

ANÁLISE NÃO - LINEAR DE PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS  
DE CONCRETO ATRAVÉS DA ANALOGIA DE GRELHA

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para obtenção do título de "Doutor em Engenharia", área de Estruturas.

Autor: Eng. ROBERTO CHUST CARVALHO  
Orientador: Prof. Dr. MOUNIR KHALIL EL DEBS

São Carlos, janeiro de 1994

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ANÁLISE NÃO - LINEAR DE PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS  
DE CONCRETO ATRAVÉS DA ANALOGIA DE GRELHA

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para obtenção do título de "Doutor em Engenharia", área de Estruturas.

Autor: Eng. ROBERTO CHUST CARVALHO  
Orientador: Prof. Dr. MOUNIR KHALIL EL DEBS

São Carlos, janeiro de 1994

## AGRADECIMENTOS

Gostaria inicialmente de declinar meus agradecimentos:

- ao Prof. Dr. Mounir Khalil El Debs, que sempre atuou de forma dedicada, paciente e segura na orientação, tornando possível este trabalho;
- aos colegas José Sérgio Komatsu e Arquimedes Diógenes Cilone pela amizade, incentivo e sugestões;
- à Aline Barboza pela cessão do programa de analogia da grelha com análise linear;
- aos colegas do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos, pelo constante apoio;
- a Dimas Milanetto pela elaborada execução dos desenhos deste trabalho;
- à Maria Regina, Renata e Rodrigo por compartilhar e acompanhar todos os passos para o desenlace de mais esta etapa;
- à memória de meus pais que me formaram e encaminharam;
- à Deus pela possibilidade de concretizar a realização deste sonho.

## RESUMO

Neste trabalho, analisam-se pavimentos de edifícios, levando-se em conta a não-linearidade do concreto devida à fissuração à flexão e à torção. Considera-se, também, o efeito da fluência nos deslocamentos.

O pavimento de edifício de concreto, constituído de lajes e vigas, é analisado considerando a interação de seus elementos, utilizando-se o método da analogia da grelha.

A consideração da fissuração é feita a partir das relações momento-curvatura para a flexão, e momento-rotação para a torção. Com o emprego da relação momento-curvatura, calculam-se os deslocamentos transversais de vigas de concreto, comparando-os com resultados experimentais.

A partir destas idealizações estruturais, foram feitas análises dos esforços e deslocamentos transversais de lajes isoladas, de lajes associadas e vigas formando um pavimento representativo. Os resultados obtidos são comparados com os do procedimento usual, em que é feita a decomposição do pavimento em vigas e lajes, bem como os de análise linear, considerando a analogia de grelha e, em alguns casos, o método dos elementos finitos.

## ABSTRACT

This work provides an analysis for concrete building floors, taking in account the nonlinear behaviour of concrete due to bending and torsion cracking. It is also considered the creep in the deflections.

The building floor, made of beam and slab, is calculated using the interaction of its elements, using the grillage analogy.

The concrete cracking is represented by moment-curvature relationship for bending, and by the moment-twist for torsion. The concrete beam deflections are calculated using the moment-curvature relationship, and they are compared with the experimental results.

The analysis of the efforts and deflections are made for the slab, the building floors with slab and beam, considering this structure model. These results are compared with the results of the usual procedure, in which the building floor is decomposed in slab and beams. They are also compared with the results of the grillage analogy and, in some cases, with the linear finite element method.

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1.Preliminares.....	1
1.2.Modelos para a análise de pavimentos de edifícios.....	5
1.3. Situação histórica do trabalho.....	9
1.4. Objetivo.....	14
1.5. Desenvolvimento do trabalho.....	15

CAPÍTULO 2 - ANALOGIA DA GRELHA COM ANÁLISE LINEAR

2.1. Introdução.....	16
2.2. Teoria das placas delgadas.....	17
2.3. Influência do coeficiente de Poisson.....	18
2.4. A analogia de grelha .....	20
2.4. Influência do coeficiente de Poisson na analogia da grelha .....	22
2.5. Malha a adotar para a grelha equivalente.....	23
2.6. Características geométricas e elásticas dos elementos da grelha equivalente.....	24
2.7. Exemplos de lajes retangulares calculadas com analogia de grelha.....	26
2.8. Tipo de malha e cargas a considerar.....	33
2.9. Convergência dos resultados com o refinamento da malha.....	35
2.10. Exemplos de analogia da grelha para lajes sem vigas.....	37
2.11. Lajes apoiadas em vigas.....	41
2.12. Utilização da simetria.....	42

CAPÍTULO 3 - FUNDAMENTOS PARA A CONSIDERAÇÃO DA NÃO LINEARIDADE FÍSICA DO MATERIAL

3.1. Introdução.....	44
3.2. Diagrama momento-curvatura.....	45
3.3. Equacionamento do diagrama momento-curvatura.....	49
3.4. Estádio I e momento de fissuração.....	52
3.5. Estádio II.....	55
3.6. Momento de escoamento e momento último.....	59
3.7. Situações particulares e largura colaborante.....	64

3.8. Exemplo de Cálculo do diagrama momento-curvatura.....	67
3.9. Utilização da relação momento-curvatura para determinação de deslocamentos de vigas de concreto armado .....	72
3.9.1. Descrição do ensaio.....	72
3.9.2. Valores teóricos e comparações.....	79
3.10. Comportamento na torção.....	83
3.11. Torção - estágio I .....	84
3.12. Torção - estágio II .....	85
3.13. Exemplo do diagrama momento de torção-rotação.....	90
3.14. Deformações ao longo do tempo.....	92
3.15. Função fluência.....	94
3.16. Considerações para o cálculo dos deslocamentos ao longo do tempo.....	96

#### CAPÍTULO 4 - CONSIDERAÇÃO DA NÃO LINEARIDADE FÍSICA DO MATERIAL NA ANALOGIA DA GRELHA

4.1. Introdução.....	98
4.2. Importância da análise não linear.....	98
4.3. Utilização do carregamento incremental.....	100
4.4. Geração de dados.....	101
4.5. Consideração da não linearidade no programa de grelha.....	102
4.6. Emprego da equação momento-curvatura na programação.....	106
4.7. Utilização da equação momento de torção-rotação.....	108
4.8. Consideração da fluência.....	109
4.9. Programa propriamente dito.....	110

**CAPÍTULO 5 - EXEMPLOS DO EMPREGO DA ANALOGIA DA GRELHA - ANÁLISE NÃO LINEAR**

5.1. Introdução.....	116
5.2. Placas retangulares isoladas.....	117
5.2.1. Placa quadrada simplesmente apoiada - exemplo 5.1.....	117
5.2.2. Placa quadrada contorno engastado - exemplo 5.2.....	122
5.3. Lajes apoiadas em vigas.....	127
5.3.1. Placa quadrada apoiada em vigas - consideração do efeito de fissuração da flexão - exemplo 5.3.....	128
5.3.2. Placa quadrada apoiada em vigas - consideração do efeito de fissuração na torção - exemplo 5.4.....	132
5.3.3. Análise da reação da laje nas vigas periféricas - exemplos 5.5, 5.6 e 5.7.....	136
5.4. Exemplos da analogia da grelha para lajes sem vigas.....	141
5.4.1. Placa quadrada sem vigas - bordas livres - exemplo 5.8.....	141
5.4.2. Placa quadrada sem vigas - bordas engastadas - exemplo 5.9.....	146
5.5. Exemplo da analogia da grelha para pavimento com lajes associadas e vigas.....	150
5.5.1. Consideração da fissuração do concreto à flexão como valor de G reduzido - exemplo 5.10.....	159
5.5.1.1. Análise das reações nos pilares.....	159
5.5.1.2. Análise dos momentos fletores nas vigas.....	162
5.5.1.3. Análise dos momentos fletores nas lajes.....	165
5.5.1.4. Análise dos deslocamentos nas vigas e lajes.....	170
5.5.2. Consideração da fissuração do concreto à flexão com valor de G dado pela teoria da elasticidade - exemplo 5.11.....	172
5.5.2.1. Análise das reações nos pilares.....	172
5.5.2.2. Análise dos momentos fletores nas vigas.....	173
5.5.2.3. Análise dos momentos fletores nas lajes.....	178

5.5.2.4. Análise dos deslocamentos nas vigas e lajes.....	182
5.5.3. Consideração da fissuração do concreto à flexão e à torção com G dado pela teoria da elasticidade-Exemplo 5.12. ....	187
5.5.3.1. Análise das reações nos pilares.....	187
5.5.3.2. Análise dos momentos fletores nas vigas.....	188
5.5.3.3. Análise dos momentos fletores nas lajes.....	190
5.5.3.4. Análise dos deslocamentos nas vigas e lajes.....	191
5.5.4. Análise do número de iterações, convergência nos resultados.....	192
5.5.5. Consideração da fluência- exemplo 5.13.....	193

## CAPÍTULO 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

6.1. Preliminares .....	196
6.2. A estrutura de pavimento considerada como um todo .....	196
6.3. Modelo empregado.....	197
6.4. Influência do valor do módulo de deformabilidade transversal.....	198
6.5. Influência da fissuração à flexão nos esforços solicitantes.....	198
6.6. Influência da fissuração à torção nos esforços solicitantes .....	199
6.7. Deformação.....	199
6.8. Possibilidades e sugestões.....	200

<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u> .....	203
---	-----

<u>ANEXO I</u> .....	203
----------------------	-----

## NOTAÇÃO

Procurou-se usar a notação da NBR 6118. As que não seguem esta norma, estão devidamente explicitadas no texto.

## SIGLAS

As principais siglas usadas no decorrer do trabalho, têm os seguintes significados:

CEB- Comité Euro-Internationale du Béton

EESC- Escola de Engenharia de São Carlos

NBR- Norma Brasileira

USP- Universidade de São Paulo

### SISTEMA DE UNIDADES

O sistema de unidades adotado é o Sistema Internacional.

## CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

### 1.1. PRELIMINARES

Ao projetar um pavimento de edifício, o engenheiro leva em conta as imposições arquitetônicas, as interferências dos projetos elétrico e hidráulico e outras considerações de maneira a obter uma estrutura barata, segura e de simples execução.

Uma maneira de se baratear a estrutura é buscar a redução da quantidade de material. O cálculo das armaduras das peças, com as dimensões do anteprojeto, pode conduzir a valores menores que os mínimos exigidos por norma. Quando isto acontece significa, em princípio, que as dimensões das peças podem ser diminuídas. O problema está em quanto estas dimensões podem ser diminuídas. As dimensões das seções devem ser superiores aos valores mínimos estipulados pelas normas, e ter valores que evitem uma deformação excessiva. Nestas situações é necessário empregar-se um procedimento de cálculo mais acurado que os usuais para os deslocamentos.

Quando é feita a primeira tentativa de definição da estrutura não se têm os esforços solicitantes, cabendo portanto ao projetista avaliar, através de sua experiência, a necessidade de colocar vigas e pilares em certos trechos do pavimento e adotar dimensões para as seções transversais. Os critérios não deixam de ter uma certa subjetividade, mas levam sempre em conta a rigidez dos elementos. Para uma determinada região de pavimento, como a indicada na figura 1.1, estando definidas as posições dos pilares, pode-se optar por laje maciça sem vigas (lajes que se apoiam diretamente em pilares, situação a), com vigas (situação b), lajes e vigas intermediárias apoiadas em outras vigas (c), ou laje nervurada (d). Se as dimensões do trecho forem grandes, as soluções em que os elementos são menos rígidos ficam inviabilizadas. Assim, uma das características que diferencia os sistemas anteriores é a rigidez, ou seja, imaginando que os valores dos vãos das lajes sejam grandes, os sistemas 1.1.a e b podem não ser adequados, pois para que as lajes deformem pouco, necessitam uma grande quantidade de material. A solução 1.1.c apresenta lajes que podem ter rigidez adequada, uma vez que os vãos são menores que os casos anteriores, e supõe-se que as vigas de contorno são bastante rígidas. Já o sistema 1.1.d apresenta uma laje de seção com grande rigidez e pequeno consumo de material.

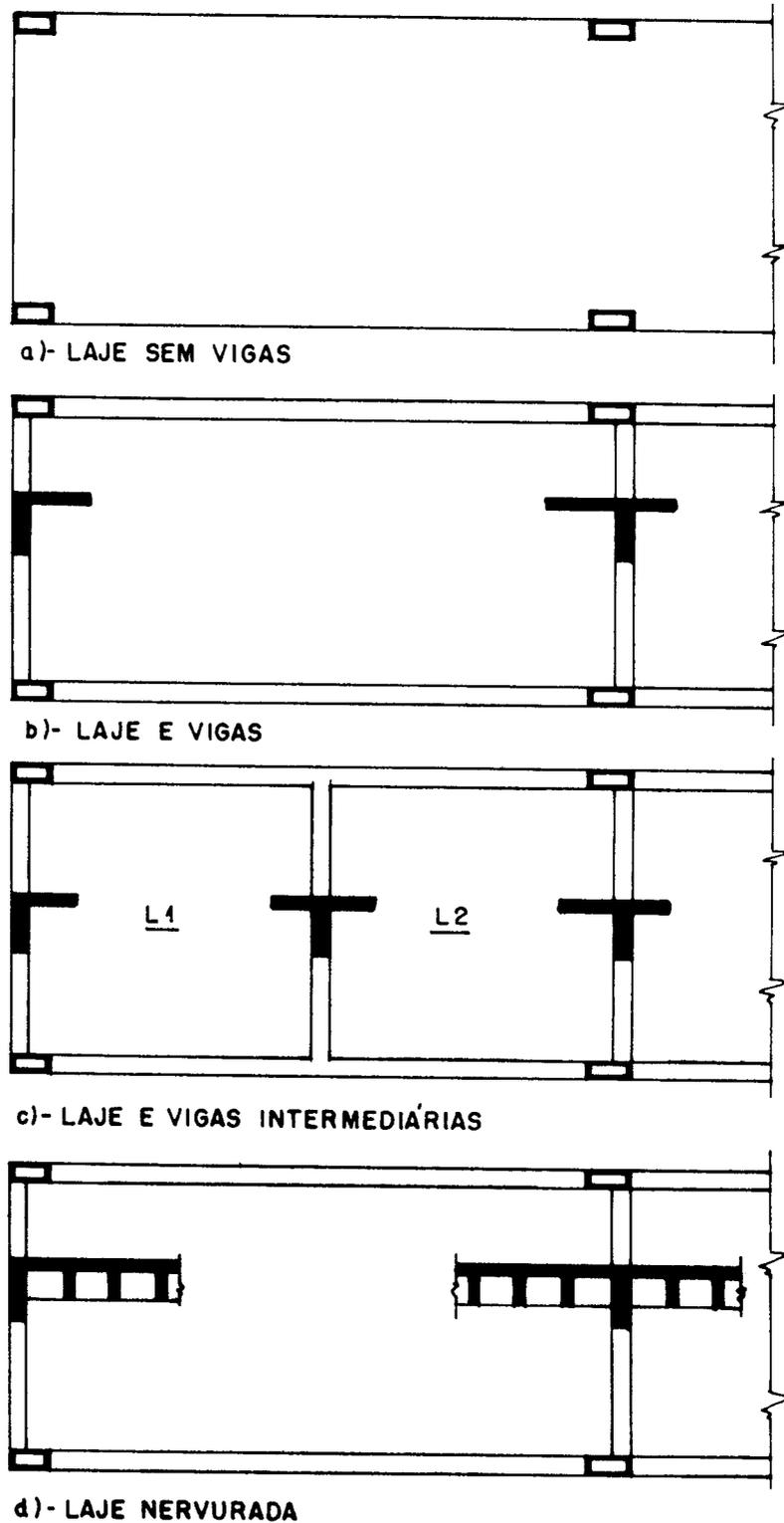


FIG. 1.1 - TIPOS DE ESTRUTURA PARA UM TRECHO DE PAVIMENTO

Ao fazer a sua opção, o projetista usa, mesmo que inconscientemente, o conceito de rigidez. De qualquer forma, a confirmação se a solução é adequada, em termos de esforços e deslocamentos, só será obtida após o emprego de um modelo de cálculo. Tendo em vista a familiaridade que a maioria dos engenheiros tem com o conceito de rigidez, opta-se neste trabalho pelo emprego de um modelo em que a variação desta grandeza indica como a estrutura trabalha após ter algumas de suas regiões fissuradas.

A consideração da fissuração é fundamental, uma vez que o estado de deformação depende da rigidez ao longo dos elementos da estrutura. Nos trechos dos elementos em que o momento fletor supera o de fissuração, há uma diminuição considerável da rigidez e conseqüentemente um aumento do estado de deformação da estrutura. Sabe-se também que pode haver uma variação de esforços em função da alteração da distribuição das rigidezes relativas, ou seja, a partir de um certo nível de esforços, o equilíbrio se dá segundo equações que envolvem, em alguns termos, coeficientes de rigidez diferentes. Tendo um modelo adequado que leve isto em conta, o projetista deve usar essa característica na definição da estrutura. Na situação 1.1.c, ocorre um caso como o que foi descrito acima, em que não se garante que haja um engastamento perfeito das lajes L1 e L2 no lado comum. Havendo fissuração do concreto nesta região, passa-se, então, a ter um engaste elástico e isto deve ser levado em conta na definição da espessura e no detalhamento das lajes vizinhas.

Outro ponto a se destacar é que o projetista, em função das respostas duvidosas que seu modelo lhe fornece, pode restringir a definição da estrutura colocando um número maior de pilares ou vigas. Assim, por exemplo, se para a situação da figura 1.2 usa-se um modelo de cálculo de placas isoladas e vigas contínuas, para evitar as situações típicas de grelha entre as vigas V4, V5, V6 e V2, o projetista pode optar por colocar mais três pilares nas intersecções de V2 com V4, V5 e V6.

O projetista, quando define a estrutura do pavimento, deve estar atento ao problema da fluência. Nos casos em que são usadas estruturas com grandes vãos, torna-se importante controlar a deformação ao longo do tempo. Nestas situações, pode ser vantajoso deixar a estrutura escorada mais tempo, ou até mesmo, tentar reduzir a intensidade da carga permanente diminuindo, ou eliminando, o contrapiso. De qualquer forma, só o uso de um modelo de cálculo adequado é que vai permitir

avaliar o quanto o fenômeno influencia nos deslocamentos.

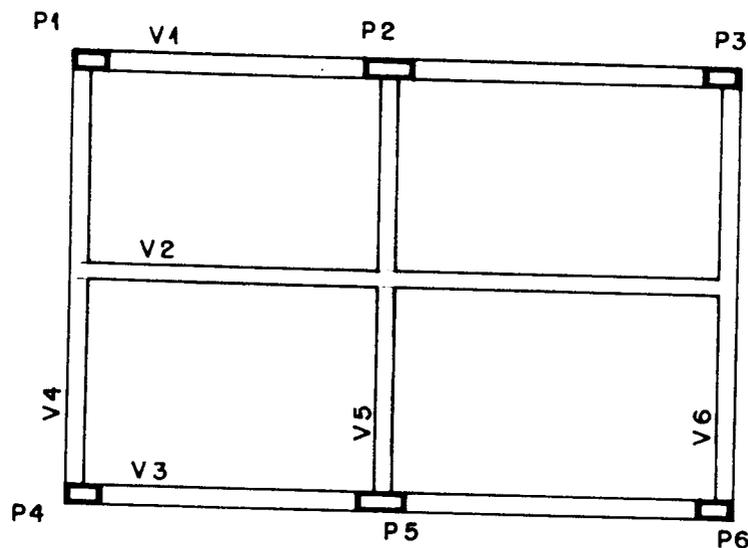


FIG. 1.2 - ESTRUTURA DE PAVIMENTO COM VIGAS FORMANDO UM SISTEMA DE GRELHA

A definição da estrutura é uma atividade iterativa, ou seja, uma vez arbitradas posições de elementos (pilares, vigas e lajes) e suas dimensões, pode-se calcular esforços e deslocamentos. Analisando estes dados pode-se introduzir, cancelar, mudar dimensões de elementos, pré-dimensionar a armadura e retomar o processo de cálculo. Enfim, sem dúvida nenhuma, o modelo de cálculo empregado é de suma importância na definição da estrutura de pavimento e acaba sendo usado pelo projetista na sua própria formação de experiência no "lançamento" da estrutura.

Imagina-se que o engenheiro, ao conseguir entender o funcionamento das estruturas, passa a ter condição de formular bons projetos. Neste sentido, os

programas de cálculo não deixam de ser instrumentos pedagógicos para este aprendizado.

## 1.2. MODELOS PARA ANÁLISE DE PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS

Os aspectos enfocados anteriormente conduzem à necessidade de se criar modelos estruturais mais sofisticados, em termos de cálculos mais precisos, e que traduzam melhor o comportamento em serviço da estrutura, principalmente no que diz respeito às deformações.

Quando se faz o detalhamento da armadura deve-se ter em conta os estados limites últimos e de utilização. Assim, é interessante conhecer o desenvolvimento dos esforços na estrutura no estado de utilização, para que a concepção do detalhamento também esteja mais próxima da realidade, pois a estrutura funciona, na maior parte de sua existência sob as condições de utilização.

Dentro dos inúmeros modelos que o projetista pode utilizar devem ser destacados aqueles que tenham: a) a maior abrangência de informações; b) menor restrição de utilização; c) sido bem testados; d) facilidade de uso. Pode acontecer que o modelo que fornece resultados mais precisos, necessite ser bastante sofisticado, de forma que tenha limitações de uso para certos casos, e não seja fácil de empregar. Assim, para a resolução de problemas mais simples pode não ser necessário o emprego de um modelo muito sofisticado, pode ser usado um modelo mais simples que forneça resultados com precisão aceitável. É bom lembrar que através da análise dos resultados fornecidos pelos modelos mais simples, podem ser obtidos subsídios para a utilização dos mais complexos.

De qualquer forma, é sempre importante que o usuário tenha consciência das hipóteses que norteiam o modelo empregado para conhecer seu alcance e, então, poder fazer uma análise mais realista dos resultados. Neste sentido, passa-se agora a descrever, de maneira bem resumida, algumas características do modelo chamado aqui de cálculo clássico ou usual de pavimentos e o da analogia de grelha, empregado neste trabalho.

A determinação dos esforços, deslocamentos e armadura de um pavimento de edifício, que possui vigas, é feita classicamente através da análise individual dos elementos que se supõe constituí-lo. Desta forma, quando o sistema é constituído de lajes e vigas, analisa-se isoladamente as placas (lajes) apoiadas nos seus contornos em

vigas. Estas são consideradas indeslocáveis na direção vertical, devido ao fato de terem rigidez bem superior às das placas. Supõe-se que as vigas estejam apoiadas em pilares considerados indeformáveis na direção vertical. Assim, as principais hipóteses simplificadoras empregadas neste procedimento são:

a) as placas são constituídas de material elástico, isótropo, linear e têm pequenos deslocamentos;

b) a rotação nos contornos da placa ou é livre (apoio simples), ou é totalmente impedida (engaste);

c) a ação das placas nas vigas de contorno se faz somente através de forças verticais, não havendo transmissão de momentos de torção nas vigas;

d) considera-se também, usualmente, que as ações da placa nas vigas são uniformemente distribuídas e que não há transmissão de reação direta para o pilar, ou seja, as cargas para chegarem aos pilares devem passar pelas vigas;

e) para o cálculo das placas, consideram-se as vigas no seu contorno, indeslocáveis na direção vertical;

f) considera-se que os pilares são elementos mais rígidos à deformação vertical do que as vigas, funcionando assim como apoios indeslocáveis na direção vertical;

A maior parte das hipóteses adotadas visam possibilitar exatamente subdividir o pavimento em elementos mais simples; placas isoladas, vigas e pilares que têm soluções já conhecidas para os carregamentos usuais, através da resistência do materiais e da teoria das placas delgadas .

Na primeira hipótese, ao se considerar o material linear, e que a estrutura só tem deslocamentos pequenos, estão sendo consideradas a linearidade física e geométrica da estrutura.

Supor que as estruturas de concreto armado têm comportamento físico linear, quando a rigidez da seção é a relativa ao estágio I, e usando as constantes elásticas do material dadas pela Norma, conduz normalmente ao cálculo de valores de deslocamentos verticais menores que os reais. Admite-se, neste caso, que os esforços internos nos estados limites últimos são proporcionais linearmente aos do estado em serviço sem fissura. O diagrama de esforços solicitantes, nas estruturas hiperestáticas, se altera, quando a fissuração, em algumas seções, é alcançada. Desta

forma, além de não se ter certeza quanto aos valores dos esforços solicitantes, a análise linear pode não indicar a posição correta dos esforços máximos.

A fissuração dos elementos estruturais também deve influenciar na distribuição de cargas. É inquietante a não consideração da rigidez proporcionada pela existência da armadura nos elementos, assim como utilizarem-se, no detalhamento destas, os diagramas de esforços solicitantes, que só ocorrem para o estágio I. As estruturas só funcionam no estágio I se os valores das ações forem baixos.

A continuidade entre as placas pode ser considerada através da introdução de momentos de correção, aplicados na vizinhança de lajes, cujos momentos de engastamento perfeito sejam muito diferentes. Tais procedimentos, conforme podem ser vistos em Timoshenko [37], são trabalhosos, embora melhorem a hipótese b descrita anteriormente.

O uso de técnicas conservadoras, baseadas na subdivisão dos sistemas estruturais, com bastante simplificações, pode conduzir, para alguns tipos de estruturas e solicitações, a valores superestimados de esforços, o que evita uma maior economia de material. Situação mais grave é quando, pelo uso das mesmas técnicas, chega-se a resultados inferiores aos que ocorrem quando a estrutura está em serviço. Nestes casos, embora possa não haver risco de colapso, pode ocorrer uma redução no coeficiente de segurança.

As lajes, normalmente, não são consideradas engastadas nas vigas periféricas, pois a rigidez à torção de elementos retangulares de pequena espessura (vigas) é bem baixa.

O uso de processos de cálculo que consideram o pavimento de maneira integrada permite, em princípio, melhorar as hipóteses anteriores da seguinte forma:

- a) a resolução do pavimento de forma integrada permite considerar na capacidade de rotação de uma laje, a rigidez das vizinhas;
- b) as vigas podem ser consideradas como elementos deformáveis verticalmente;
- c) é possível modelar mais adequadamente a interação das lajes com as vigas;
- d) é possível considerar facilmente, nas lajes, cargas não uniformemente distribuídas, como por exemplo cargas lineares.

Com a crescente utilização de microcomputadores e métodos numéricos, já se torna viável fazer análises de pavimentos com as considerações anteriores.

Entre os diversos modelos utilizados nos métodos numéricos, dois se destacam para analisar os pavimentos de edifícios de forma integrada: o dos elementos finitos, e o da analogia de grelha .

O processo dos elementos finitos hoje já é bastante explorado, sendo uma das melhores técnicas para analisar o pavimento de prédios, pois permite, através de elementos apropriados, considerar os efeitos de placa e de viga. Pode-se também considerar o efeito não linear do material. O emprego do processo dos elementos finitos em maior escala pelos escritórios técnicos, é ainda pequeno, talvez porque ainda não estejam familiarizados com eles.

Os engenheiros, talvez, pela sua formação acadêmica, têm mais facilidade de interpretar fisicamente elementos estruturais de viga, placa e pilar, pois para eles já existem soluções clássicas dadas pela resistência dos materiais e teoria das placas delgadas, com as quais já estão familiarizados.

A idéia de se interpretar uma laje através de uma grelha equivalente (processo da analogia de grelha) não é nova, tendo sido feita inicialmente por Marcus em 1932 (ver Timoshenko [37]), que não dispunha, na época, de computadores e, portanto, tinha que se valer de processos aproximados para resolver as grelhas.

Bem mais tarde, em 1959, Lighfoot [28] retomou a analogia de grelha no estudo de pavimentos, mas já usando programas de computador, e posteriormente este estudo foi sistematizada por Hambly [23] .

Neste trabalho, opta-se por usar o modelo de analogia de grelha, por ser aparentemente mais fácil de ser assimilado pelos técnicos, por permitir de maneira bem simples, empregar a utilização das relações momento-curvatura, ter uma programação simples que permite o emprego de microcomputadores, e necessitar apenas de elementos com a mesma característica (barra) para representar a placa e a viga. Acrescenta-se que a analogia de grelha pode ser o modelo mais indicado para resolver algumas estruturas de lajes como, por exemplo, as pré-moldadas e as nervuradas, quando comparado com teoria de lajes isotrópicas.

Considera-se que o modelo da analogia de grelha ainda não foi totalmente esgotado, ou seja sua utilização pode contribuir para a análise de pavimentos,

inclusive, como é o caso aqui, considerarada a fissuração e a fluência do concreto.

Este trabalho é uma continuação natural dos trabalhos de Costa [19] e Barboza [5], desenvolvidos no Departamento de Estruturas de Escola de Engenharia de São Carlos. O primeiro considera um modelo de lajes isoladas, apoiadas em vigas que formam um sistema de grelha. Barboza já considera placas e vigas como um sistema único, através da analogia de grelha linear. Neste trabalho complementa-se o trabalho de Barboza, introduzindo na equação constitutiva do material, o efeito da fissuração e o efeito da fluência.

### 1.3. SITUAÇÃO HISTÓRICA DO TRABALHO

Neste item, são mostrados alguns aspectos do desenvolvimento do cálculo de pavimento ao longo do tempo. Sem ter a pretensão de fazer um estudo do estado da arte e de investigação histórica, procura-se colocar a vivência e experiência do autor no campo prático.

Ao consultar a bibliografia do livro de Timoshenko [37], pela própria observação das datas das publicações, percebe-se que durante muitas décadas foram feitas análises, buscando soluções para as placas delgadas. A equação fundamental do problema na sua forma diferencial já era conhecida há muito tempo; assim, a grande dificuldade estava em encontrar-se uma solução para a mesma. Isso passou a ser um grande desafio para Matemáticos, Engenheiros e Físicos, que foram conseguindo êxitos a partir de procedimentos numéricos que, em geral, se baseavam em séries. Nesta época não se contava com o poderoso auxílio dos computadores, e portanto, os processos numéricos não podiam avançar muito mais, pois demandariam procedimentos de cálculos exaustivos e passíveis de erros.

Desta maneira, para cada tipo de problema, ou seja, para cada tipo de condição de contorno, formato de placa (exceção feita às placas circulares cuja solução devido à particularidade de forma já era conhecida) e tipo de carregamento, podia-se obter uma solução em que algumas hipóteses simplificadoras, compatíveis com o conhecimento da época, foram discutidas anteriormente e são rerepresentadas no capítulo 2. Através da coletânea das pesquisas de um número grande de autores, foi possível montar tabelas de lajes que forneciam momentos fletores, forças cortantes,

reações de apoio e deslocamentos nos diversos pontos de lajes retangulares, circulares, triangulares, apoiadas em vigas, com bordos livre, sem vigas de apoio, sujeitas à ação de cargas uniformemente distribuídas, concentradas, uniformes em faixas e outras mais. Todo este conhecimento inestimável pode ser encontrado, no todo ou em parte, entre outras, nas publicações de Timoshenko [37], Bares [6]. A pergunta que se faz é: Tais tabelas devem ser abandonadas? Não têm mais valor prático? Acredita-se que não se pode descartar este conhecimento, pois na pior das hipóteses, os resultados advindos daí representam aproximações ou até situações limites, no que diz respeito às condições de contorno. Por exemplo, considerar que as vigas de contorno de uma placa são indeslocáveis na vertical, pode não estar muito longe da verdade quando as de apoio da laje têm grande rigidez. Para o caso de uma laje pertencente a um "pano" contínuo, pode-se calculá-la como engastada no seu contorno, e, depois ainda, calculá-la como apoiada, e então armá-la para as duas situações. Ficará também claro, no desenvolver do trabalho, que a "teoria clássica" de placa fornece indicativos para o pré-dimensionamento e uma análise inicial do comportamento da estrutura.

De qualquer maneira, a simplificação mais preocupante no início, seria aquela em que o material da placa é considerado resistente à tração, pois sabe-se perfeitamente que isto só é possível, para o concreto armado, quando todas as seções da placa trabalharem no estágio I. Conforme será visto adiante, os momentos de fissuração de seções transversais são relativamente baixos, e mesmo para as cargas em serviço há, geralmente, muitos trechos funcionando no estágio II.

A partir da segunda guerra mundial, com o desenvolvimento do estudo dos materiais e o uso de elementos cada vez mais resistentes, houve a necessidade de se desenvolver os estudos do colapso das peças. A tese de Johansen [25] em 1943 faz o estudo das linhas de ruptura, ou seja, considera as placas funcionando no estágio III. Desenvolve-se também o cálculo, no estágio III, das armaduras das seções transversais. Supõe-se, neste caso, que o momento fletor de cálculo empregado é o de momento fletor de serviço, calculado no estágio I, majorado por um coeficiente de segurança. Supõe-se assim, haver linearidade entre o estágio I e o III. A armadura é calculada com diagramas em que se considera a plastificação do concreto comprimido e o escoamento do aço tracionado. Esta situação perdura até os dias de hoje, com pequenas alterações. Tanto as placas como as vigas de pavimento, mesmo que calculadas isoladamente, têm seus esforços solicitantes na ruptura considerados como

os do estágio I, multiplicados por um coeficiente de segurança. Esta situação só é um pouco alterada a partir da década de 70, em que passam a ser considerados coeficientes de minoração nas características dos materiais envolvidos, e se inicia o emprego de métodos semi-probabilísticos.

Percebe-se, neste caso, que provavelmente de forma involuntária, pulava-se uma etapa do estudo, sob o ponto de vista didático. Como funcionam as lajes e vigas dos pavimentos no estágio II? Faltava também ainda, obter uma maneira simples de estudar o pavimento com processos integrados.

Após a década de 50, começam a surgir os primeiros computadores que irão permitir uma revolução, entre outras, no campo do cálculo estrutural. Os métodos numéricos se sofisticam e começa a ser possível estudar o meio contínuo com procedimentos genéricos que permitem estudar cada vez mais, de uma só vez, trechos maiores da estrutura.

Surge também a análise matricial de estruturas em que se pode programar resolução de treliças, pórticos e grelhas. Os primeiros computadores a serem instalados nas Universidades Brasileiras datam da metade dos anos 60, quando já se desenvolvem novos métodos, como o dos elementos finitos. Entre os primeiros computadores instalados está o IBM 1130, que, para ler os programas, usa o sistema de cartões perfurados. Surgem, nesta época, os primeiros programas de utilização direta, ou seja, programas que permitem a um usuário sem experiência de programação, através do fornecimento de um conjunto de dados, obter os esforços e deslocamentos de uma estrutura. Um dos primeiros destes programas é o STRESS, que apresentava um uso simples, mas teve, no início, seu emprego restrito a estruturas de maior porte. Assim, foi o caso dos viadutos de acesso, no Caju, da Ponte Costa e Silva (Rio- Niteroi) no Rio de Janeiro, onde o autor atuava na época. Só para se ter uma idéia, o livro de análise matricial editado nos Estados Unidos, de Weaver [40] é de 1967, e enfatiza-se que Lightfoot [28] já usava programas de computadores em 1959.

Mas o alto preço dos computadores ou de seu tempo de trabalho, aliado à cansativa tarefa de perfurar cartões e à necessidade de esperar a execução dos programas, não fez com que se revolucionassem os procedimentos de cálculo. Foi, sem dúvida, um início, uma semente que se plantou.

Inicia-se então o desenvolvimento do método dos elementos finitos, que irá ser

usado em várias aplicações da engenharia, inclusive no cálculo estrutural.

A conceituação é sólida, genérica e alcança bons resultados, mas depende de computadores para sua ampla utilização. Assim, antes que se popularize o método, surge um fator que acelera o procedimento de cálculos usuais, particularmente, dos pavimentos.

As primeiras calculadoras portáteis ou eletrônicas, aparecem, no Brasil, por volta da década de 70. Os primeiros modelos são capazes apenas de efetuar as quatro operações algébricas; porém, já por volta de 1973, surgem as famosas HP que possuem uma série de funções matemáticas embutidas e ainda memória para o armazenamento de resultados parciais. Quem nunca calculou usando uma régua de cálculo, não imagina o passo que estava sendo dado, quanto tempo o projetista podia dedicar agora ao estudo realmente da estrutura, sem levar em conta a segurança que obtinha nas operações algébricas.

Então, apesar do surgimento do STRUDL, um dos primeiros de utilização direta para elementos finitos, concomitante às calculadoras, ainda não seria desta vez que os elementos finitos se popularizariam. Havia ainda uma fase a ser vencida a das calculadoras programáveis. Em torno de 1979, a Revista Estrutura, sob responsabilidade de Aderson Moreira da Rocha, comercializava e publicava programas para cálculo de esforços em vigas contínuas, placas isoladas, pórticos, dimensionamento de armadura de seção transversal e outros mais. O estudo dos procedimentos numéricos, das linguagens de computação aumentam, preparando-se o terreno para o próximo passo.

O passo seguinte no desenvolvimento do cálculo vem na década de 80. A partir de 1981, surge a primeira revista brasileira de microcomputadores, a Microsistemas. O desenvolvimento da eletrônica é tão grande que se consegue fabricar computadores de pequeno tamanho, porém poderosíssimos em memória (quando comparados ao IBM 1130) e bastante velozes no processamento. Assim, a cada processador produzido pela indústria da microeletrônica, baixam-se os preços e aumenta-se a capacidade dos micros. O custo do equipamento é uma condição importante para o desenvolvimento tecnológico dos procedimentos. Embora já houvesse disponíveis programas de utilização direta de elementos finitos, e o método fosse bom, ainda não havia uma utilização em larga escala nos escritórios de projeto estrutural.

Com a popularização dos microcomputadores, dois caminhos foram tomados em termos de cálculo de pavimentos. Um, que visava simplesmente automatizar as operações usadas, até então, no cálculo dito usual. Nesta situação, uma vez "lançada" a estrutura, o projetista fornece dados a um programa, que, com maior grau de interação, calcula os momentos fletores das placas e a armadura correspondente. Calcula os esforços solicitantes nas vigas, consideradas também isoladas, com as reações das lajes, pesos próprios da mesma e das paredes que podem estar em cima dela. Calcula a armadura longitudinal e transversal das vigas, fornecendo também as reações nos pilares. Alguns programas mais recentes chegam a detalhar tanto a armadura longitudinal como a transversal das vigas, que podem até produzir desenhos de armação em "Ploters". Chama-se aqui, novamente, a atenção para o fato de que fazer o cálculo do pavimento com um programa de computador não confere, em princípio, maior precisão ao cálculo, talvez apenas maior precisão às contas. Deve-se estar atento para as hipóteses em que se baseiam o programa, os recursos de que o programa dispõe e conhecer suas limitações.

Um segundo caminho foi tomado quando se tentou desenvolver novos procedimentos de cálculo, tais como uso de grelha para um conjunto de vigas, analogia de grelha para todo o pavimento, elementos finitos e outros mais. Pode-se dizer que Wilson [41], com seu SAP80, está nesta segunda categoria. É um programa que usa elementos finitos, que permite o cálculo de esforços solicitantes e deslocamentos de alguns tipos de estruturas espaciais e, entre outras coisas, pavimentos de edifício. O programa não calcula ou detalha armadura. Muitos outros no Departamento de Estrutura da Escola de Engenharia de São Carlos trilharam este caminho, como por exemplo, Corrêa [17], Costa [19] e Barboza [5]. Paralelamente, continuou-se a utilizar computadores de grande porte, como por exemplo Proença [32], que já faz a análise não linear do material.

Junto com a utilização cada vez mais crescente dos microcomputadores, também aumentou o uso dos computadores e supercomputadores e, desta forma, melhoraram os procedimentos numéricos, permitindo que outras análises, até então feitas de maneira simplistas, pudessem ser usadas, tais como a não-linearidade física e geométrica e a plasticidade do concreto. Exemplos de análises de plasticidade com procedimentos numéricos são dados em Owen [31] (1980) e Chen [16] (1982). Para estas análises são retomados os conceitos de critérios de Resistência dos Materiais. Assim, pode-se estudar a estrutura funcionando nos estádios I, II e III, ou seja, as lacunas

vão sendo preenchidas. Os modelos continuam sendo melhorados, como é o caso, por exemplo, de Vecchio [39], que considera um elemento tridimensional, levando em conta a interação entre a flexão e a torção.

Como se percebe, existe muito a ser estudado, e cada trabalho de dissertação, tese, publicação ou livro representa um passo, mesmo que pequeno, ao objetivo de melhor conhecer as estruturas.

Todos os procedimentos citados, como será visto, sofrem influência de alguns fatores importantes. Para se desenvolver um trabalho como este depende-se, entre outras coisas, de equipamento adequado, tempo, disponibilidade financeira, conhecimentos de computação e disponibilidade de programas adequados. Para se avaliar o trabalho de realizar este estudo, seguem-se alguns comentários. O trabalho foi iniciado com o computador do tipo "APPLE" e terminado (os últimos seis meses) com um tipo "PC-386". Em termos de linguagem, começou-se com o Turbo-Pascal, versão 3.0, concluindo-se com a versão 5.0. Hoje já existem a 7.0 e a versão "for Windows". Além do Pascal e dos programas desenvolvidos, foram usados dois processadores de texto um para manipulação de dados e outro para linguagem científica, dois programas para traçado de gráficos, o sistema Laser (Corrêa [18]), um gerenciador de arquivos e, bem no final, como ferramenta auxiliar o Windows 3.1. Este trabalho foi desenvolvido com apenas seis meses de afastamento das atividades didáticas da UFSCAR e sem auxílios financeiros. Na maior parte do tempo os equipamentos utilizados foram os de propriedade do autor.

#### 1.4 OBJETIVO

O objetivo principal deste trabalho é analisar pavimento de prédios mediante a utilização da analogia de grelha e considerando a não linearidade física e a fluência do concreto.

Tem como objetivo secundário fornecer elementos para que os projetistas de estruturas de concreto armado possam, de maneira simples, calcular pavimentos de edifícios com resultados mais próximos da realidade e ainda consigam ter maior liberdade no lançamento da estrutura.

Tendo em conta este segundo objetivo, procura-se seguir de certa forma o modelo dos Manuais do CEB (Comité Euro-International du Béton): a) são descritos inicialmente os fenômenos; b) coloca-se sua formulação matemática; c) resolvem-se

exemplos numéricos que possam elucidar o emprego da formulação, assim como mostrar a ordem de grandeza dos parâmetros envolvidos.

Procura-se usar nos exemplos, sempre que possível, dados compatíveis aos das estruturas reais, com o intuito de fornecer subsídios aos projetistas.

### 1.5 DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

Este trabalho foi dividido em seis capítulos de maneira a permitir que a leitura fosse feita da forma mais didática possível.

Procura-se, a cada início de capítulo, no item de introdução, descrever quais itens são analisados, para que o leitor possa se situar e, eventualmente, ir diretamente ao assunto desejado.

No capítulo 2, estuda-se o uso da analogia de grelha para resolução de placas de pavimentos de edifícios, considerando a linearidade do concreto armado. Destacam-se neste caso as comparações feitas com cálculo de placas da teoria das placas delgadas.

No capítulo 3, são apresentados os fundamentos para a consideração da não-linearidade física do concreto, para os casos de flexão e torção. Compara-se os resultados do deslocamento do ponto central de uma série de vigas bi-apoiadas ensaiadas, com os resultados obtidos através de um programa que leva em conta a variação da rigidez devido a não-linearidade do concreto. No final deste capítulo é apresentada a consideração da fluência do concreto.

No capítulo 4, mostra-se como se pode considerar a não-linearidade física do material (concreto armado) juntamente com a analogia de grelha. Destaca-se, neste caso, o programa desenvolvido para tanto.

No capítulo 5, são feitos exemplos de placas isoladas e pavimento de um edifício. São anexados os resultados e figuras tiradas destes valores que mostram o funcionamento das estruturas depois de fissuradas.

No capítulo 6, são apresentadas as conclusões e comentadas as possibilidades de se ampliar a utilização do procedimento, colocando-se, inclusive, sugestões nesse sentido.

## CAPÍTULO 2 - ANALOGIA DA GRELHA COM ANÁLISE LINEAR

### 2.1. INTRODUÇÃO

Conforme já descrito no primeiro capítulo, o modelo da analogia de grelha é um procedimento simples que pode ser usado para o cálculo de esforços e deslocamentos de pavimentos de edifícios.

Atém-se, inicialmente, ao estudo de placas retangulares, elásticas, isotrópicas, isoladas, apoiadas no contorno em vigas indeslocáveis na direção vertical e submetidas a cargas uniformemente distribuídas e com comportamento linear. Após a apresentação de um resumo do formulário da teoria da placa delgada para tais elementos (item 2.2) procura-se mostrar a influência do coeficiente de Poisson nos resultados (item 2.3).

No item 2.4 apresenta-se o conceito da analogia de grelha e em 2.5 verifica-se a variação do coeficiente de Poisson no processo. Discutem-se no item 2.6 as recomendações relativas ao emprego de malhas para a análise de analogia de grelha. No item 2.7 definem-se as características geométricas e elásticas a serem consideradas nos elementos da analogia de grelha.

No item 2.8 são resolvidos dois exemplos de lajes retangulares apoiadas em vigas indeslocáveis e analisam-se os resultados. Alguns comentários sobre o tipo de malha a empregar, e algumas possibilidades de se carregar a grelha são feitas no item 2.9. Finaliza-se o estudo de lajes retangulares apoiadas no contorno, analisando, no item 2.10, a convergência dos resultados de um exemplo de refinamento da malha da grelha.

O procedimento da analogia de grelha pode ser usado também para a análise de pavimentos sem vigas. No item 2.11 procura-se, através da resolução de exemplos, mostrar a precisão que se obtém quando se estabelecem comparações entre os resultados da teoria da placa delgada com emprego do processo numérico de séries.

No item 2.12, usando a analogia de grelha, resolve-se uma laje apoiada no contorno em vigas deformáveis e seus resultados são comparados com os da teoria de placas delgadas.

No último item (2.13) deste capítulo, mostra-se como pode ser utilizada a

simetria da estrutura e do carregamento para que se use uma quantidade menor de elementos na análise.

## 2.2 TEORIA DAS PLACAS DELGADAS

A teoria de placa delgada, ou de Kirchhoff, aqui considerada, pode ser vista com detalhes em Timoshenko [37] e Martinelli [29].

A equação básica fundamental das placas delgadas é dada por:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (2.1)$$

onde :

w - deslocamento transversal de um ponto da placa

x,y - coordenadas de um ponto genérico da placa

p - carga

D - Rigidez à flexão dada pela expressão:

$$D = \frac{E h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (2.2)$$

sendo E o módulo de deformabilidade e  $\nu$  o coeficiente de Poisson

Uma forma de se obter uma solução, dada por Navier, como visto em Timoshenko [37], é considerar que a carga p pode ser representada por uma série de Fourier dupla (a maioria das tabelas é feita através das séries simples de M. Lévy, como é mostrado também em Timoshenko [37]) do tipo :

$$p = p(x,y) = \sum_m \sum_n p_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m \pi x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \pi y}{b} \quad (2.3)$$

com a e b as dimensões do lado da placa.

Os valores de  $p_{mn}$  são dados por :

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \cdot \int_0^a \int_0^b p(x,y) \cdot \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \cdot \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b} \cdot dx \cdot dy \quad (2.4)$$

Para o caso da carga uniformemente distribuída, fica-se com :

$$p = p(x,y) = \sum_m \sum_n \frac{16 \bar{p}}{\pi^2 m n} \cdot \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \cdot \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b} \quad (2.5)$$

com  $m$  e  $n$  inteiros e ímpares (1,3,5....) e  $\bar{p}$  o valor da carga uniforme.

Substituindo o valor de  $p$  na equação 2.1 e considerando as condições de contorno para placa, apoiada ao longo de suas bordas e com rotação livre, obtêm-se:

$$w = \frac{16 \bar{p}}{\pi^6 D} \cdot \sum_m \sum_n \frac{\operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \cdot \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b}}{m \cdot n \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (2.6)$$

Os momentos  $m_x$  e  $m_y$ , por faixa unitária, nas direções  $x$  e  $y$  ficam dados por :

$$m_x = \frac{16 \bar{p}}{\pi^4} \cdot \sum_m \sum_n \frac{\left( \frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right)}{m \cdot n \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \cdot \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b} \quad (2.7)$$

$$m_y = \frac{16 \bar{p}}{\pi^4} \cdot \sum_m \sum_n \frac{\left( \frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2} \right)}{m \cdot n \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \cdot \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b} \quad (2.8)$$

### 2.3 INFLUÊNCIA DO COEFICIENTE DE POISSON

O coeficiente de Poisson tem um efeito considerável na determinação dos esforços e deslocamentos. Portanto, toda vez que se for comparar processos de obtenção de esforços e deslocamentos em placas, torna-se necessário fixar seu valor.

Bares [6] ressalta bem que os esforços e deslocamentos variam com o valor de  $\nu$  adotado. De fato, pelas expressões do item anterior, pode-se escrever :

$$(m_x)_{\nu_2} = \frac{1}{1 - \nu_1^2} \cdot \left\{ \left[ 1 - \nu_1 \cdot \nu_2 \right] \cdot (m_x)_{\nu_1} + \left[ \nu_2 - \nu_1 \right] \cdot (m_y)_{\nu_1} \right\} \quad (2.9)$$

$$(m_y)_{\nu_2} = \frac{1}{1 - \nu_1^2} \cdot \left\{ \left[ 1 - \nu_1 \cdot \nu_2 \right] \cdot (m_y)_{\nu_1} + \left[ \nu_2 - \nu_1 \right] \cdot (m_x)_{\nu_1} \right\} \quad (2.10)$$

$$(w)_{\nu_2} = (w)_{\nu_1} \frac{1 - \nu_2^2}{1 - \nu_1^2} \quad (2.11)$$

com  $(m_x)_{\nu_2}$ ,  $(m_y)_{\nu_2}$  e  $(w)_{\nu_2}$  os momentos fletores em x, y e w o deslocamento para  $\nu$  com valor igual a  $\nu_2$ ; e  $(m_x)_{\nu_1}$ ,  $(m_y)_{\nu_1}$  e  $(w)_{\nu_1}$  os momentos fletores em x, y e w o deslocamento, para o  $\nu$  igual a  $\nu_1$ .

O valor de  $\nu$  será considerado aqui, para efeito de comparação, variando de 0,0 a 0,4. Imaginando  $\nu_1=0$  e  $\nu_2=0,4$  (valores mínimo e máximo) chega-se então a:

$$(m_x)_{\nu_2=0,4} = \left[ (m_x)_{\nu_1=0,0} + 0,4 \cdot (m_y)_{\nu_1=0,0} \right]$$

$$(m_y)_{\nu_2=0,4} = \left[ (m_y)_{\nu_1=0,0} + 0,4 \cdot (m_x)_{\nu_1=0,0} \right]$$

$$(w)_{\nu_2=0,4} = 0,84 \cdot (w)_{\nu_1=0,0}$$

no caso de uma placa quadrada em que o momento é máximo no centro, e tem valor igual nas duas direções, tem-se :

$$(m_x)_{\nu_2=0,4} = \left[ 1,4 \cdot (m_x)_{\nu_1=0,0} \right]$$

$$(m_y)_{\nu_2=0,4} = \left[ 1,4 \cdot (m_y)_{\nu_1=0,0} \right]$$

Desta maneira, com a variação máxima de  $\nu$ , obtém-se uma variação de 16% na flecha e 40% nos momentos fletores. É, portanto, bastante importante, quando se usam tabelas, sejam ou não, oriundas das soluções de teoria de placa delgada, explicitar-se o valor de  $\nu$ , pois os resultados podem diferir bastante.

## 2.4 A ANALOGIA DA GRELHA

A analogia de grelha foi usada inicialmente por Marcus (ver Timoshenko[37]) para resolver placas com bordas indeslocáveis verticalmente.

O procedimento consiste em substituir a placa (laje) por uma malha equivalente de vigas (grelha equivalente). O conceito pode ser estendido para o caso de placas (lajes) que se apoiam diretamente em pilares (lajes sem vigas) como mostra Figueiredo [20].

No caso de pavimentos de edifícios compostos por lajes e vigas, pode-se usar o mesmo procedimento. A figura 2.1a mostra uma planta de um pavimento de prédio onde se tem duas lajes, cinco vigas e seis pilares. Na figura 2.1b estão indicados os eixos dos elementos da grelha equivalente que representa a estrutura mostrada em planta em 2.1a. Notar que os elementos que aparecem em negrito representam as vigas e os demais as lajes. Os pilares foram considerados como apoios indeslocáveis na direção vertical.

As cargas distribuídas se dividem entre os elementos da grelha equivalente de acordo com a área de influência de cada elemento. Podem ser consideradas uniformemente distribuídas ao longo dos elementos ou mesmo, dentro de certa aproximação, concentradas nos nós. As cargas concentradas da estrutura devem ser aplicadas nos nós, considerando-se, quando a posição das mesmas não coincidir com um nó, valores equivalente de carga no nós próximos.

As rigidezes à torção e à flexão da placa nas duas direções são tratadas como concentradas nos elementos correspondentes da grelha equivalente. Devem ter valores tais que ao carregar-se as duas estruturas, a real e a da grelha equivalente, obtenha-se a mesma deformação e esforços internos iguais em seções correspondentes das duas estruturas. Isto se dá, em virtude da diferença de características das duas estruturas, apenas de forma aproximada. Usando malhas adequadas e definindo as rigidezes de maneira apropriada consegue-se obter valores razoáveis para os deslocamentos e esforços.

A utilização de programas de computadores para a resolução da grelha, foi empregada inicialmente por Lightfoot [28]. Usando a analogia de grelha e um programa de computador pode-se resolver pavimentos de edifícios com: grandes dimensões em planta; com contornos não regulares; com vazios internos (poços de elevadores); lajes com vigas; e lajes sem vigas.

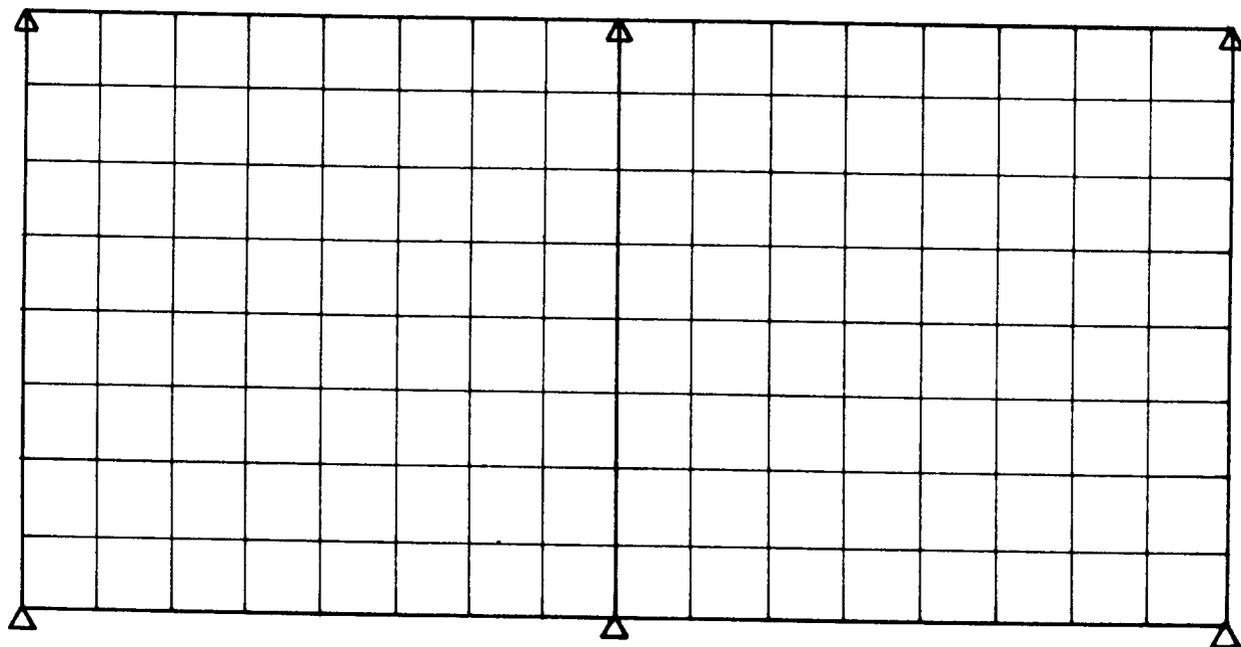
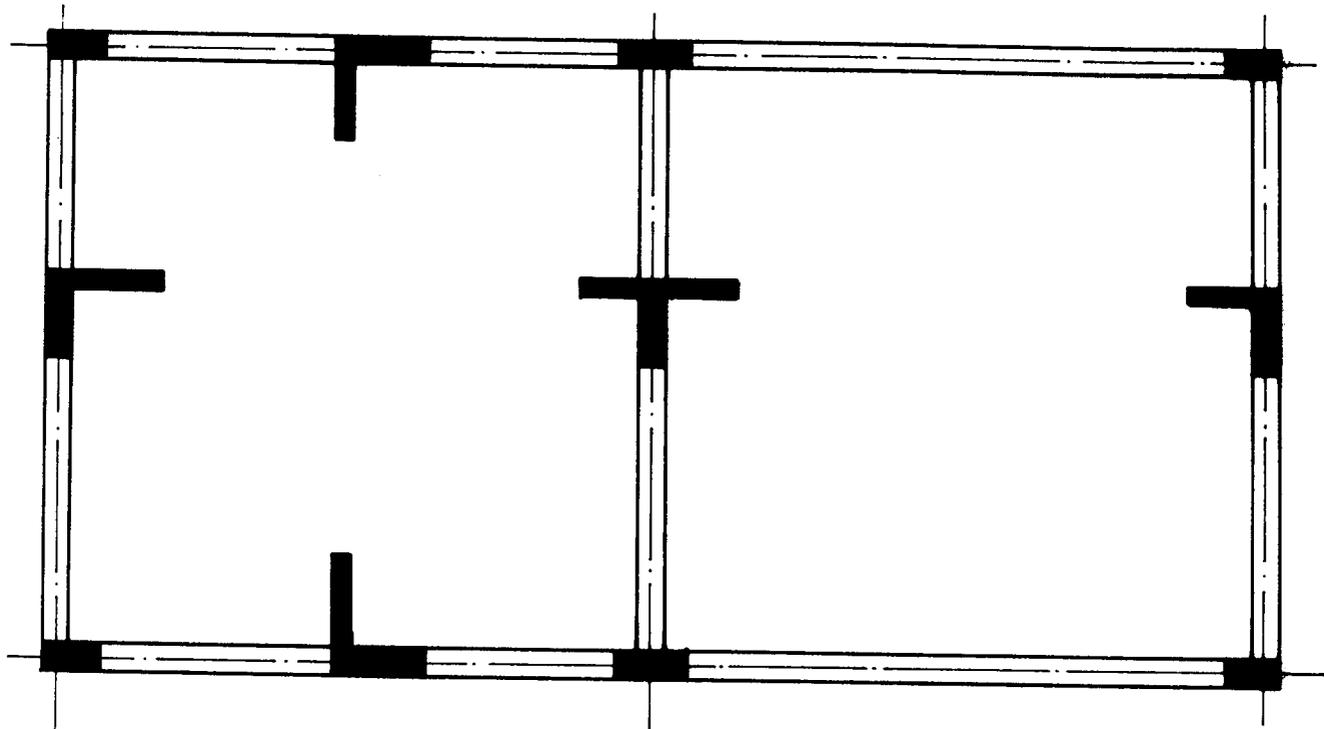


Fig. 2.1 - a) PLANTA DE UM PAVIMENTO COM VIGAS E LAJES b) GRELHA EQUIVALENTE EMPREGADA PARA REPRESENTAR O PAVIMENTO

## 2.5 INFLUÊNCIA DO COEFICIENTE DE POISSON NA ANALOGIA DA GRELHA

O maior inconveniente em tentar representar o funcionamento de uma placa, na analogia da grelha, com uma grelha equivalente, está, sem dúvida nenhuma, em não considerar a deformação transversal das barras, que é a principal característica da placa.

Assim, mesmo que se use uma malha de elementos pouco espaçados, pela própria característica dos elementos usados, haverá uma diferença entre os resultados de esforços e deslocamentos, pois o efeito do coeficiente  $\nu$  se faz sentir, na teoria de placa, de forma diferente que no processo de analogia de grelha.

A rigidez de uma viga de seção retangular é dada por  $K_v = E \cdot b \cdot h^3 / 12$ , a da placa, considerando uma faixa de largura  $b$  e com mesma altura da viga, é dada por  $K_p = E \cdot h^3 \cdot b / 12(1 - \nu^2)$ , o que mostra que a placa é, normalmente, mais rígida ou menos deformável que a viga. A diferença de rigidez entre um elemento e outro está no termo  $1/(1 - \nu^2)$ . A variação deste termo com  $\nu$  é dada a seguir no quadro 2.1:

$\nu$	0,0	0,10	0,20	0,30	0,40
$1 - \nu^2$	1,0	0,99	0,96	0,91	0,84
$\frac{1}{1 - \nu^2}$	1,0	1,01	1,04	1,10	1,19
QUADRO 2.1 - VARIAÇÃO DE $1 / (1 - \nu^2)$ COM $\nu$					

Na análise de viga isolada o coeficiente  $\nu$  não altera o valor dos deslocamentos, porém na grelha, o valor de  $\nu$  afeta os deslocamentos, embora não da mesma forma que na laje. Na formulação de grelha é usado o valor de  $G$ , módulo de elasticidade transversal, que varia com  $\nu$  de acordo com a expressão :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.12)$$

Alguns coeficientes de rigidez do elemento de grelha variam diretamente com  $G$ . Pode-se perceber que, mantido constante o valor de  $E$ , variando  $\nu$ , o valor de  $G$  vai

se modificando, porém de forma inversa que a relação  $1/(1-\nu^2)$ , conforme mostra o quadro 2.2 .

$\nu$	0,0	0,10	0,20	0,30	0,40
$\frac{1}{1-\nu^2}$	1,0	1,01	1,04	1,10	1,19
G	0,5	0,45	0,42	0,38	0,36
QUADRO 2.2 - VARIAÇÃO DE $1/(1-\nu^2)$ E G COM $\nu$					

Desta forma, com o aumento de  $\nu$ , os deslocamentos na placa diminuem, enquanto na grelha aumentam. Tal situação será discutida junto com os exemplos numéricos do item 2.7.

## 2.6. MALHA A ADOTAR PARA A GRELHA EQUIVALENTE

Entre as diversas recomendações que Hambly [23] faz, para a adoção de uma grelha equivalente no procedimento da analogia de grelha, destacam-se as seguintes:

- a) o espaçamento entre os elementos da grelha equivalente não deve ser superior a 1/4 do vão;
- b) no caso de se desejar estudar efeitos localizados deve-se considerar um espaçamento menor da malha na região em questão;
- c) as vigas ou regiões rígidas tem que ser consideradas como elementos;
- d) em bordas livres os elementos devem ser considerados passando a 0,3h deste, sendo h a espessura do elemento
- e) para placas pouco esconsas os elementos da grelha podem ser considerados ortogonais

## 2.7. CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E ELÁSTICAS DOS ELEMENTOS DA GRELHA EQUIVALENTE

Em princípio, as características elásticas do material são consideradas invariáveis com o tempo e o carregamento.

Os valores de  $E$  e  $\nu$  a se utilizar podem ser adotados a partir das recomendações dadas pela NBR6118 [2] com:

$$E_c = 6\,640 \sqrt{f_{c,j}} \quad \text{sendo} \quad f_{c,j} = f_{ck} + 3,5 \quad \text{em MPa} \quad (2.13)$$

$$\nu = 0,20 \quad (2.14)$$

As características geométricas que devem ser consideradas para os elementos são de dois tipos: o do elemento placa e o do elemento viga-placa.

Quando se estuda apenas uma placa considera-se, normalmente, para inércia à flexão, a faixa de largura  $b$  e altura  $h$ . No caso da analogia de grelha considera-se a soma da metade dos espaços entre os elementos vizinhos, para a largura  $b$  e a altura  $h$  é a espessura da peça. Desta forma pode-se determinar, conhecida a armadura na região, a rigidez do elemento tipo placa (como pode ser visto no capítulo 3).

Para se avaliar a parcela geométrica da rigidez à torção, no estágio I, deve se considerar o dobro da de flexão, como indica Hambly [23], pois a distribuição de tensão de cisalhamento em um elemento de placa é uniforme e varia linearmente a partir da linha média da placa, conforme é mostrado na figura 2.2, podendo se escrever:

$$\frac{\tau_{xy}}{z} = \frac{12 t_{xy}}{bh^3}$$

$$\text{mas} \quad \frac{t_{xy}}{i} = - \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \left( \frac{1}{R_{xy}} \right)$$

$$\text{e com } i = \frac{h^3}{12} \quad \text{e} \quad \frac{1}{R_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \quad \text{pode-se escrever}$$

$$\tau_{xy} = - \frac{E bh^3}{12(1+\nu)} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

com o valor de E tirado da expressão 2.12 chega-se a:

$$\tau_{xy} = - \frac{G bh^3}{6} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

podendo-se portanto considerar

$$I_t = \frac{bh^3}{6}$$

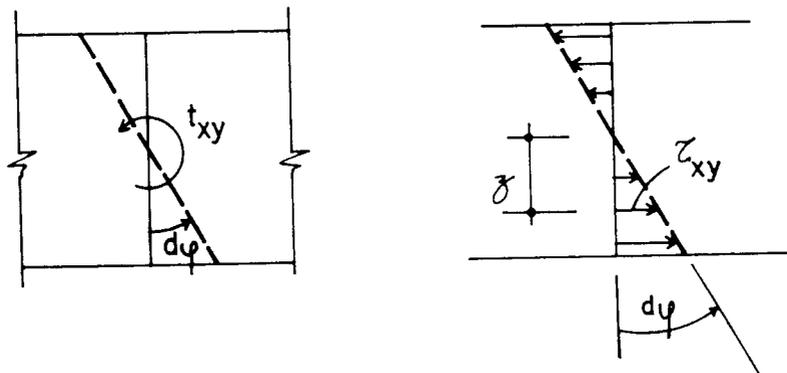


Fig. 2.2 - TENSÕES TANGENCIAIS EM EM ELEMENTO DE PLACA (Hambly [23])

Desta forma, sem considerar a armadura, tem-se para o elemento placa:

$$I_f = \frac{bh^3}{12} \quad (2.15)$$

$$I_t = \frac{bh^3}{6} \quad (2.16)$$

Para o elemento viga deve-se considerar na flexão, o seu trabalho conjunto com a placa, ou seja, parte da laje trabalha como mesa da viga, fazendo que funcione como viga t $\hat{e}$ . Um dos crit $\acute{e}$ rios para a determina $\acute{c}$ o deste trecho  $\acute{e}$  o de largura colaborante da norma brasileira, discutido no cap $\acute{i}$ tulo 3. Uma vez determinada a largura colaborante, o coeficiente de rigidez pode ser calculado conforme o indicado no cap $\acute{i}$ tulo 3, tanto no est $\acute{a}$ dio I como no II.

O coeficiente de rigidez  $\grave{a}$  tor $\c{c}$ o do elemento viga, tem a parcela geom $\acute{e}$ trica discutida no cap $\acute{i}$ tulo 3, obedecendo o crit $\acute{e}$ rio da Resist $\ancia$  dos Materiais, tendo sido considerada sempre a viga como retangular, sem levar em conta a contribui $\c{c}$ o da laje adjacente.

## 2.8 EXEMPLOS DE LAJES RETANGULARES CALCULADAS COM ANALOGIA DA GRELHA

Para possibilitar uma aferi $\c{c}$ o da influ $\ancia$  dos par $\acute{a}$ metros utilizados procurou-se resolver, pelo menos, dois exemplos de placas retangulares submetidas  $\grave{a}$  carga uniformemente distribu $\acute{i}$ da. Um primeiro caso (EX. 2.1) sup $\tilde{o}$ e a placa simplesmente apoiada no contorno, com lados iguais. No segundo (EX. 2.2) considera-se um dos lados como o dobro do outro, e os demais dados iguais aos do primeiro. Os valores num $\acute{e}$ ricos considerados nos dois exemplos s $\tilde{a}$ o:

$$E_c = 28\,559 \text{ MPa};$$

$$\nu \text{ variando de } 0,0 \text{ a } 0,4;$$

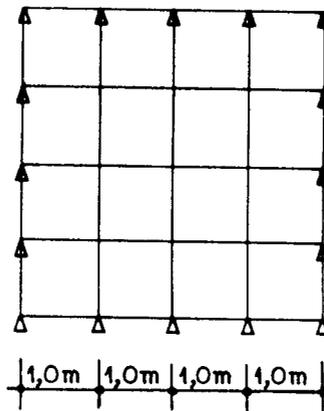
$$h = 8 \text{ cm};$$

$$\text{carga total } p = 5 \text{ kN/m}^2 \text{ ( } g_1 = 2,0; g_2 = 1,0, q = 2,0 \text{ kN/m}^2 \text{ )};$$

$$\text{exemplo 1: } l_x = 4\text{m } l_y = 4\text{m} \text{ ; exemplo 2: } l_x = 4\text{m } l_y = 8\text{m};$$

As placas foram analisadas com as grelhas cujas malhas s $\tilde{a}$ o mostradas na fig. 2.3. Assim, a do exemplo 1 tem 40 elementos, com um espa $\c{c}$ amento entre eles de 1 m (1/4 do v $\tilde{a}$ o). No exemplo 2 foi mantido o mesmo espa $\c{c}$ amento entre elementos. Com o intuito de comparar resultados com a teoria das placas delgadas cujas bordas s $\tilde{a}$ o indesloc $\acute{a}$ veis na dire $\c{c}$ o verticalmente, s $\tilde{a}$ o considerados no contorno das grelhas, apoios indesloc $\acute{a}$ veis nesta dire $\c{c}$ o. As cargas foram consideradas uniformemente distribu $\acute{i}$ das nos elementos da grelha.

## EXEMPLO 2.1



## EXEMPLO 2.2

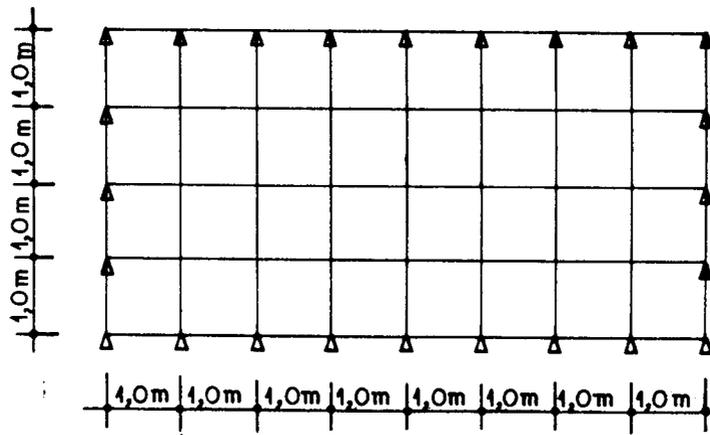


Fig. 2.3 - MALHA DAS GRELHAS USADAS NOS EXEMPLOS 2.1 e 2.2  
RESPECTIVAMENTE

Para a resolução das grelhas foi usado o programa GPLAN de Corrêa [18]. Os valores obtidos pelo modelo da analogia de grelha são comparados com os calculados através de resolução da equação fundamental com as séries simples de Levy, que estão tabeladas por Bares [6].

Os resultados de esforços e deslocamentos no centro da placa para o exemplo 2.1 são dados no quadro 2.3

coluna	A	B	C	D	E	F	G
valor	$\nu$	$m_x$	$m_x$	$r_1$	a	a	$r_2$
unid.		kNm/m	kNm/m		mm	mm	
situação		grelha	série	B/C	grelha	série	E/F
	0,0	3,30	2,94	1,12	4,55	4,26	1,07
	0,1	3,41	3,23	1,05	4,71	4,22	1,12
	0,2	3,52	3,53	0,99	4,86	4,09	1,19
	0,3	3,62	3,83	0,95	5,00	3,88	1,29
	0,4	3,71	4,11	0,90	5,13	3,58	1,43

QUADRO 2.3 - LAJE QUADRADA MOMENTOS FLETORES ( $m_x$ ) E FLECHAS (a)  
EXEMPLO 2.1

Como já foi comentado, o valor de  $\nu$  influencia sensivelmente os resultados. Para se obter maior coerência pode-se tomar como sendo básicos os resultados de  $\nu=0,1$  da grelha, e calcular os valores dos esforços para os demais valores de  $\nu$ , usando a correção da teoria de placa de acordo com as equações 2.9 e 2.10. Assim, neste caso, é óbvio que o erro será sempre o mesmo, conforme indica o quadro 2.4

coluna	A	B	C	D	E
valor	$\nu$	$m_x$	$m_x$	$m_x$	$r_3$
unid.		kNm/m	kNm/m	kNm/m	
situação		grelha	corrigido	série	C/D
	0,0	3,30	3,09	2,94	1,05
	0,1	3,41	3,41	3,23	1,05
	0,2	3,52	3,71	3,53	1,05
	0,3	3,62	4,03	3,83	1,05
	0,4	3,71	4,30	4,12	1,05

QUADRO 2.4 LAJE QUADRADA-MOMENTOS FLETORES DA GRELHA CORRIGIDOS  
EXEMPLO 2.1 -

Da mesma forma que se corrigiu o momento fletor, pela teoria de placa, pode-se fazer o mesmo com o deslocamento do ponto central, usando a equação 2.11, obtendo os resultados da quadro 2.5

coluna	A	B	C	D	E
valor	$\nu$	a	a	a	$r_4$
unid.		mm	mm	mm	
situação		grelha	corrigido	série	C/D
	0,0	4,55	4,75	4,26	1,12
	0,1	4,71	4,71	4,22	1,12
	0,2	4,86	4,57	4,09	1,12
	0,3	5,00	4,33	3,88	1,12
	0,4	5,13	4,00	3,58	1,12

QUADRO 2.5 - LAJE QUADRADA-DESLOCAMENTO MÁXIMO DA GRELHA CORRIGIDO - Exemplo 2.1

Nas figuras 2.4 e 2.5 estão mostradas as variações do momento fletor e deslocamentos com o coeficiente de Poisson para a resolução pela teoria da placa delgada, analogia de grelha e os resultados da grelha corrigidos. O valor de referência de  $\nu$  podia ser 0,2 e não 0,1. Na verdade, não é possível estabelecer, em princípio, um valor de  $\nu$  mais adequado que servirá para todos os casos. É preciso notar que o valor de  $\nu$ , que conduz à melhor aproximação no deslocamento, não é o mesmo que leva ao valor mais próximo do momento fletor.

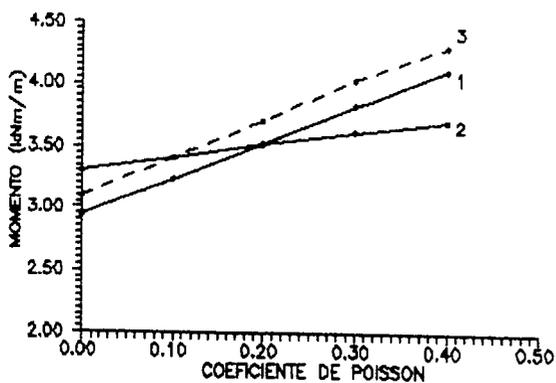


FIG. 2.4 VARIACAO DO MOMENTO FLETOR COM O COEFICIENTE DE POISSON-PLACA QUADRADA 1-SERIE, 2-GRELHA, 3-GRELHA CORRIGIDA

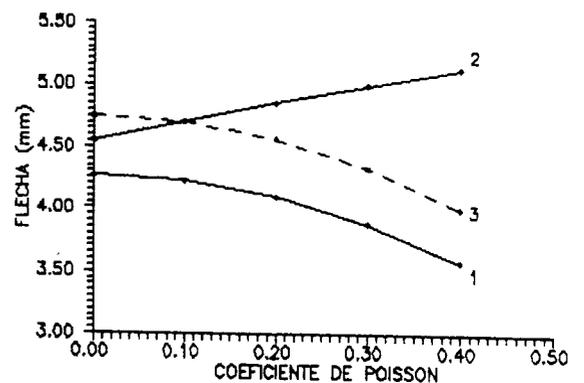


FIG. 2.5 VARIACAO DA FLECHA COM O COEFICIENTE DE POISSON-PLACA QUADRADA 1-SERIE, 2-GRELHA, 3-GRELHA CORRIGIDA

Para o exemplo 2.2, ou seja, a placa de 4 por 8m, os resultados de momento na menor direção  $m_x$  e o deslocamento no centro da placa estão indicados no quadro 2.6

coluna	A	B	C	D	E	F	G
valor	$\nu$	$m_x$	$m_x$	$r_1$	a	a	$r_2$
unid.		kN.m/m	kN.m/m		mm	mm	
situação		grelha	série	B/C	grelha	série	E/F
	0,0	8,12	7,70	1,05	10,86	11,78	0,92
	0,1	8,34	7,73	1,07	11,10	11,66	0,95
	0,2	8,49	7,77	1,09	11,32	11,31	1,00
	0,3	8,66	7,80	1,11	11,54	10,72	1,07
	0,4	8,78	7,83	1,12	11,70	9,89	1,18

QUADRO 2. 6 LAJE RETANGULAR, MOMENTO  $m_x$  e FLECHAS -EXEMPLO 2.2 -

Também, como no caso anterior, pode-se tomar como sendo os valores básicos, os resultados de um valor de  $\nu$ . Considerando  $\nu=0,0$ , como valor básico, pode-se calcular os valores dos esforços para os demais valores de  $\nu$  usando a correção da teoria de placa, de acordo com as equações 2.9 e 2.10. Os resultados assim obtidos, para momento e deslocamento, no meio da placa, estão mostrados nos quadros 2.7 e 2.8.

coluna	A	B	C	D	E
valor	$\nu$	$m_x$	$m_x$	$m_x$	$r_3$
unid.		kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	
situação		grelha	corrigido	série	C/D
	0,0	8,12	8,12	7,70	1,054
	0,1	8,34	8,24	7,73	1,067
	0,2	8,49	8,37	7,77	1,077
	0,3	8,66	8,49	7,80	1,088
	0,4	8,78	8,62	7,83	1,100

QUADRO 2.7 - - LAJE RETANGULAR MOMENTOS DA GRELHA CORRIGIDOS  
EXEMPLO 2.2

coluna	A	B	C	D	E
valor	$\nu$	a	a	a	$r_4$
unid.		mm	mm	mm	
situação		grelha	corrigido	série	C/D
	0,0	10,86	10,86	11,78	0,922
	0,1	11,10	10,75	11,66	0,922
	0,2	11,32	10,43	11,31	0,922
	0,3	11,54	9,88	10,72	0,922
	0,4	11,70	9,12	9,89	0,922

QUADRO 2.8 LAJE RETANGULAR FLECHA DA GRELHA CORRIGIDA -EXEMPLO 2.2

Os momentos na direção secundária, ou seja, na maior direção, no meio da placa, são dados no quadro 2.9 e apresentam diferenças significativas entre os processos. É bom salientar que os momentos desta direção não têm muita importância, já que seus valores são em geral baixos, e a armadura calculada para resisti-los, geralmente têm seção inferior ao valor mínimo recomendado por Norma.

coluna	A	B	C	D
valor	$\nu$	$m_y$	$m_y$	$r_1$
unid.		kN.m/m	kN.m/m	
situação		grelha	série	B/C
	0,0	1,24	0,34	3,64
	0,1	1,26	1,11	1,13
	0,2	1,28	1,88	0,68
	0,3	1,29	2,65	0,49
	0,4	1,31	3,11	0,42

QUADRO 2.9 - LAJE RETANGULAR MOMENTOS FLETORES EM  $y$ - EXEMPLO 2.2

De qualquer maneira, neste caso, é também preferível fazer a correção dos valores através do processo citado. Tais resultados são encontrados no quadro 2.10

coluna	A	B	C	D	E
valor	$\nu$	$m_x$	$m_x$	$m_x$	$r_3$
unid.		kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	
situação		grelha	corrigido	série	C/D
	0,0	1,24	1,24	0,34	3,64
	0,1	1,26	2,05	1,11	1,84
	0,2	1,28	2,86	1,88	1,52
	0,3	1,32	3,67	2,65	1,38
	0,4	1,34	4,48	3,42	1,31

QUADRO 2.10 LAJE RETANGULAR MOMENTOS DA GRELHA EM  $y$  CORRIGIDOS -  
EXEMPLO 2.2

Nas figuras 2.6 e 2.7 são mostradas as variações do momento fletor na direção principal e o deslocamento em função do coeficiente de Poisson, no caso da resolução por teoria da placa delgada, grelha e grelha com valores corrigidos, para o exemplo 2.1.

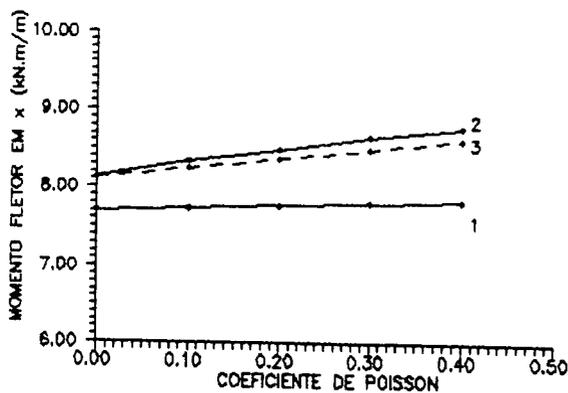


FIG. 2.6 VARIACAO DO MOMENTO FLETOR COM O COEFICIENTE DE POISSON-PLACA RETANG. 1-SERIE, 2-GRELHA, 3-GRELHA CORRIGIDA

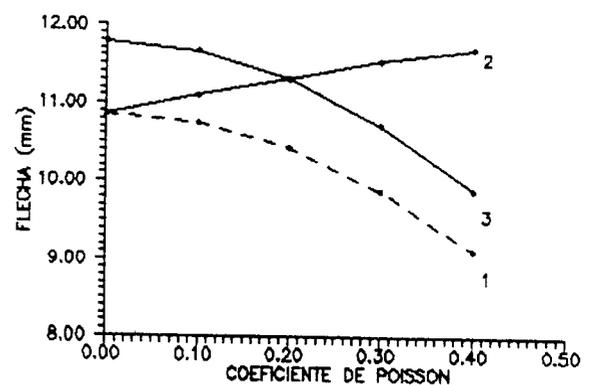


FIG. 2.7 VARIACAO DA FLECHA COM O COEFICIENTE DE POISSON-PLACA RETANG. 1-SERIE, 2-GRELHA, 3-GRELHA CORRIGIDA

Constata-se, como já foi citado que o valor do deslocamento, no meio da placa no processo de analogia de grelha, aumenta com  $\nu$ , o que é incongruente. Porém, através da correção feita através das fórmulas 2.9 e 2.10 pode-se chegar a resultados coerentes. É possível supor, a partir dos resultados destes dois exemplos, que o valor básico a adotar para  $\nu$  na analogia de grelha, varia ao menos com a geometria da estrutura (relação entre os vãos, neste caso), devendo ser estudado qual o melhor para cada caso.

Neste trabalho será usado, por ocasião da análise de pavimentos, sem mais considerações, o valor proposto pela NBR6118 de  $\nu=0,2$ .

### 2.9. TIPO DE MALHA E CARGAS A CONSIDERAR

No caso da placa retangular foi usada uma malha de elementos quadrados, porém, segundo o critério de Hambly, citado anteriormente, é possível dividir a placa em elementos retangulares tais como o da figura 2.8a em que o espaçamento passa a ser um quarto do vão. Levando-se em conta que é na menor direção que surgem os maiores esforços, parece ser mais adequado adotar-se a malha da mesma figura na situação b, que é composta de elementos retangulares, porém com um maior número, na direção em que ocorre o maior esforço.

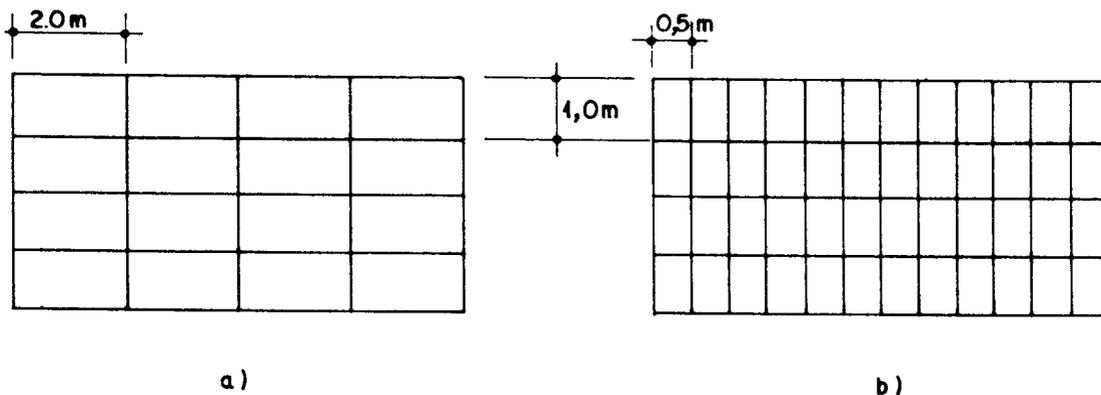


Fig. 2.8 -MALHA PARA PLACA RETANGULAR COM a) 25 NÓS; b) 90 NÓS

Sendo a ação na placa do tipo uniformemente distribuída, analisam-se os exemplos com os elementos carregados da mesma forma. Surgem então, dois critérios para a determinação das ações em cada elemento: a da NBR 6118 [2], e o do processo de quinhões de carga de Marcus (ver Rocha [34]). Resolvida a grelha indicada na fig 7b, com os dois tipos de carga, chega-se aos resultados de momento, no meio da placa, no segundo a menor direção, indicados no quadro 2.11

col.	A	B	C	D	E
tipo	série	NBR	quinhão	$r_1=A/B$	$r_2=A/C$
$m_x$	7,70	5,20	8,00	1,48	0,97

QUADRO 2.11 - MOMENTO FLETOR NO MEIO DA PLACA EM kN.m/m COM DISTRIBUIÇÃO DA NBR6118 E QUINHÃO DE CARGAS DE MARCUS

Percebe-se que o critério de distribuição de carga proposto pela Norma não resulta em boa solução para a situação linear, ou em serviço, podendo talvez ser conveniente para análises de ruptura.

Chama-se a atenção que o resultado da coluna C do quadro 2.11, é mais próximo ao do obtido com série que o do item anterior. Isto se deve ao maior número de elementos na malha empregada neste ítem. Porém, é importante frisar que é preciso usar a distribuição de cargas adequada.

No caso de se usar a malha da figura 2.8.a, o resultado encontrado, mesmo sendo usada a distribuição de quinhões de Marcus, leva a um momento no meio da placa, na menor direção de 9,29 kNm/m contra 7,77 kNm/m do resultado da série, obtendo-se uma relação entre ambos de 1,23. O erro, portanto, neste caso, é grande, pois na menor direção existem poucos elementos.

A placa retangular estudada anteriormente está submetida a uma ação uniformemente distribuída, porém, não é necessário que os elementos da grelha também o sejam. É possível carregar-se apenas os nós da grelha com cargas concentradas. No quadro 2.12 aparecem os resultados encontrados e as comparações com os resultados de carga uniforme na grelha equivalente e a solução em série.

coluna	unid.	A	B	C
situação		concent.	uniforme	série
$m_x$	kN.m/m	8,472	8,39	7,77
r		1,09	1,08	1,00
flecha	mm	10,95	11,49	10,23
r		1,070	1,123	1,000

**QUADRO 2.12 - LAJE RETANGULAR MOMENTOS FLETORES EM x  
E DESLOCAMENTOS**

Percebe-se então que há pouca diferença entre usar carga concentrada nos nós e distribuída nos elementos. É claro que esta diferença é função do espaçamento da malha da grelha.

### 2.10 CONVERGÊNCIA DE RESULTADOS COM O REFINAMENTO DA MALHA

Quando se deseja utilizar um processo numérico é preciso ter em conta a convergência de seus resultados. Não será feita aqui uma análise matemática do problema, mas procura-se dar uma idéia (pelo menos para o caso de um exemplo simples), de como os resultados variam, com o aumento de nós e elementos da grelha.

É evidente, como já foi comentado, que não serão obtidos valores exatos, pois os elementos de barra têm características distintas dos elementos de placa. Assim, deve-se verificar se é possível obter uma convergência rápida para a análise da placa, ou seja, usar poucos elementos com uma boa aproximação.

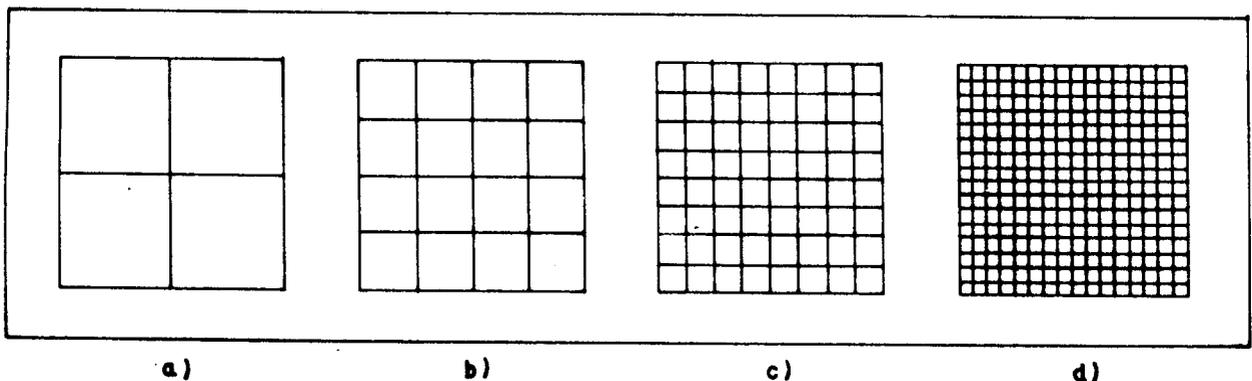


Fig. 2.9 -MALHAS DE GRELHAS COM a) 9 NÓS; b)25 NÓS; c) 81 NÓS E d)289 NÓS

Para se ter uma idéia disto, procurou-se resolver a placa do exemplo 2.1, considerando  $\nu=0.0$  com quatro tipos de malhas, indicadas na figura 2.9, que contêm respectivamente 9, 25, 81 e 289 elementos.

Os resultados obtidos para o momento fletor e deslocamentos no centro da placa são indicados no quadro 2.13

tipo un.	n.nós	flecha kNm/m	$r_1$	$m_x$ mm	$r_2$
grelha	9	4,559	1,226	3,611	1,069
grelha	25	4,552	1,118	3,297	1,068
grelha	81	4,432	1,043	3,072	1,039
grelha	289	4,363	1,019	3,000	1,023
série	--	4,262	1,000	2,944	1,000

**QUADRO 2.13 - MOMENTOS FLETORES E FLECHAS NO CENTRO DA PLACA QUADRADA**

Pelos resultados obtidos, percebe-se que, pelo menos para o exemplo em questão, há uma convergência rápida para o valor do momento fletor quando se passa de 9 para 25 e depois para 81 elementos. A velocidade de convergência é grande na variação inicial do número de elementos. Já para a flecha, a aproximação é menos acentuada com o aumento do número dos elementos. Nas figuras 2.10 e 2.11 estão mostradas as variações dos resultados em função do tipo de malha.

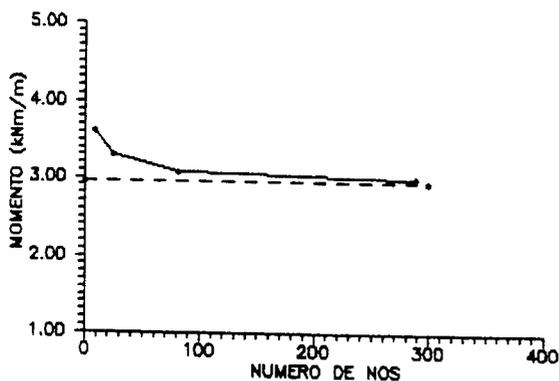


FIG.2.10- VARIACAO DO MOMENTO FLETOR COM O REFINAMENTO DA MALHA - PLACA QUADRADA

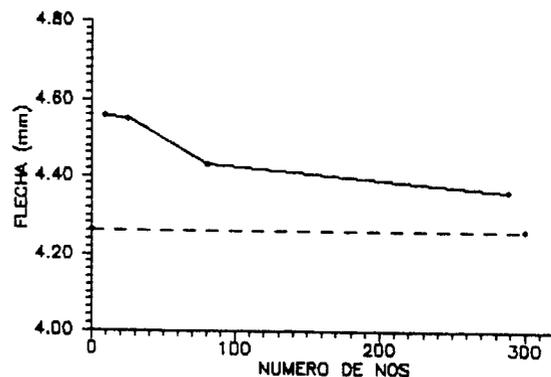


FIG.2.11- VARIACAO DA FLECHA COM O REFINAMENTO DA MALHA - PLACA QUADRADA

### 2.11 -EXEMPLOS DE ANALOGIA DA GRELHA PARA LAJES SEM VIGAS

Assim, como foi feito para as lajes apoiadas em vigas indeslocáveis, procura-se resolver dois exemplos de placas apoiadas em pilares, sem vigas. No primeiro caso (exemplo 2.3), supõe-se a placa apoiada em quatro pilares, um em cada canto, com lados iguais, carga uniformemente distribuída e bordos livres. No segundo (exemplo 2.4), consideram-se os mesmos dados do anterior, porém com os bordos engastados. Os valores numéricos considerados nos dois exemplos são :

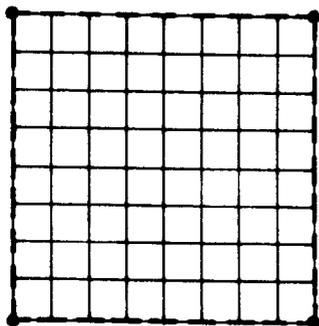
$$E_c = 2,85 \cdot 10^7 \text{ MPa}; \nu \text{ variando de } 0,0 \text{ a } 0,4;$$

$$h = 12 \text{ cm (valor mínimo exigido por norma); } l_x = 4\text{m}; l_y = 4\text{m}$$

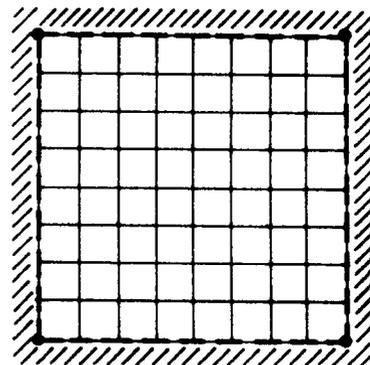
$$p = 6 \text{ kN/m}^2 \quad (g_1 = 3,0; g_2 = 1,0, q = 2,0 \text{ kN/m}^2).$$

Os exemplos foram analisados com as grelhas mostradas na fig. 2.12 e, portanto, a do exemplo 2.3 tem 144 elementos com um espaçamento entre eles de 0,5 m. No exemplo 2.4 foi mantido o mesmo espaçamento entre elementos. Os resultados são comparados com os da teoria das placas delgadas, encontrados em Timoshenko [37] e em Bares [6].

Para efeito de comparação, são mostrados apenas os resultados obtidos no centro da placa (momentos fletores e deslocamento).



a) EXEMPLO 2.3



b) EXEMPLO 2.4

Fig. 2.12 -LAJES SEM VIGAS EX 2.3 - BORDAS LIVRES, EX 2.4 - BORDAS ENGASTADAS

Assim, o momento fletor e o deslocamento vertical no centro da placa do exemplo 2.3, são dados no quadro 2.14.

coluna	A	B	C	D	E	F	G
valor	$\nu$	$m_x$	$m_x$	$r_1$	a	a	$r_2$
unid.		kNm/m	kNm/m		mm	mm	
situação		grelha	série	B/C	grelha	série	E/F
	0,0	9,914	8,517	1,16	10,46	9,610	1,09
	0,1	9,754	9,369	1,04	10,54	9,512	1,11
	0,2	9,602	10,22	0,94	10,57	9,224	1,14
	0,3	9,436	11,07	0,85	10,62	8,745	1,21
	0,4	9,302	11,92	0,78	10,67	8,072	1,32

QUADRO 2.14 - LAJE SEM VIGAS, BORDA LIVRE - EXEMPLO 2.3

Da mesma forma, como acontece com as placas apoiadas em vigas, o valor de  $\nu$  influencia sensivelmente os resultados para as placas apoiadas em pilares. Para se obter maior precisão, toma-se como valor básico os resultados de  $\nu=0,0$  da grelha, e calcula-se os valores dos esforços para os demais  $\nu$  usando a correção da teoria de placa. O erro é sempre o mesmo, conforme indica o quadro 2.15.

coluna	A	B	C	D	E
valor	$\nu$	$m_x$	$m_x$	$m_x$	$r_3$
unid.		kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	
situação		grelha	corrigido	série	C/D
	0,0	9,914	9,914	8,517	1,16
	0,1	9,754	10,91	9,369	1,16
	0,2	9,602	11,89	10,22	1,16
	0,3	9,436	12,89	11,07	1,16
	0,4	9,302	13,88	11,92	1,16

QUADRO 2.15 - LAJE SEM VIGAS- MOMENTOS DA GRELHA CORRIGIDOS - EXEMPLO 2.3

Fazendo a correção da flecha com a equação 2.11, chega-se aos resultados do quadro 2.16

coluna	A	B	C	D	E
valor	$\nu$	a	a	a	$r_4$
unid.		mm	mm	mm	
situação		grelha	corrigido	série	C/D
	0,0	10,46	10,46	9,61	1,088
	0,1	10,54	10,35	9,51	1,088
	0,2	10,57	10,04	9,22	1,088
	0,3	10,62	9,51	8,74	1,088
	0,4	10,67	8,78	8,07	1,088

QUADRO 2.16 - LAJE SEM VIGAS -FLECHA DA GRELHA CORRIGIDA-EXEMPLO-2.3

Para o exemplo 2.4, ou seja a placa igual ao do exemplo anterior com o contorno engastado, os resultados de momento e o deslocamento no centro da placa estão indicados no quadro 2.17.

coluna	A	B	C	D	E	F	G
valor	$\nu$	$m_x$	$m_x$	$r_1$	a	a	$r_2$
unid.		kN.m/m	kN.m/m		mm	mm	
situação		grelha	série	B/C	grelha	série	E/F
	0,0	2,520	2,640	0,95	2,170	2,16	1,00
	0,1	2,436	2,900	0,84	2,177	2,14	1,03
	0,2	2,368	3,160	0,75	2,181	2,08	1,05
	0,3	2,294	3,430	0,67	2,184	1,97	1,11
	0,4	2,236	3,690	0,61	2,187	1,81	1,21

QUADRO 2.17 LAJE SEM VIGAS E ENGASTADA NO CONTORNO -EXEMPLO 2.4

Como no caso anterior, pode-se, também, tomar como sendo básicos os resultados de  $\nu=0,0$  da grelha, calcular os valores dos esforços para os demais  $\nu$  usando a correção da teoria de placa. Os resultados para momento e flecha assim obtidos, estão mostrados nos quadros 18 e 19

coluna	A	B	C	D	E
valor	$\nu$	$m_x$	$m_x$	$m_x$	$r_3$
unid.		kN.m/m	kN.m/m	kN.m/m	
situação		grelha	corrigido	série	C/D
	0,0	2,520	2,52	2,64	0,956
	0,1	2,436	2,77	2,90	0,956
	0,2	2,368	3,02	3,16	0,956
	0,3	2,294	2,38	3,43	0,956
	0,4	2,236	3,53	3,69	0,956

QUADRO 2.18 LAJE SEM VIGAS E ENGASTADA- MOMENTOS DA GRELHA CORRIGIDOS - EXEMPLO 2.4-

coluna	A	B	C	D	E
valor	$\nu$	a	a	a	$r_4$
unid.		mm	mm	mm	
	situação	grelha	corrigido	série	C/D
	0,0	2,17	2,170	2,16	1,005
	0,1	2,15	2,148	2,138	1,005
	0,2	10,57	2,083	2,074	1,005
	0,3	10,62	1,974	1,965	1,005
	0,4	10,67	1,822	1,814	1,005

QUADRO 2.19 LAJE SEM VIGAS E ENGASTADA. FLECHAS DA GRELHA CORRIGIDAS -EXEMPLO 2.4 -

## 2.12 LAJES APOIADAS EM VIGAS

A análise de lajes apoiadas em vigas, deformáveis na direção vertical, é difícil de ser feita através da teoria de placas delgadas, devido ao grande número de variáveis que interferem. Pode-se achar porém, a solução para o caso de uma placa quadrada apoiada nos contornos, em Timoshenko [37]. Com o intuito de se comparar com o processo da analogia de grelha, lança-se mão do exemplo apresentado em Barboza [5] (EX. 2.5) onde se obtêm os momentos no centro da placa, da viga e a flecha da placa dada (fig. 2.13) com os seguintes dados:

$E_c = 30 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ ;  $G = 12 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ ;  $\nu = 0,25$ ;  $h = 10 \text{ cm}$ ; carga na laje  $p = 10 \text{ kN/m}^2$ ; dimensões da viga  $b = 12 \text{ cm}$  e  $h = 50 \text{ cm}$ ; vãos de 5 m.

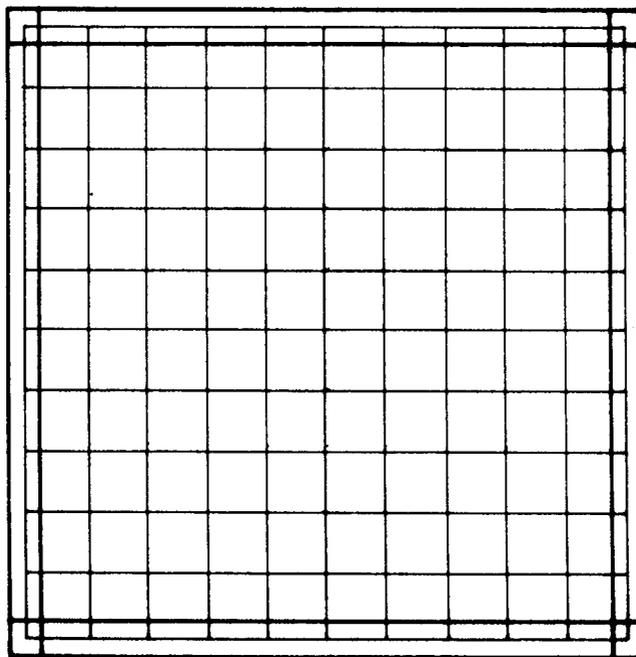


Fig. 2.13- LAJE APOIADA EM VIGAS COM MALHA PARA O USO DA G. E. EX

Os resultados obtidos estão representados na tabela 2.20

tipo	$m_x$	$r_1$	flecha	$r_2$
un.	kN.m/m		mm	
placas	1,295	1,00	14,4	1,00
grelha1	1,024	0,79	14,4	1,00
grelha2	1,068	0,82	15,0	1,04
grelha3	1,224	0,95	17,0	1,18

QUADRO 2.20 - MOMENTOS FLETORES E FLECHAS NO CENTRO DA PLACA APOIADA EM VIGAS E RAZÃO COM O VALOR DA TEORIA DE PLACAS.

Os resultados de grelha1 referem-se à situação em que as vigas de contorno têm rigidez à torção no estágio I (no caso  $2,44 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ ). Já na grelha2 considera-se a rigidez à torção no estágio II ( $1,58 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ ). No caso da grelha3 foi considerada uma inércia à torção praticamente nula, de maneira que representasse a solução da placa delgada em que a ligação entre placa e vigas fosse de rotação livre.

De fato, os resultados do terceiro caso mostram que os valores de momentos estão bem próximos do obtido com a teoria da placa delgada, enquanto a flecha é maior para a solução em grelha.

### 2.13 UTILIZAÇÃO DA SIMETRIA

É muito comum, na prática, o emprego de estruturas que têm um ou dois eixos de simetria, submetidas também a carregamentos simétricos. Desta forma, sempre que possível, pode-se fazer uso desta condição para permitir o emprego de malhas com um menor número de elementos.

Há dois casos a destacar: o primeiro, em que o eixo de simetria corta diversos elementos da grelha equivalente em um único ponto (fig. 2.14 a); o segundo, em que o eixo de simetria coincide com o eixo de um ou mais elementos da grelha.

No primeiro caso, pode-se empregar uma estrutura equivalente desde que, nos pontos seccionados pelo eixo, sejam impedidos os deslocamentos à rotação do eixo  $y$  do elemento.

Já no segundo caso, além da mesma providência do caso anterior, deve-se usar a inércia à flexão dos elementos que têm eixo axial coincidente com o eixo de simetria, com a metade do valor real, além de metade da ação externa. Os esforços internos nestes elementos, deverão, no final, ser multiplicados por dois.

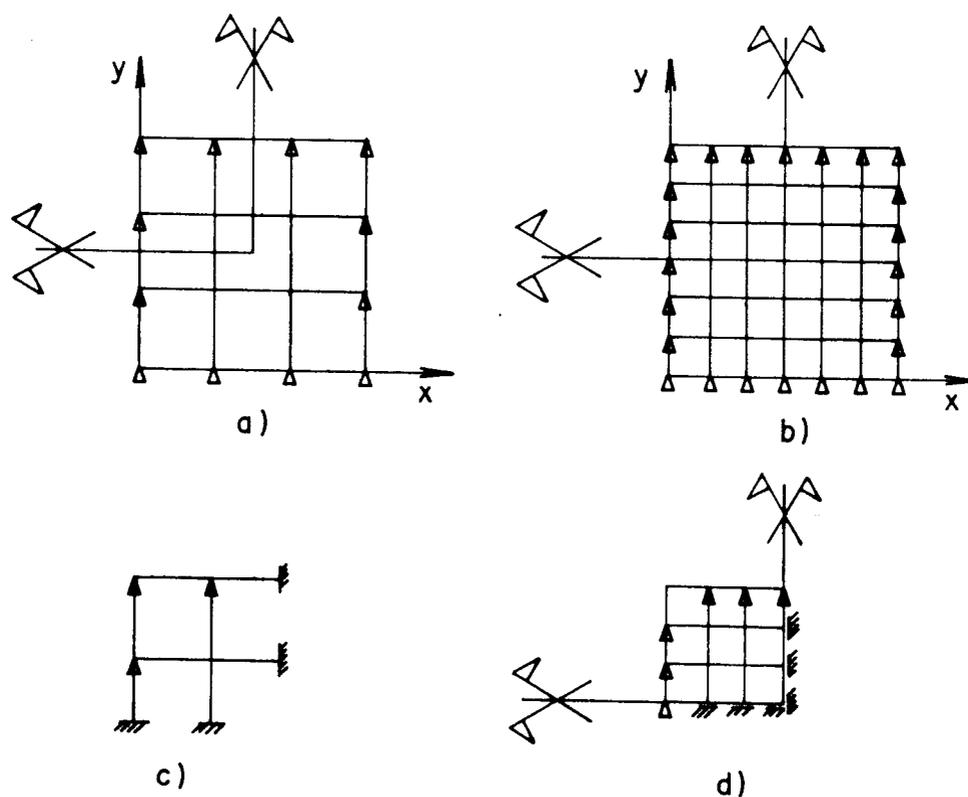


Fig. 2.14- CONSIDERAÇÃO DA SIMETRIA.

## CAPÍTULO 3 - FUNDAMENTOS PARA A CONSIDERAÇÃO DA NÃO LINEARIDADE FÍSICA DO MATERIAL

### 3.1. INTRODUÇÃO

Normalmente a análise de uma estrutura é feita mediante a hipótese de que os seus deslocamentos sejam pequenos e não influenciam os esforços internos (exceção feita ao fenômeno de flambagem). Considera-se também que o material tenha um comportamento linear na relação tensão-deformação ou momento-curvatura.

Neste trabalho considera-se também que os deslocamentos são pequenos, porém é levado em conta a não linearidade física do concreto armado, devida principalmente ao efeito da fissuração. Leva-se em conta ainda o efeito da fluência do concreto, que é importante para a avaliação da deformação final da estrutura.

Inicialmente, monta-se um modelo para análise da flexão simples, considerando a fissuração, fazendo-se o mesmo com a torção. O efeito da fluência é considerado de acordo com as indicações da NBR 7197 [3].

As relações momento-curvatura são usadas com o intuito de se evitar a integração das tensões normais no domínio da seção transversal. Isto simplifica a programação e permite a utilização de um número razoável de elementos sem empregar uma grande capacidade de memória. Câmara [9] salienta que, embora este tipo de modelo seja mais simples que os baseados nas relações  $\sigma \times \epsilon$ , "não há justificção fundamentada que mostre que os resultados obtidos em análise não lineares, com base nos modelos do tipo tensão-deformação, permitem necessariamente melhores aproximações à realidade que os métodos de momento-curvatura, desde que estes se encontrem suficientemente testados".

Procura-se mostrar como deve ser feita a modelagem do material de forma que possa ser empregado no processo da analogia de grelha.

Com o aumento da pesquisa, principalmente no campo experimental, será possível surgirem modelos melhores que os aqui estudados, podendo ser facilmente adaptados ao programa desenvolvido no capítulo 4.

Procura-se inicialmente introduzir alguns conceitos da relação momento-curvatura no item 3.2, para no item seguinte definir seu equacionamento, de acordo com o modelo do CEB90.

No item 3.4, detalha-se o equacionamento do momento-curvatura para a seção transversal, trabalhando no estágio I, para no item 3.5 analisar a seção no estágio II, e finalmente, no item 3.6, mostra-se como pode ser feita a determinação do momento de escoamento e momento último com as respectivas curvaturas.

No item 3.7, são comentadas algumas situações particulares de comportamento da seção transversal e mostra-se como pode ser considerado o efeito da laje trabalhando como mesa da viga.

Um exemplo ilustrativo da determinação da equação do momento-curvatura é feito no item 3.8.

No item 3.9 utiliza-se o programa de grelha com carregamento incremental e a equação de momento-curvatura, para calcular os deslocamentos de pontos de uma viga bi-apoiada ensaiada no laboratório de estrutura da EESC-USP (Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo), comparando-se os resultados obtidos do deslocamento do ponto central com os experimentais..

O comportamento da seção transversal na torção é feito em 3.10. O equacionamento do momento de torção-rotação e expressões para seu cálculo nos estádios I e II são feitos em 3.11 e 3.12, respectivamente. Finaliza-se a análise da torção fazendo-se um exemplo ilustrativo em 3.13.

A deformação da estrutura ao longo do tempo é analisada no item 3.14. A função fluência é detalhada em 3.15, enquanto em 3.16 são relacionadas as considerações que devem ser feitas para o cálculo do estado de deformação de um piso no tempo  $t$ .

### 3.2. DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA

O estado de deformação de seções transversais de concreto armado submetidas a flexão simples, fica definido pela relação constitutiva expressa em termos do momento-curvatura. A curvatura média de uma seção é dada pela relação geométrica:

$$\frac{1}{r} = \frac{\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}}{d} \quad (3.1)$$

onde  $\epsilon_{sm}$ ,  $\epsilon_{cm}$  representam respectivamente a deformação específica média do

aço e do concreto na borda mais comprimida.

Desta forma bastaria relacionar as deformações específicas em função do momento. Como nem sempre é fácil obter-se esta relação, pode-se usar outras expressões para obter a equação constitutiva. Uma maneira possível é aquela que se tenta relacionar diretamente o momento ( $M$ ) com a curvatura ( $1/r$ ), a partir de modelos que consideram flexão simples pura atuando em um trecho de peça em que a seção está contida.

A partir do diagrama momento-curvatura pode-se definir a rigidez média à flexão da seção. Considera-se que a rigidez é composta de duas parcelas. A primeira  $E_c$ , módulo de deformabilidade do concreto, aqui suposto constante, independente da intensidade da tensão e de sua variação com o tempo. O efeito da variação de  $E_c$  ao longo do tempo pode ser considerado na análise de fluência, embora aqui também não seja feita. Usa-se neste trabalho, como nas normas de concreto, o módulo de deformabilidade do concreto com a idade de 28 dias. A segunda parcela,  $I$ , chamada de inércia, pode ser calculada em função do momento de inércia nos estádios I e II puro. O estágio II puro é aquele que ocorre quando o concreto tracionado não participa da resistência da seção transversal.

Na figura 3.1 está representada a relação momento-curvatura de uma seção de concreto armado submetida a flexão simples. A região no gráfico, em que os momentos são inferiores ao de fissuração ( $M_f$ ), constitui o estágio I. Entende-se por momento de fissuração aquele que causa a primeira abertura de fissura na região tracionada de concreto. No estágio I a relação entre o momento-curvatura é linear.

Para um momento superior a  $M_f$  há uma sensível diminuição da rigidez à flexão, embora não exista, em princípio, sinal de escoamento, seja do aço tracionado ou do concreto comprimido. Este trecho corresponde ao estágio II.

Um terceiro trecho da curva ocorre quando o aço tracionado ou o concreto comprimido começa a plastificar e há uma variação sensível de rigidez no trecho. Nesta situação as deformações começam a ser grandes, pelo menos na região próxima a esta seção. Como será visto adiante a definição do momento de escoamento não é fácil de ser feita e, para considerar tais efeitos na estrutura, deve-se, levar em conta a plastificação do concreto.

Há desvios quanto à curva descrita, pois há a influência da taxa de armadura e o formato da seção transversal como mostra Guefi [21] e se reproduz na fig. 3.2.

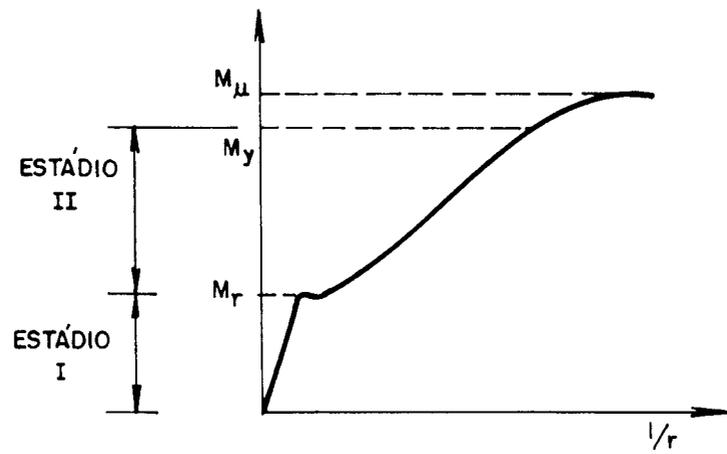


Fig. 3.1 - DIAGRAMA DE MOMENTO-CURVATURA NA FLEXÃO SIMPLES

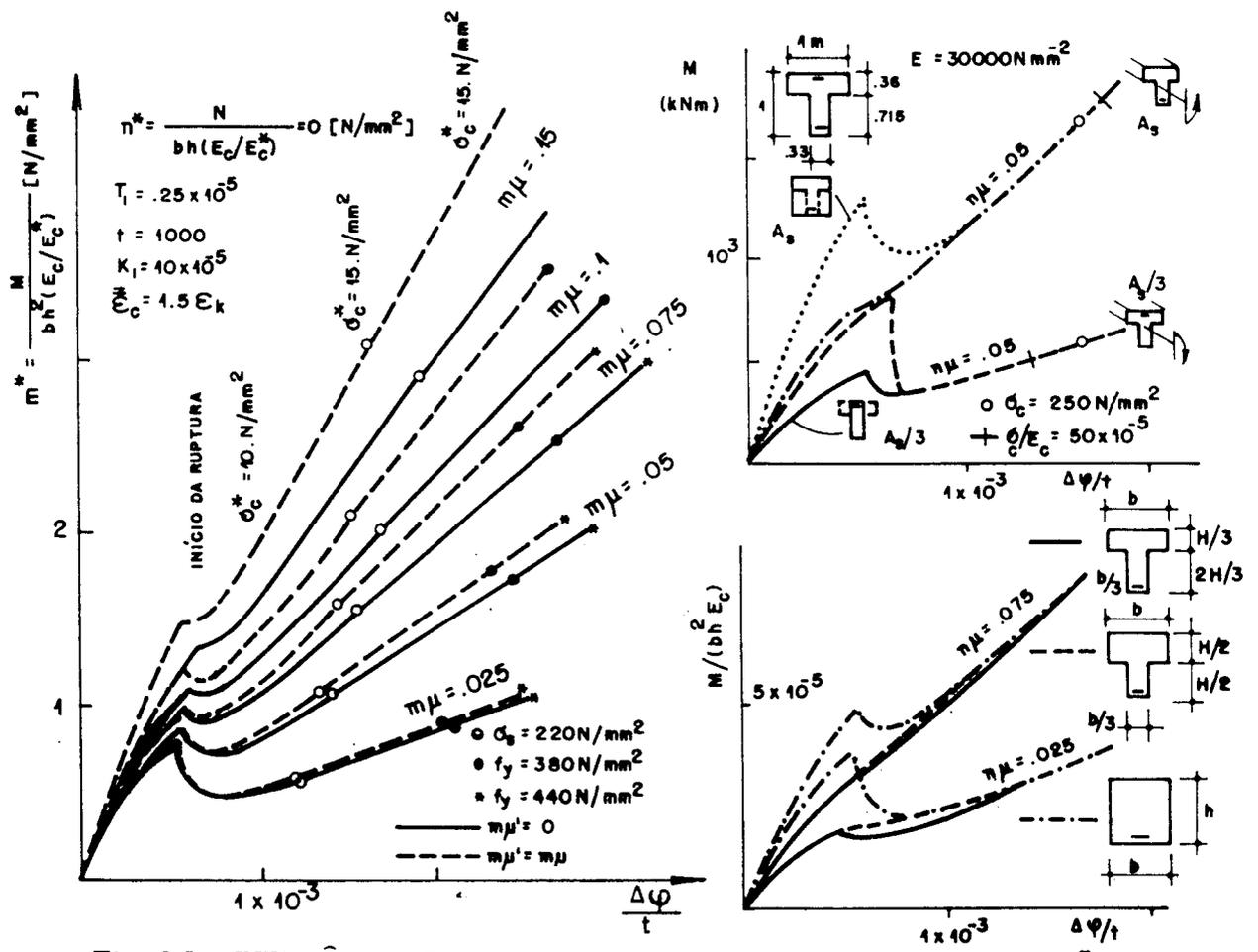


Fig. 3.2 - INFLUÊNCIA DA TAXA DE ARMADURA E FORMA DA SEÇÃO TRANSVERSAL NO DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA, GUEFI [21]

Outro ponto importante a se destacar é que embora se estude o diagrama momento-curvatura de uma seção transversal, este na verdade, deve representar o comportamento de um trecho da estrutura. Guefi [21] deixa claro este fato, e até diferencia o que vem a ser a curvatura local e a média. A primeira representa melhor as regiões em que há uma grande variação de momento fletor como, por exemplo, as seções próximas do apoio central de vigas contínuas usuais. Já a segunda representa melhor as regiões próximas ao meio do vão destas vigas. A figura 3.3 mostra a diferença da consideração da curvatura local e média.

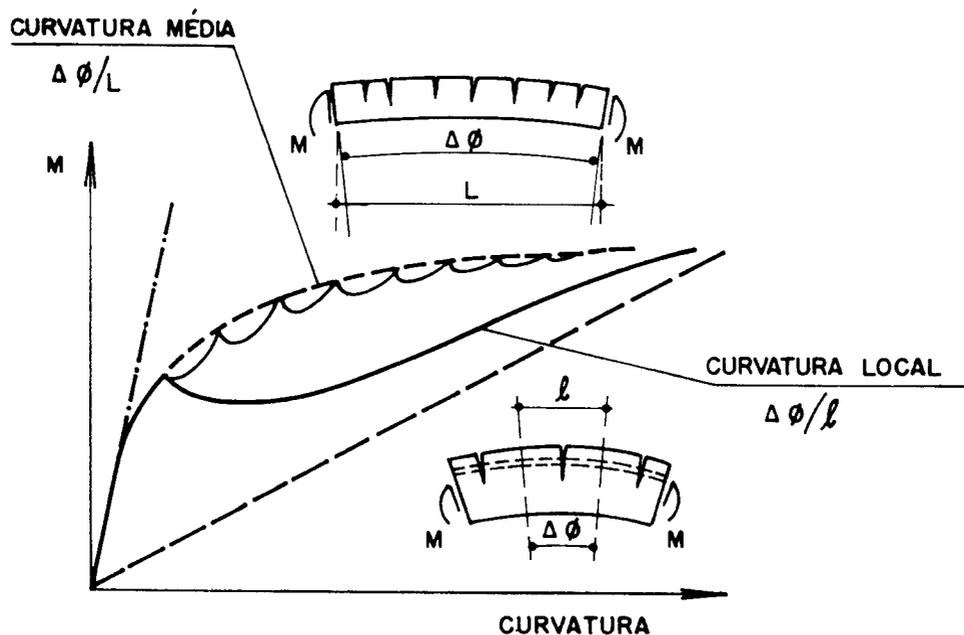


Fig. 3.3 - CURVATURA MÉDIA E LOCAL, GUEFI [21]

### 3 . 3- EQUACIONAMENTO DO DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA

O CEB através de seu Código Modelo (CEB90) [15] fornece as seguintes indicações para a função momento-curvatura.

para o estágio I

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} \quad (3.2)$$

para o estágio II

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{ts}} = \frac{1}{r_2} - \left( \frac{1}{r_{2r}} - \frac{1}{r_{1r}} \right) \cdot \beta_b \cdot \left( \frac{M_r}{M} \right) \quad (3.3)$$

e para  $M > M_y$  :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_y} - \left( \frac{1}{r_{2r}} - \frac{1}{r_{1r}} \right) \cdot \beta_b \cdot \left( \frac{M_r}{M_y} \right) + \frac{(M - M_y)}{2 K_{III}} \quad (3.4)$$

com

$$K_{III} = \frac{M_u - M_y}{\frac{1}{r_u} - \frac{1}{r_y}} \quad (3.5)$$

e ainda :

$M$  - momento fletor na seção ou no trecho analisado

$M_y$  - momento de escoamento da seção

$M_r$ -momento de fissuração para a seção ou trecho analisado

$M_u$ - momento último da seção

$\frac{1}{r_y}$  - curvatura correspondente ao momento  $M_y$

$\frac{1}{r_u}$  - curvatura correspondente ao momento  $M_u$

$\frac{1}{r_{1r}}$  - curvatura correspondente ao estágio I com a atuação do momento  $M_r$

$\frac{1}{r_2}$  - curvatura correspondente ao estágio II puro com atuação do momento  $M$

$\frac{1}{r_{2r}}$  - curvatura no estágio II puro com atuação do momento  $M_r$

$$\frac{1}{r_{ts}} = \left( \frac{1}{r_{2r}} - \frac{1}{r_{1r}} \right) \cdot \beta_b \cdot \left( \frac{M_r}{M} \right) \quad (3.6)$$

$\frac{1}{r_{ts}}$  - rigidez do concreto à tração ("tension stiffening")

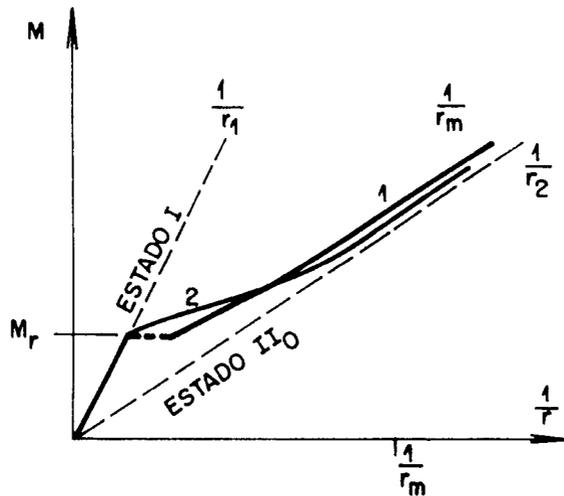
com  $\beta_b > \beta_1 \cdot \beta_2$

$\beta_1$ -coeficiente característico de aderência igual a 0,5 para barras de má aderência e 1 em caso contrário

$\beta_2$ -coeficiente igual a 0,5 se as cargas forem repetitivas ou 0,8 para o primeiro carregamento.

O modelo do C.E.B. baseia-se na hipótese de que a deformação média de um elemento fissurado é equivalente à de um elemento fictício, em que uma parte funciona no estágio II puro ( $II_0$ ) e outra no estágio I, conforme é mostrado na figura 3.4. Nesta mesma figura é mostrado o diagrama momento-curvatura que decorre da expressão de inércia média de Branson (ver Câmara[9]).

Embora o desenho do diagrama momento-curvatura no código modelo CEB-90 tenha a forma tri-linear (ver figura 3.4), o trecho do estágio II é curvo. Isto ocorre porque a rigidez à tração do concreto é variável (ver fórmula 3.6). Assim, simplificadamente, se houver interesse, pode-se definir uma rigidez única para o trecho do estágio II. Isto facilita o equacionamento. No presente trabalho não será feita esta aproximação.



$$\frac{1}{r_m} = (1 - \xi) \cdot \frac{1}{r_1} + \xi \cdot \frac{1}{r_2}$$

$$\xi = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left( \frac{M_r}{M} \right)^2$$

$$= 0 \text{ PARA } M < M_r$$

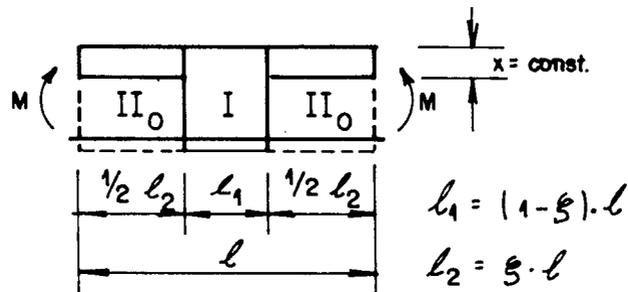


Fig. 3.4 - DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA SEGUNDO 1) O CEB158 [14] E 2) BRANSON (CÂMARA [9]) E MODELO EMPREGADO PARA TRECHO DO ELEMENTO

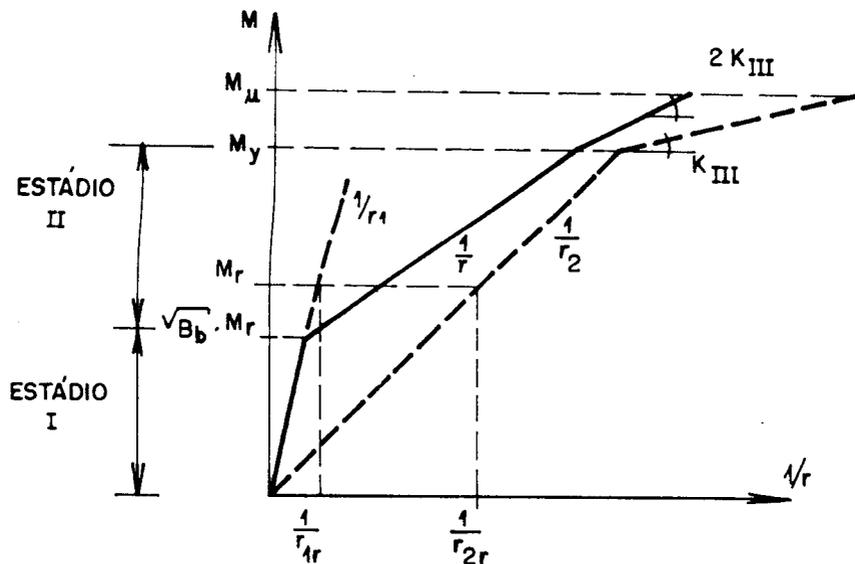


Fig. 3.5 - DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA SEGUNDO O CEB90 [15]

### 3.4. ESTÁDIO I E MOMENTO DE FISSURAÇÃO

No estágio I basta considerar a área de aço como uma seção de concreto equivalente de área igual a  $\alpha_s A_s$  e usar a definição clássica de momento de inércia para obter o valor de  $I_e$ , que, multiplicado por  $E_c$ , fornece a rigidez à flexão. O valor de  $\alpha_s$  é a relação entre os módulos de elasticidade do aço e de deformabilidade do concreto. O que se faz portanto, é homogeneizar a seção transversal.

Além da hipótese anterior considera-se o concreto resistindo à tração e que sempre há uma relação linear entre a tensão e a deformação específica para os pontos da seção transversal.

O gráfico da figura 3.6 mostra uma seção retangular submetida a um momento fletor menor que o momento  $M_r$  e o respectivo diagrama de deformações específicas e tensões.

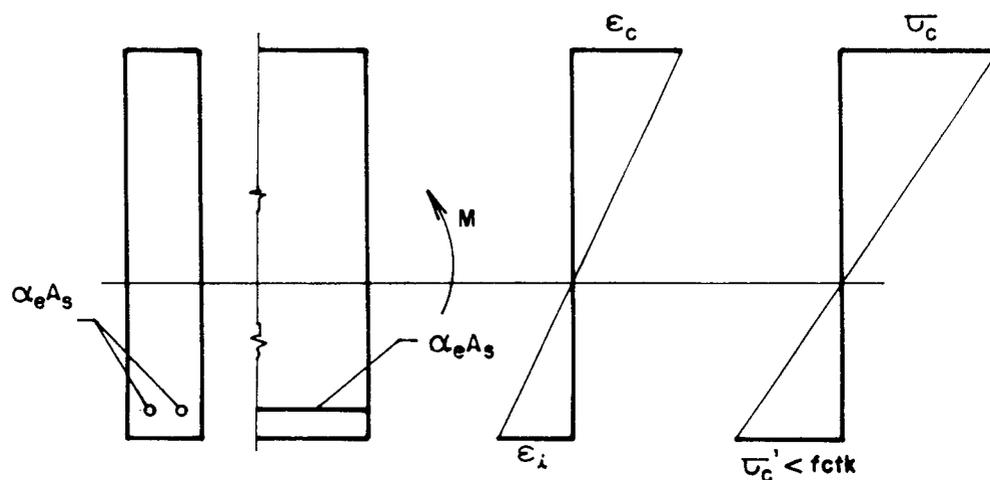


Fig. 3.6 - SEÇÃO TRANSVERSAL NO ESTÁDIO I

Supõe-se aqui, que o fim do estágio I se dá quando, na seção transversal, ocorre a primeira fissura de tração no concreto. Existe, em princípio, uma transição do estágio I para o II, em que haveria uma plastificação do concreto tracionado. Esta transição é chamada de estágio Ib e não será considerada na presente análise.

Com o intuito de descrever o comportamento médio da estrutura, levando em conta as ações de retração, temperatura, carregamento prévio, e descargas de carga permanente, o CEB90 [15] considera que a curvatura média é influenciada pela “fissuração antes da atuação do valor de  $M_T$ , isto é, para o valor de  $M_T \cdot \sqrt{\beta_b}$ ”. Este valor é obtido igualando-se as expressões 3.2 e 3.3. Desta forma está se levando em conta que não é possível definir o momento de fissuração apenas em função da formação da primeira fissura de flexão.

O momento de fissuração pode ser calculado de várias formas, entre elas a do CEB-90, escolhida para este trabalho.

Segundo o CEB e também Leonhardt [26] além de Ghali [22], o valor de  $M_r$  é dado por:

$$M_r = W_1 \cdot f_t \quad (3.7)$$

com

$W_1$  - módulo de resistência da seção transversal considerando a armadura

O valor a se empregar para  $f_t$  é bastante discutível e normalmente não é obtido diretamente dos ensaios. Aqui, considera-se que o valor de  $f_t$  pode ser tomado igual ao valor de  $f_{ctM}$  (resistência média à tração do concreto na flexão).

Leonhardt considera que a resistência do concreto à tração em vigas fletidas cai com o aumento da altura das mesmas. Este efeito deve-se basicamente à diminuição do gradiente de tensões. Assim, é de se esperar, que a resistência à tração do concreto em vigas seja bem menor que nas lajes. Outro fator de influência é a forma da seção transversal. A NBR7197 [3] no seu anexo, dispõe que a resistência à tração na flexão, quando da verificação do estado limite de formação de fissuras, deve ser considerada com o valor de  $f_{ctM}$ , que é igual a 1,2 vezes o valor de  $f_{ctk}$  (resistência característica do concreto à tração aos 28 dias de idade), para vigas com seção T e 1,5 vezes o valor de  $f_{ctk}$  para vigas com seção retangular.

O valor de  $f_{ctk}$  pode ser obtido na falta de dados de maneira indireta, de acordo com a NBR6168 [2] por :

$$f_{ctk} = \frac{f_{ck}}{10} \quad \text{para } f_{ck} < 18 \text{ MPa} \quad (3.8)$$

$$f_{ctk} = 0,06 \cdot f_{ck} + 0,7 \quad \text{para } f_{ck} > 18 \text{ MPa}$$

Assim, neste trabalho o cálculo de  $M_r$  é feito pela fórmula (3.7) com a consideração de  $f_{ctm} = 1,5 f_{ctk}$  para elementos "tipo" placa e  $f_{ctm} = 1,2 f_{ctk}$  para elementos tipo viga, lembrando que é feita a consideração de viga T nos elementos de viga. Procura-se desta maneira, usar o fato de que, nas placas, o gradiente de tensões é maior que nas vigas, e que o valor da resistência à tração em elementos fletidos é maior que o dado pelo ensaio de tração ( $f_{ctk}$ ).

### 3.5. ESTÁDIO II

A seção está trabalhando no estágio II puro ou  $II_0$ , quando atua nela um momento maior que o de fissuração, e tendo-se ainda:

- a) distribuição da tensão de compressão no concreto triangular;
- b) esforço à tração resistido apenas pela armadura abaixo da linha neutra, não se considerando portanto o concreto trabalhando a tração;
- c) aço e concreto sem escoar;

Nesta situação, aplicado um momento  $M > M_f$ , o equilíbrio, na seção transversal, é obtido igualando-se a resultante das tensões de compressão no concreto e a armadura comprimida, com a resultante das tensões na armadura tracionada. A partir desta situação, obtém-se a posição da linha neutra. Pode-se então calcular a inércia referente ao estágio II puro, denominado aqui de  $I_{II0}$ . A rigidez à flexão no estágio II puro passa a ser dada pelo produto de  $E_c \cdot I_{II0}$ . Na figura 3.5 a linha tracejada representa a relação momento-curvatura do estágio II puro em que :

$$\frac{M}{E_c \cdot I_{II0}} = \left( \frac{1}{r_2} \right)$$

Para calcular o momento de inércia do estágio II puro é preciso determinar a posição da linha neutra. Para isto emprega-se uma formulação baseada em Ghali [22]. No caso de uma seção em forma de tê, como a mostrada na figura 3.7, a posição da linha neutra é dada na seguinte equação do segundo grau:

$$a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

com

$$a_1 = \frac{b_w}{2}$$

$$a_2 = h_f (b_f - b_w) + (\alpha_e - 1) A_s' + \alpha_e A_s \quad (3.9)$$

$$a_3 = -d' (\alpha_e - 1) A_s' - d \alpha_e A_s - \frac{h_f^2}{2} (b_f - b_w)$$

e desta forma :

$$x = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4 \cdot a_1 \cdot a_3}}{2 \cdot a_1}$$

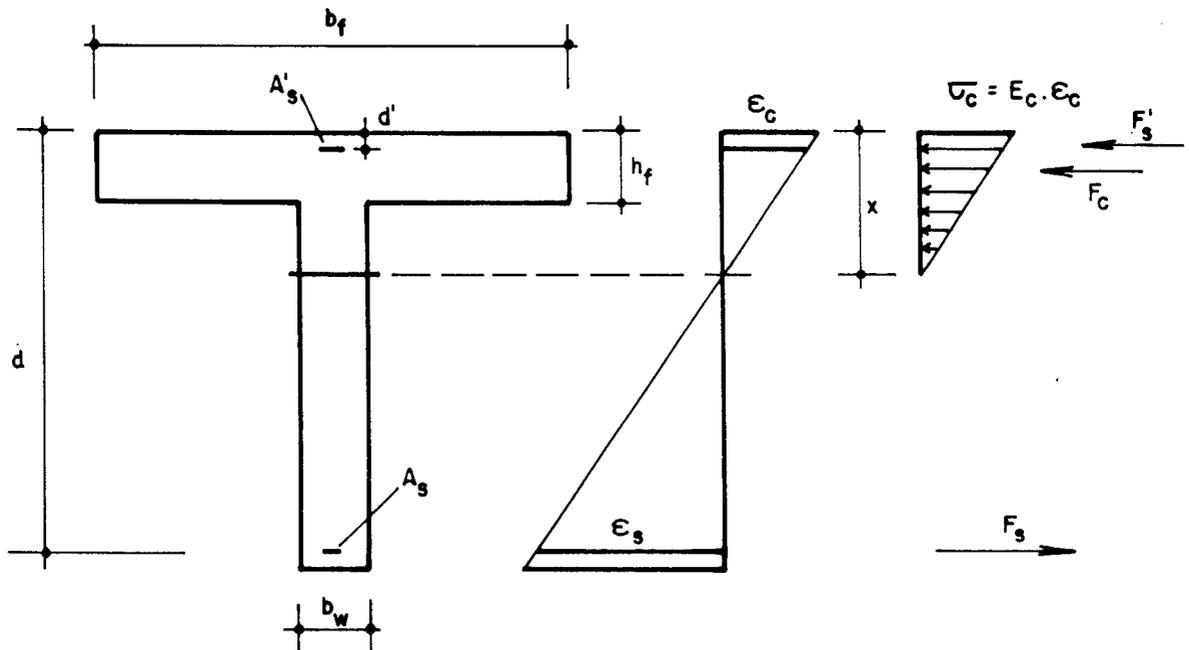


Fig. 3.7 - SEÇÃO TRANSVERSAL NO ESTÁDIO II PURO

Quando a seção transversal é retangular, basta fazer o valor de  $h_f$  igual a zero. Se a linha neutra for menor que a espessura da mesa, considera-se uma viga retangular com  $b_w = b_f$  e  $h_f = 0$ .

Obtida a posição da linha neutra, calcula-se o momento de inércia em relação ao eixo que passa pela linha neutra, que fica definido por :

$$I_{x, no} = \frac{h_f^3}{12} (b_f - b_w) + h_f (b_f - b_w) \left(x - \frac{h_f}{2}\right)^2 + \frac{b_w x^3}{3} + (\alpha_s - 1) A_s' \cdot (x - d')^2 + \alpha_s \cdot A_s \cdot (x - d)^2 \quad (3.10)$$

As situações do estádio I e II puro são, na verdade, valores limites. Para valores intermediários pode-se usar uma função interpoladora. Branson, como se vê em Câmara [9], sugere determinar a inércia média  $I_m$  com a expressão:

$$I_m = \left[ \frac{M_r}{M} \right]^4 \cdot I_1 + \left\{ 1 - \left[ \frac{M_r}{M} \right]^4 \right\} \cdot I_{II,0} \quad (3.11)$$

No Boletim 158 do CEB [14] a inércia média é dada por :

para  $M > M_r$

$$I_m = \frac{I_1 \cdot I_{II,0}}{I_1 \zeta + (1 - \zeta) \cdot I_{II,0}} \quad (3.12)$$

$$\text{com } \zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left[ \frac{M_r}{M} \right]^2$$

Considerando a hipótese de pequenas deformações, a relação curvatura e momento fletor é dada genericamente pela expressão:

$$\frac{M}{EI_m} = -\frac{1}{r} \quad (3.13)$$

Substituindo o valor da curvatura  $1/r$  da expressão 3.13 em 3.3, chega-se à expressão 3.12. Assim, pelo modelo do CEB90, a expressão 3.12 também pode ser usada para definir a inércia média, porém passa a ser válida para momentos acima de  $M_r \cdot \sqrt{\beta_b}$ , enquanto que para o CEB158, os valores devem ser usados para momentos superiores a  $M_r$ . Desta forma, considera-se que a expressão para o CEB90 é dada por :

para  $M > M_r \cdot \sqrt{\beta_b}$

$$I_m = \frac{I_1 \cdot I_{II,0}}{I_1 \zeta + (1 - \zeta) \cdot I_{II,0}} \quad (3.14)$$

A implementação de cada modelo em programas computacionais é muito fácil, pois resume-se a 2 ou 3 linhas de fórmulas que representam a equação constitutiva, ou seja, as linhas de programação seriam aquelas que representariam as fórmulas 3.11, 3.12 ou 3.14. Pode-se até deixar no programa, a critério do usuário, a escolha de uma das três possibilidades, que seria definida na entrada de dados.

Na figura 3.8 é representada a variação da Inércia média no estágio I e II em relação ao Momento fletor, para as três formulações, da seção transversal do exemplo do item 3.8. A inércia diminui a partir de momentos acima do de fissuração, tendendo ao valor correspondente do estágio II puro. Já no caso do modelo do CEB90 a inércia diminui a partir do valor  $M_T \cdot \sqrt{\beta_b}$ . A partir do valor  $M_T$ , por ter a mesma equação, resulta nos mesmos valores que o do CEB158.

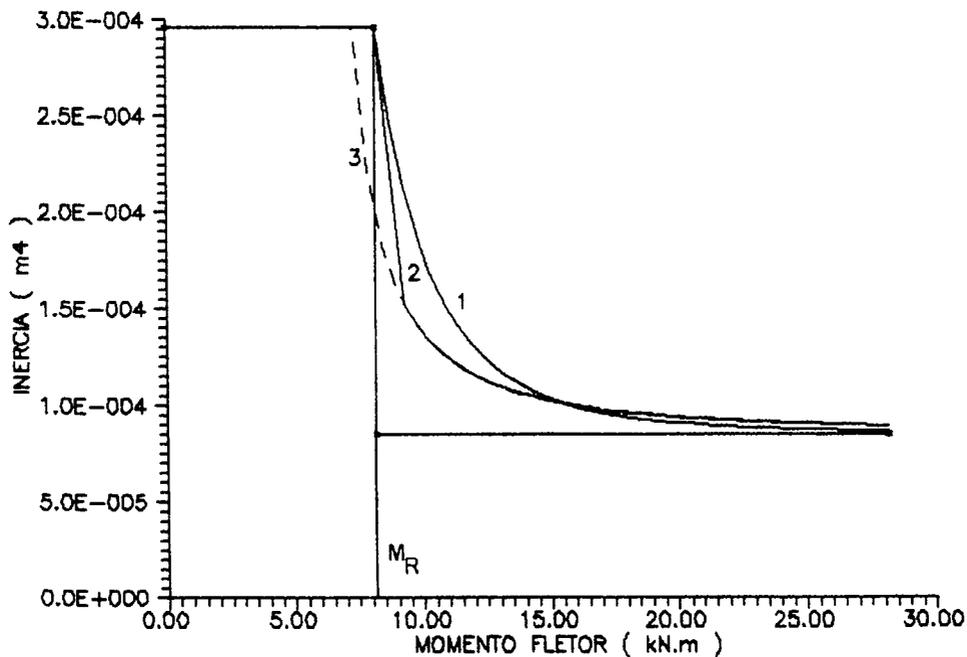


fig. 3-8 VARIACAO DA INERCIA COM O MOMENTO FLETOR  
1-BRANSON, 2-CEB158, 3-CEB90

Para efeito de cálculo, quando se implementam no programa as expressões anteriores, ao que tudo indica, a formulação do CEB90, deve conduzir a deformações maiores, ou seja, a estruturas menos rígidas. A formulação do Manual 158 conduz a

valores de rigidez inferiores ao obtidos por Branson e superiores aos do CEB90. De qualquer forma, pelo menos no exemplo do item 3.9, são testadas as três formulações para que possam ser aferidas.

### 3.6. MOMENTO DE ESCOAMENTO E MOMENTO ÚLTIMO

Para representar o trecho final do diagrama momento-curvatura torna-se necessário definir o momento de escoamento e o momento último.

A definição do segundo é fácil de ser feita, pois os estados limites últimos são descritos detalhadamente pelo CEB. A norma brasileira NBR-6118 [2] faz esta definição no item 4.1.1, bastando escolher os valores de  $\epsilon$  do concreto e do aço que levem ao máximo valor de  $M$ . De qualquer forma, trata-se de resolver um problema de verificação, pois não se conhece de antemão o domínio que representa a solução, e a armadura já está definida.

É difícil de se definir o momento de escoamento e o CEB90 evita fazê-lo. Côrrea [17] considera que é quando o aço inicia seu escoamento ( $\epsilon_s = \epsilon_{yk}$ ). Para o concreto admite que o diagrama de tensões tenha variação linear (vestígio do estado II) e o valor da tensão no concreto  $\sigma_c$  seja dada pelo produto de  $E_c$  por  $\epsilon_c$ . Esta hipótese só se torna consistente se for tomado para  $E_c$  um valor diferente que o recomendado pela NBR6118 (equação 2.13), que corresponde ao valor numérico da tangente no início do diagrama tensão-deformação, em serviço, do concreto.

Desta forma, como pode ser visto na figura 3.9, para um valor de deformação específica razoável, tem-se uma tensão superior a  $f_{ck}$

Aqui se procura usar um módulo de deformabilidade secante  $E_c^s$ , definido pelo ponto de coordenadas tensão e deformação  $(0;0)$  e  $(0,002;f_{ck})$ , conforme é indicado na figura 3.9.

Não se considera, neste trabalho, o valor da resistência característica do concreto multiplicada por 0,85 (efeito Rusch). Quando a maior parte do carregamento é de natureza permanente, pode-se considerar este fator de minoração.

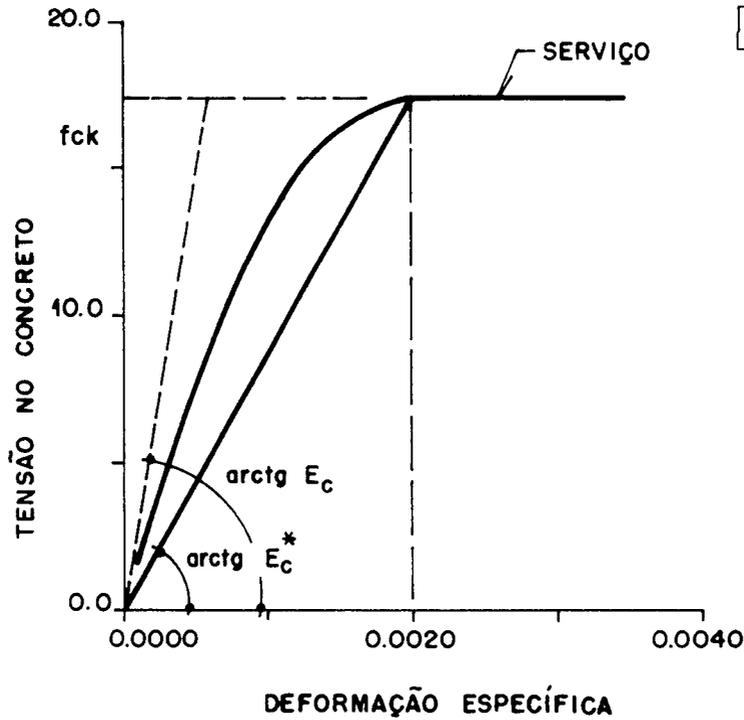


Fig. 3.9 - TENSÃO-DEFORMAÇÃO E MÓDULO DE DEFORMABILIDADE DO CONCRETO

Desta maneira a posição da linha neutra fica conhecida e também o valor de  $M_y$ .

Na figura 3.10 mostra-se a situação que corresponde ao momento de escoamento. Para a situação descrita chega-se à seguinte equação:

$$a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

com

$$a_1 = b_w$$

$$a_2 = (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot 2 + 2 \cdot (A_s' + A_s) \cdot \alpha_s^* \tag{3.15}$$

$$a_3 = -2 \cdot (d_s' \cdot A_s' + d \cdot A_s) \cdot \alpha_s^* + h_f^2 \cdot (b_f - b_w)$$

$$x = \frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4 \cdot a_1 \cdot a_3}}{2 \cdot a_1} \quad \text{sendo} \quad \alpha_s^* = \frac{E_c}{E_s}$$

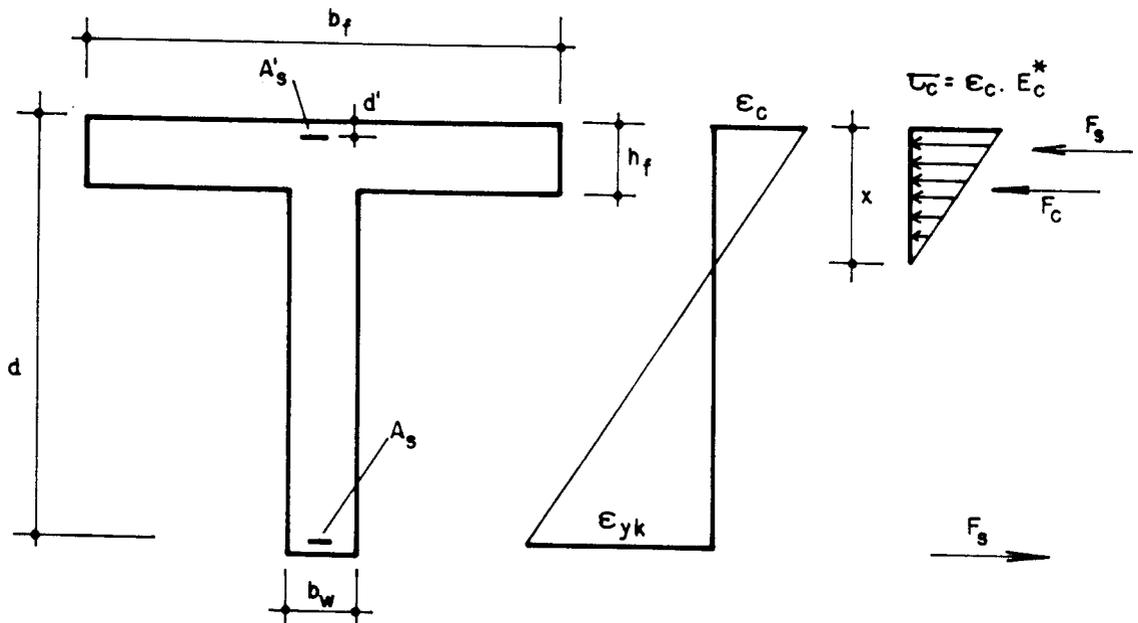


Fig. 3.10 - ESQUEMA PARA O CÁLCULO DO MOMENTO DE ESCOAMENTO

Uma vez conhecida a posição da linha neutra pode-se calcular o momento correspondente que fica dado por:

$$M_y = \frac{f_{yk}}{d - x} \left[ (x - h_f/2)^2 \cdot \frac{(b_f - b_w)}{\alpha_e} \cdot h_f + \frac{b_w x^3}{3 \alpha_e} + A_s \cdot (d-x)^2 + A'_s \cdot (x-d')^2 \right] \quad (3.16)$$

A curvatura  $\frac{1}{r_y}$ , correspondente a este momento, pode ser calculada usando a expressão 3.3

O momento último será obtido, como já foi citado, através de verificação de cálculo. Supõe-se, inicialmente, a seção no estado limite último e no domínio de deformação 2, com  $\epsilon_s = 1\%$  e  $\epsilon_c$  entre 0,2 a 0,35%, e monta-se a equação de equilíbrio que resulta :

$$a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

com

$$a_1 = 0,8 \cdot b_w \cdot f_{ck}$$

$$a_2 = f_{ck} \cdot h_f \cdot (b_f - b_w) - 0,8 \cdot f_{ck} \cdot d \cdot b_w - A_s' \cdot f_s' - f_{yk} \cdot A_s \quad (3.17)$$

$$a_3 = (d' \cdot f_s' \cdot A_s' + A_s \cdot d \cdot f_{yk}) - d \cdot h_f \cdot (b_f - b_w) \cdot f_{ck}$$

com a equação de compatibilidade geométrica :

$$\frac{\epsilon_s'}{x - d'} = \frac{\epsilon_s}{d - x} = \frac{0,01}{d - x}$$

supondo aço tipo A

$$f_s' = E_s \cdot \epsilon_s' = E_s \cdot \frac{0,01}{d - x} \cdot (x - d')$$

chega-se a :

$$x = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4 \cdot a_1 \cdot a_3}}{2 \cdot a_1}$$

Uma vez conhecida a posição da linha neutra, pode-se calcular o valor de  $\epsilon_c$  e verificar se está compreendido entre 0,02 e 0,35%. Em se verificando a hipótese, o momento último fica igual a:

$$M_U = \left[ (x - h_f/2) \cdot (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot f_{ck} + 0,48 \cdot b_w x^2 \cdot f_{ck} + A_s \cdot (d-x) \cdot f_{yk} + A_s' \cdot f_s' \cdot (d-d') \right] \quad (3.18)$$

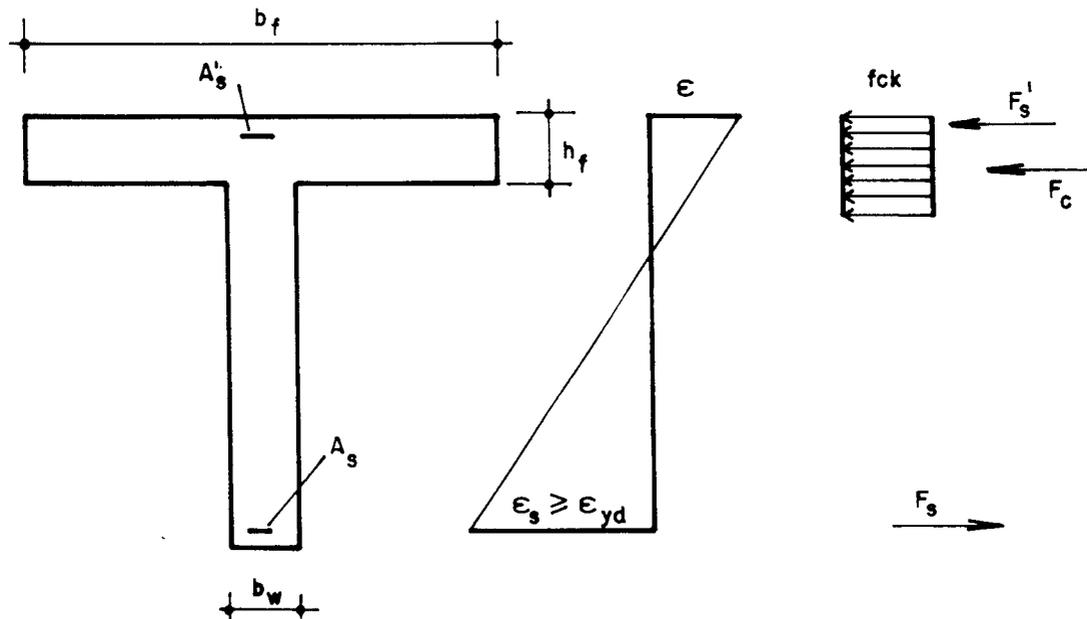


Fig. 3.11 - ESQUEMA PARA O CÁLCULO DO MOMENTO ÚLTIMO

A curvatura correspondente, usando de forma aproximada 3.1, fica:

$$\left( \frac{1}{r_u} \right) = \frac{0,01}{d - x} \quad (3.19)$$

Se o valor de  $\epsilon_c$  não está contido no domínio 2, então seu valor deve ser considerado 0,0035 e o valor de  $\epsilon_s$  estará entre  $\epsilon_{yk}$  e 0,10%, tratando-se pois do domínio 3 e pode-se escrever:

$$\frac{\epsilon'_s}{x - d'} = \frac{\epsilon_c}{x}$$

e assim

$$f'_s = E_s \cdot \epsilon'_s = E_s \cdot \frac{0,0035}{x} \cdot x - d'$$

a solução é a mesma que a anterior, porém com os valores de  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$

dados por :

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,8 \cdot b_w \cdot f_{ck} \\ a_2 &= f_{ck} \cdot h_f \cdot (b_f - b_w) + A_s' \cdot E_s \cdot 0,0035 - f_{yk} \cdot A_s \\ a_3 &= - d' \cdot E_s \cdot A_s' \cdot 0,0035 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Determinados os valores de  $c$ ,  $\epsilon_s$  e  $\epsilon_c$  calcula-se  $M_u$  e a curvatura:

$$\begin{aligned} M_u &= \left[ (x - h_f/2) \cdot (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot f_{ck} + 0,48 \cdot b_w x^2 \cdot f_{ck} + A_s \cdot (d-x) \cdot f_{yk} + \right. \\ &\quad \left. + A_s' \cdot f_s' \cdot (d-x') \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\text{com } f_s' = \frac{(c - d')E_s}{c}$$

A curvatura correspondente fica:

$$\left( \frac{1}{r_u} \right) = \frac{\epsilon_s + 0,0035}{d} \quad (3.22)$$

### 3.7. SITUAÇÕES PARTICULARES E LARGURA COLABORANTE

Existem duas situações particulares a serem consideradas. A primeira, quando se tem um elemento de seção transversal retangular. Para se usar as fórmulas deduzidas anteriormente, basta fazer  $b_f = b_w$ .

Uma segunda situação ocorre quando a linha neutra corta a mesa, ou seja, o valor de  $c$  é menor que  $h_f$ . Nesta caso deve-se usar  $b_w = b_f$ .

Outro ponto que precisa ser detalhado é o valor da largura colaborante ( $b_f$ ), ou seja, a parte da laje que pode ser considerada como elemento da viga. O critério aqui adotado é do item 3.2.2.2 da NBR6118 [2] que recomenda, quando não há mísulas,

$$b_f = b_w + 2 b_1$$

$$b_f = b_w + b_1 + b_3$$

(3 . 24)

com

$$b_1 \leq 0,10 a ; b_1 \leq 8 h_f \text{ ou } b_1 \leq 0,5 b_2$$

$$b_3 \leq 0,10 a ; b_3 \leq 6 h_f$$

Para os valores de  $b_1$  e  $b_2$ , usar o menor dos valores indicados anteriormente, e, para o valor de  $a$ , usar  $a=l$ ,  $a=0,75.l$ ,  $a=0,6.l$  ou  $a=2.l$ , se a viga é simplesmente apoiada, tem tramo com momento em uma extremidade, tramo com momento em duas extremidades, ou a viga é em balanço, respectivamente. O valor de  $l$  é o comprimento do tramo. A figura 3.12 indica esquematicamente o valor de  $b_f$ .

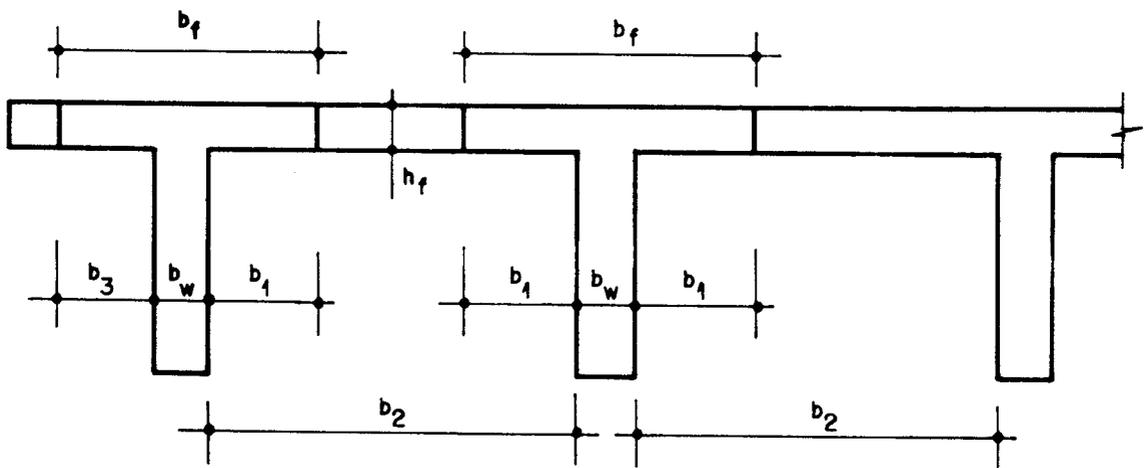


Fig. 3.12 - ESQUEMA PARA A DETERMINAÇÃO DE  $b_f$

É preciso destacar que, uma viga contínua, como a do esquema estrutural mostrada na figura 3.13, pode funcionar como T nas regiões em que o momento fletor é positivo, ou seja, tem sua borda superior comprimida, ou nas regiões em que o momento fletor, sendo negativo, não ultrapassa o momento de fissuração  $M_f$ .

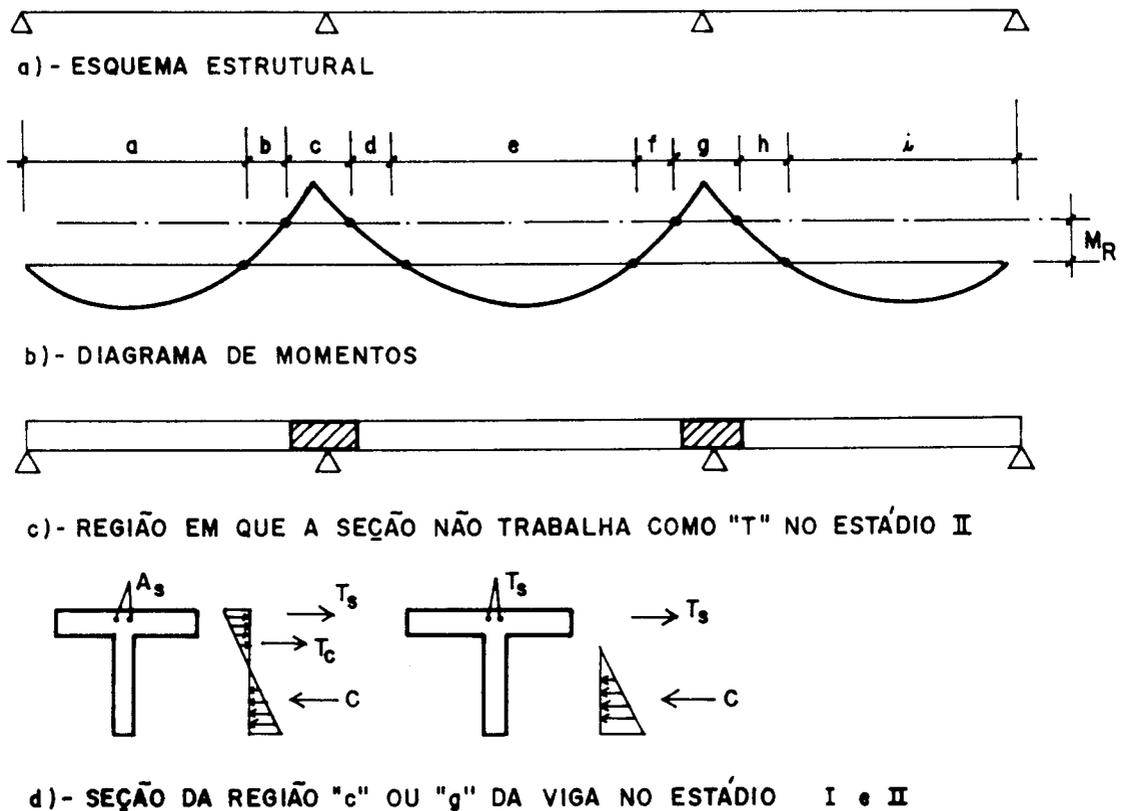


Fig. 3.13 - COMPORTAMENTO DA SEÇÃO T EM VIGA CONTÍNUA

Imaginando que a viga da figura 3.13 tenha o diagrama de momento fletores mostrado em 3.13.b, nota-se que nas regiões "c" e "g" a viga não tem características de viga T, pois a sua mesa está tracionada e a tensão no concreto ultrapassou a sua resistência à tração. Nas regiões em que o momento não ultrapassa o momento de fissuração, as seções estariam trabalhando no estágio I e com um comportamento de seção T. Para determinar as características da seção do elemento tipo viga, é preciso verificar se o comportamento é de viga T para todos os estádios. Isso depende do diagrama de momentos fletores, que, por sua vez, é função da distribuição, ao longo da peça, da rigidez. Tem-se desta forma mais uma não-linearidade.

Neste trabalho as regiões do tipo "c" e "g" serão estimadas com base nos diagramas obtidos no cálculo usual.

### 3.8. EXEMPLO DE CÁLCULO DO DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA

A seção usada aqui é a do exemplo do item 3.9 da série 1, em que são considerados os seguintes valores :

$E_c = 2,92 \times 10^4$  MPa;  $E_s = 2,1 \times 10^5$  MPa;  $A_s = 2,36$  cm<sup>2</sup>;  $A_s' = 0,39$  cm<sup>2</sup>;  $b_w = 12$  cm;  $h = 30$  cm;  $d = 27,5$  cm;  $d' = 2,5$  cm;  $f_{ct} = 2,68$  MPa.  $\beta_1 = 1,0$  e  $\beta_2 = 0,8$

A figura 3.14 mostra a seção em questão.

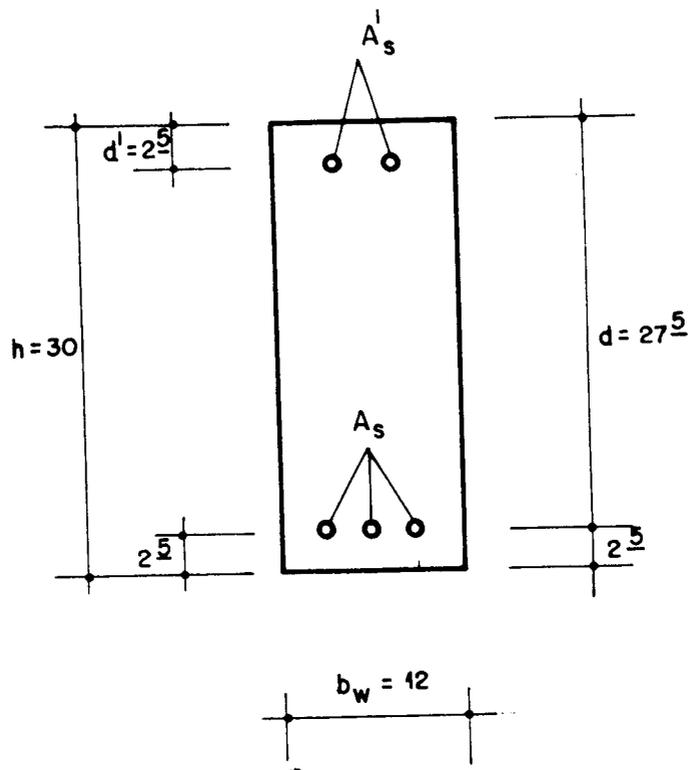


Fig. 3.14 - SEÇÃO TRANSVERSAL DO EXEMPLO DE CÁLCULO DE MOMENTO - CURVATURA

O valor de  $\alpha_e$  pode ser calculado a partir do módulo de deformabilidade do concreto e do módulo de elasticidade do aço:

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} = \frac{21}{2,92} = 7,19$$

## a) ESTÁDIO I

Com o resultado de  $\alpha_e$ , com a geometria da seção dada, chega-se a :

$$I_1 = 2,96 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$E_c \cdot I_1 = 8.643 \text{ kN.m}^2$$

$$M_r = 8,15 \text{ kN.m}$$

a curvatura no final do trecho do estádio fica sendo  $\frac{1}{r} = 8,43 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$

## b) ESTÁDIO II

Este trecho do gráfico momento-curvatura é dado pela equação 3.3.

Inicialmente calcula-se a curvatura no estádio I, correspondente ao momento fletor de fissuração.

$$\frac{1}{r_{1r}} = 9,429 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

O estádio II puro fica determinado a partir da posição da linha neutra que é dada por  $x = 0,074 \text{ m}$

A inércia correspondente é dada por:

$$I_{110} = 8,535 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

e portanto :

$$E_c \cdot I_{110} = 8,535 \cdot 10^{-5} \cdot 2,92 \times 10^7 = 2492,2 \text{ kN.m}^2$$

Desta forma pode-se determinar a curvatura no estádio II puro para o valor

do momento de fissuração

$$\frac{1}{r_{2r}} = 3,27 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

e finalmente a equação da curvatura para o estágio II

$$\frac{1}{r} = 4,01 \cdot 10^{-4} \cdot M - \frac{9,482 \cdot 10^{-3}}{M}$$

### c) ESTÁDIO III

A equação 3.4 define este trecho final do gráfico. O cálculo do momento de escoamento é feito como se segue :

$$E_c^* = 12.000 \text{ MPa}$$

$$\alpha_e = 17,5$$

$$x = 10,42 \text{ cm}$$

O valor do momento de escoamento e a curvatura correspondente são dados pelos valores:

$$M_y = 28,5 \text{ kN.m}$$

$$\frac{1}{r_y} = 1,11 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$$

Supondo inicialmente que a seção está no domínio II

$$x = 4,76 \text{ cm}$$

verificando o domínio :

$$\epsilon_c = 2,09 \cdot 10^{-3} < 0,0035$$

Assim, o momento fletor último e a curvatura correspondente ficam valendo:

$$M_u = 30,15 \text{ KN.m}$$

$$\frac{1}{r_u} = 4,39 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$$

$$\text{com } K_{III} = 38,57$$

O gráfico momento-curvatura da seção em questão é dado na figura 3.15.A pela linha contínua. A linha tracejada, que representa o estágio II puro, é obtida através da união do ponto de origem ao ponto que tem ordenadas momento de escoamento e a curvatura com a inércia do estágio II puro. O último trecho do gráfico é traçado com a inclinação proporcional a  $K_{III}$ . Notar que a curvatura devida ao momento último é muito grande quando comparada às outras, e nem aparece no gráfico.

Mostra-se na figura 3.15.B o gráfico momento-curvatura da mesma seção, usando-se a inércia média de Branson, os preceitos do CEB158 e CEB90. A única diferença entre a curva do CEB158 e CEB90 ocorre na região próxima ao momento de fissuração. No CEB158, para  $M=M_f$  há um patamar dado por BC, enquanto no CEB90 a curva tem a mesma característica que o restante do estágio II, representada no trecho por AC. O diagrama momento-curvatura, considerando a expressão de Branson, apresenta uma rigidez maior que as anteriores, no trecho inicial do estágio II, para ficar depois ligeiramente menor. Lembrar que, como a expressão de Branson não depende dos fatores  $\beta_1$  e  $\beta_2$  este aspecto pode não ocorrer sempre.

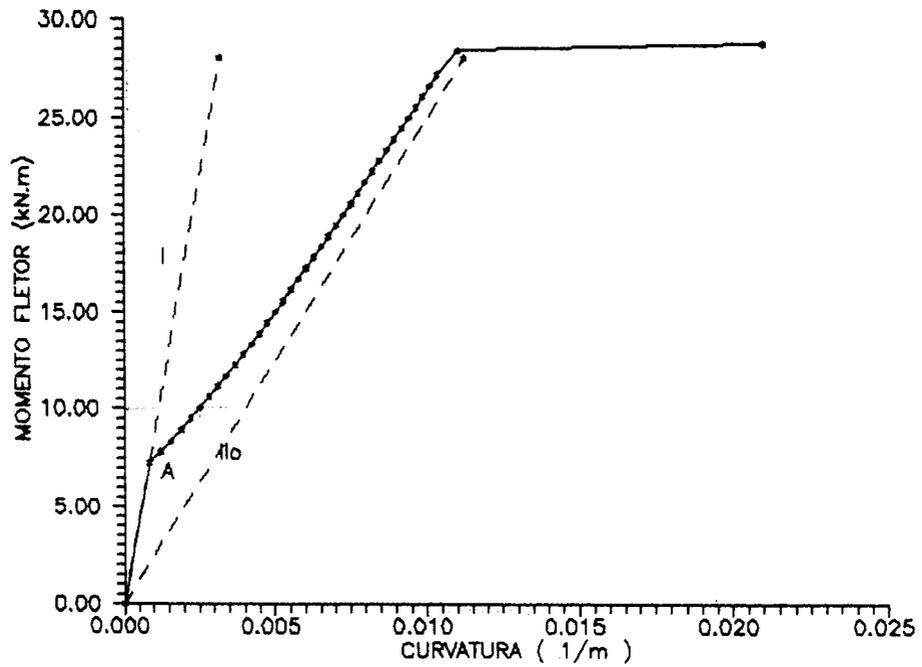


FIG.3-15A DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA SEGUNDO CEB90 SECAO TRANSVERSAL 12X30 cm E 3 0 DE 10 mm

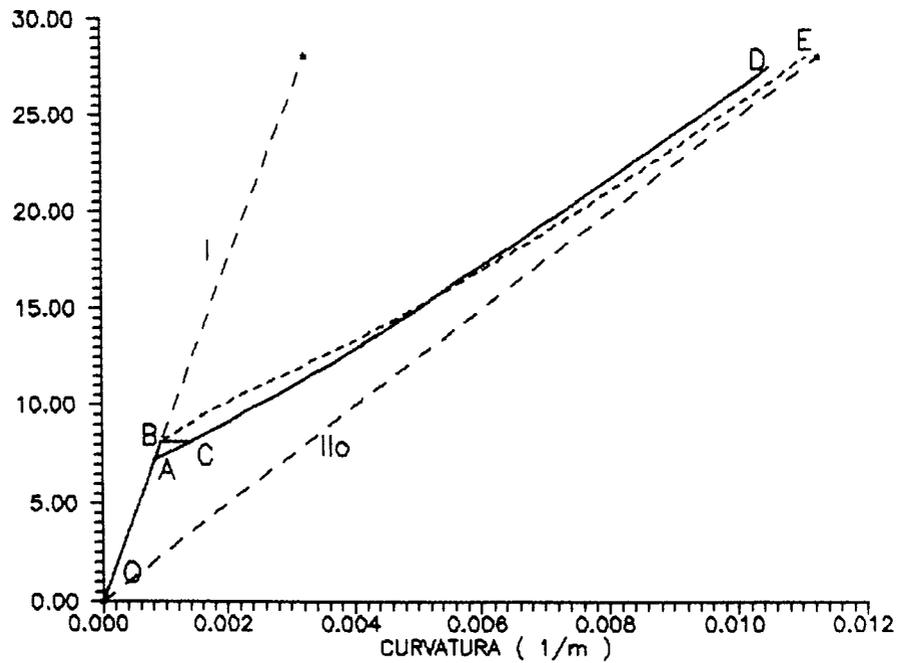


FIG.3-15B DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA SEGUNDO CEB90 (OAD),CEB158(OBCD) E BRANSON (OBE)

### 3.9. UTILIZAÇÃO DA RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA PARA DETERMINAÇÃO DE DESLOCAMENTOS DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

No sentido de comparar deslocamentos determinados pela relação momento-curvatura com o uso da inércia média, calcula-se o deslocamento do ponto central de três séries de vigas bi-apoiadas ensaiadas em laboratório. Procura-se inicialmente descrever o ensaio e a maneira como foram obtidos os resultados para em seguida comparar com os valores encontrados pelo procedimento de cálculo.

#### 3.9.1. DESCRIÇÃO DO ENSAIO

Com o intuito de pesquisar o comportamento de vigas de concreto armado à flexão foi realizado um conjunto de ensaios de vigas bi apoiadas, no laboratório de estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da USP, como pode ser visto em Alvares [1]. Os ensaios foram feitos com vigas simplesmente apoiadas submetidas a cargas concentradas nos terços, conforme mostra a fig. 3.16. O terço central da viga fica submetido a um estado de flexão simples e pura, desprezando-se o peso próprio. Indica-se na figura em questão, o pórtico de reação usado no ensaio, assim como macacos hidráulicos acionados por bomba manual que aplicam a carga na estrutura.

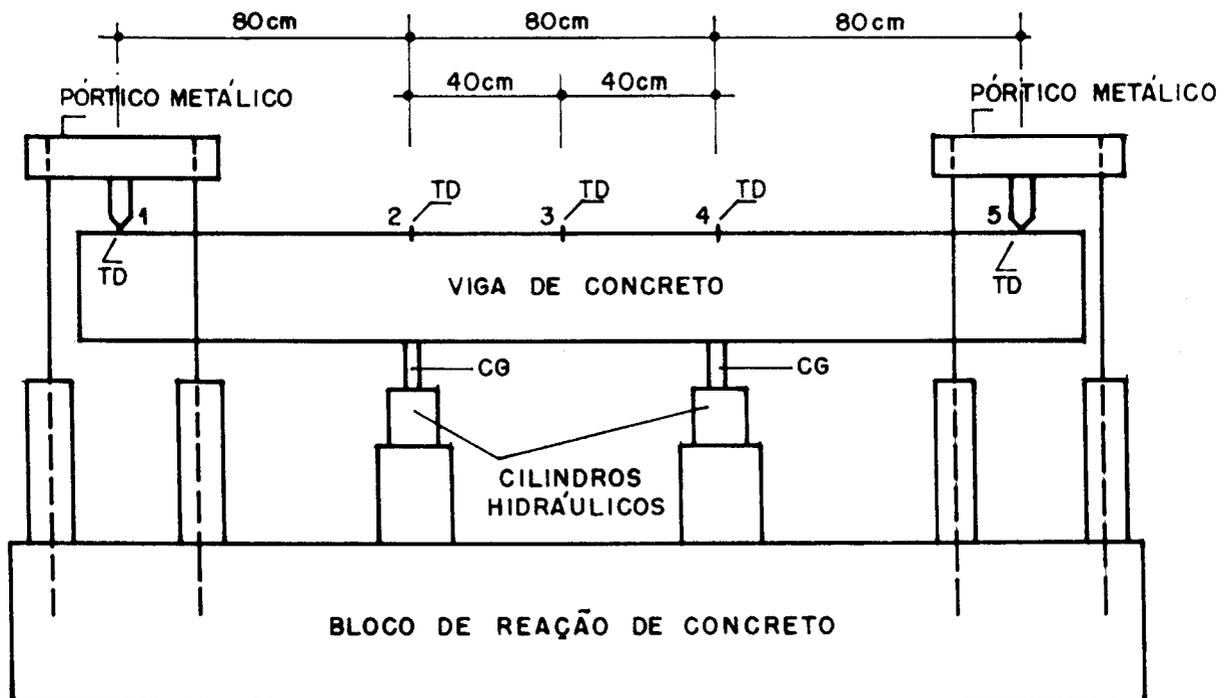


Fig. 3.16 - ESQUEMA DO ENSAIO DAS VIGAS BI-APOIADAS

Foram usados ainda os seguintes equipamentos para a obtenção de dados :

- transdutores de deslocamento (TD), para medir deslocamentos com sensibilidade de 0,025 mm

- Célula de carga (CG) para medir o valor da carga aplicada.

Foram executadas 3 séries de 2 vigas cada, com a mesma seção transversal,  $b_w = 12$  cm e  $h = 30$  cm, variando-se apenas a taxa de armadura longitudinal junto à face inferior. A armadura longitudinal e a taxa de armadura das séries são respectivamente 3  $\phi$  10 mm,  $\rho = 0,65$  % ; 5  $\phi$  10 mm,  $\rho = 1,09$  % ; 7  $\phi$  10 mm,  $\rho = 1,53$  % e apresentam a disposição mostrada na figura 3.17

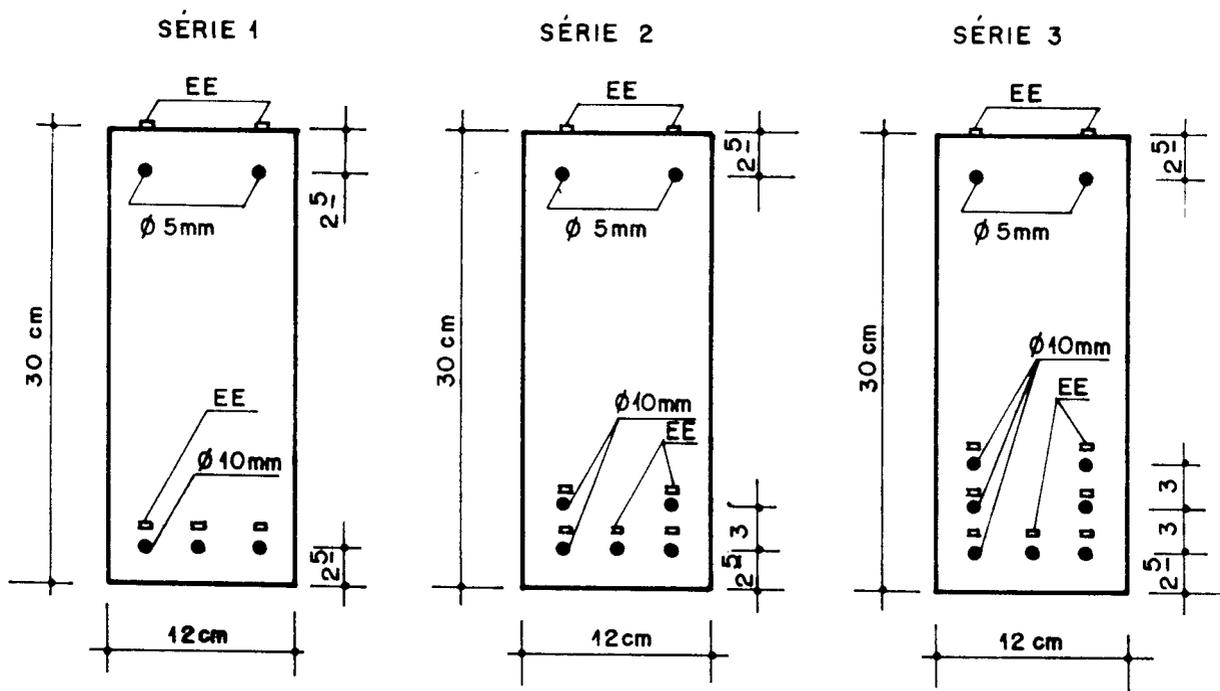


Fig. 3.17 - SEÇÃO TRANSVERSAL DAS SÉRIES DAS VIGAS ENSAIADAS

O aço empregado é o CA50A tendo portanto  $f_{yk} = 500$  MPa e  $E_s = 210.000$  MPa. Para o concreto foi usado o traço em peso de 1 : 2,42 : 4,03 e fator água cimento de 0,5, conduzindo a um consumo de cimento de  $310$  kg/m<sup>3</sup>. Os valores do módulo de deformabilidade, resistência à compressão e à tração do concreto foram obtidos de ensaios realizados com corpos de provas cilíndricos de amostras do concreto usado

nas vigas. Obteve-se o valor de 29,2 GPa para  $E_c$ . Para  $f_{ck}$  e  $f_{ctk}$  foram considerados os valores médios e não os característicos, obtidos dos ensaios correspondentes, que são, respectivamente, 24,0 e 2,68 MPa.

Os deslocamentos verticais dos pontos 1, 2, 3, 4 e 5 são medidos por transdutores. As leituras feitas devem ser trabalhadas para traduzirem os deslocamentos verticais efetivos dos pontos 2, 3 e 4, uma vez que, teoricamente, a viga bi-apoiada ensaiada tem os pontos 1 e 5 indesejáveis verticalmente, o que não pode ser garantido no ensaio. Desta forma, chamando o deslocamento efetivo e medido do ponto  $i$  de  $D_i$  e  $D_{bi}$ , respectivamente tem-se :

$$D_2 = D_{b2} - \left( \frac{2}{3} D_{b1} + \frac{1}{3} D_{b5} \right)$$

$$D_3 = D_{b3} - \left( \frac{1}{2} D_{b1} + \frac{1}{2} D_{b5} \right)$$

$$D_4 = D_{b4} - \left( \frac{1}{3} D_{b1} + \frac{2}{3} D_{b5} \right)$$

Na figura 3.18 mostra-se esquematicamente os deslocamentos envolvidos no cálculo anterior.

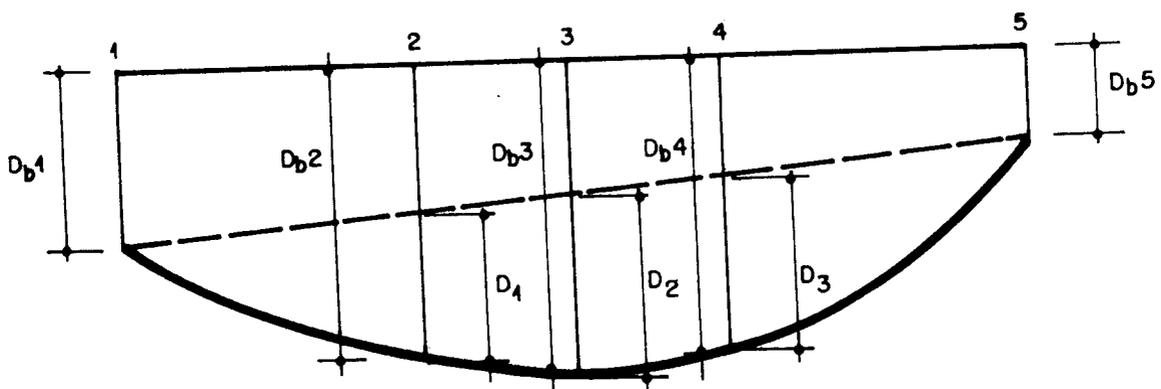


Fig. 3.18 ESQUEMA DA VIGA DEFORMADA COM DESLOCAMENTOS EFETIVOS(D) E MEDIDOS ( $D_b$ )

Através dos resultados obtidos pode-se calcular o valor da curvatura no trecho em que o momento é constante (flexão pura). Para tanto supõe-se que a viga, entre os pontos 2 e 4, após deformar-se, tem sua elástica representada por um arco de círculo. Assim a curvatura fica dada por :

$$\frac{1}{R} = \frac{2 \cdot f}{\left(\frac{l}{6}\right)^2 + f^2}$$

com  $f = D_3 - \left(\frac{D_2 + D_4}{2}\right)$  e  $l$  como sendo o vão da viga

O ensaio foi feito em etapas, medindo-se para cada uma delas a carga atuante (sempre crescente) e os deslocamentos nos pontos de 1 a 5, além das deformações medidas nos extensômetros elétricos.

Com estes valores, e levando em conta que o momento fletor no terço central é dado por  $M = P \cdot \frac{l}{3}$ , chega-se aos gráficos da figura 3.19

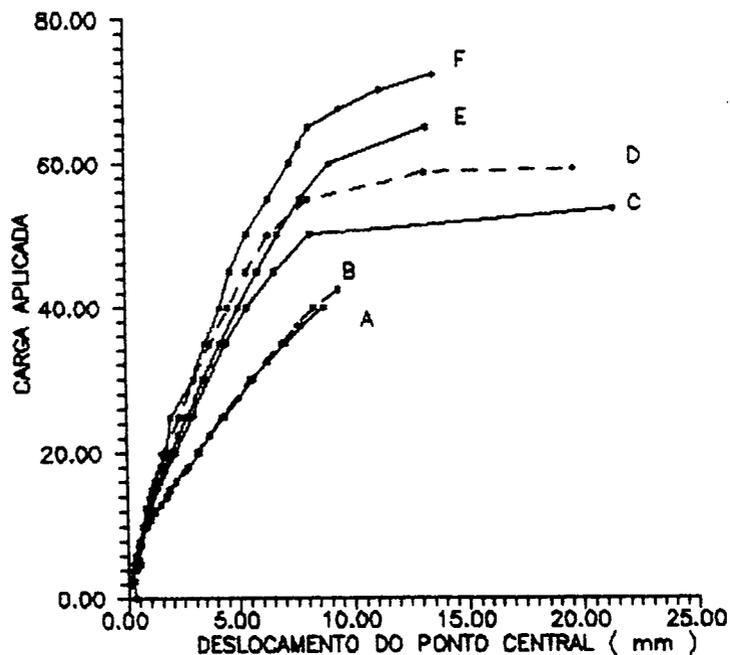


FIG.3.19 FORÇA X DESLOCAMENTO DO PONTO CENTRAL VIGA COM 3 (A,B), 5 (C,D) e 7 (E,F) Ø DE 10 mm VALORES OBTIDOS DO ENSAIO

No gráfico da figura 3.19 está representado o deslocamento do ponto central (ponto 3) das vigas ensaiadas, em função da carga aplicada. Nota-se um trecho inicial correspondente ao estágio I, em que o momento de fissuração não foi alcançado e há linearidade entre carga e deslocamento. Um segundo trecho, em que se percebe uma diminuição de rigidez da estrutura correspondente ao estágio II e, finalmente, um terceiro, em que há um aumento considerável no deslocamento, caracterizando o escoamento e a vizinhança do estado limite de ruína.

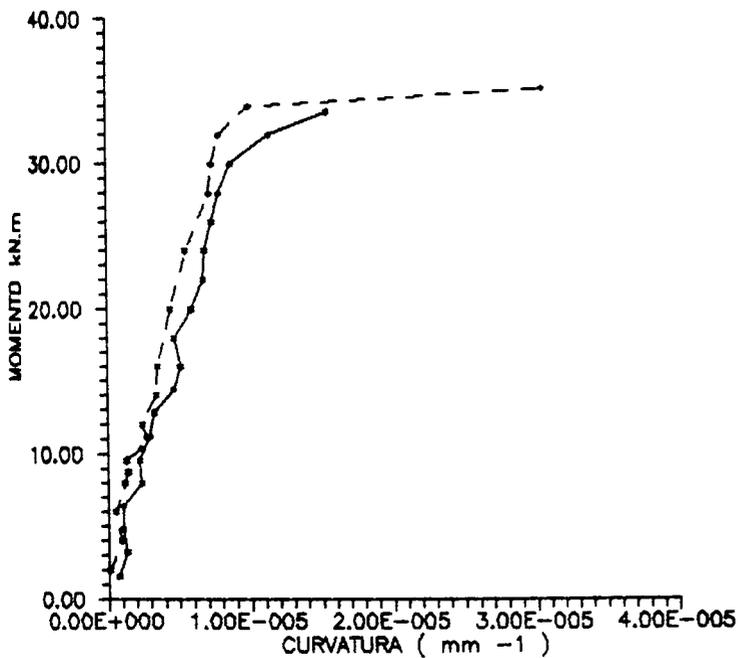


FIG. 3.20 MOMENTO X CURVATURA  
VIGA COM 3 Ø DE 10 mm

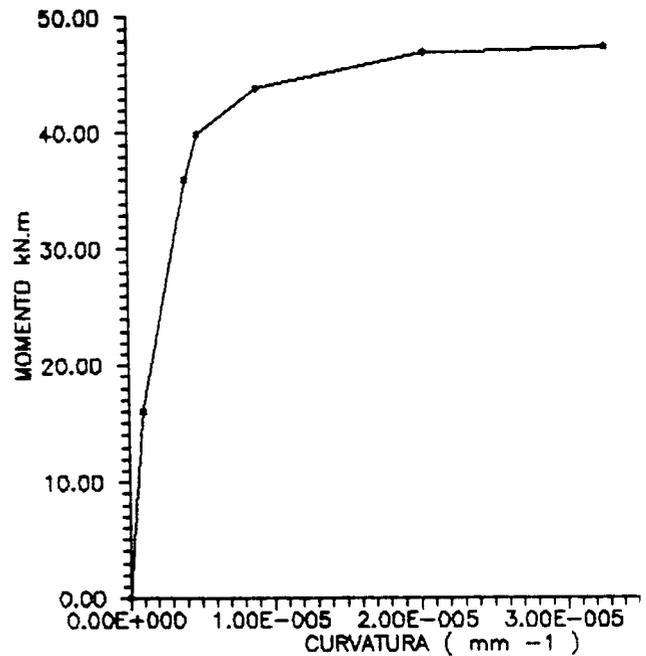


FIG.3.21 MOMENTO X CURVATURA  
VIGA COM 5 Ø DE 10 mm

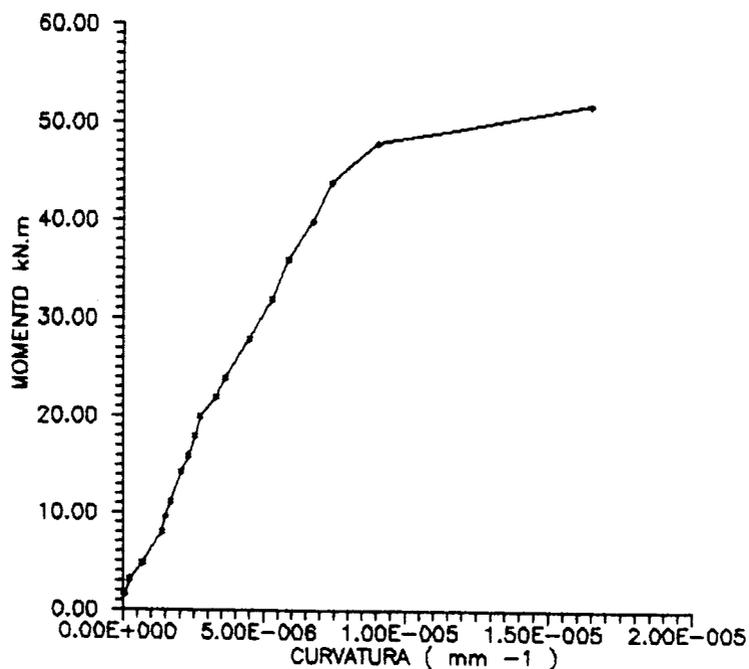


FIG. 3.22 MOMENTO X CURVATURA  
VIGA COM 7 Ø DE 10 mm

Nos gráficos 3.20, 3.21 e 3.22 são mostrados os diagramas Momento-curvatura das três séries de ensaio a partir dos valores dos deslocamentos obtidos e a formulação já apresentada. No gráfico 3.21 uma série de pontos foram desprezados pois não apresentavam valores razoáveis de curvatura. Percebe-se que não há agora uma curva bem definida como se esperava, mas isto deve ocorrer, provavelmente porque o trecho estudado tem um comprimento pequeno, portanto, qualquer desvio de leitura pode conduzir a uma diferença significativa no valor da curvatura. Dessa forma, quando o objetivo é retirar deslocamentos para obter o diagrama momento-curvatura devem ser usadas medidas de pontos mais afastados para se ter uma precisão maior nos resultados.

Pelos gráficos da figura 3.19 pode-se avaliar os momentos de fissuração para cada série de viga. Na verdade o que se pode deduzir do gráfico é o valor da carga a partir do qual o diagrama força-deslocamento muda de inclinação. Como esta observação é feita através de uma curva experimental e como o intervalo das cargas não é pequeno em torno do valor em que provavelmente se dá início à primeira fissura, os valores de momentos obtidos são só estimativos.

Para a primeira série o valor da carga é de 8 kN, para a segunda 9,4 kN e a terceira em torno de 10 kN, correspondendo assim aos valores de 6,4; 7,52 e 8 kN.m para momento de fissuração. A partir das fórmulas apresentadas anteriormente e usando os resultados dos ensaios dos corpos de prova, tem-se os seguintes valores de momento de fissuração:

$$\text{Série 1 : } M_{\text{r}} = 8,05 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{Série 2 : } M_{\text{r}} = 8,31 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{Série 3 : } M_{\text{r}} = 8,69 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

No quadro 3.1 agrupam-se os momentos de fissuração encontrados no ensaio para as três séries; quando se consideram as fórmulas deste capítulo e para quando se faz a consideração do CEB90 - de que o estágio II se inicia quando é alcançado o valor  $M_{\text{r}} \cdot \sqrt{\beta_1 \beta_2}$  (ver fig. 3.5).

coluna	A	B	C	D	E
unid.	kN.m	kN.m		kNm/m	
situação	ensaio	teórico	$r_1 = B/A$	CEB-90	$r_2 = D/A$
série 1	6,4	8,05	1,25	7,20	1,13
série 2	7,52	8,31	1,10	7,43	0,99
série 3	8,0	8,69	1,08	7,77	0,97

**QUADRO 3.1 - MOMENTOS DE FISSURAÇÃO  $M_{\text{r}}$  COMPARAÇÕES**

Observa-se no quadro 3.1 que o valor teórico de  $M_{\text{r}}$  se aproxima do obtido no ensaio, quando a taxa de armadura é alta, enquanto a proposição do CEB90 ao contrário, conduz a valores mais próximos para a taxa intermediária.

Pelos valores do momento de fissuração obtidos espera-se conseguir melhores resultados para a segunda e a terceira séries de vigas, uma vez que o momento de fissuração, no primeiro caso, é muito diferente do valor teórico.

### 3.9.2. VALORES TEÓRICOS E COMPARACÕES

Os valores dos deslocamentos podem ser obtidos a partir de integrações para etapas sucessivas de carregamento. No caso, utiliza-se um programa de grelha não linear, com carregamento incremental, e equação constitutiva do material concreto armado tirada das relações de momento-curvatura descrito no capítulo posterior. Apesar da estrutura se tratar de uma viga, pode-se fazer a análise usando o esquema de grelha, restringindo-se os diversos nós à rotação segundo o eixo longitudinal. Neste caso, para cada etapa de carga é considerada uma rigidez  $EI_m$  média para o elemento em questão. As inércias médias são dadas pelas expressões 3.11, 3.12 ou 3.14.

O esquema estrutural da viga, escolhido com a numeração dos nós e elementos, é dada na figura 3.23

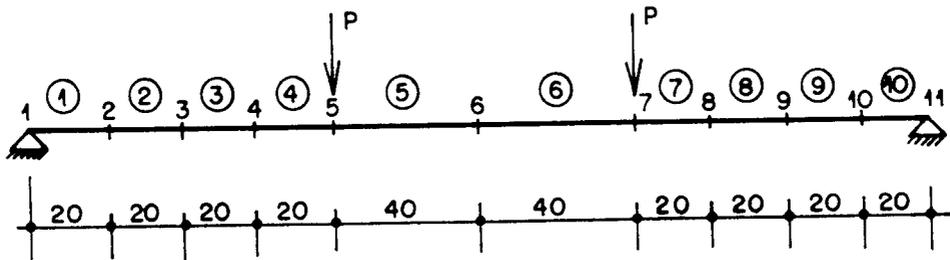


Fig. 3.23 - ESQUEMA ESTRUTURAL DA VIGA DO ENSAIO, PARA O USO DO PROGRAMA DE GRELHA

Inicialmente são calculadas as características geométricas da seção transversal de cada série que resultam em :

$$\text{série 1 --> } I_1 = 2,96 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{110} = 7,44 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$M_T = 8,05 \text{ kN.m}$$

série 2 -->  $I_1 = 3,02 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

$I_{110} = 1,01 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

$M_r = 8,31 \text{ kN.m}$

série 3 -->  $I_1 = 3,11 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

$I_{110} = 1,29 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

$M_r = 8,69 \text{ kN.m}$

Na figura 3.24 é mostrado o gráfico de carga-deslocamento vertical do ponto central, usando as expressões de inércia de Branson, Manual do CEB e CEB90 para a viga com 3 ferros de diâmetro  $\phi=10 \text{ mm}$  e considerando 30 etapas de carga e os resultados do ensaio.

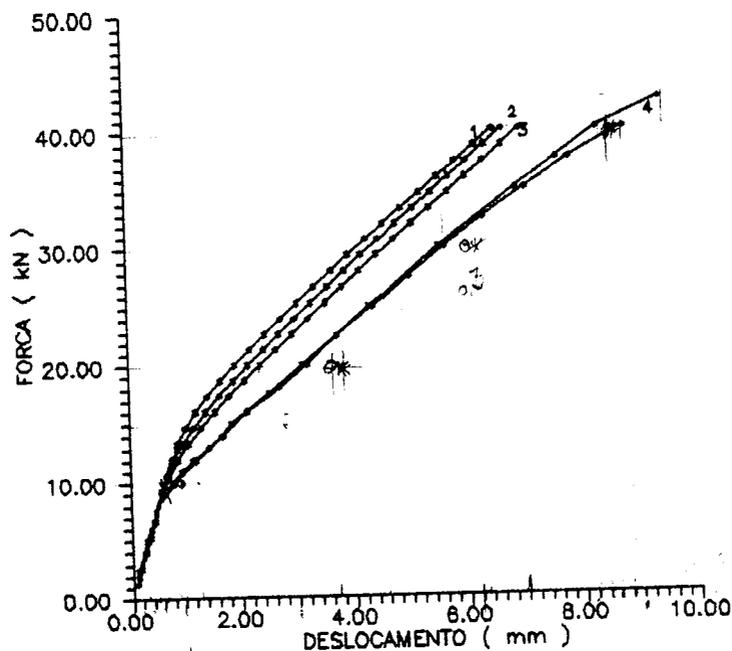


FIG.3.24 FORÇA X DESLOCAMENTO DO PONTO CENTRAL  
VIGA COM 3  $\phi$  10: 1)BRANSON 2)MANUAL CEB 3)CEB90  
4) ENSAIOS-- NÚMERO DE ETAPAS UTILIZADAS 10

Percebe-se que o modelo de Branson conduz aos menores deslocamentos, ou seja, indicando uma maior rigidez da estrutura. Seguem-se os modelos do manual do CEB e o modelo de CEB90 no sentido de estrutura menos rígida, porém ressalta-se

que as diferenças são pequenas.

Verifica-se, como era de se esperar, que a concordância nos resultados, para este caso, não é tão boa, pois o valor do momento de fissuração teórico é bem diferente do obtido no ensaio. Desta maneira resolveu-se novamente o problema usando o momento de fissuração obtido no ensaio, ou seja,  $M_f=6,4$  kN.m, e para corrigir a inclinação do diagrama carga-deslocamento, usou-se  $E_c=23,36$  GPa. Nesta situação, a concordância dos resultados é quase total. O diagrama carga-deslocamento para a situação, junto com os dos ensaios são mostrados na fig. 3.25.

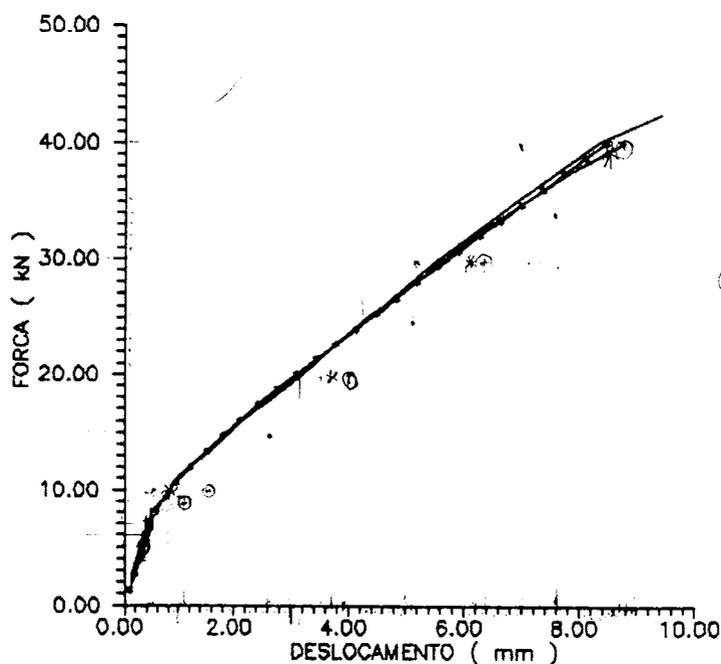


FIG.3.25 FORÇA X DESLOCAMENTO DO PONTO CENTRAL  
VIGA COM 3  $\phi$  10; VALORES DE ENSAIO E DO PROGRAMA  
COM CEB90  $M_R=6,4$  kN.m ;  $E_c=23,36$  GPa

Na fig. 3.26 estão representados os resultados obtidos para 30 etapas dos três modelos (Branson, Manual CEB e CEB90) para a viga da série com 5  $\phi$  de 10 mm. Nota-se que também nesta situação há uma proximidade grande de valores obtidos pelo programa com os resultados do ensaio.

Finalmente, na figura 3.27, estão mostrados o resultados obtidos para 30 etapas com os três modelos e os resultados dos ensaios da série de 7  $\phi$  de 10 mm. Assim como nas situações anteriores há uma proximidade grande entre os valores.

Percebe-se também que há pouca diferença entre os resultados obtidos por cada um dos três procedimentos.

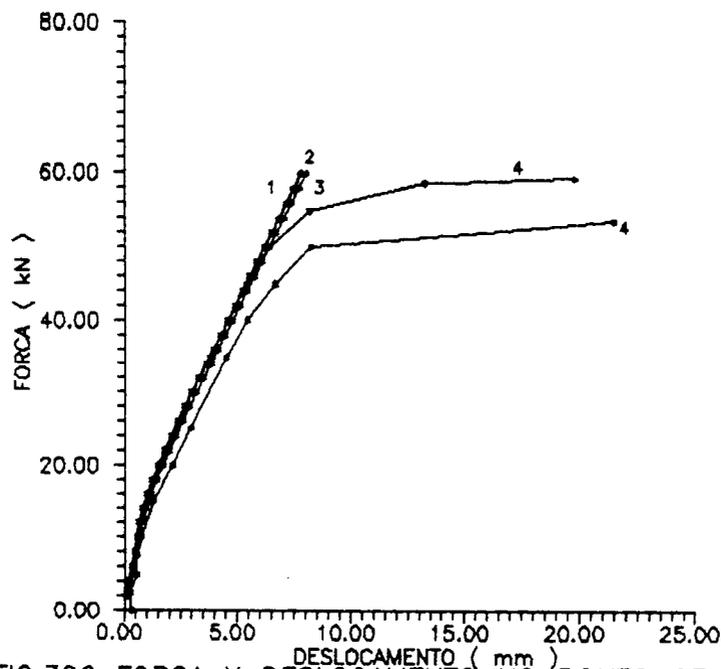


FIG.3.26 FORÇA X DESLOCAMENTO NO PONTO CENTRAL VIGA COM 5 Ø DE 10 mm - UTILIZADO 30 ETAPAS  
 1) BRANSON 2) MANUAL CEB 3) CEB90 4) ENSAIOS.

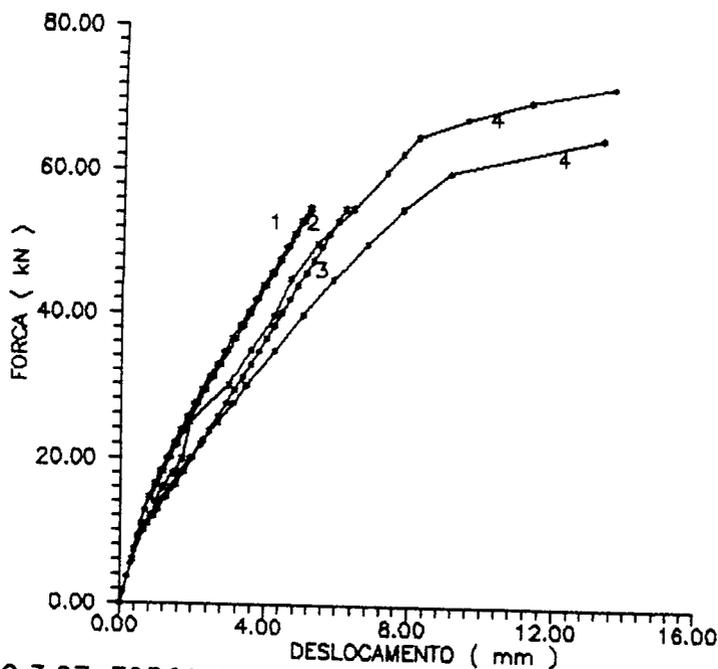


FIG.3.27 FORÇA X DESLOCAMENTO PONTO CENTRAL VIGA COM 7 Ø DE 10 mm 30 ETAPAS UTILIZADAS  
 1) BRANSON 2) MANUAL CEB 3) CEB90 4) ENSAIOS

### 3.10. COMPORTAMENTO NA TORÇÃO

O comportamento das peças de concreto à torção é estudado via de regra de forma independente dos demais esforços.

A maioria dos ensaios disponíveis estão relacionados à torção simples e são adotados como aproximação para os casos de solicitações compostas (Leonhardt [27]). Considera-se aqui que o empenamento das seções transversais não está restringido, sendo desta forma, só levada em conta a torção de Saint-Venant.

Sob o ponto de vista prático é importante destacar dois tipos de momento de torção que podem surgir em uma estrutura de concreto armado.

O primeiro seria resultado de ações de coação, como por exemplo o efeito de pilares, que impedem a rotação de vigas periféricas de uma laje segundo seu próprio eixo longitudinal. Este tipo de esforço não é necessário para manter o equilíbrio da peça, e desta forma pode ser desprezado para efeito de cálculo. Porém, não resta dúvida de que deve ser considerado quando se deseja investigar de uma maneira mais aproximada a deformação da estrutura. É preciso adiantar que a rigidez à torção no estágio II é bem mais baixa que a do estágio I; assim, é bom verificar se no nível dos esforços de utilização este estado não é alcançado.

O segundo tipo de esforço é aquele que é necessário ao equilíbrio, como no caso de uma marquise engastada em uma viga. Nesta situação, o cálculo deve ser feito considerando a torção e verificando também a deformação.

O caso mais corriqueiro de seção para estruturas de pavimentos de prédio, é sem dúvida, o de forma retangular. Assim, neste trabalho, só será estudado este tipo de seção transversal.

Na figura 3.28 é mostrado um gráfico da relação momento de torção-rotação (a rotação estará sempre referida a um trecho unitário), indicando os principais trechos deste.

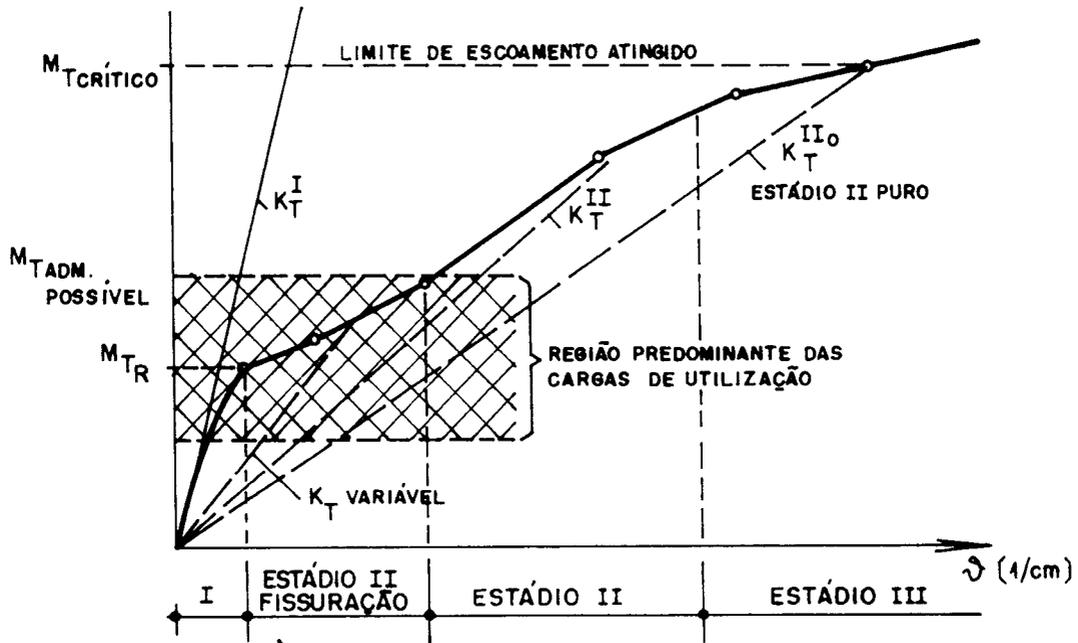


Fig. 3.28 - DIAGRAMA MOMENTO DE TORÇÃO-ROTAÇÃO DE UMA PEÇA DE CONCRETO ARMADO

### 3.11. TORÇÃO - ESTÁDIO I

Pode-se dizer, de uma forma geral, que no estágio I, quando toda a seção de concreto está íntegra, as tensões podem ser calculadas pelos conceitos da resistência dos materiais. Neste sentido, é apresentada, a seguir, a tabela 1, que contém os coeficientes necessários para o cálculo da inércia e módulo resistente à torção de seções transversais retangulares.

TABELA 1

$I_t = j b^3 . h$ ;  $W_t = W b^2 h$ ;  $n = b/n$

$\eta$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$W$	0.333	0.312	0.291	0.273	0.258	0.246	0.237	0.229	0.221	0.214	0.208
$j$	0.333	0.312	0.291	0.270	0.249	0.229	0.209	0.189	0.171	0.155	0.141

No estágio I pode-se perceber que a relação momento-rotação apresenta um decréscimo antes que as fissuras de torção apareçam. Isto deve-se ao fato de que o núcleo da seção não participa da resistência à torção, e as tensões aumentam de dentro para fora da mesma, provocando um estado de microfissuração que faz com que a rigidez diminua.

Assim, Leonhardt [27] recomenda que o valor de rigidez à torção deve ser dado por:

$$K_{It} = 0,7 G I_t$$

Considerando que

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

e supondo  $\nu = 0,15$  chega-se a  $G = 0,43 E$  e desta forma

$$K_{It} = 0,30 E I_t \quad (3.25)$$

que é a expressão do CEB90

Segundo Leonhardt [26] a porcentagem de armadura, quando se usa armadura longitudinal e estribos verticais, não influi na rigidez à torção do estágio I, sendo desta forma desprezada neste cálculo.

### 3.12. TORÇÃO- ESTÁDIO II

Leonhardt define dois trechos para o estágio II. Um primeiro em que se inicia a formação de fissuras e fica definido através do momento de fissuração à torção designado por  $M_{TR}$ . Este é obtido a partir da máxima tensão de tração que ocorre na seção. O valor da máxima da tensão de tração, segundo ensaios realizados é de

$$\sigma_t = 0,47 \beta_W^{2/3} \text{ (kgf / cm}^2\text{)} \quad \text{e portanto}$$

$$M_{TR} = W_t \cdot \sigma_t \quad (3.26)$$

com  $\beta_w$  igual à resistência característica do concreto à compressão com o corpo de prova cúbico.

O coeficiente de rigidez segundo Leonhardt [27], Ghali [22], pode ser obtido através da análise de uma treliça espacial em que a armadura longitudinal, distribuída no perímetro da seção e a transversal, trabalham tracionadas e as bielas de concreto trabalham à compressão, como indica a figura 3.29

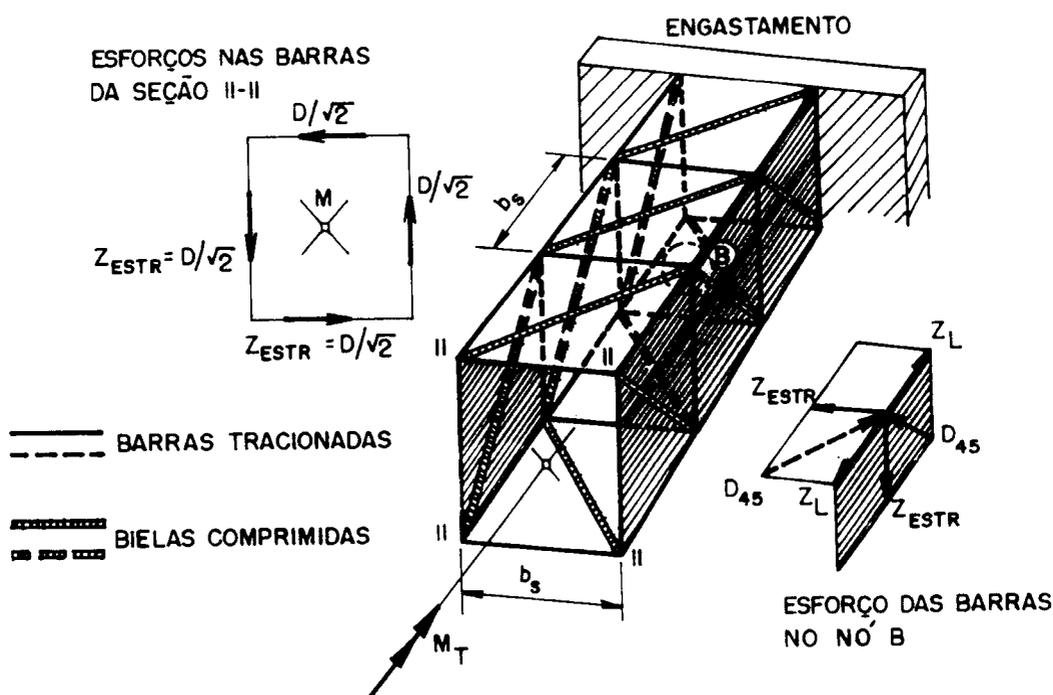


Fig. 3.29 - TRELIÇA ESPACIAL QUE REPRESENTA O FUNCIONAMENTO DA PEÇA DE CONCRETO ARMADO SOLICITADO À TORÇÃO

Ultrapassado o momento de fissuração supõe-se que apenas uma região da seção trabalha. É delimitada pelo contorno da peça e o contorno interno paralelo e com distância de  $h_1$  do primeiro, ou com os contornos paralelos ao da peça, com espessura  $h_1$  e centrados pela linhas que unem as barras de canto (ver fig 3.30 ). O valor de  $h_1$  fica definido por :

$$h_1 = \frac{b_s}{5} \quad \text{se} \quad b_s < \frac{5b}{6} \quad \text{e}$$

(3.27)

$$h_1 = \frac{b_s}{6} \quad \text{se} \quad b_s \geq \frac{5b}{6}$$

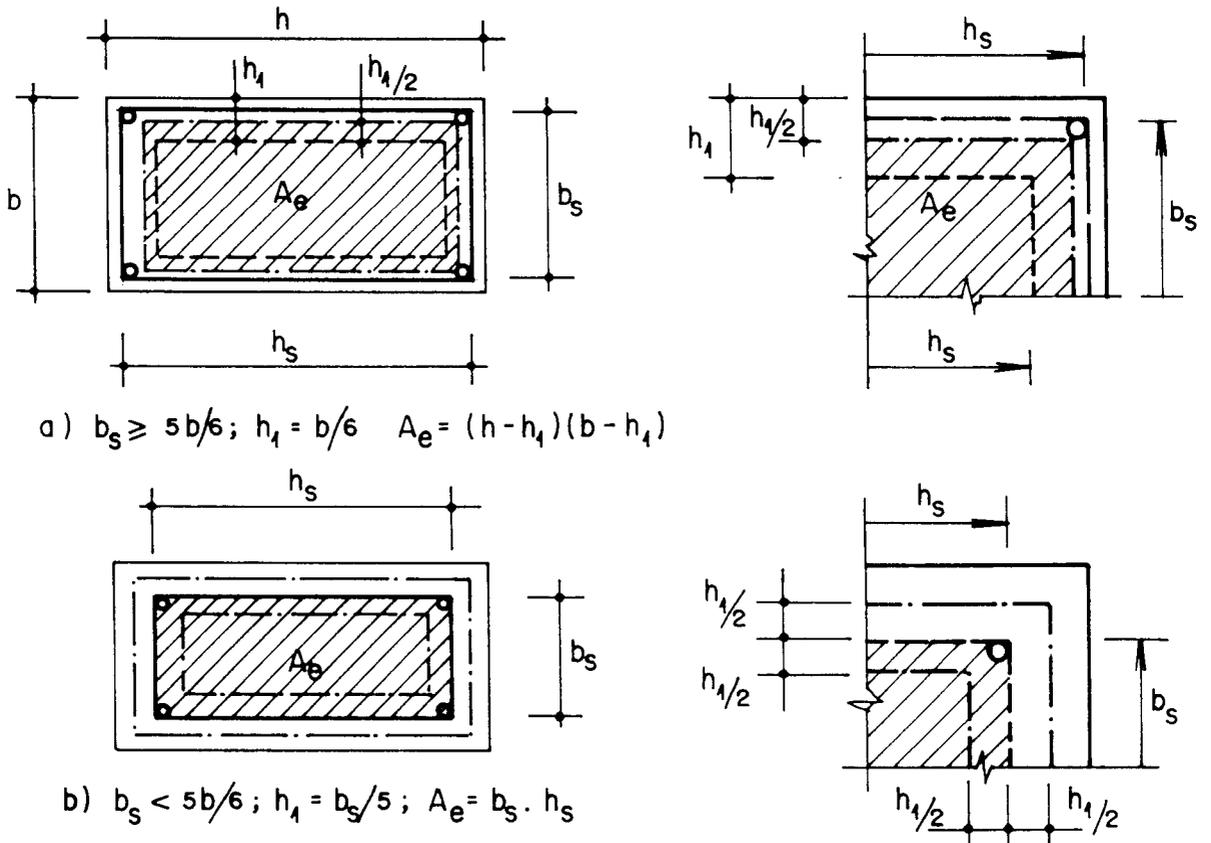


Fig. 3.30 - SITUAÇÕES A SEREM CONSIDERADAS PARA A SEÇÃO TRANSVERSAL NO ESTÁDIO II SOLICITADA À TORÇÃO

Calculando-se a rigidez a partir da treliça espacial da figura 3.18, onde se considera que as fissuras se desenvolvem segundo um ângulo de  $\theta$ , chega-se à expressão :

$$K_{ll,t} = \frac{4 E_s A_e^3}{u_e^2} \times \frac{1}{\frac{\cotg^2 \theta}{\rho_1} + \frac{\tg^2 \theta}{\rho_s} + \frac{4 A_e E_s}{u_e E_c h_1 \sin^2 (2\theta)}}$$

se for considerado  $\theta = 45^\circ$

$$K_{II,t} = \frac{4 E_s A_e^3}{u_e^2} \times \frac{1}{\frac{1}{\rho_l} + \frac{1}{\rho_s} + \frac{4 A_e E_s}{u_e E_c h_1}} \quad (3.28)$$

Com:

$\rho_l, \rho_s$  - taxas de armadura longitudinal e transversal ;

$A_e$  - área limitada pela linha média da parede fictícia;

$u_e$  - perímetro de  $A_e$

Porém Leonhardt lembra que os resultados obtidos em ensaios indicam valores de tensões nas armaduras abaixo dos valores encontrados pela teoria da biela, e recomenda, portanto, que seja utilizado então o valor

$$K_{II,t} = \frac{4 E_s A_e^3}{u_e^2} \times \frac{1}{\kappa_T \left( \frac{1}{\rho_l} + \frac{1}{\rho_s} \right) + \frac{4 A_e E_s}{u_e E_c h_1}} \quad (3.29)$$

com:

$$\kappa_T = \frac{M_T - 0,7 M_{TR}}{M_{T,cr} - 0,7 M_{TR}}$$

e ainda

$$M_{T,cr} = 2 \cdot A_e \cdot f_{yk} \cdot \frac{A_{sl}}{u} \quad (3.30)$$

Ou seja, o momento crítico, ou máximo é alcançado com o escoamento da armadura.

Já o CEB 90 considera para o estágio II só com torção o valor

$$K_{II,t} = 0,10 \cdot E_c \cdot J_t \quad (3.31)$$

Quando há esforços de torção e de cisalhamento oriundos da flexão, Leonhardt recomenda a utilização de fatores corretivos na curvatura de torção e de flexão. Este caminho não nos interessa aqui, pois o objetivo é o cálculo do coeficiente de rigidez equivalente. Cabe ressaltar que, nesta situação, é difícil tentar usar o modelo da treliça espacial pois as fissuras passam a ter inclinações variáveis em função da interação dos esforços.

O CEB90 propõe também, para o caso de haver interação entre os esforços tangenciais de cortante e torção, uma formulação bem simples que resulta :

$$K_{It,f} = 0,05 \cdot E_c \cdot J_t \quad (3.32)$$

Resta considerar que talvez o momento crítico de torção seja alcançado quando a tensão de compressão na biela for máxima, pela norma brasileira fica:

$$\tau_t = \frac{M_t}{2 \cdot A_e \cdot h_e} \quad (3.33)$$

como

$$\tau_{t,cr} = 0,30 f_{ck} \quad \text{ou} \quad 35 \text{ MPa}$$

$$M_{t,cr} = 0,60 \cdot A_e \cdot h_1 \cdot f_{ck} \quad (3.34)$$

Será dada aqui prioridade à formulação do CEB90, embora fique claro que é necessário melhorar o estudo do assunto para se conseguir definir o problema. Como há o interesse nas ações combinadas de flexão, o diagrama momento torçor-rotação ficará como indica a figura 3.31.

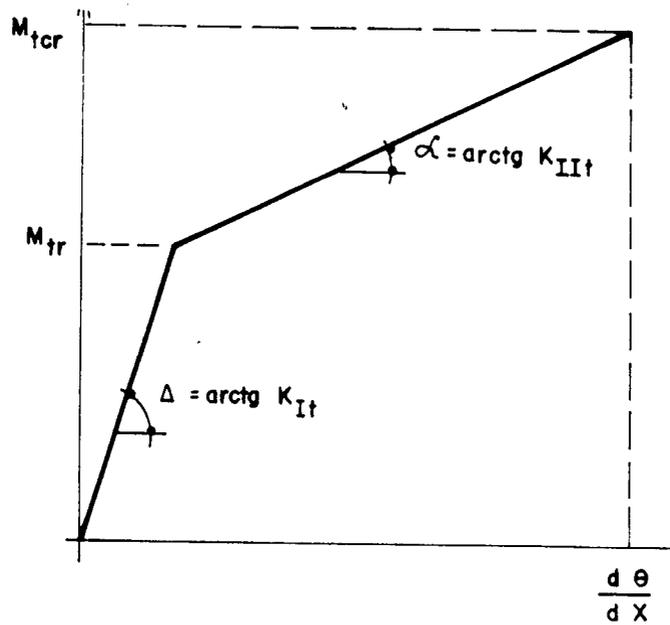


Fig. 3.31 - DIAGRAMA DE MOMENTO DE TORÇÃO-ROTAÇÃO

### 3.13. EXEMPLO DO DIAGRAMA MOMENTO DE TORÇÃO-ROTAÇÃO

Para ilustrar as fórmulas discutidas são calculados aqui os valores necessários para o traçado do diagrama momento-rotação para a seção retangular dada na figura 3.32.

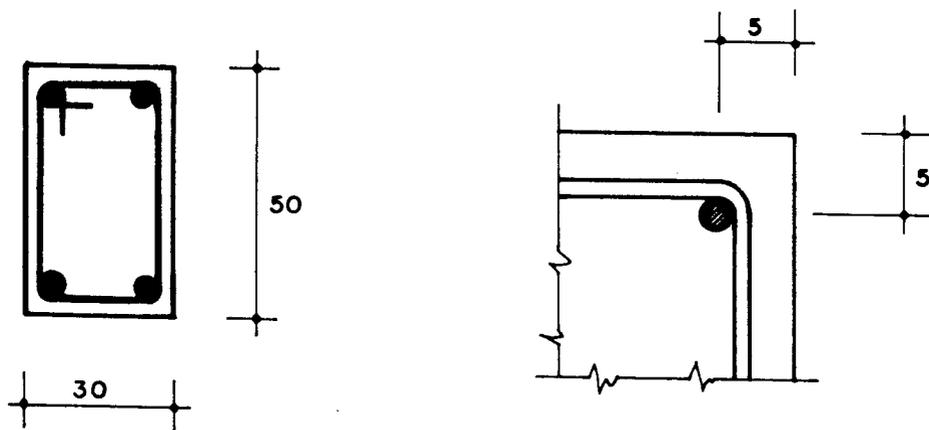


Fig. 3.32 - SEÇÃO TRANSVERSAL PARA O EXEMPLO DO CÁLCULO DO DIAGRAMA DE MOMENTO DE TORÇÃO-ROTAÇÃO

**estádio I**

$$\alpha = 6$$

assim da tabela 1 tem-se  $j = 0,209$  e  $w = 0,237$  desta forma

$$K_{It} = 25816 \text{ kN.m}^2$$

$$\sigma_1 = 1640 \text{ kN/m}^2$$

$$M_{tr} = 17,49 \text{ N.m}$$

**estádio II**

considerando a formulação do CEB tem-se

$$K_{II,t,f} = 4300 \text{ kN.m}^2$$

com o recobrimento da armadura de 5 cm tem-se

$$h_1 = 4 \text{ cm}$$

$$A_{ef} = 0,08 \text{ m}^2$$

$$M_{t,cr} = 33,6 \text{ N.m}$$

Usando o formulário de Leonhardt

considerando  $A_{sl} = 13,5 \text{ cm}^2$  e usando (3.30)

$$M_{T,cr} = 90 \text{ N.m}$$

$$\kappa_T = 0,0111 M_T - 0,137$$

então para  $M_{TR} < M_T < M_{T,cr}$  tem-se :

$$K_{II,t} = 331 \text{ kN.m}^2$$

Na figura 3.21 apresenta-se o diagrama momento de torção-rotação para formulação do CEB90 e Leonhardt.

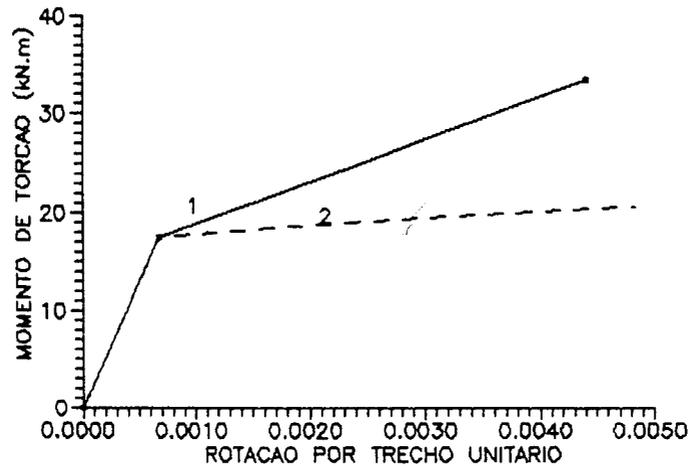


FIG. 3-33 MOMENTO DE TORÇÃO-ROTAÇÃO, 1-CEB 2-LEDNHARDT

### 3.14. DEFORMAÇÕES AO LONGO DO TEMPO

O estado de deformação de uma estrutura muda ao longo do tempo, podendo haver também mudança no estado de tensões. Os principais fenômenos causadores deste efeito, nos pavimentos de concreto armado, são a relaxação do aço, a fluência e a retração do concreto. No presente trabalho não é abordado estudo de peças protendidas, assim, a relaxação e a retração têm um efeito pequeno. A retração, quando ocorre em peças fletidas, com seção transversal simétrica, não tem influência nos deslocamentos. Como normalmente as armaduras dos elementos de placa e de viga não são simétricas haveria uma influência da retração, mas, ainda assim pequena, e portanto, será desprezada. Desta forma, só se leva em conta o efeito da fluência do concreto.

No estudo da fluência considera-se aqui, que as ações permanentes que a causam não variam com o tempo. As ações consideradas permanentes são neste caso, o peso próprio estrutural e sobrecargas de caráter permanente. As cargas acidentais só provocarão deformações imediatas. Supõe-se que, em princípio, o período de tempo entre a ação do peso próprio estrutural e a sobrecarga permanente, normalmente

devida a revestimento, pavimentos, etc, seja pequeno podendo ser ou não considerado.

O módulo de deformabilidade do concreto  $E_c$  aumenta com a idade do concreto, mas para fins práticos pode ser considerado constante e o valor de referência a ser adotado será o de 28 dias de idade -  $E_{c,28}$ . Assim, uma vez carregada, e mantida a carga constante, uma peça de concreto apresentará uma deformação instantânea que aumenta com o tempo. A deformação específica do concreto no tempo  $t$  é dada pela expressão :

$$\epsilon_c(t) = \frac{\sigma_0(t_0)}{E_{c,28}} \left[ 1 + \phi(t, t_0) \right] \quad (3.35)$$

onde  $\phi(t, t_0)$  é o coeficiente de fluência para o tempo  $t$  devido à ação permanente incidindo no concreto desde o tempo  $t_0$ .

Se a ação causadora da fluência não se mantiver constante ao longo do tempo, pode-se usar a mesma expressão considerando o fator de forma, menor que um, chamado  $\chi$  - coeficiente de ajustamento de idade. Este fator procura representar que a deformação de fluência devida a uma ação variável é menor do que quando é constante. Deste modo a expressão anterior fica:

$$\epsilon_c(t) = \frac{\sigma_0(t_0)}{E_{c,28}} \left[ 1 + \chi \cdot \phi(t, t_0) \right] \quad (3.36)$$

Supondo que a condição estática da estrutura não varie com o tempo e que haja uma homogeneidade do material (concreto armado), ou mesmo que a mudança de suas características durante a fissuração possa, para efeito de fluência e relaxação, ser desprezada, haverá apenas aumento de deformação sem variação de esforços internos. Não havendo protensão e o estado de tensão não variando com o tempo, pode-se dizer neste caso que não haverá necessidade de considerar o coeficiente  $\chi$ .

Uma hipótese considerada razoável é a que supõe a linearidade dos efeitos de fluência, quando o intervalo de tempo não é muito grande e, quando a intensidade dos esforços permanentes não é muito alta. Assim, podem ser somadas parcelas de deformação de períodos de tempo parciais para se obter a deformação final.

Considerando assim a superposição de efeitos, tem-se para expressão da curvatura, seja no estágio I ou II :

$$\left(-\frac{1}{r}\right)_t = \left(-\frac{1}{r}\right)_{t_0} + \left(-\frac{1}{r}\right)_{t,\phi} \quad (3.37)$$

Pode-se simplificar mais ainda o cálculo fazendo-se :

$$w_t = w_{t_0} \cdot \left[ 1 + \phi(t, t_0) \right]$$

onde  $w_t$  é o deslocamento vertical em um ponto genérico da estrutura no tempo  $t$  e  $w_{t_0}$  idem no tempo  $t_0$ .

### 3.15. FUNÇÃO FLUÊNCIA

O fator de fluência  $\phi$  que permite calcular o deslocamento de um ponto no instante genérico  $t$  está bem definido a partir do item 7.1 da NBR 7197 [3] e tem como expressão :

$$\phi = \phi_a + \phi_f + \phi_d \quad (3.38)$$

com

$$\phi_a = 0,8 \cdot \left[ 1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad (3.39)$$

$$\text{com } \frac{f_c(t)}{f_c(t_\infty)} = \frac{9t(t+42)}{(9t+40)(t+61)} \quad (\text{para } \alpha=1 \quad T=20^\circ\text{C e } t=t_0)$$

$$\phi_f = \phi_{f_\infty} \left[ \beta_f(t) - \beta_f(t_0) \right] \quad (3.40)$$

$$\text{com } \phi_{f\infty} = \phi_{1,c} \cdot \phi_{2,c}$$

$$\phi_{1,c} = 4,45 - 0,035 U$$

$$\phi_{2,c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}} \quad \text{com } h_{fic} \text{ em cm}$$

$$h_{fic} = \gamma \cdot \frac{2 \cdot A_c}{u}$$

U - umidade relativa

$\gamma$  - dado pela NBR 7197 e dependendo da umidade relativa do ambiente.

$A_c$  - área da seção transversal de concreto

u - parte do perímetro da seção transversal em contato com o ar.

O valor  $\beta_f$  que dá a variação ao longo do tempo fica determinado por:

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + A \cdot t + B}{t^2 + C \cdot t + D}$$

sendo que :

$$A = h_{fic}^3 - 350 \cdot h_{fic}^2 + 588 \cdot h_{fic} + 113$$

$$B = h_{fic}^3 - 3060 \cdot h_{fic}^2 + 3234 \cdot h_{fic} - 23$$

$$C = -200 \cdot h_{fic}^3 + 13 \cdot h_{fic}^2 + 1090 \cdot h_{fic} + 183$$

$$D = 7597 \cdot h_{fic}^3 - 31916 \cdot h_{fic}^2 + 35343 \cdot h_{fic} + 1931$$

com  $h_{fic}$  em m e t em dias

$$\phi_d = \phi_{d,\infty} \cdot \beta_d(t - t_0) \quad (3.41)$$

$$\phi_{d,\infty} = 0,4$$

$$\beta_d(t - t_0) = \frac{t - t_0 + 20}{t + t_0 + 70}$$

Todas as fórmulas são válidas para  $\alpha=1$ ,  $T=20^{\circ}\text{C}$ , ou seja, para concreto que tem endurecimento normal e quando a temperatura ambiente é em média,  $20^{\circ}\text{C}$ . Sem essas condições deve-se usar a idade fictícia do concreto, definida pela expressão dada abaixo:

$$t = \alpha \sum_i \frac{T_i + 10}{30} \cdot \Delta t_{ef,i} \quad (3.42)$$

O valor de  $\alpha$  é igual a 1, 2 ou 3. Para o cimento ARI o valor a ser usado é igual a 3, 2 para os CP 200, 320 e 400, e 1 para os demais.

$T_i$  - temperatura média diária do ambiente em graus centígrados

$\Delta t_{ef,i}$  - período, em dias, durante o qual a temperatura média do ambiente,  $T_i$ , pode ser admitida constante.

O emprego de expressões analíticas com polinômios se justifica na medida em que é interessante determinar os coeficientes através de programas de computador.

### 3.16. CONSIDERAÇÕES PARA O CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS AO LONGO DO TEMPO

Os esforços das estruturas aqui são obtidos carregando-a de forma incremental. Para determinar o estado de deslocamento em um tempo  $t$ , seria preciso, em princípio, usarem-se incrementos de tempo. Porém considerando a linearidade da fluência, conforme descrito em 3.14, basta conhecer o estado de deslocamento no tempo zero para algumas etapas de carga.

É necessário armazenar o estado de deslocamento no tempo zero da estrutura devido à ação da carga permanente estrutural ( $g_1$ ), da sobrecarga permanente ( $g_2$ ) e finalmente da carga acidental ( $q$ ). Assim, o programa de resolução deve armazenar, em um arquivo próprio, os deslocamentos quando a intensidade do carregamento alcançar o valor correspondente a  $g_1$ , também quando o valor alcançar  $g_1 + g_2$  e finalmente quando ocorrer  $g_1 + g_2 + q$ . É feito assim pois este tipo de solução está baseado na acumulação de esforços e deslocamentos do incremento considerado com os anteriores. O efeito isolado de  $g_2$  ou  $q$  é obtido por subtração dos valores arquivados.

Uma vez feito o armazenamento das informações anteriores, o estado de deslocamento no tempo  $t$  da estrutura pode ser obtido por:

$$w(t) = w_{g_1} \cdot [1 + \phi(t, t_0)] + w_{g_2} \cdot [1 + \phi(t, t_1)] + w_q \quad (3.43)$$

$w(t)$  - deslocamento nodal total no tempo  $t$

$w_{g_1}$  - idem para ação permanente estrutural

$w_{g_2}$  - idem para ação sobrecarga permanente

$w_q$  - idem para ação acidental

$\phi(t, t_0)$  - coeficiente de fluência para o período  $t, t_0$

$\phi(t, t_1)$  - idem para o período  $t, t_1$

Assim, desta maneira, calcula-se o estado de deformação da estrutura para um tempo genérico  $t$ .

## CAPÍTULO 4 - CONSIDERAÇÃO DA NÃO-LINEARIDADE FÍSICA DO MATERIAL NA ANALOGIA DE GRELHA

### 4-1 INTRODUÇÃO

O modelo de analogia de grelha para análise de pavimentos, com o material considerado linear, foi descrito no capítulo 2. Neste capítulo, procura-se adaptar o modelo para levar em conta o efeito da fissuração e fluência do concreto que causam a não-linearidade entre esforços e deslocamentos. Não é levada em conta aqui a não-linearidade geométrica, ou seja aquela que considera o estado de deslocamento como influenciando o estado de esforços.

A escolha deste modelo leva, neste caso, à adoção da relação momento-curvatura como lei constitutiva do material, mantendo desta maneira a possibilidade de executar a integração da energia de deformação apenas ao longo do comprimento do elemento.

Discute-se inicialmente no item 4.2 a importância da análise não-linear, para no item 4.3 descrever a técnica do carregamento incremental, explicitando como se faz a mudança da rigidez dos elementos. No item 4.4 comenta-se como foi usada a geração de dados. A consideração da não-linearidade no programa de grelha equivalente é tratada no item 4.5. Os itens 4.6, 4.7 e 4.8 tratam da equação momento-curvatura na flexão, momento de torção-rotação e da consideração da fluência, respectivamente. Finalmente, no item 4.9 é feita uma descrição sucinta do programa propriamente dito.

### 4-2 IMPORTÂNCIA DA ANÁLISE NÃO-LINEAR

A principal vantagem em se considerar a não-linearidade na análise física do elemento de concreto, é obviamente investigar o que ocorre com a estrutura em serviço, o mais próximo do possível.

A importância da determinação do estado de deformação, o mais próximo possível da realidade, decorre principalmente da tendência de, cada vez mais, se utilizar elementos mais esbeltos e, portanto, mais deformáveis. Assim, a condição

determinante de projeto pode, nestas situações, ser a deformação limite e não os estados limites últimos de ruptura.

O comportamento de uma estrutura em concreto armado depende principalmente do grau de fissuração de seus elementos. Pode-se mostrar que mesmo para cargas de serviço, ocorre a não-linearidade física do concreto, uma vez que os esforços necessários para alcançar o momento de fissuração, são, em geral, relativamente de baixa intensidade. Sabe-se também que para pavimentos de edifícios, normalmente, a carga acidental é menor que as permanentes. Desta maneira, mesmo para as verificações em serviço, deve-se procurar empregar um modelo que leve em conta a não-linearidade física.

Uma aplicação do modelo desenvolvido é a possibilidade, através de simulações, de determinar a influência das características do material ou da estrutura no comportamento em serviço. Através da análise dos resultados de simulações com o modelo proposto pode-se, inclusive estabelecer diretrizes para a experimentação.

Cabe ainda ressaltar, como já foi mencionado anteriormente, que é possível conseguir economia no detalhamento das armaduras levando-se em conta a redistribuição de esforços que ocorre em estruturas hiperestáticas, uma vez que, devido à fissuração, há alteração de rigidez.

Por fim, a possibilidade de investigar estruturas considerando sua fissuração e fluência, permite ao engenheiro enriquecer sua atividade de projetar, não ficando preso a considerações simplificadoras. Tendo um conhecimento melhor do estado de deformação final da estrutura, o projetista pode, entre outras coisas, indicar contra-flechas mais adequadas durante a execução.

É claro que não é fácil usar todas estas aplicações descritas anteriormente, porém torna-se necessário defini-las e avançar em direção das possibilidades de usá-las, mesmo que de maneira aproximada, em estruturas ou subestruturas mais complexas. Desenvolve-se assim, o modelo de analogia de grelha não-linear como forma de analisar pavimentos de edifícios, fornecendo o estado de deslocamento sob cargas de utilização, bem como a distribuição de esforço após o efeito da fissuração.

### 4.3. UTILIZAÇÃO DO CARREGAMENTO INCREMENTAL

Entre as diversas técnicas para resolver o problema de estruturas não-lineares, destaca-se a do carregamento incremental. Assim como a integração de uma função pode ser substituída por somatórios de integrais parciais, o carregamento de uma estrutura pode ser obtido pela soma de  $n$  etapas de carga.

Uma primeira vantagem ao fazer isto está na possibilidade de trabalhar, em cada etapa, com a rigidez próxima da correta. Pode-se considerar que, em cada etapa de carga, há linearidade entre esforços e deslocamentos, bastando para tanto considerar um certo número mínimo de etapas. O problema não-linear passa, assim, a ser resolvido de forma linear, ou seja, através de uma soma de parcelas lineares.

Se a maneira de simular o carregamento for próxima à que ocorre na prática, pode-se, geralmente, obter informações bem próximas da realidade.

Pode-se, pela mesma técnica, considerar etapas de tempo em que a intensidade de carga permanece constante e o tempo varie, permitindo analisar a fluência do concreto.

A possibilidade de estudar a estrutura através da resolução de vários parcelas lineares permite ao engenheiro de projeto, acostumado com este procedimento, interpretar e acompanhar melhor os resultados obtidos.

Cabe ressaltar que há a dificuldade de se identificar a história mais adequada de carregamento a ser adotada, ou seja, aquela que representa melhor o funcionamento mais próximo da realidade da estrutura. Porém, também outros processos não são capazes de melhorar este aspecto; o que se pode fazer quanto a isso, é talvez, adotar um conjunto de histórias possíveis de carga e obter-se uma envoltória de esforços e deslocamentos. Trata-se, entretanto, de um procedimento bastante trabalhoso.

Para se utilizar a rigidez de cada elemento em cada etapa, pode-se considerar, em princípio, o nível de solicitação da etapa anterior. Há aí uma aproximação que pode ser pequena, na medida em que se aumenta o número de etapas. A figura 4.1 ilustra o diagrama carga ( $P$ ) e deslocamento ( $\delta$ ) de um ponto de um elemento para as diversas etapas de carga.

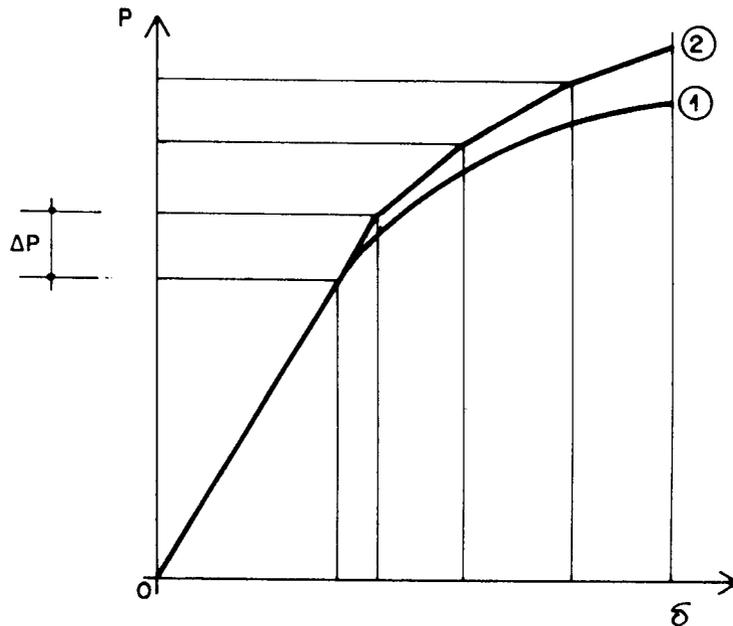


Fig. 4.1 - CARGA x DESLOCAMENTO 1) DESENVOLVIMENTO REAL 2)  
DESENVOLVIMENTO POR ETAPAS LINEARES

#### 4.4. GERAÇÃO DE DADOS

O sucesso da análise de pavimentos de edifícios só pode ser alcançado se for possível usar, de maneira prática, o conjunto de informações necessários, tais como numeração de elementos, nós, rigidez à flexão e torção no estágio I e II. Para isto é indispensável o uso de geradores de dados, uma vez que na discretização do piso, através de uma malha de elementos, normalmente, há uma repetição de informações. É preciso lembrar que, usualmente, ao se numerar os nós e elementos de uma estrutura, pode-se fazê-lo de maneira que obedçam a uma lei de formação. O gerador de dados deve ser capaz de permitir a geração destes dados através de um número mínimo de informações.

Como o procedimento de utilização de barras prismáticas já está bem

explorado e divulgado, por mais que se diferenciem os geradores, os resultados obtidos são quase os mesmos. Normalmente, a saída de dados destes geradores acaba sendo feita com arquivos do tipo "não documento", que permitem, em princípio, serem utilizados por outros programas.

Neste trabalho foi utilizado o gerador do sistema Laser (Corrêa [18]), para criar o arquivo de dados do programa de grelha equivalente, com a vantagem de se poder usar inclusive o módulo de desenho em tela do sistema citado, o que permite evitar erros grosseiros. Para tanto, adaptou-se o trecho de leitura de dados do programa principal de grelha, de maneira que a sequência ficasse de acordo com os dados gerados pelo sistema Laser. As pequenas mudanças, porventura necessárias, foram feitas através de editores de texto que permitem, facilmente, trocar e acrescentar dados.

Uma das pequenas mudanças que se fez, foi a de considerar que os elementos com a mesma rigidez no estágio I e II teriam suas características guardadas em uma única posição de memória. Assim, cada elemento fica definido por nó inicial, final e um número que caracteriza o tipo da propriedade. Isso traz economia de memória.

#### 4.5. CONSIDERAÇÃO DA NÃO-LINEARIDADE NO PROGRAMA DE GRELHA

Usa-se aqui o processo dos deslocamentos para obter os esforços e deslocamentos da grelha. Para levar em conta a fissuração, pode-se resolver, como já foi citado antes, a estrutura submetida a carregamento incremental, de maneira que em cada incremento de carga o funcionamento seja linear. Se durante a etapa de carregamento o momento fletor ou de torção em um elemento ultrapassar o momento de fissuração ou outro limite, a rigidez do elemento é alterada na etapa seguinte.

Este procedimento é aqui adotado, porém, é bom lembrar que é possível melhorar a precisão imaginando que, alcançada a etapa de carregamento genérica  $i$  (em que, por exemplo, em um elemento o momento de fissuração é ultrapassado), volta-se à etapa de carga  $i-1$ , desconsiderando portanto os esforços e deslocamentos da etapa  $i$ . Resolve-se a estrutura, para etapa  $i$ , considerando a rigidez deste elemento com o valor compatível ao esforço calculado anteriormente para a etapa  $i$ .

É preciso, porém, ter em mente que este refinamento certamente dificulta a programação, assim como aumenta o tempo real de cálculo e pode não conduzir, em

alguns casos, a diferenças significativas, pois trata-se de considerar a mudança rigidez de um trecho. Fica também claro que se o número de etapas for grande, este tipo de aproximação não tem tanta importância. De qualquer forma, fica registrada a maneira de fazê-lo.

O esquema tradicional de um programa, usando o processo de deslocamentos, é dado resumidamente pela sequência de operações:

- 1) GERAÇÃO E LEITURA DE DADOS ;
- 2) MONTAGEM DO VETOR DE CARGAS;
- 3) MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ;
- 4) RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE INCÓGNITAS COM OBTENÇÃO DOS VALORES DE DESLOCAMENTOS;
- 5) CÁLCULO DOS ESFORÇOS INTERNOS;
- 6) SAÍDA DE DADOS.

No caso da análise não linear, basta repetir um trecho deste programa tantas vezes quanto for, no mínimo, o número de etapas de carga. Analisa-se para cada uma delas, se a rigidez deve ser mudada, e em quais elementos.

Para evitar o uso de memória excessiva, obtém-se o estado de deslocamento dos nós e dos esforços nos elementos através da soma do estado anterior ao da etapa em questão, gravando-se os resultados para serem usados na próxima etapa. Assim, esquematicamente, para os deslocamentos tem-se:

$$\{\Delta U\} = [K]^{-1} \cdot \{\Delta P\} \quad (4.1a)$$

$$\{U\}_i = \{U\}_{i-1} + \{\Delta U\} \quad (4.1b)$$

com

$\{\Delta U\}$  - vetor coluna que contém os deslocamentos nodais devidos à parcela de carga atuante na etapa  $i$ .

$[K]$  - matriz de rigidez com as modificações de rigidez de acordo com a etapa  $i-1$

$[K]^{-1}$  - matriz de rigidez  $[K]$  inversa

$\{\Delta P\}$  - vetor de cargas correspondente à parcela de carga da etapa  $i$ .

$\{U\}_i$  - vetor coluna que contém os deslocamentos nodais devido à carga total até etapa  $i$ .

$\{U\}_{i-1}$  Idem ao anterior, sem considerar a parcela de carga atuante na etapa  $i$ .

Desta maneira, quando se faz o procedimento relativo às expressões (4.1a) e (4.1b), os valores de  $\{\Delta U\}$  estão na memória principal do computador e  $\{U\}_{i-1}$  em um arquivo de disco. Então, através, de uma variável auxiliar, pode-se ler os valores  $\{U\}_{i-1}$  e somá-los com  $\{\Delta U\}$  para, em seguida, gravar no arquivo dos valores de  $\{U\}_{i-1}$ , que são perdidos. A economia de memória obtida corresponde à dimensão do vetor de deslocamentos. Um procedimento análogo é feito com os esforços nos elementos. Em termos computacionais isto constitui uma perda de velocidade, porém tem a vantagem de permitir o uso de uma memória menor.

Uma outra possibilidade do programa é a de gravar no disco, para cada etapa, os valores de deslocamentos e esforços correspondentes para permitir a análise da fluência.

Na análise não-linear de grelha foi utilizado o esquema indicado:

- 1) GERAÇÃO E LEITURA DE DADOS;
- 2) MONTAGEM DO VETOR DE CARGAS;
- 3) MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ;
- 4) RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE INCÓGNITAS E OBTENÇÃO DOS VALORES DE DESLOCAMENTOS;
- 6) CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS E DOS ESFORÇOS INTERNOS;
- 5) LEITURA, SOMA DOS DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS E POSTERIOR GRAVAÇÃO;
- 7) LEI CONSTITUTIVA, MUDANÇA DA RIGIDEZ DE ALGUNS ELEMENTOS;
- 8) VOLTA AO ITEM 2 ATÉ QUE SE COMPLETE O CICLO DE CARGAS SAÍDA DE RESULTADOS;

Outra técnica possível de se empregar é a que admite, para cada etapa de

carga, uma iteração em que se procura corrigir o erro de haver sido considerada a estrutura linear para o incremento de carga.

Imagine-se que a figura 4.2 represente a variação de esforço  $P$  e deslocamento  $\delta$ . Carregada a estrutura com  $\Delta P$ , ocorre o esforço  $P_A$  e o deslocamento  $\delta_A$ . Para este nível de esforço ( $P_A$ ), supondo a curva 1 como a que representa o comportamento do elemento, o valor correto de deslocamento é  $\delta_1$ . A maneira de corrigir é carregar de  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  e etc até que se chegue, com uma certa precisão, ao valor de  $\delta_1$ . Na figura em questão, foi usada dentro da iteração, a mesma rigidez para o elemento, ou seja, os segmentos  $KA$ ,  $LB$ ,  $MC$  são paralelos, porém podiam ter inclinações diferentes e decrescentes, de maneira que permitissem uma convergência mais rápida.

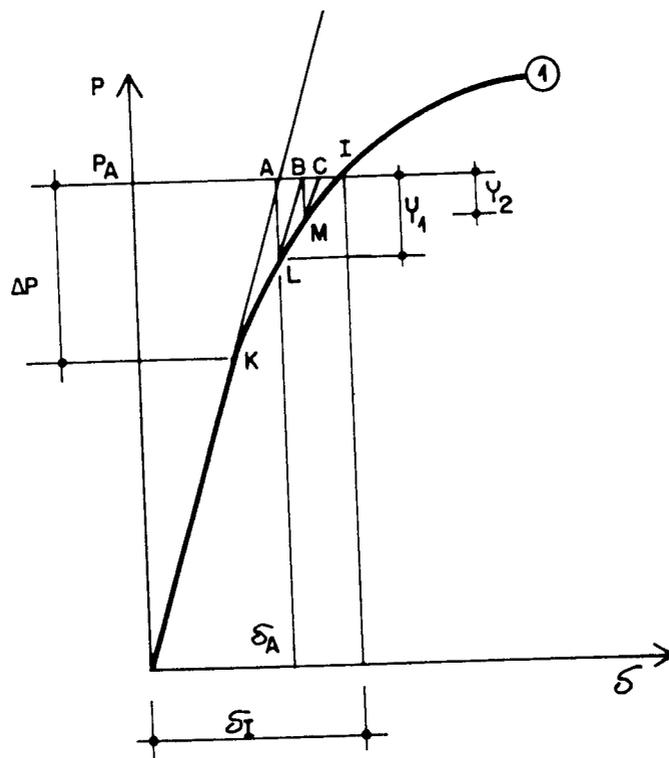


Fig. 4.2 - ITERAÇÃO DURANTE UMA ETAPA DE CARGA

#### 4.6. EMPREGO DA EQUAÇÃO MOMENTO-CURVATURA NA PROGRAMAÇÃO

A adoção da equação do momento-curvatura faz com que se evite a integração das tensões e deformações na seção transversal. Cabe, porém agora, discutir como implementar este procedimento para avaliar o comportamento de um elemento da grelha.

O momento fletor normalmente varia ao longo do elemento e assim também a curvatura; porém, se para o momento pode existir uma função contínua, pode não acontecer o mesmo na curvatura. Nos pontos em que aparece a fissura de flexão no concreto tracionado há uma perda de rigidez (o produto EI), que torna a função descontínua.

Já no capítulo 3 foi mostrada a possibilidade de se definir uma curvatura média e uma local, em que se deve considerar um comprimento menor para os elementos nos quais os valores de momento fletor variam muito, e elementos mais longos no caso de uma variação não muito grande de momentos. De qualquer maneira, ao considerar uma rigidez intermediária entre as dos estádios I e II puro, através das expressões de momento-curvatura, já se está levando em conta que, ao longo do elemento, podem existir trechos com e sem fissuras.

Para se calcular deslocamentos unitários em um elemento, e definir a matriz de rigidez, há sempre a possibilidade de se fazer a integração ao longo do elemento, considerando a curvatura, ou a rigidez EI variável e assim :

$$a = \int \frac{1}{r} \cdot \bar{M} \cdot dx$$

$$a = \int \frac{M}{EI} \cdot \bar{M} \cdot dx$$

Considerando o valor de E constante, I fica determinado, por exemplo, por uma das três expressões do capítulo 3, (3.11, 3.12, e 3.13) e, dessa maneira, é considerada a fissuração. Assim, todos os procedimentos de integração conhecidos da matemática podem ser aplicados. Entre os autores que aplicam a integração numérica, pode-se citar Tharmalingham [36] na análise de grelha não-lineares e Câmara [9] em vigas e pórticos.

A vantagem de fazer a integração numérica ao longo do elemento é obter-se uma maior precisão no efeito da fissuração e, desta forma, diminuir o número de elementos a serem usados na análise. Câmara usa este recurso em vigas, com o

intuito de usar um número menor de elementos. Porém, é claro, que a teoria de vigas, pelo menos a linear, é, sem dúvida, muito bem representada pela análise matricial usual. Assim, não há necessidade de se ter um número muito grande de elementos para representar a viga. Neste trabalho, contudo, deseja-se analisar pavimentos de edifícios, e os trechos de placa estão sendo substituídos por uma malha de elementos em grelha, que, por si só, necessita um certo número de elementos, como mostrado no capítulo 2. Desta forma, opta-se por não usar a integração numérica ao longo do elemento e fazer a análise de cada elemento através dos valores dos momentos nas respectivas extremidades.

A comparação com o momento de fissuração é feita através do maior valor em módulo, mas o programa permite, se for interesse do usuário, usar na comparação, a média dos momentos nas extremidades do elemento.

A lei constitutiva deve, em princípio, diferenciar se há um elemento do tipo viga ou do tipo laje. No primeiro caso, o critério unidimensional é satisfatório, enquanto que no segundo, o ideal seria usar-se um critério bidimensional. Explicando melhor: imagine-se um ponto K como o da figura 4.3, na situação a) em que os momentos principais têm o mesmo sinal (ambos tracionam a borda inferior da placa); o valor de tensão que provoca a fissuração do concreto, deve ser menor que no caso b) em que há sinais opostos nos momentos. Esta situação poucas vezes ocorre nas regiões mais solicitadas da placa; assim, seu efeito também não deve ser grande. Aqui não é feita esta distinção, e a única diferença entre os tipos de elementos está nas características geométricas e momentos de fissuração.

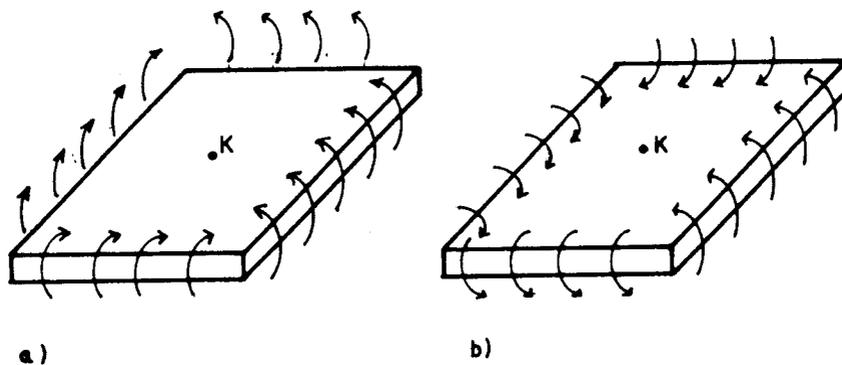


Fig.4.3-MOMENTOS NAS DIREÇÕES PRINCIPAIS a)MESMO SINAL b)SINAIS OPOSTOS

#### 4.7. UTILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO MOMENTO DE TORÇÃO-ROTAÇÃO

Analisa-se a torção, na estrutura, da mesma forma que se fez com a flexão. Como já foi mencionado no capítulo 3, os efeitos de torção e flexão são considerados isolados, sem interagir. Em outras palavras o valor do momento de fissuração e a equação constitutiva, de cada um dos efeitos, são independentes. Os esforços de momento fletor e de momento de torção, na estrutura, são dependentes. Assim, a fissuração à flexão pode depender do momento torçor e vice-versa.

No item 4.3, quando se escreve mudança de rigidez, deve ser entendida por "mudança de rigidez à flexão e à torção", bastando comparar sempre os momentos fletores e de torção com os respectivos momentos de fissuração.

Como o estudo, aqui, é feito para pavimentos de edifícios, convém distinguir o efeito nos elementos tipo placa e tipo viga. Os que representam realmente uma viga, ou uma viga e parte de laje, devem ter sua rigidez à torção analisada. Já os elementos do tipo placa, que representam uma região da placa, por serem parte de um meio em que as duas dimensões são de valores significativos, não têm considerada a análise não linear de torção. Desta maneira, a análise não linear da torção é feita somente nos elementos do tipo viga.

O efeito da torção, em geral, tem mais significado nas vigas de contorno. Estes elementos, pela própria situação de transmissão de esforço placa-viga, devem ter valores, mais altos de momentos de torção e, desta forma, o início da fissuração causará provavelmente uma redistribuição de esforços, e um aumento nos deslocamentos verticais.

Cabem aqui os mesmos comentários feitos para a questão da integração ao longo do elemento. Destaca-se ainda que Tharmalingham [36] também considera a variação de rigidez de torção e usa a integração numérica nos elementos.

#### 4.8. CONSIDERAÇÃO DA FLUÊNCIA

A fluência, apesar de ser considerada linear (ver item 3.15), contribui para a não linearidade entre esforços e deslocamentos da estrutura, pois só se aplica a parte da carga, a permanente.

Procura-se analisar, neste trabalho, o pavimento como um todo, porém devido às características geométricas dos elementos que o compõem (vigas e placas), há em princípio uma diferença entre os valores dos fatores de fluência ( $\phi$ ) destes elementos. Pode existir o que se chama de heterogeneidade geométrica, ou seja, trechos de pavimentos de diferentes espessuras, vigas de alturas, perímetros e espessuras diferentes. Normalmente as diferenças decorrentes desta variação são pequenas. A variação do coeficiente de fluência é maior quando se tem valores diferentes da idade do concreto, quando da introdução do carregamento, ou mesmo quando há mudança do esquema estrutural na história da estrutura. Este não é o caso dos pavimentos comuns de prédio. Existem, assim, dois caminhos a considerar: um primeiro, em que se toma um coeficiente  $\phi$  de fluência médio para todo o pavimento; um outro, em que se considera para um conjunto de elementos (vigas) um coeficiente, e outro para os demais elementos (placa). Reitera-se, que mesmo que a estrutura tenha dois tipos de coeficientes de fluência, a distribuição dos esforços não irá variar muito. Desta forma, aqui será usado um coeficiente médio de fluência que representa todos os elementos do pavimento.

No programa de grelha equivalente deve ser especificada a etapa de carga correspondente ao esforço de peso próprio  $g_1$  e a sobrecarga de caráter permanente  $g_2$ . Os estados de deslocamentos da estrutura para as etapas de carga correspondentes aos valores de  $g_1$  e  $g_2$  são gravados em arquivos. Através de outro programa, calculam-se os valores do coeficiente de fluência  $\phi$  para a idade do concreto ( $t_0$ ), quando da introdução de  $g_1$ , e para a idade ( $t_1$ ) do concreto, quando da introdução de  $g_2$ . Os valores são designados por  $\phi(t, t_1)$  e  $\phi(t, t_0)$  respectivamente. Os arquivos são lidos e, através de operações descritas a seguir, chega-se ao valor final de deslocamento da estrutura, considerando a fluência.

O estado de deslocamento no tempo  $t$ , em um ponto genérico, é dado pela expressão:

$$w(t) = w_{g_1} \cdot [1 + \phi(t, t_0)] + w_{g_2} \cdot [1 + \phi(t, t_1)] + w_q \quad (3.40)$$

com  $w_{g_1}$  - deslocamento vertical devido à ação da carga  $g_1$ ;

$w_{g_2}$  - deslocamento vertical devido à ação da carga  $g_2$ ;

$w_q$  - deslocamento vertical devido à ação da carga  $q$ .

Através dos arquivos anteriores são conhecidos para os diversos pontos os valores de  $w_{g_1}$ ,  $w_{g_1 + g_2}$  e  $w_{g_1 + g_2 + q}$ .

O primeiro passo a tomar é obter os valores de  $w_{g_2}$  e  $w_q$  da seguinte maneira:

$$w_{g_2} = w_{g_1 + g_2} - w_{g_1} \quad (4.2a)$$

$$w_q = w_{g_1 + g_2 + q} - w_{g_1} - w_{g_2} \quad (4.2b)$$

Com estes valores pode-se aplicar a expressão (3.40) e obter o estado de deslocamento da estrutura no tempo  $t$ .

#### 4.9. PROGRAMA PROPRIAMENTE DITO

Como já foi dito, o programa aqui utilizado para a análise de pavimento de edifícios é uma adaptação do programa desenvolvida por Barboza [5], comprovando aliás que o modelo de cálculo é bastante simples e pode ser facilmente implementado em programas lineares. A parte linear do programa será descrita sucintamente, pois já está amplamente mostrada e explicada naquela publicação.

O programa está desenvolvido em linguagem PASCAL, que, de certa forma, obriga o programador a usar pelo menos a técnica de estruturação. Isto facilita sem dúvida o trabalho de adaptação, pois quase todas operações realizadas estão definidas em procedimentos ("procedures").

Não foi aproveitada a parte inicial de geração de dados do programa original, pois este objetivava permitir que engenheiros, habituados a subdividir o pavimento em lajes e vigas, usassem o programa e entendessem as saídas de dados, sem ter um conhecimento maior de análise matricial. Imagina-se que o profissional que vai lidar com o programa de análise não-linear já tenha uma idéia do processo da analogia de grelha. Opta-se, pelo menos aqui neste trabalho, por usar a geração de dados de

acordo com o descrito no item 4.4; cabe ao projetista decidir a melhor maneira de gerar os dados.

É importante, em geral, dividir o programa em trechos para utilizar a maior estrutura possível, sem ultrapassar o limite de memória do computador, pois em cada módulo é possível maximizar-se a dimensão das variáveis. Porém, para facilitar o trabalho, e na tentativa de diminuir o tempo de execução, os módulos de montagem da matriz de rigidez e resolução do sistema, da versão original, foram unidos em um só. Isto foi possível porque, foi eliminada toda a parte referente à diferenciação do que é viga e laje, na saída do programa, diminuindo-se a memória utilizada.

O programa continua podendo ser usado por computador do tipo PC, com 640 Kb de memória, mas necessita de um dispositivo de memória auxiliar, seja "drive" com disco flexível ou um disco rígido.

O procedimento de leitura de dados, em relação ao programa original, foi modificado, fazendo-se a identificação dos elementos por tipos. Em vez de se ter na memória as inércias à flexão e à torção no estágio I e II, e os momentos de fissuração à flexão e à torção de cada elemento, definem-se grupos de elementos que têm características iguais. A cada elemento é associado um tipo, ficando suas características definidas pelo vetor que, situado na memória principal, armazena as características de cada grupo. Deste modo economiza-se memória, pois é usado um vetor que tem dimensão igual a seis vezes a quantidade de tipos de elementos.

Para caracterizar corretamente os elementos, é preciso identificar os trechos de viga que trabalham, mesmo no estágio II, como viga T, ou seja, os trechos de vigas cujas mesas estão tracionadas por momentos menores que o de fissuração. Para tanto, pode-se analisar os resultados da estrutura resolvida com o carregamento total e com análise linear.

O início do programa é feito com a apresentação de um "menu", em que são colocadas à disposição do usuário as possibilidades de resolução da estrutura, saída de dados e impressão de dados. Naturalmente, na primeira entrada, a opção a ser utilizada é a de resolver a estrutura.

Na figura 4.4 mostra-se o fluxograma simplificado do programa, quando é solicitada a opção de resolução da estrutura.

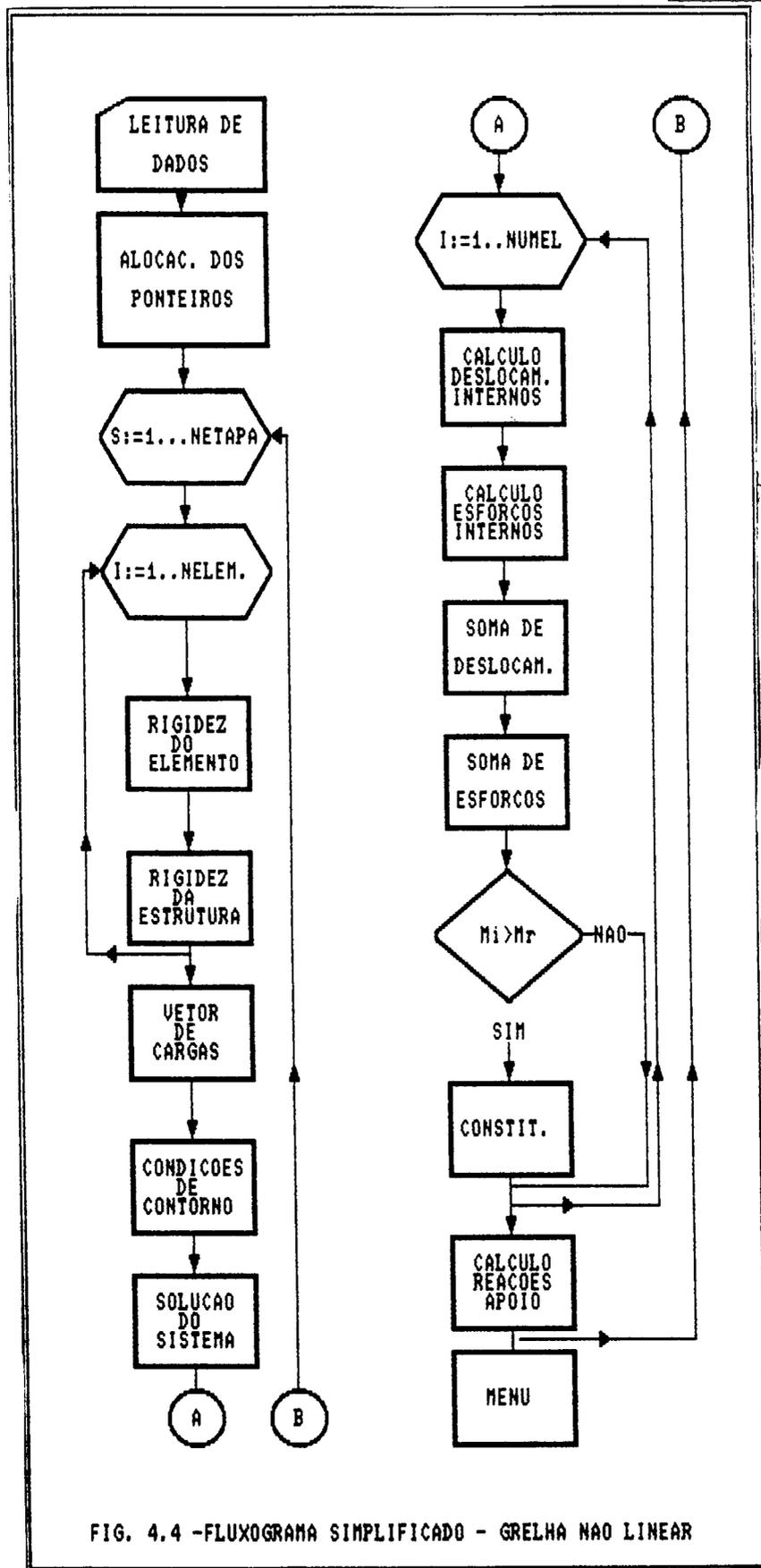


FIG. 4.4 -FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO - GRELHA NAO LINEAR

Basicamente com o módulo de leitura são obtidos os seguintes valores do arquivo de dados :

- quantidade de etapas de carregamento;
- número da etapa correspondente à carga  $g_1$ ;
- número da etapa correspondente à carga  $g_2$ ;
- valores de  $E$  e  $\nu$ ;
- largura da banda da matriz de rigidez da estrutura;
- quantidade de nós da estrutura;
- quantidade de barras da estrutura;
- quantidade de tipos de elementos;
- coordenadas, restrições e ações nos nós;
- número do nó inicial, final e o tipo de cada barra da estrutura;
- Inércia à flexão, à torção no estágio I e II, momento de fissuração à flexão, à torção, para cada tipo de elemento.

Algumas variáveis do programa são definidas, para ocuparem o máximo de memória, como variáveis dinâmicas e, portanto, precisam, nesse passo do programa, serem alocadas e zeradas - é o que faz o procedimento ALOC. (alocação) DOS PONTEIROS.

Após a alocação dos ponteiros passa-se à resolução da estrutura  $n$  vezes, sendo  $n$  igual ao número de etapas de carregamento. No esquema isto é visto na variação de  $S$  de 1 até NETAPA (número de etapas). Cada etapa de carregamento equivale à intensidade de  $p/n$ . Pode-se também trabalhar com uma etapa inicial de carregamento maior, correspondente ao surgimento do primeiro momento de fissuração da peça, seguida de  $n-1$  etapas de carregamento, sendo neste caso a intensidade do carregamento a partir da segunda etapa igual a  $(p - p_0)/(n - 1)$ .

Para cada etapa de carga é montada a matriz de rigidez da estrutura, através da soma dos coeficientes de rigidez de cada elemento. Torna-se importante usar uma solução que considera a armazenagem em banda da matriz de rigidez, pois haverá

uma diminuição grande na memória ocupada, e conseqüentemente, uma possibilidade de usar uma malha maior. Toda a armazenagem de valores é feita levando-se em conta este detalhe. Para cada elemento é calculado o seu comprimento, os cossenos diretores e a matriz de rigidez segundo os eixos locais. A transformação para os eixos globais é feita por:

$$[RB] = [\beta]^t \cdot [r] \cdot [\beta]$$

sendo  $[RB]$  - matriz de rigidez do elemento segundo os eixos globais

$[\beta]^t$  - a matriz de transformação de coordenadas transposta

$[r]$  - matriz de rigidez do elemento segundo os eixos locais

$[\beta]$  - a matriz de transformação de coordenadas

Os coeficientes são, em seguida, acumulados na matriz de rigidez da estrutura, já na direção dos deslocamentos segundo o eixo global.

Calculada a contribuição de cada elemento passa-se ao cálculo do vetor de cargas. No caso em questão são usadas cargas aplicadas nos nós, o que dá boa precisão para pavimentos com cargas uniformemente distribuídas, como visto no capítulo 2. Desta forma, os valores de carga dados podem ser colocados diretamente no vetor de carga. Convém lembrar que o incremento de carga é dado pelo valor da carga dividida pelo número de etapas (quando são usadas etapas de cargas iguais). Tem-se, então na verdade, um vetor de cargas correspondente a uma parcela de carga da estrutura.

As condições de contorno são consideradas colocando-se 1 na diagonal principal e zerando a linha e coluna correspondentes.

Tem-se, até agora, o vetor de carga  $\{P\}$ , matriz de rigidez da estrutura  $[R]$  e deseja-se calcular o vetor de deslocamentos no sistema global  $\{U\}$ . Isto é feito, usando-se o processo de resolução de sistema de equações de Gauss-Jordan com matriz em banda. Neste caso, não há vantagem em se usar o processo de Cholesky, pois, para cada carregamento a matriz de rigidez, em princípio, muda.

Obtido o valor de  $\{U\}$ , passa-se a executar um trecho do programa  $n$  vezes,

sendo  $n$  igual ao número de elementos (NUMEL). Neste trecho calcula-se para cada elemento os deslocamentos nodais no sistema local,  $\{u\}$ , e através da matriz de rigidez do elemento, calculam-se os esforços solicitantes do elemento dados pelo vetor  $\{f\}$  :

$$\{ f \} = [ r ] . \{ u \}$$

Estas solicitações e os deslocamentos, correspondem a uma parcela de carga e devem ser somadas aos valores correspondentes da parcela anterior, como já visto no item 5. No caso de ser a primeira etapa de carga são somados com valores nulos. Para evitar um gasto excessivo de memória estes valores são armazenados em disco rígido ou flexível.

Tendo o esforço no elemento  $i$ , verifica-se se os momentos fletores ou de torção ultrapassaram os valores correspondentes de fissuração. Em caso positivo é calculada nova inércia para o elemento. No fluxograma isto é feito pelo procedimento chamado de CONSTIT. O valor desta inércia não pode simplesmente ocupar o mesmo espaço da memória que o da rigidez no estágio I, desta forma é armazenado em outra variável. Quando da montagem da matriz de rigidez, sabe-se qual valor tomar pela leitura da variável ESTADIO - que tem valor igual a 1 se o elemento não fissurou, e 2, no caso de ter fissurado. Este procedimento é feito para a flexão e para a torção.

Após o procedimento anterior ter sido feito para todos os elementos, calculam-se as reações de apoio; tem início nova montagem de matriz de rigidez para a nova etapa de carga, e assim sucessivamente.

Após a última etapa de carga o programa retorna ao "menu", proporcionado a possibilidade de se criar um arquivo de saída, ou então de imprimir diretamente os resultados.

## CAPÍTULO 5 - EXEMPLOS DO EMPREGO DA ANALOGIA DA GRELHA - ANÁLISE NÃO-LINEAR

### 5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados exemplos do emprego do processo da analogia de grelha, considerando a não-linearidade do concreto. São resolvidas inicialmente placas isoladas e depois um conjunto destas, que formam um pavimento.

São abordados alguns dos exemplos do capítulo 2, para se ter uma idéia do que ocorre nestes tipos de estruturas, quando se considera a fissuração do concreto.

Resolvem-se no item 5.2 dois exemplos de placas quadradas, uma simplesmente apoiada e outra engastada. São discutidos inicialmente, os resultados obtidos pelos três processos de determinação da rigidez (CEB-90, CEB-158 e BRANSON) para a placa simplesmente apoiada. Para o mesmo exemplo, é feito o estudo da variação do coeficiente de Poisson. Ainda neste item é feito o segundo exemplo, ou seja, considera-se a placa quadrada com os bordos impedidos à rotação (engastados).

No item 5.3 estuda-se a placa quadrada do capítulo 2, apoiada em vigas no contorno, com a consideração da não-linearidade. Executa-se também um estudo das reações da laje nas vigas periféricas.

No item 5.4 são estudadas as lajes sem vigas no contorno, com características similares às do item 2.

No item 5.5 é estudado um pavimento com vigas e placas levando em conta a não-linearidade e o efeito da fluência.

Procura-se usar, em todos exemplos, dados próximos aos que seriam usados na prática, principalmente no que diz respeito às seções de armadura longitudinal empregadas nos diversos elementos.

No anexo I procura-se resumir, em folha dupla, as características dos exemplos desenvolvidos neste capítulo permitindo ao leitor um melhor acompanhamento do texto.

## 5.2. PLACAS RETANGULARES ISOLADAS

Neste item são resolvidos dois exemplos. O primeiro, exemplo 5.1, trata de uma placa quadrada simplesmente apoiada no contorno, o segundo, exemplo 5.2, considera a placa anterior com os bordos impedidos de girar.

### 5.2.1. PLACA QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA - EXEMPLO 5.1

Os dados para este exemplo são relacionados a seguir:

#### Geometria

$$l_x=4\text{m } l_y=4\text{m};$$

$$h=8 \text{ cm};$$

$$d= 6,5 \text{ cm.}$$

#### Carregamento

$$\text{carga total } p=5 \text{ KN/m}^2;$$

$$g_1=2,0 \text{ kN/m}^2;$$

$$g_2=1,0 \text{ kN/m}^2;$$

$$q=2,0 \text{ kN/m}^2;$$

total de etapas de carregamento 10

#### Características de resistência e deformabilidade

concreto

$$f_{ck}= 15 \text{ MPa, } f_{ctk}= 1,5 \text{ MPa, } E_c=28 \text{ 600 MPa e } \nu \text{ variando de } 0,0 \text{ a } 0,4;$$

aço CA50A

$$f_{yk}= 500 \text{ MPa e } E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa.}$$

#### Discretização

malha de 81 nós e 144 elementos.

#### Características dos elementos

$$\text{armadura } A_s= 1,88 \text{ cm}^2/\text{m} ( \phi = 6,3 \text{ mm c/ } 17 \text{ cm e } \rho=0,235\% );$$

$$I_t=2,17 \cdot 10^3 \text{ cm}^4;$$

$$I_{10} = 2,23 \cdot 10^2 \text{ cm}^4;$$

$$M_r = 1,23 \text{ kN.m};$$

$$I_{t,1} = 4,34 \cdot 10^3 \text{ cm}^4;$$

outros valores

$$\beta_1 = 1,0;$$

$$\beta_2 = 0,8;$$

Foi considerado inicialmente  $\nu=0,2$  e testadas as três expressões de inércia média 3.11, 3.12 e 3.13, Branson, CEB-158 e CEB-90, respectivamente. Os resultados de esforços e deslocamentos no centro da placa para este caso estão dados no quadro 5.1. Os valores indicados da análise linear referem-se aos resultados da teoria de placas com série e AG significa analogia de grelha.

coluna	A	B	C	D	E	F	G
valor	$\nu$	$m_x$	$m_x$	$r_1$	a	a	$r_2$
unid.		kNm/m	kNm/m		mm	mm	
situação		não-linear	linear	B/C	não-linear	linear	E/F
BRANSON	0,2	3,16	3,53	0,89	4,8	4,09	1,17
CEB-158	0,2	2,88	3,53	0,82	5,1	4,09	1,25
CEB-90	0,2	2,62	3,53	0,74	5,5	4,09	1,34
AG LINEAR	0,2	-----	3,37	-----	-----	4,68	-----

QUADRO 5.1 - LAJE QUADRADA, MOMENTO E DESLOCAMENTO NO MEIO DA PLACA SITUAÇÃO DE ANÁLISE LINEAR E NÃO-LINEAR -EXEMPLO 5.1

Indicam-se, nas figuras 5.1, 5.2, os gráficos de carregamento x momento fletor, carregamento x deslocamento para o ponto do meio da placa. Na figura 5.3 indicam-se os momentos fletores ao longo do meio da placa.

Quando se considera a fissuração do concreto na placa, ocorre uma diminuição no momento fletor no meio da placa, que é mais acentuada para o caso do CEB90, e menor para a consideração da expressão de Branson e tem valores intermediários para o CEB158.

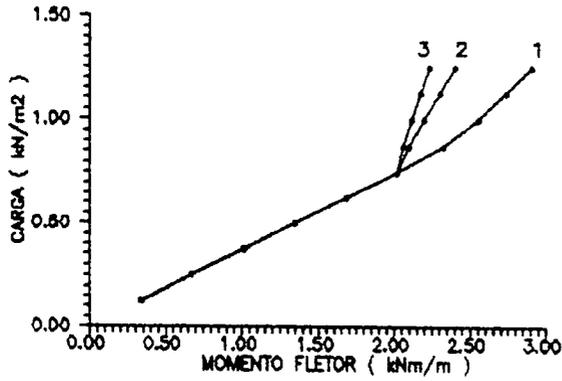


FIG. 5.1 CARGA X MOMENTO PONTO CENTRAL PLACA QUADRADA APOIADA 1-BRANSON 2-CEB158 3-CEB90

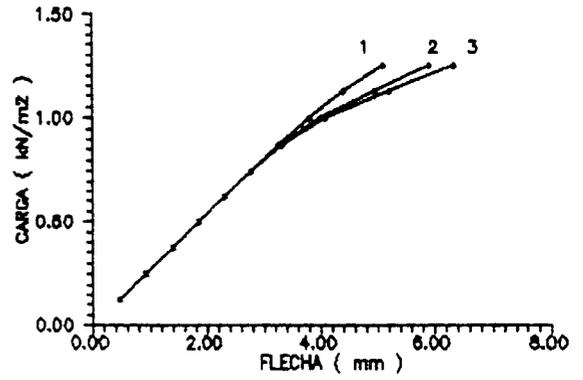


FIG. 5.2 CARGA X FLECHA PONTO CENTRAL PLACA QUADRADA APOIADA 1-BRANSON 2-CEB158 3-CEB90

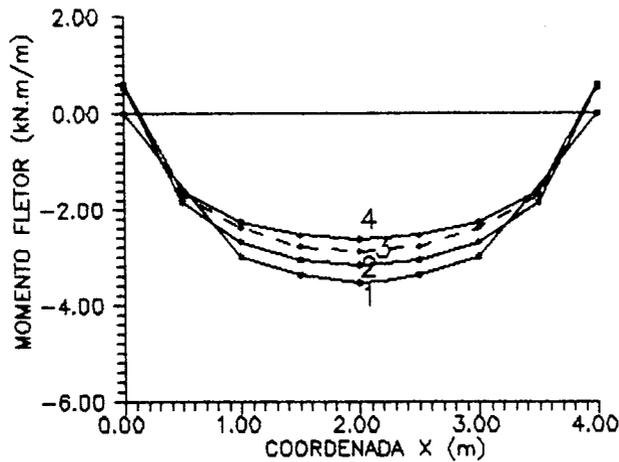


FIG. 5.3 MOMENTO AO LONGO DO MEIO DA PLACA EX. 5.1 SITUACAO 1-LINEAR SERIE 2-BRANSON 3-CEB158 4-CEB90

Como pode ser visto na figura 5.2 a diferença entre o CEB90 e CEB158 está no início da fissuração, que para o caso do CEB90 ocorre quando o momento alcança o valor de  $M_T \cdot \sqrt{\beta_1 \cdot \beta_2}$ , e no CEB 158 só quando o momento alcança o valor de  $M_T$ . Assim, como pode ser visto na figura 5.1, os trechos do diagrama carga x momento fletor, quando já se iniciou a fissuração, para os casos do CEB90 e CEB158, apresentam paralelismo, pois a expressão da inércia média de ambos é idêntica, diferindo apenas quanto ao ponto inicial de cada um deles.

Como era esperado, o procedimento de Branson considera a estrutura mais rígida, ou seja, os deslocamentos são menores que os outros dois procedimentos, e neste caso, têm valores próximos ao linear, obtido com a analogia de grelha. O CEB90 apresenta os maiores deslocamentos, enquanto o procedimento do CEB158 apresenta valores intermediários.

Na figura 5.3 mostra-se o desenvolvimento do momento fletor ao longo de um eixo paralelo à borda, que corta o centro da placa. Percebe-se como a fissuração faz com que os momentos diminuam. Porém, convém salientar que, no caso de ser usada a técnica da analogia de grelha, ocorrem momentos fletores negativos na borda da placa, decorrentes da rigidez à torção dos elementos de contorno. Se esses valores forem somados aos do centro da placa, a diferença entre o caso linear obtido pela teoria de placas não irá diferir tanto dos casos não-lineares.

Embora sabendo que o valor de  $\nu$  do concreto esteja próximo ao valor de 0,2, faz-se aqui a variação deste valor apenas para mostrar que, no caso da não-linearidade, diferentemente da análise linear, a variação de  $\nu$  tem pouca influência. Usando-se o processo do CEB-90 e variando-se o valor de  $\nu$ , obtém-se, para o ponto central, os momentos fletores e deslocamentos dados no quadro 5.2. Como já foi observado, a influência do coeficiente de Poisson na analogia de grelha, é tal que os deslocamentos variam de forma inversa aos da teoria de placa aumentando com  $\nu$ .

As figuras 5.4 e 5.5 mostram a variação dos momentos fletores e deslocamentos verticais com o coeficiente de Poisson. Como se percebe pelas figuras citadas e ainda pelos valores mostrados no quadro 5.2, há pouca influência do coeficiente de Poisson nos resultados de análise não-linear. Assim, para este exemplo, haveria uma variação de menos de 5% para o momentos fletores, e praticamente este mesmo valor para os deslocamentos verticais no centro da placa,

considerado o valor de  $\nu$  do concreto próximo de 0,2.

coluna	A	B	C	D	E	F	G
valor	$\nu$	$m_x$	$m_x$	$r_1$	a	a	$r_2$
unid.		kNm/m	kNm/m		mm	mm	
situação		não-linear	referencia	B/C	não-linear	referencia	E/F
	0,0	2,52	2,62	0,96	4,8	5,50	0,87
	0,1	2,54	2,62	0,97	5,2	5,50	0,95
	0,2	2,62	2,62	1,00	5,5	5,50	1,00
	0,3	2,74	2,62	1,05	5,8	5,50	1,05
	0,4	2,82	2,62	1,08	6,0	5,50	1,09

QUADRO 5.2 - LAJE QUADRADA - MOMENTO FLETOR E DESLOCAMENTO TRANSVERSAL DO PONTO CENTRAL COM VARIAÇÃO DE  $\nu$  COMPARADOS COM  $\nu=0,2$  -EXEMPLO 5.1

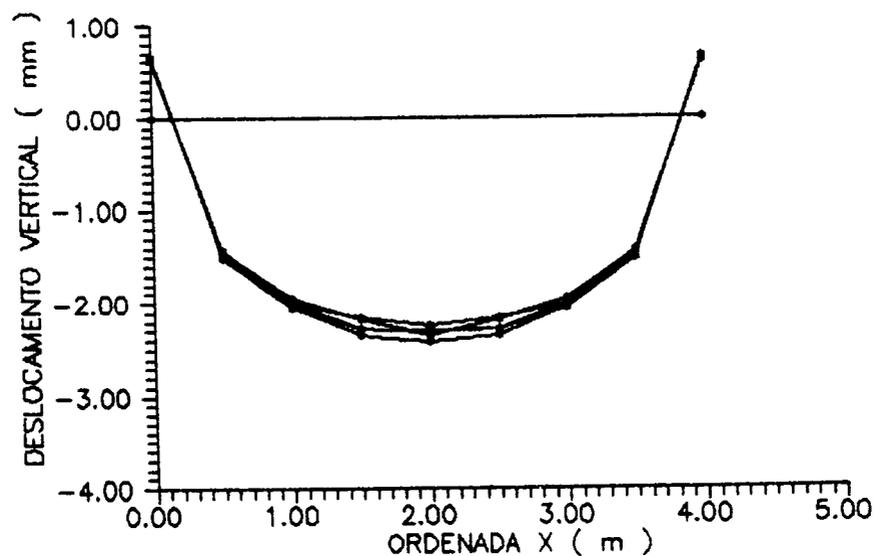


FIG. 5.4 - VARIAÇÃO DO MOMENTO FLETOR NO EIXO CENTRAL DA PLACA COM O COEFICIENTE DE POISSON

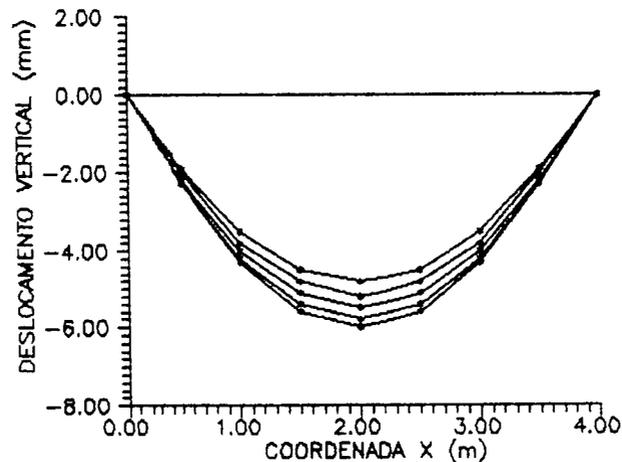


FIG. 5.5 VARIACAO DO DESLOCAMENTO VERTICAL, NO EIXO CENTRAL DA PLACA, COM  $\nu=0$  COEFICIENTE DE POISSON

### 5.2.2. PLACA QUADRADA CONTORNO ENGASTADO - EXEMPLO 5.2

Neste exemplo usa-se a placa quadrada do item anterior considerando, neste caso, que nas bordas as rotações de flexão estão impedidas. O valor de  $\nu$  é considerado igual a 0,2 e todos os dados usados aqui foram listados anteriormente, com exceção das características dos elementos que são mostradas a seguir :

#### Características dos elementos

Elementos do tipo 1, centro da placa:

armadura  $A_s = 1,60 \text{ cm}^2/\text{m}$  ( $\phi = 6,3 \text{ mm c/ } 20 \text{ cm}$  e  $\rho = 0,20\%$ );

$I_1 = 2,20 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$ ;

$I_{10} = 1,94 \cdot 10^2 \text{ cm}^4$ ;

$$M_r = 1,23 \text{ kN.m};$$

$$I_{t,l} = 4,4 \cdot 10^3 \text{ cm}^4.$$

Elementos do tipo 2, borda da placa:

armadura  $A_s = 2,46 \text{ cm}^2/\text{m}$  (  $\phi = 8,0 \text{ mm c/ 20 cm}$  e  $\rho = 0,31\%$  );

$$I_t = 2,22 \cdot 10^3 \text{ cm}^4;$$

$$I_{t0} = 3,19 \cdot 10^2 \text{ cm}^4;$$

$$M_r = 1,25 \text{ kN.m};$$

$$I_{t,l} = 4,44 \cdot 10^3 \text{ cm}^4.$$

Na figura 5.6 estão mostrados os elementos do tipo 2 que tem armadura negativa (posicionadas proximas à face superior).

Assim como nos próximos exemplos, usa-se o procedimento do CEB-90 para a resolução da estrutura. A partir deste exemplo emprega-se, nos quadros de resultados, o termo linear, para indicar os resultados obtidos com a analogia de grelha linear.

No quadro 5.3 estão indicados os valores de momento fletor e deslocamento para pontos situados no centro da placa e meio da borda.

coluna	A	B	C	D	E	F	G
valor	$\nu$	$m_x$	$m_x$	$r_1$	a	a	$r_2$
unid.		kNm/m	kNm/m		mm	mm	
situação		não-linear	linear	B/C	não-linear	linear	E/F
centro	0,2	1,70	1,580	1,08	1,55	1,4	1,11
borda	0,2	-3,50	-4,16	0,84	--	--	--

QUADRO 5.3 - LAJE QUADRADA ENGASTADA, MOMENTOS E DESLOCAMENTO NO MEIO E NA BORDA DA PLACA, SITUAÇÃO DE ANÁLISE LINEAR E NÃO-LINEAR -EXEMPLO 5.2

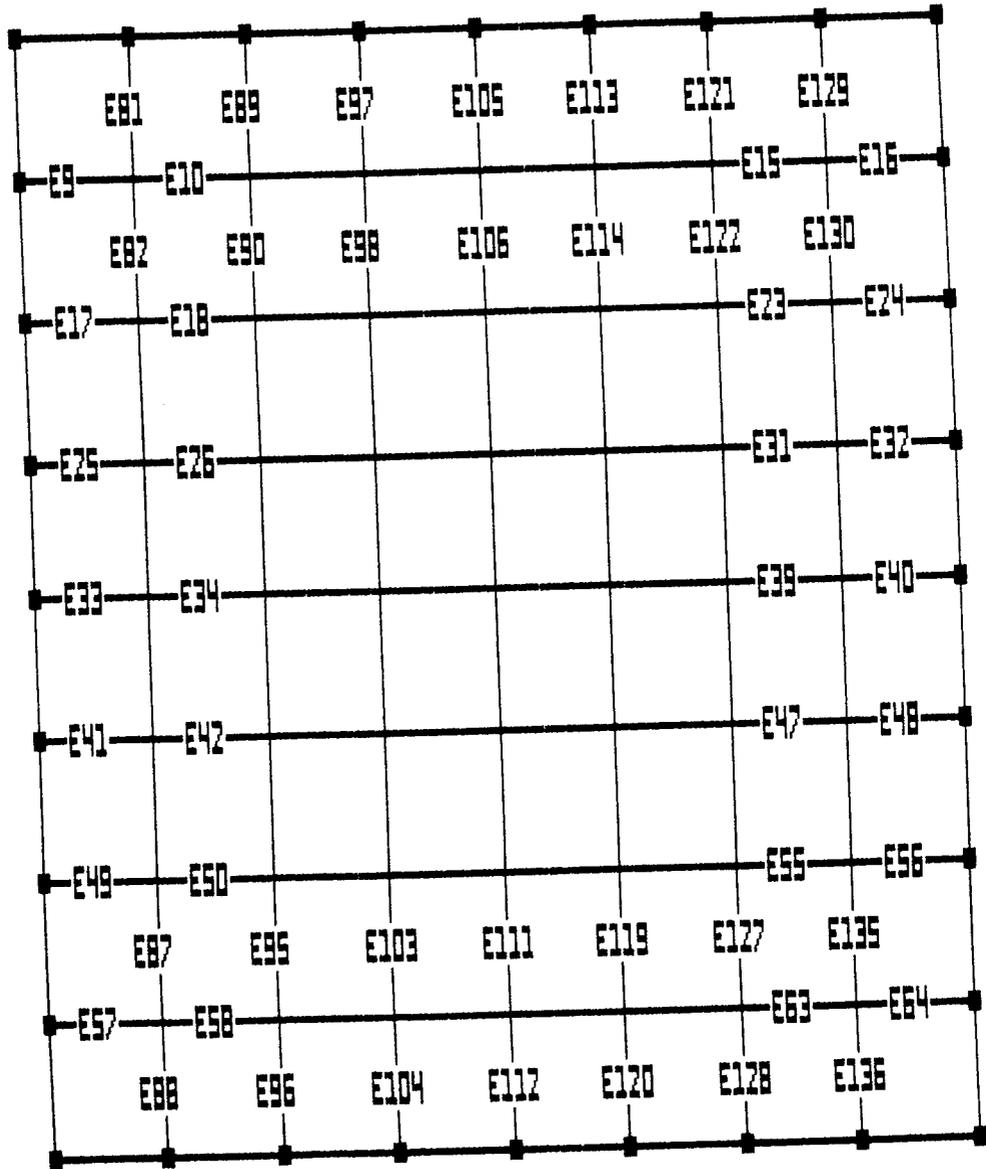


FIG. 5.6 - ELEMENTOS COM ARMADURA NEGATIVA -EXEMPLO 5.2

Nas figuras 5.7 e 5.8 são indicados os gráficos de carga x deslocamento e momento fletor x carregamento, respectivamente, para o ponto do meio da placa. Na figura 5.9 mostram-se os deslocamentos dos pontos da placa em um corte no meio da mesma. A figura 5.10 indica para a mesma seção, os momentos fletores. Na figura 5.11 é mostrada a variação do momento fletor na borda com o carregamento.

Como era esperado, com o aumento do carregamento na placa e o início da fissuração da seção junto à borda, o momento fletor nesta região diminui de valor, enquanto o do meio da placa aumenta.

No gráfico da figura 5.7 pode-se perceber que no início da fissuração dos elementos da borda, o momento fletor no centro da placa aumenta. Em seguida, o processo de fissuração inicia-se também nos elementos centrais, e o trecho do gráfico correspondente apresenta uma diminuição do momento fletor no ponto central. Com o aumento do carregamento e o prosseguimento da fissuração dos elementos da borda, o momento fletor no ponto central volta a aumentar.

Naturalmente que o estado de deslocamento da placa na situação não-linear, é maior que o correspondente da situação linear, como se vê na fig. 5.9. A fissuração, tanto dos elementos junto à borda, quanto dos próximos ao centro da placa, faz com que o deslocamento do ponto central aumente. O que se pode verificar é que o diagrama carga x deslocamento (fig. 5.8) mostra, no início da fissuração, uma inclinação menor, ou seja, uma rigidez maior do que quando se aproxima das últimas etapas. Isso se deve ao fato de que, no início há apenas a fissuração dos elementos junto à borda, para depois ocorrer a fissuração tanto destes quanto dos elementos centrais.

Na figura 5.10 percebe-se, pelo diagrama de momento fletor, na seção do centro da placa, que há uma diminuição, no valor absoluto, do momento fletor negativo e aumento do momento fletor positivo.

Esta placa, por ser engastada nas bordas, faz com que a diferenças entre o caso não-linear e o linear sejam menores que o do exemplo anterior. Assim, tantos os momentos fletores quanto os deslocamentos variam menos no exemplo 5.2 que no exemplo 5.1.

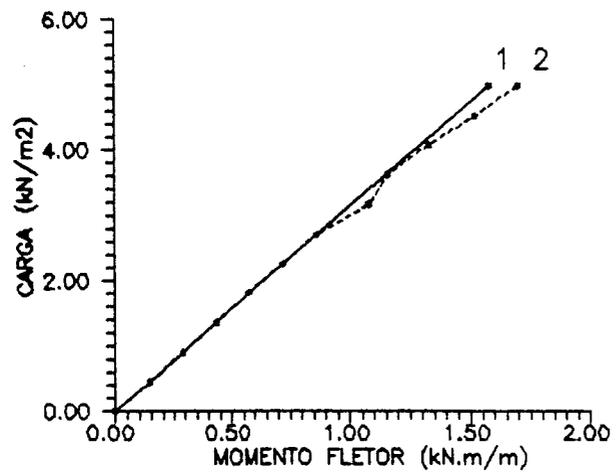


FIG.5.7- CARGA X MOMENTO NO MEIO DA PLACA EXEMPLO 5.2 1-GRELHA LINEAR 2-NAO LINEAR

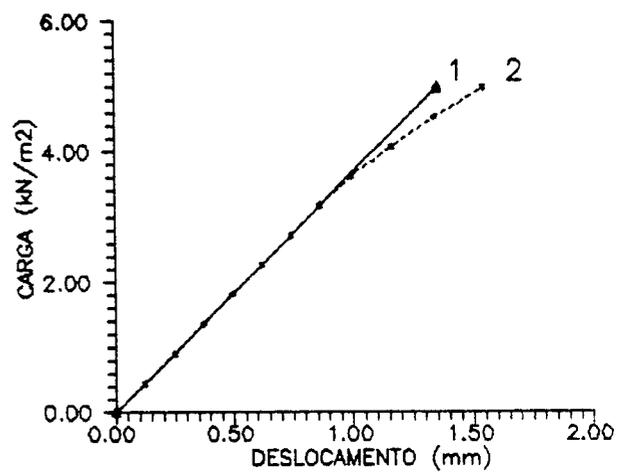


FIG.5.8 -DESLOCAMENTO VERTICAL NO CENTRO DA PLACA SITUAÇÃO 1-LINEAR 2-NAO LINEAR

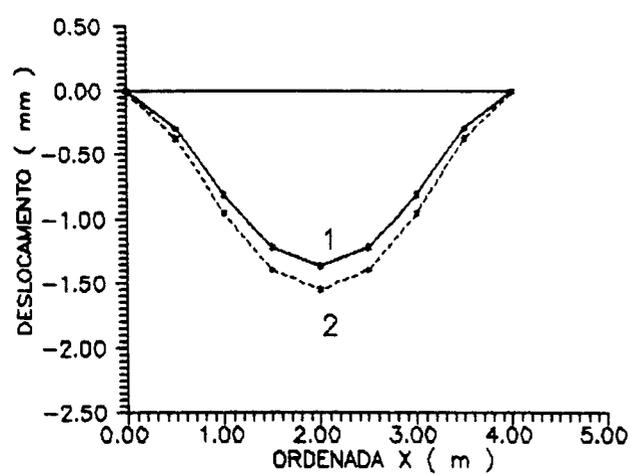


FIG. 5.9 DEFORMAÇÃO EIXO CENTRAL DA PLACA DO EXE.5.2 SITUAÇÃO 1-LINEAR, 2-NAO LINEAR

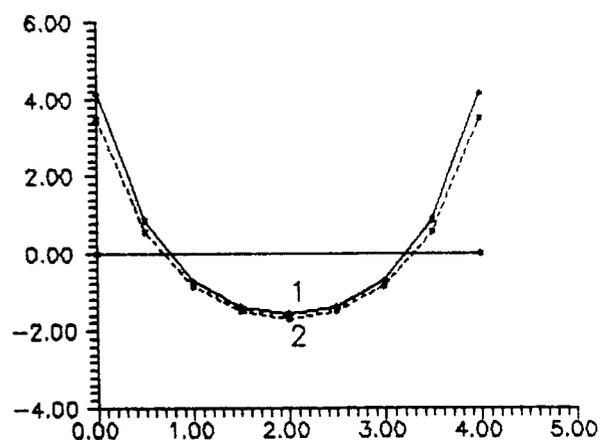


FIG 5.10 MOMENTO FLETOR SECAO CENTRAL EXEMPLO 5.2 ; 1-LINEAR ; 2-NAO LINEAR

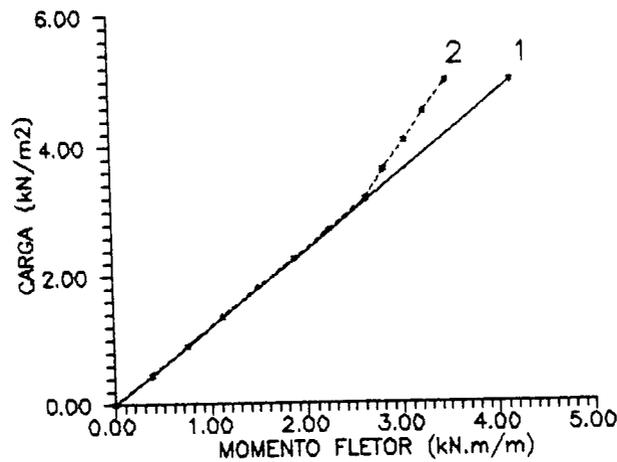


FIG.5.11—CARGA X MOMENTO NA BORDA DA PLACA  
EXEMLO 5.2 1—GRELHA LINEAR 2—NÃO LINEAR

### 5.3 LAJES APOIADAS EM VIGAS

Como no item 2.12, resolve-se o exemplo de uma laje apoiada em vigas no contorno, considerando-se inicialmente o efeito de fissuração à flexão para em seguida levar em conta o efeito da fissuração à torção.

É feito também um estudo da reação da carga da laje nas vigas de contorno, e como variam os momentos fletores no centro das vigas. Mostra-se também que a rigidez das vigas tem influência nestes valores, como já havia mostrado Mazzilli [30] para o caso linear, para a situação em que há a fissuração das vigas e da laje.

5.3.1. PLACA QUADRADA APOIADA EM VIGAS - CONSIDERAÇÃO DO EFEITO DE FISSURAÇÃO DA FLEXÃO - EXEMPLO 5.3

Para a placa cuja malha é dada na fig. 5.12 tem-se os seguintes dados:

Geometria

laje:

$$l_x=5m, l_y=5m;$$

$$h=10 \text{ cm};$$

$$d= 9,0 \text{ cm}.$$

vigas:

$$b_w=12 \text{ cm};$$

$$h=50 \text{ cm};$$

$$d= 47,5 \text{ cm}.$$

Carregamento

$$\text{carga total } p=10 \text{ KN/m}^2;$$

$$g_1=2,5 \text{ kN/m}^2;$$

$$g_2=1,0 \text{ kN/m}^2;$$

$$q=6,5 \text{ kN/m}^2;$$

total de etapas de carregamento 10

Características de resistência e deformabilidade

concreto

$$f_{ck}= 15 \text{ MPa}, f_{ctk}= 1,5 \text{ MPa}, E_c=30 \text{ 000 MPa} \text{ e } \nu= 0,2.$$

aço CA50A

$$f_{yk}= 500 \text{ MPa} \text{ e } E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}.$$

Discretização

malha de 81 nós e 144 elementos.

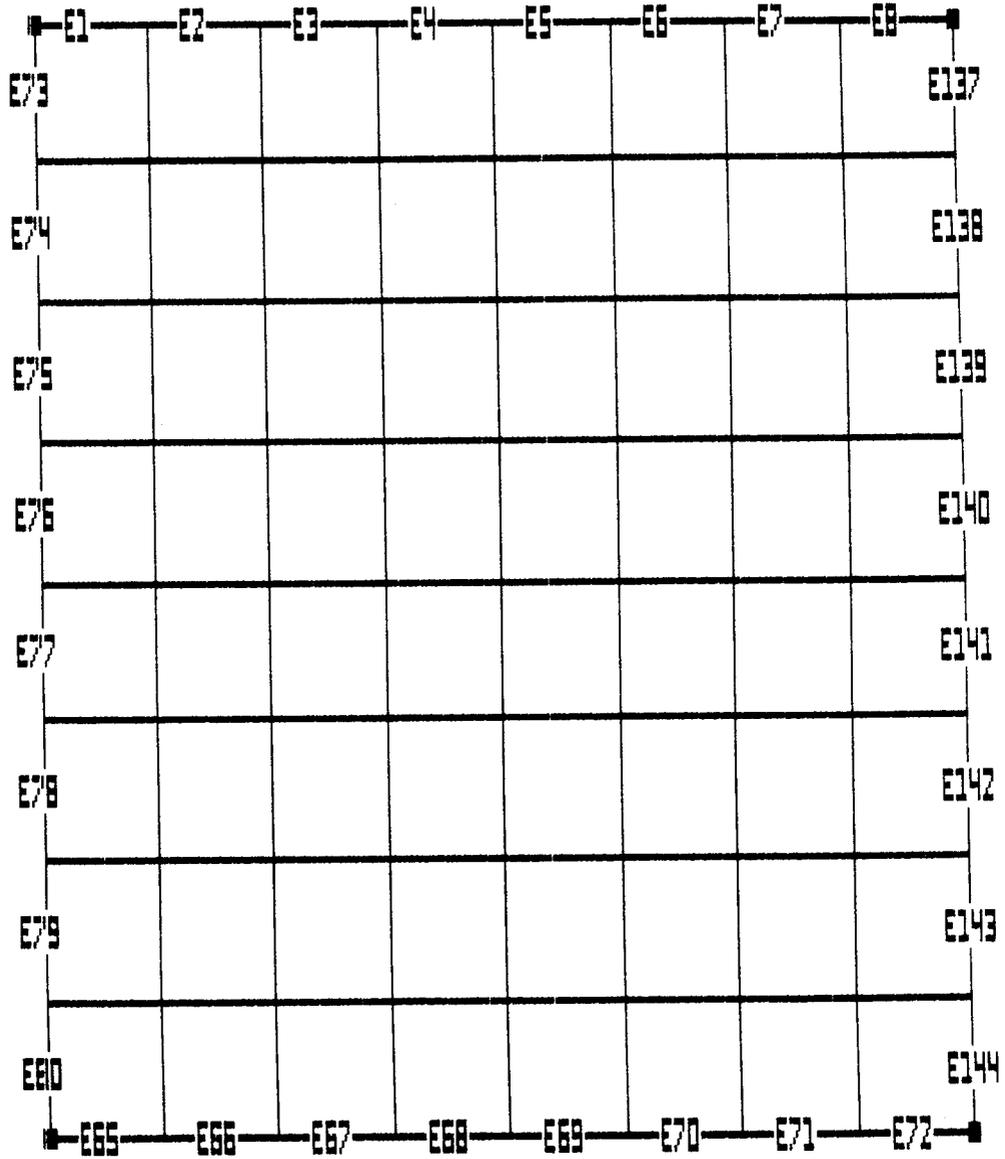


FIG. 5.12- MALHA USADA PARA RESOLVER O EXEMPLO 5.3 - ELEMENTOS NUMERADOS REPRESENTAM VIGAS DE CONTOURO

Características dos elementos

tipo 1 - laje:

armadura  $A_S = 2,42 \text{ cm}^2/\text{m}$  ( $\phi = 6,3 \text{ mm c/ 13 cm}$  e  $\rho = 0,24\%$ );

$$I_r = 5,26 \cdot 10^3 \text{ cm}^4;$$

$$I_{I0} = 3,48 \cdot 10^2 \text{ cm}^4;$$

$$M_r = 2,38 \text{ kN.m};$$

$$I_{t,l} = 1,05 \cdot 10^3 \text{ cm}^4;$$

tipo 2 - viga:

armadura  $A_S = 3,34 \text{ cm}^2$ ;

$I_r = 2,59 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$  (foi considerada a largura colaborante);

$$I_{I0} = 4,68 \cdot 10^4 \text{ cm}^4;$$

$$M_r = 13,8 \text{ kN.m};$$

$$I_{t,l} = 2,59 \cdot 10^4 \text{ cm}^4;$$

outros valores

$$\beta_1 = 1,0;$$

$$\beta_2 = 0,8;$$

Os resultados obtidos pela análise linear e não-linear no meio da placa e da viga estão representados, respectivamente, nos quadros 5.4 e 5.5.

tipo	$m_x$	desloca.	$r_1$	$r_2$
un.	kNm/m	mm		
linear	9,46	11,3	1,00	1,00
não-linear	6,32	25,87	1,50	0,44

**QUADRO 5.4 - MOMENTOS FLETORES E DESLOCAMENTO NO CENTRO DA LAJE PARA A SITUAÇÃO LINEAR E NÃO-LINEAR - EXEMPLO 5.3**

Os valores de  $r_1$  e de  $r_2$  referem-se à relação entre o momento e a flecha do caso linear com o não-linear.

tipo	$M_x$	desloca.	$r_1$	$r_2$
un.	kNm	mm		
linear	62,4	2,10	1,00	1,00
não-linear	65,3	7,94	0,96	0,26

**QUADRO 5.5 - MOMENTOS FLETORES E DESLOCAMENTO NO CENTRO DA VIGA PARA SITUAÇÃO LINEAR E NÃO-LINEAR - EXEMPLO 5.3**

Nas figuras 5.13 e 5.14 estão mostradas a variação de momento fletor e deslocamento no centro da placa com o carregamento. Como era de se esperar os valores da flecha aumentam bastante no caso não-linear enquanto o valor de momento fletor no meio da placa diminui e aumenta no meio da viga .

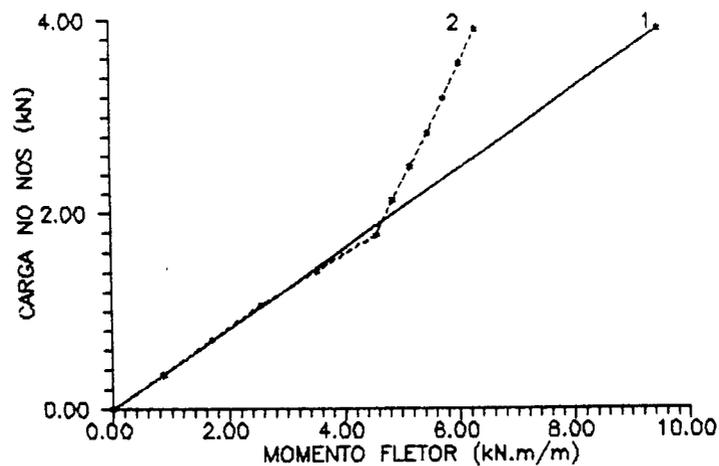


FIG. 5.13- MOMENTO FLETOR MEIO DA PLACA EX.5.3 VARIANDO COM A CARGA 1-LINEAR 2-NAO LINEAR

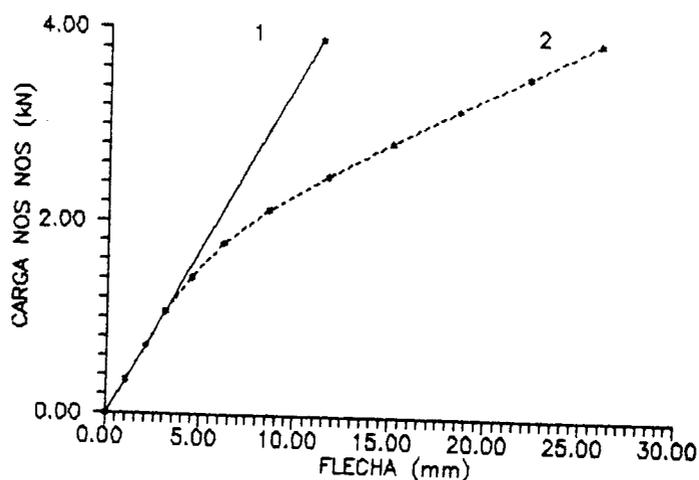


FIG. 5.14- DESLOCAMENTO NO MEIO DA PLACA EX.5.3 VARIANDO COM A CARGA 1-LINEAR 2-NAO LINEAR A FLEXAO

### 5.3.2. PLACA QUADRADA APOIADA EM VIGAS - CONSIDERAÇÃO DO EFEITO DE FISSURAÇÃO NA TORÇÃO EXEMPLO 5.4

Para a placa do exemplo anterior deve-se considerar, além dos valores já fornecidos, o valor da inércia à torção na viga no estágio II,  $I_{t,II} = 4,08 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$  e o momento de fissuração  $M_{TR} = 3,0 \text{ kN.m}$ .

Para facilitar o entendimento do efeito da fissuração à torção, foi resolvido o exemplo em questão, considerando-se apenas o efeito da fissuração na torção e depois os efeitos da flexão e torção. Os valores no ponto central da placa e da viga estão mostrados no quadros 5.6 e 5.7, respectivamente.

tipo	$m_x$	desloca.	$r_1$	$r_2$
un.	kNm/m	mm		
1	9,46	11,3	1,00	1,00
2	6,32	25,8	1,50	0,44
3	10,3	12,5	0,91	0,90
4	6,43	28,7	1,47	0,39

QUADRO 5.6 - MOMENTOS FLETORES E DESLOCAMENTO NO CENTRO DA LAJE PARA SITUAÇÃO 1- LINEAR 2-NÃO-LINEAR À FLEXÃO 3- NÃO-LINEAR À TORÇÃO 4- NÃO-LINEAR À FLEXÃO E À TORÇÃO - EXEMPLO 5.4

Os valores de  $r_1$  e de  $r_2$  têm o mesmo significado que os dos quadros anteriores (relação do caso linear com o não-linear).

A variação de momento fletor e deslocamento no centro da placa, com o carregamento, estão mostradas nas figuras 5.15 e 5.16.

Percebe-se por este e por outros exemplos de placa simplesmente apoiada, que uma vez iniciada a fissuração do concreto, devido à flexão, os deslocamentos aumentam muito e os valores do momento fletor, no centro da placa, diminuem. Por causa da fissuração à torção, também ocorre um aumento no deslocamento, porém pequeno, no centro da placa, enquanto o momento no centro aumenta em virtude da diminuição do engastamento da laje nas vigas. Como pode ser visto nas figuras 5.15 e 5.16, entretanto, o efeito da fissuração à torção é bem menor que o à flexão.

Quando se considera a fissuração do concreto devido à flexão e à torção percebe-se, como já era esperado, um aumento da flecha e também do momento fletor, quando comparado ao caso da fissuração só flexão tanto na situação linear como não linear. A variação que decorre do efeito da fissuração à torção é, de qualquer forma, pequena, sendo sem dúvida, o efeito de flexão responsável pela parcela de maior variação.

Para a viga periférica há pouca diferença na introdução da fissuração à torção conforme pode ser observado pelos resultados obtidos no quadro 5.7.

tipo un.	M kNm	desloca. mm	$r_1$	$r_2$
1	62,36	2,10	1,00	1,00
2	65,30	7,94	0,96	0,26
3	61,26	2,00	1,02	1,05
4	65,14	7,81	0,96	0,27

QUADRO 5.7 - MOMENTOS FLETORES E DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA VIGA PARA SITUAÇÃO 1- LINEAR 2- NÃO-LINEAR À FLEXÃO 3- NÃO-LINEAR À TORÇÃO 4- NÃO-LINEAR FLEXÃO E À TORÇÃO. EXEMPLO 5.4

Também com relação ao momento fletor máximo existe pouca alteração. O deslocamento máximo, no centro da viga chega até a sofrer uma pequena redução, creditada, talvez, à variação das ações da laje na própria viga.

Na figura 5.17 mostra-se o diagrama de momento fletor ao longo da viga periférica para as situações do quadro 5.7

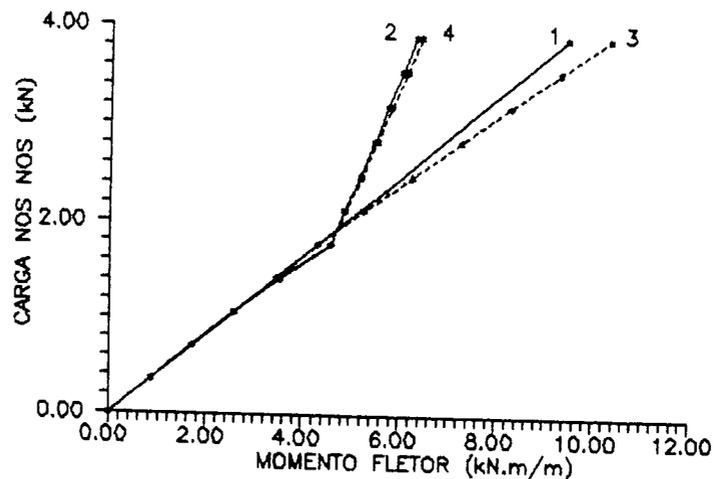


FIG. 5.15- MOMENTO FLETOR NO MEIO DA LAJE EX 5.3 VARIANDO COM A CARGA 1-LINEAR 2-NÃO LINEAR À FLEXÃO 3-NÃO LINEAR À TORÇÃO 4-NÃO LINEAR FLEXÃO E TORÇÃO

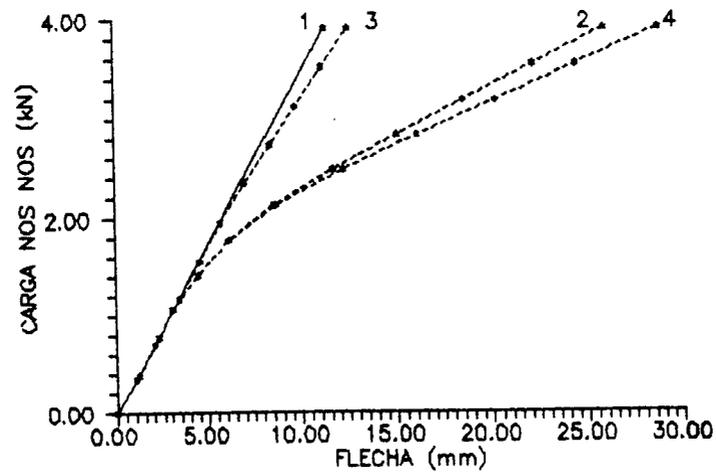


FIG. 5.16- DESLOCAMENTO NO MEIO DA PLACA EX.5.3 VARIANDO COM A CARGA 1-LINEAR 2-NAO LINEAR-A FLEXAO 3-NAO LINEAR A TORCAO 4-NAO LINEAR FLEXAO E TORCAO

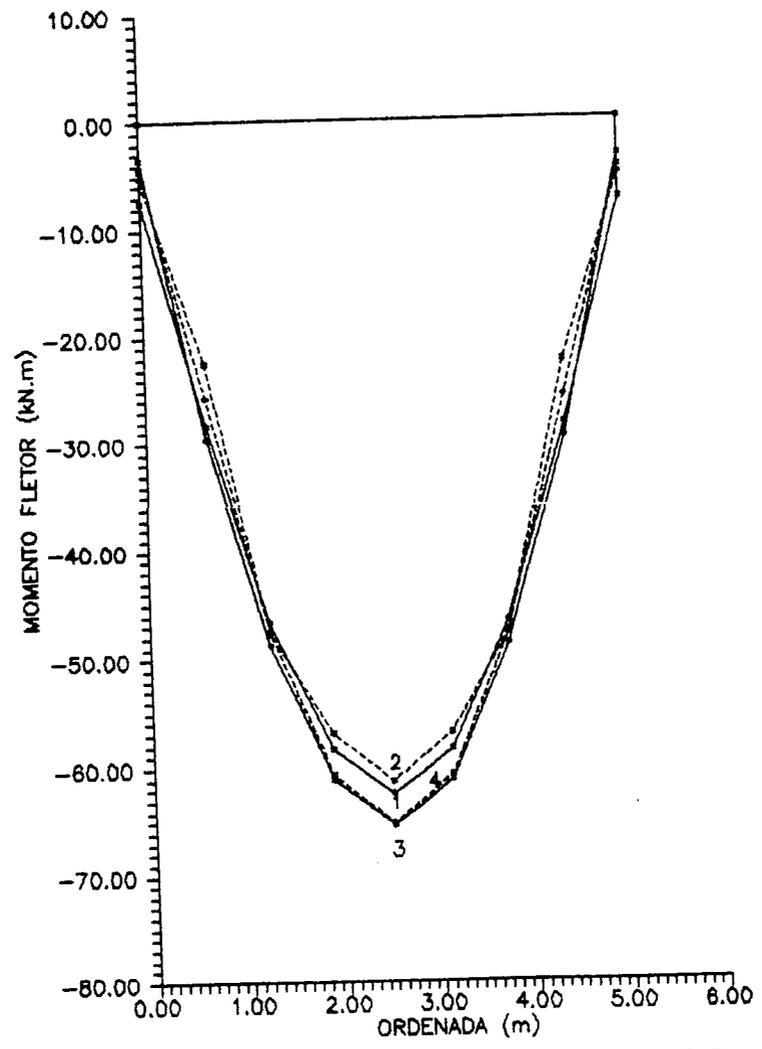


FIG. 5.17 - MOMENTO FLETOR NA VIGA PARA A SITUAÇÃO 1- LINEAR, 2-NAO LINEAR A TORCAO, 3-NAO LINEAR FLEXAO 4- NAO LINEAR FLEXAO E TORCAO.

### 5.3.3 - ANÁLISE DA REAÇÃO DA LAJE NAS VIGAS PERIFÉRICAS EXEMPLOS 5.5, 5.6 E 5.7

Quando se usa o cálculo usual, imaginam-se as lajes trabalhando isoladamente e calculam-se as vigas através da reação que recebem das lajes. É importante, desta forma, definir os valores das reações para calcular corretamente os esforços nas vigas. Um dos critérios para definir a reação da laje nas vigas é fornecido pela NBR 6118 [2], que considera atuando nas vigas cargas uniformemente distribuídas. Para cada viga de contorno, a resultante de carga é obtida multiplicando-se a intensidade da carga uniformemente distribuída pela área de um triângulo ou trapézio correspondente, obtidos a partir dos vértices da laje, em função das condições de apoio.

O problema é abordado por Mazzilli [30], que faz o estudo de lajes retangulares isoladas apoiadas em vigas, variando vãos, dimensões de vigas e espessura da laje. Usa como modelo de cálculo o método dos elementos finitos com formulação linear e mostra, de forma inequívoca, que os valores da reação da laje nas vigas, e conseqüentemente, os esforços nestas, dependem da relação de rigidez entre a laje e a viga, que no processo usual não é possível levar em conta.

Para as lajes de vãos 5x10m, 5x5m e 10x10m, que Mazzilli estuda, verifica-se que na maioria dos casos os momentos fletores no centro das vigas são superiores aos encontrados pelo processo usual.

Com o intuito de estender esta discussão ao campo da influência da fissuração, resolvem-se aqui mais três exemplos denominados 5.5, 5.6 e 5.7, em que se varia a altura das vigas periféricas do exemplo 5.4, fazendo com que se obtenha no último caso, uma "viga" com a altura da laje, ou seja, uma laje sem vigas. A malha adotada tem espaçamento de 0,5 m.

Na figura 5.18 estão mostradas as seções transversais das vigas e respectivas armaduras para os diversos exemplos. Os valores da armadura para cada caso, foram obtidos a partir dos resultados lineares.

Os resultados obtidos para a placa no caso linear e não-linear estão indicados no quadro 5.8. Os resultados obtidos para o centro da viga no caso linear e não-linear estão indicados no quadro 5.9

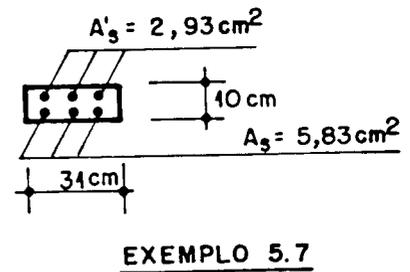
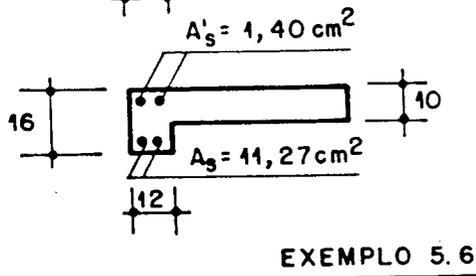
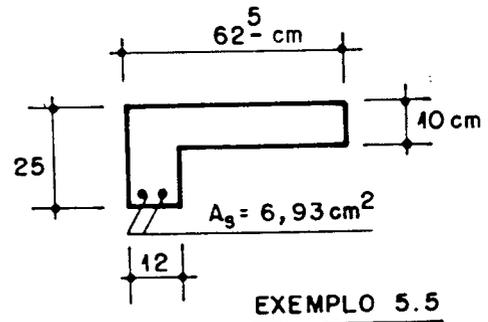
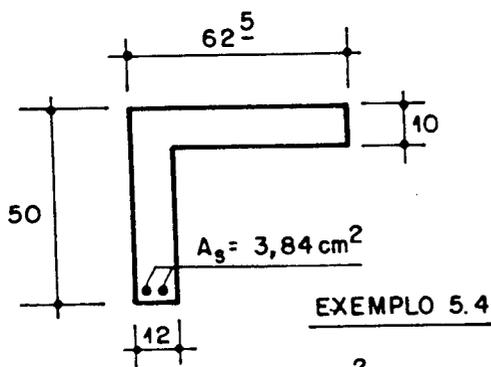


FIG. 5.18- SEÇÕES TRANSVERSAIS DAS VIGAS PERIFÉRICAS DOS EXEMPLOS 5.4, 5.5, 5.6 E 5.7

EXEMPLO	VIGA	LINEAR $m_x$ (kN.m/m)	NÃO LIN. $m_x$ (kN.m/m)	$r_1$	LINEAR a (mm)	NÃO LIN. a (mm)	$r_2$
5.4	12x50	9,60	6,54	0,81	11,32	28,7	2,27
5.5	12x25	13,7	7,85	0,97	24,87	62,89	4,98
5.6	12x16	17,5	17,8	2,20	39,44	339,7	26,9
5.7	31x10	24,8	9,14	1,13	48,51	91,07	7,22
USUAL	12x50	8,09	-----	1,00	12,61	-----	1,00

QUADRO 5.8 -MOMENTOS FLETORES E DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA PLACA VARIANDO A GEOMETRIA DAS VIGAS PERIFÉRICAS, CASOS LINEAR E NÃO-LINEAR.  $r_1$  e  $r_2$  SÃO AS RELAÇÕES DOS MOMENTOS E DESLOCAMENTOS NÃO-LINEARES E O DO CASO USUAL

EXEMPLO	VIGA	LINEAR $M_x$ (kN.m)	NÃO LIN. $M_x$ (kN.m)	$r_1$	LINEAR a (mm)	NÃO LIN. a (mm)	$r_2$
5.4	12x50	62,36	65,14	1,67	2,10	7,81	2,88
5.5	12x25	49,98	61,93	1,59	10,8	24,5	9,04
5.6	12x16	37,65	58,43	1,50	21,7	40,1	14,8
5.7	31x10	13,46	38,87	0,99	31,2	172	63,1
USUAL	12x50	39,06	-----	---	2,71	-----	----

QUADRO 5.9 -MOMENTOS FLETORES E DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA VIGA VARIANDO A GEOMETRIA DAS VIGAS PERIFÉRICAS, CASOS LINEAR E NÃO-LINEAR.  $r_1$  e  $r_2$  RELAÇÕES DOS MOMENTOS E DESLOCAMENTOS NÃO-LINEARES SOBRE O CASO USUAL

Deve-se lembrar, que neste estudo, não foram consideradas as dimensões que os elementos deveriam ter a fim de evitar uma deformação excessiva.

Pelos resultados obtidos percebe-se que os esforços nas vigas são função da sua rigidez principalmente no estágio I, porém quando se considera a fissuração, para este exemplo, percebe-se que o momento fletor da viga converge para um valor bem maior que o obtido pelo processo usual. A explicação para este fato deve ser a de que a laje fissurada não consegue mais distribuir as cargas, principalmente junto ao pilar.

Somente uma viga com baixa rigidez em comparação com a laje, é que pode, no estágio I, para a estrutura estudada, conduzir a um carregamento próximo do uniformemente distribuído na viga periférica, como pode ser visto na figura 5.19. Nesta figura indica-se a reação da laje nas vigas para os diversos casos analisados. Verifica-se que os casos extremos são exatamente o exemplo 5.4 e o 5.7, o caso usual correspondente a, provavelmente, uma distribuição intermediária. De fato ao se fazer uma viga com baixa rigidez (12x16 cm) chega-se a uma distribuição próxima à usual. Quando se considera a fissuração, mesmo para o caso da viga 12x16 cm, a forma do carregamento na viga é bem diferente da uniformemente distribuída, conforme pode ser visto na figura 5.20 .

Data Dump Model

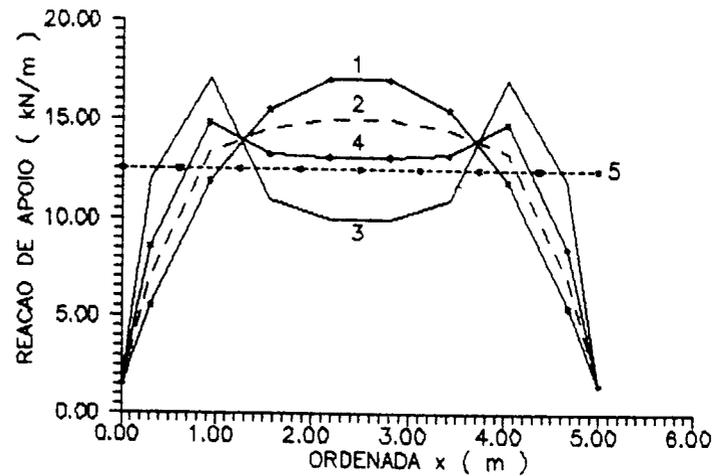


FIG. 5.19 REACAO DE APOIO DA LAJE NA VIGA PERIFERICA  
ANALISE LINEAR, VIGAS 1-12X50 cm; 2-12X25; 3-62,5X10  
4-VIGA CDM 12X16 e 5-REACAO CRITERIO DA NBR 6118

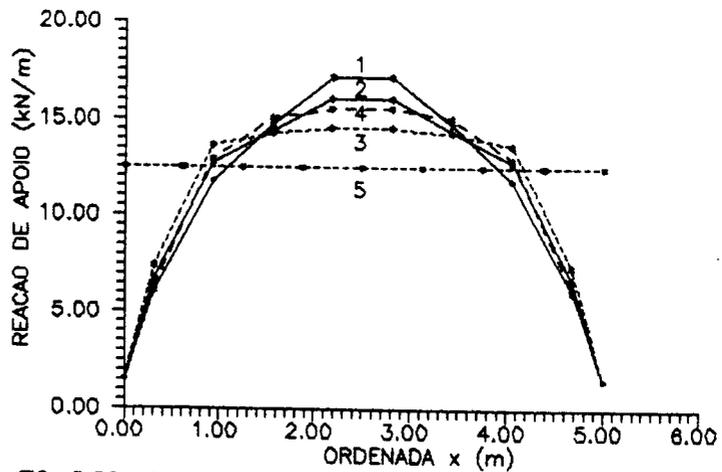


FIG. 5.20 REACAO DE APOIO DA LAJE NA VIGA PERIFERICA  
ANALISE NAO LINEAR VIGAS 1-12X50 cm, 2-12X25 cm,  
3-62,5X10 cm (SEM VIGA),4-12X15 cm,5-CRITERIO NBR 8116

Finalmente salienta-se o fato de que o diagrama de momento fletor em um eixo, que passa pelo meio da placa, mostra que os momentos fletores da placa, próximos à viga, são de valores negativos e de mesma ordem de grandeza dos que ocorrem no centro da placa. Mesmo após a fissuração à torção das vigas e talvez até pela baixa rigidez da placa após a fissuração de flexão, há um certo engastamento da laje na viga. Para que isso seja possível, é necessário detalhar-se armadura própria, pois o modelo aqui usado não considera plastificação do material.

A figura 5.21 mostra o diagrama de momentos ao longo de uma eixo que passa no centro da placa da estrutura estudada.

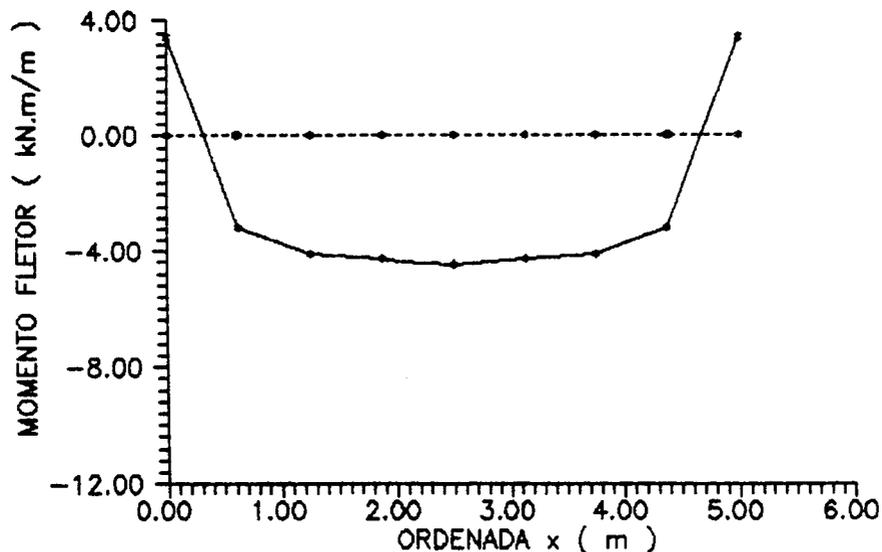


FIG. 5.21 MOMENTO FLETOR EM UMA SEÇÃO PARALELA A BORDA QUE PASSA PELO MEIO DA PLACA, ANÁLISE NÃO LINEAR, VIGA 12x50 cm

Cabe ainda dizer que os comentários feitos aqui são válidos para a estrutura estudada e devem ser, portanto, utilizados apenas como orientação para outras situações. Há influência das condições de contorno da placa, espessura da laje (neste exemplo é pequeno) e ainda a intensidade do carregamento, que nesta situação é alta, pois os deslocamentos são bastantes significativos. O ideal é usar, sempre que possível programas que levem em conta tais efeitos na estrutura.

Cumprir dizer também que, ao detalhar a estrutura, o projetista, optaria pela solução do caso 5.4, ou ainda, por uma que tivesse a viga e laje mais rígidas. Os demais casos servem para se entender o funcionamento da estrutura, mas conduzem a grandes deslocamentos e ao emprego, em algumas situações, de armadura dupla o que na prática poderia ser inviável.

#### 5.4. EXEMPLOS DA ANALOGIA DE GRELHA PARA LAJES SEM VIGAS

Assim como foi feito para as lajes apoiadas em vigas indelocáveis procuram-se resolver dois exemplos de placas apoiadas em pilares, sem vigas.

No primeiro caso (exemplo 5.8) supõe-se placa quadrada, com deslocamentos e rotações livres no contorno, carga uniformemente distribuída e pilares de apoio nos cantos. No segundo são usados os mesmos dados porém, com os bordos engastados, ou seja, impedidos de rotação (exemplo 5.9).

As placas dos dois exemplos foram analisadas com as grelhas mostradas na fig. 5.22, onde aparece a malha utilizada e os nós correspondentes aos pilares numerados. Os resultados são comparados com os da analogia de grelha linear.

Para efeito de comparação mostram-se apenas os resultados obtidos (momentos e deslocamentos) no centro da placa e junto à borda, além também da variação dos mesmos com o carregamento.

##### 5.4.1. PLACA QUADRADA SEM VIGAS - BORDAS LIVRE -EXEMPLO 5.8

Os dados para o exemplo são listados a seguir:

##### Geometria

$$l_x=4m, l_y=4m;$$

$h=12$  cm;

$d= 11$  cm.

### Carregamento

carga total  $p=6$  KN/m<sup>2</sup>;

$g_1=3,0$  kN/m<sup>2</sup>;

$g_2=1,0$  kN/m<sup>2</sup>;

$q=2,0$  kN/m<sup>2</sup>;

total de etapas de carregamento 10

### Características de resistência e deformabilidade

concreto

$f_{ck}= 15$  MPa,  $f_{ctk}= 1,5$  MPa,  $E_c=17\ 000$  MPa e  $\nu =0,2$ ;

aço CA50A

$f_{yk}= 500$  MPa e  $E_s = 2,1 \cdot 10^5$  MPa.

### Discretização

malha de 81 nós e 144 elementos.

### Características dos elementos

armadura  $A_s= 4,00$  cm<sup>2</sup>/m (  $\phi = 6,3$  mm c/ 7,5 cm e  $\rho=0,33\%$  );

$I_r=7,45 \cdot 10^3$  cm<sup>4</sup>;

$I_{l0}=1,19 \cdot 10^3$  cm<sup>4</sup>;

$M_r = 2,84$  kN.m;

$I_{t,l} = 1,40 \cdot 10^4$  cm<sup>4</sup>.

### outros valores

$\beta_1= 1,0$ ;

$\beta_2= 0,8$ ;

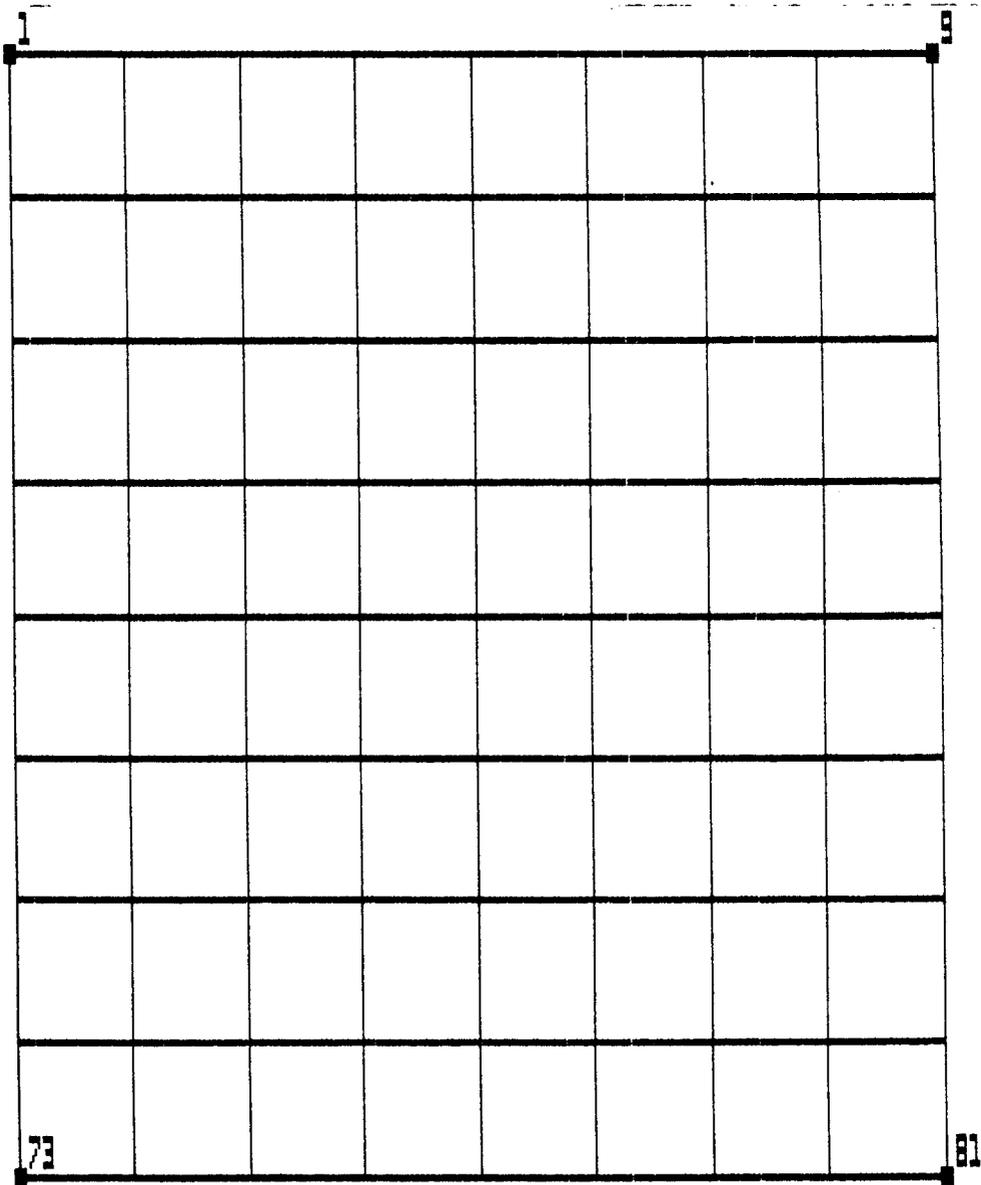


FIG. 5.22-MALHA USADA PARA RESOLVER OS EXEMPLOS 5.8 e 5.9 NÓS INDICADOS REPRESENTAM OS PILARES DA ESTRUTURA

Assim, o momento fletor e o deslocamento vertical no centro da placa do exemplo 5.8 são dados no quadro 5.10

tipo	$m_x$	$r_1$	deslocam.	$r_2$
un.	kNm/m		mm	
linear	9,60	1,00	10,2	1,00
não-linear	11,4	0,86	25,2	0,40

QUADRO 5.10 - MOMENTOS FLETORES E DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA LAJE PARA SITUAÇÃO LINEAR E NÃO-LINEAR - EXEMPLO 5.8

Da mesma forma, são mostrados no quadro 5.11 os valores dos momentos e deslocamentos no centro da borda livre

tipo	$m_x$	$r_1$	desloc.	$r_2$
un.	kNm/m		mm	
linear	8,20	1,00	6,50	1,00
não-linear	6,58	1,24	14,5	0,44

QUADRO 5.11 - MOMENTOS FLETORES E DESLOCAMENTO NO CENTRO DA BORDA PARA SITUAÇÃO LINEAR E NÃO-LINEAR - EXEMPLO 5.8

Pode-se concluir que os momentos positivos no centro da placa aumentam quando há fissuração, enquanto que os da borda diminuem. Isto fica claro ao observar as figuras 5.25 e 5.26. Na figura 5.23 percebe-se a existência de duas inclinações após a primeira fissuração. O primeiro desvio deve-se ao início da fissuração dos elementos próximos ao apoio. A segunda inclinação é devida ao início da fissuração dos elementos centrais junto com os da borda. Na figura 5.24 é mostrada a deformação do ponto central com o carregamento. Nota-se a grande perda de rigidez da estrutura e a ocorrência de três inclinações no diagrama. A primeira, referente ao trecho linear; a segunda, à fissuração dos elementos de contorno, e a última, à fissuração de quase todos os elementos. Nas figuras 5.25 e 5.26 mostra-se o desenvolvimento do momento fletor ao longo da borda e do eixo central da placa.

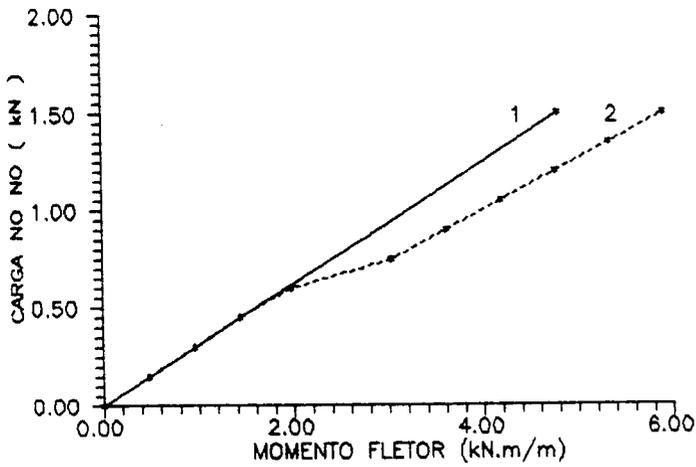


FIG. 5.23- CARGA X MOMENTO FLETOR, NO CENTRO DA PLACA DO EXEMPLO 5.8 1-LINEAR 2-NAO LINEAR

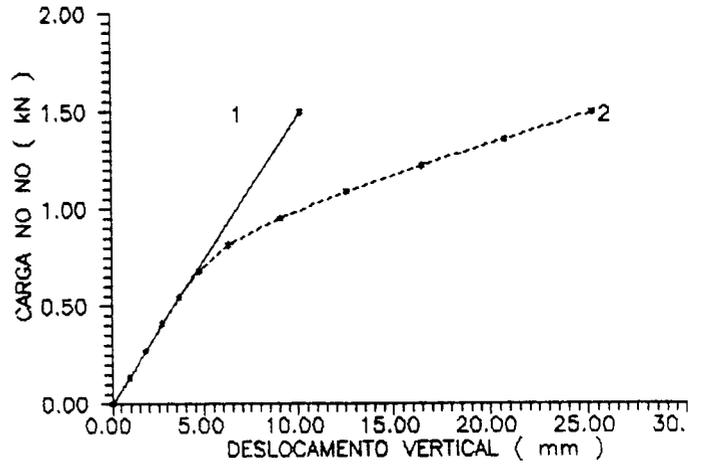


FIG. 5.24- DESLOCAMENTO VERTICAL NO CENTRO DA PLACA DO EXEMPLO 5.8 1-LINEAR 2-NAO LINEAR

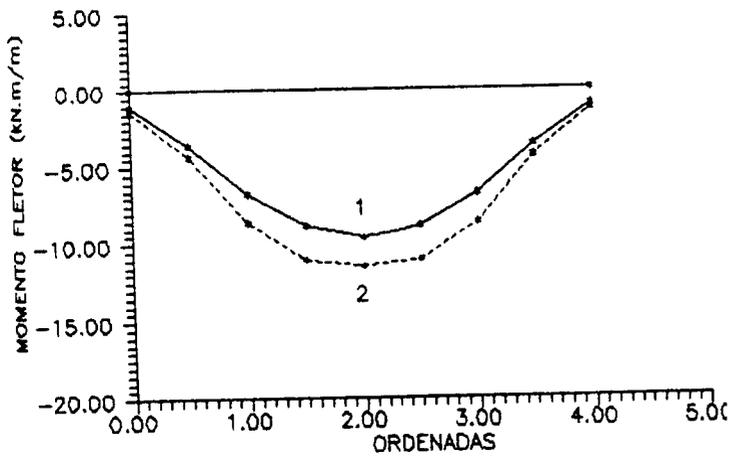


FIG. 5.25 -MOMENTO FLETOR AO LONGO DO EIXO CENTRAL DA PLACA EX.5.8 1-LINEAR 2-NAO LINEAR

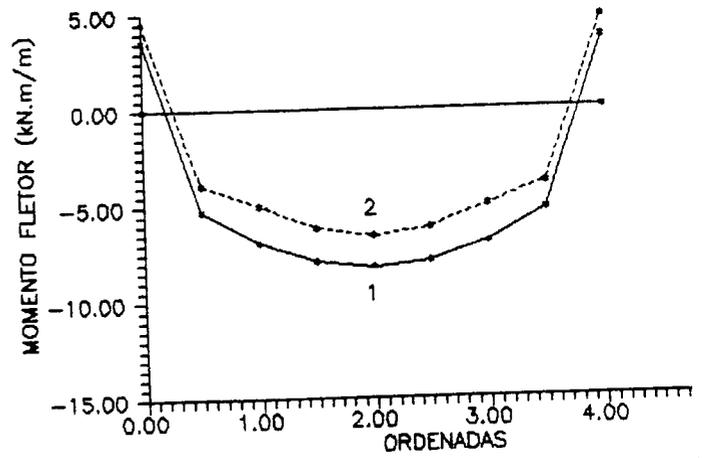


FIG. 5.26 -MOMENTO FLETOR AO LONGO DO BORDO DA PLACA DO EX.5.8 1-LINEAR 2-NAO LINEAR

5.4.2. PLACA QUADRADA SEM VIGAS - BORDAS ENGASTADAS - EXEMPLO5.9

Consideram-se os mesmos dados do exemplo anterior, alterando apenas as armaduras dos elementos. Assim, tem-se:

Características dos elementos

tipo 1 elementos centrais:

armadura  $A_S = 1,60 \text{ cm}^2/\text{m}$  ( $\phi = 6,3 \text{ mm c/ } 20 \text{ cm}$  e  $\rho = 0,13\%$ );

$I_i = 7,30 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$ ;

$I_{i0} = 5,34 \cdot 10^2 \text{ cm}^4$ ;

$M_r = 2,75 \text{ kN.m}$ ;

$I_{t,i} = 1,46 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$ .

tipo 2 elementos de borda:

armadura  $A_S = 3,68 \text{ cm}^2/\text{m}$  ( $\phi = 6,3 \text{ mm c/ } 9 \text{ cm}$  e  $\rho = 0,31\%$ );

$I_i = 7,49 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$ ;

$I_{i0} = 1,11 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$ ;

$M_r = 2,54 \text{ kN.m}$ ;

$I_{t,i} = 1,49 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$ .

Resolvendo-se a estrutura, determinam-se os valores do momento fletor e o deslocamento vertical no centro da placa, dados no quadro 5.12

tipo	$m_x$	$r_1$	desloc.	$r_2$
un.	kNm/m		mm	
linear	2,42	1,00	2,10	1,00
não-linear	2,78	0,87	3,16	0,66

QUADRO 5.12 - MOMENTOS FLETORES E DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA PLACA PARA SITUAÇÃO LINEAR E NÃO-LINEAR - EXEMPLO 5.9

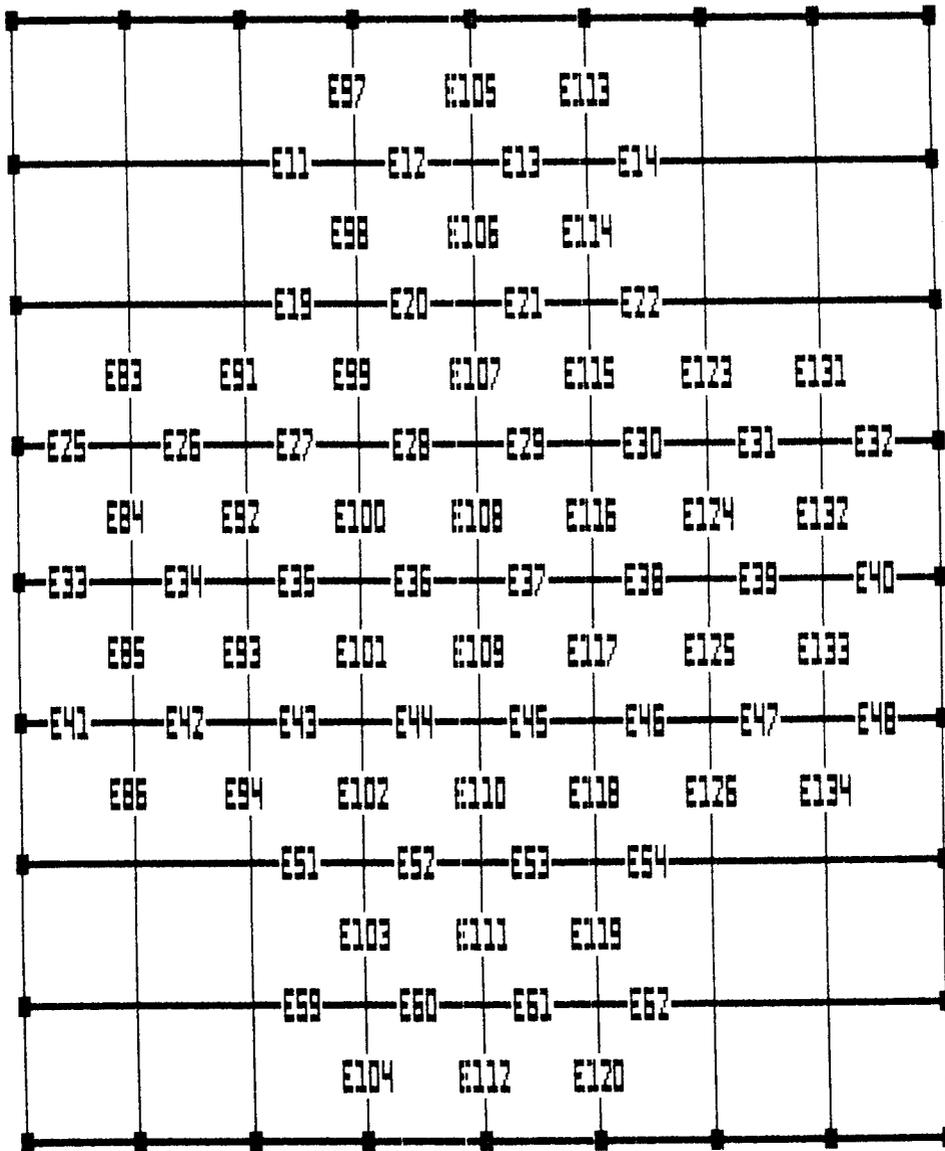


FIG. 5.27-MALHA USADA PARA RESOLVER O EXEMPLO 5.9 . ELEMENTOS INDICADOS REPRESENTAM OS ELEMENTOS CENTRAIS

Da mesma forma mostram-se, no quadro 5.13, os valores dos momentos e deslocamentos no centro da borda

tipo	$m_x$	$r_1$	deslocam. $r_2$	
un.	kNm/m		mm	
linear	2,92	1,00	1,60	1,00
não-linear	3,48	0,84	2,60	0,62

QUADRO 5.13 - MOMENTOS FLETORES E DESLOCAMENTO NO CENTRO DA BORDA PARA SITUAÇÃO LINEAR E NÃO-LINEAR - EXEMPLO 5.11

Pode-se concluir que os momentos fletores positivos aumentam, enquanto que os negativos diminuem. Isto fica claro ao se observar a figura 5.31.

Na figura 5.29 é mostrada o deslocamento do ponto central com o carregamento. Nota-se que a perda de rigidez da estrutura, quando comparada ao exemplo anterior é menor. Isto se deve, é claro, ao fato de que o sistema estrutural é, neste caso, bem mais hiperestático.

Os elementos da borda, como pode ser visto na fig. 5.31, têm um comportamento de viga. O momento negativo junto ao pilar diminui, em valor absoluto, devido à fissuração, enquanto que nesta região o momento positivo aumenta.

De qualquer maneira, a variação de momentos não é tão grande quanto se esperava, ou seja, não há uma redistribuição muito grande, talvez devido até aos valores relativamente altos para os momentos de fissuração, que as lajes têm.

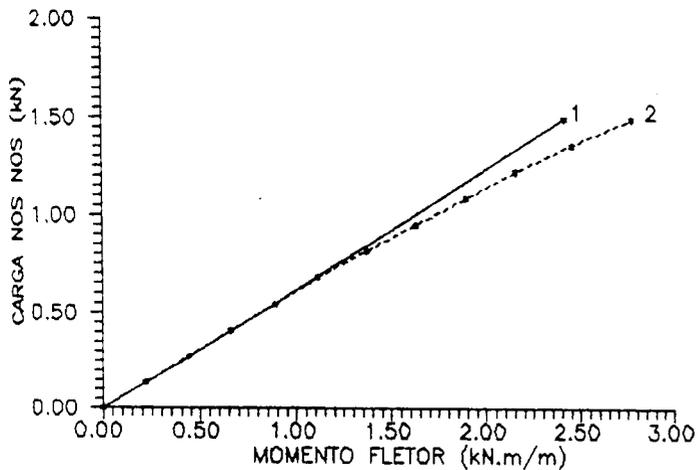


FIG. 5.28- VARIACAO DO MOMENTO FLETOR NO MEIO DA PLACA COM O CARREGAMENTO EX. 5.9 1-LINEAR 2- NAO LINEA

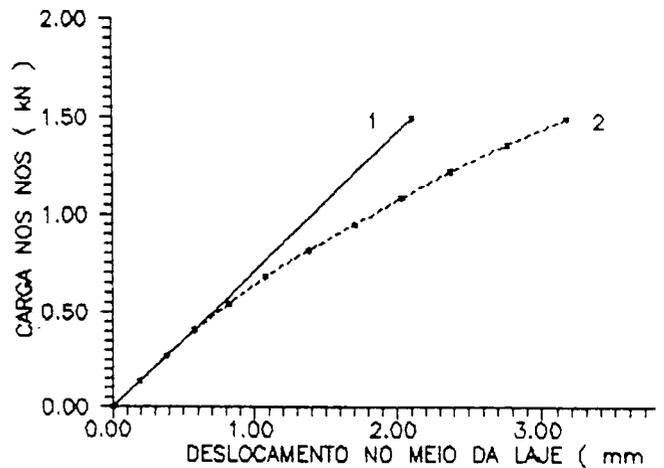


FIG. 5.29- VARIACAO DO DESLOCAMENTO NO MEIO DA F COM O CARREGAMENTO EX. 5.9 1-LINEAR 2-NAO L

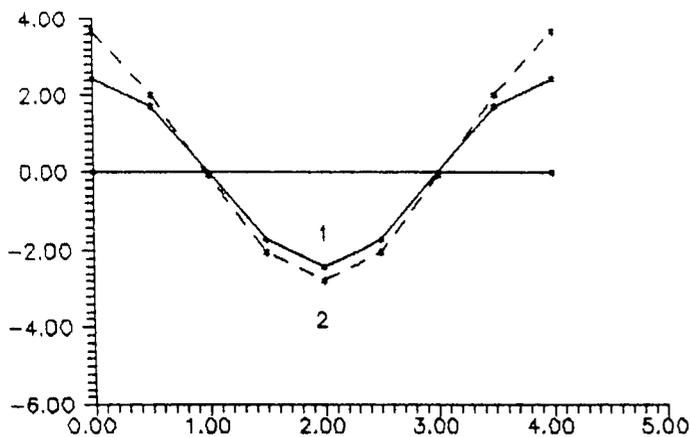


FIG. 5.30- MOMENTO FLETOR NO EIXO CENTRAL DA LAJE DO EX. 5.9 1- LINEAR 2-NAO LINEAR

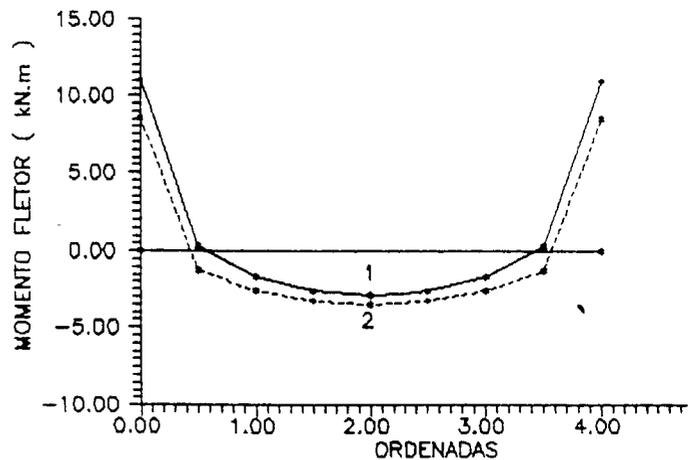


FIG. 5.31 -MOMENTO FLETOR NA BORDA DA PLACA DO EX. 5.8 1-LINEAR 2-NAO LINEAR

## 5.5 -EXEMPLO DE ANALOGIA DA GRELHA PARA PAVIMENTO COM LAJES ASSOCIADAS E VIGAS

Procura-se neste item estudar o pavimento, típico de edifícios residenciais, cuja forma é dada na figura 5.32. Este mesmo exemplo é resolvido por Mazzilli [30], usando elementos finitos e Barboza [5] com analogia de grelha. Todas as duas formulações anteriores, consideram a linearidade entre esforços e deslocamentos. Na análise feita aqui, considera-se a fissuração à flexão que conduz à não-linearidade entre esforços e deslocamentos.

A estrutura em questão é resolvida com analogia de grelha linear e não-linear e variando-se o valor de  $G$ . Na grelha não-linear consideram-se separadamente as situações de fissuração à flexão e à torção, para em seguida, levar-se em conta a fissuração à torção com à flexão. Finalmente, são apresentados os resultados obtidos para as considerações de cálculo usual e do método dos elementos finitos. Cada situação ou hipótese de cálculo, é chamada de "caso" e atribui-se, a cada uma delas, um número. Assim, são apresentados os resultados dos seguintes casos:

- Caso 0** - estrutura resolvida com o método dos elementos finitos e análise linear. Este caso é o único que não considera a largura colaborante nas vigas e os resultados são tirados de Mazzilli [30];
- Caso 1** - estrutura resolvida pelo processo usual com análise linear.
- Caso 2** - estrutura resolvida com analogia de grelha, análise linear e  $G=0,15.E_C$  ;
- Caso 3**- estrutura resolvida com analogia de grelha, análise não linear, fissuração à flexão e  $G=0,15.E_C$ ;
- Caso 4** -estrutura resolvida com , analogia de grelha, análise linear e  $G$  dado pela teoria da elasticidade com  $\nu=0,2$  ;
- Caso 5** -estrutura resolvida com analogia de grelha, análise não-linear, fissuração à flexão e  $G$  dado pela teoria da elasticidade com  $\nu=0,2$  ;
- Caso 6** -estrutura resolvida com analogia de grelha, análise não-linear, fissuração à torção e  $G$  dado pela teoria da elasticidade com  $\nu=0,2$  ;

Caso 7 - estrutura resolvida com analogia de grelha, análise não-linear, fissuração à flexão e à torção e  $G$  dado pela teoria da elasticidade com  $\nu=0,2$ .

Os casos 2 e 3 fazem parte do exemplo 5.10 e os seus resultados aparecem junto com os dos casos 0 e 1. Os casos 4, 5 fazem parte do exemplo 5.11 e os 6 e 7 do exemplo 5.12 ( para maior facilidade de leitura do texto usar páginas do anexo I ).

### DADOS GERAIS

Para a sequência de casos a serem resolvidos, existem dados comuns que são descritos a seguir:

#### Geometria

definida na figura 5.32.

#### Carregamento

carga total  $p=5 \text{ KN/m}^2$ ;

$g_1=2,5 \text{ kN/m}^2$ ;

$g_2=0,5 \text{ kN/m}^2$ ;

$q=2,0 \text{ kN/m}^2$ ;

total de etapas de carregamento 20.

#### Características de resistência e deformabilidade

concreto

$f_{ck}= 15 \text{ MPa}$ ,  $f_{ctk}= 1,5 \text{ MPa}$ ,  $E_c=30 \text{ 000 MPa}$ ;

aço CA50A

$f_{yk}= 500 \text{ MPa}$  e  $E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ .

#### Discretização

malha de 132 nós e 241 elementos, apresentada na fig. 5.33.

Características dos elementos

apresentadas nas figuras 5.34, 5.36 e complementadas pelos quadro 5.14 e 5.15

outros valores

$$\beta_1 = 1,0 \text{ e } \beta_2 = 0,8.$$

Como é necessário calcular a armadura, para levar em conta o efeito de fissuração, foram usados os resultados do processo usual para determiná-la.

Em nenhum procedimento é considerado o peso próprio das vigas, e a carga atuante nas lajes é considerada como uniformemente distribuída em todas elas.

No processo usual, considera-se o pavimento formado por placas isoladas e vigas simplesmente apoiadas nos pilares. Os momentos nas lajes são calculados pela teoria de placas, e as reações nas vigas, de acordo com o procedimento da NBR6118, já comentado no capítulo 2. Finalmente, as vigas são consideradas apoiando-se simplesmente nos pilares, que não sofrem, em presença delas, deformações axiais. Os valores assim obtidos estão indicados nos quadros apresentados nos próximos itens. Os momentos fletores nas vigas, nesta situação, em nada dependem das constantes elásticas  $E_c$  e  $G$ .

Na figura 5.36 estão indicados os tipos de elementos usados nas vigas e nas placas.

Nas figuras 5.35 e 5.37 indicam-se os pontos onde são calculados os deslocamentos verticais, os momentos fletores das lajes e os momentos fletores nas vigas.

A relação  $G=0,15.E_c$ , usada no exemplo 5.10 e recomendada por Hanai et Alli [24], é para simular a fissuração à torção das vigas que têm rigidez baixa. Assim, para este exemplo, não se considera a fissuração à torção, comparando-se depois este caso com o 6 (fissuração à torção e  $G$  dado pela teoria da elasticidade).

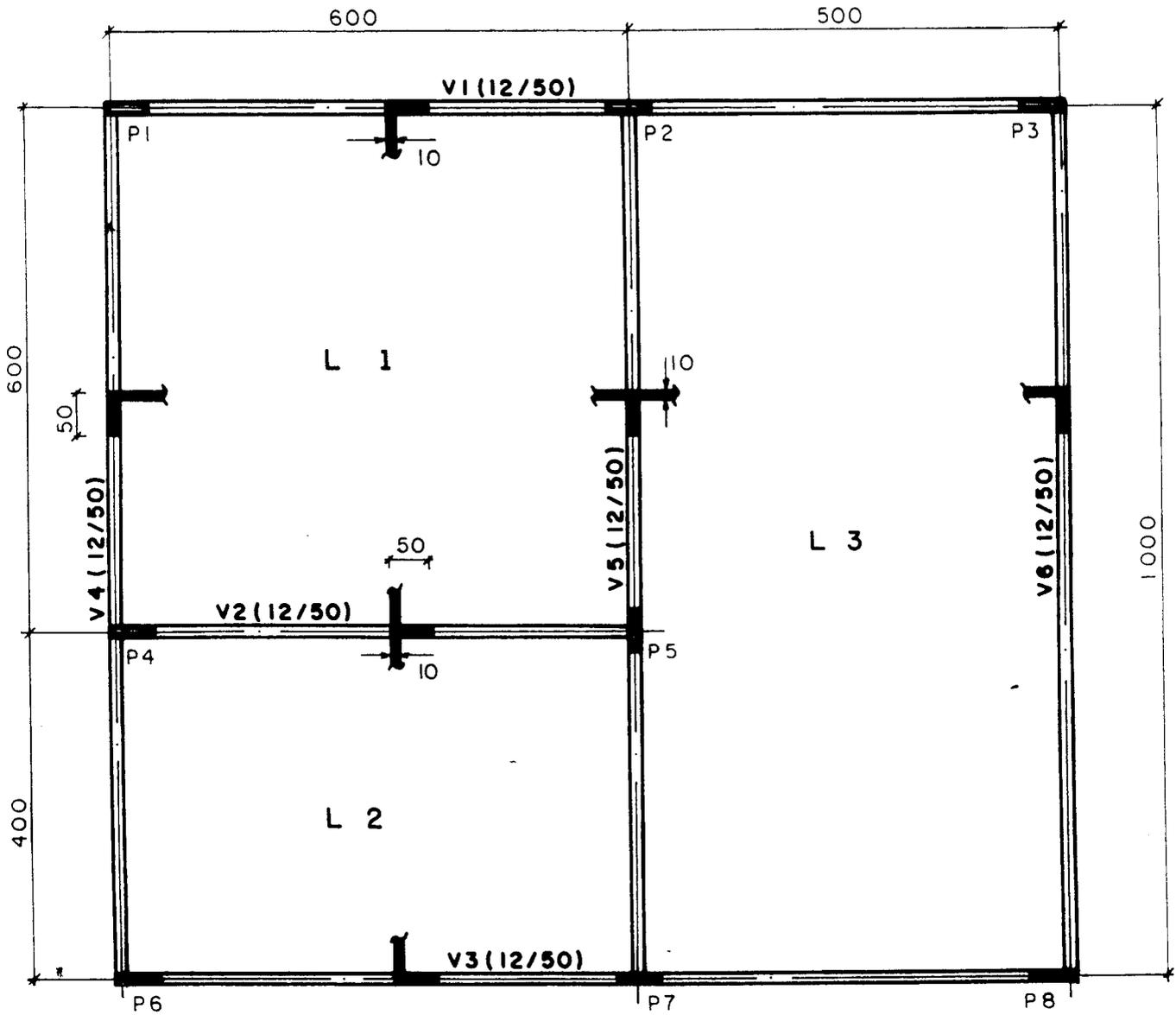


FIG 5.32 PLANTA DE FORMA DO PAVIMENTO USADO NOS EXEMLOS 5.10 E.5.11 -  
MEDIDAS EM cm

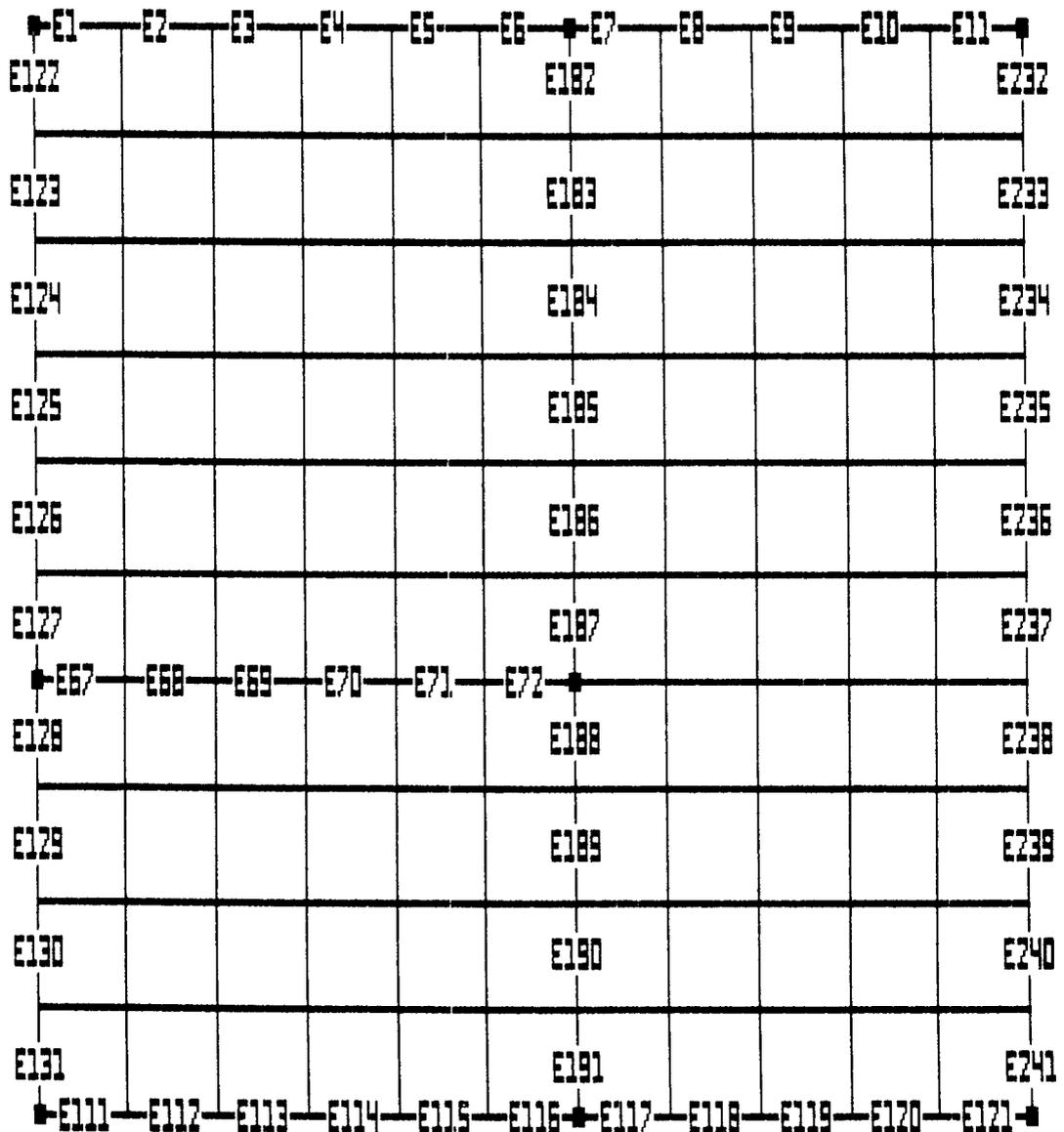


FIG 5.33 MALHA EMPREGADA PARA A RESOLUÇÃO DO PAVIMENTO DE EX.5.10, EX 5.11 e EX. 5.12 - ELEMENTOS NUMERADOS CORRESPONDEM AS VIGAS DO PAVIMENTO

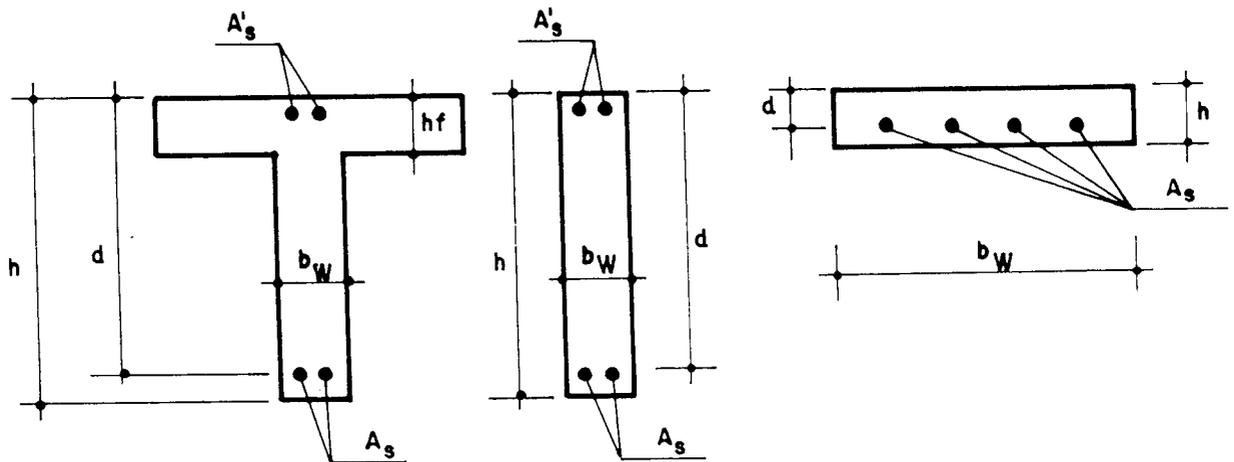


FIG 5.34 SEÇÕES TRANSVERSAIS USADAS PARA A RESOLUÇÃO DO PAVIMENTO DE EX.5.10, EX. 5.11 e 5.12 - COM ANALOGIA DE GRELHA

elemento	estrutura	$b_w$ cm	$b_f$ cm	$h_f$ cm	$A_s$ cm <sup>2</sup>	$A'_s$ cm <sup>2</sup>
1	V1,V3,V4	12	50	10	1,10	0,64
2	V1,V3,V4	12	50	10	1,45	0,64
2A	V1,V3,V4	12	0	0	1,45	0,64
3	V2	12	172	10	5,57	0,64
4	V5	12	72	10	4,70	0,64
5	V5	12	72	10	6,79	0,86
5A	V5	12	0	0	6,79	0,86
6	V6	12	92	10	6,64	0,64
7	LAJE	100	0	0	6,50	0
8	LAJE	100	0	0	3,00	0

QUADRO 5.14 -CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS USADAS NOS EXEMPLOS 5.10 , 5.11 E 5.12

grandeza	$I_1$	$I_{n,0}$	$M_r$	$I_{t,I}$	$I_{t,II}$	$M_{TR}$
unidade	$m^4$	$cm^4$	$kN.m$	$m^4$	$m^4$	$kN.m$
multiplica por	$.10^{-3}$	$.10^{-4}$	$.10^{-4}$	$.10^{-4}$	$.10^{-5}$	
elemento						
1	2,27	1,72	15,72	2,59	4,30	3,00
2	2,30	1,76	15,88	2,59	4,30	3,00
3	3,57	8,14	20,59	2,59	4,30	3,00
4	2,79	6,15	18,29	2,59	4,30	3,00
5	3,12	8,57	19,80	2,59	4,30	3,00
6	2,91	6,30	19,28	2,59	4,30	3,00
7	0,0653	0,188	2,700	1,30	1,30	--
8	0,0629	0,099	2,560	1,25	1,25	--

QUADRO 5.15 -CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E MOMENTOS DE FISSURAÇÃO DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS USADAS NOS EXEMPLOS 5.10 , 5.11 E 5.12

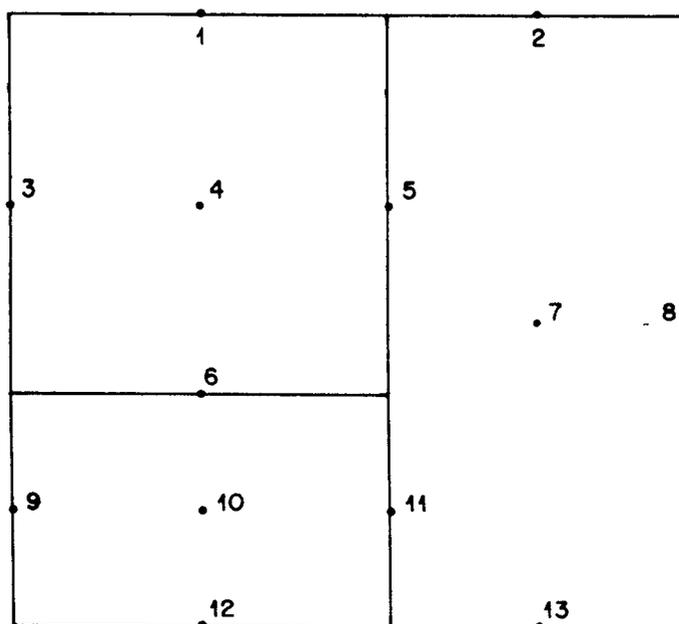


FIG 5.35 PONTOS PARA CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS NAS DIVERSAS SITUAÇÕES

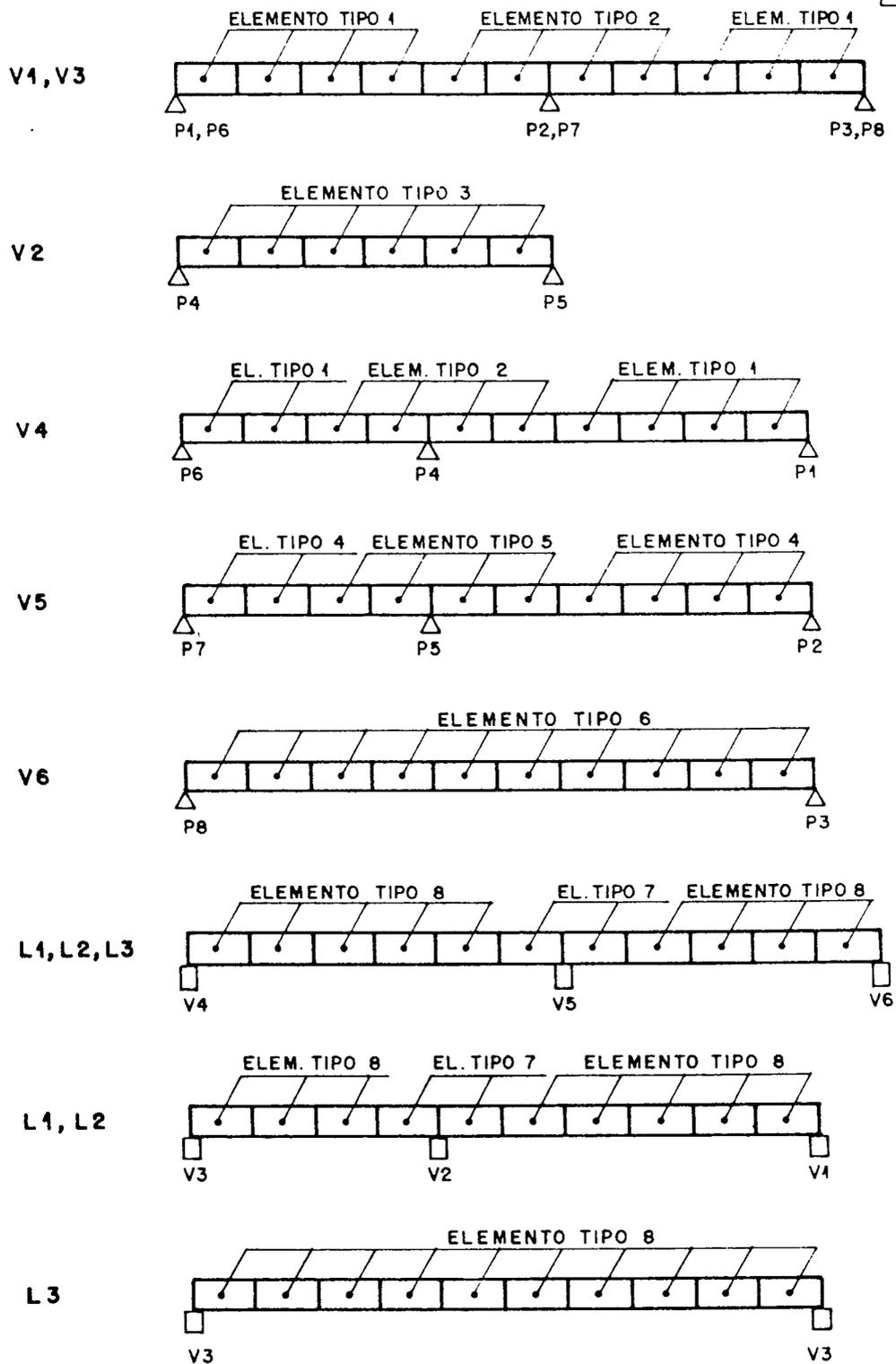


FIG 5.36 TIPOS DE ELEMENTOS USADOS PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR

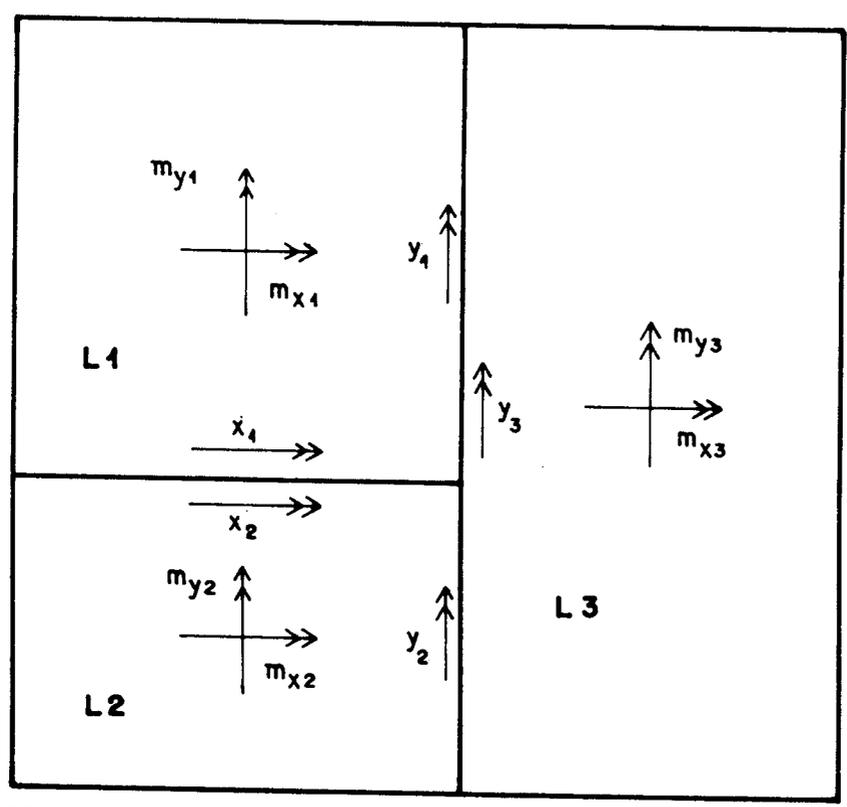
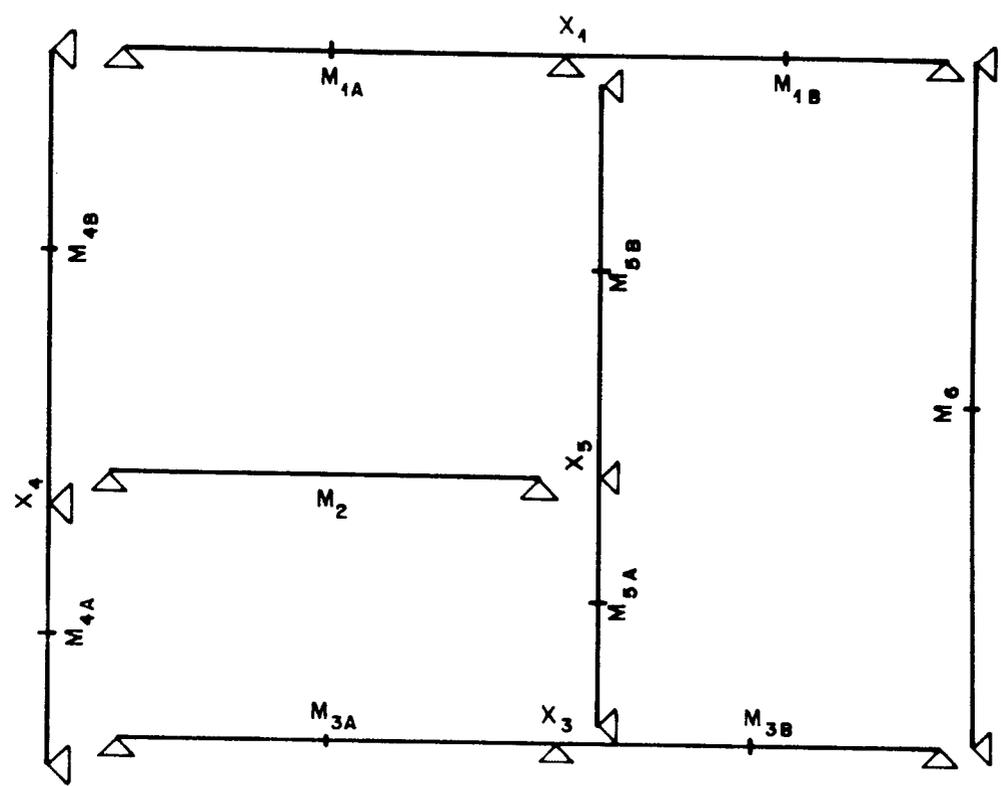


FIG 5.37 ESQUEMA ESTRUTURAL DAS VIGAS PARA A CASO 1 E PONTOS PARA CÁLCULO DOS MOMENTOS FLETORES DAS VIGAS E DAS LAJES

### 5.5.1. CONSIDERAÇÃO DA FISSURAÇÃO DO CONCRETO À FLEXÃO, VALOR DE G REDUZIDO - EXEMPLO 5.10

O estudo do pavimento em questão é iniciado, fazendo-se a análise da fissuração somente à flexão. Os resultados são comparados com os obtidos pelo método dos elementos finitos linear, usual e analogia de grelha linear. Assim como nos outros casos, comparam-se as reações nos pilares, os momentos fletores nas vigas e nas lajes, e finalmente os deslocamentos nos pontos indicados.

#### 5.5.1.1 ANÁLISE DAS REAÇÕES NOS PILARES

São apresentadas, neste item, as reações nos pilares, para os casos 0, 1, 2 e 3. No quadro 5.16 estão anotados os valores das reações que podem ser vistas representadas em um diagrama de barras da figura 5.38

PILAR	CASO 0	CASO 1	CASO 2	CASO 3
P1	28,32	26,76	28,82	28,94
P2	82,20	89,90	85,18	84,22
P3	43,83	44,77	45,81	45,57
P4	78,10	82,79	80,50	79,84
P5	223,5	193,2	207,7	211,4
P6	12,49	12,66	13,37	13,44
P7	37,69	53,68	42,18	40,81
P8	43,86	45,20	46,53	46,21

QUADRO 5.16 - REAÇÕES NOS PILARES EM kN

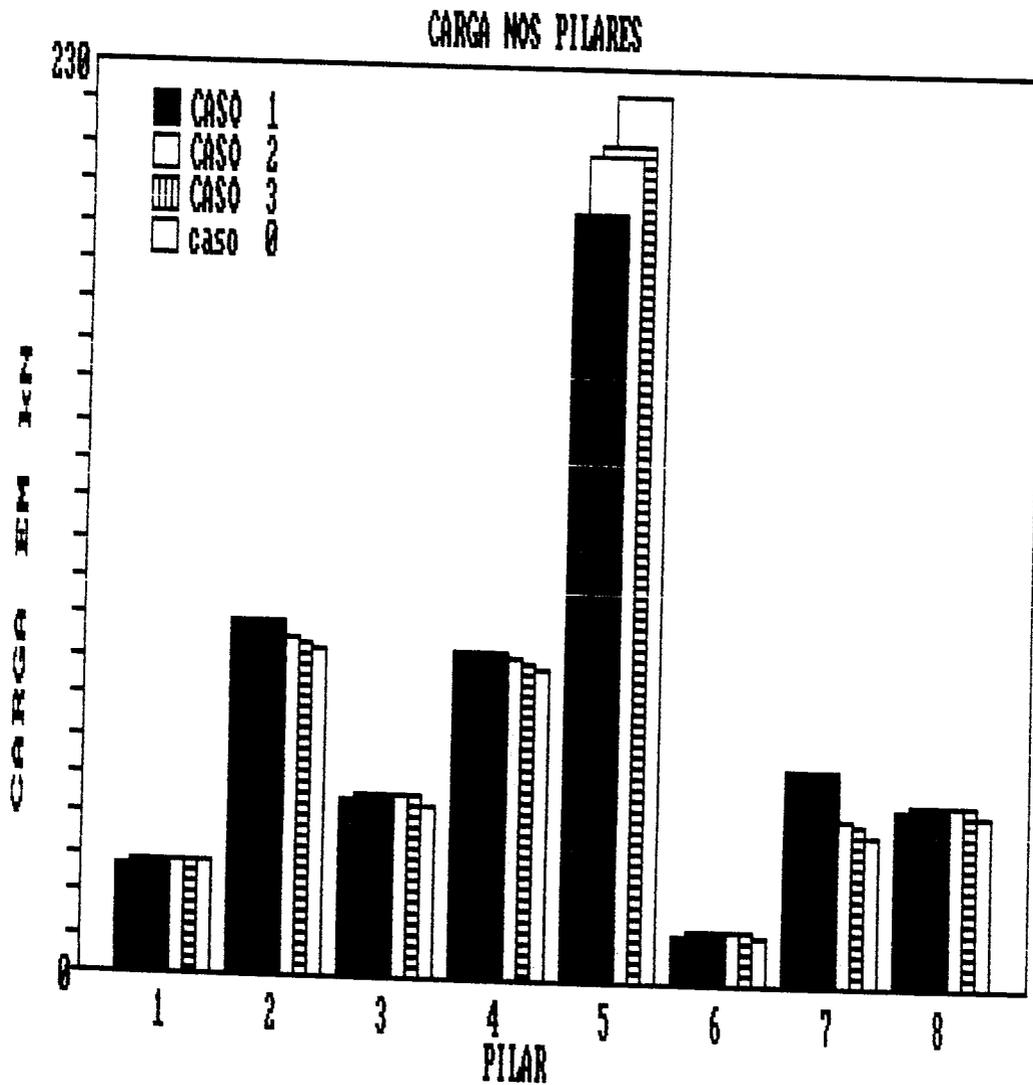


FIG 5.38 GRÁFICO DE DIAGRAMA DE BARRAS COM AS REAÇÕES NOS PILARES PARA OS CASOS: 0- MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS LINEAR; 1- PROCESSO USUAL; 2-ANALOGIA DE GRELHA LINEAR ; 3-ANALOGIA DE GRELHA NÃO-LINEAR À FLEXÃO.

Percebe-se, ao analisar a figura 5.38, que a maior diferença entre valores se dá quando é comparado o processo dos elementos finitos (caso 0) com o cálculo usual (caso 1) para o pilar central. Também existe uma diferença razoável na reação do mesmo pilar, quando se compara a analogia de grelha (caso 2) e ao processo usual. As diferenças, nas reações dos pilares, devido à fissuração são insignificantes. De qualquer maneira, há um aumento na reação de P5 com uma diminuição das reações em P2 e P7. Isto se deve, provavelmente, a um comportamento, depois da fissuração, mais próximo de uma laje sem vigas, em que a reação de P5 é bem maior que a situação da laje com vigas.

É importante salientar que a redistribuição de reações nos pilares devida à fissuração é muito pequena, e não traria, para fins de detalhamento, diferenças significativas.

Algumas relações entre reações dos pilares estão mostradas no quadro 5.17.

PILAR	RELAÇÃO DE REAÇÕES	VALOR
P5	caso 0/caso 1	1,16
P5	caso 2/caso 1	1,10
P5	caso 3/caso 1	1,09
P5	caso 2/caso 3	0,98
P2	caso 2/caso 3	1,01
P1	caso 2/caso 3	0,98
P3	caso 2/caso 3	0,99
P6	caso 2/caso 3	0,99
P8	caso 2/caso 3	1,00

QUADRO 5.17 - RELAÇÕES ENTRE REAÇÕES NOS PILARES

### 5.5.1.2 ANÁLISE DOS MOMENTOS FLETORES NAS VIGAS

Os valores encontrados para os momentos fletores, nas seções das vigas, indicadas na fig. 5.35, para os casos 0, 1, 2 e 3 estão indicados no quadro 5.18.

SEÇÃO	CASO 0	CASO 1	CASO 2	CASO 3
$M_{1a}$	27,19	15,70	24,19	24,62
$X_1$	-31,02	-20,0	-27,9	-25,7
$M_{1B}$	12,71	5,200	10,10	13,66
$M_2$	51,75	80,00	69,90	63,92
$M_{3A}$	20,95	13,70	18,45	17,68
$X_3$	-23,7	-18,5	-22,9	-19,1
$M_{3B}$	11,83	6,300	10,97	14,26
$M_{4A}$	4,40	0,600	2,66	3,58
$X_4$	-29,9	-17,0	-25,6	-25,5
$M_{4B}$	28,07	17,0	26,06	25,71
$M_{5A}$	16,03	10,56	10,65	14,36
$X_5$	-82,6	-76,6	-87,3	-84,3
$M_{5B}$	64,30	66,40	73,93	70,35
$M_6$	80,35	93,40	113,2	102,2

**QUADRO 5.18 - MOMENTOS FLETORES EM kN.m NAS VIGAS**

Quando se considera a fissuração, imagina-se que os momentos fletores negativos de uma viga, diminuem e, conseqüentemente, os momentos fletores positivos nos tramos aumentem. Porém, é necessário lembrar que, quando se analisa o conjunto lajes-vigas, a distribuição das cargas nas vigas, também pode ser alterada, pela fissuração das lajes, que pode aumentar ou diminuir este efeito. Ressalta-se que não é possível, em princípio, estabelecer que a reação das lajes nas vigas se apresentem de forma uniforme. Espera-se, ainda que uma diminuição de momento negativo  $\delta M$ , acarrete um aumento de mesmo valor no momento positivo da viga estudada. As figuras 5.39, 5.40, 5.41, 5.42, 5.43 e 5.44 mostram os diagramas de momento fletor na vigas V1, V2, V3, V4, V5 e V6 para os casos 1, 2 e 3.

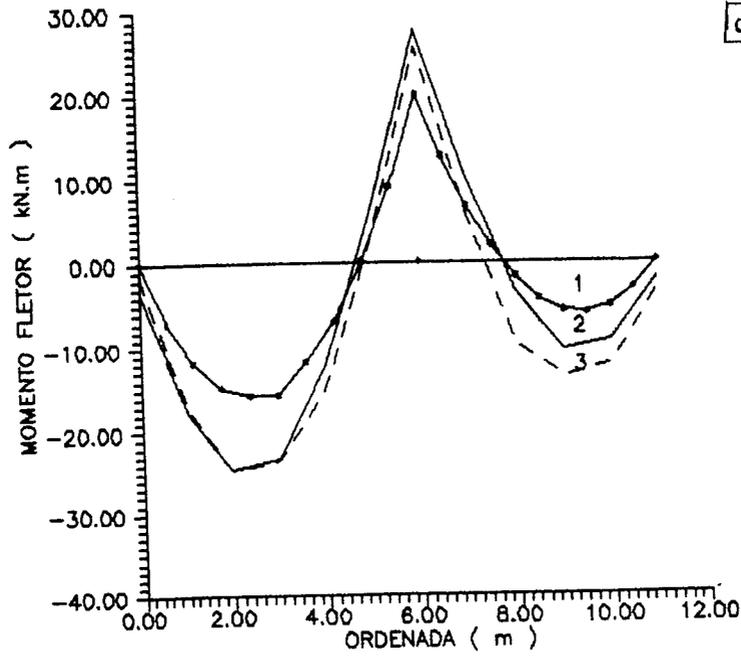


FIG 5.39 MOMENTO FLETOR AO LONGO DA VIGA V1  
1-CALC. USUAL 2-GRELHA LINEAR 3-GRELHA NAO LINEAR

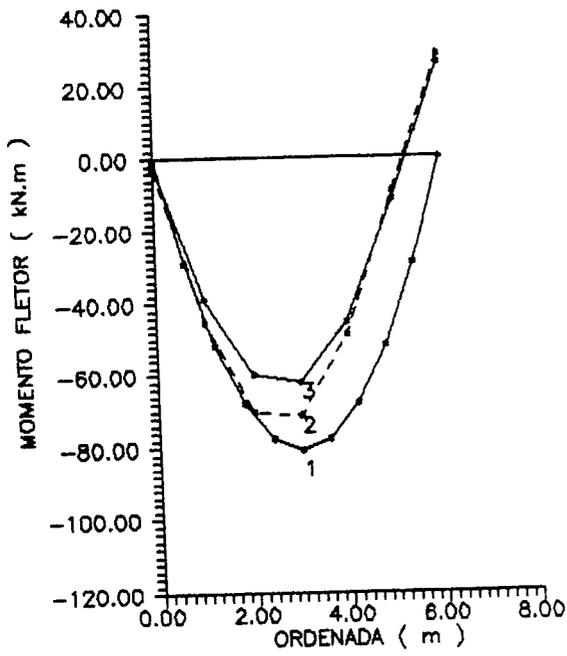


FIG 5.40 MOMENTO FLETOR AO LONGO DA VIGA V2  
1-CALC. USUAL 2-GRELHA LINEAR  
E 3-GRELHA NAO LINEAR

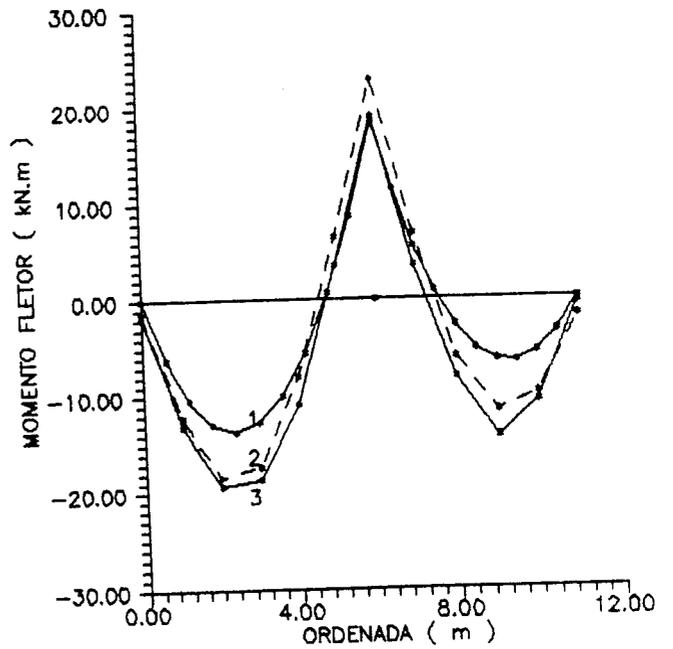


FIG 5.41 MOMENTO FLETOR AO LONGO DA VIGA V3  
1-CALCULO USUAL 2- GRELHA LINEAR  
E 3- GRELHA NAO LINEAR

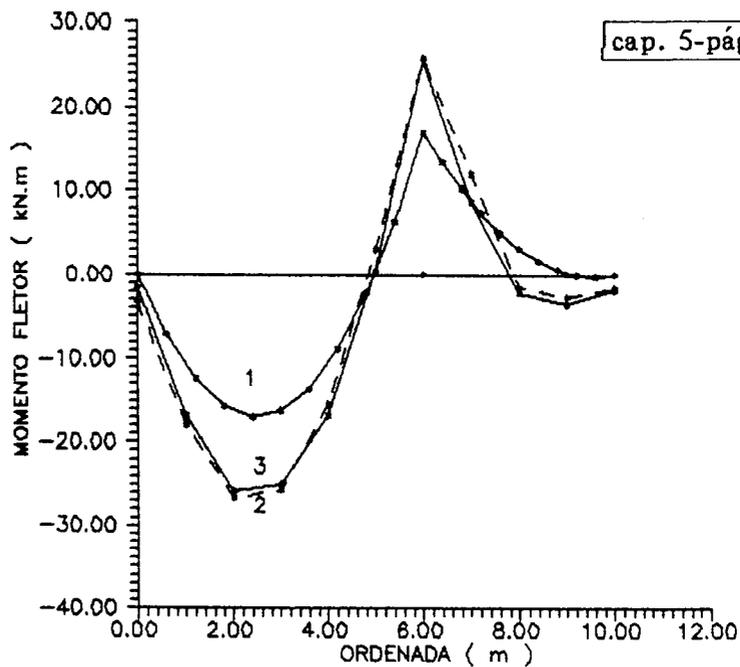


FIG 5.42 MOMENTO FLETOR AO LONGO DA VIGA V4  
1-CALC. USUAL 2-GRELHA LINEAR 3-GRELHA NAO LINEAR

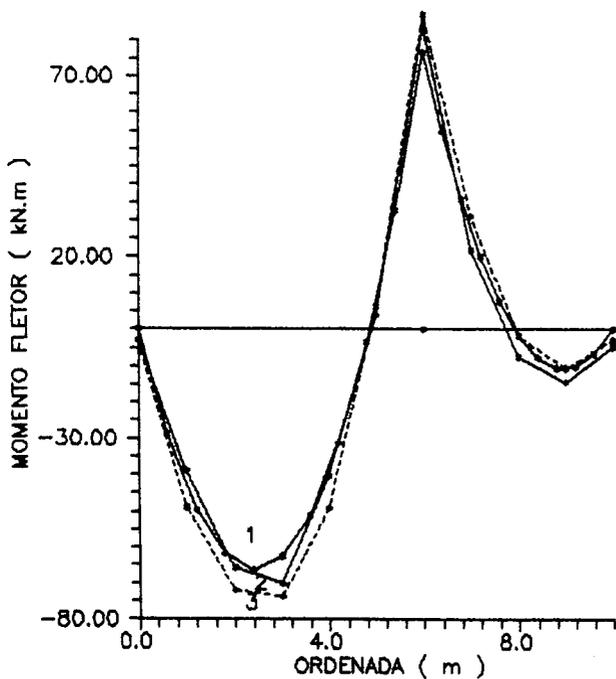


FIG 5.43 MOMENTO FLETOR AO LONGO DA VIGA V5  
1-CALCULO USUAL 2- GRELHA LINEAR E 3- GRELHA NAO LINEAR

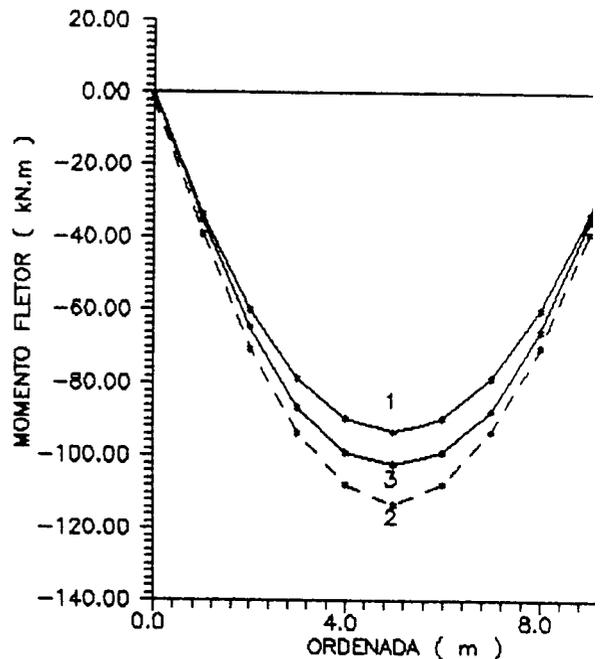


FIG 5.44 MOMENTO FLETOR AO LONGO DA VIGA V6  
1-CALCULO USUAL 2-GRELHA LINEAR E 3- GRELHA NAO LINEAR

De forma geral os momentos fletores positivos do caso 2 são maiores que no caso 1, provavelmente porque no caso usual (1) supõe-se uma distribuição uniforme das reações das lajes nas vigas, o que nem sempre corresponde à realidade, como pode ser visto no item 5.3.3.

No caso 1, V2, é considerada simplesmente apoiada e o seu diagrama de momentos fletores so apresenta valores positivos, enquanto nos casos 2 e 3, como a estrutura é considerada como um conjunto único, ocorre um momento de engastamento parcial, negativo, de valor razoável que contribui para diminuir, bastante, o valor do momento fletor positivo. É conveniente, porém, salientar que este momento negativo, que surge na extremidade da viga, pode levar a uma plastificação da laje na vizinhança do apoio, efeito que o programa utilizado não tem a capacidade de prever.

Comparando-se os casos 3 e 2, verifica-se que há uma pequena diminuição nos momentos fletores negativos e um aumento nos momentos fletores positivos (exceto  $M_{3a}$ ,  $M_{4b}$  e  $M_{5b}$ ) das vigas contínuas. O momento máximo das vigas de um único tramo diminui após a fissuração, como é o caso, no exemplo, das vigas V2 e V6. Tudo leva a crer que a variação dos momentos nas vigas não é só função da fissuração de suas seções transversais, mas depende também, da fissuração das lajes. A variação, nos pontos onde os momentos têm valores máximos, é de 4% para a viga V5 e 10% para a V6.

Comparando-se os diagramas de momento fletor nos casos 2 e 3 para as vigas V1, V2 e V3 percebe-se que diminui o momento fletor positivo da viga V2, enquanto aumentam os das vigas V1 e V3, confirmando a redistribuição de esforços. Com relação às vigas V4, V5 e V6, percebe-se uma diminuição no momento fletor positivo de V5 e V6 no tramo 2, e aumento nos momento fletores positivos da viga V3 e no tramo 1 de V6.

#### 5.5.1.3- ANÁLISE DOS MOMENTOS FLETORES NAS LAJES

Os valores encontrados para os momentos fletores nos pontos das lajes indicadas na fig. 5.35, para os casos 0, 1, 2 e 3 estão indicados no quadro 5.19.

SEÇÃO	CASO 0	CASO 1	CASO 2	CASO 3
$m_{x1}$	6,02	5,15	6,55	5,83
$m_{y1}$	5,69	5,15	7,15	5,91
$x_1$	-2,6	-12,5	-8,54	-7,98
$y_1$	-6,71	-12,5	-12,8	-12,3
$m_{x2}$	2,66	3,30	3,78	2,84
$m_{y2}$	3,44	2,14	2,90	4,05
$x_2$	-2,6	-8,30	-8,54	7,98
$y_2$	-5,8	-6,45	-11,0	-10,8
$m_{x3}$	5,99	3,56	3,83	5,22
$m_{y3}$	6,94	7,31	9,33	7,31
$y_3$	-16,3	-15,1	-30,7	-30,6

**QUADRO 5.19 - MOMENTOS FLETORES EM kN.m/m NAS LAJES**

Como era esperado há uma diferença razoável, em alguns pontos, entre o cálculo usual, caso 1, e o de grelha linear, caso 2, em que se considera a estrutura como um todo, como já foi mostrado por Mazzilli [30] e Barbosa [5]. Desta maneira, quando se analisam os momentos fletores negativos, percebe-se que o valor  $x_1$  para laje  $L_1$ , está superestimado, enquanto que o valor  $y_2$ , para laje  $L_2$  está subestimado. Os demais valores estão parecidos com exceção de  $y_3$ , que tem um valor no caso 2 bem maior que o usual, pois este não considera a rigidez da viga  $V_2$ . Se forem considerados pontos mais afastados da viga  $V_2$  os momentos têm valores parecidos. Convém ainda lembrar que Mazzilli, usando elementos finitos, obtém valores de momentos fletores negativos bem mais baixos que os da analogia de grelha e os do processo usual, exceto para a laje  $L_3$ , em que os valores praticamente coincidem.

É possível, no processo usual, empregar um procedimento que leva, em conta, de certa forma, a continuidade das lajes, ou seja, no encontro das lajes  $L_1-L_2$ ,  $L_1-L_3$  e  $L_2-L_3$  existe um só momento fletor. Este procedimento é descrito nos livros de concreto armado, tais como Rocha [34] e outros. Introduce-se um momento de correção  $\delta M$ , que é a diferença entre os momentos das duas placas vizinhas consideradas engastadas. Considera-se neste trabalho, só para efeito de comparação, que o

momento atuante nas bordas das duas placas vizinhas seja a média entre os valores delas, consideradas isoladas e engastadas (caso 1A), e não será levado em conta o momento de engastamento junto à viga  $V_2$ . Os resultados obtidos, com as relações do caso 1A/caso 2, e caso 1/caso 2, estão mostrados no quadro 5.20. Para os momentos do caso 1 tomou-se sempre o maior valor em módulo.

SEÇÃO	CASO 1A	CASO 2	$r = \frac{\text{caso 1A}}{\text{caso 2}}$	$r = \frac{\text{caso 1}}{\text{caso 2}}$
$L_1 - L_3$	-13,8	-12,8	1,08	1,18
$L_1 - L_2$	-10,4	-8,54	1,22	1,46
$L_2 - L_3$	-10,8	-11,0	0,98	1,37

**QUADRO 5.20 - MOMENTOS FLETORES NEGATIVOS NAS LAJES EM kN.m/m**

Verifica-se, pelos resultados encontrados no quadro 5.20, que a diferença entre os valores dos momentos fletores diminui quando são usados os valores do caso 1A.

Quanto aos momentos fletores positivos, no caso da grelha linear os valores são maiores (com exceção de  $m_{x3}$ ) que os obtidos pelo cálculo usual.

Os valores dos momentos positivos para laje nas situações 1 e 2 são dados no quadro 5.21. Os momentos fletores positivos, considerando a grelha linear, podem chegar a ter uma diferença de até 28% os do processo usual.

SEÇÃO	CASO 1	CASO 2	$r = \frac{\text{caso 1}}{\text{caso 2}}$
$m_{x1}$	5,15	6,55	0,79
$m_{y1}$	5,15	7,15	0,72
$m_{x2}$	3,96	3,78	1,05
$m_{y2}$	2,14	2,90	0,73
$m_{x3}$	3,56	3,83	0,92
$m_{y3}$	7,31	9,33	0,78

**QUADRO 5.21 - MOMENTOS FLETORES POSITIVOS NA LAJES EM kN.m/m**

Levando-se em conta a fissuração à flexão, percebe-se uma pequena diminuição nos momentos fletores negativos, em cima dos apoios. Os momentos positivos nas lajes podem aumentar, em virtude da diminuição, em módulo, dos momentos negativos da laje. Podem, também diminuir, em função do próprio efeito da fissuração, como já foi visto nas lajes isoladas. No pavimento do exemplo, ocorrem as duas situações.

SEÇÃO	CASO 2	CASO 3	$r = \frac{\text{caso 2}}{\text{caso 3}}$
$m_{x1}$	6,55	5,83	1,12
$m_{y1}$	7,15	5,91	1,21
$x_1$	-8,54	-7,98	1,07
$y_1$	-12,8	-12,3	1,04
$m_{x2}$	3,78	2,84	1,33
$m_{y2}$	2,90	4,05	0,72
$x_2$	-8,54	-7,98	1,07
$y_2$	-11,0	-10,8	1,02
$m_{x3}$	3,83	5,22	0,73
$m_{y3}$	9,33	7,31	1,28
$y_3$	-30,7	-30,3	1,01

QUADRO 5.22 - COMPARAÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES (kN.m/m) NAS LAJES PARA OS CASOS 2 e 3.

Na figura 5.45 está mostrado o diagrama de barras dos momentos fletores para as lajes nos casos 1, 2 e 3, considerando, neste caso, para valores de momento negativos os dados no caso 1A.

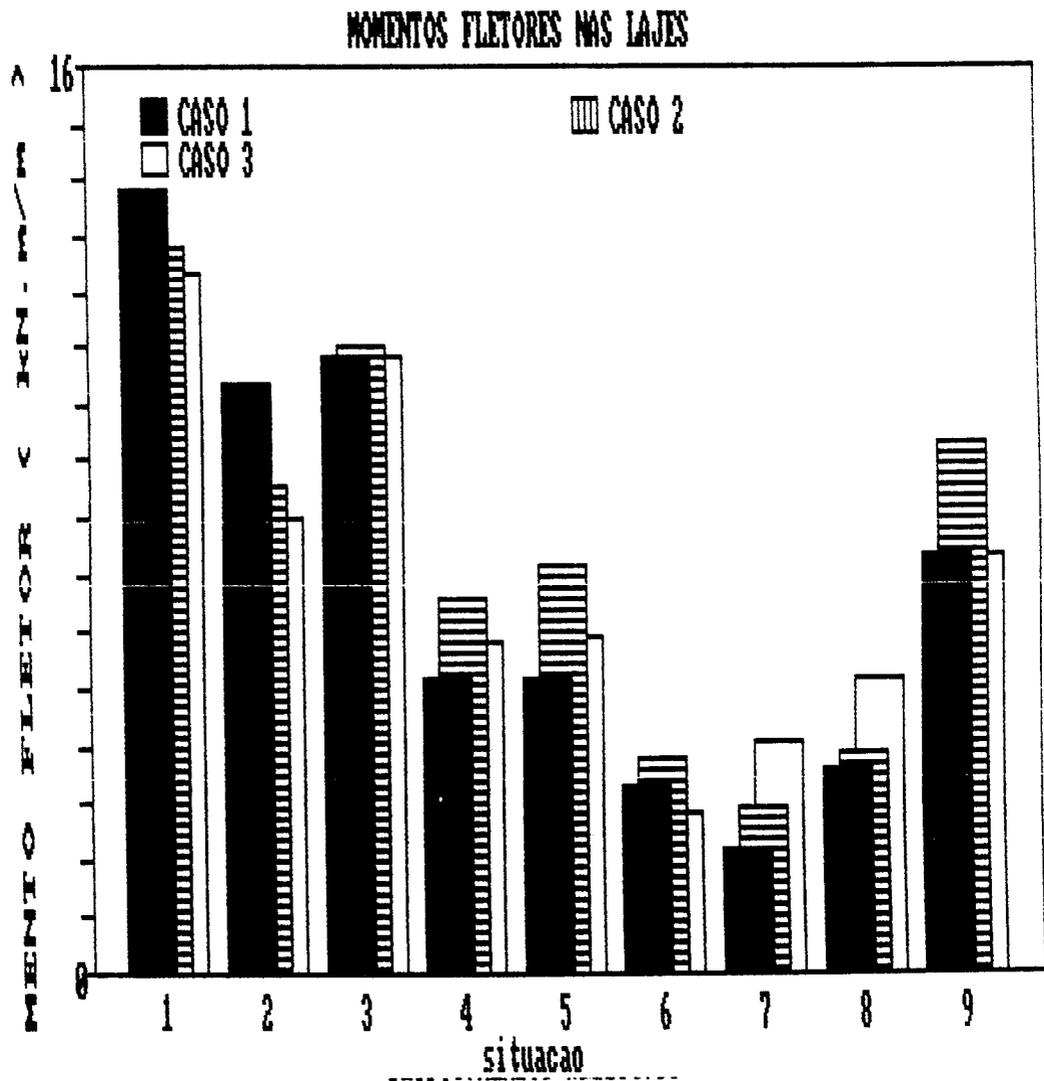


FIG. 5.45 - MOMENTOS FLETORES NEGATIVOS E POSITIVOS NAS LAJES EM  $kN \cdot m/m$ , PARA OS CASOS 1, 2 e 3 COM 1-LAJE  $L_1 - L_3$ , 2-LAJE  $L_1 - L_2$ , 3-LAJE  $L_2 - L_3$ . 4-  $m_{x1}$ , 5-  $m_{y1}$ , 6-  $m_{x2}$ , 7-  $m_{y2}$ , 8-  $m_{x3}$ , 9-  $m_{y3}$

#### 5.5.1.4. ANÁLISE DOS DESLOCAMENTOS NAS VIGAS E LAJES

O cálculo dos deslocamentos da estrutura em questão, foi feito para as situações 0,1, 2 e 3 e os resultados estão apresentados no quadro 5.23. No caso 1, para se conseguir o resultado do deslocamento, no centro da placa, foi somada, ao valor obtido pela teoria de placas, a média dos deslocamentos das vigas periféricas.

PONTO	CASO 0	CASO 1	CASO 2	CASO 3
1	1,12	0,74	1,04	5,05
2	0,25	0,11	0,19	0,38
3	1,31	0,77	1,19	5,74
4	7,18	6,68	9,53	19,4
5	2,30	2,40	2,78	8,92
6	1,40	2,78	2,19	5,99
7	13,8	10,9	14,1	32,7
8	9,48	10,4	12,4	32,9
9	1,31	-0,1	-0,11	-0,3
10	2,00	1,75	3,01	4,83
11	0,06	0,00	-0,28	-0,7
12	0,85	0,63	0,75	2,00
13	0,25	0,40	0,25	0,64

QUADRO 5.23 - DESLOCAMENTOS VERTICAIS EM mm NAS LAJES E VIGAS

Os resultados mostrados no quadro 5.23 para o caso 0, foram adaptados, uma vez que Mazzilli não considerou a largura colaborante das vigas .

Os resultados obtidos nas análises lineares têm valores próximos. Constituem exceções alguns pontos em que, no caso usual, os valores são menores, pois considera-se, nas vigas, a carga atuando como uniformemente distribuída. Quando há a fissuração do concreto, o estado de deformação da estrutura aumenta bastante. Isto mostra, que para analisar, mais realisticamente, as deformações da estrutura, é necessário usar procedimentos que levem em conta a fissuração. Finalmente é mostrado, na figura 5.46, o diagrama de barras dos deslocamentos do quadro 5.23.

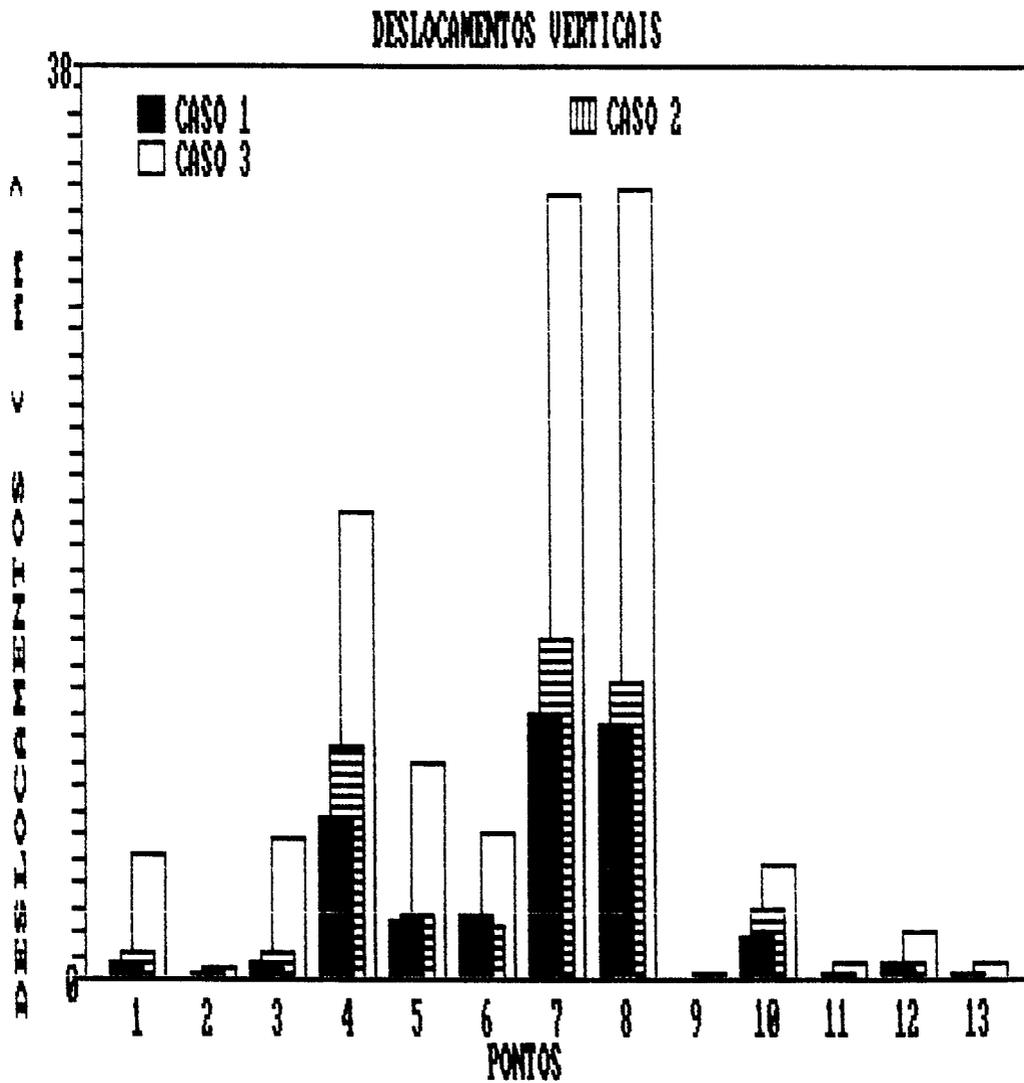


FIG. 5.46 - DESLOCAMENTOS DOS PONTOS DAS VIGAS E LAJES, CASOS 1B-USUAL; 2-GRELHA LINEAR; 3- GRELHA COM FISSURAÇÃO À FLEXÃO.

### 5.5.2. CONSIDERAÇÃO DA FISSURAÇÃO DO CONCRETO À FLEXÃO COM VALOR DE G DADO PELA TEORIA DA ELASTICIDADE - EXEMPLO 5.11

Neste item, resolve-se a mesma estrutura do exemplo anterior, usando a relação do módulo de deformabilidade transversal,  $G$ , com o valor dado pela teoria da elasticidade, e considerando o coeficiente de Poisson,  $\nu$ , igual a 0,2. Desta forma, resulta para  $G$  o valor de  $1,25 \cdot 10^7$  MPa. Convém lembrar que a NBR6118 recomenda o uso de 0,2 para o valor de  $\nu$ .

Com este exemplo pode-se analisar a influência do valor de  $G$ , através da comparação dos resultados obtidos, com os casos do processo usual (caso 1), linear com  $G$  reduzido (caso 2) e não-linear à flexão com  $G$  reduzido (caso 3). Assim, consideram-se dois casos: o caso 4 em que o material trabalha como-linear; e o caso 5, em que se considera a não-linearidade à fissuração e à flexão.

#### 5.5.2.1-ANÁLISE DAS REAÇÕES NOS PILARES

Apresentam-se, neste item, as reações nos pilares para os casos 1, 2, 3, 4 e 5. No quadro 5.24 estão anotados os valores das reações.

PILAR	CASO 1	CASO 2	CASO 3	CASO 4	CASO 5
P1	26,76	28,82	28,94	27,87	28,70
P2	89,90	85,18	84,22	85,15	82,25
P3	44,77	45,81	45,57	44,46	45,53
P4	82,79	80,50	79,84	80,36	80,95
P5	193,2	207,7	211,4	213,4	215,4
P6	12,66	13,37	13,44	12,39	12,65
P7	53,68	42,18	40,81	41,04	38,09
P8	45,20	46,53	46,21	45,29	46,33

QUADRO 5.24 - REAÇÕES NOS PILARES EM kN

Verifica-se assim, como já era esperado, que são novamente insignificantes, para efeito de detalhamento de armadura, as mudanças ocorridas nas reações dos

pilares, quando se considera o valor de G dado pela teoria de elasticidade.

Comparando os casos 4 e o 1 percebe-se que a maior variação ocorre no pilar P7 que tem uma variação de 24 %.

Os resultados do caso 4 comparados com os do caso 2, mostram que os valores das reações são praticamente os mesmos, e a maior alteração, em valor absoluto, ocorre no pilar P5, em que a reação aumenta de 2,7 %. Pela comparação dos casos 5 e 3, nota-se que o aumento de G não altera significativamente as reações, e o comportamento se mantém parecido quando são comparados os casos lineares (2 e 4).

#### 5.5.2.2-ANÁLISE DOS MOMENTOS FLETORES NAS VIGAS

Os valores encontrados para os momentos fletores nas seções das vigas indicadas na fig. 5.37, para os casos 2, 3, 4 e 5 estão indicados no quadro 5.25.

SEÇÃO	CASO 1	CASO 2	CASO 3	CASO 4	CASO 5
$M_{1a}$	15,70	24,19	24,62	26,60	26,09
$X_1$	-20,0	-27,9	-25,7	-30,3	-27,8
$M_{1B}$	5,200	10,10	13,66	12,70	16,7
$M_2$	80,00	69,90	63,9	67,20	63,3
$M_{3A}$	13,70	18,45	17,68	19,35	19,50
$X_3$	-18,5	-22,9	-19,1	-24,2	-21,4
$M_{3B}$	6,300	10,97	14,26	13,46	16,95
$M_{4A}$	0,600	2,66	3,58	3,65	4,69
$X_4$	-17,0	-25,6	-25,5	-28,1	-27,6
$M_{4B}$	17,0	26,06	25,71	28,61	25,57
$M_{5A}$	10,56	10,65	14,36	13,27	17,59
$X_5$	-76,6	-87,3	-84,3	-89,9	-87,3
$M_{5B}$	66,40	73,93	70,35	74,68	70,41
$M_6$	93,40	113,2	102,2	105,9	92,81

QUADRO 5.25 - MOMENTOS FLETORES EM kN.m NAS VIGAS

Usando para  $G$  o valor da teoria da elasticidade percebe-se, que os momentos fletores das vigas contínuas aumentam em módulo, e os das vigas com um tramo (V2 e V6), apresentam uma diminuição nos seus valores. Esta observação é válida tanto para a situação em que o material é considerado linear (casos 2 e 4), como também, para quando o material não é linear à flexão (casos 3 e 5). Assim, ao considerar um valor de  $G$  menor que o dado pela teoria da elasticidade, estão sendo subestimados os momentos fletores nas vigas contínuas e superestimados os das vigas de um tramo.

O maior momento fletor negativo ( $X_5$ ), no caso linear, aumentou, em módulo, em 3,0%, enquanto que o maior momento positivo ( $M_g$ ) diminuiu em 7%. Para a situação não-linear, o aumento do momento negativo é de 3,6% e a diminuição do momento positivo é de 10%.

As alterações que ocorrem, devido ao aumento do módulo de elasticidade transversal, devem acontecer, provavelmente, porque as lajes passam a distribuir os esforços nas vigas de maneira diferente e também porque os momentos de torção aumentam, na ligação laje e vigas perimetrais.

Comparando-se os casos 4 e 5, nota-se que o comportamento é o mesmo que se tem, quando se compara o caso 2 com o 3. Isto quer dizer que a fissuração à flexão tem o mesmo efeito tanto na estrutura que tem um  $G$  maior, quanto na estrutura que tem um  $G$  menor. Em virtude da fissuração os momentos negativos das vigas decrescem em módulo e a maioria dos momentos positivos das vigas contínuas aumentam, enquanto os momentos das vigas de um só tramo diminuem.

Na figura 5.49 é mostrado o diagrama de barras para os momentos nas situações usual, linear e não-linear à flexão com o valor de  $G$  tirado da teoria da elasticidade. Percebe-se, então, que com o aumento de  $G$ , os momentos diferem mais do processo usual, do que no caso em que se considera um valor de  $G$  baixo.

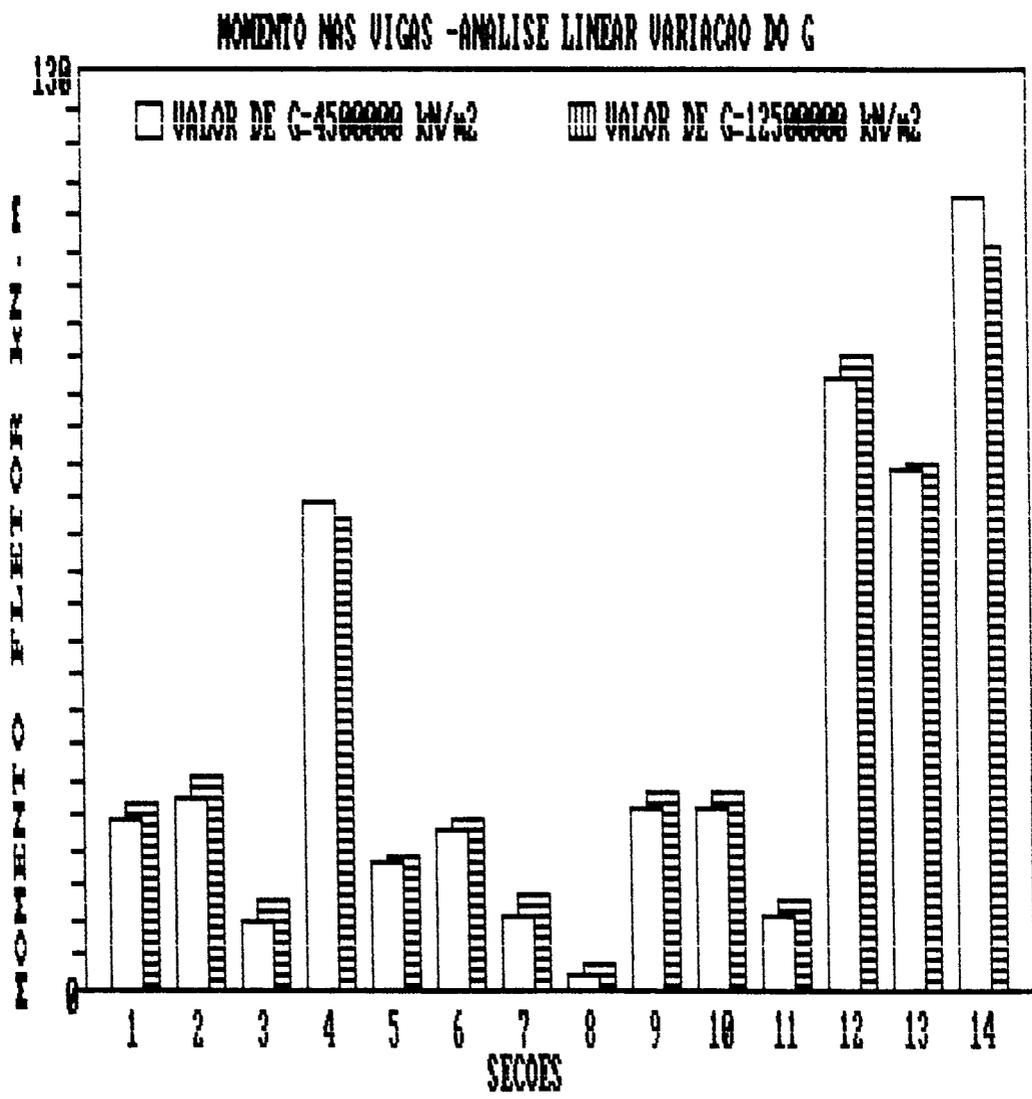


FIG. 5.47 - MOMENTOS FLETORES NAS VIGAS, ANALÍSE LINEAR, SEÇÕES 1-M<sub>1a</sub>, 2-X<sub>1</sub>, 3-M<sub>1b</sub>, 4- M<sub>2</sub>, 5-M<sub>3a</sub>, 6-X<sub>3</sub>, 7-M<sub>3b</sub>, 8-M<sub>4a</sub>, 9-X<sub>4</sub>, 10-M<sub>4b</sub>, 11-M<sub>5a</sub>, 12-X<sub>5</sub>, 13-M<sub>4b</sub>, 14- M<sub>6</sub>

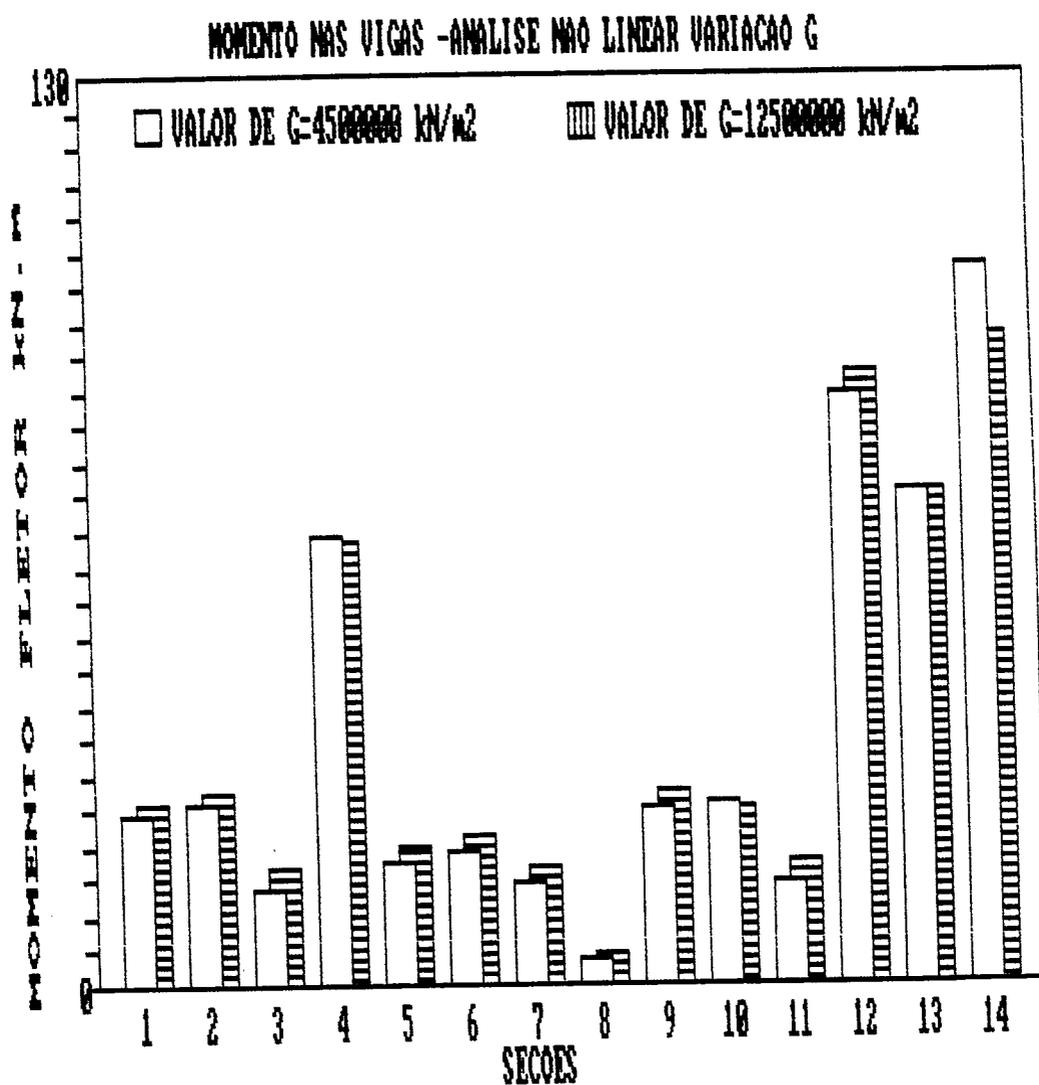


FIG. 5.48 - MOMENTOS FLETORES NAS VIGAS, ANÁLISE NÃO LINEAR, SEÇÕES  
 1- $M_{1a}$ , 2- $X_1$ , 3- $M_{1b}$ , 4-  $M_2$ , 5- $M_{3a}$ , 6- $X_3$ , 7- $M_{3b}$ , 8- $M_{4a}$ , 9- $X_4$ , 10- $M_{4b}$ , 11- $M_{5a}$ , 12-  
 $X_5$ , 13- $M_{4b}$ , 14-  $M_6$

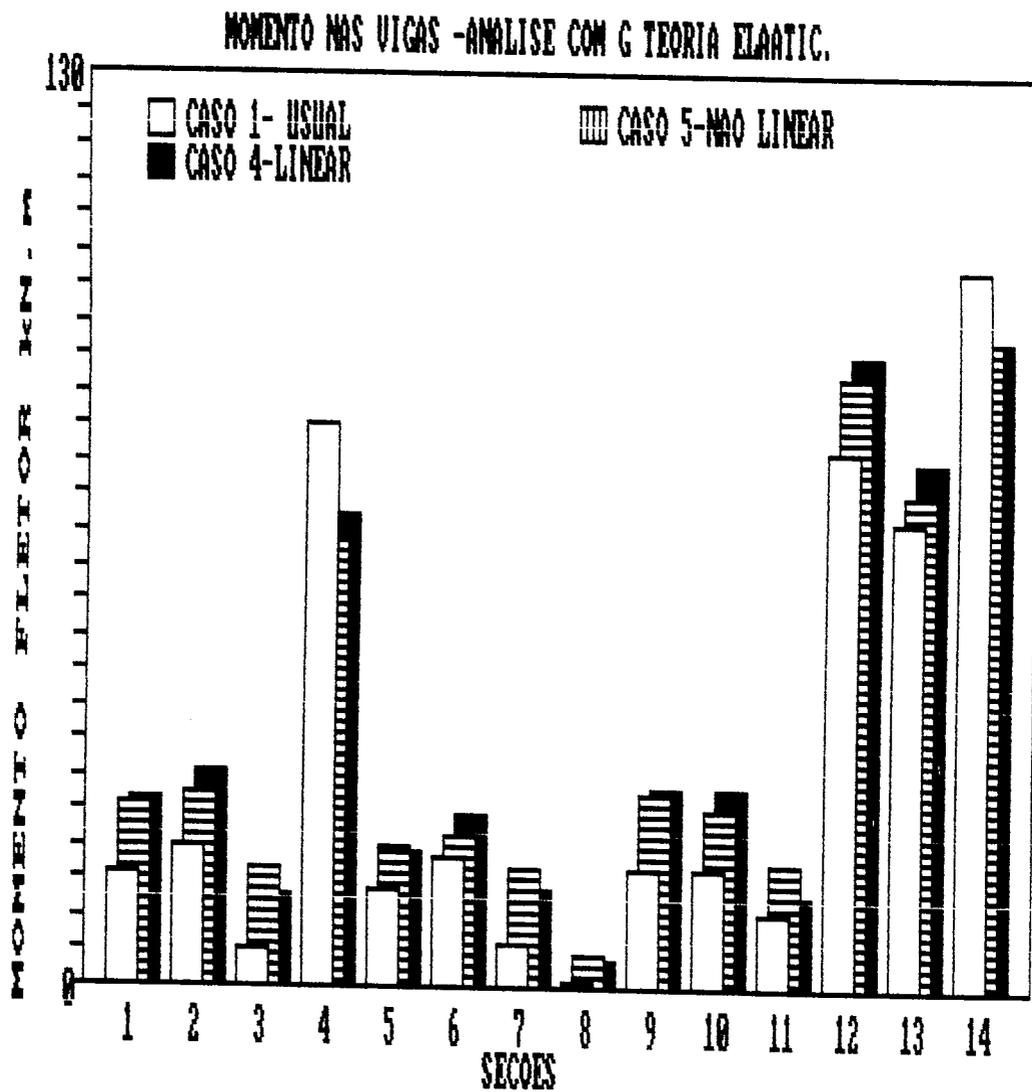


FIG. 5.49 - MOMENTOS FLETORES NAS VIGAS, PROCESSO USUAL, ANÁLISE LINEAR E ANÁLISE NÃO LINEAR, SEÇÕES 1-M<sub>1a</sub>, 2-X<sub>1</sub>, 3-M<sub>1b</sub>, 4- M<sub>2</sub>, 5-M<sub>3a</sub>, 6-X<sub>3</sub>, 7-M<sub>3b</sub>, 8-M<sub>4a</sub>, 9-X<sub>4</sub>, 10-M<sub>4b</sub>, 11-M<sub>5a</sub>, 12-X<sub>5</sub>, 13-M<sub>4b</sub>, 14- M<sub>6</sub>

**5.5.2.3- ANÁLISE DOS MOMENTOS FLETORES NAS LAJES**

Os valores encontrados para os momentos fletores nos pontos das lajes indicadas na figura 5.35, para os casos 1, 2, 3, 4 e 5 estão indicados no quadro 5.26.

SEÇÃO	CASO 1	CASO 2	CASO 3	CASO 4	CASO 5
$m_{x1}$	5,15	6,55	5,83	5,31	5,37
$m_{y1}$	5,15	7,15	5,91	5,67	4,72
$x_1$	-10,4	-8,54	-7,98	-8,52	-7,47
$y_1$	-13,8	-12,8	-12,3	-12,6	-11,2
$m_{x2}$	3,30	3,78	2,84	3,02	2,69
$m_{y2}$	2,14	2,90	4,05	2,51	4,04
$x_2$	-10,4	-8,54	-7,98	-8,52	-7,47
$y_2$	-10,8	-11,0	-10,8	-10,5	-9,10
$m_{x3}$	3,56	3,83	5,22	3,56	4,91
$m_{y3}$	7,31	9,33	7,31	7,92	6,45
$y_3$	-15,1	-30,7	-30,6	-27,5	-27,4

QUADRO 5.26 - MOMENTOS FLETORES EM kN.m/m NAS LAJES

Os momentos positivos nas lajes diminuem com o aumento do valor de G. Os negativos sofrem, também, um decréscimo muito pequeno, em módulo. Este comportamento se verifica tanto para o caso linear, quanto para o não-linear, bastando, assim, comparar os casos 2 com 4 e 3 com 5. O momento máximo negativo  $y_1$  (o valor de  $y_3$  não é analisado por causa da interferência da viga V2) diminui mais (cerca de 13%) com a fissuração à flexão para o valor de G maior (casos 4 e 5), do que na situação em que o G é menor (casos 2 e 3), que tem uma diminuição de 4%. Para o momento fletor positivo  $m_{y3}$  na laje, a influência de G é praticamente a mesma, uma vez que do caso 2 para 3 há uma diminuição de 27%, enquanto que do caso 4 para 5 a diminuição é de 23%.

Para o caso usual apresentam-se no quadro os momentos negativos médios. De um modo geral, com o aumento do valor de G, os momentos na laje para o caso linear (caso 4), são mais próximos aos do caso usual do que os do caso 2.

Nas figuras 5.50, 5.51 e 5.52 estão mostrados os diagramas de barras dos momentos nas lajes para os casos 2,4; 3,5 e 1,4 e 5.

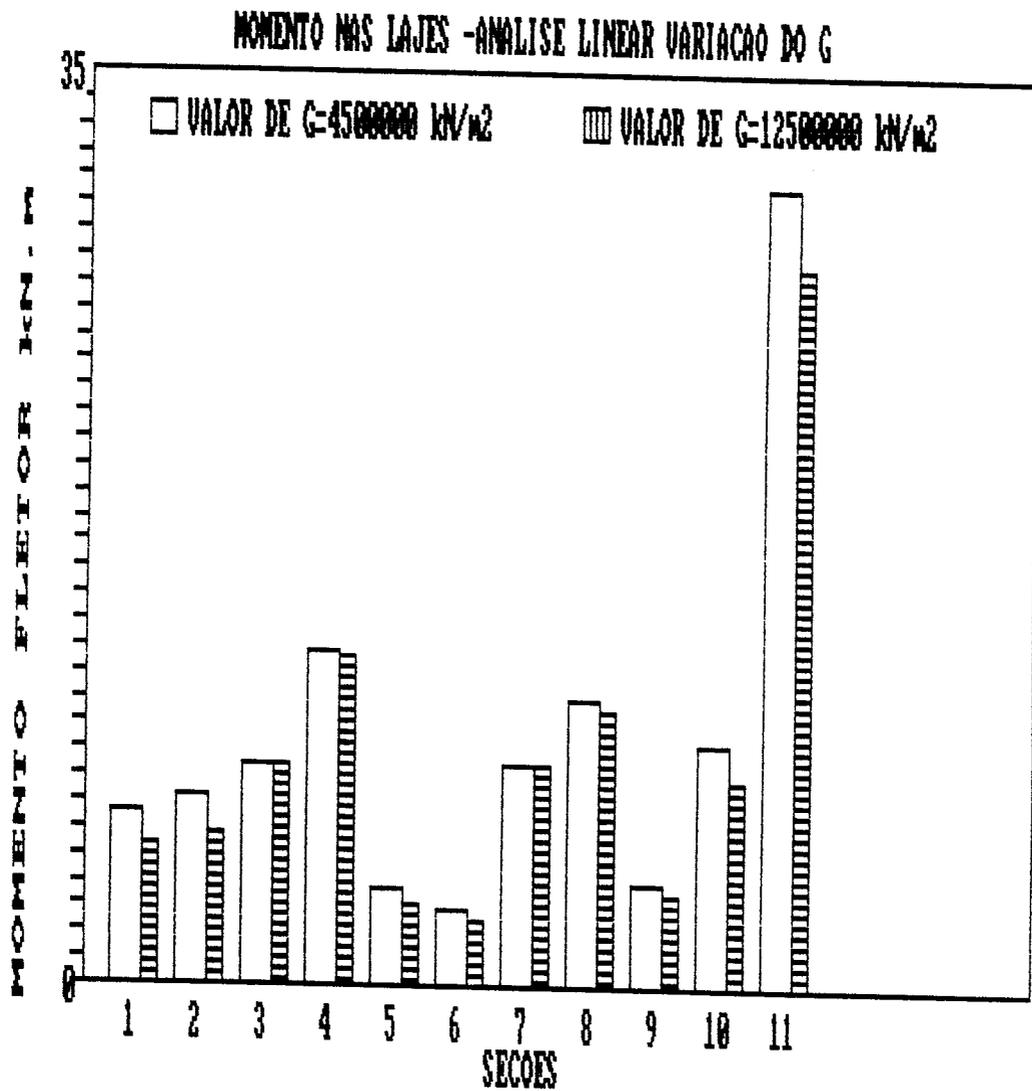


FIG. 5.50 - MOMENTOS FLETORES EM kN.m, ANÁLISE LINEAR NAS LAJES 1-  $M_{x1}$  2- $M_{y1}$ , 3 -  $X_1$  4-  $Y_1$  , 5 -  $M_{x2}$  , 6- $M_{y2}$  , 7-  $X_2$  , 8-  $Y_2$  , 9- $M_{x3}$ , 10-  $M_{y3}$  , 11-  $Y_3$

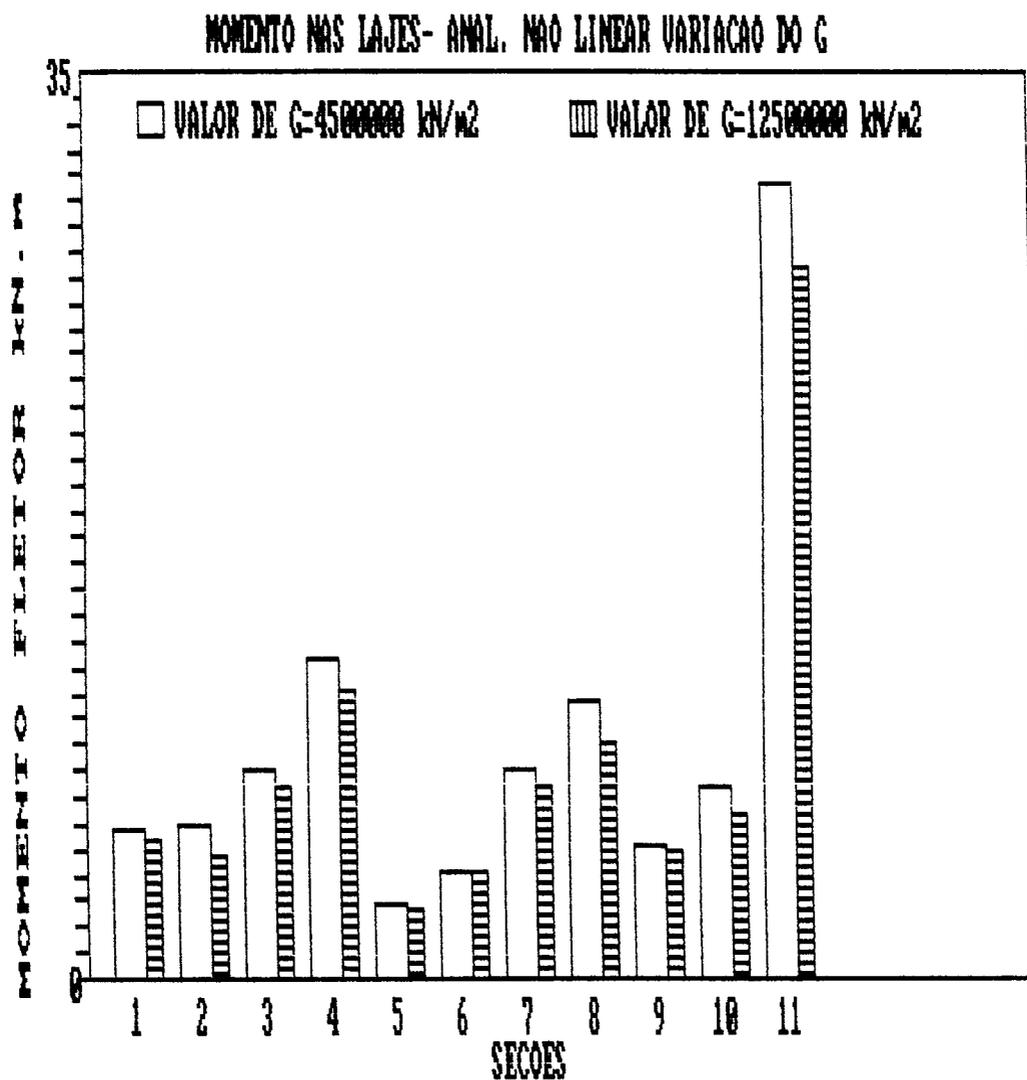


FIG 5.51 - MOMENTOS FLETORES EM kN.m, ANÁLISE NÃO LINEAR NAS LAJES  
 1-  $M_{x1}$ , 2-  $M_{y1}$ , 3 -  $X_1$  4-  $Y_1$ , 5 -  $M_{x2}$ , 6-  $M_{y2}$ , 7-  $X_2$ , 8-  $Y_2$ , 9-  $M_{x3}$ , 10-  $M_{y3}$ ,  
 11-  $Y_3$

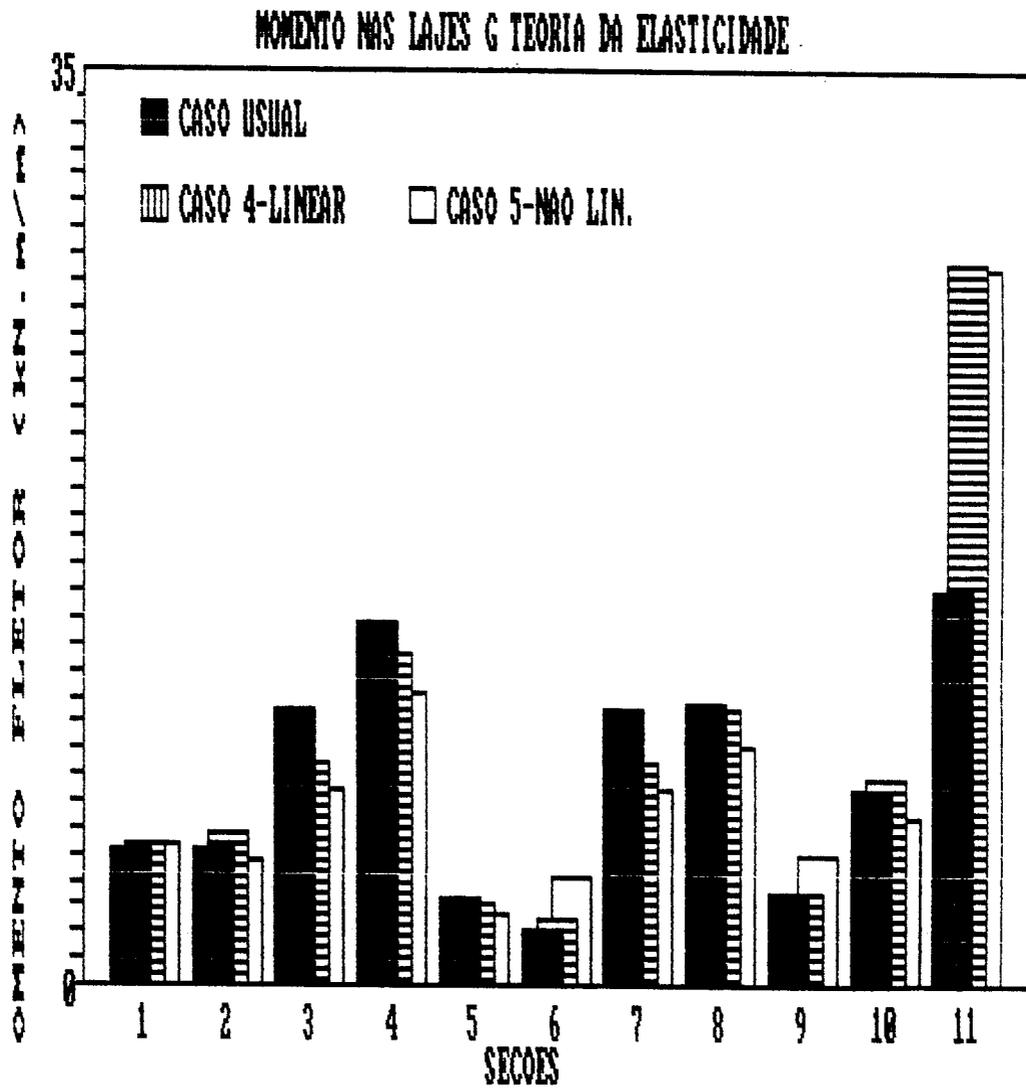


FIG. 5.52 - MOMENTOS FLETORES EM kN.m, CASOS 1, 4 E 5 1-  $M_{x1}$ , 2- $M_{y1}$ , 3 -  $X_1$  4-  $Y_1$ , 5 -  $M_{x2}$ , 6- $M_{y2}$ , 7-  $X_2$ , 8-  $Y_2$ , 9- $M_{x3}$ , 10-  $M_{y3}$ , 11-  $Y_3$

5.5.2.4- ANÁLISE DOS DESLOCAMENTOS NAS VIGAS E LAJES

Neste item apresenta-se os deslocamentos dos pontos da estrutura assinalados para as situações 1, 2, 3, 4 e 5 com os resultados apresentados no quadro 5.27.

PONTO	CASO 1	CASO 2	CASO 3	CASO 4	CASO 5
1	0,74	1,04	5,05	1,12	5,66
2	0,11	0,19	0,38	0,26	0,92
3	0,77	1,19	5,74	1,30	6,76
4 *	6,68	9,53	19,4	7,83	17,5
5	2,40	2,78	8,92	2,81	8,74
6	2,78	2,19	5,99	2,08	5,87
7 *	10,9	14,1	32,7	12,3	27,9
8	10,4	12,4	32,9	11,6	29,4
9	-0,1	-0,11	-0,3	-0,11	-0,3
10*	1,75	3,01	4,83	2,57	4,90
11	0,00	-0,28	-0,7	-0,26	-0,6
12	0,63	0,75	2,00	0,77	2,60
13	0,40	0,25	0,64	0,32	1,11

QUADRO 5.27 - DESLOCAMENTOS VERTICAIS EM mm NAS LAJES E VIGAS

Os resultados obtidos mostram uma pequena mudança, cuja tendência nas duas situações, linear e não-linear à flexão, é de aumentar os deslocamentos nas vigas e diminuir nos pontos da laje (4, 7 e 10). Nas vigas de um tramo só os deslocamentos diminuem, mas bem pouco (pontos 6 e 8). Quando foram estudadas as placas isoladas, já havia sido constatada a tendência da diminuição dos deslocamentos com o aumento do G. Em alguns pontos das vigas contínuas os deslocamentos aumentam com o aumento do valor de G.

A maior variação dos deslocamentos, ocorre nas lajes, pois no ponto 7, quando se considera a situação linear, há uma diminuição no deslocamento de 14,6% e de 17%, quando se considera a situação não-linear. Nas vigas, o ponto com maior deslocamento, ponto 8, tem uma diminuição de deslocamentos de 7% e 11%, respectivamente.

Os deslocamentos para a situação linear, com o módulo de elasticidade transversal tirado da teoria da elasticidade, tem valores mais próximos do procedimento usual, conforme pode ser visto pelo quadro anterior.

A não consideração da fissuração leva a valores muito distantes daqueles que devem ocorrer. Isto pode ser visto analisando-se o ponto 8, que apresenta o maior deslocamento de todos. Considerando os casos 2 e 3, nota-se que o deslocamento no caso 3 é 2,65 vezes maior que o caso 2. Para o caso 5 há, no mesmo ponto, um deslocamento 2,53 vezes maior que o do caso 4. Finalmente, ainda para o ponto 8, o deslocamento no caso 5 é 2,83 vezes maior que o obtido pelo processo usual. Ressalta-se, novamente a importância da análise não-linear, que não sendo considerada, conduz a um estado de deslocamento da estrutura bem inferior ao que deve realmente ocorrer.

Outra particularidade que deve ser notada, é que a relação entre os deslocamentos entre o caso 5 (não-linear à flexão) e caso 1 (usual), não é constante para os diversos pontos. É naturalmente, isto ocorre porque existe a não-linearidade física do material. Desta forma, não é possível, através de coeficientes de redução de rigidez (como é visto no CEB158 [14]), obter com a análise usual o deslocamento próximo do real, pois este valor seria diferente para cada ponto. A utilização de um coeficiente deste tipo é função dos esforços ao longo do elemento, ou do trecho da estrutura em que o ponto estudado se localiza. É difícil avaliar este coeficiente, em função dos esforços obtidos pelo processo usual. Os esforços obtidos desta forma, como já foi visto, podem apresentar diferenças, às vezes, significativas em relação a outros procedimentos. Definir este coeficiente a partir dos valores de uma análise linear, considerando o pavimento funcionando como um único elemento, melhora a precisão, porém, neste caso, já que se usa um procedimento linear é melhor usar diretamente o mesmo procedimento com análise não-linear.

Na figura 5.53 está mostrado o diagrama de barras dos deslocamentos nos pontos escolhidos da estrutura para as situações 2 e 4. Na figura 5.56, as situações levadas em conta são as 3 e 5. Finalmente, mostra-se na figura 5.57 o diagrama de barras dos deslocamentos para os casos 1, 4 e 5.

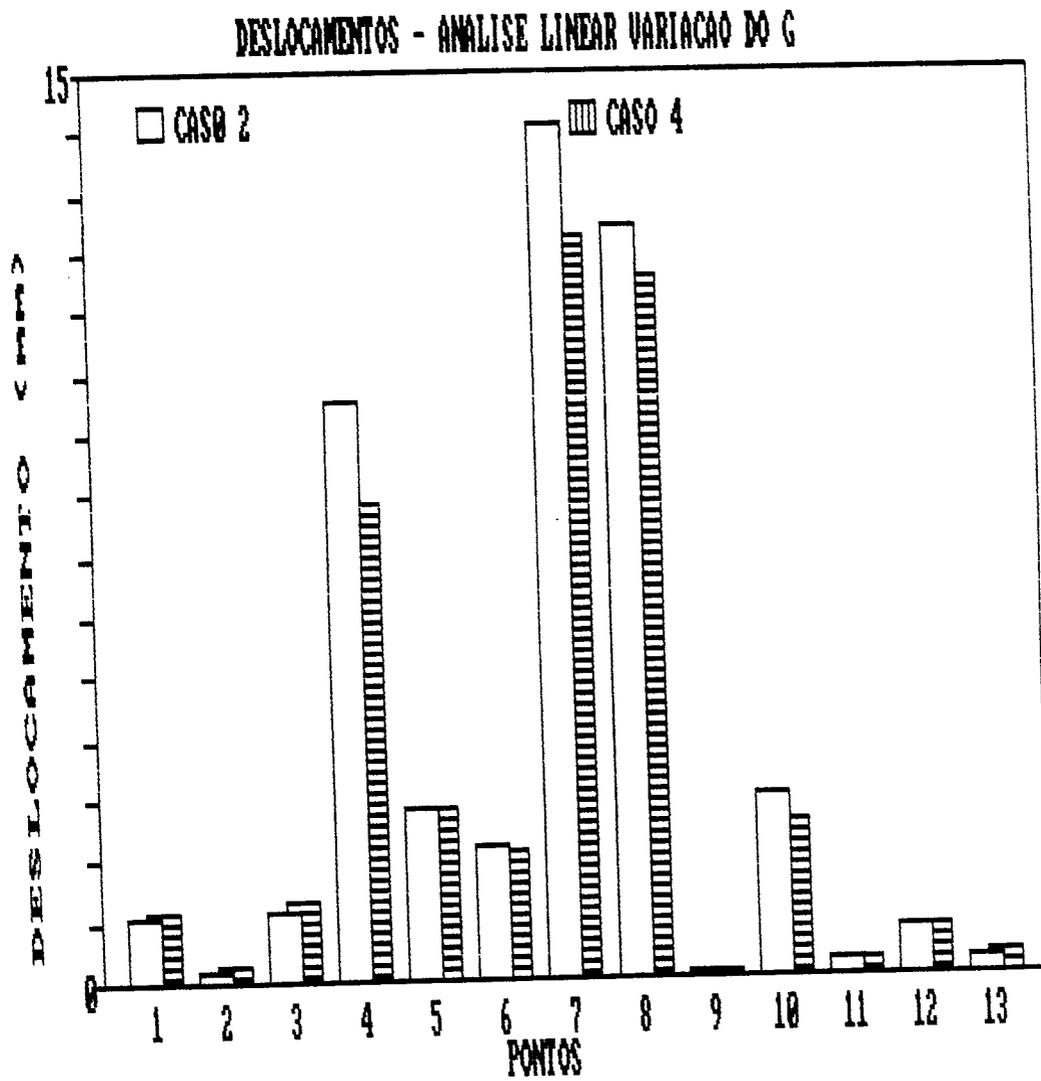


FIG. 5.53 - DESLOCAMENTOS, EM mm, NOS PONTOS DE 1 A 13 DA ESTRUTURA, COM ANÁLISE LINEAR

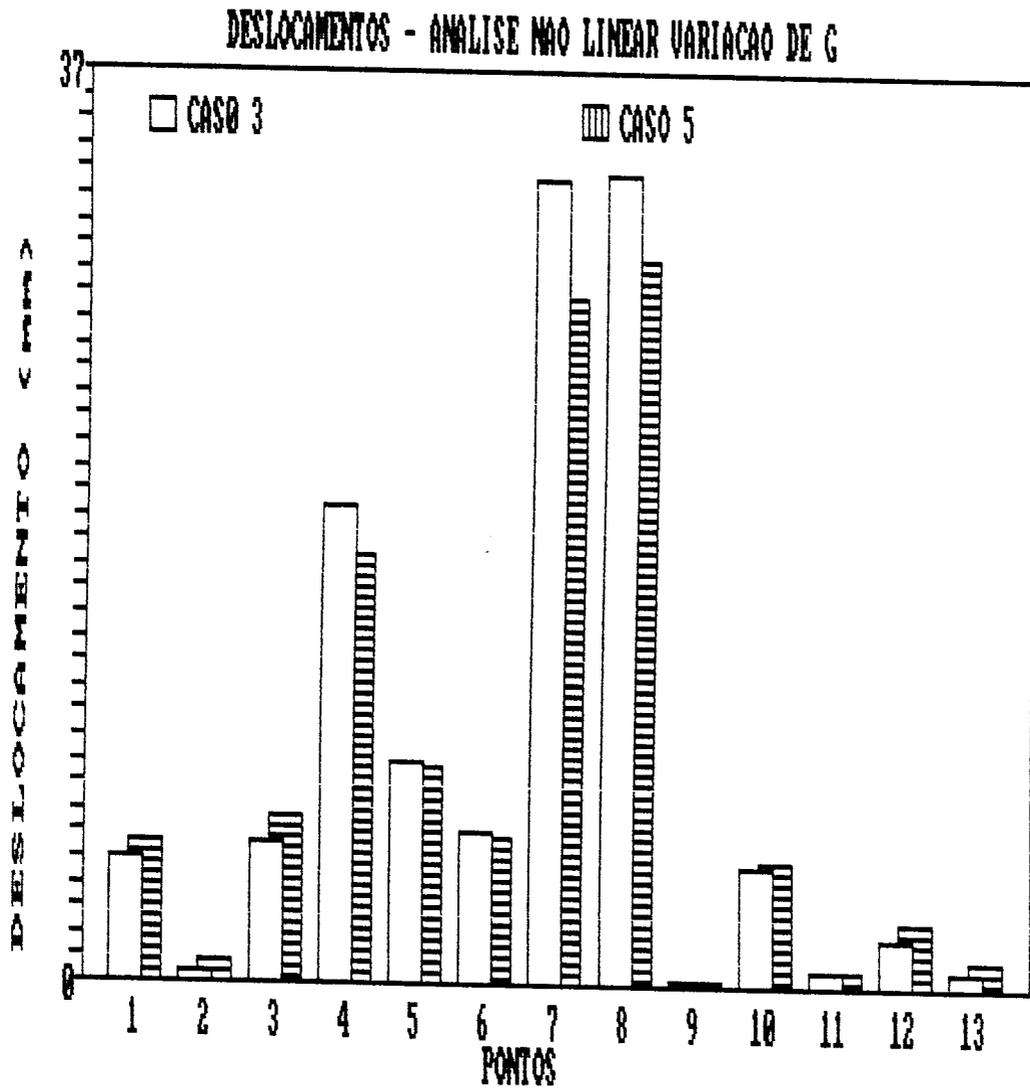


FIG 5.54 - DESLOCAMENTOS, EM mm, NOS PONTOS DE 1 A 13 DA ESTRUTURA, COM ANÁLISE NÃO LINEAR

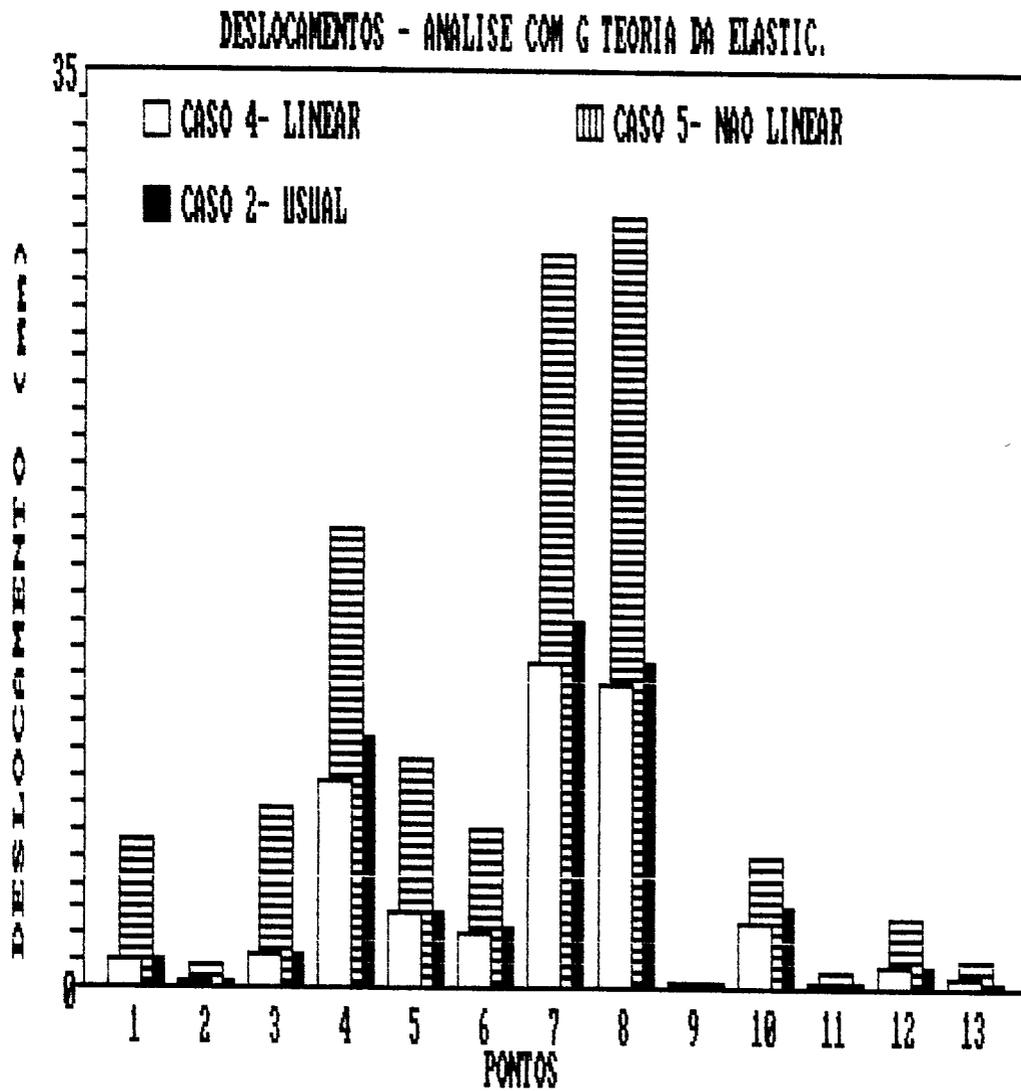


FIG. 5.55 - DESLOCAMENTOS, EM mm, NOS PONTOS DE 1 A 13 DA ESTRUTURA, CASOS 1, 4 E 5

### 5.5.3. CONSIDERAÇÃO DA FISSURAÇÃO DO CONCRETO À FLEXÃO E À TORÇÃO COM G DADO PELA TEORIA DE ELASTICIDADE- EXEMPLO 5.12

Este exemplo é o mesmo que o anterior, o que muda é a consideração da não-linearidade à torção. Todas as características geométricas, ações e demais dados são iguais aos do exemplo do item anterior.

Para analisar o efeito da torção a estrutura é resolvida considerando-se apenas a não-linearidade à torção. Este caso é designado 6. Resolve-se, também, a estrutura considerando a não-linearidade à flexão e à torção, denominando de caso 7.

Com o aumento do  $G$ , os valores dos momentos máximos de torção, são 1,5 vezes o valor dos momentos de fissuração à torção, considera-se assim que pode haver, portanto, uma maior influência da fissuração à torção. Utilizando-se 20 etapas de carregamento, obtém-se para o momento de torção, na viga  $V_1$  junto ao pilar P1, o valor de 5,67 kN.m. Sendo o valor do momento de fissuração,  $M_{tr}$ , igual a 3,0 kN.m, pode-se concluir que, a partir da décima terceira iteração, a rigidez à torção de alguns elementos, passa a ser modificada.

Vale lembrar, como já foi mencionado anteriormente que, como a fissuração à flexão acontece logo nas primeiras etapas de carga, no caso da consideração da fissuração à flexão e à torção, há a possibilidade da redistribuição dos esforços em alguns elementos, e eventualmente pode ocorrer um aumento nos esforços de torção. Assim, a variação da rigidez pode ocorrer antes da etapa citada.

Procura-se verificar se o exemplo 5.10, em que se considerou um valor mais baixo que o da teoria da elasticidade, pode representar o efeito da fissuração à torção. Para isto faz-se a comparação do caso 2 com o caso 6.

#### 5.5.3.1-ANÁLISE DAS REAÇÕES NOS PILARES

Procura-se, neste item, estudar como variam as reações nos pilares para os casos 1, 4, 5, 6 e 7. No quadro 5.28 estão anotados os valores das reações.

PILAR	CASO 1	CASO 4	CASO 5	CASO 6	CASO 7
P1	26,76	27,87	28,70	28,04	28,73
P2	89,90	85,15	82,25	84,99	82,35
P3	44,77	44,46	45,53	44,56	45,71
P4	82,79	80,36	80,95	80,21	81,08
P5	193,2	213,4	215,4	213,2	214,1
P6	12,66	12,39	12,65	12,46	12,74
P7	53,68	41,04	38,09	41,13	38,86
P8	45,20	45,29	46,33	45,29	46,25

**QUADRO 5.28 - REAÇÕES NOS PILARES EM kN**

Pelos valores do quadro 5.28 verifica-se que são insignificantes as mudanças que ocorrem com as reações dos pilares quando se considera, neste exemplo, a fissuração somente à torção, e à torção e à flexão.

A maior alteração, quando se considera somente a fissuração à torção, que se tem é inferior a 1%. Quando se leva em conta a fissuração à flexão e à torção, a maior mudança ocorrida nas reações dos pilares também é inferior a 1%.

Conclui-se, assim que, pelo menos para este exemplo, o efeito da fissuração à torção não causa modificações nas reações dos pilares.

### 5.5.3.2. ANÁLISE DOS MOMENTOS FLETORES NAS VIGAS

Os valores encontrados para os momentos fletores nas seções das vigas indicadas na figura 5.35, para os casos 1, 4, 5, 6 e 7 estão indicados no quadro 5.29.

SEÇÃO	CASO 1	CASO 4	CASO 5	CASO 6	CASO 7
M <sub>1R</sub>	15,70	26,60	26,09	26,08	25,88
X <sub>1</sub>	-20,0	-30,3	-27,8	-30,1	-27,6
M <sub>1B</sub>	5,200	12,70	16,70	12,72	16,7
M <sub>2</sub>	80,00	67,20	63,3	67,57	63,8
M <sub>3A</sub>	13,70	19,35	19,50	19,34	19,55
X <sub>3</sub>	-18,5	-24,2	-21,4	-23,9	-21,6
M <sub>3B</sub>	6,300	13,46	16,95	13,29	16,29
M <sub>4A</sub>	0,600	3,65	4,69	3,70	4,79
X <sub>4</sub>	-17,0	-28,1	-27,6	-27,8	-27,5
M <sub>4B</sub>	17,0	28,61	25,57	28,05	25,32
M <sub>5A</sub>	10,56	13,27	17,59	12,70	17,38
X <sub>5</sub>	-76,6	-89,9	-81,4	-90,1	-84,9
M <sub>5B</sub>	66,40	74,68	69,21	74,94	69,54
M <sub>6</sub>	93,40	105,9	92,81	106,3	94,33

QUADRO 5.29 - MOMENTOS FLETORES EM kN.m NAS VIGAS

Da mesma forma como aconteceu com as reações de apoio nos pilares, os momentos fletores nas vigas tiveram mudanças insignificantes nos seus valores. Quando se compara o caso 6 (não-linear à torção) com o caso 4 (linear) percebe-se que não houve influência significativa da torção, pois as variações estiveram sempre abaixo de 5%. A comparação entre o caso 7 (fissuração à flexão e à torção) e o caso 5 (fissuração à flexão) mostra, também que, a variação de momentos fletores foi inferior a 5%.

Para analisar se o uso do módulo de elasticidade transversal,  $G$ , igual a 0,15 vezes o módulo de deformabilidade do concreto,  $E_c$ , conduz à consideração da fissuração à torção, basta comparar o caso 2 (linear com  $G=0,15.E_c$ ) com o caso 4 (linear com  $G$  dado pela teoria da elasticidade). Isto pode ser feito pois, como foi observado, os resultados do caso 6 (não-linear à torção), para os momentos fletores nas vigas, são praticamente iguais aos do caso 4. Esta comparação dos casos 4 e 2, já foi feita no item 5.5.3.2 e mostra que o uso do valor de  $G$  mais baixo leva, de uma forma geral, a se subestimar os momentos fletores nas vigas contínuas e

superestimar os momentos das vigas de um só tramo.

### 5.5.3.3- ANÁLISE DOS MOMENTOS FLETORES NAS LAJES

Os valores encontrados para os momentos fletores nos pontos das lajes indicadas na 5.35, para os casos 4, 5, 6 e 7 estão indicados no quadro 5.30.

SEÇÃO	CASO 1	CASO 4	CASO 5	CASO 6	CASO 7
$m_{x1}$	5,15	5,31	5,37	5,44	5,38
$m_{y1}$	5,15	5,67	4,72	5,87	5,27
$x_1$	-10,4	-8,52	-7,47	-8,57	-7,40
$y_1$	-13,8	-12,6	-11,2	-13,2	-11,2
$m_{x2}$	3,30	3,02	2,69	2,98	2,33
$m_{y2}$	2,14	2,51	4,04	2,52	4,03
$x_2$	-10,4	-8,52	-7,47	-8,52	-7,40
$y_2$	-10,8	-10,5	-9,10	-10,6	-10,5
$m_{x3}$	3,56	3,56	4,91	3,55	4,93
$m_{y3}$	7,31	7,92	6,45	7,97	6,54
$y_3$	-15,1	-27,5	-27,4	-27,1	-27,0

QUADRO 5.30 - MOMENTOS FLETORES EM kN.m/m NAS LAJES

Como no caso das reações dos pilares e dos momentos fletores nas vigas, poucas mudanças ocorrem nos momentos fletores das lajes. As variações que aparecem devidas à consideração da fissuração à torção são inferiores a 5%.

Desta maneira a comparação do caso 2 (linear com  $G=0,15.E_c$ ) com o caso 4 (linear com  $G$  dado pela teoria da elasticidade), vai mostrar se, adotando-se para  $G$  um valor mais baixo que o dado pela teoria da elasticidade, é possível representar o efeito da fissuração à torção. De outra maneira, o que se está fazendo é substituir os resultados do caso 6 pelos resultados do caso 4. A comparação entre os caso 2 e 4 já foi feita em 5.5.3.3 e mostra que, de uma maneira geral, no caso 2 acabam sendo superestimados os valores dos momentos fletores nas lajes.

**5.5.3.4- ANÁLISE DOS DESLOCAMENTOS NAS VIGAS E LAJES**

Neste item calculam-se os deslocamentos dos pontos da estrutura assinalados para as situações 1, 4, 5, 6 e 7 e os resultados estão apresentados no quadro 5.31.

PONTO	CASO 1	CASO 4	CASO 5	CASO 6	CASO 7
1	0,74	1,12	5,66	1,10	5,54
2	0,11	0,26	0,92	0,27	0,93
3	0,77	1,30	6,76	1,28	6,64
4 *	6,68	7,83	17,5	7,92	17,5
5	2,40	2,81	8,74	2,82	8,79
6	2,78	2,08	5,87	2,09	5,99
7 *	10,9	12,3	27,9	12,4	28,7
8	10,4	11,6	29,4	11,7	30,2
9	-0,1	-0,11	-0,3	-0,10	-0,4
10*	1,75	2,57	4,90	2,56	4,94
11	0,00	-0,26	-0,6	-0,27	-0,7
12	0,63	0,77	2,60	0,72	2,62
13	0,40	0,32	1,11	0,32	1,01

**QUADRO 5.31 - DESLOCAMENTOS VERTICAIS EM mm NAS LAJES E VIGAS**

Como nas análises anteriores, os deslocamentos dos pontos das vigas e lajes alteram em menos de 5% com a consideração da fissuração à torção. De um modo geral, há uma tendência de aumento nos deslocamentos. Mas, considerando-se os valores obtidos, pode-se dizer, para o exemplo em questão, que os efeitos da fissuração à torção são pequenos no estado do deslocamento da estrutura.

Seguindo o raciocínio feito nos itens anteriores, pode-se comparar o caso 2 com o 4, em lugar de comparar o caso 2 com o 6. Esta análise já foi feita no item 5.5.3.4 e concluiu-se que, para os deslocamentos das lajes (pontos 4, 7 e 10) no caso 2 superestimam-se os deslocamentos e nos demais pontos, eles são subestimados.

#### 5.5.4- ANÁLISE DO NÚMERO DE ITERAÇÕES E CONVERGÊNCIA NOS RESULTADOS

Resolve-se, neste ítem, o exemplo anterior considerando a fissuração por flexão e torção com 10, 20, 30 e 40 etapas, anotando-se para estas situações o tempo gasto pelo programa, o deslocamento do ponto 72, e os momentos fletores  $Y_1$ ,  $X_5$  e  $M_6$  e apresentando-se os resultados no quadro 5.32. Vale ressaltar que o equipamento usado, como já foi escrito, é um computador do tipo 386 DX e tem índice "NORTON" igual 45,9, ou seja, é aproximadamente 45,9 vezes mais rápido que o computador tipo XT.

N. ETAPAS	TEMPO MIN:SEG	DESLOC. mm	$y_1$ kN.m/m	$X_5$ kN.m	$M_6$ kN.m
10	3:13	29,7	-11,40	-85,29	94,53
20	6:16	30,2	-11,35	-84,92	94,33
30	9:24	30,3	-11,33	-84,61	94,31
40	12:34	30,4	-11,30	-84,59	94,30

QUADRO 5.32 - TEMPO, DESLOCAMENTO E MOMENTOS FLETORES PARA DIVERSAS ETAPAS

Os resultados obtidos mostram, em primeiro lugar que o tempo gasto é pequeno, mesmo com um número grande de etapas. Em segundo lugar, percebe-se a convergência dos resultados e a pequena discrepância existentes entre eles. Os momentos escolhidos são os que apresentam maior módulo, com exceção do momento  $Y_3$ , que é afetado pela viga  $V_2$ . Tomando-se os valores extremos da análise, ou seja para 10 e 40 etapas chega-se às razões :

$$\text{deslocamento} : \frac{29,7}{30,4} = 0,977$$

$$\text{momento } Y_1 : \frac{-11,40}{-11,30} = 1,008$$

$$\text{momento } X_5 : \frac{-85,29}{-84,59} = 1,008$$

$$\text{momento } M_g : \frac{94,53}{94,30} = 1,002$$

### 5.5.5 CONSIDERAÇÃO DA FLUÊNCIA EXEMPLO 5.13

Neste item, resolve-se o exemplo anterior 5.12, considerando a fissuração à flexão e à torção e levando, também, em conta o efeito da fluência do concreto para o tempo infinito.

Além dos dados, que foram considerados em 5.12, os seguintes valores são usados para o cálculo do coeficiente de fluência:

#### concreto

idade do concreto quando da atuação de  $g_1$  e  $g_2$  - 7 dias;

abatimento entre 5 e 9 cm.

cimento do tipo Portland ( CP )

#### cargas

$$g_1 = 2,5 \text{ kN/m}^2;$$

$$g_2 = 1,0 \text{ kN/m}^2;$$

$$p = 1,5 \text{ kN/m}^2;$$

relação entre as cargas permanentes e total-  $R = 0,70$  .

#### condição geométrica

espessura fictícia - elemento de 1m x 0,1 m;

#### condições climatológicas

temperatura média de 20° C;

umidade relativa do ar  $U_r = 70\%$ .

Levando em conta que o concreto tem 7 dias de idade, quando entra em carga, e que o cimento usado é do tipo Portland, passa-se a ter para a idade fictícia do concreto o valor 14 dias. Com esses valores e usando as fórmulas do capítulo 3, chega-se ao coeficiente de fluência para o tempo infinito. Este coeficiente considera . O valor do coeficiente é dado por :

$$\phi(\infty, 7) = 3,01$$

Com a relação de 0,7 entre a carga permanente e a total, chega-se à etapa a ser considerada aplicado o coeficiente  $\phi$  que, nesse caso, é a de número 14. Usando esses valores, calculam-se os deslocamentos apresentados no quadro 5.32, listados na coluna do caso 8.

PONTO	CASO 1	CASO 4	CASO 7	CASO 8	caso 8 caso 1	caso 8 caso 4
1	0,74	1,12	5,54	11,8	16,0	10,5
2	0,11	0,26	0,93	1,57	14,2	6,04
3	0,77	1,30	6,64	14,2	18,4	10,9
4 *	6,68	7,83	17,5	41,7	6,24	6,24
5	2,40	2,81	8,79	22,9	9,54	8,15
6	2,78	2,08	5,99	15,3	5,52	7,38
7 *	10,9	12,3	28,7	75,4	6,91	6,13
8	10,4	11,6	30,2	82,4	7,94	7,14
9	-0,1	-0,11	-0,4	-0,7	7,00	6,36
10*	1,75	2,57	4,94	12,5	7,18	4,88
11	0,00	-0,26	-0,7	-1,7	----	----
12	0,63	0,77	2,62	5,10	8,10	6,62
13	0,40	0,32	1,01	1,72	4,30	5,38

QUADRO 5.33 - DESLOCAMENTOS VERTICAIS EM mm NAS LAJES E VIGAS E COMPARAÇÕES - EXEMPLO 5.13

Como pode ser visto, pelos resultados obtidos, há uma variação grande nos deslocamentos quando se considera o efeito da fluência. Quando o cálculo é feito pelo processo usual não se considera a fissuração e a fluência, e desta forma os valores dos deslocamentos acabam sendo subestimados. Assim no ponto 8, em que o deslocamento é máximo tem-se no tempo infinito um deslocamento 7,94 vezes maior que o obtido pelo processo usual.

Comparando-se o caso 8 com o caso 4, em que o cálculo também é linear porem com a consideração da analogia de grelha, as relações nos pontos de maior

deslocamento em geral diminuem.

Verifica-se que o efeito da fluência é bem grande pois tomando-se o ponto 7 como referencia verifica-se que em relação à deformação final a deformação linear representa  $r = \frac{12,3}{75,4} = 0,16$ , ou seja cerca de 16%. Considerando a fissuração tem-se em relação o deslocamento final a relação de  $r = \frac{29,7}{75,4} = 0,38$  e portanto 38 %.

Desta maneira percebe-se a importancia da consideração da fluência nos deslocamentos no tempo infinito.

## CAPÍTULO 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

### 6.1. PRELIMINARES

Neste capítulo, discutem-se algumas conclusões que podem ser obtidas do trabalho. Embora a maioria já esteja enunciada no texto anterior, procura-se agrupá-las por tópicos de maneira que o leitor possa ter uma visão mais global do trabalho.

Procura-se, também, enunciar as alternativas que podem ser usadas com o programa e técnicas aqui empregadas, colocando-se as sugestões para novos trabalhos.

É preciso dizer que o grande significado deste trabalho está em mostrar que é possível fazer a análise não-linear física dos pavimentos de edifícios com as técnicas simples e bastante conhecidas. Acredita-se, que este procedimento possa orientar os estudos no sentido de melhorar o cálculo e o projeto de pavimentos de edifícios de concreto armado.

### 6.2. A ESTRUTURA DO PAVIMENTO CONSIDERADA COMO UM TODO

Nenhum procedimento simplista, em que se isolam os diversos elementos, considera a influência que as características elásticas destes podem produzir na estrutura. Como já havia mostrado Mazzilli [30], os procedimentos simplistas deixam de levar em conta as dimensões das seções transversais dos elementos da estrutura, ou melhor, deixam de considerar a rigidez. Como bem foi mostrado no item 5.3.3, há uma diversidade de comportamento da placa em função da sua rigidez relativa à das vigas periféricas. Somente uma análise que leve em conta a estrutura como um todo vai possibilitar esta análise.

Os resultados obtidos nos exemplos de pavimento de edifício, quando se comparam principalmente os momentos das vigas, da analogia de grelha com o processo usual, mostram que há discrepância bastante grande nos resultados.

Considerar a ação da laje, na viga, como uma carga uniformemente distribuída, como prescreve a norma NBR 6118, para as cargas em serviço, é extremamente simplista e pode levar a valores de momentos na viga abaixo dos reais.

Os resultados para os momentos das lajes, obtidos pelo cálculo usual e pelos da analogia de grelha têm uma diferença menor que a diferença encontrada nos momentos fletores nas vigas.

O cálculo dos deslocamentos por processos usuais conduz, ao que tudo indica, a valores abaixo dos obtidos com os procedimentos da analogia de grelha.

De qualquer maneira, os procedimentos simplistas, servem para dar idéia como se comporta a estrutura como um todo, e podem ser usados no pré-dimensionamento da armadura dos diversos trechos da estrutura.

Finalmente, acredita-se que o uso de procedimentos que calculam o pavimento como um todo, permite que o projetista tenha uma visão melhor do seu comportamento, e possa otimizar o projeto a partir de mudanças na rigidez das lajes, vigas e na mudança de posição de vigas, pilares e apoios.

### 6.3. MODELO EMPREGADO

Há duas análises a serem feitas. A primeira, referente ao modelo usado para interpretar a estrutura do pavimento: a analogia de grelha. A segunda, é feita sobre o modelo que considera a fissuração do concreto: relação momento-curvatura e rigidez média do elemento .

Embora já bem estudado, o modelo de analogia de grelha mereceu uma atenção especial, pois procurou-se detalhar assuntos tais como a precisão, a convergência com o refinamento da malha, e o estudo comparativo das lajes sem vigas com os valores obtidos pela teoria das placas. Desta forma procurou-se, no capítulo 2, através de exemplos de lajes isoladas com ou sem viga, resumir e complementar as informações dos trabalhos pesquisados.

Pode-se verificar que os resultados obtidos com a analogia de grelha linear, para as estruturas isoladas, são bastante aceitáveis a nível de valores práticos.

Para a análise do exemplo do pavimento, o uso da analogia de grelha na análise linear leva a bons resultados, como já mostrou Barboza [5], e não apresentou, aparentemente, nenhum resultado ilógico para a análise não-linear.

O uso de um modelo em que se avalia a variação da rigidez do elemento a partir da relação momento-curvatura, é bastante propício para análise dos deslocamentos de vigas. A prova disto são os resultados obtidos para as vigas

ensaidas na Escola de Engenharia de São Carlos, que têm uma grande concordância com os resultados dos ensaios, conforme é mostrado no capítulo 3.

Neste trabalho foram considerados três procedimentos para estabelecer a inércia média: Branson, CEB-158 e CEB90. Conclui-se que o CEB90 conduz a peças com menor rigidez, enquanto que o processo de Branson leva aos maiores valores de rigidez e o CEB-158 a valores intermediários. O emprego de cada uma das expressões deve ser avaliado pelo projetista e o programa permite o uso de qualquer uma delas. Pela comparação dos resultados do ensaio das vigas bi-apoiadas e do programa, parece ser mais indicado a utilização do modelo do CEB90.

Finalmente pode-se dizer que o processo é convergente, tanto na análise linear quanto na não-linear. Na parte linear a melhoria de resultados pode ser obtida quando se faz um refinamento da malha. Na análise não-linear pode-se melhorar os resultados refinando-se a malha ou aumentando o número de etapas de carregamento. No final do capítulo 5 foi mostrado o refinamento que se obtém quando se aumenta o número de etapas.

#### 6.4. INFLUÊNCIA DO VALOR DO MÓDULO DE DEFORMABILIDADE TRANSVERSAL

O uso de um valor do módulo de deformabilidade transversal reduzido, para levar em conta o efeito de fissuração à torção, não se revelou consistente. Os resultados encontrados com este procedimento diferem razoavelmente dos fornecidos pelo procedimento que considera o valor do módulo de deformabilidade transversal obtido pela teoria da elasticidade e a não-linearidade à torção.

#### 6.5. INFLUÊNCIA DA FISSURAÇÃO À FLEXÃO NOS ESFORÇOS SOLICITANTES

A fissuração causa mudanças nos momentos fletores dos elementos do pavimento, porém estas variações não são muito grandes.

A grande influência da fissuração está no estado de deformação da estrutura, que aumenta muito quando comparada aos procedimentos que não levam em conta a fissuração.

A fissuração atua no sentido de redistribuir, em uma estrutura hiperestática, os esforços, de maneira que os elementos mais solicitados possam transferir carga

para os menos solicitados. É muito comum imaginar-se que devido a fissuração do concreto por flexão e torção, ocorra uma redistribuição de esforços, tal que os momentos fletores positivos e negativos, em uma viga contínua, por exemplo, tenham valores parecidos em módulo. Imagina-se que os momentos negativos, geralmente sendo maiores (em módulo), provoquem uma fissuração junto ao apoio e os momentos positivos, em virtude disto, tenham seus valores aumentados. Pelo exemplo do pavimento percebe-se que a redistribuição de esforços é pequena e alguns momentos fletores positivos podem até diminuir depois da fissuração, em virtude da redistribuição das reações das lajes nas vigas.

Para a estrutura do pavimento, os momentos fletores negativos das vigas contínuas diminuem (em módulo) e os positivos, em sua maioria, aumentam. Os momentos das vigas de um só tramo tem seus valores diminuídos. Nas lajes, os momentos fletores positivos, em geral, aumentam enquanto os negativos diminuem em módulo.

As reações nos pilares, não sofrem, praticamente, nenhuma influência da fissuração do concreto.

Pelos valores obtidos para os exemplos do pavimento, pode-se dizer que a fissuração do concreto deve ocorrer para as cargas de serviço, uma vez que os momentos de fissuração dos elementos constitutivos são mais baixos que os valores dos momentos fletores em diversos trechos da estrutura, para carga de peso próprio.

#### 6.6. INFLUÊNCIA DA FISSURAÇÃO À TORÇÃO NOS ESFORÇOS SOLICITANTES

Os exemplos resolvidos para o pavimento de edifício mostram que a fissuração à torção provoca modificações inferiores a 5% dos valores obtidos. Desta maneira, deve-se estudar outros tipos de estrutura como, por exemplo, estruturas em que as vigas tenham grandes larguras, para verificar se a fissuração à torção pode causar mudanças importantes nos esforços solicitantes.

#### 6.7. DEFORMAÇÃO

Sem dúvida nenhuma, um dos pontos cruciais do projeto moderno de pavimentos está na avaliação correta da deformação da estrutura, principalmente ao

longo do tempo.

Apesar de todo o desenvolvimento do cálculo estrutural e as técnicas construtivas, continua-se usando contrapiso de regularização, que tem como principal finalidade tornar a superfície de pavimento horizontal. Não deixa de ser um contrasenso, pois ao executá-lo está se acrescentando peso próprio à estrutura. Para evitar este procedimento bastaria projetar contraflechas adequadas que permitissem, com uma execução cuidadosa, em um certo tempo, ter-se a superfície superior do pavimento horizontal. É conveniente lembrar que a fluência do concreto existe com ou sem contrapiso, aliás é até mais intensa com a execução do mesmo. Em virtude da existência da fluência, não existe possibilidade de se ter, teoricamente falando, o pavimento, ao longo do tempo, formando um plano horizontal.

Do estudo feito percebeu-se que a fissuração faz com que os deslocamentos máximos na estrutura aumentem consideravelmente. Não basta, simplesmente, tentar usar cálculos expeditos, com valores de módulo de deformabilidade longitudinal ( $E_c$ ) ou transversal ( $G$ ) do concreto reduzido.

Uma possibilidade que se abre com o programa é o fato de se poder simular, com maior precisão, o efeito da idade do concreto quando da retirada do escoramento da estrutura no estado de deformação. Considera-se normalmente apenas como importante a resistência que o concreto tem, na data da retirada do escoramento do pavimento. A retirada do escoramento numa data em que o concreto tem pouca idade, pode levar a valores altos de coeficiente de fluência. Através da análise da fluência o programa permite conhecer o estado de deformação do pavimento em um instante qualquer de tempo.

A consideração do comportamento do conjunto viga-laje passa pela utilização do conceito de largura colaborante. Na rigidez da viga é necessário considerá-la, caso contrário, a flexibilidade da estrutura estará superestimada. Mesmo que o modelo fosse outro, como por exemplo, os elementos finitos, torna-se importante considerar o aumento de inércia que a laje proporciona à viga.

## 6.8. POSSIBILIDADES E SUGESTÕES

Procura-se relatar neste item as possibilidades de se melhorar os procedimentos usados aqui e são feitas, também, algumas sugestões para trabalhos

futuros.

Apesar de considerar o pavimento como um todo na análise de analogia de grelha, é óbvio que, quando se pensa na estrutura do edifício, o pavimento é uma parte, um subsistema, e portanto está sendo feita uma aproximação do mesmo tipo, que a chamada aqui usual, quando se decompõem o pavimento em lajes e vigas.

Uma das aproximações que se fez nesta situação é a de considerar que os pilares são apoios rígidos e incapazes de absorver momentos. Essa situação pode ser melhorada, considerado-se coeficientes de molas nas restrições de apoio que representam os pilares. Estes coeficientes podem levar em conta a deformabilidade vertical do pilar, e a absorção de momentos fletores pelos pilares. Nesta região do pilar, para se considerar a fissuração teria que ser levado em conta o diagrama Momento-curvatura para a flexão composta.

Com o desenvolvimento da análise matricial, pode-se, provavelmente trabalhar com uma estrutura tridimensional, usando-se a técnica de subestruturas, acoplando-se a analogia de grelha do pavimento com os pórticos verticais de pilares e vigas.

O modelo empregado pode ser melhorado, calculando-se os coeficientes de rigidez da analogia de grelha, através de integração numérica ao longo de cada elemento. Pode-se, também, fazer, como descrito no capítulo 4, uma série de iterações a cada etapa de carregamento, de maneira a se considerar a rigidez mais próxima do real para o elemento em análise.

É preciso investigar qual precisão que se obtém com o modelo da analogia de grelha em pavimentos que tenham elementos não ortogonais entre si. Neste caso devem ser elaborados e resolvidos alguns exemplos e comparar os resultados com outros processos para verificar, até que ponto, a analogia de grelha equivalente fornece uma resposta aceitável.

Sugere-se que se faça uma série de investigações que verifiquem se, com o surgimento de regiões de concreto plastificado, ocorre uma grande redistribuição de esforços, que não foi possível detectar considerando a fissuração à flexão e à torção do concreto.

Como foi concluído anteriormente, a fissuração do concreto ocorre mesmo para cargas em serviço. Para evitá-la, a solução é usar a protensão. Nesta caso pode-se continuar usando o modelo de grelha, ou melhor uma "grelha" em que se considera

mais uma coordenada de deslocamento, ou seja, na direção axial do elemento, e usar o modelo momento-curvatura para flexão composta. A protensão permite, ao introduzir tensões de compressão, que se aumente o valor do momento de fissuração da seção.

Pelos exemplos das vigas mostradas no capítulo 3, tem-se a impressão de que o diagrama do momento-curvatura na flexão, depende mais da taxa de armadura do que se considera normalmente. Recomenda-se assim que os trabalhos de Guefi e Giuriani [21] sejam continuados, de maneira que se consiga equacionar melhor o efeito desta variável (taxa de armação), na determinação do momento de fissuração. Acrescenta-se a esta investigação, a necessidade de estudar melhor o efeito da viga T no cálculo da rigidez. Devem ser resolvidos diversos exemplos para verificar a variação dos trechos em que a viga trabalha realmente como T.

O uso do modelo aqui desenvolvido abre, sem dúvida nenhuma, um vasto campo para investigação e para simular situações que levantem a possibilidade de ocorrência de fissuras na alvenaria de edifícios devido a deformação excessiva da estrutura. Pode-se, também, estudar a influência da idade do concreto, quando da retirada do escoramento da estrutura, verificando se haveria diminuição razoável da deformação da estrutura com o concreto carregado com uma idade maior. Pode-se promover estudos no sentido de se obter um mapa de contraflecha para o pavimento, de tal maneira, que na data do assentamento do acabamento, o pavimento torna-se o mais plano possível. Assim, o contrapiso de regularização terá a menor espessura possível ou então não precise nem ser feito. Finalmente, podem-se promover ensaios para comparar os resultados, com os obtidos no programa e assim verificar a precisão que o programa tem.

**BIBLIOGRAFIA**

- [1] **ÁLVARES M. S.; Estudo de um modelo para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação do método dos elementos finitos ;** Dissertação a ser apresentada ; SET- EESC- USP; - São Carlos; 1993
- [2] **ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS; Cálculo e execução de estruturas de concreto armado ;** Rio de Janeiro; 1978 ( NBR 6118/78)
- [3] **ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS; Projeto de estruturas de concreto protendido ;** Rio de Janeiro;1989 (NBR 7197/89 )
- [4] **ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS; Acões e segurança nas estruturas;** Rio de Janeiro; 1984 (NBR 8681/84)
- [5] **BARBOZA A. S. R.; Contribuição à análise estrutural de sistemas lajes-vigas de concreto armado mediante analogia de grelha;** Dissertação de mestrado; SET- EESC- USP; - São Carlos; Outubro de 1992
- [6] **BARES R. ; Tablas para el calculo de placas y vigas pared;** Editorial Gustavo Gili S/A; Barcelona; 1972
- [7] **BRANSON D. E.; Procedures for computing deflections;** ACI Journal; New York; Setembro de 1968.
- [8] **BRANSON D. E.;Deflections of reinforced concrete flexural members;** Journal of American Concrete Institute; New York; Junho de 1966.
- [9] **CÂMARA J. M. N.; Comportamento em Serviço de Estruturas em betão armado e pré-esforçado - tese apresentada na Escola de Engenharia Civil da Universidade Técnica de Lisboa ;** Lisboa ;Janeiro de 1988.
- [10] **CAMPAGNOLO, J. L., Gobetti L. C. W.; Análise teórico experimental das deformações devido à flexão em lajes de concreto armado -** Publicação do Curso de Pós-Graduação da EE- UFRGS - Porto Alegre;
- [11] **CARVALHO, R. C. ; Contribuição ao cálculo de pontes em balanço progressivo;** Dissertação de mestrado; SET- EESC- USP; - São Carlos; 1988
- [12] **CEB; Manual on structural effects of time dependent behaviour of concrete;** Bulletin n. 142; 1984
- [13] **CEB; Structures analisys - nonlinear analisys of concrete frames and design of slabs;** Bulletin N. 153 ;PARIS ; Abril de 1982.
- [14] **CEB; Manual on cracking and deformations ;** Bulletin n. 158; 1985

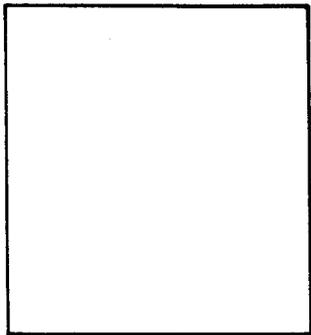
- [15] CEB; CEB-FIP model code 1990 - final draft - Bulletin D'Information, n. 203-205; 1991
- [16] CHEN, W. F.; **Plasticity in reinforced concrete**; McGraw Hill Inc; New York; 1982
- [17] CORRÊA M. R. S.; **Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios**; tese SET-EESC-USP; São Carlos setembro de 1991
- [18] CORRÊA M. R. S., RAMALHO R. A.; **Sistema laser de análise estrutural - V Simpósio Nacional de Tecnologia de Construção: Software para o Projeto de Edifícios - EPUSP; - São Paulo ; 1987**
- [19] COSTA J. B. -**Automação de projetos de pavimento tipo de edifícios de concreto armado**; dissertação SET-EESC-USP; 1990
- [20] FIGUEIREDO, Filho R. S.; **Sistemas estruturais de lajes sem vigas: subsídios para o projeto e execução**; Tese de Doutorado; SET-EESC-USP São Carlos ; 1989
- [21] GUEFI P., GIURIANI E. ;**Effeti della fessurazione sugli appoggi ed Campata nelle travi continue de concreto armato**; Prefabbricazione - Roma, ex 22 n 11/12 p 9-30 nov-dic 1986
- [22] GHALI A. , R. FAVRE ; **Concrete structures: stresses and deformations**; Chapman Hall ; London; 1986
- [23] HAMBLY, E. C.; **Bridge Deck Behavior**; Chapman and Hall; London; 1976
- [24] HANAI, J. D, et alii ; **Estudo comparativo de sistemas estruturais para a construção de unidades básicas de saúde do programa metropolitano de saúde de São Paulo**; Relatório; EESC- USP, DECIV-UFSCAR; São Carlos; Outubro de 1985
- [25] JOHANSSON K. W.; **Linhas de ruptura: teoria e prática**; Ao Livro Técnico S. A. - Rio de Janeiro; Junho de 1962
- [26] LEONHARDT F.; **Construções de concreto: verificação da capacidade de utilização**; Vol. 4 Editora Interciência; - Rio de Janeiro; 1971
- [27] LEONHARDT F. ,MONNIG E.- **Construções de concreto: princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto**; Vol. 1 Editora Interciência ; Rio de Janeiro; 1971
- [28] LIGHTFOOT E. F., SAWKO F.- **Structural frame analisys by eletronic computer: gride frameworks resolved by generalised slope deflection**; Engineering, 187 (18-20) ; 1959
- [29] MARTINELLI D. A. O, MONTANARI I., SAVASSI W. - **Placas Elásticas -**

- Apostila; EESC-USP São Carlos - 1986
- [30] MAZZILLI A. R. M. ; **Influência da flexibilidade das vigas de apoio no cálculo de estruturas de edifícios**; Dissertação Escola Politécnica -USP; São Paulo- 1988
- [31] OWEN, D. , HINTON, E. ; **Finite elements in plasticity: teory and practice**;  
Pineridge Press Ltd; Swansea ; 1980
- [32] PROENÇA, S. P. B.;**Sobre modelos matemáticos do comportamento não linear do concreto**; Tese de Doutorado; SET-EESC-USP São Carlos ; 1988
- [33] RAO, P. S. , SUBRAHMANYAN, B. v. ; **Trisegmental moment-curvature relations for reinforced concrete members**; Proc. of the American Concrete Institute; 70; 5; 346-347 ; 1973
- [34] ROCHA A. M.- **Novo curso prático de concreto armado**; Vol. 1 Editora Centífica ; Rio de Janeiro; 1972
- [35] SCHIEL F. , ; **Introdução à resistência dos materiais**; Editora Harper ; São Paulo
- [36] THAMALINGHAM T. ; **Nonlinear analisys of grid systems**; Canadian Journal of Civil Eng. ; Vol. 6 n. 3 ; Julho de 1989
- [37] TIMOSHENKO S., WOINOWSKY K.; **Theory of plates and shells**; McGraw-Hill Book Company - Tokyo 1959
- [38] VASCONCELOS, A. C. ; **Manual para a correta utilização dos aços de protensão** ; Livros Técnicos e Científicos; Rio de Janeiro ; 1975
- [39] VECCHIO F. J. , SELBY R. G. ; **Toward compression-field analisys of reinforced concrete solids** ; Journal of Structural Engineering, ASCE- New York; Junho de 1991
- [40] WEAVER, W. Jr. ; **Computer programs for structural analisys** ; D. Van Nstrand Company, Inc. Princeton: 1967
- [41] WILSON, E. L, HABIBULLAH A.; **SAP80 structural analisys programs** ; Manual de utilização; Computers & Structures Inc. ; Berkeley, California: 1984
- [42] ZIENKIEWICZ O. C. - **The finite element method**; MacGraw-Hill Books ; Great Britain ; 1971

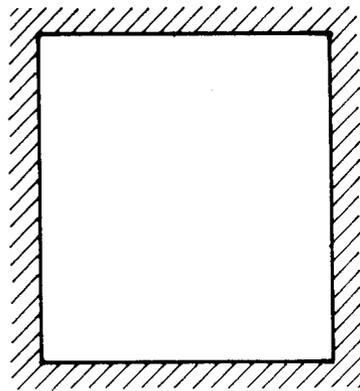
A N E X O

I

## LAJES COM BORDAS INDESLOCÁVEIS VERTICALMENTE

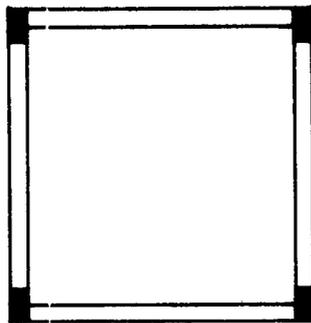


EXEMPLO 5.1



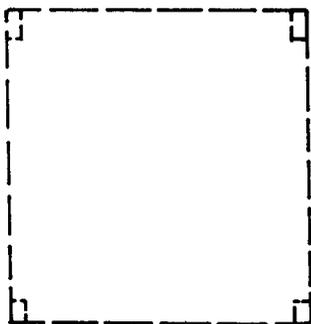
EXEMPLO 5.2

## LAJES APOIADAS EM VIGAS

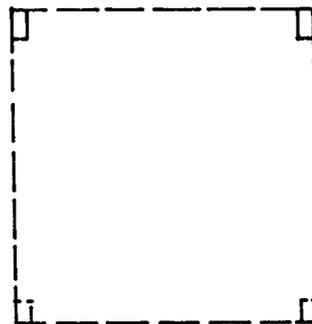


EXEMPLOS 5.3, 5.4; 5.5; 5.6 e 5.7

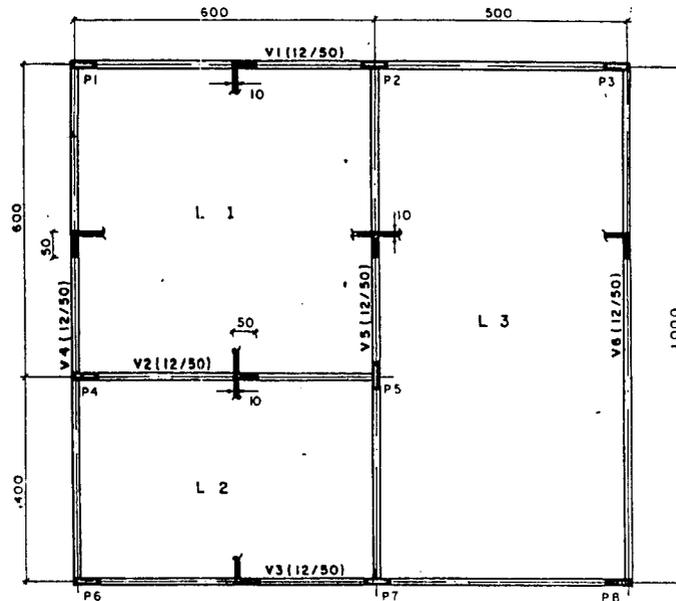
## LAJES COM BORDAS LIVRES APOIADAS EM PILARES



EXEMPLO 5.8



EXEMPLO 5.9



**Caso 0** - estrutura resolvida com o método dos elementos finitos e análise linear. Este caso é o único que não considera a largura colaborante nas vigas e os resultados são tirados de Mazzilli [30];

**Caso 1** - estrutura resolvida pelo processo usual com análise linear.

**Caso 2** - estrutura resolvida com analogia de grelha, análise linear e  $G=0,15.E_c$  ;

**Caso 3**- estrutura resolvida com analogia de grelha, análise não linear, fissuração à flexão e  $G=0,15.E_c$ ;

**Caso 4** -estrutura resolvida com , analogia de grelha, análise linear e  $G$  dado pela teoria da elasticidade com  $\nu=0,2$  ;

**Caso 5** -estrutura resolvida com analogia de grelha, análise não-linear, fissuração à flexão e  $G$  dado pela teoria da elasticidade com  $\nu=0,2$  ;

**Caso 6** -estrutura resolvida com analogia de grelha, análise não-linear, fissuração à torção e  $G$  dado pela teoria da elasticidade com  $\nu=0,2$  ;

**Caso 7** - estrutura resolvida com analogia de grelha, análise não-linear, fissuração à flexão e à torção e  $G$  dado pela teoria da elasticidade com  $\nu=0,2$ .

**Caso 8** - estrutura resolvida com analogia de grelha, análise não-linear, fissuração à flexão e à torção ,  $G$  dado pela teoria da elasticidade com  $\nu=0,2$  e consideração da fluência.