

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ALGUNS ASPECTOS DA FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E DIMENSIONAMENTO
DE ELEMENTOS COMPRIMIDOS DE AÇO.

Eng.^o GERALDO DONIZETTI DE PAULA

Dissertação apresentada à Escola
de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo como
parte dos requisitos para obten
ção do título de "Mestre em
Engenharia de Estruturas".

COMISSÃO JULGADORA:

Prof.Dr. Roberto Martins Gonçalves (Orientador) EESC-SET
Prof.Dr. Renato Bertolino Junior - UNESP - Ilha Solteira
Prof.Dr. Maximiliano Malite - EESC-SET

SUPLENTE:

Prof.Dr. Sergio Persival B. Proença - EESC-SET
Prof.Dr. Sebastião A.L. de Andrade - PUC-RJ

São Carlos, abril de 1994

Ao meu pai Francisco Realino de Paula e à
minha mãe Guilhermina Ferreira de Jesus,
dedico este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Roberto Martins Gonçalves, pela disposição e disponibilidade na orientação deste trabalho.

Ao Prof. José Jairo de Sales, pelo incentivo e colaboração.

À Antonio Valdir Carneiro, pelos trabalhos de digitação e datilografia.

À Maria Nadir Minatel, pelos trabalhos de revisão bibliográfica.

À Francisco Carlos Guete de Brito, pelos trabalhos de desenho.

Aos colegas Manoel da Silva Álvares e Ilka Maria da Silva, pela amizade e apoio nos momentos difíceis.

Aos meus pais e irmãos, pelo apoio, carinho e pela luta por dias melhores.

À Escola de Minas/UFOP, por minha formação acadêmica.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Apresenta-se a fundamentação teórica dos principais aspectos relativos ao dimensionamento de elementos de aço comprimidos, baseados nas prescrições recomendadas pela Norma Brasileira NBR 8800/86 - Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios.

A fundamentação teórica destina-se a justificar os procedimentos referentes ao cálculo da carga crítica de flambagem, considerando a flambagem por flexão, torção, flexão e torção, bem como a flambagem de elementos de chapa no regime elástico.

Discute-se as teorias do módulo tangente e do módulo reduzido para determinar a carga crítica de flambagem no regime inelástico, comportamento este presente nos perfis de aço devido as tensões residuais e imperfeições iniciais.

Abordam-se, também, aspectos relativos ao cálculo da força normal resistente como: curvas de flambagem, influência da força cortante, comprimentos efetivos de flambagem. Compara-se alguns dos parâmetros referentes a flambagem por flexão segundo as normas brasileira, canadense, americana e européia.

ABSTRACT

The theoretical basis of the principal aspects to steel compression members design is presented, following the principal recommendations of the Brazilian Code NBR 8800/86-Design and construction of steel structures for Buildings.

Theoretical background were used to determinate the critical buckling load taking into account flexural buckling, torsional buckling and flexural-torsional buckling, as well as the local buckling in the elastic range.

The tangent modulus theory and the reduced modulus theory are examined to determinate the critical inelastic buckling load, present in the steel shapes due to residual stresses and the effects of initial crookedness.

Topics related to the evaluation of the resistant axial force as buckling curves, shear force effects, effective buckling lengths are also presented. Parameters of flexural buckling according the brazilian, canadian, american and european codes were also analysed.

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

- A_b = Área do banzo;
- A_{ef} = Área efetiva;
- A_g = Área da seção transversal;
- A_w = Área da diagonal;
- C_w = Momento de inércia setorial ou constante de empenamento;
- $D(X_o, Y_o)$ = Centro de torção ou de cisalhamento da seção transversal da barra;
- E = Módulo de elasticidade;
- E_T = Módulo tangente;
- E_r = Módulo reduzido;
- G = Módulo de elasticidade transversal ($G=0,385E$);
- G = Rigidez relativa genérica de um elemento; carga permanente;
- G_A = Rigidez relativa na extremidade "A";
- G_B = Rigidez relativa na extremidade "B";
- H = Parâmetro utilizado na flambagem por flexão e torção;

I	= Momento de inércia;
I_e	= Momento de inércia da parte elástica da seção transversal;
I_t	= Momento de inércia à torção;
I_x, I_y	= Momentos principais de inércia da seção;
M	= Momento fletor;
M_{int}	= Momento interno resistente;
N	= Força normal em geral;
N_{cr}	= Carga crítica de flambagem;
N_d	= Força normal de cálculo;
N_e	= Carga crítica de flambagem elástica;
N_{ex}, N_{ey}	= Carga crítica de flambagem elástica, segundo os eixos "x" e "y", respectivamente;
N_n	= Força normal nominal;
N_r	= Carga crítica do módulo reduzido;
N_T	= Carga crítica do módulo tangente;
N_y	= Força normal de escoamento da seção = $A_g f_y$;
Q	= Carga variável; coeficiente de redução que leva em conta a flambagem local;
Q_a	= Relação entre a área efetiva e a área bruta da seção da barra;
Q_s	= Fator de redução usado no cálculo de elementos esbeltos comprimidos não enrijecidos;
R	= Resistência em geral;
R_n	= Resistência nominal;
R_d	= Resistência de cálculo
S_d	= Solicitação de cálculo;
V	= Força cortante;
W	= Módulo de resistência elástico;

LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

b	= Largura em geral;
b_{ef}	= Largura efetiva;
f	= Tensão em geral;
f_e	= Tensão crítica de flambagem elástica;
f_{ex}, f_{ey}, f_{ez}	= Tensões críticas de flambagem elástica segundo os eixos x, y e z ;
f_p	= Tensão de proporcionalidade;
f_r	= Tensão residual, a ser considerada igual a 115 Mpa;
f_Y	= Limite de escoamento do aço, valor nominal especificado;
f_{cr}	= Tensão crítica de flambagem;
k	= Fator comprimento efetivo de flambagem;
k_x, k_y	= Fator comprimento efetivo de flambagem relativos aos eixos " x " e " y ", respectivamente;
k_z	= Fator comprimento efetivo de flambagem referente à flambagem por torção;
l	= Comprimento do vão;
l_{fl}	= Comprimento de flambagem;
m	= Fator de ampliação;
r	= Raio de giração;
r_o	= Raio de giração polar em relação ao centro de torção;
r_x, r_y	= Raios de giração em relação aos eixos " x " e " y ", respectivamente;
t	= Espessura em geral;
v	= Deslocamento lateral na direção do eixo " y ";
v_T	= Deslocamento lateral total;
v_o	= Deslocamento inicial;
x, y	= Eixos principais de inércia;
x_o, y_o	= Coordenadas do centro de torção;

z = Eixo longitudinal;
 w = Deslocamento na direção do eixo "x";

LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

Δ : Deslocamento horizontal no topo de um pilar;
 Σ : Somatório

LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

α : Coeficiente;
 β : Fator que corrige o efeito da distorção angular devido à força cortante na resistência de flambagem da barra;
 γ : Coeficiente de ponderação das ações;
 γ : Distorção angular;
 ϵ : Deformação;
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$: Deformações unitárias nas direções "x", "y" e "z", respectivamente;
 η : Parâmetro das imperfeições iniciais;
 θ : Ângulo entre a diagonal da coluna treliçada com o banzo;
 θ_A e θ_B : Rotações nas extremidades "A" e "B", respectivamente;
 λ : Índice de esbeltez;
 $\bar{\lambda}$: Índice de esbeltez reduzido;
 λ_c : Índice de esbeltez genérico de uma placa;
 λ_p : Índice de esbeltez correspondente à plastificação;
 λ_r : Índice de esbeltez correspondente ao início do escoamento, com ou sem tensão residual;
 ν : Coeficiente de Poisson;
 ρ : Coeficiente correspondente à força normal reduzida;

ρ^*	: Coeficiente correspondente à força normal reduzida, englobando o coeficiente de redução da resistência;
σ	: Tensão normal;
τ_m	: Tensão de cisalhamento média;
τ	: Tensão de cisalhamento;
τ_{xy}	: Componente de cisalhamento na direção "y" atuando na face perpendicular ao eixo "x";
τ_{xz}	: Componente de cisalhamento na direção "z" atuando na face perpendicular ao eixo "x";
τ_{yz}	: Componente de cisalhamento na direção "z" atuando na face perpendicular ao eixo "y";
ϕ	: Rotação em torno do centro de torção;
ϕ_c	: Coeficiente de resistência na compressão;
φ	: Relação entre o módulo tangente e o módulo de elasticidade;
ψ	: Fatores de combinação.

SIGLAS

- AÇOMINAS - Aços Minas Gerais - MG;
- AISC - American Institute of Steel Construction;
- CAN3-S16.1-M84 - Norma canadense (canadian standards Association);
- CG - Centro de gravidade da seção transversal;
- COSIPA - Companhia Siderúrgica Paulista - SP;
- CSBM - Companhia Siderúrgica Belgo-Mineira - MG;
- CSN - Companhia Siderúrgica Nacional - RJ;
- ECCS - European Convention for Constructional Steelwork;
- EUROCODE - Norma Européia (Common Unified of Practice for Steel Structures);
- LRFD - Norma Americana (Load and Resistance Factor Design);
- NBR 8800 - Norma Brasileira (Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios);
- USIMINAS - Usinas Siderúrgicas de Minas Gerais - MG.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

DADOS HISTÓRICOS SOBRE O AÇO

1.1- O DESENVOLVIMENTO DO AÇO	01
1.2- IMPLANTAÇÃO DO PARQUE SIDERÚRGICO NACIONAL	03
1.3- A EVOLUÇÃO DOS ESTUDOS REFERENTES A RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS	04
1.4- CONSTRUÇÃO METÁLICA	04
1.5- EDIFICAÇÕES RELEVANTES EM ESTRUTURAS METÁLICAS	06

CAPÍTULO 2

BARRAS COMPRIMIDAS- FLAMBAGEM ELÁSTICA

2.1- GENERALIDADES	07
2.2- FLAMBAGEM ELÁSTICA OU DE EULER	10
2.2.1- Barra simplesmente apoiada	11
2.3- ANÁLISE DA FORÇA CORTANTE NO CÁLCULO DA CARGA CRÍTICA	15
2.4- CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM PARA OS ELEMENTOS COM VÁRIAS CONDIÇÕES DE VINCULAÇÃO	20
2.5- COMPRIMENTO EFETIVO DE FLAMBAGEM	22

2.6- ELEMENTOS COMPRIMIDOS ESPECIAIS	25
2.7- FLAMBAGEM COM TORÇÃO E FLAMBAGEM POR FLEXÃO E TORÇÃO	25
2.7.1- Preliminares	25
2.7.2- Flambagem por Torção	25
2.7.3- Flambagem por Flexão e Torção	27
2.8- CONSIDERAÇÕES FINAIS	39

CAPÍTULO 3

FLAMBAGEM INELÁSTICA

3.1- GENERALIDADES	41
3.2- TEORIA DO MÓDULO TANGENTE	43
3.3- TEORIA DO MÓDULO REDUZIDO OU DUPLO MÓDULO	50
3.4- MODELO DE SHANLEY	55
3.5- CONSIDERAÇÕES FINAIS	61

CAPÍTULO 4

TENSÕES RESIDUAIS E IMPERFEIÇÕES INICIAIS

4.1- GENERALIDADES	63
4.2- TENSÕES RESIDUAIS	63
4.2.1- Preliminares	63
4.2.2- Tensões residuais nos perfis laminados a quente...	65
4.2.3- Tensões residuais em perfis soldados	67
4.3- IMPERFEIÇÕES INICIAIS	72
4.3.1- Preliminares	72
4.3.2- Barra com excentricidade inicial na extremidade ..	73

4.3.3- Barra com imperfeição de fabricação	77
4.3.4- Curvas de flambagem, caso geral.....	89
4.4- EFEITO DAS TENSÕES RESIDUAIS E IMPERFEIÇÕES INICIAIS NA ANÁLISE DA RESISTÊNCIA DAS BARRAS	91
4.4.1- Preliminares	91
4.4.2- Efeito das imperfeições iniciais	92
4.4.3- Efeito das tensões residuais na análise da resistência das barras	95
4.5- CONSIDERAÇÕES FINAIS	104

CAPÍTULO 5

COMPRIMENTO EFETIVO DE FLAMBAGEM

5.1- GENERALIDADES	105
5.2- ELEMENTOS ISOLADOS	105
5.3- ELEMENTOS DE TRELIÇA	106
5.4- ELEMENTOS DE PÓRTICOS	109
5.4.1- Pórticos Indeslocáveis	109
5.4.2- Pórticos Deslocáveis	124
5.5- CONSIDERAÇÕES FINAIS	135

CAPÍTULO 6

BARRAS COMPOSTAS

6.1- GENERALIDADES	137
6.2- DETERMINAÇÃO DO FATOR (β)	139
6.2.1- Barras compostas, treliçadas, formadas por perfis interligados por diagonais	139

6.2.2- Barras compostas formadas por chapas regularmente espaçadas, formando travejamento em quadro (sistema Vierendel)	150
6.2.3- Barras formadas por chapas contínuas vazadas	154
6.3- CONSIDERAÇÕES FINAIS	157

CAPÍTULO 7

FLAMBAGEM DE CHAPAS

7.1- GENERALIDADES	158
7.2- FLAMBAGEM DE CHAPAS UNIFORMEMENTE COMPRIMIDAS	160
7.3- CLASSIFICAÇÃO DOS ELEMENTOS COMPRIMIDOS	164
7.3.1- Elementos enrijecidos	164
7.3.2- Elementos não enrijecidos	164
7.4- RESISTÊNCIA PÓS-FLAMBAGEM	167
7.4.1- Efeito da resistência pós-crítica na resistência global da barra	169
7.5- FLAMBAGEM INELÁSTICA DE CHAPAS	171
7.6- CONSIDERAÇÕES FINAIS	172

CAPÍTULO 8

NORMALIZAÇÃO

8.1- GENERALIDADES	173
8.2- Ações Nominais	174

8.2.1- Classificação das ações nominais	174
8.2.2- Combinações de ações para os estados limites últimos	175
8.3- BARRAS COMPRIMIDAS	177
8.3.1- Classificação das seções	177
8.3.2- Relações largura/espessura (b/t)	179
8.4- ELEMENTOS ESBELTOS COMPRIMIDOS	182
8.4.1- Elementos comprimidos não-enrijecidos	183
8.4.2- Elementos comprimidos enrijecidos	188
8.5- ÍNDICE DE ESBELTEZ LIMITE	191
8.6- RESISTÊNCIA DE CÁLCULO	192
8.6.1- Flambagem por Flexão	192
8.6.2- Flambagem por torção e flambagem por flexão e torção	198
8.6.2.1- Tensão crítica de flambagem elástica	199
8.7- CONSIDERAÇÕES FINAIS	201

CAPÍTULO 9

INFORMAÇÕES SOBRE A FLAMBAGEM POR FLEXÃO SEGUNDO AS NORMAS NBR 8800/86, CAN3-S16.1-M84, AISC-LRFD/86 E EUROCODE/83

9.1- GENERALIDADES	202
9.2- COMPARAÇÃO DOS PARÂMETROS	202
9.3- CONSIDERAÇÕES FINAIS	211

CAPÍTULO 10

CONSIDERAÇÕES FINAIS 212

BIBLIOGRAFIA 216

ANEXOS

ANEXO I

ELEMENTOS COMPRIMIDOS ESPECIAIS

I.1- GENERALIDADES A-I-01
I.2- BARRAS COM DUAS FORÇAS AXIAIS A-I-02
I.3- ELEMENTOS COMPRIMIDOS COM APOIO INTERMEDIÁRIO. A-I-08
I.4- BARRAS COM ALTERAÇÕES NA SEÇÃO TRANSVERSAL ... A-I-14

ANEXO II

FLEXÃO DE CHAPAS

II.1- GENERALIDADES A-II-01
II.2- FLEXÃO PURA DE CHAPAS A-II-01
II.3- FLEXÃO DE CHAPAS POR FORÇA LATERAL
DISTRIBUÍDA A-II-07
II.4- FLEXÃO DE CHAPAS ATRAVÉS DE AÇÕES COMBINADAS
POR FORÇAS LATERAIS E FORÇAS NORMAIS TRAÇÃO
OU COMPRESSÃO NO PLANO MÉDIO DA CHAPA A-II-10

ANEXO III

EXEMPLOS A-III.01

CAPÍTULO 1

DADOS HISTÓRICOS SOBRE O AÇO

1.1- O DESENVOLVIMENTO DO AÇO

Define-se aço como sendo uma liga metálica de ferro, apresentando no máximo 2% de carbono. O principal processo de obtenção ocorre através da redução do carbono contido no minério de ferro seguido de operações siderúrgicas que melhoram as características do aço e incorporam outros componentes.

O aço é classificado conforme o teor dos elementos da liga em: aços comuns (teor de ferro acima de 98%), aços ligas ou especiais (apresentam outros elementos com teores acima do normal). Quanto ao processo de fabricação pode ser fundido, forjado e laminado.

Os aços são encontrados comercialmente sob o forma de laminados planos (chapas, bobinas, folhas) e laminados não planos (barras, trilhos, perfis laminados), sendo empregados em caldeiras, vasos de pressão, construção civil, naval, etc.

Achados arqueológicos indicam que o processo evolutivo do aço começou no século IV A.C., com a descoberta de um conjunto de quatro esferas, em EL-GEZIVAT, no Egito. Entretanto, acredita-se que o manuseio do ferro tenha iniciado em 6.000 A.C.

A partir do ano 50 A.C., o ferro foi bastante utilizado no império romano, sendo a Espanha o principal fornecedor de artigos fabricados de ferro à cidade de Roma.

Após a queda do império romano surge na Espanha a forja catalã, que com este novo processo passou a dominar a técnica metalúrgica de obtenção de ferro e aço na idade média.

Inicialmente o ferro era obtido na forma de um estado semi-pastoso, sendo beneficiado por um sistema primitivo de pudragem (batidas) através do qual o material adquiria condições de uso, principalmente na confecção de armas.

A construção civil apresenta uma nova forma do emprego do ferro fundido nos gradis aramados com desenhos artísticos nas fachadas dos casarões e palácios.

O consumo de aço aumentou muito no decorrer do tempo, em 1856, a produção alcançou 1 (um) milhão de toneladas por ano, passando a 100 milhões de toneladas em 1926, chegando a 700 milhões de toneladas em 1983.

Até meados do século XIX, não se conseguia produzir aço em grande escala. HENRY BESSEMER solucionou este problema na Inglaterra, propondo uma injeção de ar no cadinho que contém o gusa fundido para queimar todo o silício e oxidar o carbono ainda presente, reduzindo-o.

Após o desenvolvimento do aço Bessemer no mercado em 1856, apareceu o forno revérbero ou a céu aberto e, em 1864, o forno Siemens-Martins, um grande rival do Forno Bessemer.

Entretanto, os dois processos apresentam a mesma limitação, ou seja, a obtenção de aços maleáveis, pois não era ainda possível reduzir o teor de fósforo existente na maioria das jazidas de minério de ferro.

SIDNEY G. THOMAS, verificou que a presença de um revestimento básico absorvia a porcentagem de fósforo prejudicial.

Atualmente utiliza-se o processo LD (Linz-Donawitz), fazendo com que as aciarias do mundo todo, produzam centenas de milhões de toneladas de aço por ano, sob a forma de barras, chapas, perfis, trilhos, tubos, etc.

1.2- IMPLANTAÇÃO DO PARQUE SIDERÚRGICO NACIONAL

As primeiras siderúrgicas foram implantadas no Brasil em 1808, após a vinda da família real, que com incentivos governamentais, foram construídas as usinas do Morro do Pilar, do Prata e as forjas do Curral.

Em meados do século XIX, foram construídas várias forjas na província de Minas Gerais. No final deste século inicia-se a implantação de usinas como: Esperança, Wigg, União, Usina da Cia Mecânica-Mineira e a Fábrica de Ipanema, em Sorocaba (SP), a qual funcionou de 1818 até o fim do século XIX.

No século XX, foram implantadas as siderúrgicas maiores como a Cia Siderúrgica Belgo-Mineira em 1921 e a Cia Siderurgica Nacional (CSN) em 1946.

Na década de 60, o processo de consolidação do parque siderúrgico nacional teve um grande avanço com o início da operação da COSIPA e da USIMINAS, ocorrendo também a primeira expansão da CSN e a implantação de diversas empresas privadas.

No início da década de 70, foi criado um plano de expansão, visando a auto suficiência do aço para o mercado

nacional. A produção de aço aumentou de 5 milhões de toneladas em 1970 para 14 milhões em 1979. Neste ano o Brasil conseguiu seu primeiro "superavit" de 300.000 toneladas no balanço comercial do aço, importando 500.000 toneladas e exportando 800.000 toneladas.

1.3- A EVOLUÇÃO DOS ESTUDOS REFERENTES A RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

A evolução da resistência dos materiais contribuiu muito para o desenvolvimento da engenharia estrutural. Os principais estudos nesta área ocorreram no século XVII.

GALILEU (1564-1642), apresentou no seu livro "Two New Sciences" a primeira publicação sobre resistência dos materiais.

ROBERT HOOKE (1635-1703), estabeleceu experimentalmente a relação linear existente entre tensões e deformações, a qual passou a ser chamada de Lei de Hooke, tornando um princípio básico para o desenvolvimento da mecânica dos sólidos.

DANIEL BERNOULLI (1700-1782), propôs a Euler que escrevesse a equação diferencial da linha elástica, minimizando a energia de deformação.

LEONARD EULER (1707-1783), desenvolveu em 1744 a formulação para flambagem elástica por flexão. Formulação importante para o cálculo estrutural elástico e a base inicial para todo o estudo das barras comprimidas.

1.4- CONSTRUÇÃO METÁLICA

Até o século XVIII, os principais materiais utilizados na construção eram: madeira, pedras, argilas, pozolona e cal. O ferro era usado apenas nas esquadrias e portões.

As primeiras aplicações intensivas do ferro fundido nas construções foram as pontes e estações ferroviárias. Inicialmente as pontes metálicas eram construídas utilizando o ferro fundido, passando para ferro pudlado e posteriormente para o aço laminado, evidenciando a melhoria não só da qualidade do material aço mas, principalmente, o aumento da resistência.

O emprego do aço em estruturas de edifício teve seu início em 1885, quando um engenheiro americano, Willian Le Baron Jenney, idealizou e construiu um prédio de escritórios no qual as forças verticais eram suportadas por um esqueleto metálico, com paredes de alvenaria - o House Insurance Building, em Chicago, com 10 pavimentos.

GUSTAVE EIFFEL (1832-1923), engenheiro francês, ficou conhecido internacionalmente, após construir, em Bardeaux, uma ponte, ligando as redes ferroviárias de Midi e Orleans. Após isto foi convidado a construir em Portugal, Estados Unidos e Itália. Suas principais obras foram: Viaduto de Garobit, entre Meargenals e Saint-Flour, 5.550m (1882); Ponte sobre o Rio Douro, em Portugal, vão central de 180m (1887); Edifícios para exposições de Paris nos anos 1867, 1878 e 1889; Torre Eiffel, 312m de altura; Estruturas de sustentação da Estátua da Liberdade, New York.

Consolida-se, assim, o aço como uma excelente opção para as obras especiais de altura e vãos livres elevados. Nota-se que os maiores edifícios, torres, coberturas e vãos de pontes, construídas a partir de 1900, apresentam estrutura de aço.

A construção metálica evolui muito a partir da 2^a Guerra Mundial com o desenvolvimento da solda elétrica, produção de parafusos de alta resistência e a melhoria da qualidade das propriedades químicas e mecânicas do aço.

Atualmente as estruturas de aço são utilizadas em: pontes ferroviárias, pontes rodoviárias, edifícios de

andares múltiplos, edifícios industriais, galpões, silos industriais, coberturas de grandes vãos, torres de transmissão e sub-estação, guindastes, pontes-rolantes, etc.

Considera-se importante analisar o fenômeno da compressão para os elementos estruturais, como: estruturas treliçadas, colunas carregadas axialmente, elementos de contraventamentos, estacas, etc.

1.5- EDIFICAÇÕES RELEVANTES EM ESTRUTURAS METÁLICAS

Edificações no exterior: Ponte Coalbrookdale, Inglaterra, 31m (1779); Britania Bridge, Inglaterra, viga caixão com dois vãos centrais de 140m (1850); Brooklin Bridge, New York, Ponte pênsil com 486m de vão livre (1883); Torre Eiffel, Paris, com 312m de altura (1889); Empire State Building, New York, com 380m de altura (1933); Golden Gate Bridge, San Francisco, Ponte Pênsil com 1280m de vão livre (1937); World Trade Center, New York, com 410m de altura, 110 andares (1972); Sears Tower, Chicago, 442m de altura (1974).

Edificações no Brasil: Ponte Iapu, Ipatinga, MG, com 320m de extensão (1970); Ponte sobre o canal de Bertiooga, Bertiooga, SP, com 1.546m de extensão (1980); Ponte sobre o Rio Tocantins, Marabá, PA, com 2.310m de extensão (1986); Edifício Antonio Marinho Saraiva, Belo Horizonte, MG, com 3.522m² (1986); Edifício Rio Preto, Brasília, DF, com 18.000m² (1987); Terceira Ponte de Vitória, ES, com 3.500m de extensão (1989); Centro de atividades e clube do trabalhador Hércio Rezende, Vila Velha, ES, com 9.500m² (1989); Edifício Shopping Volta Redonda, Volta Redonda, RJ, com 30.554m² (1989); Edifício Capri, Belo Horizonte, MG, com 8.890m² (1990).

CAPÍTULO 2

BARRAS COMPRIMIDAS- FLAMBAGEM ELÁSTICA

2.1- GENERALIDADES

Este capítulo apresenta as seguintes considerações sobre: flambagem por flexão, flambagem por torção e flambagem por flexão e torção; o efeito da força cortante na resistência das barras com seções em alma cheia (ex., perfil I) e prescrições referentes ao comprimento efetivo de flambagem (kl).

Apresenta-se, também, o cálculo da carga crítica de flambagem¹ elástica para elementos comprimidos com várias condições de vinculação, a qual será utilizada no "Capítulo 8" para determinar a resistência de cálculo das barras axialmente comprimida.

As barras comprimidas podem ser definidas como um elemento estrutural submetido apenas à força axial de compressão.

1

O termo "carga crítica de flambagem" foi utilizado para definir a força crítica de flambagem, tendo em vista ser este um termo de uso consagrado na bibliografia.

A figura 2.1.a apresenta uma barra prismática, de material elástico, solicitada axialmente por uma força de compressão N .

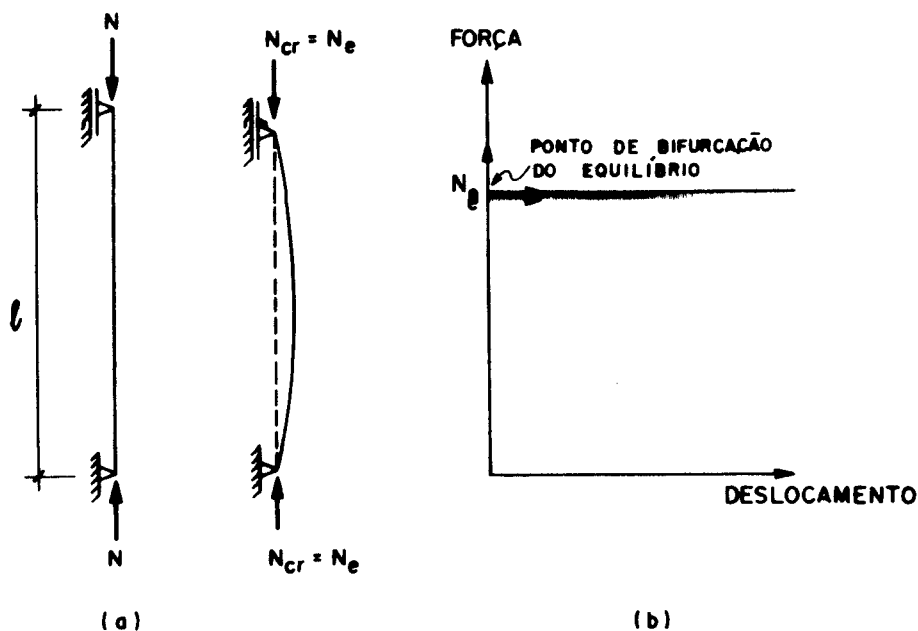


Figura 2.1- CARGA DE EULER

O equilíbrio de uma barra axialmente comprimida é um dos aspectos a serem analisados, define-se equilíbrio estável de uma barra comprimida axialmente por uma força N , ao fenômeno no qual um pequeno deslocamento, decorrente da aplicação de uma força lateral, desaparece após a remoção desta força, com a volta da barra à posição inicial.

Uma segunda situação consiste em que: para o mesmo deslocamento lateral, ao incrementar-se a força de compressão de maneira crescente, atinge-se um ponto em que a barra não mais retorna a posição inicial, caracterizando assim o equilíbrio instável.

A força axial correspondente à passagem de uma posição de equilíbrio para outra, bifurcação do equilíbrio, recebe o nome de carga crítica ou carga de flambagem.

O fenômeno da bifurcação do equilíbrio representado na figura 2.1.b, recebe o nome de flambagem.

A curva (a) da figura 2.2 representa o comportamento força x deslocamento lateral de uma barra perfeitamente reta de material elástico. As curvas (b), (c) e (d) representam, respectivamente, este comportamento para uma barra com pequenos e grandes imperfeições iniciais e com a força axial aplicada excentricamente.

Barras esbeltas, nas quais o comprimento é bem superior às dimensões da seção transversal, quando comprimidas perdem a estabilidade à medida que a força axial atinge o valor crítico, conhecido como carga crítica de flambagem de Euler.

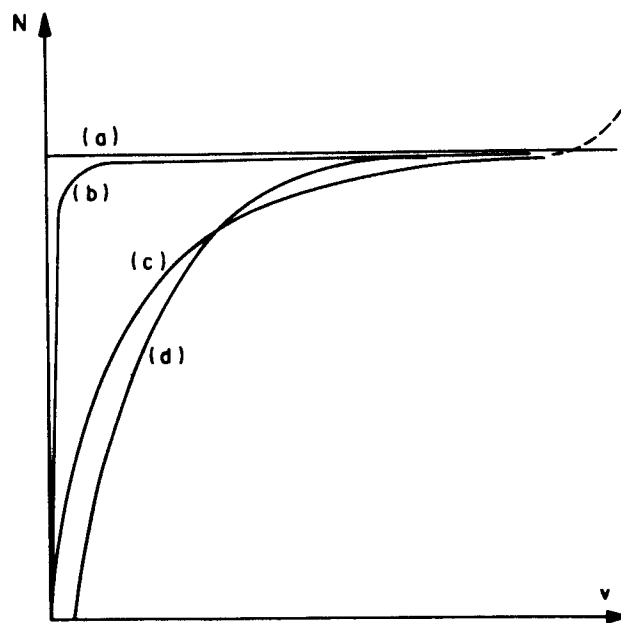


Figura 2.2-CURVAS FORÇA-DESLOCAMENTO: (a) BARRA PERFEITAMENTE RETA EM TEORIA DE 2a. ORDEM, (b) BARRA COM PEQUENA IMPERFEIÇÃO INICIAL, (c) BARRA COM GRANDE IMPERFEIÇÃO INICIAL, (d) BARRA COM FORÇA APLICADA EXCENTRICAMENTE.

Barras curtas podem atingir o escoamento, com a aplicação da força axial de compressão, antes de ocorrer a flambagem, portanto, o estado limite da barra é caracterizado pelo escoamento da seção transversal.

Para determinados índices de esbeltez de uma barra pode ocorrer o escoamento de algumas fibras da seção transversal, após a aplicação da força axial de compressão, outras fibras ainda permanecem no regime elástico, este caso caracteriza o regime inelástico e o estado limite será analisado através de duas teorias, a teoria do módulo tangente e a teoria do módulo reduzido. Estas teorias serão abordadas posteriormente.

Com as explicações anteriores apresentadas caracteriza-se, em função da esbeltez das barras, o regime elástico e inelástico.

2.2- FLAMBAGEM ELÁSTICA OU DE EULER

Para analisar o fenômeno da flambagem, considera-se a teoria de 2ª. ordem para obter as equações de equilíbrio na posição deslocada da barra. As hipóteses que possibilitam tal análise estão abaixo relacionadas:

- a) Barra prismática perfeitamente reta;
- b) Material infinitamente elástico, perfeitamente homogêneo e isótropo;
- c) Força aplicada lentamente, perfeitamente centrada e não muda de direção durante a aplicação;
- d) As seções permanecem planas;
- e) Os deslocamentos laterais das barras são pequenos (teoria dos pequenos deslocamentos);
- f) Ausência de imperfeições iniciais e tensões residuais;
- g) O material obedece a lei de Hooke.

2.2.1- Barra simplesmente apoiada

A carga crítica de flambagem da barra axialmente comprimida, representada na figura 2.3.a, é obtida considerando apenas a flexão, ou seja, despreza-se nesta análise o efeito da força cortante.

Por equilíbrio dos momentos na posição deslocada da figura 2.3.b, tem-se:

$$-M_{int} + Nv = 0 \quad (2.1)$$

onde:

M_{int} = o momento interno resistente;

v = o deslocamento lateral da seção analisada.

Com a expressão aproximada da curvatura, teoria de 2a. ordem, tem-se:

$$\frac{1}{r} = v'' = - \frac{M_{int}}{EI} \quad (2.2)$$

Substituindo a equação (2.2) na equação (2.1), obtém-se a equação diferencial da elástica.

$$EIv'' + Nv = 0 \quad (2.3)$$

Considerando $k^2 = N/EI$, obtém-se:

$$v'' + k^2 v = 0 \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes, cuja solução geral é:

$$v(x) = C_1 \text{ sen } kx + C_2 \text{ cos } kx \quad (2.5)$$

As condições de contorno consideradas são:

$$v(0) = 0 \quad (2.6)$$

$$v(\ell) = 0 \quad (2.7)$$

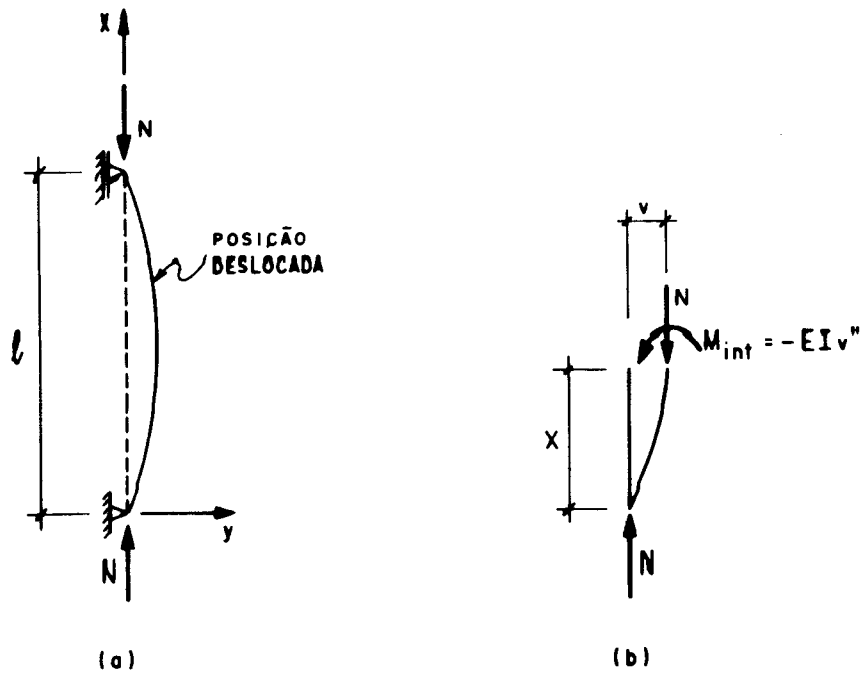


Figura 2.3- BARRA BIAPOIADA EM SUA POSIÇÃO DESLOCADA.

Considerando a 1a. condição de contorno, equação (2.6). Tem-se:

$$C_2 = 0 \quad (2.8)$$

Usando a 2a. condição de contorno, equação (2.7).

$$v(l) = 0 = C_1 \text{ sen } kl = 0 \quad (2.9)$$

Pode-se considerar da equação (2.9) as seguintes igualdades:

$$C_1 = 0 \text{ solução trivial, a barra permanece reta} \quad (2.10)$$

ou

$$k = 0 \text{ não tem força aplicada} \quad (2.11)$$

ou

$$\text{sen } kl = 0 \text{ fornece a carga crítica de 1a. espécie} \quad (2.12)$$

A solução não trivial da equação (2.12) descreve o equilíbrio da barra na posição deslocada.

$$kl = n\pi; \text{ sendo } n = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Considerando $n=1$, obtém-se a carga crítica de Euler.

$$N_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (2.14)$$

Substituindo a equação (2.8) na equação (2.5), obtém-se a equação da elástica.

$$v(x) = C_1 \text{ sen } kx \quad (2.15)$$

A elástica, equação (2.15), é indeterminada, confirmando que é um problema de 1ª espécie.

A figura 2.4 representa graficamente este comportamento.

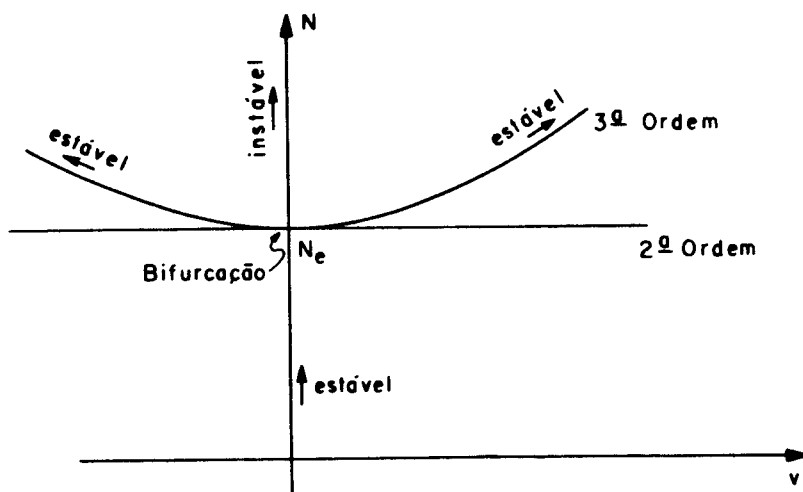


Figura 2.4- CONDIÇÃO DE EQUILÍBRIO.

A teoria de 3ª ordem estuda o equilíbrio na posição deslocada com as formulas exatas para os deslocamentos.

A equação de Euler, desenvolvida em 1744, é base fundamental para o estudo de barras axialmente comprimidas.

Reescrevendo a equação (2.14), obtém-se a tensão crítica de flambagem (f_e).

$$\frac{N_e}{A_g} = \frac{\pi^2 EI}{l^2 A_g} \quad (2.16)$$

$$f_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2 A_g} \quad (2.17)$$

Por definição o raio de giração (r) é:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A_g}} \quad (2.18)$$

Substituindo a equação (2.18) na equação (2.17), tem-se:

$$f_e = \frac{\pi^2 E r^2}{l^2} \quad (2.19)$$

Chamando de $\lambda = l/r$, onde λ = índice de esbeltez, obtém-se:

$$f_e = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (2.20)$$

A fórmula de Euler é válida admitindo a Lei de Hooke. Portanto, a tensão crítica não pode superar a tensão de proporcionalidade do material (f_p).

Analisando a expressão da tensão crítica de Euler conclui-se que a flambagem é um problema de equilíbrio e não de resistência do material.

A flambagem ocorre quando a barra está submetida a uma força de compressão superior à carga crítica e há alguma perturbação no equilíbrio, esta perturbação é responsável então pelo deslocamento lateral.

Ressalta-se que a tensão de proporcionalidade f_p está diretamente relacionada com as tensões residuais, inerentes ao processo de fabricação dos perfis de aço. Estas tensões serão discutidos no "Capítulo 4".

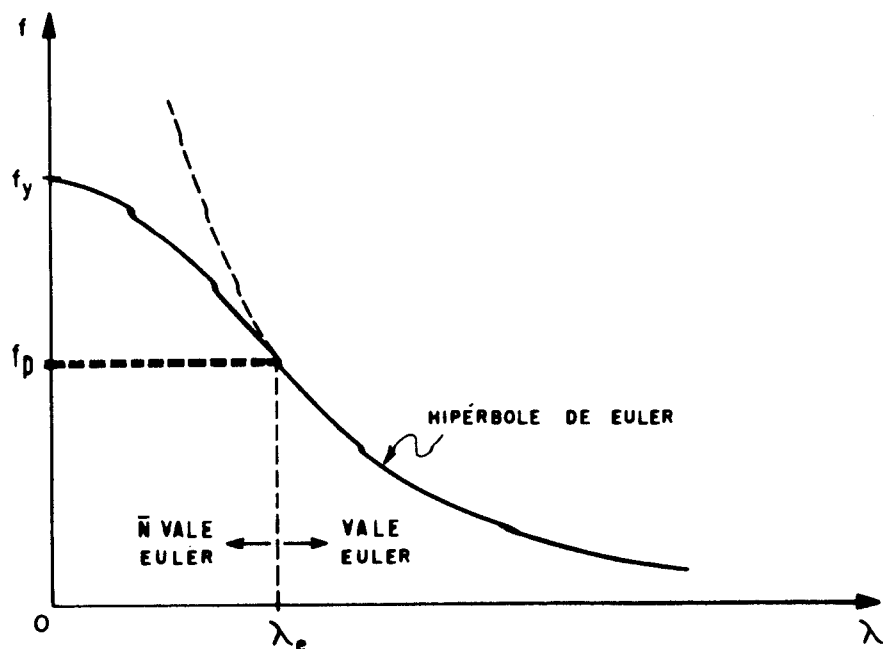


Figura 2.5- HIPÉRBOLE DE EULER.

2.3- ANÁLISE DA FORÇA CORTANTE NO CÁLCULO DA CARGA CRÍTICA

Admitindo-se uma barra prismática carregada axialmente, figura 2.6, tem-se:

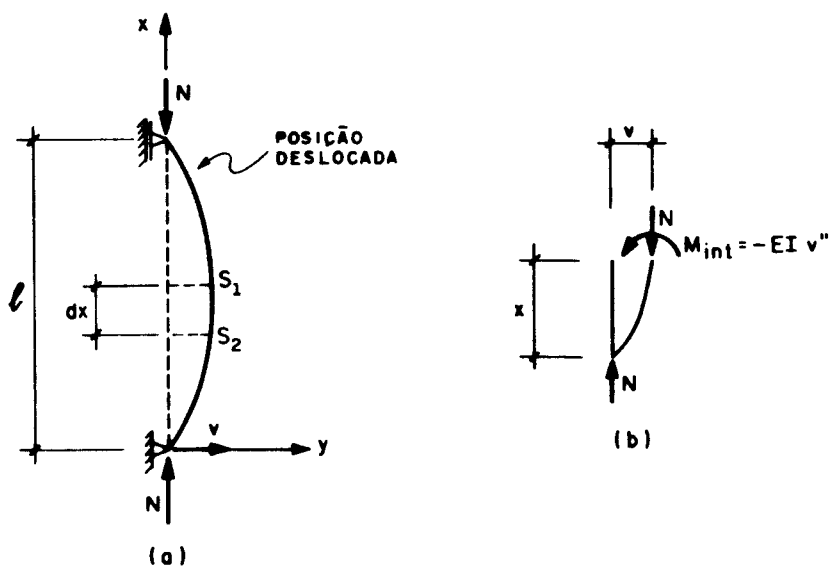


Figura 2.6- BARRA BIAPOIADA COMPRIMIDA AXIALMENTE EM SUA POSIÇÃO DESLOCADA.

Seja o cálculo da força cortante resultante, V , num elemento de comprimento dx , entre as seções S_1 e S_2 . Como apresenta a figura 2.7:

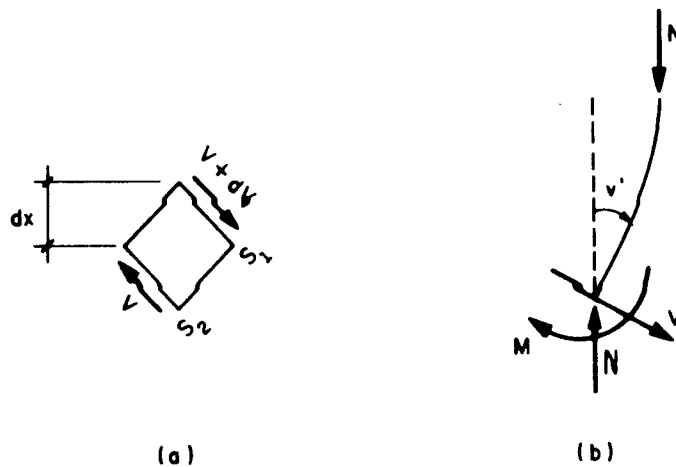


Figura 2.7- ELEMENTO DE COMPRIMENTO (dx) EM SUA POSIÇÃO DESLOCADA

$$V = \frac{dM}{dx} = Nv' \quad (2.21)$$

É clássica a consideração da distorção angular média provocada pela força cortante, como sendo:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{n\tau_m}{G} = \frac{nV}{GA_g}$$

ou

$$\gamma = v'_c = \frac{nV'}{A_g G} \quad (2.22)$$

onde:

τ_m = tensão de cisalhamento média;

n = um fator numérico que depende da forma da seção transversal e leva em conta a não uniformidade na distribuição da tensão de cisalhamento (τ).

Para obter a equação diferencial da elástica, considera-se uma parcela referente ao efeito do momento fletor e outra parte proveniente do efeito da força cortante.

A parte da elástica referente ao momento fletor é:

$$\frac{1}{r} = v_M'' - \frac{M_{int}}{EI} \quad (2.23)$$

A parte da elástica referente ao cortante, v_c'' , é:

$$v_c' = \frac{nV}{A_g G} \quad (2.24)$$

$$v_c'' = \frac{nV'}{A_g G} \quad (2.25)$$

Comparando as equações (2.21) e (2.24), tem-se:

$$v_c'' = \frac{nNv''}{A_g G} \quad (2.26)$$

Somando as equações (2.23) e (2.26), tem-se a equação diferencial da elástica.

$$v'' = v_M'' + v_c'' = - \frac{M_{int}}{EI} + \frac{nNv''}{A_g G} \quad (2.27)$$

O momento interno é igual ao momento externo.

$$M_{int} = M = Nv \quad (2.28)$$

Das equações (2.27) e (2.28), obtém-se:

$$v'' = - \frac{Nv}{EI} + \frac{nN}{A_g G} v'' \quad (2.29)$$

Rearranjando:

$$v'' \left(1 - \frac{nN}{A_g G}\right) + \frac{N}{EI} v = 0 \quad (2.30)$$

A equação (2.30) é homogênea e sua solução é:

$$v = e^{\lambda x} \quad (2.31)$$

Substituindo v e v'' pelos correspondentes valores na equação (2.30), tem-se a equação característica:

$$\lambda^2 \left(1 - \frac{nN}{A_g G} \right) + \frac{N}{EI} = 0 \quad (2.32)$$

As raízes da equação (2.32) são:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \alpha_i \quad (2.33)$$

Onde:

$$\alpha = \sqrt{\frac{N/EI}{1 - nN/A_g G}} \quad (2.34)$$

A solução geral da equação homogênea é:

$$v = C_1 \operatorname{sen} \alpha x + C_2 \operatorname{cos} \alpha x \quad (2.35)$$

A equação (2.35) é idêntica a equação (2.5), portanto, sua solução pode ser obtida com as seguintes condições de contorno:

$$v(0) = v(l) = 0 \quad (2.36)$$

Considerando $v(0) = 0$, tem-se:

$$C_2 = 0 \quad (2.37)$$

Considerando $v(l) = 0$, vem:

$$v(l) = 0 = C_1 \operatorname{sen} \alpha l = 0 \quad (2.38)$$

A solução é:

$$\operatorname{sen} \alpha l = 0 \quad (2.39)$$

Donde:

$$\alpha l = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

Sendo $n=1$, tem-se a carga crítica.

$$\alpha l = \pi \quad (2.41)$$

De (2.41) e (2.34), tem-se:

$$\sqrt{\frac{N/EI}{1-nN/A_g G}} l = \pi \quad (2.42)$$

Rearranjando, tem-se:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{\left[1 + \frac{n}{A_g G} \frac{\pi^2 EI}{l^2}\right]} \quad (2.43)$$

Considerando $\beta = \sqrt{1 + \frac{n}{A_g G} \frac{\pi^2 EI}{l^2}}$ como sendo um fator de correção devido a força cortante.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_{fl}^2} \frac{1}{\beta^2} \quad (2.44)$$

ou

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta l_{fl})^2} \quad (2.45)$$

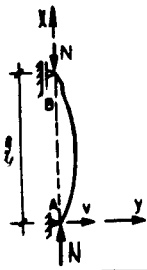
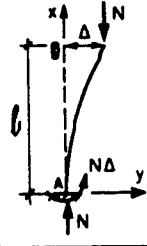
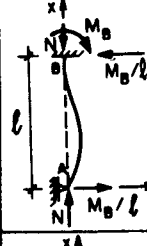
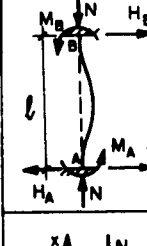
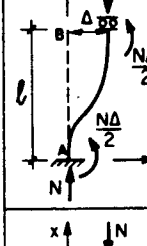
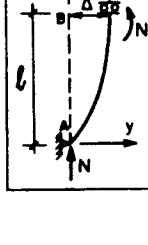
O valor de β aproxima-se da unidade para os perfis de alma cheia normalmente utilizados nos projetos. Por esta razão, é razoável desprezar o efeito da força cortante nos cálculos correntes.

Entretanto, para barras compostas o efeito da cortante torna-se importante e não poderá ser desprezado.

2.4- CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM PARA OS ELEMENTOS COM VÁRIAS CONDIÇÕES DE VINCULAÇÃO

A TABELA 2.1, apresenta um resumo das principais etapas referentes a determinação da carga crítica de flambagem para várias condições de vinculação. Foram respeitadas todas as hipóteses citadas no início do capítulo.

TABELA 2.1- CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM POR FLEXÃO

Elemento considerado	Eq.dif.de equilíbrio	solução geral	condições de contorno	resultado de N_{cr}	Observações
	$v''+k^2v = 0$	$v=C_1 \text{sen}kx+C_2 \text{cos}kx$	$v(0) = 0$ $v(l) = 0$	$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = N_e$	v =deslocamento lateral (y) v' =giro
	$v''+k^2v = k^2\Delta$	$v=C_1 \text{sen}kx+C_2 \text{cos}kx+\Delta$	$v(0) = 0$ $v(l) = \Delta$ $v'(0) = 0$	$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$	v =deslocamento lateral Δ =deslocamento lateral em B
	$v''+k^2v - \frac{M_B x}{EI l} = 0$	$v=C_1 \text{sen}kx+C_2 \text{cos}kx + \frac{M_B}{N l} x$	$v(0) = 0$ $v(l) = 0$ $v'(l) = 0$	$N_{cr} = 2,05 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	v =deslocamento lateral M_B =momento em B
	$v''+k^2v = -\frac{H_A x}{EI} + \frac{M_A}{EI}$	$v=C_1 \text{sen}kx+C_2 \text{cos}kx - \frac{H_A x}{N} + \frac{M_A}{N}$	$v(0) = 0$ $v(l) = 0$ $v'(0) = 0$ $v'(l) = 0$	$N_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$	v =deslocamento lateral M_B e M_A =momento em B e A H_A e H_B =reações horizontais em A e B
	$v''+k^2v = \frac{N\Delta}{2EI}$	$v=C_1 \text{sen}kx+C_2 \text{cos}kx + \frac{\Delta}{2}$	$v(0) = 0$ $v'(0) = 0$ $v(l) = \Delta$	$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	v =deslocamento lateral Δ =desl. lateral em B
	$v''+k^2v = 0$	$v=C_1 \text{sen}kx+C_2 \text{cos}kx$	$v(0) = 0$ $v'(l) = 0$	$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$	v =deslocamento lateral Δ =desl. lateral em B

2.5- COMPRIMENTO EFETIVO DE FLAMBAGEM

O comprimento efetivo de flambagem (kl) pode ser definido como a distância entre dois pontos de curvatura nula, pontos de inflexão, na posição deslocada de um elemento.

O coeficiente k , denominado fator comprimento efetivo de flambagem, é função das condições de extremidade da barra.

Apresenta-se, a seguir, o cálculo do valor de k para a barra bi-engastada, ilustrada na figura 2.8.

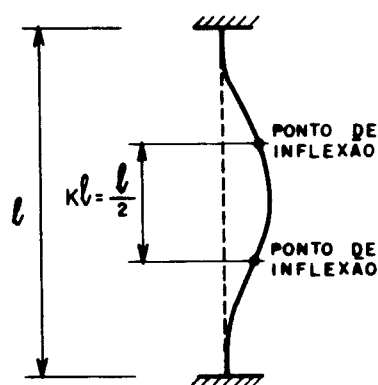


Figura 2.8- MODELO DE FLAMBAGEM SIMÉTRICO DE UMA BARRA BI-ENGASTADA.

Os pontos de inflexão na curvatura da barra são obtidos considerando a equação do momento interno, ao longo do comprimento da barra, nula.

$$M = -EIV'' = 0 \quad (2.46)$$

Através da solução geral da equação diferencial de equilíbrio na posição deslocada desta barra, é possível obter a equação do deslocamento lateral (v).

$$v = \frac{M_A}{N} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{l} x \right) \quad (2.47)$$

Diferenciando a expressão (2.47) e substituindo em (2.46), obtém-se:

$$M = EI \frac{M_A 4\pi^2}{N\ell^2} \cos \frac{2\pi x}{\ell} = 0 \quad (2.48)$$

onde:

$$\cos \frac{2\pi x}{\ell} = 0 \quad (2.49)$$

ou

$$x = \frac{n\ell}{4}, \quad n = 1, 3, 5 \dots \quad (2.50)$$

Para os valores de n iguais a 1 e 3, obtém-se $x_1 = \frac{\ell}{4}$ e $x_2 = 3\frac{\ell}{4}$ que são os pontos de inflexão. Logo a distância entre os pontos de inflexão é:

$$x_2 - x_1 = \frac{3\ell}{4} - \frac{\ell}{4} = \frac{\ell}{2} \quad (2.51)$$

Portanto:

$$k\ell = \frac{\ell}{2} \quad (2.52)$$

ou

$$k = \frac{1}{2} \quad (2.53)$$

Como pode ser observado o coeficiente do comprimento de flambagem (k) nada mais é do que um fator de correção que será aplicado sobre um padrão (barra simplesmente apoiada).

O fator comprimento efetivo pode ser então determinado pela equação (2.54), que nada mais é do que a comparação entre a condição padrão e as barras com outras vinculações.

$$k = \sqrt{\frac{N_e}{N_{cr}}} \quad (2.54)$$

onde;

N_e = carga crítica de Euler, barra biapoiada;






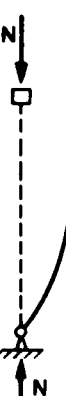
N_{cr} = carga crítica, barra com outras condições de vinculação.

Utilizando a equação (2.54) e os valores de N_e e N_{cr} da Tabela 2.1, obtém-se os valores teóricos de k para as barras idealizadas, como ilustra a Tabela 2.2.

Baseados nas cargas críticas para uma barra simplesmente apoiada e outra biengastada, já apresentadas anteriormente, é possível calcular o fator k , a partir da equação (2.54).

$$k = \sqrt{\frac{N_e}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 EI / \ell^2}{4\pi^2 EI / \ell^2}} = 0,5$$

TABELA 2.2 - VALORES TEÓRICOS DE K PARA BARRAS IDEAIS

Elemento em sua posição deslocada						
Valores teóricos de k	0,5	0,7	1,0	1,0	2,0	2,0

2.6- ELEMENTOS COMPRIMIDOS ESPECIAIS

Denominam-se neste trabalho, elementos comprimidos especiais as barras prismáticas com alterações na força axial aplicada, presença de contraventamentos intermediários ou variação da seção transversal. Estes elementos são frequentemente aplicados em estruturas metálicas.

O Anexo I apresenta o desenvolvimento deste item, ou seja, o comportamento de barras prismáticas com duas forças axiais aplicadas, elementos comprimidos com apoio intermediário, barras com alterações na seção transversal, bem como uma tabela com os valores da carga crítica de flambagem para alguns elementos especiais.

2.7- FLAMBAGEM POR TORÇÃO E FLAMBAGEM POR FLEXÃO E TORÇÃO

2.7.1- Preliminares

Geralmente, as barras com seções transversais abertas de paredes finas flambam por torção ou por um efeito combinado da flexão com a torção.

A Tabela (2.3), apresenta um resumo de alguns trabalhos referentes à flambagem por torção e a flambagem por flexão e torção.

2.7.2- Flambagem por Torção

Define-se flambagem por torção como o fenômeno no qual uma barra axialmente comprimida, mantém o seu eixo longitudinal reto, enquanto suas mesas flambam por rotação sob o eixo z.

Recomenda-se verificar o valor da carga crítica de flambagem por torção em algumas seções duplamente simétricas, onde o centro de gravidade coincide com o centro de cisalhamento, como as barras cruciforme formadas por chapas delgadas. A figura 2.9 ilustra uma seção duplamente simétrica sujeita a flambagem com torção.

TABELA 2.3- DADOS HISTÓRICOS REFERENTES AO ESTUDO DA FLAMBAGEM POR TORÇÃO E DA FLAMBAGEM POR FLEXÃO E TORÇÃO

Autor (ano)	TABALHOS APRESENTADOS
Wagner, H., segundo "Bleich, H.H." (1952)	Análise do comportamento da flambagem com torção em seções abertas de parede fina. Introduzindo o conceito do empenamento unitário.
Bleich, F.; Bleich, H. segundo "Bleich, H. H." (1952)	Estudo do problema de flexão, torção e flambagem de barras com seções transversais poligonais de parede fina.
Bleich, H.H. (1952)	Análise do fenômeno de flambagem com torção em seções simétricas.
	Análise do fenômeno de flambagem com torção em seções com apenas um eixo de simetria.
"Timoshenko, S.P., Gere, J.M." (1961)	Estudo referente a flambagem por torção e por flexão e torção.
LEE.G.C. (1967)	Análise da flambagem por torção inelástica, perfis H, sob o efeito e tensões residuais.
Kitipornchai (1983)	Estudo paramétrico referente a flambagem por flexão e torção em cantoneiras
Al-sayed, S.H., Bjorhovde, R. (1989)	Solução para formular a carga crítica de flambagem em seções transversais poligonais de parede fina.

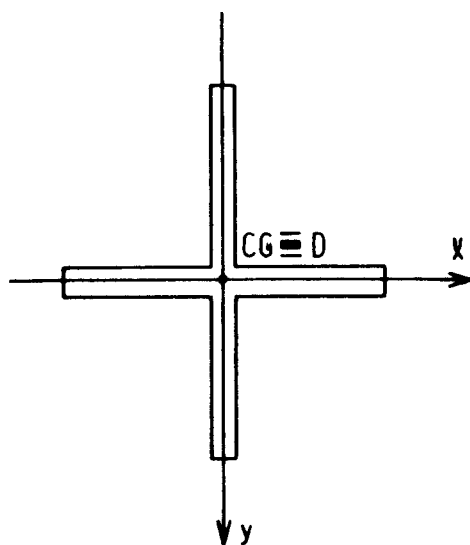


Figura 2.9- SEÇÃO DUPLAMENTE SIMÉTRICA.

A figura 2.10 representa uma barra comprimida axialmente, com seção duplamente simétrica, após a rotação nas mesas do perfil, ou seja, flambagem com torção.

Este trabalho não apresenta as equações diferenciais de equilíbrio que regem o problema da flambagem com torção, pois este fenômeno é um caso particular do problema de flambagem por flexão e torção, conforme item 2.7.3.

A flambagem será torcional quando ocorrer apenas o giro, rotação em torno do eixo z. As equações diferenciais de equilíbrio (2.55), (2.56) e (2.57) regentes do problema da flambagem por flexão e torção, estão apresentadas no item subsequente.

2.7.3- Flambagem por Flexão e Torção

A flambagem por flexão e torção de uma barra comprimida é caracterizada pela translação do centro de cisalhamento, definida pelos deslocamentos w e v nas direções x e y , respectivamente, e uma rotação da seção transversal em relação ao centro de cisalhamento (ângulo ϕ).

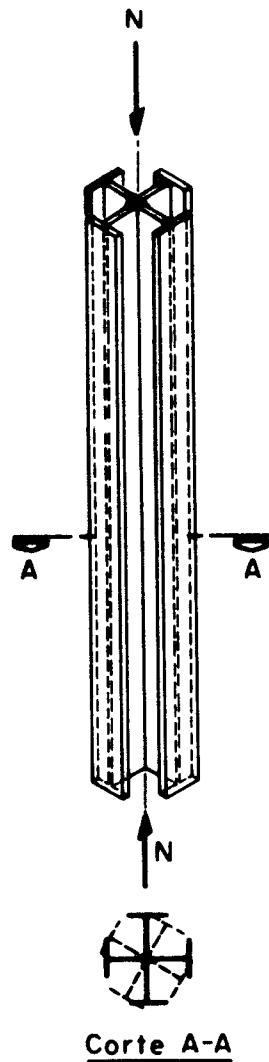


Figura 2.10- FLAMBAGEM POR TORÇÃO.

A seção transversal assimétrica, ilustrada na figura 2.11, exemplifica as translações e rotações que caracterizam a flambagem por flexão e torção.

Durante a translação da seção transversal o centro de cisalhamento D desloca para D' e o centro de gravidade C.G desloca para C.G'. E após a rotação, a posição final do centro de gravidade será C.G''.

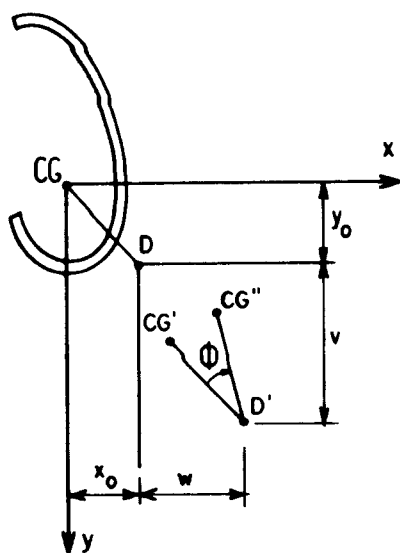


Figura 2.11- SEÇÃO TRANSVERSAL ASSIMÉTRICA.

A figura 2.12 ilustra uma barra, com seção monossimétrica, com a força de compressão N aplicada no centro de gravidade da seção transversal, com o deslocamento e rotação da flambagem por flexão e torção.

Utilizando-se o método do equilíbrio na posição deslocada, obtém-se as equações diferenciais que regem o problema da flambagem por flexão e torção para uma seção de parede fina aberta, com espessura constante ao longo do comprimento, conforme ilustra a figura 2.13.

Segundo "RACHID (1991)¹", as equações diferenciais de equilíbrio, as quais representam o problema da flambagem por flexão e torção, são representadas pelas equações (2.55), (2.56) e (2.57).

1

"RACHID, M." - "Notas de aula do curso Instabilidade das Estruturas", pós-graduação EESC/USP, 1991.

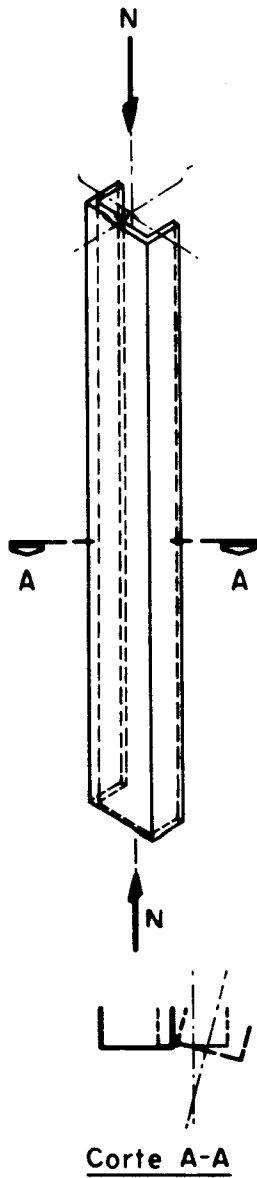


Figura 2.12- FLAMBAGEM POR FLEXÃO E TORÇÃO.

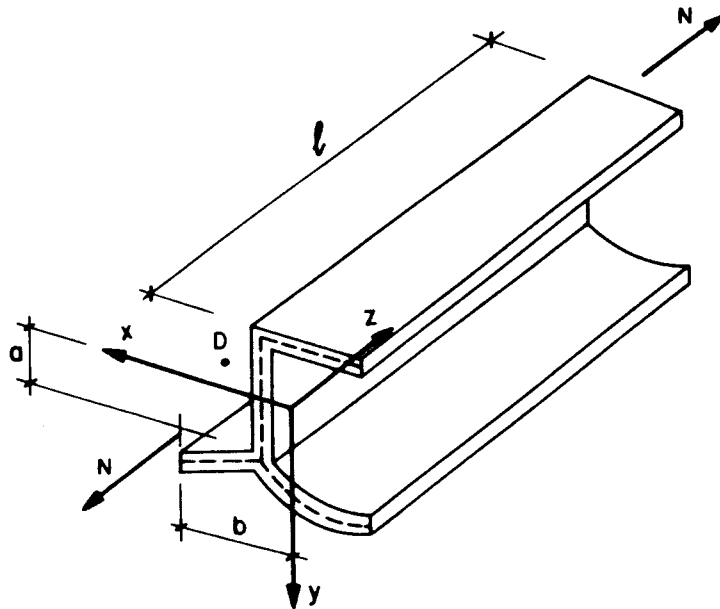


Figura 2.13- SEÇÃO DE PAREDE FINA ABERTA.

$$EI_x v_D^{iv} - Nv_D'' + (Nx_0 - M_y)\phi'' = 0 \quad (2.55)$$

$$EI_y w_D^{iv} - Nw_D'' - (Ny_0 - M_x)\phi'' = 0 \quad (2.56)$$

$$EC_w \phi^{iv} - [Nr_0^2 + 2M_y(k_x - x_0) + 2M_x(k_y - y_0) + GI_t] \phi'' + \\ - (M_y - Nx_0)v_D'' + (M_x - Ny_0)w_D'' = 0 \quad (2.57)$$

Convenção de Sinais:

$N > 0$: tração

$M_y > 0$: quando tracionar regiões com $x > 0$

$M_x > 0$: quando tracionar regiões com $y > 0$

$$k_y = \frac{1}{2I_x} \int_{A_g} y(y^2 + x^2) dA_g$$

$$k_x = \frac{1}{2I_y} \int_{A_g} x(y^2 + x^2) dA_g$$

Se y for eixo de simetria, tem-se que $k_x = 0$ e vice-versa.

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + \frac{I_x + I_y}{A_g}$$

No caso geral de instabilidade, a barra delgada poderá perder sua forma reta quando ocorrer: deslocamentos $v(z)$ no eixo y ; deslocamentos $w(z)$ no eixo x e rotação $\phi(z)$ das seções em torno do centro de torção D .

Na flambagem por flexão, tem-se: 1 equação e deslocamentos $-v(z)$ ou $w(z)$.

Na flambagem por flexão e torção, tem-se: deslocamentos $-v(z)$, $w(z)$ e rotação $\phi(z)$.

Entretanto, quando ocorrer $v(z)$ e $w(z)$ a flambagem será por flexão.

Ocorrendo apenas $\phi(z)$, a flambagem será puramente torcional.

Quando ocorrer $\phi(z)$ e $v(z)$ ou $\phi(z)$ e $w(z)$ ou $\phi(z)$, $v(z)$ e $w(z)$ a flambagem será por flexão e torção.

Portanto, a flambagem por flexão é considerada um caso particular a qual ocorre com determinadas condições de carregamento, vinculação e geometria.

Considere-se a barra comprimida axialmente da figura 2.14 para os três tipos de seções transversais:

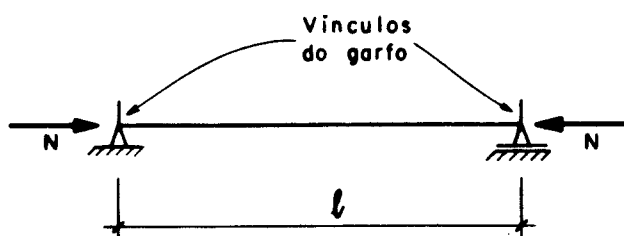


Figura 2.14- BARRA COMPRIMIDA AXIALMENTE COM VÍNCULOS DE GARFO.

a) Seções duplamente simétricas, com a força N aplicada no C.G. da seção transversal.

$$N = -N$$

$$M_x = M_y = 0 \quad (a = b = 0)$$

$$k_x = k_y = 0$$

$$x_o = y_o = 0$$

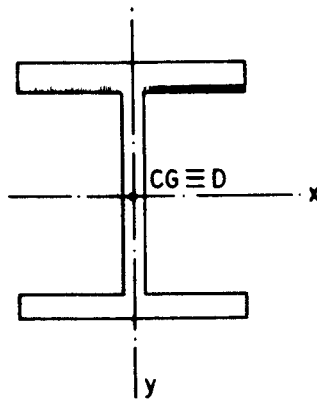


Figura 2.15- SEÇÃO DUPLAMENTE SIMÉTRICA COM A FORÇA DE COMPRESSÃO APLICADA NO C.G.

Das equações de equilíbrio (2.55), (2.56) e (2.57), resultam:

$$EI_x v_D^{iv} + Nv_D'' = 0 \quad (2.58)$$

$$EI_y w_D^{iv} + Nw_D'' = 0 \quad (2.59)$$

$$EC_w \phi^{iv} + [Nr_o^2 - GI_t] \phi'' = 0 \quad (2.60)$$

Sendo estas equações desacopladas, a flambagem dar-se-á por flexão em torno de um dos eixos principais de inércia ou por torção.

Analisando as equações (2.58) e (2.59) separadamente, obtém-se:

$$N_v = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} = N_{ex} \quad (2.61)$$

$$N_w = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} = N_{ey} \quad (2.62)$$

A equação (2.60) diz respeito à carga crítica de flambagem por torção. Rearranjando esta, tem-se:

$$\phi^{iv} + P^2 \phi'' = 0 \quad (2.63)$$

onde:

$$P^2 = \frac{Nr_o^2 - GI_t}{EC_w} \quad (2.64)$$

A solução geral da equação (2.63) é:

$$\phi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \text{sen}Pz + C_4 \text{cos}Pz \quad (2.65)$$

Impondo as condições de contorno, vínculos de garfo nos apoios, tem-se:

Rotação impedida nos apoios: $\phi(0) = 0$ e $\phi(\ell) = 0$

Bimomento nulo nos apoios : $\phi''(0) = 0$ e $\phi''(\ell) = 0$

O que permite concluir

$$C_3 P^2 \text{sen} P\ell = 0 \quad (2.66)$$

$$C_3 = 0 : \text{A barra permanece reta ou} \quad (2.67)$$

$$P = 0 : \text{Não tem força aplicada ou} \quad (2.68)$$

$$\text{sen} P\ell = 0 \rightarrow P\ell = n\pi \quad (2.69)$$

Adotando $n=1$, obtém-se:

$$N_\phi = \left[\frac{\pi^2 EC_w}{\ell^2} + GI_t \right] \frac{1}{r_o^2} = N_{ez} \quad (2.70)$$

Em 1a. espécie, a elástica fica indeterminada, obtendo-se apenas a sua forma:

$$\phi(z) = C_3 \left[\text{sen}Pz - \frac{\text{sen}P\ell}{\ell} z \right] \quad (2.71)$$

A carga crítica será a menor entre N_v , N_w e N_ϕ .

- b) Seções monossimétricas, com a força N aplicada no CG da seção transversal.

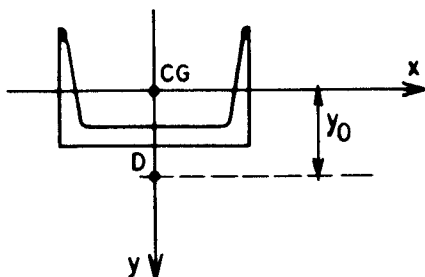


Figura 2.16- SEÇÃO MONOSSIMÉTRICA COM A FORÇA DE COMPRESSÃO APLICADA NO C.G.

Considerando como sendo y o eixo de simetria, as equações de equilíbrio (2.55), (2.56) e (2.57), resultam:

$$EI_x v_D^{iv} + Nv_D'' = 0 \quad (2.72)$$

$$EI_y w_D^{iv} + Nw_D'' + Ny_0 \phi'' = 0 \quad (2.73)$$

$$EC_w \phi^{iv} + [Nr_o^2 - GI_t] \phi'' + Ny_0 w_D'' = 0 \quad (2.74)$$

A equação (2.72) é desacoplada, enquanto que, as equações (2.73) e (2.74) encontram-se acopladas. Portanto, a flambagem dar-se-á por flexão em torno do eixo "x", ou por flexão e torção em torno do eixo "y".

Da equação (2.72), tem-se:

$$N_v = \frac{\pi^2 E I_x}{\ell^2} = N_{ex} \quad (2.75)$$

Integrando as equações (2.73) e (2.74) e aplicando as condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 w_D(0) &= 0 & w_D(l) &= 0 \\
 w_D''(0) &= 0 & w_D''(l) &= 0 & (2.76) \\
 \phi(0) &= 0 & \phi(l) &= 0 \\
 \phi''(0) &= 0 & \phi''(l) &= 0
 \end{aligned}$$

Tem-se o sistema:

$$w_D'' + \frac{N}{EI_Y} w_D + \frac{Ny_0}{EI_Y} \phi = 0 \quad (2.77)$$

$$\phi'' + \frac{Nr_0^2 - GI_t}{EC_w} \phi + \frac{Ny_0}{EC_w} w_D = 0 \quad (2.78)$$

Isolando ϕ na equação (2.77) e substituindo ϕ e ϕ'' na equação (2.78), obtém-se uma equação diferencial:

$$w_D^{iv} + k_1 w_D'' + k_2 w_D = 0 \quad (2.79)$$

onde:

$$k_1 = \frac{N}{EI_Y} + \frac{Nr_0^2 - GI_t}{EC_w} \quad (2.80)$$

$$k_2 = \left[\frac{Nr_0^2 - GI_t}{EC_w y_0} - \frac{Ny_0}{EC_w} \right] \frac{Ny_0}{EI_Y} \quad (2.81)$$

A solução geral da equação diferencial (2.79) é:

$$w_D(z) = C_1 \operatorname{sen} \delta_1 z + C_2 \operatorname{cos} \delta_1 z + C_3 \operatorname{sen} \delta_2 z + C_4 \operatorname{cos} \delta_2 z \quad (2.82)$$

Impondo as condições de contorno (2.76),
obtem-se:az

$$C_1 (\delta_2^2 - \delta_1^2) \operatorname{sen} \delta_1 l = 0 \quad (2.83)$$

$$C_3 (\delta_1^2 - \delta_2^2) \operatorname{sen} \delta_2 l = 0 \quad (2.84)$$

A carga crítica é obtida através de:

$$\operatorname{sen} \delta_1 l = 0 \quad \rightarrow \quad \delta_1 l = \pi \quad (2.85)$$

OU

$$\operatorname{sen} \delta_2 l = 0 \quad \rightarrow \quad \delta_2 l = \pi \quad (2.86)$$

Portanto, a equação característica $\lambda^4 + k_1 \lambda^2 + k_2 = 0$,
tem como raiz a expressão.

$$\lambda^2 = - \frac{\pi^2}{l^2} \quad (2.87)$$

Considerando as expressões de k_1 e k_2 e
rearranjando os termos comuns, tem-se uma equação quadrática
em $N_{w\phi}$. Onde as raízes desta equação são dadas por:

$$N_{eyz} = N_{w\phi} = \frac{r_o^2 (N_w + N_\phi) \pm r_o \sqrt{r_o^2 (N_w + N_\phi)^2 - 4 (r_o^2 - y_o^2) N_w N_\phi}}{2 (r_o^2 - y_o^2)} \quad (2.88)$$

A carga crítica é o menor valor entre N_v e $N_{w\phi}$.

c) seções assimétricas, com a força normal N aplicada no C.G
da seção transversal.

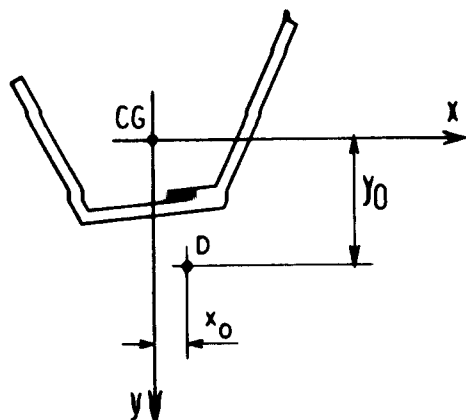


Figura 2.17- SEÇÃO ASSIMÉTRICA COM A FORÇA COMPRESSÃO APLICADA NO C.G.

Das equações de equilíbrio (2.55), (2.56) e (2.57), tem-se:

$$EI_x v_D^{iv} + Nv_D'' - Nx_O \phi'' = 0 \quad (2.89)$$

$$EI_y w_D^{iv} + Nw_D'' + Ny_O \phi'' = 0 \quad (2.90)$$

$$EC_w \phi^{iv} + [Nr_O^2 - GI_t] \phi'' - Nx_O v_D'' + Ny_O w_D'' = 0 \quad (2.91)$$

Verifica-se que as equações (2.89) (2.90) e (2.91) estão acopladas, portanto, a flambagem dar-se-á por torção e flexão em torno dos eixos "y" e "x".

Resolvendo o sistema de equações diferenciais, representado pelas equações (2.89), (2.90) e (2.91), obtém-se uma equação cúbica em (N):

$$r_O^2 [N - N_v] [N - N_w] [N - N_\phi] - N^2 y_O^2 [N - N_v] - N^2 x_O^2 [N - N_w] = 0 \quad (2.92)$$

onde:

$$N_v = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} = N_{ex} \quad (2.93)$$

$$N_w = \frac{\pi^2 EI_Y}{l^2} = N_{ey} \quad (2.94)$$

$$N_\phi = \left[\frac{\pi^2 EC_w}{l^2} + GI_t \right] \frac{1}{r_o^2} = N_{ez} \quad (2.95)$$

A carga crítica é a menor das três raízes da equação (2.92).

2.8- CONSIDERAÇÕES FINAIS

Das hipóteses consideradas no estudo da flambagem por flexão, algumas são teoricamente idealizadas, como por exemplo: material infinitamente elástico, perfeitamente homogêneo e isótropo; barra ideal e ausência de imperfeições iniciais e tensões residuais.

No regime elástico, para grandes valores de λ , ocorre um valor limite a partir do qual as prescrições teóricas são muito próximas das obtida através de resultados de ensaios.

A carga crítica de flambagem por flexão, por torção e por flexão e torção pode ser obtida a partir das equações (2.55), (2.56) e (2.57). Portanto, a flambagem por flexão e por torção é considerada um caso particular ocorrendo com determinadas condições de carregamento, vinculação e geometria.

Para determinar a carga crítica de flambagem por flexão e torção ou por torção (em seções duplamente simétricas, monossimétricas e assimétricas) considera-se o vínculo de garfo, portanto, o calculista deve se preocupar em detalhar as ligações nos projetos considerando este vínculo.

No regime elástico, considera-se a carga crítica

de flambagem por flexão e torção ou por torção para definir a tensão crítica de flambagem elástica no "Capítulo 8", obtendo-se o índice de esbeltez reduzido ($\bar{\lambda}$).

A partir do exposto anteriormente será possível determinar a resistência de cálculo de barras axialmente comprimidas, para os estados limites de flambagem por flexão e torção ou por torção, no regime elástico.

O efeito da força cortante no cálculo da carga crítica de flambagem em perfis de alma cheia pode ser desprezado, pois o valor do fator (β), o qual multiplica o comprimento efetivo de flambagem, aproxima-se da unidade.

CAPÍTULO 3

FLAMBAGEM INELÁSTICA

3.1- GENERALIDADES

Descreve-se, neste capítulo, o fenômeno da flambagem de barras comprimidas no regime inelástico, através das teorias do módulo tangente e do módulo reduzido. Estas teorias explicam o comportamento do material, no momento em que algumas fibras da seção transversal atingem a tensão correspondente à plastificação, enquanto que outras encontram-se no regime elástico.

A análise destas teorias torna-se fundamental no cálculo da resistência das barras comprimidas com imperfeições iniciais e tensões residuais.

Entende-se por regime inelástico, a perda da linearidade no intervalo entre a tensão de proporcionalidade e a tensão de escoamento do material, decorrente das tensões residuais no aço.

Uma barra prismática comprimida axialmente, com material infinitamente elástico, figura 3.1a, apresenta a tensão crítica de flambagem deduzida por Euler.

$$f_e = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (3.1)$$

Para uma barra comprimida com o comportamento tensão-deformação elástico perfeitamente plástico, figura 3.1b, a tensão crítica de flambagem de Euler será válida somente para $f_e \leq f_y$, ou seja, para $\lambda \geq \pi \sqrt{E/f_y}$. Neste caso o escoamento da barra por compressão é um dos estado limite últimos.

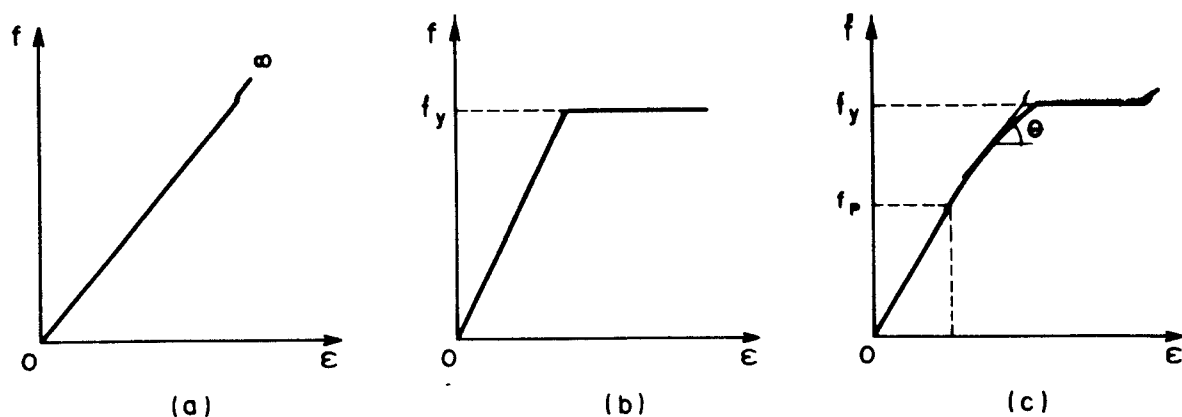


Figura 3.1- DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO, (a) COMPORTAMENTO ELÁSTICO, (b) COMPORTAMENTO ELASTO-PLÁSTICO e (c) COMPORTAMENTO INELÁSTICO.

As tensões residuais nos perfis estruturais de aço alteram o comportamento tensão-deformação (figura 3.1c), portanto, a tensão crítica de flambagem de Euler só é aplicada para $f_e \leq f_p$.

Para valores da tensão $f_e > f_p$, a tensão crítica de flambagem deve ser corrigida, levando-se em conta o comportamento inelástico do material.

ENGESSER (1889) verificou que uma barra com um material obedecendo o diagrama tensão-deformação da figura 3.1c, atinge a bifurcação do equilíbrio acima do limite de proporcionalidade. Para explicar tal comportamento propôs a teoria do módulo tangente.

3.2- TEORIA DO MÓDULO TANGENTE

A teoria do módulo tangente descreve o comportamento da flambagem de barras no regime inelástico, as quais apresentam tensão crítica de flambagem superior à tensão de proporcionalidade do material. O módulo tangente, E_T , governará o comportamento destas fibras durante a flambagem.

Para a análise desta teoria, considera-se cinco hipóteses fundamentais:

- a) A barra é perfeitamente reta;
- b) Barra biapoiada com força aplicada no eixo centróide;
- c) Os deslocamentos são pequenos comparados às dimensões da seção transversal da barra;
- d) A seção plana permanece plana durante a flexão;
- e) Não há inversão no sentido da deformação transversal da seção da barra, durante a flexão.

A figura 3.2a representa uma barra submetida a força crítica do módulo tangente, N_T , em sua posição deslocada. Os aumentos combinados da força axial dN_T e do momento fletor dM , durante a flambagem, provocam um aumento na deformação axial da seção no lado côncavo da curvatura.

A distribuição das deformações e tensões estão esquematizadas na figura 3.2b, onde a tensão f_T e a deformação ϵ_T , ocorrem antes da flambagem.

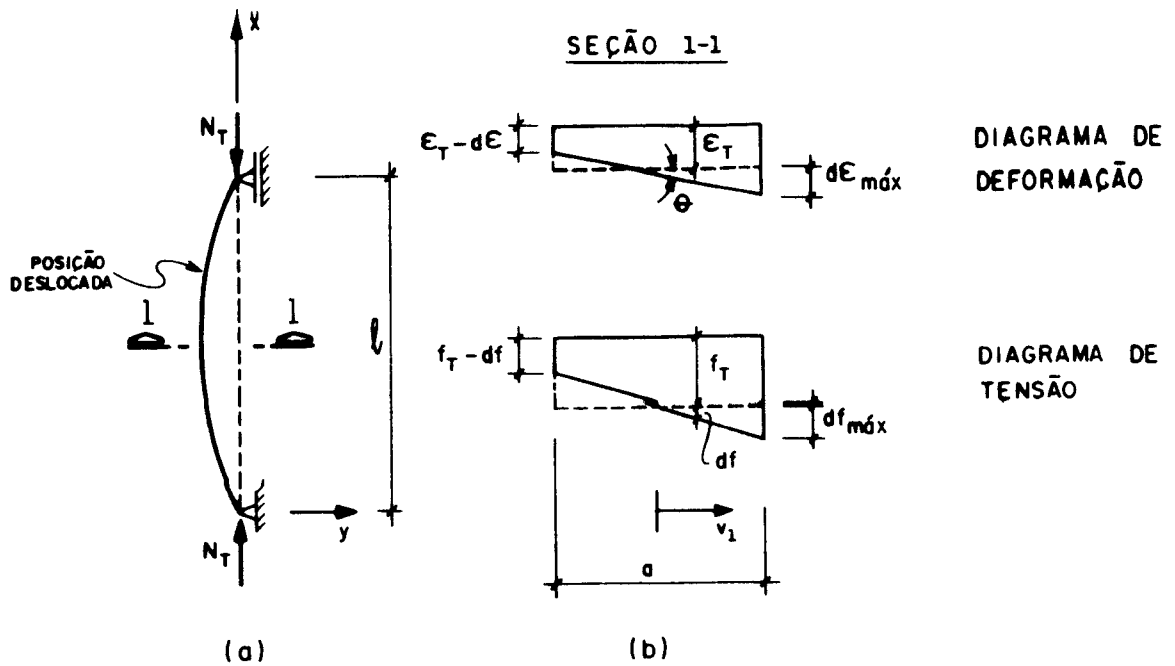


Figura 3.2-. TEORIA DO MÓDULO TANGENTE.

A figura 3.3 esquematiza o comportamento tensão-deformação da seção transversal, obtendo-se, portanto, o módulo tangente como a inclinação da curva para cada ponto específico. Resumindo, o módulo tangente varia ponto a ponto após a tensão de proporcionalidade.

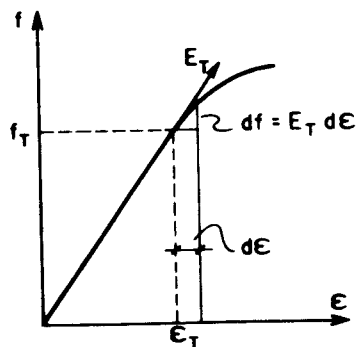


Figura 3.3- DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO.

$$E_T = \frac{df}{d\epsilon} \quad (3.2)$$

A equação de equilíbrio para um segmento da barra comprimida (dx) é:

$$-M_{int} + N_T v = 0 \quad (3.3)$$

onde:

v = deslocamento na direção y .

O momento interno na seção é:

$$M_{int} = \int_{A_g} f v_1 dA_g \quad (3.4)$$

onde:

v_1 = distância da fibra ao eixo neutro da seção transversal

f = tensão longitudinal de uma fibra na seção transversal.

Da figura 3.2b, tem-se:

$$f = f_T + df = f_T + \frac{df_{m\acute{a}x}}{a} (v_1 + a/2) \quad (3.5)$$

Substituindo a equação (3.5) em (3.4) e rearranjando;

$$M_{int} = f_T \int_{A_g} v_1 dA_g + \frac{df_{m\acute{a}x}}{a} \int_{A_g} v_1^2 dA_g + \frac{df_{m\acute{a}x}}{2} \int_{A_g} v_1 dA_g \quad (3.6)$$

onde:

$$\int_{A_g} v_1 dA_g = 0 \quad (3.7)$$

$$\int_{A_g} v_1^2 dA_g = I \quad (3.8)$$

Substituindo as equações (3.7) e (3.8) em (3.6), obtém-se:

$$M_{int} = \frac{df_{m\acute{a}x}}{a} I = dM \quad (3.9)$$

Substituindo $df_{m\acute{a}x} = E_T d\epsilon_{m\acute{a}x}$ na equação (3.9) e considerando que $d\epsilon_{m\acute{a}x}/a = \theta$, tem-se:

$$M_{int} = E_T I \theta \quad (3.10)$$

onde:

$$\theta = -v'' \quad (3.11)$$

Substituindo as equações (3.10) e (3.11) na equação (3.3), tem-se:

$$E_T I v'' + N_T v = 0 \quad (3.12)$$

A equação (3.12) é a equação diferencial de equilíbrio para uma barra biapoiada na posição deslocada, submetida à força axial do módulo tangente.

A solução desta equação é feita conforme foi apresentado na flambagem elástica, substituindo-se apenas E_T por E . Portanto, a solução será:

$$N_T = \frac{\pi^2 E_T I}{\ell^2} = \frac{E_T}{E} N_e \quad (3.13)$$

ou

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E_T}{\lambda^2} \quad (3.14)$$

As tensões não podem ser calculadas diretamente, pois existe uma correlação entre o módulo tangente (E_T) e a tensão (f), figura 3.3.

Através de estudos experimentais, é possível obter a curva tensão-deformação, figura 3.4, a qual representa o comportamento elástico e inelástico das barras de aço comprimidas.

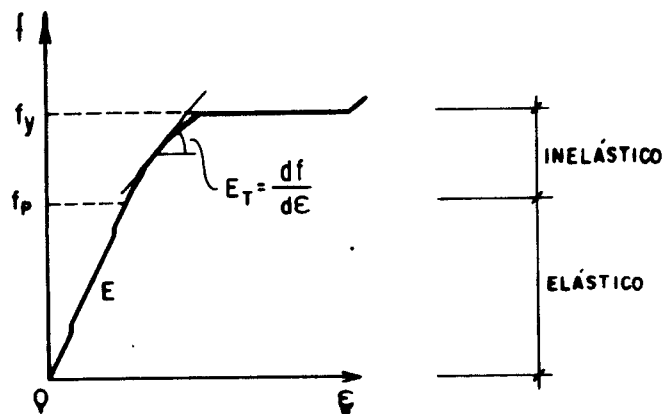


Figura 3.4- DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO (REGIME ELÁSTICO E INELÁSTICO).

A tensão f_p é considerada o limite entre os regimes elástico e inelástico e igualando-se f_p com a tensão crítica de Euler, obtém-se o índice de esbelteza de proporcionalidade, acima do qual o regime é elástico.

$$f_p = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{lim}^2} \quad (3.15)$$

$$\lambda_p = \pi \sqrt{E/f_p} \quad (3.16)$$

O gráfico da figura 3.5 representa a curva de flambagem para as barras de aço comprimidas nos campos elástico e inelástico.

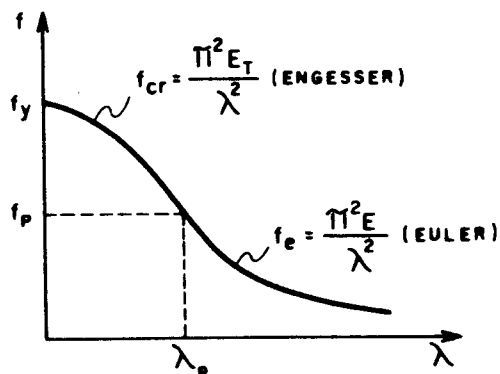


Figura 3.5- DIAGRAMA TENSÃO-ESBELTEZ.

Para valores de $\lambda < \lambda_p$ o material não obedece mais a lei de Hooke, adotou-se uma parábola para representar o comportamento inelástico, com início em f_y , para $\lambda = 0$ e término tangente à hipérbole de Euler no ponto de $\lambda = \lambda_p$.

Ressalta-se que o índice de esbeltez $\lambda = kl/r$ para a tensão de flambagem inelástica é o mesmo formulado para a flambagem elástica, ou seja, mantém-se os coeficientes de flambagem k apresentados no estudo da flambagem elástica.

Apesar das cargas críticas obtidas pela teoria do módulo tangente corresponderem rigorosamente aos resultados de ensaios, o conceito inicial de Engesser era incorreto.

Engesser estabeleceu que a bifurcação do equilíbrio ocorre sem alterar o valor da carga crítica (fig. 3.6a) e, portanto, a soma das tensões introduzidas pelo momento fletor Nv_0 (fig.3.6b), as quais ocorrem após a flambagem, devem ser nulas para qualquer seção transversal da barra. No entanto, este momento fletor provoca um aumento das tensões de compressão num lado da seção transversal e uma redução no lado oposto, conforme ilustra a figura 3.6c.

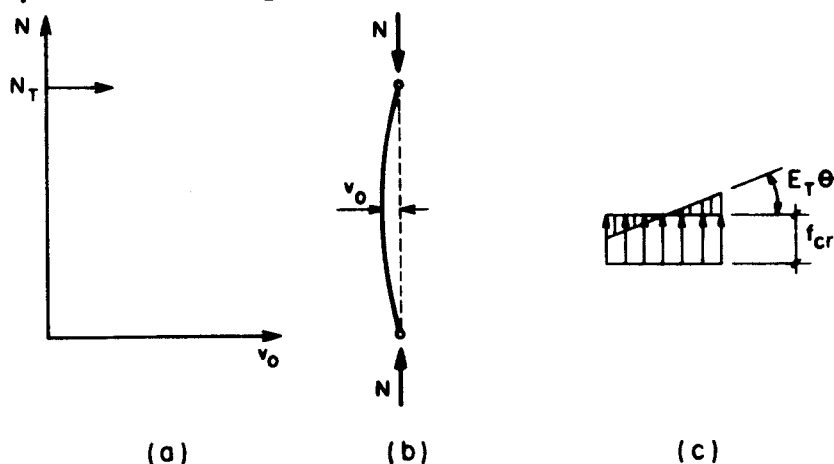


Figura 3.6- CONCEITO DE ENGESSER DE FLAMBAGEM DE BARRA INELÁSTICA

A perda de instabilidade da coluna, flambagem, ocorrendo no campo elástico, o carregamento e descarregamento das fibras será governado pelo módulo elástico (E). Entretanto, no campo inelástico, Engesser

considerou que o módulo tangente (E_T) é responsável pelo comportamento tensão-deformação no carregamento e descarregamento das fibras, de uma dada seção transversal.

Figura 3.7.

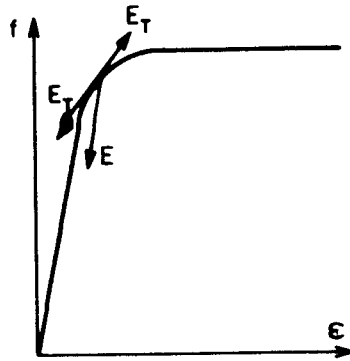


Figura 3.7- CARREGAMENTO E DESCARREGAMENTO DAS FIBRAS, TEORIA DO MÓDULO TANGENTE.

Na realidade, comprovou-se posteriormente que os materiais descarregam-se no campo elástico (E), conforme representa a figura 3.8.

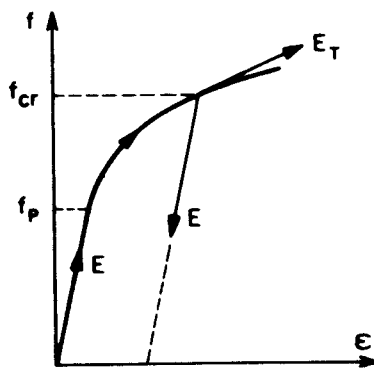


Figura 3.8- CARREGAMENTO E DESCARREGAMENTO DAS FIBRAS, TEORIA DO MÓDULO REDUZIDO

JASINSKY (1895) demonstrou que a teoria de Engesser, módulo tangente, era incorreta conforme os conceitos da estabilidade clássica. Então, ENGESSER (1898) modificou sua teoria introduzindo o efeito do descarregamento elástico, obtendo assim a teoria do módulo reduzido ou duplo módulo.

3.3- TEORIA DO MÓDULO REDUZIDO OU DUPLO MÓDULO

A teoria do módulo reduzido, baseou-se no mesmo conceito fundamental adotado pela teoria do módulo tangente, ou seja, a força solicitante não varia na flambagem.

Portanto, na flambagem, a barra será solicitada por um momento fletor que provocará um aumento das tensões de compressão em um dos lados da seção transversal e uma redução das tensões no outro lado.

Considerou-se então, na teoria do módulo reduzido a não reversibilidade do diagrama tensão-deformação no regime inelástico, ou seja, no campo inelástico os acréscimos devido ao carregamento são governados pelo módulo tangente E_T e os decréscimos, descarregamentos, governados pelo módulo elástico E , conforme figura 3.8.

Para análise desta teoria, deve-se verificar as seguintes hipóteses:

- a) Seja conhecida a curva tensão- deformação do material;
- b) Campo dos pequenos deslocamentos;
- c) Seção permanece plana durante a flexão;
- d) Nenhuma alteração da força é associada à bifurcação do equilíbrio;
- e) Barra biapoiada perfeitamente reta com força aplicada no centróide.

A figura 3.9a representa uma barra submetida a força correspondente ao módulo reduzido, N_r , em sua posição deslocada, enquanto que, a figura 3.9b representa os diagramas de deformação e de tensão, respectivamente.

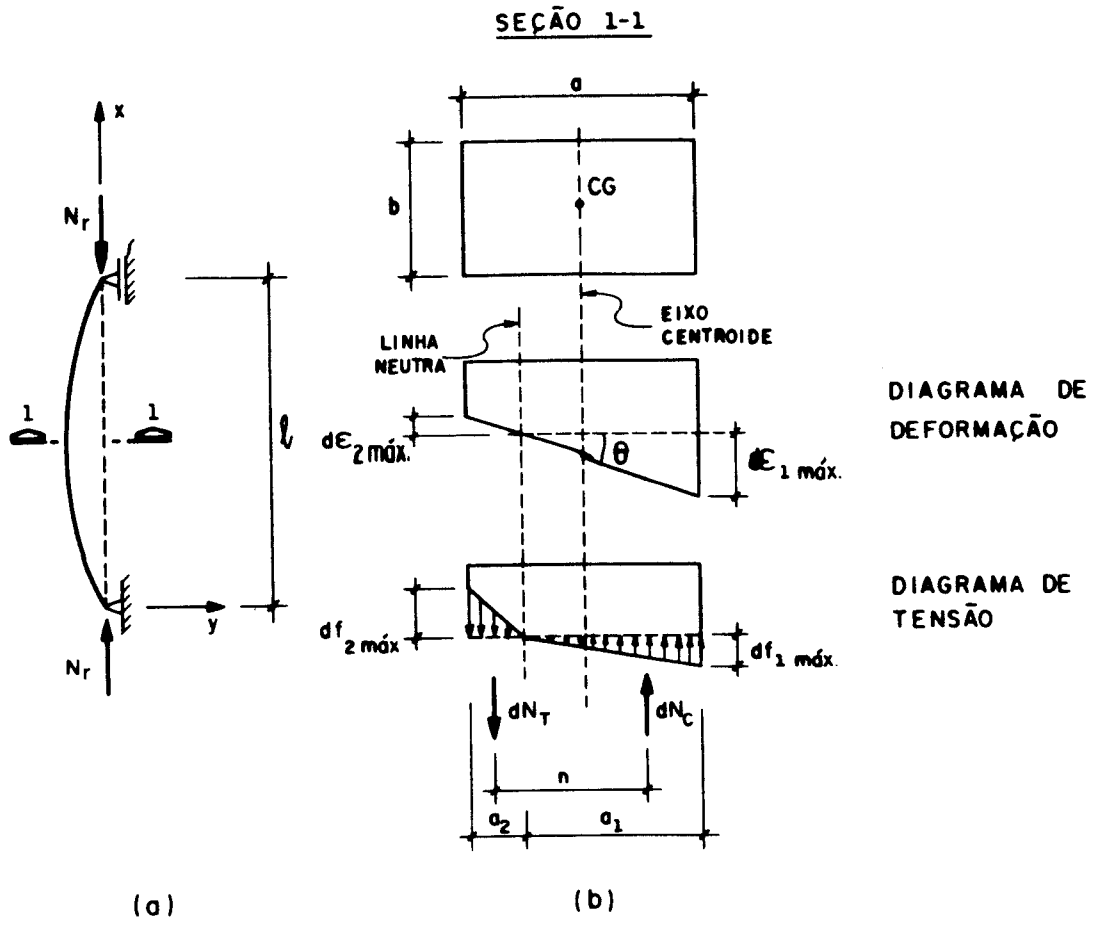


Figura 3.9- TEORIA DO MÓDULO REDUZIDO.

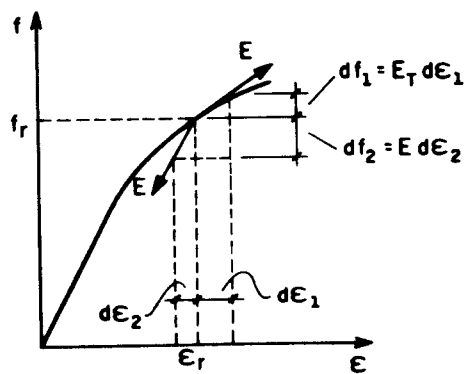


Figura 3.10- DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO, TEORIA DO MÓDULO REDUZIDO

A equação de equilíbrio para um segmento (dx) é:

$$-M_{int} + N_r v = 0 \quad (3.17)$$

Por equilíbrio, tem-se da figura 3.9b.

$$dN_C - dN_T = 0 \quad (3.18)$$

O momento interno resistente da barra é:

$$M_{int} = dN_C \cdot n = dN_T n \quad (3.19)$$

onde:

n = distância entre o par de forças (figura 3.9b)

A resultante das forças de tração e compressão será:

$$dN_T = \frac{1}{2} b a_2 df_2 \quad (3.20)$$

e

$$dN_C = \frac{1}{2} b a_1 df_1 \quad (3.21)$$

Igualando as equações (3.20) e (3.21), tem-se:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{df_2}{df_1} \quad (3.22)$$

Da figura 3.9b, tem-se:

$$d\epsilon_1 = \theta a_1 \quad (3.23)$$

e

$$d\epsilon_2 = \theta a_2 \quad (3.24)$$

Conforme ilustra a figura 3.10.

$$df_1 = E_T \theta a_1 \quad (3.25)$$

e

$$df_2 = E \theta a_2 \quad (3.26)$$

Substituindo as equações (3.25) e (3.26) nas equações (3.22), tem-se:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = \frac{E}{E_T} \quad (3.27)$$

Da equação (3.27) e considerando que $a = a_1 + a_2$, obtém-se:

$$a_1 = \frac{av\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_T}} \quad (3.28)$$

e

$$a_2 = \frac{av\sqrt{E_T}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_T}} \quad (3.29)$$

Das equações (3.28), (3.25) e (3.21).

$$dN_C = \frac{1}{2} ba^2 \frac{E E_T}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E_T}\right)^2} \theta \quad (3.30)$$

Similarmente, das equações (3.29), (3.26) e (3.20)

$$dN_T = \frac{1}{2} ba^2 \frac{E E_T}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E_T}\right)^2} \theta \quad (3.31)$$

Da figura 3.9b, obtém-se o valor de n .

$$n = a - \frac{1}{3} a_2 - \frac{1}{3} a_1 \quad (3.32)$$

ou

$$n = \frac{2}{3} a \quad (3.33)$$

Substituindo as equações (3.33) e (3.31) em (3.19), obtém-se:

$$M_{int} = \frac{1}{3} ba^3 \frac{E E_T}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E_T}\right)^2} \theta \quad (3.34)$$

Multiplicando o segundo membro da equação (3.34) por 4/4,

$$M_{int} = \frac{1}{12} ba^3 \frac{4E E_T}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E_T}\right)^2} \theta \quad (3.35)$$

onde:

$$\frac{1}{12} ba^3 = I \quad (\text{momento de inércia da seção retangular}) \quad (3.36)$$

$$\frac{4E E_T}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E_T}\right)^2} = E_r \quad (\text{módulo reduzido da seção retangular}) \quad (3.37)$$

Rearranjando a equação (3.35),

$$M_{int} = E_r I \theta \quad (3.38)$$

Substituindo a equação (3.38) em (3.37) e considerando $\theta = -v''$, obtém-se:

$$E_r I v'' + N_r v = 0 \quad (3.39)$$

A solução da equação (3.39) é conhecida como:

$$N_r = \frac{\pi^2 E_r I}{l^2} \quad (3.40)$$

Multiplicando a equação (3.40) por E/E , obtém-se:

$$N_r = \frac{E_r}{E} N_e \quad (3.41)$$

N_r é a carga crítica de flambagem, obtida conforme a teoria do módulo reduzido, como $E_r > E_T$, esta será sempre maior que a carga crítica pela teoria do módulo tangente (N_T).

O conceito teórico da estabilidade clássica indica que a teoria do módulo reduzido será mais correta que a teoria do módulo tangente, para o cálculo da flambagem no regime inelástico. Entretanto, os resultados de ensaios demonstram que as barras flambam com forças próximas à obtida, pela teoria do módulo tangente.

SHANLEY (1947)¹ solucionou este paradoxo, demonstrando teórica e experimentalmente que a carga crítica de flambagem depende essencialmente de como o ensaio é realizado.

3.4- MODELO DE SHANLEY

As discrepâncias entre o conceito do módulo reduzido e os resultados de ensaios originam-se na curvatura inicial da barra e na excentricidade de aplicação das forças, as quais não eram totalmente evitadas durante a execução dos ensaios.

Para confirmar esta suposição, Shanley ensaiou pequenas barras de alumínio, onde pôde ser verificado que os deslocamentos laterais iniciaram-se com as forças próximas

1

Shanley, F.R., Inelastic Column Theory e the column paradox

aos valores teóricos obtidos pelo módulo tangente, mas em nenhum caso atingiu os valores teóricos baseados ao módulo reduzido.

Shanley adotou um modelo matemático para explicar o comportamento pós-flambagem de uma barra inelástica.

Este modelo é composto por duas barras infinitamente rígidas ligadas por uma rótula plástica, conforme ilustra a figura 3.11.

Sejam ϵ_1 e ϵ_2 como sendo as deformações ocorridas após o início da flexão.

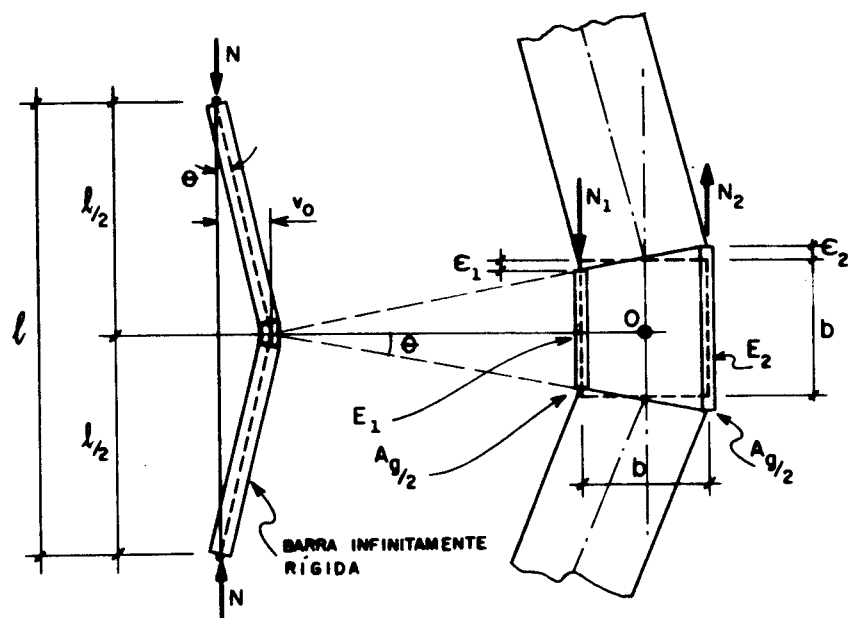


Figura 3.11- SEGMENTO DE BARRAS INFINITAMENTE RÍGIDAS LIGADOS POR UMA RÓTULA PLÁSTICA

O deslocamento lateral no meio do vão é igual a

$$v_0 = \theta l/2 \quad (3.42)$$

Por geometria, obtém-se o ângulo θ .

$$\theta = \frac{1}{b} (\epsilon_1 + \epsilon_2) \quad (3.43)$$

Das equações (3.42) e (3.43), obtém-se:

$$v_o = \frac{\ell}{2b} (\epsilon_1 + \epsilon_2) \quad (3.44)$$

O momento externo no ponto 0 será:

$$M_e = N v_o = \left[\frac{N\ell}{2b} (\epsilon_1 + \epsilon_2) \right] \quad (3.45)$$

Da resistência dos materiais, ou seja, através da formulação para o alongamento de uma barra solícitada por uma força axial constante, obtém-se a força axial em cada flange:

$$N_1 = \frac{2\epsilon_1 E_1 (A_g/2)}{b} \quad (3.46)$$

e

$$N_2 = \frac{2\epsilon_2 E_2 (A_g/2)}{b} \quad (3.47)$$

O momento interno no ponto 0 é:

$$M_{int} = \frac{b}{2} N_1 + \frac{b}{2} N_2 \quad (3.48)$$

Substituindo as equações (3.46) e (3.47) em (3.48), rearranjando, tem-se:

$$M_{int} = \frac{A_g}{2} (\epsilon_1 E_1 + \epsilon_2 E_2) \quad (3.49)$$

Por equilíbrio dos momentos, equações (3.45) e (3.49), obtém-se:

$$N = \frac{A_g}{\ell} \left(\frac{\epsilon_1 E_1 + \epsilon_2 E_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \quad (3.50)$$

Ocorre um aumento da tensão de compressão no elemento 1 e uma diminuição no elemento 2. Portanto,

substitui-se E_1 e E_2 por E_T e E , respectivamente.

$$N = \frac{A_g}{l} \left(\frac{E_T \epsilon_1 + E \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \quad (3.51)$$

Considerando que:

$$\varphi = E_T/E \quad (3.52)$$

Da equação (3.44), tem-se:

$$\epsilon_1 = \frac{2v_o b}{l} - \epsilon_2 \quad (3.53)$$

Pela análise do módulo tangente, tem-se:

$$E_1 = E_2 = E_T \quad (3.54)$$

Logo,

$$N_T = A_g E_T b/l \quad (3.55)$$

Substituindo a equação (3.53) em (3.51), e considerando as equações (3.52) e (3.55), obtém-se:

$$N = N_T \left[1 + \frac{l \epsilon_2}{2bv_o} (1/\varphi - 1) \right] \quad (3.56)$$

Após atingir a carga crítica referente ao módulo tangente, é possível aumentar a força normal de compressão. Este aumento é devido a diferença entre as forças N_1 e N_2 .

$$N = N_T + \Delta N \quad (3.57)$$

onde:

$$\Delta N = N_1 - N_2 \quad (3.58)$$

Das equações (3.44) e (3.47), obtém-se:

$$N_1 = \frac{\epsilon_1 E_T A_g}{b} \quad (3.59)$$

$$N_2 = \frac{\epsilon_2 E A_g}{b} \quad (3.60)$$

Das equações (3.52) (3.53), (3.59) e (3.60), obtém-se ΔN :

$$N_1 - N_2 = \frac{A_g E_T}{b} \left[\frac{2bv_0}{l} - \left(1 + 1/\varphi \right) \epsilon_2 \right] \quad (3.61)$$

Substituindo a equação (3.61) na equação (3.57) e considerando a equação (3.55), obtém-se:

$$N = N_T \left[1 + \frac{2v_0}{b} - \frac{l\epsilon_2}{b^2} \left(1 + 1/\varphi \right) \right] \quad (3.62)$$

Isolando ϵ_2 das equações (3.56) e (3.62), tem-se:

$$\epsilon_2 = 2v_0 \frac{1}{\frac{l}{2v_0} (1/\varphi - 1) + \frac{l}{b} (1/\varphi + 1)} \quad (3.63)$$

Substituindo a equação (3.63) em (3.56) e rearranjando, obtém-se:

$$N = N_T \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{b}{2v_0} \right) + (1+\varphi)/(1-\varphi)} \right] \quad (3.64)$$

Shanley considera que a barra inicia a flexão imediatamente após atingir a carga crítica referente ao módulo tangente. Desta forma, a equação (3.64) indica o comportamento pós-flambagem da barra, ou seja, quando a força normal (N) é maior que a carga crítica do módulo

tangente (N_T).

Conclui-se do modelo de Shanley que:

- a) A teoria do módulo tangente fornece a força máxima na qual uma barra inicialmente reta, permanecerá reta;
- b) A força normal crítica excede a obtida pelo módulo tangente (N_T), porém é inferior a do módulo reduzido (N_r);
- c) A força normal $N > N_T$ provoca deslocamentos laterais nas barras.

A figura 3.12 representa o comportamento força normal deslocamento de barras comprimidas axialmente.

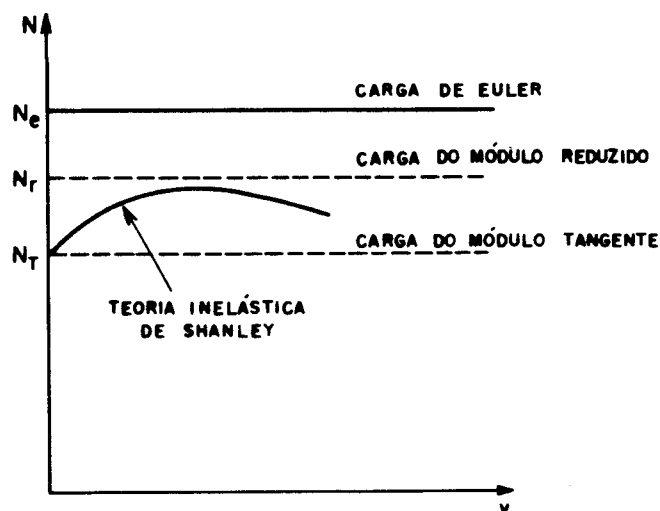


Figura 3.12- COMPORTAMENTO FORÇA-DESLOCAMENTO DE UMA BARRA PERFEITAMENTE RETA.

Ensaio realizados em barras comprimidas no regime inelástico, indicam que as resistências normalmente aproximam-se da carga crítica do módulo tangente. As imperfeições iniciais e as excentricidades acidentais na aplicação da força, justificam estes resultados.

Estes efeitos combinados correspondem a uma solicitação tipo flexo-compressão, na qual a força normal varia nas proximidades do valor crítico, atingindo valores próximos aos obtidos pela teoria do módulo tangente.

Além disso, a teoria do módulo tangente é mais simples, portanto, adota-se a força normal obtida pelo módulo tangente como sendo a resistência máxima das barras comprimidas axialmente.

A figura 3.13 esquematiza o comportamento força aplicada-deslocamento de quatro modelos de barras comprimidas: (a) barra ideal biapoiada com comportamento elástico perfeito; (b) barra ideal biapoiada com comportamento elasto-plástico perfeito; (c) barra biapoiada com imperfeições iniciais e tensões residuais; (d) barra com restrições de vinculação com imperfeições iniciais e tensões residuais.

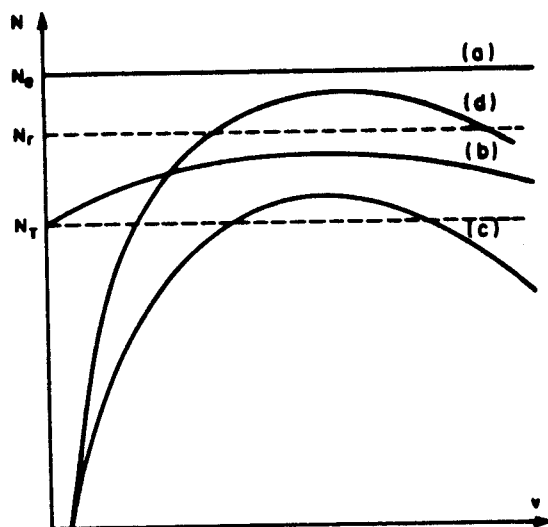


Figura 3.13- COMPORTAMENTO FORÇA-DESLOCAMENTO DE BARRAS.

3.5- CONSIDERAÇÕES FINAIS

O regime inelástico ocorre devido a presença de tensões residuais e eventualmente imperfeições iniciais nas estruturas de aço.

Apesar de todos os resultados de ensaios demonstrarem que as barras flambam com as forças próximas à carga crítica do módulo tangente, não se aplica esta teoria

devido a dificuldade no cálculo do módulo tangente, o qual varia em cada ponto da curva tensão-deformação (figura 3.3).

As duas teorias apresentadas (teoria do módulo tangente e teoria do módulo reduzido) não explicam efetivamente o fenômeno pela dificuldade em determinar o módulo tangente (E_T). Surgindo, portanto, para os regimes inelástico e elástico as curvas de flambagem, as quais serão apresentadas no "Capítulo 8".

CAPÍTULO 4

TENSÕES RESIDUAIS E IMPERFEIÇÕES INICIAIS

4.1- GENERALIDADES

Este capítulo descreve os fatores que influenciam a resistência das barras, tais como as tensões residuais e as imperfeições iniciais, existentes nas estruturas de aço.

Apresenta-se o cálculo do deslocamento lateral total (v_T) em uma barra com imperfeição de fabricação. Este deslocamento será utilizado para deduzir os principais parâmetros que regem as curvas de flambagem apresentadas pela Norma NBR 8800 . .

4.2- TENSÕES RESIDUAIS

4.2.1- Preliminares

As imperfeições estruturais ou mecânicas, presentes nos perfis de aço, consistem essencialmente na presença de tensões residuais e na distribuição heterogênea das características mecânicas numa dada seção transversal.

Denomina-se tensões residuais as tensões existentes nos perfis estruturais e chapas de aço, as quais surgem e permanecem durante a transformação do aço em um produto acabado. Tais tensões originam-se de deformações resultantes, essencialmente, dos efeitos térmicos e mecânicos ocorridos durante o processo de laminação dos aços.

Entende-se por efeitos térmicos: o resfriamento, a soldagem, o corte a maçarico, etc, enquanto que, os decorrentes dos efeitos da conformação mecânica são: a laminação a frio, dobramento e desempenamento.

O valor e a distribuição das tensões residuais dependem do tipo de seção transversal, da temperatura de laminação ou soldagem, das condições de resfriamento e métodos de retificação das peças. Segundo HUBER (1954)¹ a presença de tensões residuais nos perfis estruturais de aço é a principal causa da não-linearidade de parte do diagrama tensão-deformação das barras axialmente comprimidas, conforme figura 4.1.

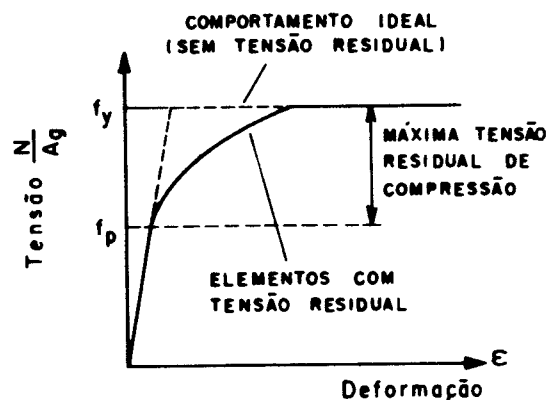


Fig. 4.1- INFLUÊNCIA TÍPICA DA TENSÃO RESIDUAL NA CURVA MÉDIA TENSÃO-DEFORMAÇÃO.

1

"HUBER, A.W., BEEDLE, L.S.(1954)" - Residual stress and compressive strength of steel. Welding Journal, V.33, n.12, p.589s-614s.

4.2.2- Tensões residuais nos perfis laminados a quente

As tensões residuais existentes nos perfis laminados a quente são provenientes do processo de resfriamento não uniforme das peças após a laminação, sendo que estas tensões são de origem térmica e sua distribuição podem alterar-se por algum processo mecânico.

Segundo GALAMBOS (1988)², o valor e distribuição das tensões residuais nos perfis laminados a quente dependem de vários fatores, tais como: seção transversal da peça, temperatura de laminação, condições de resfriamento, procedimentos de desempenamento e das propriedades do material.

Nos perfis laminados a quente, as mesas resfriam-se mais lentamente que a alma, devido as espessuras das mesas serem maiores. Entretanto, as partes mais expostas ao ar, como as extremidades das mesas e a parte central da alma, resfriam-se mais rapidamente.

A figura 4.2 ilustra as tensões residuais presentes nas regiões de resfriamento mais lento que serão de tração, e portanto, as tensões nas regiões de resfriamento mais rápido serão de compressão.

2

"GALAMBOS, T.V. (1988) - Guide to stability design criteria for metal structures. 4.ed. New York: John Wiley & Sons.

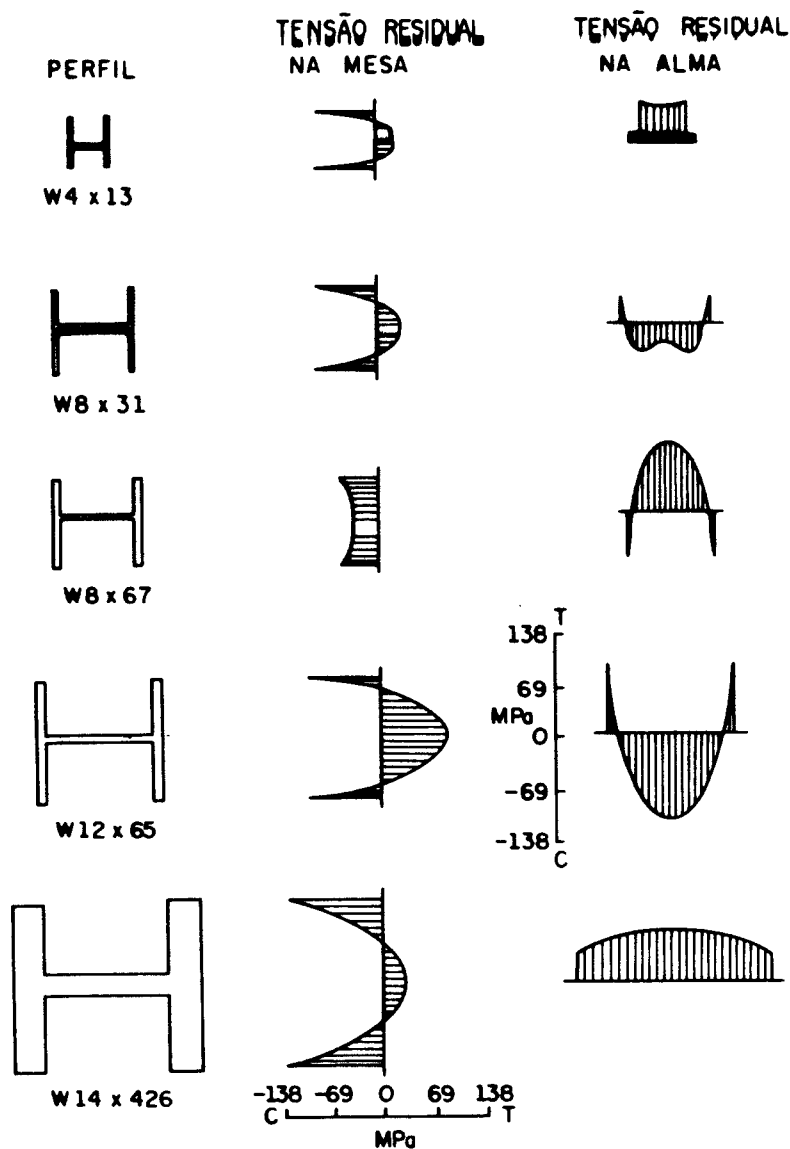


Fig. 4.2- DISTRIBUIÇÃO DE TENSÃO RESIDUAL EM PERFIS LAMINADOS DE ABAS PLANAS.

O valor das tensões residuais varia significativamente ao longo da espessura, nos perfis pesados (perfis "jumbo", não laminados no Brasil). A figura 4.3 representa o valor das tensões residuais medidas no perfil laminado (W14 x 730), tipo jumbo.

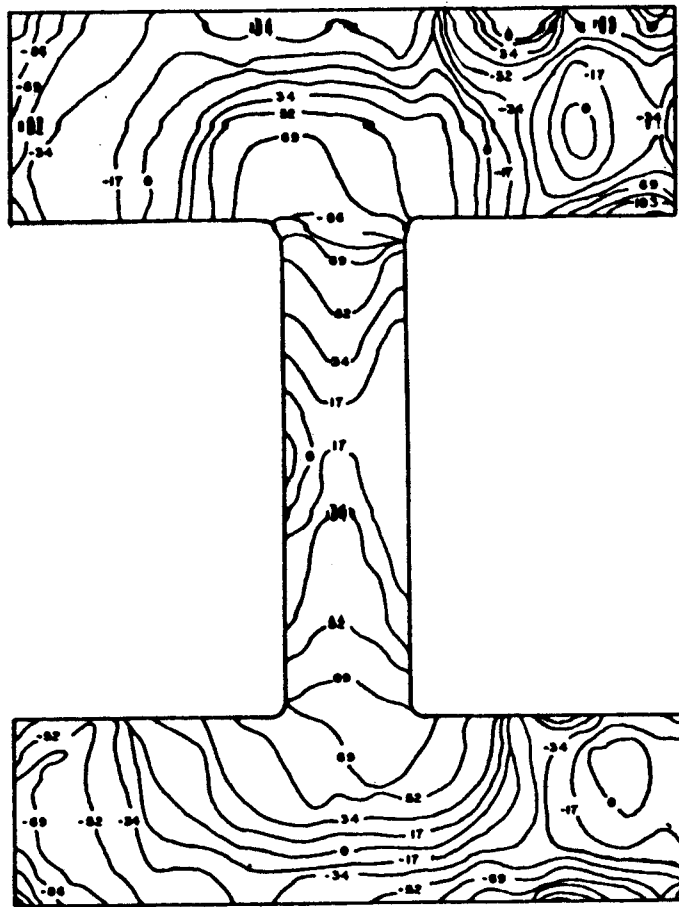


Fig. 4.3- DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES RESIDUAIS, EM CURVAS DE ISOTENSÕES, EM "MPa".

Segundo NAGARAJA (1964)³, a classe do aço não tem grande influência na distribuição da tensão residual, quanto o efeito da geometria da seção.

4.2.3- Tensões residuais em perfis soldados

Existem dois tipos de perfis soldados, os quais são: os perfis soldados compostos por barras chatas ("Welded shape universal-mill plates") e os perfis soldados compostos por chapas cortadas a maçarico ("Welded Shape flame-cut plates").

3

"NAGARAJA RAO, N.R., ESTUAR, F.R., TALL, L." (1964) - Residual stresses in welded shapes. Welding Journal, V.43, n.7, Research Suppl., p.295s - 306s.

Os elementos constituintes dos perfis compostos por barras chatas são formados por barras laminadas padronizadas. O termo barra-chata foi retirado do catálogo de produtos da companhia siderúrgica nacional (1962), enquanto que, os elementos constituintes dos perfis compostos por chapas cortadas a maçarico são obtidos através de cortes realizados em chapas laminadas, sendo este corte feito a maçarico.

A distribuição das tensões residuais nestes perfis é, geralmente diferente, conforme ilustra as figuras (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7).

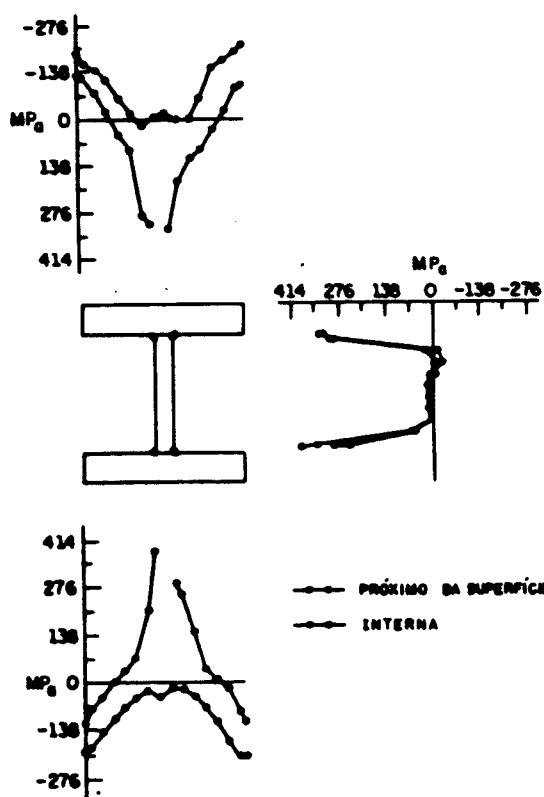


Figura 4.4-TENSÕES RESIDUAIS NO PERFIL SOLDADO 15H290 - BARRAS CHATAS, AÇO A36, SOLDA DE FILETE (12,7mm).

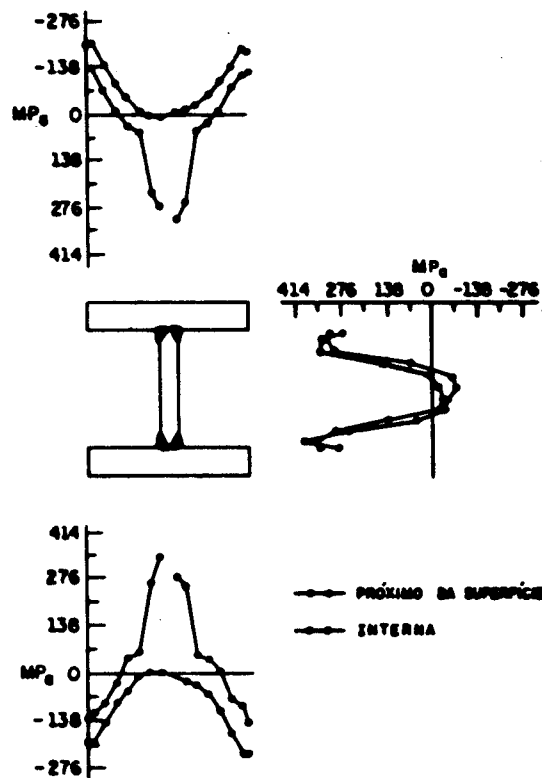


Figura 4.5- TENSÕES RESIDUAIS NO PERFIL SOLDADO 15H290 - BARRAS CHATAS, AÇO A36, SOLDA DE PENETRAÇÃO (9,3mm)

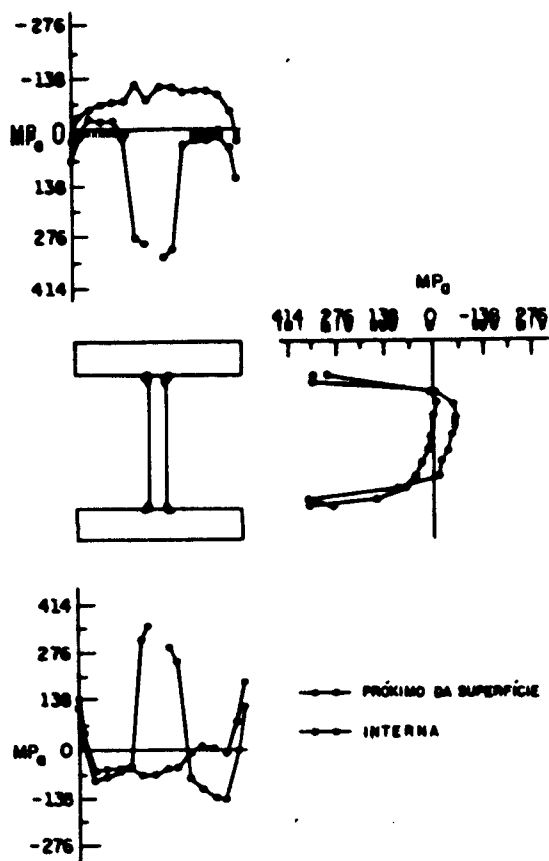


Figura 4.6-TENSÕES RESIDUAIS NO PERFIL SOLDADO 15H290 - CHAPAS CORTADAS A MAÇARICO, AÇO A36, SOLDA DE FILETE (12,7mm).

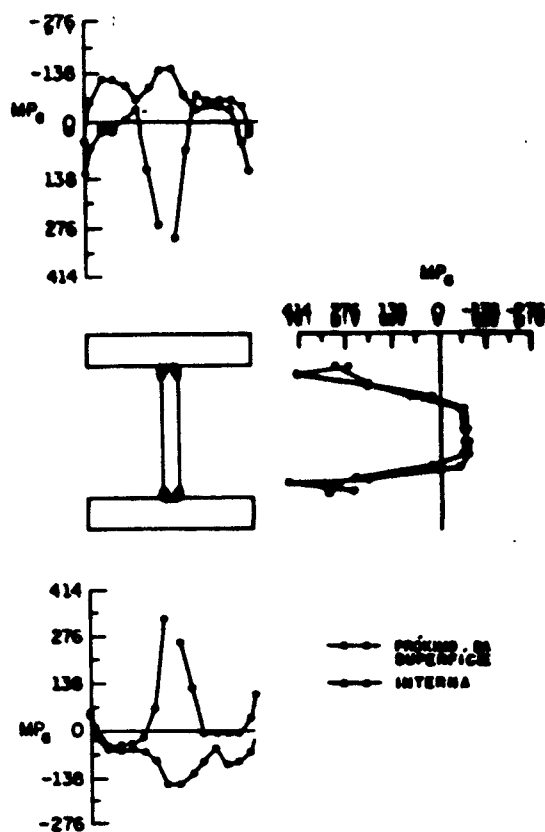


Figura 4.7- TENSÕES RESIDUAIS NO PERFIL SOLDADO 15H290 - CHAPAS CORTADAS A MAÇARICO, A36, SOLDA DE PENETRAÇÃO (9,3mm).

As tensões residuais nos perfis soldados são resultantes, principalmente, dos processos de soldagem. Estas tensões apresentam uma influência significativa na resistência das barras de perfis H, e em seções tipo caixão.

Segundo "ALPSTEN, (1970)"⁴, a máxima tensão

4

"ALPSTEN, G.A., TALL, L. (1970)" - Residual stresses in heavy welded shapes. Welding Journal, V.49, n.3 Research suppl., p.93s - 105s

residual de tração na solda ou numa pequena região adjacente à borda cortada a maçarico é igual ou superior a tensão de escoamento das chapas componentes.

O fenômeno da soldagem altera o valor das tensões residuais iniciais provenientes tanto das operações de corte a maçarico quanto do resfriamento das chapas.

A figura 4.8 representa uma comparação qualitativa da distribuição de tensões residuais entre as barras chatas "universal-mill plate" e as chapas cortadas a maçarico "flame-cut plate".

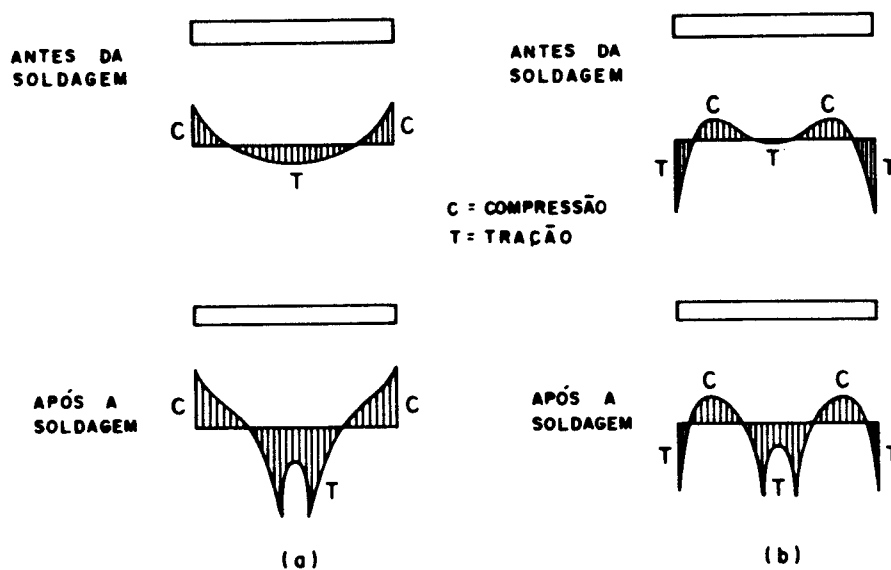


Fig. 4.8- COMPARAÇÃO QUALITATIVA DE TENSÕES RESIDUAIS EM BARRAS CHATAS E CHAPAS CORTADAS A MAÇARICO, ANTES DA SOLDAGEM E APÓS A SOLDAGEM NO CENTRO DA CHAPA: (a) BARRA CHATA; (b) CHAPA CORTADA A MAÇARICO.

As barras chatas apresentam tensões residuais de compressão nas bordas, enquanto que, as tensões residuais nas bordas das chapas cortadas a maçarico são de tração.

Nos perfis H compostos por barras chatas, a soldagem aumenta as tensões de compressão nas extremidades,

aumentando, portanto, a região da tensão residual de compressão, que diminuirá a tensão de proporcionalidade da barra.

O tipo de solda utilizada, não é um fator significativo à distribuição de tensões residuais nos perfis soldados, conforme pode ser observado nas figuras 4.4 e 4.6, solda de filete, e as figuras 4.5 e 4.7, solda de penetração.

A figura 4.9 representa o diagrama de isotensões para um perfil soldado composto por chapas cortadas a maçarico.

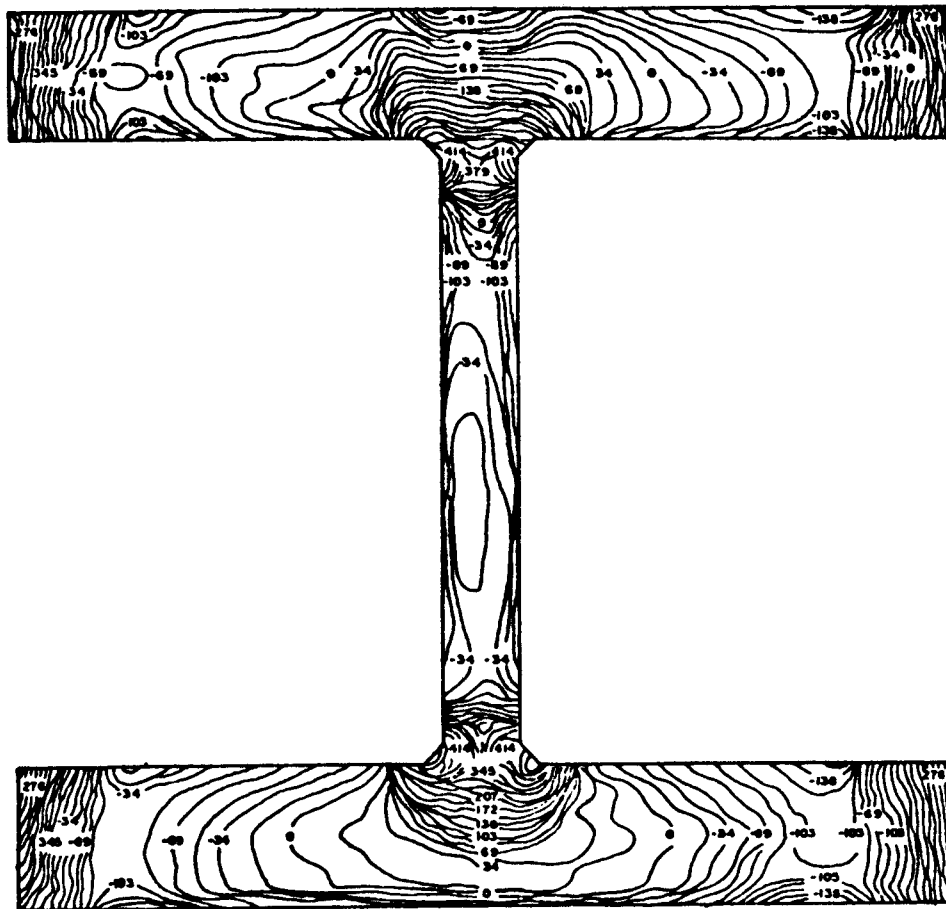


Fig. 4.9- DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES RESIDUAIS, EM CURVAS DE ISOTENSÕES, EM "MPa".

4.3- IMPERFEIÇÕES INICIAIS

4.3.1- Preliminares

Em estruturas metálicas, as imperfeições geométricas ocorrem durante o processo de laminação dos perfis e na fabricação das estruturas. A partir da existência destas imperfeições não é mais possível admitir a hipótese de barras perfeitamente retas. Nas barras comprimidas as imperfeições geométricas introduzem momentos fletores desde o início do carregamento.

Conforme ilustra a figura 4.10, desde o início do carregamento existem momentos fletores atuando na barra, iguais a Nv_0 no meio do vão.

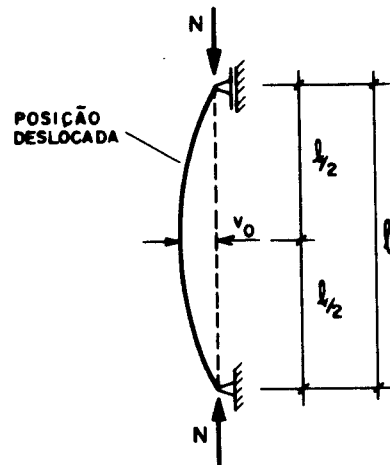


Figura 4.10- BARRA COMPRIMIDA COM IMPERFEIÇÃO INICIAL

A presença de imperfeições geométricas e a excentricidade inicial na extremidade da barra, tem uma influência significativa na capacidade limite da barra.

4.3.2- Barra com excentricidade inicial na extremidade

A figura 4.11 representa a condição de carregamento e a posição deslocada de uma barra comprimida excentricamente, onde a força de compressão N , encontra-se aplicada a uma distância v_0 do eixo centróide da barra.

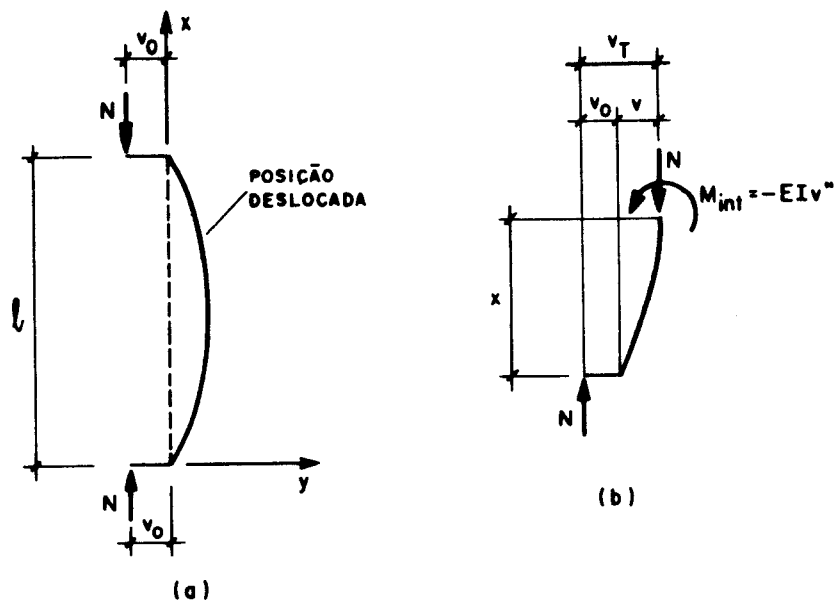


Figura 4.11- BARRA COMPRIMIDA EXCENTRICAMENTE.

Considerando o equilíbrio na posição deslocada, conforme a Figura 4.11b, tem-se:

$$-M_{int} + N(v_0 + v) = 0 \quad (4.1)$$

O momento interno pode ser escrito por:

$$M_{int} = -EIv'' \quad (4.2)$$

Substituindo a equação (4.2) na equação (4.1) e considerando $k^2 = N/EI$, obtém-se a equação diferencial

regente para a barra comprimida excentricamente:

$$v'' + k^2 v = -k^2 v_0 \quad (4.3)$$

A equação (4.3) é heterogênea e sua solução é obtida através da seguinte forma.

$$v = v_h + v_p \quad (4.4)$$

Sendo, v_h a solução da equação homogênea e v_p a solução particular não-homogênea.

A solução da equação homogênea é igual a

$$v_h = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \operatorname{cos} kx \quad (4.5)$$

A solução particular v_p é:

$$v_p = -v_0 \quad (4.6)$$

Substituindo as equações (4.5) e (4.6) em (4.4), tem-se a solução geral da equação (4.3).

$$v = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \operatorname{cos} kx - v_0 \quad (4.7)$$

Considera-se duas condições de contorno, para determinar as constantes C_1 e C_2 .

$$v(0) = 0 \quad (4.8)$$

$$v(l) = 0 \quad (4.9)$$

Das equações (4.8) e (4.7), tem-se:

$$C_2 = v_0 \quad (4.10)$$

Substituindo as equações (4.9) e (4.10) em (4.7), obtém-se:

$$C_1 = \left(\frac{1 - \cos kl}{\text{sen} kl} \right) v_0 \quad (4.11)$$

Substituindo as equações (4.10) e (4.11) em (4.7),
tem-se:

$$v = \left[\frac{1 - \cos kl}{\text{sen} kl} \text{sen} kx + \cos kx - 1 \right] v_0 \quad (4.12)$$

Percebe-se que o deslocamento lateral máximo ocorre no meio do vão. Portanto, substituindo $x = \ell/2$ na equação (4.12), tem-se:

$$v_{\text{máx}} = \left(\frac{1 - \cos kl}{\text{sen} kl} \text{sen} \frac{k\ell}{2} + \cos \frac{k\ell}{2} - 1 \right) v_0 \quad (4.13)$$

Rearranjando,

$$v_{\text{máx}} = \left(\frac{1}{\cos k\ell/2} - 1 \right) v_0 \quad (4.14)$$

O deslocamento lateral máximo, equação (4.14), é medido do eixo centróide original indeformado da barra. Sendo o deslocamento máximo total medido a partir da linha de aplicação da força normal N.

Obtém-se, o deslocamento total conforme a expressão (4.15).

$$v_T = v_{\text{máx}} + v_0 = v_0 \left(\frac{1}{\cos k\ell/2} \right) \quad (4.15)$$

Definindo-se, $m = 1/\cos k\ell/2$ como o fator de ampliação e considerando $k = \sqrt{N/EI}$, tem-se:

$$m = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{N/N_e}} \quad (4.16)$$

Substituindo a equação (4.16) na equação (4.15),
tem-se:

$$v_T = v_o \left(\frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{N/N_e} \right)} \right) \quad (4.17)$$

Verifica-se, através da equação (4.17) que v_T tende a infinito, quando N aproxima-se de N_e .

A figura 4.12, ilustra um gráfico do deslocamento lateral no meio do vão em função do carregamento, para duas relações de excentricidades, $v_o/l = 0,001$ e $0,005$. Verifica-se um aumento acentuado do deslocamento lateral, quando a força aproxima-se à carga crítica de Euler. A curva carregamento-deslocamento lateral aproxima-se assintoticamente para as cargas críticas obtidas utilizando as expressões de Euler.

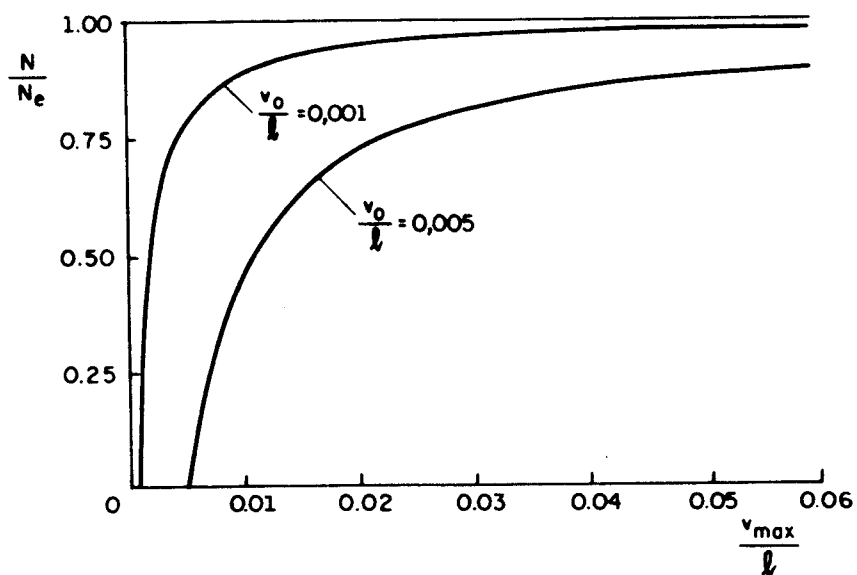


Figura 4.12- COMPORTAMENTO FORÇA-DESLOCAMENTO DE BARRAS COMPRIMIDAS EXCÊNTRICAMENTE.

Conclui-se, portanto, que a máxima força a qual uma barra perfeitamente elástica, comprimida excentricamente, pode suportar, é carga crítica de Euler.

Entretanto, devido ao escoamento do material, a carga crítica de flambagem para uma barra comprimida excentricamente é inferior a carga de Euler.

4.3.3- Barra com imperfeição de fabricação

A figura 4.13 ilustra uma barra com uma imperfeição inicial na posição deslocada. A equação de equilíbrio nesta posição é representada pela expressão (4.18).

$$-M_{int} + N(v_1 + v_2) = 0 \quad (4.18)$$

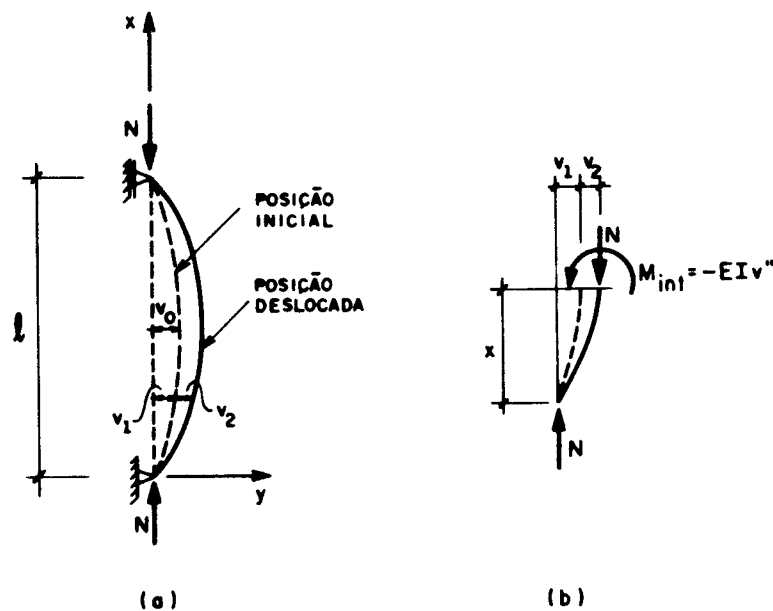


Figura 4.13- BARRA COM IMPERFEIÇÃO INICIAL.

Admitindo-se a curvatura inicial como uma função senoidal, a qual satisfaz as condições de contorno da barra, tem-se:

$$v_1 = v_0 \text{ sen } (\pi x/l) \quad (4.19)$$

v_0 é a flecha inicial no meio do vão.

A força axial de compressão aplicada na barra, provoca um deslocamento lateral adicional.

$$v_2 = v \text{ sen}(\pi x/l) \quad (4.20)$$

Em 2a. ordem, tem-se o momento interno.

$$M_{int} = -EIv_2'' \quad (4.21)$$

Substituindo a equação (4.21) na equação (4.18), obtém-se a equação diferencial regente do problema.

$$EIv_2'' + N(v_1 + v_2) = 0 \quad (4.22)$$

Das equações (4.19) e (4.22), tem-se:

$$EIv_2'' + Nv_2 = -Nv_0 \text{ sen } (\pi x/l) \quad (4.23)$$

Substituindo $k^2 = N/EI$ na equação (4.23)

$$v_2'' + k^2 v_2 = -k^2 v_0 \text{ sen } \pi x/l \quad (4.24)$$

A equação (4.24) é heterogênea e sua solução é obtida pela equação.

$$v_2 = v_{2h} + v_{2p} \quad (4.25)$$

Sendo, v_{2h} a solução da equação homogênea e v_{2p} a solução particular da não-homogênea.

$$v_{2h} = C_1 \text{ sen } kx + C_2 \text{ cos } kx \quad (4.26)$$

$$v_{2p} = C_3 \text{ sen } \frac{\pi x}{\ell} + C_4 \text{ cos } \frac{\pi x}{\ell} \quad (4.27)$$

Substituindo a equação (4.27) na equação (4.24), obtém-se as constantes C_3 e C_4 .

$$C_3 = - \frac{k^2 \ell^2}{(k^2 \ell^2 - \pi^2)} v_0 \quad (4.28)$$

Rearranjando

$$C_3 = \frac{v_0 N/N_e}{1 - N/N_e} \quad (4.29)$$

$$C_4 (k^2 - \frac{\pi^2}{\ell^2}) = 0 \quad (4.30)$$

Da equação (4.30), tem-se:

$$C_4 = 0 \quad (4.31)$$

ou

$$k^2 = \pi^2 / \ell^2 \quad (4.32)$$

Substituindo-se (4.28) e (4.31) em (4.27), tem-se:

$$v_{2p} = \frac{v_0 N/N_e}{1 - N/N_e} \text{ sen } \left(\frac{\pi x}{\ell} \right) \quad (4.33)$$

Para a resolver a equação (4.26), considera-se as duas condições de contorno:

$$v_2(0) = 0 \quad (4.34)$$

$$v_2(\ell) = 0 \quad (4.35)$$

Obtém-se das equações (4.34) e (4.35) respectivamente, os valores de C_1 e C_2 :

$$C_2 = 0 \quad (4.36)$$

$$C_1 \operatorname{sen} k\ell = 0 \quad (4.37)$$

Da equação (4.37), tem-se:

$$C_1 = 0 \quad (4.38)$$

ou

$$\operatorname{sen} k\ell = 0 \quad (4.39)$$

Considerando $\operatorname{sen} k\ell = 0$, obtém-se novamente a solução limite, $N = N_e$. Portanto, a solução da equação (4.26) são as equações (4.36) e (4.38).

Então, a equação (4.25) é reescrita:

$$v_2 = \frac{v_0 N/N_e}{1-N/N_e} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{\ell} \right) \quad (4.40)$$

Somando as equações (4.19) e (4.40), obtém-se o deslocamento lateral total.

$$v_T = v_1 + v_2 \quad (4.41)$$

$$v_T = \frac{N/N_e}{1-N/N_e} v_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell} + v_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell} \quad (4.42)$$

Rearranjando, obtém-se:

$$v_T = \left(\frac{1}{1-N/N_e} \right) v_0 \text{sen } \frac{\pi x}{l} \quad (4.43)$$

Define-se $m = \frac{1}{1-N/N_e}$ como o fator de ampliação.

O deslocamento lateral máximo ocorre no meio do vão, $x = l/2$. Portanto, a equação (4.44) fornece o deslocamento total ou a flecha ampliada.

$$v_T = v_0 \left(\frac{1}{1-N/N_e} \right) \quad (4.44)$$

Verifica-se, através da equação (4.44), que o deslocamento v_T tende a infinito quando N aproxima-se de N_e .

A figura 4,14 ilustra as curvas carregamento-deslocamento lateral de uma barra geometricamente imperfeita.

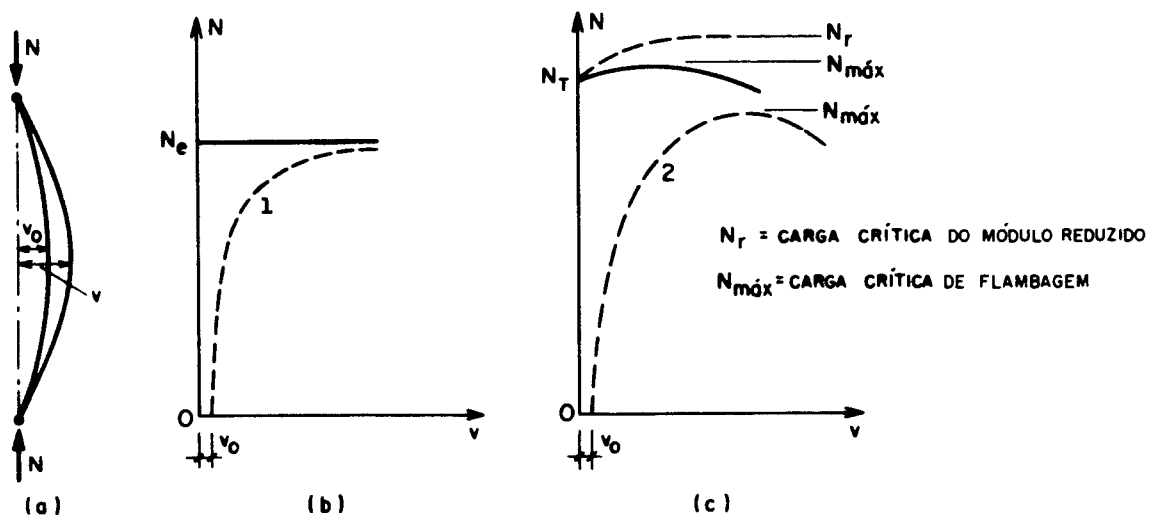


Figura 4.14- COMPORTAMENTO DE BARRAS PERFEITAMENTE RETAS E COM IMPERFEIÇÃO INICIAL.

Verifica-se através da curva 1 da figura 4.14b, que a força máxima, a qual uma barra geometricamente imperfeita suporta, tende assintoticamente à carga crítica de Euler, no regime elástico.

Conforme a curva 2 da figura 4.14c, a resistência limite de uma barra geometricamente imperfeita ocorre após a plastificação total da seção crítica.

O gráfico da figura 4.15, referente às expressões do deslocamento lateral total (v_T) da barra comprimida excentricamente e da barra com imperfeição inicial, apresenta as duas curvas que são praticamente coincidentes, permitindo concluir que, em ambos os casos, é possível admitir, sem grandes erros, que a solução é a mesma.

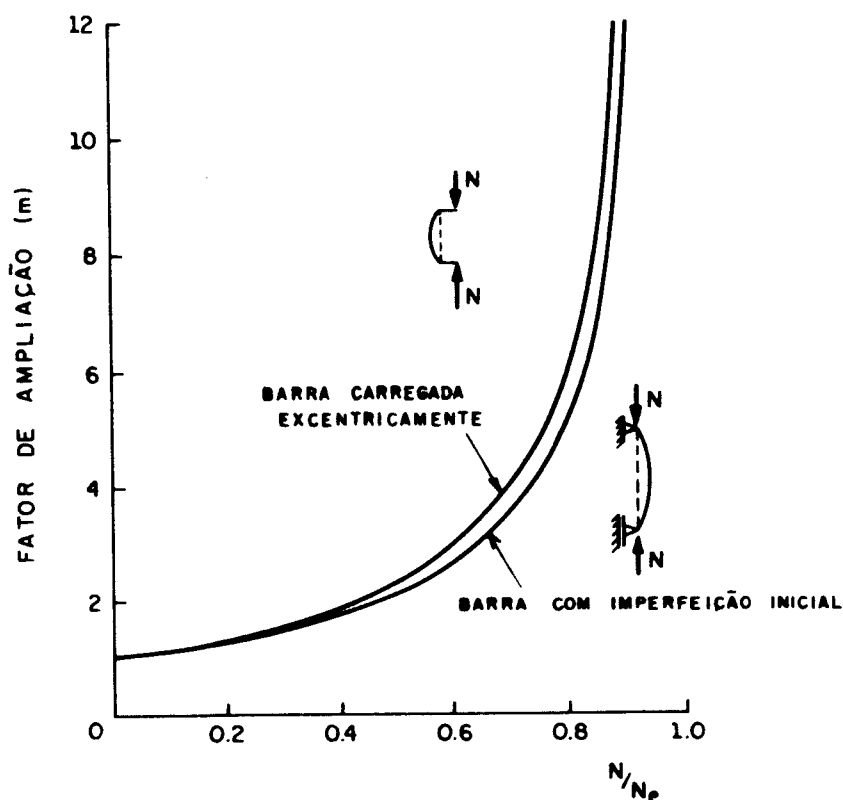


Figura 4.15- FATORES DE AMPLIAÇÃO.

A partir da expressão (4.44), deslocamento total, é possível deduzir os principais parâmetros que regem as curvas de flambagem apresentadas pela Norma NBR 8800 .

A barra simplesmente apoiada representada pela figura 4.13, será solicitada pela força normal de compressão e pelo momento fletor o qual teremos:

$$M = N v_o \frac{l'}{(1-N/N_e)} \quad (4.45)$$

Considera-se que a máxima tensão na barra é a tensão de escoamento do material. Portanto, a expressão para a tensão crítica é representada por:

$$\frac{N}{A_g} + \frac{M}{W} = f_y \quad (4.46)$$

Substituindo a equação (4.45) em (4.46) e introduzindo A_g , tem-se:

$$\frac{N}{A_g} + \frac{N}{W} \frac{A_g}{A_g} v_o \left(\frac{1}{1-N/N_e} \right) = f_y \quad (4.47)$$

Rearranjando a equação (4.47), tem-se:

$$\frac{N}{A_g} + \frac{N}{A_g} \eta \left(\frac{1}{1-N/N_e} \right) = f_y \quad (4.48)$$

onde:

$$\eta = \frac{A_g v_o}{W} \quad (4.49)$$

Reescrevendo a equação (4.48)

$$\eta \frac{N}{A_g} = \left(f_y - \frac{N}{A_g} \right) \left(1 - \frac{N}{N_e} \right) \quad (4.50)$$

Dividindo a equação (4.50) por f_y e reescrevendo.

$$\eta\rho = (1-\rho)\left(1 - \frac{N}{N_e}\right) \quad (4.51)$$

onde:

$$\frac{N}{A_g f_y} = \frac{N}{N_y} = \rho \quad (4.52)$$

Rearranjando a equação (4.51), obtém-se:

$$\eta\rho = (1-\rho)(1 - \rho\bar{\lambda}^2) \quad (4.53)$$

onde:

$$\frac{N}{N_e} = \rho \frac{N_y}{N_e} = \rho \frac{f_y}{f_e} \quad (4.54)$$

$$f_e = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (4.55)$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_y}} \quad (4.56)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_p} \quad (4.57)$$

Rearranjando a equação (4.53), obtém-se:

$$(\bar{\lambda}^2) \rho^2 - (1 + \eta + \bar{\lambda}^2)\rho + 1 = 0 \quad (4.58)$$

O valor de ρ possibilita o cálculo da normal resistente, cuja solução é:

$$\rho = \frac{(\bar{\lambda}^2 + \eta + 1) \pm \sqrt{(\bar{\lambda}^2 + \eta + 1)^2 - 4\bar{\lambda}^2}}{2\bar{\lambda}^2} \quad (4.59)$$

Para obter-se a menor normal resistente, despreza-se a solução positiva.

O fator (ρ) permite calcular a normal resistente, o qual compara a normal resistente (N_n) com a força normal de escoamento da seção ($A_g f_y$).

O parâmetro $\eta = (A_g v_o) / W$ representa matematicamente as imperfeições iniciais, entretanto as normas estrangeiras incorporam neste coeficiente os efeitos das tensões residuais.

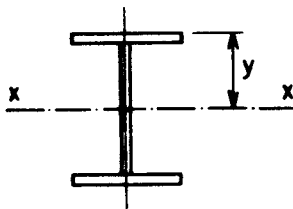
A partir do parâmetro (η) pode-se determinar um coeficiente (γ) que representa um número definido em função do tipo da seção transversal e dos eixos considerados.

$$\eta = \frac{A_g v_o}{W} \quad (4.60)$$

Reescrevendo a equação (4.60), tem-se:

$$\eta = \frac{A_g v_o}{W(y/y)} \quad (4.61)$$

Onde y é a distância da fibra mais comprimida em relação ao eixo considerado, conforme o esquema a seguir:



Considerando que $Wy = I$, tem-se da equação (4.61):

$$\eta = \frac{A_g v_o}{I/y} \quad (4.62)$$

Rearranjando a equação (4.62)

$$\eta = \frac{v_o}{r^2 / y} \quad (4.63)$$

Onde:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A g}} \quad (4.64)$$

O fator (v_o) representa as imperfeições iniciais e as tensões residuais de fabricação, o qual pode ser expresso em função de uma imperfeição padrão.

$$v_o = \frac{\ell}{\gamma} \quad (4.65)$$

onde (γ) é um número definido para cada tipo de seção e dos eixos considerados.

Substituindo a equação (4.65) na equação (4.63), tem-se:

$$\eta = \frac{\ell}{\gamma(r^2 / y)} \quad (4.66)$$

Rearranjando a equação (4.66)

$$\eta = \frac{\lambda}{\gamma(r/y)} \quad (4.67)$$

Onde:

$$\lambda = \frac{\ell}{r} \quad (4.68)$$

Das equações (4.56) e (4.57), tem-se:

$$\lambda = \bar{\lambda} \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_Y}} \quad (4.69)$$

Para o aço ASTM A-36 com $E = 205.000$ MPa e $f_Y = 250$ MPa, obtém-se:





$$\lambda = 89,96 \bar{\lambda} \quad (4.70)$$

Substituindo a equação (4.70) na equação (4.67), tem-se:

$$\eta = \frac{89,96 \bar{\lambda}}{\psi(r/\bar{y})} \quad (4.71)$$

A tabela 4.1 representa os valores da relação (r/y) para várias famílias de perfis.

TABELA 4.1- VALORES DA RELAÇÃO (r/y)

SEÇÃO	VALORES DE (r/y)
	0,71 a 0,81
	0,67 a 0,69
	0,58
	0,50
H $(h/b) \leq 1,2$ — X	0,855
H $(h/b) \geq 1,2$ — X	0,833
IP — X	0,822
IP — Y	0,435
JL — X	1,0 a 1,09
JL — Y	0,42 a 0,44

Admitindo a expressão (4.72) chega-se nas expressões proposta pela Norma NBR 8800 .

$$\eta = \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - \lambda_0^2} \cong \alpha \bar{\lambda}^2 \quad (4.72)$$

Substituindo a equação (4.72) na equação (4.71),
tem-se:

$$\alpha = \frac{89,96}{\gamma(r/y)} \quad (4.73)$$

Rearranjando

$$\gamma = \frac{89,96}{\alpha(r/y)} \quad (4.74)$$

Exemplificando o exposto acima, podemos analisar o caso de dupla cantoneira: para cantoneiras duplas de abas iguais (J|) — curva de flambagem "c" ($\alpha=0,384$).

Para o "eixo x" $\rightarrow (r/y) \cong 1,05$

$$\gamma = \frac{89,96}{\alpha (r/y)} = \frac{89,96}{0,384 \times 1,05}$$

ou

$$\gamma_x \cong 223$$

Para o "eixo y" $\rightarrow (r/y) \cong 0,43$

$$\gamma = \frac{89,96}{\alpha (r/y)} = \frac{89,96}{0,384 \times 0,43}$$

ou

$$\gamma_y \cong 545$$

As normalizações de outros países recomendam considerar o valor máximo para a imperfeição inicial (v_0)

igual a $l/1.000$ ($\gamma = 1.000$). Tendo em vista que neste parâmetro são incorporados os efeitos de tensão residual, conforme o exemplo anterior, o fator (γ) será bem diferente de 1.000, dependendo da seção transversal e dos eixos considerados.

4.3.4- Curvas de flambagem, caso geral

Da flambagem elástica, flambagem de Euler, tem-se que: a partir do instante que a tensão crítica (f_{cr}) é atingida, ocorre o fenômeno da perda de estabilidade com a possível plastificação da seção transversal.

$$f_e = f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = f_y \quad (4.75)$$

ou

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_y}} \quad (4.76)$$

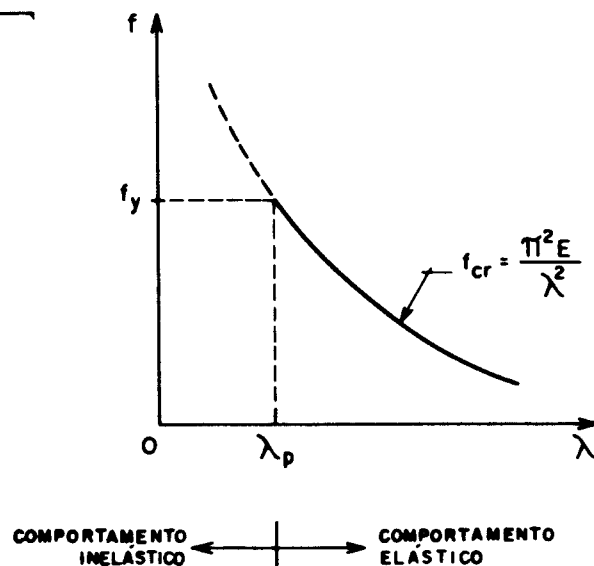


Fig. 4.16- DIAGRAMA TENSÃO-RELAÇÃO DE ESBELTEZ PARA BARRAS PERFEITAMENTE RETA.

A flambagem inelástica irá ocorrer devido a presença de tensões residuais e imperfeições iniciais, quando a barra é comprimida, a partir do instante que a

tensão aplicada (f) supera a tensão de proporcionalidade (f_p).

$$f > f_p = f_y - f_r \quad (4.77)$$

onde:

f_r = tensão residual;

f_y = tensão de escoamento do material.

Igualando a tensão crítica de flambagem com a tensão de proporcionalidade, tem-se o valor limite para o índice de flambagem elástica (λ_r).

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_r^2} = f_y - f_r \quad (4.78)$$

ou

$$\lambda_r = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_y - f_r}} \quad (4.79)$$

A figura 4.17 representa um diagrama tensão-relação de esbeltez, curva de flambagem, para uma barra inicialmente imperfeita.

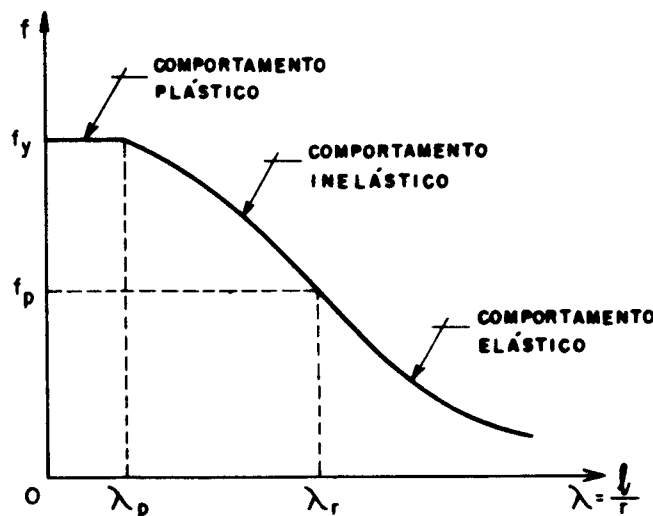


Fig. 4.17- DIAGRAMA TENSÃO-RELAÇÃO DE ESBELTEZ PARA BARRAS COM IMPERFEIÇÃO INICIAL E TENSÃO RESIDUAL.

Comparando a figura 4.17 com a 4.16, verifica-se que o limite para o início da flambagem elástica deixa de ser λ_p , passando a ser λ_r .

A figura 4.18 representa a curva de flambagem para barras inicialmente imperfeitas, em função dos parâmetros é adimensionais \bar{N} e $\bar{\lambda}$.

onde:

$$\bar{N} = \frac{f_{cr}}{f_y} \quad (4.80)$$

e

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_p} \quad (4.81)$$

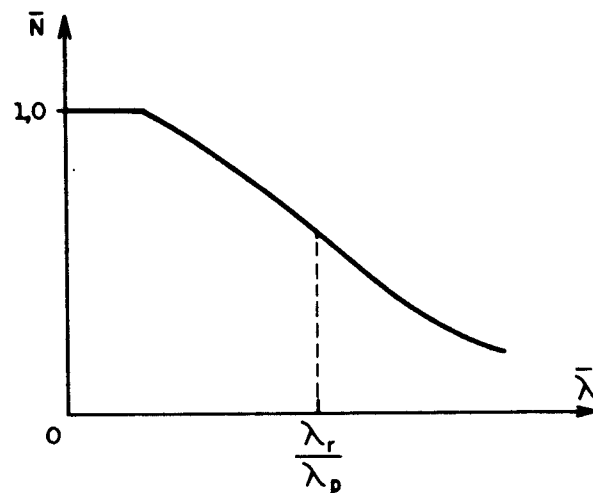


Fig. 4.18- O DESENHO ESQUEMÁTICO DA CURVA DE FLAMBAGEM PARA BARRAS COM IMPERFEIÇÃO INICIAL E TENSÃO RESIDUAL EM FUNÇÃO DE $\bar{\lambda}$.

4.4- EFEITO DAS TENSÕES RESIDUAIS E IMPERFEIÇÕES INICIAIS NA ANÁLISE DA RESISTÊNCIA DAS BARRAS.

4.4.1- Preliminares

Estes dois efeitos, normalmente, ocorrem simultaneamente, entretanto, para fins teóricos serão analisados separadamente.

4.4.2- Efeito das imperfeições iniciais

Normalmente, representa-se o valor das imperfeições iniciais por uma fração do comprimento da barra. Recomenda-se, portanto, adotar o valor da curvatura inicial para os perfis de aba plana (I e H), da ordem de $l/1000$.

Entretanto, BJORHOVDE (1972)⁵ verificou, através de medições de muitos perfis, que a curvatura inicial tende a um valor inferior ao máximo permitido, ou seja, variando em torno de $l/1500$.

BJORHOVDE (1972), analisou a resistência de 112 barras com imperfeições iniciais da ordem de $l/500$, $l/1000$ e $l/2000$, ilustrado na figura 4.19. Os resultados obtidos foram utilizados para a determinação das curvas de flambagem do SSRC ("Structural Stability Research Council").

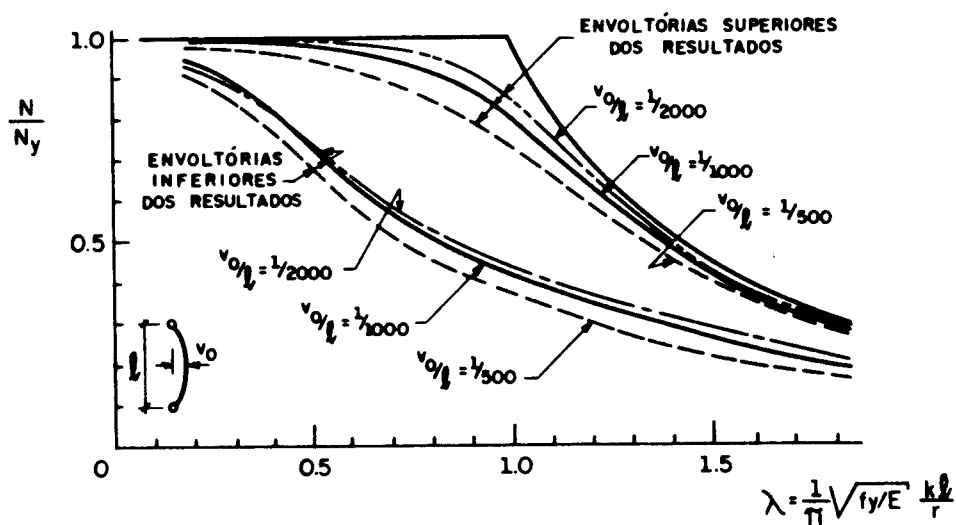


Figura 4.19- ENVOLTÓRIAS DOS RESULTADOS DE ENSAIOS PARA 112 BARRAS, BASEADAS NAS IMPERFEIÇÕES INICIAIS DE $l/500$, $l/1000$ e $l/2000$.

5

"GALAMBOS, T.V. (1988)" - Guide to stability design criteria for metal structures. 4.ed. New York: John Wiley & Sons. Cita o trabalho de BJORHOVDE (1972).

Analisando as figuras 4.20, 4.21 e 4.22, reproduzidas de BALLIO (1983)⁶, pode-se concluir que:

-A tensão de escoamento do material praticamente não influencia no comportamento de flambagem. Exemplifica-se o caso de um perfil de abas planas I-DIE20, considerando a flambagem em relação ao eixo de menor inércia, com um deslocamento inicial (v_0) igual a $l/1000$, conforme a figura 4.20.

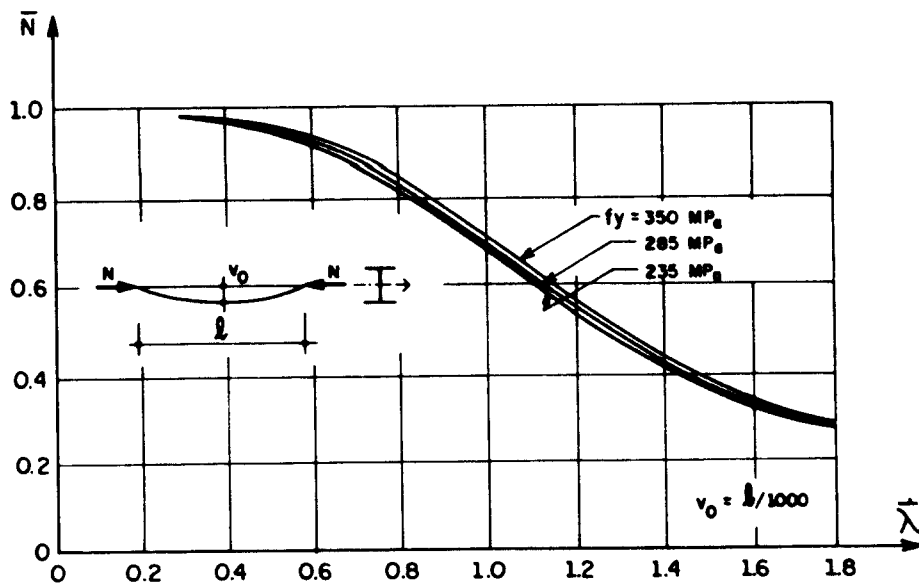


Fig. 4.20- CURVAS DE FLAMBAGEM PARA BARRAS COM IMPERFEIÇÃO INICIAL ($v_0 = l/1000$).

-O efeito da forma dos perfis, na flambagem, pode ser desprezado no caso de seções I, conforme apresenta a figura 4.21, para um material livre de imperfeições mecânicas e com imperfeições iniciais igual a $l/1000$.

6

BALLIO, G. MAZZOLANI, F.M. - Theory and design of steel structures. London: Chapman and Hall, 632p.

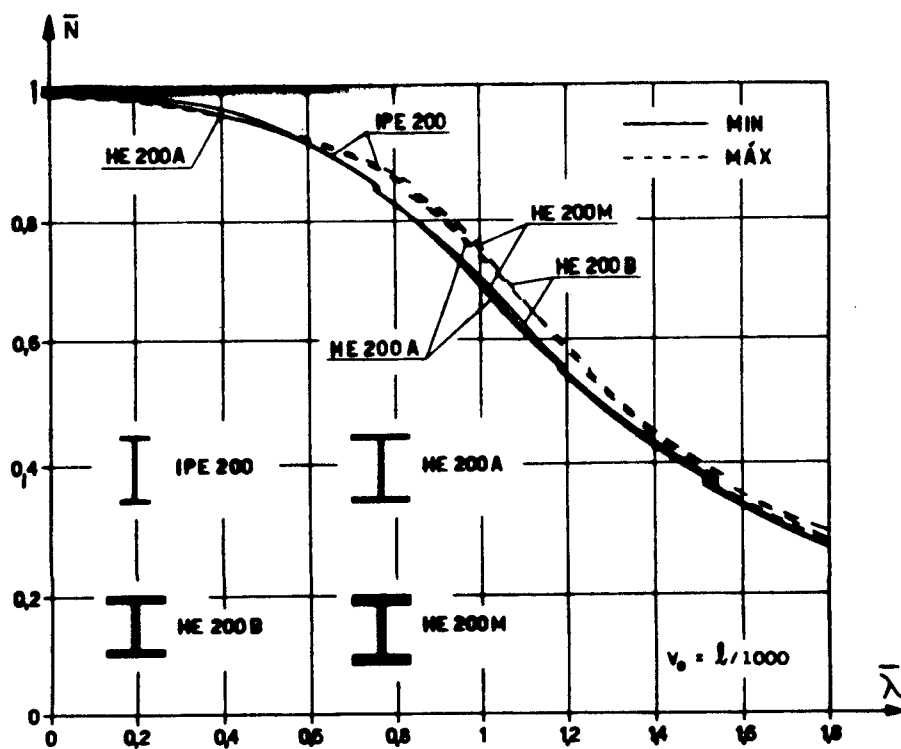


Fig. 4.21- CURVAS DE FLAMBAGEM PARA SEÇÕES "I".

-As curvas de flambagem de várias seções, conforme figura 4.22, são quase coincidentes, exceto a curva da seção T.

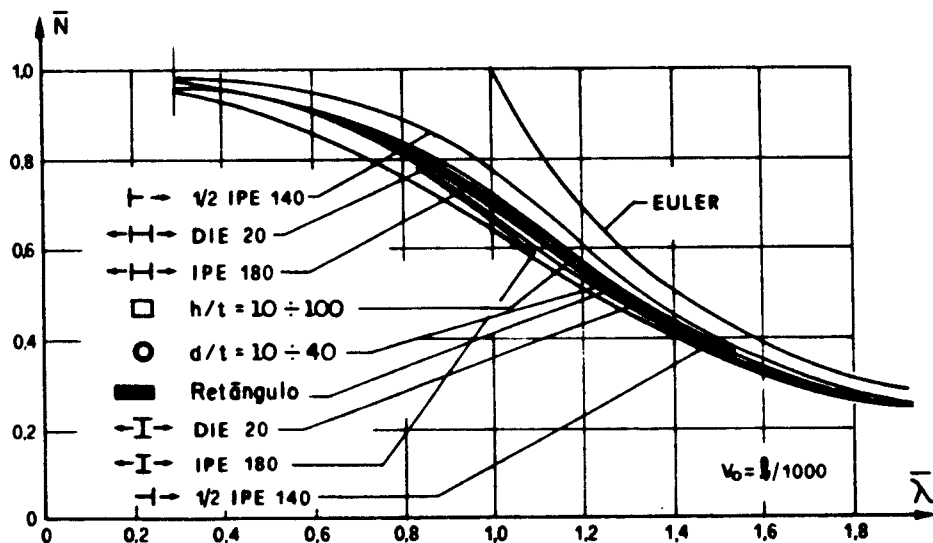


Fig. 4.22- CURVAS DE FLAMBAGEM PARA VÁRIAS SEÇÕES.

4.4.3- Efeito das tensões residuais na resistência das barras

Segundo HUBER (1954), a presença de tensões residuais nos perfis de aço estruturais apresentam uma grande influência na resistência das barras comprimidas.

A resistência destas barras pode ser obtida através de resultados de ensaios, considerando o conceito do módulo tangente sob a curva experimental, em combinação com a relação de esbeltez apropriada.

A figura 4.23 representa as curvas tensão-deformação de um corpo-de-prova na ausência de tensões residuais, e de um perfil H laminado com tensões residuais.

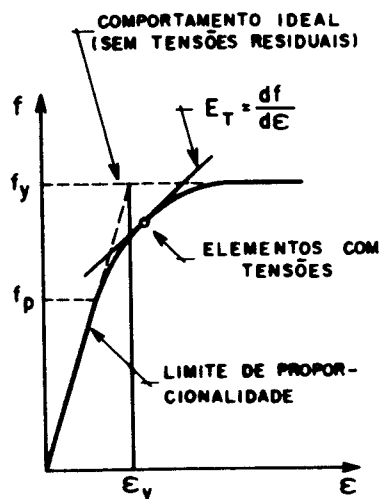


Fig. 4.23- DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO.

A figura 4.24 ilustra o diagrama tensão-esbeltez, nos regimes elástico e inelástico de uma barra comprimida axialmente.

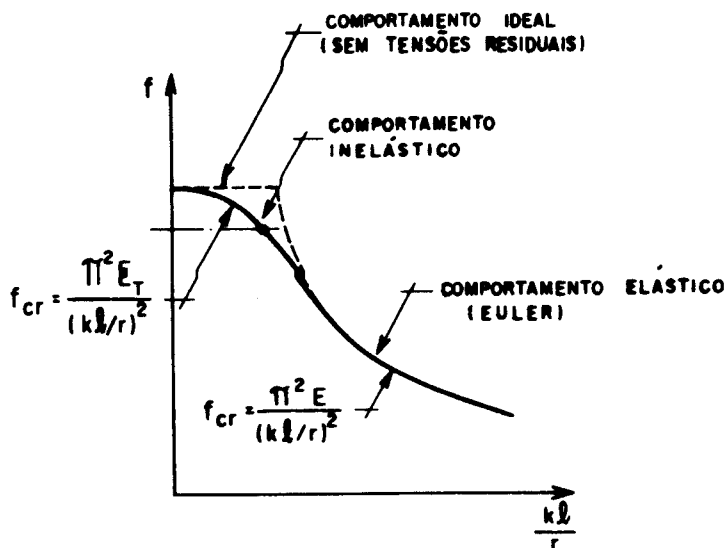


Fig. 4.24- DIAGRAMA TENSÃO-ESBELTEZ.

McFALLS (1969)⁷ apresenta um estudo referente a resistência de perfis soldados compostos por chapas cortadas a maçarico em tamanhos comerciais e analisou os perfis 12H79 e 14H202.

A figura 4.25 apresenta a distribuição das tensões residuais nas chapas da mesa e da alma do perfil 12H79, antes da execução da solda.

As figuras 4.26 e 4.27 representam a distribuição medida de tensões residuais nos perfis 12H79 e 14H202, respectivamente. Nota-se que os dois perfis apresentam uma distribuição semelhante, ou seja, as regiões de tração ou compressão são localizadas na mesma região dos perfis.

A diferença de tensões nos dois perfis é apenas no valor, ou seja, a tensão residual média nas extremidades das mesas do perfil 12H79 varia entre 193,06 e 206,85MPa, e, entre 124,11 e 144,80MPa nas extremidades das mesas do

7

"McFALLS, R.K., TALL, L.(1969)" - A study of welded columns manufactured from flame-cut plates. welding journal, v.48, n.4, Research Suppl., p.141s-153s.

perfil 14H202. Enquanto que, a máxima tensão residual de compressão na mesa é igual em média a 110,32 e 82,74MPa, para os perfis 12H79 e 14H202, respectivamente.

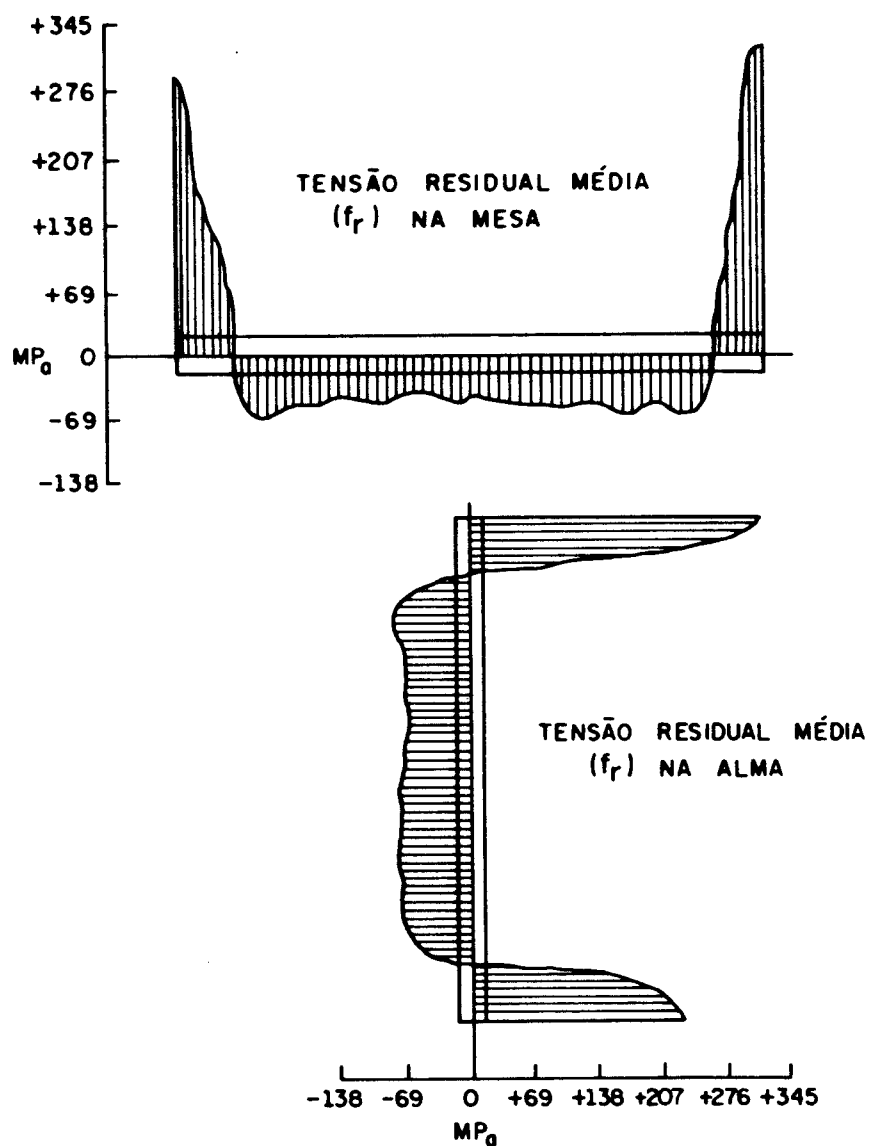


Fig. 4.25- TENSÕES RESIDUAIS MÉDIAS NAS CHAPAS ANTES DA SOLDAGEM.

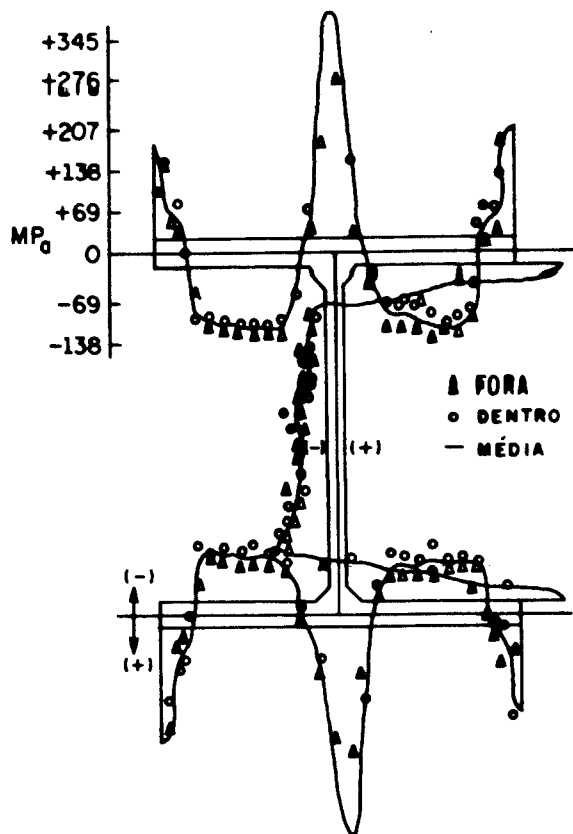


Fig. 4.26- TENSÕES
RESIDUAIS - PERFIL 12H79

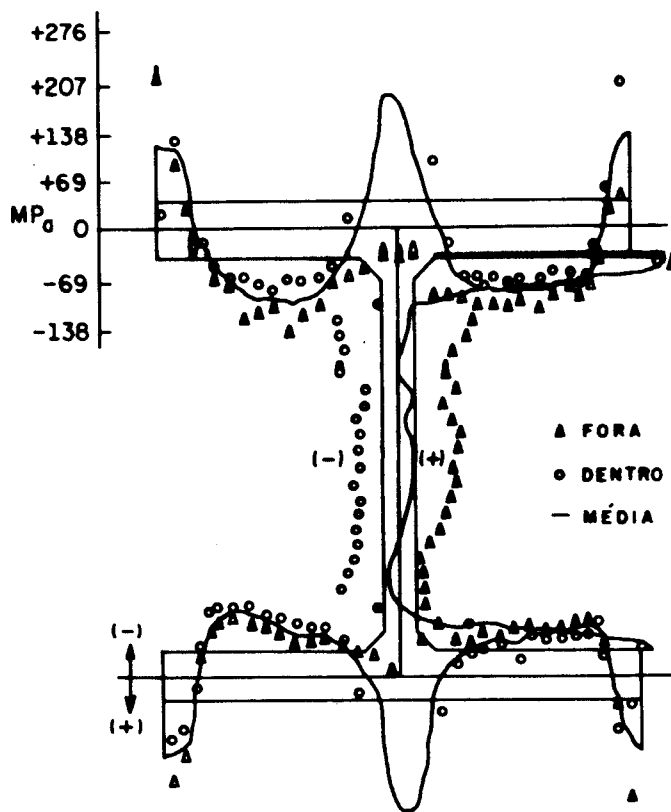


Fig. 4.27- TENSÕES
RESIDUAIS - PERFIL 14H202

Verifica-se, da figura 4.26, que o efeito da solda nas chapas mais finas do perfil 12H79, na ligação da mesa com a alma, produz valores maiores da tensão residual de tração. Geralmente, pode-se dizer que nos perfis mais pesados, a solda ocupa uma percentagem menor da área total, diminuindo o aquecimento induzido por unidade de volume e, portanto, o valor das tensões residuais normalmente serão menores.

Comparando as figuras 4.25 e 4.26, verifica-se que o efeito da solda de filete nas tensões residuais,

praticamente não atinge a alma, porém, na largura média da mesa, o calor devido a soldagem resulta em altas tensões localizadas de tração, após o resfriamento. Isto produz o aumento nas tensões residuais de compressão ao longo da mesa, o qual mantém o equilíbrio interno.

As figuras 4.28, 4.29, 4.30 e 4.31, representam as curvas de flambagem, conforme o conceito do módulo tangente, para os perfis 12H79 e 14H202 com a flambagem ocorrendo em relação aos eixos de maior inércia (x-x) e de menor inércia (y-y), respectivamente. Sendo (I_e) o momento de inércia da parte elástica da seção transversal e (I) momento total de inércia.

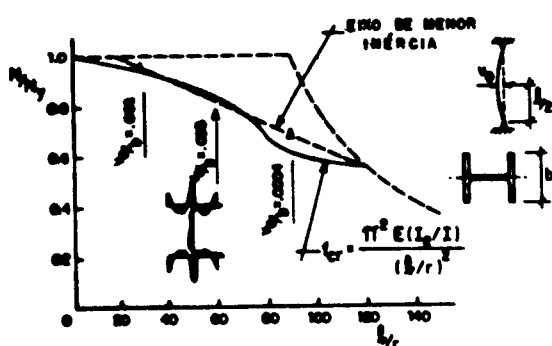


Fig. 4.28-CURVA DO MÓDULO TANGENTE, EIXO DE MENOR INÉRCIA - PERFIL 12H79

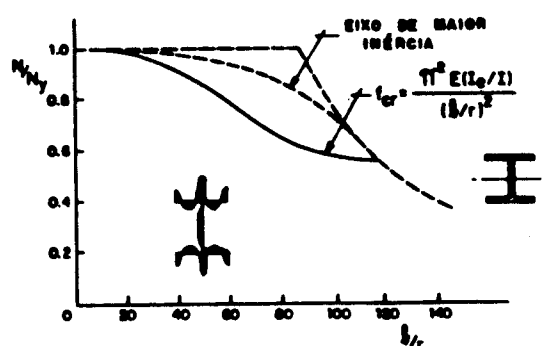


Fig. 4.29-CURVA DO MÓDULO TANGENTE, EIXO DE MAIOR INÉRCIA - PERFIL 12H79

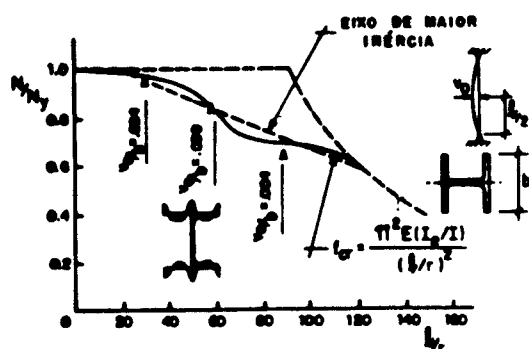


Fig. 4.30-CURVA DO MÓDULO TANGENTE, EIXO MENOR INÉRCIA - PERFIL 14H202

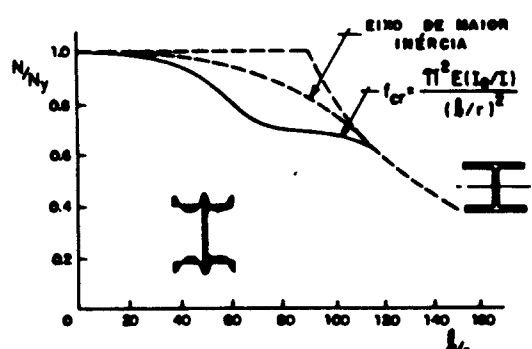


Fig. 4.31-CURVA DO MÓDULO TANGENTE, EIXO MAIOR INÉRCIA - PERFIL 14H202

Analisando a figura 4.28, verifica-se que as tensões residuais de tração nas extremidades das mesas, devido ao corte a maçarico, aumenta a resistência da barra para relação de esbeltez menores que 50.

Pode-se concluir da figura 4.29, que a resistência dos perfis soldados compostos por chapas cortadas a maçarico, diminui muito para relações de esbeltez maiores que 50.

Conforme ilustra a figura 4.30, os perfis mais pesados apresentam maior resistência para relações de esbeltez superior a 50, devido a um menor valor da tensão residual de compressão.

Comparando as curvas das figuras 4.28 e 4.30, pode-se concluir que a carga crítica obtida a partir da teoria do módulo tangente, aproxima-se bem à resistência última das barras cortadas a maçarico. A teoria do módulo tangente não é uma teoria de resistência última, entretanto, resulta na carga crítica, na qual uma barra perfeitamente reta flambará.

Para uma melhor compreensão da influência de tensões residuais sob a resistência das barras, baseadas no módulo tangente, McFALLS (1969) selecionou quatro modelos representando a faixa de distribuição de tensões residuais presentes nos perfis H, considerando todos os métodos de fabricação normalmente utilizados.

Os modelos 1 e 2 representam as distribuições das tensões residuais geralmente encontradas nos perfis soldados compostos por chapas cortadas a maçarico. O modelo 3 representa uma distribuição característica dos perfis laminados a quente, enquanto que, a distribuição do modelo 4 é encontrada nos perfis soldados compostos por barras chatas.

As figuras 4.32, 4.33, 4.34 e 4.35, representam as curvas de flambagem referente aos quatro modelos para os

perfis 12H79 e 14H202, considerando a flambagem em torno do menor e maior eixo de inércia, respectivamente.

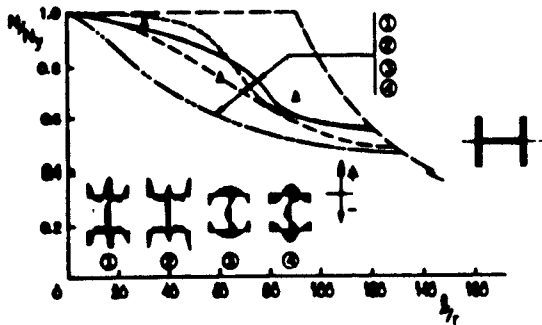


Fig. 4.32-EFEITO DAS TENSÕES RESIDUAIS NA RESISTÊNCIA DAS BARRAS - PERFIL 12H79, EIXO DE MENOR INÉRCIA.

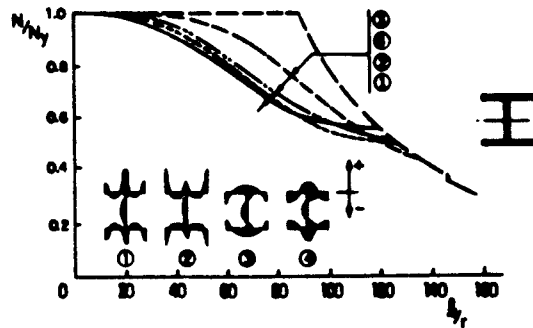


Fig. 4.33-EFEITO DAS TENSÕES RESIDUAIS NA RESISTÊNCIA DAS BARRAS - PERFIL 12H79, EIXO DE MAIOR INÉRCIA.

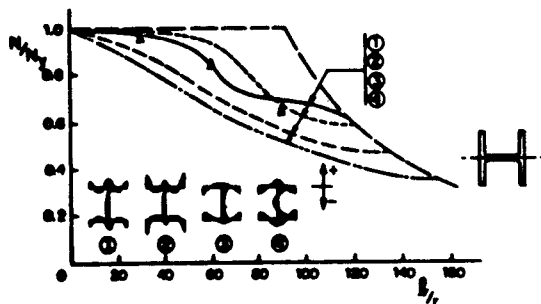


Fig. 4.34-EFEITO DAS TENSÕES RESIDUAIS NA RESISTÊNCIA DAS BARRAS - PERFIL 14H202, EIXO DE MENOR INÉRCIA.

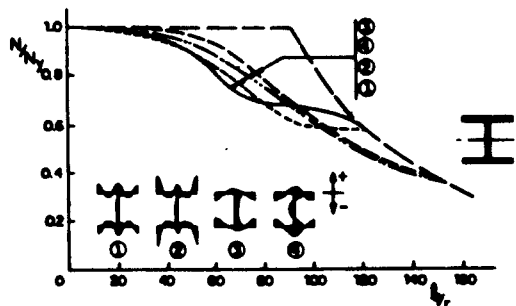


Fig. 4.35-EFEITO DAS TENSÕES RESIDUAIS NA RESISTÊNCIA DAS BARRAS - PERFIL 14H202, EIXO DE MAIOR INÉRCIA.

Verifica-se, através da figura 4.32 para o perfil 12H79, que o efeito da tensão residual influencia mais a resistência das barras na faixa com relação de esbeltez inferior a 50, ou seja, nesta região ocorre uma maior variação das curvas de flambagem referentes aos quatro modelos.

Comparando as figuras 4.32, 4.33 conclui-se que o efeito das tensões residuais sob a resistência das barras, normalmente é significativo, quando a flambagem ocorre em relação ao eixo de menor inércia.

Observa-se da figura 4.34, perfil 14H202, que as curvas de flambagem referentes aos quatro modelos variam tanto para relações de esbeltez inferior a 50, quanto para maiores relações de esbeltez.

No entanto, comparando as figuras 4.34 e 4.35, pode-se concluir que para o perfil 14H202, o efeito da tensão residual sob a resistência da barra é significativo, se a flambagem ocorreu em relação ao eixo de menor inércia.

Segundo GALAMBOS (1988) os perfis compostos por chapas cortadas a maçarico apresentam resistências idênticas as dos perfis laminados de mesmas proporções, enquanto que os perfis compostos por barras chatas, comparativamente, tendem a serem menos resistentes.

Por esta razão, a "Canadian Standards Association" (CSA, 1974) em sua norma de cálculo pelo estado limite, exige que os perfis soldados sejam compostos por chapas cortadas a maçarico.

Conclui-se, da figura 4.36, que os perfis soldados mais pesados, compostos por chapas cortadas a maçarico, tendem a serem mais resistentes que os mais leves.

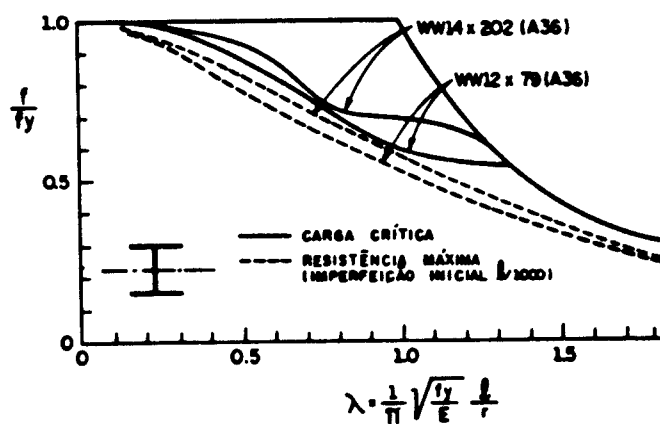


Fig. 4.36- CURVAS DE FLAMBAGEM PARA PERFIS DE ABAS PLANAS SOLDADOS

O alívio de tensões devido ao recozimento das chapas componentes antes da soldagem dos perfis, aumenta significativamente a tensão de proporcionalidade das barras, pela redução das tensões residuais.

A figura 4.37 ilustra que os perfis formados por chapas com alívios de tensões são mais resistentes que os perfis compostos por chapas cortadas a maçarico e, conseqüentemente, aos perfis compostos por barras chatas.

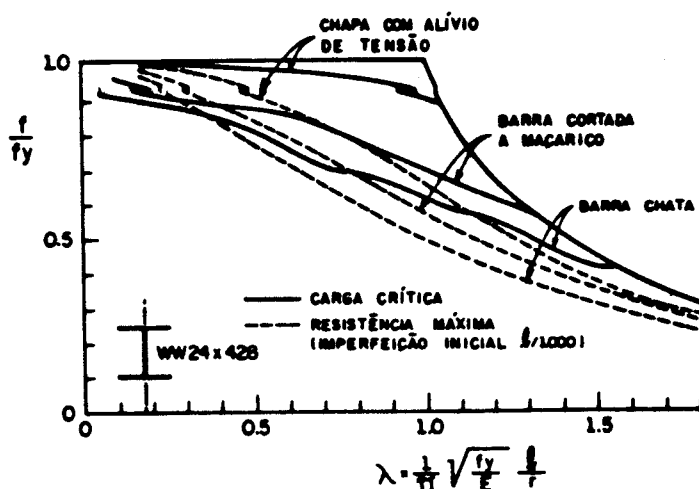


Figura 4.37- COMPARAÇÃO DAS CURVAS DE FLAMBAGEM PARA O PERFIL WF24x428 (AÇO A36) COM CHAPAS COM ALÍVIO DE TENSÕES, CHAPAS CORTADAS A MAÇARICO E BARRAS CHATAS.

Segundo GALAMBOS (1988) pode-se concluir, através dos resultados obtidos por BATTERMAN (1967) e BJORHOVDE (1972), que:

- a) Para uma boa aproximação da resistência máxima da barra, é importante considerar os efeitos combinados das tensões residuais com a curvatura inicial;
- b) A tensão residual quase não influencia a resistência máxima das barras esbeltas, tanto perfeitamente retas quanto inicialmente imperfeitas, para as quais a resistência aproxima-se à carga de Euler;

- c) A variação da distribuição de tensões residuais no perfil, influencia mais na resistência das barras inicialmente imperfeitas, que nas barras perfeitamente retas;
- d) Baseiam-se nas hipóteses, para o cálculo das resistências, em que a curvatura inicial do perfil permanece constante durante o carregamento.

4.5- CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo abordou várias análises referentes às tensões residuais e imperfeições iniciais, existentes nos perfis estruturais de aço, bem como a influência destas na resistência das barras comprimidas.

Os exemplos, referente a tensões residuais apresentados neste trabalho, foram baseados nas tensões medidas em perfis não fabricados no Brasil, portanto, deve-se realizar ensaios para medir tensões residuais nos perfis estruturais nacionais, principalmente nos perfis soldados.

O parâmetro (η), equação (4.49), representa matematicamente o valor das imperfeições iniciais, porém as normas incorporam o efeito das tensões residuais minorando o fator γ .

Determina-se através do parâmetro (η) um coeficiente (γ) que representa um número definido em função do tipo da seção transversal e dos eixos considerados, a partir do qual pode-se quantificar o valor das imperfeições iniciais como sendo $v_0 = (l/\gamma)$.

O fator (ρ), equação (4.59), compara a força normal nominal (N_n) com a força normal de escoamento da seção ($A_g f_y$), cujas considerações serão discutidas no "Capítulo 8" referente ao cálculo da normal resistente.

CAPÍTULO 5

COMPRIMENTO EFETIVO DE FLAMBAGEM

5.1- GENERALIDADES

Define-se comprimento efetivo de flambagem, l_{fl} , como a distância entre dois pontos de inflexão do elemento em análise, na forma flambada. Este comprimento é obtido pelo produto kl , sendo (l) o comprimento do vão e (k) o fator comprimento efetivo de flambagem, o qual será apresentado nos itens subsequentes para vários tipos de vinculação de um elemento comprimido.

5.2- ELEMENTOS ISOLADOS

Os valores teóricos de k , fator comprimento efetivo de flambagem, são obtidos conforme deduzido no "Capítulo 2", ou seja, o fator k é definido como:

$$k = \sqrt{\frac{N_e}{N_{cr}}}$$

onde:

N_e = carga crítica de Euler de uma barra biapoiada;

N_{cr} = carga crítica de uma barra com outras condições de vinculação.

A tabela 5.1 ilustra os valores teóricos de k , e os valores recomendados para o dimensionamento das barras isoladas.

5.3- ELEMENTOS DE TRELIÇA

O fator comprimento efetivo de flambagem (k) para barras de treliça pode ser calculado através da análise da flambagem elástica da treliça considerada.

CUDÓS SAMBLANCT (1978)¹ apresenta um estudo para determinar os valores de (k), para vários elementos de treliça, a partir do comportamento da flambagem elástica.

Os valores encontrados por "CUDÓS SAMBLANCAT" são aproximadamente iguais aos valores recomendados pela Norma NBR 8800, os quais estão representados na tabela 5.2.

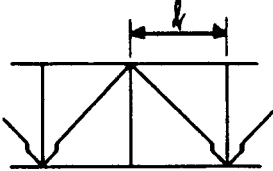
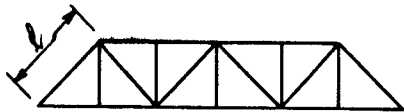
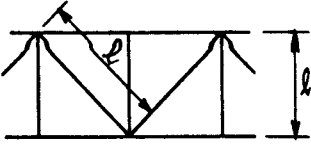
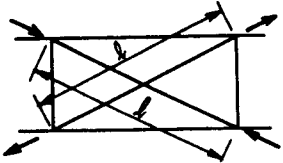
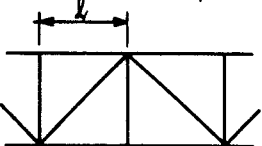
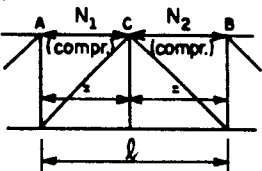
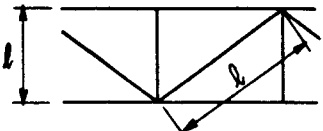
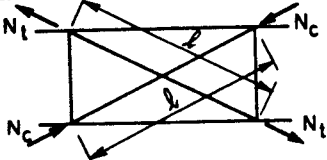

1

CUDÓS SAMBLANCAT, V. (1978) Cálculo de Estructures de Acero-Tomo 1 - Editora H. Blume Ediciones - Rosário, Madrid - Espana, 867p.

TABELA 5.1 - VALORES DE k PARA ELEMENTOS ISOLADOS.

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
A linha traçada representa a linha elástica de flambagem						
Valores teóricos k	0,5	0,7	1,0	1,0	2,0	2,0
Valores recomendados para o dimensionamento	0,6	0,8	1,2	1,0	2,1	2,0
Condições de vinculação	 	Rotação e translação impedidas Rotação livre, translação impedida Rotação impedida, translação livre Rotação e translação livres.				

TABELA 5.2 - COEFICIENTE "k" EM BARRAS DE TRELIÇA.

	CASO	ESQUEMA	Elemento considerado	k
FLAMBAGEM NO PLANO DA TRELIÇA	1		Banzo	1,0
	2		Diagonal Extrema	1,0
	3		Montante ou Diagonal	1,0
	4		Diagonal comprimida ligada no centro a uma diagonal tracionada de mesma seção.	0,5
FLAMBAGEM FORA DO PLANO DA TRELIÇA	1		Banzo com todos os nós contidos fora do plano da treliça.	1,0
	2		Banzos contínuos onde somente A e B são contidos fora do plano ($N_1 > N_2$)	$0,75 + 0,25 \frac{N_2}{N_1}$
	3		Montante ou diagonal	1,0
	4		Diagonal comprimida ligada no centro a uma diagonal tracionada de mesma seção.	$\sqrt{1,0 - 0,75 \frac{N_t}{N_c}} \geq 0,5$
	5		Montante contínuo de treliça em K. ($N_1 > N_2$)	$0,75 + 0,25 \frac{N_2}{N_1}$

5.4- ELEMENTOS DE PÓRTICOS

O cálculo do fator comprimento efetivo (k) para um elemento de pórtico é mais complexo que para um elemento isolado, pois para avaliar a restrição rotacional da extremidades do elemento em análise, deve-se considerar a rigidez de todos os elementos adjacentes, assim como a rigidez das ligações entre estes.

Teoricamente, para obter o fator comprimento efetivo de flambagem (k) de uma coluna de pórtico, deve-se considerar uma análise da estabilidade global da estrutura, entretanto, para fins práticos, este procedimento não é viável.

JULIAN e LAWRENCE (1959) propuseram um método simplificado para determinação de (k), o qual é recomendado pelo AISC "American Institute of Steel Construction".

O comprimento efetivo de flambagem (k) varia entre os pórticos deslocáveis e indeslocáveis, pois as colunas destes comportam-se diferentemente.

Para o cálculo dos pórticos retangulares rígidos, com os pilares submetidos a flexo-compressão, com a força axial constante, pode-se isolar cada elemento e considerá-lo como uma viga-coluna.

5.4.1- Pórticos Indeslocáveis

Obtém-se o fator comprimento efetivo " k " para o pórtico indeslocável, através de uma análise realizada segundo o modelo de flambagem, representado na figura 5.1. Considera-se as seguintes hipóteses para tal análise:

- a) Todos os elementos são prismáticos e comportam-se elasticamente;
- b) As forças axiais nas vigas são desprezíveis;
- c) Todas as colunas flambam simultaneamente;
- d) Em um nó, o momento de engastamento produzido pelas vigas é distribuído entre as colunas, proporcionalmente a sua rigidez;
- e) Na flambagem, as rotações das vigas são iguais e opostas, ou seja, as vigas fletem em curvatura simples.

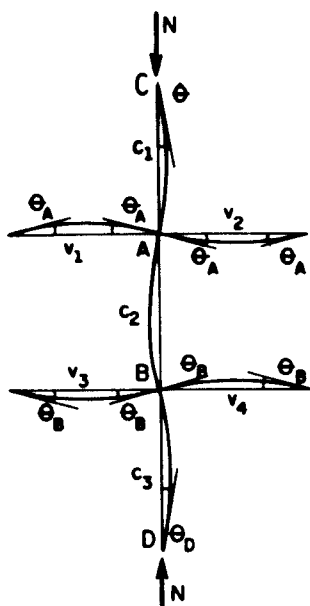


Figura 5.1- MODELO DE FLAMBAGEM PARA FATOR (k) NO PÓRTICO INDESLOCÁVEL.

Considera-se o elemento isolado do pórtico como a viga-coluna representada na figura 5.2, em sua posição deslocada, sob a ação de momentos fletores nas extremidades A e B, respectivamente, e pela ação da força axial de compressão "N".

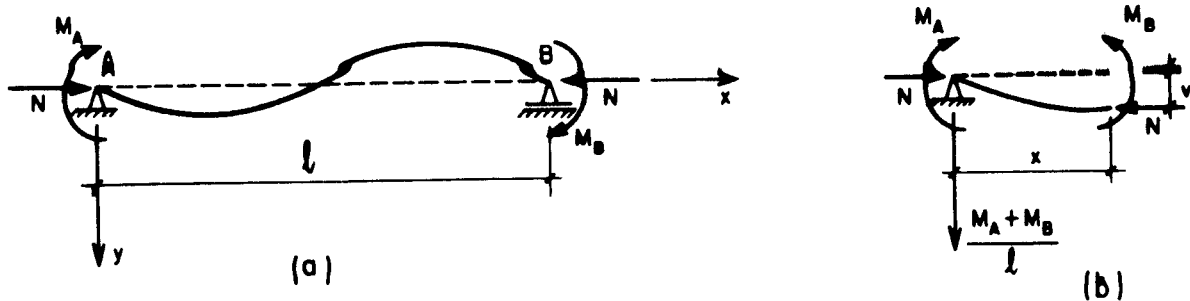


Figura 5.2- VIGA-COLUNA COM MOMENTOS FLETORES NAS EXTREMIDADES.

Por equilíbrio, na figura 5.2b, obtém-se o momento externo como:

$$M_{\text{ext}} = M_A + Nv - \frac{M_A + M_B}{l} x \quad (5.1)$$

O momento interno resistente é:

$$M_{\text{int}} = -EIv'' \quad (5.2)$$

Igualando as equações (5.1) e (5.2) e rearranjando, tem-se:

$$v'' + k^2 v = \frac{M_A + M_B}{EI l} x - \frac{M_A}{EI} \quad (5.3)$$

onde:

$$k^2 = \frac{N}{EI} \quad (5.4)$$

A solução geral da equação (5.4), é:

$$v = C_1 \text{sen}kx + C_2 \text{cos}kx + \frac{M_A + M_B}{EI l k^2} x - \frac{M_A}{EI k^2} \quad (5.5)$$

Adota-se as seguintes condições de contorno para determinar as constantes C_1 e C_2 .

$$v(0) = 0 \quad (5.6)$$

$$v(l) = 0 \quad (5.7)$$

Substituindo as equações (5.6) e (5.7) em (5.5), obtém-se:

$$C_2 = \frac{M_A}{EI k^2} \quad (5.8)$$

$$C_1 = - \frac{(M_A \cos kl + M_B)}{EI k^2 \operatorname{sen} kl} \quad (5.9)$$

Substituindo as equações (5.8) e (5.9) em (5.5) e rearranjando, obtém-se:

$$v = - \frac{M_A}{EI k^2} \left[\frac{\cos kl}{\operatorname{sen} kl} \operatorname{sen} kx - \cos kx - \frac{x}{l} + 1 \right] +$$

$$- \frac{M_B}{EI k^2} \left[\frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} kl} - \frac{x}{l} \right] \quad (5.10)$$

Derivando a equação (5.10), tem-se a equação do giro.

$$v' = - \frac{M_A}{EI k} \left[\frac{\cos kl}{\operatorname{sen} kl} \cos kx + \operatorname{sen} kx - \frac{1}{kl} \right] +$$

$$- \frac{M_B}{EI k} \left[\frac{\cos kx}{\operatorname{sen} kl} - \frac{1}{kl} \right] \quad (5.11)$$

Fazendo $x = 0$ na equação (5.11) e rearranjando, tem-se a rotação na extremidade A.

$$\theta_A = \frac{l}{EI} \left[\frac{\text{sen}kl - kl\text{cos}kl}{(kl)^2 \text{sen}kl} \right] M_A + \frac{l}{EI} \left[\frac{\text{sen}kl - kl}{(kl)^2 \text{sen}kl} \right] M_B \quad (5.12)$$

Da mesma forma, fazendo $x = l$, obtém-se a rotação na extremidade B.

$$\theta_B = \frac{l}{EI} \left[\frac{\text{sen}kl - kl}{(kl)^2 \text{sen}kl} \right] M_A + \frac{l}{EI} \left[\frac{\text{sen}kl - kl\text{cos}kl}{(kl)^2 \text{sen}kl} \right] M_B \quad (5.13)$$

Reescrevendo sob a forma matricial as equações (5.12) e (5.13), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

onde:

$$A_{11} = A_{22} = \frac{l}{EI} \left[\frac{\text{sen}kl - kl\text{cos}kl}{(kl)^2 \text{sen}kl} \right] \quad (5.15)$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{l}{EI} \left[\frac{\text{sen}kl - kl}{(kl)^2 \text{sen}kl} \right] \quad (5.16)$$

Reescrevendo a equação (5.14), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

ou

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

onde:

$$B_{11} = B_{22} = \frac{EI}{\ell} \left[\frac{\frac{1}{kl} - \cotg kl}{\frac{1}{(kl)^2} \left(2\text{tg} \frac{kl}{2} - kl \right)} \right] \quad (5.19)$$

$$B_{12} = B_{21} = \frac{EI}{\ell} \left[\frac{-\frac{1}{kl} + \text{coseck} l}{\frac{1}{(kl)^2} \left(2\text{tg} \frac{kl}{2} - kl \right)} \right] \quad (5.20)$$

$$M_A = \frac{EI}{\ell} (r_{ii} \theta_A + r_{ij} \theta_B) \quad (5.21)$$

$$M_B = \frac{EI}{\ell} (r_{ji} \theta_A + r_{jj} \theta_B) \quad (5.22)$$

onde:

$$r_{ii} = r_{jj} = \frac{B_{11}\ell}{EI} = \frac{B_{22}\ell}{EI} \quad (5.23)$$

$$r_{ij} = r_{ji} = \frac{B_{12}\ell}{EI} = \frac{B_{21}\ell}{EI} \quad (5.24)$$

O fator "r" é denominado fator de estabilidade, e as equações (5.21) e (5.22) são as equações inclinação-deslocamento para a viga-coluna, as quais são

válidas, segundo as seguintes condições:

- a) A viga é prismática;
- b) Não ocorre deslocamento relativo entre duas extremidades do elemento, ou seja, o elemento não desloca-se;
- c) Não exista rótula interna ou descontinuidade no elemento;
- d) Não ocorre carregamentos transversais ao vão do elemento;
- e) A força axial no elemento é de compressão e constante.

Conforme a hipótese "e", considerada para o modelo de flambagem dos pórticos indeslocáveis, as vigas fletem em curvatura simples, $\theta_B = -\theta_A$. A figura 5.3 representa uma viga-coluna submetida a momentos nas extremidades com flexão em curvatura simples. Neste caso as equações inclinação-deslocamento (5.21) e (5.22) reduzem a:

$$M_A = \frac{EI}{l} (r_{ii} - r_{ij}) \theta_A \quad (5.25)$$

$$M_B = -M_A \quad (5.26)$$

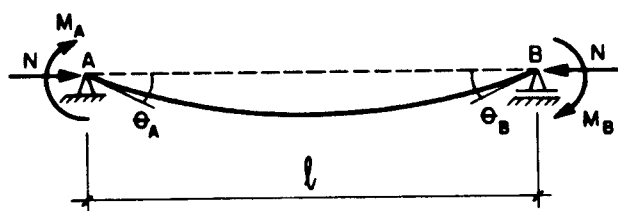


Figura 5.3- VIGA-COLUNA FLETIDA EM CURVATURA SIMPLES.

Analisando o modelo de flambagem da figura 5.1, adotando-se as equações (5.21) e (5.22) para as colunas e as equações (5.25) e (5.26) para as vigas, obtém-se as equações dos momentos fletores nas extremidades de cada uma das barras que concorrem aos nós A e B, respectivamente.

Aplicando as equações (5.21) e (5.22), obtêm-se as equações dos momentos nas extremidades das colunas, como:

$$(M_A)_{c1} = \left(\frac{EI}{\ell} \right)_{c1} [r_{ii} \theta_A + r_{ij} \theta_B] \quad (5.27)$$

$$(M_A)_{c2} = \left(\frac{EI}{\ell} \right)_{c2} [r_{ii} \theta_A + r_{ij} \theta_B] \quad (5.28)$$

$$(M_B)_{c2} = \left(\frac{EI}{\ell} \right)_{c2} [r_{ij} \theta_A + r_{ii} \theta_B] \quad (5.29)$$

$$(M_B)_{c3} = \left(\frac{EI}{\ell} \right)_{c3} [r_{ij} \theta_A + r_{ii} \theta_B] \quad (5.30)$$

Considerando as equações (5.21) e (5.22), obtêm-se as equações dos momentos fletores nas extremidades das vigas, como:

$$(M_A)_{v1} = \left(\frac{EI}{\ell} \right)_{v1} [r_{ii} - r_{ij}] \theta_A \quad (5.31)$$

$$(M_A)_{v2} = \left(\frac{EI}{\ell} \right)_{v2} [r_{ii} - r_{ij}] \theta_A \quad (5.32)$$

$$(M_B)_{v3} = \left(\frac{EI}{\ell} \right)_{v3} [r_{ii} - r_{ij}] \theta_B \quad (5.33)$$

$$(M_B)_{v4} = \left(\frac{EI}{\ell} \right)_{v4} [r_{ii} - r_{ij}] \theta_B \quad (5.34)$$

Devido a hipótese "b", forças axiais nas vigas desprezíveis, pode-se considerar $r_{ii}=4$ e $r_{ij}=2$ para as vigas, portanto, as equações dos momentos fletores nas extremidades destas, reduzem-se a:

$$(M_A)_{v1} = \left(\frac{EI}{l} \right)_{v1} 2\theta_A \quad (5.35)$$

$$(M_A)_{v2} = \left(\frac{EI}{l} \right)_{v2} 2\theta_A \quad (5.36)$$

$$(M_B)_{v3} = \left(\frac{EI}{l} \right)_{v3} 2\theta_B \quad (5.37)$$

$$(M_B)_{v4} = \left(\frac{EI}{l} \right)_{v4} 2\theta_B \quad (5.38)$$

A hipótese "b" recomenda desprezar as forças axiais nas vigas, a força (N) aproxima-se de zero, ou seja, $kl = (\sqrt{N/EI})l$, aproxima-se de zero. Portanto, pode-se verificar através da regra de L'hospital que os fatores de estabilidade r_{ii} e r_{ij} reduzem-se a 4 e 2, respectivamente:

Rearranjando as equações (5.23) e (5.24), tem-se:

$$r_{ii} = \left[\frac{kl \operatorname{sen} kl - (kl)^2 \cos kl}{2 - 2\cos kl - kl \operatorname{sen} kl} \right] = \frac{f(kl)}{g(kl)} \quad (5.39)$$

$$r_{ij} = \left[\frac{(kl)^2 - kl \operatorname{sen} kl}{2 - 2\cos kl - kl \operatorname{sen} kl} \right] = \frac{f(kl)}{g(kl)} \quad (5.40)$$

Aplicando a regra de L'hospital na equação de r_{ii} , tem-se:

$$r_{ii} = \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{f(kl)}{g(kl)} = \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{f^{n'}(kl)}{g^{n'}(kl)} \quad (5.41)$$

ou

$$r_{ii} = \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{f^{iii}(kl)}{g^{iii}(kl)} = \frac{4\cos kl + kl \sin kl}{\cos kl} = 4 \quad (5.42)$$

Analogamente, aplicando a regra de L'hospital na equação de r_{ij} , tem-se:

$$r_{ij} = \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{f(kl)}{g(kl)} = \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{f^{n'}(kl)}{g^{n'}(kl)} \quad (5.43)$$

ou

$$r_{ij} = \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{f^{iv}(kl)}{g^{iv}(kl)} = \frac{4\cos kl - kl \sin kl}{2\cos kl - kl \sin kl} = 2 \quad (5.44)$$

Por equilíbrio dos momentos nó A, tem-se:

$$\left(M_A\right)_{c1} + \left(M_A\right)_{c2} + \left(M_A\right)_{v1} + \left(M_A\right)_{v2} = 0 \quad (5.45)$$

Reescrevendo a equação (5.45), tem-se:

$$\left(M_A\right)_{c2} = -\left(M_A\right)_{v1} - \left(M_A\right)_{v2} - \left(M_A\right)_{c1} \quad (5.46)$$

Substituindo as equações (5.27), (5.35) e (5.36) em (5.46), obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(M_A\right)_{c1} = & -2 \left[\left(\frac{EI}{l}\right)_{v1} + \left(\frac{EI}{l}\right)_{v2} \right] \theta_A + \\ & - \left(\frac{EI}{l}\right)_{c1} [r_{ii} \theta_A + r_{ij} \theta_B] \end{aligned} \quad (5.47)$$

Da equação (5.28), tem-se:

$$[\Gamma_{ii} \theta_A + \Gamma_{ij} \theta_B] = \frac{(M_A)_{c2}}{\left(\frac{EI}{\ell}\right)_{c2}} \quad (5.48)$$

Das equações (5.48) e (5.47), tem-se:

$$\left(M_A\right)_{c2} = -2 \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{c2} \frac{\Sigma_A \left(\frac{EI}{\ell}\right)_v}{\Sigma_A \left(\frac{EI}{\ell}\right)_c} \theta_A \quad (5.49)$$

onde:

$$\Sigma_A \left(\frac{EI}{\ell}\right)_v = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{v1} + \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{v2} \quad (5.50)$$

$$\Sigma_A \left(\frac{EI}{\ell}\right)_c = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{c1} + \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{c2} \quad (5.51)$$

Fazendo um procedimento análogo, considerando o equilíbrio no nó B, obtém-se o momento na extremidade B da coluna 2.

$$\left(M_B\right)_{c2} = -2 \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{c2} \frac{\Sigma_B \left(\frac{EI}{\ell}\right)_v}{\Sigma_B \left(\frac{EI}{\ell}\right)_c} \theta_B \quad (5.52)$$

onde:

$$\Sigma_B \left(\frac{EI}{\ell}\right)_v = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{v3} + \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{v4} \quad (5.53)$$

$$\Sigma_B \left(\frac{EI}{\ell}\right)_c = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{c2} + \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{c3} \quad (5.54)$$

Eliminando $(M_A)_{c2}$ das equações (5.28) e (5.49) tem-se:

$$\left(r_{ii} + 2 \frac{\Sigma_A \left(\frac{EI}{l} \right)_v}{\Sigma_A \left(\frac{EI}{l} \right)_c} \right) \theta_A + r_{ij} \theta_B = 0 \quad (5.55)$$

E $(M_B)_{c2}$ das equações (5.29) e (5.52), tem-se:

$$r_{ij} \theta_A + \left(r_{ii} + 2 \frac{\Sigma_B \left(\frac{EI}{l} \right)_v}{\Sigma_B \left(\frac{EI}{l} \right)_c} \right) \theta_B = 0 \quad (5.56)$$

Reescrevendo as equações (5.54) e (5.55), tem-se:

$$\left(r_{ii} + \frac{2}{G_A} \right) \theta_A + r_{ij} \theta_B = 0 \quad (5.57)$$

$$r_{ij} \theta_A + \left(r_{ii} + \frac{2}{G_B} \right) \theta_B = 0 \quad (5.58)$$

Chama-se de G_A e G_B a rigidez relativa nas extremidades A e B, respectivamente.

Onde:

$$G_A = \frac{\Sigma_A \left(\frac{EI}{l} \right)_c}{\Sigma_A \left(\frac{EI}{l} \right)_v} \quad (5.59)$$

$$G_B = \frac{\Sigma_B \left(\frac{EI}{\ell} \right)_c}{\Sigma_B \left(\frac{EI}{\ell} \right)_v} \quad (5.60)$$

$\Sigma \left(\frac{EI}{\ell} \right)_c$ = soma da rigidez de cada coluna ligada rigidamente a extremidade, nó interno;

$\Sigma \left(\frac{EI}{\ell} \right)_v$ = soma da rigidez de cada viga ligada rigidamente a extremidade, nó interno.

Reescrevendo sob a forma matricial as equações (5.57) e (5.58), tem-se:

$$\begin{bmatrix} r_{ii} + \frac{2}{G_A} & r_{ij} \\ r_{ij} & r_{ii} + \frac{2}{G_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

Na bifurcação, o determinante da matriz dos coeficientes é nulo:

$$\det. \begin{bmatrix} r_{ii} + \frac{2}{G_A} & r_{ij} \\ r_{ij} & r_{ii} + \frac{2}{G_B} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.62)$$

Substituindo os valores de r_{ii} e r_{ij} , equações (5.23) e (5.24) na equação (5.62) e considerando que:

$$kl = \left(\sqrt{N/EI} \right) \ell = \pi \sqrt{N/N_e} = \pi/k \quad (5.63)$$

Obtém-se a equação (5.64)

$$\frac{G_A G_B}{4} \left(\frac{\pi}{k} \right)^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2} \right) \left(1 - \frac{\pi/k}{\text{tg } \pi/k} \right) + \frac{2 \text{tg } \pi/2k}{\pi/k} - 1 = 0 \quad (5.64)$$

Adotando-se os valores dos fatores G_A e G_B , obtém-se na equação (5.64) o fator comprimento efetivo "k" para um elemento de pórtico indeslocável. Entretanto, este valor de "k" em função de G_A e G_B pode ser obtido diretamente do ábaco representado na figura 5.4, o qual refere-se a equação (5.64).

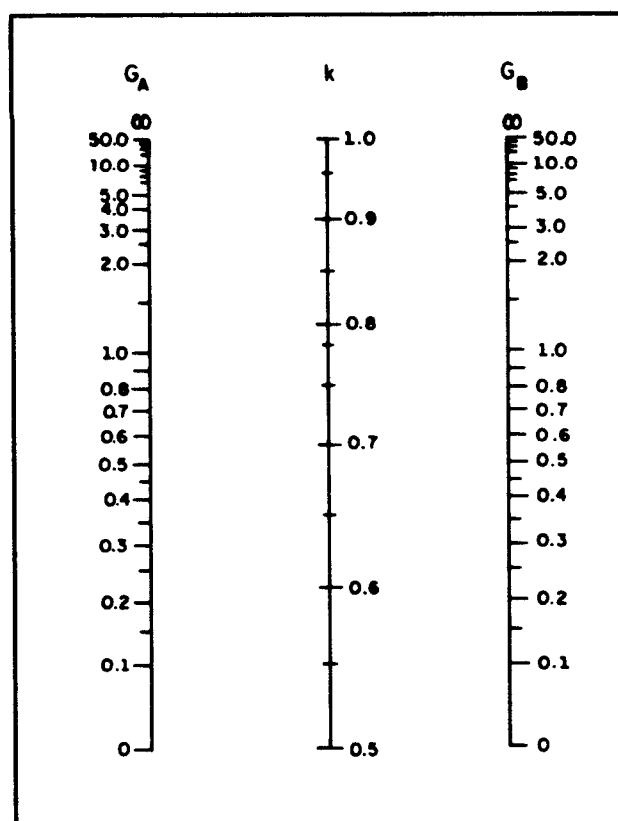


Figura 5.4- VALORES DE k PARA PÓRTICOS INDESLOCÁVEIS.

Verifica-se que os fatores G para ambas as extremidades da coluna foram definidos como a relação entre a somatória da rigidez de todas as colunas e de todas as vigas rigidamente ligadas ao nó considerado em um pórtico bem regular.

Para que a equação (5.64) seja estendida aos casos

onde a extremidade oposta da viga, em relação ao nó em análise, é articulada ou perfeitamente engastada, deve-se multiplicar o denominador do fator G por um coeficiente (α), como:

$$G = \frac{\Sigma \left(\frac{EI}{l} \right)_c}{\Sigma \alpha \left(\frac{EI}{l} \right)_v} \quad (5.65)$$

O coeficiente (α) corrige a rigidez utilizada na dedução da equação (5.64), a qual é representada nas figuras 5.5-a. As figuras 5.5-b e 5.5-c ilustram as situações na qual a extremidade oposta é rotulada e engastada, respectivamente.

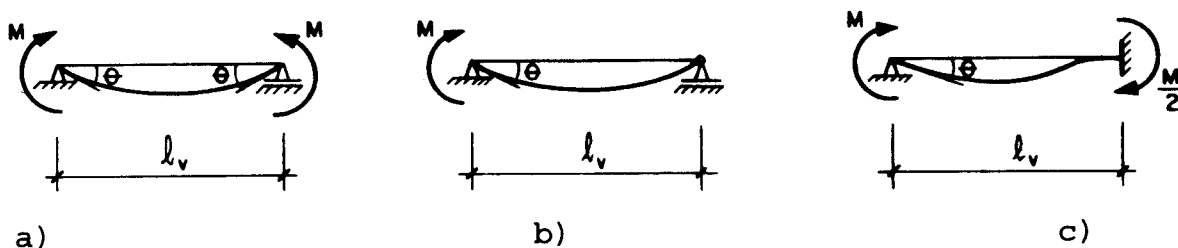


Figura 5.5- CORREÇÃO DA RIGIDEZ DA VIGA.

A rotação θ na figura 5.5a é:

$$\theta = \frac{Ml_v}{EI_v} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{Ml_v}{2EI_v} \quad (5.66)$$

ou

$$\frac{M}{\theta} = \frac{2EI_v}{l_v} \quad (5.67)$$

Da figura 5.5b, tem-se a rotação θ .

$$\theta = \frac{Ml_v}{3EI_v} \quad (5.68)$$

ou

$$\frac{M}{\theta} = \frac{3EI_v}{\ell_v} \quad (5.69)$$

Analogamente da figura 5.5c, tem-se:

$$\theta = \frac{M\ell_v}{EI_v} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) = \frac{M\ell_v}{4EI_v} \quad (5.70)$$

ou

$$\frac{M}{\theta} = \frac{4EI_v}{\ell_v} \quad (5.71)$$

Verifica-se das figuras 5.5b, que a rigidez da viga aumenta uma vez e meia, portanto, $\alpha = 1,5$. Enquanto que, na figura 5.5c, a rigidez da viga aumenta duas vezes, logo $\alpha = 2,0$.

5.4.2- Pórticos Deslocáveis

Analisando o modelo de flambagem representado na figura 5.6, obtém-se o fator comprimento efetivo "k" de uma coluna de pórtico deslocável. Para verificar este comportamento de flambagem, considera-se as seguintes hipóteses.

- a) Os elementos são prismáticos e comportam-se elasticamente;
- b) Despreza-se as forças axiais nas vigas;
- c) Todas as colunas flambam simultaneamente;
- d) O momento de engastamento nas vigas é distribuído entre as colunas, proporcionalmente a sua rigidez;
- e) Na flambagem, as rotações das vigas nas duas extremidades são iguais em módulo e direção, isto é, as vigas fletem em curvatura dupla.

Devido a translação relativa do nó nas extremidades do elemento, figura 5.7, as equações inclinação-deslocamento (5.21) e (5.22) são modificadas.

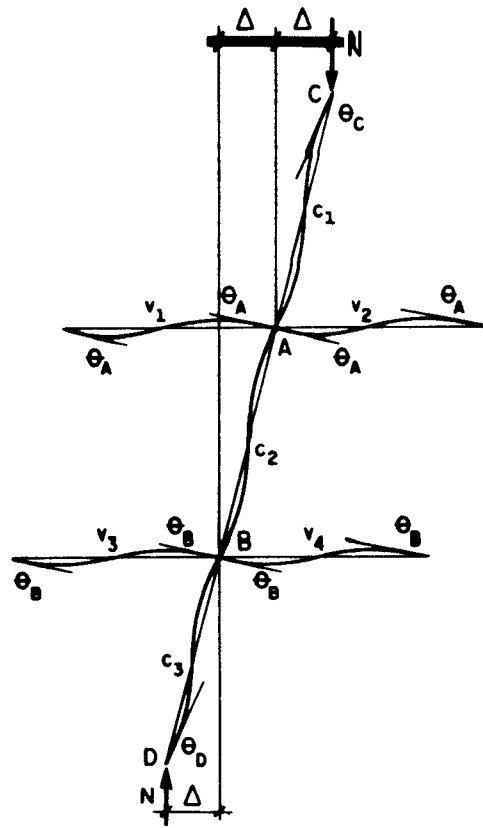


Figura 5.6- MODELO DE FLAMBAGEM PARA O FATOR (k) NO PÓRTICO DESLOCÁVEL.

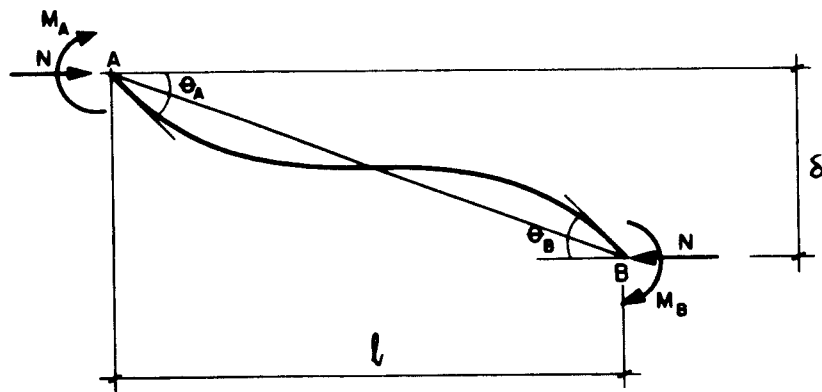


Figura 5.7- VIGA COLUNA COM TRANSLAÇÃO NO NÓ.

Comparando as figuras 5.2 e 5.7, verifica-se que as rotações nas extremidades da figura 5.7, diminuem de um valor (δ/l) . Logo as equações (5.21) e (5.22) resultam.

$$M_A = \frac{EI}{l} \left[r_{ii} (\theta_A - \delta/l) + r_{ij} (\theta_B - \delta/l) \right] \quad (5.72)$$

$$M_B = \frac{EI}{l} \left[r_{ij} (\theta_A - \delta/l) + r_{ii} (\theta_B - \delta/l) \right] \quad (5.73)$$

Rearranjando, tem-se:

$$M_A = \frac{EI}{l} \left[r_{ii} \theta_A + r_{ij} \theta_B - (r_{ii} + r_{ij}) \delta/l \right] \quad (5.74)$$

$$M_B = \frac{EI}{l} \left[r_{ij} \theta_A + r_{ii} \theta_B - (r_{ii} + r_{ij}) \delta/l \right] \quad (5.75)$$

Devido a hipótese "e", os elementos de viga fletem em dupla curvatura ($\theta_A = \theta_B$), conforme representa a figura 5.8, as equações (5.21) e (5.22) reduzem-se a:

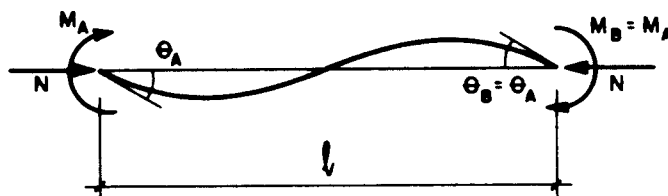


Figura 5.8- VIGA-COLUNA EM CURVATURA DUPLA.

$$M_A = \frac{EI}{l} \left[r_{ii} + r_{ij} \right] \theta_A \quad (5.76)$$

$$M_B = M_A \quad (5.77)$$

Considerando as equações (5.74) e (5.75) para as colunas, e as equações (5.76) e (5.77) para as vigas, pode-se escrever as equações para os elementos da figura 5.6.

Logo, tem-se as equações para as colunas como:

$$(M_A)_{c1} = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{c1} \left[r_{ii} \theta_A + r_{ij} \theta_B - (r_{ii} + r_{ij}) \frac{\delta}{\ell_{c1}} \right] \quad (5.78)$$

$$(M_A)_{c2} = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{c2} \left[r_{ii} \theta_A + r_{ij} \theta_B - (r_{ii} + r_{ij}) \frac{\delta}{\ell_{c2}} \right] \quad (5.79)$$

$$(M_B)_{c2} = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{c2} \left[r_{ij} \theta_A + r_{ii} \theta_B - (r_{ii} + r_{ij}) \frac{\delta}{\ell_{c2}} \right] \quad (5.80)$$

$$(M_B)_{c3} = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{c3} \left[r_{ij} \theta_A + r_{ii} \theta_B - (r_{ii} + r_{ij}) \frac{\delta}{\ell_{c3}} \right] \quad (5.81)$$

As equações dos momentos para as vigas são:

Devido a hipótese "b", desprezando-se a força axial para as vigas, pode-se considerar que r_{ii} e r_{ij} são 4 e 2, respectivamente.

$$(M_A)_{v1} = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{v1} [4\theta_A + 2\theta_A] = \left(\frac{EI}{\ell}\right)_{v1} 6\theta_A \quad (5.82)$$

$$(M_A)_{v2} = \left(\frac{EI}{l}\right)_{v2} [4\theta_A + 2\theta_A] = \left(\frac{EI}{l}\right)_{v2} 6\theta_A \quad (5.83)$$

$$(M_B)_{v3} = \left(\frac{EI}{l}\right)_{v3} [4\theta_B + 2\theta_B] = \left(\frac{EI}{l}\right)_{v3} 6\theta_B \quad (5.84)$$

$$(M_B)_{v4} = \left(\frac{EI}{l}\right)_{v4} [4\theta_B + 2\theta_B] = \left(\frac{EI}{l}\right)_{v4} 6\theta_B \quad (5.85)$$

Por equilíbrio no ponto A, tem-se:

$$(M_A)_{c1} + (M_A)_{c2} + (M_A)_{v1} + (M_A)_{v2} = 0 \quad (5.86)$$

Reescrevendo:

$$(M_A)_{c2} = -(M_A)_{v1} - (M_A)_{v2} - (M_A)_{c1} \quad (5.87)$$

Substituindo as equações (5.78), (5.82) e (5.83) em (5.87), tem-se:

$$(M_A)_{c2} = -6 \left[\left(\frac{EI}{l}\right)_{v1} + \left(\frac{EI}{l}\right)_{v2} \right] \theta_A - \left(\frac{EI}{l}\right)_{c1} \left[r_{ii} \theta_A + r_{ij} \theta_B - (r_{ii} + r_{ij}) \frac{\delta}{l_{c1}} \right] \quad (5.88)$$

Das equações (5.79) e (5.88), tem-se:

$$r_{ii} \theta_A + r_{ij} \theta_B - (r_{ii} + r_{ij}) \frac{\delta}{l_{c2}} = \frac{(M_A)_{c2}}{\left(\frac{EI}{l}\right)_{c2}} \quad (5.89)$$

Sendo $l_{c1} = l_{c2}$, substituindo a equação (5.89) na equação (5.88), resulta.

$$(M_A)_{c2} = -6 \left(\frac{EI}{l} \right)_{c2} \frac{\Sigma_A \left(\frac{EI}{l} \right)_v}{\Sigma_A \left(\frac{EI}{l} \right)_c} \theta_A \quad (5.90)$$

Onde:

$$\Sigma_A \left(\frac{EI}{l} \right)_v = \left(\frac{EI}{l} \right)_{v1} + \left(\frac{EI}{l} \right)_{v2} \quad (5.91)$$

$$\Sigma_A \left(\frac{EI}{l} \right)_c = \left(\frac{EI}{l} \right)_{c1} + \left(\frac{EI}{l} \right)_{c2} \quad (5.92)$$

Analogamente, considerando o equilíbrio no nó B, obtém-se o momento na extremidade B da coluna 2.

$$(M_B)_{c2} = -6 \left(\frac{EI}{l} \right)_{c2} \frac{\Sigma_B \left(\frac{EI}{l} \right)_v}{\Sigma_B \left(\frac{EI}{l} \right)_c} \theta_B \quad (5.93)$$

Onde:

$$\Sigma_B \left(\frac{EI}{l} \right)_v = \left(\frac{EI}{l} \right)_{v3} + \left(\frac{EI}{l} \right)_{v4} \quad (5.94)$$

$$\Sigma_B \left(\frac{EI}{l} \right)_c = \left(\frac{EI}{l} \right)_{c2} + \left(\frac{EI}{l} \right)_{c3} \quad (5.95)$$

Eliminando $(M_A)_{c2}$ das equações (5.79) e (5.89), e $(M_B)_{c2}$ das equações (5.80) e (5.93), obtém-se:

$$\left(r_{ii} + 6 \frac{\Sigma_A \left(\frac{EI}{\ell} \right)_v}{\Sigma_A \left(\frac{EI}{\ell} \right)_c} \right) \theta_A + r_{ij} \theta_B - (r_{ii} + r_{ij}) \frac{\delta}{\ell_{c2}} = 0 \quad (5.96)$$

$$r_{ij} \theta_A + \left(r_{ii} + 6 \frac{\Sigma_B \left(\frac{EI}{\ell} \right)_v}{\Sigma_B \left(\frac{EI}{\ell} \right)_c} \right) \theta_B - (r_{ii} + r_{ij}) \frac{\delta}{\ell_{c2}} = 0 \quad (5.97)$$

As equações (5.96) e (5.97) são obtidas considerando o equilíbrio nos nós A e B, respectivamente. Por equilíbrio da coluna 2, determina-se uma terceira equação.

$$(M_A)_{c2} + (M_B)_{c2} + N \delta - V \ell_{c2} = 0 \quad (5.98)$$

Desde que não exista força horizontal atuando, a equação (5.98) resulta.

$$(M_A)_{c2} + (M_B)_{c2} + N \delta = 0 \quad (5.99)$$

Substituindo as equações (5.81) e (5.93) em (5.99), tem-se:

$$-6 \left(\frac{EI}{\ell} \right)_{c2} \frac{\Sigma_A \left(\frac{EI}{\ell} \right)_v}{\Sigma_A \left(\frac{EI}{\ell} \right)_c} \theta_A - 6 \left(\frac{EI}{\ell} \right)_{c2} \frac{\Sigma_B \left(\frac{EI}{\ell} \right)_v}{\Sigma_B \left(\frac{EI}{\ell} \right)_c} \theta_B + N \delta = 0 \quad (5.100)$$

Considerando que:

$$N \delta = \left(\frac{EI}{\ell} \right)_{c2} (kl)_{c2}^2 \frac{\delta}{\ell_{c2}} \quad (5.101)$$

Das equações (5.100) e (5.101), tem-se:

$$-6 \frac{\Sigma_A \left(\frac{EI}{\ell} \right)_v}{\Sigma_A \left(\frac{EI}{\ell} \right)_c} \theta_A - 6 \frac{\Sigma_B \left(\frac{EI}{\ell} \right)_v}{\Sigma_B \left(\frac{EI}{\ell} \right)_c} \theta_B + (kl)_{c2}^2 \frac{\delta}{\ell_{c2}} = 0 \quad (5.102)$$

Reescrevendo sob a forma matricial as equações (5.96), (5.97), (5.102), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} r_{ii} + \frac{6}{G_A} & r_{ij} & -(r_{ii} + r_{ij}) \\ r_{ij} & r_{ii} + \frac{6}{G_B} & -(r_{ii} + r_{ij}) \\ \frac{-6}{G_A} & -\frac{6}{G_B} & (kl)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

Onde:

$$\theta_C = \frac{\delta}{l_{c2}} \quad (5.104)$$

Os fatores G_A e G_B são definidos nas equações (5.59) e (5.60), respectivamente.

Na bifurcação do equilíbrio, tem-se:

$$\det. \begin{bmatrix} r_{ii} + \frac{6}{G_A} & r_{ij} & -(r_{ii} + r_{ij}) \\ r_{ij} & r_{ii} + \frac{6}{G_B} & -(r_{ii} + r_{ij}) \\ \frac{-6}{G_A} & -\frac{6}{G_B} & (kl)^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.105)$$

Utilizando as expressões para r_{ii} e r_{ij} , equações (5.23) e (5.24), na equação (5.105) e considerando que $kl = \pi/k$, obtém-se:

$$\frac{G_A G_B (\pi/k)^2 - 36}{6(G_A + G_B)} - \frac{(\pi/k)}{\text{tg}(\pi/k)} = 0 \quad (5.106)$$

Obtém-se o fator comprimento efetivo "k" para um elemento de pórtico deslocável, através da equação (5.106),

ou diretamente do ábaco representado na figura 5.9, o qual refere-se a equação (5.106).

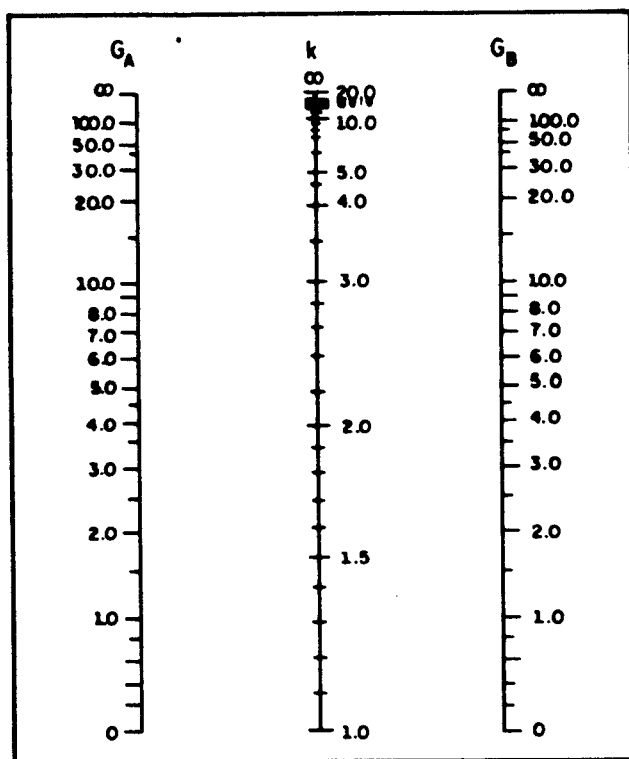


Figura 5.9- VALORES DE k PARA PÓRTICOS DESLOCÁVEIS.

Analogamente ao pórtico indeslocável, deve-se corrigir a rigidez das vigas com um coeficiente α , para os casos em que as extremidades opostas desta é rotulada ou engastada, impedida de girar, conforme figura 5.10.

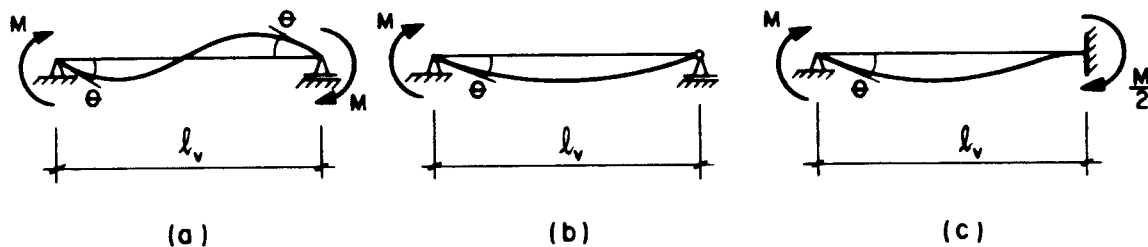


Figura 5.10- CORREÇÃO DA RIGIDEZ DA VIGA.

A figura 5.10.a foi utilizada na dedução da equação (5.106), enquanto que as figuras 5.10b e 5.10c representam as situações com extremidade opostas rotulada e engastada, respectivamente.

A rotação na figura 5.10a é:

$$\theta = \frac{Ml_v}{EI_v} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{Ml_v}{6EI_v} \quad (5.107)$$

Rearranjando, tem-se:

$$\frac{M}{\theta} = \frac{6EI_v}{l_v} \quad (5.108)$$

Da figura 5.10b, tem-se:

$$\theta = \frac{Ml_v}{3EI_v} \quad (5.109)$$

ou

$$\frac{M}{\theta} = \frac{3EI_v}{l_v} \quad (5.110)$$

Analogamente, tem-se a rotação da figura 5.10c.

$$\theta_B = \frac{Ml_v}{EI_v} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) = \frac{Ml_v}{4EI_v} \quad (5.111)$$

ou

$$\frac{M}{\theta} = \frac{4EI_v}{l_v} \quad (5.112)$$

Percebe-se através da figura 5.10b, que a rigidez da viga reduz a metade, portanto, $\alpha = 0,5$. Na figura 5.10c, a rigidez reduz a 2/3 da rigidez correspondente a figura 5.10a, logo, $\alpha=0,67$.

A tabela 5.3 representa os valores de α , coeficiente de correção da rigidez, usados para todas as vigas ligadas rigidamente a extremidade.

TABELA 5.3-VALORES DE α (COEFICIENTE DE CORREÇÃO DA RIGIDEZ)

Condições de Extremidade da viga	Translação na direção perpendicular a coluna	
	Impedida no nó	Permitida no nó
Extremidade oposta da viga ligada rigidamente, porém pode girar, hipóteses das demonstrações.	1,00	1,00
Extremidade oposta da viga rotulada.	1,50	0,50
Extremidade oposta da viga ligada rigidamente, porém não pode girar.	2,00	0,67

A Norma NBR 8800 apresenta em seu anexo I, valores de (α) idênticos aos da tabela 5.3, os quais são recomendados por "JOHNSTON (1976)²" para vigas com extremidade oposta rotulada e engastada (impedida de girar), respectivamente.

O valor do fator "G", para cada uma das extremidades da coluna, é obtido conforme a equação (5.65), ou seja:

2

JOHNSTON, B.G. Guide to stability design criteria for metal structures. 3ed. New York: John Wiley & Sons, 1976, 616p.

$$G = \frac{\sum \left(\frac{EI}{l} \right)_c}{\sum \alpha \left(\frac{EI}{l} \right)_v} \quad (5.113)$$

Quando a extremidade da coluna for apoio da estrutura são feitas as seguintes observações:

$G = \infty$ para bases rotuladas (através de pino, neoprene, etc.);

$G = 10$ Para bases consideradas rotuladas, porém, com a placa de base apoiada diretamente sobre o concreto sem dispositivo algum de articulação;

$G = 1,0$ Para bases engastadas.

5.5- CONSIDERAÇÕES FINAIS

As condições ideais de vinculação que são consideradas no cálculo do fator comprimento efetivo de flambagem para os elementos isolados, dificilmente ocorrem. No entanto, as normas técnicas consideram tais condições e recomendam adotar os valores representados na tabela 5.1, ou seja, majorando-os para considerar possíveis imperfeições nestas vinculações.

As hipóteses consideradas para determinar o fator comprimento efetivo de flambagem em elementos de pórticos, tais como: os elementos comportam-se elasticamente, todas as colunas flambam simultaneamente e momentos de engastamento

perfeito nas extremidades, provavelmente não ocorrem. Entretanto, as normas técnicas consideram tais hipóteses e recomendam determinar o fator comprimento efetivo de flambagem através da equação (5.64) ou do ábaco da figura 5.4 para pórticos indeslocáveis e da equação (5.106) ou do ábaco da figura 5.9 para pórticos deslocáveis.

Deve-se fazer uma reavaliação das hipóteses visando um cálculo mais preciso do fator comprimento efetivo de flambagem bem como apresentar novos ábacos para elementos de pórticos indeslocáveis e deslocáveis.

O comprimento efetivo de flambagem (kl) será utilizado no "Capítulo 8" para determinar a resistência de cálculo de barras comprimidas.

CAPÍTULO 6

BARRAS COMPOSTAS

6.1- GENERALIDADES

Este capítulo apresenta as considerações do efeito da força cortante na resistência de barras compostas formadas por: perfis interligados por diagonais (colunas treliçadas), chapas de travejamento em quadro, chapas contínuas vazadas.

Apresenta-se o cálculo do fator de correção (β) devido ao efeito da distorção angular provocado pela força cortante. Este fator deverá multiplicar o comprimento efetivo de flambagem ($k\ell$), o qual depende das condições de extremidades da barra analisada.

Pode-se desprezar o efeito da força cortante sob a carga crítica de flambagem nas barras com seção em alma cheia (ex., perfil I), entretanto, este efeito é significativo na resistência de flambagem de barras compostas, formadas por: perfis interligados por diagonais, colunas treliçadas, (figura 6.1a); chapas de travejamento em quadro (figura 6.1b); chapas contínuas vazadas (figura 6.1c).

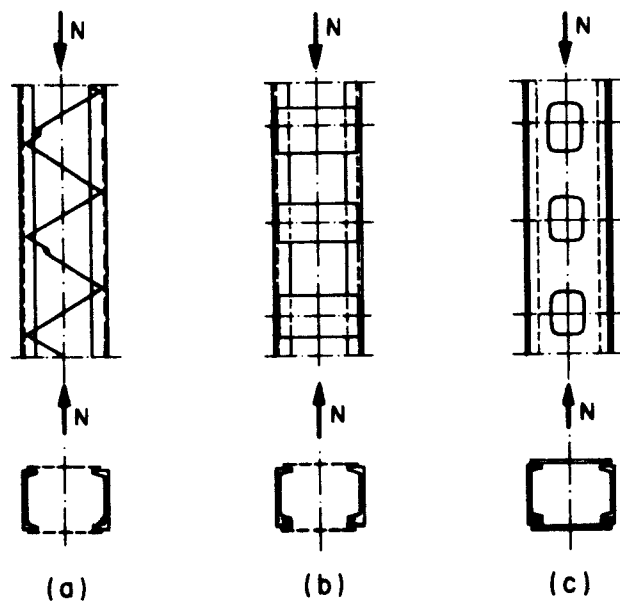


Figura 6.1- BARRAS COMPOSTAS.

A equação geral da carga crítica de flambagem no regime elástico, considerando o efeito da força cortante, para as barras com seção em alma cheia é expressa como:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta k l)^2} \quad (6.1)$$

onde:

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{n \cdot \pi^2 EI}{A_g G l^2}} \quad (6.2)$$

n = Fator que corrige a não uniformidade na distribuição da tensão de cisalhamento (τ) ao longo da seção;

β = Fator que corrige o efeito da distorção angular devido a força cortante na resistência de flambagem da barra.

6.2- DETERMINAÇÃO DO FATOR (β)

6.2.1- Barras compostas, treliçadas, formadas por perfis interligados por diagonais

a) Treliçamento simples

Analisando o efeito da força cortante (V) em um painel da barra composta (figura 6.2a) é possível obter o deslocamento devido a distorção angular através do alongamento e encurtamento das diagonais em cada painel, conforme ilustra a figura 6.2b.

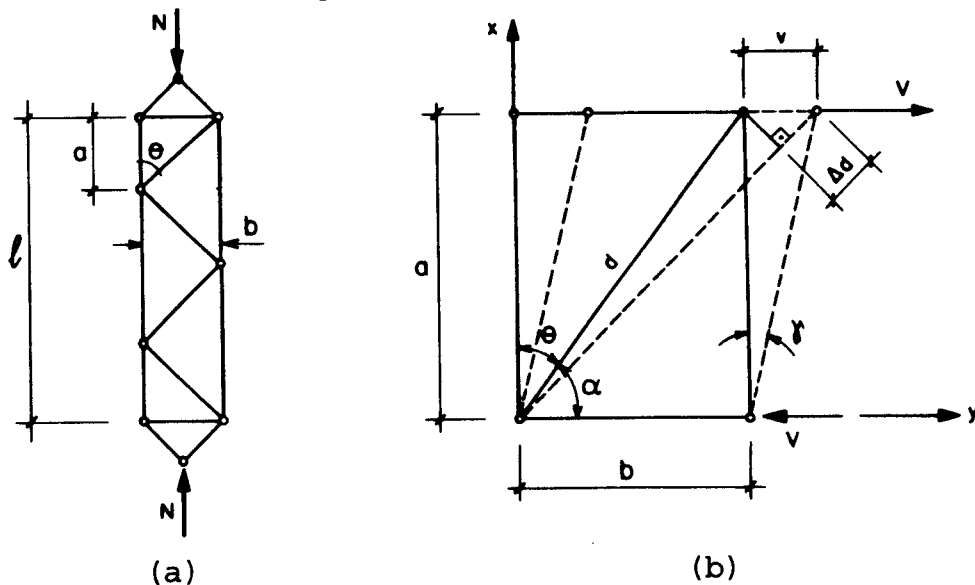


Figura 6.2- BARRA COMPOSTA, TRELIÇAMENTO SIMPLES.

O valor da distorção angular (γ), baseado na teoria dos pequenos deslocamentos, é obtido por:

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma = \frac{v}{a} \quad (6.3)$$

onde:

v = deslocamento lateral

Considera-se, da resistência dos materiais, o valor da distorção angular (γ), como:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{n\tau_m}{G} = \frac{nV}{GA_g} \quad (6.4)$$

Igualando as equações (6.3) e (6.4), tem-se:

$$v = \frac{naV}{GA_g} \quad (6.5)$$

Obtém-se a força normal de tração na diagonal, devido a força cortante, através da expressão (6.6):

$$V_d = \frac{V}{\cos\alpha} \quad (6.6)$$

Reescrevendo a equação (6.6):

$$V_d = V \frac{d}{b} \quad (6.7)$$

Por geometria, figura 6.2b, tem-se:

$$v = \frac{\Delta d}{\cos\alpha} = \Delta d \cdot \frac{d}{b} \quad (6.8)$$

Da resistência dos materiais, tem-se:

$$\Delta d = \frac{V_d \cdot d}{A_w \cdot E} \quad (6.9)$$

Onde:

A_w = área da diagonal.

Substituindo a equação (6.7) na equação (6.9), obtém-se:

$$\Delta d = \frac{V \cdot d^2}{bEA_w} \quad (6.10)$$

Das equações (6.8) e (6.10) é possível obter:

$$v = \frac{V \cdot d^3}{b^2 EA_w} \quad (6.11)$$

Igualando as equações (6.5) e (6.11):

$$\frac{\Pi}{A_g G} = \frac{d^3}{ab^2 EA_w} \quad (6.12)$$

Substituindo a equação (6.12) na equação (6.2), obtém-se o valor de β :

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{d^3}{ab^2 A_w} \frac{\pi^2 I}{l^2}} \quad (6.13)$$

Rearranjando a equação (6.13)

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 A_g}{\lambda^2 A_w} \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}} \quad (6.14)$$

Onde:

$$b = d \sin \theta; \quad (6.15)$$

$$a = d \cos \theta; \quad (6.16)$$

$$r^2 = I/A_g \quad (6.17)$$

$$\lambda = l/r$$

A_g = área total da seção transversal.

b) Treliçamento simples com montantes.

Nas barras dispostas conforme a figura 6.3, considera-se o deslocamento lateral total (v) como sendo a soma entre os deslocamentos devido ao efeito da força cortante na diagonal (v_1) e no montante (v_2), respectivamente.



Figura 6.3- BARRA COMPOSTA, TRELIÇAMENTO SIMPLES COM MONTANTES

Pode-se desprezar a parcela referente ao deslocamento (v_2), determinando-se portanto, o fator de correção (β) através da equação (6.14).

c) Trelização em x

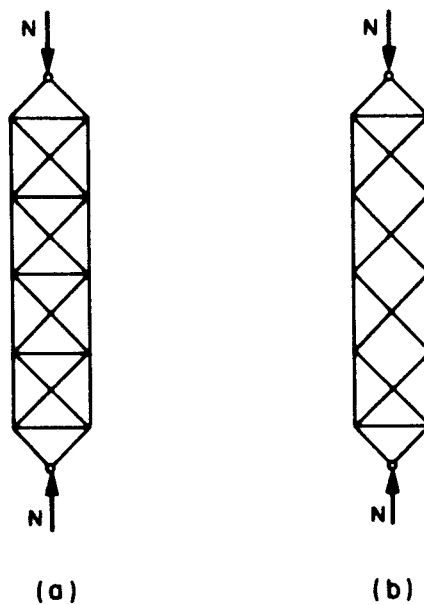


Figura 6.4- BARRA COMPOSTA, TRELIÇAMENTO EM "x".

Analisando-se as barras da figura 6.4.a, pode-se verificar que a força cortante comprime uma diagonal e traciona a outra. O efeito cortante não é transmitido para os montantes, os quais podem ser retirados no cálculo do fator de correção (β), conforme ilustra a figura 6.4b.

Neste caso, determina-se o fator de correção (β) através da equação (6.14), dobrando-se a área da diagonal (A_w).

Considerando uma relação entre a área da diagonal (A_w) e a área do banzo (A_b), na expressão (6.14), pode-se apresentar os seguintes casos:

Onde:

A_b = área de um banzo.

1o) CASO: $A_w = 0,25A_b \rightarrow$ Geralmente ocorre em colunas para grandes capacidades, como nos edifícios industriais.

Portanto, substituindo $A_w = 0,25 A_b$ na expressão (6.14); tem-se:

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{9,0}{\cos\theta \sin^2\theta}} \quad (6.18)$$

A tabela 6.1 ilustra os valores de β , equação (6.18), para valores do ângulo (θ) iguais a 60° , 45° e 30° , respectivamente.

Analisando-se as barras da figura 6.4.a, pode-se verificar que a força cortante comprime uma diagonal e traciona a outra. O efeito cortante não é transmitido para os montantes, os quais podem ser retirados no cálculo do fator de correção (β), conforme ilustra a figura 6.4b.

Neste caso, determina-se o fator de correção (β) através da equação (6.14), dobrando-se a área da diagonal (A_w).

Considerando uma relação entre a área da diagonal (A_w) e a área do banzo (A_b), na expressão (6.14), pode-se apresentar os seguintes casos:

Onde:

A_b = área de um banzo.

1o) CASO: $A_w = 0,25A_b \rightarrow$ Geralmente ocorre em colunas para grandes capacidades, como nos edifícios industriais.

Portanto, substituindo $A_w = 0,25 A_b$ na expressão (6.14); tem-se:

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{9,0}{\cos\theta \sin^2\theta}} \quad (6.18)$$

A tabela 6.1 ilustra os valores de β , equação (6.18), para valores do ângulo (θ) iguais a 60° , 45° e 30° , respectivamente.

TABELA 6.1 - VALORES DE β

λ	β		
	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 30^\circ$
20	1,262	1,276	1,423
25	1,174	1,184	1,287
30	1,124	1,131	1,207
35	1,092	1,098	1,155
40	1,071	1,076	1,121
45	1,057	1,060	1,097
50	1,046	1,049	1,079
55	1,038	1,041	1,066
60	1,032	1,034	1,055
65	1,028	1,029	1,047
70	1,024	1,025	1,041
75	1,021	1,022	1,036
80	1,018	1,019	1,032
85	1,016	1,017	1,028
90	1,015	1,015	1,025
95	1,013	1,014	1,022
100	1,012	1,013	1,020
105	1,011	1,012	1,018
110	1,010	1,011	1,017
115	1,009	1,010	1,015
120	1,008	1,009	1,014
125	1,007	1,008	1,013

O gráfico da figura 6.5 ilustra os valores do fator (β), obtidos na tabela 6.1, em função da esbeltez (λ).

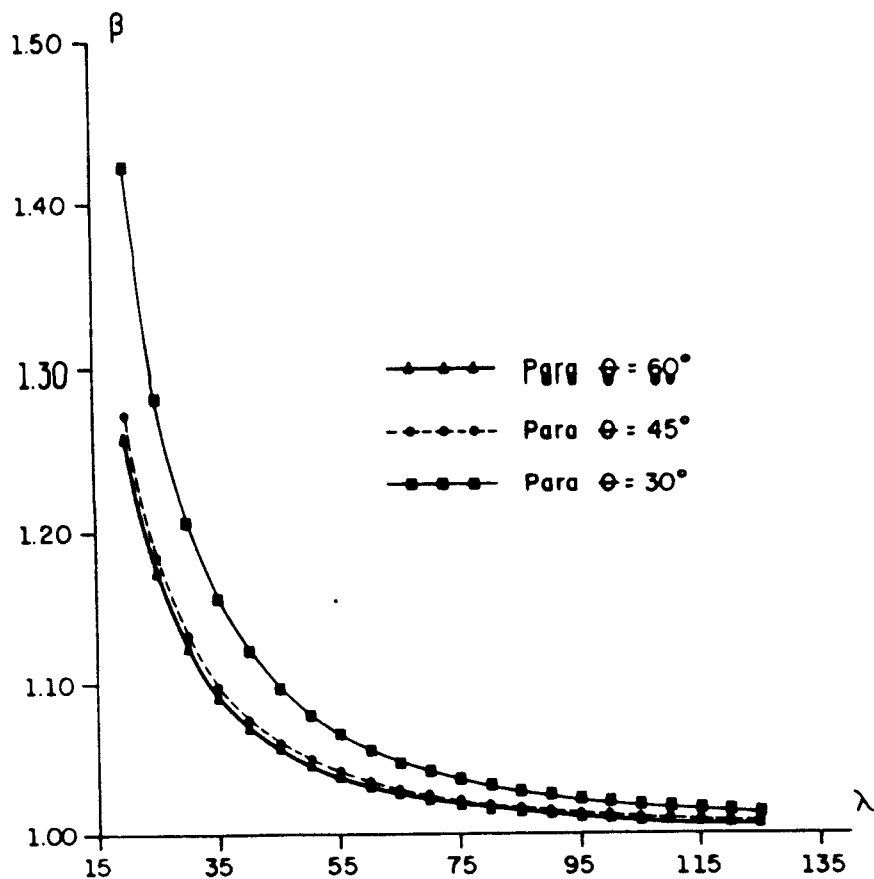


Figura 6.5- FATOR DE CORREÇÃO " β ".

2o) CASO: $A_w = 0,5A_b \rightarrow$ Treliças e colunas convencionais, como: treliças de coberturas, colunas para edifícios de pequeno porte, pontes de pequena capacidade.

Substituindo $A_w = 0,5A_b$ na expressão (6.14), tem-se:

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{5,0}{\cos\theta \sin^2\theta}} \quad (6.19)$$

A tabela 6.2 ilustra os valores de β , equação (6.19), para valores de (θ) iguais a 60° , 45° e 30° , respectivamente.

TABELA 6.2- VALORES DE β

λ	β		
	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 30^\circ$
20	1,153	1,161	1,253
25	1,100	1,106	1,168
30	1,071	1,075	1,119
35	1,052	1,055	1,089
40	1,040	1,043	1,069
45	1,032	1,034	1,055
50	1,026	1,028	1,045
55	1,022	1,023	1,037
60	1,018	1,019	1,031
65	1,015	1,016	1,027
70	1,013	1,014	1,023
75	1,012	1,012	1,020
80	1,010	1,011	1,018
85	1,009	1,009	1,016
90	1,008	1,080	1,014
95	1,007	1,007	1,013
100	1,006	1,006	1,011
105	1,005	1,006	1,010
110	1,005	1,005	1,009
115	1,004	1,005	1,008
120	1,004	1,004	1,007
125	1,004	1,004	1,007

O gráfico da figura 6.6 ilustra os valores do fator (β), da Tabela 6.2, em função da esbeltez (λ):

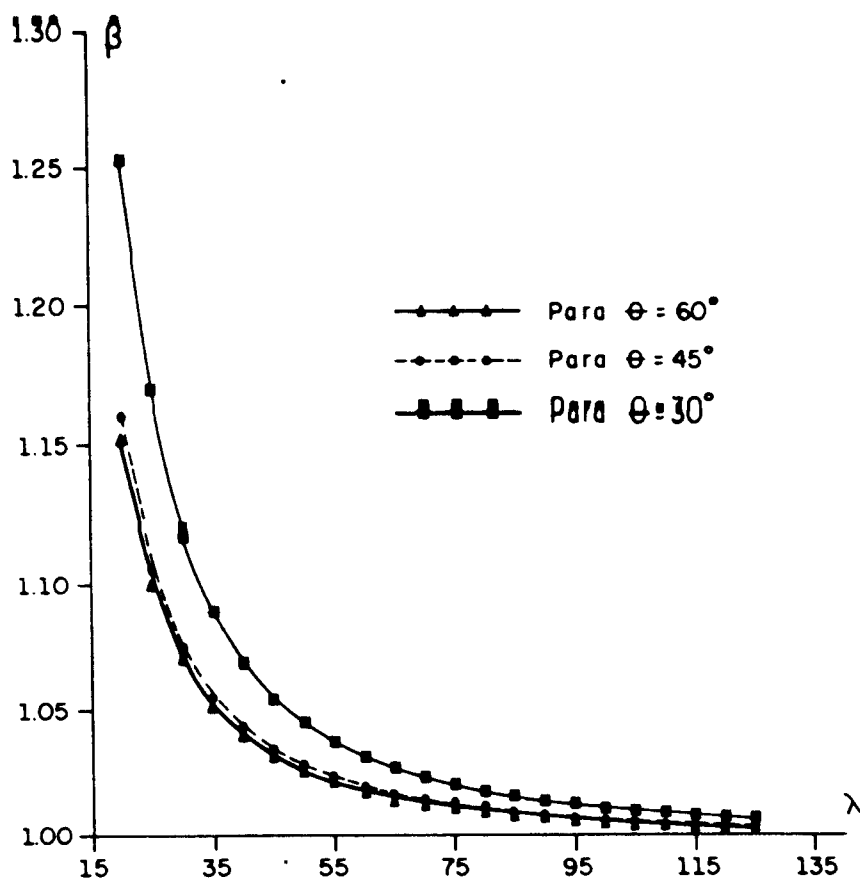


Figura 6.6- FATOR DE CORREÇÃO " β ".

3o) CASO: $A_w = 0,75A_b$

Este caso é praticamente impossível de ser obtido na prática, ocorre geralmente em treliças de pequeno vão, com ações externas extremamente elevadas.

A análise é feita somente para efeito de comparação teórica.

Substituindo $A_w = 0,75A_b$ na expressão (6.14), obtém-se:

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{3,67}{\cos\theta \sin^2\theta}} \quad (6.20)$$

A Tabela 6.3 ilustra os valores de β , equação (6.20), para valores de (θ) iguais a 60° , 45° e 30° , respectivamente.

TABELA 6.3- VALORES DE β

λ	β		
	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 30^\circ$
20	1,114	1,121	1,191
25	1,075	1,079	1,126
30	1,052	1,055	1,089
35	1,039	1,041	1,066
40	1,030	1,032	1,051
45	1,024	1,025	1,040
50	1,019	1,020	1,033
55	1,016	1,017	1,027
60	1,013	1,014	1,023
65	1,011	1,012	1,020
70	1,010	1,010	1,017
75	1,009	1,009	1,015
80	1,008	1,008	1,013
85	1,007	1,007	1,012
90	1,006	1,006	1,010
95	1,005	1,005	1,009
100	1,004	1,005	1,008
105	1,004	1,004	1,007
110	1,003	1,004	1,006
115	1,003	1,003	1,006
120	1,003	1,003	1,005
125	1,003	1,003	1,005

O gráfico da figura 6.7 ilustra os valores do fator (β), da tabela 6.3, em função da esbeltez (λ).

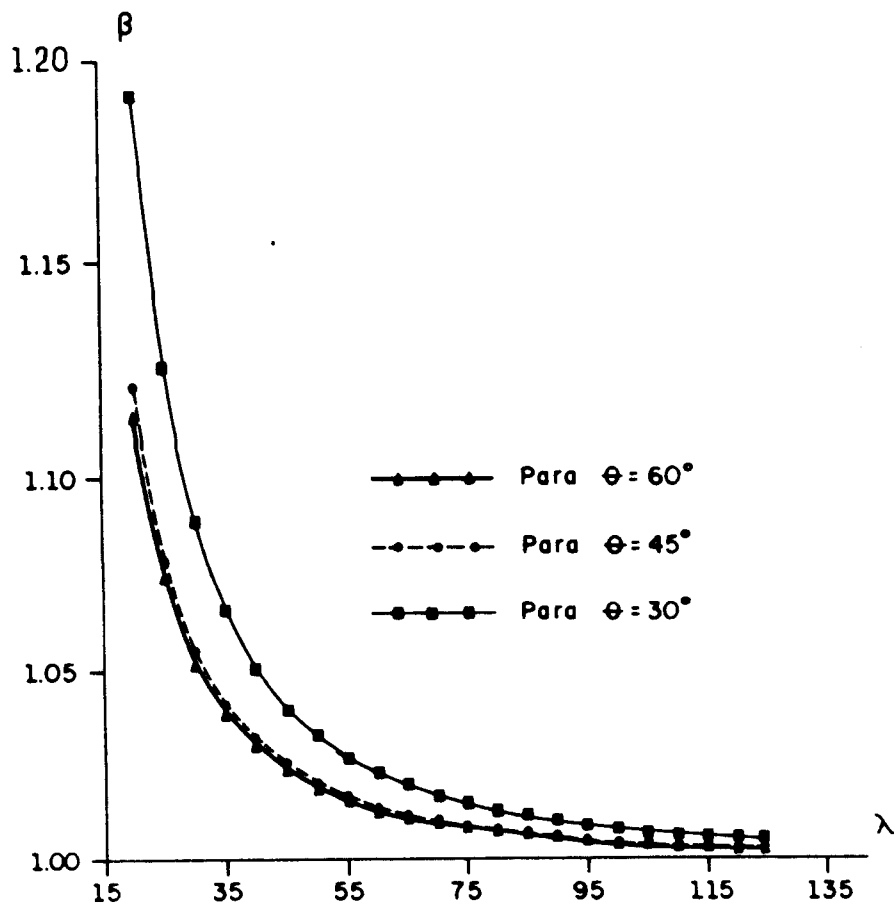


Figura 6.7- FATOR DE CORREÇÃO " β ".

Analisando os gráficos, pode-se concluir que:

- Para valores de $\lambda < 40$, pouco utilizado na prática, há uma grande correção a ser feita pelo fator (β);
- Para valores de $\lambda > 80$, pequena variação do fator (β);
- Percebe-se que o fator de correção (β) depende mais do ângulo da diagonal com a vertical (θ), que da relação entre a área da diagonal (A_w) e área do banzo (A_b);

d) Verifica-se que para valores de θ iguais a 60° e 45° , respectivamente, pode-se considerar o fator de correção (β) iguais aos valores recomendados por GALAMBOS (1988)¹, ou seja, representado da seguinte forma.

Para $\lambda > 40$

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{300}{\lambda^2}}$$

Para $\lambda \leq 40$

$$\beta = 1,10$$

6.2.2- Barras compostas formadas por chapas regularmente espaçadas, formando travejamento em quadro (sistema Vierendel)

TIMOSHENKO (1961)² desenvolveu a análise do efeito da força cortante na redução da carga crítica de flambagem, em barras compostas formadas por chapas regularmente espaçadas, formando travejamento em quadro, figura 6.8.

1

GALAMBOS, T.V. - Guide to stability Design criteria for metal structures. 4.ed. New York: John Wiley & Sons, 786p.

2

TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. - Theory of elastic stability. 2ed. TOKYO: McGraw - Hill Kagakusha. 541p.

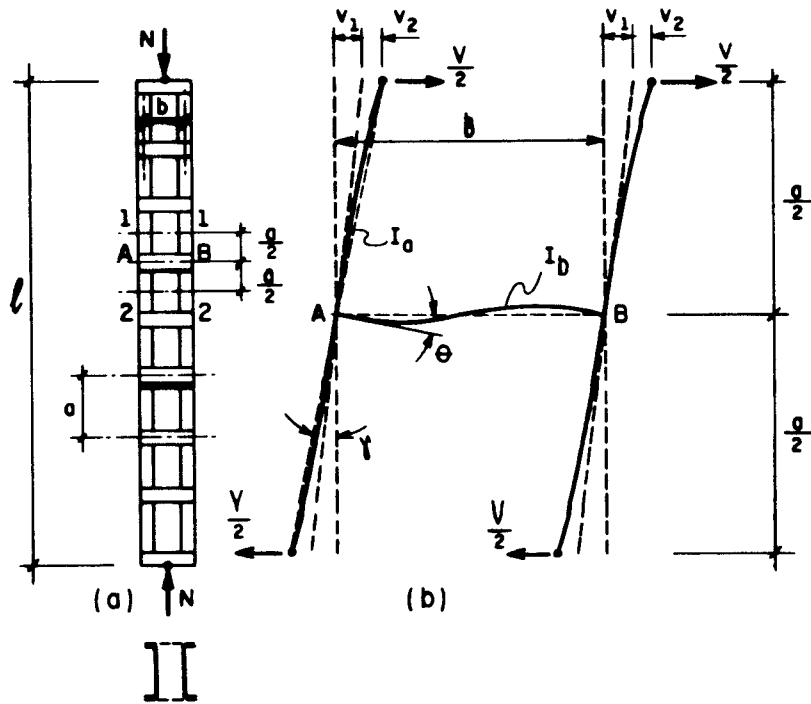


Figura 6.8- BARRA COMPOSTA, FORMANDO TRAVEJAMENTO EM QUADRO (SISTEMA VIERENDEL).

Estas barras são ligadas por chapas transversais, ligações engastadas, conforme ilustra a figura 6.8a.

Analisando um elemento da barra, representado entre as seções 1.1 e 2.2, na posição deslocada, obtém-se o deslocamento lateral devido a força cortante (V).

Admitindo-se que as linhas elásticas dos banzos apresentam pontos de inflexão nas seções consideradas, figura 6.8b, obtém-se o deslocamento lateral total $v = v_1 + v_2$.

Onde:

v_1 = deslocamento devido a flexão da chapa horizontal, barra \overline{AB} ;

v_2 = deslocamento devido a flexão dos banzos.

Obtém-se o ângulo de rotação (θ) nas extremidades da barra \overline{AB} , como:

$$\theta = \frac{Mb}{3EI_b} - \frac{Mb}{6EI_b} \quad (6.21)$$

Determina-se os momentos nas extremidades da barra \overline{AB} , através da seguinte expressão:

$$M = \frac{Va}{2} \quad (6.22)$$

Substituindo a equação (6.22) na equação (6.21) e rearranjando, obtém-se:

$$\theta = \frac{Vab}{12EI_b} \quad (6.23)$$

Onde:

b = comprimento da barra horizontal.

a = espaçamento entre as barras horizontais

EI_b = rigidez à flexão da barra horizontal.

Por geometria, figura 6.8b, e baseado na teoria dos pequenos deslocamentos pode-se obter o ângulo (θ).

$$\theta = \frac{v_1}{a/2} \quad (6.24)$$

Igualando as equações (6.23) e (6.24), obtém-se:

$$v_1 = \frac{Va^2b}{24EI_b} \quad (6.25)$$

Através da expressão do deslocamento na extremidade da viga em balanço, figura 6.8b, obtém-se o deslocamento v_2 .

$$v_2 = \frac{V}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{1}{3EI_a} = \frac{Va^3}{48EI_a} \quad (6.26)$$

Onde:

EI_a = rigidez a flexão do banzo.

Por geometria, figura 6.8b, tem-se:

$$\gamma = \frac{v_1 + v_2}{a/2} = \frac{Vab}{12EI_b} + \frac{Va^2}{24EI_a} \quad (6.27)$$

A distorção angular (γ), devido a força cortante (V), é:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{nV}{GA_g} \quad (6.28)$$

Igualando as equações (6.27) e (6.28), obtém-se:

$$\frac{n}{GA_g} = \frac{1}{12E} \left(\frac{ab}{I_b} + \frac{a^2}{2I_a} \right) \quad (6.29)$$

Substituindo as equações (6.29) em (6.2), tem-se:

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI}{12\ell^2} \left(\frac{ab}{EI_b} + \frac{a^2}{2EI_a} \right)} \quad (6.30)$$

Reescrevendo a equação (6.30), obtém-se:

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{12\lambda^2} \left(\frac{abA_g}{I_b} + \frac{a^2 A_g}{2I_a} \right)} \quad (6.31)$$

Considerando $\left(\frac{abA_g}{I_b} \right) = 0$ e $A_g = 2A_a$, na equação (6.31), obtém:

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{12} \frac{\lambda_a^2}{\lambda^2}} \quad (6.32)$$

onde:

λ_a = índice de esbeltez do banzo.

λ = índice de esbeltez total da barra composta.

Substituindo a equação (6.32) na equação (6.1);

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2}{12} \frac{\lambda_a^2}{\lambda^2} \right)} \quad (6.33)$$

6.2.3- Barras formadas por chapas contínuas vazadas

TIMOSHENKO (1961)³ desenvolveu a análise do efeito da força cortante na redução da carga crítica de flambagem, em barras formadas por chapas contínuas vazadas, figura 6.9.

Obtém-se as propriedades geométricas da seção, como área e momento de inércia, através das hipóteses apresentadas a partir da figura 6.9.

3

TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. - Theory of elastic stability. 2.ed. Tokyo: McGraw - Hill Kogakusha. 541p.

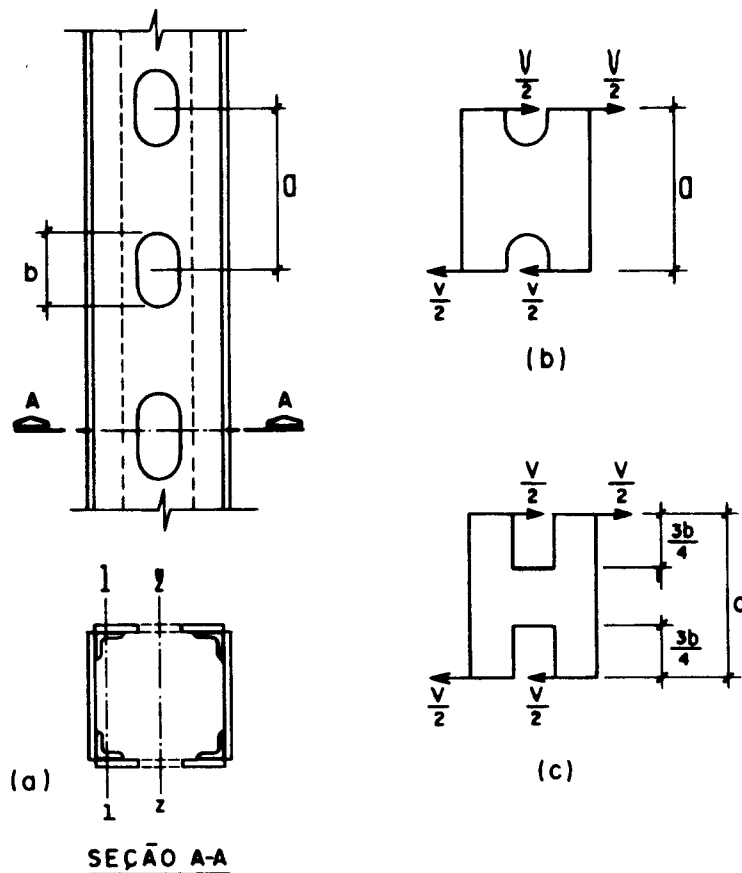


Figura 6.9- BARRA FORMADA POR CHAPAS CONTÍNUAS VAZADAS.

Admite-se um elemento idealizado, figura 6.9c, similar ao elemento representado na figura 6.8b. Substituindo-se apenas a chapa horizontal pela chapa vazada, infinitamente rígida ($I_b = \infty$).

Considera-se o valor $3/4b$, representado na figura 6.9c, compatível com resultados de ensaios.

Substituindo $I_b = \infty$ na equação (6.25), obtém-se:

$$v_1 = 0 \tag{6.34}$$

Determina-se o deslocamento devido a flexão dos banzos (v_2), figura 6.9c, através da equação (6.26).

$$v_2 = \frac{V}{2} \left(\frac{3}{4}b \right)^3 \frac{1}{3EI_f} \quad (6.35)$$

Reescrevendo a equação (6.35);

$$v_2 = \frac{9Vb^3}{128EI_f} \quad (6.36)$$

Onde:

I_f = momento de inércia da membrana, perfil U, o qual representa a área total efetiva da barra no lado do eixo z, figura 6.9a, considerado sob o centróide da membrana (eixo 1-1).

Substituindo as equações (6.34) e (6.35) na equação (6.27), obtém-se:

$$\gamma = \frac{9Vb^3}{64aEI_f} \quad (6.37)$$

Das equações (6.37) e (6.28), tem-se:

$$\frac{n}{GA_g} = \frac{9b^3}{64aEI_f} \quad (6.38)$$

Substituindo a equação (6.38) na equação (6.2), obtém-se:

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{9b^3}{64aEI_f}} \quad (6.39)$$

Rearranjando a equação (6.39)

$$\beta = \sqrt{1 + 0,14 \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{A_g}{I_F} \frac{b^3}{a}} \quad (6.40)$$

Substituindo a equação (6.40) na equação (6.1),
tem-se:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2} \left(\frac{1}{1 + 0,14 \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{A_g}{I_F} \frac{b^3}{a}} \right) \quad (6.41)$$

6.3- CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considera-se o efeito da força cortante, representado matematicamente pelo fator (β), desprezível para as barras interligadas por diagonais (colunas treliçadas) desde que o ângulo entre a diagonal e a barra vertical seja compreendido entre 45° e 60° . Esta hipótese é recomendada pelas principais normas técnicas e os resultados obtidos (gráficos das figuras 6.5, 6.6 e 6.7) indicam que é uma boa aproximação para ser utilizada no cálculo corrente.

Entretanto, para as barras compostas, formando travejamento em quadro (sistema vierendel) e barras formadas por chapas contínuas vazadas, o efeito da cortante, representado matematicamente pelo fator (β), não pode ser desprezado.

Este fator (β) é multiplicado pelo comprimento efetivo de flambagem (kl), o qual depende das condições de vinculação, diminuindo a resistência da barra analisada.

CAPÍTULO 7

FLAMBAGEM DE CHAPAS

7.1- GENERALIDADES

O desenvolvimento deste capítulo baseia-se nos trabalhos apresentados por BLEICH (1952)¹, SALMON (1990)² e TIMOSHENKO (1961)³. Aborda-se o comportamento da flambagem de chapas uniformemente comprimidas.

Apresenta-se o cálculo da tensão crítica de flambagem elástica de chapas. Esta será utilizada no "Capítulo 8", para demonstrar as relações largura/espessura (b/t), apresentadas na tabela 8.4, as quais diferenciam as seções em função da esbeltez dos elementos que as compõem.

Apresenta-se a definição dos elementos enrijecidos e não-enrijecidos, as quais serão abordadas com maior profundidade no "Capítulo 8", particularmente nos casos de

1

BLEICH, F. - Buckling Strength of metal structures. New York: McGraw - Hill. 508P.

2

SALMON, C.G., JOHNSON, J.E. - steel structures: design and behavior. 3.ed. New York: Harper & Row. 1086P.

3

TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. - Theory of elastic stability. 2.ed. Tokyo: McGraw - Hill Kogakusha. 541P.

elementos esbeltos (seções classe 4).

Os perfis constituintes das estruturas metálicas, laminados ou soldados, são compostos de elementos de chapas e pode-se verificar que a resistência última de uma coluna, baseada em seu índice de esbeltez global, somente ocorrerá se os elementos de chapa não flambarem localmente.

A flambagem local dos elementos de chapa pode provocar a ruína prematura da seção transversal ou produzir uma distribuição não-uniforme de tensões, a qual reduzirá a resistência global da seção.

Apresenta-se, na tabela 7.1, dados sobre o processo evolutivo dos estudos referentes a flambagem de chapas. Todos os dados constituintes da tabela foram obtidos em BLEICH (1952).

TABELA 7.1- DADOS HISTÓRICOS REFERENTE À FLAMBAGEM DE CHAPAS

Autor (ano)	Trabalhos apresentados
Bryan, G.H. (1891)	Flambagem de chapas retangulares simplesmente apoiadas, comprimidas. Foi o primeiro a aplicar o critério da energia p/ resolver o problema da flambagem.
Reissner, H. (1909)	Flambagem de chapa retangular comprimida, com as duas bordas engastadas e com uma borda engastada e outra livre.
Timoshenko, S. (1910)	Flambagem de chapa sob várias condições de apoio e a aplicação da teoria na investigação dos elementos de chapa em colunas de aço.
Bleich, F. (1924)	Flambagem de chapa plana no regime inelástico considerando a chapa como anisotrópica.
Lundquist, Stowell (1939)	Flambagem local em colunas de seção retangular simétrica e de seções "U" e "Z".
Kollbruner, C.F. (1935-1946)	Flambagem de chapa nos regimes elástico e inelástico.

7.2- FLAMBAGEM DE CHAPAS UNIFORMEMENTE COMPRIMIDAS

Analisando-se uma chapa retangular apoiada nas quatro bordas, uniformemente comprimida na direção x , verifica-se que, se o comprimento desta for muito maior que a largura ($a \gg b$), a configuração deslocada da chapa na flambagem apresenta uma série de ondas, com a largura (h) aproximadamente igual a largura (b) da mesma, conforme ilustra a figura 7.1.

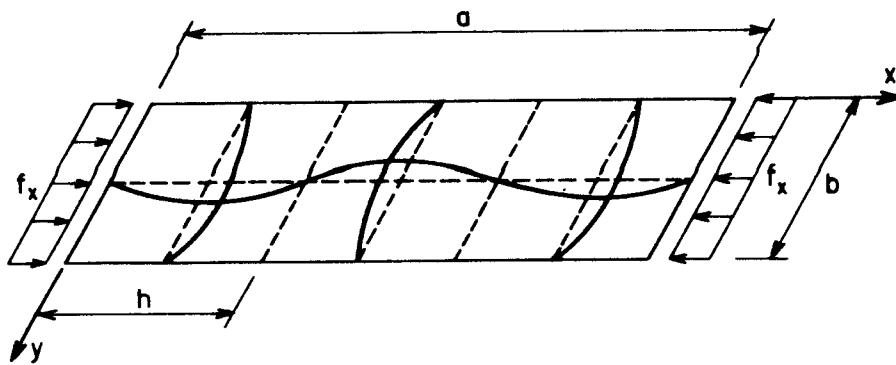


Figura 7.1- CHAPA RETANGULAR APOIADA NAS QUATRO BORDAS COM TENSÃO DE COMPRESSÃO UNIFORME.

Para uma chapa quadrada simplesmente apoiada nas quatro bordas, uniformemente comprimida na direção x , figura 7.2, a flambagem ocorrerá com uma curvatura simples nas duas direções.

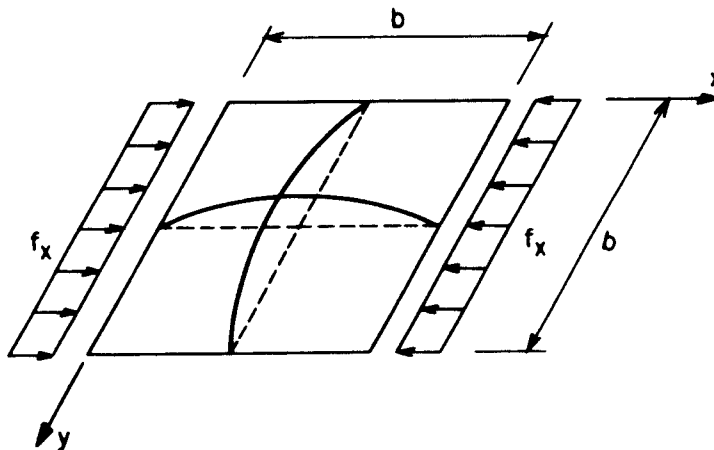


Figura 7.2- CHAPA QUADRADA APOIADA NAS QUATRO BORDAS COM TENSÃO DE COMPRESSÃO UNIFORME.

Determina-se a tensão crítica de flambagem elástica, a partir da equação diferencial (7.1), deduzida no Anexo II, baseada na hipótese de pequenos deslocamentos, ou seja, considera-se a ordem de grandeza do deslocamento transversal da ordem da espessura da chapa.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (7.1)$$

Considerando-se que a chapa está submetida apenas a força de compressão na direção x, a equação (7.1) reduz-se a:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (7.2)$$

Segundo TIMOSHENKO (1961) o deslocamento (w) de uma chapa retangular, com as bordas simplesmente apoiadas, pode ser expressa por uma série dupla:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \quad (7.3)$$

Onde (n) e (m) representam o número de meias ondas senoidais nas direções x e y, respectivamente.

A equação (7.3) satisfaz as condições de contorno, ou seja, os deslocamentos e os momentos ao longo das quatro bordas são nulos. Portanto, tem-se:

$$w = 0 ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (7.4)$$

Os momentos nas direções x e y são definidos no Anexo II, como:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \bar{\nu} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad (7.5)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \bar{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (7.6)$$

Substituindo a equação (7.3) na equação (7.2),
obtem-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \left[\pi^4 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^2 - \frac{N_x n^2 \pi^2}{D a^2} \right] \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{b} = 0 \quad (7.7)$$

Analisando a equação (7.7), pode-se verificar que esta apresenta as seguintes soluções:

$$B_{nm} = 0 \text{ (n\~ao \~e solu\~ao da chapa em flambagem);}$$

$$\pi^4 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^2 - \frac{N_x n^2 \pi^2}{D a^2} = 0 \quad (7.8)$$

A equação (7.8) \~e solu\~ao da chapa em flambagem, da qual obt\~em-se a for\~ca N_x :

$$N_x = \frac{D\pi^2}{b^2} \left[n \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{m^2}{n} \left(\frac{a}{b} \right) \right]^2 \quad (7.9)$$

Pode-se expressar a tens\~ao cr\~itica de flambagem como:

$$f_{cr} = \frac{N_x}{t} \quad (7.10)$$

Substituindo a equação (7.9) em (7.10), obt\~em-se:

$$f_{cr} = \frac{D\pi^2}{tb^2} \left[n \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{m^2}{n} \left(\frac{a}{b} \right) \right]^2 \quad (7.11)$$

Considerando $m=1$, uma meia onda senoidal na direção y , obtém-se o menor valor para a tensão crítica.

$$f_{cr} = \frac{D\pi^2 k}{tb^2} \quad (7.12)$$

onde:

$$k = \left[n \frac{b}{a} + \frac{1}{n} \frac{a}{b} \right]^2 \quad (7.13)$$

k = coeficiente de flambagem;

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (7.14)$$

D = rigidez a flexão da chapa.

Substituindo a equação (7.14) na equação (7.12), obtém-se a equação geral para a tensão crítica de flambagem elástica de uma chapa retangular comprimida em uma direção.

$$f_{cr} = \frac{k \pi^2 E}{12(1-\nu^2) (b/t)^2} \quad (7.15)$$

O coeficiente de flambagem (k) é função do tipo de solicitação, das condições de extremidades da chapa e da relação (a/b).

A figura 7.3 ilustra o valor de (k) em função da relação (a/b), para uma chapa uniformemente comprimida com as extremidades longitudinais simplesmente apoiadas. Pode-se verificar que, quando a relação (a/b) é um número inteiro, o valor de k é 4.

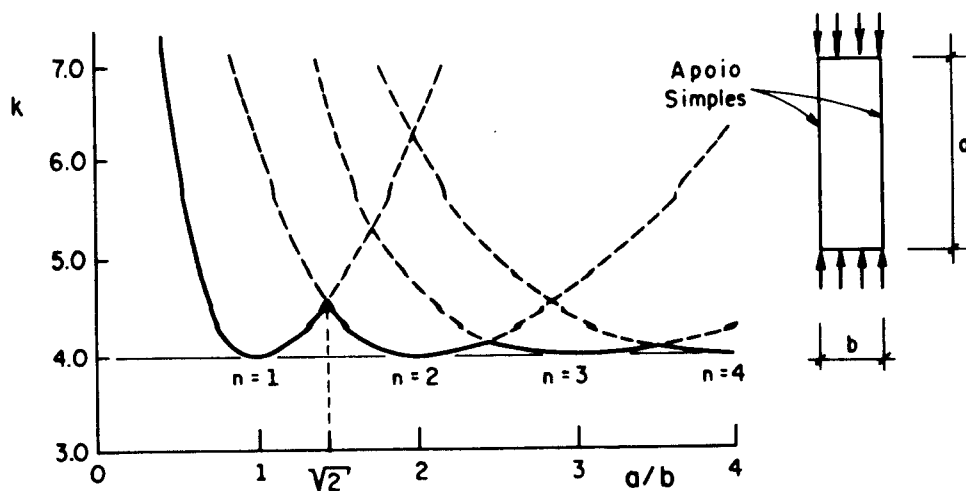


Figura 7.3- COEFICIENTES DE FLAMBAGEM PARA CHAPAS RETANGULARES UNIFORMEMENTE COMPRIMIDAS.

7.3- CLASSIFICAÇÃO DOS ELEMENTOS COMPRIMIDOS

Os elementos comprimidos de chapa classificam-se em duas categorias:

7.3.1- Elementos enrijecidos

Chama-se de elementos enrijecidos, aqueles com as duas bordas paralelas à direção da tensão de compressão, borda (a), apoiadas ou engastadas.

7.3.2- Elementos não enrijecidos

Denomina-se por elementos não-enrijecidos, aqueles que apresentam-se apoiados ao longo de uma borda e livre na outra borda paralela à direção da tensão de compressão, borda (a).

A figura 7.4 ilustra alguns exemplos típicos dos elementos enrijecidos e não-enrijecidos.

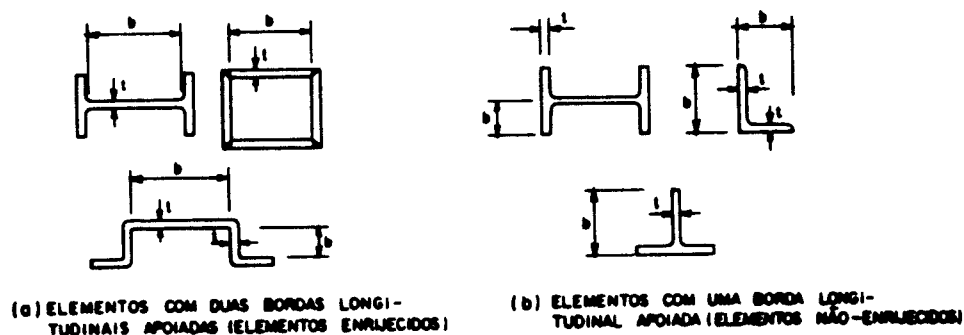


Figura 7.4- ELEMENTOS COMPRIMIDOS ENRIJECIDOS E NÃO ENRIJECIDOS.

Determina-se os valores de k em função da relação (a/b) , para as condições de vinculação de bordas idealizadas, elementos enrijecidos e não-enrijecidos, através da figura 7.5, reproduzida do SALMON (1990).

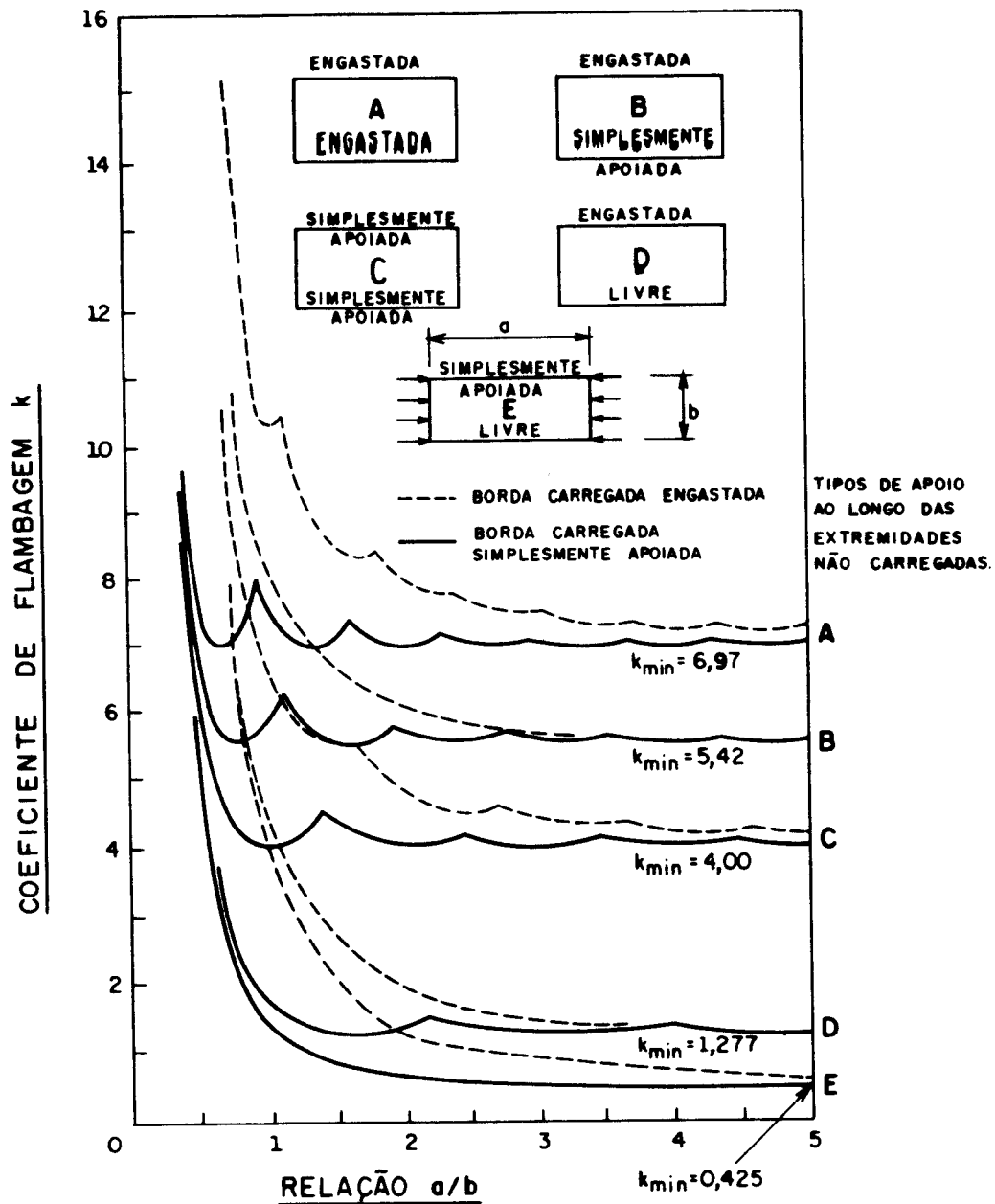
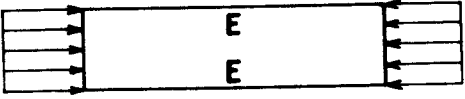
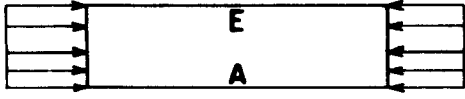
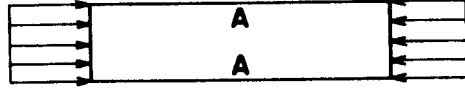
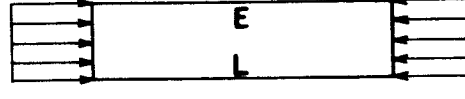
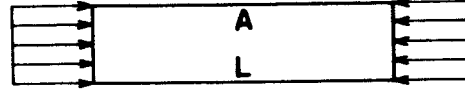


Figura 7.5- COEFICIENTES DE FLAMBAGEM ELÁSTICA PARA CHAPAS RETANGULARES PLANAS.

A tabela 7.2 ilustra os valores mínimos de k para chapa longa com diferentes condições de apoio da borda paralela ao carregamento, borda (a).

TABELA 7.2- VALORES DE k PARA CHAPAS LONGAS

CASO	VINCULAÇÃO DAS BORDAS	VALOR DE K
1		6,97
2		5,42
3		4,0
4		1,277
5		0,425
E=ENGASTE A=APOIO SIMPLES L=LIVRE		

A título de ilustração do comportamento de elementos enrijecidos e não-enrijecidos, a figura 7.6 ilustra a configuração deslocada, devido a flambagem, de chapas uniformemente comprimidas.

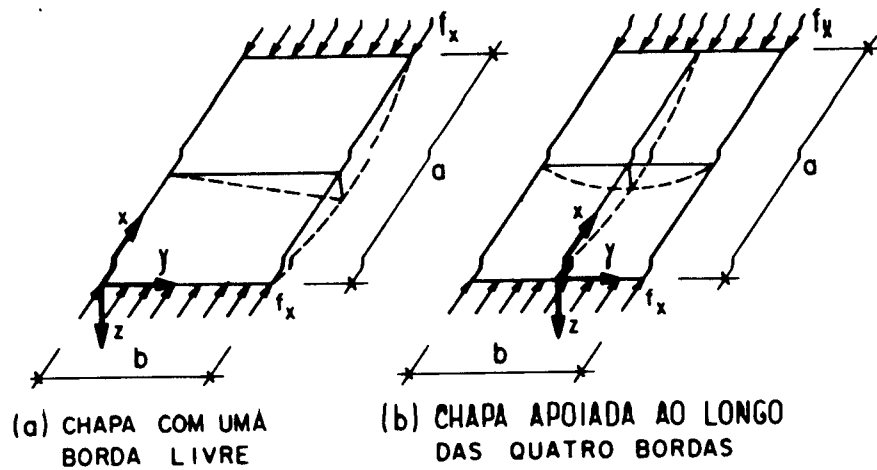


Figura 7.6- POSIÇÃO DESLOCADA DE CHAPAS EM FLAMBAGEM

7.4- RESISTÊNCIA PÓS-FLAMBAGEM

Uma chapa, ao atingir a tensão crítica de flambagem, tem um comportamento diferente de um elemento unidimensional, como uma barra. No caso da barra, ao ser atingida a tensão crítica de flambagem, praticamente não há condições de acréscimo de tensão. No caso da chapa, devido às suas características bidimensionais, ao se atingir a tensão crítica de flambagem há uma redistribuição da tensão para as partes enrijecidas desta chapa.

Denomina-se comportamento pós-flambagem de uma chapa, ao fenômeno da redistribuição de tensão para as partes enrijecidas da mesma, após esta ter atingido a tensão crítica de flambagem.

O conceito da resistência pós-flambagem foi considerado pela primeira vez em 1946 pelas especificações da Norma AISI ("Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members").

A distribuição de tensão após se atingir a tensão crítica deixa de ser uniforme, ocorrendo o colapso convencional que corresponde a tensão máxima igual a tensão de escoamento do aço, portanto, para análise do comportamento pós-flambagem é introduzido o conceito da área

efetiva.

A figura (7.7) representa uma distribuição real de tensões e um sistema equivalente para elementos de chapa, enrijecidos e não enrijecidos, sob compressão axial.

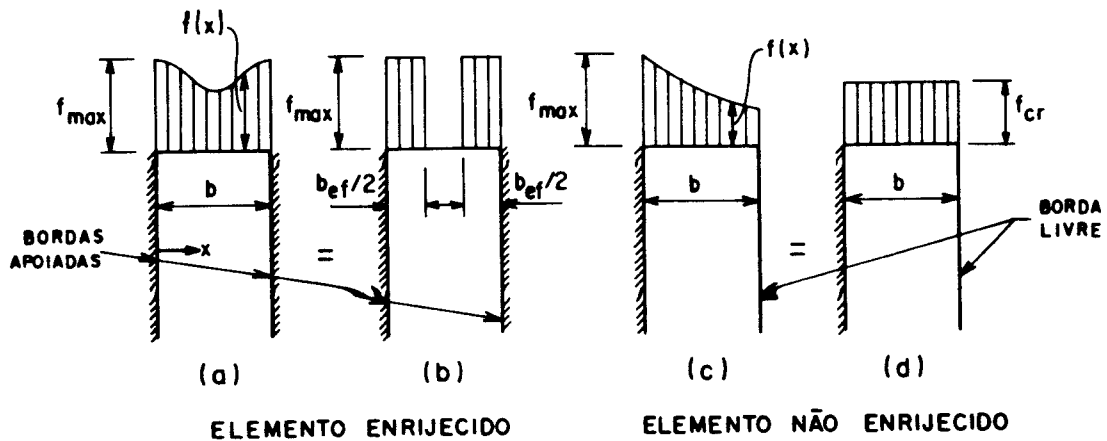


FIGURA 7.7- ELEMENTOS DE CHAPA SOB COMPRESSÃO AXIAL, DISTRIBUIÇÃO REAL DE TENSÕES E UM SISTEMA EQUIVALENTE.

A resistência nominal (N_n) para um elemento enrijecido, figura 7.7a, é expressa como:

$$N_n = t \int_0^b f(x) dx \quad (7.16)$$

Considerando a figura 7.7b, tem-se:

$$N_n = t b_{ef} f_{m\acute{a}x} \quad (7.17)$$

Desprezando-se o encruamento, a máxima tensão ($f_{m\acute{a}x}$) iguala-se à tensão de escoamento do material (f_y), portanto, reescrevendo a equação (7.17), obtém-se:

$$N_n = A_{ef} f_y \quad (7.18)$$

Onde:

b_{ef} = largura efetiva sob a qual a máxima tensão pode ser considerada uniforme;

A_{ef} = área efetiva da seção transversal.

Analogamente, analisando a figura (7.7c), obtém-se a resistência nominal para o elemento não enrijecido.

$$N_n = t \int_0^b f(x) dx \quad (7.19)$$

Entretanto, a capacidade do elemento pode ser obtida conforme a figura (7.7d), ou seja:

$$N_n = t b f_{cr} \quad (7.20)$$

Rearranjando, tem-se:

$$N_n = A_g f_{cr} \quad (7.21)$$

7.4.1- Efeito da resistência pós-crítica na resistência global da barra

Reescrevendo a equação (7.18), tem-se a resistência nominal do elemento enrijecido:

$$N_n = \frac{A_{ef}}{A_g} f_y A_g = Q_a f_y A_g \quad (7.22)$$

Analogamente, reescrevendo a equação (7.21), obtém-se a resistência nominal do elemento não enrijecido:

$$N_n = \frac{f_{cr}}{f_y} f_y A_g = Q_s f_y A_g \quad (7.23)$$

Onde:

$$Q_a = \frac{A_{ef}}{A_g} \quad (7.24)$$

$$Q_s = \frac{f_{cr}}{f_y} \quad (7.25)$$

Entretanto, um sistema comprimido composto de ambos os elementos, enrijecidos e não enrijecidos, normalmente é considerado como não enrijecido para estabelecer a tensão crítica (f_{cr}).

Portanto, para o cálculo da largura efetiva dos elementos enrijecidos, considera-se $f_{m\acute{a}x} = f_{cr}$. Desta forma, reescrevendo a equação (7.18), obtém-se a resistência total:

$$N_n = f_{cr} A_{ef} \quad (7.26)$$

Rearranjando, tem-se:

$$N_n = \frac{f_{cr}}{f_y} f_y \frac{A_{ef}}{A_g} A_g \quad (7.27)$$

ou

$$N_n = Q A_g f_y \quad (7.28)$$

onde:

$$Q = Q_s Q_a \quad (7.29)$$

Sendo Q_s e Q_a os coeficientes que levam em consideração a flambagem local de elementos não-enrijecidos e enrijecidos, respectivamente.

7.5- FLAMBAGEM INELÁSTICA DE CHAPAS

As expressões apresentadas a seguir, baseiam-se nos trabalhos de BLEICH (1952) e HAAIJER (1960), quais sejam. A equação diferencial da superfície deslocada da chapa e a expressão para o cálculo da tensão crítica de flambagem no regime inelástico.

A partir do momento que a tensão de compressão excede a tensão de proporcionalidade do aço, a chapa torna-se anisotrópica, ou seja, apresenta propriedades diferentes em todas as direções.

BLEICH (1952) apresenta a seguinte equação diferencial para a flambagem no regime inelástico:

$$\frac{\varphi \partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{\varphi} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (7.30)$$

Obtém-se através da equação (7.30), a expressão para o cálculo da tensão crítica de flambagem no regime inelástico, como:

$$f_{cr} = \frac{k \pi^2 E \sqrt{\varphi}}{12(1-\bar{n}\nu^2)(b/t)^2} \quad (7.31)$$

onde:

$$\varphi = \frac{E_T}{E} ; \quad (7.32)$$

E_T = módulo de elasticidade tangente do aço.

A flambagem inelástica de chapas é apresentada, neste item, apenas para se ter uma comparação com a flambagem elástica de chapas (item 7.2). Para maiores informações recomenda-se verificar a bibliografia.

7.6- CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considera-se apenas duas direções principais, x e y , para o cálculo das equações diferenciais da superfície deslocada da chapa nos regime elástico, equação (7.2), e no regime inelástico, equação (7.30), respectivamente.

Determina-se a tensão crítica de flambagem elástica de chapas, a partir da equação (7.2), baseada na hipótese de pequenos deslocamentos, ou seja, admite-se o deslocamento transversal com a mesma ordem de grandeza da espessura da chapa.

A hipótese considerada para determinar a tensão crítica de flambagem elástica de chapas, equação (7.15), bem como a condição de extremidade adotada, bordas simplesmente apoiadas, é uma idealização com pouca probabilidade de ocorrer nos perfis utilizados em estruturas de aço.

A tensão crítica de flambagem elástica, expressão (7.15), juntamente com a figura 7.5, coeficientes de flambagem elástica para chapas retangulares planas em compressão, serão utilizadas no "Capítulo 8" para determinar as relações (b/t) , as quais diferenciam as seções transversais tendo em vista seu comportamento na flambagem.

A flambagem inelástica de chapas, bem como a resistência pós-crítica, apresentam grandes dificuldades devido a necessidade de resolução das equações diferenciais, portanto, são utilizados resultados de ensaios, expressos pelo fator de redução (Q) , isto facilita os cálculos correntes.

O coeficiente de redução (Q) que leva em conta a flambagem local, expressão (7.29), será utilizado no "Capítulo 8" para determinar a resistência nominal de barras axialmente comprimidas.

CAPÍTULO 8

NORMALIZAÇÃO

8.1- GENERALIDADES

Apresenta-se, neste capítulo, os critérios de dimensionamento de barras comprimidas e alguns comentários baseados na Norma brasileira NBR 8800/86 (Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios). Os comentários e observações estão baseados nas hipóteses que consideram somente barras prismáticas comprimidas, com as forças de compressão atuando sob o eixo que passa pelo centro de gravidade das seções transversais.

A Norma NBR 8800 utiliza o método dos estados limites para o dimensionamento das barras, o qual baseia-se na aplicação de coeficientes de segurança majorando as ações e minorando as resistências nominais. Este método prevê que todas combinações das ações possíveis deverão ser inferiores às resistências nominais minoradas.

Portanto, a condição para o dimensionamento é expressa como:

$$S_d \leq R_d \quad (8.1)$$

onde:

$$S_d = a \sum_{i=1}^n \psi \gamma_i A_i \quad (8.2)$$

$$R_d = \phi R_n \quad (8.3)$$

a = operador, que simboliza a transformação da combinação de ações em um efeito das ações (transformação realizada através de análise estrutural);

n = número de ações na combinação;

γ_i = coeficiente de segurança da ação nominal A_i ;

A_i = ação nominal;

ϕ = coeficiente de segurança da resistência nominal ($\phi < 1$).

ψ = fatores de combinação

8.2- Ações Nominais

8.2.1- Classificação das ações nominais

- a) **Ações Permanentes (G)**, inclui o peso próprio da estrutura e o peso de todos os elementos componentes da construção, tais como pisos, paredes permanentes, revestimentos, acabamentos, instalações e equipamentos fixos, etc;
- b) **Ações variáveis (Q)**, inclui as sobrecargas decorrentes do uso e ocupação da edificação, equipamentos, divisórias móveis, sobrecargas em coberturas, pressão hidrostática, empuxo de terra, vento, variação de temperatura, etc;
- c) **Ações excepcionais (E)**, explosões, choques de veículos, efeitos sísmicos, etc.

8.2.2- Combinações de ações para os estados limites últimos

a) Combinações normais e combinações aplicáveis a etapas construtivas:

$$\Sigma(\gamma_g G) + \gamma_{q1} Q_1 + \Sigma_{j=2}^n (\gamma_{qj} \psi_j Q_j) \quad (8.4)$$

b) Combinações excepcionais:

$$\Sigma(\gamma_g G) + E + \Sigma(\gamma_q \psi Q) \quad (8.5)$$

Onde:

Q_1 = Ação variável predominante para o efeito analisado;

Q_j = Demais ações variáveis;

γ_g e γ_q = coeficientes de ponderação;

ψ = fatores de combinação.

Os coeficientes de ponderação (γ_g e γ_q) e os fatores de combinação (ψ) encontram-se nas tabelas 8.1 e 8.2, respectivamente.

TABELA 8.1 - COEFICIENTES DE PONDERAÇÃO

COM- BINA- ÇÕES	AÇÕES PERMANENTES (γ_g)		AÇÕES VARIÁVEIS (γ_q)			
	GRANDE VARIABI- LIDADE	PEQUENA VARIABI- LIDADE	RECALQUES DIFEREN- CIAIS	VARIAÇÃO DE TEM- PERATU- RA	AÇÕES DECOR- RENTES DO USO	DEMAIS AÇÕES VARIÁ- VEIS
NORMAIS	1,4 (0,9)	1,3 (1,0)	1,2	1,2	1,5	1,4
DURANTE A CONS- TRUÇÃO	1,3 (0,9)	1,2 (1,0)	1,2	1,0	1,3	1,2
EXCEPCI- ONAS	1,2 (0,9)	1,1 (1,0)	0	0	1,1	1,0

Verifica-se, através da tabela (8.1), que os valores entre parênteses correspondem aos coeficientes para ações permanentes favoráveis à segurança; ações variáveis e excepcionais favoráveis à segurança não devem ser consideradas nas combinações.

Considera-se cargas permanentes de pequena variabilidade os pesos próprios de elementos metálicos e pré-fabricados, com controle rigoroso de peso. Excluem-se os revestimentos feitos in loco deste elementos.

A variação de temperatura citada não incluem a gerada por equipamento, esta deve ser considerada como ação decorrente do uso da edificação.

Ações decorrentes do uso da edificação incluem: sobrecargas em pisos e em coberturas, cargas de pontes rolantes, cargas de outros equipamentos, etc.

TABELA 8.2- FATORES DE COMBINAÇÃO (ψ)

AÇÕES	ψ
Sobrecargas em pisos de bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens; conteúdo de silos e reservatórios.	0,75
Cargas de equipamentos, incluindo pontes rolantes e sobrecargas em pisos diferentes dos anteriores.	0,65
Variações de temperatura.	0,6
Pressão dinâmica do vento.	0,6

A NBR 8800 recomenda adotar os coeficientes ψ iguais a 1,0 para as ações variáveis não citadas na tabela 8.2 e para ações variáveis nela citadas, quando forem de mesma natureza da ação variável predominante Q_1 ; todas as ações variáveis decorrentes do uso de uma edificação (sobrecargas em pisos e em coberturas, cargas de pontes-rolantes e de outros equipamentos) são consideradas de mesma natureza.

8.3- BARRAS COMPRIMIDAS

A Norma NBR 8800/86 recomenda, em seu item 5.3, que suas prescrições são válidas para barras prismáticas comprimidas, com as forças de compressão atuando segundo eixo que passa pelo centro de gravidade das barras.

8.3.1- Classificação das seções

Para análise da Norma NBR 8800, as seções são designadas por classe 1 (supercompactas), classe 2 (compactas), classe 3 (semi-compactas) e classe 4 (seções esbeltas), dependendo da relação largura/espessura (b/t) de seus elementos componentes submetidos à compressão uniforme ou não, conforme a tabela 8.4.


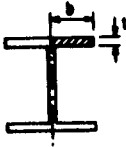
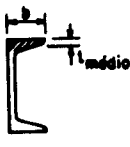

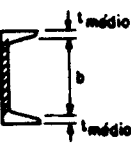
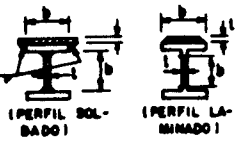
A tabela 8.3 ilustra o significado de tais classes, onde as seções classe 1, na análise plástica, deverão ser duplamente simétricas quando sujeitas à compressão.

TABELA 8.3- SIGNIFICADO DAS CLASSES

Classe	Significado
1	Permite atingir o momento de plastificação, M_{pl} , e a subsequente redistribuição de momentos fletores.
2	Permite que se atinja o momento de plastificação, M_{pl} , mas não necessariamente a redistribuição de momentos fletores.
3	Permite atingir o momento correspondente ao início do escoamento
4	São as que estão sujeitas a flambagem local de um de seus elementos comprimidos.

A tabela 8.4 ilustra alguns exemplos destas seções, com as definições da largura (b) e espessura (t), destinados ao cálculo dos limites das várias classes, entretanto, em barras comprimidas, normalmente trabalha-se com as seções classe 3.

TABELA 8.4- VALORES LIMITE DE (b/t)

	DESCRIÇÃO DO ELEMENTO	EXEMPLOS C/DE-FINIÇÃO "b,t"	CLASSE	TIPO DE SOLICIT	(b/t) _{máx}
ELEM. NÃO ENRIJECIDOS	I) ABAS DE CANTONEIRAS SIMPLES, OU DUPLAS LIGADAS ENTRE SI DE FORMA INTERMITENTE, ELEM. ENRIJECIDOS EM GERAL		1	-	NÃO APLICÁVEL
			2	-	NÃO APLICÁVEL
			3	N	$0,44\sqrt{E/f_y}$
	II) MESAS DE PERFIS "I"		1	M e N	$0,30\sqrt{E/f_y}$
			2	M	$0,38\sqrt{E/f_y}$
			3	N	$0,55\sqrt{E/f_y}$
	III) MESAS DE PERFIS "U"		1	-	NÃO APLICÁVEL
			2	M	$0,38\sqrt{E/f_y}$
			3	N	$0,55\sqrt{E/f_y}$
ELEMENTOS ENRIJECIDOS	IV) MESAS DE PERFIS CAIXÃO QUADRADOS DE ESPESSURA UNIFORME		1	M e N	$1,12\sqrt{E/f_y}$
			2	M	$1,12\sqrt{E/f_y}$
			3	N	$1,47\sqrt{E/f_y}$
	V) ALMAS DE PERFIS "U"		1	-	NÃO APLICÁVEL
			2	M	$1,12\sqrt{E/f_y}$
			3	N	$1,47\sqrt{E/f_y}$
	VI) ELEMENTOS ENRIJECIDOS EM GERAL		1	M e N	$1,12\sqrt{E/f_y}$
			2	M	$1,12\sqrt{E/f_y}$
			3	N	$1,47\sqrt{E/f_y}$

8.3.2- Relações largura/espessura (b/t)

Determina-se os valores da relação largura/espessura (b/t) para classificar as classes das seções submetidas à compressão uniforme ou não. A tabela 8.4 apresenta os valores limites de (b/t), para os quais não ocorre a flambagem local dos elementos até que seja atingida a tensão de escoamento do material, portanto, tem-se:

$$f_{cr} \geq f_y \quad (8.6)$$

A tensão crítica de flambagem elástica (f_{cr}), equação (7.15) do "Capítulo 7", é expressa como:

$$f_{cr} = \frac{k \pi^2 E}{12(1-\nu^2) (b/t)^2} \quad (8.7)$$

Substituindo a equação (8.7) na equação (8.6), tem-se:

$$\frac{b}{t} \leq 0,95 \sqrt{\frac{Ek}{f_y}} \quad (8.8)$$

SALMON (1990)¹ recomenda considerar o fator (λ_c) para minimizar o desvio entre a tensão de escoamento (f_y) e a curva de transição decorrente das imperfeições iniciais e das tensões residuais, figura 8.1, o qual é definido como:

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{f_y}{f_{cr}}} \quad (8.9)$$

1

SALMON, C.G., JOHNSON, J.E. Steel structures: design and behavior. 3. ed. New York: Harper & Row, 1990, 1086p.

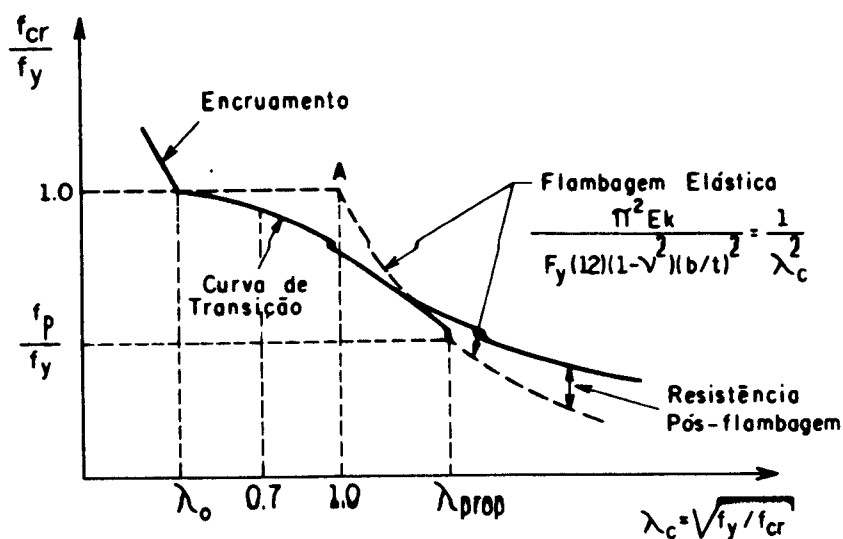


Figura 8.1- REPRESENTAÇÃO ADIMENSIONAL DA RESISTÊNCIA DE CHAPAS.

Substituindo a equação (8.7) na equação (8.9), considerando $\nu = 0,3$ para o aço, tem-se:

$$\frac{b}{t} \leq 0,95 \lambda_c \sqrt{\frac{Ek}{f_y}} \quad (8.10)$$

Admitindo $\lambda_c = 0,7$, valor obtido através de análises experimentais, na equação (8.10), obtém-se:

$$\frac{b}{t} \leq 0,67 \sqrt{\frac{Ek}{f_y}} \quad (8.11)$$

Determina-se os valores de (b/t) , para as seções classe 3, representados na tabela (8.4), elementos não enrijecidos e enrijecidos, utilizando a equação (8.11) com os valores de (k) obtidos através da figura (7.5), "Capítulo 7".

a) Para elementos não-enrijecidos

CASO I - Cantoneiras simples

Substituindo $k= 0,425$, valor obtido da figura 7.5, na equação (8.11), obtém-se:

$$\frac{b}{t} = 0,44 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (8.12)$$

CASO II - Mesas de perfis "I" e "H"

Para este caso SALMON (1990) recomenda selecionar $k=0,7$, na figura 7.5. Portanto, substituindo este valor na equação (8.11), tem-se:

$$\frac{b}{t} = 0,55 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (8.13)$$

b) Para elementos enrijecidos

CASO I - Mesas de seção caixão quadradas e retangulares

Adotando-se $k = 5,0$, na figura 7.5, e substituindo na equação (8.11), obtém-se o valor de (b/t) :

$$\frac{b}{t} = 1,47 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (8.14)$$

Os valores de (b/t) calculados para os elementos não enrijecidos e enrijecidos, equações (8.12), (8.13) e (8.14) são os valores adotados pela Norma NBR 8800.

8.4- ELEMENTOS ESBELTOS COMPRIMIDOS

Barras axialmente comprimidas, cujas seções apresentam elementos com relações largura/espessura (b/t) superiores às dadas na tabela 8.4, ou seja, seções classe 3, solicitadas por força normal de compressão, (exceto tubos de seção circular, para os quais este caso não é previsto pela Norma NBR 8800) possuem um coeficiente Q expresso como:

$$Q = Q_s Q_a \quad (8.15)$$

Onde Q_s e Q_a são os coeficientes que levam em consideração a flambagem local de elementos não-enrijecidos e enrijecidos, respectivamente.

Elementos comprimidos não-enrijecidos, são aqueles que apresentam uma borda livre paralela à direção da tensão normal de compressão, tomando a largura (b), conforme a tabela 8.4, da seguinte maneira:

- a) Para chapas a largura (b) é a distância da borda livre até a solda de ligação com o perfil principal;
- b) Para abas de cantoneiras e mesas de perfis "U" e "Z", a largura (b) é a dimensão nominal total; para almas de perfis "T" é igual à altura do perfil;
- c) Para mesas de perfis "I", "H" e "T", a largura (b) é a metade da largura nominal total.

Elementos comprimidos enrijecidos, são aqueles que apresentam as duas bordas paralelas à direção da tensão normal de compressão, apoiadas lateralmente em toda a sua extensão. A largura (b) deve ser tomada, conforme a tabela 8.4, da seguinte maneira:

- a) Para chapas de reforço de mesas, (b) é a distância entre as linhas de solda;
- b) Para mesas de perfis caixão (b) é a distância livre entre linhas de solda das almas com as mesas;
- c) Para almas de perfis soldados ou laminados, (b) é distância entre faces internas de mesas;
- d) Para mesas de perfis tubulares retangulares, a largura (b) é igual a distância livre entre almas.

8.4.1. Elementos comprimidos não-enrijecidos

Define-se o fator (Q_s), conforme a expressão:

$$Q_s = \frac{f_{cr}}{f_y} \leq 1,0 \quad (8.16)$$

Obtém-se os valores de Q_s utilizados no cálculo da resistência das barras comprimidas, da seguinte forma:

- a) Cantoneira simples ou dupla ligadas de forma intermitente:

A figura 8.2 representa os valores de (Q_s) em função da relação largura/espessura (b/t).

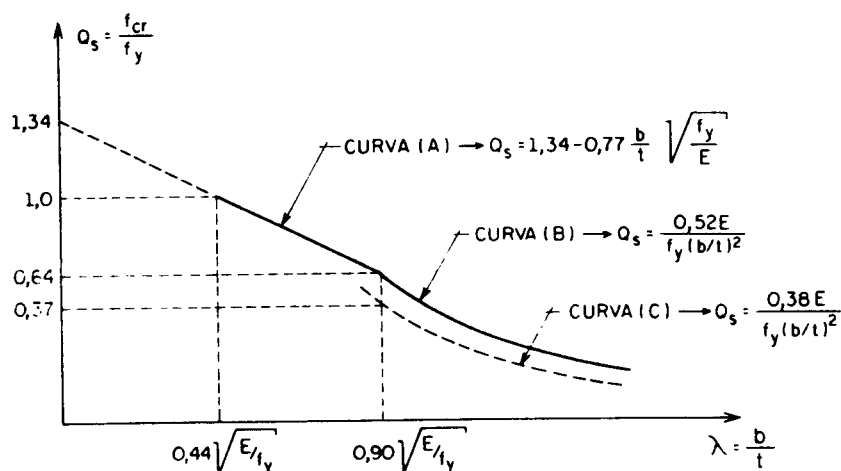


Figura 8.2- RESISTÊNCIA DE CHAPAS NÃO-ENRIJECIDAS (CANTONEIRAS)

Onde:

Curva (A) = curva de flambagem inelástica;

Curva (B) = curva de flambagem elástica,
considerando a resistência pós-flambagem;

Curva (C) = curva de flambagem elástica.

$$\text{Para } 0,44 \sqrt{\frac{E}{f_y}} < \frac{b}{t} \leq 0,90 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$Q_s = 1,34 - 0,77 \frac{b}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \quad (8.17)$$

$$\text{Para } \frac{b}{t} > 0,90 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$Q_s = \frac{0,52E}{f_y (b/t)^2} \quad (8.18)$$

A curva de flambagem elástica, curva (C) inicia com um valor arbitrado de $\lambda_c = \sqrt{2}$, enquanto que, o início da curva (A), ou seja, o início da flambagem de chapas ocorre para $\lambda_c = 0,7$. Estes valores foram obtidos em ensaios.

Substituindo a equação (8.7) na equação (8.16), obtém-se a equação da curva (C):

$$Q_s = \frac{0,38E}{f_y (b/t)^2} \quad (8.19)$$

Entretando, devido ao fenômeno pós-crítico de flambagem, a curva (C) será corrigida. Utiliza-se então a equação da curva (B) obtida através de resultados de ensaios, que para este caso é expressa por:

$$Q_s = \frac{0,52E}{f_y (b/t)^2} \quad (8.20)$$

Substituindo os valores de (λ_c) iguais a $0,7$ e $\sqrt{2}$ com $k = 0,425$, elementos não-enrijecidos, na equação (8.10), obtém-se respectivamente, os valores limites de (b/t) para os regimes elástico e inelástico, expresso por:

$$\frac{b}{t} = 0,44 \sqrt{\frac{E}{f_y}} ; \quad (\text{regime inelástico}) \quad (8.21)$$

$$\frac{b}{t} = 0,90 \sqrt{\frac{E}{f_y}} ; \quad (\text{regime elástico}) \quad (8.22)$$

Com estes limites é possível obter a equação da reta, regime inelástico, representada na figura 8.2, e expressa por:

$$Q_s = 1,34 - 0,77 \frac{b}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \quad (8.23)$$

b) Mesas e chapas em geral

$$\text{Para } 0,55 \sqrt{\frac{E}{f_y}} < \frac{b}{t} \leq 1,02 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$Q_s = 1,42 - 0,76 \frac{b}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \quad (8.24)$$

$$\text{Para } \frac{b}{t} > 1,02 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$Q_s = \frac{0,67E}{f_y (b/t)^2} \quad (8.25)$$

A figura 8.3 representa os valores de (Q_s) em função da relação largura/espessura (b/t) .

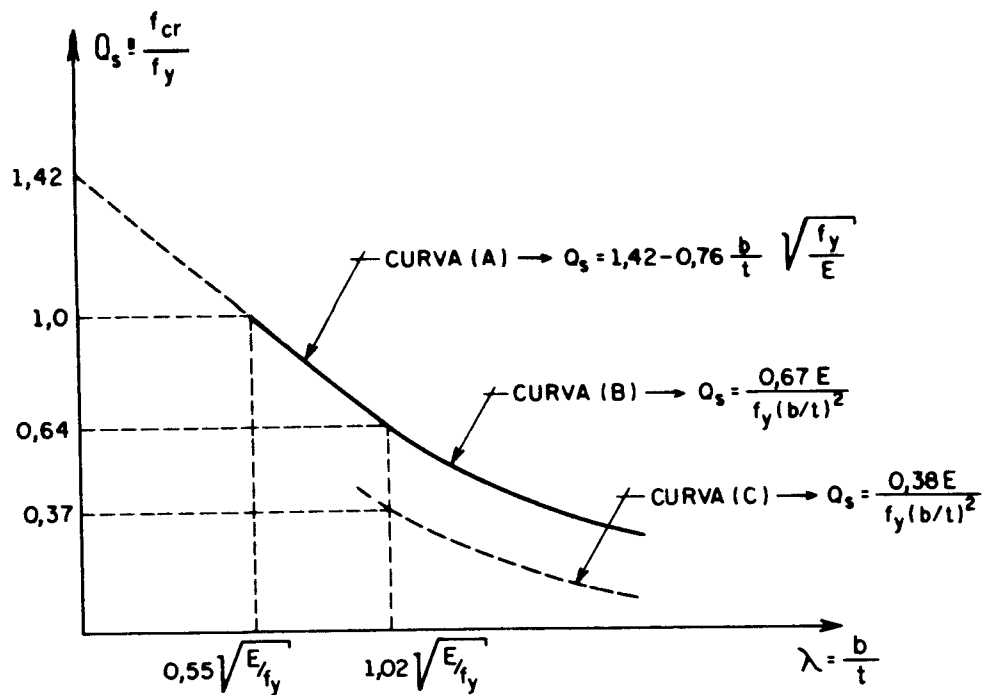


Figura 8.3- RESISTÊNCIA DE CHAPAS NÃO-ENRIJECIDAS

Onde:

- Curva (A) = curva de flambagem inelástica;
- Curva (B) = curva de flambagem elástica, considerando a resistência pós-flambagem;
- Curva (C) = curva de flambagem elástica.

Obtém-se o gráfico da figura 8.3 por um processo análogo ao descrito anteriormente, ou seja, através da correção que considera o comportamento pós-flambagem das chapas.

c) Almas de perfis "T".

$$\text{Para } 0,74 \sqrt{\frac{E}{f_y}} < \frac{b}{t} \leq 1,02 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$Q_s = 1,91 - 1,24 \frac{b}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \quad (8.26)$$

$$\text{Para } \frac{b}{t} > 1,02 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$Q_s = \frac{0,67E}{f_y (b/t)^2} \quad (8.27)$$

A figura 8.4 representa os valores de (Q_s) em função da relação largura/espessura (b/t).

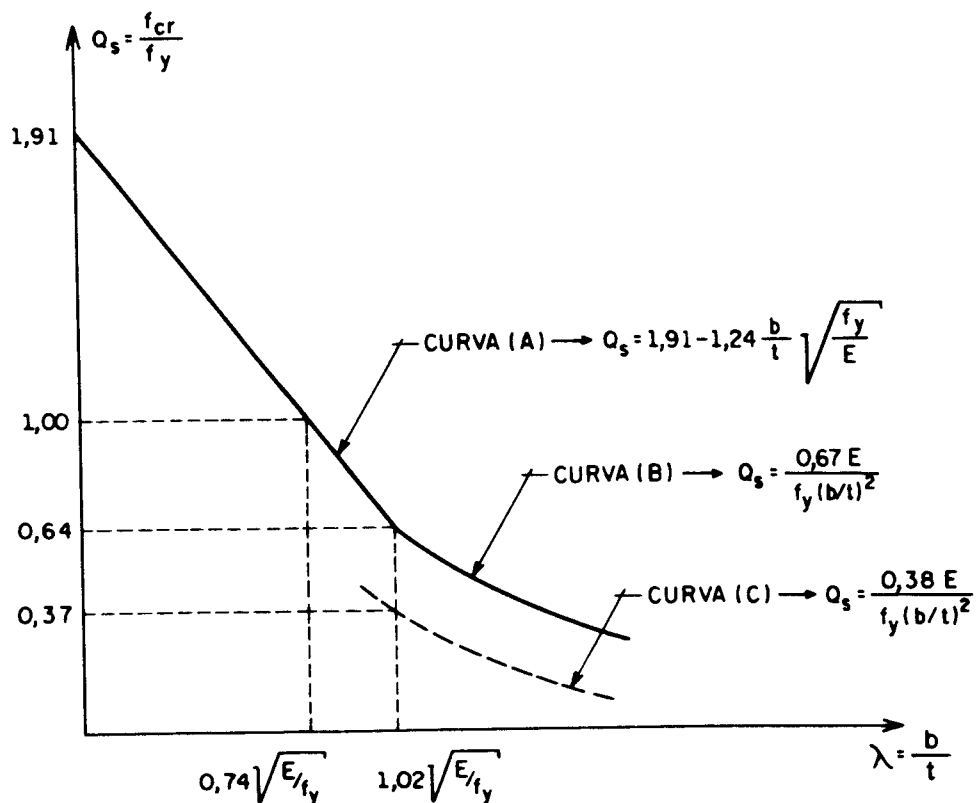


Figura 8.4- RESISTÊNCIA DE CHAPAS NÃO-ENRIJECIDAS

Onde;

Curva (A) = curva de flambagem inelástica;

Curva (B) = curva de flambagem elástica,
considerando a resistência
pós-flambagem;

Curva (C) = curva de flambagem elástica.

Obtém-se o gráfico da figura 8.4 por um processo análogo ao descrito anteriormente, ou seja, através da correção que considera o comportamento pós-flambagem das chapas.

Os elementos não enrijecidos de perfis "U" e "T" cujas relações (b/t) ultrapassem os limites indicados na tabela 8.4 para seções classe 3 sujeitas à força normal de compressão, devem também obedecer às limitações dadas na tabela 8.5.

TABELA 8.5- LIMITAÇÕES PARA PERFIS "U" e "T".

PERFIL	RELAÇÃO ENTRE A LARGURA TOTAL DA MESA E A ALTURA DO PERFIL	RELAÇÃO ENTRE AS ESPESURAS DA MESA E DA ALMA
Perfis "U" laminados ou soldados	$\leq 0,25$	$\leq 3,0$
	$\leq 0,50$	$\leq 2,0$
Perfis "T" soldados	$\geq 0,50$	$\geq 1,25$
Perfis "T" laminados	$\geq 0,50$	$\geq 1,10$

8.4.2- Elementos comprimidos enrijecidos

Define-se o fator de forma (Q_a), para elementos enrijecidos, como a relação entre a área efetiva " A_{ef} " e a área bruta " A_g " de toda a seção da barra.

$$Q_a = \frac{A_{ef}}{A_g} \quad (8.28)$$

Onde:

$$A_{ef} = A_g - \Sigma (b - b_{ef})t; \quad (8.29)$$

$\Sigma = 0$ somatório de todos os elementos enrijecidos;

b_{ef} = largura efetiva.

A largura efetiva (b_{ef}) é definida como a largura fictícia de chapa sobre a qual uma distribuição uniforme de tensão apresenta a mesma resultante que a distribuição real de tensões sobre toda a largura da chapa, conforme ilustra a figura (8.5).

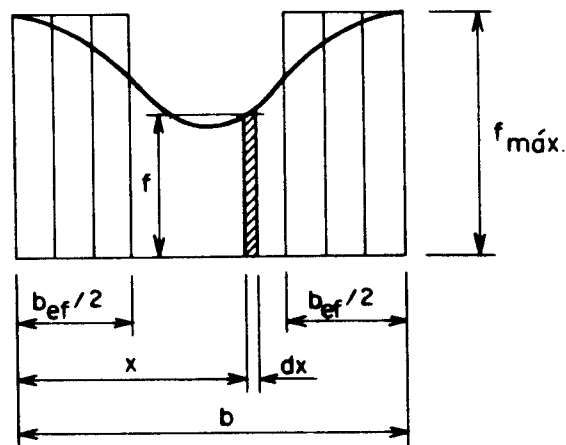


Figura 8.5- LARGURA EFETIVA DE ELEMENTO COMPRIMIDO ENRIJECIDO

WINTER apresentou em 1946, a partir de resultados de ensaios, a expressão para o cálculo da largura efetiva (b_{ef}) de uma chapa longa apoiada nas quatro bordas sujeitas à compressão uniforme.

$$b_{ef} = 1,9t \sqrt{\frac{E}{f}} \left[1 - 0,475 \left(\frac{t}{b} \right) \sqrt{\frac{E}{f}} \right] \quad (8.30)$$

Onde:

f = tensão atuando no elemento (f_{\max} da figura 8.5);
 b/t = relação largura/espessura real.

A equação (8.30) foi substituída, a partir de 1968, pela equação (8.31), expressa a seguir, pois esta apresenta resultados mais próximos dos encontrados em ensaios.

$$b_{ef} = 1,9t \sqrt{\frac{E}{f}} \left[1 - 0,415 \left(\frac{t}{b} \right) \sqrt{\frac{E}{f}} \right] \quad (8.31)$$

Aplica-se a equação (8.31) para os elementos enrijecidos uniformemente comprimidos, desprezando a restrição ao giro nas bordas longitudinais, ou seja, $k=4,0$. Entretanto, esta equação pode ser considerada para elementos com outras condições de borda, ou seja, para outros valores do coeficiente de flambagem k :

$$b_{ef} = 0,95t \sqrt{\frac{kE}{f}} \left[1 - 0,208 \left(\frac{t}{b} \right) \sqrt{\frac{kE}{f}} \right] \quad (8.32)$$

A Norma NBR 8800 recomenda determinar uma largura efetiva (b_{ef}) para o elemento comprimido enrijecido, quando sua relação largura/espessura (b/t) ultrapassar os valores limites indicados na tabela 8.4, para seções classe 3, sujeitas à força normal, conforme os seguintes casos:

- a) Mesas de seções caixão, quadradas ou retangulares, de espessura uniforme:

$$b_{ef} = \frac{797t}{\sqrt{f}} \left[1 - \frac{158}{\left(\frac{b}{t}\right)\sqrt{f}} \right] \leq b \quad (8.33)$$

- b) Em outros elementos enrijecidos (exceto chapas com sucessão de aberturas de acesso):

$$b_{ef} = \frac{797t}{\sqrt{f}} \left[1 - \frac{140}{\left(\frac{b}{t}\right)\sqrt{f}} \right] \leq b \quad (8.34)$$

Onde:

f = tensão de cálculo no elemento enrijecido, em MPa, obtida por aproximações sucessivas, dividindo-se a força normal de cálculo pela área efetiva "A_{ef}";

b = largura real de um elemento comprimido enrijecido na mesma unidade de "t";

b_{ef} = largura efetiva, na mesma unidade de "t";

t = espessura do elemento enrijecido.

8.5- ÍNDICE DE ESBELTEZ LIMITE

Geralmente, as ações variáveis, como sobrecarga e vento, podem provocar grandes perturbações e vibrações nas barras muito esbeltas, podendo introduzir solicitações não consideradas no cálculo corrente.

Por esta razão, a Norma NBR 8800/86 recomenda considerar o índice de esbeltez (kl/r) máximo, para barras comprimidas, igual a 200.

8.6- RESISTÊNCIA DE CÁLCULO

8.6.1- Flambagem por Flexão

A resistência de cálculo de barras axialmente comprimidas sujeitas à flambagem por flexão é dada por:

$$R_d = \phi_c N_n \quad (8.35)$$

onde:

$$\phi_c = 0,90$$

N_n = força normal nominal

$$N_n = \rho Q N_y = \rho Q A_g f_y \quad (8.36)$$

O fator (ρ) foi definido no "Capítulo 4", equação (4.59), a qual é expressa por:

$$\rho = \frac{(\bar{\lambda}^2 + \eta + 1) \pm \sqrt{(\bar{\lambda}^2 + \eta + 1)^2 - 4\bar{\lambda}^2}}{2\bar{\lambda}^2} \quad (8.37)$$

Para obter-se a menor normal resistente, despreza-se a solução positiva.

Reescrevendo a equação (8.37), tem-se:

$$\rho = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1/\bar{\lambda}^2} \quad (8.38)$$

Onde:

$$\beta = \frac{\bar{\lambda}^2 + \eta + 1}{2\bar{\lambda}^2}; \quad (8.39)$$

$$\eta = \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0,04}; \quad (8.40)$$

$$\bar{\lambda}_0 = 0,2 \quad (8.41)$$

Expressões e nomenclatura utilizadas pela NBR 8800.

Na dedução da equação (8.37) o parâmetro (η) representa matematicamente as imperfeições iniciais, entretanto as normas estrangeiras incorporam neste coeficiente os efeitos das tensões residuais definindo várias curvas de flambagem.

O trabalho de calibração de resultados e dos valores a serem adotados foi desenvolvido pelo comitê responsável sobre o tema do ECCS - "European Convention for Construtional Steelwork".

Foram apresentadas várias propostas para o valor de (α) entre elas ressalta-se a formulada por "Perry" onde:

$$\eta = \alpha \lambda \quad (8.42)$$

e Dutheil onde

$$\eta = \alpha \lambda^2 \frac{f_r}{\pi^2 E} \quad (8.43)$$

Considerou-se os resultados de ensaios (mais de 1000 barras ensaiadas) para a determinação dos valores numéricos a serem adotados para este parâmetro (η) e os principais aspectos utilizados na calibração destes valores foram:

- Introdução de ($\bar{\lambda}_0$) que representa o comportamento de barras curtas onde o escoamento do material é preponderante;
- A calibração do parâmetro (α) considerou o intervalo de variação de 0,6 a 2,1 para o índice de esbeltez reduzido onde é mais frequente o dimensionamento de barras com tais condições, selecionando, para este intervalo, os menores desvios entre os valores obtidos teoricamente e os valores obtidos nos ensaios para as várias curvas de flambagem.

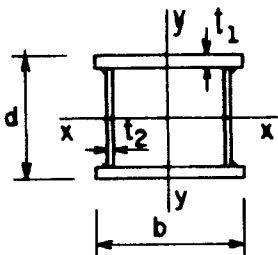
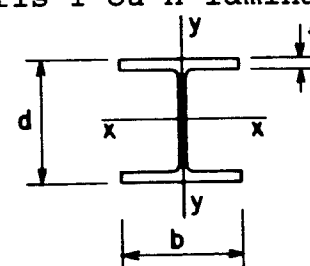
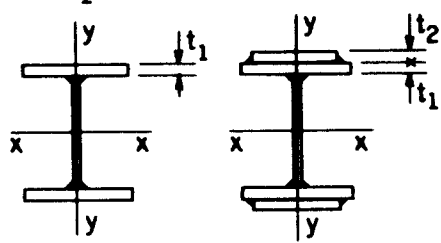
O parâmetro (α) adotado pela Norma NBR 8800 é baseado nas recomendações do Eurocode/78, os quais encontram-se representados na tabela 8.6.

TABELA 8.6- VALORES DE " α "

VALOR DE " α "	CURVA DE FLAMBAGEM
0,158	"a"
0,281	"b"
0,384	"c"
0,572	"d"

Os valores de " α " apresentados na tabela (8.6) variam de acordo com os tipos de seção e eixos de flambagem, conforme a tabela (8.7).

Tabela 8.7- CLASSIFICAÇÃO DE SEÇÕES PARA FLAMBAGEM

SEÇÃO TRANSVERSAL		Flamb. em relação ao eixo	curva de flambagem	
perfis tubulares		x - x y - y	a	
	Soldas de grande espessura e	$b/t_1 < 30$ $d/t_2 < 30$	c	
	demais casos		x - x y - y	b
			x - x y - y	a
	$d/b > 1,2$ e $t \leq 40\text{mm}$	x - x y - y	a b(a)	
	$d/b \leq 1,2$ e $t \leq 40\text{mm}$	x - x y - y	b(a) c(b)	
	$t > 40\text{mm}$	x - x y - y	d	
			x - x y - y	a
	$t_1 \leq 40\text{mm}$	x - x	b	
	$t_2 \leq 40\text{mm}$	y - y	c	
	$t_1 > 40\text{mm}$ e/ou $t_2 > 40\text{mm}$	x - x	c	
		y - y	d	
perfis U.L.T e perfis de seção cheia		x - x y - y	c	

Segundo QUEIROZ² (1988) as classificações entre parênteses podem ser usadas para aços com $f_y > 430\text{MPa}$. As barras compostas de dois ou mais perfis, as quais atendam aos requisitos da Norma NBR 8800, será considerada como curva "c" para flambagem relativa ao eixo principal da seção que não intercepta os perfis componentes principais.

Pode-se determinar os valores de " ρ " através das equações (8.44) e (8.45) ou pelas curvas de flambagem representadas na figura 8.6.

$$\rho = 1,0 \text{ para } 0 \leq \bar{\lambda} \leq 0,20 \quad (8.44)$$

$$\rho = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1/\bar{\lambda}^2} \text{ para } \bar{\lambda} > 0,20 \quad (8.45)$$

Onde:

$$\beta = \frac{1}{2\bar{\lambda}^2} \left[1 + \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0,04} + \bar{\lambda}^2 \right] \quad (8.46)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi} \frac{k\ell}{r} \sqrt{QF_y/E} \quad (8.47)$$

k = fator comprimento efetivo de flambagem (ver "Capítulo 5");

ℓ = comprimento real, não contraventado, o comprimento não contraventado pode variar para diferentes eixos de referência da seção transversal da barra comprimida ($\ell_x \neq \ell_y$);

r = raio de giração da seção transversal bruta, relativo ao eixo em torno do qual se dá a flambagem;

2

QUEIROZ, G. *Elementos das estruturas de aço*. 2.ed. Belo Horizonte, 1988. 455p.

$Q = 1,0$ para seções cujos elementos apresentam relações largura/espessura (b/t) iguais ou inferiores às dadas na tabela 8.4 para seções classe 3, solicitadas por força normal. Caso contrário, para elementos esbeltos comprimidos, $Q < 1,0$.

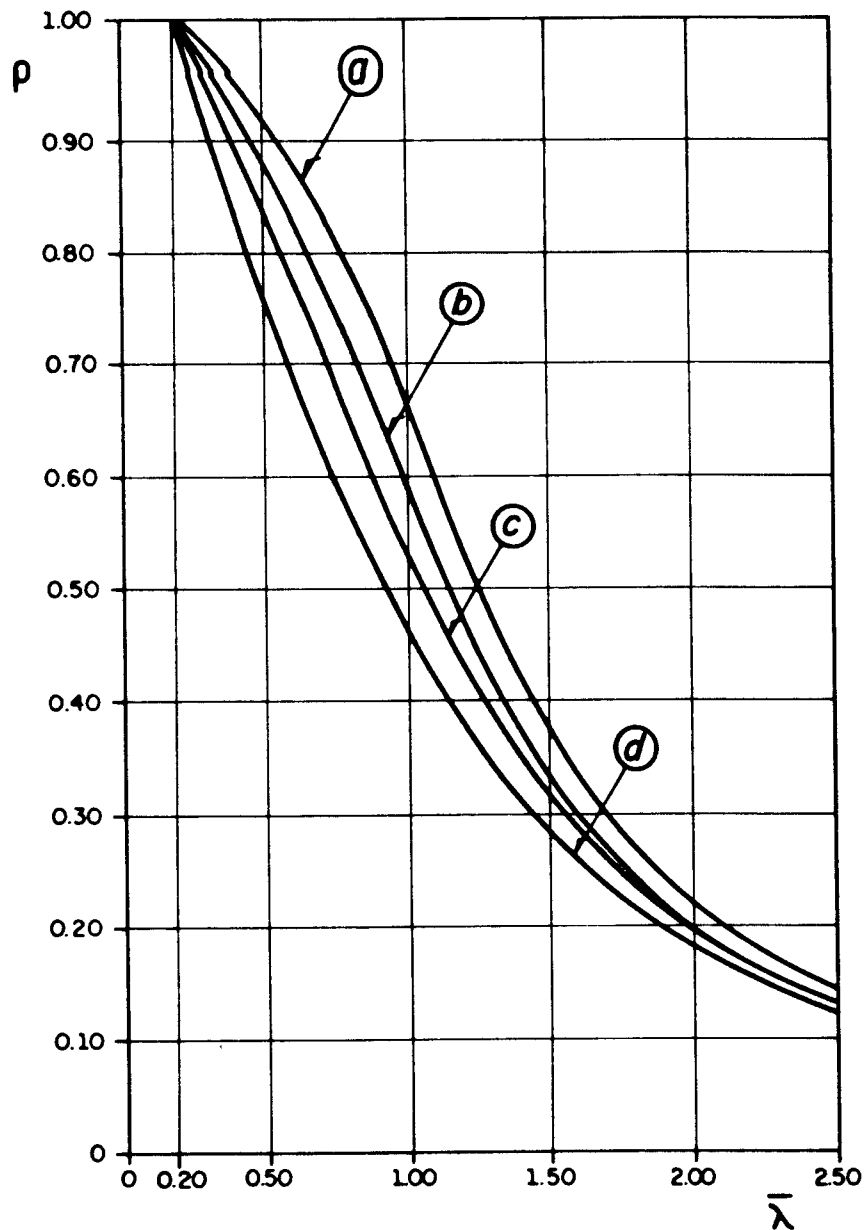


Figura 8.6- CURVAS DE FLAMBAGEM

8.6.2- Flambagem por torção e flambagem por flexão e torção

Barras comprimidas com seção transversal assimétrica ou com apenas um eixo de simetria, seção cruciforme, barras com grandes comprimentos livres à torção, bem como barras com os elementos da seção transversal apresentando grandes valores das relações (b/t) , estão sujeitas aos estados limites de flambagem por torção ou por flexão e torção.

Determina-se a resistência de cálculo de barras comprimidas axialmente, para os estados limites de flambagem por flexão e torção, como:

$$R_d = \phi_c N_n = 0,90N_n \quad (8.48)$$

Sendo N_n a força normal nominal à compressão, equação (8.36), a qual é expressa como:

$$N_n = \rho Q A_g f_y \quad (8.49)$$

Definida a tensão crítica de flambagem, obtém-se o índice de esbeltez reduzido como:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{Q f_y / f_e} \quad (8.50)$$

Onde:

f_e = tensão crítica de flambagem por flexão pura, torção ou flexão e torção.

Obtém-se o fator (ρ) através da curva "c" representada na figura (8.6) e da esbeltez reduzida, equação (8.50).

8.6.2.1- Tensão crítica de flambagem elástica

Foi deduzida a carga crítica de flambagem, considerando a flambagem por torção e por flexão e torção, no "Capítulo 2", em seu item 2.7, para os perfis com dupla simetria, monossimétricos e assimétricos.

Para obter a tensão crítica de flambagem basta dividir a carga crítica de flambagem pela área bruta da seção transversal da barra.

1) Perfis com dupla simetria

A tensão crítica de flambagem elástica (f_e) é o menor dos valores entre (f_{ey}), (f_{ex}) e (f_{ez}).

a) -Flambagem elástica por flexão em relação ao eixo "y":

A carga crítica de flambagem, deduzida no "Capítulo" 2, equação (2.62), é expressa como:

$$N_{ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} \quad (8.51)$$

Dividindo-se a equação (8.51) por A_g e rearranjando, obtém-se:

$$f_{ey} = \frac{\pi^2 E}{\left[k_y \frac{l}{r_y} \right]^2} \quad (8.52)$$

b) -Flambagem elástica por flexão em relação ao eixo "x":

Dividindo-se a equação da carga crítica de flambagem (N_{ex}), deduzida no capítulo 2, por A_g obtém-se:

$$f_{ex} = \frac{\pi^2 E}{\left[k_x \frac{l}{r_x} \right]^2} \quad (8.53)$$

c) - Flambagem elástica por torção:

Analogamente, dividindo-se a equação da carga crítica de flambagem por torção (N_{ez}), deduzida no "Capítulo" 2, por A_g , obtém-se:

$$f_{ez} = \frac{1}{A_g r_o^2} \left[\frac{\pi^2 E C_w}{(k_z \ell)^2} + G I_t \right] \quad (8.54)$$

2) Perfis monossimétricos

Os perfis monossimétricos, cujo o eixo "y" é o de simetria, apresentam como tensão crítica de flambagem elástica " f_e " o menor valor entre (f_{ex}) e (f_{eyz}):

a) - Flambagem elástica por flexão em relação ao eixo "x":

$$f_{ex} = \frac{\pi^2 E'}{\left[k_x \frac{\ell}{r_x} \right]^2} \quad (8.55)$$

b) - Flambagem elástica por flexão e torção em relação ao eixo "y":

Dividindo-se a equação da carga crítica de flambagem por flexão e torção (N_{eyz}), deduzida no "Capítulo 2", equação (2.88), por A_g e rearranjando, obtém-se:

$$f_{eyz} = \frac{f_{ey} + f_{ez}}{2H} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4f_{ey}f_{ez}H}{(f_{ey} + f_{ez})^2}} \right] \quad (8.56)$$

Onde:

$$H = 1 - \frac{y_o^2}{r_o^2}; \quad (8.57)$$

f_{ey} e f_{ez} - conforme equações (8.52) e (8.54), respectivamente.

3) Perfis assimétricos

Dividindo-se a equação cúbica em N, equação (2.92), apresentada no "Capítulo 2", por A_g e rearranjando, obtém-se a seguinte equação cúbica:

$$(f_e - f_{ex})(f_e - f_{ey})(f_e - f_{ez}) - f_e^2(f_e - f_{ey})\left(\frac{X_o^2}{r_o^2}\right) - f_e^2(f_e - f_{ex})\left(\frac{Y_o^2}{r_o^2}\right) = 0 \quad (8.58)$$

A tensão crítica de flambagem elástica (f_e) de um perfil com seção assimétrica é dada pela menor das raízes da equação (8.58):

Onde:

f_{ey} , f_{ex} e f_{ez} - conforme equações (8.52), (8.53) e (8.54), respectivamente.

8.7- CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os valores dos parâmetros (α) adotados pela Norma NBR 8800 foram os adotados pelo Eurocode/78, estes valores já foram alterados em versões mais recentes.

Os perfis soldados, fabricados no Brasil, apresentam as relações largura/espessura (b/t) diferentes dos perfis fabricados em outros países, portanto, deve-se realizar ensaios específicos (para medir tensões residuais e imperfeições iniciais) em tais perfis visando determinar novos valores para os parâmetros (α) a serem adotados pela Norma NBR 8800, em futuras revisões.

O anexo III apresentará alguns exemplos ilustrativos, baseados nas prescrições da Norma NBR 8800.

CAPÍTULO 9

INFORMAÇÕES SOBRE A FLAMBAGEM POR FLEXÃO SEGUNDO AS NORMAS NBR 8800/86, CAN3-S16.1-M84, AISC-LRFD/86 E EUROCODE/83.

9.1- GENERALIDADES

Apresenta-se, neste capítulo, uma comparação dos valores adotados para os vários parâmetros que conduzem ao cálculo da força normal resistente pelas Normas brasileira (NBR 8800/86), americana (AISC-LRFD/86), canadense (CAN 3-S16.1-M84) e europeia (EUROCODE/83).

A força normal resistente, comparada neste capítulo, refere-se somente à obtida pela flambagem por flexão.

As normas brasileira, canadense e europeia utilizam as curvas múltiplas de flambagem para o cálculo da força normal resistente, enquanto que, a norma americana adota uma curva única de flambagem.

9.2- COMPARAÇÃO DOS PARÂMETROS

A tabela 9.1 apresenta as expressões equivalentes, para as normas analisadas, do parâmetro (ρ), coeficiente correspondente a força normal reduzida, o qual é utilizado no cálculo da força normal resistente.

Conforme ilustra a tabela 9.1, cada norma adota um coeficiente de minoração da resistência, entretanto, a normalização européia não considera tal coeficiente de minoração.

A norma européia está baseada em prescrições teóricas, desenvolvidas pelo ECCS¹, utilizando resultados de ensaios para ajustar as curvas de flambagem.

A norma americana utilizou resultados de ensaios, a partir dos quais, com um tratamento estatístico, foi ajustada uma curva única de flambagem.

A norma canadense está baseada em resultados de ensaios realizados na Europa e no Canadá para ajustar suas curvas de flambagem.

A norma brasileira está fundamentada nas curvas de flambagem utilizadas na versão do Eurocode de 1978.

Cada norma apresenta uma maneira diferente para dimensionar os elementos esbeltos comprimidos, seções classe 4, portanto, tais seções não foram utilizadas para efeito de comparação de resultados, ou seja, considerou-se, neste capítulo, apenas as seções classe 1, 2 e 3.

Para as seções classe 1, 2 e 3, os coeficientes Q_s e Q_a , que levam em consideração a flambagem local de elementos não enrijecidos e enrijecidos, são iguais a 1,0, tratamento dado por todas as normas analisadas.

A partir do exposto acima, pode-se expressar o coeficiente Q , equação 8.15, como:

$$Q = Q_s Q_a = 1,0 \quad (9.1)$$

1

 ECCS-European Convention for Constructional Steelwork.

TABELA 9.1 - EXPRESSÕES PARA O PARÂMETRO (ρ)

	Coeficiente de resistência (ϕ_c)	EXPRESSÕES DO PARÂMETRO (ρ)
NBR 8800/86	0,9	$\rho = \frac{(\bar{\lambda}^2 + \eta + 1) - \sqrt{(\bar{\lambda}^2 + \eta + 1)^2 - 4\bar{\lambda}^2}}{2\bar{\lambda}^2}$ $\eta = \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2} - 0,04$ <p>Curvas a - $\alpha = 0,158$ c - $\alpha = 0,384$ b - $\alpha = 0,281$ d - $\alpha = 0,572$</p>
AISC-LRFD/86	0,85	$\rho = 0,658 \bar{\lambda}^2 \quad \bar{\lambda} \leq 1,5$ $\rho = \frac{0,877}{\bar{\lambda}^2} \quad \bar{\lambda} > 1,5$
CAN3-S16.1-M84	0,9	<p>Para as curvas- b, c e d</p> $0 \leq \bar{\lambda} \leq 0,15 \quad \rho = 1,0$ $0,15 < \bar{\lambda} \leq 1,0 \quad \rho = (1,035 - 0,202\bar{\lambda} - 0,222\bar{\lambda}^2)$ $1,0 < \bar{\lambda} \leq 2,0 \quad \rho = (-0,111 + 0,636\bar{\lambda}^{-1} + 0,087\bar{\lambda}^{-2})$ $2,0 < \bar{\lambda} \leq 3,6 \quad \rho = (0,009 + 0,877\bar{\lambda}^{-2})$ <p>Para perfis tubulares - curva (a)</p> $0 \leq \bar{\lambda} \leq 0,15 \quad \rho = 1,0$ $0,15 < \bar{\lambda} \leq 1,2 \quad \rho = (0,990 + 0,122\bar{\lambda} - 0,367\bar{\lambda}^2)$ $1,2 < \bar{\lambda} \leq 1,8 \quad \rho = (0,051 + 0,801\bar{\lambda}^{-2})$ $1,8 < \bar{\lambda} \leq 2,8 \quad \rho = (0,008 + 0,942\bar{\lambda}^{-2})$
EUROCODE/83	1,0	$\rho = \frac{1 + \eta + \bar{\lambda}^2 - \sqrt{(1 + \eta + \bar{\lambda}^2)^2 - 4\bar{\lambda}^2}}{2\bar{\lambda}^2}$ $\eta = \alpha (\bar{\lambda} - 0,2)$ <p>Curvas a₀ - $\alpha = 0,13$ c - $\alpha = 0,49$ a - $\alpha = 0,21$ d - $\alpha = 0,76$ b - $\alpha = 0,34$</p>

O valor de $\bar{\lambda}$ para a tabela 9.1 é dado por:

$$\bar{\lambda} = \frac{kl}{r} \sqrt{\frac{Qf_Y}{\pi^2 E}} \quad (9.2)$$

Das equações (9.1) e (9.2), tem-se:

$$\bar{\lambda} = \frac{kl}{r} \sqrt{\frac{f_Y}{\pi^2 E}} \quad (9.3)$$

Da equação (8.36), tem-se a força normal nominal:

$$N_n = \rho A_g f_y \quad (9.4)$$

Comparando a força normal nominal, equação (9.4) com a força normal resistente, equação (8.35), tem-se:

$$N_d = \phi_c \rho A_g f_y \quad (9.5)$$

Reescrevendo

$$N_d = \rho^* A_g f_y \quad (9.6)$$

Onde:

$$\rho^* = \phi_c \rho \quad (9.7)$$

O coeficiente (ρ^*) corresponde a força normal reduzida englobando o coeficiente de redução da resistência.

Os gráficos, figura 9.1, 9.2, 9.3 e 9.4, ilustram as curvas obtidas do coeficiente (ρ^*) com os valores da tabela 9.1 para as quatro normas, em função do índice de esbeltez reduzido $\bar{\lambda}$.

As normas brasileiras e européia consideram um patamar de escoamento no intervalo de $0 < \bar{\lambda} \leq 0,2$, enquanto que, a norma canadense admite o patamar de escoamento no intervalo de $0 < \bar{\lambda} \leq 0,15$. A norma americana despreza o patamar de escoamento.

Com valores de $\bar{\lambda}$ elevados (acima de 1,1), caracterizando o comportamento elástico, as curvas de flambagem adotadas pelas quatro normas aproximam-se.

No regime inelástico, valores de $\bar{\lambda}$ inferiores a 1,1, ocorre uma maior variação, conforme ilustra as figuras 9.1, 9.2, 9.3 e 9.4.

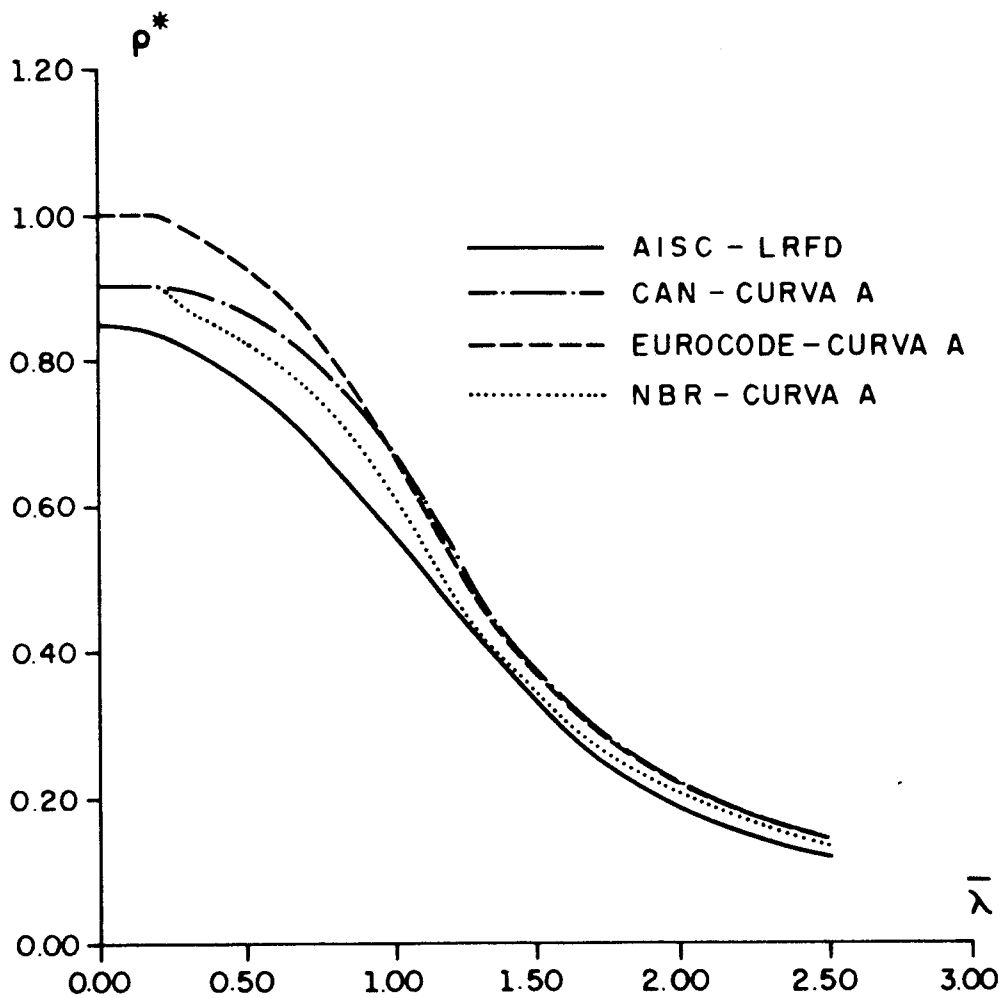


FIGURA 9.1 - CURVAS DE FLAMBAGEM

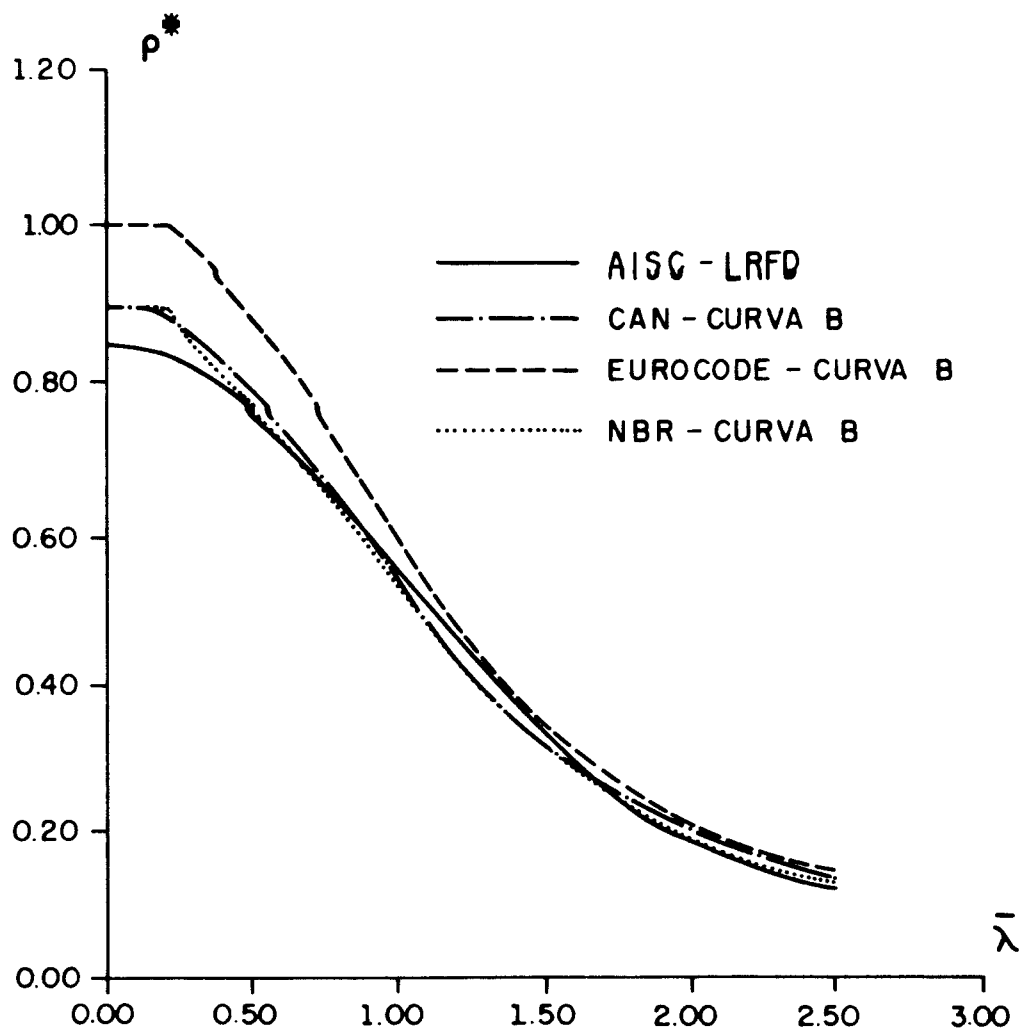


FIGURA 9.2 - CURVAS DE FLAMBAGEM

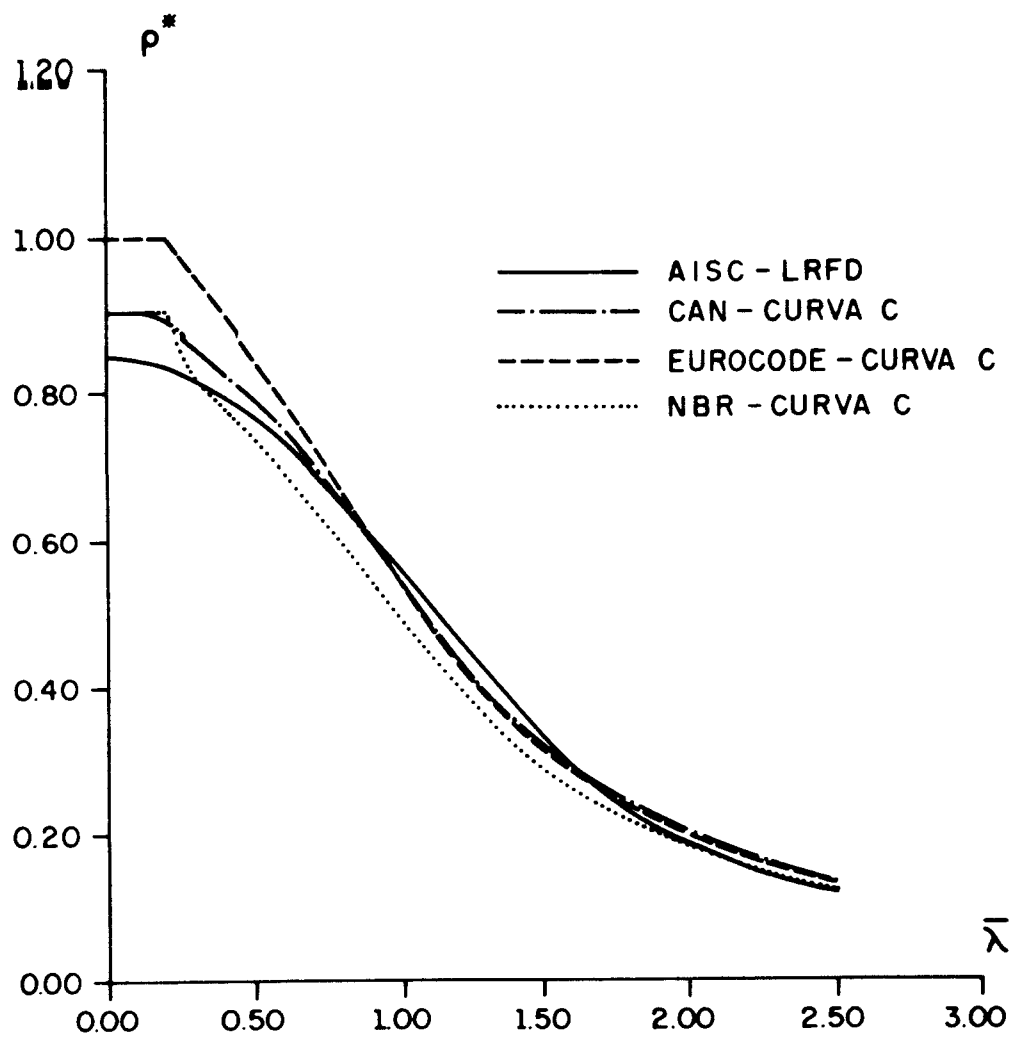


FIGURA 9.3 - CURVAS DE FLAMBAGEM

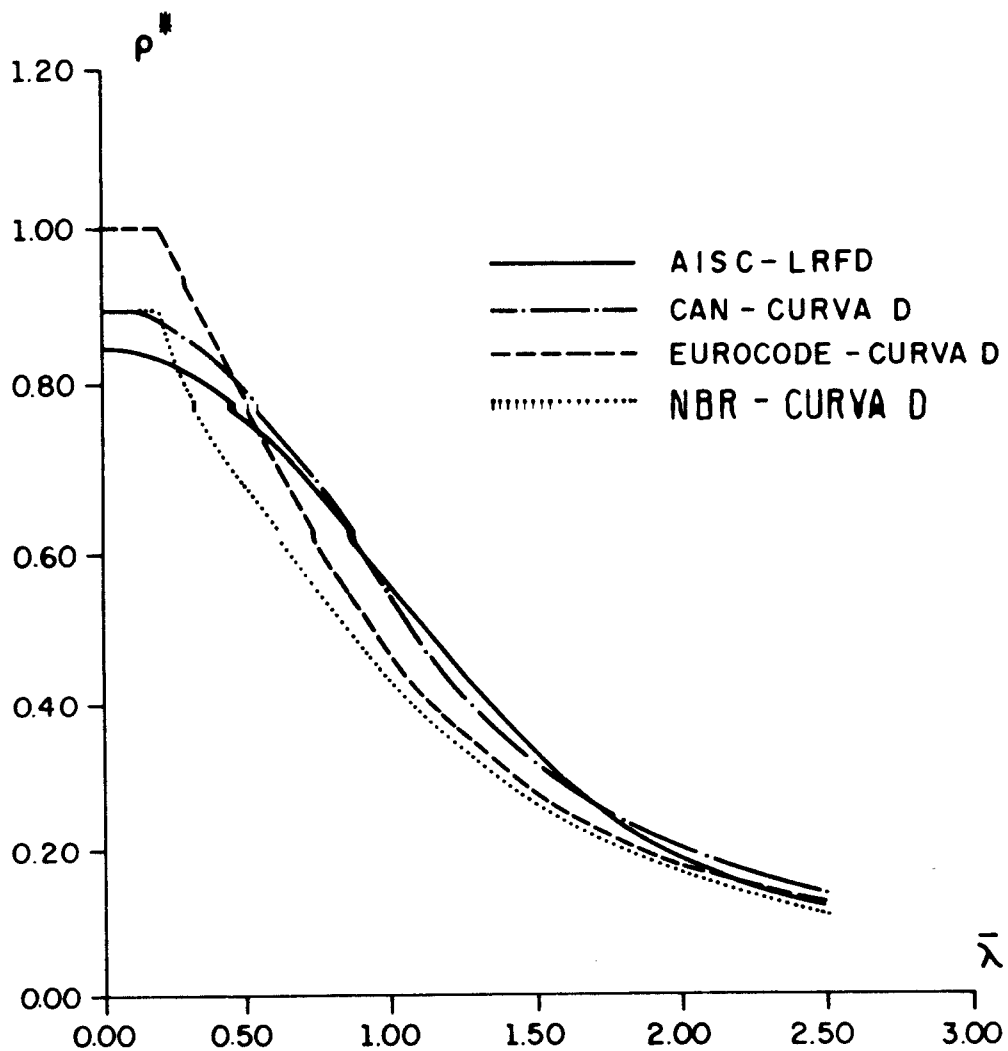


FIGURA 9.4 - CURVAS DE FLAMBAGEM

Percebe-se, através dos gráficos anteriores, que atribuindo um coeficiente de minoração para a norma européia idêntico ao da norma brasileira, ocorrerá uma aproximação das curvas de flambagem das duas normas.

Para seção transversal vazada, a curva de flambagem "a" adotada pela norma brasileira encontra-se acima da curva da norma americana e inferior as curvas das normas canadense e européia.

Para os perfis I ou H laminados, a curva de flambagem "b" adotada pela norma brasileira é praticamente coincidente com as curvas das normas americanas e canadense.

Para os perfis "U", "L", "T" e perfis de seção cheia, a curva de flambagem "c" adotada pela norma brasileira é inferior as curvas apresentadas pelas outras normas, entretanto, a partir de $\bar{\lambda}$ próximo de 2,0, esta curva aproxima-se da curva apresentada pela norma americana.

Para perfis I ou H laminados ou soldados, com relações especiais de dimensões, a curva de flambagem "d" adotada pela norma brasileira conduz a menores valores da força normal resistente que as curvas apresentadas pelas outras normas.

A norma canadense adota apenas duas curvas de flambagem, curva "a" para os perfis tubulares e a curva "b" para os demais perfis, entretanto, para fins ilustrativos esta curva foi designada por "b", "c" e "d" nos gráficos das figuras 9.2, 9.3 e 9.4, respectivamente.

A partir do exposto acima, percebe-se que a norma americana adota uma curva única de flambagem, pois esta parte do presuposto que os perfis mais utilizados nas edificações metálicas enquadram-se na curva de flambagem adotada.

Para traçar as curvas de flambagem atuais, considerou-se poucos ensaios nos perfis "I" soldados. A ECCS (European convention for constructional steelwork) analisou ensaios em apenas um tipo de perfil soldado. FUKUMOTO (1983)² coletou resultados de ensaios realizados no mundo todo, armazenando-os no chamado NDSS (Numerical Data-Base for Steel Structures), registrando 282 ensaios em perfis I soldados, 229 no Japão, 31 nos Estados Unidos e 22 na

² FUKUMOTO, Y., ITOH. Y. Evaluation of multiple column curves using the experimental data-bate approach. Journal of Constructional Steel Research, v. 3, n.3, p.2-19.

Europa, verificando-se apenas 10 tipos diferentes de perfis ensaiados.

Como no Brasil, os perfis soldados são muito utilizados nas edificações correntes, torna-se importante um programa de pesquisa para avaliar a distribuição das tensões residuais, bem como determinar o valor das imperfeições iniciais, visando obter uma curva de flambagem adequada para estes perfis.

9.3- CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Cálculo da força normal resistente pela norma brasileira conduz a valores compatíveis com as normas de outros países, desde que os perfis utilizados nas edificações corrente apresentem características geométricas semelhantes aos perfis ensaiados para obter as curvas de flambagem, ou seja, perfis no padrão Europeu.

Os perfis pesados (tipo jumbo) bastante utilizados na Europa, não são fabricados no Brasil, portanto, deve-se realizar ensaios nos perfis existentes no mercado interno visando obter novas curvas de flambagem a serem adotadas pela norma brasileira em futuras revisões.

CAPÍTULO 10

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os objetivos propostos inicialmente para este trabalho consistiam no estudo da fundamentação teórica dos principais aspectos relativos as prescrições recomendadas pela Norma Brasileira NBR 8800/86 (Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios) referente ao dimensionamento de barras comprimidas.

Ao término deste trabalho pode-se comentar alguns aspectos importantes relativos ao dimensionamento de elementos de aço comprimidos, os quais encontram-se apresentados a seguir.

No regime elástico, para elevados valores do índice de esbeltez (λ), as prescrições teóricas aproximam-se das obtidas através de resultados de ensaios, considerando a flambagem por flexão, por torção e por flexão e torção para o cálculo da carga crítica de flambagem.

A flambagem por flexão e por torção são casos particulares das equações diferenciais de equilíbrio, pois ocorrem sob determinadas condições de vinculação e geometria da seção transversal.

Para determinar a carga crítica de flambagem por flexão e torção, em seções duplamente simétrica,

monossimétricas e assimétricas, admite-se o vínculo de garfo, portanto, o calculista deve considerar tal vínculo no detalhamento das ligações durante a elaboração do projeto.

No regime inelástico, devido a presença de tensões residuais e imperfeições iniciais existentes nos perfis de aço, os resultados de ensaios demonstram que as barras flambam com as forças próximas à obtida pela teoria do módulo tangente, porém não se aplica esta teoria. A dificuldade em determinar o módulo tangente, está na variação ponto a ponto do comportamento tensão-deformação, este é o fator que impossibilita a adoção desta.

A Norma NBR 8800 adotou o conceito das múltiplas curvas de flambagem para o cálculo da força normal resistente, onde cada tipo de perfil é classificado para uma curva de flambagem adequada, que melhor represente o seu comportamento.

As tensões residuais, exemplificadas neste trabalho, são para perfis não fabricados no Brasil; sugere-se, portanto, a realização de ensaios para avaliar a distribuição de tensões residuais nos perfis estruturais existentes no mercado interno, principalmente em perfis soldados.

As imperfeições iniciais e tensões residuais, representadas matematicamente pelo parâmetro (η), são fatores importantes no cálculo da força normal resistente. Exemplificando para, o aço ASTM-A36, com tensão de escoamento de 250 MPa (f_y), admite-se uma tensão residual igual a 115MPa (f_r), portanto, percebe-se que o comportamento será elástico para valores correspondentes a tensões da ordem de aproximadamente cinquenta por cento da tensão de escoamento.

Existem outros fatores importantes para o cálculo da força normal resistente, entre estes, o fator comprimento efetivo de flambagem (k).

No cálculo do fator comprimento efetivo de flambagem (k) para elementos isolados, as normas técnicas não consideram as condições ideais de vinculação e recomendam adotar os valores da tabela 5.1 (página 106), pois estes fatores são majorados para considerar imperfeições nas vinculações.

Para elementos de treliça as normas técnicas recomendam determinar o fator comprimento efetivo de flambagem (k) através da tabela 5.2 (página 107), sem maiores contestações.

Para elementos de pórticos, as hipóteses consideradas para determinar fator comprimento efetivo de flambagem (k) tais como: os elementos comportam-se elasticamente, todas as colunas flambam simultaneamente e momentos de engastamento perfeito nas extremidades, provavelmente não ocorrem. Entretanto, as normas técnicas consideram tais hipóteses e recomendam determinar o fator (k) através dos ábacos das figuras 5.4 e 5.9 (páginas 121 e 131) para pórticos indeslocáveis e deslocáveis, respectivamente. Sugere-se fazer uma reavaliação destas hipóteses visando o cálculo mais preciso do fator (k) bem como apresentar novos ábacos.

Outro fator importante para o cálculo da força normal resistente é o efeito da força cortante no cálculo da carga crítica de flambagem, representado matematicamente pelo fator (β).

O efeito da força cortante no cálculo da carga crítica de flambagem, pode ser desprezado em perfis de alma cheia (ex. perfil "I"). Nas barras interligadas por diagonais (colunas treliçadas), desde que o ângulo entre a diagonal e o banzo seja compreendido entre 45^0 e 60^0 , o efeito da força cortante também pode ser desprezado, pois os valores do parâmetro (β) são próximos da unidade.

No caso de barras compostas, formando travejamento em quadro (sistema vierendel) e barras formadas por chapas contínuas vazadas, o efeito da força cortante torna-se significativo no cálculo da carga crítica de flambagem e não pode ser desprezado.

Apresenta-se, a seguir, alguns comentários referentes às recomendações da Norma NBR 8800.

A Norma NBR 8800 adotou as curvas de flambagem e a classificação das seções do Eurocode/78, valores já alterados em versões mais recentes. Percebe-se, portanto, que estes valores devem ser reavaliados em futuras revisões da Norma NBR 8800.

As relações largura/espessura (b/t) dos perfis utilizados nas edificações metálicas no Brasil são diferentes das apresentadas pelos perfis usados em outros países, Europa e Estados Unidos. Cabe salientar que as relações largura/espessura (b/t), as quais diferenciam as seções transversais tendo em vista seu comportamento na flambagem, são obtidas a partir da tensão crítica de flambagem elástica, expressão (7.5), e da figura 7.5, coeficientes de flambagem elástica de chapas retangulares planas em compressão.

Baseado no exposto acima sugere-se a realização de ensaios específicos para avaliar o comportamento pós-crítico de flambagem de chapas, pois atualmente corrige-se este fenômeno admitindo o conceito da área efetiva (A_{ef}).

Como a Norma NBR 8800 considera os critérios de cálculo da força normal resistente idênticos aos do Eurocode, não se tem condições de avaliar corretamente o desempenho, quer a nível de consumo de aço, quer a nível da segurança global no dimensionamento de barras comprimidas. Com a realização de ensaios para determinar novos parâmetros e, conseqüentemente, curvas de flambagem adequadas para os perfis existentes no mercado interno, será possível responder a esta importante questão.

BIBLIOGRAFIA¹

- AÇO na arquitetura. CBA Cadernos Brasileiros de Arquitetura, São Paulo, v.20, 1991. [R]
- ADLURI, S.M.R., MADUGULA, M.K.S. Factored axial compressive resistance of schifflerized angles. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v.18, n.6, p.926-932, Dec. 1991. [C]
- ALPSTEN, G.A., TALL, L. Residual stresses in heavy welded shapes. *Welding Journal*, v.49, n.3, Research Suppl., p.93s-105s, March, 1970. [I]
- AL-SAYED, S.H., BJORHOVDE, R. Experimental study of single angle columns. *Journal of Constructional Steel Research*, v.12, p.83-102, 1989. [R]
- AL-SAYED, S.H., BJORHOVDE, R. Inelastic behavior of single angle columns. *Journal of Constructional Steel Research*, v.12, p.103-118, 1989. [R]
- AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION (AISC). *Manual of steel construction: load & resistance factor design*. Chicago, 1986. [I]
- AOKI, T., MIGITA, Y., FUKUMOTO, Y. Local buckling strength of closed polygon folded section columns. *Journal of Constructional Steel Research*, v.20, n.4, p.259-270, 1991. [C]

1

Todas as referências bibliográficas citadas foram consultadas e classificadas segundo três recomendações, em função de sua importância para os vários aspectos abordados neste trabalho.

- [I] Leitura Importante
- [R] Leitura Recomendável
- [C] Leitura Complementar

- ARAÚJO, E.C. *Elementos de aço flexo-comprimidos*. São Carlos, 1993. 569p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. [R]
- ARBABI, F., LI, F. Buckling of variable cross-section columns: integral-equation approach. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.117, n.8, p.2426-2441, Aug. 1991. [C]
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). *NBR 8800/86: Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios*. Rio de Janeiro, 1986. [I]
- AUGUSTI, G., BARATTA, A. Teoria probabilistica della resistenza delle aste compresse. *Costruzioni Metalliche*, v.23, n.1, p.44-58, gen.-feb. 1971. [R]
- BALLIO, G., MAZZOLANI, F.M. *Theory and design of steel structures*. London: Chapman and Hall, 1983. 632p. [I]
- BATTERMAN, R.H., JOHNSTON, B.G. Behavior and maximum strength of metal columns. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.93, n.2, p.205-230, Apr. 1967. [I]
- BEER, H. Nuove curve per il calcolo di aste compresse. *Costruzioni Metalliche*, v.22, n.5, p.338-344, set.-ott. 1970. [R]
- BEER, H., SCHULZ, G. Bases théoriques des courbes européennes de flambement. *Costruzioni Metalliche*, v.22, n.6, p.436-452, nov.-dic. 1970. [R]
- BERNARD, A. Buckling tests on I-section beams rolled in high-yield steel. *Acier-Stahl-Steel*, n.4, p.157-160, 1978. [C]
- BERNARD, A., DA RIN, M. Effect of the shape of the stress-strain curve upon the performance of steel frames. *Acier-Stahl-Steel*, n.3, p.103-113, 1978. [R]
- BILD, S., KULAK, G.L. Local buckling rules for structural steel members. *Journal of Constructional Steel Research*, v.20, n.1, p.1-52, 1991. [C]
- BJORHOVDE, R. Columns: from theory to practice. *Engineering Journal*, AISC, p.21-34, first quarter, 1988. [I]
- BJORHOVDE, R. Effect of end restraint on column strength: practical applications. *Engineering Journal*, AISC, p.1-13, first quarter, 1984. [I]

- BJORHOVDE, R. Research needs in stability of metal structures. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.106, n.12, p.2425-2442, December, 1980. [I]
- BJORHOVDE, R. et al. Residual stresses in thick welded plates. *Welding Journal*, v.51, n.8, Research Suppl., p.392s-405s, Aug. 1972. [I]
- BLEICH, F. *Buckling strength of metal structures*. New York: McGraw-Hill, 1952. 508p. [I]
- BRAHAM, M. et alii. Buckling of thin-walled hollow sections: cases of axially-loaded rectangular sections. *Acier-Stahl-Steel*, n.1, p.30-36, 1980. [C]
- BRIDGE, R.Q., FRASER, D.J. Improved G-factor method for evaluating effective lengths of columns. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, v.113, n.6, p.1341-1356, June, 1987. [R]
- CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION (CSA). CAN3-S136-M84: *Cold-formed steel structural members*. Toronto, 1984. [I]
- CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION (CSA). CAN3-S16.1-M84: *Steel structures for buildings (limit states design)*. Toronto, 1984. [I]
- CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION (CSA). CAN/CSA-S16.1-M89: *Limit states design of steel structures*. In: . *Handbook of steel construction*. 15.ed. Ontario, 1991. pt.1 [I]
- CARPENA, A. Détermination des limites élastiques pour l'analyse du flambement. *Costruzioni Metalliche*, v.22, n.6, p.453-457, nov.-dic. 1970. [R]
- CHEN, W.F., LUI, E.M. Columns with end restraint and bending in load and resistance design factor. *Engineering Journal, AISC*, p.105-132, third quarter, 1985. [I]
- CHEN, W.F., LUI, E.M. Stability design criteria for steel members and frames in the United States. *Journal of Constructional Steel Research*, v.5, n.1, p.31-74, 1985. [I]
- CHEN, W.F., LUI, E.M. *Structural stability: theory and implementation*. New York: Elsevier, 1987. 490p. [I]
- CHEN, W.F., SANTATHADAPORN, S. Review of column behavior under biaxial loading. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.94, n.12, p.2999-3021, Dec. 1968. [I]

- CHENG, J.J. Projeto de estruturas de perfis de chapa dobrada (Cold-formed steel structures). In: COLÓQUIO DE ESTRUTURAS DE AÇO NA PUC/RJ, 3., Rio de Janeiro, 11-14 jul. 1988. Anais. 160p. [R]
- CLARKE, M.J. et al. Advanced analysis of steel building frames. *Journal of Constructional Steel Research*, v.23, p.1-29, 1992. [C]
- COMPANHIA SIDERÚRGICA NACIONAL. *Catálogo de produtos*. Rio de Janeiro, 1962. [R]
- CUDÓS SAMBLANCAT, V. *Calculo de estructuras de acero*. Madrid: H. Blume, 1978. tomo 1 [I]
- DADDI, I., MAZZOLANI, F.M. Determinazione sperimentale delle imperfezioni strutturali nei profilati di acciaio. *Costruzioni Metalliche*, n.5, p.374-394, 1972. [R]
- DAVIES, J.M. Postbuckling behaviour of foam-filled, thin-walled steel beams. *Journal of Constructional Steel Research*, v.20, n.1, p.75-83, 1991. [C]
- DIAS, L.A.M. *Edificações de aço no Brasil*. São Paulo: Zigurate Ed., 1993. 203p. [I]
- DUAN, L., CHEN, W.F. Effective length factor for columns in braced frames. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.114, n. 10, p.2357-2370, Oct. 1988. [R]
- DUAN, L., CHEN, W.F. Effective length factor for columns in unbraced frames. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.115, n.1, p.149-165, Jan. 1989. [R]
- DUBAS, P., GEHRI, E. (eds.) *Behaviour and design of steel plated structures*. Brussels: ECCS-CECM-EKS, 1986. 247p. [C]
- DUBERG, J.E., WILDER III, T.W. Column behavior in the plastic stress range. *Journal of the Aeronautical Sciences*, v.17, n.6, p.323-327, June, 1950. [C]
- DUTHEIL, J. Verifica delle aste compresse: principi fondamentali. *Costruzioni Metalliche*, v.18, n.4, p.266-275, iug.-ago. 1966. [C]
- ELGAALY, M., DAGHER, H., DAVIDS, W. Behavior of single-angle-compression members. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.117, n.12, p.3720-3741, Dec. 1991. [C]
- ERMOPOULOS, J.C. Buckling length of framed compression members with semirigid connections. *Journal of Constructional Steel Research*, v.18, n.2, p.139-154, 1991. [C]

- EUROCODE 3. *Common unified code of practice for steel structures*. Draft, 1983. [I]
- FAKURY, R.H. *Cálculo de estruturas de aço*. Belo Horizonte: COTEC, 1984. [R]
- FRASER, D.J. Design of tapered member portal frames. *Journal of Constructional Steel Research*, v.3, n.3, p.20-26, 1983. [R]
- FRASER, D.J. Evaluation of effective length factors in braced frames. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v.10, p.18-26, 1983. [R]
- FRASER, D.J., BRIDGE, R.Q. Buckling of stepped crane columns. *Journal of Constructional Steel Research*, v.16, n.23-38, 1990. [R]
- FUKUMOTO, Y., ITOH, Y. Evaluation of multiple column curves using the experimental data-base approach. *Journal of Constructional Steel Research*, v.3, n.3, p.2-19, 1983. [R]
- GALAMBOS, T.V. (ed.) *Guide to stability design criteria for metal structures*. 4.ed. New York: John Wiley & Sons, 1988. 786p. [I]
- GALAMBOS, T.V. *Structural members and frames*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1968. 373p. [I]
- GEORGESCU, D., TOMA, C., GOSA, O. Post-critical behaviour of 'K' braced frames. *Journal of Constructional Steel Research*, v.21, n.1-3, p.115-133, 1992. [C]
- GIONCU, V. et al. Coupled instabilities in monosymmetrical steel compression members. *Journal of Constructional Steel Research*, v.21, n.1-3, p.71-95, 1992. [C]
- GOMES, O.F. *Análise dos elementos fletidos em estruturas de aço*. São Carlos, 1993. 323p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. [R]
- GONÇALVES, R.M. Estudo de barras solicitadas à compressão. In: SEMINÁRIO "USO DO AÇO NA CONSTRUÇÃO", 3., São Paulo, 1988. Anais. São Paulo: CTCEN, 1988. p.173-186 [I]
- GONÇALVES, R.M. et alii. *Notas de aula da disciplina "Tópicos Especiais em Estruturas Metálicas"*. São Carlos, Curso de Pós-graduação EESC-USP, 1991. [I]

- HAAIJER, G. Plate buckling in the strain-hardening range. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, v.83, n.2, paper 1212, 47p., Apr. 1957. [I]
- HAAIJER, G., THÜRLIMANN, B. Inelastic buckling in steel. *Transactions, ASCE*, v. 125, part 1, p.308-338, 1960; with discussion p.338-344 [I]
- HUBER, A.W., BEEDLE, L.S. Residual stress and compressive strength of steel. *Welding Journal*, v.33, n.12, p.589s-614s, Dec. 1954. [I]
- IVÁNYI, M., HEGEDÜS, L. Local buckling and flexural-torsional buckling with regard to residual stresses. *Journal of Constructional Steel Research*, v.21, n.1-3. p.205-226, 1992. [C]
- JACQUET, J. Essais de flambement et exploitation statistique. *Costruzioni Metalliche*, v.22, n.6, p.416-435, nov.-dic. 1970. [R]
- JOHNSTON, B.G. Buckling behavior above the tangent modulus load. *Transactions, ASCE*, v.128, part 1, p.819-839, 1963; with discussion p.839-848 [I]
- JOHNSTON, B.G. (ed.) *Guide to stability design criteria for metal structures*. 3.ed. New York: John Wiley & Sons, 1976. 616p. [I]
- KENNEDY, J.B., MURTY, M.K.S. Buckling of steel angle and tee struts. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.98, n.ST11, p.2507-2522, November, 1972. [R]
- KITIPORNCHAI, S. Torsional-flexural buckling of angles: a parametric study. *Journal of Constructional Steel Research*, v.3, n.3, p.27-31, 1983. [I]
- KITIPORNCHAI, S., LEE, H.W. Inelastic buckling of single-angle, tee and double-angle struts. *Journal of Constructional Steel Research*, v.6, n.1, p.3-20, 1986. [R]
- KNUDSEN, B. *Buckling strength analysis*. Hovik: Det norske Veritas, 1982. 81p. (Classification Notes, n. 30.1) [C]
- KOZÁK, J. Le dimensionnement économique des barres en acier a haute résistance, sollicitées au flambage. *Acier-Stahl-Steel*, v.31, n.6, p.301-305, juin, 1966. [C]
- LAMBOOY, W. Éléments soumis à un effort de compression excentré. *Acier-Stahl-Steel*, n.2, p.85-89, 1974. [C]
- LANDOLFO, R., MAZZOLANI, F.M. The influence of the

- variation through the thickness of residual stresses in tubular columns. *Journal of Constructional Steel research*, v.19, n.1, p.49-57, 1991. [C]
- LEE, G.C., FINE, D.S., HASTREITER, W.R. Inelastic torsional buckling of H-columns. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.93, n.5, p.295-307, Oct. 1967. [R]
- LIEW, J.Y.R., SHANMUGAM, N.E., LEE, S.L. Behavior of thin-walled steel box columns under biaxial loading. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, v.115, n.12, p.3076-3094, Dec. 1989. [C]
- LIEW, J.Y.R., SHANMUGAM, N.E., LEE, S.L. Design of thin-plated steel box columns under biaxial loading. *Journal of Constructional Steel Research*, v.16, p.39-70, 1990. [C]
- LIN, S.H., YU, W.W., GALAMBOS, T.V. ASCE LRFD method for stainless steel structures. *Journal of Structural Engineering*, v.118, n.4, p.1056-1070, Apr. 1992. [C]
- MALITE, M. *Análise do comportamento estrutural de vigas mistas aço-concreto constituídas por perfis de chapa dobrada*. São Carlos, 1993. 2v. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. [R]
- MAQUOI, R., RONDAL, J. Analytical formulation of the new European buckling curves. *Acier-Stahl-Steel*, n.1, p.23-28, 1978. [R]
- MAS, E., MASSONNET, C. Part prise par la Belgique dans les recherches expérimentales de la Convention Européenne des Associations de la Construction Métallique sur le flambement centrique des barres en acier doux. *Acier-Stahl-Steel*, v.31, n.9, p.393-400, sept. 1966. [R]
- MASSONNET, C. Etat actuel du probleme du flambement des barres en acier, a la lumiere des travaux de la Commission VIII (Instabilite) de la Convention Européenne de la Construction Métallique. *Acier-Stahl-Steel*, v.31, n.10, p.459-466, oct. 1966. [R]
- MAZZOLANI, F.M. Influenza delle imperfezioni strutturali sulla instabilità delle colonne in acciaio. *Costruzioni Metalliche*, v.25, n.6, p.380-390, nov.-dic. 1973. [R]
- McFALLS, R.K., TALL, L. A study of welded columns manufactured from flame-cut plates. *Welding Journal*, v.48, n.4, Research Suppl., p.141s-153s, Apr. 1969. [I]

- MORI, D.D. *Flexo-torção: barras com seção transversal aberta e paredes delgadas*. São Carlos: EESC-USP, 1988. [C]
- MURZEWSKI, J. Polish developments in ultimate limit states of steel framed structures. *Journal of Constructional Steel Research*, v.21, n.1-3, p.43-57, 1992. [C]
- NAGARAJA RAO, N.R., ESTUAR, F.R., TALL, L. Residual stresses in welded shapes. *Welding Journal*, v.43, n.7, Research Suppl., p.295s-306s, July, 1964. [I]
- PICARD, A., BEAULIEU, D. Experimental study of the buckling strength of compression members connected to coplanar tension members. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v.16, n.3, p.249-257, 1989. [C]
- QUEIROZ, G. *Elementos das estruturas de aço*. 2.ed. Belo Horizonte, 1988. 455p. [I]
- RACHID, M. *Notas de aula da disciplina "Instabilidade das Estruturas"*. São Carlos, Curso de PAs-graduação EESC-USP, 1991. [I]
- RACHID, M., MORI, D.D. *Instabilidade: conceitos - aplicação na flambagem por flexão*. São Carlos: EESC-USP, 1989. [R]
- RASMUSSEN, K.J.R., HANCOCK, G.J. Compression tests of welded channel section columns. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.115, n.4, p.789-808, April, 1989. [C]
- RODRIGUES, F.C., BATISTA, E.M. Calibração de uma curva de flambagem para dimensionamento de colunas constituídas de perfis de chapa dobrada. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 25., Porto Alegre, nov. 1991. Anais. Porto Alegre: CPGEC-UFRGS, 1991. v.2, p.301-312 [R]
- RONDAL, J., MAQUOI, R. Single equation for SSRC column-strength curves. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.105, n.ST1, p.247-250, Jan. 1979. [I]
- SALES, J.J. *Estudo do projeto e da construção de edifícios de andares múltiplos com estrutura de aço - 1ª parte: estado da arte*. São Carlos, 1991. 183p. (Plano de pesquisa) [I]
- SALMERI, A. Sul calcolo diretto della larghezza efficace di lastre sottili compresse uniformemente (Calculating the effective width of an uniformly loaded thin-plate with a direct method). *Costruzioni Metalliche*, n.1, p.48-53, 1987. [C]

- SALMON, C.G., JOHNSON, J.E. *Steel structures: design and behavior*. 3.ed. New York: Harper & Row, 1990. 1086p. [I]
- SFINTESCO, D. Fondement expérimental des courbes européennes de flambement. *Costruzioni Metalliche*, v.22, n.6, p.409-415, nov.-dic. 1970. [R]
- SHANLEY, F.R. The column paradox. *Journal of the Aeronautical Sciences*, v.13, n.12, p.678, Dec. 1946. [I]
- SHANLEY, F.R. Inelastic column theory. *Journal of the Aeronautical Sciences*, v.14, n.5, p.261-268, May 1947. [I]
- SHANMUGAM, N.E., LIEW, J.Y.R., LEE, S.L. Welded steel box-columns under biaxial loading. *Journal of Constructional Steel Research*, v.12, p.119-139, 1989. [C]
- SHEN, Z., ZHANG, Q. Interaction of local and overall instability of compressed box columns. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, v.117, n.11, p.3337-3355, Nov. 1991. [C]
- SOHAL, I.S., CHEN, W.F. Local buckling and sectional behavior of fabricated tubes. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, v.113, n.3, p.519-533, Mar. 1987. [C]
- STEUP, H. Compressed members with misaligned axes or loading eccentricities. *Journal of Constructional Steel Research*, v.21, n.1-3, p.135-143, 1992. [C]
- TEBEDGE, N., CHEN, W.F. Design criteria for H-columns under biaxial loading. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.100, n.3, p.579-598, March, 1974. [C]
- THÜRLIMANN, B. Column buckling: historical and actual notes. *Journal of Constructional Steel Research*, v.17, p.95-111, 1990. [C]
- TIMOSHENKO, S.P. *History of strength of materials*. New York: McGraw-Hill, 1953. 452p. [I]
- TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. *Theory of elastic stability*. 2.ed. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1961. 541p. [I]
- USAMI, T., FUKUMOTO, Y. Deformation analysis of locally buckled steel compression members. *Journal of Constructional Steel Research*, v.13, p.111-135, 1989. [C]
- USIMINAS. *O aço na construção brasileira*. Belo Horizonte, s.d. (Catálogo técnico) [R]

- USIMINAS. *O aço no Brasil: importante elemento construtivo*. Belo Horizonte, s.d. (Catálogo técnico) [R]
- USIMINAS MECÂNICA. *Pontes metálicas*. Belo Horizonte, s.d. (Catálogo técnico) [R]
- USIMINAS MECÂNICA. *Qualidade gerando indústrias*. Belo Horizonte, s.d. (Catálogo técnico) [R]
- VAYAS, I. Torsional rigidities of open stiffeners to compression flanges. *Journal of Constructional Steel Research*, v.20, n.1, p.65-74, 1991. [C]
- WENG, C.C., WHITE, R.N. Residual stresses in cold-bent thick steel plates.. *Journal of Structural Engineering*, v.116, n.1, p.24-39, January 1990. [C]
- WILLIAMS, F.W., JEMAH, A.K. Buckling curves for elastically supported columns with varying axial force, to predict lateral buckling of beams. *Journal of Constructional Steel Research*, v.7, p.133-147, 1987. [C]
- YEMELIN, Y. On the effective width of girder flanges in elastic and elasto-plastic stages. *Journal of Constructional Steel Research*, v.21, n.1-3, p.195-204, 1992. [C]

ANEXO I

ELEMENTOS COMPRIMIDOS ESPECIAIS

I.1- GENERALIDADES

Neste texto, denomina-se elementos comprimidos especiais, as barras prismáticas com alterações na força axial aplicada, presença de contraventamentos intermediários ou variação da seção transversal. A Figura I.1 ilustra os três casos citados.

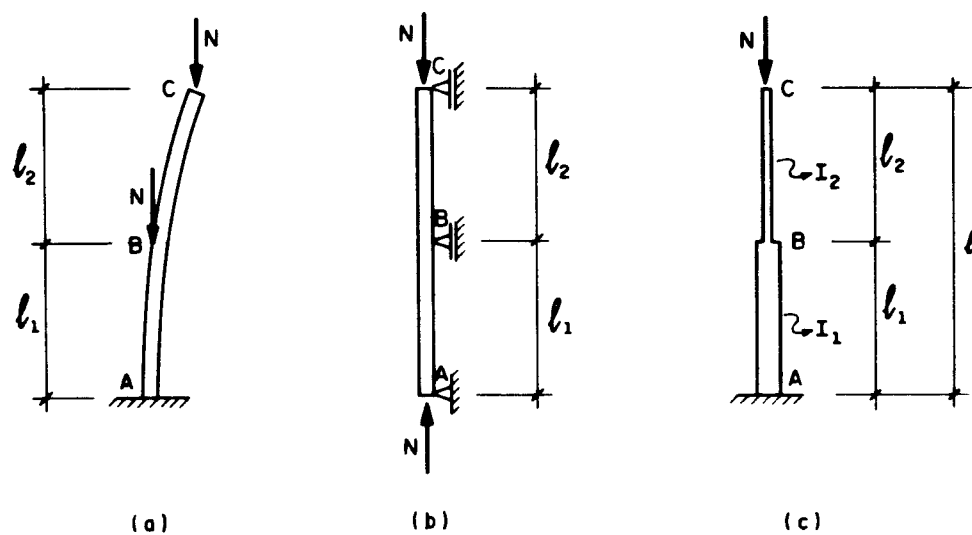


Figura I.1- ELEMENTOS ESPECIAIS

I.2- BARRA COM DUAS FORÇAS AXIAIS

A figura I.2 esquematiza uma barra em balanço solicitada por duas forças axiais N . Uma força encontra-se aplicada na extremidade livre, enquanto que, a outra localiza-se no ponto médio do vão. A variação da força axial ao longo do comprimento da barra, resultará na força $2N$ para o vão 1 (\overline{AB}) e N para o vão 2 (\overline{BC}).

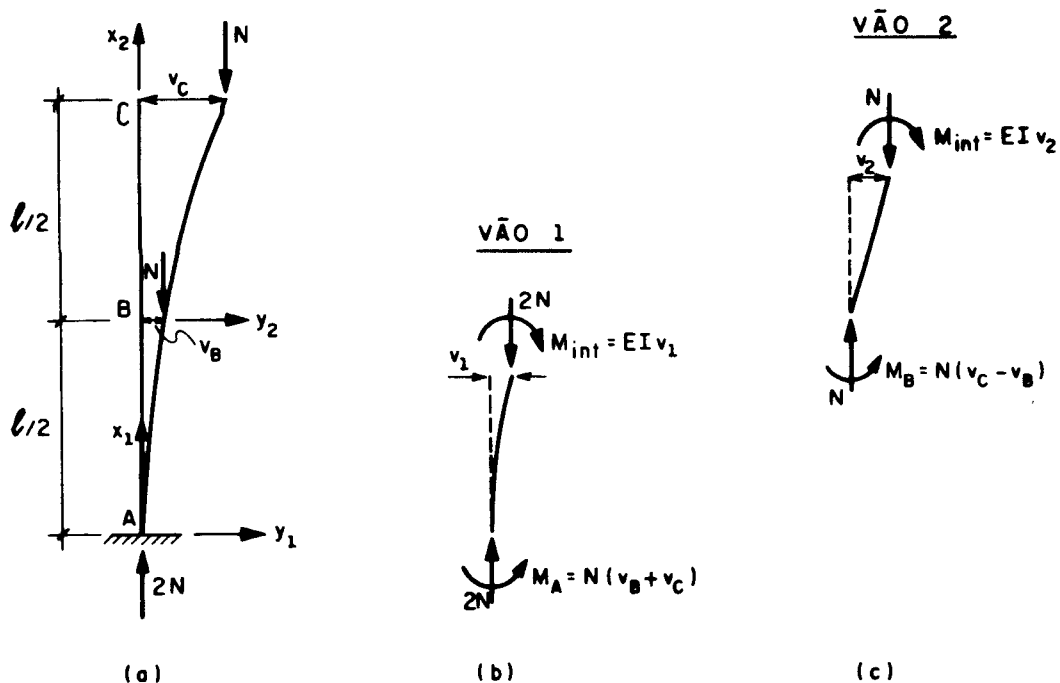


Figura I.2- BARRA EM BALANÇO SUBMETIDA A DUAS FORÇAS AXIAIS

A carga crítica de flambagem será determinada a partir das equações diferenciais de equilíbrio para cada trecho da barra.

Da análise da barra na posição deslocada, figura I.2.b, pode-se obter a equação diferencial de equilíbrio para o trecho 1.

$$EI v_1'' + 2Nv_1 = M_A \quad (I.1)$$

Rearranjando a equação (I.1), obtém-se:

$$v_1'' + K_1^2 v_1 = \frac{M_A}{EI} \quad (I.2)$$

onde:

$$K_1^2 = \frac{2N}{EI} \quad (I.3)$$

O momento em A é:

$$M_A = N(v_B + v_C) \quad (I.4)$$

Sendo v_B e v_C os deslocamentos laterais nos pontos B e C, respectivamente.

A solução geral da equação (I.2) é:

$$v_1 = C_1 \operatorname{sen} K_1 x_1 + C_2 \operatorname{cos} K_1 x_1 + \frac{M_A}{EIK_1^2} \quad (I.5)$$

Da figura I.2c, obtém-se a equação diferencial de equilíbrio para o trecho 2.

$$EIv_2'' + Nv_2 = M_B \quad (I.6)$$

Rearranjando a equação (I.6), obtém-se:

$$v_2'' + K_2^2 v_2 = \frac{M_B}{EI} \quad (I.7)$$

onde:

$$K_2^2 = \frac{N}{EI} \quad (I.8)$$

O momento em B é:

$$M_B = N(v_C - v_B) \quad (I.9)$$

A solução geral da equação (I.7) é:

$$v_2 = C_3 \operatorname{sen} K_2 x_2 + C_4 \operatorname{cos} K_2 x_2 + \frac{M_B}{EIK_2^2} \quad (I.10)$$

É necessário quatro condições de contorno para o cálculo das constantes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 .

$$v_1(0) = 0 \quad (\text{I.11})$$

$$v_1'(0) = 0 \quad (\text{I.12})$$

$$v_1(\ell/2) = v_2(0) + v_B \quad (\text{I.13})$$

$$v_1'(\ell/2) = v_2'(0) \quad (\text{I.14})$$

Substituindo as condições de contorno dadas em (I.11), (I.12) na equação (I.5), obtém-se:

$$C_2 = - \frac{M_A}{EIK_1^2} \quad (\text{I.15})$$

$$C_1 = 0 \quad (\text{I.16})$$

Substituindo as condições de contorno (I.13), (I.14) na equação (I.10), obtém-se:

$$C_4 = - \frac{M_A}{EIK_1^2} \cos \frac{K_1 \ell}{2} + \frac{M_B}{EIK_1^2} - \frac{M_B}{EIK_2^2} \quad (\text{I.17})$$

$$C_3 = \frac{M_A}{EIK_1 K_2} \operatorname{sen} \frac{K_1 \ell}{2} \quad (\text{I.18})$$

Substituindo, as constantes obtidas em (I.15), (I.16), (I.17) e (I.18) nas equações (I.5) e (I.10), obtém-se:

$$v_1 = \frac{M_A}{EIK_1^2} (1 - \cos K_1 x_1) \quad (\text{I.19})$$

e

$$v_2 = \frac{M_A}{EIK_1 K_2} \operatorname{sen} \frac{K_1 \ell}{2} \operatorname{sen} K_2 x_2 - \left(\frac{M_A}{EIK_1^2} \cos \frac{K_1 \ell}{2} + \right. \\ \left. - \frac{M_B}{EIK_1^2} + \frac{M_B}{EIK_2^2} \right) \cos K_2 x_2 + \frac{M_B}{EIK_2^2} \quad (\text{I.20})$$

Considerando as duas condições de continuidade:

$$v_1(\ell/2) = v_B \quad (\text{I.21})$$

$$v_2(\ell/2) = v_C - v_B \quad (\text{I.22})$$

Substituindo estas condições de continuidade, (I.21) e (I.22), nas equações (I.19) e (I.20), obtém-se:

$$v_B = \frac{M_A}{EIK_1^2} \left(1 - \cos K_1 \frac{\ell}{2}\right) \quad (\text{I.23})$$

e

$$v_C - v_B = \frac{M_A}{EIK_1 K_2} \operatorname{sen} \frac{K_1 \ell}{2} \operatorname{sen} K_2 \frac{\ell}{2} - \left(\frac{M_A}{EIK_1^2} \cos \frac{K_1 \ell}{2} + \right. \\ \left. - \frac{M_B}{EIK_1^2} + \frac{M_B}{EIK_2^2} \right) \cos K_2 \frac{\ell}{2} + \frac{M_B}{EIK_2^2} \quad (\text{I.24})$$

Substituindo as equações (I.3) e (I.4) em (I.23), obtém-se:

$$v_B \left(-1 - \cos \frac{K_1 \ell}{2}\right) + v_C \left(1 - \cos \frac{K_1 \ell}{2}\right) = 0 \quad (\text{I.25})$$

Das equações (I.3) e (I.8), tem-se:

$$K_1 = \sqrt{2} K_2 \quad (\text{I.26})$$

Substituindo as equações (I.3), (I.4), (I.8) e (I.26) na equação (I.24), obtém-se:

$$v_B \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{K_1 \ell}{2} \operatorname{sen} \frac{K_2 \ell}{2} + v_C \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{K_1 \ell}{2} \operatorname{sen} \frac{K_2 \ell}{2} + \\ -v_C \cos \frac{K_2 \ell}{2} + v_B \cos \frac{K_2 \ell}{2} = 0 \quad (\text{I.27})$$

Reescrevendo sob a forma matricial as equações (I.25) e (I.27), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_B \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.28})$$

onde:

$$A_{11} = -1 - \cos \frac{K_1 \ell}{2} \quad (\text{I.29})$$

$$A_{12} = +1 - \cos \frac{K_1 \ell}{2} \quad (\text{I.30})$$

$$A_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{K_1 \ell}{2} \operatorname{sen} \frac{K_2 \ell}{2} + \cos \frac{K_2 \ell}{2} \quad (\text{I.31})$$

$$A_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{K_1 \ell}{2} \operatorname{sen} \frac{K_2 \ell}{2} - \cos \frac{K_2 \ell}{2} \quad (\text{I.32})$$

O determinante da matriz nulo será a solução não trivial da equação (I.28).

$$\det. \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{I.33})$$

Resolvendo o determinante (I.33), tem-se:

$$\begin{aligned} & (-1 - \cos \frac{K_1 \ell}{2}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{K_1 \ell}{2} \operatorname{sen} \frac{K_2 \ell}{2} - \cos \frac{K_2 \ell}{2} \right) + \\ & - \left(1 - \cos \frac{K_1 \ell}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{K_1 \ell}{2} \operatorname{sen} \frac{K_2 \ell}{2} + \cos \frac{K_2 \ell}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.34})$$

Rearranjando a equação (I.34), obtém-se:

$$-\frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{K_1 l}{2} \operatorname{sen} \frac{K_2 l}{2} + 2 \cos \frac{K_1 l}{2} \cos \frac{K_2 l}{2} = 0 \quad (\text{I.35})$$

Rearranjando,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{K_1 l}{2} = \operatorname{cotg} \frac{K_2 l}{2} \quad (\text{I.36})$$

Substituindo o valor de K_1 da equação (I.26) na equação (I.36)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2} K_2 l}{2} = \operatorname{cotg} \frac{K_2 l}{2} \quad (\text{I.37})$$

Por tentativas, determina-se o valor do parâmetro K_2

$$K_2 = \frac{1,4378}{l} \quad (\text{I.38})$$

Das equações (I.8) e (I.38), é possível obter o valor de N_{cr} .

$$N_{cr} = 2,067 \frac{EI}{l^2} \quad (\text{I.39})$$

Multiplicando a equação (I.39) por π^2/π^2 e reescrevendo:

$$N_{cr} = 0,21 \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (\text{I.40})$$

I.3- ELEMENTOS COMPRIMIDOS COM APOIO INTERMEDIÁRIO

As condições para o cálculo da força normal crítica para elementos comprimidos com apoio intermediário baseia-se nas informações apresentadas na figura I.3. Pode-se dividir a barra em dois trechos e adota-se dois eixos coordenados: $x_1 - y_1$ para o trecho 1 e $x_2 - y_2$ para o trecho 2, aos quais serão associadas as equações diferenciais de equilíbrio.

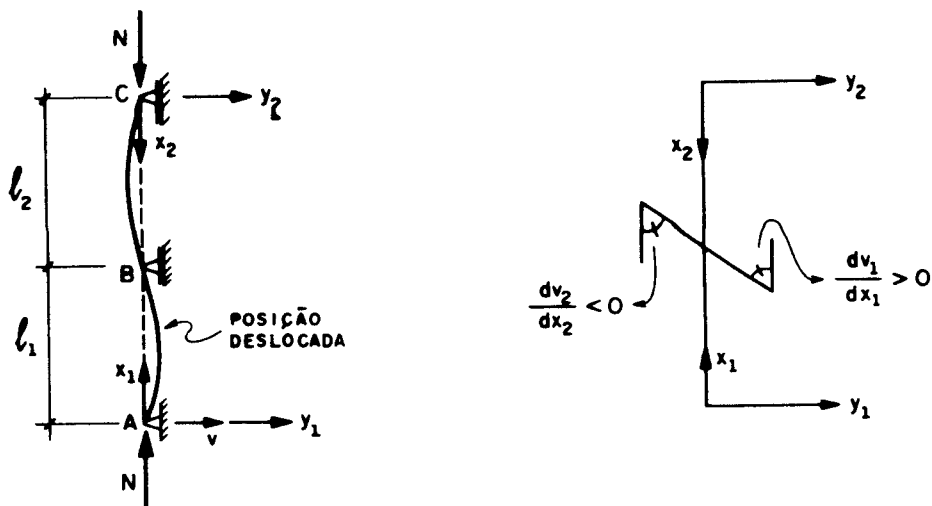


Figura I.3- ELEMENTOS CONTÍNUOS

Denomina-se por v o deslocamento lateral na direção y .

Considerando-se um segmento infinitesimal do trecho 1 (\overline{AB}) da barra, conforme representado na figura I.4.

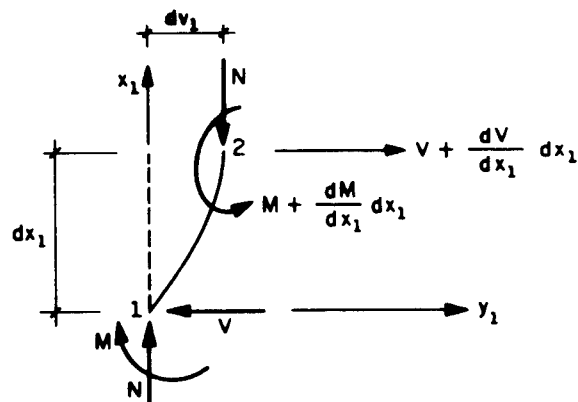


Figura I.4- ELEMENTO DE COMPRIMENTO (dx) EM SUA POSIÇÃO DESLOCADA

Por equilíbrio, tem-se o momento externo no ponto

2.

$$V dx_1 + N dv_1 + M - \left(M + \frac{dM}{dx_1} dx_1 \right) = 0 \quad (\text{I.41})$$

Rearranjando,

$$V = \frac{dM}{dx_1} - \frac{N dv_1}{dx_1} \quad (\text{I.42})$$

A somatória das forças horizontais é nula,
portanto

$$\Sigma F_{y1} = 0 \quad (\text{I.43})$$

ou

$$-V + V + \frac{dV}{dx_1} dx_1 = 0 \quad (\text{I.44})$$

Ou seja:

$$\frac{dV}{dx_1} = 0 \quad (\text{I.45})$$

Diferenciando a equação (I.42), obtém-se:

$$\frac{dV}{dx_1} = \frac{d^2 M}{dx_1^2} - \frac{N d^2 v_1}{dx_1^2} \quad (\text{I.46})$$

Das equações (I.45) e (I.46):

$$\frac{d^2 M}{dx_1^2} - \frac{N d^2 v_1}{dx_1^2} = 0 \quad (\text{I.47})$$

Rearranjando a equação acima:

$$EI \frac{d^4 v_1}{dx_1^4} + \frac{N d^2 v_1}{dx_1^2} = 0 \quad (\text{I.48})$$

onde:

$$M = - EI \frac{d^2 v_1}{dx_1^2} \quad (I.49)$$

Reescrevendo a equação (I.48), obtém-se a equação diferencial de quarta ordem para o trecho 1:

$$v_1^{iv} + K^2 v_1'' = 0 \quad (I.50)$$

onde:

$$K^2 = \frac{N}{EI} \quad (I.51)$$

A solução geral da equação (I.50) é

$$v_1 = C_1 \operatorname{sen} Kx_1 + C_2 \operatorname{cos} Kx_1 + C_3 x_1 + C_4 \quad (I.52)$$

Analogamente ao raciocínio anterior, tem-se a equação diferencial de quarta ordem para o trecho 2.

$$v_2^{iv} + K^2 v_2'' = 0 \quad (I.53)$$

A equação (I.53) apresenta a seguinte solução geral.

$$v_2 = C_5 \operatorname{sen} Kx_2 + C_6 \operatorname{cos} Kx_2 + C_7 x_2 + C_8 \quad (I.54)$$

Para determinar as oito constantes, considera-se as seguintes condições de contorno.

$$v_1(0) = v_2(0) = 0 \quad (I.55)$$

$$v_1(l_1) = v_2(l_2) = 0 \quad (I.56)$$

$$v_1''(0) = v_2''(0) = 0 \quad (I.57)$$

E as equações de compatibilidade:

$$v_1'(l_1) = -v_2'(l_2) \quad (\text{I.58})$$

$$v_1''(l_1) = v_2''(l_2) \quad (\text{I.59})$$

Derivando a equação (I.52), tem-se:

$$v_1' = KC_1 \cos Kx_1 - KC_2 \sin Kx_1 + C_3 \quad (\text{I.60})$$

Derivando novamente a equação (I.60), obtém-se:

$$v_1'' = -K^2 C_1 \sin Kx_1 - K^2 C_2 \cos Kx_1 \quad (\text{I.61})$$

Derivando duas vezes a equação (I.54), obtém-se:

$$v_2' = KC_5 \cos Kx_2 - KC_6 \sin Kx_2 + C_7 \quad (\text{I.62})$$

e

$$v_2'' = -K^2 C_5 \sin Kx_2 - K^2 C_6 \cos Kx_2 \quad (\text{I.63})$$

Substituindo a condição de contorno (I.55) nas equações (I.52) e (I.54), tem-se:

$$C_4 = 0 \quad (\text{I.64})$$

e

$$C_8 = 0 \quad (\text{I.65})$$

Da condição de contorno (I.57) substituindo nas equações (I.61) e (I.63), tem-se:

$$C_2 = 0 \quad (\text{I.66})$$

e

$$C_6 = 0 \quad (\text{I.67})$$

Reescrevendo as equações (I.52) e (I.54) e a condição de contorno (I.56) é possível obter:

$$C_1 \text{sen}Kl_1 + C_3 l_1 = 0 \quad (\text{I.68})$$

e

$$C_5 \text{sen}Kl_2 + C_7 l_2 = 0 \quad (\text{I.69})$$

Utilizando a condição de compatibilidade (I.58), e substituindo nas equações (I.60) e (I.62), obtém-se:

$$KC_1 \text{cos}Kl_1 + C_3 + K\text{cos}Kl_2 + C_7 = 0 \quad (\text{I.70})$$

Analogamente (I.59) nas equações (I.61) e (I.63), tem-se:

$$-C_1 \text{sen}Kl_1 + C_5 \text{sen}Kl_2 = 0 \quad (\text{I.71})$$

Escrevendo, sob a forma matricial, as equações (I.68), (I.69), (I.70) e (I.71):

$$\begin{bmatrix} \text{sen}Kl_1 & l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}Kl_2 & l_2 \\ K\text{cos}Kl_1 & 1 & K\text{cos}Kl_2 & 1 \\ -\text{sen}Kl_1 & 0 & \text{sen}Kl_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.72})$$

O sinal negativo na equação (I.58) indica que ocorre uma inversão da inclinação da barra no apoio intermediário em relação aos eixos coordenados $(x_1 - y_1)$ e $(x_2 - y_2)$.

O determinante da matriz dos coeficientes, (I.72), sendo nulo é a solução não trivial deste sistema de equações.

$$\begin{vmatrix} \text{sen}Kl_1 & l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}Kl_2 & l_2 \\ K\text{cos}Kl_1 & 1 & K\text{cos}Kl_2 & 1 \\ -\text{sen}Kl_1 & 0 & \text{sen}Kl_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{I.73})$$

Resolvendo o determinante é possível escrever:

$$l_1 \text{sen}Kl_1 \text{sen}Kl_2 + l_2 \text{sen}Kl_1 \text{sen}Kl_2 - Kl_1 l_2 \text{sen}(Kl_1 + Kl_2) = 0 \quad (\text{I.74})$$

Para o caso particular, $l_1 = 1,5l_2$, obtém-se:

$$2,5 \text{sen} 1,5Kl_2 \text{sen}Kl_2 - 1,5Kl_2 \text{sen}2,5Kl_2 = 0 \quad (\text{I.75})$$

Por tentativas, obtém-se o menor valor de K que satisfaz a equação (I.75), o qual será dado por:

$$K = \frac{2,427}{l_2} \quad (\text{I.76})$$

Substituindo o valor do parâmetro K (I.76) na equação (I.51) é possível obter a força normal crítica.

$$N_{\text{cr}} = 5,89 \frac{EI}{l_2^2} \quad (\text{I.77})$$

O valor de N_{cr} da equação (I.77) é a solução particular para as relações de comprimento $l_1 = 1,5l_2$.

Substituindo na equação (I.77), o valor de l_2 em função de l , e multiplicando-a por π^2/π^2 , obtém-se:

$$N_{\text{cr}} = 3,73 \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (\text{I.78})$$

I.4- BARRAS COM ALTERAÇÕES NA SEÇÃO TRANSVERSAL

Este trabalho não apresenta a solução deste problema, pois sua solução é análoga à apresentada nos dois casos anteriores, tais barras estão ilustradas na figura I.1c.

TIMOSHENKO (1961)¹ apresenta a solução deste problema através de dois processos, por equilíbrio e pelo método da energia.

A Tabela (I.1) resume os valores da carga crítica de flambagem para alguns elementos especiais. É conveniente ressaltar que incluiu-se o valor da carga crítica, para uma viga simplesmente apoiada (EULER), para permitir uma comparação com os demais valores apresentados.

TABELA I.1- VALORES DA CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM

Elemento					
Carga crítica	$N_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$N_{cr} = 0,21 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$N_{cr} = 3,73 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$N_{cr} = 0,65 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$N_{cr} = 0,137 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$
Observações	-	$l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$	$l_1 = 1,5l_2$	$l_1 = l_2 = l/2$ $I_1 = 2I_2 = I$	$l_1 = l_2 = l/2$ $I_1 = 2I_2 = I$

1

TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. (1961) - Theory of elastic stability. 2.ed. MCGRAW - HILL KOGAKUSHA, LTD. 540P.

ANEXO II

FLEXÃO DE CHAPAS

II.1- GENERALIDADES

O desenvolvimento deste Anexo baseia-se nos trabalhos apresentados por SALMON (1990)¹ e TIMOSHENKO (1961)². Aborda-se a flexão de chapas, com o objetivo principal do cálculo da superfície deslocada de uma chapa, equação (II.48).

Esta equação foi utilizada no "Capítulo 7", para determinar a tensão crítica de flambagem elástica, considerando a hipótese de pequenos deslocamentos (a ordem de grandeza do deslocamento transversal aproximadamente igual a espessura da chapa).

II.2- FLEXÃO PURA DE CHAPAS

Analisando um elemento de uma chapa retangular definido por dois pares de planos paralelos aos planos "xz" e "yz", conforme ilustra a figura II.1. Considera-se que durante a flexão da chapa, as duas bordas laterais deste elemento permanecem planas e rotacionam sob o eixo neutro n-n.

1

SALMON, C.G., JOHNSON, J.E. - steel structures: design and behavior. 3.ed. New York: Harper & Row. 1086 P.

2

TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. - Theory of elastic stability. 2.ed. Tokyo: McGraw - Hill Kogakusha. 541P.

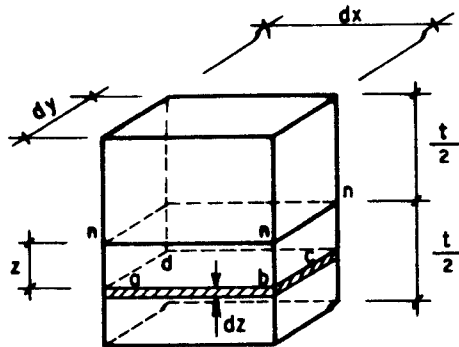


Figura-II.1- ELEMENTO DE CHAPA

O plano médio da chapa não deformará durante a flexão, enquanto permanecer normal a superfície deformada, sendo, portanto, admitida uma superfície neutra.

A análise da flexão de um elemento de chapa com largura unitária, pode ser feita como se esta fosse uma viga de seção transversal retangular de comprimento (l) e altura (t) onde (t) é a espessura da chapa, considerada pequena em comparação com outras dimensões.

A figura II.2 representa as deformações de um elemento de chapa no plano "xy", da qual obtém-se as deformações como:

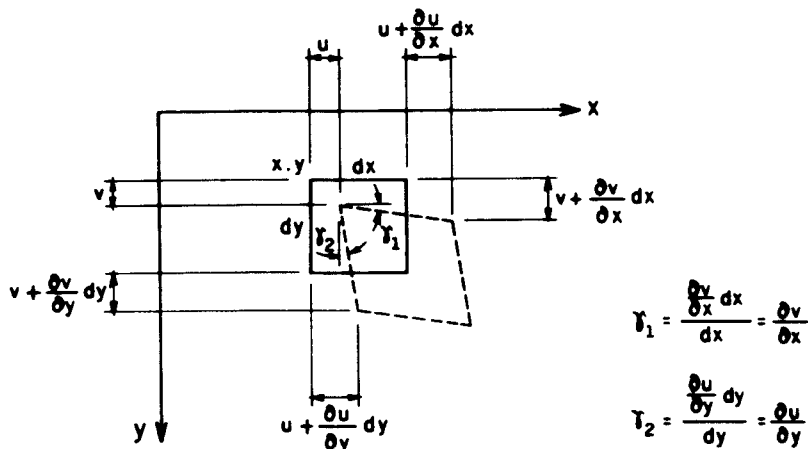


Figura II.2- DEFORMAÇÕES DO ELEMENTO DE CHAPA NO PLANO "xy"

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{II.1})$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{II.2})$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{II.3})$$

Analisando a figura II.3, reproduzida de SALMON (1990), obtém-se os deslocamentos no plano da chapa em função de seu deslocamento lateral (w).

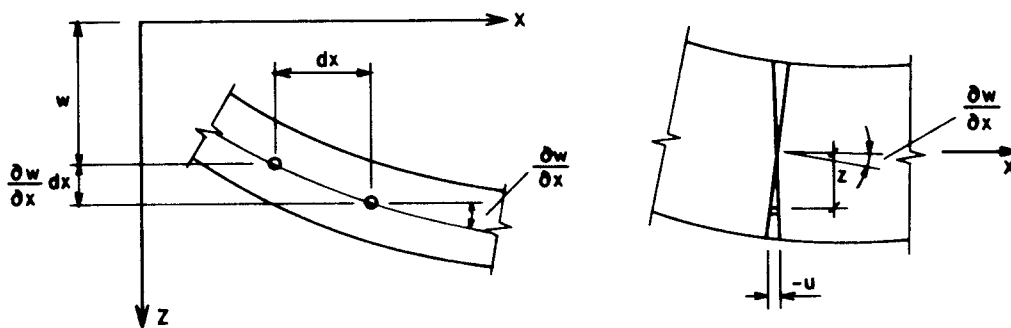


Figura II.3- DEFORMAÇÃO DO ELEMENTO DE CHAPA PERPENDICULAR AO PLANO "xy"

Considera-se que a inclinação positiva fornece um deslocamento negativo (u) e (v), como:

$$-u = z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.4})$$

$$-v = z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{II.5})$$

Substituindo as equações (II.4) e (II.5) nas equações (II.1), (II.2) e (II.3), obtém-se:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{II.6})$$

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{II.7})$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{II.8})$$

Da Lei de Hooke, tem-se:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad (\text{II.9})$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (\text{II.10})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (\text{II.11})$$

Das equações (II.9) e (II.10), tem-se:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad (\text{II.12})$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad (\text{II.13})$$

Substituindo as equações (II.6) e (II.7) nas equações (II.12) e (II.13), respectivamente, obtém-se:

$$\sigma_x = - \frac{zE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.14})$$

$$\sigma_Y = - \frac{zE}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.15})$$

Substituindo a equação (II.8) na equação (II.11),
tem-se:

$$\tau_{xy} = -2zG \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{II.16})$$

Analisando a figura II.4, reproduzida de SALMON (1990), obtém-se os momentos fletores e de torção em função das tensões normais e de cisalhamento, respectivamente, como:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz \quad (\text{II.17})$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_y dz \quad (\text{II.18})$$

$$M_{xy} = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \quad (\text{II.19})$$

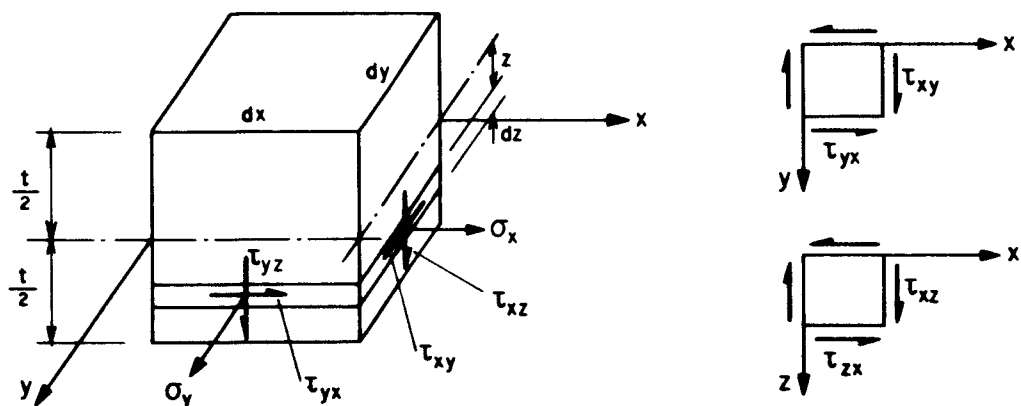


Figura II.4- ELEMENTO DE CHAPA NA FLEXÃO.

Substituindo as equações (II.14) e (II.15) nas equações (II.17) e (II.18), obtém-se:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.20})$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II.21})$$

onde:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}; \quad (\text{II.22})$$

D = rigidez a flexão da chapa.

Das equações (II.16) e (II.19), obtém-se:

$$M_{xy} = \frac{Gt^3}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{II.23})$$

Da resistência dos materiais, tem-se:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.24})$$

Substituindo a equação (II.24) na equação (II.23) e rearranjando, obtém-se:

$$M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{II.25})$$

II.3- FLEXÃO DE CHAPAS POR FORÇA LATERAL DISTRIBUÍDA

Admite-se uma força distribuída atuando perpendicular ao plano médio da chapa, cuja a resultante seja igual a (q) , a qual pode variar ao longo das superfícies da chapa, em função de x e de y .

Analisando um elemento da chapa cortado por dois pares de planos paralelos aos planos "xz" e "yz", conforme ilustra a figura II.5, reproduzida do TIMOSHENKO (1961), pode-se concluir, através da estática, que a ação da força (q) produzirá nos lados laterais deste elemento forças cortantes verticais, momentos fletores e momentos de torção, por unidade comprimento, como:

$$V_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad (II.26)$$

$$V_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \quad (II.27)$$

Onde os momentos fletores e de torção por unidade de comprimento são definidos segundo as equações (II.20), (II.21) e (II.25).

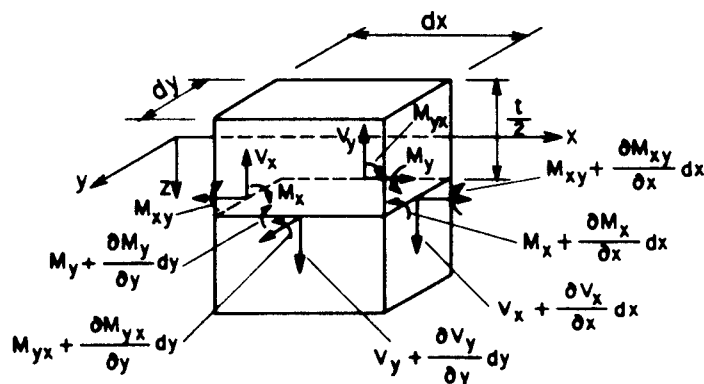


Figura II.5 MOMENTOS FLETORES, MOMENTOS DE TORÇÃO E FORÇAS CORTANTES EM UM ELEMENTO DE CHAPA.

Considera-se as tensões τ_{xz} e τ_{yz} constantes, ao longo de pequenas distâncias dy e dx , e a resultante das forças cortantes $V_x dy$ e $V_y dx$ passando pelo centróide dos lados do elemento.

Por equilíbrio das forças na direção do eixo z , tem-se:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0 \quad (\text{II.28})$$

Rearranjando a equação (II.28), tem-se:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q = 0 \quad (\text{II.29})$$

Inclui-se o peso da chapa no valor da força (q).

Por equilíbrio dos momentos de todas as forças em relação ao eixo x , tem-se:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + V_y dx dy = 0 \quad (\text{II.30})$$

Rearranjando a equação (II.30)

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + V_y = 0 \quad (\text{II.31})$$

Analogamente, considerando o equilíbrio dos momentos em relação ao eixo y :

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - V_x = 0 \quad (\text{II.32})$$

Reescrevendo as equações (II.31) e (II.32), obtém-se:

$$V_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (\text{II.33})$$

$$V_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad (\text{II.34})$$

Substituindo as equações (II.33) e (II.34) na equação (II.29), tem-se:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \quad (\text{II.35})$$

Admitindo-se $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, tem-se que $M_{yx} = -M_{xy}$, logo a equação (II.35), reduz-se a:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (\text{II.36})$$

Substituindo as equações (II.20), (II.21) e (II.25) na equação (II.36), obtém-se:

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - 2D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -q \quad (\text{II.37})$$

Rearranjando a equação (II.37)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (\text{II.38})$$

Integrando a equação (II.38), obtém-se a superfície deslocada da chapa, $w = w(x, y)$

II.4- FLEXÃO DE CHAPAS ATRAVÉS DE AÇÕES COMBINADAS POR FORÇAS LATERAIS E FORÇAS NORMAIS (TRAÇÃO OU COMPRESSÃO) NO PLANO MÉDIO DA CHAPA.

Na flexão de chapas, devido à ação de forças laterais, pode-se desprezar os alongamentos do plano médio da chapa pois os deslocamentos são muito pequenos.

No caso de ações combinadas por forças laterais com forças normais atuando no plano médio da chapa, os alongamentos no plano tornam-se significativos.

Deve-se, portanto, considerar os efeitos das tensões normais no plano médio da chapa na flexão da mesma.

Analisando a figura II.6, reproduzida de TIMOSHENKO (1961), a qual representa o equilíbrio de um pequeno elemento de chapa na configuração deformada através de dois planos paralelos aos planos coordenados "xz" e "yz", obtém-se por equilíbrio, admitindo que não exista forças tangenciais, as seguintes equações:

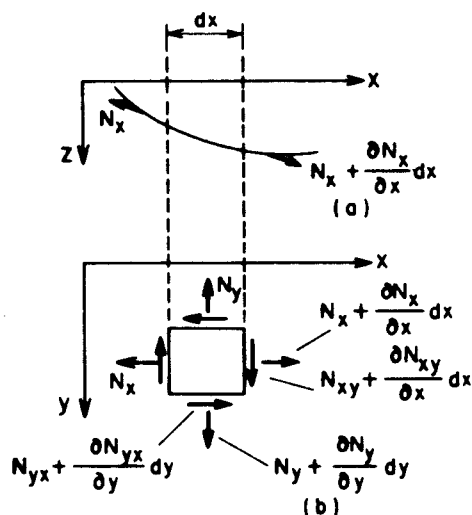


Figura II.6 ELEMENTO DE CHAPA NA CONFIGURAÇÃO DEFORMADA.

$$-N_x + N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx + N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy - N_{yx} = 0 \quad (\text{II.39})$$

$$N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy - N_y + N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx - N_{xy} = 0 \quad (\text{II.40})$$

Reescrevendo as equações (II.39) e (II.40),
obtém-se:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.41})$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.42})$$

Projetando a força normal N_x em relação ao eixo z ,
obtém-se:

$$-N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy \quad (\text{II.43})$$

Simplificando e desprezando os termos de maior
ordem, obtém-se:

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (\text{II.44})$$

Analogamente, projetando as forças N_y em relação
ao eixo z , tem-se:

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (\text{II.45})$$

Projetando todas as forças de cisalhamento em relação ao eixo z, considerando $N_{yx} = N_{xy}$, obtém-se:

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (\text{II.46})$$

Igualando a soma das equações (II.44), (II.45) e (II.46) à força $q dx dy$, a qual atua no elemento, e considerando as equações (II.41) e (II.42), obtém-se:

$$q = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{II.47})$$

Substituindo a equação (II.47) na equação (II.38), tem-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (\text{II.48})$$

Para determinar a superfície deslocada de uma chapa, quando os valores das forças N_x , N_y e N_{xy} não são pequenos, comparados com os valores críticos das mesmas, deve-se substituir a equação diferencial (II.38) pela equação diferencial (II.48).

ANEXO III

EXEMPLOS

EXEMPLO 1 - Verificar se a coluna da figura III.1 resiste aos esforços:

Carga permanente = 100 kN
sobrecarga = 70 kN
vento = 30 kN

Considera-se o perfil laminado I 203 x 27,3, Aço ASTM-A36.

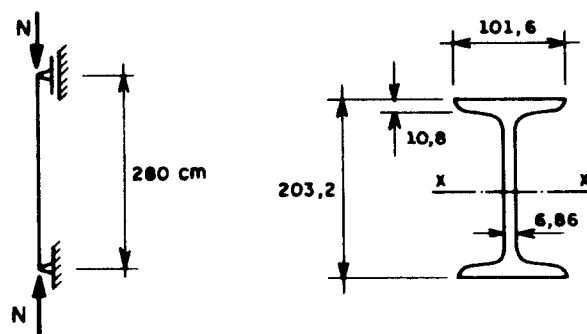


FIGURA III.1 - COLUNA BIAPOIADA

Propriedades geométricas

$$A_g = 34,8 \text{ cm}^2$$

$$r_x = 8,3 \text{ cm}$$

$$r_y = 2,11 \text{ cm}$$

a) Solicitação de cálculo

Considerando a equação (8.4), tem-se:

$$S_d = 1,4 \times 100 + 1,5 \times 70 + 1,4 \times 0,6 \times 30 = 270 \text{ kN}$$

b) Índice de esbeltez máximo

$$\lambda_y = \lambda_{\text{máx}} = \frac{kl}{r_y} = \frac{1,0 \times 280}{2,11} = 133 < 200 \text{ ok!}$$

Sendo o fator comprimento efetivo de flambagem (k) igual a 1,0, conforme a tabela 5.1.

c) Índice esbeltez reduzido.

Da equação (8.47), obtém-se:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi} \frac{kl}{r_y} \sqrt{Q f_y / E}$$

Através da relação largura/espessura (b/t), pode-se concluir na tabela 8.4 que o perfil considerado é classe 1, portanto, $Q = 1,0$.

Substituindo o valor de Q na expressão de $\bar{\lambda}$, tem-se:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi} 133 \sqrt{\frac{1,0 \times 25}{20500}} = 1,48$$

d) Curva de flambagem

Considerando a flambagem em relação ao eixo y-y, percebe-se na tabela 8.7 que a curva de flambagem será a curva "b".

e) Resistência de cálculo

Da equação (8.35), obtém-se:

$$R_d = \phi_c N_n = \phi_c \rho Q A_g f_y$$

Obtém-se da equação (8.45) o valor de (ρ):

$$\rho = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1/\bar{\lambda}^2}$$

Onde:

$$\beta = \frac{1}{2\bar{\lambda}^2} \left[1 + \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0,04} + \bar{\lambda}^2 \right]$$

Da tabela 8.6, tem-se que $\alpha=0,281$ para a curva "b".

$$\beta = \frac{1}{2(1,48)^2} \left[1 + 0,281 \sqrt{(1,48)^2 - 0,04} + (1,48)^2 \right]$$

$$\beta = 0,82$$

Portanto

$$\rho = 0,82 - \sqrt{(0,82)^2 - 1/(1,48)^2}$$

$$\rho = 0,355$$

Substituindo o valor de ρ na expressão da resistência de cálculo, (R_d), tem-se:

$$R_d = 0,90 \times 0,355 \times 34,8 \times 25 = 278 \text{ kN}$$

$$R_d = 278 \text{ kN} > S_d = 270 \text{ kN} \quad \text{Ok!}$$

EXEMPLO 2 - Dimensionar a diagonal da treliça representada na figura III.2.

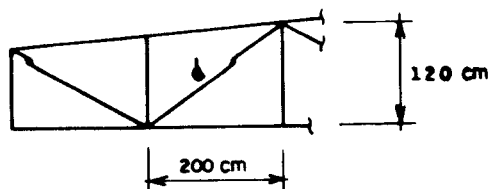


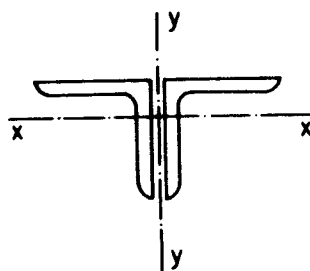
FIGURA III.2 - TRELIÇA

Admite-se os esforços:

Carga permanente = 140 kN
 sobrecarga = 80 kN
 vento = -10 kN

$$l_d = \sqrt{200^2 + 120^2} = 233,2 \text{ cm}$$

Considera-se a cantoneira dupla de abas iguais, $\text{JL } 4'' \times 1/4''$ - Aço ASTM-A36.



Propriedades geométricas

$A_g = 25,02 \text{ cm}^2$	$I_x = 250 \text{ cm}^4$	$y_o = 2,45 \text{ cm}$
$r_x = 3,17 \text{ cm}$	$C_w = 0$	$r_o^2 = 35,59 \text{ cm}^2$
$r_y = 4,42 \text{ cm}$	$I_t = 3,36 \text{ cm}^4$	
$E = 20.500 \text{ kN/cm}^2$	$y = 2,77 \text{ cm}$	

a) Solicitação de cálculo

Da equação (8.4), tem-se:

$$S_d = 1,4 \times 140 + 1,5 \times 80 - 0,84 \times 10 = 308\text{kN}$$

b) Índice de esbeltez máximo

$$\lambda_x = \lambda_{\text{máx}} = \frac{kl}{r_x} = \frac{1,0 \times 233,2}{3,17} = 74 < 200 \text{ ok!}$$

Sendo $k = 1,0$, conforme a tabela 5.2

c) Cálculo do fator de redução (Q)

$$\frac{b}{t} = \frac{101,6}{6,35} = 16 > 13 \quad 0,44 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 13$$

Seção "classe 4", conforme a tabela 8.4.

Portanto, da equação (8.17), tem-se:

$$Q_s = 1,34 - 0,77 \frac{b}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}}$$

$$Q_s = 1,34 - 0,77 \times 16 \sqrt{\frac{25}{20500}} = 0,91$$

Como o fator $Q_a = 1,0$, (Q) reduz-se a:

$$Q = Q_s \times Q_a = 0,91$$

d) Índice de esbeltez reduzido

Da equação (8.47), obtém-se:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Q f_y}{f_e}}$$

Onde f_e é a menor tensão crítica de flambagem, que será calculada a seguir.

e) Curva de flambagem

Analisando a tabela 8.7, verifica-se que para cantoneiras, considera-se a curva de flambagem "c".

f) Cálculo da tensão crítica de flambagem - análise da flambagem por flexão e torção.

Considerando $k_x = k_y = k_z = 1,0$

1) flambagem elástica por flexão em relação ao eixo "x"

$$f_{ex} = \frac{\pi^2 E}{\left[\frac{k_x \ell}{r_x} \right]^2} \quad (\text{da eq. 8.55})$$

$$f_{ex} = 37,4 \text{ kN/cm}^2$$

2) flambagem elástica por flexão e torção em relação ao eixo "y".

$$f_{eyz} = \frac{f_{ey} + f_{ez}}{2H} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4f_{ey}f_{ez}H}{(f_{ey} + f_{ez})^2}} \right]$$

(da eq. 8.56)

onde:

$$f_{ey} = \frac{\pi^2 E}{\left[\frac{k_y \ell}{r_y} \right]^2} = 72,68 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{ez} = \frac{1}{A_g r_o^2} \left[\frac{\pi^2 E C_w}{(k_z \ell)^2} + GI_t \right] = 29,78 \text{ kN/cm}^2$$

$$H = 1 - \frac{y_o^2}{r_o^2} = 0,93$$

Donde

$$f_{eyz} = 28,49 \text{ kN/cm}^2$$

Comparando f_{ex} e f_{eyz} nota-se que a flambagem será por flexão e torção em torno do eixo "y".

g) Resistência de cálculo

Da equação (8.50), obtém-se o valor de $\bar{\lambda}$.

$$\bar{\lambda} = \sqrt{Q f_y / f_e} = \sqrt{\frac{0,91 \times 25}{28,49}} = 0,89$$

Da equação (8.48), obtém-se:

$$R_d = \phi_c N_n = \phi_c \rho Q A_g f_y$$

Da equação (8.45), obtém-se o valor de (ρ) como:

$$\rho = \beta - \sqrt{\beta^2 - (1/\bar{\lambda}^2)}$$

Onde:

$$\beta = \frac{1}{2\bar{\lambda}^2} \left[1 + \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0,04} + \bar{\lambda}^2 \right]$$

Da tabela 8.6, tem-se que $\alpha = 0,384$ para a curva "c".

$$\beta = \frac{1}{2(0,89)^2} \left[1 + 0,384 \sqrt{(0,89)^2 - 0,04} + (0,89)^2 \right]$$

$$\beta = 1,34$$

Portanto

$$\rho = 1,34 - \sqrt{(1,34)^2 - 1/(0,89)^2} = 0,61$$

Substituindo os valores de ρ e Q na expressão da resistência de cálculo (R_d), tem-se:

$$R_d = 0,90 \times 0,61 \times 0,91 \times 25,02 \times 25 = 312,5 \text{ kN}$$

$$R_d = 312,5 \text{ kN} > S_d = 308 \text{ kN} \quad \text{ok!}$$

EXEMPLO 3 - Verificar a coluna "E-D" da figura III.3, considerando o Aço ASTM-A36 com os valores nominais da força normal da barra "E-D" (N).

carga permanente de grande variabilidade = 400kN
sobrecarga em piso = 300kN

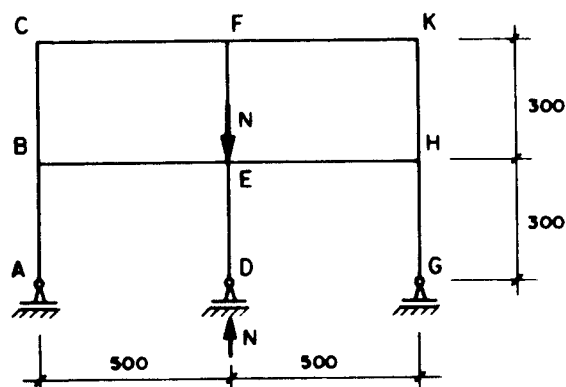


FIGURA III.3 - PÓRTICO DESLOCÁVEL

Admite-se os seguintes perfis soldados:

Para as colunas - I250 x 51

Propriedades geométricas

$$A_g = 65\text{cm}^2$$

$$r_x = 10,91\text{cm}$$

$$r_y = 5,10\text{cm}$$

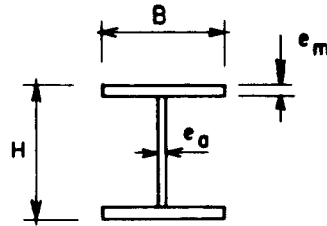
$$I_x = 7757\text{cm}^4$$

$$H = 250\text{mm}$$

$$B = 200\text{mm}$$

$$e_m = 12,7\text{mm}$$

$$e_a = 6,35\text{mm}$$



Para as vigas - I250x31

Propriedades geométricas

$$A_g = 39\text{cm}^2$$

$$r_x = 10,26\text{cm}$$

$$r_y = 2,31\text{cm}$$

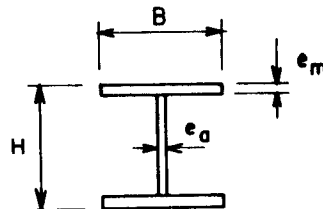
$$I_x = 4178\text{cm}^4$$

$$H = 250\text{mm}$$

$$B = 100\text{mm}$$

$$e_m = 12,7\text{mm}$$

$$e_a = 6,35\text{mm}$$



a) Solicitação de cálculo

Considerando a equação (8.4), tem-se:

$$S_d = 1,4 \times 400 + 1,5 \times 300 = 1010\text{kN}$$

b) Fator comprimento efetivo de flambagem (k)

Os valores do fator (G), rigidez relativa, para as extremidades D e E da coluna "E-D" são obtidos através da expressão (5.113), ou seja.

$$G = \frac{\sum \left(\frac{EI}{l} \right)_c}{\sum \alpha \left(\frac{EI}{l} \right)_v}$$

$$G_D = 10,0 \text{ (considerando rótula imperfeita)}$$

$$\alpha = 1,0 \text{ (conforme a tabela 5.3)}$$

$$G_E = \frac{7757/300 + 7757/300}{1,0(4178)/500 + 1,0(4178)/500}$$

$$G_E = \frac{2 \times 7757/300}{2 \times 4178/500} = 3,1$$

Com os valores de (G_D) e (G_E) , os quais correspondem a " G_A e G_B ", respectivamente, no ábaco da figura 5.9, obtém-se o valor do fator comprimento efetivo de flambagem (k), como sendo.

$$k_x = 2,3$$

c) Índice de esbelteza máximo

$$\lambda_x = \lambda_{\text{máx}} = \frac{k\ell}{r_x} = \frac{2,3 \times 300}{10,91} = 63,24 < 200 \quad \text{ok!}$$

d) Índice de esbelteza reduzido

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi} \frac{k\ell}{r_x} \sqrt{\frac{Q f_y}{E}}$$

Conclui-se da tabela 8.4, através da relação largura/espessura (b/t), que a seção é classe 1, portanto, $Q = 1,0$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi} \times 63,24 \sqrt{\frac{1,0 \times 25}{20500}} = 0,7$$

e) Curva de flambagem

Analisando a tabela 8.7, considerando a flambagem em relação ao eixo y-y, verifica-se que a curva de flambagem será a curva "c".

f) Resistência de cálculo

$$R_d = \phi_c N_n = \phi_c \rho Q A_g f_y \quad (\text{da eq. 8.35})$$

$$\rho = \beta - \sqrt{\beta^2 - (1/\bar{\lambda}^2)} \quad (\text{da eq. 8.45})$$

Onde:

$$\beta = \frac{1}{2\bar{\lambda}^2} \left[1 + \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0,04} + \bar{\lambda}^2 \right] \quad (\text{da eq. 8.46})$$

$$\beta = \frac{1}{2(0,7)^2} \left[1 + 0,384 \sqrt{(0,7)^2 - 0,04} + (0,7)^2 \right]$$

$$\beta = 1,8$$

Portanto

$$\rho = 1,8 - \sqrt{(1,8)^2 - 1/(0,7)^2} = 0,7$$

Substituindo os valores de ρ na expressão de R_d ,
tem-se:

$$R_d = 0,90 \times 0,7 \times 1,0 \times 65 \times 25 = 1024 \text{ kN} > S_d = 1010 \text{ kN ok!}$$