

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

CÁLCULO EVOLUTIVO DE PAREDES DE CONTENÇÃO

AUTORA : Enga. RENATA ROMANELLI TRONDI

ORIENTADOR : Prof. Dr. WALTER ABRAHÃO NIMIR

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

COMISSÃO EXAMINADORA :

Prof. Dr. Orêncio Monje Villar

Prof. Dr. Walter Savassi

Prof. Dr. Walter Abrahão Nimir

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

SÃO CARLOS - SP, OUTUBRO DE 1993

*Aos meus pais,  
Adriano e Lya*

## AGRADECIMENTOS

Ao orientador Prof. Dr. Walter Abrahão Nimir pela colaboração e pelo incentivo.

Aos Profs. Drs. João Batista de Paiva, Sérgio Percival Baroncini Proença e Tarcísio Barreto Celestino que muito contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Às Sras. Maria Nadir Minatel e Rosi Ap. Jordão Rodrigues pelo apoio.

Aos amigos Luttgardes de O. Neto, Ana Júlia R. Nardo, Iara Manfrin, Ana Paula D. Seleguin e Sérgio Seleguin pelo grande apoio e contribuição.

Aos meus tios Paulo E. Dias Duarte e Jane Romanelli Duarte pelo apoio.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

## RESUMO

O presente trabalho tem por finalidade o desenvolvimento de um programa para o cálculo de paredes de contenção através de um método unidimensional evolutivo.

Este método considera a parede como uma viga de largura unitária calculada através do método dos elementos finitos, mergulhada em um meio elasto-plástico, que representa o comportamento do solo, e faz a interação solo estrutura durante as fases de execução desta.

O solo é considerado como um conjunto de molas através da hipótese de Winkler e, para o cálculo de plastificação destas molas é utilizado o método de Newton-Raphson "modificado".

Alguns exemplos numéricos do cálculo destas paredes são apresentados ao final do trabalho para mostrar o comportamento deste tipo de estrutura com diferentes considerações sobre o carregamento e o comportamento destas molas.

## ABSTRACT

This work presents a software to analyze retaining walls in which the wall is considered a beam of unit breadth and embedded into the soil, which is supposed to be an elastic Winkler foundation.

In this formulation the Winkler foundation is supposed to have an elastic-plastic behaviour and an algorithm based on the modified Newton-Raphson is used in the analysis.

All the phases of the construction of the wall are considered and for each one of this phases it is automatically established the loads, the Winkler constants of the soil and of the stiffeners used for preventing large displacements in the wall and the analysis of this phase of the construction is carried out. The process continues until all the excavation is done and the final displacements, bending moments and shear forces are obtained. The software developed also furnishes the efforts and displacements at the end of each phase.

Numerical examples are presented in which different hypotheses on the loads and the behaviour of the Winkler foundation are considered.

# ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO.....	1
2.	COMPORTAMENTO DO SOLO.....	13
2.1.	Introdução.....	13
2.2.	Cargas atuantes na estrutura.....	13
2.2.1.	Sobrecargas.....	13
2.2.2.	Peso próprio do solo.....	16
2.2.3.	Pressão neutra.....	18
2.3.	Empuxos e deslocamentos limites de plastificação...18	
2.4.	Plastificação do solo.....	22
3.	COMPORTAMENTO DA ESTRUTURA DE CONTENÇÃO.....	31
3.1.	Introdução.....	31
3.2.	Comportamento de uma estronca como apoio elástico..31	
3.3.	Comportamento de um tirante como apoio elástico...34	
3.4.	Montagem da matriz de rigidez da viga.....	36
3.5.	Montagem do vetor de forças nodais.....	40
4.	PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO DAS ROTINAS.....	42
4.1.	Introdução.....	42
4.2.	Entrada de dados.....	42
4.3.	Programa principal.....	44
4.4.	Subrotina CONCAT.....	46
4.5.	Subrotina ORDEM.....	46
4.6.	Subrotina SUBREN.....	47
4.7.	Subrotina PRSEHOR e PRSINHOR.....	48
4.8.	Subrotina NUNFASES.....	49
4.9.	Subrotina ESFORES.....	50
4.10.	Subrotina CALCMOR.....	50
4.11.	Subrotina CACBLOQ e CALBLOQ.....	50
4.12.	Subrotina MATRIGI e RESISLI.....	51
4.13.	Subrotina CONTENDE e RESULTO.....	51

5.	ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÃO.....	54
5.1.	Introdução.....	54
5.2.	Exemplo 1.....	54
5.3.	Exemplo 2.....	65
5.4.	Exemplo 3.....	72
5.5.	Considerações finais.....	74

## LISTA DE FIGURAS

Fig. 1 - Esquema genérico de uma vala escorada . . . . .	2
Fig. 2 - Diagrama de tensões (método empírico) (9) . . . . .	5
Fig. 3 - Esquema para o cálculo dos esforços (4) . . . . .	6
Fig. 4 - Sistema estático (método semi-empírico) (4) . . . . .	7
Fig. 5 - Sistema estático (método semi-empírico) (4) . . . . .	8
Fig. 6 - Sistema estático (método semi-empírico) (4) . . . . .	9
Fig. 7 - Modificação no carregamento que atua na parede devido ao seu deslocamento (4) . . . . .	11
Fig. 8 - Comportamento elasto-plástico de uma mola (4) . . . . .	12
Fig. 9 - Esquema de aplicação de uma sobrecarga de fundação . . . . .	14
Fig. 10 - Esquema de aplicação de uma sobrecarga de equipamentos na beira da vala . . . . .	15
Fig. 11 - Esquema de aplicação da sobrecarga de veículos e depósitos lateralmente à vala . . . . .	16
Fig. 12 - Exemplo de três camadas de solo com suas respectivas cotas e pesos específicos . . . . .	17
Fig. 13 - Diagrama de pressões horizontais de água . . . . .	18
Fig. 14 - Distribuição do carregamento horizontal da viga . . . . .	21

Fig. 15 - Representação esquemática do solo como apoio elasto-plástico (4) . . . . .	23
Fig. 16 - Esquema de distribuição do coeficiente de apoio elástico horizontal em 2 camadas . . . . .	25
Fig. 17 - Reativação de uma mola 'x' após um ciclo de histerese (20) . . . . .	28
Fig. 18 - Diagrama de empuxo x deslocamento da mola localizada à esquerda do nó na figura 6 (20) . . . . .	29
Fig. 19 - Diagrama de empuxo x deslocamento da mola localizada à direita do nó na figura 6 (20) . . . . .	29
Fig. 20 - Comprimento de uma estronca para efeito de cálculo (20) . . . . .	32
Fig. 21 - Diagrama de esforços x deslocamentos de uma estronca simples (20) . . . . .	33
Fig. 22 - Diagrama de esforços x deslocamentos de uma estronca pré-comprimida (20) . . . . .	33
Fig. 23 - Comprimento de um tirante para o cálculo de sua rigidez (20) . . . . .	35
Fig. 24 - Diagrama de esforços x deslocamentos de um tirante (20) . . . . .	35
Fig. 25 - Esquema da parede de contenção do exemplo 1 . . . . .	55
Fig. 26 - Elástica da viga na primeira fase de escavação . . . . .	68
Fig. 27 - Elástica da viga na terceira fase de escavação . . . . .	69
Fig. 28 - Elástica da viga na quinta fase de escavação . . . . .	69
Fig. 29 - Elástica da viga na sétima fase de escavação . . . . .	70

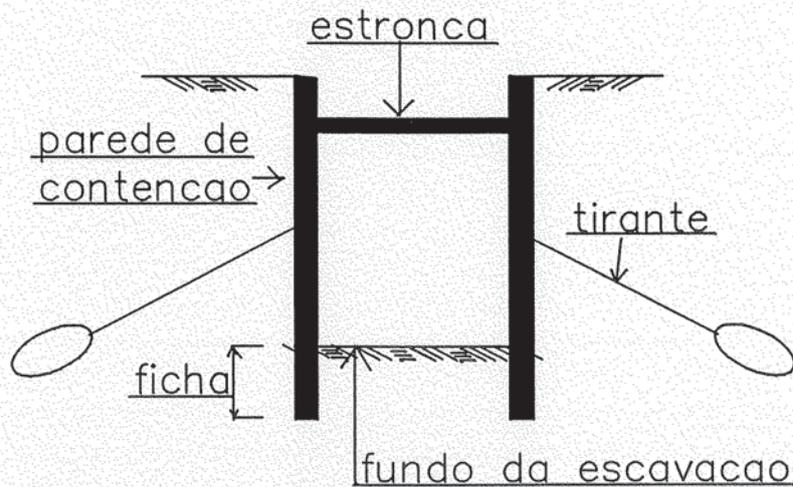
Fig. 30 - Elástica da viga na nona fase de escavação . .	70
Fig. 31 - Superposição das elásticas do procedimento 1 .	71
Fig. 32 - Esquema da parede de contenção para o exemplo 3 (9) . . . . .	72

## 1 - Introdução

Um dos métodos construtivos mais utilizados para a abertura de valas a céu aberto é o chamado "cut-and-cover" que aparentemente é bastante simples, consistindo em construir paredes de contenção, escavar a parte interna, construir a estrutura permanente, algumas vezes retirar o escoramento, e aterrar os espaços remanescentes. Na prática o cálculo desta parede, que pode ou não ser escorada, se torna bastante complexo quando se trata de obras de grande porte.

No nosso país os problemas que envolvem o cálculo desta parede para este método construtivo haviam sido relegados a um segundo plano, talvez porque as obras executadas com este método fossem de pequeno porte e provisórias; entretanto com as obras do METRÔ de São Paulo e do Rio de Janeiro, a partir da década de 60, estes problemas começaram a ser levados em consideração, pois os recalques nos edifícios vizinhos à obra não poderiam ultrapassar certos valores. Surgiu assim a necessidade de um aperfeiçoamento cada vez maior para os projetos e execução destas paredes de contenção com o propósito de se conseguir estruturas que tivessem uma segurança adequada, que fossem mais econômicas, e de fácil execução (9).

A figura 1 mostra uma vala a céu aberto com seus elementos de contenção. A parede poderá ser executada em concreto ou com perfis metálicos (estacas), espaçados ou não, com ou sem pranchões de madeira. O escoramento poderá ser feito com estroncas e/ou tirantes. As estroncas são perfis metálicos que poderão ser pré-comprimidos para diminuir os deslocamentos provocados pela compressão desta. Os tirantes, ao contrário das estroncas, não são reutilizáveis, mas apresentam vantagens como a maior mobilidade para trabalhos dentro da vala. Compreende-se por ficha o comprimento mínimo da parede que permanecerá enterrado no solo e por fundo da escavação a cota final da escavação.



**Fig. 1 - Esquema genérico de uma vala escorada**

Nesta figura já se pode observar a complexidade da análise do sistema estrutural, já que o cálculo da estrutura de contenção está intimamente ligado ao comportamento do solo. Muitos são os fatores que influem nesse comportamento (9).

Dentre essa série de fatores pode-se citar:

- o clima;
- as dimensões da escavação;
- as propriedades do solo na região;
- o tipo de controle do nível de água, quando presente na escavação;
- o tempo de execução (tanto de escavação quanto de instalação do escoramento);
- o tipo de escoramento;
- a sequência imposta pelo método construtivo;
- a presença de edificações e outras sobrecargas (como por exemplo as do trânsito local e as de equipamentos que serão utilizados na obra);

O clima influi principalmente através da temperatura, cujas variações, provocando alongamento ou encurtamento das estroncas, vão influir na maneira como o solo escorado responde às solicitações das cargas. Nos climas frios o congelamento d'água do solo pode causar expansão.

As propriedades do solo na região, o tipo de controle do nível de água (quando houver) e a presença de edificações e outras sobrecargas influem diretamente no carregamento que estará solicitando a parede e conseqüentemente nos deslocamentos desta.

As dimensões da escavação, o tipo de escoramento e a seqüência imposta pelo método construtivo estão intimamente ligadas e influirão diretamente nos deslocamentos da parede que por sua vez influenciam nas deformações que o solo sofrerá.

O tempo de execução não só influencia no carregamento, como também nos deslocamentos da estrutura de contenção, por exemplo, se a escavação fosse realizada instantaneamente e os tirantes ou estroncas fossem colocados imediatamente, os deslocamentos não seriam tão grandes como se após a escavação estes elementos demorassem a ser colocados, sem contar que com a rapidez da escavação não haveria muito tempo de se escoar a água do solo.

Existem ainda outros parâmetros que precisam ser conhecidos, como por exemplo as características físicas e reológicas do solo, que incluem os coeficientes de empuxo passivo e ativo (que determinam os carregamentos limites de apassivação e ativação), o coeficiente de apoio elástico horizontal do solo, o ângulo de atrito interno e a coesão de cada camada.

A análise deste tipo de estrutura levando-se em consideração todos estes parâmetros seria muito complexa sem a adoção de hipóteses simplificadoras, que serão escolhidas de acordo com o procedimento de cálculo adotado pelo projetista.

Os modelos utilizados para a análise destas estruturas de contenção podem ser matemáticos ou experimentais. Os experimentais, como por exemplo o ensaio de modelos reduzidos, são muito difíceis de serem executados, restando então os modelos matemáticos. Dentro destes modelos existem vários procedimentos de cálculo que podem ser adotados e que serão classificados como empíricos, semi-empíricos e analíticos.

Os empíricos e semi-empíricos são bastante conservadores e levam a uma estrutura de contenção muito robusta, devidos aos parâmetros para o cálculo sempre estarem muito a favor da segurança. Além disso, eles não levam em conta os esforços que atuam na estrutura durante a execução da vala (ou quando o fazer é de modo deficiente), dando somente os resultados finais da escavação, embora os esforços atuantes durante esta escavação possam ser muito mais críticos (11).

O método empírico fornece as forças axiais nas estroncas e tirantes e os momentos fletores na parede, mas estes esforços são calculados somente através de curvas de envoltória aparente para tensões. As curvas mais usadas são a de Terzaghi e Peck (18). A parede pode ser projetada permitindo-se a ocorrência de rótulas para o fundo da escavação e nos pontos de suporte. Para se estimar o recalque da superfície existem procedimentos empíricos que se baseiam em resultados experimentais.

O método semi-empírico baseia-se em uma distribuição lateral de tensões, mas não assume a responsabilidade pela modificação destes valores com o deslocamento da parede, não considerando as forças e deslocamentos nos estágios anteriores. Este método juntamente com o empírico não têm uma base teórica que permita uma variação dos parâmetros para o cálculo. A seguir está uma breve explicação de como se calcula uma parede de contenção através destes métodos:

- Método Empírico

- Método da envoltória aparente:

São adotados diferentes diagramas de envoltória aparente de tensões para os vários tipos de solo existentes. Para este exemplo foi adotado o diagrama proposto por Guerra (9) que é o mostrado na figura 2.

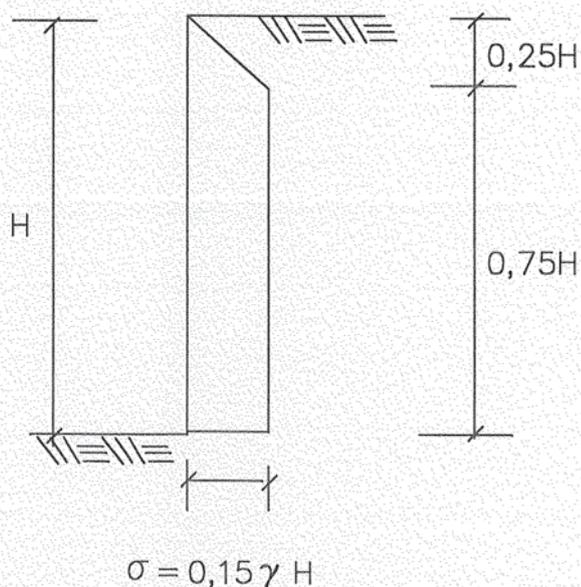


Fig. 2 - Diagrama de tensões (método empírico) (9)

O momento fletor na seção do primeiro apoio será dado, como mostra a figura 3, por:

$$M = P_b L_b \quad (1.1)$$

$P_b$  - resultante

$L_b$  - braço da alavanca

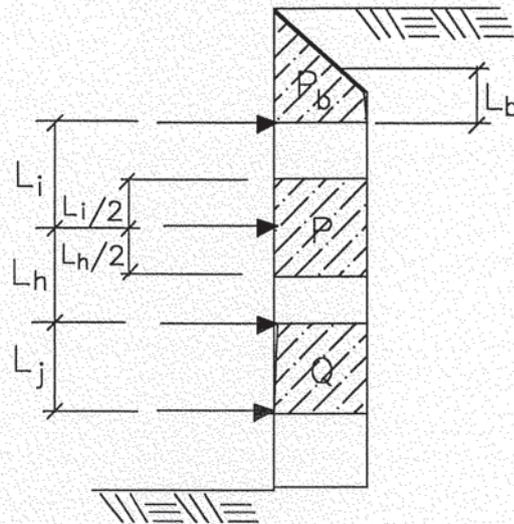


Fig. 3 - Esquema para o cálculo dos esforços (4)

Em um apoio intermediário será:

$$M = \frac{P}{10} \left( \frac{L_i}{2} + \frac{L_h}{2} \right) \quad (1.2)$$

P - resultante

$L_i$  e  $L_h$  - distâncias entre níveis

O momento máximo entre apoios será:

$$M = \frac{Q}{10} L_j \quad (1.3)$$

Q - resultante

$L_j$  - distância entre apoios

Admitem-se articulações nos apoios (com exceção do primeiro) e na seção correspondente ao fundo da escavação e calculam-se as forças cortantes a partir das vigas isostáticas.

- **Método Semi-Empírico**

- Método da viga contínua para paredes flexíveis:

Sistemas estáticos:

Primeira fase de escavação (parede em balanço):

Admite-se que a parede se comporta como uma viga engastada a uma certa profundidade  $H_i$  que será adotada preliminarmente com valor  $H_i = 0,25H_j$ , sendo  $H_j$  a altura de escavação conforme mostra a figura 4. Para viabilizar o sistema estático proposto admite-se que o empuxo passivo e o empuxo ativo abaixo do nível de escavação vão direto para o apoio, criando uma reação  $C_i$  no engastamento obtida pela superposição destes dois empuxos. A parede é calculada normalmente como uma viga em balanço engastada no apoio fixo determinado (4).

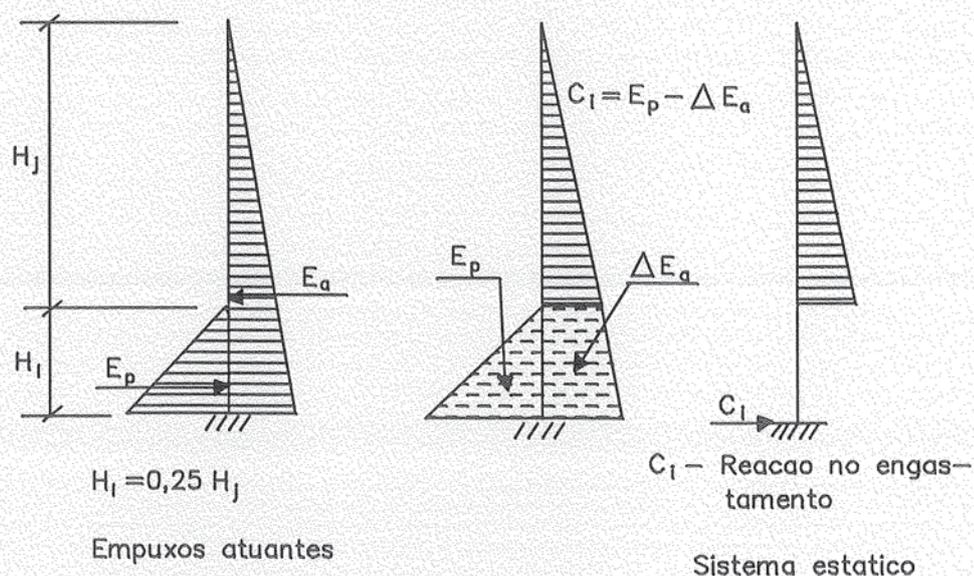
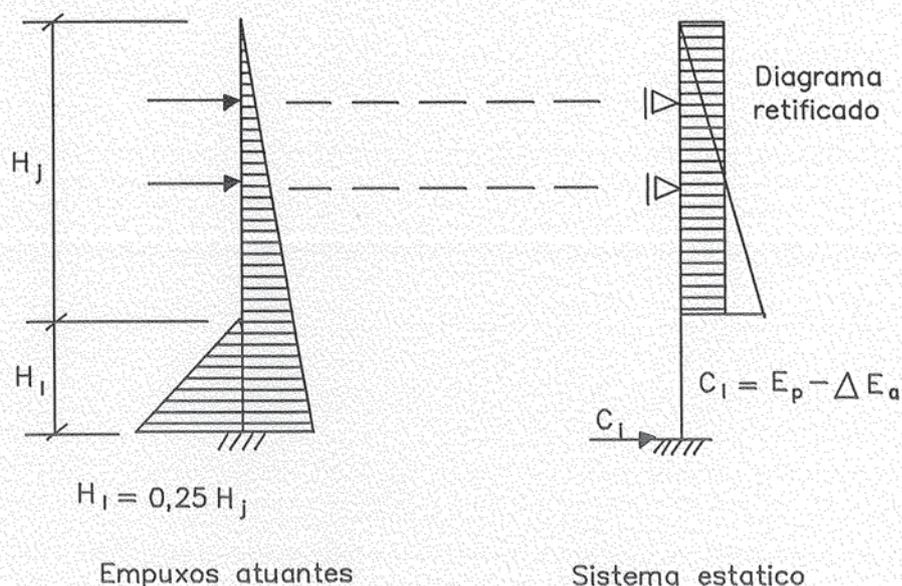


Fig. 4 - Sistema estático (método semi-empírico) (4)

### Fases intermediárias de escavação:

Determinam-se o ponto de engastamento e a reação  $C_i$  deste da mesma maneira calculada na primeira fase. O cálculo da parede é feito normalmente como viga contínua sobre apoios fixos nas estroncas e engastada a uma certa profundidade, conforme mostra a figura 5. O diagrama de empuxo ativo acima do nível de escavação é o diagrama retificado, que é numericamente igual ao empuxo calculado (igualdade de áreas) (4).



**Fig. 5 - Sistema estático (método semi-empírico) (4)**

Na fase final de escavação o cálculo é feito também como uma viga contínua com a diferença de que agora, ao invés do engastamento, admite-se um apoio fixo na região da ficha localizado a 0,60m do seu comprimento abaixo do fundo da escavação (4).

- Método da viga contínua para paredes rígidas:

O cálculo da parede é feito normalmente para as várias fases da mesma maneira mostrada para vigas flexíveis, mas utilizando-se um diagrama de carregamento correspondente ao empuxo em repouso. Permite-se uma redução do empuxo na região inferior da parede e admite-se que esta redução inicie a  $0,3H$  acima do fundo da escavação (sendo  $H$  a altura desta escavação) e diminua linearmente até ao pé da ficha, onde apresenta o valor de  $\sigma/2$  (sendo  $\sigma$  o valor da pressão em repouso a profundidade  $0,7H$ ) conforme mostra a figura 6 (4).

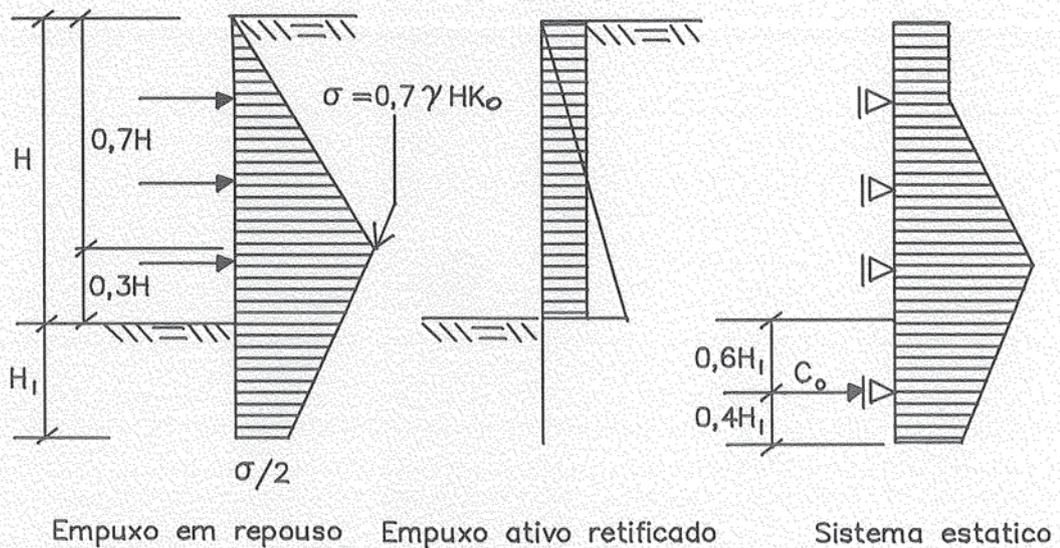


Fig. 6 - Sistema estático (método semi-empírico) (4)

Já o procedimento analítico pode considerar a estrutura dentro de um meio visco-elasto-plástico que simula o comportamento do

solo, fazendo a interação solo estrutura e inclusive levando em conta a não linearidade deste meio.

Dentro deste procedimento pode-se escolher entre uma análise tridimensional do conjunto formado pela estrutura de contenção e o solo, uma análise bidimensional ou unidimensional. A análise tridimensional requer uma quantidade de dados muito grande, tornando um cálculo corriqueiro deste tipo de estrutura em um problema bastante complexo para ser resolvido.

A análise bidimensional é mais simples que a tridimensional e resulta em deslocamentos e tensões mais próximas da realidade em relação à unidimensional, mas também necessita de uma quantidade de dados razoável, tornando também um cálculo corriqueiro em um problema muito complexo.

Resta então a análise unidimensional, cujos resultados não são tão próximos da realidade como os da bidimensional, mas são bastante satisfatórios para o dimensionamento da estrutura, além de utilizar um número de dados bem reduzido, simplificando o cálculo.

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um programa para a análise de paredes de contenção utilizando um método de cálculo unidimensional que considera a parede como uma viga em meio elasto-plástico, sendo que o efeito do esforço axial será desprezado. É utilizada inicialmente uma distribuição de carregamento pré determinada que o solo, assim como as sobrecargas, aplicam à parede. Com o deslocamento da parede resultante de uma fase qualquer de execução, essa distribuição será corrigida da maneira como mostra a figura 7.

Como o solo inicialmente está normalmente comprimido, os deslocamentos resultantes da remoção do solo até uma cota qualquer causam um alívio no carregamento  $f$  externo à parede que a solicitava na fase anterior e do mesmo modo causa um acréscimo no carregamento interno à parede.

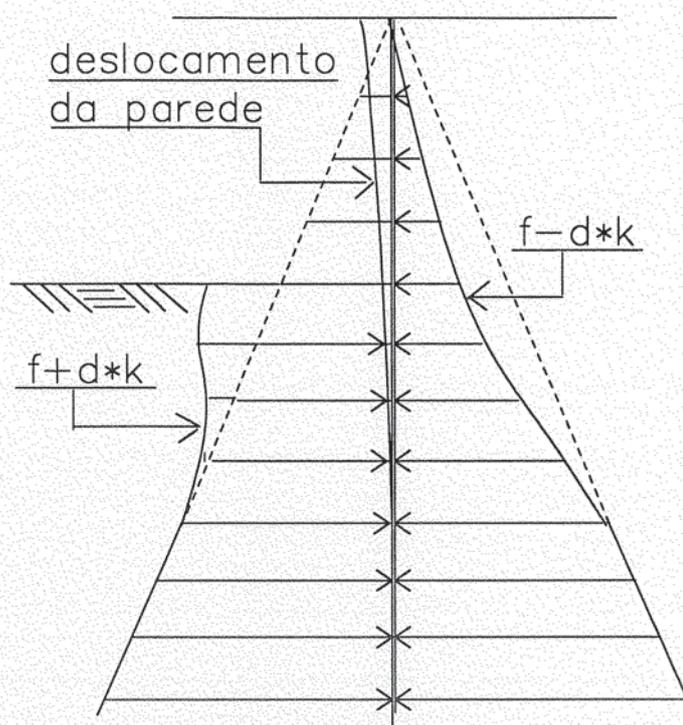


Fig. 7 - Modificação no carregamento que atua na parede devido ao seu deslocamento (4)

Neste método a viga é discretizada levando-se em conta as suas características físicas e geométricas (por exemplo as cotas iniciais e finais da viga e as cotas de mudança do módulo de elasticidade), as cotas de mudanças das características físicas do meio em que está imersa e as de aplicação de estroncas e tirantes. Para esta discretização calcula-se os comprimentos dos intervalos entre estas cotas e divide-se estes intervalos em outros de comprimento menor ou igual ao mínimo determinado pelo usuário. Para o solo admite-se a hipótese de Winkler, que considera que este equivale a várias molas desacopladas entre si e conectadas à parede.

Para estas molas admite-se um comportamento elasto-plástico representado pela figura 8. Os dois segmentos de reta horizontais representam os estados limites de apassivação e ativação. Nesta figura  $d_a$  e  $d_p$  são os deslocamentos limites de ativação e apassivação,  $f_r$  é o empuxo em repouso,  $f_a$  o empuxo ativo e  $f_p$  o empuxo passivo.

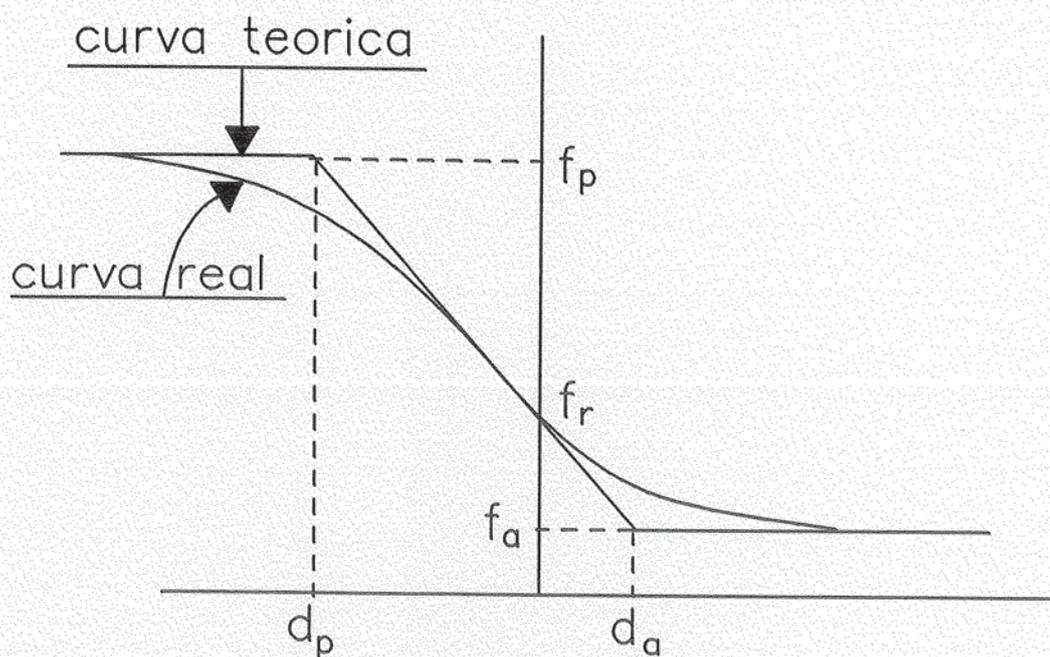


Fig. 8 - Comportamento elasto-plástico de uma mola (4)

No capítulo 2 serão dados mais detalhes sobre o carregamento e o comportamento do solo como apoio elasto-plástico. No capítulo 3 será explicado o comportamento da estrutura de contenção, assim como a montagem da matriz de rigidez da viga e do vetor de cargas nodais. No capítulo 4 encontram-se os procedimentos de cálculo do programa principal e das subrotinas que compõem este programa para o cálculo desta viga. No capítulo 5 serão apresentadas a análise dos resultados e a conclusão.

## **2 - Comportamento do Solo**

### **2.1 - INTRODUÇÃO**

Neste capítulo será apresentado como o solo se comporta como carregamento e como apoio elasto-plástico para a parede que será calculada como uma viga da maneira explicada no capítulo anterior. Será explicado inicialmente o cálculo dos empuxos horizontais e em seguida o cálculo do carregamento desta viga e dos empuxos limites de plastificação. Posteriormente se verá como se considera a plastificação do solo e como após esta plastificação, se houver uma inversão de deslocamentos, o solo volta a trabalhar no regime elástico, havendo uma modificação dos estados iniciais, fenômeno chamado de histerese.

Como já foi dito anteriormente o empuxo que atua sobre a parede depende da interação solo-estrutura durante todas as fases de execução, ou seja, este empuxo provoca deslocamentos na parede e estes deslocamentos alteram o valor dos empuxos por causa da deformação que eles provocam no solo e assim sucessivamente. Será explicado aqui como calcular o valor dos empuxos iniciais.

O carregamento da viga será calculado conforme determina a NC-03/80 (4), onde este será um resultado da superposição dos diversos diagramas de carga resultante dos empuxos de terra, da pressão hidrostática do lençol freático e das sobrecargas decorrentes da existência de edifícios na zona de influência da parede de contenção e da presença de depósitos de materiais, veículos e equipamentos necessários à obra posicionados lateralmente à vala.

### **2.2 - CARGAS ATUANTES NA ESTRUTURA**

#### **2.2.1 - Sobrecargas**

Existem as cargas adicionais decorrentes da existência de edifícios junto à estrutura de contenção. Para o cálculo da

influência deste tipo de sobrecarga quatro parâmetros precisam ser conhecidos, a distância  $a$  da borda da vala à carga de fundação do(s) edifício(s), a extensão  $b$  desta carga, o valor dela e a cota de aplicação como mostra a figura 9. Com estes dados calcula-se a influência desta sobrecarga uniformemente distribuída em todos os nós da viga através da seguinte equação:

$$E_h = \frac{p}{\pi} \left[ \alpha + \frac{1}{2} (\sin 2\delta - \sin(2\alpha + 2\delta)) \right] \quad (2.1)$$

Onde,

- $\alpha$  e  $\delta$  dependerão da profundidade do nó onde se quer calcular o empuxo em relação à cota de aplicação da sobrecarga,
- $p$  é o valor desta sobrecarga,
- $E_h$  o empuxo horizontal.

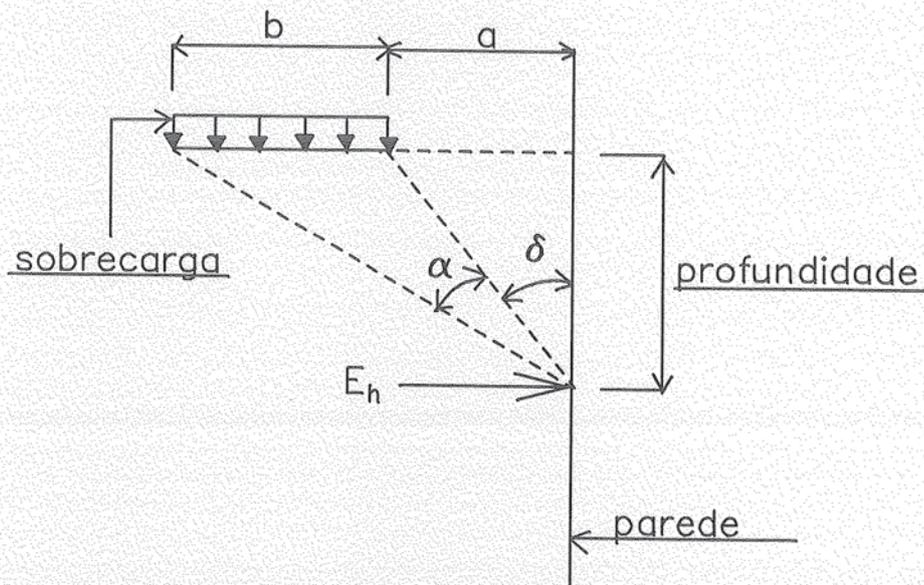
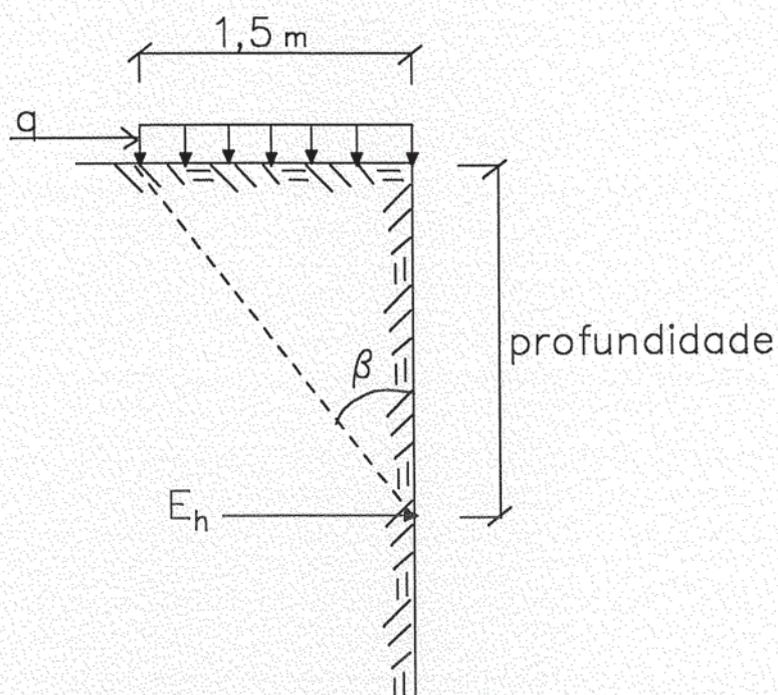


Fig. 9 - Esquema de aplicação de uma sobrecarga de fundação



**Fig. 10 - Esquema de aplicação de uma sobrecarga de equipamentos na beira da vala**

Outra sobrecarga vem de equipamentos, como escavadeiras e guindastes, localizados na beira da vala. Leva-se em consideração que esta sobrecarga esteja aplicada numa faixa de 1,5 m de largura na superfície do terreno como mostra a figura 10. Sendo assim, precisa-se conhecer apenas o valor desta sobrecarga.

O empuxo horizontal será fornecido pela seguinte equação:

$$E_h = \frac{q}{\pi} \left( \beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right) \quad (2.2)$$

Onde,

- q é o valor desta sobrecarga

Existe ainda uma outra sobrecarga proveniente de depósitos de materiais de construção que possam vir a ser realizados ao lado da obra e também do tráfego lateral de veículos. Considera-se este tipo de sobrecarga equivalente a uma camada de solo fictícia situada acima do nível do terreno no valor de  $10 \text{ kN/m}^2$  como mostra a figura 11. Esta carga de  $10 \text{ kN/m}^2$  será então somada ao carregamento de todos os nós da viga.

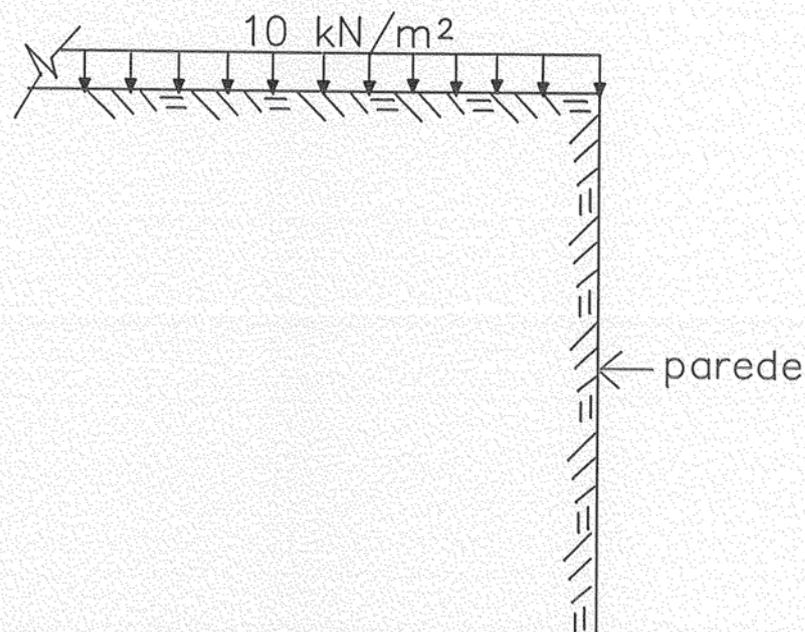


Fig. 11 - Esquema de aplicação da sobrecarga de veículos e depósitos lateralmente à vala

### 2.2.2 - PESO PRÓPRIO DO SOLO

Tendo-se o peso específico natural ou peso específico saturado (no caso do solo estar submerso), calcula-se a pressão vertical que este solo exerce nas cotas em que se encontram os nós da viga como será mostrado a seguir.

Considere-se um solo constituído de três camadas como mostra a figura 12, sendo que a primeira possui peso específico natural  $\gamma_1$ , e as outras duas peso específico saturado,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ , na

segunda e terceira camada respectivamente por estarem as duas submersas. Para se calcular então a pressão vertical nas cotas  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$  (referentes ao nível do mar) por exemplo, deve-se proceder da seguinte maneira:

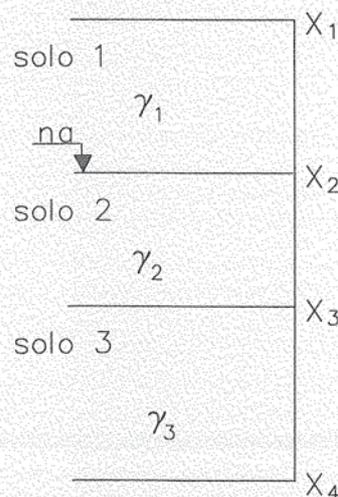
$$P_{v(x_2)} = \gamma_1 (x_1 - x_2) \quad (2.3)$$

$$P_{v(x_3)} = \gamma_1 (x_1 - x_2) + (\gamma_2 - \gamma_a) (x_2 - x_3) \quad (2.4)$$

$$P_{v(x_4)} = \gamma_1 (x_1 - x_2) + (\gamma_2 - \gamma_a) (x_2 - x_3) + (\gamma_3 - \gamma_a) (x_3 - x_4) \quad (2.5)$$

onde,

-  $\gamma_a$  é o peso específico da água.



**Fig. 12 - Exemplo de três camadas de solo com suas respectivas cotas e pesos específicos**

### 2.2.3 - PRESSÃO NEUTRA

No caso de não existir uma camada impermeável abaixo do nível d'água o diagrama de pressões horizontais partirá do zero no ponto de início do lençol e crescerá linearmente de  $\gamma_a \cdot H$ , ou peso específico da água vezes a profundidade do nó, até a última cota da viga. Caso contrário, tendo-se a pressão nos pontos de início e fim do lençol e mudanças de camada (na figura 13 a superfície da terceira camada não é totalmente impermeável; sua permeabilidade decresce com a profundidade), como mostra esta figura, calcula-se nos nós intermediários a pressão horizontal através de uma interpolação linear destas pressões nos pontos citados acima.

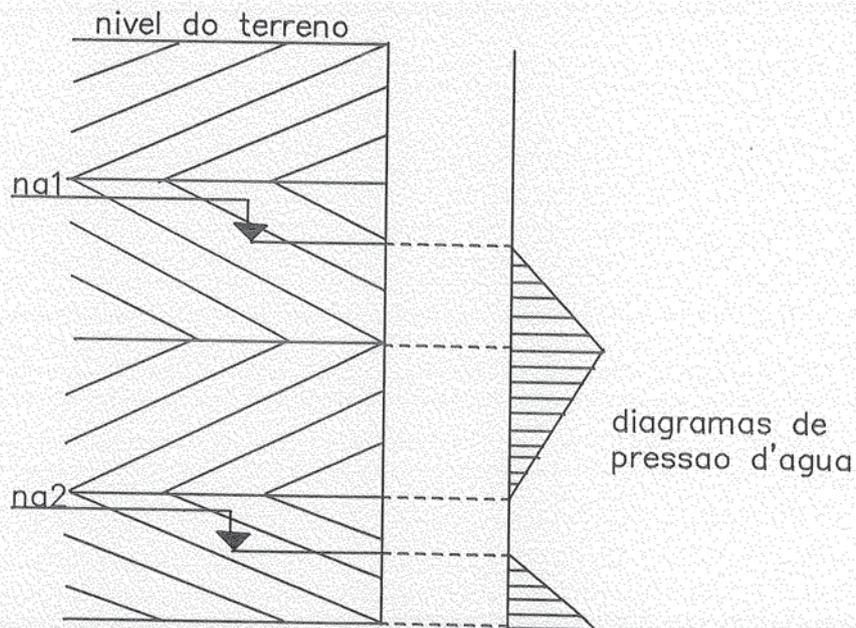


Fig. 13 - Diagrama de pressões horizontais de água

### 2.3 - EMPUXOS E DESLOCAMENTOS LIMITES DE PLASTIFICAÇÃO

Os valores dos empuxos limites de plastificação das molas, dos deslocamentos limites da parede a partir do qual as molas se

plastificarão e do empuxo em repouso dependem de vários fatores, como por exemplo a profundidade em relação à superfície do terreno em que se encontra a mola, do tipo de solo, da existência ou não de sobrecargas, etc.

Consideram-se que os solos interno e externo à vala tenham as mesmas características iniciais e que sejam conhecidos os seguintes parâmetros para cada camada:

- a cota de início da camada em relação ao nível do mar
- a cota final da camada
- o coeficiente de empuxo ativo ( $K_a$ )
- o coeficiente de empuxo em repouso ( $K_0$ )
- o coeficiente de empuxo passivo ( $K_p$ )
- a coesão
- o ângulo de atrito interno
- o peso específico ou peso específico saturado, no caso do solo estar sujeito à pressão neutra
- o coeficiente de apoio elástico horizontal do solo

Os coeficientes de empuxo ativo, passivo e em repouso são coeficientes que multiplicados pelas ações verticais fornecem os valores das ações horizontais. O  $K_0$  é que dará o carregamento inicial efetivo que estará solicitando a parede. O  $K_a$  e o  $K_p$  darão os empuxos horizontais limites de plastificação das molas.

Os coeficientes de empuxo ativo e passivo podem ser considerados constantes para cada camada e neste caso seus valores devem ser fornecidos ao programa, ou serem calculados variando com a profundidade; neste caso devem ser fornecidos apenas o ângulo de atrito interno e a coesão. No caso da segunda opção ser a escolhida as equações que fornecerão os coeficientes são as seguintes:

$$K_a = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{2c}{\gamma h} \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.6)$$

$$K_p = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{2c}{\gamma h} \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.7)$$

Onde,

- $\varphi$  é o ângulo de atrito interno,
- $c$  é a coesão,
- $h$  a profundidade da cota em relação à superfície do terreno onde se está calculando os coeficientes.

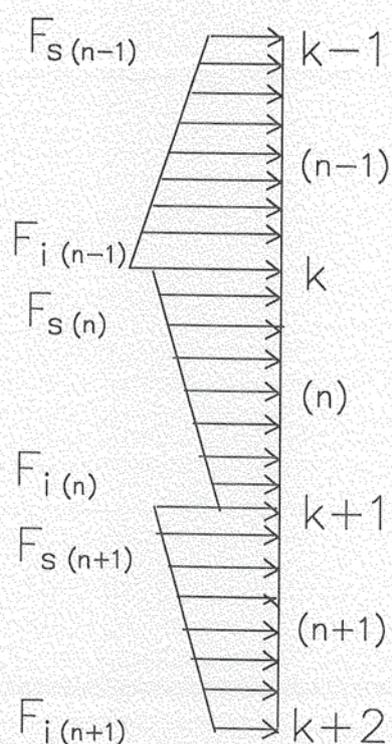
No caso da coesão do solo ser zero o segundo termo destas equações será nulo. Sendo assim estes coeficientes dependerão apenas do ângulo de atrito interno e não mais da profundidade, portanto eles serão constantes na camada. O valor do coeficiente de empuxo em repouso deverá ser fornecido ao programa.

Para se calcular os empuxo ativo soma-se a parcela de carga correspondente ao peso próprio do solo com a sobrecarga devida ao depósito de materiais e veículos ( $10 \text{ KN/m}^2$ ) e multiplica-se o resultado desta soma pelo coeficiente de empuxo ativo. Feito isso somam-se as parcelas de carga devidas às sobrecargas de edifícios e de equipamentos na beira da vala, calculadas como mostrado no início do capítulo.

O empuxo em repouso é calculado da mesma maneira explicada no parágrafo acima com a diferença de que o coeficiente que será usado é o de repouso e que as duas últimas sobrecargas citadas (edifício e equipamentos) deverão ser multiplicadas por 2 para considerar a indeslocabilidade da parede, conforme a NC-03/80.

O empuxo passivo é calculado multiplicando-se a parcela de carga devida ao peso próprio do solo pelo coeficiente de empuxo passivo e somando-se a sobrecarga devida aos edifícios ao resultado desta multiplicação. As outras sobrecargas não entram neste cálculo.

A figura 14 mostra uma distribuição do carregamento horizontal da viga em três camadas diferentes de solo, sendo que os índices  $k$  se referem aos números dos nós, os índices  $n$  aos números dos elementos,  $F_s$  é o valor da carga no ponto superior de cada camada e  $F_i$  no ponto inferior. Nesta figura verifica-se que o carregamento horizontal que estará solicitando a viga é descontínuo nos pontos de mudança de camada, pois os valores dos coeficientes de empuxo em repouso são diferentes para cada uma.



**Fig. 14 - Distribuição do carregamento horizontal da viga**

## 2.4 - PLASTIFICAÇÃO DO SOLO

Como já foi dito no capítulo 1, para o solo (funcionando como meio elasto-plástico) admite-se a hipótese de Winkler, onde considera-se que este corresponde a uma série de molas desacopladas entre si e conectadas à parede como mostra a figura 15. A função do coeficiente de apoio elástico horizontal do solo é justamente a de definir o valor da rigidez destas molas.

Para tanto deve-se conhecer os valores deste coeficiente de apoio elástico horizontal do solo para cada camada nas suas cotas iniciais e finais. Para um ponto intermediário pertencente a uma determinada camada admite-se que este coeficiente seja obtido através de interpolação linear entre aqueles definidos para o início e o final desta. Chama-se de camada aqui não as camadas de solo, mas as de mudança deste coeficiente.

Há três casos para se considerar quando se calcula a rigidez destas molas em função do coeficiente de apoio elástico horizontal do solo. O primeiro caso quando o nó estiver no começo ou fim da parede, o segundo quando estiver num ponto de mudança de camada deste coeficiente e o terceiro quando estiver num ponto qualquer onde não ocorra mudança desta camada.

A figura 16 mostra uma distribuição do coeficiente de apoio elástico horizontal de um solo contendo duas camadas, onde a primeira está representada por  $K_{s1}$  e  $K_{i1}$ , que são os valores inicial e final destes coeficientes, e na segunda por  $K_{s2}$  e  $K_{i2}$ ;  $L_1, L_4, L_5, L_6, L_{11}$  são os comprimentos dos elementos da viga já discretizada,  $Y_5$  é a profundidade do nó 5 em relação ao início da camada e  $H_1$  é a altura total da camada.

Os valores destes coeficientes para o primeiro e último nó da viga serão  $K_{s1}$  e  $K_{i2}$  respectivamente e as rigidezes destas molas serão estes valores multiplicados pela área de influência de cada nó, ou seja:

$$K_1 = K_{s1} * \frac{L_1}{2} \quad (2.10)$$

$$K_{12} = K_{i2} * \frac{L_{11}}{2} \quad (2.11)$$

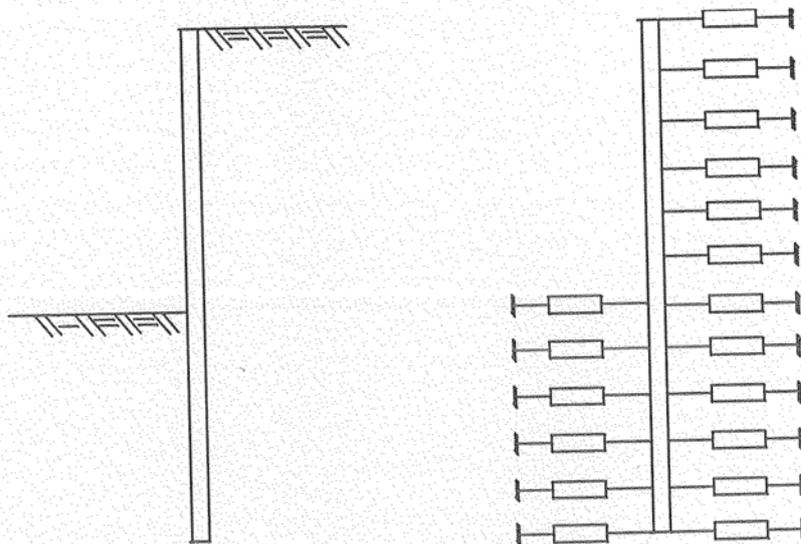


Fig. 15 - Representação esquemática do solo como apoio elasto-plástico (4)

Para o nó 5 intermediário na camada a rigidez será:

$$K_5 = \left( K_{s1} + \frac{K_{i1} - K_{s1}}{H1} * Y5 \right) * \left( \frac{L_4 + L_5}{2} \right) \quad (2.12)$$

Onde o primeiro termo da equação corresponde à interpolação linear do coeficiente de apoio elástico horizontal do solo e o segundo à área de influência do nó 5.

No nó 6 onde ocorre uma transição de camada a rigidez será:

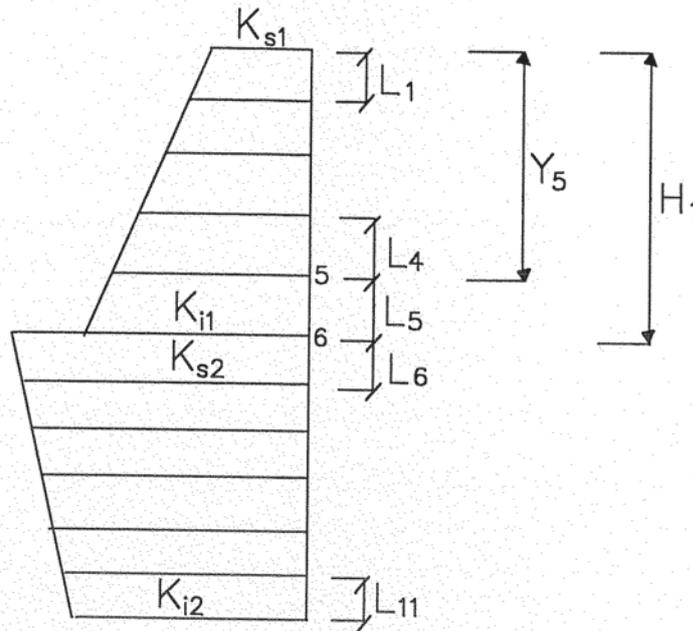
$$K_6 = \left( \frac{K_{i1} + K_{s2}}{2} \right) * \left( \frac{L_5 + L_6}{2} \right) \quad (2.13)$$

Assim calcula-se a rigidez de todas as molas que simulam os elementos de solo como apoio da viga.

A análise do comportamento destas molas no regime elasto-plástico é feita através dos empuxos passivo e ativo limite por nó, que determinam inicialmente seus limites de deslocamento. Estes deslocamentos limites são calculados subtraindo-se destes empuxos o empuxo em repouso e dividindo-se os resultados destas subtrações pela rigidez da mola como mostram as equações a seguir. Porém estes deslocamentos irão se modificar quando há um ciclo de histerese, como será mostrado posteriormente.

$$E_{al} = \frac{(E_r - E_a)}{K} \quad (2.14)$$

$$E_{pl} = \frac{(E_p - E_r)}{K} \quad (2.15)$$



**Fig. 16 - Esquema de distribuição do coeficiente de apoio elástico horizontal em 2 camadas**

A figura 17 mostra um par de molas correspondentes a um nó  $x$  qualquer, que inicialmente estão em repouso. Em relação aos diagramas de empuxos-deslocamentos mostrados nas figuras 18 e 19, que constituem os modelos reológicos de funcionamento de uma mola (20), temos uma condição de equilíbrio de forças e sendo assim o empuxo em repouso interno à vala tem o mesmo valor e sinal contrário do externo. Não existe ainda deslocamento e portanto a mola se encontra no ponto B destes diagramas.

Supondo-se agora que uma força horizontal  $P$  seja aplicada da direita para a esquerda no topo da parede através de incrementos de tal modo que se tenha:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i \quad (2.16)$$

Seja  $\Delta P_1$  o primeiro quinhão de carga a ser aplicado no topo da parede. Suponha-se então que as duas molas (à esquerda e à

direita do nó na figura 17) estão trabalhando no regime elástico. A mola à esquerda do nó está sendo comprimida e a mola à direita está sendo descomprimida e não tracionada como parece (admite-se que o solo não resiste à tração), pois o elemento de solo está normalmente comprimido. No caso deste elemento não ter uma compressão inicial não existirá esta mola e o empuxo ativo limite e consequentemente o deslocamento ativo limite serão iguais a zero.

No final deste primeiro estágio de carregamento as forças atuantes neste nó serão:

- Força à esquerda:

$$F_e = E_r + K * d_1 \quad (2.17)$$

- Força à direita:

$$F_d = (-E_r) + K * d_1 \quad (2.18)$$

Em relação aos diagramas das figuras 18 e 19 ambas as molas se encontram ainda na fase elástica e portanto dentro no trecho AB destes diagramas, onde para a mola à esquerda existe um deslocamento passivo e para a mola da direita, um deslocamento ativo.

Aplica-se agora outro incremento de carga  $\Delta P_2$ , tal que este incremento não seja suficiente para plastificar nenhuma das duas molas, mas que leve a mola da esquerda ao máximo deslocamento passivo. Sendo assim, a mola da direita continua no trecho AB do diagrama e a mola da esquerda atinge o ponto A. Qualquer acréscimo de carga neste mesmo sentido que se aplique ao carregamento já atuante na parede plastificará esta mola.

As forças atuantes no nó após este incremento de carga passam a ser então:

- Força à esquerda:

$$F_e = E_r + K * \sum_{i=1}^2 d_i \quad (2.19)$$

- Força à direita:

$$F_d = (-E_r) + K * \sum_{i=1}^2 d_i \quad (2.20)$$

O próximo incremento de carga será absorvido somente pela mola da direita, já que a mola da esquerda plastifica e não absorve mais esforço nenhum. Este carregamento leva a mola da direita ao limite de plastificação por ativação, ou seja, coloca a mola no ponto A do diagrama.

Neste estágio os esforços atuantes no nó serão:

- Força à esquerda:

$$F_e = E_r + K * \sum_{i=1}^2 d_i \quad (2.21)$$

apesar do deslocamento ser:

$$\sum_{i=1}^3 d_i \quad (2.22)$$

pois a mola à esquerda já se encontrava plastificada neste terceiro estágio, não absorvendo mais nenhum esforço.

- Força à direita:

$$F_d = (-E_r) + K * \sum_{i=1}^3 d_i \quad (2.23)$$

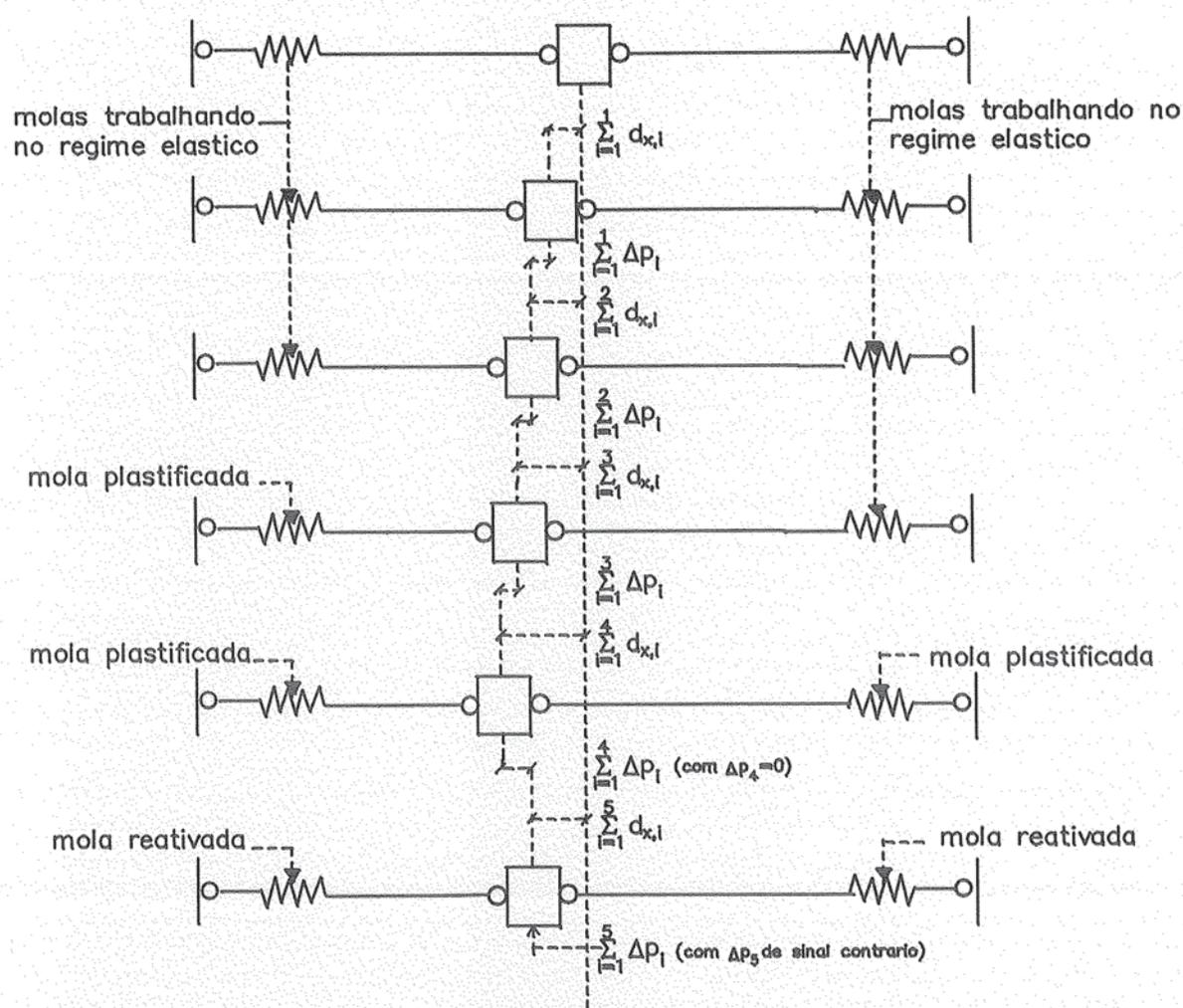


Fig. 17 - Reativação de uma mola 'x' após um ciclo de histerese (20)

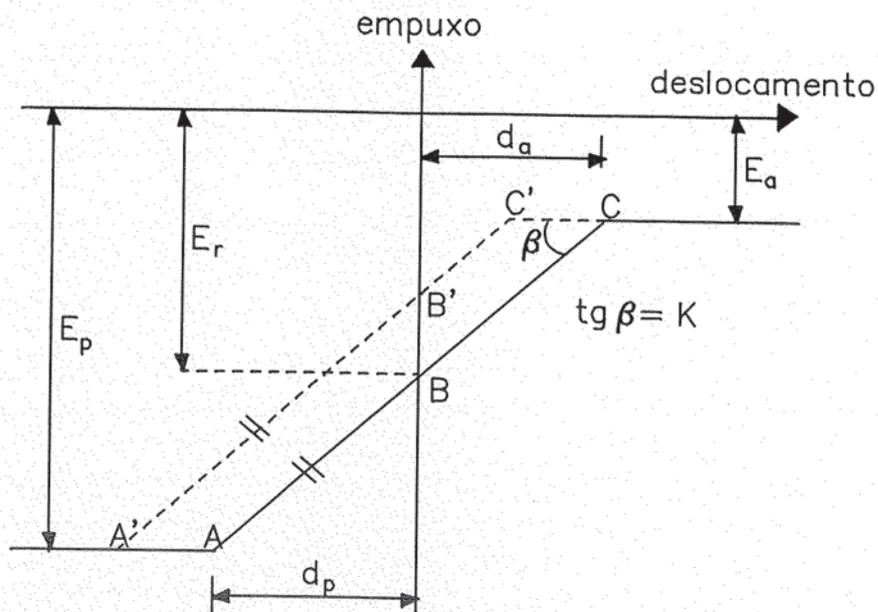


Fig. 18 - Diagrama de empuxo x deslocamento da mola localizada à esquerda do nó na figura 6 (20)

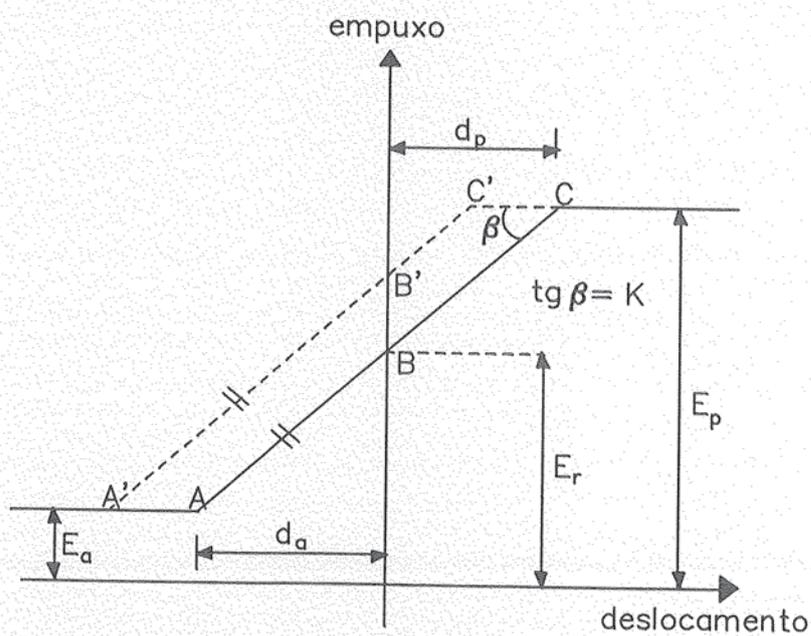


Fig. 19 - Diagrama de empuxo x deslocamento da mola localizada à direita do nó na figura 6 (20)

Se for aplicado mais um incremento de carga, as duas molas estarão plastificadas e as forças nos nós serão as mesmas da fase anterior, mas o deslocamento será:

$$\sum_{i=1}^4 d_i \quad (2.24)$$

Se agora for aplicado mais um incremento de carga no sentido contrário da força aplicada até então ocorrerá o fenômeno da histerese do solo, que nada mais é do que considerar o solo voltando a trabalhar no regime elástico segundo as retas tracejadas dos diagramas das figuras 18 e 19, ou seja, modificando-se as condições iniciais. Neste último estágio o deslocamento e as forças serão:

- Deslocamento:

$$\sum_{i=1}^5 d_i \quad (2.25)$$

- Força à esquerda:

$$F_e = E_r + K * \sum_{i=1}^5 d_i \quad (2.26)$$

- Força à direita:

$$F_d = (-E_r) + K * \sum_{i=1}^5 d_i \quad (2.27)$$

Verifica-se então que apesar dos empuxos passivo e ativo limites continuarem os mesmos, a cada novo ciclo de histerese os deslocamentos limites serão diferentes dos anteriores, ou seja, serão estabelecidos novos deslocamentos limites sem que os empuxos limites se modifiquem.

### 3 - Comportamento da estrutura de contenção

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentado como considerar para a estrutura as solicitações de carga do solo e, se houver, também as solicitações das estroncas ou tirantes, sendo analisada como uma viga em meio elásto-plástico.

Primeiramente será mostrado o comportamento de uma estronca como apoio elástico para esta viga e em seguida o mesmo para um tirante. Após isto será apresentada a montagem da matriz de rigidez do conjunto viga, apoios elásticos (tirantes e/ou estroncas) e apoio elasto-plástico (solo).

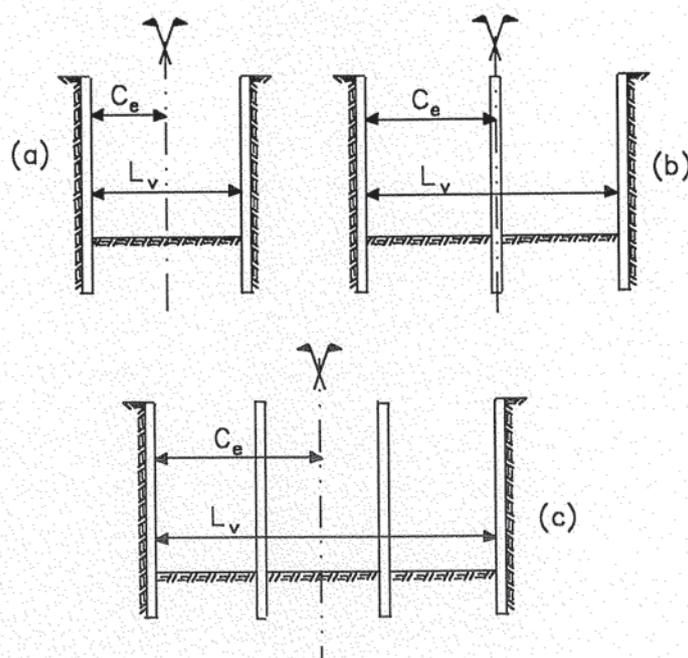
#### 3.2 - COMPORTAMENTO DE UMA ESTRONCA COMO APOIO ELÁSTICO

A vala será considerada simétrica e portanto, para efeito de cálculo da rigidez da estronca, admite-se que o comprimento desta seja a metade da largura da vala, qualquer que seja o caso a ser analisado conforme está indicado na figura 20. Nesta figura  $C_e$  é o valor do comprimento da estronca que será usado neste cálculo e  $L_v$  a largura da vala. Considera-se o comportamento da estronca como o de uma mola ligada ao nó interno à vala e cuja rigidez será (20):

$$K_e = \frac{E_s S}{C_e} \quad \text{ou} \quad K_e = \frac{2 E_s S}{L_v} \quad (3.1)$$

Onde,

- $E_s$  é o modulo de elasticidade longitudinal do aço de que é feita a estronca,
- $S$  é a área de seção transversal desta,
- $C_e$  e  $L_v$  são o comprimento da estronca e a largura da vala respectivamente.



**Fig. 20 - Comprimento de uma estronca para efeito de cálculo  
(20)**

No caso da estronca não ser pré-comprimida o diagrama de esforços-deslocamentos obedece o esquema indicado na figura 21, onde  $F$  é uma força genérica aplicada à estronca,  $F_{1c}$  é a força limite de compressão que poderá ser aplicada à estronca,  $d$  é o deslocamento genérico da mola que representa a estronca,  $d_{1c}$  o encurtamento limite da estronca e  $K_e$  a rigidez desta.

Através deste diagrama pode-se observar que se o deslocamento crescer a partir de 0 até  $d_{1c}$ , a força crescerá de 0 até  $F_{1c}$ , que é a força limite de compressão a partir da qual o dimensionamento da estronca ficará comprometido. Caso contrário, se o deslocamento decrescer a partir de 0, a estronca não funcionará.

Se a estronca for pré-comprimida o diagrama de esforços-deslocamentos ficará como indicado na figura 22, onde além das variáveis citadas no diagrama anterior existirá também a força de pré-compressão da estronca, o  $F_{pc}$ , e o alongamento limite desta, o  $d_{1t}$ .

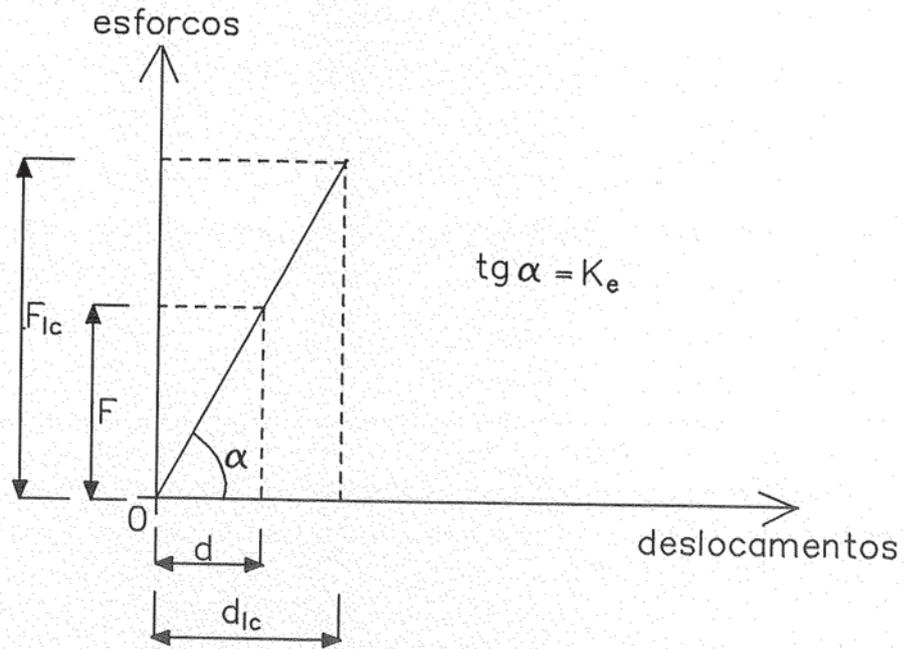


Fig. 21 - Diagrama de esforços x deslocamentos de uma estronca simples (20)

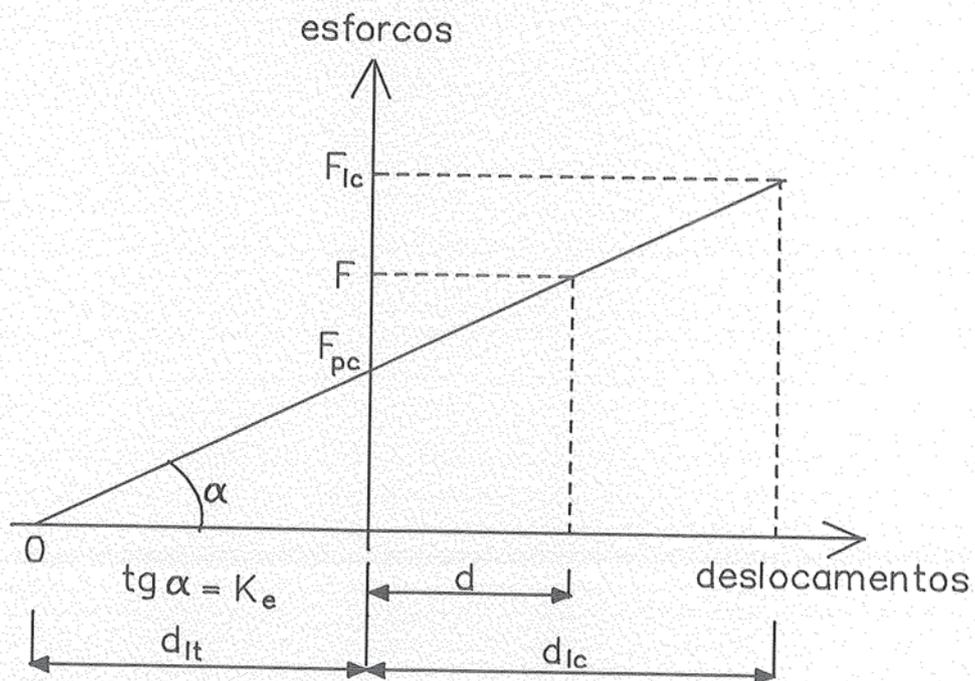


Fig. 22 - Diagrama de esforços x deslocamentos de uma estronca pré-comprimida (20)

Na figura 22, a força de pré-compressão,  $F_{pc}$ , corresponde o deslocamento convencionalizado como sendo nulo da estronca. Se a partir deste ponto o deslocamento crescer até  $d_{lc}$  a força genérica  $F$  crescerá de  $F_{pc}$  até  $F_{lc}$ , que é a força de compressão limite a partir da qual o dimensionamento da estronca ficará comprometido. Caso contrário, se o deslocamento decrescer até 0, a força  $F$  decrescerá de  $F_{pc}$  a zero, que é o limite de alongamento abaixo do qual a estronca não funciona.

Sendo assim, em qualquer um dos dois casos, o valor de  $K_e$  será adicionado ou não à matriz de rigidez da viga conforme a estronca esteja ou não funcionando.

### 3.3 - COMPORTAMENTO DE UM TIRANTE COMO APOIO ELÁSTICO

Admite-se que o tirante é uma mola acoplada ao nó onde foi instalado e que o bulbo deste esteja colocado numa linha horizontal em relação a este nó, conforme mostra a figura 23 (20).

Nesta figura  $C_t$  é o comprimento do tirante usado no cálculo de sua rigidez que será calculada através da seguinte equação:

$$K_t = \frac{E_s S}{C_t} \quad (3.2)$$

Onde,

- $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço de que é feito o tirante,
- $S$  é a somatória das seções transversais dos cabos que compõem o tirante.

O diagrama de esforços-deslocamentos de um tirante será o mostrado na figura 24, onde  $F_{pt}$  é a força de protensão deste,  $d_{lt}$  é o alongamento limite,  $d$  é um deslocamento genérico,  $d_{lc}$  é o encurtamento limite,  $F$  é uma força genérica e  $F_{lt}$  é a força limite de tração.

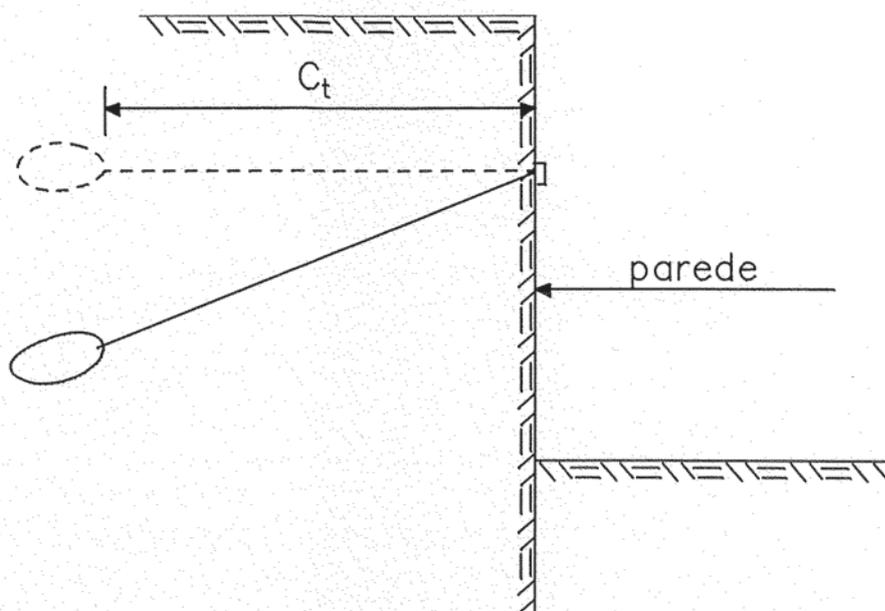


Fig. 23 - Comprimento de um tirante para o cálculo de sua rigidez (20)

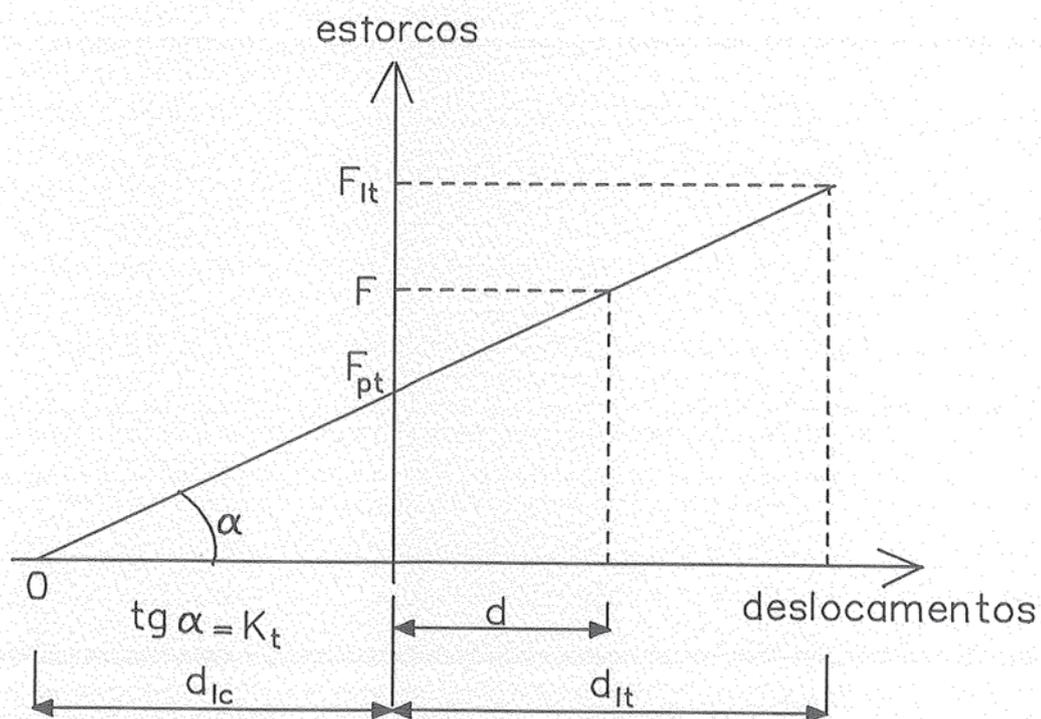


Fig. 24 - Diagrama de esforços x deslocamentos de um tirante (20)

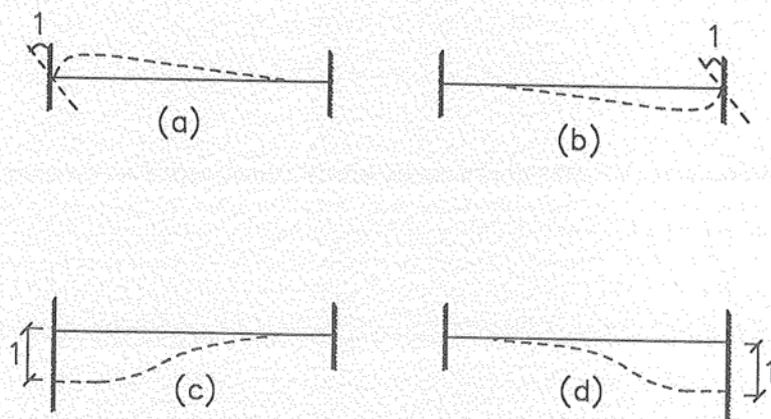
De acordo com a figura 24 pode-se observar que à força de protensão do tirante corresponde o deslocamento convencional como sendo zero deste. Se a partir deste ponto o deslocamento crescer de zero até  $d_{lt}$ , a força genérica  $F$  crescerá de  $F_{pt}$  até  $F_{lt}$ , limite a partir do qual o dimensionamento do tirante ficará comprometido. Se ao contrário, o deslocamento decrescer até  $d_{lc}$ , a força decrescerá de  $F_{pt}$  até 0, a partir do qual o tirante não funciona mais.

Assim como a estronca, o valor da rigidez do tirante ( $K_t$ ) será ou não adicionado à matriz de rigidez da viga dependendo se o tirante estiver ou não trabalhando.

### 3.4 - MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA VIGA

Será necessário conhecer o comprimento e o produto de rigidez ( $EI$ ) para cada elemento da viga e também os valores de  $G$ ,  $S$  e  $\Psi$ , que são o módulo de elasticidade transversal, a área de seção transversal e o coeficiente de forma da viga, se se desejar incluir as deformações por esforço cortante. Além disso, conhecendo-se também o coeficiente de mola devido ao solo e às estroncas e/ou tirantes, se houver, para cada nó, torna-se possível a montagem da matriz de rigidez.

Será usado o processo dos deslocamentos e para tanto as soluções dos seguintes problemas deverão ser conhecidos:



Onde (a) e (b) são as rotações unitárias a esquerda e a direita do elemento e (c) e (d) são os deslocamentos unitários. As soluções para estes problemas, assim como os coeficientes de forma das seções, se encontram em tabelas na referência (20), onde se leva em conta inclusive as deformações por esforço cortante. Com estes dados monta-se a matriz de rigidez de um elemento genérico:

$$\begin{bmatrix} \frac{4 EI}{L} & \frac{-6 EI}{L^2} & \frac{2 EI}{L} & \frac{6 EI}{L^2} \\ \frac{-6 EI}{L^2} & \frac{12 EI}{L^3} & \frac{-6 EI}{L^2} & \frac{-12 EI}{L^3} \\ \frac{2 EI}{L} & \frac{-6 EI}{L^2} & \frac{4 EI}{L} & \frac{6 EI}{L^2} \\ \frac{6 EI}{L^2} & \frac{-12 EI}{L^3} & \frac{6 EI}{L^2} & \frac{12 EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

Esta matriz considera apenas as deformações por flexão, não levando em conta as deformações por cortante. Para se considerar estas deformações todos os elementos da matriz acima se modificarão, pois todos os deslocamentos unitários (giros e deslocamentos transversais) das extremidades de um elemento restringido produzem cortante. A matriz modificada ficará então como mostrado a seguir:

$$\begin{bmatrix} \frac{4 EI U}{L} & \frac{-6 EI Z}{L^2} & \frac{2 EI U}{L} & \frac{6 EI Z}{L^2} \\ \frac{-6 EI Z}{L^2} & \frac{12 EI Z}{L^3} & \frac{-6 EI Z}{L^2} & \frac{-12 EI Z}{L^3} \\ \frac{2 EI U}{L} & \frac{-6 EI Z}{L^2} & \frac{4 EI U}{L} & \frac{6 EI Z}{L^2} \\ \frac{6 EI Z}{L^2} & \frac{-12 EI Z}{L^3} & \frac{6 EI Z}{L^2} & \frac{12 EI Z}{L^3} \end{bmatrix}$$

Onde U e Z são coeficientes adimensionais auxiliares utilizados para calcular a matriz de rigidez e são obtidos a partir das seguintes equações:

$$Z = \frac{1}{1 + \frac{12}{\alpha L^2}} \quad (3.3)$$

$$U = \frac{\alpha L^2 + 3}{\alpha L^2 + 12} \quad (3.4)$$

$$\alpha = \frac{G S}{EI \psi} \quad (3.5)$$

Onde,

- L é o comprimento do elemento,
- EI o modulo de elasticidade e o momento de inércia respectivamente,
- S a área de seção transversal,
- G o modulo de elasticidade transversal do material,
- $\psi$  é um fator de forma que depende da forma da seção transversal.

A partir da matriz de rigidez de cada elemento monta-se a matriz de rigidez da viga, que terá uma largura de semi-banda igual a quatro, ou seja, terá apenas quatro colunas, e um número de linhas igual a duas vezes o número de nós. A seguir estão indicadas as linhas desta matriz referentes ao primeiro nó, a um nó genérico e ao último nó da viga.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{bmatrix} \frac{4 E_1 I_1 U_1}{L_1} & \frac{6 E_1 I_1 Z_1}{L_1^2} & \frac{2 E_1 I_1 U_1}{L_1} & \frac{6 E_1 I_1 Z_1}{L_1^2} \\ \frac{12 E_1 I_1 Z_1}{L_1^3} & -\frac{6 E_1 I_1 Z_1}{L_1^2} & -\frac{12 E_1 I_1 Z_1}{L_1^3} & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{(b)} \quad & \begin{bmatrix} 4 \left( \frac{E_n I_n U_n}{L_n} + \frac{E_{n+1} I_{n+1} U_{n+1}}{L_{n+1}} \right) & 6 \left( \frac{E_n I_n Z_n}{L_n^2} - \frac{E_{n+1} I_{n+1} Z_{n+1}}{L_{n+1}^2} \right) & \frac{2 E_{n+1} I_{n+1} U_{n+1}}{L_{n+1}} & \frac{6 E_{n+1} I_{n+1} Z_{n+1}}{L_{n+1}^2} \\ 12 \left( \frac{E_n I_n Z_n}{L_n^3} + \frac{E_{n+1} I_{n+1} Z_{n+1}}{L_{n+1}^3} \right) & -6 \frac{E_{n+1} I_{n+1} Z_{n+1}}{L_{n+1}^2} & -12 \frac{E_{n+1} I_{n+1} Z_{n+1}}{L_{n+1}^3} & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{(c)} \quad & \begin{bmatrix} \frac{2 E_x I_x U_x}{L_x} & -\frac{6 E_x I_x Z_x}{L_x^2} & \frac{4 E_x I_x U_x}{L_x} & \frac{6 E_x I_x Z_x}{L_x^2} \\ -\frac{12 E_x I_x Z_x}{L_x^3} & \frac{6 E_x I_x Z_x}{L_x^2} & \frac{12 E_x I_x Z_x}{L_x^3} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Das matrizes da página anterior, a matriz (a) se refere às duas primeiras linhas da matriz de rigidez da viga ou ao nó inicial desta, a (c) se refere às duas últimas linhas ou ao nó final e a (b) aos nós restantes. Deve-se tomar o cuidado de igualar Z e U a 1 caso não se deseje considerar as deformações por cortante.

Montada esta matriz falta apenas somar aos elementos da diagonal principal que se referem aos deslocamentos transversais os coeficientes de rigidez de mola de cada nó, ou seja, na matriz (a) soma-se o coeficiente da mola 1 no elemento da segunda linha e primeira coluna, na matriz (b) soma-se o coeficiente da mola n também na segunda linha e primeira coluna e na (c) faz-se o mesmo para o coeficiente da mola x.

### 3.5 - MONTAGEM DO VETOR DE FORÇAS NODAIS

Tendo-se o vetor de cargas nos elementos conforme mostra a figura 9 do capítulo anterior, calcula-se o vetor de cargas nodais através das seguintes equações:

$$F_{n(2k)} = \frac{(3 F_{s(n-1)} + 7 F_{i(n-1)}) L_{(n-1)}}{20} + \frac{(7 F_{s(n)} + 3 F_{i(n)}) L_{(n)}}{20} \quad (3.6)$$

$$F_{n(2k-1)} = \frac{(2 F_{s(n-1)} + 3 F_{i(n-1)}) L_{(n-1)}^2}{60} + \frac{(3 F_{s(n)} + 2 F_{i(n)}) L_{(n)}^2}{60} \quad (3.7)$$

Onde,

- K é o índice que se refere ao nó,
- n é o índice que se refere ao elemento,

- $F_{n(2k)}$  é o força nodal correspondente à translação do nó  $k$ ,
- $F_{n(2k-1)}$  é o força correspondente à rotação,
- $(2k)$  e  $(2k-1)$  são os índices do vetor

Para se calcular estas forças para os nós iniciais e finais da viga estas equações se reduzirão para:

Para o nó inicial:

$$F_{n(2)} = \frac{(3 F_{i(1)} + 7 F_{s(1)}) L_{(1)}}{20} \quad (3.8)$$

$$F_{n(1)} = \frac{(2 F_{i(1)} + 3 F_{s(1)}) L_{(1)}}{60} \quad (3.9)$$

Para o nó final:

$$F_{n(2x)} = \frac{(7 F_{i(x-1)} + 3 F_{s(x-1)}) L_{(x-1)}}{20} \quad (3.10)$$

$$F_{n(2x-1)} = \frac{(3 F_{i(x-1)} + 2 F_{s(x-1)}) L_{(x-1)}}{60} \quad (3.11)$$

Onde,

- $x$  é o nó final da viga,
- $(x-1)$  é o último elemento desta

## 4 - Procedimentos de cálculo das rotinas

### 4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo encontram-se explicações sobre o programa principal e as 14 subrotinas que compõem o programa. Em primeiro lugar será explicada a entrada de dados e posteriormente os processos de cálculo utilizados.

### 4.2 - ENTRADA DE DADOS

São dados de entrada do programa:

a - número de camadas de solo, número de cotas de instalação de tirantes, número de cotas de instalação de estroncas, número de fases de escavação, número de produtos de rigidez (EI) da parede, número de lençóis freáticos, número de fases de reaterro, número de camadas com coeficiente de apoio elástico horizontal do solo diferentes, número de rebaixamentos do nível do lençol freático, número de cotas de instalação das cunhas de transferência.

b - cotas de mudança de camada (incluindo a inicial da primeira camada e final da última).

c - peso específico natural ou saturado (no caso da camada estar submersa), coesão do solo, ângulo de atrito interno, coeficiente de empuxo ativo, coeficiente de empuxo passivo, coeficiente de empuxo em repouso.

d - valor do coeficiente de apoio elástico horizontal superior, valor do coeficiente de apoio elástico horizontal inferior.

e - cotas de mudança do coeficiente citado no item anterior (incluindo a inicial e a final).

f - cotas de rebaixamento do nível do lençol freático.

g - cotas das fases de reaterro, coeficiente de apoio elástico horizontal inicial, coeficiente de apoio elástico horizontal final, peso específico, coeficientes de empuxo em repouso, ativo e passivo, coesão, ângulo de atrito interno.

h - cota inicial do nível do lençol freático, cota final deste nível.

i - cotas de instalação de tirantes, módulo de elasticidade transversal, área de seção transversal, comprimento, esforço de protensão.

j - cotas de instalação de estroncas, módulo de elasticidade transversal, área de seção transversal, comprimento, esforço de pré-compressão.

k - cotas das fases de escavação.

l - cotas dos produtos de rigidez (incluindo a inicial e final da parede).

m - número de cotas de fundações de edifícios, comprimento máximo do elemento para a discretização da viga.

n - cotas de apoio das fundações de edifícios, distância da parede ao início do carregamento destas fundações, comprimentos destes carregamentos, valores dos carregamentos.

o - valor da sobrecarga de equipamentos na beira da vala, valor da sobrecarga de depósitos de materiais e tráfego de veículos.

p - cotas das cunhas de transferência das lajes da estrutura permanente, valor do respectivo coeficiente de mola.

q - módulo de elasticidade da viga, momento de inércia, área de seção transversal, módulo de elasticidade transversal, coeficiente de forma da seção para cada seção diferente.

Os dados devem ser fornecidos na mesma ordem dos ítems que foram citados e separados por vírgulas. Os ítems que citam cotas de camadas devem ter cada cota separadas em linhas diferentes.

Os ítems f,g,h,i,j,n e p são optativos, não precisam ser fornecidos ao programa. Se não existem tirantes, por exemplo, é só entrar com zero no número de cotas de instalação de tirantes do ítem a e não fornecer o ítem i e assim por diante. Os outros ítems são obrigatórios. No caso do ítem o se não houver alguma das sobrecargas basta fornecer o valor desta sobrecarga igual a zero. Será dado a seguir um exemplo de como montar este arquivo.

#### 4.3 - PROGRAMA PRINCIPAL

Após pedir o nome do arquivo de dados da parede e fazer a leitura destes dados o programa calcula o vetor formado pelos produtos de rigidez da viga (normalmente existe apenas um produto de rigidez), que nada mais é que o produto do módulo de elasticidade pelo momento de inércia.

Feito isso vem o cálculo do vetor de intervalos que é formado pela união de todos os outros vetores de cotas (menos as de sobrecarga de fundação) através da subrotina CONCAT. As cotas neste vetor não estão em ordem e para isso é montado um outro vetor através da subrotina ORDEM que as coloca em ordem decrescente.

Tendo-se este vetor com as cotas já ordenadas calcula-se o vetor dos comprimentos de cada intervalo entre duas cotas consecutivas. Após este cálculo vem a divisão de cada intervalo em elementos com um comprimento máximo dado pelo usuário através da subrotina SUBREN. Tendo-se este novo vetor de intervalos da viga calculam-se as cotas dos novos nós gerados pela divisão citada acima.

Com a viga já discretizada calculam-se os coeficientes de mola de cada nó. Para isso é feita uma comparação entre o vetor com as cotas dos nós da viga e o vetor que possui as cotas de mudança

do coeficiente de apoio elástico horizontal do solo, para se verificar se o nó se encontra no começo ou fim da parede ou ainda no ponto de mudança deste coeficiente. Através das equações (2.10), (2.11), (2.12) e (2.13) do capítulo 2 são calculados os coeficientes de rigidez de mola de cada nó. Não se deve esquecer que inicialmente estes coeficientes são iguais tanto para a mola externa à vala quanto para a interna.

Em seguida inicia-se o cálculo das pressões verticais e horizontais. Para isso serão chamadas as subrotinas PRSEHOR e PRSINHOR que calcularão os vetores de forças horizontais externos e internos à vala.

Se o programa estiver na fase inicial será chamada a subrotina NUNFASES que irá zerar os coeficientes de mola internos da faixa que será escavada.

Caso contrário, se a primeira fase de escavação já foi calculada será chamada primeiramente a subrotina ESFORES que verificará se existe algum tirante ou estronca a ser colocado na parte já escavada e, se houver, somará ao coeficiente de mola interno do respectivo nó o coeficiente de mola do tirante ou estronca e também montará um vetor contendo a força de protensão (tirante) ou pré-compressão (estronca) que será somado ao de forças nodais.

Se o programa estiver na fase de reaterro será chamada a subrotina CALCMOR que irá calcular os coeficientes de mola dos nós internos à vala para a faixa que será reaterrada.

Terminada esta etapa será calculado o vetor de forças nodais do carregamento efetivo da viga através da subrotina CALBLOQ e o vetor de forças nodais para os empuxos ativo e passivo através da subrotina CACBLOQ. É feita depois uma soma dos vetores de forças nodais internas, externas e do vetor de forças proveniente de estroncas e/ou tirantes.

Depois disto é montada a matriz de rigidez da viga através da subrotina MATRIGI e o sistema linear é resolvido através da subrotina RESISLI. Tendo-se então o vetor de deslocamentos da viga inicia-se o cálculo da plastificação do solo através da subrotina CONTENDE.

Após esta subrotina ser chamada é feita uma verificação para se saber se a plastificação desta fase terminou ou não. Se estiver terminada será chamada a subrotina RESULTO que arquivará os resultados desta fase e se esta não for a última o programa voltará à subrotina NUNFASES e iniciará o cálculo de uma nova fase. Se não estiver terminada haverá um desvio para o ponto onde se monta a matriz de rigidez e o sistema linear será resolvido novamente com um novo vetor de forças nodais correspondente à plastificação das molas.

Os resultados de cada fase estarão guardados em arquivos que terão os seguintes nomes; RESP1, RESP2, RESP3, etc. O último arquivo conterá os deslocamentos máximos e mínimos de cada nó e a fase em que estes deslocamentos aconteceram.

#### **4.4 - SUBROTINA CONCAT**

Esta subrotina apenas une a um vetor todos os outros vetores de cotas como explicado anteriormente. Para isso ela é chamada várias vezes, uma para cada vetor, guardando o último índice do vetor união onde se acrescentou um dos vetores citados e guardando o próximo vetor abaixo deste.

#### **4.5 - SUBROTINA ORDEM**

Esta subrotina ordena o vetor contendo todas as cotas em ordem decrescente. Isto é feito guardando-se o valor da primeira cota deste vetor em uma variável auxiliar e comparando-se esta variável com todas as outras cotas. Se uma destas cotas for maior que o valor desta variável ela será substituída e a comparação

continuará. Será guardado não só o valor da maior cota como também seu índice no vetor original.

O "looping" que compara estas cotas vai sendo decrementado de 1 a cada passo para que não se compare esta cota outra vez. Feito isso o vetor de cotas é redimensionado extraíndo-se dele a maior cota encontrada e colocando-a em um outro vetor como mostrado a seguir:

$$[5,2 ; -6,4 ; 10,3 ; 1,9 ; -2,7]$$

Neste vetor o maior valor é o 10,3, que é o terceiro elemento. Ele será retirado deste vetor e o terceiro elemento passará a ser o 1,9 como mostrado a seguir:

$$[5,2 ; -6,4 ; 1,9 ; -2,7]$$

O vetor que conterà as cotas ordenadas ficará, neste primeiro "looping", da seguinte maneira:

$$[10,3 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0]$$

Fazendo-se isso obtém-se o vetor já ordenado, mas ainda resta verificar se existem cotas iguais. Para isso faz-se uma comparação entre as cotas consecutivas e se elas forem iguais a segunda delas será retirada do vetor e este será reorganizado.

#### 4.6 - SUBROTINA SUBREN

Nesta subrotina cada intervalo do vetor de cotas calculado na subrotina anterior será subdividido em elementos. Para se fazer esta subdivisão divide-se cada intervalo pelo comprimento máximo do elemento (dado de entrada). Se o resultado for um número inteiro este será o número de elementos do intervalo, se não o

próximo número inteiro acima deste que foi calculado será o número de elementos e o comprimento de cada um será o resultado da divisão do intervalo por este número.

A cada intervalo subdividido, o valor destes novos elementos são guardados em um outro vetor como mostra o exemplo a seguir:

$$[3 ; 4,3 ; 2,7]$$

Se este for o vetor de intervalos original e o comprimento máximo para o elemento for 1, o vetor final será o seguinte:

$$[1 ; 1 ; 1 ; 0,86 ; 0,86 ; 0,86 ;$$

$$; 0,86 ; 0,86 ; 0,9 ; 0,9 ; 0,9]$$

Onde 0,86 é o resultado de 4,3 dividido por 5 e 0,9 de 2,7 dividido por 3.

#### 4.7 - SUBROTINAS PRSEXHOR E PRSINHOR

Estas subrotinas calculam a pressão vertical do solo e depois os carregamentos horizontais da viga correspondentes à parte externa e interna da vala respectivamente.

Em primeiro lugar é calculada, para cada nó, a pressão devida ao peso próprio do solo. É feita uma comparação entre cotas para se verificar qual a camada de solo e seu respectivo peso específico e em seguida é feita uma outra comparação para verificar se a camada está submersa; se estiver é retirado do peso específico saturado do solo o peso específico da água. Feito isso, a pressão na altura do nó é calculada efetuando-se o produto deste peso específico pelo comprimento do elemento e somando-se à pressão do nó anterior.

A subrotina PRSINHOR, que monta o carregamento interno à vala, começa então o cálculo dos empuxos limites da viga, enquanto a PRSEXHOR, que monta o carregamento externo, continua com o cálculo do carregamento devido às sobrecargas.

Para isto é feita uma comparação entre as cotas de aplicação destas sobrecargas e as dos nós da viga e, a partir da primeira cota de um nó localizado logo abaixo da cota de aplicação da sobrecarga, calcula-se o carregamento devido a estas sobrecargas através das equações (2.1) e (2.2) do capítulo 2. Os valores dos empuxos ativo, passivo e em repouso em cada nó são então calculados da maneira explicada no item 2.3 do capítulo 2.

Para o carregamento externo à vala é feito ainda um cálculo para se considerar o carregamento devido à água. É feita então uma outra comparação entre as cotas de início e fim do lençol e a de escavação da fase onde se encontra o programa. Com isso é possível montar este vetor de cargas já considerando a diferença deste carregamento entre a parte interna e externa da vala.

Para a subrotina que monta o carregamento interno ainda são consideradas as fases de reaterro. Neste caso ela monta o novo vetor de cargas interno devido ao acréscimo causado por este reaterro.

#### 4.8 - SUBROTINA NUNFASES

Como citado anteriormente esta subrotina zera os coeficientes de mola até a última cota escavada. Para isso é verificado o índice da cota do vetor de nós da viga que corresponde à cota de escavação (no caso de se estar nesta fase) e então são zeradas as molas de índice 1 até o anterior a este que corresponde à cota de escavação. A mola do nó desta cota (escavação) terá seu valor recalculado, pois a área de influência do elemento que antecede este nó já não existe mais. Esta subrotina verifica também o índice que corresponde à cota de reaterro que será usado em outras subrotinas.

#### 4.9 - SUBROTINA ESFORES

Através de uma comparação entre as cotas de instalação de estroncas e tirantes com as dos nós, esta subrotina cria um vetor que contém os esforços que estes apoios exercem na estrutura. Este vetor será posteriormente somado ao de forças nodais.

Além de criar este vetor, esta subrotina também calcula os coeficientes de mola correspondentes à estes tirantes ou estroncas e os coloca em um vetor que será somado ao de coeficientes de mola global do nó, que é a soma dos coeficientes de rigidez das molas externa, interna e de um possível tirante (ou estronca).

Isto acontece nas fases de escavação, para as de reaterro o processo é o contrário, ou seja, a subrotina zera estes esforços e coeficientes de mola conforme estas estroncas forem sendo retiradas da estrutura.

#### 4.10 - SUBROTINA CALCMOR

Esta subrotina calcula os coeficientes de mola do solo nas fases de reaterro. Isto é feito comparando-se, em cada fase de reaterro, a cota até onde a parte interna foi reaterrada com as dos nós e calcula-se então os coeficientes relativos a estes nós.

Além disso, a mola correspondente à última cota de escavação que foi reduzida na subrotina NUNFASES é de novo recalculada pois o elemento de solo acima deste nó passa a existir novamente.

#### 4.11 - SUBROTINAS CACBLOQ E CALBLOQ

Estas subrotinas são chamadas duas vezes cada uma, isso por que é preciso calcular o vetor de cargas nodais para o carregamento externo e para o interno separadamente.

A subrotina CACBLOQ calcula apenas os vetores de cargas nodais referentes aos carregamentos limites de plastificação do solo (ativo e passivo). Já a CALBLOQ calcula os esforços que estão solicitando esta viga. A diferença é que na primeira subrotina não é necessário calcular o esforço devido à rotação no nó, isto por que não existe mola nesta direção, e na segunda estes esforços são calculados.

As duas funcionam da mesma maneira, ou seja, tendo-se o valor do carregamento distribuído em cada nó verifica-se se a cota do nó coincide com a de mudança de camada, pois estes nós possuem dois valores diferentes de carga, um para o elemento acima e outro para o que está abaixo. Isto acontece por que os valores dos coeficientes de empuxo em repouso são diferentes para cada camada.

Já com os valores destas cargas, através das equações (3.6) e (3.7) do capítulo 3, são calculados as forças nodais para os nós intermediários da viga. Para o nó inicial são usadas as equações (3.8) e (3.9) e para o final (3.10) e (3.11).

#### **4.12 - SUBROTINA MATRIGI E RESISLI**

A subrotina MATRIGI monta a matriz de rigidez da viga já em formato retangular. Para levar em conta a mudança do produto de rigidez é feita uma comparação entre as cotas dos nós e as de mudança deste produto e assim, se houver mudança neste produto, será utilizado o valor correspondente para cada elemento.

Montada esta matriz e o vetor de forças nodais o sistema será resolvido pela subrotina RESISLI através do Método de Eliminação de Gauss.

#### **4.13 - SUBROTINA CONTENDE E RESULTO**

A subrotina CONTENDE faz a verificação das molas para saber quais estão plastificadas ou ainda na fase elástica e ainda se alguma

mola plastificada em uma fase anterior voltou a trabalhar na fase elástica através de um ciclo de histerese.

O processo utilizado para a plastificação das molas é o do Método de Newton-Raphson "modificado" (24) que permite a utilização de um mesmo sistema de equações em todas as iterações de uma fase. Este procedimento é mais econômico do ponto de vista de memória computacional, porém tem uma convergência mais lenta.

Para este cálculo, inicialmente (primeira fase) os deslocamentos da viga são comparados aos deslocamentos limites ativo e passivo e as molas cujos deslocamentos ultrapassarem estes limites estarão plastificadas.

A diferença entre estes deslocamentos será multiplicada pelos respectivos coeficientes de rigidez de mola, obtendo-se as forças nodais de cada mola plastificada que serão armazenadas em dois vetores. O primeiro vetor se refere às molas que plastificaram por ativação e o segundo às molas que plastificaram por apassivação.

Na iteração seguinte os forças nodais correspondentes às molas que já estavam plastificadas são subtraídas destes vetores, obtendo-se apenas os valores de forças nodais correspondentes ao deslocamento de cada mola nesta iteração.

No caso de um ciclo de histerese estes valores passam a ser os novos limites de plastificação.

Para as molas plastificadas são ainda guardados em um vetor informações sobre se estas molas estão plastificadas por ativação ou apassivação e se são molas externas ou internas à vala. Isto é feito para uma posterior correção nos forças que estarão solicitando a viga e para que as molas plastificadas por ativação sejam zeradas na fase seguinte.

A cada iteração as normas do vetor deslocamentos total da iteração anterior e do vetor deslocamentos desta são calculadas e comparadas. Quando a diferença entre elas for menor que 0,1% as iterações param e será chamada a subrotina RESULTO para o armazenamento dos resultados desta fase.

Para cada fase é aberto automaticamente um novo arquivo para o armazenamento dos resultados com nomes pré estabelecidos. Estes arquivos irão conter dados sobre deslocamentos, momentos fletores e esforços cortantes para cada nó da viga.

Será ainda armazenado em um último arquivo, após o término de todas as fases, os deslocamentos máximos e mínimos de cada nó e a fase correspondente em que eles aconteceram, assim como os esforços normais que estarão solicitando as estroncas em cada fase.

## 5 - Análise dos resultados e conclusão

### 5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados três exemplos numéricos com diferentes enfoques sobre o programa proposto neste trabalho. No primeiro exemplo o objetivo é exemplificar a sequência de cálculo mostrando as hipóteses assumidas para a elaboração do programa.

O segundo exemplo fornece uma comparação de alguns resultados quando algumas destas hipóteses são modificadas e o terceiro faz uma comparação com os resultados fornecidos por outros processos de cálculo utilizados.

### 5.2 - EXEMPLO 1

Será apresentado um exemplo numérico que mostrará a sequência de cálculo utilizada no programa. Nesta sequência estarão representados, entre outros cálculos, o de desenvolvimento do diagrama de carregamento devido às deformações do solo em consequência do deslocamento da parede e o de plastificação das molas. Os dados deste exemplo são mostrados na figura 25.

Esta figura mostra uma parede de contenção com apenas uma camada de solo, dois níveis de escoramento representados pelas estroncas e as cotas de início e fim desta. Esta parede foi calculada com três fases de escavação, sendo que a primeira vai até a cota 3m, a segunda até a cota 6m e a terceira até a cota 9m. A primeira estronca foi colocada antes do início da segunda fase de escavação e a segunda antes da terceira fase nas cotas 2m e 5m respectivamente. A discretização da parede foi feita a cada metro e a única sobrecarga existente é devida a depósitos de materiais na beira da vala.

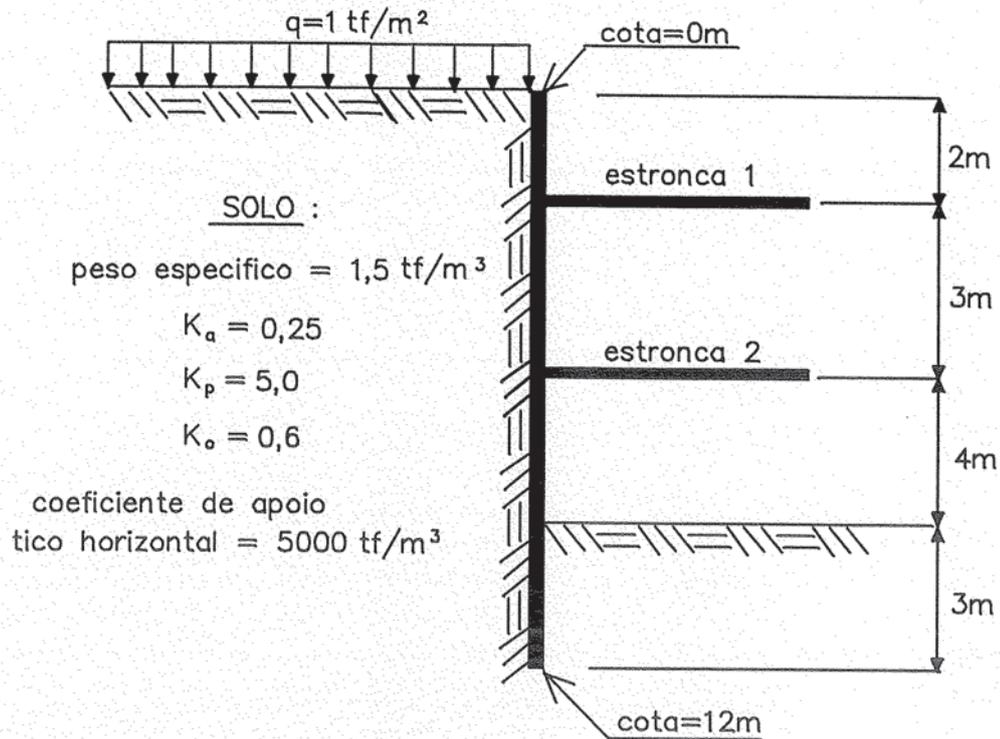


Fig. 25 - Esquema da parede de contenção do exemplo1

As tabelas a seguir mostram os resultados parciais e finais de empuxos e deslocamentos de cada fase. Observar que a tabela 1 se refere ao carregamento distribuído da viga e as outras ao carregamento nodal.

#### - FASE 1

Os empuxos na tabela 1 são os valores em cada nó do carregamento distribuído da viga, calculados conforme indicado no capítulo 2. Calculando-se os forças nodais correspondentes a este carregamento e montando a matriz de rigidez da viga calcula-se a elástica da primeira fase. Calculam-se também as forças nodais correspondentes aos carregamentos limites ativo e passivo e dividem-se estes valores pelos respectivos coeficientes de mola obtendo-se os deslocamentos limites mostrados na tabela 2.

Tabela 1 - Dados de empuxos e coeficientes de mola (tf/m)

nó	Empuxo repouso externo (Ere)	Empuxo repouso interno (Eri)	Empuxo efetivo inicial (Ere+ +Eri)	Coef.de mola externo do solo (Kme)	Coef.de mola interno do solo (Kmi)
1	0,6	0	0,6	2500	0
2	1,5	0	1,5	5000	0
3	2,4	0	2,4	5000	0
4	3,3	0	3,3	5000	2500
5	4,2	-3,6	0,6	5000	5000
6	5,1	-4,5	0,6	5000	5000
7	6,0	-5,4	0,6	5000	5000
8	6,9	-6,3	0,6	5000	5000
9	7,8	-7,2	0,6	5000	5000
10	8,7	-8,1	0,6	5000	5000
11	9,6	-9,0	0,6	5000	5000
12	10,5	-9,9	0,6	5000	5000
13	11,4	-10,8	0,6	2500	2500

Tabela 2 - Deslocamentos iniciais e limites de plastificação

nó	Deslocamento elástico inicial (m)	Deslocamento limite ativo externo (m)	Deslocamento limite passivo interno (m)
1	$0,3363 \cdot 10^{-03}$	$0,1015 \cdot 10^{-03}$	0
2	$0,2991 \cdot 10^{-03}$	$0,1750 \cdot 10^{-03}$	0
3	$0,2607 \cdot 10^{-03}$	$0,2800 \cdot 10^{-03}$	0
4	$0,2203 \cdot 10^{-03}$	$0,3850 \cdot 10^{-03}$	$0,1584 \cdot 10^{-02}$
5	$0,1798 \cdot 10^{-03}$	$0,4900 \cdot 10^{-03}$	$0,4686 \cdot 10^{-02}$
6	$0,1427 \cdot 10^{-03}$	$0,5950 \cdot 10^{-03}$	$0,6600 \cdot 10^{-02}$
7	$0,1116 \cdot 10^{-03}$	$0,7000 \cdot 10^{-03}$	$0,7920 \cdot 10^{-02}$
8	$0,8700 \cdot 10^{-04}$	$0,8050 \cdot 10^{-03}$	$0,9240 \cdot 10^{-02}$
9	$0,6830 \cdot 10^{-04}$	$0,9100 \cdot 10^{-03}$	$0,1056 \cdot 10^{-01}$
10	$0,5410 \cdot 10^{-04}$	$0,1015 \cdot 10^{-02}$	$0,1188 \cdot 10^{-01}$
11	$0,4270 \cdot 10^{-04}$	$0,1120 \cdot 10^{-02}$	$0,1320 \cdot 10^{-01}$
12	$0,3290 \cdot 10^{-04}$	$0,1225 \cdot 10^{-02}$	$0,1452 \cdot 10^{-01}$
13	$0,2350 \cdot 10^{-04}$	$0,1299 \cdot 10^{-02}$	$0,1544 \cdot 10^{-01}$

Verifica-se então que apenas as duas primeiras molas externas à vala estão plastificadas, pois os seus deslocamentos foram maiores que os deslocamentos limites ativos. Fazendo-se então a subtração entre estes dois deslocamentos e multiplicando-se os resultados pelos correspondentes coeficientes de mola obtém-se o novo vetor de cargas nodais que será reaplicado na viga. Este novo vetor consistirá de duas forças concentradas aplicadas aos dois primeiros nós com valores  $0,5870\text{tf}$  e  $0,6205\text{tf}$  respectivamente. Resolvendo-se novamente o sistema tem-se os deslocamentos mostrados na tabela 3.

Tabela 3 - Deslocamentos da primeira iteração

nó	Deslocamento desta iteração (m)	Deslocamento total (m)
1	$0,9150 \cdot 10^{-04}$	$0,4278 \cdot 10^{-03}$
2	$0,7140 \cdot 10^{-04}$	$0,3705 \cdot 10^{-03}$
3	$0,5230 \cdot 10^{-04}$	$0,3130 \cdot 10^{-03}$
4	$0,3550 \cdot 10^{-04}$	$0,2558 \cdot 10^{-03}$
5	$0,2170 \cdot 10^{-04}$	$0,2015 \cdot 10^{-03}$
6	$0,1120 \cdot 10^{-04}$	$0,1539 \cdot 10^{-03}$
7	$0,3900 \cdot 10^{-05}$	$0,1155 \cdot 10^{-03}$
8	$-0,1000 \cdot 10^{-05}$	$0,8600 \cdot 10^{-04}$
9	$-0,3900 \cdot 10^{-05}$	$0,6440 \cdot 10^{-04}$
10	$-0,5500 \cdot 10^{-05}$	$0,4860 \cdot 10^{-04}$
11	$-0,6400 \cdot 10^{-05}$	$0,3630 \cdot 10^{-04}$
12	$-0,6900 \cdot 10^{-05}$	$0,2600 \cdot 10^{-04}$
13	$-0,7300 \cdot 10^{-05}$	$0,1620 \cdot 10^{-04}$

Verifica-se após esta iteração que a terceira mola externa à vala também plastificou. Reaplica-se então um novo vetor de cargas nodais correspondente à plastificação destas três molas, onde as duas primeiras cargas serão o resultado da multiplicação dos deslocamentos desta iteração pelos seus coeficientes de rigidez e a terceira será o resultado da subtração do deslocamento total pelo deslocamento limite ativo externo deste nó multiplicado pelo seu coeficiente de rigidez. Estas iterações serão realizadas até que a norma do vetor deslocamentos de uma iteração qualquer seja menor que 0,1% da norma do vetor deslocamentos total da iteração anterior.

Até o final desta fase apenas estas três molas estarão plastificadas e o resultado final está indicado na tabela 4.

**Tabela 4**

nó	Deslocamento final (m)
1	0,5612 10 <sup>-03</sup>
2	0,4777 10 <sup>-03</sup>
3	0,3943 10 <sup>-03</sup>
4	0,3132 10 <sup>-03</sup>
5	0,2385 10 <sup>-03</sup>
6	0,1751 10 <sup>-03</sup>
7	0,1249 10 <sup>-03</sup>
8	0,8730 10 <sup>-04</sup>
9	0,6060 10 <sup>-04</sup>
10	0,4140 10 <sup>-04</sup>
11	0,2720 10 <sup>-04</sup>
12	0,1520 10 <sup>-04</sup>
13	0,4100 10 <sup>-05</sup>

## - FASE 2

Antes de iniciar o cálculo desta segunda fase de escavação as rigidezes correspondentes às três molas externas à vala que plastificaram na fase anterior serão zeradas na matriz de rigidez e a rigidez da primeira estronca será somada ao elemento correspondente desta matriz. Além disto o vetor carregamento será modificado conforme explicado no capítulo 2. Este novo vetor está mostrado na tabela 5.

Tabela 5 - Dados sobre o carregamento da segunda fase (tf)

nó	Carregamento nodal inicial externo menos carregamento devido ao deslocamento da viga	Carregamento nodal inicial interno menos carregamento devido ao deslocamento da viga	Carregamento nodal total desta fase
1	0,4350-0,2538	0	0,1812
2	1,500-0,8750	0	0,6350
3	2,400-1,400	0	1,0000
4	3,300-1,566	0	1,7340
5	4,200-1,1925	0	3,0075
6	5,100-0,8755	0	4,2245
7	6,000-0,6245	-0,945-0,3123	4,1183
8	6,900-0,4365	-5,490-0,4365	0,5370
9	7,800-0,3030	-7,200-0,3030	-0,0060
10	8,700-0,2070	-8,100-0,2070	0,1860
11	9,600-0,1360	-9,000-0,1360	0,3280
12	10,50-0,0760	-9,900-0,0760	0,4480
13	5,565-0,0103	-5,265-0,0103	0,2795

Nesta tabela os valores correspondentes aos carregamentos nodais externo e interno são obtidos a partir dos carregamentos distribuídos em repouso iniciais desta fase e os carregamentos devidos ao deslocamento da viga são obtidos através da multiplicação destes deslocamentos pelas rigidezes das molas

correspondentes. Os momentos de engastamento perfeito utilizados serão os momentos obtidos inicialmente nesta fase.

**Tabela 6 - Coeficientes de mola (tf/m)**

nó	Kme	Kmi	Kestronca
1	0	0	-
2	0	0	-
3	0	0	21000
4	5000	0	-
5	5000	0	-
6	5000	0	-
7	5000	2500	-
8	5000	5000	-
9	5000	5000	-
10	5000	5000	-
11	5000	5000	-
12	5000	5000	-
13	2500	2500	-

A rigidez das molas externas, internas e da estronca estão mostradas na tabela 6. Iniciando agora o cálculo desta fase obtém-se os deslocamentos mostrados na tabela 7.

Tabela 7 - Deslocamentos iniciais da fase 2

nó	Deslocamento elástico desta fase (m)	Deslocamento total (m)
1	$0,2322 \cdot 10^{-03}$	$0,7934 \cdot 10^{-03}$
2	$0,2433 \cdot 10^{-03}$	$0,7210 \cdot 10^{-03}$
3	$0,2547 \cdot 10^{-03}$	$0,6490 \cdot 10^{-03}$
4	$0,2663 \cdot 10^{-03}$	$0,5795 \cdot 10^{-03}$
5	$0,2715 \cdot 10^{-03}$	$0,5100 \cdot 10^{-03}$
6	$0,2631 \cdot 10^{-03}$	$0,4382 \cdot 10^{-03}$
7	$0,2379 \cdot 10^{-03}$	$0,3628 \cdot 10^{-03}$
8	$0,1992 \cdot 10^{-03}$	$0,2865 \cdot 10^{-03}$
9	$0,1547 \cdot 10^{-03}$	$0,2153 \cdot 10^{-03}$
10	$0,1103 \cdot 10^{-03}$	$0,1517 \cdot 10^{-03}$
11	$0,6780 \cdot 10^{-04}$	$0,9500 \cdot 10^{-04}$
12	$0,2710 \cdot 10^{-04}$	$0,4230 \cdot 10^{-04}$
13	$-0,1280 \cdot 10^{-04}$	$-0,8700 \cdot 10^{-05}$

O deslocamento total da tabela 7 é a soma do deslocamento elástico desta fase com o final da fase anterior. Através destes deslocamentos verifica-se que as molas 4 e 5, externas à vala, estão plastificadas (não se deve esquecer que as três primeiras molas externas já não estão trabalhando). Calcula-se então o vetor de cargas correspondente à plastificação destas duas molas que será a subtração do deslocamento total desta fase e do deslocamento limite ativo externo multiplicada pela rigidez de cada mola.

Fazendo-se as iterações como mostrado na primeira fase obtém-se o vetor de deslocamentos total desta, que está mostrado na tabela 8. Nesta fase apenas as molas 4 e 5 externas plastificam.

**Tabela 8**

nó	Deslocamento final (m)
1	0,8326 $10^{-03}$
2	0,7575 $10^{-03}$
3	0,6831 $10^{-03}$
4	0,6108 $10^{-03}$
5	0,5372 $10^{-03}$
6	0,4602 $10^{-03}$
7	0,3792 $10^{-03}$
8	0,2979 $10^{-03}$
9	0,2221 $10^{-03}$
10	0,1543 $10^{-03}$
11	0,9410 $10^{-04}$
12	0,3820 $10^{-04}$
13	-0,1610 $10^{-04}$

**- FASE 3**

Nesta fase o procedimento de cálculo é o mesmo das fases anteriores, com as cinco primeiras molas externas zeradas por estarem plastificadas por ativação e as nove primeiras molas internas zeradas em consequência da escavação. Além disto

acrescenta-se a rigidez da segunda estroca na matriz de rigidez. Os deslocamentos iniciais desta fase são mostrados na tabela 9.

**Tabela 9 - Deslocamentos iniciais da fase 3**

nó	Deslocamento elástico desta fase (m)	Deslocamento total (m)
1	$0,7310 \cdot 10^{-04}$	$0,9057 \cdot 10^{-03}$
2	$0,1362 \cdot 10^{-03}$	$0,8937 \cdot 10^{-03}$
3	$0,1996 \cdot 10^{-03}$	$0,8827 \cdot 10^{-03}$
4	$0,2638 \cdot 10^{-03}$	$0,8746 \cdot 10^{-03}$
5	$0,3246 \cdot 10^{-03}$	$0,8618 \cdot 10^{-03}$
6	$0,3797 \cdot 10^{-03}$	$0,8399 \cdot 10^{-03}$
7	$0,4271 \cdot 10^{-03}$	$0,8063 \cdot 10^{-03}$
8	$0,4553 \cdot 10^{-03}$	$0,7532 \cdot 10^{-03}$
9	$0,4542 \cdot 10^{-03}$	$0,6763 \cdot 10^{-03}$
10	$0,4213 \cdot 10^{-03}$	$0,5756 \cdot 10^{-03}$
11	$0,3636 \cdot 10^{-03}$	$0,4577 \cdot 10^{-03}$
12	$0,2945 \cdot 10^{-03}$	$0,3327 \cdot 10^{-03}$
13	$0,2224 \cdot 10^{-03}$	$0,2063 \cdot 10^{-03}$

Verifica-se, através dos deslocamentos totais mostrados nesta tabela, que nesta fase as molas 6 e 7, externas à vala, estão plastificadas. Fazendo-se as iterações chega-se ao vetor deslocamento final mostrado na tabela 10.

Tabela 10

nó	Deslocamento final (m)
1	0,9158 10 <sup>-03</sup>
2	0,9098 10 <sup>-03</sup>
3	0,9049 10 <sup>-03</sup>
4	0,9026 10 <sup>-03</sup>
5	0,8944 10 <sup>-03</sup>
6	0,8750 10 <sup>-03</sup>
7	0,8407 10 <sup>-03</sup>
8	0,7839 10 <sup>-03</sup>
9	0,7014 10 <sup>-03</sup>
10	0,5939 10 <sup>-03</sup>
11	0,4689 10 <sup>-03</sup>
12	0,3367 10 <sup>-03</sup>
13	0,2031 10 <sup>-03</sup>

### 5.3 - EXEMPLO 2

Durante a execução do programa houve uma discussão sobre se as molas plastificadas por ativação deveriam ou não terem seus valores de rigidez zerados na matriz na passagem de uma fase para outra, como apresentado no exemplo anterior. Elas seriam religadas na matriz de rigidez caso houvesse um ciclo de histerese.

Foi então analisado um outro exemplo bem mais complexo que o anterior com três hipóteses diferentes. A primeira e a segunda hipóteses correspondem a zerar e a não zerar estes valores e a

terceira além de se zerar estas molas zera-se também o carregamento que estava atuando nelas. O procedimento restante continua o mesmo para os três casos.

Este exemplo foi rodado com nove fases de escavação e são mostradas as elásticas da viga nas fases ímpares, para as três hipóteses, em cinco gráficos diferentes. Os dados deste exemplo estão na tabela 11.

**Tabela 11 - Dados para o cálculo do exemplo 2**

Cota (m)	Descrição
791,0	nível do terreno
790,6	estronca 1
790,0	nível 1 de escavação
787,0	solo 1 / solo 2
786,4	estronca 2
785,8	nível 2 de escavação
780,0	NA inicial
778,4	nível 1 de rebaixamento do lençol
777,0	estronca 3
776,4	nível 3 de escavação
772,5	nível 2 de rebaixamento do lençol
771,1	estronca 4 e solo 2 / solo 3
770,5	nível 4 de escavação
769,0	nível 3 de rebaixamento do lençol
768,5	solo 3 / solo 4

767,6	estronca 5
767,0	nível 5 de escavação
763,7	nível 4 de rebaixamento do lençol
762,5	estronca 6
761,7	nível 6 de escavação
760,5	nível 5 de rebaixamento do lençol
759,3	estronca 7
758,5	nível 7 de escavação
757,0	nível 6 de rebaixamento do lençol
755,0	nível 8 de escavação
753,4	nível 7 de rebaixamento do lençol
751,5	estronca 8
751,4	nível 9 de escavação
744,4	fim da parede

As estroncas de 1 a 6 têm rigidez igual a  $1,4 \cdot 10^5$  kN/m, a 7 igual a  $2,8 \cdot 10^5$  kN/m e a 8 igual a  $5,6 \cdot 10^6$  kN/m e todas têm semi comprimento igual a 7,5m. O coeficiente de apoio elástico horizontal do solo vale  $10000,0$  kN/m<sup>3</sup> do início da parede até a cota 787,0 e daí até o final da parede seu valor passa a ser  $30000,0$  kN/m<sup>3</sup>. A única sobrecarga existente é a de depósitos de materiais com valor igual a  $10$  kN/m<sup>2</sup>.

Tabela 12 - Características das camadas de solo

	$\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )	Ko	Ka	Kp
SOLO 1	15,0	0,60	0,33	4,60
SOLO 2	16,0	0,60	0,34	4,27
SOLO 3	18,5	0,50	0,30	5,30
SOLO 4	18,5	0,60	0,39	3,55

Nestas figuras são mostradas as elásticas da viga nas várias fases de escavação. Nelas P1, P2 e P3 representam os três procedimentos de cálculo citados anteriormente, E1 a E7 são as estroncas e ne é o nível de escavação da fase correspondente.

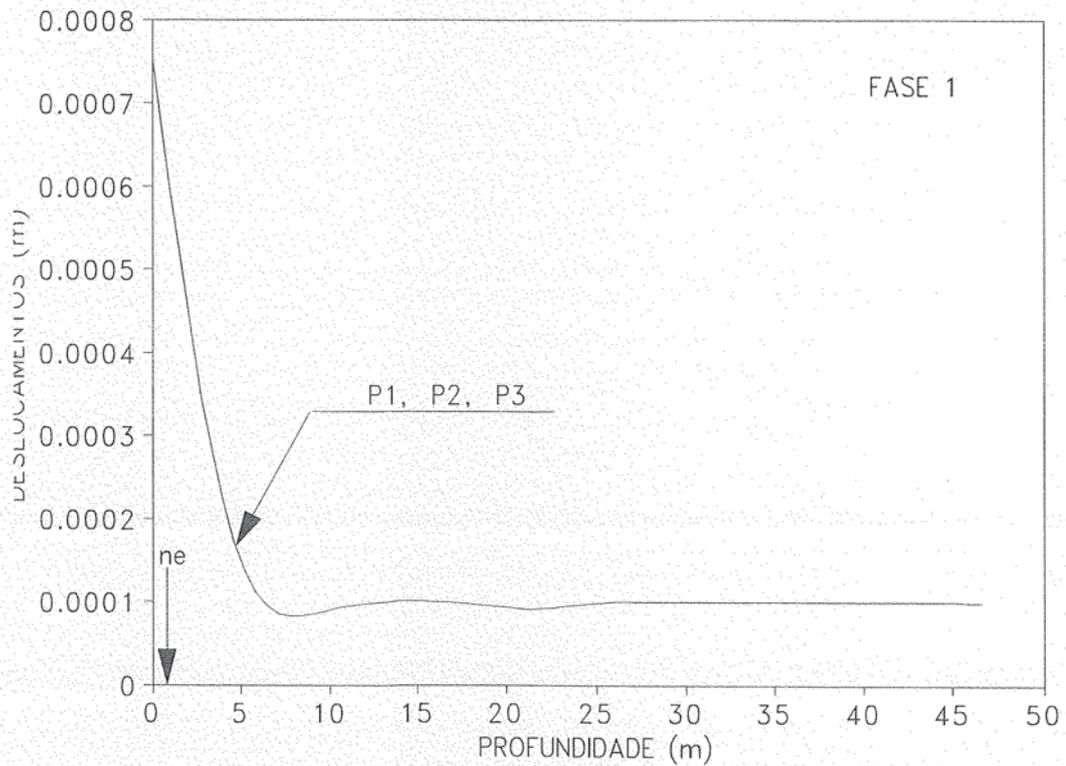


Fig. 26 - Elástica da viga na primeira fase de escavação

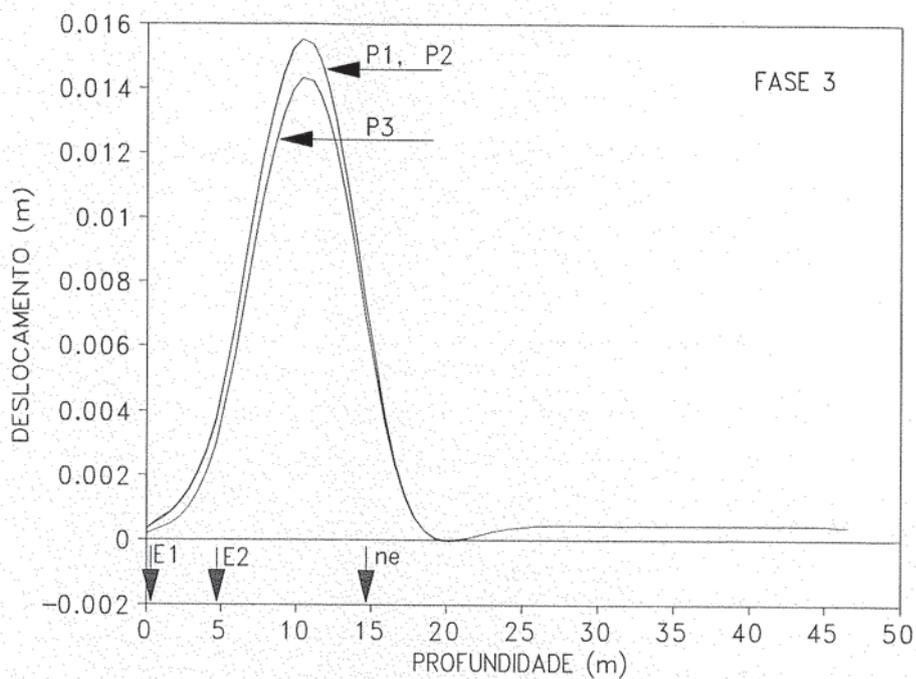


Fig. 27 - Elástica da viga na terceira fase de escavação

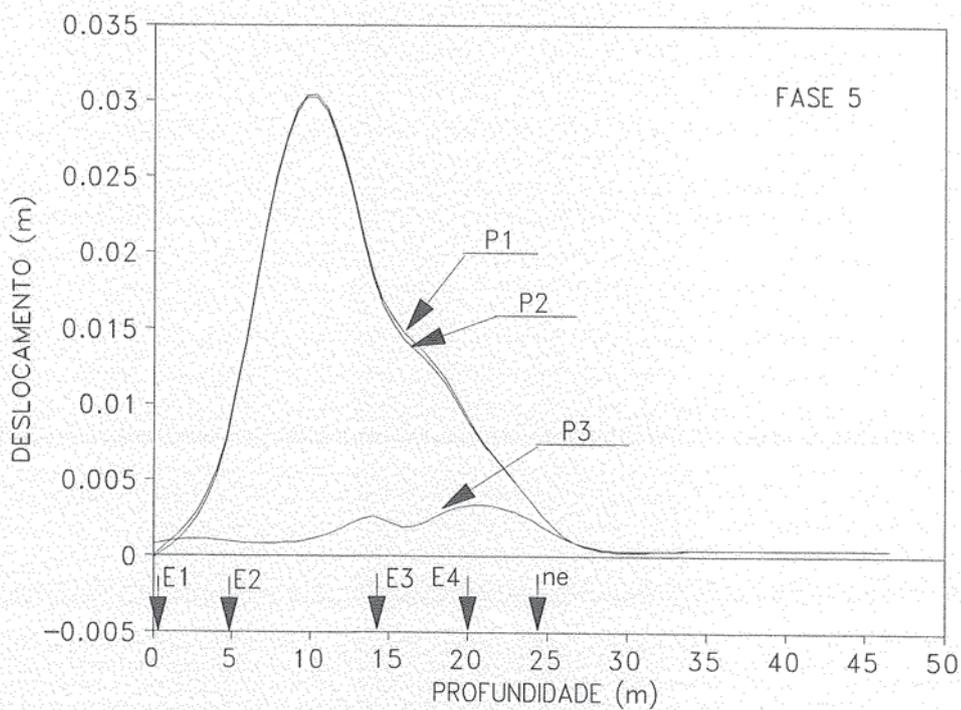


Fig. 28 - Elástica da viga na quinta fase de escavação

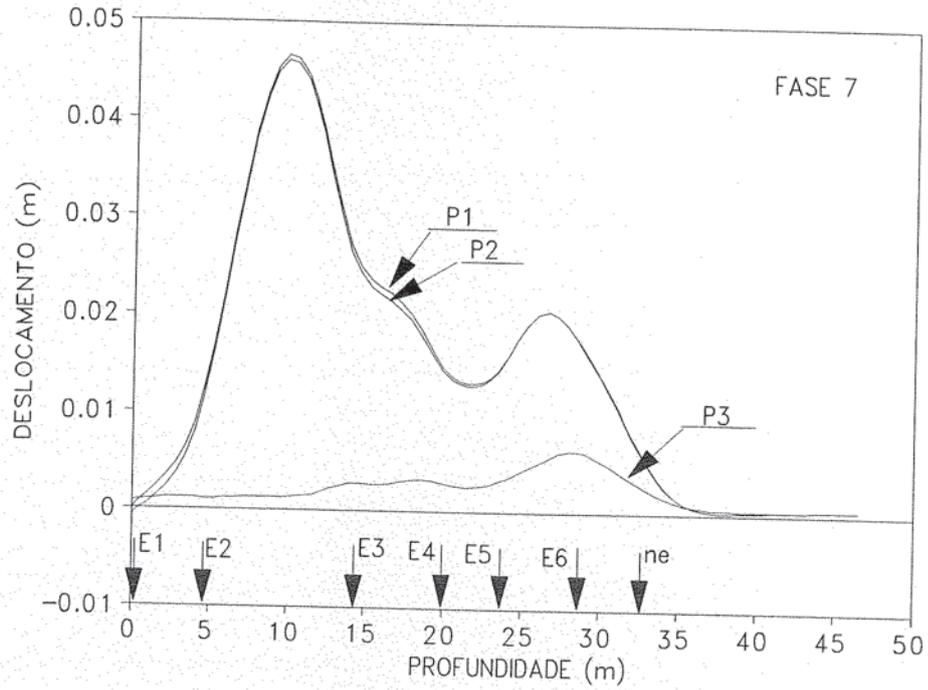


Fig. 29 - Elástica da viga na sétima fase de escavação

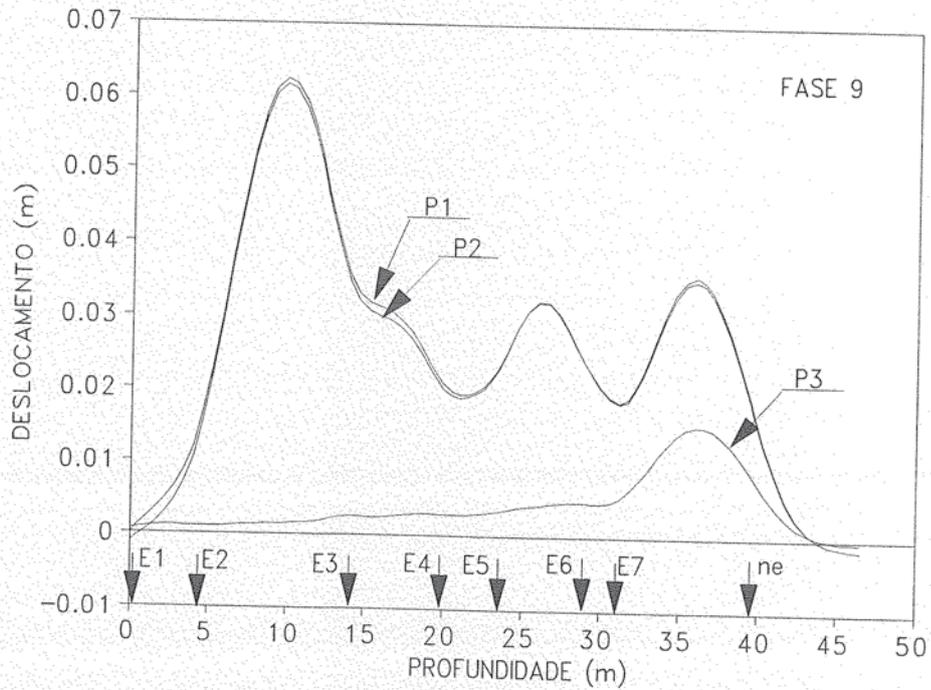
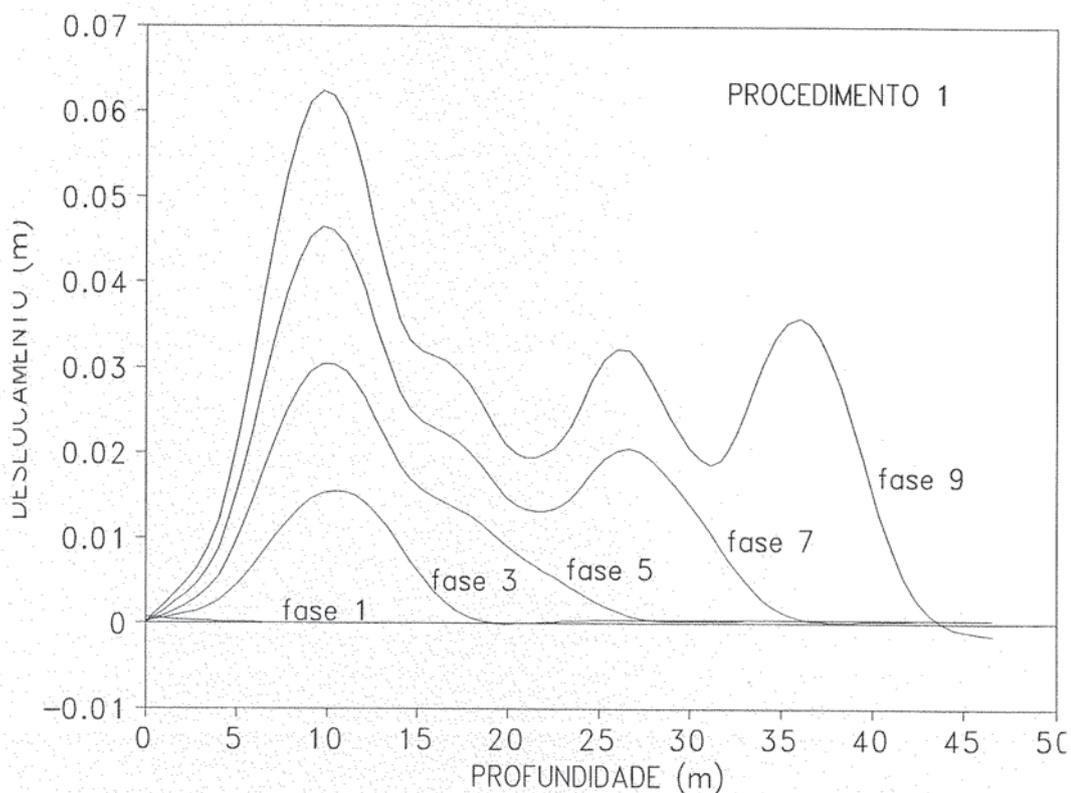


Fig. 30 - Elástica da viga na nona fase de escavação



**Fig. 31 - Superposição das elásticas do procedimento 1**

Verifica-se através das primeiras quatro figuras que se o carregamento não for zerado juntamente com as molas pouca será a diferença entre as elásticas da viga, e que é grande a diferença se este carregamento for zerado no processo de cálculo.

A última figura representa uma superposição das elásticas nas diversas fases de escavação mostrando a progressão dos deslocamentos da viga.

## 5.4 - EXEMPLO 3

Neste exemplo serão comparados quatro processos de cálculo de paredes de contenção. Os processos que serão utilizados são os empíricos e semi empíricos já citados no capítulo 1.

O exemplo calculado é o mostrado na figura 32 cujos resultados serão comparados com os obtidos por Guerra (9).

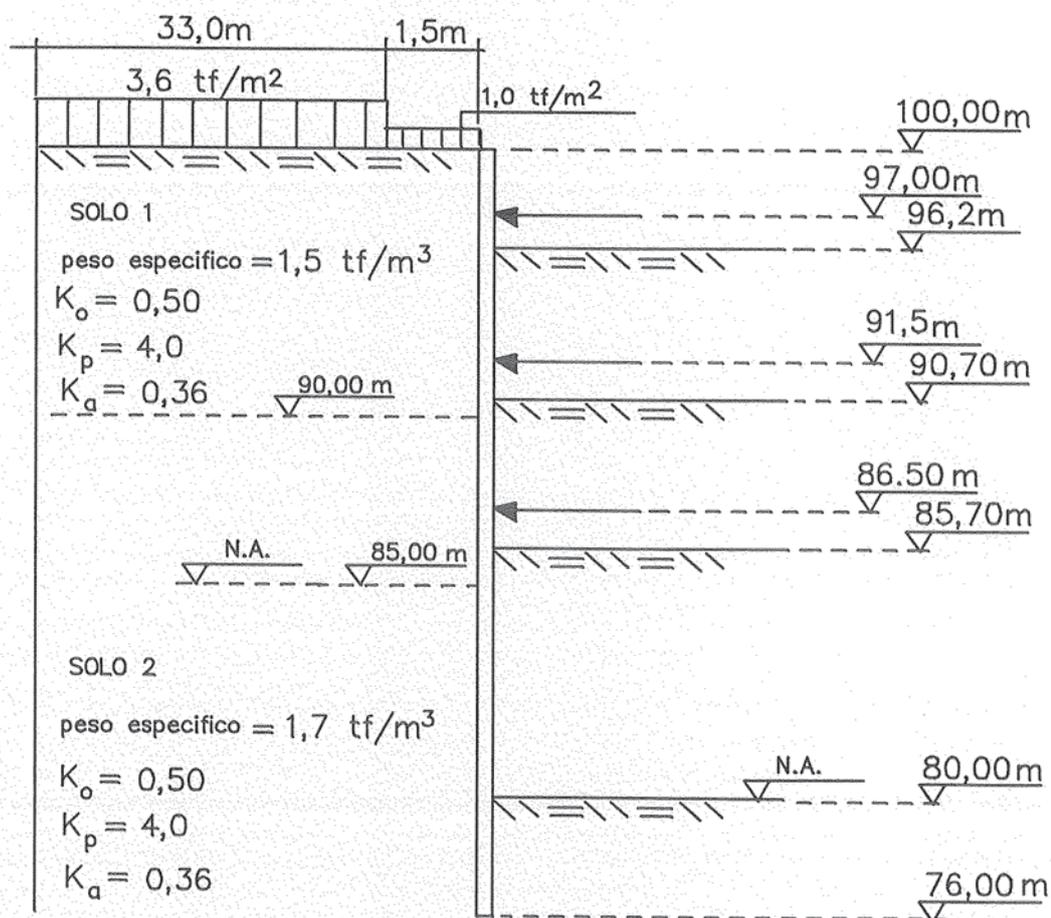


Fig. 32 - Esquema da parede de contenção para o exemplo 3 (9)

A comparação entre os resultados obtidos é feita apenas entre os momentos máximos e mínimos nas seções teóricas da viga e esforços normais nas estroncas, que são os únicos dados obtidos pelo método da envoltória aparente de tensões. Estes resultados estão indicados nas duas tabelas a seguir:

**Tabela 13 - Momentos fletores (tf.m)**

Processos de cálculo	Momento máximo	Momento mínimo
NC-03 (flexível)	16,340	-5,850
NC-03 (rígida)	48,500	-60,390
Envoltória aparente	28,100	-31,770
Programa proposto	23,350	-27,720

**Tabela 14 - Forças normais nas estroncas (tf)**

Processos de cálculo	Estronca 1 (97,00m)	Estronca 2 (91,50m)	Estronca 3 (86,50m)
NC-03 (flexível)	10,260	4,470	9,590
NC-03 (rígida)	15,220	52,980	82,440
Envoltória aparente	14,630	27,630	48,880
Programa proposto	10,840	9,800	31,490

## 5.5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi apresentar um programa para o cálculo de paredes de contenção que permita uma análise mais próxima do comportamento real deste tipo de estrutura como alternativa aos métodos empíricos e semi-empíricos ainda utilizados.

Estes métodos, como já mencionado no capítulo 1, não consideram as deformações do solo, que modificam os parâmetros iniciais adotados, nas mudanças de fases. Além disso existem muitas restrições quanto à utilização destes métodos como, por exemplo, a altura máxima de escavação permitida que não deve ultrapassar 20m, as distâncias entre apoios não devem ser muito diferentes e esta diferença não deve exceder 30% do maior vão, o terreno deve ser homogêneo, etc (4).

Os métodos empíricos devem ser utilizados somente quando o objetivo do cálculo se restringir à resistência da parede, não interessando avaliar os recalques na superfície (4).

Já nos métodos semi-empíricos os deslocamentos calculados não são confiáveis, pois não consideram o histórico de escavação e de escoramento e normalmente são utilizados coeficientes de segurança elevados. Estes aspectos levam a estrutura projetada a trabalhar de um modo diferente do concebido (14).

Os métodos unidimensionais também fazem muitas simplificações para o cálculo. Uma dessas simplificações é a não consideração das perdas de protensão em tirantes ou da pré-compressão em estroncas. Entretanto esta perda não é significativa uma vez que não ultrapassam 10% da carga realmente incorporada. Outra é o fato de não se levar em conta o efeito da variação de temperatura. Além disso não consideram a redistribuição vertical das tensões horizontais atuantes na parede decorrente da acomodação vertical do solo; e também consideram as molas desacopladas entre si, o que na realidade não ocorre.

Apesar de todas estas simplificações este método constitui num avanço considerável em relação aos demais métodos citados acima. Através dos exemplos deste capítulo pode-se constatar a eficiência deste método em relação ao demais que levam a resultados mais conservadores ou a resultados não confiáveis, como a utilização do método de viga contínua para paredes flexíveis, para o cálculo de paredes diafragma.

Em relação às hipóteses de cálculo do exemplo 2, nota-se que não houve praticamente nenhuma diferença entre os deslocamentos obtidos nos dois primeiros procedimentos. Já no terceiro procedimento, onde o carregamento nodal foi zerado com a plastificação da mola correspondente por ativação, os deslocamentos obtidos foram muito menores.

Deve-se evitar a utilização deste terceiro procedimento, pois não se pode afirmar que o carregamento da viga em um nó qualquer devido à pressão do solo deixa de atuar com o deslocamento ativo da mola correspondente a este nó.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] BANAN, M.R.; KARAMI, G.; FARSHAD, M. Finite element analysis of curved beams on elastic foundations. *Computers & Structures*, v.32, n.1, p.45-53. 1989.
- [2] BEAUFAIT, F.W.; HOADLEY, P.W. Analysis of elastic beams on nonlinear foundations. *Computers & Structures*, v.12, p.669-676, 1980.
- [3] CLASTORNIK, J. et al. Beams on variable Winkler elastic foundation. *Journal of Applied Mechanics*, v.53, n.4, p.925-928, Dec. 1986.
- [4] COMPANHIA DO METROPOLITANO DE SÃO PAULO (METRÔ). Departamento de Projeto Civil. *Cálculo das obras do método em trincheira*. São Paulo, 1980. cap.5 (Normas técnicas complementares, NC-03/80)
- [5] EISENBERGER, M.; YANKELEVSKY, D.Z. Exact stiffness matrix for beams on elastic foundation. *Computers & Structures*, v.21, n.6, p.1355-1359, 1985.
- [6] FAGES, R.; BOUYAT, C. Calcul de rideaux de parois moulées ou de palplanches. p.38-46
- [7] GAIOTO, N. *Estruturas de arrimo e empuxos de terra*. São Carlos, EESC-USP, 1979. 40p.
- [8] GERE, J.M.; WEAVER JR., W. *Análise de estruturas reticuladas*. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987. 443p.
- [9] GUERRA, E.S. *Cálculo estático de escoramentos de valas: proposta de metodologia para construção de envoltória aparente de tensões*. São Paulo, 1982. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

- [10] LAURA, P.A.A.; CORTÍNEZ, V.H. Vibrating beam partially embedded in Winkler-type foundation. *Journal of Engineering Mechanics*, v.113, n.1, p.143-147, Jan. 1987.
- [11] MAFFEI, C.; ANDRÉ, J.; CIFU, S. Methods for calculating braced excavations. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SOIL STRUCTURE INTERACTION, Roorkee, India, Jan. 3-7, 1977. *Proceedings*.
- [12] MARZIONNA, J.D. *Sobre o cálculo estático de valas*. São Paulo, 1979. 81p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [13] MATSUDA, H.; SAKIYAMA, T. Analysis of beams on non-homogeneous elastic foundation. *Computers & Structures*, v.25, n.6, p.941-946, 1987.
- [14] NIMIR, W.A. *Sobre o cálculo de paredes-diafragma em valas de metrôs*. São Carlos, 1979. 158p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [15] PAIVA, J.B.; GODOY, C.V.A. Aplicação do método dos elementos finitos à análise de vigas apoiadas em base elástica. In: CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 10., Porto, Portugal, 1989. *Anais*. v.1, p.A.73-82
- [16] ROSSIGNOL, P.; GENIN, M.J. Calculs de rideaux de parois moulées avec le programme "Paroi": exemples d'applications. *Travaux*, p.65-67, dec. 1973.
- [17] RUGGIERO, M.A.G.; LOPES, V.L.R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo, Makron Books do Brasil, 1988. 295p.
- [18] TERZAGHI, K.; PECK, R.B. *Mecánica de suelos en la ingeniería practica*. Buenos Aires, Ed. El Ateneo, 1975.

- [19] TSCHEBOTARIOFF, G.P. *Mecánica del suelo: cimientos y estructuras de tierra*. 3.ed. Madrid: Aguilar, 1963. 642p.
- [20] TUFAILE, D.; PERON, A.S.; GUERRA, E.S. *Fundamentos do cálculo unidimensional evolutivo de paredes de contenção*. São Paulo, METRÔ-Departamento de Projeto Civil, 1983.
- [21] VALLABHAN, C.V.G.; DAS, Y.C. Parametric study of beams on elastic foundations. *Journal of Engineering Mechanics*, v.114, n.12, p.2072-2082, Dec. 1988.
- [22] VELLOSO, D.A.; LOPES, F.R. *Paredes moldadas no solo*. Rio de Janeiro, FRANKI, s.d. 36p.
- [23] YANKELEVSKY, D.Z.; EISENBERGER, M.; ADIN, M.A. Analysis of beams on nonlinear Winkler foundation. *Computers & Structures*, v.31, n.2, p.287-292, 1989.
- [24] ZIENKIEWICZ, O.C. *El método de los elementos finitos*. Barcelona, Ed. Reverté, 1980. 903p.