

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
PARA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE PLACAS

LAURO HENRIQUE MELLO CHUEIRI

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Civil.

ORIENTADOR: Prof.Dr. Wilson Sergio Venturini

São Carlos

1994

C486f Chuciri, Lauro Henrique Mello
Formulação do método dos elementos de contorno para análise elasto-plástica de placas / Lauro Henrique Mello Chuciri.-- São Carlos, 1994.
219p.

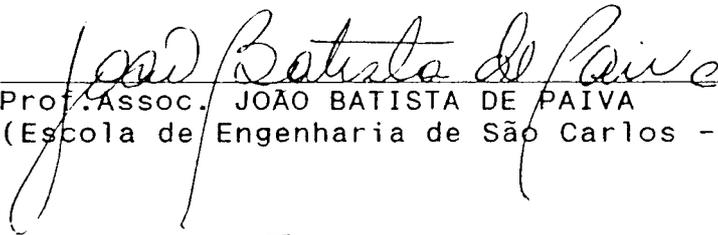
Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos-
Universidade de São Paulo, 1994.
Orientador: Prof.Dr. Wilson Sergio Venturini.

1. Método dos elementos de contorno. 2. Análise elasto-plástica -
Placas. I. Título.

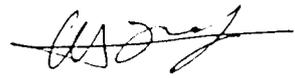
FOLHA DE APROVAÇÃO

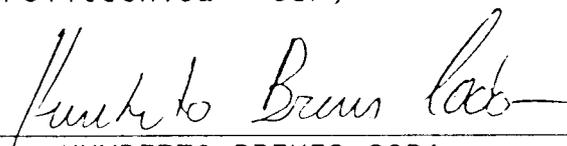
Tese defendida e aprovada em 16/12/1994
pela Comissão Julgadora:


Prof. Tit. WILSON SERGIO VENTURINI (Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos - USP)

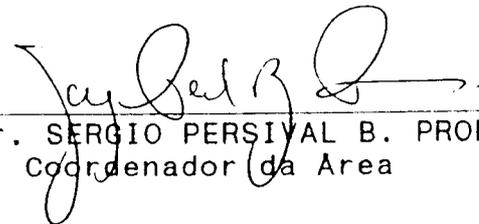

Prof. Assoc. JOÃO BATISTA DE PAIVA
(Escola de Engenharia de São Carlos - USP)


Prof. Dr. WEBE JOÃO MANSUR
(COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro)


Prof. Dr. MIGUEL LUIZ BUCALEM
(Escola Politécnica - USP)


Prof. Dr. HUMBERTO BREVES CODA
(Escola de Engenharia de São Carlos - USP)


Prof. Dr. JURANDYR POVINELLI
Presidente da CPG


Prof. Dr. SÉRGIO PERSIVAL B. PROENÇA
Coordenador da Área

.iii.

Para Vanilda,
com amor.

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar meus agradecimentos a todos aqueles que ajudaram a tornar possível este trabalho.

Sou especialmente grato ao Professor Doutor Wilson Sergio Venturini, por sua orientação constante e segura e pelo estímulo em todos os estágios deste trabalho; sobretudo, agradeço-lhe pela amizade.

A Newton Carlos Pereira Ferro e Andréa Carla Gonçalves Vianna agradeço profundamente pela amizade e valiosa colaboração.

Aos colegas e funcionários do Departamento de Engenharia Civil da UNESP de Bauru, obrigado pelo apoio recebido. Agradeço especialmente a Edmilson Quirino Ramos, pela elaboração de figuras que compõem este trabalho e às secretárias Marlene e Maria, pelo carinho.

Aos professores e funcionários do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, estendo meus agradecimentos pela amizade demonstrada. Agradeço especialmente a Marta Regina Couto Faria e Antonio Valdair Carneiro, pelo trabalho de digitação e impressão, a Francisco Carlos Guete de Brito, pelos desenhos e a Maria Nadir Minatel e Rosi Aparecida Jordão Rodrigues, pela atenção e apoio.

De modo especial, agradeço à minha mulher Vanilda, por seu amor, estímulo e dedicação ao longo de todo o curso, particularmente nos momentos mais difíceis. Sua colaboração e sugestões foram de fundamental importância para a conclusão deste trabalho. Muito obrigado.

SUMÁRIO

1	APRESENTAÇÃO	1
1.1	Introdução	1
1.2	Aplicação do Método dos Elementos de Contorno na Análise de Placas	5
2	FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS DELGADAS	11
2.1	Introdução	11
2.2	Relações Básicas da Teoria de Kirchhoff	12
2.2.1	Deslocamentos	12
2.2.2	Deformações	13
2.2.3	Tensões	15
2.2.4	Esforços e Relações Diferenciais de Placas	16
2.2.5	Força Cortante Equivalente	20
2.3	Equações de Placas em Coordenadas Polares	22
2.4	Solução Fundamental de Placas	28
3	EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO DE PLACAS	36
3.1	Introdução	36
3.2	Equação Integral para um Ponto do Domínio da Placa	36
3.3	Equação Integral para um Ponto do Contorno da Placa	43
3.4	Integrais de Domínio para o Carregamento	48
4	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROBLEMAS DE PLACAS	53
4.1	Introdução	53
4.2	Discretização das Equações Integrais	54
4.2.1	Aproximação das Variáveis do Problema	56
4.2.2	Transformações das Equações Integrais em Equações Algébricas	61
4.3	Sistema de Equações	65
4.4	Integração sobre os Elementos	70
4.5	Propriedades da Matriz \underline{H}	75
4.6	Deslocamentos e Esforços para Pontos Internos	77
4.7	Aplicações Numéricas	87
4.7.1	Exemplo 1. Placa quadrada com dois lados opostos apoiados e engastada nos outros dois, com	

carregamento uniformemente distribuído	87
4.7.2 Exemplo 2. Placa quadrada apoiada nos quatro cantos	89
4.7.3 Exemplo 3. Placa quadrada apoiada, com carregamento distribuído ao longo de uma linha	90
4.7.4 Exemplo 4. Placa com dois tipos de carregamento e condições de contorno variadas	93
4.7.5 Exemplo 5. Placa quadrada com carregamento linearmente distribuído	95
4.7.6 Exemplo 6. Placa trapezoidal	97
5 PROBLEMAS DE PLACAS COM CAMPO DE MOMENTOS INICIAIS	100
5.1 Introdução	100
5.2 Equações Integrais com Campo de Momentos Iniciais	101
5.2.1 Equações Básicas	101
5.2.2 Equações Integrais para Deslocamentos	102
5.2.3 Equações Integrais para Esforços nos Pontos Internos	105
5.3 Discretização das Equações Integrais	115
5.4 Integração sobre as Células	122
5.5 Técnica de Solução	133
5.6 Momentos nos Pontos do Contorno	136
5.7 Avaliações Numéricas	142
5.7.1 Exemplo 1. Placa quadrada engastada, sujeita a um gradiente de temperatura	142
5.7.2 Exemplo 2. Placa quadrada apoiada nas bordas e sujeita a um gradiente de temperatura	144
5.7.3 Exemplo 3. Placa triangular simplesmente apoiada, sujeita a um gradiente de temperatura	145
6 ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE PLACAS	148
6.1 Introdução	148
6.2 Conceitos Básicos da Teoria da Plasticidade	148
6.2.1 Problemas Unidimensionais	150
6.2.2 Generalização para Problemas Multidimensionais	153
6.2.3 Critérios de escoamento	162
6.3 Um Modelo Simples para Análise Elastoplástica de Placas	167
6.4 Solução Numérica do Problema Não-linear	171

6.5 Avaliações Numéricas	175
6.5.1 Exemplo 1. Placa biapoiada com momentos aplicados nas extremidades	175
6.5.2 Exemplo 2. Placa biengastada nas extremidades, com carga uniformemente distribuída	176
6.5.3 Exemplo 3. Placa quadrada apoiada nas quatro bordas com carga uniformemente distribuída	178
6.5.4 Exemplo 4. Placa quadrada engastada nas quatro bordas, com carga uniformemente distribuída	179
7 MODELOS ALTERNATIVOS PARA A ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE LAJES	182
7.1 Introdução	182
7.2 Modelos Usuais para a Análise Elastoplástica de Lajes de Concreto Armado	182
7.3 Um Modelo Alternativo para a Análise de Lajes de Concreto Armado.....	184
7.4 Uma Adaptação do Modelo Estratificado	191
7.5 Avaliações Numéricas	200
7.5.1 Exemplo 1. Laje simplesmente apoiada nas quatro bordas, com carga concentrada	200
7.5.2 Exemplo 2. Laje apoiada nos quatro cantos, com carga concentrada	203
7.5.3 Exemplo 3. Placa apoiada nas quatro bordas, com carga uniformemente distribuída	206
8 CONCLUSÕES	209
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	212

RESUMO

No desenvolvimento de projetos estruturais, a análise de placas é de grande interesse. Neste trabalho, desenvolve-se uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para a análise elástica desse elemento estrutural, baseada na Teoria Clássica de Kirchhoff. Complementa-se a formulação com a inclusão de um campo de deformações assumido, estendendo-a, assim, à análise elastoplástica de placas, incluindo-se um modelo que possa ser aplicado à solução de lajes de concreto armado. Os modelos elástico e elastoplástico são aferidos com a solução de alguns exemplos, comprovando-se a eficiência da formulação.

ABSTRACT

Plate bending analysis is of great interest to develop structural design. In this work, a boundary element formulation is proposed to treat this kind of structural element, based on the Kirchhoff's Classical Theory and assuming elastic behavior. The formulation is extended to incorporate the effects of possible initial stress fields. Thus, the developed numerical algorithm can also be applied to plate bending elastoplastic analysis. Emphasis is given to a reinforced concrete model suitable to study building slabs. Several examples are shown to illustrate the efficiency of the elastic and elastoplastic developed models.

1 APRESENTAÇÃO

1.1 Introdução

Na concepção de um projeto estrutural, as placas são elementos que aparecem com freqüência, e a solução de problemas envolvendo estes elementos estruturais constitui um assunto de grande importância para o campo da Engenharia de Estruturas. Assim, para a melhoria dos projetos estruturais, é fundamental o conhecimento do comportamento das placas submetidas a diversos tipos de carregamentos, admitindo-se, ainda, a possibilidade da associação da placa com outros elementos estruturais, bem como um estudo mais refinado para diferentes tipos de materiais.

A teoria das placas representa uma aproximação bidimensional do problema tridimensional da teoria da elasticidade, através da consideração de hipóteses simplificadoras. O primeiro trabalho nesta área é devido a KIRCHHOFF (1850), que desenvolveu a chamada Teoria Clássica, a qual é, até hoje, a mais utilizada, e representa muito bem o comportamento de placas delgadas sob a ação de carregamento transversal. Nesta teoria, a solução do problema leva a uma equação diferencial de quarta ordem, onde devem ser satisfeitas duas condições de contorno da placa.

Alternativamente à Teoria Clássica, REISSNER (1944, 1945) e MINDLIN (1951) desenvolveram teorias semelhantes, que levam em consideração as deformações por cisalhamento transversal. O sistema de equações diferenciais obtido é de sexta ordem, no

qual devem ser verificadas três condições de contorno, relacionadas às condições físicas do problema. Estas teorias apresentam resultados melhores que os da Teoria de Kirchhoff, para os pontos situados nas bordas, e permitem a análise de placas delgadas e moderadamente espessas.

Outras teorias surgiram na época, envolvendo os deslocamentos da superfície média da placa e as rotações neste plano, podendo-se citar os trabalhos de HENCKY (1947) e KROMM (1953).

Mais recentemente, CHENG (1979) desenvolveu uma teoria, obtendo uma equação diferencial de ordem infinita para os deslocamentos transversais, onde derivadas maiores que as de quarta ordem multiplicam os quadrados da espessura da placa. No limite, quando a espessura tende a zero, obtém-se a equação bi-harmônica da Teoria Clássica.

LEVINSON (1980) deduziu uma nova teoria, também considerando as deformações por cisalhamento, permitindo a análise estática e dinâmica de placas.

Em 1985, GREGORY e WAN demonstraram que satisfazendo-se certas condições de contorno para a solução do problema de flexão de placa e se utilizando a equação de deslocamento de Cheng, o problema reduz-se exatamente à equação de Kirchhoff.

Em trabalho recente, REISSNER (1986) apresentou nova formulação, generalizando as equações para a análise de placas considerando-se grandes deformações, obtendo um sistema de equações diferenciais de décima ordem. Do mesmo autor, o trabalho de 1991 aborda a análise de placas ortotrópicas, incluindo o conceito de apoio *soft*.

Finalmente, BARRET & ELLIS (1988) desenvolveram uma extensão da teoria de Cheng, obtendo as expressões das componentes de deslocamentos e tensões em termos do deslocamento transversal da superfície média da placa e suas derivadas. Neste trabalho, demonstram, ainda, como são obtidas as formulações tradicionais de Kirchhoff, Mindlin e Reissner, a partir desta teoria desenvolvida.

As soluções analíticas das equações diferenciais que governam muitos problemas físicos de interesse, como é o caso

das soluções de placas, infelizmente só podem ser obtidas em alguns casos. Devido a esta limitação, surgiram, nas últimas décadas, várias técnicas para a obtenção de soluções numéricas destas equações. Com o avanço dos computadores, a utilização destas técnicas tornou-se o caminho mais eficiente para a análise dos diversos problemas práticos no campo da Engenharia.

Assim, surgiram os chamados métodos numéricos, onde se destacam o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno. Os dois primeiros se enquadram dentro do grupo dos chamados métodos de domínio, onde, na aproximação da solução da equação diferencial do problema, são utilizados valores das variáveis associadas aos pontos do domínio e do contorno do corpo analisado. Já os métodos de contorno, que utilizam equações integrais do problema, necessitam das variáveis básicas apenas no contorno.

O Método das Diferenças Finitas é o mais antigo destes métodos, tendo surgido a partir do trabalho de SOUTHWELL (1946), e é utilizado, ainda hoje, na solução de diversos problemas de Engenharia.

O desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos coincidiu com o avanço tecnológico dos equipamentos computacionais, tendo sido os primeiros trabalhos desenvolvidos no final dos anos cinquenta (TURNER, 1956), (ARGYRIS, 1960). Este método tornou-se o mais utilizado nas diversas áreas da Engenharia, mostrando-se extremamente eficiente para a solução de problemas práticos; atualmente, é empregado em sistemas computacionais para a análise de estruturas, inclusive com a consideração de respostas não-lineares.

Alternativamente aos métodos de domínio, atualmente se tem dado grande importância ao desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno, assim denominado por BREBBIA (1978), onde as variáveis do problema são calculadas em pontos discretos do contorno e, a partir destes valores, calculam-se as variáveis nos pontos do domínio. Este método apresenta, assim, a vantagem de se obter uma redução na dimensão do problema, já que a discretização é feita apenas no contorno, levando a uma quantidade menor de dados de entrada e memória auxiliar de armazenamento das informações do problema. Pode-se ressaltar, ainda, a facilidade de

se representar domínios infinitos e a determinação de esforços e deformações em pontos de interesse do domínio, sem introduzir erros de interpolação para o domínio e sem a necessidade de se alterar a discretização do contorno.

Apesar de ser mais recente, o Método dos Elementos de Contorno tem sua origem na resolução de equações integrais, as quais são conhecidas desde o século passado. Historicamente, a primeira aplicação destas equações na teoria da elasticidade foi devida a BETTI (1872) e, posteriormente, complementada por Somigliana e Cerrutti em problemas de elasticidade plana.

O trabalho de MUSKHELISHVILI (1953) retomou a utilização das equações integrais aplicadas a problemas de elasticidade plana, seguidos dos trabalhos de outros pesquisadores russos, onde se destacam as contribuições de MIKHLIN (1957) e KUPRADZE (1965), dando início ao uso de equações integrais na forma de um método, dito indireto, já que as variáveis envolvidas não eram as variáveis reais do problema. No início dos anos sessenta, JASWON (1963) e SYMM (1963) apresentaram um equacionamento utilizando variáveis reais do problema, mantendo, porém, uma função de tensão auxiliar, sendo, por este motivo, chamado de método semi-direto, por alguns autores.

O primeiro trabalho que apresentou a chamada formulação direta, que envolve as variáveis físicas do problema, foi aplicado por RIZZO (1967) em problemas de elasticidade plana, posteriormente estendida para a elasticidade tridimensional por CRUSE (1969). Nestes trabalhos, a equação integral é discretizada através de elementos no contorno, empregando-se uma aproximação constante para forças e deslocamentos. Seguiram-se os trabalhos de RICARDELLA (1973) e CRUSE (1974), que introduziram a aproximação linear para as variáveis nos elementos, e LCHAT (1975), que desenvolveu elementos com aproximação de ordem superior.

Com a publicação de BREBBIA (1978), onde as equações integrais são obtidas a partir da técnica dos resíduos ponderados, obteve-se maior generalização do método, conseguindo-se a associação desta formulação com outros métodos numéricos. A partir de então, as pesquisas intensificaram-se nos diversos campos da Engenharia e novas formulações foram desenvolvidas para a análise dos mais variados problemas, tais

como a análise em meios contínuos, com a consideração de não-linearidade geométrica e física, o estudo da mecânica das rochas, as interações solo-estrutura e fluido-estrutura, entre outros.

1.2 Aplicação do Método dos Elementos de Contorno na Análise de Placas

A evolução do Método dos Elementos de Contorno conduziu naturalmente ao desenvolvimento de formulações para a análise de placas, baseadas na Teoria de Kirchhoff, e a sua aplicação em problemas práticos. O primeiro trabalho neste campo deve-se a JASWON et al (1967), que propuseram a solução da equação bi-harmônica, decompondo-a em duas equações harmônicas, resolvidas através de equações integrais. Esta formulação tem o tratamento indireto, sendo o trabalho de FORBES e ROBINSON (1969) o primeiro a utilizar o método direto.

Seguem-se, posteriormente, os trabalhos de HANSEN (1976), que propôs uma formulação direta para a análise de placas infinitas com furos de contorno não carregado, e o estudo de BEZINE & GAMBY (1978), que desenvolveram uma formulação direta, partindo da identidade de Green e considerando duas equações integrais, relativas ao deslocamento transversal e à sua derivada na direção normal. Ainda nesta época, destacam-se os trabalhos de BEZINE (1978) e STERN (1979), que utilizaram a formulação direta. Bezine utilizou a discretização com elementos constantes, sem transformar a integral de domínio devido ao carregamento em integrais de contorno, ficando seu estudo restrito ao caso de cargas concentradas. A formulação de Stern já tinha o caráter mais geral, com aproximação linear nos elementos, incluindo o cálculo das reações de canto como função dos momentos volventes, sem, porém, considerar a possibilidade da descontinuidade das condições de contorno nos nós de canto.

Apesar da formulação direta ser a mais utilizada, alguns trabalhos adotando a formulação indireta merecem destaque. Neste contexto, ALTIERO & SIKARSKIE (1978) apresentaram uma técnica na qual consideram a placa real contida numa placa fictícia, cuja função de Green é conhecida, aplicada apenas a

placas engastadas. Posteriormente, WU e ALTIERO (1979) estenderam esta técnica para condições arbitrárias de contorno. Um trabalho similar foi desenvolvido por TOTTENHAN (1979), que apresentou uma comparação entre as formulações direta e indireta, além de sua extensão para a análise de placas apoiadas em base elástica e de cascas abatidas.

A partir do início dos anos oitenta, intensificaram-se as pesquisas envolvendo a análise elástica de placas via Método dos Elementos de Contorno, quando surgiram novos esquemas de solução do problema, através do aperfeiçoamento das formulações diretas já desenvolvidas para a teoria clássica de placas.

Neste sentido, podem ser citadas algumas contribuições ao longo destes anos. BEZINE (1981) desenvolveu uma formulação para a análise de placas com condições de apoio no domínio. Posteriormente, HARTMANN & ZOTEMANTEL (1986) também desenvolveram uma formulação que permite vínculos no domínio e adotaram um esquema de interpolação hermitiana para os deslocamentos. GUO-SHU & MUKHERJEE (1986) consideraram, também, funções hermitianas de interpolação para os elementos no contorno e utilizaram três equações para cada nó, relativas ao deslocamento e suas derivadas nas direções normal e tangencial ao contorno. Neste mesmo ano, PARIS & DE LEON (1986) desenvolveram uma formulação direta para a solução de placas simplesmente apoiadas, através da decomposição da equação bi-harmônica em duas equações harmônicas.

PAIVA (1987) apresentou a possibilidade da associação de placas com vigas e pilares, propondo, como alternativa do equacionamento do problema, a utilização de equações integrais apenas para os deslocamentos transversais em pontos do contorno e fora do domínio.

Os trabalhos de ABDEL-AKHER & HARTLEY (1989) apresentaram fórmulas para o cálculo de equações integrais utilizando funções de interpolação Lagrangianas e um esquema de integração analítica para o cálculo das integrais com singularidades. PILTNER & TAYLOR (1989) desenvolveram uma formulação que considera as deformações por cisalhamento, adotando soluções fundamentais baseadas em funções complexas. Ainda em

1989, KATSIKADELIS & ARMENAKAS (1989) adotaram a combinação do Método dos Elementos de Contorno com o Método das Diferenças Finitas para a solução simultânea de duas equações integrais e duas equações diferenciais. CAMP & GIPSON (1990) utilizaram diversos tipos de elementos de contorno isoparamétricos, sendo as integrais calculadas analiticamente. A combinação dos Métodos dos Elementos de Contorno e das Diferenças Finitas também foi usada no trabalho de SAPOUNTZAKIS & KATSIKADELIS (1991) para a análise de placas com espessura variável.

Mais recentemente, KARAMI et al (1992) desenvolveram uma formulação utilizando um sistema onde são acopladas a equação bi-harmônica e uma equação harmônica, resolvidas simultaneamente, sendo, ainda, as integrais de contorno calculadas analiticamente. Ao contrário da grande maioria dos trabalhos apresentados nos últimos anos, que usam o método direto, VABLE & ZHANG (1992) adotaram a formulação indireta para a análise de placas, fazendo uso de um esquema de integração analítica e de funções fictícias, aproximadas por polinômios de Lagrange e Hermite.

A análise de placas através das teorias de Reissner ou Mindlin, com a utilização do Método dos Elementos de Contorno, foi inicialmente desenvolvida em 1982, por VAN DER WEEËN (1982). Nesta formulação, são escritas três equações integrais para cada ponto do contorno, relativas aos deslocamentos transversais e às rotações normal e tangencial ao contorno da placa. Nesta mesma linha, podem ser destacados, ainda, os trabalhos de KARAN (1986), BARCELLOS & SILVA (1987), LONG et al (1988), WESTPHAL & BARCELLOS (1989) e RIBEIRO & VENTURINI (1989). Mais recentemente, modelos que usam a teoria de Reissner e consideram a não-linearidade geométrica foram apresentados nos trabalhos de XIAO-YAN et al (1990) e HE & QUIN (1993).

Na última década, multiplicaram-se os trabalhos abordando os diversos tipos de problemas de interesse, com o desenvolvimento de técnicas visando a análise não-linear, a análise de vibrações em placas e a consideração de placas sobre fundação, entre outras.

As formulações que consideram a não-linearidade física de placas têm sido objeto de algumas pesquisas, ainda em

uma quantidade modesta, tendo em vista a importância do assunto. Em um trabalho inicial, MORJARIA & MUKHERJEE (1980) desenvolveram um esquema para a análise não elástica de placas, dependente do tempo. Neste trabalho, consideram um modelo viscoplástico, utilizando a equação diferencial que governa o problema baseada na teoria clássica, em termos de taxas de deslocamentos; apresentam a aplicação do modelo em placas engastadas e simplesmente apoiadas, sujeitas a um carregamento transversal distribuído, variando linearmente com o tempo.

Posteriormente, MOSHAIOV & VORUS (1986) desenvolveram uma formulação para a análise elastoplástica de placas, usando um esquema incremental-iterativo, considerando momentos fletores plásticos iniciais. Eles adotaram a formulação desenvolvida por Stern para a análise elástica, através da teoria clássica, na qual são definidas duas equações integrais para cada ponto do contorno, relativas ao deslocamento e à sua derivada na direção normal ao contorno. O contorno é discretizado por elementos constantes; no cálculo das integrais de domínio, este é dividido em células, cujas funções aproximadoras são constantes, tanto para a parcela devida ao carregamento, como para os momentos iniciais.

Em 1992, a análise elastoplástica de placas utilizando a teoria de Reissner foi apresentada nos trabalhos de KARAM & TELLES (1992) e RIBEIRO (1992). Ambos usaram o método incremental-iterativo, baseado na técnica dos momentos iniciais, sendo as equações integrais discretizadas através de elementos quadráticos no contorno. No primeiro destes trabalhos, as integrais de domínio são discretizadas através de células internas constantes e, no segundo, por funções aproximadoras lineares.

Em função das soluções fundamentais adotadas, as formulações do Método dos Elementos de Contorno que utilizam a teoria de Reissner podem apresentar algumas dificuldades, principalmente na avaliação das integrais de domínio, sendo, às vezes, necessário um número significativo de células na discretização do domínio. Assim, optou-se, neste trabalho, por uma formulação que utiliza a teoria Clássica, que, embora mais limitada, parece ser um caminho mais seguro e adequado para os problemas que se pretende analisar.

Portanto, o objetivo principal do presente trabalho é a análise elastoplástica de placas, com as hipóteses da Teoria de Kirchhoff, através do Método dos Elementos de Contorno. Para tanto, inicialmente, no Capítulo 2, são apresentados os conceitos básicos e as equações da Teoria de Kirchhoff para a flexão de placas, bem como as soluções fundamentais dos deslocamentos e esforços da placa, que são utilizadas na formulação.

No Capítulo 3, determinam-se as equações integrais relativas aos deslocamentos para pontos do domínio e do contorno, assim como se faz a transformação das integrais de domínio, relativas ao carregamento, em integrais sobre o contorno da região carregada.

No Capítulo 4, descreve-se um procedimento numérico utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno, através da discretização das equações integrais, pela divisão do contorno da placa em elementos, sobre os quais as variáveis do problema são aproximadas por funções quadráticas. Escrevendo-se as equações apenas para deslocamentos em pontos do contorno e fora do domínio, obtêm-se um sistema de equações algébricas lineares, onde as incógnitas são os deslocamentos e esforços dos pontos do contorno. Obtêm-se, ainda, as equações para os deslocamentos e esforços dos pontos do domínio da placa. Ao final deste Capítulo, são apresentados diversos exemplos de análise elástica de placas, comparando-se os resultados obtidos com outros modelos ou soluções analíticas conhecidas.

No Capítulo 5, complementa-se a formulação desenvolvida, admitindo-se a ocorrência de momentos iniciais na placa, provenientes de um campo de deformações assumido. As integrais de domínio que resultam destes momentos são discretizadas através da divisão do domínio em células triangulares, com função aproximadora linear. Assim, além de se poder considerar problemas com efeitos térmicos, o equacionamento pode ser aplicado à solução de problemas com comportamento não-linear do material.

O Capítulo 6 refere-se à extensão da formulação à análise elastoplástica de placas. Alguns conceitos e hipóteses da teoria da plasticidade são abordados, bem como sua aplicação ao estudo de placas. Para a solução não-linear do problema, adota-se

um algoritmo incremental e iterativo, sem que haja a necessidade de atualização das matrizes envolvidas, baseado no processo das tensões iniciais. São apresentados, ao final do Capítulo, alguns exemplos numéricos.

Com base na formulação não-linear desenvolvida, propõe-se, no Capítulo 7, modelos para a análise elastoplástica de lajes de concreto armado.

2 FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS DELGADAS

2.1 Introdução

As placas são elementos estruturais definidos como corpos limitados por duas superfícies planas, admitindo-se casos de pequena curvatura. A espessura, definida como sendo a distância entre as duas superfícies, é pequena, quando comparada com as demais dimensões. Admite-se que o carregamento é transversal ao plano médio da placa, que é equidistante às duas superfícies que definem o corpo. Existe a possibilidade de se ter carregamentos combinados contidos no plano médio.

As teorias que consideram o elemento como bidimensional mais utilizadas no estudo de placas são a Teoria Clássica de Kirchhoff e a Teoria de Reissner.

A Teoria de Reissner (REISSNER, 1944) é mais abrangente, permitindo a análise de placas delgadas e moderadamente espessas. Já a Teoria de Kirchhoff visa e interpreta suficientemente bem placas delgadas com pequenos deslocamentos.

Neste trabalho serão analisadas as placas delgadas sob a ação de carregamento transversal, baseando-se na Teoria de Kirchhoff, que, em vista das limitações impostas, leva a uma simplificação do problema. Para tanto, são necessárias as seguintes hipóteses:

- a superfície média é admitida como superfície neutra;
- os deslocamentos transversais são pequenos, quando comparados com a espessura t da placa;

- a normal à superfície média, inicialmente indeformada, permanece normal após a deformação, isto é, não são consideradas as deformações por cisalhamento transversal;
- as tensões normais à superfície da placa são pequenas, se comparadas às demais componentes de tensão, sendo, portanto, desprezadas;
- não ocorrem deformações no plano médio da placa.

Admite-se, ainda, que a placa seja constituída de material homogêneo, isotrópico e cujo comportamento é elástico-linear.

2.2 Relações Básicas da Teoria de Kirchhoff

A partir das simplificações envolvidas nas hipóteses descritas, podem-se determinar as relações e equações fundamentais da Teoria de Kirchhoff para placas delgadas isotrópicas.

2.2.1 Deslocamentos

O deslocamento de um ponto qualquer da placa fletida pode ser escrito através de componentes u_1 , u_2 e u_3 , sendo as direções x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente, dadas por um sistema ortogonal com origem no plano médio da placa, o qual coincide com o plano x_1x_2 .

Devido às hipóteses para placas delgadas, pode-se considerar que o deslocamento transversal u_3 dos pontos da placa seja representado pelo deslocamento w do plano médio da placa (FUNG, 1965), ou seja:

$$u_3 = w(x_1, x_2)$$

Tomando-se um elemento de placa (Fig. 2.1), com seção transversal paralela ao plano x_1x_3 , observa-se que, após a deformação por flexão, a superfície média sofre uma rotação dada por $w_{,1}$, em um dado ponto P.

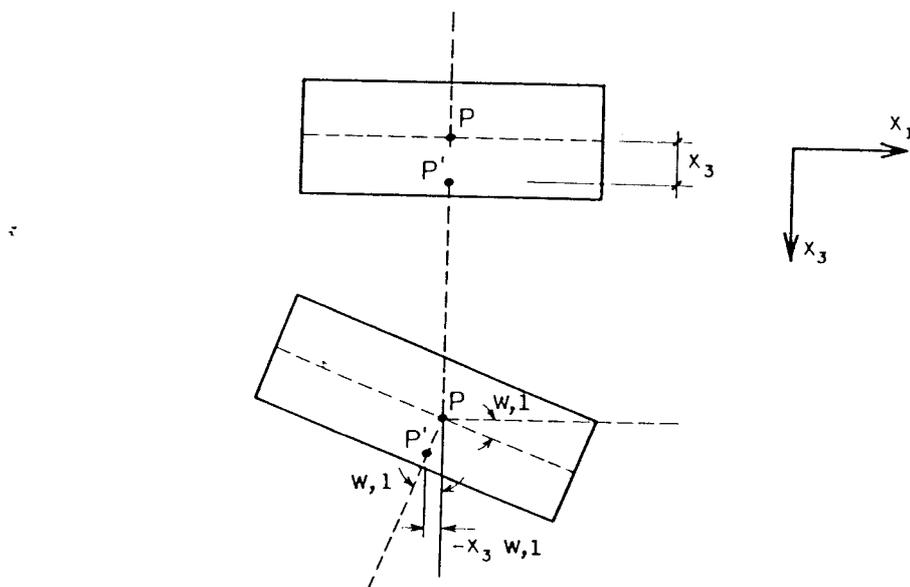


FIGURA 2.1. Posição inicial e final da seção transversal paralela ao plano $x_1 x_3$ de um elemento de placa

Como não há deformações no plano médio da placa e os pontos permanecem na mesma normal ao plano médio após a flexão, verifica-se que o ponto P sofre um deslocamento na direção x_1 , dado por:

$$u_1 = -x_3 w_{,1};$$

analogamente, para a direção x_2 , tem-se:

$$u_2 = -x_3 w_{,2}$$

Portanto, na forma geral, pode-se escrever:

$$u_i = -x_3 w_{,i}, \quad (2.1)$$

para $i = 1, 2$.

2.2.2 Deformações

Considerem-se, agora, na Fig. 2.2, as posições

inicial e final de um elemento de placa abcd, paralelo ao plano médio e a uma distância x_3 deste.

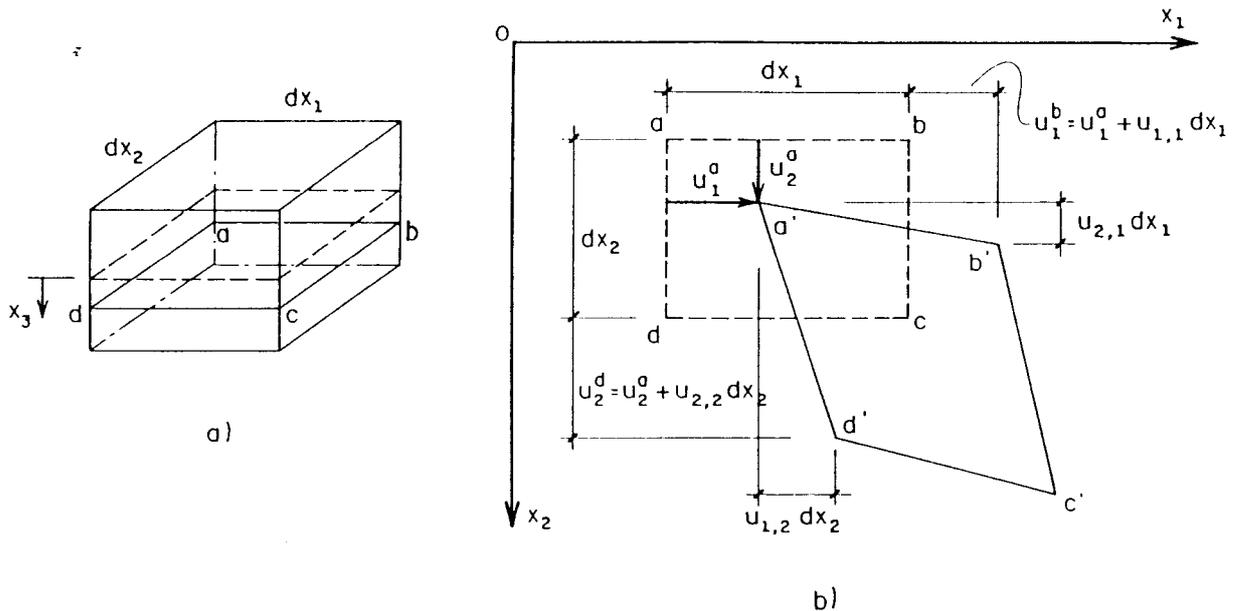


FIGURA 2.2. Posições inicial (a) e final (b) do elemento abcd

Chamando-se de u_i^P o deslocamento na direção i de um ponto P qualquer, pode-se escrever:

$$u_1^b = u_1^a + u_{1,1} dx_1$$

$$u_2^b = u_2^a + u_{2,1} dx_1$$

$$u_1^d = u_1^a + u_{1,2} dx_2$$

$$u_2^d = u_2^a + u_{2,2} dx_2$$

Assim, para pequenos deslocamentos, as deformações nas direções x_1 e x_2 são dadas por:

$$\epsilon_{11} = \frac{u_1^b - u_1^a}{dx_1} = u_{1,1}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{u_2^d - u_2^a}{dx_2} = u_{2,2}$$

e a semi-variação do ângulo reto, formado pelos lados ab e cd do elemento é dada por:

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{u_{1,2} + u_{2,1}}{2}$$

Estas deformações podem ser escritas, na seguinte forma geral:

$$\epsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.2)$$

Substituindo-se (2.1) em (2.2), chega-se à relação entre as deformações e os deslocamentos transversais do plano médio:

$$\epsilon_{ij} = -x_3 w_{,ij} \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.3)$$

2.2.3 Tensões

Conhecidas as deformações em um ponto da placa, as tensões correspondentes podem ser determinadas a partir da Lei de Hooke, considerando, ainda, que as tensões relativas à direção normal ao plano da placa são desprezíveis. Assim, tem-se:

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (i, j, k=1, 2) \quad (2.4)$$

onde:

- E é o módulo da elasticidade longitudinal do material da placa;

- G é o módulo de elasticidade transversal do material;
- ν é o coeficiente de Poisson do material.

A equação seguinte relaciona E, G e ν :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Substituindo-se (2.3) em (2.4), obtém-se:

$$\sigma_{ij} = -\frac{Ex_3}{(1-\nu^2)} \left[\nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu)w_{,ij} \right] \quad (i, j, k, = 1, 2) \quad (2.5)$$

2.2.4 Esforços e Relações Diferenciais de Placas

Podem-se obter os esforços através das resultantes das componentes de tensão que atuam em um elemento da placa. Considere-se, assim, o elemento de placa da Fig. 2.3 - (a), onde estão indicadas as componentes de tensão σ_{ij} .

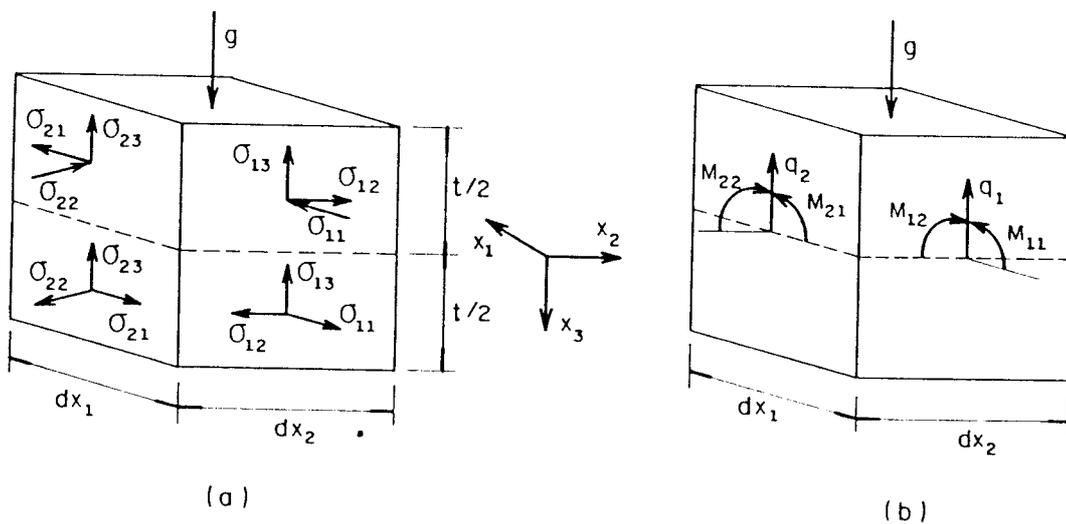


FIGURA 2.3. Tensões e esforços em um elemento de placa

Integrando-se as tensões ao longo da espessura do elemento, obtêm-se os esforços indicados na Fig. 2.3. - (b), por unidade de comprimento:

$$M_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3 \quad (i, j=1, 2) \quad (2.6)$$

$$q_i = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{i3} dx_3 \quad (i, j=1, 2) \quad (2.7)$$

que representam, respectivamente, os momentos e as forças cortantes no elemento.

As equações dos momentos podem ser obtidas em função dos deslocamentos transversais, levando-se (2.5) em (2.6), que, após integração, resultam em:

$$M_{ij} = -D \left[\nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij} \right] \quad (i, j, k=1, 2), \quad (2.8)$$

sendo D a rigidez à flexão da placa, dada por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Os esforços cortantes q_i podem ser expressos em função dos deslocamentos transversais, a partir das equações de equilíbrio do elemento de placa.

Ao se considerar um elemento de placa da Fig. 2.4, indicando-se os esforços e o carregamento g distribuído, podem-se obter as equações de equilíbrio de forças verticais e de momentos em torno dos eixos x_1 e x_2 , dadas por:

$$q_{i,i} + g = 0 \quad (2.9)$$

$$M_{ij,i} - q_j = 0 \quad (i, j=1, 2) \quad (2.10)$$

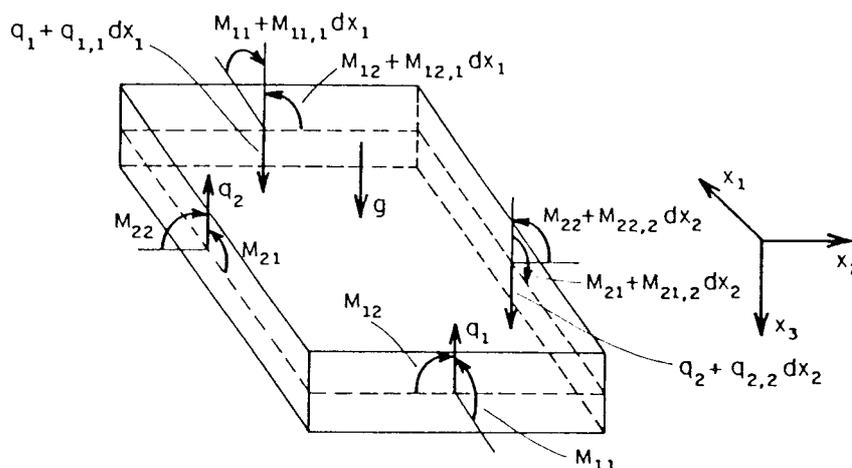


FIGURA 2.4. Elemento de placa

A partir das equações (2.10) e (2.8), obtém-se, então:

$$q_j = - D w_{,kkj} \quad (j,k=1,2) \quad (2.11)$$

A equação diferencial de placas em função dos momentos, é obtida através da eliminação de q_j nas equações (2.9) e (2.10), resultando:

$$M_{ij,ij} + g = 0 \quad (i,j=1,2) \quad (2.12)$$

Substituindo-se (2.8) em (2.12), chega-se à equação diferencial de placas, envolvendo apenas os deslocamentos transversais:

$$w_{,kk\ell\ell} = \frac{g}{D} \quad , \quad (k,\ell=1,2)$$

a qual, reescrita usando-se o operador de Laplace, fica:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{g}{D} \quad , \quad (2.13)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Alternativamente, esta equação pode ser obtida a partir das equações (2.9) e (2.11).

Nos problemas de placas, há necessidade de se conhecer os esforços não somente referidos às direções x_1 e x_2 , mas também em relação a um sistema genérico de coordenadas n e s .

Para isso, analisa-se um elemento de placa abc (Fig. 2.5 - (a)), no plano médio da placa. O sistema genérico ns é adotado na face inclinada ac do elemento.

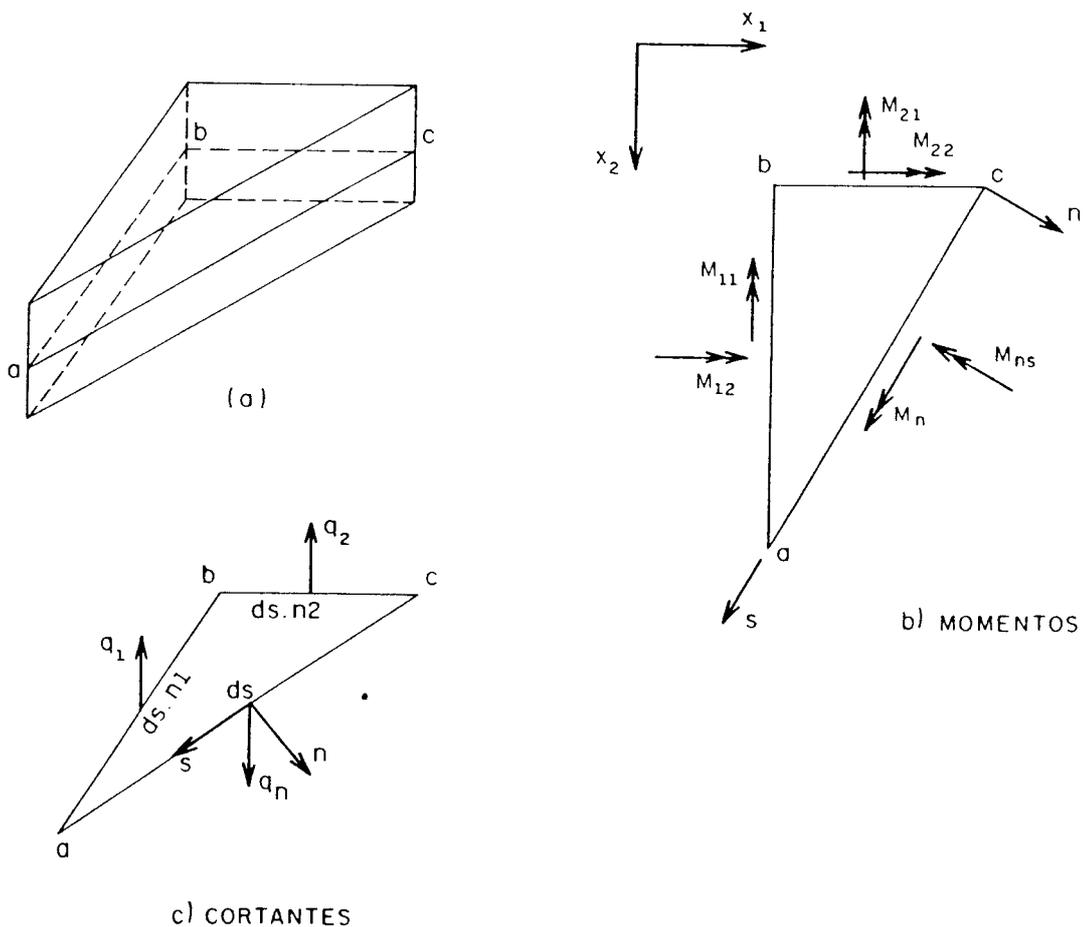


FIGURA 2.5. Esforços no elemento abc

Analogamente ao equilíbrio das resultantes de tensões nas faces do elemento, podem-se obter, por equilíbrio dos momentos atuantes no elemento abc (Fig. 2.5 - (b)), as seguintes relações entre os momentos:

$$M_n = M_{ij} n_i n_j \quad (2.14.a)$$

$$M_{ns} = M_{ij} n_i s_j \quad (i, j=1,2) , \quad (2.14.b)$$

onde M_n e M_{ns} são os momentos atuantes na face ac do elemento e n_j e s_j são os cossenos diretores das direções n e s , respectivamente.

Da mesma forma que os momentos, a força cortante atuante na face ac pode ser relacionada com as cortantes relativas aos eixos x_1 e x_2 , através do equilíbrio das forças verticais (Fig. 2.5 - (c)), que resulta em:

$$q_n = q_i n_i \quad (i=1,2) \quad (2.15)$$

2.2.5 Força Cortante Equivalente

Na resolução da equação diferencial de placas (2.13) é necessário que sejam satisfeitas as condições de contorno do problema. Nos problemas usuais, estas referem-se ao deslocamento transversal w do plano médio, à sua derivada $\partial w / \partial n$, e aos esforços M_n , M_{ns} e q_n dos pontos do contorno da placa, segundo as direções normal e tangencial à borda (Fig. 2.5).

Como a equação diferencial é de quarta ordem, devem ser satisfeitas duas condições ao longo da borda, envolvendo apenas quatro variáveis do problema. KIRCHHOFF (1850) demonstrou que as condições de contorno relativas à força cortante q_n e ao momento M_{ns} devem ser agrupadas em uma única condição, relativa a um esforço V_n , denominado força cortante equivalente.

Para tanto, considere-se um ponto P pertencente ao contorno de uma placa, conforme a Fig. 2.6 - (a), sobre o qual se define um sistema (n,s) , nas direções normal e tangencial ao contorno, respectivamente.

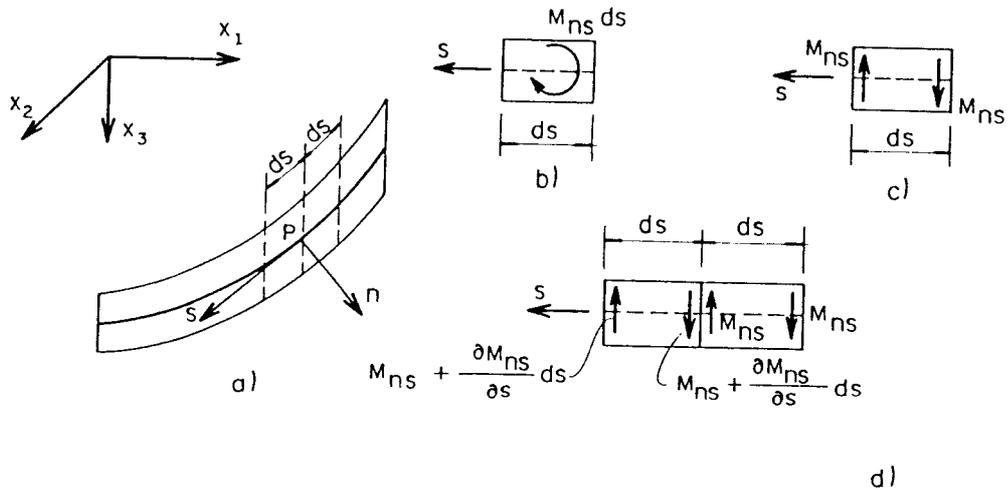


FIGURA 2.6. Momentos volventes no contorno da placa

Considerem-se, ainda, dois elementos infinitesimais de comprimento ds (Fig. 2.6 - (a)), onde, em cada elemento, atua um momento volvente resultante, dado por $M_{ns} ds$ (Fig. 2.6. - (b)). Este momento pode ser considerado como um binário de forças de intensidade M_{ns} , aplicadas nas extremidades do elemento, conforme mostra a Fig. 2.6 - (c). Tomando-se dois elementos consecutivos (Fig. 2.6 - (d)), verifica-se que na junção dos elementos existe uma força resultante, dada por $(\partial M_{ns} / \partial s) ds$. A soma desta força com a força cortante no ponto P ($q_n ds$), resulta na força cortante equivalente $V_n ds$, cuja intensidade por unidade de comprimento é dada por:

$$V_n = q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \tag{2.16}$$

Para o caso particular de n coincidir com os eixos x_1 ou x_2 , pode-se escrever:

$$V_1 = q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \tag{2.17.a}$$

$$V_2 = q_2 + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} \tag{2.17.b}$$

2.3 Equações de Placas em Coordenadas Polares

Na solução de certos problemas, é conveniente que a equação diferencial, assim como as outras relações, estejam referidas a um sistema de coordenadas polares. É o caso da solução fundamental para problemas de placas.

Assim, para se obterem as relações vistas anteriormente em um sistema de coordenadas polares, considere-se a Fig. 2.7, onde estão indicados os dois sistemas.

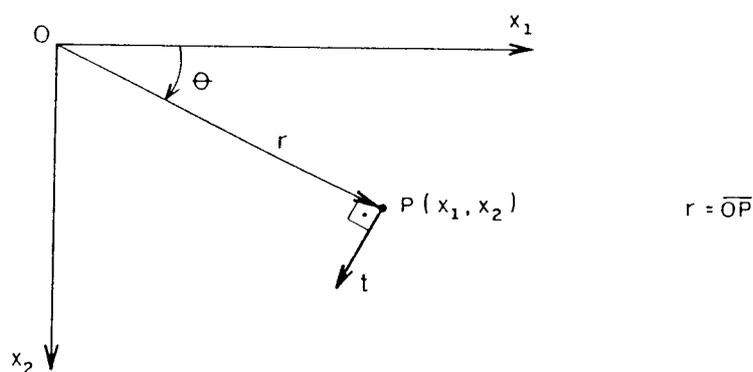


FIGURA 2.7. Sistemas de coordenadas cartesianas e polares no plano da placa

Um ponto P de coordenadas (x_1, x_2) pode ser definido em função de r e θ , que são, respectivamente, a distância deste ponto à origem do sistema de coordenadas e o ângulo entre o segmento OP e o semi-eixo positivo Ox_1 . Considere-se, ainda, t como sendo o versor correspondente à direção perpendicular a r .

As equações que relacionam as coordenadas do ponto P nos sistemas cartesiano e polar são:

$$x_1 = r_1 = r \cos \theta \quad (2.18.a)$$

$$x_2 = r_2 = r \sin \theta \quad (2.18.b)$$

Inversamente, pode-se escrever:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 \quad (2.19.a)$$

$$\theta = \arctg \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (2.19.b)$$

Através das relações (2.18) e (2.19), obtêm-se as relações das derivadas:

$$r_{,1} = \frac{r_1}{r} = \cos\theta \quad (2.20.a)$$

$$r_{,2} = \frac{r_2}{r} = \sin\theta \quad (2.20.b)$$

$$\theta_{,1} = -\frac{r_2}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r} \quad (2.21.a)$$

$$\theta_{,2} = \frac{r_1}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r} \quad (2.21.b)$$

Derivando-se as equações (2.20) em relação a θ e as equações (2.21) em relação a r , obtêm-se:

$$\frac{\partial r_{,1}}{\partial \theta} = -\sin\theta \quad (2.22.a)$$

$$\frac{\partial r_{,2}}{\partial \theta} = \cos\theta \quad (2.22.b)$$

$$\frac{\partial \theta_{,1}}{\partial r} = -\frac{\sin\theta}{r^2} \quad (2.23.a)$$

$$\frac{\partial \theta_{,2}}{\partial r} = \frac{\cos\theta}{r^2} \quad (2.23.b)$$

Os cossenos diretores correspondentes ao versor t , indicado na Fig. 2.7, são dados por:

$$t_1 = -r_{,2} = -\text{sen}\theta \quad (2.24.a)$$

$$t_2 = r_{,1} = \text{cos}\theta \quad (2.24.b)$$

Substituindo-se (2.24) nas equações (2.21), (2.22) e (2.23), estas podem ser escritas na forma:

$$\theta_{,i} = \frac{t_i}{r} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial r_{,i}}{\partial \theta} = t_i \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \theta_{,i}}{\partial r} = -\frac{t_i}{r^2} \quad (i=1,2) \quad (2.27)$$

Podem-se escrever os deslocamentos w em função de r e θ e obter suas derivadas em relação à coordenada genérica x_j :

$$w_{,j} = \frac{\partial w}{\partial x_j} = \frac{\partial w}{\partial r} r_{,j} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \theta_{,j} \quad (2.28)$$

A partir desta equação, pode-se definir o operador diferencial de primeira ordem:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial r} r_{,i} + \frac{\partial}{\partial \theta} \theta_{,i} \quad (2.29)$$

o qual, aplicado em (2.28), resulta em :

$$w_{,ij} = \left[\frac{\partial}{\partial r} r_{,i} + \frac{\partial}{\partial \theta} \theta_{,i} \right] \left[\frac{\partial w}{\partial r} r_{,j} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \theta_{,j} \right] \quad (2.30)$$

Desenvolvendo-se as derivadas, obtém-se:

$$\begin{aligned} w_{,ij} = & \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (r_{,i} r_{,j}) + \frac{\partial w}{\partial r} \left(\frac{\partial r_{,j}}{\partial \theta} \theta_{,i} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \left(\theta_{,j} r_{,i} + \theta_{,i} r_{,j} \right) + \\ & + \frac{\partial w}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta_{,j}}{\partial r} r_{,i} + \frac{\partial \theta_{,j}}{\partial \theta} \theta_{,i} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} (\theta_{,i} \theta_{,j}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para os casos em que o problema apresenta simetria em relação à origem do sistema de coordenadas polares, como ocorre no problema fundamental de placas, o deslocamento w é função apenas de r , já que não varia com θ . Neste caso, a equação (2.31) pode ser escrita na forma:

$$w_{,ij} = \frac{d^2 w}{dr^2} (r_{,i} r_{,j}) + \frac{dw}{dr} \left(\frac{\partial r_{,j}}{\partial \theta} \theta_{,i} \right) \quad (2.32)$$

Tendo em vista (2.25) e (2.26), é possível, então, definir o operador diferencial de segunda ordem, a partir de (2.32), como sendo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = (r_{,i} r_{,j}) \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} (t_i t_j) \frac{d}{dr} \quad (2.33)$$

O operador de Laplace em coordenadas polares, para os casos em que $w = f(r)$, é obtido utilizando-se os índices repetidos em (2.33) e considerando-se que $r_{,k} r_{,k} = t_k t_k = 1$. Tem-se, então:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} ,$$

ou seja,

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \quad (2.34)$$

Neste caso, a equação diferencial de placas escrita em coordenadas polares fica:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{g}{D} , \quad (2.35)$$

ou, ainda,

$$\frac{d^2 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{g}{D} \quad (2.36)$$

As expressões dos esforços também podem ser obtidas em coordenadas polares; utilizando-se os operadores (2.33) e (2.34) nas equações (2.8), obtêm-se os momentos:

$$M_{ij} = -D \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} \left[\delta_{ij} \nu + (1-\nu) (r_{,i} r_{,j}) \right] + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \left[\delta_{ij} \nu + (1-\nu) (t_i t_j) \right] \right\} \quad (2.37)$$

Através dos operadores (2.29) e (2.34), obtém-se a derivada de terceira ordem, dada por:

$$w_{,kki} = r_{,i} \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.38)$$

a qual, substituída em (2.11), resulta na expressão das forças cortantes:

$$q_i = -Dr_{,i} \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (i=1,2) \quad (2.39)$$

Conhecidas as expressões dos momentos e das forças cortantes em coordenadas polares, podem ser deduzidas as expressões de M_n , M_{ns} e V_n , nestas mesmas coordenadas, para um ponto genérico P do contorno, onde n e s são, respectivamente, os vetores normal e tangente ao contorno, com origem em P (Fig. 2.8).

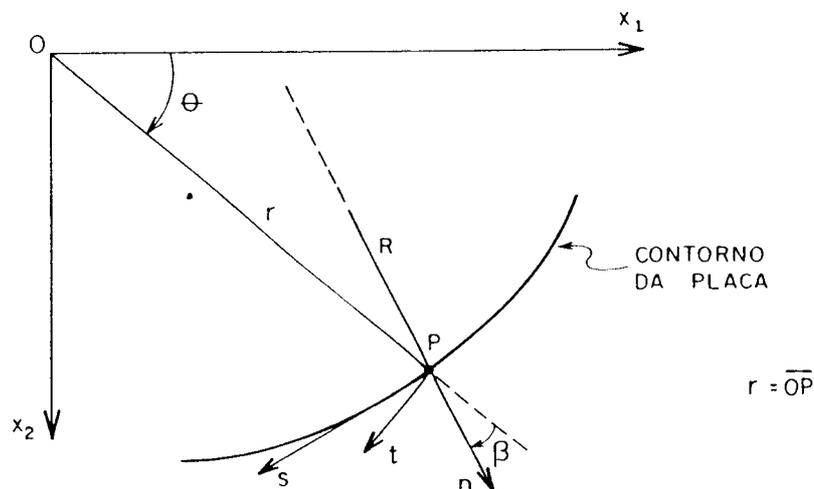


FIGURA 2.8. Vetores n e s no ponto P do contorno da placa

Substituindo-se (2.37) em (2.14) e (2.39) em (2.15), obtêm-se as equações:

$$M_n = -D \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} \left[\nu + (1-\nu) (r_{,i} n_i)^2 \right] + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \left[\nu + (1-\nu) (r_{,i} s_i)^2 \right] \right\} \quad (2.40)$$

$$M_{ns} = -D (1-\nu) (r_{,i} n_i) (r_{,j} s_j) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.41)$$

$$Q_n = -D (r_{,i} n_i) \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.42)$$

Para se obter a equação da força cortante equivalente V_n , definida em (2.16), em coordenadas polares, é necessário, inicialmente, obter-se a derivada de M_{ns} em relação à direção s . A Fig. 2.8 mostra que os produtos escalares envolvidos em (2.41) podem ser expressos em função do ângulo β , através das equações:

$$r_{,i} n_i = \cos \beta \quad (2.43.a)$$

$$r_{,j} s_j = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) = -\sin \beta \quad , \quad (2.43.b)$$

os quais, substituídos em M_{ns} , produzem a expressão:

$$M_{ns} = D(1-\nu) \cos \beta \sin \beta \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.44)$$

Desta forma, a derivada de M_{ns} em relação a s é dada por:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} \quad , \quad (2.45)$$

uma vez que M_{ns} depende de r e β . Analisando-se a Fig. 2.8, podem-se escrever, ainda:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = r_{,i} s_i = -\text{sen}\beta \quad (2.46)$$

e

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{1}{R} - \frac{\cos\beta}{r} \quad (2.47)$$

onde R é o raio de curvatura do contorno no ponto P.

De (2.44), obtêm-se as derivadas de M_{ns} em relação a β e r , as quais, substituídas em (2.45), juntamente com (2.46) e (2.47), produzem a equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = & D(1-\nu) \cos\beta \left[\text{sen}^2\beta \left(-\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{4\text{sen}^2\beta - 1}{r} \left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] + \\ & + \frac{D(1-\nu)}{R} (1 - 2\text{sen}^2\beta) \left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Levando-se (2.42) e (2.48) em (2.16), obtém-se a expressão de V_n :

$$\begin{aligned} V_n = & -D(1-\nu) (n_i r_{,i}) \left\{ \left[(s_j r_{,j})^2 + \frac{1}{1-\nu} \right] \left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1 - 4(s_j r_{,j})^2}{r} \left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right\} + \\ & + \frac{D(1-\nu)}{R} \left[1 - 2(s_i r_{,i})^2 \right] \left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.4 Solução Fundamental de Placas

Para problemas que têm como base o uso de equações integrais, é necessário o estudo das soluções fundamentais. Define-se como problema fundamental o caso particular de uma placa de domínio infinito, denominado domínio fundamental, sujeita a uma carga transversal unitária em um ponto genérico q deste domínio.

Assim, a solução fundamental deste problema é o deslocamento transversal w em um ponto p qualquer, denominado ponto de deslocamento ou campo, devido à carga unitária aplicada em q , chamado ponto de carregamento ou ponto fonte (Fig. 2.9).

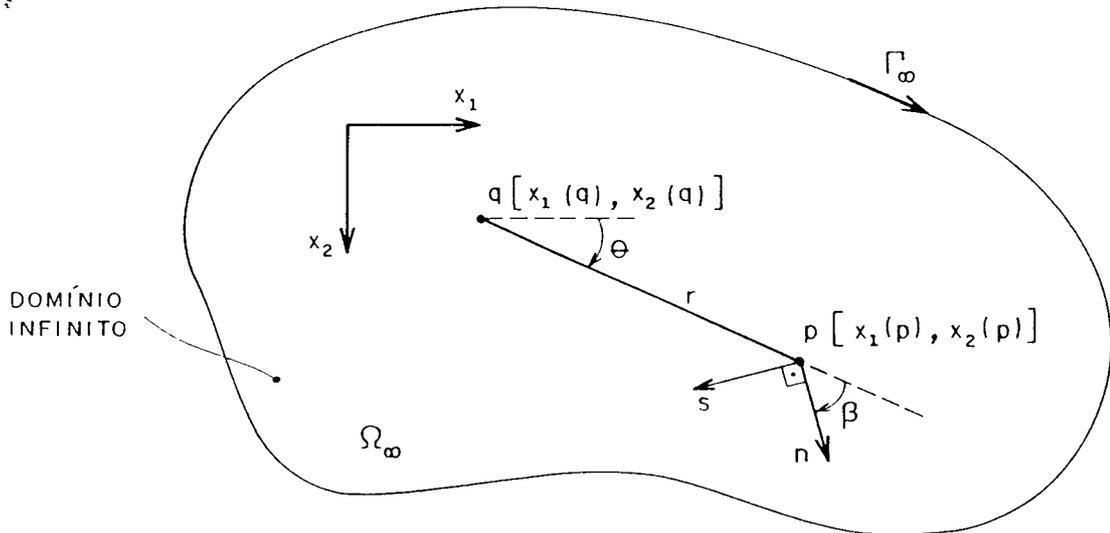


FIGURA 2.9. Pontos de carregamento q e de deslocamento p

Pode-se definir este carregamento unitário através da distribuição delta de Dirac, denotada por $\delta(q,p)$, cujas propriedades são:

$$\delta(q,p) = 0, \quad \text{para } p \neq q \quad , \quad (2.50.a)$$

$$\delta(q,p) = \infty, \quad \text{para } p \equiv q \quad (2.50.b)$$

Para uma função contínua qualquer ϕ tem-se que:

$$\int_{\Omega_\infty} \phi(p) \delta(q,p) d\Omega_\infty = \phi(q) \quad , \quad (2.51)$$

uma vez que:

$$\int_{\Omega_\infty} \delta(q,p) d\Omega_\infty = 1 \quad , \quad (2.52)$$

ou seja, a resultante do carregamento definido pela distribuição delta de Dirac sobre o domínio fundamental é uma força unitária aplicada no ponto q .

Portanto, a solução fundamental é obtida a partir da equação diferencial (2.13), substituindo-se g pela distribuição delta de Dirac, isto é:

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* = \frac{\delta(q,p)}{D} \quad , \quad (2.53)$$

onde w^* representa a solução fundamental. Esta equação, para todos os pontos do domínio fundamental, com exceção do ponto q , fica:

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* = 0 \quad (2.54)$$

Considerando-se um sistema de coordenadas polares com origem em q , levando-se em conta a simetria existente e também a equação (2.35), pode-se escrever:

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right) = 0 \quad , \quad (2.55)$$

ou seja,

$$\frac{d^2 w^*}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w^*}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw^*}{dr} = 0 \quad (2.56)$$

Após as integrações, verifica-se que a solução desta equação é dada por:

$$w^* = \frac{C_1}{4} r^2 \ln r + (C_2 - C_1) \frac{r^2}{8} + C_3 \ln r + C_4 \quad , \quad (2.57)$$

onde C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são constantes.

Levando-se em consideração a condição de simetria em relação ao ponto q (Fig. 2.9), pode-se escrever que $dw^*/dr = 0$, para $r = 0$, obtendo-se:

$$C_3 = 0 \quad (2.58)$$

A constante C_1 pode ser obtida a partir da condição de equilíbrio das forças verticais atuantes em um círculo de raio r , como mostra a Fig. 2.10, cujo centro é o ponto q de aplicação da carga unitária.

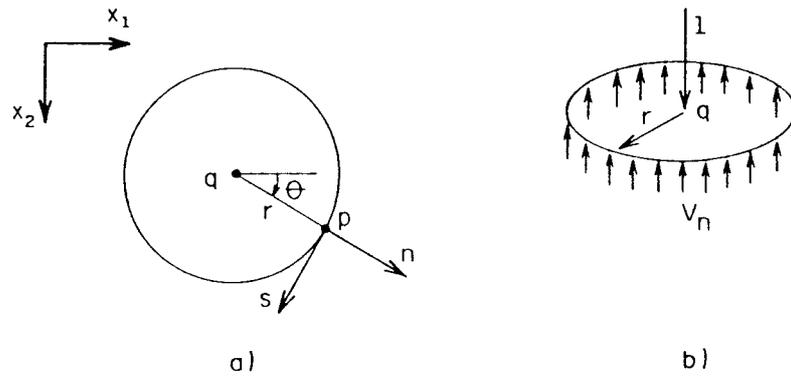


FIGURA 2.10. Forças atuantes no círculo de raio r e centro q

Assim, a força cortante equivalente V_n em um ponto p da circunferência, necessária para equilibrar a carga unitária, vale:

$$V_n = - \frac{1}{2\pi r} \quad (2.59)$$

A expressão de V_n , dada na equação (2.49), neste caso, é apenas função de r , já que o ângulo β é nulo para todos os pontos da circunferência; portanto, tem-se:

$$V_n = - D \left(\frac{d^3 w^*}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^*}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw^*}{dr} \right) \quad (2.60)$$

Substituindo-se (2.60) em (2.59) e expressando-se V_n em função do Laplaciano em coordenadas polares, tem-se:

$$- D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right) = - \frac{1}{2\pi r} \quad (2.61)$$

Das equações (2.57) e (2.61), obtém-se:

$$C_1 = \frac{1}{2\pi D} \quad ; \quad (2.62)$$

este valor, substituído em (2.57), juntamente com (2.58), leva a:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r + \frac{r^2}{8} \left(C_2 - \frac{1}{2\pi D} \right) + C_4 \quad (2.63)$$

As constantes C_2 e C_4 são obtidas a partir das condições de contorno para um problema qualquer da placa. No caso do problema fundamental, onde o raio é infinito, estes valores podem ser quaisquer. BEZINE (1978) e STERN (1979), por exemplo, adotam os valores:

$$C_2 = \frac{1}{2\pi D} \quad e \quad C_4 = 0$$

Neste trabalho, seguiremos a sugestão de DANSON (1979), que adota $C_2 = C_4 = 0$. Portanto, para estes valores, obtém-se a seguinte solução fundamental, em termos dos deslocamentos:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (2.64)$$

Além dos deslocamentos, há interesse de outros valores do problema fundamental. A partir de (2.64), podem-se obter a derivada dos deslocamentos e os esforços, dados em (2.40), (2.41) e (2.49), em um ponto genérico p , segundo um sistema de coordenadas (n,s) qualquer (Fig.2.9). Lembrando-se que, no caso, w^* é apenas função de r , obtém-se:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{dw^*}{dr} \frac{dr}{dn} \quad ,$$

ou seja,

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (r, n_i) \quad (2.65)$$

Obtêm-se, ainda, as equações:

$$M_n^* = - \frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + (1-\nu) (r, n_i)^2 + \nu \right] \quad (2.66)$$

$$M_{ns}^* = - \frac{1}{4\pi} (1-\nu) (r, i n_i) (r, j s_j) \quad (2.67)$$

$$V_n^* = \frac{r, i n_i}{4\pi r} \left[2(1-\nu) (r, j s_j)^2 - 3 + \nu \right] + \frac{1-\nu}{4\pi R} \left[1 - 2(r, i s_i)^2 \right], \quad (2.68)$$

onde r é a distância entre os pontos p e q , a qual é dada por:

$$r = \left\{ \left[x_1(p) - x_1(q) \right]^2 + \left[x_2(p) - x_2(q) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (2.69)$$

Há interesse, também, em se determinar as derivadas dos deslocamentos e dos esforços fundamentais em relação a uma direção m de um sistema qualquer de eixos cartesianos (m,u) , com origem no ponto q (Fig. 2.11).

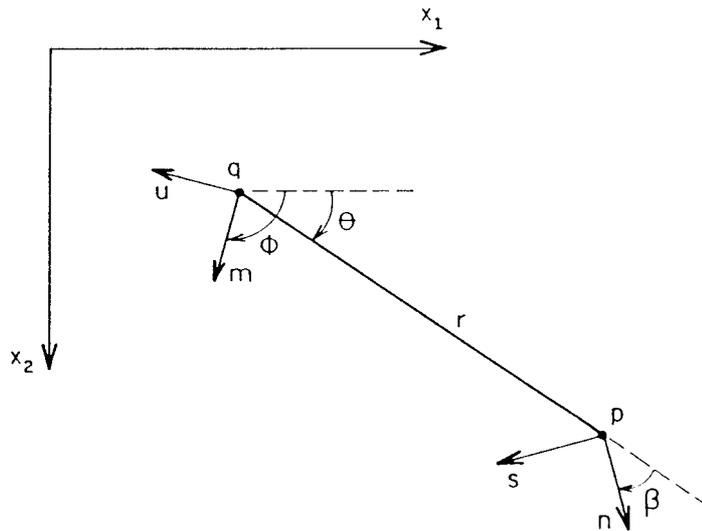


FIGURA 2.11. Sistemas de coordenadas (m,u) e (n,s)

A derivada de w^* , dada por (2.64), em relação à direção m , é:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{dw^*}{dr} \frac{\partial r}{\partial m}, \quad (2.70)$$

onde

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial x_i(q)} \frac{\partial x_i(q)}{\partial m} \quad , \quad (2.71)$$

sendo $m_i = \partial x_i(q)/\partial m$ os cossenos diretores de \vec{m} em relação ao sistema de coordenadas (x_1, x_2) . Portanto, tem-se:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial x_i(q)} m_i \quad (2.72)$$

As derivadas de r em relação à direção x_i , definida no ponto q , são obtidas a partir de (2.69) e valem:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(q)} = \frac{x_i(q) - x_i(p)}{r} = -r_{,i} \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial r_{,i}}{\partial x_j(q)} = - \frac{\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}}{r} = -r_{,ij} \quad (2.74)$$

Substituindo-se (2.73) em (2.72), obtêm-se:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = -r_{,i} m_i \quad , \quad (2.75)$$

que, levada em (2.70), resulta em :

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = - \frac{r}{4\pi D} \ln r (r_{,i} m_i) \quad (2.76)$$

Da mesma forma, tendo em vista (2.74), obtêm-se, das equações (2.65) a (2.68), as expressões:

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right) = - \frac{1}{4\pi D} \left[(r_{,i} m_i) (r_{,j} n_j) + (m_i n_i) \ln r \right] \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_n^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu) (r_{,i} m_i) + 2(1-\nu) (r_{,i} n_i) \left[(m_j n_j) + \right. \right. \\ \left. \left. - (r_{,j} m_j) (r_{,k} n_k) \right] \right\} \quad (2.78) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_{ns}^*}{\partial m} = \frac{1-\nu}{4\pi r} \left\{ (m_i n_i) (r, j s_j) + (m_i s_i) (r, j n_j) + \right. \\ \left. - 2 (r, i m_i) (r, j n_j) (r, k s_k) \right\} \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial V_n^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu) (r, i s_i) \left[4 (r, j s_j) (r, k m_k) (r, l n_l) + \right. \right. \\ \left. - 2 (m_j s_j) (r, k n_k) - (m_j n_j) (r, k s_k) \right] + (3-\nu) \left[(m_i n_i) + \right. \\ \left. - 2 (r, i m_i) (r, j n_j) \right] \left. \right\} + \\ + \frac{1-\nu}{\pi R r} (r, i s_i) \left[(m_j s_j) - (r, j m_j) (r, k s_k) \right] \quad (2.80)$$

3 EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO DE PLACAS

3.1 Introdução

Para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno, é necessária, inicialmente, a obtenção de equações integrais que definam o problema. Estas envolvem as soluções fundamentais vistas no Capítulo 2 e relacionam o deslocamento $w(q)$ e sua derivada direcional $\partial w(q)/\partial m$ de um ponto q do domínio da placa com os deslocamentos e esforços no contorno. Tais equações podem ser obtidas através do método dos resíduos ponderados, ou a partir do Teorema da Reciprocidade de Betti.

Neste Capítulo, estas equações serão obtidas a partir da aplicação do primeiro Teorema de Betti a uma placa submetida a dois carregamentos não simultâneos g e g^* , os quais dão origem a dois estados de tensão e deslocamentos distintos. Após a integração da expressão obtida pelo Teorema, chegar-se-á às equações integrais para pontos do domínio da placa e, posteriormente, para pontos do contorno.

3.2 Equação Integral para um Ponto do Domínio da Placa

Considere-se uma placa isótropa qualquer de contorno Γ e domínio Ω , submetida a um carregamento g distribuído em uma área de domínio Ω_g . Pode-se admitir que esta placa está contida em outra, de domínio infinito Ω_∞ e contorno Γ_∞ , conforme mostra a Fig. 3.1.

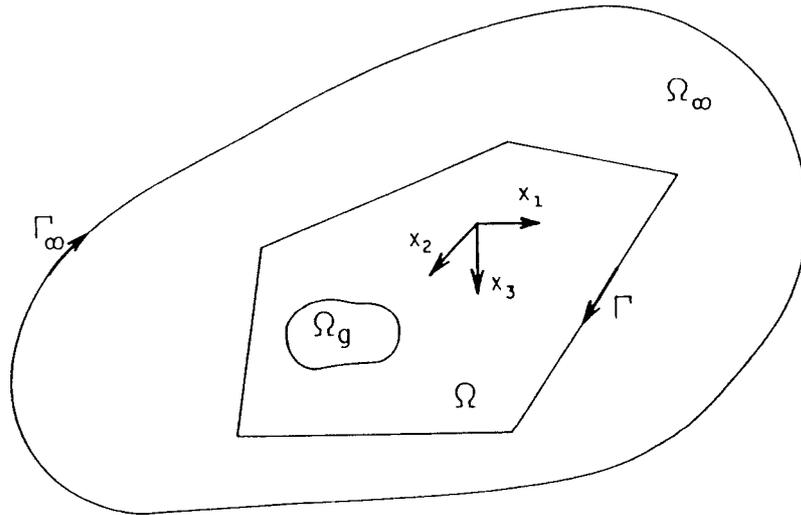


FIGURA 3.1. Placa de dimensões finitas, contida em uma placa infinita

Admita-se, então, que a placa de domínio finito é submetida a dois carregamentos não simultâneos g e g^* , onde o símbolo $*$ é utilizado para definir o carregamento e soluções fundamentais. Assim, associados a estes carregamentos, têm-se as superfícies elásticas w e w^* , os estados de tensão σ_{ij} e σ_{ij}^* e seus respectivos estados de deformação ϵ_{ij} e ϵ_{ij}^* , podendo-se escrever o Teorema de Betti (BETTI, 1872) da seguinte forma:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dV \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.1)$$

Denotando-se por U o segundo membro da equação (3.1) e desprezando-se as deformações por cisalhamento transversal e as tensões relativas à direção x_3 , normal ao plano da placa, tem-se:

$$U = \int_V (\sigma_{11} \epsilon_{11}^* + \sigma_{22} \epsilon_{22}^* + 2\sigma_{12} \epsilon_{12}^*) dV \quad (3.2)$$

Substituindo-se, em (3.2), os valores dados pelas equações (2.3) e (2.5), integrando-se ao longo da espessura e levando-se em conta as equações (2.6) e (2.8), obtém-se a

expressão de U em função de uma integral sobre o domínio Ω , dada por:

$$U = \int_{\Omega} (M_{ij} w'_{,ij}) d\Omega \quad (i,j=1,2) \quad (3.3)$$

Aplicando-se o teorema da divergência, ou integrando-se (3.3) por partes, em relação à coordenada x_j , obtém-se:

$$U = - \int_{\Gamma} M_{ij} w'_{,i} n_j d\Gamma + \int_{\Omega} M_{ij,j} w'_{,i} d\Omega \quad (3.4)$$

onde n_j são os cossenos diretores do vetor normal ao contorno da placa, indicado na Fig. 3.2.

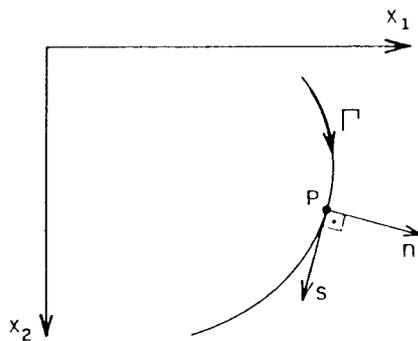


FIGURA 3.2. Sistema de coordenadas (n,s) , normal e tangencial ao contorno

Integrando-se novamente por partes a integral de domínio que obteve-se em (3.4), vem:

$$U = - \int_{\Gamma} M_{ij} w'_{,i} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} M_{ij,j} w'_{,i} n_i d\Gamma - \int_{\Omega} M_{ij,i} w'_{,j} d\Omega \quad (3.5)$$

Considerando-se a equação diferencial de placas em função dos momentos (2.12), a equação de equilíbrio (2.10) e a equação (2.15), obtém-se para U a seguinte expressão:

$$U = - \int_{\Gamma} M_{ij} w'_{,i} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.6)$$

As derivadas de w^* em relação à coordenada x_i são:

$$w'_{,i} = \frac{\partial w^*}{\partial x_i} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x_i} + \frac{\partial w^*}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_i} ,$$

ou seja,

$$w'_{,i} = \frac{\partial w^*}{\partial n} n_i + \frac{\partial w^*}{\partial s} s_i , \quad (3.7)$$

sendo s_i os cossenos diretores do vetor tangente ao contorno, conforme a Fig. 3.2.

Substituindo-se (3.7) na primeira parcela do segundo membro da equação (3.6), tem-se:

$$U = - \int_{\Gamma} \left(M_{ij} n_i n_j \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ij} s_i n_j \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.8)$$

Tendo em vista as equações (2.14), pode-se escrever:

$$U = - \int_{\Gamma} \left(M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - q_n w^* \right) d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.9)$$

Pode-se, agora, integrar por partes o segundo termo da integral sobre o contorno que figura no segundo membro da equação (3.9), obtendo-se:

$$\int_{\Gamma} \left(M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma = \left[M_{ns} w^* \right]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma , \quad (3.10)$$

onde Γ_1 e Γ_2 representam os limites do contorno no qual se realiza a integração.

Para contornos fechados, cuja representação paramétrica e a respectiva derivada sejam contínuas, a primeira parcela do segundo membro de (3.10) se anula. Quando existem

angulosidades ou cantos no contorno, esta parcela não se anula, dando origem às reações de cantos.

Pode-se reescrever esta parcela sobre todos os lados do contorno, em função da reação R_{ci} de cada canto genérico i , indicado na Fig. 3.3, a qual é dada por:

$$R_{ci} = M_{nsi}^+ - M_{nsi}^- \quad , \quad (3.11)$$

sendo M_{nsi}^+ e M_{nsi}^- , respectivamente, os momentos volventes posterior e anterior ao canto i (Fig. 3.3).

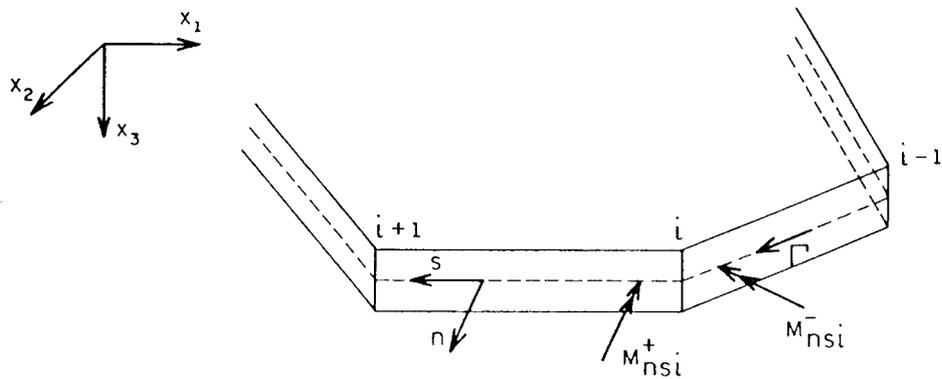


FIGURA 3.3. Momentos volventes em um canto i da placa

Assim, considerando (3.11), a equação (3.10) pode ser expressa por:

$$\int_{\Gamma} \left(M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad , \quad (3.12)$$

onde N_c é o número total de cantos no contorno e w_{ci}^* é o valor do deslocamento w^* no canto i . Substituindo-se esta equação em (3.9), tem-se:

$$U = \int_{\Gamma} \left(q_n w^* + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.13)$$

Considerando-se, ainda, a definição de V_n , dada em

(2.16), e também que a carga g está distribuída em Ω_g , chega-se a:

$$U = \int_{\Gamma} \left(V_n^* w^* - M_n^* \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (3.14)$$

De forma análoga, pode-se desenvolver o primeiro membro da equação (3.1), obtendo-se:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} dV = \int_{\Gamma} \left(V_n^* w^* - M_n^* \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci}^* + \int_{\Omega} g^* w d\Omega \quad (3.15)$$

Assim, a partir das equações (3.1), (3.14) e (3.15), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left(V_n^* w^* - M_n^* \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci}^* + \int_{\Omega} g^* w d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma} \left(V_n^* w^* - M_n^* \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como foi mencionado, admite-se que g^* seja uma carga unitária aplicada em um ponto q qualquer do domínio da placa e que sua representação matemática é a distribuição delta de Dirac, $\delta(q,p)$, conforme (2.50). Assim, os deslocamentos e esforços fundamentais, associados a este carregamento, são funções do ponto de aplicação da carga, chamado ponto de carregamento q , e do ponto de deslocamento p no domínio; se este último ponto estiver no contorno da placa, é representado por P .

Já os deslocamentos e esforços provenientes do carregamento real g são funções apenas do ponto p , onde os efeitos de g são medidos, pois a posição deste carregamento é fixa.

Substituindo-se, então, g^* por $\delta(q,p)$, em (3.16), e usando-se a representação de cada variável em função dos dois pontos, q e p , para os valores fundamentais, e de um ponto apenas, em caso contrário, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \delta(q, p) w(p) d\Omega(p) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] d\Gamma(P) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Levando-se em conta a propriedade da função delta de Dirac, dada em (2.51), tem-se que:

$$\int_{\Omega} \delta(q, p) w(p) d\Omega(p) = w(q) \quad , \quad (3.18)$$

sendo $w(q)$ o deslocamento no ponto de carregamento, devido à carga g . Substituindo-se (3.18) em (3.17), obtém-se a equação:

$$\begin{aligned}
w(q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
+ \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] d\Gamma(P) + \\
+ \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Esta equação é a representação integral do deslocamento w de um ponto q , envolvendo as soluções fundamentais obtidas no Capítulo 2, sendo função das variáveis do contorno; no caso, estas variáveis são os deslocamentos $w(P)$, $\partial w(P)/\partial n$ e $w_{ci}(P)$ e os esforços $V_n(P)$, $M_n(P)$ e $R_{ci}(P)$.

A partir de (3.19), pode-se obter, também, a equação integral da derivada direcional do deslocamento em relação à direção m , para um ponto q da placa, conforme indicado na Fig. 2.11. Derivando-se, então, w em relação a m , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(q)}{\partial m} + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(q, P) w_{ci}(P) = \\ = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.3 Equação Integral para um Ponto do Contorno da Placa

Para a formulação de problemas de flexão de placas através do Método dos Elementos de Contorno, além das equações (3.19) e (3.20) para pontos do domínio, há necessidade da obtenção de equações integrais para pontos do contorno, os quais serão denotados por Q.

Para isto, considere-se a Fig. 3.4, onde tem-se um ponto Q, inicialmente no contorno; este ponto torna-se interior ao domínio pelo acréscimo de um contorno circular Γ_ξ , centrado em Q, com raio ξ , e pela retirada da parcela $\bar{\Gamma}$, indicada na Fig. 3.4.b.

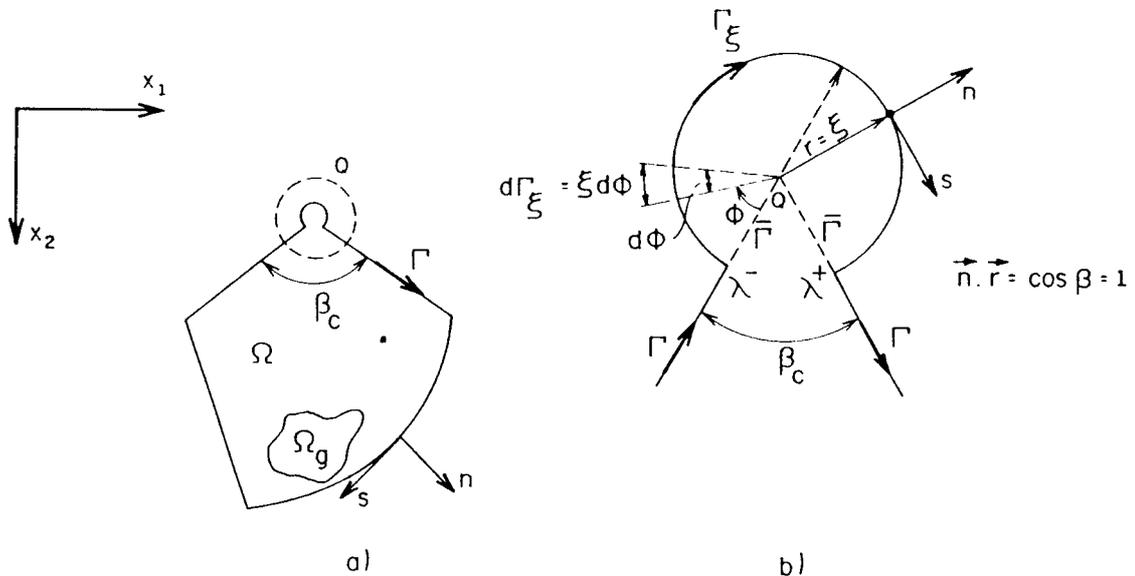


FIGURA 3.4. Contorno circular acrescido a um ponto Q de um canto da placa

Após esta modificação no domínio da placa, a equação integral para o ponto Q pode ser escrita, a partir de (3.19), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
w(Q) &+ \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n^*(Q,P) w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
&+ \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q,P) w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c_i}^*(Q,P) w_{c_i}(P) + \\
&+ R_{c_{\lambda^-}}^*(Q,P) w_{c_{\lambda^-}}(P) + R_{c_{\lambda^+}}^*(Q,P) w_{c_{\lambda^+}}(P) = \\
&= \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n(P) w^*(Q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \\
&+ \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(P) w^*(Q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
&+ \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(Q,P) + R_{c_{\lambda^-}}(P) w_{c_{\lambda^-}}^*(Q,P) + \\
&+ R_{c_{\lambda^+}}(P) w_{c_{\lambda^+}}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(p) \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Assim, o ponto Q será do contorno quando o raio ξ tender a zero e $w(Q)$ será calculado na condição limite; portanto, vem:

$$\begin{aligned}
& w(Q) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
& N_c - 1 \\
& + \sum_{i=1} R_{c_i}^*(Q, P) w_{c_i}(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c_{\lambda^-}}^*(Q, P) w_{c_{\lambda^-}}(P) + R_{c_{\lambda^+}}^*(Q, P) w_{c_{\lambda^+}}(P)] = \\
& = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{N_c - 1} R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(Q, P) + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[R_{c_{\lambda^-}}(P) w_{c_{\lambda^-}}^*(Q, P) + R_{c_{\lambda^+}}(P) w_{c_{\lambda^+}}^*(Q, P) \right] + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Os limites das integrais sobre o contorno $(\Gamma - \bar{\Gamma})$ nas equações anteriores, resultam no valor principal das mesmas; assim, têm-se:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) = \\
& = \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

e

$$\begin{aligned}
& \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n^*(P) w^*(Q, P) - M_n^*(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) = \\
& = \int_{\Gamma} \left[V_n^*(P) w^*(Q, P) - M_n^*(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) \quad (3.24)
\end{aligned}$$

A parcela de (3.22) referente à integral sobre o trecho Γ_ξ , envolvendo $w(P)$ e $\partial w(P)/\partial n$, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) = \\
& = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ V_n^*(Q, P) [w(P) - w(Q)] - M_n^*(Q, P) \left[\frac{\partial w}{\partial n}(P) - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right] \right\} d\Gamma_\xi(P) + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n^*(Q, P) w(Q) d\Gamma_\xi(P) - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) d\Gamma_\xi(P) \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Considerando-se válida a continuidade, ou, utilizando-se a condição de Hölder (JASWON & SYMM, 1977), dada por:

$$|w(P) - w(Q)| \leq C_1 r^{\alpha_1(P, Q)} \quad (3.26.a)$$

e

$$\left| \frac{\partial w}{\partial n}(P) - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right| \leq C_2 r^{\alpha_2(P, Q)}, \quad (3.26.b)$$

onde C_1 e C_2 são constantes e $0 < \alpha_i \leq 1$, com $i = 1, 2$, a primeira integral de (3.25) se anula. Como $w(Q)$ e $\partial w(Q)/\partial n$ são valores do domínio e não variam, portanto, ao longo de Γ_ξ , a equação (3.25) fica:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) = \\
& = w(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n^*(Q, P) d\Gamma_\xi(P) - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} M_n^*(Q, P) d\Gamma_\xi(P)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Substituindo-se em (3.27) os valores de $V_n^*(Q, P)$ e $M_n^*(Q, P)$, dados em (2.68) e (2.66), respectivamente, e considerando-se, ainda, que, no caso, $r_{,i} n_{,i} = 1$, $r_{,i} s_{,i} = 0$ e $r = R = \xi$ (Fig. 3.4), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) = \\
& = w(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} -\frac{1}{2\pi\xi} d\Gamma_\xi(P) + \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln\xi + 1 \right] d\Gamma_\xi(P)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Sendo $d\Gamma_\xi(P) = \xi d\phi$, a expressão (3.28) pode ser indicada na forma:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) = \\
& = w(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi \cdot \beta_c} -\frac{1}{2\pi\xi} \xi d\phi + \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi \cdot \beta_c} \frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln\xi + 1 \right] \xi d\phi,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

onde β_c é o ângulo interno do canto da placa, indicado na Fig. 3.4. Desenvolvendo-se, em (3.29), as integrais, obtém-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) = -\frac{2\pi - \beta_c}{2\pi} w(Q) \tag{3.30}$$

Analogamente, as demais integrais sobre Γ_ξ indicadas em (3.22) conduzem a valores nulos, assim como ocorre com os limites das parcelas que envolvem as reações de canto R_c . Assim, tendo em vista as equações (3.23), (3.24) e (3.30), a expressão (3.22), a qual representa a equação integral para um ponto do contorno, fica:

$$\begin{aligned}
 & K(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q,P)w_{c_i}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)w_{c_i}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p)d\Omega_g(p), \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

onde

$$K(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \quad (3.32)$$

Para o caso particular em que o ponto Q do contorno não pertence a um canto, isto é, $\beta_c = \pi$, tem-se:

$$K(Q) = \frac{1}{2} \quad (3.33)$$

De forma análoga ao efetuado no item 3.2, pode-se obter a equação integral correspondente à derivada do deslocamento $\partial w(Q)/\partial m$, para um ponto do contorno, em relação a uma coordenada genérica m (PAIVA, 1987).

3.4 Integrais de Domínio para o Carregamento

Para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno é conveniente transformar as integrais de domínio que aparecem nas equações integrais (3.19), (3.20) e (3.31), correspondentes às influências do carregamento distribuído na área Ω_g , em integrais no contorno Γ_g .

Para isto, considere-se a Fig. 3.5, na qual estão

representados a região Ω_g , seu contorno Γ_g e o ponto de carregamento q . A partir desta figura, obtêm-se as seguintes relações:

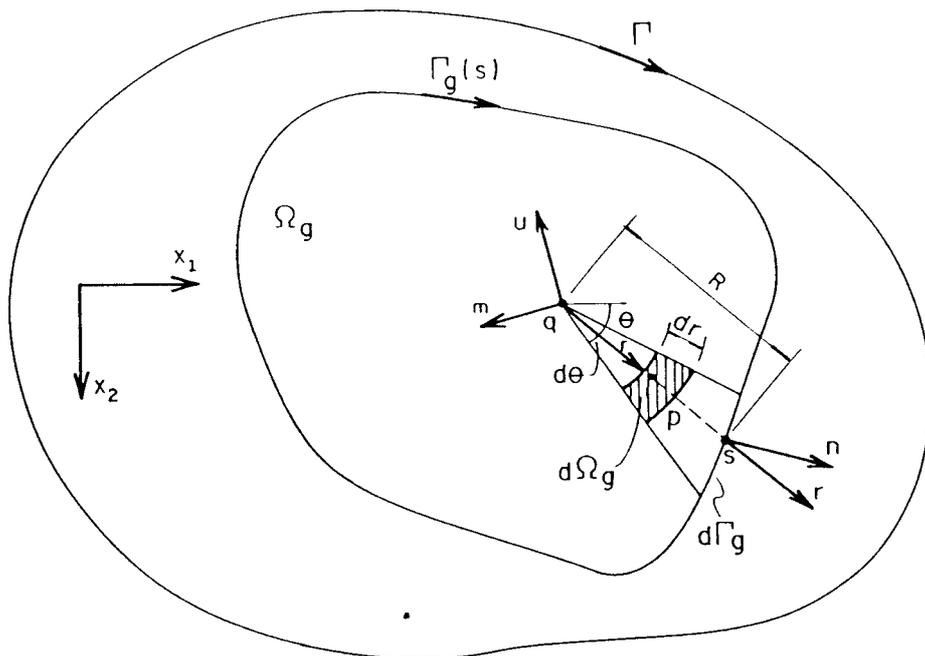
$$d\Omega_g = r \, dr \, d\theta \tag{3.34}$$

$$d\theta = \frac{r_{,i} \, n_i}{R} \, d\Gamma_g \tag{3.35}$$

onde $r_{,i}$ e n_i representam os cossenos diretores do vetor r e da normal ao contorno, n .

Substituindo-se (3.35) em (3.34), obtém-se:

$$d\Omega_g = r \, dr \, \frac{r_{,i} \, n_i}{R} \, d\Gamma_g \tag{3.36}$$



$$d\Omega_g = r \, dr \, d\theta$$

$$d\theta = \frac{r_{,i} \, n_i \, d\Gamma_g}{R}$$

FIGURA 3.5. Região carregada Ω_g

Em consequência da mudança de variável indicada em (3.36), as integrais de domínio de (3.19) e de (3.20) são expressas por:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) = \int_{\Gamma_g} F_1 \frac{r, i n_i}{R} d\Gamma_g \quad (3.37)$$

e

$$\int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega_g(p) = \int_{\Gamma_g} F_2 \frac{r, i n_i}{R} d\Gamma_g \quad , \quad (3.38)$$

com

$$F_1 = \int_0^R g(p) w^*(q, p) r dr \quad (3.39)$$

e

$$F_2 = \int_0^R g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) r dr \quad , \quad (3.40)$$

onde R é o valor de r para um ponto qualquer do contorno Γ_g .

Admitindo-se que a carga g varia linearmente na região Ω_g , a expressão de $g(p)$, em relação ao sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2) é dada por:

$$g(p) = Ax_1(p) + Bx_2(p) + C \quad (3.41)$$

A partir das relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas e polares, com origem em q (Fig. 3.5), as quais são dadas por:

$$x_1(p) = x_1(q) + r \cos \theta \quad (3.42.a)$$

$$x_2(p) = x_2(q) + r \sin \theta \quad , \quad (3.42.b)$$

pode-se escrever o carregamento $g(p)$ na forma:

$$g(p) = A \cos \theta + B \sin \theta + g(q) \quad , \quad (3.43)$$

onde $g(q)$ é o valor da intensidade da carga no ponto q , ou seja:

$$g(q) = Ax_1(q) + Bx_2(q) + C \quad (3.44)$$

Substituindo-se (3.43) e $w^*(q,p)$, dado pela equação (2.64), em (3.39), obtém-se:

$$F_1 = \int_0^R \left[\text{Arcos}\theta + B\text{rsen}\theta + g(q) \right] \frac{r^2}{8\pi D} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) r dr \quad (3.45)$$

e, como $g(q)$ é constante, tem-se que:

$$F_1 = \frac{1}{8\pi D} \int_0^R (\text{Acos}\theta + B\text{sen}\theta) r^4 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) dr + \frac{g(q)}{8\pi D} \int_0^R r^3 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) dr \quad (3.46)$$

Fazendo-se a integração em relação a r , obtém-se:

$$F_1 = \frac{1}{40\pi D} \left[R^5 \left(\ln R - \frac{7}{10} \right) (\text{Acos}\theta + B\text{sen}\theta) \right] + \frac{g(q)}{32\pi D} R^4 \left(\ln R - \frac{3}{4} \right) \quad (3.47)$$

Substituindo-se (3.47) em (3.37), chega-se à integral de domínio transformada em uma integral sobre o contorno Γ_g :

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega_g(p) = \frac{g(q)}{32\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 \left(\ln R - \frac{3}{4} \right) r_{,i} n_i d\Gamma_g + \frac{1}{40\pi D} \int_{\Gamma_g} R^4 \left(\ln R - \frac{7}{10} \right) (\text{Acos}\theta + B\text{sen}\theta) r_{,i} n_i d\Gamma_g \quad (3.48)$$

Procedendo-se de forma semelhante, pode-se obter F_2 , dada pela equação (3.40), substituindo-se os valores de $g(p)$ e $\partial w^* / \partial m$, dado por (3.43) e (2.76), respectivamente. Assim, a equação de domínio (3.38) também reduz-se a uma equação de contorno, dada por:

$$\int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega_g(p) = -\frac{g(q)}{12\pi D} \int_{\Gamma_g} R^2 \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) r_{,i} m_i r_{,i} n_i d\Gamma_g +$$

$$- \frac{1}{16\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 \left(\ln R - \frac{1}{4} \right) (A \cos \theta + B \sin \theta) r_{,i} m_i r_{,i} n_i d\Gamma_g \quad (3.49)$$

Nestas equações, admite-se que a carga $g(p)$ tem variação linear. As cargas pontuais ou distribuídas ao longo de uma linha podem ser consideradas como casos particulares, em que o domínio Ω_g tende a um ponto ou a uma linha, respectivamente.

Uma outra alternativa para a transformação das integrais de domínio em integrais no contorno é a utilização do Método da Reciprocidade Múltipla, sugerido por NOWAK & BREBBIA (1989). Para os casos de uma carga $g(p)$ qualquer, as integrais (3.48) e (3.49) podem ser resolvidas dividindo-se a região Ω_g em subregiões menores, ou células, e fazendo-se o somatório das integrais sobre todas as células do domínio (SILVA, 1986).

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROBLEMAS DE PLACAS

4.1 Introdução

A solução analítica das equações integrais de placas obtidas no Capítulo 3 está restrita a poucos problemas. Na maioria dos casos práticos de interesse, é necessária a aplicação de métodos numéricos para a obtenção de soluções aproximadas.

Neste Capítulo, descreve-se um procedimento numérico utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno, o qual, basicamente, consiste na divisão do contorno da placa em segmentos, denominados elementos de contorno, sobre os quais as variáveis w , $\partial w/\partial n$, V_n e M_n são aproximadas por funções previamente escolhidas. Estas funções interpoladoras são, geralmente, polinomiais e são definidas em função de pontos previamente escolhidos em cada elemento, ditos nós ou pontos nodais.

Desta forma, as equações integrais transformam-se em equações algébricas, envolvendo os valores nodais das variáveis do contorno, que são os valores das variáveis associadas aos nós.

As equações algébricas resultantes desta transformação, quando aplicadas aos pontos particulares do contorno ou não (como a ser visto), dão origem a um sistema de equações lineares, onde as incógnitas são os deslocamentos e esforços do contorno. Impondo-se as condições de contorno do problema, pode-se resolver este sistema e, posteriormente, calcular os valores de deslocamentos e esforços para os pontos do domínio.

Ao final do Capítulo, são apresentados alguns exemplos de solução da análise elástica linear de placas, comparando-se com os resultados obtidos por outros modelos ou soluções analíticas conhecidas.

4.2 Discretização das Equações Integrais

A discretização das equações integrais é obtida através da divisão do contorno em segmentos, conforme indicado na Fig. 4.1.

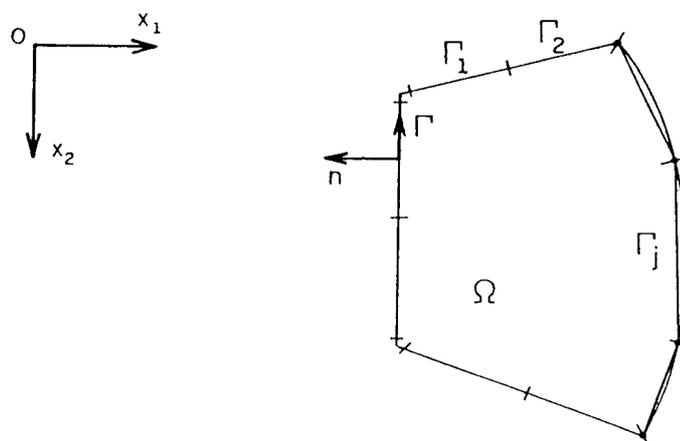


FIGURA 4.1. Discretização do contorno da placa

O número e a forma dos elementos são escolhidos visando-se representar de forma adequada o contorno real da placa. Em cada elemento Γ_j , as variáveis do problema são aproximadas por funções polinomiais. A geometria dos elementos, geralmente, é linear ou parabólica e as funções aproximadoras polinomiais podem ser as funções constante, linear ou quadrática.

Neste trabalho, adotam-se segmentos retos, ou seja, elementos lineares quanto à geometria, e funções polinomiais quadráticas para a aproximação das variáveis em cada elemento. Assim, a integração ao longo do contorno transforma-se em uma soma de integrais sobre cada elemento. Estas integrais são feitas numericamente e é conveniente, para tanto, expressar as coordenadas de cada ponto P de um elemento em função de

coordenadas locais homogêneas ξ (Fig. 4.2), da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{x}(P) = \underset{\sim}{\psi}^T(P) \underset{\sim}{X}^N \quad (4.1)$$

onde

$$\underset{\sim}{x}(P) = \left\{ \begin{array}{c} x_1(P) \\ x_2(P) \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

$$\underset{\sim}{\psi}^T(P) = \left[\begin{array}{cc} \underset{\sim}{\phi}^T(P) & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{\phi}^T(P) \end{array} \right] \quad (4.3)$$

$$\underset{\sim}{X}^N = \left\{ \begin{array}{c} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

O índice N é utilizado para indicar os valores das coordenadas nos pontos extremos do elemento. Assim, x_i^N representa a coordenada na direção i do ponto N.

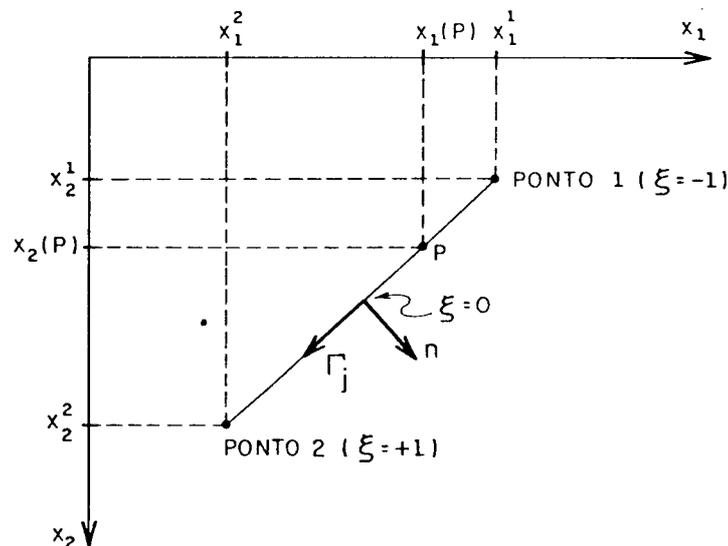


FIGURA 4.2. Geometria do elemento

O vetor que contém as funções aproximadoras em (4.3) é dado por:

$$\underset{\sim}{\phi}(P) = \begin{Bmatrix} \phi_1(P) \\ \phi_2(P) \end{Bmatrix}, \quad (4.5)$$

onde os ϕ_i são funções da coordenada ξ , com origem no centro do elemento, expressos por:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad (4.6.a)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad (4.6.b)$$

Portanto, a equação (4.1), que relaciona a coordenada de um ponto genérico às coordenadas dos pontos extremos do elemento, pode ser escrita explicitamente na forma:

$$\begin{Bmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

4.2.1 Aproximação das Variáveis do Problema

A aproximação das variáveis do problema pode ser feita de forma análoga à geometria, expressa por (4.7). Porém, para uma função interpoladora do segundo grau, há necessidade de se definir três pontos nodais em cada elemento, para que se possa relacionar as variáveis de um ponto qualquer P do elemento com os valores nodais destas variáveis.

Estes pontos nodais podem estar em qualquer posição ao longo do elemento; considera-se, neste trabalho, os nós 1 e 3 com coordenadas locais ξ_1 e ξ_3 , respectivamente, e o nó 2 localizado no centro do elemento, com $\xi_2 = 0$, conforme indicado na Fig. 4.3.

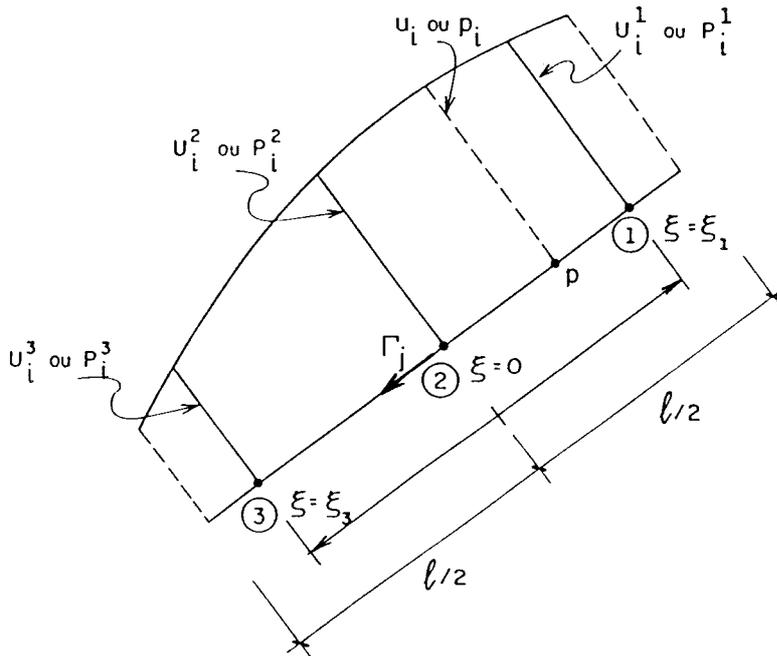


FIGURA 4.3. Aproximação das variáveis - elemento quadrático

Assim, pode-se expressar os vetores de deslocamentos u e esforços p em um ponto P qualquer do elemento, em termos de seus valores nodais U^N e P^N , através de três funções interpoladoras Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 , fazendo-se:

$$\begin{matrix} u(P) & = & \Phi^T(P) & U^N & & (4.8) \\ \sim & & \sim & \sim & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} p(P) & = & \Phi^T(P) & P^N & , & (4.9) \\ \sim & & \sim & \sim & & \end{matrix}$$

ou, explicitamente, na forma:

$$\tilde{u}(P) = \begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(P) & 0 & \Phi_2(P) & 0 & \Phi_3(P) & 0 \\ 0 & \Phi_1(P) & 0 & \Phi_2(P) & 0 & \Phi_3(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

e

$$\tilde{p}(P) = \begin{Bmatrix} p_1(P) \\ p_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(P) & 0 & \Phi_2(P) & 0 & \Phi_3(P) & 0 \\ 0 & \Phi_1(P) & 0 & \Phi_2(P) & 0 & \Phi_3(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_1^2 \\ P_2^2 \\ P_1^3 \\ P_2^3 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

onde $u_1(P) = w(P)$ e $u_2(P) = \partial w(P)/\partial n$ são, respectivamente, os deslocamentos e rotações no ponto P do elemento, assim como $U_1^N = w^N$ e $U_2^N = \partial w^N/\partial n$ são estes valores nos respectivos nós, com $N = 1, 2, 3$.

Analogamente, $p_1(P) = V_n(P)$ e $p_2(P) = M_n(P)$ são os esforços no ponto P e $P_1^N = V_n^N$ e $P_2^N = M_n^N$, os valores nos pontos nodais, para $N = 1, 2, 3$.

As funções quadráticas Φ_i , indicadas na Fig. 4.4, são dadas em função da coordenada adimensional ξ , por:

$$\Phi_1(P) = \frac{1}{\xi_1(\xi_3 - \xi_1)} (\xi_3 - \xi) \xi \quad (4.12.a)$$

$$\Phi_2(P) = 1 - \frac{\xi_3 + \xi_1}{\xi_1 \xi_3} \xi + \frac{1}{\xi_1 \xi_3} \xi^2 \quad (4.12.b)$$

$$\Phi_3(P) = \frac{1}{\xi_3 (\xi_1 - \xi_3)} (\xi_1 - \xi) \xi \quad (4.12.c)$$

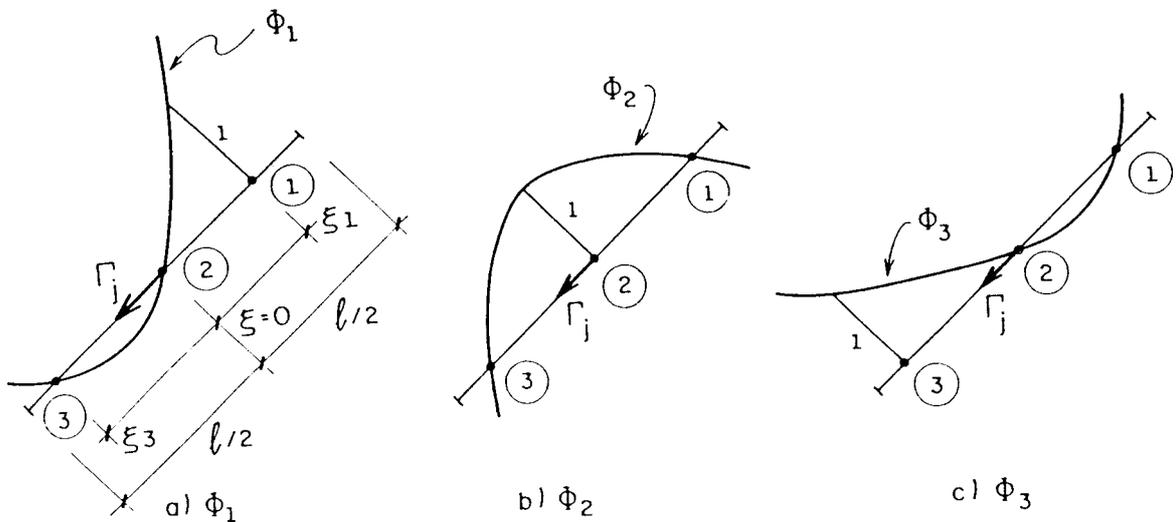


FIGURA 4.4. Funções interpoladoras quadráticas

O uso deste tipo de elemento, dito descontínuo, permite que as variáveis sejam descontínuas em pontos do contorno correspondentes a nós adjacentes. Isto ocorre em situações onde existem angulosidades ou vinculações diferentes entre elementos que concorrem em um mesmo nó. Nestes casos, utilizam-se dois nós com as mesmas coordenadas para definir um único ponto do contorno, caracterizando-se, assim, o ponto como "nó duplo".

Isto permite que um mesmo ponto do contorno possa apresentar dois valores nodais distintos de uma mesma variável, conforme indicado na Fig. 4.5 - (a), quando os nós são definidos no interior do elemento.

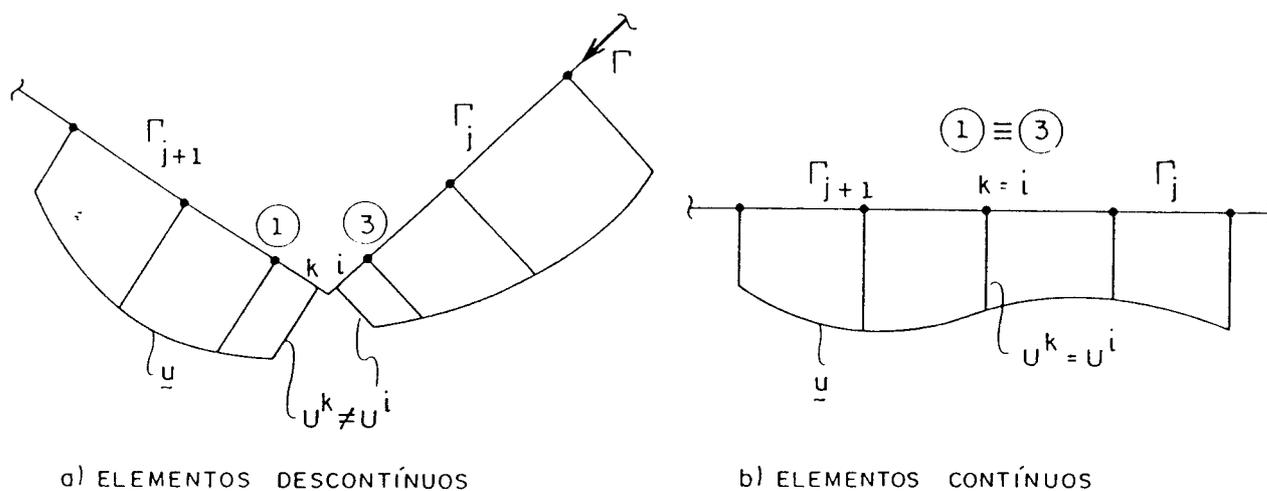


FIGURA 4.5. Elementos contínuos e descontínuos

Para os casos em que não haja descontinuidade das variáveis de contorno em um nó associado a dois elementos adjacentes (Fig. 4.5 - (b)), pode-se utilizar o elemento contínuo, fazendo-se os pontos nodais 1 ou 3 coincidentes com os pontos extremos 1 ou 2 do elemento, que estão indicados na geometria do elemento (Fig. 4.2). Neste caso, as funções interpoladoras Φ_i são obtidas fazendo-se, respectivamente, $\xi_1 = -1$ ou $\xi_3 = +1$, nas equações (4.12).

Quando, simultaneamente, os dois nós coincidem com os pontos extremos, tem-se o caso particular do elemento contínuo nas duas extremidades e, assim, as funções (4.12) ficam:

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2} (1 - \xi) \xi \quad (4.13.a)$$

$$\Phi_2 = 1 - \xi^2 \quad (4.13.b)$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2} (1 + \xi) \xi \quad (4.13.c)$$

Neste trabalho, utiliza-se a combinação dos elementos contínuos e descontínuos, já que a discretização apenas com elementos descontínuos aumenta significativamente o número de nós e, por consequência, o número de equações do sistema, e as descontinuidades das variáveis no contorno só ocorrem em alguns pontos, conforme mencionado anteriormente.

4.2.2 Transformações das Equações Integrais em Equações Algébricas

A equação integral do deslocamento de um ponto Q qualquer do contorno, expressa em (3.31), pode ser escrita em função dos deslocamentos \underline{u} , esforços \underline{p} e dos respectivos valores fundamentais, na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 C(Q)u(Q) + \int_{\Gamma} \underline{p}^*(Q,P) \underline{u}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q,P) w_{ci}(P) = \\
 = \int_{\Gamma} \underline{u}^*(Q,P) \underline{p}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} w_{ci}^*(Q,P) R_{ci}(P) + \\
 + \int_{\Omega_g} g(P) u_g^*(Q,P) d\Omega_g(P) \quad , \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

onde

$$\underline{u}(P) = \begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(P) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(P) \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\underline{p}(P) = \begin{Bmatrix} p_1(P) \\ p_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_n(P) \\ M_n(P) \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\underline{p}^*(Q,P) = \begin{bmatrix} V_n^*(Q,P) & - M_n^*(Q,P) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\underline{u}^*(Q,P) = \begin{bmatrix} w^*(Q,P) & - \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$u_g^*(Q,P) = w^*(Q,P) \quad (4.19)$$

$$u(Q) = w(Q) \quad (4.20)$$

$$C(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \quad (4.21)$$

Após a discretização do contorno em N_e elementos e substituindo-se as variáveis por suas aproximações em cada elemento dadas por (4.8) e (4.9), a equação (4.14) fica:

$$\begin{aligned} C(Q)u(Q) + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} \tilde{p}^*(Q,P) \tilde{\Phi}^T(P) \tilde{U}_j^N d\Gamma_j(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q,P) w_{ci}(P) = \\ = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} \tilde{u}^*(Q,P) \tilde{\Phi}^T(P) \tilde{P}_j^N d\Gamma_j(P) + \sum_{i=1}^{N_c} w_{ci}^*(Q,P) R_{ci}(P) + \\ + \int_{\Omega_g} g(p) u_g^*(Q,p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Assim, as integrais de contorno que aparecem na equação (4.22) têm valores conhecidos para cada elemento e multiplicam os valores nodais das variáveis. Portanto, estas integrais podem ser calculadas para cada elemento Γ_j e são representadas, genericamente, por:

$$\tilde{h}^j(Q) = \int_{\Gamma_j} \tilde{p}^*(Q,P) \tilde{\Phi}^T(P) d\Gamma_j(P) \quad (4.23)$$

$$\tilde{g}^j(Q) = \int_{\Gamma_j} \tilde{u}^*(Q,P) \tilde{\Phi}^T(P) d\Gamma_j(P) \quad (4.24)$$

A integral de domínio correspondente ao carregamento transversal $g(p)$ também pode ser calculada. Como foi visto no item 3.4, seu valor pode ser obtido com a transformação em uma integral de contorno, representada por:

$$t(Q) = \int_{\Omega_g} g(p) u^*(Q, p) d\Omega_g(p) \quad (4.25)$$

Portanto, a equação (4.22) pode ser reescrita como função dos valores nodais, na forma:

$$\begin{aligned} C(Q)u(Q) + \sum_{j=1}^{N_e} h^j(Q) U_j^N + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \\ = \sum_{j=1}^{N_e} g^j(Q) P_j^N + \sum_{i=1}^{N_c} w_{ci}^*(Q, P) R_{ci}(P) + t(Q) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Após a soma das influências $h^j(Q)$ e $g^j(Q)$ de todos os elementos e agrupando-se os coeficientes multiplicativos de um mesmo valor nodal, para todos os nós do contorno, pode-se escrever a equação (4.26) matricialmente:

$$C(Q)u(Q) + \hat{H}(Q)U + H_c(Q)w_c = G(Q)P + G_c(Q)R_c + T(Q), \quad (4.27)$$

onde:

- $\hat{H}(Q)$ e $G(Q)$, são, respectivamente, os vetores que contêm os coeficientes dos deslocamentos e esforços nodais, obtidos através das equações (4.23) e (4.24); eles dependem apenas da geometria e das constantes físicas do problema;
- $H_c(Q)$ e $G_c(Q)$ são, respectivamente, os vetores dos coeficientes de deslocamentos e reações dos cantos;
- $T(Q)$ é o valor da integral (4.25), resultante da integração do carregamento na região Ω_g .

Em (4.27), os vetores que contêm os valores nodais dos deslocamentos e esforços U e P , para todos os nós do contorno, e os vetores dos deslocamentos e reações dos cantos, w_c e R_c , são:

$$\begin{aligned} \tilde{U}^T &= \left\{ w^1 \quad \frac{\partial w^1}{\partial n} \quad w^2 \quad \frac{\partial w^2}{\partial n} \quad \dots \quad w^{N_n} \quad \frac{\partial w^{N_n}}{\partial n} \right\} \\ \tilde{P}^T &= \left\{ V_n^1 \quad M_n^1 \quad V_n^2 \quad M_n^2 \quad \dots \quad V_n^{N_n} \quad M_n^{N_n} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_c^T &= \left\{ w_{c_1} \quad w_{c_2} \quad \dots \quad w_{c_{N_c}} \right\} \\ \tilde{R}_c^T &= \left\{ R_{c_1} \quad R_{c_2} \quad \dots \quad R_{c_{N_c}} \right\}, \end{aligned}$$

sendo N_n , o número de nós do contorno da placa, e N_c , o número de cantos.

Logo, a equação (4.27) representa a transformação da equação integral do deslocamento de um ponto do contorno em uma equação algébrica.

Deve-se observar, ainda, que, no caso do ponto Q ser um nó do contorno, o deslocamento $u(Q)$ pode ser escrito em função dos deslocamentos U_j do elemento ao qual pertence este ponto Q . Desta forma, os coeficientes oriundos destes deslocamentos podem ser incorporados ao vetor $\tilde{H}(Q)$, resultando em:

$$\tilde{H}(Q)\tilde{U} + \tilde{H}_c(Q)\tilde{w}_c = \tilde{G}(Q)\tilde{P} + \tilde{G}_c(Q)\tilde{R}_c + T(Q) \quad (4.28)$$

Como será descrito no próximo item, os termos relacionados aos cantos da placa, w_c e R_c , podem ser considerados como variáveis do problema, ou, ainda, ser expressos em função dos valores dos nós vizinhos ao canto, através de um esquema de diferenças finitas (PAIVA, 1987), (SILVA, 1986). Assim, os coeficientes de $\tilde{H}_c(Q)$ e $\tilde{G}_c(Q)$ podem ser incluídos nos coeficientes de $\tilde{H}(Q)$ e $\tilde{G}(Q)$, na equação (4.28), levando à equação:

$$\tilde{H}(Q)\tilde{U} = \tilde{G}(Q)\tilde{P} + T(Q) \quad (4.29)$$

4.3 Sistema de Equações

Após a discretização do contorno da placa, deseja-se obter um algoritmo conveniente para a solução numérica do problema, onde quatro variáveis são associadas a cada nó do contorno, que são os deslocamentos $w(P)$ e $\partial w(P)/\partial n$ e os esforços $V_n(P)$ e $M_n(P)$. Duas destas variáveis são conhecidas devido às condições de contorno impostas.

De um modo geral, quando um deslocamento U_i é conhecido, o esforço correspondente P_i é incógnita, e vice-versa. Nos casos clássicos de vinculações em problemas de placas, tem-se:

- (a) borda engastada, onde $w = 0$ e $\partial w/\partial n = 0$, e V_n e M_n desconhecidos;
- (b) borda simplesmente apoiada, onde $w = 0$ e $M_n = 0$, e V_n e $\partial w/\partial n$ desconhecidos;
- (c) borda livre, onde $V_n = 0$ e $M_n = 0$, e w e $\partial w/\partial n$ desconhecidos.

Portanto, impondo-se as condições de contorno a todos os nós deste, tem-se $2N_n$ incógnitas no problema. Uma das alternativas para se obter estas incógnitas é a montagem de um sistema de equações algébricas, utilizando-se a equação (4.29) e escrevendo-se duas equações para cada nó do contorno. Além da equação algébrica do deslocamento, pode ser obtida uma equação integral da derivada direcional do deslocamento, descrita no Capítulo 3, para um ponto Q do contorno, de forma semelhante a (4.29), mudando-se apenas os valores dos vetores $H(Q)$, $G(Q)$ e $T(Q)$, em função das correspondentes soluções fundamentais.

Neste trabalho, utiliza-se uma outra alternativa, que considera os deslocamentos e as reações associadas aos nós de canto, como variáveis do problema. Tem-se, então, que, nos casos clássicos de vinculação, um destes valores é conhecido, ou seja, em cada canto da placa w_c ou R_c são conhecidos.

Então, após a imposição das condições de contorno para todos os nós e cantos da placa, tem-se $2N_n$ incógnitas nos nós, e N_c incógnitas nos cantos. Torna-se necessário, assim, aplicar a equação (4.27) ou (4.28), utilizando-se duas equações para cada nó, e uma para cada canto, para a definição de um sistema compatível. O sistema assim definido pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H} & \tilde{H}_c \\ \bar{\tilde{H}} & \bar{\tilde{H}}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G} & \tilde{G}_c \\ \bar{\tilde{G}} & \bar{\tilde{G}}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{R}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{T}_c \end{Bmatrix}, \quad (4.30)$$

onde:

- \tilde{H} e \tilde{G} são submatrizes quadradas de ordem $2N_n$, compostas pelos vetores $\tilde{H}(Q)$ e $\tilde{G}(Q)$ associados às duas equações de cada nó;
- \tilde{H}_c e \tilde{G}_c são submatrizes de dimensão $2N_n \times N_c$, compostas pelos subvetores $\tilde{H}_c(Q)$ e $\tilde{G}_c(Q)$ associados às duas equações de cada nó, correspondentes a \tilde{w}_c e \tilde{R}_c , respectivamente;
- \tilde{T} é o subvetor de $2N_n$ elementos, constituído pelos coeficientes de $\tilde{T}(Q)$;
- $\bar{\tilde{H}}$, $\bar{\tilde{G}}$, $\bar{\tilde{H}}_c$ e $\bar{\tilde{G}}_c$ são, respectivamente, submatrizes semelhantes a \tilde{H} , \tilde{G} , \tilde{H}_c e \tilde{G}_c , provenientes das equações integrais de deslocamento aplicadas nos cantos da placa; portanto, $\bar{\tilde{H}}$ e $\bar{\tilde{G}}$ têm $N_c \times 2N_n$ elementos e $\bar{\tilde{H}}_c$ e $\bar{\tilde{G}}_c$ são quadradas, de ordem N_c ;
- \tilde{T}_c é o subvetor semelhante a \tilde{T} , para as equações relativas aos cantos, com N_c elementos.

Conforme foi descrito, para a montagem do sistema (4.30) devem-se ter duas equações associadas a cada nó do contorno. Neste trabalho, ao invés de se escrever a equação de deslocamento e sua derivada direcional, adota-se uma alternativa que se mostra mais eficiente em problemas de placas (CALDERÓN, 1991), (PAIVA & VENTURINI, 1987), que é a utilização, apenas, da equação integral do deslocamento. Neste caso, aplica-se esta equação para os nós Q do contorno e para pontos A fora do domínio, associados a estes nós, esquematizados na Fig. 4.6.

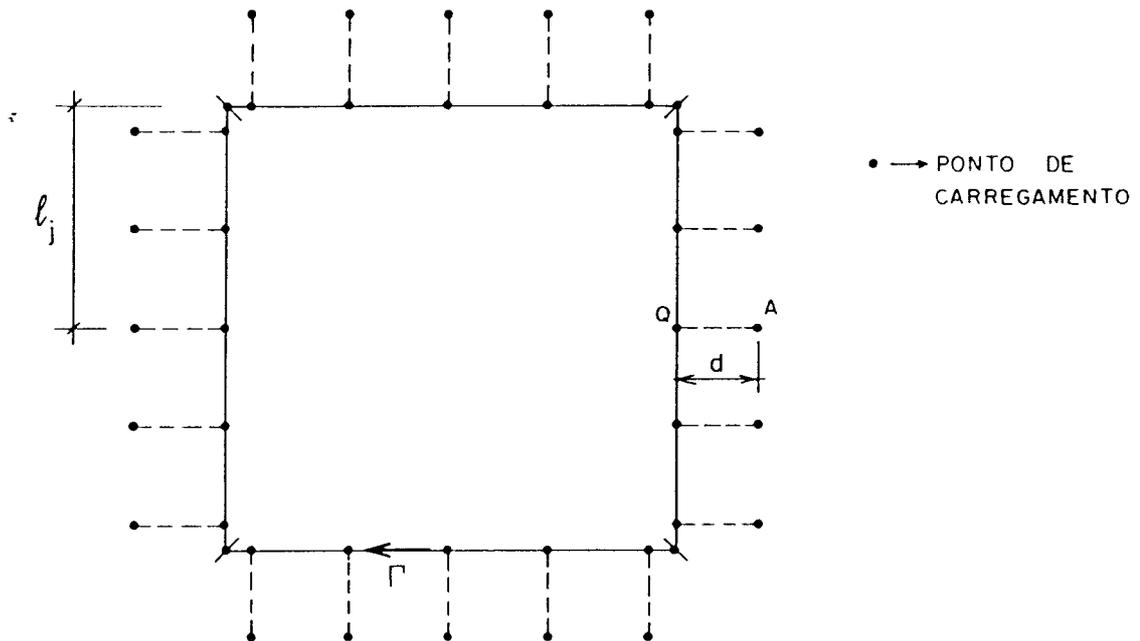


FIGURA 4.6. Placa quadrada, com pontos de carregamento no contorno, cantos e fora do domínio

A posição de um ponto A é definida na direção normal ao elemento, a uma distância do nó do contorno dada por:

$$d = a l_m \quad , \quad (4.31)$$

onde a é um coeficiente maior que zero e l_m é a média dos comprimentos dos elementos concorrentes no nó, ou, simplesmente, o comprimento do elemento, no caso do nó estar no interior do elemento.

O valor de a pode ser qualquer; porém, para que não se tenham problemas numéricos no cálculo dos coeficientes, adota-se seu valor entre 0,5 e 1,5, conforme SILVA (1986) e CALDERÓN (1991).

Como é preciso escrever, também, a equação integral em cada canto da placa, é necessário que os nós situados nos cantos, ou os pontos de carregamento, sejam levados para o interior de seus respectivos elementos, conforme indicado na Fig. 4.6, uma vez que estes pontos apresentam as mesmas coordenadas cartesianas (nós duplos), e levariam à singularidade do sistema de equações. Assim, os elementos que concorrem em um canto são descontínuos, de acordo com o indicado na Fig. 4.4. Desta forma, uma placa quadrada, discretizada com dois elementos por lado, está representada na Fig. 4.6, onde são mostrados os pontos de carregamento para os quais são escritas as equações.

Nesta alternativa proposta, na qual se utiliza, apenas, a equação integral de deslocamento para a definição do sistema de equações (4.30), pode-se, ainda, representar estas equações em uma única equação matricial, para o ponto Q do contorno e o ponto A fora do domínio. Para isto, utiliza-se os valores de deslocamentos e esforços generalizados e recorre-se à equação (4.14); então, vem:

$$\begin{aligned}
 & \tilde{C}(Q) \tilde{u}(Q) + \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{p}^*(Q, P) \tilde{u}(P) d\tilde{\Gamma}(P) + \sum_{i=1}^N \tilde{p}_{c_i}^*(Q, P) \tilde{w}_{c_i}(P) = \\
 & = \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{u}^*(Q, P) \tilde{p}(P) d\tilde{\Gamma}(P) + \sum_{i=1}^N \tilde{u}_{c_i}^*(Q, P) \tilde{R}_{c_i}(P) + \\
 & + \int_{\tilde{\Omega}_g} \tilde{g}(P) \tilde{u}_g^*(Q, P) d\tilde{\Omega}_g \quad ; \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

neste caso, tem-se $C(Q) = 1/2$ para os pontos Q no contorno sem angulosidade e nulo para os pontos A fora do domínio, uma vez que o primeiro termo da equação (3.18) se anula, devido à propriedade da função delta de Dirac, ou seja:

$$\int_{\tilde{\Omega}} \delta(A, P) w(P) d\tilde{\Omega}(P) = w(A) = 0 \quad (4.33)$$

Portanto, os vetores e matrizes de (4.32) são dados por:

$$\underset{\sim}{C}(Q) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\underset{\sim}{u}(Q) = \begin{Bmatrix} w(Q) \\ w(A) \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\underset{\sim}{P}^*(Q, P) = \begin{bmatrix} V_n^*(Q, P) & -M_n^*(Q, P) \\ V_n^*(A, P) & -M_n^*(A, P) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\underset{\sim}{u}(P) = \begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(P) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(P) \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\underset{\sim}{P}_{ci}^*(Q, P) = \begin{Bmatrix} R_{ci}^*(Q, P) \\ R_{ci}^*(A, P) \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\underset{\sim}{u}^*(Q, P) = \begin{bmatrix} w^*(Q, P) & -\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \\ w^*(A, P) & -\frac{\partial w^*}{\partial n}(A, P) \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\underset{\sim}{p}(P) = \begin{Bmatrix} p_1(P) \\ p_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_n(P) \\ M_n(P) \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

$$\underset{\sim}{u}_{ci}^*(Q, P) = \begin{Bmatrix} w_{ci}^*(Q, P) \\ w_{ci}^*(A, P) \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\underset{\sim}{u}_g^*(Q, P) = \begin{Bmatrix} w^*(Q, P) \\ w^*(A, P) \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

A equação integral para os cantos da placa é semelhante, porém com o coeficiente $C(Q) = \beta/2\pi$, conforme (4.21).

O sistema de equações lineares (4.30), montado

conforme foi descrito, pode ser resolvido isolando-se todas as incógnitas no primeiro membro, obtendo-se um sistema da forma:

$$\begin{matrix} A & X & = & B & , \\ \sim & \sim & & \sim & \end{matrix} \quad (4.43)$$

onde X é o vetor das incógnitas, composto pelos deslocamentos e esforços nos nós e cantos da placa.

Resolvendo-se este sistema, obtêm-se todas as incógnitas no contorno da placa.

4.4 Integração sobre os Elementos

Na obtenção das equações (4.28), necessárias para a montagem do sistema, os coeficientes de $H(Q)$ e $G(Q)$ são provenientes da equação (4.22), através das integrações sobre cada elemento que compõe o contorno, dadas por (4.23) e (4.24), as quais podem ser escritas na forma:

$$h_k^n(Q) = \int_{\Gamma_j} p_k^*(Q, P) \Phi_n(P) d\Gamma_j(P) \quad (4.44)$$

$$g_k^n(Q) = \int_{\Gamma_j} u_k^*(Q, P) \Phi_n(P) d\Gamma_j(P) \quad , \quad (4.45)$$

onde:

- n representa o nó local do elemento onde se mede a resposta do carregamento unitário aplicado;
- k indica a natureza da resposta medida em P , relativa aos esforços fundamentais V_n^* e M_n^* , ou aos correspondentes deslocamentos w^* e $\partial w^* / \partial n$;
- Q é o ponto singular ou de carregamento, localizado no contorno. Será o ponto A , se estiver fora do domínio da placa.

É conveniente que estas integrais sejam expressas em termos da coordenada adimensional ξ . Da relação de coordenadas expressa em (4.7), levando-se em conta a Fig. 4.2, pode-se escrever:

$$\Gamma_j = \xi \frac{\ell}{2} \quad , \quad (4.46)$$

sendo ℓ o comprimento do elemento.

Para a mudança de variável, é necessário o determinante do Jacobiano da transformação, que tem o valor:

$$|J| = \frac{d\Gamma_j}{d\xi} = \frac{\ell}{2} \quad (4.47)$$

Assim, as integrais (4.44) e (4.45) ficam:

$$h_k^n(Q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 p_k^*(Q, P) \Phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.48)$$

$$g_k^n(Q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 u_k^*(Q, P) \Phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.49)$$

Para os casos em que o ponto Q não pertence ao elemento a ser integrado, ou para um ponto A fora do domínio, as integrais (4.48) e (4.49) podem ser calculadas numericamente, empregando-se a fórmula de quadratura de Gauss, dada pela seguinte expressão:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{N_g} w_i f(\xi_i) \quad , \quad (4.50)$$

onde:

- $f(\xi)$ é a função a ser integrada, escrita em relação à coordenada ξ ;
- N_g é o número de pontos de integração;
- ξ_i é a coordenada adimensional do ponto i de integração, definido em função de N_g ;
- w_i é o fator ponderador, também definido em função de N_g .

O número N_g de pontos de integração deve ser escolhido em função de alguns parâmetros, tais como a distância entre o ponto Q de carregamento e o elemento a ser integrado, o comprimento do elemento e a função a ser integrada (GIL RODRIGUEZ, 1986).

Quando o ponto de carregamento Q pertence ao elemento a ser integrado, as funções fundamentais envolvidas nas integrações apresentam singularidades. Nestes casos, estas integrais devem ser calculadas no sentido do valor principal de Cauchy, e é conveniente que sejam feitas analiticamente.

Assim, para um nó n local de um elemento qualquer, as integrais (4.48) e (4.49) são expressas por:

$$h_1^n(Q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 V_n^*(Q, P) \Phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.51)$$

$$h_2^n(Q) = -\frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 M_n^*(Q, P) \Phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.52)$$

$$g_1^n(Q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 w^*(Q, P) \Phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.53)$$

$$g_2^n(Q) = -\frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \Phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.54)$$

Utilizando-se as soluções fundamentais vistas no Capítulo 2 e as funções aproximadoras dadas em (4.12), estas integrais podem ser calculadas analiticamente ao longo de um elemento genérico de comprimento ℓ , ao qual pertence o ponto singular Q .

Na Fig. 4.7, estão indicadas a posição genérica do ponto singular Q , denotada pela coordenada adimensional ξ_s , e os nós 1 e 3 do elemento, com as respectivas coordenadas ξ_1 e ξ_3 . Tendo em vista as funções ϕ_1 e ϕ_2 , expressas em (4.6), que relacionam as coordenadas de um ponto genérico às coordenadas dos pontos extremos do elemento, pode-se escrever o posicionamento do ponto singular em função dos seguintes valores (Fig. 4.7)):

$$\phi_{1s} = \frac{1}{2} (1 - \xi_s) \quad (4.55.a)$$

$$\phi_{2s} = \frac{1}{2} (1 + \xi_s) \quad (4.55.b)$$

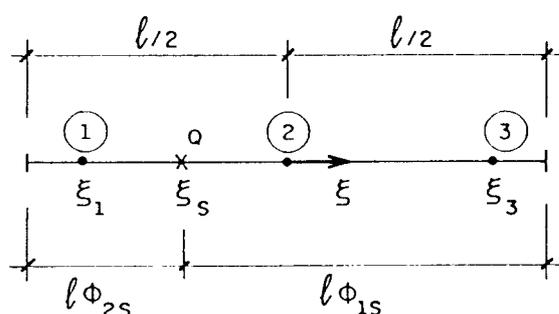


FIGURA 4.7. Posição do ponto singular e dos nós em um elemento

Assim, as integrais (4.51) a (4.54) resultam em:

$$h_1^n(Q) = 0 \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} h_2^n(Q) = & \frac{l}{4\pi} \left\{ C_1^n (1+\nu) \left[\phi_{2s} \ln(l\phi_{2s}) + \phi_{1s} \ln(l\phi_{1s}) - 1 \right] + \right. \\ & + C_2^n (1+\nu) \left[(\phi_{2s})^2 \ln(l\phi_{2s}) - (\phi_{1s})^2 \ln(l\phi_{1s}) - \frac{\xi_s}{2} \right] + \\ & + C_3^n (1+\nu) \left[\frac{4}{3} (\phi_{2s})^3 \ln(l\phi_{2s}) + \frac{4}{3} (\phi_{1s})^3 \ln(l\phi_{1s}) - \frac{1}{9} (1 + 3\xi_s^2) \right] + \\ & \left. + \nu \left[C_1^n + C_2^n \xi_s + \frac{C_3^n}{3} (1 + 3\xi_s^2) \right] \right\} \quad (4.57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1^n(Q) = & \frac{\ell^3}{8\pi D} \left\{ \frac{C_1^n}{3} \left[(\phi_{2s})^3 (\ln(\ell\phi_{2s}) - \frac{5}{6}) + (\phi_{1s})^3 (\ln(\ell\phi_{1s}) - \frac{5}{6}) \right] + \right. \\
& + \frac{C_2^n}{2} \left[(\phi_{2s})^4 (\ln(\ell\phi_{2s}) - \frac{3}{4}) - (\phi_{1s})^4 (\ln(\ell\phi_{1s}) - \frac{3}{4}) \right] + \\
& \left. + \frac{4C_3^n}{5} \left[(\phi_{2s})^5 (\ln(\ell\phi_{2s}) - \frac{7}{10}) + (\phi_{1s})^5 (\ln(\ell\phi_{1s}) - \frac{7}{10}) \right] \right\} \quad (4.58)
\end{aligned}$$

$$g_2^n(Q) = 0 \quad (4.59)$$

Nestas expressões, as constantes C_1^n , C_2^n e C_3^n são relativas aos nós locais e, portanto, dependem das funções aproximadoras Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 . Estes valores podem ser escritos, genericamente, na forma:

$$C_1^n = \frac{-\xi_s^2 + (\xi_i + \xi_j)\xi_s - \xi_i\xi_j}{(\xi_i - \xi_n)(\xi_n - \xi_j)} \quad (4.60.a)$$

$$C_2^n = \frac{2\xi_s - (\xi_i + \xi_j)}{(\xi_i - \xi_n)(\xi_n - \xi_j)} \quad (4.60.b)$$

$$C_3^n = \frac{-1}{(\xi_i - \xi_n)(\xi_n - \xi_j)} \quad (4.60.b)$$

com $n, i, j = 1, 2, 3$ e $n \neq i \neq j$.

Deve-se lembrar, ainda, que, no caso, o nó 2 está no centro do elemento e, portanto, a coordenada adimensional ξ_2 é sempre nula. Os valores de ξ_1 e ξ_3 definem o posicionamento dos nós 1 e 3, respectivamente. No caso de se ter o elemento descontínuo e, portanto, os nós estão no interior do elemento, adota-se, neste trabalho, a coordenada adimensional em módulo, entre 0,4 e 0,6, para se ter um afastamento conveniente entre os nós locais do elemento.

Os termos do vetor de cargas T, correspondentes às

integrais de domínio, são obtidos a partir de (4.25), através da integração sobre os segmentos lineares em que o contorno do carregamento é dividido. Estas integrais podem ser feitas numericamente, através da fórmula de quadratura de Gauss, aplicando-se a mudança de variável indicada em (4.46), na expressão (3.48).

No caso do contorno Γ_g do carregamento coincidir com o contorno da placa, em uma determinada região, pode ocorrer de se ter o ponto de carregamento Q pertencente ao segmento a ser integrado. Neste caso, porém, as integrais são nulas, uma vez que o produto escalar $r_i n_i$ da equação (3.48) é nulo, para qualquer ponto do segmento.

4.5 Propriedades da Matriz \tilde{H}

Através da configuração de equilíbrio de uma placa, pode-se estabelecer duas propriedades na matriz \tilde{H} . Como a análise do problema resume-se na solução do sistema de equações (4.30), que relaciona os esforços e deslocamentos do contorno, é possível considerar configurações de equilíbrio particulares para as variáveis de contorno.

Para tanto, admite-se um carregamento transversal nulo e a consideração de movimentos de corpo rígido, ou seja, deslocamento transversal e rotação em torno de um eixo arbitrário, conforme mostra a Fig. 4.8. Estas configurações implicam em que os vetores dos esforços nodais \tilde{P} , das reações de canto \tilde{R}_c e dos termos relativos ao carregamento, \tilde{T} , sejam nulos em toda a placa. Assim, o sistema de equações (4.30) resulta em:

$$\tilde{H} \tilde{U} + \tilde{H}_c \tilde{w}_c = \tilde{0} \quad (4.61)$$

Considerando-se um movimento transversal w_0 na placa, os vetores relativos aos deslocamentos, em (4.61), ficam dados por:

$$\underset{\sim}{U}^T = \{w_0 \quad 0 \quad w_0 \quad 0 \quad \dots \quad w_0 \quad 0\} \quad (4.62)$$

$$\underset{\sim}{w}_c^T = \{w_0 \quad w_0 \quad w_0 \quad \dots \quad w_0\} \quad , \quad (4.63)$$

que resulta na propriedade seguinte, envolvendo os elementos das colunas ímpares, para qualquer linha i das matrizes H e $\underset{\sim}{H}_c$:

$$\sum_{j=1}^{N_n} h_{i \cdot 2j-1} + \sum_{j=1}^{N_c} h_{c i \cdot j} = 0 \quad (4.64)$$

Admite-se, agora, uma rotação de corpo rígido α , no sentido indicado pelo eixo arbitrário \vec{e} , indicado na Fig. 4.8, onde D_k é a distância entre um nó genérico k e o eixo de rotação. Neste caso, os vetores relativos aos deslocamentos, em (4.61), são dados por:

$$\underset{\sim}{U}^T = \alpha \left\{ D_1 \quad \cos\beta_1 \quad D_2 \quad \cos\beta_2 \quad \dots \quad D_{N_n} \quad \cos\beta_{N_n} \right\} \quad (4.65)$$

$$\underset{\sim}{w}_c^T = \alpha \left\{ D_{c_1} \quad D_{c_2} \quad \dots \quad D_{c_{N_c}} \right\} \quad , \quad (4.66)$$

sendo $\cos\beta_j = n_k^j d_k$.

No caso, n_k^j e d_k representam, respectivamente, os cossenos diretores da normal ao contorno do nó j e o versor d . Substituindo-se, então, (4.65) e (4.66) em (4.61), chega-se à seguinte propriedade:

$$\sum_{j=1}^{N_c} \left(h_{i \cdot 2j-1} D_{j \cdot} + h_{i \cdot 2j} \cos\beta_j \right) + \sum_{j=1}^{N_c} h_{c i \cdot j} D_{c_j} = 0 \quad (4.67)$$

Estas propriedades podem ser usadas para verificação das matrizes H e $\underset{\sim}{H}_c$, ou mesmo para a determinação dos elementos da diagonal principal de H , correspondentes às integrais com singularidades.

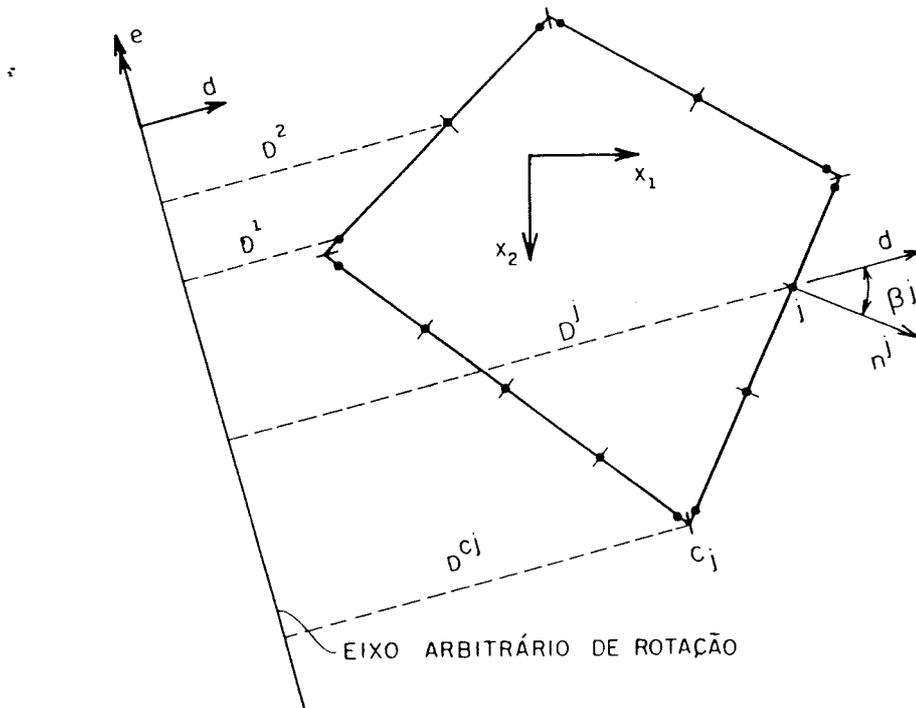


FIGURA 4.8. Placa com carregamento transversal nulo

4.6 Deslocamentos e Esforços para Pontos Internos

Após a determinação dos deslocamentos e esforços no contorno da placa, é necessária a obtenção destes valores para pontos do interior da placa.

O deslocamento $w(q)$ em um ponto interno q é dado pela equação (3.19) que, após a discretização do contorno, pode ser expressa matricialmente de forma semelhante à equação (4.27).

A partir da equação (3.19), pode-se chegar às representações integrais das curvaturas de pontos internos, segundo as direções x_1 e x_2 de um sistema cartesiano com origem no ponto q . Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_i \partial x_j} + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
& + \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) w_c(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) + \right. \\
& \left. - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right] d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P) \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) + \\
& + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) d\Omega_g(p) \tag{4.68}
\end{aligned}$$

As equações do deslocamento e das curvaturas podem ser escritas através de uma única equação, denominando-se, genericamente, os deslocamentos e esforços e suas derivadas, respectivamente, por \tilde{u} e \tilde{p} . Logo, as equações (3.19) e (4.68) são expressas, semelhantemente a (4.32), por:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(q) + \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{p}^*(q, P) \tilde{u}(P) d\tilde{\Gamma}(P) + \sum_{c=1}^{N_c} \tilde{p}_c^*(q, P) w_c(P) = \\
= \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{u}^*(q, P) \tilde{p}(P) d\tilde{\Gamma}(P) + \sum_{c=1}^{N_c} \tilde{u}_c^*(q, P) R_c(P) + \int_{\Omega_g} g(p) \tilde{u}_g^*(q, p) d\Omega_g(p) \quad , \\
\tag{4.69}
\end{aligned}$$

onde:

$$\tilde{u}(q) = \left\{ \begin{array}{l} w(q) \\ \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_1 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_2 \partial x_2} \end{array} \right\} \tag{4.70}$$

$$\tilde{p}^*(q, P) = \begin{bmatrix} V_n^*(q, P) & -M_n^*(q, P) \\ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) & -\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) \\ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) & -\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) \\ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_2 \partial x_2}(q, P) & -\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_2 \partial x_2}(q, P) \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$\tilde{u}^*(q, P) = \begin{bmatrix} w^*(q, P) & -\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) & -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) & -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2 \partial x_2}(q, P) & -\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

$$\tilde{p}_c^*(q, P) = \left\{ \begin{array}{l} R_c^*(q, P) \\ \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) \\ \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) \\ \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_2 \partial x_2}(q, P) \end{array} \right\} \quad (4.73)$$

$$\underset{\sim}{u}_c^*(q, P) = \left\{ \begin{array}{l} w_c^*(q, P) \\ \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) \\ \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) \\ \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_2 \partial x_2}(q, P) \end{array} \right\} \quad (4.74)$$

$$\underset{\sim}{u}_g^*(q, P) = \left\{ \begin{array}{l} w^*(q, P) \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2 \partial x_2}(q, P) \end{array} \right\} \quad (4.75)$$

Após a discretização do contorno da placa, conforme descrito anteriormente, podem-se determinar os deslocamentos e as curvaturas para N_i pontos internos desejados, aplicando-se as equações (4.69) nestes pontos, chegando-se a uma equação matricial semelhante a (4.30), dada por:

$$\underset{\sim}{u}(q) + \underset{\sim}{[H']} \underset{\sim}{[H'_c]} \left\{ \begin{array}{l} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{w_c} \end{array} \right\} = \underset{\sim}{[G']} \underset{\sim}{[G'_c]} \left\{ \begin{array}{l} \underset{\sim}{P} \\ \underset{\sim}{R_c} \end{array} \right\} + \underset{\sim}{T'} \quad (4.76)$$

sendo \tilde{U} e \tilde{P} os vetores que contêm os deslocamentos e esforços dos nós do contorno e, portanto, já foram determinados anteriormente, assim como \tilde{w}_c e \tilde{R}_c , que são os vetores dos deslocamentos e reações dos cantos da placa.

\tilde{H}' e \tilde{G}' são matrizes de influência dos pontos internos, semelhantes a \tilde{H} e \tilde{G} , respectivamente. As matrizes \tilde{H}'_c e \tilde{G}'_c são semelhantes a \tilde{H}_c e \tilde{G}_c e são formadas pelos coeficientes dos termos provenientes dos deslocamentos e reações de canto.

O vetor \tilde{T}' é resultante da integração sobre a região $\tilde{\Omega}_g$, dos pontos internos, de forma semelhante ao vetor \tilde{T} .

Os coeficientes das matrizes \tilde{H}' , \tilde{G}' , \tilde{H}'_c e \tilde{G}'_c são provenientes das integrais sobre os elementos do contorno discretizado, expressas em (4.23) e (4.24), porém com $\tilde{p}^*(q,P)$ e $\tilde{u}^*(q,P)$, definidos em (4.71) e (4.72). Neste caso, estas integrais podem ser feitas numericamente, já que não haverá singularidade nas funções fundamentais envolvidas.

Os momentos fletores e as forças cortantes para os pontos internos podem ser obtidos a partir das curvaturas, através das equações (2.8) e (2.11), respectivamente.

Substituindo-se os valores das curvaturas (4.68) em (2.8) e (2.11), obtêm-se, explicitamente, os esforços para um ponto q interno à placa, expressos por:

$$\begin{aligned}
 M_{ij}(q) = & - \int_{\Gamma} \left[V_{n_{ij}}^*(q,P) w(P) - M_{n_{ij}}^*(q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & - \sum_{c=1}^{N_c} R_{c_{ij}}^*(q,P) w_c(P) + \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w_{ij}^*(q,P) - M_n(P) \frac{\partial w_{ij}^*}{\partial n}(q,P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P) w_{c_{ij}}^*(q,P) + \int_{\Omega_g} g(p) w_{ij}^*(q,p) d\Omega(p) \quad (4.77)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_j(q) &= -\int_{\Gamma} \left[V_{n_j}^*(q, P) w(P) - M_{n_j}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) - \sum_{c=1}^{N_c} R_{c_j}^*(q, P) w_c(P) + \\
&+ \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w_j^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w_j^*}{\partial n}(q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P) w_{c_j}^*(q, P) + \\
&+ \int_{\Omega_g} g(p) w_j^*(q, p) d\Omega_g(p) \quad , \quad (4.78)
\end{aligned}$$

onde:

$$V_{n_{ij}}^*(q, P) = -D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \quad (4.79)$$

$$M_{n_{ij}}^*(q, P) = -D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \quad (4.80)$$

$$w_{ij}^*(q, P) = -D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_{ij}^*}{\partial n}(q, P) &= -D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) + \right. \\
&\quad \left. + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right] \quad (4.82)
\end{aligned}$$

$$R_{c_{ij}}^*(q, P) = -D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \quad (4.83)$$

$$V_{n_j}^*(q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) \quad (4.84)$$

$$M_{n_j}^* (q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_k} (q, P) \right) \quad (4.85)$$

$$w_j^* (q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k} (q, P) \right) \quad (4.86)$$

$$\frac{\partial w_j^*}{\partial n} (q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right) \right] \quad (4.87)$$

$$R_{c_j}^* (q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_k \partial x_k} (q, P) \right) \quad (4.88)$$

Com a discretização do contorno e a aproximação das variáveis e , ainda, com a aplicação das equações (4.77) e (4.78) para N_i pontos internos, obtêm-se os esforços nestes pontos, através da equação matricial:

$$\begin{matrix} E \\ \sim \\ S \end{matrix} = - \begin{bmatrix} H'' & \\ & H'' \\ & & \sim \\ & & & \sim \\ & & & & \sim \\ & & & & & \sim \\ & & & & & & \sim \\ & & & & & & & \sim \\ & & & & & & & & \sim \\ & & & & & & & & & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \sim \\ w_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G'' & \\ & G'' \\ & & \sim \\ & & & \sim \\ & & & & \sim \\ & & & & & \sim \\ & & & & & & \sim \\ & & & & & & & \sim \\ & & & & & & & & \sim \\ & & & & & & & & & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ \sim \\ R_c \end{Bmatrix} + T'' \quad , \quad (4.89)$$

onde:

$$\begin{matrix} E \\ \sim \\ S \end{matrix} = \begin{Bmatrix} E_{s_1} \\ \sim \\ E_{s_i} \\ \sim \\ E_{s_{N_i}} \end{Bmatrix} \quad , \quad \text{com} \quad \begin{matrix} E \\ \sim \\ S \\ \sim \\ i \end{matrix} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{22} \\ q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad \text{no ponto } i.$$

As matrizes H'' e G'' são semelhantes a H e G , sendo determinadas a partir das derivadas das soluções fundamentais expressas em (4.79) a (4.88).

H'' e G'' são as matrizes formadas pelos coeficientes \sim \sim dos termos provenientes dos deslocamentos e reações de canto,

sendo semelhantes a H_c e G_c , respectivamente.

O vetor T'' é resultante das integrais sobre a região do carregamento Ω_g e é semelhante a T .

Os vetores que contêm os deslocamentos e esforços dos nós do contorno, U e P , bem como os vetores com os deslocamentos e reações dos cantos, w_c e R_c , são valores já determinados.

Assim, para cada ponto interno, são geradas cinco linhas das matrizes H'' , G'' , H_c'' e G_c'' , relativas aos três momentos fletores e às duas forças cortantes. As integrais sobre os elementos do contorno envolvidas nestas matrizes são feitas numericamente.

As derivadas das soluções fundamentais que são necessárias, expressas nas equações (4.79) a (4.88), podem ser determinadas em relação a um eixo particular x_i , definido no ponto q ; são dadas por:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x_i}(q, P) = -\frac{r}{4\pi D} \ln r r_{,i} \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) = \frac{1}{4\pi D} (r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \ln r) \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) = \frac{1}{4\pi D} (1 + 2 \ln r) \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) = -\frac{1}{2\pi r D} r_{,i} \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) = -\frac{1}{4\pi D} [r_{,i} (r_{,k} n_k) + n_i \ln r] \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) &= -\frac{1}{4\pi r D} [(2r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}) (r_{,k} n_k) + \\ &\quad - r_{,i} n_j - r_{,j} n_i] \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right) = \frac{1}{2\pi r D} (r, k n_k) \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right) \right] = \frac{1}{2\pi r^2 D} [2r, i (r, k n_k) - n_i] \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^*}{\partial x_i} (q, P) = & \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu) (r, k s_k)^2 [4r, i (r, k n_k) - n_i] + \right. \\ & \left. - 4(1-\nu) (r, k s_k) (r, k n_k) s_i + (3-\nu) [n_i - 2r, i (r, k n_k)] \right\} \quad (4.98) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j} (q, P) = & \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 2(1-\nu) (r, k s_k)^2 [24r, i r, j (r, k n_k) + \right. \\ & - 4[r, i n_j + r, j n_i + \delta_{ij} (r, k n_k)]] + 2(1-\nu) (r, k s_k) [2(n_i s_j + n_j s_i) + \\ & - 8(r, k n_k) (r, i s_j + r, j s_i)] + 4(1-\nu) (r, k n_k) (s_i s_j) + \\ & \left. + (3-\nu) [2\delta_{ij} (r, k n_k) - 8r, i r, j (r, k n_k) + 2(r, i n_j + r, j n_i)] \right\} \quad (4.99) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_k} (q, P) = - \frac{1-\nu}{\pi r^3} (r, k n_k) [4(r, \ell s_\ell)^2 - 1] \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_k} (q, P) \right) = & - \frac{1-\nu}{\pi r^4} \left\{ (r, k s_k)^2 [24r, i (r, \ell n_\ell) - 4n_i] + \right. \\ & \left. - (r, \ell n_\ell) [8s_i (r, k s_k) + 4r, i] + n_i \right\} \quad (4.101) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial x_i} (q, P) = \frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu) r, i - 2(1-\nu) (r, k n_k) [r, i (r, k n_k) - n_i] \right\} \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) = & - \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ (1+\nu) (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) + \right. \\ & + 2(1-\nu) \left[n_i n_j - 2r_{,j} n_i (r_{,k} n_k) - (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) (r_{,k} n_k)^2 + \right. \\ & \left. \left. - 2r_{,i} (r_{,k} n_k) [n_j - r_{,j} (r_{,k} n_k)] \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.103)$$

$$\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) = - \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu) [1 - 2(r_{,k} n_k)^2] \right\} \quad (4.104)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) = - \frac{1-\nu}{\pi r^3} \left[r_{,i} + 2n_i (r_{,k} n_k) - 4r_{,i} (r_{,k} n_k)^2 \right] \quad (4.105)$$

$$\frac{\partial M_{ns}^*}{\partial x_i}(q, P) = - \frac{1-\nu}{4\pi r} \left[2r_{,i} (r_{,k} n_k) (r_{,k} s_k) - n_i (r_{,k} s_k) - s_i (r_{,k} n_k) \right] \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) = & \frac{1-\nu}{4\pi r^2} \left\{ 2 \left[(r_{,k} s_k) (r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) + \right. \right. \\ & + (r_{,k} n_k) (r_{,i} s_j + r_{,j} s_i) + (r_{,k} n_k) (r_{,k} s_k) (\delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j}) \left. \right] + \\ & \left. - (n_i s_j + n_j s_i) \right\} \end{aligned} \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) = \frac{1-\nu}{\pi r^2} \left[(r_{,k} s_k) (r_{,l} n_l) \right] \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) = & \frac{1-\nu}{\pi r^3} \left[4r_{,i} (r_{,k} s_k) (r_{,l} n_l) + \right. \\ & \left. - n_i (r_{,k} s_k) - s_i (r_{,l} n_l) \right] , \quad \text{com } i, j, k, l = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.109)$$

4.7 Aplicações Numéricas

São apresentados, a seguir, alguns exemplos de aplicação da formulação desenvolvida na análise elástica de placas, com diversas condições de contorno e carregamento. Os resultados são comparados com os obtidos através de soluções analíticas, dadas por TIMOSHENKO (1959), ou com soluções numéricas que utilizam o Método dos Elementos de Contorno (PAIVA, 1987), (CALDERÓN, 1991), os quais utilizam elementos de função aproximadora linear. Alguns exemplos são comparados, também, com as soluções numéricas obtidas através do Método dos Elementos Finitos.

Em todos os exemplos apresentados, utiliza-se o coeficiente $\alpha = 0,25$, que define o posicionamento dos pontos de carregamento conforme a equação (4.31), uma vez que, com este valor obteve-se um resultado numérico melhor. Nos elementos com nós duplos, as equações são escritas para $\xi_s = \pm 0,6$, embora a variação de ξ_s entre 0,4 e 0,6 não produza alterações significativas na soluções.

4.7.1 Exemplo 1. Placa quadrada com dois lados opostos apoiados e engastada nos outros dois, com carregamento uniformemente distribuído

A placa quadrada da Fig. 4.9, engastada em dois lados e apoiada nos outros dois, submetida a uma carga uniforme, foi analisada através de diversas malhas de discretização. São apresentados, no Quadro 4.1, os resultados dos deslocamentos e dos momentos fletores nos pontos A e B, para a discretização com 4, 8 e 16 elementos iguais no contorno. Conforme o esquema apresentado na Fig. 4.6, nessas discretizações têm-se, respectivamente, 12, 20 e 36 pontos nodais nos lados da placa, além dos quatro pontos localizados em seus cantos. Estes resultados são comparados com a solução analítica (TIMOSHENKO, 1959) e com os valores obtidos por CALDERÓN (1991), o qual utilizou uma formulação semelhante ao presente estudo, discretizando o contorno com 40 elementos lineares, e, portanto, 44 pontos nodais nos lados da placa.

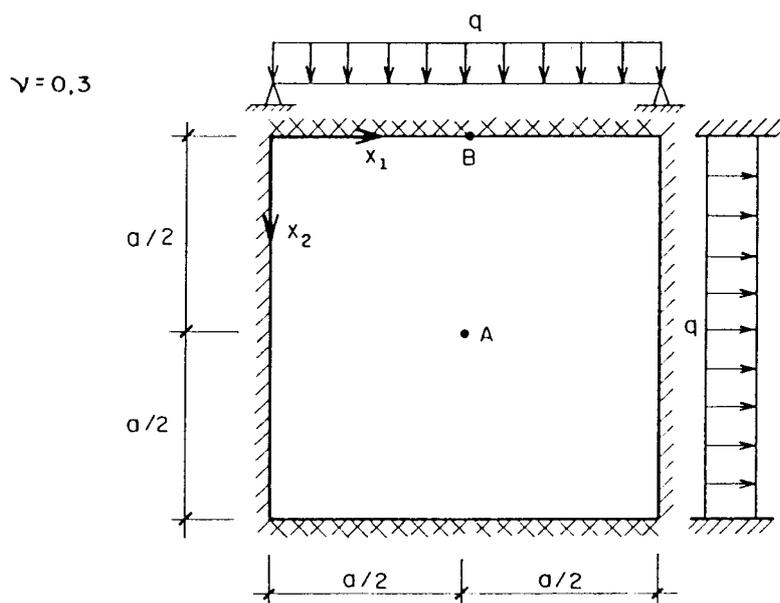


FIGURA 4.9. Placa quadrada apoiada em dois lados opostos e engastada nos outros dois

QUADRO 4.1. Resultados do Exemplo 1

SOLUÇÕES	PONTO A			PONTO B	
	$w/(qa^4/D)$	M_{11}/qa^2	M_{22}/qa^2	M_{11}/qa^2	M_{22}/qa^2
TIMOSHENKO	0,00192	0,0244	0,0332	-0,0209	-0,0697
CALDERÓN (40 elem.)	0,00192	0,0244	0,0332	-0,0203	-0,0701
PRESENTE ESTUDO					
(4 elem.)	0,00192	0,0244	0,0332	-0,0207	-0,0689
(8 elem.)	0,00192	0,0244	0,0332	-0,0214	-0,0713
(16 elem.)	0,00192	0,0244	0,0332	-0,0209	-0,0699

Como pode-se observar no Quadro 4.1, a formulação proposta para o Método dos Elementos de Contorno apresenta excelentes resultados, mesmo quando se utilizam apenas 4 elementos para a discretização do contorno. Isto foi observado, também, para os casos em que a placa encontrava-se apoiada ou engastada nos quatro lados.

Como será visto nos próximos exemplos, o elemento com funções aproximadoras parabólicas utilizado no presente trabalho apresenta melhores resultados que os elementos lineares, utilizados por CALDERÓN (1991) e PAIVA (1987), com o mesmo número de nós no contorno. Portanto, embora nem sempre seja necessário, os exemplos apresentados neste trabalho possuem malhas com o máximo de 20 elementos, ou seja, 44 nós no contorno.

Deve-se salientar, ainda, que, conforme foi observado por PAIVA (1987), a formulação que emprega apenas as equações integrais de deslocamentos é, em geral, superior às formulações usuais do Método dos Elementos de Contorno, as quais utilizam equações de deslocamentos e suas derivadas.

4.7.2 Exemplo 2. Placa quadrada apoiada nos quatro cantos

A placa quadrada da Fig. 4.10, apoiada apenas nos cantos, com carregamento uniformemente distribuído, foi discretizada com 16 elementos iguais e 36 pontos nodais no contorno. Os resultados desta análise são apresentados no Quadro 4.2, juntamente com os de CALDERÓN (1991) e PAIVA (1987), que utilizaram discretização com 40 elementos e 44 nós, e também com a solução analítica de TIMOSHENKO (1959).

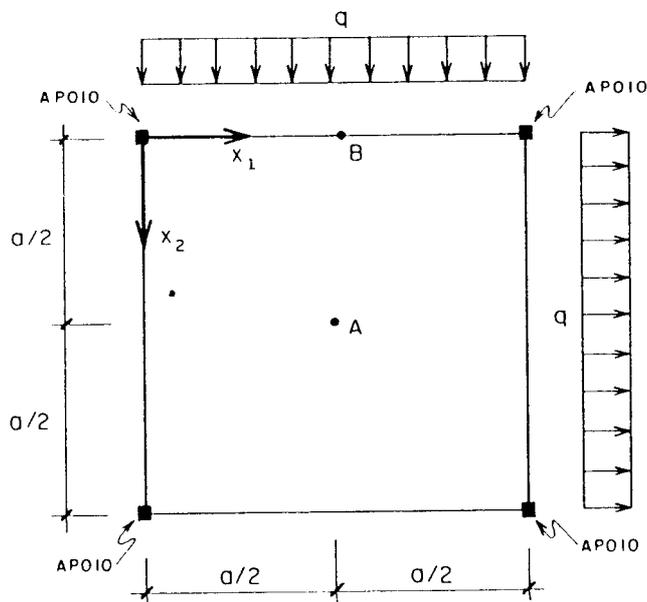


FIGURA 4.10. Placa quadrada apoiada nos quatro cantos

QUADRO 4.2. Resultados do Exemplo 2

SOLUÇÕES	PONTO A			PONTO B	
	$w/(qa^4/D)$	M_{11}/qa^2	M_{22}/qa^2	$w/qa^4/D$	M_{11}/qa^2
TIMOSHENKO	0,0260	0,1090	0,1090	—	0,1404
PAIVA (40 elem.)	0,0246	0,1100	0,1100	0,0163	0,1404
CALDERÓN (40 elem.)	0,0271	0,1139	0,1139	0,0194	—
PRESENTE ESTUDO (16 elem.)	0,0260	0,1103	0,1103	0,0173	0,1437

Pode-se observar, pelos resultados, que mesmo com 16 elementos e, portanto, 36 nós no contorno, chega-se praticamente à solução analítica para o deslocamento no centro da placa, havendo apenas uma pequena diferença no momento M_{11} , no ponto B.

4.7.3 Exemplo 3. Placa quadrada apoiada, com carregamento distribuído ao longo de uma linha

Este exemplo foi analisado por PAIVA (1987), com uma malha de 40 elementos e 44 pontos nodais no contorno, obtendo uma solução próxima à solução analítica (TIMOSHENKO, 1959).

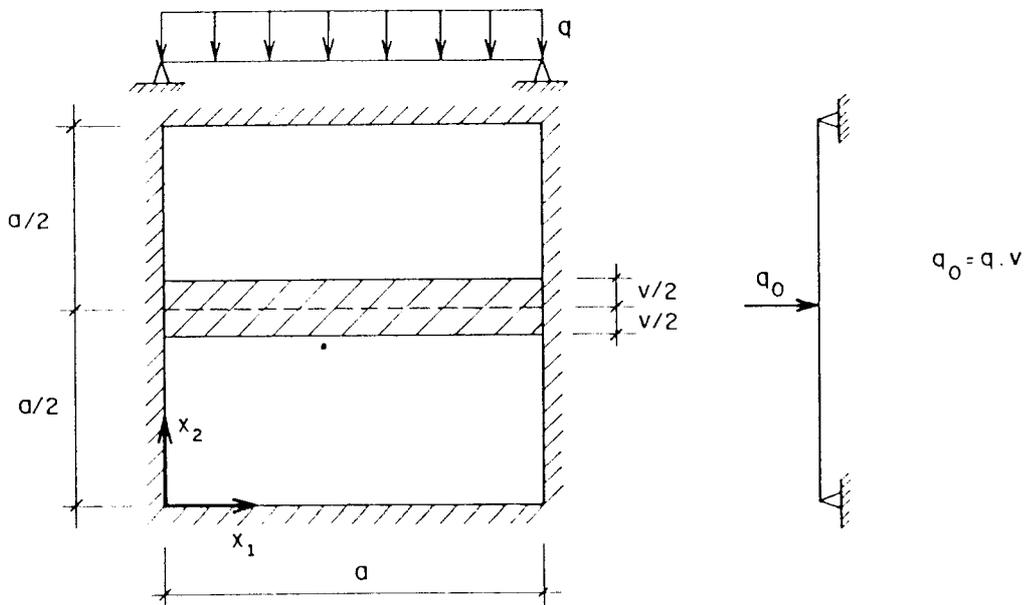


FIGURA 4.11. Placa quadrada apoiada no contorno, com carregamento distribuído em uma linha

No presente trabalho, utiliza-se uma malha com 16 elementos e 36 nós e considera-se que o carregamento está distribuído em uma faixa de pequena largura v , conforme indica-se na Fig. 4.11.

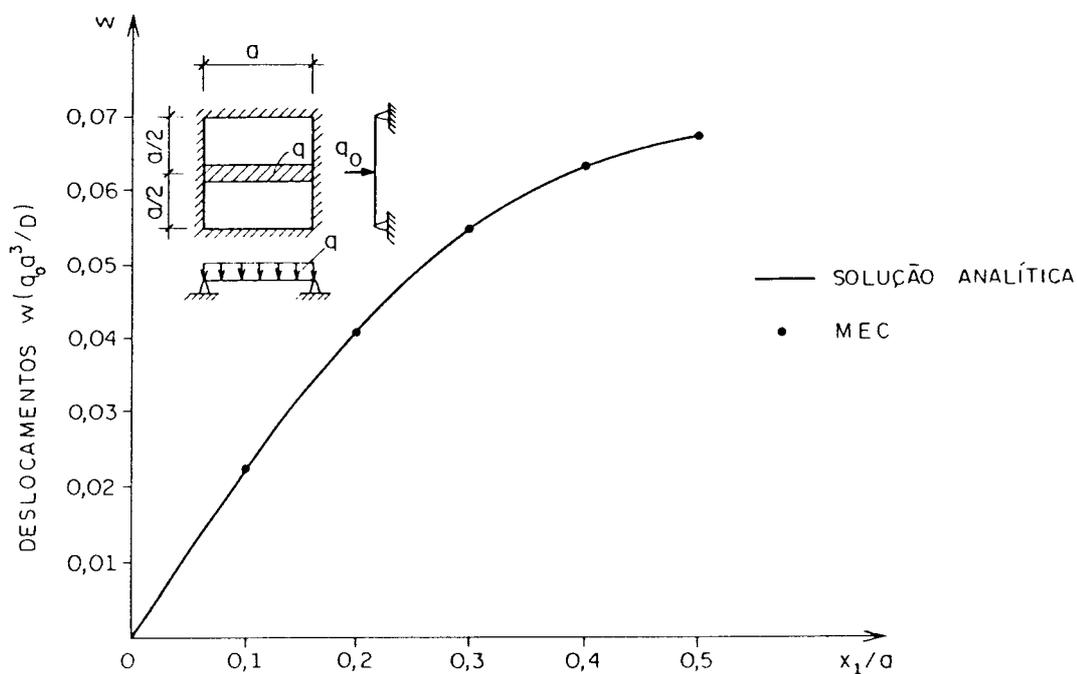


FIGURA 4.12. Deslocamentos transversais ao longo da linha central ($x_2 = a/2$)

Inicialmente, adota-se um valor de v muito pequeno, no caso, $v = a/300$, para simular uma linha de carga. As soluções assim obtidas, para deslocamentos transversais w e momentos fletores M_{11} e M_{22} sob a linha de carga, são apresentadas nas Fig. 4.12 a 4.14, onde pode-se observar a concordância com as soluções analíticas.

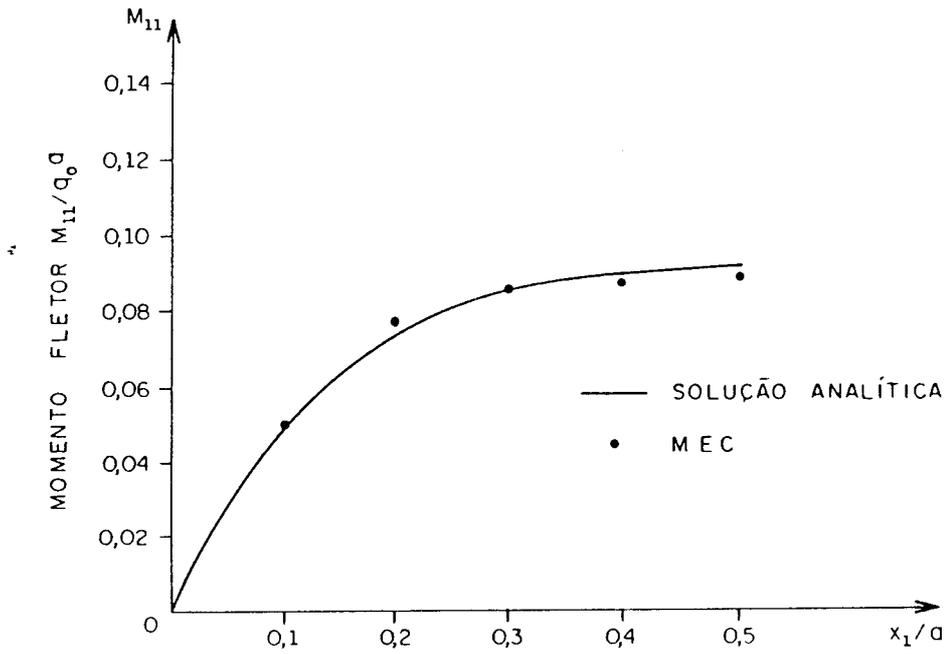


FIGURA 4.13. Momento fletor M_{11} ao longo da linha central ($x_2 = a/2$)

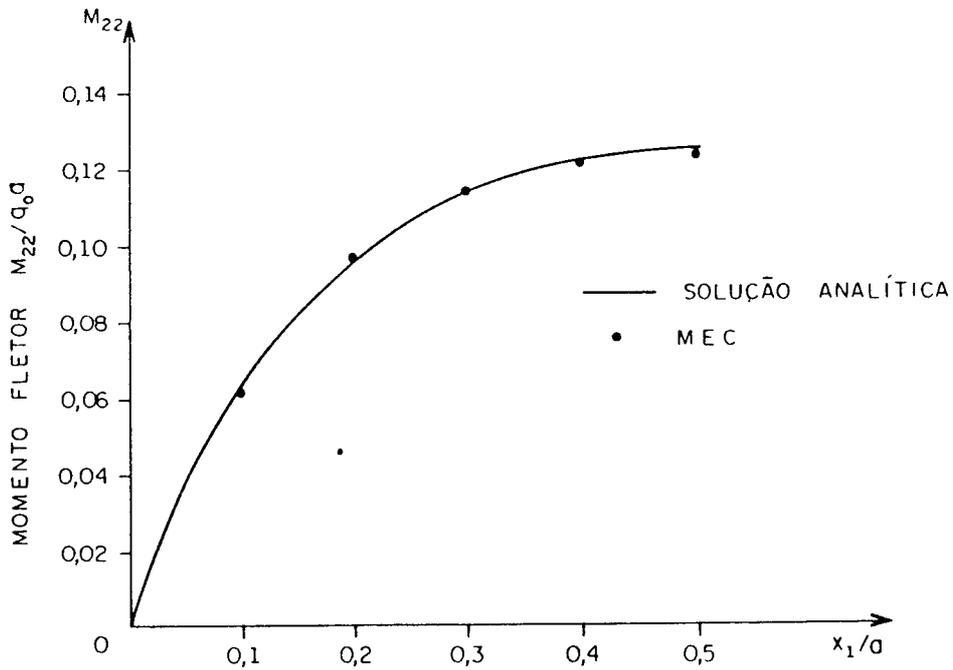


FIGURA 4.14. Momento fletor M_{22} ao longo da linha central ($x_2 = a/2$)

No caso em que o valor de v não é tão pequeno, tem-se a carga distribuída em uma faixa. Assim, no Quadro 4.3, são comparados os valores dos momentos fletores no centro da placa com a solução analítica, para uma relação $v = 0,1a$, onde observa-se um bom resultado.

QUADRO 4.3. Momentos fletores no centro da placa, para a relação $v/a = 0,1$

SOLUÇÃO ($x_1 = x_2 = a/2$)	$M_{11}/q_0 a$	$M_{11}/q_0 a$
TIMOSHENKO	0,088	0,115
Presente Estudo	0,0871	0,1156

4.7.4 Exemplo 4. Placa com dois tipos de carregamento e condições de contorno variadas

Neste exemplo, faz-se a análise da placa retangular mostrada na Fig. 4.15, com um lado engastado, dois lados simplesmente apoiados e um lado livre. O carregamento sobre a placa é composto por uma carga uniformemente distribuída de 1 tf/m^2 e uma carga concentrada de 4 tf no ponto 4. Considera-se o módulo de elasticidade longitudinal do material $E = 1,8 \cdot 10^6 \text{ tf/m}^2$, o coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$ e a espessura da placa $t = 0,18 \text{ m}$.

Este exemplo foi analisado por CALDERÓN (1991) e SILVA (1986), que compararam a solução com os resultados obtidos através do Método dos Elementos Finitos, utilizando-se o programa ICES STRUDL-II, com uma malha de 12 elementos finitos, apresentados no Quadro 4.4.

Apresentam-se, ainda, neste Quadro, os resultados da presente análise, utilizando-se malhas com 16 e 20 elementos de contorno para a discretização, e também as respostas obtidas por CALDERÓN (1991), que utilizou uma discretização de 56 elementos.

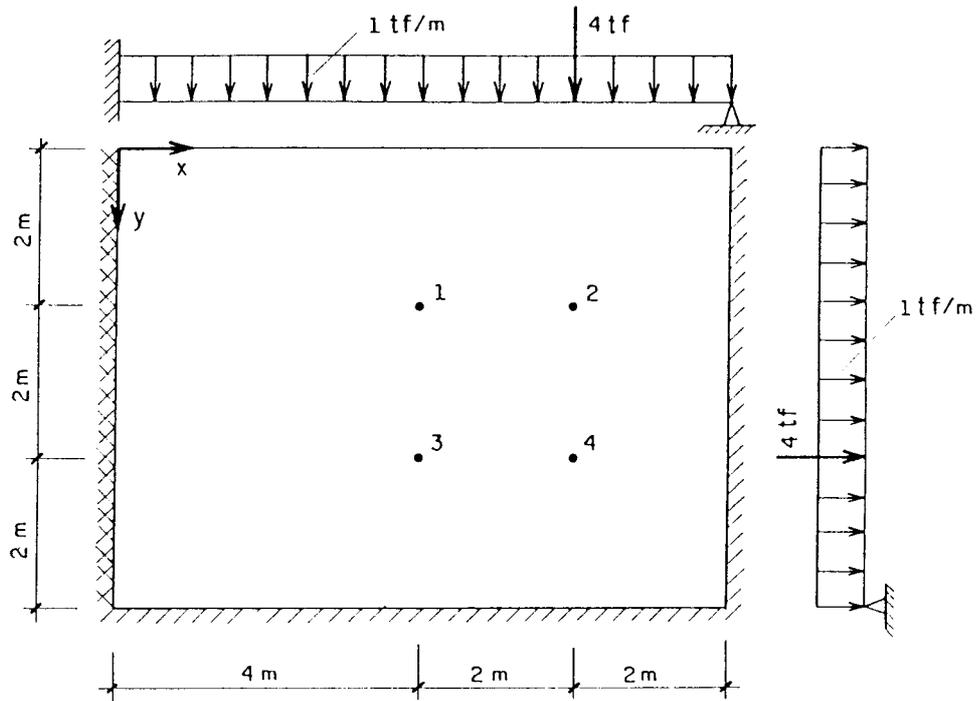


FIGURA 4.15. Placa com condições de carregamento e contorno variados

QUADRO 4.4. Deslocamentos e momentos fletores do exemplo 4

VALORES	M.E.F.	CALDERÓN (56 elem.)	PRESENTE ESTUDO	
			(16 elem.)	(20 elem.)
w_1	1,909	1,936	1,916	1,913
w_2	1,615	1,638	1,621	1,619
w_3	1,195	1,203	1,199	1,197
w_4	1,055	1,062	1,058	1,057
M_{xx1}	3620	3296	3271	3267
M_{yy1}	1530	1115	1173	1170
M_{xy1}	168	203	187	186
M_{xx2}	3738	3420	3395	3392
M_{yy2}	1184	987	1046	1042
M_{xy2}	512	587	562	560
M_{xx3}	2208	2074	2070	2067
M_{yy3}	1970	1614	1635	1635
M_{xy3}	432	432	428	428
M_{xx4}	—	3364	3626	3623
M_{yy4}	—	2833	2817	2816
M_{xy4}	—	993	985	984

Neste Quadro, as unidades dos deslocamentos w estão em cm e as dos momentos fletores, em kgf.m/m.

4.7.5 Exemplo 5. Placa quadrada com carregamento linearmente distribuído

Um outro tipo de carregamento de interesse prático em problemas de placas é o linearmente distribuído. Em vista disto, são apresentados dois problemas com este tipo de carregamento, indicados na Fig. 4.16.

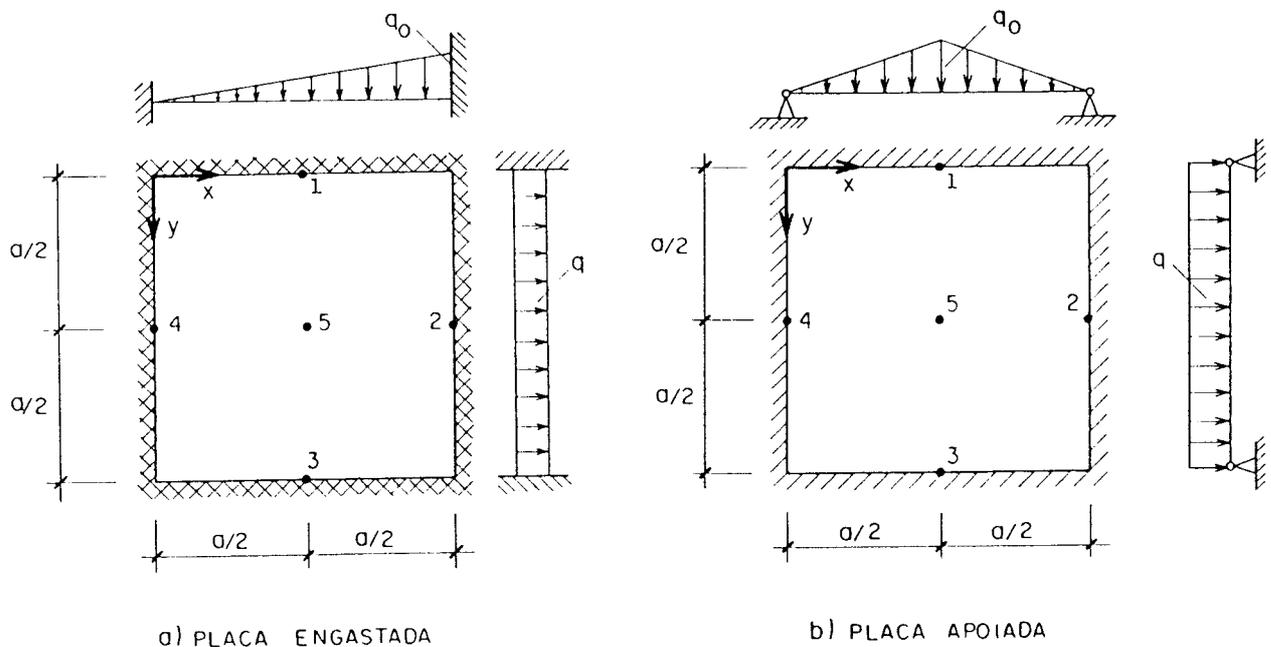


FIGURA 4.16. Placas quadradas com carregamentos linearmente distribuídos

Inicialmente, considera-se a placa engastada nos quatro lados e submetida ao carregamento indicado na Fig. 4.16 - (a). Os resultados obtidos neste trabalho, utilizando-se uma discretização com 16 elementos e 36 nós no contorno, são mostrados no Quadro 4.5, onde são comparados com a análise feita por PAIVA (1987), através de 40 elementos lineares (44 nós), e com a solução analítica (TIMOSHENKO, 1959).

TABELA 4.5. Deslocamentos e momentos fletores para a placa engastada - caso (a)

VALORES	TIMOSHENKO	PAIVA (40 elem.)	PRESENTE ESTUDO (16 elem.)
$w_5 / (q_0 a^4 / D)$	0,00063	0,00063	0,00063
$M_{xx1} / q_0 a^2$	-0,0077	-0,0077	-0,0077
$M_{yy1} / q_0 a^2$	-0,0257	-0,0259	-0,0258
$M_{xx2} / q_0 a^2$	-0,0334	-0,0338	-0,0336
$M_{yy2} / q_0 a^2$	-0,0100	-0,0101	-0,0100
$M_{xx4} / q_0 a^2$	-0,0179	-0,0181	-0,0180
$M_{yy4} / q_0 a^2$	-0,0054	-0,0054	-0,0054
$M_{xx5} / q_0 a^2$	0,0115	0,0115	0,0115
$M_{yy5} / q_0 a^2$	0,0115	0,0115	0,0115

Um segundo caso analisado é o da placa simplesmente apoiada e sujeita ao carregamento linearmente distribuído, com simetria em relação ao centro, conforme mostra a Fig.4.6-(b). Neste caso também utiliza-se uma discretização com 16 elementos e compara-se com a solução dada por TIMOSHENKO (1959), através do Quadro 4.6.

Neste Quadro, são apresentados os valores dos deslocamentos e momentos fletores no centro da placa, e também as cortantes máximas, que ocorrem nos pontos médios dos lados, bem como as reações de canto.

Pode-se observar, nos dois exemplos apresentados, a perfeita concordância dos resultados numéricos obtidos com as soluções analíticas, tanto para os deslocamentos, como para os esforços.

QUADRO 4.6. Deslocamentos e esforços para a placa apoiada caso (b)

VALORES	TIMOSHENKO	PRESENTE ESTUDO
$w_5 / (q_0 a^4 / D)$	0,00263	0,00263
$M_{xx5} / q_0 a^2$ $M_{yy5} / q_0 a^2$	0,0340 0,0317	0,0341 0,0317
$V_{x4} / q_0 a$	0,199	0,196
$V_{y3} / q_0 a$	0,315	0,316
$R_c / q_0 a^2$	0,038	0,035

4.7.6 Exemplo 6. Placa trapezoidal

Neste exemplo, analisa-se a placa trapezoidal apoiada nas duas bases e engastada nos dois lados não paralelos, com carregamento uniformemente distribuído, conforme indica a Fig. 4.17.

Este problema foi analisado por PAIVA (1987), que utilizou uma malha de 40 elementos e 44 nós no contorno, obtendo bons resultados, comparados aos valores obtidos por BARES (1972), através de diferenças finitas.

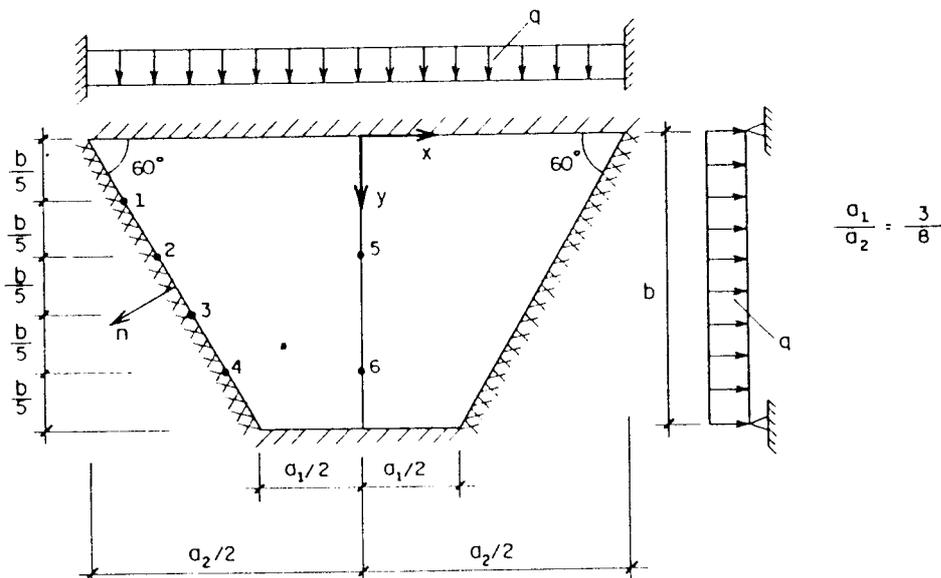


FIGURA 4.17. Placa trapezoidal engastada em dois lados e apoiada nos outros dois

No Quadro 4.7, estão indicados os valores dos momentos fletores (divididos pelo fator qa_2^2), em alguns pontos da placa para a presente análise, na qual se utiliza uma malha de 20 elementos de contorno (44 nós), assim como os resultados das referências citadas.

QUADRO 4.7. Momentos fletores na placa trapezoidal

VALORES $\times 10^2 / (qa_2^2)$	BARES	PAIVA (40 elem.)	PRESENTE ESTUDO (20 elem.)
M_{n1}	-0,4468	-0,5802	-0,5695
M_{n2}	-1,3576	-1,6069	-1,6005
M_{n3}	-2,0370	-2,3660	-2,3207
M_{n4}	-2,0583	-2,660	-2,3780
M_{xx5}	0,9233	0,8962	1,0533
M_{yy5}	1,1522	1,0077	1,1386
M_{xx6}	0,7392	0,7494	0,7412
M_{yy6}	0,4536	0,3292	0,4199

Embora hajam algumas variações nos momentos fletores, deve-se levar em consideração que os resultados são provenientes de análise através de métodos numéricos, com formulações e discretizações diferentes. Portanto, pode-se considerar os resultados bastante satisfatórios para aplicações em problemas práticos. Nota-se também que os resultados apresentados no presente estudo e na análise efetuada por Paiva, para um mesmo número de pontos nodais, são próximos, para os valores dos momentos fletores no contorno. Existem algumas diferenças significativas com a solução obtida por Bares, provavelmente por dificuldades inerentes ao Método das Diferenças Finitas utilizado.

À vista dos exemplos aqui apresentados, e em função de outras análises efetuadas, pode-se afirmar que a formulação proposta é bastante confiável para a aplicação nos problemas usuais de placas.

Outro ponto que deve ser destacado é o fato de se considerar, nesta formulação, as reações nos cantos, ou os respectivos deslocamentos associados, como variáveis do problema,

o que leva a uma facilidade na consideração das condições de contorno nestes pontos.

5 PROBLEMAS DE PLACAS COM CAMPO DE MOMENTOS INICIAIS

5.1 Introdução

Nos Capítulos anteriores, desenvolveu-se o equacionamento da solução de placas devido a um carregamento genérico. Existem, porém, problemas decorrentes de ações devidas a campos de deformações iniciais, tais como o efeito de temperatura ou retração.

A consideração de uma distribuição de temperatura variando ao longo da espessura de uma placa tem sido objeto de estudo de alguns autores, entre eles, DE LEÓN & PARIS (1987) e KAMIYA et al. (1981), utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno.

Neste Capítulo, complementa-se a formulação anteriormente desenvolvida, admitindo-se a ocorrência de momentos iniciais na placa, provenientes de um campo de deformações assumido. Assim sendo, além de se poder considerar problemas com efeitos térmicos, esta formulação tem como principal objetivo a solução de problemas de placas com comportamento não linear do material, quando aplicada com uma técnica incremental e iterativa, a partir de soluções elásticas sucessivas, conforme será visto no próximo Capítulo.

5.2 Equações Integrais com Campo de Momentos Iniciais

5.2.1 Equações Básicas

Supondo-se que exista, além do carregamento, um campo de deformações iniciais, o tensor de deformações pode ser escrito como

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^0 \quad , \quad (5.1)$$

sendo ϵ_{ij} a deformação total, composta pela componente elástica ϵ_{ij}^e , devida ao carregamento, e pela parcela ϵ_{ij}^0 , que representa o campo de deformações iniciais. No caso de placas, esta parcela está associada a um campo de curvaturas iniciais k_{ij}^0 , que pode ser transformado em um campo de momentos iniciais equivalente, utilizando-se as equações de placas desenvolvidas no Capítulo 2.

Assim, através da lei de Hooke, tem-se que:

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij}^e + \frac{2G\nu}{1-\nu} \epsilon_{kk}^e \delta_{ij} \quad (i, j, k=1, 2) \quad (5.2)$$

Substituindo-se (5.1) em (5.2), obtêm-se as tensões, em função das deformações totais e iniciais, com a equação:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e - \sigma_{ij}^0 \quad ; \quad (5.3)$$

aqui, σ_{ij}^e são as tensões devidas às deformações totais, supondo a relação elástica, e σ_{ij}^0 , as tensões correspondentes às deformações iniciais. Portanto, tem-se:

$$\sigma_{ij}^e = 2G\epsilon_{ij}^e + \frac{2G\nu}{1-\nu} \epsilon_{kk}^e \delta_{ij} \quad (5.4)$$

$$\sigma_{ij}^0 = 2G\epsilon_{ij}^0 + \frac{2G\nu}{1-\nu} \epsilon_{kk}^0 \delta_{ij} \quad (5.5)$$

Como as deformações estão relacionadas às curvaturas $w_{,ij}$, conforme a equação (2.3), e tendo em vista a integração destas tensões ao longo da espessura da placa, pode-se

ter a seguinte relação com os momentos:

$$M_{ij} = M_{ij}^e - M_{ij}^0 \quad (i, j=1,2) \quad , \quad (5.6)$$

onde M_{ij}^e e M_{ij}^0 são os momentos resultantes da integração das tensões σ_{ij}^e e σ_{ij}^0 , respectivamente, ao longo da espessura da placa.

Então, os momentos podem ser expressos por:

$$M_{ij} = -D \left[\nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij} \right] - M_{ij}^0 \quad (i, j, k=1,2) \quad , \quad (5.7)$$

sendo os momentos M_{ij}^0 definidos conforme a equação (2.6):

$$M_{ij}^0 = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{ij}^0 x_3 dx_3 \quad (i, j=1,2) \quad (5.8)$$

A partir da equação de equilíbrio (2.10), podem-se obter os esforços cortantes, com a substituição da equação (5.7), isto é:

$$q_j = -D w_{,kkj} - M_{ij,i}^0 \quad (i, j, k=1,2) \quad (5.9)$$

Substituindo-se a equação (5.7) na equação de equilíbrio (2.12), envolvendo os momentos, chega-se à equação diferencial de placas, envolvendo os deslocamentos transversais e os momentos iniciais, de forma semelhante a (2.13), dada por:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{1}{D} (g - M_{ij,ij}^0) \quad (5.10)$$

5.2.2 Equações Integrais para Deslocamentos

As equações integrais para deslocamentos em pontos do domínio ou do contorno da placa podem ser obtidas a partir do teorema da reciprocidade de Betti, de forma semelhante ao item 3.2 do Capítulo 3. Isto é, admitindo-se a placa de domínio finito submetida a dois carregamentos não simultâneos g e g^* , com tensões

e deformações associadas σ_{ij}^e , σ_{ij}^* , ϵ_{ij} e ϵ_{ij}^* , respectivamente, tem-se que:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij}^e \epsilon_{ij}^* dV \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (5.11)$$

Quando as tensões relativas à direção de x_3 são desprezadas e efetua-se a integração ao longo da espessura da placa, a equação (5.11) fica expressa em função dos momentos e das curvaturas, da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (M_{ij}^* w_{,ij}) d\Omega = \int_{\Omega} (M_{ij}^e w_{,ij}^*) d\Omega \quad (i, j=1, 2) \quad (5.12)$$

Substituindo-se o valor de M_{ij}^e , dado por (5.6), na equação (5.12), tem-se:

$$\int_{\Omega} (M_{ij}^* w_{,ij}) d\Omega = \int_{\Omega} (M_{ij} + M_{ij}^0) w_{,ij}^* d\Omega \quad (i, j=1, 2) \quad (5.13)$$

Desenvolvendo-se os dois membros desta equação, através de integração por partes, semelhantemente às equações (3.3), (3.14) e (3.15), obtém-se a equação integral do deslocamento de um ponto q do domínio da placa:

$$\begin{aligned} w(q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) + \\ - \int_{\Omega} M_{ij}^0(p) w_{,ij}^*(q, p) d\Omega(p) \end{aligned} \quad (5.14)$$

De forma análoga ao item 3.3, pode-se determinar a equação integral de deslocamento para um ponto Q do contorno da placa, dada por:

$$\begin{aligned}
& K(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q,P)w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d\Gamma(P) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(P)w^*(Q,p)d\Omega_g(p) + \\
& - \int_{\Omega} M_{ij}^0(p)w_{,ij}^*(Q,p)d\Omega(p) \quad , \quad (5.15)
\end{aligned}$$

onde

$$K(Q) = \beta_c / 2\pi \quad , \quad (5.16)$$

sendo β_c o ângulo interno do canto da placa no ponto Q.

Comparando-se as equações (5.14) e (5.15) com as equações (3.19) e (3.31), respectivamente, nota-se que a única diferença entre elas é a integral de domínio envolvendo M_{ij}^0 e as derivadas segundas da solução fundamental, que aparecem quando se considera o efeito dos momentos iniciais. É esta integral de domínio que merecerá destaque na formulação desenvolvida neste Capítulo.

De forma geral, esta integral pode ser escrita:

$$I^0 = \int_{\Omega} M_{k\ell}^0(p)w_{,k\ell}^*(q,p)d\Omega(p) \quad (k, \ell=1,2) \quad , \quad (5.17.a)$$

ou, ainda,

$$I^0 = \int_{\Omega} \left[M_{11}^0 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2}(q,p) + 2M_{12}^0 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q,p) + M_{22}^0 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2}(q,p) \right] d\Omega \quad (5.17.b)$$

Para os casos em que a distribuição de momentos iniciais $M_{k\ell}^0$ é conhecida, podem-se transformar estas integrais de

domínio em integrais equivalentes no contorno, de maneira semelhante às integrais de carregamento, de acordo com o efetuado no item 3.4.

Porém, nos casos em que os momentos iniciais somente são conhecidos em pontos discretos do domínio, o que ocorre na análise de problemas não lineares, é conveniente que o domínio seja discretizado para o cálculo destas integrais, conforme ver-se-á a seguir.

5.2.3 Equações Integrais para Esforços nos Pontos Internos

Para o cálculo das tensões ou esforços nos pontos internos, é necessária a obtenção das curvaturas nestes pontos, segundo as direções x_1 e x_2 de um sistema cartesiano ortogonal, com origem no ponto q . Portanto, derivando-se os deslocamentos dados por (5.14), chega-se à representação integral das curvaturas $w_{,ij}(q)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_i \partial x_j} + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) w_c(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) + \right. \\ \left. - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right] d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P) \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) + \\ + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) d\Omega_g(p) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} M_{k\ell}^0(p) w_{,k\ell}^*(q, p) d\Omega \\ (i, j, k, \ell = 1, 2) \quad , \quad (5.18) \end{aligned}$$

onde todas as derivadas das soluções fundamentais, definidas no ponto q , são dadas pelas equações (4.91) a (4.109), com exceção do último termo, que representa as derivadas da integral I^0 , dada em (5.17).

Atenção especial deve ser dada à obtenção da segunda derivada do termo em $w_{,k\ell}^*$, contida no integrando, uma vez que há singularidades do tipo $1/r$. Note que a expressão de $w_{,k\ell}^*$ é:

$$w_{,k\ell}^*(q, P) = \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_\ell}(q, P) = \frac{1}{4\pi D} \left(r_{,k} r_{,\ell} + \delta_{k\ell} \ln r \right) \quad (5.19)$$

Portanto, para o cálculo desta parcela, proveniente da influência de momentos iniciais na determinação das curvaturas, deve-se seguir o procedimento apresentado por MIKLIN (1962), adotado por BUI (1978), TELLES & BREBBIA (1980) E RIBEIRO (1992), o qual será exposto a seguir.

Denominando-se as derivadas de I^0 , em relação às direções x_1 e x_2 , calculadas no ponto q , por:

$$I_{,ij}^0(q) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} w_{,k\ell}^*(q, p) M_{k\ell}^0(p) d\Omega(p) \quad , \quad (5.20)$$

observa-se que a primeira derivada pode ser calculada de forma normal no integrando, pois não ocorrem singularidades fortes; assim, tomando-se a derivada em relação a x_i , tem-se:

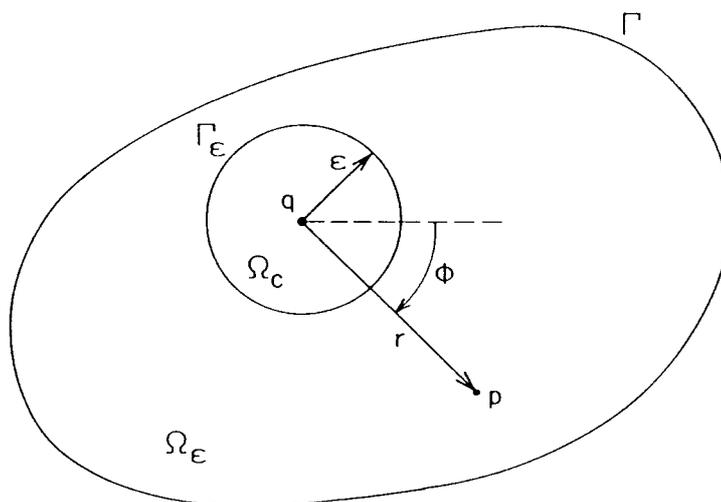
$$I_{,ij}^0(q) = \frac{\partial}{\partial x_j(q)} \int_{\Omega} w_{,k\ell i}^*(q, p) M_{k\ell}^0(p) d\Omega(p) \quad , \quad (5.21)$$

sendo:

$$w_{,k\ell i}^*(q, p) = \frac{\partial^3 w^*}{\partial x_k \partial x_\ell \partial x_i(q)}(q, p) = -\frac{1}{4\pi D r} \left[\delta_{ik} r_{,\ell} + \delta_{\ell i} r_{,k} + \delta_{k\ell} r_{,i} - 2r_{,k} r_{,\ell} r_{,i} \right] \quad (5.22)$$

Chamando-se de $V(q)$ a integral indicada em (5.21), a qual possui singularidade no domínio Ω , deve-se verificar a possibilidade da diferenciação do núcleo desta integral.

Logo, supõe-se que, do domínio Ω , é retirado um domínio circular Ω_ϵ , de pequeno raio ϵ , com origem no ponto fonte q , definindo-se o domínio $\Omega_\epsilon = \Omega - \Omega_\epsilon$, conforme a Fig. 5.1.

FIGURA 5.1. Domínios Ω_ϵ e Ω_c

Pode-se demonstrar que a parcela $V_c(q)$ da integral $V(q)$ no domínio Ω_c , dada por:

$$V_c(q) = \int_{\Omega_c} w_{,k\ell i}^*(q,p) M_{k\ell}^0(p) d\Omega_c(p) \quad , \quad (5.23)$$

onde há singularidade, é de ordem ϵ .

Para tanto, assume-se que $M_{k\ell}^0(p)$ e suas primeiras e segundas derivadas são contínuas na vizinhança do ponto q . Expandindo-se a função $M_{k\ell}^0(p)$, em torno do ponto q , através da série de Taylor:

$$M_{k\ell}^0(p) = M_{k\ell}^0(q) + [x_m(p) - x_m(q)] M_{k\ell,m}^0(q) + \dots \quad (k, \ell, m=1, 2)$$

e substituindo-a em $V_c(q)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
V_c(q) &= M_{k\ell}^0(q) \int_{\Omega_c} w_{,k\ell i}^*(q,p) d\Omega_c(p) + \\
&+ M_{k\ell,m}^0(q) \int_{\Omega_c} [x_m(p) - x_m(q)] w_{,k\ell i}^*(q,p) d\Omega_c(p) \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Utilizando-se o valor de $w_{,k\ell i}^*$, dado em (5.22), considerando-se que, no domínio Ω_c , o valor de r coincide com ϵ e que suas derivadas dependem apenas do ângulo ϕ , e levando-se em conta, ainda, que:

$$d\Omega_c = r dr d\phi \quad (5.25)$$

e

$$x_m(p) - x_m(q) = r r_{,m} \quad , \quad (5.26)$$

chega-se aos resultados:

$$\int_{\Omega_c} w_{,k\ell i}^*(q,p) d\Omega_c(p) = 0 \quad (5.27)$$

e

$$\int_{\Omega_c} [x_m(p) - x_m(q)] w_{,k\ell i}^*(q,p) d\Omega_c(p) = -K\epsilon^2 \quad (5.28)$$

Nesta última equação, K é uma constante, dada por:

$$K = \frac{1}{16D} \left(\delta_{ik} \delta_{\ell m} + \delta_{i\ell} \delta_{km} + \delta_{k\ell} \delta_{im} \right) \quad , \quad (5.29)$$

a qual não depende do ponto q . Substituindo-se (5.27) e (5.28) em (5.24), obtém-se:

$$V_c(q) = -K\epsilon^2 M_{k\ell,m}^0(q) \quad , \quad (5.30)$$

de onde se conclui que a derivada

$$\frac{\partial V_c(q)}{\partial x_j(q)} = -K\epsilon^2 M_{k\ell, mj}^0(q) \quad (5.31)$$

é também de ordem ϵ^2 e, portanto, tende a zero, quando toma-se o limite em que ϵ tende a zero.

Assim, a derivada apropriada de $V(q)$ em relação a x_j , dada por (5.21), pode ser escrita na forma:

$$I_{ij}^0(q) = \frac{\partial V(q)}{\partial x_j(q)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial x_j(q)} \int_{\Omega_\epsilon} w_{k\ell i}^*(q, p) M_{k\ell}^0(p) d\Omega(p) \right] \quad (5.32)$$

Pode-se demonstrar que, neste caso, conforme MIKHLIN (1962) e BREBBIA et al (1984), aplicando-se a regra de Leibnitz para diferenciação de integrais, obtém-se:

$$I_{ij}^0(q) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j(q)} w_{k\ell i}^*(q, p) M_{k\ell}^0(p) d\Omega(p) + \\ - M_{k\ell}^0(q) \int_{\Gamma_\epsilon} w_{k\ell i}^*(q, p) r_{,j} d\Gamma_\epsilon, \quad (5.33)$$

onde a primeira integral é interpretada no sentido do valor principal de Cauchy e a segunda, aparece com a transformação da integral do círculo de raio ϵ no contorno Γ_ϵ , indicado na Fig. 5.1; $r_{,j}$ é a derivada de r em relação à coordenada x_j do ponto de deslocamento p .

Esta integral sobre Γ_ϵ pode ser facilmente obtida, pois, sendo $d\Gamma_\epsilon = \epsilon d\phi$, fica-se apenas com valores em função de ϕ , ou seja:

$$\int_{\Gamma_\epsilon} w_{k\ell i}^* r_{,j} d\Gamma_\epsilon = \int_{\phi=0}^{2\pi} \bar{w}_{k\ell i}^* r_{,j} d\phi, \quad (5.34)$$

sendo

$$\bar{w}_{k\ell i}^*(q, p) = \epsilon w_{k\ell i}^*(q, p) \quad (5.35)$$

Substituindo-se as equações (5.22), com $r = \epsilon$, e (5.35) em (5.34), tem-se que:

$$\int_{\Gamma_\epsilon} w_{,k\ell i}^* r_{,j} d\Gamma_\epsilon = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4\pi D} (\delta_{ik} r_{,l} + \delta_{li} r_{,k} + \delta_{kl} r_{,i} - 2r_{,k} r_{,l} r_{,i}) r_{,j} d\phi, \quad (5.36)$$

que resulta em:

$$\int_{\Gamma_\epsilon} w_{,k\ell i}^* r_{,j} d\Gamma_\epsilon = -\frac{1}{8D} (\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{il} \delta_{kj} + \delta_{kl} \delta_{ij}) \quad (5.37)$$

A substituição de (5.37) em (5.33) e o cálculo da derivada da primeira integral desta equação em relação a x_j levam, finalmente, a:

$$I_{,ij}^0(q) = \int_{\Omega} \bar{e}_{ijk\ell}^*(q,p) M_{k\ell}^0(p) d\Omega(p) + \bar{g}_{ijk\ell}(q) M_{k\ell}^0(q), \quad (5.38)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{e}_{ijk\ell}^*(q,p) = w_{,k\ell ij}^*(q,p) = & -\frac{1}{4\pi D r^2} \left[2(\delta_{ik} r_{,l} r_{,j} + \delta_{il} r_{,k} r_{,j} + \right. \\ & + \delta_{kl} r_{,i} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} r_{,l} + \delta_{ij} r_{,k} r_{,l} + \delta_{lj} r_{,k} r_{,i}) + \\ & \left. - 8r_{,k} r_{,l} r_{,i} r_{,j} - (\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{il} \delta_{kj} + \delta_{kl} \delta_{ij}) \right] \end{aligned} \quad (5.39)$$

e

$$\bar{g}_{ijk\ell}(q) = \frac{1}{8D} (\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{il} \delta_{kj} + \delta_{kl} \delta_{ij}) \quad (5.40)$$

A partir das curvaturas, é possível obter-se a representação integral para os esforços, através das equações (5.7) e (5.9). Logo, considerando-se a equação (5.38), substituindo-se (5.18) em (5.7) e reagrupando-se os termos, obtém-se a equação dos momentos para um ponto q no interior da placa, dada por:

$$\begin{aligned}
M_{ij}(q) = & - \int_{\Gamma} \left[V_{n_{ij}}^*(q, P) w(P) - M_{n_{ij}}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
& - \sum_{c=1}^N R_{c_{ij}}^*(q, P) w_c(P) + \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w_{ij}^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w_{ij}^*}{\partial n}(q, P) \right] d\Gamma(P) + \\
& + \sum_{c=1}^N R_c(P) w_{c_{ij}}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w_{ij}^*(q, p) d\Omega_g(p) + \\
& - \int_{\Omega} e_{ijkl}^*(q, p) M_{kl}^0(p) d\Omega(p) - g_{ijkl}(q) M_{kl}^0(q) - M_{ij}^0(q)
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Nesta equação, todos os valores fundamentais estão definidos nas equações (4.79) a (4.83); as parcelas relativas aos momentos iniciais são dadas por:

$$e_{ijkl}^*(q, p) = -D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w_{kl}^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, p) + (1-\nu) \frac{\partial^2 w_{kl}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) \right] \tag{5.42}$$

e

$$g_{ijkl}(q) = -\frac{1}{8} \left[(1-\nu) (\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{il}) + (1+3\nu) \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \tag{5.43}$$

De maneira análoga, a partir das equações (5.9) e (5.18), pode-se obter a representação integral para a cortante $q_{\beta}(q)$, em relação a uma direção x_{β} ($\beta = 1, 2$), para um ponto interno q , na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
q_{\beta}^0(q) &= -\int_{\Gamma} \left[V_{n\beta}^*(q, P) w(P) - M_{n\beta}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
&- \sum_{c=1}^N R_{c\beta}^*(q, P) w_c(P) + \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w_{\beta}^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w_{\beta}^*}{\partial n}(q, P) \right] d\Gamma(P) + \\
&+ \sum_{c=1}^N R_c(P) w_{c\beta}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w_{\beta}^*(q, p) d\Omega_g(p) - I_{\beta}^0(q) , \quad (5.44)
\end{aligned}$$

onde os valores fundamentais estão definidos nas equações (4.84) a (4.88); aqui, aparece o termo $I_{\beta}^0(q)$, proveniente do campo de momentos M_{k1}^0 , semelhante à equação de momentos, o qual é expresso por:

$$I_{\beta}^0(q) = -D \frac{\partial}{\partial x_{\beta}}(q) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w_{,k\ell}^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, p) M_{k\ell}^0(p) d\Omega(p) - q_{\beta}^0(q) \quad (5.45)$$

sendo $q_{\beta}^0(q)$ a força cortante no ponto q , devida apenas aos momentos M_{ij}^0 , isto é:

$$q_{\beta}^0(q) = M_{i\beta, i}^0 \quad (i, \beta=1, 2) , \quad (5.46)$$

Novamente, deve-se dar atenção especial à determinação da derivada da integral que figura na equação (5.45), em virtude do tipo de singularidade que aparece no integrando.

Levando-se em conta as derivadas segundas expressas em (5.20), juntamente com seus resultados obtidos em (5.38), pode-se escrever a equação (5.45), explicitamente, na forma:

$$\begin{aligned}
I_{\beta}^0(q) = & -D \frac{\partial}{\partial x_{\beta}}(q) \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 w_{,11}^*}{\partial x_m \partial x_m}(q,p) M_{11}^0(p) + \right. \\
& + 2 \frac{\partial^2 w_{,12}^*}{\partial x_m \partial x_m}(q,p) M_{12}^0(p) + \left. \frac{\partial^2 w_{,22}^*}{\partial x_m \partial x_m}(q,p) M_{22}^0(p) \right] d\Omega(p) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}}(q) \left[\frac{1}{8D} \left(4M_{11}^0(q) + 4M_{22}^0(q) \right) \right] - q_{\beta}^0(q) \quad (5.47)
\end{aligned}$$

Como os dois últimos termos desta equação envolvem apenas as derivadas de M_{ij}^0 em relação às coordenadas x_{β} , no ponto q , estes valores são agrupados convenientemente e denotados por $\bar{q}_{\beta}^0(q)$. Para a determinação das derivadas da integral que aparecem nesta equação, utiliza-se o mesmo procedimento descrito para os momentos. Assim, do domínio Ω é retirado um domínio circular Ω_c , de pequeno raio ϵ , definindo-se o domínio remanescente Ω_{ϵ} , conforme a Fig. 5.1.

Portanto, a integral no domínio Ω_c , proveniente de (5.47), a menos da constante D , será:

$$V'_c(q) = \int_{\Omega_c} w_{,mmk\ell}^*(q,p) M_{k\ell}^0(p) d\Omega_c(p) \quad (5.48)$$

De forma análoga, expandindo-se a função $M_{k1}^0(p)$ em torno da vizinhança do ponto q , chega-se a:

$$\begin{aligned}
V'_c(q) = & M_{k\ell}^0(q) \int_{\Omega_c} w_{,mmk\ell}^*(q,p) d\Omega_c(p) + \\
& + M_{k\ell,j}^0(q) \int_{\Omega} [x_j(p) - x_j(q)] w_{,mmk\ell}^*(q,p) d\Omega_c(p) \quad (5.49)
\end{aligned}$$

Substituindo-se os valores das derivadas da solução fundamental em (5.49), considerando-se que, no domínio Ω_c , o valor de r é igual a ϵ , e, tendo em vista as equações (5.25) a (5.26), obtêm-se:

$$\int_{\Omega_c} w'_{,mmk\ell}^*(q,p) d\Omega_c(p) = 0 \quad (5.50)$$

e

$$\int_{\Omega_c} [x_j(p) - x_j(q)] w'_{,mmk\ell}^*(q,p) d\Omega_c(p) = 0 \quad , \quad (5.51)$$

uma vez que as funções envolvidas dependem apenas do ângulo ϕ (Fig. 5.1) e, neste caso, quando são integradas no domínio Ω_c , resultam em valores nulos. Portanto, tem-se:

$$V'_c(q) = 0 \quad (5.52)$$

Logo, quando se calcula o termo $I_\beta^0(q)$, dado em (5.47), a partir de (5.52), obtém-se:

$$I_\beta^0(q) = -D \frac{\partial V'_c(q)}{\partial x_\beta(q)} - \bar{q}_\beta^0(q) \quad , \quad (5.53)$$

ou seja,

$$I_\beta^0 = -D \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial x_\beta(q)} \int_{\Omega_\epsilon} w'_{,mmk\ell}^*(q,p) M_{k\ell}^0(p) d\Omega_\epsilon(p) \right] - \bar{q}_\beta^0(q) \quad (5.54)$$

Quando se aplica a regra de Leibnitz a esta última equação, esta resulta apenas na integral do domínio total Ω , isto é:

$$I_\beta^0(q) = -D \int_{\Omega} \frac{\partial w'_{,mmk\ell}^*}{\partial x_\beta(q)}(q,p) M_{k\ell}^0(p) d\Omega_c(p) - \bar{q}_\beta^0(q) \quad (5.55)$$

Logo, substituindo-se (5.55) em (5.44), tem-se a equação integral para as forças cortantes em um ponto q no interior da placa:

$$\begin{aligned}
q_{\beta}(q) = & - \int_{\Gamma} \left[V_{n\beta}^*(q, P) w(P) - M_{n\beta}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
& - \sum_{c=1}^N R_{c\beta}^*(q, P) w_c(P) + \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w_{\beta}^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w_{\beta}^*}{\partial n}(q, P) \right] d\Gamma(P) + \\
& + \sum_{c=1}^N R_c(P) w_{c\beta}^*(q, P) + \int_{\Gamma_g} g(p) w_{\beta}^*(q, p) d\Omega_g(p) + \\
& - \int_{\Omega} e_{\beta k \ell}^*(q, p) M_{k \ell}^0(p) d\Omega(p) - \bar{q}_{\beta}^0(q) , \tag{5.56}
\end{aligned}$$

onde:

$$e_{\beta k \ell}^*(q, p) = -D \frac{\partial w_{, m m k \ell}^*}{\partial x_{\beta}(q)}(q, p) \tag{5.57}$$

e

$$\bar{q}_{\beta}^0(q) = \frac{1}{2D} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}(q)} \left[M_{11}^0(q) + M_{22}^0(q) \right] - q_{\beta}^0(q) \tag{5.58}$$

5.3 Discretização das Equações Integrais

Para a solução de problemas práticos envolvendo a formulação desenvolvida, é necessária a transformação das equações integrais em equações algébricas. De acordo com o que foi visto na Capítulo 4, esta transformação é obtida através da discretização do contorno da placa, que é dividido em elementos, sobre os quais as variáveis do problema são aproximadas.

Analogamente, as integrais de domínio que aparecem nos problemas com campos de momentos iniciais podem ser computadas numericamente com a divisão do domínio em pequenas regiões, ou células, nas quais os momentos iniciais são aproximados por funções interpoladoras. Obtêm-se, então, as integrais das funções envolvidas sobre cada elemento de área.

Os deslocamentos de um ponto Q situado no contorno estão relacionados a todos os deslocamentos e esforços através da equação (5.15). Nesta equação, o deslocamento no ponto Q sofre a influência, também, dos momentos iniciais, através da integral I^0 , indicada em (5.17).

A equação (5.15) pode ser representada, de forma semelhante à equação (4.14), em função dos vetores de deslocamentos u e esforços p , assim como os respectivos valores fundamentais \tilde{u}^* e \tilde{p}^* , definidos nas equações (4.15) a (4.21). Assim, a equação de deslocamento fica expressa por:

$$\begin{aligned} C(Q)u(Q) &= \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{p}^*(Q,P) \tilde{u}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^N R_{c_i}^*(Q,P) w_{c_i}(P) = \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{u}^*(Q,P) \tilde{p}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^N w_{c_i}^*(Q,P) R_{c_i}(P) + \\ &+ \int_{\tilde{\Omega}_g} g(p) u_g^*(Q,p) d\Omega_g - \int_{\tilde{\Omega}} k^*(Q,p) M^0(p) d\Omega(p) , \quad (5.59) \end{aligned}$$

onde \tilde{k}^* é a matriz formada pelas "curvaturas" calculadas pela solução fundamental, ou seja:

$$\tilde{k}^*(Q,p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2}(Q,p) & 2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2}(Q,p) & \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2}(Q,p) \end{bmatrix}; \quad (5.60)$$

$M^0(p)$ é o vetor que contém os momentos iniciais no ponto p , dado por:

$$\tilde{M}^0(p) = \begin{Bmatrix} M_{11}^0(p) \\ M_{12}^0(p) \\ M_{22}^0(p) \end{Bmatrix} \quad (5.61)$$

A discretização da equação (5.59) é obtida através da divisão do contorno em N_e elementos de comprimento Γ_j , onde as

variáveis são aproximadas por funções interpoladoras Φ , em termos dos valores nodais $U_j^{(N)}$ e $P_j^{(N)}$ do elemento Γ_j , conforme as equações (4.8) e (4.9):

$$u(P) = \Phi^T(P) U^{(N)} \tag{5.62.a}$$

e

$$p(P) = \Phi^T(P) P^{(N)} \tag{5.62.b}$$

sendo Φ dado em (4.10) e (4.12).

Além disso, para o cálculo da equação envolvendo os momentos M^0 , o domínio Ω deve ser dividido em N_{ce} células, conforme mostra a Fig. 5.2 - (a). Assim, os valores dos momentos iniciais, que, geralmente, são conhecidos em apenas alguns pontos discretos, são aproximados por funções interpoladoras ψ , definidas sobre cada célula de domínio Ω_m , ou seja:

$$M^0(p) = \psi^T(p) M^0(N) \tag{5.63}$$

Nesta equação, $M^0(N)$ é o vetor que contém os valores conhecidos dos momentos iniciais em pontos particulares, ou pontos nodais definidos em Ω_m , e $M^0(p)$ é o vetor dos momentos iniciais em qualquer ponto p da célula.

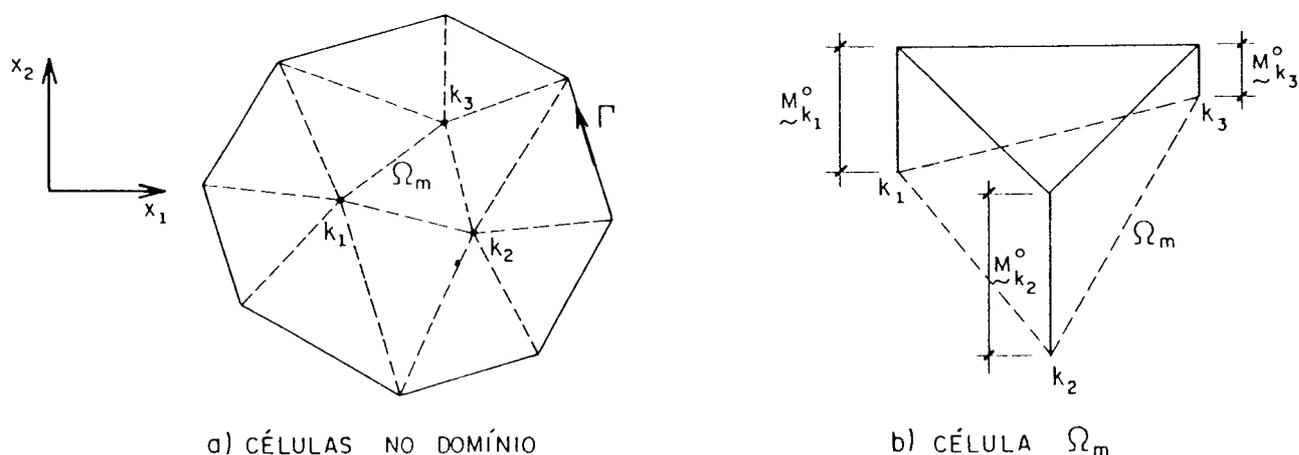


FIGURA 5.2. Divisão do domínio em células triangulares e a variação dos momentos iniciais em uma célula

Neste trabalho, adotam-se células de forma triangular, com variação linear dos momentos M^0 sobre as mesmas. Portanto, cada célula é definida pelos vértices k_1 , k_2 e k_3 , nos quais são conhecidos os valores de M^0 , conforme está esquematizado na Fig. 5.2 - (b).

Portanto, para o contorno Γ discretizado em N_e elementos, com o domínio dividido em N_{ce} células, utilizando-se as equações (5.62) e (5.63), pode-se escrever a equação (5.59) na forma:

$$\begin{aligned}
 C(Q)u(Q) + \sum_{j=1}^{N_e} \left[\int_{\Gamma_j} p^*(Q,P) \phi^T(P) d\Gamma_j(P) \right] U_j^{(N)} + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q,P) w_{c_i}(P) = \\
 = \sum_{j=1}^{N_e} \left[\int_{\Gamma_j} u^*(Q,P) \phi^T(P) d\Gamma_j(P) \right] P_j^{(N)} + \sum_{i=1}^{N_c} w_{c_i}^*(Q,P) R_{c_i}(P) + \\
 + \int_{\Omega_g} g(p) u_g^*(Q,p) d\Omega_g(p) + \sum_{m=1}^{N_{ce}} \left[- \int_{\Omega_m} k^*(Q,p) \psi^T(p) d\Omega_m(p) \right] M_m^0^{(N)} \quad (5.64)
 \end{aligned}$$

Assim, as integrais de contorno da equação (5.64) que multiplicam os valores nodais das variáveis são conhecidas para cada elemento e estão indicadas nas equações (4.23) e (4.24) por $h^j(Q)$ e $g^j(Q)$. A integral de domínio correspondente ao carregamento $g(p)$ é obtida com a transformação em uma integral de contorno e também já é conhecida, através da equação (4.25), sendo representada por $t(Q)$.

Como será visto no próximo item, as integrais sobre cada célula Ω_m também envolvem apenas valores conhecidos e podem ser determinadas, sendo, aqui, representadas por:

$$e_m^m(Q) = - \int_{\Omega_m} k^*(Q,p) \psi^T(p) d\Omega_m(p) \quad (5.65)$$

Então, a equação (5.64) pode ser reescrita como uma função de valores nodais, isto é:

$$\begin{aligned}
c(Q)u(Q) + \sum_{j=1}^{N_e} h^j(Q) U_j^{(N)} + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q, P) w_{c_i}(P) = \\
= \sum_{j=1}^{N_e} g^j(Q) P_j^{(N)} + \sum_{i=1}^{N_c} w_{c_i}^*(Q, P) R_{c_i}(P) + t(Q) + \sum_{m=1}^{N_{ce}} e^m(Q) M_m^0(N)
\end{aligned} \quad (5.66)$$

Após a soma das influências de $h^j(Q)$ e $g^j(Q)$ de todos os elementos do contorno e da soma de $e^m(Q)$ para todas as células do domínio, agrupando-se convenientemente estes coeficientes, a equação (5.66) pode escrita matricialmente:

$$c(Q)u(Q) + \hat{H}(Q)U + H_c(Q)w_c = G(Q)P + G_c(Q)R_c + T(Q) + E(Q)M^0, \quad (5.67)$$

onde U e P são os vetores que contêm os deslocamentos e esforços nodais do contorno e w_c e R_c contêm os deslocamentos e reações dos cantos. O vetor M^0 contém os momentos iniciais em todos os pontos nodais e do domínio e os vetores $\hat{H}(Q)$, $G(Q)$, $H_c(Q)$, $G_c(Q)$ e $T(Q)$ são provenientes das integrais sobre os elementos do contorno, indicadas em (4.23), (4.24) e (4.25). O vetor $E(Q)$ contém os coeficientes que consideram a influência do campo de momentos iniciais sobre os valores dos deslocamentos no contorno, os quais são obtidos da equação (5.65).

No caso, como o ponto Q é um nó do contorno, o deslocamento $u(Q)$ pode ser escrito em função dos deslocamentos nodais do elemento onde situa-se este ponto; desta forma, os coeficientes $c(Q)$ podem ser incorporados ao vetor $\hat{H}(Q)$ na equação (5.67), resultando em:

$$\hat{H}(Q)U + H_c(Q)w_c = G(Q)P + G_c(Q)R_c + T(Q) + E(Q)M^0 \quad (5.68)$$

Como foi visto no Capítulo anterior, para a montagem do sistema de equações para a determinação das incógnitas no contorno deve-se aplicar a equação (5.68) aos nós do contorno

Q, aos pontos A que estão fora do domínio, associados a estes nós, e também a cada canto. Define-se, assim, o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H} & \tilde{H}_c \\ \tilde{H} & \tilde{H}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G} & \tilde{G}_c \\ \tilde{G} & \tilde{G}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{R}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{T}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{E}_c \end{bmatrix} \tilde{M}^0 \quad (5.69)$$

Todas as submatrizes e vetores desta equação matricial estão definidas em (4.30), com exceção da última parcela, referente aos momentos iniciais; nesta parcela, as submatrizes \tilde{E} e \tilde{E}_c consideram a influência de \tilde{M}^0 sobre as incógnitas do contorno e estão associadas, respectivamente, às duas equações de cada nó e às equações dos cantos da placa. O vetor \tilde{M}^0 contém as três componentes de momentos iniciais em todos os nós do contorno e pontos do domínio da placa, denotadas por $(M_{11}^0, M_{12}^0, M_{22}^0)$.

Portanto, sendo N_n , o número de nós do contorno, N_c , o número de cantos da placa, e N_t , o número total de pontos no contorno e no domínio, utilizados para sua discretização, tem-se que o vetor \tilde{M}^0 possui $3N_t$ elementos e as submatrizes \tilde{E} e \tilde{E}_c têm dimensões $2N_n \times 3N_t$ e $N_c \times 3N_t$, respectivamente.

Após a determinação dos deslocamentos e esforços no contorno, pode-se escrever a equação de deslocamento (5.14) para um ponto q no interior do domínio, na forma discretizada, de maneira análoga à utilizada para a equação (5.64). Assim, obtêm-se os deslocamentos para cada ponto q do domínio, escrevendo-se a forma discretizada da equação (5.14) para todos os pontos de interesse.

Portanto, os valores dos deslocamentos nos pontos internos podem ser representados na forma matricial, semelhantemente a (5.69), após a determinação de todos os coeficientes relativos às integrais sobre os elementos de contorno e sobre as células, da seguinte maneira:

$$\tilde{U}(q) = - \begin{bmatrix} \tilde{H}' & \tilde{H}'_c \\ \tilde{H}' & \tilde{H}'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{w}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{G}' & \tilde{G}'_c \\ \tilde{G}' & \tilde{G}'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{R}_c \end{Bmatrix} + \tilde{T}' + \tilde{E}' \tilde{M}^0 \quad (5.70)$$

Nesta equação, $\tilde{U}(q)$ é o vetor que contém os deslocamentos nos pontos internos e os vetores \tilde{U} , \tilde{w}_c , \tilde{P} e \tilde{R}_c contêm os valores de deslocamentos e reações no contorno e, portanto, já foram previamente determinados. Os coeficientes das demais submatrizes e vetores são calculados de forma similar àquela utilizada para a montagem do sistema (5.69), porém, com os pontos q localizados no interior da placa. Assim, neste caso, todas as integrações sobre os elementos podem ser feitas numericamente, uma vez que não haverá singularidades nas funções envolvidas.

Pode-se utilizar a equação (5.18), de forma discretizada, para se determinar as curvaturas nos pontos do interior, ou utilizar a equação (5.41), que fornece os momentos nestes pontos.

Logo, procedendo-se a discretização de (5.41), de acordo com as aproximações já mencionadas, e escrevendo-se esta equação para todos os pontos internos de interesse, chega-se à forma matricial para os momentos nestes pontos:

$$\tilde{M}(q) = - \begin{bmatrix} \tilde{H}'' & \tilde{H}_c'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{w}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{G}'' & \tilde{G}_c'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{R}_c \end{Bmatrix} + \tilde{T}'' + (\tilde{E}'' - \tilde{I})\tilde{M}^0 \quad (5.71)$$

Deve-se lembrar que o vetor $\tilde{M}(q)$ contém os momentos \tilde{M}_{11} , \tilde{M}_{12} e \tilde{M}_{22} , para cada ponto q , e os coeficientes das matrizes \tilde{H}'' , \tilde{H}_c'' , \tilde{G}'' e \tilde{G}_c'' e do vetor \tilde{T}'' são determinados conforme a equação (4.89), utilizando-se a integração sobre os elementos, ou sobre a região carregada, com as funções fundamentais indicadas nas equações (4.79) a (4.83).

Na equação (5.71), \tilde{I} é a matriz identidade e a matriz \tilde{E}'' exprime a influência dos momentos iniciais sobre os momentos do ponto q . Assim, os coeficientes de \tilde{E}'' são provenientes da integração sobre cada célula, indicada em (5.65), porém substituindo-se $k^*(q, p)$ pelas funções fundamentais $e_{ijkl}^*(q, p)$, dadas em (5.42), e devidamente agrupadas aos termos que envolvem $g_{ijkl}(q)$, dados em (5.43).

Atenção especial deve ser dada à integração sobre

as células dos termos envolvendo $e_{ijkl}^*(q, p)$, pois aparecem singularidades do tipo $1/r$, quando o ponto q coincide com um dos vértices da célula. O procedimento a ser adotado para tais integrais será apresentado no próximo item.

Deve-se, ainda, ressaltar que a equação (5.71) fornece os momentos apenas para os pontos internos. Uma representação semelhante para os momentos nos pontos do contorno pode ser obtida, e será apresentada no item 5.6.

Finalmente, de forma análoga à equação de momentos, pode-se, a partir de (5.56), escrever a equação para os esforços cortantes nos pontos internos, após a discretização, na forma matricial:

$$\underset{\sim}{Q}(q) = - \begin{bmatrix} \bar{H}'' & \bar{H}_c'' \\ \sim & \sim_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \sim \\ w_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G}'' & \bar{G}_c'' \\ \sim & \sim_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ \sim \\ R_c \end{Bmatrix} + \bar{T}'' + \bar{E}'' M^0 \quad (5.72)$$

Nesta equação, o vetor $\underset{\sim}{Q}(q)$ contém as componentes das forças cortantes q_1 e q_2 nos pontos internos q e os coeficientes das matrizes \bar{H}'' , \bar{H}_c'' , \bar{G}'' e \bar{G}_c'' e do vetor \bar{T}'' são determinados conforme a equação (4.89), utilizando-se as soluções fundamentais dadas em (4.84) a (4.88). Os coeficientes da matriz \bar{E}'' são provenientes das integrais sobre cada célula, a partir das funções fundamentais $e_{\beta k l}^*(q, p)$, dadas em (5.57), e agrupadas ao termo $\bar{q}_\beta^0(q)$, dado em (5.58).

5.4 Integração sobre as Células

Nas equações integrais (5.15) para pontos do contorno, ou em (5.14), (5.41) e (5.56), para pontos internos, escritas na forma discretizada, aparecem integrais sobre as células internas, envolvendo as influências do campo de momentos iniciais. Para se obter cada uma destas integrais, funções de interpolação lineares ψ_g e ψ são escolhidas para aproximar, respectivamente, a geometria da célula e os momentos iniciais.

Assim, o domínio é aproximado por triângulos, definidos pelas coordenadas dos três vértices, conforme a Fig. 5.3.

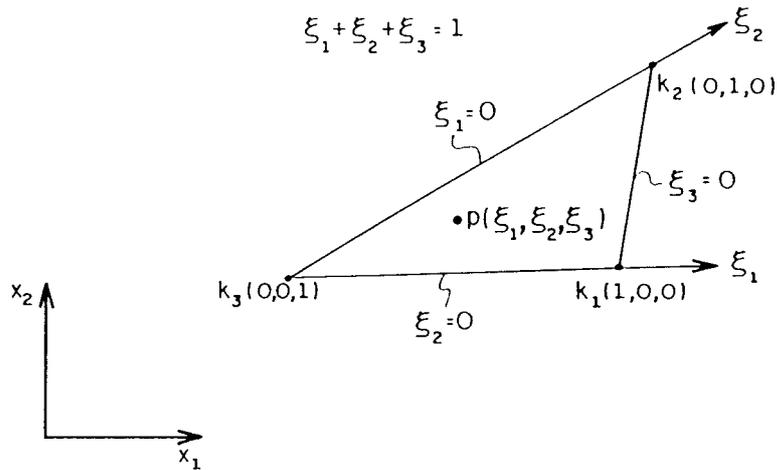


FIGURA 5.3. Célula triangular com sistema de coordenadas homogêneas

As funções de interpolação sobre cada célula podem ser expressas em função dos valores destas nos vértices, em termos de um sistema de coordenadas homogêneas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Portanto, um ponto p de coordenadas (x_1^p, x_2^p) pode ser definido em função das coordenadas dos vértices k_1, k_2 e k_3 de uma célula, através de:

$$\begin{matrix} X^p \\ \sim \end{matrix} = \begin{matrix} \psi_g^T \\ \sim_g \end{matrix} X^{(N)} = \begin{bmatrix} \Phi_g^T & 0 \\ \sim & \sim^T \\ 0 & \Phi_g \\ \sim & \sim_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(N)} \\ \sim^{(N)} \\ x_2^{(N)} \\ \sim \end{Bmatrix}, \quad (5.73)$$

onde:

$$\begin{matrix} X^p \\ \sim \end{matrix} = \begin{Bmatrix} x_1^p \\ x_2^p \end{Bmatrix}. \quad (5.74)$$

$$\begin{matrix} \Phi_g \\ \sim_g \end{matrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1^p \\ \xi_2^p \\ \xi_3^p \end{Bmatrix} \quad (5.75)$$

$$\tilde{X}_i^{(N)} = \begin{Bmatrix} x_i^{k1} \\ x_i^{k2} \\ x_i^{k3} \end{Bmatrix} \quad (i=1,2) \quad (5.76)$$

O campo de momentos iniciais M_{ij}^0 sobre cada célula é também aproximado em função dos valores nodais, nos vértices; tem-se, então:

$$\tilde{M}^{0P} = \begin{Bmatrix} M_{11}^0(p) \\ M_{12}^0(p) \\ M_{22}^0(p) \end{Bmatrix} = \tilde{\psi}^T \tilde{M}^{0(N)} \quad , \quad (5.77)$$

onde:

$$\tilde{\psi}^T = \begin{bmatrix} \xi_1^P & 0 & 0 & \xi_2^P & 0 & 0 & \xi_3^P & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1^P & 0 & 0 & \xi_2^P & 0 & 0 & \xi_3^P & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1^P & 0 & 0 & \xi_2^P & 0 & 0 & \xi_3^P \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

e

$$\tilde{M}^{0(N)} = \begin{Bmatrix} M_{ij}^{0(k1)} \\ M_{ij}^{0(k2)} \\ M_{ij}^{0(k3)} \end{Bmatrix} \quad (i,j=1,2) \quad (5.79)$$

Nestas equações, os índices superescritos referem-se ao ponto genérico p , ou aos nós dos vértices do triângulo, e os subscritos, às direções das coordenadas ou componentes dos momentos.

A coordenada x_i de um ponto p , dada por (5.73), pode ser escrita explicitamente na forma:

$$x_i^P = \xi_1^P x_i^{k1} + \xi_2^P x_i^{k2} + \xi_3^P x_i^{k3} \quad (5.80)$$

Então, as coordenadas homogêneas do ponto genérico p podem ser expressas em função das coordenadas cartesianas x_i^p e dos parâmetros da célula, da seguinte forma:

$$\xi_\alpha^p = \frac{1}{2A} \left(2A_0^\alpha + b^\alpha x_1^p + a^\alpha x_2^p \right) \quad , \quad (5.81)$$

na qual

$$a^\alpha = x_1^k - x_1^j \quad (5.82)$$

$$b^\alpha = x_2^k - x_2^j \quad (5.83)$$

$$2A_0^\alpha = x_1^j x_2^k - x_1^k x_2^j \quad , \quad (5.84)$$

com $\alpha = 1, 2, 3$; $j = 2, 3, 1$; $k = 3, 1, 2$; A é a área do triângulo, dada por:

$$A = \frac{1}{2} (b^1 a^2 - b^2 a^1) \quad (5.85)$$

A integração sobre cada célula pode ser feita através da fórmula de quadratura de Gauss para domínio triangular, utilizando-se as coordenadas homogêneas, sendo o Jacobiano da transformação de coordenadas igual ao dobro da área do triângulo da célula. Neste caso, porém, devido à natureza das funções envolvidas, há necessidade de se utilizar um grande número de pontos de integração, para se obter uma precisão aceitável, dependendo da posição do ponto de carregamento em relação à célula.

Por este motivo, adota-se, neste trabalho, um esquema semi-analítico de integração, utilizado por TELLES & BREBBIA (1979) e VENTURINI (1982), o qual apresenta melhores resultados.

Adota-se, para este esquema, um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ) , centrado no ponto de carregamento q , conforme a Fig. 5.4, tornando-se possível calcular analiticamente a integral sobre a coordenada r .

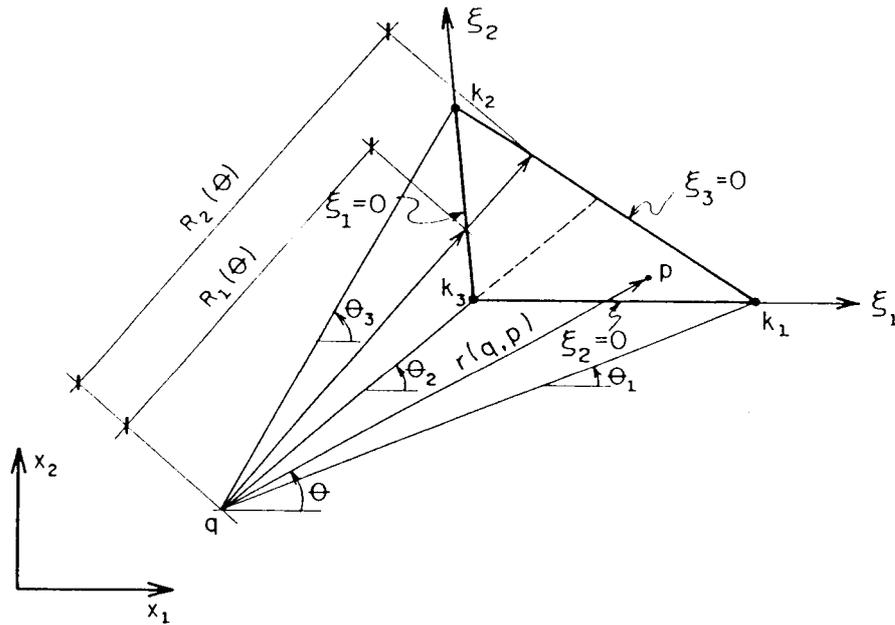


FIGURA 5.4. Sistema de coordenadas cilíndricas

Em relação a esse sistema, a função de interpolação ψ é reescrita em termos de coordenadas adimensionais $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$, sendo:

$$\bar{\xi}_\alpha^p = \bar{\xi}_\alpha^q + \frac{r}{2A} (b^\alpha \cos\theta + a^\alpha \sin\theta) \quad , \quad (5.86)$$

onde $\bar{\xi}_\alpha^q$ é obtido a partir da equação (5.81), para o ponto q, e a^α e b^α são determinados através das equações (5.82) e (5.83). Deve-se notar, portanto, que quando o ponto q coincidir com um dos cantos α do triângulo, tem-se que $\bar{\xi}_\alpha^q = 1$, para $\alpha = q$, e $\bar{\xi}_\alpha^q = 0$, para $\alpha \neq q$.

Desta forma, a integral sobre cada célula Ω_m que aparece na equação (5.64), e está expressa em (5.65), pode ser analisada de forma genérica e reescrita na forma:

$$\tilde{e}^m(Q) = - \int_{\Omega_m} \begin{bmatrix} w_{,11}^* (Q,p) & 2w_{,12}^* (Q,p) & w_{,22}^* (Q,p) \end{bmatrix} \tilde{\psi}^T d\Omega_m(p) \quad (5.87)$$

Observando o valor de ψ^I , definido em (5.78), serão determinados, para o cálculo de $e^m(\tilde{Q})$, nove coeficientes, sendo cada um proveniente da integral sobre a célula; genericamente, pode-se representar:

$$e_{k\ell}^m(Q) = - \int_{\Omega_m} w_{k\ell}^*(Q,p) \bar{\xi}_\alpha^p d\Omega_m(p) \quad (k, \ell=1,2) \quad , \quad (5.88)$$

com $\alpha = 1, 2, 3$.

Substituindo-se os valores de $w_{k\ell}^*$, dado em (5.19) e $\bar{\xi}_\alpha^p$, dado em (5.86), em (5.88), os coeficientes de $e^m(Q)$, ficam:

$$e_{k\ell}^m(Q) = - \frac{1}{4\pi D} \int_{\Omega_m} \left[\xi_\alpha^q + \frac{r}{2A} (b^\alpha \cos\theta + a^\alpha \sin\theta) \right] \left(r_{,k} r_{,\ell} + \delta_{k\ell} \ell n r \right) d\Omega_m(p) \quad , \quad (5.89)$$

onde percebe-se que $r_{,k}$ e $r_{,\ell}$ são funções, apenas, do ângulo θ , indicado na Fig. 5.4; pode-se escrever $d\Omega_m$ como função de dr e $d\theta$, chegando-se à integral:

$$e_{k\ell}^m(Q) = - \frac{1}{4\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_3} \left[\xi_\alpha^q + \frac{r}{2A} (b^\alpha \cos\theta + a^\alpha \sin\theta) \right] \left(r_{,k} r_{,\ell} + \delta_{k\ell} \ell n r \right) r dr d\theta \quad (5.90)$$

Fazendo-se a integração em relação a r , resulta uma integral apenas em função de θ , dada por:

$$e_{k\ell}^m(\theta) = - \frac{1}{4\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_3} \xi_\alpha^q \left\{ \frac{R_2^2(\theta)}{2} \left[r_{,k} r_{,\ell} + \delta_{k\ell} \left(\ell n R_2(\theta) - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{R_1^2(\theta)}{2} \left[r_{,k} r_{,\ell} + \delta_{k\ell} \left(\ell n R_1(\theta) - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} d\theta +$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_3} (b^\alpha \cos \theta + a^\alpha \sin \theta) \left\{ \frac{R_2^3(\theta)}{6A} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R_2(\theta) - \frac{1}{3} \right) \right] + \right. \\
& \left. - \frac{R_1^3(\theta)}{6A} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R_1(\theta) - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} d\theta, \quad (5.91)
\end{aligned}$$

na qual $R_1(\theta)$ e $R_2(\theta)$, que estão indicados na Fig. 5.4, são dados pela equação (5.86), usando-se valores particulares de $\bar{\xi}_\alpha^p$ sobre os lados do triângulo, ou seja:

$$R_j(\theta) = - \frac{2A \xi_\alpha^q}{b^\alpha \cos \theta + a^\alpha \sin \theta}, \quad (5.92)$$

com $j = 2$, para $\alpha = 3$, e $j = 1$, para $\alpha = 1, 2$.

Analisando-se os termos da equação (5.91) pode-se concluir que, mesmo quando o ponto de carregamento q coincide com um dos vértices do triângulo, nenhuma singularidade ocorre no cálculo das integrais; assim, estas podem ser calculadas numericamente com relação a θ , visto que o valor de $R_1(\theta)$ torna-se nulo. Para um ponto q fora da célula, pode-se efetuar a integração de θ_1 a θ_2 e de θ_2 a θ_3 , conforme a Fig. 5.4.

Deve-se notar, ainda, que os coeficientes $e_{12}^m(Q)$ e $e_{21}^m(Q)$ são iguais e, portanto, são indicados como o dobro de $e_{12}^m(Q)$ nas componentes do vetor $e^m(Q)$ que multiplicam os momentos M_{12}^0 , conforme a equação (5.87).

Quanto à matriz E' , indicada na equação (5.70), que relaciona os momentos iniciais com os deslocamentos nos pontos internos, as integrais sobre as células que formam seus coeficientes são calculadas da mesma forma, uma vez que as funções envolvidas são as mesmas, com a diferença de que o ponto q é tomado no interior da placa.

Para o cálculo dos momentos nos pontos internos q , indicados na equação (5.71), há necessidade dos coeficientes da matriz E'' , que são provenientes de integrações sobre as células das funções fundamentais $e_{ijkl}^*(q, p)$, dadas em (5.42), acrescidas

aos termos g_{ijkl} , que multiplicam as componentes M_{kl}^0 do ponto q .

Estas integrais podem ser obtidas a partir dos termos das curvaturas, ou seja, calculadas a partir de $\bar{e}_{ijkl}^*(q,p)$, dado na equação (5.39), e utilizando-se o mesmo procedimento descrito anteriormente. Pode-se, então, expressar cada coeficiente genérico, proveniente de uma célula Ω_m , como:

$$\bar{e}_{ijkl}^m(q) = - \int_{\Omega_m} w_{ijkl}^*(q,p) \xi_\alpha^p d\Omega_m(p) \quad , (i,j,k,\ell=1,2) \quad (5.93)$$

com $\alpha = 1, 2, 3$. Assim, são calculados nove coeficientes para cada componente de momento M_{ij} em cada célula.

Tendo em vista a equação (5.39), os valores de w_{ijkl}^* podem ser expressos na forma:

$$w_{ijkl}^*(q,p) = - \frac{1}{4\pi D r^2} f_{ijkl}(\theta) \quad , \quad (5.94)$$

onde f_{ijkl} depende apenas do ângulo θ , pois possui apenas as derivadas do raio em relação às direções x_1 e x_2 .

Substituindo-se (5.94) e (5.86) em (5.93) e fazendo-se a integração sobre r , obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{ijkl}^m(q) = & \frac{1}{4\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_3} f_{ijkl}(\theta) \left[\xi_\alpha^q \ln R_2(\theta) + (b^\alpha \cos\theta + a^\alpha \sin\theta) \frac{R_2(\theta)}{2A} \right] d\theta + \\ & - \frac{1}{4\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_3} f_{ijkl}(\theta) \left[\xi_\alpha^q \ln R_1(\theta) + (b^\alpha \cos\theta + a^\alpha \sin\theta) \frac{R_1(\theta)}{2A} \right] d\theta \end{aligned} \quad (5.95)$$

Estas integrais podem ser feitas numericamente com relação a θ , quando o ponto q não coincide com o vértice α do triângulo, pois ξ_α^q se anula nestes casos, quando $R_1(\theta)$ também é nulo. Porém, no caso em que o ponto q coincide com α e $R_1(\theta)$ é nulo, a segunda integral somente pode ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy. Logo, deve-se reescrever a expressão (5.95), substituindo-se $R_1(\theta)$ por um pequeno valor constante ϵ ,

conforme indicado na Fig. 5.5, e tomando-se os limite, quando ϵ tende a zero, ou seja:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{ijkl}^m(q) &= \frac{1}{4\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_{ijkl}(\theta) \left[\xi_{\alpha}^q \ln R_2(\theta) + (b^{\alpha} \cos \theta + a^{\alpha} \sin \theta) \frac{R_2(\theta)}{2A} \right] d\theta + \\ &- \frac{1}{4\pi D} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\xi_{\alpha}^q \ln \epsilon \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_{ijkl}(\theta) d\theta + \frac{\epsilon}{2A} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_{ijkl}(\theta) (b^{\alpha} \cos \theta + a^{\alpha} \sin \theta) d\theta \right] \end{aligned} \quad (5.96)$$

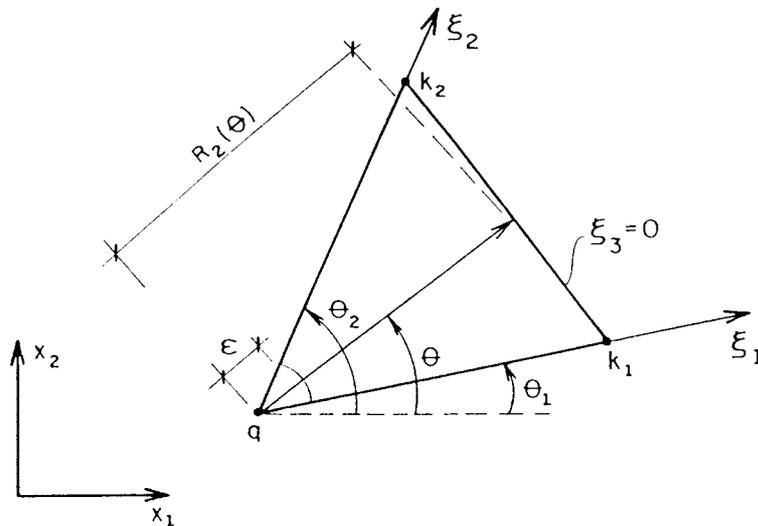


FIGURA 5.5. Sistema de coordenadas cilíndricas, com origem no vértice da célula

Neste caso, tem-se que $\xi_{\alpha}^q = 1$ e a última parcela do limite se anula; quanto à primeira, esta fica resolvida fazendo-se a integração de todas as células conectadas ao ponto q , isto é, tomando-se os limites $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 2\pi$. Devido à seguinte propriedade de $f_{ijkl}(\theta)$:

$$\int_0^{2\pi} f_{ijkl}(\theta) d\theta = 0 \quad , \quad (5.97)$$

conclui-se que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \epsilon \int_0^{2\pi} f_{ijkl}(\theta) d\theta = 0 \quad (5.98)$$

Então, da equação (5.96), resulta, apenas, a parcela relativa a $R_2(\theta)$, que pode ser integrada numericamente em relação a θ , através da fórmula de quadratura de Gauss.

Após o cálculo dos coeficientes \bar{e}_{ijkl}^m , obtêm-se, facilmente, os coeficientes da matriz E'' , através da equação (5.42), e incorporando-se os termos $\tilde{g}_{ijkl}(q)$.

O mesmo procedimento deve ser adotado para o cálculo dos coeficientes da matriz \bar{E}'' , dada em (5.72), para a determinação dos esforços cortantes. Estes coeficientes provêm da integração sobre as células das funções $e_{\beta k l}^*(q, p)$, dadas em (5.57).

Genericamente, cada coeficiente proveniente de uma célula Ω_m pode ser escrito como:

$$e_{\beta k l}^m = -D \int_{\Omega_m} \frac{\partial w_{, m m k l}^*}{\partial x_{\beta}(q)}(q, p) \xi_{\alpha}^p d\Omega_m(p) \quad (\beta, k, l = 1, 2) \quad (5.99)$$

Tendo em vista as soluções fundamentais, as funções a serem integradas na equação (5.99) são dadas por:

$$\frac{\partial w_{, m m k l}^*}{\partial x_{\beta}(q)}(q, p) = -\frac{1}{4\pi D r^3} f_{\beta k l}(\theta) \quad , \quad (5.100)$$

onde $f_{\beta k l}(\theta)$ são funções das derivadas de r em relação às direções x_1 e x_2 e, portanto, dependem apenas do ângulo θ .

Substituindo-se as equações (5.100) e (5.86) em (5.99) e integrando-se em relação a r , obtém-se:

$$\begin{aligned}
e_{\beta k \ell}^m(q) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_3} f_{\beta k \ell}(\theta) \left[-\frac{\xi_{\alpha}^q}{R_2(\theta)} + \frac{b^{\alpha} \cos \theta + a^{\alpha} \sin \theta}{2A} \ell n R_2(\theta) \right] d\theta + \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_3} f_{\beta k \ell}(\theta) \left[\frac{-\xi_{\alpha}^q}{R_1(\theta)} + \frac{b^{\alpha} \cos \theta + a^{\alpha} \sin \theta}{2A} \ell n R_1(\theta) \right] d\theta
\end{aligned} \tag{5.101}$$

Estas integrais podem ser feitas numericamente em relação a θ , a não ser quando $R_1(\theta)$ é nulo. Para a análise destes casos, deve-se verificar as duas parcelas da segunda integral de (5.101), envolvendo $R_1(\theta)$. A primeira parcela envolve a integral

$$\int_{\theta_1}^{\theta_3} f_{\beta k \ell}(\theta) \left(-\frac{\xi_{\alpha}^q}{R_1(\theta)} \right) d\theta, \tag{5.102}$$

a qual apresenta singularidade, quando o ponto q coincide com o vértice α do triângulo e, portanto, $\xi_{\alpha}^q = 1$. Adotando-se, porém, o mesmo procedimento anteriormente descrito para os coeficientes relativos ao momento, ou seja, quando se integra todas as células que concorrem no ponto q , tem-se que:

$$\int_0^{2\pi} f_{\beta k \ell}(\theta) = 0, \tag{5.103}$$

que é uma característica da função $f_{\beta k \ell}(\theta)$.

A segunda parcela de (5.101), envolvendo $R_1(\theta)$, que é dada por:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_3} f_{\beta k \ell}(\theta) \frac{b^{\alpha} \cos \theta + a^{\alpha} \sin \theta}{2A} \ell n R_1(\theta) d\theta, \tag{5.104}$$

apresenta singularidade quando o ponto q coincide com qualquer

vértice da célula, pois, neste caso, $R_1(\theta)$ é nulo. Entretanto, quando substitui-se $R_1(\theta)$ pelo valor ϵ (Fig. 5.5) e toma-se o limite para ϵ tendendo a zero, a equação (5.104) é calculada na forma:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \epsilon}{2A} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (b^\alpha \cos \theta + a^\alpha \sin \theta) f_{\beta k \ell}(\theta) d\theta \quad (5.105)$$

Integrando-se entre os limites 0 e 2π , ou seja, considerando-se todas as células conectadas no ponto q, a soma destas integrais se anula, uma vez que, para qualquer célula, tem-se:

$$\cos \theta = r_{,1} \quad (5.106)$$

e

$$\sin \theta = r_{,2} \quad ; \quad (5.107)$$

além disto, considera-se a simetria em torno do ponto q e também a característica da função $f_{\beta k \ell}(\theta)$, para a qual se tem:

$$\int_0^{2\pi} r_{,1} f_{\beta k \ell}(\theta) d\theta = 0 \quad (5.108)$$

e

$$\int_0^{2\pi} r_{,2} f_{\beta k \ell}(\theta) d\theta = 0 \quad (5.109)$$

Assim, para estes casos, resultam, na equação (5.101), apenas as integrais relativas a $R_2(\theta)$, as quais podem ser feitas numericamente.

5.5 Técnica de Solução

O sistema de equações que se obtém com a discretização das equações integrais, expresso em (5.69), pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{matrix} \tilde{H} & \tilde{U} & = & \tilde{G} & \tilde{P} & + & \tilde{T} & + & \tilde{E} & \tilde{M}^0 & , \\ \sim & \sim & & \sim & \sim & & \sim & & \sim & \sim & \end{matrix} \quad (5.110)$$

onde estão agrupadas as submatrizes associadas aos nós do contorno e aos cantos da placa, o mesmo ocorrendo com os vetores que contêm os deslocamentos ou esforços.

Analogamente, as equações dos esforços nos pontos internos, dadas por (5.71) e (5.72), também podem ser escritas na forma:

$$\begin{matrix} \tilde{M} & = & -\tilde{H}'' & \tilde{U} & + & \tilde{G}'' & \tilde{P} & + & \tilde{T}'' & + & (\tilde{E}'' - \tilde{I}) & \tilde{M}^0 \\ \sim & & \sim & \sim & & \sim & \sim & & \sim & & \sim & \sim \end{matrix} \quad (5.111.a)$$

$$\begin{matrix} \tilde{Q} & = & -\tilde{H}'' & \tilde{U} & + & \tilde{G}'' & \tilde{P} & + & \tilde{T}'' & + & \tilde{E}'' & \tilde{M}^0 \\ \sim & & \sim & \sim & & \sim & \sim & & \sim & & \sim & \sim \end{matrix} \quad (5.111.b)$$

Para se obter um procedimento numérico mais conveniente, visando, principalmente, a análise não linear que será vista no próximo Capítulo, são realizadas algumas operações matriciais sobre as equações (5.110) e (5.111), de modo a deixar isolados os termos decorrentes dos momentos iniciais.

De maneira análoga à efetuada no Capítulo anterior, levam-se, em (5.110), todas as incógnitas do contorno para um vetor \tilde{X} e trocam-se as respectivas colunas entre as matrizes \tilde{H} e \tilde{G} ; obtém-se, assim, o sistema:

$$\begin{matrix} \tilde{A} & \tilde{X} & = & \tilde{B} & + & \tilde{E} & \tilde{M}^0 \\ \sim & \sim & & \sim & & \sim & \sim \end{matrix} \quad (5.112)$$

Neste sistema, o vetor \tilde{B} contém os efeitos de deslocamentos ou esforços prescritos no contorno, somados ao efeito do carregamento atuante na placa, como na equação (4.43). Para momentos \tilde{M}^0 conhecidos, a parcela do efeito dos momentos iniciais é somada ao vetor \tilde{B} , determinando-se, assim, de maneira tradicional, as incógnitas.

Como se deseja uma expressão em função de \tilde{M}^0 , pode-se pré-multiplicar os dois lados de (5.112) por \tilde{A}^{-1} , obtendo-se a solução na forma:

$$\tilde{X} = \tilde{L} + \tilde{R} \tilde{M}^0 \quad , \quad (5.113)$$

onde:

$$\tilde{L} = \tilde{A}^{-1} \tilde{B} \quad (5.114)$$

e

$$\tilde{R} = \tilde{A}^{-1} \tilde{E} \quad (5.115)$$

Usando-se o mesmo procedimento para as equações (5.111), obtêm-se:

$$\tilde{M} = \tilde{B}'' - \tilde{A}'' \tilde{X} + (\tilde{E}'' - \tilde{I}) \tilde{M}^0 \quad (5.116.a)$$

$$\tilde{Q} = \tilde{B}'' - \tilde{A}'' \tilde{X} + \tilde{E}'' \tilde{M}^0 \quad (5.116.b)$$

Como o vetor \tilde{X} contém os valores das variáveis do contorno, já conhecidos através de (5.113), a expressão (5.116.a) fornece o momento total \tilde{M} em função do campo de momentos iniciais \tilde{M}^0 e do carregamento no domínio. No caso de análise não linear, é conveniente escrever o momento total na forma:

$$\tilde{M} = \tilde{M}^e - \tilde{M}^0 \quad , \quad (5.117)$$

onde \tilde{M}^e é a componente elástica do momento \tilde{M} . O valor de \tilde{M}^e pode ser obtido substituindo-se (5.117) em (5.116), isto é:

$$\tilde{M}^e = \tilde{B}'' - \tilde{A}'' \tilde{X} + \tilde{E}'' \tilde{M}^0 \quad (5.118)$$

Substituindo-se o valor de \tilde{X} , dado em (5.113), na equação acima, chega-se a:

$$\tilde{M}^e = \tilde{B}'' - \tilde{A}'' (\tilde{L} + \tilde{R} \tilde{M}^0) + \tilde{E}'' \tilde{M}^0 \quad , \quad (5.119)$$

onde, agrupando-se os termos, obtêm-se, finalmente:

$$\tilde{M}^e = \tilde{N} + \tilde{S} \tilde{M}^0, \quad (5.120)$$

na qual tem-se:

$$\tilde{N} = \tilde{B}'' - \tilde{A}'' \tilde{L} \quad (5.121)$$

e

$$\tilde{S} = \tilde{E}'' - \tilde{A}'' \tilde{R} \quad (5.122)$$

Pode-se observar, das equações anteriores, que os vetores \tilde{L} e \tilde{N} representam, respectivamente, a solução para os valores de contorno e momentos de um problema sem o campo de momentos iniciais. Já os efeitos de \tilde{M}^0 são representados pela matriz \tilde{R} , para as incógnitas de contorno, e pela matriz \tilde{S} , para os momentos.

Analogamente, pode-se reescrever a equação do esforço cortante, expressa em (5.116.b), de forma semelhante, ou seja:

$$\tilde{Q} = \tilde{\bar{N}} + \tilde{\bar{S}} \tilde{M}^0, \quad (5.123)$$

sendo:

$$\tilde{\bar{N}} = \tilde{\bar{B}}'' - \tilde{\bar{A}}'' \tilde{L} \quad (5.124)$$

e

$$\tilde{\bar{S}} = \tilde{\bar{E}}'' - \tilde{\bar{A}}'' \tilde{R} \quad (5.125)$$

5.6 Momentos nos Pontos do Contorno

A partir da solução do sistema de equações (5.69), são obtidos os valores das variáveis no contorno, ou seja, os valores de esforços e deslocamentos que compõem os vetores \tilde{U} e \tilde{P} do sistema.

Assim, para um elemento genérico de contorno, adotando-se um sistema local de coordenadas (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , conforme a

Fig. 5.6, têm-se para cada nó, os seguintes momentos:

$$\bar{M}_{11}^N = M_n^N \quad , \quad (5.126)$$

onde \bar{M}_{11}^N são os momentos fletores em relação ao sistema local, para um nó genérico N , e M_n^N é o momento em relação à direção n da normal ao elemento.

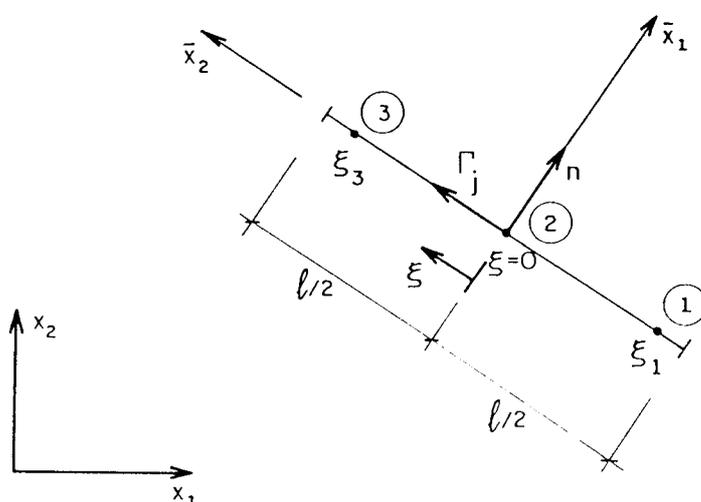


FIGURA 5.6. Sistema local de coordenadas em um elemento de contorno

Portanto, devem-se determinar as componentes dos momentos \bar{M}_{12} e \bar{M}_{22} em relação ao sistema local e, posteriormente, através da rotação do sistema de coordenadas, obterem-se estes valores em relação ao sistema global.

Para a determinação das componentes \bar{M}_{12} e \bar{M}_{22} podem-se considerar as funções aproximadoras no elemento e utilizar as relações momento-curvatura, além dos valores conhecidos dos deslocamentos w e das rotações $\partial w / \partial \bar{x}_1 = \partial w / \partial n$.

A partir da equação (5.7), pode-se escrever:

$$\bar{M}_{12} = -D(1-\nu) \frac{\partial w}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2} - \bar{M}_{12}^0, \quad (5.127)$$

onde os valores referem-se ao sistema local (\bar{x}_1, \bar{x}_2) .

Porém, a rotação na direção normal $\partial w / \partial n$ é aproximada por uma função quadrática sobre o elemento Γ_j , de acordo com a equação (4.10), ou seja:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{x}_1} = \frac{\partial w}{\partial n} = \Phi_1(P) \frac{\partial w^1}{\partial n} + \Phi_2(P) \frac{\partial w^2}{\partial n} + \Phi_3(P) \frac{\partial w^3}{\partial n}, \quad (5.128)$$

onde $\partial w^N / \partial n$ são as rotações nos pontos nodais 1, 2 e 3 do elemento, e as funções de interpolação Φ_i estão dadas em (4.12).

Logo, podem-se determinar as derivadas segundas em relação ao sistema local, derivando-se (5.128) em relação a \bar{x}_2 :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2} = \frac{\partial \Phi_1(P)}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial w^1}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_2(P)}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial w^2}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_3(P)}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial w^3}{\partial n} \quad (5.129)$$

Considerando-se a relação entre a coordenada homogênea ξ e \bar{x}_2 , dada por:

$$\bar{x}_2 = \xi \frac{\ell}{2}, \quad (5.130)$$

tem-se que:

$$\frac{d\xi}{d\bar{x}_2} = \frac{2}{\ell} \quad (5.131)$$

A equação (5.129) será, então, expressa por:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2} = \frac{2}{\ell} \left[\frac{\partial \Phi_1(P)}{\partial \xi} \frac{\partial w^1}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_2(P)}{\partial \xi} \frac{\partial w^2}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_3(P)}{\partial \xi} \frac{\partial w^3}{\partial n} \right] \quad (5.132)$$

Calculando-se as derivadas das funções aproximadoras em (5.132) e substituindo-se em (5.127), chega-se à equação do momento \bar{M}_{12} em um ponto P do elemento:

$$\bar{M}_{12} = A_1 (P) \frac{\partial w^1}{\partial n} + A_2 (P) \frac{\partial w^2}{\partial n} + A_3 (P) \frac{\partial w^3}{\partial n} - \bar{M}_{12}^0 \quad , \quad (5.133)$$

onde:

$$A_1 (P) = -D(1-\nu) \frac{2}{\ell} \frac{\xi_3 - 2\xi}{\xi_1 \xi_3 - \xi_1^2} \quad (5.134.a)$$

$$A_2 (P) = -D(1-\nu) \frac{2}{\ell} \frac{-\xi_3 - \xi_1 + 2\xi}{\xi_1 \xi_3} \quad (5.134.b)$$

$$A_3 (P) = -D(1-\nu) \frac{2}{\ell} \frac{\xi_1 - 2\xi}{\xi_1 \xi_3 - \xi_3^2} \quad (5.134.c)$$

Nestas equações, ξ_1 e ξ_3 são as coordenadas homogêneas dos nós 1 e 3, respectivamente, e ξ é a coordenada do ponto P.

No caso do elemento contínuo, onde os nós 1 e 3 coincidem com as extremidades do elemento, basta fazer $\xi_1 = -1$ e $\xi_3 = +1$, nas equações (5.134).

A componente de momentos \bar{M}_{22} pode ser determinada a partir de \bar{M}_{11} , que é conhecido. Da equação (5.7), tem-se que:

$$\bar{M}_{11} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}_2^2} \right) - \bar{M}_{11}^0 \quad (5.135)$$

e

$$\bar{M}_{22} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}_1^2} \right) - \bar{M}_{22}^0 \quad (5.136)$$

Assim, isolando-se a curvatura $\partial^2 w / \partial \bar{x}_1^2$ da equação (5.135), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}_1^2} = - \frac{\bar{M}_{11} + \bar{M}_{11}^0}{D} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}_2^2} \quad , \quad (5.137)$$

que, substituída em (5.136), resulta em:

$$\bar{M}_{22} = -D(1-\nu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}_2^2} + \nu (\bar{M}_{11} + \bar{M}_{11}^0) - \bar{M}_{22}^0 \quad (5.138)$$

Portanto, recorre-se, agora, à aproximação de w no elemento, para a determinação de sua derivada segunda. Da equação (4.10), tem-se que:

$$w = \Phi_1(P)w^1 + \Phi_2(P)w^2 + \Phi_3(P)w^3, \quad (5.139)$$

onde w^N são os deslocamentos nos pontos nodais e Φ_i , as funções aproximadoras.

Derivando-se duas vezes a equação (5.139) em relação a \bar{x}_2 , e tendo em vista (5.131), vem:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}_2^2} = \frac{4}{l^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_1(P)}{\partial \xi^2} w^1 + \frac{\partial^2 \Phi_2(P)}{\partial \xi^2} w^2 + \frac{\partial^2 \Phi_3(P)}{\partial \xi^2} w^3 \right) \quad (5.140)$$

Logo, calculando-se as derivadas das funções aproximadoras em (5.140) e substituindo-se em (5.138), chega-se à componente de momento \bar{M}_{22} , para um ponto p qualquer do elemento:

$$\bar{M}_{22} = C_1 w^1 + C_2 w^2 + C_3 w^3 + \nu \bar{M}_{11} + \nu \bar{M}_{11}^0 - \bar{M}_{22}^0, \quad (5.141)$$

onde:

$$C_1 = D \frac{1-\nu^2}{l^2} \frac{8}{\xi_1 \xi_3 - \xi_1^2} \quad (5.142.a)$$

$$C_2 = -D \frac{1-\nu^2}{l^2} \frac{8}{\xi_1 \xi_3} \quad (5.142.b)$$

$$C_3 = D \frac{1-\nu^2}{l^2} \frac{8}{\xi_1 \xi_3 - \xi_3^2} \quad (5.142.c)$$

Há interesse, também, de se determinar as componentes elásticas dos momentos. Assim, tendo em vista (5.126),

(5.133) e (5.141), pode-se escrever:

$$\bar{M}_{ij}^e = \bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ij}^0 \quad , \quad (5.143)$$

ou seja:

$$\bar{M}_{11}^e = M_n + \bar{M}_{11}^0 \quad (5.144.a)$$

$$\bar{M}_{12}^e = A_1(P) \frac{\partial w^1}{\partial n} + A_2(P) \frac{\partial w^2}{\partial n} + A_3(P) \frac{\partial w^3}{\partial n} \quad (5.144.b)$$

$$\bar{M}_{22}^e = C_1 w^1 + C_2 w^2 + C_3 w^3 + \nu M_n + \nu \bar{M}_{11}^0 \quad (5.144.c)$$

Desta forma, as componentes de momentos no contorno, em relação ao sistema local de um elemento, são determinadas em função das variáveis nodais. Pode-se, então, a partir de uma rotação no sistema de coordenadas, deixar estas componentes expressas em relação ao sistema global de coordenadas (x_1, x_2) . Ao se acoplar todos os elementos que compõem o contorno, chega-se a uma equação matricial para os momentos nos pontos do contorno, semelhante à equação (5.71), utilizada para os pontos internos, ou seja:

$$\begin{matrix} M^e & = & -H'' & U'' & + & G'' & P & + & T'' & + & E'' & M^0 \\ \sim & & \sim & \sim & & \sim & \sim & & \sim & & \sim & \sim \end{matrix} \quad (5.145)$$

Verificando-se as equações (5.144), fica claro que os coeficientes $A_i(P)$ e C_i irão compor a matriz H'' , pois multiplicam os deslocamentos e rotações nodais. As constantes que multiplicam os momentos M_n e \bar{M}_{11}^0 irão formar as matrizes G'' e E'' , respectivamente.

Deve-se lembrar, ainda, que na montagem destas matrizes para os nós comuns a dois elementos distintos, adota-se a média entre os coeficientes relativos a cada um dos elementos.

5.7 Avaliações Numéricas

Com o objetivo de se avaliar a influência dos termos relativos ao campo de momentos iniciais na formulação desenvolvida, são apresentados três exemplos de problemas de placas sujeitas a um gradiente de temperatura ao longo da espessura e constante no domínio.

Os resultados obtidos são comparados com as soluções analíticas, dadas por TIMOSHENKO (1959), e com as soluções numéricas obtidas por RIBEIRO (1992), que utiliza o Método dos Elementos de Contorno para a teoria de Reissner, com elementos de funções interpoladoras quadráticas. O autor também utiliza células triangulares, com aproximação linear, para a discretização das integrais de domínio.

5.7.1 Exemplo 1. Placa quadrada engastada, sujeita a um gradiente de temperatura

Neste exemplo, considera-se uma placa quadrada, engastada nos quatro lados, com uma variação linear de temperatura Δt entre as faces inferior e superior, igual em todos os seus pontos, conforme indica-se na Fig. 5.7.

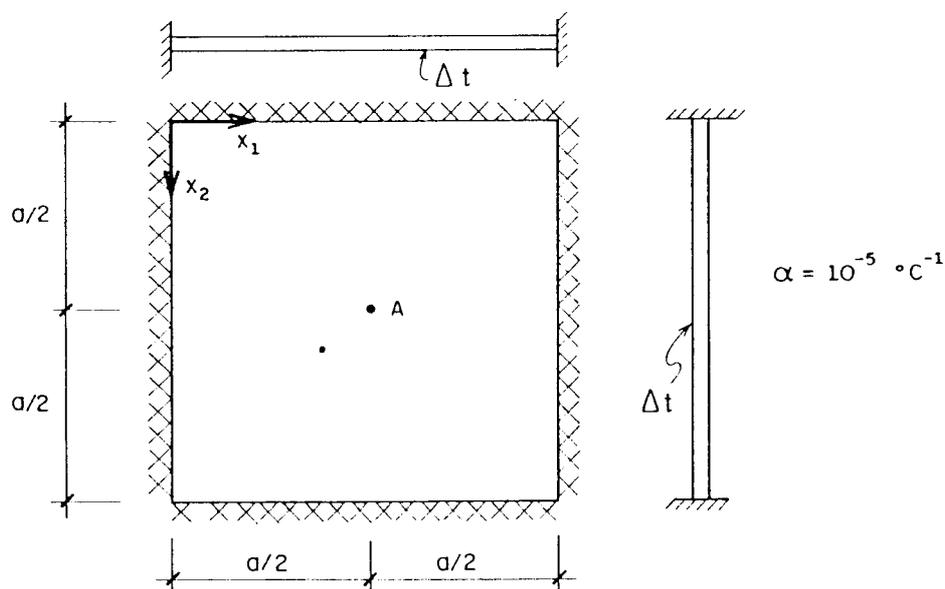


FIGURA 5.7. Placa engastada, sujeita a um gradiente de temperatura

Assim, o gradiente de temperatura é simulado por um campo de momentos iniciais, dado por:

$$M_{11}^0 = M_{22}^0 = D(1+\nu) \frac{\alpha \Delta t}{t} ,$$

onde α é o coeficiente de dilatação térmica do material, ν , o coeficiente de Poisson, t , a espessura da placa, e D , a rigidez à flexão da placa.

A solução analítica deste problema é conhecida (TIMOSHENKO, 1959); os deslocamentos são nulos em todos os pontos, uma vez que a placa permanece plana, e os momentos fletores, constantes em todo o domínio, são iguais a:

$$M_{11} = M_{22} = - D(1+\nu) \frac{\alpha \Delta t}{t}$$

e

$$M_{12} = 0$$

Na presente avaliação numérica, considera-se $a = 2,0$ m, $t = 0,1$ m, $\nu = 0,2$ e o módulo de elasticidade do material, E , igual a $2,5 \cdot 10^7$ kN/m². Estes valores resultam em um campo de momentos iniciais $M_{11}^0 = M_{22}^0 = 10$ kN.m/m, aplicado a todos os pontos, para uma variação de temperatura igual a 38,4°C.

O Quadro 5.1 mostra o resultado desta análise para duas malhas utilizadas na discretização; a primeira, com 4 elementos de contorno, um ponto interno e 8 células internas, e a segunda, com 12 elementos no contorno, 25 pontos internos e 72 células. Apresenta-se, também, o resultado da análise efetuada por RIBEIRO (1992), com uma discretização de 16 elementos no contorno, 49 pontos internos e 128 células no domínio.

QUADRO 5.1. Deslocamentos e momentos no centro da placa
Exemplo 1

VALORES NO PUNTO A	TIMOSHENKO	RIBEIRO (128 células)	PRESENTE ESTUDO	
			(8 CÉLULAS)	(72 CÉLULAS)
w_A	0	$2,469 \times 10^{-8}$	$3,633 \times 10^{-8}$	$2,894 \times 10^{-9}$
M_{11}	-10,00	-9,987	-9,998	-10,00
M_{22}	-10,00	-10,013	-9,998	-10,00
M_{12}	0	—	$1,55 \times 10^{-13}$	$-1,63 \times 10^{-12}$

Deve-se observar que, mesmo para a malha com apenas 8 células e 4 elementos de contorno, a solução é também excelente em todos os outros pontos da placa, onde os maiores erros ocorrem para os pontos próximos aos cantos, nos quais os momentos finais são $M_{11} = M_{22} = -9,905 \text{ kN.m/m}$.

5.7.2 Exemplo 2. Placa quadrada apoiada nas bordas e sujeita a um gradiente de temperatura

Considera-se, agora, a placa quadrada, como indicada na Fig. 5.7, simplesmente apoiada nos quatro lados e submetida a um gradiente de temperatura $\Delta t = 8 \text{ }^\circ\text{C}$ entre as faces. Este problema foi analisado por RIBEIRO (1992), que utilizou uma discretização com 20 elementos no contorno, 81 pontos internos e 200 células no domínio, obtendo uma solução muito próxima à decorrente da análise feita através do Método dos Elementos Finitos, com 400 elementos triangulares. Para esta análise, foram adotados os seguintes valores: $a = 2,0 \text{ m}$, $t = 0,2 \text{ m}$, $\nu = 0,3$, $E = 2,5 \cdot 10^6 \text{ tf/m}^2$, os quais resultam no campo de momentos iniciais $M_{11}^0 = M_{22}^0 = 0,9524 \text{ tf.m/m}$.

No Quadro 5.2, comparam-se os resultados do deslocamento e dos momentos fletores no centro da placa da referência citada com as análises efetuadas neste trabalho, para as duas malhas utilizadas no exemplo anterior.

QUADRO 5.2. Deslocamentos e momentos fletores no centro da placa Exemplo 2

VALORES NO PONTO A	RIBEIRO (200 células)	PRESENTE ESTUDO	
		(8 CÉLULAS)	(72 CÉLULAS)
$w_A \times 10^3$	0,1533	0,1497	0,1523
M_{11}	-0,3332	-0,3459	-0,3420
M_{22}	-0,3332	-0,3459	-0,3420

Também neste caso consegue-se uma boa resposta, mesmo para a malha mais pobre, sendo as diferenças entre as soluções de 2,4%, para o deslocamento, e de 3,8%, para os momentos fletores.

5.7.3 Exemplo 3. Placa triangular simplesmente apoiada, sujeita a um gradiente de temperatura

Como último exemplo, analisa-se a placa na forma de um triângulo equilátero, indicada na Fig. 5.8, apoiada nos lados e sujeita a uma variação de temperatura $\Delta t = 30^\circ\text{C}$.

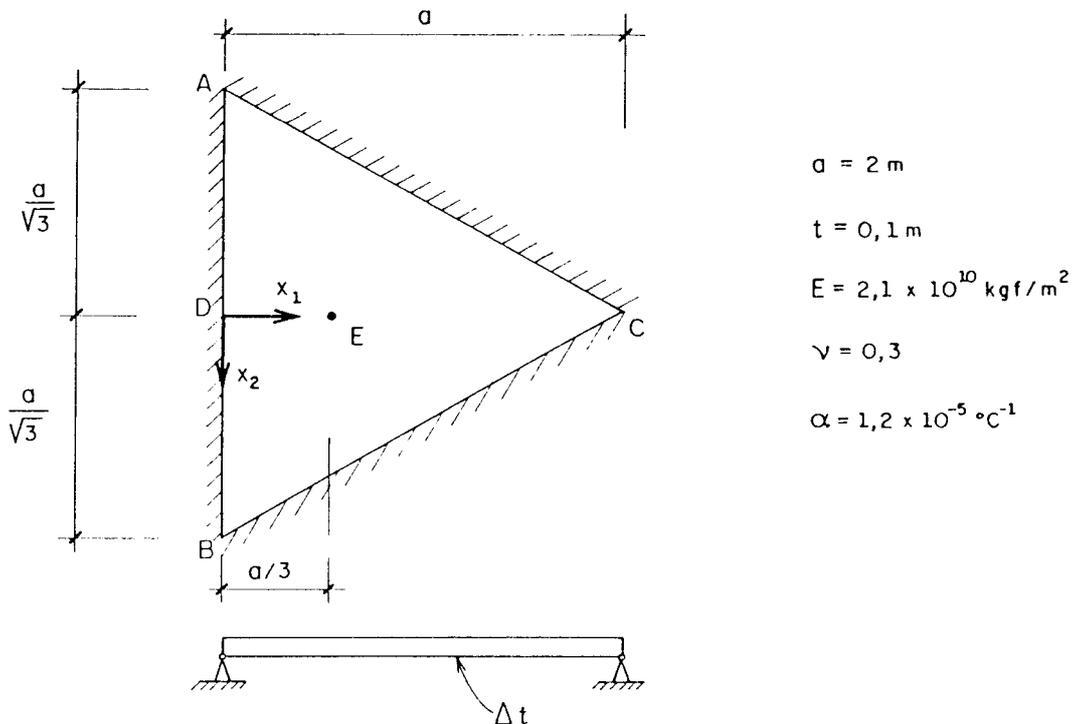


FIGURA 5.8. Placa triangular apoiada, sujeita a um gradiente de temperatura

O campo de momentos iniciais equivalente ao gradiente de temperatura entre as faces é igual a $M_{11}^0 = M_{22}^0 = 9000\text{ kgf.m/m}$.

Este problema tem solução analítica conhecida (TIMOSHENKO, 1959), sendo que os momentos fletores variam linearmente ao longo do eixo x_1 , conforme indica-se na Fig. 5.9. As forças cortantes equivalentes têm valor constante ao longo dos lados, e valem:

$$V_n = \frac{\alpha \Delta t E t^2}{8a} = 4725 \text{ kgf/m}$$

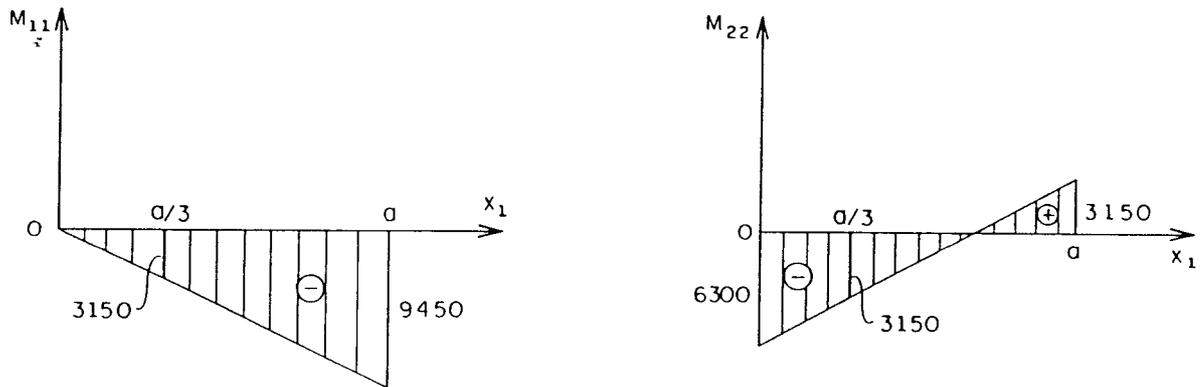


FIGURA 5.9. Momentos fletores ao longo do eixo x_1 da placa para $x_2 = 0$

No Quadro 5.3, mostram-se os valores dos momentos fletores para os pontos indicados na Fig. 5.9, bem como o valor do deslocamento no centro geométrico e a reação nos cantos da placa, obtidos através da análise efetuada com uma malha de 12 elementos no contorno, 13 pontos internos e 48 células.

QUADRO 5.3. Deslocamentos e esforços na placa triangular apoiada

VALORES	TIMOSHENKO	PRESENTE ESTUDO
		(48 células)
$w_E \times 10^3$	0,6933	0,6933
$M_{11} D$	0	0
$M_{22} D$	6300	6300
$M_{11} E$	3150	3150
$M_{22} E$	3150	3150
$M_{11} C$	9540	9452
$M_{22} C$	3150	3152
R_c	10912	10860

Na análise efetuada, a força cortante equivalente obtida ao longo dos lados apresenta uma pequena variação entre o valor mínimo de 4384 kgf/m, no vértice, e 4737 kgf/m, no ponto médio do lado do triângulo, o que representa uma solução bem próxima da analítica.

Na análise destas avaliações numéricas, conclui-se que a formulação representa bem o campo de momentos iniciais e que a integração sobre o domínio pode ser bem avaliada, sem a necessidade de uma malha muito refinada.

6 ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE PLACAS

6.1 Introdução

O objetivo básico deste Capítulo é estender a formulação anteriormente desenvolvida, através do Método dos Elementos de Contorno, à análise elastoplástica de placas. Para isto, apresenta-se, inicialmente, alguns conceitos da teoria da plasticidade, os quais governam o comportamento elastoplástico dos materiais, assim como as expressões necessárias ao equacionamento do problema.

São apresentadas, a seguir, as hipóteses e simplificações introduzidas, visando a aplicação em problemas de placas, e o procedimento numérico para a obtenção da solução. O algoritmo desenvolvido é baseado no processo das tensões iniciais, proposto por ZIENKIEWICS et al (1969).

Ao final do Capítulo, faz-se a análise elastoplástica de alguns exemplos, verificando-se a possibilidade de aplicação da formulação apresentada.

6.2 Conceitos Básicos da Teoria da Plasticidade

Neste item, são introduzidas noções de alguns princípios básicos da teoria da plasticidade, utilizados na solução de problemas que apresentam não-linearidade física. Um tratamento mais detalhado do assunto pode ser encontrado nas publicações de HILL (1950) e MENDELSON (1968), entre outras.

O objetivo da teoria da plasticidade é o

estabelecimento de relações entre tensões e deformações, típicas para materiais que apresentam este comportamento. Basicamente, o comportamento plástico caracteriza-se pelo aparecimento de deformações irreversíveis ϵ_p , após atingida a tensão inicial de escoamento do material, σ_0 , conforme mostra-se, esquematicamente, na Fig. 6.1, a qual apresenta uma possível curva tensão-deformação de um ensaio uniaxial, para um material com estas características.

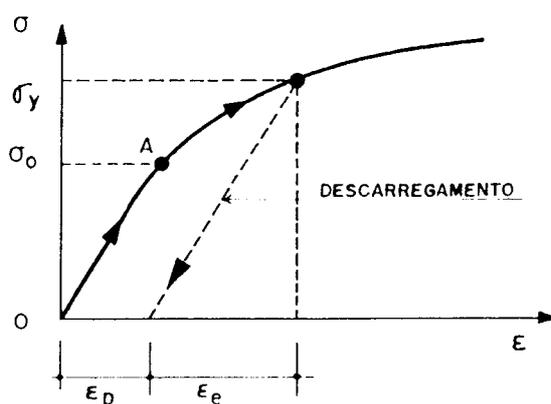


FIGURA 6.1. Curva tensão-deformação para ensaio uniaxial

Estas deformações, que são consideradas independentes do tempo de aplicação do carregamento, são mantidas, desde que determinado nível de tensão tenha sido alcançado, mesmo com o descarregamento total, anulando-se a tensão atuante.

Assim, a configuração deformada é dependente do nível de tensão e da história do carregamento. Observa-se, na Fig. 6.1, que, inicialmente, o comportamento é elástico linear, para níveis de tensão inferiores a σ_0 . Neste caso, para sucessivas situações de carga e descarga, o caminho percorrido encontra-se no trecho linear inicial \overline{OA} , não ocorrendo, portanto, deformações permanentes ou residuais. Para níveis de tensão acima da tensão de escoamento σ_0 , caracteriza-se o regime plástico do material. Neste regime, conforme pode-se observar na Fig. 6.1, geralmente ocorre uma redução na rigidez do material, quando as tensões crescem muito menos com as deformações do que no regime elástico. Verifica-se, também, que, nesta fase, a descarga não se dá mais pelo mesmo caminho percorrido durante a carga, mas por um trajeto paralelo ao do regime elástico; resulta, em consequência, no nível

nulo de tensão, a deformação irreversível, denominada deformação plástica ϵ_p . Ao se efetuar um novo carregamento, este percorre o mesmo caminho linear do descarregamento, até que seja atingido um novo valor para a tensão de escoamento, σ_y , que é função da deformação plástica acumulada até então. Este fenômeno é denominado de endurecimento ou encruamento do material.

Um outro fenômeno que ocorre no regime plástico, característico, geralmente, para os metais, é o chamado efeito Bauschinger, onde há a perda de simetria da curva tensão-deformação, após o escoamento, quando há inversão na sollicitação. Após a primeira deformação plástica, em materiais com endurecimento, os níveis de tensão de escoamento à tração e à compressão apresentam valores σ_y diferentes. Nestes casos, verifica-se uma translação na curva tensão-deformação do material, em cada ciclo completo de carga e descarga, quando se atinge tensões no regime plástico. Observa-se que as deformações permanentes modificam as características iniciais do material, retirando a sua isotropia. Este efeito não será considerado no presente estudo.

Para se ter uma teoria que modele o comportamento elastoplástico, devem ser obtidas relações explícitas entre tensão e deformação, para a fase elástica do material e para a fase após o escoamento. Deve-se ter, também, o critério de escoamento, que indica o nível de tensão a partir do qual aparecem as deformações plásticas, assim como a regra de endurecimento, que descreve como o escoamento é alterado, em função destas deformações.

6.2.1 Problemas Unidimensionais

Para os casos unidimensionais, o modelo é facilmente definido, apenas em função da curva tensão-deformação, obtida a partir do ensaio uniaxial de corpos de prova. Usualmente, algumas curvas simplificadas são adotadas, como é o caso da curva bilinear apresentada na Fig. 6.2, com o endurecimento linear do material após o escoamento. Este tipo de aproximação é adotado no presente trabalho, já que conduz a resultados satisfatórios para a análise elastoplástica de problemas usuais, e leva a simplificações nas relações constitutivas.

Neste caso, para tensões abaixo da tensão inicial de escoamento σ_0 , equivalente ao ponto A da curva, o comportamento é elástico, sendo a constante de proporcionalidade igual ao módulo de elasticidade E . A partir do escoamento, um incremento da tensão normal provoca um incremento de deformação, segundo o módulo tangente E_T . Portanto, conforme indica-se na Fig. 6.2, após o escoamento inicial, tem-se que:

$$d\sigma = E_T d\epsilon \quad , \quad (6.1)$$

com o incremento de deformação $d\epsilon$ podendo ser decomposto em uma parcela elástica e outra plástica, ou seja:

$$d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p \quad (6.2)$$

Como pode ser observado na Fig. 6.2, pode-se escrever:

$$d\sigma = E d\epsilon_e \quad , \quad (6.3)$$

ou, substituindo-se (6.2):

$$d\sigma = E(d\epsilon - d\epsilon_p) \quad (6.4)$$

Denota-se por H' o parâmetro de endurecimento, que relaciona os incrementos de tensão e deformação plástica, isto é:

$$d\sigma = H' d\epsilon_p \quad , \quad (6.5)$$

ou seja,

$$H' = \frac{d\sigma}{d\epsilon - d\epsilon_e} \quad , \quad (6.6)$$

que, através da substituição de (6.3) e (6.1), resulta em:

$$H' = \frac{E_T}{1 - E_T/E} \quad (6.7)$$

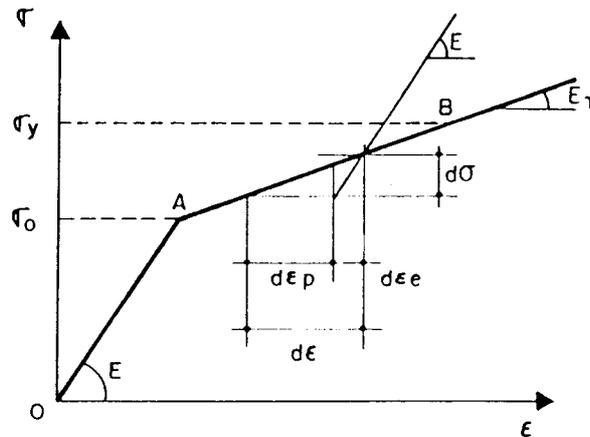


FIGURA 6.2. Comportamento bilinear

Tem-se, ainda, que a tensão de escoamento σ_y em um ponto B qualquer pode ser escrita em função da tensão inicial de escoamento, σ_0 , através da soma de incrementos de tensão entre os pontos A e B, isto é:

$$\sigma_y = \sigma_0 + \int_A^B d\sigma \quad (6.8)$$

Tendo em vista (6.5), a tensão de escoamento pode ser relacionada à deformação plástica, através de:

$$\sigma_y = \sigma_0 + \int_A^B H' d\epsilon_p \quad (6.9)$$

que, neste caso, resulta em:

$$\sigma_y = \sigma_0 + H' \epsilon_p \quad , \quad (6.10)$$

sendo ϵ_p a deformação plástica acumulada até o ponto B.

Portanto, o nível de tensão para o material descrito está limitado à seguinte condição:

$$\sigma - \sigma_y \leq 0 \quad (6.11)$$

O primeiro membro desta inequação pode ser representado por uma função de escoamento que não pode assumir valores positivos, ou seja,

$$F(\sigma, k) \leq 0 \quad , \quad (6.12)$$

ou

$$\sigma - Y(k) \leq 0 \quad , \quad (6.13)$$

onde σ é o nível de tensão e $Y(k)$, a função que representa o valor da tensão de escoamento σ_y atual, indicada na Fig. 6.2 e expressa em (6.10). Pode-se verificar que a função $Y(k)$ depende apenas do parâmetro k , associado à história do material e ao seu comportamento quanto ao endurecimento, e, neste caso, representado pela deformação plástica ϵ_p .

A função dada em (6.12) expressa matematicamente a região elástica, onde a condição $F(\sigma, k) = 0$ representa o limite atual desta região e corresponde a um ponto sobre a curva tensão-deformação.

É importante salientar que, para materiais que não apresentam relações lineares entre tensão e deformação, como o exemplo indicado na Fig. 6.1, todas as expressões anteriores são válidas, uma vez que as equações são expressas de forma incremental. Ressalte-se que, nestes casos, o parâmetro de endurecimento H' , dado em (6.7), e utilizado na equação (6.10), pode variar em cada ponto da curva tensão-deformação, em função do módulo tangente E_T .

Pode-se observar, finalmente, que o modelo elastoplástico perfeito constitui a idealização mais simples para o qual não se considera o endurecimento do material e, portanto, E_T e H ; são nulos. Neste caso, a função de escoamento pode ser representada por

$$\sigma - \sigma_0 \leq 0 \quad (6.14)$$

6.2.2 Generalização para Problemas Multidimensionais

A generalização da análise elastoplástica para estados multiaxiais de tensão pode ser feita através das hipóteses

básicas da teoria da plasticidade e dos conceitos introduzidos no item anterior para o caso unidimensional.

No meio contínuo, as relações entre tensão e deformação passam a ser estabelecidas, na sua forma geral, através das componentes tensoriais σ_{ij} e ϵ_{ij} , com $i, j = 1, 2, 3$. Portanto, analogamente ao caso unidimensional, um incremento de deformação $d\epsilon_{ij}$ pode ser decomposto em componentes elásticas e plásticas, ou seja:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (6.15)$$

Na fase elástica, a relação entre incrementos de tensão e deformação é obtida pela equação (2.4) e expressa por:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\epsilon_{kl}^e, \quad (6.16)$$

onde C_{ijkl} é o tensor de constantes elásticas que, para materiais isotrópicos, é dado por:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (6.17)$$

sendo λ e μ as constantes de Lamé e δ_{ij} o delta de Kronecker.

Para estados de tensão multiaxiais, um critério de escoamento que determina as condições que caracterizam a transição entre o regime elástico e o plástico, pode ser escrito, genericamente, na forma:

$$F(\sigma_{ij}, k) = f(\sigma_{ij}) - Y(k) = 0, \quad (6.18)$$

onde $f(\sigma_{ij})$ é função do estado de tensões atual σ_{ij} , podendo ser interpretada como uma tensão equivalente uniaxial $\bar{\sigma}$. A função $Y(k)$, que depende do parâmetro k associado à regra de endurecimento do material, pode ser entendida como um valor convencional da tensão de escoamento, obtida a partir de ensaios uniaxiais.

O critério de escoamento definido pela função F pode ser representado, no espaço de tensões, por uma superfície, denominada superfície de escoamento, a qual separa os estados de

tensões elásticas daqueles que produzem deformações plásticas. Considerando-se que o material é isotrópico e que o estado de tensão em um ponto de um corpo é representado por um ponto no espaço das tensões, os eixos coordenados no espaço podem ser relacionados às tensões principais; assim, é possível uma representação tridimensional para a superfície de escoamento, como será visto no próximo item.

De modo análogo ao caso uniaxial, deve-se observar que existe uma superfície inicial de escoamento, que, no caso, é função apenas do estado de tensão; portanto, a partir de (6.18), pode-se escrever:

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (6.19)$$

Segundo esta representação, sendo $F = 0$, acréscimos do estado de tensão que conduzam a valores negativos de F indicam situação de descarga ou entrada no regime elástico. Acréscimos de tensão que verificam a equação (6.19) indicam uma situação limite ou de carregamento neutro. Já acréscimos de tensão que conduzam a valores positivos de F são ditos inacessíveis, pois indicam o aparecimento de deformações permanentes. Nesta situação, a superfície inicial deve evoluir no espaço de tensões, de tal modo que o ponto que representa o novo estado de tensão ainda resulte sobre a superfície. Isto é análogo à análise unidimensional, quando há variação da tensão inicial de escoamento, com o aparecimento de deformação plástica, para materiais que apresentam endurecimento.

Assim, um incremento do estado de tensão no ponto que produza deformação plástica é chamado de carregamento e o incremento que conduza a um ponto no interior da superfície representa um descarregamento, que é sempre elástico. Portanto, a superfície de escoamento, em determinado estágio, só sofre alteração no espaço de tensões quando há um processo de carregamento.

Então, após o escoamento inicial em materiais que apresentam endurecimento, haverá um aumento do limite elástico, de tal maneira que o nível de tensão para o qual ocorre uma deformação plástica adicional depende do grau da deformação atual.

Deste modo, a superfície de escoamento irá variar a cada estágio de deformações plásticas, gerando superfícies subseqüentes; o processo de evolução das superfícies é, ainda, descrito pela regra de endurecimento, que indica como a função F da equação (6.18) se altera com o parâmetro k .

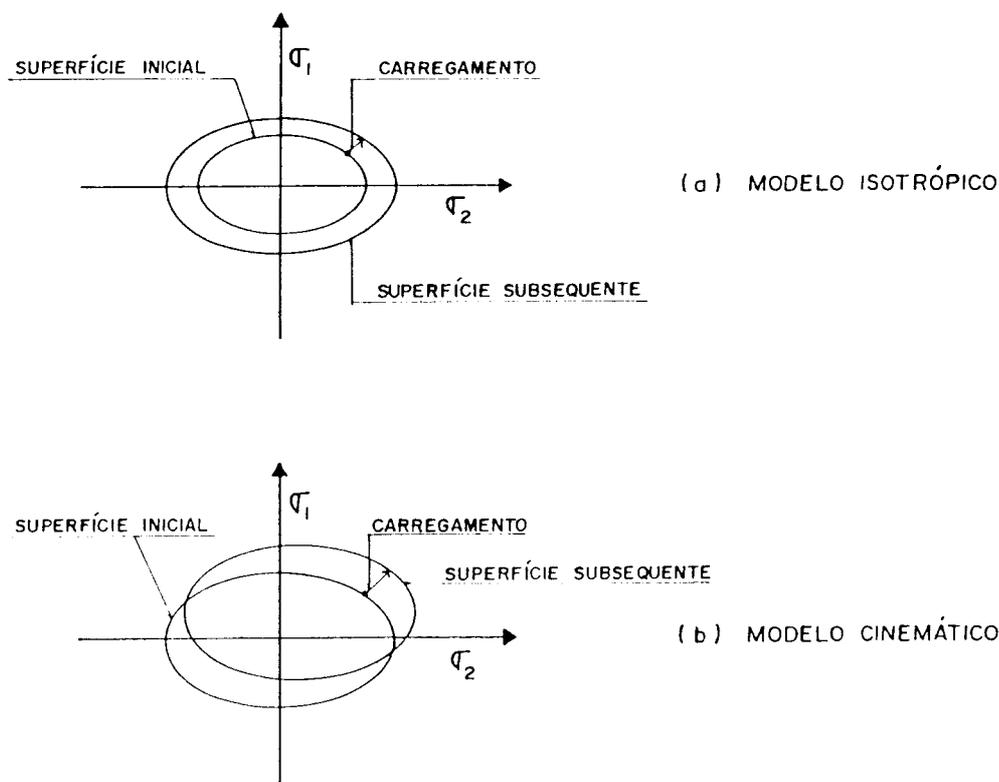


FIGURA 6.3. Modelos de endurecimento

Dois modelos que descrevem o tipo de endurecimento do material são mostrados na Fig. 6.3. O primeiro, indicado na Fig. 6.3 - (a), é denominado isotrópico e admite que a superfície evolua, mantendo a sua forma inicial, sem sofrer translação; gera-se, assim, uma superfície subseqüente, através da expansão uniforme da superfície inicial. Isto corresponde à manutenção das características iniciais de isotropia do material, sendo adequado para situações de carregamento sempre crescente. Quando as superfícies subseqüentes mantêm a dimensão e a forma, mas transladam no espaço de tensões, o modelo é dito cinemático. Este modelo permite a simulação do efeito Bauschinger, adequado para carregamentos cíclicos, e está indicado na Fig, 6.3 - (b).

Modelos mistos podem ser idealizados, compondo-se estes dois modelos básicos, levando, porém, à maior complexidade na formulação teórica. Deve-se observar, ainda, que, para materiais com comportamento elastoplástico perfeito, não há endurecimento, resultando em uma superfície fixa no espaço das tensões.

No presente trabalho, adota-se o modelo de endurecimento isotrópico que, para problemas usuais de estruturas, produz resultados satisfatórios. Neste caso, a função $f(\sigma_{ij})$ não se altera e o desenvolvimento progressivo da superfície de escoamento é definido a partir da variação da função de escoamento do material, $Y(k)$, que pode ser relacionada à deformação plástica, através do parâmetro k . Existem duas hipóteses quanto à definição deste parâmetro. A primeira, conhecida como *work hardening*, define k como função do trabalho plástico, W_p , acumulado durante as deformações, isto é:

$$k = w_p = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad , \quad (6.20)$$

onde $d\epsilon_{ij}^p$ é a parcela plástica das deformações ocorridas durante um incremento de deformação.

A partir do ensaio de tração simples, pode-se determinar W_p e o correspondente valor da tensão de escoamento convencional, $Y(k)$, obtendo-se uma relação entre estes valores.

A segunda hipótese, denominada *strain hardening*, admite que o parâmetro k seja função da deformação plástica equivalente, $\bar{\epsilon}^p$, definida por:

$$k = \bar{\epsilon}^p = \int d\bar{\epsilon}^p \quad , \quad (6.21)$$

onde

$$d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij} d\epsilon_{ij}} \quad (6.22)$$

Neste caso, o parâmetro k é relacionado à norma dos incrementos de deformação plástica; a constante que aparece na equação (6.22) é tal que a expressão é válida para o caso unidimensional, admitindo-se que o material obedeça à condição de

incompressibilidade na plastificação.

Basicamente, o caso multiaxial é associado ao estado de tensão unidimensional, através da tensão equivalente $\bar{\sigma}$ e da deformação equivalente $\bar{\epsilon}^p$, que devem reproduzir a tensão σ e a deformação plástica ϵ_p do ensaio uniaxial. Neste caso, a relação incremental pode ser expressa de forma semelhante à equação (6.5), ou seja,

$$d\bar{\sigma} = H' d\bar{\epsilon}^p \quad , \quad (6.23)$$

sendo H' a tangente à curva $(\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}^p)$, definido em (6.7).

Tendo em vista a definição da função de escoamento, dada em (6.18), e a possibilidade de endurecimento do material, observa-se que, se $f < Y(k)$, tem-se, ainda, um comportamento elástico. Quando $f = Y(k)$, tem início o escoamento e uma mudança incremental na função de escoamento, devida a um incremento de tensão, é dada por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (6.24)$$

Neste caso, pode-se ter:

- (a) descarregamento elástico, quando $df < 0$, e o ponto representativo do estado de tensão retorna para dentro da superfície de escoamento;
- (b) carregamento plástico, se $df > 0$, e o material tem comportamento plástico com endurecimento, permanecendo o ponto na superfície subsequente;
- (c) carregamento neutro, que ocorre em materiais perfeitamente plásticos, quando $df = 0$, ficando o ponto na superfície inicial, que é fixa.

Para a formulação do modelo elastoplástico, devem ser obtidas, ainda, relações constitutivas para a fase após o escoamento. Faz-se, então, uso de uma hipótese adicional da teoria da plasticidade, que consiste em se considerar que o incremento de deformação plástica é proporcional ao gradiente de tensão do potencial plástico Q . Esta grandeza é uma função escalar das tensões e do parâmetro k , e tem a dimensão de tensão. Assim,

pode-se escrever:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad , \quad (6.25)$$

onde $d\lambda$ é uma constante denominada multiplicador plástico.

A condição expressa na equação (6.25) é denominada regra de fluxo, já que indica o fluxo plástico depois do escoamento. Quando se considera o potencial plástico Q , coincidente com a função de escoamento F , a lei de fluxo é dita associativa. Neste caso, a equação (6.25) é dada por:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F(\sigma_{ij}, k)}{\partial \sigma_{ij}} \quad , \quad (6.26)$$

ou

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad , \quad (6.27)$$

uma vez que $Y(k)$ não depende do estado de tensão.

A equação (6.26) é conhecida como condição de normalidade, posto que $\partial F / \partial \sigma_{ij}$ constitui um vetor normal à superfície de escoamento no ponto representativo do estado de tensões considerado.

É possível, ainda, se demonstrar, através da teoria da plasticidade, que, tanto a superfície inicial de escoamento, como todas as superfícies subseqüentes, devem ser convexas. Estas condições são conseqüência da lei associativa de escoamento e da irreversibilidade das deformações plásticas, que implica na realização de trabalho plástico positivo durante um ciclo completo de tensão, onde as variações de tensão e de deformação devem ser de mesmo sinal. As condições de normalidade do fluxo plástico e convexidade da superfície de escoamento são adequadas aos materiais com comportamento elastoplástico perfeito, ou com endurecimento, garantindo a unicidade da solução do problema.

Para a determinação da relação entre tensões e deformações após o escoamento, substitui-se o incremento de deformação elástica de (6.15) em (6.16), obtendo-se, então:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^p) \quad (6.28)$$

Utilizando-se, então, o incremento de deformação plástica dado por (6.27), obtém-se:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\epsilon_{kl} - a_{kl} d\lambda) \quad (6.29)$$

onde

$$a_{kl} = \frac{\partial F(\sigma_{kl}, k)}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial f(\sigma_{kl})}{\partial \sigma_{kl}} \quad (6.30)$$

Durante a ocorrência de deformações plásticas, tem-se $dF = 0$, isto é:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (6.31)$$

ou, ainda,

$$a_{ij} d\sigma_{ij} - \frac{\partial y(k)}{\partial k} dk = 0 \quad (6.32)$$

Substituindo-se, em (6.32), o valor de dk , utilizando-se a hipótese de endurecimento dada por (6.20), vem:

$$a_{ij} d\sigma_{ij} - \frac{\partial y(k)}{\partial k} \sigma_{ij} a_{ij} d\lambda = 0 \quad (6.33)$$

O segundo termo desta equação pode ser reescrito na forma:

$$\frac{\partial y(k)}{\partial k} \sigma_{ij} a_{ij} d\lambda = \frac{\partial y(k)}{\partial k} \sigma_{ij} \frac{df(\sigma_{ij})}{d\sigma_{ij}} d\lambda = 0 \quad (6.34)$$

Sendo f uma função homogênea de grau unitário, aplicando-se o Teorema de Euler para funções homogêneas em (6.34), obtém-se:

$$\frac{\partial y(k)}{\partial k} \sigma_{ij} a_{ij} d\lambda = \frac{\partial y(k)}{\partial k} f(\sigma_{ij}) d\lambda \quad (6.35)$$

Através da definição do parâmetro de endurecimento em função do incremento de trabalho plástico, definido em (6.20), e considerando-se $f(\sigma_{ij})$ como uma tensão equivalente $\bar{\sigma}$ para o caso uniaxial, pode-se escrever:

$$\frac{\partial y(k)}{\partial k} f(\sigma_{ij}) d\lambda = H' d\lambda \quad , \quad (6.36)$$

onde o parâmetro de endurecimento H' , conforme expresso na equação (6.23), relaciona os incrementos de tensão e deformação plástica equivalentes.

Substituindo-se (6.36) e (6.35) na equação (6.33), obtém-se:

$$a_{ij} d\sigma_{ij} - H' d\lambda = 0 \quad (6.37)$$

O valor de $d\lambda$ pode ser determinado em função do incremento total de deformação, utilizando-se as equações (6.29) e (6.37), ou seja:

$$d\lambda = \frac{a_{ij} C_{ijkl}}{(a_{ij} d_{ij} + H')} d\epsilon_{kl} \quad , \quad (6.38)$$

sendo:

$$d_{ij} = C_{ijkl} a_{kl} \quad (6.39)$$

Finalmente, substituindo-se (6.38) em (6.29), chega-se à relação incremental entre tensão e deformação, dada por:

$$d\sigma_{ij} = \left(C_{ijkl} - \frac{d_{ij} a_{mn} C_{mnkl}}{a_{mn} d_{mn} + H'} \right) d\epsilon_{kl} \quad (6.40)$$

Note-se que esta equação expressa uma relação do tipo:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\epsilon_{kl} \quad , \quad (6.41)$$

a qual é semelhante à relação (6.1), apresentada para o caso unidimensional, onde o módulo de elasticidade tangente, E_T , é substituído por C_{ijkl}^{ep} .

Pode-se, ainda, expressar o incremento de tensão, dado em (6.40), através de suas componentes elástica e plástica, ou seja:

$$d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}^e - d\sigma_{ij}^p \quad , \quad (6.42)$$

sendo a parcela elástica do incremento dada por:

$$d\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} d\epsilon_{kl} \quad (6.43)$$

e a componente plástica, por:

$$d\sigma_{ij}^p = \frac{d_{ij} a_{mn}}{(a_{mn} d_{mn} + H')} d\sigma_{mn}^e \quad (6.44)$$

Nesta última equação, $d\sigma_{mn}^e$ representa o incremento de tensão, devido ao incremento total de deformação, supondo o comportamento elástico, sendo expresso em (6.43).

6.2.3 Critérios de Escoamento

Como foi apresentado no item anterior, para a formulação do modelo elastoplástico, há a necessidade de se ter critérios de escoamentos que indiquem o início das deformações plásticas, ou seja, uma forma explícita para a função de escoamento F , definida de forma genérica em (6.18).

Vários critérios têm sido aplicados na análise elastoplástica, associados aos diversos tipos de materiais, os quais apresentam comportamentos distintos, inviabilizando, assim, a utilização de um único critério.

No presente trabalho, a formulação permite a

utilização dos critérios de Von Mises e Tresca, os quais apresentam boa concordância com os resultados obtidos experimentalmente para materiais dúcteis, mas que podem ser, também, adaptados a materiais que não apresentem esta característica.

Um critério de escoamento é independente da orientação do sistema de coordenadas empregado, sendo, usualmente, expresso em função dos invariantes de tensão, tais como o invariante do tensor de tensão, I_1 , dado por:

$$I_1 = \sigma_{ii} \quad (6.45)$$

e dos invariantes do tensor anti-esférico, S , dado por:

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (6.46)$$

e

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} \quad ; \quad (6.47)$$

as componentes de S são dadas por:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (6.48)$$

Uma outra alternativa conveniente para se ter uma forma geral de algumas funções de escoamento é substituir-se o invariante J_3 pelo ângulo θ , introduzido por Lode, dado por:

$$\theta = \frac{1}{3} \text{arc sen} \left[- \frac{3 \sqrt{3} J_3}{2 J_2^{3/2}} \right] \quad , \quad (6.49)$$

com o ângulo θ variando no intervalo $[-\pi/6, \pi/6]$.

Os critérios desenvolvidos que fornecem uma boa previsão do escoamento em metais são independentes do invariante I_1 , como é o caso dos critérios de Tresca e Von Mises. Isto decorre do fato de que a variação de estados hidrostáticos de tensão não é significativa no escoamento destes materiais.

O critério de Tresca, formulado em 1864, estabelece que o escoamento do material começa quando a máxima tensão de cisalhamento em um ponto alcança um valor crítico k , que pode ser determinado a partir de ensaios de tração ou compressão simples. Denominando-se as tensões principais por σ_1 , σ_2 e σ_3 , sendo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, pode-se expressar o critério na forma:

$$\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = k \quad (6.50)$$

Ao se utilizar o ensaio de tração simples em que $Y(k)$ é a tensão de escoamento do material, através de (6.50), obtém-se:

$$k = \frac{Y(k)}{2}$$

e, portanto, o início do escoamento pode ser expresso pela função:

$$F = (\sigma_1 - \sigma_3) - Y(k) = 0 \quad (6.51)$$

O critério de Tresca pode, também, ser escrito em função dos invariantes J_2 e θ , na forma:

$$F = 2 \sqrt{J_2} \cos \theta - Y(k) = 0 \quad (6.52)$$

A função F pode ser representada no espaço tridimensional das tensões principais por uma superfície prismática hexagonal, conforme se indica na Fig. 6.4. Esta superfície tem comprimento infinito e possui o eixo longitudinal coincidente com o eixo hidrostático, onde $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, conseqüência da independência do critério em relação à tensão hidrostática.

Von Mises, em 1913, sugeriu que o material começa a se deformar plasticamente quando o segundo invariante, J_2 , atinge um valor crítico. Analiticamente, este critério é dado por:

$$\sqrt{J_2} = k \quad , \quad (6.53)$$

sendo J_2 dado em (6.46), ou podendo ser expresso em função das tensões principais, através de:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (6.54)$$

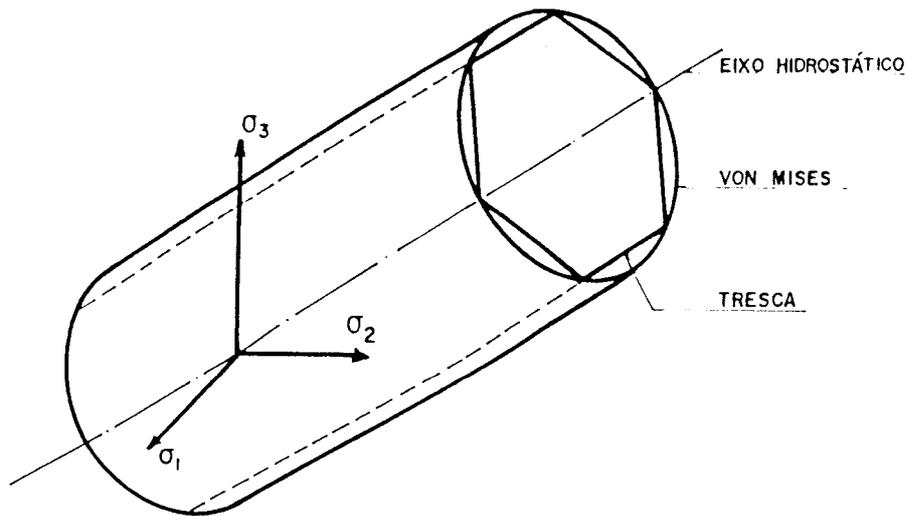


FIGURA 6.4. Superfícies de escoamento

Partindo-se do ensaio uniaxial, pode-se relacionar k com a tensão de escoamento do material $Y(k)$, por meio de (6.53), reescrevendo-se o critério na forma:

$$F = \sqrt{3J_2} - Y(k) = 0 \quad (6.55)$$

Existem duas interpretações físicas para o critério de Von Mises. A primeira, sugerida por Nadai, é que o escoamento tem início quando a tensão de cisalhamento octaédrica atinge certo valor crítico. Esta tensão ocorre no plano octaédrico, cuja direção normal é igualmente inclinada, em relação aos eixos principais, e vale:

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \quad (6.56)$$

A segunda interpretação, dada por Hencky, é que o início do escoamento ocorre quando a energia de distorção elástica desenvolvida alcança um valor crítico. Este valor é igual à energia de distorção do material, quando este é submetido ao ensaio de tração simples.

A Fig. 6.4 mostra a representação geométrica da superfície de escoamento de Von Mises no espaço das tensões principais. A condição expressa em (6.55) gera uma superfície

cilíndrica de eixo coincidente com o eixo hidrostático e com seção transversal circular constante para cada valor da tensão de escoamento $Y(k)$. Pode-se observar, na Fig. 6.4, que a superfície cilíndrica de Von Mises circunscribe o prisma hexagonal de Tresca. Assim, o critério de Tresca tem caráter mais conservativo, pois prevê o escoamento com tensões geralmente inferiores às indicadas pelo critério de Von Mises. Pode-se ainda mostrar que a maior diferença entre os critérios é inferior a 15%.

Com vistas à implementação computacional, é conveniente escreverem-se as relações constitutivas na forma matricial. Assim, a equação (6.40), que relaciona os incrementos de tensão e deformação após o escoamento, fica:

$$d\underset{\sim}{\sigma} = \left[\begin{array}{c} E \\ \sim \\ \sim \end{array} - \frac{\begin{array}{c} E \ a \ a^T \ E \\ \sim \ \sim \ \sim \end{array}}{\begin{array}{c} a^T \ E \ a \ + \ H' \\ \sim \ \sim \ \sim \end{array}} \right] d\underset{\sim}{\epsilon} \quad (6.57)$$

Deve-se observar que, nesta equação, as componentes de tensão e deformação são representadas vetorialmente; E é a matriz de constantes elásticas do material e a , de acordo com (6.30), é o vetor de fluxo, dado por:

$$\underset{\sim}{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \quad , \quad (6.58)$$

onde:

$$\underset{\sim}{\sigma}^T = \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12} \} \quad (6.59)$$

Portanto, para a determinação da matriz elastoplástica, indicada em (6.57), basta que se conheça o vetor de fluxo para cada função de escoamento. Tendo em vista que os critérios de escoamento, em geral, são expressos em função de invariantes, uma representação adequada para o vetor a , de acordo com NAYAK & ZIENKIEWICZ (1972), pode ser dada por:

$$\underset{\sim}{a} = C_1 \underset{\sim}{a}_1 + C_2 \underset{\sim}{a}_2 + C_3 \underset{\sim}{a}_3 \quad , \quad (6.60)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1^T &= \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} \\ \tilde{a}_2^T &= \frac{\partial (J_2)^{1/2}}{\partial \sigma} \\ \tilde{a}_3^T &= \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (6.61)$$

Assim, apenas as constantes C_1 , C_2 e C_3 dependem da função de escoamento. No caso do critério de Tresca, estas constantes valem:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 2 \cos \theta (1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} 3\theta) \\ C_3 &= \frac{\sqrt{3}}{J_2} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos 3\theta} \end{aligned} \quad (6.62)$$

com θ dado em (6.49).

Para o critério de Von Mises, as constantes são:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= \sqrt{3} \\ C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (6.63)$$

6.3 Um Modelo Simples para a Análise Elastoplástica de Placas

Em função das hipóteses da teoria de Kirchhoff para placas de pequena espessura, conforme visto na Capítulo 2, pode-se admitir que um ponto está sujeito a um estado plano de tensões, quando não se consideram as tensões devidas a forças cortantes. Portanto, as superfícies de escoamento podem ser expressas em função apenas das tensões σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , provenientes da flexão.

Como em uma seção transversal de uma placa fletida as tensões têm distribuição linear ao longo da espessura, enquanto o material está na fase elástica, a plastificação começa nas faces da superfície da placa, expandindo-se para a região interna, com o acréscimo das tensões. Desta forma, em um critério de escoamento representado em função das tensões há necessidade de se conhecer o estado de tensões nos pontos localizados ao longo da espessura da placa, que podem estar no regime elástico ou plástico. Uma alternativa para representar a propagação da plastificação é a divisão da espessura da placa em camadas, para as quais verifica-se o escoamento. Os momentos resultantes da integração sobre a espessura podem ser obtidos através da soma dos efeitos de cada camada.

Um modelo mais simples, e que parece razoável, para placas delgadas, consiste em se considerar que toda a seção se plastifique instantaneamente quando o momento fletor atinge o valor do momento de plastificação M_0 . Este é o momento resultante em uma seção quando todos os pontos atingem a tensão inicial de escoamento, σ_0 , e, portanto, vale:

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_0 x_3 dx_3 = \frac{\sigma_0 t^2}{4} \quad (6.64)$$

Neste modelo, adotado no presente estudo, todas as equações vistas no item anterior podem ser adaptadas através da correspondência entre tensões e momentos e entre as respectivas deformações e curvaturas. Assim, o critério de escoamento é expresso em função dos momentos atuantes na placa e também de um parâmetro de endurecimento, determinado a partir da curva momento-curvatura de um ensaio de flexão unidimensional. Ou seja, a função de escoamento é escrita na forma:

$$F(M_{ij}, k) = f(M_{ij}) - M_y(k) = 0 \quad (6.65)$$

Deve-se observar que, neste caso, f depende dos momentos M_{11} , M_{22} e M_{12} e pode, então, ser interpretada como um momento equivalente \bar{M} . O momento de plastificação M_y é função do

parâmetro k e depende do nível de curvatura plástica equivalente, $\bar{\chi}^P$, e representa o momento convencional de escoamento.

Utilizando-se, de forma análoga, os conceitos introduzidos na definição do endurecimento do material após o escoamento inicial, pode-se escrever:

$$M_y(k) = M_0 + H' \bar{\chi}^P, \quad (6.66)$$

sendo o parâmetro de endurecimento obtido a partir da curva momento-curvatura, para o caso da flexão unidimensional, e dado por:

$$H' = \frac{dM}{d\bar{\chi}^P} \quad (6.67)$$

Logo, admitindo-se que o comportamento do material seja o representado na Fig. 6.5, onde indica-se o diagrama momento-curvatura para uma faixa de placa de largura unitária, observa-se que, inicialmente, o material está no regime elástico, sendo a rigidez à flexão definida por EI . Após o escoamento inicial, definido pelo momento M_0 , o material apresenta curvaturas plásticas e endurecimento linear, com um módulo de rigidez à flexão igual a EI_T . Nesta fase, o incremento de curvatura é formado por uma componente elástica e outra plástica, isto é:

$$d\bar{\chi} = d\bar{\chi}^e + d\bar{\chi}^P \quad (6.68)$$

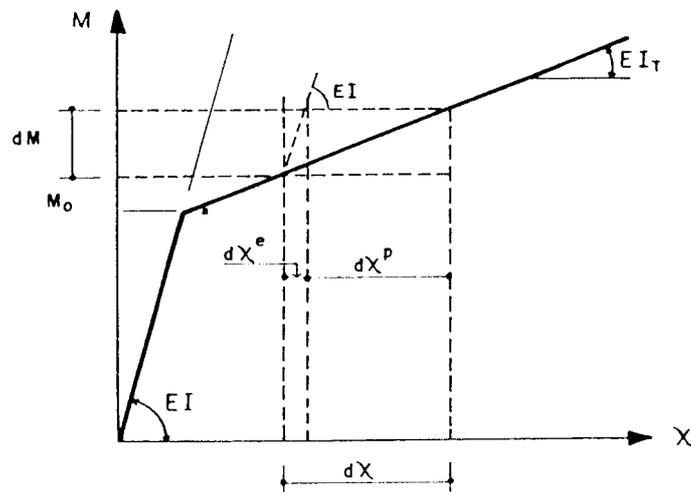


FIGURA 6.5. Momento-curvatura para flexão unidimensional

Portanto, o parâmetro H' , dado em (6.67), representa a inclinação da curva momento-curvatura após a retirada da componente elástica e pode ser calculado de forma análoga à equação (6.7), ou seja,

$$H' = \frac{EI_T}{1 - \frac{EI_T}{EI}} \quad (6.69)$$

As relações constitutivas podem ser expressas de forma matricial, utilizando-se as mesmas expressões do item anterior. Então, na fase elástica, as relações incrementais entre momentos e curvaturas são dadas por:

$$dM^e = C d\chi \quad , \quad (6.70)$$

onde

$$M^e = \begin{Bmatrix} M_{11}^e \\ M_{22}^e \\ M_{12}^e \end{Bmatrix} \quad (6.71)$$

$$d\chi = \begin{Bmatrix} \chi_{11}^e \\ \chi_{22}^e \\ \chi_{12}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{Bmatrix} \quad (6.72)$$

e

$$C = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

Após o escoamento, estas relações incrementais, de acordo com (6.57), podem ser escritas na forma:

$$dM = \begin{bmatrix} C & a & a^T & C \\ C & \frac{a^T C a + H'}{a^T C a + H'} \end{bmatrix} d\chi \quad , \quad (6.74)$$

sendo, no caso, o vetor de fluxo dado por:

$$\tilde{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \tilde{M}} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial M_{11}}, \frac{\partial F}{\partial M_{22}}, \frac{\partial F}{\partial M_{12}} \right\} \quad (6.75)$$

Tendo em vista as equações (6.38) e (6.39), pode-se escrever (6.74) da seguinte forma:

$$d\tilde{M} = d\tilde{M}^e - d\lambda \tilde{d} \quad , \quad (6.76)$$

onde:

$$d\lambda = \frac{\tilde{a}^T \tilde{C}}{\tilde{a}^T \tilde{C} \tilde{a} + H'} d\tilde{\chi} \quad (6.77)$$

e

$$\tilde{d} = \tilde{C} \tilde{a} \quad (6.78)$$

Observe-se, em (6.76), que a parcela $d\lambda \tilde{d}$ representa a componente plástica do incremento de momentos.

6.4 Solução Numérica do Problema Não-linear

Utilizando-se o equacionamento desenvolvido na seção anterior e a formulação de placas com campo de momentos iniciais, pode-se obter a solução numérica para o problema elastoplástico, baseado no processo das tensões iniciais, inicialmente proposto por ZIENKIEWICS (1969), para o Método dos Elementos Finitos. No caso de placas, o procedimento é semelhante, considerando-se uma distribuição de momentos iniciais.

Como a relação constitutiva após o escoamento do material, dada pela equação (6.74), é expressa na forma incremental, o processo numérico para a solução requer que o carregamento sobre a placa seja aplicado em incrementos. Utiliza-se, então, um algoritmo incremental-iterativo, sem atualização das matrizes envolvidas, semelhante ao método da rigidez inicial apresentado por OWEN & HINTON (1980). Nesta referência bibliográfica, está detalhada a abordagem numérica que foi empregada no presente trabalho, descrevendo-se, a seguir, os

aspectos gerais do algoritmo empregado.

Para um incremento de carga genérico, admitindo-se o comportamento elástico, pode-se determinar o incremento de momentos em cada ponto da placa, através da equação (5.120), que são acumulados ao estado de momentos atuais. Se algum ponto atinge o escoamento, o incremento de momentos reais, o qual verifica a condição de escoamento, deve ser calculado e o excesso de momentos ou incremento de momentos plásticos, dM^P , deve ser reaplicado ao sistema como um campo de momentos iniciais.

Um procedimento conveniente que pode ser utilizado é o de se obter a solução elástica para o carregamento total previsto e definir os incrementos de carga a partir de uma fração, β_i , do carregamento. Assim, para um carregamento genérico, admitindo-se que não ocorram momentos iniciais, obtém-se, de (5.120), a solução elástica para os momentos, dada por:

$$\tilde{M}^e = N \quad (6.79)$$

Logo, para um incremento de carga genérico i , o incremento de momentos elásticos, vale:

$$\tilde{\Delta M}_i^e = \beta_i \tilde{M}^e \quad (6.80)$$

Acumulando-se, então, os valores de β_i , obtém-se as somas de incrementos de momentos, correspondentes aos acréscimos do carregamento.

Os passos básicos utilizados para cada incremento de carga podem ser resumidamente descritos como:

(a) Calcula-se o incremento elástico de momentos $\tilde{\Delta M}_i^e$. Este valor é calculado, através da equação (6.80), para a primeira iteração, considerando, portanto, o efeito do incremento de carga. Para as demais iterações, $\tilde{\Delta M}_i^e$ é calculado a partir do excesso de momentos, $\tilde{\Delta M}_{i-1}^P$, determinado na iteração anterior, que é aplicado como campo de momentos iniciais. Portanto, da equação (5.120), tem-se:

$$\tilde{\Delta M}_i^e = S \tilde{\Delta M}_{i-1}^P \quad (6.81)$$

(b) Em cada ponto da placa, calcula-se o estado de momentos, supondo-se comportamento elástico, somando-se o incremento ΔM_i^e aos momentos verdadeiros da iteração anterior, ou seja:

$$\tilde{M}_i^e = \tilde{M}_{i-1} + \Delta \tilde{M}_i^e \quad (6.82)$$

(c) Verifica-se a condição de escoamento, ou seja, se $f(\tilde{M}_i^e) < M_y(k)$; neste caso, o ponto ainda está no regime elástico e a estimativa \tilde{M}_i^e está correta. Deve-se notar que $M_y(k)$ é o momento de escoamento atualizado ao final da iteração anterior, que, de acordo com (6.66), é dado por:

$$M_y(k) = M_0 + H' \bar{\chi}_{i-1}^p \quad (6.83)$$

(d) Se $f(\tilde{M}_i^e) \geq M_y(k)$ e $f(\tilde{M}_{i-1}) = M_y(k)$, então o ponto em consideração já havia escoado na iteração anterior e os momentos ainda estão crescendo. Portanto, todo o excesso de momentos deve ser reduzido, de forma que o ponto fique na superfície de escoamento. Neste caso, o incremento de momentos deve ser calculado por meio de (6.76), isto é:

$$\Delta \tilde{M}_i = \Delta \tilde{M}_i^e - d\lambda \quad (6.84)$$

e o estado de momentos nesta iteração, que satisfaz o critério de escoamento, será:

$$\tilde{M}_i = \tilde{M}_{i-1} + \Delta \tilde{M}_i^e - d\lambda \quad (6.85)$$

Deve-se notar que a última parcela da equação anterior é igual à componente plástica do incremento de momentos na iteração em curso, ou seja:

$$\Delta \tilde{M}_i^p = d\lambda \quad (6.86)$$

Este incremento de momento plástico é acumulado como M_i^p e é aplicado na próxima iteração como um campo de momentos

iniciais.

Utilizando-se o conceito de trabalho plástico, dado em (6.20), e a condição de normalidade, expressa em (6.26), pode-se determinar o incremento de curvatura plástica equivalente $\Delta \bar{\chi}_i^p$, em função do estado de momentos e do momento equivalente \bar{M}_i , através de:

$$\Delta w_p = \bar{M}_i \Delta \bar{\chi}_i^p = d\lambda \frac{a^T M^i}{\bar{M}_i} ,$$

ou:

$$\Delta \bar{\chi}_i^p = d\lambda \frac{a^T M^i}{\bar{M}_i} \quad (6.87)$$

Portanto, a curvatura plástica equivalente, ou efetiva, será:

$$\bar{\chi}_i^p = \bar{\chi}_{i-1}^p + d\lambda \frac{a^T M^i}{\bar{M}_i} , \quad (6.88)$$

onde o momento equivalente, ou efetivo, \bar{M}_i , é igual ao valor de $f(M_i)$.

(e) Se $f(\bar{M}_i^e) \geq M_y(k)$ e $f(\bar{M}_{i-1}) < M_y(k)$, significa que o ponto estava em regime elástico no início e que escoou durante a iteração corrente. Determina-se, então, quando se inicia o escoamento, ou seja, os valores de momentos que satisfazem o critério; a parcela acima destes valores deve ser reduzida à superfície de escoamento, de modo análogo ao passo anterior.

(f) Verifica-se a convergência; caso não tenha ocorrido, volta-se ao passo inicial (a),* para uma nova iteração. Quando ocorre convergência, passa-se a um novo incremento de carga, repetindo-se todos os passos, até que o carregamento total seja aplicado. Considera-se, neste trabalho, que a convergência é verificada quando o excesso de momentos efetivos fica abaixo de uma certa porcentagem do momento de plastificação da iteração em curso.

Neste trabalho, adotam-se os procedimentos sugeridos por OWEN & HINTON (1980) para melhorar a precisão do

algoritmo, eliminando-se o excesso de momentos em relação à superfície de escoamento, através de vários estágios.

Finalmente, deve-se ressaltar que, no algoritmo iterativo, calculam-se apenas os momentos. Os valores das incógnitas de contorno, armazenadas no vetor X , podem ser determinadas através da equação (5.113), em qualquer estágio desejado do processo, utilizando-se os momentos plásticos acumulados M^p , considerados como um campo de momentos iniciais, acrescentados ao carregamento acumulado até este estágio.

6.5 Avaliações Numéricas

Apresentam-se, a seguir, exemplos simples de análise elastoplástica de placas, visando a aferição do modelo desenvolvido, através da comparação dos resultados com soluções já conhecidas, ou com valores obtidos a partir de outros métodos.

6.5.1 Exemplo 1. Placa Biapoiada com Momentos Aplicados nas Extremidades

Considera-se uma placa retangular com comprimento igual a quatro vezes a largura, conforme a Fig. 6.6, apoiada nas duas extremidades, sujeita a momentos M aplicados nestes pontos. A discretização é feita através de 12 elementos no contorno e 40 células no domínio. A espessura da placa adotada é igual a um décimo do vão, podendo-se comparar os resultados com a teoria de vigas.

O problema, inicialmente, foi processado com quatro incrementos de carga. Considera-se o material com comportamento elastoplástico perfeito; assim, a solução é elástica linear até que o valor de M_p seja atingido, quando há escoamento em todas as seções, representando um patamar horizontal no diagrama momento-curvatura. A tolerância de 0,01% é fixada para a verificação da convergência.

No penúltimo incremento de carga, o momento aplicado acumulado vale $M = 0,998M_p$ e, portanto, bem próximo do escoamento das seções, mas ainda no regime elástico. Neste caso, a solução obtida coincide, praticamente, com a solução exata,

apresentando erro inferior a 0,2% para os deslocamentos e rotações nos apoios da placa.

Quando se atinge o último incremento, indicando um momento $M = M_p$, não se obtém a convergência, mesmo após quinhentas iterações, como era de se esperar.

Para se verificar a estabilidade do algoritmo, o mesmo problema foi processado, aplicando-se rotações prescritas nos apoios, obtendo-se, então, os momentos. Foram aplicados dez incrementos até se atingir o dobro da rotação do início do escoamento, ficando os momentos nos pontos da placa iguais ao momento de plastificação, com erros inferiores a 0,4%.

6.5.2 Exemplo 2. Placa Biengastada nas Extremidades, com Carga Uniformemente Distribuída

A placa da Fig. 6.6, engastada nas extremidades e sujeita a uma carga uniformemente distribuída, é analisada com a mesma discretização do exemplo anterior. Vinte incrementos de carga foram aplicados, com a carga q variando de 15 kN/m^2 a 28 kN/m^2 . Os dados para o exemplo são os seguintes: $\ell = 8 \text{ m}$; $t = 0,8 \text{ m}$; $\nu = 0$; $E = 2 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$; $M_p = 100 \text{ kN.m/m}$.

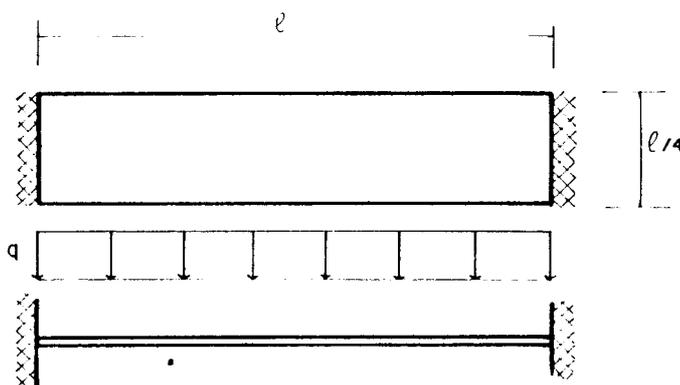


FIGURA 6.6. Placa biengastada com carga uniformemente distribuída

Esta análise considera o material com comportamento elastoplástico perfeito e foi efetuada por RIBERO (1992). Este autor também utiliza o Método dos Elementos de Contorno, porém com

a Teoria de Reissner, considerando uma discretização com 20 elementos no contorno e 128 células.

A análise de uma viga equivalente para o problema resulta em uma carga $q = 18,75 \text{ kN/m}^2$ ($q\ell^2/M_p = 12$) para a plastificação nas seções engastadas, formando-se rótulas plásticas nestes pontos; a carga limite resulta com a plastificação da seção no meio do vão para $q = 25 \text{ kN/m}^2$, e, portanto, $q\ell^2/M_p = 16$.

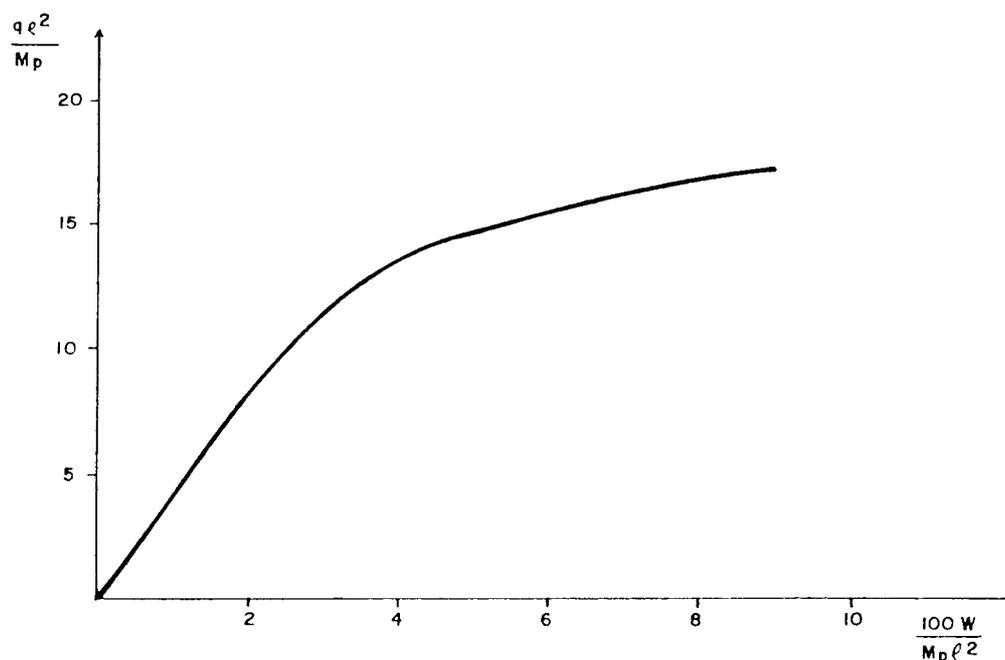


FIGURA 6.7. Curva carga-deslocamento central da placa biengastada

Na Fig. 6.7, indica-se, para a solução obtida, a variação do deslocamento no ponto central da viga em função da carga, que é semelhante ao resultado obtido por RIBEIRO (1992). Observa-se o início da perda de rigidez para valores de carga acima de 18 kN/m^2 ($q\ell^2/M_p = 11,52$) e não se obtém a convergência após o valor de $q = 26,4 \text{ kN/m}^2$ ($q\ell^2/M_p = 16,9$), quando ocorre a plastificação dos pontos da seção central.

6.5.3 Exemplo 3. Placa Quadrada Apoiada nas Quatro Bordas, com Carga Uniformemente Distribuída

Uma placa quadrada, indicada na Fig. 6.8, apoiada nas bordas e submetida a um carregamento q uniforme, é analisada, admitindo-se que o material tem comportamento elastoplástico perfeito. Esta análise foi feita por OWEN & HINTON (1980), por meio do Método dos Elementos Finitos, discretizando um quarto da placa com quatro elementos Heterosis e tem sido utilizada para aferição de diversos modelos elastoplásticos. RIBEIRO (1992) e KARAN & TELLES (1992) resolveram o problema através do Método dos Elementos de Contorno, utilizando a teoria de Reissner.

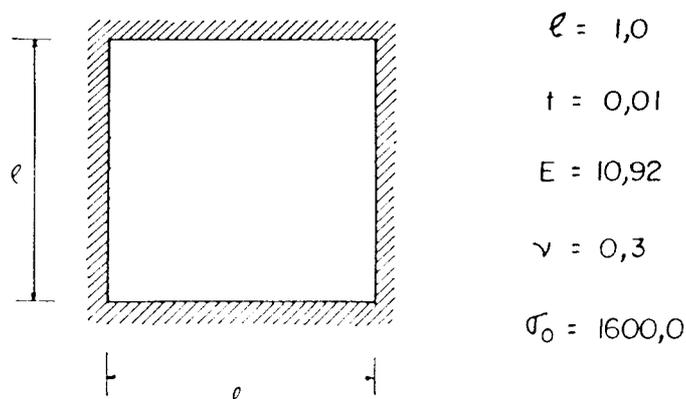


FIGURA 6.8. Placa quadrada apoiada nas bordas

Na presente análise, aproveitando-se as condições de simetria, apenas um quarto da placa é discretizado, através de 8 elementos no contorno e 32 células no domínio. Foram aplicados 24 incrementos de carga, com tolerância de 0,1%, para a verificação da convergência. Estes incrementos são menores para os valores próximos da carga limite e a análise foi feita considerando-se os critérios de Tresca e Von Mises.

A solução obtida praticamente coincide com as soluções apresentadas nas referências citadas. Na Fig. 6.9, comparam-se os resultados da presente análise com a solução apresentada por OWEN & HINTON (1980), para os valores dos deslocamentos no centro da placa.

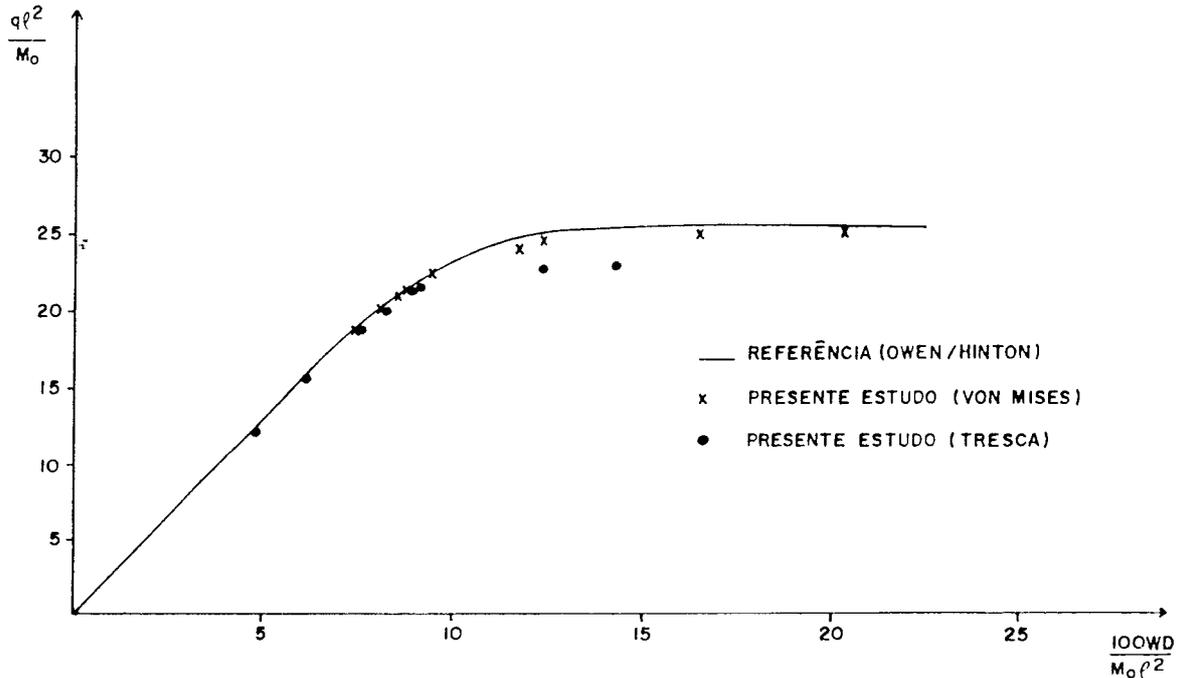


FIGURA 6.9. Curva carga-deslocamento central da placa apoiada

Pode-se verificar, pelos resultados, que o critério de Tresca conduz a deslocamentos maiores para um mesmo nível de carga, não se obtendo, para este critério, convergência para valores superiores a $p = 22,8M_0/\ell^2$, após 100 iterações.

OWEN & HINTON (1980) apresentam os resultados numéricos para a carga $p = 21,4M_0/\ell^2$, onde o deslocamento no ponto central da placa vale $w_c = 0,08741M_0.\ell^2/D$, sendo obtida, na presente análise, o valor de $w_c = 0,08770M_0.\ell^2/D$, para esta carga.

6.5.4 Exemplo 4. Placa Quadrada Engastada nas Quatro Bordas, com Carga Uniformemente Distribuída

Neste exemplo, analisa-se a placa engastada indicada na Fig. 6.10 - (a), submetida a um carregamento uniformemente distribuído. Este problema foi analisado por OWEN & FIGUEIRAS (1983), através do Método dos Elementos Finitos, utilizando uma discretização de 9 elementos *semiloof*, para um quarto da placa. Considera-se que o material, após o escoamento inicial, tenha endurecimento linear (Fig. 6.10 - (b)).

As unidades dos dados do problema não foram fornecidas e os valores são os seguintes: $t = 0,2$; $\nu = 0,3$; $E = 30000$; $E_T = 300$; $\sigma_0 = 30$.

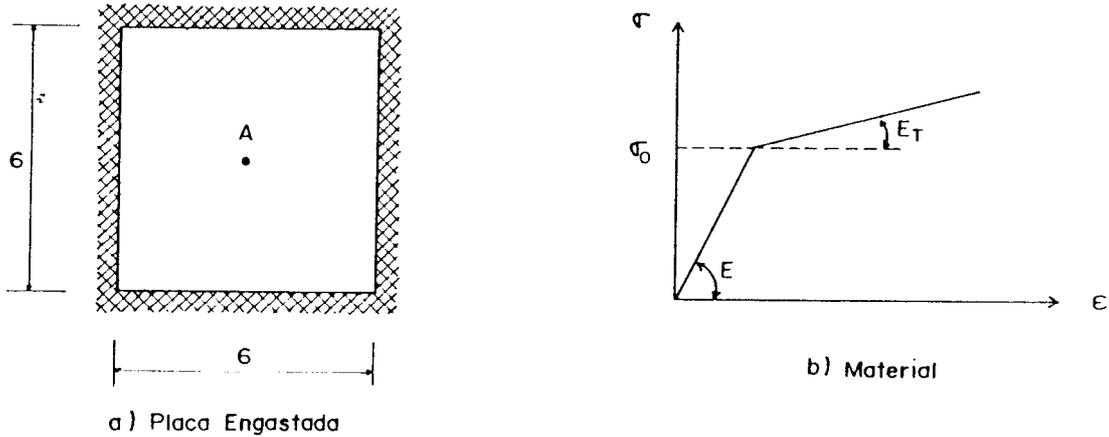


FIGURA 6.10. Placa quadrada engastada nas quatro bordas

Na análise efetuada, a discretização de um quarto da placa é feita com 8 elementos no contorno e 64 células no domínio. Considera-se o critério de Von Mises, aplicando-se 30 incrementos de carga e adotando-se a tolerância para a convergência igual a 0,1%. Não se obteve convergência após 100 iterações, para valores de carga acima de 0,4.

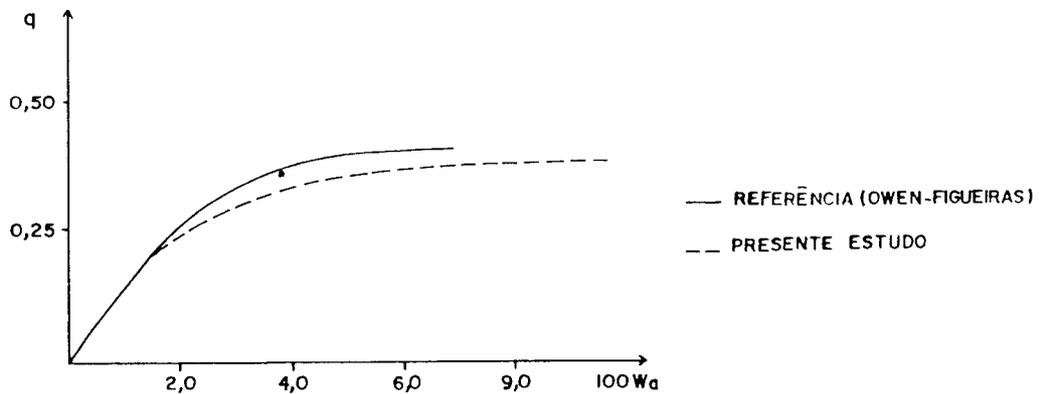


FIGURA 6.11. Curva carga-deslocamento central da placa engastada

A Fig. 6.11 mostra os resultados da presente análise e da referência citada, indicando a variação do deslocamento central da placa com a carga. Na Fig. 6.12, indicam-se as regiões plastificadas em um quarto da placa, para a carga igual a 0,35.

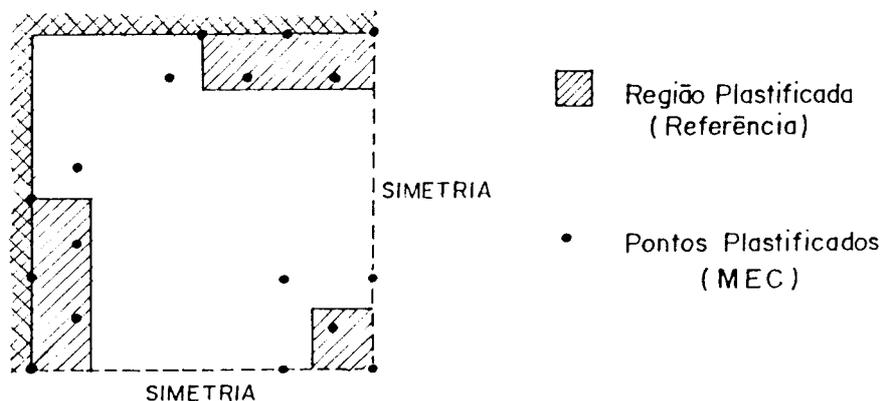


FIGURA 6.12. Regiões plastificadas da placa para $q = 0,35$

Através dos resultados obtidos, verifica-se que o modelo não-linear desenvolvido apresenta bons resultados, quando comparado com outros modelos. Estes exemplos foram analisados com alterações no número de incrementos de carga, tolerância e malhas para a discretização, não apresentando variações significativas nas soluções. Logicamente, para tolerâncias maiores, a convergência ocorre para um número menor de iterações, porém com resultados menos precisos. Quando se altera a discretização de 8 para 12 elementos no contorno e de 32 para 72 células no domínio, também não há variações importantes nos resultados das análises efetuadas.

7 MODELOS ALTERNATIVOS PARA A ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE LAJES

7.1 Introdução

Neste Capítulo, apresenta-se um modelo simples que pode ser aplicado na análise elastoplástica de lajes de concreto armado, baseado na relação momento-curvatura. Este procedimento é utilizado por CORRÊA (1991) para a aplicação em lajes usuais, através do Método dos Elementos Finitos; embora tenha limitações, tem a grande vantagem de sua simplicidade, não havendo necessidade de integração ao longo da espessura da placa. Logo, há razoável economia de espaço de memória e tempo de processamento na análise computacional de pavimentos.

Sugere-se, também, a utilização de um modelo mais refinado, que considere a progressão da plastificação ao longo da espessura da placa e permita que sejam avaliados os estados de tensão no aço e no concreto. O procedimento é semelhante ao utilizado em modelos estratificados, que consideram a espessura da placa dividida em camadas.

7.2 Modelos Usuais para a Análise Elastoplástica de Lajes de Concreto Armado

Nas últimas décadas, com o grande avanço dos recursos computacionais, a análise de estruturas de concreto armado tem sido objeto de exaustivas pesquisas, principalmente através do Método dos Elementos Finitos.

De um modo geral, tem-se buscado o aprimoramento

das técnicas de análise não-linear e especialmente o desenvolvimento de modelos constitutivos que representem com mais fidelidade o comportamento do concreto e sua interação com o aço.

Mais recentemente, modelos sofisticados, baseados em conceitos da mecânica da fratura, procuram reproduzir o comportamento do concreto pós-fratura, com a consideração do regime de amolecimento do material. Um estudo detalhado sobre os modelos constitutivos para o concreto é apresentado por PROENÇA (1988) e não é objetivo deste trabalho.

Dentro deste contexto, a análise não-linear de lajes de concreto armado vem merecendo atenção. A partir dos anos setenta, um grande número de trabalhos publicados nesta área, utilizando o Método dos Elementos Finitos, tem contribuído para o aperfeiçoamento de projetos estruturais envolvendo estes elementos.

As formulações apresentadas, baseadas na teoria clássica da plasticidade, podem ser divididas em dois tipos básicos. No primeiro, se enquadram as formulações que verificam as condições de plastificação através dos esforços resultantes e das relações momento-curvatura para o comportamento do material. Nesta linha, podem ser citados, entre outros, os trabalhos de JOFRIET & McNEICE (1971) e AUFARE et al (1986), que adotam um diagrama momento-curvatura bilinear.

Outro tipo de formulação, na qual são assumidas as relações tensão-deformação para os materiais, é aquela que verifica a possibilidade de escoamento no aço e ruptura no concreto. Neste caso, em geral, a placa é considerada como uma superposição de camadas de concreto e aço e são impostas hipóteses de compatibilidade entre as deformações dos materiais.

Este modelo apresenta nítida vantagem sobre o primeiro, pois, além de se poder verificar a progressão da plastificação ao longo da espessura da placa, permite, como no caso do concreto armado, a avaliação de materiais com comportamentos distintos.

Adotando este modelo estratificado, a maior parte das formulações para a análise não-linear de estruturas laminares tem sido desenvolvida, sendo disponíveis, atualmente, modelos sofisticados. Alguns aspectos destes modelos serão abordados

posteriormente.

7.3 Um Modelo Alternativo para a Análise de Lajes de Concreto Armado

Partindo-se da formulação desenvolvida no Capítulo anterior para a análise não-linear de placas, pode-se chegar a um modelo simples, capaz de representar o comportamento de uma laje de concreto armado em serviço; este se baseia apenas na relação momento-curvatura uniaxial para representação do comportamento do material. Este tipo de modelo, apesar de não representar com precisão os estados de tensão dos pontos da placa, como ocorre nos modelos estratificados, permite uma boa avaliação dos esforços e deformações na laje após a plastificação. Modelos semelhantes têm sido aplicados através do Método dos Elementos Finitos e demonstrado eficiência para este fim.

Basicamente, o modelo consiste em se adotar um diagrama momento-curvatura para a flexão unidimensional da laje de concreto armado, considerando o critério original de Von Mises para a verificação das condições de plastificação.

Apesar deste critério ser adequado a materiais dúcteis, tem sido aplicado na sua forma original, ou por meio de adaptações em elementos de concreto armado. Através de uma formulação estratificada, LIN & SCORDELIS (1975) utilizam o critério de Von Mises para a verificação da ruptura do concreto sob compressão biaxial.

Uma das propostas de generalização do critério para sua utilização em rupturas frágeis foi apresentada por YANG (1980), incluindo a possibilidade de verificação do efeito Bauschinger.

Mais recentemente, CHANNAKESHAVA et al (1988) aplicaram a superfície de Von Mises, com modificações, para verificação do concreto, analisando problemas de estado plano, através do Método dos Elementos de Contorno. HU & SCHNOBRICH (1991) também introduziram uma adaptação do critério para a análise de placas e cascas de concreto, via Método dos Elementos Finitos.

Nas formulações que consideram os esforços

resultantes, a escolha do diagrama momento-curvatura parece ser essencial, sendo mais importante do que o critério de esocamento adotado.

Esta preocupação tem sido demonstrada em diversos estudos experimentais e teóricos para a flexão em peças de concreto armado. No caso de lajes, as quais, em geral, apresentam baixa taxa de armadura, a curva momento-curvatura apresenta uma forma característica, que está indicada na Fig. 7.1.

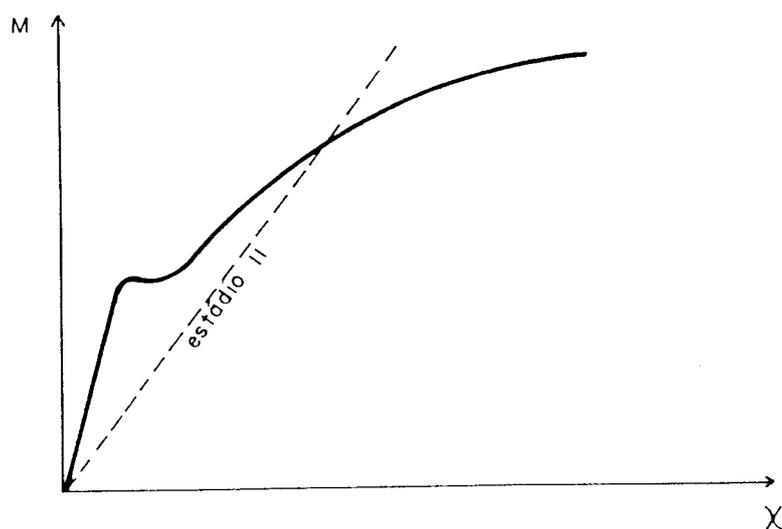


FIGURA 7.1. Diagrama momento-curvatura uniaxial para concreto armado

Na figura, o trecho inicialmente linear é elástico e corresponde ao comportamento do concreto não fissurado. A reta tracejada indica os valores teóricos obtidos quando se despreza a resistência do concreto tracionado, correspondendo ao estágio II. Pode-se observar que, neste caso, as curvaturas são bem maiores que as reais, o que pode parecer favorável à segurança. Entretanto, a consideração de curvaturas superestimadas em diferentes zonas de uma estrutura hiperestática pode conduzir a resultados nem sempre seguros.

Em trabalho publicado em 1973, baseado em uma equação semi-empírica, RAO & SUBRAHMANYAN (1973) sugerem um método para se calcular uma relação idealizada momento-curvatura

trilinear, em que a resistência do concreto tracionado entre as fissuras é considerada. Os resultados para esta aproximação são comparados com os ensaios em vigas de seção retangular e seção T, realizados por outros autores, e apresentam bons resultados.

Um diagrama momento-curvatura trilinear idealizado para flexão simples também é proposto pelo código do CEB-FIP (1990), nos seus itens 3.6 e 5.4.1, o qual é semelhante ao que está esquematizado na Fig. 7.2. Neste caso, os trechos lineares que representam os estádios I, II e III estão limitados pelos respectivos momentos M_r , M_{yk} e M_u . O momento M_r é o de início de fissuração do concreto e representa o fim do trecho elástico; M_{yk} é o momento de início do escoamento da armadura e M_u é o momento último.

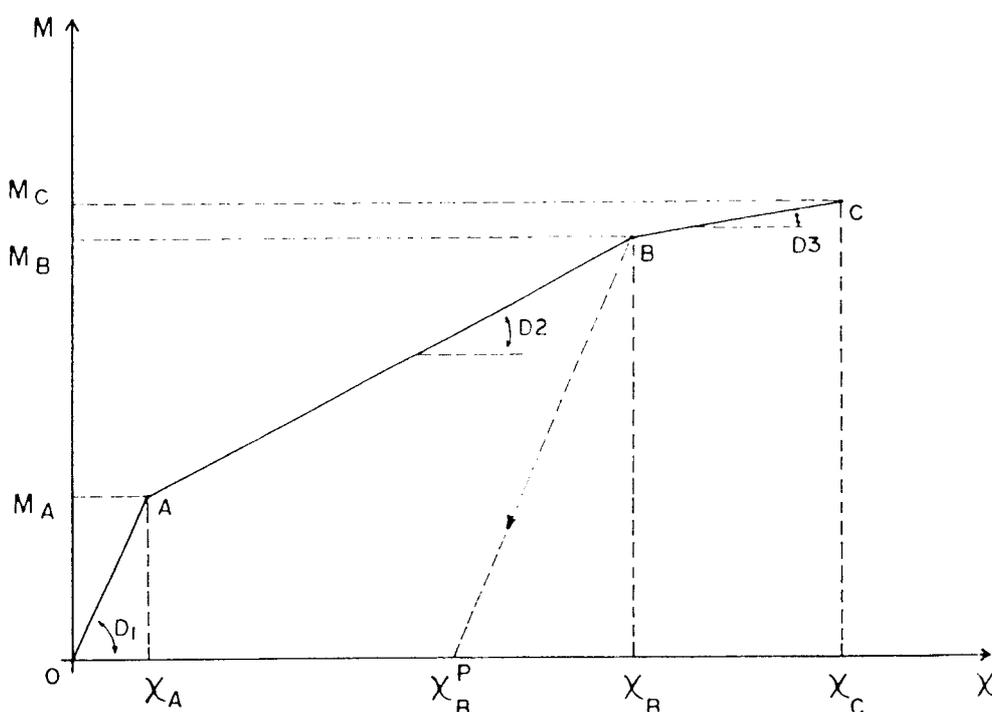


FIGURA 7.2. Momento-curvatura trilinear

No presente trabalho, admite-se o diagrama momento-curvatura indicado na Fig. 7.2, proposto por CORRÊA (1991), para a análise de placas através do Método dos Elementos Finitos. Considera-se, portanto, que o material possui um comportamento inicialmente elástico até o ponto A, onde se inicia o regime

plástico, com um parâmetro de endurecimento linear H_1' até o ponto B. Deste ponto em diante, ocorre nova queda de rigidez, com o endurecimento representado por H_2' até o ponto C, a partir do qual não há endurecimento.

Os descarregamentos em qualquer estágio são sempre considerados paralelos ao trecho inicial elástico.

Assim, com a definição dos pontos A, B e C, a rigidez à flexão de cada trecho pode ser calculada por:

$$D_1 = \frac{M_A}{\chi_A}$$

$$D_2 = \frac{M_B - M_A}{\chi_B - \chi_A} \quad (7.1)$$

$$D_2 = \frac{M_B - M_C}{\chi_C - \chi_B}$$

Portanto, os parâmetros de endurecimento relativos aos trechos AB e BC são calculados de acordo com a equação (6.69), em função da rigidez à flexão, e valem:

$$H_1' = \frac{D_2}{1 - D_2/D_1} \quad (7.2)$$

$$H_2' = \frac{D_3}{1 - D_3/D_1}$$

Então, o momento de plastificação M_y , dado na equação (6.66), é função da curvatura plástica equivalente $\bar{\chi}^p$, e neste caso, também varia com os parâmetros de endurecimento de cada trecho. Através da Fig. 7.2, é fácil ver que o momento de plastificação para valores abaixo de M_B , é determinado por:

$$M_y = M_A + H_1' \bar{\chi}^p \quad (7.3)$$

Este valor de M_y é válido, portanto, para os pontos situados nos trechos OA e AB. Deve-se notar que no trecho elástico

não há curvatura plástica e, portanto, $M_y = M_A$.

Para o trecho BC, o momento de escoamento é calculado através de :

$$M_y = M_B + H_2'(\bar{\chi}^p - \bar{\chi}_B^p) \quad , \quad (7.4)$$

até que seja alcançado o valor M_c , a partir do qual o momento de escoamento é constante.

Na equação (7.4), $\bar{\chi}_B^p$ é o valor da curvatura plástica equivalente no ponto B e, portanto, vale:

$$\bar{\chi}_B^p = \bar{\chi}_B - \frac{M_B}{D_1} \quad (7.5)$$

A determinação dos pontos limites no diagrama trilinear é feita através das condições de equilíbrio e compatibilidade de deformações impostas na seção de concreto armado, com largura unitária.

Assim, o ponto A corresponde ao início da primeira fissura no concreto é determinado com a seção homogênea de concreto, desprezando-se a presença de armadura. Denotando-se por E_c o módulo de deformação tangente do concreto e por f_{tk} a sua resistência à tração característica, tem-se que:

$$M_A = f_{tk} \frac{t^2}{6} \quad , \quad (7.6)$$

onde t é a espessura da seção. A curvatura χ_A correspondente a esse momento é, portanto, a relação entre a deformação ϵ_t na borda tracionada do concreto e a metade da espessura, ou seja:

$$\chi_A = \frac{\epsilon_t}{t/2} = \frac{2f_{tk}}{E_c t} \quad (7.7)$$

Para a determinação do ponto B, recorre-se à seção esquematizada na Fig. 7.3. Este ponto corresponde ao início do escoamento da armadura de área A_s , quando se atinge a resistência característica do aço f_{yk} . Admite-se que o concreto tracionado não

contribui e que as tensões de compressão no concreto são proporcionais às deformações através do módulo E_c .

Impondo-se a condição de equilíbrio entre as resultantes de tração no aço e compressão no concreto e tendo em vista a compatibilidade entre as deformações, determina-se a posição x da linha neutra. Sendo E_s é o módulo de elasticidade do aço e

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} \quad , \quad (7.8)$$

tem-se que:

$$x = - \alpha_e A_s + \sqrt{(\alpha_e A_s)^2 + 2\alpha_e A_s d} \quad (7.9)$$

O momento resultante M_B vale, portanto:

$$M_B = f_{yk} A_s (d - x/3) \quad (7.10)$$

e a respectiva curvatura χ_B é dada por:

$$\chi_B = \frac{\epsilon_{yk}}{d - x} \quad (7.11)$$

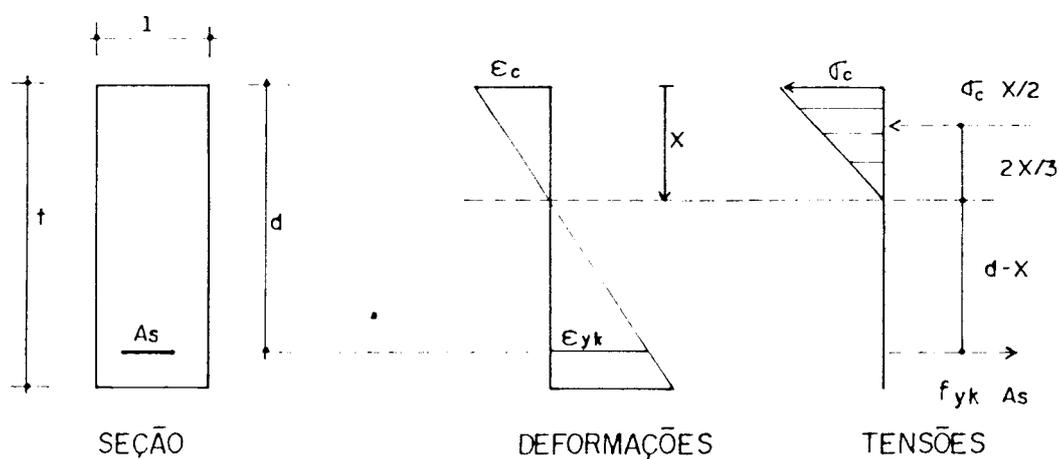
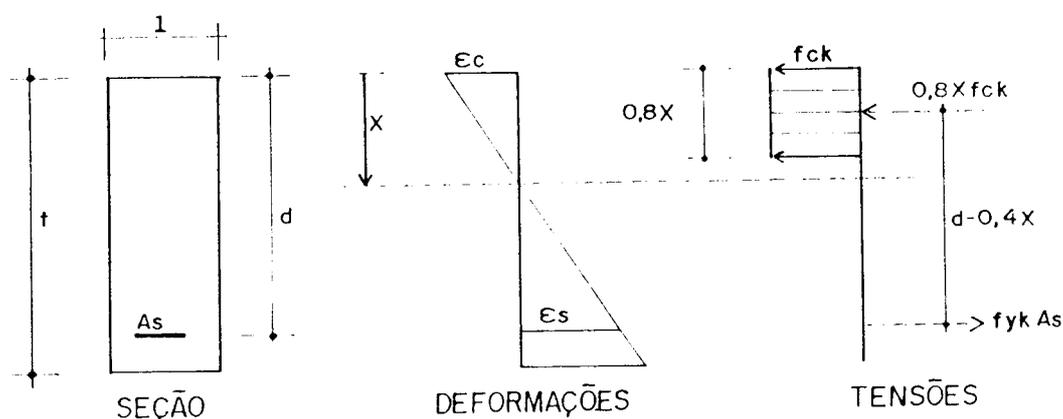


FIGURA 7.3. Distribuição de tensões e deformações para o ponto B

O ponto C é definido pelo momento último e pode ser determinado a partir das seguintes condições:

- a região comprimida do concreto atinge a resistência característica f_{ck} , enquanto a armadura escoava com a resistência característica f_{yk} ;
- admite-se o diagrama retangular equivalente para as tensões de compressão no concreto, conforme mostra-se na Fig. 7.4;
- a deformação ϵ_c no concreto deve estar entre 0,20% e 0,35%, enquanto a armadura deve ter as deformações ϵ_s entre ϵ_{yk} e 1%.



$$a) \epsilon_s = 1\% \quad e \quad \epsilon_c \leq 0,35\%$$

$$b) \epsilon_s \leq 1\% \quad e \quad \epsilon_c = 0,35\%$$

FIGURA 7.4. Distribuição de tensões e deformações para o ponto C

Portanto, conforme se indica na Fig. 7.4, pode ocorrer um dos dois casos de distribuição de deformações ao longo da seção: o caso (a), no qual o aço atinge a deformação limite de 1%, enquanto a deformação máxima no concreto está abaixo de 0,35%, ou o caso (b), em que a fibra mais comprimida do concreto atinge o valor limite, ficando a deformação no aço abaixo de 1%.

Através da igualdade entre as forças resultantes no aço e no concreto, determina-se a posição da linha neutra, ou seja:

$$x = \frac{A_s f_{yk}}{0,8 f_{ck}} \quad (7.12)$$

Assim, o momento último é determinado por:

$$M_C = 0,8x f_{ck} (d - 0,4x) \quad , \quad (7.13)$$

e a curvatura χ_A será o menor valor calculado entre os dois casos de distribuição de deformações, dados por:

$$\chi_C^a = \frac{0,01}{d - x}$$

$$\chi_C^b = \frac{0,0035}{x}$$
(7.14)

Alternativamente, podem ser efetuadas pequenas alterações na determinação dos pontos que definem o diagrama trilinear. Uma possibilidade é adotar o valor de M_A igual ao momento de fissuração M_r previsto pelo CEB-FIP, para o qual a armadura é considerada através de uma área equivalente de concreto.

Pode-se, também, considerar, no cálculo de M_C , o valor da tensão no concreto $\sigma_c = 0,85f_{ck}$ para cargas de longa duração.

O procedimento descrito anteriormente também pode ser adaptado para possibilitar a inclusão de armaduras negativas, que devem contribuir no cálculo dos momentos.

7.4 Uma Adaptação do Modelo Estratificado

Neste item, apresentam-se algumas sugestões para a adaptação da formulação desenvolvida, baseadas nos modelos estratificados utilizados através do Método dos Elementos Finitos.

Esses modelos são importantes pois, além de considerarem a propagação da plastificação ao longo da espessura da placa, permitem a avaliação de placas compostas de materiais diferentes.

Embora exista uma grande quantidade desses modelos, a idéia básica é a mesma. Admite-se que a placa é dividida em camadas, as quais podem ter espessuras e propriedades diferentes, considerando-se, porém, constantes as propriedades sobre cada

camada. Isto permite uma variação discretizada das propriedades do material e tem a vantagem de se utilizar um critério de escoamento biaxial, uma vez que é admitido, em cada camada, um estado plano de tensões. Ou seja, supõe-se que a superfície de escoamento depende apenas das tensões associadas à flexão.

Assim, admita-se que, para um determinado nível de carregamento, a distribuição real de tensões em uma seção da placa seja como a indicada na Fig. 7.5. Genericamente, os pontos localizados ao longo da espessura podem estar em regime elástico ou plástico.

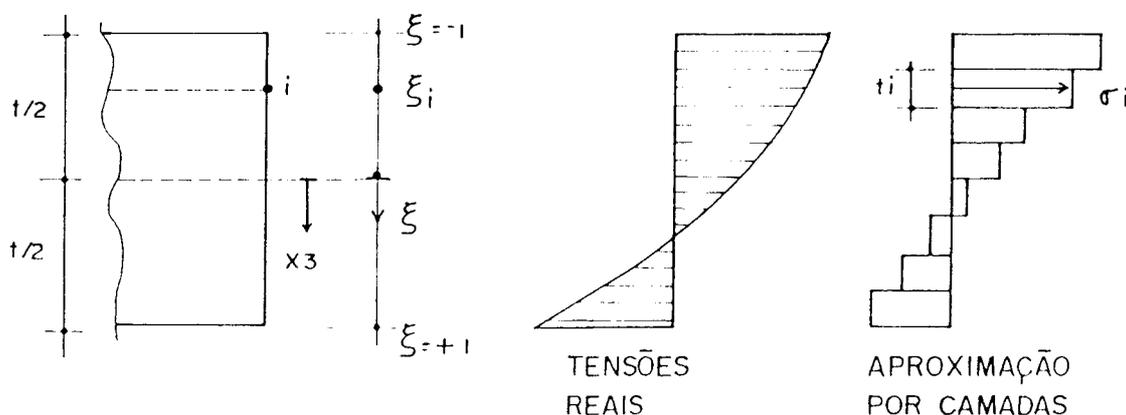


FIGURA 7.5. Distribuição de tensões em uma seção de uma placa

Com a aproximação adotada, considera-se que cada camada possui um ponto de tensão na sua superfície média. As componentes de tensão são calculadas, então, para estes pontos e assumidas como constantes ao longo da espessura t_i de cada camada. Portanto, a distribuição de tensões é discretizada na forma indicada na Fig. 7.5.

Dessa forma, são verificadas as condições de escoamento em cada ponto, em função de seu estado de tensão. Os momentos resultantes na seção são obtidos pela integração das respectivas componentes de tensão ao longo da espessura; no caso de se adotar n camadas ao longo da espessura, esta integração resulta em:

$$M_{kl} = \sum_{i=1}^n \sigma_{kl}^i t_i x_3^i \quad (k, l = 1, 2) \quad (7.15)$$

Pode-se observar que, nesse caso, é necessário um número adequado de camadas para que se obtenha uma boa discretização das tensões e esforços resultantes satisfatórios.

Por conveniência, admitir-se-á, inicialmente, que o material da placa é homogêneo e, portanto, tem as mesmas propriedades ao longo da espessura. Assim, fica evidenciado que o único objetivo da discretização na espessura da placa é a avaliação do progresso da plastificação.

Neste caso, é fácil ver que a divisão hipotética da espessura em camadas não é necessária e a formulação desenvolvida no Capítulo anterior pode ser aplicada diretamente, desde que seja expressa em termos das tensões em pontos localizados ao longo da espessura.

Sugere-se que estes pontos sejam definidos em função da coordenada homogênea ξ , indicada na Fig. 7.5, e que coincidam com os pontos utilizados na integração numérica de Gauss.

Logo, a relação entre coordenadas de um ponto é dada por:

$$x_3 = \xi \frac{t}{2} \quad , \quad (7.16)$$

e, portanto,

$$dx_3 = \frac{t}{2} d\xi \quad (7.17)$$

Dessa forma, os esforços resultantes são expressos pela integral:

$$M_{kl} = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{kl} x_3 dx_3 = \frac{t^2}{4} \int_{-1}^{+1} \sigma_{kl} \xi d\xi \quad , \quad (7.18)$$

e, portanto, calculados numericamente através da fórmula de

quadratura de Gauss.

Assim, os passos descritos no Capítulo 6 para a solução numérica do problema não-linear, são basicamente os mesmos. Ou seja, ao se aplicar um incremento de carga, são calculados, além dos esforços, as tensões e deformações nos pontos de integração.

Nestes pontos, são controladas as condições de escoamento e, portanto, devem ser verificadas as relações constitutivas. Os incrementos de momentos verdadeiros e momentos plásticos são determinados a partir da integral (7.18).

Deve-se notar, ainda, que a distribuição da deformação é linear ao longo da espessura da placa, mesmo no regime plástico, embora isto não ocorra com as tensões.

No caso de lajes de concreto armado, com muito mais razão, justifica-se a utilização de modelos estratificados. Diversos trabalhos têm sido apresentados nesta linha, com a utilização de modelos mais simples, como o de HAND et al (1973), e de modelos mais sofisticados, que consideram diversos fenômenos envolvidos na associação do aço com o concreto. É o caso da formulação desenvolvida por FIGUEIRAS (1983), que considera a resistência do concreto tracionado entre fissuras (*tension stiffening*) e a capacidade de transferência de esforço cortante do concreto fissurado por encaixe dos agregados.

Entre outros fenômenos, o efeito de amolecimento do concreto comprimido é considerado no modelo de HU & SCHNOBRICH (1990), no qual é assumida uma regra de fluxo não associativa para o concreto.

Com maior ou menor grau de sofisticação, nas formulações com estes modelos são adotados, basicamente, os procedimentos expostos a seguir.

A espessura da placa é dividida em camadas de concreto e as armaduras são distribuídas em camadas de espessuras equivalentes, conforme indica-se na Fig. 7.6. A espessura equivalente de uma camada de aço é tal que a área correspondente da armadura permanece inalterada.

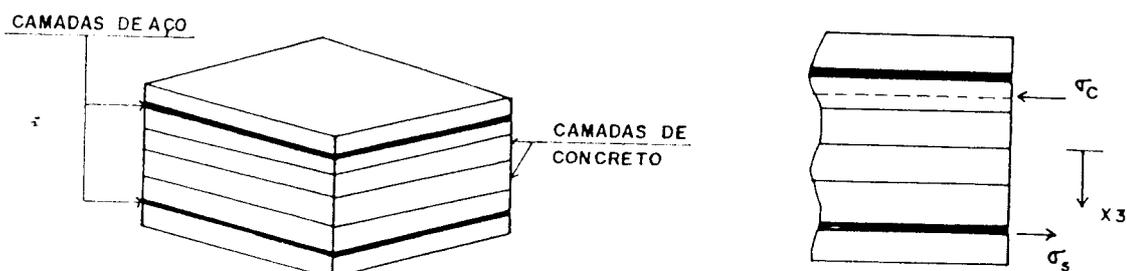


FIGURA 7.6. Modelo estratificado para o concreto armado

Considera-se que cada camada do concreto esteja sob estado plano de tensões e que as camadas de aço têm propriedades uniaxiais, isto é, apenas na direção das barras.

Em geral, considera-se o aço com comportamento elastoplástico perfeito, ou com endurecimento, sendo tratado incrementalmente como um problema unidimensional.

Para o concreto, é assumido na compressão um comportamento elastoplástico, com ou sem endurecimento, e que apresenta ruptura frágil à tração, após um regime elástico linear. Na Fig. 7.7, está indicado o comportamento uniaxial idealizado para o concreto, onde, em geral, despreza-se o regime de amolecimento.

Nesses modelos, para verificação do escoamento nas camadas de concreto, são adotados, em geral, critérios baseados nos resultados experimentais de KUPFER et al (1969) para compressão biaxial. Pode ser considerada, também, uma condição limite de esmagamento para o concreto comprimido, através de uma superfície análoga à de escoamento, porém expressa em termos das deformações.

Quando um ponto do concreto atinge a condição limite de esmagamento, admite-se que o material perde todas as condições de resistência e rigidez e as tensões no referido ponto devem ser reduzidas a zero.

A verificação das tensões de tração é feita,

geralmente, através da máxima tensão principal; considera-se que ocorre a ruptura frágil quando seu valor atinge a resistência à tração do concreto.

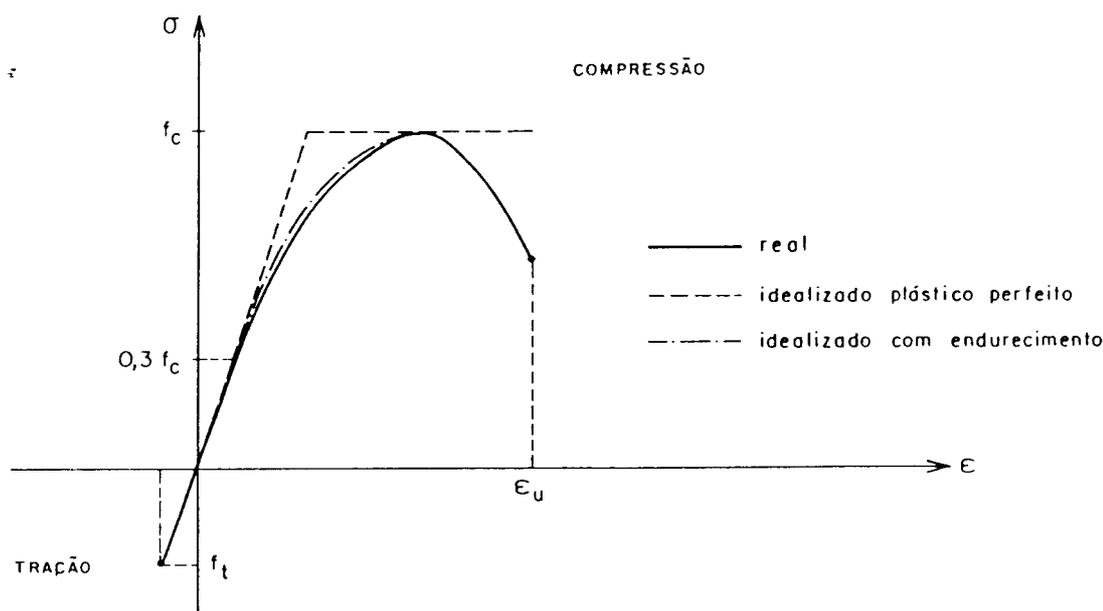


FIGURA 7.7. Modelo constitutivo unidimensional para o concreto

Aproveitando-se das principais características dos modelos estratificados que foram até aqui expostos e que são usuais nas aplicações com o Método dos Elementos Finitos, pode-se sugerir um modelo semelhante adaptado à formulação desenvolvida neste trabalho.

Sem a consideração de alguns fenômenos descritos e que são incluídos nos modelos mais refinados, a idéia básica é alcançar uma representação mais adequada do comportamento não-linear das lajes de concreto armado.

Portanto, para que o modelo sugerido seja simples e consiga atingir os principais objetivos, devem ser considerados como preponderantes na análise o comportamento do concreto quando solicitado à compressão biaxial e sua fragilidade à tração, bem como o escoamento das armaduras.

Para tanto, pode-se admitir um comportamento elastoplástico perfeito para o aço e adotar o critério de escoamento proposto por FIGUEIRAS (1983) para o concreto.

Este critério é formulado em função dos invariantes de tensão I_1 e J_2 e incluem dois parâmetros α e β do material. A superfície de escoamento original estabelecida, a qual está representada na Fig. 7.8, para o espaço das tensões principais σ_1 e σ_2 , é expressa por:

$$f(I_1, J_2) = \sqrt{\beta(3J_2 + \alpha I_1)} = \sigma_y \quad (7.19)$$

Neste caso, σ_y é a tensão que reproduz a tensão de compressão uniaxial. Portanto, é previsto o endurecimento do material definido através de σ_y , ocorrendo uma superfície inicial de escoamento quando esta tensão atinge 30% da resistência à compressão do concreto (f_c). As superfícies subseqüentes são obtidas através da expansão da região comprimida, até que seja alcançada a superfície de ruptura, quando a tensão efetiva é igual a f_c (Fig. 7.8).

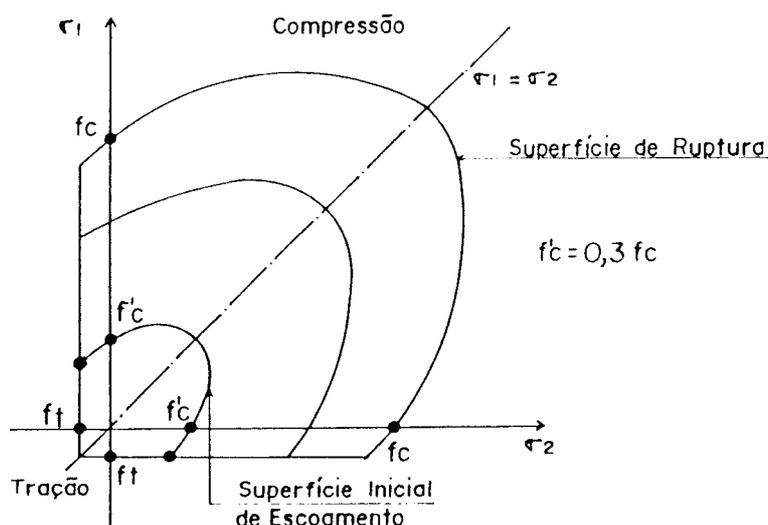


FIGURA 7.8. Superfície de escoamento para o concreto

Deve-se ressaltar que a equação (7.19) não é válida para todo o espaço de tensões. Nas regiões de tração-compressão e apenas tração, a superfície é definida pelo critério da máxima tensão principal de tração ($\sigma_1 = f_t$).

Por simplicidade, pode-se admitir um modelo elastoplástico perfeito, onde a tensão σ_y é substituída pela resistência à compressão do concreto, sendo a superfície fixa. Assim, o critério de escoamento pode ser escrito como:

$$f(I_1, J_2) = \sqrt{\beta(3J_2 + \alpha I_1)} = f_c \quad , \quad (7.20)$$

ou expresso a partir das componentes de tensão, através de:

$$F(\sigma_{ij}) = \sqrt{\beta(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2) + \alpha(\sigma_{11} + \sigma_{22})} - f_c = 0 \quad (7.21)$$

Pode-se notar, através de (7.20), que este critério coincide com o critério de Von Mises, quando assume-se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Os parâmetros α e β podem ser determinados em função dos ensaios de compressão uni e biaxial. Figueiras sugere que sejam utilizados os resultados experimentais de KUPFER et al (1969), em que se adota a resistência à compressão biaxial, $f_{bc} = 1,16f_c$; neste caso, ao se impor esta condição, e utilizando-se (7.20), obtém-se:

$$\alpha = 0,355f_c \quad (7.22)$$

$$\beta = 1,355$$

A partir de (7.21), podem ser determinadas, então, as componentes do vetor de fluxo \underline{a} , definidas em (6.61), utilizado no modelo elastoplástico.

Portanto, o modelo pode ser idealizado a partir da verificação dos estados de tensão de pontos discretos no concreto (coincidentes com os pontos de Gauss) e de pontos localizados nas posições das armaduras, sem a necessidade de divisão da espessura da placa em camadas.

Assim, um ponto que representa determinada armadura concentra a força resultante de todas as barras nesta posição, estando submetido a um estado uniaxial de tensão na direção da armadura.

A compatibilidade entre as deformações dos dois materiais deve ser garantida através da linearidade das deformações na seção de concreto armado.

Assim, seguem-se os mesmos passos do processo incremental-iterativo descrito no Capítulo 6.

Para determinado incremento de carga, são calculados os incrementos de tensões nos pontos do concreto e do aço, supondo o comportamento elástico, obtendo-se, assim, as tensões totais. Estas são corrigidas de acordo com as equações constitutivas de cada material, em um procedimento semelhante ao descrito anteriormente.

No caso dos pontos de concreto, porém, deve-se verificar a condição de tração ou compressão. Utilizando-se a tensão total em curso, determina-se a máxima tensão principal no ponto (σ_1).

Se $\sigma_1 > f_t$ ou se o ponto já havia fissurado na iteração anterior, admite-se que a tensão neste ponto é nula. Para os pontos em que isto não ocorre, a tensão efetiva $\bar{\sigma}$ é calculada de acordo com o critério de escoamento. Se $\bar{\sigma} > f_c$ ou se o ponto já havia escoado, as tensões são corrigidas conforme o procedimento elastoplástico.

Assume-se que a primeira fissura em um ponto tracionado do concreto ocorre em um plano perpendicular à direção da tensão principal de tração, quando é atingido o valor da resistência do concreto à tração (f_t). Assim, é a tensão nesta direção que é reduzida a zero, tendo, ainda, o concreto capacidade de transmitir tensões na outra direção ortogonal, bem como tensão tangencial neste plano.

Os incrementos de momentos verdadeiros e plásticos são determinados a partir da integração das tensões sobre a espessura da placa, de forma semelhante à indicada em (7.18).

Neste caso, porém, devem ser incluídas as contribuições das forças das armaduras nos momentos fletores. Assim, admitindo-se as armaduras dispostas na direção global x_1 , o momento M_{11} será calculado através de:

$$M_{11} = \frac{t^2}{4} \int_{-1}^{+1} \sigma_{11}^c \xi d\xi + \sum_{i=1}^{N_a} \sigma_s^i A_{s_i} x_3^i \quad , \quad (7.23)$$

onde σ_{11}^c é a tensão normal nos pontos do concreto e σ_s^1 é a tensão na armadura de área A_{s1} , disposta na coordenada x_3^1 ; n_a é o número total de armaduras na direção x_1 .

Deve-se notar que a força resultante em uma armadura pode contribuir com os momentos resultantes M_{11} e M_{22} , se a sua direção for inclinada, em relação ao sistema global de referência da placa.

7.5 Avaliações Numéricas

No presente trabalho, foi implementado o modelo que utiliza a relação momento-curvatura para a análise elastoplástica de lajes de concreto armado.

Utilizando-se este modelo, são apresentados, neste item, os resultados da análise de lajes de concreto armado, com o objetivo de analisar o seu desempenho.

Esses exemplos apresentados foram utilizados por diversos autores para a aferição de modelos desenvolvidos com o emprego do Método dos Elementos Finitos. As soluções obtidas no presente estudo são comparadas com os resultados experimentais ou com outros modelos; portanto, procura-se manter as unidades originais destes trabalhos.

Apresenta-se, também, um exemplo de uma placa com material homogêneo, utilizando-se o esquema adaptado de modelos estratificados descritos no item 7.4, no qual o critério de escoamento é definido em termos das componentes de tensão e as integrações ao longo da espessura da placa são feitas numericamente.

7.5.1 Exemplo 1. Laje simplesmente apoiada nas quatro bordas, com carga concentrada

A laje quadrada de concreto armado indicada na Fig. 7.9, simplesmente apoiada e submetida a uma carga concentrada no centro, é analisada neste exemplo.

Este problema foi avaliado por DOTREPPE et al (1973) e CORRÊA (1991), com o emprego do Método dos Elementos Finitos. Os primeiros autores adotam um modelo estratificado com o

uso do critério de Kupfer para o concreto e discretização de 64 elementos quadrados para um quarto de laje. Os elementos são divididos em seis camadas e a carga total de 80 kips é dividida em dez incrementos iguais.

Corrêa utiliza o critério adotado no presente trabalho, onde um oitavo da laje é discretizado em 16 elementos triangulares, com três graus de liberdade por nó.

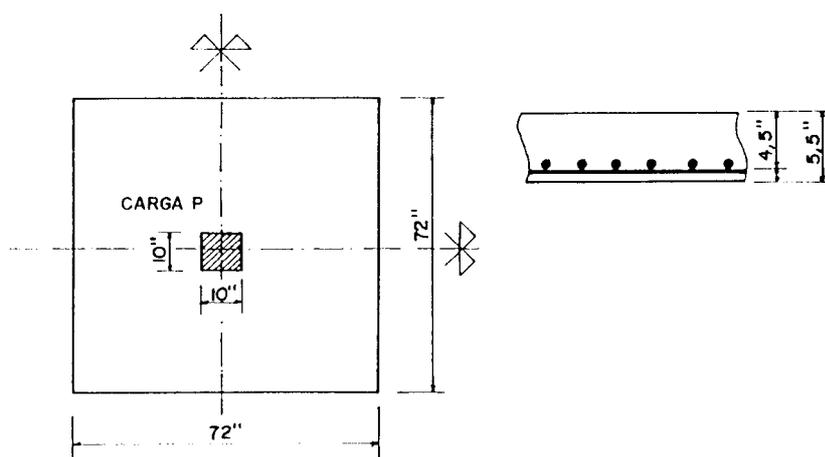


FIGURA 7.9. Laje simplesmente apoiada, com carga concentrada

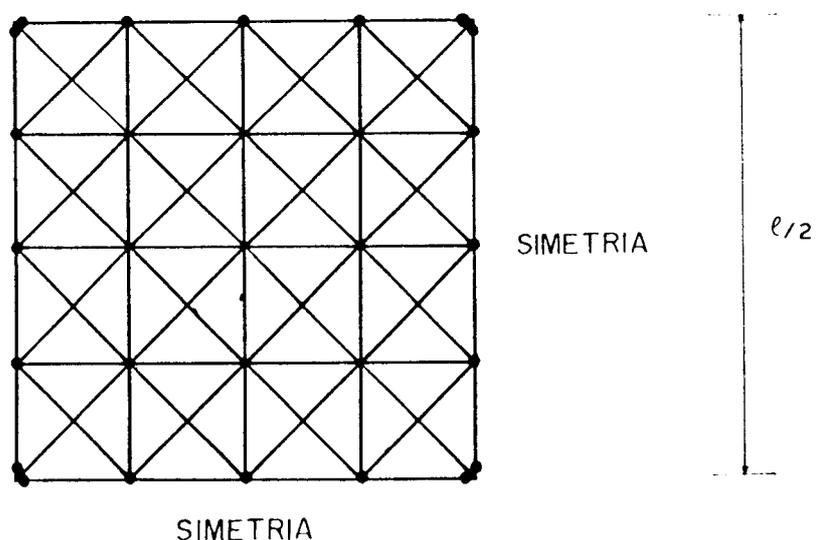


FIGURA 7.10. Discretização da placa do exemplo 7.5.1

Os dados do concreto para a análise são os seguintes: $E_c = 4.10^6$ psi; $f_{ck} = 6920$ psi; $f_{tk} = 624$ psi; $\nu = 0,15$. Para o aço, tem-se: $E_s = 30.10^6$ psi e $f_{yk} = 44000$ psi.

A armadura tem a mesma distribuição nas duas direções, com uma taxa de 0,99% em relação à área útil (calculada com a altura útil d).

Na presente análise, um quarto da placa é discretizado através de 8 elementos no contorno e 64 células no domínio, conforme se indica na Fig.7.10. A carga é aplicada através de 20 incrementos de carga, com os doze primeiros resultando em uma carga acumulada de 70 kips; os 8 últimos incrementos são de 1 kip cada um.

A tolerância adotada para a verificação da convergência foi de 0,1%; não se obteve convergência no último incremento após 200 iterações, com uma carga acumulada até então de 77 kips, obtendo-se, para este valor, um deslocamento no ponto central da placa igual a 0,47 in.

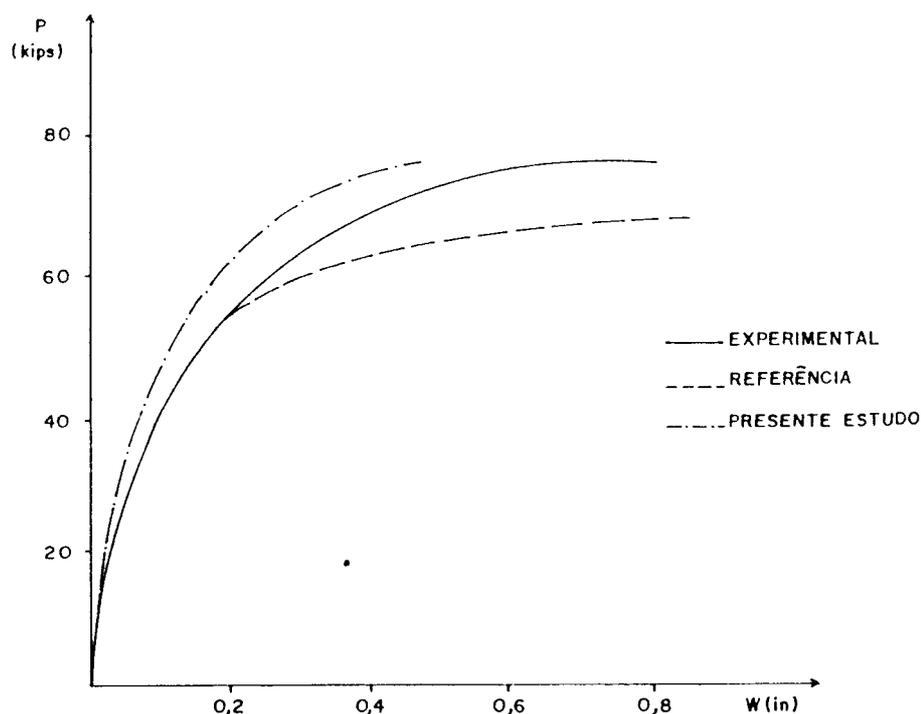


FIGURA 7.11. Curva carga-deslocamento central da laje apoiada com carga concentrada

Os resultados obtidos são muito semelhantes aos de CORRÊA (1991). Comparam-se, portanto, na Fig. 7.11, os resultados da presente análise apenas com a solução experimental e a apresentada por Dotreppe. Nesta figura, mostra-se a variação dos deslocamentos no ponto central da laje, em função da carga aplicada.

Portanto, como pode ser observado, o resultado é bom, mesmo quando comparado com um modelo estratificado. Ressalte-se, também, que, para a avaliação da carga de ruína, a previsão é muito boa, já que esta ocorre com um valor muito próximo de 75 kips.

7.5.2 Exemplo 2. Laje apoiada nos quatro cantos, com carga concentrada

Esta laje foi testada experimentalmente por McNeice e analisada via Método dos Elementos Finitos por JOFRIET & McNEICE (1971), HAND et al (1973), FIGUEIRAS (1983) e CORRÊA (1991), entre outros.

Jofriet e Corrêa adotam modelos baseados no diagrama momento-curvatura; Hand e Figueiras utilizam modelos estratificados. Este exemplo tem servido de teste para as formulações desenvolvidas por diversos autores.

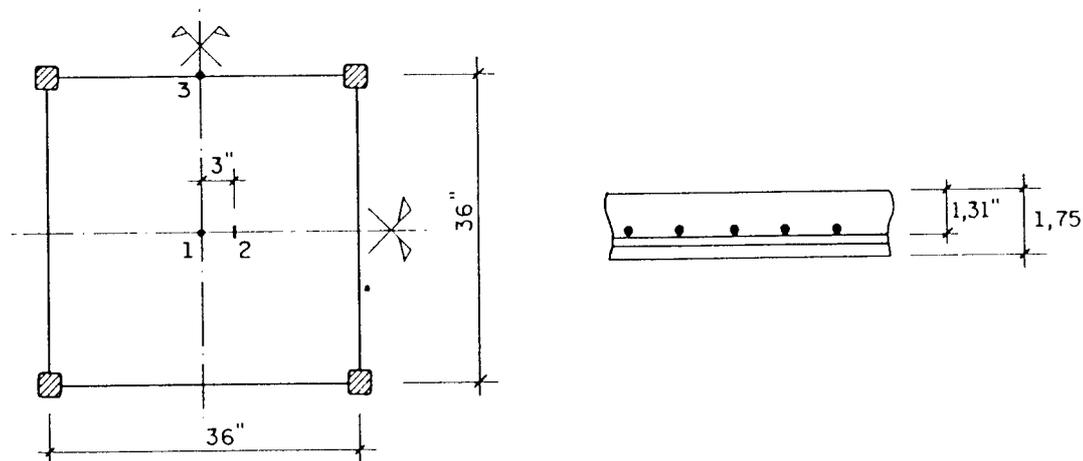


FIGURA 7.12. Laje apoiada nos cantos, com carga concentrada

A laje analisada é quadrada, está apoiada nos cantos e é submetida a uma força concentrada no centro, conforme se indica na Fig. 7.12. A armadura é a mesma nas duas direções, com taxa geométrica de 0,85% em relação à área útil.

Os dados fornecidos na análise experimental para o concreto são: $E_c = 4,15 \cdot 10^6$ psi; $f_c = 5500$ psi; $\nu = 0,15$. Como não há especificação da resistência à tração para o concreto, adota-se $f_t = 550$ psi, que é o valor assumido nas análises efetuadas por FIGUEIRAS (1983) e CORRÊA (1991).

Para o aço, conhece-se apenas o valor do módulo de elasticidade, $E_s = 29 \cdot 10^6$ psi, não havendo referência quanto à sua resistência. Neste trabalho, considera-se, para esta resistência, os mesmos dois valores adotados por Corrêa. Denomina-se "Caso A", para o valor adotado de $f_{yk} = 60000$ psi, que também é assumido por Figueiras, e "Caso B", para $f_{yk} = 50000$ psi, adotado por HAND et al (1973).

A discretização utilizada é a mesma do exemplo anterior, também para um quarto da placa. São aplicados 20 incrementos de carga, sendo de 2,2 kips a carga acumulada ao final do décimo incremento. Os últimos incrementos são iguais a 0,1 kips, atingindo-se a carga total de 3,2 kips. A tolerância para a convergência é fixada em 0,1%.

Nos resultados experimentais, são apresentados os deslocamentos em alguns pontos da placa, em função da carga. Na presente análise, comparam-se os deslocamentos nos pontos 2 e 3, indicados na Fig. 7.12, com estes valores experimentais.

Os resultados obtidos são muito próximos dos apresentados pelas referências citadas. Na Fig. 7.13, indica-se a variação do deslocamento do ponto 2 com o carregamento, admitindo-se os dois casos adotados para a resistência do aço.

Deve-se ressaltar que o Caso B ($f_{yk} = 50000$ psi) está mais próximo da solução experimental; neste caso, não se obtém a convergência para o último incremento ($P = 3,2$ kips). Já para o Caso A, obtém-se a convergência para este valor de carga.

Na Fig. 7.14, está indicada a curva carga-deslocamento para o ponto 3, considerando-se apenas o Caso B.

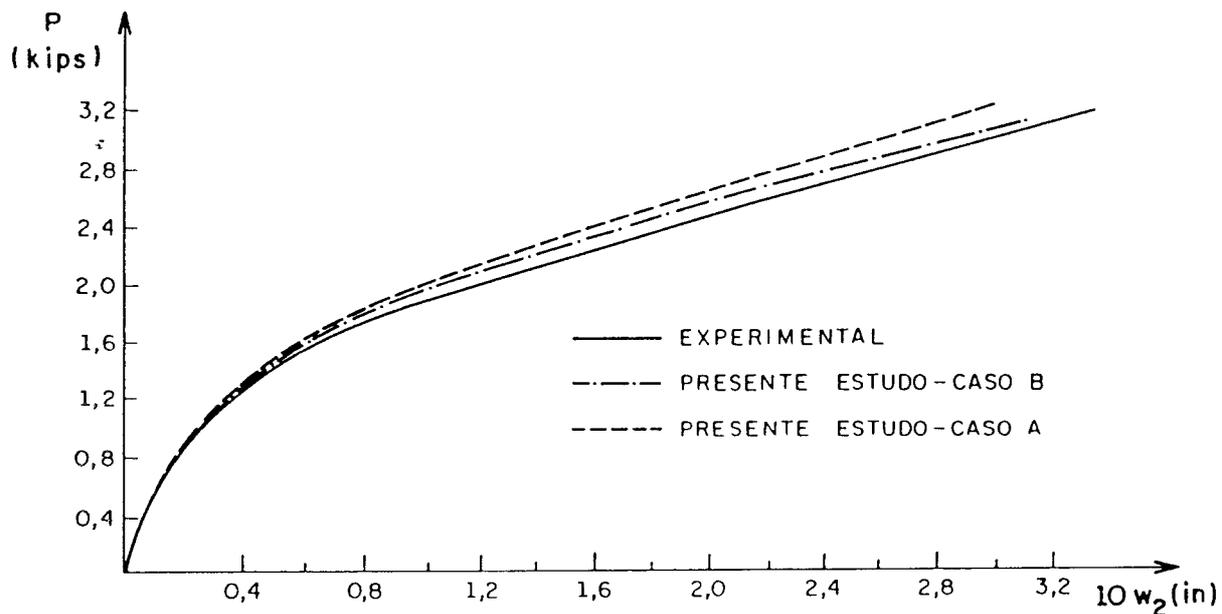


FIGURA 7.13. Curva carga-deslocamento do ponto 2 da laje apoiada nos cantos

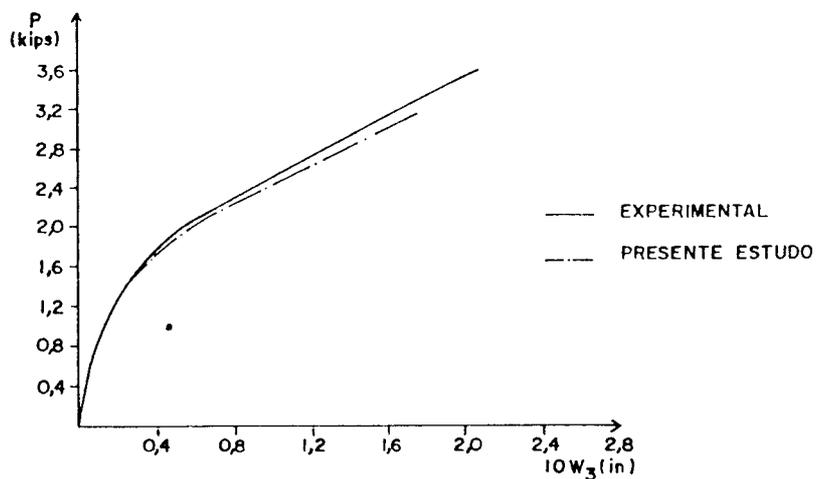


FIGURA 7.14. Curva carga-deslocamento do ponto 3 da laje apoiada nos cantos

Pode-se observar, pelos resultados, que o modelo desenvolvido neste trabalho fornece valores muito próximos dos experimentais. A análise efetuada para uma discretização com 12 elementos no contorno e 72 células no domínio não apresenta alterações significativas nos resultados apresentados.

7.5.3 Exemplo 3. Placa apoiada nas quatro bordas, com carga uniformemente distribuída

O mesmo exemplo apresentado no item 6.5.3 e indicado na Fig. 6.8 é analisado, considerando-se, porém, a integração ao longo da espessura, utilizando-se 4, 6 e 12 pontos de Gauss. Os dados relativos à placa são indicados na Fig. 6.8 e admite-se que o material tem comportamento elastoplástico perfeito.

Na presente análise, apenas um quarto da placa é discretizado através de 8 elementos de contorno e 32 células no domínio, com os mesmos valores de incrementos de carga e tolerância descritos no item 6.5.3.

Para verificação do modelo proposto, comparam-se os resultados da análise feita através do critério de Von Mises com a solução não-linear obtida por FIGUEIRAS (1983), que considera um modelo estratificado. Nesta análise, Figueiras utiliza o Método dos Elementos Finitos, considerando diversos números de camadas adotados ao longo da espessura da placa; a discretização é feita através de 4 elementos (Serendipity) para um quarto da placa.

Na Fig. 7.15, são comparadas as soluções obtidas na presente análise, para o deslocamento no ponto central da placa, com os resultados apresentados por FIGUEIRAS (1983), utilizando 20 camadas ao longo da espessura.

Pode-se observar que a solução baseada no diagrama momento-curvatura e, portanto, sem integração ao longo da espessura, apresenta deslocamentos menores do que os resultados dos modelos estratificados após o início do escoamento, já que, nesse modelo, a plastificação de um ponto da placa pressupõe o escoamento ao longo de toda a espessura da placa.

Observa-se, na Fig. 7.16, onde está indicada a variação do momento fletor no ponto central em relação ao momento

de plastificação M_p , que o comportamento é inverso, ocorrendo momentos fletores menores nos modelos estratificados, para um determinado nível de carga.

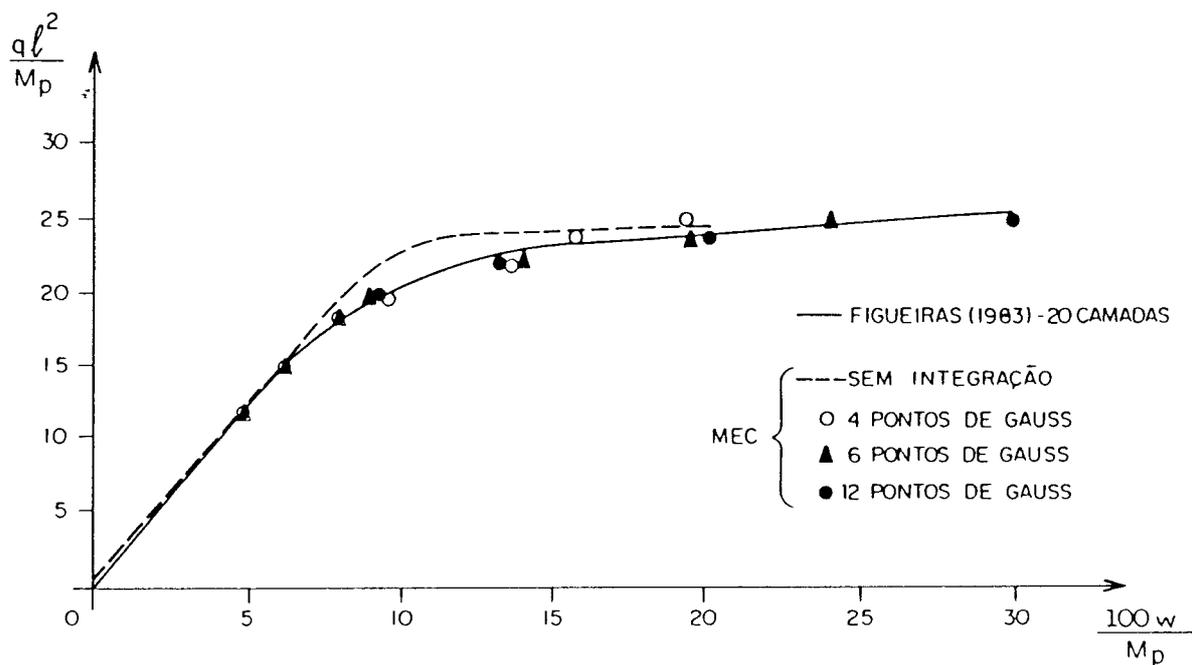


FIGURA 7.15. Curva carga-deslocamento no ponto central

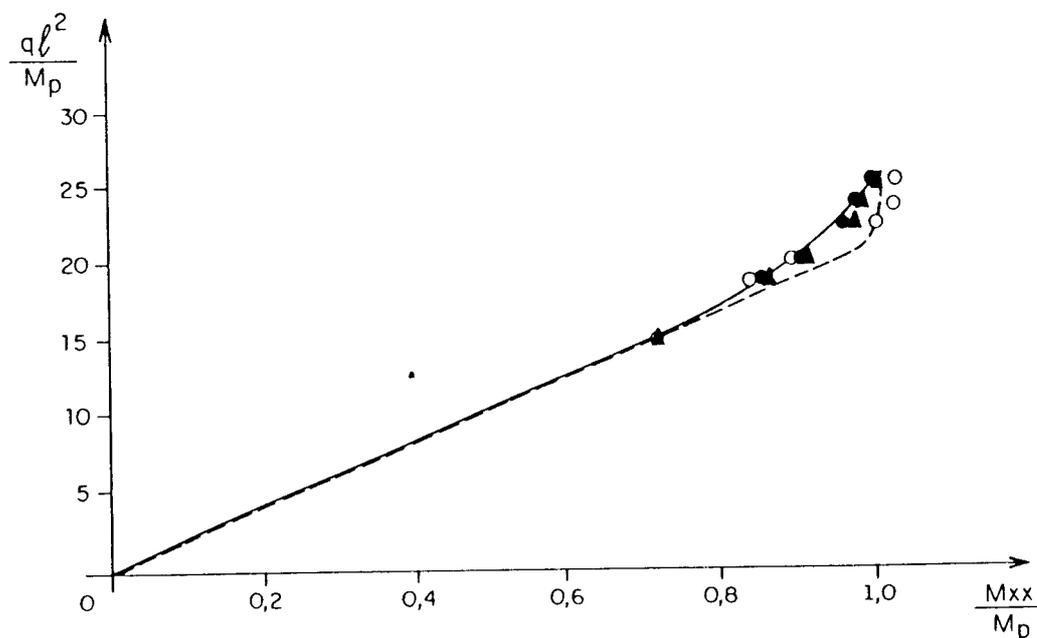


FIGURA 7.16. Curva carga-momento no ponto central

Em função dos resultados obtidos, pode-se considerar eficiente a proposta de integração ao longo da espessura da placa, sem a necessidade de definições de camadas. Consegue-se, neste caso, uma representação melhor do comportamento elastoplástico do material, obtendo-se um modelo capaz de avaliar o progresso da plastificação ao longo da espessura da placa, sem um grande aumento do esforço computacional.

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi desenvolvida, inicialmente, uma formulação para a análise linear de placas, utilizando-se a teoria clássica de Kirchhoff, através do Método dos Elementos de Contorno. Esta formulação mostrou-se eficiente para a solução elástica de placas, sob diversas condições de contorno e carregamento, como se verificou nos exemplos analisados.

A utilização da teoria clássica permite maior simplificação do problema, em relação a outras teorias, pois envolve um número menor de variáveis do problema, além de ser adequada à solução dos problemas práticos de placas delgadas.

A precisão dos resultados obtidos comprova a viabilidade da utilização do Método dos Elementos de Contorno nesse tipo de análise; destaca-se, como vantagem desse método em relação a outras técnicas numéricas, a facilidade de se modelar placas com geometria qualquer, inclusive com descontinuidades de vinculação no contorno, não havendo necessidade de discretização do domínio. Ressalte-se, ainda, que a área onde está distribuído o carregamento pode ter forma qualquer e é independente da discretização do contorno.

A inclusão das reações de canto como variáveis do problema representa uma facilidade na imposição das condições de contorno nestes pontos e fornecem resultados mais eficientes, em relação às formulações que não adotam este procedimento. Com a utilização de funções aproximadoras quadráticas para os elementos de contorno, consegue-se, também, uma redução no número de elementos adotados na discretização e de variáveis no contorno,

pois os resultados obtidos são melhores do que aqueles resultantes de elementos lineares ou constantes, com o mesmo número de pontos nodais no contorno discretizado.

A inclusão de campos de momentos iniciais na formulação possibilita a análise de placas sujeitas a efeitos de temperatura e retração, bem como a extensão da formulação à análise não-linear. A integração numérica utilizada nas integrais de domínio sobre as células fornece bons resultados, exigindo-se um número reduzido de pontos de Gauss, sendo obtidos resultados satisfatórios na análise de placas submetidas a gradientes de temperatura, mesmo com uma discretização pobre no domínio.

A formulação para a análise não-linear foi implementada com um algoritmo incremental-iterativo, baseado no método das tensões iniciais. As matrizes envolvidas não são atualizadas, sendo, portanto, os coeficientes calculados uma única vez. A necessidade de um número maior de iterações para se conseguir a convergência não implica em maiores prejuízos no tempo de processamento computacional, uma vez que, nesta fase do algoritmo, são efetuadas apenas operações matriciais simples.

Deve-se salientar, ainda, que, com o procedimento numérico adotado, diversas análises para um mesmo problema podem ser efetuadas, alterando-se os valores dos incrementos de carga e o número de iterações, sem que seja necessário recalculas as matrizes, que podem ser armazenadas em uma primeira análise. Isto é de interesse, quando se quer refinar a solução não-linear, diminuindo-se os incrementos para valores próximos da carga limite.

Este procedimento é simples e adequado para a análise elastoplástica de placas sob carregamento sempre crescente e estático, usuais em problemas práticos.

Alguns exemplos de análise elastoplástica foram processados, mostrando-se a viabilidade da formulação. Através das análises efetuadas, verifica-se que também para a solução não-linear pode-se utilizar um número reduzido de elementos de contorno na discretização. O número de células adotadas no domínio parece, também, não alterar significativamente os resultados. Este número está diretamente ligado aos pontos do domínio para os quais se quer efetuar o controle de esforços e deformações, sem,

necessariamente, estar vinculado à discretização do contorno.

O modelo implementado para a análise de lajes de concreto armado, baseado na relação momento-curvatura, também apresentou um bom desempenho e parece ser uma alternativa viável. Este modelo não tem a pretensão da determinação de valores limites de carga, mas pode representar o comportamento não-linear de lajes de concreto armado e, portanto, contribuir para projetos de pavimentos.

A implementação do modelo sugerido, que considera a integração sobre a espessura da placa parece eficiente, melhorando a formulação elastoplástica. A inclusão de armaduras e um critério adequado para o concreto armado é o próximo objetivo a ser alcançado e não deve trazer grandes dificuldades. Pretende-se, assim, conseguir um modelo no qual se possam considerar distribuições não isotrópicas da armadura e uma análise mais refinada de lajes de concreto armado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDE-AKHER, A.; HARTLEY, G. A. Evaluation of boundary integrals for plate bending. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, v. 28, n. 2, p. 75-93, 1989.
- _____. Boundary integration and interpolation procedures for plate bending. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, v. 28, n. 6, p. 1389-1408, 1989.
- ALTIERO, N. J.; SIKARSKIE, D. L. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. *Comp. & Struct.*, n. 9, p. 163-168, 1978.
- ARGYRIS, J. H. ; KELSET, S. **Energy theorems and structural analysis**. London: Butter-worths, 1960.
- AUFARE, M.; CHAUVEL, D.; L'HUBY, Y. Dynamic elasto-plastic analysis of reinforced concrete slabs and application to plastic design of some building structures. In: HINTON, E.; OWEN, R., eds. **Computational modelling of reinforced concrete structures**. Swansea: Pineridge Press, 1986. p. 303-326.
- BARCELLOS, C. S.; SILVA, L. H. M. A boundary element formulation for the Mindlin's plate model. In: BREBBIA, C. A.; VENTURINI, W. S., eds. **Boundary element techniques: applications in stress analysis and heat transfer**. Southampton, 1987.
- BARES, R. **Tablas para el calculo de placas y vigas pared**. Barcelona: G. Gili, 1972. 538 p.
- BARRET, K. E.; ELLIS, S. An exact theory of elastic plates. *Int. J. Solids Struct.*, v. 24, n. 9, p. 859-880, 1988.
- BETTI, E. Teoria dell elasticita. *Il Nuovo Cimento*, p. 7-10, 1872.
- BEZINE, G. P. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. *Mech. Res. Comm.*, v. 5, n. 4, p. 197-206, 1978.
- _____. A boundary integral equation method for plate flexure with conditions inside the domain. *Int. J. Num. Meth. Engrg*, n. 17, p. 1647-1657, 1981.
- BEZINE, G. P.; GAMBY, D. A. A new integral equation formulation for plate bending problems. In: BREBBIA, C. A., ed. **Recent advances in BEM**. London: Pentech Press, 1978. p.

327-342.

- BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech Press, 1978.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques - theory and applications in engineering**. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- BUI, H. D. Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastic problems by integral equations. *Int. J. Solids Structures*, v. 14, p. 935-939, 1978.
- CALDERÓN E. T. **Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno**. São Carlos, 1991. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CAMP, C. V.; GIPSON, G. S. Biharmonic analysis of rectilinear plates by the boundary element method. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, n. 30, p. 517-539, 1990.
- CHANNAKESKAVA, C. et al. Elasto-plastic-cracking analysis of reinforced concrete structures using boundary element method. In: BREBBIA, C. A., ed. **Boundary elements X**, v. 3. Computational Mechanics Publications, 1988.
- CHENG, S. Elastic theory of plates and a refined theory. *J. Appl. Mech.*, n. 46, p. 644-650, 1959.
- COPE, R. J. Nonlinear analysis of concrete slabs. In: HINTON, E.; OWEN, R., eds. **Computacional modelling of reinforced concrete structures**. Swansea: Pineridge Press, 1986. p. 3-43.
- CORRÊA, M. R. S. **Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios**. São Carlos, 1991. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CRUSE, T. A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. *Int. J. Solids Structures*, v. 5, p. 1259-1274, 1969.
- _____. An improved boundary integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. *Comput. & Struct.*, v. 4, p. 741-754, 1974.
- DANSON, D. J. **Analysis of plate bending problems by direct boundary element method**. Southampton, 1979. Dissertation (M.Sc.) - University of Southampton.

- DOTREPPE, J.C.; SCHNOBRICH, W.C.; PECKNOLD, D.A. Layered finite element procedure for inelastic analysis of reinforced concrete slabs. *IABSE Publications*, v. 33, n. 11, p. 53-68, 1973.
- FIGUEIRAS, J. A. **Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells**. Swansea, 1983. Tese (Doutorado) - University College of Swansea.
- FORBES, D. J.; ROBINSON, A. R. Numerical analysis of elastic plates and shallow shells by an integral equation method. *University of Illinois Structural Research Series Report*, n. 346, 1969.
- FUNG, Y. C. **Foundations of solid mechanics**. New Jersey: Prentice-Hall, 1965.
- GIL RODRIGUEZ, J. C. **Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais**. São Carlos, 1986. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- GUO-SHU, S.; MUKHERJEE, S. Boundary element method analysis of bending of elastic plates of arbitrary shape with general boundary conditions. *Engineering Analysis*, v. 3, n. 1, p. 36-44, 1986.
- HAND, F. R.; PECKNOLD, D. A.; SCHNOBRICH, W. C. Nonlinear layered analysis of RC plates and shells. *J. Struct. Div., ASCE*, v. 99, n. ST7, p. 1491-1505, July, 1973.
- HANSEN, E. B. Numerical Solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems. *Journal of Elasticity*, v. 6, n. 1, p. 39-56, 1976.
- HARTMANN, F.; ZOTEMANTEL, R. The direct boundary element method in plate bending. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, v. 23, n. 11, p. 2049-2069, 1968.
- HE, X.; QIN, Q. Nonlinear analysis of Reissner's plate by the variational approaches and boundary element methods. *Appl. Math. Modelling*, v. 17, n. 3, p. 149-155, 1993.
- HENCHY, H. Über die berücksichtigung der schubverzerrungen in ebenen platten. *Ing. Arch.*, n. 16, 1947.
- HILL, R. **The mathematical theory of plasticity**. Oxford: Oxford University Press, 1950.
- HU, H.; SCHNOBRICH, W.C. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete plates and shells under monotonic loading.

- Comput. & Struct., n. 38, p. 637-651, 1991.
- JASWON, M. A. Integral equation methods in potential theory I. Proc. Royal Society, A275, p. 23-32, 1963.
- JASWON M. A.; SYMM, G. T. Integral equation methods in potential theory and elastostatics. London: Academic Press, 1977. 287 p.
- JASWON, M. A.; MAITI, M.; SYMM, G. J. Numerical biharmonic analysis and some applications. Int. J. Solids Structures, n. 3, p. 309-332, 1967.
- JOFRIET, J C.; McNEICE, G. M. Finite element analysis of reinforced concrete slabs. J. Struct. Div., ASCE, n. 97, p. 785-806, Mar 1971.
- KAMIYA, N.; SAWAKI, Y.; KAKAMURA, Y. Termal bending analysis by boundary integral equation method. Mech. Res. Comm., v. 8. n. 6, p. 369, 1981.
- KARAM, V. J. Aplicação do método dos elementos de contorno à teoria de Reissner para flexão de placas. Rio de Janeiro, 1986. Dissertação (Mestrado) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro..
- KARAM, V. J.; TELLES, J. C. F. BEM applied to plate bending elastoplastic analysis using Reissner's theory. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 9, n. 4, p. 351-357, 1992.
- KARAMI, G.; ZARRINCHANG, J.; FOROUGHI, B. et al. An efficient analytical treatment of boundary integrals in direct boundary element analysis of plate bending problems. In: BREBBIA, C. A., DOMINGUEZ, J.; PARIS, F., eds. Boundary elements XIV, v 2, 1992.
- KATSIKADELIS, J. T.; ARMENAKAS, A. E. A new boundary equation solution to the plate problem. J. Appl. Mech., v. 56, n. 2, p. 364-374, 1989.
- KIRCHHOFF, G. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scleibe. J. Math., n. 40, p. 51-58, 1850.
- KROMM, A. Verallgemeinerte theorie der plattenstatik. Ing. Arch., n. 21, 1953.
- KUPFER, H.; HILSDORF, K. H.; RUSH, H. Behavior of concrete under biaxial stresses. Proceedings of the American Concrete Institute, v. 66, n. 8, p. 656-666, 1969.
- KUPRADZE, V. D. Potential methods in the theory of elasticity. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1965.

- LACHAT, J. A. **A further development of the boundary integral technique for elastostatics.** Southampton, 1975. Thesis (Ph.D.) - University of Southampton.
- LEVINSON, M. An accurate simple theory of statics and dynamics of elastic plates. **Mech. Res. Comm.**, v. 7, n. 6, p. 343-350, 1980.
- LIN, C. S.; SCORDELIS, A. C. Nonlinear analysis of RC shells of general form. **J. Struct. Div., ASCE**, n. 101, p. 523-538, Mar 1975.
- LONG, S. Y.; BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F. Boundary element bending analysis of moderately thick plates. **Engineering Analysis**, v. 5, n. 2, p. 64-74, 1988.
- MENDELSON, A. **Plasticity: theory and application.** [S. 1.]: Robert E. Krieger Publ. Co., 1968.
- MIKHLIN, S. G. **Integral equations.** London: Pergamon Press, 1957. (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics).
- _____. Singular integral equation. **American Math. Soc. Trans. Series 1**, n. 10, p. 84-197, 1962.
- MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. **J. Appl. Mech.**, n. 13, p. 31-38, 1951.
- MORJARIA, M.; MUKHERJEE, S. Inelastic analysis of transverse deflection of plates by the boundary element method. **J. Appl. Mech., ASME**, v. 47, n. 2, p. 291-296, 1980.
- MOSHAIOV, A.; VORUS, W. S. Elasto-plastic plate bending analysis by a boundary element method with initial plastic moments. **Int. J. Solids Structures**, v. 22, n. 11, p. 1213-1229, 1986.
- MUSKHELISHVILI, N. I. **Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.** Noordhoff: Groningen Holland, 1953.
- NAYAK, G. C.; ZIENKIEWICZ, O. C. Convenient form of stress invariants for plasticity. **J. Struct. Div., Proc. ASCE**, p. 949-953, 1972.
- NOWAK, A. J.; BREBBIA, C. A. The multiple-reciprocity method. A new approach for transformig BEM domain integral to the boundary. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 6, n. 3, p. 164-167, 1989.
- OWEN, D. R. J.; FIGUEIRAS, J. A. Elastoplastic analysis of anisotropic plates and shells by the semiloof element. **Int. J.**

- Num. Meth. Engrg., v. 19, p. 521-539, 1983.
- OWEN, D. R. J.; HINTON, E. **Finite elements in plasticity: theory and practice**. Swansea, U. K.: Pineridge Press Limited, 1980.
- PAIVA, J. B. **Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estrutura**. São Carlos, 1987. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PAIVA, J. B.; VENTURINI, W. S. Uma formulação alternativa para a resolução de placas via método dos elementos de contorno. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO E IBÉRICO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 8., Rio de Janeiro, 1987. **Anais**. v. B. Rio de Janeiro: PUC/RJ, 1987. p. 307-314.
- PARIS, F.; DE LEON, S. Simply supported plates by the boundary integral equations. **Int. J. Num. Meth. Engrg.**, v. 23, n. 2, p. 173-191, 1986.
- _____. Analysis of thermal stresses in plates with boundary element method. **Engineering Analysis**, v. 4, n. 4, p. 199-203, 1987.
- PILTNER, R.; TAYLOR, R. L. The solution of plate bending problems with aid of a boundary element algorithm based on singular complex functions. In: TANAKA, M.; BREBBIA, C. A.; HONMA, T., eds. **Boundary elements XII**, 1989.
- PROENÇA, S. P. B. **Sobre modelos matemáticos do comportamento do concreto: análise crítica e contribuições**. São Carlos, 1988. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RAO, P. S.; SUBRAHMANYAM, B. V. Trisegmental moment-curvature relations for reinforced concrete members. **Proc. of the American Concrete Institute**, n. 70, p. 346-351, May 1973.
- REISSNER, E. On bending of elastic plates, **J. Math. Physics**, n. 23, p. 184-191, 1944.
- _____. The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates. **J. Appl. Mech**, n. 12, 1945.
- _____. On small deflections of sheardeformable elastic plates. **Meth. Appl. Mech. Engrg.**, n. 59, p. 227-233, 1986.
- _____. On the asymptotic expansions for the sixth-order linear theory problem of transverse bending of orthotropic elastic plates. **Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.**, v. 85, n. 1, p.

- 75-88, 1991.
- RIBEIRO, G. O. **Sobre a formulação do método dos elementos de contorno de placas usando as hipóteses de Reissner.** São Carlos, 1992. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RIBEIRO, G. O.; VENTURINI, W. S. **Aplicação do método dos elementos de contorno no cálculo de placas através da teoria de Reissner.** In: II ENCONTRO NACIONAL DE MECÂNICA COMPUTACIONAL. **Anais: Congresso Ibero-latino-americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia**, 10. Porto, Portugal: 1989.
- RICARDELLA, P. C. **An implementation of the boundary integral technique for planar problems of elasticity and elastoplasticity.** [S. l.], 1973. Thesis (PH.D.) - Carnegie-Mellon University.
- RIZZO, F. J. **An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics.** *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 25, n. 1, p. 83-92, 1967.
- SAPOUNTZAKIS, E. J.; KATSIKADELIS, J. T. **Boundary element solution of plates of variable thickness.** *J. Engrg. Mech.*, v. 117, n. 6, p. 1241-1256, 1991.
- SILVA, N. A. **Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas sobre fundações elásticas.** São Carlos, 1986. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SOUTHWELL, R. V. **Relaxation methods in theoretical physics.** London: Oxford University Press, 1946. (The Oxford Engineering Science Series).
- STERN, M. A. **A general boundary integral formulation for the numerical solutions of plate bending problems.** *Int. J. Solids Structures*, n. 15, p. 769-782, 1979.
- SYMM, G. T. **Integral equation methods in potential theory II.** *Proc. Royal Society*, A275, p. 33-46, 1963.
- TELLES, J. C. F.; BREBBIA, C. A. **On the application of the boundary element method to plasticity.** *Appl. Math. Modelling*, n. 3, p. 466-470, 1979.
- TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells.** New York: McGraw-Hill, 1959.
- TOTTENHAN, H. **The boundary element method for plates and shells.** In: BANERJEE, P. K.; BUTTERFIELD, R. eds.. **Developments**

- boundary element methods 1. London: Applied Science Publ., p. 173-205, 1979.
- TURNER, M. J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal Aero. Science*, n. 23, p. 805-823, 1956.
- VABLE, M.; ZHANG, Y. A boundary element method for plate bending problems. *Int. J. Solids Structures*, v. 29, n. 3, p. 345-361, 1992.
- VAN DER WEEËN, F. V. Application of the boundary integral equation method to Reissner plate model. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, v. 18, n. 1, p. 1-10, 1986.
- VENTURINI, W. S. Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems. Southampton, 1982. Thesis (Ph.D.) - University of Southampton.
- XIAO-YAN, L.; KUANG-MAO, H.; XIUXI, W. Geometrically nonlinear analysis of a Reissner type plate by the boundary element method. *Computers & Structures*, v. 37, n. 6, p. 911-916, 1990.
- YANG, W. H. A generalized Von Mises criterion for yield and fracture. *J. Appl. Mech., ASME*, v. 47, p. 297-300, 1980.
- WESTPHAL JR., T.; BARCELLOS, C. S. Applications of the boundary element method to Reissner's and Mindlin's plate models. In: TANAKA, M.; BREBBIA, C. A.; HONMA, T., eds. *Boundary elements XII*, 1989.
- WU, B. C.; ALTIERO, N. J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. *Comput. & Struct.*, n. 10, p. 703-707, 1979.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; VALLIAPAN, S.; KING, I. P. Elasto-plastic solutions of engineering problems - initial stress, finite element approach. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, n. 1, p. 75-100, 1969.