

ESTUDO DE PROBLEMAS DE ESCAVAÇÃO ATRAVÉS DA COMBINAÇÃO  
ELEMENTOS DE CONTORNO E ELEMENTOS FINITOS

JOSÉ SERGIO KOMATSU

Tese apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos, da Universidade de São  
Paulo, como parte dos requisitos  
necessários para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini

São Carlos

1995

Komatsu, José Sergio

K85e      Estudo de problemas de escavação através da  
combinação elementos de contorno e elementos  
finitos / José Sergio Komatsu. -- São Carlos,  
1995.  
207p.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de  
São Carlos - Universidade de São Paulo, 1995.

Orientador: Prof.Dr. Wilson Sergio Venturini

1.Elementos de contorno. 2.Elementos finitos  
3.Escavações. 4.Plasticidade. I.Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Tese defendida e aprovada em 15-9-1995  
pela Comissão Julgadora:



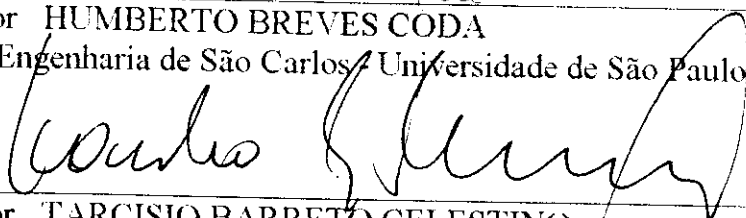
Prof. Doutor WILSON SERGIO VENTURINI - Orientador  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



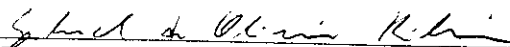
Prof. Doutor FERNANDO AMORIM DE PAULA  
(Universidade Federal de Minas Gerais)




Prof. Doutor HUMBERTO BREVES CODA  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor TARCISIO BARRETO CELESTINO  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Doutor GABRIEL DE OLIVEIRA RIBEIRO  
(Universidade Federal de Minas Gerais)



Prof. Dr. MOUNIR KHALIL EL DEBS  
Vice-Presidente da Comissão de Pós-Graduação  
em exercício



Coordenador da área - Engenharia de Estruturas  
Prof. Dr. MOUNIR KHALIL EL DEBS

À minha esposa e filhas.  
Aos meus pais e familiares.  
Aos meus amigos.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini pela orientação deste trabalho.

A todos os colegas, professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC-USP, que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

Ao Toninho pela digitação e impressão, à Sylvia e ao Chico pelos desenhos, e à Nadir pela revisão das referências bibliográficas.

## SUMÁRIO

RESUMO.....	i
ABSTRACT.....	ii
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Generalidades.....	1
1.2 Desenvolvimento do trabalho.....	7
2 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO.....	10
2.1 Generalidades.....	10
2.2 Teoria da elasticidade.....	12
2.3 Representações integrais do problema elástico.....	16
2.3.1 Generalidades.....	16
2.3.2 Equação integral para deslocamentos referente a pontos no interior do domínio.....	19
2.3.3 Equação integral para deslocamentos referente a pontos do contorno.....	19
2.3.4 Equação integral para tensões referente a pontos do interior do domínio.....	22
2.3.5 Equação integral para tensões referente a pontos do contorno.....	23
3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO - SISTEMAS ALGÉBRICOS.	24
3.1 Generalidades.....	24
3.2 Definição da geometria dos elementos de contorno.....	25
3.3 Definição das variáveis.....	27

3.4	Discretização das equações integrais.....	36
3.4.1	Discretização da equação integral de deslocamentos.	36
3.4.2	Discretização da equação integral de tensões em pontos internos .....	39
3.5	- Cálculo das integrais.....	40
3.5.1	Integrais referentes a elementos de contorno.....	40
3.5.2	Integrais de domínio.....	45
3.5.2.1	Deslocamentos - [D] e [E].....	45
3.5.2.2	Tensões - [D"] e [E"].....	52
3.6	- Cálculo das tensões em pontos do contorno.....	55
4	EQUAÇÕES ALGÉBRICAS PARA DOMÍNIOS NÃO-HOMOGÊNEOS.....	59
4.1	Sub-regiões.....	59
4.2	Montagem e resolução do sistema de equações.....	62
4.2.1	Domínio homogêneo.....	62
4.2.2	Domínio não-homogêneo.....	63
5	COMBINAÇÃO ELEMENTOS DE CONTORNO E ELEMENTOS FINITOS... ..	68
5.1	Generalidades.....	68
5.2	Método dos elementos finitos. Estruturas reticuladas.	70
5.2.1	Matriz de rigidez dos elementos das estruturas reticuladas.....	70
5.2.2	Forças nodais.....	72
5.3	- Procedimentos para combinação mec-mef.....	78
6	PLASTICIDADE DO MATERIAL.....	95
6.1	Generalidades.....	95
6.2	Comportamento elastoplástico em problemas unidimen- sionais.....	95
6.3	Comportamento elastoplástico em problemas do meio contínuo.....	99
7	ANÁLISE DE PROBLEMAS DE DOMÍNIO VARIÁVEL.....	115
7.1	Generalidades.....	115
7.2	Procedimento para simular uma escavação.....	117
7.3	Frente de escavação e estruturas de apoio.....	118

8 PROGRAMA PARA O CÁLCULO AUTOMÁTICO.....	125
8.1 Generalidades.....	125
8.2 Descrição do programa automático.....	126
8.2.1 Entrada de dados.....	126
8.2.2 Geração das matrizes.....	135
8.2.3 Montagem e resolução do sistema de equações.....	140
8.2.4 Análise não-linear - plasticidade.....	150
8.2.5 Saida dos resultados.....	155
9 EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	156
10 CONCLUSÕES.....	189
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	192



## RESUMO

KOMATSU, J.S. **Estudo de problemas de escavação através da combinação elementos de contorno e elementos finitos.** São Carlos, 1995. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Estuda-se uma combinação do método dos elementos finitos (MEF) com o método dos elementos de contorno (MEC) no acoplamento de uma estrutura reticulada em um domínio bidimensional. Para o caso em análise, os elementos uniaxiais são tratados através do MEF, enquanto que o MEC é utilizado na modelagem do meio contínuo que pode ser homogêneo ou não-homogêneo. Em problemas geomecânicos, é possível simular a sequência de escavação com as modificações estruturais necessárias. As equações do domínio bidimensional, com a influência das estruturas reticuladas, são agrupadas em um sistema que é resolvido pelo algoritmo proposto por Crotty. Utilizando-se o método dos elementos de contorno, a plasticidade do meio contínuo é analisada com um procedimento incremental e iterativo baseado no processo das tensões iniciais.

Palavras chaves: Elementos de contorno; Elementos finitos; Escavação; Plasticidade.

## ABSTRACT

KOMATSU, J.S. Study of excavation problems with a boundary element and finite element methods combination. São Carlos, 1995. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

A combination of finite element method (MEF) with the boundary element method (MEC) is studied for the frame structure and two-dimensional domain. In the analyzed case, the uniaxial elements are treated by MEF, while the MEC be used to model the continuum media which can is homogeneous or not. In geomechanical problems, it is possible to simulate a sequence excavation with the necessary structural modifications. The equations of the two-dimensional domain with the influence of the frame structure, are assembled in the system which is solved by algorithm proposed by Crotty. Using the boundary element method, it is analyzed the plastic behavior of a continuum media by an incremental and iterative procedure, which is based in the initial stress process.

Keywords: Boundary elements; Finite elements; Excavation; Plasticity.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 GENERALIDADES

Desde os tempos remotos o homem procura conhecer melhor o comportamento mecânico e as características dos materiais empregados nos diversos tipos de estruturas.

Na engenharia, os problemas físicos são formulados através de um conjunto de equações diferenciais. Somente em alguns casos mais simples é possível uma solução analítica, caso contrário, são utilizados os métodos numéricos.

Como ferramentas de cálculo, os métodos numéricos têm-se tornado mais abrangentes com o desenvolvimento tecnológico dos computadores. Desta forma, é possível resolver problemas complexos simulando-se o comportamento das estruturas com modelos cada vez mais próximos da realidade.

A utilização dos métodos numéricos resulta em sistemas com elevado número de equações, exigindo algoritmos eficientes para resolvê-los e, também, computadores cada vez mais velozes e capazes de armazenar grandes quantidades de dados.

Atualmente, o método das diferenças finitas (MDF), o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC), são considerados os principais métodos numéricos. O MDF e o MEF são conhecidos como técnicas de domínio pois discretiza-se todo o domínio em sub-domínios. No MEC apenas o contorno é discretizado e, por isso, é

conhecido como técnica de contorno.

A idéia básica do método dos elementos finitos é dividir fisicamente o domínio do problema em um número finito de sub-domínios, denominados de elementos finitos, que são interligados através dos pontos nodais. Normalmente, são adotadas formas simples para os elementos, tais como, triângulos, retângulos, quadriláteros, etc..

Para cada elemento, é possível definir de maneira aproximada as variáveis do problema e, escrevê-las como combinações lineares das funções de interpolação multiplicadas por parâmetros incógnitos.

O comportamento dos elementos é estabelecido através de uma relação causa-efeito entre deslocamentos nodais e tensões ou forças. Esta relação pode ser escrita, matricialmente, em termos de coeficientes de rigidez ou flexibilidade.

Após a análise de cada elemento isoladamente, o comportamento global é estruturado de tal modo que se tenha um sistema de equações algébricas com coeficientes de rigidez ou flexibilidade.

Com a definição das condições de contorno e do carregamento da estrutura, o sistema de equações é resolvido e as incógnitas básicas do problema são determinadas.

O método dos elementos finitos tem aplicação em uma grande variedade de problemas relevantes, e a sua formulação é obtida através de princípios variacionais ou do método dos resíduos ponderados que permite uma maior generalização.

O método dos elementos finitos tem se mostrado como uma boa opção de cálculo, principalmente, nos problemas com domínios finitos, não-homogêneos, anisotrópicos e, também, no estudo do comportamento não-linear.

Inicialmente, o método dos elementos de contorno foi conhecido como método das equações integrais de contorno, pois os problemas eram resolvidos através de equações integrais sobre o contorno do domínio. Posteriormente,

BREBBIA (1978a e 1978b) tratou o método das equações integrais de contorno de uma maneira mais conveniente, chamando-o de método dos elementos de contorno.

A formulação do método dos elementos de contorno foi elaborada, primeiramente, a partir de aproximações das equações integrais obtidas através de algum princípio clássico, por exemplo, o teorema de BETTI (1872). Depois, verificou-se a possibilidade de se utilizar o método dos resíduos ponderados para obter a formulação do método dos elementos de contorno, tornando-a mais genérica e facilitando a combinação com outros métodos numéricos conforme BREBBIA et al. (1984).

Na evolução do método dos elementos de contorno, encontram-se os chamados métodos indiretos onde as variáveis envolvidas não são as variáveis físicas do problema e, os métodos diretos nos quais a formulação é desenvolvida considerando-se as variáveis reais do problema.

Em uma determinada estrutura, as equações integrais de contorno são transformadas em equações algébricas. Para isto, o contorno do domínio é discretizado em uma série de elementos de contorno e, o domínio em sub-domínios, nos quais são admitidas funções de interpolação, tanto para a geometria do elemento quanto para as variáveis envolvidas.

Os pontos de colocação são escolhidos em número suficiente para se obter um sistema de equações determinado. Definindo-se o carregamento e as condições de contorno da estrutura, o sistema de equações é resolvido e as variáveis do contorno determinadas. A análise de qualquer ponto no interior do domínio, é feita em função dos valores das variáveis, obtidos para os pontos do contorno.

Conforme TELLES & BREBBIA (1979, 1980a e 1980b), é possível estudar o comportamento não-linear das estruturas através do método dos elementos de contorno e resolver problemas elastoplásticos e viscoplásticos, empregando-se tensões ou deformações iniciais no equacionamento do MEC.

VENTURINI (1982 e 1984) e VENTURINI & BREBBIA (1983 e 1984), utilizaram o método dos elementos de contorno para resolver problemas geotécnicos, considerando o comportamento plástico, viscoplástico e materiais rochosos sem resistência à tração e, também, com descontinuidades.

O método dos elementos de contorno se apresenta como uma boa opção de cálculo em problemas de domínios infinitos, semi-infinitos e regiões de grande concentração de tensões.

A combinação entre os diversos métodos numéricos é um assunto de grande interesse entre os pesquisadores, pois possibilita utilizar o método numérico mais conveniente a cada sub-estrutura, aproveitando melhor as particularidades de cada um.

Destaca-se a combinação do método dos elementos finitos e elementos de contorno, que surgiu com McDONALD & WEXLER (1972), analisando problemas de engenharia elétrica.

CHEN & MEI (1974) estudaram problemas de mecânica dos fluidos, onde o MEC foi utilizado para tratar o domínio infinito.

Os trabalhos de ZIENKIEWICZ et al. (1977), de SHAW & FALBY (1977), e de OSIAS et al. (1977), foram os primeiros a tratar sólidos deformáveis através da combinação elementos finitos e elementos de contorno.

AYALA & GOMEZ (1979) apresentaram detalhes do processo de resolução de problemas elásticos tridimensionais em geomecânica.

BREBBIA & GEORGIOU (1980) analisaram problemas bidimensionais através da combinação MEC-MEF. O programa desenvolvido combina elementos de contorno constantes com elementos finitos quadráticos e, embora esta combinação não seja totalmente compatível, foram obtidos bons resultados.

MUSTOE & VOLAIT (1980) estudaram a combinação MEC-MEF na análise de sólidos fissurados.

DENDROU & DENDROU (1981) utilizaram a combinação MEC-MEF para analisar a interação túnel-suporte considerando

os efeitos da descontinuidade entre rocha e concreto.

WOOD & CREED (1982) estudaram a interação solo-estrutura apresentando resultados da análise de uma plataforma "off-shore" apoiada em fundação composta por estacas.

MITSUMI (1985) apresentou um esquema de combinação MEC-MEF utilizando-o no estudo de problemas elastodinâmicos bidimensionais.

BEER & MEEK (1981) e BEER (1985 e 1986), analisaram problemas geomecânicos de domínio infinito, modelando-se as regiões de comportamento plástico através do método dos elementos finitos e as regiões de comportamento elástico através do método dos elementos de contorno.

KOBAYASHI & MORI (1986), DANGLA (1988), ESTORFF & KAUSEL (1989), XU et al. (1991), WANG & SCHMID (1992) e SHU (1992), estudaram problemas de interação solo-estrutura onde fizeram uma análise estática e dinâmica para os casos bidimensional e tridimensional.

ZAILU & JIGUANG (1987) mostraram que a combinação MEC-MEF é vantajosa em relação ao MEF, no estudo de tensões em vigas de alma esbelta e estruturas celulares compostas de placas finas na região onde existe grande gradiente de tensão.

CEN & DU (1987) aplicaram a combinação MEC-MEF em problemas com domínios de formas geométricas complexas.

RAMALHO & VENTURINI (1990) e RAMALHO (1990), analisaram no caso estático, estruturas interagindo com o meio contínuo onde o solo é modelado pelo MEC e, uma sapata rígida é utilizada como artifício para determinar as constantes de mola dos vínculos da estrutura global que é tratada pelo MEF.

CODA (1993) apresentou uma formulação tridimensional dinâmica transiente para a análise específica da ligação estrutura-solo, onde a estrutura (casca, barra) é modelada pelo MEF e o solo, admitindo-se comportamento elástico

linear, é modelado pelo MEC. O acoplamento da estrutura com o meio contínuo é realizado considerando-se a técnica das sub-regiões e elementos rígidos de ligação, que no caso é uma sapata rígida.

FERRO & VENTURINI (1991 e 1992) e FERRO (1993) aplicaram a combinação MEC-MEF para analisar a interação entre estacas e o solo. As estacas são consideradas como elementos de barras e modeladas pelo método dos elementos finitos e, o solo como um domínio infinito, tridimensional, homogêneo, elástico linear é tratado pelo método dos elementos de contorno. Com isto, resulta um sólido infinito tridimensional enrijecido.

O método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno, são duas técnicas numéricas amplamente difundidas e de grande aplicação em problemas relevantes da engenharia. A principal vantagem da combinação MEC-MEF é a possibilidade de se utilizar o método mais apropriado para cada sub-estrutura. Uma desvantagem que se destaca são as dificuldades encontradas no tratamento do sistema de equações, onde do MEF resulta uma matriz simétrica e do MEC uma matriz cheia e não-simétrica.

As equações são escritas para cada uma das duas sub-estruturas e o acoplamento é executado impondo-se o equilíbrio das forças de superfície e a compatibilidade dos deslocamentos nos pontos de interface MEC-MEF.

Dois procedimentos básicos podem ser adotados para se montar o sistema de equações. O primeiro consiste em tratar a região do MEC como elemento finito transformando-se adequadamente as matrizes, sendo o sistema de equações montado para o MEF. No segundo, o MEF é tratado como um elemento de contorno manipulando-se as matrizes do MEF de modo a serem implementadas no sistema de equações montado para o MEC. A utilização de um ou de outro procedimento depende basicamente de qual sub-estrutura, MEF ou MEC, é predominante.



Nos domínios constituídos de materiais com características diferentes, o sistema de equações obtido através do método dos elementos de contorno, apresenta a existência de blocos nulos e não-nulos que aumentam à medida que se aumentam o número de sub-regiões.

Para resolver este sistema de equações, várias técnicas podem ser utilizadas. Uma maneira é executar as operações com todos os elementos, nulos e não-nulos, ocupando espaço na memória desnecessariamente. Este procedimento pode ser melhorado resolvendo-se o sistema de equações por etapas, onde em cada etapa se elimina um determinado número de equações compatível com a memória disponível.

Neste trabalho, considera-se a combinação MEC-MEF através de um procedimento particular onde uma estrutura reticulada é tratada por elementos finitos e acoplada a um domínio bidimensional, resolvido por elementos de contorno.

Resolve-se o sistema de equações com um eficiente algoritmo proposto por CROTTY (1982), onde são armazenados apenas os elementos dos blocos não-nulos, favorecendo a utilização de microcomputadores com memória disponível limitada.

O algoritmo para o estudo da plasticidade do material do meio contínuo, é implementado de modo a se respeitar as particularidades oriundas do fato de se utilizar CROTTY(1982) para resolver o sistema de equações.

## **1.2 DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO**

Apresenta-se no capítulo II a formulação básica do método dos elementos de contorno necessária para o desenvolvimento deste trabalho.

Para um domínio bidimensional, admitindo-se um material de comportamento elástico linear e, utilizando-se a solução fundamental de Kelvin, são obtidas as equações integrais através da teoria da elasticidade.

O cálculo das integrais envolvidas na formulação é feito analiticamente quando surgem singularidades e, caso contrário, numericamente.

No Capítulo III, utilizando-se o método dos elementos de contorno, é feita a discretização de um domínio homogêneo considerando-se aproximação linear tanto para a geometria dos elementos de contorno quanto para as variáveis envolvidas no problema.

Com a técnica das sub-regiões e através do método dos elementos de contorno, no Capítulo IV são apresentadas as equações algébricas para domínios não-homogêneos.

No Capítulo V, é desenvolvido um procedimento de combinação do método dos elementos de contorno e elementos finitos. Neste trabalho, com o método dos elementos finitos trata-se a estrutura reticulada de uma maneira conveniente, fazendo-se uma condensação estática nas coordenadas correspondentes às rotações, para que o acoplamento ao domínio bidimensional, ocorra através das forças de superfície e deslocamentos, nas direções horizontal e vertical, dos pontos de interface.

A montagem do sistema de equações é feita para o domínio bidimensional resolvido pelo método dos elementos de contorno considerando-se a influência da estrutura reticulada.

Mostra-se no Capítulo VI, a teoria básica para o estudo da plasticidade do material. As tensões são calculadas para cada ponto admitindo-se comportamento elástico linear e, o domínio é discretizado em sub-domínios triangulares, denominados células. Utilizando-se o método dos elementos de contorno baseado nas tensões iniciais juntamente com um procedimento incremental e iterativo, é possível definir a região do domínio que se plastifica.

No Capítulo VII são feitas algumas considerações relativas ao estudo de problemas de domínio variável e das estruturas de apoio. O efeito tridimensional da frente de

escavação é considerado, de modo simplificado, como um problema bidimensional. É apresentado um esquema para simular a escavação.

O Capítulo VIII é dedicado ao programa de cálculo automático. Procura-se mostrar todas as etapas envolvidas na elaboração de um programa para microcomputadores codificado na linguagem FORTRAN, que resolve problemas bidimensionais, estado plano de tensão e de deformação. Neste programa, é possível considerar domínios homogêneos ou não-homogêneos, a influência das estruturas reticuladas, e a plasticidade do material do domínio bidimensional. O programa é dividido em várias unidades independentes e interligadas através de arquivos de acesso direto ou sequencial, formatados ou não, conforme o caso.

No Capítulo IX, são apresentados alguns exemplos práticos com os resultados obtidos através do programa automático. Diversas situações são analisadas procurando-se mostrar as possibilidades de aplicação do procedimento de combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno desenvolvido neste trabalho e, também, o algoritmo implementado para o estudo da plasticidade do material.

As considerações finais e conclusões do trabalho estão no Capítulo X.

## 2 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

### 2.1 GENERALIDADES

Nos problemas físicos de engenharia, são utilizados modelos matemáticos que caracterizam o comportamento de um corpo deformável de domínio  $\Omega$ , respeitando-se as condições impostas no contorno  $\Gamma$ .

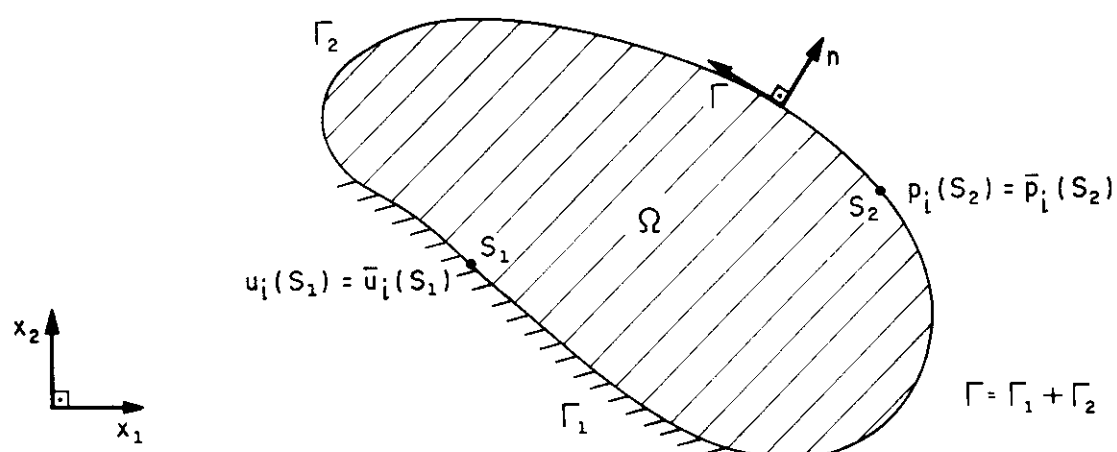


Fig.2.1.1 Condições de contorno em um domínio bidimensional

Neste capítulo são descritos os conceitos básicos da teoria da elasticidade e obtidas as equações integrais para deslocamentos e tensões referentes a pontos internos e do contorno do domínio.

Pelo método dos elementos de contorno, as equações

diferenciais ou integrais, que caracterizam o comportamento de um corpo deformável, são transformadas em equações algébricas escritas para determinados pontos previamente escolhidos.

Admitindo-se o material com um comportamento elástico linear, e uma determinada solução fundamental, é possível escreverem-se as equações integrais para um ponto qualquer, através do método dos resíduos ponderados ou do teorema de Betti.

Neste estudo, é utilizada a solução fundamental de Kelvin, que fisicamente representa o efeito de uma força unitária e concentrada atuando em um ponto pertencente ao domínio infinito.

As expressões apresentadas neste trabalho, são escritas empregando-se as seguintes regras:

a) Convenção de somatório

A repetição de um índice em um termo indica a soma de todas as componentes referentes a este índice em toda a sua variação, por exemplo:

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$a_{ij} b_i = a_{1j} b_1 + a_{2j} b_2 + a_{3j} b_3 \quad (2.1.1)$$

b) Convenção para derivadas parciais

A vírgula acompanhada por índices representa a derivada parcial com relação às coordenadas referidas a estes:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = f_{i,j} \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} = f_{i,jk} \quad (2.1.2)$$

c) Delta de Kronecker  $\delta_{ij}$

É um parâmetro auxiliar com os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 0 && \text{para } i \neq j \\ \delta_{ij} &= 1 && \text{para } i = j \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

São utilizadas as seguintes constantes elásticas:

- a) Módulo de deformação longitudinal  $E$ ,
- b) Módulo de deformação transversal  $G$ ,
- c) Coeficiente de Poisson  $\nu$ .

A relação entre estas constantes elásticas é dada por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.1.4)$$

## 2.2 TEORIA DA ELASTICIDADE

Em um corpo deformável com domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ , para um ponto qualquer  $\mathbf{s}$ , as equações de equilíbrio são representadas por,

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{s}) + b_i(\mathbf{s}) = 0 \quad (2.2.1)$$

onde  $\sigma_{ij}(\mathbf{s})$  é o tensor das tensões e  $b_i(\mathbf{s})$  o vetor das forças de domínio.

É possível mostrar que o tensor das tensões é simétrico, isto é,  $\sigma_{ij}(\mathbf{s}) = \sigma_{ji}(\mathbf{s})$ .

As componentes da força de superfície em um ponto  $\mathbf{S}$  do contorno, podem ser expressas através de,

$$p_i(\mathbf{S}) = \sigma_{ij}(\mathbf{S}) \eta_j \quad (2.2.2)$$

onde  $\eta_j$  são os cossenos diretores da normal ao contorno.

Sendo  $u_i(\mathbf{s})$  as componentes dos deslocamentos de um determinado ponto  $\mathbf{s}$  e, admitindo-se teoria de pequenas deformações, a relação deformação x deslocamento pode ser escrita da seguinte forma,

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \left[ u_{i,j}(\mathbf{s}) + u_{j,i}(\mathbf{s}) \right] \quad (2.2.3)$$

No caso de existirem deformações iniciais, tem-se,

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{s}) = \epsilon_{ij}^e(\mathbf{s}) + \epsilon_{ij}^o(\mathbf{s}) \quad (2.2.4)$$

onde  $\epsilon_{ij}^e(\mathbf{s})$  representa o vetor das deformações elásticas devido as ações que atuam na estrutura e  $\epsilon_{ij}^o(\mathbf{s})$  o vetor das deformações iniciais devido a carregamento do tipo variação de temperatura, retração, etc..

O comportamento não-linear do material pode ser modelado através das deformações iniciais ou tensões iniciais.

Combinando-se as equações anteriores, escreve-se a lei de Hooke generalizada,

$$\sigma_{ij}(\mathbf{s}) = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \left[ \epsilon_{kk}(\mathbf{s}) - \epsilon_{ll}^o(\mathbf{s}) \right] \delta_{ij} + 2G \left[ \epsilon_{ij}(\mathbf{s}) - \epsilon_{ij}^o(\mathbf{s}) \right] \quad (2.2.5)$$

ou, simplesmente,

$$\sigma_{ij}(\mathbf{s}) = C_{ijkl} \left[ \epsilon_{kl}(\mathbf{s}) - \epsilon_{kl}^o(\mathbf{s}) \right] \quad (2.2.6)$$

onde,

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + G \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right] \quad (2.2.7)$$

Substituindo-se a eq.(2.2.3) na eq.(2.2.5), a lei de Hooke generalizada é obtida em função dos deslocamentos.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{s}) = & \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} u_{k,k}(\mathbf{s}) \delta_{ij} + G \left[ u_{i,j}(\mathbf{s}) + u_{j,i}(\mathbf{s}) \right] + \\ & - \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \epsilon_{\ell\ell}^{\circ}(\mathbf{s}) \delta_{ij} - 2G \epsilon_{ij}^{\circ}(\mathbf{s}) \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Pode-se escrever, também, a lei de Hooke generalizada em função dos deslocamentos e da tensão inicial  $\sigma_{ij}^{\circ}(\mathbf{s})$ .

$$\sigma_{ij}(\mathbf{s}) = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} u_{k,k}(\mathbf{s}) \delta_{ij} + G \left[ u_{i,j}(\mathbf{s}) + u_{j,i}(\mathbf{s}) \right] - \sigma_{ij}^{\circ}(\mathbf{s}) \quad (2.2.9)$$

onde,

$$\sigma_{ij}^{\circ}(\mathbf{s}) = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \epsilon_{\ell\ell}^{\circ}(\mathbf{s}) \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij}^{\circ}(\mathbf{s}) \quad (2.2.10)$$

No estudo da análise não-linear, os valores das tensões iniciais podem ser calculados através de suas leis constitutivas.

Substituindo-se a eq.(2.2.8) na eq.(2.2.2), são obtidas as componentes da força de superfície em função dos deslocamentos.

$$\begin{aligned} p_i(\mathbf{s}) = & \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k}(\mathbf{s}) \eta_i + G \left[ u_{j,i}(\mathbf{s}) + u_{i,j}(\mathbf{s}) \right] \eta_j + \\ & - \frac{2G\nu}{1-2\nu} \epsilon_{\ell\ell}^{\circ}(\mathbf{s}) \eta_i - 2G \epsilon_{ij}^{\circ}(\mathbf{s}) \eta_j \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

A equação de Navier em função dos deslocamentos, é obtida substituindo-se a eq.(2.2.9) na eq.(2.2.1).

$$u_{i,jj}(\mathbf{s}) + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ij}(\mathbf{s}) + \frac{b_i(\mathbf{s})}{G} - \frac{\sigma_{ij,j}^{\circ}(\mathbf{s})}{G} = 0 \quad (2.2.12)$$



Tendo em vista que as aplicações deste trabalho são relativas a problemas de escavações, consideram-se domínios bidimensionais admitindo-se estado plano de tensão ou estado plano de deformação.

No estado plano de tensão Fig.2.2.2a), uma dimensão (direção  $x_3$ ) é bem menor do que as outras duas e o carregamento atua apenas no plano  $x_1, x_2$ . Com isto, pode-se desprezar as componentes  $\sigma_{3j}(\mathbf{s})$  modificando-se as eqs. (2.2.8), (2.2.11) e (2.2.12).

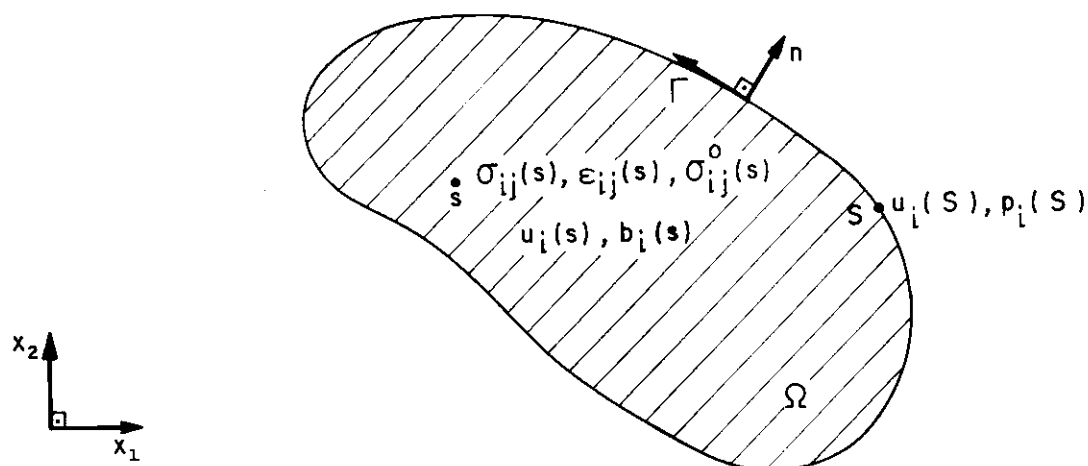
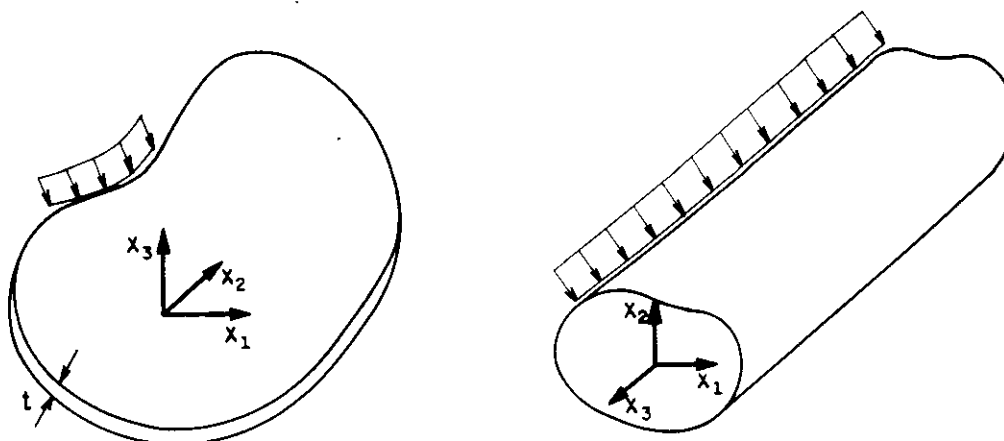


Fig.2.2.1 Domínio bidimensional - variáveis do problema

Assim, a equação de Navier, eq.(2.2.12), torna-se,

$$u_{i,jj}(\mathbf{s}) + \frac{1+\nu}{1-\nu} u_{j,ij}(\mathbf{s}) + \frac{b_i(\mathbf{s})}{G} - \frac{\sigma_{ij,j}(\mathbf{s})}{G} = 0 \quad (2.2.13)$$

Verifica-se que ao substituir nas equações básicas o coeficiente de Poisson  $\nu$  por um valor aparente  $\bar{\nu} = \nu/(1+\nu)$ , as eqs. (2.2.8), (2.2.11) e (2.2.12) não são modificadas para este estado plano.



a) Estado plano de tensão      b) Estado plano de deformação  
Fig.2.2.2 Estados planos

No estado plano de deformação Fig.2.2.2b), uma dimensão (direção  $x_3$ ) é bem maior do que as outras duas sendo o carregamento constante na direção  $x_3$ . Isto permite desprezar as componentes  $\epsilon_{3j}(\mathbf{s})$  e  $\epsilon_{j3}(\mathbf{s})$ , e as eqs. (2.2.8), (2.2.11) e (2.2.12) não são modificadas.

## 2.3 REPRESENTAÇÕES INTEGRAIS DO PROBLEMA ELÁSTICO

### 2.3.1 Generalidades

Para obterem-se as equações integrais apropriadas para a aplicação do método dos elementos de contorno, é preciso utilizar uma solução fundamental da equação diferencial eq.(2.2.12). No caso, emprega-se a solução fundamental de Kelvin conforme LOVE (1944), que é obtida substituindo-se o termo independente  $b_i(\mathbf{s})$  da eq.(2.2.1) pela distribuição delta de Dirac, ou seja,

$$\sigma_{kij,j}^*(\mathbf{q},\mathbf{s}) + \delta(\mathbf{q},\mathbf{s})\delta_{ki} = 0 \quad (2.3.1)$$

ou,

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{kj,ij}^*(\mathbf{q}, \mathbf{s}) + u_{ki,jj}^*(\mathbf{q}, \mathbf{s}) + \frac{1}{G} \delta(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \delta_{ki} = 0 \quad (2.3.2)$$

onde  $\delta_{ki}$  é o delta de Kronecker, que indica a força unitária atuando só na direção  $k$ , e o símbolo  $*$  indica o problema fundamental.

Admite-se, inicialmente, um domínio infinito  $\Omega^*$  com um contorno  $\Gamma^*$ , Fig. 2.3.1. A solução que se procura é definida como a resposta em um ponto  $\mathbf{q}$  devido a uma força unitária e concentrada aplicada no ponto  $\mathbf{s}$  nas direções  $x_1$  e  $x_2$ .

Resolvendo-se a eq.(2.3.2), admitindo-se estado plano de deformação, obtém-se a seguinte solução fundamental para os deslocamentos:

$$u_{ij}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[ -(3-4\nu)\delta_{ij} \ln r + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (2.3.3)$$

Utilizando-se as relações da teoria da elasticidade, já apresentadas, têm-se as componentes fundamentais das forças de superfície e deformações apresentadas a seguir,

$$p_{ij}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,j} r_{,i} \right] r_{,n} + \right. \\ \left. - (1-2\nu) \cdot (r_{,i}\eta_j - r_{,j}\eta_i) \right\} \quad (2.3.4)$$

$$\epsilon_{imk}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)Gr} \left\{ (1-2\nu)(r_{,k}\delta_{im} + r_{,m}\delta_{ik}) + \right. \\ \left. - r_{,i}\delta_{mk} + 2r_{,i}r_{,m}r_{,k} \right\}$$

$$\text{com } r_{,n} = r_{,i}\eta_i \quad (2.3.5)$$

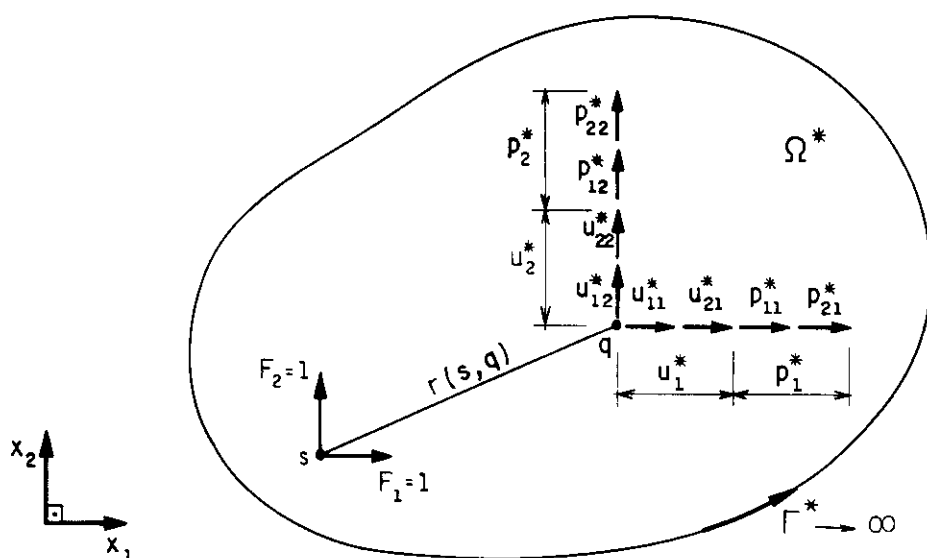


Fig.2.3.1 Soluções fundamentais

Estes valores foram obtidos para o estado plano de deformação. No caso do estado plano de tensão, basta substituir o coeficiente de Poisson  $\nu$  por  $\bar{\nu} = \nu/(1+\nu)$ , e obter os correspondentes valores.

### 2.3.2 Equação integral para deslocamentos referente a pontos no interior do domínio $\Omega$

Através do teorema de Betti ou do método dos resíduos ponderados, BREBBIA (1978a e 1978b), é possível determinar a equação integral para os deslocamentos de pontos do interior do domínio  $\Omega$ , Fig.2.3.2.

$$u_i(\mathbf{s}) = - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) u_k(\mathbf{Q}) d\Gamma(\mathbf{Q}) + \int_{\Gamma} u_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) p_k(\mathbf{Q}) d\Gamma(\mathbf{Q}) + \int_{\Omega} u_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) b_k(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) + \int_{\Omega} \epsilon_{imk}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \sigma_{mk}^0(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) \quad (2.3.6)$$

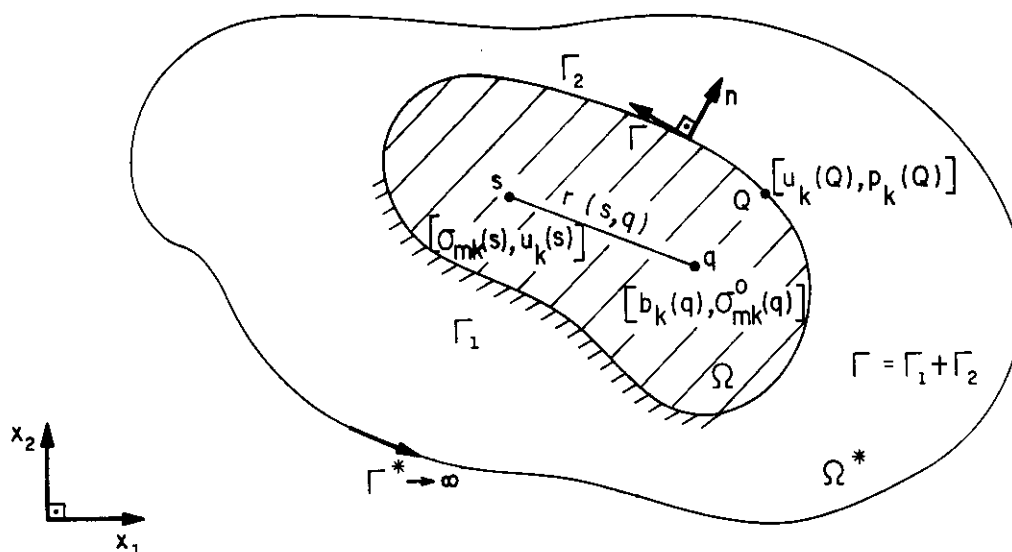


Fig.2.3.2 Definição de um corpo finito

A eq. (2.3.6) é conhecida por identidade de Somigliana e, permite calcular deslocamentos em pontos do interior do domínio  $\Omega$ , a partir dos valores de deslocamentos e forças de superfície de pontos do contorno  $\Gamma$  e, quando existirem, das forças de domínio e das tensões iniciais no domínio  $\Omega$ .

### 2.3.3 Equação integral para deslocamentos referente a pontos do contorno $\Gamma$

Para se obter a equação integral de um ponto  $S$  pertencente ao contorno  $\Gamma$  de um domínio  $\Omega$ , Fig. 2.3.3, considera-se inicialmente o domínio  $\Omega$  aumentado de uma parte infinitesimal  $\Omega_\epsilon$ , de raio  $\epsilon$ , de tal modo que o ponto  $S$  possa ser considerado como ponto interno.

Com isto, é possível escrever a equação integral (2.3.6) para o ponto  $S$ , da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
u_i(S) = & - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon} p_{ik}^*(S, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) + \\
& + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon} u_{ik}^*(S, Q) p_k(Q) d\Gamma(Q) + \\
& + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega + \Omega_\epsilon} u_{ik}^*(S, q) b_k(q) d\Omega(q) + \\
& + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega + \Omega_\epsilon} \epsilon_{imk}^*(S, q) \delta_{mk}^0(q) d\Omega(q) \quad (2.3.7)
\end{aligned}$$

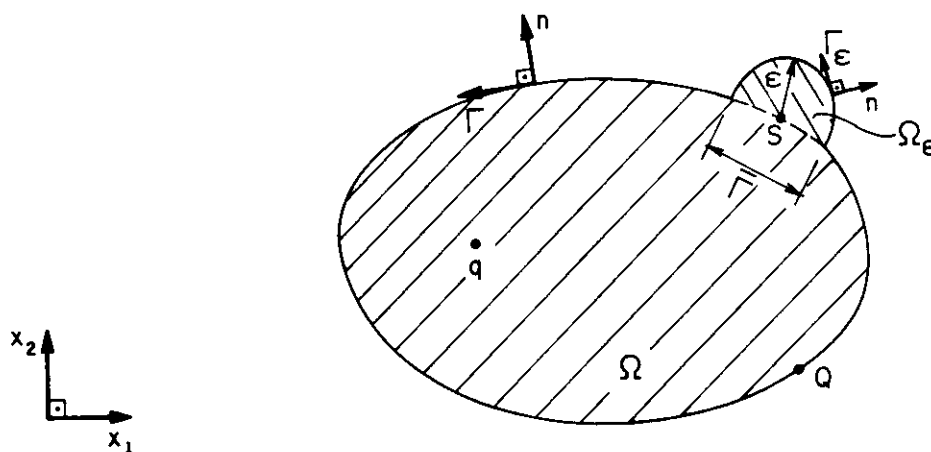


Fig.2.3.3 Ponto de carga S no contorno

Resolvendo-se adequadamente os limites indicados nesta equação, obtém-se a equação integral dos deslocamentos para pontos  $S$  do contorno  $\Gamma$ .

$$\begin{aligned}
c_{ik}(S) u_k(S) + \int_{\Gamma} p_{ik}^*(S, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} u_{ik}^*(S, Q) p_k(Q) d\Gamma(Q) + \\
\int_{\Omega} u_{ik}^*(S, q) b_k(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega} \epsilon_{imk}^*(S, q) \sigma_{mk}^0(q) d\Omega(q) \quad (2.3.8)
\end{aligned}$$

onde,

$$c_{ik}(S) = \delta_{ik} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ik}^*(S, Q) d\Gamma(Q) \quad (2.3.9)$$

Para o caso de pontos pertencentes ao contorno  $\Gamma$  sem angulosidade, isto é, que apresentam apenas uma tangente, tem-se,

$$c_{ik}(S) = \frac{1}{2} \delta_{ik} \quad (2.3.10)$$

Existindo angulosidade é obtida uma matriz, HARTMAN (1980, 1982), considerando-se a característica das tangentes que determinam a angulosidade, Fig.2.3.4.

$$c_{ik}(S) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\text{sen}(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} \\ \frac{\text{sen}(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\cos(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.3.11)$$

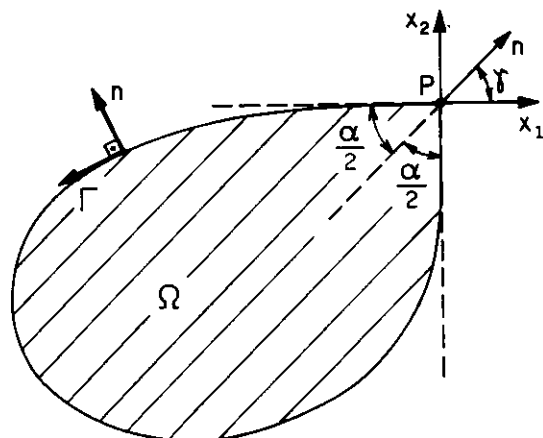


Fig.2.3.4 Ângulos  $\alpha$  e  $\gamma$  do ponto  $S$  pertencente ao contorno com angulosidade

O ângulo interno  $\alpha$  é definido pelas tangentes ao contorno, e  $\gamma$  pela bissetriz de  $\alpha$  com o eixo  $x_1$  (medido no sentido anti-horário a partir do eixo  $x_1$ ).

Para os pontos não pertencentes ao domínio  $\Omega$ , tem-se,

$$c_{ik}(\mathbf{Q}) = 0 \quad (2.3.12)$$

#### 2.3.4 Equação integral para tensões em pontos no interior do domínio $\Omega$

Além dos deslocamentos é necessário, também, conhecer o estado de tensões e deformações. No caso linear, basta determinar apenas uma destas grandezas, visto que, a outra se obtém através da lei de Hooke, eq.(2.2.5).

A equação integral das tensões é obtida para um ponto  $\mathbf{s}$  do interior do domínio, derivando-se a eq.(2.3.6) e utilizando-se convenientemente a eq.(2.2.8), BREBBIA (1978a) e BREBBIA & WALKER (1980).

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{s}) = & - \int_{\Gamma} S_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) u_k(\mathbf{Q}) d\Gamma(\mathbf{Q}) + \int_{\Gamma} D_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) p_k(\mathbf{Q}) d\Gamma(\mathbf{Q}) + \\ & + \int_{\Omega} D_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) b_k(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) + \int_{\Omega} E_{ijmk}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \sigma_{mk}^0(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) + \\ & + f(\sigma_{ij}^0(\mathbf{s})) \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

onde,

$$\begin{aligned} S_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) = & \frac{2G}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 r_{,n} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta_{jk} r_{,i}) - 4 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + 2\nu (\eta_i r_{,j} r_{,k} + \eta_j r_{,i} r_{,k}) + \right. \\ & \left. + (1-2\nu) (2\eta_k r_{,i} r_{,j} + \eta_j \delta_{ik} + \eta_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) \eta_k \delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (2.3.14)$$



$$D_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu) \left[ \delta_{ik}^r{}_{,j} + \delta_{jk}^r{}_{,i} - \delta_{ij}^r{}_{,k} \right] + \right. \\ \left. + 2r_{,i}^r{}_{,j}{}_{,k} \right\} \quad (2.3.15)$$

$$E_{ijmk}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu) \left[ \delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{jk}\delta_{im} - \delta_{ij}\delta_{mk} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\delta_{ij}^r{}_{,m}{}_{,k} \right] + 2\nu \left[ \delta_{im}^r{}_{,j}{}_{,k} + \delta_{jk}^r{}_{,i}{}_{,m} + \delta_{ik}^r{}_{,j}{}_{,m} + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_{jm}^r{}_{,i}{}_{,k} \right] + 2\delta_{mk}^r{}_{,i}{}_{,j} - 8r_{,i}^r{}_{,j}{}_{,m}{}_{,k} \right\} \quad (2.3.16)$$

$$f(\sigma_{ij}^0(\mathbf{s})) = - \frac{1}{8(1-\nu)} \left[ 2\sigma_{ij}^0(\mathbf{s}) + (1-4\nu)\sigma_{\ell\ell}^0(\mathbf{s})\delta_{ij} \right] \quad (2.3.17)$$

### 2.3.5 Equação integral para tensões referente a pontos do contorno $\Gamma$

Neste trabalho, não são utilizadas as equações integrais para o cálculo das tensões nos pontos do contorno.

Existindo ou não angulosidades, utiliza-se um procedimento aproximado descrito no item 3.6, onde devem ser conhecidos os valores dos deslocamentos e forças de superfície dos pontos nodais.

### 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO - SISTEMAS ALGÉBRICOS

#### 3.1 GENERALIDADES

As equações integrais obtidas anteriormente, apresentam soluções analíticas que não são muito simples, tornando-se conveniente um procedimento numérico para resolvê-las.

Neste capítulo, através do método dos elementos de contorno, essas equações integrais são transformadas em equações algébricas lineares. Teoricamente, é possível escreverem-se infinitas equações algébricas em pontos localizados dentro ou fora do domínio.

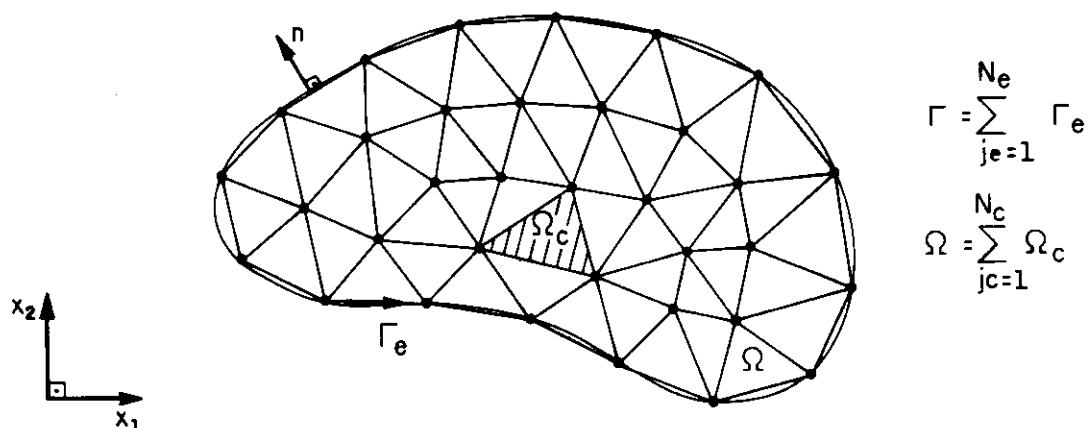


Fig.3.1.1 Discretização do domínio  $\Omega$  e do contorno  $\Gamma$

No método dos elementos de contorno divide-se o contorno  $\Gamma$  em  $N_e$  elementos de contorno  $\Gamma_e$ . Quando necessário, o domínio  $\Omega$  é dividido em  $N_c$  sub-domínios  $\Omega_c$ ,

denominados de células, que neste caso são triangulares, Fig. 3.1.1. Sempre que possível, as integrais de domínio são transformadas em integrais de contorno evitando-se a utilização das células.

### 3.2 DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Admite-se uma função aproximadora linear para definir a geometria dos elementos de contorno, Fig. 3.2.1. Assim, é condição necessária e suficiente conhecer as coordenadas de dois pontos do elemento, que no caso são os pontos 1 e 2 das extremidades.

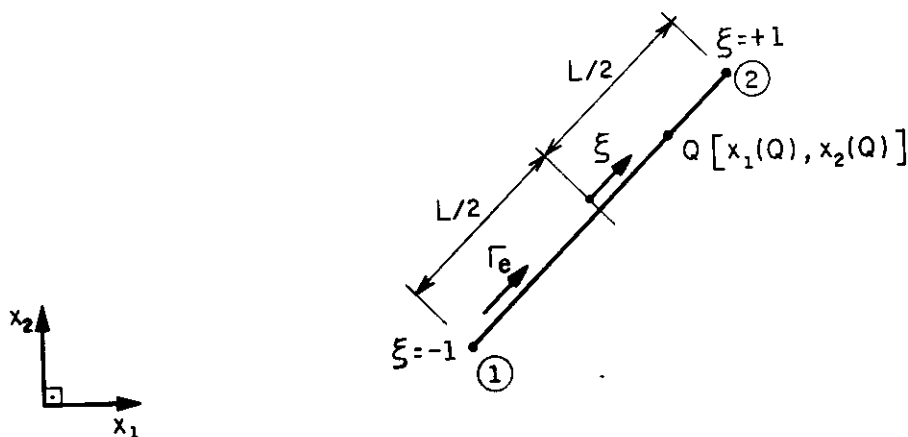


Fig.3.2.1 Elemento de contorno genérico

As coordenadas de um ponto qualquer  $Q$ , pertencente ao contorno, são escritas em termos de funções aproximadoras e de valores nodais.

$$x_k(Q) = \phi_m(Q) X_k^{je,m} = \phi_1(Q) X_k^{je,1} + \phi_2(Q) X_k^{je,2} \quad (3.2.1)$$

onde,

$k$  - direção dos eixos  $x_1$  e  $x_2$

$m$  - pontos utilizados na aproximação

$\phi_m(Q)$  - função aproximadora

$x_\ell^{je,m}$  - coordenadas dos pontos nodais 1 e 2

$je$  - número do elemento considerado.

Matricialmente,

$$x_k(Q) = \left\{ \phi_1(Q) \quad \phi_2(Q) \right\} \left\{ \begin{matrix} x_k^{je,1} \\ x_k^{je,2} \end{matrix} \right\} = \left\{ \phi(Q) \right\} \left\{ x_k \right\} \quad (3.2.2)$$

onde,

$$\left\{ \phi(Q) \right\} = \left\{ \phi_1(Q) \quad \phi_2(Q) \right\}$$

$$\left\{ x_k \right\} = \left\{ \begin{matrix} x_k^{je,1} \\ x_k^{je,2} \end{matrix} \right\} \quad (3.2.3)$$

As coordenadas do ponto  $Q$ , nas direções  $x_1$  e  $x_2$  são dadas por,

$$\begin{aligned} x_1(Q) &= \phi_1(Q) x_1^{je,1} + \phi_2(Q) x_1^{je,2} \\ x_2(Q) &= \phi_1(Q) x_2^{je,1} + \phi_2(Q) x_2^{je,2} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Escrevendo-se matricialmente, as coordenadas das duas direções, tem-se a seguinte representação,

$$\left\{ x(Q) \right\} = \left\{ \begin{matrix} x_1(Q) \\ x_2(Q) \end{matrix} \right\} = \left[ \begin{matrix} \phi_1(Q) & \phi_2(Q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(Q) & \phi_2(Q) \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} x_1^{je,1} \\ x_1^{je,2} \\ x_2^{je,1} \\ x_2^{je,2} \end{matrix} \right\} \quad (3.2.5)$$

ou,

$$\left\{ \begin{matrix} x(Q) \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \{\phi(Q)\} & \{0\} \\ \{0\} & \{\phi(Q)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x_1\} \\ \{x_2\} \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

As funções aproximadoras expressas em coordenadas adimensionais  $\xi$  resultam em,

$$\begin{aligned} \phi_1(Q) &= \frac{1}{2} (1-\xi) \\ \phi_2(Q) &= \frac{1}{2} (1+\xi) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Substituindo-se as equações de (3.2.7) em (3.2.2), obtém-se,

$$x_k(Q) = \frac{1}{2} (1-\xi) x_k^{je,1} + \frac{1}{2} (1+\xi) x_k^{je,2}$$

ou,

$$x_k(Q) = \left( \frac{x_k^{je,1} + x_k^{je,2}}{2} \right) + \left( \frac{x_k^{je,2} - x_k^{je,1}}{2} \right) \xi \quad (3.2.8)$$

### 3.3 DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS

#### a) Deslocamentos e forças de superfície

Para se definir deslocamentos e forças de superfície são admitidas funções aproximadoras lineares, Fig. 3.3.1, sendo escolhidos os pontos 1 e 2 das extremidades dos elementos para os valores nodais.

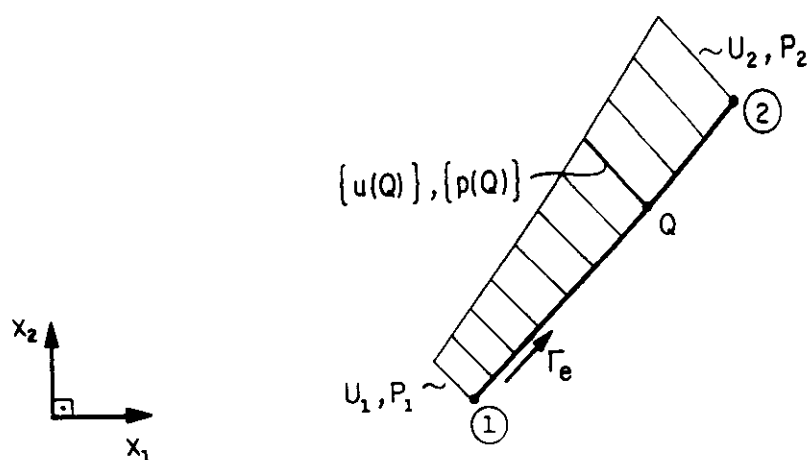


Fig.3.3.1 Aproximação linear dos deslocamentos e forças de superfície

a1) Deslocamentos

$$u_k(Q) = \phi_m(Q) U_k^{je,m} = \phi_1(Q) U_k^{je,1} + \phi_2(Q) U_k^{je,2} \quad (3.3.1)$$

Matricialmente,

$$u_k(Q) = \{\phi_1(Q) \quad \phi_2(Q)\} \begin{Bmatrix} U_k^{je,1} \\ U_k^{je,2} \end{Bmatrix} = \{\phi(Q)\} \{U_k\} \quad (3.3.2)$$

onde,

$$\{\phi(Q)\} = \{\phi_1(Q) \quad \phi_2(Q)\}$$

$$\{U_k\} = \begin{Bmatrix} U_k^{je,1} \\ U_k^{je,2} \end{Bmatrix} \quad (3.3.3)$$

Os deslocamentos do ponto Q, nas direções  $x_1$  e  $x_2$ , são expressos através de,

$$\begin{aligned}
 u_1(Q) &= \phi_1(Q) U_1^{je,1} + \phi_2(Q) U_1^{je,2} \\
 u_2(Q) &= \phi_1(Q) U_2^{je,1} + \phi_2(Q) U_2^{je,2}
 \end{aligned}
 \tag{3.3.4}$$

Escrevendo-se os deslocamentos das duas direções em uma mesma representação matricial, tem-se,

$$\left\{ u(Q) \right\} = \begin{Bmatrix} u_1(Q) \\ u_2(Q) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(Q) & \phi_2(Q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(Q) & \phi_2(Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{je,1} \\ U_1^{je,2} \\ U_2^{je,1} \\ U_2^{je,2} \end{Bmatrix}$$

(3.3.5)

ou

$$\left\{ u(Q) \right\} = \begin{bmatrix} \left\{ \phi(Q) \right\} & \left\{ 0 \right\} \\ \left\{ 0 \right\} & \left\{ \phi(Q) \right\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{ U_1 \right\} \\ \left\{ U_2 \right\} \end{Bmatrix}$$

(3.3.6)

#### a2) Forças de superfície

$$p_k(Q) = \phi_m(Q) p_k^{je,m} = \phi_1(Q) p_k^{je,1} + \phi_2(Q) p_k^{je,2}$$

(3.3.7)

Matricialmente,

$$p_k(Q) = \left\{ \phi_1(Q) \quad \phi_2(Q) \right\} \begin{Bmatrix} p_k^{je,1} \\ p_k^{je,2} \end{Bmatrix} = \left\{ \phi_k(Q) \right\} \left\{ P_k \right\}$$

(3.3.8)

onde,

$$\left\{ P_k \right\} = \begin{Bmatrix} p_k^{je,1} \\ p_k^{je,2} \end{Bmatrix}$$

(3.3.9)

As forças de superfície do ponto  $Q$ , nas direções  $x_1$  e  $x_2$ , são escritas da seguinte forma,

$$p_1(Q) = \phi_1(Q) p_1^{je,1} + \phi_2(Q) p_1^{je,2}$$

$$p_2(Q) = \phi_1(Q) p_2^{je,1} + \phi_2(Q) p_2^{je,2} \quad (3.3.10)$$

Matricialmente,

$$\{p(Q)\} = \begin{Bmatrix} p_1(Q) \\ p_2(Q) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(Q) & \phi_2(Q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(Q) & \phi_2(Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^{je,1} \\ p_1^{je,2} \\ p_2^{je,1} \\ p_2^{je,2} \end{Bmatrix} \quad (3.3.11)$$

Na discretização do contorno  $\Gamma$ , são utilizados pontos simples e pontos duplos, Fig. 3.3.2. Quando os pontos 1 e 2 das extremidades do elemento de contorno  $j_e$  pertencem, também, aos elementos vizinhos, são denominados de pontos simples e, caso contrário, de pontos duplos.

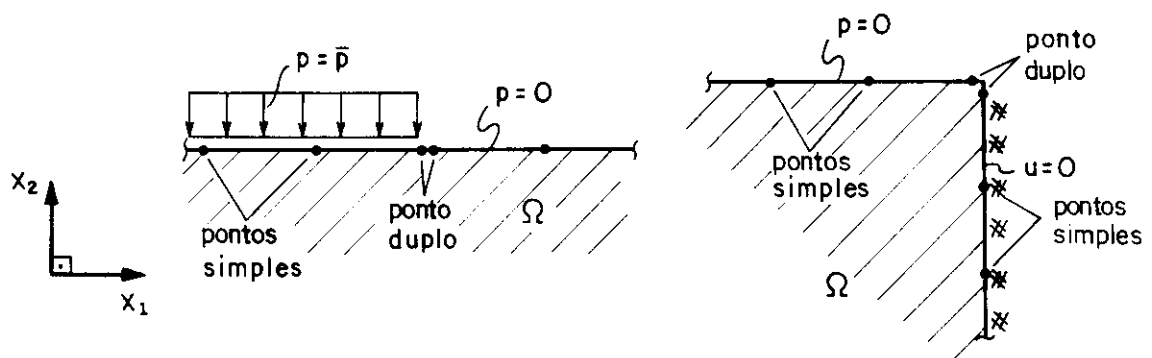


Fig.3.3.2 Pontos simples e pontos duplos



Os pontos duplos possuem a mesma posição geométrica, porém, pertencem a elementos de contorno  $\Gamma_e$  diferentes e, permitem considerar descontinuidades de forças de superfície. A utilização irrestrita de pontos duplos pode aumentar de forma significativa o número de equações e, assim, comprometer a memória disponível para armazenamento dos dados e o tempo de resolução do sistema.

#### b) Forças de domínio e tensões iniciais

O domínio  $\Omega$  da Fig. 3.1.1, é discretizado em  $N_c$  células triangulares. A definição das forças de domínio e tensões iniciais é feita admitindo-se funções aproximadoras lineares, Fig. 3.3.3, sendo escolhidos os vértices da célula,  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ , para os valores nodais.

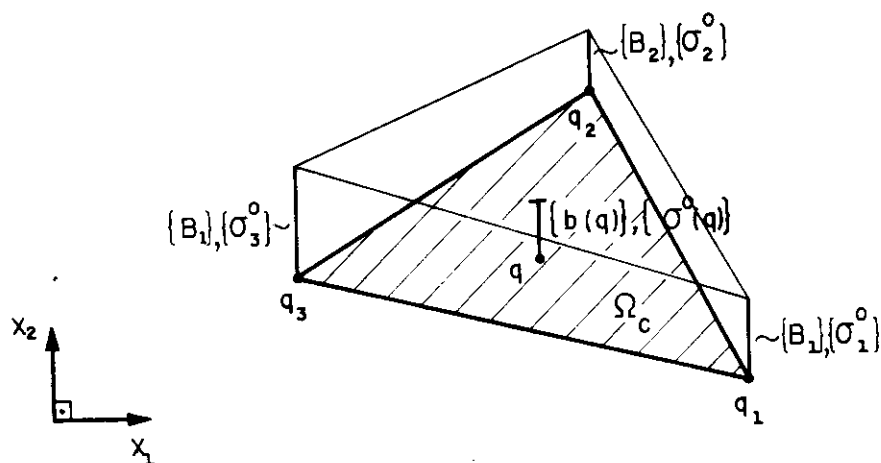


Fig.3.3.3 Aproximação linear de forças de domínio e tensões iniciais da célula jc

#### b1) Forças de domínio

As componentes das forças de domínio de um determinado ponto  $q$  no interior da célula jc podem ser escritas a partir de funções aproximadoras e valores nodais. Assim,

$$b_k(\mathbf{q}) = \psi_\ell(\mathbf{q}) B_k^{jc,\ell} = \psi_1(\mathbf{q}) B_k^{jc,1} + \psi_2(\mathbf{q}) B_k^{jc,2} + \psi_3(\mathbf{q}) B_k^{jc,3} \quad (3.3.12)$$

ou,

$$b_k(\mathbf{q}) = \{\psi_1(\mathbf{q}) \ \psi_2(\mathbf{q}) \ \psi_3(\mathbf{q})\} \begin{Bmatrix} B_k^{jc,1} \\ B_k^{jc,2} \\ B_k^{jc,3} \end{Bmatrix} = \{\psi(\mathbf{q})\} \{B_k\} \quad (3.3.13)$$

onde,

$$\{\psi(\mathbf{q})\} = \{\psi_1(\mathbf{q}) \ \psi_2(\mathbf{q}) \ \psi_3(\mathbf{q})\}$$

$$\{B_k\} = \begin{Bmatrix} B_k^{jc,1} \\ B_k^{jc,2} \\ B_k^{jc,3} \end{Bmatrix} \quad (3.3.14)$$

No item 3.5,  $\{\psi(\mathbf{q})\}$  é definido em função das coordenadas adimensionais,

$$\{\psi(\mathbf{q})\} = \xi_\ell(\mathbf{q}) = \{ \xi_1(\mathbf{q}) \ \xi_2(\mathbf{q}) \ \xi_3(\mathbf{q}) \} \quad (3.3.15)$$

sendo os valores de  $\xi_\ell(\mathbf{q})$  determinados através da eq. (3.5.22).

As forças de domínio do ponto  $\mathbf{q}$  da célula  $jc$ , nas direções  $x_1$  e  $x_2$ , são expressas através de,

$$\begin{aligned} b_1(\mathbf{q}) &= \psi_1(\mathbf{q}) B_1^{jc,1} + \psi_2(\mathbf{q}) B_1^{jc,2} + \psi_3(\mathbf{q}) B_1^{jc,3} \\ b_2(\mathbf{q}) &= \psi_1(\mathbf{q}) B_2^{jc,1} + \psi_2(\mathbf{q}) B_2^{jc,2} + \psi_3(\mathbf{q}) B_2^{jc,3} \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Matricialmente,

$$\begin{Bmatrix} b_1(\mathbf{q}) \\ b_2(\mathbf{q}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{q}) & \psi_2(\mathbf{q}) & \psi_3(\mathbf{q}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_1(\mathbf{q}) & \psi_2(\mathbf{q}) & \psi_3(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1^{jc,1} \\ B_1^{jc,2} \\ B_1^{jc,3} \\ B_2^{jc,1} \\ B_2^{jc,2} \\ B_2^{jc,3} \end{Bmatrix} \quad (3.3.17)$$

ou,

$$\begin{Bmatrix} b(\mathbf{q}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1(\mathbf{q}) \\ b_2(\mathbf{q}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\psi(\mathbf{q})\} & \{0\} \\ \{0\} & \{\psi(\mathbf{q})\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{B_1\} \\ \{B_2\} \end{Bmatrix} \quad (3.3.18)$$

## b2) Tensões iniciais

As componentes das tensões iniciais de um determinado ponto  $\mathbf{q}$  no interior da célula  $jc$ , Fig. 3.3.4, podem ser escritas em termos de funções aproximadoras e valores nodais. Assim,

$$\begin{aligned} \sigma_{mk}^o(\mathbf{q}) &= \psi_\ell(\mathbf{q}) \sigma_{mk}^{ojc,\ell} = \psi_1(\mathbf{q}) \sigma_{mk}^{ojc,1} + \psi_2(\mathbf{q}) \sigma_{mk}^{ojc,2} + \\ &+ \psi_3(\mathbf{q}) \sigma_{mk}^{ojc,3} \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Matricialmente,

$$\sigma_{mk}^o(\mathbf{q}) = \{\psi_1(\mathbf{q}) \quad \psi_2(\mathbf{q}) \quad \psi_3(\mathbf{q})\} \begin{Bmatrix} \sigma_{mk}^{ojc,1} \\ \sigma_{mk}^{ojc,2} \\ \sigma_{mk}^{ojc,3} \end{Bmatrix} = \{\psi(\mathbf{q})\} \{\sigma_{mk}^o\} \quad (3.3.20)$$

onde,

$$\{\sigma_{mk}^o\} = \begin{cases} \sigma_{mk}^{ojc,1} \\ \sigma_{mk}^{ojc,2} \\ \sigma_{mk}^{ojc,3} \end{cases} \quad (3.3.21)$$

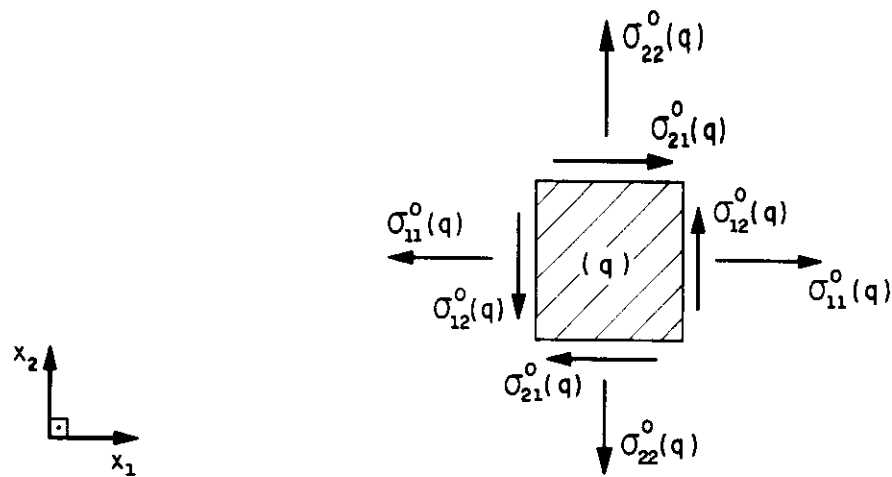


Fig.3.3.4 Estado de tensões iniciais do ponto  $\mathbf{q}$

O estado de tensões iniciais do ponto  $\mathbf{q}$  é definido em função de valores nodais, que são os valores das tensões iniciais dos vértices  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_2$ , e  $\mathbf{q}_3$  da célula  $jc$ . Para  $k=1$ ,

$m=1$ ,

$$\sigma_{11}^o(\mathbf{q}) = \psi_1(\mathbf{q}) \sigma_{11}^{ojc,1} + \psi_2(\mathbf{q}) \sigma_{11}^{ojc,2} + \psi_3(\mathbf{q}) \sigma_{11}^{ojc,3} \quad (3.3.22)$$

$m=2$ ,

$$\sigma_{21}^o(\mathbf{q}) = \psi_1(\mathbf{q}) \sigma_{21}^{ojc,1} + \psi_2(\mathbf{q}) \sigma_{21}^{ojc,2} + \psi_3(\mathbf{q}) \sigma_{21}^{ojc,3} \quad (3.3.23)$$

Analogamente para  $k=2$ ,

$m=1$ ,

$$\sigma_{12}^o(\mathbf{q}) = \psi_1(\mathbf{q}) \sigma_{12}^{ojc,1} + \psi_2(\mathbf{q}) \sigma_{12}^{ojc,2} + \psi_3(\mathbf{q}) \sigma_{12}^{ojc,3} \quad (3.3.24)$$

$m=2,$

$$\sigma_{22}^{\circ}(\mathbf{q}) = \psi_1(\mathbf{q}) \sigma_{22}^{\text{ojc},1} + \psi_2(\mathbf{q}) \sigma_{22}^{\text{ojc},2} + \psi_3(\mathbf{q}) \sigma_{22}^{\text{ojc},3} \quad (3.3.25)$$

Pelo teorema de Cauchy, tem-se que  $\sigma_{21}^{\circ}(\mathbf{q}) = \sigma_{12}^{\circ}(\mathbf{q})$ .

Escrevendo-se, matricialmente, as tensões iniciais relativas às duas direções, tem-se a seguinte representação,

$$\left\{ \sigma^{\circ}(\mathbf{q}) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^{\circ}(\mathbf{q}) \\ \sigma_{12}^{\circ}(\mathbf{q}) \\ \sigma_{22}^{\circ}(\mathbf{q}) \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{q}) & \psi_2(\mathbf{q}) & \psi_3(\mathbf{q}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_1(\mathbf{q}) & \psi_2(\mathbf{q}) & \psi_3(\mathbf{q}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1(\mathbf{q}) & \psi_2(\mathbf{q}) & \psi_3(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \cdot$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^{\text{ojc},1} \\ \sigma_{11}^{\text{ojc},2} \\ \sigma_{11}^{\text{ojc},3} \\ \sigma_{12}^{\text{ojc},1} \\ \sigma_{12}^{\text{ojc},2} \\ \sigma_{12}^{\text{ojc},3} \\ \sigma_{22}^{\text{ojc},1} \\ \sigma_{22}^{\text{ojc},2} \\ \sigma_{22}^{\text{ojc},3} \end{array} \right\} \quad (3.3.26)$$

ou,

$$\left\{ \sigma^0(\mathbf{q}) \right\} = \begin{bmatrix} \{\psi(\mathbf{q})\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{\psi(\mathbf{q})\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{\psi(\mathbf{q})\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\sigma_{11}^0\} \\ \{\sigma_{12}^0\} \\ \{\sigma_{22}^0\} \end{Bmatrix} \quad (3.3.27)$$

### 3.4 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS

As integrais de contorno são transformadas em um somatório de integrais sobre os elementos de contorno  $\Gamma_e$  e, as integrais de domínio são transformadas em um somatório de integrais sobre as células de domínio  $\Omega_c$ .

#### 3.4.1 Discretização da equação integral de deslocamentos

Seja um domínio  $\Omega$  constituído de  $N_c$  células de domínio  $\Omega_c$  e, o contorno  $\Gamma$  com  $N$  pontos e  $N_e$  elementos de contorno  $\Gamma_e$ . Com as devidas aproximações das variáveis, a equação integral dos deslocamentos de um determinado ponto  $\mathbf{S}$  do contorno, é discretizada da seguinte forma,

$$\begin{aligned} c_{ik}(\mathbf{S}) u_k(\mathbf{S}) + \sum_{je=1}^{N_e} \left[ \int_{\Gamma_e} p_{ik}^*(\mathbf{S}, \mathbf{Q}) \phi_m(\mathbf{Q}) d\Gamma_e(\mathbf{Q}) U_k^{je,m} \right] = \\ \sum_{je=1}^{N_e} \left[ \int_{\Gamma_e} u_{ik}^*(\mathbf{S}, \mathbf{Q}) \phi_m(\mathbf{Q}) d\Gamma_e(\mathbf{Q}) P_k^{je,m} \right] + \\ + \sum_{jc=1}^{N_c} \left[ \int_{\Omega_c} u_{ik}^*(\mathbf{S}, \mathbf{q}) \psi_\ell(\mathbf{q}) d\Omega_c(\mathbf{q}) B_k^{jc,\ell} \right] + \\ + \sum_{jc=1}^{N_c} \left[ \int_{\Omega_c} \epsilon_{imk}^*(\mathbf{S}, \mathbf{q}) \psi_\ell(\mathbf{q}) d\Omega_c(\mathbf{q}) \sigma_{mk}^{ojc,\ell} \right] \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

No caso de ponto interno, utiliza-se  $\mathbf{s}$  no lugar de  $\mathbf{S}$ .

Conforme será visto no item 3.5.2, para o caso da força de domínio  $b_k(\mathbf{q})$  ser constante, a integral de domínio é transformada em integral de contorno, obtendo-se,

$$\sum_{jc=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} u_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) b_k(\mathbf{q}) d\Omega_c(\mathbf{q}) = \sum_{je=1}^{N_e} b_k(\mathbf{q}) \int_{\Gamma_e} B_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) d\Gamma_e(\mathbf{Q}) \quad (3.4.2)$$

Chamando-se,

$$\int_{\Gamma_e} p_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \phi_m(\mathbf{Q}) d\Gamma_e(\mathbf{Q}) = h_{ik}^{je,m}(\mathbf{s})$$

$$\int_{\Gamma_e} u_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \phi_m(\mathbf{Q}) d\Gamma_e(\mathbf{Q}) = g_{ik}^{je,m}(\mathbf{s})$$

$$\int_{\Gamma_e} B_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) d\Gamma_e(\mathbf{Q}) = d_{ik}^{je}(\mathbf{s}, \mathbf{Q})$$

$$\int_{\Omega_c} \epsilon_{imk}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \psi_l(\mathbf{q}) d\Omega_c(\mathbf{q}) = e_{imk}^{jc,l}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \quad (3.4.3)$$

e, considerando-se todos os pontos do contorno e todas as células do domínio, tem-se,

$$[C]\{U\} + [H]^*\{U\} = [G]\{P\} + [D]\{B\} + [E]\{\sigma^0\} \quad (3.4.4)$$

As forças de domínio e tensões iniciais, quando existirem, serão valores conhecidos.

Fazendo,

$$\begin{aligned} [H] &= [C] + [H]^* \\ \{\bar{F}\} &= [D]\{B\} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

tem-se,

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{\bar{F}\} + [E]\{\sigma^0\} \quad (3.4.6)$$

No caso do ponto de colocação  $S$  pertencer ao contorno do domínio e não coincidir com os pontos nodais, nas extremidades dos elementos, a matriz  $[C]$  é alterada pois os deslocamentos  $u_k(S)$  são obtidos através das funções aproximadoras.

$$u_k(S) = \phi_m U_k^{j e, m} \quad (3.4.7)$$

Com os valores prescritos das variáveis e colocando-se as incógnitas de um mesmo lado, chega-se a um sistema de equações do tipo,

$$[A]\{X\} = \{F\} + [E]\{\sigma^0\} \quad (3.4.8)$$

onde  $\{F\}$  contém valores prescritos de deslocamentos e forças de superfície. Se existirem forças de domínio, o vetor  $\{\bar{F}\}$  é adicionado em  $\{F\}$ .

A discretização da equação integral dos deslocamentos de pontos internos  $s$  é feita de maneira idêntica à dos pontos do contorno  $S$ , obtendo-se a seguinte equação,

$$\{\bar{U}\} = -[H']\{U\} + [G']\{P\} + [D']\{B\} + [E']\{\sigma^0\} \quad (3.4.9)$$

Nesta equação os elementos das matrizes  $[H']$ ,  $[G']$ ,  $[D']$  e  $[E']$  são determinados da mesma forma que os de  $[H]$ ,  $[G]$ ,  $[D]$  e  $[E]$ .



### 3.4.2 Discretização da equação integral das tensões em pontos internos

A equação integral (2.3.13) é discretizada da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(\mathbf{s}) = & - \sum_{je=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} S_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \phi_m(\mathbf{Q}) d\Gamma_e(\mathbf{Q}) U_k^{je,m} + \\
 & + \sum_{je=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} D_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \phi_m(\mathbf{Q}) d\Gamma_e(\mathbf{Q}) P_k^{je,m} + \\
 & + \sum_{jc=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} D_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \psi_\ell(\mathbf{q}) d\Omega_c(\mathbf{q}) B_k^{jc,\ell} + \\
 & + \sum_{jc=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} E_{ijmk}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \psi_\ell(\mathbf{q}) d\Omega_c(\mathbf{q}) \sigma_{mk}^{ojc,\ell} + \\
 & - \frac{1}{8(1-\nu)} \left[ 2\sigma_{ij}^o(\mathbf{s}) + (1-4\nu) \sigma_{\ell\ell}^o(\mathbf{s}) \delta_{ij} \right]
 \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

Quando todos os pontos internos  $\mathbf{s}$  forem considerados chega-se a,

$$\{\sigma\} = -[H'']\{U\} + [G'']\{P\} + [D'']\{B\} + [E'']\{\sigma\} \tag{3.4.11}$$

onde,

$$[E''] = [\hat{E}] + [\bar{E}] \tag{3.4.12}$$

sendo que,

$$[\hat{E}] \text{ corresponde a } \int_{\Omega_c} E_{ijmk}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \psi_\ell(\mathbf{q}) d\Omega_c(\mathbf{q}) \sigma_{mk}^{ojc,\ell}$$

$$[\bar{E}] \text{ corresponde ao termo } \frac{-1}{8(1-\nu)} \left[ 2\sigma_{ij}^o(\mathbf{s}) + (1-4\nu) \sigma_{\ell\ell}^o(\mathbf{s}) \delta_{ij} \right]$$



Com um procedimento de integração numérica do tipo gaussiano pode-se escrever,

$$h_{ik}^{je,m}(\mathbf{s}) \cong \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{N_g} p_{ik}^*(\mathbf{s}, \xi_n) \phi_m(\xi_n) w(\xi_n)$$

$$g_{ik}^{je,m}(\mathbf{s}) \cong \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{N_g} u_{ik}^*(\mathbf{s}, \xi_n) \phi_m(\xi_n) w(\xi_n) \quad (3.5.2)$$

onde  $\xi_n$  são as coordenadas adimensionais dos pontos de Gauss e  $w(\xi_n)$  os correspondentes pesos.  $N_g$  é o número de pontos de Gauss.

Na integração analítica da integral  $h_{ik}^{je,m}(\mathbf{s})$ , a indicação do elemento  $je$  é substituída por  $n$ . Para  $n=1$  o ponto  $\mathbf{s}$  está localizado no ponto 1 e, para  $n=2$ , no ponto 2.

Quando o ponto  $\mathbf{s}$  estiver localizado em um ponto simples e  $m=n$ , ocorre uma singularidade do tipo  $1/r$ , que se resolve com a integração simultânea de dois elementos consecutivos, Fig. 3.5.2.

Assim, a integral

$$h_{ik}^{je,m}(\mathbf{s}) = \int_{\Gamma_e} p_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \phi_m(\mathbf{Q}) d\Gamma_e(\mathbf{Q}) \quad (3.5.3)$$

é calculada analiticamente para dois elementos de contorno consecutivos,  $je$  e  $je+1$ , obtendo-se os seguintes valores para as componentes da sub-matriz de  $[H]$ , que correspondem às influências do ponto  $\mathbf{s}$  sobre si mesmo, isto é,  $\mathbf{s} = \mathbf{Q}$ .

$$h_{ik}(\mathbf{s}) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \ln\left[L_{je+1}/L_{je}\right] (i-k) \quad (3.5.4)$$

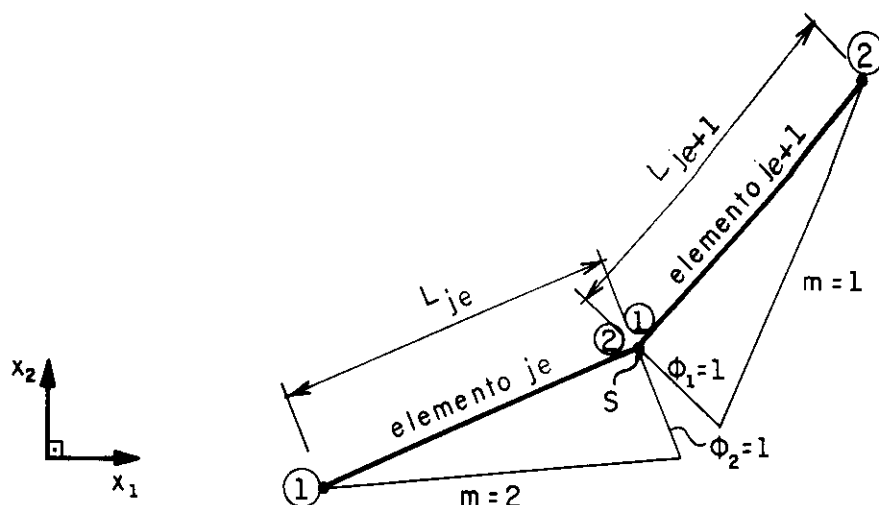


Fig.3.5.2 Integração de elementos com singularidade  $1/r$

Para o ponto  $S$  situado em um ponto simples e  $m \neq n$ , Fig.3.5.3, não existe problema de singularidade. Neste caso, o cálculo analítico fornece,

$$h_{ik}^{mn} = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} (i-k) (1-\delta_{mn}) (m-n) \quad (3.5.5)$$

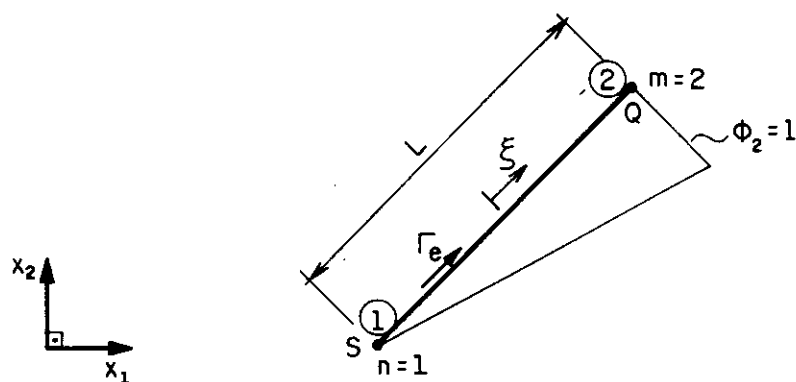


Fig.3.5.3 Integração do elemento de contorno  $je$

Quando o ponto  $S$  estiver posicionado em um ponto duplo e deslocado para dentro do elemento de contorno  $je$  com  $\xi = \bar{\xi}$ , Fig. 3.5.4, são obtidas novas expressões.

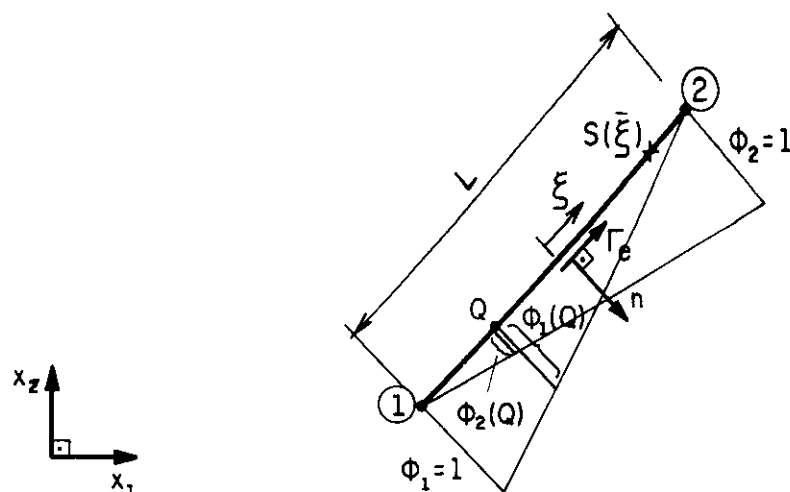


Fig.3.5.4 Ponto  $S(\bar{\xi})$  deslocado para dentro do elemento de contorno  $\Gamma_e$  que está sendo integrado

O cálculo analítico das integrais para esta situação fornece com  $m=1$  e  $m=2$ , respectivamente,

$$h_{ik}^1(\mathbf{s}) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \left[ (k-i) + \frac{1}{2}(1-\bar{\xi}) \ln \left( \frac{1-\xi}{1+\xi} \right) \right] \quad (3.5.6)$$

$$h_{ik}^2(\mathbf{s}) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \left[ (i-k) + \frac{1}{2}(1+\bar{\xi}) \ln \left( \frac{1-\xi}{1+\xi} \right) \right] \quad (3.5.7)$$

A integral,

$$g_{ik}^{je,m}(\mathbf{s}) = \int_{\Gamma_e} u_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \phi_m(\mathbf{Q}) d\Gamma_e(\mathbf{Q}) \quad (3.5.8)$$

é calculada analiticamente tanto para o caso de ponto simples quanto para o de ponto duplo.

Para o ponto  $\mathbf{s}$  situado em um ponto simples, definido em uma das extremidades do elemento de contorno  $\Gamma_e$  que está sendo integrado tem-se,

$$g_{ik}^{mn} = \frac{L}{16\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \left( \ln L - \frac{1}{2} - \delta_{mn} \right) \delta_{ik} + L_{,i} L_{,k} \right] \quad (3.5.9)$$

onde  $L$  é o comprimento do elemento  $je$ ,  $L_{,i}$  e  $L_{,k}$  são os cossenos diretores do elemento  $e$ ,  $n$  representa a posição do ponto  $S$  sendo  $n=1$  para o ponto  $S$  localizado no ponto 1 e  $n=2$  para o ponto  $S$  localizado no ponto 2.

O ponto  $S$  localizado em um ponto duplo e deslocado para dentro do elemento de contorno  $je$ , tem-se no caso de  $m=1$ , a seguinte expressão,

$$g_{ik}^{1n} = \frac{L}{16\pi G(1-\nu)} \left\{ -(3-4\nu) \left[ 4\ln L - \ln 2 + 2(\xi - \bar{\xi}) + (1 - \bar{\xi}^2) \ln(1 - \bar{\xi}) + (3 + 2\bar{\xi} - \bar{\xi}^2) \ln(1 + \bar{\xi}) \right] \delta_{ik} + L_{,i} L_{,k} \right\} \quad (3.5.10)$$

No caso de  $m=2$ , troca-se  $\bar{\xi}$  por  $-\bar{\xi}$ .

#### b) Tensões - $[H^*]$ e $[G^*]$

As integrais são calculadas através do procedimento de integração numérica de Gauss pois só existem partes não singulares.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} S_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \phi_m(\mathbf{Q}) d\Gamma_e &= \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} S_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \phi_m(\mathbf{Q}) d\xi(\mathbf{Q}) = \\ &\cong \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{N_g} S_{ijk}(\mathbf{s}, \xi_n) \phi_m(\xi_n) w(\xi_n) \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} D_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \phi_m(\mathbf{Q}) d\Gamma_e &= \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} D_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \phi_m(\mathbf{Q}) d\xi(\mathbf{Q}) = \\ &\cong \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{N_g} D_{ijk}(\mathbf{s}, \xi_n) \phi_m(\xi_n) w(\xi_n) \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

### 3.5.2 Integrais de domínio

#### 3.5.2.1 Deslocamentos - [D] e [E]

##### a) Forças de domínio

Em aplicações geotécnicas, geralmente as forças de domínio que ocorrem são devidas ao peso próprio. Logo,  $b_k(\mathbf{q})$  é considerado constante e as integrais de domínio devido as forças de domínio das equações de (2.3.6) e (2.3.13) podem ser transformadas em integrais de contorno, Fig.3.5.5.

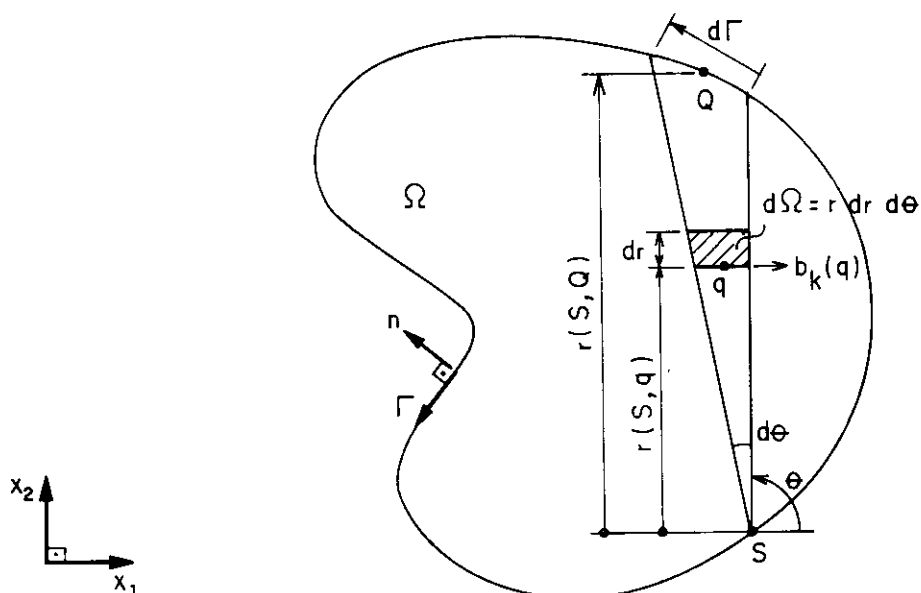


Fig.3.5.5 Integral de domínio para integral de contorno

Utilizando-se coordenadas cilíndricas, o termo integral de domínio devido as forças de domínio, da equação integral dos deslocamentos de pontos  $S$  do contorno  $\Gamma$  e de pontos internos  $s$  do domínio  $\Omega$  torna-se,

$$\int_{\Omega} u_{ik}^*(S, \mathbf{q}) b_k(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) = b_k(\mathbf{q}) \int_{\theta} \int_r u_{ik}^*(S, \mathbf{q}) r dr d\theta \quad (3.5.13)$$

Substituindo-se a solução fundamental de Kelvin, e após o cálculo das integrais indicadas obtém-se,

$$\int_{\Omega} u_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) b_k(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) = b_k(\mathbf{q}) \int_{\Gamma} B_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) d\Gamma(\mathbf{Q}) \quad (3.5.14)$$

onde,

$$B_{ik}^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) = \frac{r}{16\pi G(1-\nu)} \left[ -(3-4\nu) \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) \delta_{ik} + r_{,i} r_{,k} \right] \eta_{\ell} r_{,\ell} \quad (3.5.15)$$

sendo  $\eta_{\ell}$  os cossenos diretores da normal ao contorno.

#### b) Tensões iniciais - [E]

Na integração do termo,

$$\int_{\Omega} \epsilon_{imk}^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \sigma_{mk}^{\circ}(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) \quad (3.5.16)$$

para  $\sigma_{mk}^{\circ}(\mathbf{q})$  constante, é utilizado o mesmo procedimento de integração das forças de domínio.

No estudo da plasticidade do material, admite-se  $\sigma_{mk}^{\circ}(\mathbf{q})$  variável e para calcular a integral da eq. (3.5.16) o domínio  $\Omega$  é discretizado em  $N_c$  sub-domínios  $\Omega_c$  denominados células, Fig. 3.5.6.

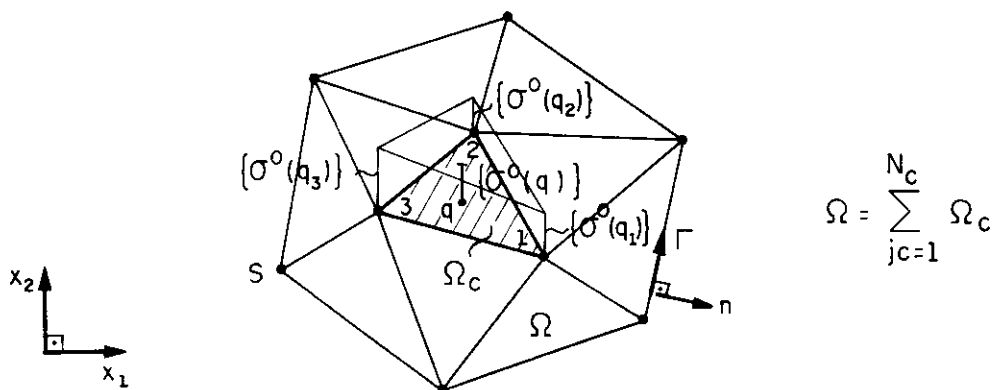


Fig.3.5.6 Discretização do domínio  $\Omega$



Para o cálculo da integral de domínio é utilizado o procedimento apresentado a seguir.

Discretizando-se a integral de domínio tem-se,

$$\int_{\Omega} \epsilon_{imk}^* (\mathbf{s}, \mathbf{q}) \sigma_{mk}^o (\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) = \sum_{jc=1}^{N_c} \left[ \int_{\Omega_c} \epsilon_{imk}^* (\mathbf{s}, \mathbf{q}) \psi_{\ell} (\mathbf{q}) d\Omega_c(\mathbf{q}) \right] \sigma_{mk}^{ojc, \ell} \quad (3.5.17)$$

onde  $\sigma_{mk}^{ojc, \ell}$  são as componentes de tensão nos vértices da célula  $jc$  de domínio  $\Omega_c$ , e são valores conhecidos.

Na integração de uma célula de domínio  $\Omega_c$ , Fig. 3.5.7, admite-se um sistema de coordenadas adimensionais fixando-se os vértices (1), (2) e (3) da seguinte forma:

- Escolhe-se o ponto (3) como qualquer um dos vértices da célula,
- Com centro no vértice (3), gira-se no sentido anti-horário do vértice (1) para o vértice (2).

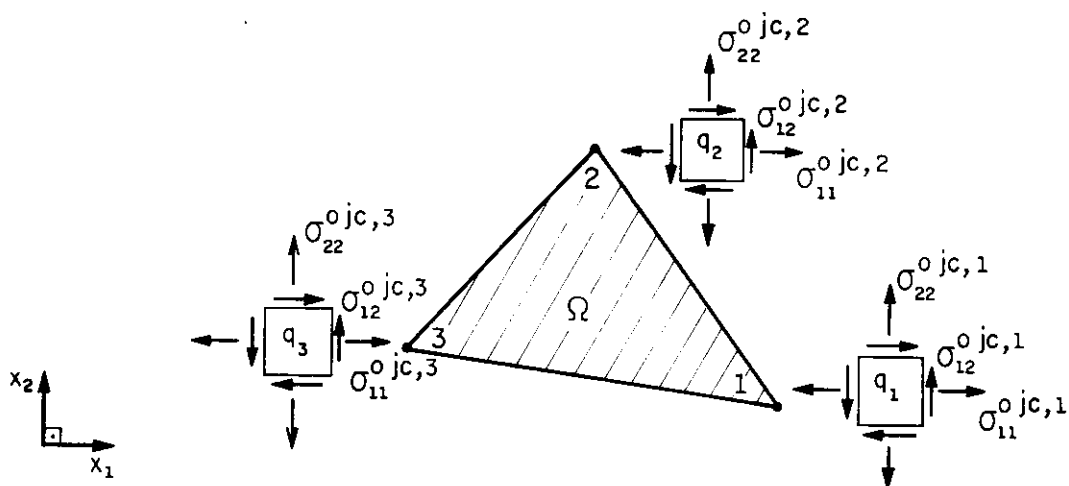


Fig.3.5.7 Tensões iniciais nos vértices da célula  $jc$  de domínio  $\Omega_c$

Qualquer ponto  $\mathbf{q}$  da célula é definido em função de três coordenadas adimensionais, Fig. 3.5.8, com,

$$\xi_3(\mathbf{q}) = 1 - \xi_1(\mathbf{q}) - \xi_2(\mathbf{q}) \quad (3.5.18)$$

pois  $\xi_1(\mathbf{q}) + \xi_2(\mathbf{q}) + \xi_3(\mathbf{q}) = 1$

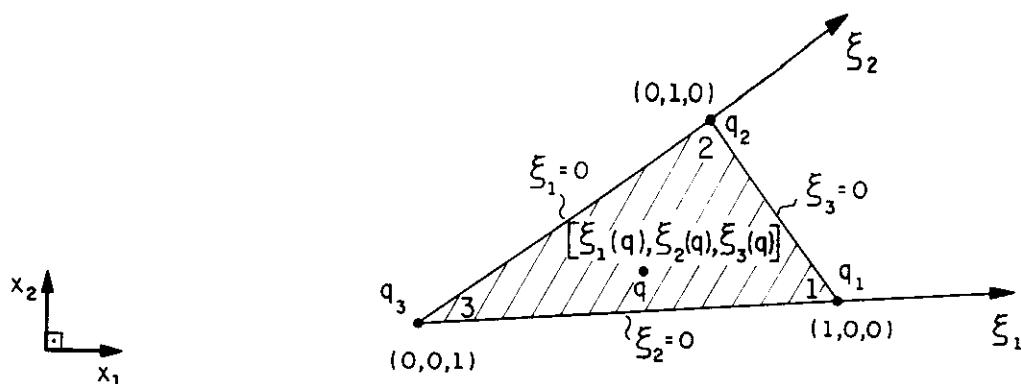


Fig.3.5.8 Coordenadas dimensionais

No sistema de coordenadas cartesianas  $x_1$  e  $x_2$ , o ponto  $\mathbf{q}$  é definido em função das coordenadas dos vértices da célula  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_2$  e  $\mathbf{q}_3$ , da seguinte forma,

$$x_k(\mathbf{q}) = \psi_\ell(\mathbf{q}) x_k^{jc,\ell}$$

ou matricialmente,

$$\{\mathbf{x}(\mathbf{q})\} = \begin{bmatrix} \{\psi(\mathbf{q})\} & \{0\} \\ \{0\} & \{\psi(\mathbf{q})\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x_1\} \\ \{x_2\} \end{Bmatrix} \quad (3.5.19)$$

Em coordenadas dimensionais,

$$\{\psi(\mathbf{q})\} = \{\xi_1(\mathbf{q}) \quad \xi_2(\mathbf{q}) \quad \xi_3(\mathbf{q})\} \quad (3.5.20)$$

$$x_k(\mathbf{q}) = \xi_1(\mathbf{q}) x_k^{jc,1} + \xi_2(\mathbf{q}) x_k^{jc,2} + \xi_3(\mathbf{q}) x_k^{jc,3} \quad (3.5.21)$$

A variável adimensional  $\xi_\ell(\mathbf{q})$ , ( $\ell=1,2,3$ ), é dada por,

$$\xi_\ell(\mathbf{q}) = \frac{1}{2A} \left[ 2A_\circ^\ell + b^\ell x_1(\mathbf{q}) + a^\ell x_2(\mathbf{q}) \right] \quad (3.5.22)$$

onde,

$$a^\ell = x_1^k - x_1^j$$

$$b^\ell = x_2^j - x_2^k$$

$$2A_\circ^\ell = x_1^j x_2^k - x_1^k x_2^j$$

$$A = \frac{1}{2} (b^1 a^2 - b^2 a^1) \quad (3.5.23)$$

com,

$$\ell = 1, 2, 3$$

$$j = 2, 3, 1$$

$$k = 3, 2, 1$$

respectivamente.

Como na integral de domínio da eq.(3.5.14) existe uma solução fundamental que é função do vetor posição  $r(\mathbf{S}, \mathbf{q})$  e do ângulo  $\theta$ , é conveniente escrever a eq.(3.5.20) em relação ao sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta)$ , com origem no ponto  $\mathbf{S}$ .

Portanto,

$$x_1(\mathbf{q}) = x_1(\mathbf{S}) + r(\mathbf{S}, \mathbf{q}) \cos \theta$$

$$x_2(\mathbf{q}) = x_2(\mathbf{S}) + r(\mathbf{S}, \mathbf{q}) \sin \theta \quad (3.5.24)$$

Substituindo-se estes valores na eq.(3.5.22), tem-se:

$$\xi_\ell(\mathbf{q}) = \xi_\ell(\mathbf{S}) + \frac{r}{2A} (b^\ell \cos \theta + a^\ell \sin \theta) \quad (3.5.25)$$

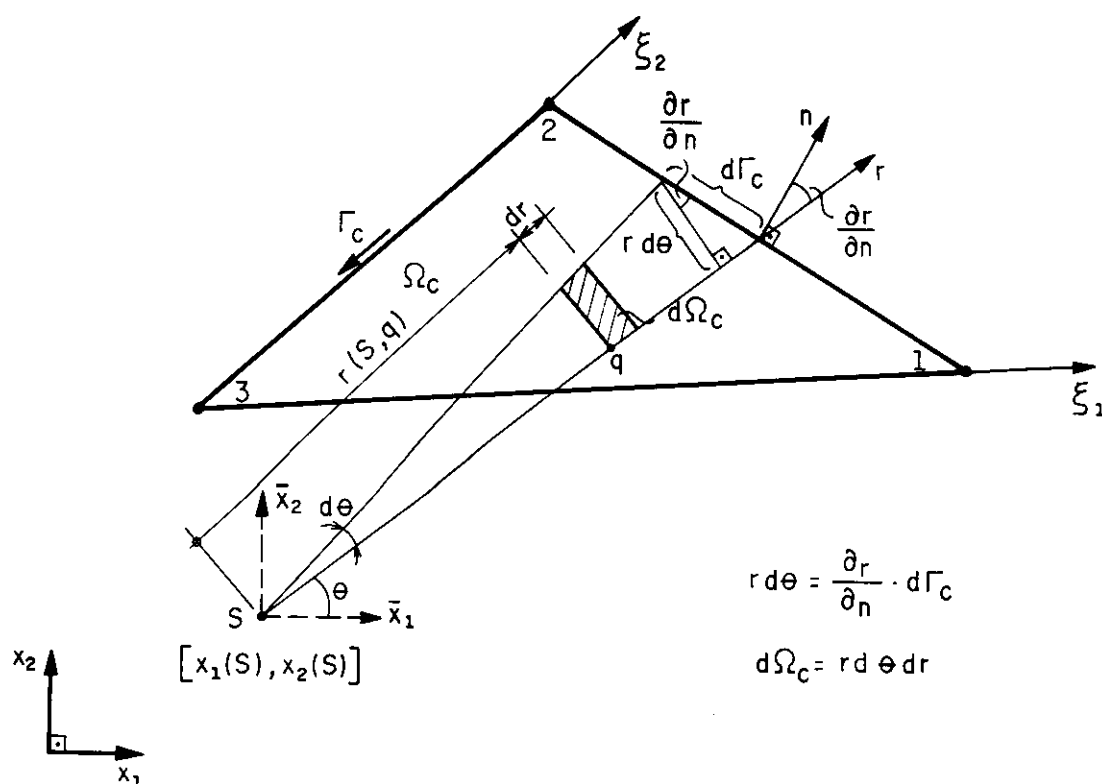


Fig.3.5.9 Coordenadas do ponto  $\mathbf{q}$  da célula de domínio  $\Omega_c$

A integral dentro do somatório da eq. (3.5.17) é escrita da seguinte forma,

$$\int_{\Omega_c} \epsilon_{imk}^*(\mathbf{S}, \mathbf{q}) \psi_\ell(\mathbf{q}) d\Omega_c(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_c} \frac{\epsilon(\mathbf{S}, \mathbf{q})}{r} \xi_\ell(\mathbf{q}) d\Omega_c(\mathbf{q}) = \epsilon(\mathbf{S}, \mathbf{q}) \quad (3.5.26)$$

onde  $\bar{\epsilon}(\mathbf{S}, \mathbf{q})$  é uma função que depende só de  $\theta$  e representa o termo  $\bar{\epsilon}(\mathbf{S}, \mathbf{q})$  multiplicado por  $r$ .

A integral sobre o domínio  $\Omega_c$  é transformada em integral sobre  $r$  e  $\theta$ , Fig. 3.5.10.

$$\epsilon(\mathbf{S}, \mathbf{q}) = \int_{\theta_1}^{\theta_3} \int_{R_1(\theta)}^{R_2(\theta)} \bar{\epsilon}(\mathbf{S}, \mathbf{q}) \xi_\ell dr d\theta \quad (3.5.27)$$

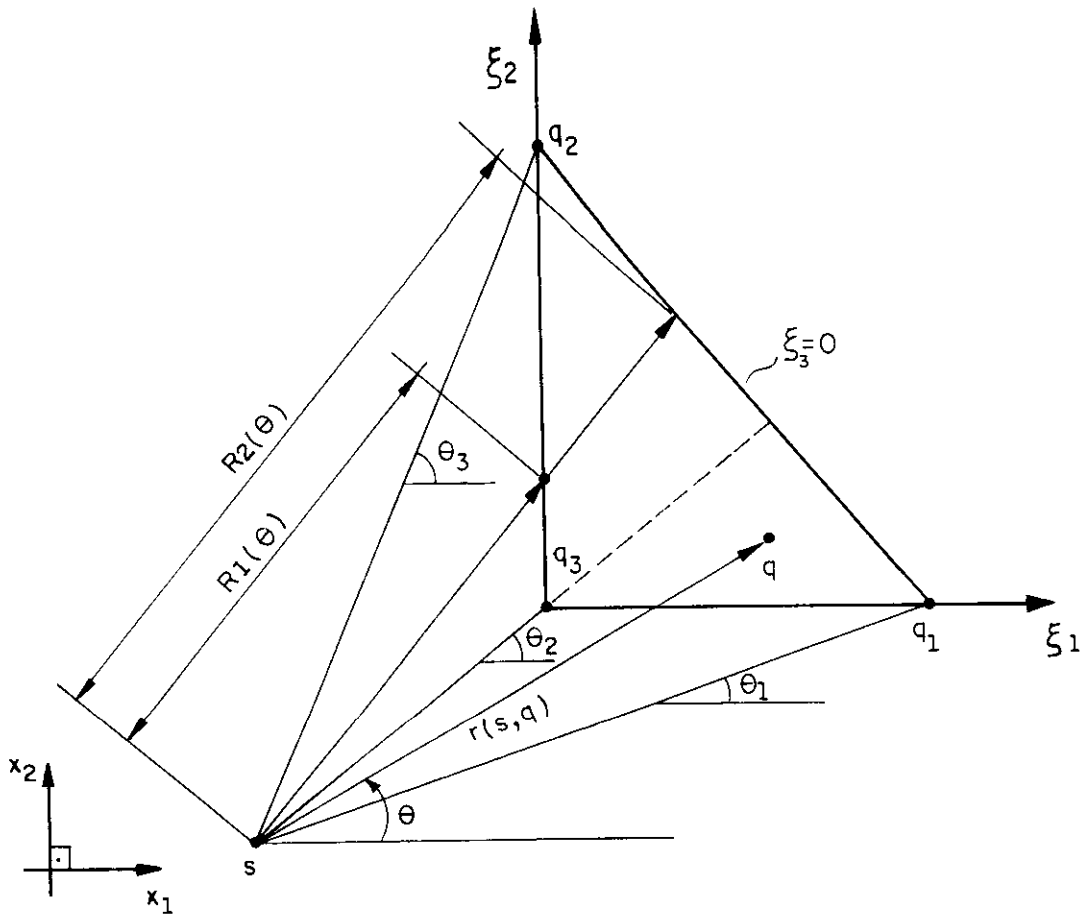


Fig.3.5.10 Sistema de coordenadas cilíndricas

Substituindo-se a eq.(3.5.25) na eq.(3.5.27), com  $\theta$  constante e integrando-se em relação a  $r$  obtém-se,

$$\epsilon(s, q) = \int_{\theta_1}^{\theta_3} \bar{\epsilon}(s, q) \left\{ \xi_\ell(s) + \frac{1}{4A} \left[ b^\ell \cos\theta + a^\ell \sin\theta \right] \cdot \left[ R_2(\theta) + R_1(\theta) \right] \right\} \left[ R_2(\theta) - R_1(\theta) \right] d\theta \quad (3.5.28)$$

onde  $R_1(\theta)$  e  $R_2(\theta)$  são determinados através da eq.(3.5.25), usando um valor específico de  $\xi_\ell(s)$  sobre os vértices da célula, ou seja,

$$R_k(\theta) = \frac{-2A\xi_\ell(\mathbf{S})}{b^\ell \cos\theta + a^\ell \sin\theta} \quad (3.5.29)$$

sendo  $k = 2$  para  $\ell = 3$  e,

$k = 1$  para  $\ell = 1, 2$ .

Para o ponto  $\mathbf{S}$  coincidente com os vértices das células, não surgem singularidades especiais e o valor final integrado de  $\epsilon(\mathbf{S}, \mathbf{q})$  é calculado numericamente sobre  $\theta$  desprezando-se o valor de  $R_1(\theta)$ .

No caso de um ponto  $\mathbf{S}$  distante da célula, a integral numérica sobre  $\theta$  é executada em duas partes conforme os limites indicados na Fig. 3.5.10, de  $\theta_1$  a  $\theta_2$  e de  $\theta_2$  a  $\theta_3$ .

### 3.5.2.2 Tensões - [D"] e [E"]

Nos pontos  $\mathbf{S}$  pertencentes ao contorno  $\Gamma$ , as tensões são calculadas através de um procedimento aproximado (ítem 3.6), em função de valores nodais conhecidos. No caso de pontos internos  $\mathbf{s}$ , as integrais de domínio de (2.3.16) para o cálculo das tensões são determinadas da forma indicada a seguir.

#### a) Forças de domínio - [D"]

Com um procedimento análogo ao utilizado para obter a eq. (3.5.14), a integral correspondente às forças de domínio torna-se,

$$\int_{\Omega_c} D_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) b_k(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) = b_k(\mathbf{q}) \int_{\Gamma} T_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) d\Gamma(\mathbf{Q}) \quad (3.5.30)$$

onde,

$$T_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) = D_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \eta_\ell r_{,\ell} \quad (3.5.31)$$

sendo  $\eta_\ell$  os cossenos diretores da normal ao contorno.

## b) Tensões iniciais - [E"]

Chamando,

$$e(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \int_{\Omega_c} E_{ijmk}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \psi_\ell(\mathbf{q}) d\Omega_c(\mathbf{q}) \sigma_{mk}^{ojc, \ell} \quad (3.5.32)$$

a integral dentro do somatório da eq.(3.4.10), e escrevendo-a da seguinte forma,

$$e(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \int_{\Omega_c} \frac{\bar{e}(\mathbf{s}, \mathbf{q})}{r^2} \xi_\ell(\mathbf{s}) d\Omega_c(\mathbf{q}) \sigma_{mk}^{ojc, \ell} \quad (3.5.33)$$

onde  $\bar{e}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$  é função apenas de  $\theta$  e determinado através de,

$$\bar{e}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = r^2 e(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \quad (3.5.34)$$

A integral da eq.(3.5.33), sobre o domínio  $\Omega_c$ , é transformada em integral sobre  $r$  e  $\theta$ . Desenvolvendo-se a integração em  $r$  tem-se,

$$\begin{aligned} e(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = & \int_{\theta_1}^{\theta_3} \bar{e}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \left[ \xi_\ell(\mathbf{s}) \ln R_2(\theta) + (b^\ell \cos \theta + a^\ell \sin \theta) \right. \\ & \left. \cdot \frac{R_2(\theta)}{2A} \right] d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{e}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \left[ \xi_\ell(\mathbf{s}) \ln R_1(\theta) + \right. \\ & \left. + (b^\ell \cos \theta + a^\ell \sin \theta) \frac{R_1(\theta)}{2A} \right] d\theta \quad (3.5.35) \end{aligned}$$

Para o ponto  $\mathbf{s}$  não coincidente com os vértices das células, as integrais sobre  $\theta$ , de  $\theta_1$  a  $\theta_2$  e de  $\theta_2$  a  $\theta_3$  são calculadas numericamente, pois não surgem singularidades, Fig. 3.5.10. Caso contrário, a segunda integral da

eq.(3.5.35) é calculada recorrendo-se ao valor principal de Cauchy onde  $R_1(\theta)$  deve ser substituído por um valor infinitesimal e constante  $\epsilon$ . Assim, a eq.(3.5.35) torna-se,

$$e(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{e}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \left[ \xi_\ell(\mathbf{s}) \ln R(\theta) + (b^\ell \cos \theta + a^\ell \sin \theta) \frac{R(\theta)}{2A} \right] d\theta +$$

$$-\xi_\ell(\mathbf{s}) \ln \epsilon \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{e}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) d\theta - \frac{\epsilon}{2A} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{e}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) (b^\ell \cos \theta + a^\ell \sin \theta) d\theta$$

(3.5.36)

onde  $\xi_\ell(\mathbf{s}) = 1$  e  $R_2(\theta)$  é substituído por  $R(\theta)$ , Fig.3.5.11.

Considera-se o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  para o cálculo da integral sobre toda a célula. O primeiro termo da eq.(3.5.36) depende de um valor finito  $R(\theta)$  e pode ser determinado para qualquer par  $(\theta_1, \theta_2)$ . Os outros termos são obtidos considerando-se todas as células interligadas ao ponto  $\mathbf{s}$ , ou seja, os limites  $(\theta_1, \theta_2)$  tornam-se  $(0, 2\pi)$ .

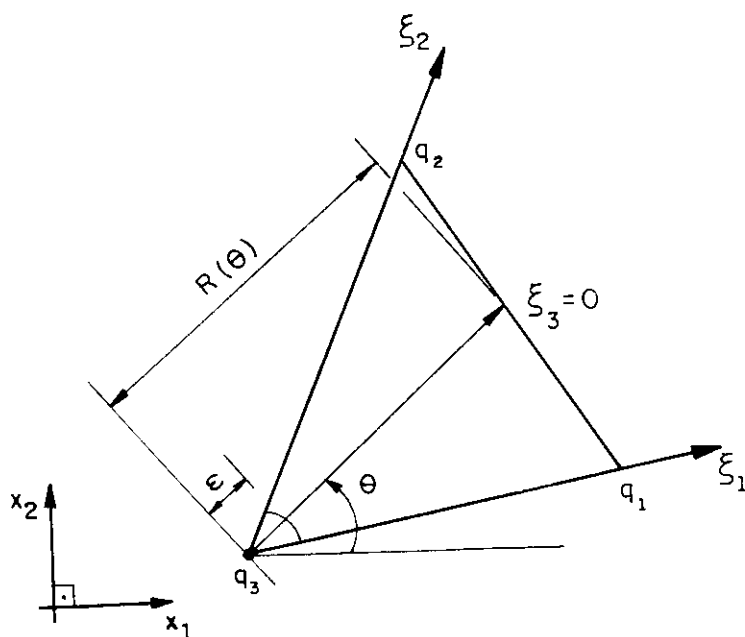


Fig.3.5.11 Sistema de coordenadas cilíndricas com origem em um dos vértices da célula jc



Escrevendo-se estas integrais separadamente tem-se,

$$e_2(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \xi_\ell(\mathbf{s}) \ln \epsilon \int_0^{2\pi} \bar{e}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) d\theta +$$

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{2A} \int_0^{2\pi} \bar{e}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) (b^\ell \cos \theta + a^\ell \sin \theta) d\theta$$
(3.5.37)

Para qualquer componente individual de  $\bar{e}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$  a parcela  $e_2(\mathbf{s}, \mathbf{q})$  desaparece, e a eq.(3.5.36) pode ser escrita apenas em função de  $R(\theta)$ .

$$e(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{e}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \left[ \ln R(\theta) + (b^\ell \cos \theta + a^\ell \sin \theta) \frac{R(\theta)}{2A} \right] d\theta$$
(3.5.38)

e pode ser integrada numericamente.

### 3.6 CÁLCULO DAS TENSÕES EM PONTOS DO CONTORNO

Utiliza-se um procedimento aproximado que depende de valores nodais conhecidos, para se determinar o estado de tensão em um determinado ponto I do contorno.

Os sistemas de referência local  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  e global  $(x_1, x_2)$  são orientados conforme a Fig. 3.6.1.

Para um ponto I qualquer tem-se,

$$\sigma_{ij}(I) \eta_j = p_i(I)$$
(3.6.1)

No sistema local, com  $\eta_1 = 0$  e  $\eta_2 = -1$ , resulta,

$$\bar{\sigma}_{12}(I) = -\bar{P}_1(I)$$
(3.6.2)

$$\bar{\sigma}_{22}(I) = -\bar{P}_2(I)$$
(3.6.3)

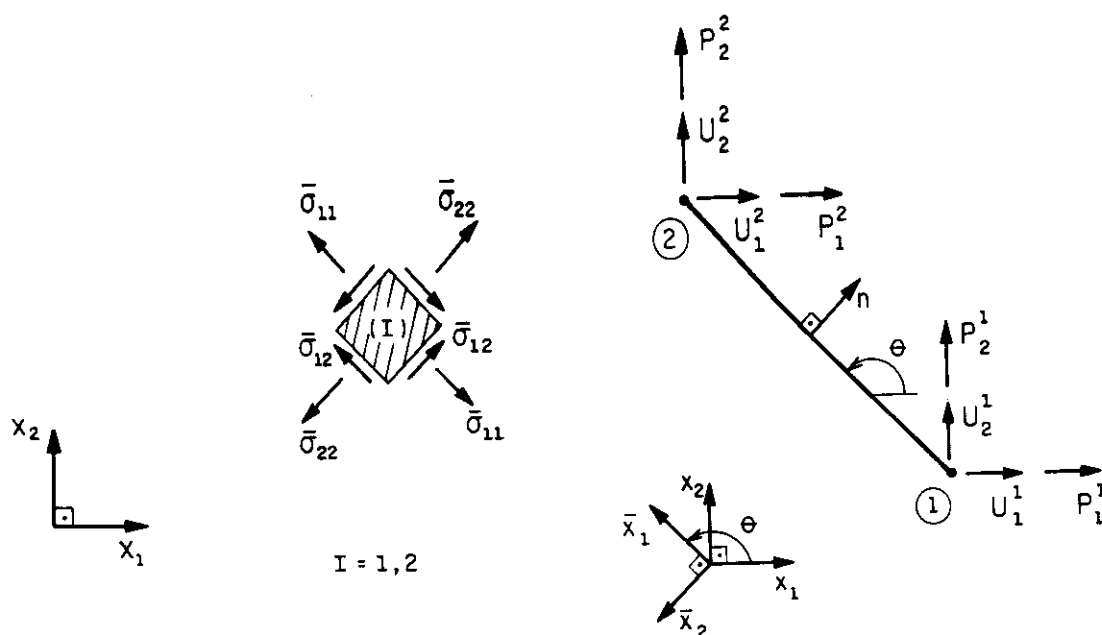


Fig.3.6.1 Elemento genérico com sistemas de referência global e local

Com a lei de Hooke generalizada, eq.(2.2.5), tem-se,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(I) = & \frac{2G\nu}{1-2\nu} \left[ \left( \bar{\epsilon}_{11}(I) + \bar{\epsilon}_{22}(I) \right) - \left( \bar{\epsilon}_{11}^O(I) + \bar{\epsilon}_{22}^O(I) \right) \right] \delta_{11} + \\ & + 2G \left( \bar{\epsilon}_{11}(I) - \bar{\epsilon}_{11}^O(I) \right) \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{22}(I) = & \frac{2G\nu}{1-2\nu} \left[ \left( \bar{\epsilon}_{11}(I) + \bar{\epsilon}_{22}(I) \right) - \left( \bar{\epsilon}_{11}^O(I) + \bar{\epsilon}_{22}^O(I) \right) \right] \delta_{22} + \\ & + 2G \left( \bar{\epsilon}_{22}^O(I) - \bar{\epsilon}_{22}(I) \right) \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

Isolando-se  $\bar{\epsilon}_{22}(I)$  na eq.(3.6.5) e substituindo-se na eq.(3.6.4) obtém-se a componente de tensão  $\bar{\sigma}_{11}$ .

$$\bar{\sigma}_{11}(I) = \frac{2G}{1-\nu} \left( \bar{\epsilon}_{11}(I) - \bar{\epsilon}_{11}^O(I) \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_{22}(I) \quad (3.6.6)$$

Existindo deformações impostas  $\epsilon_{ij}^0$ , as componentes do tensor das tensões são obtidas através de,

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \epsilon_{ll}^0 \delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij}^0 \quad (3.6.7)$$

Escrevendo-se esta equação no sistema  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$ ,

$$\bar{\sigma}_{11}^0 = \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\bar{\epsilon}_{11}^0 + \bar{\epsilon}_{22}^0) \delta_{11} + 2G\bar{\epsilon}_{11}^0 \quad (3.6.8)$$

$$\bar{\sigma}_{22}^0 = \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\bar{\epsilon}_{11}^0 + \bar{\epsilon}_{22}^0) \delta_{22} + 2G\bar{\epsilon}_{22}^0 \quad (3.6.9)$$

Isolando-se  $\bar{\epsilon}_{22}^0$  na eq.(3.6.9) e substituindo na eq.(3.6.8) tem-se,

$$\bar{\sigma}_{11}^0 = \frac{2G}{1-\nu} \bar{\epsilon}_{11}^0 + \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_{22}^0 \quad (3.6.10)$$

Logo,

$$\bar{\epsilon}_{11}^0 = \frac{1-\nu}{2G} \left( \bar{\sigma}_{11}^0 - \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_{22}^0 \right) \quad (3.6.11)$$

Substituindo-se a eq. (3.6.11) na eq. (3.6.6) obtém-se,

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{2G}{1-\nu} \bar{\epsilon}_{11} + \frac{\nu}{1-\nu} \left( \bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{22}^0 \right) - \bar{\sigma}_{11}^0 \quad (3.6.12)$$

As componentes de deformação podem ser obtidas em função da derivada dos deslocamentos. Admitindo-se variação linear para os deslocamentos escreve-se,

$$\bar{\epsilon}_{11}(I) = \frac{\bar{U}_1(2) - \bar{U}_1(1)}{\ell} \quad (3.6.13)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(I) = & \frac{2G}{1-\nu} \left( \frac{\bar{U}_1(2) - \bar{U}_1(1)}{\ell} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \bar{p}_2(I) - \bar{\sigma}_{11}^o(I) + \\ & + \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_2(I) \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

Colocando-se as tensões iniciais obtidas no sistema local, em função das tensões iniciais no sistema global, tem-se,

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11}^o(I) \\ \bar{\sigma}_{12}^o(I) \\ \bar{\sigma}_{22}^o(I) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & 2\text{sen}\theta \cos\theta & \text{sen}^2\theta \\ -\text{sen}\theta \cos\theta & \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta & \text{sen}\theta \cos\theta \\ \text{sen}^2\theta & -2\text{sen}\theta \cos\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^o(I) \\ \sigma_{12}^o(I) \\ \sigma_{22}^o(I) \end{Bmatrix} \quad (3.6.15)$$

Após a determinação das componentes locais retorna-se ao sistema global através da eq. (3.6.16).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}(I) \\ \sigma_{12}(I) \\ \sigma_{22}(I) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & -2\cos\theta \text{sen}\theta & \text{sen}^2\theta \\ \cos\theta \text{sen}\theta & (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) & -\text{sen}\theta \cos\theta \\ \text{sen}^2\theta & 2\cos\theta \text{sen}\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11}(I) \\ \bar{\sigma}_{12}(I) \\ \bar{\sigma}_{22}(I) \end{Bmatrix} \quad (3.6.16)$$

## 4 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS PARA DOMÍNIOS NÃO-HOMOGÊNEOS

### 4.1 SUB-REGIÕES

O método dos elementos de contorno, da maneira como foi formulado até o momento, resolve problemas constituídos de apenas um domínio  $\Omega$  homogêneo.

Utilizando-se a técnica das sub-regiões, é possível resolver problemas cujos domínios sejam compostos por vários sub-domínios de materiais que apresentam características diferentes. Para equacionar este problema, discretiza-se isoladamente cada sub-domínio  $\Omega_i$  homogêneo. Com a imposição do equilíbrio das forças de superfície e da compatibilidade dos deslocamentos em todos os pontos de interface das sub-regiões, o equacionamento fica completo.

Considerando-se as forças de superfície e os deslocamentos dos pontos de interface como valores incógnitos, as equações são reunidas em um único sistema, que apresenta a característica de ser constituído por blocos nulos e não-nulos, sendo que qualquer procedimento pode ser utilizado para resolvê-lo. Neste trabalho, emprega-se o algoritmo proposto por CROTTY (1982), que considera apenas os blocos não-nulos evitando-se operações desnecessárias.

Para o domínio da Fig. 4.1.1, composto de duas sub-regiões e, sem considerar o equilíbrio das forças de superfície e compatibilidade de deslocamentos, pode-se escrever a seguinte representação matricial.

$$\begin{bmatrix} [H]^i & [H]^{ij} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [H]^{ji} & [H]^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}^i \\ \{U\}^{ij} \\ \{U\}^{ji} \\ \{U\}^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]^i & [G]^{ij} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [G]^{ji} & [G]^j \end{bmatrix}.$$

$$\begin{Bmatrix} \{P\}^i \\ \{P\}^{ij} \\ \{P\}^{ji} \\ \{P\}^j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [D]^i & [0] \\ [0] & [D]^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{B\}^i \\ \{B\}^j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [E]^i & [0] \\ [0] & [E]^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\sigma^o\}^i \\ \{\sigma^o\}^j \end{Bmatrix} \quad (4.1.1)$$

Os índices duplos indicam as interfaces entre as sub-regiões com domínio  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$ .

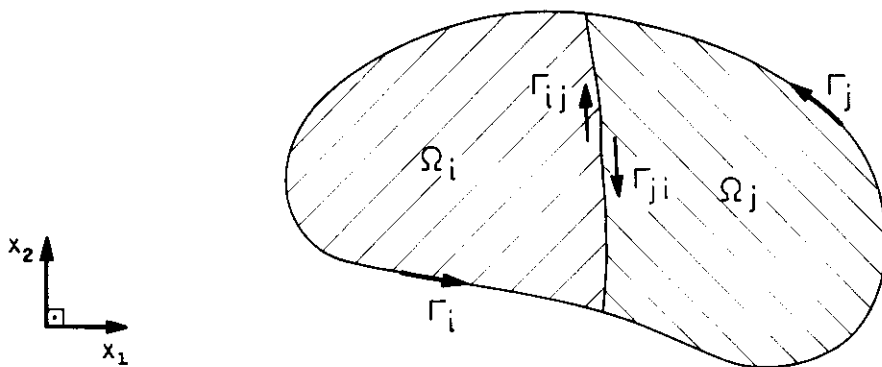


Fig.4.1.1 Domínio composto de duas sub-regiões

Equações complementares para os pontos de interface.

Equilíbrio das forças de superfície

$$\{P\}^{ij} + \{P\}^{ji} = 0 \quad (4.1.2)$$

Compatibilidade de deslocamentos

$$\{U\}^{ij} = \{U\}^{ji} \quad (4.1.3)$$

Em cada ponto de interface existem duas componentes de deslocamentos e duas de forças de superfície. Como são todas incógnitas, escrevem-se quatro equações para cada ponto de interface. Normalmente, são escritas duas equações para cada uma das sub-regiões.

Considerando-se todas as incógnitas de um mesmo lado,

$$\begin{bmatrix} [H]^i & [-G]^{ij} & [H]^{ij} & [0] \\ [0] & [+G]^{ji} & [H]^{ji} & [H]^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}^i \\ \{P\}^{ij} \\ \{U\}^{ij} \\ \{U\}^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]^i & [G]^{ij} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [G]^{ji} & [G]^j \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \{P\}^i \\ \{\bar{P}\}^{ij} \\ \{\bar{P}\}^{ji} \\ \{P\}^j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [D]^i & [0] \\ [0] & [D]^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{B\}^i \\ \{B\}^j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [E]^i & [0] \\ [0] & [E]^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\sigma^o\}^i \\ \{\sigma^o\}^j \end{Bmatrix} \quad (4.1.4)$$

As sub-matrizes  $[G]^{ij}$  e  $[G]^{ji}$  aparecem, também, no segundo membro, para considerar possíveis carregamentos  $\{\bar{P}\}^{ij}$  e  $\{\bar{P}\}^{ji}$  aplicados nos pontos de interface dos sub-domínios  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$ .

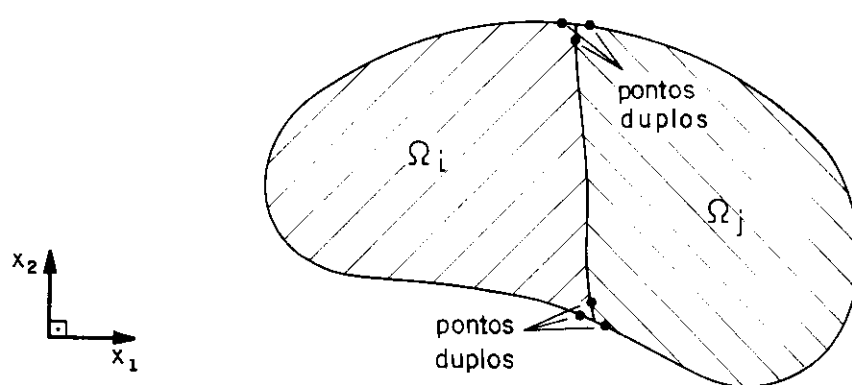


Fig.4.1.2 Pontos duplos nos vértices

Nos vértices formados por duas ou mais sub-regiões, Fig. 4.1.2, definem-se pontos duplos de modo que cada ponto de interface pertença a apenas duas sub-regiões sendo possível considerar descontinuidades de forças de superfície.

## 4.2 MONTAGEM E RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

### 4.2.1 Domínio homogêneo

Na aplicação do método dos elementos de contorno em problemas bidimensionais de domínio homogêneo, é feita a montagem do sistema dado pela eq.(3.4.6), reescrita a seguir,

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{F\} + [E]\{\sigma^0\} \quad (3.4.6)$$

As equações deste sistema são escritas, duas a duas, uma para cada direção, para os  $N$  pontos  $S$ . Estes pontos podem estar situados no domínio  $\Omega$  ou fora dele. É possível, também, escrever apenas uma equação para cada ponto  $S$  sendo necessários  $2N$  pontos. No caso de pontos não pertencentes ao contorno  $\Gamma$ , deve-se ter o cuidado de não posicionar dois pontos muito próximos, e nem muito distantes do contorno.

Escolhendo-se  $N$  pontos de colocação  $S$ , resultam  $2N$  valores de deslocamentos e  $2N$  valores de forças de superfície. Com as condições de contorno e carregamento da estrutura, normalmente  $2N$  valores são prescritos e  $2N$  incógnitos. Dos  $2N$  valores prescritos, alguns são de deslocamentos e outros de forças de superfície. As forças de domínio e tensões iniciais, quando existirem, serão valores conhecidos.

Através de um rearranjo nas equações do sistema envolvendo os coeficientes de  $[H]$  e  $[G]$ , todas as incógnitas



são agrupadas no primeiro membro, obtendo-se,

$$[A]\{X\} = \{b\} \quad (4.2.1)$$

A matriz  $[A]$  é cheia e não-simétrica, o vetor  $\{b\}$  é constituído por elementos resultantes do produto  $G_{ik}P_k$  quando são prescritas as forças de superfície  $P_k$ , ou do produto  $H_{ik}U_k$  quando os deslocamentos  $U_k$  são prescritos, mais os elementos de  $\{F\}$  e de  $[E]\{\sigma^0\}$  no caso da existência de forças de domínio  $\{B\}$  e de tensões iniciais não-nulas.

Para resolver o sistema de equações dado pela eq.(4.2.1), qualquer procedimento pode ser utilizado e, simbolicamente, tem-se,

$$\{X\} = [A]^{-1} \{b\} \quad (4.2.2)$$

onde  $\{X\}$  pode conter valores de deslocamentos e forças de superfície.

#### 4.2.2 Domínio não-homogêneo

No caso de domínios não-homogêneos a matriz  $[A]$  além de não ser simétrica, deixa de ser totalmente cheia, pois surgem blocos com elementos nulos, que aumentam à medida que o número de sub-regiões aumenta.

CROTTY (1982) propôs um algoritmo que resolve o sistema de equações evitando-se operações com os blocos de elementos nulos e, com isto, tornando a resolução mais eficiente e ocupando menos espaço de memória. Neste trabalho, o sistema de equações é resolvido por este algoritmo, e as principais considerações são apresentadas a seguir.

A matriz  $[A]$ , Fig.4.2.1, é particionada em blocos definidos por linhas-bloco e colunas-bloco. Os blocos grandes para a memória disponível, são divididos em sub-blocos definidos por linhas-bloco e colunas sub-bloco.

Os elementos dos blocos, ou sub-blocos, são armazenados por coluna, de cima para baixo e da esquerda para a direita, em um vetor  $\{Z\}$ , sendo um bloco, ou sub-bloco, por registro de um arquivo de acesso direto, inclusive os blocos definidos por elementos dos termos independentes  $\{b\}$ . É possível resolver o sistema de equações com várias colunas de  $\{b\}$ .

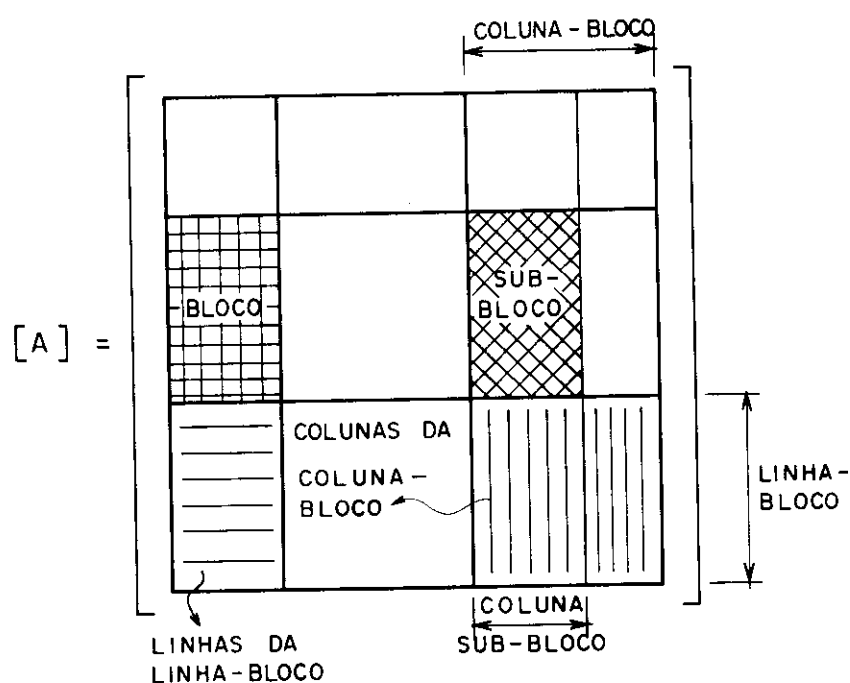


Fig.4.2.1 Partição da matriz  $[A]$

Faz-se a redução da matriz  $[A]$  expandida, isto é, com as colunas de  $\{b\}$ , por eliminação sucessiva dos blocos pivôs, que são os blocos da diagonal, ou seja, blocos da linha-bloco  $i$  e coluna-bloco  $j$ , sendo  $i=j$ .

A eliminação dos blocos é feita por linha-bloco, através da eliminação de Gauss, onde o sistema de equações  $[A] \{x\} = \{b\}$ , é transformado em um sistema equivalente  $[A'] \{x\} = \{b'\}$ , sendo  $[A']$  uma matriz triangular superior.

Escolhem-se pivôs do bloco pivô, até que todas as

colunas da coluna-bloco pivô, ou todas as linhas da linha-bloco pivô, ou ambas, se o bloco for quadrado, sejam eliminadas. Na Fig 4.2.2 são apresentados os blocos afetados durante a eliminação dos blocos pivôs.

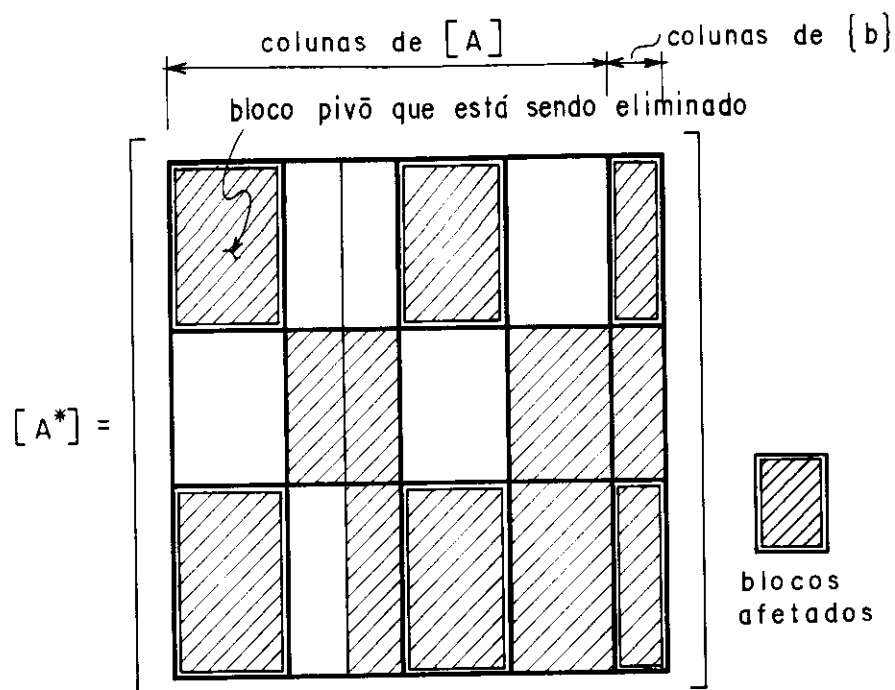


Fig.4.2.2 Blocos afetados durante a eliminação dos blocos pivôs

A eliminação da linha e coluna  $p$ , é feita através do algoritmo de Gauss.

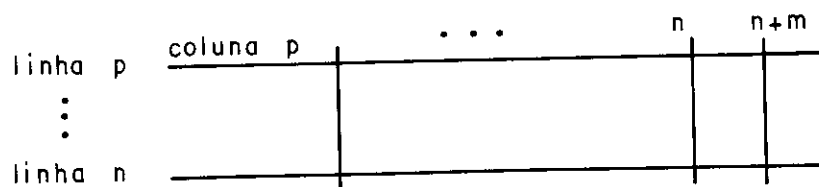


Fig.4.2.3 Eliminação da linha e coluna  $p$

$$a_{ij} \rightarrow a_{ij} - \frac{a_{ip}}{a_{pp}} a_{pj} \quad (4.2.3)$$

onde,

$$i = p+1, p+2, \dots, n$$

$$j = p+1, p+2, \dots, n+m$$

$a_{ij}$  = elementos de [A] armazenados em {Z}

$a_{pp}$  = pivô (elemento de maior valor da coluna)

$n$  = número total de incógnitas

$m$  = número de colunas de {b}.

O valor de  $a_{ij}$  não se altera quando  $a_{ip} = 0$ , ou  $a_{pj} = 0$ . Assim a operação da eq.(4.2.3) não precisa ser executada para a linha  $i$  se  $a_{ip} = 0$ , e para a coluna  $j$  se  $a_{pj} = 0$ . Após a eliminação, o bloco pivô é compactado e reescrito no registro correspondente ao arquivo de acesso direto.

Este procedimento se repete para os demais blocos não-nulos da linha-bloco pivô que está sendo eliminada. No final, é eliminado um número de variáveis equivalente ao número de colunas da coluna-bloco pivô, ou ao número de linhas da linha-bloco pivô, ou ambos, se o bloco for quadrado.

Na eliminação da linha-bloco pivô, conforme a Fig.4.2.2 os blocos afetados das demais linhas-bloco, são modificados. Os multiplicadores das linhas-bloco eliminadas são armazenados em um arquivo de acesso sequencial, que no fim conterá os elementos da matriz triangularizada a serem utilizados na retro-substituição para se determinar as incógnitas {x} através de,

$$a_i = \frac{1}{a'_{pp}} (b'_i - \sum_{j=i+1}^n a'_{ij} x_j) \quad (4.2.4)$$

com  $i = n-1, n-2, \dots, 1$ .

LACHAT (1975), propõe separar em blocos distintos os coeficientes relativos a forças de superfície e deslocamentos dos pontos de interface, posicionando primeiro

os de forças de superfície. Assim, a matriz [A] expandida de um domínio constituído de duas sub-regiões fica da forma apresentada na Fig.4.2.4, onde existem dezesseis blocos não-nulos e quatro blocos nulos.

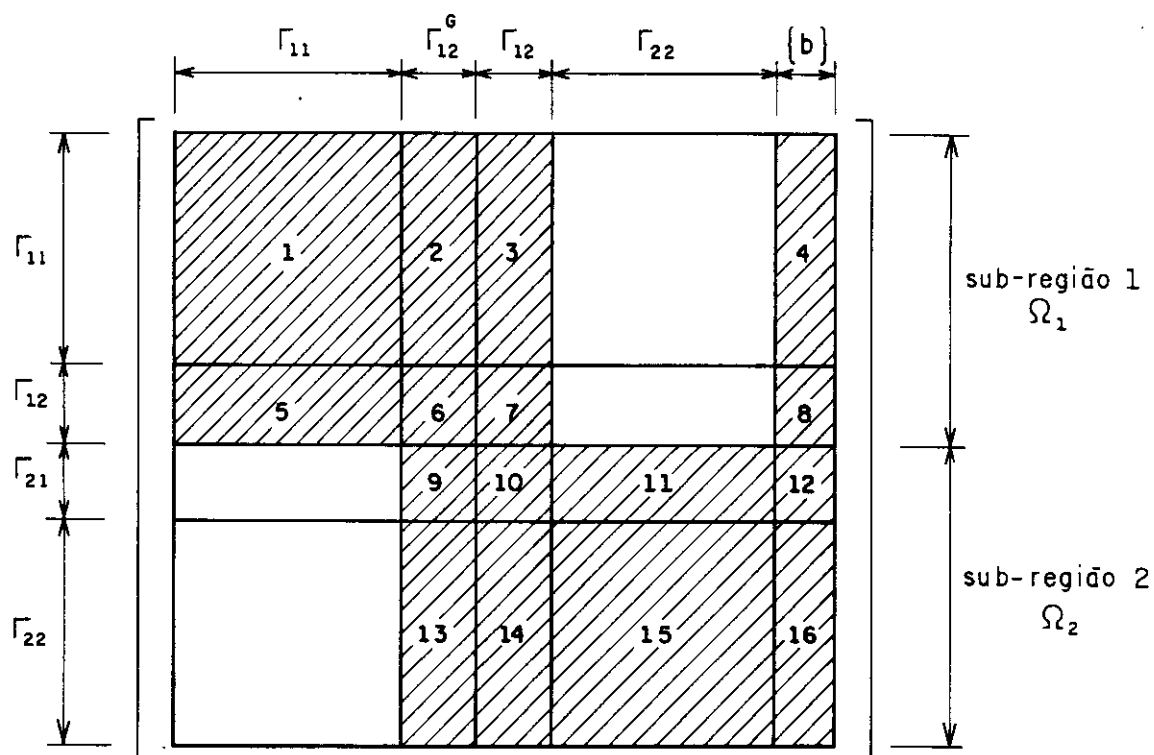


Fig.4.2.4 Esquema da matriz [A] expandida

Sendo  $i$  e  $j$  duas sub-regiões, os índices de  $\Gamma_{ij}$  se referem às coordenadas dos pontos não de interface quando  $i=j$  e, às coordenadas dos pontos de interface quando  $i \neq j$ .

## 5 COMBINAÇÃO ELEMENTOS DE CONTORNO E ELEMENTOS FINITOS

### 5.1 GENERALIDADES

Estuda-se a combinação dos métodos elementos de contorno e elementos finitos para usufruir efetivamente das vantagens de cada um, visto que, são de características diferentes e amplamente difundidos.

Escolher qual o método mais adequado a cada tipo de problema, pode não ser muito simples. Em alguns casos, onde as diferenças são mais acentuadas a escolha fica mais fácil.

O MEC tem se mostrado mais conveniente que o MEF nos problemas com grande concentração de tensões, domínio infinito ou semi-infinito. Entretanto, o MEF é mais indicado para problemas com domínio limitado, não-homogêneo, anisotrópico e, também, para o estudo da não-linearidade.

Para simular as não-linearidades física e geométrica, BUI (1978) utilizando propriedades já demonstradas por MIKHLIN (1962), resolveu o problema das derivadas dos termos integrais com singularidade no domínio de integração, analisando os termos integrais que surgem devido à integração das deformações iniciais, envolvidas no procedimento iterativo.

TELLES & BREBBIA (1974) utilizaram o método dos elementos de contorno com derivação singular em problemas elastoplásticos.

Com o processo de deformação inicial foram modelados os efeitos plásticos, TELLES & BREBBIA (1980a). Este processo

foi utilizado para o critério de von Mises admitindo-se plasticidade ideal, encruamento e amolecimento.

Os critérios de Tresca, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager foram analisados por TELLES & BREBBIA (1980b) com o processo das tensões iniciais.

MUKHERJEE (1982) apresentou um estudo sobre a aplicação do método dos elementos de contorno em problemas com deformações inelásticas dependentes do tempo, creep e visco-plasticidade.

Muitos trabalhos sobre a não-linearidade utilizando-se o método dos elementos de contorno têm sido apresentados, no entanto, ainda é um campo de pesquisa muito amplo para novas publicações.

Na geotecnia, com a combinação MEC-MEF é possível estudar problemas de abertura de valas, túneis, galerias, escoramentos diversos, estacas de fundações, etc..

As diferenças entre os diversos procedimentos de combinar os dois métodos estão concentradas no tratamento dado na montagem do sistema de equações. Duas alternativas básicas de combinação podem ser consideradas. Uma consiste em considerar o domínio de elementos de contorno como um elemento finito e a outra, considerar o domínio de elementos finitos como um elemento de contorno equivalente.

Neste trabalho, para combinar os dois métodos, a montagem do sistema de equações é feita para o domínio bidimensional, resolvido por elementos de contorno. O domínio pode ser homogêneo ou não-homogêneo, e a montagem do sistema de equações é feita com o procedimento apresentado no item 4.2.

Considera-se a influência da estrutura reticulada, que é tratada por elementos finitos, através das forças de superfície dos pontos de interface entre as duas sub-estruturas, alterando-se os elementos dos blocos correspondentes no sistema de equações montado conforme o algoritmo proposto por CROTTY(1982).

## 5.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS - ESTRUTURAS RETICULADAS

Resolvendo-se uma estrutura reticulada pelo método dos elementos finitos, obtém-se a seguinte equação,

$$[R]\{u\} = \{f\} \quad (5.2.1)$$

onde,

$[R]$  é a matriz de rigidez da estrutura,  $\{u\}$  é o vetor dos deslocamentos nodais e  $\{f\}$  é o vetor das forças nodais.

### 5.2.1 Matriz de rigidez dos elementos das estruturas reticuladas

Seja um elemento de barra com módulo de deformação longitudinal do material  $E$ , área da seção transversal  $A$ , comprimento  $L$  e momento de inércia  $I$ , com as coordenadas locais e sistemas de referência indicados na Fig.5.2.1.

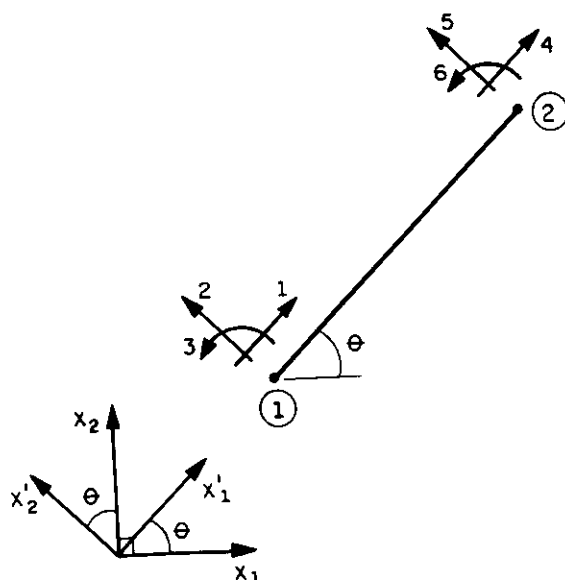


Fig.5.2.1 Coordenadas locais e sistemas de referência



Admite-se variação linear para o deslocamento axial  $u$  e uma função do terceiro grau para o deslocamento  $v$  transversal ao eixo da barra.

Os valores nodais são estabelecidos em função das translações  $u$  e  $v$ , e das rotações  $\theta$ . No sistema local de referência  $x'_1$  e  $x'_2$ , os valores nodais do ponto 1 são  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $\theta_1$  e do ponto 2 são  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $\theta_2$ .

Assim, a matriz de rigidez do elemento de barra é dada da seguinte forma,

$$[R'_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (5.2.2)$$

Para se obter a matriz de rigidez no sistema global de referência  $x_1$  e  $x_2$ , é feita uma rotação de eixos resultando em uma matriz simétrica onde os elementos são determinados por,

$$r_{11} = \frac{EA}{L} \cos^2 \theta + \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \theta = -r_{14} = r_{44}$$

$$r_{12} = \left[ \frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right] \cos \theta \sin \theta = -r_{15} = -r_{24} = r_{45}$$

$$r_{13} = -\frac{6EI}{L^2} \sin \theta = r_{16} = -r_{34} = -r_{46}$$

$$r_{22} = \frac{EA}{L} \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \theta = -r_{25} = r_{55}$$

$$r_{23} = \frac{6EA}{L^2} \cos \theta = r_{26} = -r_{35} = -r_{56}$$

$$r_{33} = \frac{4EI}{L} = r_{66}$$

$$r_{36} = \frac{2EI}{L}$$

### 5.2.2 Forças nodais

O vetor das forças nodais pode ser constituído de um carregamento aplicado diretamente nos nós  $\{f_n\}$  e, de um carregamento nodal equivalente  $\{f_e\}$ , devido as forças de superfície aplicadas ao longo do elemento.

$$\{f\} = \{f_n\} + \{f_e\} \quad (5.2.3)$$

O carregamento  $\{f_n\}$  é aplicado conforme o sistema global de referência  $x_1$  e  $x_2$ . No caso das forças de superfície, aplicadas ao longo do elemento são determinadas as forças nodais equivalentes  $\{f'_e\}$  no sistema local de referência  $x'_1$  e  $x'_2$ . Com uma rotação de eixos, obtém-se  $\{f_e\}$ , no sistema global de referência  $x_1$  e  $x_2$ .

a) Forças de superfície aplicadas na direção  $x'_1$

A energia potencial devido a este carregamento, Fig.5.2.2, é dada por,

$$\Omega = - \int_0^L p_x(x) u(x) dx \quad (5.2.4)$$

Em função das coordenadas adimensionais com  $\xi = \frac{x}{L}$  e  $dx = Ld\xi$ , a eq. (5.2.4) torna-se,

$$\Omega = - \int_0^1 p_x(\xi) u(\xi) L d\xi \quad (5.2.5)$$

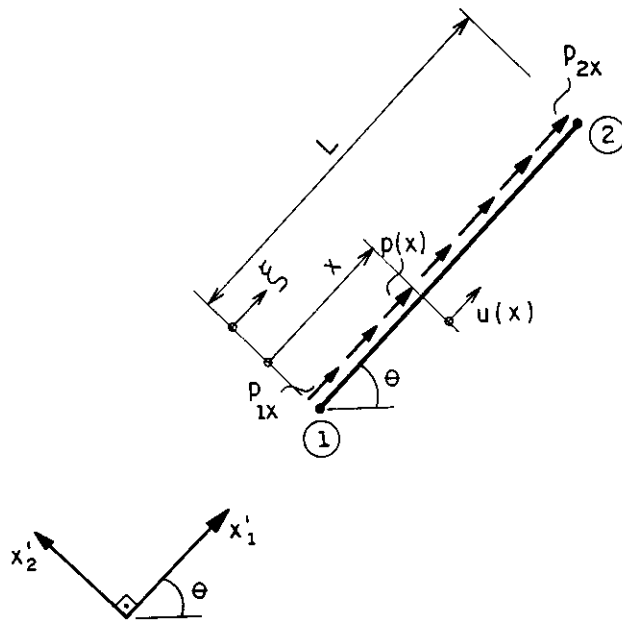


Fig.5.2.2 Forças de superfície na direção  $x'_1$

Admite-se variação linear para as funções aproximadoras dos deslocamentos  $u(\xi)$  e as forças de superfície  $p(\xi)$  obtendo-se,

$$\{f'_{ex}\} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & \frac{L}{6} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{2x} \end{Bmatrix} = [M_x] \{P_x\} \quad (5.2.6)$$

b) Forças de superfície aplicadas na direção  $x'_2$

A energia potencial devido a este carregamento, Fig.5.2.3, é expressa em coordenadas adimensionais por,

$$\Omega = - \int_0^1 p_y(\xi) v\{\xi\} L d\xi \quad (5.2.7)$$

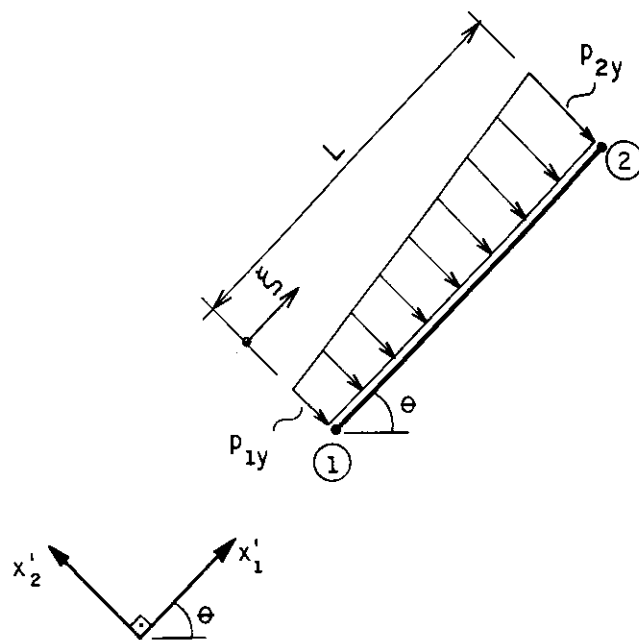


Fig.5.2.3 Forças de superfície na direção  $x'_2$

Com,

$$v(\xi) = [\phi_v(\xi)] \{V\} = \{V\}^t [\phi_v(\xi)]^t$$

$$p_Y(\xi) = [\phi_{pY}(\xi)] \{P_Y\} = \{P_Y\}^t [\phi_{pY}(\xi)]^t \quad (5.2.8)$$

tem-se,

$$\Omega = - \{V\}^t L \int_0^1 [\phi_v(\xi)]^t [\phi_{pY}(\xi)] d\xi \{P_Y\} \quad (5.2.9)$$

onde, conforme Fig. 5.2.4 e Fig. 5.2.3,

$$\{V\}^t = \{ v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \}$$

$$\{P_Y\} = \left\{ \begin{matrix} P_{1Y} \\ P_{2Y} \end{matrix} \right\} \quad (5.2.10)$$

O vetor das forças nodais equivalentes, é obtido através da seguinte integral,

$$\{F', e_Y\} = L \int_0^L [\phi^v(\xi)]^T [\phi^{p_Y}(\xi)] d\xi \{P_Y\} \quad (5.2.11)$$

Com uma função do terceiro grau para o deslocamento e variação linear para a função aproximadora das forças de superfície tem-se,

$$v(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3$$

$$[\phi^{p_Y}(\xi)] = \{ (1-\xi) \quad \xi \} \quad (5.2.12)$$

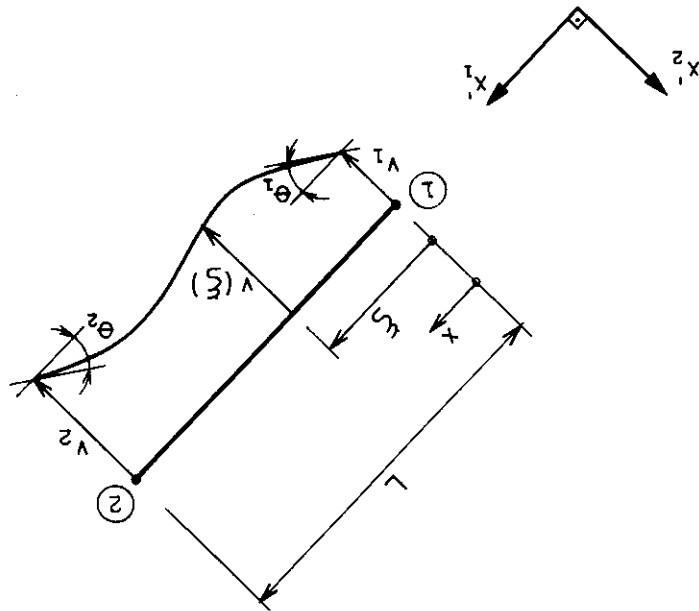


Fig. 5.2.4 Deslocamentos no elemento de barra

Com isto, chega-se a,

$$\{F', e_Y\} = \begin{bmatrix} 0,35L & \frac{30}{L} & 0,15L & -\frac{30}{L} \\ 1,5L & \frac{30}{L} & -1,5L & \frac{30}{L} \\ 0,15L & \frac{30}{L} & 0,35L & -\frac{30}{L} \\ -1,5L & \frac{30}{L} & -1,5L & \frac{30}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{1Y} \\ P_{2Y} \\ M_{1Y} \\ M_{2Y} \end{Bmatrix} = [M_Y] \{P_Y\} \quad (5.2.13)$$

c) Forças de superfície aplicadas nas direções  $x'_1$  e  $x'_2$

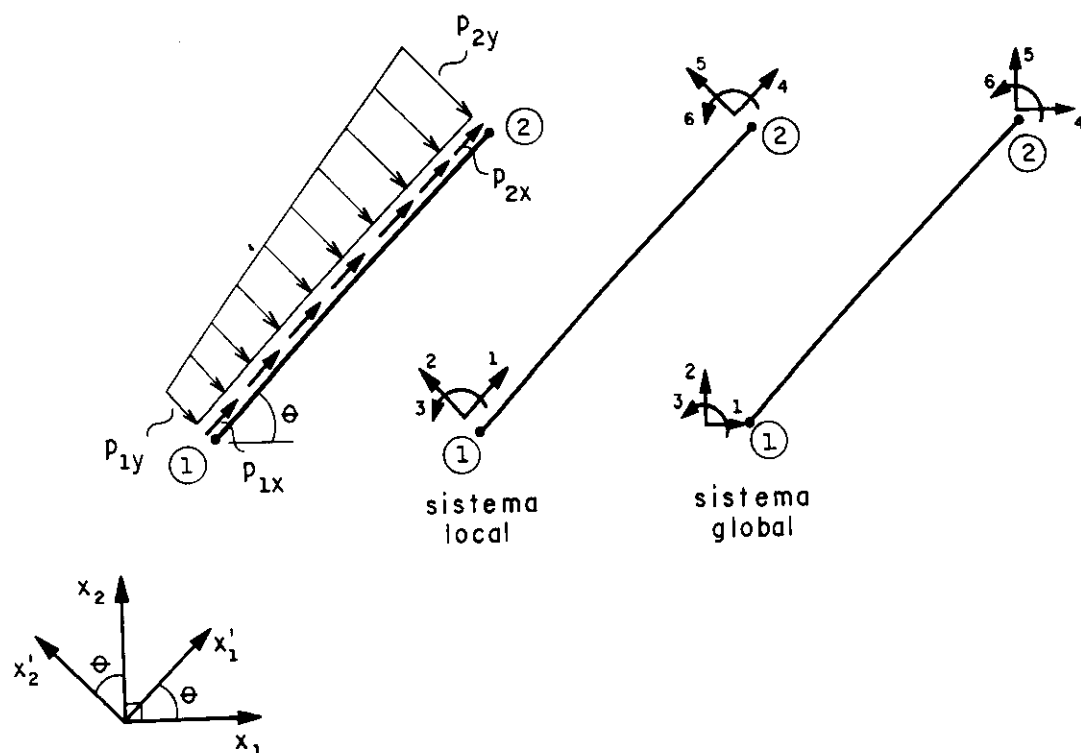


Fig. 5.2.5 Forças de superfície nas direções  $x'_1$  e  $x'_2$ , e sistemas de coordenadas

Matricialmente, para o carregamento nas duas direções, tem-se a seguinte representação,

$$\begin{Bmatrix} f'_{e1} \\ f'_{e2} \\ f'_{e3} \\ f'_{e4} \\ f'_{e5} \\ f'_{e6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & 0 & \frac{L}{6} & 0 \\ 0 & 0,35L & 0 & 0,15L \\ 0 & \frac{1,5L^2}{30} & 0 & \frac{L^3}{30} \\ \frac{L}{6} & 0 & \frac{L}{3} & 0 \\ 0 & 0,35L & 0 & 0,15L \\ 0 & \frac{-L^3}{30} & 0 & \frac{-1,5L^2}{30} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P'_{1x} \\ P'_{1y} \\ P'_{2x} \\ P'_{2y} \end{Bmatrix} \quad (5.2.14)$$

As forças nodais equivalentes no sistema global ( $x_1$ ,  $x_2$ ) são obtidas através de uma rotação de eixos,

$$\begin{Bmatrix} f_{e1} \\ f_{e2} \\ f_{e3} \\ f_{e4} \\ f_{e5} \\ f_{e6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} = [M] \{P\}$$

onde,

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_{43} = \frac{L}{3} \cos^2 \theta + 0,35L \sin^2 \theta \\ m_{12} &= m_{21} = m_{44} = m_{53} = \left(\frac{L}{3} - 0,35L\right) \cos \theta \sin \theta \\ m_{22} &= m_{54} = \frac{L}{3} \sin^2 \theta + 0,35L \cos^2 \theta \\ m_{13} &= m_{41} = \frac{L}{6} \cos^2 \theta + 0,15L \sin^2 \theta \\ m_{14} &= m_{23} = m_{42} = m_{51} = \left(\frac{L}{6} - 0,15L\right) \cos \theta \sin \theta \\ m_{24} &= \frac{L}{6} \sin^2 \theta + 0,15L \cos^2 \theta \\ m_{31} &= -m_{63} = \frac{-1,5L^2}{30} \sin \theta \\ m_{32} &= -m_{64} = \frac{1,5L^2}{30} \cos \theta \\ m_{33} &= \frac{-L^2}{30} \sin \theta \\ m_{34} &= \frac{L^2}{30} \cos \theta \\ m_{45} &= m_{63} = \frac{1,5L^2}{3} \sin \theta \\ m_{52} &= \frac{L}{6} \sin^2 \theta + 0,15L \cos^2 \theta \\ m_{64} &= \frac{-1,5L^2}{30} \cos \theta \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

### 5.3 Procedimentos para combinação MEC-MEF

Seja um problema genérico, Fig.5.3.1, constituído de dois domínios  $\Omega_c$  e  $\Omega_f$ .

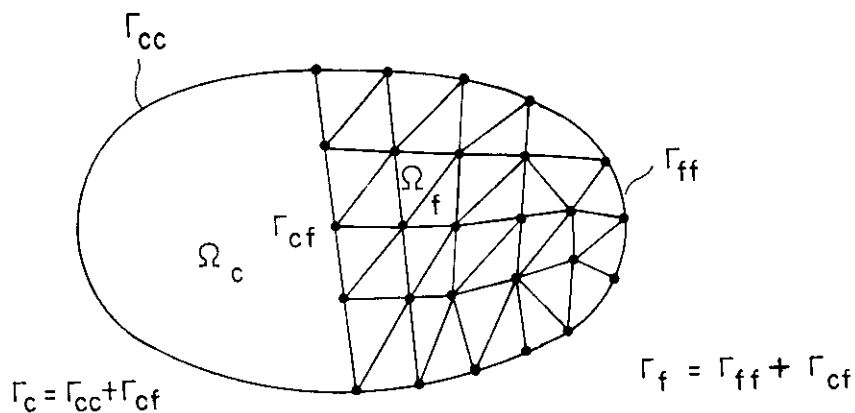


Fig.5.3.1 Domínios  $\Omega_c$  e  $\Omega_f$

O domínio  $\Omega_c$  é resolvido por elementos de contorno obtendo-se,

$$[H] \{U\} = [G] \{P\} \quad (5.3.1)$$

Enquanto que o domínio  $\Omega_f$ , sendo resolvido por elementos finitos chega-se a,

$$[R] \{u\} = \{f\} \quad (5.3.2)$$

A primeira possibilidade de acoplamento dos dois domínios é considerar  $\Omega_c$  como um elemento finito.

$$[G]^{-1} [H] \{U\} = \{P\} \quad (5.3.3)$$

Fazendo,

$$[F] = [\bar{M}] \{P\} \quad (5.3.4)$$



e multiplicando-se ambos os lados de (5.3.3) por  $\bar{M}$ , tem-se,

$$[\bar{M}] [G]^{-1} [H] \{U\} = [\bar{M}] \{P\} = \{F\}$$

ou,

$$[\bar{R}] \{U\} = \{F\} \quad (5.3.5)$$

$$\text{onde } [\bar{R}] = [M] [G]^{-1} [H] \quad (5.3.6)$$

$[\bar{R}]$  é a matriz de rigidez resultante da formulação dos elementos de contorno que é cheia e não-simétrica.

A eq.(5.3.5) é considerada juntamente com as equações do domínio  $\Omega_f$  na montagem da matriz de rigidez global.

A segunda possibilidade de acoplamento é considerar  $\Omega_f$  como um elemento de contorno equivalente.

A eq.(5.3.1) pode ser particionada da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} [H]_{cc} & [H]_{cf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_{cc}^c \\ \{U\}_{cf}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{cc} & [G]_{cf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_{cc}^c \\ \{P\}_{cf}^c \end{Bmatrix} \quad (5.3.7)$$

onde os índices  $cc$  se referem aos pontos não de interface de  $\Omega_c$  e  $cf$  aos pontos de interface.

Da mesma maneira, a eq.(5.3.2) pode ser transformada em,

$$\begin{bmatrix} [R]_{ff} & [R]_{cf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_{ff}^f \\ \{u\}_{cf}^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\}_{ff} \\ \{f\}_{cf} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [M]_{ff} & [M]_{cf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p\}_{ff}^f \\ \{p\}_{cf}^f \end{Bmatrix} \quad (5.3.8)$$

Impondo-se as condições de equilíbrio das forças de superfície e compatibilidade dos deslocamentos para os pontos de interface tem-se,

$$\{P\}_{cf}^c = -\{p\}_{cf}^f = \{P\}_i$$

$$\{U\}_{cf}^c = \{u\}_{cf}^f = \{U\}_i \quad (5.3.9)$$

Com as eqs. (5.3.7), (5.3.8) e (5.3.9) obtém-se,

$$\begin{bmatrix} [H]_{cc} & [H]_{cf} & -[G]_{cf} & [0] \\ [0] & [R]_{cf} & [M]_{cf} & [R]_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_{cc}^c \\ \{U\}_i \\ \{P\}_i \\ \{u\}_{ff}^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{cc} & [0] & [0] \\ [0] & [G]_{cf} & [0] \\ [0] & [0] & [M]_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_{cc}^c \\ \{\bar{P}\}_{cf}^c \\ \{p\}_{ff}^f \end{Bmatrix} \quad (5.3.1)$$

onde  $[G]_{cf}$  aparece no segundo membro para considerar eventuais valores prescritos  $\{\bar{P}\}_{cf}^c$ .

Definindo-se o carregamento e as condições de contorno em qualquer uma das duas possibilidades, monta-se o sistema de equações que pode ser resolvido de várias maneiras.

Neste trabalho, a estrutura reticulada é tratada por elementos finitos, e a sua influência é considerada no domínio bidimensional através dos pontos de interface.

Para um domínio bidimensional resolvido por elementos de contorno, obtém-se a eq. (3.4.6), reescrita a seguir,

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{\bar{F}\} + [E]\{\sigma\}^0 \quad (3.4.6)$$

O acoplamento da estrutura reticulada no domínio bidimensional, envolve apenas os deslocamentos e as forças de superfície dos pontos de interface entre as duas sub-estruturas. As forças de domínio e tensões iniciais produzem termos independentes que são considerados na montagem do sistema de equações. Portanto, para a combinação MEC-MEF utiliza-se parte da eq. (3.4.6), ou seja, a eq. (5.3.1) reescrita a seguir,

$$[H] \{U\} = [G] \{P\} \quad (5.3.1)$$

Para uma estrutura reticulada resolvida por elementos finitos obtém-se o sistema de equações dado pela eq. (5.2.1), reescrita a seguir,

$$[R] \{u\} = \{f\} \quad (5.2.1)$$

Com a finalidade de se efetuar o acoplamento das duas estruturas, é feito um rearranjo das equações de modo a se obter a seguinte partição,

$$\begin{bmatrix} [R]_{ee} & [R]_{ei} \\ [R]_{ie} & [R]_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_e \\ \{u\}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\}_e \\ \{f\}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [M]_{ei} \\ [M]_{ii} \end{bmatrix} \{p\}_i \quad (5.3.11)$$

O índice *e* corresponde às coordenadas dos pontos que não pertencem à interface, mais as coordenadas de rotação dos pontos de interface. O índice *i* corresponde às coordenadas de translação dos pontos que estão na interface.

Com as matrizes  $[M]_{ei}$  e  $[M]_{ii}$  são consideradas apenas as forças de superfície dos pontos de interface devido a interação entre as duas estruturas.

No vetor de forças nodais,  $\{f\}_e$  e  $\{f\}_i$  estão representados todos os carregamentos aplicados diretamente nos pontos nodais ou ao longo dos elementos.

Esta partição é feita de modo a se isolar as equações relativas às coordenadas de translação dos pontos de interface, através das quais é feito o acoplamento.

A matriz de transformação das forças de superfície em forças nodais, é determinada conforme o item 5.2.2, com as características dos elementos de interface.

A matriz  $[M]_{ei}$  contém inicialmente, valores não nulos apenas na parte referente às coordenadas de rotação dos pontos de interface.

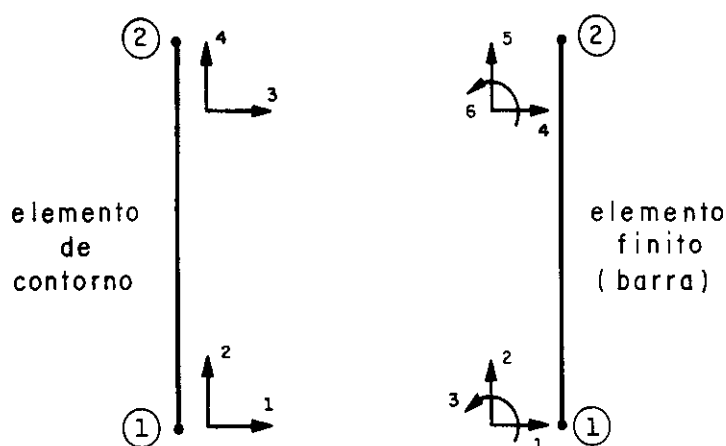


Fig.5.3.1 Coordenadas do elemento de contorno e elemento finito

Com operações elementares nas linhas e colunas da matriz  $[R]$ , do vetor  $\{f\}$ , e da matriz  $[M]$ , é possível modificar a eq. (5.3.11) para,

$$\begin{bmatrix} [I] & [R]_{ei}^* \\ [0] & [R]_{ii}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_e \\ \{u\}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\}_e^* \\ \{f\}_i^* \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [M]_{ei}^* \\ [M]_{ii}^* \end{bmatrix} \{p\}_i \quad (5.3.12)$$

Assim,

$$[I] \{u\}_e + [R]_{ei}^* \{u\}_i = \{f\}_e^* + [M]_{ei}^* \{p\}_i \quad (5.3.13)$$

e,

$$[R]_{ii}^* \{u\}_i = \{f\}_i^* + [M]_{ii}^* \{p\}_i \quad (5.3.14)$$

Da mesma forma, a eq.(5.3.14) também é modificada através de operações elementares, obtendo-se,

$$[I] \{p\}_i = [R]_{ii}^{**} \{u\}_i - \{f\}_i^{**} \quad (5.3.15)$$

Impondo-se o equilíbrio das forças de superfície e a compatibilidade dos deslocamentos, para os pontos de

interface, com as equações (5.3.1) e (5.3.15), condições de contorno e carregamento, é feita a montagem do sistema de equações para o domínio bidimensional com a influência da estrutura reticulada. Para considerar forças de domínio e tensões iniciais, basta adicionar estas influências nos termos independentes do sistema de equações.

Descreve-se a seguir o procedimento utilizado, neste trabalho, para acoplar uma estrutura reticulada no domínio bidimensional discretizado em  $N_e$  elementos de contorno e  $N$  pontos de colocação, com  $N_i$  pontos de interface MEC-MEF.

a) Estrutura reticulada tratada por elementos finitos

Escrevendo-se a eq. (5.3.15) na forma explícita,

$$\begin{array}{c}
 1 \dots 2s-1 \quad 2s \dots 2N_i \\
 \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 2s-1 \\ 2s \\ \vdots \\ 2N_i \end{array} \left[ \begin{array}{cc} 1 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots 1 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} p_1^f \\ \vdots \\ p_{2s-1}^f \\ p_{2s}^f \\ \vdots \\ p_{2N_i}^f \end{array} \right\} = \\
 \\
 \left[ \begin{array}{cccc} r_{1,1}^{**} & \dots & r_{1,2s-1}^{**} & r_{1,2s}^{**} \dots r_{1,2N_i}^{**} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ r_{2s-1,1}^{**} & \dots & r_{2s-1,2s-1}^{**} & r_{2s-1,2s}^{**} \dots r_{2s-1,2N_i}^{**} \\ r_{2s,1}^{**} & \dots & r_{2s,2s-1}^{**} & r_{2s,2s}^{**} \dots r_{2s,2N_i}^{**} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ r_{2N_i,1}^{**} & \dots & r_{2N_i,2s-1}^{**} & r_{2N_i,2s}^{**} \dots r_{2N_i,2N_i}^{**} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^f \\ \vdots \\ u_{2s-1}^f \\ u_{2s}^f \\ \vdots \\ u_{2N_i}^f \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} f_1^{**} \\ \vdots \\ f_{2s-1}^{**} \\ f_{2s}^{**} \\ \vdots \\ f_{2N_i}^{**} \end{array} \right\} \\
 \end{array} \tag{5.3.16}$$

Portanto,



$$\begin{bmatrix} H_{1,1} & \cdots & H_{1,i} & \cdots & H_{1,2j-1} & H_{1,2j} & \cdots & H_{1,k} & \cdots & H_{1,2N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{r,1} & \cdots & H_{r,i} & \cdots & H_{r,2j-1} & H_{r,2j} & \cdots & H_{r,k} & \cdots & H_{r,2N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{2N,1} & \cdots & H_{2N,i} & \cdots & H_{2N,2j-1} & H_{2N,2j} & \cdots & H_{2N,k} & \cdots & H_{2N,2N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^c \\ \vdots \\ U_i^c \\ \vdots \\ U_{2j-1}^c \\ U_{2j}^c \\ \vdots \\ U_k^c \\ \vdots \\ U_{2N}^c \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} G_{1,1} & \cdots & G_{1,i} & \cdots & G_{1,2j-1} & G_{1,2j} & \cdots & G_{1,k} & \cdots & G_{1,2N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{r,1} & \cdots & G_{r,i} & \cdots & G_{r,2j-1} & G_{r,2j} & \cdots & G_{r,k} & \cdots & G_{r,2N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{2N,1} & \cdots & G_{2N,i} & \cdots & G_{2N,2j-1} & G_{2N,2j} & \cdots & G_{2N,k} & \cdots & G_{2N,2N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^c \\ \vdots \\ P_i^c \\ \vdots \\ P_{2j-1}^c \\ P_{2j}^c \\ \vdots \\ P_k^c \\ \vdots \\ P_{2N}^c \end{Bmatrix}$$

(5.3.18)

Escrevendo-se a equação da linha  $r$  tem-se,

$$\begin{aligned} H_{r,1} U_1^c + \cdots + H_{r,i} U_i^c + \cdots + H_{r,2j-1} U_{2j-1}^c + H_{r,2j} U_{2j}^c + \cdots + H_{r,k} U_k^c + \\ + \cdots + H_{r,2N} U_{2N}^c &= G_{r,1} P_1^c + \cdots + G_{r,i} P_i^c + \cdots + G_{r,2j-1} P_{2j-1}^c + \\ + G_{r,2j} P_{2j}^c + \cdots + G_{r,k} P_k^c + \cdots + G_{r,2N} P_{2N}^c \end{aligned} \quad (5.3.19)$$





$$\begin{aligned}
P_{2j}^C &= -p_{2s}^f = -r_{2s,1}^{**} U_i^C - \dots - r_{2s,2s-1}^{**} U_{2j-1}^C - r_{2s,2s}^{**} U_{2j}^C + \\
&\quad + \dots - r_{2s,2Ni}^{**} U_k^C + f_{2s}^{**} \\
&\quad \vdots \\
&\quad \vdots \\
P_k^C &= -p_{2Ni}^f = -r_{2Ni,1}^{**} U_i^C - \dots - r_{2Ni,2s-1}^{**} U_{2j-1}^C - r_{2Ni,2s}^{**} U_{2j}^C + \\
&\quad + \dots - r_{2Ni,2Ni}^{**} U_k^C + f_{2Ni}^{**}
\end{aligned} \tag{5.3.22}$$

Substituindo-se a eq.(5.3.22) na eq.(5.3.19), obtém-se para a linha r,

$$\begin{aligned}
&H_{r,1} U_1^C + \dots + H_{r,i} U_i^C + \dots + H_{r,2j-1} U_{2j-1}^C + H_{r,2j} U_{2j}^C + \dots + H_{r,k} U_k^C + \\
&+ \dots + H_{r,2N} U_{2N}^C = G_{r,1} P_1^C + \dots + G_{r,i} (-r_{1,1}^{**} U_i^C - \dots - r_{1,2s-1}^{**} U_{2j-1}^C + \\
&-r_{1,2s}^{**} U_{2j}^C - \dots - r_{1,2Ni}^{**} U_k^C + f_1^{**}) + \dots + G_{r,2j-1} (-r_{2s-1,1}^{**} U_i^C - \dots + \\
&-r_{2s-1,2s-1}^{**} U_{2j-1}^C - r_{2s-1,2s}^{**} U_{2j}^C - \dots - r_{2s-1,2Ni}^{**} U_k^C + f_{2s-1}^{**}) + \\
&+ G_{r,2j} (-r_{2s,1}^{**} U_i^C - \dots - r_{2s,2s-1}^{**} U_{2j-1}^C - r_{2s,2s}^{**} U_{2j}^C + \dots + r_{2s,2Ni}^{**} U_k^C + \\
&+ f_{2s}^{**}) + \dots + G_{r,k} (-r_{2Ni,1}^{**} U_i^C - \dots - r_{2Ni,2s-1}^{**} U_{2j-1}^C - r_{2Ni,2s}^{**} U_{2j}^C + \\
&- \dots - r_{2Ni,2Ni}^{**} U_k^C + f_{2Ni}^{**}) + \dots + G_{r,2N} P_{2N}^C
\end{aligned} \tag{5.3.23}$$

Isolando-se as incógnitas de um mesmo lado, tem-se,

$$\begin{aligned}
 & H_{r,1} U_1^C + \dots + (H_{r,i} + G_{r,i} r_{1,1}^* + \dots + G_{r,2j-1} r_{2s-1,1}^{**} + G_{r,2j} r_{2s,1}^{**} \\
 & + \dots + G_{r,k} r_{2Ni,1}^{**}) U_i^C + \dots + (H_{r,2j-1} + G_{r,i} r_{1,2s-1}^{**} + \dots + \\
 & + G_{r,2j-1} r_{2s-1,2s-1}^{**} + G_{r,2j} r_{2s,2s-1}^{**} + \dots + G_{r,k} r_{2Ni,2s-1}^{**}) U_{2j-1}^C + \\
 & + (H_{r,2j} + G_{r,i} r_{1,2s}^{**} + \dots + G_{r,2j-1} r_{2s-1,2s}^{**} + G_{r,2j} r_{2s,2s}^{**} + \dots + \\
 & + G_{r,k} r_{2Ni,2s}^{**}) U_{2j}^C + \dots + (H_{r,k} + G_{r,i} r_{1,2Ni}^{**} + \dots + G_{r,2j-1} r_{2s-1,2Ni}^{**} + \\
 & + G_{r,2j} r_{2s,2Ni}^{**} + \dots + G_{r,k} r_{2Ni,2Ni}^{**}) U_k^C + \dots + H_{r,2N} U_{2N}^C = G_{r,1} P_1^C + \dots + \\
 & + G_{r,i} (f_1^{**} + \bar{P}_i^c) + \dots + G_{r,2j-1} (f_{2s-1}^{**} + \bar{P}_{2j-1}^c) + G_{r,2j} (f_{2s}^{**} + \bar{P}_{2j}^c) + \\
 & + \dots + G_{r,k} (f_{2Ni}^{**} + \bar{P}_k^c) + \dots + G_{r,2N} P_N
 \end{aligned} \tag{5.3.24}$$

onde  $\bar{P}_i^c$ ,  $\bar{P}_{2j-1}^c$ ,  $\bar{P}_{2j}^c$  e  $\bar{P}_k^c$  são eventuais valores prescritos nos pontos de interface MEC-MEF.

Cada linha do sistema de equações é modificada com a influência da estrutura reticulada. Resolve-se o sistema de equações para determinar as incógnitas, deslocamentos e forças de superfície, do domínio bidimensional e, conseqüentemente os valores dos deslocamentos dos pontos de interface MEC-MEF. Utiliza-se a eq.(5.3.22) para calcular as forças de superfície dos referidos pontos, e a eq.(5.3.13) para os deslocamentos dos demais pontos da estrutura reticulada. Com estes valores conhecidos determinam-se os esforços nas extremidades das barras.

Matricialmente, as operações da combinação MEC-MEF são apresentadas para os três casos indicados a seguir.

Caso a) Acoplamento da estrutura reticulada em um domínio constituído de apenas uma sub-região

Para a estrutura reticulada escreve-se a eq.(5.3.15) substituindo-se o índice  $i$  por  $cf$ .

$$[I]\{p\}_{cf}^f = [R]_{cf}^{**} \{u\}_{cf}^f - \{f\}_{cf}^{**} \quad (5.3.25)$$

onde  $cf$  se refere aos pontos de interface MEC-MEF.

O domínio bidimensional resolvido pelo MEC pode ser particionado conforme a eq. (5.3.7) reescrita a seguir,

$$\begin{bmatrix} [H]_{cc} & [H]_{cf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_{cc}^c \\ \{U\}_{cf}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{cc} & [G]_{cf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_{cc}^c \\ \{P\}_{cf}^c \end{Bmatrix} \quad (5.3.7)$$

onde o índice  $cc$  se refere aos pontos do contorno que não são de interface e  $cf$  aos pontos de interface MEC-MEF.

Pelo equilíbrio das forças de superfície e compatibilidade dos deslocamentos tem-se,

$$\begin{aligned} \{P\}_{cf}^c &= - \{p\}_{cf}^f \\ \{U\}_{cf}^c &= \{u\}_{cf}^f \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

Substituindo-se a eq.(5.3.25) na eq.(5.3.7) e com o equilíbrio das forças de superfície de (5.3.2), obtém-se,

$$\begin{bmatrix} [H]_{cc} & [H]_{cf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_{cc}^c \\ \{U\}_{cf}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{cc} & [G]_{cf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_{cc}^c \\ -([R]_{cf}^{**} \{U\}_{cf}^f - \{f\}_{cf}^{**}) \end{Bmatrix} \quad (5.3.27)$$

Utilizando-se as equações de compatibilidade de deslocamentos de (5.3.26) na eq.(5.3.28) e, colocando-se as incógnitas de um mesmo lado chega-se a,

$$\begin{bmatrix} [H]_{cc} & [H]_{cf} \\ [G]_{cf} & [R]_{cf}^{**} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_{cc}^c \\ \{U\}_{cf}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{cc} & [G]_{cf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_{cc}^c \\ \{f\}_{cf}^{**} + \{\bar{P}\}_{cf}^c \end{Bmatrix} \quad (5.3.28)$$

onde  $\{\bar{P}\}_{cf}^c$  são eventuais valores prescritos nos pontos de interface MEC-MEF.

Caso b) Estrutura reticulada acoplada a uma sub-região  $i$ , e outra na sub-região  $j$

Escrevendo-se a eq.(5.3.25) para os pontos da estrutura reticulada que são de interface com as sub-regiões  $i$  e  $j$ , respectivamente,

$${}^i [I] {}^i \{p\}_{cf}^f = {}^i [R]_{cf}^{**} {}^i \{U\}_{cf}^f - {}^i \{f\}_{cf}^{**} \quad (5.3.29)$$

$${}^j [I] {}^j \{p\}_{cf}^f = {}^j [R]_{cf}^{**} {}^j \{U\}_{cf}^f - {}^j \{f\}_{cf}^{**} \quad (5.3.30)$$

Escrevendo-se as equações (5.3.29) e (5.3.30) em uma mesma representação matricial, tem-se,

$$\begin{bmatrix} {}^i [I] & [0] \\ [0] & {}^j [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^i \{p\}_{cf}^f \\ {}^j \{p\}_{cf}^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^i [R]_{cf}^{**} & [0] \\ [0] & {}^j [R]_{cf}^{**} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^i \{u\}_{cf}^f \\ {}^j \{u\}_{cf}^f \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^i \{f\}_{cf}^{**} \\ {}^j \{f\}_{cf}^{**} \end{Bmatrix} \quad (5.3.31)$$

Para o domínio bidimensional constituído de duas sub-regiões, conforme ítem 4.1 pode-se escrever,

$$\begin{bmatrix} [H]^i & [H]^{ij} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [H]^{ji} & [H]^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}^i \\ \{U\}^{ij} \\ \{U\}^{ji} \\ \{U\}^j \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} [G]^i & [G]^{ij} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [G]^{ji} & [G]^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}^i \\ \{P\}^{ij} \\ \{P\}^{ji} \\ \{P\}^j \end{Bmatrix}$$

(5.3.32)

Considerando-se os pontos de interface MEC-MEF a eq.(5.3.32) torna-se,

$$\begin{bmatrix} [H]_{cc}^i & [H]_{cf}^i & [H]^{ij} & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [H]^{ji} & [H]_{cc}^j & [H]_{cf}^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i\{U\}_{cc}^c \\ i\{U\}_{cf}^c \\ i\{U\}_{ij}^c \\ j\{U\}_{ji}^c \\ j\{U\}_{cc}^c \\ j\{U\}_{cf}^c \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} [G]_{cc}^i & [G]_{cf}^i & [G]^{ij} & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [G]^{ji} & [G]_{cc}^j & [G]_{cf}^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i\{P\}_{cc}^c \\ i\{P\}_{cf}^c \\ i\{P\}_{ij}^c \\ j\{P\}_{ji}^c \\ j\{P\}_{cc}^c \\ j\{P\}_{cf}^c \end{Bmatrix}$$

(5.3.33)

Impondo-se o equilíbrio das forças de superfície e compatibilidade dos deslocamentos, tem-se,

Pontos de interface entre as sub-regiões  $i$  e  $j$

$$\begin{aligned} {}^i\{P\}_{ij}^c &= -{}^j\{P\}_{ji}^c = \{P\}_{ij} \\ {}^i\{U\}_{ij}^c &= {}^j\{U\}_{ji}^c = \{U\}_{ij} \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

Pontos de interface das sub-regiões  $i$  e  $j$  com a estrutura reticulada

$$\begin{aligned} {}^i\{P\}_{cf}^c &= -{}^i\{p\}_{cf}^f & {}^j\{P\}_{cf}^c &= -{}^j\{p\}_{cf}^f \\ {}^i\{U\}_{cf}^c &= {}^i\{u\}_{cf}^f & {}^j\{U\}_{cf}^c &= {}^j\{u\}_{cf}^f \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

As equações de (5.3.29) e (5.3.30) são substituídas na eq.(5.3.33), considerando-se as equações de (5.3.34) e (5.3.35).

É feito um rearranjo no sistema de equações de tal modo que as incógnitas permaneçam de um mesmo lado. Chamando-se as influências da estrutura reticulada nas sub-regiões  $i$  e  $j$  de,

$$\begin{aligned} {}^i[a] &= [G]_{cf}^i {}^i[R]_{cf}^{**} \\ {}^j[a] &= [G]_{cf}^j {}^j[R]_{cf}^{**} \end{aligned} \quad (5.3.36)$$

é possível escrever a representação matricial indicada a seguir,

$$\begin{bmatrix} [H]_{cc}^i & [H]_{cf}^i + [a] & [-G]^{ij} & [H]^{ij} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [+G]^{ji} & [H]^{ji} & [H]_{cc}^j & [H]_{cc}^j + [a] \end{bmatrix}.$$

$$\begin{Bmatrix} i\{U\}_{cc}^c \\ i\{U\}_{cf}^c \\ \{P\}_{ij} \\ \{U\}_{ij} \\ j\{U\}_{cc}^c \\ j\{U\}_{cf}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{cc}^i & [G]_{cf}^i & [G]^{ij} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [G]^{ji} & [G]_{cc}^j & [G]_{cf}^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i\{P\}_{cc}^c \\ i\{f\}_{cf}^{**} + i\{\bar{P}\}_{cf}^c \\ i\{\bar{P}\}_{ij}^c \\ j\{\bar{P}\}_{ji}^c \\ j\{P\}_{cc}^c \\ j\{f\}_{cf}^{**} + j\{\bar{P}\}_{cf}^c \end{Bmatrix}$$

(5.3.37)

onde,

$i\{\bar{P}\}_{ij}^c$  e  $j\{\bar{P}\}_{ji}^c$  são eventuais valores prescritos nos pontos de interface das sub-regiões  $i$  e  $j$ .

$i\{\bar{P}\}_{cf}^c$  e  $j\{\bar{P}\}_{cf}^c$  são eventuais valores prescritos nos pontos de interface da estrutura reticulada com as sub-regiões  $i$  e  $j$ , respectivamente.

Caso c) Acoplamento de uma estrutura reticulada no meio contínuo

O domínio bidimensional com elementos internos e resolvido pelo MEC fornece,

$$\begin{bmatrix} [H] & [HCI] \\ [HIC] & [HII] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}^c \\ \{U\}_{cf}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G] & [GCI] \\ [GIC] & [GII] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}^c \\ \{P\}_{cf}^c \end{Bmatrix}$$

(5.3.38)

onde  $[H]$  e  $[G]$  correspondem a pontos  $S$  e  $Q$  no contorno,  $[HCI]$  e  $[GCI]$  a pontos  $S$  no contorno e  $Q$  no meio contínuo,  $[HIC]$  e  $[GIC]$  a pontos  $S$  no meio contínuo e  $Q$  no contorno,  $[HII]$  e  $[GII]$  a pontos  $S$  e  $Q$  no meio contínuo.

Substituindo-se a eq.(5.3.25) na eq.(5.3.37) e com as condições de (5.3.26) chega-se à seguinte representação matricial,

$$\begin{bmatrix} [H] & [HCI] + [GCI] [R]_{cf}^{**} \\ [HIC] & [HII] + [GII] [R]_{cf}^{**} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}^c \\ \{U\}_{cf}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G] & [GCI] \\ [GIC] & [GII] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}^c \\ \{f\}_{cf}^{**} + \{\bar{P}\}_{cf}^c \end{Bmatrix} \quad (5.3.39)$$

onde  $\{\bar{P}\}_{cf}^c$  são eventuais valores prescritos nos pontos de interface MEC-MEF.

Após considerar a influência da estrutura reticulada, como mostrado nas equações (5.3.28), (5.3.37) e (5.3.39), retorna-se ao item 4.2 para a montagem e resolução do sistema de equações.

No caso de uma mesma estrutura reticulada acoplada em pontos do contorno de duas sub-regiões diferentes, na eq.(5.3.37) surgem elementos não-nulos em blocos correspondentes a pontos de interface MEC-MEF e inicialmente nulos. Isto ocorre porque ao se escrever as equações para os pontos da sub-região  $i$ , a influência da sub-região  $j$  na  $i$  é considerada através dos pontos de interface entre a estrutura reticulada e sub-região  $j$  e, vice-versa.

Para uma estrutura reticulada no interior de uma mesma sub-região, a eq.(5.3.39) não é modificada. No entanto, quando uma mesma estrutura reticulada está no interior de duas ou mais sub-regiões diferentes, a situação fica semelhante ao caso da eq.(5.3.37) analisado anteriormente.

A estrutura reticulada sendo parcialmente colocada no interior de uma sub-região, a eq.(5.3.39) também não se modifica, pois a influência dos pontos não de interface MEC-MEF é considerada nos pontos de interface como mostrado na eq.(5.3.15).



## 6 PLASTICIDADE DO MATERIAL

### 6.1 GENERALIDADES

O comportamento elástico do material de um corpo deformável fica caracterizado, quando ocorrem apenas deformações elásticas, isto é, deformações que desaparecem ao serem retiradas as solicitações que as causaram. Já, o comportamento elastoplástico do material fica caracterizado quando surgem deformações plásticas, isto é, deformações que permanecem quando se descarrega o corpo.

Inicialmente, são apresentados os conceitos básicos da teoria da plasticidade necessários para a modelagem do comportamento não-linear do material, onde são considerados os critérios de von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager. Em seguida, utilizando-se o método dos elementos de contorno, apresenta-se um algoritmo para a solução plástica do problema baseado no processo das tensões iniciais proposto por ZIENKIEWICZ et al. (1969), que foi, inicialmente, formulado através do método dos elementos finitos.

### 6.2 COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO SIMPLIFICADO EM PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS

O elemento de barra da Fig.6.2.1, com área  $A$  de seção transversal e comprimento  $L$ , é submetido a uma força axial

centrada  $F$  de tração ou compressão.

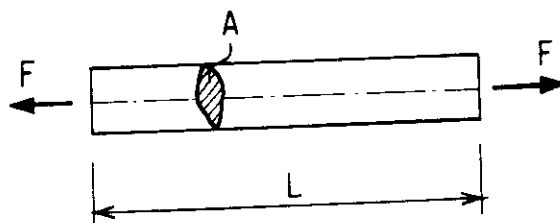
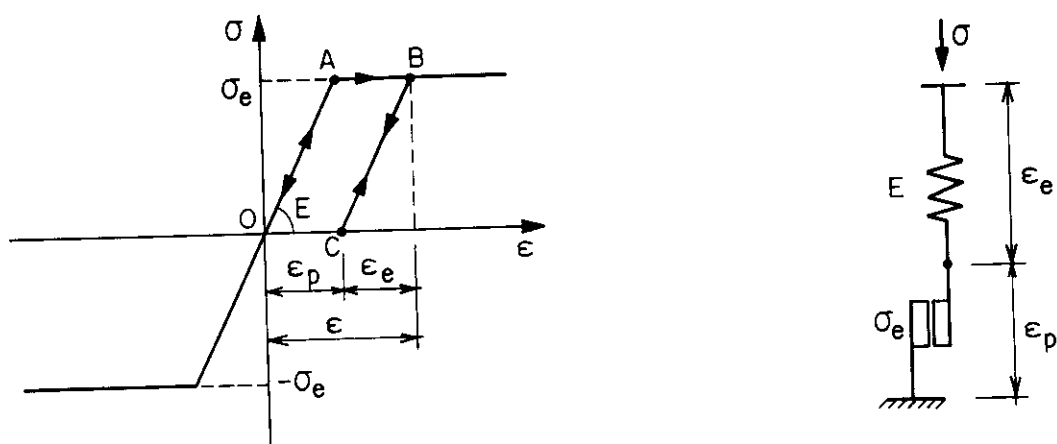


Fig.6.2.1 Elemento de barra

Com o ensaio de tração simples ou compressão simples, traça-se o diagrama tensão x deformação da Fig.6.2.2, que caracteriza o comportamento elastoplástico perfeito do material.



a) Diagrama tensão x deformação

b) Modelo reológico

Fig.6.2.2 Comportamento elastoplástico perfeito do material

Nos materiais dúcteis, a tensão normal de início de plastificação na tração e na compressão, são aproximadamente iguais e simbolizadas por  $\sigma_e$ .

Observando-se a Fig.6.2.2, enquanto o nível de tensão é inferior a  $\sigma_e$ , não surgem deformações permanentes, e o

material apresenta comportamento elástico linear. O processo de carga e descarga ocorre segundo a reta OA.

O nível de tensão permanecendo igual a  $\sigma_e$  por um determinado tempo, na descarga a trajetória percorrida é a do trecho BC, que é uma reta aproximadamente paralela à reta OA. Nesta situação a deformação total  $\epsilon$  é constituída de duas componentes,

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (6.2.1)$$

onde  $\epsilon_e$  é a deformação elástica que se recupera na descarga, e  $\epsilon_p$  é a deformação plástica que não é recuperada.

A partir desta situação, solicitando-se a barra novamente, é percorrido o trecho CB, e a deformação plástica  $\epsilon_p$  volta a variar quando  $\sigma = \sigma_e$ .

A região elástica é definida matematicamente, por uma função do tipo,

$$F(\sigma) = \sigma - \sigma_e \leq 0 \quad (6.2.2)$$

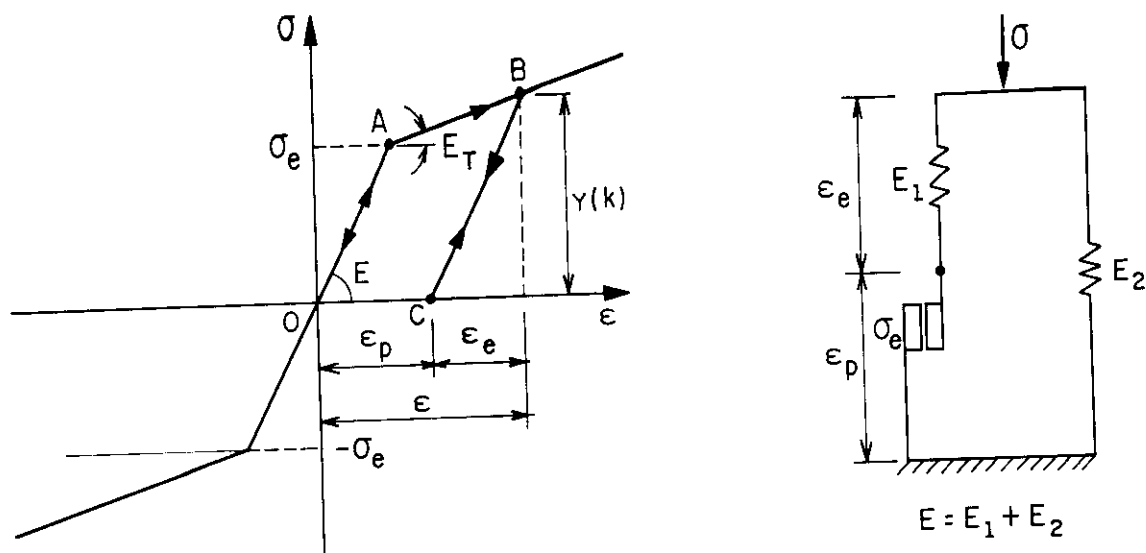
com  $\sigma \geq 0$ .

Para um determinado nível de tensão é preciso conhecer-se a história do carregamento para se determinar o correspondente estado de deformações.

É possível conhecer a história do carregamento através da deformação plástica acumulada ou da energia dissipada durante a realização de deformações irreversíveis.

Considera-se agora, um material de comportamento elastoplástico com endurecimento linear, Fig. 6.2.3.

Entende-se por endurecimento, a capacidade do material em permitir acréscimos de tensão, com acréscimos de deformação de mesmo sinal, para além do regime elástico inicial.



a) Diagrama tensão x deformação      b) Modelo reológico.  
 Fig.6.2.3 Comportamento elastoplástico com endurecimento linear

A tensão normal de início de plastificação  $\sigma_e$ , não representa mais o máximo nível de tensão possível. Quando se ultrapassa o valor de  $\sigma_e$ , em um processo de descarga fica caracterizada não só a deformação plástica mas, também, um novo intervalo que define a região elástica atual.

Assim, a região elástica é uma função do estado de tensão e da deformação plástica acumulada. Se, para um determinado nível de tensão é atingido o ponto B indicado na Fig. 6.2.3.a), um descarregamento conduz ao ponto C, e para um novo carregamento o material começa a plastificar quando o nível de tensão é igual a  $Y(k)$ . Para calcular o novo valor da deformação plástica, é preciso considerarem-se as deformações anteriores. A região elástica pode ser definida matematicamente pela função,

$$F(\sigma, k) = |\sigma| - Y(k) \leq 0 \quad (6.2.3)$$

onde  $k$  representa o parâmetro de endurecimento.

Com o conceito de trabalho de endurecimento, tem-se que a tensão normal de início de plastificação  $Y(k)$  é função do parâmetro de endurecimento  $k$ , que está associado com o trabalho plástico total realizado por unidade de volume.

Assim,

$$k = \int \sigma d\epsilon_p \quad (6.2.4)$$

ou

$$Y(k) = Y\left(\int \sigma d\epsilon_p\right) \quad (6.2.5)$$

Admite-se variação linear para o endurecimento do material na relação tensão x deformação, Fig. 6.2.3,

$$Y(k) = \sigma_e + H' \epsilon_p \quad (6.2.6)$$

onde,

$$H' = \frac{E_T}{(1 - E_T/E)} \quad (6.2.7)$$

### 6.3 COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO EM PROBLEMAS DO MEIO CONTÍNUO.

Nos estados múltiplos de tensão, a região elástica inicial no espaço das tensões é definida através de uma superfície, Fig. 6.3.1, que separa os estados de tensão onde ocorrem apenas deformações elásticas daqueles que geram deformações plásticas. O estado de tensão em um ponto qualquer do corpo deformável, define um ponto no espaço das tensões.

A superfície inicial de plastificação é representada pela função,

$$F(\sigma, k) = 0 \quad (6.3.1)$$

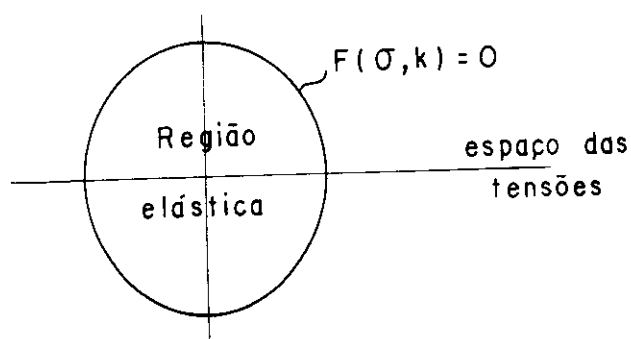
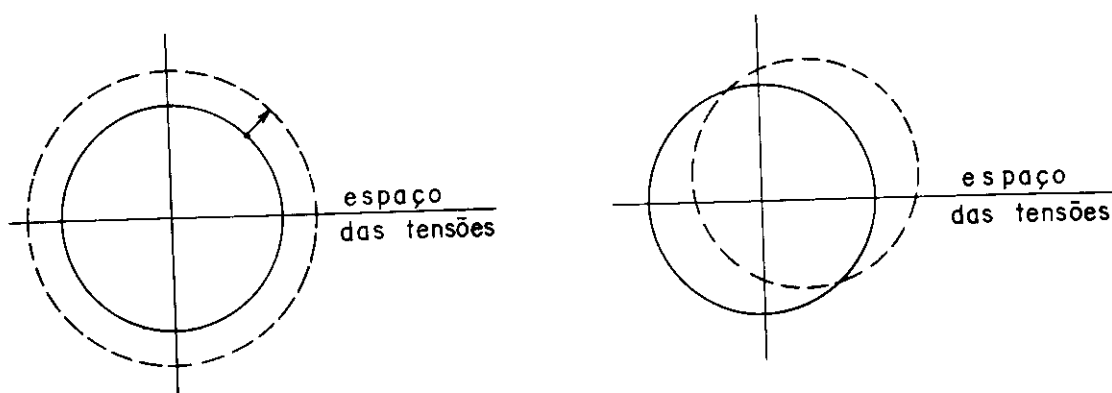


Fig.6.3.1 Superfície inicial de plastificação

No caso unidimensional, em um material que apresenta comportamento elastoplástico com endurecimento, a tensão normal de início de plastificação começa com o valor  $\sigma_e$ , e varia com o valor  $Y(k)$  conforme o nível de tensão, estabelecendo novos limites para a região elástica.

No caso de estados múltiplos de tensão, a superfície de plastificação também se modifica conforme o nível de tensão, alterando a função  $F(\sigma, k)$  e a região elástica.

Existem dois modelos básicos para representar a evolução da superfície de plastificação.



a) Modelo de endurecimento isótropo      b) Modelo cinemático

Fig.6.3.2 Superfícies de plastificação

No modelo de endurecimento isótopo a superfície de plastificação mantém a forma inicial sem translação, o que fisicamente corresponde conservar as características iniciais de isotropia do material. Já no modelo cinemático a superfície de plastificação se expande uniformemente sem distorção nem translação, à medida que o fluxo plástico ocorre.

Quando em um processo de carregamento ocorrer um incremento do estado de tensão no ponto, que conduza a um valor positivo de  $F(\sigma, k)$  tem-se uma situação inacessível e aparece a deformação plástica. No descarregamento, a função  $F(\sigma, k)$  tem valor negativo que corresponde a um ponto dentro da região elástica. O valor nulo de  $F(\sigma, k)$  representa um carregamento neutro.

Ao se analisar um material que apresenta comportamento elastoplástico é preciso definir uma relação tensão x deformação para a região elástica, uma superfície de plastificação e uma relação tensão x deformação para o cálculo das deformações plásticas.

a) Relação tensão x deformação para a região elástica

As componentes do tensor das tensões para um ponto  $\mathbf{s}$  qualquer, são obtidas através da eq.(2.2.6), reescrita a seguir,

$$\sigma_{ij}(\mathbf{s}) = C_{ijkl} \left[ \epsilon_{kl}(\mathbf{s}) - \epsilon_{kl}^0(\mathbf{s}) \right] \quad (2.2.6)$$

Na região elástica, quando não existem deformações iniciais, as componentes do tensor das tensões são dadas por,

$$\sigma_{ij}(\mathbf{s}) = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e(\mathbf{s}) \quad (6.3.2)$$

onde  $\epsilon_{kl}^e(\mathbf{s})$  é a componente elástica da deformação total.

## b) Superfícies de plastificação

São definidas através da função de plastificação,

$$F(\sigma, k) = 0 \quad (6.3.3)$$

ou

$$f(\sigma) - Y(k) = 0 \quad (6.3.4)$$

onde,

$f(\sigma)$  é função apenas das tensões, e  $Y(k)$  é função apenas do parâmetro de endurecimento  $k$ .

Fisicamente, a função de plastificação é independente do sistema de coordenadas. Assim, é conveniente escrever as variáveis da função, em termos dos seguintes invariantes,

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{kk}(\mathbf{s}) \\ J_2 &= \frac{1}{2} S_{ij}(\mathbf{s}) S_{ij}(\mathbf{s}) \\ J_3 &= \frac{1}{3} S_{ij}(\mathbf{s}) S_{jk}(\mathbf{s}) S_{ki}(\mathbf{s}) \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

onde,

$S_{ij}(\mathbf{s})$  são as componentes anti-esféricas obtidas através da seguinte expressão,

$$S_{ij}(\mathbf{s}) = \sigma_{ij}(\mathbf{s}) - \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}(\mathbf{s})}{3} \quad (6.3.6)$$

Uma representação alternativa para estes invariantes é dada pela forma angular do terceiro invariante, originalmente introduzido por LODE (1926) e hoje, denominado de  $\theta_0$ .

$$\theta_0 = \frac{1}{3} \text{sen}^{-1} \left( - \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \quad (6.3.7)$$

que deve respeitar o intervalo,



$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{6} \quad (6.3.8)$$

Com os três invariantes,  $I_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  ou  $\theta_0$ , é possível definir várias superfícies de plastificação. Para os diversos materiais, vários critérios de resistência foram estabelecidos ao longo do tempo.

Neste trabalho, são considerados os critérios de von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager. Os dois primeiros critérios apresentam resultados mais satisfatórios para materiais dúcteis, enquanto que os demais são mais indicados para materiais frágeis.

No estudo da plasticidade em solos e rochas, geralmente são utilizadas as superfícies de plastificação de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager.

A superfície de Mohr-Coulomb se baseia na teoria do atrito interno de Coulomb. Conforme foi admitido por Mohr, a plastificação do material em um determinado ponto, ocorre quando a tensão de cisalhamento ultrapassa o valor limite dado por,

$$\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \phi \quad (6.3.9)$$

onde  $c$  é a coesão,  $\sigma$  a tensão normal no plano de ruptura,  $\phi$  o ângulo de atrito interno e  $\tau$  a tensão de cisalhamento.

Impondo-se o limite das tensões de cisalhamento, conforme a Fig.6.3.3, é possível escrever a função de plastificação em termos dos invariantes  $I_1$ ,  $J_2$ ,  $\theta_0$  e dos parâmetros  $c$  e  $\phi$ .

$$F(\sigma, c) = \frac{I_1}{3} \operatorname{sen} \phi + \sqrt{J_2} \left( \cos \theta_0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \phi \right) - c \cos \phi = 0 \quad (6.3.10)$$

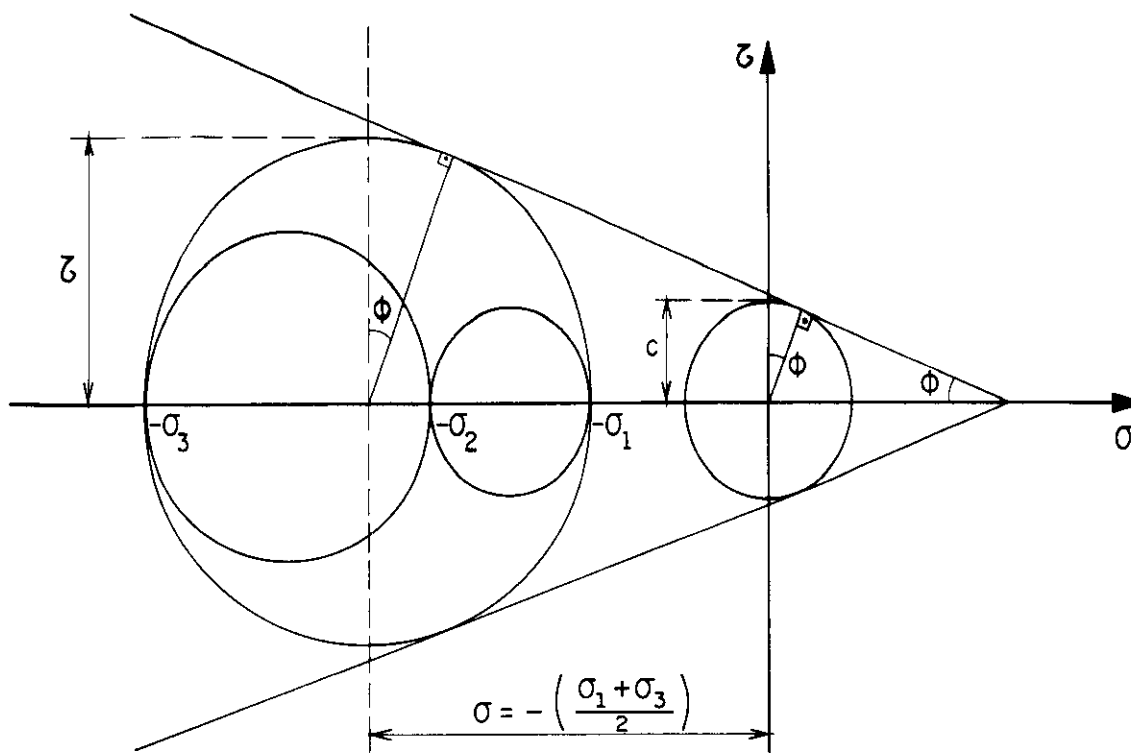


Fig.6.3.3 Mohr-Coulomb

Com,

$$\phi = 0 \quad \text{e} \quad c = \frac{Y(k)}{2} \quad (6.3.11)$$

tem-se,

$$F[\sigma, Y(k)] = \sqrt{J_2} \cos \theta_0 - \frac{Y(k)}{2} = 0 \quad (6.3.12)$$

onde  $Y(k)$  representa o valor da tensão normal de início de plastificação do caso unidimensional com endurecimento.

A função dada pela eq.(6.3.12) representa a superfície de plastificação de Tresca, e é mais adequada para materiais dúcteis, mas pode ser usada, também, na análise de solos sem atrito.

A função da superfície de plastificação de von Mises é

expressa por,

$$J_2^{1/2} - \frac{Y(k)}{\sqrt{3}} = 0 \quad (6.3.13)$$

Para obter a superfície de plastificação de Drucker-Prager, modifica-se a função de von Mises, introduzindo a influência da componente de tensão hidrostática, que é representada pelo invariante  $I_1$ . A função modificada é expressa por,

$$\alpha I_1 - J_2^{1/2} - k = 0 \quad (6.3.14)$$

onde as constantes  $\alpha$  e  $k$  são definidas em função dos parâmetros  $c$  e  $\phi$  do material.

Na tentativa de melhor representar o comportamento elastoplástico de solos e rochas, foram propostos diversos valores para as constantes  $\alpha$  e  $k$ .

Os valores originais propostos por DRUCKER & PRAGER (1952) procuram reproduzir as hipóteses de Mohr-Coulomb no estado plano de deformação. Neste caso tem-se,

$$\alpha = \frac{\text{tg } \phi}{(9+12\text{tg}^2 \phi)^{1/2}} \quad \text{e} \quad k = \frac{3c}{(9+12\text{tg}^2 \phi)^{1/2}} \quad (6.3.15)$$

Outros valores de  $\alpha$  e  $k$  podem ser obtidos admitindo-se o cone de Drucker-Prager circunscrito na pirâmide de Mohr-Coulomb. Assim,

$$\alpha = \frac{2\text{sen}\phi}{\sqrt{3}(3-\text{sen}\phi)} \quad \text{e} \quad k = \frac{6c \cos\phi}{\sqrt{3}(3-\text{sen}\phi)} \quad (6.3.16)$$

Admitindo-se o cone inscrito na pirâmide tem-se,

$$\alpha = \frac{2\text{sen}\phi}{\sqrt{3}(3+\text{sen}\phi)} \quad \text{e} \quad k = \frac{6c \cos\phi}{\sqrt{3}(3+\text{sen}\phi)} \quad (6.3.17)$$

c) Relação tensão x deformação para o cálculo das deformações plásticas

Com a finalidade de se estabelecer uma relação tensão x deformação para o cálculo das deformações plásticas, segue-se o procedimento utilizado por TELLES & BREBBIA (1980a, 1980b) e VENTURINI (1982, 1984).

Para um ponto  $\mathbf{s}$  qualquer, admite-se a deformação total constituída de duas componentes,

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{s}) = \epsilon_{ij}^e(\mathbf{s}) + \epsilon_{ij}^p(\mathbf{s}) \quad (6.3.18)$$

onde  $\epsilon_{ij}^e(\mathbf{s})$  é a componente elástica e  $\epsilon_{ij}^p(\mathbf{s})$  a plástica.

Da mesma forma, um incremento de deformação total,

$$d\epsilon_{ij}(\mathbf{s}) = d\epsilon_{ij}^e(\mathbf{s}) + d\epsilon_{ij}^p(\mathbf{s}) \quad (6.3.19)$$

Na região elástica, não existindo deformações iniciais  $\epsilon_{kl}^o(\mathbf{s})$  as tensões são obtidas através de,

$$\sigma_{ij}(\mathbf{s}) = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e(\mathbf{s}) \quad (6.3.20)$$

Do mesmo modo, um incremento de tensão,

$$d\sigma_{ij}(\mathbf{s}) = C_{ijkl} d\epsilon_{kl}^e(\mathbf{s}) \quad (6.3.21)$$

Substituindo-se a eq.(6.3.19) na eq.(6.3.21) obtém-se,

$$d\sigma_{ij}(\mathbf{s}) = C_{ijkl} \left[ d\epsilon_{kl}(\mathbf{s}) - d\epsilon_{kl}^p(\mathbf{s}) \right] \quad (6.3.22)$$

O incremento de deformação plástica é, por hipótese, admitido proporcional ao gradiente de tensão de uma quantidade denominada de potencial plástico  $Q$ . Determina-se a deformação plástica devido ao estado de tensão utilizando o gradiente do potencial plástico  $Q$ , que é uma função

escalar dependente do tensor das tensões  $\sigma_{ij}(\mathbf{s})$  e do parâmetro de endurecimento  $k$ . Assim, o incremento de deformação plástica é dado por,

$$d\epsilon_{ij}^p(\mathbf{s}) = d\lambda \frac{\partial Q[\sigma_{ij}(\mathbf{s})]}{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{s})} \quad (6.3.23)$$

onde  $d\lambda$  é uma constante de proporcionalidade chamada de multiplicador plástico.

Considerações teóricas sobre este estudo podem ser encontradas em HILL (1950). No caso de  $Q(\sigma, k) = F(\sigma, k)$  tem-se a lei da plasticidade associativa.

Substituindo-se a eq.(6.3.23) na eq.(6.3.22) obtém-se,

$$d\sigma_{ij}(\mathbf{s}) = C_{ijkl} \left( d\epsilon_{kl} - a_{kl}^{(Q)} d\lambda \right) \quad (6.3.24)$$

com,

$$a_{kl}^{(Q)} = \frac{\partial Q[\sigma_{kl}(\mathbf{s}), k]}{\partial \sigma_{kl}(\mathbf{s})} \quad (6.3.25)$$

Considerando-se a derivada da função  $F[\sigma_{ij}(\mathbf{s}), k]$  nula, é possível escrever,

$$a_{ij}^{(F)} d\sigma_{ij}(\mathbf{s}) - \frac{\partial Y(k)}{\partial k} dk = 0 \quad (6.3.26)$$

onde,

$$a_{ij}^{(F)} = \frac{\partial F[\sigma_{ij}(\mathbf{s}), k]}{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{s})} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{s})} F[\sigma_{ij}(\mathbf{s})] \quad (6.3.27)$$

Para o estado múltiplo de tensão e com o conceito de trabalho de endurecimento tem-se,

$$k = \int \sigma_{ij}(\mathbf{s}) d\epsilon_{ij}^p(\mathbf{s}) \quad (6.3.28)$$

Substituindo-se na eq.(6.3.26),

$$a_{ij}^{(F)} d\sigma_{ij}(\mathbf{s}) - \frac{\partial Y(k)}{\partial k} \sigma_{ij}(\mathbf{s}) a_{ij}^{(Q)} d\lambda = 0 \quad (6.3.29)$$

A função  $Q[\sigma_{ij}(\mathbf{s}), k]$  pode ser expressa por,

$$Q[\sigma_{ij}(\mathbf{s}), k] = q[\sigma_{ij}(\mathbf{s})] - Y(k) \quad (6.3.30)$$

Escreve-se o segundo termo da eq.(6.3.29) da seguinte forma,

$$\frac{\partial Y(k)}{\partial k} \sigma_{ij}(\mathbf{s}) a_{ij}^{(Q)} d\lambda = \frac{\partial Y(k)}{\partial k} \sigma_{ij}(\mathbf{s}) \frac{dq[\sigma_{ij}(\mathbf{s})]}{d\sigma_{ij}(\mathbf{s})} d\lambda \quad (6.3.31)$$

na qual, após aplicar o teorema de Euler torna-se,

$$\frac{\partial Y(k)}{\partial k} \sigma_{ij}(\mathbf{s}) a_{ij}^{(Q)} d\lambda = \frac{\partial Y(k)}{\partial k} q[\sigma_{ij}(\mathbf{s})] d\lambda \quad (6.3.32)$$

Interpretando-se  $q[\sigma_{ij}(\mathbf{s})]$  como uma tensão equivalente do problema unidimensional, e utilizando-se a definição do trabalho de endurecimento, eq.(6.2.4) e eq.(6.3.28), escreve-se novamente a eq.(6.3.29) da seguinte forma,

$$a_{ij}^{(F)} d\sigma_{ij}(\mathbf{s}) - H' d\lambda = 0 \quad (6.3.33)$$

onde  $H'$  é obtido através da eq.(6.2.7).

Com a eq.(6.3.24) e eq.(6.3.33) obtém-se o parâmetro de proporcionalidade.

$$d\lambda = \frac{a_{ij}^{(F)} C_{ijkl} d\epsilon_{kl}(\mathbf{s})}{\left[ a_{ij}^{(F)} d_{ij} + H' \right]} \quad (6.3.34)$$

com,

$$d_{ij} = C_{ijkl} a_{ij}^{(F)} \quad (6.3.35)$$

Substituindo-se  $d\lambda$  na eq.(6.3.24),

$$d\sigma_{ij}(\mathbf{s}) = \left[ C_{ijkl} - \frac{d_{ij} a_{mn}^{(F)} C_{mnkl}}{a_{mn}^{(F)} d_{mn} + H'} \right] d\epsilon_{kl} \quad (6.3.36)$$

Esta é a relação entre incrementos de tensão e deformação, para níveis de tensão que produzem deformações plásticas.

Para fins computacionais, é conveniente separar o incremento de tensão em componentes elástica e plástica,

$$d\sigma_{ij}(\mathbf{s}) = d\sigma_{ij}^e(\mathbf{s}) - d\sigma_{ij}^p(\mathbf{s}) \quad (6.3.37)$$

com,

$$d\sigma_{ij}^e(\mathbf{s}) = C_{ijkl} d\epsilon_{kl}(\mathbf{s}) \quad (6.3.38)$$

$$d\sigma_{ij}^p(\mathbf{s}) = \frac{d_{ij} a_{mn}^{(F)}}{\left[ a_{mn}^{(F)} d_{mn} + H' \right]} d\sigma_{mn}^e \quad (6.3.39)$$

Estas expressões são válidas para o caso tridimensional. Para utilizá-las nos estados planos de tensão e de deformação, são feitas algumas simplificações nos tensores  $a_{mn}^{(F)}$  e  $d_{mn}$ . Escrevendo-se estes tensores na forma matricial, tem-se,

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ 2a_{12} \\ a_{33} \end{Bmatrix} \quad (6.3.40)$$

onde o coeficiente relativo a tensão de cisalhamento, ( $a_{mn}$ ,  $m \neq n$ ), é multiplicado por dois para considerar a simetria,  $a_{mn}$  e  $a_{nm}$ .

Para determinar o vetor  $\{d\}$  escreve-se a matriz elástica na forma explícita,

$$[C] = \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.41)$$

válida para estado plano de deformação e,

$$[C] = \frac{2G}{(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3.42)$$

para o estado plano de tensão.

O vetor  $\{d\}$  é obtido multiplicando-se a matriz elástica  $[C]$ , pelo vetor  $\{a\}$ . Assim, após o produto tem-se para o estado plano de deformação,

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} a_{11} + M_1 \\ a_{22} + M_1 \\ a_{12} \\ a_{33} + M_1 \end{Bmatrix} \quad (6.3.43)$$

onde,

$$M_1 = \frac{\nu}{1-2\nu} (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \quad (6.3.44)$$

e, para o estado plano de tensão,



$$\{d\} = \begin{Bmatrix} a_{11} + M_2 \\ a_{22} + M_2 \\ a_{12} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.3.45)$$

onde,

$$M_2 = \frac{\bar{\nu}}{1-2\bar{\nu}} (a_{11} + a_{22}) \quad (6.3.46)$$

A superfície de plastificação de Drucker -Prager e von Mises não apresentam problemas em relação a descontinuidade das derivadas. No entanto, nas superfícies de Tresca e Mohr-Coulomb ocorrem descontinuidades das derivadas em algumas situações. Por exemplo, para  $\theta_0 = 30^\circ$  existem cantos que levam a indeterminação das deformações plásticas. Uma aproximação prática, é substituir as derivadas das superfícies de Mohr-Coulomb e Tresca por valores equivalentes obtidos das superfícies de von Mises e Drucker-Prager respectivamente, quando  $|\theta_0| > 29^\circ$ .

Utilizando-se o método dos elementos de contorno, é apresentado a seguir um procedimento numérico para solução plástica seguindo-se o processo de tensão inicial de ZIENKIEWICZ et al. (1969).

O carregamento é aplicado em incrementos e, para um determinado incremento de carga, o problema é resolvido elasticamente, sendo o incremento elástico  $d\sigma_{ij}^e$  adicionado nas tensões efetivas.

Em um ponto qualquer, se o estado de tensão estiver fora da região elástica, a tensão excedente ou incremento de tensão plástica  $d\sigma_{ij}^p$  é aplicado na estrutura como tensão inicial  $\sigma_{ij}^0$ .

Reescrevendo-se o sistema de equações de (3.4.8),

$$[A] \{X\} = \{F\} + [E] \{\sigma^0\} \quad (3.4.7)$$

onde no vetor  $\{F\}$  estão as influências dos valores prescritos de forças de superfície, deslocamentos e forças de domínio.

A solução deste sistema é dada por,

$$\{X\} = [A]^{-1}\{F\} + [A]^{-1}[E]\{\sigma^O\} \quad (6.3.47)$$

Chamando,

$$\{M\} = [A]^{-1}\{F\} \quad \text{e} \quad [R] = [A]^{-1}[E] \quad (6.3.48)$$

tem-se,

$$\{X\} = \{M\} + [R]\{\sigma^O\} \quad (6.3.49)$$

Da mesma maneira, a eq.(3.4.11) pode ser transformada em,

$$\{\sigma\} = \{F''\} - [A'']\{X\} + [E'']\{\sigma^O\} \quad (6.3.50)$$

A tensão total é expressa por,

$$\{\sigma\} = \{\sigma^e\} - \{\sigma^O\} \quad (6.3.51)$$

No estudo da plasticidade é conveniente escrever a eq.(6.3.51) da seguinte forma,

$$\{\sigma^e\} = \{\sigma\} + \{\sigma^O\} \quad (6.3.52)$$

Assim, a eq.(6.3.50) fica,

$$\{\sigma^e\} = \{F''\} - [A'']\{X\} + [E^*]\{\sigma^O\}$$

onde

$$[E^*] = [E''] + [I] \quad (6.3.53)$$

Substituindo-se a eq.(6.3.49) na eq.(6.3.53) tem-se,

$$\{\sigma^e\} = \{F''\} - [A''] \left( \{M\} + [R] \{\sigma^o\} \right) + [E^*] \{\sigma^o\} \quad (6.3.54)$$

ou,

$$\{\sigma^e\} = \{F''\} - [A''] \{M\} + ([E^*] - [A''] [R]) \{\sigma^o\} \quad (6.3.55)$$

Chamando-se,

$$\{N\} = \{F''\} - [A''] \{M\}$$

$$[S] = [E^*] - [A''] [R] \quad (6.3.56)$$

obtém-se,

$$\{\sigma^e\} = \{N\} + [S] \{\sigma^o\} \quad (6.3.57)$$

As influências das tensões iniciais, quando existirem, serão consideradas nas matrizes [R] e [S].

Na implementação deste procedimento, para cada incremento de carga, pode ser utilizada a seguinte sequência:

- a) Cálculo dos valores  $\{\Delta\sigma^e\}$  dos incrementos das tensões elásticas

Na primeira iteração de cada incremento de carga, o valor de  $\{\Delta\sigma^e\}$  é obtido pelo vetor  $\{N\}$  da eq.(6.3.57).

Quando ocorre a plastificação, o incremento de tensão plástica é aplicado na forma de tensão inicial, ou seja,  $\{\sigma^o\} = \{\Delta\sigma^p\}$  e o valor de  $\{\Delta\sigma^e\}$  é determinado por,

$$\{\Delta\sigma^e\} = [S] \{\Delta\sigma^p\} \quad (6.3.58)$$

b) Cálculo dos valores dos incrementos da tensão plástica  $d\sigma_{ij}^p$  e dos incrementos  $d\sigma_{ij}^e$ , através da eq.(6.3.39) e da eq.(6.3.37), respectivamente

c) Cálculo dos valores da tensão efetiva e dos valores acumulados da tensão inicial

Estes valores são obtidos, respectivamente, através de:

$$\{\sigma\} \leftarrow \{\sigma\} + \{\Delta\sigma\} \quad (6.3.59)$$

$$\{\sigma^a\} \leftarrow \{\sigma^a\} + \{\Delta\sigma^p\} \quad (6.3.60)$$

d) Convergência

O processo iterativo termina quando a diferença entre os valores do incremento de deformação plástica e o valor limite estabelecido pela função de plastificação adotada, estiver dentro de uma tolerância aceitável.

e) Retorna em a) para nova iteração ou novo incremento de carga.

## 7 ANÁLISE DE PROBLEMAS DE DOMÍNIO VARIÁVEL

### 7.1 GENERALIDADES

Apresenta-se neste capítulo, algumas considerações relativas a obras de escavação, que são problemas de domínio variável.

As obras de escavação são utilizadas para diversas finalidades, como por exemplo, drenagem, transportes, exploração de minas, sistemas de esgotos, etc..

A construção de metrô nas grandes cidades contribuiu muito para o desenvolvimento dos projetos e métodos construtivos das obras enterradas.

Basicamente, existem duas maneiras distintas de escavação. Uma, onde a vala é escavada a céu aberto a partir da superfície e, após a execução das estruturas permanentes é feito o reaterro e, a outra, onde a escavação é realizada praticamente sem interferir na superfície.

A escavação de vala a céu aberto, conhecida como método em trincheiras ou "cut and cover", pode ser realizada através de taludes naturalmente estáveis, com inclinação que depende do tipo de solo existente.

Nas regiões urbanas densamente povoadas esta maneira de se executar a escavação acarreta grandes transtornos, pois interfere na superfície.

Assim, é interessante conseguir valas com dimensões em planta as menores possíveis, sendo necessário utilizar adequadamente as estruturas de apoio dos taludes.

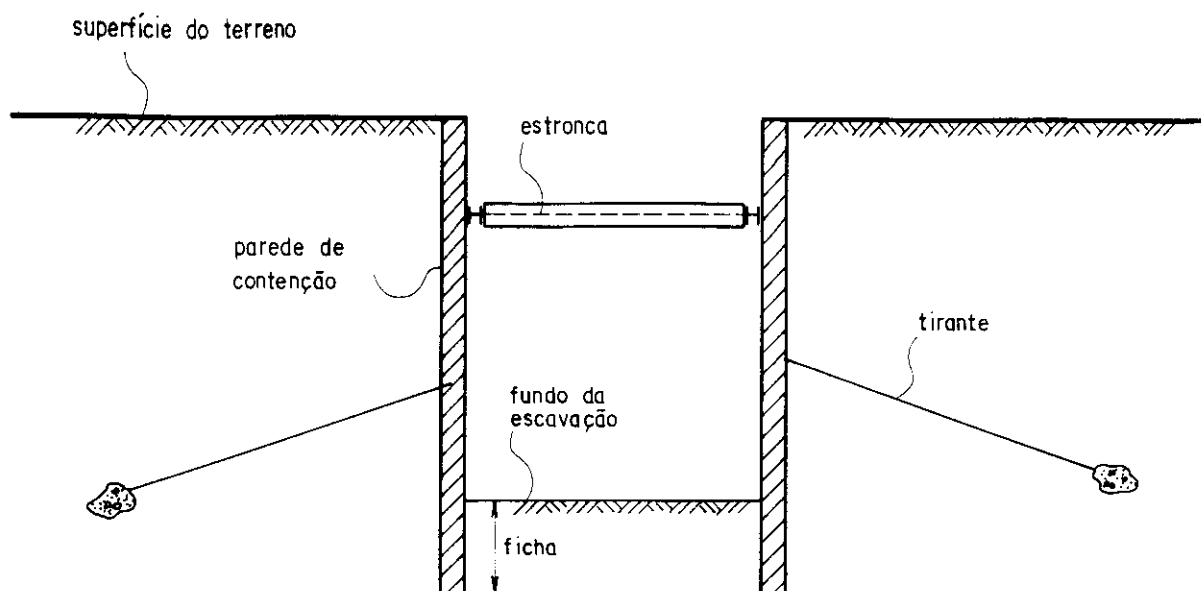


Fig.7.1.1 Elementos de uma vala com estrutura de apoio

Apresenta-se na Fig. 7.1.1, o esquema genérico de uma vala com os principais elementos da estrutura de apoio dos taludes.

A parede de contenção pode ser constituída de parede estrutural ou parede diafragma, estacas justapostas, estacas cravadas a distâncias pré-estabelecidas com pranchões de madeira ou painéis pré-moldados, etc..

Nas valas de grandes dimensões em planta, podem surgir problemas relativos a estabilidade das estrocas, e nestes casos os tirantes tornam-se mais indicados.

É muito importante um estudo que garanta a segurança tanto da obra a ser executada quanto das edificações já existentes na região circunvizinha.

Na escavação de túneis sem interferência na superfície, quando necessário, o acesso é feito através de poços de emboque ou desemboque. São utilizadas, por exemplo, máquinas shield, podendo a escavação ser mecanizada ou manual.

## 7.2 PROCEDIMENTO PARA SIMULAR UMA ESCAVAÇÃO

Consiste em aliviar o contorno das sub-regiões que possuem interfaces com a sub-região removida, aplicando-se forças de superfície correspondentes às tensões iniciais existentes. Em cada etapa de escavação a estrutura global é modificada e, a montagem do sistema de equações é feita conforme o ítem 4.2. Caso existam estruturas reticuladas, deve-se considerar os procedimentos de combinação MEC-MEF descritos no ítem 5.3.

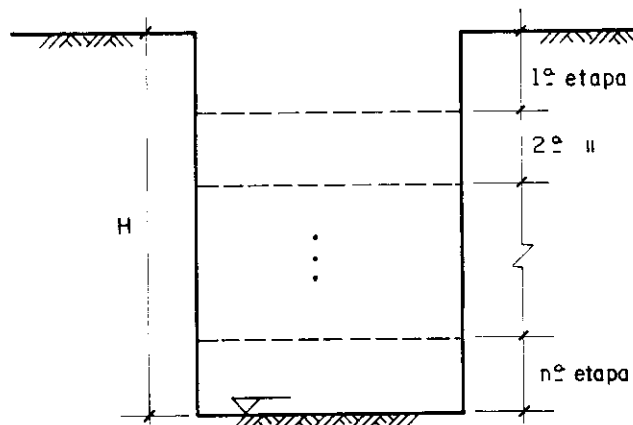


Fig.7.2.1 Etapas de escavação

Para uma escavação executada em  $n$  etapas, Fig. 7.2.1, as forças de superfície calculadas para uma determinada etapa, são influenciadas pelas etapas anteriores.

Sejam  $\{p_1\}$ ,  $\{p_2\}$ , ...  $\{p_n\}$  as forças de superfície correspondente a cada etapa de escavação sem considerar a influência das etapas anteriores sobre as posteriores.

Para simular a primeira etapa de escavação, admite-se aplicar a força de superfície  $-\{p_1\}$  no contorno correspondente. Resolvendo-se a estrutura, são obtidas as influências deste carregamento nas demais etapas, designadas de  $\{\Delta p_2^1\}$ ,  $\{\Delta p_3^1\}$ , ...  $\{\Delta p_n^1\}$ .

Após a primeira etapa de escavação tem-se,

$$\begin{aligned} \{p_2\}^* &= \{p_2\} + \{\Delta p_2^1\} \\ \{p_3\}^* &= \{p_3\} + \{\Delta p_3^1\} \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \{p_n\}^* &= \{p_n\} + \{\Delta p_n^1\} \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

Na segunda etapa de escavação aplica-se a força de superfície  $-\{p_2\}^*$  no contorno correspondente. Resolvendo-se a estrutura, são obtidas as influências deste carregamento nas demais etapas, designadas de  $\{\Delta p_3^2\}$ ,  $\{\Delta p_4^2\}$ , ...,  $\{\Delta p_n^2\}$ .

No final da segunda etapa de escavação tem-se,

$$\begin{aligned} \{p_3\}^{**} &= \{p_3\}^* + \{\Delta p_3^2\} \\ \{p_4\}^{**} &= \{p_4\}^* + \{\Delta p_4^2\} \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \{p_n\}^{**} &= \{p_n\}^* + \{\Delta p_n^2\} \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

Para simular as demais etapas de escavação, repete-se o mesmo procedimento.

### 7.3 FRENTE DE ESCAVAÇÃO E ESTRUTURAS DE APOIO

Um aspecto importante a ser considerado é o estado tridimensional de tensões e deformações na região próxima da frente de escavação. Todo o estudo apresentado a seguir tem como referência os trabalhos de LOMBARDI (1973, 1974, 1977 e 1979), DAEMEN & FAIRHURST (1972), PANET & GUELLEC (1974), PANET (1976), FAIRHURST & DAEMEN (1978, 1979) e GITELMAN (1982).



Seja a escavação de um túnel, Fig. 7.3.1, sujeito a uma tensão inicial  $p_i$ .

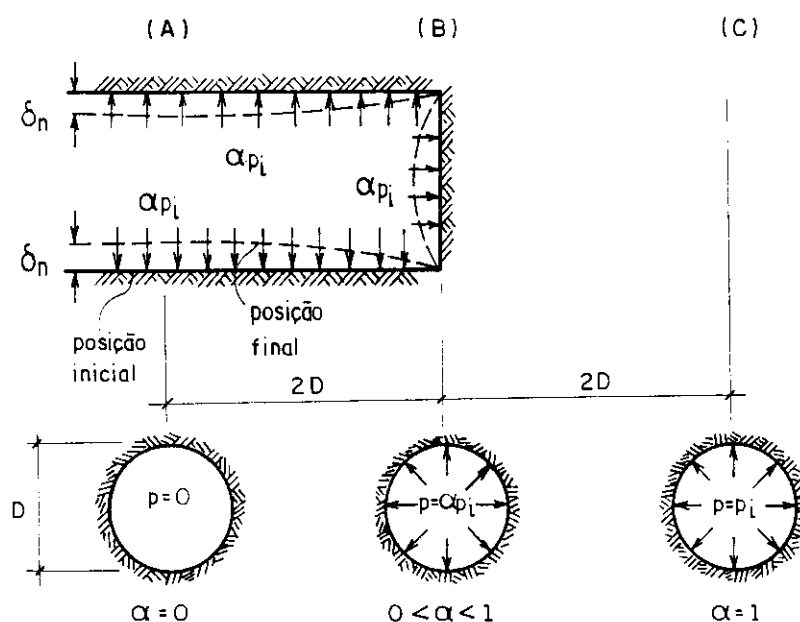


Fig.7.3.1 Frente de escavação do túnel

O efeito tridimensional da frente de escavação pode ser tratado, de forma aproximada, como um problema bidimensional considerando-se uma força de superfície fictícia  $p = \alpha p_i$ , onde  $\alpha = 1 - \lambda$  e  $\lambda = \delta / \delta_n$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ).

Os valores de  $\lambda$  são determinados através do gráfico da Fig. 7.3.2, em função de  $d/D$ , sendo  $d$  a distância do revestimento à frente de escavação,  $D$  o diâmetro do túnel, e  $\delta$  o deslocamento radial correspondente à distância  $d$ .

Para o caso de túneis com seção transversal não circular, pode-se utilizar o mesmo gráfico com  $D = (a+b)/2$ . A escavação e o avanço da frente de escavação são representadas pelo acréscimo de  $\lambda$  ou diminuição de  $p$  desde o valor  $p_i$  ( $\alpha = 1$ ) até zero ( $\alpha = 0$ ).

Através das curvas características do maciço, denominadas de Fenner-Pacher obtidas em função de um modelo

matemático determina-se, para cada etapa de escavação, o deslocamento radial  $\delta$  correspondente à tensão inicial  $p_i$  da região removida.

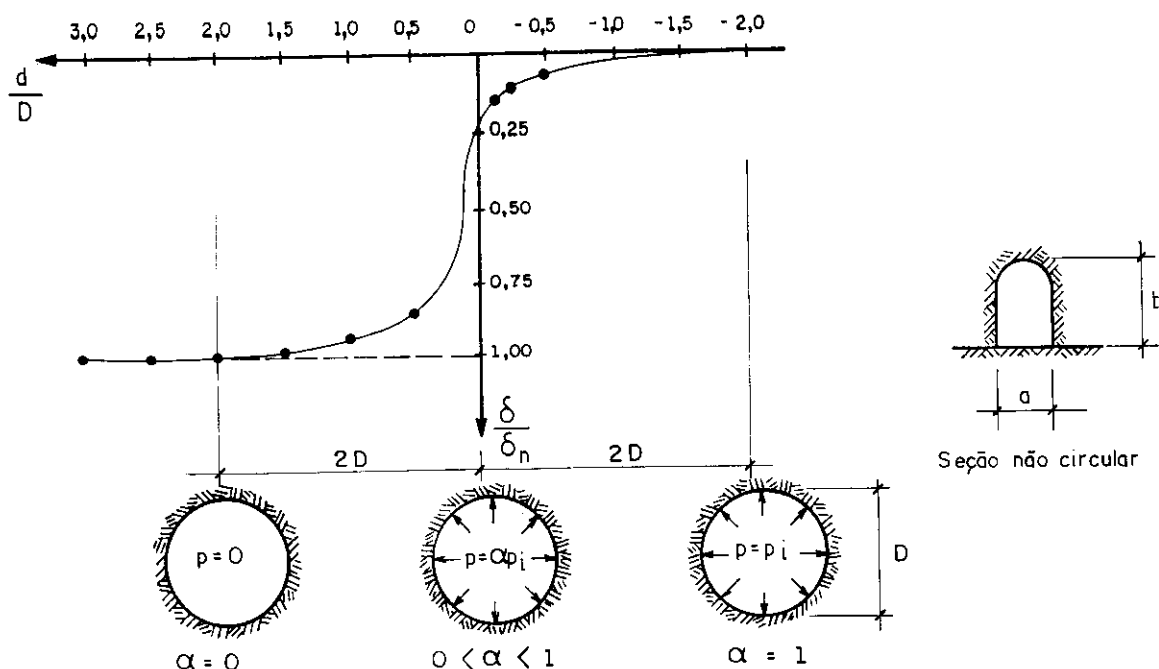


Fig.7.3.2 Variação de  $\lambda$  em função de  $d/D$

Nestas curvas características, o maciço é considerado homogêneo e isótropo e o túnel circular onde os pontos do contorno estão submetidos a um estado inicial de tensão hidrostática constante. As expressões das curvas características do maciço são obtidas através da teoria da elasticidade e plasticidade.

Na escavação de um túnel, GITELMAN (1982), as curvas (I) e (II) da Fig. 7.3.3 representam as situações de comportamento elástico do maciço, sendo que a curva (I) corresponde ao trecho linear do diagrama tensão x deformação e a curva (II) ao trecho elástico não-linear. Nestas situações quando a tensão  $p$  se anula, o deslocamento final vale  $\delta_1^0$  ou  $\delta_2^0$ , e não é preciso estrutura de apoio.

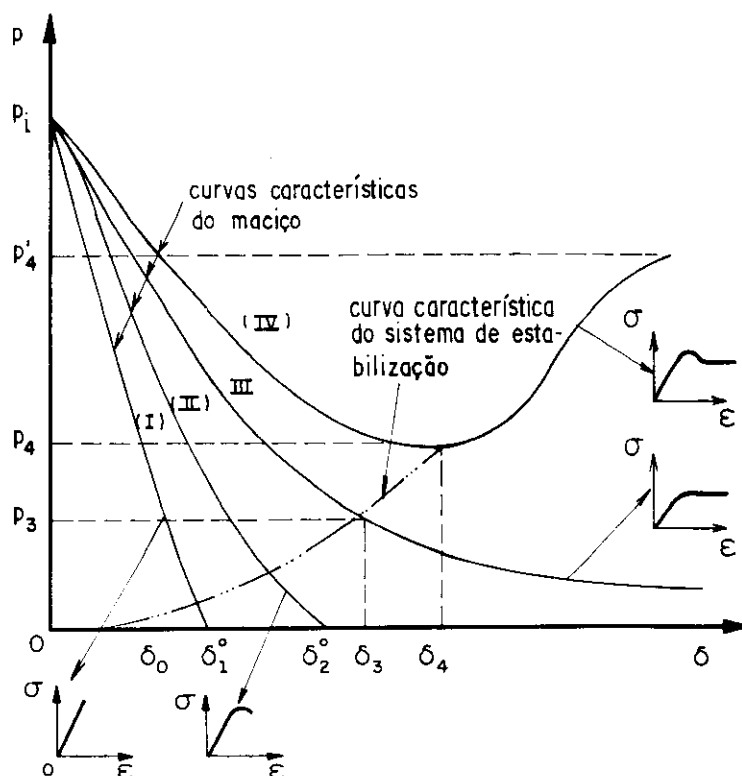


Fig.7.3.3 Curvas características do maciço

Para uma seção transversal afastada da frente de escavação, por exemplo, a seção (A) da Fig. 7.3.1, as tensões circunferenciais e radiais, variam conforme a Fig. 7.3.4, onde é considerado um comportamento elástico para o maciço.

Nestes casos, o maciço é auto portante, ou não plastificável, e a sua estabilidade é função das descontinuidades, que podem provocar o desprendimento de certo volume de blocos. Assim, a finalidade da estabilização é impedir o início do movimento de queda de blocos.

As curvas (III) e (IV) da Fig. 7.3.3, representam as situações de comportamento elastoplástico do maciço. Na curva (III) tem-se um comportamento elastoplástico ideal onde os deslocamentos, correspondentes à tensão inicial  $p_i$  nula, podem se tornar exagerados acarretando-se problemas do tipo:

a) exceder o deslocamento máximo permitido pelo material,

- b) obrigar a uma sobrecavação excessiva para manter o gabarito interno,
- c) provocar recalques nas superfícies do maciço, o que não é conveniente no caso de túneis que passam por regiões urbanizadas.

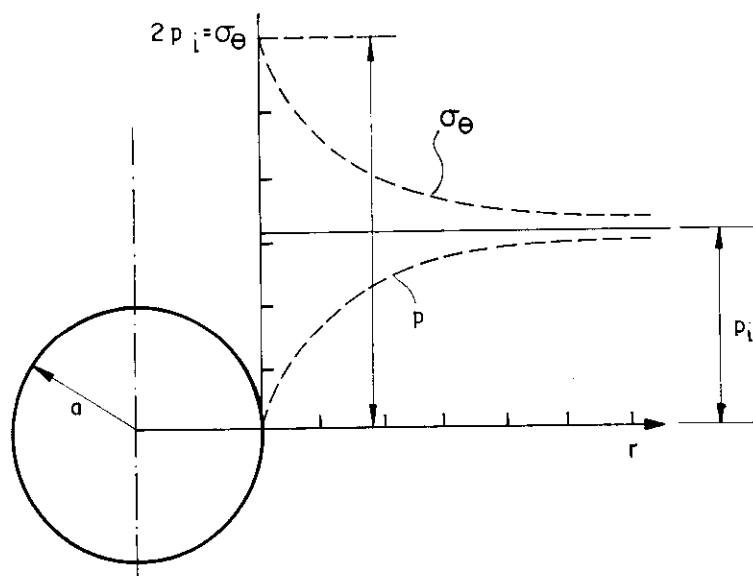


Fig.7.3.4 Seção transversal do túnel - regime elástico

Para que estes problemas não ocorram, é necessário limitar os deslocamentos e, para isto, é utilizado um sistema de estabilização, que aplica nas paredes do túnel uma pressão correspondente ao deslocamento a ser limitado.

Na curva (IV) da Fig. 7.3.3, tem-se um comportamento elastoplástico com rupturas progressivas do maciço. Nesta situação o maciço não é auto portante e é preciso que o sistema de estabilização aplique nas paredes do túnel uma tensão de confinamento  $p_c$  igual ou superior a  $p_4$ .

Na Fig. 7.3.5, tem-se a variação das tensões para uma seção transversal afastada da frente de escavação quando se considera um comportamento elastoplástico para o maciço.

No caso das curvas (III) e (IV) da Fig. 7.3.3, o comportamento dos pontos do contorno do túnel depende das propriedades geomecânicas do maciço e da intensidade da tensão inicial.

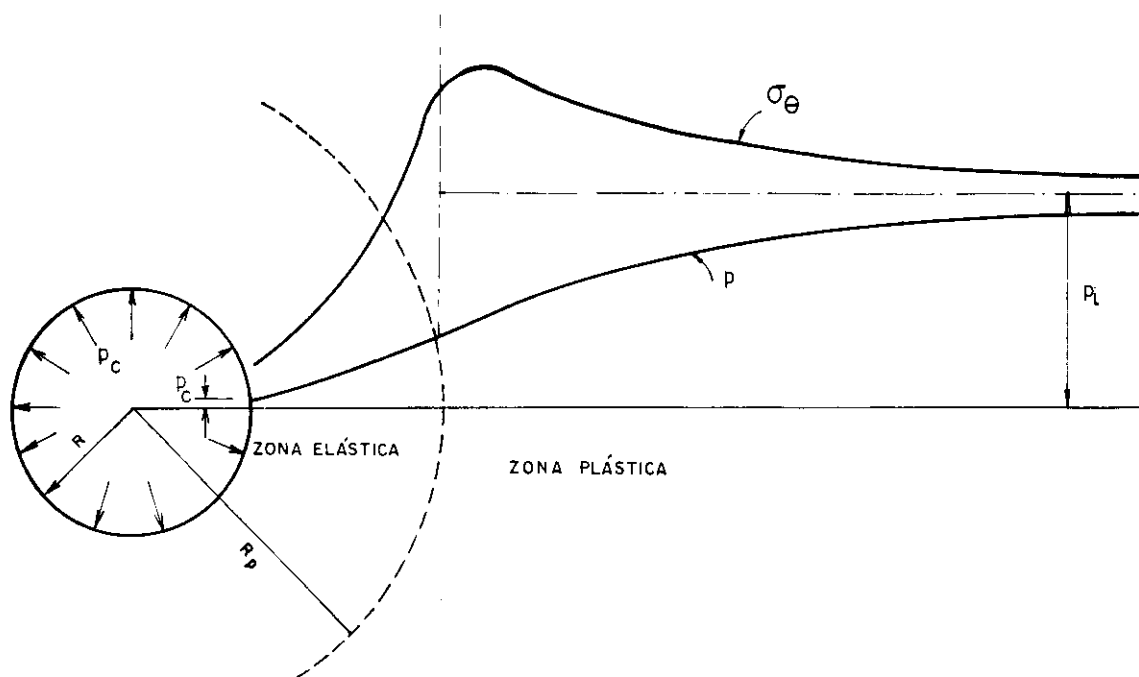


Fig.7.3.5 Seção transversal do túnel - equilíbrio elastoplástico

Tem-se na Fig. 7.3.6, a curva característica do sistema de estabilização, que representa a reação da estrutura de apoio aos deslocamentos radiais impostos pelo maciço, e é função de sua rigidez.

Deve-se conhecer o valor  $\delta_0$  do deslocamento já ocorrido, no momento em que é colocada a estrutura de apoio.

A posição de equilíbrio é obtida na interseção da curva característica do maciço com a curva característica da estrutura de apoio.

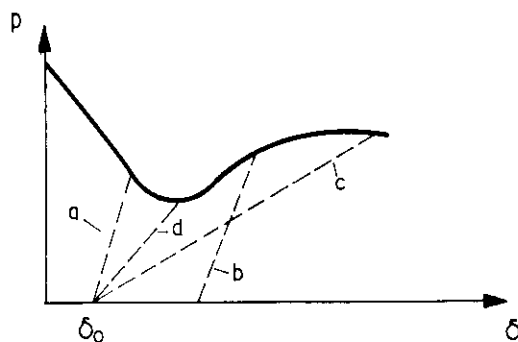


Fig.7.3.6 Características da estrutura de apoio

Conforme a Fig. 7.3.6, são possíveis as seguintes situações:

- a) a estrutura de apoio é muito rígida, e não é aproveitada adequadamente a capacidade auto portante do maciço,
- b) a estrutura de apoio é colocada muito distante da frente de escavação. Com isto, pode ocorrer uma ruptura progressiva do maciço sobrecarregando a estrutura de apoio e provocando o colapso da estrutura,
- c) a estrutura de apoio é muito flexível,
- d) a estrutura de apoio é adequada.

## 8 PROGRAMA PARA O CÁLCULO AUTOMÁTICO

### 8.1 GENERALIDADES

Com base na teoria apresentada, foi desenvolvido um programa para microcomputadores, codificado na linguagem FORTRAN, com a finalidade de se automatizar a resolução dos problemas a que se propõe este trabalho.

O programa é composto de várias unidades independentes e interligadas através de arquivos, com a possibilidade de se considerar o estado plano de tensão ou de deformação, domínio homogêneo ou não-homogêneo, acoplamento de uma estrutura reticulada no contorno ou no interior de um domínio bidimensional e, a plasticidade do material.

Os dados gerados em cada uma das unidades de programa, são gravados em arquivos de acesso sequencial e formatados, possibilitando eventuais interferências através de um editor de texto.

Nas unidades de programa onde é necessário o manuseio de matrizes, são utilizados arquivos não formatados e de acesso direto ou sequencial, conforme o caso.

Os resultados obtidos são armazenados, para cada sub-região e para cada estrutura reticulada, em diferentes arquivos de acesso sequencial e formatados.

Considera-se sistema local quando a numeração tem como referência cada sub-região ou cada estrutura reticulada e, sistema global quando a numeração se refere à estrutura como um todo.

## 8.2 DESCRIÇÃO DO PROGRAMA AUTOMÁTICO

As principais partes do programa automático são apresentadas na Fig. 8.2.1 a seguir.

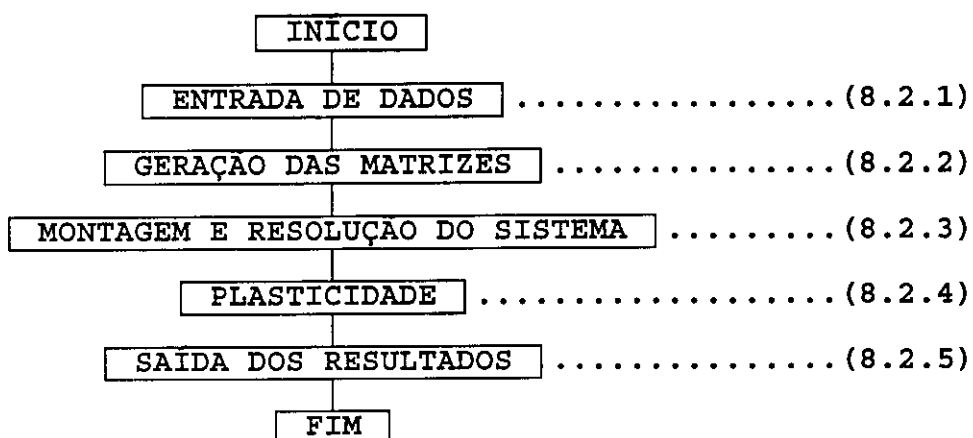


Fig.8.2.1 Fluxograma geral do programa

### 8.2.1 Entrada de dados

Nesta parte do programa automático são gerados e gravados os dados necessários para:

- a) Montagem das matrizes do MEC e do MEF referentes ao comportamento elástico e plástico,
- b) Carregamento e condições de contorno,
- c) Montagem do sistema conforme CROTTY (1982),
- d) Compatibilidade da numeração dos pontos de contorno e pontos internos com a numeração conforme a partição de Crotty e com os vértices das células,
- e) Saída dos resultados.

As unidades do programa referentes aos dados estão organizadas conforme a Fig. 8.2.2.



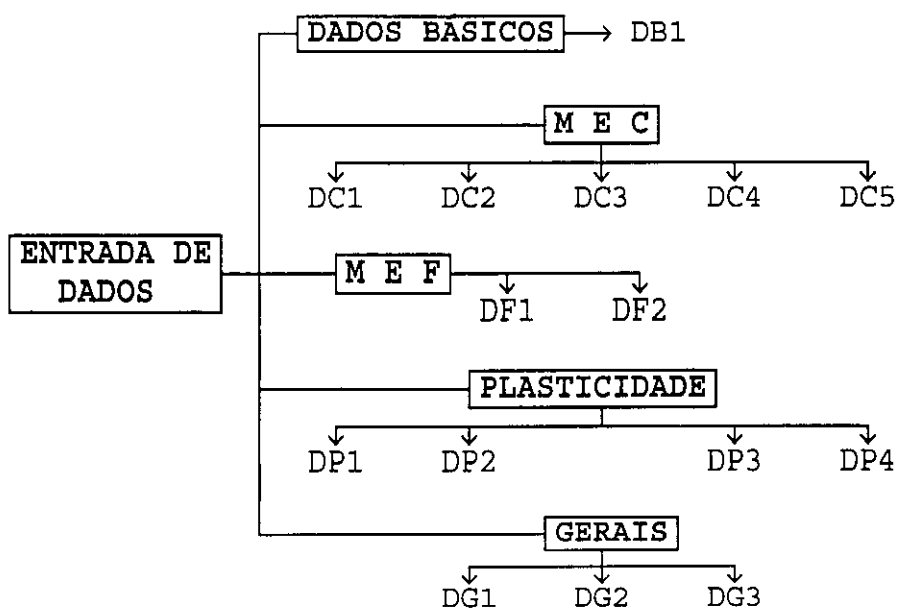


Fig.8.2.2 Fluxograma da entrada de dados

## A) DADOS BÁSICOS

## a1) Unidade DB1 - DDAD.FOR

Leitura dos dados básicos a serem utilizados nas demais unidades do programa.

NP- número do problema

NSR- número de sub-regiões

NESTR- número de estruturas reticuladas

NBL- número de blocos do sistema de equações

NH- número de colunas dos termos independentes

NNDAUX(IS)- número de pontos do contorno da sub-região IS

NNPIX(IS)- número de pontos internos da sub-região IS

NNDIX(IS)- número de pontos dos elementos internos da sub-região IS

DRIVE1- drive para gravação e leitura dos dados

DRIVE2- drive para gravação e leitura das matrizes

Estes dados são gravados em um arquivo sequencial e formatado da seguinte forma,

NDAG = 100

OPEN(NDAG, FILE='MECMEF.DAD')

## B) DADOS DO DOMÍNIO BIDIMENSIONAL - MEC

## b1) Unidade DC1 - (DC.FOR)

Esta unidade de programa executa a leitura dos dados do domínio bidimensional armazenando-os em arquivos de acesso sequencial e formatados, sendo um arquivo diferente para cada sub-região. Os dados se referem aos parâmetros básicos, coordenadas dos pontos, definição dos elementos, definição dos pontos e propriedades do material.

Principais variáveis de cada sub-região IS:

## Parâmetros básicos

NND - número de pontos do contorno

NE - número de elementos

## Coordenadas dos pontos do contorno

X1(I) - coordenada horizontal do ponto I do contorno

X2(I) - coordenada vertical do ponto I do contorno

Utiliza-se um sistema local para cada sub-região IS

## Definição dos elementos

JEL (J,1) - ponto inicial do elemento J

JEL (J,2) - ponto final do elemento J

## Definição dos pontos

IEL (I,1) - elemento anterior ao ponto I

IEL (I,2) - elemento posterior ao ponto I

## Parâmetros do material

GT - módulo de deformação transversal

POIS - coeficiente de Poisson

Os nomes dos arquivos são escritos da seguinte forma:

C=CHAR(64+IS)

NDC=200+IS

DC=DRIVE1//':DADCO'//NP//C//'.DAD'

OPEN(NDC, FILE=DC)

## b2) Unidade DC2 - (DCC.FOR)

São definidas as condições de contorno e carregamento para cada sub-região IS.

No sistema local, são estabelecidas as condições de contorno, onde,

KODE(I) = 0 - deslocamento u prescrito  
 KODE(I) = 1 - força de superfície p prescrita  
 KODE(2I-1) - u ou p prescrito na direção X1  
 KODE(2I) - u ou p prescrito na direção X2.

Os carregamentos são estabelecidos considerando-se o sistema global, onde,

IORDF(I) - vetor que compatibiliza a numeração local do ponto I com a numeração global  
 P(2I-1) - u ou p prescrito na direção X1  
 P(2I) - u ou p prescrito na direção X2.

Os nomes dos diferentes arquivos de acesso sequencial e formatados de cada sub-região, são escritos da seguinte forma,

```
NDCC=300+IS
DCC=DRIVE1//':DCARC'//NP//C//'.DAD'
OPEN(NDCC,FILE=DCC)
```

#### b3) Unidade DC3 (DCI.FOR)

Utilizando-se um sistema local de referência são lidas as coordenadas dos pontos internos de cada sub-região. As principais variáveis são,

NIP - número de pontos internos  
 XI1(I) - coordenada horizontal do ponto interno I  
 XI2(I) - coordenada vertical do ponto interno I.

Estes dados são gravados em diferentes arquivos de acesso sequencial e formatados de nomes,

```
NDCI=400+IS
DCI=DRIVE1//':DCPIN'//NP//C//'.DAD'
OPEN(NDCC,FILE=DCC)
```

#### b4) Unidade DC4 - (DCEI.FOR)

É feita a leitura dos dados de elementos internos, isto é, elementos no interior do domínio.

Principais variáveis:

NECI - número de elementos internos

XE1(I) - coordenada horizontal do ponto I

XE2(I) - coordenada vertical do ponto I

Definição dos elementos internos.

JELI(J,1) - ponto inicial do elemento J

JELI(J,2) - ponto final do elemento J

Definição dos pontos dos elementos internos.

IELI(I,1) - elemento anterior ao ponto I

IELI(I,2) - elemento posterior ao ponto I

Os dados de cada sub-região são gravados em diferentes arquivos de nomes,

NDCI=500+IS

DCI=DRIVE1//':DCPIN'//NP//C//'.DAD'

OPEN(NDCI,FILE=DCI)

#### b5) Unidade DC5 - (DCCEI.FOR)

Nesta unidade é lido o carregamento dos elementos internos de cada sub-região.

P(2I-1) - u ou p prescrito na direção X1

P(2I) - u ou p prescrito na direção X2

São gravados em arquivos de nomes,

NDCEI=600+IS

DCEI=DRIVE1//':DCCEI'//NP//C//'.DAD'

OPEN(NDCEI,FILE =DCEI)

### C) ESTRUTURAS RETICULADAS - MEF

#### c1) Unidade DF1 - (DF.FOR)

São lidos os dados referentes a cada estrutura reticulada IER.

Principais variáveis:

NNOS - número de pontos

NEXT - número de pontos não de interface MEC-MEF

NOINT - número de pontos de interface MEC-MEF  
 NUMEL - número de elementos  
 NELINT - número de elementos de interface MEC-MEF  
 NCDUP - número de coordenadas duplas  
 XF1(I) - coordenada horizontal do ponto I  
 XF2(I) - coordenada vertical do ponto I  
 JEL(J,1) - ponto inicial do elemento J  
 JEL(J,2) - ponto final do elemento J  
 E - módulo de deformação longitudinal  
 AJ - área da seção transversal  
 IZ - momento de inércia  
 IORD(J) - vetor que compatibiliza numeração local com  
           global no elemento de interface J  
 ICDUP(I) - número da coordenada dupla do ponto I.

Os dados de cada estrutura reticulada IER são armazenados em diferentes arquivos de acesso sequencial e formatados de nomes escritos da seguinte forma,

```

C=CHAR (64+IER)
NDF=700+IER
DF=DRIVE1//':DFINI'//NP//C//'.DAD'
OPEN(NDF,FILE=DF)
  
```

c2) - Unidade DF2 - (DFC.FOR)

É feita a leitura do carregamento das estruturas reticuladas. São previstas cargas aplicadas diretamente nos nós e cargas distribuídas nos elementos.

NNC - número de pontos carregados  
 K - número do ponto carregado  
 FN(3K-2) - força aplicada na direção X1 do ponto K  
 FN(3K-1) - força aplicada na direção X2 do ponto K  
 FN(3K) - momento fletor aplicado no ponto K  
 NEC - número de elementos carregados  
 JC - número do elemento carregado  
 P(JC,1) - força na direção X1 do ponto inicial do elemento  
 P(JC,2) - força na direção X2 do ponto inicial do elemento

P(JC,3)- força na direção X1 do ponto final do elemento

P(JC,4)- força na direção X2 do ponto final do elemento

Estes dados são gravados em arquivos de acesso sequencial e formatados de nomes,

```
NDFC=800+IER
```

```
DFC=DRIVE1//':DCFI'//NP//C//:DAD'
```

```
OPEN(NDFC, FILE=DFC)
```

#### D) PLASTICIDADE

d1) Unidade DP1 - (DAINV.FOR)

É feita a leitura dos dados necessários para a localização e montagem dos blocos dos termos independentes a serem modificados de modo a se ter a matriz identidade [I] no lugar de {b}. Os blocos alterados são gravados em arquivos de acesso sequencial e não formatados de nomes,

```
C=CHAR(IB+64)
```

```
NCFZ=6200+IB
```

```
CFZ=DRIVE2//':ZCRO'//CRO'//NP//C1//C2//'.MAT'
```

```
OPEN(NCFZ, FILE=CFZ, FORM='UNFORMATTED')
```

onde IB = número do bloco alterado

NP = número do problema

C1 = variável caracter de A a Z

C2 = variável caracter de A a Z

d2) Unidade DP2 - (DGCEL.FOR)

Nesta unidade são lidos os principais dados para a geração das células. Estes dados são gravados, para cada sub-região IS, em arquivos de acesso sequencial e formatados, cujos nomes são escritos da seguinte forma,

```
C=CHAR(64+IS)
```

```
NGCEL=8100+IS
```

```
DGCEL=DRIVE1//':DGCEL'//NP//C//'.DAD'
```

```
OPEN(NGCEL, FILE=DGCEL)
```

## d3) Unidade DP3 - (DCEL.FOR)

Para cada sub-região IS são lidas ou geradas as coordenadas dos vértices e definição das células. Estes dados são gravados em arquivos formatados de acesso sequencial, cujos nomes são escritos da seguinte forma,

```
NDCEL=8200+IS
DCEL=DRIVE1//':DECEL'//NP//C//'.DAD'
OPEN(NDCEL, FILE=DCEL)
```

## d4) Unidade DP4 - (DPLA.FOR)

São lidos os dados necessários para o procedimento incremental e iterativo utilizado na análise da plasticidade do material. Os dados são gravados em arquivos de acesso sequencial e formatados de nomes,

```
NDPL=10000+IS
DPL=DRIVE1//':DPLAS'//NP//C//'.DAD'
OPEN(NDPL, FILE=DPL)
```

## E) DADOS GERAIS

## e1) Unidade DG1 - (DSIS.FOR)

Nesta unidade são lidos os dados para a definição e montagem dos blocos do sistema de equações conforme o algoritmo desenvolvido por CROTTY (1982). Os blocos são formados por elementos das matrizes H e G dos elementos de contorno e dos elementos internos quando existirem. Está previsto considerar quando necessário, a influência da estrutura reticulada resolvida pelo MEF.

Principais variáveis:

```
NCONT(IS1,IS2) - número de pontos na interface das
                 sub-regiões IS1 e IS2. Quando IS1 = IS2 os pontos não
                 são de interface entre as sub-regiões IS1 e IS2
IORDL(I,IS1,IS2) - ordena os pontos de interface e não
                  interface no sistema local
```

NBL - número de blocos

IB - número do bloco

INTCF(IB) = 1 - não existe interface MEC-MEF

INTCF(IB) = 2 - existe interface MEC-MEF

Estes dados são gravados em um arquivo de acesso sequencial e formatado de nome,

NSIS=900

DSIS=DRIVE1//':DSISTC'//NP//'.DAD'

OPEN(NSIS,FILE=DSIS)

e2) Unidade DG2 - (DCRO.FOR)

É feita a leitura dos dados que controlam a partição em blocos, ou sub-blocos, conforme CROTTY (1982).

Principais variáveis:

NTR - número de linhas bloco

NTC - número de colunas bloco

NH - número de colunas dos termos independentes

MAXR - número máximo de linhas bloco

MAXE - número máximo de colunas da coluna sub-bloco

MAXI - número máximo de colunas sub-bloco

MAXC - número máximo de colunas bloco

MAXSTO - dimensão do vetor {Z} que contém elementos dos blocos ou sub-blocos

NUN - número total de equações do sistema

MAP(I,J) = 0 - bloco da linha bloco I e coluna bloco J nulo

MAP(I,J) = 1 - bloco da linha bloco I e coluna bloco J não-nulo

NROWS(I) - número de linhas da linha bloco I

KOLL(J) - número de colunas da coluna bloco J

Estes dados são gravados em um arquivo de acesso sequencial e formatado de nome,

NDCRO=1200

DCRO=DRIVE1//':DADCRO'//NP//'.DAD'

OPEN(NDCRO,FILE=DCRO)



e3) Unidade DG3 - (DSAI.FOR)

Nesta unidade são lidos os dados necessários para a saída dos resultados.

Principais variáveis:

IORDS(I) - vetor que ordena a posição do ponto I (sistema global) conforme a saída do vetor solução {Z}

IOG(I) = 1 - para  $z(I) = u$

IOG(I) = 2 - para  $z(I) = p$

ISAICF(I) = 0 - pontos sem interface MEC-MEF

ISAICF(I) = 1 - pontos com interface MEC-MEF.

Estes dados são gravados em um arquivo de acesso sequencial e formatado de nome,

```
NDSAI=1200
```

```
DSAI=DRIVE1///:DADSAI'//NP///.DAD'
```

```
OPEN(NDSAI,FILE=DSAI)
```

### 8.2.2 - Geração das matrizes.

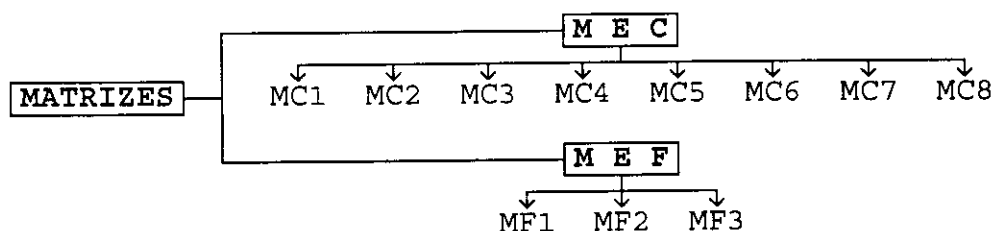


Fig.8.2.3 Fluxograma da geração das matrizes

#### A) MATRIZES DA ESTRUTURA BIDIMENSIONAL - MEC

a1) Unidade MC1 - (CHG.FOR)

São geradas as matrizes [H] e [G] que se referem aos deslocamentos dos pontos do contorno para cada sub-região IS e gravadas em diferentes arquivos de acesso direto e não formatados de nomes,

```

NCH=5100+IS
CH=DRIVE2///:MATCH'//NP//C///.MAT'
OPEN(NCH,FILE=CH,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NND)

NCG=5200+IS
CG=DRIVE2///:MATCG'//NP//C///.MAT'
OPEN(NCG,FILE=CG,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NND)

```

a2) Unidade MC2 - (CHGI.FOR)

São geradas as matrizes [HI] e [GI] referentes aos deslocamentos dos pontos internos de cada sub-região IS e gravadas em diferentes arquivos de acesso direto e não formatados de nomes,

```

NCHI=5300+IS
CHI=DRIVE2///:MATCH'//NP//C///.MAT'
OPEN(NCHI,FILE=CHI,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NND)

NCGI=5400+IS
CGI=DRIVE2///:MATCG'//NP//C///.MAT'
OPEN(NCGI,FILE=CGI,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NND)

```

a3) Unidade MC3 - (CHGTI.FOR)

Nesta unidade são geradas as matrizes [HTI] e [GTI] referentes às tensões dos pontos internos de cada sub-região IS e gravadas em diferentes arquivos de acesso direto e não formatados de nomes,

```

NHTI=7500+IS
CHTI=DRIVE2///:HTPIN'//NP//C///.MAT'
OPEN(NHTI,FILE=CHTI,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NIP)

NGTI=7600+IS
CGTI=DRIVE2///:GTPIN'//NP//C///.MAT'
OPEN(NGTI,FILE=CGTI,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NIP)

```

a4) Unidade MC4 - (CHGEI.FOR)

São geradas as matrizes [HIC], [GCI], [GIC], [GII], correspondente aos elementos internos e gravadas em arquivos de acesso direto não formatados de nomes,

```

NHIC=5600+IS
CHIC=DRIVE2//':MCHIC'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NHIC,FILE=CHIC,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NNDI)

NGCI=5700+IS
CGCI=DRIVE2//':MCGCI'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NGCI,FILE=CGCI,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NND)

NGIC=5800+IS
CGIC=DRIVE2//';MCGIC'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NGIC,FILE=CGIC,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NNDI)

NGII=5900+IS
CGII=DRIVE2//':MCGII'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NGII,FILE=CGII,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NNDI)

```

a5) Unidade MC5 - (CHGTC.FOR)

Nesta unidade são geradas as matrizes [HTC] e [GTC] referentes às tensões dos pontos do contorno de cada sub-região IS e gravadas em diferentes arquivos de acesso direto não formatados de nomes,

```

NHTC=7700+IS
CHTC=DRIVE2//':HTCON'//NP//'.MAT'
OPEN(NHTC,FILE=CHTC,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NND)

NGTC=7800+IS
CGTC=DRIVE2//':GTCON'//NP//'.MAT'
OPEN(NGTC,FILE=GHTC,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NND)

```

a6) Unidade MC6 - (CEDC.FOR)

É gerada a matriz [E] correspondente a deslocamentos dos pontos do contorno devido a aplicação de tensões iniciais. Os elementos desta matriz são gravados por coluna para cada sub-região IS, em arquivos não formatados de acesso direto de nomes,

```

NEDC=9000+IS
EDC=DRIVE2//':CEDCO'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NEDC,FILE=EDC,ACCESS='DIRECT',RECL=4*3*NND)

```

## a7) Unidade MC7 - (CETC.FOR)

Gera a matriz [E] referente a tensões elásticas dos pontos do contorno devido a aplicação de tensões iniciais. Os elementos desta matriz são gravadas por coluna para cada sub-região IS, em arquivos não formatados de acesso direto, com os nomes escritos da seguinte forma,

```
NETC=9300+IS
ETC=DRIVE2//':CETCO'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NETC,FILE=ETC,ACCESS='DIRECT',RECL=4*3*NND)
```

## a8) Unidade MC8 - (CETI.FOR)

É da mesma forma que a Unidade MC7, só que para tensões elásticas de pontos internos. Os nomes dos arquivos são,

```
NETI=9400+IS
ETI=DRIVE2//':CETIN'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NETI,FILE=ETI,ACCESS='DIRECT',RECL=4*3*NIP)
```

## B) ESTRUTURAS RETICULADAS - MEF

## b1) Unidade MF1 - (FR.FOR)

Gera a matriz de rigidez [R] de cada estrutura reticulada IER, colocando-se primeiro as coordenadas dos pontos não de interface MEC-MEF. As matrizes de cada estrutura reticulada são gravadas em diferentes arquivos de acesso direto e não formatados sendo uma linha em cada registro. Os nomes dos arquivos são escritos da seguinte forma,

```
C=CHAR(64+IER)
NFR=6000+IER
FR=DRIVE2//':MATR-'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NFR,FILE=FR,ACCESS='DIRECT',RECL=4*3*NNOS)
```

## b2) Unidade MF2 - (FM.FOR)

Nesta unidade é gerada a matriz [M] que transforma a

força de superfície {p} em força nodal {f}, para cada estrutura reticulada IER, colocando-se primeiro as coordenadas de rotação. Estas matrizes são gravadas em diferentes arquivos de acesso direto e não formatados, sendo uma linha em cada registro, com os nomes,

```
NFM=6100+IER
FM=DRIVE2//':MATM-'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NFM,FILE=FM,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NOINT)

NRII=6400+IER
FRII=DRIVE2//':RMII-'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NRII,FILE=FRII,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NOINT)

NFII=6700+IER
FFII=DRIVE2//':FFII-'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NFII,FILE=FFII,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NOINT)
```

### b3) Unidade MF3 - (FMOD.FOR)

Nesta unidade, as matrizes [R], [M] e o vetor {f}, são modificados conforme as equações de (5.3.12) a (5.3.15). Após as modificações são gravados em arquivos de acesso direto e não formatados de nomes,

[RMei]

```
NREI=6300+IER
FREI=DRIVE2//':RMEI'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NREI,FILE=FREI,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NOINT)
```

[RMii]

```
NRII=6400+IER
FRII=DRIVE2//':RMII'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NRII,FILE=FRII,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NOINT)
```

[Mei]

```
NMEI=6500+IER
FMEI=DRIVE2//':MMEI'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NMEI,FILE=FMEI,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NOINT)
```

[Mii]

```
NMII=6550+IER
FMII=DRIVE2//':MMII'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NMII,FILE=FMII,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NOINT)
```

{Fe}

```
NFEI=6600+IER
FFEI=DRIVE2//':FFEI'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NFEI,FILE=FFEI,ACCESS='DIRECT',RECL=4*LEE)
```

onde LEE=3\*NEXT+NOINT

{Fi}

```
NFII=6700+IER
FFII=DRIVE2//':FFII'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NFII,FILE=FFII,ACCESS='DIRECT',RECL=4*2*NOINT)
```

### 8.2.3 Montagem e resolução do sistema de equações

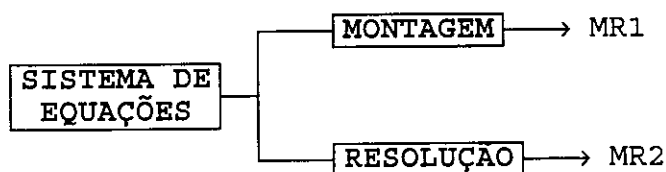


Fig.8.2.4 Fluxograma do sistema de equações

#### a) Unidade MR1 - (CF.FOR)

Nesta unidade é feita a montagem dos blocos conforme o algoritmo de CROTTY (1982), que segue uma disposição particular. Estão previstos elementos de contorno, elementos internos e combinação MEC-MEF. Os blocos gerados são gravados em diferentes arquivos de acesso sequencial e não formatados, cujos nomes são escritos da seguinte forma,

```
NCFZ=6900+IB
CFZ=DRIVE2//':ZCRO'//NP//C1//C2//'.MAT'
OPEN(NCFZ,FILE=CFZ,FORM='UNFORMATTED')
```

onde

IB = número do bloco

C1 = variável caracter de A a Z

C2 = variável caracter de A a Z

b) Unidade MR2 - (CRO.FOR)

O sistema de equações é resolvido pelo algoritmo proposto por CROTTY (1982). Esta unidade de programa é composta de várias sub-rotinas apresentadas na Fig. 8.2.5 a seguir.

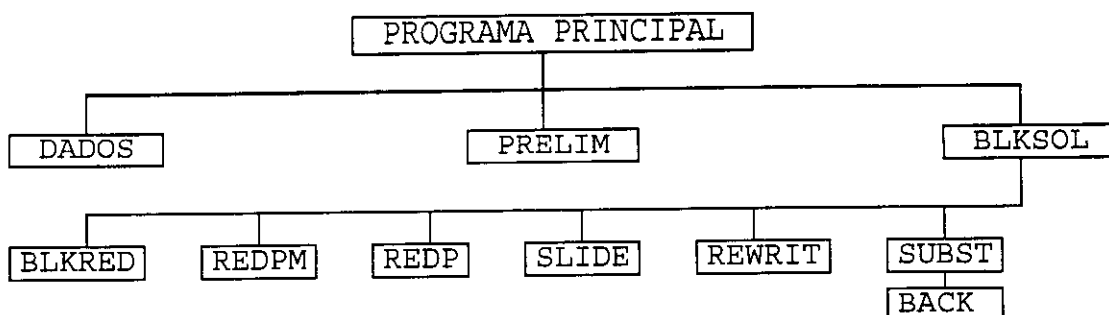


Fig.8.2.5 Fluxograma da unidade MR2

São utilizados três arquivos descritos a seguir:

LU1=7000 - unidade associada ao arquivo de acesso direto e não formatado para armazenar os blocos ou sub-blocos.

VETZ=DRIVE2//':VETORZ'//NP//:MAT'

OPEN(LU1,FILE=VETZ,ACCESS='DIRECT',RECL=4\*NELB)

onde NELB é o número de elementos do bloco gravado.

LU2=7100 - unidade associada ao arquivo de acesso direto e não formatado, para armazenar a solução.

SOLZ=DRIVE2//':SOLZ'//NP//'.MAT'

OPEN(LU2,FILE=SOLZ,ACCESS='DIRECT',RECL=4\*NUN)

onde NUN é o número de equações do sistema.

LU3=7300 - unidade associada ao arquivo de acesso sequencial e não formatado, para gravar os multiplicadores das linhas pivô.

```
PIVZ=DRIVE2//':PIVSIS'//NP//'.MAT'
OPEN(LU3,FILE=PIVZ,FORM='UNFORMATTED')
```

b1) Leitura dos dados

São lidos os dados necessários no arquivo,  
 DCRO = DRIVE2//':DADCRO'//NP//'.DAD'.

b2) Sub-rotina PRELIM

Respeitando-se os valores das variáveis na entrada de dados é feita a partição de [A] em blocos ou sub-blocos, considerando-se inclusive os termos independentes.

O arquivo de acesso direto VETZ é alterado durante o processamento e, para preservar os blocos iniciais na unidade MR1 os blocos são gravados em arquivos de acesso sequencial e não formatados.

Antes de se executar a sub-rotina BLKSOL, os blocos são lidos dos arquivos de acesso sequencial e gravados no arquivo VETZ conforme a partição obtida pela sub-rotina PRELIM.

b3) Sub-rotina BLKSOL

Através desta sub-rotina é feito o controle da eliminação dos blocos e retro-substituição para se obter a solução do sistema de equações. São utilizadas várias sub-rotinas descritas a seguir.

BLKRED - leitura de blocos ou sub-blocos no arquivo VETZ

REDPM - elimina blocos pivôs, isto é, blocos da diagonal

REDP - elimina demais blocos

SLIDE - compacta bloco ou sub-bloco eliminado

REWRIT - grava bloco ou sub-bloco eliminado no arquivo VETZ

SUBST - calcula as incógnitas por retro-substituição através da sub-rotina BACK, armazenando-as no arquivo SOLZ.



## EXEMPLO

Para ilustrar a utilização do algoritmo de CROTTY (1982), é resolvido o seguinte sistema de equações.

$$2x_1 - 4x_2 = 13$$

$$5x_1 + 8x_2 = -12$$

$$4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 21$$

$$2x_1 + x_2 + 9x_3 - 4x_4 = 1$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 9 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13 \\ -12 \\ 21 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ou,

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

onde,

[A] - matriz dos coeficientes das incógnitas

{x} - vetor das incógnitas

{b} - vetor dos termos independentes

É possível dividir a matriz [A] e o vetor {b} em blocos da seguinte forma:

$$[A] = \begin{array}{cc|cc}
 2 & -4 & 0 & 0 \\
 5 & 8 & 0 & 0 \\
 \hline
 4 & 3 & 7 & 6 \\
 2 & 1 & 9 & -4
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \overline{\hspace{1cm}} \\
 \updownarrow \text{linha bloco 1} \\
 \overline{\hspace{1cm}} \\
 \updownarrow \text{linha bloco 2} \\
 \overline{\hspace{1cm}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \overline{\hspace{2cm}} \\
 \leftarrow \hspace{1cm} \leftarrow \hspace{1cm} \\
 \text{coluna bloco 1} \quad \text{coluna bloco 2}
 \end{array}$$

$$\{b\} = \begin{array}{c}
 \overline{\hspace{1cm}} \\
 \updownarrow \text{linha bloco 1} \\
 \overline{\hspace{1cm}} \\
 \updownarrow \text{linha bloco 2} \\
 \overline{\hspace{1cm}}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \overline{\hspace{1cm}} \\
 \leftarrow \hspace{1cm} \\
 \text{coluna bloco 3}
 \end{array}$$

Os elementos dos blocos são armazenados no arquivo VETZ em forma de um vetor Z(MAXSTO) unidimensional, sendo um bloco por registro. Assim, o arquivo de acesso direto VETZ fica definido da seguinte forma:

Registro	Elementos			
1	2	5	-4	8
2	13	-12		
3	4	2	3	1
4	7	9	6	-4
5	21	1		

São utilizados os seguintes valores para as variáveis:

MAXSTO = 18  
 MAXR = 2  
 MAXI = 5  
 MAXE = 2

MAXC = 5

NTR = 2

NTC = 2

NH = 1

NUN = 4

$$\text{MAP}(I, J) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

NROWS (I) = [2 2]

KOLL(J) = [2 2]

#### Sub-rotina PRELIM

Calcula-se a maior área de memória necessária durante a eliminação dos blocos e durante a retro-substituição. Estes valores são comparados com os valores limites, e se preciso dividem-se os blocos em sub-blocos. Também, são calculados os vetores de controle para a eliminação dos blocos.

Para o exemplo em estudo, após o processamento da sub-rotina PRELIM, obtém-se:

NCL(1) = 2            NCL(2) = 2            NCL(3) = 1

NCL(J) = número de colunas da coluna sub-bloco J

KS1(1) = 1            KS2(1) = 1

KS1(2) = 2            KS2(2) = 2

KS1(3) = 3            KS2(3) = 3

KS1(J) = primeira coluna sub-bloco da coluna bloco J

KS2(J) = última coluna sub-bloco da coluna bloco J

IAD(I, J) = número dos registros do arquivo de acesso direto LU1, para armazenar o sub-bloco da linha bloco I e coluna bloco J

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

#### Sub-rotina BLKSOL

São utilizados os arquivos VETZ, SOLZ e PIVZ para a

eliminação dos blocos e retro-substituição. Para evitarem-se pivôs muito pequenos é definida uma tolerância  $TOL=10^{-7}$ . Nesta sub-rotina é gerada a variável  $NCOL(K)$  que indica o número de vetores solução a serem gravados no registro  $K$  do arquivo SOLZ.

No exemplo em estudo, os blocos são eliminados na seguinte sequência:

1) Linha bloco pivô 1 (1.a etapa)

a) Eliminação dos blocos da linha bloco pivô 1

a1) Eliminação do bloco pivô

Leitura do bloco pivô feita através da sub-rotina BLKRED

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(1) & z(3) \\ z(2) & z(4) \end{bmatrix}$$

Eliminação do bloco pela sub-rotina REDPM

$$\begin{bmatrix} 5,0 & -4,0 \\ 2,0 & -7,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(1) & z(3) \\ z(2) & z(4) \end{bmatrix}$$

São obtidos também os multiplicadores,

$$P(1,1) = 1,0 \quad P(1,2) = 1,6 \quad P(2,2) = 1,0$$

$$P(I,J) = \begin{bmatrix} 1,0 = z(13) & 1,6 = z(15) \\ 0,0 = z(14) & 1,0 = z(16) \end{bmatrix}$$

a2) Eliminação dos demais blocos da linha bloco pivô 1

Leitura do bloco pela sub-rotina BLKRED

$$\begin{Bmatrix} 13 \\ -12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z(5) \\ z(6) \end{Bmatrix}$$

Eliminação do bloco pela sub-rotina REDP

$$\begin{Bmatrix} 13,0 \\ 17,8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z(5) \\ z(6) \end{Bmatrix}$$

São obtidos, também, os seguintes multiplicadores,

$$P(1,1) = -2,40 \quad z(17)$$

$$P(2,1) = -2,47 \quad z(18)$$

Os multiplicadores da linha bloco pivô 1, obtidos em a1) e a2) são armazenados no arquivo PIVZ, nas posições z(13) a z(18).

b) Eliminação dos blocos ativos nas linhas bloco não pivô

b.1) Eliminação do bloco ativo abaixo do bloco pivô

Leitura do bloco pela sub-rotina BLKRED.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(1) & z(3) \\ z(2) & z(4) \end{bmatrix}$$

Eliminação do bloco pela sub-rotina REDPM

$$\begin{bmatrix} 4,0 & -3,4 \\ 2,0 & -2,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(1) & z(3) \\ z(2) & z(4) \end{bmatrix}$$

b.2) Eliminação dos demais blocos ativos da linha bloco não pivô

Leitura do bloco pela sub-rotina BLKRED

$$\begin{Bmatrix} 21 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z(5) \\ z(6) \end{Bmatrix}$$

Eliminação do bloco pela sub-rotina REDP.

$$\begin{Bmatrix} 22,19 \\ 0,36 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z(5) \\ z(6) \end{Bmatrix}$$

Com a sub-rotina REWRIT, estes valores são gravados no arquivo VETZ, nas mesmas posições onde estavam os valores 21,0 e 1,0 alterando-se o arquivo inicial VETZ. Os blocos ativos estão posicionados depois do bloco da diagonal da correspondente linha bloco não pivô, no caso, linha bloco 2.

2) Linha bloco pivô 2 - (2.a etapa)

a) Eliminação dos blocos da linha bloco pivô 2

Os blocos considerados na linha bloco pivô 2 estão depois da coluna bloco 2, isto é, após a diagonal.

a1) Eliminação do bloco pivô

Leitura do bloco pela sub-rotina BLKRED

$$\begin{bmatrix} 7,0 & 6,0 \\ 9,0 & -4,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(1) & z(3) \\ z(2) & z(4) \end{bmatrix}$$

Eliminação do bloco pela sub-rotina REDPM

$$\begin{bmatrix} 9,0 & 6,0 \\ 7,0 & 9,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(1) & z(3) \\ z(2) & z(4) \end{bmatrix}$$

São obtidos também os multiplicadores,

$$P(1,1) = 1,0 \quad P(1,2) = -0,44 \quad P(2,2) = 1,0$$

$$P(I,J) = \begin{bmatrix} 1,0 = z(13) & -0,44 = z(15) \\ 0 = z(14) & 1,0 = z(16) \end{bmatrix}$$

a2) Eliminação dos demais blocos da linha bloco pivô 2

Leitura do bloco pela sub-rotina BLKRED

$$\begin{Bmatrix} 22,19 \\ 0,36 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z(5) \\ z(6) \end{Bmatrix}$$

Eliminação do bloco pela sub-rotina REDP

$$\begin{Bmatrix} 22,19 \\ 21,91 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z(5) \\ z(6) \end{Bmatrix}$$

São obtidos, também, os multiplicadores,

$$P(1,1) = 0,04 \quad z(17)$$

$$P(2,1) = 2,40 \quad z(18)$$

Os multiplicadores da linha bloco 2, obtidos em a1) e a2) são gravados no arquivo PIVZ nas posições z(13) a z(18).

#### Sub-rotina SUBST

As incógnitas do sistema, que estão no vetor  $\{x\}$ , são determinadas por retro-substituição, através da sub-rotina BACK, e armazenadas no arquivo SOLZ.

No Exemplo em estudo tem-se:

- a) Leitura dos multiplicadores da linha bloco 2, no arquivo PIVZ

[1,0 0,0 -0,44 1,0 0,04]

Executa-se a retro-substituição através da sub-rotina BACK e obtém-se as incógnitas,

$x(4) = 2,405$  e  $x(3) = 1,109$

que são gravadas no arquivo SOLZ nas posições z(4) e z(3) respectivamente.

- b) Leitura dos multiplicadores da linha bloco pivô 1, no arquivo PIVZ

[1,0 0,0 1,6 -2,4 2,47]

Obtém-se as incógnitas por reto-substituição, através da sub-rotina BACK,

$x(2) = -2,472$  e  $x(1) = 1,555$

que são gravadas no arquivo SOLZ, nas posições z(2) e z(1) respectivamente.

Portanto a solução do sistema de equações fica dada por:

$x(1) = 1,555$

$x(2) = -2,472$

$x(3) = 1,109$

$x(4) = 2,405$

## 8.2.4 Plasticidade do material

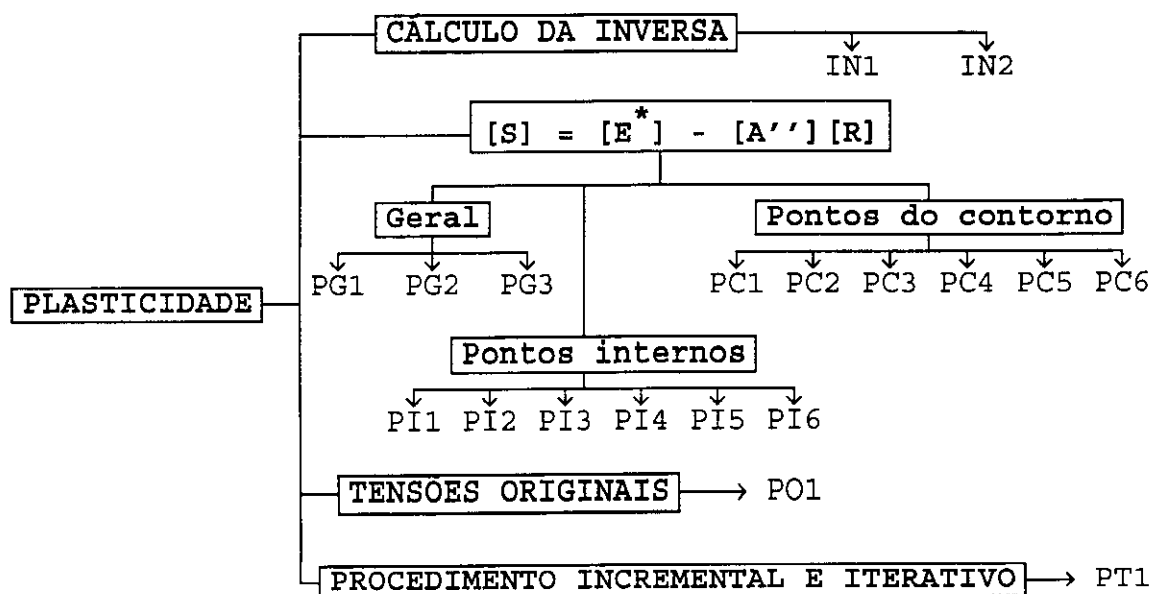


Fig.8.2.5 Fluxograma da plasticidade

## A) CÁLCULO DA INVERSA

## a1) Unidade IN1 - (CFB.FOR)

É processada para montar os blocos com elementos de valores, unitário ou nulo, conforme as NH colunas da matriz identidade [I] em cada etapa de obtenção da inversa. Estes blocos são gravados da mesma forma utilizada na Unidade MR1.

## a2) - Unidade IN2 - (LINV.FOR)

Para cada etapa de obtenção da inversa, após resolver o sistema através da unidade MR2, a solução é lida através desta unidade, sendo cada coluna da inversa gravada em um registro de um arquivo de acesso direto e não formatado.

```
NINV=9500
```

```
AINV=DRIVE2//':AINVER'//NP//'.MAT'
```

```
OPEN(NINV,FILE=AINV,ACCESS='DIRECT',RECL=4*NUN)
```



B) CÁLCULO DA MATRIZ  $[S] = [E] - [A][R]$

b1) Cálculos gerais

b1.1) Unidade PG1 - (MONFC.FOR)

É feita a montagem do vetor  $\{F\}$  que é constituído por elementos obtidos do produto  $G_k P_k$  ou  $H_k U_k$  conforme os valores prescritos. Este vetor é gravado em um arquivo de acesso sequencial e não formatado.

```
NFG=12000
FG=DRIVE2//':VETFGL'//NP//'.MAT'
OPEN(NFG, FILE=FG, FORM='UNFORMATTED')
```

b1.2) Unidade PG2 - (PROIF.FOR)

Executa o produto  $[A^{-1}]\{F\} = \{M\}$  e grava o resultado em um arquivo de acesso sequencial e não formatado.

```
NCM=12100
CM=DRIVE2//':VETUCM'//NP//'.MAT'
OPEN(NCM, FILE=CM)
```

b1.3) Unidade PG3 - (PROIEC.FOR)

Executa o produto  $[A^{-1}][E] = [R]$ , gravando cada coluna de  $[R]$  em um registro do arquivo de acesso direto e não formatado.

```
NCR=12200
CR=DRIVE2//':MATIEC'//NP//'.MAT'
OPEN(NCR, FILE=CR, ACCESS='DIRECT', RECL=4*NUN)
```

b2) Cálculo de  $[S]$  para os pontos internos

b2.1) Unidade PI1 - (MONFLI.FOR)

É feita a montagem do vetor  $\{F''\}$  que é constituído por elementos obtidos através do produto  $H''_{ik} U_k$  ou  $G''_{ik} P_k$  conforme os valores prescritos. Este vetor é gravado em um arquivo de acesso sequencial e não formatado.

```
NFLI=12300
FLI=DRIVE2//':MATFLI'//NP//'.MAT'
OPEN(NFLI,FILE=FLI,FORM='UNFORMATTED')
```

b2.2) Unidade PI2 - (MONALI.FOR)

É feita a montagem da matriz [A"] em função dos valores prescritos. Cada coluna desta matriz é armazenada em um registro do arquivo de acesso direto e não formatado.

```
NALI=12400+IS
ALI=DRIVE2//':MTALI'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NALI,FILE=ALI,ACCESS='DIRECT',RECL=4*3*NIP)
```

b2.3) Unidade PI3 - (PROAMI.FOR)

Executa o produto [A"]{M} gravando o resultado em um arquivo de acesso sequencial e não formatado.

```
NAIM=12500
PIM=DRIVE2//':PRDAIM'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NAIM,FILE=PIM,FORM='UNFORMATTED')
```

b2.4) Unidade PI4 - (SUBFMI.FOR)

Executa o produto {F"} - [A"]{M} = {N} e grava o resultado no arquivo de acesso sequencial e não formatado.

```
NTIN=12600
STIN=DRIVE2//':MATTIN'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NTIN,FILE=STIN,FORM='UNFORMATTED')
```

b2.5) Unidade PI5 - (PRODAIR.FOR)

Executa o produto [A"] [R] gravando cada coluna em um registro do arquivo de acesso direto e não formatado.

```
NAIR=12700
PAIR=DRIVE2//':MATAIR'//NP//'.MAT'
OPEN(NAIR,FILE=PAIR,ACCESS='DIRECT',RECL=4*3*NIPT)
```

onde NIPT é obtido pelo somatório dos pontos internos de todas as sub-regiões.

## b2.6) Unidade PI6 - (SUBERI.FOR)

Executa a subtração  $[E^*] - [A][R] = [S]$  e grava cada coluna em um registro do arquivo de acesso direto e não formatado de nome,

```
NTIS=12800
STIS=DRIVE2//':MTSTIS'//NP//'.MAT'
OPEN(NTIS,FILE=STIS,ACCESS='DIRECT',RECL=4*3*NIPT)
```

## b3) Cálculo de [S] para os pontos do contorno

É utilizada a mesma sequência do cálculo de [S] para pontos internos, onde apenas os nomes dos arquivos são modificados.

## b3.1) Unidade PC1 - (MONFLC.FOR)

```
NFLC=13300
FLC=DRIVE2//':MATFLC'//NP//'.MAT'
OPEN(NFLC,FILE=FLC,FORM='UNFORMATTED')
```

## b3.2) Unidade PC2 - (MONALC.FOR)

```
NALC=13400+IS
ALC=DRIVE2//':MTALC'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NALC,FILE=ALC,ACCESS='DIRECT',RECL=4*3*NND)
```

## b3.3) Unidade PC3 - (PROAMC.FOR)

```
NACM=13500
PCM=DRIVE2//':PRDACM'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NACM,FILE=PCM,FORM='UNFORMATTED')
```

## b3.4) Unidade PC4 - (SUBFMC.FOR)

```
NTCN=13600
STCN=DRIVE2//':MATTCN'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NTCN,FILE=STCN,FORM='UNFORMATTED')
```

## b3.5) Unidade PC5 - (PRODACR.FOR)

```
NACR=13700
PACR=DRIVE2//':MATACR'//NP//'.MAT'
OPEN(NACR,FILE=PACR,ACCESS='DIRECT',RECL=4*3*NNDT)
```

onde NNDT é obtido pelo somatório dos pontos do contorno de todas as sub-regiões.

b3.6) Unidade PC6 - (SUBERC.FOR)

```
NTCS=13800
STCS=DRIVE2//':MTSTCS'//NP//'.MAT'
OPEN(NTCS, FILE=STCS, ACCESS='DIRECT', RECL=4*3*NNDT)
```

C) TENSÕES ORIGINAIS

c1) Unidade PO1 - (TOR.FOR)

Esta unidade de programa foi elaborada com as possibilidades de cálculo ou leitura das tensões originais para cada sub-região. Os dados necessários para o cálculo são lidos na tela ou em arquivos com os seguintes nomes,

```
NDTEC=15200+IS
DTEC=DRIVE1//':DTEOR'//NP//C//'.DAD'
OPEN(NDTEC, FILE=DTEC)
```

As tensões originais dos pontos internos e dos pontos do contorno são gravadas, respectivamente, nos arquivos de nomes,

```
NTECI=15300+IS
TECI=DRIVE2//':TTECI'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NTECI, FILE=TECI, FORM='UNFORMATTED')
```

```
NTECC=15400+IS
TECC=DRIVE2//':TTECC'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NTECC, FILE=TECC, FORM='UNFORMATTED')
```

São calculadas as forças de superfície dos pontos do contorno correspondentes às tensões originais e gravadas nos arquivos de nomes,

```
NPSU=15400+IS
PSU=DRIVE2//':PSUPE'//NP//C//'.MAT'
OPEN(NPSU, FILE=PSU, FORM='UNFORMATTED')
```

## D) PROCEDIMENTO INCREMENTAL E ITERATIVO

## d1) Unidade PT1 - PLAST.FOR

É implementado o algoritmo para analisar a plasticidade do material, sendo os resultados gravados em arquivos formatados e de acesso sequencial de nomes,

```
C=CHAR(64+ICOUT)
NSAI=16500+ICOUT
SAI=DRIVE1//':SAIPLA'//C//'.SAI'
OPEN(NSAI,FILE=SAI)
```

onde, ICOUT indica em quais incrementos grava os resultados.

**8.2.5 Saída dos resultados**

## a) Unidade SR1 - (SAICF.FOR)

Os deslocamentos, forças de superfície e tensões elásticas do domínio bidimensional e, deslocamentos e esforços da estrutura reticulada, são gravados em arquivos formatados e de acesso sequencial de nomes,

Pontos do contorno (MEC) - deslocamentos

```
NSAIC=7300+IS
SAIC=DRIVE1//':SAI-C'//NP//'.MAT'
OPEN(NSAIC,FILE=SAIC)
```

Estrutura reticulada (MEF)

```
NSAIF=7400+IER
SAIF=DRIVE1//':SAI-F'//NP//C1//'.SAI'
OPEN(NSAIF,FILE=SAIF)
```

Pontos internos (MEC) - deslocamentos

```
NDPI=7700+IS
DPI=DRIVE1//':SAIDI'//NP//C//:SAI'
OPEN(NDPI,FILE=DPI)
```

Pontos internos (MEC) - tensões

```
NTPI=7800+IS
TPI=DRIVE1//':SAITI'//NP//C//'.SAI'
OPEN(NTPI,FILE=TPI)
```

## 9 EXEMPLOS NUMÉRICOS

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns exemplos aplicando o procedimento utilizado neste trabalho, para a combinação do método dos elementos de contorno e elementos finitos.

É feita a simulação de problemas práticos da engenharia onde são analisados diversos casos de acoplamento de uma estrutura reticulada no domínio bidimensional, descritos a seguir:

- a) Acoplamento no contorno de uma sub-região,
- b) Uma mesma estrutura reticulada acoplada no contorno de duas ou mais sub-regiões diferentes,
- c) Acoplamento no interior do domínio de uma sub-região,
- d) Estrutura reticulada parcialmente colocada no domínio de uma sub-região.

Analisa-se, também, a plasticidade do material através de um procedimento incremental e iterativo.

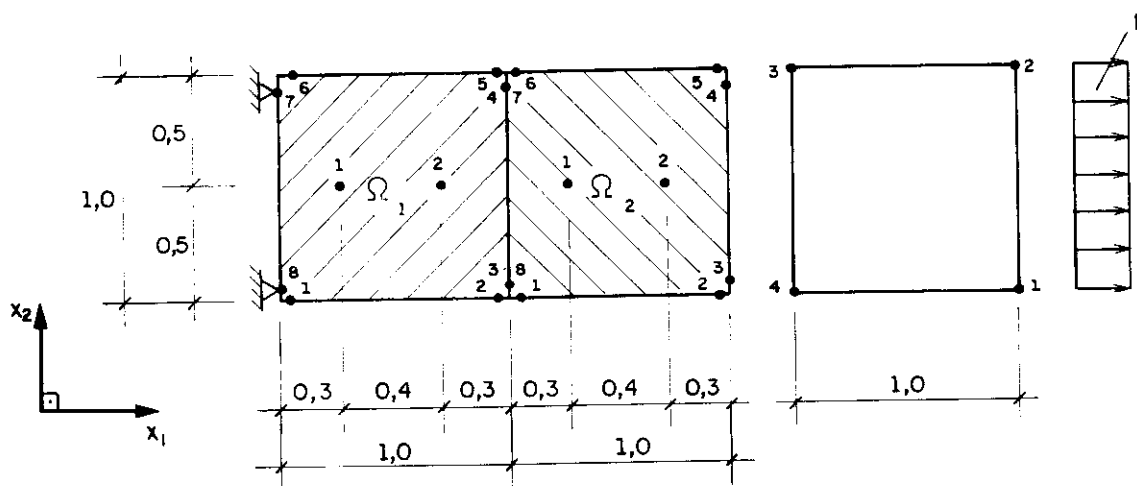
### Exemplo 1

Com este exemplo mostra-se o acoplamento de uma estrutura reticulada no contorno de uma sub-região, admitindo-se estado plano de deformação.

A chapa da Fig. 9.1, é constituída de duas sub-regiões de mesmo material, que apresenta um módulo de deformação

transversal  $G = 0,5$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0$  e, espessura unitária. Está vinculada nos pontos 7 e 8 da sub-região 1, sendo que a estrutura reticulada se acopla no contorno da sub-região 2 através dos pontos 3 e 4.

A estrutura reticulada tem módulo de deformação longitudinal  $E = 1$ , área da seção transversal  $A = 1$  e momento de inércia  $I = 0,0833333$ . O carregamento consiste de uma força de superfície unitária  $p = 1$ , que é aplicado no elemento 1 da estrutura reticulada.



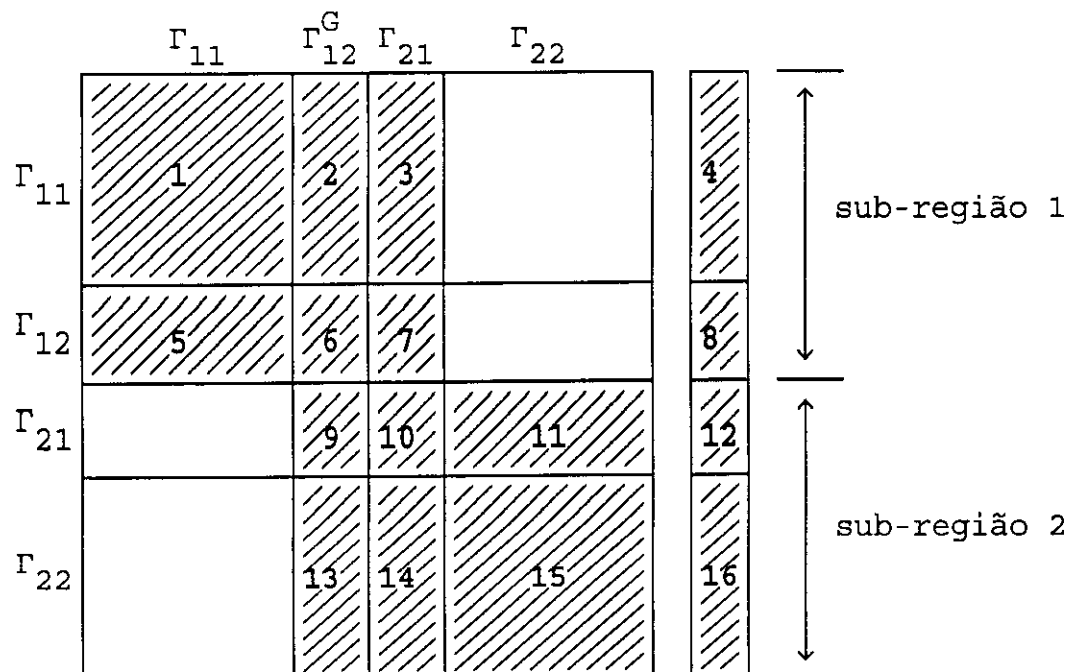
a) Domínio bidimensional

b) Estrutura reticulada

Fig.9.1 Acoplamento MEF no contorno da sub-região 2

A matriz expandida dos coeficientes das incógnitas, isto é, com os termos independentes  $\{b\}$ , contém 16 blocos conforme a partição apresentada na Fig. 9.2. Os blocos 11, 12, 15 e 16 correspondentes à sub-região 2, são afetados com a influência da estrutura reticulada.

Os deslocamentos, forças de superfície e tensões das duas sub-regiões e, deslocamentos e esforços nas extremidades das barras da estrutura reticulada, são apresentados a seguir.

Fig.9.2 Partição da matriz  $[A]$  expandida

## RESULTADOS DA SUB-REGIÃO 1

## DESLOCAMENTOS - Pontos do contorno

PTO	DESL-X1	DESL-X2	P-X1	P-X2
1	1,823097E-07	2,335925E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
2	9,999984E-01	-5,070164E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
3	9,999986E-01	-1,022592E-06	9,999982E-01	-5,557177E-08
4	1,000001E+00	-4,023314E-07	1,000001E-00	2,672136E-07
5	1,000000E+00	-5,290327E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
6	8,565015E-08	2,006007E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
7	0,000000E+00	0,000000E+00	-1,000000E+00	-5,016750E-07
8	0,000000E+00	0,000000E+00	-9,999992E-01	1,716370E-07

## DESLOCAMENTOS - Pontos internos

PTO	DESL-X	DESL-Y
1	2,999999E-01	5,802445E-09
2	6,999948E-01	-2,740470E-07

## TENSÕES - Pontos do contorno

PTO	TENSAO-X	TENSAO-XY	TENSAO-Y	TENSAO-Z
1	9,999982E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
2	9,999982E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
3	9,999982E-01	-5,557177E-08	6,202608E-07	0,000000E+00
4	1,000001E+00	2,672136E-07	6,202608E-07	0,000000E+00
5	1,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
6	1,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
7	1,000000E+00	5,016750E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
8	9,999992E-01	-1,716370E-07	0,000000E+00	0,000000E+00



## TENSÕES - Pontos internos

PTO	TENSAO-X	TENSAO-XY	TENSAO-Y	TENSAO-Z
1	9,999942E-01	1,600188E-07	4,630389E-06	0,000000E+00
2	9,997949E-01	1,943255E-07	1,761270E-04	0,000000E+00

## RESULTADOS DA SUB-REGIÃO 2

## DESLOCAMENTOS - Pontos do contorno

PTO	DESL-X1	DESL-X2	P-X1	P-X2
1	9,999985E-01	-7003546E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
2	1,999996E+00	-4060566E-06	0,000000E+00	0,000000E+00
3	1,999996E+00	-4738569E-06	1,000001E+00	-9,618770E-07
4	2,000002E+00	-4827976E-06	9,999982E-01	9,767770E-07
5	2,000002E+00	-4768372E-06	0,000000E+00	0,000000E+00
6	1,000001E+00	8235222E-08	0,000000E+00	0,000000E+00
7	1,000001E+00	-4023314E-07	-1,000001E+00	-2,672136E-07
8	9,999986E-01	-1022592E-06	-9,999982E-01	5,557177E-08

## DESLOCAMENTOS - Pontos internos

PTO	DESL-X	DESL-Y
1	1,299995E+00	-1,590555E-06
2	1,699989E+00	-3,250568E-06

## TENSÕES - Pontos do contorno

PTO	TENSAO-X	TENSAO-XY	TENSAO-Y	TENSAO-Z
1	9,999977E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
2	9,999977E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
3	1,000001E+00	-9,618770E-07	-8,940697E-08	0,000000E+00
4	9,999982E-01	9,767770E-07	-8,940697E-08	0,000000E+00
5	1,000001E+00	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
6	1,000001E+00	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
7	1,000001E+00	2,672136E-07	6,202608E-07	0,000000E+00
8	9,999982E-01	-5,557177E-08	6,202608E-07	0,000000E+00

## TENSÕES - Pontos internos

PTO	TENSAO-X	TENSAO-XY	TENSAO-Y	TENSAO-Z
1	1,000193E+00	-1,572058E-07	-1,663446E-04	0,000000E+00
2	9,995956E-01	-3,038763E-07	3,472904E-04	0,000000E+00

## RESULTADOS DA ESTRUTURA RETICULADA

## DESLOCAMENTOS

PTO	DESL-X1	DESL-X2	ROTACAO
1	2,500002	1,369044E-06	-2,499939E-01
2	2,499996	1,721084E-06	2,500063E-01
3	1,999996	-4,738569E-06	-2,499934E-01
4	2,000002	-4,827976E-06	2,500061E-01

## ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS

ELEM.	PTO	F-X1	F-X2	M(X1-X2)
1	1	-1,266597E-07	-3,520399E-07	-4,166657E-01
	2	1,266597E-07	3,520399E-07	4,166670E-01
2	2	5,000000E-01	2,980252E-08	4,166663E-01
	3	-5,000000E-01	-2,980252E-08	-4,166666E-01
3	3	-3,725309E-08	8,940697E-08	-4,166670E-01
	4	3,725309E-08	-8,940697E-08	4,166660E-01
4	4	-4,999998E-01	-5,960483E-08	4,166664E-01
	1	4,999998E-01	5,960483E-08	-4,166669E-01

Os resultados obtidos para as sub-regiões e para a estrutura reticulada são valores compatíveis com a situação apresentada. Nos pontos 3 e 4 da sub-região 1 e nos pontos 8 e 7 da sub-região 2, que são pontos de interface entre as duas sub-regiões, as forças de superfície inicialmente incógnitas resultam valor unitário na direção X1 e nulo na direção X2. Os deslocamentos dos pontos 3 e 4 da estrutura reticulada são os mesmos dos pontos 4 e 3 da sub-região 2, pois o acoplamento MEC-MEF ocorreu através destes pontos.

## EXEMPLO 2

Na Fig. 9.3 apresenta-se o caso do acoplamento de uma mesma estrutura reticulada no contorno de duas sub-regiões considerando-se o estado plano de deformação.

A finalidade deste exemplo é mostrar que surgem elementos não-nulos em blocos inicialmente nulos. Da maneira como foi feita a montagem do sistema, a matriz [A] dos coeficientes das incógnitas fica totalmente cheia e, utilizar CROTTY (1982) deixa de ser vantajoso.

Os blocos 1, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 19 e 20 são afetados com a influência da estrutura reticulada, sendo que nos blocos 4, 9, 11 e 16 inicialmente nulos surgem elementos não-nulos pois os pontos 1, 2 da estrutura reticulada são acoplados aos pontos 3, 4 da sub-região 1 e os pontos 2, 3 da estrutura reticulada aos pontos 3, 4 da sub-região 2.

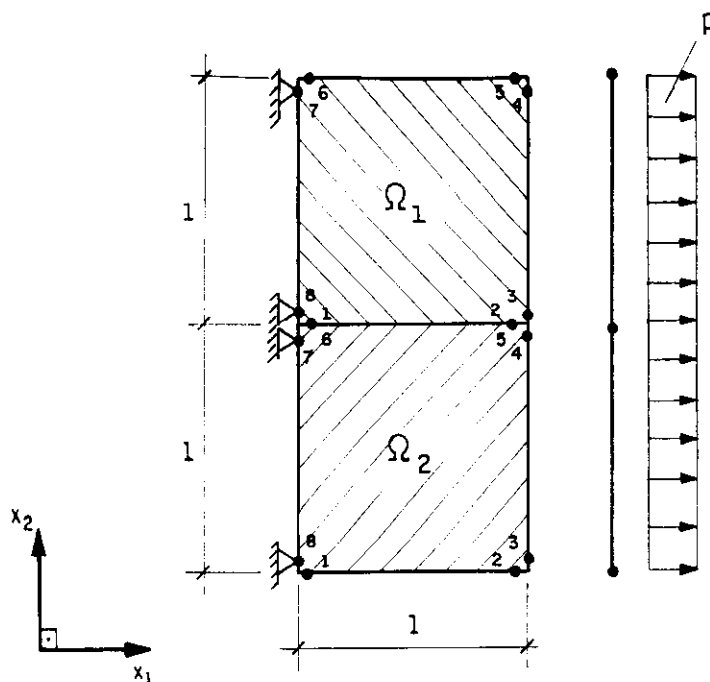


Fig.9.3 Acoplamento MEF no contorno de 2 sub-regiões

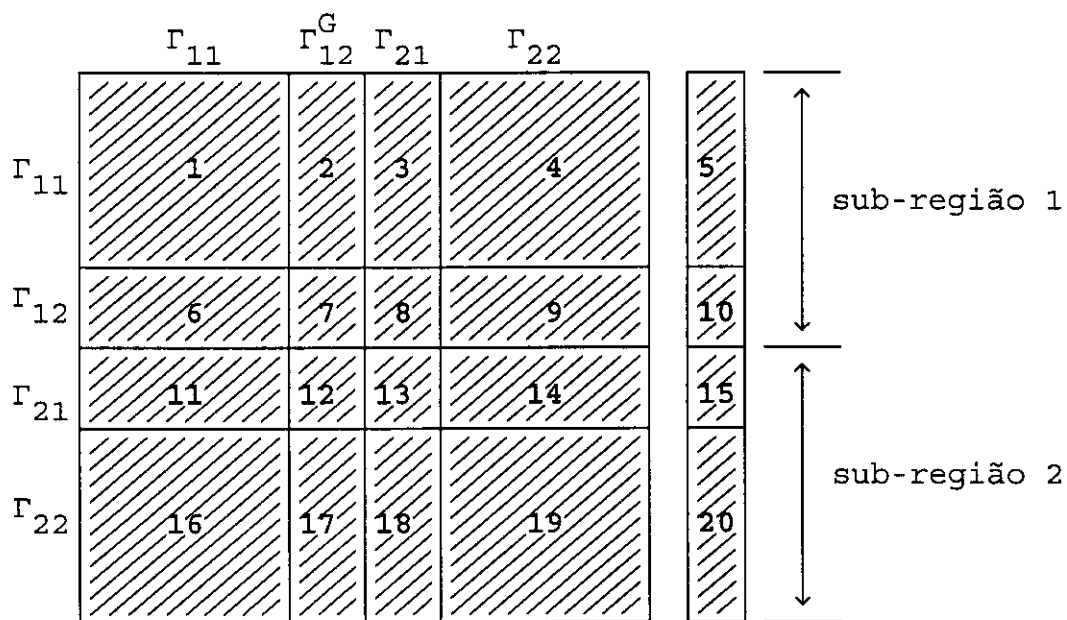


Fig.9.4 Partição da matriz [A] expandida

Utilizando-se os dados do exemplo 1 são obtidos os seguintes resultados.

## SUB-REGIAO 1

## DESLOCAMENTOS - Pontos do contorno

PTO	DESL-X1	DESL-X2	P-X1	P-X2
1	1,192093E-07	2,235174E-08	-1,192093E-07	1,639128E-07
2	9,999997E-01	8,940697E-08	1,192093E-07	-2,086163E-07
3	9,999999E-01	2,607703E-08	9,999996E-01	2,807938E-07
4	9,999998E-01	1,036096E-07	1,000000E+00	-9,639187E-08
5	9,999997E-01	-2,980232E-08	0,000000E+00	0,000000E+00
6	0,000000E+00	4,470348E-08	0,000000E+00	0,000000E+00
7	0,000000E+00	0,000000E+00	-1,000000E+00	-3,725290E-07
8	0,000000E+00	0,000000E+00	-9,999996E-01	3,129244E-07

## TENSÕES - Pontos do contorno

PTO	TENSAO-X	TENSAO-XY	TENSAO-Y	TENSAO-Z
1	9,999996E-01	1,192093E-07	-1,639128E-07	0,000000E+00
2	9,999996E-01	-1,192093E-07	2,086163E-07	0,000000E+00
3	9,999996E-01	2,807938E-07	7,753260E-08	0,000000E+00
4	1,000000E+00	-9,639187E-08	7,753260E-08	0,000000E+00
5	9,999997E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
6	9,999997E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
7	1,000000E+00	3,725290E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
8	9,999996E-01	-3,129244E-07	0,000000E+00	0,000000E+00

## SUB-REGIÃO 2

## DESLOCAMENTOS - Pontos do contorno

PTO	DESL-X1	DESL-X2	P-X1	P-X2
1	2,980232E-08	-1,490116E-08	0,000000E+00	0,000000E+00
2	1,000000E+00	1,788139E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
3	1,000000E+00	1,490116E-07	9,999998E-01	-8,800991E-08
4	9,999996E-01	1,788139E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
5	9,999997E-01	8,940697E-08	-1,192093E-07	2,086163E-07
6	1,192093E-07	2,235174E-08	1,192093E-07	-1,639128E-07
7	0,000000E+00	0,000000E+00	-9,999997E-01	-4,284084E-07
8	0,000000E+00	0,000000E+00	-1,000000E+00	4,254311E-07

## TENSÕES - Pontos do contorno

PTO	TENSAO-X	TENSAO-XY	TENSAO-Y	TENSAO-Z
1	9,999996E-01	1,192093E-07	-1,639128E-07	0,000000E+00
2	9,999996E-01	-1,192093E-07	2,086163E-07	0,000000E+00
3	9,999996E-01	2,807938E-07	7,753260E-08	0,000000E+00
4	1,000000E+00	-9,639187E-08	7,753260E-08	0,000000E+00
5	9,999997E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
6	9,999997E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
7	1,000000E+00	3,725290E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
8	9,999996E-01	-3,129244E-07	0,000000E+00	0,000000E+00

## RESULTADOS DA ESTRUTURA RETICULADA

## DESLOCAMENTOS

PTO	DESL-X1	DESL-X2	ROTACAO
1	9,999999E-01	2,607703E-08	-1,788139E-07
2	9,999998E-01	1,036096E-07	1,321236E-07
3	1,000000	1,490116E-07	6,556511E-07

## ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS

ELEM.	PTO	F-X1	F-X2	M(X1-X2)
1	1	6,457207E-07	-7,753260E-06	-7,781702E-07
	2	-6,457207E-07	7,753260E-06	4,404123E-06
2	2	-2,980231E-06	-4,540198E-06	-6,953876E-06
	3	2,980231E-06	4,540198E-06	3,973644E-06

Os resultados obtidos são os esperados para este problema. Quanto aos elementos não-nulos que surgem nos blocos inicialmente nulos, é possível montar o sistema de equações considerando-se blocos não-nulos apenas para as coordenadas referentes aos pontos de interface MEC-MEF. Neste exemplo, nos pontos da estrutura reticulada ocorre apenas uma translação unitária na direção X1.

## Exemplo 3

A chapa da Fig. 9.5 é constituída de apenas uma sub-região com oito pontos do contorno correspondendo aos seis elementos de contorno e de cinco pontos internos correspondendo aos quatro elementos internos nos quais são acoplados os elementos da estrutura reticulada. É o caso de se executar o acoplamento no interior de uma sub-região.

São utilizados os mesmos dados do exemplo 1, sendo que o carregamento unitário  $p = 1$  é aplicado nos elementos da estrutura reticulada e, admite-se para este problema o estado plano de deformação.

Os resultados do domínio bidimensional e da estrutura reticulada são apresentados a seguir.

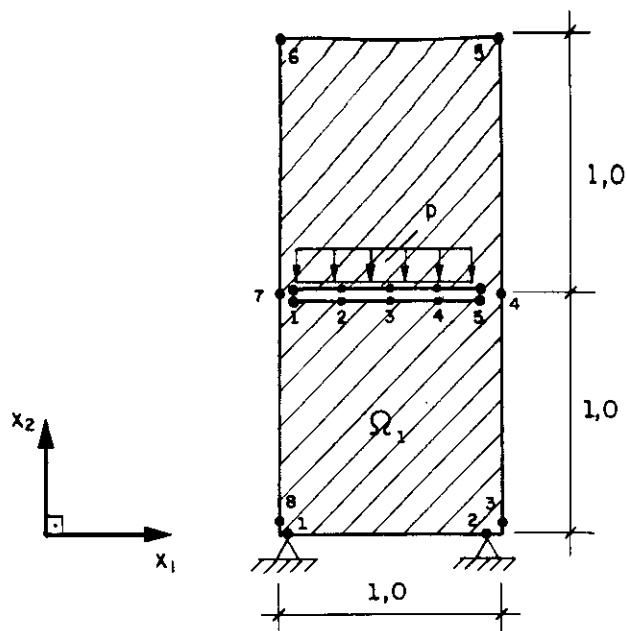


Fig.9.5 Acoplamento MEF no elemento interno

## RESULTADOS DA CHAPA E ESTRUTURA RETICULADA

## SUB-REGIÃO 1

## DESLOCAMENTOS - Pontos do contorno

PTO	DESL-X1	DESL-X2	P-X1	P-X2
1	0,000000E+00	0,000000E+00	-4,939735E-06	9,999579E-01
2	0,000000E+00	0,000000E+00	-7,897615E-07	1,000018E+00
3	-6,638467E-06	-5,543232E-06	0,000000E+00	0,000000E+00
4	3,238022E-05	-1,000010E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
5	7,353723E-05	-1,000010E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
6	7,157028E-05	-9,999679E-01	0,000000E+00	0,000000E+00
7	3,099442E-05	-9,999702E-01	0,000000E+00	0,000000E+00
8	-3,901740E-06	5,836502E-06	0,000000E+00	0,000000E+00

## TENSÕES - Pontos do contorno

PTO	TENSAO-X	TENSAO-XY	TENSAO-Y	TENSAO-Z
1	0,000000E+00	4,939735E-06	-9,999579E-01	0,000000E+00
2	0,000000E+00	7,897615E-07	-1,000018E+00	0,000000E+00
3	0,000000E+00	0,000000E+00	-1,000004E+00	0,000000E+00
4	0,000000E+00	0,000000E+00	-5,000023E-01	0,000000E+00
5	9,834766E-07	0,000000E+00	-1,192093E-07	0,000000E+00
6	9,834766E-07	0,000000E+00	1,132488E-06	0,000000E+00
7	0,000000E+00	0,000000E+00	-4,999869E-01	0,000000E+00
8	0,000000E+00	0,000000E+00	-9,999760E-01	0,000000E+00

## DESLOCAMENTOS - Pontos dos elementos internos

PTO	DESL-X1	DESL-X2
1	3,258745E-05	-9,999683E-01
2	3,268197E-05	-9,999791E-01
3	3,438070E-05	-9,999905E-01
4	3,392750E-05	-1,000003E+00
5	3,314018E-05	-1,000016E+00

## ESTRUTURA RETICULADA

## DESLOCAMENTOS

PTO	DESL-X1	DESL-X2	ROTACAO
1	3,258745E-05	-9,999683E-01	-4,334282E-05
2	3,268197E-05	-9,999791E-01	-4,372885E-05
3	3,438070E-05	-9,999905E-01	-4,744433E-05
4	3,392750E-05	-1,000003E+00	-5,077827E-05
5	3,314018E-05	-1,000016E+00	-5,124835E-05

## ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS

ELEM.	PTO	F-X1	F-X2	M(X1-X2)
1	1	-3,780733E-07	-2,693277E-06	-6,549219E-08
	2	3,780733E-07	2,693277E-06	-6,078288E-07
2	2	-6,794930E-06	-5,714252E-06	7,953793E-07
	3	6,794930E-06	5,714252E-06	-1,747102E-07
3	3	1,812819E-06	9,575883E-06	1,910610E-07
	4	-1,812819E-06	-9,575883E-06	6,523293E-07
4	4	3,149267E-06	5,815145E-06	6,435387E-07
	5	-3,149267E-06	-5,815145E-06	8,102475E-07

O carregamento solicita apenas a parte inferior do domínio da sub-região 1 e, desta forma, os pontos 5 e 6 do contorno apresentam os mesmos deslocamentos dos pontos 4 e 7. Todos os pontos dos elementos internos se deslocam da mesma forma que os pontos da estrutura reticulada. Os pontos 4 e 5 do contorno da chapa são pontos simples e, neste caso, as tensões verticais valem -0,5 pois é a média de valores obtidos considerando-se os dois elementos vizinhos, sendo que a parcela dos elementos superiores é nula e a parcela dos elementos inferiores vale -1,0. Se fossem utilizados pontos duplos nas posições dos pontos 4 e 7, as tensões verticais nos pontos dos elementos superiores seriam nulas e as tensões verticais nos pontos dos elementos inferiores valeriam -1,0.

## Exemplo 4

Considera-se uma chapa no estado plano de deformação, que é solicitada por um carregamento horizontal e unitário,  $p = 1$  indicado na Fig. 9.6. Acopla-se a estrutura reticulada nos elementos do interior do domínio de uma sub-região.

Dois casos extremos são analisados. No primeiro caso o módulo de deformação dos elementos da estrutura reticulada tem valor desprezível e, no segundo caso tem valor infinitamente grande.

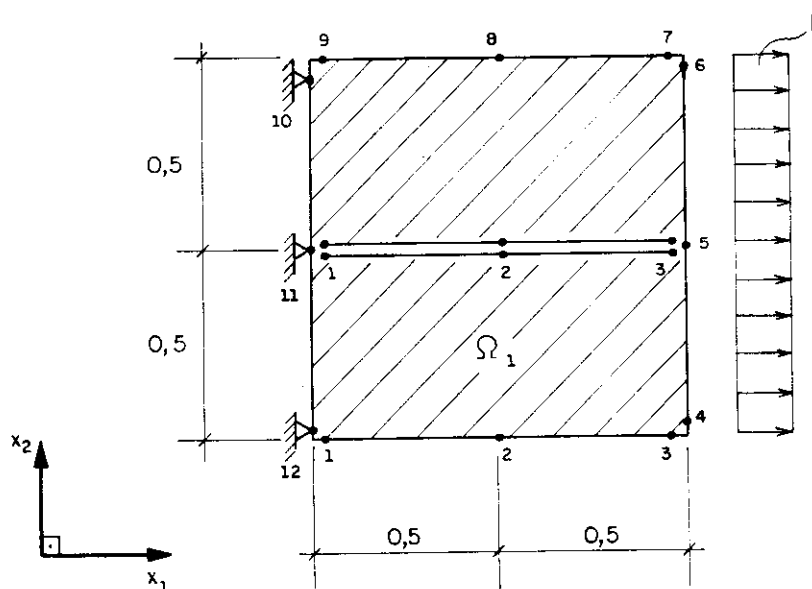


Fig.9.6 Acoplamento MEF no elemento interno

Utilizando-se os mesmos dados do exemplo 1, com o módulo de deformação longitudinal  $E = 10^{-8}$  para os elementos da estrutura reticulada, obtêm-se os deslocamentos, forças de superfície e tensões dos pontos do contorno e pontos internos da sub-região 1 e, deslocamentos e esforços nas extremidades das barras da estrutura reticulada que apresentam os mesmos deslocamentos dos pontos dos elementos internos.



## SUB-REGIÃO 1

## DESLOCAMENTOS - Pontos do contorno

PTO	DESL-X1	DESL-X2	P-X1	P-X2
1	1,639128E-07	1,415610E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
2	4,999997E-01	2,980232E-08	0,000000E+00	0,000000E+00
3	9,999988E-01	-4,768372E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
4	9,999990E-01	-9,536743E-07	1,000000E+00	0,000000E+00
5	1,000000E+00	-1,192093E-07	1,000000E+00	0,000000E+00
6	9,999989E-01	5,364418E-07	1,000000E+00	0,000000E+00
7	9,999987E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
8	5,000000E-01	-2,086163E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
9	2,980232E-07	-2,980232E-08	0,000000E+00	0,000000E+00
10	0,000000E+00	0,000000E+00	-1,000000E+00	-4,768372E-07
11	0,000000E+00	0,000000E+00	-9,999987E-01	-7,590279E-08
12	0,000000E+00	0,000000E+00	-1,000001E+00	7,121688E-07

## DESLOCAMENTOS - Pontos dos elementos internos

PTO	DESL-X1	DESL-X2
1	-9,601103E-09	-5,416899E-11
2	4,999999E-01	-1,534361E-07
3	1,000000E+00	-1,426069E-07

## TENSÕES - Pontos do contorno

PTO	TENSAO-X	TENSAO-XY	TENSAO-Y	TENSAO-Z
1	9,999990E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
2	9,999987E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
3	9,999983E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
4	1,000000E+00	0,000000E+00	1,668930E-06	0,000000E+00
5	1,000000E+00	0,000000E+00	1,490116E-06	0,000000E+00
6	1,000000E+00	0,000000E+00	1,311302E-06	0,000000E+00
7	9,999974E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
8	9,999984E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
9	9,999994E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
10	1,000000E+00	4,768372E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
11	9,999987E-01	7,590279E-08	0,000000E+00	0,000000E+00
12	1,000001E+00	-7,121688E-07	0,000000E+00	0,000000E+00

## ESTRUTURA RETICULADA

## DESLOCAMENTOS

PTO	DESL-X1	DESL-X2	ROTACAO
1	-9,601103E-09	-5,416899E-11	-3,771399E-07
2	4,999999E-01	-1,534361E-07	-1,425527E-07
3	1,000000E+00	1,426069E-07	9,203448E-08

## ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS

ELEM.	PTO	F-X1	F-X2	M(X1-X2)
1	1	-9,999998E-09	1,876698E-15	7,819594E-17
	2	9,999998E-09	-1,876698E-15	8,601530E-16
2	2	-1,000000E-08	-1,876697E-15	-8,601532E-16
	3	1,000000E-08	1,876697E-15	-7,819569E-17

A chapa se deforma como se a estrutura reticulada não existisse. Alterando-se apenas o valor de  $E = 10^8$  para os elementos da estrutura reticulada obtém-se:

## SUB-REGIÃO 1

## DESLOCAMENTOS - Pontos do contorno

PTO	DESL-X1	DESL-X2	P-X1	P-X2
1	1,067722E-02	-6,715447E-03	0,000000E+00	0,000000E+00
2	2,308762E-01	-4,907180E-02	0,000000E+00	0,000000E+00
3	6,611038E-01	1,567276E-01	0,000000E+00	0,000000E+00
4	7,540073E-01	3,508218E-01	1,000000E+00	0,000000E+00
5	5,960464E-07	3,576279E-07	1,000000E+00	0,000000E+00
6	7,540069E-01	-3,508214E-10	1,000000E+00	0,000000E+00
7	6,611032E-01	-1,567271E-01	0,000000E+00	0,000000E+00
8	2,308762E-01	4,907182E-02	0,000000E+00	0,000000E+00
9	1,067722E-02	6,715521E-03	0,000000E+00	0,000000E+00
10	0,000000E+00	0,000000E+00	1,144742E+00	-1,131248E-02
11	0,000000E+00	0,000000E+00	-3,137211E+00	-3,229361E-07
12	0,000000E+00	0,000000E+00	1,144740E+00	1,131278E-02

## DESLOCAMENTOS - Pontos dos elementos internos

PTO	DESL-X1	DESL-X2
1	5,327635E-09	4,830437E-09
2	3,339454E-07	1,087671E-07
3	5,770312E-07	2,127037E-07

## TENSÕES - Pontos do contorno

PTO	TENSAO-X	TENSAO-XY	TENSAO-Y	TENSAO-Z
1	4,403980E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
2	6,504266E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
3	8,604551E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
4	1,000000E+00	0,000000E+00	-7,016429E-01	0,000000E+00
5	1,000000E+00	0,000000E+00	-7,016432E-01	0,000000E+00
6	1,000000E+00	0,000000E+00	-7,016436E-01	0,000000E+00
7	8,604540E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
8	6,504260E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
9	4,403980E-01	0,000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
10	-1,144742E-02	1,131248E-02	0,000000E+00	0,000000E+00
11	3,137211E+00	3,229361E-07	0,000000E+00	0,000000E+00
12	-1,144740E-01	-1,131278E-02	0,000000E+00	0,000000E+00

## ESTRUTURA RETICULADA

## DESLOCAMENTOS

PTO	DESL-X1	DESL-X2	ROTACAO
1	5,327635E-09	4,830437E-09	2,078734E-07
2	3,339454E-07	1,087671E-07	2,078733E-07
3	5,770312E-07	2,127037E-07	2,078732E-07

## ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS

ELEM.	PTO	F-X1	F-X2	M(X1-X2)
1	1	-6,572356E-01	-1,154093E-07	-1,850198E-09
	2	6,572356E-01	1,154093E-07	-4,840388E-08
2	2	-4,861715E-01	1,070305E-08	2,661911E-08
	3	4,861715E-01	-1,070305E-08	8,534736E-08

Nesta situação, a estrutura reticulada trabalha como uma barra rígida não permitindo que os pontos próximos a ela se deformem.

## Exemplo 5

Apresenta-se na Fig. 9.7, o caso de uma estrutura reticulada ser colocada parcialmente em uma sub-região com domínio infinito.

Resolve-se este problema no estado plano de deformação considerando-se os seguintes valores para as características do material da sub-região de domínio infinito:

módulo de deformação transversal  $G = 8500 \text{ kN/cm}^2$

coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$

Aplica-se uma força horizontal  $F = 10 \text{ kN}$  na extremidade livre da estrutura reticulada que apresenta as seguintes características:

módulo de deformação longitudinal  $E = 1000 \text{ kN/cm}^2$

área da seção transversal  $A = 3000 \text{ cm}^2$

momento de inércia  $I = 225000 \text{ cm}^4$

A estrutura reticulada é discretizada em oito elementos sendo que nos pontos de 5 a 9 é feito o acoplamento MEC-MEF com os pontos de 1 a 5 dos elementos internos.

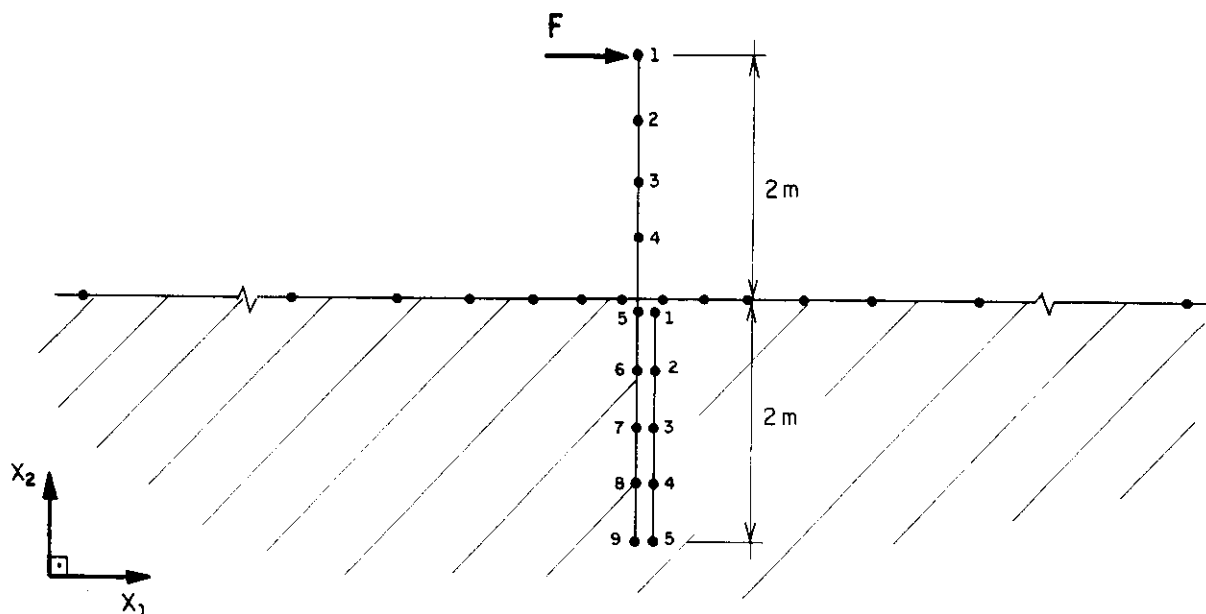


Fig.9.7 Barra parcialmente colocada em um domínio infinito

É indicada na Fig. 9.8, a forma dos deslocamentos ocorridos no domínio infinito e na estrutura reticulada para o caso deste problema.

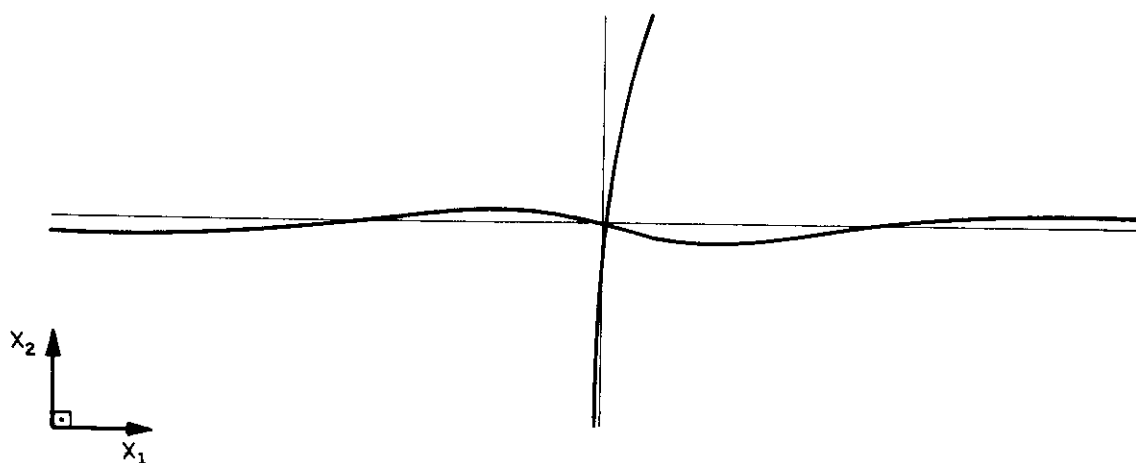


Fig.9.8 Esquema dos deslocamentos

Os pontos 1, 2, 3 e 4 da estrutura reticulada não são pontos de interface MEC-MEF e suas coordenadas, duas de translação e uma rotação, juntamente com as coordenadas de

rotação dos pontos 5, 6, 7, 8 e 9, são eliminadas com operações elementares.

A influência da eliminação destas coordenadas é considerada no acoplamento através das forças de superfície dos pontos de interface MEC-MEF.

#### DESLOCAMENTOS DA ESTRUTURA RETICULADA (cm)

PTO	DESL-X1	DESL-X2	ROTACAO
1	1,745877E-01	6,387767E-05	-1,156438E-03
2	1,176917E-01	6,387767E-05	-1,100882E-03
3	6,635124E-02	6,387767E-05	-9,342157E-04
4	2,612194E-02	6,387767E-05	-6,564379E-04
5	2,559301E-03	6,387767E-05	-2,675491E-04
6	-1,796736E-03	5,783168E-05	1,778905E-05
7	-1,220951E-03	5,705938E-05	2,985689E-08
8	-1,453056E-03	6,047898E-05	-1,299110E-05
9	-2,541627E-03	6,875375E-05	-2,558064E-05

Obtém-se o mesmo deslocamento horizontal para ponto 1 da estrutura reticulada, com o procedimento de combinação elementos de contorno e elementos finitos ou através da teoria da resistência dos materiais.

No exemplo em estudo tem-se,

$$u^*(1) = 1,745877E-01 \text{ cm.}$$

Como o domínio infinito se deforma deve-se considerar o deslocamento horizontal e a rotação do ponto 5. Desta forma, o deslocamento final do ponto 1 é dado por,

$$u(1) = u^*(1) - u(5) - \theta(5)l.$$

Portanto,

$$u(1) = 1,745877 \cdot 10^{-1} - 2,559301 \cdot 10^{-3} - 2,675491 \cdot 10^{-4} \cdot 200$$

$$u(1) = 0,11851857 \text{ cm.}$$

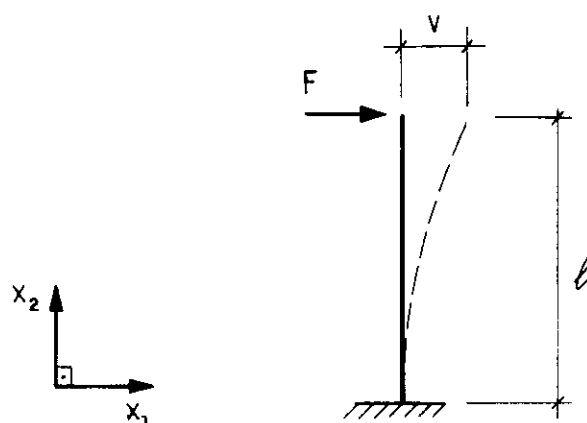


Fig.9.9 Elástica da barra engastada

Pela teoria da resistência dos materiais, uma barra engastada e carregada por uma força  $F$  na extremidade livre, Fig. 9.9, o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da força é dado por:

$$v = \frac{Fl^3}{3EI} = \frac{10 \cdot 200^3}{3 \cdot 1000 \cdot 225000} = 0,11851851 \text{ cm}$$

Com estes resultados mostra-se que o procedimento MEC-MEF desenvolvido neste trabalho, é adequado a problemas desta natureza.

#### Exemplo 6

Na Fig. 9.10, é apresentado um túnel com revestimento de concreto submetido apenas a uma pressão radial e constante  $p = 1000 \text{ kN/m}^2$ . Considerando-se o estado plano de deformação, os deslocamentos e tensões radiais são calculados utilizando-se a teoria da elasticidade, elementos de contorno com duas sub-regiões e o procedimento de combinação MEC-MEF desenvolvido neste trabalho. Quatro discretizações diferentes, 12, 24, 40 e 60 elementos, e espessuras de 30, 20, 15 e 10 cm para o revestimento de concreto, são utilizadas para comparar os resultados dos diversos procedimentos de cálculo.

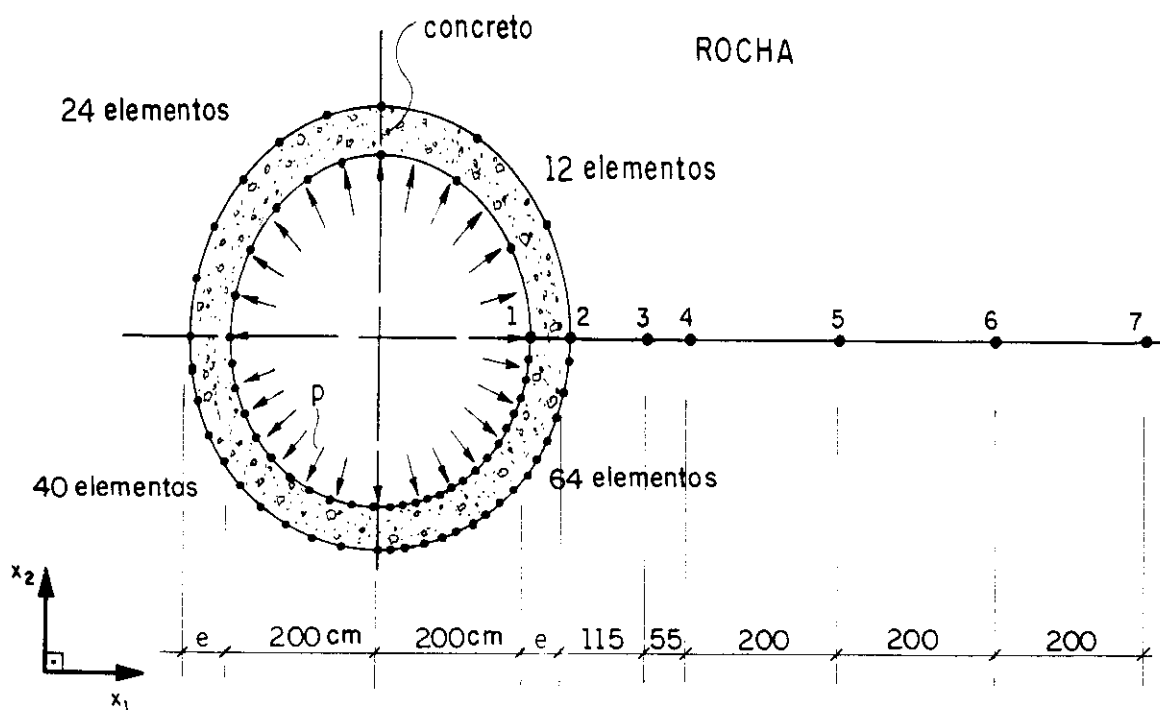


Fig.9.10 Túnel em rocha com revestimento de concreto

Características do revestimento de concreto:

módulo de deformação longitudinal  $E = 25700000 \text{ kN/m}^2$

módulo de deformação transversal  $G = 11173913 \text{ kN/m}^2$

coeficiente de Poisson  $\nu = 0,15$ .

Características da rocha:

módulo de deformação longitudinal  $E = 12850000 \text{ kN/m}^2$

módulo de deformação transversal  $G = 5354167 \text{ kN/m}^2$

coeficiente de Poisson  $\nu = 0,20$ .

No cálculo feito pelo MEC considera-se o domínio composto de duas sub-regiões, sendo uma a rocha e a outra o revestimento de concreto. Já, no cálculo feito pela combinação MEC-MEF, o domínio tem apenas uma sub-região que é a rocha, onde se acopla a estrutura reticulada que é o revestimento de concreto discretizado em barras.

A finalidade principal deste exemplo é observar o comportamento dos deslocamentos e tensões radiais, em função da espessura do revestimento de concreto  $e$ , da discretização utilizada pelo método dos elementos de contorno  $e$ , pelo procedimento de combinação MEC-MEF. São apresentados os resultados para os sete pontos indicados na Fig. 9.10.

DESLOCAMENTOS RADIAIS ( $10^{-4}$  m)

Teoria da elasticidade

Ponto	e = 10	e = 15	e = 20	e = 30
1	1,914	1,809	1,711	1,533
2	1,866	1,739	1,622	1,409
3	1,244	1,159	1,081	0,939
4	1,073	1,000	0,933	0,810
5	0,715	0,667	0,622	0,540
6	0,537	0,500	0,466	0,405
7	0,429	0,400	0,373	0,324

12 elementos

Pt	M E C				MEC - MEF			
	e=10	e=15	e=20	e=30	e=10	e=15	e=20	e=30
1	1,665	1,559	1,470	1,316				
2	1,621	1,498	1,392	1,206	1,755	1,677	1,606	1,481
3	1,056	0,976	0,907	0,786	1,143	1,093	1,047	0,965
4	0,911	0,842	0,782	0,678	0,986	0,942	0,902	0,832
5	0,607	0,561	0,521	0,452	0,657	0,628	0,602	0,555
6	0,455	0,421	0,391	0,339	0,493	0,471	0,451	0,416
7	0,364	0,337	0,313	0,271	0,394	0,377	0,361	0,333

24 elementos

Pt	M E C				MEC - MEF			
	e=10	e=15	e=20	e=30	e=10	e=15	e=20	e=30
1	1,837	1,734	1,639	1,470				
2	1,790	1,666	1,552	1,348	1,895	1,810	1,732	1,585
3	1,186	1,104	1,029	0,894	1,256	1,200	1,148	1,058
4	1,023	0,952	0,887	0,771	1,083	1,035	0,990	0,912
5	0,682	0,635	0,591	0,514	0,722	0,690	0,660	0,608
6	0,512	0,476	0,444	0,385	0,542	0,517	0,495	0,456
7	0,409	0,381	0,355	0,308	0,433	0,414	0,396	0,365

40 elementos

Pt	M E C				MEC - MEF			
	e=10	e=15	e=20	e=30	e=10	e=15	e=20	e=30
1	1,883	1,779	1,683	1,508				
2	1,835	1,709	1,593	1,384	1,927	1,840	1,761	1,621
3	1,221	1,137	1,060	0,921	1,282	1,224	1,171	1,078
4	1,053	0,981	0,914	0,794	1,106	1,056	1,010	0,930
5	0,702	0,654	0,609	0,529	0,737	0,704	0,674	0,620
6	0,526	0,490	0,457	0,397	0,553	0,528	0,505	0,465
7	0,421	0,392	0,366	0,318	0,442	0,422	0,404	0,372



64 elementos

Pt	M E C				MEC - MEF			
	e=10	e=15	e=20	e=30	e=10	e=15	e=20	e=30
1	1,901	1,796	1,699	1,522				
2	1,852	1,726	1,608	1,397	1,938	1,850	1,771	1,630
3	1,234	1,150	1,071	0,930	1,291	1,233	1,180	1,086
4	1,064	0,992	0,924	0,802	1,113	1,063	1,017	0,936
5	0,709	0,661	0,616	0,535	0,742	0,709	0,678	0,624
6	0,532	0,496	0,462	0,401	0,557	0,532	0,509	0,468
7	0,426	0,397	0,370	0,321	0,445	0,425	0,407	0,375

TENSÕES RADIAIS (kN/m<sup>2</sup>)

Teoria da elasticidade

Ponto	e = 10	e = 15	e = 20	e = 30
1	-1000,0	-1000,0	-1000,0	-1000,0
2	-868,7	-809,9	-755,1	-656,1
3	-386,1	-359,9	-335,6	-291,6
4	-287,2	-267,8	-249,6	-216,9
5	-127,6	-119,0	-110,9	-96,4
6	-71,8	-66,9	-62,4	-54,2
7	-45,9	-42,8	-39,9	-34,7

12 elementos

Pt	M E C				MEC - MEF			
	e=10	e=15	e=20	e=30	e=10	e=15	e=20	e=30
1	-873,2	-878,8	-883,2	-890,7				
2	-719,8	-665,3	-618,0	-535,5				
	-784,6	-725,2	-673,7	-583,7	-849,3	-811,8	-777,5	-716,8
3	-329,2	-304,3	-282,7	-244,9	-356,4	-340,6	-326,2	-300,8
4	-244,1	-225,6	-209,6	-181,6	-264,2	-252,5	-241,8	-223,0
5	-108,4	-100,2	-93,0	-80,6	-117,3	-112,1	-107,4	-99,0
6	-61,0	-56,3	-52,3	-45,3	-66,0	-63,1	-60,4	-55,7
7	-39,0	-36,0	-33,5	-29,2	-42,2	-40,4	-38,6	-35,6

24 elementos

Pt	M E C				MEC - MEF			
	e=10	e=15	e=20	e=30	e=10	e=15	e=20	e=30
1	-965,3	-966,5	-967,7	-969,7				
2	-823,2	-766,1	-713,7	-620,0				
	-841,4	-783,0	-729,4	-633,7	-890,8	-850,8	-814,3	-749,9
3	-368,3	-342,7	-319,3	-277,4	-389,9	-372,4	-356,4	-328,2
4	-273,9	-254,9	-237,5	-206,3	-290,0	-277,0	-265,1	-244,2
5	-121,8	-113,3	-105,6	-91,7	-128,9	-123,1	-117,8	-108,5
6	-68,5	-63,7	-59,4	-51,6	-72,5	-69,3	-66,3	-61,0
7	-43,8	-40,8	-38,0	-33,0	-46,4	-44,3	-42,4	-39,1

40 elementos

Pt	M E C				MEC - MEF			
	e=10	e=15	e=20	e=30	e=10	e=15	e=20	e=30
1	-987,2	-987,6	-988,1	-988,8				
2	-850,5	-792,3	-738,4	-641,4				
	-857,2	-798,6	-744,3	-646,5	-900,2	-859,6	-822,6	-757,3
3	-378,9	-353,0	-348,9	-285,7	-397,8	-379,9	-363,6	-334,7
4	-281,8	-262,6	-244,7	-212,6	-296,0	-282,7	-270,5	-249,0
5	-125,3	-116,7	-108,8	-94,5	-131,6	-125,6	-120,2	-110,7
6	-70,5	-65,6	-61,2	-53,1	-74,0	-70,7	-67,6	-62,3
7	-45,1	-42,0	-39,2	-34,0	-47,4	-45,2	-43,3	-39,8

64 elementos

Pt	M E C				MEC - MEF			
	e=10	e=15	e=20	e=30	e=10	e=15	e=20	e=30
1	-994,9	-995,1	-995,3	-995,6				
2	-860,7	-802,1	-747,5	-649,1				
	-863,4	-804,5	-749,8	-651,1	-903,4	-862,7	-825,5	-759,9
3	-382,9	-356,8	-332,5	-288,8	-400,7	-382,6	-366,1	-337,0
4	-284,8	-265,4	-247,4	-214,8	-298,0	-284,6	-272,3	-250,7
5	-126,6	-118,0	-109,9	-95,5	-132,5	-126,5	-121,0	-111,4
6	-71,2	-66,4	-61,8	-53,7	-75,5	-71,2	-68,1	-62,7
7	-45,6	-42,5	-39,6	-34,4	-47,7	-45,5	-43,6	-40,1

Os resultados obtidos do cálculo executado pelo método dos elementos de contorno considerando-se duas sub-regiões diferentes, se aproximam mais dos resultados da teoria da elasticidade quando são utilizadas discretizações com muitos elementos de contorno.

No caso do procedimento de combinação elementos de contorno e elementos finitos, mesmo utilizando-se uma discretização com poucos elementos obtêm-se resultados aceitáveis. Aumentando-se demasiadamente a espessura da estrutura reticulada, a consideração de comportamento de barra deve se tornar grosseira.

Assim, pode-se dizer que para elementos menos esbeltos da estrutura reticulada é mais indicado o cálculo pelo método dos elementos de contorno com duas sub-regiões e, para elementos mais esbeltos da estrutura reticulada o procedimento de combinação elementos de contorno e elementos finitos é o mais indicado.

## Exemplo 7

Na Fig. 9.11, tem-se uma chapa de espessura unitária e composta de duas sub-regiões com o mesmo material. Admite-se o estado plano de deformação e impõe-se um deslocamento horizontal igual a 2, nos pontos 3 e 4 da sub-região 2.

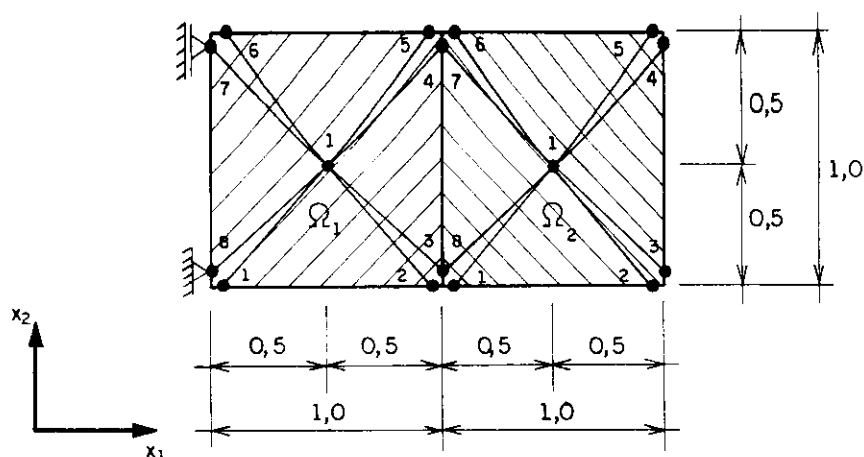


Fig.9.11 Chapa de espessura unitária

Características do material das duas sub-regiões:  
 módulo de deformação longitudinal  $E = 1,0$   
 coeficiente de Poisson  $\nu = 0$   
 tensão de escoamento  $\sigma_y = 0,65$   
 módulo de rigidez tangente  $H' = 0$   
 ângulo de atrito interno  $\phi = 0$ .

Neste exemplo analisa-se o comportamento elastoplástico através do algoritmo apresentado no item 6.3. O contorno de cada uma das duas sub-regiões é discretizado em quatro elementos e oito pontos e, o domínio em quatro células triangulares.

Utilizando-se o critério de Tresca e aplicando-se incrementos de tensão obtém-se o diagrama tensão x deformação da Fig. 9.12.

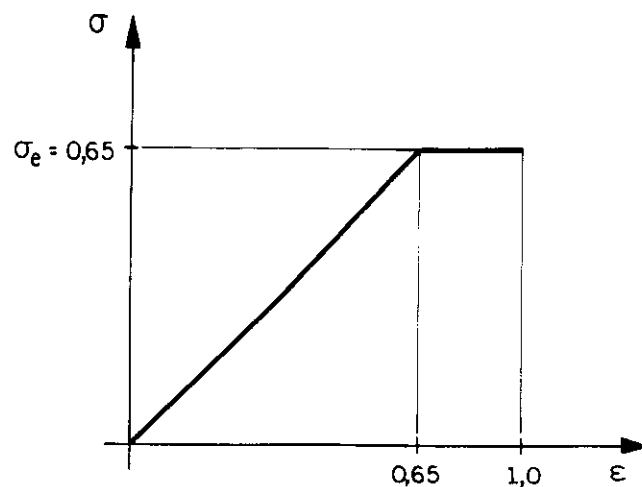


Fig.9.12 Diagrama tensão x deformação

Na direção  $X_1$ , em todos os pontos da chapa tem-se um comportamento elástico até se atingir a tensão de início de plastificação. Acima deste valor, a tensão permanece constante e ocorrem deformações plásticas. No final, todos os pontos estão com tensão  $\sigma_e = 0,65$ , deformação elástica  $\epsilon_e = 0,65$  e deformação plástica  $\epsilon_p = 0,35$ .

Exemplo 8

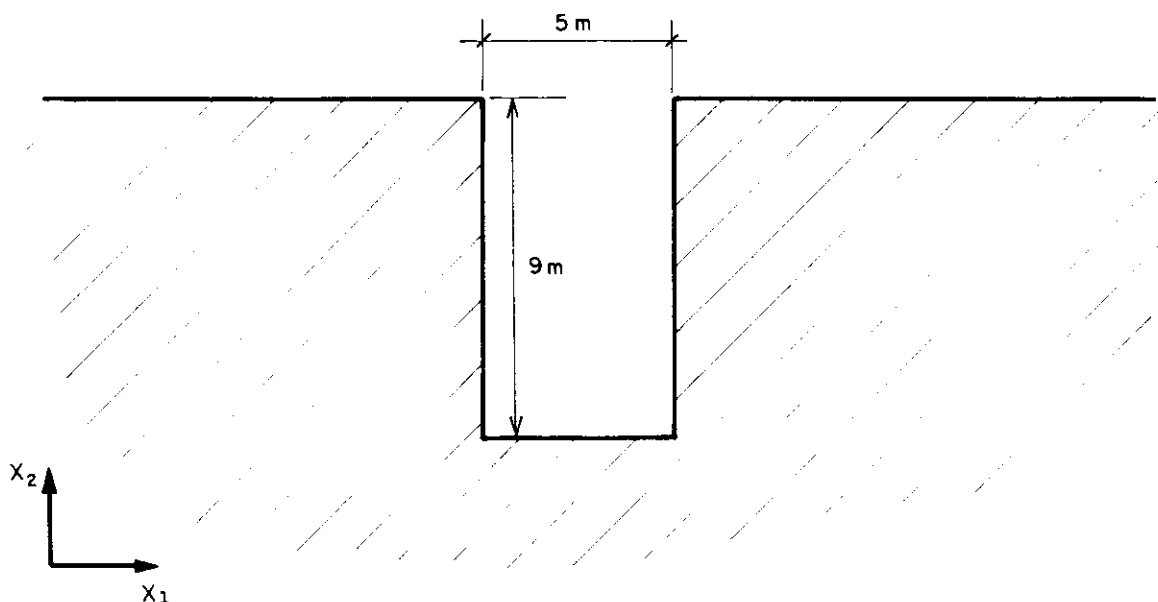


Fig. 9.13 Dimensões de uma vala

Admitindo-se o estado plano de deformação, é apresentado o caso da abertura de uma vala com as dimensões indicadas na Fig. 9.13. O objetivo deste exemplo é analisar para diversas discretizações, o comportamento dos deslocamentos e das tensões, existindo ou não, a parede de contenção. Considera-se a simetria da vala e, discretiza-se o contorno do domínio com elementos cujos comprimentos aumentam à medida que se distancia do local da escavação.

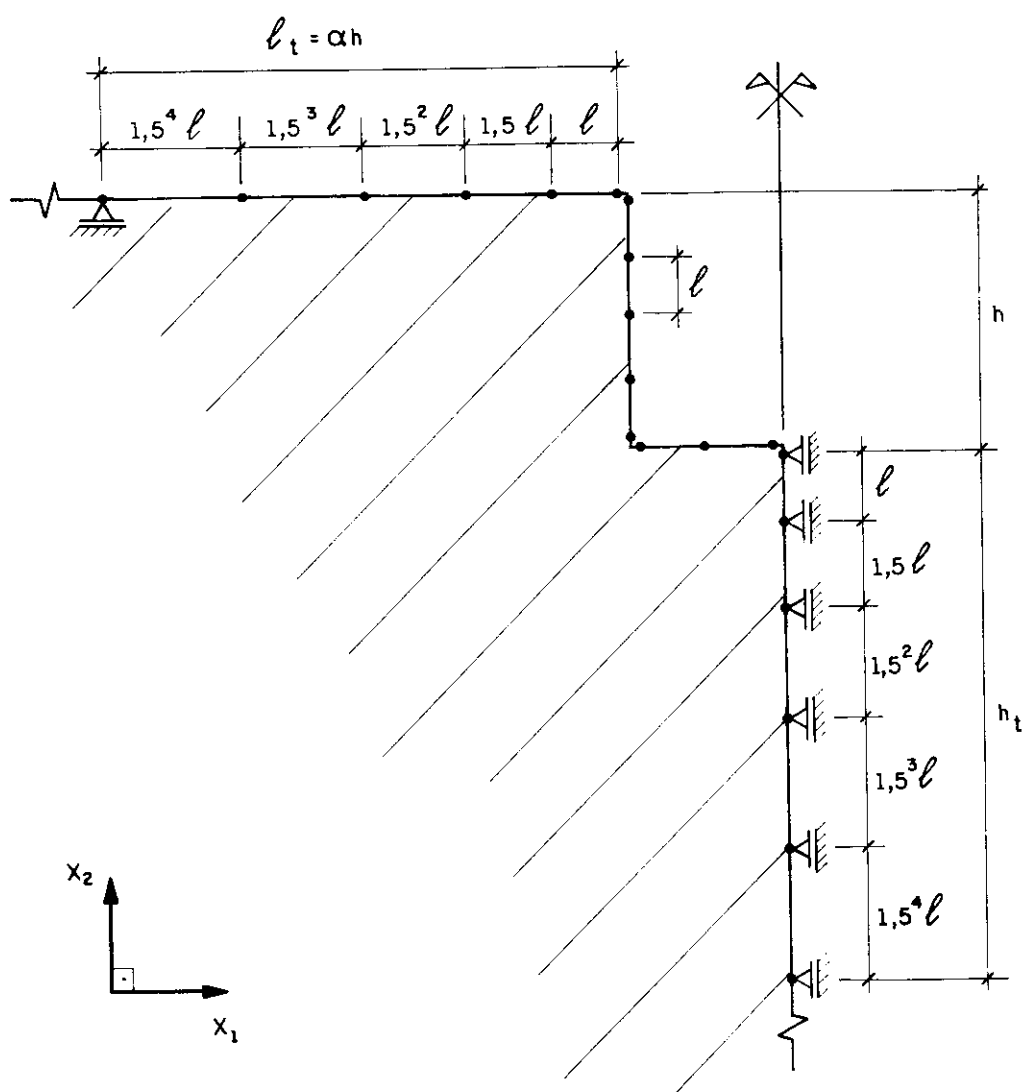


Fig.9.14 Discretização e vinculação do contorno da vala

Diversas situações são analisadas variando-se o comprimento  $l_t$  admitindo-se a vinculação da Fig. 9.14.

Pretende-se, também, mostrar a aplicação do algoritmo implementado para o estudo da plasticidade do meio contínuo, onde é possível definir a região que plastifica. No caso da escavação de uma vala, o meio contínuo é o solo e a plasticidade é analisada com as superfícies de plastificação de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager visto que os resultados obtidos são satisfatórios.

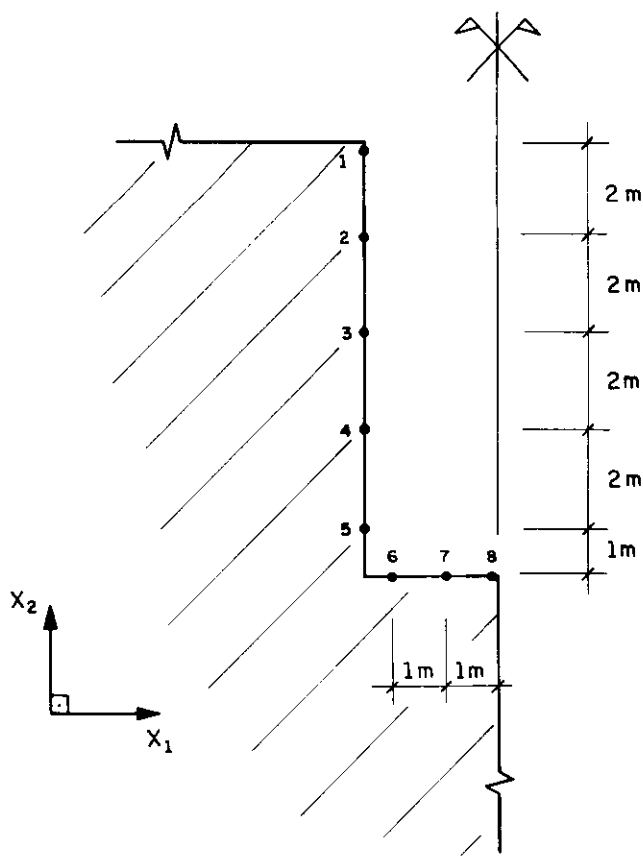


Fig.9.15 Pontos escolhidos para análise

Características do solo:

módulo de deformação longitudinal  $E=10000 \text{ kN/m}^2$

coeficiente de Poisson  $\nu=0,2$

peso específico  $\gamma=15\text{kN/m}^3$

coeficiente de empuxo em repouso  $K_0=0,6$

coesão  $c=10\text{kN/m}^2$

ângulo de atrito interno  $\phi=30^\circ$ .

Para o exemplo em estudo, com  $\alpha=l_t/h$ , são escolhidos os pontos indicados na Fig. 9.15 para análise dos resultados considerando-se diversos valores de  $\alpha$  e o domínio fechado com  $\alpha=6,03$ .

Considerando-se o regime elástico, são obtidos os resultados indicados a seguir,

Deslocamentos na direção  $x_1$  ( $10^{-2}\text{m}$ )

Pt	$\alpha=l_t/h$					Domínio fechado $\alpha=6,03$
	6,03	16,58	40,47	94,36	142,92	
1	-26,946	-5,893	-2,620	-0,348	-0,970	-2,024
2	-18,979	-3,322	-0,846	0,895	0,413	-0,666
3	-13,403	-1,309	0,637	2,025	1,636	0,657
4	-8,796	0,193	1,670	2,739	2,437	1,621
5	-5,001	0,731	1,699	2,409	2,207	1,635

Tensão normal na direção  $x_2$  ( $\text{kN/m}^2$ )

Pt	$\alpha=l_t/h$					Domínio fechado $\alpha=6,03$
	6,03	16,58	40,47	94,36	142,92	
1	158,68	33,72	14,74	2,30	5,34	-2,04
2	112,75	4,49	-11,74	-22,26	-19,77	-26,30
3	64,99	-22,68	-35,62	-43,88	-41,97	-47,55
4	28,73	-50,58	-62,11	-69,39	-67,74	-72,68
5	-16,39	-98,64	-110,71	-118,51	-116,64	-120,35

Deslocamentos na direção  $x_2$  ( $10^{-2}\text{m}$ )

Pt	$\alpha=l_t/h$					Domínio fechado $\alpha=6,03$
	6,03	16,58	40,47	94,36	142,92	
6	79,71	45,13	43,865	31,377	46,789	26,417
7	81,57	46,63	45,326	32,818	48,231	27,832
8	83,32	47,33	45,873	33,273	48,706	28,256

Tensão normal na direção  $x_1$  ( $\text{kN/m}^2$ )

Pt	$\alpha=l_t/h$					Domínio fechado $\alpha=6,03$
	6,03	16,58	40,47	94,36	142,92	
6	62,82	-36,54	-54,25	-67,76	-63,79	-49,48
7	93,60	-0,10	-16,31	-28,24	-24,90	-13,46
8	130,70	9,76	-10,03	-23,74	-20,40	-10,13

Na Fig. 9.15, são apresentadas as formas dos deslocamentos, na direção  $x_1$ , dos pontos da parede lateral

da vala para os diversos valores de  $\alpha$ .

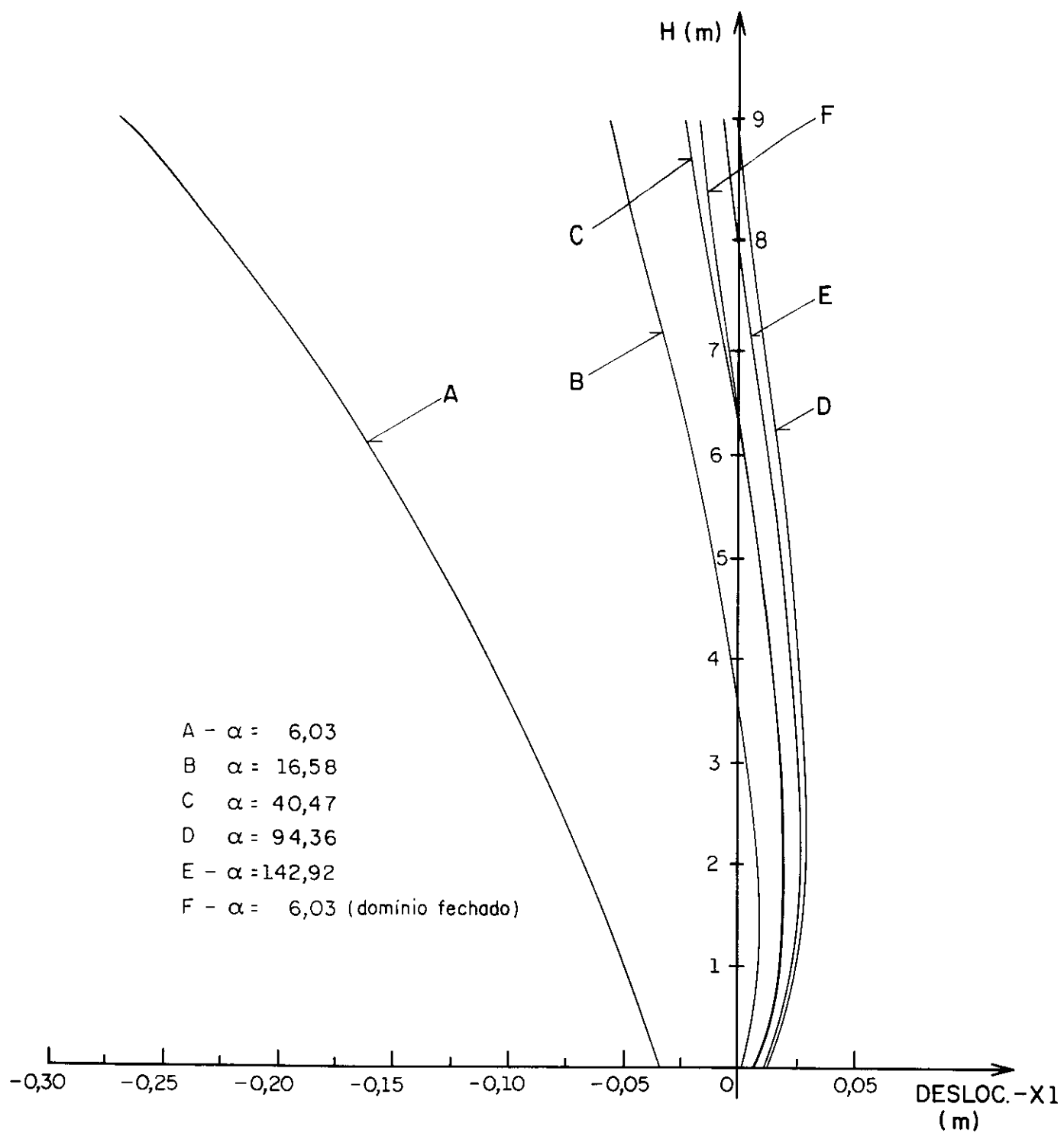


Fig.9.15 Deslocamentos da parede lateral da vala



Pode-se observar que os deslocamentos apresentam a mesma forma, porém, com valores diferentes, tendendo a se aproximarem à medida que se aumenta  $\alpha$ . Isto ocorre devido ao fato dos deslocamentos serem influenciados pelo movimento de corpo rígido. As tensões variam significativamente para valores de  $\alpha$  menores e, no exemplo em estudo, tende a se estabilizar para  $\alpha$  superiores a 40. Já no caso de se considerar um domínio fechado com  $\alpha=6,03$ , que é o menor valor analisado, pode-se considerar um comportamento satisfatório.

Para o estudo da plasticidade do solo é utilizada a discretização do domínio em células da Fig. 9.16.

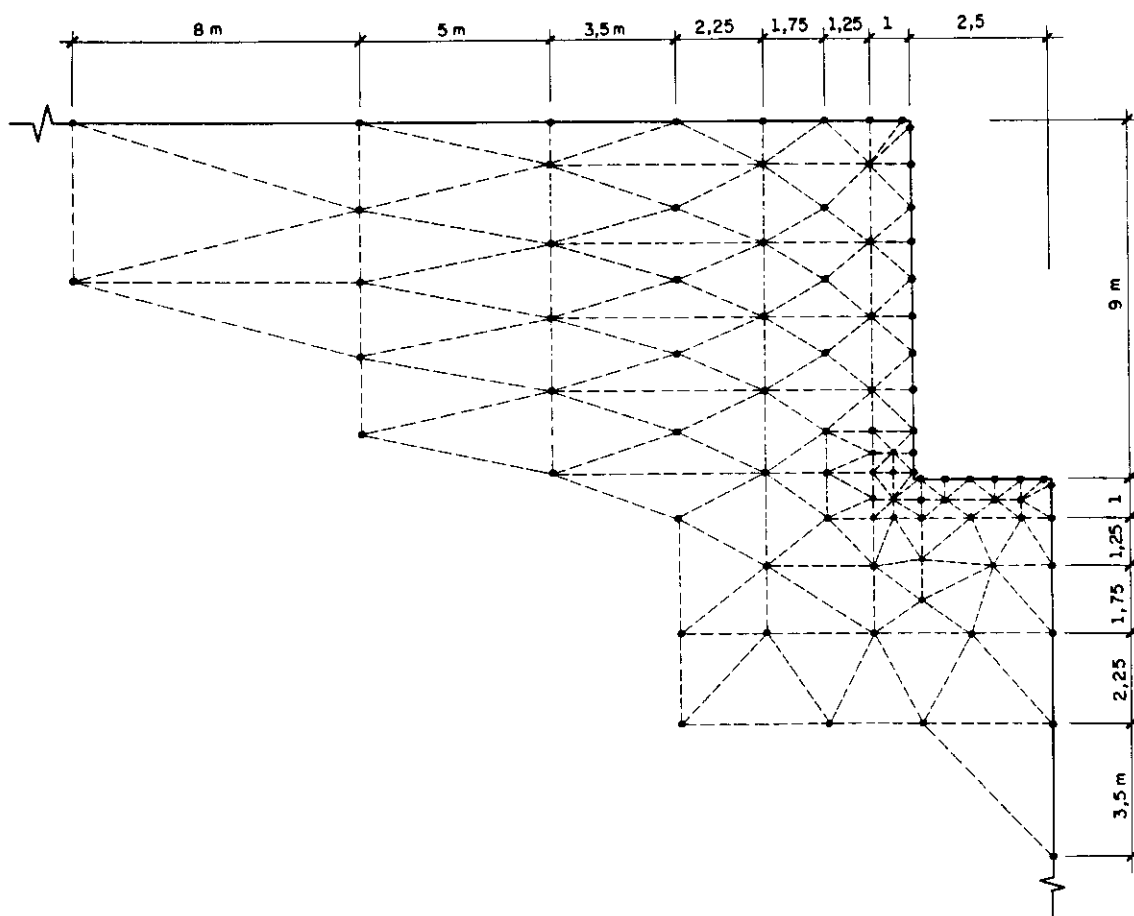


Fig.9.16 Discretização do domínio em células

Na Fig. 9.17, estão as regiões que se plastificam quando se utilizam as superfícies de plastificação de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager.

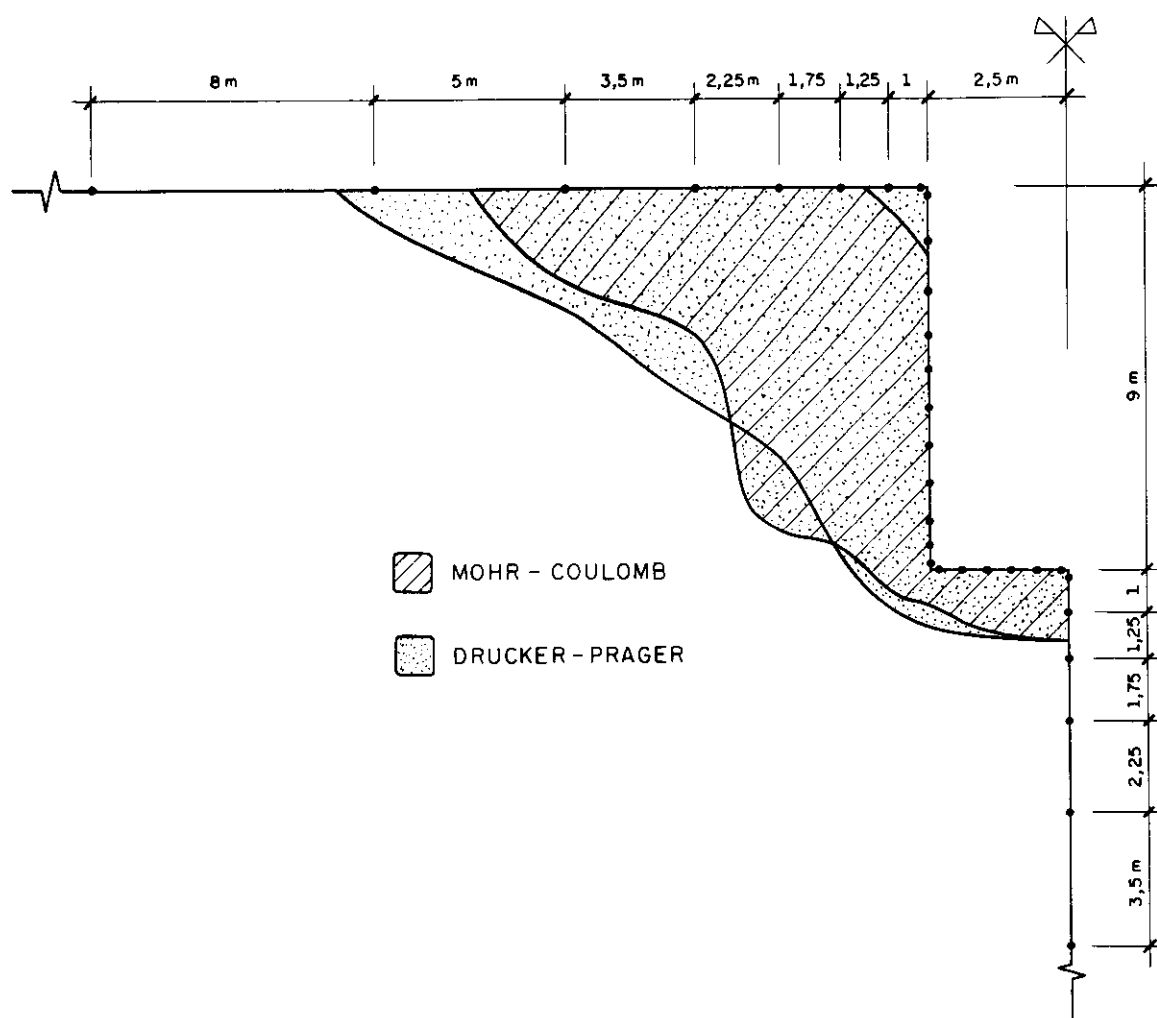


Fig.9.17 Regiões plastificadas

Considera-se a parede de contenção de concreto como uma estrutura de elementos lineares, a ser acoplada ao domínio bidimensional através dos pontos do contorno e pontos do domínio.

Características da parede de contenção:  
 módulo de deformação longitudinal  $E_c = 25700000 \text{ kN/m}^2$   
 coeficiente de Poisson  $\nu = 0,15$   
 espessura  $e = 20 \text{ cm}$ .

São escolhidos os pontos indicados na Fig. 9.16, para análise dos resultados.

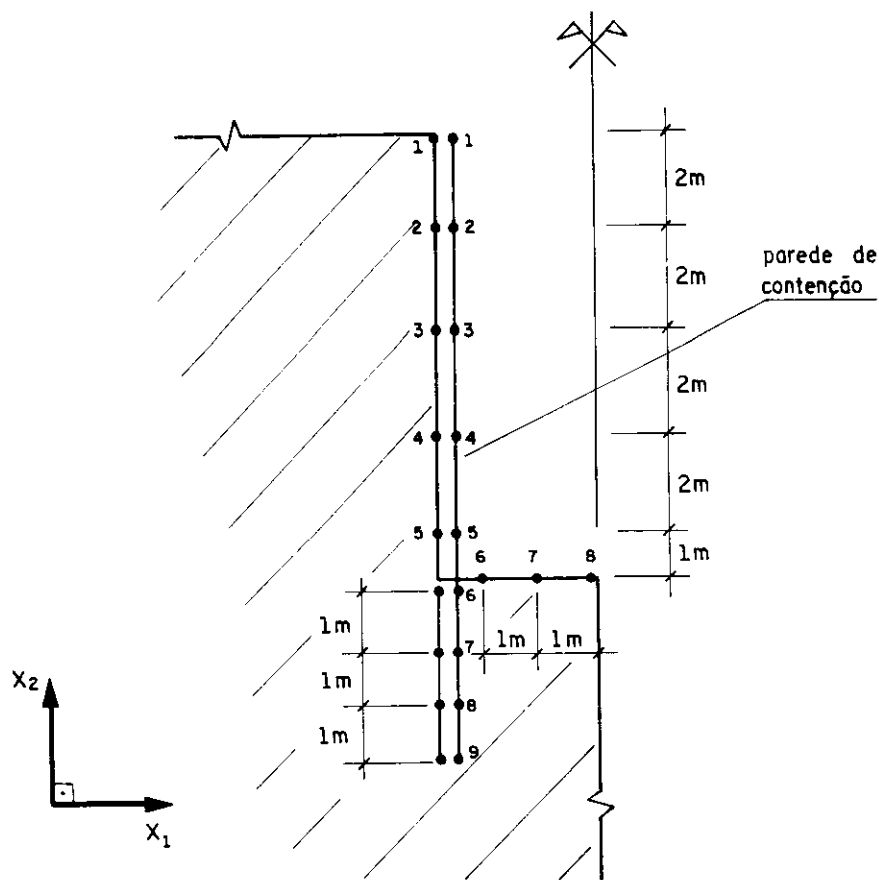


Fig.9.18 - Pontos do contorno e da parede de contenção

Deslocamentos na direção  $x_1$  da estrutura reticulada ( $10^{-2}m$ )

Pt	$\alpha = lt/h$					Domínio fechado $\alpha = 6,03$
	6,03	16,58	40,47	94,36	142,92	
1	4,843	3,754	3,842	3,799	3,784	3,691
2	4,515	3,811	3,884	3,851	3,795	3,780
3	4,036	3,626	3,681	3,659	3,557	3,618
4	2,865	2,649	2,681	2,669	2,530	2,650
5	0,767	0,705	0,712	0,709	0,633	0,705
6	0,009	0,047	0,047	0,048	0,099	0,049
7	0,042	0,278	0,280	0,281	0,517	0,289
8	0,083	0,594	0,598	0,599	1,068	0,615
9	0,133	0,952	0,958	0,960	1,709	0,987

Deslocamentos na direção  $x_2$  ( $10^{-2}m$ )

Pt	$\alpha=lt/h$					Domínio fechado $\alpha=6,03$
	6,03	16,58	40,47	94,36	142,92	
6	6,107	2,051	2,051	2,048	2,100	2,042
7	8,167	4,128	4,129	4,117	4,244	4,092
8	8,798	4,782	4,779	4,760	4,905	4,726

Tensões dos pontos do contorno ( $kN/m^2$ )

Pt	$\alpha=6,03$			$\alpha=16,58$		
	$\sigma_{x1}$	$\tau$	$\sigma_{x2}$	$\sigma_{x1}$	$\tau$	$\sigma_{x2}$
1	-64,97	-242,36	-16,23	-166,04	32,36	-41,51
2	-72,27	-19,29	-43,53	-75,17	18,73	-44,29
3	-43,79	-10,99	-61,87	-44,16	6,82	-62,03
4	-49,97	-12,30	-88,87	-51,03	-1,42	-89,28
5	-64,62	-85,73	-117,92	-66,42	-2,07	-118,69
6	-1,79	0	0	-63,19	0	0
7	24,09	0	0	16,72	0	0
8	25,80	0	0	26,41	0	0

Pt	$\alpha=40,47$			$\alpha=94,36$		
	$\sigma_{x1}$	$\tau$	$\sigma_{x2}$	$\sigma_{x1}$	$\tau$	$\sigma_{x2}$
1	-167,14	32,18	-41,79	-166,77	32,37	-41,69
2	-75,60	18,74	-44,40	-75,48	18,92	-44,37
3	-44,24	6,87	-62,05	-44,21	7,05	-62,05
4	-51,03	-1,36	-89,28	-51,05	-1,17	-89,29
5	-66,42	-1,91	-118,69	-66,46	-1,69	-118,71
6	-63,09	0	0	-62,76	0	0
7	16,89	0	0	16,72	0	0
8	26,45	0	0	26,07	0	0

Pt	$\alpha=142,92$			Domínio fechado $\alpha=6,03$		
	$\sigma_{x1}$	$\tau$	$\sigma_{x2}$	$\sigma_{x1}$	$\tau$	$\sigma_{x2}$
1	-129,27	43,36	-32,32	-166,69	33,36	-41,67
2	-76,99	17,92	-44,74	-75,55	19,83	-44,38
3	-45,54	6,90	-62,38	-44,24	7,73	-62,06
4	-51,39	-1,23	-89,37	-51,09	-0,69	-89,30
5	-66,38	-1,77	-118,68	-66,49	-1,37	-118,72
6	-32,94	0	0	-61,72	0	0
7	38,76	0	0	16,18	0	0
8	45,26	0	0	25,05	0	0

Os deslocamentos dos pontos da parede de contenção, obtidos no regime elástico, estão na Fig. 9.19 para os diversos valores de  $\alpha$ .

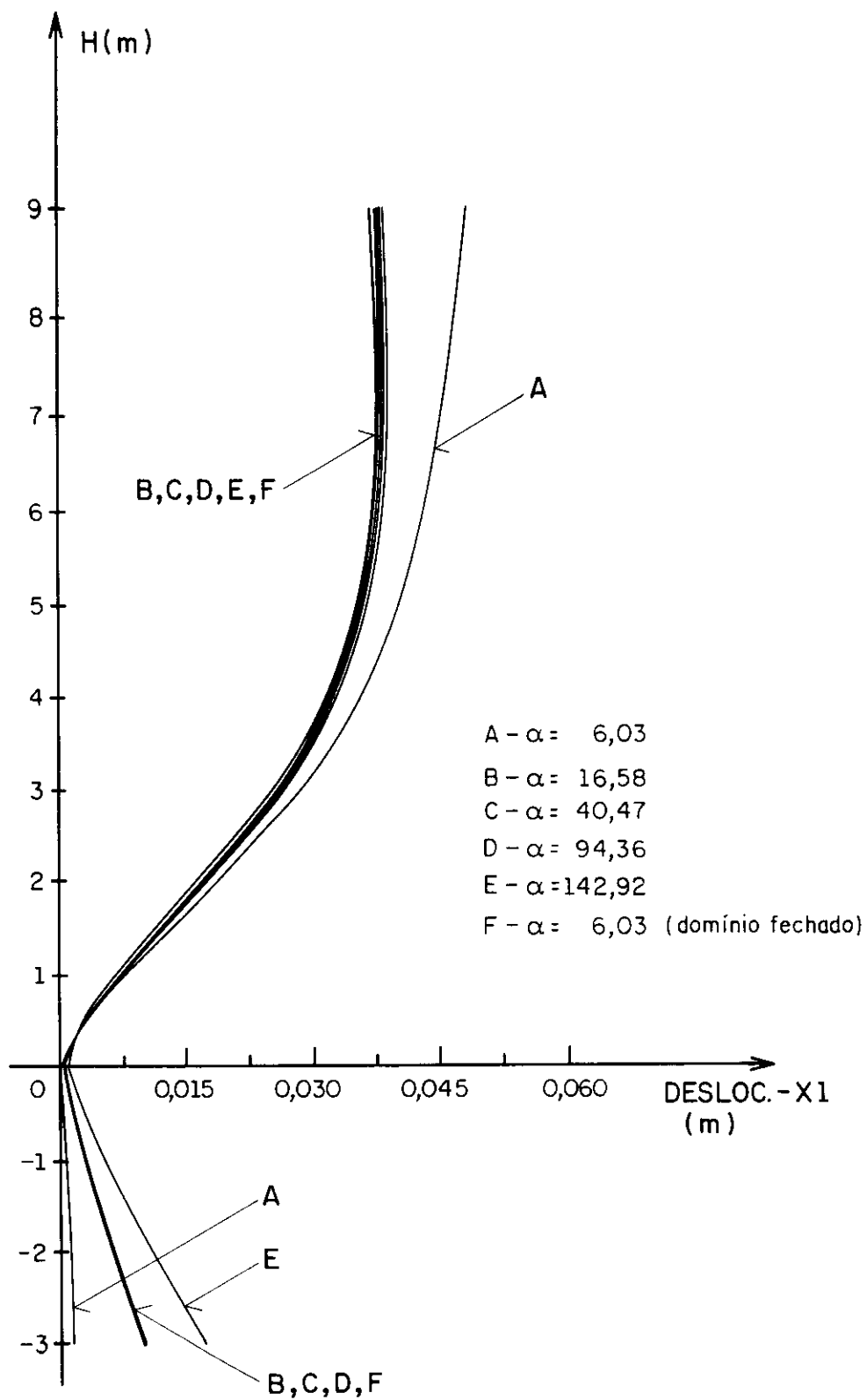


Fig.9.19 Deslocamentos dos pontos da parede de contenção

Os resultados obtidos são satisfatórios para o exemplo em estudo. Observa-se que para  $\alpha=6,03$ , os deslocamentos se afastam dos demais casos e, para  $\alpha=142,92$  os deslocamentos da parte enterrada da parede de contenção se afastam dos casos B,C,D e F.

No estudo da plasticidade do material, o termo

$$\frac{-1}{8(1-\nu)} \left[ 2\sigma_{ij}^0(\mathbf{s}) + (1-4\nu)\sigma_{\ell\ell}^0(\mathbf{s})\delta_{ij} \right]$$

utilizado na montagem das matrizes referentes às tensões iniciais, só vale quando não existirem descontinuidades de tensões.

Na abertura de uma vala com parede de contenção surgem descontinuidades de tensões e por isso, utiliza-se um procedimento aproximado admitindo-se comportamento elástico para a região próxima da parede de contenção.

No caso do concreto, com este procedimento aproximado não se conseguiu definir a região plástica do domínio devido a problemas de instabilidade numérica. Uma alternativa possível de ser desenvolvida é deslocar os pontos com descontinuidades de tensão para dentro da célula.

Considera-se a parede de contenção constituída de pranchas de madeira com as seguintes características:  
módulo de deformação longitudinal  $E=10000000 \text{ kN/m}^2$   
espessura  $e=4 \text{ cm}$ .

Neste caso, com o procedimento incremental e iterativo utilizado para o estudo da plasticidade do material e, admitindo-se comportamento elástico na região próxima da parede de contenção, resultou na plastificação de toda a malha da Fig. 9.16.

## 10 CONCLUSÕES

A principal vantagem da combinação do método dos elementos finitos (MEF) e do método dos elementos de contorno (MEC), é a possibilidade de se utilizar o método mais conveniente para cada tipo de domínio. Neste trabalho, o método dos elementos finitos foi utilizado no cálculo da estrutura reticulada e, o método dos elementos de contorno no cálculo do domínio bidimensional.

Com a realização deste trabalho, tornou-se disponível um procedimento de cálculo automático, para a combinação MEC-MEF, onde uma estrutura reticulada é acoplada a um domínio bidimensional, com resultados satisfatórios para os exemplos analisados.

Nos problemas de escavação de túneis e abertura de valas, o domínio infinito é considerado bidimensional e tratado pelo método dos elementos de contorno e, o revestimento dos túneis ou as paredes de contenção das valas são considerados como estruturas reticuladas e resolvidas pelo método dos elementos finitos. Neste caso, a escolha de cada método ao domínio correspondente foi feita em função dos resultados de pesquisas já realizadas, onde o método dos elementos de contorno se apresenta melhor para simular o domínio infinito e, o método dos elementos finitos é o mais indicado para resolver as estruturas reticuladas. As diferentes camadas de solo são consideradas, no método dos elementos de contorno, através da técnica das sub-regiões.

Executa-se a montagem do sistema de equações para o

domínio bidimensional considerando-se, adequadamente, a influência das estruturas reticuladas. Este sistema de equações é resolvido com o algoritmo proposto por CROTTY(1982) que permite considerar de modo eficiente as várias sub-regiões, definindo-se uma partição onde aparecem blocos nulos e não-nulos sendo que apenas os elementos dos blocos não-nulos são armazenados para a resolução do sistema.

Para se levar em conta a influência das estruturas reticuladas através do procedimento de combinação MEC-MEF utilizado neste trabalho, alguns blocos do sistema de equações são afetados conforme a definição da interface das estruturas reticuladas (MEF) com as sub-regiões do domínio bidimensional (MEC).

A utilização do algoritmo proposto por CROTTY (1982), é mais interessante quando existem várias sub-regiões, fazendo com que o número de blocos nulos aumente. Porém, perde este atrativo no caso onde uma mesma estrutura reticulada possui pontos de interface com várias sub-regiões diferentes reduzindo o número de blocos nulos. Também, em algumas partições pode ocorrer que durante a eliminação alguns blocos inicialmente nulos se tornem não-nulos.

Uma dificuldade encontrada no algoritmo proposto por CROTTY(1982) é a determinação dos valores das variáveis MAXSTO, MAXR, MAXI e MAXE, que dependem da partição utilizada para a matriz [A] dos coeficientes das incógnitas do sistema de equações.

No procedimento empregado para acoplar uma estrutura reticulada em um domínio bidimensional, a eliminação das coordenadas dos pontos não pertencentes à interface juntamente com as rotações dos pontos de interface MEC-MEF, é muito demorada quando a discretização aumenta, tornando-se um inconveniente nos casos onde o tempo de processamento for importante. Uma alternativa é tratar, convenientemente, a estrutura reticulada como uma sub-região e executar a



montagem do sistema de equações considerando-se esta situação.

A plasticidade do material é analisada utilizando-se o método dos elementos de contorno com as tensões iniciais, através de um procedimento incremental e iterativo, onde as matrizes envolvidas são rearranjadas de modo a facilitar o trabalho computacional evitando-se resolver o sistema de equações para cada iteração. Neste procedimento é necessário o cálculo da inversa, o que não deixa de ser uma desvantagem, mesmo utilizando-se o algoritmo de CROTTY(1982) no qual é possível resolver o sistema de equações com várias colunas dos termos independentes  $\{b\}$  ao mesmo tempo.

O cálculo da inversa da matriz  $[A]$  de um sistema com um número elevado de equações, utilizando-se o algoritmo proposto por CROTTY(1982) é realizado em várias etapas onde o número de etapas de cálculo é fixado em função da variável MAXE que define o número máximo de colunas existente nas colunas sub-bloco. Em cada uma destas etapas de cálculo os blocos correspondentes aos termos independentes  $\{b\}$  são modificados de modo a se ter, adequadamente, a matriz identidade. Resolvendo-se o sistema de equações em número igual ao número de etapas, tem-se no final, a inversa da matriz  $[A]$ .

As diversas situações apresentadas nos exemplos analisados mostram que o procedimento de combinação entre o método dos elementos de contorno e elementos finitos desenvolvido neste trabalho, é mais uma alternativa de cálculo que possibilita a simulação de muitos problemas práticos de engenharia.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSSEN, R.S. et al. (1980) **The application and numerical solution of integral equations.** Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Sijthoff and Noordhoff.
- ARGYRIS, J.H.; KELSEY S. (1955) Energy theorems and structural analysis. **Aircraft Engineering, 26-27.**
- AYALA, F.; GOMEZ, R. (1979) A general procedure for solving three dimensional elasticity problems in geomechanics. In: INT. CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS IN GEOMECHANICS, 3rd, Aachen, 2-6 April. **Proceedings.** p.3-13.
- BANERJEE, P.K.; BUTTERFIELD, R. (1977) Boundary element in geomechanics. In: GUDEHUS G., ed. **Finite elements in geomechanics.** London, John Wiley & Sons, Chap. 6.
- BANERJEE, P.K.; BUTTERFIELD, R. (1981) **The boundary element method in engineering sciences.** McGraw-Hill.
- BATHE, J.K. (1982) **Finite element procedures in engineering analysis.** Englewood Cliffs, Prentice Hall.
- BEER, G.; MEEK, J.L. (1981) The coupling of boundary and finite element methods for infinite domain problems in elasto/plasticity. In: BREBBIA, C.A. ed. **Boundary element methods.** Springer-Verlag.

- BEER, G. (1985) An isoparametric joint/interface element for finite element analysis. **Int. J. Num. Meth. Eng.**, v.21, p.585-600.
- BEER, G. (1986) Implementation of combined boundary element -finite element analysis with application in geomechanics. In: BANERJEE, D.K.; WATSON, J.O., eds. **Developments in boundary element methods - 4**. London, Appl. Sci. Publ.
- BESKOS, D.E. (1987) **Boundary element methods in mechanics**. North-Holland, Elsevier Science Publishing.
- BETTI, E. (1872) Teoria dell elasticita. **Il Nuovo Cimento**, t.7-10.
- BOOKER et al. (1989) Some recent applications of numerical methods to geotechnical analysis. **Computers & Structures**, v.31, n.1, p.81-92.
- BORJA, R.I.; LEE, S.R. (1989) Numerical simulation of excavation in elastoplastic soils. In: **Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomech.**, v.13, p.231-249.
- BRADY, B.H.G.; WASSYNG, A. (1981) A coupled finite element boundary element method of stress analysis. **International Journal of Rock Mechanics, Mining Science & Geomechanics Abstracts**, v.18, p.475-485.
- BREBBIA, C.A.; CONNOR, J.J. (1973) **Fundamentals of finite element techniques for structural engineers**. London, Butterworths.
- BREBBIA, C.A. (1978a) **The boundary element method for engineers**. London, Pentech Press.

- BREBBIA, C.A. (1978b) Weighted residual classification of approximate methods. **Appl. Math. Modelling**, v.2, n.3.
- BREBBIA, C.A.; FERRANTE, A.J. (1978) **Computational methods for the solution of engineering problems**. London, Pentech Press.
- BREBBIA, C.A.; GEORGIU, P. (1980) Combination of boundary and finite elements for elastostatics. **Appl. Math. Modelling**, v.3, p.212-220.
- BREBBIA, C.A.; WALKER, S. (1980) **Boundary element techniques in engineering**. London, Newnes-Butterworths.
- BREBBIA, C.A. ed. (1981) **Boundary element methods**. Springer-Verlag.
- BREBBIA, C.A., ed. (1982) **Boundary element methods in engineering**. Springer-Verlag.
- BREBBIA, C.A., et al. (1983) **Boundary elements**. Springer-Verlag.
- BREBBIA, C.A., et al. (1984) **Boundary element techniques: theory and applications in engineering**. Springer-Verlag.
- BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. (1984) **Boundary elements: an introductory course**. Southampton, CML Publ.
- BUI, H.D. (1978) Some remarks about the formation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations. **Int. J. Solids Structures**, v.18, p.935-939.
- CATHIE, D.N.; BANERJEE, P.K. (1982) Boundary element methods for plasticity and creep including viscoplastic approach. **Res. Mechanica**, v.4, p.3-22.

- CEN, Z.Z.; DU, Q.H. (1987) Some further works on the combination of hybrid/mixed finite elements to boundary elements. In: JAPAN-CHINA SYMPOSIUM ON BOUNDARY ELEMENT METHODS, 1st, Kauizawa, Japan, June 1-5. **Proceedings.**
- CHAUDONEERET, M. (1977) Méthode des équations intégrales appliquées a la résolution de problemes de viscoplasticité. **J. Mécanique Appl.**, v.1, p.113-132.
- CHEN, H.S.; MEI, C.C. (1974) Oscillations and wave forces in a man-made harbour. In: NAVAL HYDRO SYMP., 10th, Dept. of Civil Eng., MIT., Cambridge, USA.
- CHEN, W.F. (1982) **Plasticity in reinforced concrete.** McGraw-Hill.
- CODA, H. B. (1993) **Análise tridimensional transiente de estruturas pela combinação entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos.** São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- COMPANHIA DO METROPOLITANO DE SÃO PAULO (METRÔ). Departamento de Projeto Civil. **Cálculo das obras do método em trincheira.** São Paulo, 1980. cap.5 (Normas técnicas complementares, NC-03/80).
- COULOMB, C.A. (1776) Essay sur une application des regles de maximes et minimis a quelques de statique relatifs a l'architecture. **Mem. Acad. Roy. Press Divers Sav.**, Paris, 5, 7.
- CROTTY, J.M. (1982) A block equation solver for large unsymmetric matrices arising in the boundary integral equation method. **Int. J. Num. Meth. Eng.**, v.18, p.997-1017.

- DAEMEN, J. J. K.; FAIRHURST, C. (1972) Rock failure and tunnel support loading. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM UNDERGROUND-OPENINGS, Lucerne. **Proceedings.**
- DANGLA, P. (1988) Plane strain soil-structure interaction model. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v.16, n.8, p.1115-1128.
- DENDROU, B.A.; DENDROU, S.A. (1981) A finite element-boundary integral scheme to formulate rock-effects on the linear of an underground intersection. In: BREBBIA, C.A., ed. **Boundary element method.** Springer-Verlag.
- DESAI, C.S.; CHRISTIAN, J.T. (1977) **Numerical methods in geotechnical engineering.** New York, McGraw-Hill.
- DRUCKER, D.C.; PRAGER, W. (1952) Soil mechanics and plastic analysis or limit design. **Quart. Appl. Math.**, v.10, p.157-165.
- ESTORFF, O.; KAUSEL, E. (1989) Coupling of boundary and finite elements for soil-structure interaction problems. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v.18, n.7, p.1065-1075.
- FAIRHURST, C.; DAEMEN, J. J. K. (1978,1979) Les Consequences Pratiques de la Recherche sur la Conception et le Dimensionnement de Soutenements de Tunnel. **Journée d'Études**, Paris, A.F.T.E.S.; 26 octobre 1978, **Tunnels et Ouvrages Souterrains**, n.32, p.98-110, 1979.
- FELIPA, C. A. (1981) Interfacing finite element and boundary element discretizations. In: BREBBIA, C.A., ed. **Boundary element methods.** Berlin, Springer-Verlag.

- FERRO, N.C.P.; VENTURINI, W.S. (1991) Formulação de um elemento de fundação através do método dos elementos de contorno. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 25., Porto Alegre. **Anais.** v.1, p.421-430.
- FERRO, N.C.P.; VENTURINI, W.S. (1992) BEM-FEM coupling for building structure analysis. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON METHODS, 14th., Seville, November. **Proceedings.**
- FERRO, N. C. P. (1993) **Uma combinação MEC/MEF para análise de fundações enrijecidas por estacas.** São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- FUNG, Y.C. (1965) **Foundations of solid mechanics.** Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
- GEORGIU, P. (1981) **The coupling of the direct boundary element method with the finite element displacement technique in elastostatics.** Ph.D.Thesis, University of Southampton.
- GERE, J.M.; WEAVER JR., W. (1981) **Análise de estruturas reticuladas.** Rio de Janeiro, Guanabara Dois.
- GIL RODRIGUES, J.C.; VENTURINI, W.S. (1985) Boundary element technique for the analysis of tension discontinuity problems. In: BREBBIA, C.A., NOYE, B.J., eds. **BETECH 85.** Springer-Verlag.
- GIL RODRÍGUEZ, J.C. (1986) **Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais.** São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- GIL RODRÍGUEZ, J.C.; VENTURINI, W.S. (1986) Sobre a influência da discretização de domínios bidimensionais para o método dos elementos de contorno. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 7., São Carlos, **Anais**.
- GIPSON, G.S. (1987) **Boundary element fundamentals**. CML Publ.
- GITELMAN, M. (1982) Estabilidade dos túneis e seu dimensionamento. In: SIMPÓSIO SOBRE ESCAVAÇÕES SUBTERRÂNEAS, Rio de Janeiro. **Anais**. Rio de Janeiro, ABGE e Empresa de Engenharia Ferroviária. v.1, p.185-214.
- GUDEHUS, G. (1977) **Finite elements in geomechanics**. London, John Wiley.
- HARTMAN, F. (1980a) Computing the C-matrix on non-smooth boundary points. In: BREBBIA, C.A., ed. **New developments in boundary element methods**. CML Publ.
- HARTMAN, F. (1980b) Elastic potentials on piecewise smooth surfaces. **Journal of elasticity**, v.12, p.31-50.
- HILL, R. (1950) **The mathematical theory of plasticity**. Oxford, Clarendon Press.
- HOEK, E.; BROWN, E.T. (1980) **Underground excavations in rock**. London, The Institution of Mining and Metallurgy.
- JAEGER, J.C.; COOK, N.G.W. (1976) **Fundamentals of rock mechanics**, New York, John Wiley & Sons.
- KACHANOV, L.M. (1971) **Foundations of the theory of plasticity**. North-Holland.



- KOBAYASHI, S.; MORI, K. (1986) Three-dimensional dynamic analysis of soil-structure interactions by boundary integral equation - finite combined method. In: SHAW, R. P., ed. **Innovative numerical methods in engineering**. Berlin, Springer-Verlag, p.613-618.
- KOVÁRI, K. (1977) The elastoplastic analysis in the design practice of underground opening. In: GUDEHAUS, G. **Finite elements in geomechanics - 12**. London, John Wiley & Sons.
- LACHAT, J.C. (1975) **A further development of the boundary integral technique for elastostatics**. Ph.D.Thesis, University of Southampton.
- LACHAT, J.C.; WATSON, J.O. (1976) Effective numerical treatment of boundary integral equations. **Int. J. Num. Meth. Engng.**, v.10, p.991-1005.
- LAMAS, A.R.G. (1982) **Noções da teoria da plasticidade**. Relatório DT 14, CMEST, Universidade Técnica de Lisboa.
- LODE, W. (1926) Versuche Ueber de Einfluss Dermit leren Hampts Pannung auf das Fliessen der Metalle Eisen Kupfen und Niekel. **Z. Physik**, v.36, p.913-939.
- LOMBARDI, G. (1973) The influence of rock characteristics on the stability of rock cavities. **Tunnels and Tunneling**, v.5, p.340-351.
- LOMBARDI, G. (1974) The problems of tunnel supports. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF ROCK MECHANICS, 3rd, Denver. **Proceedings**.

- LOMBARDI, G. (1977) Long term measurements in underground openings and their interpretation with special consideration of the rheological behaviour of the rock. In: INT. SYMP. ON FIELD MEASUREMENTS IN ROCK MECHANICS, Zurich. **Proceedings.**
- LOMBARDI, G.; AMBERG, W. (1979) L'influence de la méthode de construction sur l'équilibre final d'un tunnel. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON ROCK MECHANICS, 4th, Montreaux. **Proceedings.**
- LOVE, A.E.H. (1944) **A treatise on the mathematical theory of elasticity.** New York, Dover Publications.
- MAFFEI, C.E.M., et al. (1977) Methods for calculating braced excavations. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SOIL STRUCTURE INTERACTION, Roorkee, India, Jan. 3-7. **Proceedings.**
- MARZIONNA, J.D. (1979) **Sobre o cálculo estático de valas.** São Paulo. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- MCDONALD, B. H.; WEXLER, A. (1972) Finite element solution of unbounded field problems. **IEE Trans. Microwave Theory and Techniques**, MTT-20, p.841-47.
- MENDELSON, A. (1968) **Plasticity: theory and application.** Malabar, Flórida, Robert E. Krieger Publishing.
- MENDELSON, A. (1973) **Boundary integral methods in elasticity and plasticity.** NASA, (Report no. NASA TN D-7418).

- MESSAFER, T.; COATES, L. E. (1989) An application of FEM/BEM coupling to foundation analysis. In: BREBBIA, C. A.; CONNOR, J.J., eds. **Advances in boundary elements - 3: stress analysis**. Southampton, CML Publ. p.211-223.
- MIKHLIN, S. G. (1957) **Integral equations**. New York, Pergamon Press.
- MITSUI, Y. et al. (1985) A coupling scheme for boundary and finite elements using a joint element. **Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.**, v.9, p.161-172.
- MOREIRA, D.F. (1977) **Análise matricial das estruturas**. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora.
- MUKHERJEE, S. (1977) Corrected boundary integral equations in planar thermoelastoplasticity. **Int. J. Solids Structures**, v.13, p.331-335.
- MUKHERJEE, S. (1982) **Boundary element method in creep and fracture**. Barking, U.K., Elsevier Applied Science Publ.
- MUSKHELISHVILI, N.I. (1953) **Some basic problems of mathematical theory of elasticity**. Noordhoff Groningen.
- MUSTOE, G.G.; VOLAIT, F. (1980) A symmetric direct integral equation method for two-dimensional elastostatics. In: INT. SEMINAR ON BOUNDARY ELEMENT METHODS, 2nd, Southampton. **Proceedings**.
- MUSTOE, G. G. (1984) Advanced integration schemes for boundary elements and volume cells for two and three-dimensional nonlinear analysis. In: BANERJEE, P.K.; MUKHERJEE, S., eds. **Developments in boundary element methods - 3**. Appl. Sci. Publ..

- NIMIR, W.A. (1979) **Sobre o cálculo de paredes-diafragma em valas de metrô**s. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- OSIAS, J.R., et al (1977) Combined boundary integral equation finite element analysis of solids. In: SYMPOSIUM ON INNOVATIVE NUMERICAL ANALYSIS IN APPLIED ENGINEERING SCIENCE, 1st, Versailles, CETIM - **Proc.**
- OWEN, D.R.J.; HINTON, E. (1980) **Finite elements in plasticity: theory and practice**. Swansea, Pineridge Press.
- PANET, M.; GUELLEC, P. (1974) Contribution au probleme de l'étude du soutènement d'un tunnel derriere le front de taille. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF ROCK MECHANICS. 3rd, **Proceedings**.
- PANET, M. (1976) Stabilité et soutènement des tunnels. In: LA MÉCANIQUE des roches appliquée aux ouvrages de génie civil. Association Amicale des Ingénieurs Anciens Elèves de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- PAULA, F.A., et al. (1987) Combination of boundary elements and finite elements to solve two-dimensional elasticity problems. In: BREBBIA, C.A.; VENTURINI, W.S., eds. **Boundary element techniques: applications in stress analysis and heat transfer**. Southampton, CML Publ., p.163-176.
- PROENÇA, S.P.B. (1988) **Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições**. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- RAMALHO, M.A. (1990) **Sistema para análise de estruturas considerando interação com o meio elástico.** São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RAMALHO, M.A.; VENTURINI, W. S. (1990) **Formulação de um elemento para a discretização de sapatas rígidas com base no método dos elementos de contorno.** In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA , 11., Rio de Janeiro. **Anais.** v.2, p.903-912.
- RICARDELLA, P.C. (1973) **An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity.** Pittsburg, Dept. Mech. Engng., Carnegie Mellon University. (Report N.º SM-73-10).
- RIZZO, F.J. (1967) **An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics.** **Quart. Appl. Math.**, v.25, n.1, p.83-95.
- RIZZO, F.J.; SHIPPY, D.J. (1968) **A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem.** **Int. J. Solids Structures**, v.4, p.1161-1179.
- ROCHA, F.S. (1988) **Análise de descontinuidades pelo método dos elementos de contorno.** São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RONALDO, I. B.; SEUNG, R. L. (1989) **Numerical simulation of excavation in elastoplastic soils.** **Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomech.**, v.13, p.231-249.
- SALVADORI, M.G. (1952) **Numerical methods in engineering.** Prentice Hall.

- SAKURAI, S. (1977) Interpretation of field measurements in undersea tunnels with the aid of mathematical models. In: INT. SYMP. ON FIELD MEASUREMENTS IN ROCK MECHANICS. Zurich. **Proceedings**.
- SHAW, R.P.; FALBY, W. (1977) FEBIE: A combined finite element-boundary integral equations method. In: SYMPOSIUM ON INNOVATIVE NUMERICAL ANALYSIS IN APPLIED ENGINEERING SCIENCE, 1st, Versailles. **Proceedings**.
- SHU, W. (1992) Coupled boundary and finite elements for dynamic structure (3D) - foundation soil-interaction. **Computers & Structures**, v.44, n.4, p.807-816, Aug.3.
- SMITH, G.N. (1971) **An introduction to matrix and finite element methods in civil engineering**. London, Applied Science Publishers.
- SOMIGLIANA, C. (1886) Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. **Il Nuovo Cimento**, 17-19.
- TEIXEIRA, A.H. (1982) Sistemas de suporte e revestimento em túneis de baixa cobertura. In: SIMPÓSIO SOBRE ESCAVAÇÕES SUBTERRÂNEAS, Rio de Janeiro. **Anais**. Rio de Janeiro, ABGE e Empresa de Engenharia Ferroviária. v.1, p.215-227.
- TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C. A. (1979) On the application of the boundary element method to plasticity. **Appl. Math. Modelling**, v.3, p.466-470.
- TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. (1980a) The boundary element method in plasticity. In: BREBBIA, C.A., ed. **New development in boundary element methods**. CML Publications, p.295-317.

- TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C. A. (1980b) Elastoplastic boundary element analysis. In: WUNDERLICH, W. et alii, eds. Proc. Europe-U.S. Workshop on nonlinear finite element analysis in structural mechanics. Springer-Verlag, p. 403-434.
- TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. (1970) Theory of elasticity. New York, McGraw-Hill.
- TRESCA, H. (1864) Mémoire sur l'écoulements des corps, solides soumis à des fortes pressions. Comptes Rendus, Paris, 59.
- TRONDI, R.R. (1993) Cálculo evolutivo de paredes de contenção. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- TSUTSUMI, M. (1983) Tunnelling in soils: movements and structures. Ph.D.Thesis, University of Durham.
- VALLABHAN, C.V.G.; SIVAKUMAR, J. (1986) The application of boundary element techniques for some soil structure interaction problems. Washington, D.C., Dept. of the Army, U.S. Army Corps of Engineers.
- VALLABHAN, C.V.G. (1987) Coupling of BEM/FEM technology: an overview. In: BREBBIA, C.A., VENTURINI, W.S., eds. Boundary element techniques: applications in stress analysis and heat transfer. Southampton, CML Publ.
- VALLIAPPAN, S. (1968) Non-linear stress analysis of two-dimensional problems with special reference to rock and soil mechanics. Ph.D.Thesis, Swansea, University of Wales.

- VENTURINI, W.S. (1982) **Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems.** Ph.D.Thesis, Univesity of Southampton.
- VENTURINI, W.S.; BREBBIA, C.A. (1983) Some applications of the boundary element method in geomechanics. **Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.**, v.7, p.419-434.
- VENTURINI, W. S. (1984) **Boundary element method in geomechanics.** Springer-Verlag. (Lecture Notes in Engineering).
- VENTURINI, W.S.; BREBBIA, C.A. (1984) Boundary element formulation for nonlinear applications in geomechanics. **Appl. Math. Modelling**, v.8, p.251-260.
- VENTURINI, W.S. (1988) **Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia.** São Carlos. Tese (Livre docência) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- WANG, S.; SCHMID, G. (1992) Dynamic structure-soil-structure interaction by FEM sn BEM. **Computational Mechanics**, v.9, n.5, p.347-357.
- WATSON, J.O. (1979) Advanced implementation of the boundary element method for two and three-dimensional elastostatics. In: BANERJEE, P.K.; BUTTERFIELD, R., eds. **Developments in boundary element methods.** London, Appl. Sci. Publ.
- WESTERGAARD, H.M. (1952) **Theory of elasticity and plasticity.** New York, Dover Publ.



- WOOD, L.A.; CREED, S.G. (1982) The application of boundary elements in offshore engineering. In: BREBBIA, C.A., ed. **Boundary element methods in engineering**. Springer-Verlag.
- XU, Z. et al. (1991) Boundary element method for dynamic soil-structure interaction with complicated site. In: ASIAN PACIFIC CONFERENCE ON COMPUTATIONAL MECHANICS, Hong Kong, Dec. 11-13. **Proc.** Rotterdam, A. A. Balkema, p.541-546.
- ZAILU, J.; JIGUANG, S. (1987) **Some coupling usage of BEM and FEM for structures composed of thin plates**. In: JAPAN-CHINA SYMPOSIUM ON BOUNDARY ELEMENT METHODS, 1st, Karuizawa, Japan, p.1-5. **Proceedings**.
- ZIENKIEWICZ, O.C., et al (1969) Elastoplastic solutions of engineering problems, initial stress finite element approach. **Int. J. Num. Meth. Engng.**, v.1, p.75-100.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; VALLIAPPAN, S. (1969) Analysis of real structures for creep plasticity and other complex constitutive laws. In: CONF. ON MATERIALS IN CIV. ENG., University of Southampton. **Proceedings**.
- ZIENKIEWICZ, O.C. (1971) **The finite element method in engineering science**. London, McGraw-Hill.
- ZIENKIEWICZ, O.C., et al. (1977) The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. **Int. J.Num. Meth. Engng.**, v.11, p.355-375.

