

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ESTÁTICO DE PAINÉIS
PLANOS DE EDIFÍCIOS ALTOS UTILIZANDO A
TÉCNICA CONTÍNUA**

MARIA ANGELA PEREIRA XAVIER

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Civil.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Eddie Mancini

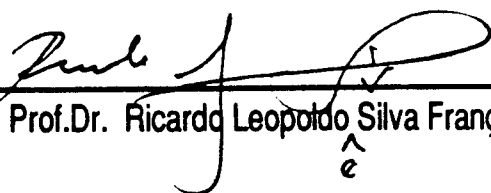
São Carlos
1994

FOLHA DE APROVAÇÃO

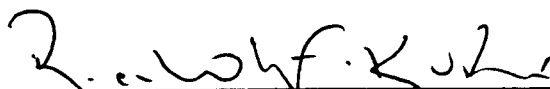
Tese defendida e aprovada em 05/8/1994
pela Comissão Julgadora:



Prof.Dr. Eddie Mancini (Orientador) - EESC-USP



Prof.Dr. Ricardo Leopoldo Silva França - EP-USP



Prof.Dr. Ricardo Hallal Fakury - UFMG

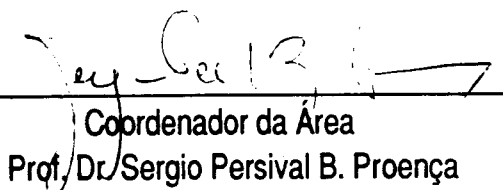


Prof.Assoc. Roberto Luiz de Arruda Barbato - EESC-USP



Prof. Dr. Marcio Antonio Ramalho - EESC-USP

Presidente da CPG
Prof. Dr. Jurandyr Povinelli



Coordenador da Área
Prof. Dr. Sergio Persival B. Proença

*"A História das Ciências é a da
eliminação progressiva do erro, isto é,
da sua substituição por um erro
novo, mas cada vez menos absurdo."*

(ENGELS)

A meu pai, Francisco (em memória).

A meu marido, Ernesto.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Eddie Mancini, pela orientação dedicada e constante e, sobretudo, pela amizade.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pela concessão da bolsa de estudos.

Aos Professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC-USP, pela atenção e colaboração.

Aos amigos Alan e Gizilene, pelo apoio e incentivo.

À Adriana, pela digitação deste trabalho.

À Silvia, pela editoração deste trabalho.

RESUMO

Apresenta-se neste trabalho um processo de análise, em regime elástico, de painéis planos de edifícios altos sujeitos à ação de cargas laterais e verticais, uniformemente distribuídas ao longo da altura da estrutura. Utiliza-se, para o desenvolvimento teórico, a técnica do meio contínuo, que consiste basicamente em considerar a rigidez dos elementos de conexão horizontais, lajes e vigas, distribuída na altura. Consideram-se na análise: a influência das deformações axiais dos pilares; a influência da deformação por força cortante das barras e, também, a influência dos trechos rígidos (nós rígidos), que são as regiões de interseção entre vigas e pilares.

As características geométricas de vigas e pilares podem apresentar mudanças em vários níveis da altura da estrutura. O trecho de painel compreendido entre dois níveis consecutivos mantém sua rigidez constante ao longo de seu comprimento. Nas estruturas constituídas por pilares de elevada rigidez e sob a ação apenas de cargas laterais, leva-se em conta a flexibilidade das fundações.

Inicia-se a análise estudando-se o painel “pórtico”, segundo hipóteses de cálculo já usualmente adotadas nos processos de análise que utilizam a técnica do meio contínuo. Em seguida, com a utilização de uma hipótese nova, porém de eficiência já comprovada, chega-se ao “pórtico geral”. Este painel denomina qualquer painel plano de pilares verticais e vigas horizontais onde não se faz nenhuma restrição quanto ao tipo dos elementos verticais. Assim este modelo pode tratar painéis com prumadas verticais de pilares-parede e/ou pilares de pórtico, sem qualquer limitação relativa a seu posicionamento na estrutura.

As condições de equilíbrio de cada painel são estabelecidas dentro dos conceitos de cálculo da teoria de segunda ordem, uma vez que se leva em conta a configuração deformada do painel. A carga crítica vertical de instabilidade global, é também determinada.

O comportamento de cada painel fica expresso através de um sistema de equações diferenciais de terceira ordem, cuja solução é obtida através do método das diferenças finitas, com uso de computador. São apresentados, também, diversos exemplos numéricos de estruturas analisadas, que procuram ilustrar todo o potencial do processo de análise desenvolvido.

ABSTRACT

A process of analysis in elastic range for panels subject to the action of lateral and vertical loads uniformly distributed along the height is presented in this work. The continuous medium technique is utilized, for the theoretical development, which consists of considering the stiffness of the horizontal connection elements, beams and slabs, distributed along the height of the building. In the analysis are considered: the influence of axial displacement of the columns, the influence of shear deformation of the bars and the influence of finite dimensions of rigid joints.

The geometric characteristics of the beams and columns can vary at several levels along the height. The part of panel situated between two consecutive levels must have constant stiffness. The flexibility of the foundations is taken into consideration in the structures composed of columns of high stiffness and subject to the action of lateral load only.

The analysis is initiated studying the "frame" panel according to the usual continuous medium technique hypothesis. Next, utilizing an already verified new hypothesis the "general frame" is studied. This panel denominates any plane panel composed of vertical columns and horizontal beams. It is not necessary to define the type of vertical elements thus, this structural model permits to treat any panel composed of walls and/or columns without restriction of their position in the structure.

The equilibrium conditions of each panel are established according to the second order theory since the deflected configuration of the panel is considered. The critical vertical load of overall elastic instability can also be determined.

The behavior of each panel is expressed by a system of differential equations of third order. The solution is found by the finite difference method. Several numerical examples for the studied structures are presented illustrating the structural analysis process developed in this work.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	01
2. PAINEL PÓRTICO	05
2.1. Introdução	05
2.2. Desenvolvimento Teórico	08
2.2.1. Equações de Equilíbrio	08
2.2.1.1. Equilíbrio dos Pilares à Força Normal	08
2.2.1.2. Equilíbrio do Pórtico ao Momento	11
2.2.2. Formulação Matricial	27
2.3. Variação das Características Geométricas com a Altura	32
2.4. Aplicação do Método das Diferenças Finitas	34
2.4.1. Malha de Pontos	34
2.4.2. Determinação do Número de Equações do Sistema de Equações Lineares em Diferenças Finitas	37
2.4.3. Equações em Diferenças Finitas	40
2.5. Cálculo dos Esforços	43
2.6. Determinação da Carga Crítica	47
3. PAINEL PÓRTICO GERAL	50
3.1. Introdução	50
3.2. Desenvolvimento Teórico	52
3.2.1. Equações de Equilíbrio	52
3.2.1.1. Equilíbrio do Pórtico Geral ao Momento	52
3.2.1.2. Equilíbrio dos Pilares à Força Normal	56
3.2.2. Formulação Matricial	57
3.3. Variação das Características Geométricas com a Altura	59
3.4. Aplicação do Método das Diferenças Finitas	62
3.4.1. Malha de Pontos	62
3.4.2. Determinação do Número de Equações do Sistema de Equações Lineares em Diferenças Finitas	65
3.4.3. Equações em Diferenças Finitas	66
3.5. Cálculo dos Esforços	70

3.6. Determinação da Carga Crítica	70
3.7. Pórtico Geral com Pilares de Rigidez Elevada	71
3.7.1. Pilares de Rigidez Elevada Sobre Fundação Rígida	71
3.7.2. Pilares de Rigidez Elevada Sobre Fundação Flexível	75
3.7.2.1. Introdução	75
3.7.2.2. Desenvolvimento Teórico	76
4. PROGRAMA PARA CÁLCULO AUTOMÁTICO.....	80
4.1. Dados de Entrada	80
4.2. Subrotinas	83
4.3. Impressão dos Resultados	84
4.4. Listagem do Programa	84
5. EXEMPLOS NUMÉRICOS	86
5.1. Introdução	86
5.2. Exemplo Numérico 1	86
5.3. Exemplo Numérico 2	97
5.4. Exemplo Numérico 3	103
5.5. Exemplo Numérico 4	113
5.6. Exemplo Numérico 5	121
5.7. Exemplo Numérico 6	128
5.8. Exemplo Numérico 7	148
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	160
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	161
APÊNDICE A: Determinação dos Momentos M' e M'' de Barras com Trechos Rígidos nas suas Extremidades	167
APÊNDICE B: Método das Diferenças Finitas	173
APÊNDICE C: Método de Newton Raphson	177

1. INTRODUÇÃO

Os projetos de edifícios cada vez mais altos têm levado o engenheiro estrutural a se preocupar com a segurança de tais construções. A resistência ao vento é um aspecto importante do projeto estrutural e o comportamento de edifícios altos sob a sua ação tem despertado grande interesse por parte dos pesquisadores.

Muita atenção também é dada ao problema de estabilidade das estruturas de edifícios. Vários pesquisadores colaboraram para o assunto. Podem-se citar, entre outros, os trabalhos de: MACGREGOR (25,26) e NAIR(36).

Sob a ação do vento, um edifício desloca-se lateralmente e as cargas verticais interagem com estes deslocamentos produzindo esforços adicionais. Este efeito é conhecido como efeito P- Δ . A análise de estruturas incluindo este efeito é conhecida como análise em segunda ordem.

KALYANARAMAN (22) cita diversos métodos para se considerar o efeito P- Δ . Dentre estes destaca-se o método da carga lateral equivalente que constitui-se num procedimento iterativo, onde em cada etapa são determinadas cargas laterais equivalentes a partir dos deslocamentos obtidos através de análise em primeira ordem. BECH & KÖNIG (4) e FRANCO (14, 15) definiram parâmetros de avaliação da necessidade de se incluir no cálculo de estruturas os efeitos de segunda ordem.

Pode-se analisar o comportamento das estruturas de edifícios altos, sob cargas laterais e verticais, através da técnica do meio contínuo. Este processo consiste, basicamente, em se substituir o sistema de conexões horizontais, constituídos de lajes e vigas, por um meio contínuo de rigidez equivalente, distribuído ao longo da altura da estrutura. Os esforços transmitidos por estes elementos ficam, assim, continuamente distribuídos na vertical. Vários trabalhos foram desenvolvidos utilizando-se esta técnica e evidenciaram a sua eficiência na análise de estruturas. Dentre estes trabalhos, citam-se, por exemplo: ALBIGES & GOULET (1), GLUCK & GELLERT (20), TARANATH (47), STAMATO (45,46) e MANCINI (29).

Baseando-se nestes trabalhos, CARVALHO (5) estudou a instabilidade de algumas estruturas de edifícios altos, dirigindo a sua análise para a determinação da carga crítica vertical destas estruturas. Complementando esta análise, CARVALHO (6) determinou a carga crítica vertical de associações planas e tridimensionais de painéis e, também, analisou a influência das vigas na distribuição dos esforços entre paredes associadas. Continuando estes estudos, XAVIER (52) analisou o efeito $P-\Delta$ em alguns modelos estruturais planos e tridimensionais. Desprezando, entretanto, as deformações axiais dos elementos verticais que compõem as estruturas.

BATTISTELLE (3) desenvolveu procedimentos para o cálculo dos deslocamentos laterais em painéis planos sujeitos à ação de cargas laterais e verticais. Considerou na análise a influência das deformações axiais dos pilares e o efeito $P-\Delta$.

LAIER (23) apresentou uma análise do comportamento de um pórtico plano, formado por dois pilares iguais, utilizando uma variante da técnica do meio contínuo. O efeito $P-\Delta$ foi levado em consideração através de coeficientes de majoração.

A técnica do meio contínuo tem sua aplicação recomendada em edifícios de características geométricas regulares em planta e em elevação, o que pode ser encontrado com frequência nos edifícios altos. Porém, certos casos de variações das características geométricas de estruturas, ao longo da altura, podem ser resolvidos. Dentre os trabalhos desenvolvidos sobre o assunto, merecem ser citados: GLUCK (18, 19), TSO & CHAN (49), PISANTY & TRAUM (38), COULL & PURI (8) e BARBOSA (2).

O objetivo deste trabalho é desenvolver um processo de análise, em regime elástico, de painéis planos sujeitos à ação de cargas laterais e verticais, utilizando a técnica do meio contínuo. A análise é feita em teoria de segunda ordem, quando se leva em conta o efeito $P-\Delta$. Quando se despreza este efeito faz-se a análise em primeira ordem. São consideradas: a influência das deformações axiais dos pilares; a influência da deformação por força cortante das barras e também a influência dos trechos rígidos (nós rígidos), que são as regiões de interseção entre vigas e pilares.

Admite-se na análise que as características geométricas dos painéis podem variar abruptamente, em vários níveis, ao longo da altura. O trecho de painel compreendido entre dois níveis consecutivos mantém sua rigidez constante.

Baseando-se nos trabalhos de MANCINI (28,29), COSTA (7) e CARVALHO (6), considera-se a flexibilidade das fundações dos painéis constituídos por "pilares-parede" e submetidos apenas ao carregamento lateral.

O processo de análise, desenvolvido neste trabalho utilizando-se a técnica do meio contínuo, resulta num sistema de equações diferenciais de terceira ordem, que expressa o comportamento dos painéis considerados. A solução deste sistema de equações é obtida através do método das diferenças finitas e fornece, ao nível de cada andar, os deslocamentos da estrutura. A carga crítica vertical global, em regime elástico, de cada modelo estrutural, pode também ser determinada. O seu valor corresponde ao do carregamento vertical para o qual é nulo ou muito próximo de zero o valor do determinante da matriz dos coeficientes do sistema de equações lineares em diferenças finitas. Para a sua obtenção pode-se utilizar um processo numérico iterativo e é conveniente o emprego do processo de Newton-Raphson.

Ao Capítulo 2 deste trabalho, reserva-se a análise de "pórticos planos" com várias prumadas de pilares. No Capítulo 3, partindo-se das equações resultantes da análise do "pórtico plano" e, também, baseando-se na formulação desenvolvida em LAIER (23), analisa-se o painel "pórtico geral". Este painel denomina qualquer painel plano de pilares verticais e vigas horizontais onde não se faz nenhuma restrição quanto ao tipo dos elementos verticais. Assim este modelo pode tratar painéis com prumadas verticais de pilares-parede e/ou pilares de pórtico, sem qualquer limitação relativa a seu posicionamento na estrutura. Até o presente momento, os processos de cálculo utilizados exigiam, para a elaboração do modelo estrutural e a análise respectiva, o enquadramento prévio de cada prumada vertical nas categorias de pilar-parede ou pilar de pórtico, exigindo portanto para cada painel uma modelagem particular.

No "pórtico geral", em cada elemento vertical é considerada a flexão local à qual, em cada andar, é acrescentada a flexão global do elemento considerado como um todo. A flexão global predomina nos pilares-parede, já a flexão local predomina nos pilares de pórtico. No processo de análise desenvolvido neste trabalho, este comportamento à flexão dos elementos verticais é caracterizado naturalmente, o que permite a generalidade do pórtico geral como descrito anteriormente.

As soluções dos sistemas de equações diferenciais, gerados pelo tratamento contínuo, obtidas através do método das diferenças finitas, exigem a utilização de computador. Para isto desenvolveu-se um programa em linguagem FORTRAN, cuja listagem e descrição sumária dos dados de entrada e sub-rotinas são apresentadas no Capítulo 4. Alguns exemplos numéricos são resolvidos no Capítulo 5 e a precisão dos resultados é avaliada comparando-os com aqueles obtidos pela análise discreta. No capítulo 6, expõem-se algumas considerações sobre o trabalho.

Finalmente, no Apêndice A, são determinados os momentos fletores de barras com trechos rígidos nas suas extremidades e, nos Apêndices B e C, encontram-se os resumos dos métodos das diferenças finitas e de Newton-Raphson, respectivamente.

2. PAINEL PÓRTICO

2.1. Introdução

Apresenta-se a seguir uma análise elástica, em teoria de segunda ordem, de um pórtico plano submetido a um carregamento externo constituído por: carga lateral uniformemente distribuída q ; carga lateral concentrada no topo de intensidade F e carga vertical uniforme p , distribuída entre os pilares ao longo de seus eixos verticais (Figura 2.1-a). Sob efeito deste carregamento, a elástica resultante da deformação do pórtico, causada pela ação do momento fletor, devido à consideração da deformação axial dos pilares, e pelo esforço cortante, tem o aspecto indicado na Figura 2.1-b.

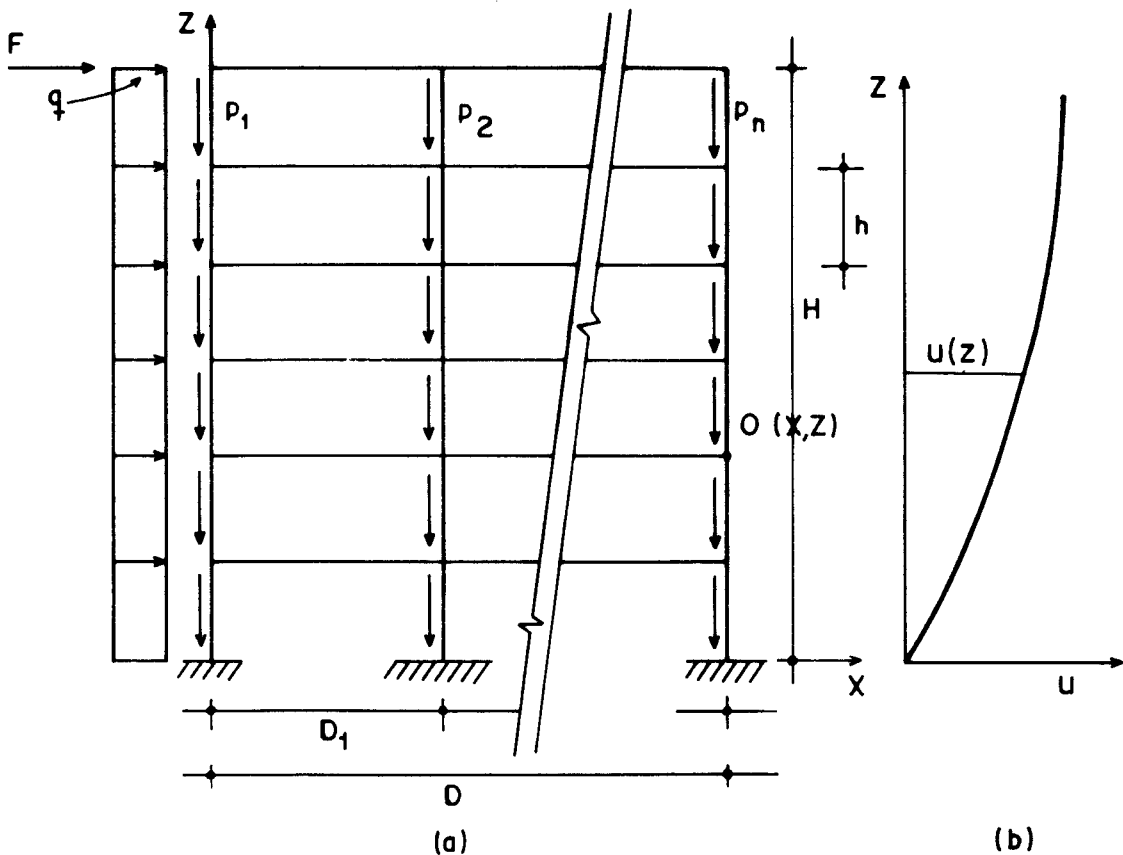


Figura 2.1- Paineil pórtico

O pórtico será referido a um sistema de eixos oxz , contido no plano do painel, com ox horizontal de sentido positivo da esquerda para a direita e oz vertical, com sentido positivo da base para o topo, conforme se indica na Figura 2.1-a.

O equacionamento matemático, que será deduzido segundo as hipóteses da técnica do meio contínuo, expressará o comportamento do pórtico plano da Figura 2.1-a constituído, em planta, por n pilares, de seções transversais não necessariamente iguais, e m ($m = n-1$) vigas, com vãos de comprimentos D_k (o índice k indica a numeração dos vãos, crescente no sentido positivo do eixo ox). D representa a largura do painel, H sua altura e h a altura dos andares.

A estrutura pode ter suas características geométricas constantes ao longo de sua altura, ou sofrer variações bruscas ao nível de andares. Em cada trecho de painel compreendido entre dois níveis consecutivos, as características geométricas devem ser mantidas constantes. Não será prevista, nesta análise, variação no número e na posição dos pilares do pórtico ao longo da altura.

Entre os trechos de geometrias diferentes, impõem-se condições de compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de esforços, conforme se verá oportunamente. Admite-se para o material de cada trecho o comportamento elástico linear, representando-se por E e G os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente.

Considera-se que as vigas são engastadas aos pilares e têm a capacidade de resistir ao esforço cortante e ao momento fletor. Supõe-se que estes elementos de ligação possuam rigidez axial infinita e estejam distribuídos uniformemente ao longo da altura H do painel, de acordo com o tratamento contínuo. Para o desenvolvimento da análise não será necessário conhecer-se a posição dos seus pontos de inflexão.

Supõe-se que os pilares sejam rigidamente engastados na base, deformáveis axialmente e com pontos de inflexão situados à semi-altura dos mesmos. A flexão de coluna é apenas local e o momento externo do carregamento, em um ponto o qualquer de abscissa x e ordenada z , é equilibrado pelos momentos das forças normais.

Será levada em consideração a influência da deformação por força cortante das vigas e pilares. Admite-se também que as ligações entre estes elementos podem ser rígidas. FAKURY (11), baseando-se em publicações do meio técnico, observa que estas ligações rígidas, denominadas neste trabalho de nós rígidos, devem ser consideradas especialmente quando a largura dos pilares ou altura das vigas for superior a cerca de 15 por cento do espaçamento entre os pilares ou da altura dos andares, respectivamente.

Neste trabalho, considerar-se-á como dimensão horizontal do nó rígido a largura do pilar e como dimensão vertical, a altura da viga. Na Figura 2.2, representam-se estas dimensões e apresenta-se a seguinte notação:

- j - índice que assume os valores 1 a n referentes, respectivamente, às prumadas 1 a n
- k - índice que assume os valores 1 a $m = n-1$ referentes, respectivamente, aos vãos 1 a $m = n - 1$
- Cv_k - comprimento do trecho deformável da viga do vão k
- \bar{h} - comprimento do trecho deformável dos pilares do andar i
- tv_k - semi-largura do trecho rígido do pilar j
- tv_{k+1} - semi-largura do trecho rígido do pilar $j+1$
- t_j - semi-altura do trecho rígido das vigas dos vãos k e $k - 1$ que concorrem no pilar j . No caso de alturas diferentes, considera-se a altura da viga mais alta.

Denominar-se-ão nós puntuais aos pontos de interseção dos eixos longitudinais dos pilares e vigas.

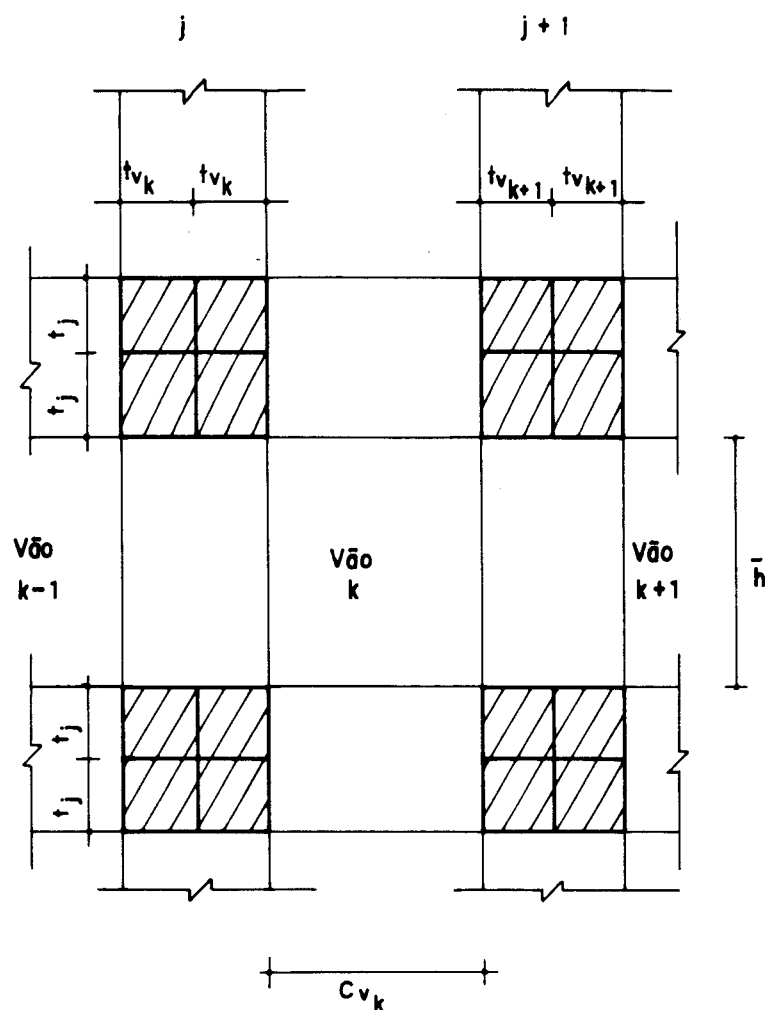


Figura 2.2 - Representação dos nós rígidos do pórtico.

2.2. Desenvolvimento Teórico

2.2.1. Equações de Equilíbrio

2.2.1.1. Equilíbrio dos Pilares à Força Normal

A Figura 2.3 apresenta elementos de pilares de altura dz e a convenção positiva para os esforços que os solicitam. Em um pilar j ($j = 1, \dots, n$), p_j indica a carga vertical e uniforme, N_j o esforço normal e q_k ($k = 1, \dots, n-1$), de acordo com a técnica contínua, é o esforço cortante distribuído no meio contínuo que substitui o sistema discreto de vigas do vão k .

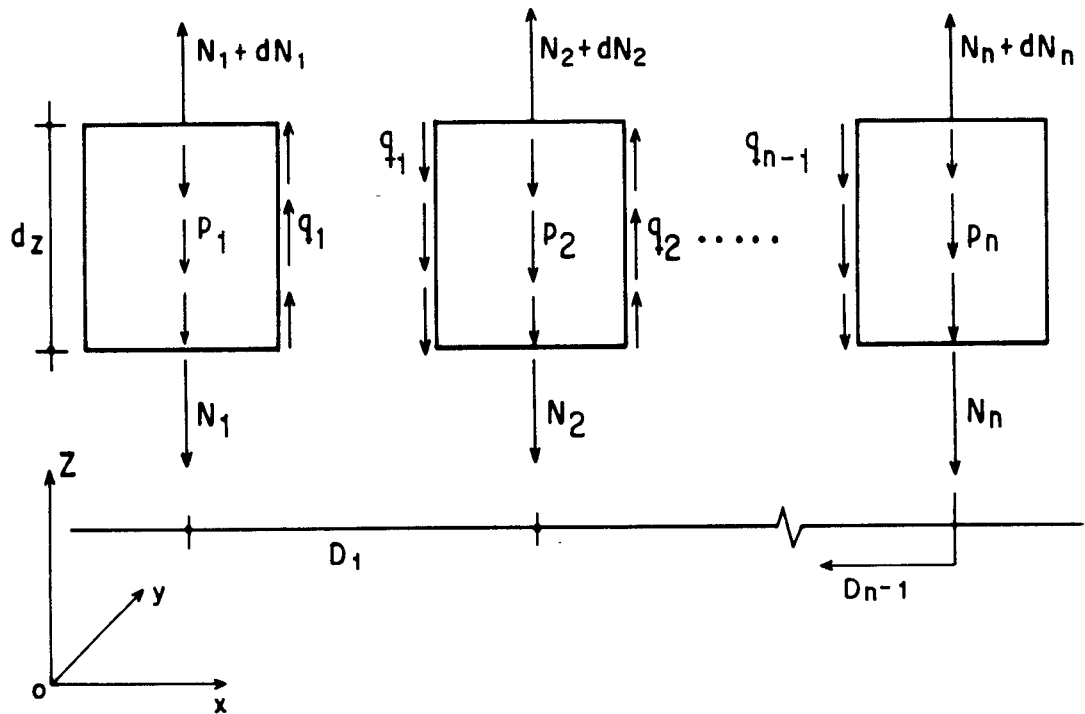


Figura 2.3- Elementos de pilares de altura dz

Considerando-se na Figura 2.3 positivos os esforços de tração, o equilíbrio à força normal será expresso por:

i-) Para o pilar da extremidade esquerda:

$$N_1 + dN_1 - N_1 + q_1 dz - p_1 dz = 0$$

ou

$$\frac{dN_1}{dz} = N_1' = p_1 - q_1 \quad (2.1-a)$$

ii-) Para os pilares intermediários:

$$N_j + dN_j - N_j - q_{j-1} dz - p_j dz + q_j dz = 0$$

ou

$$\frac{dN_j}{dz} = N'_j = p_j + q_{j-1} - q_j \quad (2.1-b)$$

iii-) Para o pilar da extremidade direita, que corresponde a n-ésima prumada:

$$N_n + dN_n - N_n - q_{n-1}dz - p_n dz = 0$$

ou

$$\frac{dN_n}{dz} = N'_n = p_n + q_{n-1} \quad (2.1-c)$$

O esforço normal em um pilar genérico j, a uma cota z da base painel, é calculado pela expressão:

$$N_j = E \cdot Ap_j \cdot v'_j \quad (2.2)$$

onde:

E é o módulo de elasticidade longitudinal.

Ap_j é a área da seção transversal do pilar j.

v'_j é a derivada primeira, em relação a z, do deslocamento vertical v_j do pilar j.

Substituindo-se a equação (2.2), derivada uma vez em relação a z, nas equações (2.1), obtêm-se, respectivamente para o pilar da extremidade esquerda, para o pilar genérico j ($j = 2, 3, \dots, n-1$) e para o pilar da extremidade direita, as seguintes equações diferenciais de equilíbrio:

$$\begin{aligned} E \cdot Ap_1 \cdot v''_1 &= p_1 - q_1 \\ E \cdot Ap_j \cdot v''_j &= p_j + q_{j-1} - q_j \\ E \cdot Ap_n \cdot v''_n &= p_n + q_{n-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.2.1.2. Equilíbrio do Pórtico ao Momento

Na Figura 2.4, apresentam-se o pórtico, em sua posição deformada, e os esforços cortantes Q_j e normais N_j dos pilares, a uma cota z da base. Obedecendo-se à convenção positiva para os esforços e deslocamentos indicados nesta Figura, o equilíbrio ao momento em torno do ponto $o(x, z)$ (situado na cota z e na n -ésima prumada) de todos os esforços externos e internos expressa-se através da seguinte equação:

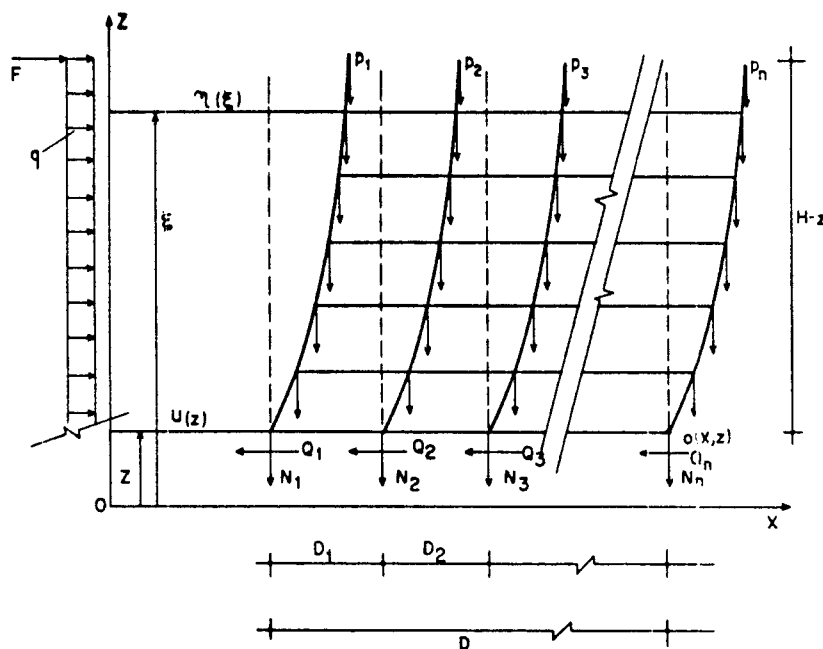


Figura 2.4 - Trecho de pórtico em sua posição deformada

$$\begin{aligned}
 N_1 D + N_2 (D - D_1) + N_3 (D - D_1 - D_2) + \dots + N_{n-1} D_{n-1} &= M_\ell - \int_z^H p_1 [D - (\eta - u)] d\xi + \\
 - \int_z^H p_2 [D - D_1 - (\eta - u)] d\xi - \int_z^H p_3 [D - D_1 - D_2 - (\eta - u)] d\xi - \dots - \int_z^H p_{n-1} [D_{n-1} - (\eta - u)] d\xi + \\
 + \int_z^H p_n (\eta - u) d\xi & \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

onde:

M_z é o momento fletor na cota z das cargas laterais aplicadas ao pórtico.

u é o deslocamento lateral do painel na cota z e na direção do eixo ox .

η é o deslocamento lateral do painel na cota ξ e na direção do eixo ox .

Efetuada-se as integrais do segundo membro da equação (2.4), derivando-se uma vez, em relação a z , a equação resultante, e considerando-se, conforme Figura 2.4, que na cota z $\eta(z) = u$, obtém-se:

$$N'_1 D + N'_2 (D - D_1) + N'_3 (D - D_1 - D_2) + \dots + N'_{n-1} D_{n-1} = -Q_\ell - p(H - z)u' + p_1 D + p_2 (D - D_1) + p_3 (D - D_1 - D_2) + \dots + p_{n-1} D_{n-1} \quad (2.5)$$

onde:

p é a carga vertical total no pórtico

Q_ℓ é a força cortante externa na cota z proveniente do carregamento lateral e dada por:

$$Q_\ell = F + q(H - z) \quad (2.6)$$

sendo oportuno lembrar que H é a altura total do pórtico, F a carga concentrada aplicada no topo do painel e q a carga lateral uniformemente distribuída.

Substituindo-se as equações (2.1) na equação (2.5), resulta:

$$-q_1 D_1 - q_2 D_2 - q_3 D_3 - \dots - q_{n-3} D_{n-3} - q_{n-2} (D - D_1 - D_2 - D_3 - \dots - D_{n-3} - D_{n-1}) + -q_{n-1} D_{n-1} = -Q_\ell - p(H - z)u' \quad (2.7)$$

Observa-se na Figura 2.4 que:

$$D_{n-2} + D_{n-1} = D - D_1 - D_2 - \dots - D_{n-3} \quad (2.8)$$

Levando-se a equação (2.8) na equação (2.7) obtém-se, para o pórtico com n prumadas de pilares e m vãos ($m = n-1$), a seguinte equação de equilíbrio à força cortante:

$$Q_\ell = \sum_{k=1}^m q_k D_k - p(H-z)u' \quad (2.9)$$

A equação (2.9) possui como incógnitas, além da derivada primeira do deslocamento lateral $u(z)$, o esforço cortante de cada vão k do pórtico. Torna-se necessário determinar uma equação que expresse estes esforços em qualquer cota z do painel. Para isso, considere-se a Figura 2.5, que representa as deformações de um andar genérico i do pórtico correspondentes à distorção u' do painel e à deformação axial de cada pilar.

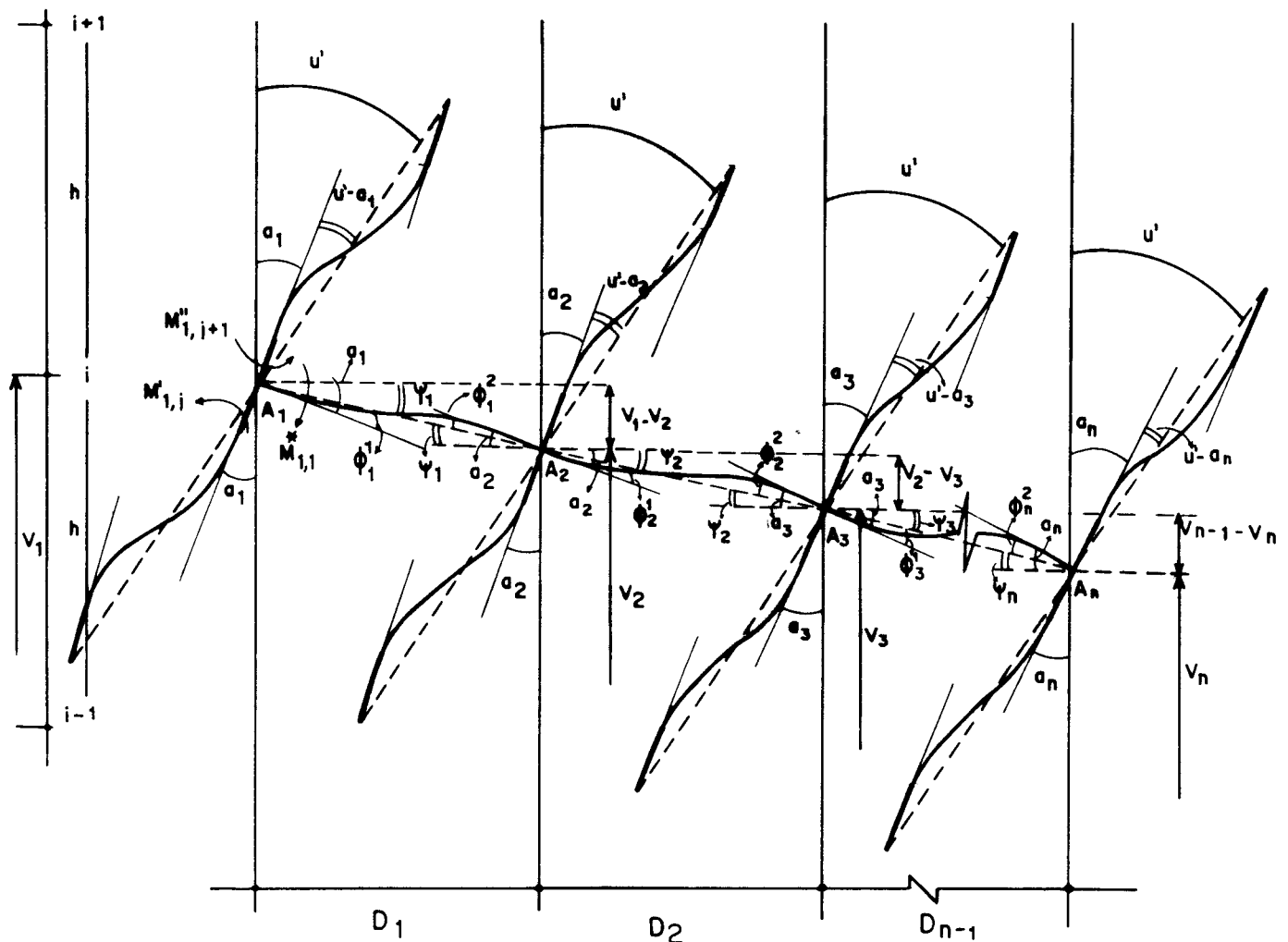


Figura 2.5- Trecho de um pórtico e sua deformação devido ao carregamento

De acordo com a Figura 2.5 definem-se: α_j como a rotação do nó A_j do pilar j ; ψ_k como a inclinação da viga k (devido aos deslocamentos verticais dos pilares k e $k+1$) e ϕ_k^1 e ϕ_k^2 como as rotações das extremidades esquerda e direita, respectivamente, da viga situado no vão k .

A viga genérica k estará solicitada por um esforço cortante concentrado Vv_k ($Vv_k = h \cdot q_k$, sendo h a altura dos andares) e pelos momentos $M_{k,k}^*$ e $M_{k+1,k}^{**}$ gerados pelas rotações dos nós e deslocamentos verticais dos pilares k e $k+1$, conforme se indica na Figura 2.6.

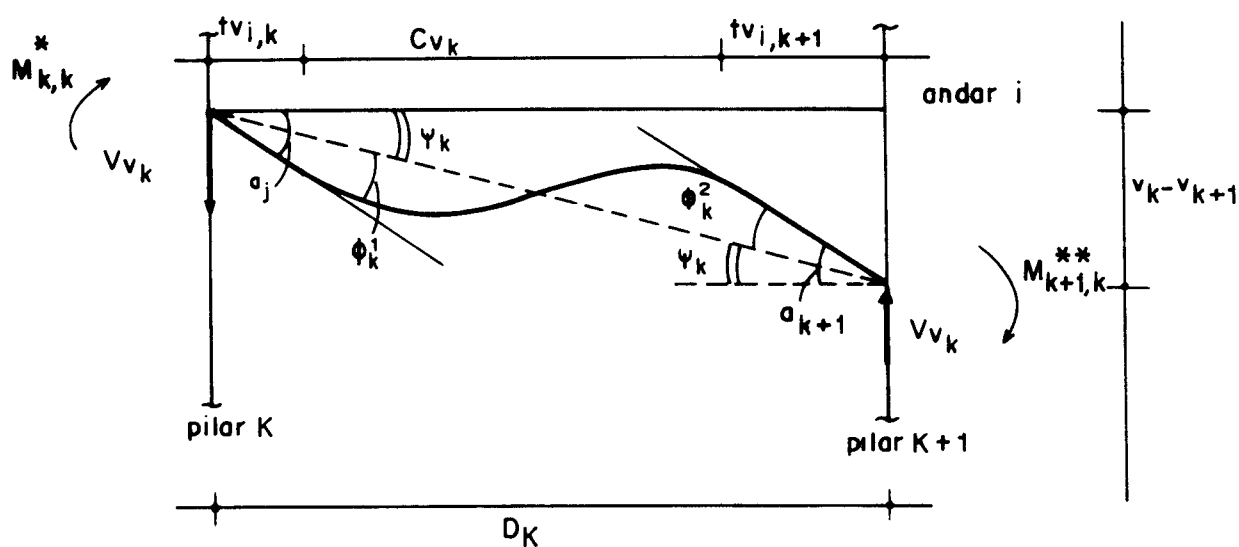


Figura 2.6 - Deformação de um lintel

Adotando-se a convenção de esforços positivos da Figura 2.6, pode-se escrever:

$$q_k D_k = \frac{M_{k,k}^* + M_{k+1,k}^{**}}{h} \quad (2.10)$$

De acordo com as equações (A.14) do Apêndice A, os momentos $M_{k,k}^*$ e $M_{k+1,k}^{**}$ valem:

$$M_{k,k}^* = \frac{6 \cdot E \cdot I_{vc_k}}{D_k} \left[2 \cdot \gamma_k \cdot \phi_k^1 + \mu_k \cdot \phi_k^2 \right] \quad (2.11-a)$$

$$M_{k+1,k}^{**} = \frac{6 \cdot E \cdot I_{vc_k}}{D_k} \left[\bar{\mu}_k \cdot \phi_k^1 + 2 \cdot \bar{\gamma}_k \cdot \phi_k^2 \right] \quad (2.11-b)$$

onde :

E é o módulo de elasticidade longitudinal.

I_{vc_k} é o momento de inércia corrigido da viga, que leva em conta a deformação por força cortante, e que, conforme a equação (A.11-a) do Apêndice A, vale:

$$I_{vc_k} = r_{v_k} \cdot I_{v_k} \quad (2.12)$$

com:

I_{v_k} sendo o momento de inércia da viga do vão k e

$$r_{v_k} = \frac{A_{v_k} \cdot G \cdot C_{v_k}^2}{A_{v_k} \cdot G \cdot C_{v_k}^2 + 12 \cdot c \cdot E \cdot I_{v_k}} \quad (2.13)$$

onde:

A_{v_k} é a área da seção transversal da viga

G é o módulo de elasticidade transversal

C_{v_k} é o comprimento do trecho deformável da viga

c é o fator de forma da seção transversal do trecho deformável da viga.

Os parâmetros $\gamma_k, \bar{\gamma}_k, \mu_k, \bar{\mu}_k$ que aparecem em (2.11) são, de acordo com a equação (A.15) Apêndice A, calculados através das expressões:

$$\gamma_k = \left(\frac{D_k}{C_{v_k}} \right)^3 \left[\frac{C_{v_k}}{2r_{v_k}} (t_{v_k} + (t_{v_k} - s_{v_k})r_{v_k}) + \frac{C_{v_k}^2}{3r_{v_k}} + t_{v_k}(t_{v_k} - s_{v_k}) \right] \frac{1}{D_k^2}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_k &= \left(\frac{D_k}{Cv_k} \right)^3 \left[\frac{Cv_k}{2rv_k} (tv_{k+1} + (tv_{k+1} - sv_k)rv_k) + \frac{Cv_k^2}{3rv_k} + tv_{k+1}(tv_{k+1} - sv_k) \right] \frac{1}{D_k^2} \\
\mu_k &= \left(\frac{D_k}{Cv_k} \right)^3 \left[\frac{Cv_k}{rv_k} ((tv_k - sv_k)rv_k + tv_{k+1}) + \frac{Cv_k^2}{3rv_k} + 2tv_{k+1}(tv_k - sv_k) \right] \frac{1}{D_k^2} \\
\bar{\mu}_k &= \left(\frac{D_k}{Cv_k} \right)^3 \left[\frac{Cv_k}{rv_k} (tv_k + (tv_{k+1} - sv_k)rv_k) + \frac{Cv_k^2}{3rv_k} + 2tv_k(tv_{k+1} - sv_k) \right] \frac{1}{D_k^2}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde:

$$sv_k = \frac{6 \cdot c \cdot E \cdot Iv_k}{Av_k \cdot G \cdot Cv_k} \tag{2.15}$$

Na Figura 2.6 pode-se ainda observar que os ângulos ψ_k , ϕ_k^1 e ϕ_k^2 têm os seguintes valores:

$$\psi_k = \frac{v_k - v_{k+1}}{D_k} \tag{2.16-a}$$

$$\phi_k^1 = a_k - \psi_k \tag{2.16-b}$$

$$\phi_k^2 = a_{k+1} - \psi_k \tag{2.16-c}$$

Levando-se as equações (2.16) nas equações (2.11) e substituindo-se as equações resultantes em (2.10), obtém-se:

$$q_k D_k = \frac{6 \cdot E \cdot Kvc_k}{h} \left[(\bar{\mu}_k + 2\bar{\gamma}_k) a_k + (\mu_k + 2\bar{\gamma}_k) a_{k+1} - (\mu_k + \bar{\mu}_k + 2\bar{\gamma}_k + 2\bar{\gamma}_k) \frac{v_k - v_{k+1}}{D_k} \right] \tag{2.17}$$

com Kvc_k sendo o parâmetro de rigidez da viga dado por:

$$Kvc_k = \frac{Ivc_k}{D_k} \quad (2.18)$$

Para o pórtico da Figura 2.4 a equação (2.17) desdobra-se em (n-1) equações relativas aos (n-1) vãos, quando se substitui o índice k por 1, para o primeiro vão, por 2, para o segundo vão, ... e por n-1, para o vão (n-1), isto é:

$$\begin{aligned} q_1 D_1 &= \frac{6E}{h} \left[(k\bar{\mu}_1 + 2k\gamma_1) a_1 + (k\mu_1 + 2k\bar{\gamma}_1) a_2 - (k\mu_1 + k\bar{\mu}_1 + 2k\gamma_1 + 2k\bar{\gamma}_1) \frac{v_1}{D_1} + \right. \\ &\quad \left. + (k\mu_1 + k\bar{\mu}_1 + 2k\gamma_1 + 2k\bar{\gamma}_1) \frac{v_2}{D_1} \right] \\ q_2 D_2 &= \frac{6E}{h} \left[(k\bar{\mu}_2 + 2k\gamma_2) a_2 + (k\mu_2 + 2k\bar{\gamma}_2) a_3 - (k\mu_2 + k\bar{\mu}_2 + 2k\gamma_2 + 2k\bar{\gamma}_2) \frac{v_2}{D_2} + \right. \\ &\quad \left. + (k\mu_2 + k\bar{\mu}_2 + 2k\gamma_2 + 2k\bar{\gamma}_2) \frac{v_3}{D_2} \right] \\ q_{n-1} D_{n-1} &= \frac{6E}{h} \left[(k\bar{\mu}_{n-1} + 2k\gamma_{n-1}) a_{n-1} + (k\mu_{n-1} + 2k\bar{\gamma}_{n-1}) a_n - (k\mu_{n-1} + k\bar{\mu}_{n-1} + 2k\gamma_{n-1} + 2k\bar{\gamma}_{n-1}) \frac{v_{n-1}}{D_{n-1}} + \right. \\ &\quad \left. + (k\mu_{n-1} + k\bar{\mu}_{n-1} + 2k\gamma_{n-1} + 2k\bar{\gamma}_{n-1}) \frac{v_n}{D_{n-1}} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde:

$$\begin{aligned} k\mu_k &= Kvc_k \cdot \mu_k \\ k\bar{\mu}_k &= Kvc_k \cdot \bar{\mu}_k \\ k\gamma_k &= Kvc_k \cdot \gamma_k \\ k\bar{\gamma}_k &= Kvc_k \cdot \bar{\gamma}_k \end{aligned} \quad (2.20)$$

Somando-se ambos os membros das equações (2.19), obtém-se:

$$\begin{aligned}
(q_1 D_1 + q_2 D_2 + \dots + q_{n-1} D_{n-1}) &= \frac{6 \cdot E}{h} \left\{ (2k\bar{\gamma}_1 + k\bar{\mu}_1) a_1 + [k\mu_1 + (2k\bar{\gamma}_1 + 2k\gamma_2) + k\bar{\mu}_2] a_2 + \right. \\
&+ \dots + [k\mu_{n-2} + (2k\bar{\gamma}_{n-2} + 2k\gamma_{n-1}) + k\bar{\mu}_{n-1}] a_{n-1} + (k\mu_{n-1} + k\bar{\gamma}_{n-1}) a_n - \left[\left(\frac{(2k\bar{\gamma}_1 + k\bar{\mu}_1)}{D_1} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{(2k\bar{\gamma}_1 + k\mu_1)}{D_1} \right) v_1 + \left(-\frac{(2k\bar{\gamma}_1 + k\bar{\mu}_1)}{D_1} - \frac{(2k\bar{\gamma}_1 + k\mu_1)}{D_1} + \frac{(2k\gamma_2 + k\bar{\mu}_2)}{D_2} + \frac{(2k\bar{\gamma}_2 + k\mu_2)}{D_2} \right) v_2 + \right. \\
&+ \dots + \left(-\frac{(2k\bar{\gamma}_{n-2} + k\bar{\mu}_{n-2})}{D_{n-2}} - \frac{(2k\bar{\gamma}_{n-2} + k\mu_{n-2})}{D_{n-2}} + \frac{(2k\bar{\gamma}_{n-1} + k\bar{\mu}_{n-1})}{D_{n-1}} + \frac{(2k\bar{\gamma}_{n-1} + k\mu_{n-1})}{D_{n-1}} \right) v_{n-1} + \\
&\left. \left. + \left(-\frac{(2k\bar{\gamma}_{n-1} + k\bar{\mu}_{n-1})}{D_{n-1}} - \frac{(2k\bar{\gamma}_{n-1} + k\mu_{n-1})}{D_{n-1}} \right) v_n \right] \right\} \quad (2.21)
\end{aligned}$$

A equação (2.21) pode ser escrita em forma matricial como:

$$\sum_{k=1}^{n-1} q_k D_k = \{E\} \cdot ([\bar{K}]\{A\} - [\bar{K}]\{v\}) \quad (2.22)$$

onde:

$$\{E\} = \left\{ \frac{6 \cdot E}{h} \quad \frac{6 \cdot E}{h} \quad \dots \quad \frac{6 \cdot E}{h} \right\}_{1 \times n} \quad (2.23)$$

$\{A\}$ é o vetor das rotações dos nós dos pilares ao nível do andar i

$\{v\}$ é o vetor dos deslocamentos verticais dos pilares ao nível do andar i

$[\bar{K}]$ e $[\bar{K}]$ são matrizes quadradas, de ordem n , cuja disposição dos elementos é mostrada a seguir:

$2k\gamma_1$	$k\mu_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$k\bar{\mu}_1$	$2k\gamma_1 + k\mu_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$k\mu_2$	$2k\gamma_2 + 2k\gamma_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0	0	0	$2k\gamma_{r-2} + 2k\gamma_{r-1}$	0	$k\mu_{r-1}$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$k\mu_{r-1}$	$2k\gamma_{r-1} + 2k\gamma_r$	$k\mu_r$	$k\mu_r$	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$k\mu_r$	$2k\gamma_r + 2k\gamma_{r+1}$	$2k\gamma_r + 2k\gamma_{r+1}$	0	0	0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0	0	0	0	0	0	0	$2k\gamma_{n-3} + 2k\gamma_{n-2}$	$k\mu_{n-2}$	$k\mu_{n-2}$	$k\mu_{n-2}$	0
0	0	0	0	0	0	0	$k\mu_{n-2}$	$2k\gamma_{n-2} + 2k\gamma_{n-1}$	$k\mu_{n-1}$	$k\mu_{n-1}$	$2k\gamma_{n-1}$
0	0	0	0	0	0	0	0	$k\mu_{n-1}$	$2k\gamma_{n-1}$	$2k\gamma_{n-1}$	$2k\gamma_{n-1}$

$[K] =$

(2.24)

Impondo-se a condição de equilíbrio ao momento em cada nó A_j do andar i (Figura 2.5), é possível expressar o vetor $\{A\}$ como uma função dos deslocamentos laterais u e dos deslocamentos verticais, v_j .

Considerando-se positivo o sentido anti-horário do momento sobre a barra, pode-se, de modo geral, escrever as seguintes equações:

i-) Para o nó da extremidade esquerda:

$$M''_{1,i+1} + M'_{1,i} - M^*_{1,1} = 0 \quad (2.25-a)$$

ii-) Para um nó intermediário:

$$M''_{j,i+1} + M'_{j,i} - M^{**}_{j,j-1} - M^*_{j,j} = 0 \quad (2.25-b)$$

iii-) Para o nó da extremidade direita:

$$M''_{n,i+1} + M'_{n,i} - M^{**}_{n,n-1} = 0 \quad (2.25-c)$$

Nas equações (2.25), $M''_{j,i+1}$ e $M'_{j,i}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) são os momentos nas extremidades inferior e superior, respectivamente, das barras verticais que concorrem no nó A_j . Supondo-se que são próximos os valores das rotações de três nós consecutivos de um mesmo pilar, estes momentos, de acordo com as equações (A.18) do Apêndice A, valem:

$$M''_{j,i+1} = \frac{6E \cdot I_{pcj}}{h} \rho_j (u' - a_j)$$

$$M'_{j,i} = \frac{6E \cdot I_{pcj}}{h} \rho_j (u' - a_j) \quad (2.26)$$

onde:

E é o módulo de elasticidade longitudinal

I_{pcj} é o momento de inércia corrigido do pilar j , que leva em conta a deformação por força cortante, e que, conforme a equação (A.11-a) do Apêndice A., vale:

$$I_{pcj} = r_{pj} \cdot I_{pj} \quad (2.27)$$

Com I_{pj} sendo o momento de inércia do pilar j e r_{pj} dado por:

$$r_{pj} = \frac{A_{pj} \cdot G \cdot \bar{h}^2}{A_{pj} \cdot G \cdot \bar{h}^2 + 12E \cdot c \cdot I_{pj}} \quad (2.28)$$

onde:

A_{pj} é a área da seção transversal do pilar j .

G é o módulo de elasticidade transversal.

\bar{h} é o comprimento do trecho deformável do pilar j .

c é o fator de forma do trecho deformável do pilar j .

O parâmetro ρ_j , que aparece nas equações (2.26) é, de acordo com a equação (A.19) do Apêndice A, dado por:

$$\rho_j = \left(\frac{h}{\bar{h}}\right)^3 \left[\frac{\bar{h} + 2(t_j - sp_j)r_{pj}}{h \cdot r_{pj}} \right] \quad (2.29)$$

onde:

$$sp_j = \frac{6c \cdot E \cdot I_{pj}}{A_{pj} \cdot G \cdot \bar{h}} \quad (2.30)$$

$M_{j,j}^*$ e $M_{j,j-1}^{**}$ são, respectivamente, os momentos no nó A_j correspondentes às vigas dos vãos j e $j-1$. De acordo com as equações (A.14) do Apêndice A, obtêm-se:

$$M_{j,j}^* = \frac{6 \cdot E \cdot I_{vcj}}{D_j} \left[2\gamma_j \cdot \phi_j^1 + \mu_j \cdot \phi_j^2 \right] \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$M_{j,j-1}^{**} = \frac{6 \cdot E \cdot I_{vcj-1}}{D_{j-1}} \left[\bar{\mu}_{j-1} \cdot \phi_{j-1}^1 + 2\bar{\gamma}_{j-1} \cdot \phi_{j-1}^2 \right] \quad (j = 2, 3, \dots, n) \quad (2.31)$$

onde I_{vc_j} e $I_{vc_{j-1}}$ são dados pela equação (2.12); $\phi_j^1, \phi_j^2, \phi_{j-1}^1$ e ϕ_{j-1}^2 são definidos nas equações (2.16) e $\gamma_j, \bar{\gamma}_{j-1}, \mu_j$ e $\bar{\mu}_{j-1}$, nas equações (A.15) do Apêndice A. Observe-se que nas equações (2.12) e (2.16) o índice k indica o vão e deve ser convenientemente substituído por $j-1$ ou j .

Substituindo-se as equações (2.16) em (2.31) e levando-se as expressões resultantes e as equações (2.26) em (2.25), obtêm-se, respectivamente para o nó da extremidade esquerda, para o nó intermediário j ($j = 2, 3, \dots, n-1$) e para o nó da extremidade direita, as expressões:

$$k_1 u' - (k_1 + 2k\gamma_1)a_1 - k\mu_1 a_2 + \frac{1}{D_1}(2k\gamma_1 + k\bar{\mu}_1)v_1 + \frac{1}{D_1}(k\mu_1 - k\bar{\mu}_1)v_1 - \frac{1}{D_1}(2k\gamma_1 + k\bar{\mu}_1)v_2 + \frac{1}{D_1}(k\mu_1 - k\bar{\mu}_1)v_2 = 0 \quad (2.32-a)$$

$$k_j u' - k\bar{\mu}_{j-1}a_{j-1} - (k_j + 2k\bar{\gamma}_{j-1} + 2k\gamma_j)a_j - k\mu_j a_{j+1} + \frac{1}{D_{j-1}}(2k\bar{\gamma}_{j-1} + k\mu_{j-1})v_{j-1} + \frac{1}{D_{j-1}}(k\bar{\mu}_{j-1} - k\mu_{j-1})v_{j-1} + \left[\frac{1}{D_{j-1}}(2k\bar{\gamma}_{j-1} + k\mu_{j-1}) - \frac{1}{D_j}(2k\gamma_j + k\bar{\mu}_j) \right] v_j - \left[\frac{1}{D_{j-1}}(k\bar{\mu}_{j-1} - k\mu_{j-1}) - \frac{1}{D_j}(k\mu_j - k\bar{\mu}_j) \right] v_j + \frac{1}{D_j}(2k\gamma_j + k\bar{\mu}_j)v_{j+1} - \frac{1}{D_j}(k\mu_j - k\bar{\mu}_j)v_{j+1} = 0 \quad (2.32-b)$$

$$k_n u' - k\bar{\mu}_{n-1}a_{n-1} - (k_n + 2k\bar{\gamma}_{n-1})a_n + \frac{1}{D_{n-1}}(2k\bar{\gamma}_{n-1} + k\mu_{n-1})v_{n-1} + \frac{1}{D_{n-1}}(k\bar{\mu}_{n-1} - k\mu_{n-1})v_{n-1} + \frac{1}{D_{n-1}}(2k\bar{\gamma}_{n-1} + k\mu_{n-1})v_n - \frac{1}{D_{n-1}}(k\bar{\mu}_{n-1} - k\mu_{n-1})v_n = 0 \quad (2.32-c)$$

onde:

$$k_j = 2 \cdot Kpc_j \cdot \rho_j \quad (2.33)$$

com o parâmetro de rigidez Kpc_j dado por:

$$Kpc_j = \frac{Ipc_j}{h} \quad (2.34)$$

Em forma matricial as equações (2.32) são escritas como:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{UN}\}u' - ([\mathbf{K}] + [\overline{\mathbf{K}}])\{\mathbf{A}\} + \left([\overline{\mathbf{K}}] + [\overline{\overline{\mathbf{K}}}] \right)\{\mathbf{v}\} = \{0\} \quad (2.35)$$

onde:

$[\overline{\mathbf{K}}]$ e $[\overline{\overline{\mathbf{K}}}]$ são matrizes quadradas, de ordem n , definidas em (2.24) e (2.24-a), respectivamente.

$$\{\mathbf{UN}\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right\}_{n \times 1} \quad (2.36-a)$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & k_r & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & k_n \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (2.36-b)$$

$[\overline{\overline{\mathbf{K}}}]$ é uma matriz quadrada, de ordem n , apresentando a seguinte forma:

Explicitando o vetor $\{A\}$ na equação (2.35), vem:

$$\{A\} = [K_1]\{UN\}u' + [K_2]\{v\} \quad (2.38)$$

onde $[K_1]$ e $[K_2]$ são matrizes quadradas, de ordem n , definidas pelas equações:

$$[K_1] = ([K] + [\bar{K}])^{-1}[K] \quad (2.39-a)$$

$$[K_2] = ([K] + [\bar{K}])^{-1}([\bar{K}] + [\bar{\bar{K}}]) \quad (2.39-b)$$

Substituindo-se a equação (2.38) na equação (2.22), obtém-se:

$$\sum_{k=1}^{n-1} q_k D_k = s_f u' + \{\bar{S}\}\{v\} \quad (2.40)$$

onde:

s_f é a rigidez do pórtico à força cortante dada por:

$$s_f = \{E\}[\bar{K}][K_1]\{UN\} \quad (2.41)$$

$\{\bar{S}\}$ é o vetor de ordem $1 \times n$ cuja formação é definida quando se desenvolve a seguinte equação:

$$\{\bar{S}\} = \{E\}([\bar{K}][K_2] - [\bar{\bar{K}}]) \quad (2.42)$$

Levando-se a equação (2.40) na equação (2.9), expressa-se o equilíbrio à força cortante através de:

$$Q_\ell = (s_f - p(H - z))u' + \{\bar{S}\}\{v\} \quad (2.43)$$

2.2.2. Formulação Matricial

Com a equação (2.43) e as equações (2.3), de equilíbrio dos pilares à força normal, pode-se compor um sistema de equações em forma matricial, cuja solução fornecerá os deslocamentos laterais $u(z)$ do pórtico e os deslocamentos verticais $v_j(z)$ dos pilares.

Explicitando-se os q_k ($k = 1, \dots, n-1$) nas equações (2.19) e levando-se as expressões resultantes em (2.3), encontram-se, respectivamente para o primeiro pilar, para o pilar genérico j ($j = 2, \dots, n-1$) e para o pilar da n -ésima prumada, as expressões:

$$\begin{aligned}
 & Ev_1'' + \frac{6E}{h \cdot Ap_1} \left[\frac{(2k\gamma_1 + k\bar{\mu}_1)}{D_1} a_1 + \frac{(2k\bar{\gamma}_1 + k\mu_1)}{D_1} a_2 \right] - \frac{6E}{h \cdot Ap_1} \left[\frac{ks_1}{D_1^2} v_1 - \frac{ks_2}{D_1^2} v_2 \right] = \frac{p_1}{Ap_1} \\
 & Ev_j'' + \frac{6E}{h \cdot Ap_j} \left\{ \frac{-(2k\gamma_{j-1} + k\bar{\mu}_{j-1})}{D_{j-1}} a_{j-1} - \left[\frac{(2k\bar{\gamma}_{j-1} + k\mu_{j-1})}{D_{j-1}} - \frac{(2k\gamma_j + k\bar{\mu}_j)}{D_j} \right] a_j + \frac{(2k\bar{\gamma}_j + k\mu_j)}{D_j} a_{j+1} \right\} + \\
 & - \frac{6E}{h \cdot Ap_j} \left[\frac{-ks_{j-1}}{D_{j-1}^2} v_{j-1} + \left(\frac{ks_{j-1}}{D_{j-1}^2} + \frac{ks_j}{D_j^2} \right) v_j - \frac{ks_j}{D_j^2} v_{j+1} \right] = \frac{p_j}{Ap_j} \\
 & Ev_n'' + \frac{6E}{h \cdot Ap_n} \left\{ \frac{-(2k\gamma_{n-1} + k\bar{\mu}_{n-1})}{D_{n-1}} a_{n-1} - \left[\frac{(2k\bar{\gamma}_{n-1} + k\mu_{n-1})}{D_{n-1}} \right] a_n \right\} + \\
 & - \frac{6E}{h \cdot Ap_n} \left[\frac{-ks_{n-1}}{D_{n-1}^2} v_{n-1} + \frac{ks_{n-1}}{D_{n-1}^2} v_n \right] = \frac{p_n}{Ap_n}
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

onde:

Ap_j é a área da seção transversal do pilar j

$$ks_k = k\mu_k + k\bar{\mu}_k + 2k\gamma_k + 2k\bar{\gamma}_k \quad (k = 1, \dots, n-1) \tag{2.45}$$

com $k\mu_k, k\bar{\mu}_k, k\gamma_k$ e $k\bar{\gamma}_k$ dados pelas equações (2.20).

Em forma matricial as equações (2.44) são escritas como:

$$[E]\{v''\} + \{K_3\}u' + [K_4]\{v\} = \{p\} \quad (2.46)$$

onde:

$$i-) [E] = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (2.47)$$

ii-) $\{K_3\}$ é um vetor de ordem $n \times 1$ definido pela equação:

$$\{K_3\} = [ES][\bar{K}]^T [K_1]\{UN\} \quad (2.48-a)$$

onde:

$$[ES] = \begin{bmatrix} \frac{6E}{h \cdot Ap_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6E}{h \cdot Ap_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{6E}{h \cdot Ap_n} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (2.48-b)$$

$[\bar{K}]$ é a matriz quadrada, de ordem n , dada pela equação (2.24-a).

$[K_1]$ é a matriz quadrada, de ordem n , definida pela primeira das equações (2.39).

$\{UN\}$ é um vetor unitário de ordem $n \times 1$.

iii-) $[K_4]$ é uma matriz quadrada, de ordem n , com sua formação determinada pelo desenvolvimento da equação:

$$[K_4] = [ES] \cdot \left(\left[\bar{K} \right]^T [K_2] - [KS] \right) \quad (2.49-a)$$

onde:

$[K_2]$ é uma matriz quadrada de ordem n e definida pela equação (2.39-b).

$[KS]$ é uma matriz quadrada, de ordem n , apresentada a seguir:

$\frac{ks_1}{D_1^2}$	$-\frac{ks_1}{D_1}$...	0	...	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\frac{ks_1}{D_1^2}$	$\frac{ks_1}{D_1^2} + \frac{ks_2}{D_2^2}$...	$-\frac{ks_2}{D_2}$...	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$-\frac{ks_2}{D_2}$...	$\frac{ks_2}{D_2^2} + \frac{ks_3}{D_3^2}$...	0	0	0	0	0	0	0	0
									
0	0	...	0	...	$\frac{ks_{r-2}}{D_{r-2}^2} + \frac{ks_{r-1}}{D_{r-1}^2}$	$-\frac{ks_{r-1}}{D_{r-1}^2}$	0	0	0	0	0	0
0	0	...	0	...	$-\frac{ks_{r-1}}{D_{r-1}^2}$	$\frac{ks_{r-1}}{D_{r-1}^2} + \frac{ks_r}{D_r^2}$	$-\frac{ks_r}{D_r^2}$	0	0	0	0	0
									
0	0	...	0	...	0	0	0	$\frac{ks_{n-3}}{D_{n-3}^2} + \frac{ks_{n-2}}{D_{n-2}^2}$	$-\frac{ks_{n-2}}{D_{n-2}^2}$	$-\frac{ks_{n-2}}{D_{n-2}^2}$	0	0
0	0	...	0	...	0	0	0	$-\frac{ks_{n-2}}{D_{n-2}^2}$	$\frac{ks_{n-2}}{D_{n-2}^2} + \frac{ks_{n-1}}{D_{n-1}^2}$	$-\frac{ks_{n-1}}{D_{n-1}^2}$	$-\frac{ks_{n-1}}{D_{n-1}^2}$	0
0	0	...	0	...	0	0	0	0	$-\frac{ks_{n-1}}{D_{n-1}^2}$	$-\frac{ks_{n-1}}{D_{n-1}^2}$	$-\frac{ks_{n-1}}{D_{n-1}^2}$	0

(2.49-b)

[KS] =

Ainda para a equação (2.46) são definidos:

$$\{v''\} = \begin{Bmatrix} v_1'' \\ v_2'' \\ \vdots \\ v_n'' \end{Bmatrix}_{n \times 1} \quad (2.50)$$

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 / Ap_1 \\ p_2 / Ap_2 \\ \vdots \\ p_n / Ap_n \end{Bmatrix}_{n \times 1} \quad (2.51)$$

As equações (2.43) e (2.46) formarão um sistema de $n+1$ equações diferenciais, cuja solução fornecerá as incógnitas do problema, ou seja, os deslocamentos verticais dos n pilares e o deslocamento horizontal do painel, ao nível dos andares. O sistema de equações será então:

$$[T]\{U''\} + [MS]\{U\} = \{C\} \quad (2.52)$$

onde:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & - & - & - & - \\ \vdots & | & [E]_{n \times n} & & \\ 0 & | & & & \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (2.53-a)$$

$$\{U''\} = \begin{Bmatrix} u''' \\ \dots \\ \{v''\}_{n \times 1} \end{Bmatrix}_{(n+1) \times 1} \quad (2.53-b)$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u' \\ \dots \\ \{v\}_{n \times 1} \end{Bmatrix}_{(n+1) \times 1} \quad (2.53-c)$$

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} Q_e \\ \dots \\ \{p\}_{n \times 1} \end{Bmatrix}_{(n+1) \times 1} \quad (2.53-d)$$

$$[MS] = \begin{bmatrix} s_f - p(H-z) & \vdots & \{\bar{S}\}_{1 \times n} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \{K_3\}_{n \times 1} & \vdots & [K_4]_{n \times n} \\ & \vdots & \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (2.53-e)$$

As condições de contorno utilizadas na resolução do sistema (2.52) são:

1) Supondo a indeslocabilidade da base do painel, vem

$$u(0) = 0$$

$$\{v(0)\} = \{0\} \quad (2.54-a)$$

2) Supondo que não existem forças normais aplicadas no topo do pórtico,

$$\{v'(H)\} = \{0\} \quad (2.54-b)$$

2.3. Variação das Características Geométricas com a Altura

Em um projeto estrutural, as seções de vigas e pilares podem variar abruptamente em vários níveis. A solução deste tipo de problema, pela técnica do meio contínuo, pode ser obtida subdividindo-se a estrutura, ao longo de sua altura, em trechos de características geométricas constantes.

Cada trecho é analisado isoladamente através da equação matricial (2.52). As condições de contorno são aplicadas na base do primeiro trecho e no topo do último. Nos pontos de mudança brusca das seções, impõem-se condições de compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de esforços.

Para o caso do painel pórtico, Figura 2.7, subdividido em NT trechos, devem-se impor às $(NT-1)$ interseções (entendendo-se, aqui, por interseções os pontos de mudança brusca de seções) as seguintes condições:

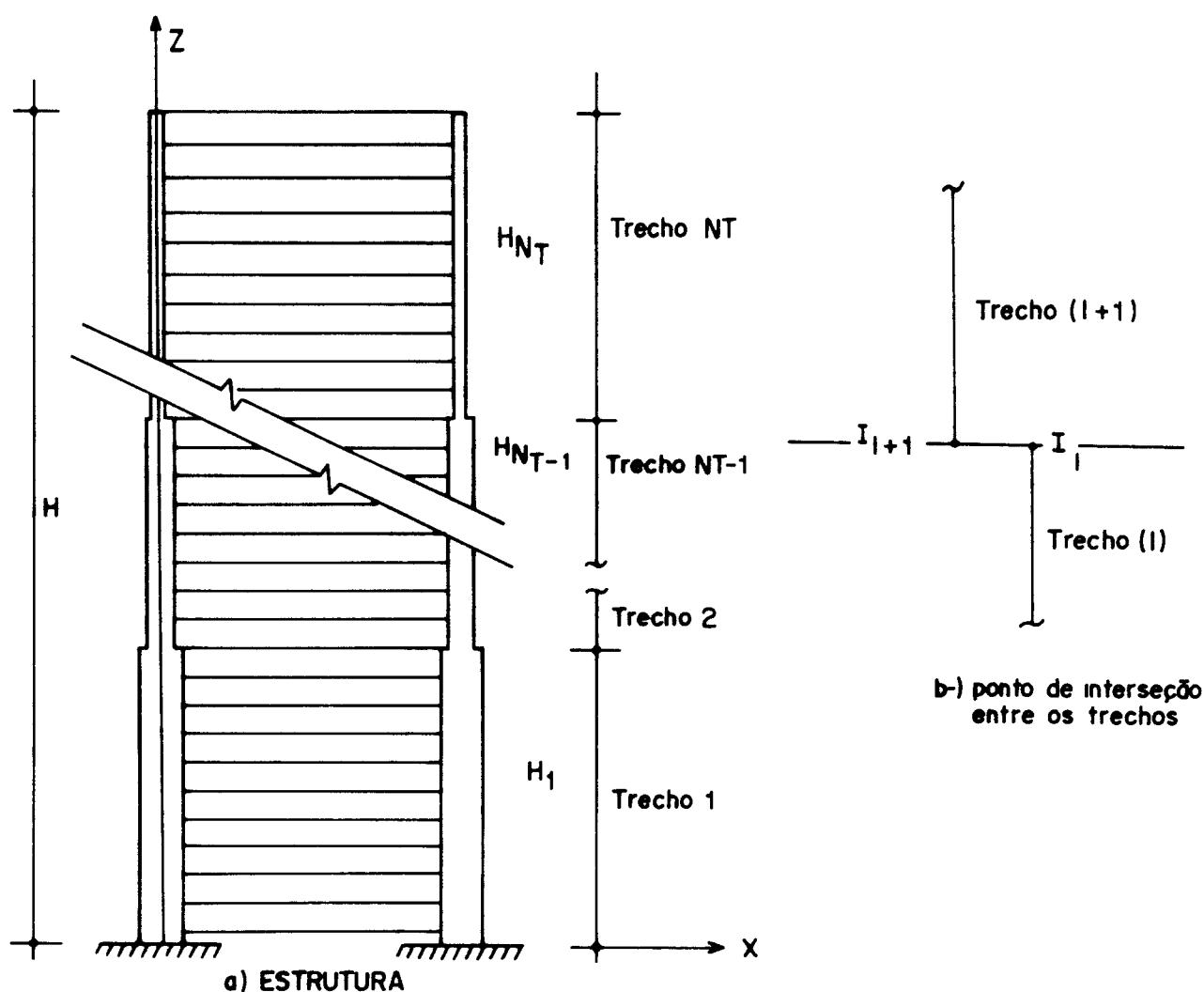


Figura 2.7 - Pórtico com NT trechos

a-) Igualdade nos deslocamentos laterais $u(z)$ em cada interseção, ou seja:

$$u(I_\ell) = u(I_{\ell+1}) \quad (2.55-a)$$

onde I_ℓ e $I_{\ell+1}$ são pontos cujas ordenadas correspondem ao topo do trecho (ℓ) e a base do trecho $(\ell+1)$, respectivamente, conforme se indica na Figura 2.7-b.

b-) Igualdade nos deslocamentos verticais $v_j(z)$ de todos os pilares em cada interseção, ou seja:

$$v_j(I_\ell) = v_j(I_{\ell+1}) \quad (2.55-b)$$

onde o índice j estende-se a todos os pilares do pórtico.

c-) Igualdade de esforço normal N_j em todos os pilares e em cada interseção. Esta condição é expressa, de acordo com a equação (2.2), por:

$$E_\ell \cdot A_{p_{\ell,j}} \cdot v'_j(I_\ell) = E_{\ell+1} \cdot A_{p_{\ell+1,j}} \cdot v'_j(I_{\ell+1}) \quad (2.55-c)$$

onde E_ℓ e $E_{\ell+1}$ são os módulos de elasticidade dos trechos (ℓ) e ($\ell+1$), respectivamente, e $A_{p_{\ell,j}}$ e $A_{p_{\ell+1,j}}$ são as áreas da seção transversal dos pilares do trecho (ℓ) e ($\ell+1$) da prumada j , respectivamente.

Vale ressaltar que este método de resolução de estruturas com variação de rigidez, pela técnica do meio contínuo, já forneceu bons resultados em sistemas estruturais tubulares, conforme FAKURY (12).

2.4. Aplicação do Método das Diferenças Finitas

2.4.1. Malha de Pontos

Para a aplicação do método das diferenças finitas à solução da equação (2.52), considera-se uma malha constituída por NP_ℓ pontos sobre o eixo dos z . Com a finalidade de permitir mudanças das seções transversais dos elementos do pórtico, em alguns andares, subdivide-se esta malha de pontos em trechos, nos quais as seções dos elementos são mantidas constantes ao longo de suas respectivas alturas. Cada trecho possui então uma malha de NP_ℓ pontos, igualmente espaçados de Δ_ℓ , com $NP_{\ell-2}$ pontos pertencentes ao trecho de painel e dois pontos exteriores denominados de fictícios, conforme se indica na Figura 2.8.

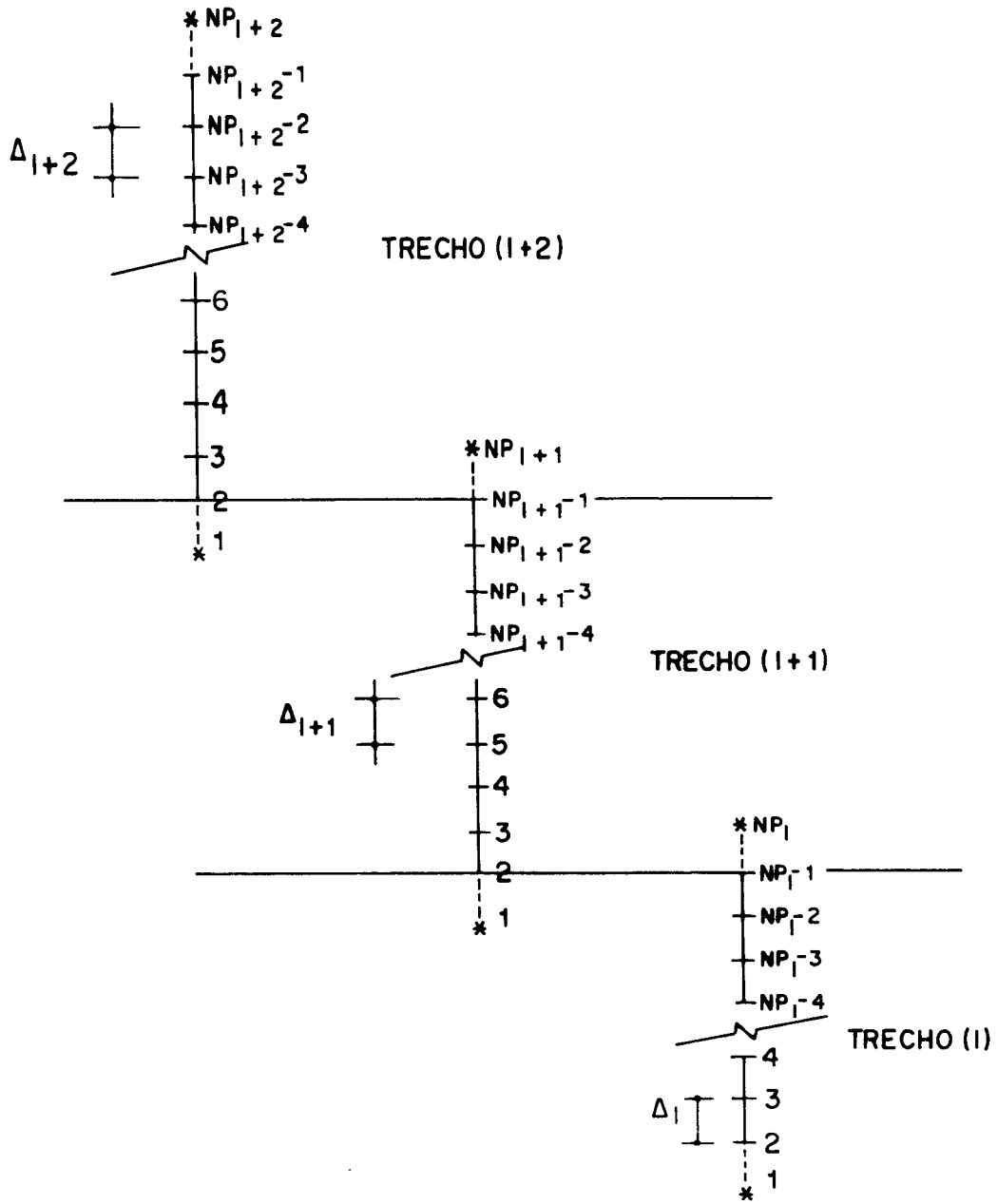


Figura 2.8 - Malha de pontos

De acordo com a Figura 2.8, definem-se :

l - índice que indica o número do trecho

NS_l - número de subdivisões do trecho l

NP_l - número de pontos do trecho l , dado por:

$$NP_\ell = NS_\ell + 3$$

NT - número de trechos do painel

NUP - número de prumadas de pilares

Cada trecho terá uma numeração para os pontos denominada de numeração local, que se inicia pelo número 1 indo até o número NP_ℓ . Existirá também uma numeração global para os pontos, que dependerá do número de prumadas de pilares do pórtico. Dessa maneira, um ponto M da malha de pontos do trecho ℓ ($M= 1,2,\dots, NP_\ell$) corresponderá ao ponto L_M da numeração global, calculado através da expressão:

$$L_M = \left[\left(\sum_{s=1}^{\ell} NP_{s-1} \right) + M \right] (NUP + 1) - NUP \quad (2.56)$$

Na equação acima, se quando desenvolve a somatória, deve-se considerar sempre $NP_0 = 0$.

Os deslocamentos laterais u e os deslocamentos verticais v_1, v_2, \dots, v_{NUP} , em um ponto genérico L_M da malha, serão expressos por:

$$\begin{aligned} u &= F(L_M) \\ v_1 &= F(L_M + 1) \\ v_2 &= F(L_M + 2) \\ \\ v_{NUP} &= F(L_M + NUP) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Na interseção dos trechos, devem-se impor condições de compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de esforços. Se um painel tem NT trechos, isso indica que existem (NT-1) interseções. Na Figura 2.9, representam-se as interseções entre os trechos (ℓ) com ($\ell+1$) e ($\ell+1$) com ($\ell+2$). A interseção entre (ℓ) e ($\ell+1$), por exemplo, ocorre no ponto com numeração global $L_{2\ell-}$ para o trecho ℓ e $L_{2\ell}$ para o trecho ($\ell+1$). Para qualquer interseção, os valores de $L_{2\ell-}$ e $L_{2\ell}$ ($\ell = 1,2,\dots, NT-1$) são dados por:

$$\begin{aligned} L_{2\ell-} &= L_s + (L_s - 1) \cdot NUP \\ L_{2\ell} &= L_{2\ell-} + 3(NUP + 1) \end{aligned} \quad (2.58-a)$$

onde:

$$L_s = \left(\sum_{s=1}^{\ell} NP_{s-1} \right) + NP_{\ell} - 1 \quad (\text{com } NP_0 = 0) \quad (2.58-b)$$

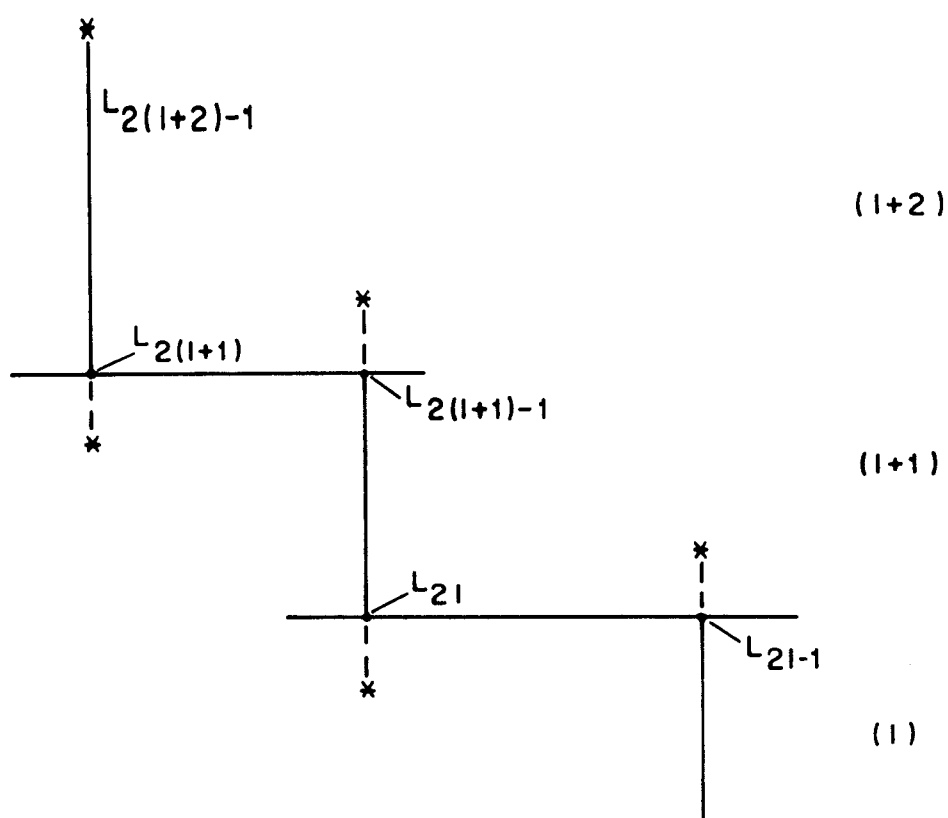


Figura 2.9 - Pontos de interseção entre os trechos

2.4.2. Determinação do Número de Equações do Sistema de Equações Lineares em Diferenças Finitas

O número de incógnitas (NI) do sistema de equações em diferenças finitas, para um pórtico com NUP prumadas de pilares e uma malha com NPT pontos, será expresso por:

$$NI = NPT (NUP + 1) \quad (2.59)$$

Torna-se necessário fazer um levantamento do número de equações que serão escritas em diferenças finitas e que, é claro, deverá ser igual ao número de incógnitas NI.

A equação matricial (2.52), de ordem $(NUP+1) \times (NUP+1)$, quando escrita em diferenças finitas, será aplicada aos $(NP_e - 2)$ pontos de cada trecho. Para um pórtico com NUP prumadas e NT trechos, o número total de pontos de aplicação do sistema de equações (NPAS) será:

$$NPAS = NPT - 2NT$$

o que conduzirá a um número total de equações (NEM) determinado por:

$$NEM = (NPT - 2NT) \cdot (NUP+1) \quad (2.60)$$

As condições de contorno, fornecidas pelas equações (2.54), conduzem a um conjunto de equações em diferenças finitas em número de:

$$NEC = 2NUP + 1 \quad (2.61)$$

E, finalmente, o número de equações de compatibilidade e de equilíbrio (NECP) nas $(NT-1)$ interseções será:

$$NECP = (NT-1) \cdot (2NUP+1) \quad (2.62)$$

Somando-se as equações (2.60) a (2.62), obtém-se o seguinte número total de equações:

$$(NEM) + (NEC) + (NECD) = NPT (NUP + 1) - NT \quad (2.63)$$

Comparando-se as equações (2.59) e (2.63), observa-se que faltam NT equações. Para sanar este problema, pode-se utilizar um artifício para a criação de equações suplementares sem a introdução de novas incógnitas, conforme BARBOSA (2). Conseguir-

se isso calculando-se o valor do polinômio interpolador do 4º grau, dado pela equação (B.1) do Apêndice B, para o primeiro ponto (L_1) de cada trecho, a partir dos valores de 5 pontos posteriores (L_2, L_3, L_4, L_5, L_6) indicados na Figura 2.10. O valor de $p(-3\Delta_\ell)$ será:

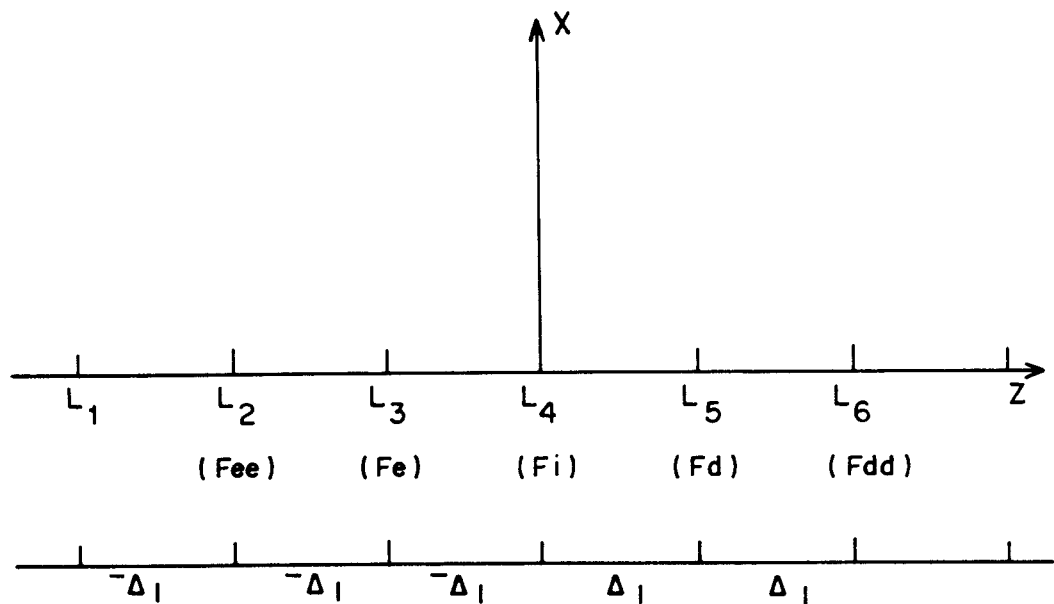


Figura 2.10- Representação dos seis primeiros pontos de cada trecho

$$p(-3\Delta_\ell) = a(-3\Delta_\ell)^4 + b(-3\Delta_\ell)^3 + c(-3\Delta_\ell)^2 + d(-3\Delta_\ell) + e \quad (2.64)$$

Com os valores dos coeficientes do polinômio, expressos pelas equações (B.4) do Apêndice B, reescreve-se a equação (2.64) na forma:

$$p(-3\Delta_\ell) = 5Fee - 10Fe + 10Fi - 5Fd + Fdd \quad (2.65)$$

e como $p(-3\Delta_\ell) = F(L_1)$, resulta:

$$F(L_1) - 5F(L_2) + 10F(L_3) - 10F(L_4) + 5F(L_5) - F(L_6) = 0 \quad (2.66)$$

Aplicando-se a equação (2.66) em cada trecho, obtêm-se as NT equações procuradas.

2.4.3. Equações em Diferenças Finitas

Efetuando-se as operações matriciais indicadas em (2.52), pode-se escrever as (NUP+1) equações resultantes em uma notação simplificada da forma:

$$T(I,1)u''' + \sum_{J=1}^{NUP} T(I,J+1)v_J'' + MS(I,1)u' + \sum_{J=1}^{NUP} MS(I,J+1)v_J = C(I) \quad (2.67)$$

onde I assume os valores 1, 2, ..., NUP+1 referentes à primeira, à segunda, ... à (NUP+1)-ésima linha do sistema (2.52).

Deve-se aplicar a equação (2.67) aos pontos $M = 3, 4, 5, \dots, (NP_\ell - 2)$ de cada trecho ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, NT$), utilizando-se os operadores de diferenças centrais expressos pelas equações (B.5-a) do Apêndice B. Desta maneira, obtém-se, para cada ponto, um conjunto de (NUP+1) equações dadas por:

$$\begin{aligned} & \left(\Delta_\ell MS(I,1) - \frac{6T(I,1)}{\Delta_\ell} \right) F(L_{M-2}) + \sum_{J=1}^{NUP} [-T(I,J+1)F(L_{M-2} + J)] + \left(-8\Delta_\ell MS(I,1) + \frac{12T(I,1)}{\Delta_\ell} \right) F(L_{M-1}) + \\ & + \sum_{J=1}^{NUP} [16T(I,J+1)F(L_{M-1} + J)] + \sum_{J=1}^{NUP} \left[(12\Delta_\ell^2 MS(I,J+1) - 30T(I,J+1)F(L_M + J)) \right] + \\ & + \left(8\Delta_\ell MS(I,1) - \frac{12}{\Delta_\ell} T(I,1) \right) F(L_{M+1}) + \sum_{J=1}^{NUP} [16T(I,J+1)F(L_{M+1} + J)] + \left(-\Delta_\ell MS(I,1) + \frac{6T(I,1)}{\Delta_\ell} \right) F(L_{M+2}) + \\ & + \sum_{J=1}^{NUP} [-T(I,J+1)F(L_{M+2} + J)] = 12\Delta_\ell^2 C(I) \end{aligned} \quad (2.68)$$

No ponto $M = NP_\ell - 1$, no topo de cada trecho, observa-se que não é possível aplicar a equação (2.68), obtida com a utilização dos operadores centrais. É necessário, então, usarem-se os operadores que envolvam apenas um ponto à direita do ponto de aplicação, expressos pelas equações (B.5-c) do Apêndice B. Dessa forma, a equação (2.67) será escrita em diferenças finitas como:

$$\begin{aligned}
& \left[-\Delta_\ell MS(I,1) + \frac{6T(I,1)}{\Delta_\ell} \right] F(L_{NP_\ell-4}) + \sum_{J=1}^{NUP} \left[-T(I,J+1) F(L_{NP_\ell-4} + J) \right] + \\
& + \left(6\Delta_\ell MS(I,1) - \frac{36}{\Delta_\ell} T(I,1) \right) F(L_{NP_\ell-3}) + \sum_{J=1}^{NUP} \left[4T(I,J+1) F(L_{NP_\ell-3} + J) \right] + \\
& + \left[-18\Delta_\ell MS(I,1) + \frac{72}{\Delta_\ell} T(I,1) \right] F(L_{NP_\ell-2}) + \sum_{J=1}^{NUP} \left[6T(I,J+1) F(L_{NP_\ell-2} + J) \right] + \\
& + \left[10\Delta_\ell MS(I,1) - \frac{60}{\Delta_\ell} T(I,1) \right] F(L_{NP_\ell-1}) + \sum_{J=1}^{NUP} \left[(12\Delta_\ell^2 MS(I,J+1) - 20T(I,J+1)) F(L_{NP_\ell-1} + J) \right] + \\
& + \left(3\Delta_\ell MS(I,1) + \frac{18}{\Delta_\ell} T(I,1) \right) F(L_{NP_\ell}) + \sum_{J=1}^{NUP} \left[11T(I,J+1) F(L_{NP_\ell} + J) \right] = 12\Delta_\ell^2 C(I)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

com $I = 1, 2, \dots, (NUP+1)$

Para o ponto $M=2$, na base de cada trecho, utilizam-se os operadores assimétricos à esquerda, expressos pelas equações (B.5-b) do Apêndice B. A equação (2.67) será escrita em diferenças finitas como:

$$\begin{aligned}
& \left[-3\Delta_\ell MS(I,1) - \frac{18T(I,1)}{\Delta_\ell} \right] F(L_1) + \sum_{J=1}^{NUP} \left[11T(I,J+1) F(L_1 + J) \right] + \left[-10\Delta_\ell MS(I,1) + \frac{60}{\Delta_\ell} T(I,1) \right] F(L_2) + \\
& + \sum_{J=1}^{NUP} \left[(12\Delta_\ell^2 MS(I,J+1) - 20T(I,J+1)) F(L_2 + J) \right] + \left[18\Delta_\ell MS(I,1) - \frac{72}{\Delta_\ell} T(I,1) \right] F(L_3) + \\
& + \sum_{J=1}^{NUP} \left[6T(I,J+1) F(L_3 + J) \right] + \left[-6\Delta_\ell MS(I,1) + \frac{36}{\Delta_\ell} T(I,1) \right] F(L_4) + \sum_{J=1}^{NUP} \left[4T(I,J+1) F(L_4 + J) \right] + \\
& + \left[\Delta_\ell MS(I,1) - \frac{6}{\Delta_\ell} T(I,1) \right] F(L_5) + \sum_{J=1}^{NUP} \left[-T(I,J+1) F(L_5 + J) \right] = 12\Delta_\ell^2 C(I)
\end{aligned} \tag{2.70}$$

com $I = 1, 2, \dots, (NUP+1)$

As condições de contorno (2.54) são impostas pelas equações:

a-) Para $u(0) = 0$:

$$F(NUP+2) = 0 \quad (2.71-a)$$

b-) Para $\{v(0)\} = \{0\}$:

$$F(NUP+2+J) = 0 \quad (2.71-b)$$

c-) Para $\{v'(H)\} = \{0\}$:

$$-F(L_{NPT-4} + J) + 6F(L_{NPT-3} + J) - 18F(L_{NPT-2} + J) + 10F(L_{NPT-1} + J) + 3F(L_{NPT} + J) = 0 \quad (2.71-c)$$

onde $J = 1, 2, \dots, NUP$

As condições de compatibilidade e de equilíbrio (2.55) são impostas pelas equações :

a-) Para $u(L_{2\ell-1}) = u(L_{2\ell})$:

$$F(L_{2\ell-1}) - F(L_{2\ell}) = 0 \quad (2.72-a)$$

b-) Para $v_j(L_{2\ell-1}) = v_j(L_{2\ell})$:

$$F(L_{2\ell-1} + J) - F(L_{2\ell} + J) = 0 \quad (2.72-b)$$

c-) Para $E_\ell \cdot Ap_{\ell,j} \cdot v'_j(L_{2\ell-1}) = E_{\ell+1} \cdot Ap_{\ell+1,j} \cdot v'_j(L_{2\ell})$:

$$\frac{E_\ell \cdot Ap_{\ell,j}}{\Delta_\ell} [F(L_{2\ell-1} - 3ND + J) - 6F(L_{2\ell-1} - 2ND + J) + 18F(L_{2\ell-1} - ND + J) - 10F(L_{2\ell-1} + J) - 3F(L_{2\ell-1} + ND + J)] + \frac{E_{\ell+1} \cdot Ap_{\ell+1,j}}{\Delta_{\ell+1}} [-3F(L_{2\ell} - ND + J) - 10F(L_{2\ell} + J) + 18F(L_{2\ell} + ND + J) - 6F(L_{2\ell} + 2ND + J) + F(L_{2\ell} + 3ND + J)] = 0 \quad (2.72-c)$$

onde:

$$ND = NUP + 1 \quad J = 1, 2, 3, \dots, NUP \quad e \quad \ell = 1, 2, \dots, (NT-1)$$

As equações (2.68) a (2.72) e as NT equações (2.66) formam um sistema de NPT (NUP+1) equações lineares, cuja solução fornece os deslocamentos laterais u do painel e os deslocamentos verticais dos pilares nos NPT pontos da malha. Com os deslocamentos, determinam-se os esforços ao nível dos andares do pórtico.

2.5. Cálculo dos Esforços

O esforço normal no pilar j , no nível i de um determinado trecho ℓ , será obtido através da equação (2.2), efetuando-se o produto entre o módulo de elasticidade longitudinal, área da seção transversal do pilar e a derivada primeira do deslocamento vertical neste nível. Para a sua determinação, utiliza-se o método das diferenças finitas.

Deve-se aplicar a equação (2.2) aos $(NP_{\ell}-2)$ pontos de cada trecho da malha de pontos da Figura 2.8. Utilizando-se os operadores de diferenças finitas, expressos pelas equações (B.5) do Apêndice B, e tendo-se em vista a notação, para os deslocamentos verticais, definida nas equações (2.57), obtêm-se:

a-) Para o ponto da base do trecho ℓ :

$$N(L_2 + J) = \frac{E_{\ell} \cdot Ap_{\ell,j}}{12\Delta_{\ell}} [-3F(L_1 + J) - 10F(L_2 + J) + 18F(L_3 + J) - 6F(L_4 + J) + F(L_5 + J)] \quad (2.73-a)$$

b-) Para um ponto M qualquer do trecho ℓ :

$$N(L_M + J) = \frac{E_{\ell} \cdot Ap_{\ell,j}}{12\Delta_{\ell}} [F(L_{M-2} + J) - 8F(L_{M-1} + J) + 8F(L_{M-1} + J) - F(L_{M+2} + J)] \quad (2.73-b)$$

c-) Para o ponto do topo do trecho ℓ :

$$N(L_{NP-1} + J) = \frac{E_\ell \cdot Ap_{\ell,j}}{12\Delta_\ell} [-F(L_{NP-4} + J) + 6F(L_{NP-3} + J) - 18F(L_{NP-2} + J) + 10F(L_{NP-1} + J) + 3F(L_{NP} + J)] \quad (2.73-c)$$

Nas equações (2.73), E_ℓ é o módulo de elasticidade longitudinal do material, $Ap_{\ell,j}$ é a área da seção transversal do pilar j e Δ_ℓ é o espaçamento entre os pontos da malha do trecho ℓ . A variável J assume os valores 1, 2, ..., NUP , relativos a todos os pilares do pórtico.

A equação (2.17) fornece o esforço cortante distribuído q_k ($k = 1, \dots, n-1$) em qualquer ponto da altura do pórtico. O esforço cortante concentrado, em cada viga do vão k , pode ser obtido multiplicando-se o valor de q_k pelo pé-direito (h_ℓ) do trecho ℓ , correspondente a altura de influência de cada viga. Para a viga situada no topo e para a viga hipotética da base do pórtico, a altura de influência será $h_\ell/2$.

Em um certo andar i do trecho ℓ , a equação (2.17), em forma matricial, escreve-se como:

$$\{q\}_i = \{VEL\}u'_i + [MAL]\{v\}_i \quad (2.74)$$

onde:

$\{q\}_i$ é o vetor contendo os esforços cortantes distribuídos em todos os vãos do andar

$\{v\}_i$ é o vetor contendo os deslocamentos verticais, ao nível do andar i , de todos os pilares.

u'_i é a derivada primeira, em relação a z , do deslocamento lateral no nível i

$\{VEL\}$ é o vetor de ordem $(n-1) \times 1$ definido por:

$$\{VEL\} = [KL_1][K_1]\{UN\} \quad (2.75-a)$$

com $[K_1]$ sendo a matriz quadrada, de ordem n , dada pela equação (2.39-a); $\{UN\}$ sendo o vetor unitário de ordem $n \times 1$ e $[KL_1]$ sendo a matriz retangular, de ordem $(n-1) \times n$, que apresenta a seguinte forma:

$$[KL_1] = \begin{bmatrix} \frac{6E \cdot (\bar{k}\bar{\mu}_1 + 2k\bar{\gamma}_1)}{h \cdot D_1} & \frac{6E \cdot (k\mu_1 + 2k\bar{\gamma}_1)}{h \cdot D_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6E \cdot (\bar{k}\bar{\mu}_2 + 2k\bar{\gamma}_2)}{h \cdot D_2} & \frac{6E \cdot (k\mu_2 + 2k\bar{\gamma}_2)}{h \cdot D_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E \cdot (\bar{k}\bar{\mu}_3 + 2k\bar{\gamma}_3)}{h \cdot D_3} & \frac{6E \cdot (k\mu_3 + 2k\bar{\gamma}_3)}{h \cdot D_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{6E \cdot (\bar{k}\bar{\mu}_{n-1} + 2k\bar{\gamma}_{n-1})}{h \cdot D_{n-1}} & \frac{6E \cdot (k\mu_{n-1} + 2k\bar{\gamma}_{n-1})}{h \cdot D_{n-1}} \end{bmatrix} \quad (2.75-b)$$

[MAL] é a matriz retangular, de ordem $(n-1) \times n$, obtida através da equação:

$$[MAL] = [KL_1][K_2] - [KL_2] \quad (2.76-a)$$

com [K2] sendo a matriz quadrada, de ordem n , dada pela equação (2.39-b), e [KL₂] sendo a matriz retangular, de ordem $(n-1) \times n$, cujos elementos são mostrados a seguir:

$$[KL_2] = \begin{bmatrix} \frac{6E \cdot ks_1}{h \cdot D_1^2} & -\frac{6E \cdot ks_1}{h \cdot D_1^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6E \cdot ks_2}{h \cdot D_2^2} & -\frac{6E \cdot ks_2}{h \cdot D_2^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E \cdot ks_3}{h \cdot D_3^2} & -\frac{6E \cdot ks_3}{h \cdot D_3^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{6E \cdot ks_{n-1}}{h \cdot D_{n-1}^2} & -\frac{6E \cdot ks_{n-1}}{h \cdot D_{n-1}^2} \end{bmatrix} \quad (2.76-b)$$

onde ks_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) é dado pela equação (2.45).

Para a obtenção do esforço cortante distribuído ao longo da altura H, ao nível de cada viga, utiliza-se o método das diferenças finitas e a malha de pontos definida na Figura 2.8. Com os operadores de diferenças finitas, expressos pelas equações (B.5) do Apêndice B, e a notação, para os deslocamentos u e v_j , definida nas equações (2.57), escreve-se a equação (2.74) nas seguintes formas:

a) Para o ponto da base do trecho ℓ :

$$q(k) = \frac{VEL(k)}{12\Delta_\ell} [-3F(L_1) - 10F(L_2) + 18F(L_3) - 6F(L_4) + F(L_5)] + \sum_{J=1}^{NUP} MAL(k, J)F(L_2 + J) \quad (2.77-a)$$

b) Para um ponto M qualquer do trecho ℓ :

$$q(k) = \frac{VEL(k)}{12\Delta_\ell} [F(L_{M-2}) - 8F(L_{M-1}) + 8F(L_{M+1}) - F(L_{M+2})] + \sum_{J=1}^{NUP} MAL(k, J)F(L_M + J) \quad (2.77-b)$$

c) Para o ponto do topo do trecho ℓ :

$$q(k) = \frac{VEL(k)}{12\Delta_\ell} [-F(L_{NP_\ell-4}) + 6F(L_{NP_\ell-3}) - 18F(L_{NP_\ell-2}) + 10F(L_{NP_\ell-1}) + 3F(L_{NP_\ell})] + \sum_{J=1}^{NUP} MAL(k, J)F(L_{NP_\ell-1} + J) \quad (2.77-c)$$

onde k assume os valores 1 a $n-1$.

2.6. Determinação da Carga Crítica

O sistema de equações lineares em diferenças finitas, obtido quando se aplica o método das diferenças finitas à solução da equação (2.52), tem a forma $AX = B$, com A sendo a matriz dos coeficientes das diferenças finitas, X o vetor contendo os deslocamentos da estrutura e B o vetor de cargas.

O carregamento crítico de estruturas, submetidas a carregamentos uniformes lateral e vertical e analisadas em teoria de segunda ordem, é definido como o valor da carga que provoca variações excessivamente grandes das funções deslocamentos, para uma variação pequena de carregamento. Determinar o carregamento crítico vertical total, em regime elástico, será, então, procurar um valor para o carregamento vertical tal que seja nulo ou muito próximo de zero o valor do determinante da matriz A . O método de Newton Raphson, cujo resumo apresenta-se no Apêndice C, constitui-se num processo iterativo eficiente, que pode com simplicidade ser utilizado na solução desse problema.

Na Figura 2.11, apresenta-se uma curva típica de carga vertical total x determinante. Neste caso, pelo motivo descrito no Apêndice C, será mais conveniente utilizar-se o método da secante. Para a sua aplicação procede-se desta maneira: a partir de dois valores iniciais para a carga vertical total, $P_0 = 0$ e P_1 de valor muito próximo ao de P_0 , calculam-se os determinantes da matriz A correspondentes a esses dois valores de P , isto é, $\bar{\Delta}_0$ e $\bar{\Delta}_1$. Determina-se o valor da carga P_2 graficamente (Figura 2.11), como sendo a abscissa do ponto de interseção do eixo OP e da reta secante que passa por $(P_0, \bar{\Delta}_0)$ e $(P_1, \bar{\Delta}_1)$, ou através da equação (C.4) do Apêndice C,

$$P_{k+1} = \frac{P_{k-1}\bar{\Delta}_k - P_k\bar{\Delta}_{k-1}}{\bar{\Delta}_k - \bar{\Delta}_{k-1}} \quad (2.78)$$

assumindo-se para k o valor 1, por ser a primeira iteração, isto é:

$$P_2 = \frac{P_0\bar{\Delta}_1 - P_1\bar{\Delta}_0}{\bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_0} \quad (2.79)$$

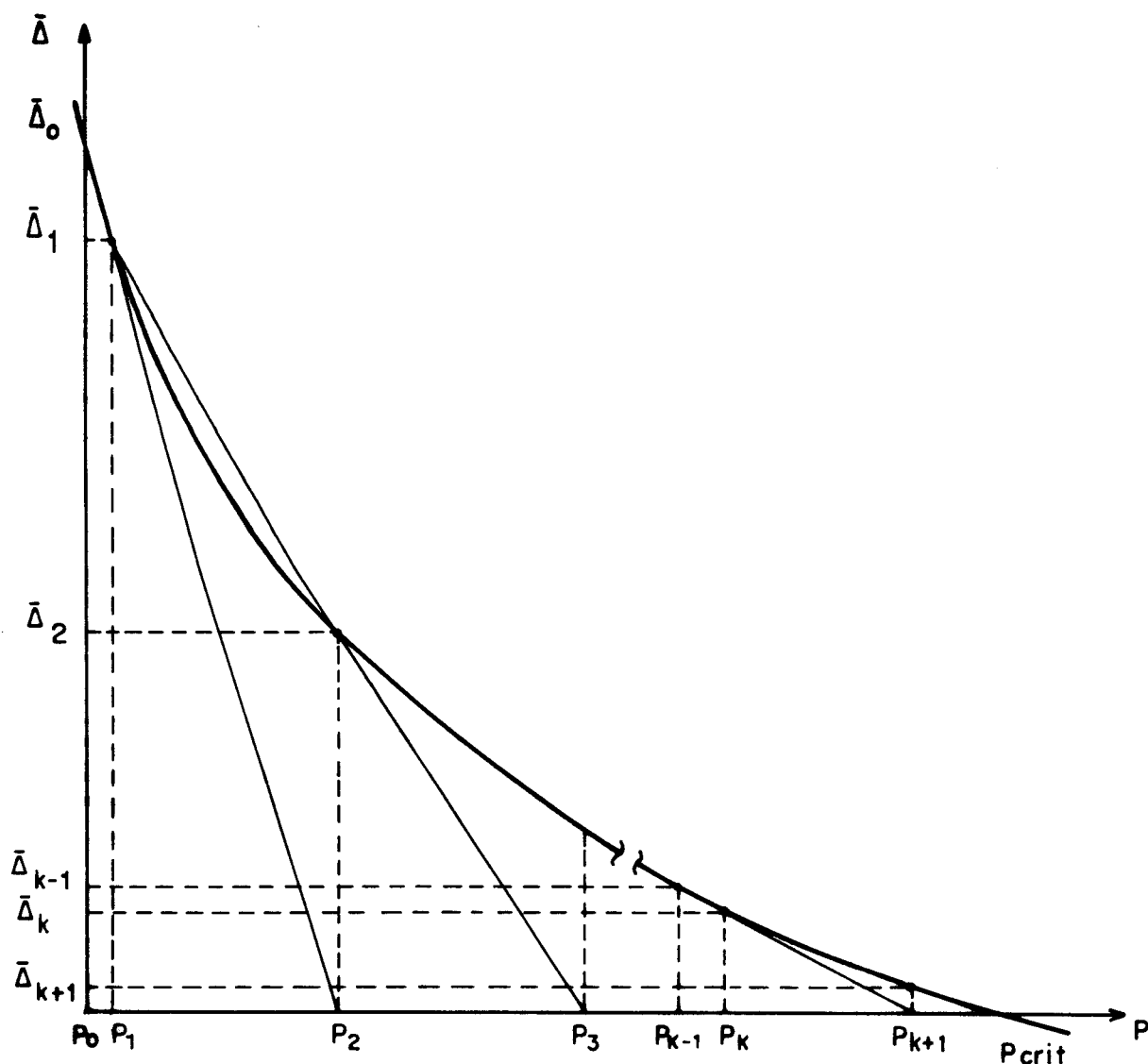


Figura 2.11- Determinação de P_{crit} pelo método de Newton Raphson

Com P_2 obtém-se o valor do determinante $\bar{\Delta}_2$ da matriz A ; determina-se P_3 , a partir dos pontos $(P_1, \bar{\Delta}_1)$ e $(P_2, \bar{\Delta}_2)$, graficamente ou através da equação (2.78) assumindo-se $k = 2$. O processo continua até que se atinja para o determinante um valor próximo de zero, de acordo com a precisão desejada. O valor da carga correspondente é o carregamento crítico total.

É oportuno observar que, neste trabalho, a distribuição do carregamento vertical entre os pilares do pórtico não afeta o valor do carregamento crítico total. Isto pode ser verificado através das matrizes $[T]$ e $[MS]$ do sistema de equações diferenciais (2.52).

Observe-se que o único elemento que contém a carga vertical é o primeiro elemento da matriz $[MS]$, com valor igual à diferença entre o parâmetro de rigidez s_f e a carga vertical total p . A distribuição do carregamento vertical está presente apenas no vetor $\{C\}$ (equação (2.53-d)), constituído pela força cortante externa Q_ℓ e pelas cargas p_j de cada pilar.

3. PAINEL PÓRTICO GERAL

3.1. Introdução

Dando continuidade à análise elástica, em teoria de segunda ordem, estuda-se neste capítulo o pórtico indicado na Figura 3.1. Neste painel, a disposição dos elementos estruturais, em planta e em elevação, é análoga àquela da estrutura da Figura 2.1-a e o carregamento atuante é idêntico àquele descrito no item 2.1.

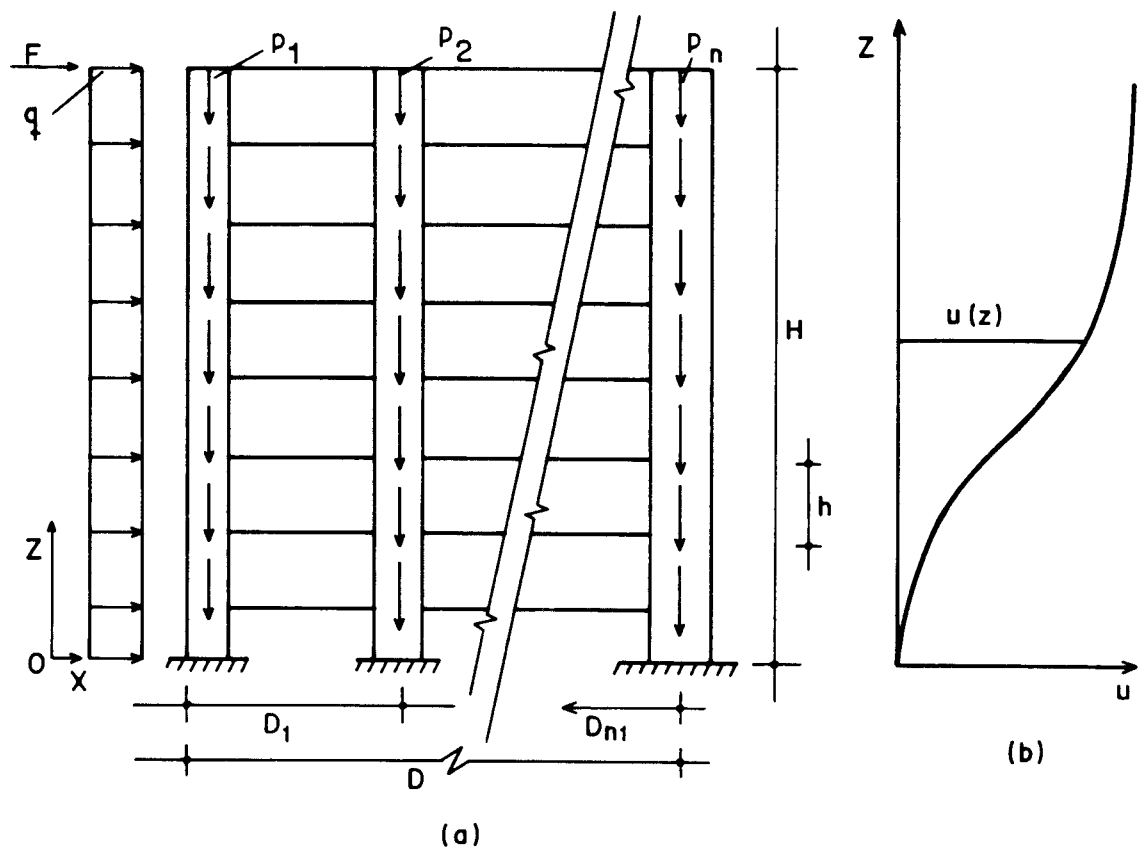


Figura 3.1 - Pórtico geral.

Admite-se que as colunas do pórtico têm a capacidade de resistir à flexão global, além da flexão local transmitida pelos lintéis. Em virtude disso e da consideração da influência dos deslocamentos verticais dos pilares, a deformada lateral apresenta a forma indicada na Figura 3.1-b. Observe-se que o momento do carregamento externo, em uma

cota z da altura H , será equilibrado parte pelos momentos das forças normais e parte pelos momentos fletores de cada pilar.

Neste trabalho, denominar-se-á pórtico geral ao painel, que, sob o efeito do carregamento indicado na Figura 3.1-a, apresente a curva elástica, resultante da deformação por momento fletor e por esforço cortante, com o aspecto indicado na Figura 3.1-b.

Para o desenvolvimento teórico, utilizar-se-á a técnica contínua, podendo-se, assim, substituir o número discreto de vigas por um meio contínuo de rigidez equivalente uniformemente distribuído ao longo da altura H . De acordo com os conceitos de cálculo da teoria de segunda ordem, as condições de equilíbrio serão estabelecidas levando-se em conta a posição deformada da estrutura.

Admite-se que as vigas são engastadas nos pilares e infinitamente rígidas axialmente. Não será necessário supor que os centros de seus vãos são pontos de momento nulo.

Considera-se inicialmente que os pilares são perfeitamente engastados nas suas bases. Posteriormente, para pilares de grande rigidez, admite-se a presença de vínculos elásticos nas bases.

Analogamente ao capítulo anterior, serão levadas em consideração, na análise teórica, as influências dos nós rígidos (Figura 2.2) e da deformação por força cortante de pilares e vigas. Supõe-se, ainda, que as seções transversais destes elementos estruturais podem variar abruptamente ao nível de andares.

3.2. Desenvolvimento Teórico

3.2.1. Equações de Equilíbrio

3.2.1.1. Equilíbrio do Pórtico Geral ao Momento

Na Figura 3.2 representa-se o pórtico geral em sua posição deformada. Com exceção dos momentos fletores M_j em cada pilar, os demais esforços, parâmetros e dimensões são idênticos aos do painel da Figura 2.4 do item 2.2. Considerando-se positivos os sentidos para os esforços e deslocamentos indicados na Figura 3.2, o equilíbrio ao momento em relação ao ponto $o(x,z)$, de todos os esforços externos e internos, expressa-se por:

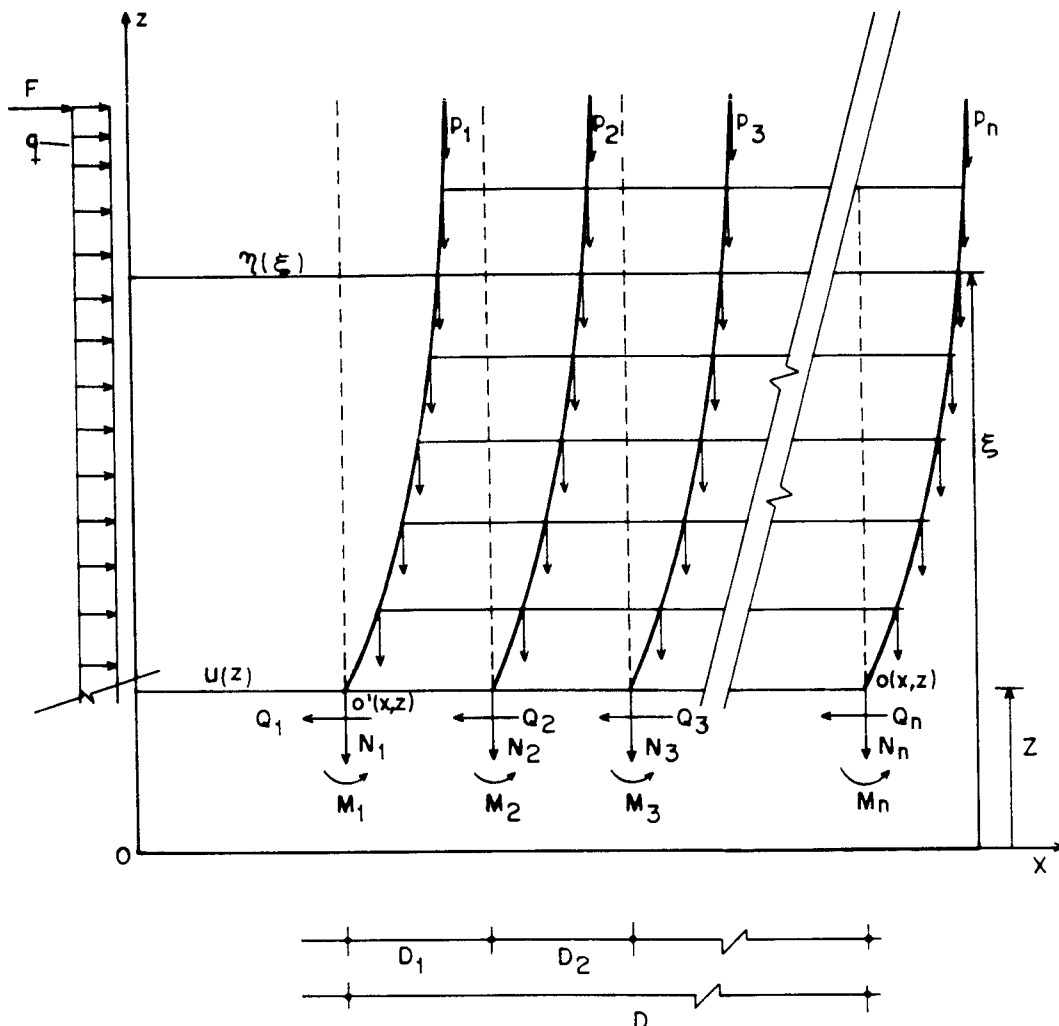


Figura 3.2- Pórtico geral em sua posição deformada.

$$\begin{aligned}
& N_1 D + N_2 (D - D_1) + N_3 (D - D_1 - D_2) + \dots + N_{n-1} D_{n-1} + (M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n) = M_\ell + \\
& - \int_z^H p_1 [D - (\eta - u)] d\xi - \int_z^H p_2 [D - D_1 - (\eta - u)] d\xi - \int_z^H p_3 [D - D_1 - D_2 - (\eta - u)] d\xi + \dots + \\
& - \int_z^H p_{n-1} [D_{n-1} - (\eta - u)] d\xi + \int_z^H p_n (\eta - u) d\xi
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde:

M_ℓ é o momento, em cada cota z , das cargas laterais q e F .
 u e $\eta(\xi)$ são os deslocamentos laterais nas cotas z e ξ , respectivamente.

Com a equação (3.1), e seguindo um raciocínio análogo ao utilizado no item 2.2, chega-se a seguinte expressão:

$$Q_\ell = q_1 D_1 + q_2 D_2 + \dots + q_{n-1} D_{n-1} - (M'_1 + M'_2 + M'_3 + \dots + M'_n) - p(H - z)u'$$

ou

$$Q_\ell = \sum_{k=1}^{n-1} q_k D_k - \sum_{j=1}^n M'_j - p(H - z)u' \tag{3.2}$$

onde:

p é carga vertical total do pórtico geral.

Q_ℓ é a força cortante externa, em uma cota z , devido às cargas laterais q e F , dada por:

$$Q_\ell = F + q(H - z)$$

n é o índice que indica o número total de pilares.

Considera-se, inicialmente, que sob ação das cargas externas, o andar genérico i do pórtico geral apresenta deformação análoga àquela representada na Figura 2.5. Em virtude da distorção u' do painel e das rotações dos nós, os pilares apresentam neste nível uma flexão local expressa pelos momentos $M'_{j,i}$ e $M''_{j,i+1}$, obtidos através da equação

(A.18) do Apêndice A ou das equações (2.26). A estes momentos deve-se superpor a flexão global, expressa pelos momentos M_j , conforme se verá no exemplo numérico 6.

A deformação de uma viga genérica k tem o aspecto indicado na Figura 2.6 e a somatória $\sum_{k=1}^{n-1} q_k D_k$ é obtida através da equação (2.22), ou seja:

$$\sum_{k=1}^{n-1} q_k D_k = \{E\}([\bar{K}]\{A\} - [\bar{\bar{K}}]\{v\}) \quad (3.3)$$

onde:

$\{E\}$, $[\bar{K}]$ e $[\bar{\bar{K}}]$ estão definidos nas equações (2.23), (2.24) e (2.24-a), respectivamente. $\{A\}$ e $\{v\}$ são vetores, de ordem $n \times 1$, constituídos, respectivamente, das rotações dos nós e dos deslocamentos verticais dos pilares.

Com raciocínio idêntico ao empregado no sub-item 2.2.1.2. do capítulo 2, o equilíbrio ao momento em cada nó A_j do andar genérico i , indicado na Figura 2.5, permite escrever:

$$\{A\} = [K_1]\{UN\}u' + [K_2]\{v\} \quad (3.4-a)$$

onde:

$\{UN\}$ é o vetor unitário, de ordem $n \times 1$, dado pela equação (2.36-a)

$[K_1]$ e $[K_2]$ são matrizes quadradas, de ordem n , dadas pelas equações (2.39), isto é:

$$[K_1] = ([K] + [\bar{K}])^{-1}[K] \quad (3.4-b)$$

$$[K_2] = ([K] + [\bar{K}])^{-1}([\bar{\bar{K}}] + [\bar{\bar{K}}]) \quad (3.4-c)$$

com $[\bar{K}]$, $[\bar{\bar{K}}]$, $[K]$ e $[\bar{\bar{K}}]$ sendo matrizes quadradas, de ordem n , já definidas nas equações (2.24), (2.24-a), (2.36-b) e (2.37), respectivamente.

Utilizando-se as equações (3.4), reescreve-se a equação (3.3) como:

$$\sum_{k=1}^{n-1} q_k D_k = s_f u' + \{\bar{S}\}\{v\} \quad (3.5)$$

onde o vetor $\{\bar{S}\}$, de ordem $1 \times n$, e o parâmetro s_f (rigidez do painel à força cortante) são calculados através das equações (2.42) e (2.41), respectivamente.

Conforme foi dito anteriormente, o vetor $\{A\}$ fornece ao nível de cada andar as rotações dos pilares, cujos valores eram considerados próximos em três nós consecutivos de uma mesma prumada. Isto conduz a um ponto de momento nulo na semi-altura de cada pilar. Considerando-se que, em presença dos momentos fletores M_j , as rotações dos nós das colunas devem variar ao longo da altura e, também, como se utiliza a técnica do meio contínuo, LAIER (23) sugere que a curvatura das colunas passe a ser dada por:

$$\frac{d}{dz} \{A\} = [K_1]\{UN\}u'' + [K_2]\{V'\} \quad (3.6)$$

e a flexão global total, que corresponde à soma dos momentos das colunas, $\sum_{j=1}^n M_j$, seja expressa, de acordo com a resistência dos materiais, por:

$$\sum_{j=1}^n M_j = \{EI_{p1} \quad EI_{p2} \quad \dots \quad EI_{pn}\} \frac{d\{A\}}{dz} \quad (3.7)$$

Substituindo-se a equação (3.6) na equação (3.7), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^n M_j = K_5 u'' + \{K_6\}\{v'\} \quad (3.8-a)$$

onde

$$K_5 = \{RF\}[K_1]\{UN\} \quad (3.8-b)$$

$$\{K_6\} = \{RF\}[K_2] \quad (3.8-c)$$

com

$$\{RF\} = \{EI_{p_1} \ EI_{p_2} \ EI_{p_3} \ \dots \ EI_{p_n}\}_{1 \times n}$$

Derivando-se, uma vez em relação a z , a equação (3.8-a) resulta:

$$\sum_{j=1}^n M'_j = K_5 u''' + \{K_6\} \{v''\} \quad (3.8-d)$$

Substituindo-se a equação (3.8-d) na equação (3.2), obtém-se a seguinte equação de equilíbrio do pórtico geral à força cortante:

$$Q_\ell = (s_f - p(H - z))u' - K_5 u''' + \{\bar{S}\} \{v\} - \{K_6\} \{v''\} \quad (3.9)$$

3.2.1.2. Equilíbrio dos Pilares à Força Normal

Indica-se na Figura 3.3 um elemento genérico do pilar j com o seu respectivo carregamento (q_j , q_{j-1} e p_j) e esforços normais.

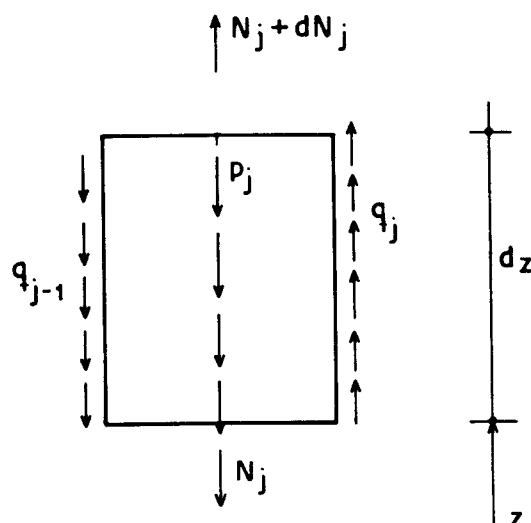


Figura 3.3 - Elemento do pilar genérico j .

A imposição da condição de equilíbrio do elemento à força normal resulta numa equação idêntica à equação (2.1.-b) do subitem 2.2.1.1..

Procedendo-se de maneira similar para os outros pilares do pórtico e utilizando-se um raciocínio análogo ao descrito no subitem 2.2.1.1., compõe-se um sistema de equações diferenciais igual ao apresentado em (2.3). De acordo com o subitem 2.2.2., este sistema de equações tem a forma matricial indicada em (2.46), isto é:

$$[E]\{v''\} + \{K_3\}u' + [K_4]\{v\} = \{p\} \quad (3.10)$$

com $[E]$, $\{K_3\}$, $[K_4]$ e $\{p\}$ definidos nas equações (2.47), (2.48-a), (2.49-a) e (2.51).

3.2.2. Formulação Matricial

As equações matriciais (3.9) e (3.10) formam um sistema de $n+1$ equações diferenciais expresso por:

$$[T]\{U''\} + [MS]\{U\} = \{C\} \quad (3.11)$$

onde:

$$[T] = \begin{bmatrix} -K_5 & | & -\{K_6\}_{1 \times n} & \\ \hline 0 & | & & \\ 0 & | & [E]_{n \times n} & \\ \vdots & | & & \\ 0 & | & & \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (3.12-a)$$

$$[MS] = \begin{bmatrix} s_f - p(H-z) & | & \{\bar{S}\}_{1 \times n} & \\ \hline & | & & \\ \{K_3\}_{n \times 1} & | & [K_4]_{n \times n} & \\ & | & & \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (3.12-b)$$

$$\{U''\} = \begin{Bmatrix} u'''' \\ \text{-----} \\ \{v''\}_{n \times 1} \end{Bmatrix}_{(n+1) \times 1} \quad (3.13-a)$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u' \\ \text{-----} \\ \{v\}_{n \times 1} \end{Bmatrix}_{(n+1) \times 1} \quad (3.13-b)$$

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} Q_\ell \\ \text{-----} \\ \{P\}_{n \times 1} \end{Bmatrix}_{(n+1) \times 1} \quad (3.13-c)$$

Observe-se que a diferença entre as equações (2.52) e (3.11) ocorre na matriz [T], cuja primeira linha é formada, aqui, por elementos não nulos. Os demais coeficientes, matrizes e vetores, permanecem inalterados.

A solução da equação (3.11) será obtida através do método das diferenças finitas e fornecerá, ao nível de cada andar, os deslocamentos verticais dos n pilares e o deslocamento lateral do pórtico geral.

As condições de contorno utilizadas para a resolução do sistema de equações diferenciais citado acima são:

1-) Supondo indeslocabilidade dos pilares nas bases, vem:

$$u(0) = 0 \quad (3.14-a)$$

$$\{v(0)\} = \{0\} \quad (3.14-b)$$

2-) Supondo rotação {A} nula nas bases dos pilares, resulta, de acordo com as equações (3.4 - a) e (3.14-b), em:

$$u'(0) = 0 \quad (3.14-c)$$

3-) Supondo não existir momentos e forças normais aplicadas no topo do painel,

$$u''(H) = 0 \quad (3.14-d)$$

$$\{v'(H)\} = \{0\} \quad (3.14-e)$$

3.3. Variação das Características Geométricas com a Altura

De maneira análoga ao pórtico analisado no capítulo anterior, as seções de vigas e pilares podem variar abruptamente em vários níveis. O trecho do painel, compreendido entre dois níveis consecutivos, mantém suas características geométricas constantes ao longo de seu comprimento.

Na Figura (3.4), representa-se o nível ℓ (ou interseção ℓ), situado entre os trechos (ℓ) e ($\ell+1$). Deve-se, então, impor neste nível as seguintes condições:

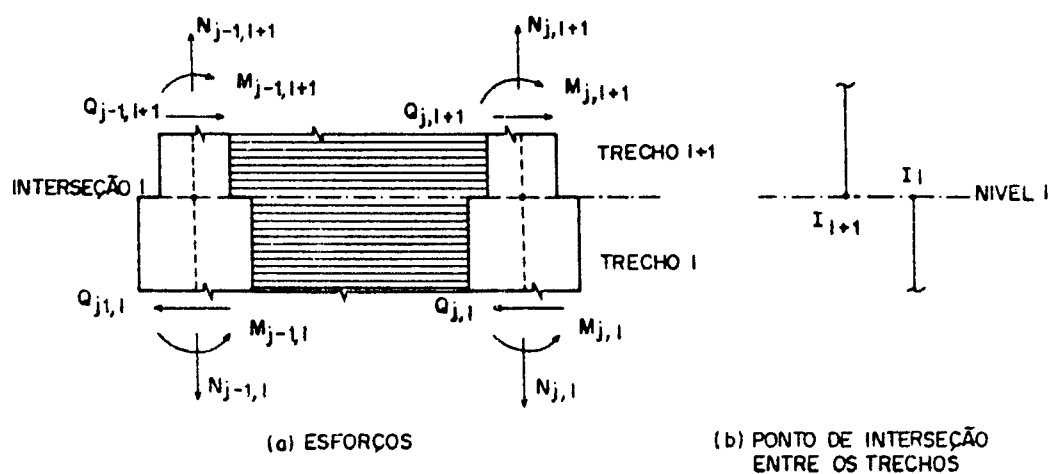


Figura 3.4- Interseção ℓ entre os trechos (ℓ) e ($\ell+1$)

a) Igualdade nos deslocamentos laterais $u(z)$ em cada interseção, ou seja:

$$u(I_\ell) = u(I_{\ell+1}) \quad (3.15-a)$$

onde os pontos de mesma ordenada I_ℓ e $I_{\ell+1}$, pertencentes respectivamente aos trechos ℓ e $\ell+1$, estão indicados na Figura 3.4-b.

b) Igualdade nos deslocamentos verticais $v_j(z)$ de todos os pilares em cada interseção, ou seja:

$$v_j(I_\ell) = v_j(I_{\ell+1}) \quad (3.15-b)$$

onde o índice j assume os valores: 1, 2, ..., n

c) Igualdade de esforço normal N_j em todos os pilares e em cada interseção. Esta condição expressa-se, de acordo com equação (2.2), por:

$$E_\ell \cdot A_{p_{\ell,j}} \cdot v'_j(I_\ell) = E_{\ell+1} \cdot A_{p_{\ell+1,j}} \cdot v'_j(I_{\ell+1}) \quad (3.15-c)$$

com E_r e $A_{p_{r,j}}$ sendo o módulo de elasticidade longitudinal e a área da seção transversal do pilar j do trecho r (o índice r assumindo os valores (ℓ) ou $(\ell+1)$).

d) Igualdade nas derivadas primeiras da função deslocamento lateral, ou seja:

$$u'(I_\ell) = u'(I_{\ell+1}) \quad (3.15-d)$$

e) Equilíbrio ao momento no nível ℓ .

Considere-se o pórtico em sua posição deformada e os pontos $o'(x,z)$ e $o(x,z)$, situados na interseção ℓ e, respectivamente, na primeira e n -ésima prumadas de pilar (Figura 3.2). A condição de equilíbrio ao momento em relação a estes pontos resulta em:

e.1.1) Para o trecho ℓ :

$$M_{\text{int},0}(I_\ell) = M_{\text{ext},0}^{(p)}(I_\ell) + M_{\text{ext},0}^{(q,F)}(I_\ell) \quad (3.16-a)$$

e.1.2) Para o trecho $(\ell + 1)$:

$$M_{\text{int},0'}(I_{\ell+1}) = M_{\text{ext},0'}^{(p)}(I_{\ell+1}) + M_{\text{ext},0'}^{(q,F)}(I_{\ell+1}) \quad (3.16-b)$$

onde:

$M_{\text{int},0}$, $M_{\text{ext},0}^{(p)}$, $M_{\text{ext},0}^{(q,F)}$ são, respectivamente, os momentos em relação ao ponto $o(x,z)$ devidos aos esforços internos, ao carregamento vertical p e ao carregamento lateral constituído das cargas q e F .

$M_{\text{int},o'}$, $M_{\text{ext},o'}^{(p)}$, $M_{\text{ext},o'}^{(q,F)}$ são os momentos devidos aos esforços citados anteriormente em relação ao ponto $o'(x,z)$.

Subtraindo-se membro a membro as equações (3.16), resulta:

$$M_{\text{int},o}(I_{\ell}) - M_{\text{int},o'}(I_{\ell+1}) = M_{\text{ext},o}^{(p)}(I_{\ell+1}) - M_{\text{ext},o'}^{(p)}(I_{\ell}) \quad (3.16-c)$$

cujo desenvolvimento conduz a:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n M_j(I_{\ell}) + N_1(I_{\ell})D + N_2(I_{\ell})(D - D_1) + N_3(I_{\ell})(D - D_1 - D_2) + \dots + \\ & + N_{n-1}(I_{\ell})(D - D_1 - D_2 - \dots - D_{n-2}) - \left(\sum_{j=1}^n M_j(I_{\ell+1}) - N_2(I_{\ell+1})D_1 - \dots + \right. \\ & \left. - N_3(I_{\ell+1})(D_1 + D_2) - \dots - N_n(I_{\ell+1})D \right) = -p(H - z(I_{\ell}))D \end{aligned} \quad (3.16-d)$$

Em virtude da igualdade do esforço normal N_j em todos os pilares e em cada interseção, a equação (3.16-d) é reescrita como:

$$\sum_{j=1}^n M_j(I_{\ell}) - \sum_{j=1}^n M_j(I_{\ell+1}) + D \left(\sum_{j=1}^n N_j(I_{\ell}) \right) = -p(H - z(I_{\ell}))D \quad (3.16-e)$$

Impondo-se a condição de equilíbrio à força normal no nível ℓ (ponto I_ℓ ou $I_{\ell+1}$), resulta:

$$\sum_{j=1}^n N_j(I_\ell) = -p(H - z(I_\ell)) \quad (3.17-a)$$

Utilizando-se a equação (2.2), escreve-se (3.17-a) como:

$$\sum_{j=1}^n E_\ell \cdot A_{p_{\ell,j}} \cdot v'_j(I_\ell) = -p(H - z(I_\ell)) \quad (3.17-b)$$

Substituindo-se (3.17-a) ou (3.17-b) na equação (3.16-e), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^n M_j(I_\ell) = \sum_{j=1}^n M_j(I_{\ell+1}) \quad (3.18)$$

As equações de compatibilidade (3.15) e (3.18) e a equação de equilíbrio (3.17-b) compõem o conjunto de expressões que devem ser aplicadas às $(\ell - 1)$ interseções do pórtico geral.

3.4. Aplicação do Método das Diferenças Finitas

3.4.1. Malha de Pontos

Para a aplicação do método das diferenças finitas à solução da equação (3.11), considera-se também uma malha constituída por NPT pontos sobre o eixo dos z . Cada trecho de painel possui NP_ℓ pontos, igualmente espaçados de Δ_ℓ , só que agora se consideram $NP_\ell - 3$ pontos pertencentes ao trecho e três pontos exteriores; dois na base e um no topo do trecho, denominados de fictícios, conforme se indica na Figura 3.5.

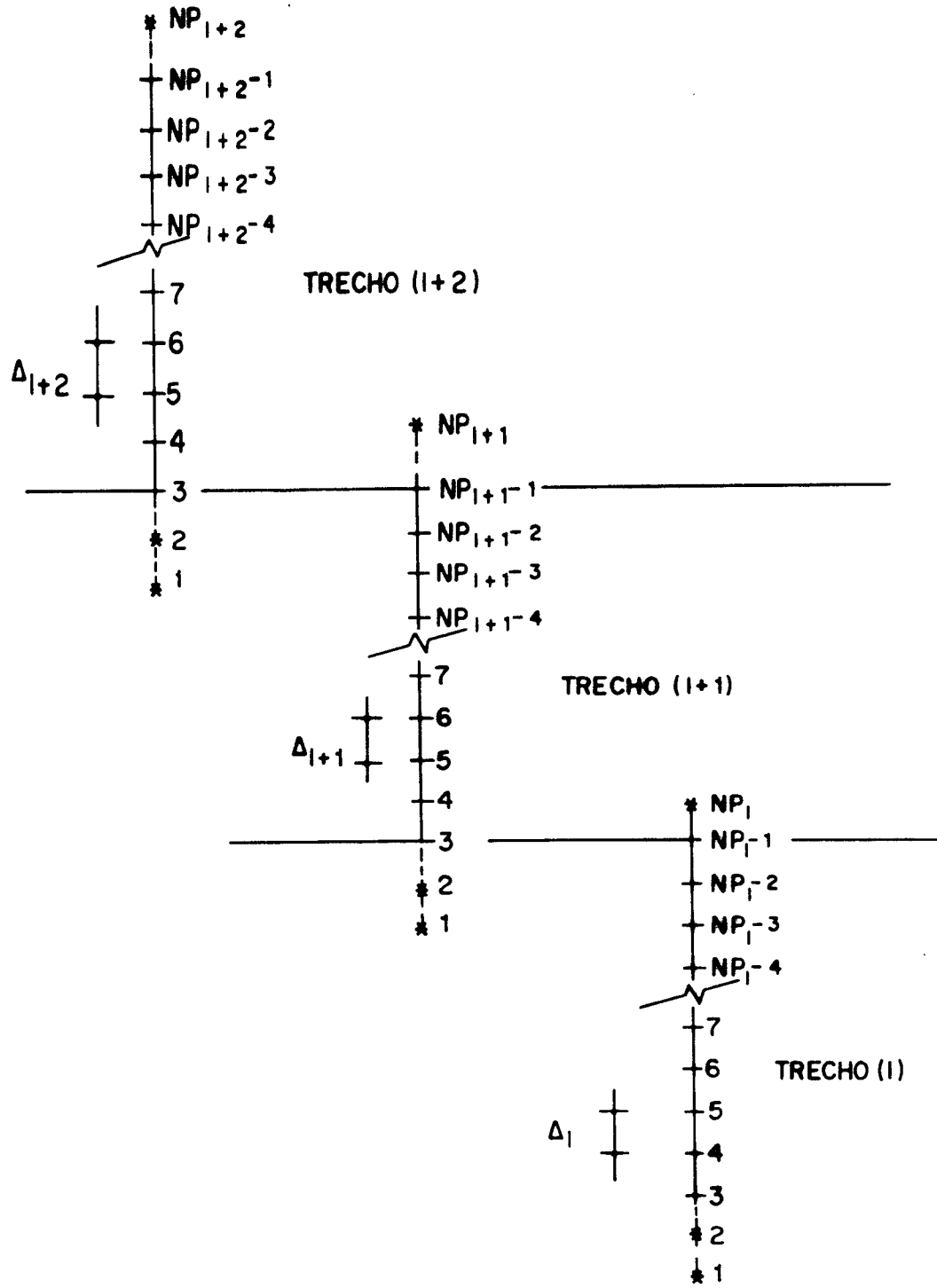


Figura 3.5 - Malha de pontos

De acordo com a Figura 3.5, definem-se:

- ℓ - índice que indica o número do trecho
 NS_ℓ - número de subdivisões do trecho ℓ
 NP_ℓ - número de pontos do trecho ℓ , dado por:

$$NP_\ell = NS_\ell + 4$$

- NT - número de trechos do painel
 NUP - número de prumadas de pilares

Um ponto M qualquer do trecho ℓ corresponderá na numeração local a um dos números: 1, 2, ..., ou NP_ℓ . Este mesmo ponto, na numeração global, corresponderá ao número L_M calculado pela expressão (2.56), ou seja:

$$L_M = \left[\left(\sum_{s=1}^{\ell} NP_{s-1} \right) + M \right] (NUP + 1) - NUP \quad (3.19)$$

com $NP_0 = 0$

Considerando-se J como o número de uma prumada genérica, definem-se $F(L_M)$ e $F(L_M+J)$ ($J = 1, 2, \dots, NUP$) como os valores dos deslocamentos lateral u e verticais v_J , respectivamente, em um ponto genérico L_M da malha.

O ponto de interseção de dois trechos, de características geométricas diferentes, tem numeração global $L_{2\ell-1}$ para o trecho ℓ e $L_{2\ell}$ para o trecho $\ell + 1$, calculada através das equações:

$$\begin{aligned} L_{2\ell-1} &= L_s + (L_s - 1)NUP \\ L_{2\ell} &= L_{2\ell-1} + 4(NUP + 1) \quad (\ell = 1, 2, \dots, NT-1) \end{aligned} \quad (3.20-a)$$

com

$$L_s = \left(\sum_{s=1}^{\ell} NP_{s-1} \right) + NP_\ell - 1 \quad (NP_0 = 0) \quad (3.20-b)$$

3.4.2. Determinação do Número de Equações do Sistema de Equações Lineares em Diferenças Finitas

O número de incógnitas (NI) do sistema de equações em diferenças finitas para um pórtico geral com NUP prumadas de pilares, será:

$$NI = NPT (NUP+1) \quad (3.21)$$

Aplicando-se a equação matricial (3.11) aos $(NP_{\ell}-3)$ pontos de cada trecho, ou aos $(NPT - 3NT)$ pontos da malha de pontos, obtém-se um número de equações (NEM) determinado por:

$$NEM = (NPT-3NT) (NUP+1) \quad (3.22)$$

As condições de contorno (3.14) geram um conjunto de equações em diferenças finitas em número de :

$$NEC = 2NUP+3 \quad (3.23-a)$$

e o número de equações de compatibilidade e de equilíbrio será:

$$NECD = (NT-1) (2NUP+4) \quad (3.23-b)$$

Somando-se as equações (3.22) e (3.23), obtém-se:

$$NEM + NEC + NECD = NPT(NUP + 1) - [(NT - 1)(NUP - 1) + NUP] \quad (3.24)$$

Comparando-se as equações (3.24) e (3.21), observa-se que faltam $[(NT-1)(NUP-1) + NUP]$ equações. Para sanar o problema, utiliza-se o mesmo artifício do capítulo anterior, ou seja, geram-se equações suplementares sem a introdução de novas incógnitas.

Calculando-se o valor do polinômio interpolador do quarto grau, equação (B.1) do Apêndice B, para o primeiro ponto de cada trecho, conforme o procedimento já descrito no item 2.4.2 do capítulo anterior, obtém-se a seguinte equação nos deslocamentos verticais:

$$F(L_1 + J) - 5F(L_2 + J) + 10F(L_3 + J) - 10F(L_4 + J) + 5F(L_5 + J) - F(L_6 + J) = 0 \quad (3.25)$$

Para a obtenção das $[(NT - 1) (NUP - 1) + NUP]$ equações, procede-se da seguinte maneira:

- 1) Aplica-se a equação (3.25) no ponto (L_1+J) do primeiro trecho, com $J = 1, 2, \dots, NUP$, resultando, então, em NUP equações adicionais.
- 2) Aplica-se a equação (3.25) no ponto (L_1+J) , $J = 2, 3, \dots, NUP$, dos $(NT-1)$ trechos restantes totalizando, desta maneira, $(NT-1) (NUP - 1)$ equações.

3.4.3. Equações em Diferenças Finitas

Conforme se observou anteriormente, as equações (2.52) e (3.11), que expressam respectivamente o comportamento dos painéis pórtico e pórtico geral sob idênticas condições de carregamento, apresentam uma equivalência em sua forma. Pode-se, então, com procedimento análogo ao do capítulo anterior, escrever a equação (3.11) na seguinte forma simplificada:

$$T(I,1)u''' + \sum_{J=1}^{NUP} T(I,J+1)v_J'' + MS(I,1)u' + \sum_{J=1}^{NUP} MS(I,J+1)v_J = C(I) \quad (3.26)$$

onde I assume os valores $1, 2, \dots, (NUP + 1)$ referentes à primeira, à segunda, ..., à $(NUP + 1)$ -ésima linha do sistema de equações diferenciais expresso matricialmente em (3.11).

As malhas de pontos utilizadas na aplicação do método das diferenças finitas à resolução das equações (2.52) e (3.11) diferem, uma vez que no pórtico (Figura 2.8) existem dois pontos fictícios (um na base e outro no topo de cada trecho) e no pórtico geral (Figura 3.5) existem três pontos fictícios (dois na base e um no topo).

No ponto $M = 3$ da base de cada trecho do pórtico geral, e nos pontos $M = 4, 5, \dots, (NP_{\ell}-2)$, também de cada trecho ℓ , observa-se que se pode aplicar a equação (3.26) utilizando-se os operadores de diferenças centrais, que envolvem dois pontos à direita e dois

à esquerda do ponto de aplicação M e são dados pelas equações (B.5-a) do Apêndice B. A equação resultante é idêntica à equação (2.68) do capítulo anterior.

Para o ponto $M = NP_{\ell-1}$, no topo de cada trecho, utilizam-se na equação (3.26) os operadores assimétricos à direita, expressos pelas equações (B.5-C) do Apêndice B. A equação resultante é idêntica à equação (2.69) do capítulo anterior.

As condições de contorno são impostas pelas equações:

a) Para $u(0) = 0$:

$$F(2NUP+3) = 0 \quad (3.27-a)$$

b) Para $\{v(0)\} = \{0\}$:

$$F(2NUP+3+J) = 0 \quad (J = 1, 2, \dots, NUP) \quad (3.27-b)$$

c) Para $u'(0) = 0$:

$$F(L_1) - 8F(L_2) + 8F(L_4) - F(L_5) = 0 \quad (3.27-c)$$

d) Para $u''(H) = 0$:

$$-F(L_{NPT-4}) + 4F(L_{NPT-3}) + 6F(L_{NPT-2}) - 20F(L_{NPT-1}) + 11F(L_{NPT}) = 0 \quad (3.27-d)$$

e) Para $\{v'(H)\} = \{0\}$:

$$-F(L_{NPT-4+J}) + 6F(L_{NPT-3+J}) - 18F(L_{NPT-2+J}) + 10F(L_{NPT-1+J}) + 3F(L_{NPT+J}) = 0 \quad (3.27-e)$$

De acordo com a localização dos pontos de interseção entre os trechos, representada na Figura 3.6, as equações de compatibilidade são escritas em diferenças finitas da seguinte maneira:

a) Para $u(L_{2\ell-1}) = u(L_{2\ell})$:

$$F(L_{2\ell-1}) - F(L_{2\ell}) = 0 \quad \ell = 1, \dots, (NT - 1) \quad (3.28-a)$$

b) Para $v_j(L_{2\ell-1}) = v_j(L_{2\ell})$:

$$F(L_{2\ell-1} + J) - F(L_{2\ell} + J) = 0 \quad \ell = 1, 2, \dots, (NT - 1) \quad (3.28-b)$$

c) Para $E_\ell \cdot Ap_{\ell,j} \cdot v'_j(L_{2\ell-1}) = E_{\ell+1} \cdot Ap_{\ell+1,j} \cdot v'_j(L_{2\ell})$:

$$\frac{E_\ell \cdot Ap_{\ell,j}}{\Delta_\ell} [F(L_{2\ell-1} - 3ND + J) - 6F(L_{2\ell-1} - 2ND + J) + 18F(L_{2\ell-1} - ND + J) - 10F(L_{2\ell-1} + J) - 3F(L_{2\ell-1} + ND + J)] + \frac{E_{\ell+1} \cdot Ap_{\ell+1,j}}{\Delta_{\ell+1}} [F(L_{2\ell} - 2ND + J) - 8F(L_{2\ell} - ND + J) + 8F(L_{2\ell} + ND + J) - F(L_{2\ell} + 2ND + J)] = 0 \quad (3.28-c)$$

onde $ND = NUP + 1$, $J = 1, \dots, NUP$ e $\ell = 1, 2, \dots, (NT - 1)$

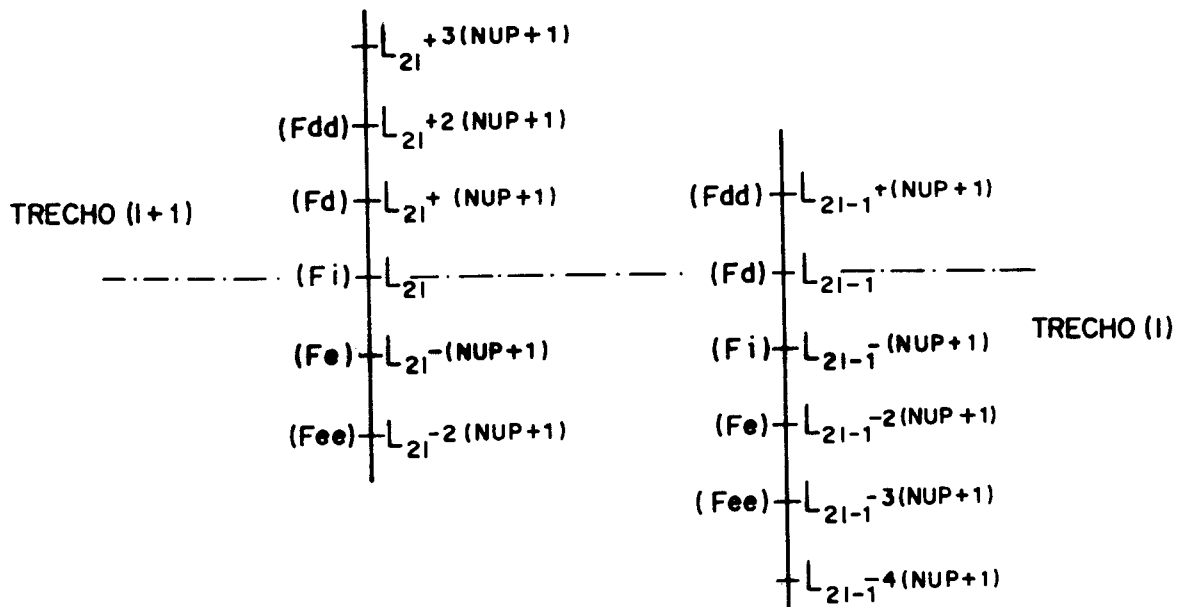


Figura 3.6- Localização dos pontos de interseção

d-) Para $u'(L_{2\ell-1}) = u'(L_{2\ell})$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta_\ell} [-F(L_{2\ell-1} - 3ND) + 6F(L_{2\ell-1} - 2ND) - 18F(L_{2\ell-1} - ND) + 10F(L_{2\ell-1}) + 3F(L_{2\ell-1} + \\ & + ND)] - \frac{1}{\Delta_{\ell+1}} [F(L_{2\ell} - 2ND) - 8F(L_{2\ell} - ND) + 8F(L_{2\ell} + ND) - F(L_{2\ell} + 2ND)] = 0 \end{aligned} \quad (3.28-d)$$

e-) Para $\sum_{j=1}^n M_j(L_{2\ell-1}) = \sum_{j=1}^n M_j(L_{2\ell})$:

$$\begin{aligned} & \frac{K_5(\ell)}{\Delta_\ell^2} [-F(L_{2\ell-1} - 3ND) + 4F(L_{2\ell-1} - 2ND) + 6F(L_{2\ell-1} - ND) - 20F(L_{2\ell-1}) + 11F(L_{2\ell-1} + \\ & + ND)] + \sum_{J=1}^{NUP} \frac{K_6(\ell, J)}{\Delta_\ell} [-F(L_{2\ell-1} - 3ND + J) + 6F(L_{2\ell-1} - 2ND + J) - 18F(L_{2\ell-1} - ND + J) + \\ & + 10F(L_{2\ell-1} + J) + 3F(L_{2\ell-1} + ND + J)] - \frac{K_5(\ell+1)}{\Delta_{\ell+1}^2} [-F(L_{2\ell} - 2ND) + 16F(L_{2\ell} - ND) + \\ & - 30F(L_{2\ell}) + 16F(L_{2\ell} + ND) - F(L_{2\ell} + ND)] - \sum_{J=1}^{NUP} \frac{K_6(\ell+1, J)}{\Delta_{\ell+1}} [F(L_{2\ell} - 2ND + J) - 8F(L_{2\ell} + \\ & - ND + J) + 8F(L_{2\ell} + ND + J) - F(L_{2\ell} + 2ND + J)] = 0 \end{aligned} \quad (3.28-e)$$

f-) Para a equação de equilíbrio global à força normal:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n E_\ell \cdot A_{p_{\ell, j}} \cdot v'_j(L_{2\ell-1}) = -p(H - z(L_{2\ell-1})) \\ & \sum_{J=1}^{NUP} \frac{E_\ell \cdot A_{p_{\ell, J}}}{12\Delta_\ell} [-F(L_{2\ell-1} - 3ND + J) + 6F(L_{2\ell-1} - 2ND + J) - 18F(L_{2\ell-1} - ND + J) + 10F(L_{2\ell-1} + J) + \\ & + 3F(L_{2\ell-1} + ND + J)] = -p[H - z(L_{2\ell-1})] \end{aligned} \quad (3.28-f)$$

Da equação (3.28-d) à (3.28-f) consideram-se: $ND = NUP + 1$ e o índice ℓ assumindo os valores: 1, 2, ..., (NT-1).

As equações (2.68), (2.69), (3.27) e (3.28) juntamente com as equações (3.25) formam um sistema de $NPT \cdot (NUP + 1)$ equações lineares, cuja solução fornece os deslocamentos laterais u do painel e os deslocamentos verticais v_j ($j = 1, \dots, n$) dos pilares nos NPT pontos da malha.

3.5. Cálculo dos Esforços

De maneira análoga àquela descrita no item 2.5., os esforços normais N_j dos pilares, a nível dos andares do painel, serão obtidas pelo método das diferenças finitas através da equação (2.2).

Para um ponto genérico $M = 3, 4, \dots, NP_{\ell-2}$ do trecho ℓ ($\ell=1, 2, \dots, NT$) da malha de pontos indicada na Figura 3.5, estes esforços serão calculados pela equação (2.73-b). Para o ponto $M = NP_{\ell-1}$, no topo do trecho, utilizar-se-á a equação (2.73-c).

Em uma viga do trecho ℓ ($\ell=1, 2, \dots, NT$), situado no nível do ponto genérico $M = 3, 4, \dots, NP_{\ell-2}$ da malha de pontos da Figura 3.5, o esforço cortante concentrado Vv_k (k indica o vão) será determinado pela equação (2.77-b), multiplicada pela altura h_{ℓ} dos andares. A equação (2.77-c), quando multiplicada pela área de influência da viga do topo, ($h_{\ell}/2$), fornece o esforço cortante concentrado neste elemento.

3.6. Determinação da Carga Crítica

Para o pórtico geral, o carregamento vertical crítico, em regime elástico, também poderá ser determinado. Para a sua determinação procede-se de maneira análoga àquela descrita no item 2.6. do Capítulo 2.

3.7. Pórtico Geral com Pilares de Rigidez Elevada

3.7.1. Pilares de Rigidez Elevada Sobre Fundação Rígida

Considere-se agora o caso em que os pilares do pórtico geral são bem mais rígidos que as vigas, ou seja, $K_p \gg \gg K_v$. Neste caso, a matriz $[K]$, formada pelos parâmetros de rigidez K_{p_j} dos pilares, conforme mostra a equação (2.36-b), apresenta elementos com valores elevados em relação aos valores dos elementos da matriz $[\bar{K}]$, constituída pelos parâmetros de rigidez das vigas e representada na equação (2.24). Em virtude disto, vê-se que a soma destas matrizes tende à matriz $[K]$, ou seja :

$$[K] + [\bar{K}] \cong [K] \quad (3.29)$$

e a matriz $[K_1]$, definida na equação (3.4-b), passa a ser determinada por:

$$[K_1] \cong [K]^{-1} [K] \cong [I] \quad (3.30)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade.

A matriz $[K_2]$ será calculada a partir das matrizes $[K]$, $[\bar{K}]$, $[\bar{\bar{K}}]$ e $[\bar{\bar{\bar{K}}}]$, efetuando-se as operações matriciais indicadas na equação (3.4-c). As matrizes $[\bar{K}]$ e $[\bar{\bar{K}}]$, representadas respectivamente nas equações (2.24-a) e (2.37), compõem-se dos parâmetros de rigidez das vigas e aparecem na formulação do pórtico geral, devido à consideração da deformação axial dos pilares.

Com a equação (3.29), pode-se reescrever (3.4-c) na seguinte forma matricial:

$$[K_2] = [K]^{-1} ([\bar{\bar{K}}] + [\bar{\bar{\bar{K}}}]) \quad (3.31)$$

Em vista do exposto anteriormente, verifica-se que o produto matricial, indicado na equação (3.31), tende à matriz nula, então:

$$[K_2] \cong [0] \quad (3.32)$$

Substituindo-se as equações (3.30) e (3.32) nas equações que expressam o comportamento do pórtico geral, mostrado na Figura 3.1, obtém-se:

i-) Para a equação (3.4-a):

$$\{A\} = \{UN\} u' \quad (3.33-a)$$

ii-) Para a equação (3.3):

$$\sum_{k=1}^{n-1} q_k D_k = \{E\}([\bar{K}]\{UN\}u' - [\bar{K}]\{v\}) \quad (3.33-b)$$

iii-) Para a equação (3.7):

$$\sum_{j=1}^n M_j = \{EI_{p_1} \ EI_{p_2} \ \dots \ EI_{p_n}\} \{UN\} u''$$

ou

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = EI_p \cdot u'' \quad (3.33-c)$$

onde $I_p = I_{p_1} + I_{p_2} + \dots + I_{p_n}$

iv-) Para a equação (3.2):

$$Q_\ell = \sum_{k=1}^{n-1} q_k D_k - EI_p \cdot u''' - p(H-z)u' \quad (3.33-d)$$

É oportuno lembrar que: $\{UN\}$ é um vetor unitário de ordem $n \times 1$; $\{E\}$ é um vetor de ordem $1 \times n$, definido em (2.23); I_{p_j} é o momento de inércia do pilar genérico j ; E é o módulo de elasticidade longitudinal; D_k é o comprimento do vão k ; p é a carga vertical total; H é a altura do painel e M_j , q_k e Q_ℓ são, respectivamente, o momento fletor recebido pelo pilar j , esforço cortante distribuído no vão k e força cortante externa proveniente das cargas laterais q e F , a uma cota z da base do pórtico.

No intuito de apresentar a equação (3.33-b) em uma forma mais explícita, considera-se o pórtico geral constituído apenas por dois pilares ($n = 2$ e $k = 1$) de seções transversais diferentes. Deste modo, de acordo com as equações (2.24) e (2.24-a), obtêm-se:

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} 2k\gamma_1 & k\mu_1 \\ k\bar{\mu}_1 & 2k\bar{\gamma}_1 \end{bmatrix} \quad (3.34-a)$$

$$[\bar{K}] = \frac{1}{D_1} \cdot \begin{bmatrix} 2k\gamma_1 + k\bar{\mu}_1 & -(2k\gamma_1 + k\bar{\mu}_1) \\ 2k\bar{\gamma}_1 + k\mu_1 & -(2k\bar{\gamma}_1 + k\mu_1) \end{bmatrix} \quad (3.34-b)$$

Substituindo-se (3.34-a) e (3.34-b) e os vetores $\{E\}$, de ordem 1×2 , e $\{UN\}$, de ordem 2×1 , na equação (3.33-b), resulta:

$$q_1 D_1 = \frac{6 \cdot E}{h} (2k\gamma_1 + k\mu_1 + 2k\bar{\gamma}_1 + k\bar{\mu}_1) [u' - (v_1 - v_2) / D_1] \quad (3.35)$$

com h sendo a altura dos andares do pórtico geral.

Levando-se em consideração a influência dos trechos rígidos dos nós do painel e desprezando-se a influência da deformação por força cortante das vigas, obtêm-se, de acordo com as equações (2.14) (com $sv_1 = 0$ e $rv_1 = 1$) e (2.20), a seguinte expressão:

$$2k\gamma_1 + k\mu_1 + 2k\bar{\gamma}_1 + k\bar{\mu}_1 = 2Kv_1 (D_1 / Cv_1)^3 \quad (3.36)$$

com Cv_1 sendo o comprimento do trecho deformável da viga e $Kv_1 = Iv_1 / D_1$.

Substituindo-se a equação (3.36) em (3.35), vem:

$$q_1 h = \frac{12 \cdot E \cdot Iv_1}{Cv_1^3} [D_1 u' - (v_1 - v_2)] \quad (3.37)$$

onde Iv_1 é o momento de inércia das vigas e v_1 e v_2 são os deslocamentos verticais dos pilares dados pela equação (2.2), ou seja:

$$v_1 = \frac{1}{E \cdot A_{p1}} \int_0^z N_1 dz \quad (3.38)$$

$$v_2 = \frac{1}{E \cdot A_{p2}} \int_0^z N_2 dz$$

Se o carregamento atuante no pórtico geral constitui-se apenas de cargas laterais q e F , $N_1 = -N_2 = N$. Pode-se, então, escrever a equação (3.37) como:

$$\frac{q_1 \cdot h \cdot C v_1^3}{12 \cdot E \cdot I v_1} = D_1 \cdot u' - \frac{1}{E} (1/A_{p1} + 1/A_{p2}) \int_0^z N dz \quad (3.39-a)$$

As equações (3.33-c) e (3.33-d), para o pórtico geral com dois pilares, escrevem-se como:

$$M_1 + M_2 = E I_p \cdot u'' \quad (3.39-b)$$

$$Q_\ell = q_1 D_1 - E I_p \cdot u''' \quad (3.39-c)$$

onde $I_p = I_{p1} + I_{p2}$

As expressões (3.39) são semelhantes àquelas obtidas em ALBIGES & GOULET (1), para o caso de duas paredes, de seções transversais diferentes, associadas entre si por vigas. Considerando-se um painel com um maior número de pilares e um raciocínio análogo ao utilizado para o pórtico com dois pilares, chega-se a equações formalmente semelhantes às expressões (3.39). Pode-se, então, concluir que: quando $K_p \gg \gg K_v$ o painel geral apresenta o comportamento de uma associação de paredes unidas por vigas. Vale ressaltar que isto só ocorre quando se leva em conta, na análise desse painel, a influência dos nós rígidos.

3.7.2. Pilares de Rigidez Elevada Sobre Fundação Flexível

3.7.2.1. Introdução

A hipótese de engastamento rígido na base de pilares de rigidez elevada nem sempre ocorre na prática. Os pilares podem apoiar-se em fundações cuja flexibilidade ocasionam, em suas bases, rotações e deslocamentos verticais. Logo, é suposição bastante razoável considerar estes elementos elasticamente engastados na base. Diversos trabalhos têm sido desenvolvidos levando-se em conta a flexibilidade das fundações. Citam-se, por exemplo, CARVALHO (6), COSTA (7), MANCINI (28,31), MURASHEV (35), TSO & CHAN (49), dentre outros.

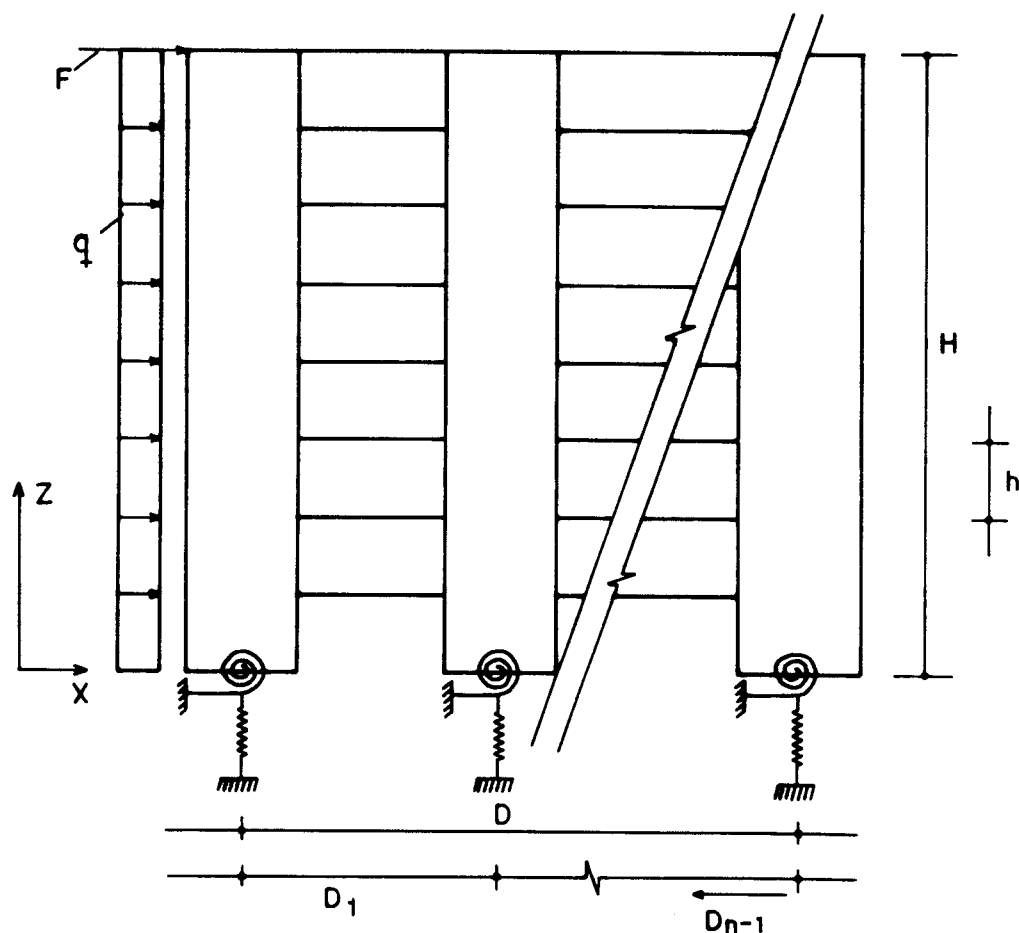


Figura 3.7 - Pórtico geral com vínculos elásticos.

Na Figura 3.7, representa-se um pórtico geral com n pilares engastados elasticamente em suas bases. Supõem-se $K_{p_j} \gg \gg K_{v_k}$ e um carregamento aplicado constituído apenas por cargas laterais, uniforme q e concentrada no topo F . Isto é, não será considerado o efeito $P-\Delta$ no painel.

3.7.2.2. Desenvolvimento Teórico

A rotação e o deslocamento vertical na fundação são proporcionais, respectivamente, ao momento fletor e o esforço normal na base do pilar j .

Sendo ϕ_j a rotação da fundação do pilar j , pode-se escrever:

$$\phi_j = a_j(0) = \frac{M_j(0)}{g_j} \quad (\text{com } j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.40)$$

onde

$a_j(0)$ é a rotação na base do pilar j .

g_j é a rigidez à rotação do engastamento elástico, definida pela expressão:

$$g_j = C_\phi \cdot J_{s_j} \quad (\text{com } j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.41)$$

com C_ϕ sendo o coeficiente de deformação do solo e J_{s_j} o momento de inércia da sapata de fundação.

$M_j(0)$ é o momento fletor na base do pilar j , expresso pela equação:

$$M_j(0) = EI_{p_j} \cdot a'_j(0) \quad (\text{com } j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.42)$$

com E e I_{p_j} sendo, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal do material e o momento de inércia do pilar j . O símbolo ($'$) indica primeira derivada em relação a z .

Em vista da equação (3.42), pode-se escrever a equação (3.40), para o pórtico geral com n prumadas de pilares, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 g_1 a_1(0) &= j_1 a_1'(0) \\
 g_2 a_2(0) &= j_2 a_2'(0) \\
 &\vdots \\
 g_n a_n(0) &= j_n a_n'(0)
 \end{aligned}
 \tag{3.43-a}$$

onde j_j ($j = 1, 2, \dots, n$) representa o produto de rigidez à flexão $EI p_j$.

Somando-se membro a membro as equações (3.43-a), resulta:

$$\{g\}\{A(0)\} = \{RF\}\{A'(0)\} \tag{3.43-b}$$

onde:

$\{A(0)\}$ é o vetor das rotações dos pilares na base e que, segundo a equação (3.4-a), vale:

$$\{A(0)\} = [K_1]\{UN\}u'(0) + [K_2]\{v(0)\} \tag{3.44-a}$$

com $[K_1]$, $\{UN\}$, $[K_2]$ e $\{v\}$ já definidos anteriormente.

$\{RF\}$ é o vetor, de ordem $1 \times n$, dado por:

$$\{RF\} = \{EI p_1 \quad EI p_2 \quad \dots \quad EI p_n\} \tag{3.44-b}$$

$\{g\}$ é o vetor, de ordem $1 \times n$, definido por:

$$\{g\} = \{g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_n\} \tag{3.44-c}$$

Substituindo-se a equação (3.44-a) e sua primeira derivada, em relação a z , na equação (3.43-b), resulta:

$$G_1 u'(0) - K_5 u''(0) + \{G_2\}\{v(0)\} - \{K_6\}\{v'(0)\} = 0 \tag{3.45-a}$$

com

$$G_1 = \{g\} [K_1] \{UN\} \quad (3.45-b)$$

$\{G_2\}$ sendo o vetor, de ordem $1 \times n$, dado por:

$$G_2 = \{g\} [K_2] \quad (3.45-c)$$

K_5 e $\{K_6\}$, definidos pelas equações (3.8).

Sendo δ_j o deslocamento vertical da fundação j e $v_j(0)$ o deslocamento vertical na base do pilar j , pode-se escrever:

$$\delta_j = v_j(0) = \frac{N_j(0)}{gv_j} \quad (\text{com } j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.46)$$

onde:

gv_j é a rigidez ao deslocamento vertical da fundação j determinada através da equação:

$$gv_j = C_\phi \cdot As_j \quad (\text{com } j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.47)$$

com As_j sendo a área da sapata de fundação j .

$N_j(0)$ é o esforço normal na base do pilar, calculado pela equação (2.2) ou,

$$N_j(0) = E \cdot Ap_j \cdot v'_j(0) \quad (\text{com } j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.48)$$

com Ap_j representando a área da seção transversal do pilar j .

Levando-se a equação (3.48) na equação (3.46), obtêm-se, respectivamente para os pilares 1, 2, ... e n , as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} E \cdot Ap_1 \cdot v'_1(0) &= gv_1 \cdot v_1(0) \\ E \cdot Ap_2 \cdot v'_2(0) &= gv_2 \cdot v_2(0) \\ &\vdots \\ E \cdot Ap_n \cdot v'_n(0) &= gv_n \cdot v_n(0) \end{aligned} \quad (3.49)$$

ou, para um pilar genérico j:

$$E \cdot A p_j \cdot v_j'(0) = g v_j \cdot v_j(0) \quad (\text{com } j = 1, \dots, n) \quad (3.50)$$

A equação (3.45-a) e as equações (3.50) constituem as condições de contorno que, juntamente com as equações de contorno (3.14-a), (3.14-d) e (3.14-e), possibilitam resolver o sistema de equações diferenciais (3.11). A solução, correspondente aos deslocamentos e esforços (ao nível de cada andar) do pórtico geral sobre fundações flexíveis, será obtida através do método das diferenças finitas, da maneira descrita no item 3.4.. Apenas as condições de contorno (3.27-c) e (3.27-b) são substituídas pelas equações (3.45-a) e (3.50). Estas últimas equações são escritas em diferenças finitas, para o ponto da base do painel, na seguinte forma:

a-) Para a equação (3.45-a):

$$\begin{aligned} & (\Delta_1 G_1 + K_5)F(L_1) - (8\Delta_1 G_1 + 16K_5)F(L_2) + 30K_5F(L_3) + (8\Delta_1 G_1 - 16K_5)F(L_4) + (-\Delta_1 G_1 + \\ & + K_5)F(L_5) + \sum_{J=1}^{NUP} \{-\Delta_1 K_6(J)F(L_1 + J) + 8\Delta_1 K_6(J)F(L_2 + J) + 12\Delta_1^2 G_2(J)F(L_3 + J) + \\ & -8\Delta_1 K_6(J)F(L_4 + J) + \Delta_1 K_6(J)F(L_5 + J)\} = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

b-) Para as equações (3.50):

$$E \cdot A p(J) \left[F(L_1 + J) - 8F(L_2 + J) - \frac{12\Delta_1 g v(J)}{E \cdot A p(J)} F(L_3 + J) + 8F(L_4 + J) - F(L_5 + J) \right] = 0 \quad (3.52)$$

onde Δ_1 é o espaçamento entre os pontos da malha e J assume os valores: 1, 2, ..., NUP.

4. PROGRAMA PARA CÁLCULO AUTOMÁTICO

Com base nas equações resultantes da aplicação do método das diferenças finitas à solução das equações (2.52) e (3.11), escreveu-se um programa em linguagem FORTRAN. Uma descrição sumária dos dados de entrada, das subrotinas utilizadas pelo programa principal e dos resultados fornecidos pelo programa encontra-se nos itens que seguem. Inclui-se também uma listagem completa do programa.

4.1. Dados de Entrada

Os dados necessários à utilização do programa são:

IR - parâmetro que indica como serão consideradas as ligações viga-pilar, isto é:

se $IR = 1$, painel com nós rígidos

se $IR \neq 1$, painel com nós puntuais

IEN - parâmetro que indica que tipo de painel será calculado, isto é:

se $IEN = 0$, calcula-se o painel pórtico

se $IEN = 1$, calcula-se o painel pórtico geral

ICTP - parâmetro que indica a consideração da deformação por força cortante nos pilares:

se $ICTP = 1$, inclui-se este efeito

se $ICTP \neq 1$, não inclui

ICTV - parâmetro que indica a consideração da deformação por força cortante nas vigas:

se $ICTV = 1$, inclui-se este efeito

se $ICTV \neq 1$, não inclui

IRP - vetor de ordem **NU** que identifica a dimensão horizontal do nó rígido.

se $IRP(J) = 1$, calcula-se o painel considerando, como trecho rígido do nó, apenas a largura do pilar **J**.

se $IRP(J) \neq 0$, calcula-se o painel de nós puntuais ou nós rígidos, dependendo do valor de **IR**.

IENFX - parâmetro que identifica a fundação flexível

se $IENFX = 1$, a fundação é flexível

se $IENFX \neq 1$, a fundação é rígida.

IENGF e **IENVF** - são parâmetros relativos à fundação flexível. No caso da consideração deste tipo de fundação, devem ser tomados iguais a 1.

ITMAX - parâmetro cujo valor estima o número de iterações do método de Newton Raphson para o cálculo da carga crítica.

IPI - Parâmetro, que se tem valor igual a 1, imprimem-se os resultados das iterações do método de Newton Raphson

ICAR - parâmetro que define o cálculo da carga crítica

se $ICAR = 1$, não se calcula a carga crítica.

se $ICAR \neq 1$, calcula-se a carga crítica

NA - número de andares do painel

NT - número de trechos do painel

NV - número de vãos do painel

NU - número de prumadas de pilares

Q - carga lateral uniformemente distribuída

P - carga vertical total e uniformemente distribuída

F - carga lateral aplicada ao topo do painel

HT - altura total da estrutura

C - fator de correção utilizado quando se consideram as deformações por força cortante.

CFI - coeficiente de deformação do solo

ARE, JSP - Vetores de ordem (NU) com elementos correspondentes às áreas e aos momentos de inércia das sapatas, respectivamente.

Obs.: CFI, ARE e JSP só devem ser lidos se $IENFX = 1$.

D - vetor de ordem NV contendo o comprimento dos vãos do painel.

ALFA - vetor de ordem NU contendo os coeficientes de distribuição da carga vertical total p.

HM - vetor de ordem NT contendo o valor do pé-direito de cada trecho.

E - vetor de ordem NT contendo o valor do módulo de elasticidade longitudinal de cada trecho.

NATRE - vetor de ordem NT contendo o número de andares de cada trecho.

CE - Parâmetro que define qual o espaçamento (Δ_ℓ) entre os pontos da malha de cada trecho, ou seja:

se $CE \neq 1$, $\Delta_\ell = HM$

se $CE = 1$, Δ_ℓ deve ser lido

G - vetor de ordem NT contendo o valor do módulo de elasticidade transversal de cada trecho.

DEL - vetor de ordem NT contendo o valor de espaçamento Δ_ℓ de cada trecho.

AV - vetor de ordem NV contendo a altura da viga do andar genérico de cada trecho.

EV - vetor de ordem NV contendo a espessura de cada viga do andar genérico de cada trecho.

B - vetor de ordem NU contendo a largura de cada pilar do trecho de painel.

EP - vetor de ordem NU contendo a espessura de cada pilar do trecho de painel.

4.2 Subrotinas

O programa principal utiliza as seguintes subrotinas:

RIGSF - gera a matriz [MS] e a 1ª linha da matriz [T].

GJRSIS - utilizada para a inversão de matrizes pela sub-rotina RIGSF.

ENGFLE - gera as condições de contorno relativas à consideração de fundação flexível

CONDCP - gera as condições de compatibilidade entre os trechos de características geométricas diferentes.

SOLUSI - resolve o sistema de equações em diferenças finitas pelo processo de Gauss - Jordan.

ESFOR - calcula os esforços normais e momentos fletores nos pilares.

ESFOR1 - calcula as forças cortantes concentradas das vigas.

MATMD - gera a matriz dos coeficientes das diferenças finitas em cada iteração do método de Newton Raphson.

DETERM - calcula o determinante da matriz dos coeficientes das diferenças finitas pelo processo de eliminação de Gauss, segundo FAKURY (12).

4.3. Impressão dos Resultados

O programa fornece os deslocamentos laterais do painel e os deslocamentos verticais de cada prumada de pilar. Fornece também os esforços normais dos pilares e os esforços cortantes das vigas, para todos os painéis analisados, e os momentos fletores, correspondentes à flexão global e à flexão total, para os pilares do pórtico geral. Todos esses valores são impressos nos pontos da malha pertencentes às estruturas.

4.4. Listagem do Programa

(ver páginas seguintes)

C=====
C==== PROGRAMA PARA RESOLUCAO DO SISTEMA
C==== DE EQUACOES DIFERENCIAIS
C==== PORTICO PLANO
C=====

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 K5,K6(4),MD(156,157),KVC(4),KPC(4),MALT(9,4),MAL(4,4)
REAL*8 K2(4,4),IPP(3,4),KVCC(3,4),JSP(4),KPPC(3,4)
REAL*8 KV(4),KP(4),IP(4),IV(4),MS(5,5),NH,IVC(4),IPC(4),MSS(4)
DIMENSION D(4),HM(4),E(4),NATRE(4),HTRE(4),NS(4),AV(4),ARE(4)
DIMENSION EV(4),B(4),EP(4),TV(4),S(4,4),CV(4),TP(4),HB(4)
DIMENSION RO(4),DEL(4),NP(4),ALFA(4),PP(4),T(5,5),Z(50),IRP(4)
DIMENSION L(44),CI(156),FF(156),G(4),AL(4,4),SV(4),RV(4),MPL1(2)
DIMENSION RB(4),AB(4),SP(4),RP(4),TK6(4,4),MPL(2),MPZ(3)
DIMENSION VELT(9),VEL(4),ENO(132),ECO(88),TT(4),DET(2),DINC(156)
DIMENSION SK1(12),AK2(12,4),SS(4),SRR(3,4),SK3(3,4),AK4(12,4)
OPEN(1,FILE='ENTRADA.DAT',STATUS='OLD',ACCESS='SEQUENTIAL',FORM='F
*ORMATTED')
OPEN(2,FILE='SAIDA.DAD',STATUS='NEW',ACCESS='SEQUENTIAL',FORM='FOR
*MATTED')
OPEN(3,FILE='MATRIMA.DAD',STATUS='NEW',ACCESS='SEQUENTIAL',FORM='U
*NFORMATTED')
LEI=1
IMP=2
```

C==== DADOS DO PORTICO

```
READ(LEI,10)IR,IEN,ICTP,ICTV
10 FORMAT(4I2)
READ(LEI,16)IENFX,IENGF,IENVF
16 FORMAT(3I2)
READ(LEI,12)ITMAX,IPI,ICAR
12 FORMAT(3I2)
READ(LEI,11)NA,NT,NV,NU,Q,P,F,HT,C
11 FORMAT(4I2,5F10.0)
WRITE(IMP,15)NA,NT,NV,NU,Q,P,F,HT
15 FORMAT(/,5X,'NUMERO DE ANDARES',17('.'),'=',I2,/,5X,'NUMERO DE TRE
*CHOS',17('.'),'=',I2,/,5X,'NUMERO DE VAOS DO PORTICO',9('.'),'=',I
*2,/,5X,'NUMERO DE PRUMADAS DO PORTICO',5('.'),'=',I2,/,5X,'CARREGA
*MENTO LATERAL DISTRIBUIDO',2('.'),'=',G15.7,/,5X,'CARREGAMENTO VER
*TICAL TOTAL',7('.'),'=',G15.7,/,5X,'CARREGAMENTO LATERAL CONCENTRA
*DO',2('.'),'=',G15.7,/,5X,'ALTURA TOTAL',22('.'),'=',G15.7,/)
IF(IR.EQ.1) GO TO 31
WRITE(IMP,32)
32 FORMAT(//,5X,'PORTICO COM NOS PUNTUAIS')
GO TO 36
31 WRITE(IMP,33)
33 FORMAT(//,5X,'PORTICO COM NOS RIGIDOS')
36 IF(IEN.EQ.1) GO TO 34
WRITE(IMP,35)
35 FORMAT(5X,'PORTICO')
GO TO 37
34 WRITE(IMP,38)
38 FORMAT(5X,'PORTICO GERAL')
37 IF(ICTP.EQ.1) THEN
WRITE(IMP,41)
41 FORMAT(5X,'CONSIDERADO O EFEITO DA CORTANTE NOS PILARES')
END IF
IF(ICTV.EQ.1) THEN
WRITE(IMP,42)
42 FORMAT(5X,'CONSIDERADO O EFEITO DA CORTANTE NAS VIGAS')
```

```

END IF
NZ=NU+1
IF(IENFX.EQ.1) THEN
DO 73 IL=1,NU
ARE(IL)=0.
73 JSP(IL)=0.
READ(LEI,51)CFI
51 FORMAT(F10.0)
IF(IENVF-0)52,52,53
53 DO 54 I=1,NU
54 READ(LEI,55)ARE(I)
55 FORMAT(F10.0)
52 IF(IENGF-0)56,56,57
57 DO 58 II=1,NU
58 READ(LEI,59)JSP(II)
59 FORMAT(F10.0)
56 CONTINUE
DO 62 IJ=1,NU
62 WRITE(IMP,64)IJ,ARE(IJ),IJ,JSP(IJ)
64 FORMAT(/,5X,'AREA DA SAPATA ',I2,' =',G15.7,1X,'MOM. DE INERCIA ',
*I2,' =',G15.7)
END IF
DO 20 I=1,NV
READ(LEI,30)KK,D(KK)
30 FORMAT(I2,F10.0)
20 CONTINUE
WRITE(IMP,40)
40 FORMAT(/,5X,'DISTRIBUICAO DO CARREGAMENTO VERTICAL',/,5X,37('*'),
*/)
DO 310 J=1,NU
READ(LEI,320)ALFA(J),IRP(J)
320 FORMAT(F10.0,I1)
PP(J)=ALFA(J)*P
WRITE(IMP,330)J,PP(J)
330 FORMAT(5X,'CARGA VERTICAL NO PILAR ',I2,2X,G15.7)
310 CONTINUE
DO 8 JJ=1,NU
IF(IRP(JJ).EQ.0)GO TO 8
WRITE(IMP,63)JJ
63 FORMAT(/,5X,'CONSIDERADA APENAS A DIMENSAO HORIZONTAL DO NO RIGID
*O ',I2)
8 CONTINUE
DO 50 I=1,NT
READ(LEI,60)HM(I),E(I),NATRE(I),CE,G(I)
60 FORMAT(2F10.0,I3,2F10.0)
HTRE(I)=NATRE(I)*HM(I)
CT=(3.-IEN)*HM(I)
IF(HTRE(I).LT.CT) GO TO 100
IF(CE.EQ.1.) GO TO 105
GO TO 80
105 READ(LEI,70)DEL(I)
70 FORMAT(F10.0)
GO TO 90
80 DEL(I)=HM(I)
90 IAA=HTRE(I)*10
IBB=DEL(I)*10
NS(I)=IAA/IBB
GO TO 110
100 IF(CE.EQ.1.) GO TO 198

```

```

      NS(I)=3-IEN
      DEL(I)=HTRE(I)/NS(I)
      GO TO 110
198 READ(LEI,199)DEL(I)
199 FORMAT(F10.0)
      NS(I)=HTRE(I)/DEL(I)
110 NP(I)=NS(I)+3+IEN
      WRITE(IMP,120)I
120 FORMAT(//,5X,'T R E C H O   D E   N U M E R O           ',I2,/,5X,36('*'),
      */,)
      WRITE(IMP,121)G(I)
121 FORMAT(/,5X,'MODULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL',4('.'),'=' ,G15.7)
      WRITE(IMP,130)E(I),HM(I),HTRE(I),NATRE(I),NS(I),DEL(I),NP(I)
130 FORMAT(5X,'MODULO DE ELASTICIDADE',16('.'),'=' ,G15.7,/,5X,'ALTURA
*DO ANDAR NO TRECHO',13('.'),'=' ,G15.7,/,5X,'ALTURA TOTAL DO TRECHO
*',16('.'),'=' ,G15.7,/,5X,'NUMERO DE ANDARES DO TRECHO',11('.'),'='
*,I2,/,5X,'NUMERO DE SUBDIVISOES DO TRECHO',7('.'),'=' ,I2,/,5X,'ESP
*ACAMENTO ENTRE OS PONTOS DO TRECHO','.=' ,G15.7,/,5X,'NUMERO DE PON
*ITOS DO TRECHO',12('.'),'=' ,I2)
50 CONTINUE
      NPT=0
      DO 340 J=1,NT
340 NPT=NPT+NP(J)
      NI=NPT*(NU+1)
      WRITE(IMP,350)NPT,NI
350 FORMAT(//,5X,'NUMERO TOTAL DE PONTOS',15('.'),'=' ,I3,/,5X,'NUMERO
*DE INCOGNITAS',18('.'),'=' ,I3)
      DO 470 J=1,NI
      DO 470 L1=1,NI
470 MD(J,L1)=0.
C==== PRIMEIRAS (NU+1) LINHAS DA MATRIZ MD
      L2=IEN*(NU+1)+NU+2
      MD(1,L2)=1.
      IF(IENVF.EQ.1) GO TO 482
      DO 480 I=1,NU
480 MD(I+1,L2+I)=1.
482 KL=1+IEN
      IN=0
      NR=0
      NH=0
      LM=NPT-2*NT+2
      DO 360 J=1,NI
360 CI(J)=0.
      DO 370 J=1,LM
370 Z(J)=0.
      DO 490 I=1,NT
      SO=0.
C==== LEITURA DO ANDAR GENERICO DE CADA TRECHO
      WRITE(IMP,491)I
491 FORMAT(//,5X,'DADOS DO ANDAR GENERICO DO TRECHO           ',I2,/,5X,37('*')
      */,)
      DO 140 J=1,NV
      READ(LEI,150)KK,AV(KK),EV(KK)
150 FORMAT(I2,2F10.0)
      IV(KK)=(EV(KK)*AV(KK)**3)/12.
      KV(KK)=IV(KK)/D(KK)
      WRITE(IMP,160)KK
160 FORMAT(/,5X,'VAO           ',I2,/,5X,8('*'))
      WRITE(IMP,170)AV(KK),EV(KK),IV(KK),KV(KK),D(KK)

```



```

170 FORMAT(/,5X,'ALTURA DA VIGA',14('.'),'=' ,G15.7,/,5X,'ESPESSURA DA
*VIGA',11('.'),'=' ,G15.7,/,5X,'MOMENTO DE INERCIA DA VIGA','..' ,G1
*5.7,/,5X,'PARAMETRO KV',16('.'),'=' ,G15.7,/,5X,'COMPRIMENTO DO VAO
*',10('.'),'=' ,G15.7)
C==== CALCULO DAS AREAS DOS LINTEIS
AL(I,KK)=AV(KK)*EV(KK)
WRITE(IMP,141)AL(I,KK)
141 FORMAT(5X,'AREA DA VIGA',16('.'),'=' ,G15.7)
140 CONTINUE
DO 180 JJ=1,NU
READ(LEI,185)KK,B(KK),EP(KK)
185 FORMAT(I2,2F10.0)
IP(KK)=(EP(KK)*B(KK)**3)/12.
IPP(I,KK)=IP(KK)
KP(KK)=IP(KK)/HM(I)
IF(IRP(JJ).EQ.1)GO TO 196
IF(IR.NE.1)THEN
TV(KK)=0.
GO TO 195
END IF
196 TV(KK)=B(KK)/2.
195 WRITE(IMP,190)KK
190 FORMAT(//,5X,'PRUMADA ',I2,/,5X,12('*'))
WRITE(IMP,200)B(KK),EP(KK),IP(KK),KP(KK),TV(KK)
200 FORMAT(/,5X,'LARGURA DO PILAR',22('.'),'=' ,G15.7,/,5X,'ESPESSURA D
*O PILAR',20('.'),'=' ,G15.7,/,5X,'MOMENTO DE INERCIA DO PILAR',11('
*.'),'=' ,G15.7,/,5X,'PARAMETRO KP',26('.'),'=' ,G15.7,/,5X,'SEMI LAR
*GURA DO TRECHO RIGIDO DA VIGA','..' ,G15.7)
C==== CALCULO DAS AREAS DOS PILARES
S(I,KK)=B(KK)*EP(KK)
WRITE(IMP,240)S(I,KK)
240 FORMAT(5X,'AREA DO PILAR',25('.'),'=' ,G15.7)
180 CONTINUE
C==== CALCULO DE CV(NV),TP(NV),HB(NU),RO(NU),RB(NU),SV(NV),RV(NV),SP(NU)
C==== RP(NU)
DO 260 L1=1,NV
CV(L1)=D(L1)-(TV(L1)+TV(L1+1))
IF(ICTV.EQ.1)THEN
SV(L1)=6.*C*E(I)*IV(L1)/(AL(I,L1)*G(I)*CV(L1))
AXX=AL(I,L1)*G(I)*CV(L1)**2+12.*C*E(I)*IV(L1)
RV(L1)=AL(I,L1)*G(I)*CV(L1)**2/AXX
ELSE
SV(L1)=0.
RV(L1)=1.
END IF
IVC(L1)=RV(L1)*IV(L1)
KVC(L1)=RV(L1)*KV(L1)
KVCC(I,L1)=KVC(L1)
WRITE(IMP,250)L1,CV(L1),SV(L1),RV(L1),IVC(L1),KVC(L1)
250 FORMAT(//,5X,'COMPRIMENTO DO TRECHO FLEXIVEL DA VIGA..',I2,'..' ,G1
*5.7,/,5X,'PARAMETRO SV',32('.'),G15.7,/,5X,'PARAMETRO RV',32('.'),
*G15.7,/,5X,'IVC(L1)=' ,G15.7,/,5X,'KVC(L1)=' ,G15.7)
260 CONTINUE
IF(IR.NE.1)THEN
DO 265 L2=1,NU
265 TP(L2)=0.
GO TO 275
END IF
TP(1)=AV(1)/2.

```

```

TP(NU)=AV(NV)/2.
IF(NV.EQ.1) GO TO 275
NO=NV-1
DO 270 LL=1,NO
DI=AV(LL)-AV(LL+1)
IF(DI.LT.0.) THEN
AA=AV(LL+1)
GO TO 280
END IF
AA=AV(LL)
280 TP(LL+1)=AA/2.
270 CONTINUE
275 DO 290 L1=1,NU
HB(L1)=HM(I)-2.*TP(L1)
IF(ICTP.EQ.1) THEN
SP(L1)=6.*C*E(I)*IP(L1)/(S(I,L1)*G(I)*HB(L1))
AXY=S(I,L1)*G(I)*HB(L1)**2+12.*C*E(I)*IP(L1)
RP(L1)=S(I,L1)*G(I)*HB(L1)**2/AXY
ELSE
SP(L1)=0.
RP(L1)=1.
END IF
X1=(HM(I)/HB(L1))**3
X2=(HB(L1)+2.*(TP(L1)-SP(L1))*RP(L1))/RP(L1)
RB(L1)=X1*(X2/HM(I))
AB(L1)=HM(I)-2.*TP(L1)
Y1=(HM(I)/AB(L1))**3
Y2=(AB(L1)+2.*(TP(L1)-SP(L1))*RP(L1))/RP(L1)
RO(L1)=Y1*(Y2/HM(I))
WRITE(IMP,300)TP(L1),HB(L1),RO(L1),SP(L1),RP(L1)
300 FORMAT(/,5X,'SEMI-LARGURA DO TRECHO RIGIDO DO PILAR.....=',G15.7,/,
*,5X,'COMPRIMENTO DO TRECHO FLEXIVEL DO PILAR...=',G15.7,/,5X,'PARA
*METRO RO',30('.'),'=',G15.7,/,5X,'PARAMETRO SP',G15.7,/,5X,'PARAME
*TRO RP',G15.7)
IPC(L1)=RP(L1)*IP(L1)
KPC(L1)=RP(L1)*KP(L1)
KPPC(I,L1)=6.*E(I)*KPC(L1)*RO(L1)
WRITE(IMP,291)IPC(L1),KPC(L1)
291 FORMAT(5X,'PARAMETRO IPC',G15.7,/,5X,'PARAMETRO KPC',G15.7)
290 CONTINUE
C==== MONTAGEM DA MATRIZ DAS DIFERENCAS FINITAS
DO 500 J=1,NP(I)
L(J)=0
500 L(J)=NR+J+(NR+J-1)*NU
C==== MONTAGEM DA MATRIZ T(NU+1,NU+1)
DO 530 II=1,NZ
DO 530 JJ=1,NZ
530 T(II,JJ)=0.
DO 540 KK=2,NZ
540 T(KK,KK)=E(I)
ICA=2
IF(I.EQ.1) ICA=1
LN=ICA*NU+1
IN=IN+LN
I1=IN+1
IF(IEN.EQ.1) GO TO 2666
C==== EQUACAO COMPLEMENTAR
MD(I1,L(1))=1.
MD(I1,L(2))=-5.

```

```

MD(I1,L(3))=10.
MD(I1,L(4))=-10.
MD(I1,L(5))=5.
MD(I1,L(6))=-1.
IN=IN+1
GO TO 2777
2666 IF(I.NE.1) GO TO 2888
C==== DERIVADA PRIMEIRA DE U E NULA NA BASE
IF(IENGF.EQ.1) THEN
IFLX=I1
GO TO 2887
END IF
MD(I1,L(1))=1.
MD(I1,L(2))=-8.
MD(I1,L(4))=8.
MD(I1,L(5))=-1.
2887 IN=IN+1
LAA=1
GO TO 2999
2888 IN=IN+2
LAA=2
GO TO 2999
IF(P.NE.0.0) THEN
IF(NU-2)3888,3888,3889
3889 LAA=3
END IF
2999 DO 550 LA=LAA,NU
J1=IN+LA
MD(J1,L(1)+LA)=1.
MD(J1,L(2)+LA)=-5.
MD(J1,L(3)+LA)=10.
MD(J1,L(4)+LA)=-10.
MD(J1,L(5)+LA)=5.
MD(J1,L(6)+LA)=-1.
550 CONTINUE
3888 CONTINUE
IN=IN+NU
C==== CALCULO DA MATRIZ MS(NU+1,NU+1) E DA LINHA 1 DE T(NU+1,NU+1)
2777 CALL RIGSF(I, IEN,KPC, RB,RO, IP,RV, SV,TV, NU,D, CV,KVC, NV, E, HM, S, MS, NZ
*,K5,K6,VEL,MAL,SS,K2)
IF(IENFX.EQ.1.AND.I.EQ.1) GO TO 76
GO TO 75
76 CALL ENGFLE(IENGF, IENVF, NU, CFI, ARE, JSP, S, E, K5, K6, SS, K2, L, IFLX, DEL,
*MD)
75 MSS(I)=MS(1,1)
DO 5699 JJU=2,NZ
5699 SRR(I, JJU-1)=MS(1, JJU)
NUE=(I-1)*NV
DO 581 J=1, NV
NPE=NUE+J
VELT(NPE)=VEL(J)
DO 582 JJ=1, NU
MALT(NPE, JJ)=MAL(J, JJ)
582 CONTINUE
581 CONTINUE
DO 560 JJ=1, NU
SK3(I, JJ)=MS(JJ+1, 1)
IJ=(I-1)*NU+JJ
SK1(IJ)=SS(JJ)

```

```

DO 570 KJ=1,NU
AK2(IJ,KJ)=K2(JJ,KJ)
570 AK4(IJ,KJ)=MS(JJ+1,KJ+1)
560 CONTINUE
T(1,1)=-K5
TT(I)=T(1,1)
DO 591 IA=1,NU
IB=IA+1
T(1,IB)=-K6(IA)
TK6(I,IA)=K6(IA)
591 CONTINUE
IF(IEN.EQ.0) THEN
C==== EQUACAO PARA O PONTO DA BASE
KL=KL+1
Z(KL)=HT-NH-SO*DEL(I)
SO=SO+1.
CAUX=MS(1,1)-P*Z(KL)
DO 610 II=1,NZ
II2=IN+1
MM1=2
IF(II.EQ.1) MM1=1
GO TO (612,613)MM1
612 P1=DEL(I)*CAUX
GO TO 614
613 P1=DEL(I)*MS(II,1)
614 MD(II2,L(1))=-3.*P1
MD(II2,L(2))=-10.*P1
MD(II2,L(3))=18.*P1
MD(II2,L(4))=-6.*P1
MD(II2,L(5))=P1
DO 620 J=1,NU
JJ=J+1
J1=L(1)+J
J2=L(2)+J
J3=L(3)+J
J4=L(4)+J
J5=L(5)+J
MD(II2,J1)=11.*T(II,JJ)
MD(II2,J2)=12.*MS(II,JJ)*DEL(I)**2-20.*T(II,JJ)
MD(II2,J3)=6.*T(II,JJ)
MD(II2,J4)=4.*T(II,JJ)
MD(II2,J5)=-T(II,JJ)
620 CONTINUE
IN=IN+1
610 CONTINUE
END IF
C==== EQUACAO PARA OS PONTOS CENTRAIS
NW=NP(I)-2
DO 630 M=3,NW
M1=L(M-2)
M2=L(M-1)
M3=L(M)
M4=L(M+1)
M5=L(M+2)
KL=KL+1
Z(KL)=HT-NH-SO*DEL(I)
SO=SO+1.
CAUX=MS(1,1)-P*Z(KL)
DO 640 MM=1,NZ

```

```

II3=IN+1
MM1=2
IF(MM.EQ.1) MM1=1
GO TO (631,632)MM1
631 P2=DEL(I)*CAUX
GO TO 633
632 P2=DEL(I)*MS(MM,1)
633 MD(II3,M1)=P2-6.*T(MM,1)/DEL(I)
MD(II3,M2)=-8.*P2+12.*T(MM,1)/DEL(I)
MD(II3,M4)=8.*P2-12.*T(MM,1)/DEL(I)
MD(II3,M5)=-P2+6.*T(MM,1)/DEL(I)
DO 650 NN=1,NU
MN=NN+1
N1=M1+NN
N2=M2+NN
N3=M3+NN
N4=M4+NN
N5=M5+NN
MD(II3,N1)=-T(MM,MN)
MD(II3,N2)=16.*T(MM,MN)
MD(II3,N3)=12.*MS(MM,MN)*DEL(I)**2-30.*T(MM,MN)
MD(II3,N4)=16.*T(MM,MN)
MD(II3,N5)=-T(MM,MN)
650 CONTINUE
IN=IN+1
640 CONTINUE
630 CONTINUE
C==== EQUACAO PARA O PONTO DO TOPO
KL=KL+1
Z(KL)=HT-NH-SO*DEL(I)
SO=SO+1.
CAUX=MS(1,1)-P*Z(KL)
LO=L(NP(I)-4)
L1=L(NP(I)-3)
L2=L(NP(I)-2)
L3=L(NP(I)-1)
L4=L(NP(I))
DO 655 IJ=1,NZ
II4=IN+1
MM1=2
IF(IJ.EQ.1)MM1=1
GO TO (656,657)MM1
656 P3=DEL(I)*CAUX
GO TO 658
657 P3=DEL(I)*MS(IJ,1)
658 MD(II4,LO)=-P3+6.*T(IJ,1)/DEL(I)
MD(II4,L1)=6.*P3-36.*T(IJ,1)/DEL(I)
MD(II4,L2)=-18.*P3+72.*T(IJ,1)/DEL(I)
MD(II4,L3)=10.*P3-60.*T(IJ,1)/DEL(I)
MD(II4,L4)=3.*P3+18.*T(IJ,1)/DEL(I)
DO 660 IK=1,NU
L5=LO+IK
L6=L1+IK
L7=L2+IK
L8=L3+IK
L9=L4+IK
MO=IK+1
MD(II4,L5)=-T(IJ,MO)
MD(II4,L6)=4.*T(IJ,MO)

```

```

MD(II4,L7)=6.*T(IJ,MO)
MD(II4,L8)=12.*MS(IJ,MO)*DEL(I)**2-20.*T(IJ,MO)
MD(II4,L9)=11.*T(IJ,MO)
660 CONTINUE
IN=IN+1
655 CONTINUE
NR=NR+NP(I)
NH=NH+HTRE(I)
IF(I.EQ.NT) GO TO 670
GO TO 490
C==== CONDICOES DE CONTORNO NO TOPO
670 IF(IEN.EQ.1) THEN
II6=IN+1
MD(II6,LO)=-1.
MD(II6,L1)=4.
MD(II6,L2)=6.
MD(II6,L3)=-20.
MD(II6,L4)=11.
IN=IN+1
END IF
DO 680 JM=1,NU
II5=IN+1
N1=LO+JM
N2=L1+JM
N3=L2+JM
N4=L3+JM
N5=L4+JM
MD(II5,N1)=-1.
MD(II5,N2)=6.
MD(II5,N3)=-18.
MD(II5,N4)=10.
MD(II5,N5)=3.
680 IN=IN+1
490 CONTINUE
IF(NT.EQ.1) GO TO 711
C==== CONDICOES DE COMPATIBILIDADE
CALL CONDCP(NT,NP,NU,IEN,NZ,DEL,E,S,TT,TK6,D,P,MD,MPL,MPL1)
711 CONTINUE
REWIND 3
WRITE(3)MD
C==== CALCULO DO VETOR INDEPENDENTE
KL=1+IEN
IN=0
DO 380 I=1,NT
IA=2+IEN
IAI=2
IF(I.EQ.1) IAI=1+IEN
IF(IEN.EQ.1) IAI=IA
LN=IA*NU+IAI
IN=IN+LN
N1=NP(I)-1
NN=2+IEN
DO 400 N=NN,N1
KL=KL+1
CI(IN+1)=12.*(F+Q*Z(KL))*DEL(I)**2
DO 410 KK=2,NZ
KM=KK-1
QQ=PP(KM)/S(I,KM)
410 CI(IN+KK)=12.*QQ*DEL(I)**2

```

```

      IN=IN+NZ
      IF(N.EQ.N1) MPZ(I)=KL
400  CONTINUE
380  CONTINUE
      IF(IEN.EQ.1.AND.NT.NE.1) THEN
      DT=0.
      DO 6381 II=1,NV
6381 DT=DT+D(II)
      DO 6380 I=1,NT-1
6380 CI(MPL(I))=-P*Z(MPZ(I))
      END IF
      DO 444 IL=1,NI
      444 FF(IL)=CI(IL)
C===== RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
      CALL SOLUSI(NI,MD,FF)
C===== IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS
      WRITE(IMP,800)
      800 FORMAT(/,5X,'DESLOCAMENTOS DO PORTICO',/,5X,24('*'),/,/,10X,'NIVEL'
      *,6X,'DESLOCAMENTO U',/)
      NR=0
      NR1=0
      NM=0
      DO 810 I=1,NT
      NDPF=NP(I)-1
      NPI=(NR+2+IEN)*(NU+1)-NU
      II=2+IEN
      DO 820 J=II,NDPF
      JJ=NR1-NM+J
      HP=HT-Z(JJ)
      WRITE(IMP,830)HP,FF(NPI)
      830 FORMAT(5X,G15.7,1X,G15.7)
      NPI=NPI+NU+1
      820 CONTINUE
      NR=NR+NP(I)
      I2=0
      IF(I.NE.1) I2=1+IEN
      NR1=NR1+NDPF-I2
      NM=1+IEN
      810 CONTINUE
      DO 840 LL=1,NU
      WRITE(IMP,801)LL
      801 FORMAT(/,10X,'NIVEL',6X,'DESLOCAMENTO V',I2,/)
      NR=0
      NR1=0
      NM=0
      DO 811 I=1,NT
      NDPF=NP(I)-1
      NPI=(NR+2+IEN)*(NU+1)-NU+LL
      II=2+IEN
      DO 821 J=II,NDPF
      JJ=NR1-NM+J
      HP=HT-Z(JJ)
      WRITE(IMP,831)HP,FF(NPI)
      831 FORMAT(5X,G15.7,G15.7)
      NPI=NPI+NU+1
      821 CONTINUE
      NR=NR+NP(I)
      I2=0
      IF(I.NE.1) I2=1+IEN

```

```

NR1=NR1+NDPF-I2
NM=1+IEN
811 CONTINUE
840 CONTINUE
NWW=NPT*NU
NW1=NPT*NV
CALL ESFOR(NPT,HT,IEN,NU,NT,NP,E,S,FF,DEL,HM,KPPC,Z,IPP,SK1,AK2,NA
*TRE,ENO,NWW)
CALL ESFOR1(NPT,HT,IEN,NV,NT,NP,NU,VELT,MALT,HM,FF,DEL,Z,ECO,NW1)
IF(ICAR.EQ.1) GO TO 1030
C==== CALCULO DA CARGA CRITICA DE INSTABILIDADE
REWIND 3
READ(3)MD
XO=0.
X1=0.05
JD=1
DO 900 JJ=1,2
PPP=XO
IF(JJ.NE.1) PPP=X1
CALL MATMD(PPP,IEN,NT,NU,NP,MSS,DEL,Z,TT,MD)
CALL DETERM(JD,NI,MD,DINC,DD,DETT)
IF(DABS(DETT).GT.1.0E-04) GO TO 910
X=PPP
FX=DETT
GO TO 950
910 DET(JJ)=DETT
JD=JD+1
900 CONTINUE
FO=DET(1)
F1=DET(2)
IF(IPI.NE.1) GO TO 920
WRITE(IMP,930)
930 FORMAT(/,5X,'ITE',8X,'P',15X,'DET')
920 DO 940 INTE=1,ITMAX
X=(XO*F1-X1*FO)/(F1-FO)
PPP=X
CALL MATMD(PPP,IEN,NT,NU,NP,MSS,DEL,Z,TT,MD)
CALL DETERM(JD,NI,MD,DINC,DD,DETT)
FX=DETT
IF(IPI.NE.1) GO TO 960
WRITE(IMP,970)INTE,X,FX
970 FORMAT(/,6X,I2,2X,G15.7,1X,G15.7)
960 IF(DABS(FX).LE.1.0E-06) GO TO 950
XO=X1
FO =F1
X1=X
F1=FX
JD=JD+1
940 CONTINUE
C==== IMPRESSAO DOS RESULTADOS FINAIS
WRITE(IMP,980)
980 FORMAT(/,5X,'EXCEDIDO NUMERO MAXIMO DE ITERACOES')
WRITE(IMP,990)
990 FORMAT(/,5X,'VALORES OBTIDOS NA ULTIMA ITERACAO')
GO TO 1010
950 WRITE(IMP,1000)
1000 FORMAT(/,5X,19('-'),/,5X,'RESULTADOS FINAIS',/,5X,19('-'))
1010 WRITE(IMP,1020)X,FX,INTE
1020 FORMAT(/,5X,'CARGA CRITICA',9X,'=',G15.7,/,5X,'VALOR DO DETERMINAN

```



```
*TE =',G15.7,/,5X,'TOTAL DE ITERACOES    =',I2)
1030 CONTINUE
      CLOSE(3)
      STOP
      END
```

85- 12

```

C===== SUBROTINA PARA O CALCULO DA MATRIZ MS(NU+1,NU+1) =====
SUBROUTINE RIGSF(I, IEN, KPC, RB, RO, IP, RV, SV, TV, NU, D, CV, KVC, NV, E, HM, S
*, MS, NZ, K5, K6, VEL, MAL, SS, K2)
IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
REAL*8 KVC(4), KPC(4), MS(5,5), K(4,4), NI(4), KI(4), KG(4)
REAL*8 KR(4), KB(4,4), K1(4,4), K2(4,4), KS(4,4), MAL(4,4)
REAL*8 IP(4), K5, K6(4), NIB(4), KIB(4), KL1(4,4), KL2(4,4)
DIMENSION AX(4), RV(4), SV(4), AXM(4,4)
DIMENSION D(4), HM(4), E(4), S(4,4), CV(4), RO(4), TV(4), SR(4)
DIMENSION GM(4), GB(4), BB(4,4), AU(4,4), BX(4), BI(4,4)
DIMENSION RB(4), BBB(4,4), AUU(4,4), VEL(4), SS(4)
C===== MONTAGEM DA MATRIZ K(NU,NU)
IMP=2
K5=0.
DO 5 IA=1,NU
5 K6(IA)=0.
DO 10 LA=1,NU
DO 10 LB=1,NU
10 K(LA, LB)=0.
DO 20 LC=1,NU
K(LC, LC)=KPC(LC)*(RB(LC)+RO(LC))
20 CONTINUE
C===== CALCULO DA MATRIZ KB DE ORDEM (NU X NU)
DO 60 LO=1,NV
XI1=(CV(LO)**2)/(3.*RV(LO))
XI2=TV(LO)-SV(LO)
XI3=TV(LO+1)-SV(LO)
XI4=CV(LO)/RV(LO)
XI5=D(LO)/(CV(LO)**3)
GM(LO)=XI5*(0.5*XI4*(TV(LO)+XI2*RV(LO))+XI1+TV(LO)*XI2)
GB(LO)=XI5*(0.5*XI4*(TV(LO+1)+XI3*RV(LO))+XI1+TV(LO+1)*XI3)
NI(LO)=XI5*(XI4*(XI2*RV(LO)+TV(LO+1))+XI1+2.*TV(LO+1)*XI2)
NIB(LO)=XI5*(XI4*(XI3*RV(LO)+TV(LO))+XI1+2.*TV(LO)*XI3)
KI(LO)=KVC(LO)*NI(LO)
KIB(LO)=KVC(LO)*NIB(LO)
KG(LO)=KVC(LO)*GM(LO)
KR(LO)=KVC(LO)*GB(LO)
60 CONTINUE
DO 90 MP=1,NU
DO 90 MQ=1,NU
90 KB(MP, MQ)=0.
KB(1,1)=2.*KG(1)
KB(1,2)=KI(1)
KB(2,1)=KIB(1)
DO 100 II=1,NV
IF(II.EQ.NV)GO TO 110
KB(II+1, II+1)=2.*KR(II)+2.*KG(II+1)
KB(II+1, II+2)=KI(II+1)
KB(II+2, II+1)=KIB(II+1)
GO TO 100
110 KB(II+1, II+1)=2.*KR(II)
100 CONTINUE
C===== CALCULO DA MATRIZ BB DE ORDEM (NU X NU)
DO 170 J=1,NU
DO 170 M=1,NU
170 BB(J, M)=0.
BB(1,1)=(2.*KG(1)+KIB(1))/D(1)
BB(1,2)=-BB(1,1)
DO 180 J=1,NV
BB(J+1, J)=(2.*KR(J)+KIB(J))/D(J)

```

```

        IF(J.EQ.NV) GO TO 190
        BB(J+1,J+2)=- (2.*KG(J+1)+KIB(J+1))/D(J+1)
        BB(J+1,J+1)=-BB(J+1,J)-BB(J+1,J+2)
        GO TO 180
190    BB(J+1,J+1)=-BB(J+1,J)
180    CONTINUE
C==== CALCULO DA MATRIZ BBB DE ORDEM (NU X NU)
        DO 223 J=1,NU
        DO 223 M=1,NU
223    BBB(J,M)=0.
        BBB(1,1)=(KI(1)-KIB(1))/D(1)
        BBB(1,2)=-BBB(1,1)
        DO 225 J=1,NV
        BBB(J+1,J)=(KIB(J)-KI(J))/D(J)
        IF(J.EQ.NV) GO TO 227
        BBB(J+1,J+2)=- (KI(J+1)-KIB(J+1))/D(J+1)
        BBB(J+1,J+1)=-BBB(J+1,J)-BBB(J+1,J+2)
        GO TO 225
227    BBB(J+1,J+1)=-BBB(J+1,J)
225    CONTINUE
C==== CALCULO DAS MATRIZES K1 E K2 DE ORDEM (NU X NU)
        DO 230 LV=1,NU
        DO 230 LM=1,NU
        AU(LV,LM)=K(LV,LM)+KB(LV,LM)
        AUU(LV,LM)=BB(LV,LM)+BBB(LV,LM)
230    CONTINUE
        CALL GJRSIS(NU,AU)
        DO 300 IK=1,NU
        DO 300 JK=1,NU
        K1(IK,JK)=0.
        K2(IK,JK)=0.
        DO 300 KK=1,NU
        K1(IK,JK)=K1(IK,JK)+AU(IK,KK)*K(KK,JK)
300    K2(IK,JK)=K2(IK,JK)+AU(IK,KK)*AUU(KK,JK)
        DO 25 JJ=1,NU
        SS(JJ)=0.
        DO 35 JL=1,NU
35    SS(JJ)=SS(JJ)+K1(JJ,JL)
25    CONTINUE
C==== MONTAGEM DA MATRIZ KL1 E KL2 DE ORDEM (NV X NU)
        DO 305 LV=1,NV
        DO 305 LM=1,NU
        KL1(LV,LM)=0.
305    KL2(LV,LM)=0.
        DO 315 J=1,NV
        AZZ=KIB(J)+2.*KG(J)
        AWW=KI(J)+2.*KR(J)
        AYY=6.*E(I)/(HM(I)*D(J))
        KL1(J,J)=AZZ*AYY
        KL1(J,J+1)=AWW*AYY
        KL2(J,J)=(AZZ+AWW)*AYY/D(J)
315    KL2(J,J+1)=-KL2(J,J)
C==== CALCULO DO VETOR VEL(NV) E DA MATRIZ MAL(NV X NU)
        DO 375 IK=1,NV
        DO 375 JK=1,NU
        AXM(IK,JK)=0.
        DO 375 KK=1,NU
375    AXM(IK,JK)=AXM(IK,JK)+KL1(IK,KK)*K1(KK,JK)
        DO 385 IK=1,NV
        VEL(IK)=0.

```

```

DO 385 JK=1,NU
385 VEL(IK)=VEL(IK)+AXM(IK,JK)
DO 395 IK=1,NV
DO 395 JK=1,NU
AXM(IK,JK)=0.
DO 395 KK=1,NU
395 AXM(IK,JK)=AXM(IK,JK)+KL1(IK,KK)*K2(KK,JK)
DO 405 IK=1,NV
DO 405 JK=1,NU
405 MAL(IK,JK)=AXM(IK,JK)-KL2(IK,JK)
C==== CALCULO DE SF-BARRA
DO 370 IU=1,NU
BX(IU)=0.
DO 380 IX=1,NU
BI(IU,IX)=0.
380 CONTINUE
370 CONTINUE
DO 390 IX=1,NU
AX(IX)=0.
DO 400 JX=1,NU
AX(IX)=AX(IX)+6.*E(I)*KB(JX,IX)/HM(I)
400 CONTINUE
DO 410 JY=1,NU
410 BX(JY)=BX(JY)+AX(IX)*K1(IX,JY)
390 CONTINUE
SB=0.
DO 450 LX=1,NU
450 SB=SB+BX(LX)
DO 470 IU=1,NU
DO 470 IX=1,NU
470 AU(IU,IX)=0.
C==== CALCULO DO VETOR S-BARRA (SR(NU))
DO 480 IW=1,NU
DO 480 JW=1,NU
DO 480 KW=1,NU
480 AU(IW,JW)=AU(IW,JW)+KB(IW,KW)*K2(KW,JW)
DO 520 LW=1,NU
DO 520 LU=1,NU
520 BI(LW,LU)=AU(LW,LU)-BB(LW,LU)
DO 555 LW=1,NU
SR(LW)=0.
DO 560 LU=1,NU
560 SR(LW)=SR(LW)+6.*E(I)*BI(LU,LW)/HM(I)
555 CONTINUE
C==== MONTAGEM DA MATRIZ DO SISTEMA DE EQUACOES
DO 720 LU=1,NZ
DO 720 LP=1,NZ
720 MS(LU,LP)=0.
DO 730 L=1,NU
AX(L)=0.
DO 740 J=1,NU
740 AX(L)=AX(L)+K1(L,J)
730 CONTINUE
MS(1,1)=SB
DO 760 L=1,NU
J=L+1
760 MS(1,J)=SR(L)
DO 770 L=1,NU
J=L+1
DO 770 KL=1,NU

```

```

770 MS(J,1)=MS(J,1)+6.*E(I)*BB(KL,L)*AX(KL)/(S(I,L)*HM(I))
C===== MONTAGEM DA MATRIZ KS DE ORDEM NUXNU
DO 780 L=1,NU
DO 780 J=1,NU
780 KS(L,J)=0.
KS(1,1)=(KI(1)+KIB(1)+2.*(KG(1)+KR(1)))/(D(1)**2)
KS(1,2)=-KS(1,1)
DO 790 L=1,NV
J=L+1
II=L+2
FX=(KI(L)+KIB(L)+2.*(KG(L)+KR(L)))/(D(L)**2)
IF(L.EQ.NV) GO TO 785
GX=(KI(J)+KIB(J)+2.*(KG(J)+KR(J)))/(D(J)**2)
KS(J,J)=FX+GX
KS(J,II)=-GX
GO TO 790
785 KS(J,J)=FX
790 CONTINUE
IM=NU-1
DO 810 IN=1,IM
KZ=IN+1
DO 810 JN=KZ,NU
KS(JN,IN)=KS(IN,JN)
810 CONTINUE
DO 820 JS=1,NU
DO 830 JT=1,NU
AU(JS,JT)=0.
BI(JS,JT)=6.*E(I)*KS(JS,JT)/(S(I,JS)*HM(I))
DO 840 JR=1,NU
840 AU(JS,JT)=AU(JS,JT)+6.*E(I)*BB(JR,JS)*K2(JR,JT)/(S(I,JS)*HM(I))
830 CONTINUE
820 CONTINUE
DO 930 LS=1,NU
DO 930 LT=1,NU
IS=LS+1
IT=LT+1
MS(IS,IT)=AU(LS,LT)-BI(LS,LT)
930 CONTINUE
IF(IEN.EQ.1) THEN
C===== CALCULO DO PARAMETRO K5 E DO VETOR K6(1,NU)
DO 1000 IA=1,NU
BX(IA)=0.
1000 CONTINUE
DO 1080 IA=1,NU
DO 1080 IB=1,NU
BX(IA)=BX(IA)+E(I)*IP(IB)*K1(IB,IA)
1080 CONTINUE
DO 1030 IC=1,NU
1030 K5=K5+BX(IC)
DO 1130 LU=1,NU
DO 1140 JU=1,NU
K6(LU)=K6(LU)+E(I)*IP(JU)*K2(JU,LU)
1140 CONTINUE
1130 CONTINUE
END IF
RETURN
END

```

```

C==== SUBROTINA DE INVERSAO DE MATRIZES
SUBROUTINE GJRSIS(N,A)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION A(4,4),B(4),C(4),IP(4),IQ(4)
IMP=2
DO 111 K=1,N
T=0.
DO 6 I=K,N
S=0.
DO 3 J=K,N
3 S=S+DABS(A(I,J))
IF(S)4,5,4
4 DO 222 J=K,N
IF(DABS(A(I,J))-S*T)222,222,7
7 IP(K)=I
IQ(K)=J
PIVO=A(I,J)
T=DABS(PIVO/S)
222 CONTINUE
6 CONTINUE
IF(T)101,5,101
101 IF(IP(K)-K)8,98,8
8 DO 9 J=1,N
IPK=IP(K)
Z=A(IPK,J)
A(IPK,J)=A(K,J)
9 A(K,J)=Z
98 IF(IQ(K)-K)10,20,10
10 IQK=IQ(K)
DO 11 I=1,N
Z=A(I,IQK)
A(I,IQK)=A(I,K)
11 A(I,K)=Z
20 DO 12 J=1,N
IF(J-K)13,14,13
14 B(J)=1./PIVO
C(J)=1.
GO TO 15
13 B(J)=-A(K,J)/PIVO
C(J)=A(J,K)
15 A(K,J)=0.
12 A(J,K)=0.
DO 111 I=1,N
DO 111 J=1,N
A(I,J)=A(I,J)+C(I)*B(J)
111 CONTINUE
DO 16 KAUX=1,N
K=N-KAUX+1
IF(IP(K)-K)17,18,17
17 DO 102 I=1,N
IPK=IP(K)
Z=A(I,IPK)
A(I,IPK)=A(I,K)
A(I,K)=Z
102 CONTINUE
18 IF(IQ(K)-K)104,16,104
104 DO 103 J=1,N
IQK=IQ(K)
Z=A(IQK,J)
A(IQK,J)=A(K,J)

```

```
      A(K,J)=Z
103 CONTINUE
      16 CONTINUE
      GO TO 118
      5 WRITE(IMP,100)
100  FORMAT(///,5X,'PROGRAMA NAO EXECUTADO - MATRIZ SINGULAR',//)
      STOP
118  CONTINUE
      RETURN
      END
```

```

C==== SUBROTINA PARA IMPOSICAO DAS CONDICAOES DE CONTORNO DO
C==== ENGASTAMENTO ELASTICO
SUBROUTINE ENGFLE(IENGF,IENVF,NU,CFI,ARE,JSP,S,E,K5,K6,SS,K2,L,IFL
*X,DEL,MD)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 MD(156,157),K5,K6(4),K2(4,4),JSP(4),KV(4)
DIMENSION ARE(4),S(4,4),E(4),L(44),DEL(4),SS(4),GK2(4)
IMP=2
IF(IENVF.EQ.1) THEN
DO 10 IL=1,NU
10 KV(IL)=CFI*ARE(IL)
DO 20 JJ=1,NU
L1=L(1)+JJ
L2=L(2)+JJ
L3=L(3)+JJ
L4=L(4)+JJ
L5=L(5)+JJ
AUX1=E(1)*S(1,JJ)
MD(JJ+1,L1)=AUX1
MD(JJ+1,L2)=-8.*AUX1
MD(JJ+1,L3)=-12.*DEL(1)*KV(JJ)
MD(JJ+1,L4)=8.*AUX1
20 MD(JJ+1,L5)=-AUX1
END IF
IF(IENGF.EQ.1) THEN
GSS=0.
DO 30 II=1,NU
30 GSS=GSS+CFI*JSP(II)*SS(II)
DO 40 II1=1,NU
GK2(II1)=0.
DO 50 II2=1,NU
50 GK2(II1)=GK2(II1)+CFI*JSP(II2)*K2(II2,II1)
40 CONTINUE
AUX2=DEL(1)*GSS
MD(IFLX,L(1))=AUX2+K5
MD(IFLX,L(2))=-(8.*AUX2+16.*K5)
MD(IFLX,L(3))=30.*K5
MD(IFLX,L(4))=8.*AUX2-16.*K5
MD(IFLX,L(5))=-AUX2+K5
DO 80 J=1,NU
L1=L(1)+J
L2=L(2)+J
L3=L(3)+J
L4=L(4)+J
L5=L(5)+J
AUX3=DEL(1)*K6(J)
MD(IFLX,L1)=-AUX3
MD(IFLX,L2)=8.*AUX3
MD(IFLX,L3)=12.*GK2(J)*DEL(1)**2
MD(IFLX,L4)=-8.*AUX3
80 MD(IFLX,L5)=AUX3
END IF
RETURN
END

```



```

C==== SUBROTINA PARA IMPOSICAO DAS CONDICOES DE COMPATIBILIDADE
SUBROUTINE CONDCP(NT, NP, NU, IEN, NZ, DEL, E, S, TT, TK6, D, P, MD, MPL, MPL1)
IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
REAL*8 MD(156, 157)
DIMENSION L(10), E(4), DEL(4), S(4, 4), NP(4), D(4), MPL(2)
DIMENSION TT(4), TK6(4, 4), TK5(4), DD(4), DD1(4)
DIMENSION MPL1(2)
PP1=P
IMP=2
IN=0
NR=0
DO 1040 IL=1, NU
DD(IL)=0.
1040 DD1(IL)=0.
DO 1000 II=1, NU-1
1000 DD(1)=DD(1)+D(II)
DD1(2)=D(1)
IF(NU.EQ.2) GO TO 1020
CC=0.
DO 1030 JJ=2, NU-1
CC=CC-D(JJ-1)
1030 DD(JJ)=DD(1)+CC
DO 1050 JL=3, NU
1050 DD1(JL)=DD1(JL-1)+D(JL-1)
1020 CONTINUE
DO 685 II=1, NT
685 TK5(II)=-TT(II)
III=NT-1
DO 690 KX=1, III
C==== IGUALDADE DOS DESLOCAMENTOS LATERAIS
IF(IEN.EQ.1) THEN
ICA=0
IF(KX.EQ.1) ICA=1
IN=IN+(NP(KX)-ICA)*(NU+1)
GO TO 3777
END IF
ICA=2
IF(KX.EQ.1) ICA=1
IN=IN+NP(KX)*(NU+1)+(ICA-2)*NU
3777 LS=NR+NP(KX)-1
KF=2*KX
KE=2*KX-1
L(KE)=LS+(LS-1)*NU
L(KF)=L(KE)+(3+IEN)*(NU+1)
LN=IN+1
MD(LN, L(KE))=1.
MD(LN, L(KF))=-1.
C==== IGUALDADE DOS DESLOCAMENTOS VERTICAIS
DO 700 KJ=1, NU
LN=IN+KJ+1
LE=L(KE)+KJ
LF=L(KF)+KJ
MD(LN, LE)=1.
700 MD(LN, LF)=-1.
C==== IGUALDADE DOS ESFORCOS NORMAIS
DO 710 KY=1, NU
L1=L(KE)-3*(NU+1)+KY
L2=L(KE)-2*(NU+1)+KY
L3=L(KE)-(NU+1)+KY
L4=L(KE)+KY

```

```

L5=L(KE)+(NU+1)+KY
IF(IEN.EQ.1) THEN
N1=L(KF)-2*(NU+1)+KY
N2=L(KF)-(NU+1)+KY
N3=L(KF)+KY
N4=L(KF)+(NU+1)+KY
N5=L(KF)+2*(NU+1)+KY
ELSE
N1=L(KF)-(NU+1)+KY
N2=L(KF)+KY
N3=L(KF)+(NU+1)+KY
N4=L(KF)+2*(NU+1)+KY
N5=L(KF)+3*(NU+1)+KY
END IF
LN=IN+NU+1+KY
AUX1=E(KX)*S(KX,KY)/DEL(KX)
MD(LN,L1)=AUX1
MD(LN,L2)=-6.*AUX1
MD(LN,L3)=18.*AUX1
MD(LN,L4)=-10.*AUX1
MD(LN,L5)=-3.*AUX1
AUX2=E(KX+1)*S(KX+1,KY)/DEL(KX+1)
IF(IEN.EQ.1) THEN
MD(LN,N1)=AUX2
MD(LN,N2)=-8.*AUX2
MD(LN,N4)=8.*AUX2
MD(LN,N5)=-AUX2
ELSE
MD(LN,N1)=-3.*AUX2
MD(LN,N2)=-10.*AUX2
MD(LN,N3)=18.*AUX2
MD(LN,N4)=-6.*AUX2
MD(LN,N5)=AUX2
END IF
710 CONTINUE
C==== IGUALDADE DOS MOMENTOS
IF(IEN.EQ.1) THEN
LN=IN+2*NU+1
DO 715 IF1=1,2
M1=LN+IF1
IF(IF1.EQ.2) MPL(KX)=M1
J1=L(KE)-4*NZ
J2=L(KE)-3*NZ
J3=L(KE)-2*NZ
J4=L(KE)-NZ
J5=L(KE)
J6=L(KE)+NZ
IF(IF1.EQ.2) THEN
DO 4010 IVR=1,NU-1
LU1=J2+IVR
LU2=J3+IVR
LU3=J4+IVR
LU4=J5+IVR
LU5=J6+IVR
AUVR=E(KX)*S(KX,IVR)/(12.*DEL(KX))
MD(M1,LU1)=-AUVR
MD(M1,LU2)=6.*AUVR
MD(M1,LU3)=-18.*AUVR
MD(M1,LU4)=10.*AUVR
4010 MD(M1,LU5)=3.*AUVR

```

```

GO TO 4040
END IF
AUU1=TK5 (KX) / (12.*DEL (KX)**2)
AUU2=TK5 (KX+1) / (12.*DEL (KX+1)**2)
MD (M1, J2)=-AUU1
MD (M1, J3)=4.*AUU1
MD (M1, J4)=6.*AUU1
MD (M1, J5)=-20.*AUU1
MD (M1, J6)=11.*AUU1
DO 500 II1=1, NU
II2=J2+II1
II3=J3+II1
II4=J4+II1
II5=J5+II1
II6=J6+II1
AUU3=TK6 (KX, II1) / (12.*DEL (KX))
MD (M1, II2)=-AUU3
MD (M1, II3)=6.*AUU3
MD (M1, II4)=-18.*AUU3
MD (M1, II5)=10.*AUU3
500 MD (M1, II6)=3.*AUU3
4040 CONTINUE
M3=L (KF) -2*NZ
M4=L (KF) -NZ
M5=L (KF)
M6=L (KF) +NZ
M7=L (KF) +2*NZ
M8=L (KF) +3*NZ
IF (IF1.EQ.2) THEN
LV3=M3+NU
LV4=M4+NU
LV6=M6+NU
LV7=M7+NU
AVVR=E (KX+1) *S (KX+1, NU) / (12.*DEL (KX+1))
MD (M1, LV3)=AVVR
MD (M1, LV4)=-8.*AVVR
MD (M1, LV6)=8.*AVVR
MD (M1, LV7)=-AVVR
GO TO 715
END IF
MD (M1, M3)=AUU2
MD (M1, M4)=-16.*AUU2
MD (M1, M5)=30.*AUU2
MD (M1, M6)=-16.*AUU2
MD (M1, M7)=AUU2
DO 510 II7=1, NU
IM3=M3+II7
IM4=M4+II7
IM6=M6+II7
IM7=M7+II7
AUU4=TK6 (KX+1, II7) / (12.*DEL (KX+1))
MD (M1, IM3)=-AUU4
MD (M1, IM4)=8.*AUU4
MD (M1, IM6)=-8.*AUU4
510 MD (M1, IM7)=AUU4
715 CONTINUE
LN=IN+2*NU+3
C===== IGUALDADE DE U'
M2=LN+1
BAUX1=1./DEL (KX)

```

```
BAUX2=1./DEL(KX+1)
MD(M2,J2)=-BAUX1
MD(M2,J3)=6.*BAUX1
MD(M2,J4)=-18.*BAUX1
MD(M2,J5)=10.*BAUX1
MD(M2,J6)=3.*BAUX1
MD(M2,M3)=-BAUX2
MD(M2,M4)=8.*BAUX2
MD(M2,M6)=-8.*BAUX2
MD(M2,M7)=BAUX2
M2=LN+2
MPL1(KX)=M2
END IF
691 NR=NR+NP(KX)
690 CONTINUE
RETURN
END
```

```

C==== SUBROTINA PARA RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
SUBROUTINE SOLUSI(N,A,F)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION A(156,157),F(156)
NI=N-1
NS=N+1
IMP=2
C==== POSICIONAMENTO DA COLUNA NC DA MATRIZ F NA COLUNA NS DA MATRIZ A
DO 10 I=1,N
A(I,NS)=F(I)
10 CONTINUE
C==== PESQUISA DO MAIOR ELEMENTO DA COLUNA E TROCA DE LINHAS
DO 20 L=1,NI
LS=L+1
DO 35 I=LS,N
IF(DABS(A(L,L))-DABS(A(I,L)))40,35,35
40 DO 30 J=L,NS
PROV=A(L,J)
A(L,J)=A(I,J)
A(I,J)=PROV
30 CONTINUE
35 CONTINUE
C==== DIVISAO DA LINHA PIVOT POR A(L,L)
PIV=A(L,L)
DO 50 J=L,NS
50 A(L,J)=A(L,J)/PIV
C==== REDUCAO DE GAUSS / MATRIZ TRIANGULAR
DO 20 I=LS,N
M=0
ELEM=A(I,L)
DO 20 J=L,NS
A(I,J)=A(I,J)-ELEM*A(L,J)
C==== TESTE DO SISTEMA
IF(J-NS)60,70,70
60 IF(DABS(A(I,J))-0.1D-16)20,20,80
80 M=1
GO TO 20
70 IF(M)90,90,20
90 IF(DABS(A(I,J))-0.1D-16)100,100,110
100 WRITE(IMP,140)
140 FORMAT(5(//),22X,'SOLUCAO INDETERMINADA')
STOP
110 WRITE(IMP,150)
150 FORMAT(5(//),23X,'SOLUCAO IMPOSSIVEL')
STOP
20 CONTINUE
A(N,NS)=A(N,NS)/A(N,N)
A(N,N)=1
C==== DIAGONALIZACAO DE JORDAN
DO 120 I=1,NI
IS=I+1
DO 120 K=IS,N
VAL=A(I,K)
DO 120 J=K,NS
120 A(I,J)=A(I,J)-VAL*A(K,J)
C==== EXPLICITACAO DAS RAIZES (DESLOCAMENTOS)
DO 130 I=1,N
130 F(I)=A(I,NS)
RETURN
END

```

```

C====          SUBROUTINA PARA O CALCULO DO ESFORCO NORMAL          =====
SUBROUTINE ESFOR(NPT,HT,IEN,NU,NT,NP,E,S,FF,DEL,HM,KPPC,Z,IPP,SK1,
*AK2,NATRE,ENO,NWW)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 IPP(3,4),KPPC(3,4)
DIMENSION E(4),S(4,4),DEL(4),ENO(132),FF(156),NP(4),L(44),Z(50)
DIMENSION VL(132),SK1(12),AK2(12,4),ULL(50),FLE(132),VLL(132)
DIMENSION ULLL(50),UL(50),GIR(132),FLA(44),FTI(44)
DIMENSION FTS(44),NATRE(4),HM(4),FLEX(3)
IMP=2
C==== CALCULO DO ESFORCO NORMAL NOS PILARES
DO 901 JI=1,NWW
901 ENO(JI)=0.
DO 900 JJ=1,NU
NR=0
DO 920 I=1,NT
AA6=E(I)*S(I,JJ)
DO 910 J=1,NP(I)
L(J)=0
910 L(J)=(NR+J)*(NU+1)-NU
LI=(JJ-1)*NPT+NR
IF(IEN.EQ.0) THEN
C==== ESFORCO NORMAL NO PONTO DA BASE
VL(LI+2)=(-3.*FF(L(1)+JJ)-10.*FF(L(2)+JJ)+18.*FF(L(3)+JJ)-6.*FF(L(
*4)+JJ)+FF(L(5)+JJ))/(12.*DEL(I))
VLL(LI+2)=(11.*FF(L(1)+JJ)-20.*FF(L(2)+JJ)+6.*FF(L(3)+JJ)+4.*FF(L(
*4)+JJ)-FF(L(5)+JJ))/(12.*DEL(I)**2)
ENO(LI+2)=VL(LI+2)*AA6
END IF
C==== ESFORCO NORMAL NOS PONTOS CENTRAIS
NW=NP(I)-2
DO 940 M=3,NW
VL(LI+M)=(FF(L(M-2)+JJ)-8.*FF(L(M-1)+JJ)+8.*FF(L(M+1)+JJ)-FF(L(M+2
*))+JJ))/(12.*DEL(I))
VLL(LI+M)=(-FF(L(M-2)+JJ)+16.*FF(L(M-1)+JJ)-30.*FF(L(M)+JJ)+16.*FF
*(L(M+1)+JJ)-FF(L(M+2)+JJ))/(12.*DEL(I)**2)
ENO(LI+M)=VL(LI+M)*AA6
940 CONTINUE
C==== ESFORCO NORMAL NO PONTO DO TOPO
LO=L(NP(I)-4)
L1=L(NP(I)-3)
L2=L(NP(I)-2)
L3=L(NP(I)-1)
L4=L(NP(I))
VL(LI+NW+1)=(-FF(LO+JJ)+6.*FF(L1+JJ)-18.*FF(L2+JJ)+10.*FF(L3+JJ)+3
*.*FF(L4+JJ))/(12.*DEL(I))
VLL(LI+NW+1)=(-FF(LO+JJ)+4.*FF(L1+JJ)+6.*FF(L2+JJ)-20.*FF(L3+JJ)+1
*1.*FF(L4+JJ))/(12.*DEL(I)**2)
ENO(LI+NW+1)=VL(LI+NW+1)*AA6
NR=NR+NP(I)
920 CONTINUE
900 CONTINUE
C==== IMPRESSAO DOS ESFORCOS NORMAIS
DO 960 LL=1,NU
WRITE(IMP,970)LL
970 FORMAT(/,10X,'NIVEL',6X,'ESFORCO NORMAL N',I2)
NR=0
NR1=0
NM=0
DO 980 I=1,NT

```

```

NDPF=NP(I)-1
LI=(LL-1)*NPT+NR
II=2+IEN
DO 990 J=II,NDPF
JJ=NR1-NM+J
HP=HT-Z(JJ)
WRITE(IMP,1000)HP,ENO(LI+J)
1000 FORMAT(5X,G15.7,3X,G15.7)
990 CONTINUE
NR=NR+NP(I)
I2=0
IF(I.NE.1) I2=1+IEN
NR1=NR1+NDPF-I2
NM=1+IEN
980 CONTINUE
960 CONTINUE
IF(IEN.NE.1) GO TO 1500
C==== CALCULO DOS MOMENTOS FLETORES EM CADA PRUMADA
DO 1001 JI=1,NWW
GIR(JI)=0.
1001 FLE(JI)=0.
DO 1010 JJ=1,NU
NR=0
DO 1020 I=1,NT
AUX7=E(I)*IPP(I,JJ)
DO 1030 J=1,NP(I)
L(J)=0
1030 L(J)=(NR+J)*(NU+1)-NU
C==== U'' NOS PONTOS CENTRAIS
NW=NP(I)-2
IF(JJ.EQ.1) THEN
DO 1040 M=3,NW
UL(NR+M)=(FF(L(M-2))-8.*FF(L(M-1))+8.*FF(L(M+1))-FF(L(M+2)))/(12.*
*DEL(I))
ULL(NR+M)=(-FF(L(M-2))+16.*FF(L(M-1))-30.*FF(L(M))+16.*FF(L(M+1))-
*FF(L(M+2)))/(12.*DEL(I)**2)
ULLL(NR+M)=(-FF(L(M-2))+2.*FF(L(M-1))-2.*FF(L(M+1))+FF(L(M+2)))/(2
*.*DEL(I)**3)
1040 CONTINUE
END IF
C==== MOMENTO FLETOR NOS PONTOS CENTRAIS
NUE=(I-1)*NU+JJ
LI=(JJ-1)*NPT+NR
DO 1050 M=3,NW
FLE(LI+M)=AUX7*SK1(NUE)*ULL(NR+M)
GIR(LI+M)=SK1(NUE)*UL(NR+M)
DO 1060 JI1=1,NU
JII=LI+M+(JI1-JJ)*NPT
FLE(LI+M)=FLE(LI+M)+AUX7*AK2(NUE,JI1)*VL(JII)
GIR(LI+M)=GIR(LI+M)+AK2(NUE,JI1)*FF(L(M)+JI1)
1060 CONTINUE
1050 CONTINUE
C==== U'' NO PONTO DO TOPO
IF(JJ.EQ.1) THEN
LO=L(NP(I)-4)
L1=L(NP(I)-3)
L2=L(NP(I)-2)
L3=L(NP(I)-1)
L4=L(NP(I))
UL(NR+NW+1)=(-FF(LO)+6.*FF(L1)-18.*FF(L2)+10.*FF(L3)+3.*FF(L4))/(1

```

```

*2.*DEL(I)
ULL(NR+NW+1)=(-FF(LO)+4.*FF(L1)+6.*FF(L2)-20.*FF(L3)+11.*FF(L4))/(
*12.*DEL(I)**2)
ULLL(NR+NW+1)=(FF(LO)-6.*FF(L1)+12.*FF(L2)-10.*FF(L3)+3.*FF(L4))/(
*2.*DEL(I)**3)
END IF
C==== MOMENTO FLETOR NO PONTO DO TOPO
FLE(LI+NW+1)=AUX7*SK1(NUE)*ULL(NR+NW+1)
GIR(LI+NW+1)=SK1(NUE)*UL(NR+NW+1)
DO 1070 JI2=1,NU
JII=LI+NW+1+(JI2-JJ)*NPT
FLE(LI+NW+1)=FLE(LI+NW+1)+AUX7*AK2(NUE,JI2)*VL(JII)
L33=L(NP(I)-1)
GIR(LI+NW+1)=GIR(LI+NW+1)+AK2(NUE,JI2)*FF(L33+JI2)
1070 CONTINUE
NR=NR+NP(I)
1020 CONTINUE
1010 CONTINUE
C==== IMPRESSAO DOS MOMENTOS FLETORES
DO 1080 LL=1,NU
WRITE(IMP,1090)LL
1090 FORMAT(//,10X,'NIVEL',6X,'FLEX. GLOBAL PRUM',I2)
NR=0
NR1=0
NM=0
DO 2000 I=1,NT
NDPF=NP(I)-1
LI=(LL-1)*NPT+NR
DO 2010 J=3,NDPF
JJ=NR1-NM+J
HP=HT-Z(JJ)
WRITE(IMP,2020)HP,FLE(LI+J)
2020 FORMAT(5X,G15.7,3X,G15.7)
2010 CONTINUE
NR=NR+NP(I)
I2=0
IF(I.NE.1) I2=2
NR1=NR1+NDPF-I2
NM=2
2000 CONTINUE
1080 CONTINUE
DO 3000 LL=1,NU
DO 3001 LL1=1,NT
3001 FLEX(LL1)=0.
WRITE(IMP,3005)LL
3005 FORMAT(//,2X,'PRUMADA ',I2)
WRITE(IMP,3020)
3020 FORMAT(//,9X,'ESFOR. NO NIVEL*',15X,'ESFORCOS NO ANDAR',15X,'*')
WRITE(IMP,3010)
3010 FORMAT(/,2X,'NIVEL ',1X,'FLE. GLOB.TOTAL',1X,'FLE. LOCAL AND.',1X,
*'FLE. TOTAL SUP.',1X,'FLE. TOTAL INF.')
NR=0
NR1=0
NM=0
NRA=0
DO 3050 I=1,NT
IAA=HM(I)*10
IBB=DEL(I)*10
NS=IAA/IBB
NDPF=NP(I)-1

```



```
LI=(LL-1)*NPT+NR
DO 3100 JK1=1,NATRE(I)
J=JK1+2+(JK1-1)*(NS-1)
J9=J+NS
AUX=(GIR(LI+J9)+GIR(LI+J))/2.
BAX=(UL(NR+J9)+UL(NR+J))/2.
FLA(JK1)=KPPC(I,LL)*(BAX-AUX)
FTS(JK1)=FLE(LI+J)+FLA(JK1)
FTI(JK1+1)=FLE(LI+J9)-FLA(JK1)
IF(JK1.EQ.1)THEN
CIM=1.
IF(I.NE.1)CIM=0.5
FLE(LI+J)=CIM*(FLE(LI+J)+FLA(JK1))+FLEX(I)
GO TO 4000
END IF
FLE(LI+J)=(FTS(JK1)+FTI(JK1))/2.
IF(JK1.EQ.NATRE(I))THEN
IF(I.EQ.1.AND.NT.NE.1)GO TO 4150
FLE(LI+J9)=FTI(JK1+1)
GO TO 4000
4150 FLEX(I+1)=FTI(JK1+1)/2.
END IF
4000 JK2=JK1+NRA
WRITE(IMP,3250)JK2,FLE(LI+J),FLA(JK1),FTI(JK1+1),FTS(JK1)
3250 FORMAT(4X,I2,3X,G15.7,1X,G15.7,1X,G15.7,1X,G15.7)
3100 CONTINUE
IF(I.EQ.NT)THEN
WRITE(IMP,4500)JK2+1,FLE(LI+J9)
4500 FORMAT(4X,I2,3X,G15.7)
END IF
NRA=NRA+NATRE(I)
NR=NR+NP(I)
I2=0
IF(I.NE.1)I2=2
NR1=NR1+NDPF-I2
NM=2
3050 CONTINUE
3000 CONTINUE
1500 CONTINUE
RETURN
END
```

```

C====      SUBROTINA PARA CALCULO DOS ESFORCOS NOS LINTEIS      =====
      SUBROUTINE ESFOR1(NPT,HT,IEN,NV,NT,NP,NU,VELT,MALT,HM,FF,DEL,Z,ENO
*,NW1)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8 MALT(9,4)
      DIMENSION NP(4),VELT(9),HM(4),FF(156),ENO(88),L(44),DEL(4),Z(50)
      DIMENSION UL(50)
      IMP=2
C==== CALCULO DO ESFORCO CORTANTE NOS LINTEIS
      DO 1020 II=1,NW1
1020  ENO(II)=0.
      DO 1030 JJ=1,NV
      NR=0
      DO 1040 I=1,NT
      NUE=(I-1)*NV+JJ
      DO 1050 J=1,NP(I)
      L(J)=0
1050  L(J)=(NR+J)*(NU+1)-NU
      IND=(JJ-1)*NPT+NR
      IF(IEN.EQ.0) THEN
C==== ESFORCO CORTANTE NO PONTO DA BASE
      UL(NR+2)=(-3.*FF(L(1))-10.*FF(L(2))+18.*FF(L(3))-6.*FF(L(4))+FF(L(
*5)))/(12.*DEL(I))
      ENO(IND+2)=VELT(NUE)*UL(NR+2)
      DO 1060 JK=1,NU
      ENO(IND+2)=ENO(IND+2)+MALT(NUE,JK)*FF(L(2)+JK)
1060  CONTINUE
      ENO(IND+2)=ENO(IND+2)*HM(I)/2.
      END IF
C==== ESFORCO CORTANTE NOS PONTOS CENTRAIS
      NW=NP(I)-2
      DO 1070 M=3,NW
      UL(NR+M)=(FF(L(M-2))-8.*FF(L(M-1))+8.*FF(L(M+1))-FF(L(M+2)))/(12.*
*DEL(I))
      ENO(IND+M)=VELT(NUE)*UL(NR+M)
      DO 1080 MM=1,NU
      ENO(IND+M)=ENO(IND+M)+MALT(NUE,MM)*FF(L(M)+MM)
1080  CONTINUE
      ENO(IND+M)=ENO(IND+M)*HM(I)
      IF(IEN.EQ.1.AND.M.EQ.3) THEN
      ENO(IND+M)=ENO(IND+M)/2.
      END IF
1070  CONTINUE
C==== ESFORCO CORTANTE NO PONTO DO TOPO
      LO=L(NP(I)-4)
      L1=L(NP(I)-3)
      L2=L(NP(I)-2)
      L3=L(NP(I)-1)
      L4=L(NP(I))
      UL(NR+NP(I)-1)=(-FF(LO)+6.*FF(L1)-18.*FF(L2)+10.*FF(L3)+3.*FF(L4))
*/(12.*DEL(I))
      ENO(IND+NP(I)-1)=VELT(NUE)*UL(NR+NP(I)-1)
      DO 1090 NN=1,NU
      ENO(IND+NP(I)-1)=ENO(IND+NP(I)-1)+MALT(NUE,NN)*FF(L3+NN)
1090  CONTINUE
      ENO(IND+NP(I)-1)=ENO(IND+NP(I)-1)*HM(I)/2.
      NR=NR+NP(I)
1040  CONTINUE
1030  CONTINUE
C==== IMPRESSAO DOS ESFORCOS CORTANTES NOS LINTEIS

```

```
DO 1100 LL=1,NV
WRITE(IMP,1110)LL
1110 FORMAT(//,10X,'NIVEL',6X,'CORTANTE NAS VIGAS DO VAO',I2)
NR=0
NR1=0
NM=0
DO 1120 I=1,NT
NDPF=NP(I)-1
IND=(LL-1)*NPT+NR
II=2+IEN
DO 1130 J=II,NDPF
JJ=NR1-NM+J
HP=HT-Z(JJ)
WRITE(IMP,1140)HP,ENO(IND+J)
1140 FORMAT(5X,G15.7,6X,G15.7)
1130 CONTINUE
NR=NR+NP(I)
II2=0
IF(I.NE.1) II2=1+IEN
NR1=NR1+NDPF-II2
NM=1+IEN
1120 CONTINUE
1100 CONTINUE
RETURN
END
```

C=====

SUBROTINA PARA ALTERACAO DA MATRIZ MD

=====

85- 31

SUBROUTINE MATMD(PP,IEN,NT,NU,NP,MSS,DEL,Z,TT,MD)

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

REAL*8 MD(156,157),MSS(4)

DIMENSION L(44),Z(50),TT(4),DEL(4),NP(4)

NZ=NU+1

IN=0

NR=0

KL=1+IEN

DO 2000 I=1,NT

ICA=2

IF(I.EQ.1) ICA=1

LN=ICA*NU+1

IN=IN+LN

IF(IEN.EQ.1) GO TO 2020

IN=IN+1

GO TO 2030

2020 IA=2

IF(I.EQ.1) IA=1

IN=IN+NU+IA

2030 DO 2010 J=1,NP(I)

L(J)=0

2010 L(J)=NR+J+(NR+J-1)*NU

C===== PONTO DA BASE

IF(IEN.EQ.0) THEN

KL=KL+1

CAUX=MSS(I)-PP*Z(KL)

P1=DEL(I)*CAUX

I1=IN+1

MD(I1,L(1))=-3.*P1

MD(I1,L(2))=-10.*P1

MD(I1,L(3))=18.*P1

MD(I1,L(4))=-6.*P1

MD(I1,L(5))=P1

IN=IN+NZ

END IF

C===== EQUACAO PARA OS PONTOS CENTRAIS

AXX=TT(I)/DEL(I)

NW=NP(I)-2

DO 2040 M=3,NW

M1=L(M-2)

M2=L(M-1)

M3=L(M)

M4=L(M+1)

M5=L(M+2)

KL=KL+1

CAUX=MSS(I)-PP*Z(KL)

P2=DEL(I)*CAUX

I2=IN+1

MD(I2,M1)=P2-6.*AXX

MD(I2,M2)=-8.*P2+12.*AXX

MD(I2,M4)=8.*P2-12.*AXX

MD(I2,M5)=-P2+6.*AXX

IN=IN+NZ

2040 CONTINUE

C===== EQUACAO PARA O TOPO

KL=KL+1

CAUX=MSS(I)-PP*Z(KL)

LO=L(NP(I)-4)

L1=L(NP(I)-3)

```
L2=L(NP(I)-2)
L3=L(NP(I)-1)
L4=L(NP(I))
P3=DEL(I)*CAUX
I3=IN+1
MD(I3,LO)=-P3+6.*AXX
MD(I3,L1)=6.*P3-36.*AXX
MD(I3,L2)=-18.*P3+72.*AXX
MD(I3,L3)=10.*P3-60.*AXX
MD(I3,L4)=3.*P3+18.*AXX
IN=IN+NZ
NR=NR+NP(I)
2000 CONTINUE
RETURN
END
```

C==== SUBROTINA PARA O CALCULO DO DETERMINANTE DE MD

====

85- 33

```
SUBROUTINE DETERM(JD,NII,A,DINC,DD,DET)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION A(156,157),AM(156,156),DINC(156)
N=NII
DO 200 M1=1,N
DO 200 M2=1,N
200 AM(M1,M2)=A(M1,M2)
IN=1
AUX=1.
DET=1.
10 I=1
J=1
20 IF(DABS(AM(I,J))-0.1E-05)30,30,40
30 IF(I-N)50,60,60
50 I=I+1
GO TO 20
60 DET=0.
RETURN
40 IF(I-1)70,70,80
80 DO 90 J=1,N
SUP=AM(1,J)
AM(1,J)=AM(I,J)
90 AM(I,J)=SUP
AUX=-AUX
70 DET=DET*AM(1,1)
IF(JD.NE.1) GO TO 65
DINC(IN)=DABS(DET)
65 DET=DET/DINC(IN)
IN=IN+1
DO 100 J=2,N
100 AM(1,J)=AM(1,J)/AM(1,1)
DO 110 I=2,N
DO 110 J=2,N
110 AM(I,J)=AM(I,J)-AM(1,J)*AM(I,1)
NI=N-1
DO 120 I=1,NI
DO 120 J=1,NI
120 AM(I,J)=AM(I+1,J+1)
IF(N-2)130,130,140
140 N=N-1
GO TO 10
130 DET=DET*AUX*AM(1,1)
IF(JD.NE.1) GO TO 150
DD=DET
150 DET=DET/DD
RETURN
END
```

5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1. Introdução

Apresentam-se, a seguir, exemplos numéricos de aplicação do método das diferenças finitas, através do programa em linguagem FORTRAN apresentado no Capítulo 4. Obtêm-se as soluções dos sistemas de equações (2.52) e (3.11) (deslocamentos laterais u e verticais v_j) que expressam o comportamento do pórtico e pórtico geral, através da técnica do meio contínuo.

Os esforços normais nos pilares e os esforços cortantes concentrados nas vigas foram calculados de acordo com o item 2.5. do Capítulo 2. Os momentos fletores, correspondentes à flexão local foram calculados através das equações (2.26) e aqueles correspondentes à flexão global foram obtidos através da equação:

$$M_j = EI_p a_j' \quad (5.1)$$

Nos exemplos 1 e 3, leva-se em conta o efeito $P-\Delta$ e determina-se o carregamento crítico vertical global. Nos exemplos 2 e 4, considera-se a variação das características geométricas com a altura dos painéis, da maneira descrita nos itens 2.3. e 3.3. No exemplo 5, calcula-se uma associação de paredes, por vigas, elasticamente engastadas em suas bases. No exemplo 6, calcula-se uma associação de pórtico e parede por vigas e, finalmente, no exemplo 7, resolve-se uma associação de pórtico e parede por barras biarticuladas.

Quando se consideram os painéis submetidos apenas ao carregamento lateral, apresentam-se, também, para efeito de comparação, os valores dos esforços e deslocamentos fornecidos pela análise discreta.

5.2. Exemplo numérico 1

Representa-se na Figura 5.1 um pórtico com três prumadas de pilares, 15 andares de altura $h = 3,0$ m. As seções transversais dos pilares e dos dois conjuntos de vigas são constantes ao longo da altura e medem: $0,30 \times 0,80$ m para os pilares 1 e 2 e $0,30 \times 0,70$ para o pilar 3 e as vigas. Para o módulo de elasticidade longitudinal adota-se o valor $E = 2,0 \times 10^7$ kN/m².

O painel será calculado como pórtico e pórtico geral de nós puntuais e como pórtico e pórtico geral de nós rígidos.

O carregamento constitui-se de carga lateral e uniforme distribuída $q = 3,6$ kN/m e carga vertical total, também uniforme. Em relação a esta última carga, foram analisados dois casos:

Caso (a) - $p = 0,0$ (1ª ordem)

Caso (b) - $p = 400$ kN/m ou $p_1 = 139,2$ kN/m, $p_2 = 139,2$ kN/m e $p_3 = 121,6$ kN/m (2ª ordem).

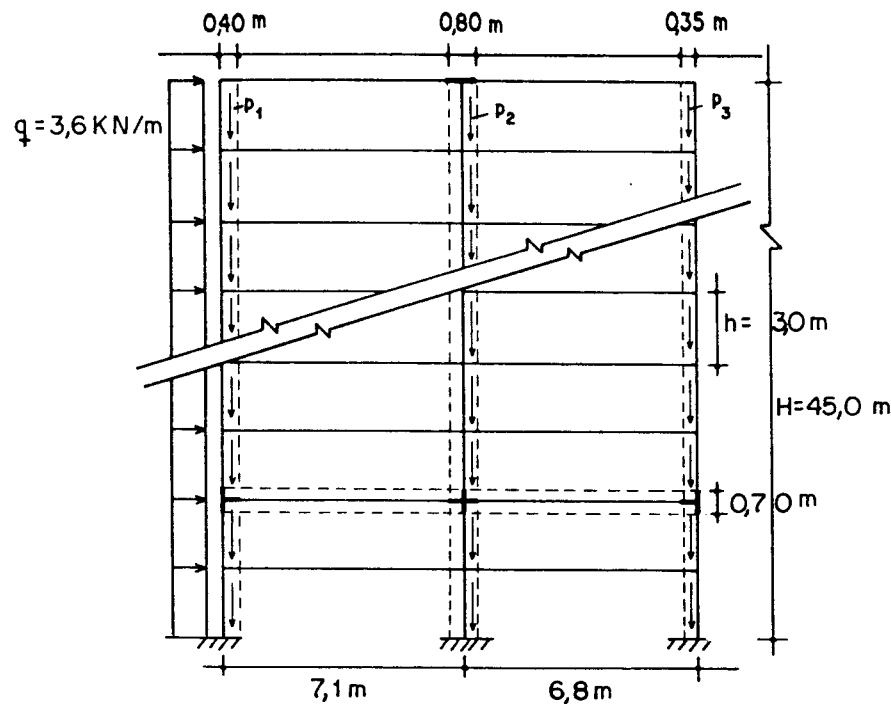


Figura 5.1. - Painel pórtico

A-) Resultados

A.1-) Deslocamentos

Nas Tabelas 5.1 e 5.2, apresentam-se os deslocamentos laterais u ao longo da altura do pórtico e do pórtico geral, para os casos (a) e (b) de carregamento. Observa-se a boa concordância entre os resultados obtidos pela análise discreta e pela análise do pórtico geral (Tabela 5.1) e, também, uma redução entre os valores dos deslocamentos do pórtico

geral, em relação ao pórtico, mais pronunciada nos andares da base. A consideração dos trechos rígidos reduz, em média, os deslocamentos no topo dos painéis em cerca de 30%. Em relação, ainda, aos deslocamentos no topo, nota-se um acréscimo de 9%, 8%, 5%, e 5% no caso (b) quando comparado ao caso (a), para o pórtico e pórtico geral de nós puntuais e pórtico e pórtico geral de nós rígidos, nesta ordem.

Tabela 5.1. Deslocamentos laterais $u(m)$

Caso (a) de carregamento					
Z(m)	Pórtico		Pórtico Geral		Tec. Discreta
	Tipo de nó		Tipo de nó		Tipo de nó
	Puntual	Rígido	Puntual	Rígido	Puntual
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3,0	0,0030	0,0019	0,0014	0,0010	0,0014
6,0	0,0058	0,0038	0,0038	0,0027	0,0039
9,0	0,0085	0,0057	0,0064	0,0045	0,0065
12,0	0,0110	0,0074	0,0090	0,0062	0,0090
15,0	0,0134	0,0090	0,0113	0,0078	0,0114
18,0	0,0156	0,0106	0,0135	0,0094	0,0136
21,0	0,0176	0,0120	0,0155	0,0108	0,0156
24,0	0,0195	0,0133	0,0174	0,0121	0,0175
27,0	0,0211	0,0145	0,0191	0,0133	0,0191
30,0	0,0226	0,0156	0,0205	0,0144	0,0206
33,0	0,0239	0,0166	0,0218	0,0154	0,0219
36,0	0,0250	0,0174	0,0229	0,0162	0,0230
39,0	0,0259	0,0181	0,0238	0,0169	0,0238
42,0	0,0266	0,0187	0,0245	0,0175	0,0245
45,0	0,0270	0,0192	0,0250	0,0180	0,0250

Tabela 5.2. Deslocamentos laterais $u(m)$

Caso (b) de carregamento				
Z(m)	Pórtico		Pórtico Geral	
	Tipo de nó		Tipo de nó	
	Puntual	Rígido	Puntual	Rígido
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3,0	0,0033	0,0021	0,0015	0,0010
6,0	0,0065	0,0041	0,0042	0,0029
9,0	0,0095	0,0061	0,0071	0,0048
12,0	0,0123	0,0079	0,0098	0,0066
15,0	0,0149	0,0096	0,0124	0,0083
18,0	0,0173	0,0113	0,0148	0,0100
21,0	0,0194	0,0128	0,0170	0,0115
24,0	0,0214	0,0142	0,0190	0,0129
27,0	0,0232	0,0154	0,0207	0,0141
30,0	0,0247	0,0166	0,0223	0,0152
33,0	0,0261	0,0176	0,0236	0,0162
36,0	0,0272	0,0184	0,0248	0,0171
39,0	0,0281	0,0191	0,0257	0,0178
42,0	0,0288	0,0197	0,0264	0,0184
45,0	0,0295	0,0202	0,0270	0,0189

Na Figura 5.2, representam-se através de gráficos os deslocamentos laterais u , a nível de cada andar, do pórtico e do pórtico geral (nós puntuais e nós rígidos), desprezando-se o efeito $P-\Delta$ (caso (a)). Na Figura 5.3, consideram-se apenas o pórtico e pórtico geral de nós puntuais submetidos aos casos (a) e (b) de carregamento.

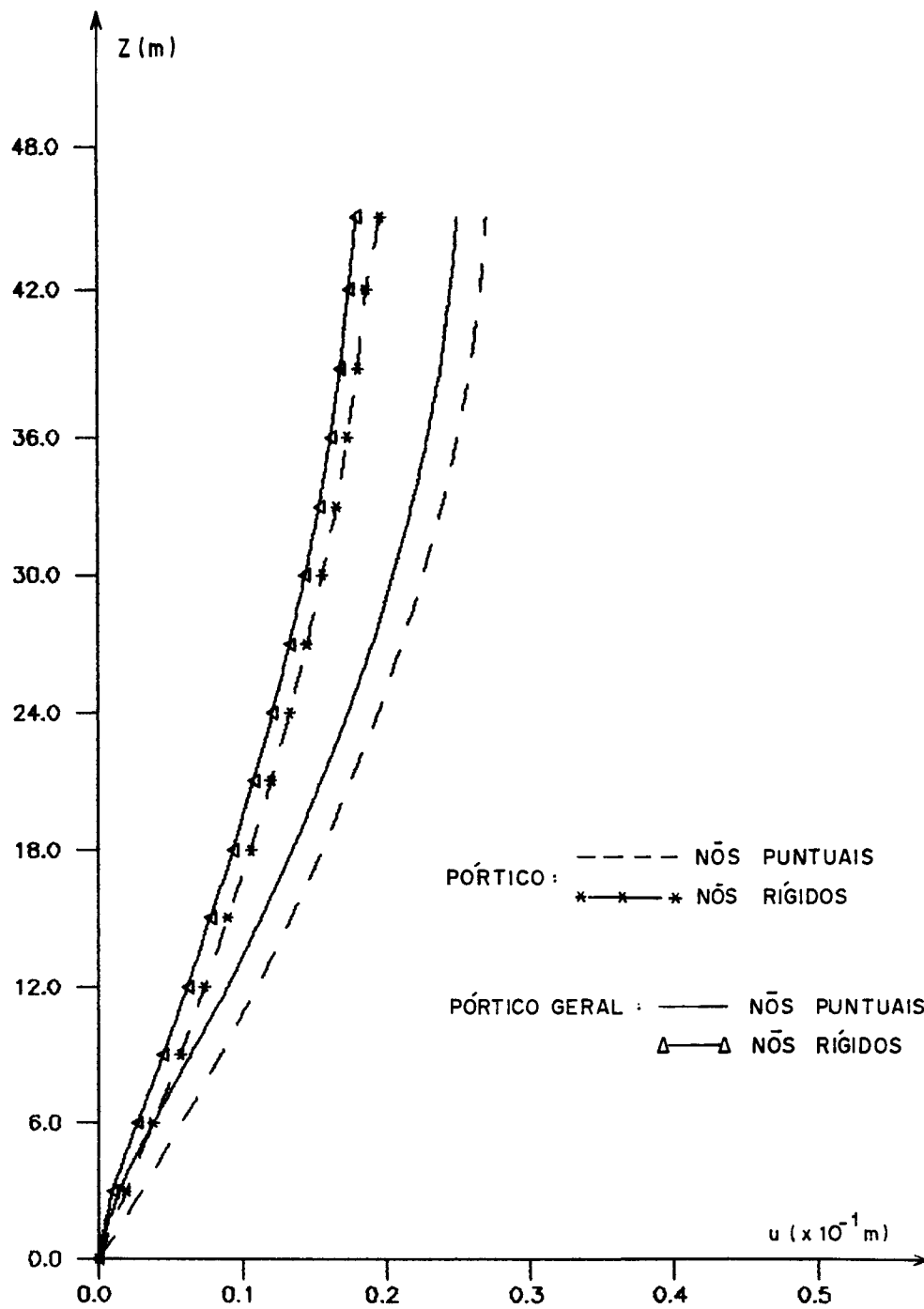


Figura 5.2. - Deslocamentos laterais u (caso (a) de carregamento)

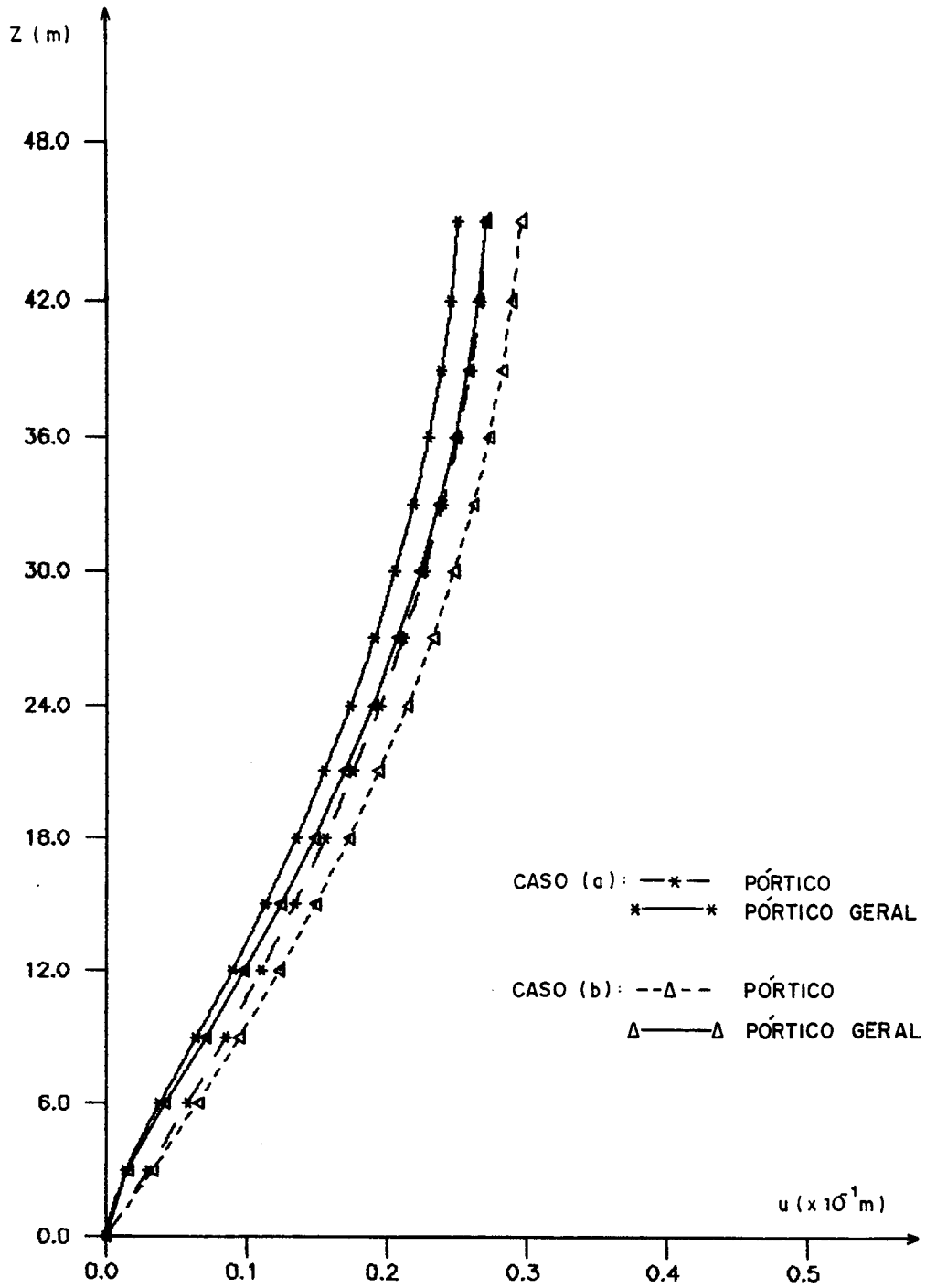


Figura 5.3. - Deslocamentos laterais u (nós puntuais)

A.2-) Esforços

Como a consideração da influência dos nós rígidos, neste exemplo, não altera significativamente os resultados dos esforços, apresentam-se nas Tabelas 5.3 e 5.4 os valores dos esforços cortantes concentrados nas vigas dos vãos 1 e 2, respectivamente, apenas para o pórtico e pórtico geral de nós puntuais. A 4ª coluna de cada Tabela contém os resultados obtidos através da técnica discreta.

Quando se comparam os resultados obtidos para o pórtico e pórtico geral, nota-se que a maior diferença ocorre no esforço cortante (Vv_k) nos andares da base de cada vão, com valores, para o pórtico geral, nulo no nível zero (devido a restrição $u'(0) = 0$) e cerca de 25% menor no primeiro nível ($Z = 3,0$ m). Observa-se que, exceto no topo, os resultados da análise discreta são praticamente iguais aos do pórtico geral (caso (a)).

Tabela 5.3. Esforços cortantes nas vigas do vão 1 (kN)

Z(m)	Caso (a) de carregamento			Caso (b) de carregamento	
	Pórtico	Pórtico Geral	Técnica Discreta	Pórtico	Pórtico Geral
0,0	17,050	0,000	0,000	19,211	0,000
3,0	31,923	24,175	24,081	35,756	26,398
6,0	29,728	27,969	27,897	33,089	30,824
9,0	27,516	27,231	27,062	30,427	30,000
12,0	25,291	25,178	25,158	27,776	27,620
15,0	23,053	22,993	22,997	25,140	25,069
18,0	20,805	20,763	20,769	22,524	22,482
21,0	18,548	18,514	18,519	19,930	19,902
24,0	16,284	16,255	16,259	17,363	17,343
27,0	14,014	13,991	13,993	14,823	14,811
30,0	11,740	11,723	11,722	12,317	12,312
33,0	9,463	9,457	9,450	9,844	9,850
36,0	7,185	7,205	7,184	7,405	7,439
39,0	4,906	5,008	4,947	5,003	5,122
42,0	2,628	3,008	2,840	2,638	3,040
45,0	0,177	0,849	1,204	0,156	0,845

Tabela 5.4. Esforços cortantes nas vigas do vão 2 (kN)

Z(m)	Caso (a) de carregamento			Caso (b) de carregamento	
	Pórtico	Pórtico Geral	Técnica Discreta	Pórtico	Pórtico Geral
0,0	17,933	0,000	0,000	20,206	0,000
3,0	33,374	25,238	24,916	37,407	27,581
6,0	30,902	29,066	28,939	34,443	32,078
9,0	28,446	28,160	27,977	31,520	31,088
12,0	26,005	25,899	25,879	28,639	28,490
15,0	23,577	23,524	23,532	25,800	25,738
18,0	21,160	21,124	21,136	23,004	22,972
21,0	28,751	18,723	18,734	20,251	20,230
24,0	16,351	16,327	16,337	17,540	17,526
27,0	13,956	13,936	13,945	14,870	14,863
30,0	11,566	11,551	11,557	12,242	12,241
33,0	9,178	9,173	9,175	9,654	9,664
36,0	6,792	6,814	6,802	7,105	7,143
39,0	4,407	4,514	4,458	4,593	4,718
42,0	2,020	2,418	2,249	2,117	2,538
45,0	-0,184	0,521	0,806	-0,163	0,562

Os esforços cortantes (V_{v1}) das vigas e os esforços normais dos pilares são representados, em gráficos, nas Figuras 5.4 e 5.5, respectivamente, para o pórtico e pórtico geral de nós puntuais e o caso (a) de carregamento. A Figura 5.6 apresenta, apenas, os esforços normais nos pilares do pórtico geral de nós puntuais, quando se leva em conta o efeito P- Δ (caso (b)).

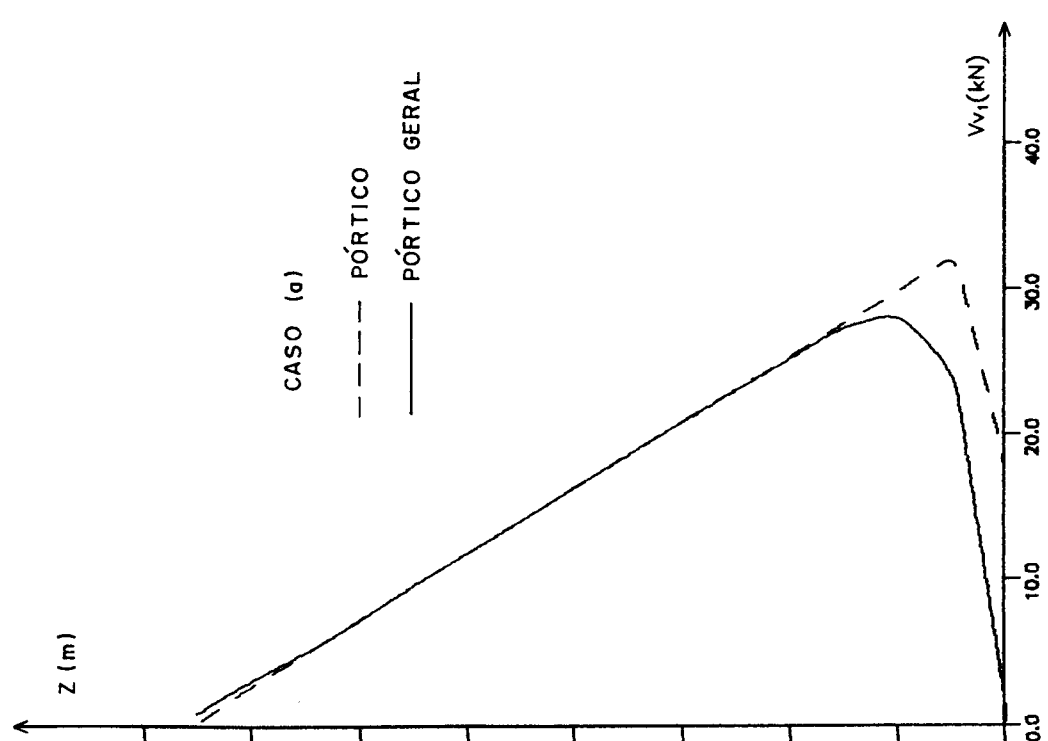
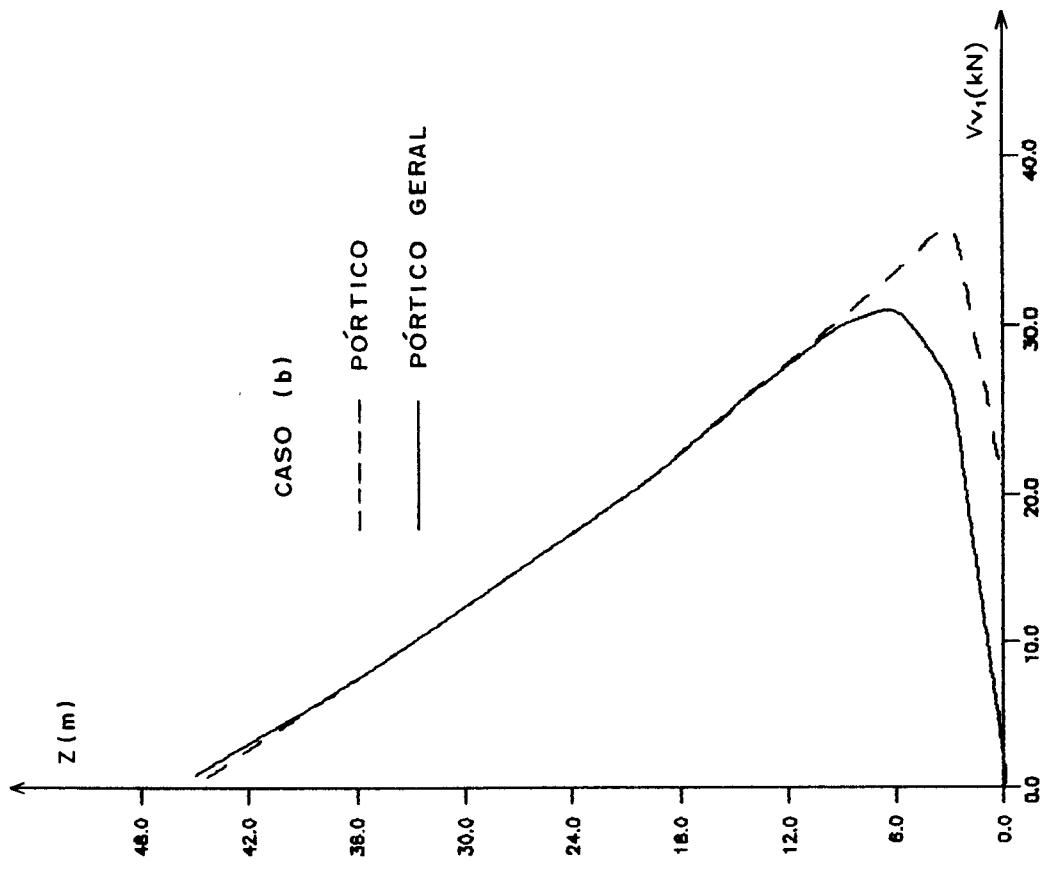


Figura 5.4 - Esforços cortantes nas vigas do vão 1 (nós puntuais)

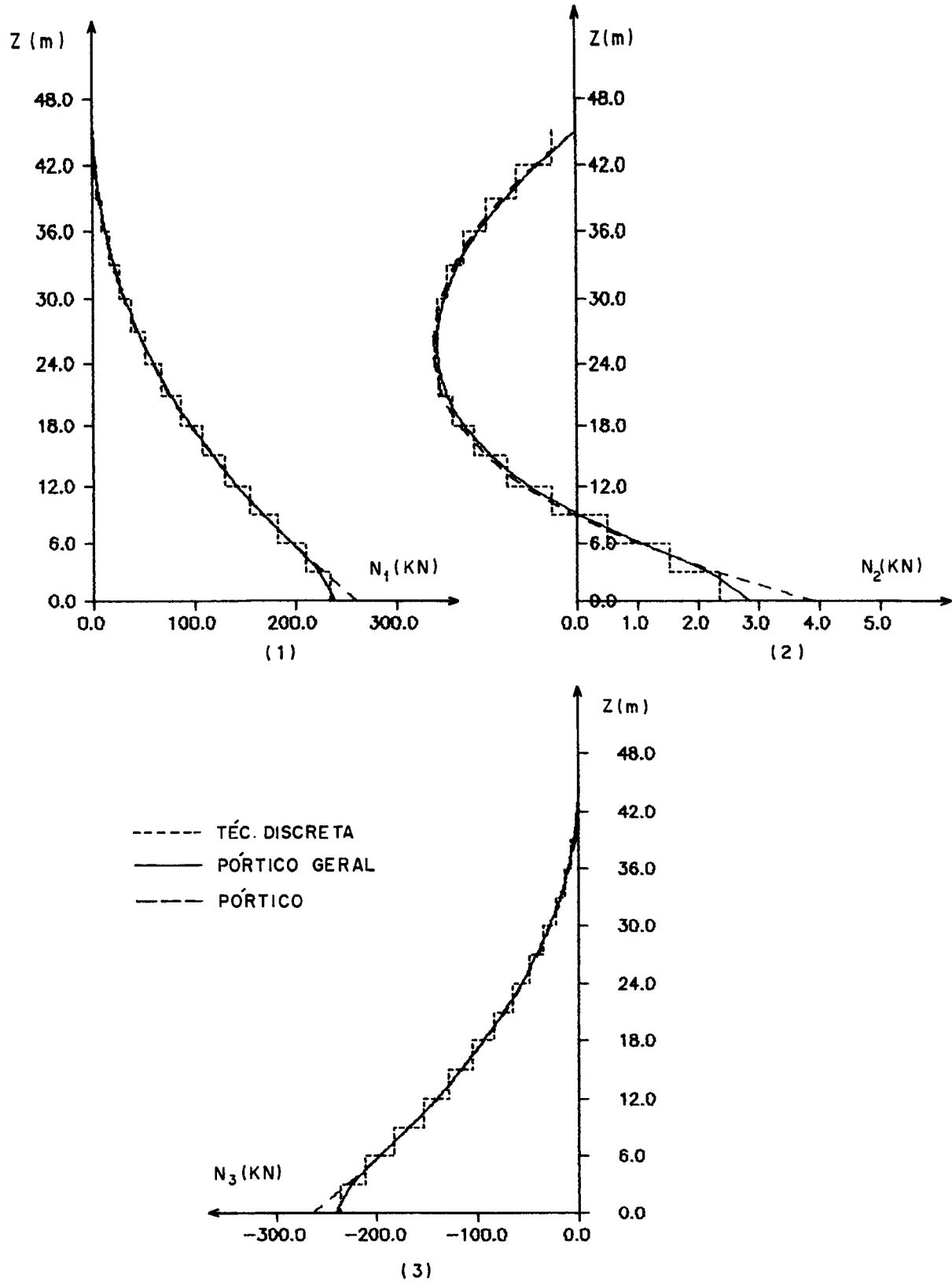


Figura 5.5 - Esforços normais nos pilares do pórtico geral (nós puntuais e caso (a) de carregamento). (1)- Esforço normal no pilar 1; (2)- Esforço normal no pilar 2; (3)- Esforço normal no pilar 3.

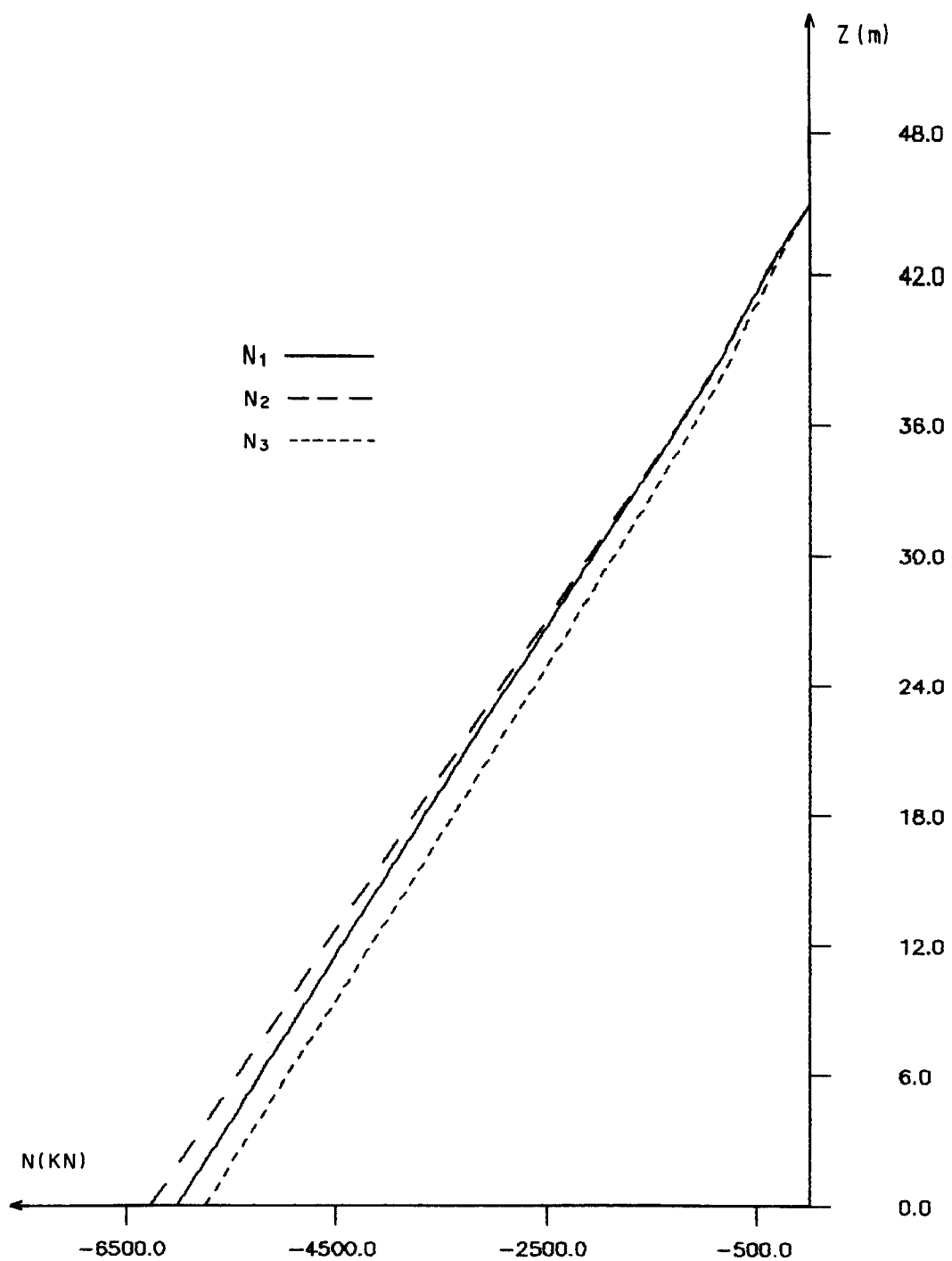


Figura 5.6 - Esforços normais nos pilares do pórtico geral (nós puntuais e caso (b) de carregamento)

B-) Carga crítica global

A Tabela 5.5 apresenta os valores da carga crítica global para os painéis de nós puntuais e de nós rígidos analisados neste exemplo. Observa-se que a consideração dos nós rígidos conduz a valores bem maiores para as cargas críticas (cerca de 52% para o pórtico e 45% para o pórtico geral). Observa-se, também, que a carga crítica do pórtico geral é maior do que a do pórtico, aproximadamente 35% quando os nós são puntuais e 30% quando os nós são rígidos. Isto ocorre porque o pórtico geral, devido ao engastamento dos pilares, apresenta, na base, uma rigidez lateral maior que o pórtico.

Tabela 5.5. Carga crítica global (kN/m)

Tipo de nó	Painel	
	Pórtico	Pórtico Geral
Puntual	3356,283	4544,495
Rígido	5106,360	6611,025

5.3. Exemplo numérico 2

O painel da Figura 5.7 tem 15 andares de altura $h = 3,0$ m e está submetido a um carregamento lateral uniforme de intensidade $q = 3,6$ kN/m. Para o módulo de elasticidade longitudinal adota-se o valor $E = 2,0 \times 10^7$ kN/m.²

As seções transversais dos três pilares medem até o quinto andar (0,60 x 0,60)m e, a partir deste nível, passam a medir (0,5 x 0,5)m. As seções transversais das vigas medem até o quinto andar (0,25 x 0,60)m e, do sexto andar em diante, (0,25 x 0,50)m.

O painel será calculado como pórtico e pórtico geral, desprezando-se a influência dos nós rígidos e o efeito de P- Δ .

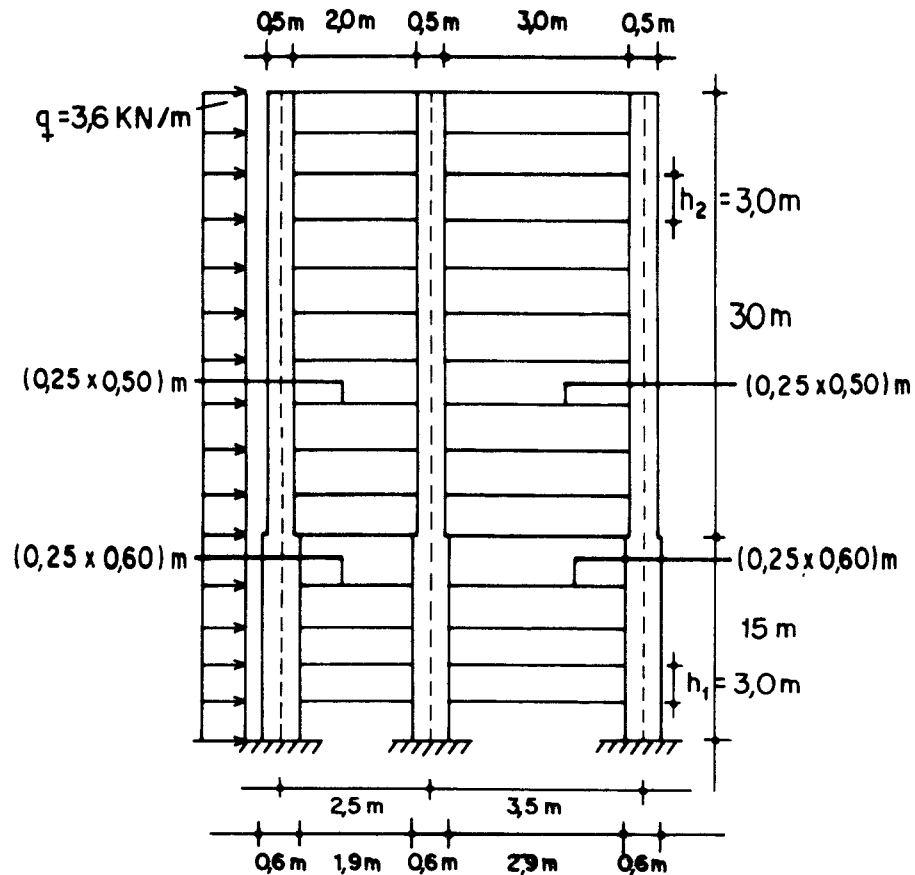


Figura 5.7 - Pórtico com rigidez variável.

A-) Resultados

A.1-) Deslocamentos e esforços

Na Tabela 5.6, apresentam-se os deslocamentos laterais ao longo da altura do pórtico e do pórtico geral. A 4ª coluna desta tabela contém os valores obtidos pela técnica discreta. Na Figura 5.8- (3), representam-se em gráficos estes deslocamentos.

Tabela 5.6 Deslocamentos laterais u(m)

Z(m)	Pórtico	Pórtico Geral	Técnica Discreta
0,0	0,0000	0,0000	0,0000
3,0	0,0027	0,0010	0,0014
6,0	0,0054	0,0033	0,0039
9,0	0,0082	0,0059	0,0066
12,0	0,0110	0,0087	0,0094
15,0	0,0138	0,0116	0,0121
18,0	0,0178	0,0150	0,0157
21,0	0,0217	0,0187	0,0194
24,0	0,0254	0,0224	0,0231
27,0	0,0289	0,0257	0,0266
30,0	0,0321	0,0289	0,0297
33,0	0,0350	0,0317	0,0326
36,0	0,0376	0,0344	0,0352
39,0	0,0400	0,0366	0,0375
42,0	0,0420	0,0387	0,0395
45,0	0,0436	0,0404	0,0412

Na Tabela 5.7, apresentam-se os resultados dos esforços cortantes concentrados nas vigas dos vãos 1 e 2, do pórtico e pórtico geral, e os resultados obtidos pela técnica discreta. Nas Figuras 5.8-(1) e (2), representam-se graficamente estes esforços. Os resultados obtidos para os esforços normais nos pilares estão indicados na Tabela 5.8 e representados graficamente na Figura 5.9.

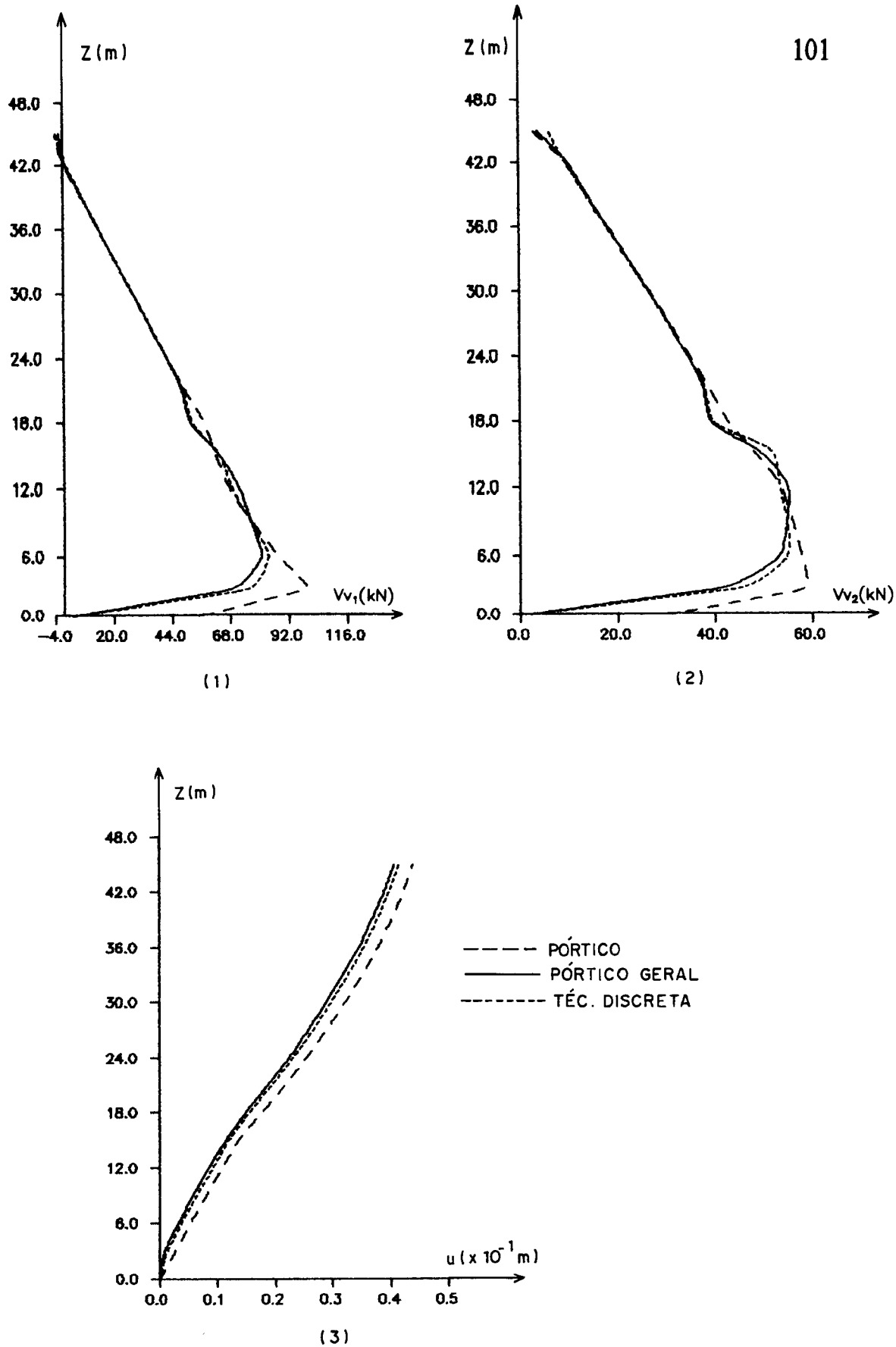


Figura 5.8 - (1) Esforços cortantes nas vigas do vão 1
 (2) Esforços cortantes nas vigas do vão 2
 (3) Deslocamentos laterais u

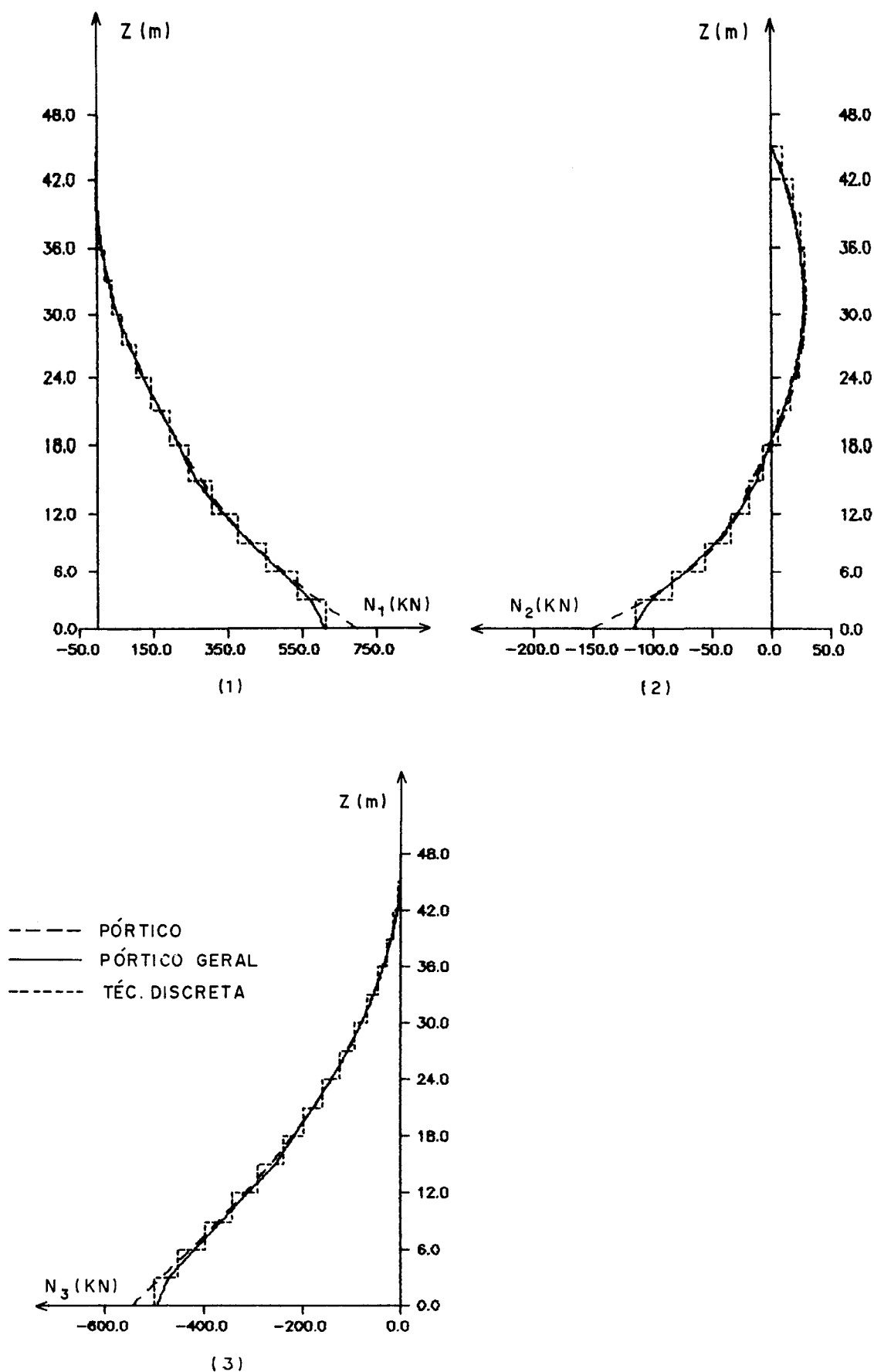


Figura 5.9 - (1) Esforço normal no pilar 1
 (2) Esforço normal no pilar 2
 (3) Esforço normal no pilar 3

A análise das Tabelas e gráficos anteriores indica uma boa aproximação entre os esforços e deslocamentos obtidos pelas técnicas contínua e discreta, principalmente se é utilizado, na técnica contínua, o pórtico geral. Comparando-se os resultados do pórtico e pórtico geral, notam-se diferenças mais pronunciadas apenas nos andares da base, tanto nos esforços quanto nos deslocamentos.

5.4. Exemplo numérico 3

Na Figura 5.10, representa-se uma associação de três paredes por vigas. O painel tem 20 andares de altura $h = 3,0$ m. As paredes 1 e 2 têm seção transversal de dimensões $0,20 \times 2,0$ m e a parede 3 tem seção $0,20 \times 3,0$ m. As vigas são iguais, com seções transversais de $0,20 \times 0,40$ m. Para o módulo de elasticidade admite-se o valor $E = 2,0 \times 10^7$ kN/m²

O carregamento constitui-se de carga lateral e uniforme distribuída $q = 4$ kN/m e carga vertical total p , também uniforme. Em relação a esta última carga, foram analisados dois casos:

Caso (a) - $p = 0,0$ (1ª ordem)

Caso (b) - $p = 700$ kN/m ou $p_1 = 200$ kN/m, $p_2 = 200$ kN/m e $p_3 = 300$ kN/m (2ª ordem)

O painel foi calculado como pórtico geral de nós rígidos.

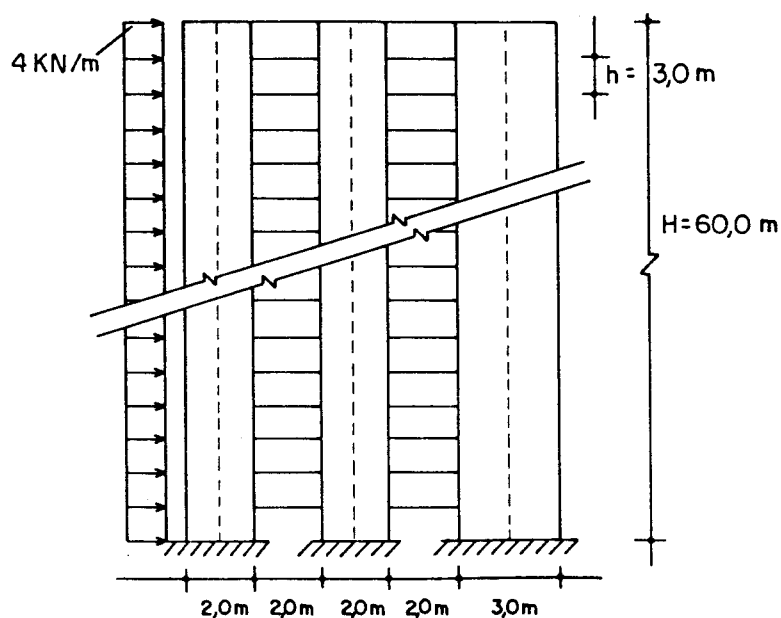


Figura 5.10 - Paredes associadas

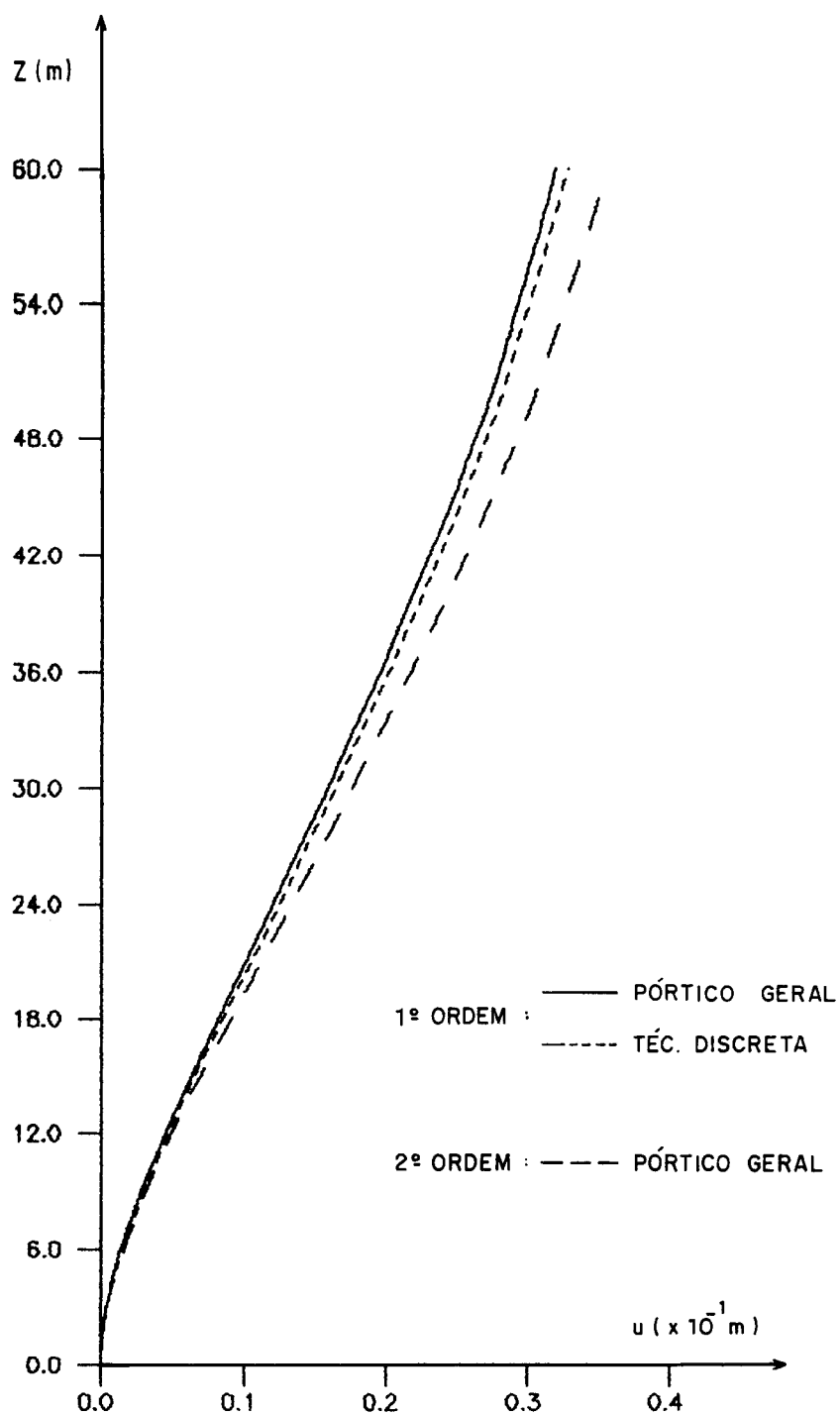
A-) Resultados

A.1-) Deslocamentos

A Tabela 5.9 apresenta os resultados dos deslocamentos laterais do painel, obtidos pela técnica contínua (1ª ordem e 2ª ordem) e pela técnica discreta (1ª ordem). Nota-se, ao longo da altura, uma boa aproximação entre os resultados em 1ª ordem fornecidos pelas duas técnicas, com uma diferença de 2,5% no topo. Levando-se em conta o efeito P- Δ , observa-se um acréscimo de cerca de 11,3% no topo. Na Figura 5.10-a, representam-se graficamente estes deslocamentos.

Tabela 5.9. Deslocamentos laterais $u(x 10^{-1} \text{ m})$

Z(m)	Pórtico Geral		Técnica Discreta
	1ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
0,0	0,000	0,000	0,000
3,0	0,004	0,004	0,004
6,0	0,014	0,016	0,015
9,0	0,028	0,031	0,030
12,0	0,045	0,049	0,047
15,0	0,063	0,069	0,065
18,0	0,082	0,091	0,085
21,0	0,101	0,112	0,105
24,0	0,120	0,133	0,125
27,0	0,139	0,155	0,144
30,0	0,159	0,176	0,164
33,0	0,177	0,197	0,183
36,0	0,196	0,217	0,202
39,0	0,213	0,237	0,220
42,0	0,230	0,256	0,237
45,0	0,247	0,274	0,254
48,0	0,262	0,292	0,270
51,0	0,278	0,309	0,285
54,0	0,292	0,325	0,300
57,0	0,306	0,340	0,314
60,0	0,319	0,355	0,327

Figura 5.10-a - Deslocamentos laterais u

A.2-) Esforços

Nas Tabelas 5.10 a 5.12, apresentam-se, respectivamente, os resultados das análises em 1ª ordem e 2ª ordem dos esforços cortantes concentrados nas vigas, dos esforços normais e dos momentos fletores (flexão global) dos pilares do pórtico geral. A Tabela 5.10 ainda fornece os resultados em 1ª ordem obtidos pela análise discreta. Nas Figuras 5.11 a 5.14, representam-se graficamente estes esforços.

Tabela 5.10. Esforços cortantes (Vv_k) nas vigas.

Z(m)	Vv_1 (kN)			Vv_2 (kN)		
	Pórtico Geral		Técnica Discreta	Pórtico Geral		Técnica Discreta
	1ª ordem	2ª ordem	1ª ordem	1ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3,0	25,845	27,806	25,961	29,457	31,698	28,633
6,0	40,018	43,564	39,700	45,684	49,739	44,741
9,0	47,078	51,742	46,817	53,832	59,170	53,105
12,0	49,888	55,243	49,844	57,136	63,271	56,629
15,0	50,144	55,832	50,255	57,519	64,043	57,162
18,0	48,835	54,583	49,017	56,102	62,702	55,848
21,0	46,568	52,175	46,771	53,575	60,021	53,395
24,0	43,717	49,039	43,912	50,367	56,493	50,233
27,0	40,513	45,453	40,676	46,741	52,435	46,626
30,0	37,099	41,594	37,214	42,863	48,052	52,747
33,0	33,565	37,580	33,629	38,839	43,482	38,714
36,0	29,973	33,493	29,986	34,742	38,820	34,601
39,0	26,369	29,397	26,337	30,625	34,141	30,473
42,0	22,796	25,346	22,723	26,541	29,511	26,379
45,0	19,303	21,402	19,171	22,548	25,003	22,347
48,0	15,960	17,646	15,748	18,727	20,710	18,454
51,0	12,872	14,196	12,544	15,199	16,768	14,797
54,0	10,208	11,234	9,666	12,158	13,388	11,550
57,0	8,237	9,055	7,219	9,912	10,903	8,997
60,0	3,700	4,067	5,434	4,480	4,927	7,410

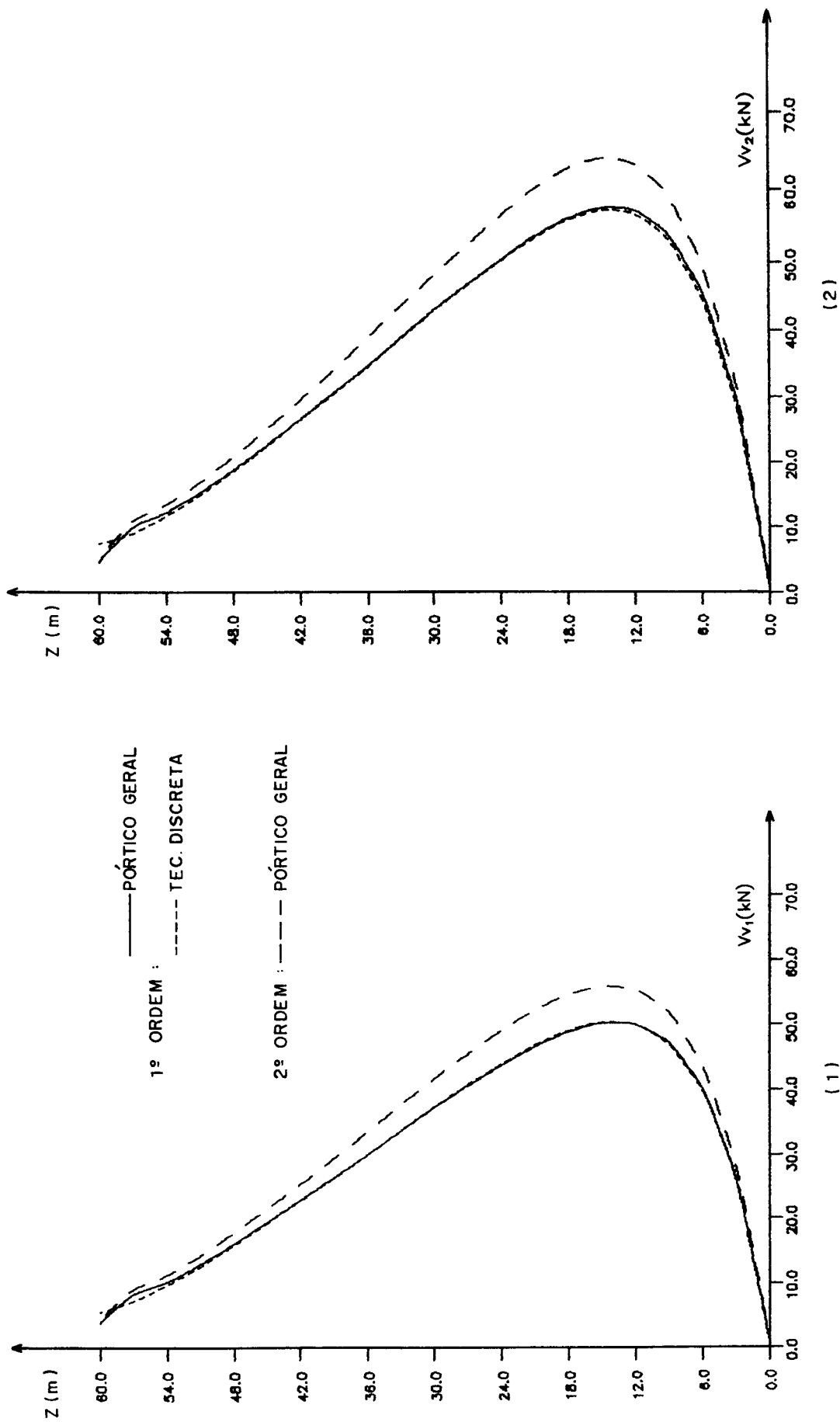


Figura 5.11 - (1) Esforços cortantes nas vigas do vão 1
 (2) Esforços cortantes nas vigas do vão 2

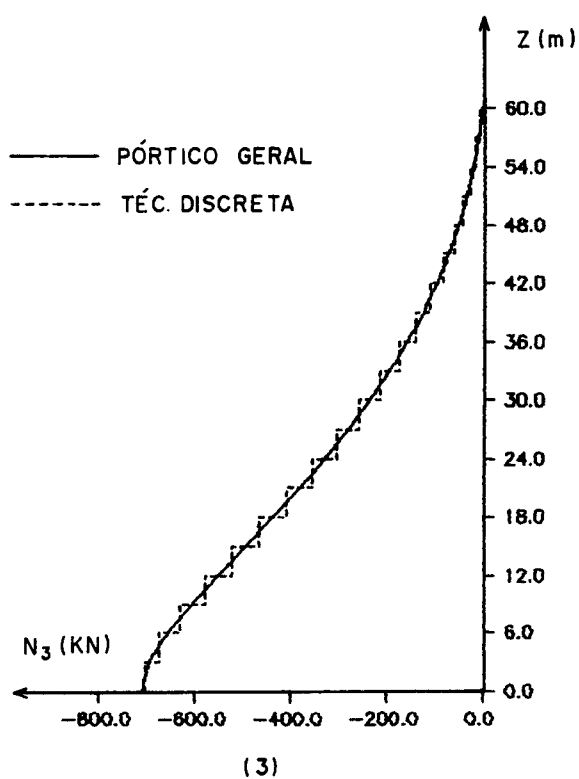
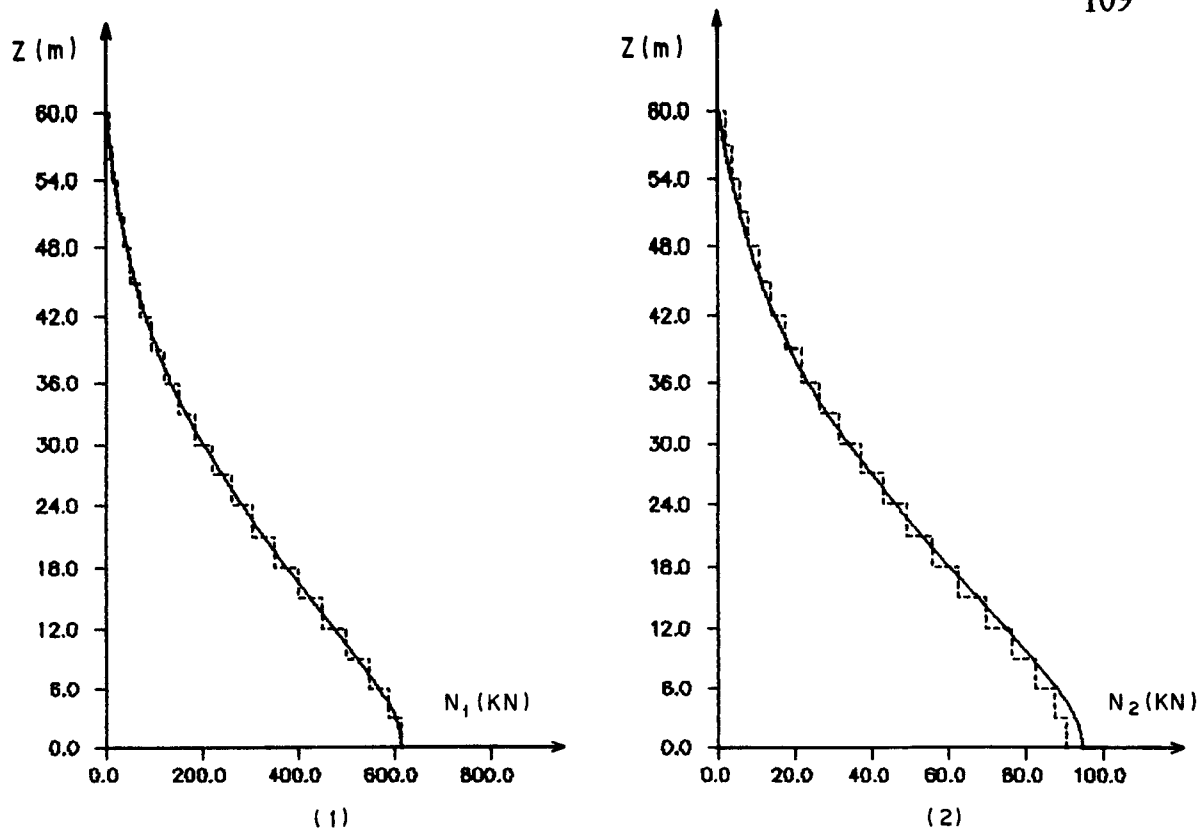


Figura 5.12 - (1) Esforço normal no pilar 1 (1ª ordem)
 (2) Esforço normal no pilar 2 (1ª ordem)
 (3) Esforço normal no pilar 3 (1ª ordem)

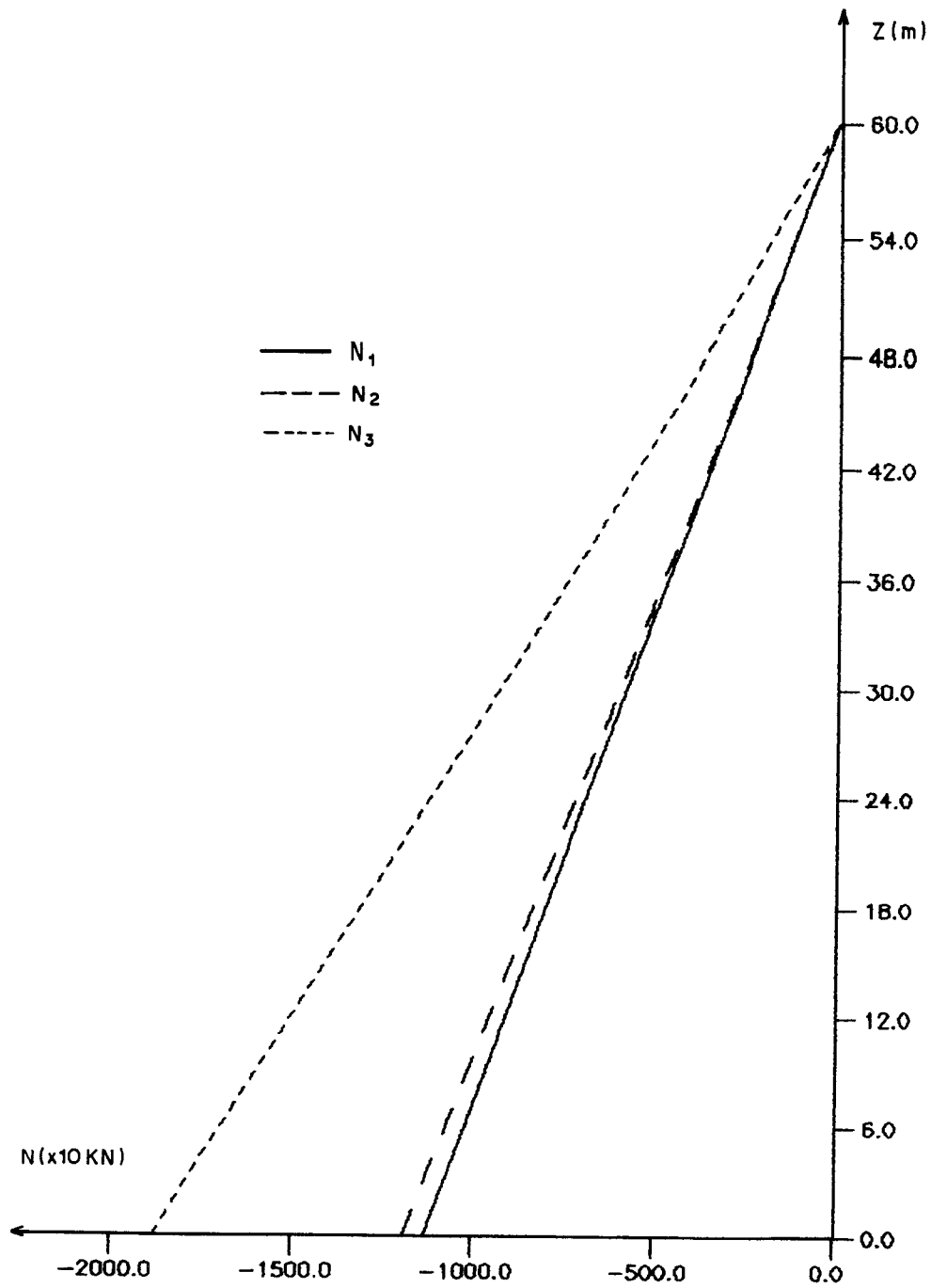


Figura 5.13 - Esforços normais nos pilares 1,2 e 3 (2ª ordem)

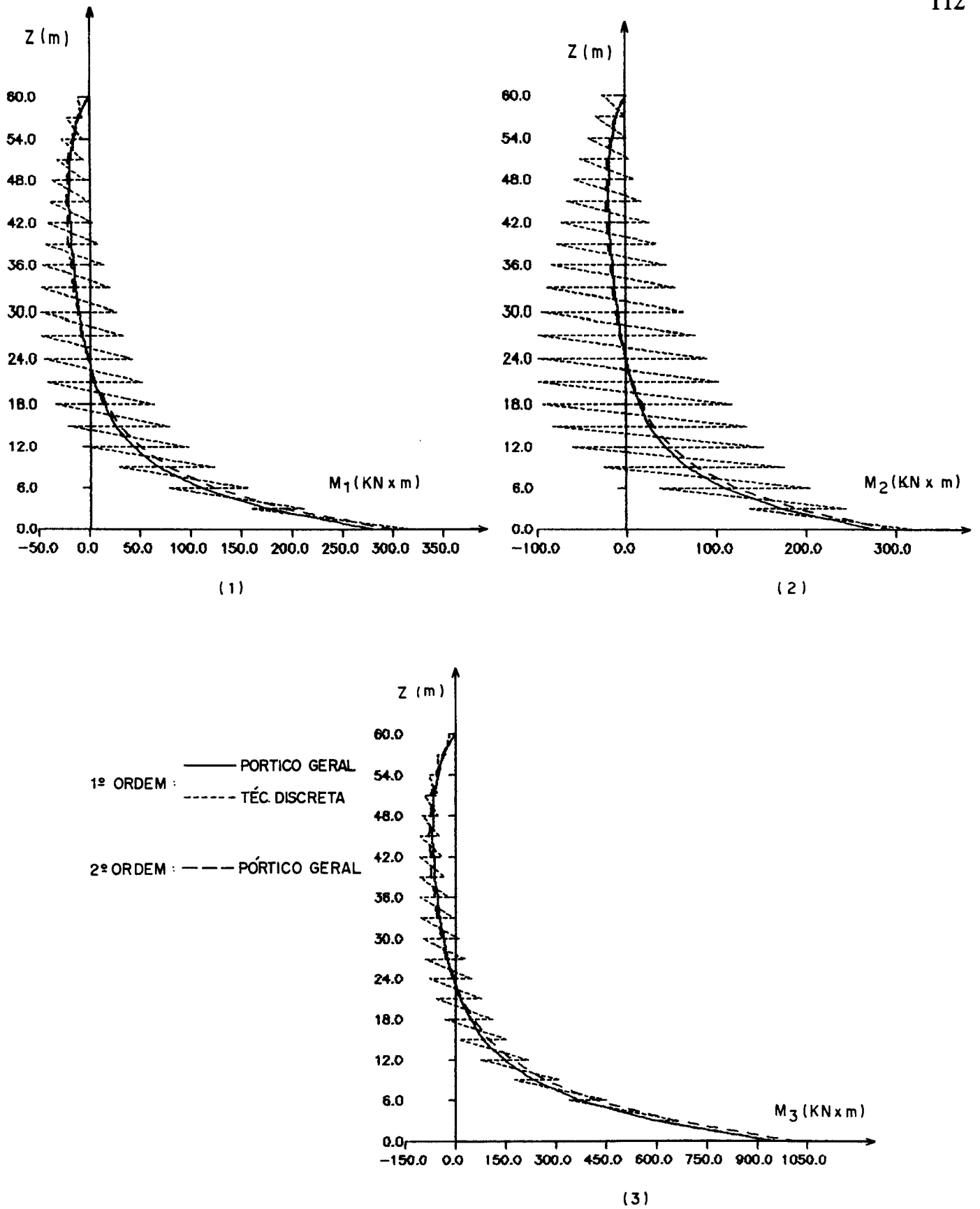


Figura 5.14 - (1) Momento fletor no pilar 1
 (2) Momento fletor no pilar 2
 (3) Momento fletor no pilar 3

Analisando-se as Tabelas e gráficos anteriores, verifica-se uma boa aproximação entre os resultados obtidos através das duas técnicas de análise, para os esforços e deslocamentos ao longo da altura do painel, comprovando a teoria desenvolvida no item 3.7. do Capítulo 3.

B-) Carga crítica global

Foi encontrado para a carga crítica global o valor $p = 68,72 \text{ kN/cm}$.

5.5. Exemplo numérico 4

A estrutura da Figura 5.15 tem 20 andares de altura $h = 3,0 \text{ m}$, e é constituída por duas paredes unidas por vigas. Até o 10º andar, as seções transversais das paredes medem $0,25 \times 6,0 \text{ m}$ e $0,25 \times 8,0 \text{ m}$. A partir do 10º andar, passam a medir $0,25 \times 4,0 \text{ m}$ e $0,25 \times 5,0 \text{ m}$, respectivamente. As seções transversais das vigas são constantes ao longo da altura e medem $0,25 \times 0,66 \text{ m}$. Para o módulo de elasticidade longitudinal adota-se o valor $E = 2,0 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ e para o coeficiente de Poisson, o valor $\mu = 0,20$.

O carregamento constitui-se de uma carga lateral e uniformemente distribuída $q = 10 \text{ kN/m}$.

O painel será calculado como pórtico geral de nós rígidos e leva-se em conta a influência da deformação por força cortante dos pilares e vigas.

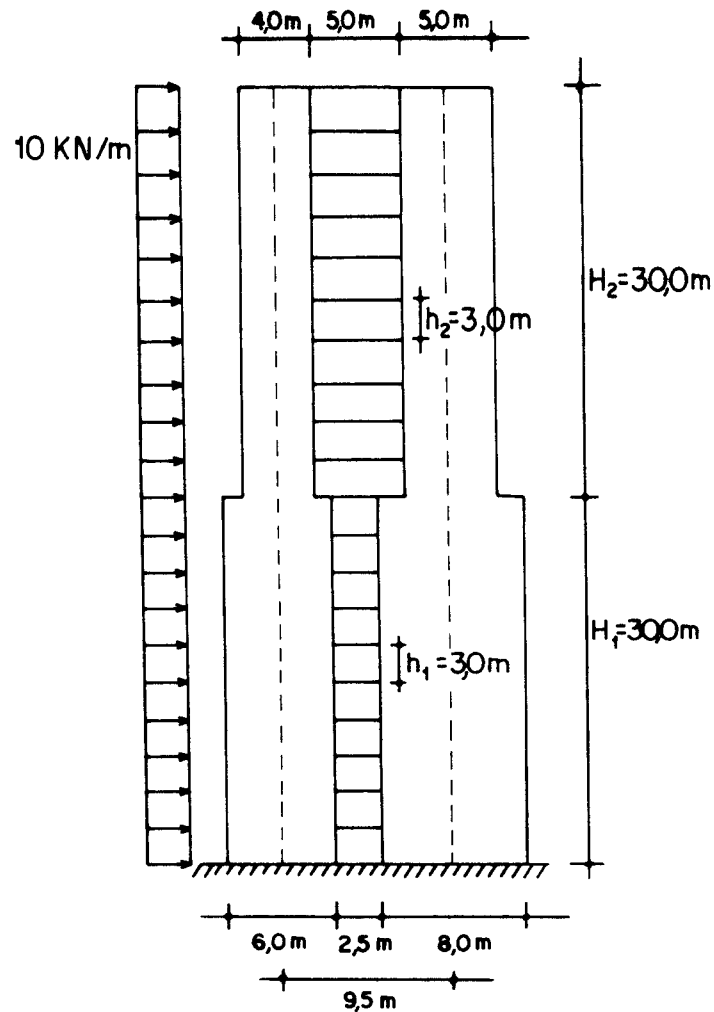


Figura 5.15 - Paredes associadas com variação de rigidez

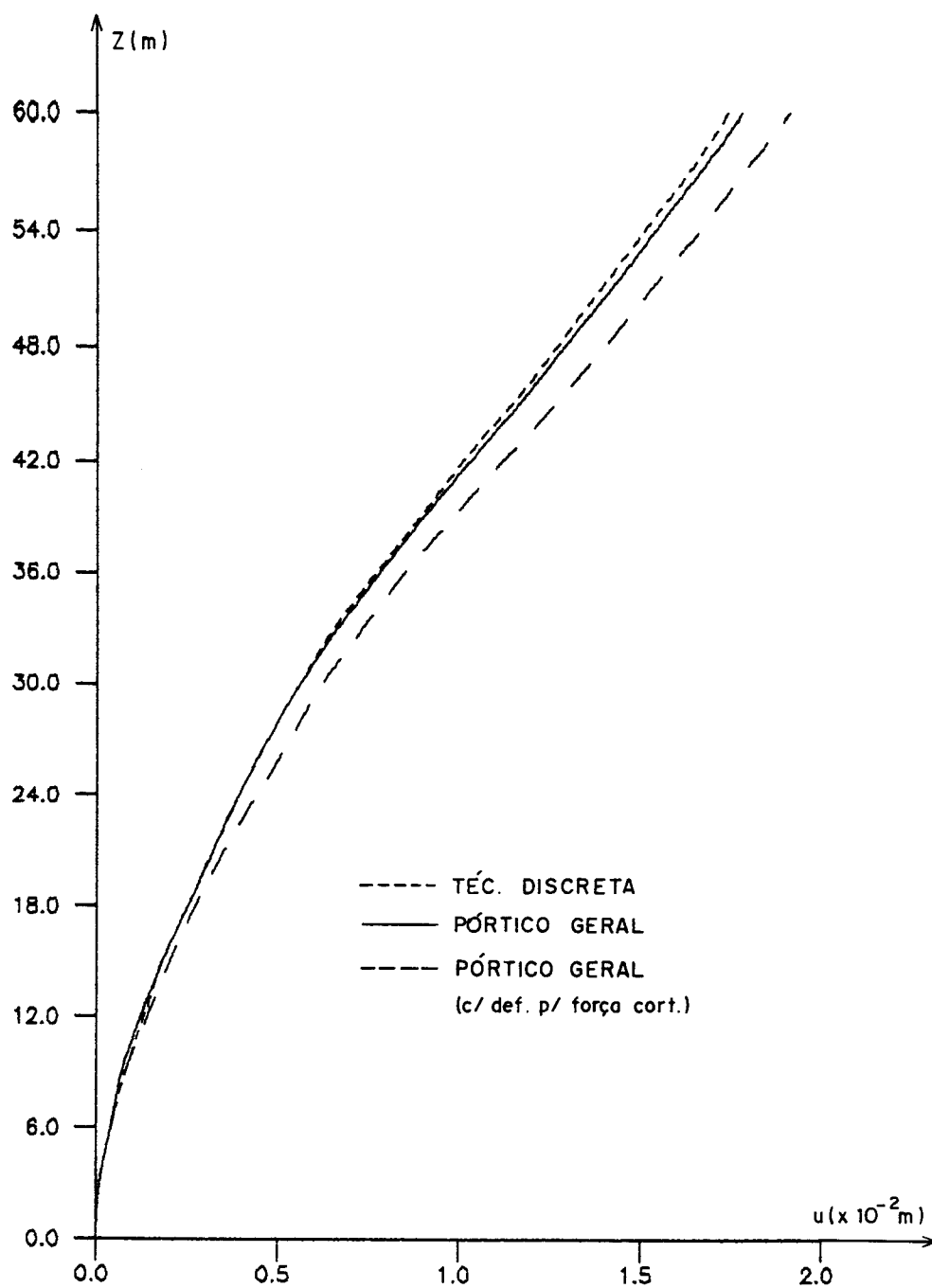
A-) Resultados

A.1-) Deslocamentos

A Tabela 5.13 apresenta os deslocamentos laterais, ao longo da altura do painel, representados graficamente na Figura 5.16. Notam-se pequenas diferenças em relação aos resultados obtidos na análise discreta (cerca de 2,3% no topo) e, também, um acréscimo de 7,3%, quando se considera na análise do pórtico geral, a influência da deformação por força cortante de vigas e pilares.

Tabela 5.13. Deslocamentos laterais u(m)

Z(m)	Pórtico Geral		Técnica Discreta
	Sem def. p/ força cortante	Com def. p/ força cortante	
0,0	0,0000	0,0000	0,0000
3,0	0,0001	0,0001	0,0001
6,0	0,0004	0,0004	0,0004
9,0	0,0007	0,0008	0,0008
12,0	0,0012	0,0014	0,0013
15,0	0,0018	0,0020	0,0018
18,0	0,0025	0,0027	0,0025
21,0	0,0032	0,0035	0,0032
24,0	0,0039	0,0044	0,0039
27,0	0,0047	0,0053	0,0047
30,0	0,0056	0,0062	0,0056
33,0	0,0066	0,0073	0,0065
36,0	0,0078	0,0085	0,0077
39,0	0,0090	0,0098	0,0089
42,0	0,0103	0,0112	0,0101
45,0	0,0116	0,0126	0,0114
48,0	0,0129	0,0140	0,0127
51,0	0,0142	0,0153	0,0139
54,0	0,0154	0,0166	0,0151
57,0	0,0166	0,0178	0,0163
60,0	0,0178	0,0191	0,0174

Figura 5.16 - Deslocamentos laterais u

A.2-) Esforços

Na Tabela 5.14, apresentam-se os resultados dos esforços cortantes concentrados nas vigas e dos esforços normais dos pilares. Na Figura 5.17, representam-se estes esforços através de gráficos.

As diferenças mais acentuadas, entre os resultados das análises contínua e discreta, ocorrem para o painel pórtico geral, sem a consideração da influência da deformação por força cortante dos pilares e vigas. No nível $Z = 27,0$ m, estas diferenças são de cerca de 10,4% para o esforço cortante na viga e no nível $Z = 30,0$ m, em torno de 17% para o esforço normal dos pilares. Isto pode ser verificado, também, na Figura 5.17.

Tabela 5.14. Esforços cortantes (V_{v_k}) nas vigas e esforços normais nos pilares (N_j)

Z(m)	V_{v_1} (kN)			$N_1 = - N_2$ (kN)	
	Pórtico Geral		Técnica Discreta	Pórtico Geral	
	Sem def. p/ força cortante	Com def. p/ força cortante	—	Sem def. p/ força cortante	Com def. p/ força cortante
0,0	0,00	0,00	0,00	1138,95	1101,64
3,0	36,08	33,05	35,57	1120,01	1084,34
6,0	61,04	56,59	59,77	1070,66	1038,84
9,0	78,09	73,16	76,02	1000,54	973,46
12,0	89,63	84,76	86,78	916,29	894,15
15,0	97,57	92,95	93,83	822,45	805,07
18,0	103,45	99,05	98,57	721,82	708,94
21,0	108,61	104,19	102,17	615,78	607,28
24,0	114,31	109,44	105,74	504,42	500,51
27,0	121,89	115,84	110,41	386,53	388,02
30,0	119,93	111,35	117,51	259,43	267,99
33,0	22,84	24,44	21,32	239,50	246,17
36,0	26,65	27,83	25,21	214,57	219,87
39,0	28,62	29,51	27,20	186,80	191,07
42,0	29,19	29,90	27,77	157,80	161,13
45,0	28,76	29,37	27,31	128,75	131,57
48,0	27,69	28,24	26,16	100,49	102,73
51,0	26,30	26,84	24,63	73,48	75,17
54,0	24,91	25,46	23,02	47,89	49,03
57,0	23,83	24,40	21,62	23,56	24,13
60,0	11,69	11,98	20,75	0,00	0,00

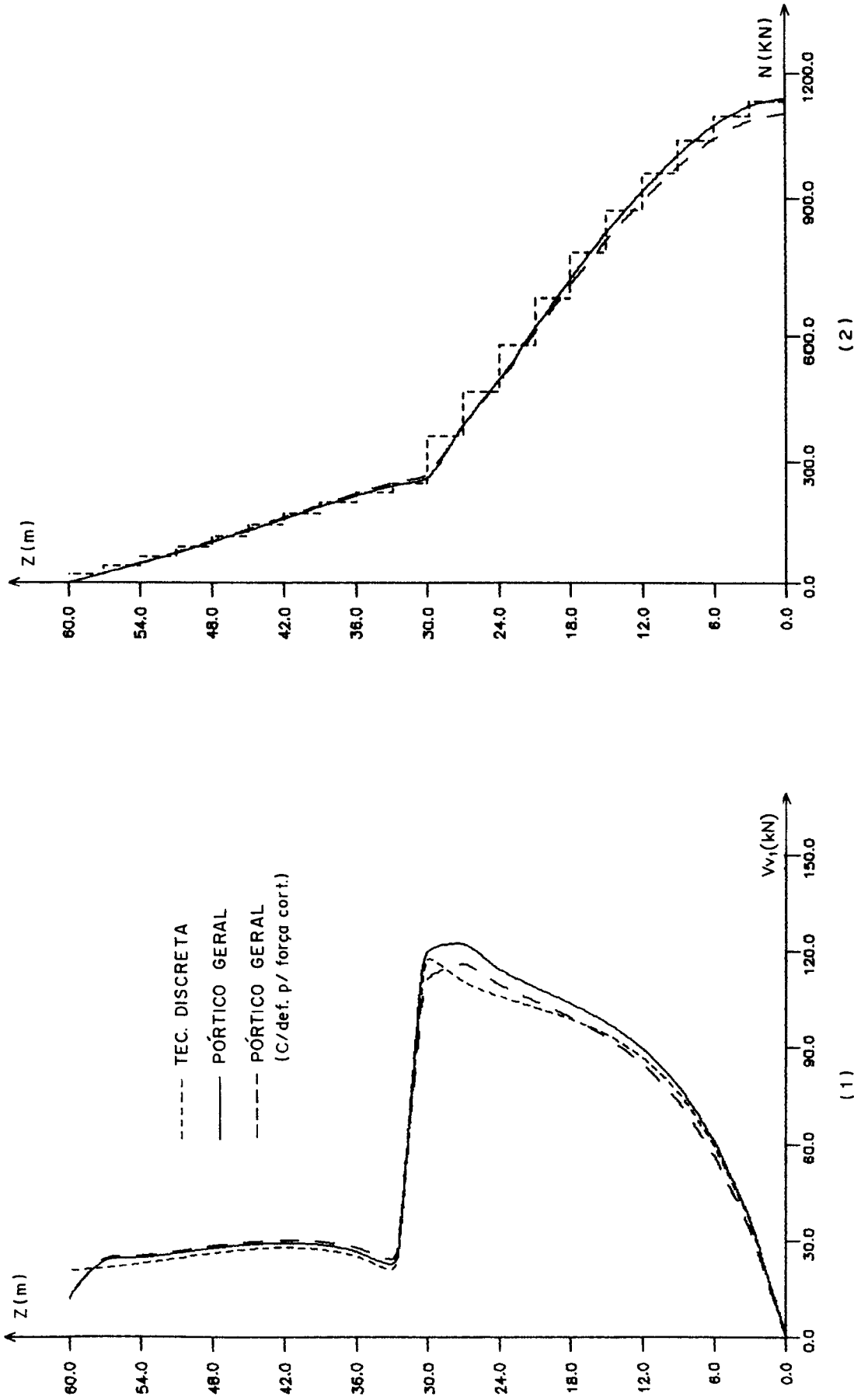


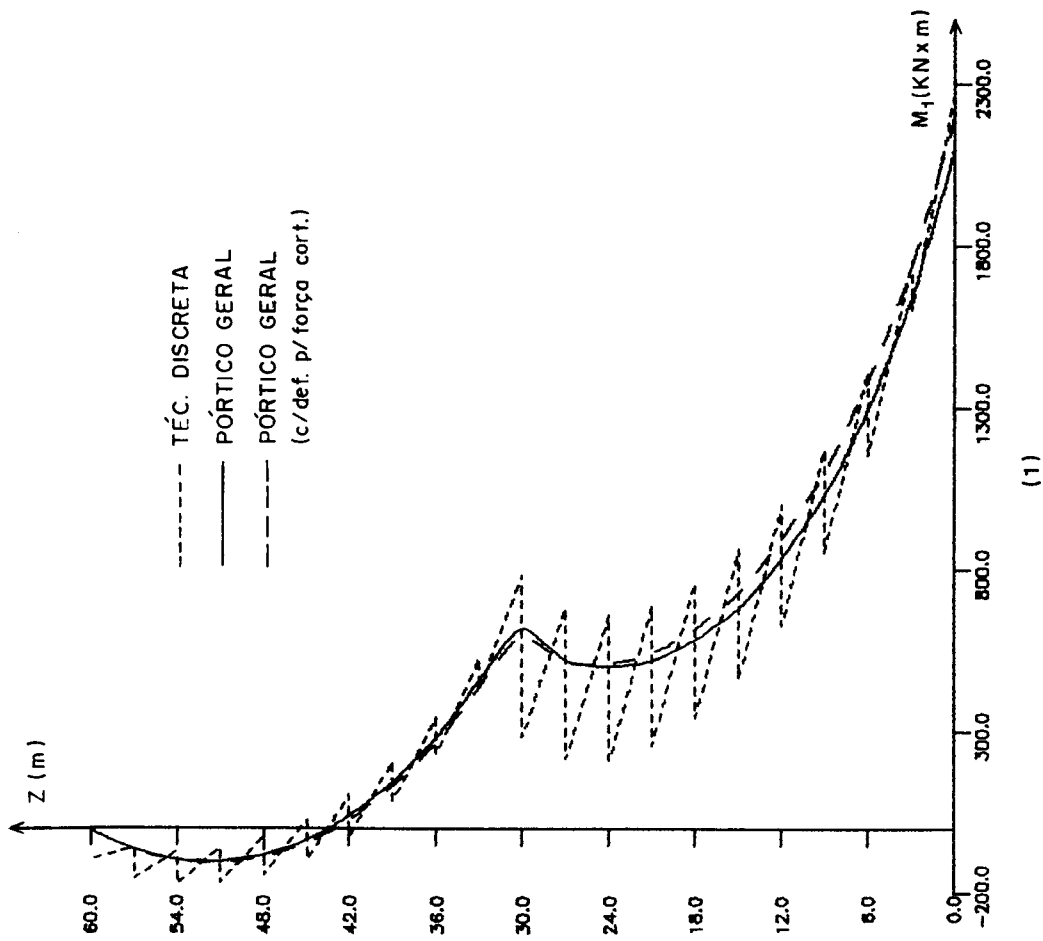
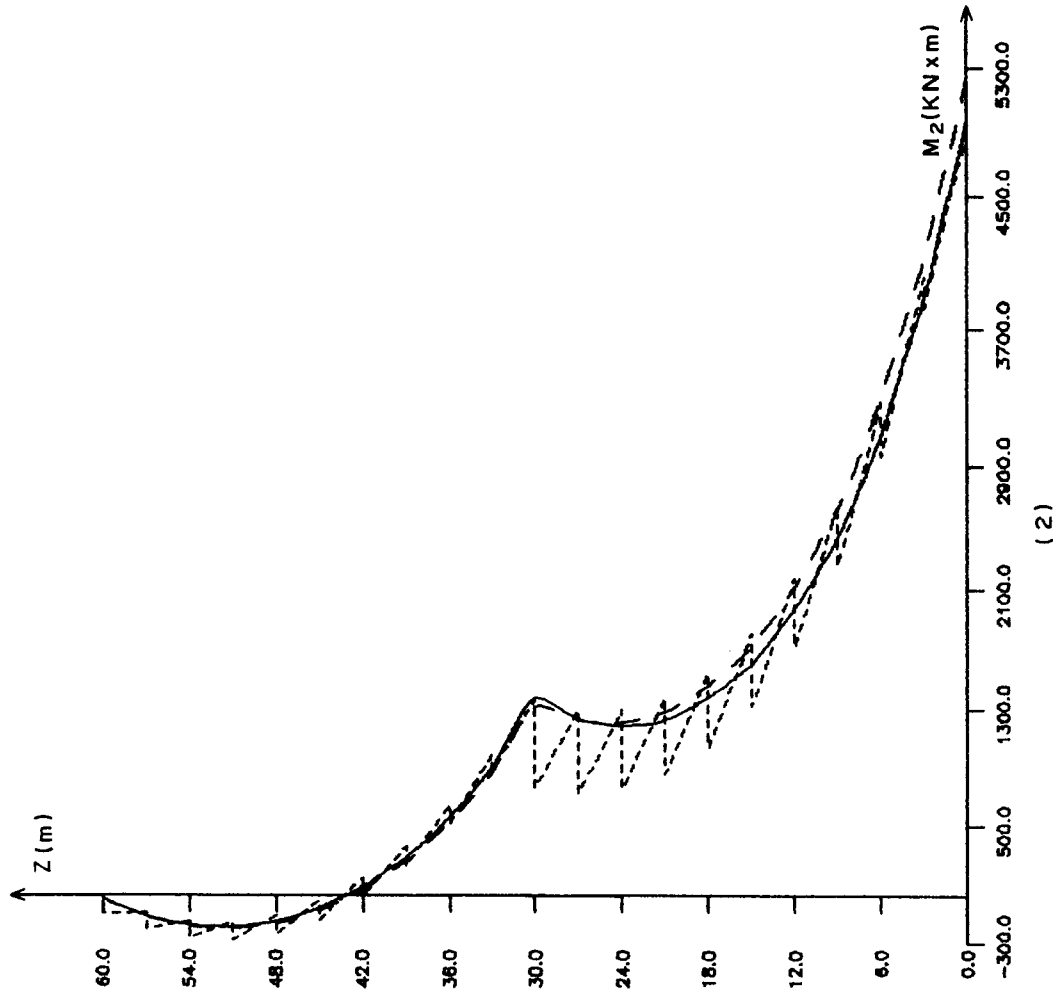
Figura 5.17. - (1) Esforços cortantes nas vigas (V_{v_k})
(2) Esforços normais nos pilares ($N_1 = - N_2$)

Encontram-se, na Tabela 5.15, os resultados dos momentos fletores (flexão global) nos pilares e, na Figura 5.18, as curvas relativas às variações destes esforços ao longo da altura.

Observa-se, na Figura 5.18-(1), uma boa aproximação entre os resultados obtidos pelas técnicas contínua e discreta para os momentos fletores do pilar 1, com pequenas diferenças na base e no topo. Em relação aos momentos fletores do pilar 2, notam-se diferenças mais acentuadas nas proximidades do nível onde ocorre a variação de rigidez do painel.

Tabela 5.15. Momentos fletores (flexão global) nos pilares

Z(m)	Pórtico Geral			
	M ₁ (kN x m)		M ₂ (kN x m)	
	Sem def. p/ força cortante	Com def. p/ força cortante	Sem def. p/ força cortante	Com def. p/ força cortante
0,0	2101,58	2201,71	4989,73	5247,78
3,0	1640,68	1737,62	3894,72	4139,46
6,0	1296,75	1382,18	3077,71	3290,94
9,0	1028,12	1101,80	2439,67	2621,91
12,0	832,25	891,35	1974,57	2120,05
15,0	681,02	728,27	1615,52	1731,42
18,0	582,43	616,21	1382,59	1464,72
21,0	516,96	539,87	1226,36	1283,40
24,0	500,10	509,22	1186,66	1211,27
27,0	519,42	514,84	1232,92	1225,82
30,0	617,22	591,15	1377,08	1323,85
33,0	458,85	437,34	896,93	856,26
36,0	282,63	265,62	552,44	519,96
39,0	143,91	130,29	281,25	254,92
42,0	40,99	29,96	80,06	58,46
45,0	-33,37	-42,25	-65,30	-82,93
48,0	-78,32	-85,34	-153,16	-167,30
51,0	-98,84	-104,09	-193,26	-203,98
54,0	-91,96	-95,50	-179,81	-187,13
57,0	-60,67	-62,44	-118,63	-121,33
60,0	0,00	0,00	0,00	0,00



Figuras 5.18 - (1) Momento fletor no pilar 1 (M_1)
(2) Momento fletor no pilar 2 (M_2)

5.6. Exemplo numérico 5

Neste exemplo, considera-se, novamente, a associação de paredes apresentada na Figura 5.10 (Exemplo 3). Supõe-se, agora, que as paredes sejam elasticamente engastadas em suas bases. As sapatas 1 e 2 (relativas às paredes 1 e 2, respectivamente) têm áreas $A_{s1} = A_{s2} = 3,0 \text{ m}^2$ e momentos de inércia $J_{s1} = J_{s2} = 2,25 \text{ m}^4$. A sapata 3 (relativa à parede 3) tem área $A_{s3} = 4,0 \text{ m}^2$ e momento de inércia $J_{s3} = 5,333 \text{ m}^4$. Para o coeficiente de deformação do solo, é tomado o valor $C_\phi = 8 \times 10^5 \text{ kN/m}^3$ e para o módulo de elasticidade, o valor $E = 2,0 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$.

A-) Resultados

A.1-) Deslocamentos laterais e esforços cortantes nas vigas

As Tabelas 5.16 e 5.17 fornecem, respectivamente, os resultados dos deslocamentos laterais e dos esforços cortantes nas vigas obtidos através das técnicas contínua e discreta. Na Figura 5.19, representam-se graficamente estes resultados.

Na Tabela 5.16, pode-se observar um aumento de cerca de 13,8% no deslocamento lateral do topo para o pórtico geral sobre fundação flexível, quando comparado ao caso de fundação rígida (Exemplo 3) e, também, uma diferença de cerca de 2%, quando comparado ao resultado da análise discreta.

Tabela 5.16. Deslocamentos laterais $u(x10^{-1}m)$

Z(m)	Pórtico Geral		Técnica Discreta
	Fundação Rígida	Fundação Flexível	Fundação Flexível
0,0	0,000	0,000	0,000
3,0	0,004	0,008	0,009
6,0	0,014	0,022	0,023
9,0	0,028	0,038	0,040
12,0	0,045	0,057	0,060
15,0	0,063	0,077	0,080
18,0	0,082	0,098	0,102
21,0	0,101	0,119	0,124
24,0	0,120	0,141	0,146
27,0	0,139	0,161	0,167
30,0	0,159	0,183	0,189
33,0	0,177	0,203	0,210
36,0	0,196	0,224	0,231
39,0	0,213	0,243	0,251
42,0	0,230	0,262	0,270
45,0	0,247	0,280	0,288
48,0	0,262	0,298	0,306
51,0	0,278	0,315	0,323
54,0	0,292	0,331	0,340
57,0	0,306	0,347	0,355
60,0	0,319	0,363	0,371

Tabela 5.17. Esforços cortantes (V_{V_k}) nas vigas

Z(m)	V_{V_1} (kN)		V_{V_2} (kN)	
	Pórtico Geral	Técnica Discreta	Pórtico Geral	Técnica Discreta
0,0	6,545	----	7,175	----
3,0	33,490	34,192	37,736	37,440
6,0	44,533	44,895	50,491	50,072
9,0	49,832	49,931	56,701	56,326
12,0	51,607	51,693	58,879	58,559
15,0	51,222	51,347	58,572	58,288
18,0	49,515	49,651	56,733	56,476
21,0	47,000	47,116	53,951	53,712
24,0	43,995	44,073	50,587	50,360
27,0	40,694	40,730	46,867	46,642
30,0	37,219	37,216	42,933	42,709
33,0	33,646	33,598	38,876	38,644
36,0	30,029	29,932	34,759	34,513
39,0	26,409	26,267	30,631	30,371
42,0	22,826	22,649	26,540	26,274
45,0	19,326	19,123	22,544	22,275
48,0	15,978	15,729	18,721	18,419
51,0	12,887	12,563	15,193	14,803
54,0	10,220	9,735	12,151	11,608
57,0	8,249	7,317	9,904	9,906
60,0	3,706	5,527	4,476	7,515

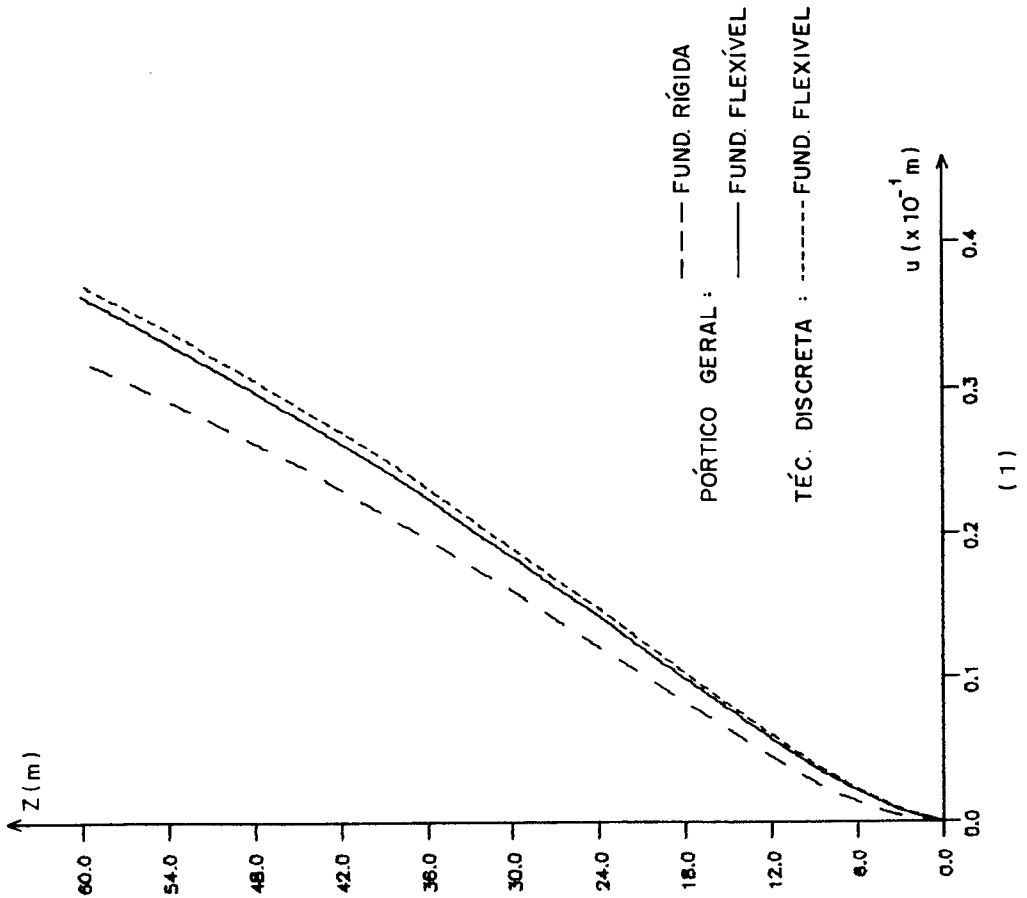
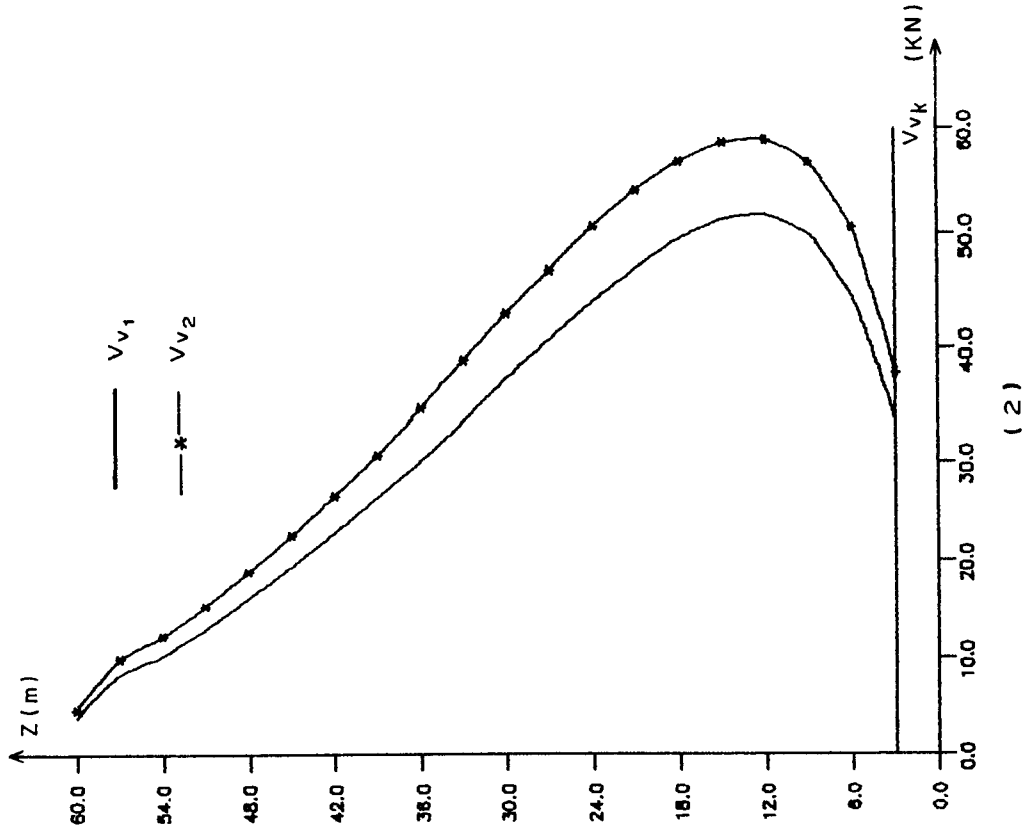


Figura 5.19 - (1) Deslocamentos laterais u
 (2) Esforços cortantes (V_{vK}) nas vigas dos vãos 1 e 2

A.2-) Esforços normais e momentos fletores (flexão global) nos pilares

Na Tabela 5.18, encontram-se os valores dos esforços normais e momentos fletores (flexão global) nas paredes e na Figura 5.20, representam-se através de gráficos estes esforços.

Tabela 5.18. Forças normais e momentos fletores (flexão global) nos pilares

Z(m)	Pórtico Geral					
	Esforços Normais nos Pilares			Momentos Fletores nos Pilares		
	N ₁ (kN)	N ₂ (kN)	N ₃ (kN)	M ₁ (kN)	M ₂ (kN)	M ₃ (kN)
0,0	641,031	95,795	-736,826	233,810	230,482	794,788
3,0	616,983	92,939	-709,923	148,295	146,436	503,637
6,0	577,350	87,752	-665,102	95,296	94,318	323,248
9,0	529,775	81,282	-611,058	59,826	59,413	202,569
12,0	478,814	74,176	-552,991	37,803	37,716	127,688
15,0	427,252	66,843	-494,095	21,584	21,720	72,573
18,0	376,793	59,544	-436,337	11,603	11,855	38,701
21,0	328,481	52,450	-380,930	3,000	3,342	9,503
24,0	282,949	45,672	-328,621	-2,089	-1,709	-7,718
27,0	240,585	39,285	-279,870	-7,467	-7,043	-25,937
30,0	201,617	33,339	-234,956	-10,338	-9,911	-35,630
33,0	166,178	27,865	-194,043	-14,105	-13,655	-48,382
36,0	134,338	22,885	-157,223	-15,709	-15,269	-53,774
39,0	106,120	18,409	-124,529	-18,371	-17,920	-62,779
42,0	81,508	14,441	-95,949	-18,892	-18,460	-64,498
45,0	60,442	10,976	-71,418	-20,357	-19,925	-69,444
48,0	42,808	7,998	-50,806	-19,405	-19,011	-66,165
51,0	28,404	5,478	-33,883	-18,893	-18,526	-64,391
54,0	16,898	3,367	-20,265	-15,106	-14,820	-51,474
57,0	7,739	1,585	-9,323	-10,346	-10,155	-35,247
60,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

A boa aproximação, verificada neste exemplo, entre os resultados, dos esforços e deslocamentos obtidos através das análises contínua e discreta, indica que através do pórtico geral de nós rígidos tem-se uma estimativa bastante razoável do comportamento de paredes associadas sobre fundações flexíveis.

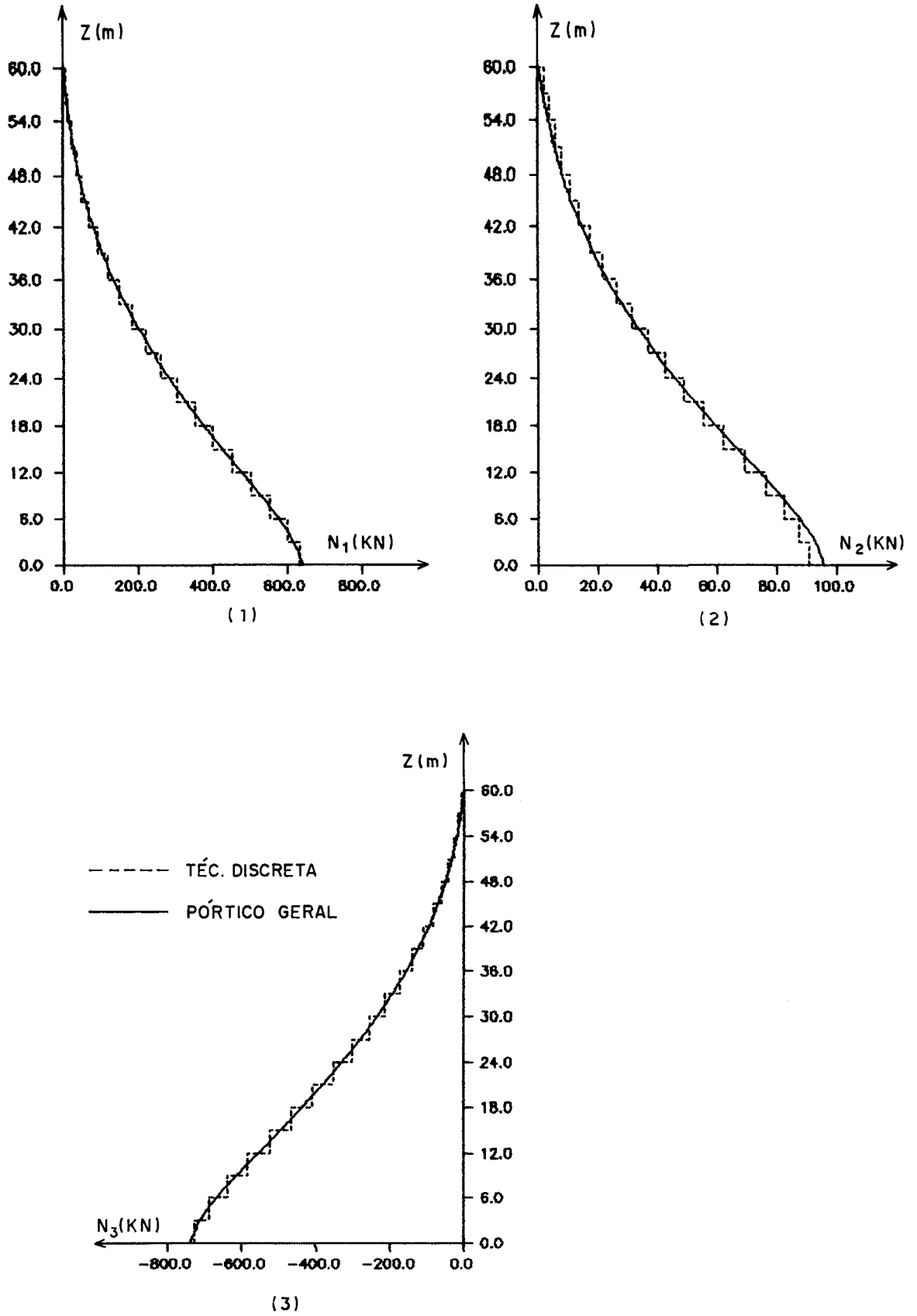


Figura 5.20 - (1) Esforço normal no pilar 1
 (2) Esforço normal no pilar 2
 (3) Esforço normal no pilar 3

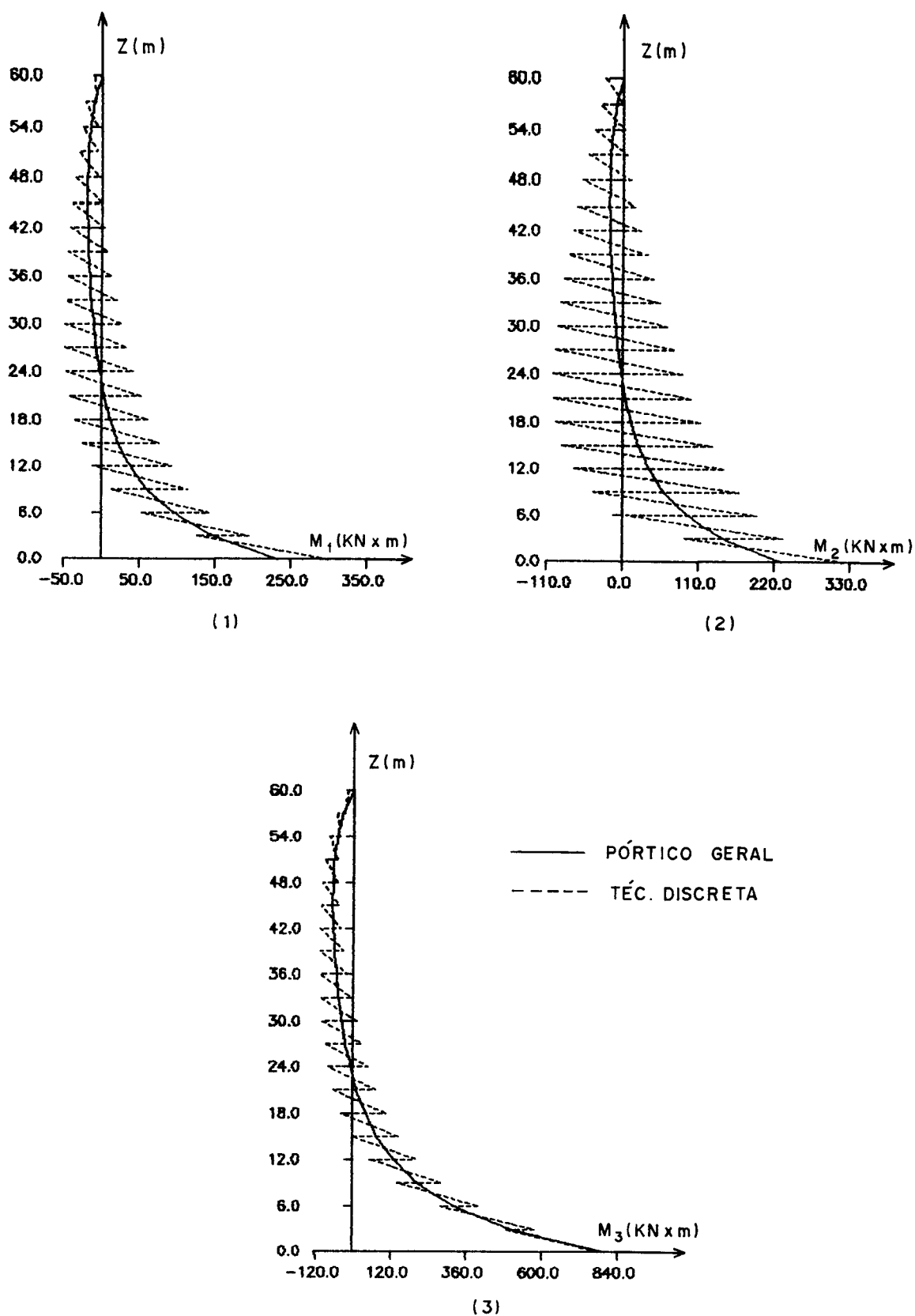


Figura 5.21 - (1) Momento fletor no pilar 1
 (2) Momento fletor no pilar 2
 (3) Momento fletor no pilar 3

5.7. Exemplo numérico 6

Representa-se, na Figura 5.22, uma associação plana de uma parede e um pórtico através de vigas. A estrutura tem vinte andares de altura $h = 3,0$ m. As seções transversais da parede e todos os pilares e vigas do pórtico são constantes ao longo da altura e medem $1,5 \times 2,0$ m para parede, $0,4 \times 0,4$ m para os pilares do pórtico e $0,20 \times 0,40$ m para os dois conjuntos de vigas.

O carregamento constitui-se de carga lateral, uniformemente distribuída $q = 4,0$ kN/m e carga vertical total, também uniforme, de valor $p = 100$ kN/m, distribuída entre a parede e os pilares do pórtico da seguinte maneira: $p_1 = 48,4$ kN/m e $p_2 = p_3 = 25,8$ kN/m.

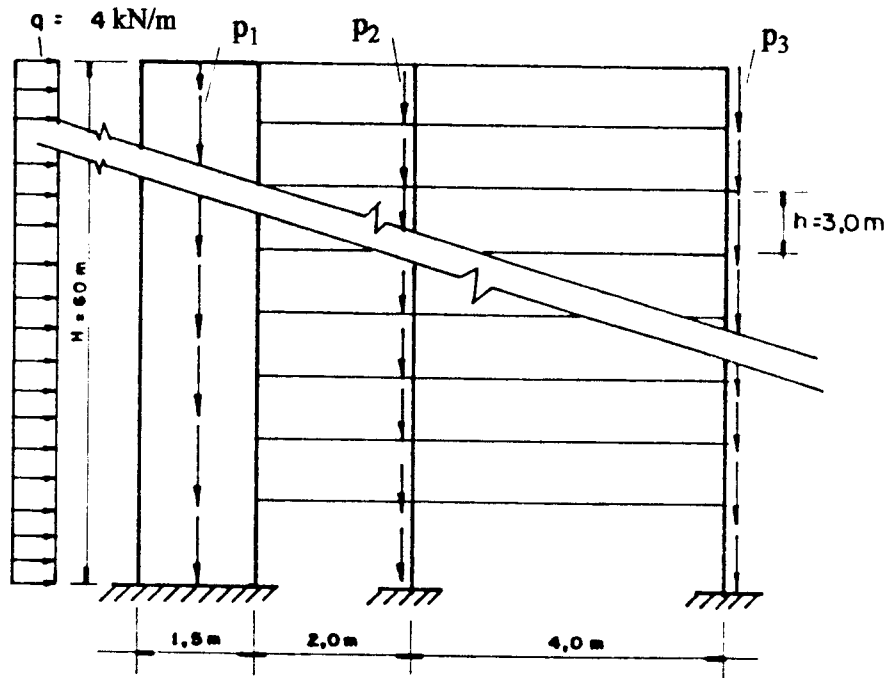


Figura 5.22 - Associação de parede e pórtico por vigas

Para o módulo de elasticidade adota-se o valor $E = 2 \times 10^7$ kN/m².

Em relação à consideração dos nós rígidos, o pórtico geral foi analisado de duas maneiras:

Caso (a) - Considerando-se apenas a dimensão horizontal do nó rígido no primeiro pilar (parede). Os dois pilares restantes (pilares do pórtico) têm nós puntuais.

Caso (b) - Considerando-se as dimensões horizontal e vertical do nó rígido em cada pilar (pórtico geral de nós rígidos).

Os esforços e deslocamentos, resultantes da análise em 1ª ordem ($p = 0,0$), são apresentados em tabelas e gráficos. No Caso (a), apresentam-se também os resultados obtidos através da análise discreta. Como resultados da análise em 2ª ordem, são mostrados apenas os deslocamentos laterais.

A-) Resultados

A.1-) Deslocamentos

Na Tabela 5.19, encontram-se os valores dos deslocamentos laterais u ao longo da altura do painel. No Caso (a), observa-se a boa concordância entre os resultados obtidos pelas análises discreta e contínua. No nível do topo, quando se compara o deslocamento da análise em 1ª ordem com o deslocamento da análise em 2ª ordem, nota-se um acréscimo de 8,9% no Caso (a) e 7,4% no Caso (b). Comparando-se agora o Caso (a) com o Caso (b), verifica-se, também no topo, uma redução de 15,4% no deslocamento em 1ª ordem e 16,6% no deslocamento em 2ª ordem.

Na Figura 5.23 - (1), mostram-se as curvas dos deslocamentos laterais u , obtidos através da análise em 1ª ordem com a utilização das técnicas contínua (Casos (a) e (b)) e discreta. A Figura 5.23 - (2) apresenta os deslocamentos do pórtico geral (Casos (a) e (b)) resultantes das análises em 1ª ordem e 2ª ordem.

Tabela 5.19. Deslocamentos laterais u (m)

Z (m)	Pórtico Geral				Técnica Discreta
	Caso (a)		Caso (b)		Caso (a)
	1ª ordem	2ª ordem	1ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3,0	0,0030	0,0032	0,0026	0,0027	0,0031
6,0	0,0100	0,0107	0,0084	0,0089	0,0103
9,0	0,0191	0,0205	0,0158	0,0168	0,0195
12,0	0,0292	0,0315	0,0241	0,0257	0,0299
15,0	0,0399	0,0433	0,0329	0,0351	0,0409
18,0	0,0509	0,0553	0,0419	0,0448	0,0522
21,0	0,0620	0,0675	0,0511	0,0547	0,0635
24,0	0,0731	0,0796	0,0603	0,0647	0,0749
27,0	0,0840	0,0916	0,0694	0,0745	0,0861
30,0	0,0947	0,1033	0,0784	0,0842	0,0971
33,0	0,1051	0,1146	0,0872	0,0937	0,1078
36,0	0,1152	0,1256	0,0958	0,1029	0,1181
39,0	0,1248	0,1362	0,1040	0,1118	0,1281
42,0	0,1341	0,1462	0,1120	0,1203	0,1376
45,0	0,1429	0,1558	0,1196	0,1285	0,1466
48,0	0,1512	0,1648	0,1268	0,1362	0,1551
51,0	0,1591	0,1733	0,1337	0,1436	0,1631
54,0	0,1667	0,1814	0,1403	0,1506	0,1707
57,0	0,1735	0,1890	0,1465	0,1573	0,1778
60,0	0,1803	0,1964	0,1525	0,1638	0,1847

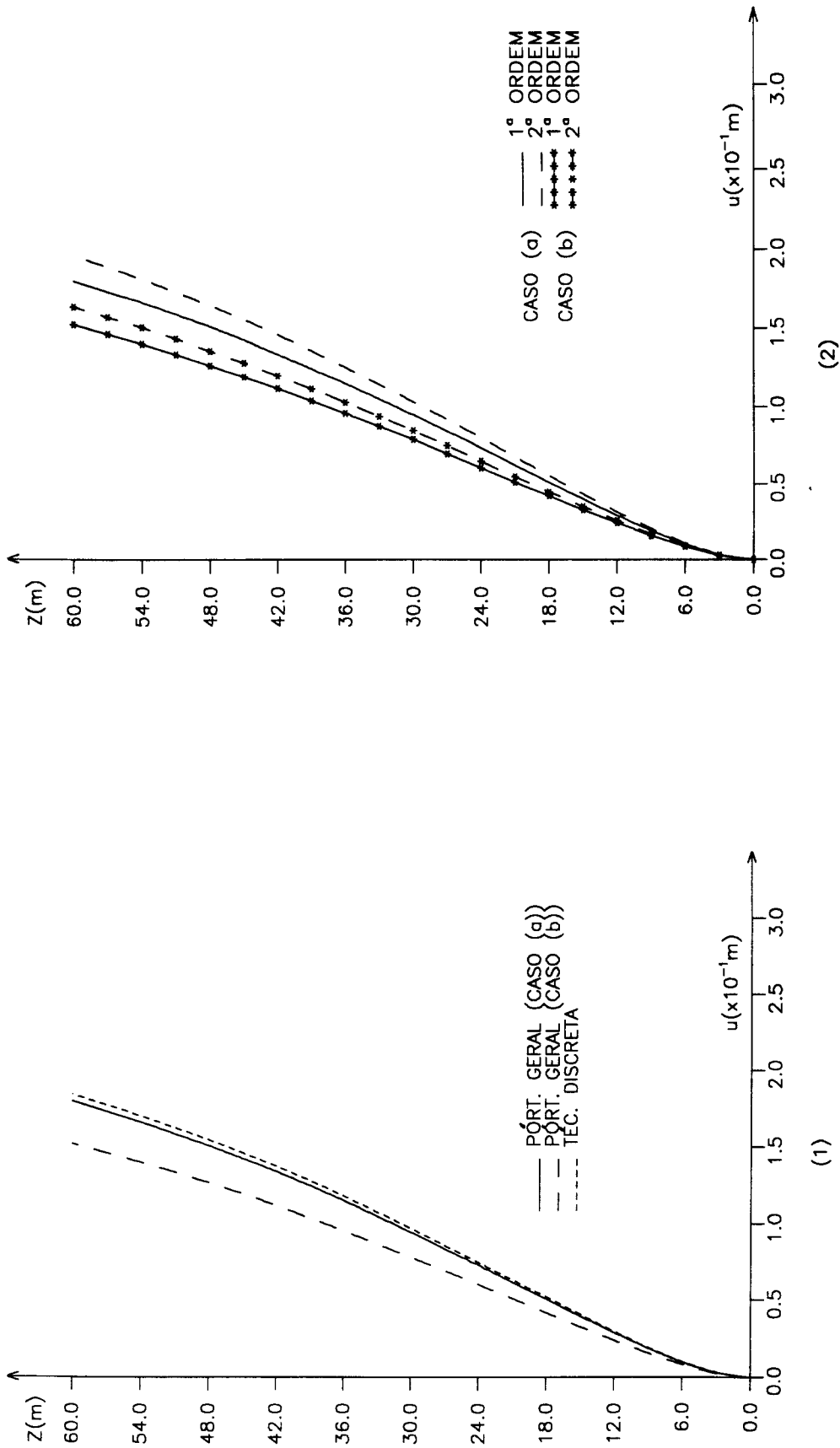


Figura 5.23 - (1) Deslocamentos laterais u (1ª ordem)
 (2) Deslocamentos laterais u (Pórtico Geral)

B-) Esforços

Nas Tabelas 5.20 e 5.21, apresentam-se, respectivamente, os esforços normais na parede (pilar 1) e nos pilares do pórtico (pilares 2 e 3). As Figuras 5.24 e 5.25 mostram estes resultados em gráficos.

A análise destas tabelas e gráficos indica uma boa aproximação entre os resultados obtidos, no Caso (a), pelas técnicas contínua e discreta e, também, que a consideração dos trechos rígidos no pórtico (Caso (b)) conduz a variações mais significativas nos esforços cortantes das vigas do segundo vão e nos esforços normais do pilar 2 (N_2).

Tabela 5.20. Esforços cortantes (V_{v_k}) nas vigas

Z (m)	V_{v_1} (kN)			V_{v_2} (kN)		
	Pórtico Geral		Técnica Discreta	Pórtico Geral		Técnica Discreta
	Caso (a)	Caso (b)	Caso (a)	Caso (a)	Caso (b)	Caso (a)
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3,0	94,140	102,668	94,353	21,122	24,504	21,107
6,0	128,188	133,660	130,185	32,217	36,486	32,658
9,0	135,654	136,914	138,199	38,203	42,637	38,950
12,0	131,665	129,914	134,402	41,397	45,781	42,283
15,0	123,004	119,536	125,763	42,923	47,165	43,882
18,0	112,671	108,414	115,395	43,355	47,384	44,347
21,0	101,956	97,496	104,608	43,008	46,762	44,007
24,0	91,380	87,069	93,961	42,076	45,500	43,062
27,0	81,121	77,164	83,631	40,689	43,738	41,646
30,0	71,208	67,721	73,611	38,947	41,590	39,854
33,0	61,604	58,649	63,866	36,933	39,149	37,771
36,0	52,253	49,854	54,388	34,717	36,498	35,473
39,0	43,089	41,244	45,089	32,366	33,713	33,026
42,0	34,057	32,737	35,910	29,943	30,865	30,491
45,0	25,122	24,267	26,761	27,513	28,027	27,927
48,0	16,298	15,803	17,650	25,147	25,277	25,405
51,0	7,705	7,407	8,750	22,931	22,708	23,023
54,0	-0,299	-0,635	0,470	20,989	20,449	20,864
57,0	-6,835	-7,467	-6,233	19,519	18,723	19,660
60,0	-4,937	-5,406	-11,977	9,444	8,983	15,563

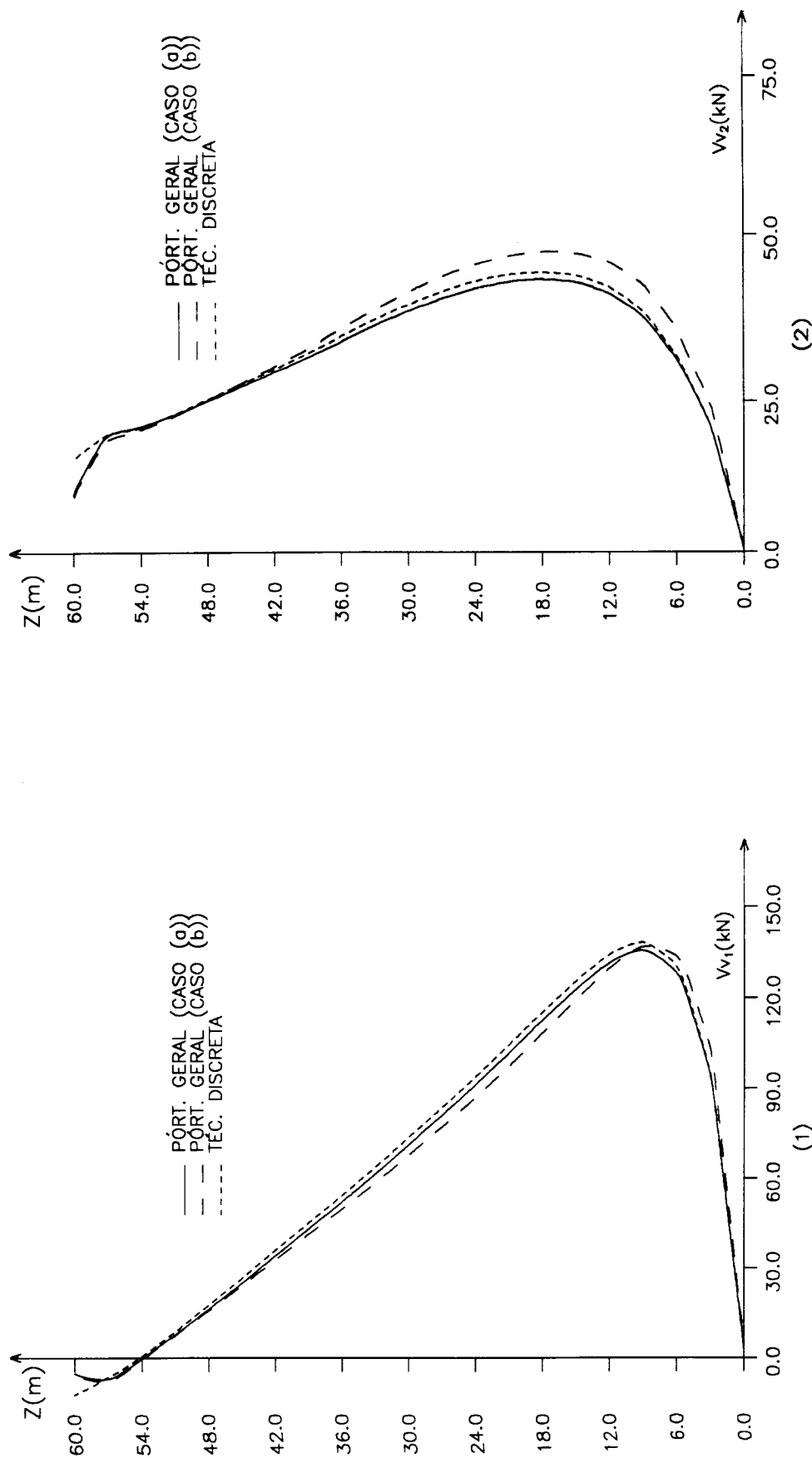


Figura 5.24 - (1) Esforços cortantes nas vigas do vão 1 (1ª ordem)
 (2) Esforços cortantes nas vigas do vão 2 (1ª ordem)

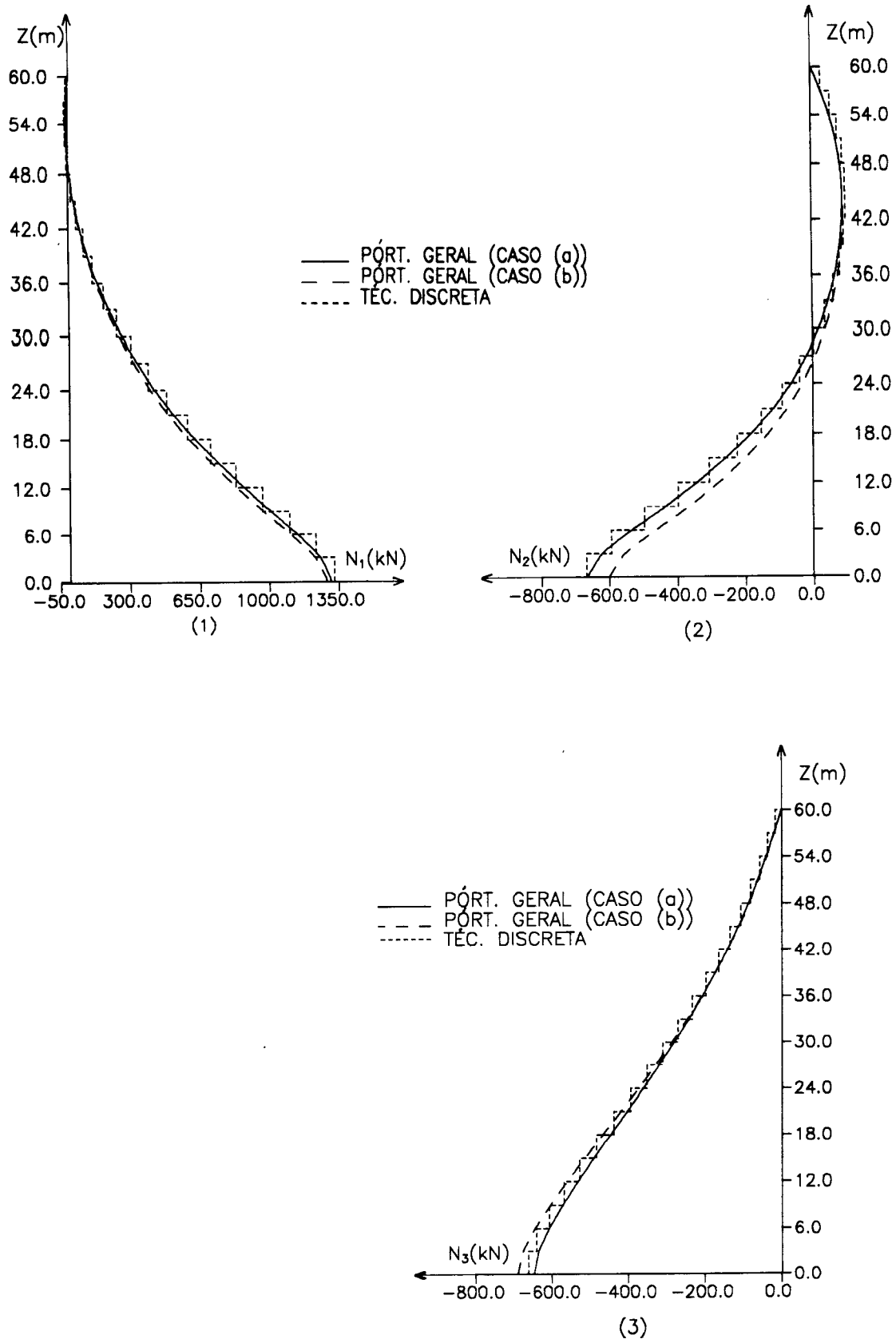


Figura 5.25 - (1) Esforço normal no pilar 1
 (2) Esforço normal no pilar 2
 (3) Esforço normal no pilar 3

Conforme foi exposto no Capítulo 3, os pilares apresentam, em cada nível, uma flexão local (expressa pelas equações (2.26)) devido à distorção u' e às rotações dos nós (consideradas próximas em três níveis consecutivos) e, também, uma flexão global (calculada através da equação (5.1)) devido à variação de rotação dos nós ao longo da altura do painel. A flexão total, a nível dos andares, deve ser obtida somando-se as duas flexões citadas.

No caso de paredes, de acordo com o subitem 3.7.1. do item 3.7., as rotações dos nós têm valores aproximadamente iguais ao de u' (equação (3.33-a)). Isto equivale a afirmar que, em cada parede, a flexão total, ao nível de cada andar, deve ter valor próximo ao da flexão global. No caso de pilares de pórtico, isto não ocorre, e a flexão total deve ser obtida pela soma das duas flexões.

Na Tabela 5.22, apresentam-se os valores da flexão global de cada pilar, obtidos através da equação (5.1) para os Casos (a) e (b). Estes valores estão representados graficamente na Figura 5.26 juntamente com os momentos resultantes da análise discreta. Pode-se observar que o gráfico do pilar 1 tem a forma característica da curva de momento de uma parede.

As colunas 4, 7 e 10 da Tabela 5.22 contêm, respectivamente, os pontos médios (flexão total) do diagrama de momentos (Figura 5.26), obtidos através de análise discreta, dos pilares 1, 2 e 3. Em cada pilar, pelas vizinhanças destes pontos deve passar a curva de flexão total, obtida através da análise contínua. Como foi dito anteriormente, no caso de paredes esta curva pode ser representada pela flexão global (equação (5.1)). Isto pode ser verificado tanto na Tabela 5.22 como na Figura 5.27.

Tabela 5.22 Momentos Fletores nos pilares - Caso (a)

Z (m)	M ₁ (kN.m)			M ₂ (kN.m)			M ₃ (kN.m)		
	Pórtico Geral		Técnica Discreta	Pórtico Geral		Técnica Discreta	Pórtico Geral		Técnica Discreta
	Flexão Global		Flexão Total	Flexão Global		Flexão Total	Flexão Global		Flexão Total
	Caso (a)	Caso (b)	Caso (a)	Caso (a)	Caso (b)	Caso (a)	Caso (a)	Caso (b)	Caso (a)
0,0	928,799	812,894	976,892	20,484	18,449	60,361	30,901	27,422	45,468
3,0	465,917	378,593	485,584	11,332	9,681	32,117	15,374	12,684	22,255
6,0	243,734	191,542	250,620	6,762	5,712	14,625	7,971	6,383	12,308
9,0	132,342	105,451	134,191	4,322	3,727	6,525	4,298	3,518	6,477
12,0	72,531	61,315	72,090	2,892	2,587	2,381	2,354	2,072	3,459
15,0	37,261	35,248	36,005	1,957	1,832	0,170	1,227	1,231	1,644
18,0	14,131	17,510	12,334	1,283	1,264	-1,153	0,495	0,663	0,438
21,0	-2,581	4,071	-4,544	0,756	0,808	-2,021	-0,025	0,233	-0,434
24,0	-15,548	-6,783	-17,663	0,326	0,427	-2,647	-0,431	-0,116	-1,109
27,0	-26,045	-15,813	-28,344	-0,033	0,104	-3,137	-0,762	-0,410	-1,656
30,0	-34,694	-23,385	-37,592	-0,336	-0,170	-3,553	-1,037	-0,660	-2,119
33,0	-41,811	-29,689	-44,812	-0,589	-0,400	-3,865	-1,266	-0,871	-2,979
36,0	-47,552	-34,828	-50,756	-0,796	-0,590	-4,115	-1,456	-1,047	-2,766
39,0	-51,981	-38,853	-55,570	-0,959	-0,740	-4,312	-1,606	-1,188	-2,986
42,0	-55,078	-41,763	-58,938	-1,078	-0,851	-4,449	-1,716	-1,296	-3,137
45,0	-56,707	-43,488	-61,525	-1,150	-0,922	-4,545	-1,782	-1,366	-3,232
48,0	-56,523	-43,811	-61,807	-1,170	-0,948	-4,511	-1,792	-1,393	-3,218
51,0	-53,740	-42,190	-59,236	-1,122	-0,920	-4,313	-1,719	-1,356	-3,032
54,0	-46,641	-37,302	-52,109	-0,972	-0,809	-3,802	-1,506	-1,213	-2,900
57,0	-31,467	-25,901	-39,579	-0,650	-0,555	-1,965	-1,025	-0,852	0,165
60,0	0,000	0,000	-	0,000	0,000	-	0,000	0,000	-

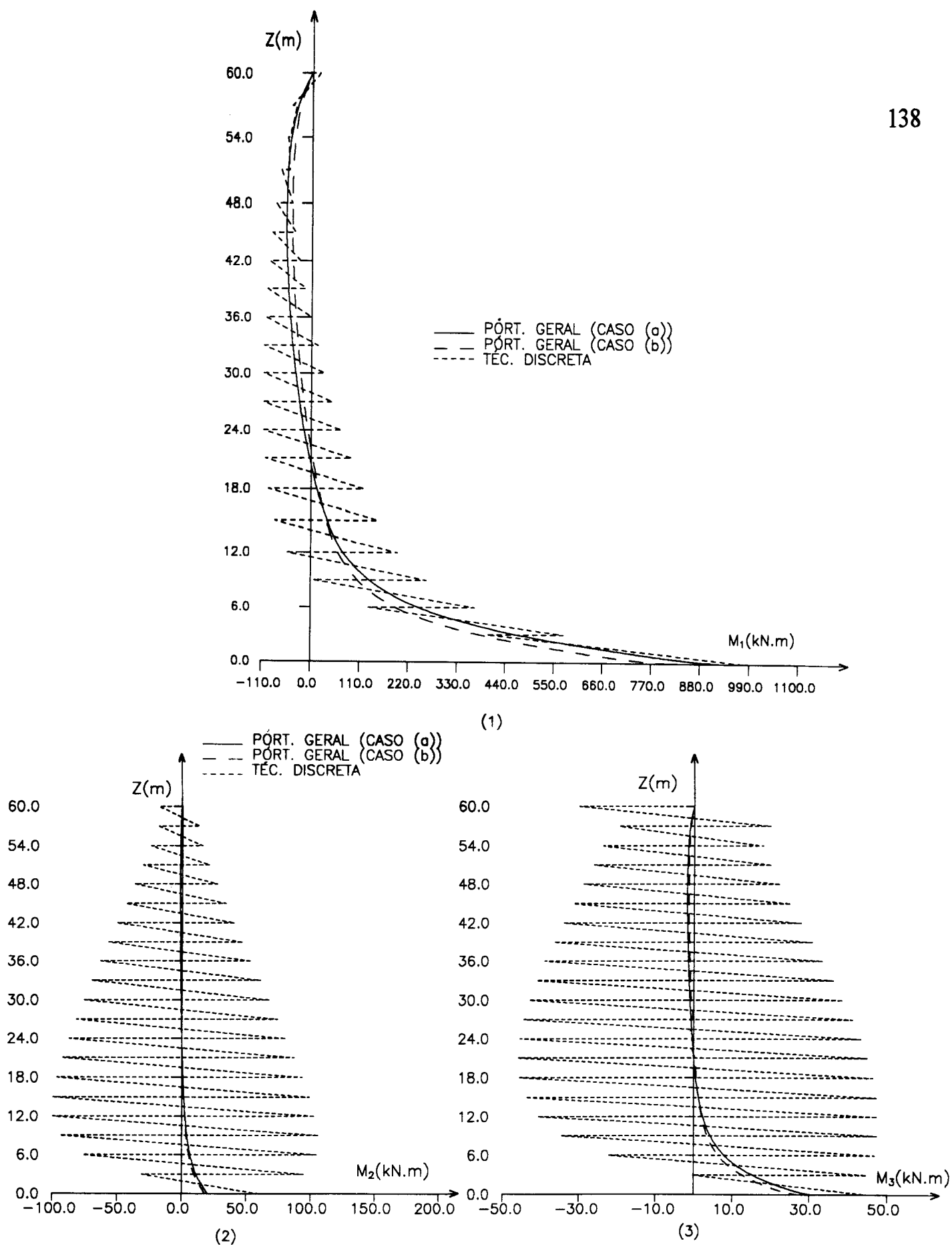


Figura 5.26 - (1) Momento fletor no pilar 1
 (2) Momento fletor no pilar 2
 (3) Momento fletor no pilar 3

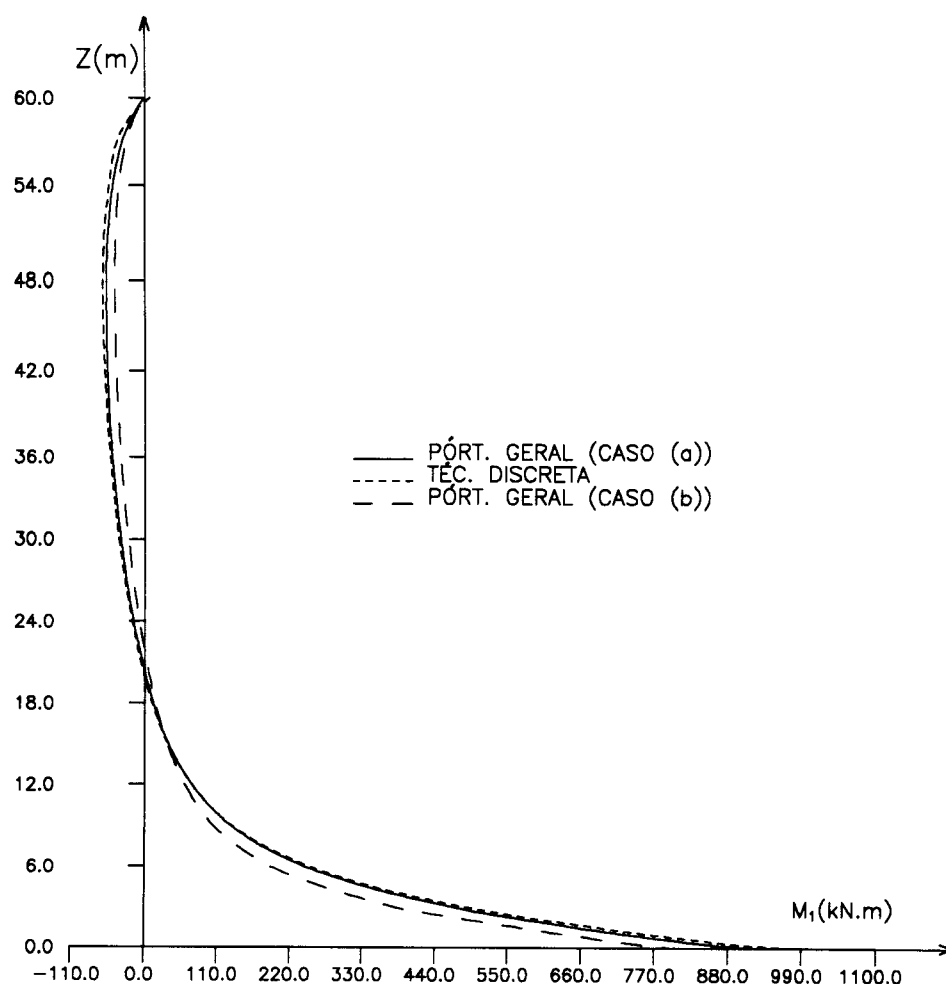


Figura 5.27 - Flexão global da análise contínua e flexão total da análise discreta para o pilar 1

Os pilares do pórtico comportam-se de outro modo. De acordo com a Tabela 5.22, os resultados da flexão global (Caso (a)) e da curva média da técnica discreta apresentam diferenças significativas. Ao nível da base, a técnica discreta fornece para o pilar 2 um valor cerca de 3 vezes maior e, para o pilar 3 um valor cerca de 50% maior. A Figura 5.28 mostra estas diferenças.

Comparando-se os Casos (a) e (b) da análise contínua, observa-se, no nível da base, que a flexão global do Caso (a) é maior do que a do Caso (b), aproximadamente 11% para o pilar 2 e 12,7% para o pilar 3.

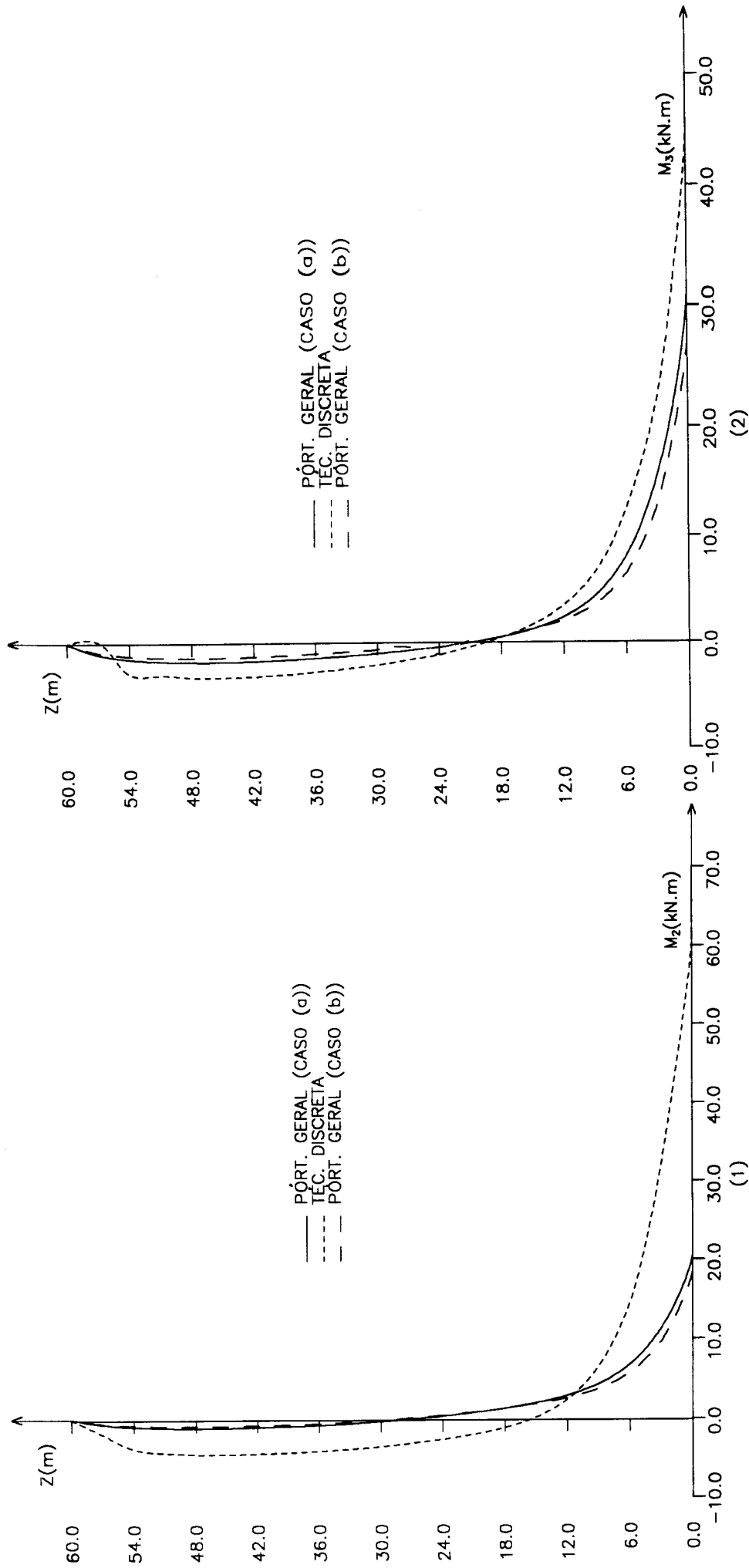


Figura 5.28 - (1) Flexão global da análise contínua e flexão total da análise discreta do pilar 2

(2) Flexão global da análise contínua e flexão total da análise discreta do pilar 3

Devido às diferenças observadas entre as flexões total (análise discreta) e global (análise contínua) dos pilares 2 e 3, torna-se necessário calcular a flexão local destes pilares, que, somada à flexão global, em cada nível, resulta na flexão total da análise contínua.

Como em três níveis consecutivos ($i - 1$, i e $i + 1$), de uma mesma prumada, as rotações dos nós apresentam agora valores diferentes, a flexão local de um andar ($i + 1$), compreendido entre os níveis i e ($i + 1$), pode ser estimada através das equações (2.26) tomando-se para a rotação e para u' (derivada da curva contínua u) a média aritmética de seus valores nos níveis ($i + 1$) e i . Este momento médio será somado à flexão global dos níveis i e ($i + 1$). Deste modo, resulta na barra do referido andar um momento na extremidade inferior, denominado momento superior ao nível i , e outro em sua extremidade superior, denominado momento inferior ao nível ($i + 1$). Os valores destes esforços na parede (pilar 1) e nos pilares do pórtico (pilares 2 e 3), para o Caso (a), encontram-se nas Tabelas 5.22-a a 5.22-c, respectivamente, juntamente com os resultados obtidos pela análise discreta. Observa-se que, apesar do cálculo ser aproximado, os resultados têm a mesma ordem de grandeza daqueles obtidos pela técnica discreta. Efetuando-se a média aritmética destes momentos, em cada nível, obtém-se a flexão total da análise contínua, cujos valores, ao longo da altura, estão indicados na Tabela 5.23 (Casos (a) e (b)) e representados em gráficos nas Figuras 5.29 e 5.30.

Note-se que este processo corrige a flexão global dos pilares do pórtico (pilares 2 e 3). Comparando-se as Tabelas 5.22 e 5.23, pode-se ainda observar que a variação entre as flexões global e total ao longo da altura da parede (pilar1) é muito pequena.

A boa aproximação alcançada entre os resultados fornecidos pelas técnicas contínua e discreta indica que através do pórtico geral pode se ter, também, uma estimativa bastante razoável do comportamento de uma associação de parede e pórtico por vigas.

Tabela 5.22-a Momentos fletores do pilar 1 (kN.m) - Caso (a)

Z (m)	Pórtico Geral		Técnica Discreta	
	Flexão Total		Flexão Total	
	Momento Inferior	Momento Superior	Momento Inferior	Momento Superior
0,0	-	971,857	-	976,892
3,0	422,859	567,709	398,879	572,290
6,0	141,942	364,741	131,155	370,085
9,0	11,334	255,187	7,248	261,135
12,0	-50,314	189,813	-51,608	195,789
15,0	-80,021	146,037	-79,985	151,996
18,0	-94,645	113,422	-94,261	118,930
21,0	-101,871	87,075	-101,462	92,373
24,0	-105,204	64,647	-104,951	69,624
27,0	-106,240	44,965	-106,224	49,535
30,0	-105,704	27,407	-106,268	31,084
33,0	-103,912	11,625	-104,703	15,078
36,0	-100,984	-2,601	-101,896	0,384
39,0	-96,932	-15,372	-98,198	-12,942
42,0	-91,686	-26,711	-93,021	-24,855
45,0	-85,074	-36,488	-87,279	-35,772
48,0	-76,742	-44,289	-79,192	-44,423
51,0	-65,974	-49,111	-68,471	-50,001
54,0	-51,271	-48,666	-53,682	-50,536
57,0	-29,442	-37,871	-35,048	-44,110
60,0	6,403	-	18,130	-

Tabela 5.22-b Momentos fletores do pilar 2 (kN.m) - Caso (a)

Z (m)	Pórtico Geral		Técnica Discreta	
	Flexão Total		Flexão Total	
	Momento Inferior	Momento Superior	Momento Inferior	Momento Superior
0,0	-	52,071	-	60,361
3,0	-20,255	87,559	-30,583	94,817
6,0	-69,465	100,580	-75,809	105,060
9,0	-89,496	103,267	-93,623	106,673
12,0	-96,053	101,155	-99,224	103,986
15,0	-96,306	96,780	-98,995	99,336
18,0	-93,540	91,310	-96,002	93,695
21,0	-89,271	85,289	-91,597	87,554
24,0	-84,207	78,979	-86,440	81,146
27,0	-78,686	72,510	-80,847	74,573
30,0	-72,880	65,952	-74,968	67,862
33,0	-66,878	59,350	-68,837	61,107
36,0	-60,735	52,736	-62,564	54,333
39,0	-54,491	46,141	-56,179	47,555
42,0	-48,179	39,607	-49,707	40,808
45,0	-41,836	33,193	-43,180	34,090
48,0	-35,514	27,012	-36,583	27,560
51,0	-29,304	21,287	-30,048	21,421
54,0	-23,381	16,487	-23,714	16,109
57,0	-18,110	13,619	-17,675	13,744
60,0	-14,269	-	-17,638	-

Tabela 5.22-c Momentos fletores do pilar 3 (kN.m) - Caso (a)

Z (m)	Pórtico Geral		Técnica Discreta	
	Flexão Total		Flexão Total	
	Momento Inferior	Momento Superior	Momento Inferior	Momento Superior
0,0	-	42,100	-	45,468
3,0	4,176	43,546	-0,295	44,805
6,0	-20,201	44,957	-22,137	46,753
9,0	-32,688	45,890	-34,350	47,304
12,0	-39,278	46,214	-40,629	47,547
15,0	-42,633	45,932	-43,915	47,203
18,0	-44,207	45,098	-45,439	46,315
21,0	-44,627	43,789	-45,821	44,953
24,0	-44,246	42,081	-45,404	43,186
27,0	-43,273	40,048	-44,394	41,082
30,0	-41,847	37,762	-42,929	38,690
33,0	-40,066	35,289	-42,073	36,115
36,0	-38,011	32,691	-38,934	33,402
39,0	-35,753	30,032	-36,582	30,610
42,0	-33,354	27,374	-34,076	27,802
45,0	-30,873	24,791	-31,484	25,019
48,0	-28,365	22,373	-28,824	22,387
51,0	-25,884	20,255	-26,138	20,073
54,0	-23,480	18,664	-23,721	17,920
57,0	-21,056	18,029	-19,454	19,784
60,0	-19,056	-	-29,881	-

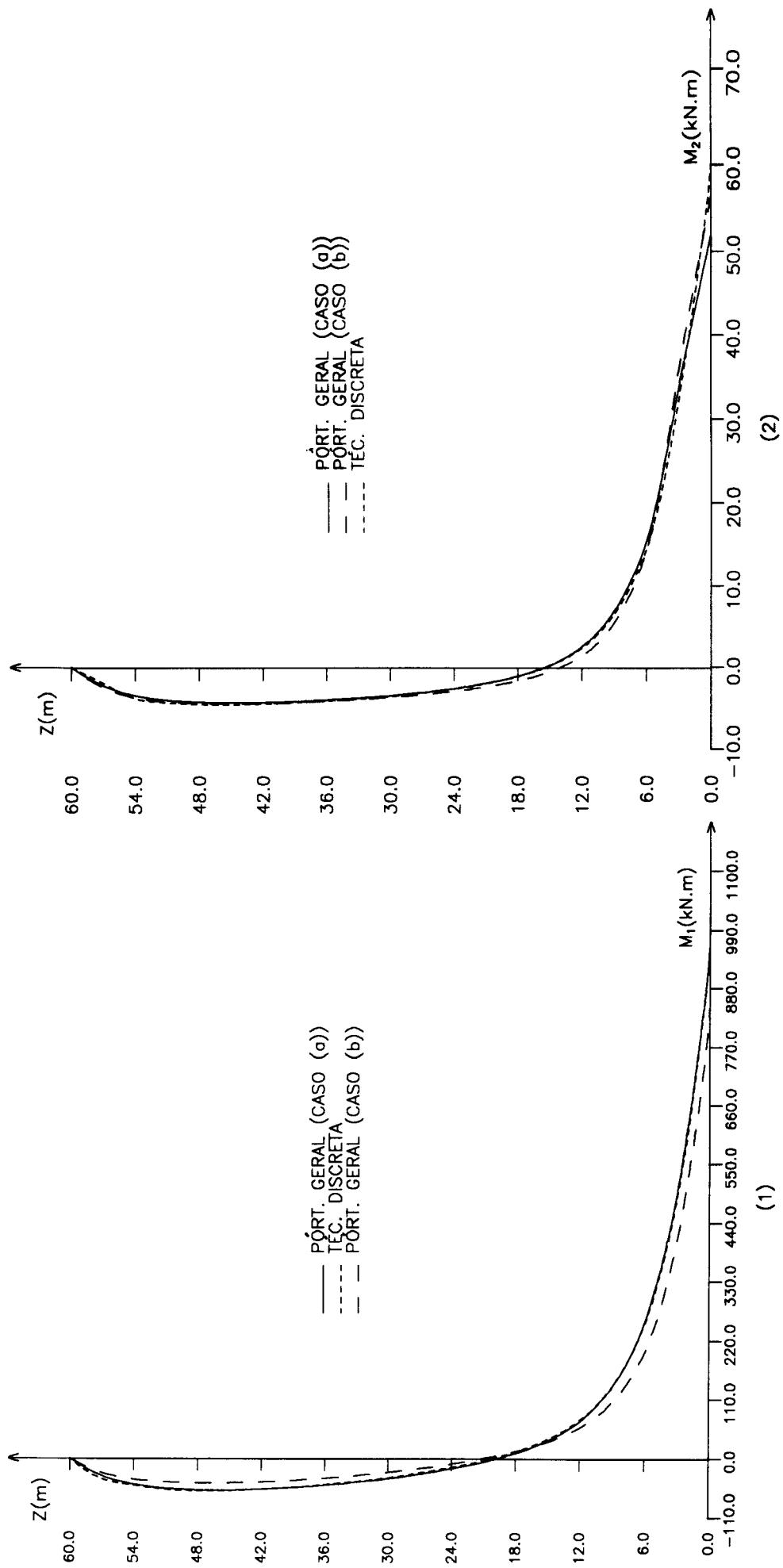


Figura 5.29 - (1) Flexão total no pilar 1
 (2) Flexão total no pilar 2

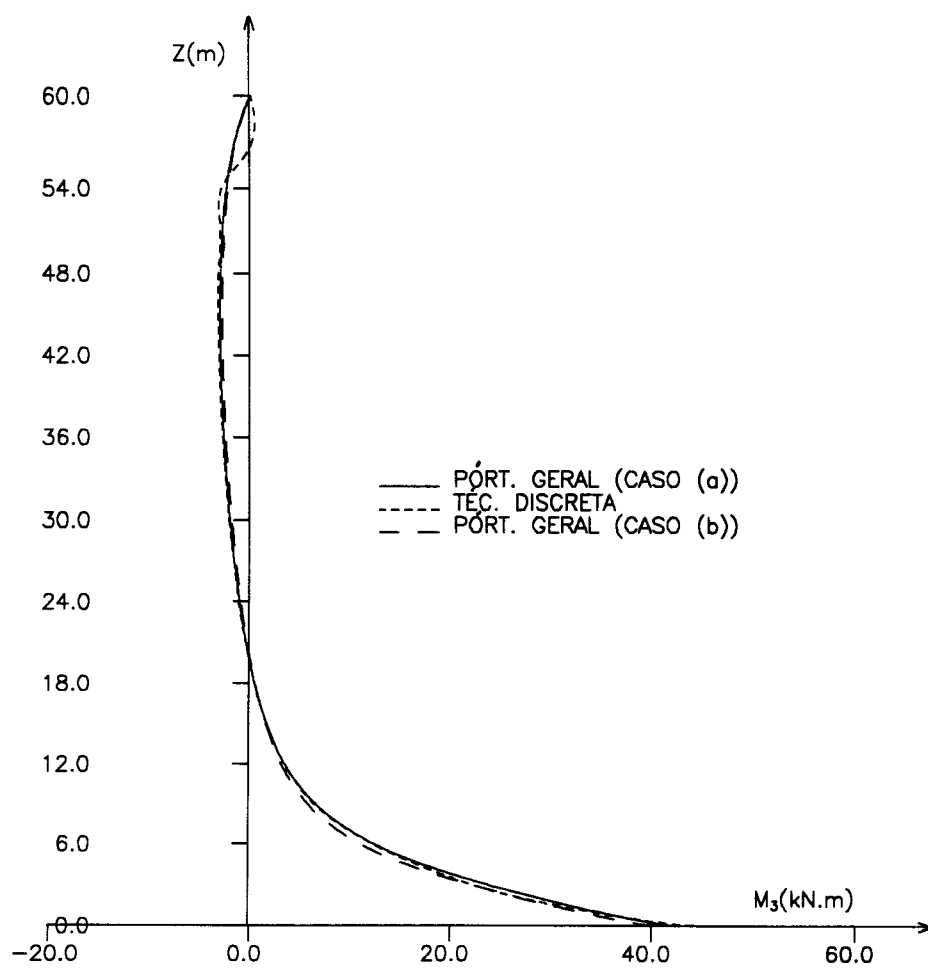


Figura 5.30 - Flexão total no pilar 3

5.8. Exemplo numérico 7

Neste exemplo, considera-se novamente a associação de parede e pórtico apresentada na Figura 5.22 (exemplo 6). Supõe-se, agora, que os elementos de ligação sejam constituídos por barras biarticuladas, conforme indica a Figura 5.31. Estes elementos têm também o comprimento de 2,0 m.

Aplica-se à associação um carregamento idêntico ao do exemplo anterior, isto é: carga lateral $q = 4,0 \text{ kN/m}$ e carga vertical total $p = 100 \text{ kN/m}$ ($p_1 = 48,4 \text{ kN/m}$ e $p_2 = p_3 = 25,8 \text{ kN/m}$).

Para o módulo de elasticidade adota-se o valor $E = 2,0 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$

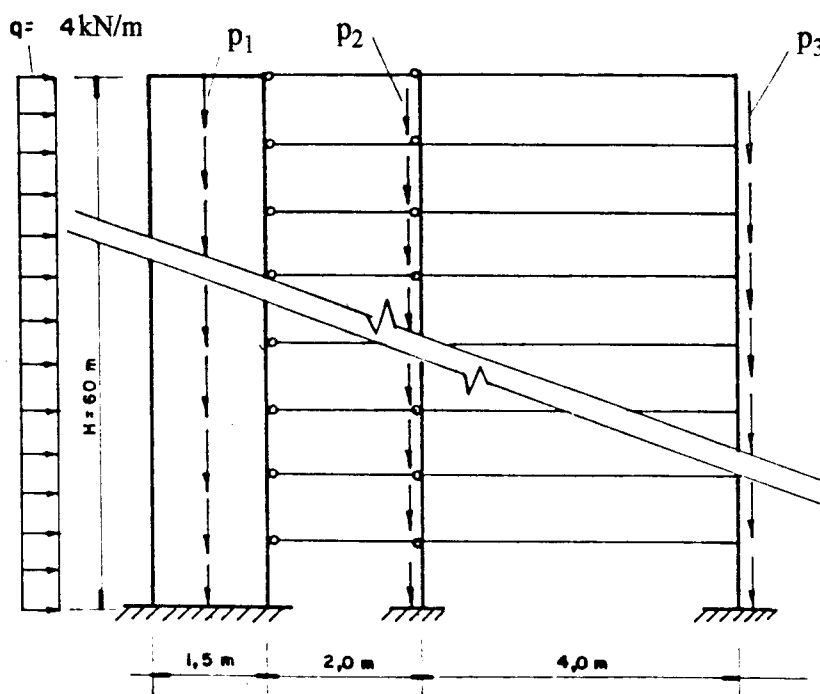


Figura 5.31 - Associação de parede e pórtico por barras biarticuladas

Em relação à consideração dos nós rígidos, o pórtico geral foi analisado de duas maneiras:

Caso (a) - Pórtico de nós pontuais

Caso (b) - Pórtico de nós rígidos

De maneira análoga ao exemplo anterior, os esforços e deslocamentos, resultantes da análise em 1ª ordem ($p = 0,0$), são apresentados em tabelas e gráficos. No Caso (a), apresentam-se ainda os resultados obtidos através da análise discreta. Como resultados da análise em 2ª ordem, são mostrados apenas os deslocamentos laterais.

Para que as vigas do primeiro vão do pórtico geral tenham o comportamento de barras biarticuladas, na entrada de dados do programa (capítulo 4), atribuem-se às dimensões das seções transversais destes elementos valores, tais que: $Av_1 = 1,0 \text{ m}^2$ e $Iv_1 = 1 \times 10^{-10} \text{ m}^4$.

A-) Resultados

A.1-) Deslocamentos

Na Tabela 5.24, apresentam-se os deslocamentos horizontais do painel, obtidos pela técnica do meio contínuo e pela técnica discreta. No Caso (a) (1ª ordem), nota-se uma boa aproximação entre os resultados fornecidos pelas duas técnicas.

A Figura 5.32-(1) apresenta, através de gráficos, os deslocamentos resultantes da análise em 1ª ordem das técnicas contínua (Casos (a) e (b)) e discreta e a Figura 5.32-(2), apenas os resultados da análise contínua (1ª ordem e 2ª ordem).

Na Figura 5.32-(3), representam-se graficamente os deslocamentos laterais, obtidos através da análise contínua, da associação de parede e pórtico por barras biarticuladas e, também, da associação destes elementos verticais por vigas (exemplo 6).

Tabela 5.24 Deslocamentos laterais u (m)

Z (m)	PÓRTICO GERAL				Técnica Discreta
	Caso (a)		Caso (b)		Caso (a)
	1ª ordem	2ª ordem	1ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
0,0	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3,0	0,0063	0,0077	0,0055	0,0065	0,0062
6,0	0,0225	0,0280	0,0194	0,0232	0,0223
9,0	0,0453	0,0571	0,0389	0,0470	0,0449
12,0	0,0725	0,0924	0,0618	0,0754	0,0719
15,0	0,1025	0,1318	0,0870	0,1070	0,1016
18,0	0,1342	0,1738	0,1135	0,1404	0,1330
21,0	0,1667	0,2170	0,1408	0,1750	0,1652
24,0	0,1995	0,2607	0,1683	0,2099	0,1976
27,0	0,2321	0,3041	0,1958	0,2448	0,2297
30,0	0,2640	0,3467	0,2229	0,2792	0,2612
33,0	0,2951	0,3880	0,2495	0,3129	0,2919
36,0	0,3252	0,4279	0,2754	0,3457	0,3215
39,0	0,3541	0,4661	0,3004	0,3773	0,3499
42,0	0,3817	0,5024	0,3246	0,4078	0,3770
45,0	0,4080	0,5369	0,3478	0,4369	0,4027
48,0	0,4330	0,5696	0,3700	0,4648	0,4271
51,0	0,4567	0,6006	0,3913	0,4915	0,4501
54,0	0,4792	0,6300	0,4116	0,5170	0,4719
57,0	0,5008	0,6583	0,4312	0,5416	0,4928
60,0	0,5219	0,6858	0,4504	0,5656	0,5129

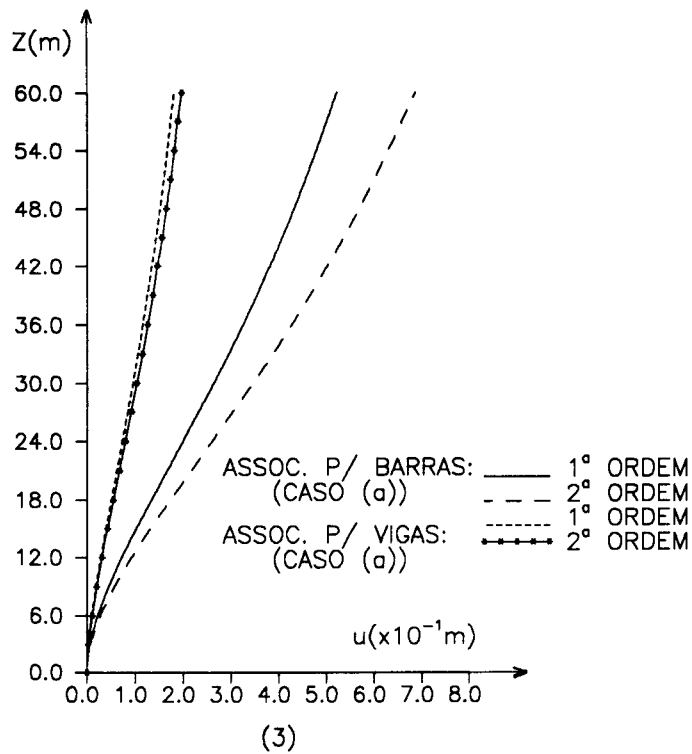
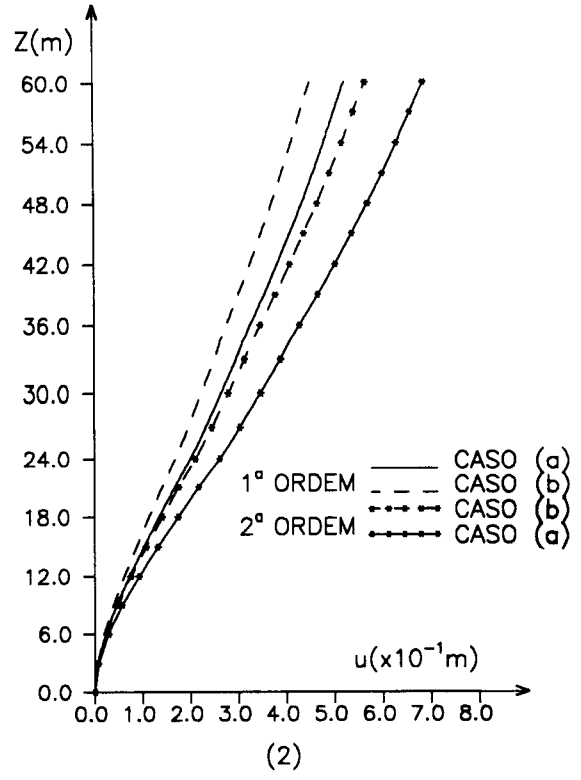
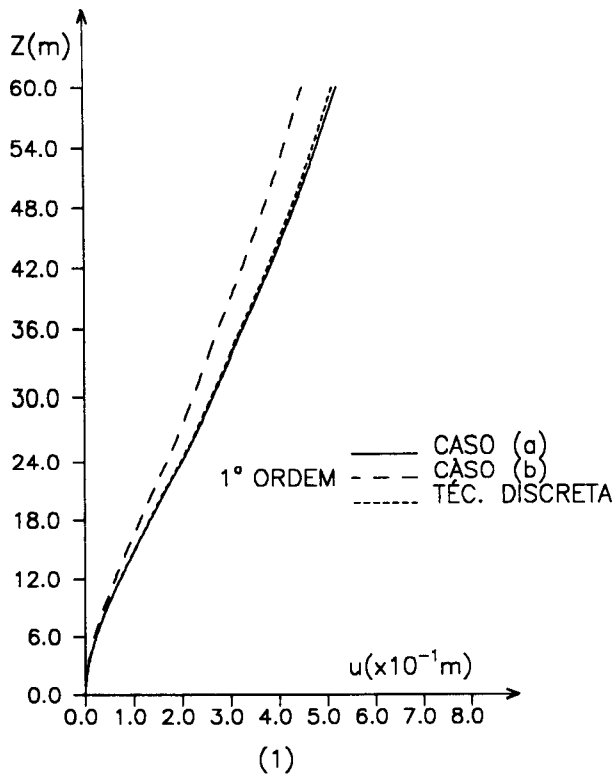


Figura 5.32 - Deslocamentos laterais u

A.2-) Esforços

A.2.1-) Esforços cortantes e esforços normais

Na Tabela 5.25, apresentam-se os resultados da análise em 1ª ordem, obtidos pela técnica contínua (Casos (a) e (b)), dos esforços cortantes das vigas e dos esforços normais ($N_2 = -N_3$) dos pilares do pórtico. Esta tabela ainda fornece os resultados em 1ª ordem dos esforços cortantes nas vigas, obtidos pela análise discreta para o Caso (a). Na Figura 5.33, representam-se graficamente estes esforços.

Tabela 5.25 Esforços cortantes (V_{v2}) e esforços normais (N)

Z (m)	V_{v2} (kN)			$N_2 = -N_3$ (kN)	
	Pórtico Geral		Técnica Discreta	Pórtico Geral	
	Caso (a)	Caso (b)	Caso (a)	Caso (a)	Caso (b)
0,0	0,000	0,000	-	1318,847	1371,211
3,0	45,017	52,649	44,203	1294,689	1342,672
6,0	73,247	83,383	72,353	1234,404	1273,202
9,0	89,918	99,992	89,052	1152,016	1180,562
12,0	98,727	107,641	97,866	1057,257	1076,282
15,0	102,170	109,577	101,258	956,435	967,286
18,0	101,911	107,815	100,927	854,131	858,333
21,0	99,105	103,661	98,052	753,442	752,429
24,0	94,554	97,966	93,450	656,489	651,508
27,0	88,286	91,284	87,682	564,721	556,815
30,0	82,286	83,981	81,127	479,116	469,140
33,0	75,251	76,304	74,064	400,314	338,973
36,0	67,927	68,429	66,712	328,708	316,595
39,0	60,488	60,491	59,236	264,498	252,135
42,0	53,096	52,618	51,779	207,717	195,592
45,0	45,916	44,947	44,498	158,237	146,834
48,0	39,144	37,655	37,578	115,753	105,575
51,0	33,032	30,991	31,271	79,735	71,321
54,0	27,923	25,323	25,701	49,362	43,272
57,0	24,301	21,212	22,399	23,401	20,168
60,0	11,427	9,758	15,954	0,000	0,000

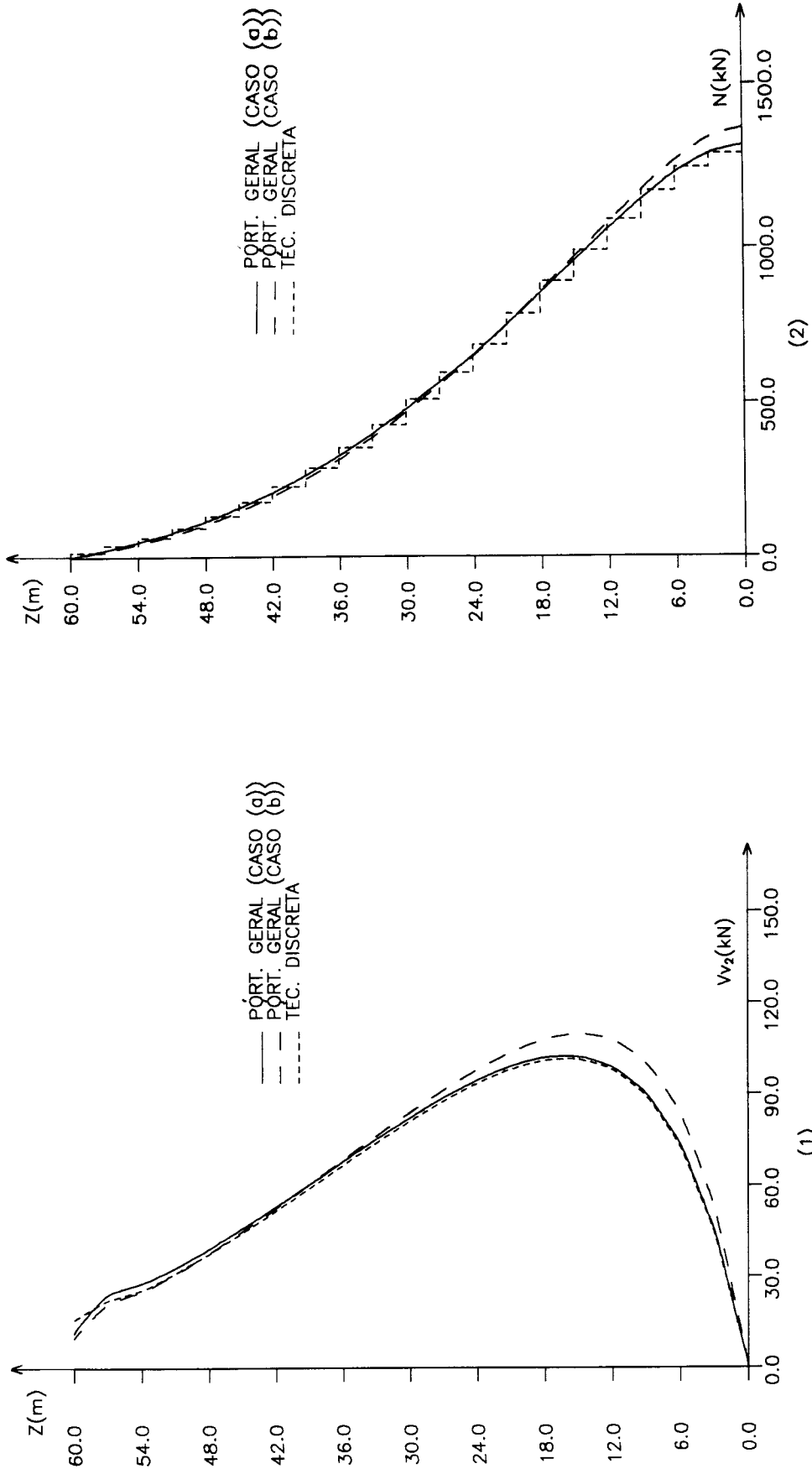


Figura 5.33 - (1) Esforços cortantes nas vigas do pórtico
 (2) Esforços normais nos pilares do pórtico ($N_2 = -N_3$)

A.2.2-) Momentos fletores

A Tabela 5.26 apresenta os resultados em 1ª ordem (Caso (a)) das análises contínua (flexão global e flexão total) e discreta (flexão total) para a parede (pilar 1) e os pilares do pórtico (pilares 2 e 3). Observa-se, também neste exemplo, a boa aproximação entre os resultados da flexão global da parede (pilar 1), obtidos pela análise contínua, com os da flexão total, obtidos pela análise discreta. Quando se compara, ao nível da base, a flexão global (análise contínua) com a flexão total (análise discreta) dos pilares do pórtico (pilares 2 e 3), nota-se uma diferença de cerca de 41,3% entre estes valores. Esta diferença cai para cerca de 2%, quando se soma à flexão global o valor da flexão local. Os resultados desta soma, acima e abaixo de cada nível, constam da Tabela 5.26-a.

Na Tabela 5.27, encontram-se os resultados obtidos pela técnica do meio contínuo para o Caso(b).

Na Figura 5.34, representam-se através de gráficos os resultados obtidos pelas análises contínua (flexão global - Casos (a) e (b)) e discreta (Caso (a)) para a parede (pilar 1) e os pilares do pórtico. A Figura 5.35-(1) apresenta, para os pilares 2 e 3, o gráfico da flexão global (análise contínua - Casos (a) e (b)) e o gráfico da flexão total (análise discreta - Caso (a)). Na Figura 5.35-(2), representam-se, em gráficos, os resultados da flexão total destes pilares, obtidos pelas análises contínua (Casos (a) e (b)) e discreta (Caso (a)).

Os bons resultados verificados, neste exemplo, indicam que através do pórtico geral de nós puntuais, tem-se uma estimativa bastante razoável do comportamento de parede e pórtico associados por barras biarticuladas.

Tabela 5.26 Momentos fletores nos pilares - Caso (a)

Z (m)	M ₁ (kN.m)		M ₂ =M ₃ (kN.m)		
	Pórtico Geral	Técnica Discreta	Pórtico Geral		Técnica Discreta
	Flexão Global	Flexão Total	Flexão Global	Flexão Total	Flexão Total
0,0	1781,464	1751,887	58,284	80,792	82,376
3,0	1217,288	1196,644	40,240	58,552	57,499
6,0	821,292	808,673	27,529	38,755	37,690
9,0	541,234	535,080	18,498	24,868	24,289
12,0	348,922	340,399	12,257	15,320	14,711
15,0	204,554	200,241	7,540	8,336	7,913
18,0	104,774	98,431	4,245	3,479	3,029
21,0	25,414	23,712	1,605	-0,235	-0,496
24,0	-28,300	-31,725	-0,213	-2,785	-3,071
27,0	-74,579	-73,751	-1,787	-4,854	-4,981
30,0	-104,037	-106,212	-2,818	-6,209	-6,425
33,0	-131,944	-130,359	-3,793	-7,382	-7,471
36,0	-146,788	-148,408	-4,342	-8,033	-8,218
39,0	-162,234	-160,579	-4,903	-8,611	-8,699
42,0	-165,465	-168,248	-5,066	-8,709	-8,961
45,0	-168,956	-169,061	-5,229	-8,717	-8,895
48,0	-158,653	-163,597	-4,945	-8,166	-8,566
51,0	-145,575	-149,931	-4,565	-7,370	-7,646
54,0	-113,795	-124,271	-3,582	-5,765	-7,078
57,0	-71,776	-88,823	-2,268	-3,535	-1,421
60,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabela 5.26-a - Momentos fletores dos pilares 2 e 3 ($M_2 = M_3$ kN.m) - Caso (a)

Z (m)	Pórtico Geral		Técnica Discreta	
	Flexão total		Flexão total	
	Momento Inferior	Momento Superior	Momento Inferior	Momento Superior
0,0	-	80,792	-	82,374
3,0	17,732	99,371	13,322	101,676
6,0	-31,602	109,112	-34,688	110,069
9,0	-63,084	112,821	-64,771	113,350
12,0	-82,066	112,705	-83,162	112,584
15,0	-92,909	109,580	-93,349	109,176
18,0	-97,795	104,754	-97,901	103,959
21,0	-98,904	98,434	-98,550	97,557
24,0	-97,042	91,472	-96,523	90,380
27,0	-93,472	83,763	-92,664	82,701
30,0	-88,369	75,950	-87,552	74,702
33,0	-82,561	67,796	-81,535	66,593
36,0	-75,931	59,865	-74,930	58,493
39,0	-69,110	51,889	-67,935	50,537
42,0	-61,857	44,439	-60,740	42,818
45,0	-54,735	37,300	-53,395	35,605
48,0	-47,475	31,142	-46,141	29,009
51,0	-40,653	25,912	-38,921	23,628
54,0	-34,060	22,530	-32,765	18,608
57,0	-28,380	21,310	-23,832	20,990
60,0	-23,578	-	-32,013	-

Tabela 5.27 Momentos fletores nos pilares - Caso (b)

Z (m)	Pórtico Geral		
	M ₁ (kN,m)	M ₂ =M ₃ (kN,m)	
	Flexão Global	Flexão Global	Flexão Total
0,0	1580,491	52,656	78,981
3,0	1035,028	34,908	55,754
6,0	674,772	23,138	34,974
9,0	433,892	15,224	21,289
12,0	278,610	10,080	12,476
15,0	164,729	6,276	6,320
18,0	90,344	3,756	2,277
21,0	30,008	1,694	-0,767
24,0	-8,517	0,346	-2,748
27,0	-44,393	-0,910	-4,406
30,0	-65,758	-1,688	-5,433
33,0	-89,067	-2,522	-6,410
36,0	-100,631	-2,966	-6,920
39,0	-115,609	-3,515	-7,467
42,0	-119,297	-3,688	-7,574
45,0	-125,925	-3,950	-7,691
48,0	-119,767	-3,790	-7,279
51,0	-113,747	-3,627	-6,710
54,0	-90,301	-2,892	-5,337
57,0	-59,620	-1,917	-3,369
60,0	0,000	0,000	0,000

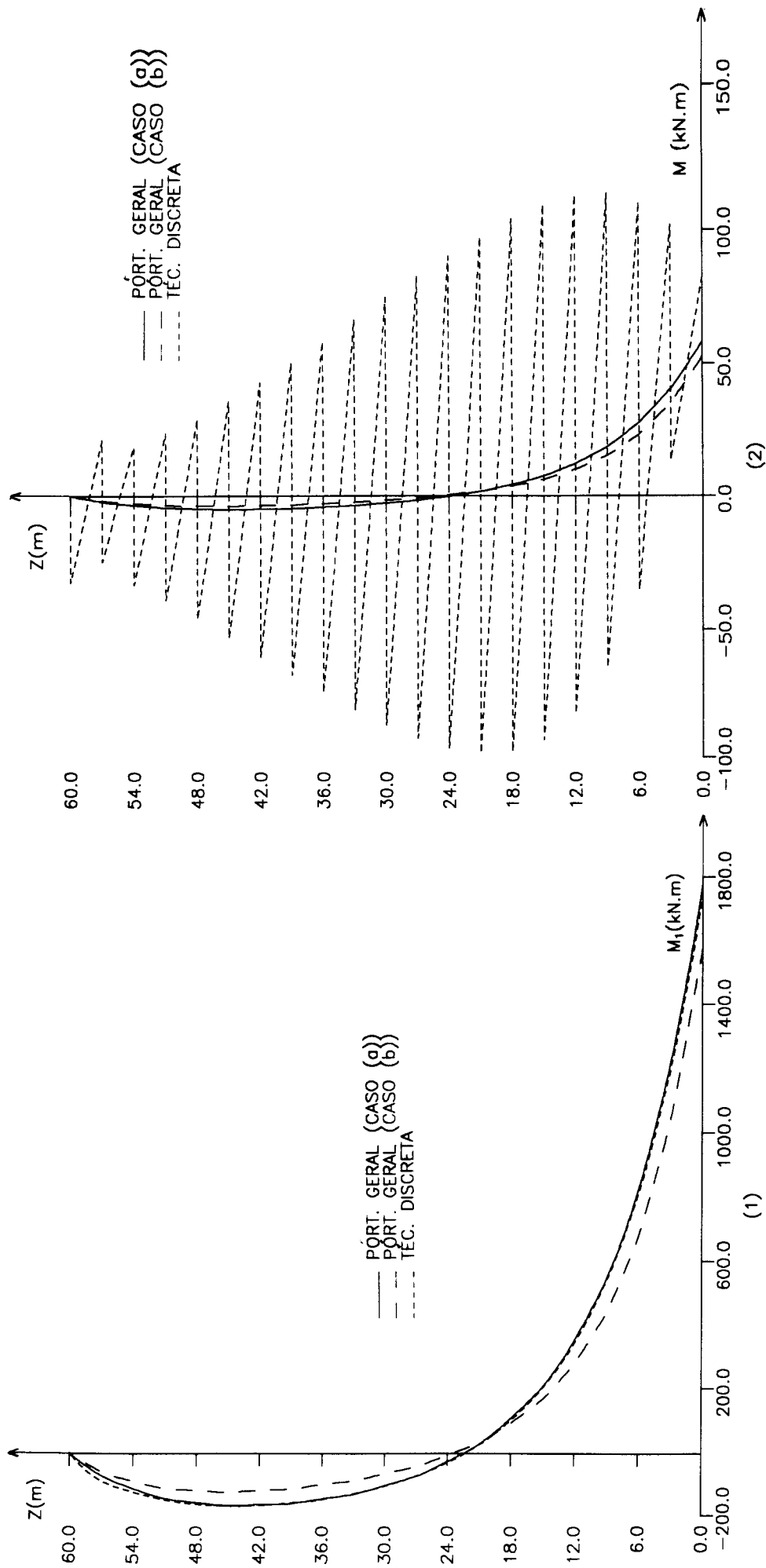


Figura 5.34 - (1) Momento fletor no pilar 1
 (2) Momentos fletores nos pilares do pórtico ($M_2 = M_3$)

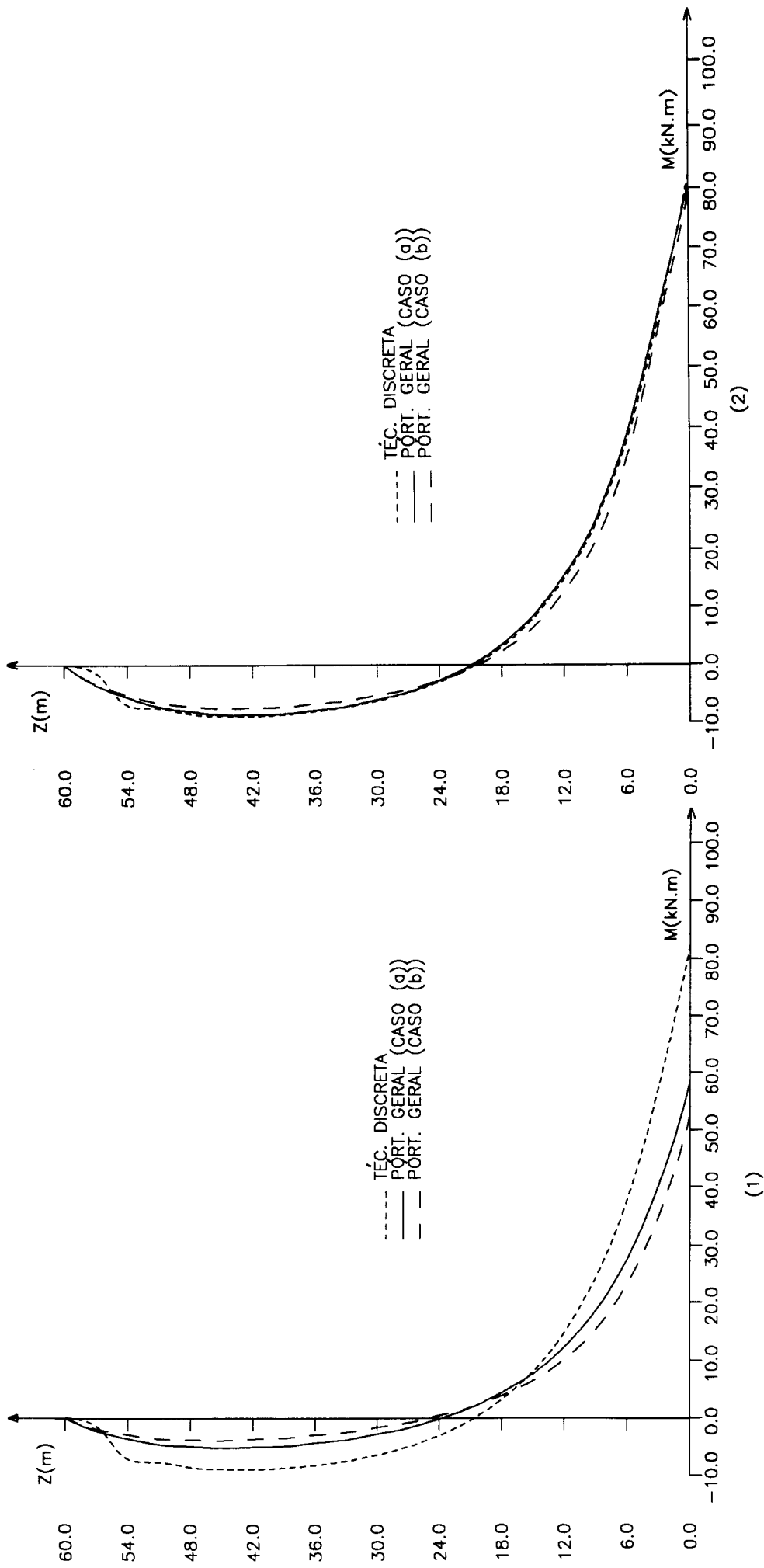


Figura 5.35 - (1) Flexão global da análise contínua e flexão total da análise discreta dos pilares 2 e 3
 (2) Flexão total dos pilares 2 e 3

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos exemplos numéricos apresentados neste trabalho, observa-se que a utilização da técnica do meio contínuo fornece resultados bastante aproximados àqueles obtidos com a análise discreta. Na solução do sistema de equações diferenciais, gerado pelo tratamento contínuo, utilizou-se o método das diferenças finitas. Nos exemplos numéricos, bons resultados foram obtidos para uma malha de pontos, igualmente espaçados, distantes entre si do valor correspondente a altura dos andares. Melhores resultados são alcançados quando se reduz o espaçamento entre os pontos.

O processo de Newton Raphson, utilizado no cálculo da carga crítica, propicia uma sequência de cálculos facilmente programável em computadores. Neste trabalho nas estruturas mais rígidas, como paredes associadas, obteve-se uma convergência mais rápida dos resultados. Isto também depende da precisão estimada para o valor do determinante. No exemplo 1, considerando-se nulo o determinante de valor menor ou igual a 1×10^{-6} , chegou-se ao valor da carga crítica em 17 iterações e no exemplo 3, em 10 iterações.

Nos exemplos numéricos que analisam os pórticos, pode-se verificar a contribuição favorável da consideração da capacidade de resistência a flexão global dos pilares, no modelo estrutural pórtico geral. Isto corrige a posição do ponto de momento nulo, passando a situá-lo não mais à semi-altura de cada pilar e, também, corrige os valores dos esforços nos andares próximos da base. Como este painel é mais rígido do que o pórtico, os deslocamentos laterais são menores e os valores da carga crítica vertical global são maiores.

A consideração da influência dos trechos rígidos na análise estrutural, além de aumentar a rigidez da estrutura reduzindo os deslocamentos laterais, possibilita calcular através do pórtico geral as paredes associadas por lintéis e, também, a associação de parede e pórtico por vigas. Devido às hipóteses adotadas no desenvolvimento teórico do pórtico geral, principalmente aquelas relacionadas com a sua geometria, foi possível calcular através deste modelo estrutural a associação de parede e pórtico por barras bi-articuladas, com bons resultados.

A suposição de paredes sobre fundações flexíveis é importante porque os esforços e deslocamentos, ao nível dos andares da base, podem sofrer variações significativas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1- ALBIGES, M & GOULET, J. Contreventement des batiments. Annales de L'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, no.149, May 1960. p. 473-500.
- 2- BARBOSA, J.A. Edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral. Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1978. 330 p.
- 3- BATTISTELLE, R. A. G. Cálculo dos deslocamentos laterais de painéis planos considerando as deformações axiais dos pilares e o efeito de segunda ordem. Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1991. 134p.
- 4- BECK, H. & KÖNIG, G. Forças de confinamento em estruturas de esqueleto. Beton und Stahlbetonbau, Berlin, 1967. 36p.
- 5- CARVALHO, F. ANASTÁCIO C. Instabilidade de edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis. Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1980. 142p.
- 6- CARVALHO, FLAVIO A.C. Efeitos de cargas verticais em estruturas de edifícios altos. Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1982. 36 p.
- 7- COSTA , J. L. Núcleos estruturais sobre fundações flexíveis. Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1984. 187 p.
- 8- COULL, A. & PURI, R. D. Analysis of coupled shear walls of variable cross-section. Building Science, vol. 2, 1968. p. 313-320.
- 9- COWPER, G.R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. Journal of Applied Mechanics, ASME, Jun. 1966. p. 335-339.

- 10- ELKHOLY, I.A.S. & ROBINSON, H. An Inelastic analysis of coupled shear walls. Building Science, vol.9, 1974. p.1-8.
- 11- FAKURY, R.H. Comportamento das estruturas tubulares de edifícios altos sob carregamento lateral. Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1986. 325p.
- 12- FAKURY, R.H. A aplicação da técnica do meio contínuo à análise e ao estudo do comportamento dos sistemas estruturais tubulares de edifícios altos. Tese de Doutorado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP. 1992. 293p.
- 13- FERREIRA, L.F.O. Associação plana de pórtico com pilares paredes. Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1975. 203 p.
- 14- FRANCO, M. Problemas de estabilidade nos edifícios de concreto armado. Trabalho apresentado no Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado, IBRACON, São Paulo, Julho 1985. 17p.
- 15- FRANCO, M. O parâmetro de instabilidade dos edifícios altos. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, RPEE, no. 23, 1985. p. 69-72
- 16-FRANÇA, R.L.S Exemplo de cálculo do esforço de 2ª ordem global em um edifício de concreto armado. Trabalho apresentado no Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado. IBRACON, São Paulo, Julho 1985. 43p.
- 17- GALAMBOS, TV. Structural members and frames. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1968. 373p.
- 18- GLUCK, J. Lateral load analysis of multistory structures comprising shear walls with sudden changes in stiffness. ACI Journal, Proceedings, vol. 66, September 1969. p.729-736
- 19- GLUCK, J. Lateral analysis of irregular shear wall multistory structures. ACI Journal, Proceedings, vol. 67, July 1970. p.548-553.

- 20- GLUCK, J & GELLERT, M. Non-linear analysis of an elastic supported and lateral restrained cantilever Proceedings Institution of Civil Engineers, 51(3), Mar. 1972. p.561-566.
- 21- GOTO, Y. & CHEN, W.F. Second-order elastic analysis for frame design. Journal of Structural Engineering, ASCE, vol 113, no 7, July 1987. p.1501-1519.
- 22- KALYANARAMAN, V. P-delta analysis of tall buildings. In: SEMINAR OF TALL STRUCTURES AND USE THE PRESTRESSED CONCRETE IN HYDRAULIC STRUCTURES, Srinagar, India, May 1984. Preliminary Publication. p.I-231-245.
- 23- LAIER, J. E. Efeitos de segunda ordem em pórticos de edifícios altos. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, Março 1989. 52p.
- 24- LAVALL, A.C.C. Análise elástica em segunda ordem de pórticos planos metálicos. Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1988. 198 p.
- 25- MACGREGOR, J.G. The stability of concrete buildings. Rio de Janeiro, PUC - RJ, 1984. p.63-94.
- 26- MACGREGOR, J.G. & HAGE, S.E. Stability analysis and design of concrete frames. Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 103, no. ST 10, October 1977. p. 1953-1970.
- 27- MACGREGOR, J.G. & LAI, S.M.A. Geometric nonlinearities in unbraced multistory frames. Journal of structural Engineering, ASCE, Vol 109, no 11, November 1983. p.2528-2545.
- 28- MANCINI, E. Associação contínua tridimensional de pórticos e paredes com engastamentos elásticos. Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos- USP, 1972. 105 p.

- 29- MANCINI, E. Análise contínua de estruturas de edifícios elevados sujeitas à ação do vento. Tese de Doutorado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1973. 140p.
- 30- MANCINI, E. Núcleo estrutural sobre fundação flexível. In: A Engenharia Estrutural Sul Americana na Década dos 80: Homenagem ao Prof. Júlio Ricaldoni, Montevideo, Uruguai, Dezembro 1986.
- 31- MANCINI, E. Aplicações da técnica do meio contínuo ao cálculo de estruturas de edifícios altos. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos- USP, 1986. 110p.
- 32- MANCINI, E & SAVASSI, W. Breve estudo comparativo sobre o comportamento de pórticos planos sob a ação de cargas horizontais. In: VI Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais, Santa Fé, Argentina. vol1, p. 49-63.
- 33- MOY, F.C.S. Multistory frame design using story stiffness concept, Journal of the Structural Division, ASCE, vol.102, no ST 6, June 1976. p.1197-1212.
- 34- MOY, F. C. Consideration of secondary effects in frame design, Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 103, no ST10, October 1977. p.2005-2019.
- 35- MURASHEV, V. ,SIGALOV, E. & BAIKOV, V. Design of Reinforced Concrete Structures, MIR Publishers, Moscou, 1971.
- 36- NAIR, R.S. Overall elastic stability of multistory buildings. Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 101, no. ST 12, December 1975. p. 2487-2503.
- 37- OLIVEIRA, J. FILHO. Estudo comparativo sobre painéis estruturais planos sob a ação do vento. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP. 161p.
- 38- PASCUAL, C.A.Q. Parâmetros característicos para a definição de um modelo estático: "pilar de pórtico"ou "pilar-parede". Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1987. 219p.

- 39- PISANTY, A & TRAUM, E.E. Simplified analysis of coupled shear walls of variable cross-section. Building Science, vol 5, 1970. p.11-20.
- 40- RICALDONI, J. Estruturas de edificios elevados. Montevideo, Facultad de Ingenieria y Agrimensura, Publicação do Instituto de Estática, No 18, Dez. 1958. 46p.
- 41- ROSENBLUETH, E. Slenderness effects in buildings. Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 91, no. ST 1, January 1965. p.229-252.
- 42- RUGGIERO, M.A.G. & LOPES, V.L.R. Cálculo numérico - Aspectos teóricos e computacionais. São Paulo, McGraw-Hill, 1988. 295p.
- 43- SALVADORI, M.G. & BARON, M.L. Métodos numéricos en ingenieria. México, Ed. Continental, 1961. 260p.
- 44- SCHOLZ, H. P-delta effect in elastic analysis of sway frames, Journal of the Structural Engineering, ASCE, Vol 113, No. 3, March 1987. p.534-545.
- 45- STAMATO, M.C. Associação contínua de painéis de contraventamento. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1971. 72p.
- 46- STAMATO, M.C. & SMITH, B.S. Análise aproximada de estruturas tridimensionais de edificios elevados. São Carlos, Escola de engenharia de São Carlos -USP, Pub. 071/83. 23p.
- 47- TARANATH, B.S. Structural analysis and design of tall buildings, .NY. McGraw-Hill, 1988. 738p.
- 48- TIMOSHENKO, S. P. & GERE, J.M. Theory of elastic stability. New York, McGraw-Hill, 1961. 541p.
- 49-TSO, W.K. & CHAN, P.C.K. Static analysis of stepped coupled walls by transfer matriz method, Building Science, vol 8., 1973. p.167-177.

- 50- VASCONCELLOS, A.C., Critérios para dispensa de consideração do efeito de 2ª ordem. Trabalho apresentado no colóquio sobre Estabilidade Global de Estruturas de Concreto Armado, IBRACON, São Paulo, Julho 1985. 35p.
- 51- WOOD, B.R., et al., Column design by P-delta method, Journal of the Structural Division, ASCE, vol 102, no. ST 2, Feb. 1976. p.411-427.
- 52- XAVIER, M.A.P. Análise de efeitos de segunda ordem em estruturas de edifícios altos pela técnica do meio contínuo. Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos- USP, 1987. 317p.
- 53- YU, C.H. & SHANMUGAM, N. E. Stability of frames with semirigid joints. Computers & Structures, vol. 23, no 25, 1986. p. 639-648.

APÊNDICE A: DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS M' E M'' DE BARRAS COM TRECHOS RÍGIDOS NAS SUAS EXTREMIDADES

Admitindo-se que, nos painéis planos analisados neste trabalho, as ligações entre vigas e pilares podem ser rígidas, torna-se necessário determinar para uma barra bi-engastada o valor dos momentos M' e M'' , que surgem nas suas extremidades quando se impõem a estas extremidades rotações diferentes e de mesmo sentido. Essa situação reproduz o tipo de deformação que os pilares e vigas dos painéis pòrtico e pòrtico geral apresentam quando são solicitados por cargas lateral e vertical.

Na Figura A.1-a, representa-se uma barra bi-engastada de comprimento total L . Os trechos rígidos tem comprimentos t_1 e t_2 e às suas extremidades são impostas as rotações α_1 e α_2 , surgindo então os momentos M' e M'' . Será levada em consideração a deformação por força cortante da barra, além da deformação por momento fletor, de acordo com COSTA (7).

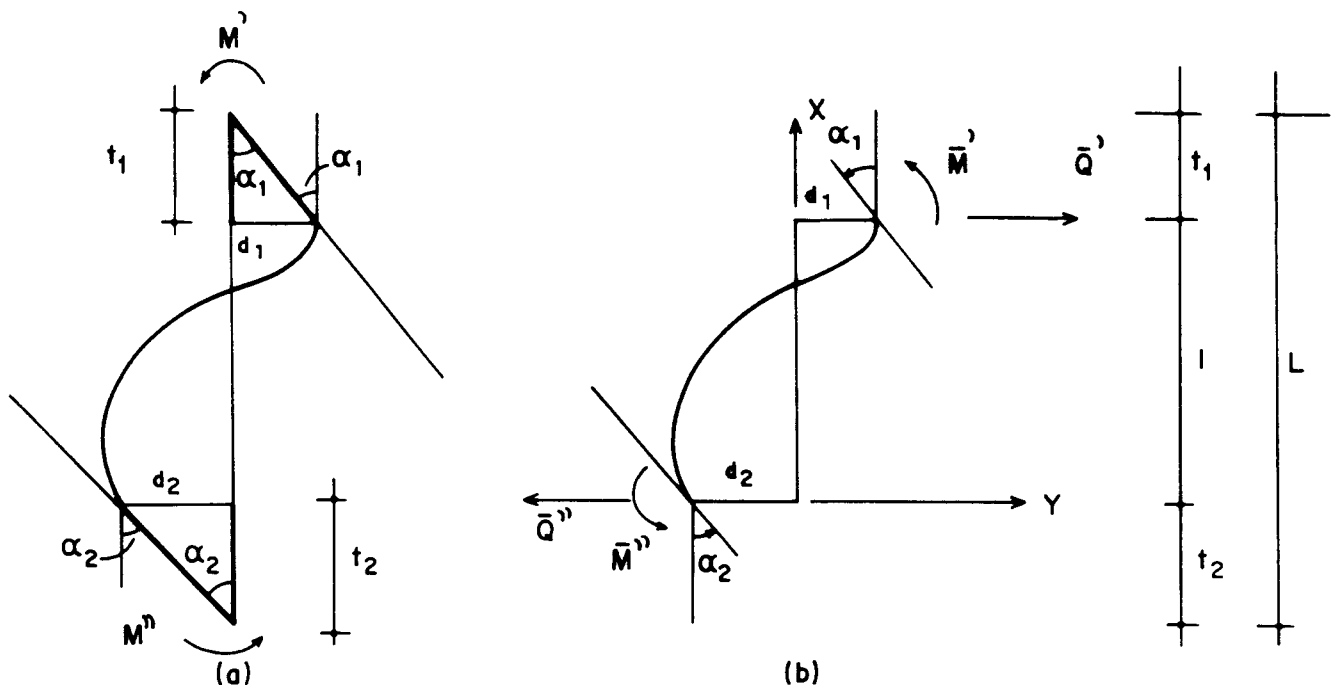


Figura A.1- Deformação de uma barra bi-engastada e com nós rígidos.

Devido às rotações α_i impostas às extremidades rígidas da barra, aparecem no trecho deformável, nas suas extremidades, recalques $d_i = \alpha_i t_i$ e rotações α_i (Figura A.1-b).

De acordo com a resistência dos materiais, as deformações devidas ao momento fletor e força cortante são dadas, respectivamente por:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{c}{GA} \frac{dQ}{dx} \quad (\text{A.2})$$

onde:

E é o módulo de elasticidade longitudinal

I é o momento de inércia da seção transversal da barra

G é o módulo de elasticidade transversal

A é a área da seção transversal da barra

c é o fator de forma da seção transversal do trecho deformável da barra.

Somando-se as equações (A.1) e (A.2), vem:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{c}{GA} \frac{dQ}{dx} \quad (\text{A.3})$$

Como $\frac{dQ}{dx}$ e $\frac{d^2 M}{dx^2}$ são iguais a carga distribuída, nula para este caso, a equação (A.3) pode ser escrita como:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \quad (\text{A.4})$$

A solução da equação (A.4) é da forma:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 \quad (\text{A.5})$$

cujos coeficientes C_i são determinados quando se impõem as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & y = -d_2, \quad \text{em } x = 0 \\ & y = d_1, \quad \text{em } x = \ell \end{aligned} \quad (\text{A.6-a})$$

b) Quando se considera o efeito da força cortante nas deformações, os elementos das extremidades da barra sofrerão, pelo efeito das tensões de cisalhamento, distorções γ além das rotações α_i . De acordo com os sentidos para os esforços e deformações, indicados na figura (A.1-b), e lembrando-se que $\bar{Q}' = \bar{Q}''$, vem:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\alpha_2 + \frac{c\bar{Q}''}{AG} \quad \text{em } x = 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\alpha_1 + \frac{c\bar{Q}''}{AG} \quad \text{em } x = \ell \end{aligned} \quad (\text{A.6-b})$$

Substituindo-se as equações (A.6) na equação (A.5), obtêm-se:

$$\begin{aligned} C_1 &= -d_2 \\ C_2 &= -\alpha_2 + \frac{c\bar{Q}''}{GA} \\ C_3 &= \frac{(2\alpha_2 + \alpha_1)}{\ell} - \frac{3c\bar{Q}''}{AG\ell} + \frac{3(d_1 + d_2)}{\ell^2} \\ C_4 &= -\frac{2(d_1 + d_2)}{\ell^3} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\ell^2} + \frac{2c\bar{Q}''}{AG\ell^2} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

O equilíbrio ao momento da barra estabelece:

$$\bar{Q}'' = \frac{\bar{M}'' + \bar{M}'}{\ell} \quad (\text{A.8})$$

A equação (A.5), derivada duas vezes em relação a x , quando levada na equação (A.3), para os pontos $x = 0$ e $x = \ell$, conduz a:

$$\begin{aligned}\bar{M}'' &= 2EIC_3 \\ \bar{M}' &= -EI(2C_3 + 6C_4\ell)\end{aligned}\tag{A.9}$$

Com as equações (A.9), a expressão da força cortante $\bar{Q}' = \bar{Q}''$, de acordo com (A.8), passa a ser:

$$\bar{Q}'' = -6EIC_4$$

ou, substituindo-se o valor de C_4 , resulta:

$$\bar{Q}'' = 12EI_c \frac{d_1 + d_2}{\ell^3} + 6EI_c \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\ell}\tag{A.10}$$

onde:

$$I_c = rI\tag{A.11-a}$$

com

$$r = \frac{AG\ell^2}{AG\ell^2 + 12EI_c}\tag{A.11-b}$$

Os momentos M' e M'' são calculados através das expressões:

$$\begin{aligned}M'' &= \bar{M}'' + \bar{Q}'' \cdot t_2 \\ M' &= \bar{M}' + \bar{Q}'' \cdot t_1\end{aligned}\tag{A.12}$$

Substituindo-se as equações (A.7) em (A.9) e levando-se as equações resultantes juntamente com (A.10) nas equações (A.12), obtêm-se:

$$M'' = \frac{6EI_c}{L} \left(\frac{L}{\ell} \right)^3 \left\{ \alpha_1 \left[\frac{\ell}{r} (t_1 + (t_2 - s) \cdot r) + \frac{\ell^2}{3r} + 2t_1(t_2 - s) \right] + 2\alpha_2 \left[\frac{\ell}{2r} (t_2 + r(t_2 - s)) + \frac{\ell^2}{3r} + t_2(t_2 - s) \right] \right\} \frac{1}{L^2}$$

$$M' = \frac{6EI_c}{L} \left(\frac{L}{\ell} \right)^3 \left\{ 2\alpha_1 \left(\frac{\ell}{2r} [t_1 + (t_1 - s) \cdot r] + \frac{\ell^2}{3r} + t_1(t_1 - s) \right) + \alpha_2 \left[\frac{\ell}{r} [(t_1 - s) \cdot r + t_2] + \frac{\ell^2}{3r} + 2(t_1 - s)t_2 \right] \right\} \frac{1}{L^2}$$

(A.13-a)

onde:

$$s = \frac{6EI_c \cdot c}{AG\ell} \quad (A.13-b)$$

As equações (A.13) podem ainda ser escritas da seguinte maneira:

$$M'' = \frac{6EI_c}{L} (\bar{\mu}\alpha_1 + 2\bar{\gamma}\alpha_2)$$

$$M' = \frac{6EI_c}{L} (2\gamma\alpha_1 + \mu\alpha_2)$$

(A.14)

onde:

$$\gamma = \left(\frac{L}{\ell} \right)^3 \left(\frac{\ell}{2r} [t_1 + (t_1 - s) \cdot r] + \frac{\ell^2}{3r} + t_1(t_1 - s) \right) \cdot \frac{1}{L^2}$$

$$\mu = \left(\frac{L}{\ell} \right)^3 \left(\frac{\ell}{r} [(t_1 - s) \cdot r + t_2] + \frac{\ell^2}{3r} + 2t_2(t_1 - s) \right) \cdot \frac{1}{L^2}$$

$$\bar{\mu} = \left(\frac{L}{\ell} \right)^3 \left(\frac{\ell}{r} [t_1 + (t_2 - s) \cdot r] + \frac{\ell^2}{3r} + 2t_1(t_2 - s) \right) \cdot \frac{1}{L^2}$$

$$\bar{\gamma} = \left(\frac{L}{\ell} \right)^3 \left(\frac{\ell}{2r} [t_2 + r \cdot (t_2 - s)] + \frac{\ell^2}{3r} + t_2(t_2 - s) \right) \cdot \frac{1}{L^2}$$

(A.15)

No caso em que as rotações são iguais ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$) e os trechos rígidos têm comprimentos diferentes ($t_1 \neq t_2$), resulta:

$$\begin{aligned} M'' &= \frac{6EI_c}{L} \bar{\rho} \cdot \alpha \\ M' &= \frac{6EI_c}{L} \rho \cdot \alpha \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \left(\frac{L}{\ell}\right)^3 \left[\frac{\ell + 2(t_2 - s) \cdot r}{L \cdot r} \right] \\ \rho &= \left(\frac{L}{\ell}\right)^3 \left[\frac{\ell + 2(t_1 - s) \cdot r}{L \cdot r} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Mas, se além de rotações iguais a barra tiver trechos rígidos de iguais comprimentos ($t_1 = t_2 = t$), que é o caso dos pilares do pórtico, obtém-se:

$$M'' = M' = \frac{6EI_c}{L} \rho \cdot \alpha \quad (\text{A.18})$$

onde:

$$\rho = \bar{\rho} = \left(\frac{L}{\ell}\right)^3 \left[\frac{\ell + 2(t - s) \cdot r}{L \cdot r} \right] \quad (\text{A.19})$$

APÊNDICE B: MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

A aplicação do método das diferenças finitas à solução de equações diferenciais, geradas pelo tratamento contínuo em edifícios altos sob carga lateral, pode ser encontrada em diversos trabalhos como em BARBOSA (2) e MANCINI (29).

O método das diferenças finitas é a técnica numérica para se obterem soluções aproximadas de equações diferenciais. Neste método, as derivadas da função desconhecida são aproximadas às derivadas de uma parábola de grau r ($r \geq$ à ordem da equação diferencial) que intercepta a função em $r + 1$ pontos igualmente espaçados de h , sobre o eixo dos z .

Com o propósito de se obterem operadores com número simétrico de pontos, optou-se pela parábola de interpolação de quarto grau.

$$p(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E \quad (\text{B.1})$$

cujos valores nos pontos de interpolação ($i - 2h$, $i - h$, i , $i + h$, $i + 2h$) devem coincidir com os valores da função desconhecida $f(z)$, que de acordo com a Figura B.1 valem:

$$\begin{aligned} f(i - 2h) &= F_{ee} \\ f(i - h) &= F_e \\ f(i) &= F_i \\ f(i + h) &= F_d \\ f(i + 2h) &= F_{dd} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

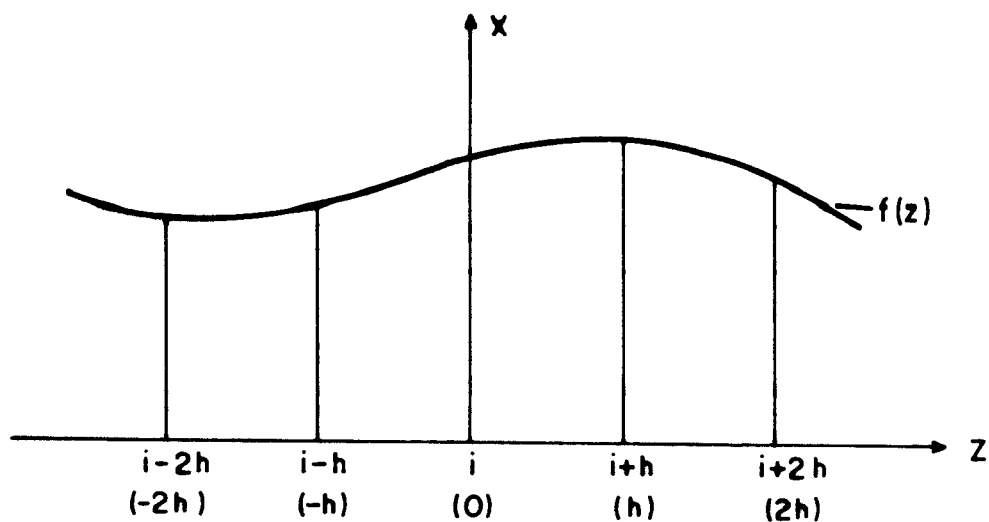


Figura B.1- Valores da função

Passando-se a parábola $p(z)$ pelos cinco pontos de interpolação e tomando-se a abscissa do ponto i como origem, resulta o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} (2h)^4 & -(2h)^3 & (2h)^2 & -2h & 1 \\ h^4 & -h^3 & h^2 & -h & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ h^4 & h^3 & h^2 & h & 1 \\ (2h)^4 & (2h)^3 & (2h)^2 & 2h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Fee \\ Fe \\ Fi \\ Fd \\ Fdd \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

cuja solução fornece os valores dos coeficientes do polinômio, expressos por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{24h^4} [Fee - 4Fe + 6Fi - 4Fd + Fdd] \\ B &= \frac{1}{12h^3} [-Fee + 2Fe - 2Fd + Fdd] \\ C &= \frac{1}{24h^2} [-Fee + 16Fe - 30Fi + 16Fd - Fdd] \\ D &= \frac{1}{12h} [Fee - 8Fe + 8Fd - Fdd] \\ E &= Fi \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Como a função $f(z)$ é aproximada pelo polinômio $p(z)$ no intervalo $(-2h, 2h)$, podem-se obter todas as derivadas de $f(z)$ neste intervalo. Para o ponto i as expressões das derivadas são denominadas de diferenças finitas centrais e para os demais pontos do intervalo recebem o nome de diferenças finitas assimétricas à esquerda ou à direita, conforme o ponto esteja à esquerda ou à direita do ponto central i . Desta maneira, as expressões para as terceiras, segundas e primeiras derivadas de $f(z)$ nos pontos em que z é igual a zero, $-h$, e h são:

$$\begin{aligned} F_i''' &= p'''(0) = 6B \\ F_i'' &= p''(0) = 2C \\ F_i' &= p'(0) = D \end{aligned} \tag{B.4-a}$$

$$\begin{aligned} F_e''' &= p'''(-h) = -24Ah + 6B \\ F_e'' &= p''(-h) = 12Ah^2 - 6Bh + 2C \\ F_e' &= p'(-h) = -4Ah^3 + 3Bh^2 - 2Ch + D \end{aligned} \tag{B.4-b}$$

$$\begin{aligned} F_d''' &= p'''(h) = 24Ah + 6B \\ F_d'' &= p''(h) = 12Ah^2 + 6Bh + 2C \\ F_d' &= p'(h) = 4Ah^3 + 3Bh^2 + 2Ch + D \end{aligned} \tag{B.4-c}$$

ou, tendo-se em vista as expressões (B.2), obtém-se:

a) Diferenças finitas centrais

$$\begin{aligned} F_i''' &= \frac{1}{2h^3} [-F_{ee} + 2F_e - 2F_d + F_{dd}] \\ F_i'' &= \frac{1}{12h^2} [-F_{ee} + 16F_e - 30F_i + 16F_d - F_{dd}] \\ F_i' &= \frac{1}{12h} [F_{ee} - 8F_e + 8F_d - F_{dd}] \end{aligned} \tag{B.5-a}$$

b) Diferenças finitas assimétricas à esquerda

$$\begin{aligned}
 F_e''' &= \frac{1}{2h^3} [-3F_{ee} + 10F_e - 12F_i + 6F_d - F_{dd}] \\
 F_e'' &= \frac{1}{12h^2} [11F_{ee} - 20F_e + 6F_i + 4F_d - F_{dd}] \\
 F_e' &= \frac{1}{12h} [-3F_{ee} - 10F_e + 18F_i - 6F_d + F_{dd}]
 \end{aligned}
 \tag{B.5-b}$$

c) Diferenças finitas assimétricas à direita:

$$\begin{aligned}
 F_d''' &= \frac{1}{2h^3} [F_{ee} - 6F_e + 12F_i - 10F_d + 3F_{dd}] \\
 F_d'' &= \frac{1}{12h^2} [-F_{ee} + 4F_e + 6F_i - 20F_d + 11F_{dd}] \\
 F_d' &= \frac{1}{12h} [-F_{ee} + 6F_e - 18F_i + 10F_d + 3F_{dd}]
 \end{aligned}
 \tag{B.5-c}$$

APÊNDICE C: MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

Nas diversas áreas das ciências exatas, ocorrem, freqüentemente, situações que envolvem a resolução de uma equação do tipo $f(x)=0$. Em muitos casos, é praticamente impossível encontrar-se raízes exatas, buscando-se então aproximações para essas raízes através de processos iterativos.

O método das tangentes de Newton Raphson constitui-se num processo iterativo eficiente para o cálculo de raízes de equações, principalmente pelas suas propriedades de convergência e simplicidade de aplicação.

Neste método, a partir da função de iteração:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (C.1)$$

e de um dado valor inicial para x ($x = x_0$), o ponto x_1 ($x_1 = F(x_0)$) é obtido, de tal forma que x_1 é a abscissa do ponto de interseção entre o eixo ox e a reta tangente à curva $f(x)$ em $(x_0, f(x_0))$, conforme indica-se na Figura C.1.. A sequência x_k será determinada por:

$$x_{k+1} = F(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (C.2)$$

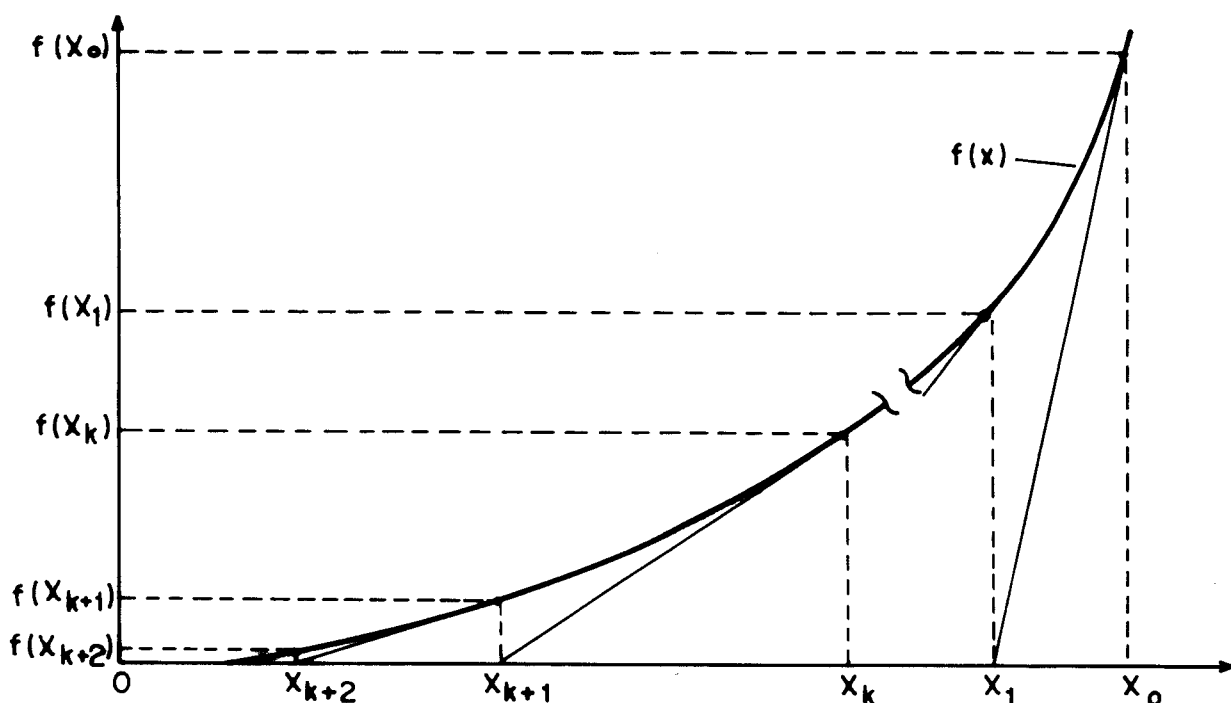


Figura C.1- Método das tangentes de Newton Raphson

Nos casos em que é trabalhoso obter-se $f'(x)$ ou ainda, em que $f'(x)$ é muito complicada, aconselha-se substituir a derivada pelo quociente:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad (\text{C.3})$$

onde x_k e x_{k-1} são duas aproximações para a raiz.

Neste caso, a função de iteração será:

$$F(x_k) = x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (\text{C.4})$$

A partir das duas aproximações x_{k-1} e x_k , o ponto x_{k+1} é obtido como sendo a abscissa do ponto de intersecção do eixo ox e da reta secante que passa por $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$, conforme indica-se na figura C.2

O processo continua até que seja encontrado para $f(x)$ um valor tão próximo de zero quanto seja a precisão desejada.

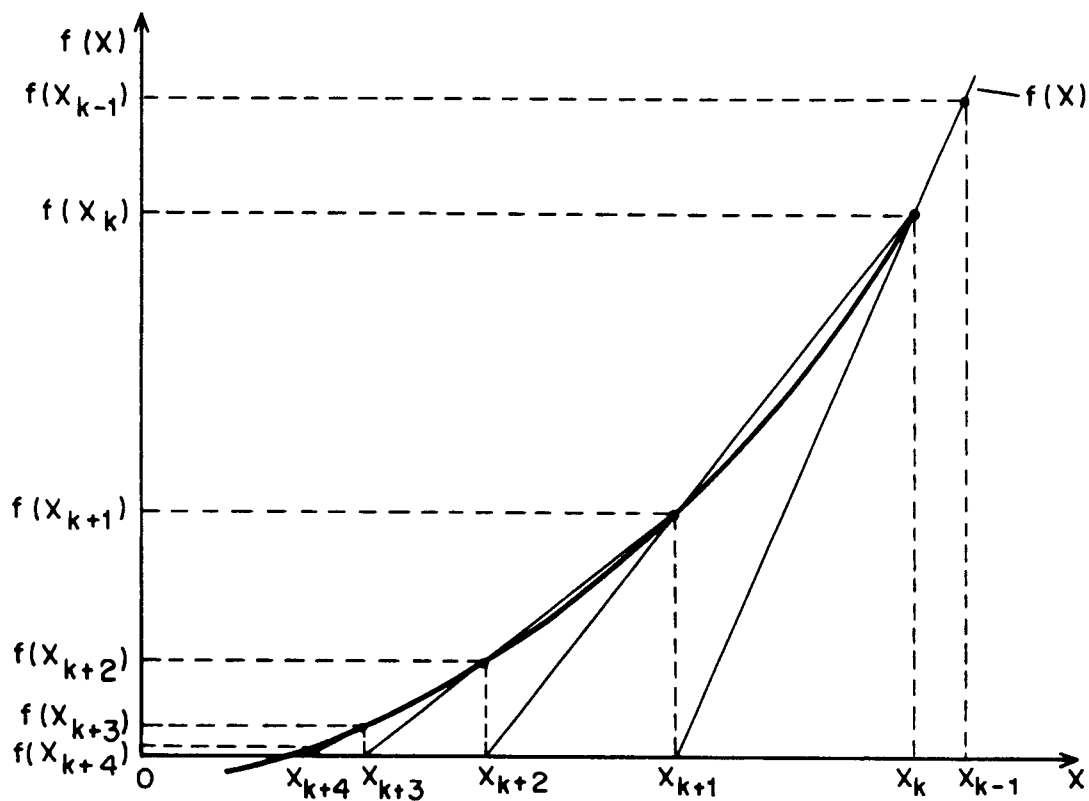


Figura C.2 - Método das secantes de Newton Raphson