\alpha_p) \quad (3.17)$$

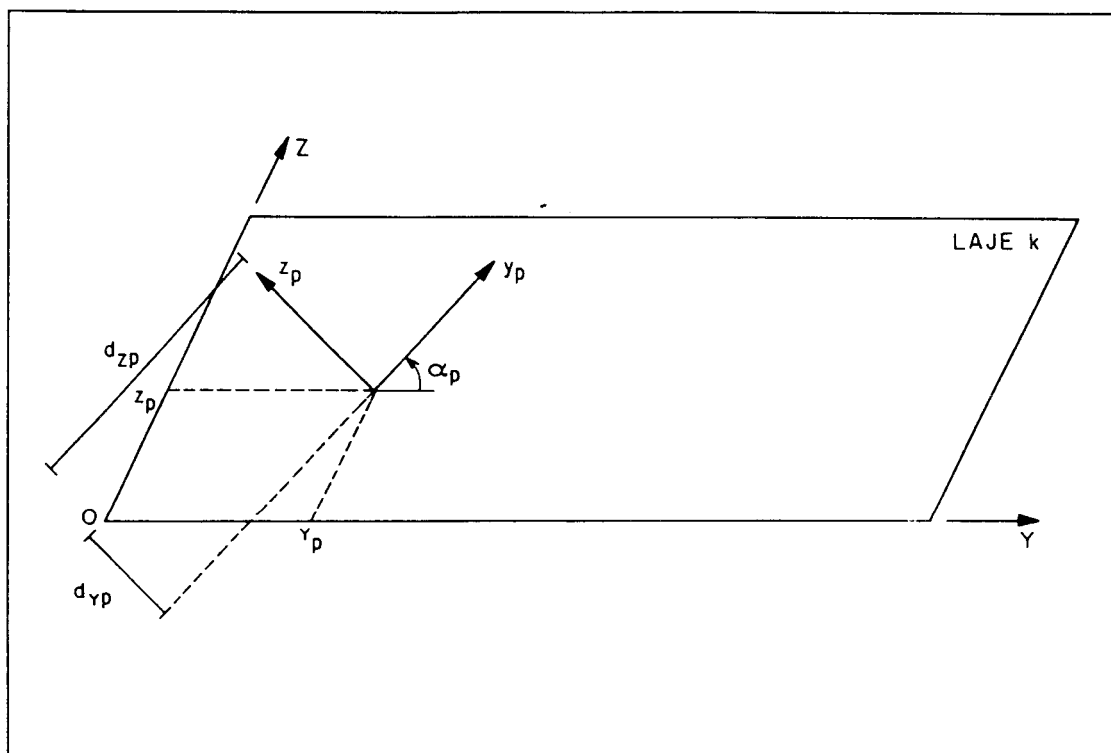


FIGURA 3.4 - Distância dos eixos do pilar à origem do sistema de referência da subestrutura.

Assim, a matriz de rigidez do pilar em função das coordenadas da subestrutura,  $[K_p]_G$ , é obtida por:

$$[K_p]_G = [\beta_p]^T \cdot [K_p] \cdot [\beta_p] \quad (3.18)$$

sendo  $[\beta_p]^T$  a transposta da matriz  $[\beta_p]$ .

### 3.3.1 EXCENTRICIDADES ENTRE PILARES

Como descrito anteriormente, são admitidas excentricidades em pilares de mesma prumada entre dois pavimentos consecutivos. Quando houver casos de redução excêntrica, a matriz de rigidez do pilar será modificada,

pois o nó da seção extrema inferior do pilar, não é o mesmo da extremidade superior.

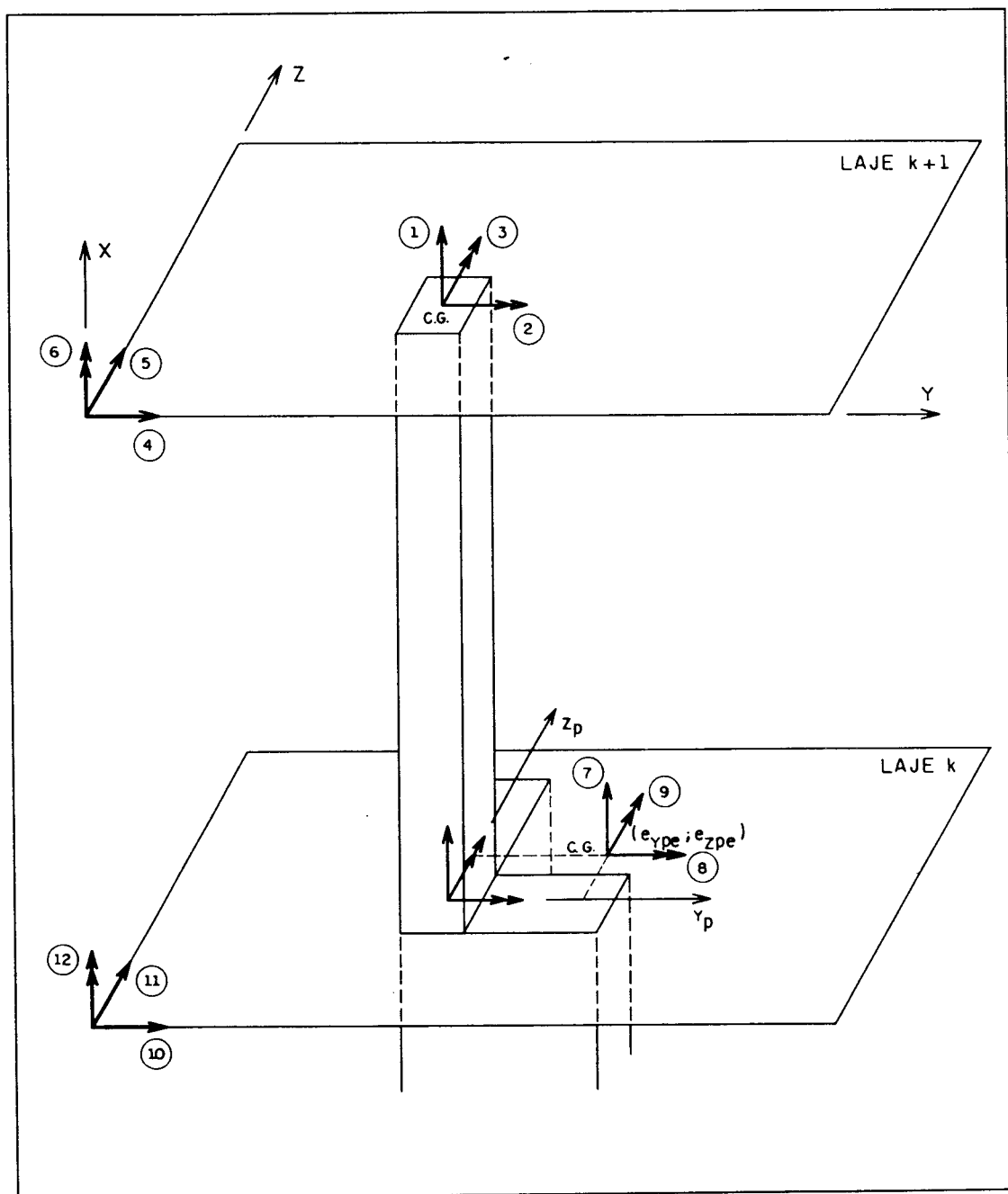


FIGURA 3.5 - Excentricidades entre pilares.

onde  $e_{y_{pe}}$  e  $e_{z_{pe}}$  são as excentricidades do centro de gravidade da seção inferior em relação ao sistema de eixos do pilar superior. Com isso, a matriz de rigidez do pilar de seção

reduzida, nas coordenadas da subestrutura,  $[K_{pe}]_G$ , é obtido por:

$$[K_{pe}]_G = [\beta_{pe}]^T \cdot [K_P]_G \cdot [\beta_{pe}] \quad (3.19)$$

onde  $[\beta_{pe}]$  é a matriz de incidência correspondente, escrita da seguinte forma:

$$[\beta_{pe}] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [\beta_{pe}]_i \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

sendo a submatriz  $[\beta_{pe}]_i$ , dada por:

$$[\beta_{pe}]_i = \begin{bmatrix} 1 & -e_{zpe} & e_{ype} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$



## CAPÍTULO 4

---

### MATRIZ DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS DE PLACA

#### 4.1 INTRODUÇÃO

Quando se estuda placas considerando-as como um meio contínuo, chega-se a um sistema de equações diferenciais cuja solução analítica é bastante restrita, conhecida apenas para alguns casos particulares. Entretanto, através de alguns métodos com possibilidade de implementação numérica como o Método das Diferenças Finitas ou o Método dos Elementos Finitos, permite-se obter soluções aproximadas para vários problemas reais.

Dentre esses destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), que consiste num método geral de discretização dos meios contínuos em vários elementos de dimensões finitas, onde sua solução recai na resolução de um sistema de equações lineares ao invés de equações diferenciais. A estrutura é então discretizada em várias subregiões ou elementos que estão interconectados através de seus pontos nodais, onde se estabelecem relações definidas matematicamente entre esforços e deslocamentos.

Na análise de flexão de placas utilizando o MEF, BATOZ et al(1980), concluiu que dentre os vários elementos finitos triangulares, com nove graus de liberdade, disponíveis no estudo de placas delgadas, o elemento DKT (Discrete Kirchhoff Theory) se apresentou como sendo o mais eficiente sob o ponto de vista teórico, numérico e computacional. Portanto, com a formulação desse elemento, determina-se também a contribuição da rigidez das lajes à flexão, possibilitando enfim a implementação de um modelo mais representativo do comportamento real da estrutura.

#### 4.2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Observa-se na figura 2.9 que o elemento finito DKT pertence à classe dos elementos triangulares com três graus de liberdade por nó de vértice. Sua formulação baseia-se inicialmente na teoria de Reissner-Mindlin, onde são consideradas as deformações por força cortante.

Sabe-se da teoria clássica de placas delgadas ou teoria de Kirchhoff, que essas deformações são desprezadas, tendo como hipótese fundamental que: "uma reta normal ao plano médio indeformado da placa, mantém-se normal à superfície média após a deformação", sendo portanto, uma generalização da hipótese de Bernoulli.

Então, pela teoria clássica, as rotações  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$  de uma reta normal à superfície média segundo os planos Y-X e Z-X, respectivamente, são diretamente relacionados com as derivadas parciais dos deslocamentos transversais  $w_{1Y}$  e  $w_{1Z}$ , segundo os eixos de referência Y e Z das lajes.

$$\beta_Y = -w_{1Y} \quad (4.1)$$

$$\beta_Z = -w_{1Z} \quad (4.2)$$

A partir da generalização da hipótese de Kirchhoff, a teoria de placas que inclui as deformações por força cortante (teoria de Reissner-Mindlin), tem como hipótese que: "uma reta normal ao plano médio permanece reta após a deformação, mas não necessariamente normal à superfície média deformada". Nesse caso, as rotações  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$  são funções independentes de  $w_{,Y}$  e  $w_{,Z}$ , respectivamente.

Posteriormente na sua formulação, a hipótese de Kirchhoff é introduzida ao longo dos lados do elemento, discretamente nos seus pontos nodais. Quando impõe-se essa condição, conseqüentemente as deformações por força cortante são desprezadas, pois afinal trata-se de placas delgadas, proporcionando assim, a convergência dos resultados para teoria clássica.

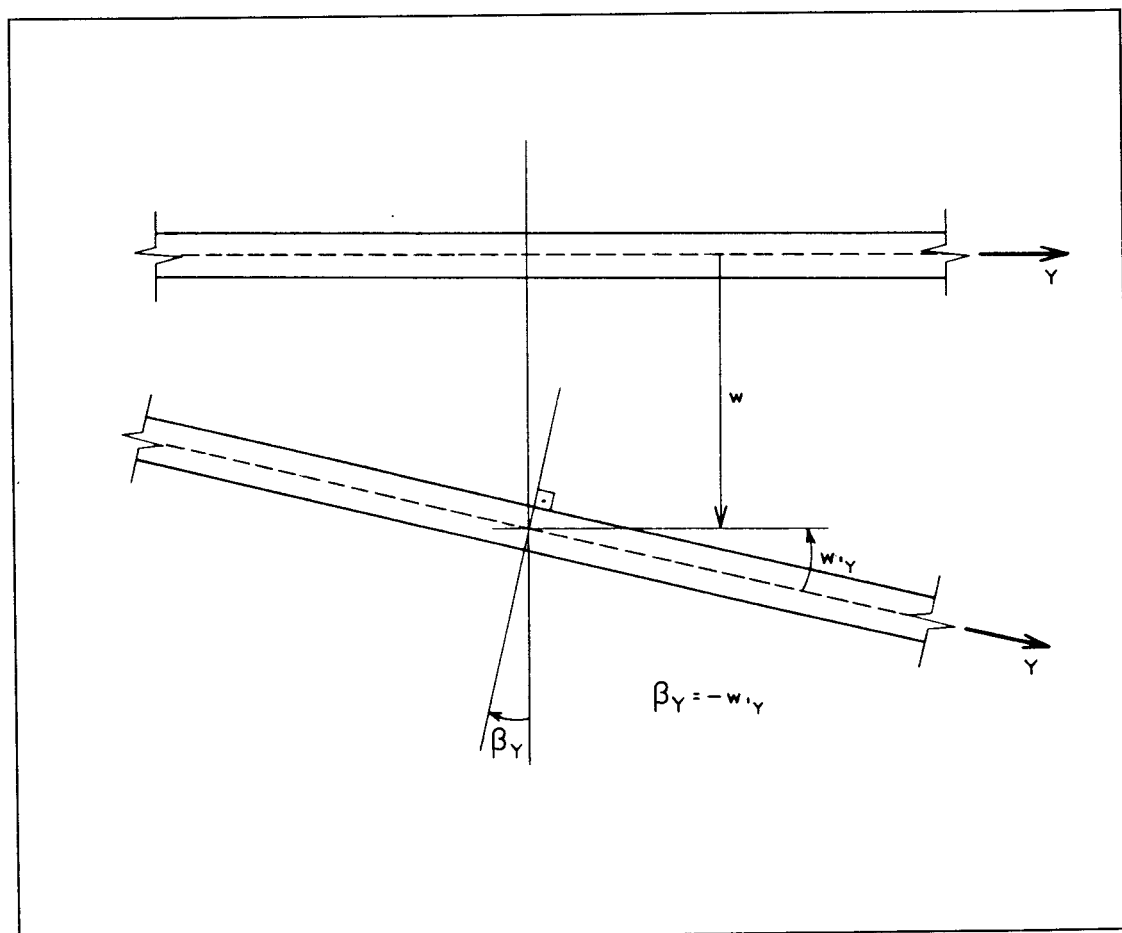


FIGURA 4.1 - Deslocamento segundo a teoria de Kirchhoff.

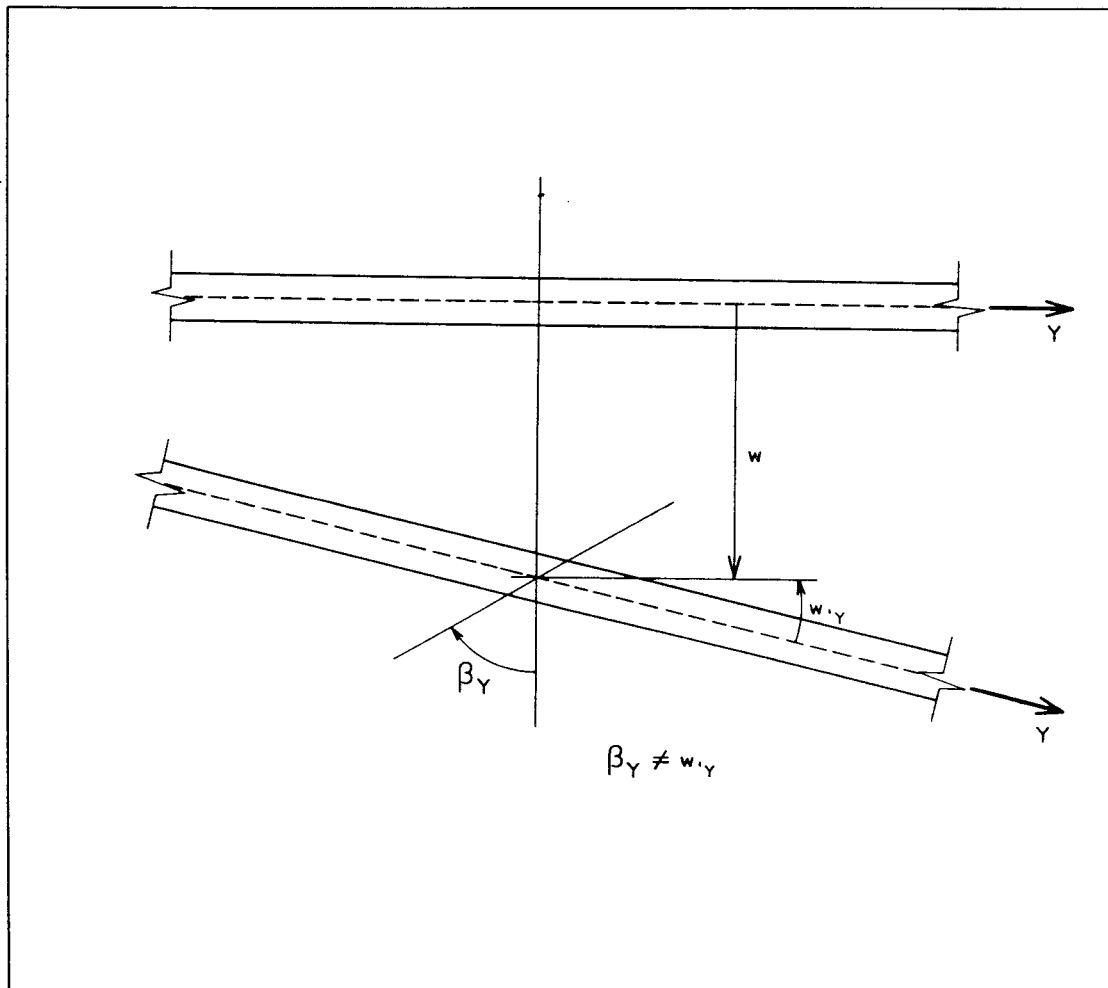


FIGURA 4.2 - Deslocamento segundo a teoria de Reissner-Mindlin.

#### 4.3 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Considerando-se a hipótese de Reissner-Mindlin e admitindo-se pequenos deslocamentos, as componentes de deslocamentos horizontais  $u$  e  $v$ , de um ponto genérico da placa de coordenadas  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , são:

$$u = X \beta_Y(Y, Z); \quad v = X \beta_Z(Y, Z) \quad \text{e} \quad w = w(Y, Z) \quad (4.3)$$

onde  $w$  é o deslocamento transversal na direção do eixo  $X$ .

O vetor de deformação por flexão  $\{\varepsilon\}_f$  é dado por:

$$\{\varepsilon\}_f = \begin{Bmatrix} \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{YZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial Y} \end{Bmatrix} = X \begin{Bmatrix} \beta_{Y',Y} \\ \beta_{Z',Z} \\ \beta_{Y',Z} + \beta_{Z',Y} \end{Bmatrix} = X \{\bar{k}\} \quad (4.4)$$

onde  $\{\bar{k}\}$  é o vetor curvatura.

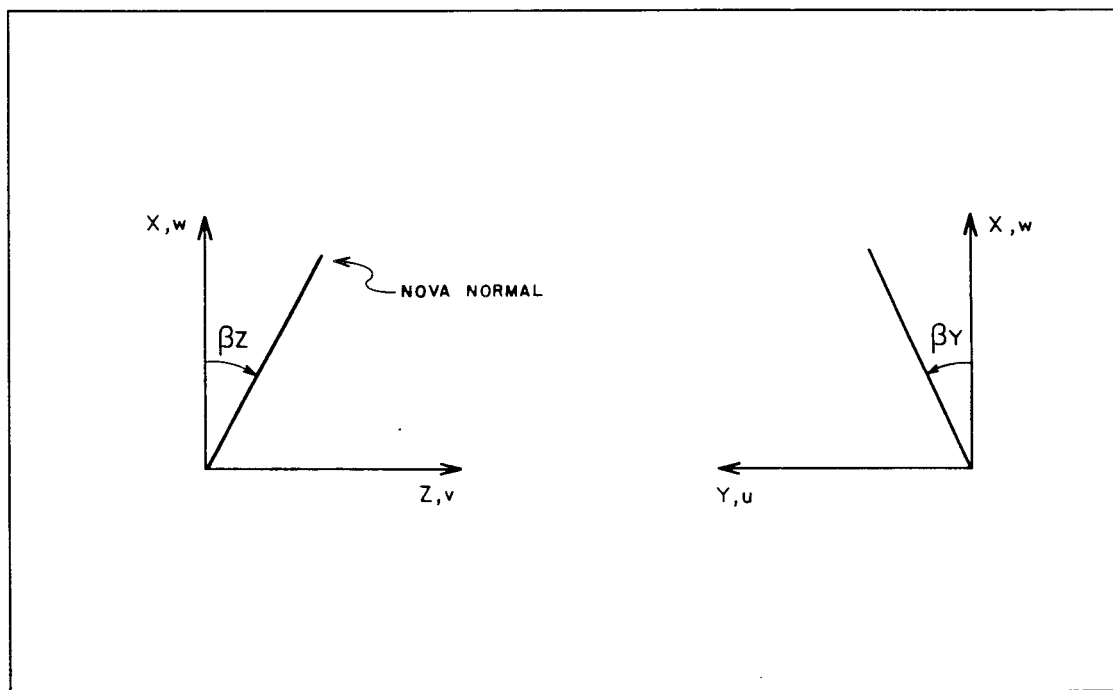


FIGURA 4.3 - Convenções positivas das rotações  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$ .

O vetor de deformação transversal devido à força cortante,  $\{\gamma\}$ , é dado por:

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{YX} \\ \gamma_{ZX} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{',Y} + \beta_Y \\ w_{',Z} + \beta_Z \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Observa-se que as deformações por flexão variam linearmente ao longo da espessura da laje, enquanto que as deformações transversais devido à força cortante são constantes com a mesma. A componente de tensão  $\sigma_x$  é desprezada por ser pequena em relação às tensões  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ .

A relação tensão-deformação na placa de material homogêneo e isotrópico, de comportamento elástico-linear e com espessura  $h$  constante, num ponto genérico é dado por:

$$\{\sigma\}_f = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \{\epsilon\}_f = \frac{E}{1-\nu^2} X \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \{\bar{k}\}$$

$$\{\sigma\}_f = \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = X [D] \{\bar{k}\} \quad (4.6)$$

e

$$\{\sigma\}_c = \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E \psi}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{\gamma\} = [E] \{\gamma\} \quad (4.7)$$

Os termos  $E$  e  $\nu$  nas equações (4.6) e (4.7) são respectivamente o módulo de elasticidade longitudinal do material e o coeficiente de Poisson, e  $\psi$  um fator de correção para força cortante, geralmente adotado 5/6. Os índices  $f$  e  $c$  referem-se respectivamente à flexão e ao cisalhamento.

Com as deformações e tensões definidas, a energia de deformação total pode ser escrita da seguinte forma:

$$U = U_f + U_c$$

onde:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}_f^t \{\sigma\}_f dV = \frac{1}{2} \int_V [X \{\bar{k}\}]^t [X [D] \{\bar{k}\}] dXdYdZ$$

$$U_f = \frac{1}{2} \int_V \{\bar{k}\}^t X^2 [D] \{\bar{k}\} dXdYdZ$$

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{\bar{k}\}^t [D]_f \{\bar{k}\} dA \quad (4.8)$$

sendo:

$$[D]_f = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X^2 [D] dX = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

e

$$U_c = \frac{1}{2} \int_V \{\gamma\}^t \{\sigma\}_c dV = \frac{1}{2} \int_V \{\gamma\}^t [E] \{\gamma\} dXdYdZ$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_A \{\gamma\}^t [D]_c \{\gamma\} dA \quad (4.10)$$

onde:

$$[D]_c = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [E] dX = \frac{E h \psi}{2(1 + \nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuada-se as operações das equações (4.8) e (4.10), encontra-se:

$$U_f = \frac{E h^3}{24(1 - \nu^2)} \int_A \{ \beta_{Y,Y}^2 + \beta_{Z,Z}^2 + 2\nu\beta_{Y,Y}\beta_{Z,Z} + \frac{1 - \nu}{2} (\beta_{Z,Y} + \beta_{Y,Z})^2 \} dA$$

$$U_c = \frac{E h \Psi}{4(1 + \nu)} \int_A \{ (w_{,Y} + \beta_Y)^2 + (w_{,Z} + \beta_Z)^2 \} dA$$

É importante observar que ambas as parcelas da energia de deformação estão escritas em função apenas das primeiras derivadas, sendo rotações em  $U_f$  e deslocamentos transversais em  $U_c$ , necessitando-se, portanto, apenas garantir a continuidade  $C^0$  para que se tenha o elemento conforme ou compatível.

#### 4.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DKT

Nas placas delgadas a parcela da energia de deformação devido à força cortante é desprezível comparada à energia de deformação por flexão. Define-se placa delgada quando a relação entre sua espessura e seu menor vão, estiver compreendido entre 1/5 e 1/100. Assim, a expressão da energia de deformação total  $U$  do elemento DKT fica:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{ \bar{k} \}^t [D]_f \{ \bar{k} \} dYdZ \quad (4.11)$$

Sua formulação no estudo de placas delgadas baseia-se nas seguintes hipóteses:

(1) As rotações  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$  variam quadraticamente no elemento. Considere então o seguinte polinômio:

$$\beta_Y(Y, Z) = \alpha_1 + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z + \alpha_4 Y^2 + \alpha_5 Y Z + \alpha_6 Z^2 \quad (4.12)$$



$$\beta_Z(Y, Z) = \rho_1 + \rho_2 Y + \rho_3 Z + \rho_4 Y^2 + \rho_5 Y Z + \rho_6 Z^2 \quad (4.13)$$

Observa-se então para que se tenha compatibilidade das rotações, o elemento deve possuir três nós por lado.

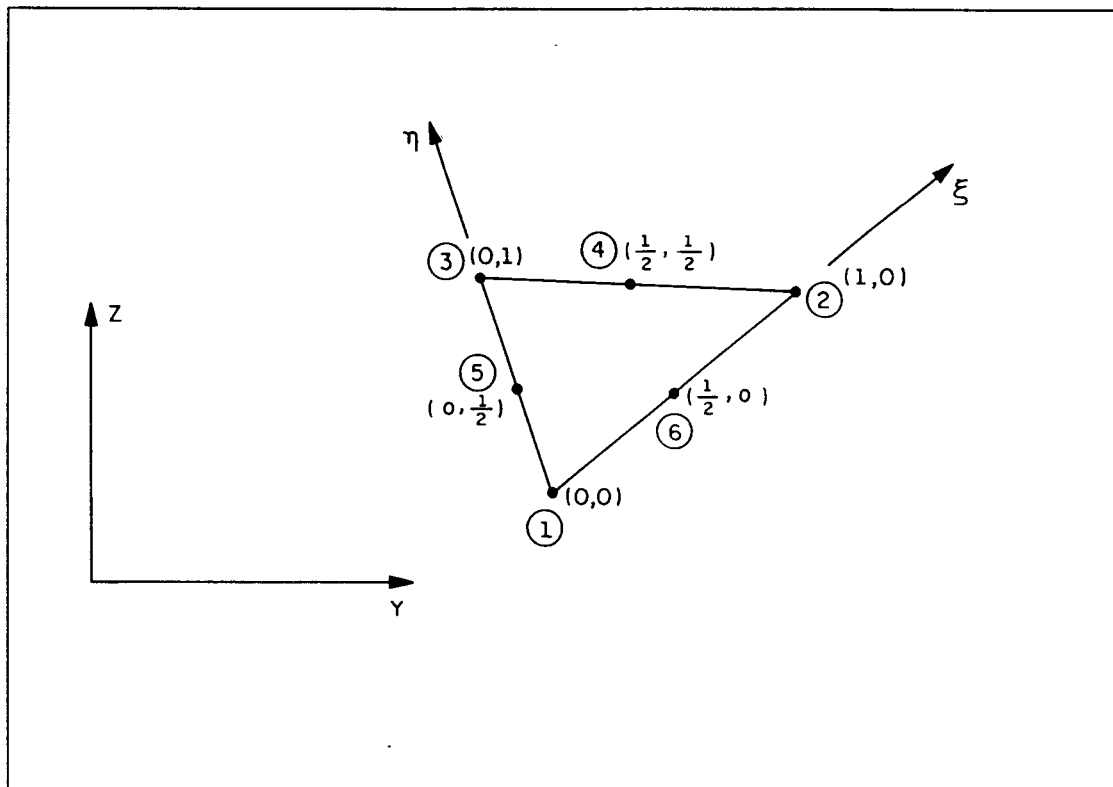


FIGURA 4.4 - Disposição inicial dos pontos nodais no elemento DKT.

Escrevendo-se as equações (4.12) e (4.13) na forma matricial, em função das coordenadas homogêneas  $\xi$  e  $\eta$ , tem-se agora:

$$\beta_Y(\xi, \eta) = \left\{ 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \right\} \begin{Bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \\ \alpha'_4 \\ \alpha'_5 \\ \alpha'_6 \end{Bmatrix} = \underline{\Psi}(\xi, \eta) \{ \alpha' \} \quad (4.14)$$

$$\{\alpha'\} = [A]^{-1}\{\beta_Y\} \quad (4.18)$$

$$\{\rho'\} = [A]^{-1}\{\beta_Z\} \quad (4.19)$$

onde:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo-se as equações (4.18) e (4.19) em (4.14) e (4.15), respectivamente, obtém-se:

$$\beta_Y(\xi, \eta) = \underline{\psi}(\xi, \eta)[A]^{-1}\{\beta_Y\} \quad (4.20)$$

$$\beta_Z(\xi, \eta) = \underline{\psi}(\xi, \eta)[A]^{-1}\{\beta_Z\} \quad (4.21)$$

Efetuando-se os produtos matriciais das equações anteriores, encontra-se finalmente as rotações exclusivamente em função de seus parâmetros nodais.

$$\beta_Y(\xi, \eta) = \{N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6\}\{\beta_Y\} \quad (4.22)$$

$$\beta_Z(\xi, \eta) = \{N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6\}\{\beta_Z\} \quad (4.23)$$

Sendo  $N_i(\xi, \eta)$  as funções de forma, dadas por:

$$N_1 = 1 - 3\xi - 3\eta + 2\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2$$

$$N_2 = -\xi + 2\xi^2$$

$$N_3 = -\eta + 2\eta^2$$

$$N_4 = 4\xi\eta$$

$$N_5 = 4\eta - 4\xi\eta - 4\eta^2$$

$$N_6 = 4\xi - 4\xi\eta - 4\xi^2$$

(2) A hipótese de Kirchhoff é imposta discretamente ao longo dos lados do elemento nos seus pontos nodais, possibilitando enfim, relacionar as rotações com as primeiras derivadas dos deslocamentos transversais.

a) Nós de vértice (Nós 1,2 e 3).

$$\{\gamma\} = \begin{bmatrix} \beta_Y + w_{,Y} \\ \beta_Z + w_{,Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

b) Nós de meio de lado (Nós 4,5,6).

$$\beta_{sk} + w_{,sk} = 0 \quad (4.25)$$

onde o índice  $k$  representa os nós de meio de lado, e  $s$  uma coordenada que percorre cada lado, no sentido anti-horário em torno de cada lado.

$$\beta_z(\xi, \eta) = \left\{ 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \right\} \begin{Bmatrix} \rho'_1 \\ \rho'_2 \\ \rho'_3 \\ \rho'_4 \\ \rho'_5 \\ \rho'_6 \end{Bmatrix} = \underline{\Psi}(\xi, \eta) \{\rho'\} \quad (4.15)$$

Os parâmetros generalizados  $\{\alpha'\}$  e  $\{\rho'\}$  são transformados para os parâmetros nodais  $\{\beta_Y\}$  e  $\{\beta_Z\}$ , respectivamente, particularizando-se a função para cada nó do elemento. Então:

$$\{\beta_Y\} = \begin{Bmatrix} \beta_{Y1} \\ \beta_{Y2} \\ \beta_{Y3} \\ \beta_{Y4} \\ \beta_{Y5} \\ \beta_{Y6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha'\} = [A] \{\alpha'\} \quad (4.16)$$

Da mesma forma, encontra-se:

$$\{\beta_Z\} = \begin{Bmatrix} \beta_{Z1} \\ \beta_{Z2} \\ \beta_{Z3} \\ \beta_{Z4} \\ \beta_{Z5} \\ \beta_{Z6} \end{Bmatrix} = [A] \{\rho'\} \quad (4.17)$$

então:

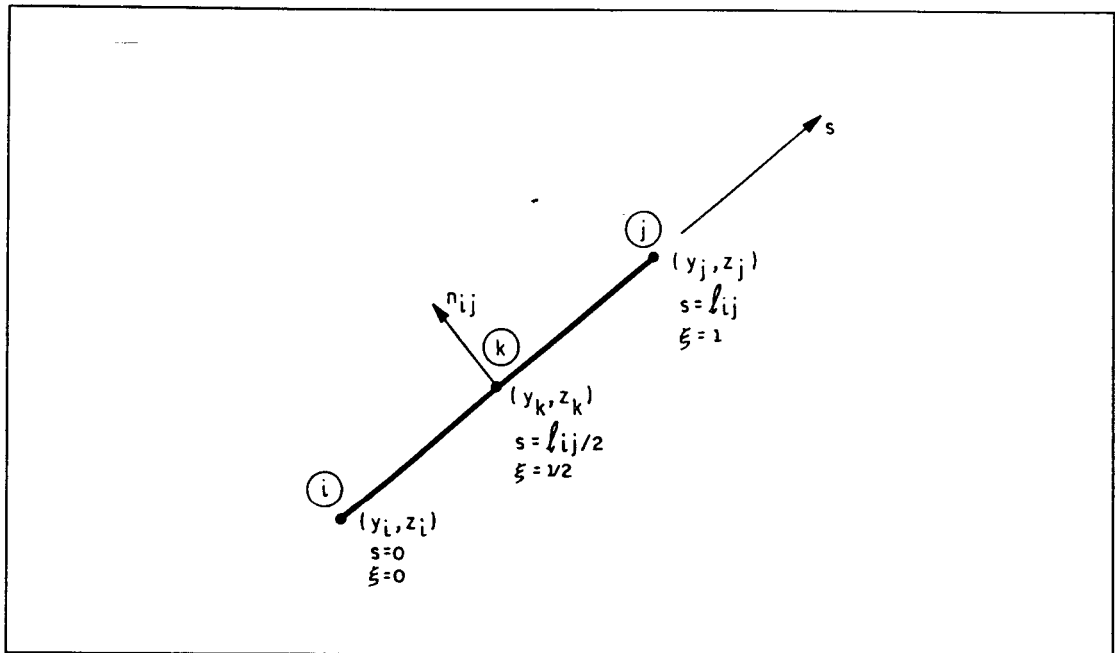


FIGURA 4.5 - Coordenadas dos nós do lado ij do elemento.

(3) A variação de  $w$  é cúbica ao longo dos lados do elemento.

Em coordenadas genéricas, a função  $w$  num lado  $ij$  qualquer do elemento fica:

$$w_s = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 \quad (4.26)$$

Passando para coordenadas adimensionais, tem-se:

$$w_s = \alpha'_0 + \alpha'_1 \frac{s}{l_{ij}} + \alpha'_2 \frac{s^2}{l_{ij}^2} + \alpha'_3 \frac{s^3}{l_{ij}^3} \quad (4.27)$$

logo:

$$w'_s = \frac{1}{l_{ij}} \alpha'_1 + \frac{2}{l_{ij}^2} \alpha'_2 s + \frac{3}{l_{ij}^3} \alpha'_3 s^2 \quad (4.28)$$

Para o nó inicial  $i$ , tem-se:

$$\frac{s}{l_{ij}} = 0$$

então:

$$w_i = \alpha'_0$$

$$w'_{si} = \frac{1}{l_{ij}} \alpha'_1$$

Para o nó central  $k$ , tem-se:

$$\frac{s}{l_{ij}} = \frac{1}{2}$$

então:

$$w_k = \alpha'_0 + \frac{1}{2} \alpha'_1 + \frac{1}{4} \alpha'_2 + \frac{1}{8} \alpha'_3$$

$$w'_{sk} = \frac{1}{l_{ij}} \alpha'_1 + \frac{1}{l_{ij}} \alpha'_2 + \frac{3}{4l_{ij}} \alpha'_3$$

Para o nó final  $j$ , tem-se:

$$\frac{s}{l_{ij}} = 1$$

então:

$$w_j = \alpha'_0 + \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3$$

$$w'_{sj} = \frac{1}{l_{ij}} \alpha'_1 + \frac{2}{l_{ij}} \alpha'_2 + \frac{3}{l_{ij}} \alpha'_3$$

Utilizando-se a formulação matricial, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ w'_{si} \\ w_j \\ w'_{sj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/l_{ij}) & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (1/l_{ij}) & (2/l_{ij}) & (3/l_{ij}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha'_0 \\ \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ l_{ij} w'_{si} \\ w_j \\ l_{ij} w'_{sj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha'_0 \\ \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{Bmatrix}$$

assim:

$$\begin{Bmatrix} \alpha'_0 \\ \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ l_{ij} w'_{si} \\ w_j \\ l_{ij} w'_{sj} \end{Bmatrix}$$

então:

$$\alpha'_0 = w_i$$

$$\alpha'_1 = l_{ij} w'_{si}$$

$$\alpha'_2 = -3 w_i - 2 l_{ij} w'_{si} + 3 w_j - l_{ij} w'_{sj}$$

$$\alpha'_3 = 2 w_i + l_{ij} w'_{si} - 2 w_j + l_{ij} w'_{sj}$$

Sabe-se que:

$$w'_{sk} = \frac{1}{l_{ij}} \alpha'1 + \frac{1}{l_{ij}} \alpha'2 + \frac{3}{4l_{ij}} \alpha'3$$

Substituindo-se os valores anteriormente determinados, na expressão acima, encontra-se:

$$w'_{sk} = \frac{-3}{2l_{ij}} w_i - \frac{1}{4} w'_{si} + \frac{3}{2l_{ij}} w_j - \frac{1}{4} w'_{sj} \quad (4.29)$$

(4) Impõe-se uma variação linear de  $\beta_n$  (rotação na direção normal), ao longo dos lados. Dessa forma, a função  $\beta_n$  em coordenadas homogêneas fica:

$$\beta_n = [1 \quad \xi] \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Os parâmetros nodais ficam:

$$\begin{Bmatrix} \beta_{ni} \\ \beta_{nj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

então:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{ni} \\ \beta_{nj} \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$



Substituindo-se (4.32) em (4.30), encontra-se:

$$\beta_n = \begin{bmatrix} (1 - \xi) & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{ni} \\ \beta_{nj} \end{Bmatrix}$$

Para encontrarmos o valor da função no nó central  $k$ , basta igualar  $\xi = \frac{1}{2}$ , e substituir na expressão acima:

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2} (\beta_{ni} + \beta_{nj}) \quad (4.33)$$

A partir das quatro hipóteses anteriormente citadas e das relações geométricas existentes para cada lado do triângulo, pode-se obter as rotações  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$  em função dos nove graus de liberdade do elemento.

As relações geométricas necessárias são:

$$\begin{bmatrix} \beta_Y \\ \beta_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

e

$$\begin{bmatrix} w_{,s} \\ w_{,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_Y \\ \phi_Z \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

onde  $c = \cos(Y, n_{ij})$  e  $s = \sin(Y, n_{ij})$

As rotações em função dos parâmetros nodais  $\{u_{DKT}\}$ , já definido na equação (2.3) do segundo capítulo, pode ser escrita como:

$$\beta_Y = [\bar{G}]\{u_{DKT}\} \quad (4.36)$$

$$\beta_Z = [\bar{H}]\{u_{DKT}\} \quad (4.37)$$

sendo  $[\bar{G}]$  e  $[\bar{H}]$ , matrizes de ordem  $1 \times 9$ . Pode-se ainda reescrevê-las da seguinte maneira:

$$[\bar{G}] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2][G] \quad (4.38)$$

$$[\bar{H}] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2][H] \quad (4.39)$$

ambas as matrizes  $[G]$  e  $[H]$  são de ordem  $6 \times 9$ , dadas a seguir:

$$[G]^T = \begin{bmatrix} 0 & -6a_6 & -6a_5 & 6a_6 & -6(a_5 - a_6) & -6a_5 \\ 0 & 4b_6 & 4b_5 & -4b_6 & -4(b_5 + b_6) & -4b_5 \\ 1 & (-3 - 4c_6) & (-3 - 4c_5) & (2 + 4c_6) & 4(1 + c_5 + c_6) & (2 + 4c_5) \\ 0 & 6a_6 & 0 & -6a_6 & -6(a_4 + a_6) & 0 \\ 0 & 4b_6 & 0 & -4b_6 & 3(b_6 + b_4) & 0 \\ 0 & (-1 - 4c_6) & 0 & (2 + 4c_6) & 4(c_6 - c_4) & 0 \\ 0 & 0 & 6a_5 & 0 & 6(a_4 + a_5) & -6a_5 \\ 0 & 0 & 4b_5 & 0 & 3(b_4 - b_5) & -4b_5 \\ 0 & 0 & (-1 - 4c_5) & 0 & 4(c_5 - c_4) & (2 + 4c_5) \end{bmatrix}$$

$$[H]^T = \begin{bmatrix} 0 & 6d_6 & -6d_5 & -6d_6 & 6(d_5 - d_6) & 6d_5 \\ -1 & (3 + 4e_6) & (3 + 4e_5) & (-2 - 4e_6) & -4(1 + e_5 + e_6) & (-2 - 4e_5) \\ 0 & -4b_6 & -4b_5 & 4b_6 & 4(b_5 + b_6) & 4b_5 \\ 0 & -6d_6 & 0 & 6d_6 & 6(d_4 + d_6) & 0 \\ 0 & (1 + 4e_6) & 0 & (-2 - 4e_6) & 4(e_4 - e_6) & 0 \\ 0 & -4b_6 & 0 & 4b_6 & 3(b_6 - b_4) & 0 \\ 0 & 0 & 6d_5 & 0 & -6(d_4 + d_5) & -6d_5 \\ 0 & 0 & (1 + 4e_5) & 0 & 4(e_4 - e_5) & (-2 - 4e_5) \\ 0 & -4b_6 & -4b_5 & 0 & 3(b_5 - b_4) & 4b_5 \end{bmatrix}$$

onde:

$$a_k = -\frac{Y_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$b_k = \frac{3}{4} Y_{ij} Z_{ij} / l_{ij}^2$$

$$c_k = \left( \frac{1}{4} Y_{ij}^2 - \frac{1}{2} Z_{ij}^2 \right) / l_{ij}^2$$

$$d_k = -Z_{ij} / l_{ij}^2$$

$$e_k = \left( \frac{1}{4} Z_{ij}^2 - \frac{1}{2} Y_{ij}^2 \right) / l_{ij}^2$$

$$l_{ij}^2 = (Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2)$$

sendo  $k = 4, 5, 6$  para os lados  $ij = 23, 31, 12$ , respectivamente.

Pode-se então agora escrever o vetor curvatura  $\{\bar{k}\}$ , em função dos graus de liberdade do elemento.

$$\{\bar{k}\} = [B]\{u_{DKT}\} \quad (4.40)$$

onde [B] é matriz de ordem 3x9 que relaciona o vetor curvatura com o vetor deslocamento do elemento.

Sabe-se que  $\{\bar{k}\}$  da equação (4.4), é:

$$\{\bar{k}\} = \begin{bmatrix} \beta_{Y'Y} \\ \beta_{Z'Z} \\ \beta_{Y'Z} + \beta_{Z'Y} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Derivando-se as expressões (4.36) e (4.37) obtém-se:

$$\beta_{Y'Y} = \frac{1}{2A} [1 \quad \xi \quad \eta] \begin{bmatrix} b_2[G]_2 + b_3[G]_3 \\ 2b_2[G]_4 + b_3[G]_5 \\ b_2[G]_5 + 2b_3[G]_6 \end{bmatrix} \{u_{DKT}\}$$

$$\beta_{Y'Y} = \frac{1}{2A} [1 \quad \xi \quad \eta][X]\{u_{DKT}\} \quad (4.42)$$

sendo A a área do triângulo,  $b_i = (z_j - z_m)$  e  $c_i = (y_m - y_j)$  com  $i, j, m$  assumindo valores 1, 2, 3 ciclicamente.  $[G]_i$  representa a  $i$ -ésima linha da matriz [G]. Analogamente, obtém-se os outros termos do vetor curvatura  $\{k\}$ .

$$\beta_{Z'Z} = \frac{1}{2A} [1 \quad \xi \quad \eta][Y]\{u_{DKT}\} \quad (4.43)$$

$$(\beta_{Y'Z} + \beta_{Z'Y}) = \frac{1}{2A} [1 \quad \xi \quad \eta][Z]\{u_{DKT}\}$$

onde:

$$[Y] = \begin{bmatrix} c_2[H]_2 + c_3[H]_3 \\ 2c_2[H]_4 + c_3[H]_5 \\ c_2[H]_5 + 2c_3[H]_6 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

e

$$[Z] = \begin{bmatrix} c_2[G]_2 + c_3[G]_3 + b_2[H]_2 + b_3[H]_3 \\ 2c_2[G]_4 + c_3[G]_5 + 2b_2[H]_4 + b_3[H]_5 \\ c_2[G]_5 + 2c_3[G]_6 + b_2[H]_5 + 2b_3[H]_6 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Sabe-se da equação (4.11) que a energia de deformação do elemento DKT, é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\bar{k}\}^t [D]_f \{\bar{k}\} dYdZ \quad (4.46)$$

onde:

$$\{\bar{k}\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} [1 & \xi & \eta][X] \\ [1 & \xi & \eta][Y] \\ [1 & \xi & \eta][Z] \end{bmatrix} \{u_{DKT}\} \quad (4.47)$$

então:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} [1 & \xi & \eta][X] \\ [1 & \xi & \eta][Y] \\ [1 & \xi & \eta][Z] \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Substituindo-se a equação (4.40) em (4.46), obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{u_{DKT}\}^T [B]^T [D]_f [B] \{u_{DKT}\} dYdZ$$

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{u_{DKT}\}^T [B]^T [D]_f [B] \{u_{DKT}\} 2A d\xi d\eta$$

$$U = \frac{1}{2} \{u_{DKT}\}^T \int_0^1 \int_0^{1-\xi} 2A [B]^T [D]_f [B] d\xi d\eta \{u_{DKT}\}$$

Sabe-se que a energia de deformação, em função da matriz de rigidez  $[k]$  do elemento, pode ser escrita como:

$$U = \frac{1}{2} \{u_{DKT}\}^T [K] \{u_{DKT}\}$$

então:

$$[K] = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} 2A [B]^T [D]_f [B] d\xi d\eta \quad (4.49)$$

Efetuada-se as integrações da equação anterior, determina-se explicitamente a matriz de rigidez  $[K]$  do elemento, já em relação ao sistema de referência das lajes ou da subestrutura.

$$[K] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} [X] \\ [Y] \\ [Z] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{11}[R] & D_{12}[R] & D_{13}[R] \\ D_{12}[R] & D_{22}[R] & D_{23}[R] \\ D_{13}[R] & D_{23}[R] & D_{33}[R] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [X] \\ [Y] \\ [Z] \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

onde:

$$[R] = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

#### 4.5 FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

As forças nodais equivalentes no elemento triangular DKT para um carregamento uniformemente distribuído  $q$ , segundo BATOZ et al(1980), são dadas por:

$$\{f_{DKT}\}^T = \frac{qA}{3} \{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\} \quad (4.51)$$

onde  $\{f_{DKT}\}^T$  é a transposta do vetor de forças nodais equivalentes  $\{f_{DKT}\}$ , e  $A$  a área do elemento triangular. Portanto, admitiu-se que as cargas uniformemente distribuída  $q$ , ficam representadas apenas por cargas concentradas em cada nó do elemento.

#### 4.6 ESFORÇOS INTERNOS NO ELEMENTO

Os esforços internos presentes no elemento DKT são os momentos fletores  $M_Y$  e  $M_Z$ , o momento volvente  $M_{YZ}$ , e também as forças cortantes  $Q_Y$  e  $Q_Z$ .

Os momentos fletores e volvente podem ser obtidos através da seguinte equação:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_Y \\ M_Z \\ M_{YZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{h}{2} \\ -\frac{h}{2} \end{Bmatrix} \int \{\sigma\}_f x dx = \begin{Bmatrix} \frac{h}{2} \\ -\frac{h}{2} \end{Bmatrix} \int [D]\{k\} x^2 dx = [D]_f \{\bar{k}\} \quad (4.52)$$

onde  $\{M\}$  é o vetor dos momentos,  $\{\sigma\}_f$  o vetor de tensões devido à flexão,  $\{\bar{k}\}$  o vetor de curvatura,  $[D]$  a matriz que relaciona tensões com deformações e  $[D]_f$  a matriz definida na equação (4.9) .

Substituindo-se a equação (4.40) em (4.52), obtém-se a expressão  $\{M\}$  para qualquer ponto no interior ou contorno do elemento, em função de seus deslocamentos nodais.

$$\{M\} = [D]_f [B] \{u_{DKT}\} \quad (4.53)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} M_Y \\ M_Z \\ M_{YZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} [1 & \xi & \eta][X] \\ [1 & \xi & \eta][Y] \\ [1 & \xi & \eta][Z] \end{bmatrix} \{u_{DKT}\} \quad (4.54)$$

As forças cortantes ( $Q_Y$  e  $Q_Z$ ), são obtidas através das expressões da elasticidade que relacionam as mesmas, com os momentos fletores e volventes.

$$Q_Y = M_{Y'Y} + M_{YZ'Y} \quad (4.55)$$

$$Q_Z = M_{Z'Z} + M_{YZ'Y} \quad (4.56)$$

Portanto, uma vez calculado os deslocamentos nodais, pode-se determinar os esforços internos em cada elemento, através das equações (4.54) a (4.56).

#### 4.7 ELEMENTO FINITO QUADRANGULAR

Geralmente as lajes que compõem os pavimentos de edifícios apresentam geometria retangular. Nesse caso uma discretização automática por malhas compostas de elementos quadrangulares, principalmente os retangulares, torna-se



mais simples do que a por elementos triangulares. Entretanto o elemento quadrangular pode também ser utilizado em lajes de contorno poligonal qualquer, da mesma forma que são utilizados os elementos triangulares.

O elemento quadrangular pode ser obtido facilmente pela composição de quatro elementos triangulares DKT, quando colocam-se os parâmetros internos, comum aos elementos, em função dos seus parâmetros externos, através da condensação estática.

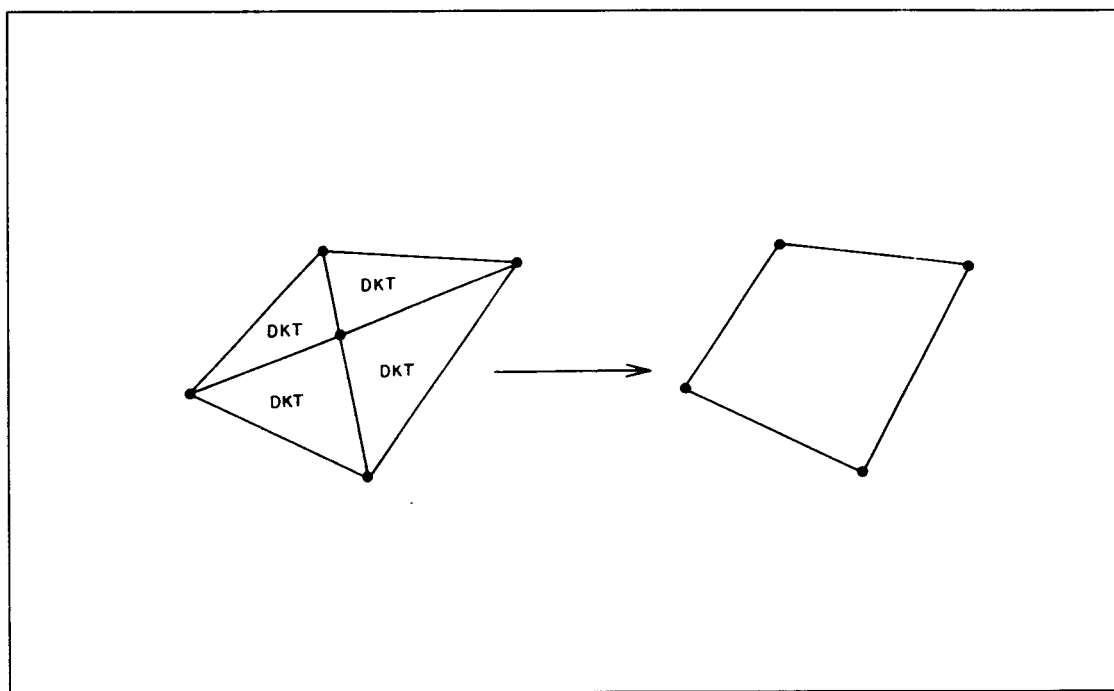


FIGURA 4.6 - Elemento quadrangular formado a partir de elementos DKT.

A relação entre forças nodais  $\{f\}^*$  e deslocamentos  $\{\delta\}^*$ , do quadrilátero, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} [K_{ee}]_{12 \times 12} & [K_{ei}]_{12 \times 3} \\ [K_{ie}]_{3 \times 12} & [K_{ii}]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_e\}_{12 \times 1}^* \\ \{\delta_i\}_{3 \times 1}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_e\}_{12 \times 1}^* \\ \{f_i\}_{3 \times 1}^* \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

onde  $[K]_c$  representa a matriz de rigidez condensada do quadrilátero de ordem  $12 \times 12$ , função apenas dos parâmetros externos. Deve-se observar que as forças nodais também foram modificadas.

onde os índices  $e$  e  $i$  referem-se respectivamente aos parâmetros externos e internos. Efetuando-se os produtos matriciais da equação anterior, obtém-se:

$$\{f_e\}^* = [K_{ee}]\{\delta_e\}^* + [K_{ei}]\{\delta_i\}^* \quad (4.58)$$

$$\{f_i\}^* = [K_{ie}]\{\delta_e\}^* + [K_{ii}]\{\delta_i\}^* \quad (4.59)$$

Da equação (4.59), tira-se:

$$\{\delta_i\}^* = [K_{ii}]^{-1}\{\{f_i\}^* - [K_{ie}]\{\delta_e\}^*\} \quad (4.60)$$

Substituindo-se agora a equação (4.60) em (4.58), obtém-se:

$$\{f_e\}^* - [K_{ei}][K_{ii}]^{-1}\{f_i\}^* = \left\{ [K_{ee}] - [K_{ei}][K_{ii}]^{-1}[K_{ie}] \right\} \{\delta_e\}^* \quad (4.61)$$

Definindo:

$$\{f\}_c = \{f_e\}^* - [K_{ei}][K_{ii}]^{-1}\{f_i\}^*$$

$$[K]_c = [K_{ee}] - [K_{ei}][K_{ii}]^{-1}[K_{ie}]$$

a equação (4.61) fica:

$$\{f\}_c = [K]_c \{\delta_e\}^* \quad (4.62)$$

## CAPÍTULO 5

---

### MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA

#### 5.1 INTRODUÇÃO

A matriz de rigidez global do edifício é obtida através da contribuição das rigidezes de todos seus elementos estruturais componentes (elementos de placas e barras). Seria portanto, trabalhosa a análise global da estrutura, considerando-a de uma só vez todas as coordenadas deslocamentos envolvidas, devido ao enorme número de incógnitas presentes no sistema de equações correspondente.

Para que se tenha um sistema computacional eficaz na resolução de estruturas de grande porte, como edifícios, utilizam-se as técnicas de subestruturação, que analisam a rigidez de cada andar independentemente, ao invés da estrutura global como um todo. Dessa forma, com a divisão do edifício em várias subestruturas, teoricamente é possível analisar edifícios com qualquer número de andares. Quando tem-se a repetitividade dos pavimentos, não é necessário a composição da rigidez de cada um deles, diminuindo assim, o esforço computacional. As técnicas de subestruturação utilizadas são feitas em série e paralelo.

## 5.2 NUMERAÇÃO DOS NÓS

A partir do sistema de referência de cada subestrutura, definem-se todos os nós que compõem o pavimento. Os pontos nodais dos elementos finitos que se conectam aos pilares são definidos como nós externos, e aqueles que não apresentam conectividade com os elementos verticais, são os nós internos.

A princípio a numeração dos nós dos elementos que discretizam o pavimento é feita independentemente da numeração dos nós da subestrutura, mas posteriormente deve-se garantir uma perfeita incidência para os nós externos.

A matriz de rigidez e o vetor de forças nodais do pavimento, devem ser condensados para as coordenadas dos nós externos, que fazem parte das coordenadas da subestrutura propriamente dita. Nessa primeira etapa de montagem da matriz de rigidez global do edifício, é utilizado a técnica de subestruturação em paralelo.

## 5.3 SUBESTRUTURAÇÃO EM PARALELO

Para se obter a matriz de rigidez e vetor de forças nodais do pavimento em função apenas dos nós externos, podem ser utilizados dois métodos de condensação estática, o método tradicional ou o método "Choleski Decomposition". O método tradicional utiliza a liberação total das coordenadas dos nós internos para se chegar à matriz de rigidez na forma condensada, como se fez por exemplo no item 4.7 na composição do elemento quadrangular, enquanto que o segundo método envolve apenas a liberação parcial das coordenadas internas.

### 5.3.1 MÉTODO "CHOLESKI DECOMPOSITION"

Seja a equação matricial de equilíbrio do pavimento:

$$\begin{bmatrix} [R_{II}] & [R_{IE}] \\ [R_{EI}] & [R_{EE}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I\} \\ \{D_E\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_I\} \\ \{F_E\} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

sendo:

*I*: índice que indica os parâmetros internos do pavimento;

*E*: índice que indica os parâmetros externos do pavimento.

Este método pode ser formulado a partir da decomposição da matriz de rigidez num triplo produto matricial.

$$\begin{bmatrix} [R_{II}] & [R_{IE}] \\ [R_{EI}] & [R_{EE}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [RT] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [R^*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [L]^T & [RT]^T \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

sendo [L] uma matriz triangular inferior com termos unitários na diagonal principal; [RT] a matriz retangular; [0] a matriz nula; [I] a matriz identidade; [D] a matriz diagonal e [R\*] a matriz simétrica condensada.

Da equação (5.2), obtém-se as seguintes expressões:

$$[R_{II}] = [L][D][L]^T \quad (5.3)$$

$$[R_{EI}] = [R_{IE}]^T = [RT][D][L]^T \quad (5.4)$$

$$[R_{EE}] = [R^*] + [RT][D][RT]^T \quad (5.5)$$

Relacionando-se a equação (5.2) com (5.1), encontram-se os seguintes sistemas desacoplados:

$$\begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [R^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I^*\} \\ \{D_E^*\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_I^*\} \\ \{F_E^*\} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

onde:

$$\begin{Bmatrix} \{D_I^*\} \\ \{D_E^*\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L]^T & [RT]^T \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I\} \\ \{D_E\} \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\begin{Bmatrix} \{F_I\} \\ \{F_E\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [RT] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_I^*\} \\ \{F_E^*\} \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

A equação (5.3) representa a decomposição de Choleski da submatriz  $[R]_{II}$ . Da equação (5.4), encontra-se a expressão da submatriz  $[RT]$ , como sendo:

$$[RT] = [R_{EI}][[D][L]^T]^{-1} \quad (5.9)$$

Da equação (5.5), tira-se:

$$[R^*] = [R_{EE}] - [RT][D][RT]^T \quad (5.10)$$

Das equações (5.9) e (5.10), determinam-se as expressões genéricas dos termos da matriz  $[RT]$  e  $[R^*]$ , respectivamente.

$$RT_{i,j} = \frac{1}{D_{j,j}} R_{i+NI,j} - \sum_{k=1}^{j-1} RT_{i,k} L_{j,k} D_{k,k} \quad (5.11)$$

e

$$R_{i,j}^* = R_{i+NI,j+NI} - \sum_{k=1}^{NI} L_{i,k}^2 D_{k,k} \quad (5.12)$$

sendo  $R_{i,j}$  o termo da matriz de rigidez original e  $NI$  o número de coordenadas internas. Observa-se que a matriz  $[R^*]$ , pode ser determinada a partir da triangularização de Gauss até a coluna referente a última coordenada interna.

$$\begin{bmatrix} [R_{II}] & [R_{IE}] \\ [R_{EI}] & [R_{EE}] \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Triangularização}} \begin{bmatrix} [L]^T & [RT] \\ [0] & [R^*] \end{bmatrix}$$

Da equação (5.6), obtém-se:

$$[R^*] \{D_E^*\} = \{F_E^*\} \quad (5.13)$$

lembrando-se que  $[R^*]$  e  $[F_E^*]$  representam a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais, em função das coordenadas externas, respectivamente.

Da equação (5.7), conclui-se que:



$$\{D_E^*\} = \{D_E\} \quad (5.14)$$

e da equação (5.8), encontra-se:

$$\{F_I\} = [L]\{F_I^*\} \quad (5.15)$$

e

$$\{F_E\} = [RT]\{F_I^*\} + \{F_E^*\} \quad (5.16)$$

então:

$$\{F_E^*\} = \{F_E\} - [RT]\{F_I^*\} \quad (5.17)$$

Uma vez calculado  $\{F_I^*\}$  da equação (5.15), pode-se obter  $\{D_I^*\}$ , de acordo com a equação (5.6).

$$[D]\{D_I^*\} = \{F_I^*\} \quad (5.18)$$

A partir da equação (5.7), encontra-se a expressão do vetor deslocamento das coordenadas internas  $\{D_I\}$ , como sendo:

$$\{D_I\} = [[L]^T]^{-1}(\{D_I^*\} - [RT]^T\{D_E\}) \quad (5.19)$$

Analisando-se as equações (5.10) e (5.17), observa-se que não é necessário inversões de matrizes para se obter  $[R^*]$  e  $\{F_E^*\}$ , resultando assim, num método de menor número de operações numéricas e menor esforço computacional

que o método tradicional. Portanto, o método utilizado neste trabalho é o método "Choleski Decomposition" para obtenção da matriz de rigidez condensada do pavimento.

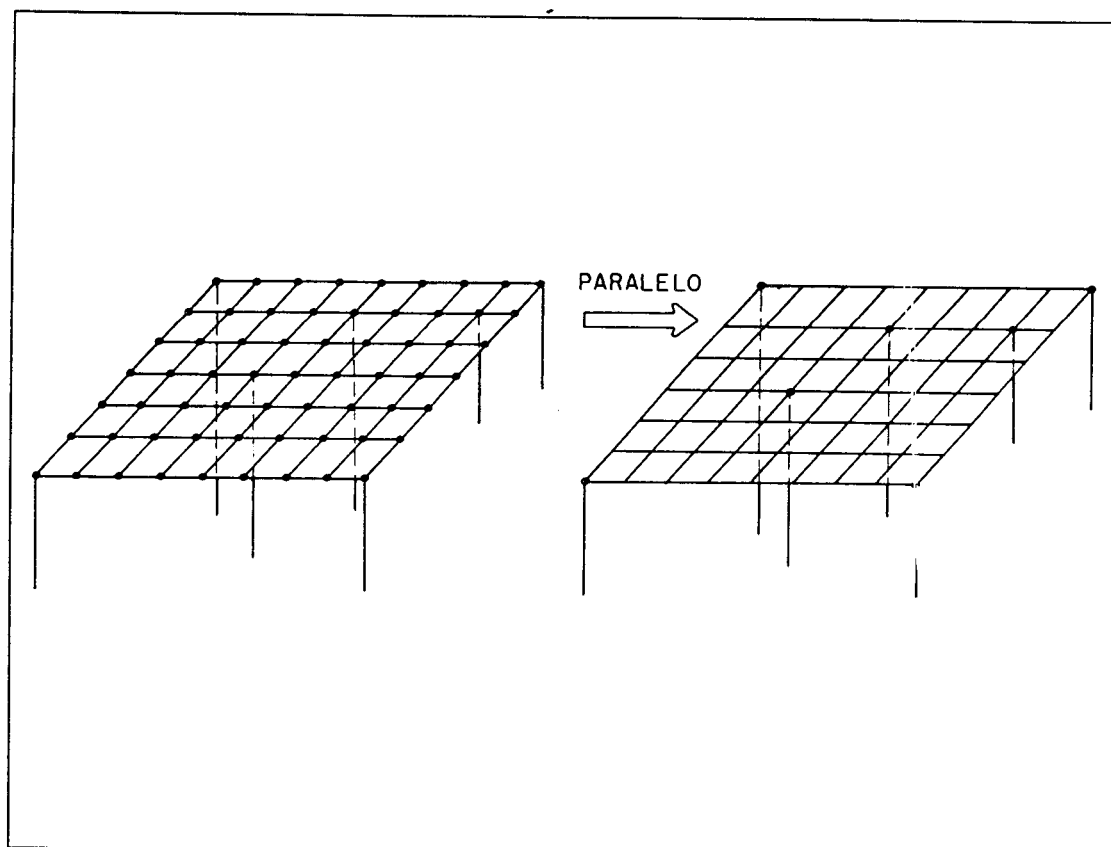


FIGURA 5.1 - Subestruturação em paralelo.

#### 5.4 CONTRIBUIÇÃO DOS PILARES À RIGIDEZ DA SUBESTRUTURA

Devido a presença dos pilares, a matriz de rigidez de cada subestrutura relaciona-se com o pavimento superior e inferior. A contribuição da rigidez dos elementos horizontais à subestrutura fica restrita ao próprio pavimento em que estão contidos, assim, para um pavimento  $k$ , a matriz de rigidez dos elementos horizontais, já nas coordenadas da subestrutura, são espalhadas apenas na matriz  $[R]_{K,K}$ . Entretanto, os termos da matriz de rigidez dos pilares, são espalhadas nas matrizes  $[R]_{K,K}$ ,  $[R]_{K,K-1}$  e  $[R]_{K-1,K-1}$ , onde o índice  $k-1$  representa o pavimento inferior ao  $k$ .

O endereçamento dos termos da matriz de rigidez condensada de cada elemento contido no pavimento, à matriz de rigidez  $[R]_{k,k}$  da subestrutura, depende de suas conectividades com os nós dos pilares. Sabe-se que as coordenadas envolvidas são:

- coordenadas independentes do próprio pilar, com os respectivos endereçamentos:

$$\delta_X = 3p - 2$$

$$\phi_Y = 3p - 1$$

$$\phi_Z = 3p$$

- coordenadas dependentes, referente ao movimento de corpo rígido das lajes, que são:

$$\delta_Y = N_T - 2$$

$$\delta_Z = N_T - 1$$

$$\phi_X = N_T$$

onde  $p$  é o número do nó do pilar e  $N_T$  o número total de coordenadas da subestrutura, que equivale ao triplo do número total dos pilares mais três.

	$\delta_{Xs}$	$\phi_{Ys}$	$\phi_{Zs}$								$\delta_{Ys}$	$\delta_{Zs}$	$\phi_{Xs}$
$\delta_{Xs}$	1,1	1,2	1,3	.	.	.	.	.	.	.	1,4	1,5	1,6
$\phi_{Ys}$	2,1	2,2	2,3	.	.	.	.	.	.	.	2,4	2,5	2,6
$\phi_{Zs}$	3,1	3,2	3,3	.	.	.	.	.	.	.	3,4	3,5	3,6
	.	.	.								.	.	.
	.	.	.								.	.	.
	.	.	.								.	.	.
	.	.	.								.	.	.
	.	.	.								.	.	.
$\delta_{Ys}$	4,1	4,2	4,3	.	.	.	.	.	.	.	4,4	4,5	4,6
$\delta_{Zs}$	5,1	5,2	5,3	.	.	.	.	.	.	.	5,4	5,5	5,6
$\phi_{Xs}$	6,1	6,2	6,3	.	.	.	.	.	.	.	6,4	6,5	6,6

FIGURA 5.2 - Endereçamento dos termos  $ij$  da matriz  $[K_p]_s$  à matriz  $[R]_{k,k}$ .

	$\delta_{Xi}$	$\phi_{Yi}$	$\phi_{Zi}$								$\delta_{Yi}$	$\delta_{Zi}$	$\phi_{Xi}$
$\delta_{Xs}$	1,7	1,8	1,9	.	.	.	.	.	.	.	1,10	1,11	1,12
$\phi_{Ys}$	2,7	2,8	2,9	.	.	.	.	.	.	.	2,10	2,11	2,12
$\phi_{Zs}$	3,7	3,8	3,9	.	.	.	.	.	.	.	3,10	3,11	3,12
	.	.	.								.	.	.
	.	.	.								.	.	.
	.	.	.								.	.	.
	.	.	.								.	.	.
	.	.	.								.	.	.
$\delta_{Ys}$	4,7	4,8	4,9	.	.	.	.	.	.	.	4,10	4,11	4,12
$\delta_{Zs}$	5,7	5,8	5,9	.	.	.	.	.	.	.	5,10	5,11	5,12
$\phi_{Xs}$	6,7	6,8	6,9	.	.	.	.	.	.	.	6,10	6,11	6,12

FIGURA 5.3 - Endereçamento dos termos  $ij$  da matriz  $[K_P]_s$  à matriz  $[R]_{k,k-1}$ .

	$\delta_{Xi}$	$\phi_{Yi}$	$\phi_{Zi}$								$\delta_{Yi}$	$\delta_{Zi}$	$\phi_{Xi}$
$\delta_{Xi}$	7,7	7,8	7,9	.	.	.	.	.	.	.	7,10	7,11	7,12
$\phi_{Yi}$	8,7	8,8	8,9	.	.	.	.	.	.	.	8,10	8,11	8,12
$\phi_{Zi}$	9,7	9,8	9,9	.	.	.	.	.	.	.	9,10	9,11	9,12
	.	.	.								.	.	.
	.	.	.								.	.	.
	.	.	.								.	.	.
	.	.	.								.	.	.
	.	.	.								.	.	.
	.	.	.								.	.	.
$\delta_{Yi}$	10,7	10,8	10,9	.	.	.	.	.	.	.	10,10	10,11	10,12
$\delta_{Zi}$	11,7	11,8	11,9	.	.	.	.	.	.	.	11,10	11,11	11,12
$\phi_{Xi}$	12,7	12,8	12,9	.	.	.	.	.	.	.	12,10	12,11	12,12

FIGURA 5.4 - Endereçamento dos termos da matriz  $[K_P]_s$  à matriz  $[R]_{k-1,k-1}$ .

onde os índices  $s$  e  $i$  representam as extremidade superior e inferior do pilar, respectivamente.

### 5.5 SUBESTRUTURAÇÃO EM SÉRIE

Como o sistema estrutural é dividido em várias subestruturas em série, a matriz de rigidez global será formada pela contribuição das matrizes de rigidez de todos os andares já na forma condensada, observando obviamente sua sequência de numeração. Assim, o sistema de equilíbrio global fica expresso por:

$$\begin{bmatrix} [R]_{N,N} & [R]_{N,N-1} & & & & & & & & & [0] \\ [R]_{N-1,N} & [R]_{N-1,N-1} & [R]_{N-1,N-2} & & & & & & & & \\ & & \vdots & & & & & & & & \\ & & & [R]_{K,K+1} & [R]_{K,K} & [R]_{K,K-1} & & & & & \\ & & & & \vdots & & & & & & \\ & & & & [R]_{1,2} & [R]_{1,1} & [R]_{1,0} & & & & \\ [0] & & & & & [R]_{0,1} & [R]_{0,0} & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [D]_N \\ [D]_{N-1} \\ \vdots \\ [D]_K \\ \vdots \\ [D]_1 \\ [D]_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [F]_N \\ [F]_{N-1} \\ \vdots \\ [F]_K \\ \vdots \\ [F]_1 \\ [F]_0 \end{Bmatrix}$$

Os índices das submatrizes indicam os pavimentos a que se referem, sendo  $[D]_k$  o vetor deslocamento e  $[F]_k$  o vetor de forças nodais de um pavimento genérico  $k$ , considerando-se já as forças nodais equivalentes. A primeira linha da matriz corresponde ao último pavimento  $N$  do edifício, e a última linha refere-se a base do mesmo, representado pelo número  $0$ . Respeitando essa numeração, observa-se que a matriz de rigidez global é uma matriz simétrica em faixa (banda).

Efetuando-se o produto matricial da primeira linha, a equação de equilíbrio correspondente fica:

$$[R]_{N,N}[D]_N + [R]_{N,N-1}[D]_{N-1} = [F]_N \quad (5.20)$$

o produto da segunda linha, fica:

$$[R]_{N-1,N}[D]_N + [R]_{N-1,N-1}[D]_{N-1} + [R]_{N-1,N-2}[D]_{N-2} = [F]_{N-1} \quad (5.21)$$

substituindo-se a expressão de  $[D]_N$  que se obtém em (5.20), na equação acima, encontra-se:

$$\begin{aligned} & \left\{ [R]_{N-1,N-1} - [R]_{N-1,N}[R]_{N,N}^{-1}[R]_{N,N-1} \right\} [D]_{N-1} + [R]_{N-1,N-2}[D]_{N-2} = \\ & \left\{ [F]_{N-1} - [R]_{N-1,N}[R]_{N,N}^{-1}[F]_N \right\} \end{aligned} \quad (5.22)$$

definindo:

$$[R]_{N-1,N-1}^* = [R]_{N-1,N-1} - [R]_{N-1,N}[R]_{N,N}^{-1}[R]_{N,N-1} \quad (5.23)$$

e

$$[F]_{N-1}^* = [F]_{N-1} - [R]_{N-1,N}[R]_{N,N}^{-1}[F]_N \quad (5.24)$$

obtém-se:

$$[R]_{N-1,N-1}^*[D]_{N-1} + [R]_{N-1,N-2}[D]_{N-2} = [F]_{N-1}^* \quad (5.25)$$

Eliminando-se de maneira análoga os deslocamentos das equações de equilíbrio subseqüentes, num processo de substituição para frente (método da eliminação em série), na K-ésima subestrutura, encontra-se:

$$[R]_{K,K}^*[D]_K + [R]_{K,K-1}[D]_{K-1} = [F]_K^* \quad (5.26)$$

onde:

$$[R]_{K,K}^* = [R]_{K,K} - [R]_{K,K-1} [R]_{K-1,K-1}^{*-1} [R]_{K-1,K} \quad (5.27)$$

$$[F]_K^* = [F]_K - [R]_{K,K-1} [R]_{K-1,K-1}^{*-1} [F]_{K-1}^* \quad (5.28)$$

As últimas eliminações da série, fica então:

$$[R]_{1,1}^* [D]_1 + [R]_{1,0} [D]_0 = [F]_1^* \quad (5.29)$$

$$[R]_{0,0}^* [D]_0 = [F]_0^* \quad (5.30)$$

Conclui-se portanto, que o processo de eliminação em série, consiste na redução da matriz de rigidez e vetor de forças do sistema global às coordenadas da base do edifício, como se observa na equação (5.30).

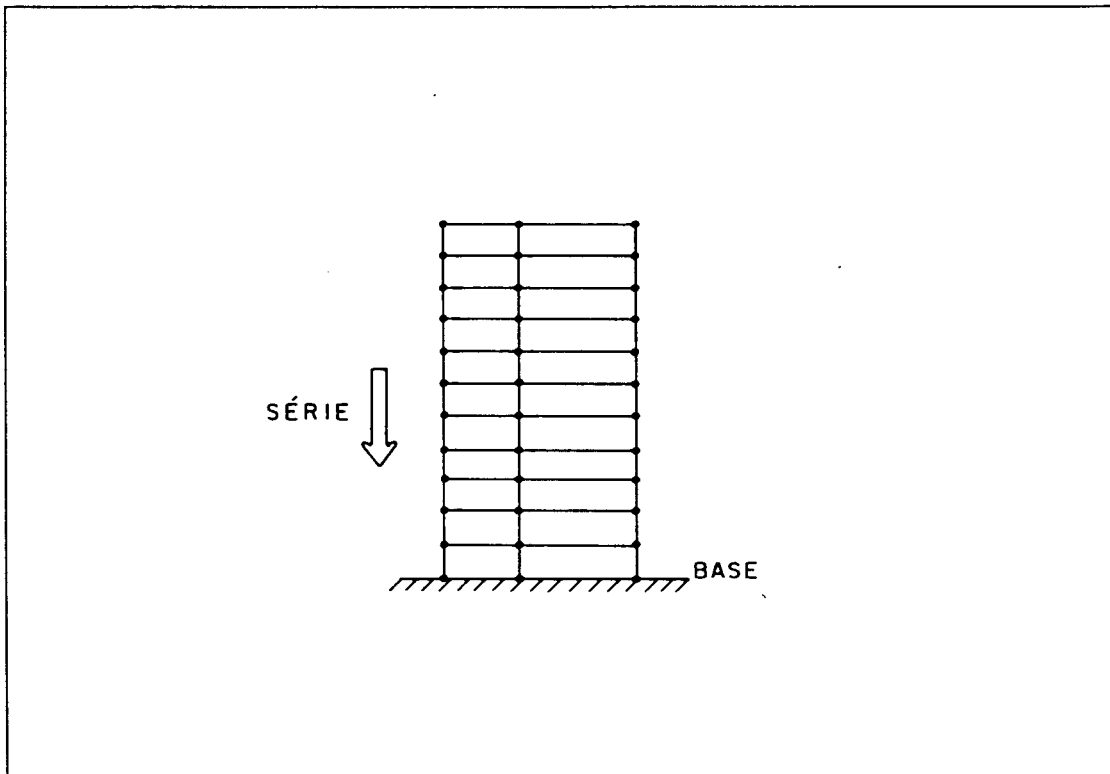


FIGURA 5.5 - Subestruturação em série.

O vetor deslocamento  $[D]_0$ , que contém os deslocamentos nodais na ligação estrutura-fundação, podem ser:

- a) Deslocamentos nodais nulos, no caso de engaste;
- b) Deslocamentos nodais impostos ou pré-fixados, no caso de recalques diferenciais;
- c) Deslocamentos nodais livres, para caso de deslocamentos incógnitos.

No primeiro caso, não é necessário fazer a eliminação até a base da estrutura, pois o vetor  $[D]_0$  é completamente conhecido. Somente quando houver deslocamentos incógnitos é que se faz uso da última equação.

Explicitando-se a equação de equilíbrio (5.30), tem-se:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1i} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2i} & \cdots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{i1} & R_{i2} & \cdots & R_{ii} & \cdots & R_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{ni} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_i \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

Caso seja necessário impor deslocamentos nulos ou conhecidos na base, são feitas alterações na matriz  $[R]_{0,0}^*$  e  $[F]_0^*$ , de modo a se obter tais valores no vetor  $[D]_0$ .

Se  $D_i = \alpha$ , onde  $\alpha$  é um deslocamento conhecido, faz-se uma alteração no vetor  $[F]_0^*$  de forma que  $\bar{F}_i = F_i - R_{i1}\alpha$  e  $F_i = \alpha$ . A linha e coluna da matriz  $[R]_{0,0}^*$  correspondente ao deslocamento conhecido serão nulas, exceto para o termo da diagonal principal, que assume valor unitário. Portanto, a equação (5.31) fica:



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{22} & \dots & R_{2i} & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & R_{12} & \dots & R_{1i} & \dots & R_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & R_{n2} & \dots & R_{ni} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_i \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ E_2 - R_{21}\alpha \\ \vdots \\ E_i - R_{i1}\alpha \\ \vdots \\ E_n - R_{n1}\alpha \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

Se existirem mais deslocamentos impostos, tal como  $D_i = \beta$ , a expressão acima fica agora:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{22} & \dots & 0 & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & R_{n2} & \dots & 0 & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_i \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ E_2 - R_{21}\alpha - R_{2i}\beta \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \\ E_n - R_{n1}\alpha - R_{ni}\beta \end{Bmatrix}$$

Dessa forma, para qualquer outro valor de  $[D]_j$  conhecido, o procedimento é análogo aos anteriores. Uma vez obtido o sistema de equações modificado, devido as condições de contorno impostas referente às vinculações da base, basta resolvê-lo para se obter o vetor deslocamentos na ligação estrutura-fundação.

Com os deslocamentos da base conhecido, volta-se às equações anteriores, onde através do processo de retro-substituições, calculam-se os deslocamentos de todos os elementos em cada subestrutura até o topo do edifício.

## 5.6 DESLOCAMENTOS LOCAIS DOS ELEMENTOS

Após a determinação dos deslocamentos de todos os nós nas coordenadas da subestrutura, pode-se facilmente calcular deslocamentos nos extremos dos elementos de barra em

suas coordenadas locais. Os deslocamentos locais de cada elemento, pode ser obtido através da seguinte expressão geral:

$$\{u\}_E = [\beta]_E \{U\}_E \quad (5.33)$$

onde:

$\{u\}_E$  : representa os deslocamentos nos extremos de cada elemento, em coordenadas locais;

$\{U\}_E$  : representa os deslocamentos nodais determinados nas coordenadas da subestrutura;

$[\beta]_E$  : matriz de incidência correspondente a cada elemento;

$E$  : índice que representa o elemento estrutural.

## 5.7 ESFORÇOS SOLICITANTES NOS ELEMENTOS

### 5.7.1 VETOR DE FORÇAS NODAIS

O vetor de forças nodais do sistema estrutural é obtida pela contribuição direta das forças concentradas nos nós, mais as possíveis forças nodais equivalentes, devido ao carregamento distribuído ao longo do elemento.

$$\{f\} = \{f\}_{NÓ} + \{f\}_{EQ} \quad (5.34)$$

onde:

$\{f\}$ : representa o vetor de forças nodais, em coordenadas locais;

$\{f\}_{\text{NÓ}}$ : representa o vetor de forças concentradas diretamente aplicadas nos nós, em coordenadas locais;

$\{f\}_{\text{EQ}}$ : representa o vetor de forças nodais equivalentes, em coordenadas locais.

### 5.7.2 FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES DAS VIGAS

O vetor de forças nodais equivalentes  $\{f_V\}_{\text{EQ}}$  das vigas, segundo as coordenadas locais, corresponde às forças segundo estas coordenadas, sem que existam deslocamentos correspondentes. Por isso, a determinação das forças nodais equivalentes se resume nos esforços de engastamento perfeito em cada extremidade, para os diversos tipos de carregamento.

$$\{f_V\}_{\text{EQ}}^T = \{V_1 \quad Mt_1 \quad M_1 \quad V_2 \quad Mt_2 \quad M_2\} \quad (5.35)$$

onde:

$V_1$  e  $V_2$ : são forças verticais;

$M_1$  e  $M_2$ : momentos fletores;

$Mt_1$  e  $Mt_2$ : momentos torçores;

$\{f_V\}_{\text{EQ}}^T$ : transposta do vetor de forças nodais equivalentes da viga.

Para cargas uniformemente distribuídas no seu comprimento, tem-se:.

$$\{f_v\}_{EQ}^T = \left\{ \begin{array}{cccccc} -\frac{q l}{2} & 0 & \frac{q l^2}{12} & -\frac{q l}{2} & 0 & -\frac{q l^2}{12} \end{array} \right\} \quad (5.36)$$

sendo:

$l$  : o comprimento de cada trecho;

$q$  : carga uniformemente distribuída.

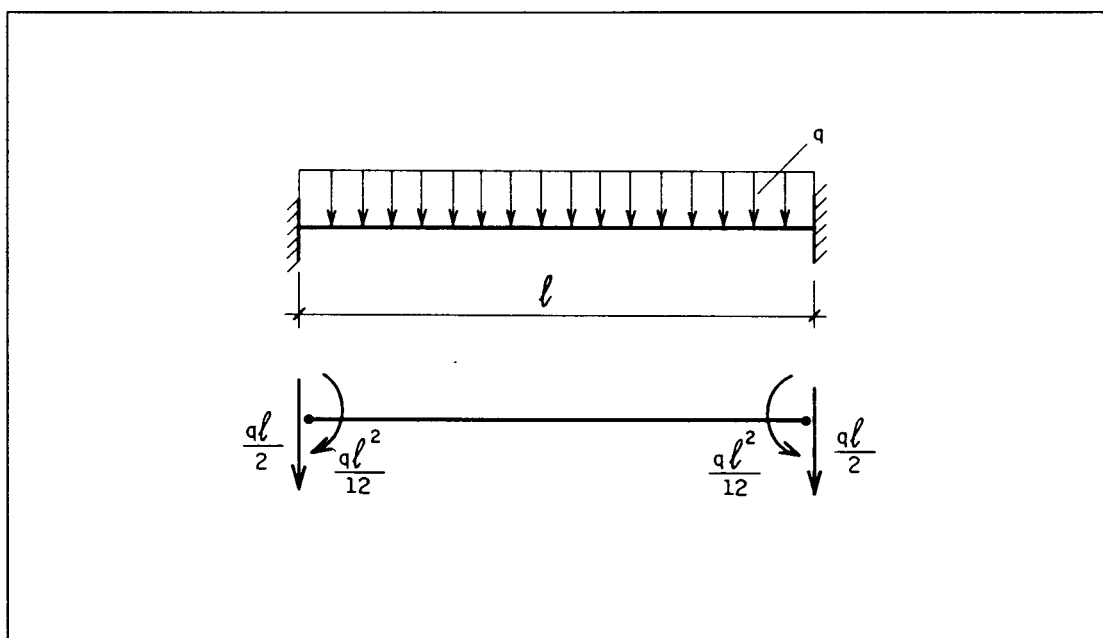


FIGURA 5.6 - Carga uniformemente distribuída.

O vetor de forças nodais equivalentes da viga  $\{F_v\}_{EQ}$ , agora nas coordenadas da subestrutura, pode ser determinado através da seguinte expressão:

$$\{F_v\}_{EQ} = [\beta_v]^T \{f_v\}_{EQ} \quad (5.37)$$

onde  $[\beta_v]^T$  é a transposta da matriz de incidência  $[\beta_v]$ , determinado no capítulo 3.

Enfim, uma vez calculado o vetor  $\{u\}_E$  para cada elemento, os esforços correspondentes nos extremos é obtido através de:

$$\{f\}_E = [K]_E \{u\}_E - \{f_E\}_{EQ} \quad (5.38)$$

sendo:

$\{f\}_E$  : esforços nos extremos de cada elemento;

$[K]_E$  : matriz de rigidez do elemento nas coordenadas locais;

$\{f_E\}_{EQ}$  : vetor de forças nodais equivalentes do elemento, lembrando que esse vetor é nulo nos pilares.

## CAPÍTULO 6

---

### IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA

#### 6.1 INTRODUÇÃO

Sabe-se que o objetivo principal do trabalho é a determinação de esforços e deslocamentos em diversos pontos da estrutura, respeitando obviamente as limitações do modelo mecânico adotado na análise, e suas hipóteses fundamentais, já discutidos nos capítulos anteriores.

Foram utilizados os recursos gráficos da linguagem Turbo PASCAL para se obter uma melhor apresentação do programa, entretanto, a estrutura principal do sistema computacional foi desenvolvida na linguagem FORTRAN, onde estão implementadas todas as rotinas de cálculo, ambos aplicados aos microcomputadores da linha PC.

Cinco subprogramas foram desenvolvidos separadamente para que se pudesse aproveitar melhor os limites da memória do computador, onde são executados internamente pelo Turbo PASCAL através de seus executáveis (extensão 'EXE'), apesar dos mesmos terem sido feitos em FORTRAN. A comunicação entre as duas linguagens foi possível

devido ao acesso de arquivos comuns de leitura. Com isso, buscou-se utilizar as facilidades dos dois sistemas, sem comprometer a estrutura de programação de cada uma das partes.

## 6.2 ENTRADA DE DADOS

Devido a enorme quantidade de dados a serem processados na análise de estruturas de grande porte como os edifícios, principalmente quando se utiliza o Método dos Elementos Finitos, optou-se pela edição de arquivos em disco que contém todos os dados necessários ao processamento do programa.

Para cada subestrutura são elaborados dois arquivos independentes: um contém todos os dados referente aos elementos horizontais que compõem o pavimento, e o segundo referente aos pilares e também às forças do vento. As unidades de saída estão sempre de acordo com as de entrada, dispensando portanto transformações entre unidades de mesma grandeza. Os arquivos editados não são formados exclusivamente por números como os tradicionais, mas constam também de palavras-chave ou comandos que facilitam sua montagem, tornando-os auto-explicativos, permitindo ainda a inclusão de comentários.

Os dados dos elementos de viga e placa são implementados com auxílio do módulo I do programa do REZENDE (1991), onde é possível a geração automática de malhas para discretização do pavimento. Os comandos necessários a sua entrada de dados estão apresentados no quarto capítulo da dissertação de mestrado do mesmo autor. Obviamente não vai ser preciso utilizar todas as palavras-chave, pois os modelos de análise são totalmente diferentes. Por exemplo, os

nós dos pilares do pavimento são simulados com auxílio do comando 'PONTO\_VINCULADO'.

Agora, os comandos adotados para montagem do arquivo de dados dos elementos verticais de cada subestrutura, são:

1. **Palavra-chave:** 'ALTURA\_PILARES'

**Parâmetros:** pilar inicial, pilar final, altura.

**Exemplo:** 1,5,2.88

**Análise:** os pilares de 1 a 5 têm 2.88 de altura.

2. **Palavra-chave:** 'MATERIAL\_PILARES'

**Parâmetros:** pilar inicial, pilar final, módulo de elasticidade, coeficiente de POISSON.

**Exemplo:** 3,9,210000.0,0.22

**Análise:** módulo de elasticidade e coef. de POISSON dos pilares 3 ao 9 têm valores 210000 e 0.22, respectivamente.

3. **Palavra-chave:** 'SEÇÕES\_PILARES'

**Parâmetros:** número de segmentos, número da extremidade inicial, da extremidade final, coordenadas das extremidades respectivamente e espessura do segmento.



**Exemplo:** 2

1,2,80.0,0.0,0.0,0.0,20.0

2,3,0.0,0.0,0.0,80.0,20.0

**Análise:** seção constituída de dois segmentos. As coordenadas das extremidades do primeiro segmento são 1(80,0) e 2(0,0), e do segundo, 2(0,0) e 3(0,80), ambos de espessura 20 .

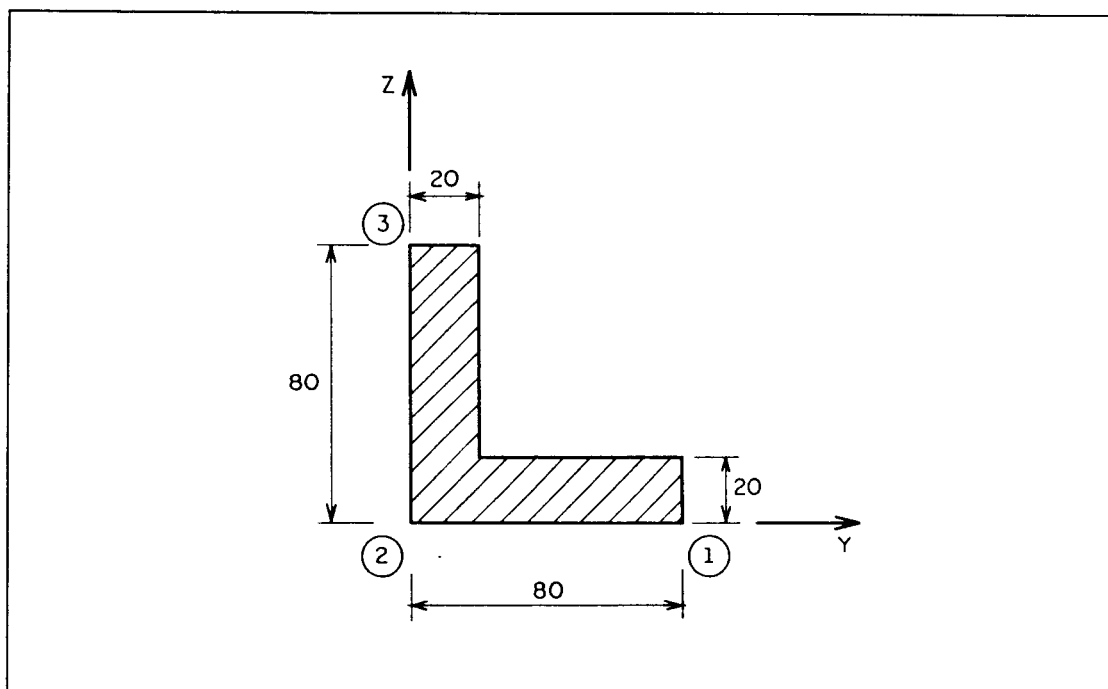


FIGURA 6.1 - Seção exemplo.

#### 4. Palavra-chave: 'EXCENTRICIDADES'

**Parâmetros:** número de vigas que se conectam ao pilar, excentricidade na direção Y entre viga-pilar, na direção Z, e o comprimento do trecho da viga correspondente.

**Exemplo:** 1

-2.2,1.3,40.0

**Análise:** o pilar correspondente apresenta apenas um elemento de viga conectado cuja extremidade tem excentricidades (-2.2,1.3) e comprimento 40.

5. **Palavra-chave:** 'FORÇAS\_VENTO'

**Parâmetros:** componente da força do vento na direção Y, na direção Z e o momento em torno do eixo X em cada andar.

**Exemplo:** 100,0.0,0.0

**Análise:** no andar correspondente, a força do vento só tem componente na direção Y que vale 100.

6. **Palavra-chave:** 'REM'

**Parâmetros:** não há

**Análise:** permite inserir linha de comentários.

Os parâmetros das palavras-chave "3" e "4" são utilizados em todos pilares da subestrutura, onde as mesmas são sempre numeradas a partir do topo até a base do edifício. A disposição das palavras-chave pode ser aleatória.

### 6.3 APRESENTAÇÃO

Com a utilização dos recursos das janelas ativas do Turbo PASCAL, foram desenvolvidas telas com intuito de aperfeiçoar a visualização do texto, obtendo-se assim, uma melhor qualidade na apresentação do programa.

A primeira tela limita-se a apresentação da instituição onde se desenvolveu o trabalho, assunto, autor e o orientador responsável. A segunda permite a entrada dos dados gerais do edifício: título da estrutura, número total de andares e subestruturas. A partir desses dados tem-se uma janela para cada subestrutura diferente, onde finalmente é feita a leitura dos arquivos de dados do pavimento e pilares correspondentes, e ainda definem-se os andares que representam essa subestrutura, conforme sua numeração do topo até a base.

Caso haja algum erro nos dados durante a apresentação em tela, ou até mesmo nos dados dos arquivos já editados, surgirá uma mensagem intermitente indicadora de erros encontrados no canto superior direito da janela correspondente, de acordo com os testes de consistência adotados no programa.

#### **6.4 SUBPROGRAMAS**

O sistema computacional desenvolvido é composto por seis subprogramas individuais, onde cada um desempenha uma função específica. O primeiro subprograma ('ANALISE.EXE'), é responsável pela apresentação do sistema de acordo com a abordagem do item anterior, e também pela execução dos demais subprogramas, feito internamente pelo Turbo Pascal. Com isso, evita-se a chamada dos arquivos executáveis um de cada vez separadamente.

O segundo ('ANDAR.EXE'), faz a montagem da matriz de rigidez e o vetor de forças nodais de cada subestrutura. Nessa etapa é feita a subestruturação em paralelo, onde se obtém todos os parâmetros em função apenas das coordenadas dos pilares. Para isso, é preciso fazer inicialmente a renumeração de todos os nós dos elementos do pavimento, para

que as coordenadas dos nós dos pilares sejam automaticamente agrupadas na submatriz de rigidez correspondente às coordenadas externas.

O terceiro subprograma ('SISTEMA.EXE'), efetua também a montagem da matriz de rigidez e vetor de forças nodais, mas dessa vez considerando todos os andares do edifício. Nesta etapa, faz-se a composição das rigidezes de todas as subestruturas a partir do último pavimento, adicionando-se sempre a parcela de rigidez das coordenadas de base da subestrutura anterior com as coordenadas de topo da subestrutura seguinte, até que se chegue ao primeiro andar do edifício.

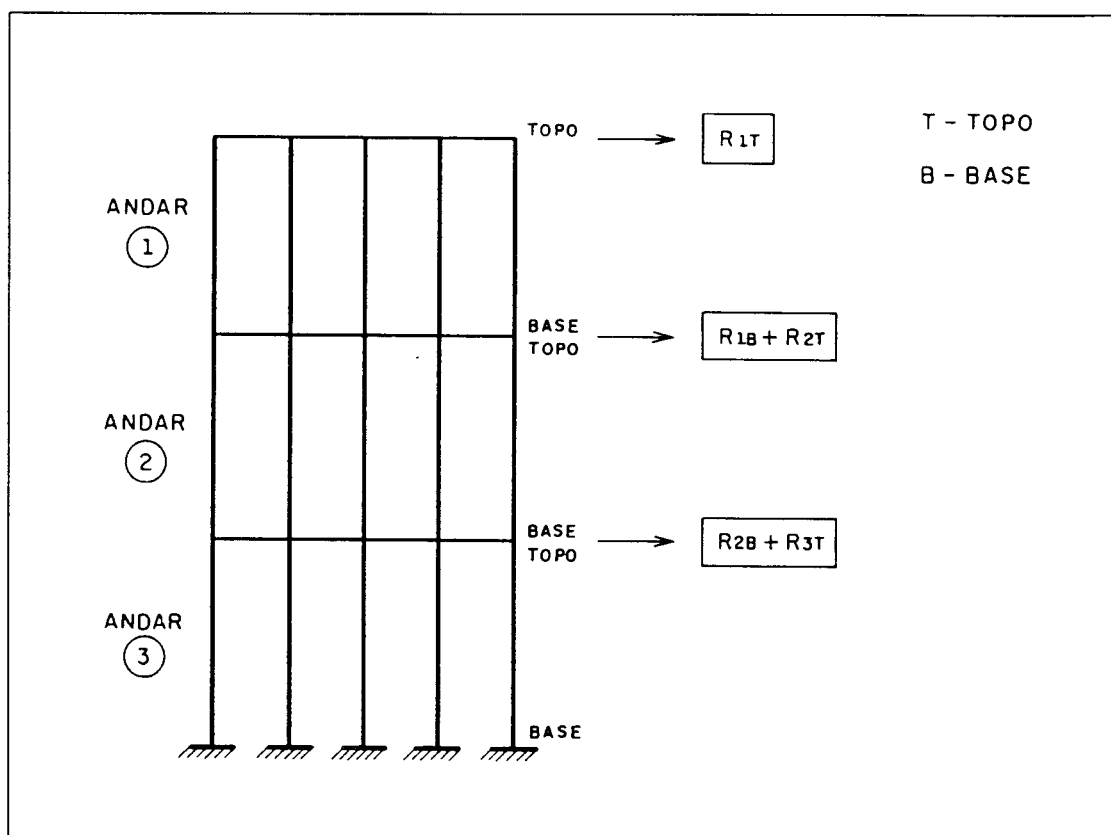


FIGURA 6.2 - Esquema de montagem da rigidez dos pavimentos.

Sabe-se que o sistema de equilíbrio global resultante apresenta a matriz de rigidez em faixa (banda), em consequência da numeração adotada aos andares. O quarto

subprograma ('SERIE.EXE'), resolve esse sistema utilizando o método da eliminação de Gauss, onde determinam-se os deslocamentos em todas as subestruturas segundo suas coordenadas, admitindo-se que a base do edifício está totalmente engastada na ligação estrutura-fundação.

A quinta parte ('RETORNO.EXE'), determina os deslocamentos dos nós internos do pavimento, representando os nós dos elementos de vigas e placas. Foi feito então o processo de retro-substituição, de acordo com o método de Choleski empregado na subestruturação em paralelo. E finalmente o último subprograma ('ESFORCO.EXE'), calcula os esforços em todos elementos de cada andar do edifício, referente às suas coordenadas locais.

## 6.5 ARQUIVO DE ERROS

São estabelecidos alguns testes de consistência no sistema computacional para facilitar a identificação e correção dos erros cometidos durante a leitura dos dados ou execução do programa. Quando um erro é encontrado, o programa é interrompido pelo aviso luminoso na tela, e automaticamente gera-se um arquivo 'ERROS.LST', contendo os erros detectados.

Portanto, no arquivo gerado, apresentam-se mensagens correspondentes a cada tipo de erro verificado, por exemplo:

a) Caso alguma palavra-chave não seja encontrada no arquivo de dados dos pilares, a mensagem apresentada é : "  
\*\*\* FALTA O COMANDO : < Palavra-chave correspondente > " ;

b) Se certos dados não estão em conformidade com as palavras-chave adotadas, a mensagem correspondente fica :  
"\*\*\* NÃO RECONHECIDO O COMANDO : < Dados > " ;

c) Se os materiais ou alturas definidas para os pilares não estiverem em consonância com seu número total correspondente, a mensagem é : "\*\*\* <MATERIAL\_PILARES> INCOMPATÍVEL COM NÚMERO DE PILARES" ou "\*\*\* <ALTURA\_PILARES> INCOMPATÍVEL COM NÚMERO DE PILARES", respectivamente;

d) Quando o número de andares for menor que o número de subestruturas, a mensagem apresentada fica: " \*\*\* NÚMERO DE ANDARES INCOMPATÍVEL" ;

e) Caso uma subestrutura representar um andar que seja maior que o número total de pavimentos, a mensagem é: " \*\*\* SUBESTRUTURA INCOMPATÍVEL COM NÚMERO DE ANDARES" .

## 6.6 RESULTADOS

Para cada edifício analisado, são gerados quatro arquivos de saída contendo os resultados obtidos pelo sistema computacional. Todos os arquivos têm extensão 'LST', para facilitar sua identificação.

O arquivo 'ANDARDES.LST' contém os deslocamentos independentes dos pilares e também os de corpo rígido das lajes, que são únicos em cada pavimento.

Os deslocamentos dos nós internos do pavimento, com as respectivas posições, estão no arquivo 'PAVDES.LST', representando portanto os nós dos elementos de vigas e placas que não têm conectividade com os pilares.

Os esforços nos pilares em todos andares do edifício, estão no arquivo 'PILARES.F.LST', e os das vigas estão no 'VIGAES.F.LST', lembrando-se que todas unidades dos resultados obtidos estão de acordo com os dados de entrada do problema, e os esforços, com o sistema de coordenadas locais adotado. Dessa forma, para cada pilar, o primeiro número

indica os esforços da extremidade superior, e o segundo, da extremidade inferior. E os esforços solicitantes nas vigas sempre estará relacionado ao seu trecho flexível.

## 6.7 LIMITES DE PROCESSAMENTO

Deve-se destacar novamente que o sistema computacional implementado, analisam edifícios cujos materiais componentes apresentem comportamento elástico linear, sem considerar os efeitos de segunda ordem da estrutura. Entretanto, sabe-se que a não linearidade geométrica pode ser analisada através de sucessivas etapas lineares.

Com objetivo de obter um melhor aproveitamento da memória do computador, as matrizes de rigidez referentes às coordenadas internas e externas do pavimento, inicialmente foram armazenadas em vetores contendo apenas os elementos situados acima da diagonal principal, devido a simetria da matriz.

As variáveis estão dimensionadas conforme a disponibilidade da memória RAM (Random Access Memory), responsável pela execução do programa. Para o computador utilizado na EESC-USP, com 14 mega-bytes de memória livre, permite processar os dados de estruturas que estejam dentro dos seguintes limites:

PILARES	$\leq 50$
PONTOS NODAIS	$\leq 1300$
ELEMENTOS DE BARRA	$\leq 1000$
ELEMENTOS DE PLACA	$\leq 2000$
SUBESTRUTURAS DIFERENTES	$\leq 74$
NÚMERO DE VIGAS QUE SE CONECTAM A CADA PILAR	$\leq 05$

## CAPÍTULO 7

---

### EXEMPLOS NUMÉRICOS

#### 7.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentam-se dois exemplos numéricos, cujos resultados obtidos são analisados com intuito de verificar a eficiência do sistema computacional desenvolvido, e principalmente obter algumas conclusões a respeito do comportamento estrutural dos edifícios quando se considera a rigidez transversal das lajes.

Para cada estrutura analisada são feitas comparações dos resultados obtidos pelo programa em diferentes casos, com destaque ao primeiro exemplo onde acrescenta-se a solução obtida por PRUDENTE (1983) em seu modelo. No segundo exemplo, elaborado pelo próprio autor, objetiva-se mostrar a capacidade do sistema computacional na resolução de estruturas de geometria mais complexas, comum nos edifícios modernos.

Para facilitar a entrada de dados das forças do vento, o sistema de referência do edifício localiza-se no



centro geométrico de cada pavimento, dispensando portanto incluir a sua componente de momento.

Seria interessante elaborar mais exemplos de aplicação, porém, devido a grande quantidade de informações que se obtém para cada edifício quando se utiliza o Método dos Elementos Finitos, tornaria inviável a impressão de todos os resultados.

## 7.2 PRIMEIRO EXEMPLO

Neste exemplo aborda-se uma estrutura tubular com todos pavimentos iguais em planta conforme a figura 7.1, tendo os seguintes dados adicionais:

- Dimensões dos pilares: 30cm x 30cm
- Dimensões das vigas: 20cm x 40cm
- Pé-direito dos andares: 300cm
- Número de andares: 9
- Força do vento  $F_1$ : 1,44tf/m
- Módulo de elasticidade  $E$ : 200tf/cm<sup>2</sup>

A estrutura está totalmente engastada na sua base, e foi calculada apenas para as forças laterais do vento, concentradas ao nível de cada pavimento. A análise é feita com cinco modelos diferentes, onde os três primeiros desconsideram a rigidez transversal das lajes. Alguns dos resultados obtidos estão em gráficos para permitir uma melhor visualização.

MODELO 1: Associação tridimensional de painéis planos utilizando subestruturas, já calculado por PRUDENTE (1983), desconsiderando-se os trechos rígidos;

MODELO 2: Análise tridimensional sem observar a formação de painéis e os trechos rígidos;

MODELO 3: Análise tridimensional com trechos rígidos;

MODELO 4: Análise tridimensional considerando a rigidez transversal das lajes com espessura constante de 15cm, e com trechos rígidos;

MODELO 5: Análise tridimensional considerando a rigidez transversal das lajes com espessura constante de 15cm, e sem trechos rígidos.

Os resultados dos modelos 2 ao 5 foram obtidos pelo autor fazendo algumas alterações no programa. Desprezou-se a influência da rigidez transversal das lajes anulando-se todos os termos das matrizes de rigidez dos elementos de placa (triangular ou quadrangular), e a simulação dos trechos rígidos pôde ser negligenciada desprezando-se as excentricidades entre viga-pilar.

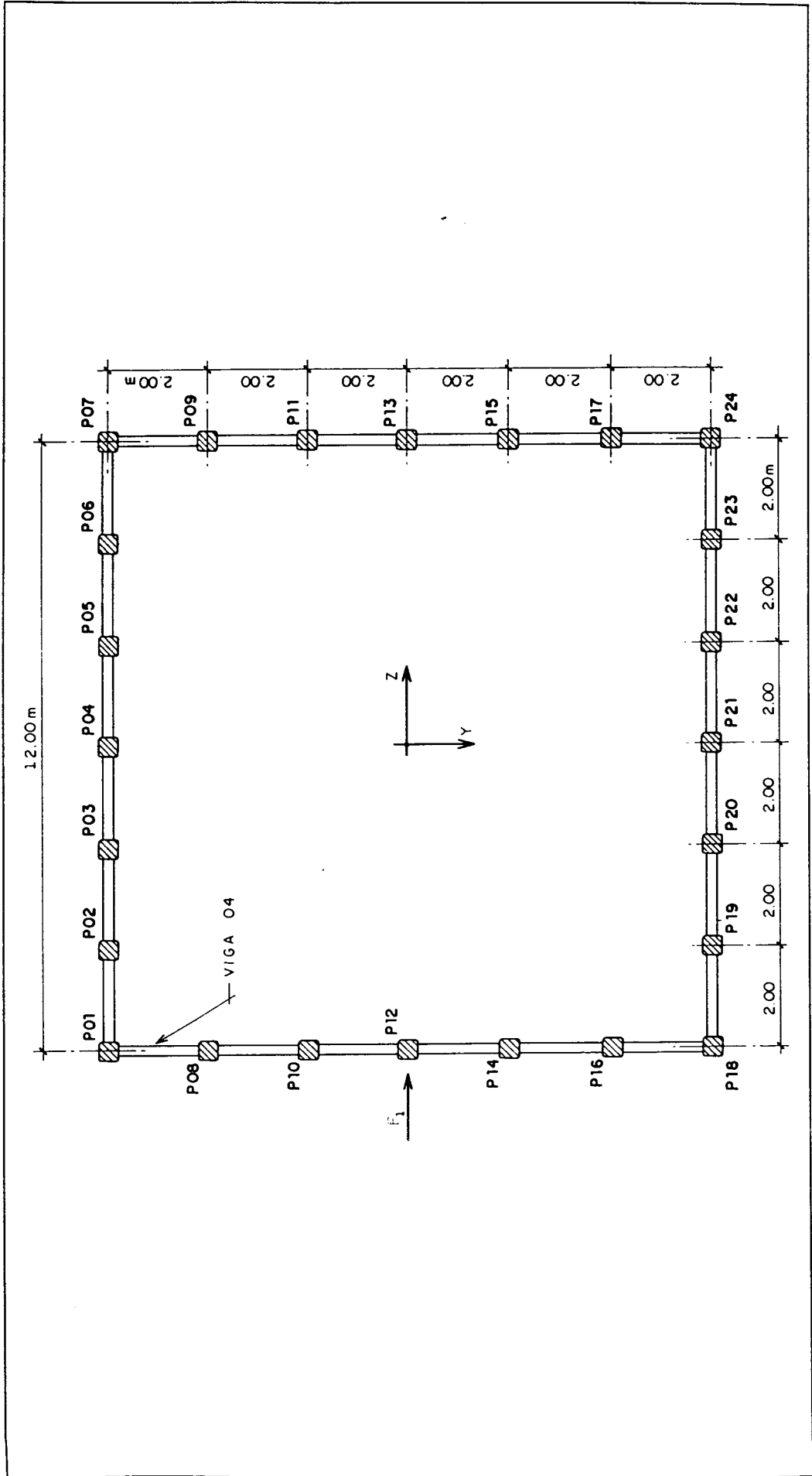


Figura 7.1 - Planta baixa dos pavimentos.

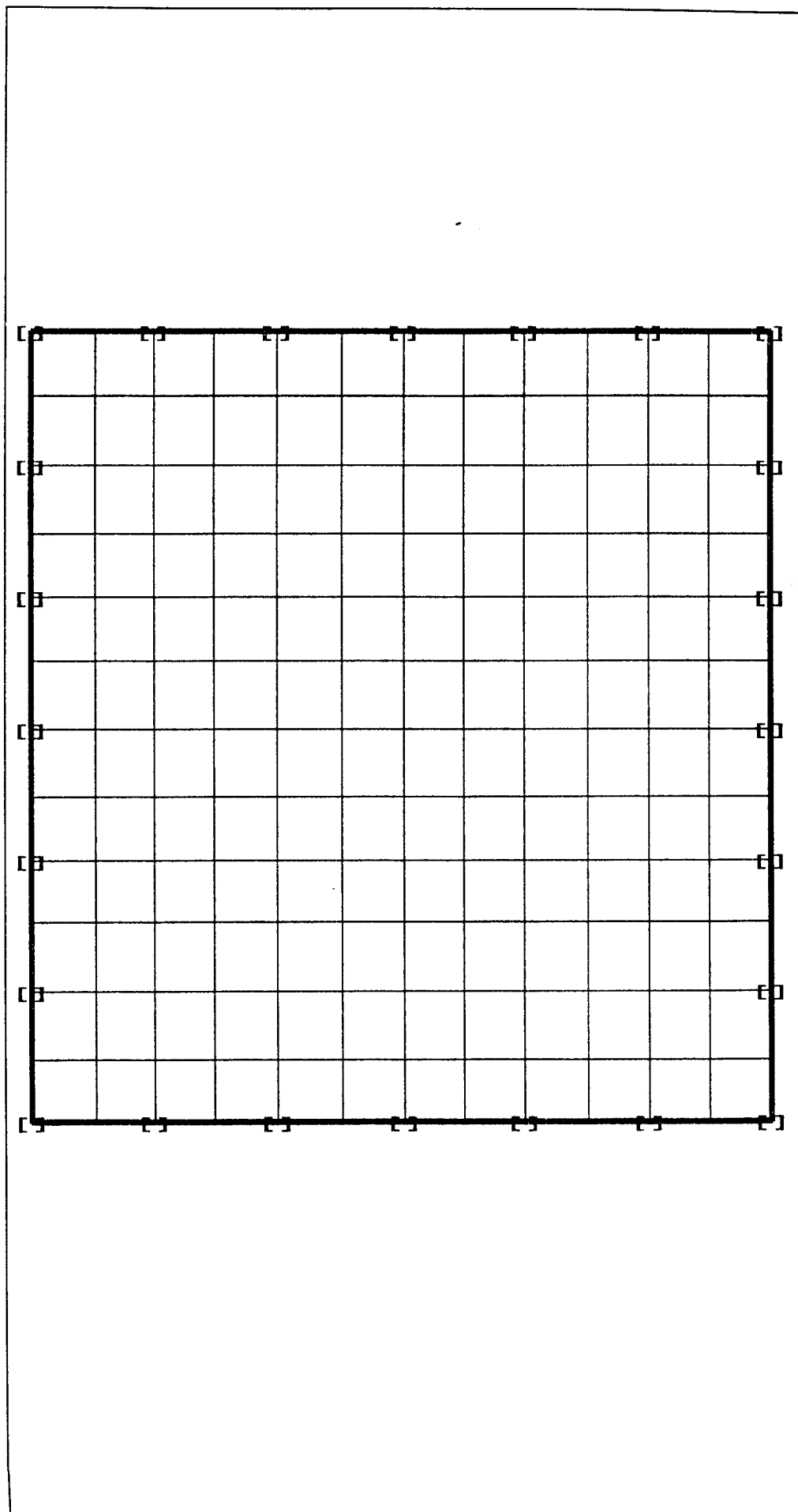
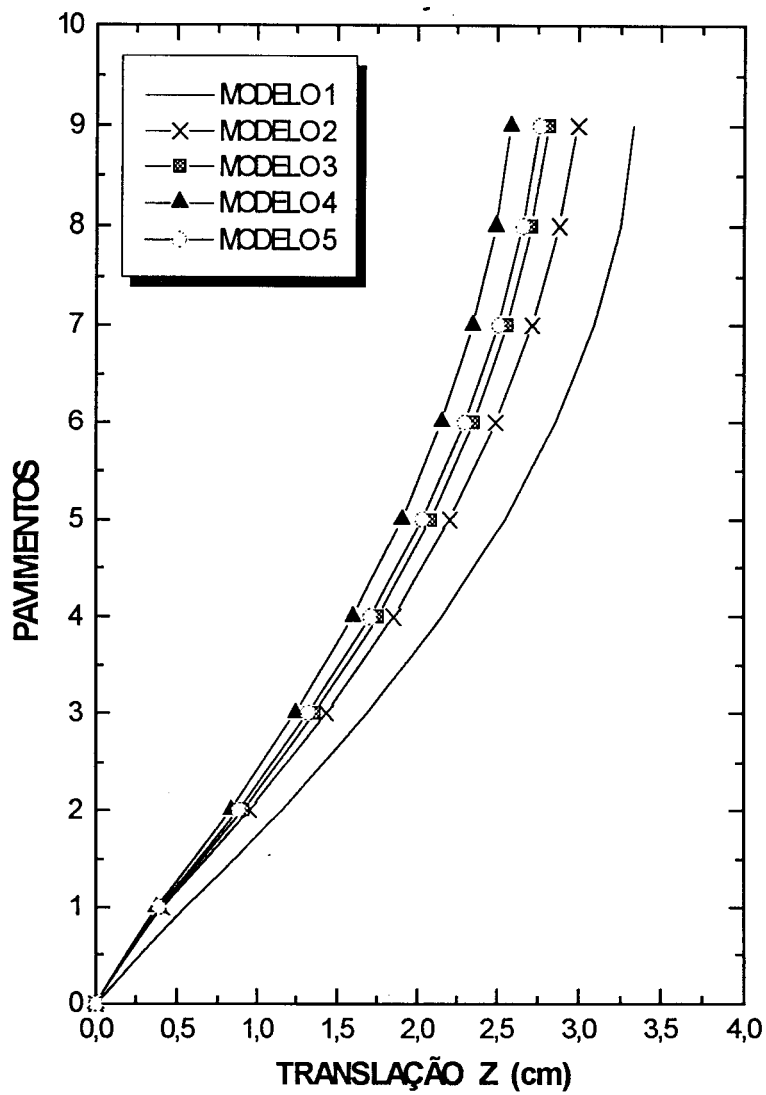
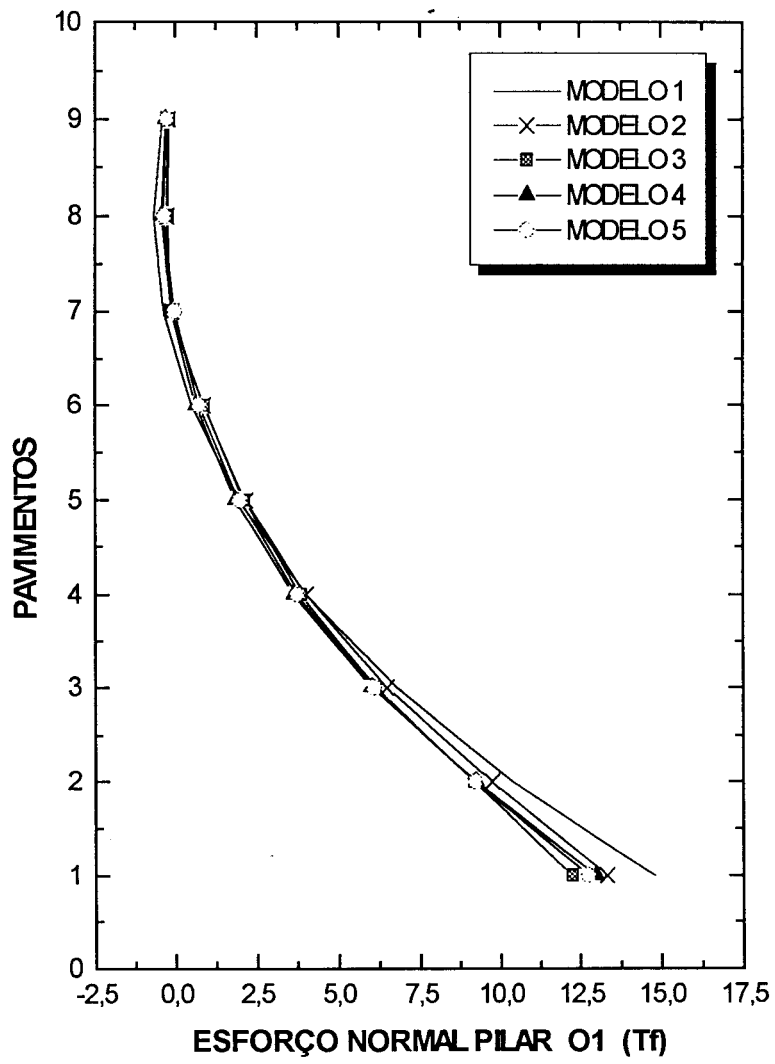


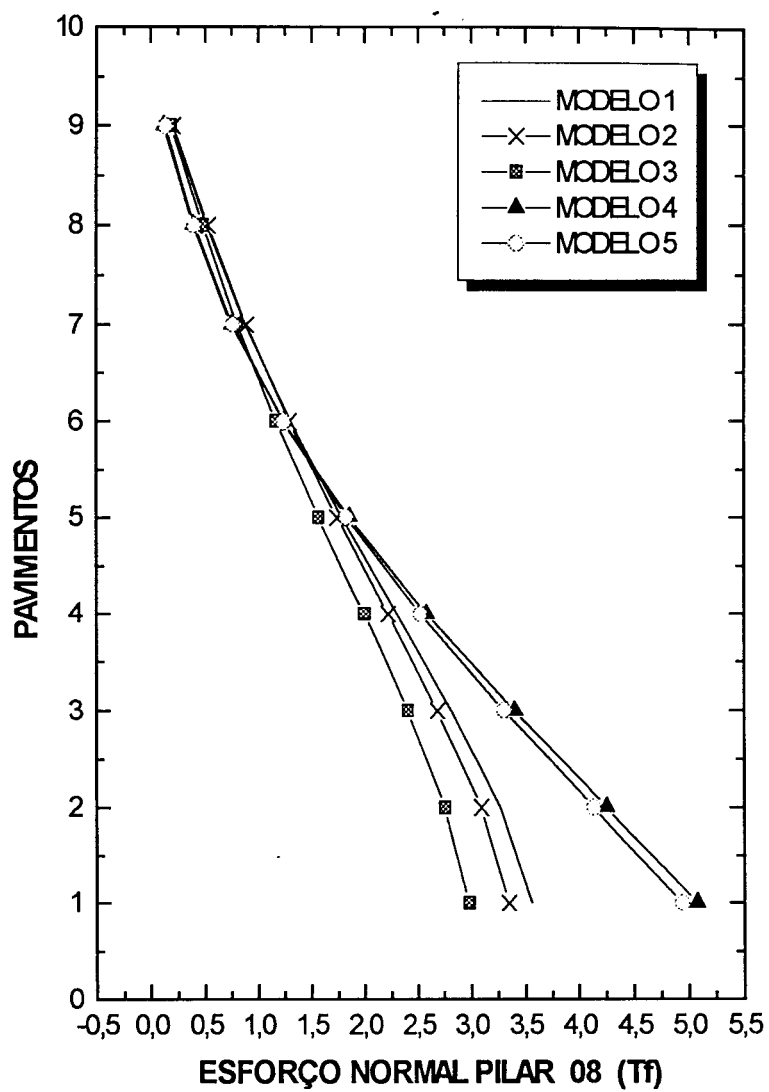
Figura 7.2 - Discretização do pavimento.



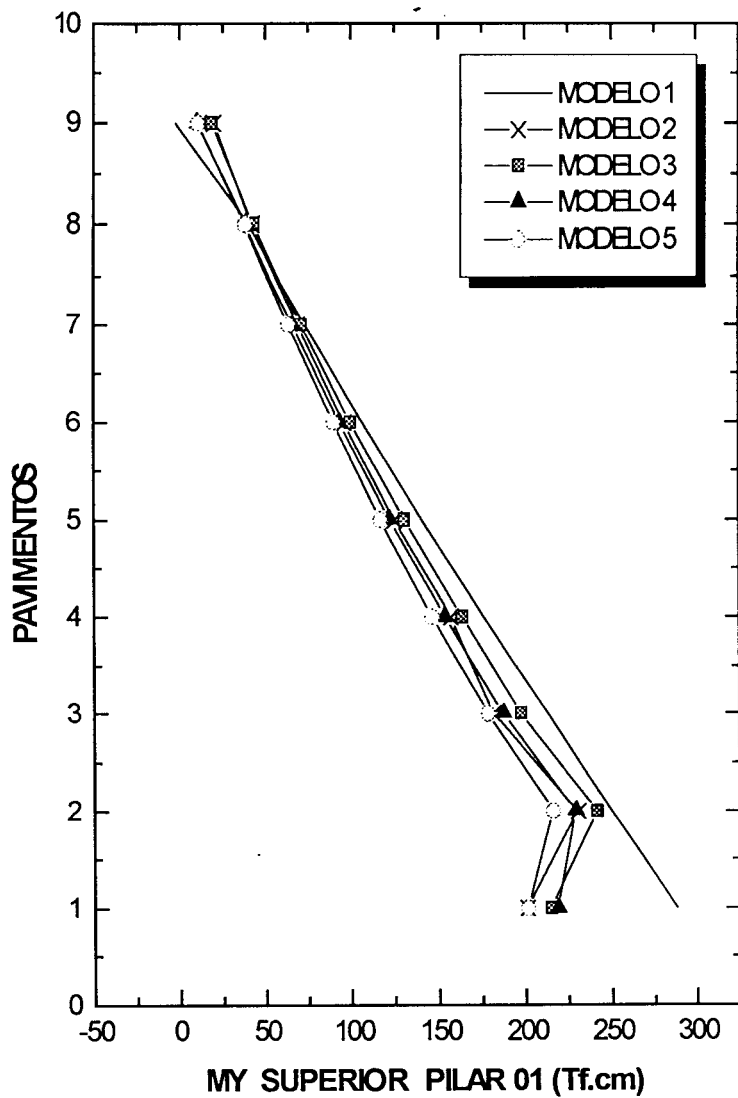
- Gráfico 01 -



- Gráfico 02 -

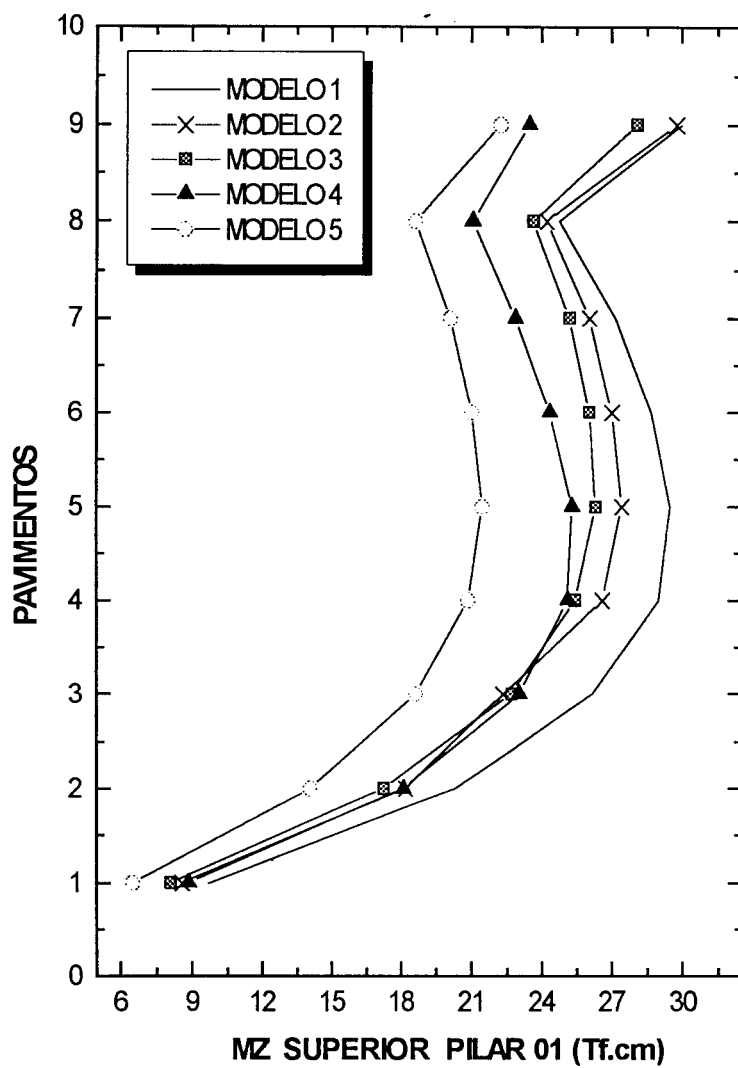


- Gráfico 03 -

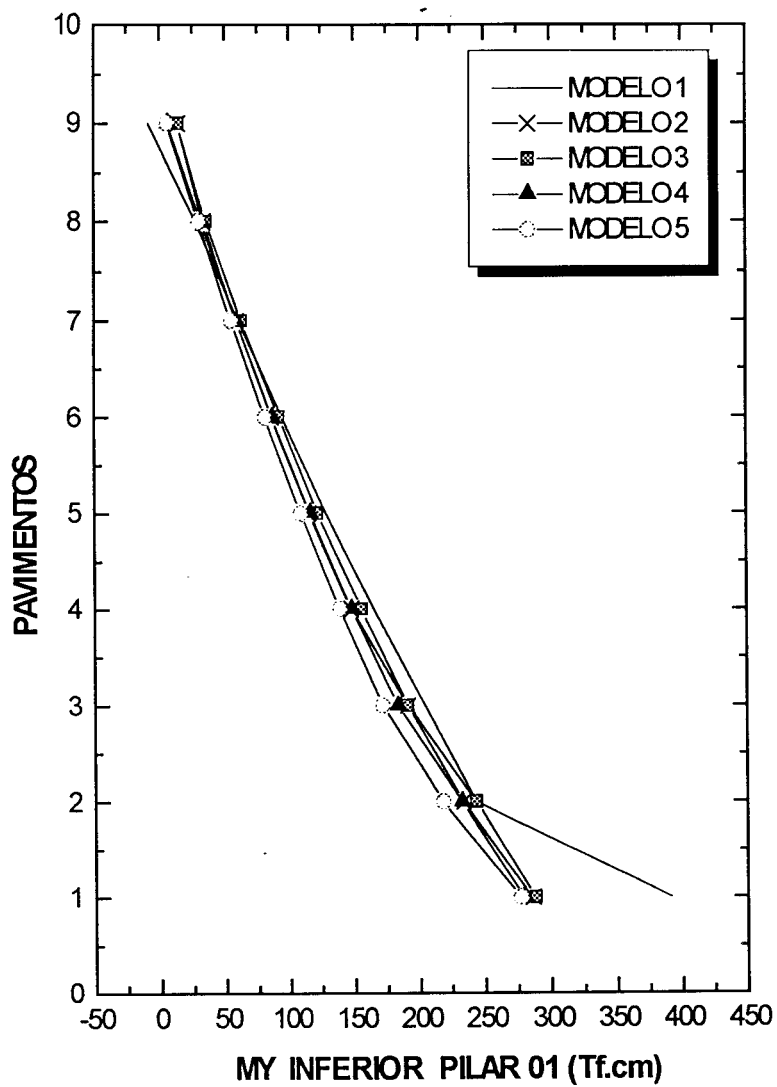


- Gráfico 04 -

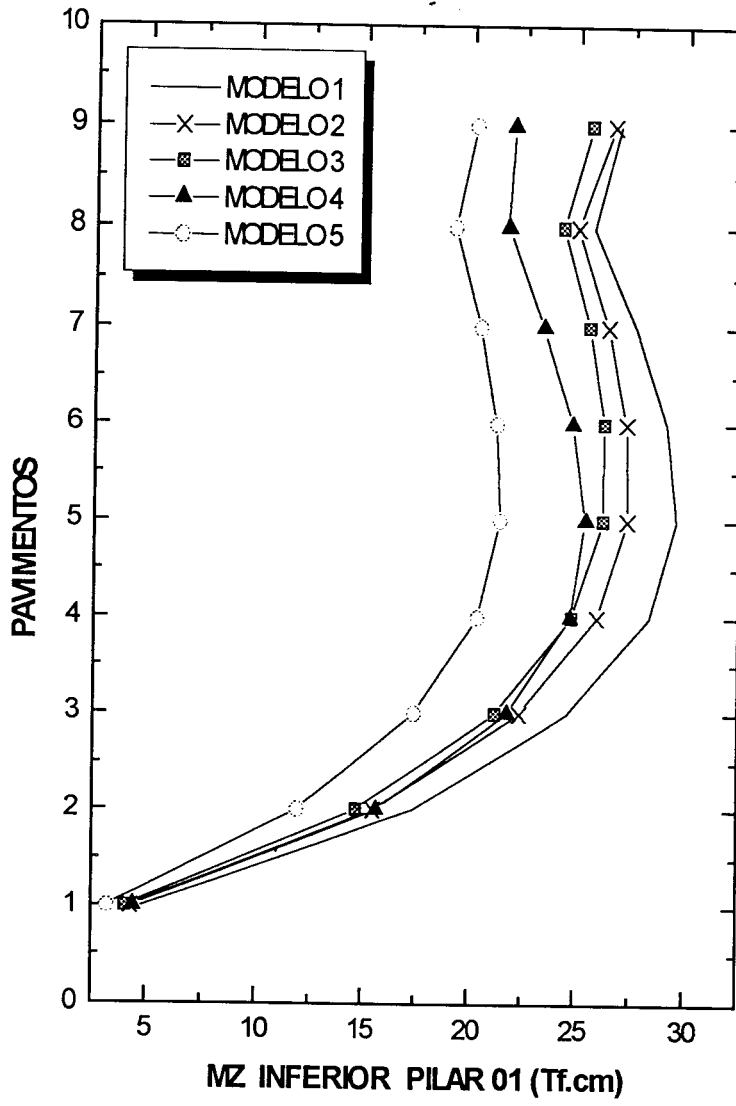




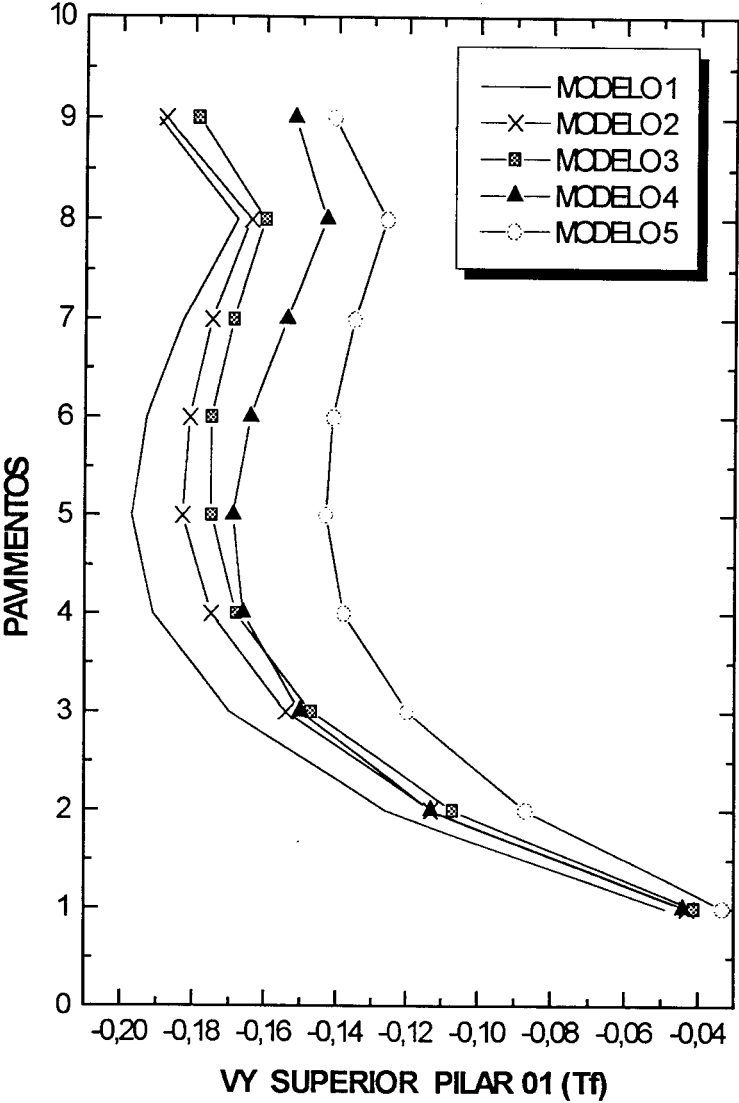
- Gráfico 05 -



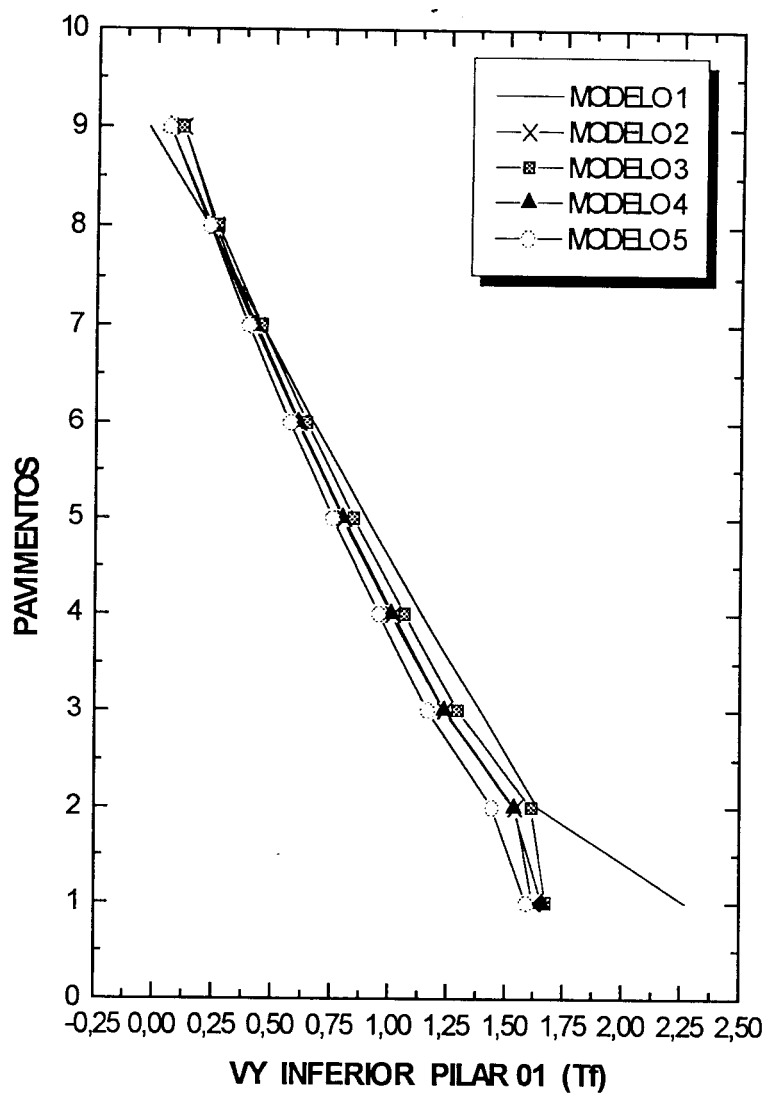
- Gráfico 06 -



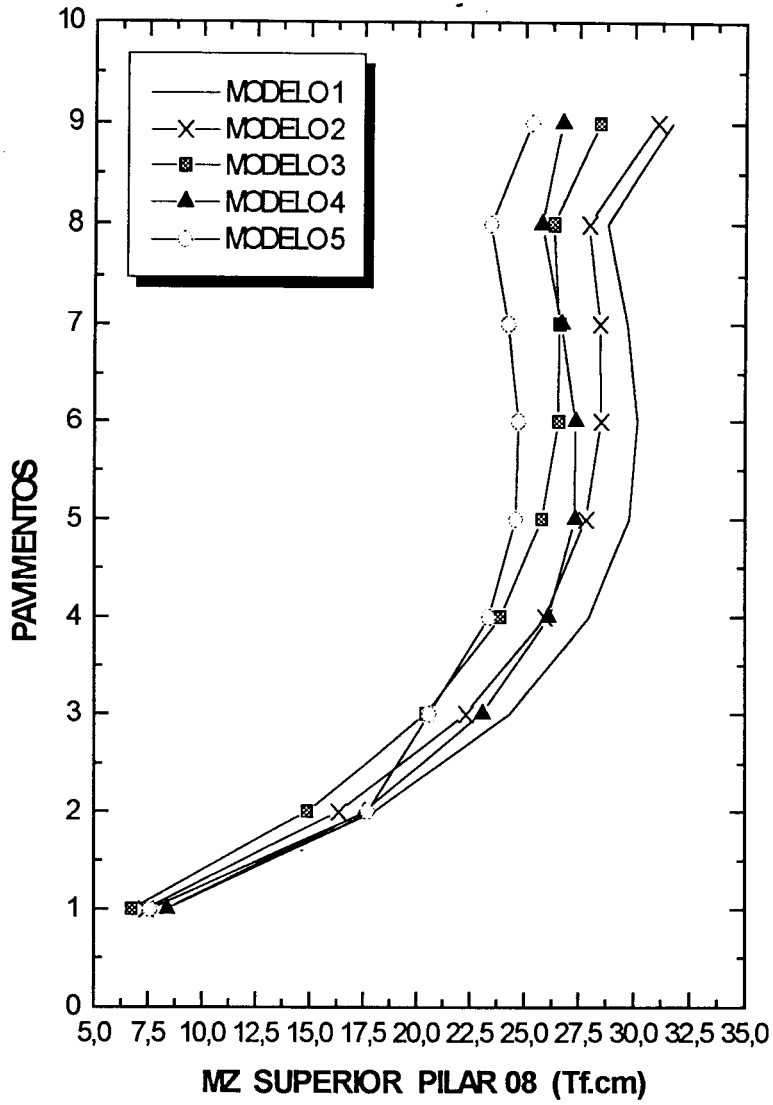
- Gráfico 07 -



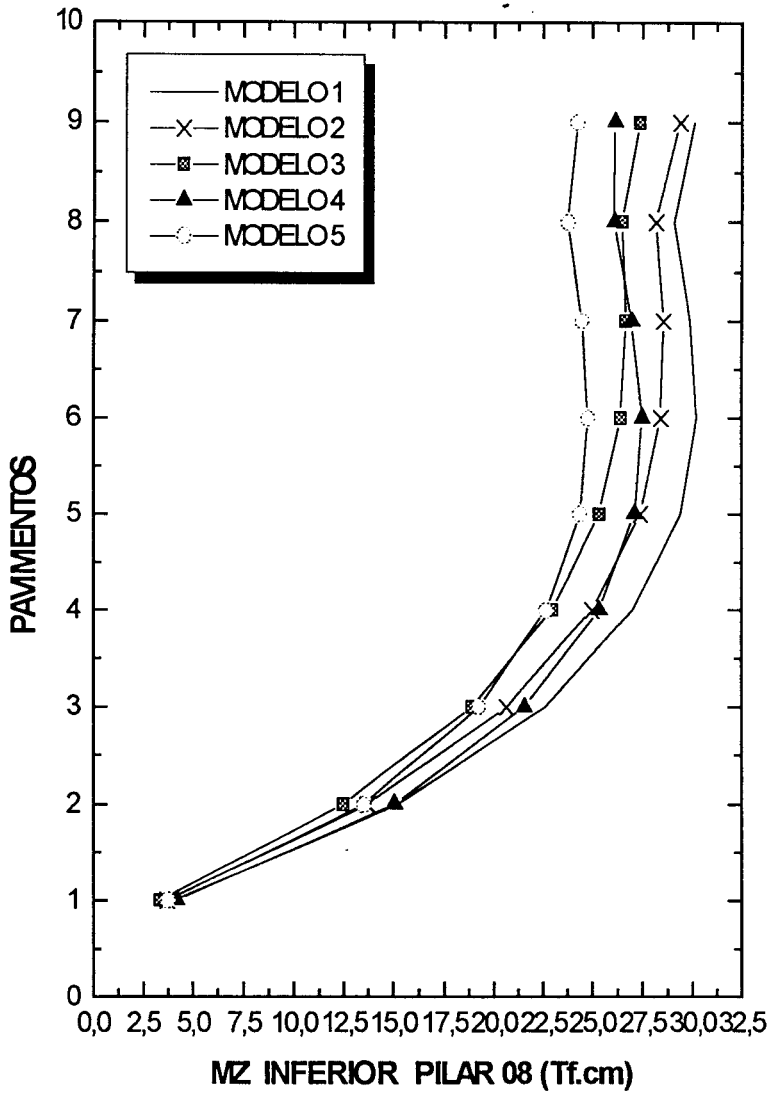
- Gráfico 08 -



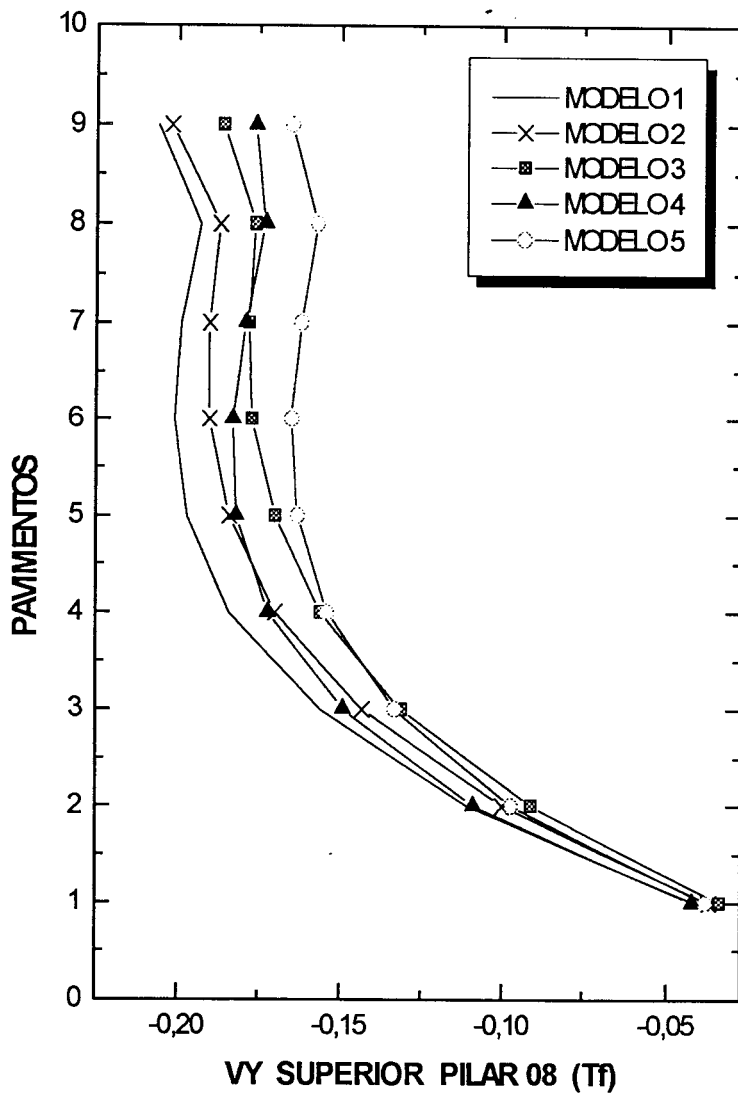
- Gráfico 09 -



- Gráfico 10 -

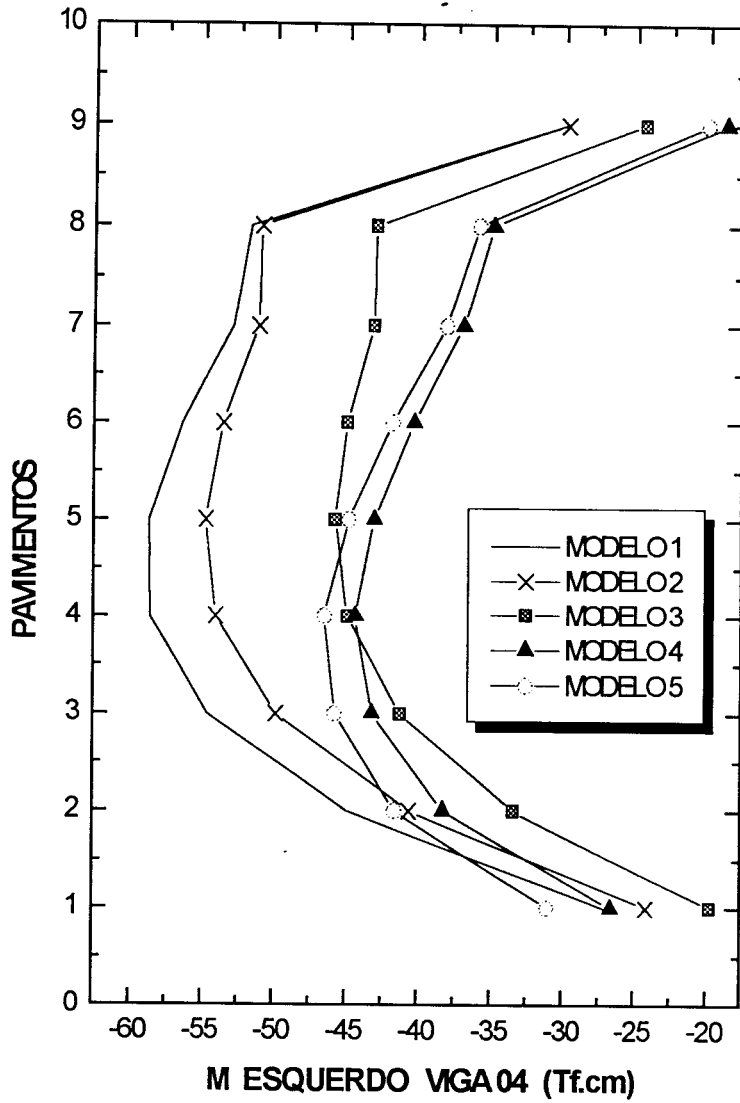


- Gráfico 11 -

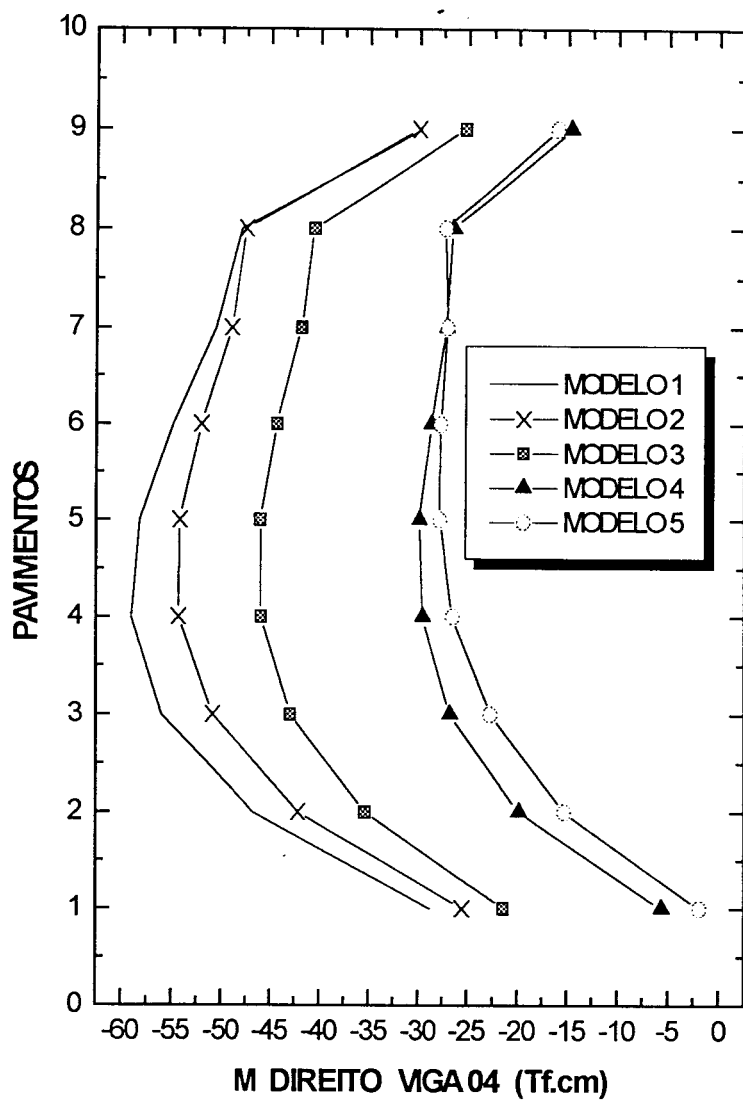


- Gráfico 12 -





- Gráfico 13 -



- Gráfico 14 -

Como a geometria da estrutura é perfeitamente simétrica, e também pela distribuição uniforme das rigidezes dos seus elementos, há somente translação horizontal na direção Z, onde a força do vento está aplicada.

Como o espaçamento entre pilares é pequeno e há apenas vigas de borda, a estrutura apresenta comportamento análogo a um tubo, por essa razão a nomenclatura de estrutura tubular. Esta estrutura, portanto, comporta-se aproximadamente como um tubo fletido, onde os pilares que recebem diretamente a aplicação da força do vento se tracionam, e os pilares correspondentes, da face oposta, se comprimem, combatendo dessa forma os momentos externos provenientes das forças laterais.

As deformações de tração ou compressão nos pilares de canto são maiores, e fazendo-se uma análise nos que estão dispostos na mesma direção das forças laterais, verificou-se uma diminuição progressiva dessas deformações para os pilares vizinhos, anulando-se nos pilares centrais, onde a partir desse ponto, aumenta novamente mas no sentido inverso, até chegar ao outro pilar extremo. Isso deve-se ao comportamento das vigas de bordo à flexão.

Analisando o primeiro gráfico deste exemplo, observa-se que ao computar a rigidez à flexão das lajes na estrutura, os deslocamentos horizontais dos pavimentos são menores que os obtidos pelos modelos que as consideram apenas como diafragmas rígidos; encontrou-se uma diferença de 17% referente a translação do último pavimento, comparando-se os modelos 01 com 04. Pode-se concluir portanto, que as lajes tiveram uma participação considerável na rigidez global da estrutura.

Com os deslocamentos reduzidos, verificou-se de uma forma geral uma redução dos esforços de flexão nos elementos estruturais, como pode ser verificado nos pilares

01 e 08. O mesmo raciocínio pode ser estendido para as vigas. Observou-se também uma redução nas forças cortantes, entretanto, a força normal do pilar 08 aumentou sensivelmente (gráfico 03).

### 7.3 SEGUNDO EXEMPLO

Neste exemplo analisa-se um edifício com 12 pavimentos iguais, conforme a figura 7.3, onde se aplica simultaneamente duas componentes da força do vento  $F_1$  e  $F_2$  em cada pavimento. Todos os andares têm pé-direito de 2,90m. Para simplificar a elaboração do arquivo de dados, todas as lajes apresentam a mesma espessura e carregamento vertical uniformemente distribuído ( $550 \text{ Kg} / \text{m}^2$ ).

As forças do vento foram determinadas respeitando a norma NBR6123, com velocidade básica  $V_0 = 30 \text{ m} / \text{s}$ , fatores  $S_1 = S_3 = 1,0$ , e  $S_2$  classificado na categoria V e classe B.

Com intuito de permitir uma melhor aferição dos dados, mostram-se nas tabelas seguintes, as dimensões das seções transversais dos elementos estruturais (vigas e pilares), e ainda as forças do vento em todos os pavimentos. Novamente analisa-se a estrutura em vários casos, sendo agora:

MODELO 1: Análise tridimensional sem observar a formação de painéis e os trechos rígidos;

MODELO 2: Análise tridimensional considerando a rigidez transversal das lajes com espessura constante de 10cm, e sem trechos rígidos.

MODELO 3: Análise tridimensional com trechos rígidos;

MODELO 4: Análise tridimensional considerando a rigidez transversal das lajes com espessura constante de 10cm, e com trechos rígidos.

VIGAS	DIMENSÕES (cm)
V01	12X50
V02	20X60
V03	12X50
V04	12X50
V05	12X60
V06	12X60
V07	20X50
V08	12X60
V09	12X60
V10	20X60
V11	15X60
V12	20X60
V13	15X60
V14	20X60
V15	15X60
V16	12X50
V17	15X60
V18	20X60
V19	15X60
V20	20X60

TABELA 7.1 - Características Geométricas das vigas.

PILARES	DIMENSÕES (cm)
P01	15X40
P02	15X40
P03	SEÇÃO EM "L" (60X60X20)
P04	20X60
P05	15X40
P06	15X40
P07	20X60
P08	SEÇÃO EM "L" (60X60X20)
P09	15X40
P10	15X40
P11	20X60
P12	20X60
P13	20X80
P14	15X40
P15	15X40
P16	20X80
P17	SEÇÃO EM "L" (60X60X20)
P18	20X60
P19	20X80
P20	20X80
P21	20X60
P22	SEÇÃO EM "L" (60X60X20)

TABELA 7.2 - Características Geométricas dos pilares.

FORÇAS DO VENTO		
PAVIMENTO	FORÇA F1 (Kgf)	FORÇA F2 (Kgf)
01	1094,80	1293,86
02	1094,80	1293,86
03	1094,80	1293,86
04	1219,98	1441,80
05	1219,98	1441,80
06	1351,67	1597,42
07	1351,67	1597,42
08	1526,22	1803,72
09	1526,22	1803,72
10	1526,22	1803,72
11	1672,83	1976,99
12	1672,83	1976,99

TABELA 7.3 - Componentes das forças do vento.

Nas páginas seguintes, parte dos resultados encontrados pelo programa neste exemplo são apresentados e novamente estão dispostos em gráficos.

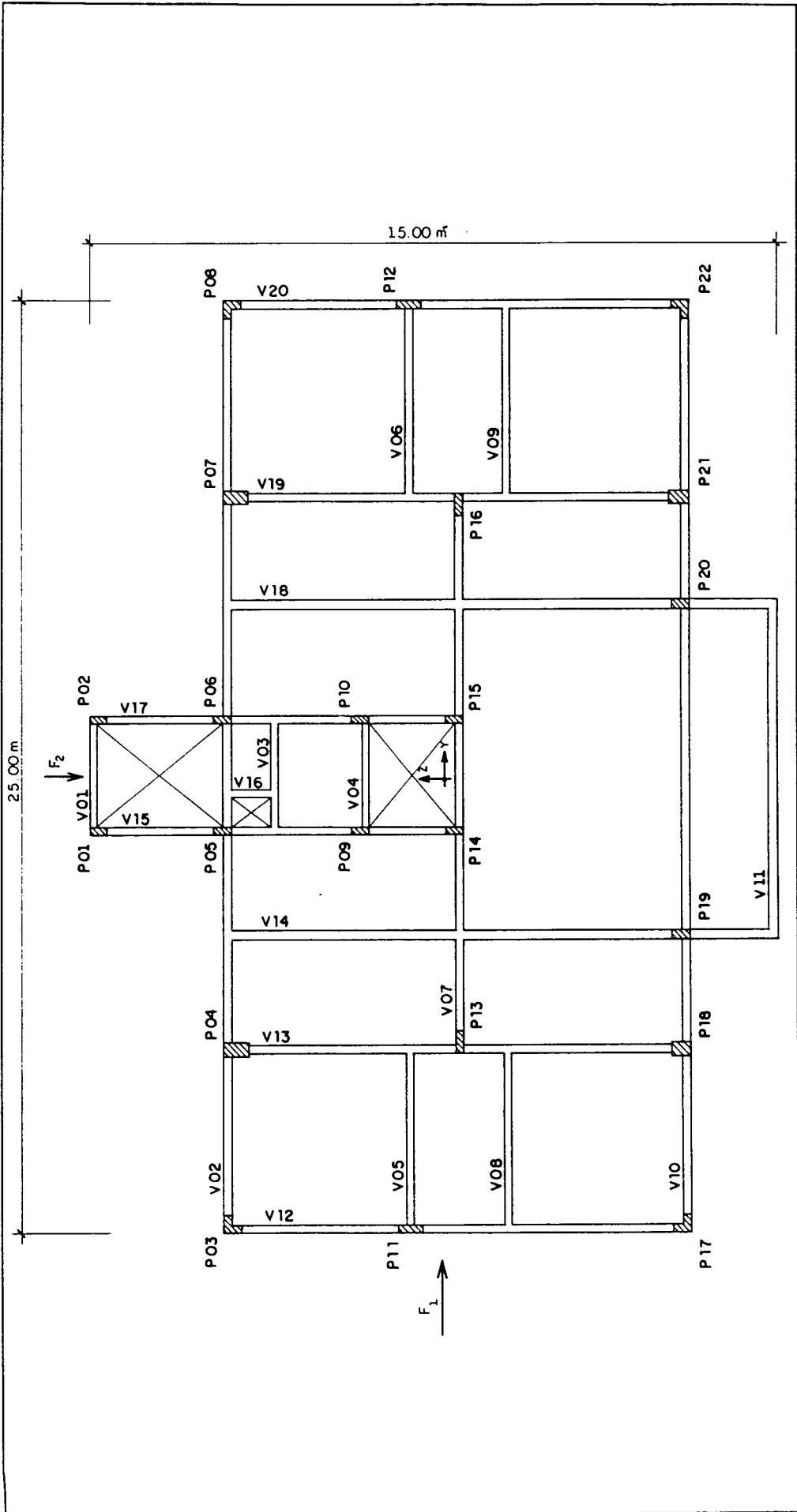


Figura 7.3 - Planta baixa dos pavimentos.

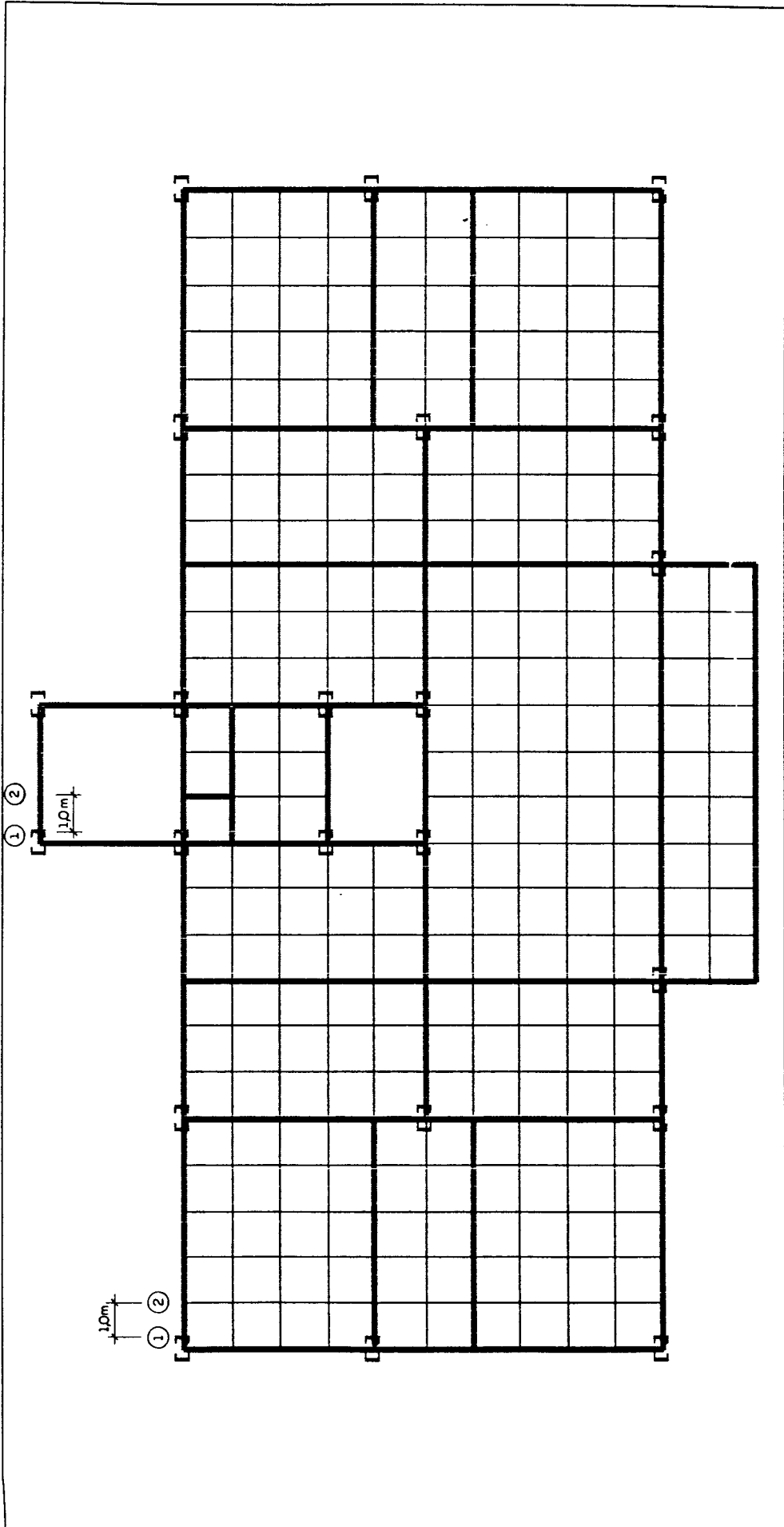
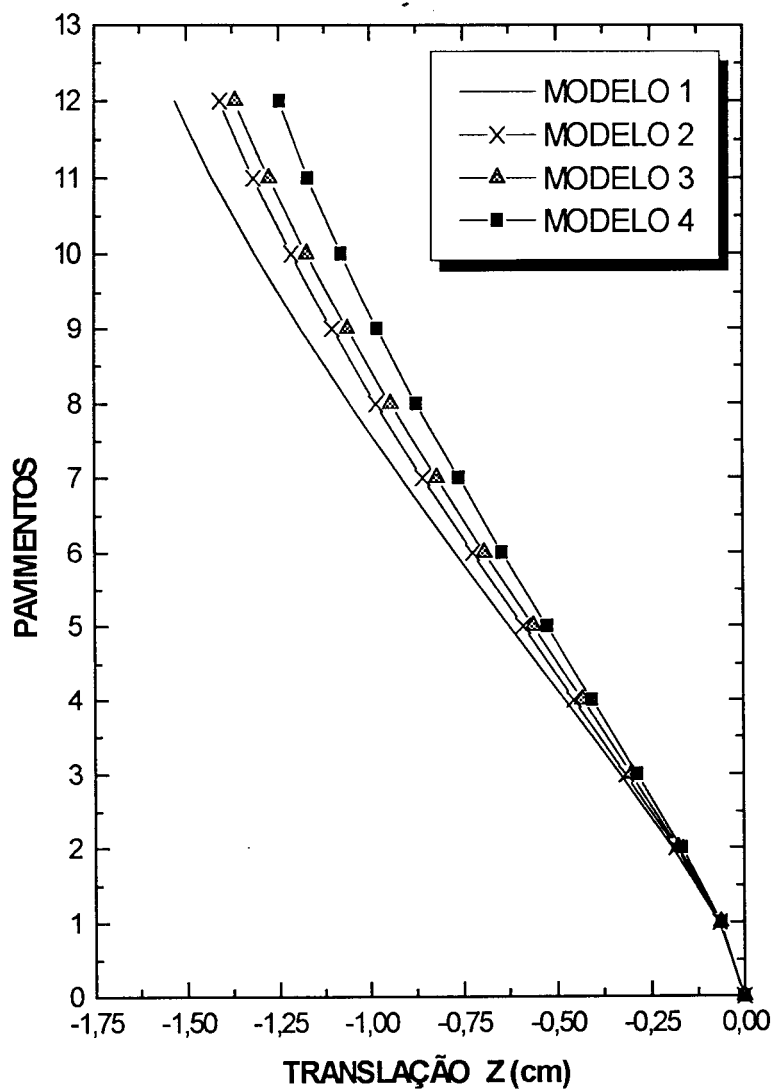
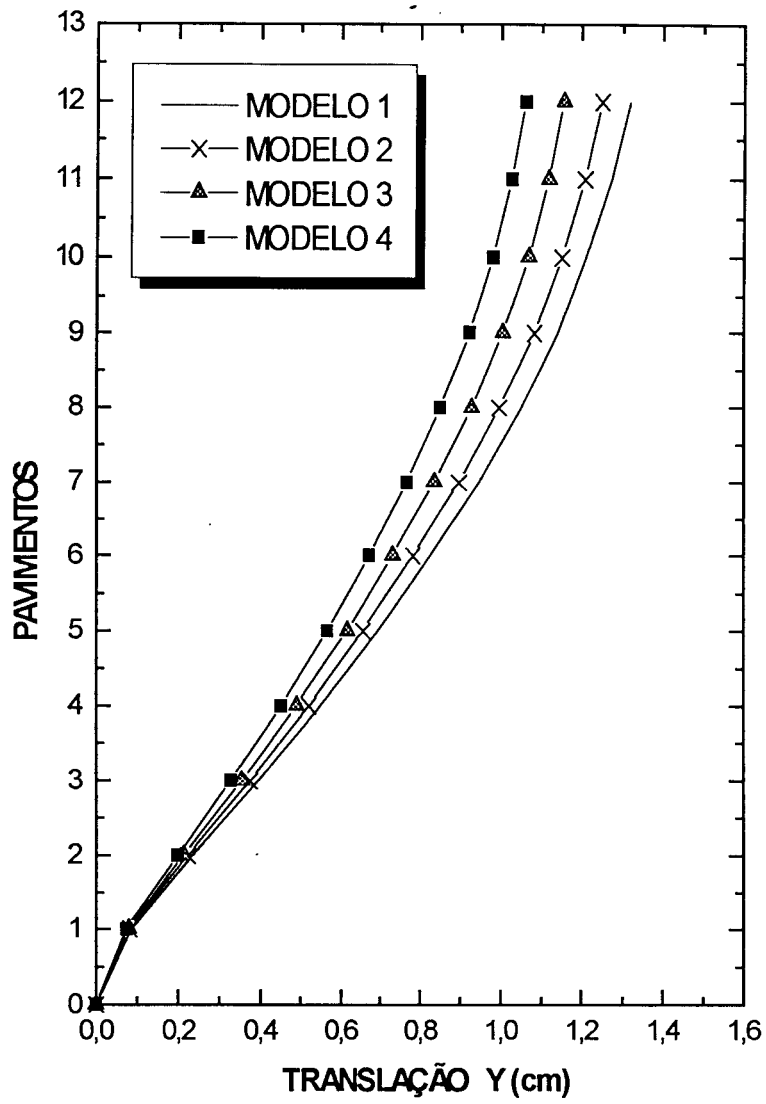


Figura 7.4 - Discretização do pavimento.

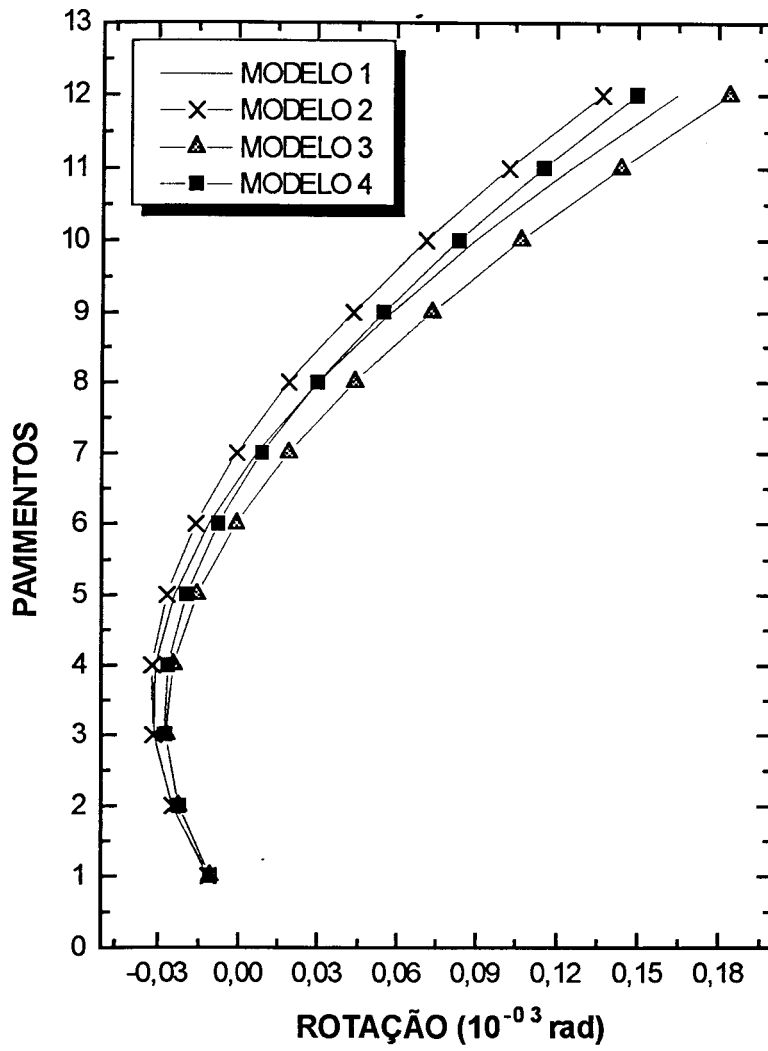




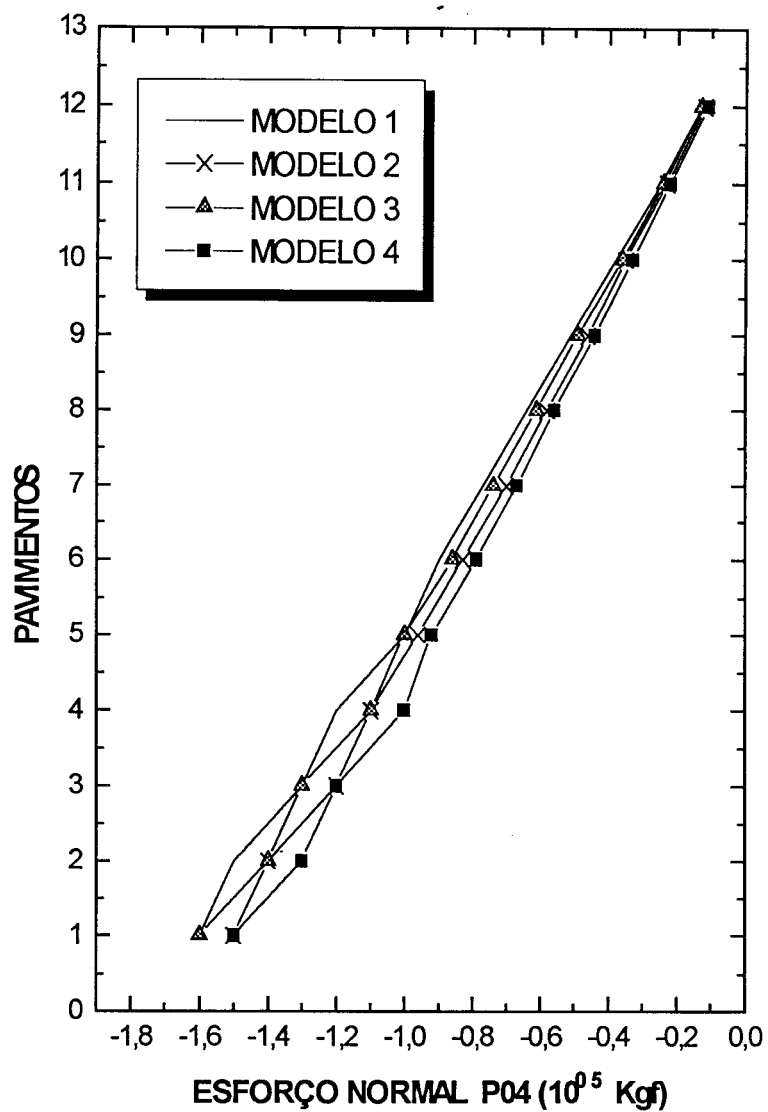
- Gráfico 15 -



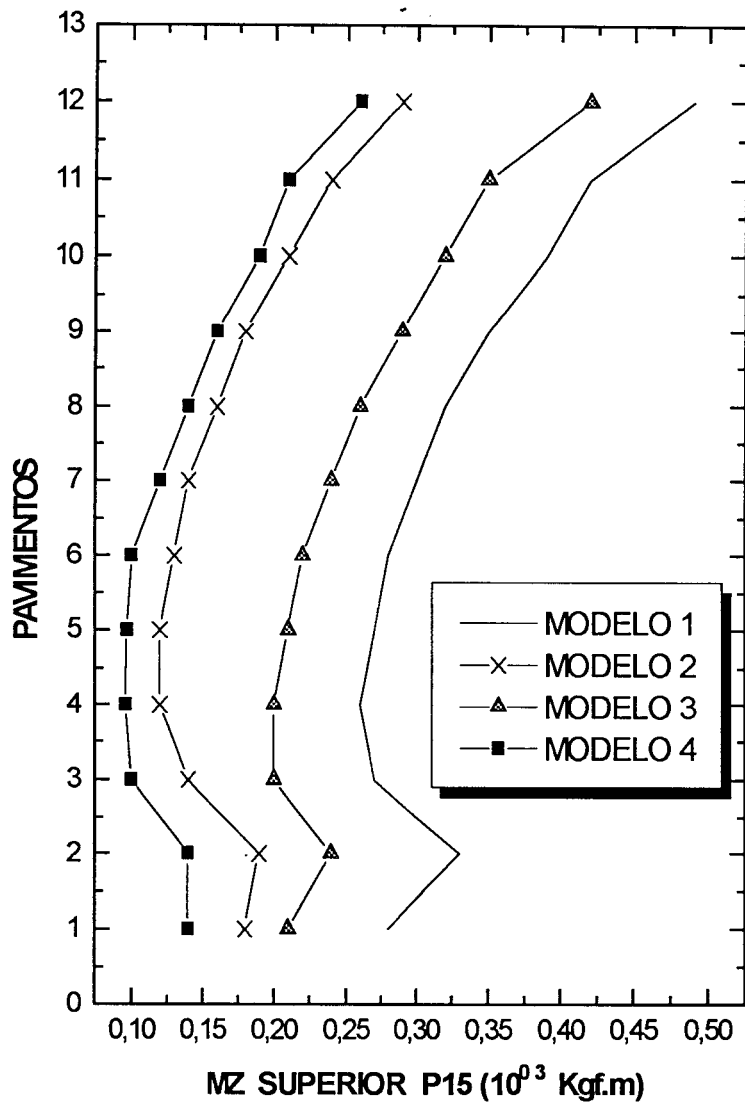
- Gráfico 16 -



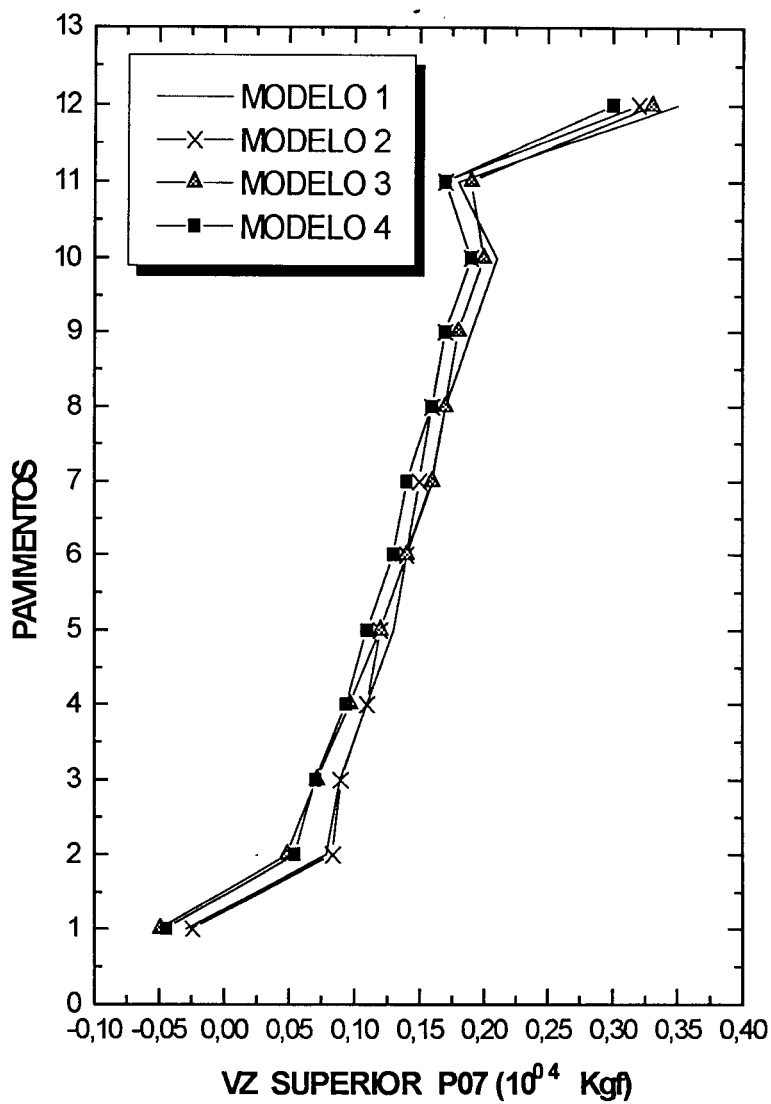
- Gráfico 17 -



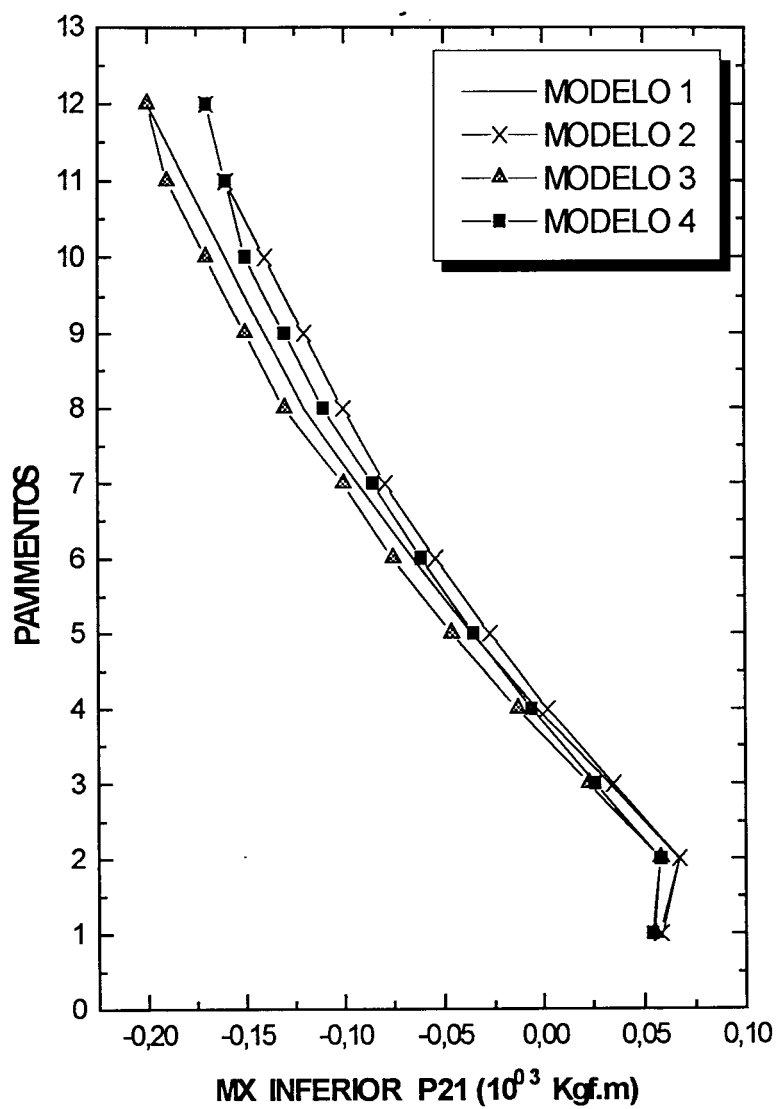
- Gráfico 18 -



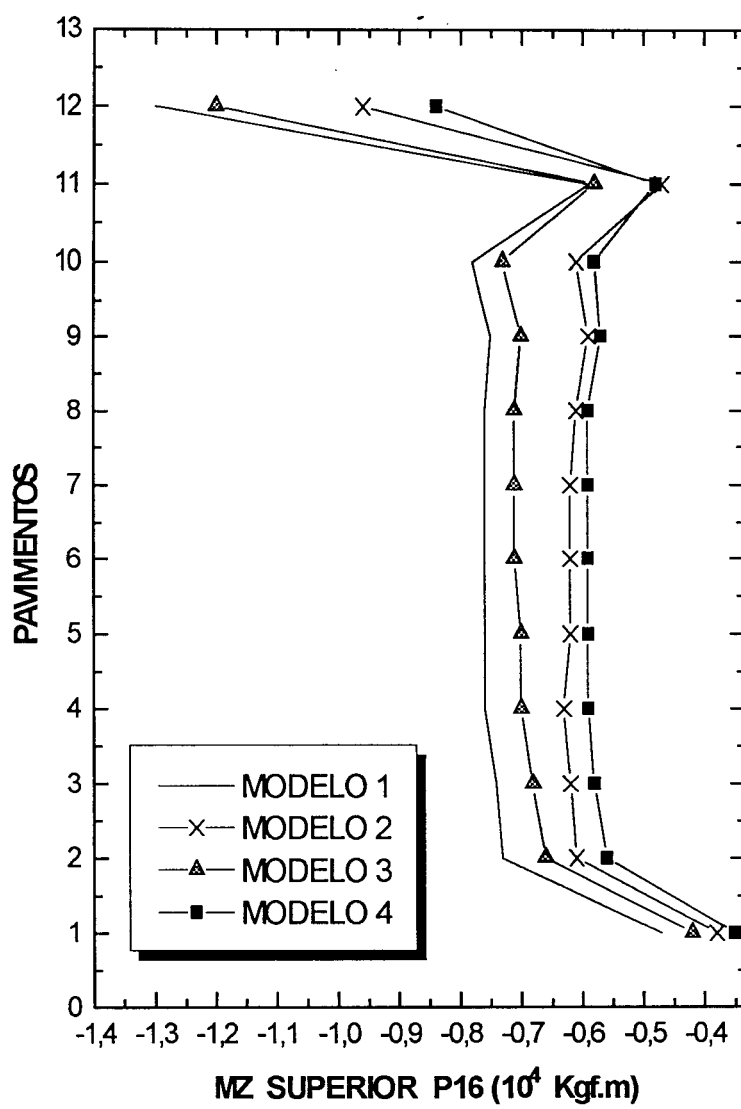
- Gráfico 19 -



- Gráfico 20 -

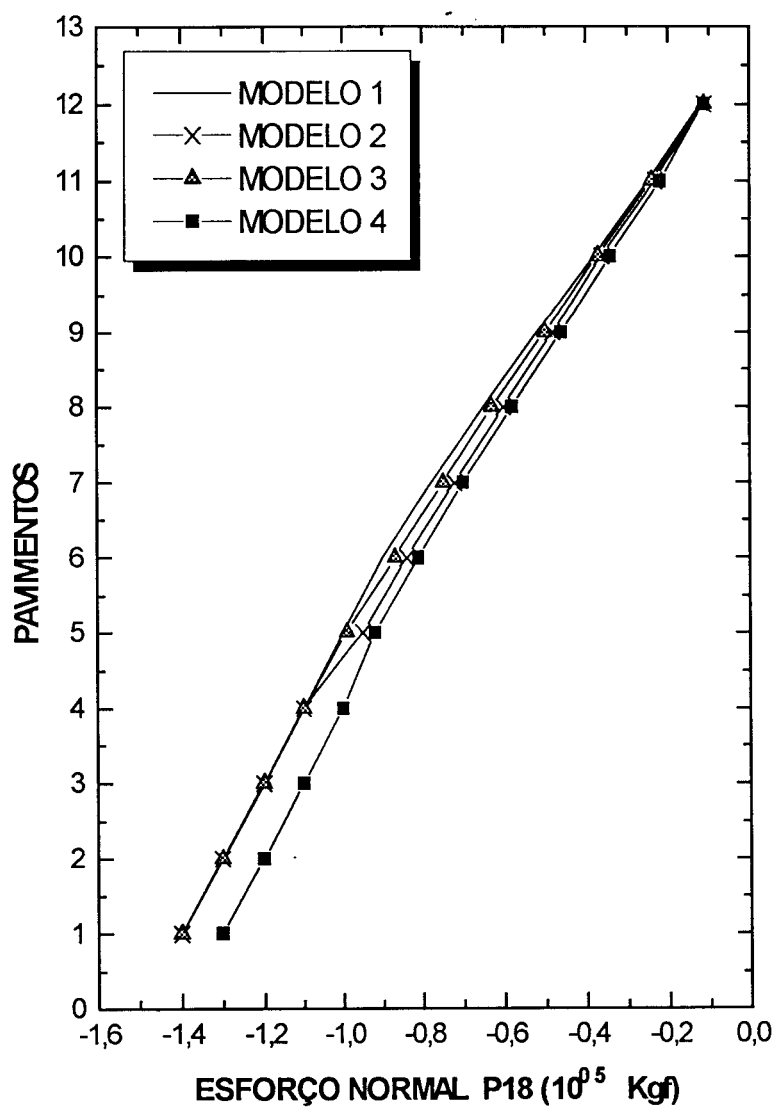


- Gráfico 21 -

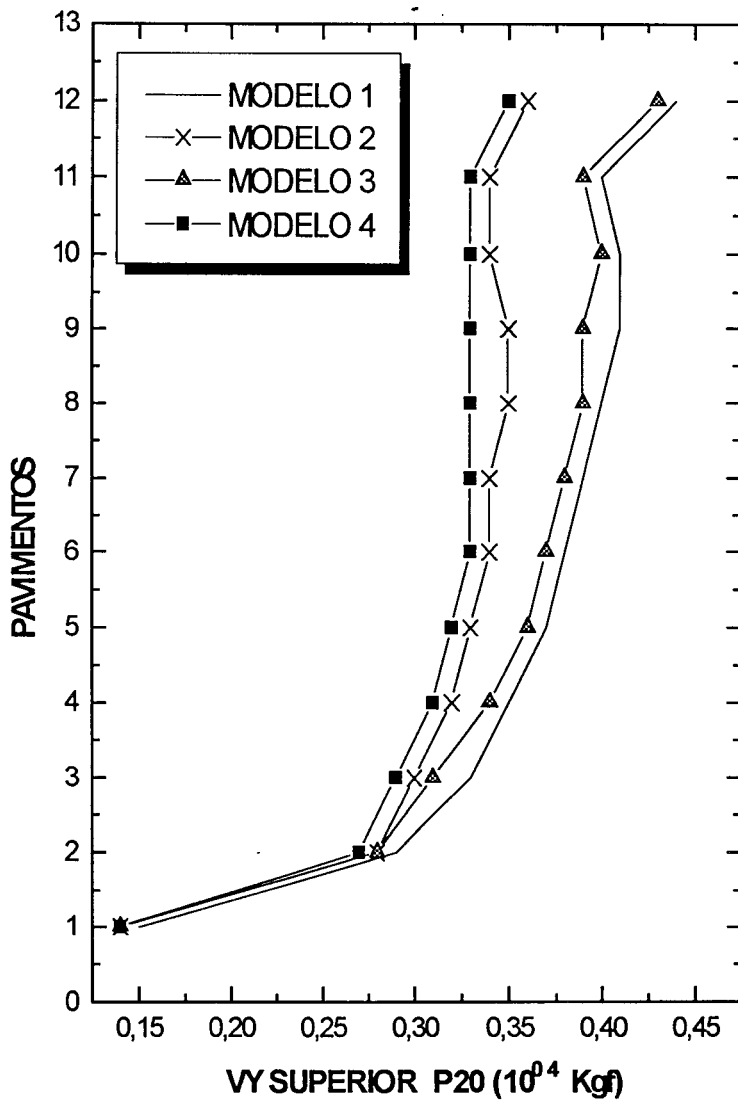


- Gráfico 22 -

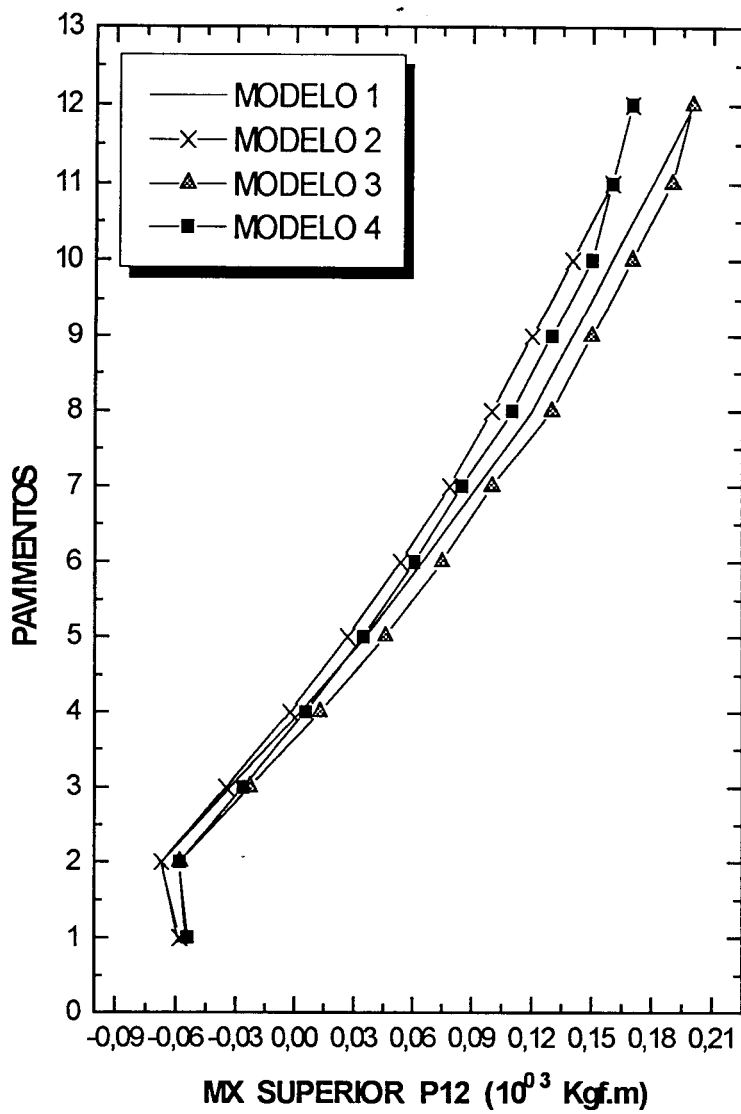




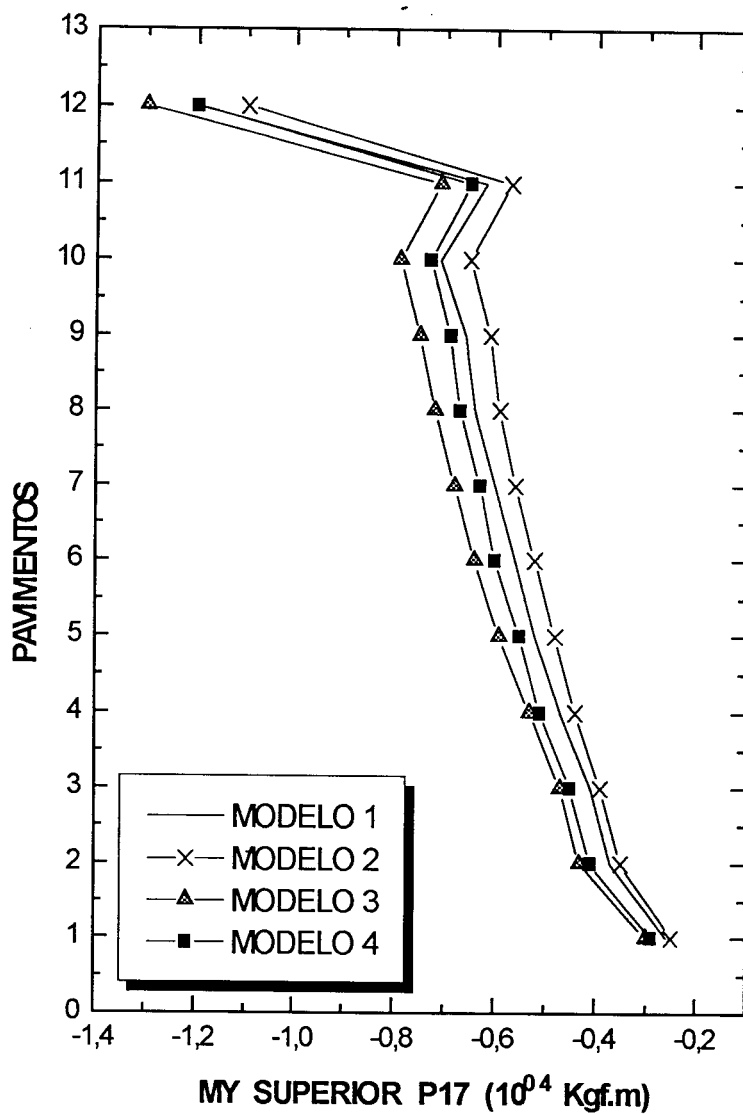
- Gráfico 23 -



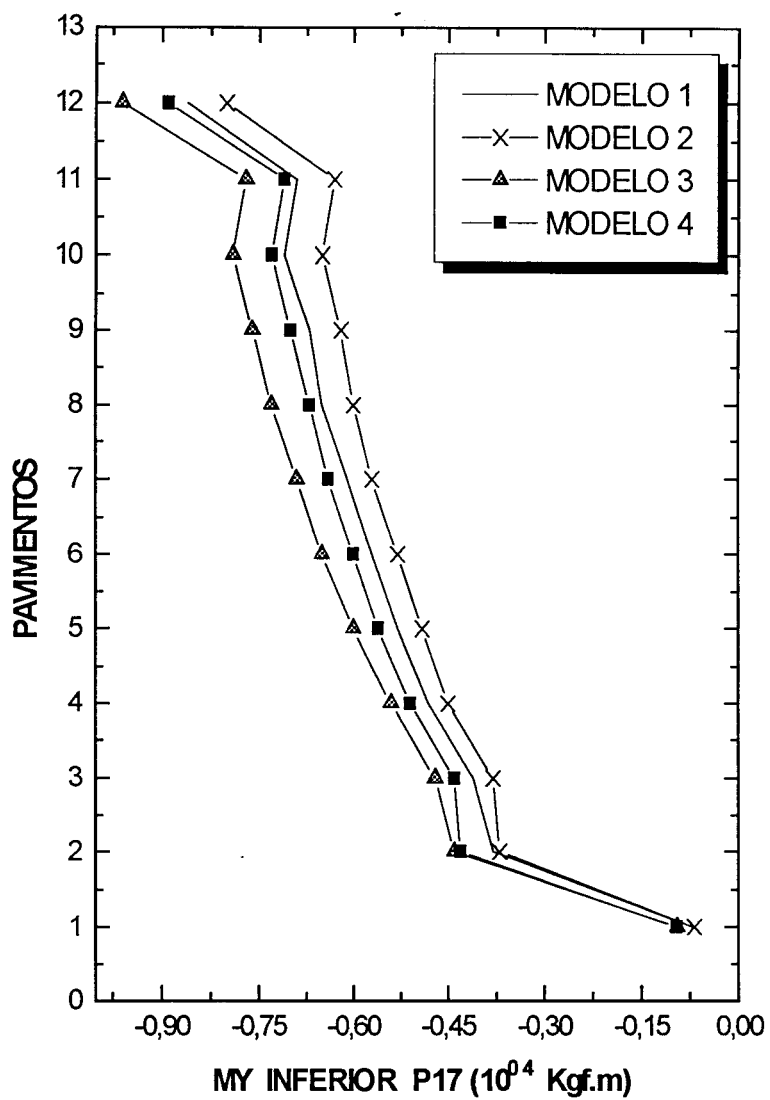
- Gráfico 24 -



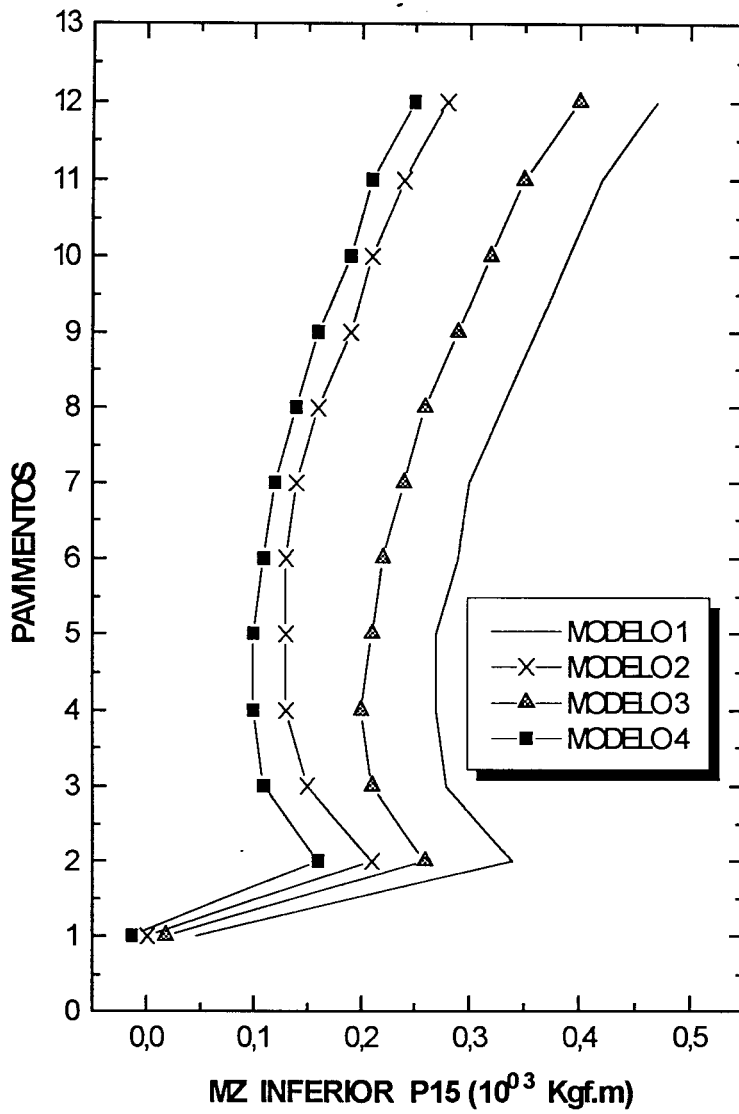
- Gráfico 25 -



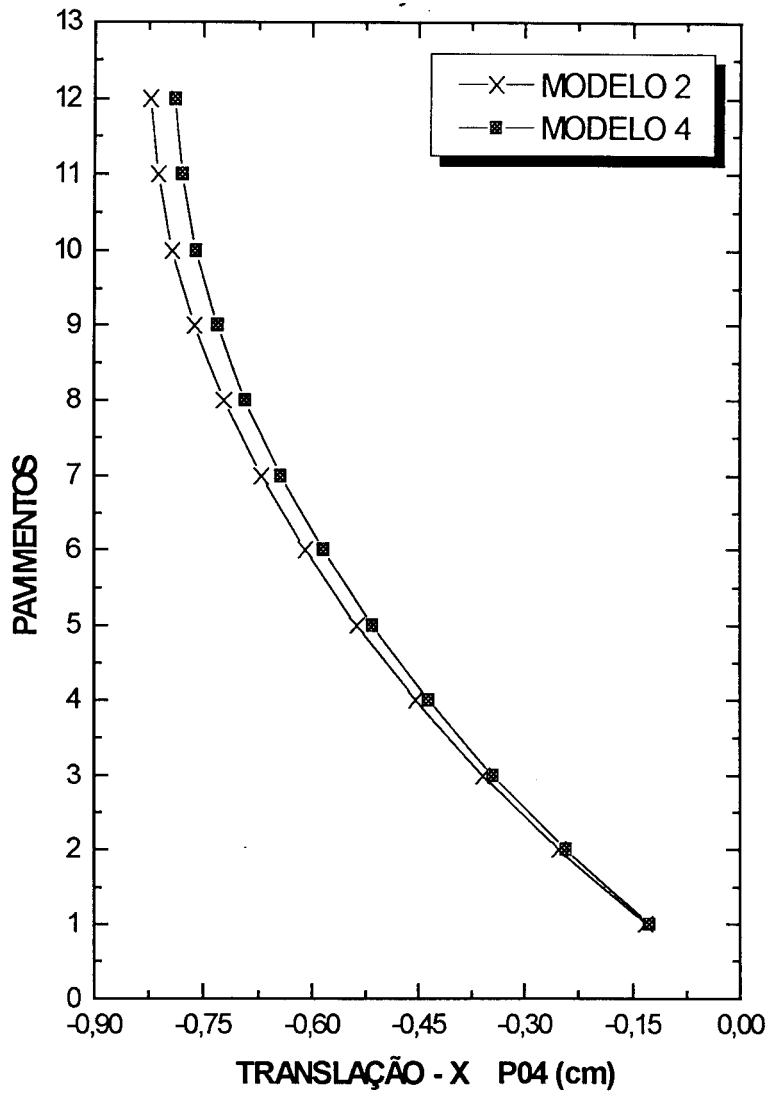
- Gráfico 26 -



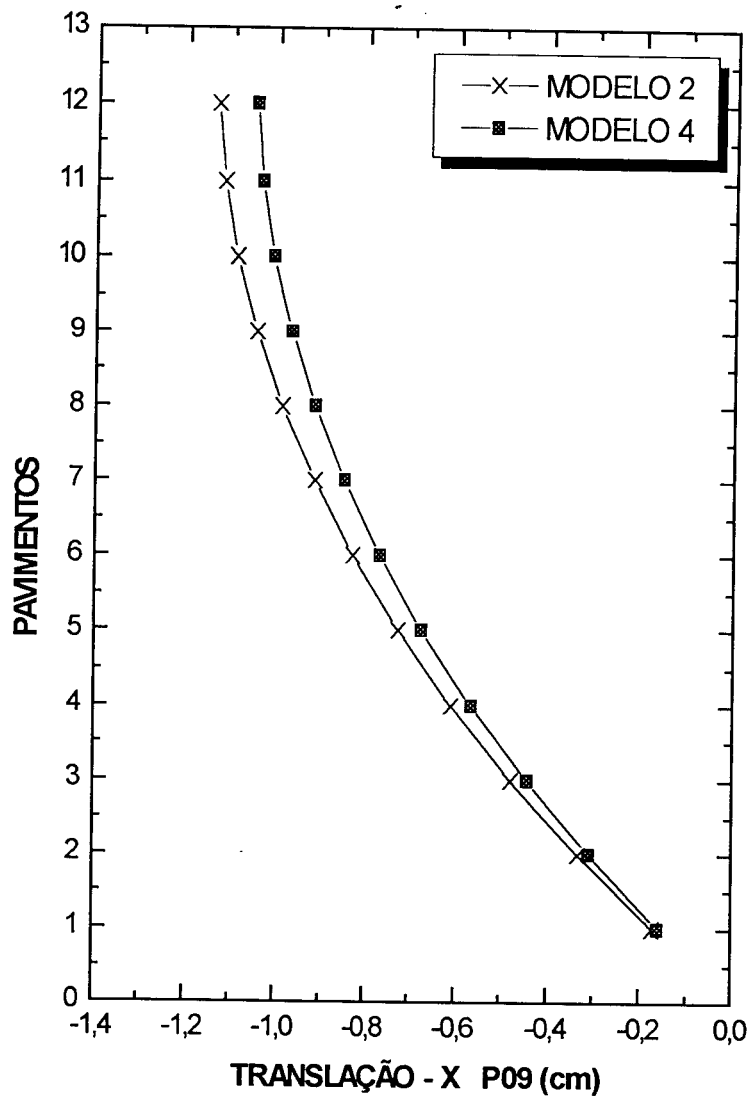
- Gráfico 27 -



- Gráfico 28 -

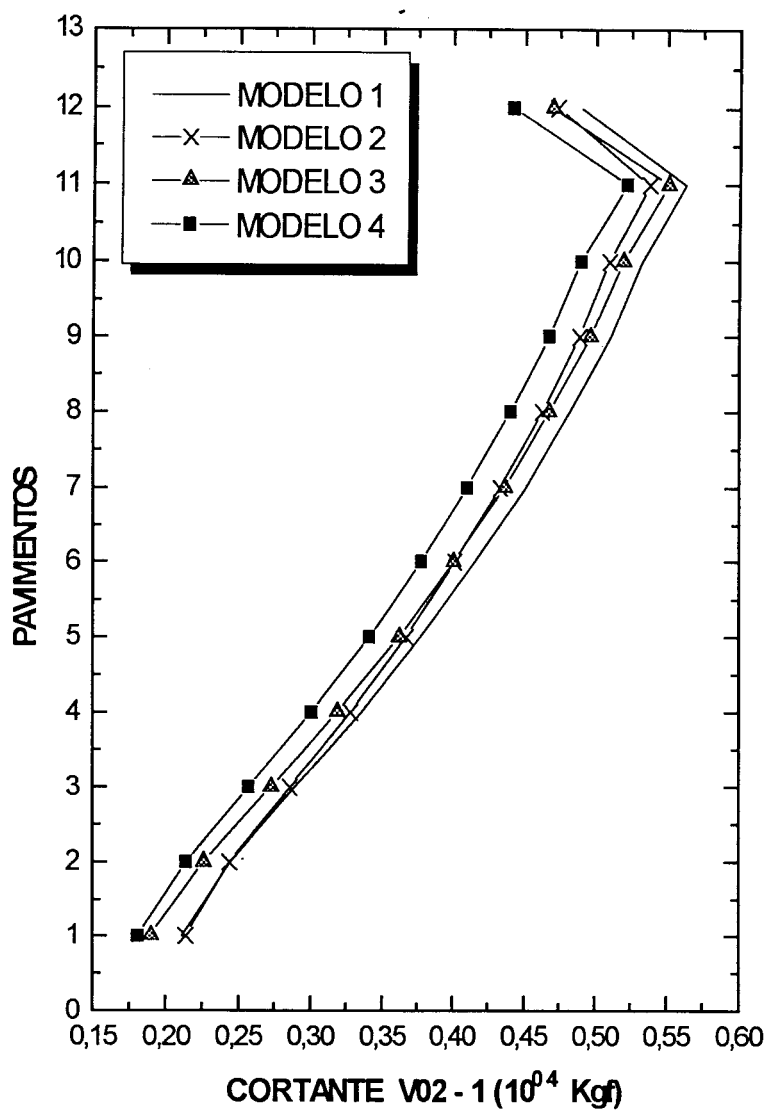


- Gráfico 29 -

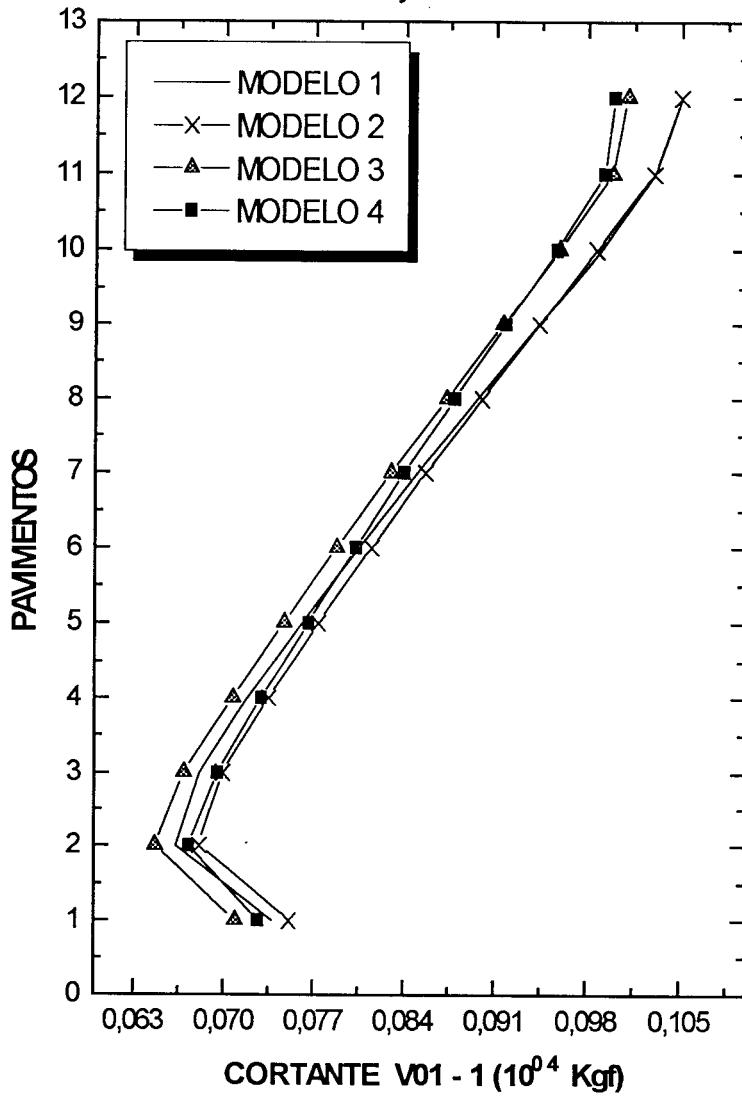


- Gráfico 30 -

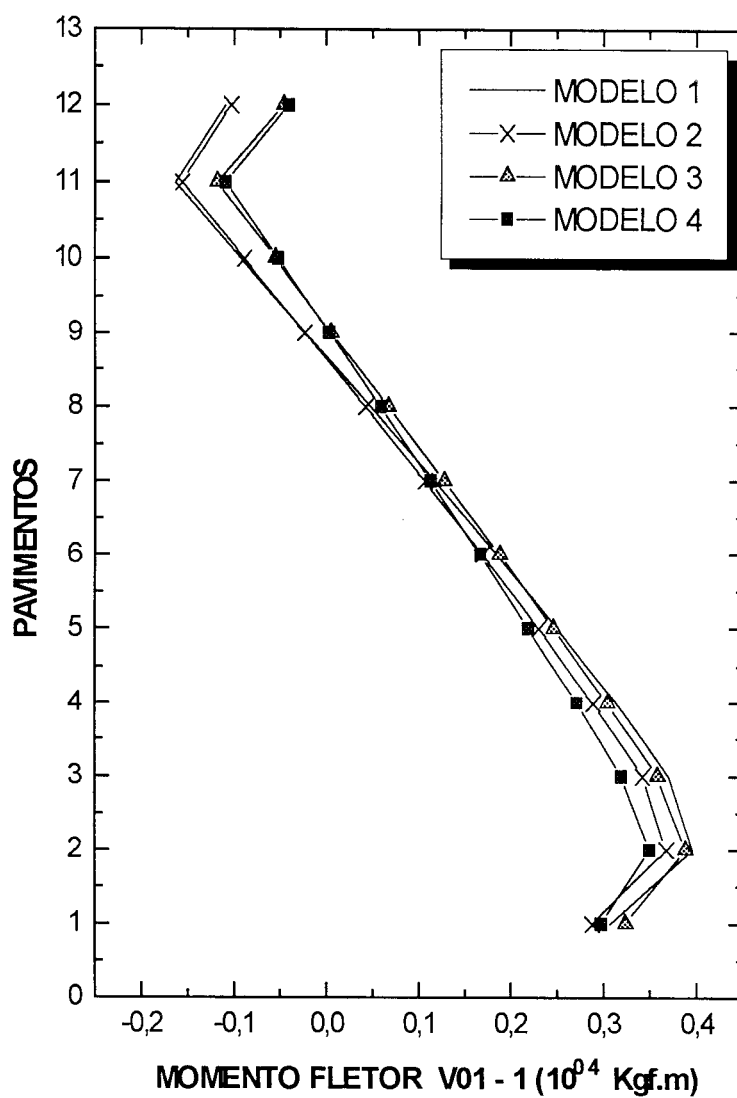




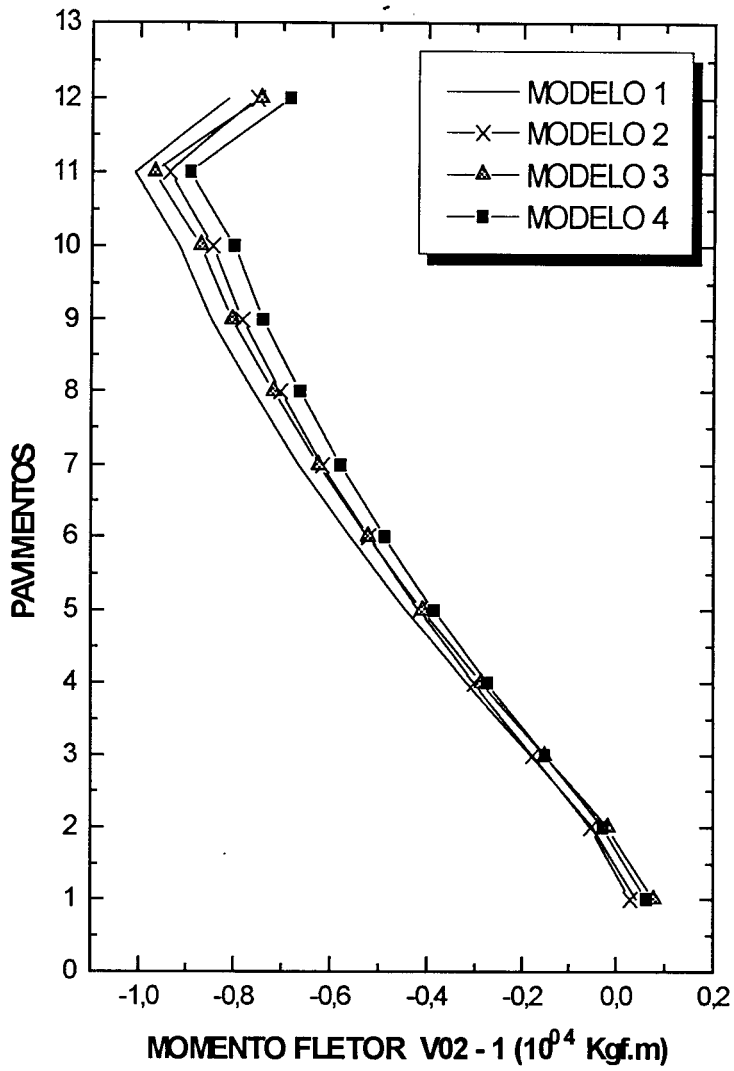
- Gráfico 31 -



- Gráfico 32 -



- Gráfico 34 -



- Gráfico 33 -

Verifica-se novamente que ao levar em conta a rigidez à flexão das lajes juntamente com os trechos rígidos, ocorre uma redução dos deslocamentos horizontais nos pavimentos em comparação aos outros casos, entretanto neste exemplo, os trechos rígidos têm uma influência tão considerável quanto as lajes na rigidez global da estrutura, como se pode ver nos gráficos 15 e 16 comparando-se os modelos 2 com 3.

A princípio pode-se pensar que as rotações dos pavimentos por serem pequenas, não são tão significativas quanto os deslocamentos lineares, entretanto, se calcularmos por exemplo a translação do pilar 12 na direção "Z", que se encontra a 12,5m da origem do sistema de referência, devido à rotação do último pavimento obtido no modelo 4 ( $0,1496 \times 10^{-03}$  rad), o pilar nesse nível desloca-se 0,19cm, representando 15% da componente do deslocamento horizontal correspondente, daí a importância de se considerar a estrutura no espaço tridimensional para que tais efeitos não sejam desprezados.

## CAPÍTULO 8

---

### CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

No modelo estrutural adotado no presente trabalho, as lajes têm uma participação mais efetiva na interação dos esforços e deslocamentos com os demais elementos (vigas e pilares), em comparação aos modelos que as consideram apenas como diafragmas rígidos. Há portanto, uma análise conjunta mais realista de cada subestrutura, proveniente da simulação da rigidez relativa entre os elementos estruturais.

Com a utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF), foi possível obter informações sobre os deslocamentos independentes em diversos pontos do pavimento, tornando-se uma grande vantagem em relação aos modelos que tradicionalmente admitem as lajes sem qualquer rigidez transversal, onde tais deslocamentos não podem ser avaliados.

Como objetivo principal é analisar a contribuição da rigidez à flexão das lajes na estrutura global, e conhecer seus deslocamentos correspondentes, geralmente uma malha

grosseira já obtém resultados satisfatórios para esses propósitos, entretanto, deve-se salientar, embora não seja o caso, quando se objetiva conhecer a distribuição de tensões, é conveniente o uso de malhas mais refinadas.

Com o estudo dos resultados obtidos nos exemplos, mostrou-se que a rigidez transversal das lajes influencia sensivelmente no comportamento estrutural do edifício. A representatividade da rigidez relativa laje-viga-pilar obtido com o emprego do MEF, também influenciará no fluxo das cargas, produzindo via de regra, menores esforços, principalmente os de flexão nos elementos da subestrutura, podendo ocorrer portanto economia da armadura nas peças em concreto armado.

Apesar do modelo ser bastante eficiente, sem dúvida alguma, o mesmo pode ser aperfeiçoado ainda mais, pois pode-se considerar trechos rígidos verticais nas ligações viga-pilar ou até mesmo nas ligações laje-viga. A deformabilidade das lajes em seu plano pode ser analisada, discretizando-a também em elementos finitos de chapa, dessa forma é possível computar os esforços axiais nas vigas quando a estrutura estiver submetida ao carregamento lateral.

Para trabalhos futuros nesta linha de pesquisa, recomenda-se incluir os núcleos estruturais ou resistentes com seus lintéis, avaliação da contribuição de rigidez das alvenarias de fechamento para o edifício, ou ainda fazer a análise global considerando a não-linearidade física e geométrica da estrutura.

## **BIBLIOGRAFIA**

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1980). *NBR6123 - Forças devido ao vento em edificações*. Rio de Janeiro.
- BALCAZAR, E.A.S.G. (1991). *Análise linear de estruturas tridimensionais pelo método dos elementos finitos utilizando subestruturas*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BARBOSA, J.A. (1977). *Edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral*. São Carlos. 301p. Dissertação (Mestrado)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BAPTISTA, S.M. (1994). *Análise de pavimentos de edifícios com a utilização do método dos elementos finitos*. São Carlos. 109p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BATOZ, J.L. (1982). An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, v.18, p.1077-1089.
- BATOZ, J.L.; BATHE, K.L.; HO, L.W. (1980). A study of three-node triangular plate-bending elements. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, v.15, p.1771-1812.
- BRUNELI, A.C. (1987). *Análise estrutural de edifícios sujeitos ao carregamento horizontal, considerando a rigidez das lajes, com o método dos elementos finitos*. São Carlos. 245p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CÂMARA JR., U.F. (1978). *Análise dos esforços em edifícios altos*. Rio de Janeiro. 200p. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica/RJ.



- COOK, R.C. ; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. (1989). *Concepts and applications of finite element analysis*. New York, John Wiley & Sons.
- CORRÊA, M.R.S. (1991). *Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistema estruturais de edifícios*. São Carlos. 331p. Tese (Doutorado)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CRUZ, A.A.V. (1979). *Análise estática tridimensional de edifícios com a consideração de pilares-paredes dispostos arbitrariamente*. Rio de Janeiro. 127p. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica/RJ
- EL-HAMMASI, S.A. (1990). Numerical method for analysing open thin-walled structures under interaction of bending and torsion. *Computer & Structures*, v.37, n.6, p.947-956.
- FLEMING, J.F. (1989). *Computer analysis of structural systems*. New York, McGraw-Hill.
- JEYACHANDRABOSE, C.; KIKHOPE, J. (1985). An alternative explicit formulation for the DKT plate-bending element. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, v.21, p.1289-1293.
- KOZÁK, J. (1991). *Stell-concrete structures for multistorey buildings*. Bratislava Czecho-Slovakia, Elsevier.
- LEI, W.; MEEK, J.L. (1993). Multi-level substructuring and its implementation in programming. *Advances in Engineering Software*, v.16, p.195-202.
- MARTINELLI, D.A.O.; MONTANARI, I.; SAVASSI, W. (1986). *Placas elásticas: equações gerais e placas retangulares*. São Carlos, EESC-USP. 114p.
- MORI, D.D. (1988). *Flexo-torção: barras com seção transversal aberta e paredes delgadas*. São Carlos, EESC-USP. 132p.
- MORI, D.D. (1992). *Os núcleos estruturais e a não-linearidade geométrica na análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos*. São Carlos. 224p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PRZEMIENIECKI, J.S. (1963). Matrix structural analysis of substructures. *AIAA Journal*, v.1, n.1, p.138-147.
- PRUDENTE, M. (1983). *Análise de estruturas tridimensionais usuais de edifícios altos*. São Carlos. 156p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- RAO, S.S. (1989). *The finite element method in engineering*. West Lafayette, Pergamon Press.
- REZENDE, M.N. (1990). *Análise de pavimentos de edifícios pelo método dos elementos finitos em microcomputadores*. São Carlos. 87p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RIBEIRO, S.R.S. (1987). *Associação tridimensional de pórticos e paredes de seção aberta em estruturas de edifícios altos*. São Carlos. 224p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RIOS, B.M.C. (1991). *Análise tridimensional e envoltória de esforços em edifícios altos sujeitos à ações verticais e laterais*. São Carlos. 254p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- ROSEN, R.; RUBINSTEIN, M.F. (1970). Substructure analysis by matrix decomposition. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.3, p.663-670.
- SMITH, B.S.; COULL, A. (1991). *Tall building structures: analysis and design*. London, Wiley-Interscience.
- SORIANO, H.L.; HAAS, J.W. (1989). Matrix compatibility of interface thin-walled open-section column and beam. *Computer & Structures*, v.33, n.2, p.583-591.
- UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Escola de Engenharia de São Carlos. Serviço de Biblioteca. (1993). *Diretrizes para elaboração de dissertações e teses na EESC-USP*. São Carlos. 56p.
- VLASSOV, B.Z. (1962). *Pieces longues en voiles minces*. Paris, Eyrolles.
- YAGUI, T.; WAKABAYASHI, M. (1973). Núcleos resistentes de edifícios elevados. In: CONFERÊNCIA REGIONAL SUL AMERICANA SOBRE EDIFÍCIOS ALTOS, 1., Porto Alegre, dez. 1973. *Anais*. p.157-170.
- YOSHIDA, G.K. (1988). *Análise de estruturas de edifícios constituídos de núcleo de concreto armado e pilares ou pendurais de aço*. São Carlos. 200p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- ZIENKIEWICZ, O.C. (1967). *The finite element method*. London, MacGraw-Hill.
- ZIENKIEWICZ, O.C. ; TAYLOR, R.L. ; PAPADOPOULOS, P. ; OÑATES, E. (1990). *Plate bending elements with discrete constraints: new triangular elements*. *Computer & Structures*, v.35, p.505-522.