

**"MODELOS DE COMPORTAMENTOS VISCOELÁSTICO E
VISCOPLÁSTICO NA ANÁLISE DE
ESTRUTURAS PLANAS"**

JORGE MUNAIAR NETO

*Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.*

ORIENTADOR: Prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença

São Carlos

1994

FOLHA DE APROVAÇÃO

Dissertação defendida e aprovada em ____/____/____,

pela comissão julgadora:

Prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença

Escola de Engenharia de São Carlos - USP

Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini

Escola de Engenharia de São Carlos - USP

Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta

Escola Politécnica - USP

Presidente da CPG

*Aos meus pais,
verdadeiros suportes para o meu aprendizado.*

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Sérgio Persival Baroncini Proença pela ótima orientação e pelo constante companheirismo durante a elaboração deste trabalho.

À minha família e minha companheira pelo apoio e pela sempre valorização na elaboração deste.

Ao Professor Dr. João Batista de Paiva e à Engenheira Renata Romanelli Trondi, pela contribuição dada na utilização de editores de textos.

À secretária Rosi Ap. Jordão Rodrigues e à bibliotecária Maria Nadir Minatel, pela constante atenção e serviços prestados.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, pela bolsa de estudos concedida.

Aos demais professores, colegas e funcionários desse departamento pela amizade

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE TABELAS	iii
LISTA DE SÍMBOLOS	iv
RESUMO	v
ABSTRACT	vi
1-) COMENTÁRIOS PRELIMINARES	01
2-) MODELOS REOLÓGICOS UNIDIMENSIONAIS	06
2.1-) Modelos Reológicos Básicos	06
2.1.1-) Modelo Elástico	06
2.1.2-) Modelo Plástico	07
2.1.3-) Modelo Viscoso	08
2.2-) Modelos Reológicos Combinados	10
2.2.1-) Modelos Elastoplásticos	10
2.2.1.1-) Associação em Série	11
2.2.1.2-) Associação em Paralelo	11
2.2.1.3-) Associação Mista	13
2.2.2-) Modelos Viscoelásticos	14
2.2.2.1-) Associação em Série	16
2.2.2.2-) Associação em Paralelo	17

2.2.2.3-)	Associações Mistas	18
2.2.3-)	Modelo Elasto-Viscoplástico de OWEN/HINTON	20
3-)	CONSIDERAÇÕES SOBRE A GENERALIZAÇÃO DO MODELO MECÂNICO UNIDIMENSIONAL DE OWEN/HINTON	27
3.1-)	Relações Constitutivas	27
3.1.1-)	Expressões Básicas	27
3.1.2-)	Incrementos de Deformação	29
3.1.3-)	Determinação da Matriz H	32
3.1.4-)	Incrementos de Tensão	35
3.2-)	Aspectos da Integração no Tempo	37
3.2.1-)	Incremento do Tempo	37
3.2.2-)	Análise Iterativa - Equações de Equilíbrio	38
3.2.3-)	Correção das Tensões e Convergência dos Resultados	41
3.3-)	Procedimento Computacional	42
3.3.1-)	Etapas de Cálculo	42
3.2.5-)	Objetivos e Considerações Gerais sobre o Código de Cálculo VEPLAS.FOR .	44
3.4-)	Exemplo de Aplicação	46
4-)	UMA MODIFICAÇÃO SOBRE O MODELO DE OWEN/HINTON ASPECTOS UNIDIMENSIONAIS	48

5-) CONSIDERAÇÕES SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO	
<i>MODIFICADO UNIDIMENSIONAL</i>	55
5.1-) <i>Análise Unidimensional</i>	55
5.1.1-) <i>Deslocamentos dos Nós</i>	55
5.1.2-) <i>Incrementos de Tensão</i>	58
5.1.3-) <i>Incrementos de Deformação</i>	59
5.1.4-) <i>Correção do Equilíbrio</i>	60
5.1.5-) <i>Estimativa do Passo de Tempo</i>	61
5.2-) <i>Procedimento de Análise</i>	62
5.3-) <i>Exemplos Testados no Programa de Barras</i>	66
6-) GENERALIZAÇÃO DA MODIFICAÇÃO SOBRE O MODELO DE	
<i>OWEN/HINTON PARA ANÁLISE PLANA</i>	77
6.1-) <i>Relações Constitutivas</i>	77
6.1.1-) <i>Expressões Básicas</i>	77
6.1.2-) <i>Incrementos de Deformação</i>	81
6.1.3-) <i>Incrementos de Tensão</i>	82
6.2-) <i>Aspectos da Integração no Tempo</i>	84
6.2.1-) <i>Incremento do Tempo</i>	84
6.2.2-) <i>Análise Iterativa - Equações de</i> <i>Equilíbrio</i>	85
6.2.3-) <i>Correção das Tensões e Convergência</i> <i>dos resultados</i>	86
6.2.4-) <i>Exemplos de Aplicação</i>	87
7-) <i>CONCLUSÕES FINAIS</i>	98

ANEXOS AO TRABALHO	103
ANEXO 01 - ARQUIVO DE SAÍDA DOS RESULTADOS DO EXEMPLO 3 / CAPÍTULO 6	103
ANEXO 02 - ARQUIVO DE SAÍDA DOS RESULTADOS DO EXEMPLO 7 / CAPÍTULO 6	113
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	121
APÊNDICE DO TRABALHO	126
APÊNDICE A - SUBROTINAS DO PROGRAMA VEPLAS.FOR	126
APÊNDICE B - SUBROTINAS DO PROGRAMA BIVEP.FOR	129
APÊNDICE C - PROCEDIMENTO ALTERNATIVO PARA A OBTENÇÃO DA RELAÇÃO CONSTITUTIVA DO NOVO MODELO REOLÓGICO	132
APÊNDICE D - EXPRESSÕES UTILIZADAS PARA A EXTENSÃO AO CASO DAS TRELIÇAS PLANAS DO CÓDIGO DE CÁLCULO UNIVEP.FOR	137

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 - Modelo Reológico Elástico	7
Figura 02 - Modelo Reológico Plástico	8
Figura 03 - Modelo Reológico Viscoso	10
Figura 04 - Modelo Elástico Perfeitamente Plástico	11
Figura 05 - Modelo Plástico com Encruamento	12
Figura 06 - Modelo Elasto-plástico Bilinear	13
Figura 07 - Determinação do parâmetro H	14
Figura 08 - a) Curva de Fluência ($\sigma = \text{cte}$)	15
b) Curva de Relaxação ($\epsilon = \text{cte}$)	15
Figura 09 - Modelo de Maxwell	16
Figura 10 - Modelo de Kelvin	18
Figura 11 - Modelo Combinado Mola/Kelvin.....	19
Figura 12 - Modelo de Burger	20
Figura 13 - Modelo de Owen/Hinton	21
Figura 14 - Diagramas de [tensão/Deform.] x Tempo	22
Figura 15 - Modelo Elastoplástico de Owen/Hinton com e sem Encruamento	26
Figura 16 - Cilindro pressurizado / análise E-VP	46
Figura 17 - Novo Modelo Reológico	49
Figura 18 - Diagrama de [tensão/Deform.] x tempo	49
Figura 19 - Deslocamentos em um Elemento de Barra	56
Figura 20 - Treliça plana simétrica	68
Figura 21 - Barra tracionada com inércia cte	69
Figura 22 - Deformação x Tempo (CREEP).....	70
Figura 23 - Deformação x Tempo (CREEP).....	71

<i>Figura 24 - Deformação x Tempo (CREEP).....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 25 - Deformação x Tempo (CREEP).....</i>	<i>72</i>
<i>Figura 26 - Barra tracionada com inércia variável</i>	<i>73</i>
<i>Figura 27 - Treliça Formada por 5 Barras iguais</i>	<i>75</i>
<i>Figura 28 - Processo de Convergência.....</i>	<i>87</i>
<i>Figura 29 - Chapa tracionada com inércia cte</i>	<i>88</i>
<i>Figura 30 - Chapa tracionada com inércia variável</i>	<i>89</i>
<i>Figura 31 - Viga biapoiada</i>	<i>91</i>
<i>Figura 32 - Escavação de túnel em rocha</i>	<i>92</i>
<i>Figura 33 - Escavação de túnel em rocha (Gnaisse)</i>	<i>93</i>
<i>Figura 34 - Cilindro pressurizado de parede espessa</i>	<i>95</i>
<i>Figura 35 - Diagrama de Deslocamento x Tempo</i>	<i>96</i>
<i>Figura 36 - Chapa tracionada (calibração do modelo)....</i>	<i>97</i>
<i>Figura 37 - Diagrama de Deformação x Tempo</i>	<i>97</i>
<i>Figura 38 - Sistemas Global e Local de coordenadas</i>	<i>142</i>
<i>Figura 39 - Obtenção da Matriz de Rotação β_0</i>	<i>143</i>

LISTA DE TABELAS

Tabela 01 - Parâmetros para os Crit. de Plastificação ...	33
Tabela 02 - a) Resultados de Deslocamentos (cilíndro) ...	47
b) Resultados de Tensões (cilíndro)	47
Tabela 03 - Resultado de Deslocamento na treliça	68
Tabela 04 - a) Deformações na chapa de $I=cte$ (caso a) ...	69
b) Deformações na chapa de $I=cte$ (caso b) ...	70
Tabela 05 - Deslocamentos e Deformações na chapa com inércia variável	74
Tabela 06 - a) Deslocamentos na treliça de 5 barras	76
b) e c) Deformações na treliça de 5 barras ..	76
Tabela 07 - Deslocamentos na extremidade (barra/chapa) ..	89
Tabela 08 - Deslocamentos na extremidade (barra/chapa) ..	90
Tabela 09 - Deslocamento na viga biapoiada	91
Tabela 10 - Deslocamentos de um túnel em rocha	93
Tabela 11 - Deslocamentos de um túnel em rocha	94
Tabela 12 - Valores de Tensões Principais no túnel	94
Tabela 13 - Deslocamento no cilindro pressurizado	95

LISTA DE SÍMBOLOS

- E - Módulo de elasticidade longitudinal do material.
- H - Parâmetro de encruamento.
- Y - Nível de Tensões.
- Δt - Intervalo de tempo.
- ϵ - Deformação Total.
- ϵ_e - Parcela de deformação elástica.
- ϵ_p - Parcela de deformação plástica.
- ϵ_v - Parcela de deformação viscosa.
- ϵ_{ve} - Parcela de deformação viscoelástica.
- ϵ_{vp} - Parcela de deformação viscoplástica.
- γ - Coeficiente de fluidez do material.
- ν - Coeficiente de Poisson.
- μ - Coeficiente de viscosidade do material.
- σ - Tensão aplicada.
- σ_y - Tensão de escoamento.
- σ_m - Tensão aplicada na mola.
- σ_s - Tensão aplicada no sólido.
- $\sigma_a = \sigma_v$ - Tensão aplicada no amortecedor.

RESUMO

NETO, J.M. Modelos de Comportamentos Viscoelástico e Viscoplastico na Análise de Estruturas Planas. São Carlos, 1994, 141p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O presente trabalho trata dos aspectos de formulação e resposta numérica de modelos viscoelásticos e elasto-viscoplasticos para a análise do comportamento de estruturas. Com base na Reologia dos Materiais, são revistos os conceitos relativos aos modelos unidimensionais básicos e algumas de suas combinações, com destaque para o chamado modelo elasto-viscoplastico de OWEN/HINTON. Propõe-se em seguida um novo modelo elasto-viscoplastico que permite reproduzir, como casos particulares, o modelo de OWEN/HINTON e os regimes primários e secundários de fluência. Sua resposta numérica em campo unidimensional é estudada através da análise de estruturas de barras.

As formulações combinadas estudadas são estendidas para possibilitar a análise de estados planos, sendo aplicadas em alguns exemplos sugeridos na literatura. As potencialidades demonstradas pelo novo modelo combinado permitem sugerir sua aplicação, no âmbito da engenharia civil, para o estudo de estruturas em concreto e problemas específicos de interação solo-estrutura, como escavação de túneis.

Palavra-chave: Viscoelasticidade - análise estrutural;
Viscoplasticidade - análise estrutural.

ABSTRACT

NETO, J.M. Viscoelastic and Viscoplastic Behaviors Models in Plane Structural Analysis. São Carlos, 1994. 141p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

The present work studies the aspects of formulation and numerical response of viscoelastic and elasto-viscoplastic constitutive models for structural analysis. Based on the Rheology of Materials some concepts related to one dimensional basic rheologic elements and its combinations are reviewed, with prominence on the so called Elasto-viscoplastic arrangement of OWEN/HINTON. In the sequence, a new Elasto-viscoplastic arrangement is proposed, which allows reproduce the model of OWEN/HINTON and the primary and secondary creeps as particular cases. Its numerical response in one dimensional domain, is studied through the analysis of bars structures.

The combined formulations studied previously are extended to make possible plane states analysis, being applied in some examples suggested in the literature. The potencialities presented by the new model allow to suggest its application on what concerns to civil engineering study concrete structures and particular problems of soil-structure interation, like tunnel excavation.

Key-words: Viscoelasticity - structural analysis;
Viscoplasticity - structural analysis.

CAPÍTULO 1 - COMENTÁRIOS PRELIMINARES

Na análise do comportamento estrutural, o efeito do tempo pode ser um fator importante a ser considerado, pois sabe-se que a maioria dos materiais sofrem deformações evolutivas, mesmo sob carregamento constante, cuja estabilização depende diretamente de suas propriedades físicas e dos níveis de sollicitação. Essas deformações evolutivas, quando associadas a um comportamento não-linear, podem ser descritas mediante um modelo **ELASTO-VISCOPLÁSTICO**. Tal modelo tem aplicação no âmbito da engenharia civil, em problemas de interação solo-estrutura, como por exemplo nas escavações de túneis (em rocha ou solo), valas a céu aberto e na análise do comportamento de estruturas em concreto, particularmente nas situações em que deformações residuais não-imediatas são significativas.

Ressalta-se ainda, que a análise estrutural incorporando um modelo constitutivo elasto-viscoplástico, pode fornecer não só informações sobre as tensões e deformações ao longo do tempo, mas também, sobre os valores da carga correspondente ao início da plastificação e da carga que provocará o **COLAPSO** completo da estrutura, situação essa em que ocorrerão acréscimos de deslocamentos sem acréscimos

dos valores de força.

Assim, esse tipo de análise *não-linear física* vem ao encontro de uma abordagem mais requintada sobre o comportamento de estruturas, quando comparada àquelas usuais que empregam o *modelo elástico linear*, pois permite prever o comportamento nos regimes de utilização e de ruptura.

No presente trabalho, se pretende tratar particularmente alguns aspectos da formulação de modelos constitutivos elasto-viscoplásticos, limitando os estudos à revisão de modelos considerados clássicos, à proposição de um modelo novo e ao estudo da sua resposta numérica a partir da implementação em código de cálculo.

A formulação dos modelos está baseada na Reologia dos Materiais, sendo que as relações constitutivas são obtidas preliminarmente para o caso uniaxial, combinando elementos reológicos básicos *"MOLA"*, *"AMORTECEDOR"* e *"SÓLIDO"*, representativos respectivamente dos comportamentos elástico linear, viscoso e plástico com ou sem encruamento.

Um modelo elasto-viscoplástico revisto é o de *OWEN/HINTON, OWEN* [1]. No entanto, deve-se observar que este modelo, elaborado a partir da associação em série de uma *MOLA* com um sistema em paralelo de *SÓLIDO E AMORTECEDOR*, no caso unidimensional e nas situações de carregamento proporcional, permite apenas considerar a evolução ao longo do tempo das mesmas deformações residuais que seriam obtidas com um modelo elasto-plástico. Entretanto, em alguns casos é

importante considerar uma outra contribuição evolutiva para a deformação total, que pode ocorrer mesmo quando o nível de tensão, ao qual o material está submetido, encontra-se abaixo da tensão de escoamento, ou seja, ainda em regime elástico.

Deste modo, propõe-se uma pequena alteração no modelo **Elásto-viscoplástico de OWEN/HINTON**, objetivando torná-lo mais completo. Essa pequena alteração, consiste em adicionar em série ao modelo anterior um sistema em paralelo de **MOLA/AMORTECEDOR**, basicamente viscoelástico.

Deve-se ressaltar, por outro lado, tendo em vista a obtenção de valores numéricos representativos da resposta de um modelo **ELASTO-VISCOPLÁSTICO**, a grande importância do algoritmo adotado para a integração das equações representativas do modelo. De fato, as relações constitutivas são normalmente expressas, de forma exata, como relações entre velocidades (variação no tempo) de deformações e de tensões, enquanto que na análise numérica é necessário realizar incrementos finitos de tensão e deformação.

Assim, no sentido de realizar a integração no espaço e no tempo, adota-se uma estratégia do tipo **incremental-iterativa**, isto é, em cada passo de carga procede-se a uma análise evolutiva procurando-se atingir, mediante verificação do equilíbrio, uma situação de deformação estável

Nesse particular, os fatores que interferem nos resultados são:

- a-) Tipo do Algoritmo: Explícito ou Implícito
- b-) Passo de Tempo Inicial;
- c-) Parâmetros de multiplicação para os passos de tempo atual e futuro;
- d-) Critérios de plastificação: TRESCA, VON MISES, MOHR-COULOMB E DRUCKER-PRAGER.

Para um melhor entendimento do presente trabalho, descreve-se a seguir, de modo bastante sucinto, o conteúdo básico dos demais capítulos.

O **CAPÍTULO 2** apresenta uma revisão, com base na **REOLOGIA DOS MATERIAIS**, de alguns modelos constitutivos denominados básicos, combinados e o elasto-viscoplástico de Owen/Hinton. O **CAPÍTULO 3** trata da generalização do Modelo Elasto-viscoplástico de Owen/Hinton, da análise unidimensional para uma análise plana. Ainda neste capítulo, são comentados alguns aspectos de importância relativos ao código de cálculo que incorpora aquele modelo, além de teste de aplicação numérica. A modificação introduzida no modelo Elasto-viscoplástico de Owen/Hinton, objetivando a obtenção das deformações ao longo do tempo, mesmo em regime elástico, é objetivo do **CAPÍTULO 4**. No **CAPÍTULO 5** são implementadas as expressões do novo modelo em código de cálculo para barras, visando uma melhor compreensão do procedimento de integração no tempo, particularmente da contribuição viscoelástica. Também apresentam-se alguns testes para verificação da eficiência das expressões e das novas rotinas de integração

no tempo.

A generalização do novo modelo para a análise plana, é apresentada no **CAPÍTULO 6**. Finalmente, no **CAPITULO 7** , são reunidas as conclusões finais referentes à esse trabalho.

CAPÍTULO 2 - MODELOS UNIDIMENSIONAIS

A Reologia dos Materiais possibilita a obtenção de relações constitutivas para a simulação do comportamento de um material submetido a condições quaisquer de solicitação. Neste capítulo, faz-se uma abordagem detalhada dos modelos reológicos básicos e suas associações mais usuais, destacando-se suas respostas, para solicitações uniaxiais, nas fases de carregamento e descarregamento. Coloca-se em destaque, a associação que dá origem ao modelo Elasto-viscoplástico de Owen/Hinton.

2.1-) MODELOS REOLÓGICOS BÁSICOS

2.1.1-) MODELO ELÁSTICO

Esse modelo é representado pelo elemento **MOLA**, cuja rigidez é substituída pelo Módulo de Elasticidade do material. Quando aplica-se uma tensão no modelo, ocorre o aparecimento de deformações **imediatas**, simultâneas com as tensões e invariáveis no tempo, sendo totalmente **recuperáveis** ou **reversíveis** quando do descarregamento. A **figura 1** apresentada a seguir ilustra o comportamento do modelo:

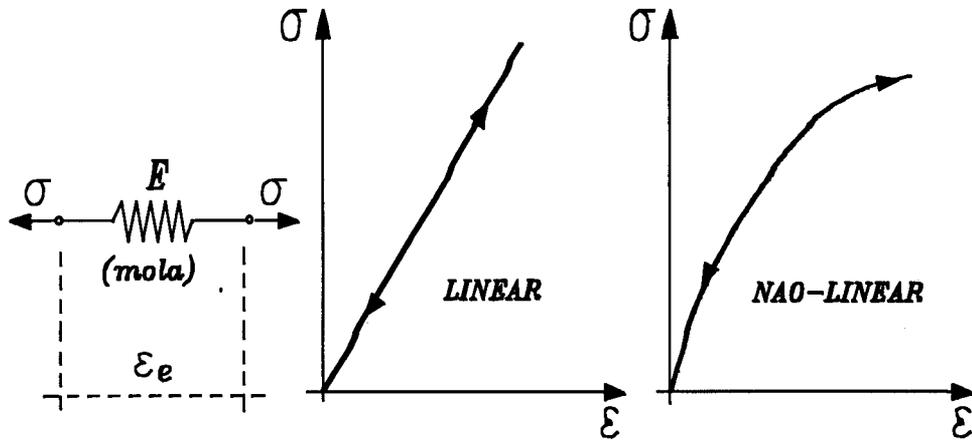


FIGURA 1 - MODELO REOLÓGICO ELÁSTICO (MOLA)

2.1.2-) MODELO PLÁSTICO OU RÍGIDO PLÁSTICO

Esse modelo é representado pelo elemento **SÓLIDO**, que funciona como um "**gatilho**" que será acionado apenas quando a tensão aplicada se igualar ou superar a tensão de escoamento do material, caracterizando então o aparecimento de deformações, denominadas "plásticas". Essas deformações plásticas, apesar de **imediatas, são irreversíveis** (residuais) quando ocorre o descarregamento.

O comportamento plástico pode ser **PERFEITO**, com deformações ilimitadas após atingida a tensão de escoamento do material como mostram as relações (1.1-a) e (1.1-b), ou ainda **COM ENCRUAMENTO**, onde acréscimos de tensão são admissíveis com a evolução das deformações plásticas, conforme será apresentado mais adiante nos modelos combinados. A **figura 2** ilustra o modelo plástico perfeito:

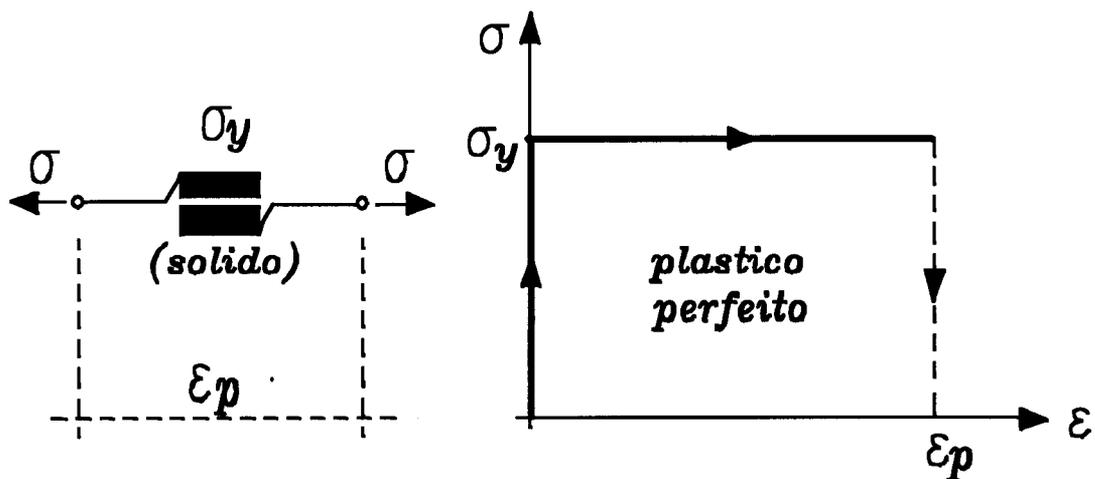


FIGURA 2 - MODELO REOLÓGICO PLÁSTICO (SÓLIDO)

$$\sigma < \sigma_y \Rightarrow \epsilon = 0 \quad (1.1-a)$$

$$\sigma = \sigma_y \Rightarrow \epsilon = \epsilon_p \quad (1.1-b)$$

2.1.3-) MODELO VISCOSO

Esse modelo é representado pelo elemento **AMORTECEDOR**, que funciona como um "retardador" para o aparecimento das deformações. No instante de aplicação da tensão, toda energia fica armazenada no amortecedor e dissipa-se ao longo do tempo.

Caracteriza-se então o aparecimento da variável tempo, que é parâmetro de fundamental importância no estudo de modelos viscosos. Assim, ao aplicar-se a tensão ocorrerá uma velocidade de deformação, levando no decorrer do tempo à deformações **não imediatas** e totalmente **irreversíveis** quando do descarregamento. A relação entre tensão aplicada e velocidade de deformação é suposta proporcional:

$$\sigma = \mu \dot{\epsilon} \quad (1.2)$$

onde μ = coeficiente de viscosidade do material

A expressão (1.2) permite duas análises bastante distintas, referentes à fase de carregamento sob tensão constante e à fase de descarregamento, quando a tensão aplicada vai a zero:

$$\sigma = \bar{\sigma} \Rightarrow \mu \dot{\epsilon} = \bar{\sigma} \Rightarrow \epsilon(t) = \frac{\bar{\sigma} t}{\mu} \quad (1.2-a)$$

$$\sigma = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} = 0 \Rightarrow \epsilon = \bar{\epsilon} = cte \quad (1.2-b)$$

Desse modo, fica caracterizado o comportamento do modelo viscoso, através da análise das expressões (1.2-a) e (1.2-b) apresentadas: a primeira expressão, referente ao crescimento linear da deformação e, a segunda, referente à deformação residual ou não-reversível. Deve-se ressaltar que essa deformação residual difere da deformação obtida no modelo plástico, por não ser imediata.

Apresentam-se na *figura 3*, a representação reológica do modelo e seu respectivo comportamento:

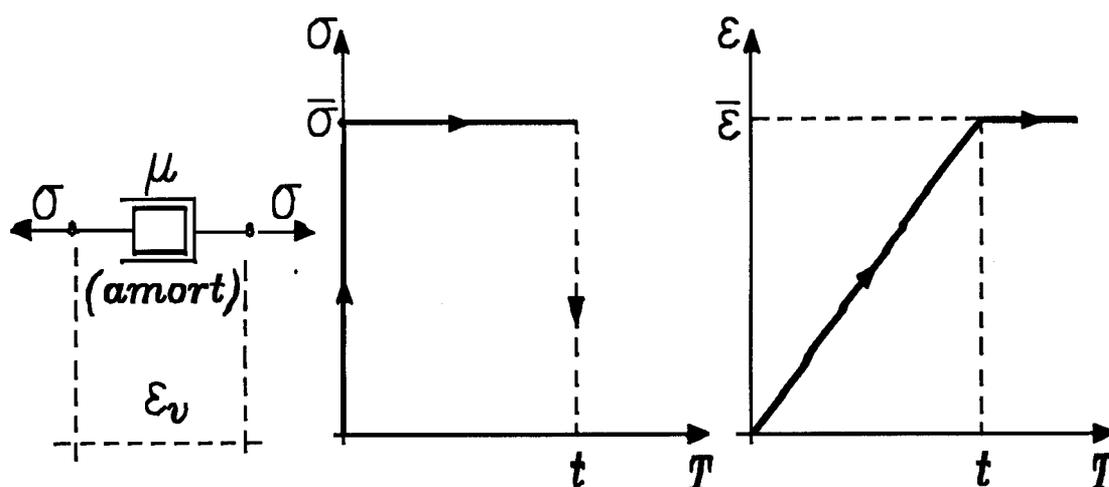


FIGURA 3 - MODELO REOLÓGICO VISCOSO (AMORTECEDOR)

2.2-) MODELOS REOLÓGICOS COMBINADOS

2.2.1-) MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS

O modelo elasto-plástico pode ser representado a partir da combinação dos elementos reológicos básicos **MOLA**, com rigidez igual ao módulo de elasticidade do material e **SÓLIDO**, que escorrega sobre uma superfície, uma vez vencida a força de atrito, força essa correspondente à tensão de escoamento do material.

Apresentam-se a seguir, diferentes tipos de associações que geram os modelos reológicos elasto-plásticos básicos e combinados, cujo comportamento está mais próximo dos comportamentos observados nos materiais dúcteis.

2.2.1.1-) Associação em SÉRIE

Representa o **MODELO ELÁSTICO PERFEITAMENTE PLÁSTICO**, através do arranjo em série da **MOLA** com o **SÓLIDO**, com a importante característica da igualdade de tensões em ambos os elementos. Com relação à deformação, resulta da soma das parcelas de deformação de cada elemento (vide relações 1.4-a,b,c). Deve-se ressaltar que, enquanto a tensão no modelo for menor que a tensão de escoamento, a deformação total não terá a contribuição do sólido e será composta apenas do valor da deformação da mola. A **figura 4** ilustra o arranjo reológico e a resposta do modelo:

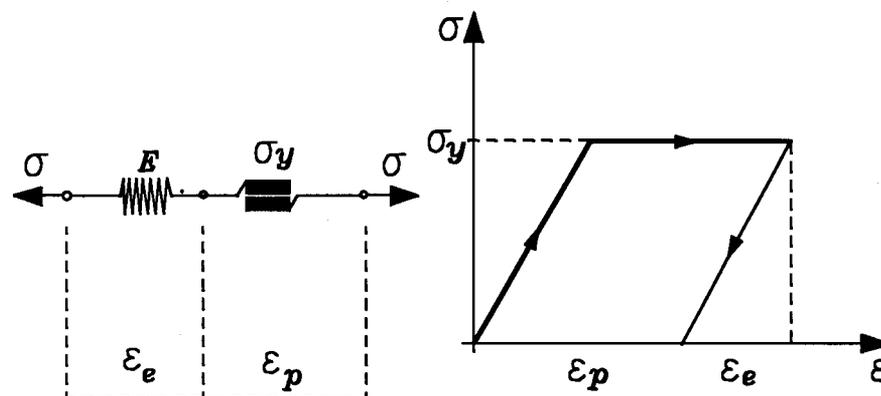


FIGURA 4 - MODELO ELÁSTICO PERFEITAMENTE PLÁSTICO

$$\sigma_m = \sigma_s = \sigma; \quad \epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p; \quad \epsilon = \epsilon_e \quad (\sigma < \sigma_y) \quad (1.4-a,b,c)$$

2.2.1.2-) Associação em Paralelo

Representa o **COMPORTAMENTO RÍGIDO PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO**, através do arranjo em paralelo da **MOLA** com

o **SÓLIDO**, possuindo características inversas do modelo anterior, ou seja, possui a mesma deformação para ambos os elementos (vide relações 1.5-a,b), porém, a tensão total é a contribuição das parcelas de cada elemento (vide relação 1.6-a), sendo que a deformação será sempre igual à deformação plástica para $\sigma \geq \sigma_y$. Outra característica do arranjo é a existência de um novo parâmetro denominado **encruamento (H)** (vide relação 1.6-b), o qual determina uma razão de crescimento constante de deformação. A figura 5 ilustra o modelo:

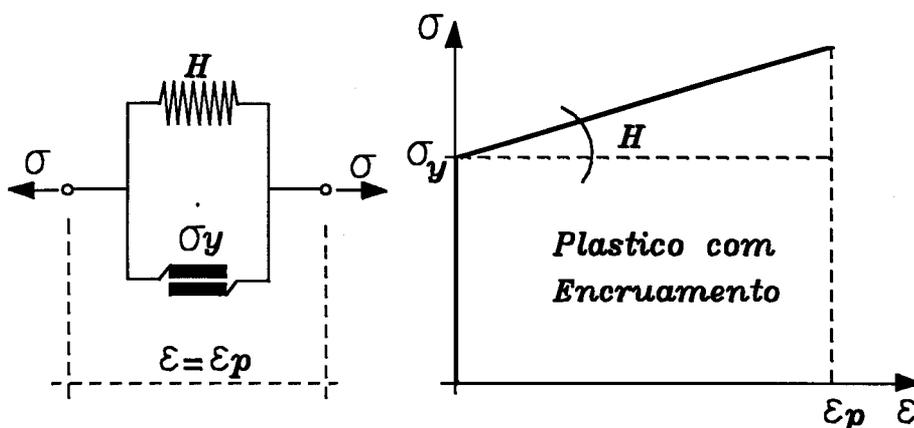


FIGURA 5 - MODELO PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO

$$\epsilon = \epsilon_p \quad (\sigma < \sigma_y) ; \quad \epsilon = 0 \quad (\sigma < \sigma_y) \quad (1.5-a,b)$$

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_s = H\epsilon_p + \sigma_y ; \quad H = \frac{(\sigma - \sigma_y)}{\epsilon_p} \quad (1.6-a,b)$$

2.2.1.3-) Associação Mista

É representada pela combinação em série de uma **MOLA** com o modelo **RÍGIDO COM ENCRUAMENTO** e caracteriza-se pela soma das parcelas de deformação de ambos os conjuntos, como indicado nas relações (1.7-a,b) e ilustrada na **figura 6** a seguir:

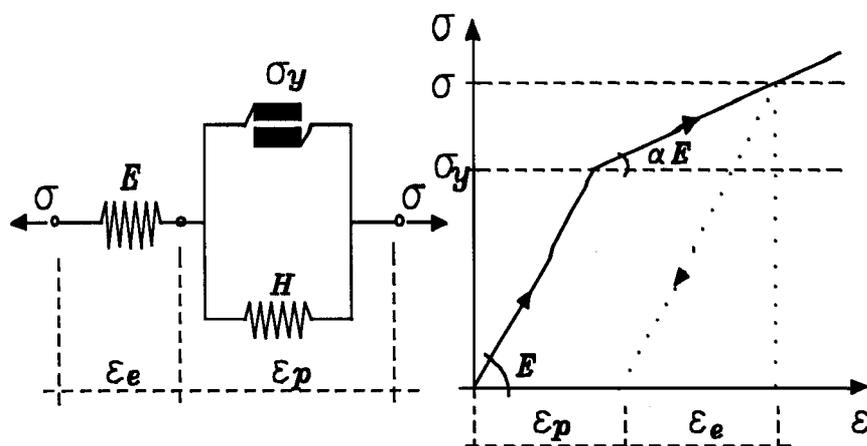


FIGURA 6 - MODELO ELASTO-PLÁSTICO BILINEAR

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \frac{(\sigma - \sigma_y)}{H} ; \quad \sigma = \sigma_m = \sigma_s \quad (1.7-a,b)$$

Neste caso, a determinação do parâmetro de encruamento dá-se como segue, com base na **figura 7**:

$$H = \frac{(\sigma - \sigma_y)}{\varepsilon_p} = \frac{(\sigma - \sigma_y)}{\varepsilon - \varepsilon_e} = \frac{(\sigma - \sigma_y)}{\frac{(\sigma - \sigma_y)}{\alpha E} - \frac{(\sigma - \sigma_y)}{E}}$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{\frac{(1-\alpha)}{(\alpha E)}} = \frac{\alpha E}{1-\alpha} \quad (1.8)$$

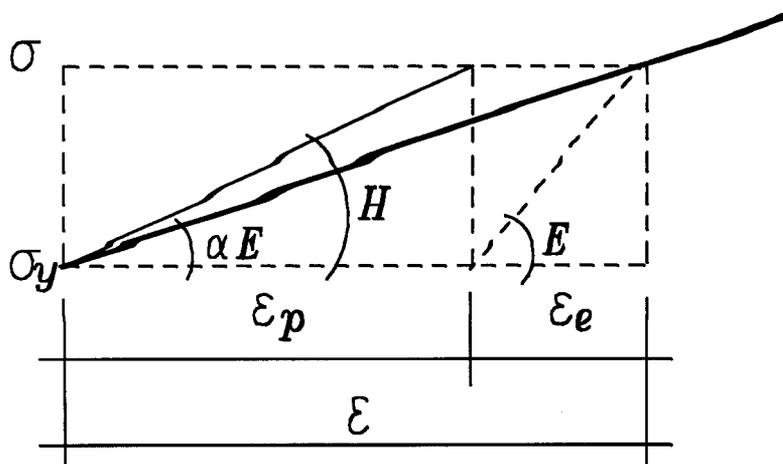
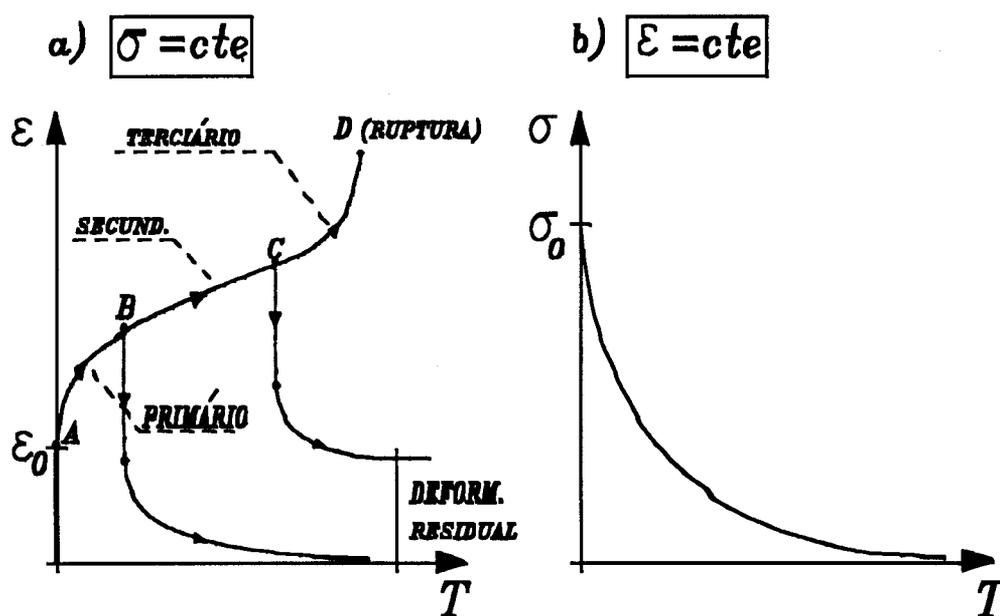


FIGURA 7 - DETERMINAÇÃO DO PARÂMENTRO H

2.2.2-) MODELOS VISCO-ELÁSTICOS

O modelo viscoelástico pode ser representado a partir da combinação dos elementos **MOLA** e **AMORTECEDOR**. Possui importância considerável na simulação do comportamento de materias como, por exemplo, o concreto que mesmo em regime elástico apresenta deformação ao longo do tempo devido a fatores como fissuração. O comportamento viscoelástico pode ser melhor compreendido nos diagramas de **FLUÊNCIA** ou "**CREEP**" (tensão constante com aumento das deformações) e **RELAXAÇÃO** (deformações constantes com diminuição das tensões), apresentados nas **figura 8a e 8b** respectivamente.



FIGURAS 8a e 8b - CURVAS DE FLUÊNCIA E RELAXAÇÃO

Em particular na figura 8a, nota-se que a uma deformação imediata ϵ_0 segue um regime de "*creep*" *primário*, no qual as deformações são totalmente recuperadas em caso de descarregamento. No regime de "*creep*" *secundário* a velocidade de deformação mantém-se praticamente constante e se o carregamento é retirado em qualquer instante dentro desse regime, aparecem deformações irreversíveis. No regime de "*creep*" *terciário*, a velocidade de deformação cresce rapidamente levando à ruptura.

Assim como nos modelos elasto-plásticos, os modelos viscoelásticos possuem dois tipos de associações básicas que permitem reproduzir as características de cada um dos regimes de "*creep*", primário ou secundário. Tais associações são apresentadas a seguir detalhadamente.

2.2.2.1-) Associação em SÉRIE - Modelo de Maxwell

É representada pela associação em série de **MOLA e AMORTECEDOR**, tendo como principais características a igualdade de tensões para ambos os elementos e a deformação total como a soma das parcelas elástica e viscosa. Em outras palavras, além da deformação imediata da mola, ocorrerá um acréscimo de deformação pela transferência de tensões devido ao alívio do amortecedor.

No que segue, estão apresentados o modelo de Maxwell, os diagramas de tensão e deformação ao longo do tempo, todos na **figura 9** e as expressões básicas (1.9-a), (1.9-b) e (1.10) referentes ao seu comportamento:

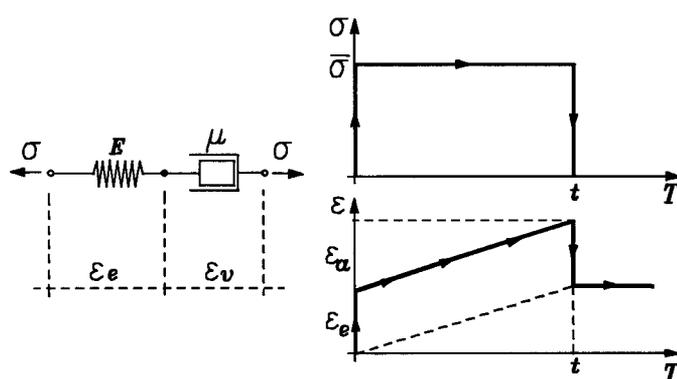


FIGURA 9 - ASSOCIAÇÃO EM SÉRIE / MAXWELL

$$\sigma_m = \sigma_a = \sigma \quad (1.9-a)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_v = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (1.9-b)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(t) = \frac{\bar{\sigma} t}{\mu} + \frac{\bar{\sigma}}{E} \quad (1.10)$$

Como se pode concluir a partir de suas características, o modelo de Maxwell se aplica à simulação do regime de "creep" secundário.

2.2.2.2-) Associação em Paralelo - Modelo de Kelvin

É representado pela associação em paralelo entre **MOLA** e **AMORTECEDOR**. Ao contrário da associação em série, caracteriza-se pela igualdade de deformação para ambos os elementos, porém, a tensão total é a soma das parcelas elástica e viscosa. Deve-se ressaltar que ocorrerá uma transferência de tensões entre os elementos ao longo do tempo: o amortecedor perde e a mola ganha.

A seguir, apresentam-se os diagramas de tensão e deformação ao longo do tempo (**figura 10**) e as expressões básicas (1.11-a), (1.11-b) e (1.11-c), referentes ao modelo de Kelvin:

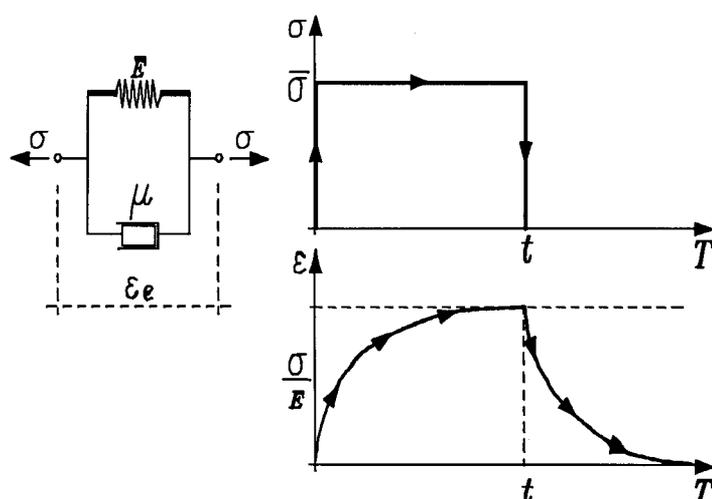


FIGURA 10 - ASSOCIAÇÃO EM PARALELO / KELVIN

$$\varepsilon = \varepsilon_m = \varepsilon_v = \varepsilon_e \quad (1.11-a)$$

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_v = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon} \quad (1.11-b)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\bar{\sigma}}{E} \left(1 - e^{-\frac{Et}{\mu}}\right) \quad (1.11-c)$$

2.2.2.3-) Associações mistas

São representadas por diferentes tipos de associações, em geral utilizando os modelos básicos de Maxwell e de Kelvin.

a-) Modelo combinado de Kelvin

Elaborado através da associação de uma **MOLA** de rigidez E , em série com o **MODELO DE KELVIN**, este modelo

pode fornecer uma boa aproximação para o regime de "creep" primário, devido às características de deformações imediatas e variáveis ao longo do tempo e totalmente reversíveis em caso de descarregamento. A *figura 11* ilustra o modelo:

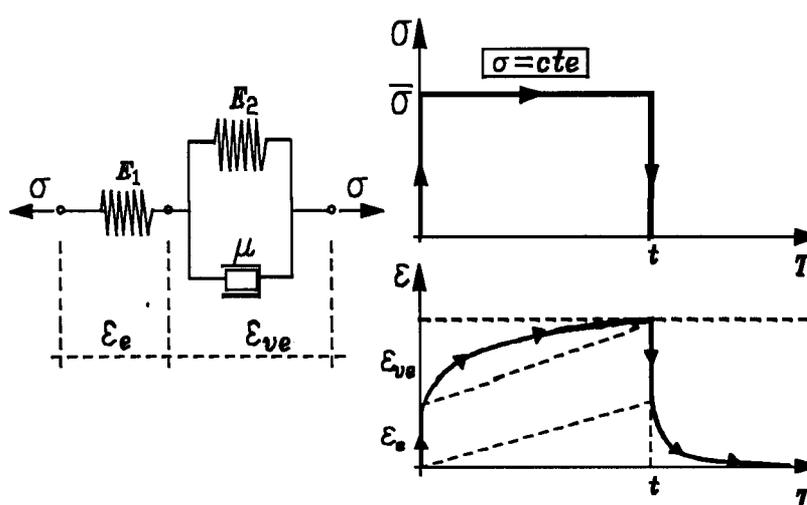


FIGURA 11 - MODELO COMBINADO MOLA/KELVIN

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_{ve} \quad (1.12-a)$$

$$\sigma = \sigma_e = \sigma_{ve} = E_1 \epsilon_e = E_2 \epsilon_{ve} + \mu \dot{\epsilon}_{ve} \quad (1.12-b)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} \Rightarrow \epsilon(t) = \bar{\sigma} \left[\frac{(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} - \frac{e^{-\frac{E_2 t}{\mu}}}{E_2} \right] \quad (1.12-c)$$

b-) Modelo de Burger

Representado através da associação em série dos modelos de *Maxwell e Kelvin*. A característica principal

desse modelo é a possibilidade de simulação do "**creep primário**", característica do modelo de Kelvin, com posterior simulação do "**creep secundário**", característica do modelo de Maxwell. Isto possibilita então a obtenção quase que completa do diagrama de fluência. A **figura 12** ilustra o modelo:

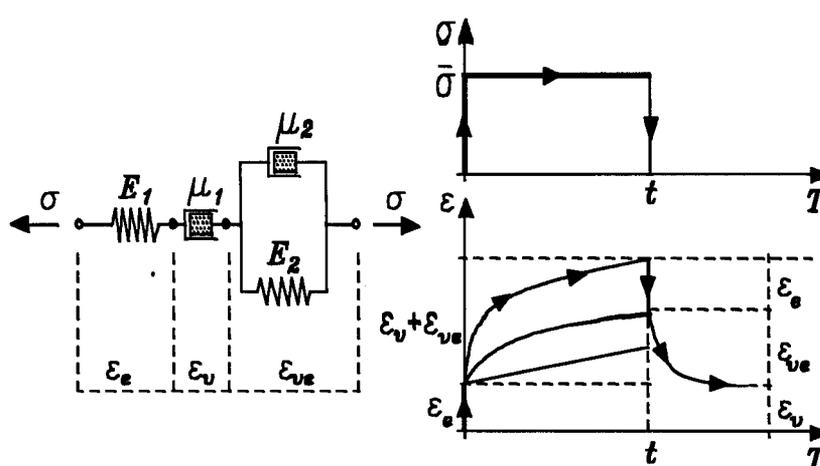


FIGURA 12 - MODELO REOLÓGICO DE BURGER

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_v + \epsilon_{ve} \quad (1.13-a)$$

$$\sigma = \sigma_e = \sigma_v = \sigma_{ve} = E_1 \epsilon_e = \mu_1 \dot{\epsilon}_v = E_2 \epsilon_{ve} + \mu_2 \dot{\epsilon}_{ve} \quad (1.13-b)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} \Rightarrow \epsilon(t) = \frac{\bar{\sigma}}{E_1} + \frac{\bar{\sigma} t}{\mu_1} + \frac{\bar{\sigma}}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\mu_2}}\right) \quad (1.13-c)$$

2.2.3-) MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE OWEN/HINTON

O modelo Elasto-viscoplástico é composto de três elementos básicos (*MOLA, SÓLIDO E AMORTECEDOR*), cujo objetivo principal é o de permitir a análise do comportamento

da estrutura ao longo do tempo. A análise no tempo é a principal e vantajosa diferença, quando comparado ao modelo elasto-plástico. Deve-se adiantar, no entanto, que no caso do modelo elasto-viscoplástico a ser considerado, o elemento sólido possui comportamento equivalente ao comportamento paralelo do caso elasto-plástico rígido com encruamento, isto é, a ele é associado um parâmetro de encruamento positivo. Este fato permite que ocorra, mesmo após ter sido atingida a tensão de escoamento do material já na fase viscoplástica, uma **estabilização da deformação total**.

Sob o ponto de vista do procedimento numérico, a ser descrito mais adiante, a análise evolutiva é feita em cada passo de tempo Δt_n para cada incremento de carga, ou parcela relativa ao carregamento total que se deseja aplicar à estrutura. Deve-se ressaltar, que para cada incremento de carga existirão vários Δt_n , até que se atinja a estabilização das deformações. As **figuras 13 e 14** ilustram o modelo.

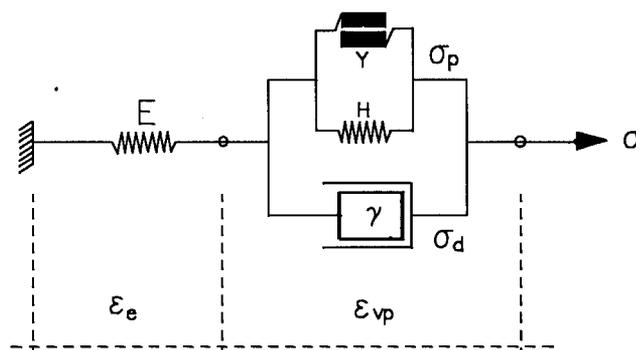


FIGURA 13 - MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE OWEN/HINTON

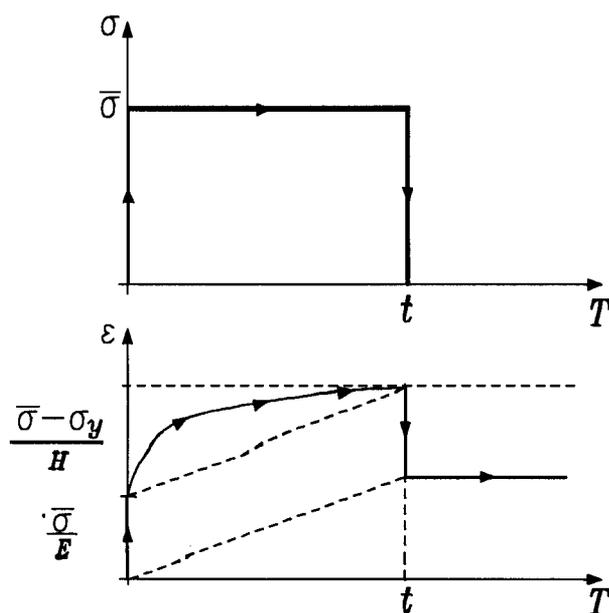


FIGURA 14 - [TENSÃO / DEFORMAÇÃO] x TEMPO

Para o esquema indicado na **figura 13**, pode-se dizer que a deformação total é a soma das parcelas deformação elástica e deformação viscoplástica. Quanto às tensões, pode-se admitir que σ_p é igual a Y (com significado descrito abaixo), uma vez que tenha sido atingido o nível σ_y , e σ_d é a tensão no amortecedor ($\sigma - \sigma_p$), dissipando-se ao longo do tempo. Assim, podem ser elaboradas as seguintes relações:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{vp} \quad (2.1)$$

$$\sigma_e = \sigma = E \varepsilon_e \quad (2.2)$$

$$Y = \sigma_y + H \varepsilon_{vp} \quad (2.3)$$

$$\sigma_d = \mu \frac{d\epsilon_{vp}}{dt} = \mu \dot{\epsilon}_{vp} \quad (2.4)$$

$$\sigma = \sigma_d + \sigma_p \quad (2.5)$$

onde:

Y = Nível de tensão após atingida a tensão de escoamento;

σ_y ...= Tensão de escoamento do material;

H = Parâmetro de encruamento (admitido constante);

μ = Coeficiente de viscosidade do material.

Admitindo $\sigma_p = Y$ e (2.4), e substituindo em (2.5), obtém-se a seguinte expressão:

$$\sigma = \mu \frac{d\epsilon_{vp}}{dt} + \sigma_y + H \epsilon_{vp} \quad (2.6)$$

Substituindo agora ϵ_{vp} de (2.1) e (2.2) em (2.6), resulta:

$$HE\epsilon + \mu E \frac{d\epsilon}{dt} = H\sigma + E(\sigma - \sigma_y) + \mu \frac{d\sigma}{dt} \quad (2.7)$$

Assim, a expressão (2.7) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que define uma

relação de **dependência no tempo** entre tensão e deformação em regime viscoplástico. Considerando o parâmetro $\gamma = 1/\mu$, como sendo o **parâmetro de fluidez** e , substituindo-o em (2.7) e rearranjando a expressão, tem-se:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_{vp} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma [\sigma - (\sigma_y + H \epsilon_{vp})] \quad (2.8)$$

onde:

$$\dot{\epsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}}{E} \quad (2.8-a)$$

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \gamma [\sigma - (\sigma_y + H \epsilon_{vp})] \quad (2.8-b)$$

Observa-se assim, que a expressão (2.8) define a taxa de deformação total, relacionada com os resíduos ou excesso de tensão, capaz de atingir um estado de acomodação que converge para os valores de tensão e deformação do modelo elasto-plástico misto.

Pode-se, ainda, considerar um estado de tensões constantes ($\sigma = \sigma_a$) aplicada ao modelo, "Ensaio de Creep", assumindo a expressão (2.7) a seguinte forma:

$$\gamma H \varepsilon + \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\gamma H}{E} \sigma_a + \gamma (\sigma_A - \sigma_y) \quad (2.9)$$

Aplicando os procedimentos de integração, necessários para a expressão acima, obtém-se a relação genérica:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_A}{E} + \frac{(\sigma_a - \sigma_y)}{H} [1 - e^{-H\gamma t}] \quad (2.10)$$

Nota-se que a expressão (2.10) fornece informações importantes sobre as deformações ao longo do tempo, que tendem em $t \rightarrow \infty$ aos valores do modelo elasto-plástico. Pode-se, ainda, considerar o caso de um modelo plástico perfeito ($H=0$), onde os valores de deformação crescem continuamente a uma taxa constante, ao longo do tempo. Nesse caso, a expressão (2.10), aplicando-se a regra de **L'HOPITAL**, toma a seguinte forma:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_a}{E} + (\sigma_a - \sigma_y) \gamma t \quad (2.11)$$

Na *figura 15*, são apresentados os gráficos de deformação total ao longo do tempo, das expressões (2.10) e (2.11), respectivamente:

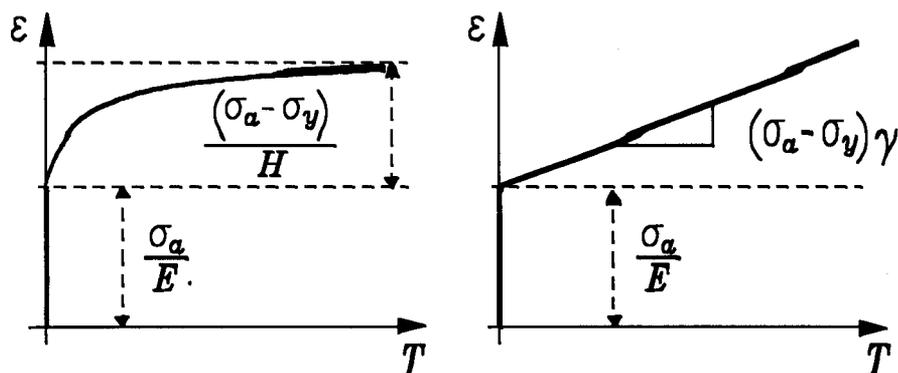


FIGURA 15 - COM ENCRUAMENTO / SEM ENCRUAMENTO

A análise elasto-viscoplástica, apesar de mais custosa em termos de formulação e implementação numérica, possibilita a elaboração de uma análise mais completa, uma vez que a evolução do comportamento estrutural até a iminência do colapso pode ser simulado com maior precisão.

Além disso, o modelo elasto-viscoplástico tem como casos particulares, os modelos **elástico**, **viscoelástico ($\gamma=0$)** e **elasto-plástico perfeito ($H=0$)**, este último suficiente para as análises que objetivam a determinação apenas do nível da carga de colapso da estrutura.

**CAPÍTULO 3 - CONSIDERAÇÕES SOBRE A GENERALIZAÇÃO
DO MODELO MECÂNICO UNIDIMENSIONAL
DE OWEN/HINTON**

O interesse por uma análise estrutural pelo menos em campo bidimensional, conduz a uma generalização do modelo Elasto-viscoplástico de OWEN/HINTON. Para tanto, é necessário adotar uma lei para a **velocidade ou taxa de deformação viscoplástica**. Nos itens seguintes, apresentam-se a expressão adotada por Owen/Hinton para a taxa de deformação viscoplástica, as aproximações utilizadas para a obtenção dos incrementos finitos de deformação viscoplástica, de tensão, dos passos de tempo e aspectos da análise iterativa e convergência dos resultados.

3.1-) RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

3.1.1-) EXPRESSÕES BÁSICAS DO MODELO

Pode-se abordar o problema, partindo-se da interpretação da deformação total, agora um vetor com seis componentes, como a soma das parcelas deformação elástica (ϵ_e) e deformação viscoplástica (ϵ_{vp}), porém, exprimindo-as, em termos de suas variações no tempo:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} \quad (3.1)$$

onde: $\dot{} \rightarrow d/dt = \text{variação no tempo}$

Uma hipótese simplificadora para $\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}$, consiste em admitir que seja dependente somente do estado atual de tensões (representado pelo vetor $\boldsymbol{\sigma}$ de seis componentes), ou seja, $\boldsymbol{\varepsilon}_{vp} = \mathbf{f}[\boldsymbol{\sigma}]$. Por outro lado, valem as seguintes relações:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = D \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (3.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} = \gamma \langle \Phi \rangle a \quad (3.3)$$

$$\langle \Phi \rangle = \Phi(F) = e^{M \left(\frac{F-F_0}{F_0} \right) - 1} \quad \text{ou} \quad \Phi(F) = \left(\frac{F-F_0}{F_0} \right)^N \quad (3.4)$$

onde:

D: Matriz de rigidez elástico;

M e N....: Constantes prescritas, normalmente iguais a 1;

F₀: Tensão de escoamento uniaxial do material;

F : Valor obtido da expressão de um critério para existência de acréscimos na deformação v-plástica;

a : Vetor normal à superfície representativa de um potencial 'plástico';

γ : Parâmetro de fluidez do material;

e a operação $\langle \phi \rangle$, toma os valores positivos de ϕ , e funciona da seguinte forma:

a) Se $F - F_0 \geq 0$, ocorrerá deformação viscoplástica:

$$\langle \Phi(F) \rangle = \Phi(F) \Rightarrow \dot{\epsilon}_{vp} \neq 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_{vp}$$

b) Se $F - F_0 < 0$, não ocorrerá deformação viscoplástica:

$$\dot{\epsilon}_{vp} = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e \Rightarrow \epsilon = \epsilon_e = D^{-1} \sigma$$

A partir dessas expressões, passa a ser possível a determinação dos valores das duas parcelas de deformação, elástica e viscoplástica. Entretanto, para fins de cálculo, é interessante determinar acréscimos finitos das variáveis, o que será discutido a seguir.

3.1.2-) INCREMENTOS DE DEFORMAÇÃO VISCOPLÁSTICA

Partindo da expressão (3.3), pode-se definir o incremento viscoplástico, que virá a ocorrer em um intervalo de tempo, utilizando as expressões seguintes:

$$\Delta \varepsilon_{vp}^n = \Delta t_n [(1-\theta) \dot{\varepsilon}_{vp}^n + \theta \dot{\varepsilon}_{vp}^{n+1}] \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{vp}^{n+1} = \varepsilon_{vp}^n + \Delta \varepsilon_{vp}^n$$

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$$

Adotando-se $\theta=0$, obtém-se a expressão de Integração no Tempo de Euler, ou também conhecida como "**Procedimento Explícito**". Desse modo, o incremento de deformação passa a ser conhecido em função apenas das condições do problema existentes no instante de tempo atual ('*FORWARD DIFFERENCE*'):

$$\Delta \varepsilon_{vp}^n = \Delta t_n \dot{\varepsilon}_{vp}^n \quad (3.5-a)$$

Adotando-se $\theta=1$, obtém-se a expressão do esquema dito "**Totalmente Implícito**" ('*BACKWARD DIFFERENCE*'), onde o incremento de deformação é obtido a partir da velocidade de deformação no instante futuro (n+1):

$$\Delta \varepsilon_{vp}^n = \Delta t_n \dot{\varepsilon}_{vp}^{n+1} \quad (3.5-b)$$

Pode-se, ainda, considerar o fato de se

adotar o valor de $\theta=0.5$, obtendo-se uma expressão que adota uma solução intermediária com relação às anteriores:

$$\Delta \varepsilon_{vp}^n = \Delta t_n \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{vp}^n}{2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{vp}^{n+1}}{2} \right) \quad (3.5-c)$$

Observa-se que na expressão (3.5-a), o valor da taxa de deformação viscoplástica no instante n já é conhecida. No entanto, o valor da taxa de deformação viscoplástica no instante $n+1$ para as expressões (3.5-b) e (3.5-c) ainda é desconhecida. Uma aproximação para aquela taxa pode ser determinada, utilizando-se um desenvolvimento em *SÉRIE DE TAYLOR*:

$$\dot{\varepsilon}_{vp}^{n+1} = \dot{\varepsilon}_{vp}^n + H^n \Delta \sigma^n \quad (3.6)$$

$$H^n = \left(\frac{\partial \dot{\varepsilon}_{vp}}{\partial \sigma} \right)^n = H^n(\sigma^n) \quad (3.6-a)$$

Assim, pode-se reescrever a expressão (3.5) na seguinte forma:

$$\Delta \varepsilon_{vp}^n = \dot{\varepsilon}_{vp}^n \Delta t_n + C^n \Delta \sigma^n \quad (3.7)$$

$$C^n = \Theta \Delta t^n H^n \quad (3.7-a)$$

3.1.3-) DETERMINAÇÃO DA MATRIZ H

Quando são utilizadas as expressões **semi-implícitas** ou **totalmente implícitas**, o termo ε_{vp} no instante $n+1$ aparece e torna-se então necessária a determinação da 'matriz' C e conseqüentemente da 'matriz' H , ambas no instante n , como apresentadas nas expressões (3.6-a) e (3.7-a). Assim pode-se determinar a matriz H da seguinte forma:

$$H^n = \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{vp}^n}{\partial \sigma^n} = \gamma \left[\left[\Phi \frac{\partial a^t}{\partial \sigma} + \frac{d\Phi}{dF} a^t \right] \right] \quad (3.8)$$

escrita para um critério associativo, com o potencial plástico coincidente com a **função de plastificação**:

$$a = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (3.9)$$

A função de plastificação F tem sua expressão definida, neste trabalho, a partir dos critérios de **TRESCA**, **VON MISES**, **MOHR-COULOMB**, **DRUCKER PRAGER**. Deve-se ressaltar ainda que F e F_0 assumem diferentes valores, em

função do critério a ser adotado, como mostra a **tabela 1**:

TABELA 1 - PARÂMETROS REFERENTES AOS CRITÉRIOS		
CRITÉRIOS	NÍVEL DE TENSÃO (F)	ESCOAMENTO (F₀)
TRESCA	$2 \cdot \sqrt{(J_2')} \cdot \cos\phi$	σ_y
VON MISES	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{(J_2')}$	σ_y
MOHR COULOMB	$J_1 \cdot \sin\phi / 3 + \sqrt{(J_2')} \cdot (\cos\theta - (\sin\theta \cdot \sin\phi) / \sqrt{3})$	$c \cdot \cos\phi$
DRUCKER-PRAGER	$a \cdot J_1 + \sqrt{(J_2')}$	K'

na tabela, aparecem as seguintes grandezas:

$$J_1 = \sigma_{ii} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = \frac{(\sigma_{ij} \sigma_{ij})}{2} = \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \tau_{xy}^2)}{2}$$

$$J_2' = \frac{(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2)}{2} + \tau_{xy}^2$$

$$a = \frac{2 \sin\phi}{\sqrt{3}(3 - \sin\phi)} \quad k' = \frac{6 c \cos\phi}{\sqrt{3}(3 - \sin\phi)}$$

ϕ = ângulo de atrito c = coesão

θ = ângulo de Lode (PROENÇA[18])

Observa-se ainda, que as simplificações feitas para a obtenção dos invariantes de tensão J_1 e J_2 , devem-se ao fato de que, para o trabalho em questão, serão considerados apenas os **ESTADOS PLANOS DE TENSÃO, DEFORMAÇÃO E AXISSIMÉTRICO**.

Pode-se obter a expressão da matriz H a partir de uma operação com matrizes. No caso do critério de " **VON MISES** ", por exemplo, procede-se do seguinte modo:

$$H^n = H = p_1 M_1 + p_2 M_2 \quad (3.10)$$

$$p_1 = \gamma \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2'}} \Phi \right\rangle \quad (3.10-a)$$

$$p_2 = \gamma \left\langle \frac{3}{4(J_2')} \frac{d\Phi}{dF} - \frac{\sqrt{3}\Phi}{4(J_2')^{3/2}} \right\rangle \quad (3.10-b)$$

M_1 e M_2 são matrizes, já considerando as simplificações necessárias para os **Estados Planos de Tensão, Deformação e Axissimétrico**, dadas por:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \quad (3.10-c)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \sigma'_x{}^2 & \sigma'_x\sigma'_y & 2\sigma'_x\tau_{xy} & \sigma'_x\sigma'_z \\ \sigma'_x\sigma'_y & \sigma'_y{}^2 & 2\sigma'_y\tau_{xy} & \sigma'_y\sigma'_z \\ 2\sigma'_x\tau_{xy} & 2\sigma'_y\tau_{xy} & 4\tau_{xy}^2 & 2\sigma'_z\tau_{xy} \\ \sigma'_x\sigma'_z & \sigma'_y\sigma'_z & 2\sigma'_z\tau_{xy} & \sigma'_z{}^2 \end{pmatrix} \quad (3.10-d)$$

Observa-se, ainda, que H^a pode também ser obtida para os outros critérios, mediante expressões obtidas via procedimentos análogos.

3.1.4-) INCREMENTOS DE TENSÃO

Partindo da expressão (3.2), obtém-se a expressão para o acréscimo de tensão, segundo o desenvolvimento mostrado a seguir:

$$\dot{\sigma} = D\dot{\epsilon}_e \Rightarrow \Delta\sigma^n = D\Delta\epsilon_e^n = D(\Delta\epsilon^n - \Delta\epsilon_{vp}^n) \quad (3.11)$$

Sabe-se que a matriz de deformação total

onde ser expressa como:

$$\varepsilon = \mathbf{B}d \Rightarrow \Delta \varepsilon^n = \mathbf{B}^n \Delta d^n \quad (3.12)$$

onde, \mathbf{B} é a matriz dos operadores de derivadas sobre os deslocamentos e Δd^n o vetor incremento de deslocamento no instante n . Assim, substituindo-se as equações (3.5-a) e (3.12) em (3.11), tem-se que:

$$\Delta \sigma^n = \hat{D}^n (\mathbf{B}^n \Delta d^n - \dot{\varepsilon}_{vp}^n \Delta t_n) \quad (3.13)$$

onde:

$$\hat{D}^n = (D^{-1} + C^n)^{-1} \quad (3.13-a)$$

$$D = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13-b)$$

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13-c)$$

$$\alpha = \frac{\nu}{1-\nu} \quad \beta = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

As matrizes elásticas D , apresentadas referem-se, respectivamente, ao estado plano de tensão (3.13-b) e aos estados plano de deformação e axissimétrico (3.13-c), sendo E o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson.

3.2-) ASPECTOS DA INTEGRAÇÃO NO TEMPO

3.2.1-) INCREMENTO DO TEMPO

Para o cálculo do incremento de tempo, adota-se a seguinte relação (OWEN [1]), baseada na razão entre a deformação viscoplástica total efetiva e a velocidade de deformação viscoplástica efetiva, ambas no instante n :

$$\Delta \bar{\epsilon}_{vp}^n = \left[\frac{d(\bar{\epsilon}_{vp}^n)}{dt} \right] \Delta t_n \leq \tau \bar{\epsilon}^n$$

$$\Delta t_n = \tau \left[\bar{\epsilon}^n / \left(\frac{d(\bar{\epsilon}_{vp}^n)}{dt} \right) \right]^{1/2} \quad (3.14-a)$$

onde:

$$\frac{d(\bar{\epsilon}_{vp}^n)}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\epsilon}_{vp}^n \cdot \dot{\epsilon}_{vp}^n) \quad (3.14-b)$$

$$\bar{\epsilon}^n = \sqrt{\frac{2}{3}} (\epsilon^n \cdot \epsilon^n) \quad (3.14-c)$$

são a taxa de deformação viscoplástica efetiva (3.14-b) e deformação total efetiva (3.14-c), respectivamente.

A expressão (3.14-a) é aplicada para todos os pontos de integração de Gauss, adotando-se o menor valor encontrado. Quanto ao fator de controle τ , os valores que garantem a estabilidade do processo encontram-se dentro do intervalo de 0,01 a 0,15 para algoritmos explícitos e próximo de 10 para algoritmos implícitos.

Um modo complementar para estimar o passo de tempo para o incremento $n+1$, consiste em multiplicar o passo de tempo atual Δt_n por um fator K , variável entre 1.5 e 2.0, como mostrado na expressão (3.14-d):

$$\Delta t_{n+1} = K \Delta t_n \quad (3.14-d)$$

3.2.2-) ANÁLISE ITERATIVA - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Em qualquer instante de tempo t_n , o equilíbrio entre a distribuição de tensões σ^n , compatível com o modelo constitutivo e o carregamento aplicado f^n deve ser

verificado. Durante um incremento de tempo Δt_n essa condição também deve ser satisfeita. Em forma linearizada, a equação que exprime o equilíbrio incremental é:

$$\int_{\Omega} [\mathbf{B}^n]^t \Delta \boldsymbol{\sigma}^n d\Omega + \Delta \mathbf{f}^n = 0 \quad (3.15)$$

onde $\Delta \mathbf{f}^n$ é o incremento de cargas em $\hat{\mathbf{t}}_n$.

A equação (3.15) constitui a base de todo o procedimento numérico de análise não-linear. Dentro desse procedimento, a verificação do equilíbrio incremental leva à determinação de uma variação $\Delta \mathbf{d}^n$ para os deslocamentos, explicitada pela seguinte relação, obtida pela substituição da (3.13) na (3.15):

$$\Delta \mathbf{d}^n = [\mathbf{K}_T^n]^{-1} \Delta \mathbf{V}^n \quad (3.16)$$

onde \mathbf{K}_T^n é a Matriz de Rigidez Tangente e $\Delta \mathbf{V}^n$ é o Vetor dos 'pseudo-incrementos' de carga, expressos por:

$$\Delta \mathbf{V}^n = \int_{\Omega} [\mathbf{B}^n]^T \hat{\mathbf{D}}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^n \Delta t_n d\Omega + \Delta \mathbf{f}^n \quad (3.16-a)$$

$$\mathbf{K}_T^n = \int_{\Omega} [\mathbf{B}^n]^T \dot{\mathbf{D}}^n \mathbf{B}^n d\Omega \quad (3.16-b)$$

Assim, com os valores de Δd^n , volta-se à expressão (3.13) e calcula-se $\Delta \sigma^n$. Na sequência resultam:

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + \Delta \sigma^n \quad (3.17)$$

$$d^{n+1} = d^n + \Delta d^n \quad (3.18)$$

A determinação dos incrementos de deformação viscoplástica $\Delta \epsilon_{vp}^n$ pode ser feita usando-se a expressão mostrada a seguir:

$$\Delta \epsilon_{vp}^n = B^n \Delta d^n - D^{-1} \Delta \sigma^n \quad (3.19)$$

obtida a partir da sequência

$$\Delta \sigma^n = D(\Delta \epsilon^n - \Delta \epsilon_{vp}^n) \Rightarrow D \Delta \epsilon_{vp}^n = D \Delta \epsilon^n - \Delta \sigma^n \Rightarrow \Delta \epsilon_{vp}^n = \Delta \epsilon^n - D^{-1} \Delta \sigma^n$$

O valor de ϵ_{vp}^{n+1} é então atualizado através da relação:

$$\epsilon_{vp}^{n+1} = \epsilon_{vp}^n + \Delta \epsilon_{vp}^n \quad (3.20)$$

3.2.3-) CORREÇÃO DAS TENSÕES E CONVERGÊNCIA DOS RESULTADOS

Lembrando que os valores dos acréscimos de deslocamentos Δd^n e, por consequência, os de tensão $\Delta \sigma^n$ foram calculados a partir de uma forma linearizada da equação de equilíbrio incremental, os valores de σ^{n+1} podem representar de forma não satisfatória as reais condições de tensão, que deveriam equilibrar o carregamento total no instante $n+1$. A necessária correção se baseia no cálculo do resíduo, através da seguinte relação:

$$\psi^{n+1} = \int_{\Omega} [B^{n+1}]^t \sigma^{n+1} d\Omega + f^{n+1} \neq 0 \quad (3.21)$$

O valor de ψ^{n+1} , caso exista, nada mais é do que a diferença entre o valor atual de carga e o valor em equilíbrio com a distribuição de tensões compatível com o modelo constitutivo. Esse resíduo deve ser aplicado na forma de incremento de carga, somando-o ao vetor de pseudo-forças, de modo a se restaurar o nível real de carregamento na próxima iteração. A convergência do procedimento iterativo é feita com base em um controle sobre os valores de $\Delta \epsilon_{vp}$, monitorados a cada incremento verificando se as diferenças entre os valores atuais e os calculados no passo anterior estão dentro de uma **tolerância** previamente escolhida.

3.3-) PROCEDIMENTO DE CÁLCULO EM COMPUTADOR

3.3.1-) ETAPAS DE CÁLCULO

Objetivando-se uma melhor compreensão, é apresentada a seguir uma sequência de utilização das relações comentadas anteriormente. Essa sequência é correspondente às etapas de cálculo, e vem descrita de maneira direta e simplificada. Parte-se do pressuposto de que são conhecidas as condições iniciais do problema, em um instante $t^0=0$, situação essa, ainda na fase elástica, ou seja, $\varepsilon_{vp}^0 = 0$. Portanto, conhecidos os parâmetros d^0 , F^0 , σ^0 , e ε^0 , obtém-se resultados operando as expressões do seguinte modo:

ETAPA 1: d^n , σ^n , ε^n , ε_{vp}^n e F^n , são conhecidos no instante t^n .

Calculam-se então:

$$a-) \quad B^n, \quad C^n = \Theta \Delta T_H H^n, \quad D$$

$$b-) \quad \hat{D}^n = (D^{-1} + C^n)^{-1}, \quad K_T^n = \int_{\Omega} [B^n]^t \hat{D}^n B^n d\Omega$$

$$c-) \quad \dot{\varepsilon}_{vp}^n = \gamma(\phi) a^n$$

ETAPA 2: Incrementos de Deslocamentos e Tensão em t_n .

$$a-) \quad \Delta V^n = \int_{\Omega} [B^n]^t \hat{D}^n \dot{\varepsilon}_{vp}^n \Delta t^n d\Omega + \Delta f^n$$

$$b-) \quad \Delta d^n = [K_T^n]^{-1} \Delta V^n, \quad \Delta \sigma^n = \hat{D}^n (B^n \Delta d^n - \dot{\varepsilon}_{vp}^n \Delta t_n)$$

ETAPA 3: Cálculo dos Deslocamentos e Tensão em t_{n+1} .

$$d^{n+1} = d^n + \Delta d^n \quad , \quad \sigma^{n+1} = \sigma^n + \Delta \sigma^n$$

ETAPA 4: Cálculo do resíduo para o processo de correção do equilíbrio.

a-) $\dot{\epsilon}_{vp}^{n+1} = \gamma \langle \phi \rangle a^n$, com $d^{n+1} \Rightarrow B^{n+1}$

b-) com $B^{n+1}, \sigma^{n+1} \Rightarrow \psi^{n+1} = \int_{\Omega} [B^{n+1}]^t \sigma^{n+1} d\Omega + f^{n+1}$

c-) $\psi^{n+1} \neq 0 \Rightarrow \Delta V^{n+1} = \int_{\Omega} [B^{n+1}]^t \hat{D}^{n+1} \dot{\epsilon}_{vp}^{n+1} \Delta T_{n+1} d\Omega + \Delta f^{n+1} + \psi^{n+1}$

ETAPA 5: Processo Iterativo de Convergência.

Se o novo valor de $d(\epsilon_{vp})/dt$ em $n+1$ não estiver suficientemente próximo do anterior, em respeito a uma certa tolerância, repetem-se os passos 1, 2, 3 e 4, até que a diferença entre o valor atualizado e o valor anterior se encontre dentro de uma tolerância desejada, previamente determinada. Se a tolerância fôr verificada, ocorreu a convergência, estando a execução do programa terminada ou então prossegue-se a análise com um novo incremento de carga.

3.3.2-) OBJETIVOS E CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O CÓDIGO DE CÁLCULO "VEPLAS.FOR".

Um dos objetivos desse trabalho é elaborar um código de cálculo ou programa para micro-computadores, inicialmente em linguagem **FORTRAN**, para proceder à análise elasto-viscoplástica de problemas planos. O programa possui um corpo principal (programa principal), de onde são chamadas todas as subrotinas, de modo que o programa tenha uma apresentação totalmente estruturada e de fácil compreensão para o usuário. Deve-se ressaltar, ainda, que a elaboração fez-se a partir de um programa já existente, em **linguagem fortran**, para análise elasto-plástica. Com relação aos resultados, o programa fornece, para cada incremento de carga, os correspondentes valores de tensão e deformação.

Observa-se que, no programa-base de análise elasto-plástica, o método utilizado para a obtenção dos valores de deslocamentos, tensões e deformações, foi o **MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS** e, portanto, sua estrutura básica é aproveitada, isto é, a geração das matrizes de rigidez dos elementos, a rotina de solução do sistema de equações, etc. Além disso, na integração no tempo foram implementados procedimentos explícitos e implícitos.

A leitura dos dados, como módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, forças externas aplicadas à estrutura, bem como os parâmetros inerentes ao algoritmo de solução, momento de inércia, área da seção

transversal, etc, é feita a partir de um arquivo previamente criado. A utilização de um arquivo de dados possui a grande vantagem de permitir ao usuário a execução de várias análises consecutivamente, ou ainda, a execução de um mesmo caso com pequenas alterações de interesse, como por exemplo, carregamentos, propriedades dos materiais, etc

Em função da utilização dos **ELEMENTOS FINITOS**, torna-se necessário que o arquivo de dados contenha, também, informações sobre o número total de nós da malha, o número total de elementos, as coordenadas dos nós, a incidência dos elementos e restrições nodais. O programa base permite uma verificação da consistência dos dados, objetivando a detecção de eventuais erros ocorridos na sua digitação.

Os dados introduzidos, bem como os resultados obtidos após a execução do programa, são armazenados em um arquivo de saída de dados (ou resultados finais), para posterior análise. É importante que a disposição dos dados de entrada e saída nesse arquivo seja feita de forma clara, organizada, compreensível e suficientemente documentada, de forma a proporcionar uma fácil análise e interpretação. Esse mesmo tipo de documentação foi feita também no arquivo de entrada de dados.

3.4-) EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Para testar a eficiência do programa, utilizou-se como exemplo, um cilindro submetido à pressão interna. A figura do exemplo em questão, bem como os dados de entrada, apresentam-se a seguir:

$$\begin{array}{lll}
 P = 14,00 \text{ dN/mm}^2 & E = 21.000 \text{ dN/mm}^2 & \sigma_y = 24,00 \text{ dN/mm}^2 \\
 \gamma = 0,001 \text{ mm/dia} & H = 0,0 & \nu = 0,30 \quad \text{Crit:VON MISES}
 \end{array}$$

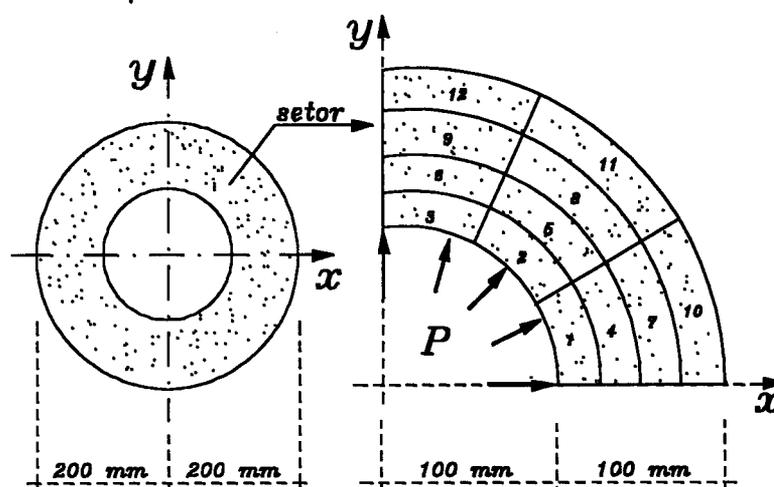


FIGURA 16 - CILÍNDRIO PRESSURIZADO COM PAREDE ESPESSA

As tabelas 2a e 2b, apresentam respectivamente os resultados finais do deslocamento da parede interna do cilindro e as tensões no mesmo, para o Estado Plano de Deformação, utilizando os três procedimentos disponíveis no código de cálculo:

TABELA 2a - RESULTADOS OBTIDOS PARA O DESLOCAMENTO INTERNO			
θ (procedim.)	No. Iterações	Tempo (dias)	Desloc. (mm)
0,0	34	6,81056	0,139066
0,5	35	6,68737	0,138957
1,0	37	7,76607	0,138915

TABELA 2b - RESULTADOS DAS TENSÕES P/ O 1o. PONTO DE INTEGRAÇÃO GAUSS NO ELEMENTO No. 1 (EM dN/mm^2)				
θ (proced.)	Sigma XX	Sigma YY	Sigma XY	Sigma ZZ
0,0	-12,489	14,779	-3,1095	0,68711
0,5	-12,491	14,742	-3,1093	0,67526
1,0	-12,490	14,692	-3,1128	0,66062

Esse exemplo foi também retirado de OWEN [1] e os resultados obtidos utilizando o programa VEPLAS.FOR conseguem recuperar com bastante precisão os resultados apresentados naquela referência.

CAPÍTULO 4 - UMA MODIFICAÇÃO SOBRE O MODELO

ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE OWEN/

HINTON - ASPECTOS UNIDIMENSIONAIS

Esse modelo, nada mais é do que o modelo elasto-viscoplástico básico acrescido de um terceiro trecho disposto em série com os dois primeiros já existentes. Esse terceiro trecho pode também ser chamado de **VISCOELÁSTICO**, caracterizado pela associação em paralelo de uma mola de rigidez E_2 e um amortecedor de fluidez γ_1 , e tem como principal função considerar o desenvolvimento de deformações ao longo do tempo, mesmo estando o material sob níveis de solicitação abaixo da tensão de escoamento (ainda em regime elástico). Cabe ressaltar ainda que este novo modelo possui como casos particulares (evidenciadas mediante a prescrição de valores nulos para alguns dos parâmetros) todas as associações estudadas no **CAPÍTULO 2** como: o modelo de *BURGER* ($E_2=0$ e $Y=0$), de *OWEN/HINTON* ($\mu_1=0$), misto de *KELVIN* ($\mu_1=0$ e $Y=0$), elasto-plástico com encruamento ($\mu_1=0$, $\mu_2=1$ e $H \neq 0$), ou ainda, sem encruamento ($\mu_1=0$, $\mu_2=1$ e $H=0$). A adição do trecho **VISCOELÁSTICO** implica em alterações nas expressões

apresentadas anteriormente. O esquema unidimensional do novo modelo e seu comportamento estão ilustrados nas **figura 17 e 18**, respectivamente:

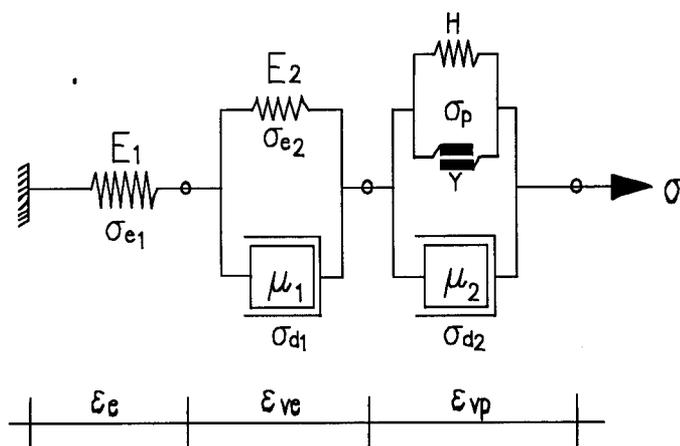


FIGURA 17 - MODELO MODIFICADO DE OWEN/HINTON

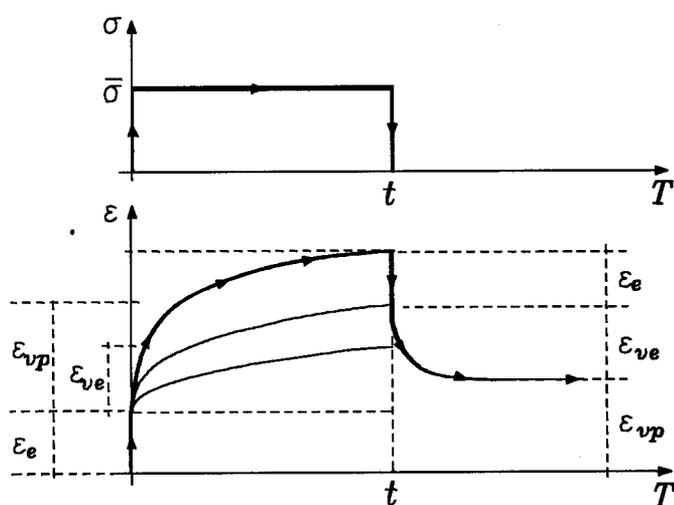


FIGURA 18 - (TENSÃO / DEFORMAÇÃO) x TEMPO

As expressões referentes ao novo modelo, em decorrência da associação em série, escrevem-se da seguinte forma:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} \quad (4.1-a)$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_{ve} + \dot{\varepsilon}_{vp} \quad (4.1-b)$$

sendo que:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\sigma_{e_1} = \sigma_{ve} = \sigma_{vp} = \sigma \quad (4.2)$$

onde σ_{e_1} representa a tensão na mola, σ_{ve} a tensão no trecho viscoelástico e σ_{vp} a tensão no trecho viscoplástico, todas iguais a tensão aplicada σ .

Com o objetivo de deduzir a relação constitutiva do modelo é interessante, tendo-se em vista a relação (4.1-b), escrever as expressões das velocidades de deformação correspondente à cada trecho da associação, como apresentado a seguir:

A-) COM RELAÇÃO AO TRECHO ELÁSTICO :

$$\sigma_{e_1} = \sigma \quad (4.3-a)$$

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_1} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} \quad (4.3-b)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$$

B-) COM RELAÇÃO AO TRECHO VISCOELÁSTICO :

$$\sigma_{ve} = \sigma_{e_2} + \sigma_{d_1} = \sigma \quad (4.4-a)$$

$$E_2 \varepsilon_{ve} + \mu_1 \frac{d\varepsilon_{ve}}{dt} = \sigma$$

$$\dot{\varepsilon}_{ve} = \frac{\sigma}{\mu_1} - \frac{E_2 \varepsilon_{ve}}{\mu_1} \quad (4.4-b)$$

C-) COM RELAÇÃO AO TRECHO VISCOPLÁSTICO :

$$\sigma_{vp} = \sigma_p + \sigma_{d_2} = \sigma \quad (4.5-a)$$

se $\sigma \geq \sigma_y$

$$\sigma_p = Y = \sigma_y + H\varepsilon_{vp}$$

$$\sigma_{d_2} = \mu_2 \dot{\epsilon}_{vp}$$

$$(\sigma_y + H\epsilon_{vp}) + \mu_2 \dot{\epsilon}_{vp} = \sigma$$

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \frac{(\sigma - \sigma_y - H\epsilon_{vp})}{\mu_2} \quad (4.5-b)$$

Assim, substituindo as expressões (4.3-b), (4.4-b) e (4.5-b) na (4.1-b), obtém-se uma expressão geral para a razão de deformação, que possui a seguinte forma:

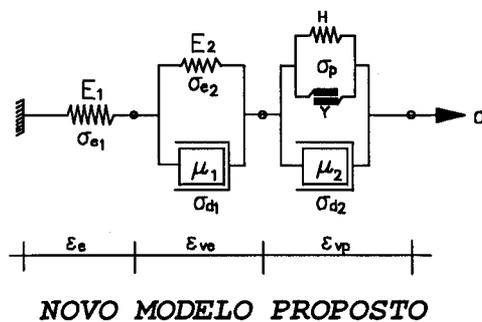
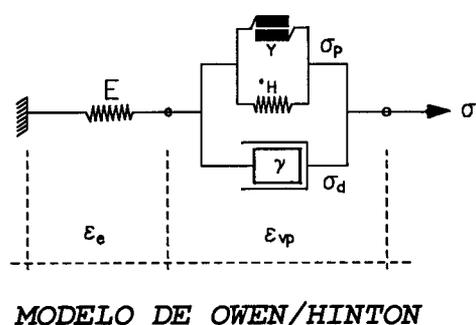
$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{(\sigma - E_2 \epsilon_{ve})}{\mu_1} + \frac{[\sigma - (\sigma_y + H\epsilon_{vp})]}{\mu_2} \quad (4.6)$$

Definindo-se $\gamma_1 = 1/\mu_1$ e $\gamma_2 = 1/\mu_2$, como os parâmetros de fluidez do material, a relação (4.6) passa a ser escrita na forma:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \gamma_1 (\sigma - E_2 \epsilon_{ve}) + \gamma_2 [\sigma - (\sigma_y + H\epsilon_{vp})] \quad (4.7)$$

Com relação à expressão (4.7), analisando-se o lado direito da igualdade, pode-se notar que as parcelas elástica e viscoplástica são idênticas às parcelas da expressão do modelo constitutivo de OWEN/HINTON. O termo central adicional representa o comportamento viscoelástico do material. Encontra-se em anexo a este trabalho, um procedimento alternativo para a obtenção da expressão (4.7).

É interessante neste ponto do texto, reunir as relações correspondentes ao **MODELO DE OWEN/HINTON** e o **NOVO MODELO** proposto, com o objetivo de comparar as diferenças entre ambos:



$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp}$$

$$\sigma_e = \sigma_{vp} = \sigma$$

$$\sigma_{e_1} = \sigma_{ve} = \sigma_{vp} = \sigma$$

$$\sigma_e = \sigma = E\varepsilon_e$$

$$\sigma_{e_1} = \sigma = E_1\varepsilon_e$$

$$\sigma_{ve} = \textit{inexistente}$$

$$\sigma_{ve} = \sigma = E_2 \epsilon_{ve} + \mu_1 \dot{\epsilon}_{ve}$$

$$\sigma_{vp} = \sigma = \sigma_p + \sigma_d$$

$$\sigma_{vp} = \sigma = \sigma_p + \sigma_{d_2}$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_{vp}$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_{ve} + \dot{\epsilon}_{vp}$$

$$\dot{\epsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}}{E}$$

$$\dot{\epsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}}{E_1}$$

$$\dot{\epsilon}_{ve} = \textit{inexistente}$$

$$\dot{\epsilon}_{ve} = \gamma_1 (\sigma - E_2 \epsilon_{ve})$$

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \gamma [\sigma - (\sigma_y + H \epsilon_{vp})]$$

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \gamma_2 [\sigma - (\sigma_y + H \epsilon_{vp})]$$

O passo seguinte do estudo, consiste implementar as relações do modelo modificado num código de cálculo para compreender melhor o algoritmo de integração das mesmas e proceder à análise de sua resposta numérica.

**CAPÍTULO 5 - CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A
IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO
MODIFICADO UNIDIMENSIONAL**

Com o objetivo de avaliar a resposta do novo modelo em casos de solicitação mais simples, apresenta-se neste capítulo a implementação do mesmo em um código de cálculo.

5.1-) ANÁLISE UNIDIMENSIONAL

Será apresentado a seguir, o procedimento completo de implementação da relação constitutiva do modelo modificado num código de cálculo para barras, em elementos finitos. A sequência de operações e rotinas do novo código de cálculo, chamado de *UNIVEP.FOR*, apresenta-se em anexo, de forma resumida.

5.1.1-) DESLOCAMENTO DOS NÓS

Considere-se uma estrutura discretizada com elementos finitos de barra com um grau de liberdade por nó e seja um elemento genérico com nós de extremidade **1 e 2**,

conforme indicado na *figura 19*. O incremento dos deslocamentos do nó 1, que ocorre no intervalo de tempo $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ quando submetido ao carregamento Δf_1^n , pode ser colocado na seguinte forma:

$$\Delta \Phi_1^n = \frac{L}{AE} \Delta f_1^n + \Delta \epsilon_{ve}^n L + \Delta \epsilon_{vp}^n L = \Delta \phi_e^n + \Delta \phi_{ve}^n + \Delta \phi_{vp}^n \quad (5.1)$$

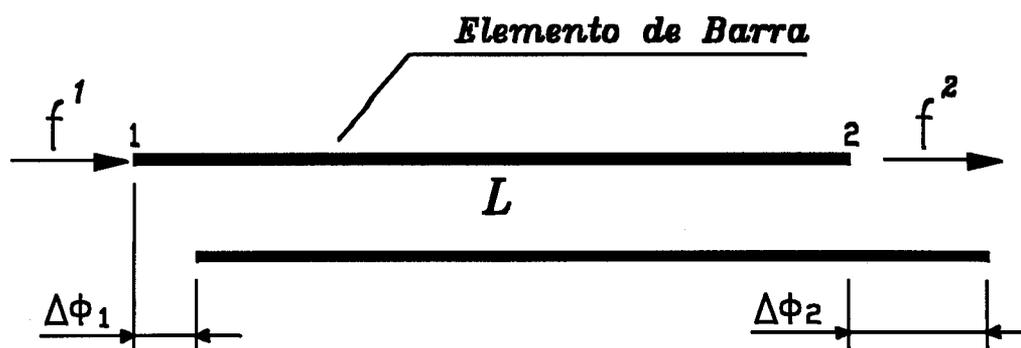


FIGURA 19 - DESLOCAMENTOS DOS NÓS DE UMA BARRA

Pode-se ainda reescrever a expressão (5.1), na sua forma matricial, em termos de deslocamentos e forças nodais, como apresentado a seguir:

$$[K] \Delta \phi^n = \Delta V^n \quad (5.2)$$

onde:

$$\Delta \phi^n = \begin{bmatrix} \Delta \phi_1^n \\ \Delta \phi_2^n \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\Delta V^n = AE \Delta t_n (\dot{\epsilon}_{ve} + \dot{\epsilon}_{vp}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \Delta f^n \quad (5.4)$$

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Na expressão (5.4), empregou-se a **Regra de Euler** para descrever o incremento das quantidades de deformação no intervalo de tempo Δt_n :

$$\Delta \epsilon_e^n = \dot{\epsilon}_e \Delta t_n \quad \Delta \epsilon_{ve}^n = \dot{\epsilon}_{ve} \Delta t_n \quad \Delta \epsilon_{vp}^n = \dot{\epsilon}_{vp} \Delta t_n$$

Da expressão (5.2) à expressão (5.5), aparecem ainda as seguintes grandezas:

E = Módulo de Elasticidade inicial do material;

A = Área de seção transversal da barra i (constante);

L = comprimento inicial da barra i;

Δt_n = Intervalo de Tempo = $t_{n+1} - t_n$;

ΔV^n = Vetor das Pseudo-forças;

K = Matriz de rigidez da barra i;

Δf^n = Incremento de força aplicada no elemento.

Assim, os deslocamentos nodais em um instante

de tempo t_{n+1} , são atualizados de forma acumulativa, do seguinte modo:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta\varphi^n \quad (5.6)$$

A linearização proporcionada pelo esquema de **Euler**, conduz a uma distribuição de tensões no instante t^{n+1} que pode não estar mais em equilíbrio com as forças aplicadas. Uma correção sobre o equilíbrio deve ser realizada dentro de um processo iterativo, que se repete até que uma situação estável seja alcançada (onde a evolução das parcelas viscoelásticas e viscoplásticas são nulas ou menores que uma tolerância admitida).

5.1.2-) INCREMENTOS DE TENSÃO

O incremento das tensões pode ser colocado, em função da variação dos deslocamentos dos nós inicial e final de uma determinada barra i , de acordo com as seguintes expressões:

$$\sigma^n = E\varepsilon_e^n \Rightarrow \Delta\sigma^n = E\Delta\varepsilon_e^n$$

$$\Rightarrow \Delta \sigma^n = E(\Delta \varepsilon^n - \Delta \varepsilon_{ve}^n - \Delta \varepsilon_{vp}^n)$$

$$\Rightarrow \Delta \sigma^n = E \left[\frac{(\Delta \phi_1^n - \Delta \phi_2^n)}{L} - \dot{\varepsilon}_{ve}^n \Delta t_n - \dot{\varepsilon}_{vp}^n \Delta t_n \right] \quad (5.7)$$

Através também de um procedimento acumulativo, a obtenção da tensão em um instante t_{n+1} , utilizando $\Delta \sigma^n$, se faz do seguinte modo:

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + \Delta \sigma^n \quad (5.8)$$

5.1.3-) INCREMENTOS DE DEFORMAÇÕES VISCOELÁSTICA E VISCOPLÁSTICA

Os incrementos das deformações viscoelásticas e viscoplásticas, são escritos em função de suas respectivas velocidades:

$$\Delta \varepsilon_{ve}^n = \dot{\varepsilon}_{ve}^n \Delta t_n \Rightarrow \varepsilon_{ve}^{n+1} = \varepsilon_{ve}^n + \Delta \varepsilon_{ve}^n \quad (5.9)$$

$$\Delta \varepsilon_{vp}^n = \dot{\varepsilon}_{vp}^n \Delta t_n \Rightarrow \varepsilon_{vp}^{n+1} = \varepsilon_{vp}^n + \Delta \varepsilon_{vp}^n \quad (5.10)$$

As velocidades de deformação são determinadas pelas seguintes relações, que derivam das propriedades dos dois arranjos em paralelo do modelo:

$$\dot{\epsilon}_{ve}^{n+1} = \gamma_1 (\sigma^{n+1} - E_2 \epsilon_{ve}^{n+1}) \quad (5.11)$$

$$\dot{\epsilon}_{vp}^{n+1} = \gamma_2 [\sigma^{n+1} - (\sigma_y + H \epsilon_{vp}^{n+1})] \quad (5.12)$$

5.1.4-) CORREÇÃO DO EQUILÍBRIO

O procedimento para correção do equilíbrio está baseado no cálculo do resíduo de forças ao final de cada passo de tempo, dentro de um mesmo incremento de carga Δf^n . Para um elemento genérico i , o resíduo Ψ é calculado a partir de um balanço entre *força nodal aplicada* e *forças equivalentes à tensão no elemento*:

$$\psi^{n+1} = A \sigma^{n+1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + f^{n+1} \quad (5.13)$$

A expressão apresentada acima, resulta da forma clássica do equilíbrio, $\Psi = \int_V (B^t \sigma^{n+1}) dV + f^{n+1}$, onde, no caso das barras, $B = [-1/L, 1/L]$, $D = E$ e $\int_V dV = AL$. O resíduo de forças será adicionado às pseudo-forças no próximo incremento de tempo:

$$\Delta V^{n+1} = AE_1 \Delta t_{n+1} (\dot{\epsilon}_{ve}^{n+1} + \dot{\epsilon}_{vp}^{n+1}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \Delta f^{n+1} + \psi^{n+1} \quad (5.14)$$

É importante lembrar que Δf^{n+1} é igual a zero para todas as etapas do processo iterativo, à exceção da

primeira, dentro de um mesmo incremento de carga. O procedimento de correção do equilíbrio se repetirá com acréscimos no passo de tempo, até que ocorra a convergência dos valores de deformação viscoelástica e viscoplástica. Isto acontecerá quando ambos os valores de $d(\epsilon_{ve})/dt$ e $d(\epsilon_{vp})/dt$ atingirem um valor muito pequeno dentro de uma tolerância previamente definida pelo usuário.

5.1.5-) ESTIMATIVA DO PASSO DE TEMPO

A estimativa do passo de tempo baseia-se na idéia de limitar os incrementos de deformação viscoelástica e viscoplástica a uma fração da deformação total como forma de garantir a estabilidade do processo iterativo. No trabalho, são empregadas duas expressões distintas, em correspondência a cada parcela de deformação cujos valores são calculados e comparados simultaneamente, dentro de um mesmo passo de tempo em cada elemento:

$$(\Delta t_n)_1 = \tau [\epsilon^n / \dot{\epsilon}_{ve}^n] \quad ; \quad (\Delta t_n)_2 = \tau [\epsilon^n / \dot{\epsilon}_{vp}^n]$$

onde $\tau = 0,01$ à $0,15$ (intervalo para melhor convergência)

O valor de Δt_n a ser adotado, deve ser o menor entre todos os $(\Delta t_n)_1$ e $(\Delta t_n)_2$. Entretanto, de modo

simplificado, *OWEN* [1] sugere que os dois passos sucessivos de tempo também obedecem à seguinte relação:

$$\Delta t_{n+1} \leq K \Delta t_n \quad K = 1,5 \rightarrow 2,0$$

5.2-) PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O procedimento de análise apresentado neste ítem, ilustra a sequência de operações a serem realizadas quando da implementação do modelo modificado em código de cálculo para estruturas planas de barras.

O processo de solução tem como ponto de partida, o conhecimento das condições iniciais em um instante $t=0$, correspondente à fase de resposta elástica. Nessa etapa, são conhecidas as variáveis ψ^0 , ε^0 , σ^0 e f^0 , bem como, $\varepsilon_{ve}^0 = 0$ e $\varepsilon_{vp}^0 = 0$. Já, num instante genérico, a passagem da situação caracterizada em t_n para t_{n+1} , segue a sequência de operações dividida nas seguintes etapas :

ETAPA 1: TAXAS DE DEFORMAÇÕES VISCOELÁSTICAS E VISCOPLÁSTICAS

No instante $t=t_n$, os valores de σ^n , ε^n , ε_{ve}^n , ε_{vp}^n e f^n são conhecidos para cada elemento, bem como seus deslocamentos nodais. Assim, pode-se calcular as taxas de deformações viscoelástica e viscoplástica para cada elemento, como segue:

$$\dot{\epsilon}_{ve}^n = \gamma_1 (\sigma^n - E_2 \epsilon_{ve}^n)$$

$$\dot{\epsilon}_{vp}^n = \gamma_2 [\sigma^n - (\sigma_y + H \epsilon_{vp}^n)]$$

**ETAPA 2: INCREMENTOS DOS DESLOCAMENTOS NODAIS, TENSÕES E
DEFORMAÇÕES**

a) Calculam-se os incrementos dos deslocamentos nodais, usando-se as expressões (5.2), (5.3), (5.4) e (5.5), do seguinte modo:

$$\Delta \varphi^n = [K]^{-1} \Delta V^n$$

$$\Delta V^n = AE_1 \Delta t_n (\dot{\epsilon}_{ve}^n + \dot{\epsilon}_{vp}^n) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \Delta f^n ; \quad K = \frac{E_1 A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Com os valores dos incrementos dos deslocamentos, calculam-se então os incrementos das tensões e os incrementos de deformações viscoelástica e viscoplástica, respectivamente, para cada elemento, usando-se as expressões (5.7), (5.9) e (5.10):

$$\Delta \sigma^n = E_1 \left(\frac{\Delta \phi_1^n - \Delta \phi_2^n}{L} - \dot{\epsilon}_{ve}^n \Delta t_n - \dot{\epsilon}_{vp}^n \Delta t_n \right)$$

$$\Rightarrow \Delta \epsilon_{ve}^n = \dot{\epsilon}_{ve}^n \Delta t_n$$

$$\Rightarrow \Delta \epsilon_{vp}^n = \dot{\epsilon}_{vp}^n \Delta t_n$$

ETAPA 3: ATUALIZAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS, TENSÕES E DEFORMAÇÕES

Usando os valores dos incrementos de deslocamentos, tensões, deformação viscoelástica e deformação viscoplástica, obtidos nas etapas 1 e 2, respectivamente, determinam-se os deslocamentos totais dos nós, a tensão total, as deformações totais viscoelástica e viscoplástica, utilizando-se as expressões (5.6), (5.8), (5.9) e (5.10):

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta \varphi^n \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \phi_1^{n+1} \\ \phi_2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^n \\ \phi_2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \phi_1^n \\ \Delta \phi_2^n \end{bmatrix}$$

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + \Delta \sigma^n$$

$$\epsilon_{ve}^{n+1} = \epsilon_{ve}^n + \Delta \epsilon_{ve}^n$$

$$\epsilon_{vp}^{n+1} = \epsilon_{vp}^n + \Delta \epsilon_{vp}^n$$

ETAPA 4: TAXAS DE DEFORMAÇÃO PARA O PASSO SEGUINTE

Com os valores de deformação viscoelástica e viscoplástica no instante **n+1**, calculam-se as taxas das mesmas, do seguinte modo:

$$\dot{\epsilon}_{ve}^{n+1} = \gamma_1 (\sigma^{n+1} - E_2 \epsilon_{ve}^{n+1})$$

$$\dot{\epsilon}_{vp}^{n+1} = \gamma_2 [\sigma^{n+1} - (\sigma_y + H\epsilon_{vp}^{n+1})]$$

ETAPA 5: CORREÇÃO DO EQUILÍBRIO

Aplica-se agora, caso seja necessária, a correção do equilíbrio, através do cálculo dos resíduos de força, usando as expressões (5.13) e (5.14):

$$\varphi^{n+1} = A\sigma^{n+1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + f^{n+1}$$

acrescentados no **vetor dos acréscimos das pseudo-forças**, do seguinte modo:

$$\Delta V^{n+1} = AE_1 \Delta t_{n+1} (\dot{\epsilon}_{ve}^{n+1} + \dot{\epsilon}_{vp}^{n+1}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \Delta f^{n+1} + \varphi^{n+1}$$

ETAPA 6: CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO (" STEADY STATE ")

Deve-se verificar agora se os incrementos de deformações viscoelásticas e viscoplásticas estão

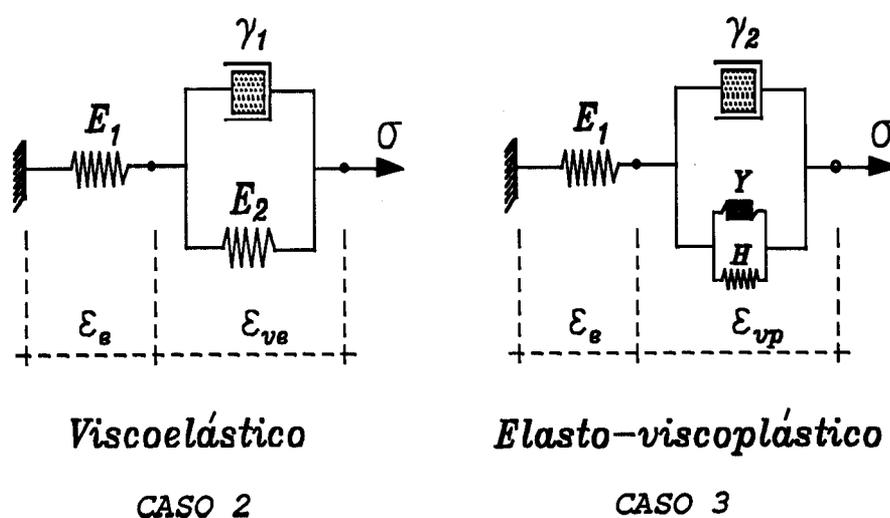
suficientemente pequenos ou próximos de zero. Quando isso ocorre, a convergência foi obtida, podendo-se finalizar a análise ou aplicar um novo incremento de carga. Caso contrário, volta-se à etapa 1 e refaz-se todo o procedimento para um novo passo de tempo. No **APÊNDICE B**, estão comentadas as principais subrotinas que compõem o programa elaborado.

5.3-) EXEMPLOS TESTADOS NO PROGRAMA DE BARRAS

Objetivando testar a eficiência do código de cálculo em questão, em particular quanto ao funcionamento das novas expressões, referentes ao modelo elasto-viscoplástico modificado, procurou-se selecionar alguns exemplos, capazes de fornecer informações necessárias para uma boa avaliação. Os exemplos foram testados, considerando-se os seguintes casos:

- CASO 1-) Apenas regime Elástico: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$
 CASO 2-) Apenas regime Elasto-viscoelástico .: $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$
 CASO 3-) Apenas regime Elasto-viscoplástico .: $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$
 CASO 4-) Comportamento do Modelo Completo ...: $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$

Nos casos 2 e 3 apresentados a seguir, no sentido de confrontar os resultados obtidos, foram usadas as expressões abaixo relacionadas, retiradas da apostila "**NOÇÕES BÁSICAS DE REOLOGIA**", PROENÇA [17], para ambos os casos:



$$\text{caso 2} \Rightarrow \varepsilon(t) = \bar{\sigma} \left[\frac{(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} - \frac{e^{-(E_2 \gamma_1 t)}}{E_2} \right] \quad (5.15)$$

$$\text{caso 3} \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\bar{\sigma}}{E_1} + \frac{(\bar{\sigma} - \sigma_y)}{H} [1 - e^{-(H \gamma_2 t)}] \quad (5.16)$$

Os exemplos foram testados em análises unidimensional e bidimensional, e são os seguintes:

• **EXEMPLO 1 : ANÁLISE ELÁSTICA / BIDIMENSIONAL**

Esse exemplo foi retirado da apostila "PROCESSOS GERAIS DA HIPERESTÁTICA CLÁSSICA", SOUZA[19], tendo como objetivo, testar o código de cálculo apenas em regime elástico, sem a ocorrência de deformações evolutivas:

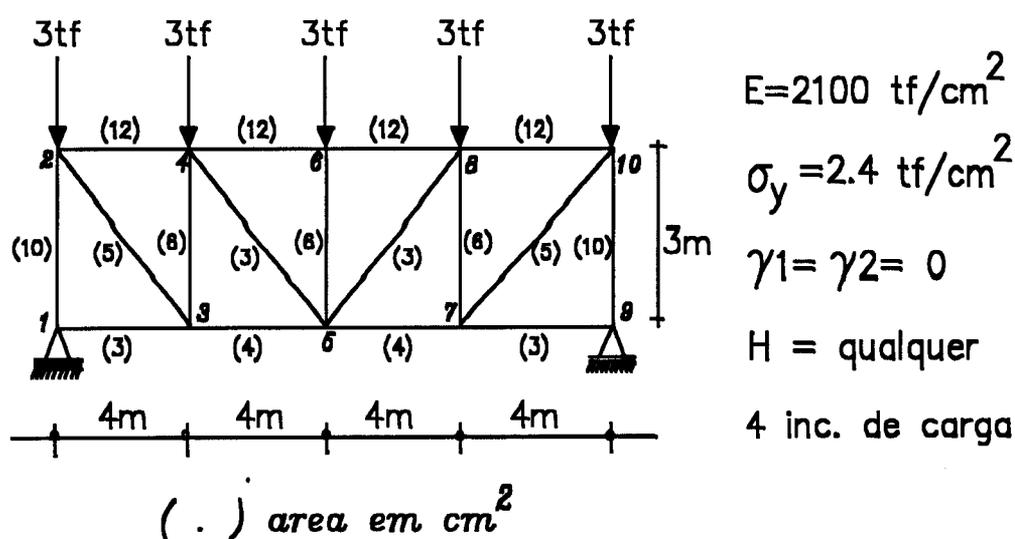


FIGURA 20 - TRELIÇA PLANA SIMÉTRICA

Para esse exemplo, os resultados de deslocamentos obtidos para o nó 5 foram os seguintes:

TABELA 3 - RESULTADO DE DESLOCAMENTO NO EXEMPLO 1		
NÓ	SOUZA	Resultado no BIVEP.FOR
5	1,986 cm	1,986 cm

• EXEMPLO 2 : ANÁLISE ELASTO-VISCOPLÁSTICA / UNIDIMENSIONAL

Esse exemplo, ilustrado na figura 21 foi retirado de OWEN [1], ilustrado no figura 21, sendo analisada a deformação total de um único elemento, segundo diferentes condições. Observa-se que aquela referência não apresenta as unidades adotadas para os parâmetros do material.

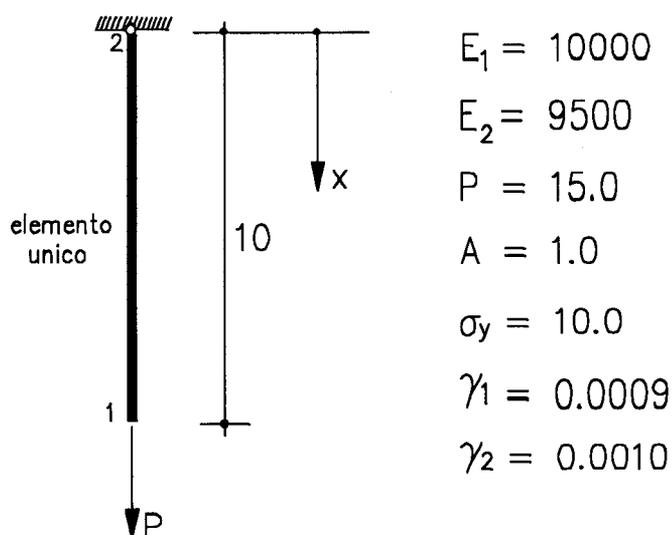


FIGURA 21 - ELEMENTO DE BARRA TRACIONADO

- a) 4 increm. de carga, $H=5000$, $\tau=0,10$, $\gamma_1=0,00000$, $\gamma_2=0,00100$
 b) 4 increm. de carga, $H=5000$, $\tau=0,10$, $\gamma_1=0,00090$, $\gamma_2=0,00000$
 c) 4 increm. de carga, $H=5000$, $\tau=0,10$, $\gamma_1=0,00090$, $\gamma_2=0,00100$

Para os casos citados a e b, os resultados de deformações obtidas foram os seguintes:

TABELA 4a - RESULTADOS DE DEFORMAÇÃO NO EXEMPLO 2			
CASO a - ANÁLISE PARA O 4o. INCREMENTO DE CARGA			
Elemento	OWEN	Expr. (5.16)	UNIV. FOR
1	$2,50354 \cdot 10^{-3}$	$2,49968 \cdot 10^{-3}$	$2,50175 \cdot 10^{-3}$

TABELA 4b - RESULTADOS DE DEFORMAÇÃO NO EXEMPLO 2			
CASO b - ANÁLISE PARA O 4o. INCREMENTO DE CARGA			
Elemento	OWEN	Expr. (5.15)	UNIV. FOR
1	*****	$3,07894 \cdot 10^{-3}$	$3,08144 \cdot 10^{-3}$

Este exemplo pode, por outro lado, fornecer informações particularmente com relação à capacidade de simulação do "CREEP PRIMÁRIO" por parte do modelo. Apresentam-se a seguir, apenas em caráter ilustrativo, alguns gráficos de DEFORMAÇÃO x TEMPO da barra estudada, nas situações em que $\sigma < \sigma_y$ e $\sigma \geq \sigma_y$:

a-) 1 Increm. de Carga, $H=5000$, $\tau=0,10$, $\gamma_1=0,00090$, $\gamma_2=0,00000$

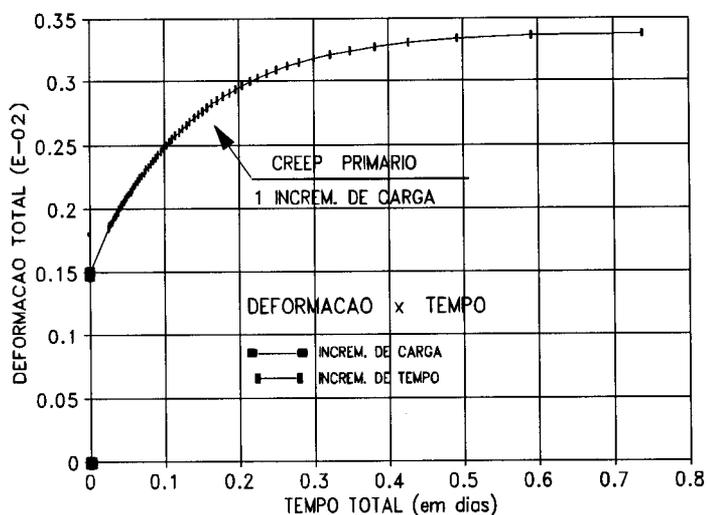


FIGURA 22 - DEFORMAÇÃO x TEMPO / SEM PLASTIFICAÇÃO

b-) 1 Increm. de Carga, $H=5000$, $\tau=0,10$, $\gamma_1=0,00000$, $\gamma_2=0,00100$

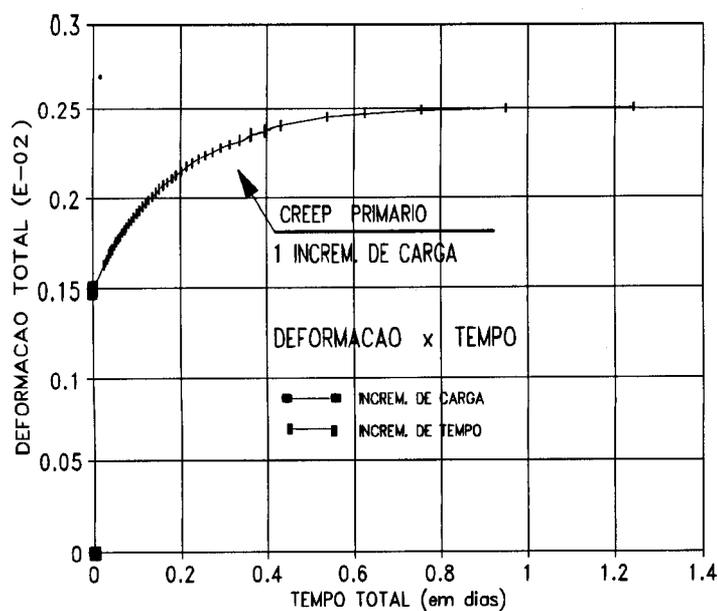


FIGURA 23 - DEFORMAÇÃO x TEMPO / COM PLASTIFICAÇÃO

c) 1 increm. de carga, $H=5000$, $\tau=0,10$, $\gamma_1=0,00090$, $\gamma_2=0,00100$

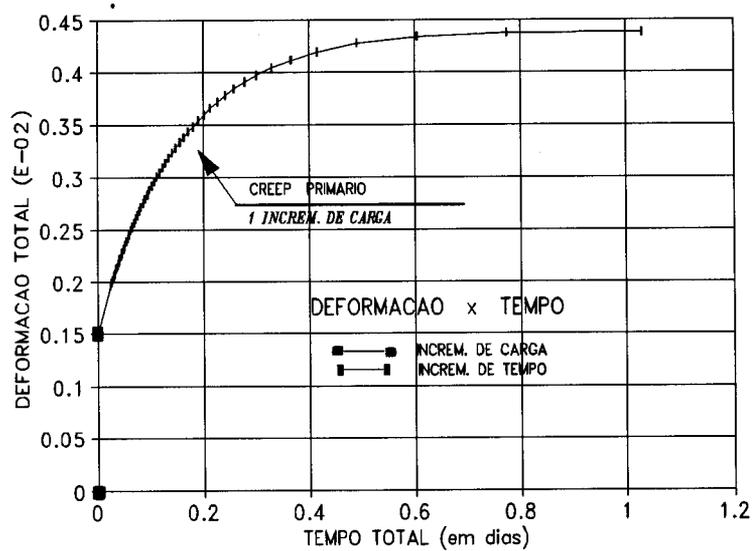


FIGURA 24 - DEFORMAÇÃO x TEMPO / COM PLASTIFICAÇÃO

d) 3 increm. de carga, $H=5000$, $\tau=0,025$, $\gamma_1=0,00090$, $\gamma_2=0,00100$

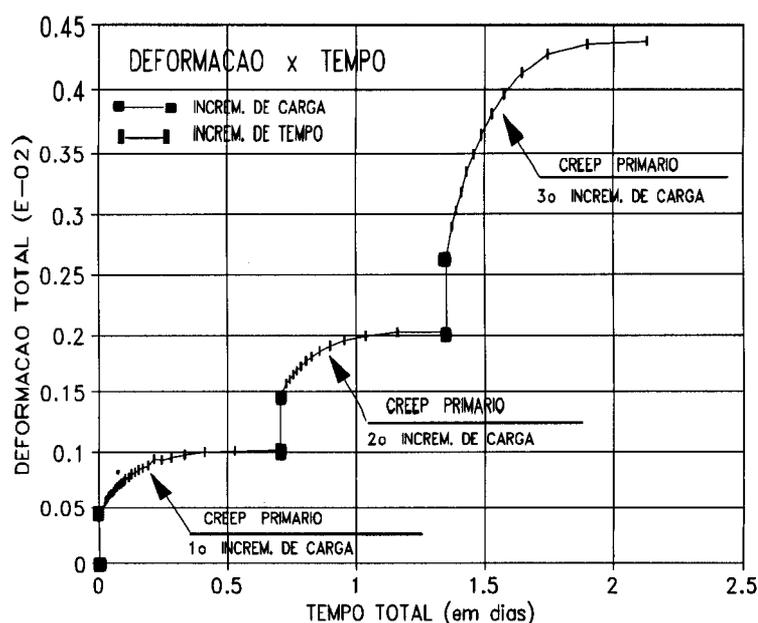


FIGURA 25 - DEFORMAÇÃO x TEMPO / COM PLASTIFICAÇÃO

Os exemplos 3 e 4, que seguem, foram retirados da dissertação de mestrado do **Eng. José Benaque Rubert, RUBERT [5]**, com o título de "**Estudo do Desempenho de Algoritmos Numéricos na Solução de Sistemas Não-Lineares de Estruturas Formadas por Barras de Treliças**". Esses exemplos tem como objetivo, analisar o deslocamento do nó extremo da estrutura. No entanto, para uma melhor avaliação do código de cálculo, foram comparados os valores de deformação total obtidos nos mesmos, com os fornecidos pelas expressões (5.15) e (5.16), no sentido não só de verificar a eficiência das novas formulações, mas também do processo de convergência.

• **EXEMPLO 3 : ANÁLISE ELASTO-VISCOPLÁSTICA / UNIDIMENSIONAL**

Esse exemplo, ilustrado na **figura 26**, refere-se a uma barra, constituída de dois elementos, onde será analisado o deslocamento do **nó 3**:

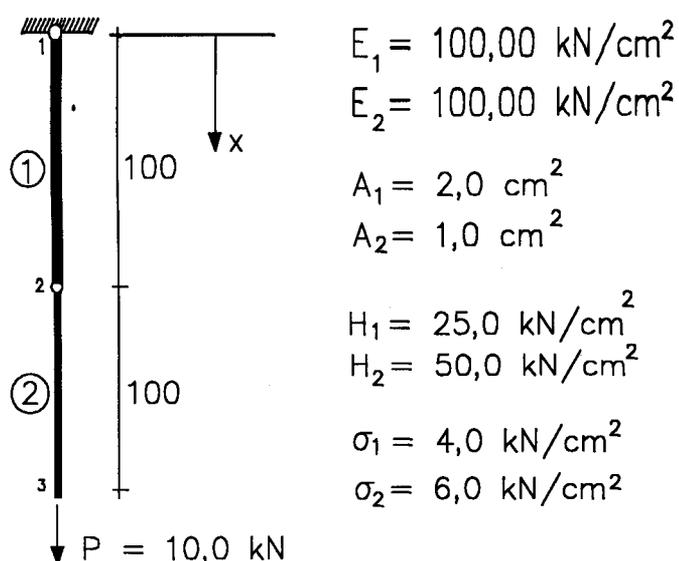


FIGURA 26 - DOIS ELEMENTOS DE BARRA TRACIONADOS

- a-) 5 incrementos de carga, $\gamma_1=0,0000$, $\gamma_2=0,0020$
- b-) 5 incrementos de carga, $\gamma_1=0,0015$, $\gamma_2=0,0000$
- c-) 5 incrementos de carga, $\gamma_1=0,0015$, $\gamma_2=0,0020$

Os resultados de deslocamento do nó 3 no **caso a**, e deformação do elemento 2 nos **casos a e b** foram os seguintes:

TABELA 5 - DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÕES NO EXEMPLO 3			
CASO a - ANÁLISE PARA O 5o. INCREMENTO DE CARGA			
DESLOC. (cm)	RUBERT	-	UNIV. FOR
Nó 3	27,00	*****	27,0394
DEFORMAÇÃO	RUBERT	EXPR. (5.16)	UNIV. FOR
Elemento 2	*****	$1,79998 \cdot 10^{-1}$	$1,80177 \cdot 10^{-1}$
CASO b - ANÁLISE PARA O 5o. INCREMENTO DE CARGA			
DEFORMAÇÃO	RUBERT	EXPR. (5.15)	UNIV. FOR
Elemento 2	*****	$1,99999 \cdot 10^{-1}$	$2,00089 \cdot 10^{-1}$

• **EXEMPLO 4 : ANÁLISE ELASTO-VISCOPLÁSTICA / BIDIMENSIONAL**

Treliça formada por cinco (5) barras de mesmas características, ilustrada na **figura 27**, com uma carga P aplicada no nó 1, analisado sob as seguintes variações:

a-) 7 incrementos de carga, $H=0$, $\gamma_1=0,0000$, $\gamma_2=0,0020$

b-) 7 incrementos de carga, $H=0$, $\gamma_1=0,0015$, $\gamma_2=0,0000$

c-) 7 incrementos de carga, $H=250$, $\gamma_1=0,0000$, $\gamma_2=0,0020$

d-) 7 incrementos de carga, $H=250$, $\gamma_1=0,0015$, $\gamma_2=0,0020$

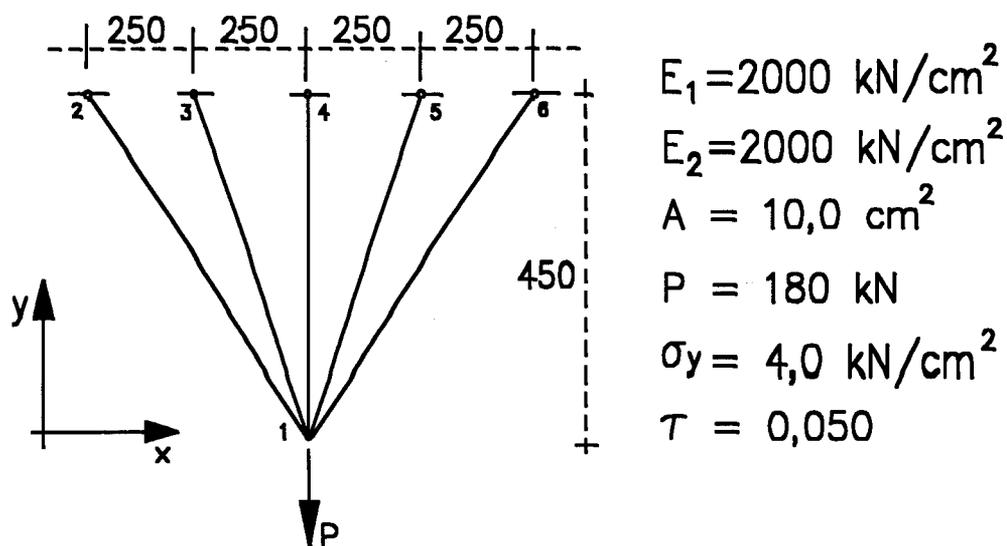


FIGURA 27 - TRELIÇA PLANA FORMADA POR 5 BARRAS IGUAIS

Deve-se ressaltar que o **caso a** possui a particularidade da ocorrência de plastificação de todas as barras da treliça, após o 6o incremento de carga, devido a nulidade do parâmetro de encruamento do material ($H=0$). Desse modo, são comparados como forma ilustrativa para esse caso, os valores dos deslocamentos do nó 1, do primeiro ao quinto incrementos de carga e, para os **casos b e c**, as deformações nas barras 1-2, 1-3 e 1-4, como apresentados nas tabelas 6a e 6b a seguir:

TABELA 6a - DESLOCAMENTOS NO EXEMPLO 4 / (em cm)					
CASO a - ANÁLISE PARA O 5o. INCREMENTO DE CARGA					
INCREM.	1o.	2o.	3o.	4o.	5o.
RUBERT	0,69000	0,83000	1,00000	1,25000	1,95000
VEPLAS	0,69002	0,82802	1,00035	1,33172	1,95820

TABELA 6b - DEFORMAÇÕES NO EXEMPLO 4			
CASO b - ANÁLISE PARA O 7o. INCREMENTO DE CARGA			
Elemento	RUBERT	Expr. (5.15)	BIVEP.FOR
1-2	*****	2,74481.10 ⁻³	2,74519.10 ⁻³
1-3	*****	4,68689.10 ⁻³	4,68754.10 ⁻³
1-4	*****	6,13347.10 ⁻³	6,13432.10 ⁻³
CASO c - ANÁLISE PARA O 7o. INCREMENTO DE CARGA			
Elemento	RUBERT	Expr. (5.16)	BIVEP.FOR
1-2	*****	2,31068.10 ⁻³	2,48620.10 ⁻³
1-3	*****	4,09824.10 ⁻³	4,24530.10 ⁻³
1-4	*****	5,36349.10 ⁻³	5,55558.10 ⁻³

CAPÍTULO 6 - GENERALIZAÇÃO DA MODIFICAÇÃO DO MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE OWEN/HINTON PARA ANÁLISE PLANA

Faz-se neste capítulo uma generalização do novo modelo, obtendo-se as expressões que representam o seu comportamento no caso plano. No que se refere a integração no tempo, utiliza-se apenas um algoritmo explícito.

6.1-) RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

6.1.1-) EXPRESSÕES BÁSICAS

No capítulo anterior, a expressão que define a relação entre tensão e deformação do novo modelo foi obtida referindo-se apenas à uma análise unidimensional. A generalização segue um procedimento análogo àquele adotado para o modelo de OWEN/HINTON.

Tendo em vista a modificação introduzida naquele modelo, torna-se necessário elaborar apenas as expressões referentes ao trecho adicional, viscoelástico, já

que para os demais trechos serão aproveitadas as mesmas expressões adotadas no capítulo anterior.

Para as expressões de velocidade de deformação viscoelástica do trecho adicional, são empregadas as relações propostas para o modelo viscoelástico de **KELVIN, SOBOTKA[2]**, limitando-se apenas aos **ESTADOS PLANOS DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO**:

6.1.1.1-) Estado Plano de Tensão ($\sigma_x = \tau_{xz} = \tau_{yx} = 0$)

Para o Estado Plano de Tensão, as relações constitutivas correspondente ao modelo de Kelvin são as seguintes:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) + \frac{\mu}{(1-\eta^2)} (\dot{\epsilon}_x + \eta \dot{\epsilon}_y) \quad (6.1)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) + \frac{\mu}{(1-\eta^2)} (\dot{\epsilon}_y + \eta \dot{\epsilon}_x) \quad (6.2)$$

$$\tau_{xy} = G \epsilon_{xy} + \lambda \dot{\epsilon}_{xy} \quad (6.3)$$

onde:

ν = coeficiente de Poisson 'Normal'

η = coeficiente de Poisson 'Tangencial'

μ = coeficiente de Viscosidade 'Normal'

λ = coeficiente de Viscosidade 'Tangencial'

Observa-se então, o aparecimento de dois (2) novos parâmetros η e λ que como os demais, devem ser identificados através de ensaios de laboratório (experimental). Rearranjando-se agora as expressões (6.1), (6.2) e (6.3) de modo a isolar os termos com dependência no tempo, obtém-se:

$$\dot{\epsilon}_x = \gamma (1-\eta^2) \left[\sigma_x - \frac{E}{(1-v^2)} (\epsilon_x + v\epsilon_y) \right] + \eta \dot{\epsilon}_y \quad (6.4)$$

$$\dot{\epsilon}_y = \gamma (1-\eta^2) \left[\sigma_y - \frac{E}{(1-v^2)} (\epsilon_y + v\epsilon_x) \right] + \eta \dot{\epsilon}_x \quad (6.5)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \gamma_t (\tau_{xy} - G \epsilon_{xy}) \quad (6.6)$$

onde:

γ = Coeficiente de Fluidez 'Normal' = $1/\mu$

γ_t = Coeficiente de Fluidez 'Tangencial' = $1/\lambda$

Substituindo-se (6.5) em (6.4), obtem-se as expressões de velocidades de deformação viscoelástica, apresentadas a seguir:

$$\dot{\epsilon}_x = \gamma \left[\sigma_x - \eta \sigma_y + \frac{E}{(1-v^2)} (\epsilon_x (\eta v - 1) + \epsilon_y (\eta - v)) \right] \quad (6.7)$$

analogamente

$$\dot{\epsilon}_y = \gamma \left[\sigma_y - \eta \sigma_x + \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_y(\eta\nu-1) + \epsilon_x(\eta-\nu)) \right] \quad (6.8)$$

e

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \gamma_t (\tau_{xy} - G \epsilon_{xy}) \quad (6.9)$$

6.1.1.2-) Estado Plano de Deformação ($\epsilon_z = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$)

Para o Estado Plano de Deformação, as expressões de tensão para o modelo de Kelvin em x , y e xy são as seguintes:

$$\sigma_x = \frac{E\epsilon_x}{(1+\nu)} + \frac{\nu E(\epsilon_x + \epsilon_y)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{\mu}{1+\eta} \dot{\epsilon}_x + \frac{\mu\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)} (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) \quad (6.10)$$

$$\sigma_y = \frac{E\epsilon_y}{(1+\nu)} + \frac{\nu E(\epsilon_x + \epsilon_y)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{\mu}{1+\eta} \dot{\epsilon}_y + \frac{\mu\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)} (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) \quad (6.11)$$

$$\tau_{xy} = G \epsilon_{xy} + \lambda \dot{\epsilon}_{xy} \quad (6.12)$$

Usando-se uma sequência de operações análoga ao do Estado Plano de Tensão, chega-se às expressões finais de razão de deformação viscoelástica, como apresentadas a seguir:

$$\dot{\epsilon}_x = \gamma(1+\eta) \left[\sigma_x - \eta(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{E(\epsilon_x(1-\nu-\eta+2\eta\nu) + \epsilon_y(\nu+\eta-2\eta\nu))}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right] \quad (6.13)$$

$$\dot{\epsilon}_y = \gamma(1+\eta) \left[\sigma_y - \eta(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{E(\epsilon_y(1-\nu-\eta+2\eta\nu) + \epsilon_x(\nu+\eta-2\eta\nu))}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right] \quad (6.14)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \gamma_t(\tau_{xy} - G \epsilon_{xy}) \quad (6.15)$$

onde:

$$\dot{\epsilon}_z = 0 \quad ; \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

6.1.2-) INCREMENTOS DE DEFORMAÇÃO VISCOELÁSTICA

O cálculo do incremento de deformação viscoelástica, num passo finito de tempo, no caso do modelo modificado, é feito através de um procedimento explícito sendo que a atualização daquela deformação resulta da soma da deformação viscoelástica, no **passo n**, com o seu respectivo incremento, como indicado a seguir:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ve}^n \Delta t_n \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n \quad (6.16)$$

Em termos de suas componentes, as expressões dos incrementos de deformação viscoelástica, bem como de seus respectivos valores atualizados, em x, y e xy, são:

$$(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n)_x = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ve}^n)_x \Delta t_n \Rightarrow (\boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^{n+1})_x = (\boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n)_x + (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n)_x \quad (6.16-a)$$

$$(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n)_y = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ve}^n)_y \Delta t_n \Rightarrow (\boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^{n+1})_y = (\boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n)_y + (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n)_y \quad (6.16-b)$$

$$(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n)_{xy} = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ve}^n)_{xy} \Delta t_n \Rightarrow (\boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^{n+1})_{xy} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n)_{xy} + (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n)_{xy} \quad (6.16-c)$$

No caso do *Estado Plano de Deformação*, acrescenta-se ainda:

$$(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n)_z = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ve}^n)_z \Delta t_n \Rightarrow (\boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^{n+1})_z = (\boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n)_z + (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ve}^n)_z \quad (6.16-d)$$

6.1.3-) INCREMENTOS DE TENSÃO

O procedimento para o cálculo do incremento de tensão $\Delta \boldsymbol{\sigma}^n$, ocorre de maneira análoga ao do utilizado no modelo de *OWEN/HINTON*, porém, acrescido da parcela do

incremento de deformação viscoelástica. Apresentam-se a seguir, as expressões para a obtenção do incremento de tensão e da atualização de seu valor:

$$\sigma = D \varepsilon_e \Rightarrow \Delta \sigma^n = D \Delta \varepsilon_e^n \quad (6.17)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} \Rightarrow \varepsilon_e = \varepsilon - \varepsilon_{ve} - \varepsilon_{vp} \Rightarrow \Delta \varepsilon_e^n = \Delta \varepsilon^n - \Delta \varepsilon_{ve}^n - \Delta \varepsilon_{vp}^n \quad (6.18)$$

Substituindo a expressão (6.18) em (6.17),
tem-se:

$$\Delta \sigma^n = D(\Delta \varepsilon^n - \Delta \varepsilon_{ve}^n - \Delta \varepsilon_{vp}^n) = \hat{D}^n (B^n \Delta d^n - \dot{\varepsilon}_{ve}^n \Delta t_n - \dot{\varepsilon}_{vp}^n \Delta t_n) \quad (6.19)$$

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + \Delta \sigma^n \quad (6.20)$$

Deve-se observar ainda que as expressões de incremento de tensão e de seu valor atualizado foram apresentadas na sua forma condensada; obviamente quando implementadas no código de cálculo, devem ser apresentadas em termos de suas componentes no plano x e y.

6.2-) ASPECTOS DA INTEGRAÇÃO NO TEMPO

6.2.1-) INCREMENTO DO TEMPO

Com relação à estimativa do passo de tempo Δt_n , foi mantido o mesmo procedimento do modelo anterior, adotando-se um passo variável e pequeno, definido como uma parcela da razão entre a **deformação total efetiva** e a **velocidade de deformação efetiva**. No entanto, em consequência da existência das velocidades de deformação viscoplástica e viscoelástica, aquela estimativa dá-se a partir de duas expressões distintas:

$$\Delta t_n^1 = \tau \left[\left(\bar{\epsilon}^n \right) / \left(\frac{d \bar{\epsilon}_{ve}^n}{dt} \right) \right]_{\text{mín}}^{1/2} \quad (6.21-a)$$

$$\Delta t_n^2 = \tau \left[\left(\bar{\epsilon}^n \right) / \left(\frac{d \bar{\epsilon}_{vp}^n}{dt} \right) \right]_{\text{mín}}^{1/2} \quad (6.21-b)$$

Deve-se ressaltar que as expressões para a deformação total efetiva e velocidade de deformação efetiva encontram-se apresentadas no capítulo 3. As expressões (6.21-a) e (6.21-b) são aplicadas à todos os pontos de integração de Gauss, no caso dos elementos isoparamétricos empregados e o fator de controle τ assume apenas valores no intervalo $0,01 \leq \tau \leq 0,15$, intervalo esse que propiciará uma melhor convergência dos resultados. O valor final do passo de tempo

adotado será o mínimo dos mínimos, ou seja:

$$\Delta t_n = [(\Delta t_n^1)_{\min} ; (\Delta t_n^2)_{\min}]_{\min} \quad (6.22)$$

Para o próximo passo de tempo, de modo simplificado, continua válida a expressão:

$$\Delta t_{n+1} = K \Delta t_n \quad ; \quad K = 1,5 \rightarrow 2,0 \quad (6.23)$$

6.2.2-) ANÁLISE ITERATIVA - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Assim, como comentado no capítulo 3, As equações de equilíbrio incremental a serem satisfeitas em um intervalo de tempo Δt_n , tem a seguinte forma:

$$\int_{\Omega} [B^n]^t \Delta \sigma^n d\Omega - \Delta f^n = 0 \quad (6.24)$$

Substituindo-se (6.19), referente ao incremento de tensão em (6.24), obtém-se a expressão para o incremento de deslocamento dada por:

$$\Delta d^n = [K_T^n]^{-1} \Delta V^n \quad (6.25)$$

onde:

$$[K_T^n] = \int_{\Omega} [B^n]^t \hat{D}^n B^n d\Omega$$

e

$$\Delta V^n = \int_{\Omega} [B_T^n]^t \hat{D}^n \dot{\epsilon}_{ve}^n \Delta t^n d\Omega + \int_{\Omega} [B_T^n]^t \hat{D}^n \dot{\epsilon}_{vp}^n \Delta t^n d\Omega + \Delta f^n$$

6.2.3-) CORREÇÃO DAS TENSÕES E CONVERGÊNCIA DOS RESULTADOS

Para a correção do equilíbrio, deve-se considerar a parcela associada à velocidade de deformação viscoelástica na expressão do vetor das pseudo-forças:

$$\varphi^{n+1} = \int_{\Omega} [B^{n+1}]^t \sigma^{n+1} d\Omega + f^{n+1} \neq 0$$

$$\Delta V^{n+1} = \int_{\Omega} [B^{n+1}]^t \hat{D}^{n+1} \dot{\epsilon}_{ve}^{n+1} \Delta t_{n+1} d\Omega + \int_{\Omega} [B^{n+1}]^t \hat{D}^{n+1} \dot{\epsilon}_{vp}^{n+1} \Delta t_{n+1} d\Omega + \Delta f^{n+1} + \varphi^{n+1}$$

De modo análogo ao descrito no **capítulo 3**, a busca do equilíbrio com o nível de carga do início do passo, é feita aplicando-se o vetor de pseudo-forças na forma de carregamento nodal. Obtém-se assim um novo acréscimo de

deslocamentos e, conseqüentemente, novos acréscimos de deformações. Novamente, impondo-se o modelo constitutivo, gera-se um novo resíduo, menor que o primeiro, refazendo-se então todo o procedimento anteriormente descrito. A **figura 28** a seguir ilustra o " **Procedimento iterativo** " comentado:

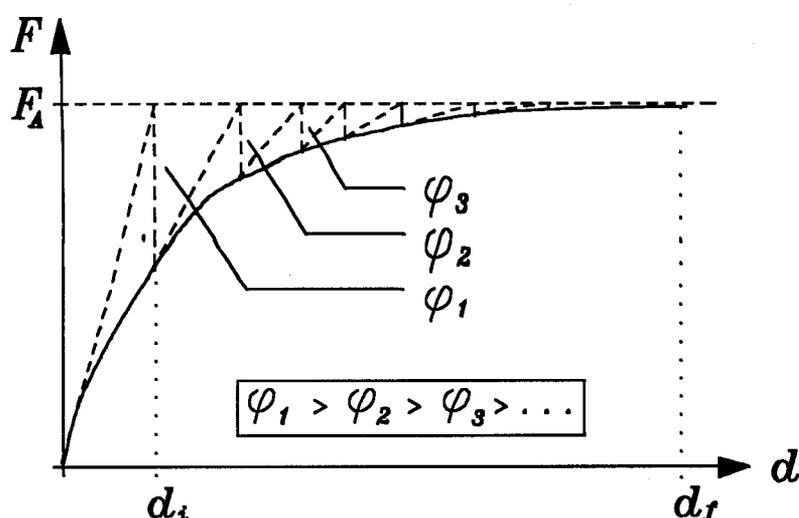


FIGURA 28 - PROCESSO DE CONVERGÊNCIA DOS RESULTADOS

6.2.4-) EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Objetivando testar a eficiência das novas expressões referentes ao novo modelo, foram selecionados alguns exemplos de aplicação, desde os mais simples, como por exemplo, uma chapa tracionada, até os mais complexos, como por exemplo, escavação de túneis em rocha, cilindro espesso submetido à pressão interna, viga biapoiada, etc.

Deve-se ressaltar que os exemplos testados procuraram abranger algumas das diversas peculiaridades do novo modelo: **análise elasto-plástica, análise elasto-**

viscoplástica e análise viscoelástica. Observa-se ainda que devido a falta de informações referentes aos valores do coeficiente de Poisson 'tangencial' (η) e do coeficiente de viscosidade 'tangencial' (λ), adotaram-se para ambos números correspondentes a 1/3 de seus respectivos valores 'normais', tornando possível assim a execução do programa.

Serão apresentados a seguir, os exemplos testados, bem como os resultados obtidos nos mesmos:

• **EXEMPLO 1 - CHAPA TRACIONADA / INÉRCIA CONSTANTE**

Simula-se, nesse caso, o comportamento da barra tracionada, apresentada no **EXEMPLO 2** do **CAPÍTULO 5**, usando-se uma chapa com os mesmos parâmetros lá apresentados. O esquema do chapa e os resultados obtidos são apresentados a seguir na **figura 29 e Tabela 7**, respectivamente:

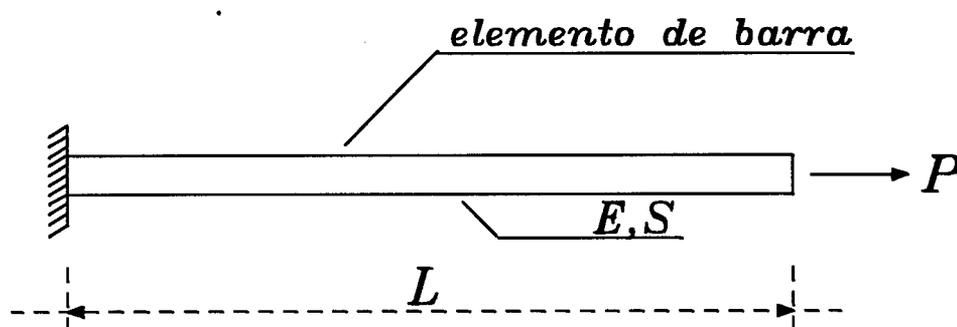


FIGURA 29 - CHAPA TRACIONADA COM INÉRCIA CONSTANTE

$E_1 = 10.000$	$E_2 = 9.500$	$P = 15,0$	$A = 1,0$	$H = 5.000$
$\sigma_y = 10,0$	$\gamma_1 = 0,0009$	$\gamma_2 = 0,0010$	$\tau = 0,10$	

TABELA 7 - DESLOCAMENTOS NA EXTREMIDADE (BARRA/CHAPA)			
C. CÁLCULO	PARÂMETROS	P/ A BARRA	P/ A CHAPA
CASO a $\gamma_1=0,00000$ $\gamma_2=0,00100$	Deslocamento	0,025017	0,026355
	Iterações	18	34
	Tempo	1,60859	46,20190
CASO b $\gamma_1=0,00090$ $\gamma_2=0,00000$	Deslocamento	0,030814	0,030814
	Iterações	27	24
	Tempo	1,45115	1,45111

EXEMPLO 2 - CHAPA TRACIONADA / INÉRCIA VARIÁVEL

Simula-se agora a barra de inércia variável, referente ao **EXEMPLO 3 do CAPÍTULO 5**, utilizando-se uma chapa tracionada com os mesmos parâmetros lá adotados. O esquema da mesma e os resultados obtidos apresentam-se a seguir, na **figura 30 e tabela 8**, respectivamente:

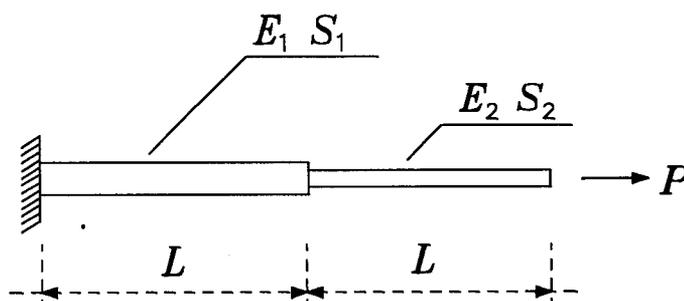


FIGURA 30 - CHAPA TRACIONADA COM INÉRCIA VARIÁVEL

$$P = 10,00 \text{ kN} \quad \tau = 0,10$$

ELEMENTO 1:

$$E_1 = 100,00 \text{ kN/cm}^2 \quad S_1 = 2,0 \text{ cm}^2 \quad H_1 = 25,0 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{y1} = 4,0 \text{ kN/cm}^2 \quad \gamma_{ve} = 0,0015 \quad \gamma_{vp} = 0,0020$$

ELEMENTO 2:

$$E_2 = 100,00 \text{ kN/cm}^2 \quad S_2 = 1,0 \text{ cm}^2 \quad H_2 = 50,0 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{y2} = 6,0 \text{ kN/cm}^2 \quad \gamma_{ve} = 0,0015 \quad \gamma_{vp} = 0,0020$$

TABELA 8 - DESLOCAMENTOS NA EXTREMIDADE (BARRA/CHAPA)			
C. CÁLCULO	PARÂMETRO	P/ A BARRA	P/ A CHAPA
CASO a $\gamma_{ve} = 0,0000$ $\gamma_{vp} = 0,0020$	<i>Deslocamento</i>	27,0394	26,6920
	<i>Iterações</i>	39	52
	<i>Tempo</i>	106,637	977,266
CASO b $\gamma_{ve} = 0,0015$ $\gamma_{vp} = 0,0000$	<i>Deslocamento</i>	30,0133	30,0310
	<i>Iterações</i>	81	86
	<i>Tempo</i>	117,672	176,439

EXEMPLO 3 - VIGA BIAPOIADA / ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA

Uma viga biapoiada (isostática), retirada de TELLES [14], é submetida a um carregamento distribuído uniforme, monitorando-se o deslocamento do nó "C" e comparando-o com resultados obtidos através da "Teoria de

Viga", como apresentados na *Tabela 9*.

Devido à simetria da viga, a discretização da mesma será feita apenas em uma de suas duas metades, objetivando facilitar a elaboração do arquivo de dados, além de uma redução no tempo de execução no código de cálculo. Os parâmetros da viga apresentam-se a seguir e o esquema da viga carregada é ilustrado na *figura 31*:

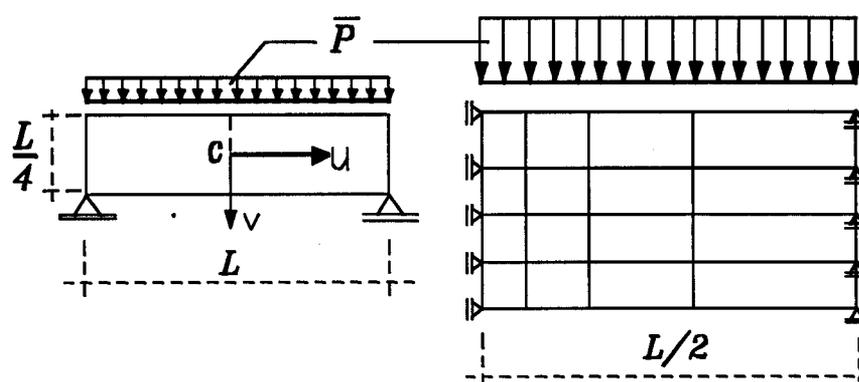


FIGURA 31 - VIGA BIAPOIADA / CARREGAMENTO UNIFORME

$$E_1 = 21.092,09 \text{ kN/cm}^2 \quad E_2 = 0 \quad \sigma_y = 25,311 \text{ kN/cm}^2 \quad H = 0$$

$$L = 40,64 \text{ cm} \quad \nu = 0,30 \quad \gamma_{ve} = 0,0 \quad \gamma_{vp} = 1,0 \text{ sec}^{-1}$$

Critério de Escoamento: *TRESCA*

TABELA 9 - DESLOCAMENTO DO NÓ C DA VIGA (cm)		
Carregamento \bar{P} (kN/cm)	TELLES	VEPLAS.FOR
3.163875	0,226160	0,251968

EXEMPLO 4 - ESCAVAÇÃO DE TÚNEL / ANÁLISE ELASTO-VISCOPLÁSTICA

Esse exemplo foi retirado de BREBBIA [16] e refere-se à escavação de um túnel em rocha onde analisa-se o deslocamento final convergente do nó **A** ilustrado na **figura 32**. Devido a dupla simetria da seção transversal do túnel, discretiza-se apenas 1/4 da mesma. Os resultados finais de deslocamentos encontram-se na **Tabela 10**:

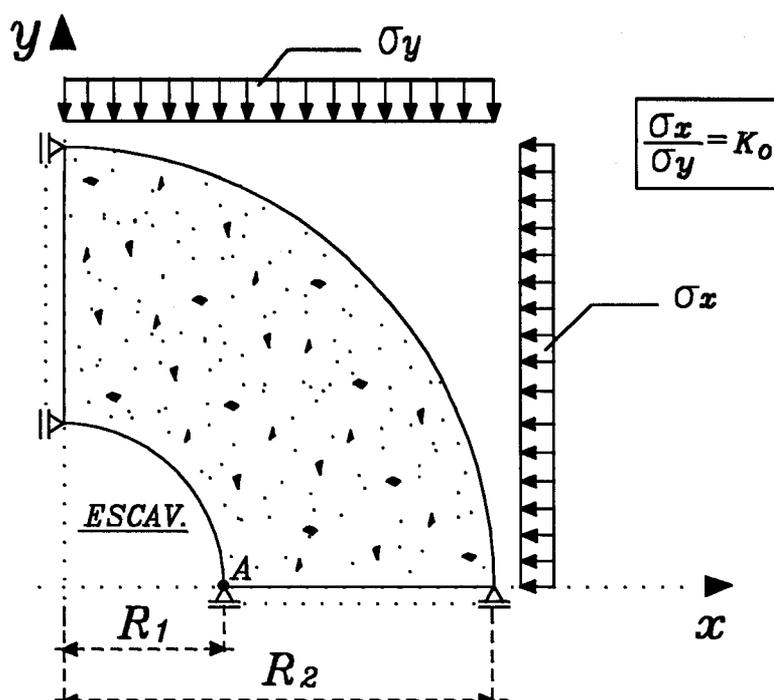


FIGURA 32 - ESCAVAÇÃO DE TÚNEL EM ROCHA / ANÁLISE E-VP

$\sigma_y = 3,906 \text{ MPa}$	$\sigma_x = 1,953 \text{ MPa}$	$R_1 = 1,676 \text{ m}$	$R_2 = 4,542 \text{ m}$
$E_1 = 3.515,35 \text{ MPa}$	$\nu = 0,15$	$C = 0,7031 \text{ MPa}$	$H = 15,0 \text{ MPa}$
$\phi = 30^\circ$	$\gamma_{ve} = 0,0000$	$\gamma_{vp} = 1.10^{-6} / \text{MPa/s}$	MOHR-COULOMB

TABELA 10 - RESULTADOS: DESLOCAMENTO, ITERAÇÃO E TEMPO			
REFERENCIAL	DESLOC. (cm)	ITERAÇÕES	TEMPO (dias)
BREBBIA	0,62484	*****	*****
VEPLAS.FOR	0,66099	898	158,50

EXEMPLO 5 - ESCAVAÇÃO DE TÚNEL / ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA

Faz-se agora uma análise apenas elasto-plástica quando da escavação de um túnel em rocha (Biotita-Gnaiss), SINGH [13]. Obtém-se o deslocamento convergente final da parede interna do mesmo, analisando novamente apenas 1/4 de sua seção transversal, como ilustrado na **figura 33**. Os resultados obtidos apresentam-se a seguir, nas **Tabelas 11 e 12**:

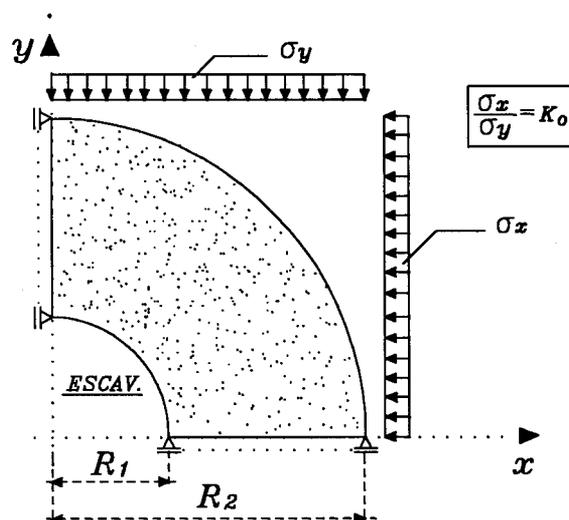


FIGURA 33 - ESCAVAÇÃO DE TÚNEL EM ROCHA / ANÁLISE E-P

$$\sigma_y = \sigma_x = 882,00 \text{ tf/m}^2 \quad R_1 = 2,500 \text{ m} \quad R_2 = 20,000 \text{ m}$$

$$E_1 = 4480000 \text{ tf/m}^2 \quad \nu = 0,18 \quad C = 160 \text{ tf/m}^2$$

$$\phi = 30^\circ \quad \gamma_{ve} = 0,0000 \quad \gamma_{vp} = 1.10^{-6}/\text{MPa/s}$$

Critério de Escoamento de MOHR-COULOMB

TABELA 11 - DESLOCAMENTO DA PAREDE INTERNA (em metros)		
LEITURA DOS	SINGH	VEPLAS.FOR
Deslocamento	$1,0000.10^{-3}$	$1,2102.10^{-3}$
Iterações	*****	169
Tempo	*****	0,0

TABELA 12 - TENSÕES PRINCIPAIS NO MACIÇO (tf/m ²)				
TENSÃO PRINCIPAL	OBTIDO DE	AFASTAMENTO RADIAL (em metros)		
		2,75	3,50	5,50
σ_1	SINGH	-180,00	-365,00	-660,00
	VEPLAS.FOR	-197,24	-432,04	-843,11
σ_2	SINGH	-1.525,00	-1.350,00	-1,060,00
	VEPLAS.FOR	-1.637,60	-1.474,80	-992,14

EXEMPLO 6 - CILÍNDRIO PRESSURIZADO / ANÁLISE VISCOELÁSTICA

Esse exemplo foi retirado de CHEN [15] e trata-se de um cilindro de parede espessa, submetido à

pressão interna. Novamente, devido a dupla simetria de sua seção transversal, faz-se a análise apenas em 1/4 da mesma como ilustrado na **figura 34**. Os resultados obtidos referentes à evolução dos deslocamentos da parede externa do cilindro ao longo do tempo estão apresentados a seguir na **Tabela 13** e no diagrama de *Deslocamento x Tempo* ilustrado na **figura 35**:

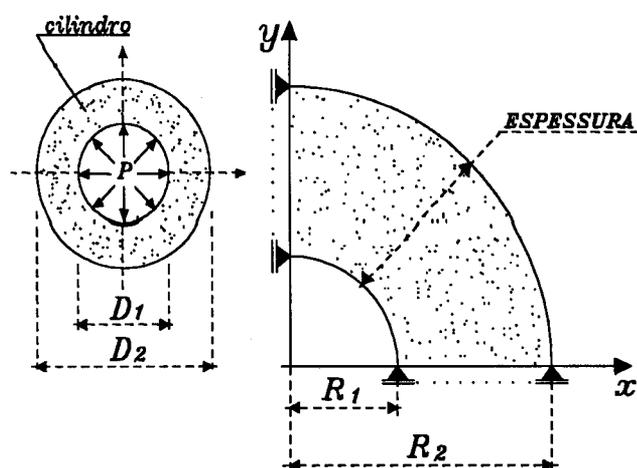


FIGURA 34 - CILÍNDRIO PRESSURIZADO COM PAREDE ESPESSA

$D_1 = 25,40 \text{ cm}$ $D_2 = 50,80 \text{ cm}$ $P = 0,007031 \text{ MPa}$
 $E_1 = 15,524 \text{ MPa}$ $E_2 = 3,881 \text{ MPa}$ $\nu = 0,150$
 $\gamma_1 = 0,015/\text{MPa}/\text{dia}$ $\gamma_2 = 0,000$ **VON MISES**

TABELA 13 - DESLOCAMENTO DA PAREDE EXTERNA (cm)				
Tempo de Refer.	CHEN		VEPLAS.FOR	
	<i>Desloc.</i>	<i>Tempo (dias)</i>	<i>Desloc.</i>	<i>Tempo (dias)</i>
Início	2,100	0,00	1,499	0,00
Final	7,420	30,00	7,380	30,50

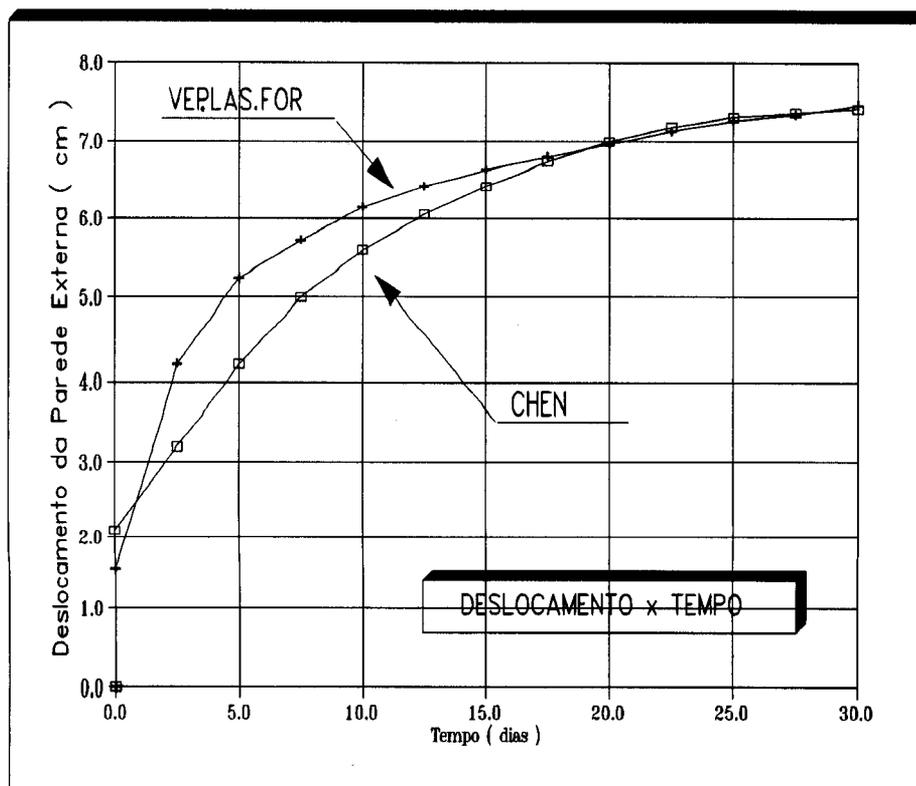


FIGURA 35 - DIAGRAMA DE DESLOCAMENTO x TEMPO

EXEMPLO 7 - ANÁLISE INVERSA PARA CALIBRAÇÃO DO MODELO

Na falta da realização de ensaios de laboratório para obtenção dos parâmetros do modelo, optou-se por uma análise inversa, calibrando-se o modelo a partir de resultados experimentais apresentados em *OWEN* [1]. Os parâmetros determinados por essa análise estão relacionados em seguida. O esquema da barra tracionada esta ilustrada na *figura 36* e os resultados obtidos na *figura 37*.

$$\begin{aligned}
 L &= 10,00 \text{ m} & t_1 = t_2 &= 0,50 \text{ m} & \nu &= 0,24 & \sigma_y &= 110 \text{ bar} \\
 E_1 &= 10.500 \text{ bar} & E_2 &= 29.000 \text{ bar} & H &= 5.500 \text{ bar} \\
 \gamma_{ve} = \gamma_1 &= 8 \cdot 10^{-6} / \text{bar/dia} & \gamma_{vp} = \gamma_2 &= 7 \cdot 10^{-4} / \text{bar/dia}
 \end{aligned}$$

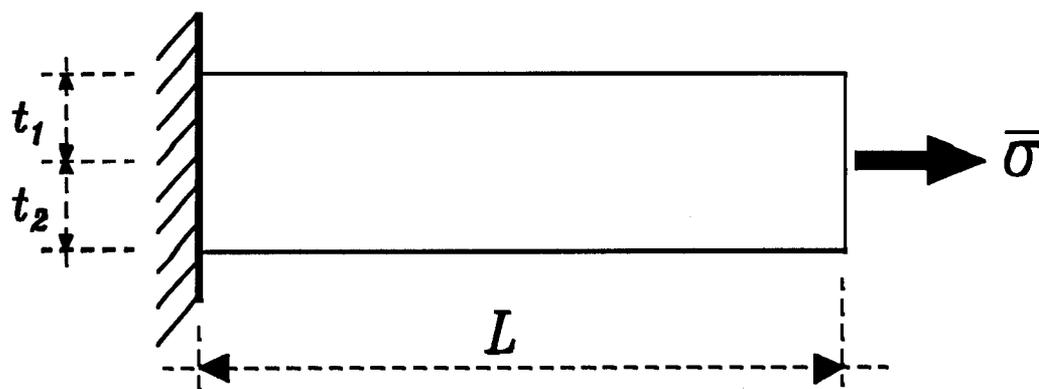


FIGURA 36 - CHAPA TRACIONADA

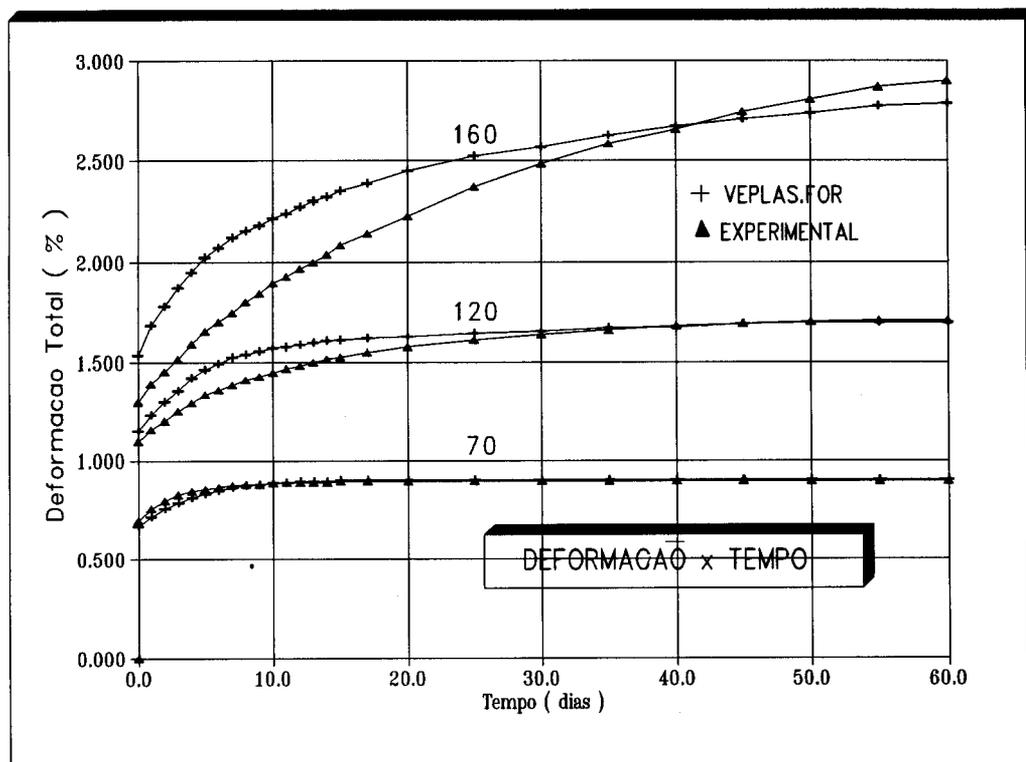


FIGURA 37 - DIAGRAMA DE DEFORMAÇÃO x TEMPO

CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES FINAIS

Em muitos problemas de ordem prática na engenharia de estruturas civis, a previsão da resposta estrutural ao longo do tempo é fundamentalmente importante, seja quanto à elaboração de um projeto mais econômico, seja no que diz respeito aos fatores relacionados à segurança. É o caso, por exemplo, da escavação de túneis em rocha ou solo, onde a estimativa do grau de fechamento das paredes do mesmo, no período de horas entre a escavação e a colocação da estrutura de sustentação, pode propiciar um projeto mais seguro e econômico.

Os modelos constitutivos viscoelásticos e viscoplásticos, por levarem em conta a deformação ao longo do tempo, constituem a forma adequada de tratar problemas do tipo mencionado. Entretanto, antes da sua utilização, é necessário que se conheçam claramente as hipóteses relativas a cada modelo e a sua eficiência sob o ponto de vista da resposta numérica.

Assim, este trabalho procura dar ênfase aos aspectos da formulação e resposta numérica de modelos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos para a análise do comportamento de estruturas.

As características e hipóteses implícitas em cada modelo podem ser melhor estudadas em suas versões unidimensionais. Nesse particular, a **Reologia dos Materiais** é bastante útil uma vez que através das associações de seus elementos básicos **mola, sólido e amortecedor**, permite a formulação de diferentes modelos constitutivos cujas propriedades ficam bem definidas em campo unidimensional.

O primeiro modelo estudado foi o **Elasto-Viscoplástico de OWEN/HINTON**, elaborado a partir da associação em série de **mola** e de um conjunto em paralelo **sólido com encruamento e amortecedor**. As relações constitutivas foram implementadas em um código de cálculo para análise de estados planos pelo método dos elementos finitos, chamado **VEPLAS.FOR** (em linguagem FORTRAN e executado em micro-computadores PC/AT - 386 DX). Através de testes realizados, o modelo mostrou-se capaz de reproduzir as deformações em regime elástico, bem como a evolução das deformações plásticas no tempo, as mesmas que seriam obtidas com um modelo elastoplástico. Esta, aliás é uma das características do modelo, a outra seria, impondo-se uma tensão de escoamento nula, a capacidade de se reproduzir o regime secundário de fluência.

No entanto, seria interessante poder simular a evolução das deformações que ocorrem não só no regime plástico, mas também no regime elástico, pois sabe-se que determinados materiais possuem evoluções significativas das deformações, mesmo quando as tensões atuantes encontram-se

abaixo da tensão de escoamento. É o caso, por exemplo, do concreto, devido a fatores como fissuração com conseqüente diminuição do seu módulo de elasticidade.

Assim, adicionou-se em série ao modelo de OWEN/HINTON, uma associação em paralelo de **MOLA/AMORTECEDOR**. Essa pequena modificação, deu origem a um novo modelo reológico, chamado de **"MODELO PROPOSTO"**, ou ainda, **"NOVO MODELO REOLÓGICO"**.

Esse modelo, pelas suas características, apresenta como casos particulares o modelo de OWEN/HINTON, os comportamentos puramente elástico, elasto-plástico e viscoelástico (no caso de tensão constante permite reproduzir os regimes primário e secundário de fluência).

Implementaram-se as expressões do modelo proposto em novos códigos de cálculo para estruturas compostas por barras: **"UNIVEP.FOR"** para análise unidimensional e **"BIVEP.FOR"** para análise de treliças planas, ambos em linguagem FORTRAN. A elaboração desses códigos de cálculo objetivou avaliar a resposta das novas formulações em casos simples de solicitação, bem como entender melhor o procedimento de integração do modelo constitutivo.

Apesar de simples os programas de barras desenvolvidos podem se constituir em úteis ferramentas para o estudo de estruturas metálicas em treliça, uma vez que se incorpore o efeito da temperatura. De fato, sabe-se que altas temperaturas induzem a uma diminuição na viscosidade do material e, conseqüentemente, a um aumento das deformações.

Com o objetivo de estender a análise para combinações mais complexas de tensões, fez-se a generalização para estados planos e a implementação das expressões do modelo proposto no código de cálculo **VEPLAS.FOR**. Os exemplos testados variaram desde a análise de uma chapa tracionada até casos que podem simular a escavação de túneis em rocha. Os resultados obtidos foram bastante satisfatórios, demonstrando a potencialidade do novo modelo, particularmente para aplicação em problemas nos quais seja importante considerar o "creep" primário no regime elástico e deformações residuais no regime plástico.

Finalmente, os estudos realizados permitem estabelecer uma continuidade do presente trabalho, baseando-se nas seguintes sugestões:

- a) Identificação dos Parâmetros do Novo Modelo:** de fato é necessário 'calibrar' o modelo através de ensaios de caracterização paramétrica do material em laboratório;

- b) Validação do Modelo:** os resultados numéricos obtidos com o modelo devem ser comparados com resultados reais obtidos por observação, eventualmente em estruturas ensaiadas em laboratório;

- c) Incorporação da Mecânica do Dano:** para aplicação ao concreto é interessante que se incorpore a influência da microfissuração característica desse material;

d) Algoritmo de Integração no Tempo: os algoritmos implícitos são incondicionalmente estáveis sendo, portanto, de interesse sua utilização;

e) Análise do Efeito da Temperatura: para que se possa estender convenientemente o modelo para o estudo de estruturas metálicas.

ANEXO 1 - EXEMPLO 3 / CAP. 6

 ***** ARQUIVO DE SAIDA DOS RESULTADOS *****

EXEMPLO 7: VIGA BIAPOIADA / COMPORTAMENTO ELASTO-PLASTICO

 ***** DADOS DE CONTROLE DO PROGRAMA *****

No. TOTAL DE PONTOS= 25	No. TOTAL DE ELEMENTOS ..= 16
No. DE NOS RESTRITOS= 10	1-EPT, 2-EPD ou 3-AXS ...= 1
No. DE NOS POR ELEMENTO .= 4	No. TOTAL DE MATERIAIS ..= 1
ORDEM DA INTEGR DE GAUSS = 3	No. DE EQUACOES/ELEMENTO = 8
ALGORITMO ESCOLHIDO= 1	1-T, 2-VM, 3-MC ou 4-DP .= 1
No. DE INCREM. DE CARGA .= 4	3-(EPT e EPD-3) OU 4-AXS = 3

ELEMENTO	PROPRIEDADE	NOS DO ELEMENTO			
----------	-------------	-----------------	--	--	--

1	1	1	6	7	2
2	1	2	7	8	3
3	1	3	8	9	4
4	1	4	9	10	5
5	1	6	11	12	7
6	1	7	12	13	8
7	1	8	13	14	9
8	1	9	14	15	10

9	1	11	16	17	12
10	1	12	17	18	13
11	1	13	18	19	14
12	1	14	19	20	15
13	1	16	21	22	17
14	1	17	22	23	18
15	1	18	23	24	19
16	1	19	24	25	20

***** COORDENADAS DOS NOS DA ESTRUTURA EM X e Y

NO	COORD-X	COORD-Y	NO	COORD-X	COORD-Y	NO	COORD-X	COORD-Y
----	---------	---------	----	---------	---------	----	---------	---------

1	.0000	.0000	2	.0000	2.5400	3	.0000	5.0800
4	.0000	7.6200	5	.0000	10.1600	6	2.5400	.0000
7	2.5400	2.5400	8	2.5400	5.0800	9	2.5400	7.6200
10	2.5400	10.1600	11	6.3500	.0000	12	6.3500	2.5400
13	6.3500	5.0800	14	6.3500	7.6200	15	6.3500	10.1600
16	11.4300	.0000	17	11.4300	2.5400	18	11.4300	5.0800
19	11.4300	7.6200	20	11.4300	10.1600	21	20.3200	.0000
22	20.3200	2.5400	23	20.3200	5.0800	24	20.3200	7.6200

25 20.3200 10.1600

***** CODIGOS DE VINCULACAO : 00-LIVRE, 01-RESTR_X, 10-RESTR_Y

NO	COD.	RESTR_X	RESTR_Y	NO	COD.	RESTR_X	RESTR_Y
----	------	---------	---------	----	------	---------	---------

1	10	.0000	.0000	2	10	.0000	.0000
3	10	.0000	.0000	4	10	.0000	.0000
5	10	.0000	.0000	21	1	.0000	.0000
22	1	.0000	.0000	23	1	.0000	.0000
24	1	.0000	.0000	25	1	.0000	.0000

***** TIPOS DE MATERIAS E PROPRIEDADES: *****

 . MATERIAL DO TIPO: 1 .

MOD ELASTICIDADE E1..=	21092.09	MOD ELASTICIDADE E2..=	.00
C. DE FLUIDEZ V-EL...=	.000000	C. DE FLUIDEZ V-PL...=	1.000000
TENSAO DE ESCOAMENTO =	25.311	ENCRUAMENTO (H).....=	.000
COEF DE POISSON (v)..=	.300	ESPESSURA (e).....=	.000
PESO ESPECIFICO (g)..=	.000	ANGULO DE ATRITO.....=	.000

DELTAS DE FLUXO (M,N)= 1.000 EQUACAO DE FLUXO.....= 1.000

* MAXIMA LARGURA DE BANDA ENCONTRADA= 14 *

* TIPOS DE CARREGAMENTOS ATUANTES NA ESTRUTURA *

. CARGAS CONCENTRADAS nos NOS: NAO .

. CARGAS GRAVIMETRICAS: NAO .

. CARGAS nos LADOS DO ELEMENTO: SIM .

.....

* NUMERO DE LADOS CARREGADOS.....= 4 *

. LADO NOS CORRESPONDENTES AO LADO .

.....

4	10		5	
	25.311	.000	25.311	.000
8	15		10	
	25.311	.000	25.311	.000
12	20		15	
	25.311	.000	25.311	.000
16	25		20	
	25.311	.000	25.311	.000

***** FORCA NODAL TOTAL PARA CADA ELEMENTO *****

1							
	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000							
2							
	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000							
3							
	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000							
4							
	.000	.000	.000	.000	.000	-32.145	.000
-32.145							
5							
	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000							
6							
	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000							
7							
	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000							
8							
	.000	.000	.000	.000	.000	-48.217	.000
-48.217							
9							
	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000							
10							
	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000							
11							

	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000							
12							
	.000	.000	.000	.000	.000	-64.290	.000
-64.290							
13							
	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000							
14							
	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000							
15							
	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000							
16							
	.000	.000	.000	.000	.000	-112.507	.000
-112.507							

```

*****
ALGORITMO [0:EXPL, 0.5:S-IMPL, 1:IMPL] ..(TIMEX)= .00000
PASSO DE TEMPO INICIAL ESCOLHIDO .....(DTINT)= .02400
INCREMENTO DO PASSO DE TEMPO ATUAL V_EL .....= .00000
INCREMENTO DO PASSO DE TEMPO ATUAL V_PL .....= .05000
INCREMENTO DO PASSO DE TEMPO SEGUINTE .....(k)= 1.50000
*****

```

```

NUMERO DO INCREMENTO.....: 1
FATOR DE CARGA .....(FACTO)= .04000
TOLERANCIA DE CONVERGENCIA.....(TOLER)= .00001

```

No. MAX. DE ITERACOES(MITER)= 200

PARAMETRO DE SAIDA INICIAL(NOUTP1)= 0

PARAMETRO DE SAIDA FINAL(NOUTP2)= 1

TEMPO TOTAL = .000000E+00 ITER. PARCIAL = 1 ITER. TOTAL =

1

CONVERGENCIA VISCO-EL = 0 RESIDUO = .000000E+00

CONVERGENCIA VISCO-PL = 0 RESIDUO = .000000E+00

***** DESLOCAMENTOS DOS NOS DA ESTRUTURA EM X e Y *****

NO	DESLOC-X	DESLOC-Y	NO	DESLOC-X	DESLOC-Y
1	.00000E+00	-.19470E-01	2	.00000E+00	-.19797E-01
3	.00000E+00	-.19935E-01	4	.00000E+00	-.19918E-01
5	.00000E+00	-.19712E-01	6	.14380E-02	-.19083E-01
7	.68485E-03	-.19400E-01	8	.17018E-04	-.19539E-01
9	-.64846E-03	-.19520E-01	10	-.13994E-02	-.19326E-01
11	.34133E-02	-.17105E-01	12	.16535E-02	-.17391E-01
13	.44476E-04	-.17520E-01	14	-.15653E-02	-.17519E-01
15	-.33133E-02	-.17351E-01	16	.55465E-02	-.12208E-01
17	.26733E-02	-.12385E-01	18	.93605E-04	-.12492E-01
19	-.24956E-02	-.12534E-01	20	-.53965E-02	-.12508E-01
21	.68625E-02	.00000E+00	22	.33868E-02	.00000E+00
23	.14309E-03	.00000E+00	24	-.31217E-02	.00000E+00
25	-.66716E-02	.00000E+00			

NUMERO DO INCREMENTO.....: 2

FATOR DE CARGA(FACTO)= .08000

TOLERANCIA DE CONVERGENCIA.....(TOLER)= .00001

No. MAX. DE ITERACOES(MITER)= 200

PARAMETRO DE SAIDA INICIAL(NOUTP1)= 0

PARAMETRO DE SAIDA FINAL(NOUTP2)= 1

TEMPO TOTAL = .000000E+00 ITER. PARCIAL = 1 ITER. TOTAL = 2

CONVERGENCIA VISCO-EL = 0 RESIDUO = .000000E+00

CONVERGENCIA VISCO-PL = 0 RESIDUO = .000000E+00

***** DESLOCAMENTOS DOS NOS DA ESTRUTURA EM X e Y *****

NO	DESLOC-X	DESLOC-Y	NO	DESLOC-X	DESLOC-Y
----	----------	----------	----	----------	----------

1	.00000E+00	-.38941E-01	2	.00000E+00	-.39595E-01
3	.00000E+00	-.39869E-01	4	.00000E+00	-.39835E-01
5	.00000E+00	-.39425E-01	6	.28761E-02	-.38167E-01
7	.13697E-02	-.38800E-01	8	.34036E-04	-.39079E-01
9	-.12969E-02	-.39039E-01	10	-.27989E-02	-.38652E-01
11	.68267E-02	-.34211E-01	12	.33070E-02	-.34782E-01
13	.88951E-04	-.35041E-01	14	-.31306E-02	-.35037E-01
15	-.66267E-02	-.34702E-01	16	.11093E-01	-.24416E-01
17	.53466E-02	-.24771E-01	18	.18721E-03	-.24985E-01
19	-.49912E-02	-.25068E-01	20	-.10793E-01	-.25016E-01
21	.13725E-01	.00000E+00	22	.67736E-02	.00000E+00
23	.28617E-03	.00000E+00	24	-.62434E-02	.00000E+00
25	-.13343E-01	.00000E+00			

NUMERO DO INCREMENTO.....: 3

FATOR DE CARGA(FACTO)= .12000

TOLERANCIA DE CONVERGENCIA.....(TOLER)= .00001

No. MAX. DE ITERACOES(MITER)= 200

PARAMETRO DE SAIDA INICIAL(NOUTP1)= 0

PARAMETRO DE SAIDA FINAL(NOUTP2)= 1

TEMPO TOTAL = .000000E+00 ITER. PARCIAL = 1 ITER. TOTAL = 3

CONVERGENCIA VISCO-EL = 0 RESIDUO = .000000E+00

CONVERGENCIA VISCO-PL = 999 RESIDUO = .100000E+03

.
.
.

TEMPO TOTAL = .110712E+00 ITER. PARCIAL = 45 ITER. TOTAL = 47

CONVERGENCIA VISCO-EL = 0 RESIDUO = .000000E+00

CONVERGENCIA VISCO-PL = 0 RESIDUO = .000000E+00

***** DESLOCAMENTOS DOS NOS DA ESTRUTURA EM X e Y *****

NO	DESLOC-X	DESLOC-Y	NO	DESLOC-X	DESLOC-Y
1	.00000E+00	-.19124E+00	2	.00000E+00	-.19394E+00
3	.00000E+00	-.19524E+00	4	.00000E+00	-.19470E+00
5	.00000E+00	-.19415E+00	6	.23735E-01	-.18592E+00
7	.12351E-01	-.18778E+00	8	.37607E-03	-.18910E+00
9	-.11120E-01	-.18849E+00	10	-.22911E-01	-.18823E+00
11	.48818E-01	-.15911E+00	12	.23637E-01	-.16002E+00
13	.60648E-03	-.16060E+00	14	-.22395E-01	-.16051E+00
15	-.47263E-01	-.16023E+00	16	.56386E-01	-.10555E+00
17	.27950E-01	-.10618E+00	18	.70902E-03	-.10660E+00
19	-.26617E-01	-.10665E+00	20	-.55500E-01	-.10654E+00
21	.60369E-01	.00000E+00	22	.30303E-01	.00000E+00
23	.79732E-03	.00000E+00	24	-.28791E-01	.00000E+00
25	-.58988E-01	.00000E+00			

NUMERO DO INCREMENTO.....: 4

FATOR DE CARGA(FACTO)= .12500

TOLERANCIA DE CONVERGENCIA.....(TOLER)= .00001

NO. MAX. DE ITERACOES(MITER)= 200

PARAMETRO DE SAIDA INICIAL(NOUTP1)= 0

PARAMETRO DE SAIDA FINAL(NOUTP2)= 1

TEMPO TOTAL = .110712E+00 ITER. PARCIAL = 1 ITER. TOTAL = 48

CONVERGENCIA VISCO-EL = 0 RESIDUO = .000000E+00

CONVERGENCIA VISCO-PL = 999 RESIDUO = .100000E+03

TEMPO TOTAL = .207263E+00 ITER. PARCIAL = 22 ITER. TOTAL = 69

CONVERGENCIA VISCO-EL = 0 RESIDUO = .000000E+00

CONVERGENCIA VISCO-PL = 0 RESIDUO = .000000E+00

***** DESLOCAMENTOS DOS NOS DA ESTRUTURA EM X e Y *****

NO	DESLOC-X	DESLOC-Y	NO	DESLOC-X	DESLOC-Y
1	.00000E+00	-.22030E+00	2	.00000E+00	-.22468E+00
3	.00000E+00	-.22616E+00	4	.00000E+00	-.22570E+00
5	.00000E+00	-.22535E+00	6	.27112E-01	-.21420E+00
7	.14126E-01	-.21736E+00	8	.26695E-03	-.21904E+00
9	-.13095E-01	-.21832E+00	10	-.27778E-01	-.21768E+00
11	.55556E-01	-.18367E+00	12	.27350E-01	-.18504E+00
13	.46883E-03	-.18563E+00	14	-.26467E-01	-.18546E+00
15	-.54285E-01	-.18526E+00	16	.65637E-01	-.12226E+00
17	.32419E-01	-.12282E+00	18	.56696E-03	-.12328E+00
19	-.31321E-01	-.12335E+00	20	-.64983E-01	-.12324E+00
21	.69684E-01	.00000E+00	22	.34907E-01	.00000E+00
23	.68894E-03	.00000E+00	24	-.33645E-01	.00000E+00
25	-.68567E-01	.00000E+00			

ANEXO 2 - EXEMPLO 7 / CAP. 6

 ***** ARQUIVO DE SAIDA DOS RESULTADOS *****

EXEMPLO 13 : CHAPA TRACIONADA COM TENSAO APLICADA DE 70 BAR

 ***** DADOS DE CONTROLE DO PROGRAMA *****

No. TOTAL DE PONTOS= 37	No. TOTAL DE ELEMENTOS ..= 8
No. DE NOS RESTRITOS= 5	1-EPT, 2-EPD ou 3-AXS ...= 1
No. DE NOS POR ELEMENTO . = 8	No. TOTAL DE MATERIAIS ..= 1
ORDEM DA INTEGR DE GAUSS = 3	No. DE EQUACOES/ELEMENTO = 16
ALGORITMO ESCOLHIDO= 1	1-T, 2-VM, 3-MC ou 4-DP . = 2
No. DE INCREM. DE CARGA . = 1	3-(EPT e EPD-3) OU 4-AXS = 3

ELEMENTO	PROPRIEDADE	NOS DO ELEMENTO							
----------	-------------	-----------------	--	--	--	--	--	--	--

1	1	1	6	9	10	11	7	3	2
2	1	3	7	11	12	13	8	5	4
3	1	9	14	17	18	19	15	11	10
4	1	11	15	19	20	21	16	13	12
5	1	17	22	25	26	27	23	19	18
6	1	19	23	27	28	29	24	21	20
7	1	25	30	33	34	35	31	27	26
8	1	27	31	35	36	37	32	29	28

```

*****
***** COORDENADAS DOS NOS DA ESTRUTURA EM X *****
NO    COORD-X   COORD-Y NO    COORD-X   COORD-Y NO    COORD-X
COORD-Y
*****
  1    .0000    .0000  2    .0000    .2500  3    .0000
.5000
  4    .0000    .7500  5    .0000    1.0000  6    1.2500
.0000
  7    1.2500    .5000  8    1.2500    1.0000  9    2.5000
.0000
 10    2.5000    .2500 11    2.5000    .5000 12    2.5000
.7500
 13    2.5000    1.0000 14    3.7500    .0000 15    3.7500
.5000
 16    3.7500    1.0000 17    5.0000    .0000 18    5.0000
.2500
 19    5.0000    .5000 20    5.0000    .7500 21    5.0000
1.0000
 22    6.2500    .0000 23    6.2500    .5000 24    6.2500
1.0000
 25    7.5000    .0000 26    7.5000    .2500 27    7.5000
.5000
 28    7.5000    .7500 29    7.5000    1.0000 30    8.7500
.0000
 31    8.7500    .5000 32    8.7500    1.0000 33    10.0000
.0000
 34    10.0000   .2500 35    10.0000   .5000 36    10.0000
.7500
 37    10.0000   1.0000

```

***** CODIGOS DE VINCULACAO : 00-LIVRE, 01-RESTR_X, 10-RESTR_Y *****

NO	COD.	RESTR_X	RESTR_Y	NO	COD.	RESTR_X

RESTR_Y

1	11	.0000	.0000	2	11	.0000
						.0000
3	11	.0000	.0000	4	11	.0000
						.0000
5	11	.0000	.0000			

***** TIPOS DE MATERIAS E PROPRIEDADES: *****

 . MATERIAL DO TIPO: 1 .

MOD ELASTICIDADE E1..=	10500.00	MOD ELASTICIDADE E2..=	29000.00
C. DE FLUIDEZ V-EL...=	.000008	C. DE FLUIDEZ V-PL...=	.000700
TENSAO DE ESCOAMENTO =	110.000	ENCRUAMENTO (H).....=	5500.000
COEF DE POISSON (v)..=	.240	ESPESSURA (e).....=	1.000
PESO ESPECIFICO (g)..=	.000	ANGULO DE ATRITO.....=	.000
DELTAS DE FLUXO (M,N)=	1.000	EQUACAO DE FLUXO.....=	1.000

* MAXIMA LARGURA DE BANDA ENCONTRADA= 20 *

* TIPOS DE CARREGAMENTOS ATUANTES NA ESTRUTURA *

```
*****
. CARGAS CONCENTRADAS nos NOS .....: NAO .
. CARGAS GRAVIMETRICAS .....: NAO .
. CARGAS nos LADOS DO ELEMENTO .....: SIM .
.....
```

```
*****
* NUMERO DE LADOS CARREGADOS.....= 2 *
```

```
*****
. LADO NOS CORRESPONDENTES AO LADO .
```

```
.....
7 33 34 35
-70.000 .000 -70.000 .000 -70.000 .000
```

```
.....
8 35 36 37
-70.000 .000 -70.000 .000 -70.000 .000
.....
```

```
*****
***** FORCA NODAL TOTAL PARA CADA ELEMENTO *****
```

```
*****
1
.000 .000 .000 .000 .000 .000 .000
.000
.000 .000 .000 .000 .000 .000 .000
.000
2
.000 .000 .000 .000 .000 .000 .000
.000
.000 .000 .000 .000 .000 .000 .000
.000
3
```

.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000						
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000						
4						
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000						
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000						
5						
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000						
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000						
6						
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000						
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000						
7						
.000	.000	.000	.000	5.833	.000	23.333
.000						
5.833	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000						
8						
.000	.000	.000	.000	5.833	.000	23.333
.000						
5.833	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000						

 ALGORITMO [0:EXPL, 0.5:S-IMPL, 1:IMPL] ..(TIMEX)= .00000

PASSO DE TEMPO INICIAL ESCOLHIDO (DTINT) = .05000
 INCREMENTO DO PASSO DE TEMPO ATUAL V_EL = .10000
 INCREMENTO DO PASSO DE TEMPO ATUAL V_PL = .10000
 INCREMENTO DO PASSO DE TEMPO SEGUINTE (k) = 1.50000

NUMERO DO INCREMENTO.....: 1

FATOR DE CARGA (FACTO) = 1.00000

TOLERANCIA DE CONVERGENCIA..... (TOLER) = .00001

No. MAX. DE ITERACOES (MITER) = 300

PARAMETRO DE SAIDA INICIAL (NOUTP1) = 1

PARAMETRO DE SAIDA FINAL (NOUTP2) = 1

TEMPO TOTAL = .000000E+00 ITER. PARCIAL = 1 ITER. TOTAL = 1

CONVERGENCIA VISCO-EL = 999 RESIDUO = .100000E+03

CONVERGENCIA VISCO-PL = 0 RESIDUO = .000000E+00

***** DESLOCAMENTOS DOS NOS DA ESTRUTURA EM X e Y *****

NO	DESLOC-X	DESLOC-Y	NO	DESLOC-X	DESLOC-Y
1	.00000E+00	.00000E+00	2	.00000E+00	.00000E+00
3	.00000E+00	.00000E+00	4	.00000E+00	.00000E+00
5	.00000E+00	.00000E+00	6	.82148E-02	.88114E-03
7	.81278E-02	-.15983E-06	8	.82151E-02	-.88148E-03
9	.16517E-01	.70787E-03	10	.16552E-01	.35391E-03
11	.16593E-01	-.72526E-06	12	.16552E-01	-.35536E-03
13	.16518E-01	-.70933E-03	14	.24875E-01	.80425E-03
15	.24859E-01	-.18059E-05	16	.24876E-01	-.80789E-03
17	.33196E-01	.78912E-03	18	.33205E-01	.39253E-03

19	.33213E-01	-.35338E-05	20	.33206E-01	-.39960E-03
21	.33197E-01	-.79621E-03	22	.41537E-01	.79403E-03
23	.41535E-01	-.59096E-05	24	.41539E-01	-.80588E-03
25	.49868E-01	.79094E-03	26	.49870E-01	.39106E-03
27	.49872E-01	-.88765E-05	28	.49871E-01	-.40882E-03
29	.49871E-01	-.80871E-03	30	.58202E-01	.78754E-03
31	.58204E-01	-.12399E-04	32	.58205E-01	-.81235E-03
33	.66535E-01	.78369E-03	34	.66536E-01	.38364E-03
35	.66537E-01	-.16368E-04	36	.66538E-01	-.41638E-03
37	.66538E-01	-.81644E-03			

TEMPO TOTAL = .500000E-01 ITER. PARCIAL = 2 ITER. TOTAL = 2

CONVERGENCIA VISCO-EL = 999 RESIDUO = .148156E+03

CONVERGENCIA VISCO-PL = 0 RESIDUO = .000000E+00

.
.

.

TEMPO TOTAL = .594697E+02 ITER. PARCIAL = 20 ITER. TOTAL = 20

CONVERGENCIA VISCO-EL = 0 RESIDUO = .000000E+00

CONVERGENCIA VISCO-PL = 0 RESIDUO = .000000E+00

***** DESLOCAMENTOS DOS NOS DA ESTRUTURA EM X e Y *****

NO	DESLOC-X	DESLOC-Y	NO	DESLOC-X	DESLOC-Y
1	.00000E+00	.00000E+00	2	.00000E+00	.00000E+00
3	.00000E+00	.00000E+00	4	.00000E+00	.00000E+00
5	.00000E+00	.00000E+00	6	.11185E-01	.11546E-02
7	.11096E-01	-.72609E-09	8	.11185E-01	-.11546E-02
9	.22436E-01	.71635E-03	10	.22502E-01	.35185E-03
11	.22565E-01	-.66597E-08	12	.22502E-01	-.35187E-03
13	.22436E-01	-.71637E-03	14	.33743E-01	.84499E-03

15	.33722E-01	-.12823E-07	16	.33743E-01	-.84502E-03
17	.44974E-01	.79751E-03	18	.44990E-01	.39754E-03
19	.45005E-01	-.34347E-07	20	.44990E-01	-.39761E-03
21	.44974E-01	-.79758E-03	22	.56231E-01	.79966E-03
23	.56227E-01	-.61171E-07	24	.56231E-01	-.79978E-03
25	.67467E-01	.80248E-03	26	.67469E-01	.40135E-03
27	.67471E-01	-.94469E-07	28	.67469E-01	-.40154E-03
29	.67467E-01	-.80267E-03	30	.78710E-01	.79948E-03
31	.78710E-01	-.14671E-06	32	.78710E-01	-.79977E-03
33	.89950E-01	.80241E-03	34	.89950E-01	.40069E-03
35	.89950E-01	-.21270E-06	36	.89950E-01	-.40112E-03
37	.89950E-01	-.80284E-03			

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFIAS

- 1) OWEN, D.R.J.; HINTON, E. **Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice**. Pineridge Press Limited. Swansea, U.K., 1980. Cap.1, p.3-11; Cap.2, p.13-31; Cap.3, p.33-94; Cap.4, p.95-119; Cap.6, p.157-214; Cap.7, p.215-268; Cap.8, p.271-317.
- 2) SOBOTKA, Z. **Rheology of Materials and Engineering Structures**. Elsevier Science Publishers, Prague, Czechoslovakia, 1984.
- 3) ZIENKIEWICS, O.C.; TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems**. 4.ed. MacGraw-Hill, 1991, v.1.
- 4) ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method: Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity**. 4.ed. MacGraw-Hill, 1991. v.2, Cap.7, p.211-271.
- 5) RUBERT, J.B. **Estudo do Desempenho de Algoritmos Numéricos na Solução de Sistemas Não-Lineares de Estruturas Formadas por Barras de Treliças**. São Carlos, São Paulo, Brasil, 1993. ____ p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- 6) SAKURAI, S. *Approximate Time-Dependent Analysis of Tunnel Support Structure Considering Progress of Tunnel Face.* Int.J.Num. and Anal.Meth. in Geom, v.2, 1978.
- 7) SIMO, J.C.; TAYLOR, R.L. *Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity.* Comp.Meth. in Appl.Mech. and Eng, v.48, 1985.
- 8) CELESTINO, T.B. *Projeto de Revestimento de Túneis em Concreto Projetado.* 1o. Encontro Técnico do Comitê Brasileiro de Túneis, 1982.
- 9) SRIVASTAVA, R.K.; SHARMA, K.G.; VARADARAJAN, A. *Finite Element Analysis of Tunnels using Different Yield Criteria.* Int.Sym. on Num.Mod. in Geom, p.381-389, 1986.
- 10) SWOBODA, G.; MERTZ, W.; BEER, G. *Rheological Analysis of Tunnel Excavations by Means of Coupled Finite Element (FEM) - Boundary Element (BEM) Analysis.* Int.J.Num. and Anal.Meth. in Geom, v.11, p.115-129, 1987.
- 11) LEE, S.H. *Generalized Viscoelastic Model for Creep Analysis Coupled with Plastic Deformation.* Int.J.Num.Meth. in Eng, v.26, p.153-165, 1988.

- 12) ZIENKIEWICZ, O.C.; CORMEAU, I.C. **Visco-Plasticity - Plasticity and Creep in Elastic Solids - A Unified Numerical Solution Approach.** Int.J.Num.Meth. in Eng, v.8, p.821-845, 1974.

- 13) SINGH, R.B.; SHARMA, K.G.; VARADARAJAN, A. **Elasto-Plastic Analysis of Tunnel Excavation in Layered Rock Medium by Coupled FEBEM.** Num.Meth in Geom, p.941-950, 1988.

- 14) TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. **Elastic/Viscoplastic Problems Using Boundary Elements.** Int.J.Mech.Sci, v.24, p.605-618, 1982.

- 15) CHEN, W.H.; CHANG, C.M.; YEH, J.T. **An Incremental Relaxation Finite Element Analysis of Viscoelastic Problems with Contact and Friction.** Comp.Meth. in Appl.Mech. and Eng, v.109, p.315-319, 1993.

- 16) BREBBIA, C.A. **The Boundary Element Method in Engineering Practice.** Institute of Computational mechanics, Ashurst Lodge, Ashurst, Southampton, p.1-10, 1984.

- 17) PROENÇA, S.P.B. **Noções Básicas de Reologia.** Publicações, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1986.

- 18) PROENÇA, S.P.B. *Notas Sobre Análise Não-Linear Física de Estruturas*. Setor de Publicações, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1989.
- 19) SOUZA, J.C.A. de O. e; ANTUNES, H.M.C.C. *Processos Gerais da Hiperestática Clássica*. Setor de Publicações, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1988.
- 20) VALLIAPPAN, S. *Continuum Mechanics Fundamentals*. D.A. Balkema / Rotterdam, 1981.
- 21) ZIENKIEWICZ, O.C. *Incremental Displacement in Non-linear Analysis*. Int.J.Num.Meth.Eng., v.3, p.587-592, 1971.
- 22) CRISFIELD, M.A. *Incremental/Iterative Solution Procedures for Nonlinear structural analysis*. in Numerical Methods for Nonlinear Problems, Pineridge Press, Swansea, 1980.
- 23) ZIENKIEWICZ, O.C.; MRÓZ, Z. *Generalized Plasticity Formulation and Applications to Geomechanics*. in Mechanics of Engineering Materials, Cap.33, p.655-680, Wiley, Chichester, 1984.
- 24) TAYLOR, R.L.; SIMO, J.C. *A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elasto-plasticity*. Int.J.Num.Mech.Eng., v.22, p.649-670, 1986.

- 25) ORTIZ, M.; SIMO, J.C. **An Analysis of a New Class of
Integration Algorithm for Elasto-plastic Constitutive
Relations.** Int.J.Num.Meth.Eng., v.23, p.353-366, 1986.
- 26) PHILLIPS, D.V.; ZIENKIEWICZ, O.C. **Finite Element Non-
linear Analysis of Concrete Structures.**
Proc.Inst.Civ.Eng., pt.2, v.61, p.59-88, 1976.

APÊNDICE A - SUBROTINAS DOS CÓDIGO DE CÁLCULO**VEPLAS.FOR**

As subrotinas que constituem o programa estão apresentadas a seguir, dando uma idéia geral do conteúdo do código de cálculo e de sua sequência de operações:

- **SUBROTINA DIMEN** : Dimensionamento das variáveis do programa associadas ao processo de dimensionamento dinâmico;
- **SUBROTINA INPUT** : Leitura da entrada dos dados através de arquivo;
- **SUBROTINA LOADPS** : Executa o cálculo das forças nodais equivalentes;
- **SUBROTINA ZERO** : Possui a função de zerar as variáveis de interesse;
- **SUBROTINA INCREM** : Define os incrementos de carga, em função de um fator de carga especificado;
- **SUBROTINA STIFVP** : Executa a construção da matriz de rigidez tangente K_T^p ;

- **SUBROTINA TANGVP** : Elabora a matriz D^n (chamada em STIFVP);
- **SUBROTINA FRONT** : Solução do Sistema de Equações utilizando o Método Frontal $\rightarrow \Delta d^n = [K_T^n]^{-1} \cdot \Delta V^n / d^{n+1} = d^n + \Delta d^n$;
- **SUBROTINA STEPVP** : Cálculo dos parâmetros finais relativos ao passo de tempo atual e dos parâmetros necessários para o próximo passo de tempo $\rightarrow \Delta \sigma^n, \sigma^{n+1}, \varepsilon_{vp}^{n+1}, \Delta t_{n+1}, Y^{n+1}, \Delta V^{n+1}$;
- **SUBROTINA INVAR** : Chamada pela subrotina STEPVP, para cálculo do nível efetivo de tensão;
- **SUBROTINAS YIELDF e FLOWVP** : Chamadas pela STEPVP para cálculo do vetor a e ε_{vp}^{n+1} , respectivamente;
- **SUBROTINA OUTPUT** : Responsável pela construção do arquivo de saída dos resultados do programa.

A sequência apresentada das rotinas de cálculo, mostrou-se satisfatória na execução final do programa. Apresenta-se a seguir, o **FLUXOGRAMA** do código de cálculo **VEPLAS.FOR**, com as subrotinas que compõe o programa e suas respectivas funções dentro do mesmo:

INÍCIO

DIMEN - Dimensionamento das variáveis acumulativas

INPUT - Leitura dos dados de entrada do programa

LOADPS - Cálculo das forças nodais equivalentes

ZERO - Inicializa com zero variáveis acumulativas

INCREM - Aplica os incrementos de carga

STIFVP - Cálculo da Matriz de Rigidez Tangente $K_T^n(\sigma^n)$

TANGVP-Matriz elástica D^n

FRONT - Solução do Sistema de Equações pelo Método Frontal
 $\Delta d^n = [K_T^n] \Delta V^n$; $d^{n+1} = d^n + \Delta d^n$

**INCREM.
DE
TEMPO**

STEPVP - Cálculo dos seguintes parâmetros ao final de um passo de tempo Δt^n :

$$\Delta \varepsilon^n \text{ e } \Delta \sigma^n \quad ; \quad \sigma^{n+1} = \sigma^n + \Delta \sigma^n$$

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + \Delta \varepsilon^n \quad ; \quad \Delta t_{n+1}$$

$$\Psi^{n+1} \quad ; \quad \Delta V^{n+1}$$

INVAR- Cálculo do nível de tensão F .

**INCREM.
DE
FORÇA**

YIELDF/FLOWVP

$$a = \partial F / \partial \sigma$$

$$d(\varepsilon_{vp}^{n+1}) / dt$$

OUTPUT - Saída dos resultados no passo de tempo corrente

FINAL

APÊNDICE B - SUBROTINAS DOS CÓDIGOS DE CÁLCULO

UNIVEP.FOR E BIVEP.FOR

Os códigos de cálculo *UNIVEP.FOR* e *BIVEP.FOR*, foram montados reunindo subrotinas já existentes, propostas em OWEN [1] referentes, essencialmente, à montagem das matrizes de rigidez do elemento, da estrutura e do vetor de cargas equivalentes, além de subrotinas novas relacionadas ao modelo constitutivo.

As subrotinas que constituem o código de cálculo, bem como suas respectivas funções, estão apresentadas, a seguir, numa ordem associada à sequência de operações realizadas dentro do mesmo:

- **SUBROTINA DATA:** É através dessa subrotina que se faz a leitura dos dados de entrada do programa, como por exemplo, dados de controle, parâmetros do material ou materiais, coordenadas dos nós, incidência das barras, carregamentos externos, etc. Para tanto, usa-se um arquivo previamente criado pelo usuário.

- **SUBROTINA INITAL:** Essa subrotina tem a função de zerar as variáveis utilizadas no programa, como tensões, deformações, deslocamentos, reações, etc.

- **SUBROTINA STUNVP:** Constrói a Matriz de Rigidez de cada elemento genérico da estrutura global e armazena esses dados em um arquivo específico.
- **SUBROTINA INCLD:** Faz a leitura, também através de arquivo, dos dados de controle referentes aos incrementos de carga, convergência dos resultados e tipo de saída dos resultados.
- **SUBROTINA NONAL:** Através dessa subrotina se faz a identificação do tipo do algoritmo escolhido como solução do problema a ser analisado.
- **SUBROTINA ASSEMB:** Utiliza os dados das matrizes de rigidez de cada elemento para a montagem da matriz de rigidez global da estrutura. Constrói também o vetor global de forças nodais equivalentes.
- **SUBROTINAS GREduc, RESOLV E BAKSUB:** Resolvem o sistema de equações $\{F\}=[K]\{\delta\}$, fornecendo os valores de deslocamentos parcial e total dos nós da treliça, após cada iteração.
- **SUBROTINA INCVP:** Nessa subrotina, faz-se o cálculo dos valores de tensão e deformação total nos elementos, das deformações viscoelástica e viscoplástica. Define também o passo de tempo seguinte e o vetor de resíduos.

- **SUBROTINA CONV**: Verifica a convergência da solução com base na evolução das deformações viscoelástica e viscoplástica.

- **SUBROTINA RESULT**: É através dela que se obtém a saída dos resultados do código de cálculo, como deslocamentos dos nós, tensões e deformações nos elementos, armazenando tudo em um único arquivo.

Deve-se ressaltar também que os dados de controle referentes ao passo de tempo como fator de estabilidade do passo de tempo (τ), comprimento inicial do passo de tempo (**dtint**) e o parâmetro de incremento do passo de tempo (**k**), são lidos no programa principal, entre as subrotinas **STUNVP** e **INCLD**.

**APÊNDICE C - PROCEDIMENTO ALTERNATIVO PARA A
OBTENÇÃO DA RELAÇÃO CONSTITUTIVA
DO NOVO MODELO PROPOSTO**

Será apresentado a seguir, um procedimento alternativo para a obtenção da expressão (4.7) do **capítulo 4**. O caminharmento da dedução se conduz do seguinte modo:

$$\sigma_{vp} = \sigma_p + \sigma_{d_2} = \sigma = \sigma_y + H\varepsilon_{vp} + \mu_2 \dot{\varepsilon}_{vp} \quad (4.8)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} \Rightarrow \varepsilon_{vp} = \varepsilon - \varepsilon_e - \varepsilon_{ve} \quad (4.9)$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_{ve} + \dot{\varepsilon}_{vp} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{vp} = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e - \dot{\varepsilon}_{ve} \quad (4.10)$$

Substituindo-se as expressões (4.3-b) e (4.4-b), ambas do **capítulo 4**, e (4.9) e (4.10) na expressão (4.8) tem-se que:

$$\sigma = \sigma_y + H(\varepsilon - \varepsilon_e - \varepsilon_{ve}) + \mu_2 \dot{\varepsilon}_{vp} = \sigma_y + H\varepsilon - H\varepsilon_e - H\varepsilon_{ve} + \mu_2 \dot{\varepsilon}_{vp}$$

$$\sigma = \sigma_y + H\varepsilon - H\frac{\sigma}{E_1} - H\varepsilon_{ve} + \mu_2(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e - \dot{\varepsilon}_{ve})$$

$$\sigma - \sigma_y + H\frac{\sigma}{E_1} = H\varepsilon - H\varepsilon_{ve} + \mu_2\dot{\varepsilon} - \mu_2\frac{\dot{\sigma}}{E_1} - \mu_2\left(\frac{\sigma}{\mu_1} - \frac{E_2\varepsilon_{ve}}{\mu_1}\right)$$

$$\sigma - \sigma_y + H\frac{\sigma}{E_1} + \mu_2\frac{\dot{\sigma}}{E_1} = H\varepsilon - H\varepsilon_{ve} + \mu_2\dot{\varepsilon} - \mu_2\frac{\sigma}{\mu_1} + \mu_2E_2\frac{\varepsilon_{ve}}{\mu_1}$$

$$H\varepsilon - H\varepsilon_{ve} + \mu_2\dot{\varepsilon} + \mu_2E_2\frac{\varepsilon_{ve}}{\mu_1} = \sigma - \sigma_y + H\frac{\sigma}{E_1} + \mu_2\frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \mu_2\frac{\sigma}{\mu_1} \quad (4.11)$$

Multiplicando-se a expressão (4.11) por $E_1\mu_1$,
chega-se a uma expressão geral na forma:

$$I = II \quad (4.12)$$

onde:

$$I = \mu_1\mu_2E_1\dot{\varepsilon} + \mu_1E_1H\varepsilon + (E_1E_2\mu_2 - E_1\mu_1H)\varepsilon_{ve} \quad (4.13)$$

$$II = (\sigma - \sigma_y)E_1\mu_1 + (\mu_1H + E_1\mu_2)\sigma + \mu_1\mu_2\dot{\sigma} \quad (4.14)$$

A equação (4.12) é a expressão geral do modelo
modificado. No entanto, cabem ainda algumas simplificações,

no que diz respeito ao termo I , onde é possível numa primeira passagem, o cancelamento do termo $\mu_1 E_1 H \epsilon_{ve}$ e, numa segunda passagem, o cancelamento da constante E_1 do último termo:

$$I = \mu_1 \mu_2 E_1 \dot{\epsilon} + \mu_1 E_1 H \epsilon_e + \mu_1 E_1 H \epsilon_{ve} + \mu_1 E_1 H \epsilon_{vp} + E_1 E_2 \mu_2 \epsilon_{ve} - \mu_1 E_1 H \epsilon_{ve}$$

$$I = \mu_1 \mu_2 E_1 \dot{\epsilon} + E_1 E_2 \mu_2 \epsilon_{ve} + \mu_1 E_1 H \epsilon_{vp} + \mu_1 E_1 H \frac{\sigma}{E_1}$$

$$I = \mu_1 \mu_2 E_1 \dot{\epsilon} + E_1 E_2 \mu_2 \epsilon_{ve} + \mu_1 E_1 H \epsilon_{vp} + \mu_1 H \sigma$$

Agora, considerando-se novamente $I=II$, levando o último termo da expressão I para o lado direito da igualdade e dividindo-se em seguida ambos os membros da igualdade por $\mu_1 \mu_2 E_1$, resulta:

$$\dot{\epsilon} + \frac{E_2}{\mu_1} \epsilon_{ve} + \frac{H}{\mu_2} \epsilon_{vp} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \sigma \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \right) - \frac{\sigma_y}{\mu_2} \quad (4.15)$$

Denominando-se, convenientemente, por K o lado direito da expressão (4.15), segue o desenvolvimento:

$$\dot{\epsilon} + \frac{E_2}{\mu_1} (\epsilon - \epsilon_e - \epsilon_{vp}) + \frac{H}{\mu_1} \epsilon_{vp} = K = \dot{\epsilon} + \frac{E_2}{\mu_1} \epsilon - \frac{E_2}{\mu_1} \epsilon_e - \frac{E_2}{\mu_1} \epsilon_{vp} + \frac{H}{\mu_2} \epsilon_{vp}$$

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E_2}{\mu_1} \varepsilon + \left(\frac{H}{\mu_2} - \frac{E_2}{\mu_1} \right) \varepsilon_{vp} = K + \frac{E_2 \sigma}{\mu_1 E_1} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \sigma \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} + \frac{E_2}{\mu_1 E_1} \right) - \frac{\sigma_y}{\mu_2}$$

fazendo as seguintes considerações:

$$\frac{H}{\mu_2} - \frac{E_2}{\mu_1} = C \quad ; \quad \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} + \frac{E_2}{\mu_1 E_1} = D$$

obtem-se a expressão final:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E_2}{\mu_1} \varepsilon + C \varepsilon_{vp} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \sigma D - \frac{\sigma_y}{\mu_2} \quad (4.16)$$

Substituindo-se $\gamma_1 = 1/\mu_1$ e $\gamma_2 = 1/\mu_2$ nas constantes **C** e **D** e levando-as na expressão (4.16), tem-se que:

$$C = \gamma_2 H - \gamma_1 E_2 \quad ; \quad D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1 \frac{E_2}{E_1}$$

$$\dot{\varepsilon} + \gamma_1 E_2 \varepsilon + (\gamma_2 H - \gamma_1 E_2) \varepsilon_{vp} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \sigma \left(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1 \frac{E_2}{E_1} \right) - \gamma_2 \sigma_y$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \gamma_1 \sigma + \gamma_2 \sigma + \gamma_1 \sigma \frac{E_2}{E_1} - \gamma_2 \sigma_y - \gamma_1 E_2 \varepsilon - \gamma_2 H \varepsilon_{vp} + \gamma_1 E_2 \varepsilon_{vp}$$

Agrupando-se agora todos os termos comuns às

constantes γ_1 e γ_2 :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \gamma_1 \left[\sigma + \sigma \frac{E_2}{E_1} - E_2 (\varepsilon - \varepsilon_{vp}) \right] + \gamma_2 \left[\sigma - (\sigma_y + H\varepsilon_{vp}) \right]$$

Finalmente, considerando a composição da deformação total:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon - \varepsilon_{vp} = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve}$$

É possível chegar à equação final, como indicado a seguir:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \gamma_1 \left(\sigma + \sigma \frac{E_2}{E_1} - E_2 \varepsilon_e - E_2 \varepsilon_{ve} \right) + \gamma_2 \left[\sigma - (\sigma_y + H\varepsilon_{vp}) \right]$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \gamma_1 \left(\sigma + \sigma \frac{E_2}{E_1} - \sigma \frac{E_2}{E_1} - E_2 \varepsilon_{ve} \right) + \gamma_2 \left[\sigma - (\sigma_y + H\varepsilon_{vp}) \right]$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \gamma_1 (\sigma - E_2 \varepsilon_{ve}) + \gamma_2 \left[\sigma - (\sigma_y + H\varepsilon_{vp}) \right] \quad (4.17)$$

As expressões (4.17) e a (4.7) do capítulo 4, correspondentes à taxa de deformação no tempo, obtidas por procedimentos diferentes, são idênticas.

APÊNDICE D - EXTENSÃO DO CÓDIGO DE CÁLCULO
UNIVEP.FOR PARA O CASO DAS
TRELIÇAS PLANAS

O programa *UNIVEP.FOR* que incorpora o modelo Elasto-viscoplástico modificado, considera apenas elementos de barra com **um (1)** grau de liberdade por nó. Porém, visando aplicações um pouco mais completas em estruturas de barras, criou-se o código de cálculo, *BIVEP.FOR*, para análise de treliças planas.

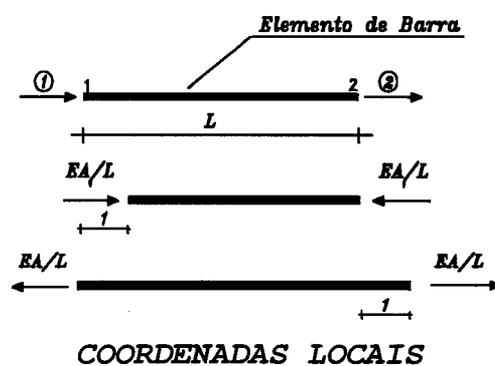
Para isso, foram feitas algumas modificações no código inicial, como por exemplo:

- a) *Leitura via arquivo de dados das coordenadas x e y dos nós da treliça: coordx e coordy;*
- b) *Leitura via arquivo de dados das vinculações em x e y:*
0 = livre (em x e y)
1 = restrito (em x e/ou y)
- c) *Leitura via arquivo de dados dos carregamentos nos nós da treliça em ambas as direções: Fx e Fy;*
- d) *Cálculo dos cossenos diretores;*
- e) *Introdução da Matriz de Rotação [$\beta_{.}$];*

Apresenta-se a seguir, a sequência de operações necessárias na obtenção da matriz de rigidez do elemento no sistema global, usando a matriz de rotação, cuja função principal é relacionar os deslocamentos globais da estrutura com os locais, e vice-versa. A matriz de rigidez no sistema local é dada por:

$$[I_e]_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ



À partir da análise das deslocabilidades segundo o sistema global, ilustradas na figura a seguir, obtém-se a matriz β_e dada por:

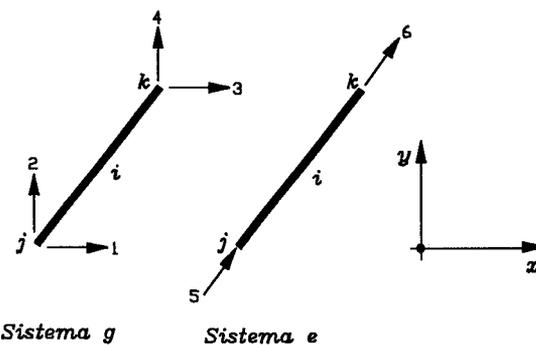
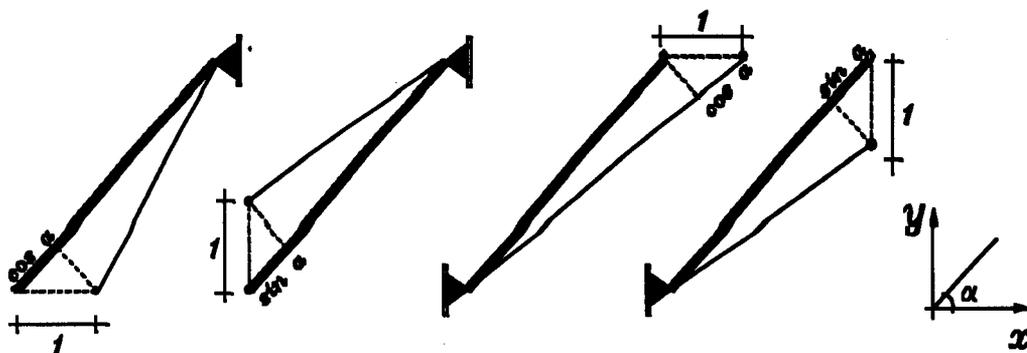


FIGURA 38 - SISTEMAS GLOBAL (g) E LOCAL (e)



Deslocamentos dos nos - Sistema g

FIGURA 39 - OBTENÇÃO DA MATRIZ DE ROTAÇÃO β_e

$$[\beta_e] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}_{2 \times 4} \quad (1)$$

A partir daí, a matriz de rigidez do elemento, segundo o sistema global, utilizando a expressão (1), passa a ser:

$$[r_g]_i = [\beta_e]_i^t [r_e]_i [\beta_e]_i = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

A matriz de rigidez da estrutura é obtida, de uma forma bastante convencional, já conhecida, usando-se a expressão:

$$[R] = \sum_{i=1}^{nel} [\beta]_i^t [r_g]_i [\beta]_i \quad (2)$$

onde:

e= Sistema e das barras;

g= Sistema g das barras;

$[r_e]_i$ = Matriz de rigidez do elemento i no sistema e;

$[r_g]_i$ = Matriz de rigidez do elemento i no sistema g;

$[\beta_e]$ = Matriz de rotação do elemento i;

$\cos \alpha, \sin \alpha$..= Cossenos diretores;

Deve-se observar ainda que, para levar-se os deslocamentos dos nós do sistema **g** para o sistema **e** basta multiplicar a matriz dos deslocamentos globais da estrutura pela matriz de rotação, como demonstrado a seguir:

$$\{\delta_e\}_i = [\beta_e]_i \{\delta_g\}_i \quad (3)$$

ou ainda, desenvolvendo a expressão (3), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix}_i \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta_5 &= \delta_1 \cos\alpha + \delta_2 \sin\alpha \\ \Rightarrow \delta_6 &= \delta_3 \cos\alpha + \delta_4 \sin\alpha \end{aligned} \quad (5-a,b)$$

Obtidos os deslocamentos dos nós no sistema **e**, calculam-se as tensões e as deformações nas barras, necessárias para o processo de convergência a ser utilizado pelo código de cálculo **BIVEP.FOR**.

