

**ANÁLISE DOS ELEMENTOS FLETIDOS EM:  
ESTRUTURAS DE AÇO**

**AUTOR: ENG. ORLANDO FERREIRA GOMES  
ORIENTADOR: PROF.DR. JOSÉ ELIAS LAIER**

UNIVERSIDADE DE SAO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SAO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ANALISE DOS ELEMENTOS FLETIDOS EM  
ESTRUTURAS DE AÇO

Dissertação apresentada a Escola de  
Engenharia de São Carlos da Universidade  
de São Paulo como parte dos requisitos  
para obtenção do título de "Mestre em  
Engenharia de Estruturas"

Eng.º ORLANDO FERREIRA GOMES  
ORIENTADOR: PROF. DR. JOSÉ ELIAS LAIER

São Carlos, janeiro de 1993

## DEDICATÓRIA

*Dedico êste trabalho àqueles que durante todo êsse tempo transferiram o sentimento de coragem e ânimo para que eu pudesse concretizá-lo.*

*A meus pais: Deodato e Izabel*

*A minha eterna companheira e espôsa  
Rosalina*

*Aos meus queridos filhos: Karine e  
Danilo*

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço ao nosso Senhor e eterno Deus por êle ter me dado as condições necessárias para realizar êsse trabalho.

Ao Prof. Dr. José Elias Laier, pela sua disposição e disponibilidade de ter orientado êsse trabalho.

Ao Prof. José Jairo de Sáles os meus sinceros agradecimentos pelo estímulo, pelas excelentes contribuições e sugestões que muito enriqueceram o teor do trabalho, e também pela sua grande experiência profissional.

Aos professores da área de Estruturas de Aço do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo e aos demais professores pelas sugestões.

Ao Sr. Antonio Valdair Carneiro pelos trabalhos de digitação e datilografia.

A Sra. Maria Nadir Minatel pelos trabalhos de revisão bibliográfica.

Aos desenhistas Sylvia H.M. Villani e Francisco Carlos Guete de Brito pela excelente qualidade de execução aos desenhos.

Ao Departamento de Estruturas da Universidade Federal de Goiás por ter permitido o meu afastamento para realização do curso de Pós-Graduação.

Aos meus colegas bolsistas pelo convívio universitário.

Ao povo do meu país e aos meus conterrâneos de Goiás presto a minha homenagem através desse trabalho.



## RESUMO

Nêste trabalho está desenvolvida em relação à teoria da flexão simples, toda uma sistemática para melhor compreensão dos itens aplicáveis ao dimensionamento das barras fletidas, componentes das Estruturas de Aço, segundo os procedimentos normativos da NBR 8800/86 (Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios - Método dos Estados Limites).

Procurou-se também dar uma certa ênfase aos fenômenos de instabilidade global e local, que ocorrem com as chapas componentes dos perfis estruturais utilizados como vigas e, através de exemplos numéricos, consolidar os conceitos normativos, fazendo uso não sómente da NBR 8800/86, mas também de normas técnicas de outros países, para se fazer um quadro comparativo dos resultados obtidos.

## ABSTRACT

In this work is developed, relate to the simple bending theory, a whole systematic for a better understanding of the appropriated itens for the computing of bending members of a Steel Structures, according to the Brazilian Code NBR 8800/86 (Design and Construction of Steel Structures for Buildings-Limit States Method).

Was also given emphasis to the global and local instability phenomena, which happen with the plates componentes of structural shapes, used as beams, and, through numerical by the NBR 8800, but also due to technical standards from other countries, with the intention of making comparisons with the obtained results.

## SUMÁRIO

### CAPÍTULO I

1- INTRODUÇÃO .....	01
1.1- APRESENTAÇÃO .....	01
1.2- PROJETO COM ESTRUTURAS DE AÇO .....	02
1.3- A SEGURANÇA NO DIMENSIONAMENTO .....	04
1.3.1- O Método das Tensões Admissíveis .....	04
1.3.2- O Método Plástico .....	07
1.3.3- O Método dos Estados Limites .....	08
1.4- AS VIGAS DE AÇO .....	10
1.4.1- O Aço como Material Estrutural .....	10
1.4.2- Os Perfis .....	11
1.4.3- Emprego e Utilização .....	16

### CAPÍTULO II -

2- FLEXÃO EM PERFIS DE AÇO .....	26
2.1- Evolução da Teoria e dos Perfis de Aço .....	26
2.2- Situação Nacional .....	33
2.3- Comportamento Estrutural .....	35

### CAPÍTULO III -

3- INSTABILIDADE DE CHAPAS E DE PERFIS .....	54
3.1- Conceituação do Problema .....	54
3.2- Flambagem de Chapas .....	57
3.2.1- Flambagem Elástica .....	58
3.2.2- Flambagem Inelástica .....	73
3.3- Classificação dos Elementos de uma Seção .....	84
3.3.1- Análise Segundo ADAMS, KRENTE, KULAK [4]..	90
3.3.2- Análise Segundo DOWLING, KNOWLES, OWENS [61] .....	93
3.3.3- Análise Segundo NBR 8800 [12] .....	95
3.3.4- Análise Segundo YURA, GALAMBOS, RAVINDRA [184] .....	95
3.4- Flambagem Lateral com Torção .....	97
3.4.1- Momento Crítico de Flambagem Elástica ...	100
3.4.2- Influência das Condições de Carregamento para o Cálculo de $M_{cr}$ .....	134
3.4.3- Considerações Adicionais sobre o Coeficiente $C_b$ .....	147
3.3.4- Influência da Posição da Aplicação das Ações Externas .....	153
3.3.5- Flambagem Lateral Inelástica com Torção .	165

### CAPÍTULO IV

4- RESISTÊNCIAS NOMINAIS .....	174
4.1- Introdução .....	174
4.1.1- Flambagem Lateral com Torção (FLT) .....	174
4.1.2- Flambagem Local da Mesa Comprimida (FLM)	175
4.1.3- Flambagem Local da Alma pelo momento Fletor (FLA) .....	175

4.2-	Critério para o Cálculo da Resistência Nominal ao Momento Fletor $M_n$ .....	178
4.3-	Flambagem Local da Alma (FLA) .....	191
4.3.1-	Valores característicos de $\lambda_p$ , $\lambda_r$ , para o Estado Limite FLA para demais seções .	199
4.4-	Flambagem de Perfis Tubulares de Seção Circular e Cilindros .....	202
4.4.1-	Análise de Estabilidade e Colapso de Cas- cas Cilíndricas Axialmente Comprimidas..	203
4.4.2-	Carga Crítica de Flambagem Elástica ....	204
4.4.3-	Comportamento dos Cilindros solicitados na Flexão .....	207
4.4.4-	Flambagem Inelástica de Tubos Circulares e de Cilindros .....	207
4.5-	Determinação da Resistência de Cálculo à Força Cortante .....	212
4.5.1-	Recomendação do Esforço Cortante Segundo [12] .....	224
4.6-	Cálculo Plástico-Apoio Lateral .....	227
4.6.1-	Determinação do Valor Limite do Comprimento de um Trecho sem Contenção Lateral, Correspondente ao Momento de Plas- tificação $M_{p\ell}$ com Redistribuição de Momentos. ....	227
4.6.2-	Recomendações Segundo [7, 12, 154] ....	231
4.7-	Considerações Finais .....	237

## CAPÍTULO V

5-	EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	245
5.1-	Considerações Preliminares .....	245
5.2-	Verificação Segundo a Especificação [12] NBR/8800 .....	251

5.3- Verificação Segundo a Especificação [8]	
LRFD .....	257
5.4- Verificação Segundo a Especificação [39].....	263
5.5- Verificação Segundo a Especificação [65]	
ECCS-EG77-2E/78 .....	268
5.6- Resistência ao Esforço Cortante .....	276
5.6.1- Verificação do Cortante Segundo a Espe-	
cificação [12] NBR 8800.....	276
5.6.2- Verificação do Cortante Segundo [8] LRFD	279
5.6.3- Verificação Segundo a Especificação [39]	
CAN-S161-M84 .....	280
CAPÍTULO VI -	
CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS .....	298
CAPÍTULO VII -	
BIBLIOGRAFIA .....	301
ANEXO 1 -	
FLAMBAGEM DE CHAPAS .....	A-1

## NOTAÇÕES

No âmbito desse trabalho, as notações a serem usadas são as seguintes:

### Letras romanas minúsculas

a	: Distância em geral; distância entre enrijecedores transversais; altura da região comprimida em lajes de vigas mistas;
b	: largura em geral;
$b_1$	: largura da mesa comprimida;
$b_2$	: largura da mesa tracionada;
$b_f$	: largura da mesa;
d	: altura de seção;
e	: constante (2.718281828);
e	: excêntrica genérica;
f	: tensão em geral;
$f_a$	: tensão aplicada;
$f_{cr}$	: tensão crítica;
$f_{cr}$	: tensão crítica de Euler;
$f_{max}$	: tensão máxima;
$f_p$	: tensão no limite de proporcionalidade;
$f_r$	: tensão residual;
$f_u$	: limite de resistência à tração do aço, valor nominal especificado;
$f_y$	: limite de escoamento do aço, valor nominal especificado;
h	: altura em geral ; distância entre as faces internas das mesas de perfis "I" e "H";

$h_c$	: distância do centro de gravidade da mesa comprimida ao centro de gravidade da seção;
$h_t$	: distância do centro de gravidade da mesa tracionada ao centro de gravidade da seção;
$i$	: número imaginário ( $\sqrt{-1}$ );
$i$	: índice que assume valores genéricos;
$k$	: constante genérica;
$k$	: coeficiente de flambagem de chapas;
$k$	: coeficiente da variável "z", na solução particular $\theta = e^{kz}$ ;
$k_x$	: propriedade de monossimetria;
$k_x, k_y, k_z$	: coeficientes de flambagem, relativos aos eixos "x", "y", e "z", respectivamente;
$l$	: comprimento
$m$	: constante genérica;
$m$	: utilizada como artifício matemático;
$n$	: constante genérica;
$n$	: letra utilizada em artifício matemático;
$n$	: número de soluções particulares linearmente independentes, de uma equação diferencial;
$n$	: grau de um polinômio;
$q$	: carga uniformemente distribuída;
$q$	: constante genérica;
$q$	: letra utilizada em artifício matemático;
$r$	: letra utilizada em artifício matemático;
$r$	: relação entre o menor e o maior momento de extremidade;
$r$	: raio de giração; raio
$r_x, r_y$	: raio de giração em relação aos eixos "x" e "y", respectivamente;



- $r_T$  : raio de giração da seção formada pela mesa comprimida mais 1/3 da região comprimida da alma, calculado em relação ao eixo situado no plano médio da alma;
- $s$  : relação entre a deformação unitária no regime de deformação por encruamento e a deformação unitária no limite de escoamento;
- $t$ : espessura genérica de uma chapa;
- $t_1$  : espessura da mesa comprimida;
- $t_f$  : espessura da mesa;
- $t_i$  : temperatura ( $i = 1, 2$ );
- $t_2$  : espessura da mesa tracionada;
- $t_w$  : espessura da alma;
- $u$  : componente de deslocamento na direção "x";
- $v$  : componente de deslocamento na direção "y";
- $w$  : componente de deslocamento na direção "z"
- $x$  : coordenada genérica na direção do eixo "x";
- $x_o$  : coordenada do centro de torção;
- $y$  : coordenada genérica na direção do eixo "y";
- $y_D$  : coordenada do centro de torção;
- $z$  : coordenada genérica na direção do eixo "z";

#### Letras romanas maiúsculas

- $A$  : área da seção transversal;
- $A_1$  ,  $A_2$  : área da seção transversal, abaixo e acima do eixo neutro, respectivamente;

$A_{ef}$	: área efetiva;
$A_g$	: área bruta;
$A_t, A_c$	: área da mesa tracionada e da mesa comprimida, respectivamente;
$A_t, A_w$	: coeficientes de flambagem, associados aos dois casos hipotéticos de flambagem de vigas;
$A_w$	: área da alma;
$C$	: coeficiente experimental, determinado por WINTER;
$C$	: força de compressão;
$C_1, C_2$	: centro de gravidade das áreas " $A_1$ " e " $A_2$ ", respectivamente;
$C_b$	: coeficiente utilizado no dimensionamento à flexão simples;
$C_i$	: constantes genéricas ( $i = 1, 2, \dots$ );
$C_w$	: momento de inércia setorial, ou constante de empenamento $[L]^6$
$D$	: diâmetro;
$D_r$	: rigidez à flexão de uma chapa;
$D_x, D_y$	: módulos ortotrópicos;
$D_{xy}, D_{yx}, 2H$	: módulos ortotrópicos;
$E$	: módulo de elasticidade longitudinal $E = 205000 \text{ MPa}$
$E_r$	: módulo reduzido;
$E_{st}$	: módulo de deformação por encruamento;
$E_t$	: módulo tangente;
$G$	: módulo de elasticidade transversal do aço, $G = 0.385E$ ; carga permanente nominal;
$G_{st}$	: módulo de deformação por encruamento transversal;
$H$	: componente horizontal de força
$I$	: momento de inércia;

$I_c$	: momento de inércia da mesa comprimida em relação ao eixo "y"; ao eixo "y";
$I_p$	: momento de inércia polar;
$I_t$	: momento de inércia da mesa tracionada em relação ao eixo "y";
$I_T$	: momento de inércia à torção;
$I_x, I_y$	: momentos de inércia em relação ao eixo "x" e "y", respectivamente;
$L$	: comprimento em geral;vão
$L_b$	: comprimento do trecho sem contenção lateral (ou destravado);
$L_{fl}$	: comprimento de flambagem;
$L_i$	: comprimento do i-ésimo elemento;
$L_p$	: valor limite do comprimento de um trecho sem contenção lateral, correspondente ao momento de plastificação, sem redistribuição posterior de momentos;
$L_{pd}$	: valor limite do comprimento de um trecho sem contenção lateral, correspondente ao momento de plastificação, com redistribuição de momentos;
$L_r$	: comprimento do trecho sem contenção lateral, correspondente ao momento resistente elástico " $M_r$ ";
$M$	: momento fletor;
$M_1$	: momento fletor total em uma posição genérica do eixo "z";
$M_A, M_B$	: momento de flexão nas extremidades "A" e "B" de uma barra, respectivamente;
$M_{cr}$	: momento crítico de flambagem lateral com torção;
$M_d$	: momento fletor de cálculo;
$M_{cru}$	: momento crítico de flambagem uniforme;

$M_{ct}$	: momento crítico torcional hipotético, quando a rigidez ao empenamento é nula;
$M_{cw}$	: momento crítico de empenamento hipotético, quando a rigidez à torção é nula;
$M_{eq}$	: momento uniforme equivalente;
$M_m$	: momento de flexão máximo;
$M_{max}$	: momento de flexão máximo;
$M_n$	: resistência nominal ao momento fletor;
$M_{pl}$	: momento de plastificação;
$M_r$	: momento fletor correspondente ao início do escoamento, incluindo ou não o efeito das tensões residuais;
$M_t$	: momento de torção;
$M_1, M_2$	: menor e maior momento fletor na extremidade do trecho não contraventado da viga, respectivamente;
$M_{tf}$	: momento de torção resistente do flange;
$M_{tw}$	: momento de torção resistente da alma;
$M_u$	: momento de flexão último;
$M_w$	: parcela do momento de torção, resistida pela flexão na torção;
$M_\omega$	: momento uniforme para flambagem sob tensões de empenamento puras;
$M_x$	: momento fletor em relação ao eixo "x";
$M_y$	: momento fletor em relação ao eixo "y";
$M_y$	: momento de flexão no limite do escoamento;
$M_z$	: momento torçor resultante em torno do eixo "z";
N	: força normal em geral;
N	: constante genérica;
P	: carga vertical;
$P_d$	: carga axial de cálculo fatorada;

$P_E$	: carga crítica de Euler;
$P_{max}$	: carga máxima;
$Q$	: carga variável;
$R$	: raio genérico de curvatura;
$R$	: capacidade de rotação de uma viga;
$R$	: resistência em geral; fôrça resultante;
$R_n$	: resistência nominal
$S_d$	: solicitação de cálculo
$V$	: força cortante;
$V$	: energia total na forma de um funcional;
$V_d$	: força cortante de cálculo;
$V_n$	: resistência nominal à força cortante;
$V_{pl}$	: força cortante correspondente à plastificação da alma por cisalhamento;
$V_x, V_y$	: forças cortantes relativas aos eixos "x" e "y", respectivamente;
$W$	: módulo de resistência elástico;
$W_x, W_y$	: módulos de resistência elásticos em relação aos eixos "x" e "y", respectivamente;
$W_c$	: módulo de resistência elástico da mesa comprimida;
$W_{ef}$	: módulo de resistência elástico da seção transversal efetiva, relativo ao eixo de flexão;
$Z$	: módulo de resistência plástico;
$Z_x, Z_y$	: módulos de resistência plásticos em relação aos eixos "x" e "y", respectivamente;

#### Letras gregas minúsculas

$\alpha$	: parcela real de um número complexo;
$\alpha$	: relação de aspecto ( $\alpha = a/b$ );

$\alpha$	: ângulo;
$\alpha_f$	: fator de forma;
$\alpha_t$	: coeficiente de dilatação térmica linear do aço;
$\beta$	: coeficiente da parte imaginária de um número complexo;
$\beta_x$	: propriedade de monossimetria de um perfil;
$\gamma$	: esbeltez torcional ( $\gamma = \pi^2 E C_{\omega} / L^2 G I_T$ );
$\gamma$	: coeficiente de ponderação das ações;
$\gamma$	: deformação devido ao cisalhamento;
$\gamma_{xy}$	: deformação de cisalhamento, correspondente às direções "x" e "y";
$\gamma_{xz}$	: deformação de cisalhamento, correspondente às direções "x" e "z";
$\gamma_{yz}$	: deformação de cisalhamento, correspondente às direções "y" e "z";
$\delta$	: deflexão genérica;
$\delta_{max}$	: deflexão máxima;
$\epsilon$	: deformação unitária genérica;
$\epsilon_m$	: deformação unitária máxima;
$\epsilon_t$	: deformação unitária na tração;
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	: deformações unitárias nas direções "x", "y", e "z", respectivamente;
$\epsilon_y$	: deformação no limite de escoamento;
$\eta$	: fator adimensional ( $E_t/E$ )
$\theta$	: rotação das extremidades de um elemento estrutural;
$\theta$	: rotação de uma viga;
$\theta_H$	: capacidade de rotação de uma viga;
$\theta_P$	: rotação de uma viga comportando elasticamente, quando atinge o momento de plastificação;
$\lambda$	: parâmetro de esbeltez ;

$\lambda$	: parâmetro de esbeltez de uma coluna ou de uma viga;
$\lambda_c$	: parâmetro de esbeltez genérico de uma chapa;
$\lambda_p$	: parâmetro de esbeltez correspondente à plastificação;
$\lambda_r$	: parâmetro de esbeltez correspondente ao início do escoamento;
$\nu$	: coeficiente de Poisson de um material genérico;
$\mu$	: momento fletor adimensional
$\mu_i$	: coeficiente que depende do diagrama de flexão de uma i-ésima viga;
$\nu_a$	: coeficiente de Poisson do aço;
$\sigma$	: tensão normal genérica;
$\sigma_z$	: tensão na direção "z";
$\tau$	: tensão genérica de cisalhamento;
$\tau_{max}$	: tensão máxima de cisalhamento;
$\tau_{xz}$	: componente de cisalhamento na direção "z", atuante na face perpendicular ao eixo "x";
$\tau_{xy}$	: componente de cisalhamento na direção "y", atuante na face perpendicular ao eixo "x";
$\tau_{yz}$	: componente de cisalhamento na direção "z", atuante na face perpendicular ao eixo "y";
$\phi$	: letra utilizada como artifício matemático;
$\phi$	: ângulo
$\phi$	: coeficiente de resistência, em geral
$\phi_b$	: coeficiente de resistência ao momento fletor

$\phi_v$  : coeficiente de resistência à força cortante  
 $\psi$  : ângulo;

#### Letras gregas maiúsculas

$\Delta$  : deslocamento; flecha;  
 $\Delta L$  : variação do comprimento;  
 $\Sigma$  : somatório

#### Símbolos matemáticos e símbolos especiais

$\pi$  : relação entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro:3,14159.....

Os demais termos tem os significados dados no texto.



## CAPÍTULO I

### 1- INTRODUÇÃO

#### 1.1. APRESENTAÇÃO

A Engenharia de Estruturas no Brasil, tem tradição em determinados tipos de construções, porém, a área de estruturas de aço não apresentou, nas últimas décadas, um desenvolvimento significativo embora a quantidade destas construções realizadas nas grandes metrópoles tenha sido significativa. No final da década de oitenta houve uma mudança considerável na filosofia do dimensionamento destas estruturas, devido principalmente à reformulação da norma NB14/86-Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios que fixa as condições que devem ser obedecidas no projeto, na execução e na inspeção de estruturas de aço para edifícios, executados com perfis laminados ou soldados, não híbridos e com ligações feitas por parafusos ou solda e que passou a ser baseada no "MÉTODO DOS ESTADOS LIMITES".

Portanto, uma das metas deste trabalho é procurar esclarecer os procedimentos normativos recomendados para os elementos fletidos por meio do desenvolvimento teórico dos critérios para o dimensionamento destes elementos.

## 1.2- PROJETO COM ESTRUTURAS DE AÇO

Uma das fases mais importante nas estruturas de aço, consiste na elaboração do projeto estrutural. Cabe ao projetista da estrutura proceder ao desenvolvimento de alguns passos importantes, tais como:

- a) Seleção do tipo de estrutura;
- b) Tipo do aço a ser empregado;
- c) Determinação das ações que atuam na Estrutura;
- d) Determinação dos esforços internos nos componentes estruturais;
- e) Cargas nas Fundações;
- f) Especificações de parafusos e soldas [26, 131].
- g) Ligações dos elementos estruturais.

O Engenheiro Civil, que tem como compromisso projetar uma estrutura segura e econômica, esbarra num dilema onde o aumento da segurança implica geralmente no aumento do custo, e ao contrário, uma redução na segurança raras vezes pode fornecer uma redução no custo. Sendo o projeto uma arte mais do que uma ciência, não é possível limitar a liberdade do projetista. Então, por mais afinados que sejam os conhecimentos científicos, não se deve prescindir dos resultados práticos e das exigências econômicas, devendo portanto existir uma espécie de compromisso entre a teoria e a prática [188].

Alguns aspectos tais como: sobrecargas imprevistas, improváveis deficiências do cálculo estrutural, possíveis defeitos de fabricação dos materiais empregados, defeitos de construção como a imperfeição dos vínculos, cargas não centradas, instalação inadequada de parafusos, soldagem mal executada, corrosão atmosférica, ações climáticas, ataques químicos, etc, constituem aspectos importantes que se não forem analisados com os devidos cuidados e acompanhados de uma orientação satisfatória poderão transformar o projeto estrutural sem segurança e comprometer o desempenho de estrutura [188].

Os elementos estruturais componentes de uma estrutura de aço, ao serem definidos no arranjo estrutural, passam a receber as ações aplicadas, dando origem às reações que por sua vez são transmitidas às fundações. A necessidade do conhecimento das ações aplicadas está intimamente aliada com a experiência profissional do projetista sendo que o mesmo precisa estar em consonância direta com as recomendações normativas.

Normalmente, o trabalho de avaliação da natureza e da intensidade das ações que podem atuar em uma estrutura não é perfeito, isto porque algumas variáveis tais como a localização geográfica e até mesmo a finalidade para o qual ela foi projetada se não forem levadas em conta na análise estrutural, poderão influenciar na segurança e como isso também não se terá uma boa visualização do caminho que estas ações irão percorrer sobre os elementos estruturais [36, 54, 95, 115, 119, 121, 154].

Para as estruturas brasileiras devem ser consultadas as normas NBR-8681, [9] que trata das Ações e Segurança nas Estruturas, e a NBR-8800, [12] Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios em seu ANEXO B.

Idealizado o modelo estrutural que irá resistir às ações, os elementos estruturais, podem ter denominações próprias tais como: vigas, arcos, treliças, tesouras,

colunas, cabos, lajes, placas, cascas, blocos, etc. Nesses elementos estruturais os esforços internos tais como: tração, compressão, flexão, torção, corte ou mesmo uma combinação destes esforços, terão determinada a sua ordem de grandeza pelas teorias clássicas da análise estrutural, em muitos casos com emprego de computadores [36].

A qualidade do aço empregado na estrutura deverá ser rigorosamente analisada pelos testes de controle de qualidade, pois com isso oferecerá a quem está projetando, confiança nos parâmetros a serem adotados para o dimensionamento e a verificação da estabilidade da estrutura. O Anexo A da NBR-8800 apresenta as recomendações aplicáveis aos materiais que normalmente são empregados nas construções em aço.

### 1.3- A SEGURANÇA NO DIMENSIONAMENTO

Os esforços que ocorrem nas estruturas de aço podem ser determinados por meio da análise elástica ou pela análise elasto-plástica, e a introdução da segurança pode ser realizada por um dos seguintes métodos de dimensionamento:

- 1) O Método das Tensões Admissíveis;
- 2) O Método Plástico;
- 3) O Método dos Estados Limites.

#### 1.3.1- O Método das Tensões Admissíveis

Este é um método tradicional e tem sido o mais usado nos últimos 90 anos. De acordo com esse método as estruturas são analisadas pela teoria elástica e as seções são dimensionadas de modo que as tensões, chamadas de admissíveis, não sejam ultrapassadas. As tensões admissíveis são uma fração da tensão de início do escoamento do aço, ou

da perda de estabilidade do elemento estrutural sendo obtido por análise estatística aplicada a um grande número de resultados de ensaios. O ensaio de tração, com corpo de prova padronizado, é o teste usado para a determinação das principais propriedades dos aços estruturais, incluindo o limite de escoamento. Na Figura 1.1 é mostrado um diagrama típico tensão-deformação de um aço estrutural com os resultados obtidos em um ensaio de tração [7, 36, 119]. A tensão crítica que caracteriza a perda de estabilidade é obtida por meio de ensaios de compressão.

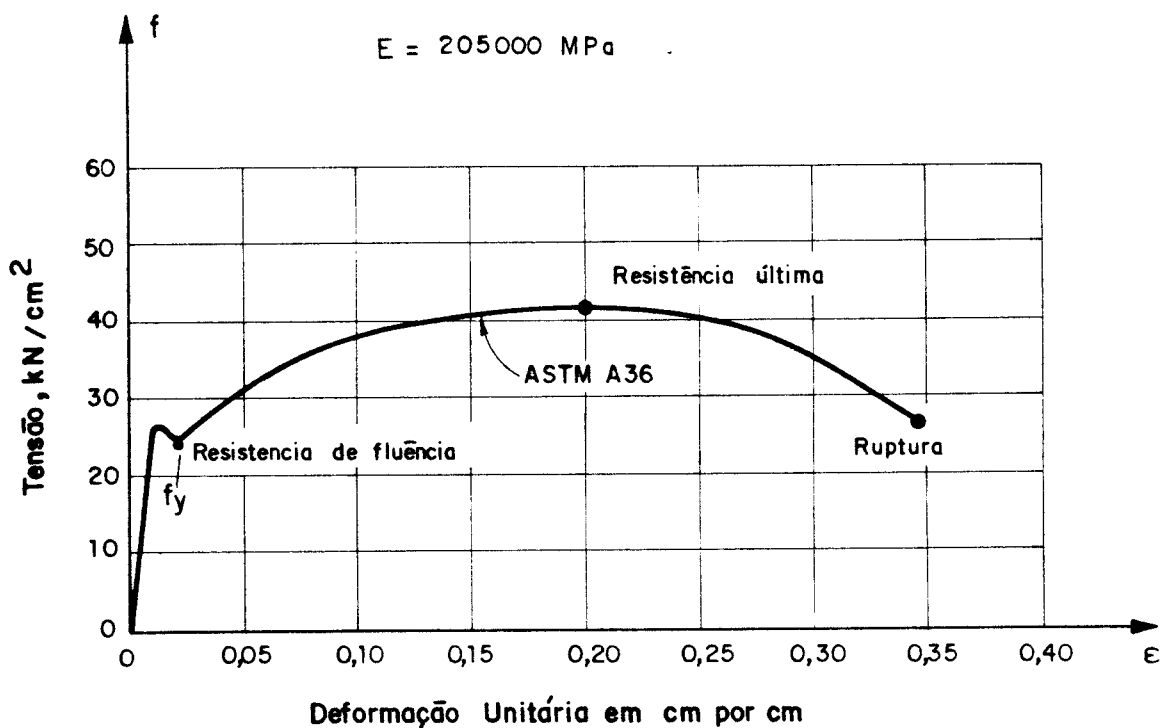


FIG. 1.1 - Diagrama típico tensão-deformação para o aço estrutural ASTM A-36 [36]

O método das Tensões Admissíveis é também conhecido como: PROJETO DAS TENSÕES ADMISSÍVEIS, PROJETO DE CARGAS DE SEGURANÇA ou PROJETO ELÁSTICO. Neste método em termos de uma viga, por exemplo, o critério de segurança aplicado à região tracionada pode ser expresso por:

$$f_b = \frac{M}{W} \leq F_b = \frac{f_y}{\gamma_S} \quad (1.1)$$

onde:

$f_b$  - Tensão na fibra tracionada extrema da seção transversal da viga

$M$  - Momento atuante na seção em análise

$W$  - Módulo de resistência à flexão

$f_y$  - Limite de escoamento

$F_b$  - Tensão admissível na flexão

$\gamma_S$  - Fator de segurança  $\geq 1,0$

Na Figura 1.2 pode-se observar, por exemplo, o diagrama típico de distribuição das tensões normais devidas à flexão na seção de um perfil de aço.

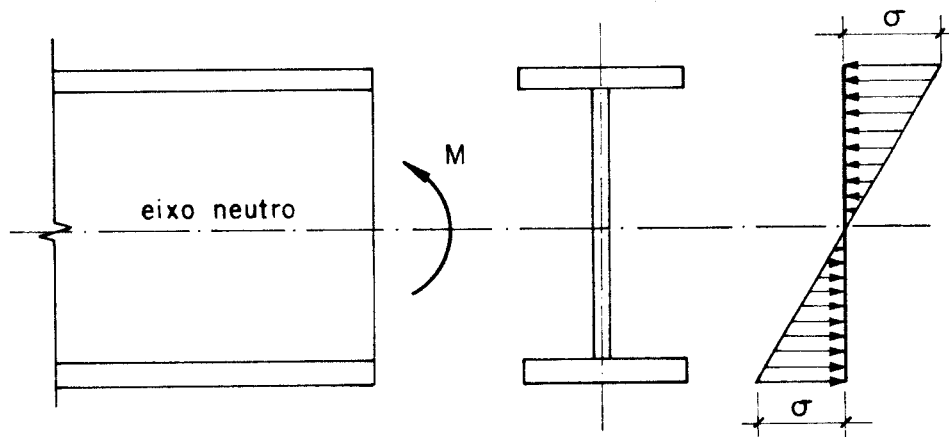


FIG. 1.2 - Diagrama de Tensões normais na flexão [95, 115, 164]

É importante observar que os valores das tensões admissíveis para os diferentes esforços (tração, compressão, flexão, corte, torção) estão prescritos nas especificações normativas [7].

### 1.3.2- O Método Plástico [21, 36, 95, 154]

Os fundamentos do projeto plástico, datam de mais de 40 anos. A aplicação da análise plástica ao projeto estrutural parece ter sido iniciada pelo Dr. Gabor Kazinczy, citado por BEEDLE [21] que em 1914 publicou resultados experimentais obtidos em vigas esgastadas [15].

Na Alemanha o método foi formalmente proposto em 1920 e em 1932 já se faziam vários trabalhos teóricos e experimentais através de H. MAIER LEIBNITZ, citado por BRESLER, LIN e SCALZI [36].

Em 1936 começou na Inglaterra uma investigação intensiva do comportamento inelástico das estruturas através do professor J.F. BAKER [36], e já em 1945 o método plástico tinha aceitação em muitos países da Europa e América do Sul [36].

Em 1961 o Instituto Americano da Construção com Aço (AISC) fazia uma revisão em suas especificações incluindo o método plástico e os progressos que a análise plástica teve e que foram obtidos particularmente na Universidade de Brown nos EUA, por SYMONDS, P.S. e NEAL, BG (1951) [36].

A teoria básica do método plástico permite explicar a redistribuição dos esforços ao longo da estrutura. No caso do aço a ductilidade e a capacidade de fluir plasticamente permitem absorver grandes deformações, além do limite elástico, sem o perigo de ocorrer ruptura.

No dimensionamento plástico a verificação da segurança de um elemento estrutural é feita multiplicando-se as cargas de trabalho por um coeficiente para se obter as chamadas cargas últimas (máxima carga que a estrutura pode suportar). Por exemplo, no caso de uma viga, o critério de segurança para o projeto pode ser expresso da seguinte maneira:

$$M(\gamma_S) \leq M_u \quad (1.2)$$

onde:

$M$  = momento devido ao carregamento

$\gamma_S$  = fator de segurança

$M_u$  = momento máximo que a viga suporta

### 1.3.3- O Método dos Estados Limites

Durante os últimos anos uma crescente atenção tem sido dada à avaliação das propriedades inelásticas dos materiais e ao cálculo direto da resistência última de um elemento estrutural. Surgia assim o método dos Estados Limites.

Pode-se afirmar que Estado Limite de uma Estrutura, é o estado em que ela deixa de satisfazer as exigências de exploração, ou seja: a estrutura, perde a capacidade de resistir as influências externas ou por sofrer uma deformação excessiva ou quando ela atinge a ruína. Portanto para que a estrutura tenha um comportamento adequado é necessário que não sejam atingidos os chamados Estados Limites [154].

As condições para que se possa fazer a verificação dos elementos estruturais definem dois tipos de Estados Limites: Os Estados Limites Últimos, relacionados com a segurança, sendo caracterizados por: Resistência máxima dúctil, comumente chamada de resistência plástica, flambagem, fadiga, fratura e deslizamento.

Os Estados Limites de utilização relacionados com a ocupação da edificação, como deformação, vibração, rachaduras, corrosão e durabilidade [8, 51, 61, 113, 154].

Com relação as bases para o dimensionamento, a NBR-8800 [12] esclarece que o método dos estados limites, utilizado para o dimensionamento dos componentes de uma estrutura (barras, e componentes estruturais) exige que nenhum estado limite aplicável seja excedido quando a estrutura for submetida a todas as combinações apropriadas de ações.



Segundo ainda a NBR 8800 [12], as ações a serem adotadas no projeto das estruturas de aço e seus componentes são estipuladas pelas normas apropriadas, bem como as condições a serem preenchidas pela estrutura. As ações devem ser tomadas como nominais, devendo ser consideradas os seguintes tipos de ações nominais:

- a) Ações permanentes
- b) Ações variáveis
- c) Ações excepcionais

O estabelecimento das regras de combinação das ações é realizado segundo a NBR-8681 [11], e o critério geral para os requisitos de segurança neste caso pode ser expresso pela seguinte relação:

$$\phi R_n \geq \gamma_0 \sum_{i=1}^n \gamma_i Q_i \quad (1.3)$$

O lado esquerdo desta expressão se refere à resistência nominal do elemento estrutural, e o lado direito define os efeitos das ações. Um projeto estrutural é considerado satisfatório quando a resistência nominal minorada é maior ou igual ao efeito das ações majoradas. Os efeitos do carregamento tais como: força axial, momento fletor, força cortante e torção são obtidos das cargas ou intensidades de cargas  $Q$ , pela análise estrutural, e são relacionados através do coeficiente  $\gamma$  sendo que cada uma dessas cargas é multiplicada por um fator que reflete as incertezas inerentes às ações e seus efeitos. O somatório dos efeitos das ações é também multiplicado por um fator  $\gamma_0$ , que representa as incertezas inerentes à análise estrutural.

Os valores dos coeficientes  $\phi$ ,  $\gamma_0$  e  $\gamma_i$  podem ser consultados nas normas NBR 8681 [11] e NBR 8800 [12].

## 1.4- AS VIGAS DE AÇO

### 1.4.1- O Aço como Material Estrutural

Os aços empregados para construção civil são ligas que geralmente contém 98% de ferro e menos que 1% de carbono, sendo um material bem conhecido e, com certeza o mais utilizado dos metais devido a fatores diversos tais como: [24, 119 e 164].

a) Alta Resistência - A alta resistência do aço pode ser observada nos diversos estados de sollicitação, quando os elementos estruturais suportam grandes esforços, apesar de possuírem pequena área na seção transversal. Com isso as estruturas de aço apesar do seu elevado peso específico ( $77\text{kN/m}^3$ ) são mais leves do que as formadas por outros materiais.

b) Maior Confiabilidade - Os elementos de aço oferecem uma grande confiabilidade, pelo fato do material pode ser admitido como homogêneo, com limites de escoamento, ruptura, módulo de elasticidade e as demais propriedades mecânicas bem definidas, ou seja, elas não mudam apreciavelmente com o tempo, tampouco ao longo do elemento ou com o tipo de sollicitação aplicada.

c) Diminuição do Tempo de Execução da Construção com Aço - As estruturas de aço são fabricadas em indústrias, através de processo seriado, que faz com que, além da montagem ser mecanizada, seja menor o prazo final da construção.

d) Facilidade de Ampliação das Estruturas Existentes - É também frequente a necessidade de ampliação de estruturas industriais, ocasião em que a expansão deve ser executada sem intervir nas outras atividades; esta facilidade é obtida, principalmente, devido à precisão e menores dimensões das peças e à fabricação fora do local da obra.

e) Limpeza da Construção - Sem a necessidade de formas e escoramentos a obra torna-se mais limpa e com isso há redução do volume de desperdícios.

f) Possibilidade de Reutilização - Os elementos de aço podem ser desmontados e transferidos facilmente para outro local, ou seja, torna-se possível a reutilização ou substituição de diversos elementos da estrutura.

g) Redução da Carga nas Fundações - Devido ao seu baixo peso, em obras de grande porte consegue-se menor carga nas fundações, o que também ajuda na economia.

Evidentemente as estruturas de aço não poderiam deixar de apresentar as suas desvantagens como: maior susceptibilidade de corrosão, fogo, que podem influenciar não só o custo de manutenção mas também na decisão final pela opção em relação ao aço [119, 164].

Cabe salientar, entretanto, que o procedimento para a escolha da melhor alternativa deverá ser feita numa análise com critério e sensibilidade, baseada em anteprojetos específicos para cada solução estrutural, aliados evidentemente a um estudo de viabilidade econômica e confiabilidade, sendo que no final a experiência de quem projeta e calcula contribuirão para a solução mais apropriada à estrutura [134].

#### 1.4.2- Os Perfis

As vigas, são os elementos estruturais, que aparecem em maior incidência nas estruturas do aço, como pode ser visto na figura 1.3, que representa um pórtico de edifício. Nesta figura as colunas, vigas, viga-colunas e as barras tracionadas são representadas pelas letras C, V, VC e T respectivamente [95].

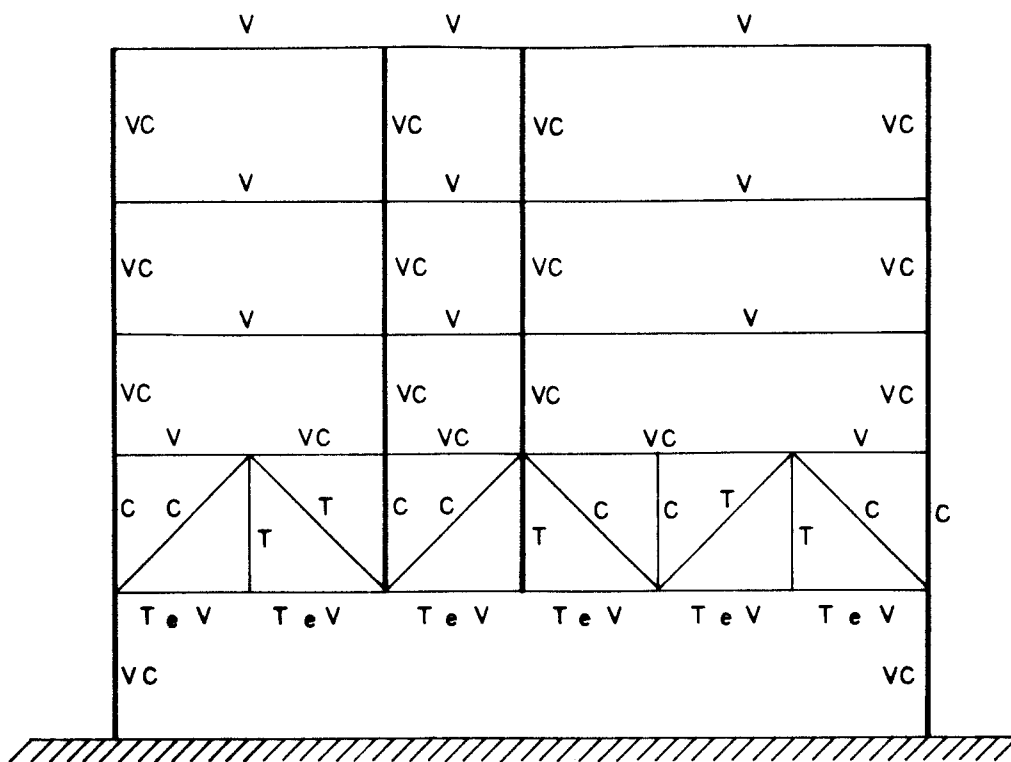


FIG 1.3- Quadros Estruturais Compostos de Vigas (V), Colunas (C), Barras Tracionadas (T) e Viga Colunas (VC)  
[95]

Os principais perfis de aço são classificados em:

- laminados
- soldados
- compostos
- conformados a frio (chapas dobradas)

a) Perfis Laminados - Esses perfis são utilizados em estruturas de edifícios, pontes e viadutos. Os principais perfis laminados no Brasil, seguem os padrões norte-americano e os tipos disponíveis no mercado são:

-Perfil H, Perfil I, Perfil U, Cantoneira L [157].

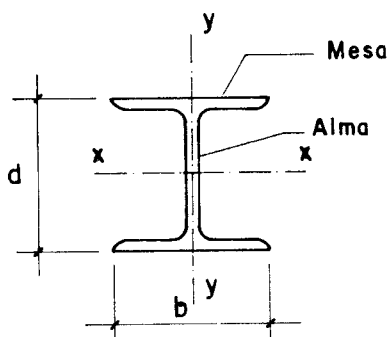
Futuramente a AÇOMINAS [2] produzirá também os perfis denominados de abas paralelas cujos tipos são os seguintes:

-Perfis H de Faces Paralelas Pesadas (HPP)

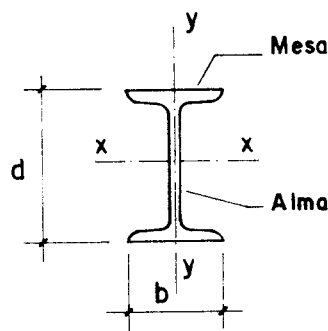
-Perfis H de Faces Paralelas Médios (HPM)

-Perfis H de Faces Paralelas Leves (HPL)

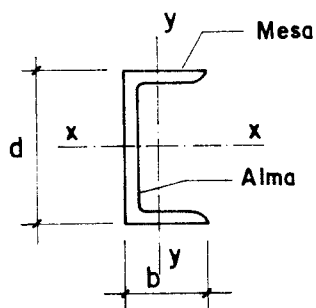
-Perfis I de Faces Paralelas (IP)



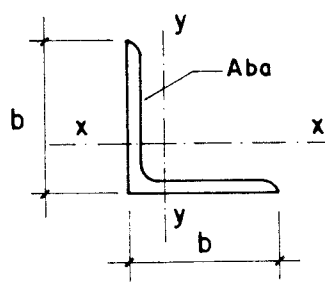
PERFIL H - PADRÃO AMERICANO



PERFIL I - PADRÃO AMERICANO



PERFIL U - PADRÃO AMERICANO



CANTONEIRA DE ABAS IGUAIS  
PADRÃO AMERICANO

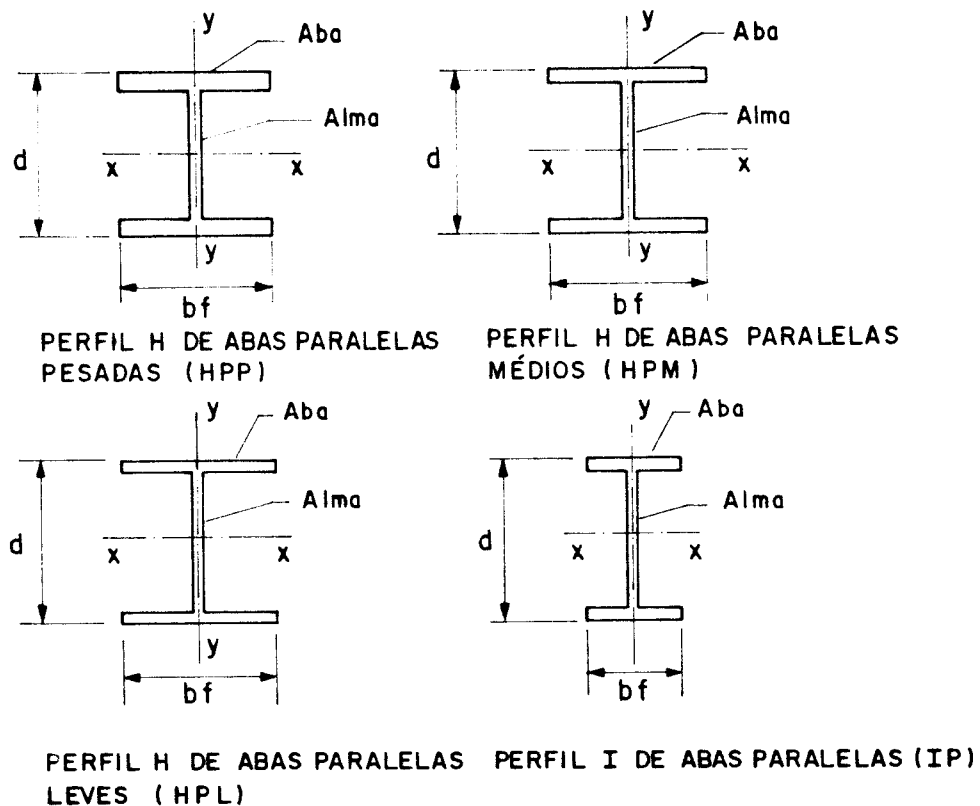


FIG. 1.4- Seções Típicas de Perfis Laminados Estruturais [53, 1, 2, 3]

b) Perfis Soldados - São seções estruturais compostas de chapas soldadas que apresentam um largo emprego nas estruturas metálicas em virtude da grande versatilidade de combinação de espessuras, alturas e larguras.

c) Perfis Compostos - São seções formadas pela associação de perfis laminados ou soldados e de chapas de aço.

Normalmente estas seções são utilizadas quando existem uma limitação da capacidade de resistência ou de dimensões dos perfis simples. No Brasil, o maior perfil I laminado tem a altura de 508mm e o maior momento de Inércia da ordem de  $69220\text{cm}^4$ . Quando surge a necessidade de uma seção ou de uma maior inércia utilizam-se os perfis compostos, respeitando

as exigências construtivas e mesmo a questão da estabilidade estrutural [2, 157].

d) Perfis de Chapa Fina Dobrada a Frio - São perfis formados a partir do dobramento de chapas de aço. Esses perfis são indicados para elementos estruturais quando o uso dos perfis

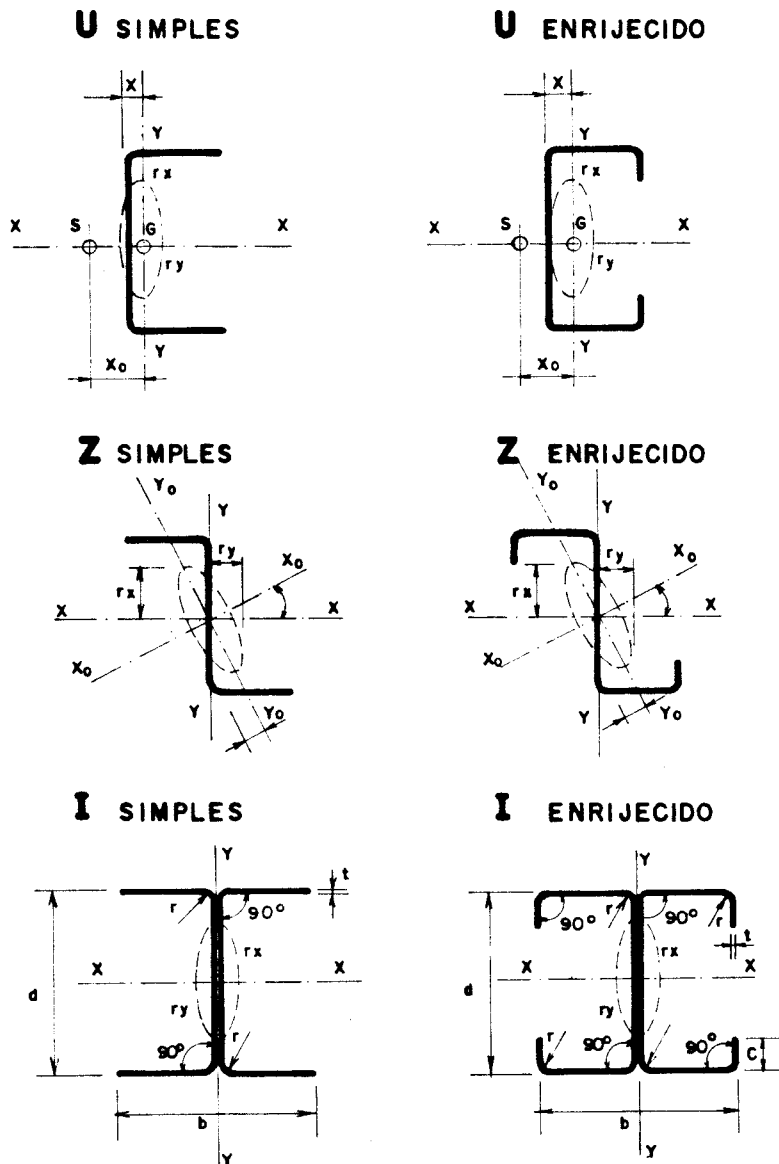


FIG. 1.5 - Perfis de Chapa Dobrada [144, 165]

laminados ou soldados é anti-econômico. Por serem seções formadas de chapas finas e que dependendo da relação largura/espessura, são mais susceptíveis a flambagem local, o dimensionamento desses perfis não deve ser realizado pelas normas destinadas aos perfis laminados ou soldados.

São largamente utilizados na execução de estruturas leves e em vigas de coberturas e de tapamento lateral dos edifícios [36, 157].

#### 1.4.3- Emprego e Utilização

As vigas, possuem designações particulares que dependem da posição estrutural que ocupam, [121, 154, 164]. As mais empregadas são:

a) Principais [121] - São vigas que com frequência servem de apoio para outras vigas. Comumente se emprega os perfis em forma de I para essas vigas (Figura 1.6).

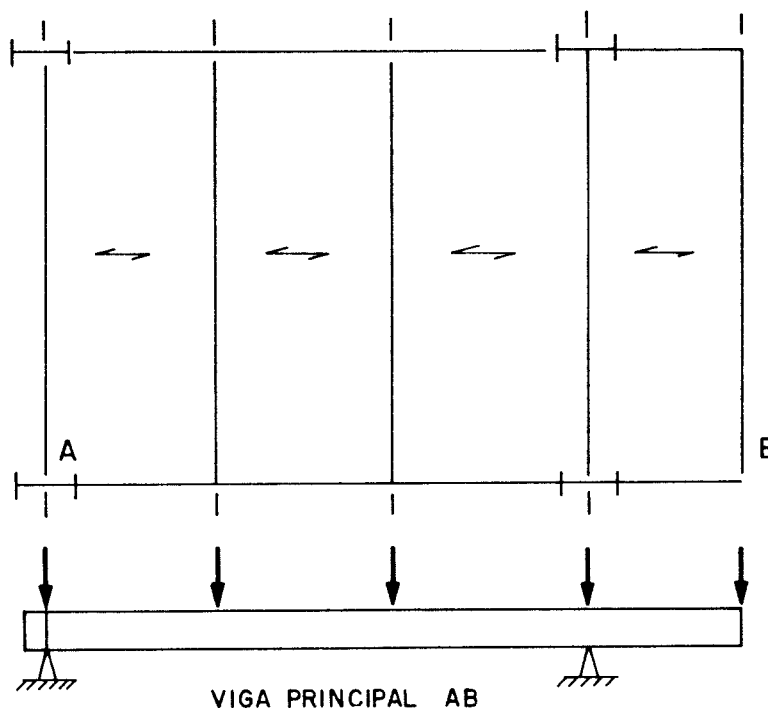


Figura 1.6 - Vigamento em projeção [55]



b) Secundárias [128] - São vigas destinadas a suportar as reações das lajes de edifícios, dos tabuleiros das pontes metálicas e mesmo dos pisos dos edifícios industriais. Normalmente se apoiam nas vigas principais (Figura 1.7; 1.8).

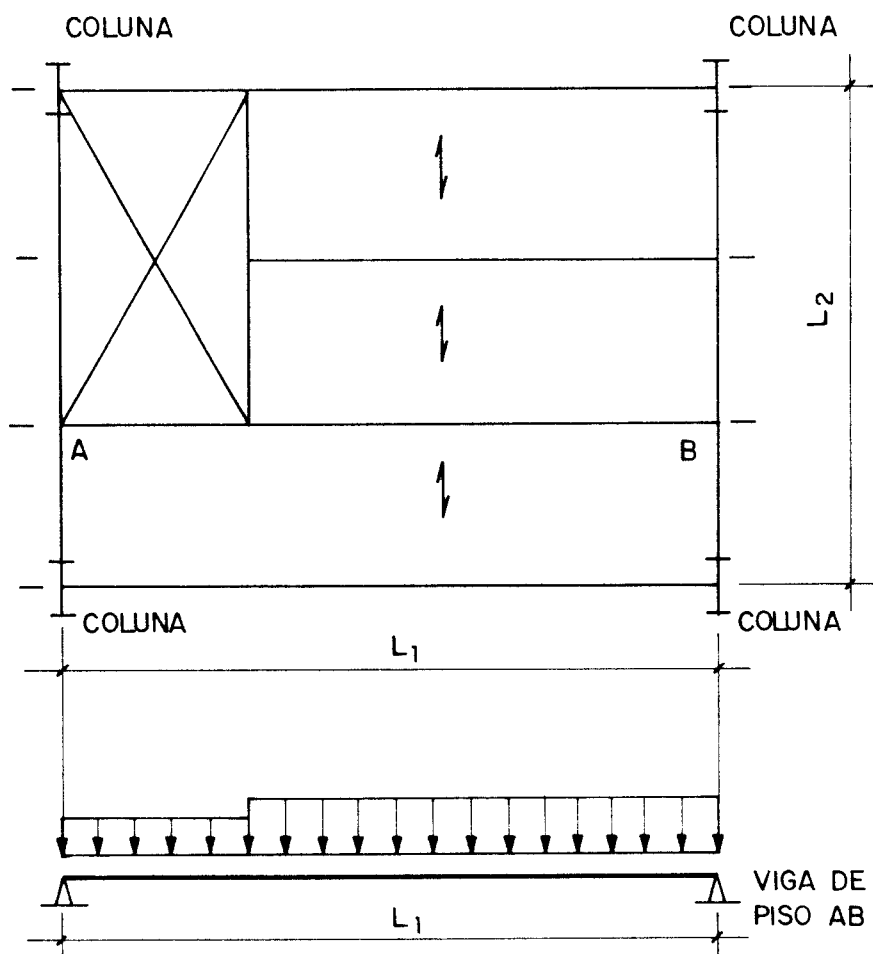


Figura 1.7 - Vigamento em tórno de aberturas [55]

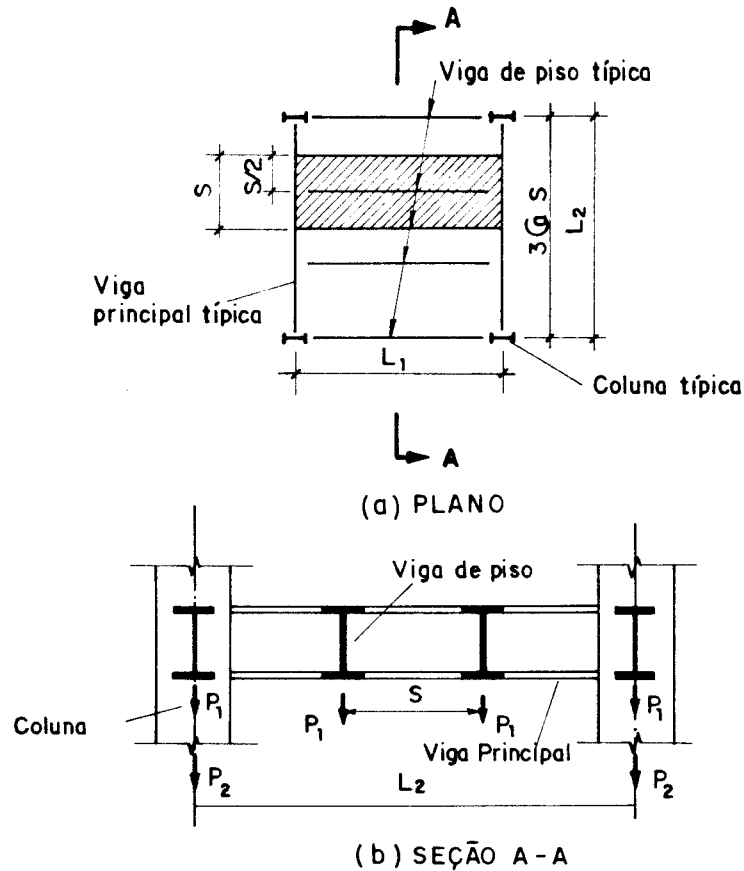


Figura 1.8 - Vigamento plano de aço mostrando a distribuição das ações vivas [95]

c) Traves [164] - São vigas leves que suportam um piso (Figura 1.9)

d) Vergas [55, 164] - São vigas colocadas por cima das aberturas entre portas e janelas dos edifícios e são destinadas a suportar o peso da parede ou alguma ação sobre a abertura. As vergas podem ser formadas por chapas, cantoneiras, cantoneiras duplas, tês, seção em I com chapas etc (Figura 1.10).

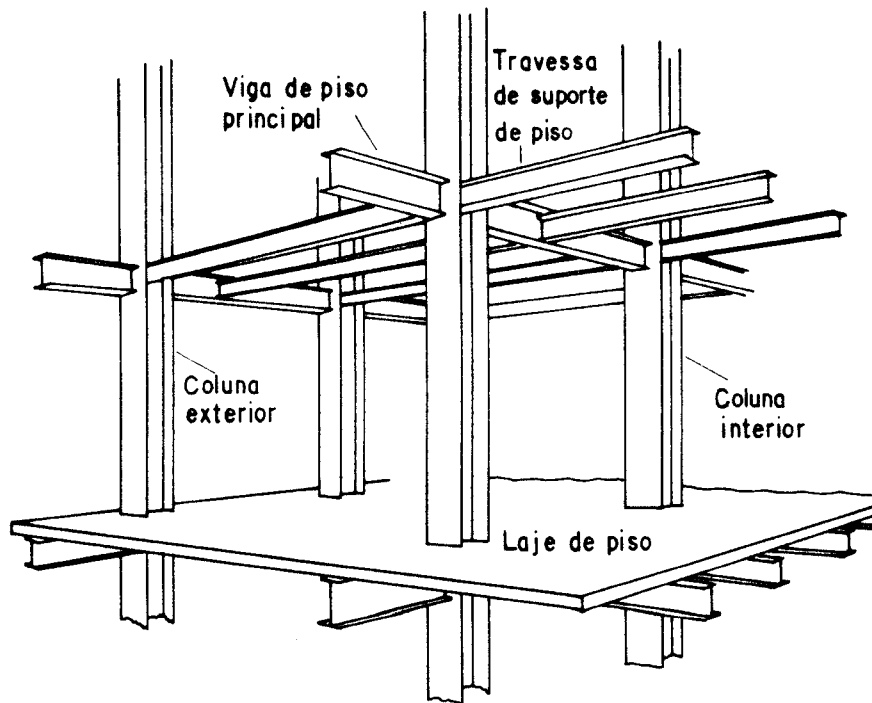


Figura 1.9 - Sistema típico de vigamento de edifício de vários andares [95]

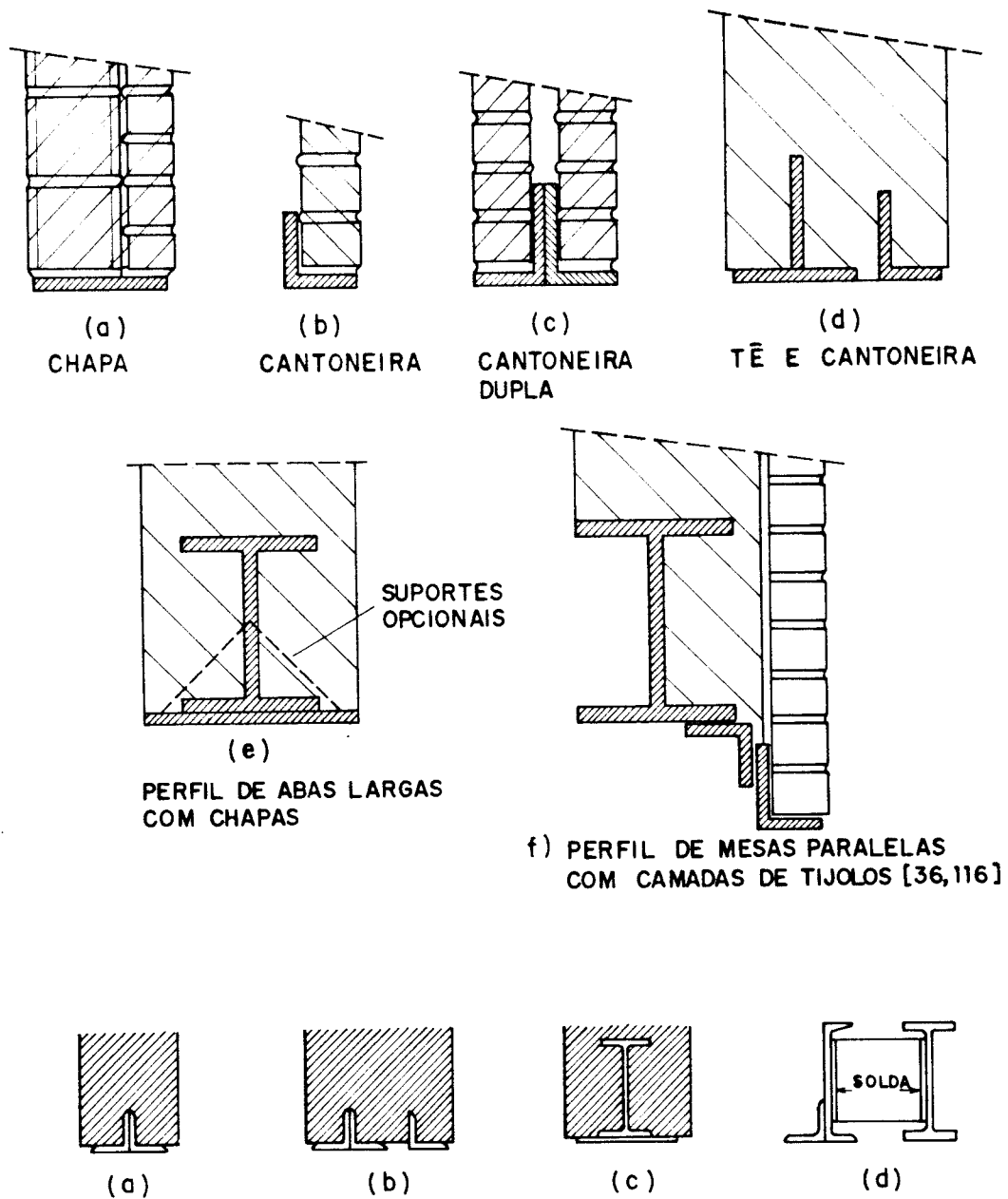


Figura 1.10 - Vergas [55, 164]

e) Terças [164] - São vigas destinadas a suportar as telhas das coberturas. Costumam ser apoiadas nas vigas dos pórticos ou nas treliças (Figura 1.11).

f) Longarinas [164] - São vigas leves que geralmente suportam o peso das telhas do fechamento lateral exterior de um edifício (Figura 1.11)

g) Vigas com Alma Aberta [115, 164] - Essas vigas, são treliças pré-fabricadas, utilizadas para suportar diretamente os pisos ou telhados nos edifícios. As almas dessas vigas são abertas e permitem a passagem de tubulação, de serviço (Figura 1.12).

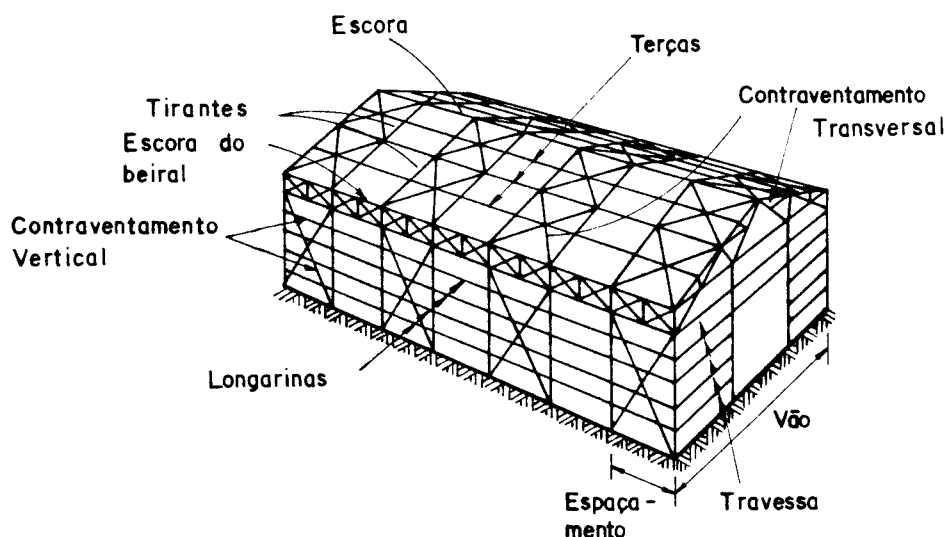


Figura 1.11 - Vigamento típico de treliças em um sistema de colunas de um edifício industrial [115].

h) Mistas [114] - Vigas mistas para efeito da maioria das normas em vigor, consistem de perfis "I" de aço, suportando laje de concreto em sua mesa superior, fundida "in loco" no seu todo ou em parte, havendo ligação entre a viga de aço e a laje de concreto, de tal forma que funcionam como um

conjunto para resistir a flexão em torno de um eixo perpendicular ao plano médio da alma (Figura 1.13)

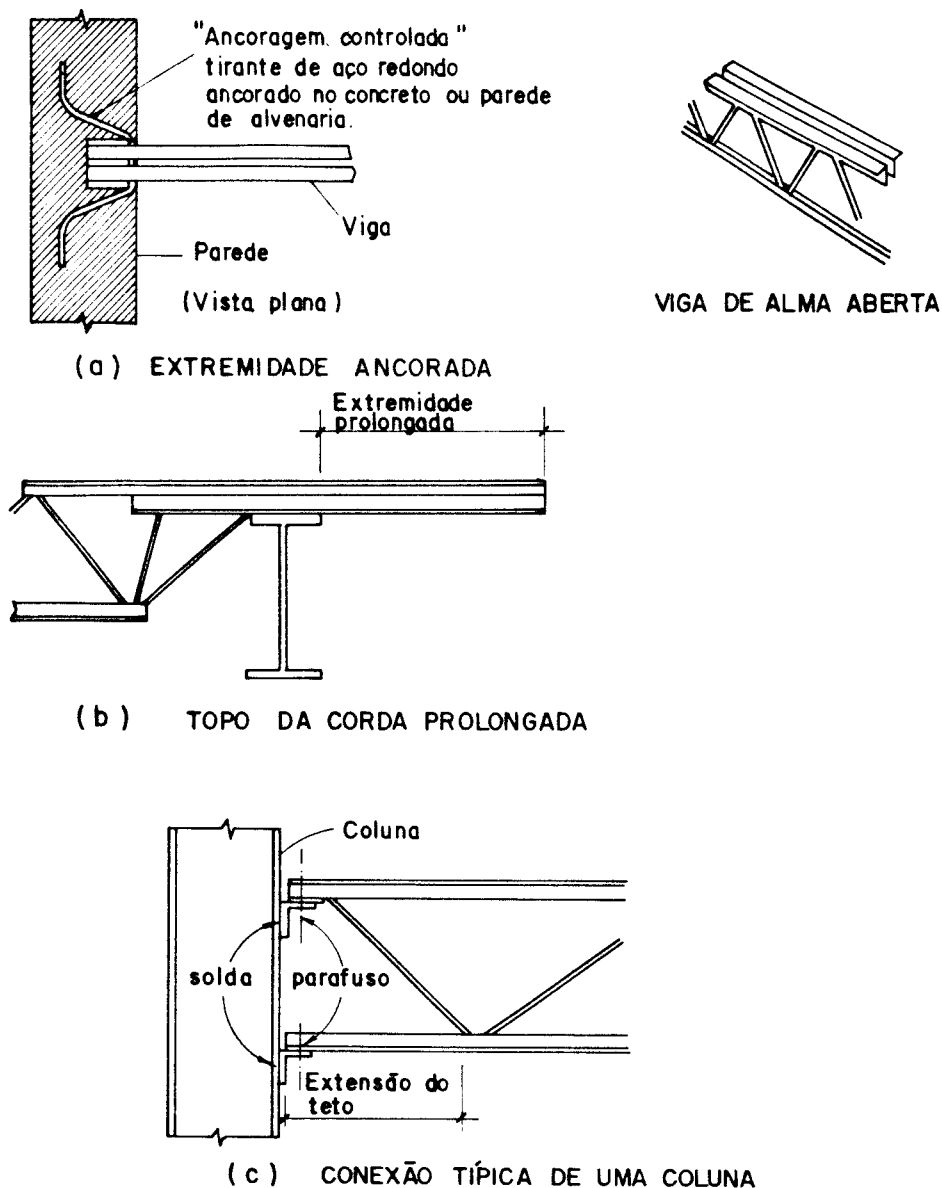
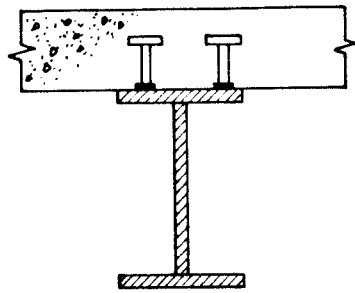
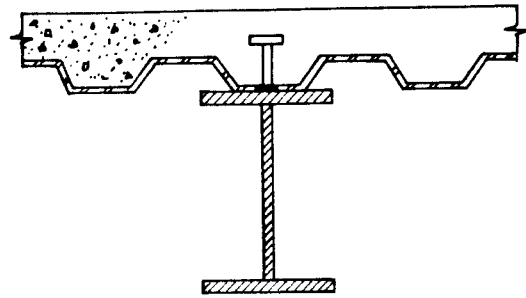


Figura 1.12 - Vigas de aço com alma aberta [115, 164]

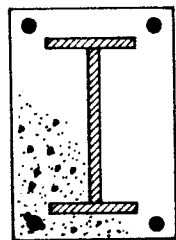
i) De Rolamento [2] - São vigas destinadas a suportar as cargas das pontes rolantes, que se locomovem sobre trilhos posicionados na mesa superior (Figura 1.14).



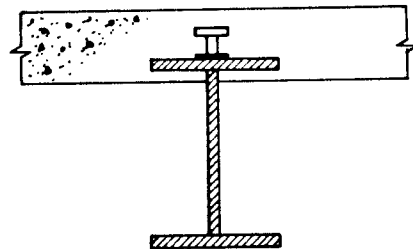
(a) LAJE COM FACE INFERIOR PLANA



(b) LAJE COM FORMA DE AÇO INCORPORADA



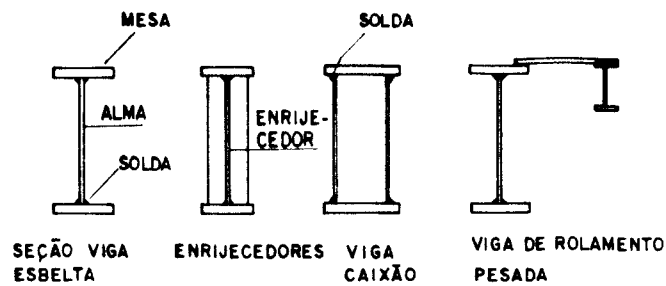
(c) VIGA DE AÇO TOTALMENTE EMBUTIDA NO CONCRETO



(d) VIGA DE AÇO SEMI-EMBTIDA NO CONCRETO

Figura 1.13 - Tipos mais usuais de seções mistas [114]

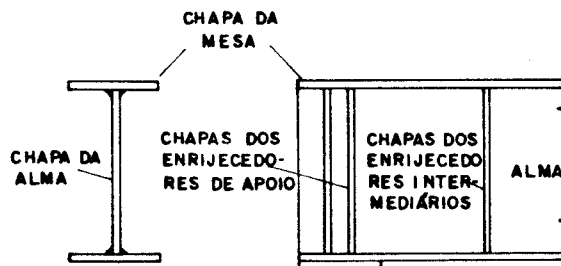
j) Esbeltas - São vigas em que a relação entre a altura e espessura da alma ultrapassa determinados limites. [32, 115, 154]. (Figura 1.14).



a) Seções Fabricadas de Vigas Esbeltas.



b) Elevação Lateral de uma Viga Esbelta



a) Seção Transversal

b) Elevação da Extremidade do Vão

Figura 1.14 - Vigas Esbeltas [113, 154]

k) Castelo, Alveolar ou Colmeia - São vigas obtidas a partir do recorte e soldagem de perfis laminados em forma de zigue-zague. Essas vigas devido a sua composição, alcançam maior altura e portanto maiores momentos de inércia. Essas vigas permitem, através da alma, a passagem dos elementos necessários em uma edificação tais como eletrodutos, tubos etc. [2, 104] (Figura 1.15).



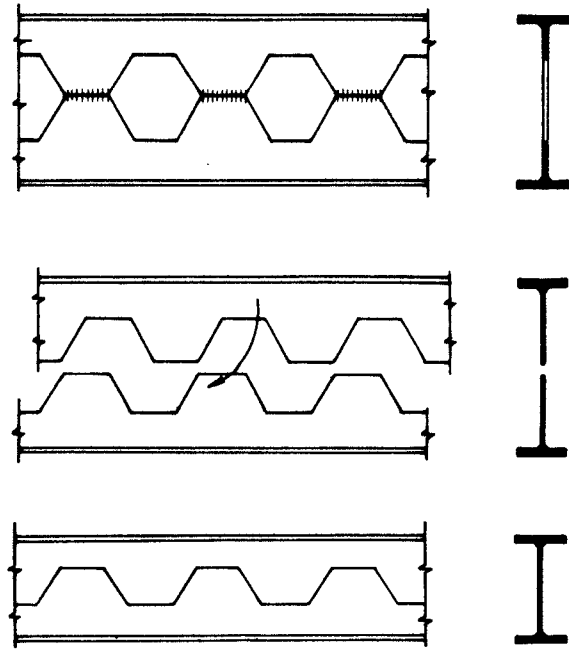


Figura 1.15 - Vigas Castelo, Alveolar ou Comeia [2]

## CAPÍTULO II

### 2- FLEXÃO EM PERFIS DE AÇO

#### 2.1- EVOLUÇÃO DA TEORIA E DOS PERFIS DE AÇO

A literatura sobre o assunto é vasta e serão comentados apenas aqueles trabalhos ou autores que marcaram época na Engenharia das Estruturas e que deram uma contribuição significativa para este assunto.

LEONARDO DA VINCI [1452-1519], citado por TIMOSHENKO [167] com destaque pelos seus trabalhos, chegou a conclusão que, ao realizar diversos ensaios em vigas bem longas, de mesma altura e largura, a resistência das mesmas variava inversamente ao comprimento e diretamente com a largura.

GALILEU GALILEI, (1564-1642), [167] realizou um trabalho interessante de mecânica dos materiais, através dos seus diálogos no famoso livro "Two New Sciences" (English translation by Henry Crew and Afonso de Salvio, The Macmillan Company, New York, 1933), e chegou a conclusão, através de estudos realizados numa viga em balanço, que ao ocorrer a fratura do sólido, a sua resistência era uniformemente distribuída e ao assumir que a barra tinha

seção transversal retangular, e o material obedecendo a Lei de Hooke, ao romper se obteria a distribuição das tensões conforme a figura 2.1.

Portanto, em relação à Teoria da Flexão ele deu uma contribuição notável com as conclusões obtidas de seus experimentos.

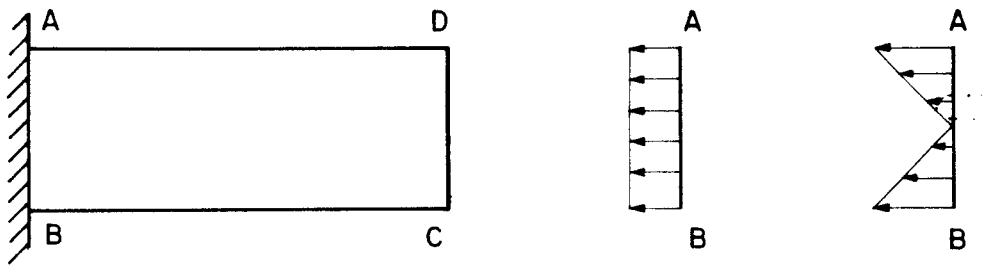


FIG. 2.1 - Ilustração Mostrando o Teste de Flexão de Galileu

MARIOTE, E. (1620-1684), [167] nasceu em Dijon e morreu em Paris. Teve que projetar uma linha de tubulação, para permitir o fornecimento de água ao Palácio de Versailles, e precisou verificar a resistência à flexão das vigas que faziam parte do mesmo.

GIRARD, P.S. (1765-1836), [167] engenheiro francês nasceu em Caen e morreu em Paris. Em torno de 1798, ao publicar o primeiro livro de Resistência dos Materiais, e uma discussão sobre a Flexão de Vigas.

BERNOULLI (1705), [167] introduziu o conceito de que a resistência de uma viga na flexão é proporcional à sua curvatura.

NAVIER, L.M.E.(1785-1836), [167] no 3º artigo do seu livro de Resistência dos Materiais faz a discussão da flexão de barras prismáticas e admite que as seções transversais

das vigas permanecem planas durante a flexão e que o eixo neutro passa sempre pelo centróide da seção transversal das mesmas.

SAINT VENANT, (1797-1886), [167] matemático francês nasceu em Fortaiseau, deu uma contribuição notável à Resistência dos Materiais, especialmente para a teoria da flexão das barras, através de suas notas escritas na 3ª edição chamada de "Resumé des Leçons" Paris 1864, que representa uma coleção de notas no curso que ele litografou denominado "Leçons de mecanique applique faites par interim par M de st-Venant (1837-1838).

EULER, (1707-1783), [167] um matemático que foi interessado principalmente na forma geométrica das curvas elásticas. Realizou vários estudos sobre flexão de vigas definindo para cada uma delas os vários tipos de curvas elásticas. Em 1757 publicou um trabalho referente ao problema da flambagem de colunas onde, através da equação da linha elástica, fez a determinação da famosa carga crítica de flambagem.

JOURAWSKI, (1821-1891), [167] apresentou uma solução para a análise das tensões de cisalhamento na flexão.

A Torção de barras foi investigada preliminarmente no século XVIII por Coulomb, C.A. e Young, T. Os primeiros tratamentos rigorosos sobre torção, constante de empenamento e flexão foram analisados por VENANT, S. em 1853. Em 1905 - TIMOSHENKO, S.P. apresentou sua investigação sobre torção não uniforme de vigas de seção transversal em I, analisando a flexão das mesas.

PRANDTL, L. e MICHELL, A.G.M. publicaram simultaneamente em 1899 um trabalho sobre a análise teórica da estabilidade lateral conforme foi mostrado por: TIMOSHENKO, S.P.; WAGNER, H. e CHWALLA, E. e outros.

Em sua obra MCGUIRE, [121] afirma que, com relação aos tipos de seções transversais empregadas em vigas, as cantoneiras de ferro foram as primeiras seções laminadas empregadas nos Estados Unidos, onde foram produzidas pela primeira vez, em 1819. Em 1849 a viga do tipo I foi introduzida por Zores na França, sendo que por volta de 1870, os americanos laminaram seções com até 375mm de altura bem como cantoneiras, seções em "U" e "T" feitas de ferro. As vigas denominadas de WF (wide flange = abas paralelas) foram laminadas por volta de 1900 e depois, com o passar do tempo, os fabricantes padronizaram as dimensões das seções desses elementos.

Segundo DERRY, e WILLIAMS, [56], em 1847 a primeira viga em ferro batido foi usada na sustentação de pisos. Elaborada por um engenheiro de Paris o seu valor como material de Construção foi defendido por Sr. Willian Fainbairn.

FERRAZ, [70] em seu trabalho afirma que por volta do século XVIII tem-se notícia de que foi instalada em Essone na França, o laminador de barras cuja concepção de calibragem permitiu obter as mais diversas seções transversais e no século XIX, durante um período de apenas 30 anos, de 1820 a 1850, surgiram as seções conhecidas até hoje.

Em 1896, surge na Inglaterra a concepção da Calibração Universal, por este motivo, durante muito tempo as vigas de abas largas paralelas eram chamados na Europa de "Vigas Grey".

Segundo BLEICH, [28] no ano de 1899, PRANDTL, e MICHELL, fizeram estudos da flambagem lateral de vigas de seções retangulares de altura limitada. Grande progresso foi dado por TIMOSHENKO, S.P, em seu famoso trabalho: "THEORY OF ELASTIC STABILITY" (1961) [169], que deu origem aos fundamentos da equação diferencial da torção em vigas de

seção transversal I duplamente simétrica. As investigações foram feitas com base na flambagem lateral de vigas I carregadas transversalmente.

Em 1913 o próprio TIMOSHENKO, estudou o fenômeno da estabilidade com a aplicação do método da energia para tratar dos problemas de flambagem.

WINTER, apresentou em 1941 fórmulas aproximadas para a flambagem lateral de vigas I, não simétricas usando o método da energia de acordo com Rayleigh-Ritz. As experiências, com perdas de estabilidade em vigas por "flambagem lateral" foram realizados por MOORE, em 1913, em uma série de testes realizados em vigas padrão I na flexão e mais tarde em 1932, KETCHUM, e DRAFFIN, realizaram testes similares em vigas leves, onde as mesmas indicaram o aparecimento de tensões críticas.

É importante frisar que os problemas que as vigas em aço apresentam são o da estabilidade lateral e da flambagem localizada nos elementos que compõem as respectivas seções transversais. Estes fatores tem se constituído, desde muito tempo, em objeto para uma série de investigações em diversos países, resultando numa extensa literatura sobre o assunto.

Outro marco importante no desenvolvimento das especificações da Engenharia Estrutural em Aço foi a concepção da filosofia do método das tensões admissíveis para o dimensionamento e para a verificação dos elementos estruturais.

Ressalta-se também que foi de grande importância para o desenvolvimento das Estruturas de Aço no mundo inteiro a fundação, em 1921, do Instituto Americano da Construção em Aço (AISC) com sede na cidade de Chicago, Estados Unidos, organização essa que é composta das seguintes categorias:

-Empresas Especializadas na fabricação e inspeção de aços estruturais.

-Membros associados que são produtores de artigos manufaturados.

-Membros profissionais individuais ou firmas que trabalham na prática de engenharia e arquitetura, onde também estão incluídos os professores de arquitetura e engenharia.

-Membros que participam através da realização de atividades de pesquisa, financiadas pelo próprio Instituto para possibilitar a publicação do manual de construção do aço [7,8].

Além disso o AISC faz publicações sobre: Especificações para Projeto, Fabricação e Inspeção de Estruturas de Aço para Edifícios, o Código de Padronização Prática para Edifícios e Pontes de Aço e também publica um importante periódico, "Engineering Journal and Modern Steel Construction" que contém artigos técnicos de projetistas, pesquisadores e professores.

Em 1961 as especificações do AISC com relação ao projeto de vigas foram adotadas no critério de resistência máxima (ou flambagem) bem como o das vigas esbeltas. O Projeto baseado no método plástico foi primeiramente aprovado pelo AISC em 1958, e incorporado em 1961. Em 1986 adotaram o método dos estados limites chamado de LRFD (Load and Resistance Factor Design).

Igualmente foi criado, por decreto lei de 1919, no Canadá a Associação Canadense de Normas Técnicas (CSA - Canadian Standard Association) passando a fazer parte, em 1973, do Conselho Nacional de Padronização. Esta associação reflete um consenso de produtores e usuários, incluindo fabricantes, consumidores, vendedores, e agencias governamentais. Como contribuição esta entidade elaborou em dezembro de 1984 a 3a. Edição do Projeto e Normalização para Estruturas de Aço de Edifícios baseado nos estados limites [39].

Como contribuição ao desenvolvimento das Estruturas de Aço através de trabalhos, pesquisas e mesmo normas técnicas destacam-se países como: Itália, França, Alemanha, Espanha, Bélgica, Suíça, Japão, e Inglaterra,

Destaca-se como especificação importante a ECCS-1981 (Research and Development in Steel Construction - 1a. Edição) e a ECCS - 1983 (European Recommendations for the fire Safety of Steel Structures - 1a. Edição).

Segundo GALAMBOS, [73] os trabalhos recentes que podem ser destacados, devido a sua importância, na verificação da estabilidade dos elementos fletidos, são os que tratam do problema da flambagem lateral com torção, que os próprios estudiosos do assunto consideram de formulação complexa. As pesquisas tem sido conduzidas desde a metade do século XIX, prosseguindo com JOHNSTON (1976), enquanto LEE (1960) TRAHAIR (1977) e NETHERCOT (1983) efetuaram revisões com desenvolvimentos mais modernos.

As teorias e aplicações da flambagem lateral com torção são amplamente relatados em alguns textos clássicos escritos em várias linguas como por exemplo, BLEICH (1952), TIMOSHENKO e GERE (1961), VLASOV (1961), BRUSH e ALMROTH (1975), CHAJES (1974), ALLEN e BULSON (1980) e GALAMBOS (1968), NARAYANAN (1983).

Com relação à flambagem e resistência das vigas esbeltas tem o estudo feito por WILSON (1886) sobre a resistência ao esforço cortante da alma dessas estruturas, WAGNER (1931) desenvolveu a teoria da diagonal tracionada na alma dessas estruturas e o seu trabalho foi estendido por KUHN (1956), com aplicações no projeto de estruturas de aviões. Uma série de estudos foram realizados num período posterior por BASLER e THÜRLIMANN em relação ao comportamento pós-flambagem dos painéis da alma das vigas esbeltas devido à flexão e ao cisalhamento, citados por GALAMBOS, [73].



## 2.2- SITUAÇÃO NACIONAL

O Brasil apesar de ser considerado um dos grandes produtores de aço no contexto mundial, apresenta índices baixos de consumo do aço nas estruturas em comparação com países mais adiantados.

Na década de vinte foi que realmente o Brasil começou a desenvolver sua indústria siderúrgica brasileira com a criação da Companhia Siderúrgica Belgo Mineira, em 1921, sendo que nesta época a produção do país limitava-se a perfis leves de pequenas dimensões mais apropriadas para coberturas e elementos componentes das demais estruturas, citados pela Revista USIMINAS [174].

Com a implantação da CSN (Companhia Siderúrgica Nacional), na cidade de Volta Redonda (RJ) em 9 de abril de 1941, cuja capacidade inicial, embora fosse dominada pela fabricação de trilhos e acessórios, provocou um aumento na oferta de perfis estruturais.

Em 1953 viria a ser fundada a FEM (Fábrica de Estruturas Metálicas) ligada à CSN e com isso o consumo interno de perfis na construção civil atingiu o recorde no período de 1971 a 1974 [174].

O país conta hoje em dia com empresas siderúrgicas de grande porte além das já citadas, tais como: COSIPA (Companhia Siderúrgica Paulista), AÇOMINAS (Aços Minas Gerais S.A.), USIMINAS (Usinas Siderúrgicas de Minas Gerais), CST (Companhia Siderúrgica de Tubarão), como as maiores produtoras de aço e também com diversas outras empresas que fabricam chapas e perfis metálicos, telhas e estruturas.

Uma das preocupações do setor da Construção Civil é com a falta de perfis adequados, mas a AÇOMINAS pretende fabricar os perfis laminados de abas paralelas que são os mais indicados para a construção de prédios residenciais,

pontes, galpões e estabelecimentos industriais.

Esses perfis oferecem algumas vantagens em relação aos demais perfis convencionais, tais como maior momento de Inércia, maior módulo de Resistência à Flexão, maior raio de giração, redução média no peso da estrutura montada e eliminação dos gastos com soldas de composição. [1,2,3].

Com relação à realização e à divulgação de pesquisas dedicadas a aplicação do aço como elemento estrutural nas edificações, um esforço conjunto das usinas, fabricantes de estruturas, entidades representativas e universidades, tem sido empreendido, possibilitando assim um aumento no volume das informações principalmente no campo das publicações técnicas.

Em relação à normalização, no aspecto relacionado ao cálculo e execução, por muito tempo utilizou-se a NB-14 (1968) sendo esta norma aprovada em 1958 e revista em 1968. Em julho de 1984 foi feito o projeto de revisão da NB-14, baseada no método dos estados limites, e em abril de 1986 era impressa a versão aprovada da NBR 8800 (Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios - Método dos Estados Limites), e em Julho de 1988 era publicado a ERRATA no. 1 que acrescenta e altera alguns procedimentos. Portanto o que está em vigor oficialmente no Brasil é a NBR 8800 [80].

Cabe salientar que o processo de desenvolvimento e revisão de normas de projeto e execução de estruturas está ligado a realização de pesquisas teóricas e experimentais e também de um levantamento estatístico real de dados para se comprovar as formulações teóricas existente sobre o assunto. A estrutura metálica vem ganhando espaço na construção civil onde vigas e colunas metálicas, constituem uma opção cada vez maior em residências, edifícios de andares múltiplos, shopping centers, edifícios comerciais etc.

Pela sua extensão territorial o Brasil constitui um país onde se consome pouco aço se comparado com outros países. Apesar do grande esforço que empresas do ramo, fabricantes, instituições de ensino, engenheiros, professores, pesquisadores e associações vem desenvolvendo no sentido de divulgar a aplicação do aço na construção civil, muitas barreiras ainda precisam ser vencidas.

### 2.3- COMPORTAMENTO ESTRUTURAL

Os elementos estruturais são considerados fletidos quando as ações atuam na direção perpendicular ao seu eixo axial e produzem tensões normais e de cisalhamento. Esta situação é conhecida como flexão simples [121].

Considere-se uma viga simples, apoiada em cada extremidade submetida a ações que causam momento fletor ao longo do vão, dando origem a tensões de compressão nas fibras superiores e tensões de tração nas fibras inferiores. A determinação das leis que regem a curvatura e as tensões internas da viga é uma das soluções clássicas da Resistência dos Materiais [81, 95, 121]. Para os propósitos da consideração dos efeitos da flexão simples as hipóteses básicas da Resistência dos Materiais são satisfatórias.

Para uma viga homogênea com uma determinada seção transversal, a relação entre o momento e a curvatura ( $M-k$ ), podem ser obtidas da relação tensão-deformação em que se utilizam algumas hipóteses da flexão, tais como:

- a) A viga é deformada apenas pelo momento sendo que o cortante e as forças axiais não são consideradas.
- b) As deformações são suficientemente pequenas.
- c) A relação entre as tensões longitudinais e as deformações na flexão são as mesmas da tração simples ou compressão.

d) As seções transversais originalmente planas sob o esforço de flexão permanecem planas após a deformação.

e) É feita a idealização do diagrama tensão-deformação, de modo que o mesmo contenha duas linhas retas conforme a Fig. 2.2.

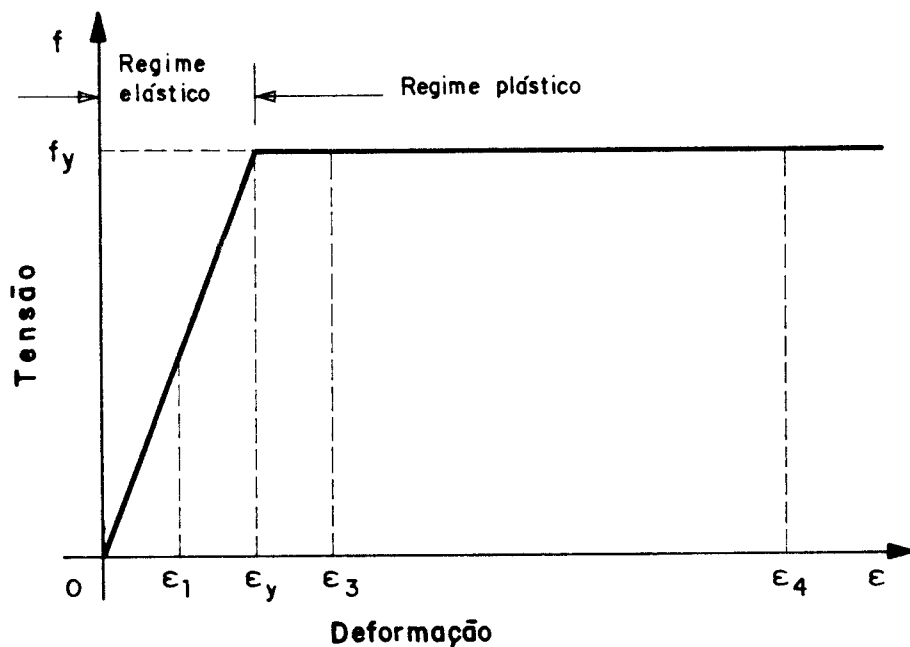
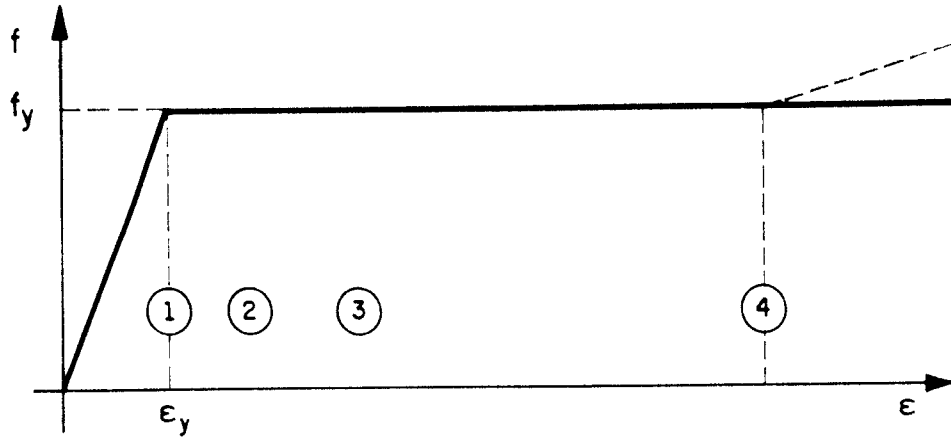
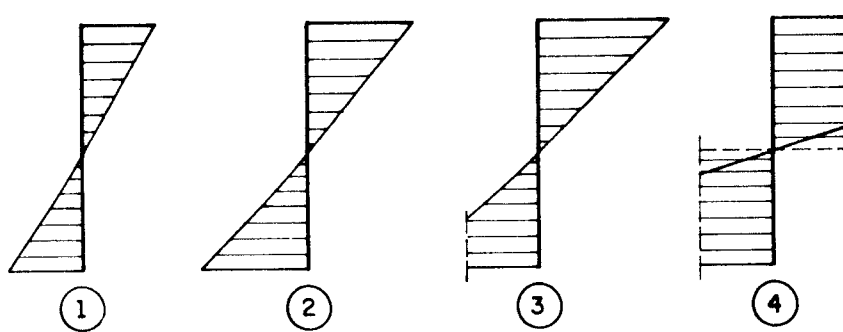


FIG. 2.2 - Diagrama Tensão - Deformação Idealizado para o Aço Estrutural [121]

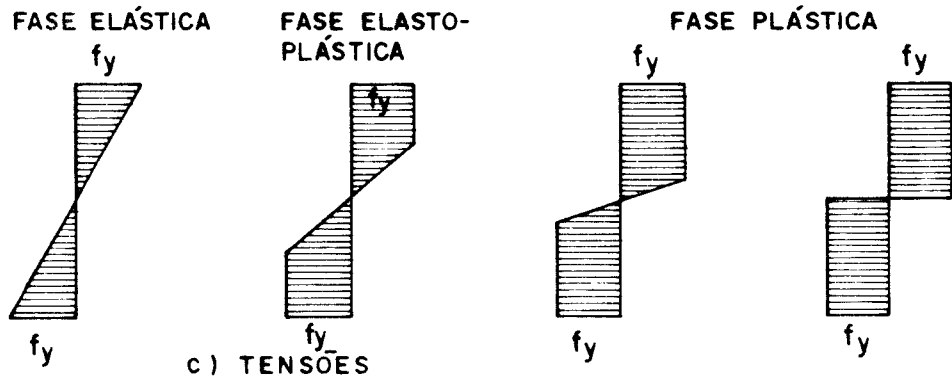
O comportamento das tensões normais na flexão de uma viga é mostrado na figura 2.3, quando um momento atuante  $M$ , tem seu valor aumentado gradativamente.



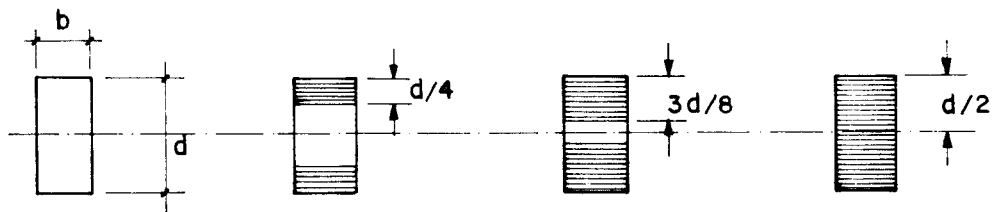
a) Diagrama tensão versus deformação



b) Deformações



c) TENSÕES



d) DISTRIBUIÇÃO DA FLUÊNCIA

FIG. 2.3- Flexão de uma Viga de Seção Transversal Retangular [21].

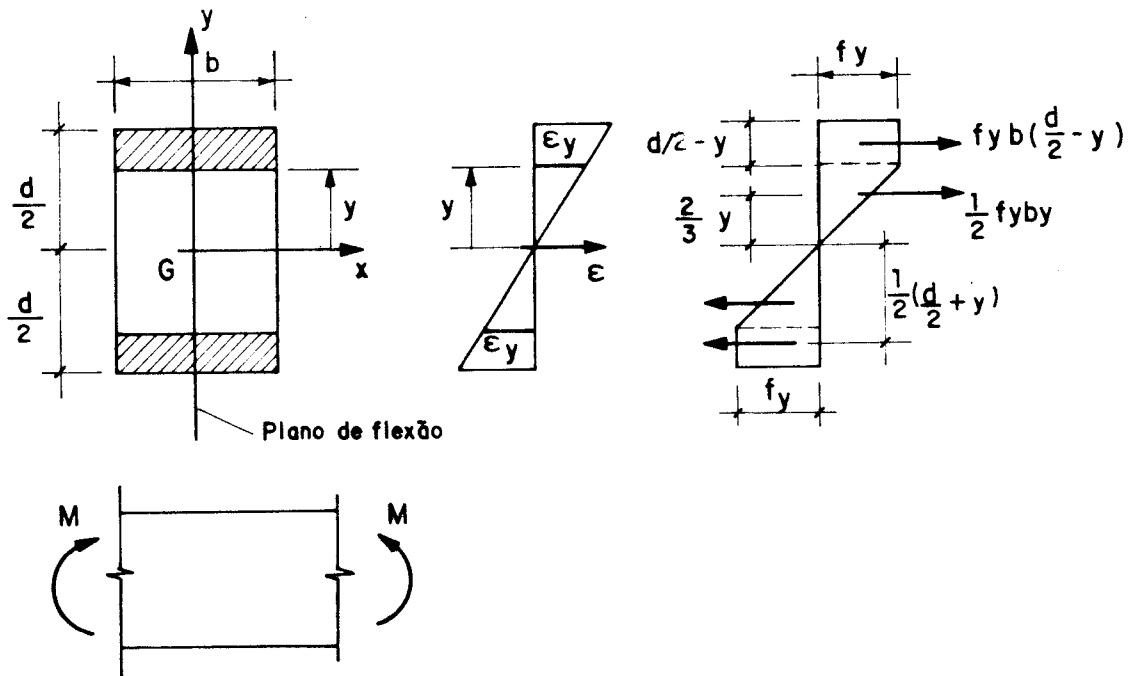


FIG. 2.4 - Distribuição dos Esforços em uma Seção Retangular Parcialmente Plasticificada [21, 131].

O momento fletor  $M$  corresponderá a distribuição das tensões, pode ser calculado tanto para as fases elástica, elasto-plástica e plástica pela expressão:

$$M = f_y b \left[ \frac{d^2}{4} - \frac{y^2}{3} \right] \quad (2.1)$$

A curvatura correspondente da peça, como se sabe, está, relacionada com a distância da fibra extrema ao eixo neutro pela expressão:

$$K = \frac{\epsilon_y}{y} \quad (2.2)$$

Quando  $y = d/2$  a tensão atinge o valor máximo de  $f_y$  na fibra extrema, e o momento fletor neste instante é o maior momento que a seção pode resistir antes de começar o escoamento, e é chamado de momento correspondente ao início do escoamento ( $M_y$ ) [12, 118, 131].

Fazendo  $y = d/2$  na equação (2.1) encontra-se:

$$M_y = f_y b \left( \frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{12} \right) = f_y b \left( \frac{3d^2 - d^2}{12} \right) \quad (2.3)$$

$$M_y = f_y \frac{bd^2}{6} \quad \text{ou mais precisamente:}$$

$$M_y = f_y W_x \quad (2.4)$$

Onde  $W_x$  é o módulo de resistência à flexão elástico, cujo valor para a seção retangular é  $\frac{bd^2}{6}$

A curvatura correspondente para a situação de  $M_y$  será:

$$\epsilon = K y \quad \text{para } y = d/2$$

$$\epsilon_y = \frac{k_y d}{2}$$

$$K_y = \frac{2\epsilon_y}{d} \quad (2.5)$$

Comparando as expressões (2.2) e (2.5) têm-se:

$$\frac{K_y}{K} = \frac{2\epsilon_y}{d} \frac{y}{\epsilon_y} = \frac{2y}{d}$$

Elevando ao quadrado os dois termos tira-se:

$$y^2 = \left( \frac{k_y}{K} \right)^2 \frac{d^2}{4}$$

Levando esse valor na expressão (2.1), vem:

$$M = f_y \times b \left[ \frac{d^2}{4} - \left( \frac{k_y}{K} \right)^2 \frac{d^2}{4} \frac{1}{3} \right]$$

que arranjada fornece:

$$M = \frac{f_y b d^2}{6} \left[ \frac{6}{4} - \frac{6}{12} \left( \frac{k_y}{K} \right)^2 \right]$$

mas  $M_y = f_y \frac{b d^2}{6}$  (expressão 2.4), logo:

$$M = M_y \left[ 1,5 - 0,5 \left( \frac{k_y}{K} \right)^2 \right]$$

ou então:

$$\frac{M}{M_y} = 1,5 - 0,5 \left( \frac{k_y}{K} \right)^2 \quad (2.6)$$

A curva adimensional M-K para uma viga de seção transversal retangular é mostrada na figura 2.5, juntamente com a relação apropriada quando M é menor do que  $M_y$ . O valor de M é limitado ao valor de  $1,5M_y$  quando então a curvatura K torna-se muito grande. No limite, quando  $M = 1,5M_y$ , K tende ao infinito ou seja, a equação 2.2 mostra que y tende a zero e a seção transversal torna-se inteiramente plastificada e o momento fletor correspondente é o momento plástico  $M_p$  [131].

Observando a equação (2.6) quando K tende a infinito, a razão  $\left( \frac{k_y}{K} \right)$  tende a zero e M tende a  $M_p$ .



Logo tem-se  $M_p/M_y = 1,5$  ou  $M_p = 1,5M_y$

Nota-se que, para a seção retangular há um aumento de 50% na resistência acima do limite elástico devido à plastificação da seção [131].

Em consequência a relação entre  $M/M_y$  (momento reduzido) em função da curvatura reduzida  $(K/K_y)$  permite construir curvas análogas para diversas formas de seção, que podem ser vistas na figura 2.5 sendo que todas estas curvas são assintóticas a horizontal de ordenada  $(M_p/M_y)$  [118].

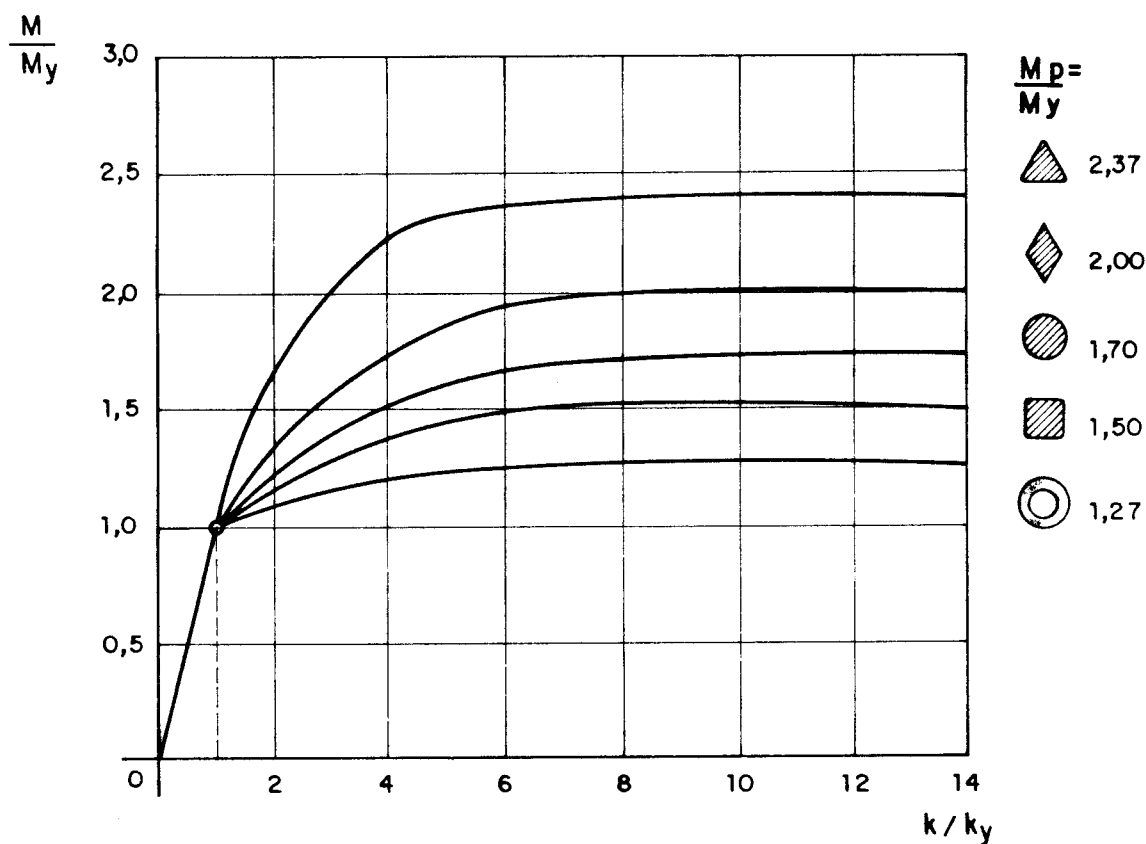


FIG. 2.5 - Diagramas de Momento/Curvatura para Várias Seções [16, 118].

O valor do momento plástico pode ser calculado diretamente para uma seção transversal dada, com um simples eixo de simetria  $O_y$  onde se situa o plano de flexão. Sendo a resultante da força axial igual a zero, na condição da mesma estar totalmente plastificada, o eixo neutro divide a seção transversal em duas partes iguais, onde as resultantes da força de tração e compressão são iguais a  $Af_y/2$ , onde  $A$  é a área da seção transversal conforme a figura 2.6.

Sendo que o eixo neutro divide a seção em duas áreas iguais  $A_1$  e  $A_2$ , sejam  $G_1$  e  $G_2$ , os respectivos centros de gravidade dessas áreas e  $\bar{y}_1$  e  $\bar{y}_2$  as respectivas distâncias dos mesmos ao eixo neutro, as resultantes das forças serão aplicadas respectivamente em  $G_1$  e  $G_2$  [131].

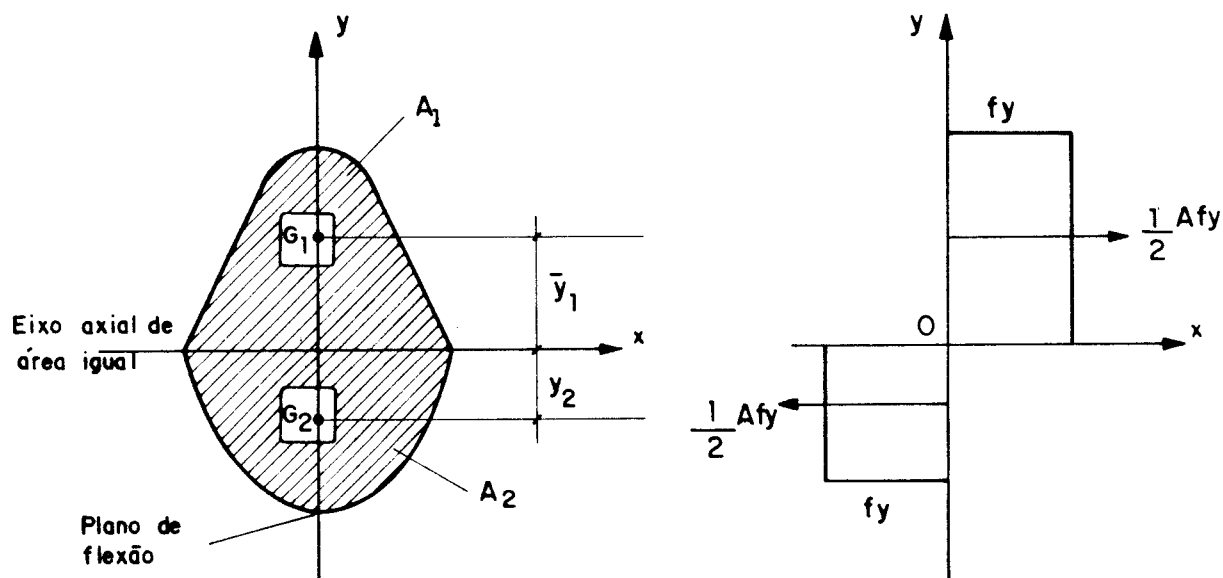


FIG. 2.6 - Distribuição das Tensões em uma Seção Transversal de Viga Completamente Plastificada com um Eixo de Simetria [98].

O momento plástico  $M_p$  será, lembrando que:  $A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$  :

$$M_p = \int_A f_y (y dA) = f_y A_1 \bar{y}_1 + f_y A_2 \bar{y}_2 = \frac{A}{2} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) f_y = Z f_y \quad (2.7)$$

onde  $Z = \int_A y dA = (A/2) (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)$  recebe o nome de módulo de resistência à flexão plástico.

A relação  $M_p / M_y$  é uma propriedade da forma da seção transversal e independe das propriedades do material [154], sendo chamada de fator de forma e designada por  $\alpha_f$

$$\alpha_f = \frac{M_p}{M_y} = \frac{f_y Z}{f_y W} = \frac{Z}{W} \quad (2.8)$$

O comportamento de uma viga de seção transversal em forma de I sob a ação de um par de momentos fletores é obtido de forma similar.

O fator de forma  $\alpha_f = Z/W$  varia para os perfis laminados de mesas paralelas de 1,10 a 1,18 sendo o valor mais frequente 1,12 e o valor médio de 1,14 [21].

Para se fazer a determinação do módulo plástico Z para seções que apresentam somente um eixo de simetria no plano de flexão, deve-se primeiro calcular a posição do eixo neutro através das condições de equilíbrio:

$$P = \int_A f dA \quad \text{e} \quad M = \int_A f dAy, \quad \text{fazendo} \quad P = 0 \quad \text{e} \quad f = f_y,$$

**EXEMPLO:** Calcular para o perfil soldado, mostrado a seguir, de mesas iguais, os valores de W, Z e  $\alpha_f$ .

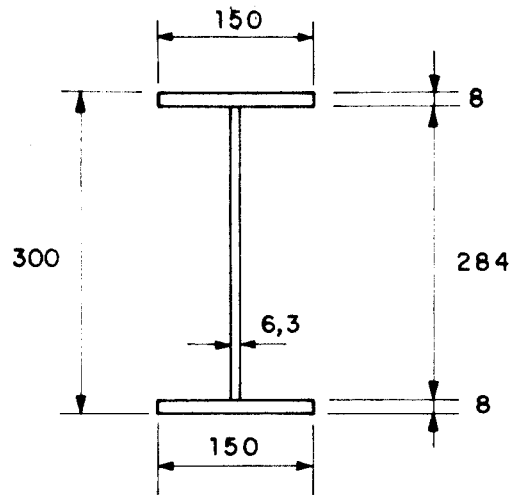


FIG. 2.7 - Perfil Soldado de Abas Iguais.

Neste caso tem-se:

$$d = 300\text{mm}; \quad h = 284\text{mm}, \quad t_f = 8\text{mm}; \quad t_w = 6,3\text{mm} \quad b_f = 150\text{mm}.$$

a) A - área da seção transversal

$$A = 2b_f t_f + h t_w$$

$$A = 2 \times 15 \times 0,8 + 28,4 \times 0,63 \approx 41,90\text{cm}^2$$

b)  $I_x$  - Momento de Inércia da seção transversal em relação ao eixo baricêntrico  $G_x$

$$I_x = \frac{b_f d^3}{12} - \frac{(b_f - t_w) h^3}{12}$$

$$I_x = \frac{15 \times 30^3}{12} - \frac{(15 - 0,63)(28,4)^3}{12}$$

$$I_x = 6320\text{cm}^4$$

c)  $W_x$  - Módulo de resistência à flexão

$$W_x = \frac{I_x}{d/2} = \frac{2I_x}{d} = 421\text{cm}^3$$

d)  $Z_x$  - Módulo Plástico

$$Z_x = b_f t_f (d - t_f) + \frac{t_w}{4} (d - 2t_f)^2$$

$$Z_x = 15 \times 0,8(29,2) + \frac{0,63}{4}(28,4)^2$$

$$Z_x = 477\text{cm}^3$$

e)  $\alpha_f$  - Fator de forma

$$\alpha_f = \frac{Z}{W} = \frac{477}{421} = 1,13$$

O diagrama momento-curvatura em perfis "I" é afetado pela presença de tensões residuais na seção, tais tensões resultam das deformações plásticas causadas por fenômenos tais como: resfriamento desigual que ocorre depois da laminação a quente, flexão a frio, ou curvatura introduzida durante a fabricação; puncionamento de furos, e operações de corte e a soldagem. Dentro deste enfoque as tensões residuais resultantes do Resfriamento Desigual e da Soldagem são mais importantes [154].

Nos perfis laminados, após o processo de laminação a quente, observa-se que nas seções onde há maior concentração de material, como por exemplo nas mesas, o resfriamento é mais lento do que na região da alma, e também na junção da alma com a mesa onde o ar tem menos acesso. Nas regiões em que o resfriamento é mais rápido surgem as tensões residuais

de compressão, enquanto que nas partes que esfriam por último aparecem as tensões residuais de tração.

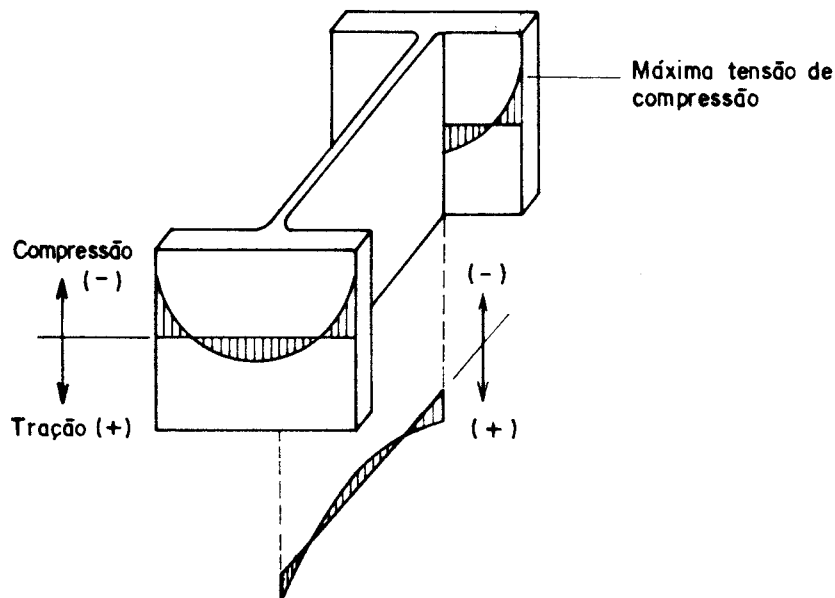


FIG. 2.8 - Tensões Residuais Típicas em Perfis Laminados [154].

A intensidade destas tensões depende de fatores tais como as dimensões da seção transversal e a rapidez do resfriamento [121].

No caso de perfis estruturais fabricados pelo processo de soldagem, também há o aparecimento de tensões residuais devido ao aquecimento localizado. Dependendo da forma da seção transversal e do processo de soldagem, a distribuição das tensões residuais nessas seções pode ser inteiramente diferente da obtida nas seções laminadas [121].

A presença das tensões residuais influencia o comportamento das barras comprimidas. Por exemplo, em um perfil, utilizado como coluna curta, quando a mesma é submetida a um ensaio de compressão, surge uma mudança no comprimento original da peça que dá origem à uma deformação específica  $\epsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$ . Se  $f_r$  representa a máxima tensão

residual de compressão, o escoamento se inicia no ponto onde ocorre esta máxima tensão ou seja, quando  $f_r + f_a = f_y$  ou para uma tensão aplicada:

$$f_a = P/A = f_y - f_r \quad (2.24)$$

Então o material passa a ter um limite de proporcionalidade definido pela tensão:

$$f_p = f_y - f_r \quad (2.25)$$

e a curva torna-se assintota à horizontal até o limite de escoamento.

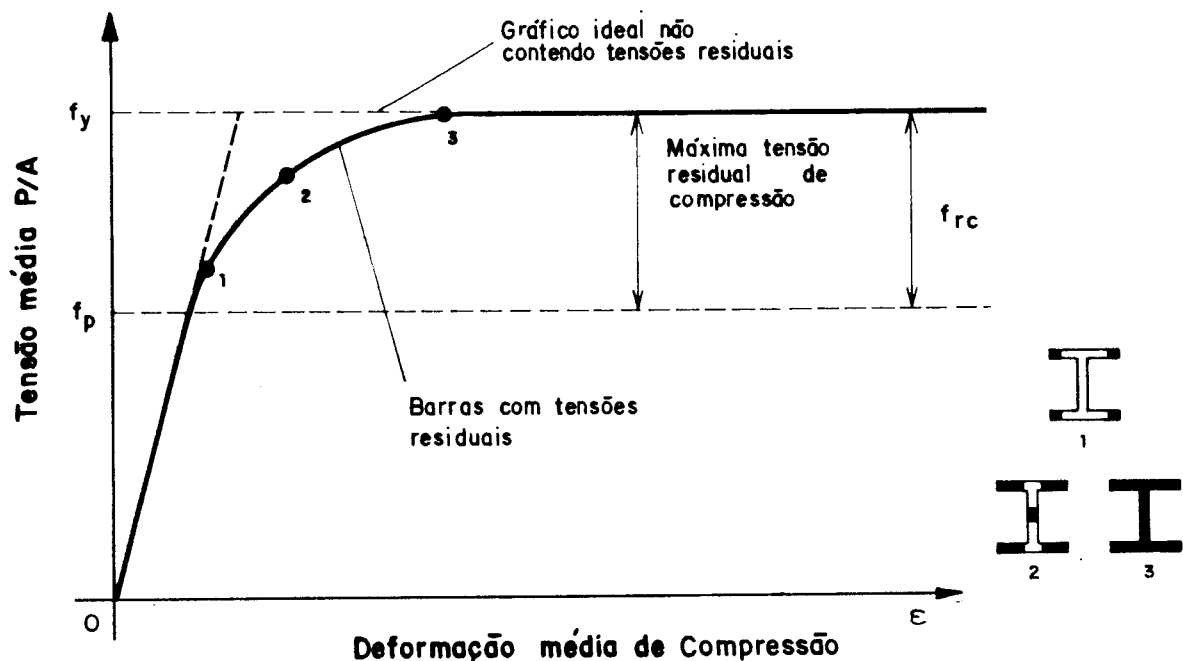


FIG. 2.9 - Influência da Tensão Residual na Curva Tensão-Deformação Média [61, 154].

As tensões residuais nas mesas dos perfis laminados podem alcançar valores altos, tais como 138MPa [154], que representa uma alta porcentagem da tensão de escoamento para aços estruturais como o ASTM A36,  $f_y = 250\text{MPa}$  [154].

A soldagem de seções compostas é uma grande introdutora de tensões residuais. Em alguns casos, até mais do que o resfriamento de perfis laminados. As próprias chapas apresentam, inicialmente, tensões residuais, relativamente uniforme, devido ao resfriamento após a laminação. Contudo, depois que o calor é aplicado para a execução da solda, o subsequente resfriamento não uniforme e ainda a restrição à distorção despertam altas tensões residuais.

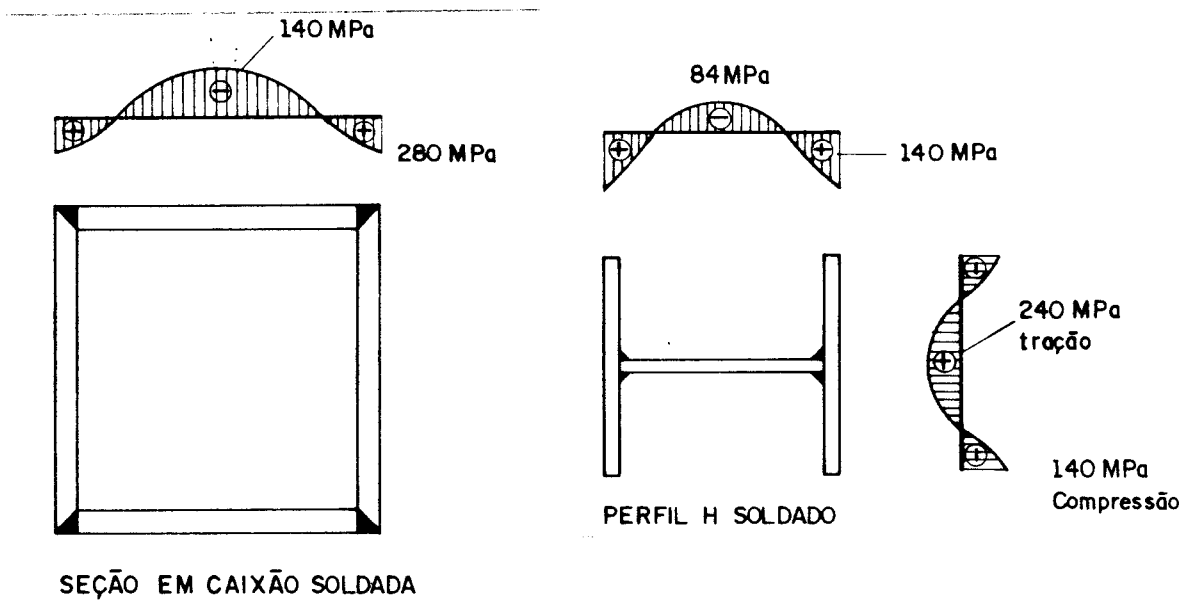


FIG. 2.10 - Distribuição Típica de Tensões Residuais em Perfis Soldados [154].

Observa-se que no caso do dimensionamento de colunas, a existência das tensões residuais nas seções transversais,



reduz a resistência à flambagem, o que interfere na formulação do dimensionamento dessas seções [23].

Nesse aspecto [118] mostra que a presença das tensões residuais desempenham uma papel relevante nas vigas industriais. Estas tensões provocam uma plastificação prematura de certas fibras, diminuindo o valor do momento máximo elástico ( $M_y$ ) e deformando a curva  $M/M_y = f(K/K_y)$ , representado pela curva 2 na figura 2.11.

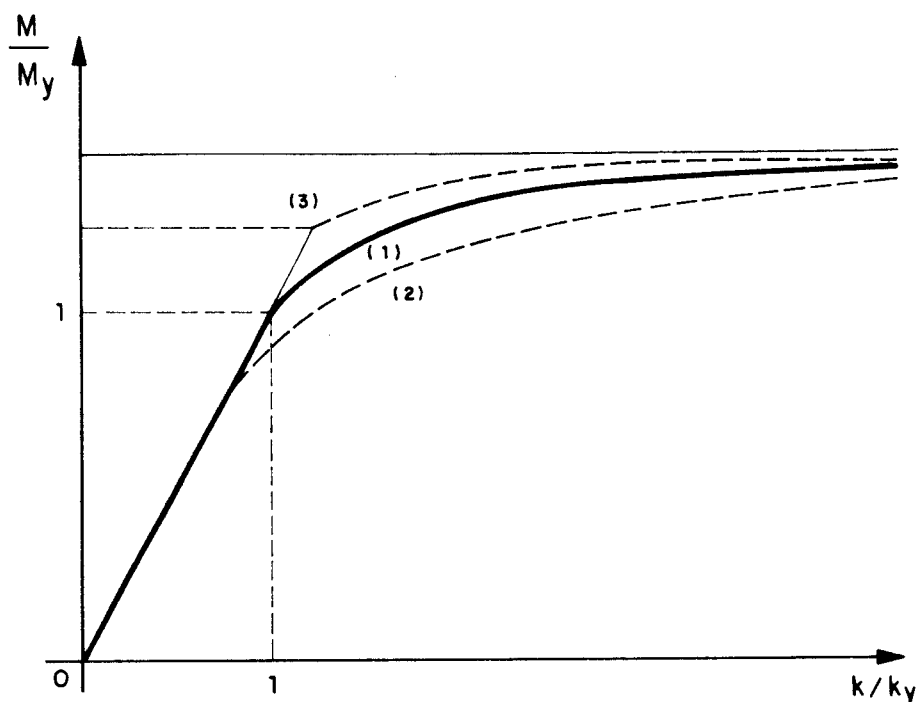


FIG. 2.11 - Influência das Tensões Residuais em Perfis Laminados [118].

Estas tensões não modificam o valor do momento plástico ( $M_p$ ) porque a tensão não pode ultrapassar  $f_y$ , logo o momento plástico  $M_p = f_y Z$  corresponde portanto ao maior momento fletor que a viga pode suportar [118].

A existência eventual de um limite superior faz com que o momento elástico aumente do valor ( $f_{yi} W$ ) até o valor ( $f_{ys} W$ ). A curva passa da forma (1) para a (3) porém o valor do

momento plástico não é afetado, porque na última fase o valor máximo no pico do diagrama corresponde a um braço de alavanca externo que tende a zero conforme a figura 2.12.

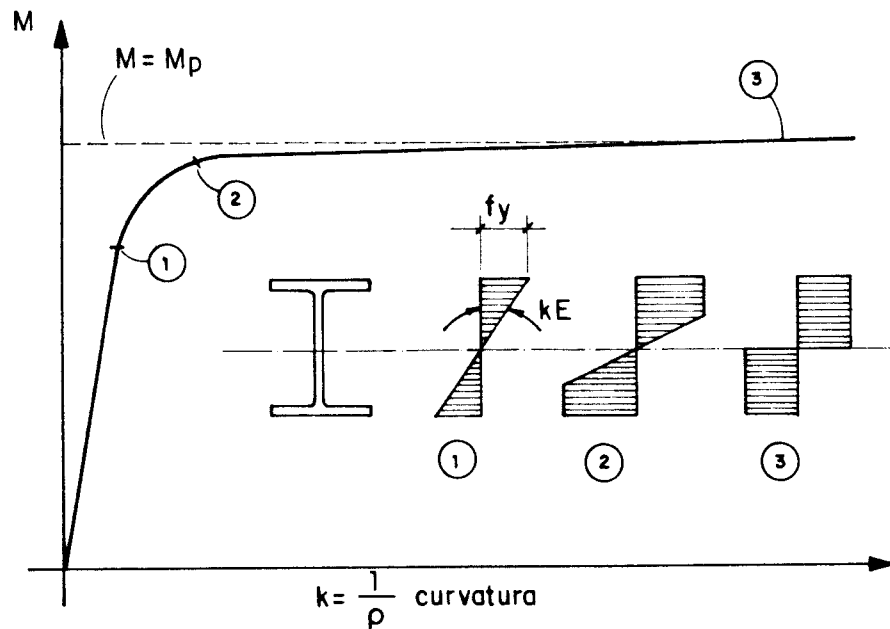


FIG. 2.12 - Etapa de Flexão Pura Plástica de uma Viga em Perfil Laminado [118].

Ainda em relação ao aspecto da influência das tensões residuais sobre a relação momento-curvatura (M-K) de uma viga fletida, BEEDLE [21] mostra a influência das tensões residuais sobre a curva (M-K) para perfis laminados de mesas paralelas conforme a figura 2.13 (a) com todo o material concentrado nas mesas, sendo a distribuição das tensões residuais nas mesas e a figura 2.13 (b) com compressão nas extremidades das mesas de  $-f_y/2$  e tração, no centro da mesa, de  $+f_y/2$ .

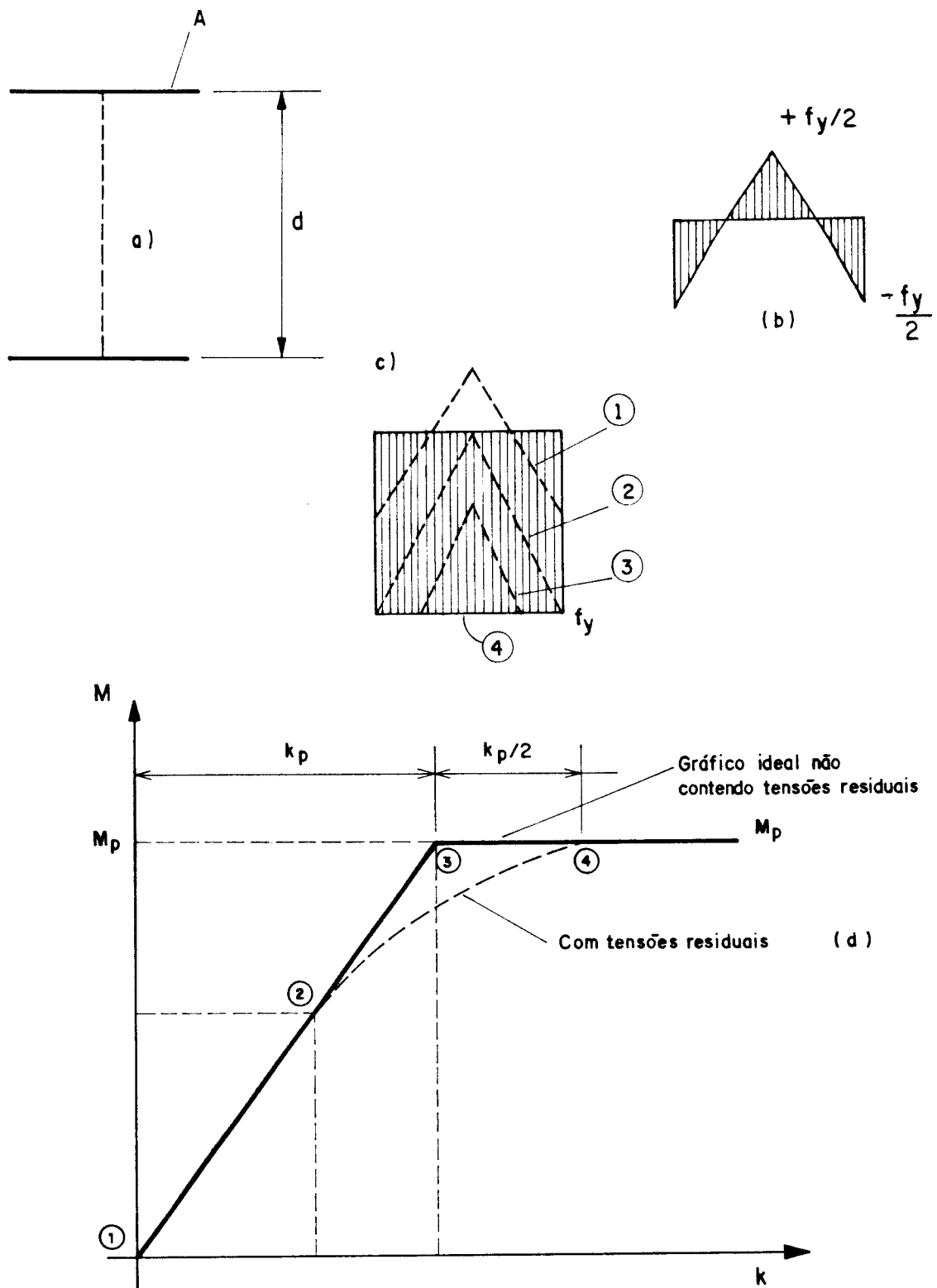


FIG. 2.13 - Representação da Influência dos Esforços Residuais, sobre a Relação (M-K) de uma Viga na Flexão (Idealizado) [21].

Em qualquer fase a força total em uma das mesas é dada

$$\text{por: } \int_A f dA = P$$

Antes da aplicação de qualquer momento externo a mesa deve estar em equilíbrio ( $P=0$ ). Quando a barra está sendo flexionada por uma momento puro, observam-se diferentes etapas de comportamento:

ETAPA 1 - Aparece uma deformação uniforme nas mesas

ETAPA 2 - A tensão na fibra extrema das mesas alcança o limite de escoamento

ETAPA 3 - Fase parcialmente plástica pois o escoamento se estende a outras fibras das mesas.

ETAPA 4 - A mesa cede por completo ao atingir a plastificação

Na fase 4 têm-se:

$$M = \int_A f(ydA) = \int_A f dAy = Pd = f_y \cdot A \cdot d$$

Esse valor é igual ao momento plástico total para a seção transversal da viga em I idealizada, ou seja a presença das tensões residuais não tem influência sobre a capacidade do momento fletor.

Segundo o AISC [8] no capítulo F denominado de vigas e outros membros fletidos, na página 6-44, é dado o valor de  $f_r$  da seguinte maneira:

$f_r$  = Tensão residual de compressão na mesa

= 70MPa para Perfis laminados

= 115MPa para Perfis soldados

A norma Brasileira [12] recomenda na página 124 para  $f_r$  o valor de 115MPa.

## CAPÍTULO III

### 3- INSTABILIDADE DE CHAPAS E DE PERFIS

#### 3.1- CONCEITUAÇÃO DO PROBLEMA

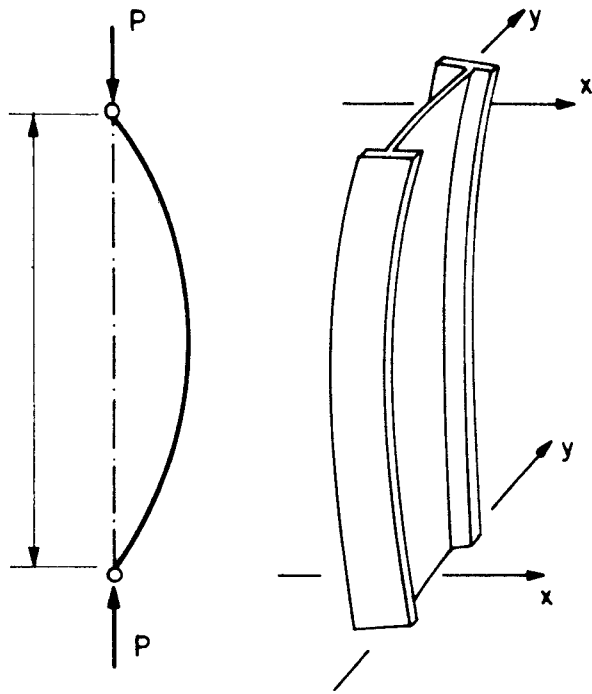
Em relação aos elementos fletidos nas estruturas de aço, além da verificação da capacidade resistente, outras considerações devem ser analisadas, principalmente pelo fato de que as seções transversais desses elementos são de chapas que, dependendo da relação largura/espessura, podem falhar por flambagem. Portanto, o efeito das tensões residuais, é muito mais significativo do que em outros tipos de solicitações, como por exemplo, de tração [46, 73].

O fenômeno da instabilidade nas vigas em aço deve ser um fator de bastante atenção e cuidado por ocasião do projeto, principalmente pelo fato relacionado à questão da contenção lateral das mesas comprimidas, pois dependendo da grandeza das ações e suas respectivas posições, originam-se dois problemas de relevância na seleção adequada de seções que são a flambagem local e a flambagem lateral. Sendo as mesmas, razões para um extenso estudo e para a realização de diversas pesquisas experimentais [21, 28, 41, 46, 128], bem como dando origem a certas diretrizes [73, 94] sobre o problema da instabilidade.

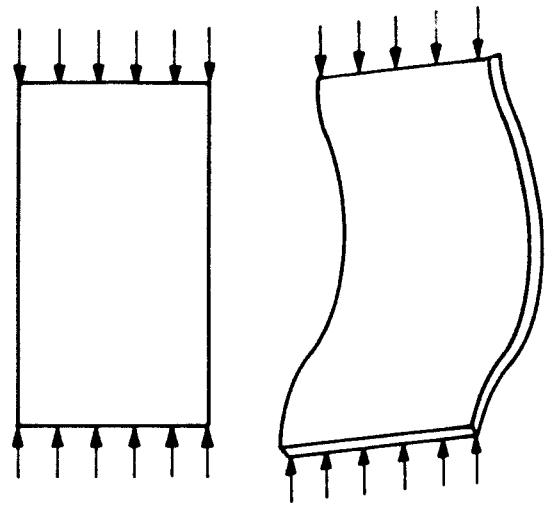
Outro aspecto interessante é que a maior parte das vigas que fazem parte de uma determinada estrutura, são ligadas a outras partes de tal modo que podem se deformar somente em uma direção e usualmente na direção das ações externas. Os sistemas de lajes de concreto nos pisos dos edifícios são muito rígidos no seu próprio plano e, são devidamente conectados para servirem de contenção lateral às vigas tanto principais como secundárias. Portanto estas vigas podem se deformar somente na direção vertical, sendo que a deformação na direção horizontal ou mesmo o rotacional é contido pelo piso. Existem contudo situações em que essas vigas não tem suporte lateral ao longo do seu vão, como é o caso, por exemplo, das vigas de rolamento dos galpões industriais. Logo, as vigas que não apresentam apoios laterais podem flambar de maneira similar as colunas [121].

A flambagem apresenta um interesse particular nas barras de aço porque as mesmas tendem a serem mais esbeltas, por exemplo, do que as barras de concreto. Entretanto não é somente a esbeltez que conduz uma barra ao fenômeno da flambagem. As chapas que formam as barras de aço, os perfis de chapa fina formados a frio ou as lâminas podem apresentar, individualmente, a flambagem localizada, sendo este aspecto a causa mais frequente da instabilidade estrutural, em virtude da relação largura/espessura [61, 121].

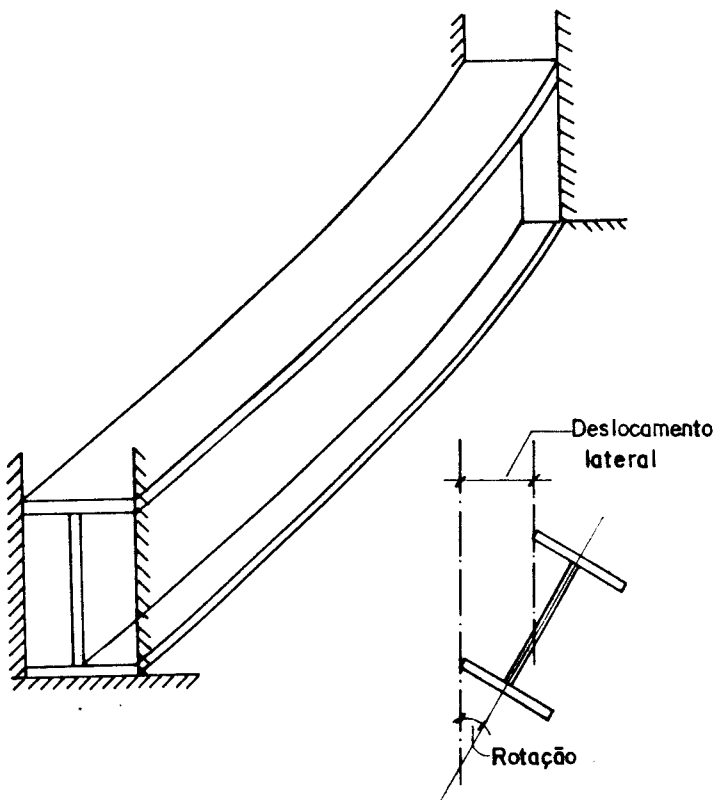
Na Figura 3.1 poderão ser vistos alguns dos tipos mais comuns de elementos estruturais em aço sob o fenômeno da flambagem



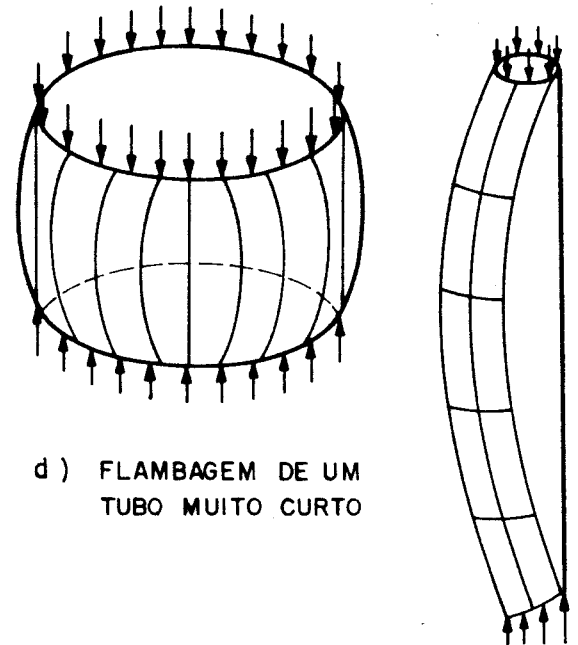
a) FLAMBAGEM DE UMA COLUNA



c) FLAMBAGEM DE UMA CHAPA PLANA



b) FLAMBAGEM LATERAL - TORSIONAL DE UMA VIGA



d) FLAMBAGEM DE UM TUBO MUITO CURTO

e) FLAMBAGEM DE UM TUBO MUITO LONGO

FIG. 3.1 - Diversas Configurações de Flambagem [41, 46, 121].



Os fatores que contribuem com reelevância para causarem o fenômeno da flambagem nos elementos fletidos segundo alguns autores tais como: [41, 46, 73, 94, 121, 128, 169] são os seguintes:

- a) Falta de contenção lateral na mesa comprimida ocorrendo simultaneamente flexão fora do plano.
- b) Esbeltez das chapas que compõe as seções transversais.
- c) Formato da seção transversal escolhida para trabalhar como viga, pois neste caso a flambagem estará diretamente ligada à localização do centro de torção [50, 151] em relação ao centro de gravidade da seção transversal.
- d) A posição das ações externas em relação ao centro de torção.
- e) As condições de apoio das vigas em suas extremidades, que dão origem a diferentes condições de contorno para o cálculo da carga crítica de flambagem.

### 3.2- FLAMBAGEM DE CHAPAS

Quando um perfil de aço é solicitado por compressão, flexão, cisalhamento ou uma combinação, as cargas críticas calculadas podem indicar que uma das chapas que compõem a seção pode flambar localmente, antes que a barra como um todo torne-se instável, ou antes que o material atinja a tensão de escoamento. Portanto as solicitações que podem levar um perfil à perda da estabilidade são: a) Compressão uniforme nas mesas e alma.

b) Cisalhamento puro nas almas de vigas em regiões onde o momento fletor é reduzido. c) Cortantes e normais combinados. Dentro desse grupo de solicitações, as de compressão ocorrem com maior frequência [3, 73, 88, 121].

### 3.2.1- Flambagem Elástica

Como analisado no anexo 1, a expressão que determina a força crítica de flambagem elástica para uma placa é:

$$F_{crit} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2)(b/t)^2} \quad (3.1)$$

onde E é o módulo de elasticidade;  $\nu$  coeficiente de Poisson; b/t a relação largura/espessura, e K é uma constante cujo valor depende do tipo de solicitação, das condições de vinculação e da relação comprimento/largura da chapa.

Os valores usuais de K podem ser vistos nas figuras 3.2 e 3.3, mostradas a seguir.

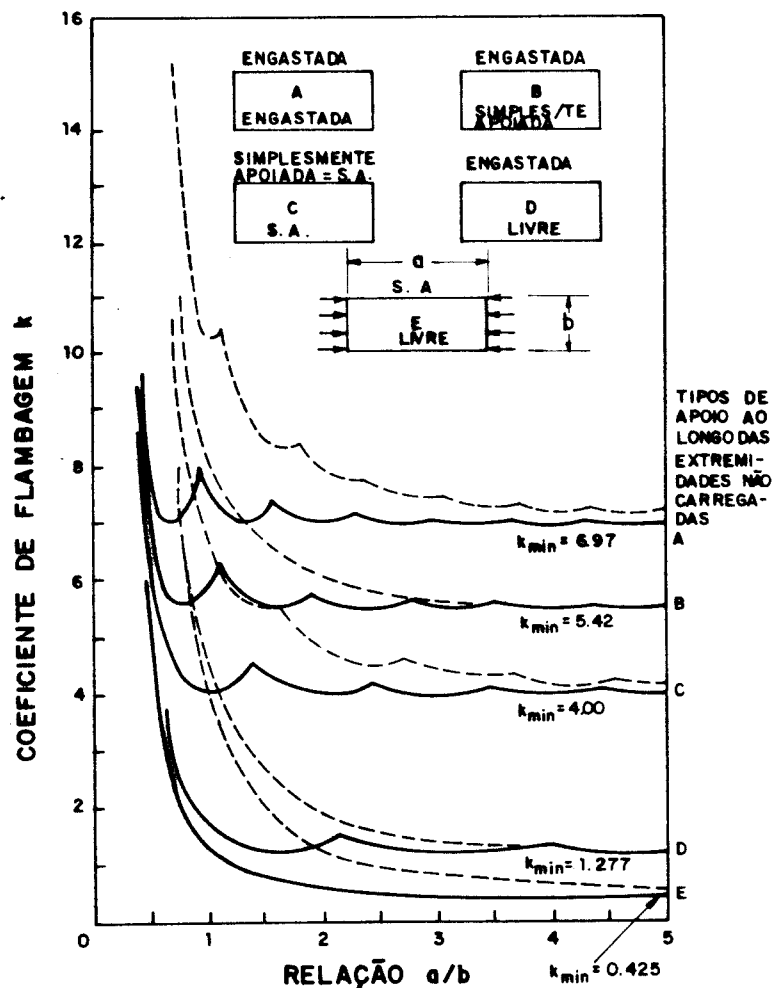


FIG. 3.2 - Coeficientes de Flambagem Elástica para chapas Retangulares Planas [88, 154]

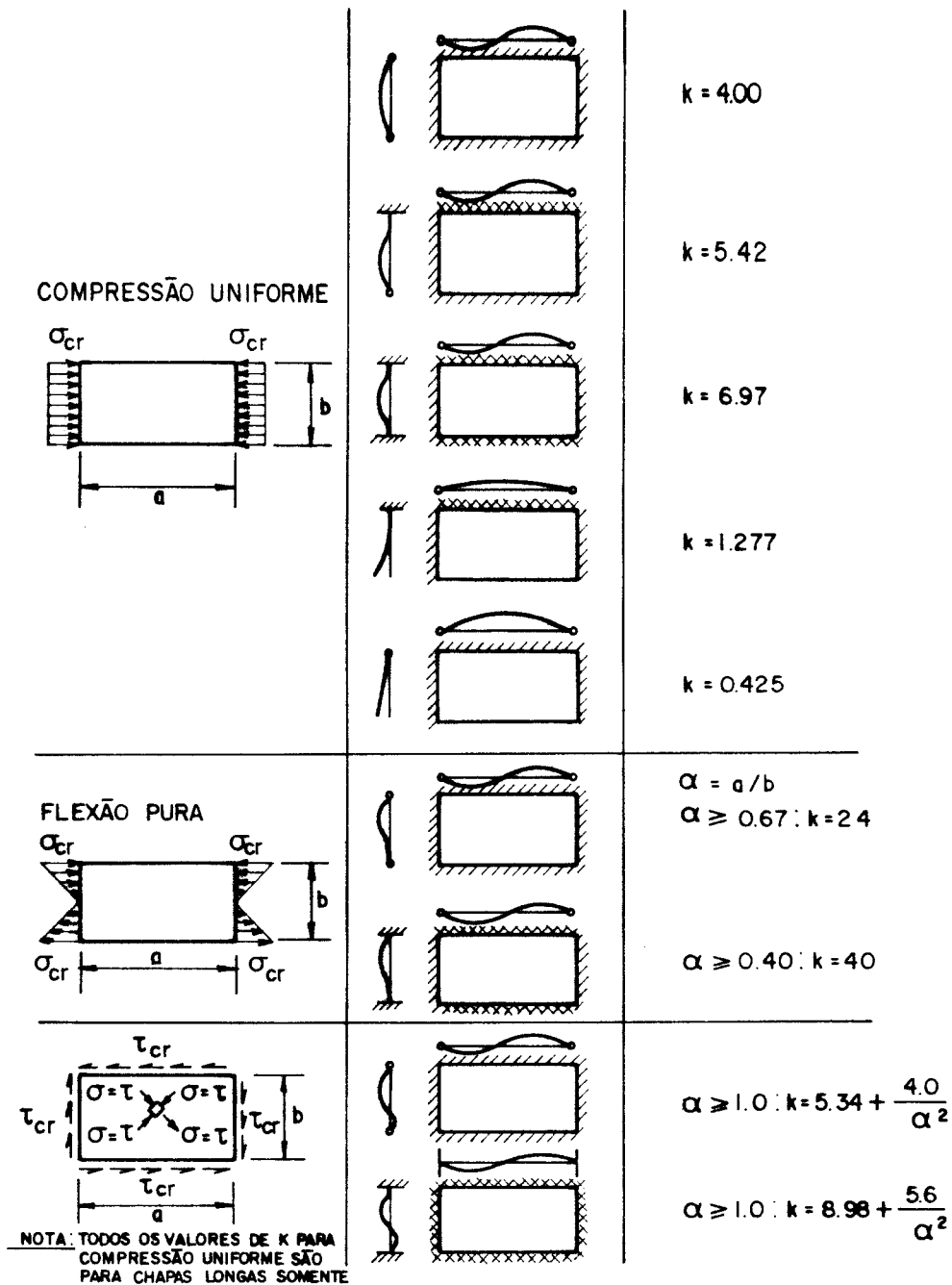


FIG. 3.3 - Coeficientes de Flambagem Aproximados para Chapas Planas [16, 28, 32, 36, 41, 73, 94, 121, 154, 169].

Segundo [95, 115, 149, 154] e mesmo para efeitos normativos [7, 8, 12] os elementos de chapas quando comprimidos podem ser classificados em duas categorias:

a) Elementos não Enrijecidos - São aqueles que apresentam uma borda livre paralela à direção da tensão normal de compressão [12].

b) Elementos Enrijecidos - São aqueles que apresentam duas bordas suportadas lateralmente, em toda a sua extensão, paralelas à direção da tensão normal de compressão [12].

Na figura 3.4 podem ser vistos estas duas categorias de elementos comprimidos.

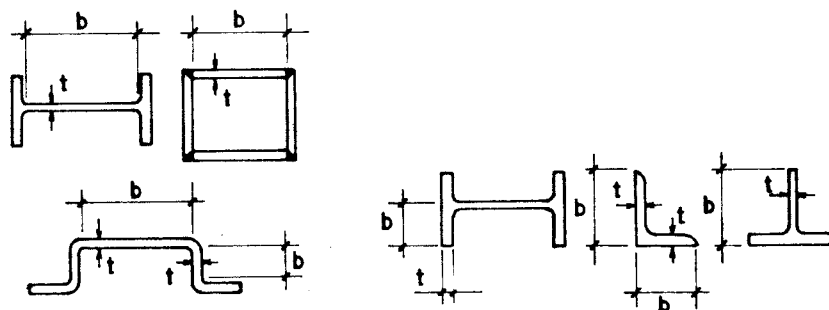


FIG. 3.4 - Elementos Comprimidos enrijecidos e não Enrijecidos [95, 115, 149, 154].

Para visualizar melhor o comportamento dos elementos de chapas comprimidas [88, 154], apresentam o gráfico mostrado na figura 3.5, com o esforço normal médio  $f = P/bt$  e a deformação unitária  $\epsilon$ , para diversos valores da relação largura/espessura, quando estes elementos são submetidos a

uma ação  $P$  de intensidade crescente, aplicada em uma direção. Segundo [154], assumindo que o material do corpo de prova não contém tensões residuais, a distribuição das tensões permanece uniforme até que se atinja a carga crítica de flambagem  $F_{CR}$ . O gráfico mostra também que a resistência da chapa nas extremidades comprimidas consiste na soma de duas componentes: 1) Tensões de flambagem elástica e inelástica representadas pela equação (3.1) e 2) Resistência pós-flambagem. Também são mostradas as variações da relação  $b/t$  no que diz respeito ao comportamento pós-flambagem assunto este de extrema importância que será discutido posteriormente.

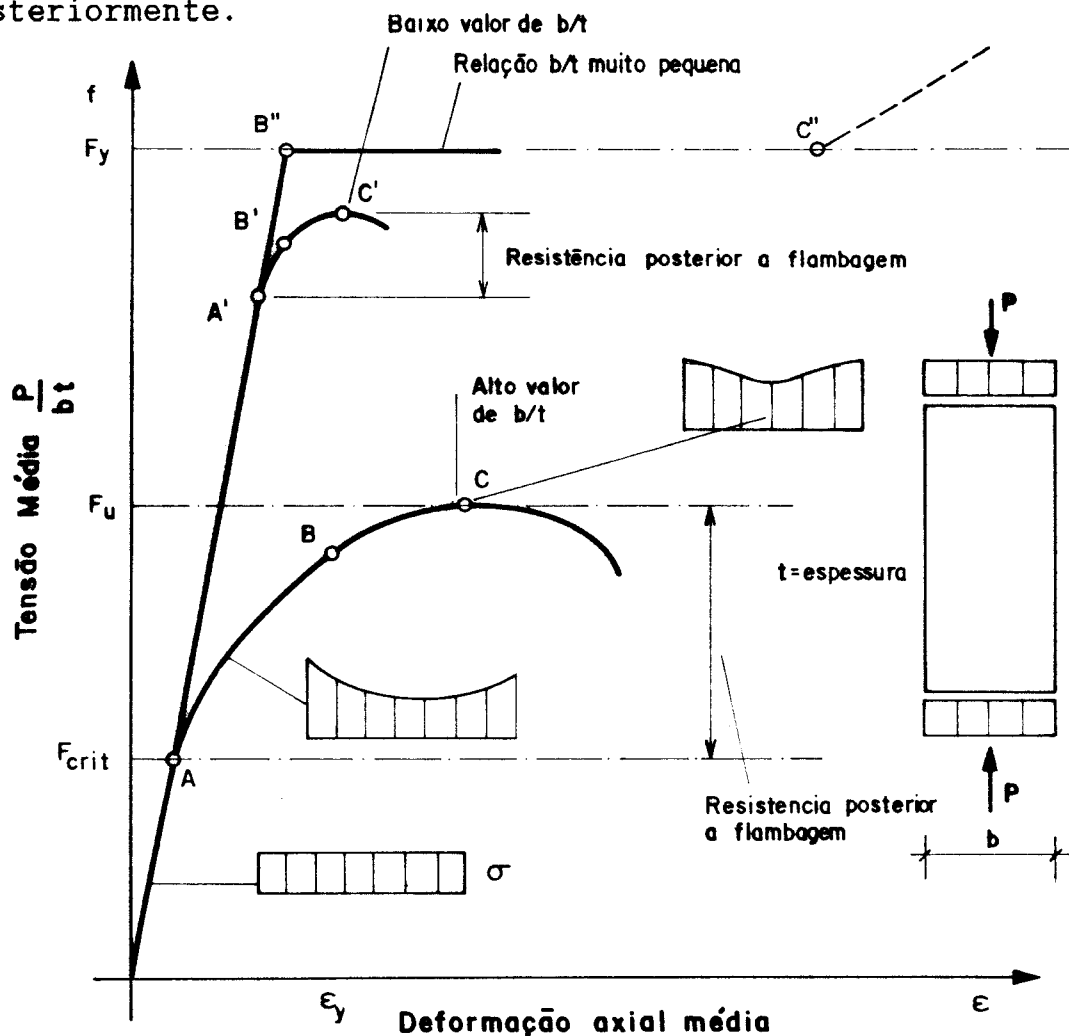


FIG. 3.5 - Comportamento de chapas sob tensões de compressão [88, 154].

Dentro das considerações sobre a limitação dos valores de "b/t" para os elementos das chapas, dentre as contribuições notáveis, inclusive para a elaboração de manuais tais como [78], destacam-se autores como [84, 85, 109, 120]. Entretanto, quem estudou com mais veemência o assunto da flambagem local de almas e mesas de vigas, através de formulações teóricas e comprovações experimentais, onde levou colunas de aço e chapas a serem comprimidas além do limite de escoamento e dentro do limite de deformação por encruamento, destituídas de flambagem foi HAAIJER, THÜRLIMANN [85].

HAAIJER [84], mostra em sua publicação que as expressões para a determinação da resistência à flambagem são obtidas assumindo que o material das chapas se comporta como ortogonalmente anisotrópico, ou seja, todas as teorias de flambagem de chapas no limite plástico, implicam em assumir um comportamento ortotrópico do material. O segundo objetivo do seu artigo é prognosticar a deformação em que ocorre a flambagem de elementos de chapas nos casos em que essas deformações ultrapassam o limite elástico.

Com isso [73, 142] mostram que uma chapa ortotrópica é aquela em que as propriedades do material são ortogonalmente anisotrópicas, ou seja, representa um corpo nos quais as propriedades elásticas são diferentes para direções diferentes [48], e geralmente as expressões para a flambagem de chapas são derivadas das relações tensões-deformações envolvendo cinco módulos ( $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$ ,  $D_{yx}$ ,  $G_t$ ). A determinação da resistência à flambagem para chapas ortotrópicas é baseada na solução da equação diferencial que governa as pequenas deformações  $w(x,y)$  conforme [73], e é expresso por:

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = - \frac{t\sigma_x}{I} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

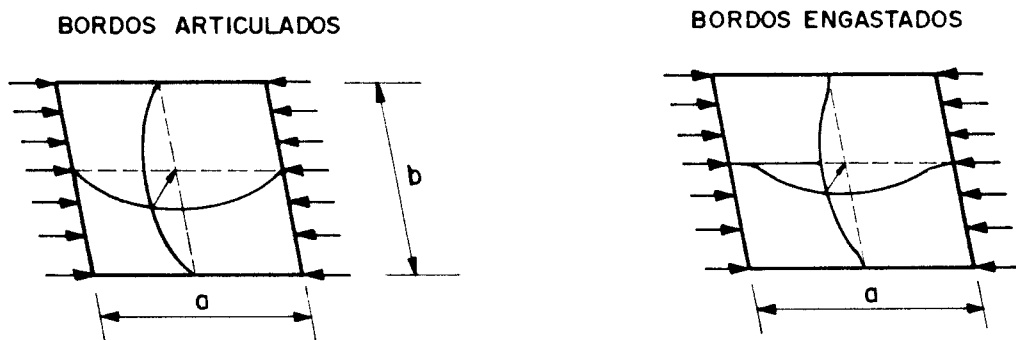
em que:  $D_x = \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y}$ ,  $D_y = \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y}$

I - momento de inércia, da chapa de espessura t

$$D_{xy} = \frac{\nu_y E_x}{1-\nu_x\nu_y}; \quad D_{yx} = \frac{\nu_x E_y}{1-\nu_x\nu_y} \quad I = \frac{t^3}{12}$$

$$2H = D_{xy} + D_{yx} + 4G_t$$

Ainda na análise segundo [84] através da solução da equação diferencial (3.2) para os casos de chapas com uma extremidade livre (Elementos não enrijecidos) e chapas apoiadas ao longo de 4 extremidades (Elementos Enrijecidos) (Figura 3.6),



FLAMBAGEM ELÁSTICA DE UMA CHAPA RETANGULAR DELGADA.

a) Chapa com uma Extremidade livre

b) Chapa apoiada ao longo de todas quatro extremidades

FIG. 3.6 - Resistência a Flambagem de chapas [85, 154]

Chega-se à seguinte conclusão:

Caso a Figura 3.6

$$F_{\text{crit}} = \left(\frac{t}{b_1}\right)^2 \left[ \frac{\pi^2}{12} D_x \left(\frac{b_1}{l_p}\right)^2 + G_t \right] \quad (3.3)$$

$b_1$  - largura da chapa

$l_p$  - comprimento da chapa.

Para uma chapa longa, o primeiro termo pode ser negligenciado e a tensão crítica de flambagem tornar-se-á:

$$F_{\text{crit}} = \left(\frac{t}{b_1}\right)^2 G_t \quad (3.4)$$

onde  $G_t$  - Módulo tangente ao cisalhamento.

Em relação ao módulo tangente ao cisalhamento [85] realizaram ensaios em tubos de parede fina até atingirem o limite de escoamento e até a deformação média  $\epsilon_0$ , conforme o diagrama tensão-deformação com deformação por encruamento (Fig. 3.7),

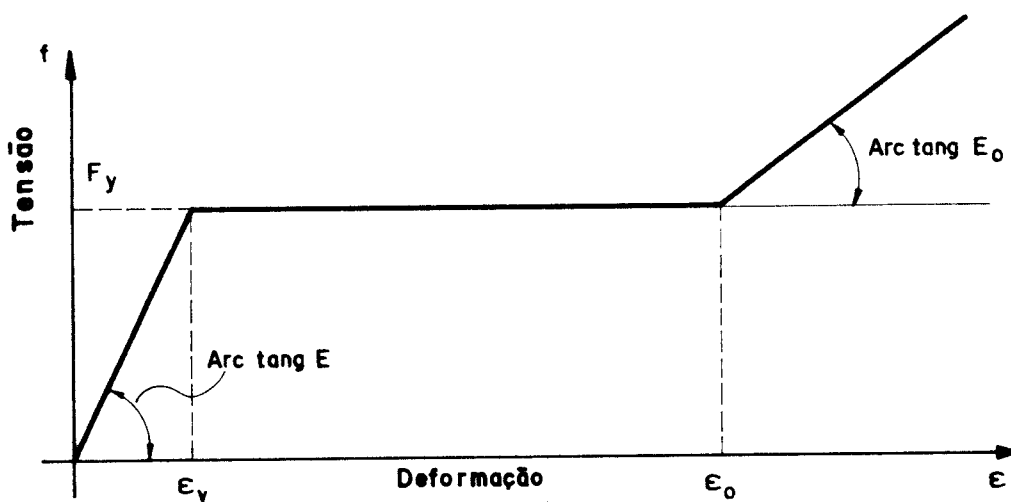


FIG. 3.7 - Diagrama com Deformação por encruamento [121]



e com a deformação mantida  $\epsilon_0$  torceram os tubos, medindo o torque aplicado e o ângulo de giro correspondente, obtendo os resultados apresentados na figura 3.8.

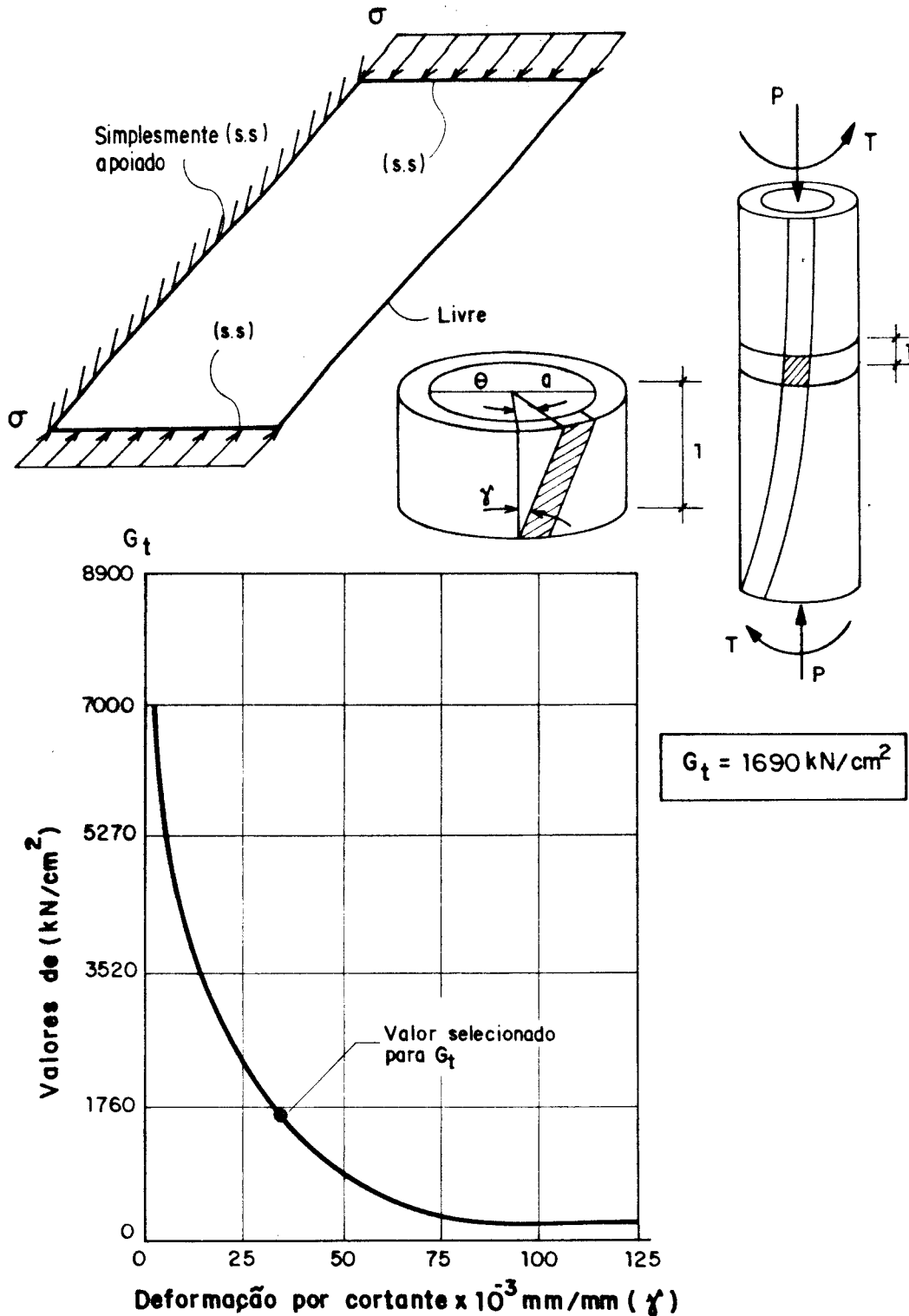


FIG. 3.8 - Módulo Tangente ao Cisalhamento Obtido Através a Deformação por encruamento [121]

Encontrando-se da figura 3.8:

$$\theta = \gamma/a \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{T}{G_t I_p} \quad G_t = \frac{T a}{\gamma I_p} \quad (3.5)$$

Portanto, após a análise de resultados de testes de flabagem em cantoneiras curtas, selecionaram para  $G_t = 16900$  MPa, como sendo o valor mais representativo do comportamento incipiente de deformação por encruamento [121].

Na expressão (3.4) fazendo  $F_{crit} = f_y$ ;  $G_t = 16900$ MPa e extraíndo o valor de  $(b_1/t)$ , tem-se a limitação da esbeltez da chapa através da análise plástica para os elementos não enrijecidos (Figura 3.4a).

$$\text{Logo } f_y = \left( \frac{t}{b_1} \right)^2 G_t \quad \text{ou chamando } b_1 = b$$

$$(b/t)^2 = \frac{G_t}{f_y} \quad b/t = \sqrt{\frac{G_t}{f_y}} \quad (3.6)$$

Por exemplo para um aço do tipo

$$G_t = 16900 \text{MPa}; \quad f_y = 232 \text{MPa}$$

$$b/t = \sqrt{\frac{16900}{232}}; \quad b/t \approx 8,5 \quad (3.7)$$

Em unidades do SI (MPa)

$$b/t = \frac{130}{\sqrt{f_y}} \quad (3.8)$$

Na expressão (3.4) o valor de  $G_t$  pode ser também calculado, segundo [109], onde os mesmos afirmam que para resolver o problema da flambagem da mesa, duas propriedades do material da seção estrutural devem ser conhecidos, que são o módulo de rigidez axial e o módulo de rigidez ao cisalhamento.

Então

$$G_t = \frac{2G}{1 + E/[4E_{ed}(1+\nu)]} \quad (3.9)$$

$E_{ed}$  — é o módulo de deformação no encruamento segundo [88], obtido por um ensaio de tração em um corpo de prova. Em seu trabalho [84], através da realização de ensaios experimentais em perfis estruturais do tipo denominado laminado de mesas paralelas e em cantoneiras, sob a ação de cargas compressivas, num total de 21 amostras, chegou a um diagrama onde é mostrado a relação tensão- deformação para o limite de deformação por encruamento para os aços com um valor de

$$E_{ed} = 6300\text{MPa}$$

valor este que também é citado por [88] na página 363 e também por [85].

Portanto para um aço do tipo ASTM A-36 ( $f_y = 250\text{MPa}$ ) que é comumente usado nas estruturas correntes de aço tem-se:

$$G = 80.000\text{MPa}; \quad E = 205.000\text{MPa}; \quad \nu = 0,3$$

$$E_{ed} = 6.300\text{MPa}; \quad \text{substituindo esses valores em (3.9),}$$

tem-se:

$G_t \approx 21500\text{MPa}$  que segundo [88] está razoavelmente de acordo com os  $16900\text{MPa}$  obtidos por [84].

Levando o valor de  $G_t = 21.500\text{MPa}$  na expressão 3.6 tem-se a relação  $b/t$  para uma determinada mesa de um perfil estrutural de viga.

$$b/t = \sqrt{\frac{G_t}{f_y}} = \sqrt{\frac{21500}{f_y}}$$

$$b/t = \frac{147}{\sqrt{f_y}} \quad (3.10)$$

O valor do módulo de cisalhamento  $G_t$  também é referendado no trabalho de [109] como sendo um valor mais exato para o aço A-36 ( $f_y = 250\text{MPa}$ ).

Para comprovar esse valores, [85] mostram que os métodos de projeto plástico assumem que a flambagem local das mesas e almas dos perfis laminados não ocorrerá durante a formação das rótulas plásticas. Segundo esses mesmos autores, diversas condições se fazem necessárias para o reexame do problema da flambagem de chapas no limite elástico. Para concordar as opiniões eles estabeleceram que colunas de aço e chapas podem ser comprimidas além do ponto de escoamento e sempre dentro do limite de deformação por encruamento, sem flambagem. Os testes foram realizados em colunas, cantoneiras e perfis laminados de mesas largas paralelas. Com isso eles verificaram que em chapas livres de tensões residuais, existem três regiões que precisam ser consideradas para o estabelecimento da resistência, que são: Flambagem Elástica (hipérbole de Euler), escoamento (segmentos AB, AB e A"B) e deformação por encruamento figura 3.9 [154].

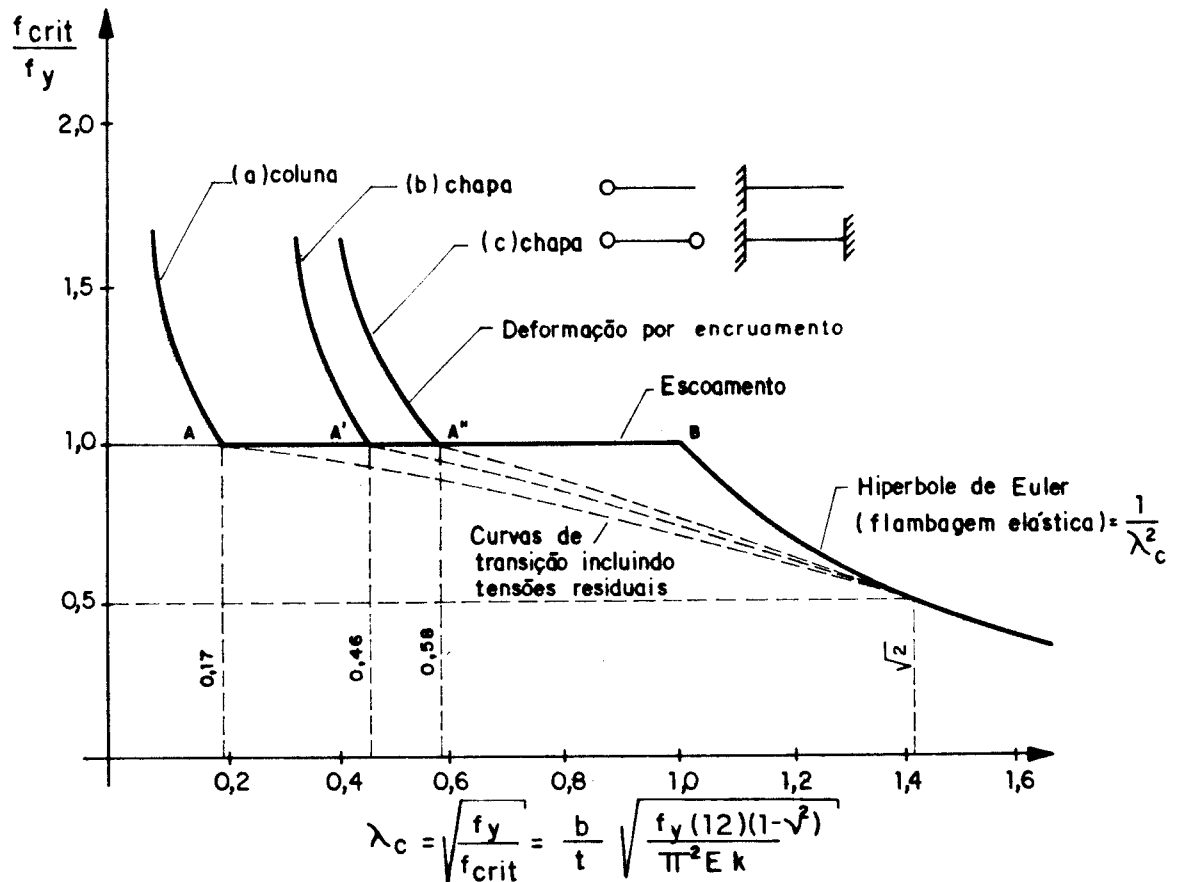


FIG. 3.9 - Flambagem de chapas Comparadas com Flambagem de colunas [154].

Para essas considerações [85] introduziram o conceito de parâmetro de esbeltez  $\lambda_c$  definido como sendo:  $F_{crit}/f_y = 1/\lambda_c^2$  (3.11).

Para o caso das chapas comprimidas axialmente, da equação 3.1.

$$\frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{F_{crit}}{f_y} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu)(b/t)^2(f_y)}$$

Extraindo o valor de  $\lambda_c$  tem-se

$$\lambda_c = b/t \sqrt{\frac{f_y (12) (1-\nu^2)}{\pi^2 E K}} \quad (3.12)$$

Esses mesmos estudiosos, através dos ensaios realizados em colunas e chapas recomendam para as seções do tipo I, no projeto plástico os seguintes valores:

a) MESAS - As recomendações mostram que elas são baseadas diretamente em investigações teóricas e experimentais. As mesas dos perfis laminados do tipo I (perfis de mesas largas paralelas) podem ser deformadas dentro do limite de deformação por encruamento se  $\lambda_c \leq 0,46$

b) ALMAS - Os resultados dos testes de compressão em almas mostram que as mesmas não falham por flambagem para  $\lambda_c = 0,58$ , sendo comprimidas dentro do limite de deformação por encruamento o que pode-se comprovado por meio da expressão (3.12) e através das provas de laboratório sugeridas por [88, 154].

Para uma melhor compreensão de algumas normas de estruturas de aço tais como [7, 8, 12] introduz-se a grandeza  $\lambda_r$  que representa o parâmetro de esbeltez para evitar a flambagem local até que seja atingido o limite de escoamento. Portanto, segundo [121, 154]:

$$F_{crit} \geq f_y \quad (\text{PROJETO ELÁSTICO})$$

$$\frac{\pi^2 E K}{12(1-\nu^2)(b/t)^2} \geq f_y$$

$$b/t \leq \sqrt{\frac{\pi^2 E K}{12(1-\nu^2)f_y}} \quad (3.13)$$

Para  $E = 205000 \text{ MPa}$ ;  $\nu = 0,3$

$$b/t \leq 425 \sqrt{\frac{k}{f_y}} \quad (f_y - \text{MPa}) \quad (3.14)$$

que é representado pelo ponto A da figura (3.12) para  $\lambda_c = 1,00$ .

O fator  $\lambda_c$  deverá portanto, segundo [154], ser usado para minimizar o desvio entre o limite de escoamento  $f_y$  e a curva de transição que leva em conta as imperfeições da peça e as tensões residuais.

Portanto a expressão (3.14), corrigida com o parâmetro de esbeltez  $\lambda_c$ , ficará da seguinte forma:

$$b/t \leq 425 \lambda_c \sqrt{\frac{k}{f_y}} \quad (3.15)$$

De acordo com [154], ao observar a figura 3.9 conclui-se que  $\lambda_c = 0,7$  representa um valor racional obtido de análise experimental logo:

$$b/t \leq 300 \sqrt{\frac{k}{f_y(\text{MPa})}} \quad (3.16)$$

Com essa expressão e com os diferentes valores do coeficiente de flambagem  $k$  extraídos das figuras 3.2 e 3.3 chega-se a valores de  $b/t$  limitando a flambagem local das chapas comprimidas conforme [121, 154].

#### a) Elementos não Enrijecidos

##### Cantoneiras Simples

Aplicando a expressão (3.16) e, considerando que se trata de um elemento apoiado e a outra livre, cujo valor para  $K$  conforme as figuras 3.2 e 3.3 é 0,425, tem-se:

$$b/t \leq 425 \times 0,7 \times \sqrt{\frac{0,425}{f_y}}$$

Encontrando-se:

$$b/t \leq \frac{194}{\sqrt{f_y}} \quad (3.17)$$

As normas [7,8] recomendam

$$b/t \leq \frac{200}{\sqrt{f_y}} \quad (f_y \text{ em unidades MPa})$$

EXEMPLO - Para o Aço A-36 ( $f_y = 250\text{MPa}$ )

$$b/t \leq \frac{200}{\sqrt{250}} \leq 12,6$$

b) Mesas de perfis tipo I e tipo U solicitadas por compressão [154] sugere  $k = 0,70$  como sendo um valor arbitrariamente selecionado da figura 3.2, para chapas situadas entre meio caminho de simplesmente apoiados e engastadas ao longo de uma extremidade.

Logo, aplicando a expressão (3.15) para  $\lambda_c = 0,7$  tem-se:

$$b/t \leq 425 \times 0,7 \times \sqrt{\frac{0,7}{F_y}}$$

$$b/t \leq \frac{250}{\sqrt{F_y}} \quad (3.18)$$

Para um aço com  $F_y = 250\text{MPa}$

$$b/t \leq \frac{250}{\sqrt{250}} \quad b/t \leq 15,8$$



A expressão (3.18) é confirmado por [7, 8] segundo as tabelas B.51 da página 536 e tabela B5.1 da página 6.32, e também é confirmado por [154].

### 3.2.2- Flambagem Inelástica

Quando se analisa o comportamento de chapas retangulares longas solicitadas longitudinalmente por compressão, no plano das chapas, deduz-se a expressão que fornece a tensão crítica de flambagem no comportamento elástico, que é a equação 3.1:

$$F_{crit} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2)(b/t)^2}$$

Entretanto, no comportamento inelástico, alguns autores [41, 73, 121, 154] afirmam, e principalmente [28] sugere, que na expressão anterior seja substituído o módulo de elasticidade por um módulo reduzido  $\eta$  que representa um fator de plasticidade ou  $(\eta.E)$  o módulo reduzido, de tal maneira que se tenha a expressão:

$$F_{crit} = \frac{k \pi^2 E \sqrt{\eta}}{12(1-\nu)^2(b/t)^2} \quad (3.19)$$

em que  $\eta = E_t/E$  sendo  $E_t =$  módulo tangente.

A referência [121] mostra que para um perfil de uma viga, a mesa comprimida define um diagrama tensão deformação em que  $E_t = E$  para tensões menores do que  $f_y$  e  $E_t=0$  para tensões iguais a  $f_y$ , conforme a figura 3.10a.

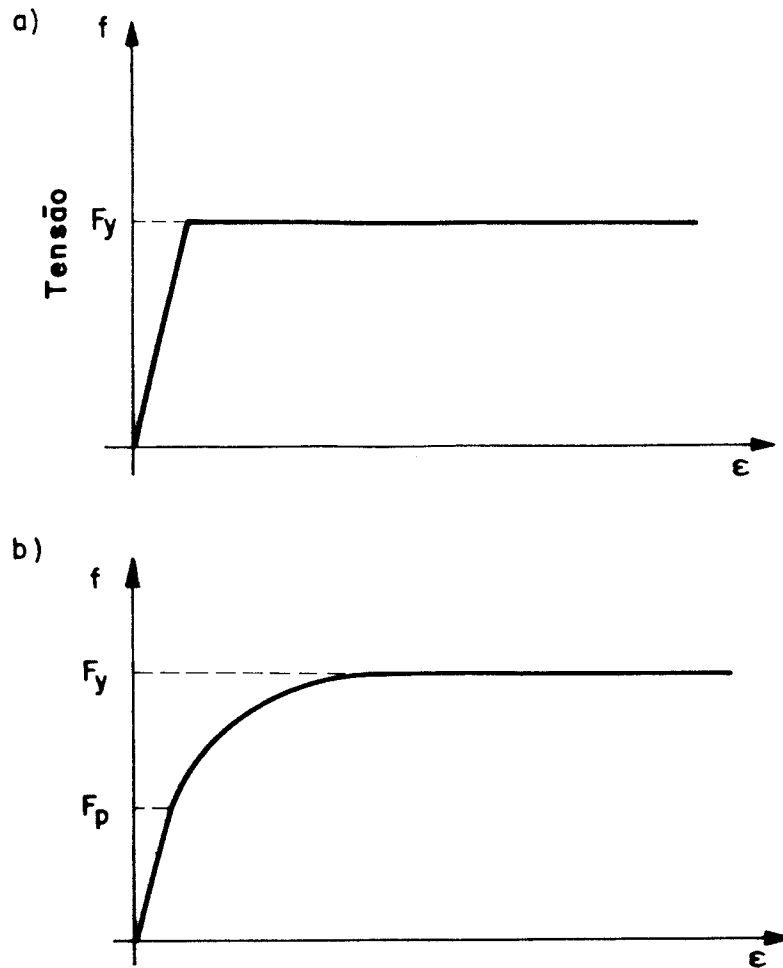


FIG. 3.10 - Diagrama Tensão-Deformação  $f - \epsilon$  [86]

Em relação a figura 3.10b, existe uma compressão inelástica entre as tensões  $f_p$  e  $f_y$  que, ao atingir  $f_y$ , levará sem muitas dificuldades, a chapa ao colapso. Para o caso da figura 3.10a, mesmo para uma mesa reforçada, que ainda resista à flambagem elástica para tensões menores que  $f_y$  e ao escoamento para tensões que atingem  $f_y$ , negligenciando as condições de suporte, o módulo tangente  $E_t$  irá repentinamente tornar-se nulo e a chapa poderá não resistir a nenhum tipo de carga [121].

No cálculo plástico, segundo [16], as hipóteses fundamentais requerem que se formem todas as rótulas plásticas, necessária à formação do mecanismo de colapso, antes que o fenômeno da flambagem local, diminua a resistência das seções em que as rótulas plásticas estarão presentes. Na realidade, o momento em uma rótula plástica genérica é considerado constante e igual ao momento último de colapso. Portanto, é necessário que todos os membros sejam capazes de suportar grandes rotações plásticas. Por causa da complexidade da análise das deformações de uma chapa comprimida, que envolve tratamento matemático complexo, inclusive partindo para o campo da matemática aplicada à teoria da plasticidade e, que várias teorias são utilizadas para a determinação da relação largura/espessura, no seu trabalho, [28], apresenta os resultados de vários ensaios em perfis estruturais de aço e alumínio bem como chapas de alumínio com várias condições de apoio e cujos dados foram aglomerados em uma tabela, mostrada na página seguinte, que apresenta as expressões do fator  $\eta$  proposto por [28] para apresentar e corrigir a expressão da carga crítica de flambagem da fase elástica para a inelástica.

Olhando na tabela a curva G, que representa os valores de  $\eta = E_t/E$  para colunas, verifica-se que a mesma concorda com a teoria do módulo tangente.

TABELA

ESTRUTURA (TIPO DE FLAMBAGEM)	FATOR INELÁSTICO $\eta$	VEJA CURVA FIG. 3.11
mesas longas uma extremidade não carregada e outra simplesmente apoiada.	$E_s/E$ $E_s$ - módulo secante	A
mesas longas e uma extremidade não carregada e outra fixa	$\frac{E_s}{E} \left( 0,428 + 0,572 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{E_t}{E}} \right)$	B
chapas longas com extremidades não carregada e outra simplesmente apoiada	$\frac{E_s}{E} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{E_t}{E}} \right)$	C
chapas longas com extremidades não carregadas e fixas	$\frac{E_s}{E} \left( 0,352 + 0,468 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{E_t}{E}} \right)$	D
Colunas	$E_t/E$	G

Obs.: O material ensaiado é uma liga de alumínio extrudado e os resultados são mostrados na figura 3.11.

Ao analisar este diagrama [28] concluiu que a curva G pode ser considerada como sendo uma curva limite para o fator  $\eta$ , fornecendo valores conservativos para a tensão crítica de flambagem.

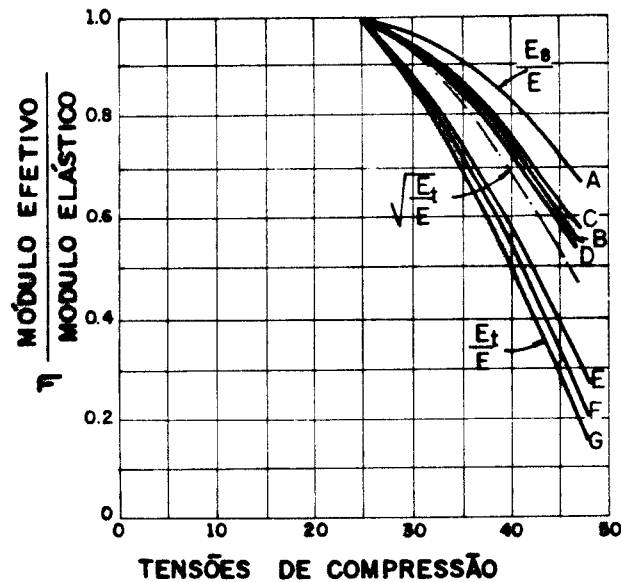


FIG. 3.11 - Variação Típica do Fator Inelástico  $\eta$  com as tensões [28]

Em suma, torna-se complexo estabelecer as limitações da relação "b/t" quando se trata do comportamento inelástico das chapas de aço em virtude das imperfeições iniciais e a presença de tensões residuais. Portanto segundo [36, 154], de acordo com os ensaios experimentais, a flambagem de chapas de aço sob a ação de tensões de compressão pode se apresentar em 3 limites: no elástico, no de deformação por encruamento e nos limites intermediários como mostra a figura 3.12.

Para o efeito de análise das normas [7, 8, 12], seja  $\lambda_p$  o valor do parâmetro de esbeltez para o qual a seção transversal pode atingir o momento de plastificação  $M_p \ell$ .

Pensando na sugestão de [28], onde apareceu a expressão (3.19) para a determinação da carga crítica de flambagem para elementos que compõem as estruturas de aço, têm-se dois aspectos importantes:

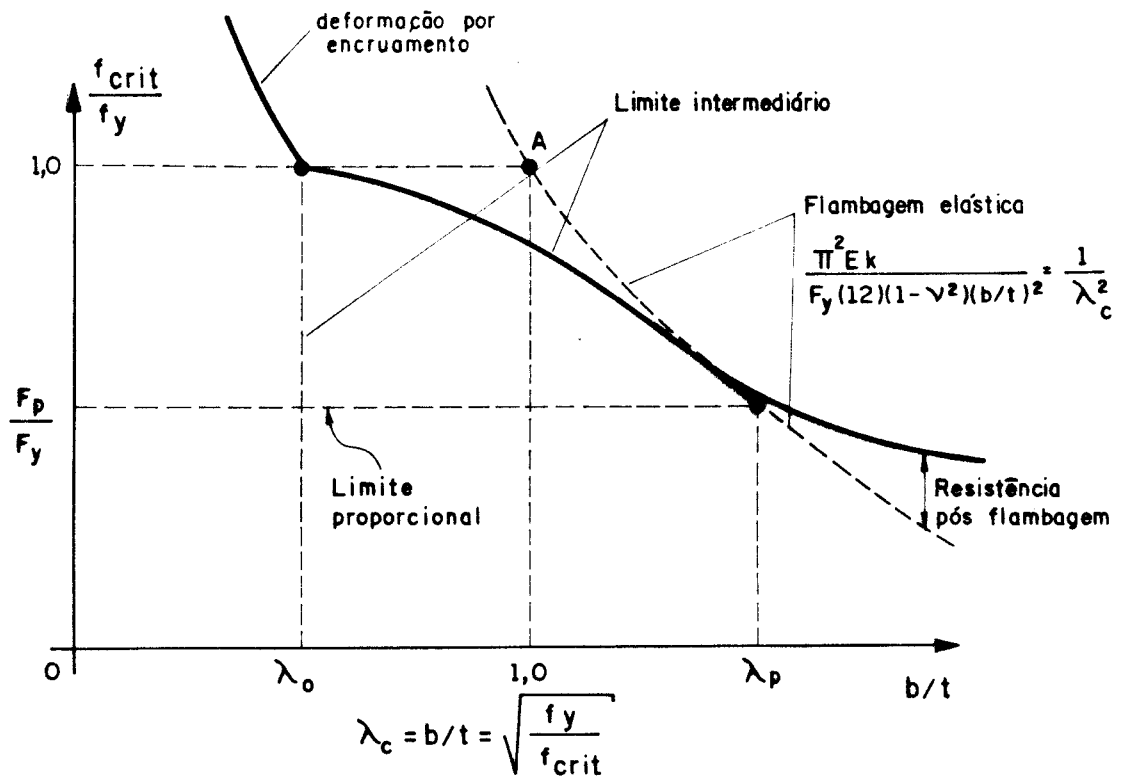


FIG. 3.12 - Flambagem Elástica e Inelástica de chapas [36, 154]

a) Dimensionamento de Colunas segundo a Teoria Inelástica.

A carga crítica de flambagem é determinada pela expressão:

$$F_{crit} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2} \quad (3.20)$$

Esta equação é chamada geralmente de fórmula do módulo tangente ou equação de Euler-Engesser.

$E_t$  - módulo tangente.

Da expressão (3.20) limita-se a esbeltez das colunas, ou seja:

$$(KL/r)_{crit} = \pi \sqrt{\frac{E_t}{F_{crit}}} \quad (3.21)$$

b) Comportamento de chapas segundo a Teoria Inelástica

Segundo [154] algumas vezes os elementos de chapas de uma determinada seção não podem flambar até que atinjam uma deformação por tensões de compressão bem significativa, excedendo a deformação  $\epsilon_y$  que é a deformação dentro da região plástica conforme a figura 3.13. ,

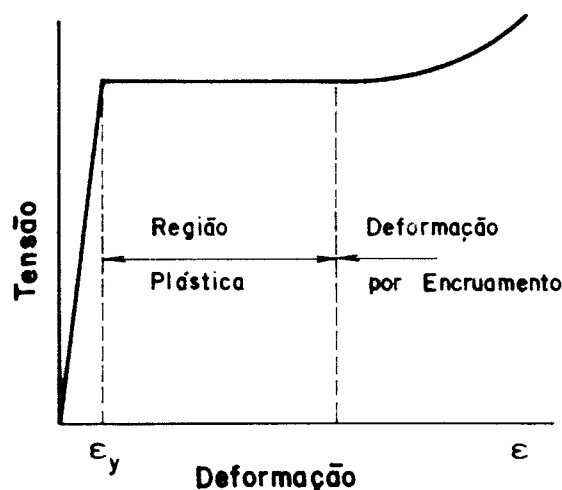


FIG. 3.13 - Regiões Plástica e de Deformação por encruamento da Relação Tensão-Deformação para os Aços Estruturais [128, 154].

Os valores mais baixo da relação "b/t" e o mais elevado da deformação compressiva  $\epsilon$  é que podem ser absorvidas sem flambagem. Ou seja, em colunas axialmente carregadas não existe a necessidade das mesmas suportarem deformações plásticas, porque a sua resistência global é baseada no parâmetro de esbeltez ( $KL/r$ ) e não será requerida deformação plástica. Entretanto, nas vigas conforme será visto posteriormente, as mesas devem ser capazes de suportar deformações plásticas significativas, sem que ocorra a flambagem local [154].

Olhando a figura (3.12) conclui-se que deve ser restrito a não ultrapassar  $\lambda_c$ , se a deformação por encruamento for atingida sem a flambagem da chapa.

Com isso, na figura 3.9,  $\lambda_c$  não deve exceder 0,46 para elementos não enrijecidos comprimidos e 0,58 para elementos enrijecidos (figura 3.4) -

### 1.º CASO: Elementos não Enrijecidos

Fazendo  $\lambda_c = 0,46$  na expressão 3.15 tem-se:

$$b/t \leq 425 \lambda_c \sqrt{k/f_y}$$

com o valor de  $k = 0,425$  (Figs. 3.2 e 3.3)

$$b/t \leq 425 \times 0,46 \sqrt{0,425/f_y} \quad (f_y \text{ em MPa})$$

$$b/t \leq \frac{127}{\sqrt{f_y}} \quad (3.22)$$

Esta expressão também foi citada por [172] que mostra a análise de chapas quando se quer determinar a tensão crítica para uma chapa simplesmente apoiada onde substitui  $\sqrt{E E_{st}}$  no lugar de  $E$ , na expressão (3.1)

Fazendo isto e também lembrando que [128] relata que para os aços estruturais tem-se os seguintes propriedades mecânicas idealizadas.

$$f_y = 250\text{MPa (Aço A-36)}$$

$$E = 200000\text{MPa}$$

$$E_{st} = E/33$$

De (3.1) com essas modificações propostas vem:



$$F_{crit} = \frac{\pi^2 K \sqrt{E E_{st}}}{12(1-\nu^2)(b/t)^2} \quad (3.23)$$

Para  $k = 0,425$ ;  $F_{crit} = f_y$   $E_{st} = E/33$   $\nu = 0,3$ ,  
tem-se:

$$b/t = \sqrt{\frac{\pi^2 K \sqrt{E \times E/33}}{12(1-0,3^2) f_y}}$$

$$b/t = \frac{\pi \sqrt{0,425} \sqrt{1/33}}{\sqrt{12 \times 0,91}} \sqrt{E/f_y}$$

$$b/t \approx 0,26 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (3.24)$$

Os ensaios experimentais realizados por [84] com o aço ASTM A-36 levaram a valores de  $E_{st}$  da ordem de 6200MPa, e  $E = 205000$ MPa. Levando esse valor em (3.23) e extraindo a relação  $b/t$  tem-se:

$$(b/t) = \frac{117}{\sqrt{f_y}} \quad (3.25)$$

ou então:

$$(b/t) \approx 0,26 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (3.26)$$

Para o A-36 com  $f_y = 250$ MPa;

encontra-se:

$$(b/t)_{max} = 7,5$$

Analisando a expressão (3.22) e considerando que os efeitos das tensões residuais e das imperfeições dos materiais desaparecem no limite plástico, a mesma foi considerada como bastante conservadora, na opinião dos autores [154] para efeitos normativos [7, 8, 12], isto, porque a deformação por encruamento é da ordem de 15 a 20 vezes  $\epsilon_y$  e que a deformação plástica total não é necessária para se atingir o momento de plastificação. Logo as normas [7,8] são planejadas para que os valores de  $\lambda_p$  sejam significativos para uma deformação plástica compressiva de 7 a 9 vezes  $\epsilon_y$  ou seja, metade da deformação necessária para atingir a deformação por encruamento.

Então as normas [7,8] adotam para elementos comprimidos não enrijecidos o valor limite da expressão 3.22.

$$b/t \leq \frac{171}{\sqrt{f_y}}$$

Para o aço A-36 ( $f_y = 250\text{MPa}$ )

$$b/t \leq \frac{171}{\sqrt{250}} = 11$$

Comparando com a expressão 3.15 tem-se, com  $k = 0,425$ ; e chamando a relação  $b/t$  de " $\lambda_p$ " e levando esses valores em (3.12)

$$\lambda_c = 0,62$$

$$\lambda_p = 0,62\pi \sqrt{\frac{0,425 \times E}{12(1-0,3^2)f_y}}$$

$$\lambda_p = 0,38 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (3.27)$$

Expressão essa que está em perfeita consonância com os valores limites da relação largura/espessura segundo [12] na tabela 1 da página 21 onde está designado: Caso 1, mesas de perfis "I", "H" e "T".

Na solicitação por momento fletor o valor da expressão (3.27) também está em harmonia com o valor de  $\lambda_p$  do Anexo D de [12] com relação ao parâmetro referente a resistência nominal ao momento fletor correspondente ao estado limite aplicável de FLM (Flambagem local da mesa) de perfis tipo "I" e "H" com dois eixos de simetria ou com um eixo de simetria no plano médio da alma e perfis "U", não sujeitos a torção, todos fletidos em torno do eixo de maior inércia.

## II CASO: Elementos Enrijecidos

Com  $\lambda_c = 0,58$  e com valor de  $k_{\min} = 4,00$  (figuras 3.2 e 3.3) e  $\nu = 0,3$ .

Nesse caso a expressão

$$b/t \leq \lambda_c \sqrt{\frac{\pi^2 E k}{12(1-\nu)^2 f_y}}$$

ficará

$$b/t \leq 0,58\pi \sqrt{\frac{4 \times E}{12 \times (1-(0,3))^2 \times f_y}} = 1,10 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = \lambda_p \quad (3.28)$$

ou

$$b/t \leq 425 \lambda_c \sqrt{\frac{k}{f_y}(\text{MPa})} = 425 \times 0,58 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 493 / \sqrt{f_y}$$

As normas [7,8] adotam

$$b/t \leq \frac{500}{\sqrt{f_y}} \quad (3.29)$$

que corresponderá ao seguinte valor para  $\lambda_c$

$$425 \lambda_c \sqrt{\frac{4E}{f_y}} = \frac{500}{\sqrt{f_y}}$$

$$\lambda_c = \frac{500}{2 \times 425} = 0,58$$

A norma [12] adota como valor limite das relações "b/t"

1,12  $\sqrt{\frac{E}{f_y}}$  para mesas de seção caixão quadradas e retangulares ou de seções tubulares com paredes de espessura uniforme, almas de perfis "U", chapas contínuas de reforço de mesas entre linhas de parafusos ou soldas o que está de acordo com a expressão (3.28) e também está em consonância com a tabela 27 de [12] relativo aos valores de  $\lambda_p$  correspondentes aos estados limites aplicáveis de FLM (Flambagem local da mesa) de perfis caixão duplamente simétricos fletidos em torno de um dos eixos de simetria.

### 3.3- Classificação dos Elementos de uma Seção

Para efeito de algumas normas tais como [7, 8, 12, 39], com relação ao comportamento das vigas, as mesmas são classificadas em quatro classes denominadas de classe 1, 2, 3 ou 4 dependendo da relação largura/espessura ("b/t").

De acordo com este critério alguns autores tais como [4, 21, 51, 54, 61, 113, 121, 134], mostram como são definidas cada uma dessas classes em relação ao seu comportamento.

O método utilizado para compreender o comportamento das vigas de aço, foi o de submeter a testes de laboratório, segundo [121] vigas laminadas do tipo I de mesas largas paralelas e lateralmente apoiadas. Nesses ensaios pode-se observar que eram as espessuras das mesas que definiam a maneira com que as mesas comprimidas eram levadas a apresentar a falha prematura por flambagem local. De um modo geral, segundo as teorias que retratam o comportamento dessas vigas, as mesmas podem apresentar falhas cujas origens são: flambagem local da mesa comprimida; flambagem local da alma, e a flambagem lateral. No caso dos ensaios dessas vigas, [121] analisou quatro tipos distintos de comportamento de acordo com as dimensões da espessura das mesas.

a) Vigas possuindo a mesa comprimida com dimensão da espessura bem compacta (chapa grossa) para prevenir uma flambagem local prematura e tendo suporte lateral. Nesse caso tem-se uma viga biapoiada solicitada por duas ações verticais de intensidade  $P$  situadas equidistantes dos apoios. Foram feitas, medições de deslocamentos e o que pode ser constatado é que esses tipos de seções se comportaram de tal maneira que, levadas até a plastificação com o momento  $M_p$ , observou-se que a flambagem local não foi um fenômeno abrupto e se deu gradualmente como pode ser observado no diagrama ( $M-\Delta$ ) da figura 3.14 e, também o ponto de falha última não se deu bruscamente após a pronunciamto da flambagem local e lateral. Portanto essas seções apresentaram falhas por flambagem local e lateral mas isto ocorreu de uma forma gradual [121].

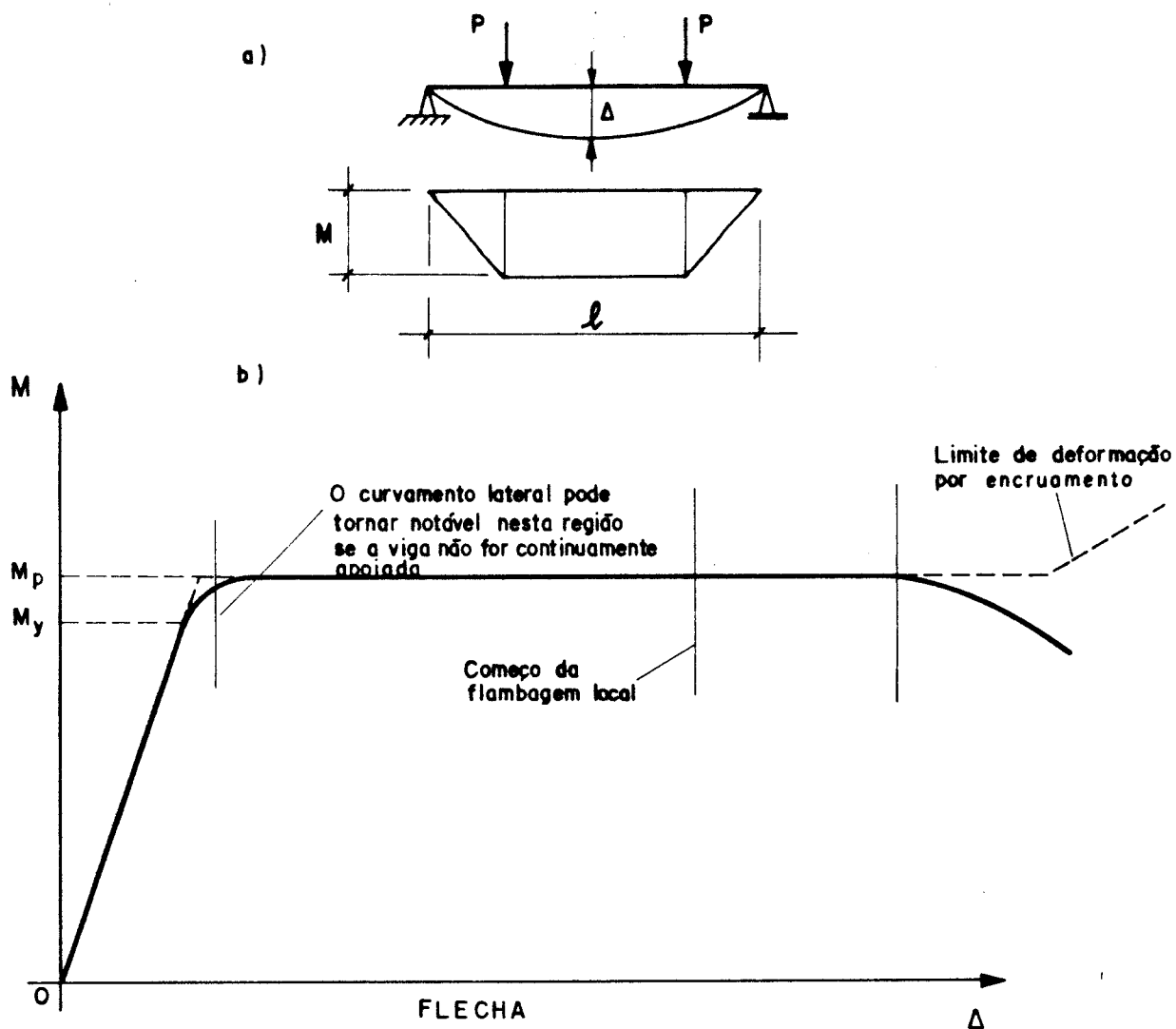


FIG. 3.14- Desempenho de uma Viga Lateralmente Apoiada [121]

b) Vigas lateralmente apoiadas e com espessuras de mesas ainda espessas, mas solicitadas por ações com intensidades diferentes. Usualmente na prática existe um gradiente de momento fletor através do comprimento da viga, com momentos que atingem valores relevantes, em determinados pontos individuais da seção transversal da viga conforme a figura 3.15.

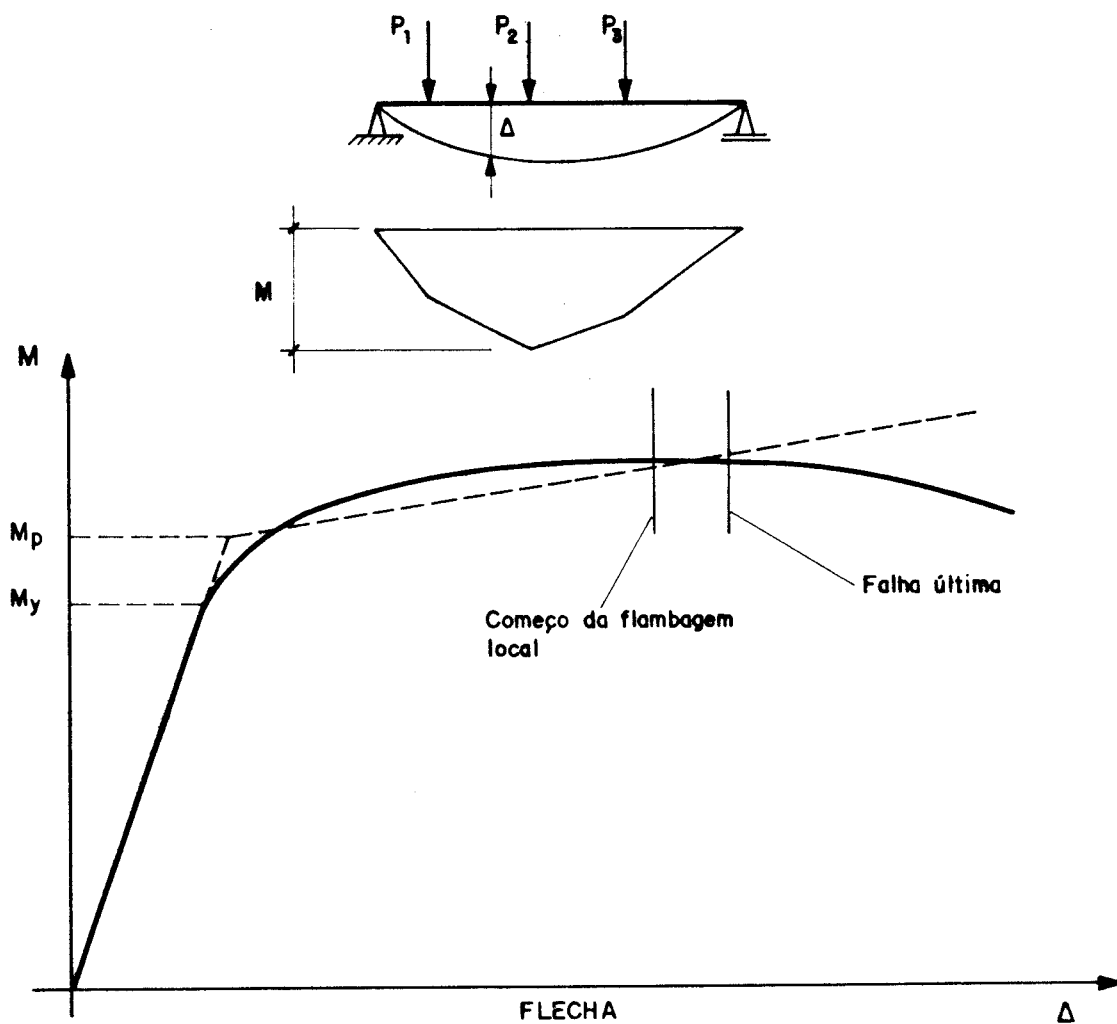


FIG. 3.15 - Viga Lateralmente Apoiada com Momento de Flexão Gradiente [121]

Nesse caso, sendo a viga apoiada lateralmente e as mesas possuindo espessura suficiente para prevenir a flambagem local, a falha última será resultante da flambagem local da mesa. Se existe um momento variável, isto mostra

que antes que a flambagem local seja capaz de se formar sua presença será capaz de causar um declínio na capacidade de resistência à flexão da viga, existindo portanto uma significativa deformação por encruamento na região de momento máximo, conforme pode ser visto na figura 3.15 [121].

c) Vigas lateralmente apoiadas mas com largura/espessura das mesas e solicitadas por ações equidistantes dos apoios. Nesse caso a flambagem local poderá conduzir à ruína com tensões menores do que o limite de escoamento, como mostra a figura 3.16 e, este poderá ser o caso de perfis soldados e de perfis dobrados a frio. Em geral as especificações [7,8] tem a intenção de dimensionar barras de aço laminadas a quente, pela limitação da flambagem local. Na figura (3.16) pode ser observado que a flambagem local e o colapso portanto, podem ocorrer antes que as mesas se deformem com plastificação completa da seção. Concluiu-se portanto através destes ensaios que determinados tipos de perfis estruturais apresentam comportamento distintos onde algumas seções podem resistir a ações até que se atinja a completa plastificação e outras que podem falhar por flambagem local antes de se atingir o limite de escoamento.

Segundo McGUIRE [121] para condensar a análise do comportamento de vigas lateralmente apoiadas uma coisa pode ser generalizada, é que o colapso final de elementos estruturais laminados a quente mostram uma extensiva deformação plástica e a formação da flambagem local das mesas, é gradual e não repentina.

Com isto alguns autores e normas como [4, 10, 40, 80 185] generalizaram o comportamento de vigas como pode ser visto a seguir.



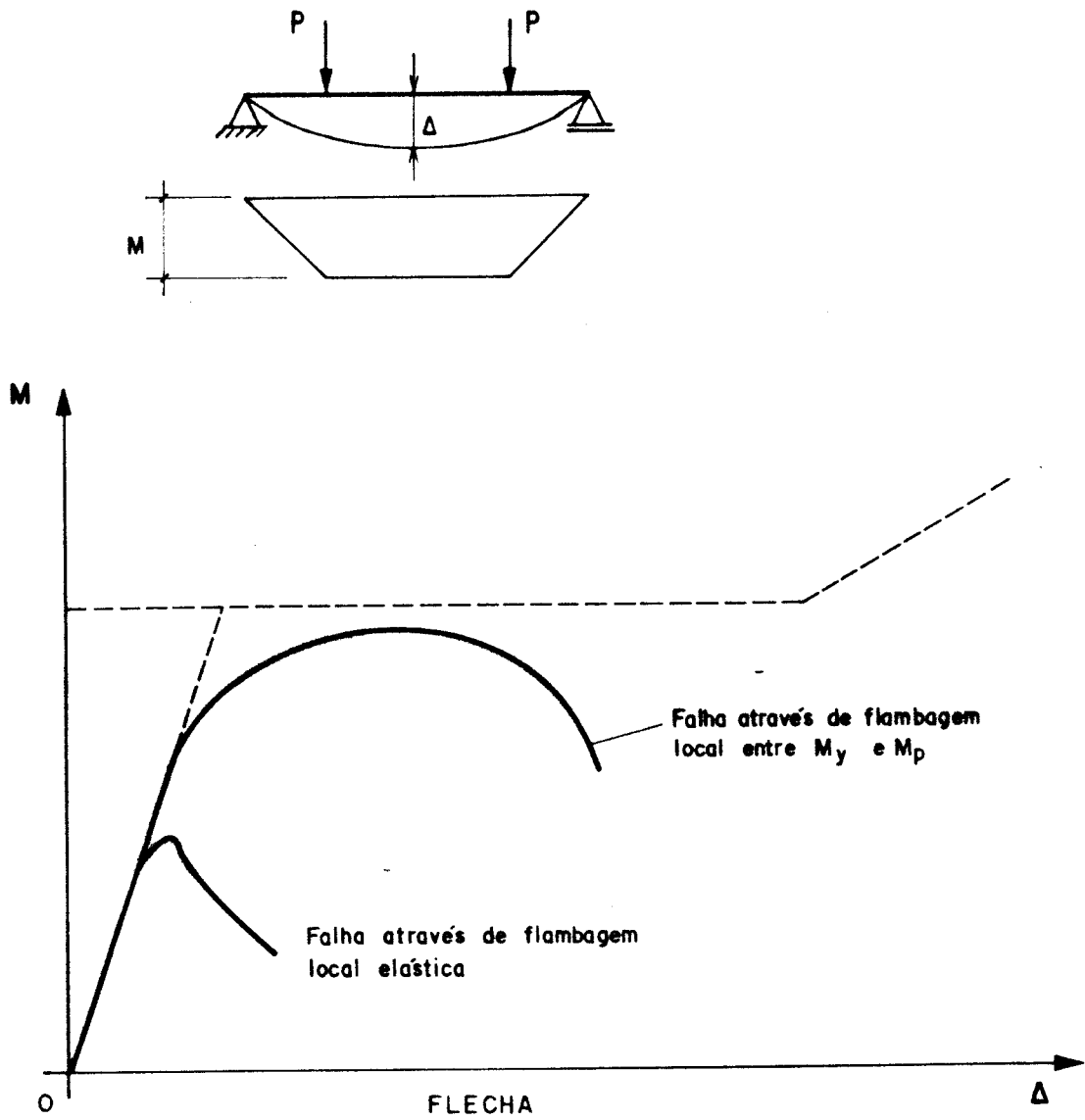


FIG. 3.16 - Flambagem Local por Momentos Menores do que  $M_p$  [121]

### 3.3.1- Análise Segundo [4]

A análise é feita, imaginando uma viga bi-apoiada conforme a figura 3.17 submetida a uma ação concentrada de intensidade  $P$ , situada no meio do vão e denotando por:  $M_0$  - momento no meio do vão e maior do que  $M_y$ . Em seguida é apresentada a distribuição dos momentos e a correspondente curvatura, conforme a figura (3.17).

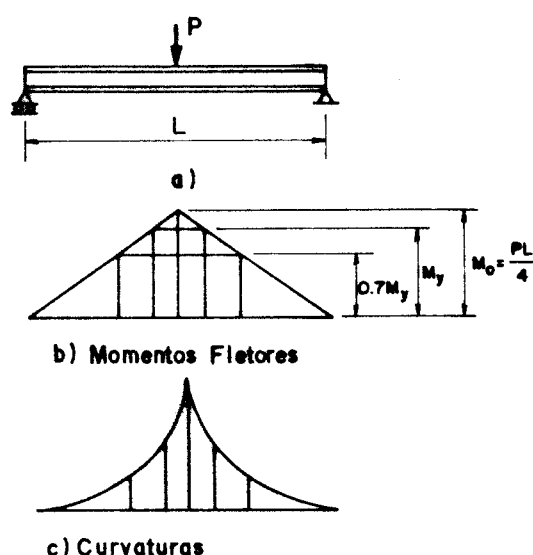


FIG. 3.17 - Momentos Fletores e Distribuição das Curvaturas [4]

As deformações  $\Delta$  são computadas e os seus valores lançados em um diagrama do tipo  $M-\Delta$ . A resposta da viga é inicialmente elástica com um valor  $0,7 M_y$ . A medida que a ação  $P$  aumenta, o escoamento penetra através das mesas e se espalha ao longo do comprimento da barra e, a deformação final surge para um momento máximo  $M_0$  devido a deformação por encruamento do material. Como resultado do comportamento dessa viga, na figura 3.18 é mostrado o diagrama momento versus deformação ( $M-\Delta$ ) onde pode ser observado na parte superior da curva a resposta ideal e o

momento resistente que pode continuar a aumentar até  $M_p$  e pode-se observar dois tipos de ocorrência que não estavam previstos na análise. A primeira delas é a flambagem local da mesa e também a flambagem local da alma que pode também ser de extrema importância, particularmente nas vigas esbeltas soldadas. A segunda, que pode mudar o comportamento da viga drasticamente é a ocorrência da flambagem lateral, que é um dos grupos de deformações laterais fora do plano da mesa comprimida situado entre os pontos dos apoios lateral.

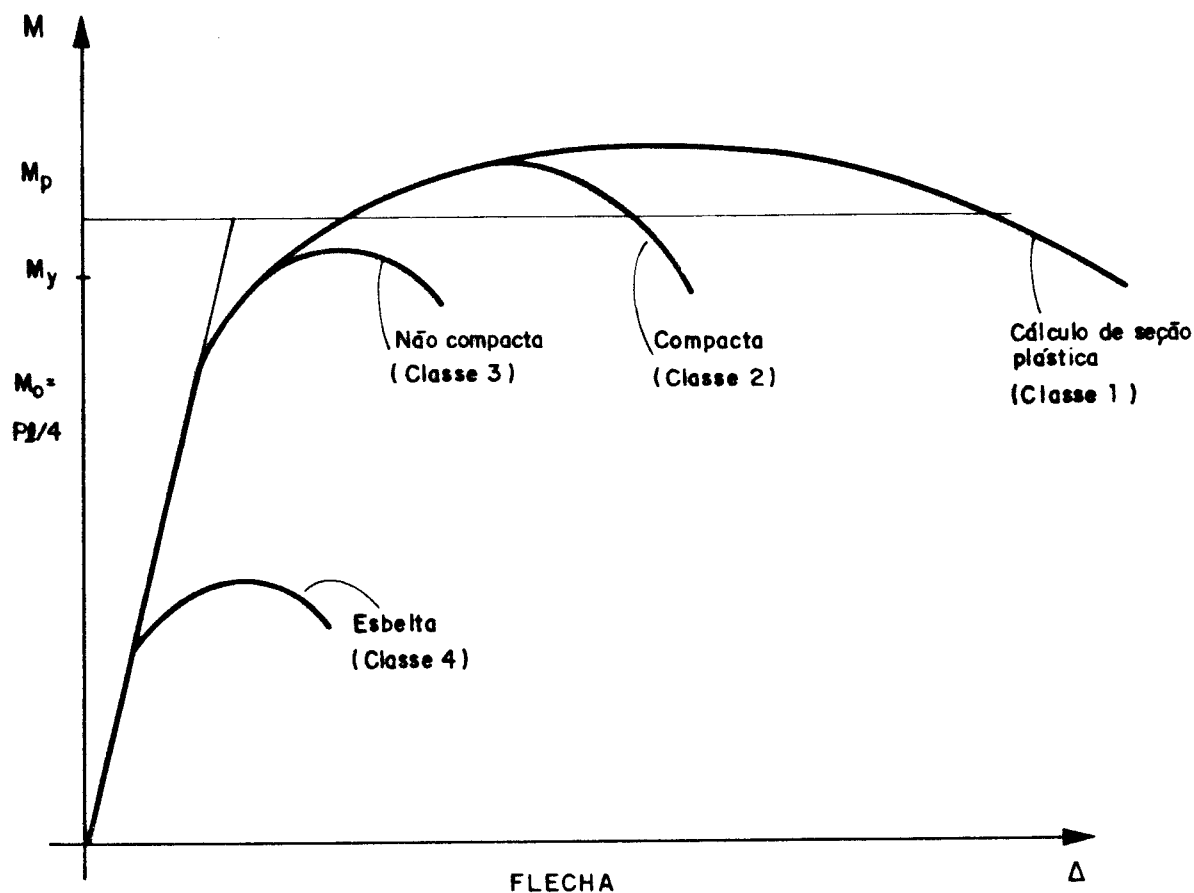


FIG. 3.18 - Relação Ação/deslocamento [4]

A Figura (3.18), que representa a análise feita por [4], pode reunir as conclusões feitas por [121] através das figuras 3.14, 3.15 e 3.16 e observa-se, que praticamente são as mesmas.

Em se tratando da análise feita por [4] o comportamento das vigas na flexão pode ser reunido em 4 categorias:

1a. CATEGORIA: SEÇÕES CLASSE 1 - Representam seções transversais de vigas que apresentam o comportamento ideal ou seja o momento resistente atinge o momento de plastificação  $M_p$  e aumenta levemente quando a viga continua a se deformar. Estas vigas são tidas como ideais para o cálculo plástico, ou seja em uma estrutura projetada para resistir a forças e a solicitações calculadas pela análise plástica, as vigas são requeridas a resistirem a um momento igual a  $M_p$ . Em contrapartida as porções das vigas devem ser capazes de produzirem rótulas plásticas capazes de resistirem ao momento de plastificação  $M_p$  enquanto suportam considerável rotação inelástica. Isto significa que as chapas das mesas comprimidas dessas vigas serão submetidas a uma média de deformações bem maiores do que as mesas comprimidas das seções de classe 2.

2a. CATEGORIA: SEÇÕES CLASSE 2 - Nesse caso as restrições normativas para estas seções com relação a limitação da relação largura-espessura das mesas comprimidas são menos restritivas do que para a classe 1, desde que os requisitos para grandes deformações inelásticas não existam. Estas seções são capazes, segundo alguns testes, de desenvolverem o momento de plastificação  $M_p$ , mas não necessitam suportar uma subsequente redistribuição de momentos. Levando isso em conta para o caso de estruturas hiperestáticas, um pequeno aumento das ações externas, resulta na formação de uma articulação plástica. Um segundo fator que contribui para a reserva de resistência nessas estruturas hiperestáticas, carregadas acima do limite elástico, é o que se chama de redistribuição de momentos, que é um processo de transferência de momentos devido a formação sucessiva de

articulações plásticas, continuando até que seja alcançado a carga última, ou atingido o estado hipostático.

3a. CATEGORIA: SEÇÕES CLASSE 3 - Nessas seções, se observado a figura 3.18, as chapas que compõe a seção transversal devem levar o elemento a desenvolver um momento resistente igual ao momento de escoamento  $M_y$  e, nesta condição, as tensões nas fibras extremas serão iguais a tensão de escoamento  $f_y$ . Em geral a chapa irá se comportar elásticamente neste estágio, ainda que alguma deterioração devido a uma grande tensão de compressão residual nos pontos das mesas possa ser esperada.

4a. CATEGORIA: SEÇÕES CLASSE 4 - Estas seções, conforme a Figura 3.18, representam o tipo que flamba localmente por um momento menor do que o momento de escoamento  $M_y$  e o momento resistente é função da largura/espessura ("b/t") das chapas que compõe essas seções e as normas [8, 12] as tratam como seções esbeltas.

### 3.3.2- Análise Segundo [61]

Mostra um gráfico de momento aplicado versus rotação, onde são plotadas várias classes de seções transversais no comportamento à flexão (figura 3.19).

Nesse caso as seções transversais dos elementos estruturais são definidas da seguinte maneira:

1. SEÇÕES TRANSVERSAIS PLÁSTICAS. São aquelas que desenvolvem uma rótula plástica com capacidade de rotação suficiente para permitir a redistribuição de momentos fletores.

2. SEÇÕES TRANSVERSAIS COMPACTAS. São aquelas que desenvolvem o momento plástico resistente da seção transversal mas onde a flambagem local, prevê uma rotação na estrutura através de um momento constante.

3. SEÇÕES TRANSVERSAIS SEMI-COMPACTAS. São aquelas em que as tensões nas fibras extremas são limitadas pelo escoamento, porque a flambagem local surgiria no desenvolvimento do momento plástico resistente da seção.

4. SEÇÕES TRANSVERSAIS ESBELTAS. São aquelas que o escoamento na fibras extremas não pode ser atingido por causa da falha prematura da flambagem local.

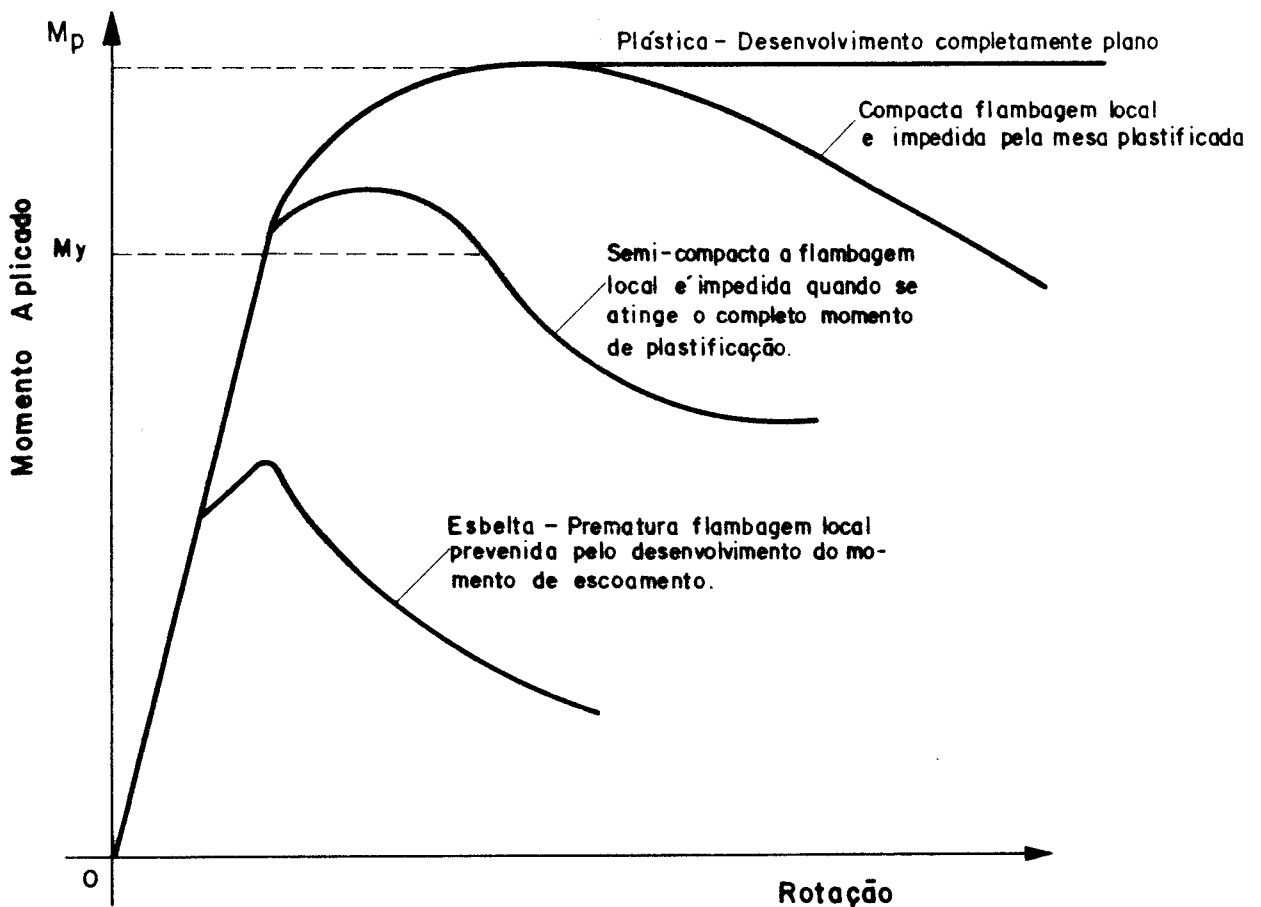


FIG. 3.19 - Curvas Momento - Rotação para Diferentes Tipos de Seções Transversais [61]

### 3.3.3- Análise Segundo [12]

Esta norma mostra na Tabela 2 da página 24, o significado das classes de seções de perfis estruturais em aço que trabalham na flexão e, com relação aos elementos fletidos, classifica-os como Classe 2, para a análise da determinação da resistência do momento fletor, sendo que em primeiro lugar que estas seções devem obedecer as prescrições da Tabela 1 da página 21 para seções de classe 2

Um aspecto interessante é que esta norma, juntamente com [7], mostra que para as seções qualificadas como compactas, suas mesas precisam ser continuamente conectadas com as almas dos perfis estruturais, entretanto a norma [7] trata apenas do projeto de seções como, Compactas, Não-Compactas e Esbeltas.

Também essas normas [7] e [12] definem as seguintes grandezas para visualizar esta classificação do ponto de vista matemático:

$\lambda$  - Parâmetro de esbeltez

$\lambda_p$  - Valor de  $\lambda$  para o qual a seção pode atingir  $M_{p\ell}$  ou parâmetro de limitação de esbeltez para seções compactas.

$\lambda_r$  - Parâmetros de limitação de esbeltez para elementos não-compactos ou valor de  $\lambda$  para o qual  $M_{cr} = M_r$ .

Cumpra salientar que maiores detalhes sobre esse assunto serão vistos no capítulo V, quando serão tratados os aspectos normativos do comportamento à flexão das vigas.

### 3.3.4- Análise Segundo [184]

Mostra o comportamento geral das vigas na flexão da seguinte maneira: O comportamento generalizado de uma viga simples ou duplamente simétrica apresenta uma inclinação sobre o seu eixo resistente a flexão conforme é mostrado na

figura 3.20. As falhas que a viga podem apresentar são as seguintes: flambagem lateral com torção, por flambagem local da chapa da mesa comprimida ou por flambagem local da alma.

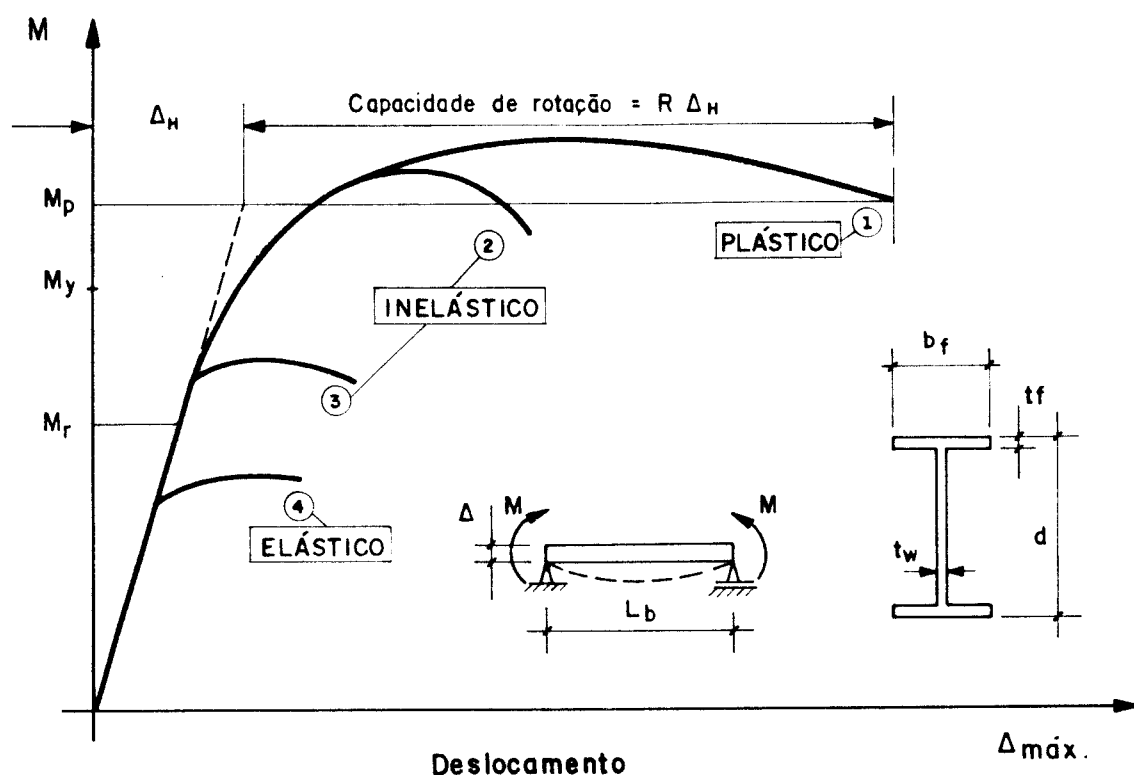


FIG. 3.20 - Comportamento Generalizada de uma Viga na flexão [184].

O comportamento mostrado na Figura 3.20 pode ser dividido em três regiões:

1. O Limite Plástico é caracterizado pela capacidade que as seções transversais possuem de atingirem o momento plástico  $M_p$ , e a manutenção desta resistência através de uma suficiente capacidade de rotação para permitir uma redistribuição de momentos em estruturas estáticamente indeterminadas.



2. O Limite Inelástico representa a região onde ocorre a instabilidade, depois que alguma porção da seção transversal escoou, mas somente um pequeno deslocamento inelástico ocorre depois da falha. As curvas 2 e 3 caracterizam este comportamento.

3. O Limite Elástico representa o local onde a flambagem toma lugar, enquanto a seção transversal ainda é elástica.

Praticamente as vigas falham nos limites I e II enquanto o limite III frequentemente torna-se importante somente durante a inspeção, antes de todos os apoios estarem no lugar. No limite plástico não somente a resistência está calculada no projeto mas também a capacidade de rotação inelástica, portanto a análise plástica pode ser usada para determinar a distribuição do momento fletor quando um mecanismo plástico é formado. Nos limites II e III não existe apreciável capacidade de rotação, logo as forças na barra podem ser obtidas por uma análise elástica. A ordem de importância, em termos de ocorrência e utilização ótima do material, é: Limites I, II e III.

#### 3.4- Flambagem Lateral com Torção

A maioria das vigas, em perfis estruturais de aço, suportam pisos de edifícios comerciais ou residenciais e também fazem parte dos chamados edifícios industriais. Normalmente esses perfis apresentam duas direções ligadas diretamente a sua resistência à flexão e, como visto no Capítulo II, em se tratando de vigas do tipo "I", há casos em que as mesas desses perfis possuem adequados suportes laterais, que podem impedir o deslocamento lateral dessas partes da seção mas, já uma grande parcela dessas vigas não

possuem esse tipo de apoio, portanto neste caso o que se tem são as chamadas vigas não apoiadas lateralmente ou as vigas apoiadas lateralmente [121, 154].

Normalmente as vigas nas estruturas de aço, quando submetidas a ação externa na direção vertical perpendicular ao eixo axial da mesma, podem apresentar 3 tipos de falhas que são: flambagem local da mesa comprimida, flambagem local da alma e a flambagem lateral com torção.

A flambagem lateral com torção é um estado limite onde as deformações da viga são formadas por uma combinação de deslocamentos e rotações. Esta flambagem pode ser evitada por meio de suportes laterais ou pelo uso de perfis estruturais mais rígidos à torção, tal como as seções em forma de caixão, ou seções abertas ligadas intermitentemente, ou por diafragmas [73].

Com o objetivo de obter seções econômicas, a maior parte dos elementos estruturais de aço utilizados para trabalhar na flexão são fabricados com momentos de inércia elevado em relação a um dos seus eixos principais, em torno do qual se apresenta a flexão e, com valores menores na direção do outro eixo, ( $I_x \gg I_y$ ) de maneira que por si só essas seções oferecem pouca resistência à flambagem lateral [88].

Com relação ainda a flambagem lateral, [154] mostra claramente a situação que uma viga pode apresentar quando altos valores de ações compressivas na mesa tenderão fazer a seção flambar na direção do eixo 2-2, conforme a figura 3.21, ou seja, repentinamente a flambagem da mesa aparecerá sobre o eixo resistente na direção lateral. Via de regra, para estimar mais precisamente este comportamento percebe-se que a mesa comprimida não está somente apoiada em sua direção menos resistente pela ligação na alma, mas que a alma também proporciona momento fletor contínuo e cortante

restringido ao longo da ligação com a mesa. Então a rigidez a flexão da alma induz a seção inteira para o interior quando o movimento lateral iniciar [154].

Os fatores que influenciam a flambagem lateral são:

(1) O comprimento da mesa comprimida não restringida. Este é o principal fator que afeta a resistência à flambagem lateral com torção.

(2) As condições das extremidades, sendo que a restrição à rotação no plano ajuda a prevenir a flambagem.

(3) Forma da seção transversal. Seções com grande rigidez à flexão lateral e torcional apresentam grande resistência a flambagem.

(4) A aplicação das ações externas e a forma do diagrama de momento fletor situado entre as restrições.

As outras variáveis são: o tipo e a posição das ações, continuidade dos suportes, a presença ou ausência do esquema de rigidez para restringir o empenamento, as propriedades do material de que são fabricados os perfis estruturais, o valor e a distribuição das tensões residuais, forças de protensão, imperfeições iniciais da geometria e do carregamento, descontinuidade da seção transversal (forma da seção, furos, etc) distorção da seção transversal e a interação entre a flambagem local e global [73, 113].

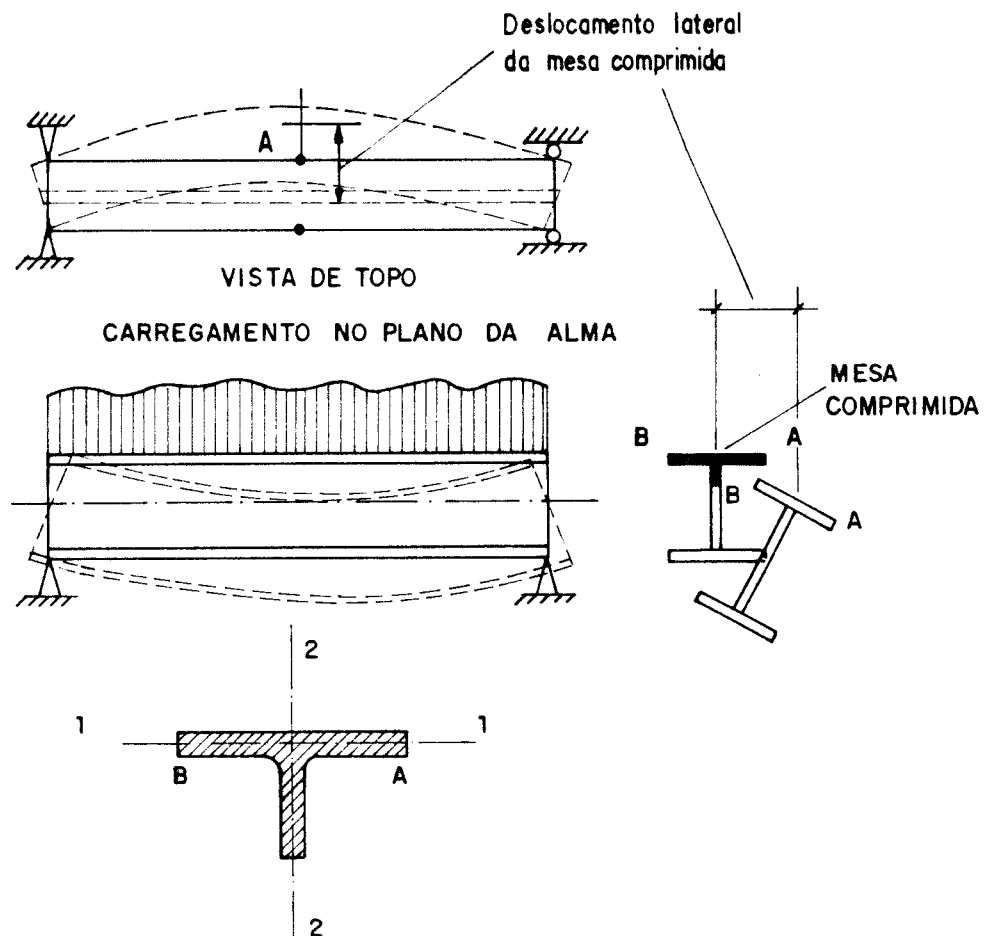


FIG. 3.21 - Viga Lateralmente Apoiada Somente nas Extremidades [154]

### 3.4.1- Momento Crítico de Flambagem Elástica

a) VIGAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL DO TIPO I - Inicialmente a análise será feita para vigas com dois planos de simetria.

Nesta análise [28, 154, 169] mostram as seguintes hipóteses:

- 1- A seção transversal da viga é constante.
- 2- As tensões nas fibras extremas devidas às ações externas não devem exceder o limite de proporcionalidade no instante da flambagem.
- 3- A deformação da viga quando encurvada e girada é tal que a seção transversal não deve mudar a sua forma.
- 4- É assumido que ocorrem pequenas deformações laterais sob a ação das cargas externas.

Segundo [154] por causa dos requisitos de projeto e uma melhor compreensão dos critérios de estabilidade, o desenvolvimento será baseado numa viga de seção transversal do tipo I solicitada por um momento constante (uniforme) atuando no plano da alma do perfil estrutural conforme pode ser visto na figura 3.22.

Das equações diferenciais de equilíbrio para a viga deformada pode-se obter os valores críticos das ações externas.

Na obtenção dessas equações usar-se-à as coordenadas axiais fixas  $X, Y, Z$  e na sequência serão tomadas as coordenadas axiais  $x, y, z$  passando pelo centróide da seção transversal sendo  $x$  e  $y$  eixos de simetria, portanto principais e  $z$  está na direção da tangente ao eixo deformado da viga após a flambagem de acordo com a figura 3.22.

A deformação da viga é definida pelas componentes  $u, v$  dos deslocamentos do centroide da seção transversal na direção de  $X$  e  $Y$  respectivamente e pelo ângulo de rotação  $\phi$  da seção transversal [169].

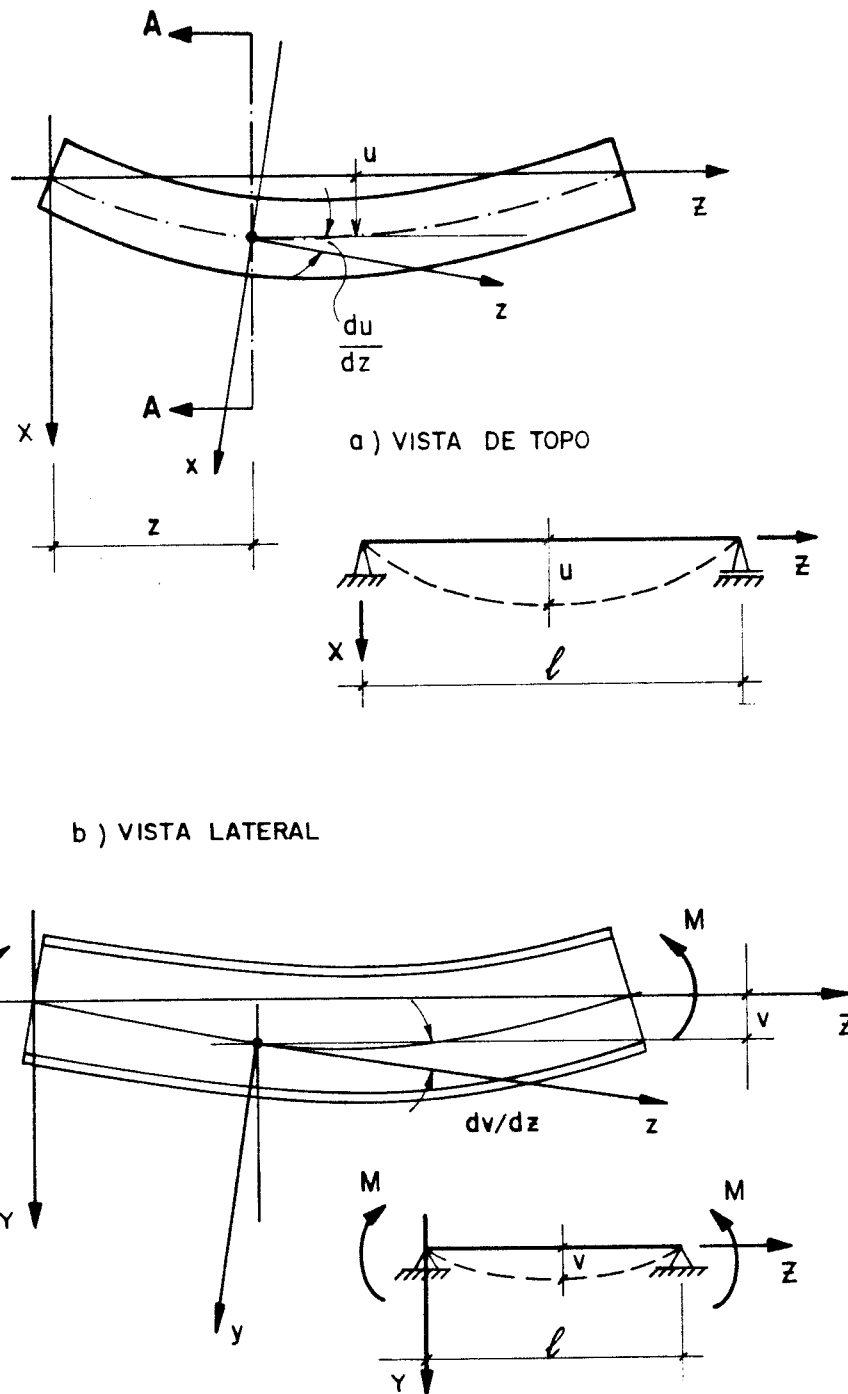


FIG. 3.22 - Viga I na Posição Deformada [154]

Observando as figuras 3.22 e 3.23, que mostram a viga na posição deformada constata-se que o momento aplicado M no plano yz será decomposto em  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  sobre os eixos, x, y e z respectivamente.

Portanto os valores serão:

$$M_x = M \cos \alpha \cos \phi; \quad M_y = M \cos \alpha \sin \phi; \quad M_z = M \sin \alpha \quad (3.30)$$

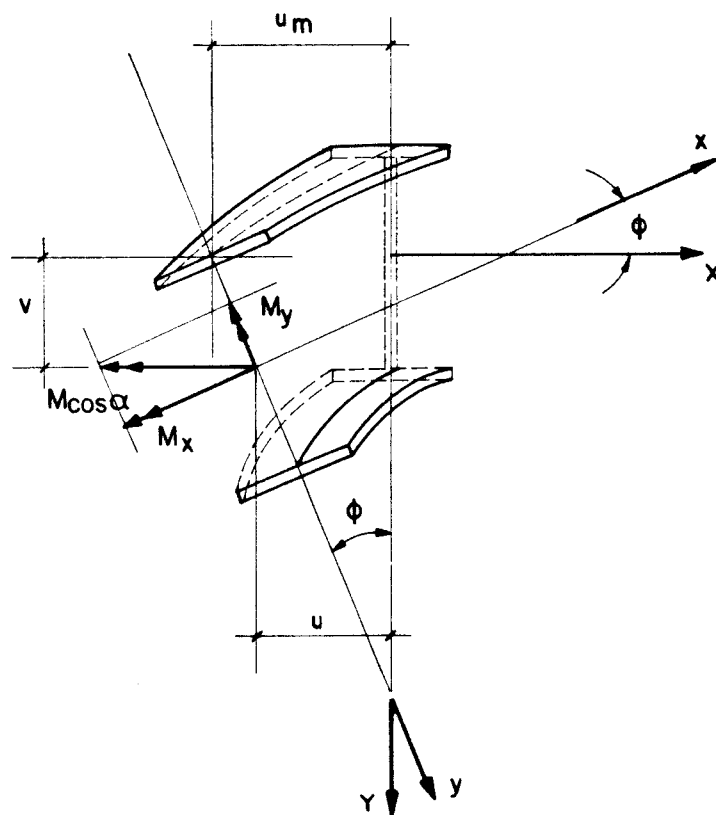
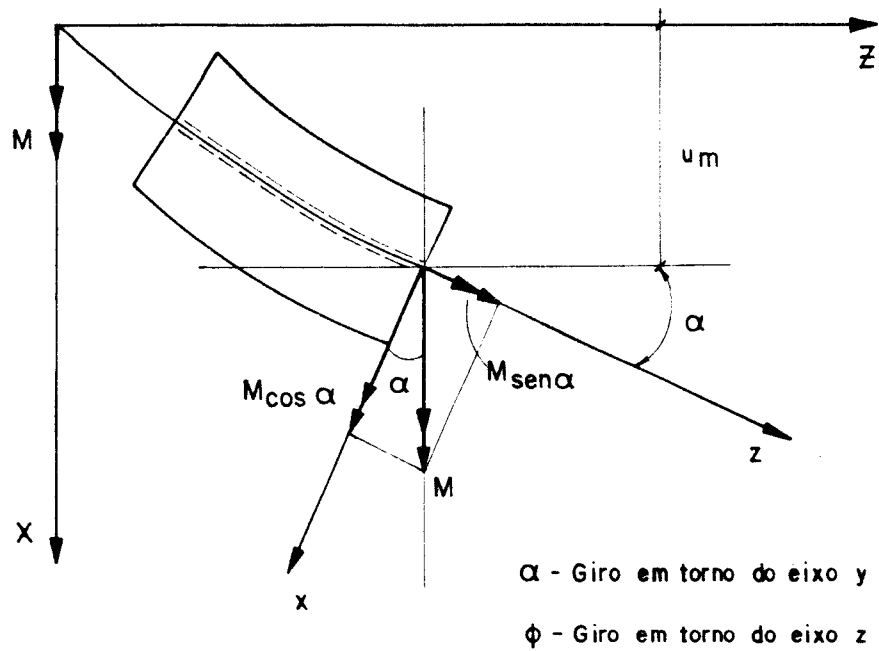


FIG. 3.23 - Viga na posição deformada mostrando as componentes do momento fletor na direção dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  [154]

De acordo com os teorias do cálculo diferencial e integral, as expressões para as funções  $\text{sen}\alpha$ ,  $\text{cos}\alpha$ ,  $\text{sen}\phi$ ,  $\text{cos}\phi$ , são obtidas através do desenvolvimento em séries de Maclaurin do tipo:

$$\text{sen } a = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} a^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$

$$\text{cos } a = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \dots \quad (3.31)$$

sendo os ângulos  $\alpha$  e  $\phi$  pequenos em virtude das pequenas deformações tem-se fazendo

$$\text{cos}\phi \cong \text{cos}\alpha \cong 1,0$$

$$\text{sen}\phi \cong \text{tg } \phi \cong \phi$$

$$\text{sen}\alpha \cong \text{tg } \alpha \cong \frac{d_u}{d_z} \cong \frac{d_u}{d_z}$$

Logo as expressões de  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  poderão serem escritas da seguinte maneira:

$$M_x \cong M \quad \longrightarrow \text{Momento de flexão pura, em torno do eixo x.}$$

$$M_y \cong M\phi \quad \longrightarrow \text{Momento em torno do eixo y, que causa a flexão lateral da viga.}$$

$$M_z \cong M \frac{d_u}{d_z} \quad \longrightarrow \text{Momento que causa a torção lateral da viga.}$$



Na teoria de flexo-torção [123, 150] mostram que a equação diferencial da flexo-torção que liga o momento de torção à rotação  $\phi$  é

$$M_t = M_{ft} + M_\ell \quad (3.32)$$

sendo que no caso da flexo-torção

$$M_{ft} = -EC_w \frac{d^3\phi}{dz^3} \text{ e } M_\ell = GI_t \frac{d\phi}{dz} \quad (3.33)$$

$M_\ell$  = momento de torção livre

$M_{ft}$  = momento de flexo-torção

Assim substituindo (3.33) em (3.32)

$$M_t = GI_t \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3\phi}{dz^3} \quad (3.34)$$

Assim tem-se que:

$$M_t = M_z = GI_t \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3\phi}{dz^3} = M \frac{d^2u}{dz^2}$$

Derivando essa expressão em relação a  $z$ , tem-se

$$GI_t \frac{d^2\phi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4\phi}{dz^4} = M \frac{d^2u}{dz^2} \quad (3.35)$$

A curvatura no plano  $xz$  é

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = -M_y = -M\phi \quad (3.36)$$

Logo

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = -\frac{M\phi}{EI_y} \quad (3.37)$$

Levando o valor de (3.37) em (3.35)

$$GI_t \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} = \frac{-M^2 \phi}{EI_y} \quad \text{ou}$$

$$EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GI_t \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \phi \frac{M^2}{EI_y} = 0 \quad (3.38)$$

A expressão (3.38) representa a equação diferencial para o ângulo de torção  $\phi$ .

Para obter a solução geral da equação (3.38) divide-se ambos os membros por  $EC_w$ .

Logo tem-se:

$$\frac{d^4 \phi}{dz^4} - \frac{GI_t}{EC_w} \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{M^2}{E^2 C_w I_y} \phi = 0 \quad (3.39)$$

Fazendo

$$\frac{GI_t}{EC_w} = 2k_1 \quad \text{e} \quad \frac{M^2}{E^2 C_w I_y} = k_2$$

A Equação (3.39) torna-se:

$$\frac{d^4 \phi}{dz^4} - 2k_1 \frac{d^2 \phi}{dz^2} - k_2 \phi = 0 \quad (3.40)$$

Esta equação tem solução do tipo

$$\phi = A e^{mz} \quad ; \quad \frac{d\phi}{dz} = A m e^{mz}; \quad \frac{d^2\phi}{dz^2} = A m^2 e^{mz}$$

$$\frac{d^3\phi}{dz^3} = A m^3 e^{mz}; \quad \frac{d^4\phi}{dz^4} = A m^4 e^{mz}$$

substituindo em (3.40) vem

$$A m^4 e^{mz} - 2k_1 A m^2 e^{mz} - k_2 A e^{mz} = 0$$

$$A e^{mz} (m^4 - 2k_1 m^2 - k_2) = 0 \quad (3.41)$$

Desde que,  $e^{mz}$  não pode ser nulo e A pode ser nulo somente se a flambagem não ocorrer, a expressão entre parenteses de (3.41) deve ser nula.

$$m^4 - 2k_1 m^2 - k_2 = 0$$

As raízes serão

$$m = \pm \sqrt{\frac{2k_1 \pm \sqrt{4k_1^2 + 4k_2}}{2}}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{2k_1 \pm 2\sqrt{k_1^2 + k_2}}{2}}$$

$$m = \pm \sqrt{k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2}}$$

m consistirá de 2 raízes reais e 2 raízes complexas, visto que:

$$\sqrt{k_1^2 + k_2} > k_1$$

Fazendo  $n^2 = k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2}$  (raízes reais)

$$q^2 = -k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2} \quad (\text{raízes complexas})$$

A solução geral será do tipo:

$$\phi = A_1 e^{nz} + A_2 e^{-nz} + A_3 e^{iqz} + A_4 e^{-iqz} \quad (3.42)$$

Segundo a teoria do cálculo diferencial e integral,

$$e^{iqz} = \cos qz + i \operatorname{sen} qz \quad (3.42.a)$$

$$e^{-iqz} = \cos qz - i \operatorname{sen} qz$$

Usando (3.42) e definindo novas constantes  $A_3$  e  $A_4$  em que é igual a  $(A_3 + A_4)$  e  $(A_{3i} - A_{4i})$  obtém-se respectivamente:

$$\phi = A_1 e^{nz} + A_2 e^{-nz} + A_3 \cos qz + A_4 \operatorname{sen} qz \quad (3.43)$$

#### Condições de Contorno

Para o caso de suportes simples torcionais isto é, as extremidades da viga não podem torcer, mas são livres para empenar, então as condições são:

$$\phi = 0, \quad \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0, \quad \text{para } z=0 \quad \text{e} \quad z=\ell$$

Para  $\phi=0$  e  $z=0$  A equação (3.43) fornece:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0 \quad (3.44)$$

Para  $\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0$  e  $z=0$  em (3.43) vem:

Segundo [123] e [150] as tensões longitudinais de enpenamento na torção livre são nulas ou seja  $\sigma_x = Ew\phi''$  por isso  $\phi'' = 0$  para  $z=0$  e  $z=\ell$ .

Derivando (3.43) em relação a  $z$  têm-se

$$\phi' = \frac{d\phi}{dz} = A_1 n e^{nz} - n A_2 e^{-nz} - q A_3 \text{sen} qz + q A_4 \text{cos} qz$$

$$\phi'' = \frac{d^2\phi}{dz^2} = A_1 n^2 e^{nz} + A_2 n^2 e^{-nz} - q^2 A_3 \text{cos} qz - q^2 A_4 \text{sen} qz$$

para  $z=0$ ;  $\phi'' = 0$ , vem

$$A_1 n^2 + A_2 n^2 - A_3 q^2 = 0 \quad (3.45)$$

multiplicando membro a expressão (3.44) por  $n^2$  têm-se:

$$A_1 n^2 + A_2 n^2 + A_3 n^2 = 0 \quad (3.46)$$

subtraindo membro a membro as expressões (3.46) e (3.45)

$$A_3 (n^2 + q^2) = 0 \quad A_3 = 0$$

Logo

$$A_1 = -A_2$$

A equação (3.43) ficará:

$$\phi = A_1 e^{nz} - A_1 e^{-nz} + A_4 \operatorname{sen} qz \quad (3.47)$$

$$\phi = A_1 (e^{nz} - e^{-nz}) + A_4 \operatorname{sen} qz$$

Da teoria das funções hiperbólicas

$$\operatorname{senh}nz = \frac{e^{nz} - e^{-nz}}{2}; \quad e^{nz} - e^{-nz} = 2\operatorname{senh}nz$$

ou

$$\phi = 2A_1 \operatorname{senh}nz + A_4 \operatorname{sen} qz \quad (3.48)$$

para  $z=\ell$ ;  $\phi=0$

$$2A_1 \operatorname{senh}n\ell + A_4 \operatorname{sen} q\ell = 0 \quad (3.49)$$

Também para

$$z = \ell; \quad \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0$$

$$\phi' = 2A_1 n \operatorname{cosh}nz + A_4 q \operatorname{cos} qz$$

$$\phi'' = 2A_1 n^2 \operatorname{senh}nz - A_4 q^2 \operatorname{sen} q\ell$$

$$2A_1 n^2 \operatorname{senh}n\ell - A_4 q^2 \operatorname{sen} q\ell = 0 \quad (3.50)$$

Multiplicando (3.49) por  $q^2$  e somando membro a membro com (3.50), têm-se:

$$2A_1 (n^2 + q^2) \operatorname{senh}n\ell = 0$$

Desde que  $(n^2 + q^2)$  não pode ser nulo e  $\text{sen}n\ell$  pode ser nulo somente se  $n=0$  então  $A_1$  deve ser nulo, logo

$$A_1 = -A_2 = 0$$

Com isso a expressão (3.48) ficará:

$$\phi = A_4 \text{sen}qz \quad (3.51)$$

$$z=\ell; \quad \phi=0$$

ou

$$\phi = A_4 \text{sen}q\ell = 0$$

Se a flambagem lateral com torção ocorrer,  $A_4$  não pode ser nulo, logo a única condição é:

$$\text{sen}q\ell = 0$$

$$q\ell = N\pi \quad q = \frac{N\pi}{\ell} \quad (N=1,2,3 \quad )$$

mas

$$\begin{cases} q^2 = -K_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2} \\ q^2 = \frac{N^2\pi^2}{\ell^2} \end{cases}$$

$$K_1 = \frac{GI_t}{2EC_w} ; \quad K_2 = \frac{M^2}{E^2C_wI_y}$$

$$-K_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2} = \frac{N^2\pi^2}{\ell^2}$$

$$-\frac{GI_t}{2EC_w} + \sqrt{\left(\frac{GI_t}{2EC_w}\right)^2 + \frac{M^2}{E^2C_wI_y}} = \frac{N^2\pi^2}{\ell^2}$$

onde  $N = 1$  representa o caso fundamental, ou 1o. modo de flambagem.

$$\frac{M^2}{E^2 C_w I_y} = \left[ \left( \frac{\pi^2}{\ell^2} + \frac{GI_t}{2EC_w} \right)^2 - \left( \frac{GI_t}{2EC_w} \right)^2 \right]$$

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t} \sqrt{1 + \frac{EC_w}{GI_t} \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2} \quad (3.52)$$

A equação (3.52) representa o momento crítico de flambagem lateral elástica com torção para uma viga solicitada pela ação de um momento constante  $M$  no plano da alma, apoiada lateralmente apenas nos apoios.

Aplicando portanto a expressão (3.52) para o caso do perfil I simétrico, têm-se  $C_w$  (constante de empenamento = momento de Inércia Setorial)

Da teoria de flexo-torção [123]

$$C_w = \int_s w^2 ds$$

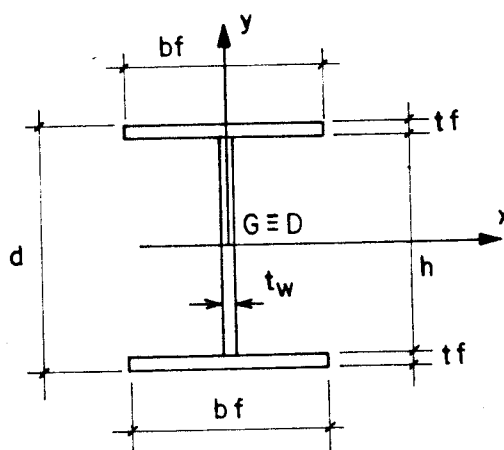


FIG. 3.24 - Perfil "I" duplamente simétrico.



$$C_w = t \int_S w^2 d_S = 4t \left[ \frac{1}{3} \frac{b}{2} \times \frac{bh}{4} \times \frac{bh}{4} \right]$$

$$C_w = \frac{b^3 h^2 t}{24}$$

mas

$$I_y \cong \frac{2xtxb^3}{12} \cong \frac{tb^3}{6}$$

Logo

$$C_w = \frac{I_y \cdot h^2}{4}$$

Logo

$$C_w = \frac{I_y (d-t_f)^2}{4}$$

O parâmetro de esbeltez é:  $\lambda = \ell/r_y$

$$\text{mas } r_y = \sqrt{I_y/A},$$

Assim:

$$\ell = \lambda \sqrt{I_y/A}$$

e portanto  $M_{cr}$  pode ser escrito como:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{EGAI_t} \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\pi^2 EA}{4G} \frac{(d-t_f)^2}{I_t}} \quad (3.53)$$

$$\text{Fazendo } \beta_1 = \pi \sqrt{EGAI_t}$$

$$\beta_2 = \frac{\pi^2 E}{4G} \frac{A(d-tf)^2}{I_t} \quad (3.54)$$

sendo  $E = 205000\text{MPa}$  e  $G = 80000\text{MPa}$  [10] substituindo esses valores em  $\beta_2$ , tem-se:

$$\beta_2 \cong 6,415 \frac{A(d-tf)^2}{I_t}$$

com essas simplificações a expressão de  $M_{cr}$ , ficará

$$M_{cr} = \frac{\beta_1}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\beta_2}{\lambda^2}} \quad \text{ou}$$

$$M_{cr} = \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{\lambda}\right)^2 \left(1 + \frac{\beta_2}{\lambda^2}\right)}$$

$$M_{cr} = \sqrt{\frac{\beta_1^2}{\lambda^2} + \left(\frac{\beta_1 \sqrt{\beta_2}}{\lambda^2}\right)^2} \quad (3.54.a)$$

Que pode ser escrita como:

$$M_{cr} = \sqrt{M_{cr1}^2 + M_{cr2}^2} \quad (3.55)$$

Nessa expressão tem-se:

$M_{cr1}$  = Resistência à torção

$M_{cr2}$  = Resistência à flexo-torção

Segundo [72] o valor de  $M_{cr}$  pode ser obtido por uma expressão aproximada e para isso despreza-se a contribuição da alma para o cálculo das características geométricas dos

perfis estruturas do tipo I, admitindo  $d \approx h$ . No caso do perfil da figura (3.24) têm-se:

$$C_w \approx \frac{I_y h^2}{4}$$

momento de inércia à torção [123]

$$I_t = \frac{1}{3} \int_s t^3 ds \quad (3.56)$$

$$I_t = \frac{2}{3} b_f t_f^3 + \frac{h t_w^3}{3}$$

Normalmente  $t_w$ , espessura da alma, tem dimensão pequena em relação às demais, portanto a parcela  $h t_w^3/3$  pode ser desprezada; assim:

$$I_t \approx \frac{2}{3} b_f t_f^3$$

$$I_y \approx \frac{t_f b_f^3}{6}$$

$$I_x \approx 2 b_f t_f \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{t_w d^3}{12}$$

$$W_x = d b_f t_f + \frac{t_w d^2}{6} = d \left( A_f + \frac{A_w}{6} \right)$$

Sendo:

$$A_f = b_f t_f; \quad A_w = t_w d$$

$A_f$  = área das mesas;  $A_w$  = área da alma

Pode-se escrever:

$$W_x \approx dA_f$$

E:

$$M_{cr1} = \frac{\beta_1}{\lambda} = \frac{\pi}{\ell/r_y} \sqrt{EGAI_t}$$

Como:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

E:

$$\nu = 0,3$$

Obtém-se:

$$G = \frac{E}{2(1+0,3)} \approx 0,385E$$

Introduzindo estes valores na equação de  $M_{cr1}$  têm-se:

$$M_{cr1} = \frac{0,65 EW_x}{\left(\frac{\ell d}{A_f}\right)} \quad (3.57)$$

A expressão de  $M_{cr2}$  é:

$$M_{cr2} = \frac{\beta_1 \sqrt{\beta_2}}{\lambda^2} = \frac{\pi \sqrt{EGAI_t}}{\lambda^2} - \frac{\pi}{2} (d-tf) \sqrt{\frac{AE}{GI_t}}$$

Como:

$$\lambda^2 = \frac{A\ell^2}{I_y}$$

$$(d-tf) = h \approx d = \frac{W_x}{A_f + A_w/6}$$

Pode-se escrever:

$$M_{cr2} = \pi^2 E W_x \frac{\frac{I_{y/2}}{A_f + A_w/6}}{\ell^2}$$

Chamando de:

$$r_t = \sqrt{\frac{I_{y/2}}{A_f + A_w/6}}$$

e:

$$\lambda_t = \frac{\ell}{r_t}$$

Encontra-se finalmente para a expressão:

$$M_{cr2} = \frac{\pi^2 E W_x}{\lambda_t^2} \quad (3.57.a)$$

ou buscando uma expressão em termos de tensão:

$$\sigma_{cr2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_t^2} \quad \text{Equação de Euler para a flambagem em}$$

torno do eixo y de uma peça em T comprimida com seção conforme a figura 3.25.

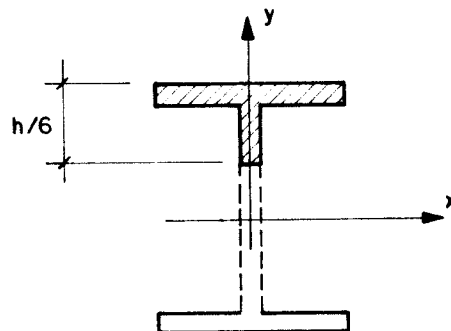


FIG. 3.25 - Perfil estrutural para o cálculo do raio de giração  $r_T$

A seguir é analisado o caso do perfil I possuir um só eixo de simetria, com as dimensões da seção transversal indicada, simplesmente apoiada e solicitada por um par de momentos uniformes  $M$ , conforme a figura 3.26.

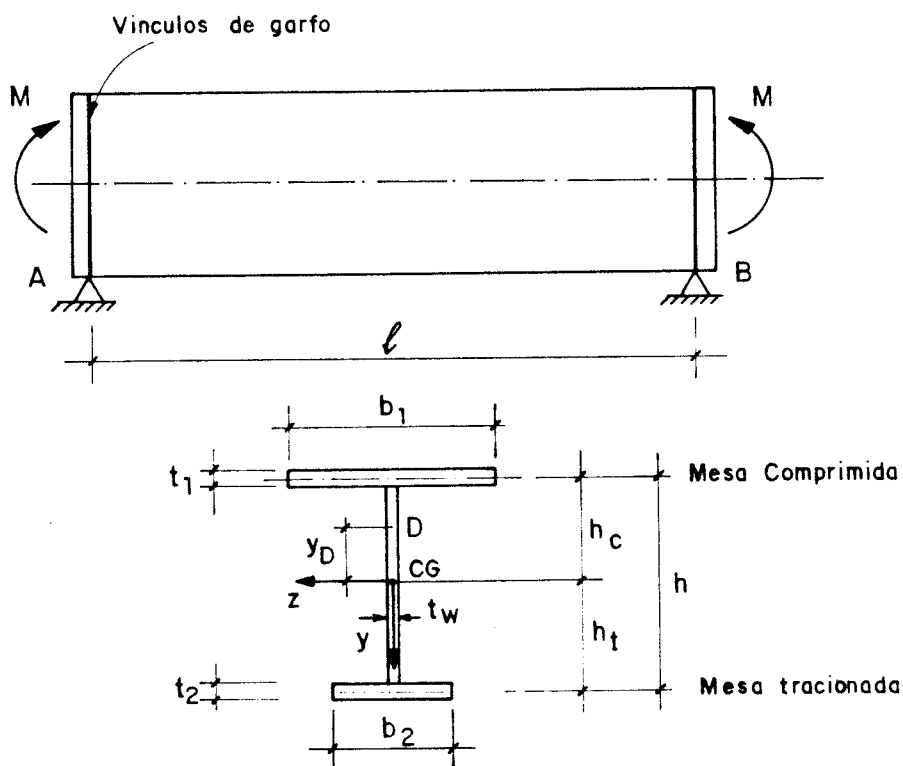


FIG. 3.26 - Viga Monosimétrica Solicitada por um Par de Momentos Uniformes [73, 102, 121, 128, 172]

A determinação do momento crítico de flambagem será feita de acordo com [151], que mostra no seu trabalho um processo automático para a determinação da carga crítica de instabilidade lateral de barras elásticas de seção aberta de paredes finas. Neste trabalho os eixos coordenados são considerados da seguinte forma conforme a figura 3.27.

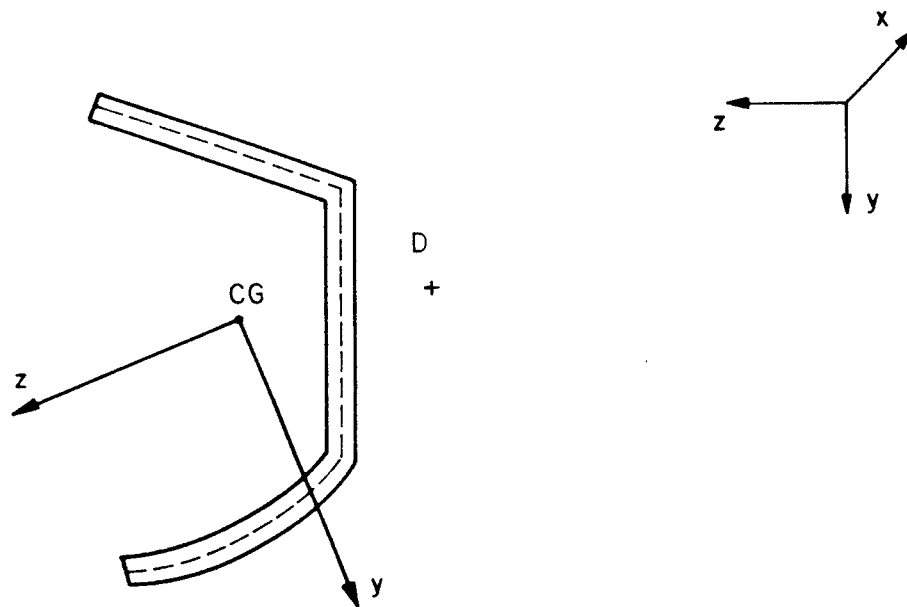


FIG. 3.27 - Seção Transversal Aberta de Paredes Finas [151]

Ainda segundo [151], a expressão da energia total é dado pela expressão, colocada numa forma funcional:

$$V = \int_0^{\ell} F(V_D, V_D', V_D'', W_D, W_D', W_D'', \phi, \phi', \phi'') dx$$

$$- \frac{1}{2} \sum P_{y_i} e_{y_i} \phi_i^2 - \frac{1}{2} \sum P_{z_i} e_{z_i} \phi_i^2 + B_e \phi' - B_d \phi' d$$

onde

$$F = \frac{1}{2} \left\{ EI_Y W_D''^2 + EI_Z V_D''^2 + EC_w \phi''^2 + GI_t \phi'^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left[ N_{i_D}^2 + 2M_Y(K_Z - z_D) + 2M_Z(K_Y - Y_D) + B \frac{U}{C_W} \right] \phi'^2 \\
& - q_Y e_Y + q_Z e_Z) \phi^2 + 2M_Z W_D'' \phi - 2M_Y V_D'' \phi + \\
& 2M_Z V_D'' + 2M_Y W_D'' - 2M_t \phi' + 2N(Y_D W_D' - z_D V_D') \phi' + \\
& N(v_D'^2 + W_D'^2) \} \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Portanto para o caso específico da figura 3.26 a expressão da energia total V será:

$$N=0; \quad M_Y=0; \quad M_Z=M; \quad B=0 \quad q_Y=0; \quad q_Z=0$$

$$\begin{aligned}
V = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left\{ EI_Y W_D''^2 + EC_W \phi''^2 + GI_t \phi'^2 + 2M_Z(K_Y - Y_D) \phi'^2 + \right. \\
\left. 2M_Z W_D'' \phi \right\} dx \tag{3.59}
\end{aligned}$$

Utilizando para  $\phi$  e  $W_D$  funções aproximadoras do tipo:

$$\phi = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}; \quad W_D = B \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell} \tag{3.60}$$

e que satisfaçam as condições de contorno.

$$W_A = 0 \quad \text{para } x = 0; \quad W_B = 0; \quad \text{para } x = \ell$$

$$\phi_A = 0 \quad \text{para } x = 0; \quad \phi_B = 0; \quad \text{para } x = \ell$$

Derivando  $\phi$ ,  $W_D$  em relação a  $x$  tem-se:



$$\phi' = \frac{A\pi}{\ell} \cos \frac{\pi x}{\ell}; \quad \phi'' = -\frac{A\pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

$$W'_D = \frac{B\pi}{\ell} \cos \frac{\pi x}{\ell}; \quad W''_D = -\frac{B\pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

$$W''_D \phi = -\frac{AB\pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell}$$

Substituindo esses valores na expressão da energia total V, tem-se:

$$V = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\ell} \frac{EI_Y B^2 \pi^4}{\ell^4 \pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell} \frac{\pi}{\ell} dx + \right.$$

$$\int_0^{\ell} \frac{EC_W A^2 \pi^4}{\ell^4 \pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell} dx \frac{\pi}{\ell} +$$

$$\int_0^{\ell} \frac{GI_t A^2 \pi^2}{\ell^2} \frac{\ell}{\pi} \cos \frac{2\pi x}{\ell} dx \frac{\pi}{\ell} +$$

$$\frac{2\ell M(K_Y - Y_D)}{\pi} \int_0^{\ell} \frac{A^2 \pi^2}{\ell^2} \cos \frac{2\pi x}{\ell} dx \frac{\pi}{\ell} +$$

$$2M \left( -\frac{AB\pi^2}{\ell^2} \right) \frac{x\ell}{\pi} \int_0^{\ell} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{\ell} dx \frac{\pi}{\ell}$$

Sabe-se da trigonometria que:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{\ell} + \cos^2 \frac{\pi x}{\ell} = 1$$

$$\cos^2 \frac{\pi x}{\ell} - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{\ell} = \cos \frac{2\pi x}{\ell}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{\ell} = \left[ 1 - \cos \frac{2\pi x}{\ell} \right] \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\pi x}{\ell} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{2\pi x}{\ell} \right]$$

$$\int \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{\ell} dx \frac{\pi}{\ell} = \frac{\pi}{\ell} \int \frac{dx}{2} - \frac{1}{2} \int \cos^2 \frac{\pi x}{\ell} \frac{\pi}{\ell} 2dx$$

$$\int \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{\ell} dx \frac{\pi}{\ell} = \frac{\pi x}{2\ell} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell}$$

$$\int \cos^2 \frac{\pi x}{\ell} dx \frac{\pi}{\ell} = \frac{\pi x}{2\ell} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell}$$

Portanto substituyendo:

$$V = \frac{1}{2} \frac{EI_Y B^2 \pi^4 \ell}{\pi \ell^4} \left[ \frac{\pi x}{2\ell} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell} \right]_0^\ell +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{EC_W A^2 \pi^4 \ell}{\pi \ell^4} \left[ \frac{\pi x}{2\ell} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell} \right]_0^\ell +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{GI_t A^2 \pi^2 \ell}{\ell^2 \pi} \left[ \frac{\pi x}{2\ell} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell} \right]_0^\ell +$$

$$+ \frac{2M(k_Y - Y_D) \ell A^2 \pi^2}{\pi \ell^2} \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi x}{2\ell} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell} \right]_0^\ell -$$

$$- \frac{2MAB\pi^2 \ell}{\pi \ell^2} \times \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi x}{2\ell} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell} \right]_0^\ell$$

Rearranjando:

$$V = \frac{1}{2} \frac{EI_Y B^2 \pi^4 \ell}{\pi \ell^4} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{EC_W A^2 \pi^4 \ell}{\pi \ell^4} \frac{\pi}{2}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{GI_t A^2 \pi^2 \ell}{\ell^2 \pi} \frac{\pi}{2} + \frac{2M(k_Y - Y_D) \ell A^2 \pi^2}{\pi \ell^2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} - \frac{2MAB \pi^2 \ell}{\pi \ell^2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

Chega-se a:

$$V = \frac{EI_Y \pi^4 B^2}{4\ell^3} + \frac{EC_W \pi^4 A^2}{4\ell^3} + \frac{GI_t \pi^2 A^2}{4\ell}$$

$$\frac{M(k_Y - Y_D) \pi^2 A^2}{2\ell} - \frac{M\pi^2}{2\ell} AB$$

No extremo da energia tem-se:

$$\frac{\partial V}{\partial A} = \frac{2EC_W \pi^4 A}{4\ell^3} + \frac{2GI_t \pi^2 A}{4\ell} + \frac{2M(k_Y - Y_D) \pi^2 A}{2\ell} - \frac{M\pi^2 B}{2\ell} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial B} = \frac{2EI_Y \pi^4 B}{4\ell^3} - \frac{M\pi^2 A}{2\ell} = 0$$

Para a solução diferente, o determinante dos coeficientes A e B deve ser nulo

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{EC_W \pi^4}{2\ell^3} + \frac{GI_t \pi^2}{2\ell} + \frac{M(k_Y - Y_D) \pi^2}{\ell} \right) - \frac{M\pi^2}{2\ell} & \\ - \frac{M\pi^2}{2\ell} & \frac{EI_Y \pi^4}{2\ell^3} \end{vmatrix} = 0$$

Portanto:

$$-\frac{M^2 \pi^4}{4\ell^2} + \frac{EI_Y \pi^4}{2\ell^3} \left[ \frac{EC_w \pi^4}{2\ell^3} + \frac{GI_t \pi^2}{2\ell} + \frac{M(k_Y - Y_D) \pi^2}{\ell} \right] = 0$$

ou:

$$M^2 - \frac{4\ell^2}{\pi^4} \frac{EI_Y \pi^6 (k_Y - Y_D)}{2\ell^4} M - \frac{4\ell^2}{\pi^4} \left( \frac{EI_Y EC_w \pi^8}{4\ell^6} + \frac{EI_Y GI_t \pi^6}{4\ell^4} \right) = 0$$

Finalmente:

$$M^2 - \frac{2EI_Y \pi^2 (k_Y - Y_D)}{\ell^2} M - \left( \frac{EI_Y EC_w \pi^4}{\ell^4} + \frac{EI_Y GI_t \pi^2}{\ell^2} \right) = 0$$

Resolvendo a equação vem:

$$M = \frac{2EI_Y \pi^2 (k_Y - Y_D)}{\ell^2} \pm \sqrt{\frac{4E^2 I_Y^2 \pi^4 (k_Y - Y_D)^2}{\ell^4} +$$

$$\sqrt{4 \left( \frac{EI_Y EC_w \pi^4}{\ell^4} + \frac{EI_Y GI_t \pi^2}{\ell^2} \right)} / 2$$

$$M = \frac{EI_Y \pi^2 (k_Y - Y_D)}{\ell^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4E^2 I_Y^2 \pi^4 (k_Y - Y_D)^2}{\ell^4} \left[ 1 +$$

$$\sqrt{\frac{4\ell^4}{4E^2 I_Y^2 \pi^4 (k_Y - Y_D)^2} \left( \frac{EI_Y EC_w \pi^4}{\ell^2} + \frac{EI_Y GI_t \pi^2}{\ell^4} \right) \right]}$$

$$M = \frac{EI_Y \pi^2}{\ell^2} (k_Y - y_D) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4E^2 I_Y^2 \pi^4 (k_Y - y_D)^2}{\ell^4} \left[ 1 + \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{1}{(k_Y - y_D)^2} \left( \frac{EC_W}{EI_Y} + \frac{GI_t \ell^2}{EI_Y \pi^2} \right)} \right]$$

$$M = \frac{EI_Y \pi^2 (k_Y - y_D)}{\ell^2} \pm \frac{1}{2} \left[ \frac{2EI_Y \pi^2 (k_Y - y_D)}{\ell^2} \right] \sqrt{1 +$$

$$\sqrt{\frac{1}{(k_Y - y_D)^2} \left( \frac{C_W}{I_Y} + \frac{GI_t \ell^2}{EI_Y \pi^2} \right)}$$

$$M = \frac{EI_Y \pi^2 (k_Y - y_D)}{\ell^2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{(k_Y - y_D)^2} \left( \frac{C_W}{I_Y} + \frac{GI_t \ell^2}{EI_Y \pi^2} \right)} \right\}$$

(3.61)

Os autores [73, 74, 128, 172] definem um termo  $\beta_x$  que é denominado coeficiente de monosimetria e que geralmente é expresso por:

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \int_A y(x^2 + y^2) dA - 2y_0 \quad (3.62)$$

em que  $I_x$  é o maior momento de inércia,  $y_0$  é a distância do centro de torção ao centro de gravidade (ver fig. 3.26) e que é negativo se a mesa maior é comprimida e  $x$  e  $y$  são

coordenadas do centro de torção, e para seções duplamente simétricas  $\beta_x = 0$ , tais como os perfis tipo "I".

Com relação ao método da energia total para a determinação da carga crítica de estabilidade elástica, na sua expressão de  $V$  aparece o termo  $K_y$  que representa as características da seção, chamadas de coordenadas do centro do círculo de estabilidade nos eixos  $y$  e  $z$  segundo [150].

$$K_y = \frac{1}{2J_z} \int_A y(y^2 + z^2) dS \quad (3.63)$$

ou adaptando para  $\beta_x$  pois

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \int_A y(y^2 + x^2) dA - 2y_0 \longrightarrow \left( \begin{array}{l} \text{trocar } x \text{ por } z \text{ e} \\ J_z \text{ por } I_z \text{ e } y_0 \text{ por} \\ y_D \text{ dA por dS.} \end{array} \right)$$

$$\beta_z = \frac{1}{I_z} \int_A y(y^2 + z^2) dA - 2y_D \quad (3.64)$$

ou

$$\frac{\beta_z}{2} = \frac{1}{2I_z} \int_A y(y^2 + z^2) dA - y_D$$

$$\frac{\beta_z}{2} = (K_y - y_D) \quad (3.65)$$

Substituindo na expressão (3.61) têm-se:

$$M = \frac{EI_y \pi^2 \beta_z}{2\ell^2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\beta_z^2} \left( \frac{C_w}{I_y} + \frac{GI_t \ell^2}{EI_y \pi^2} \right)} \right\}$$

$$M_{crit} = \frac{EI_Y \pi^2 \beta_z}{2\ell^2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\beta_z^2} \left( \frac{C_w}{I_Y} + \frac{GI_t \ell^2}{EI_Y \pi^2} \right)} \right\} \quad (3.66)$$

O autor [73] mostra que a expressão (3.66) tem o seguinte formato:

$$M_{crit} = \frac{C_b \pi^2 EI_Y \beta_x}{2(k_y L)^2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\beta_x^2} \left( \frac{C_w K_y^2}{I_Y K_z^2} + \frac{GI_t (K_y L)^2}{\pi^2 EI_Y} \right)} \right\} \quad (3.67)$$

e que (3.67) foi obtida pelo mesmo autor em [76] e que ele diz que  $K_y$  e  $K_z$  são chamados de fatores de comprimentos efetivos e que dependem das condições de contorno na Flambagem Lateral com Torção e são tomados igual à unidade ( $K_y = K_z = 1,00$ ) para ( $\phi = \phi'' = 0$ ) para  $z=0$  e  $z=L$ .

Com esta consideração para  $K_y = K_z = 1,00$  na expressão (3.67) obtém-se o mesmo resultado de (3.66) que foi determinada pelo método da energia e também para o valor de  $C_b = 1,00$ .

Analisando a expressão (3.66) segundo [12]:

$$\text{Sabe-se que } r_y^2 = \frac{I_Y}{A}; \quad I_Y = Ar_y^2$$

substituindo esse valor em (3.66) têm-se:

$$M_{crit} = \frac{EI_Y \pi^2 \beta_z}{2\ell^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4C_w}{\beta_z^2 I_Y} + \frac{4GI_t \ell^2}{\beta_z^2 EI_Y \pi^2}} \right]$$

para  $\ell = L_b$

$$M_{\text{crit}} = \frac{EA^2 r_y \pi^2 \beta_z}{2 L_b^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4C_w}{\beta_z^2 A^2 r_y} + \frac{4GI_t L_b^2}{\beta_z^2 EA^2 r_y \pi^2}} \right]$$

$$M_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EA \beta_z}{2 \left(\frac{L_b}{r_y}\right)^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{L_b}{r_y}\right)^2 \left[ \frac{4GI_t}{\pi^2 EA \beta_z^2} + \frac{4C_w}{L_b^2 A \beta_z^2} \right]} \right]$$

A especificação [12] chama por:

$$B_1 = \frac{\pi^2 EA B_x}{2} \quad e$$

$$B_2 = \frac{4GI_t}{\pi^2 EA B_x^2} + \frac{4C_w}{L_b^2 A B_x^2} \quad (\text{"para perfis "T", } C_w=0\text{"})$$

onde foi trocado  $\beta_z$  por  $B_x$

Logo com essa notação [12] escreve para seções "I" com um eixo de simetria para o estado limite "FLT" no Anexo D a expressão:

$$M_{\text{crit}} = \frac{B_1 C_b}{\left(\frac{L_b}{r_y}\right)^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + B_2 \left(\frac{L_b}{r_y}\right)^2} \right]$$

Os valores de  $B_1$  e  $B_2$  depende portanto do tipo de seção transversal e do coeficiente  $\beta_z$  que foi chamado de  $B_x$  por causa da orientação dos eixos coordenadas (x, y e z).



b) VIGAS DE SEÇÃO RETANGULAR CHEIA E SEÇÃO CAIXÃO - Seja uma viga de seção retangular (ou seção caixão) solicitada por flexão para conforme a figura 3.28 de dimensões da seção transversal (bx d)

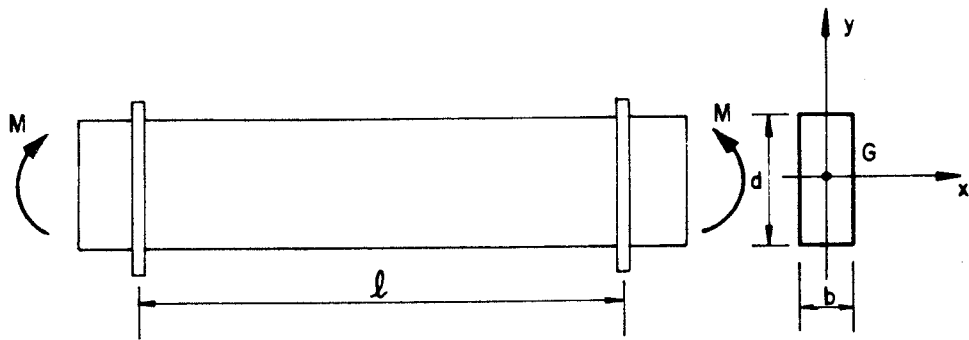


FIG. 3.28 - Flexão Pura - Seção Retangular/Caixão

Nesse caso:

$$D = G \quad d \quad C_w = \int_s w^2 ds = 0$$

Pode-se partir diretamente da expressão (3.52)

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t} \sqrt{1 + \frac{EC_w}{GI_t} \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2}$$

para  $\ell = \lambda \sqrt{I_y A}$  e  $G = 0,385E$

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t} \quad (3.68)$$

ou poderia ter partido via desenvolvimento matemático da equação diferencial (3.38)

$$GI_t \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} = - \frac{M^2 \phi}{EI_y}, \text{ com } C_w = 0$$

$$GI_t \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{M^2 \phi}{EI_y} = 0 \quad (3.69)$$

ou

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + \left( \frac{M^2}{GI_t EI_y} \right) \phi = 0$$

Fazendo  $K^2 = \frac{M^2}{EI_y GI_t}$

Obtém-se:

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + K^2 \phi = 0$$

Equação característica

$$r^2 + K^2 = 0 \quad \begin{cases} r_1 = Ki & \text{raizes complexas do} \\ r_2 = -Ki & \text{a } \pm b_i \end{cases}$$

Solução geral:

$$\phi = e^{az} (a_1 \cos bz + a_2 \sen bz)$$

Com as condições de contorno:

$$a=0, \quad b=K$$

$$\phi = a_1 \cos Kz + a_2 \sen Kz$$

$$\phi=0; \quad z=0 \text{ e } z=l$$

$$\phi=0 = a_1=0; \quad a_2 \operatorname{sen}Kl = 0$$

$$a_2 \neq 0 \text{ logo } \operatorname{sen}Kl = 0$$

$$Kl = r\pi; \quad K = r\pi/l$$

$$K^2 = \frac{r^2 \pi^2}{l^2}; \quad K^2 = \frac{M^2}{EI_y GI_t} \quad p/\eta = 1 \quad M=M_{cr}$$

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_y GI_t} \quad (3.70)$$

Fazendo novamente:

$$l = \lambda \sqrt{I_y/A}; \quad G = 0,385E$$

Encontra-se:

$$M_{cr} \cong \frac{1,95Er_y}{l} \sqrt{I_t A} \quad (3.71)$$

ou

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{EG} \sqrt{I_t A} = \frac{\beta_1}{\lambda} \quad (3.72)$$

com

$$\beta_1 = \pi \sqrt{EG} \sqrt{I_t A}$$

c) VIGAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL TIPO "U" - Considere-se o perfil tipo "U", Figura 3.29, carregado no plano normal à alma. Nesse caso, haverá torção com flexão lateral, entretanto a flambagem lateral ordinária entre os suportes pode ser uma possibilidade [121].

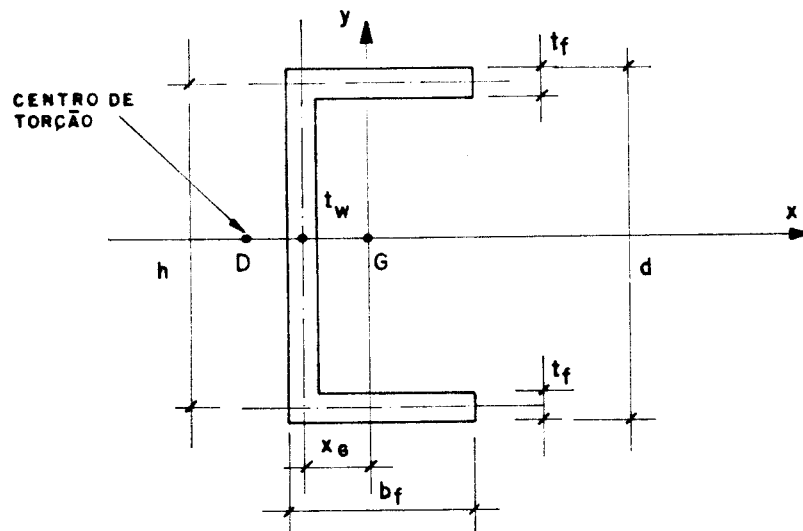


FIG. 3.29 - Perfil Tipo "U" para o Cálculo das Constantes de Torção [121]

Nesse caso pode ser usado para expressar o momento crítico  $M_{cr}$  a expressão (3.52).

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t} \sqrt{1 + \frac{EC_w}{GI_t} \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2}$$

Nesta expressão,  $\ell$  é o vão entre os pontos de apoio,  $I_y$  é o momento de inércia mínimo e, as constantes de torção  $I_t$  e  $C_w$  podem ser calculados segundo [16, 72, 73, 79, 121, 169] ou seja:

$$I_t = \frac{ht_w^3}{3} + \frac{2bftf^3}{3}$$

$$C_w = \frac{t_f b_f^3 h^2}{12} \left( \frac{3b_f t_f + 2ht_w}{6b_f t_f + ht_w} \right)$$

ou

$$C_w = \frac{(d-t_f)^2}{4} \left\{ I_y - x_G^2 A \left[ \frac{A(d-t_f)^2}{4I_x} - 1 \right] \right\}$$

$$p/G=0,385E$$

e

$$\ell = \lambda \sqrt{I_y/A}$$

Têm-se:

$$M_{cr} = \frac{1,95E}{\lambda} \sqrt{AI_t} \sqrt{1 + \frac{C_w 25,7}{\ell^2}} \quad (3.73)$$

### 3.4.2- Influência das Condições de Carregamento para o Cálculo de $M_{cr}$

Se o momento atuante na viga não é constante, conforme mostra a figura (3.30), soluções numéricas ou aproximadas são utilizadas para o cálculo da carga crítica de flambagem. Os trabalhos pioneiros para este caso foram realizados por: [15, 57, 69, 118, 156], sendo que [156] encontrou através de sua análise uma modificação para a equação (3.52) da seguinte forma:

$$M_u = C_b M_{cr} \quad (3.74)$$

onde explica o efeito do gradiente de momento.

O coeficiente  $C_b$  que aparece na expressão (3.74) representa o fator do gradiente de momento e é introduzido nas equações básicas que são desenvolvidas para vigas simplesmente apoiadas, e seu valor dependerá das condições reais de cargas e restrições de apoio. Vários são as formulações propostas para  $C_b$ . Entre os trabalhos citados anteriormente e de acordo com prescrições normativas de [7, 8, 12] o seu valor é dado por:

$$C_b = 1,75 + 1,05 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) + 0,3 \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \leq 2,3 \quad (3.75)$$

onde:

$M_1$  - é o menor momento extremo na extremidade do trecho

$M_2$  - é o maior momento extremo na extremidade do trecho

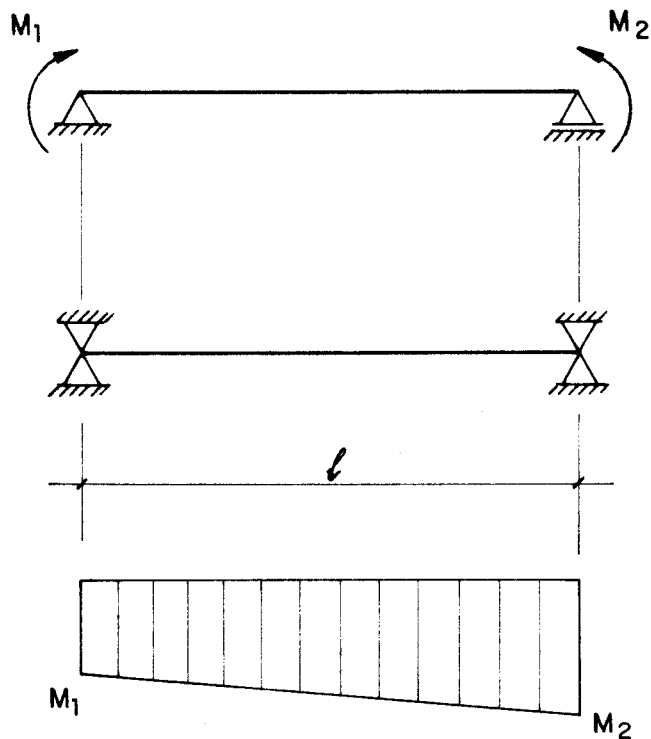


FIG. 3.30 - Viga Simplesmente Apoiada Solicitada por Momento não Uniforme [36, 73].

Como foi dito, várias expressões tem sido propostos para  $C_b$  e a seguir são mostradas algumas das análises propostas.

a) Análise segundo [155, 156]

Neste artigo o autor faz a análise da combinação crítica para compressão e flexão com momentos desiguais para a flambagem lateral de vigas onde as mesmas podem flambar por flexão e torção.

Indicando por  $M_2$  o valor  $M(z)$  para  $z=l$  e  $M_1$  o valor de  $M(z)$  para  $z=0$ , o valor de  $M(z)$  é:

$$M(z) = M_2 \left[ r + \frac{(1-r)z}{l} \right]$$

onde

$$r = M_1/M_2$$

Através do método da energia ele mostra a determinação do momento crítico de flambagem lateral para a viga solicitada por momentos uniformes e momentos desiguais, sendo:

$$M_s = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ell/a}\right)^2}$$

e assim ele define um coeficiente K

$$K_{o,1} = \frac{M_\ell}{\sqrt{EI_y GI_t}}$$

que permite fazer:

$$\frac{\sqrt{EI_y GI_t}}{\ell} = \frac{M}{K_{o,1}}$$

Logo

$$M_x = \frac{M}{K} \pi \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ell/a}\right)^2}$$

e o valor crítico de K é definido como:

$$K_{crit} = \pi \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ell/a}\right)^2} \quad \text{ou seja, quando os momentos}$$

de extremidade são iguais.



Quando a estrutura é submetida a momentos desiguais  $M_1$  e  $M_2$ , ele obtem para o coeficiente de momentos o valor:

$$K_{0,1} = \frac{M_2 \ell}{\sqrt{EI_y GI_t}} ; \quad M_2 = \frac{K}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t}$$

Em seu artigo ele tabulou valores para  $K_{0,r}$  e  $K_{0,1}$  chamando de  $\mu_r$  a relação

$$\mu_r = \frac{K_{0,r}}{K_{0,1}}$$

Os valores de  $M_r$  foram obtidos em função de  $\ell^2/a^2$ , variando de 0,1 até  $a^2 = \frac{h^2}{2} \frac{EC_w}{GI_t}$  e para os valores da relação entre os momentos  $r = M_1/M_2$  variando de 1 a -1,0 (1,0; 0,5; 0 -0,5; -1,0).

Ele notou que para valores de  $\ell^2/a^2 \leq 40$ , os erros de até 10% são mais facilmente cometidos, e que uma aproximação simplificada para o cálculo dos momentos críticos podem serem usados valores de  $\bar{\mu}_r$  de  $\mu_r$  conforme a seguir:

Valores de $r = M_1/M_2$	Valores de $\bar{\mu}_r$
1	1,00
0,5	1,32
0	1,82
-0,5	2,49
-1,0	2,50

b) Análise segundo [117]

Ele mostra em seu trabalho, no campo da estabilidade, dois problemas a serem considerados, sendo um desses problemas o comportamento e cálculo de colunas de aço solicitadas pela ação de cargas compressivas e momentos fletores desiguais.

Em seu estudo ele mostra uma solução matemática aproximada utilizando o método de RAYLEIGH-RITZ, onde determina um momento equivalente  $M_{eq}$  para uma coluna submetida a uma carga compressiva, e a flexão oblíqua e apresentam a expressão

$$M_{eq} = \sqrt{0,3(M_1^2 + M_2^2) + 0,4 M_1 M_2} \quad \text{ou}$$

$$M_{eq}/M_1 = \sqrt{0,3 + 0,3 \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 + 0,4 \frac{M_2}{M_1}}$$

para os valores de  $M_2/M_1$  variando de -1,0 a 1,00 têm-se:

$M_2/M_1 =$	-1,0	-0,5	0	0,5	1,00
$M_{eq}/M_1 =$	0,447	0,416	0,548	0,759	1,00

A expressão de  $M_{eq}$  de MASSONET é também mostrada por [121] na página 541, e notando que os valores anteriores podem também ser colocados da seguinte maneira:

$r = M_2/M_1$	$M_1/M_{eq}$
1,00	2,24
0,5	2,40
0	1,82
0,5	1,32
1,0	1,00

c) Análise Segundo [15, 93]

Em seu trabalho, eles mostram uma solução para a obtenção da carga de flambagem elástica, para seções simétricas do tipo I, submetidas a cargas de compressão centradas, com momentos fletores desiguais aplicados no plano da alma. O método da energia é utilizada para estimar a situação deformada da seção através de um processo de aproximação sucessiva.

Essas considerações podem ser vistos na figura 3.31

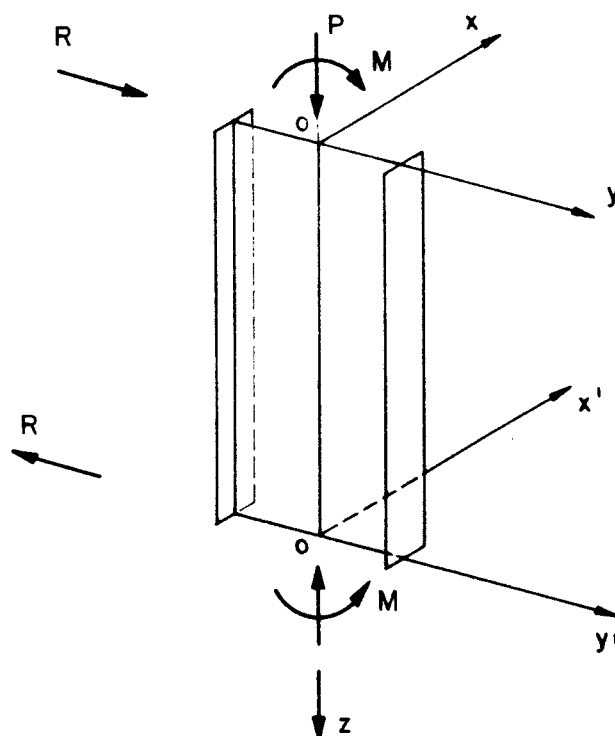


FIG. 3.31- Viga I Solicitada por Compressão e Flexão [15,93]

Ele chegou na seguinte expressão:

$$\left(\frac{M_1}{M_E}\right)^2 \frac{1}{(1-\alpha)+\gamma} + \frac{P}{P_E} = 1$$

Quando  $P=0$  e  $\gamma=0$  (rigidez ao empenamento)

$$\left(\frac{M_1}{M_E}\right)^2 = F$$

$F$  é uma quantidade dependente somente de  $\beta = M_2/M_1$  relação entre os momentos nas extremidades.

$$\alpha = \frac{PI_P}{GI_t} = \frac{PI_P}{AGI_t}$$

$$\gamma = \frac{\pi^2}{4} \frac{d^2}{l^2} \frac{EI_y}{GI_t}$$

Os valores de  $F$  e  $\beta$  foram tabelados também conforme a tabela a seguir:

$\beta = M_2/M_1$	$F$
1,00	1,00
0,5	1,72
0	3,134
-0,5	5,46
-1,0	6,529

$$\left(\frac{M_1}{M_E}\right)^2 = F$$

$$M_1 = \sqrt{F} M_E$$

$$M_E = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t}$$

ou

$\beta$	$\sqrt{F}$
1,00	1,00
0,5	1,31
0	1,77
-0,5	2,33
-1,0	2,56

d) Análise segundo [162]

Os autores mostram que uma estimativa correta da carga de flambagem elástica é de importância fundamental para o projeto de vigas. Eles recomendam o uso de um fator  $w$ , para transformar momentos desiguais em momentos equivalente que causam uma flexão uniforme conforme a figura 3.32.

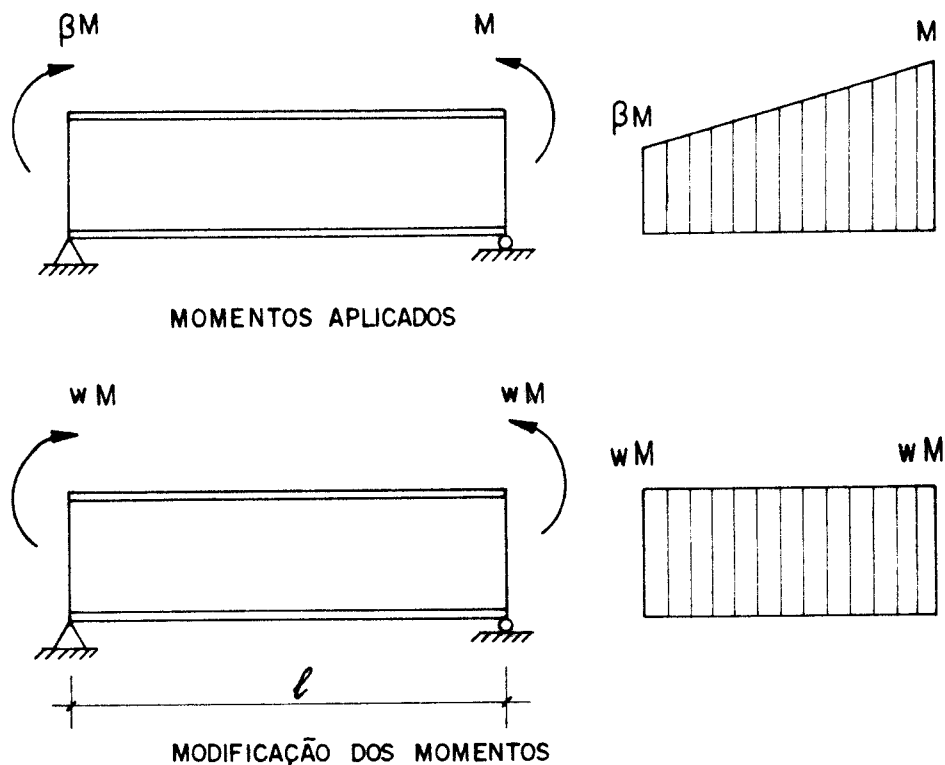


FIG. 3.32 - Modificação Aproximada dos Momentos [162]

Eles mostram que a expressão analítica para a análise do problema de estabilidade, conhecido como flambagem lateral com torção tem sido tópico de pesquisa por muitos anos.

A expressão para a determinação do momento crítico de flambagem elástica é:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GI_t} \sqrt{1+\delta}$$

onde  $\delta = \frac{\pi^2 EC_w}{l^2 GI_t}$  (semelhante portanto à expressão 3.52)

A flambagem de vigas conduz a equações diferenciais com coeficientes variáveis, que não apresentam uma forma de

solução fechada, ou seja, métodos aproximados são aplicados para encontrar a solução do problema. Os autores também mostram uma revisão na literatura sobre a questão do fator de modificação dos momentos para a análise da flambagem elástica lateral com torção (FLT) de acordo com a sequência abaixo:

1-Massonnet, citados por SHERBOURNE & PANDEY, [162]

$$M_{\text{equ}} = w M$$

onde M é o momento e para w utilizando RAYLEIGH-RITZ e com  $\gamma=1$

$$w = \sqrt{0,27(1+\beta^2) + 0,46\beta}$$

$\beta$  – relação entre os momentos aplicadas.

2. Campus and Massonnet, [162]

Propõe uma expressão mais conservativa assumindo que  $\gamma=0$  e w:

$$w = \sqrt{0,30(1+\beta^2) + 0,40\beta}$$

3 Salvadori, [162]

$$w = \frac{1}{1,75 + 1,05\beta + 0,3\beta^2} \geq 0,435$$

#### 4. Austin, [162]

$$w = 0,6 + 0,4\beta \quad (1 \leq \beta \leq 1)$$

Com relação à modificação do fator  $w$  eles mostram que o momento crítico uniforme  $M_{cr\mu}$  de uma viga simplesmente apoiada, se relaciona com a resistência à flambagem  $M_{cr}$  pela expressão.

$$M_{cr} = \frac{M_{cr\mu}}{w}$$

e olhando na Figura 3.32 para o caso de modificação do fator  $w$ , tem-se a relação:

$$M_{eq} = w M$$

Com essa análise, os autores tem descrito que um modelo analítico geral para a flambagem lateral por torção de vigas, é baseado no teorema da superposição e as equações são:

$$M_{cr}^2 = A_t M_t^2; \quad M_{cw}^2 = A_w M_w^2$$

$A_t$  e  $A_w$  são coeficientes que dependem da distribuição dos momentos e das condições de apoio.

$M_t$  momento de flambagem para torção

$M_w$  momento para empenamento

$$M_t = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t}; \quad M_w = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 E \sqrt{I_y C_w}$$



Com a superposição

$$M_{cr}^2 = A_t M_t^2 + A_w M_w^2$$

$$M_{cr}^2 = \frac{\pi^2}{\ell^2} EI_y GI_t A_t + A_w \frac{\pi^2}{\ell^2} E^2 I_y C_w$$

$$M_{cr}^2 = \frac{\pi^2}{\ell^2} EI_y GI_t A_t + A_w \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{EC_w}{GI_t} EI_t I_y$$

$$\gamma = \frac{\pi^2 EC_w}{\ell^2 GI_t}$$

$$M_{cr}^2 = \frac{\pi^2}{\ell^2} EI_y GI_t (A_t + A_w \gamma)$$

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t}; \sqrt{A_t + A_w \gamma} \quad (i)$$

Comparando com

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t}; \sqrt{1 + \gamma}$$

$$M_{cr} = \frac{M_{cr\mu}}{w}$$

$$M_{cr} = \frac{1}{w} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t}; \sqrt{1 + \gamma} \quad (ii)$$

Comparando as expressões (i) e (ii) tem-se

$$\frac{1}{W} \sqrt{1 + \gamma} = \sqrt{A_t + A_w \gamma} ;$$

$$w = \frac{\sqrt{1 + \gamma}}{\sqrt{A_t + A_w \gamma}}$$

Finalmente ao formularem essa expressão eles apresentam valores para  $A_w$  e  $A_t$  associados a dois casos hipotéticos de flambagem em que  $EC_w=0$  e  $GI_t=0$  e também através de soluções clássicas mostram valores para  $A_t$  e  $A_w$  utilizando métodos de RITZ-GALERKIN e o método dos elementos finitos.

No final do seu trabalho os autores mostram para o fator  $w$  de modificação dos momentos, dois casos de limitações para  $w$ , ( $\ell = \infty$  e  $\gamma = 0$ ; e  $\ell=0$ ,  $\gamma=\infty$ ).

$$w = \frac{\sqrt{1 + \gamma}}{\sqrt{A_t + A_w \gamma}} ; \quad W = \frac{\sqrt{1/\gamma + 1}}{\sqrt{\frac{A_t}{\gamma} + A_w}}$$

1o. CASO  $\ell \cong \infty$ ;  $\gamma = 0$

$$W = \sqrt{\frac{1}{A_t}}$$

2o. CASO  $\ell \cong 0$ ;  $\gamma = \infty$        $w = \sqrt{\frac{1}{A_w}}$

O que demonstra a influência do vão da viga nas condições de apoio.

Os autores mostram também em gráficos, várias expressões para o fator  $w$  de modificação dos momentos, avaliados na literatura tradicional e comparadas com o presente estudo.

### 3.4.3- CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE O COEFICIENTE $C_b$

Pensando nos relatos anteriores mostrados por diversos autores, tais como [54, 121, 128, 172], que também mostram em gráficos os resultados dessas análises, a fim de se poder ter uma melhor compreensão sobre o assunto, mas evidentemente voltando para a realidade atual, em que códigos normativos como [7,8,12] que adotam para o coeficiente  $C_b$  a expressão:

$$C_b = 1,75 + 1,05 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) + 0,3 \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \leq 2,3$$

e que também segundo [39, 51, 61, 113] adotam respectivamente os seguintes valores:

$$w = 0,6 + 0,4Mf_1/Mf_2 \text{ para barras com curvatura simples}$$

$$w = 0,6 - 0,4Mf_1/Mf_2 \text{ para barras com curvatura dupla} \\ \geq 0,4$$

$$w = 0,57 + 0,33\beta + 0,10\beta^2 \geq 0,43$$

$$\beta = M_1/M_2 \quad 1 \geq \beta \geq -1$$

na análise de [113,134] a expressão que relaciona  $M_{cr\mu}$  e  $M_{cr}$  é da seguinte forma

$$\bar{M} = m M_{\max}$$

Com isso podem ser observados nas figuras (3.33), (3.34) e (3.35), um sumário das conclusões sobre o coeficiente de modificação dos momentos fletores, aplicados numa viga simplesmente apoiada para diversas condições de carregamento.

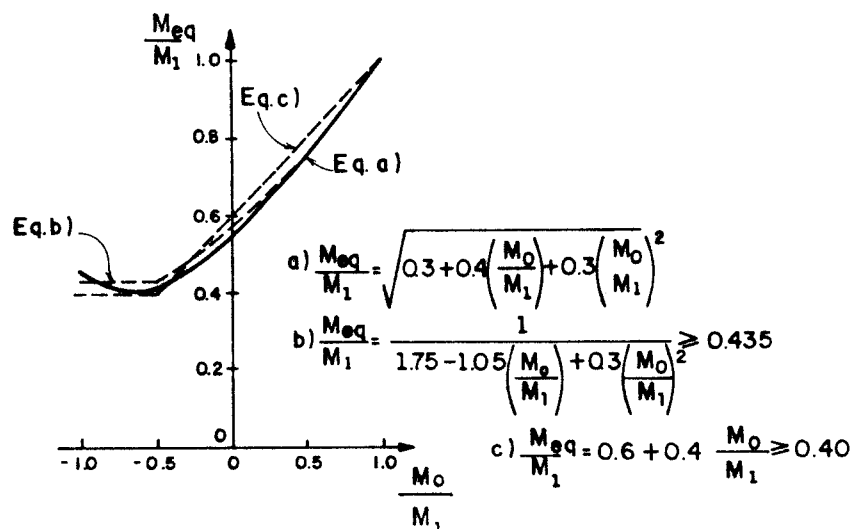
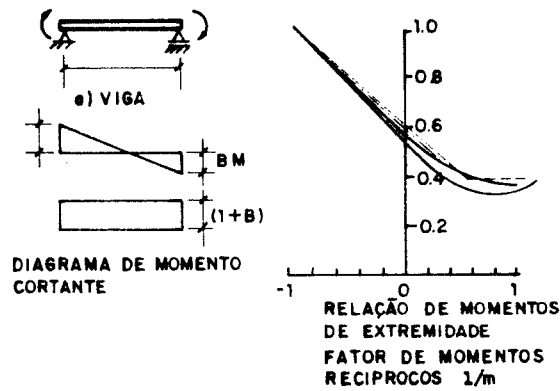


FIG. 3.33 - Fatores de Momentos Equivalente [121]



Fatores m de momentos uniformes equivalentes

VIGA E AÇÕES	MOMENTOS FLETORES	$M_{max}$	m
		M	1.00
		M	1.75
		M	2.56
		$\frac{WL}{4}$	1.35
		$\frac{wL^2}{8}$	1.13
		wbL	$1+b^2$
		$wb(1-b)$	$\frac{135+195}{(05-b)^2}$

FIG. 3.34 - Valores dos Fatores m para Carregamentos de Gradiente de Momentos [128]

De acordo com a análise de [128] e também [172]

$$m \approx C_b = 1,75 + 1,05M_1/M_2 + 0,3 \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \leq 2,56$$

$$\frac{1}{m} \approx C_m = 0,6 - 0,6 - 0,4 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) \geq 0,4$$

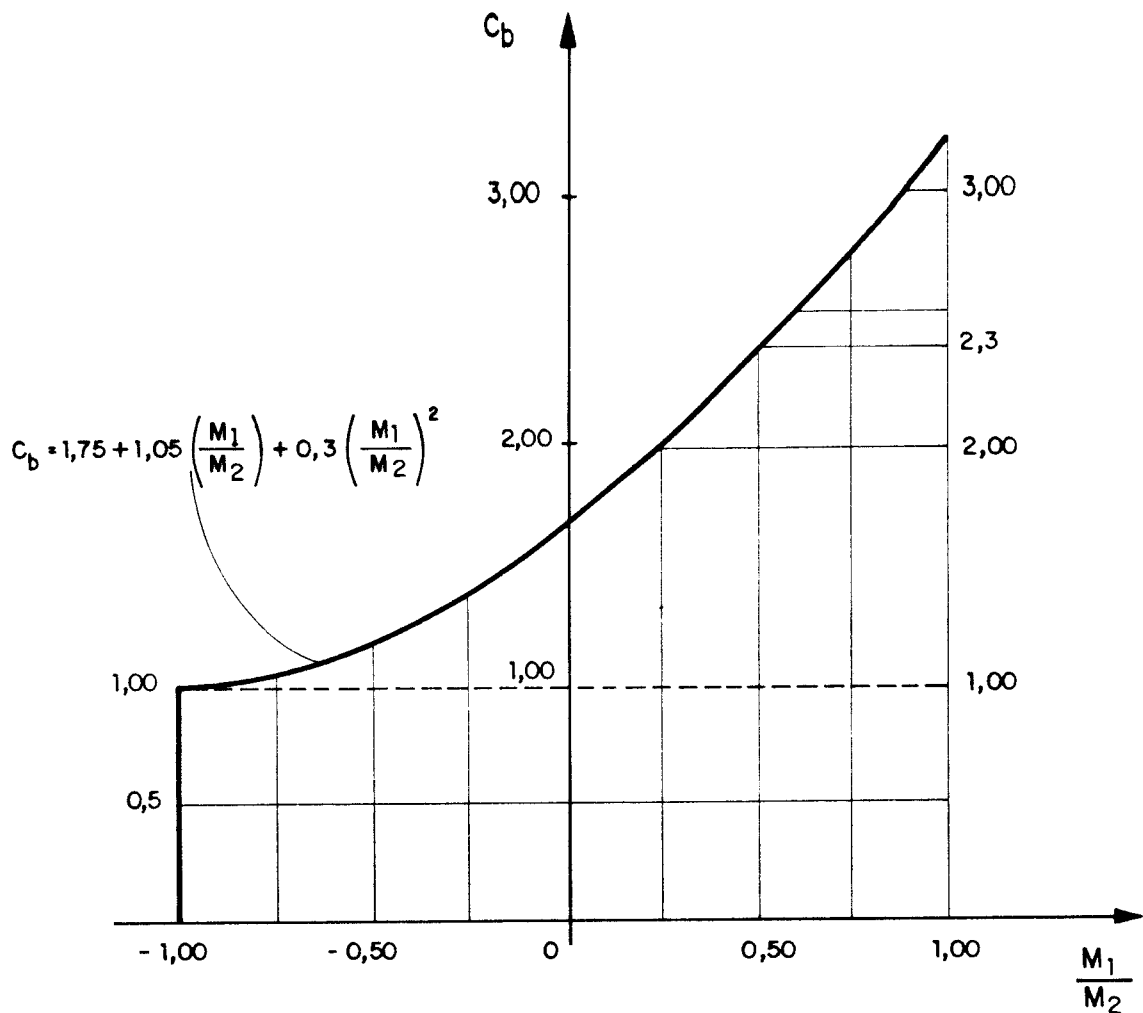


FIG. 3.35 - Diagrama  $M_1/M_2$  Versus  $C_b$  para atender as Especificações de [7, 8, 12] segundo [54]

Em relação aos problemas reais de dimensionamento das vigas na flexão os autores [128, 149], e as normas [7,8], mostram como devem ser introduzido o valor de  $C_b$  da expressão  $M_{cr\mu} = C_b M_{cr}$ , ou mais precisamente:

$$M_{cr\mu} = C_b \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{EI_y GI_t} \sqrt{1 + \frac{EC_w}{GI_t} \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2} \quad (3.76)$$

para se verificar a resistência à flambagem lateral com torção das vigas em aço solicitadas por momentos fletores desiguais. Na expressão:

$$C_b = 1,75 + 1,05 (M_1/M_2) + 0,3 (M_1/M_2)^2 \leq 2,3$$

$M_1$  é o menor (em valor absoluto) e  $M_2$  o maior (também em valor absoluto) momento fletor de cálculo nas extremidades do trecho considerado da viga. A relação  $M_1/M_2$  é positiva quando os momentos  $M_1$  e  $M_2$  produzem uma curvatura reversa (figura 3.36) e negativa quando produzem curvatura simples (figura 3.36).

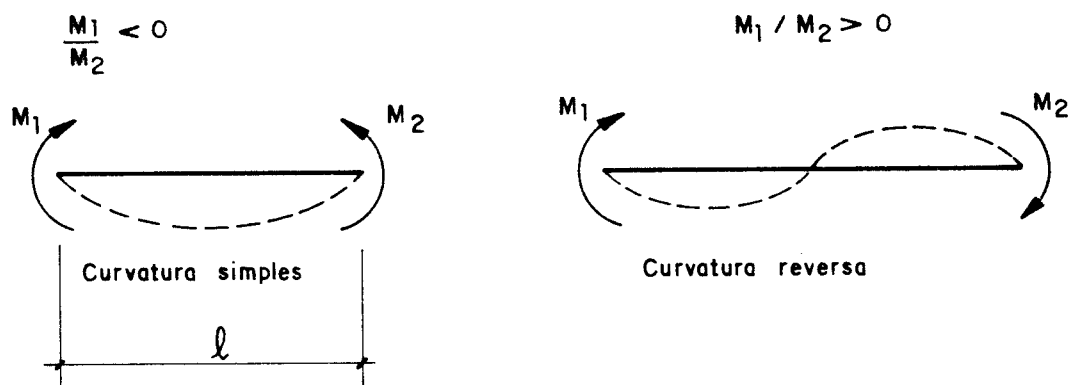


FIG. 3.36 - Trechos em que o Momento Fletor Varia Linearmente Entre as duas Seções Contidas Lateralmente, Trechos sem Cargas Aplicadas [149]

SEGUNDO [149], no caso em que as cargas aplicadas são de pequena intensidade, de forma que o diagrama de momentos fletores permanece praticamente linear entre as duas seções contidas lateralmente e, além disto, não haja seção intermediária com momento fletor superior, em valor absoluto, ao maior momento de extremidade " $M_2$ ", pode-se usar o critério anterior para a determinação de  $C_b$ .

Na figura 3.37 é mostrado os casos, segundo [149], onde existem trechos com cargas aplicadas entre duas seções contidas lateralmente e os respectivos valores de  $C_b$ .

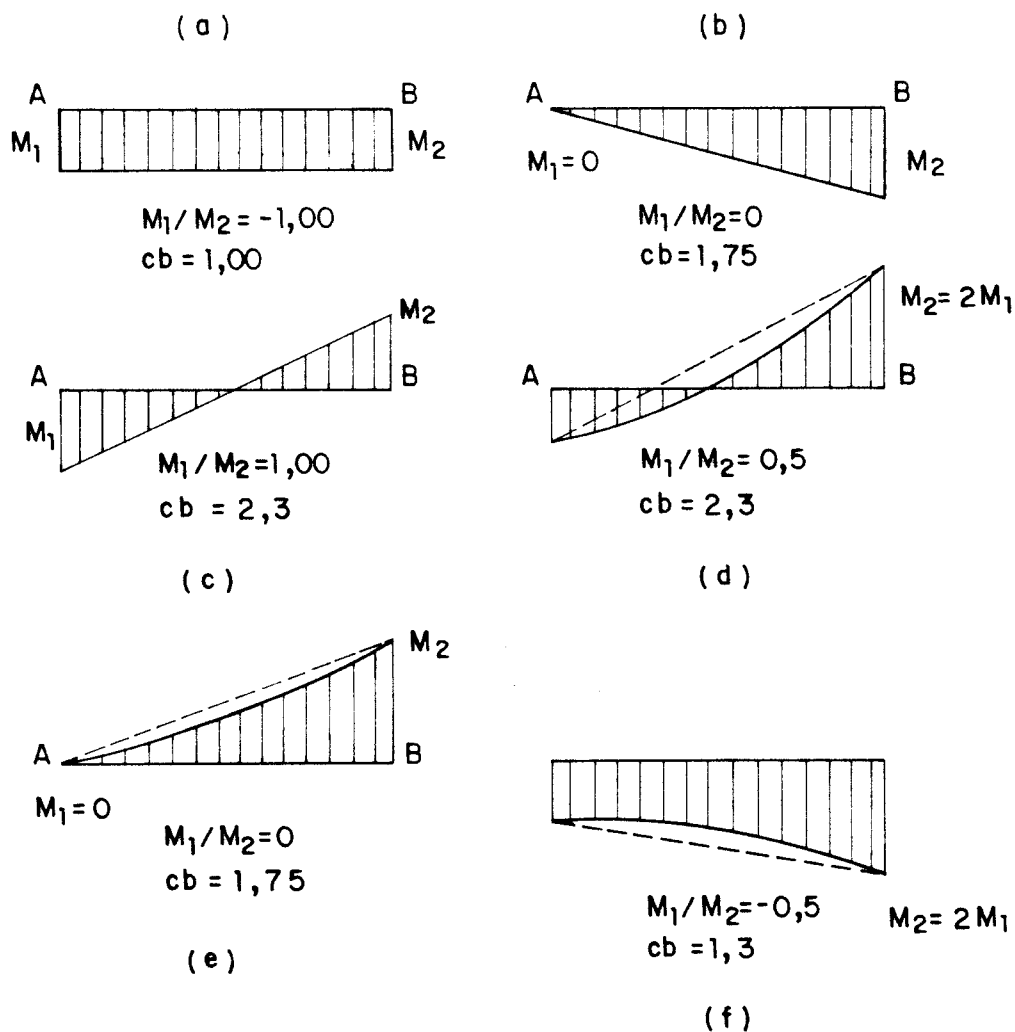


FIG. 3.37 - Trechos com Cargas Aplicadas entre as duas Seções Contidas Lateralmente [149]



### 3.4.4- Influência da Posição da Aplicação das Ações Externas

Um aspecto importante, que influencia a análise para a determinação da carga crítica de flambagem lateral com torção, está relacionado com a posição das ações externas em relação ao centro de torção das seções transversais das vigas, o que dá origem à estabilização ou desestabilização do elemento estrutural [46, 61, 94, 121].

Existem, dentro desse enfoque, 3 casos importantes a serem analisados, os quais são:

- a) Carga aplicada na parte superior da mesa comprimida do perfil;
- b) Carga aplicada no centro de gravidade que coincide com o centro de torção;
- c) Carga aplicada na parte inferior da mesa tracionada do perfil.

Esses fatores podem ser vistos, por exemplo, para uma viga simplesmente apoiada do tipo "I", sujeita a uma carga concentrada no meio do vão e nas três posições diferentes, conforme a figura 3.38.

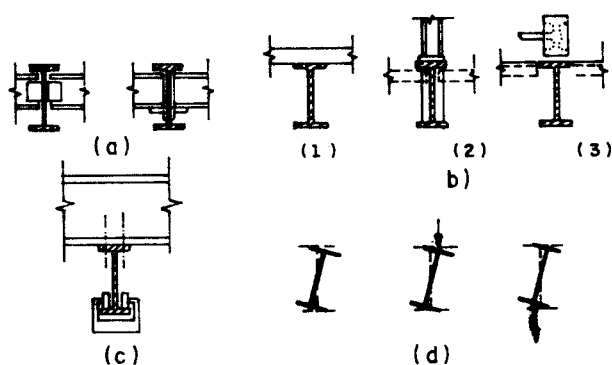


FIG. 3.38 - Viga Simplesmente Apoiada Solicitada por uma Ação Concentrada em Diversas Posições [46, 121]

Nessa questão, segundo [121], pelo menos do ponto de vista teórico, as diferentes posições da carga no perfil representam níveis diferentes de rigorismo na formulação matemática do problema. Por exemplo, a ação aplicada no topo da mesa comprimida agrava a tendência a flambagem lateral ao passo que a carga aplicada no nível inferior da mesa tracionada tem um efeito estabilizante. Essas diferenças podem ser representadas por uma completa modificação da expressão (3.52).

Para uma melhor compreensão desse problema uma análise mais apurada pode ser vista nos trabalhos dos autores [49, 136, 137], que inclusive contribuíram essencialmente na análise da flambagem lateral de vigas, e que também deram origem às obras [73, 94].

De acordo com [121] a expressão modificada para 3.52 passa a ser do seguinte tipo:

$$M_{cr} = \frac{C_b \pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \frac{EC_w}{GI_t} (1+c_p^2)} \pm \frac{\pi c_p}{\ell} \sqrt{\frac{EC_w}{GI_t}} \right] \quad (3.77)$$

onde, o sinal positivo é destinado à carga estabilizante e o sinal negativo para carga desestabilizante. A expressão (3.77) também é mostrada por [72].

Quem deu uma excelente contribuição para a formulação teórica da flambagem lateral de vigas numa forma mais geral, foram [49] onde os mesmos desenvolvem uma expressão com coeficientes que dependem principalmente das condições de carregamento e de apoio. Os valores dos coeficientes nesta expressão (3.78) foram tabuladas para uma larga variedade de

condições de carregamento e apoios. Para a formulação da equação geral para a flambagem lateral de vigas, eles utilizaram o método da energia potencial para uma viga considerada na sua posição flambada, e chegaram ao seguinte valor de  $M_{cr}$ .

$$M_{crit} = \frac{C_1 \pi^2 EI_y}{(K\ell)^2} \left[ C_2 g + C_3 k + \sqrt{(C_2 g + C_3 k)^2 + \frac{C_w}{I_y} \left( 1 + \frac{GI_t (k\ell)^2}{\pi^2 EC_w} \right)} \right] \quad (3.78)$$

onde:

$C_1, C_2, C_3$  - são coeficientes

$K$  - coeficiente de comprimento efetivo

$$k = e + \frac{1}{2I_x} \int_A y(x^2 + y^2) dA$$

$e$  - distância do centro de torção ao centro de gravidade  
 $g$  - distância do centro de torção ao ponto de aplicação da carga transversal.

Na elaboração do guia [94], onde se determina a expressão do momento  $M_{crit}$  de flambagem para uma viga simplesmente apoiada, (expressão 3.52) a mesma é ordenada da seguinte forma:

Foi visto anteriormente e na elaboração da expressão (3.52) chegou-se ao resultado:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t} \sqrt{1 + \frac{\pi}{\ell^2} \frac{EC_w}{GI_t}} \quad (3.52)$$

introduzindo a seguinte notação, utilizando o símbolo  $C_4$  do guia [94]

$$M_{cr} = \frac{C_4 \sqrt{EI_y GI_t}}{\ell} \quad (3.79)$$

onde

$$C_4 = \pi \sqrt{1 + \left( \frac{\pi}{\ell^2} \frac{1}{\sqrt{GI_t/EC_w}} \right)^2} \quad (3.80)$$

e que em geral o valor de  $C_4$  é dado pela expressão [69]

$$C_4 = \frac{C_1 \pi}{K} \left[ \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EC_w}{(K\ell)^2 GI_t} (C_2^2 + 1)} \pm \frac{C_2 \pi}{K\ell} \sqrt{\frac{EC_w}{GI_t}} \right] \quad (3.81)$$

Nessa expressão o coeficiente  $C_1$  considera o tipo de ação, as condições de apoio, e o coeficiente  $C_2$  é relacionado com o tipo de ação atuando verticalmente no elemento estrutural com relação ao centro de torção. O sinal (+) equação (3.81) é usado se a carga é aplicada na parte inferior da mesa tracionada, e o sinal (-) é usado para a carga aplicada no topo da mesa superior. Os valores de  $C_1$  e  $C_2$  para vários casos de carregamento externo na viga são tabulados na figura 3.41, adaptados de [49]. Pensando na expressão, de [49], para a determinação do momento crítico de flambagem elástica na sua forma mais geral, segundo a expressão (3.78), se ela for aplicada, por exemplo, para o caso de uma viga biapoiada cuja seção transversal seja um perfil "I" com dois eixos de simetria, como é o caso da Figura (3.39), ter-se-á:

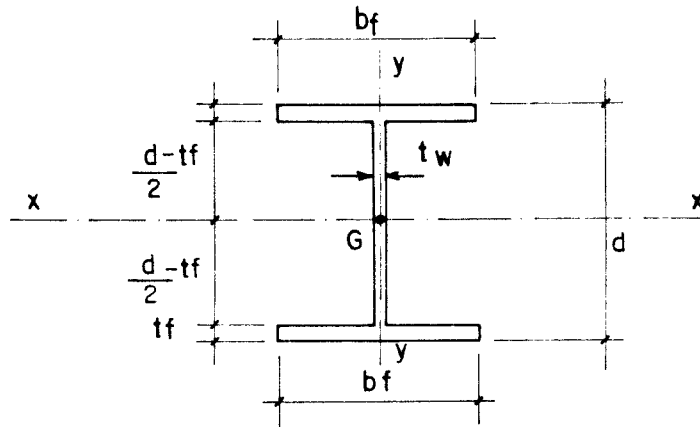


FIG. 3.39 - Perfil Soldado com Dois Eixos de Simetria

Nesse caso o centro de torção coincide com o centro de gravidade ( $y_D = 0$ ) e semelhantemente têm-se:

$$k=0, \quad e=0, \quad g=0 \quad (\text{sem carga vertical})$$

A expressão de [49] ficará do seguinte modo, com  $K = 1,00$  (viga simplesmente apoiada)

$$M_{cr} = \frac{C_1 \pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 EC_w EI_y}$$

Colocando em evidência ( $EI_y GI_t$ ), vem

$$M_{cr} = \frac{C_1 \pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \frac{EC_w}{GI_t}} \quad (3.82)$$

Comparando (3.82) com (3.76) conclui-se que  $C_1 = C_b$ , conclusão esta que é mostrada por [46, 94], ou seja,

representa o coeficiente de modificação de momentos, para diversas condições de carregamento na determinação do momento crítico de flambagem elástica.

$$M_{cr\mu} = C_b M_{cr} \quad (3.83)$$

Como trabalhos de contribuição para a determinação do coeficiente  $C_b$ , com relação à posição das ações externas quando são aplicados entre as extremidades de uma viga sem apoios intermediários, destaca-se [136, 137], este trabalho, onde os autores mostram um método bastante apurado e versátil para ser utilizado nas especificações normativas, é mostrado 41 casos diferentes de carregamento e condições de apoio para se analisar o problema da flambagem lateral de vigas. Este método, que permite uma rápida estimativa da resistência à flambagem lateral de vigas, é baseado no conceito do uso do coeficiente de flambagem lateral  $C_b$ , que é similar ao coeficiente de flambagem de chapas  $k$ .

Da equação da flambagem lateral de vigas do tipo I bissimétrica solicitada por momentos iguais nas extremidades, tem-se o valor de  $M_{cr}$  como já foi visto anteriormente, equação 3.52 ou seja:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\rho^2}\right)^2 \frac{EC_w}{GI_t}} \quad (3.52)$$

Sendo que [136, 137] reescrevem esta expressão seguinte maneira:

$$M_{cr} = C_b \sqrt{EI_y GI_t} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{R^2}} \quad (3.84)$$

onde

$$R^2 = \frac{L^2 GI_t}{EC_w}$$

ou

$$M_{cr} = C_b \sqrt{EI_y GI_t} \gamma \quad (3.85)$$

onde

$$\gamma = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{R^2}} \quad (3.86)$$

Para a montagem das tabelas, 1, 2 e 3 [136, 137], eles consideraram 4 tipos de apoios extremos que são:

a) TIPO I - onde é prevenido completamente o deslocamento lateral e a torção mas não oferece nenhuma restrição ao empenamento ou à flambagem lateral, e é chamado de simplesmente apoiado;

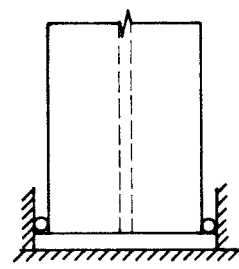
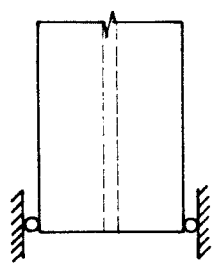
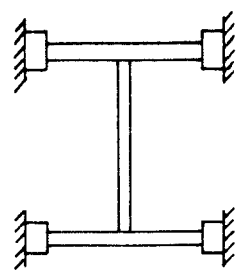
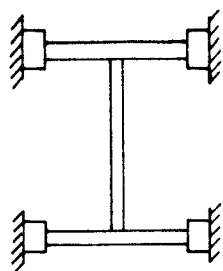
b) TIPO II - onde é prevenido completamente o deslocamento lateral, a torção e o empenamento, mas não é oferecida nenhuma restrição à flexão lateral e é chamado de empenamento fixado;

c) TIPO III - onde é prevenido completamente o deslocamento lateral, a torção e a flexão lateral mas não oferece nenhuma resistência do empenamento e é chamado de flexão lateral fixada.

d) TIPO IV - onde são prevenidas, completamente o deslocamento lateral, torção, empenamento e a flexão lateral e é chamado de completamente fixado.

Essas condições de suporte são mostradas na figura (3.40).

TIPO I - SIMPLEMENTE APOIADO TIPO II - EMPENAMENTO IMPEDIDO

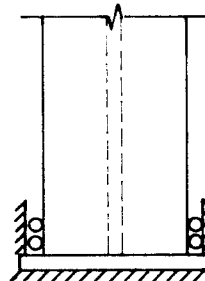
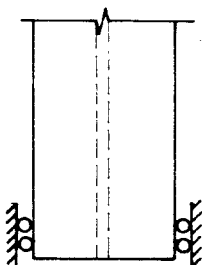
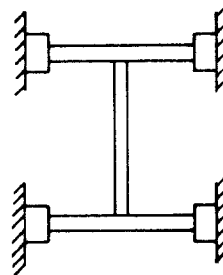
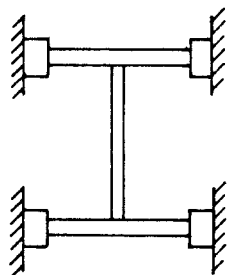


Deslocamento Lateral	Impedido $u = 0$	Impedido $u = 0$
Flexão Lateral	Livre $d^2u/dz^2=0$	Livre $d^2u/dz^2=0$
Torção	Impedida $\phi = 0$	Impedida $\phi = 0$
Empenamento	Livre $d^2\phi/dz^2=0$	Impedido $d\phi/dz=0$



TIPO III  
Flexão Lateral Impedida

TIPO IV  
Completamente Impedido



Impedido  $u=0$

Impedido  $\frac{du}{dz}=0$

Impedido  $\phi=0$

Livre  $\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0$

Impedido  $u=0$

Impedido  $\frac{du}{dz} = 0$

Impedido  $\phi=0$

Impedido  $\frac{d\phi}{dz} = 0$

FIG. 3.40 - Condições de Apoio nas Extremidades das Vigas  
[136, 137]

A seguir é visto, na figura 3.41 os valores de  $C_1$  e  $C_2$  propostos por [49] para a expressão 3.78.

CASO Nº1	CARREGAMENTO	DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR	CONDIÇÕES DE RESTRIÇÃO CONTRA ROTAÇÃO SOBRE O EIXO VERTICAL AXIAL E EXTREMIDADES	FATOR de comprimento equivalente		VALORES DOS COEFICIENTES	
				$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$
<b>VIGAS RESTRINGIDAS CONTRA DESLOCAMENTO LATERAL EM AMBAS EXTR. DO VAO</b>							
1.			SIMPLESMENTE APOIADA ENGASTADA	1.0 0.5	1.0 1.0	0 0	
2.			SIMPLESMENTE APOIADA ENGASTADA	1.0 0.5	1.3 1.3	0 0	
3.			SIMPLESMENTE APOIADA ENGASTADA	1.0 0.5	1.8 1.8	0 0	
4.			SIMPLESMENTE APOIADA ENGASTADA	1.0 0.5	2.4 2.3	0 0	
5.			SIMPLESMENTE APOIADA ENGASTADA	1.0 0.5	2.6 2.3	0 0	
6.			SIMPLESMENTE APOIADA ENGASTADA	1.0 0.5	1.1 1.0	0.45 0.29	
7.			SIMPLESMENTE APOIADA ENGASTADA	1.0 0.5	1.3 0.9	1.55 0.82	
8.			SIMPLESMENTE APOIADA ENGASTADA	1.0 0.5	1.4 1.1	0.55 0.42	
9.			SIMPLESMENTE APOIADA ENGASTADA	1.0 0.5	1.7 1.0	1.42 0.84	
10.			SIMPLESMENTE APOIADA	1.0	1.0	0.42	
<b>VIGAS EM BALANÇO</b>							
11.			EMPENAMENTO RESTRITO NAS EXTREMIDADES APOIADAS	1.0	1.3	0.64	
12.			EMPENAMENTO RESTRITO NAS EXTREMIDADES APOIADAS	1.0	2.1		

FIG. 3.41 - Valores utilizados dos coeficientes  $C_1$  e  $C_2$  da expressão 3.78 para a resistência a flambagem elástica de vigas [49, 154].

Continuando a análise, [136, 137], mostram os resultados, em forma de tabelas para todos os tipos de apoio, conforme foi visto na figura 3.40. Segundo eles, o coeficiente  $C_b$  pode ser computado em função das seguintes relações:

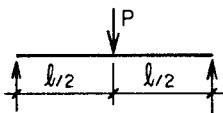

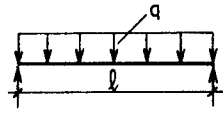
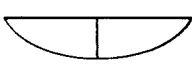
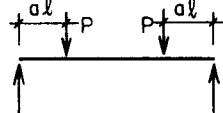
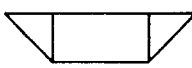
$C_b = A/B$  Carregamento Aplicado no topo do flange.

$C_b = A$  Carregamento aplicado no centro de torção

$C_b = AB$  Carregamento aplicado no flange inferior na parte mais baixa.

Os valores de A e B são mostrados nas Tabelas 1, 2 e 3 e a expressão de B é colocada em função do valor de  $R^2$


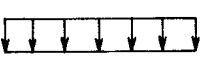

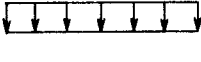

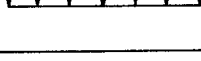

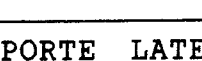
TABELA 1

CARREGAMENTO	DIAGRAMA DE MOMENTOS	M	A	B
		$\frac{Pl}{4}$	1,35	$1 - \frac{1,779}{R^2} + \frac{2,039}{R}$
		$\frac{ql^2}{8}$	1,123	$1 - \frac{1,522}{R^2} + \frac{1,681}{R}$
		$Pa$	$1+a^2$	$1 - \frac{4,59a}{R^2} + \frac{5,14a}{R}$

VIGAS TIPO I BISSIMÉTRICAS SIMPLEMENTE APOIADAS EM CADA EXTREMIDADE


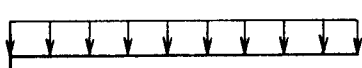
TABELA 2

VIGAS BISSIMÉTRICAS TIPO I, CARREGADAS E APOIADAS EM VÁRIAS CONDIÇÕES

TIPO DE CARREGAMENTO	TIPO DE APOIOS	FÓRMULAS PARA $C_b$	
		A	B
CARGA NO TOPO CARGA NO CENTRO DE TORÇÃO CARGA NA PARTE MAIS BAIXA DA MESA	APOIOS	$C_b = A/B$	
		$C_b = A$	
		$C_b = AB$	
	IV	$1,916 - \frac{4,186}{R^2} + \frac{5,814}{R}$	$1 - \frac{4,602}{R^2} + \frac{2,899}{R}$
	IV	$1,643 - \frac{4}{R^2} + \frac{5,563}{R}$	$1 - \frac{3,342}{R^2} + \frac{1,964}{R}$
	II	$1,43 + \frac{4,788}{R^2} + \frac{1,455}{R}$	$1 - \frac{3,13}{R^2} + \frac{1,945}{R}$
	II	$1,2 + \frac{4,106}{R^2} + \frac{1,263}{R}$	$1 - \frac{2,217}{R^2} + \frac{1,794}{R}$
	III	$2,0 - \frac{0,726}{R^2} + \frac{0,955}{R}$	$1 - \frac{2,045}{R^2} + \frac{3,289}{R}$
	III	$1,9 - \frac{1,184}{R^2} + \frac{0,02}{R}$	$1 - \frac{0,991}{R^2} + \frac{2,531}{R}$
	V	$2,95 - \frac{11,284}{R^2} + \frac{12,7}{R}$	1
	V	$2,093 - \frac{9,344}{R^2} + \frac{9,792}{R}$	$1073 + \frac{0,137}{R}$

SUPORTE LATERAL NO CENTRO E RESTRIÇÕES IGUAIS EM AMBAS EXTREMIDADES

TABELA 3

VIGAS EM BALANÇO	
TIPO DE CARREGAMENTO	FÓRMULA PARA $C_b$
	$1,28 - \frac{1,8}{R^2} + \frac{1,75}{R}$
	$2,054 - \frac{6}{R^2} + \frac{5,88}{R}$

Com isso, [136, 137] concluíram no seu trabalho, que este método é bem preciso e permite ao calculista de estrutura a determinação rápida da máxima tensão de flexão que irá causar a flambagem lateral em uma viga para um extenso número de carregamentos e de condições de apoios. O método somente requer o conhecimento das propriedades geométricas, principalmente daquelas que não constam das tabelas clássicas dos perfis estruturais tais como os valores de  $Z$ ,  $C_w$ ,  $I_t$ , etc e esse processo permite uma maior assimilação da influência do tipo de carregamento e das condições de apoio. Também pode ser facilmente utilizado através de programação em computadores digitais.

### 3.4.5- Flambagem Lateral Inelástica com Torção

O comportamento de uma viga simplesmente apoiada, solicitada pela ação de momentos iguais, atuando nas extremidades, pode ser representado, segundo [73], através de um gráfico onde é apresentada a relação entre o momento crítico ( $M_{cr}$ ) e o comprimento não apoiado ( $l$ ), como o da

figura (3.42), onde a curva pontilhada representa o caso quando as imperfeições iniciais são consideradas. Existem portanto três limites de comportamento: (1) flambagem elástica, que é aplicável para vigas longas; (2) flambagem inelástica, quando ocorre instabilidade depois que algumas porções da viga tiverem escoado e; (3) comportamento plástico, onde o comprimento não apoiado é pouco significativo e a flambagem ocorre depois que o momento plástico é atingido.

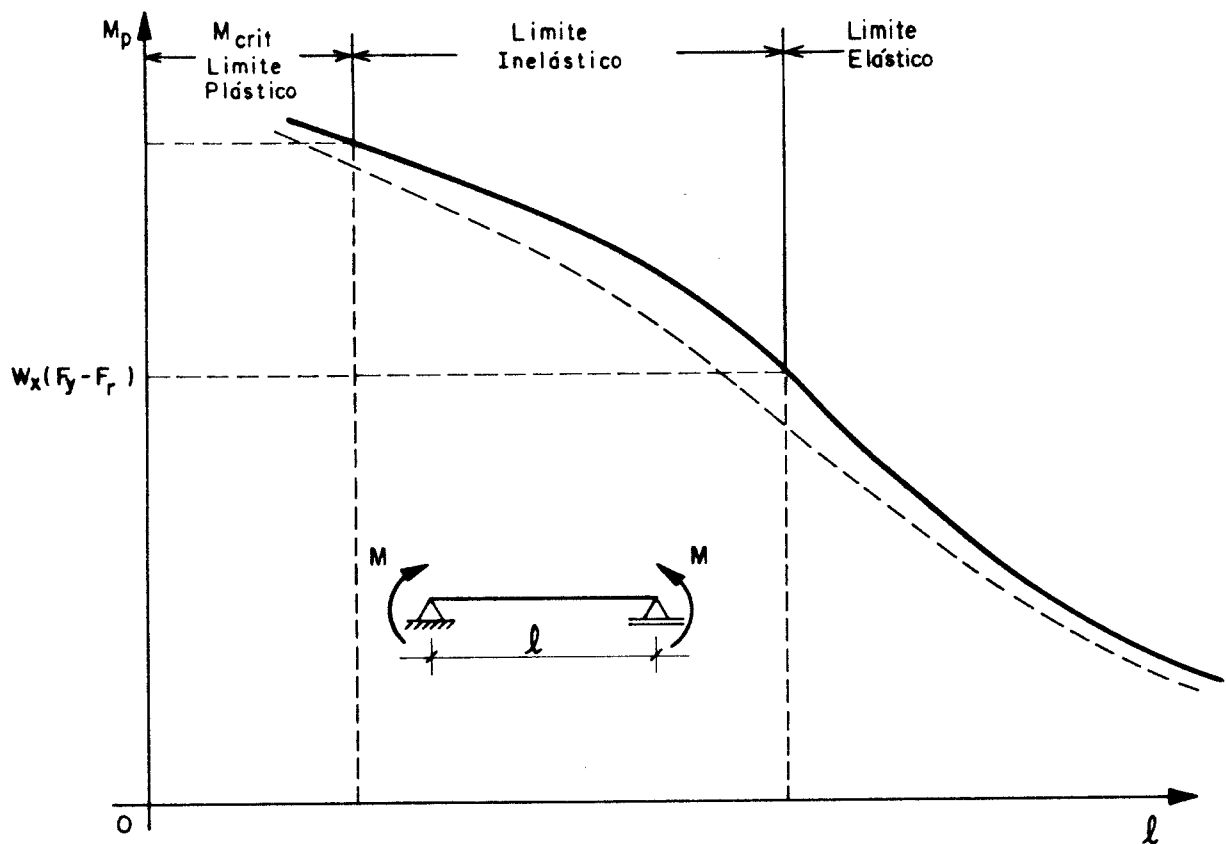


FIG. 3.42 - Curvas de Flambagem de Vigas [73].

Foi visto anteriormente, quando se determinou a expressão da carga crítica de flambagem lateral de vigas, que as mesmas são válidas para o caso em que o escoamento do

material não ocorre em nenhum lugar da viga ou seja, é assumido que a viga se comporta elasticamente, principalmente quando se trata de vigas com grande relação de esbeltez ( $l/r_y$ ). Entretanto, para vigas com esbeltez menor o escoamento ocorrerá em algumas fibras da viga, antes que seja atingido a carga crítica [46].

Alguns autores, como [75, 133, 184] mostram que, quando a flambagem ocorre fora do limite elástico, uma simples solução para este problema não é possível, e os primeiros trabalhos sobre o assunto eram limitados ao caso de vigas biapoçadas submetidas a um momento uniforme. Entretanto, recentemente para se fazer uma melhor compreensão do comportamento da flambagem inelástica, as pesquisas tem-se direcionado para vigas solicitadas por momentos com diagramas não uniformes como mostrado no gráfico da figura 3.43.

Devido a presença das tensões residuais, o momento máximo elástico  $M_r$  é dado por:

$$M_r = W_x (f_y - f_r) \quad (3.87)$$

e, para o caso da viga solicitada a um momento uniforme, a presença das tensões residuais causa uma redução significativa da solução elástica, mas para o caso da viga solicitada por momento não-uniforme o efeito das tensões residuais é grandemente diminuído quando  $C_b=1,30$ .

Analisando estes trabalhos, observa-se uma clara separação entre o comportamento elástico e inelástico, para determinados tipos de vigas, principalmente no que diz respeito a vigas muito esbeltas e vigas com esbeltez intermediária.

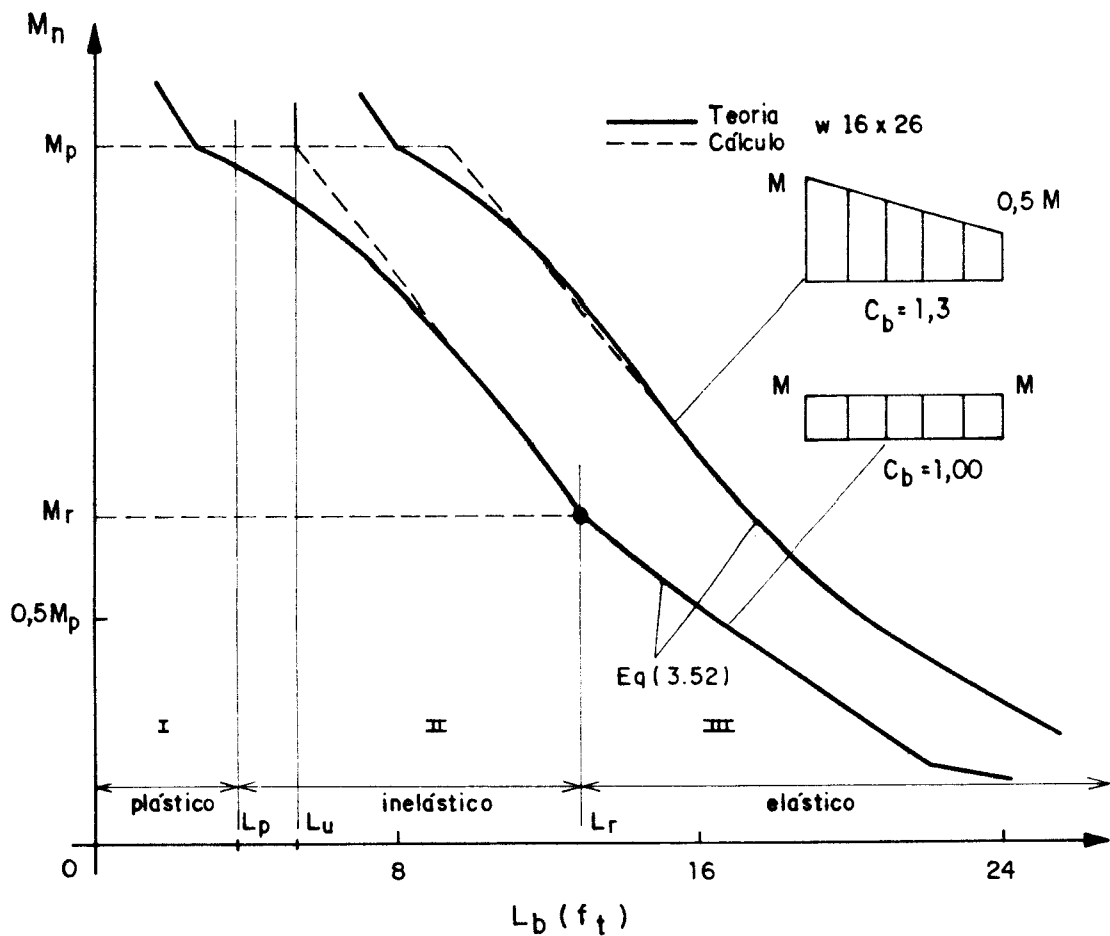


FIG. 3.43 - Comportamento de uma Viga Relacionado com o Suporte Lateral [154, 184]

Destaca-se o trabalho [133] que mostra uma série de resultados obtidos para diferentes tipos de seções transversais de vigas, diferentes combinações de carregamento e condições de suporte. Esses resultados são mostrados numa série de gráficos do tipo  $M/M_p$  versus  $\lambda_{FLT}$ , onde fica claro o comportamento das vigas na flambagem inelástica e, portanto para esse caso, é sugerido o uso do comprimento efetivo apropriado,  $\ell$ . Para dar uma solução direta no caso dessa transição, entre comportamento elástico e inelástico, várias curvas tem sido propostas e dentre essas destaca-se a de [184] que recomenda uma fórmula para a região inelástica do comportamento de uma viga.



Voltando a figura 3.43, é definido para o momento nominal  $M_n$  dois limites, sendo  $M_r$  para o momento uniforme e para o limite superior o valor  $M_p$ . Esses valores estão relacionados com os valores dos comprimentos não apoiados entre os limites  $L_u$  e  $L_r$ .

Segundo [154], para se ter uma melhor idéia dos requisitos para apoio lateral que são necessários para que a viga atinja a resistência e a capacidade de rotação pode ser utilizada a expressão (3.52) para a flambagem lateral por torção elástica, entretanto são redefinidos os valores de  $EI_y$  e  $GI_t$  no regime inelástico. Com isso de acordo com [110] para que se tenha um cálculo eficiente sobre a atuação de um momento uniforme deve ser colocado uma restrição no comprimento não apoiado da viga.

Então, para um cálculo eficiente é requerido que

$$M = M_p = Z_x f_y$$

ou seja, geralmente o suporte lateral deve ser colocado nos pontos onde o momento de plastificação deve ocorrer, e as distâncias entre os suportes laterais serão relativamente curtas. Logo o termo que envolve a rigidez à torção  $GI_t$ , na expressão (3.52) pode ser desprezado, e a expressão passa a apresentar o seguinte formato:

$$M_{cr} = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{E^2 C_w I_y} = \frac{\pi^2}{\ell^2} E \sqrt{C_w I_y} \quad (3.88)$$

já que  $M_{cr}$  deve atingir  $M_p$  e foi visto anteriormente que:

$$C_w = I_y h^2 / 4$$

e:

$$r_Y = \sqrt{I_Y/A} ; \quad r_Y^2 = I_Y/A \longrightarrow I_Y = r_Y^2 A$$

trocando o comprimento  $\ell$  por  $L_b$ , que é o comprimento não apoiado lateralmente ou comprimento sem contenção lateral.

Voltando a expressão (3.88) e observado as restrições, tem-se:

$$Z_x f_Y = \frac{\pi^2}{\ell^2} E \sqrt{\frac{I_Y h^2}{4} I_Y}$$

$$Z_x f_Y = \frac{\pi^2}{\ell^2} E \sqrt{\frac{I_Y^2 h^2}{4}} = \frac{\pi^2}{\ell^2} E \frac{I_Y}{2} h$$

$$Z_x f_Y = \frac{\pi^2}{L_b^2} E \frac{r_Y^2 A}{2} h$$

Donde:

$$\frac{L_b^2}{r_Y^2} = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{hA}{Z_x} \right) \frac{E}{f_Y}$$

$$\frac{L_b}{r_Y} = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} \frac{E}{f_Y} \left( \frac{hA}{Z_x} \right)} \quad (3.89)$$

Um limite superior para esta expressão pode ser obtido ao se considerar de acordo com [154], a não exigência de tensões residuais e um material elastico-plástico perfeito. Utilizando, ainda [154], um valor de 1,5 para  $hA/Z_x$  e  $E=205000\text{MPa}$  têm-se:

$$\frac{L_b}{r_y} = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} \frac{205000(1,5)}{f_y}}$$

$$\frac{L_b}{r_y} = \frac{1232}{\sqrt{f_y}} \quad (\text{sendo } f_y \text{ em MPa}) \quad (3.90)$$

A especificação [8] adota para barras em forma de perfil tipo I incluindo seções híbridas e perfis "U" fletidos sobre o eixo de maior inércia o valor:

$$\frac{L_b}{r_y} = \frac{790}{\sqrt{f_y}} \quad (3.91)$$

Para um aço tipo A-36 ( $f_y = 250\text{MPa}$ )

$$\frac{L_b}{r_y} \approx 50$$

A norma [12] adota  $1,75r_y \sqrt{E/f_y} = \lambda_p$

Refazendo (3.91) para [12] tem-se:

$$\frac{L_b}{r_y} = \frac{790r_y}{\sqrt{f_y}} ;$$

$$\text{seja } \lambda_p = cr_y \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

Igualando e adotando  $E = 20500\text{MPa}$

$$\frac{790r_y}{\sqrt{f_y}} = \frac{c r_y \sqrt{205000}}{\sqrt{f_y}}$$

$$c = \frac{790}{\sqrt{205000}} \approx 1,75 \text{ está portanto em consonância com a especificação [12], do valor de } \lambda_p$$

Valor limite do comprimento de um trecho de viga sem contenção lateral, correspondente ao momento de plastificação  $M_{pl}$  para seções retangulares cheias e de caixão

Quando uma viga simplesmente apoiada perfeitamente reta cuja seção transversal é um perfil estrutural tipo "I", é solicitada por um par de momentos fletores uniformes foi visto que o momento crítico de estabilidade elástica é dado pela expressão (3.52) válida dentro do campo elástico.

Alguns autores [46] mostram que a flambagem no campo plástico tem sido objeto de muitas investigações e que quando vigas são solicitadas por momentos fletores iguais e desiguais a distribuição do escoamento através da seção não varia ao longo da viga e quando não existe tensões residuais o momento crítico plástico  $M_i$  pode ser calculado pela modificação da expressão (3.52) conforme se pode observar na expressão (3.92) em que as quantidades subscritadas ( )<sub>r</sub> são as rigidezes reduzidas que são efetivas para a flambagem.

$$M_i = \frac{\pi}{L} \sqrt{(EI_y)_r (GI_t)_r} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 (EC_w)_r}{L^2 (GI_t)_r}} \quad (3.92)$$

Aplicando portanto para seções retangulares a expressão anterior e lembrando que neste caso  $C_w = 0$ ,  $M_{pl} = Z f_y$  trocando os módulos E e G por  $E_{st}$  e  $G_{st}$  que segundo [46] são utilizados nas áreas do campo plástico e no regime de deformação por encruamento, a expressão (3.92) se tornará:

$$M_{pl} = \frac{\pi}{L} \sqrt{(E_{st} I_y)(G_{st} I_t)} \quad (3.93)$$

Lembrando que para o aço estrutural do tipo ASTM A-36 segundo os autores [21,88,89,109,128,172] estimam-se os seguintes valores:

$E_{st} = E/33$ ,  $G_{st} = 0.105 E$  e portanto substituindo na expressão

(3.93) e trocando L por  $L_p$  e lembrando que:  $I_y = A r_y^2$ ;

$$L_p = 0.18 \frac{E r_y}{M_{pl}} \sqrt{I_t A} \quad (3.94)$$

Este valor fica bem próximo daquele que é recomendado pela especificação [12] no item 5.4.5.1 da página 42, cujo valor para  $L_b \leq L_p$  é da ordem de

$$L_p = \frac{0,13}{M_{pl}} E r_y \sqrt{I_t A} \quad (3.95)$$

## CAPÍTULO IV

### 4- RESISTÊNCIAS NOMINAIS

#### 4.1- INTRODUÇÃO

Na determinação dos parâmetros referentes à resistência nominal ao momento fletor das barras fletidas ( $M_n$ ), as normas [8, 12] definem três tipos de estados limites aplicáveis que são os seguintes:

- Flambagem Lateral com Torção (FLT)
- Flambagem Local da Mesa Comprimida (FLM)
- Flambagem Local da Alma pelo Momento Fletor (FLA)

##### 4.1.1- Flambagem Lateral com Torção (FLT)

É um estado limite último das barras sujeitas à flexão, onde o processo de flambagem envolve uma flexão lateral (perpendicular ao plano das ações) acompanhada de uma torção, conforme se pode observar nas figuras 3.21, 3.22 [149, 153, 154].

#### 4.1.2- Flambagem Local da Mesa Comprimida (FLM)

É a flambagem da chapa das seções que possuem uma mesa comprimida pelo momento fletor, paralela ao eixo de flexão, sendo que as tensões normais de compressão são praticamente constantes nesta mesa, e a teoria da abordagem destes fenômeno é feita no estudo de flambagem de chapas. Na figura 4.1 pode ser observado os tipos comuns de flambagem local.

#### 4.1.3- Flambagem Local da Alma pelo Momento Fletor (FLA)

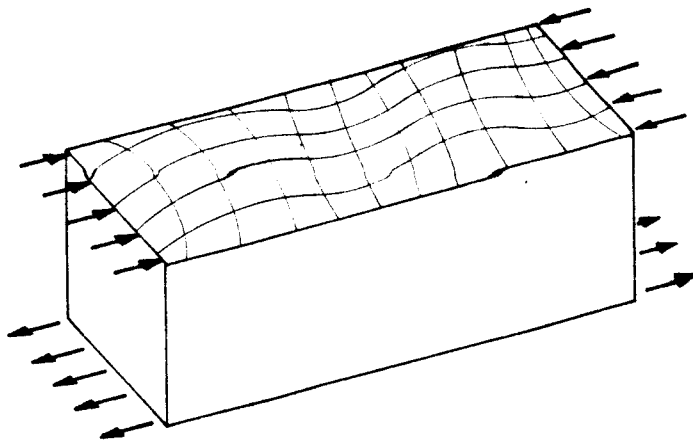
Em virtude das seções dos perfis estruturais em aço serem dotadas de almas ou mesas perpendiculares ao eixo de flexão, o dimensionamento destas almas das vigas é controlado pela flambagem que poderão ser causadas pelos seguintes tipos de tensões:

- a) Tensões de cisalhamento
- b) Tensões normais de flexão
- c) Tensões normais de compressão transversal
- d) Tensões combinadas nos casos a, b e c

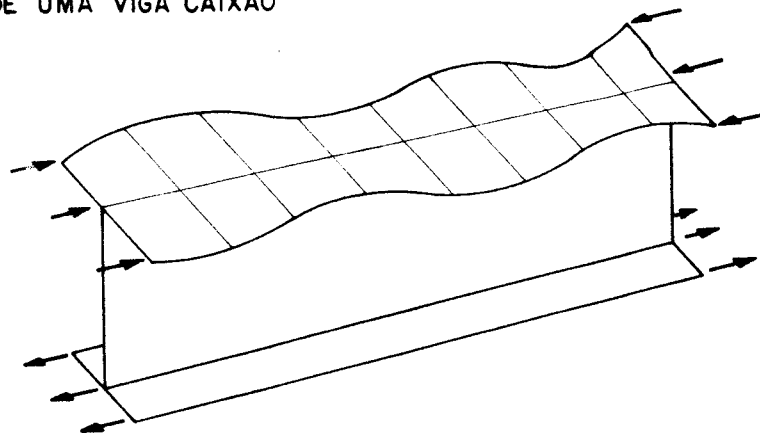
Em relação as tensões normais de compressão devido a flexão, estas por sua vez cobrem uma parte da altura da seção transversal e poderão causar a flambagem local da alma.

Quando as almas dos perfis estruturais são tratados analogamente ao caso de chapas sujeitas à compressão uniforme, elas são analisadas como elementos enrijecidos como será visto posteriormente na figura 4.5.

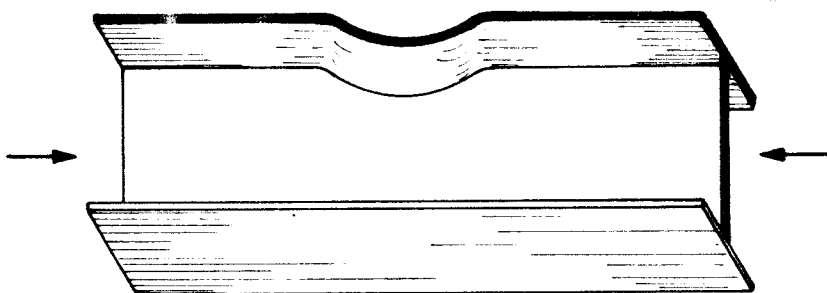
Na figura 4.2 podem ser observado os casos mais frequentes de flambagem de almas de seções estruturais de perfis em aço.



FLAMBAGEM LOCAL EM MESAS COMPRIMIDAS DE UMA VIGA CAIXÃO



FLAMBAGEM LOCAL EM MESAS COMPRIMIDAS DE UMA VIGA ESBELTA



FLAMBLAGEM LOCAL DE UMA CHAPA DO PERFIL COMPRIMIDO.

FIG. 4.1 - Tipos de flambagem local de elementos comprimidos [98, 147]



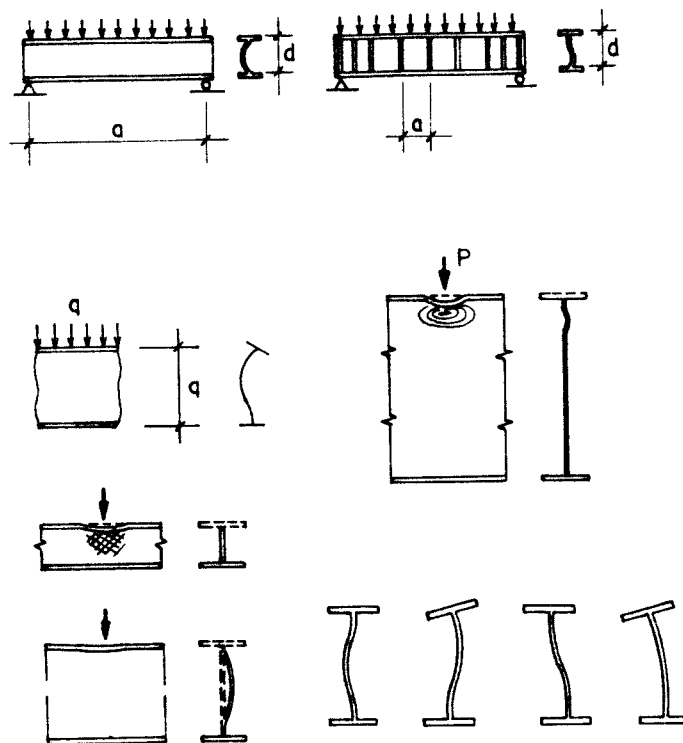


FIG. 4.2 - Tipos usuais de flambagem de alma [82, 121, 147, 149]

Como será visto a seguir as especificações [8, 12] utilizam o símbolo  $\lambda$  para representar o parâmetro de esbeltez referentes aos estados limites de flambagem local

da mesa comprimida (FLM), flambagem local da alma (FLA) e flambagem lateral com torção (FLT) e cuja determinação da resistência nominal ( $M_n$ ) ao momento fletor será feita em função desse parâmetro de esbeltez conforme a figura 4.4 e cujos valores para cada estado limite são:

$$\lambda_{FLT} = \frac{L_b}{r_y} ; \quad \lambda_{FLM} = \frac{b_f}{2t_f} ; \quad \lambda_{FLA} = \frac{h_w}{t_w} \quad (4.1)$$

#### 4.2- CRITÉRIO PARA O CÁLCULO DA RESISTÊNCIA NOMINAL AO MOMENTO FLETOR $M_n$

Segundo [8, 12 e 154], o critério de resistência de vigas lateralmente estáveis, ou para situações onde a flambagem lateral causa considerável redução da resistência, e o carregamento externo é considerado atuando no plano da alma das seções dos perfis estruturais das vigas em aço, pode ser enunciado como:

"A resistência de Cálculo  $R_d$  para o caso dos elementos fletidos deverá ser igual ou superior à solicitação de cálculo".

$$R_d \geq S_d \quad (4.2)$$

A resistência de cálculo  $R_d$  é  $\phi_b M_n$  sendo,  $\phi_b$  o coeficiente de resistência para flexão = 0,90

$$S_d = M_d$$

onde  $M_d$  - momento fletor de cálculo obtido pela majoração das cargas de serviço, segundo a NBR 8681 [11]

Portanto:

$$\phi_b M_n \geq M_d \quad (\text{condição de segurança}) \quad (4.3)$$

1o. CASO: Quando é atingido o momento de Plastificação  $M_p$  ( $M_n = M_p$ ) seguido imediatamente de uma larga capacidade rotação plástica ( $R \geq 3$  na figura 3.20).

A seção transversal da viga segundo [154] deve ser "COMPACTA" (item 3.3) para prevenir a flambagem local, ou seja, o parâmetro de esbeltez  $\lambda$  para a mesa de um perfil tipo "I" ( $\lambda = b_f/2t_f$ ) e para a alma ( $h_w/t_w$ ) não deve ultrapassar o parâmetro de esbeltez correspondente à plastificação " $\lambda_p$ " conforme foi visto anteriormente, e o apoio lateral deve ser providenciado tal que o comprimento não apoiado lateralmente  $L_b$  não exceda  $L_{pd}$  dado por:

$$\frac{L_{pd}}{r_y} = \frac{24,800 + 15,200 M_1/M_p}{f_y, MP_a} \quad (4.4)$$

onde:

$M_1$  = menor momento que atua na extremidade do segmento não apoiado lateralmente (tomado positivo quando os momentos causam curvatura reversa)

2o. CASO: O momento plástico é atingido ( $M_n = M_p$ ) mas com pouca capacidade de rotação ( $R < 3$  na figura (3.20).

A seção transversal do perfil deve ser compacta para prevenir a flambagem local, isto é, o parâmetro de esbeltez  $\lambda$  para a mesa comprimida ( $b_f/2t_f$ ) e para a alma ( $h_w/t_w$ ) não deve exceder  $\lambda_p$  e o apoio lateral deve ser providenciado de tal maneira que  $\lambda = L_b/r_y$  não exceda  $\lambda_p$ . Conforme já visto anteriormente para perfis tipo "I" o valor de  $L_b$  não pode ultrapassar  $L_p$  quando o coeficiente de modificação para momentos  $C_b$  for igual a 1,00 (valor conservativo)

$$\frac{L_b}{r_y} = \frac{790ry}{\sqrt{f_y, \text{MPa}}} \quad (4.5)$$

**CASO 3:** A flambagem lateral com torção de seções compactas pode ocorrer no regime inelástico ( $M_p > M_n \geq M_r$ )

O valor do momento nominal de resistência  $M_n$  é aproximadamente uma relação entre os pontos 1 ( $L_p, M_p$ ) e ponto 2 ( $L_r, M_r$ ) conforme pode ser observado na figura (4.3) retirada de [154].

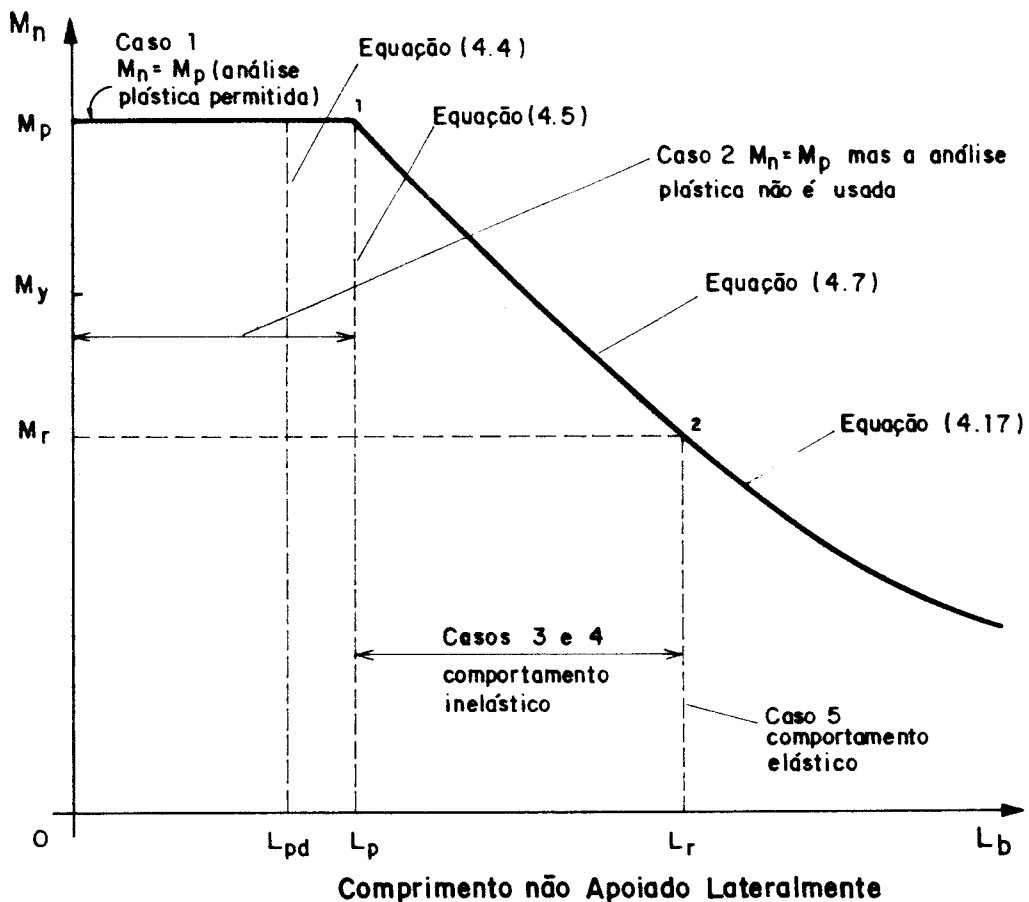


FIG. 4.3 - Resistência do Momento Nominal  $M_n$  para Seções Compactas Afetadas pela Flambagem Lateral com Torção [154]

Nesse caso a flambagem local deve ser impedida, logo a resistência nominal  $M_n$  é uma função linear da resistência à flambagem lateral com torção.

Tomando a equação da reta que passa pelos pontos (1) e (2) têm-se:

A equação da reta que passa por 2 pontos:

$$\begin{vmatrix} L_b & M_n & 1 \\ L_p & M_p & 1 \\ L_r & M_r & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_b & M_n & 1 & L_b & M_n \\ L_p & M_p & 1 & L_p & M_p \\ L_r & M_r & 1 & L_r & M_r \end{vmatrix} = 0$$

$$L_b M_p + L_r M_n + L_p M_r - L_r M_p - L_b M_r - L_p M_n = 0$$

$$M_n (L_r - L_p) = L_r M_p + L_b M_r - L_b M_p - L_p M_r$$

Somando e subtraindo o termo  $M_p L_p$  no segundo membro:

$$M_r (L_r - L_p) = L_r M_p - L_p M_p + L_b M_r - L_b M_p + L_p M_p - L_p M_r$$

$$M_n (L_r - L_p) = M_p (L_r - L_p) + L_p (M_p - M_r) + L_b (M_r - M_p)$$

$$M_n (L_r - L_p) = M_p (L_r - L_p) - (M_p - M_r) (L_b - L_p)$$

$$M_n = \frac{M_p (L_r - L_p)}{(L_r - L_p)} - (M_p - M_r) \frac{(L_b - L_p)}{(L_r - L_p)}$$

Logo

$$M_n = M_p - (M_p - M_r) \frac{(L_b - L_p)}{(L_r - L_p)} \quad (4.6)$$

Expressão que pode ser vista em [12] na página 43 para  $L_p < L_b \leq L_r$

Corrigindo a expressão (4.6) com o coeficiente  $C_b$ , tem-se:

$$M_n = C_b \left[ M_p - (M_p - M_r) \frac{(L_b - L_p)}{(L_r - L_p)} \right] \leq M_p \quad (4.7)$$

Expressão essa que pode ser observada na especificação [8] seção 6.43, onde:

$M_r$  - é o momento de resistência avaliado para cargas de serviços quando as fibras extremas atingem a tensão de escoamento  $f_y$ , incluindo as tensões residuais, e sendo expresso pelo valor:

$$M_r = (f_y - f_r)W_x \quad (4.8)$$

Para se obter o comprimento  $L_r$ , que representa o valor do comprimento de um trecho sem contenção lateral, correspondente ao momento " $M_r$ ", toma-se como ponto de partida, segundo [72], a equação aproximada para o cálculo de  $M_{cr}$ :

$$M_{cr} = C_b \sqrt{M_{cr1}^2 + M_{cr2}^2} \quad (4.9)$$

Os valores de  $M_{cr1}$  e  $M_{cr2}$ , já foram determinados anteriormente e valem respectivamente:

$$M_{cr1} = \frac{0,65 E W_x}{\left(\frac{\ell d}{A_f}\right)} \quad (3.57)$$

$$M_{cr2} = \frac{\pi^2 E W_x}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 E W_x r_t^2}{\ell^2} \quad (3.57.a)$$

Elevando ao quadrado as expressões anteriores e substituindo-se esses valores em 4.9 levando-se em conta que  $M_{cr} = M_r = (f_y - f_r) W_x$  temos:

$$M_{cr}^2 = M_{cr1}^2 + M_{cr2}^2$$

$$(f_y - f_r)^2 W_x^2 = \frac{(0,65)^2 E^2 W_x^2 A_f^2 C_b^2}{\ell^2 d^2} + \frac{\pi^4 E^2 W_x^2 r_t^4 C_b^2}{\ell^4}$$

Desenvolvendo, vem

$$(f_y - f_r)^2 \ell^4 d^2 = (0,65)^2 E^2 A_f^2 \ell^2 C_b^2 + \pi^4 E^2 r_t^4 d^2 C_b^2$$

$$\ell^4 - \frac{(0,65)^2 E^2 A_f^2 C_b^2}{(f_y - f_r)^2 d^2} \ell^2 + \frac{\pi^4 E^2 r_t^4 C_b^2 d^2}{(f_y - f_r)^2 d^2} = 0$$

Equação que resolvida em relação a  $\ell$  encontra-se o valor desejado

$$\ell = \frac{\sqrt{\frac{(0,65)^2 E^2 A_f^2 C_b^2}{(f_y - f_r)^2 d^2}} + \sqrt{\frac{(0,65)^4 E^4 A_f^4 C_b^4}{(f_y - f_r)^4 d^4} + \frac{\pi^4 E^2 r_t^4 C_b^2}{(f_y - f_r)^2}}}{2}$$

$$\ell = \frac{\sqrt{\frac{(0,65)^2 E^2 A_f^2 C_b^2}{(f_y - f_r)^2 d^2} + \frac{(0,65)^2 E^2 A_f^2 C_b^2}{(f_y - f_r)^2 d^2}} + \sqrt{1 + \frac{4\pi^4 E^2 r_t^4 C_b^2 (f_y - f_r)^4 d^4}{(0,65)^4 E^4 A_f^4 C_b^4 (f_y - f_r)^2}}}{2}$$

Para simplificar o desenvolvimento, seja:

$$X^2 = \frac{4\pi^4 E^2 r_t^4 C_b^2 (f_y - f_r)^4 d^4}{(0,65)^4 E^4 A_f^4 C_b^4 (f_y - f_r)^2}$$

$$X^2 = \frac{4\pi^4}{(0,65)^4} \frac{r_t^4 (f_y - f_r)^2 d^4}{E^2 A_f^4 C_b^2}$$

$$X = \frac{46,72(f_y - f_r)}{E C_b} \frac{(r_t^2 d^2)}{A_f^2}$$

A especificação [12] adota para perfis estruturais em aço tipo "I" e "H" com dois eixos de simetria o valor de X

$$X = \frac{40,75(f_y - f_r)}{C_b E} (r_T d / A_f)^2 \quad (4.10)$$

Logo o valor de  $\ell$  será:



$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(0,65) E A_f C_b}{(f_y - f_r) d} \sqrt{1 + \sqrt{1 + X^2}}$$

Da primeira expressão de X

$$X = \frac{46,72(f_y - f_r) (r_t^2 d^2)}{E C_b A_f^2}$$

Tira-se:

$$\frac{E C_b}{f_y - f_r} = \frac{46,72 r_t^2 d^2}{A_f^2 X}$$

Substituindo na expressão de  $\ell$

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(0,65) A_f}{d} \frac{46,72 r_t^2 d^2}{A_f^2 X} \quad (\ell = \ell_r)$$

$$\ell_r = \frac{21,47 r_t^2 d / A_f}{X} \sqrt{1 + \sqrt{1 + X^2}}$$

A especificação [12] adota:

$$L_r = \frac{19,9 r_t^2 d / A_f}{X} \sqrt{1 + \sqrt{1 + X^2}}$$

e, para obter o valor de  $\lambda_r$  que representa o parâmetro de esbeltez correspondente ao início do escoamento com ou sem

tensão residual, parte-se da expressão já vista anteriormente:

$$M_{cr} = \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\beta_1\sqrt{\beta_2}}{\lambda^2}\right)^2} \quad (3.54.a)$$

que, corrigida com o coeficiente de modificação para momentos em virtude da variedade de carregamentos, fornece:

$$M_{cr} = C_b \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\beta_1\sqrt{\beta_2}}{\lambda^2}\right)^2} \quad (4.11)$$

Elevando ao quadrado e tendo em vista que:

$$M_{cr} = M_r = (f_y - f_r) W_x$$

$$\left[ \left(\frac{\beta_1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\beta_1\sqrt{\beta_2}}{\lambda^2}\right)^2 \right] C_b^2 = M_r^2$$

$$\lambda^2 \beta_1^2 C_b^2 + \beta_1^2 \beta_2 C_b^2 = M_r^2 \lambda^4$$

$$M_r^2 \lambda^4 - \lambda^2 \beta_1^2 C_b^2 - \beta_1^2 \beta_2 C_b^2 = 0$$

$$\lambda^4 - \frac{\beta_1^2 C_b^2}{M_r^2} \lambda^2 - \frac{\beta_1^2 \beta_2 C_b^2}{M_r^2} = 0$$

Resolvendo esta equação em relação  $\lambda$ , tem-se:

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{\beta_1^2 C_b^2}{M_r^2}} + \sqrt{\frac{\beta_1^4 C_b^4}{M_r^4} + \frac{4\beta_1^2 \beta_2 C_b^2}{M_r^2}}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\beta_1^2 C_b^2}{M_r^2} + \sqrt{\frac{\beta_1^4 C_b^4}{M_r^4} \left(1 + \frac{4\beta_1^2 \beta_2 M_r^4 C_b^2}{\beta_1^4 C_b^4 M_r^2}\right)}}$$

$$\lambda = \frac{\beta_1 C_b}{\sqrt{2} M_r} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta_2 M_r^2}{\beta_1^2 C_b^2}}}$$

ou

$$(\lambda = \lambda_r)$$

$$\lambda_r = \frac{0,70 C_b \beta_1}{M_r} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta_2}{C_b^2 \beta_1^2} M_r^2}} \quad (4.12)$$

Esta expressão está de acordo com a especificação [12] no seu Anexo D página 128, onde:

$$\beta_1 = \pi \sqrt{EG} \sqrt{I_T A}$$

$$G = 0,385E$$

e para perfis "I" ou "H"

$$\beta_2 = \frac{\pi^2 E}{4G} \frac{A(d-t_f)^2}{I_T}$$

Para perfis "U"

$$\beta_2 = \frac{\pi^2 E A h^2}{4GI_t}$$

$$A = I_y/r_y^2; C_w = I_y h^2/4$$

$$\beta_2 \approx \frac{6,45 A(d-t_f)^2}{I_T}$$

$$\beta_2 = \frac{EC_w}{GI_t} \left(\frac{\pi}{r_y}\right)^2 \quad [12]$$

Para seção retangular cheia e caixão tem-se:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{E I_y} \sqrt{G I_t} \quad (4.13)$$

ou

$$M_{cr} = \frac{C_b \pi}{\ell} \sqrt{E I_y G I_t}$$

$$r_y^2 = I_y / A; \quad I_y = r_y^2 A$$

$$G = 0,385E$$

$$M_{cr} = \frac{C_b \pi}{\ell} \sqrt{E r_y^2 A G I_t}$$

$$M_{cr} = C_b \frac{\pi r_y}{\ell} \sqrt{E \times 0,385 E A I_t} = M_r$$

$$\frac{\ell}{r_y} = 1,95E \sqrt{A I_t} (C_b)$$

$$\lambda_r = L_r / r_y$$

para  $\ell = L_r$

$$L_r = \frac{1,95 C_b E r_y \sqrt{I_t A}}{M_r} \quad (4.14)$$

Esta expressão está de acordo com a especificação [12] na pagina 43.

CASO 4: Estado Limite Geral onde o Momento Nominal  $M_n$  de Resistência ocorre no Regime Inelástico para ( $M_p > M_n \geq M_r$ )

Segundo [154], esta condição não é relativamente comum para perfis laminados. Nesse caso, a variação da resistência nominal  $M_n$  com o parâmetro de esbeltez é mostrado na figura (4.4). Quando o parâmetro de esbeltez está situado entre  $\lambda_p$  e  $\lambda_r$  para um ou mais estados limites tais como (1) FLM (2) FLA, ou (3) FLT a expressão que relaciona  $M_n$  com  $\lambda$  é linear.

Para o estado limite de flambagem local da mesa comprimida ou de flambagem local da alma, as especificações [8, 12] prescrevem o seguinte valor para  $M_n$ :

$$M_n = M_p - (M_p - M_r) \left( \frac{\lambda - \lambda_p}{\lambda_r - \lambda_p} \right) \quad (4.15)$$

Para o estado limite de flambagem lateral com torção, a relação linear da equação 4.15 é usada, entretanto o resultado é multiplicado por  $C_b$  quando existe momento gradiente. A expressão de acordo com [8] é idêntica à (4.6), exceto quando é expressa em termos do parâmetro de esbeltez  $\lambda$ ,

$$M_n = C_b \left[ M_p - (M_p - M_r) \left( \frac{\lambda - \lambda_p}{\lambda_r - \lambda_p} \right) \right] \leq M_p \quad (4.16)$$

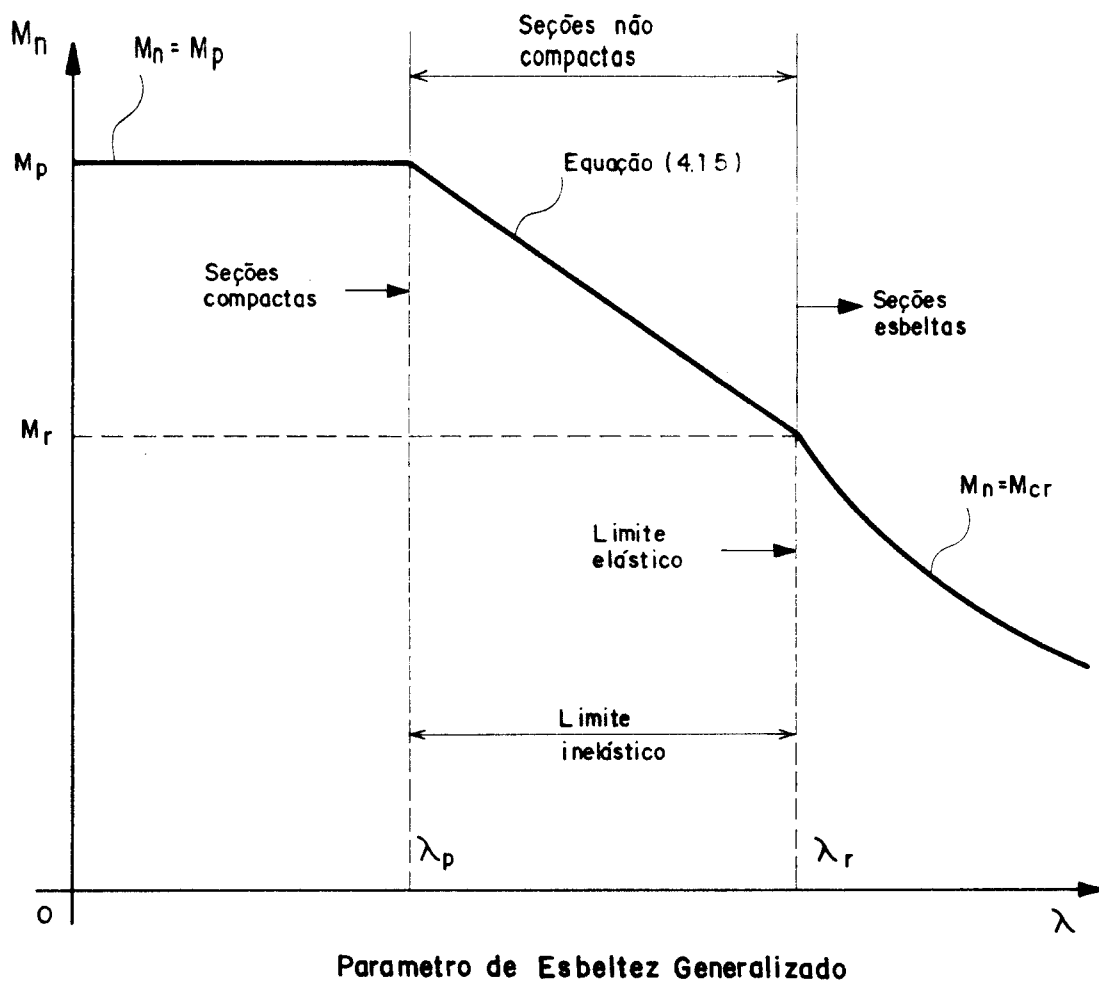


FIG. 4.4 - Resistência Nominal  $M_n$  em função do parâmetro de esbeltez  $\lambda$

CASO 5: Estado Limite Geral onde a Resistência Nominal  $M_n$  é igual à Resistência à Flambagem Elástica  $M_{cr}$  ( $M_n < M_r$ )

Segundo [154] existem duas sub-categorias para este caso: 1) O parâmetro de esbeltez  $\lambda$  para a mesa ou para a alma não excede  $\lambda_r$ ; 2) O parâmetro de esbeltez nos três estados ultrapassa  $\lambda_r$ .

Quando  $\lambda$  ultrapassa  $\lambda_r$  a flambagem local ocorrerá primeiro na fibra extrema da seção transversal do perfil estrutural tipo I e é atingida a tensão de escoamento  $f_y$ , e a eficiência da seção transversal é reduzida, esses elementos são conhecidos como "Elementos Comprimidos Esbeltos".

Também complementando esse assunto, a especificação [12] afirma que para as chamadas vigas esbeltas em que  $\lambda > \lambda_r$ , para o estado limite FLA em seções tipo "I" duplamente simétricas ou simétricas apenas em relação ao plano médio da alma, e fletidas em relação ao eixo perpendicular à alma deve-se verificar os critérios segundo o Anexo F pagina 135.

Quando  $\lambda > \lambda_r$  [154] mostra que a resistência nominal é representada pela expressão:

$$M_n = M_{cr} = C_b \frac{\pi}{L_b} \sqrt{\left(\frac{\pi E}{L_b}\right)^2 C_w I_y + E I_y G I_t} \quad (4.17)$$

#### 4.3- FLAMBAGEM LOCAL DA ALMA - (FLA)

Em geral, como já visto anteriormente, pelo fato dos perfis estruturais das vigas em aço serem formados pela composição de mesas e almas, tais como as seções denominadas de "I", "H" "T" "U" e outras, o problema da flambagem local da alma desses perfis pode ser ocasionado pela flexão que

transmite tensões de compressão e de tração causadas pelo momento fletor, bem como das chapas sujeitas a tensões de compressão uniforme, e como já visto anteriormente, essas seções de acordo com a natureza das tensões são classificadas como elementos enrijecidos e não enrijecidos [121, 149].

Na figura 4.5 podem ser observados os principais tipos de elementos estruturais que são classificados como elementos enrijecidos, A largura destes elementos deve ser tomada da seguinte forma:

a) Para chapas de reforço de mesas a largura "b" é a distância entre as linhas de solda;

b) Para mesas de perfis caixão a largura "b" é a distância livre entre linhas de solda das almas com as mesas:

c) Para almas de perfis soldados ou laminados; a largura "b" é a distância entre faces internas de mesas;

d) Para mesas de perfis tubulares retangulares a largura "b" é igual a distância livre entre almas.



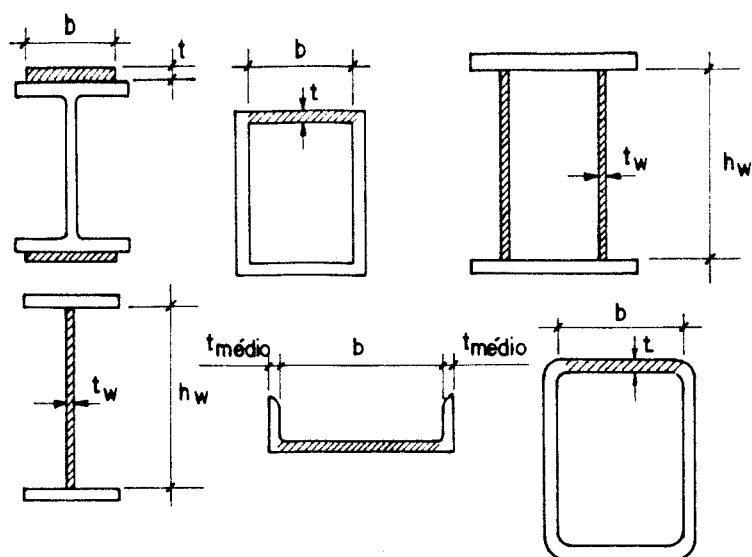


FIG. 4.5 - Elementos Apoiados ao Longo de Duas Extremidades  
Elementos Enrijecidos [149, 154]

Em relação às almas dos perfis estruturais das vigas, tendo o comportamento de chapas submetidos à compressão uniforme, como já foi visto anteriormente, a tensão crítica de flambagem é dado pela expressão (3.1).

$$F_{crit} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2)(b/t)^2} \quad (3.1)$$

Seja um trecho da alma de um determinado perfil estrutural, por exemplo um tipo "I", solicitado à flexão pura conforme mostra a figura 4.6.

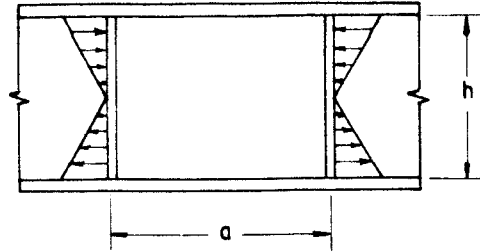


FIG. 4.6 - Alma de um Perfil Sujeito à Flexão Pura

Para se determinar o índice de esbeltez da alma ( $\lambda = h_w/t_w$ ) necessário ao cálculo da tensão crítica à flambagem local, pode-se aplicar a expressão (3.1) trocando  $b$  por  $h_w$  e  $t$  por  $t_w$ , onde a largura da chapa é a altura  $h_w$ , assim a expressão apresentará o seguinte aspecto:

$$F_{crit} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2)(h_w/t_w)^2} \quad (4.18)$$

O problema consiste em determinar o coeficiente de flambagem  $K$ , visto o mesmo possuir valores máximo e mínimo, que variam com a relação comprimento/altura da chapa e com as condições de apoio ao longo das extremidades. Se a chapa pode ser considerada como completamente fixada ao longo das extremidades paralelas à direção do carregamento, o valor máximo de  $K$  é 39,6, e se as mesas não oferecerem nenhuma resistência à rotação o valor mínimo de  $K$  é 23,9, com isso a variação do coeficiente  $K$  pode ser visto na figura 4.7.

Logo, utilizando a expressão (4.18), e limitando  $F_{crit}$  ao limite de escoamento do material da chapa tem-se:

a) Para  $K = 23,9$  (Simplesmente apoiada nas mesas)

$$(h_w/t_w)^2 = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)f_y} \quad (4.19)$$

$$h_w/t_w = \sqrt{\frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)f_y}}$$

Como para o Aço A-36  $E = 205000\text{MPa}$   $\nu = 0,30$  e  $f_y = 250\text{MPa}$  tem-se:

$$h_w/t_w = \sqrt{\frac{23,9 \pi^2 205000}{12(1-0,3^2)250}} = 133$$

b) Para  $K = 39,6$ ;  $E = 205000\text{MPa}$ ;  $\nu = 0,3$   $f_y = 250\text{MPa}$  na expressão (4.19), tem-se:

$$h_w/t_w = 171$$

Devido aos diversos tipos de condições de uniões entre mesas e almas de perfis estruturais e as condições de extremidade, alguns autores como [121, 149, 154], sugerem o valor intermediário de  $K = 35$ , para atender às especificações [8, 12] e principalmente também levando em consideração fato de se encontrar um valor representativo para a tensão crítica de flambagem elástica.

Portanto para  $K = 35$  na expressão (4.19):

$$h_w/t_w = \lambda = \lambda_r = \sqrt{\frac{35 \times \pi^2 E}{12(1-0,3^2)f_y}} = 5,60 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (4.20)$$

Segundo a especificação [12] esse valor é adotado para o estado limite FLA para perfis "I" e "H" com dois eixos de simetria no plano médio da alma e perfis "U" não sujeitos à torção, todos fletidos em torno do eixo de maior inércia.

Para o Aço A-36 ( $f_y = 250\text{MPa}$ ,  $E = 205000\text{MPa}$ )

$$\lambda_r = 5,60 \sqrt{\frac{205000}{250}} \cong 160$$

Os autores [154] mostram o seguinte valor para  $\lambda_r$ .

$$\lambda_r = h_w/t_w \cong \frac{2560}{\sqrt{f_y}, (\text{MPa})} \quad (4.21)$$

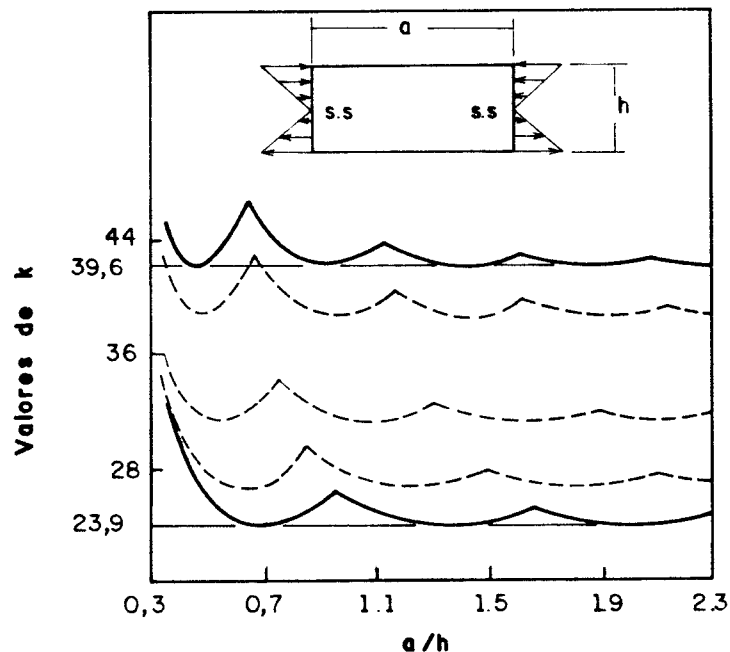


FIG. 4.7 - Coeficientes de Flambagem para chapas na Flexão Pura [154]

Com relação ao índice de esbeltez  $\lambda_p$ , que corresponde ao valor de  $\lambda$  para o qual a seção pode atingir  $M_p$ , pode-se utilizar a análise sugerida por [146 e 154] que mostram, do ponto de vista gráfico, o comportamento de vigas tipo "I" duplamente simétricas, sujeitos à flambagem local da alma, conforme pode ser visto nas figuras 4.8 e 4.9.

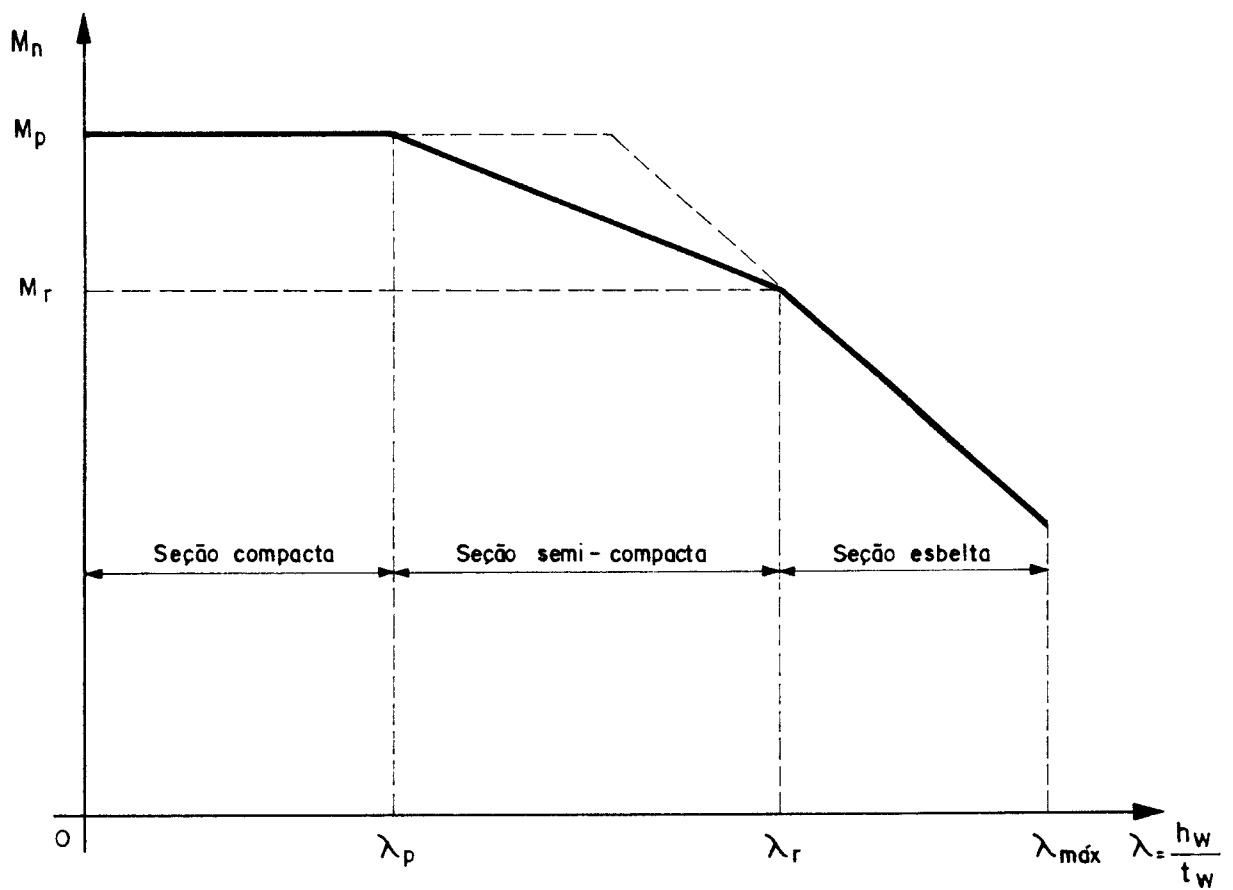


FIG. 4.8 - Momento Resistente de uma Viga I, Duplamente Simétrica Sujeita à Flambagem Local da Alma [146].

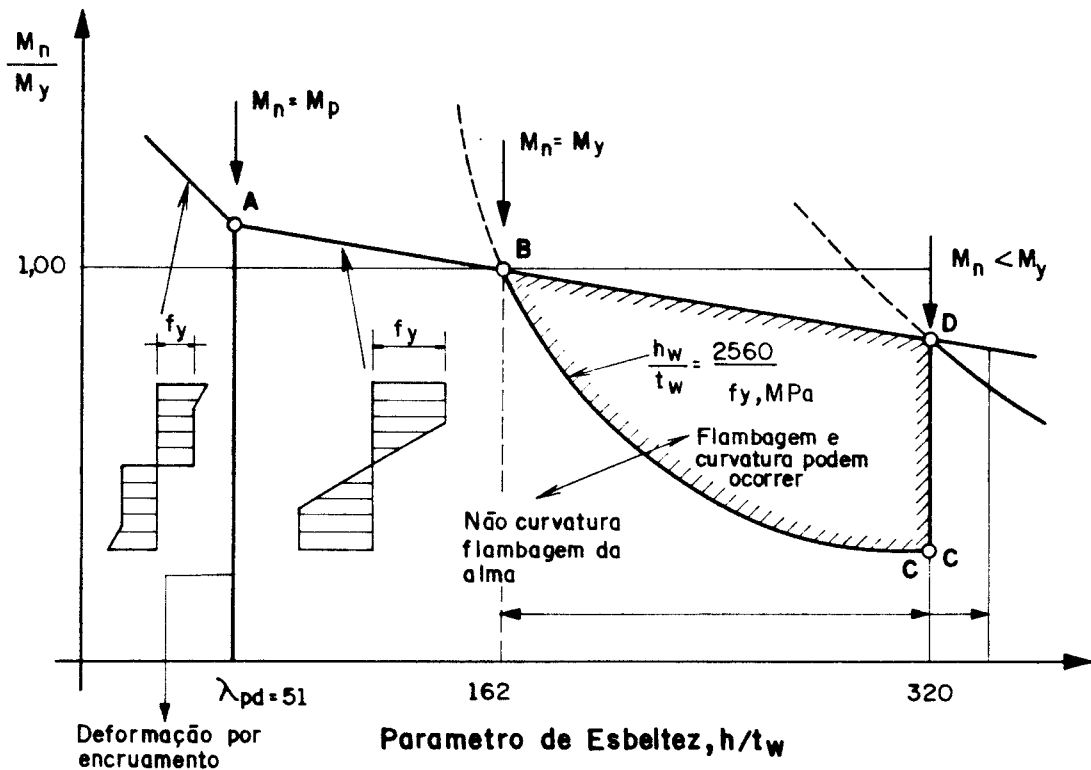
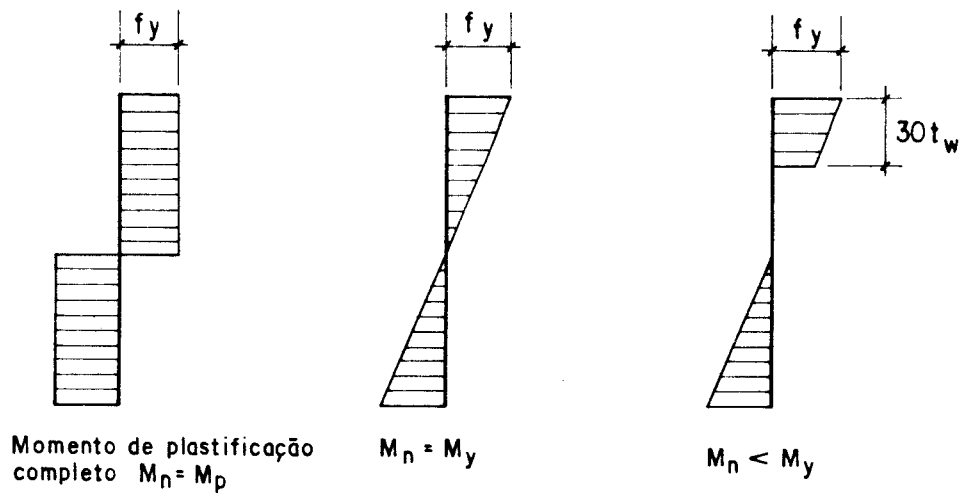


FIG. 4.9 - Resistência Nominal  $M_n$  de Vigas Principais afetadas pela resistência ao momento fletor da chapa da alma: Aço ASTM A36 [154].

4.3.1 - Valores característicos de  $\lambda_p$ ,  $\lambda_r$ , para o estado limite FLA para demais seções

a) Perfis "I" e "H" com dois eixos de simetria, e perfis "U" todos fletidos em torno do eixo de menor inércia nesse caso a flambagem se dá no plano de menor inércia sendo  $I_y < I_x$  o elemento é considerado não enrijecido.

Partindo da expressão (3.12) para a determinação de  $\lambda_r$  têm-se:

$$\lambda_c = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{f_y(12)(1-\nu^2)}{\pi^2 EK}} \quad (3.12)$$

Logo:

$$b/t = \lambda_c \sqrt{\frac{\pi^2 EK}{12f_y(1-\nu^2)}} \quad (4.22)$$

Fazendo  $K = 0,70$ , conforme recomenda [154], adotar-se um valor arbitrariamente selecionado sobre o meio caminho entre chapas simplesmente apoiadas e engastadas ao longo da extremidade apoiada (ver figura 3.2). na expressão (4.22) e  $\nu = 0,30$ ,  $\lambda_c = 0,70$ , encontra-se:

$$\lambda_r = 0,55 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (4.23)$$

expressão adotada por [12] ou segundo [8, 154] para  $E = 205000\text{MPa}$

$$\lambda_r \cong \frac{250}{\sqrt{f_y}}, (\text{MPa}) \quad (4.24)$$

Para o aço estrutural A-36 ( $f_y = 250\text{MPa}$ )

$$\lambda_r \approx 16$$

O valor de  $\lambda_p$  já foi analisado anteriormente segundo a expressão

$$\lambda_p = 0,38 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (3.27)$$

com  $E = 205000\text{MPa}$ ;  $f_y = 250\text{MPa}$

$$\lambda_p \approx 11$$

b) Perfis caixão duplamente simétricos fletidos em torno de um dos eixos de simetria.

Os limites para  $\lambda_p$  e  $\lambda_r$  nesse caso são os mesmos adotados por [12], como foi visto anteriormente para o estado limite FLA perfis tipo "I", "H" com dois eixos de simetria ou com um eixo de simetria no plano médio da alma e perfis "U" não sujeitos à torção, todos fletidos em torno do eixo de maior inércia.

Logo, para o estado limite FLA nesse caso considerado têm-se:

$$\lambda_p = 3,50 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad \text{e} \quad \lambda_r = 5,6 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

para o aço A-36 ( $E = 205000\text{MPa}$ ;  $f_y = 250\text{MPa}$ ) têm-se:

$$\lambda_p = 101 \quad ; \quad \lambda_r = 162$$



c) Perfil "T" com um eixo de simetria no plano médio da alma fletido em torno do eixo perpendicular à alma.

Nesse caso [154] recomenda segundo o raciocínio do item a, ao aplicar a expressão (4.22) com  $\lambda_c = 0,70$  e o coeficiente de flambagem nesse caso (figura 3.2)  $K = 1,277$ .

Com essa consideração, tem-se: trocando b por d, altura total da seção transversal do perfil "T", tem-se na expressão citada.

$$\lambda_r = 0,70 \sqrt{\frac{\pi^2 E 1,277}{12(1-0,3^2)f_y}}$$

$$\lambda_r \cong 0,74 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (4.25)$$

ou segundo [8, 154]

$$\lambda_r = b/t \cong 333/\sqrt{f_y}, \text{ (MPa)} \quad (4.26)$$

Para o Aço ASTM A-36

$$\lambda_r = 21$$

#### 4.4- Flambagem de Perfis Tubulares de Seção Circular e Cilindros

Determinados tipos de estruturas consistem de cilindros de parede fina e são susceptíveis ao fenômeno da flambagem. Os cilindros circulares constituem a forma mais eficiente para colunas solicitadas por cargas centradas e os mesmos são usados em aplicações de carregamentos tri-dimensionais tais como: torres de transmissão de energia, cascas reticuladas e plataformas offshore.

Cascas cilíndricas enrijecidas e não enrijecidas (cilindros com grande relação de diâmetro/espessura são usados como: depósitos de armazenagem de grãos, tanques de armazenagem de líquidos, vasos de pressão e caixões para construção de submarinos. Os tubos e cascas cilíndricas podem ser submetidos aos esforços de compressão axial, flexão, torção ou pressão interna e externa ou algum outro tipo de solicitação que causa ruptura. Dependendo das dimensões do cilindro, as falhas que podem ocorrer são: a flambagem local ou flambagem global e se o diâmetro do cilindro é relativamente largo enrijecedores longitudinais e em forma de anéis são frequentemente usados para providenciar uma resistência adicional. Os cilindros com pequena relação do diâmetro/espessura ( $D/t$ ) são usualmente referidos como tubos ou tubulações, e cilindros com grande relação ( $D/t$ ) são frequentemente chamados de cascas, e tipicamente as cascas cilíndricas são enrijecidas [41,73,94,121].

As notações referentes aos parâmetros utilizados para caracterizar as dimensões dos cilindros enrijecidos e não enrijecidos podem ser vistos na Figura 4.10

#### 4.4.1 - Análise de Estabilidade e Colapso de Cascas Cilíndricas Axialmente Comprimidas

Quando um cilindro é axialmente comprimido o tipo de flambagem que o mesmo é susceptível, depende da relação comprimento/raio ( $L/R$ ) e da relação raio/espessura ( $R/t$ ). Os cilindros curtos com diâmetros largos comportam-se como chapas planas apoiadas ao longo das extremidades carregadas e livres ao longo das extremidades não carregadas, e eles flambam dentro de uma simples onda senoidal na direção axial e não com ondas na direção circunferencial (Figura 4.11a) e por comparação cilindros muito longos com pequenos diâmetros, isto é tubos flambam como as colunas centradas pela carga crítica de Euler e não apresentam distorção na seção transversal circunferencial (Figura 4.11b) e um terceiro grupo de cilindros consistem dos moderadamente longos sendo que os mesmos falham por flambagem local, sendo que esses cilindros flambam dentro de uma série de ondulações em forma de diamantes (Figura 4.11c).

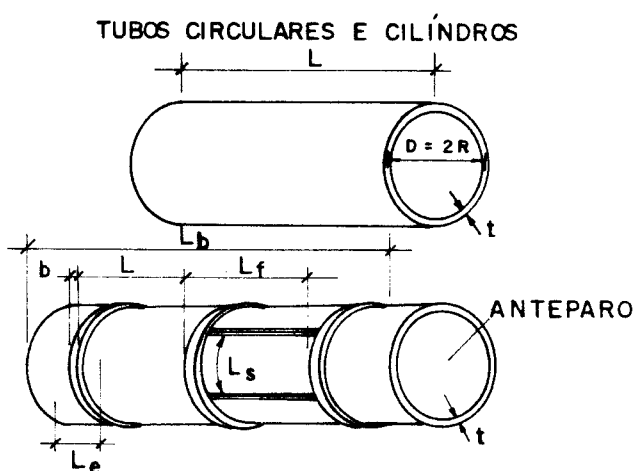
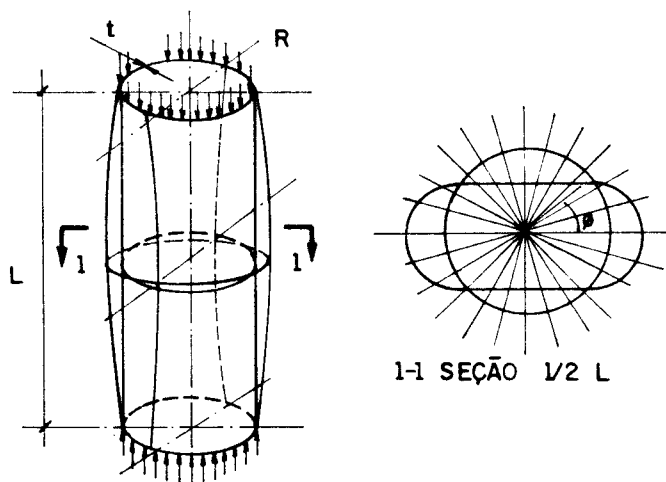
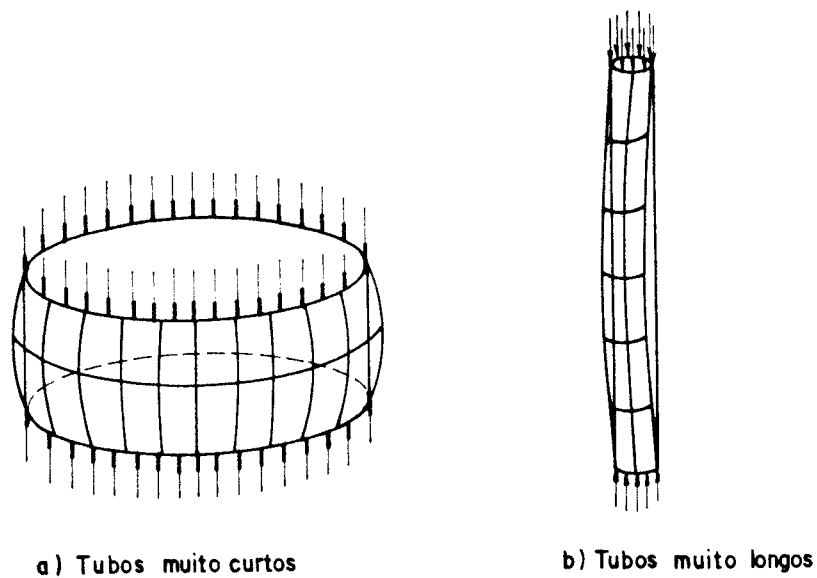


FIG. 4.10 - Notação usual para as dimensões dos cilindros [73]



c) Tubos de comprimento moderado

FIG. 4.11 - Flambagem de cascas cilíndricas [121]

#### 4.4.2- Carga Crítica de Flambagem Elástica

As tensões teóricas de flambagem elástica segundo [73] são resumidas através de um parâmetro de curvatura  $Z$  que caracteriza o comportamento dos tubos através do fenômeno da

flambagem local que separa os mesmos em três classificações: (1) Cilindros curtos (2) Cilindros de comprimentos moderados e (3) Cilindros longos ou tubos. O parâmetro Z é definido pela expressão (4.27):

$$Z = \left( \frac{L}{R} \right)^2 \left( \frac{R}{t} \right) \sqrt{(1 - \nu^2)} \quad (4.27)$$

L=Comprimento da Casca Cilíndrica ,  $\nu$ =Coeficiente de Poisson  
t=espessura da chapa do material de construção do cilindro

a) Para cilindros curtos ( $Z < 2.85$  ), a tensão crítica é obtida pela expressão (4.28)

$$f_{crit} = k_c \frac{\pi^2 E}{(12 - \nu^2)(L/t)^2} = 0.904 \frac{E}{(L/t)^2}, \nu=0.3 \quad (4.28)$$

O termo k que aparece na expressão segundo [73,94] é dado por:

$$k = \frac{1 + 12(Z)^2}{\pi^4} \quad \text{Para extremidades simplesmente apoiadas} \quad (4.29)$$

e para extremidades completamente fixas,

$$k = \frac{4 + 3(Z)^2}{\pi^4} \quad (4.30)$$

b) Para cilindros de comprimento intermediário, onde  $Z > 2.85$

A falha nesse caso ocorre pelo processo de flambagem local, sendo que a superfície flamba dentro de uma série de saliências no formato de diamante e nesse caso a carga crítica de flambagem é dado pela expressão (4.31), segundo [42,73,94,121,169].

$$f_{crit} = \frac{E}{\sqrt{[3(1 - \nu^2)]}} \left( \frac{t}{R} \right) \quad (4.31)$$

Nesta expressão adotando para os aços estruturais o valor do coeficiente de Poisson,  $\nu = 0.3$ , tem-se:  $f_{crit} = 0.6E(t/R)$ .

Portanto a expressão clássica para as tensões de flambagem elástica para cilindros axialmente comprimidos é:

$$f_{crit} = \frac{1.210 E}{(D/t)} \quad (4.32)$$

Ou mais precisamente segundo [73] as tensões críticas de flambagem teóricas podem ser escritas da seguinte forma:

$$f_{crit} = \frac{2(C)(E)}{(D/t)} \quad (4.33)$$

Onde o coeficiente C depende do nível de imperfeições associadas ao cilindro bem como da relação D/t. Segundo ainda [73] o mesmo afirma que a expressão clássica para o cálculo das tensões de flambagem dada por (4.31) representa um valor teórico no qual se assume que os cilindros são geometricamente perfeitos e que através de uma série de testes de compressão mostram que os cilindros da atualidade

podem flambar elásticamente e falharem com tensões abaixo de 30% dos valores estipulados pela expressão (4.31) em virtude da resistência pós-flambagem instável de tais cilindros que fazem deles extremamente sensíveis a pequenas imperfeições iniciais ou devido também as tensões residuais, e conseqüentemente com isso diferentes valores de C são recomendados para aplicações onde o nível de imperfeições diferir. Ainda segundo [73] para barras estruturais produzidas ou fabricadas o valor recomendado para C é 0.165.

#### 4.4.3- Comportamento dos cilindros solicitados na flexão

Segundo os autores [73,94] existem algumas discordâncias entre as conclusões realizadas pelos estudiosos com relação ao comportamento dos cilindros solicitados na flexão quando êstes são axialmente comprimidos e até que essa discordância seja resolvida os mesmos autores afirmam que a expressão (4.33) com o valor de  $C=0.165$  quando a solicitação for na compressão axial poderá ser usada também na determinação da tensão crítica de flexão quando os cilindros flambarem elásticamente.

#### 4.4.4- Flambagem inelástica de tubos circulares de cilindros

As tensões de flambagem no regime inelástico de cilindros e tubos segundo os autores [41,73,94] podem ser obtidas através da mudança do módulo de elasticidade pela introdução do módulo tangente na expressão (4.31) ou através de relações empíricas que são desenvolvidas para classes específicas de materiais. Nesse caso os mesmos autores mostram que na expressão (4.33) um fator de correção de plasticidade designado por  $\eta$  é introduzido e ela passaria a ser escrita da seguinte maneira:

$$\sigma_{rl} = \frac{\eta C E}{(R/t)} = \frac{2 \eta C E}{(D/t)} \quad (4.34)$$

Segundo [41] o fator de correção de plasticidade  $\eta$  é dado por:

$$\eta = \sqrt{\left(\frac{E_s}{E_t}\right)}$$

$E_s$  - Módulo Secante  
 $E_t$  - Módulo Tangente

e para isso para se obter portanto a carga crítica, torna-se necessário que os efeitos das imperfeições e do comportamento inelástico requer a utilização de pelos menos alguns resultados experimentais.

#### 4.4.5- Valores limites da relação (D/t) para prevenir a flambagem local de tubos de seção circular e cilindros

De acôrdo com [41] os criterios de projeto para flambagem local de cilindros não enrijecidos são baseados em um grande número de ensaios e [73] afirma que devido à complexidade das equações para a determinação das tensões críticas, normalmente se utiliza como parâmetro para deliniar a questão da flambagem local a relação (D/t) ou um parâmetro adimensional  $\alpha$  que para cilindros de seções circulares pode ser expresso pela expressão (4.35):

$$\alpha = \frac{E/f_y}{D/t}, \quad D/t = \frac{1}{\alpha} \frac{E}{f_y} \quad (4.35)$$

Segundo [73] existem várias equações propostas que relacionam a razão entre as tensões que causam a falha real nos cilindros devido a flambagem e as tensões de escoamento



$(\sigma_{f1}/f_y)$  em função do parâmetro  $\alpha = (E/f_y)(t/D)$ . Por exemplo o guia [94] recomenda os seguintes valores:

a) Equações propostas para as Cargas Críticas em Cilindros de Aço axialmente carregados

a.1) Limite Plástico

$$p/\alpha \geq 9.1 \quad \sigma_{f1}/f_y = 1.0 \quad \text{ou} \quad \frac{E/f_y}{D/t} \geq 9.1, \quad D/t \leq 0.109 \frac{E}{f_y}$$

a.2) Limite Inelástico

$$p/ \quad 2.57 \leq \alpha \leq 9.1 \quad \sigma_{f1}/f_y = 0.61 + 0.043 \alpha \quad \text{ou}$$

$$0.109 \frac{E}{f_y} \leq D/t \leq 0.389 \frac{E}{f_y}$$

a.3) Limite Elástico

$$p/\alpha < 2.57 \quad \sigma_{f1}/f_y = 0.28 \alpha \quad \text{ou} \quad \frac{E/f_y}{D/t} < 2.57$$

$$D/t > 0.389 \frac{E}{f_y}$$

Com isso os autores [73,94] conseguem sintetizar em um único gráfico os resultados obtidos através de ensaios experimentais os valores da relação:  $(\sigma_{f1}/f_y)$  versus o parâmetro( $\alpha$ ), evidenciando assim as tres fases importantes do comportamento estrutural dos cilindros axialmente carregados: Fase Plástica, Fase Inelástica e Fase Elástica.

b) Limitações da Relação (D/t) para Tubos de Seção Circular segundo [73,94]

Eles mostram que através de recentes ensaios experimentais as seções tubulares tendo uma relação D/t menor do que  $3300/f_y$  sendo  $f_y$  expresso em ksi, podem levar a ruína quando primeiramente atingirem a completa plastificação e quando a relação D/t for menor ou igual a  $1300/f_y$  estas seções podem ser consideradas como compactas e convenientes para o cálculo plástico com completa redistribuição de momentos. E para barras de seções tubulares com  $1300/f_y < D/t \leq 1900/f_y$  (semi-compactas), a carga limite de plastificação completa e a capacidade do momento de plastificação completa podem ser desenvolvidos, mas a capacidade de rotação pode ser limitada, e quando  $D/t > 3300/f_y$  é recomendada uma redução nas tensões admissíveis sendo levado em conta a flambagem local. Em resumo pode se dizer que:

b.1) para  $D/t \leq 1300/f_y$ , ou  $D/t \leq 0.045 E/f_y$ ,  $\alpha > 22.2$

b.2) para  $1300 < D/t \leq 1900/f_y$  ou  $0.045 E/f_y < D/t \leq 0.065E/f_y$

ou  $15.38 < \alpha < 22.2$

b.3) para  $D/t > 3300/f_y$  ou  $D/t > 0.114 E/f_y$ ,  $\alpha < 8.78$

c) Recomendações Normativas para a limitação da Relação D/t segundo [7,8,12] para seções tubulares.

Para efeito de comparação dessas especificações sejam as seguintes notações:

$\lambda$  - Parâmetro de esbeltez  $\lambda = D/t$

$\lambda_p$  - Parâmetro de esbeltez correspondente à plastificação

$\lambda_r$  - Parâmetro de esbeltez correspondente ao início do escoamento, com ou sem tensão residual.

A especificação [8] apresenta as seguintes limitações:

c.1) Na compressão axial

$$\lambda_p = 2070/f_{y,ksi} \text{ ou } \lambda_p = 0.07 E/f_y, \alpha = 14,28$$

$$\lambda_r = 3300/f_{y,ksi} \text{ ou } \lambda_r = 0.114 E/f_y, \alpha = 8.78$$

Por exemplo para um aço estrutural do tipo ASTM A-36 ( $f_y=250$  MPa e  $E = 205000$  MPa) têm-se:

$$\lambda_p = 57, \text{ e } \lambda_r = 92$$

c.2) Na flexão (Flambagem Local da Mesa -FLM)

$$\lambda_p = 2070/f_{y,ksi} \text{ ou } \lambda_p = 0.07 E/f_y, \alpha = 14,28$$

$$\lambda_r = 8970/f_{y,ksi} \text{ ou } \lambda_r = 0.309 E/f_y, \alpha = 3.23$$

Para o aço estrutural ASTM A-36 ( $f_y = 250$ MPa ;  $E=205000$ MPa)

$$\lambda_p = 57, \text{ e } \lambda_r = 249$$

A especificação [12] adota os seguintes valores:

Na flexão, para determinar a resistência nominal ao momento fletor de Perfis tubulares de seção circular:

Flambagem Local da Parede do Tubo - FLA

$$\lambda = D/t, \quad \lambda_p = 0.087 E/f_y (\alpha=11.49); \quad \lambda_r = 0.11 E/f_y (\alpha=9.09)$$

Para o aço estrutural do tipo ASTM A-36 ( $f_y=250\text{MPa}$ ,  $E=205000\text{MPa}$ )

$$\lambda_p = 71,34 \quad \text{e} \quad \lambda_r = 90.$$

#### 4.5- Determinação da resistência de cálculo ao cisalhamento

As vigas em estruturas de aço, devem ser projetadas para resistir também aos esforços devidos ao cortante, tanto no intervalo elástico como no intervalo plástico. Também é de grande importância a questão do fluxo de cisalhamento horizontal que é resistido pelos conectores das chamadas vigas compostas ou vigas mistas [88, 115, 121, 172] e o cortante que é resistido pela solda que liga a alma à mesa.

Na Figura 4.12 pode ser observado uma viga, em perfil laminado, submetido à ações verticais.

Sabe-se que as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são expressas pela relação

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{\text{máx}}$$

e

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V M_s}{b I_x}$$

ou com a notação  $\tau = f_v$  (tensão de cisalhamento)

V - cortante na seção

$M_s$  - momento estático

$I_x$  - momento de Inércia da seção transversal

$b$  - largura da seção na fibra em estudo.

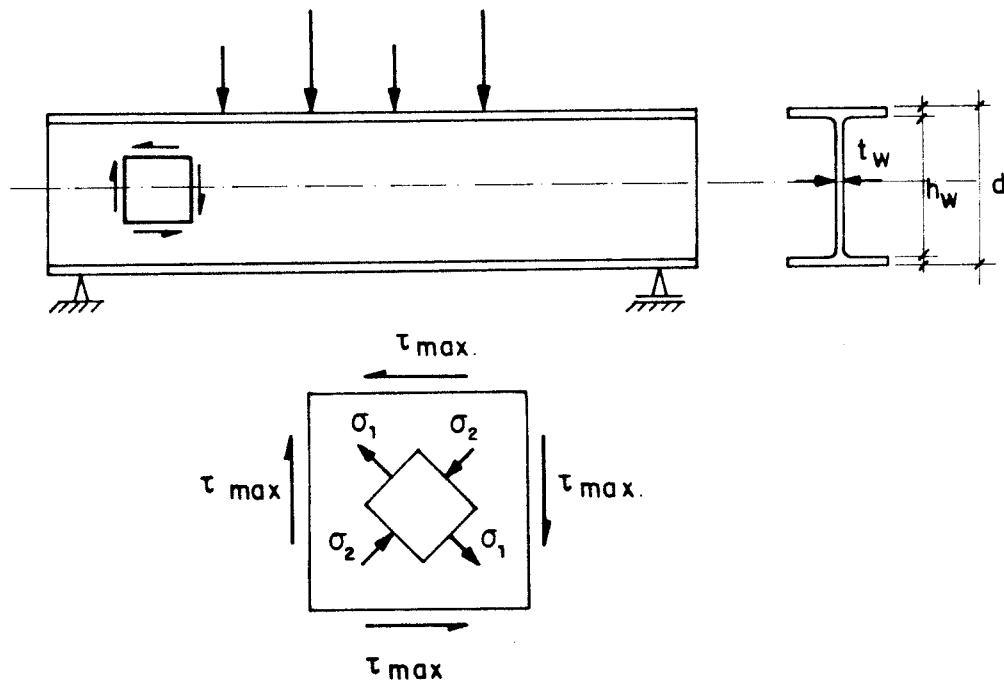


FIG. 4.12 - Tensões de Cisalhamento [121] da Teoria da Resistência dos Materiais.

Portanto:

$$f_v = \frac{V M_s}{b I_x} \quad (4.36)$$

De um modo geral, [154], afirma que vigas longas são governadas por deslocamentos; as vigas de comprimento médio são usualmente controladas pelas tensões de flexão e para vigas de vão pequeno elas podem ser governadas pelo esforço cortante.

As seções de alguns perfis metálicos tais como "I", "H", "U", ao se aplicar a expressão (4.36) para o cálculo das tensões de cisalhamento observa-se que a distribuição dessas tensões pode ser assumida como uniformemente distribuídas através da espessura  $t$  da alma desses perfis [154, 172].

Imagine-se um perfil laminado do tipo abas largas paralelas, designado segundo [7, 8] por WF 617 x 140, com as seguintes dimensões e propriedades: (Figura 4.13)

$$d = 617\text{mm}; \quad b_f = 230\text{mm}; \quad t_f = 22,225\text{mm}$$

$$t_w = 13,08\text{mm} \quad I_x = 112.382\text{cm}^4$$

e solicitado por um esforço cortante de  $V = 890 \text{ kN}$

Seja determinar a distribuição das tensões de cisalhamento.

Os autores [154] mostram essa solução da seguinte maneira.

a) Tensões junto à junção da mesa e alma

$$V = 890\text{kN}$$

$$M_s = 23 \times 2,2225 \times (30,85 - 1,11125)$$

$$M_s = 1520\text{cm}^3$$

Aplicando a expressão (4.36) tem-se

$$f_v = \frac{890 \times 1520}{112382 \times 1,308} = 9,20 \text{ kN/cm}^2 \text{ (Alma)}$$

Tensão nas mesas

$$f_v = \frac{890 \times 1520}{23 \times 112382} = 0,53 \text{ kN/cm}^2 \text{ (mesas)}$$

b) Tensão no eixo neutro

$$M_x = 1520 + \frac{(30,85 - 2,2225)1,308(30,85 - 2,2225)}{2}$$

$$M_s = 2056 \text{ cm}^3$$

$$f_v = \frac{890 \times 2056}{1,308 \times 112382} = 12,45 \text{ kN/cm}^2 \text{ (= } f_{v\text{máx}})$$

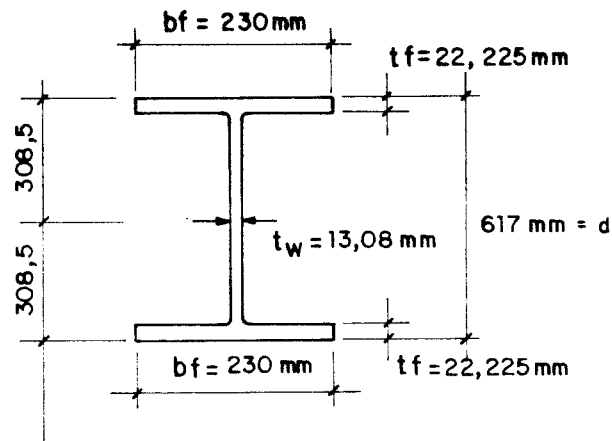


FIG. 4.13 - Perfil laminado de abas largas WF 617x140 [154]

c) Força Cortante suportada pelas mesas e alma usando uma variação linear aproximada.

$$V_{\text{flanges}} = 2 \frac{1}{2} 0,53 \times 23 \times 2,2225 = 27,09 \text{ kN}$$

$$V_{\text{alma}} = 890 - 27,09 = 862,91 \text{ kN}$$

$$\frac{V_{\text{alma}}}{V} = \frac{862,91}{890,00} \approx 0,97 \text{ ou } 97\%$$

97% do esforço cortante é absorvido pela alma do perfil.

#### Diagramas das Tensões

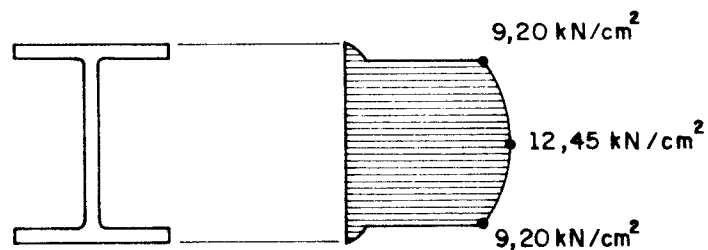


FIG. 4.14- Distribuição das Tensões de Cisalhamento [154]

Nos procedimentos usuais de cálculo, as tensões de cisalhamento são admitidas como sendo o valor médio, aplicado sobre a área da seção transversal da alma do perfil estrutural onde é negligenciado o efeito de furos para conectores,

logo:

$$f_{vm} \approx f_v = \frac{V}{A_w} \quad \text{onde } A_w = \text{área da alma} \quad (4.37)$$



A área da alma é tomada da seguinte forma:

Para perfis laminados:  $A_w = dt_w$  "I" ou "U"

Para perfis soldados :  $A_w = h_w t_w$  "I" ou "U"

No exemplo considerado

$$f_v = \frac{V}{dt_w} = \frac{890}{61,7 \times 1,308} = 11,03 \text{ kN/cm}^2$$

$$\frac{12,45 - 11,03}{12,45} = 11,4\% \text{ inferior ao valor da máxima tensão de cisalhamento.}$$

Por razão desta pequena diferença [154] afirma que usualmente as especificações permitem o cálculo da tensão média de cisalhamento  $f_{vm}$  para os perfis estruturais.

Ainda segundo [154] o critério de resistência comumente aceito para a relação entre a tensão de escoamento e as tensões principais é o da Energia de Distorção (Huber-Von Mises-Hencky) dado por:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (4.38)$$

onde  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  são tensões de tração ou de compressão que atuam nas três direções principais. Uma das tensões principais pode ser negligenciada e a expressão (4.38) é reduzida ao caso do estado plano de tensões

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \right] \text{ ou}$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_y^2 \quad (4.39)$$

O cisalhamento para ocorrerá em planos a  $45^\circ$  com as tensões principais, quando  $\sigma_2 = -\sigma_1$  e  $\tau = \sigma_1$ , substituindo esses valores em (4.39)

$$\sigma_1^2 + \sigma_1^2 + \sigma_1^2 = \sigma_y^2$$

$$3\sigma_1^2 = \sigma_y^2$$

$$\sigma_1 = \tau = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (4.40)$$

Na análise elástica adota-se

$$\sigma_1 = f_{vy} \approx 0,6f_y \quad (4.41)$$

e na análise plástica considera-se segundo [153]

$$f_{vy} = 0,55f_y$$

Porque na análise plástica é necessário considerar a interação do esforço cortante com o momento fletor e permitir a redistribuição de tensão.

Conforme foi estudado anteriormente com relação a teoria da flambagem local dos elementos de chapas dos perfis estruturais, um dos casos que também é considerado importante é o da solicitação de cisalhamento puro na alma da viga, conforme a figura 4.15

Nesse caso [73] mostra que as tensões críticas de cisalhamento podem ser obtidas pela substituição de  $\sigma_{crit}$  ( $F_{crit}$ ) e  $K$  por  $\tau_{rcrit}$  e  $K_s$  na expressão geral da carga crítica de flambagem elástica de placas (expressão 3.1), em que  $K_s$  é o coeficiente de flambagem para tensões de cisalhamento e cuja obtenção é mostrada por [169].

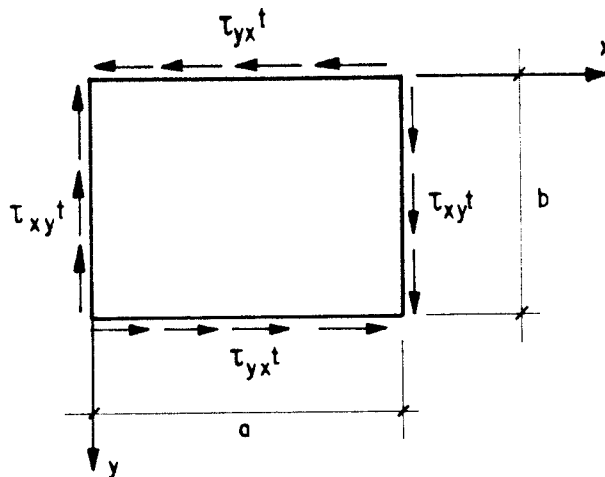


FIG. 4.15 - Chapa solicitada por forças cortantes aplicadas nos bordos [88]

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{K_S \pi^2 E}{12(1-\nu^2)(h/t)^2} \quad (4.42)$$

Segundo [73, 94] os valores de  $K_S$  para as tensões críticas para chapas submetidas ao cortante puro podem ser calculadas para três condições de apoio das extremidades da chapa. Também é considerado que os valores utilizados na expressão (3.1) para a determinação da carga crítica de flambagem são aplicáveis a chapas com dimensões tais que o valor de  $h$  é sempre assumido menor do que a dimensão  $a$ , com isso o fator  $\alpha = a/h$  é maior do que a unidade, e alguns estudiosos como [28, 42, 88, 169], mostram um traçado gráfico que relaciona os valores de  $k$  com  $\alpha$ ; e uma parábola de equação  $k = 5,34 + 4/\alpha^2$  que passa pelos pontos  $1/\alpha = 0, k=5,34$  e  $1/\alpha = 0, k=9,34$  representando com muita precisão os resultados teóricos, e proporciona portanto uma fórmula suficientemente precisa para fins práticos de projeto. Portanto têm-se:

$$K_S = 4,00 + \frac{5,34}{(a/h)^2} \quad \text{para } (a/h) \leq 1 \quad (4.43)$$

$$K_s = 5,34 + \frac{4,00}{(a/h)^2} \quad \text{para } (a/h) \geq 1 \quad (4.44)$$

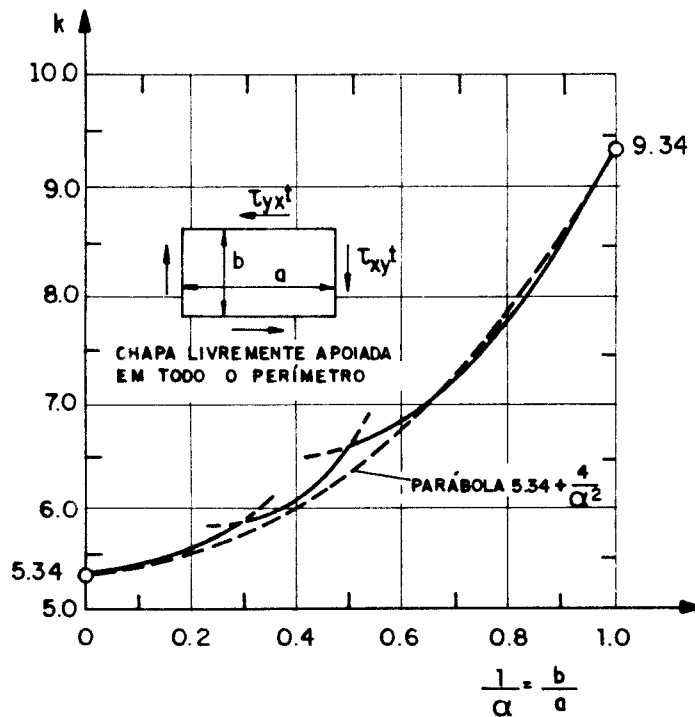


FIG. 4.16 Variação do fator de chapa  $k$  em função da relação  $\alpha = a/b$ . Chapas livremente apoiadas nos quatro bordos [88]

Com relação aos estados limites associados ao cisalhamento tem-se o escoamento e a flambagem da alma.

Na análise da flambagem inelástica tem-se a expressão (4.45):

$$F_{\text{crit}} = \frac{K \pi^2 E \sqrt{\eta}}{12(1-\nu^2)(b/t)^2} \quad (4.45)$$

onde:

$K = K_s$  para o cisalhamento puro e

$\eta = E_t/E =$  relação entre o módulo tangente e o módulo de elasticidade longitudinal do material.

$$\text{Parâmetro de esbeltez da alma } \lambda_w = \frac{b}{t} = \frac{h_w}{t_w}$$

$$K = K_s; \quad \nu = 0,3 \quad e$$

$\eta = 1,00$  (Flambagem Elástica) com tensões menores do que  $f_y$  ( $E_t = E$ ) [121].

A tensão crítica de flambagem para chapas na fase elástica, conforme já foi estudado anteriormente, para chapas uniformemente comprimidas é dado pela expressão (3.1).

$$\text{Para } F_{\text{crit}} = f_{\text{vcrit}} \quad e \quad \lambda_w = b/t; \quad \nu = 0,3$$

Esta expressão passa a ter a seguinte configuração:

$$F_{\text{vcrit}} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2)(\lambda_w)^2} \quad \text{ou:}$$

$$F_{\text{crit}} = \frac{0,904 E K}{\lambda_w^2} \quad (4.46)$$

Quando a flambagem ocorre com um valor inferior ao limite de proporcionalidade a tensão crítica pode ser tomada pela expressão 4.46. Entretanto [19] sugere uma medida empírica para a modificação de cálculo da carga crítica de flambagem no comportamento inelástico, através da expressão:

$$f_{\text{vcr}} = C f_{\text{cr}}^n \quad \text{onde } C = f_{\text{vpr}}^{(1-n)}$$

e  $f_{\text{vpr}} = 0,8\tau_y$  e segundo [19] o melhor fator para  $n$  é 0,5.

Portanto a expressão que dá a formula reduzida é:

$$F_{vcr} = \sqrt{f_{vpr} f_{crit}} \quad (4.47)$$

Quando  $f_{vcr} = f_{vy} - f_r$  com  $f_r \cong 0,2f_{vy}$

tem-se  $f_{vcr} \cong 0,8f_{vy}$

Na análise elástica  $f_{vy} \cong 0,6f_y$  (4.41)

Logo

$$F_{Vcr} \cong 0,8 \times 0,6f_y \cong 0,48f_y \quad (4.48)$$

Assim

$$F_{Vcr} = = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2)(b/t)^2} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-0,3^2)(\lambda_w)^2}$$

na análise elástica  $\lambda_r = b/t$

$$\text{Como } f_{vcr} = 0,48f_y = \frac{K \pi^2 E}{12(1-0,3^2)\lambda_r^2}$$

$$f_y = \frac{K \pi^2 E}{0,48 \times 12(1-0,3^2)\lambda_r^2} \quad (4.49)$$

$$f_y = \frac{1,883 E K}{\lambda_r^2}$$

Extraíndo o valor de  $\lambda_r$

$$\lambda_r^2 = \frac{1,883 E K}{f_y} ; \quad \lambda_r = 1,37 \sqrt{\frac{KE}{f_y}}$$

A especificação [12] adota para  $\lambda_r$ :

$$\lambda_r = 1,40 \sqrt{\frac{KE}{f_y}} \quad (4.50)$$

e para que  $f_{cr} = f_{vy} = 0,6f_y$

Partindo de (4.47)

$$f_{VcrI} = \sqrt{f_{vpr} f_{vcritE}} \quad (4.51)$$

$$f_{Vvpr} = 0,8 f_{vy}$$

$$f_{VcritE} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2) \lambda_p^2} ; \nu = 0,3$$

$$f_{vcritE} = \frac{0,904 E K}{\lambda_p^2}$$

Logo

$$f_{VcrI} = \sqrt{0,8 f_{vy} f_{vcritE}}$$

$$f_{VcrI} = \sqrt{0,8 \frac{0,904 E K}{\lambda_p^2} 0,6 f_y}$$

$$f_{VcrI} = \frac{0,656 \sqrt{Ekf_y}}{\lambda_p}$$

$$\frac{0,656 \sqrt{Ekf_y}}{\lambda_p} = 0,6 f_y$$

$$\lambda_p = \frac{0,656 \sqrt{Ekf_y}}{0,6f_y} = \frac{0,656 \sqrt{Ek} f_y^{1/2}}{0,6 f_y}$$

$$\lambda_p = \frac{1,093 \sqrt{Ek}}{\sqrt{f_y}} \text{ ou } \lambda_p = 1,093 \sqrt{\frac{Ek}{f_y}}$$

A especificação [12] adota:

$$\lambda_p = 1,08 \sqrt{\frac{kE}{f_y}} \quad (4.52)$$

Como foi mostrado no exemplo anterior, para a determinação da distribuição das tensões de cisalhamento através de um perfil estrutural tipo "I", a alma é o elemento do perfil que absorve todo o esforço cortante.

#### 4.5.1- Recomendação do Esforço Cortante Segundo [12]

A especificação [12] recomenda no item 5.5.2 que a resistência de cálculo de almas de perfis "I", "H", "U" e perfis caixão, fletidos em relação ao eixo perpendicular à alma, é " $\phi_v V_n$ " onde  $\phi_v = 0,90$  e a resistência nominal " $V_n$ " é determinada como a seguir:

a) para  $\lambda \leq \lambda_p$   $V_n = V_{p1}$  (fase Plástica)

b) para  $\lambda_p < \lambda \leq \lambda_r$   $V_n = \frac{\lambda_p}{\lambda} V_{p1}$  (fase Inelástica)

c) para  $\lambda > \lambda_r$   $V_n = 1.28 \left( \frac{\lambda_p}{\lambda} \right)^2 V_{p1}$  (fase Elástica)

Sendo  $V_{p1} = 0.6 A_w f_y$  (para análise elástica)

e  $V_{p1} = 0.55 A_w f_y$  (para análise plástica)



Nêsse caso para esclarecer êsses procedimentos, conforme já foi visto anteriormente, têm-se:

A tensão crítica de flambagem no cisalhamento puro como visto anteriormente é:

$$f_{v\text{crit}} = \frac{K \pi^2 E}{12(1 - \nu^2)(h_w/t_w)^2} \quad (4.42)$$

Igualmente têm-se:

$$\lambda = h/t_w, \quad \lambda_p = 1.08 \sqrt{\frac{K E}{f_y}}; \quad \lambda_r = 1.40 \sqrt{\frac{K E}{f_y}}$$

#### FASE INELÁSTICA

Quando a flambagem ocorre abaixo do limite de proporcionalidade a tensão crítica de flambagem de chapas é dado pela expressão (4.42) e alguns autores como [19,121] sugerem uma expressão empírica que modifica o cálculo da tensão crítica de flambagem para a fase inelástica através da seguinte fórmula, analisada anteriormente:

$$f_{v\text{crit}} = \sqrt{0.8 f_{vy} f_{cre}} \quad (4.53)$$

Elevando esta expressão ao quadrado e lembrando que:

$$f_{\text{crit}} = V_{\text{crit}} / A_w, \quad f_{vy} = 0.6 f_y, \quad f_{\text{crite}} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2) \lambda^2}$$

$$V_{\text{crit}}^2 / A_w^2 = \frac{(0.8)(0.6 f_y)(K \pi^2 E)}{12(1 - 0.3^2) \lambda^2}, \quad \lambda^2 = (1.08)^2 KE / f_y$$

$$KE = \frac{\lambda_p^2}{(1.08)^2} (f_y) \quad \nu = 0.3 \text{ (para os aços estruturais)}$$

Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} V_{crit}^2 &= \frac{(0.8) (0.6 f_y) \pi^2 \lambda_p^2 (f_y) A_w^2}{(1.08)^2 12 (1 - 0.3^2) \lambda^2} = \\ &= \frac{(0.8)(0.6) \pi^2 A_w^2 f_y^2 \lambda_p^2}{(1.08)^2 (12)(0.91) \lambda^2} \end{aligned}$$

Chamando de  $V_{crit} = V_n$  (Resistência nominal à força cortante)

Extraindo a raiz da expressão anterior, tem-se:

$$V_n = \frac{(0.609 A_w f_y) \lambda_p}{\lambda}, \text{ mas } V_{pl} = 0.60 A_w f_y$$

$$V_n = V_{pl} \frac{\lambda_p}{\lambda} \quad (4.54)$$

#### FASE ELÁSTICA

Quando  $\lambda > \lambda_r$  tem-se:  $f_{vcrit} = \frac{K \pi^2 E}{12(1 - \nu^2) \lambda^2}$

Lembrando que:  $f_{crit} = V_{crit} / A_w$ :

$$KE = \frac{\lambda_p^2}{(1.08)^2} (f_y) , \quad V_{crit} / A_w =$$

$$= \frac{\pi^2 \lambda_p^2 f_y (0.6)}{(1.08)^2 (12)(0.91) \lambda^2 (0.6)}$$

$$V_{crit} = V_n = \frac{\pi^2 (0.6 A_w f_y)}{(1.08)^2 (12)(0.91)(0.6)} \frac{\lambda_p^2}{\lambda^2}$$

$$V_n = 1.29 \left( \frac{\lambda_p}{\lambda} \right)^2 V_{p1} \quad (4.55)$$

#### FASE PLÁSTICA

Quando  $\lambda < \lambda_p$ , nesse caso tem-se:

$$V_n = V_{p1} \quad (4.56)$$

#### 4.6- Cálculo Plástico-Apoio Lateral

4.6.1-Determinação do Valor Limite do Comprimento de um Trecho sem contenção lateral, correspondente ao Momento de Plastificação  $M_{pl}$  com redistribuição posterior de momentos.

##### 4.6.1.1-Vigas sob a ação de momentos constantes

Quando as estruturas são projetadas no método plástico, nas seções que se formam articulações plásticas

deve-se desenvolver um momento resistente máximo da barra em todas elas exceto na última, no caso de vigas a mesma deve ter uma capacidade adequada de rotação para permitir sem que diminua o momento, rotações necessárias para que se formem articulações nas outras partes da estrutura. Portanto um problema que deve ser resolvido no cálculo plástico é determinar a distância entre os pontos fixos lateralmente para evitar, que fenômenos de instabilidade inelástica reduzam a resistência ou a capacidade de rotação do perfil estrutural da viga abaixo dos limites adequados [88,110,181]. Para estudar a flambagem lateral de vigas submetidas à flexão uniforme em seu plano de maior resistência se utiliza do modelo [110] da figura 4.17 e que supõem que formem articulações longitudinais no centro da alma e na junção entre a alma e a mesa tracionada do perfil estrutural.

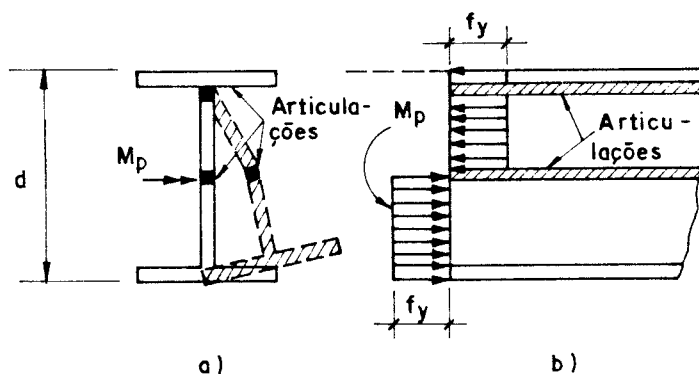


FIGURA 4.17- Modelo utilizado no estudo da flambagem lateral de vigas "I" na flexão uniforme [110]

Através desse modelo os autores [88,110] conseguem determinar a expressão 4.57 que permite determinar a distância máxima entre os apoios laterais para que se

obtenha uma capacidade de rotação R dada ou alternativamente a capacidade de rotação que pode dar uma disposição com uma certa distância conhecida entre pontos fixos lateralmente, que corresponderá ao instante em que é iminente a falha por flambagem local da metade côncava da mesa comprimida lateralmente, e a colocação de contraventamentos com distâncias maiores ou menores do que a ótima, ocasiona respectivamente a falha por flambagem lateral ou por flambagem local.

Portanto a expressão (4.57) é dada por:

$$\left( \frac{KL}{r_y} \right) \frac{\sqrt{\epsilon_y}}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0.7 \frac{hR}{(s-1)}}} \quad (4.57)$$

Nesta expressão extraindo o valor de L, tem-se:

$$L = \frac{\pi}{K \sqrt{\epsilon_y} \sqrt{1 + 0.7 \frac{hR}{(s-1)}}} r_y \quad (4.58)$$

Na expressão (4.58) as grandezas que nela aparecem tem o seguinte significado:

K-coeficiente de flambagem que leva em conta o comprimento efetivo da mesa comprimida do vão da viga em consideração  
 $\epsilon_y$ -deformação unitária correspondente ao início do fluxo plástico

h-Relação entre o módulo de elasticidade no regime de deformação por encruamento e módulo de elasticidade longitudinal do material  $h=E/E_{st}$

R-Capacidade de rotação da viga

s-Relação entre:  $\epsilon_{st}/\epsilon_y = 11.7$  para o aço estrutural ASTM A-36

Segundo [88] o valor limite de R para perfis tipo "I" e "H" flexionados ao redor do eixo de maior inércia é dado por:

$$R_{max} = 0.8(s-1) = 0.8 \left( \frac{\epsilon_{ed}}{\epsilon_y} - 1 \right) \quad (4.59)$$

Lembrando que  $\epsilon_y = f_y/E$  e levando o valor da expressão (4.59) em (4.58) tem-se:

$$L = \frac{\pi \sqrt{E}}{K \sqrt{1 + (0.56)h} \sqrt{f_y}} r_y \quad (4.60)$$

Fazendo na expressão (4.60)  $k=0.54$  segundo [110], que corresponde ao comprimento ótimo para o apoio lateral e aplicando as propriedades relativas ao aço estrutural ASTM A-36 ( $h = 33$ , segundo [88],  $E=2050000 \text{ Kgf/cm}^2$ ), tem-se:

$$\left( L \right)_{crit} = 1882 / \sqrt{f_y} (r_y) \quad f_y, (\text{Kgf/cm}^2) \quad (4.61)$$

#### 4.6.1.2- Vigas sob a ação de momento variável

Nesse caso [88], mostra que fazendo na expressão (4.58)  $h=33$ ,  $R=1$ ,  $s=11.7$  (Propriedades relativas ao aço estrutural ASTM A-36), e  $K=0.8$  de acordo com [110], o valor do comprimento crítico de contenção lateral será dado pela expressão:

$$\left( L \right)_{crit} = 3140 / \sqrt{f_y} (r_y) \quad f_y, (\text{Kgf/cm}^2) \quad (4.62)$$

#### 4.6.2- Recomendações segundo [7, 12, 154]

No cálculo plástico segundo [154] não deverá ser permitido que a flambagem lateral com torção ocorra primeiramente quando a plastificação for atingida, ou seja a redução da resistência da seção baseada no comprimento não contido lateralmente não é aceitável, sendo portanto necessário promover a contenção lateral.

Com isso a especificação [7] afirma o seguinte: "As barras deverão ser adequadamente apoiadas para resistirem deslocamentos laterais e torcionais na posição das rótulas plásticas associadas ao mecanismo de colapso. O comprimento  $l_{cr}$  não contido lateralmente na posição das rótulas plásticas, tal como é similarmente aos pontos adjacentes apoiados nas barras ou nos quadros não deverão exceder aos valores expressos das equações (4.63) e (4.64) quando forem aplicáveis, ou seja:

$$\frac{L_{cr}}{r_y} \leq \frac{9480}{f_y, \text{MPa}} + 25 \quad (4.63)$$

Essa expressão é aplicável quando  $+1.0 > M/M_p > -0.5$  (Isto é o maior momento gradiente está incluindo curvatura dupla).

$$\frac{L_{cr}}{r_y} \leq \frac{9480}{f_y, \text{MPa}} \quad (4.64)$$

Aplicável quando  $-0.5 \geq M/M_p \geq -1.0$  (isto é o menor momento gradiente aproximadamente momento uniforme). Nas expressões (4.63) e (4.64)  $M/M_p$  representa a relação que

cobre o comprimento não contido lateralmente das rótulas plásticas associadas ao mecanismo de colapso que ocorre na extremidade, sendo a relação negativa para curvatura simples e positiva para dupla curvatura,  $r_y$  o raio de giração do eixo de menor inércia.

Ao se desenvolver a expressão (4.61) [88,110] afirmam que ela tem sido confirmada por um pequeno número de provas de laboratório com aços de alta resistência, porém aplicando tal expressão para um aço estrutural com  $f_y = 2500 \text{ Kgf/cm}^2$ , encontra-se para  $L_{crit}$  o valor de  $37.4(r_y)$  e que ao aplicar a expressão (4.64) recomendada por [7] para o mesmo tipo de aço estrutural ASTM A-36 ( $f_y=250\text{MPa}$ ), encontraria o valor de  $37,92(r_y)$  o que seria plenamente aceitável segundo [88], e mesmo raciocínio é seguido ao se comparar os valores obtidos para o aço estrutural ASTM A-36, aplicando as expressões (4.62) e (4.63) cujo valor para a primeira é  $62.4(r_y)$  e para a segunda o valor  $62,92(r_y)$ .

As expressões (4.63) e (4.64) são também mostradas no item 5.4.3.2 da especificação [12].

Recentemente alguns autores [75, 110, 116] tem desenvolvido estudos relacionadas à flambagem lateral com torção na fase inelástica e mostram que nesse caso as rigidezes  $EI_y$  e  $GI_t$  são incluídas os seus valores no regime inelástico, tal como foi feito para determinar o momento crítico de instabilidade na flambagem lateral com torção, conforme a expressão (4.65).

$$M_{crit} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t} \sqrt{1 + \frac{EC_w}{GI_t} \frac{\pi^2}{\ell^2}} \quad (4.65)$$



Desde que para vigas onde se desenvolvem os momentos de plastificação, as distâncias entre os pontos de suporte lateral serão relativamente curtas [110] mostra que o termo que envolve a rigidez à torção  $GI_t$  pode ser omitido e a expressão (4.65) torna a ser escrita da seguinte forma:

$$M_{crit} = \frac{\pi^2 E}{L^2} \sqrt{C_w I_y} \quad (4.66)$$

Desde que o momento  $M_{crit}$  atinja o valor do momento  $M_{pl} = Z f_y$  e considerando um perfil estrutural de viga tipo "I" duplamente simétrico, tem-se:

$C_w = I_y h^2/4$ ;  $I_y = A r_y^2$ , e resolvendo a equação (4.66) para determinar o parâmetro de esbeltez para o momento de plastificação uniforme conforme a figura 4.18.

$$\frac{L}{r_y} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{2 f_y} \left( \frac{h A}{Z} \right)} \quad (4.67)$$

As deformações das fibras extremas serão próximas ou quase dentro do regime de deformação por encruamento, ou seja o módulo de deformação por encruamento poderá ser utilizado no lugar do módulo de elasticidade  $E$ , e a equação (4.67) então passará a ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{L}{r_y} = \sqrt{\frac{\pi^2 E_{st}}{2 f_y}} \sqrt{\frac{h A}{Z}} \quad (4.68)$$

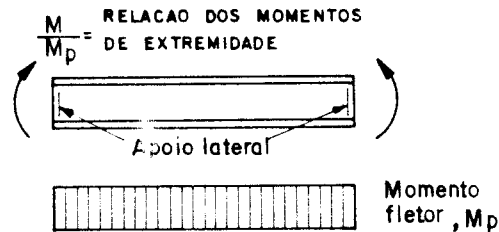


FIG. 4.18- Momento de plastificação uniforme sobre o comprimento não contido lateralmente [154]

Segundo [121, 154, 181] ao observar as dimensões das seções transversais dos perfis estruturais de vigas o termo  $\sqrt{hA/Z}$  varia de 1.5 a 1.6 e para situações onde existe uma variação de momentos ao longo do comprimento não contido lateralmente, incluindo curvatura dupla a equação (4.68) deve ser multiplicada por fatores de correção para outras variáveis.

Portanto:

$$\frac{L}{r_y} = \sqrt{\frac{\pi^2 E_{st}}{2 f_y}} \sqrt{\frac{h A}{Z}} \xi_\rho \xi_\alpha \xi_s \xi_\gamma \quad (4.69)$$

Onde:

$\xi_\rho$  = correção para o gradiente de momentos, e que segundo [181] pode ser aproximadamente igual a:  $1.34 + 0.24M/M_p$

$\xi_\alpha$  = correção parcial do escoamento; varia de 1.8 para  $M/M_p = 0$  e 1.3 para  $M/M_p = -0.7$

$\xi_s$  = correção para rigidez torcional (torção pura); aproximadamente igual a  $1.08 + 0.04 M/M_p$

$\xi_y$  = correção para as condições de extremidade com o valor médio de 1.25 para vigas contínuas com EI constante e igual para segmentos não contidos lateralmente.

Usando êsses valores e tomando segundo [154]  $\sqrt{hA/Z} = 1.60$ , a equação (4.69) se transformará em:

$$\frac{L}{r_y} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{2f_y}} \sqrt{\frac{E_{st}}{E}} (1.60) \left( 3.3 + 2.2 \frac{M}{M_p} \right) \quad (4.70)$$

Usando segundo [154]  $E_{st} = (E/f_y)$  e  $E = 205000$  MPa a expressão (4.70) tornará:

$$\frac{L}{r_y} = \frac{290 + 190 M/M_p}{f_{y,MPa}} \quad (4.71)$$

Alternativamente se adotar para  $E_{st} = 6330$  MPa, a expressão (4.70) se transformará no seguinte valor:

$$\frac{L}{r_y} = \frac{924}{\sqrt{f_{y,MPa}}} \left( 1.0 + 0.67 M/M_p \right) \quad (4.72)$$

Segundo a especificação [8], quando é permitido fazer a análise plástica de vigas e outras barras fletidas, o comprimento não contido lateralmente da mesa comprimida dos perfis estruturais denominado de  $L_b$  para a posição das rótulas plásticas associadas ao mecanismo de colapso, para as chamadas seções compactas fletidas em tórno do eixo de

maior inércia, não deverá exceder  $L_{pd}$  (Comprimento limite não apoiado lateralmente na análise plástica) e que para seções duplamente simétricas e seções monosimétricas de perfis estruturais tipo "I" com a mesa comprimida maior do que a mesa tracionada (incluindo barras híbridas) carregadas no plano da alma, apresentam o seguinte valor:

$$L_{pd} = \frac{522 + 319(M_1/M_p)}{f_y, \text{MPa}} r_y \quad (4.73)$$

Nesta expressão as grandezas que nela aparecem tem o seguinte significado:

$f_y$  = especificação para a tensão mínima de escoamento da mesa comprimida, MPa.

$M_1$  = menor momento para a extremidade do comprimento não apoiado da viga.

$M_p$  = momento de plastificação

$r_y$  = raio de giração sobre o eixo de menor inércia

$(M_1/M_p)$  é positivo quando os momentos causa curvatura reversa

Segundo os autores [154] os requisitos de [8] para seções compactas relativos à expressão (4.73) foram baseadas em recentes testes realizados na Universidade do Texas, tendo sido fundamentados na expressão (4.72) utilizando a relação  $M/M_p=0$  e indicaram que a expressão (4.73) é satisfatória para prover uma capacidade adequada de rotação de vigas.

Finalmente uma comparação é feita através da figura 4.19 onde mostra as equações desenvolvidas teoricamente, com

as equações recomendadas pelas especificações [7,12], e que conclui-se que as expressões (4.63) e (4.64) foram desenvolvidas para situações onde o apoio lateral (e restrições para torção) é providenciada somente para as extremidades do comprimento não contido lateralmente.

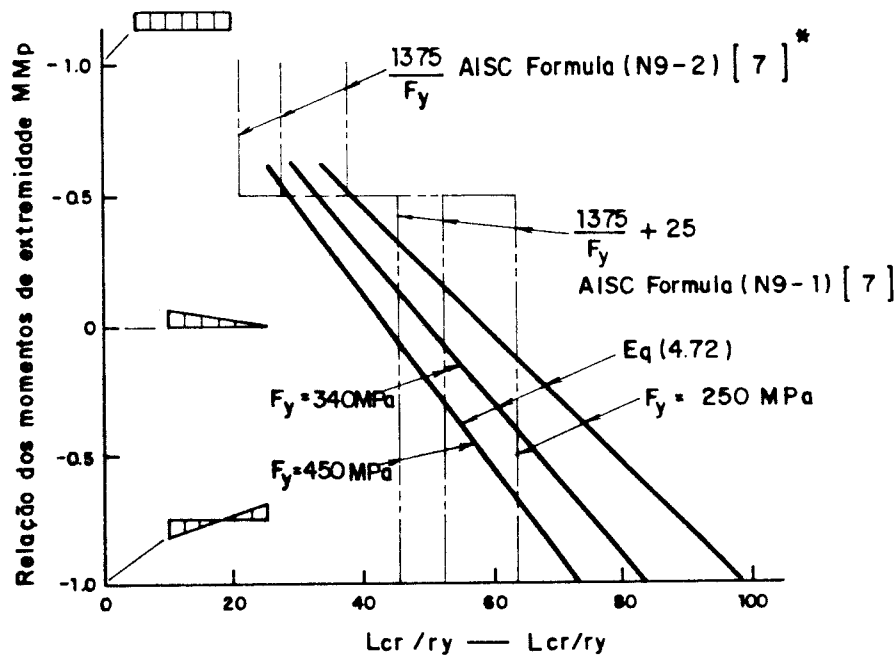


FIG. 4.19- Comparação do parâmetro de esbelteza de [7, 12] para o cálculo plástico com as equações desenvolvidas teóricamente [154]

#### 4.7- Considerações Finais

Na estabilidade dos elementos fletidos com relação aos estados limites: FLM, FLA e FLT algumas considerações não foram abordadas e pela extensão do assunto, mostra-se, aqui neste item apenas algumas. Por exemplo:

a) Estado Limite de (FLM) Flambagem local da mesa, para perfis "I" e "H" com dois eixos de simetria ou com um eixo de simetria no plano médio da alma e perfis "U" não sujeitas à torção, todos fletidas em torno do eixo de maior inércia.

Nesse caso conforme foi estudado anteriormente a tensão crítica de flambagem de chapas na fase elástica é dado pela expressão (3.1)

$$F_{\text{crit}} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2)(b/t)^2} \quad (3.1)$$

Seja

$$\lambda_r = b/t$$

Logo tem-se:

$$F_{\text{crit}} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2) \lambda_r^2}$$

mas

$$F_{\text{crit}} = \frac{M_{\text{crit}}}{W}$$

Para  $W = W_c$  (módulo resistente elástico do lado comprimido da seção, relativo ao eixo de flexão).

Logo:

$$\frac{M_{\text{crit}}}{W_c} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2) \lambda_r^2}$$

Extraíndo o valor de  $M_{\text{crit}}$ , tem-se:

$$M_{\text{crit}} = \frac{K \pi^2 E W_c}{12(1-\nu^2) \lambda_r^2}$$

Adotando  $K = 0,425$ , e  $\nu = 0,3$  tem-se:

$$M_{\text{crit}} = \frac{0,425 \pi^2 E W_c}{12(1-0,3^2) \lambda_r^2}$$

$$M_{\text{crit}} = \frac{0,38 E W_c}{\lambda_r^2} \quad (4.74)$$

Expressão adotada por [12] no Anexo D para perfis soldados.

De (4.74) extraíndo o valor de  $\lambda_r$ , tem-se:

$$\lambda_r = 0,62 \sqrt{\frac{E W_c}{M_r}} \quad (4.75)$$

Para perfis laminados partindo da recomendação de [111] que adota  $K = 0,7$ , na expressão (3.1) tem-se:

$$M_{\text{crit}} = \frac{0,63 E W_c}{\lambda^2} \quad (4.76)$$

A especificação [12] recomenda:

$$M_{\text{crit}} = \frac{0,67 E W_c}{\lambda^2} \quad (4.77)$$

Para  $\lambda = \lambda_r$ , tem-se  $M_{\text{crit}} = M_r$ :

$$\lambda_r^2 = \frac{0,67 E W_c}{M_r}$$

$$\lambda_r \cong 0,82 \sqrt{\frac{E W_c}{M_r}} \quad (4.78)$$

b) Estado Limite de Flambagem Local da Mesa (FLM), para perfis "I" e "H" com dois eixos de simetria e perfis "U", todos fletidos em torno do eixo de menor inércia.

Nesse caso, devido a presença das tensões residuais, tem-se: para o momento fletor limite de flambagem elástica a expressão:

$$M_r = (f_y - f_r)W_c \text{ ou } M_r = f_y W_t$$

e o momento fletor de flambagem elástica ( $M_{cr}$ ) será:

$$M_{cr} = W_{ef} f_y \quad (4.79)$$

Segundo [12]  $W_{ef}$  é o módulo de resistência (mínimo) elástico relativo ao eixo de flexão, para uma seção que tem uma mesa comprimida (ou alma comprimida no caso de perfil "U" fletido em relação ao eixo de menor inércia) de largura igual a "bef" (largura efetiva).

Nos elementos solicitados por compressão, que apresentam o comportamento de elementos enrijecidos e não-enrijecidos, a flambagem local desses elementos causa uma perda da rigidez e uma redistribuição de tensões, depois da ocorrência da flambagem (figura 4.20) [154].

Portanto o conceito de largura efetiva descreve o comportamento de uma chapa pós-flambagem.

WINTER [180] mostra em seu artigo, através de uma série de ensaios experimentais que mesas comprimidas de perfis leves tipo "I" e "U" tem uma importância fundamental na resistência e no comportamento quando são solicitadas por compressão uniforme.



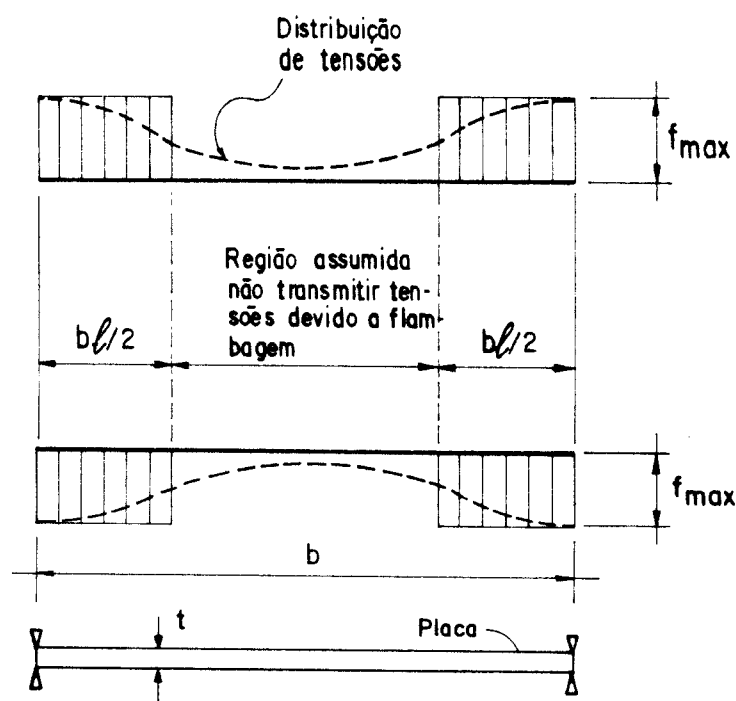


FIG. 4.20 - Tensões pós Flambagem [73]

Este artigo mostra que a partir da carga crítica de flambagem de chapas uniformemente comprimidas (expressão 3.1) chega-se a largura efetiva " $b_{ef}$ " que é equivalente a uma retração na largura real da chapa da seguinte maneira:

$$\text{Da expressão: } f_{crit} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2)(b/t)^2}$$

com  $k = 1,0$  e  $\nu = 0,3$  impondo  $f_{crit} = f_y$  tira-se:

$$b/t = 0,95 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

Fazendo

$$b_e = 2b$$

Encontra-se

$$b_e = 1,9t \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (4.80)$$

No seu artigo [180] afirma que alguns autores chegaram, através de vários ensaios, à expressão:

$$b_e = Ct \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (4.81)$$

onde o coeficiente C depende do parâmetro

$$\sqrt{\frac{E}{f_y}} (t/b)$$

Através dos ensaios experimentais [180] chegou à expressão:

$$C = 1,9 - 1,09 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \left(\frac{t}{b}\right) \quad (4.82)$$

e concluiu que uma melhor aproximação para uma verdadeira largura efetiva é obtida de uma modificação da equação de Von, KARMAN, conforme se pode observar na figura 4.21

E a expressão para largura efetiva  $b_{ef}$  torna-se:

$$\frac{b_{ef}}{t} = 1,90 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \left[ 1,0 - \frac{0,475}{(b/t)} \sqrt{\frac{E}{f_y}} \right] \quad (4.83)$$

Substituindo  $E = 20500\text{MPa}$  tem-se:

$$\frac{b_{ef}}{t} = \frac{860}{\sqrt{f}} \left[ 1,0 - \frac{215}{(b/t) \sqrt{f}} \right] \quad (4.84)$$

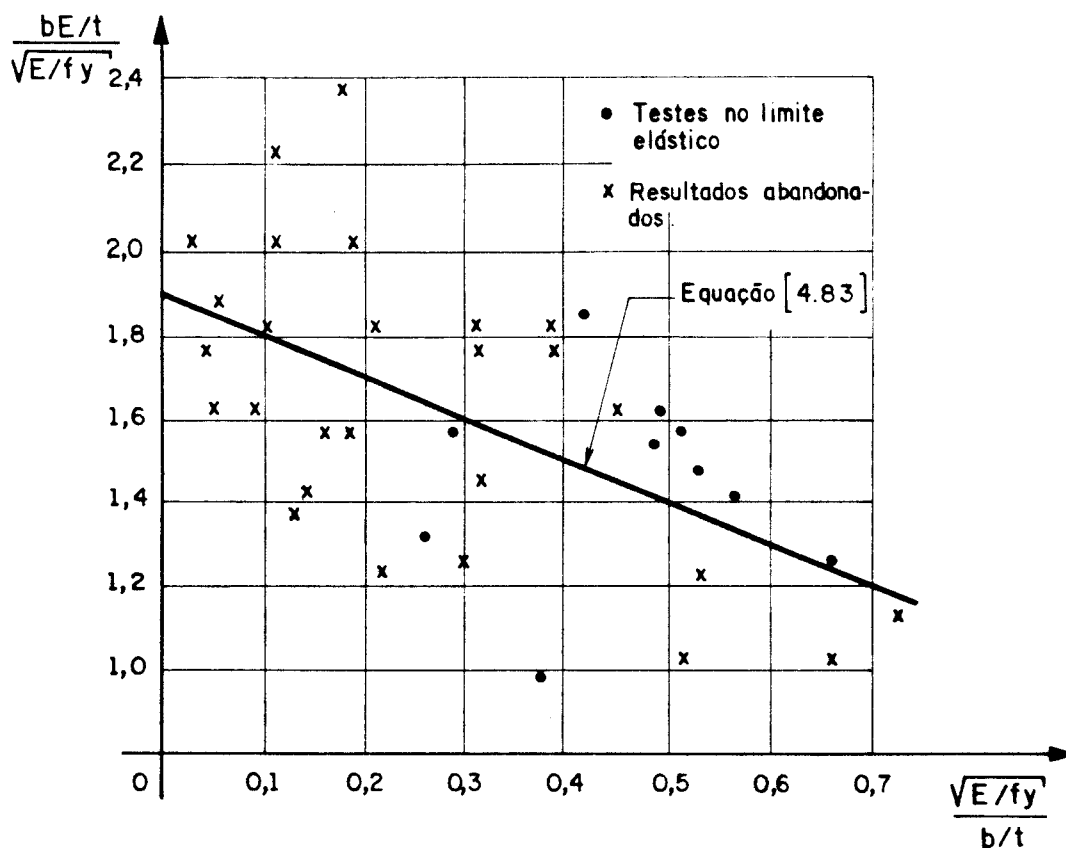


FIG. 4.21 - Determinação Experimental da Largura Efetiva segundo [180]

Em sua obra [154] mostra que experiências realizadas com perfis leves de aço, o coeficiente, do segundo termo na equação (4.84) pode ser reduzido e também de acordo com as especificações [8, 12] são adotados os seguintes valores para  $b_e/t$ .

a) Para seção caixão quadrada ou retangular de espessura uniforme

$$b_{ef} = \frac{862t}{\sqrt{f_y}} \left[ 1 - \frac{173}{(b/t)\sqrt{f_y}} \right] \leq b \quad (4.85)$$

b) Para demais seções uniformemente comprimidas

$$b_{ef} = \frac{862t}{\sqrt{f_y}} \left[ 1 - \frac{152}{(b/t)\sqrt{f_y}} \right] \leq b \quad (4.86)$$

Nas expressões anteriores  $f_y$  é expresso em MPa.

## CAPÍTULO V

### 5- EXEMPLOS NUMÉRICOS

#### 5.1 - CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Neste exemplo para efeito de determinação da solicitação de cálculo  $S_d$  de acordo com a especificação [12] foram feitas as seguintes considerações:

a) As combinações de ações foram realizadas para os estados limites últimos de acordo com a expressão (5.1):

Para combinações normais e combinações aplicáveis a etapas construtivas:

$$S_d = \sum ( \gamma_g G ) + \gamma_{q1} Q_1 + \sum_{j=2}^n ( \gamma_{qj} \psi_j Q_j ) \quad (5.1)$$

$Q_1$  - ação variável predominante para o efeito analisado

$Q_j$  - demais ações variáveis

$\gamma_g$  - coeficiente de ponderação das ações permanentes

$\gamma_q$  - coeficiente de ponderação das ações variáveis

$\psi$  - fatores de combinação

Os valores dados correspondem a ações permanentes de grande variabilidade, portanto para combinações normais  $\gamma_g = 1.4$  e as ações variáveis predominantes foram consideradas como sendo ação decorrente do uso e portanto o valor adotado para  $\gamma_q = 1,5$ .

O exemplo será desenvolvido baseado nas especificações [8, 12, 39, 65].

Na viga simplesmente apoiada (figura 5.1) verificar se o perfil resiste às solicitações indicadas, utilizando as seguintes condições:

- 1) Suporte lateral contínuo
- 2) Suporte lateral nas extremidades A e B
- 3) Suporte lateral nas extremidades e nos pontos C e D

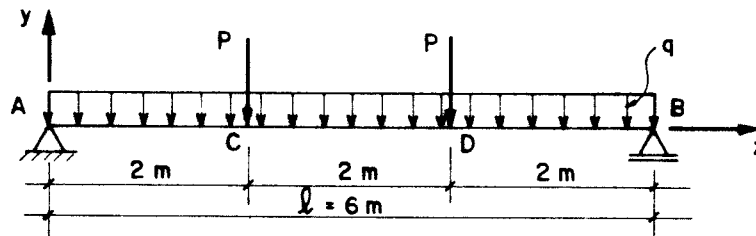


Fig. 5.1 - Viga Simplesmente Apoiada Solicitada pelas Ações Indicadas

Dados:

$$q = \begin{cases} 5\text{kN/m} & \text{- Ação Permanente} \\ 20\text{kN/m} & \text{- Ação Variável} \end{cases}$$

$$P = \begin{cases} 40\text{kN} & \text{- Ação Permanente} \\ 20\text{kN} & \text{- Ação Variável} \end{cases}$$

Aço MR-250 ( $f_y = 250\text{MPa}$ )

$E = 205000\text{MPa}$  ;  $G = 0,385E$  ;  $\nu = 0,3$

### 5.1.1- Ações de Cálculo

#### a- Momento Atuante

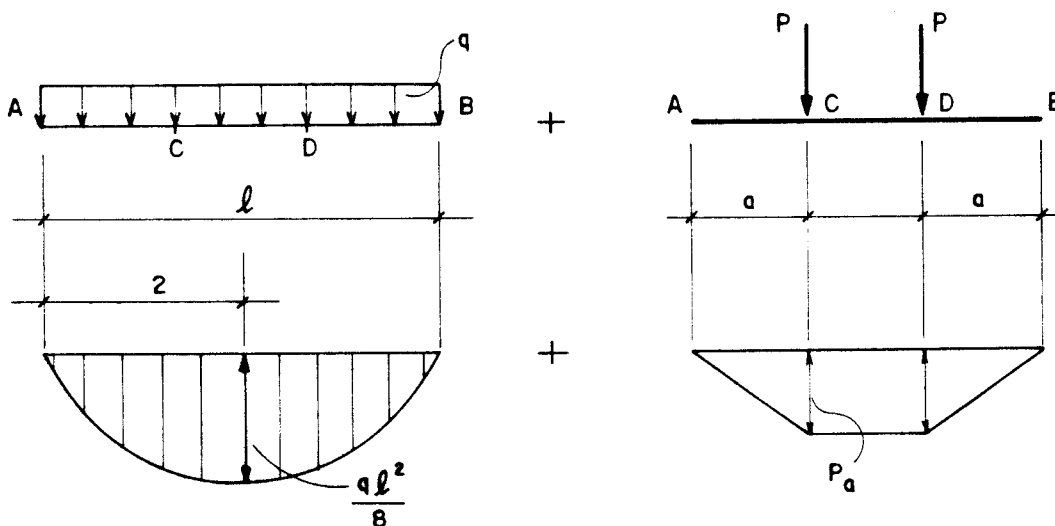


FIG. 5.2- Valores máximos dos momentos fletores para cada carregamento

O momento máximo para a viga acima será:

$$M = \frac{ql^2}{8} + Pa$$

- Esforços Devido à ação Permanente-G

$$M_g = \frac{ql^2}{8} + Pa = \frac{0,05 \times 600^2}{8} + 40 \times 200$$

$$M_g = 2250 + 8000 = 10250\text{kN.cm}$$

- Esforços Devido à Ação Variável- $Q_1$

$$M_q = \frac{q\ell^2}{8} + P_a = \frac{0,20 \times 600^2}{8} + 20 \times 200$$

$$M_q = 13000 \text{ kN.cm}$$

b- Cortante Atuante

Inicialmente determinando os valores dos esforços cortantes, devido a carga permanente e sobrecarga e em seguida obtém-se o esforço cortante de cálculo

Ação Permanente

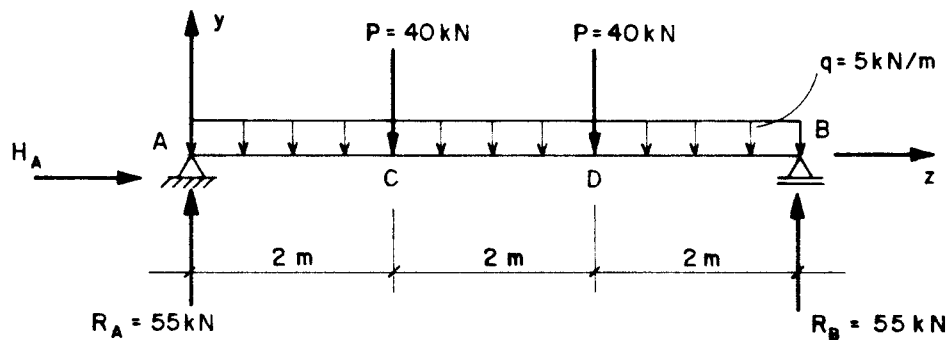


FIG. 5.3- Valores das ações permanentes

$$R_A = R_B = \frac{5 \times 6}{2} + 40 = 15 + 40 = 55 \text{ kN}$$



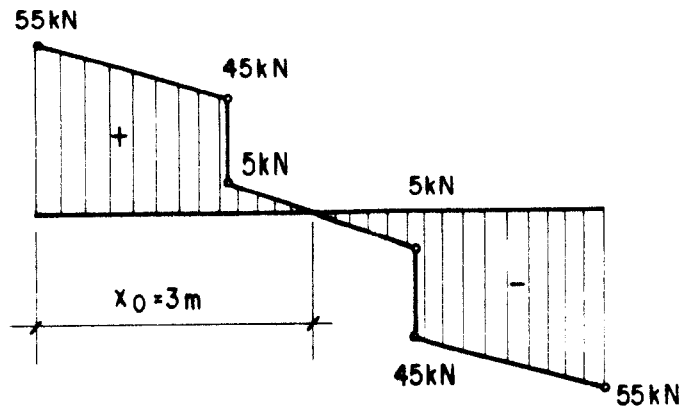


FIG. 5.4- Diagrama do esforço cortante para a ação permanente

Logo:

$$V_{Dmáx} = 55 \text{ kN}$$

AÇÃO VARIÁVEL Q

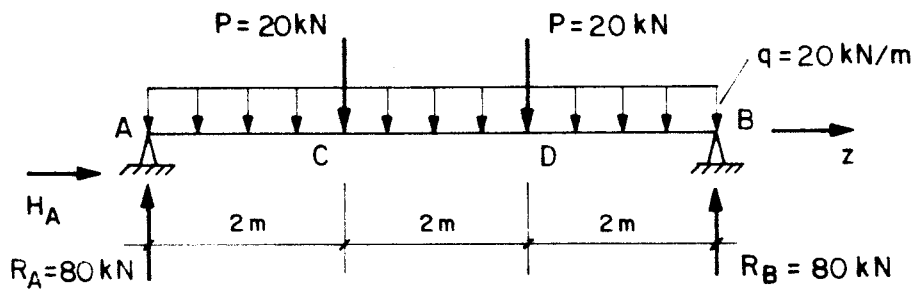
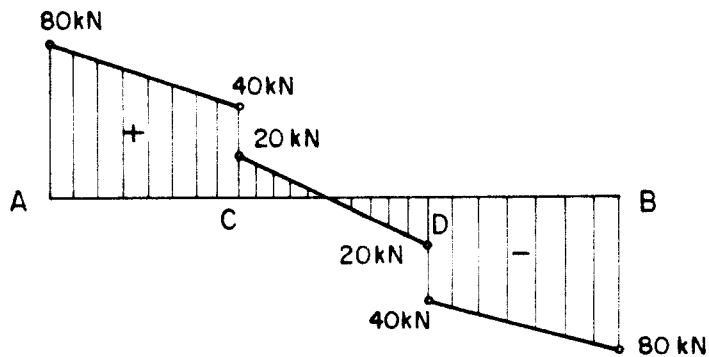


FIG. 5.5- Valores das ações variáveis

Reações Verticais

$$R_A = R_B = \frac{q\ell}{2} + \frac{2P}{2} = \frac{q\ell}{2} + P$$

$$R_A = R_B = \frac{20 \times 6}{2} + 20 = 80 \text{ kN}$$



$$V_{Qmax} = 80 \text{ kN}$$

FIG. 5.6- Diagrama do esforço cortante para ação variável

### 5.1.2- Características Geométricas do Perfil IS 355 X 93,7

$$d = 355 \text{ mm} ; b_f = 190 \text{ mm} ; t_f = 25,00 \text{ mm}$$

$$h = 305 \text{ mm} ; t_w = 8,0 \text{ mm}$$

$$A = 119,4 \text{ cm}^2 ; I_x = 27804,7 \text{ cm}^4 , r_x = 15,26 \text{ cm}$$

$$W_x = 1566,5 \text{ cm}^3 ; I_y = 2859,2 \text{ cm}^4$$

$$W_y = 301 \text{ cm}^3 ; r_y = 4,89 \text{ cm} ; r_T = 15,26 \text{ cm}$$

$$I_T = \frac{2}{3} b_f t_f^3 + \frac{1}{3} d_w t_w^3$$

$$I_T = \frac{2}{3} \times 19 \times 2,5^3 + \frac{1}{3} \times 30,5 \times 0,8^3$$

$$I_T = 203,122 \text{ cm}^4$$

$$C_w = \frac{I_y h^2}{4} = \frac{2859,2 \times (30,5)^2}{4} = 664942,7 \text{ cm}^6$$

## 5.2- VERIFICAÇÃO SEGUNDO A ESPECIFICAÇÃO [12] NBR 8800

### 5.2.1- I Parte - Suporte Lateral Contínuo

Nesse caso não ocorre o estado limite (FLT) tem-se que os parâmetros referentes à resistência nominal ao momento fletor  $M_n$  é dado para os estados limites de FLM (Flambagem Local da Mesa) e FLA (Flambagem Local da Alma).

#### a- FLM

$$\lambda = \frac{b_f}{2t_f} = \frac{190}{2 \times 25} = 3,8$$

$$\lambda_p = 0,38 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 0,38 \sqrt{\frac{205000}{250}}$$

$$\lambda_p = 11 \quad (\lambda < \lambda_p) \text{ , portanto } M_n = M_{p\ell}$$

#### b- FLA

$$\lambda = \frac{h_w}{t_w} = \frac{305}{8} = 38$$

$$\lambda_p = 3,5 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 3,5 \sqrt{\frac{205000}{250}}$$

$$\lambda_p = 100 \quad (\lambda < \lambda_p)$$

Logo

$$M_n = M_{p\ell} = f_y Z$$

De acordo com [131] o módulo plástico Z é dado por:

$$Z = b_f t_f (d - t_f) + \frac{t_w}{4} (d - 2t_f)^2$$

$$Z = 19 \times 2,5 (35,5 - 2,5) + \frac{0,8}{4} (35,5 - 5)^2$$

$$Z = 19 \times 2,5 \times 33 + \frac{0,8}{4} \times (30,5)^2$$

$$Z = 1754 \text{ cm}^3$$

$$M_n = 25 \times 1754 = 43850 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Limitação } M_n < 1,25 w f_y = 1,25 \times 1566,5 \times 25 = 48953 \text{ kN.cm}$$

$$\text{logo } M_n = 43850 \text{ kN.cm}$$

$$\phi_b M_n = 0,90 \times 43850 \text{ (item 5.4.4)}$$

$$\phi_b M_n = 39465 \text{ KN.cm}$$

#### Condição de Segurança

Segundo [12] tem-se:

$$R_d \geq S_d$$

$$S_d = M_d$$

$$M_d = \gamma_g M_g + \gamma_q M_q$$

$$M_d = 1,4 \times 10250 + 1,5 \times 13000$$

$$M_d = 33850 \text{ kN.cm}$$

$$R_d = \phi_b M_n = 39465 > 33850 \text{ kN.cm} \quad \text{Ok}$$

#### 5.2.2- II Parte: Suporte Lateral nas Extremidades

Inicialmente segundo o anexo D de [12] que se aplica a viga não esbeltas ( $\lambda < \lambda_r$ ), faz-se esta verificação, sendo,  $\lambda$  e  $\lambda_r$  definidos para o estado limite (FLA).

$$\lambda = \frac{h}{t_w} = \frac{305}{8} = 38,125$$

$$\lambda_r = 5,6 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 5,6 \sqrt{\frac{205000}{250}} = 160$$

$$\lambda < \lambda_r \quad (\text{viga não esbelta})$$

a- Estado Limite FLM (idem ao caso anterior)

$$M_n = 43.850 \text{ kN.cm}$$

b- Estado Limite FLM (idem ao anterior)

$$M_n = 43.850 \text{ kN.cm}$$

c- Estado Limite FLT

$$\lambda = \frac{L_b}{r_y} = \frac{600}{4,89} \cong 123$$

$$\lambda_p = 1,75 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$\lambda_p = 1,75 \sqrt{\frac{205000}{250}} = 50$$

$$\lambda_r = \frac{0,707 C_b \beta_1}{M_r} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{4 \beta_2}{C_b^2 \beta_1^2} M_r^2}}$$

$$M_r = (f_y - f_r)W$$

Adota-se  $f_r = 115$  MPa segundo [12]

$$M_r = (25 - 11,5) 1566,5$$

$$M_r = 21147,75 \text{ kN.cm}$$

$C_b = 1,00$  [8, 12, 154] (A favor da segurança)

$$\beta_1 = \pi \sqrt{GEI_T A}$$

$$\beta_1 = \pi \sqrt{0,385 \times 20500 \times 20500 \times 203,122 \times 119,4}$$

$$\beta_1 = 6223214,121 \text{ kN.cm}$$

$$\beta_2 = 6,415 \frac{A(d-t_f)^2}{I_T}$$

$$\beta_2 = 6,415 \times \frac{119,4(35,5-2,5)^2}{203,122}$$

$$\beta_2 = 4106,50$$

$$\lambda_r = 301$$

Logo, sendo  $\lambda_p = 50$  ;  $\lambda = 123$ ;  $\lambda_r = 301$

tem-se:

$$\lambda_p < \lambda < \lambda_r$$

Nesse caso

$$M_n = M_{pl} - (M_{pl} - M_r) \frac{\lambda - \lambda_p}{\lambda_r - \lambda_p}$$

$$M_n = 43850 - (43850 - 21147,75) \frac{123 - 50}{301 - 50}$$

$$M_n = 43850 - \frac{(22702,25) 73}{251}$$

$$M_n = 37247 \text{ kN.cm}$$

Comparando os valores obtidos para  $M_n$  considerando os estados limites FLM, FLA e FLT emprega-se o menor valor que é:

$$M_n = 37247 \text{ kN.cm}$$

Portanto:

$$\phi_b M_n = 0,90 \times 37247 = 33522 \text{ kN.cm} < 33850 \text{ kN.cm} = M_d$$

Portanto

$$\phi_b M_n < M_d$$

A viga não passa. Porém buscando-se a razão entre os limites encontra-se  $\frac{\phi_b M_n}{M_d} = 0,99 \approx 1,0$  que permite aceitar o perfil.

### 5.2.3- III Parte: Suporte Lateral nas Extremidades e nos Pontos C e D.

Nesse caso  $L_b = 200 \text{ cm}$

Determinação do Momento Resistente  $M_n$

#### a- ESTADO LIMITE FLM

Idem caso anterior  $M_n = 43850 \text{ kN.cm}$

#### b- ESTADO LIMITE FLA

Idem caso anterior  $M_n = 43850 \text{ kN.cm}$

#### c- ESTADO LIMITE FLT

$$\lambda = \frac{L_b}{r_y} = \frac{200}{4,89} = 41$$

$$\lambda < \lambda_p = 50 \quad M_n = 43850 \text{ kN.cm}$$



$$\phi_b M_n = 0,90 \times 43850 = 39465 \text{ kN.cm} > 33850 \text{ kN.cm} = M_d$$

Logo

$$\phi_b M_n > M_d \quad (\text{OK})$$

### 5.3- VERIFICAÇÃO SEGUNDO A ESPECIFICAÇÃO [8] - LRFD

#### 5.3.1- I PARTE: Suporte Lateral Contínuo

##### a- ESTADO LIMITE FLM

$$\lambda = \frac{b_f}{2t_f} = \frac{190}{2 \times 25} = 3,8$$

$$\lambda_p = \frac{171}{\sqrt{F_{y'}}} \text{ MPa}$$

$$\lambda_p = \frac{171}{\sqrt{250}} = 10,8$$

##### b- ESTADO LIMITE FLA

$$\lambda = \frac{h}{t_w} = \frac{305}{8} = 38$$

$$\lambda_p = \frac{1690}{\sqrt{F_{y'} \text{ MPa}}} = \frac{1690}{\sqrt{250}} = 107$$

$$\lambda < \lambda_p$$

Logo

$$M_n = M_p = F_y Z_x$$

$$M_n = 1754 \times 25 = 43850 \text{ kN.cm}$$

Logo

$$\phi_b M_n \geq M_u$$

$$M_u = 1,2D + 1,6L$$

$M_u$  = Momento de serviço devido às ações fatoradas

D - Carga Permanente

L - Carga Viva

$$M_u = 1,2 \times 10250 + 1,6 \times 13000$$

$$M_u = 33100 \text{ kN.cm}$$

$$\phi_b M_n = 0,90 \times 43850 = 39465 \text{ kN.cm}$$

Comparando com  $M_u$ , tem-se

$$\phi_b M_n > M_u \quad (\text{OK})$$

### 5.3.2- II PARTE: Suporte Lateral nas Extremidades

#### a- ESTADO LIMITE FLM

Idem anterior  $\lambda = 3,8$  ;  $\lambda_p = 10,8$   $\lambda < \lambda_p$

b- ESTADO LIMITE FLA

Idem Anterior  $\lambda = 38$  ;  $\lambda_p = 107$   $\lambda < \lambda_p$

c- ESTADO LIMITE FLT

$$\lambda = L_b / r_y = \frac{600}{4,89} = 123$$

$$\lambda_p = \frac{L_p}{r_y} = \frac{790}{\sqrt{F_y, (\text{MPa})}} = \frac{790}{\sqrt{250}} = 50$$

Logo

$$\lambda > \lambda_p$$

$$\lambda_r = \frac{L_r}{r_y} = \frac{X_1}{(F_y - F_r)} \sqrt{1 + \sqrt{1 + X_2 (F_y - F_r)^2}}$$

onde

$$X_1 = \frac{\pi}{W_x} \sqrt{\frac{EGJ_t A}{2}}$$

$$X_2 = 4 \frac{C_w}{I_y} \left( \frac{W_x}{GI_t} \right)^2$$

$$X_1 = \frac{\pi}{1566,5} \sqrt{\frac{20500 \times 0,385 \times 20500 \times 119,4 \times 203,122}{2}}$$

$$X_1 = 2809,12 \text{ kN/cm}^2$$

$$X_2 = \frac{4 \times 664942.7}{2859,2} \times \left( \frac{1566.5}{0,385 \times 20500 \times 203,122} \right)^2$$

$$X_2 = 0,000888213 \text{ cm}^4 / (\text{kN})^2$$

$$\lambda_r = \frac{2809,12}{(25-11,6)} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 0,000888213 \times (25-11,6)^2}}$$

$$\lambda_r = \frac{2809,12}{13,4} \times 1,441 = 302$$

Logo

$$L_b = 600 \text{ cm}$$

$$L_p = \lambda_p r_y = 50 \times 4,89 = 244,5 \text{ cm}$$

$$L_r = \lambda_r r_y = 302 \times 4,89 = 1476,78 \text{ cm}$$

Portanto

$$L_p < L_b < L_r$$

Nesse caso a resistência nominal  $M_n$  será

$$M_n = C_b \left[ M_p - (M_p - M_r) \left( \frac{L_b - L_p}{L_r - L_p} \right) \right]$$

$$C_b = 1,00$$

$$M_r = (F_y - F_r)W_x = (25 - 11,6) 1566,5$$

$$M_r = 20991,10 \text{ kN.cm}$$

$$(M_p - M_r) = 43850 - 20991,10 = 22858,90 \text{ kN.cm}$$

$$M_n = 1,00 \left[ 43850 - 22858,90 \left( \frac{600 - 244,5}{1476,78 - 244,5} \right) \right]$$

$$M_n = 37255 \text{ kN.cm}$$

Comparando os 3 valores para os estados limites FLM, FLA e FLT,  $M_n$  é o menor dos três valores

Logo

$$M_n = 37255 \text{ kN.cm}$$

$$\phi_b M_n = 0,90 \times 37255 = 33529,5 \text{ kN.cm} > 33.100 \text{ kN.cm} = M_u$$

Portanto

$$\phi_b M_n > M_u \quad (\text{OK})$$

5.3.3- III PARTE: Suporte Lateral nas Extremidades e nos  
Pontos C e D

a- ESTADO LIMITE FLM

$$\lambda = 3,8 ; \lambda_p = 10,8 \quad \lambda < \lambda_p$$

$$M_n = M_{p\ell} = F_y Z_x = 43850 \text{ kN.cm}$$

b- ESTADO LIMITE FLA

$$\lambda = 38 ; \lambda_p = 107 \quad \lambda < \lambda_p$$

$$M_n = M_{p\ell} = F_y Z_x = 43850 \text{ kN.cm}$$

c- ESTADO LIMITE FLT

$$L_b = 200 \text{ cm}$$

$$L_p = \frac{790 r_y}{\sqrt{F_y, \text{MPa}}} = \frac{790 \times 4,89}{\sqrt{250}} = 244 \text{ cm}$$

$$L_b < L_p \quad M_n = M_{p\ell} = F_y Z_x$$

$$M_n = 25 \times 1754 = 43850 \text{ kN.cm}$$

Adota-se

$$M_n = 43850 \text{ kN.cm}$$

$$\phi_b M_n = 0,900 \times 43850 = 39465 \text{ kN.cm}$$

Logo

$$\phi_b M_n > M_u$$

#### 5.4- VERIFICAÇÃO SEGUNDO A ESPECIFICAÇÃO [39] CAN-S161-M84

De acordo com esta especificação o critério de segurança utilizado na majoração das ações é dado por:

$$\alpha_D D + \gamma \psi (\alpha_L L + \alpha_\theta Q + \alpha_T T)$$

D - Carga morta, incluindo peso próprio

L - Cargas vivas devido a ocupação

Q - Cargas devido ao vento

T - Temperatura

$\alpha$  - Fatores de combinação

$$\alpha_D = 1,25 ; \alpha_L = 1,50 ; \alpha_\theta = 1,50 ; \alpha_T = 1,25$$

No caso do exemplo tem-se:

$$M_f = \alpha_D D + \gamma \psi \alpha_L L \quad \psi = 1,00 ; \gamma = 1,00$$

$$M_f = 1,25 \times 10250 + 1,00 \times 1,00 \times 1,50 \times 13000$$

$$M_f = 32312,5 \text{ kN.cm}$$

#### 5.4.1- I PARTE: Suporte Lateral Contínuo

No item 13.5 tem-se que na flexão quando as barras são lateralmente apoiadas o momento resistente fatorado  $M_r$  para vigas com suporte lateral contínuo na mesa comprimida do perfil estrutural é dado por:

a) Para Seções Classe 1 e Classe 2

$$M_r = \phi Z F_y = \phi M_p$$

Da análise da estabilidade da mesa e da alma do perfil estrutural, na tabela 1 da página 46, tem-se:

a- Mesas de Perfis I, Seções Classe 2

$$b/t \leq \frac{170}{\sqrt{F_y}, \text{MPa}}$$

$$b/t = \frac{190}{2 \times 25} = 3,8$$

$$\frac{170}{\sqrt{250}} = 10,7 \quad \text{Logo } 3,8 < 10,7 \quad (\text{OK})$$

b- Almas na Flexão

$$\frac{h}{w} \leq \frac{1370}{\sqrt{F_y}, \text{MPa}}$$

$$\frac{h}{w} = \frac{305}{8} = 38$$



$$\frac{1370}{\sqrt{250}} = 87 \quad \text{Logo } 38 < 87 \quad (\text{OK})$$

Com isso Seção Classe 2, logo

$$M_r = \phi Z F_y \quad \phi = 0,90 \quad (\text{Apendice E})$$

$E_1$

$$M_r = 0,90 \times 1754 \times 25 = 39465 \text{ kN.cm}$$

Critério de Segurança (Item 7.2.1)

$$M_r = 39465 \text{ kN.cm} > 32.312,5 \text{ kN.cm} = M_f$$

Logo

$M_r > M_f$
-------------

 (OK)

#### 5.4.2- II PARTE: Suporte Lateral nas Extremidades

Nesse caso, o item 136 da especificação define na flexão de barras não apoiadas lateralmente que o momento  $M_r$  é dado por:

a) Perfis Duplamente Simétricos Classe 1 e Classe 2

$$\text{Quando } M_u > \frac{2}{3} M_p \quad (i)$$

$$M_r = 1,15 \phi M_p \left( 1 - \frac{0,28 M_p}{M_u} \right) \leq \phi M_p$$

(ii) Quando  $M_u \leq \frac{2}{3} M_p$

$$M_r = \phi M_u$$

onde

$$M_u = \frac{\pi}{\omega L} \sqrt{EI_y GI_t + \left( \frac{\pi E}{L} \right)^2 I_y C_w}$$

$\omega = 1,00$  (mesmo papel do coeficiente  $C_b$ )

$L =$  Comprimento não apoiado do flange comprimido

$$M_u = \frac{\pi}{1,00 \times 600} \sqrt{20500 \times 2859,2 \times 0,385 \times 20500 \times 203,122 + \left( \frac{\pi \times 20500}{600} \right)^2 2859,2 \times 664942,7}$$

$$M_u = 56362 \text{ kN.cm}$$

$$\frac{2}{3} M_p = \frac{2}{3} \times 25 \times 1754 = 29233,34 \text{ kN.cm}$$

$$M_u > \frac{2}{3} M_p$$

Logo o momento resistente  $M_r$  será:

$$M_r = 1,15 \times 0,90 \times 43850 \left( 1 - \frac{0,28 \times 43850}{56362} \right)$$

$$M_r = 35498 \text{ kN.cm} < \phi M_p = 0,90 \times 43850 = 39465 \text{ kN.cm}$$

Comparando com  $M_f$

$$M_f = 32312,5 \text{ kN.cm} < 35498 \text{ kN.cm} = M_r$$

Logo

$$\boxed{M_r > M_f} \quad \text{OK}$$

#### 5.4.3- III PARTE: Suporte Lateral nas Extremidades e nos Pontos C e D

Nesse caso  $L = 200 \text{ cm}$

$$M_u = \frac{\pi}{1,00 \times 200} \sqrt{20500 \times 2859,2 \times 0,385 \times 20500 \times 203,122 + \left( \frac{\pi \times 20500}{200} \right)^2 \times 2859,2 \times 664942,7}$$

$$M_u = 268007 \text{ kN.cm} > \frac{2}{3} M_p$$

$$M_r = 1,15 \times 0,90 \times 43850 \left( 1 - \frac{0,28 \times 43850}{268007} \right)$$

$$M_r = 43306 \text{ kN.cm} > 32312,5 \text{ kN.cm} = M_f$$

$$\boxed{M_r > M_f}$$

## 5.5- VERIFICAÇÃO SEGUNDO A ESPECIFICAÇÃO [65]ECCS-EG77-2E/78

Inicialmente a especificação indica os tipos de estados limites considerados, mostrando os fatores de carga propostos

$\gamma_G, \gamma_Q$

Para o estado limite de serviço

$$\gamma_G = \gamma_Q = 1$$

Para o estado limite último

$$\gamma_G = 1,35 ; \gamma_Q = 1,5$$

$\gamma_G$  - coeficiente parcial das cargas permanentes

$\gamma_Q$  - coeficiente parcial das cargas variáveis com efeito predominante, sendo que a carga de projeto  $F_d$  será:

$$F_d = \gamma_G G_k + \gamma_Q \left( Q_{k,1} + \sum_2^n \psi_i Q_{k,2} \right)$$

No exemplo considerado

$$M_d = 1,35 \times 10250 + 1,5 \times 13000$$

$M_d = 33.338 \text{kN.cm}$
-----------------------------

Com relação às barras fletidas a Especificação ECCS recomenda que a máxima tensão  $\sigma$  devido à flexão produzida pelas cargas de projeto deve ser menor do que a tensão limite  $\sigma_D$  expressa por:

$$\sigma \leq \sigma_D$$

onde

$$\sigma_D = \eta_r \alpha f_y$$

$\eta_r$  = fator de redução

$\alpha$  = fator de forma para flexão em torno do eixo de

$$\text{maior resistência} = \frac{Z}{W} = \frac{M_p \ell}{M_e}$$

$f_y$  = limite de escoamento do material que é construído o perfil estrutural

O fator de redução é dado por:

$$\eta_r = \frac{1}{\left(1 + \lambda_M^{2n}\right)^{1/n}}$$

$n$  = fator sistema

$$\lambda_M = \sqrt{\frac{\alpha f_y}{\sigma_{\text{crit},D}}}$$

$$\sigma_{\text{crit},D} = \frac{M_{\text{crit},D}}{W_x}$$

O momento crítico  $M_{cr}$  é expresso para vigas tipo I de mesas largas:

$$M_{cr} = \psi_1 (\pi/L_{c,h}) \sqrt{EJ_y GJ_t} \sqrt{1 + \pi^2/k^2}$$

onde

$$K = L_{c,h} \sqrt{\frac{GI_t}{EC_w}}$$

$\psi_1$  = coeficiente que depende da distribuição das ações e das condições de apoio

$$\psi_1 = 1,75 - 1,05 \left( \frac{M_B}{M_A} \right) + 0,3 \left( \frac{M_A}{M_B} \right)^2$$

$$\text{ou } M_{cr} = \frac{\psi_1 \pi}{L} \sqrt{EJ_y GI_t} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EC_w}{L^2 GI_t}}$$

O fator do sistema  $n$  pode variar dependendo da forma da seção transversal, das condições de carregamento, da posição de aplicação da carga externa e sua excentricidade, bem como da qualidade do aço. Esta especificação recomenda  $n = 2,5$ .

A verificação será feita apenas para a II Parte onde se considera o suporte lateral apenas nas extremidades A e B da viga. Logo  $L = 600\text{cm}$ .

#### a) Flambagem Local da Mesa

Para prevenir a flambagem local prematura as partes sob flexão e compressão devem apresentar a relação  $(b/t)$  não

maior do que:

$$b/t \leq 8,5 \sqrt{\frac{2,35}{f_y}} \quad (\text{Cálculo Plástico})$$

$$f_y \text{ expresso em N/mm}^2 \quad f_y = 250 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{Aço A36})$$

No caso do exemplo

$$\frac{b}{2t} = \frac{190}{2 \times 25} = 3,8$$

$$8,5 \sqrt{\frac{235}{250}} = 8,2$$

Logo

$$b/2t < 8,2 \quad (\text{OK})$$

b) Flambagem Local da Alma

$$\frac{h}{t} < 43 \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

$$\frac{h}{t} = \frac{305}{8} = 38$$

$$43 \sqrt{\frac{235}{f_y}} = 43 \sqrt{\frac{235}{250}} = 42$$

Logo

$$h/t < 42 \quad (\text{OK})$$

### c- Flambagem Lateral com Torção

Sendo prevenida a flambagem local das partes que compõe o perfil estrutural a especificação parte para a verificação da flexão ou seja:

$$\sigma \leq \sigma_D$$

$$\sigma = \frac{M_{\text{máx}}}{W_x} \quad ; \quad \sigma_D = \eta_r \alpha f_y \quad M_{pl} = Z_x f_y$$

mas

$$\alpha = \frac{Z_x}{W_x}$$

$$\sigma_D = \eta_r \frac{Z_x}{W_x} f_y = \frac{\eta_r M_{pl}}{W_x}$$

Logo

$$\frac{M_{\text{máx}}}{W_x} \leq \eta_r \frac{M_{pl}}{W_x}$$

$$\boxed{M_{\text{máx}} \leq \eta_r M_{pl}}$$

Cálculo de  $\eta_r$

$$\eta_r = \frac{1}{\left(1 + \bar{\lambda}_M^{2n}\right)^{1/n}}$$

com  $n = 2,5$



$$\bar{\lambda}_M = \sqrt{\frac{\alpha f_y}{\sigma_{\text{crít,D}}}} = \sqrt{\frac{\alpha f_y}{\frac{M_{\text{crít}}}{W_x}}}$$

$$\bar{\lambda}_M = \sqrt{\frac{\alpha W_x f_y}{M_{\text{crít}}}} = \sqrt{\frac{Z_x f_y}{M_{\text{crít}}}}$$

$$\bar{\lambda}_M = \sqrt{\frac{M_{pl}}{M_{\text{crít}}}}$$

$$M_{pl} = Z_x f_y = 25 \times 1754 = 43850 \text{ kN.cm}$$

$$M_{\text{crít}} = \frac{\psi_1 \pi}{L} \sqrt{E J_y G I_t} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 E C_w}{L^2 G J_t}}$$

$$\psi_1 = 1,00 \text{ (tal como foi feito para } C_b \text{)}$$

$$G = 0,385 E$$

$$M_{\text{crít}} = \frac{\pi}{600} \sqrt{20500 \times 2859,2 \times 0,385 \times 20500 \times 203,122} \times \sqrt{1 + \frac{\pi^2 \times 20500 \times 664942,7}{600^2 \times 0,385 \times 20500 \times 203,122}}$$

$$M_{\text{crít}} = 50756 \text{ kN.cm}$$

Logo

$$\bar{\lambda}_M = \sqrt{\frac{43850}{50756}} = 0,93$$

$$\eta_r = \frac{1}{\left[ 1 + (0,93)^{2 \times 2,5} \right]^{1/2,5}} \approx 0,81$$

Logo

$$M_{\text{máx}} \leq \eta_r M_{p\ell} = 0,81 \times 43850$$

$$M_{\text{máx}} \leq 35519 \text{ kN.cm}$$

Portanto adota-se:

$$M_n = 35519 \text{ kN.cm}$$

#### d- ANÁLISE DA SEGURANÇA

A análise de segurança, é feita considerando de um lado da expressão as solicitações de cálculo  $S(F_d)$  onde  $F_d =$

$$\gamma_G G_k + \gamma_Q \left( Q_{k,1} + \sum_2^n \psi_i Q_{k2} \right) \text{ e, do outro lado a}$$

resistência  $R(f_d)$  de cálculo:

$$S(F_d) \leq R(f_d)$$

Conforme previsto na determinação do momento fletor de cálculo  $M_d$ , já que a análise foi feita para os 3 estados limites FLM, FLA e FLT utilizou-se os coeficientes de majoração da Carga Permanente  $\gamma_G = 1,35$  e  $\gamma_Q = 1,5$ , como [16] e a especificação ECCS recomendam, sendo calculado:

$$M_d = 33338 \text{ kN.cm} .$$

A Resistência Nominal de Cálculo,  $R_d$ , que para as especificações, [8, 12] é  $R_d = \phi R_n$ , conforme recomendações da ECCS será:

$$R(f_d) = R \left( \frac{f_k}{\gamma_m} \right) = \phi R_n$$

O coeficiente  $\gamma_m$ , segundo [16] depende do nível de conhecimento do comportamento estrutural, especialmente para o fenômeno da flambagem. Para os estados limites últimos muitos códigos dão os valores de  $\gamma_m$  em função do tipo de estado limite e dos métodos de cálculo. Os estados limites de estabilidade local e global são estudados pelos métodos de cálculo que sempre estão ao lado da segurança e sem significância estatística (exceto para colunas comprimidas), para tais estados limites convencionalmente adota-se  $\gamma_m = 1$ .

Com isso, voltando a expressão anterior:

$$R(f_d) = R(f_k)$$

Foi verificado que no exemplo, para os três estados limites FLM, FLA e FLT, o valor obtido para o momento

resistente normal era de:

$$\text{FLM} - M_n = M_{p\ell} = f_y Z_x = 43850 \text{ kN.cm}$$

$$\text{FLA} - M_n = M_{p\ell} = f_y Z_x = 43850 \text{ kN.cm}$$

$$\text{FLT} - M_n = 35519 \text{ kN.cm}$$

Portanto adota-se o menor:

$$\gamma_m R_d = R(f_k)$$

$M_n = 35519 \text{ kN.cm}$
-----------------------------

Comparando com  $M_d = 33338 \text{ kN.cm}$

$$\gamma_m M_n > M_d \quad (\gamma_m = 1,00) \quad M_n > M_d$$

$$35519 > 33338 \text{ kN.cm} \quad \boxed{\text{OK}}$$

## 5.6- RESISTÊNCIA AO ESFORÇO CORTANTE

### 5.6.1- Verificação do Cortante Segundo a Especificação [12] NBR 8800

#### a- Cortante de Cálculo

O esforço cortante de cálculo  $V_d$  será:

$$V_d = \gamma_g V_D + \gamma_Q V_Q$$

$$V_d = 1,4 \times 55 + 1,5 \times 80$$

## b- Cortante Resistente

$$V_d = 197 \text{ kN}$$

$$\lambda = \frac{h}{t_w} = \frac{305}{8} = 38,125$$

$$\lambda_p = 1,08 \sqrt{\frac{KE}{f_y}}$$

Seja

$$a = 2,00 \text{ m} = 200 \text{ cm}$$

$$h = 305 \text{ mm} = 30,5 \text{ cm}$$

$$a/h = 6,56 > 3 \quad k = 5,34$$

$$\lambda_p = 1,08 \sqrt{\frac{5,34 \times 20500}{25}} = 71$$

Logo

$$\lambda < \lambda_p$$

$$V_n = V_{p\ell} = 0,55 A_w f_y \quad A_w = h \times t_w$$

$$V_n = 0,55 h \times t_w f_y$$

$$V_n = 0,55 \times 30,5 \times 0,8 \times 25 = 335,5 \text{ kN}$$

Resistência de Cálculo

$$\phi V_n = 0,90 V_n = 0,90 \times 335,5 \approx 302 \text{ kN}$$

$$\boxed{\phi_v V_n > V_d} \quad (\text{OK})$$

c- Verificação da flecha segundo [12]

Segundo a NBR 8800 admitindo a viga como componente de um edifício industrial tem-se:

Para o deslocamento vertical devido a sobrecarga e considerando barra biapoiada suportando pisos

$$\delta_m \leq \frac{1}{360} \text{ do vão} = \frac{600}{360} \approx 1,67\text{cm}$$

No caso do exemplo:

$$\delta_{\text{máx}} = \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{23Pl^3}{648EI}$$

$$\delta_{\text{máx}} = \delta_{1\text{máx}} + \delta_{2\text{máx}} ;$$

$$\delta_{1\text{máx}} = \frac{5ql^4}{384EI} ; \quad \delta_{2\text{máx}} = \frac{23Pl^3}{648EI}$$

$$\delta_{\text{máx}} = \frac{5 \times 0,20 \times (600)^4}{384 \times 20500 \times 27804,7} + \frac{23 \times 20 \times (600)^3}{648 \times 20500 \times 27804,7}$$

$$\delta_{\text{máx}} = 0,592 + 0,269$$

$$\delta_{\text{máx}} = 0,861\text{cm} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\delta_{\text{máx}} = \frac{l}{697} < \frac{l}{360} \quad (\text{OK})}$$

### 5.6.2- Verificação do cortante segundo [8] - LRFD

No Capítulo F Item F2.2 a especificação apresenta a relação  $h/t_w$  que deve ser calculada primeiramente:

Para

$$h/t_w \leq 187 \sqrt{\frac{K}{F_{yw}}}$$

sendo o aço ASTM A-36 com  $F_y = 36 \text{ksi} = 250 \text{MPa}$

E

$$V_n = 0,6 F_{yw} A_w$$

$$h/t_w = \frac{305}{8} = 38,125$$

$$K = 5 + \frac{5}{(a/h)^2}$$

com  $a = 200 \text{cm}$ ;  $h = 305 \text{mm}$

Encontra-se:

$$a/h = 6,56 > 3,00$$

Portanto:  $k = 5,00$

Logo

$$\lambda = 187 \sqrt{\frac{K}{F_{yw, \text{ksi}}}} = 187 \sqrt{\frac{5}{36}} = 69,7$$

Então

$$h/t_w = 38,125 < 69,7 \quad (\text{OK})$$

$$V_n = 0,60 F_{yw} A_w ; A_w = d \times t_w \quad (\text{item F.22})$$

$$V_n = 0,60 \times 25 \times 35,5 \times 0,8 = 426 \text{ kN}$$

$$\phi_v V_n = 0,90 \times 426 \quad (\phi_v = 0,90)$$

$$\phi_v V_n = 383,4 \text{ kN}$$

$$\text{Comparando com } V_d = 1,2 \times D + 1,6 L$$

$$= V_d = 1,2 \times 55 + 1,6 \times 80$$

$$= V_d = 194 \text{ kN}$$

$$\phi_v V_n > V_d \quad (\text{OK})$$

### 5.6.3. Verificação Segundo a Especificação [39] CAN-S161-M84

No item 13.4.1 dessa especificação tem-se que o esforço cortante  $V_r$ , desenvolvido pela alma de uma barra deve ser tomado igual a:

$$V_r = \phi A_w F_s$$

$$A_w = hw \quad (\text{perfis soldados})$$

Calcula-se a relação  $h/w$

$$h/w = \frac{305}{8} = 38,125$$



$$\text{Se } h/w \leq 439 \sqrt{\frac{K_v}{F_y}} \text{ (MPa)}$$

Adota-se  $F_s = 0,66 F_y =$  Tensão de cisalhamento último  
com  $a/h = 200/30,5 = 6,56$ , portanto  $a/h > 1$

Logo

$$K_v = 5,34$$

Sendo:

$$\lambda_p = 439 \sqrt{\frac{K_v}{F_y}} = 439 \sqrt{\frac{5,34}{250}} = 64,16 \text{ logo}$$

e como

$$\lambda = h/t_w = 38,125 < 64,16 = 439 \sqrt{\frac{K_v}{F_y}} \text{ (OK)}$$

Logo

$$F_s = 0,66 F_y = 0,66 \times 250 = 165 \text{ MPa}$$

$$F_s = 16,5 \text{ kN/cm}^2$$

Então

$$V_r = \phi A_w F_s$$

$$\phi = 0,90 \text{ (Apendix E - Margins of Safety, página 155)}$$

$$V_r = 0,90 \times 30,5 \times 0,8 \times 16,5$$

$$V_r = 362,34\text{kN}$$

Comparando com  $V_d$ ,  $V_d = 1,25 \times 55 + 1,00 \times 1,0 \times 1,5 \times 80 \cong 189\text{kN}$

Portanto:

$$V_r > V_d \quad (\text{OK})$$

#### 5.6.4- Verificação do Cortante Segundo [65] - ECCS

Com base na recomendação R 532 da página 5.3.2.

$$V_{pl} = 0,58 f_y t_w h_w$$

$$V_{pl} = 0,58 \times 25 \times 0,8 \times 30,5$$

$$V_{pl} \cong 354\text{kN} \quad ; \quad V_d = 1,35 \times 55 + 1,5 \times 80$$

$$V_d < V_{pl} \quad (\text{OK}) \quad V_d = 194,25\text{kN}$$

O objetivo do exemplo foi analisar a segurança estrutural de uma determinada viga solicitada pelo carregamento indicado, sendo que a verificação, foi feita a luz de quatro especificações [8, 12, 39, 65] e poderá ser visto abaixo o quadro final de resultados para efeito comparativo, observando o procedimento que cada especificação dá em relação ao dimensionamento das barras fletidas de estruturas de aço.

## RESULTADO FINAL E QUADRO COMPARATIVO

ESPECIFI- CAÇÃO	$V_d$ (kN)	$M_d$ (kN.cm)	$\phi_v V_n$ (kN)	$\phi_b M_n$ (kN.cm)	$\phi_v V_n/V_d$	$\phi_b M_n/M_d$
NBR 8800	197	33850	302	33522	1,53	0,99
LRFD	194	33100	384	33530	1,97	1,01
CAN	189	32313	362	35498	1,91	1,10
ECCS	194	33338	354	35519	1,83	1,07

Os resultados obtidos neste quadro mostram que os valores dos quocientes das resistências nominais em relação à solicitações de cálculo são bem próximos, visto que cada norma trata os coeficientes de majoração das ações com valores específicos e próprios para as situações de cada país. Embora, se constate que as normas NBR 8800 e LRFD 86 se aproximam em seus procedimentos às limitações dos estados limites de FLT, FLA e FLM. Já as normas CAN 84 e ECCS 78, apesar de terem procedimentos próprios em relação aos mesmos estados limites, não apresentaram desvio significativo. Entretanto, vale observar que as duas últimas especificações CAN e ECCS apresentam um valor mais elevado para os momentos nominais, que reflete a recente atualização destas normas.

**EXEMPLO 5.2-** Considerando a viga da figura 5.7, como pertencente a uma determinada estrutura de aço, que para efeito do exemplo será considerada simplesmente apoiada e solicitada pelas seguintes ações:

- a) Ação Permanente de Pequena Variabilidade  $G = 40 \text{ kN}$
- b) Ação Variável Predominante  $Q_1 = 20 \text{ kN}$
- c) MATERIAL: Aço Estrutural ASTM A-36 ( $f_y = 250 \text{ MPa}$ ;  
 $E=205000 \text{ MPa}$   $G = 0.385 E$  ;  $\nu_a = 0.30$  Coeficiente de  
 Poisson;  $\gamma_a = 77 \text{ kN/m}^3$ ; Peso Específico)

d) Vão da viga  $L = 6000 \text{ mm}$

Determina-se os seguintes valores:

- 1) Resistência de Cálculo ao Momento Fletor ( $\phi_b M_n$ )
- 2) Resistência de Cálculo ao Esforço Cortante ( $\phi_v V_n$ )
- 3) Valor máximo do deslocamento ( $\delta_{max}$ ).

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Será utilizada, na resolução deste exemplo a especificação NBR8800/86 (Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios-Método dos Estados Limites), considerando as seguintes hipóteses:

VIGA CONTIDA LATERALMENTE EM TODA A SUA EXTENSÃO

VIGA CONTIDA LATERALMENTE APENAS NOS APOIOS A e B

VIGA CONTIDA LATERALMENTE NOS PONTOS A, B e C

SOLUÇÃO: Inicialmente é mostrado o esquema estrutural da viga em questão na figura 5.7.

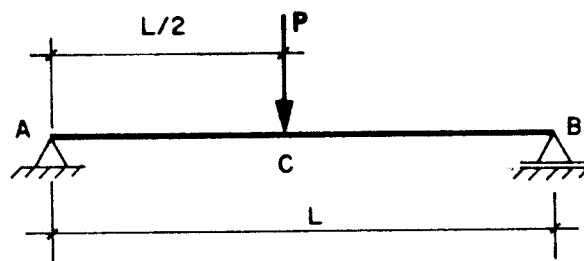


FIG. 5.7- Viga simplesmente apoiada sujeita ao carregamento indicado pertencente a uma determinada estrutura de aço.

#### 5.2.1- Pré-dimensionamento expedito

Utilizando como referência a especificação [7] para se ter uma idéia das dimensões da seção transversal da viga.

Nêsse caso será adotado  $\sigma_{adm} = 0.66(f_y) = 16.5 \text{ kN/cm}^2$   
(Seção Compacta)

Da teoria clássica da Resistência dos Materiais têm-se:

### TEORIA DA FLEXÃO SIMPLES

$$\sigma_{at} = M_{max} / W_x \leq \sigma_{adm} \quad (5.2)$$

Logo o módulo de resistência  $W_x$  será:

$$W_{necess.} \geq M_{max} / \sigma_{adm}$$

Observando a figura 5.7 tem-se que a carga total será:

$$P = G + Q_1 = 40 + 20 = 60 \text{ kN}$$

O momento fletor máximo é dado por :  $M_{max} = PL/4$

$$M_{max} = (60 \times 600)/4 = 9000 \text{ kN.cm}$$

$$W_{xnecess} \geq 9000/16.5 \geq 545 \text{ cm}^2$$

A altura da seção transversal da viga por considerações práticas segundo [153] será tomada igual a:

$$d \approx L / 20 \quad , \quad d = 600/20 = 30 \text{ cm}$$

$$\text{Largura da mesa } b_f = d/2 = 15 \text{ cm}$$

Espessura da mesa  $t_f$ : Segundo [7] da tabela B5.1 tem-se:

$$\text{Limitação da Relação } b_f/2t_f \leq 171 / \sqrt{F_y, \text{MPa}} \leq 11$$

$$\text{Logo } t_f \geq \frac{b_f}{22} \geq \frac{150}{22} \geq 6.8 \text{ mm}$$

Espessura da alma  $t_w$  : Segundo [7]

$$d/t_w \leq 640/\sqrt{F_{y,ksi}} \leq 107, \quad t_w \geq d/107 \geq 300/107 \geq 2.8 \text{ mm}$$

Limitação da flecha:

$$\delta \leq \delta_{adm}, \quad \frac{P\ell^3}{48EI} \leq \delta_{adm}, \quad I \geq \frac{P\ell^3}{48E\delta_{adm}} \quad (\delta_{adm} = \frac{\ell}{360} = 1,67\text{cm})$$

$$I \geq \frac{60 \times (600)^3}{48 \times 20.500 \times 1,67}, \quad I_{necess} \geq 7.887\text{cm}^4$$

Partindo portanto dessa idéia inicial seja adotar um perfil soldado segundo os padrões de fabricação de [145] apresentando as seguintes dimensões da seção transversal:

PERFIL SOLDADO IS 305 x 51.9 , conforme a figura 5.8

$$d = 305 \text{ mm} ; b_f = 175\text{mm} ; t_f = 12.5 \text{ mm} ; t_w = 8\text{mm} ; h_w = 280\text{mm}$$

### 5.2.2- Características geométricas do perfil IS 305 x 51,9

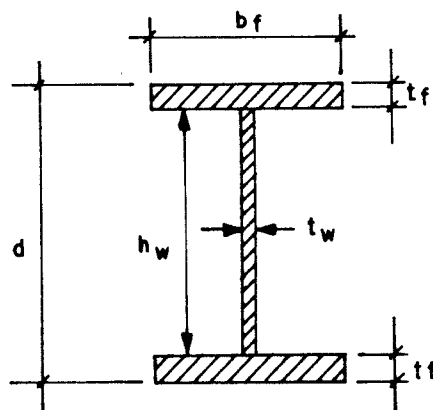


FIG. 5.8- Perfil soldado de mesas iguais

$$A = 66.1 \text{ cm}^2, \quad I_x = 10826.9 \text{ cm}^4, \quad r_x = 12,79 \text{ cm} ; W_x = 710 \text{ cm}^3;$$

$$I_y = 1117.7 \text{ cm}^4 ; r_y = 4.11 \text{ cm} ; W_y = 127,7 \text{ cm}^3$$

$$\text{Momento de Inércia a Torção } (I_t = 2/3 b_f t_f^3 + 1/3 d t_w^3)$$

$$I_t = 2/3 (17.5)(1.25)^3 + 1/3 (30.5)(0.8)^3 \approx 28 \text{ cm}^4$$

$$\text{Módulo Plástico } \{Z_x = b_f t_f d [1 + (d - 2t_f)t_w/6 b_f t_f]\} [128]$$

$$Z_x = 781 \text{ cm}^3$$

$$\text{Fator de forma} = Z/W = 781/710 = 1.10$$

5.2.3- Verificação da segurança estrutural segundo [12]  
primeira hipótese - viga contida lateralmente em toda  
extensão

a)-Solicitação de Cálculo  $M_d$

Aplicando a expressão (5.1)

$$M_d = \gamma_g G + \gamma_{q1} Q_1 = \left[ \frac{[1.3(40) + 1.4(20)] \times 600}{4} \right] = 12000 \text{ kN.cm}$$

b) -Resistência ao Momento Fletor  $-M_n$

Inicialmente segundo o anexo D de [12] caracteriza se  
essa seção representa viga não esbelta para o estado limite  
FLA definido na Tabela 27

Portanto têm-se:

$$\lambda = h_w / t_w = 35 \quad ; \quad \lambda_r = 5.6 \sqrt{E / f_y} = 5.6 \sqrt{205000/250} = 160$$

Portanto  $\lambda < \lambda_r$  (Viga Não Esbelta)

Estado Limite Aplicável (FLM)

$$\lambda = b_f / 2 t_f = 175/2 \times 12.5 = 7 \quad ; \quad \lambda_p = 0.38 \sqrt{E / f_y}$$

$$\lambda_p = 0.38 \sqrt{205000/250} = 11, \quad \lambda < \lambda_p$$

$$e \quad M_n = M_{pl} = Z_x f_y = 781 \times 25 = \underline{19525 \text{ kN.cm}}$$

Estado Limite Aplicável (FLA)

$$\lambda = h_w/t_w = 280/8 = 35 ; \quad \lambda_p = 3.5 \sqrt{E / f_y}$$

$$\lambda_p = 3.5 \sqrt{205000/250} = 100.22 , \quad \lambda < \lambda_p$$

$$M_n = M_{pl} = Z_x f_y = 781 \times 25 = \underline{19525 \text{ kN cm}}$$

Limitação 5.4.1.3.1 de[12]

$$M_n \leq 1.25 W_x f_y \leq (1.25)(710)(25) \leq \underline{22187.5 \text{ kN.cm}}$$

Portanto  $M_n = 19525 \text{ kN cm}$

$$M_{d(\text{resist})} = \phi_b M_n = (0.90)(19525) = 17572.5 \text{ kN.cm}$$

Logo:

$$M_{d(\text{resist})} > M_d$$

(5.3)

#### 5.2.4- Segunda hipótese - viga contida lateralmente apenas nas extremidade A e B

Nesse caso o valor da distância entre duas seções contidas lateralmente ( $L_b$ ) será:  $L_b = 600 \text{ cm}$ .

Estado Limite Aplicável (FLT)



Parâmetro de Esbeltez (  $\lambda$  )  $\lambda = L_b / r_y = 600/4.11 = 146$

$$\lambda_p = 1.75 \sqrt{E / f_y} = 1.75 \sqrt{205000/250} = 50$$

$$\lambda_r = \frac{0.707 C_b \beta_1}{M_r} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{4 \beta_2}{C_b^2 \beta_1^2} M_r^2}}$$

$$\beta_1 = \pi \sqrt{G E} \sqrt{I_t A}$$

$$\beta_1 = \pi \sqrt{0.385 \times 20500 \times 20500} \sqrt{28 \times 66.1}$$

$$\beta_1 = 1719150 \text{ kN.cm}$$

$$\beta_2 = 6.415 \frac{A (d - t_f)^2}{I_t} = (6.415 \times 66.1)(29.25)^2 / 28$$

$$\beta_2 = 12957$$

Momento Fletor de flambagem elástica ( $M_r$ )

$$M_r = (f_y - f_r) W, \quad f_r \text{ -Tensão Residual} = 115 \text{ MPa [12],}$$

página 124

$$M_r = (25 - 11.5) 710 = 9585 \text{ kN.cm}$$

$$C_b = 1.0 \text{ (pagina 44 da NBR 8800/86)}$$

Substituindo esses valores na expressão de  $\lambda_r$ , obtem-se o valor de  $\lambda_r = 205$

Portanto comparando os valores de  $\lambda$ ,  $\lambda_r$ ,  $\lambda_p$

$$\lambda = 146, \lambda_r = 205, \lambda_p = 50, \text{ logo tem-se: } \lambda_p < \lambda < \lambda_r$$

Nesse caso o valor da Resistência Nominal ( $M_n$ ) ao Momento Fletor será dado por:

$$M_n = M_{pl} - (M_{pl} - M_r) \frac{\lambda - \lambda_p}{\lambda_r - \lambda_p}$$

$$M_n = 19925 - (19925 - 9585) \frac{146 - 50}{205 - 50} = 13521 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Estado Limite (FLM)} - M_n = M_{pl} = Z f_y = \underline{19925 \text{ kN.cm}}$$

$$\text{Estado Limite (FLA)} - M_n = M_{pl} = Z f_y = \underline{19925 \text{ kN.cm}}$$

$$\text{Estado Limite (FLT)} - M_n = \underline{13521 \text{ kN.cm}}$$

Limitação de [12] no item 5.4.1.3.1  $M_n \leq 1.25 W f_y$

$$M_n \leq (1.25) \times (710) \times (25) \leq 22187.5 \text{ kN.cm}$$

Considerando os três valores obtidos aos estados limites (FLT, FLM e FLA),  $M_n$  é o menor. Portanto  $M_n = 13521 \text{ kN.cm}$

$$M_{dresist} = \phi_b M_n = 0.90 \times 13521 = 12170 \text{ kN.cm}$$

Logo:

$M_{dresist} \geq M_d$
------------------------

### 5.2.5- Terceira hipótese-viga contida lateralmente nos pontos A, B e C

Nesse caso observando a figura 5.7, tem-se os segmentos contidos lateralmente AC e CB

Seja portanto nesse caso  $L_b = 600/2 = 300$  cm

Estado Limite Aplicável (FLT)

$$\lambda = L_b / r_y = 300/4.11 = 73$$

Como já foi visto anteriormente  $\lambda_p = 50$

Nesse caso o Coeficiente  $C_b$  segundo [12] é dado pela expressão:

$$C_b = 1.75 + 1.05 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) + 0.3 \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \leq 2.3$$

Observando o diagrama de momentos fletores das figuras 5.9 e 5.10 os segmentos não contidos lateralmente AC e CB o trecho é linear e portanto a relação dos dois momentos fletores  $M_1$  e  $M_2$  do trecho não contido lateralmente será igual a  $M_1/M_2 = 0$ , logo o valor de  $C_b$  será :  $C_b = 1.75$ .

Substituindo os valores já calculados de  $\beta_1, \beta_2, M_r, C_b$  na expressão de  $\lambda_r$  encontra-se o valor de  $\lambda_r = 222$

Logo comparando os valores  $\lambda=73, \lambda_p = 50$  e  $\lambda_r = 222$ , conclui-se que:  $\lambda_p < \lambda < \lambda_r$ . Nesse caso o valor de  $M_n$  será dado pela expressão anterior

$$M_n = M_{pl} - (M_{pl} - M_r) \frac{\lambda - \lambda_p}{\lambda_r - \lambda_p}$$

$$M_n = 19925 - (19925 - 9585) \frac{(73 - 50)}{(222 - 50)} = \underline{18542 \text{ kN.cm}}$$

Estado Limite Aplicável (FLM) -  $M_n = \underline{19925 \text{ kN.cm}}$

Estado Limite Aplicável (FLA) -  $M_n = \underline{19925 \text{ kN.cm}}$

Estado Limite Aplicável (FLT) -  $M_n = \underline{18542 \text{ kN.cm}}$

Limitação de [12] no item 5.4.1.3.1 -  $M_n \leq 1.25 W f_y$

$$M_n \leq 1.25 \times 710 \times 25 \leq 22187.5 \text{ kN.cm}$$

Comparando os três estados limites (FLM, FLA e FLT) o valor de  $M_n$  será o menor dos três valores ou seja:  $M_n = 18542 \text{ kN.cm}$

Logo  $M_{dresist} = \phi_b M_n = 0.90 \times 18542 \text{ kN.cm} = 16688 \text{ kNcm}$

Portanto

$M_{dresist} \geq M_d$
------------------------

#### 5.2.6- Resistência de cálculo à força cortante

Inicialmente faz-se a determinação dos esforços cortantes para o carregamento indicado, calculando separadamente para a carga permanente de  $G = 40 \text{ kN}$  e  $Q_1 = 20 \text{ kN}$ , cujos valores são mostrados nos diagramas de esforços cortantes das figuras 5.11 e 5.12.

Para  $P_G = 40 \text{ kN}$  e  $P_{Q1} = 20 \text{ kN}$ , encontram-se respectivamente os seguintes valores máximos para os esforços cortantes:

$$V_{G_{\max}} = 20 \text{ kN} \quad ; \quad V_{Q1_{\max}} = 10 \text{ kN}$$

O esforço cortante de cálculo  $V_d$  segundo a expressão (5.1) será:  $V_d = \gamma_g V_{G_{\max}} + \gamma_{Q1} V_{Q1_{\max}} = 1.3 \times 20 + 1.4 \times 10 = 40 \text{ kN}$

A resistência de cálculo ao esforço cortante de almas de perfis I é prescrito no item 5.5.2 de [12], onde mostra que o valor do esforço resistente de cálculo  $V_{d_{\text{resist}}} = \phi_v V_n$ , onde  $\phi_v = 0.90$

a)-Determinação da Resistência Nominal  $V_n$

Segundo a especificação [12] tem-se:

$$\lambda = 280/8 = 35$$

$$\lambda_p = 1.08 \sqrt{k E / f_y} \quad , \quad \lambda_r = 1.40 \sqrt{k E / f_y}$$

$$k = 4 + \frac{5.34}{(a/h)^2} \quad , \quad \text{para } a/h < 1$$

$$k = 5.34 + \frac{4}{(a/h)^2} \quad , \quad \text{para } a/h \geq 1 \quad (k=5.34 \text{ para } a/h > 3)$$

$$V_{pl} = 0.6 A_w f_y \quad (\text{para análise elástica})$$

$$V_{pl} = 0.55 A_w f_y \quad (\text{para análise plástica})$$

a = distância entre enrijecedores transversais

h = altura livre da alma entre mesas

t<sub>w</sub> = espessura da alma

Sendo a viga travada no vão central (Ponto C) seja considerar o valor de  $a = 300\text{cm}$ , logo  $a/h = 300/30.5 = 9,83 > 3$ ,  $k = 5.34$

Logo os valores de  $\lambda_p$  e  $\lambda_r$  serão respectivamente:

$$\lambda_p = 1.08 \sqrt{(5.34 \times 205000)/250} = 71$$

$$\lambda_r = 1.40 \sqrt{(5.34 \times 205000)/250} = 93$$

Comparando esses valores com o de  $\lambda = 35$ , tem-se:

$\lambda < \lambda_p$ , nesse caso [12] mostra que:

$$V_n = V_{pl} = 0.55 A_w f_y = 0.55 h_w t_w f_y = 0.55 \times 28 \times 0.8 \times 25$$

$$V_n = 308 \text{ kN}$$

Logo o esforço resistente de cálculo ao cortante será dado por:

$$V_{dresist} = \phi_v V_n = 0.90 \times 308 = 277.2 \text{ kN}$$

$$\boxed{V_{dresist} > V_d} \quad (5.4)$$

### 5.2.7- Deslocamento máximo - $\delta_{max}$

Segundo o ANEXO C de [12] onde se recomendam os valores máximos para deformações, como se trata de estado limite de utilização, devem ser usados valores nominais das ações.

Da teoria clássica das Estruturas para a viga em questão solicitada ao carregamento indicado, tem-se:

$$\delta_{\max} = \frac{P L^3}{48 EI} = \frac{20 \times (600)^3}{48 \times 20500 \times 10826.9} \quad (P_{q1} = 20 \text{ kN})$$

$\delta_{\max} = 0.405 \text{ cm}$	ou $\approx$	$L/1481$
------------------------------------	--------------	----------

Supondo que esta viga pertença a uma estrutura de um Edifício Industrial, o deslocamento máximo vertical onde foi considerada a ação variável de  $P_{q1} = 20 \text{ kN}$ , tem-se que:

Segundo [12] na Tabela 26 da página 122  $\delta_{adm} = L/360$

Portanto  $\delta_{\max} < \delta_{adm}$  (OK)

#### 5.2.8- Resumo geral dos resultados finais

Momento Fletor de Cálculo  $-M_d = 12000 \text{ kN cm}$

Esforço Cortante de Cálculo  $V_d = 40 \text{ kN}$

##### 5.2.8.1- Primeira Hipótese

$\phi_b M_n = 17572.5 \text{ kN cm}$

##### 5.2.8.2- Segunda Hipótese

$\phi_b M_n = 12032 \text{ kN cm}$

### 5.2.8.3- Terceira Hipótese

$$\phi_b M_n = 16376,4 \text{ kN cm}$$

### 5.2.8.4- Resistência de Cálculo ao Cortante

$$\phi_v V_n = 277,2 \text{ kN}$$

### 5.2.8.5- Deslocamento Máximo

$$\delta_{\max} = 0.405 \text{ cm} \approx L/1481$$

### 5.2.8- Diagramas dos Esforços Solicitantes para Ação Permanente e Ação Variável Predominante

A seguir poderá ser visto nas figuras 5.9 a 5.12 os respectivos diagramas de esforços cortantes e de momentos fletores para o carregamento indicado solicitante da viga em questão.

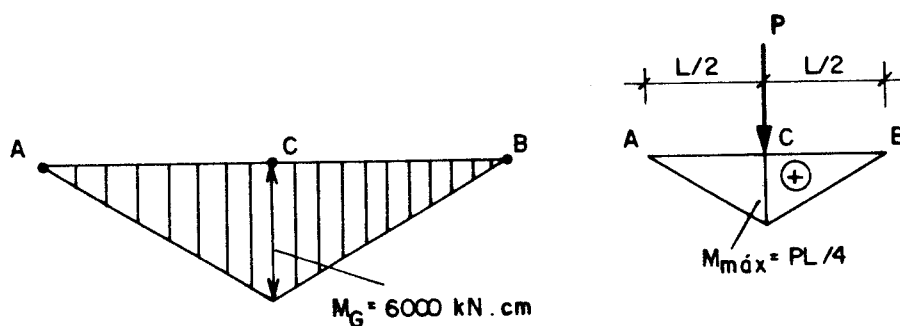


FIG. 5.9- Diagrama do momento fletor para  $P_G=40 \text{ kN}$



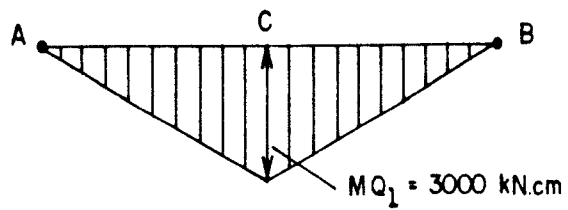


FIG. 5.10- Diagrama do momento fletor para  $P_{Q1} = 20\text{ kN}$

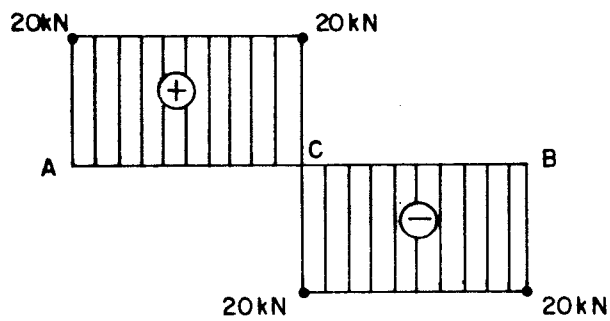


FIG. 5.11- Diagrama de esforço cortante para  $P_G = 40\text{ kN}$

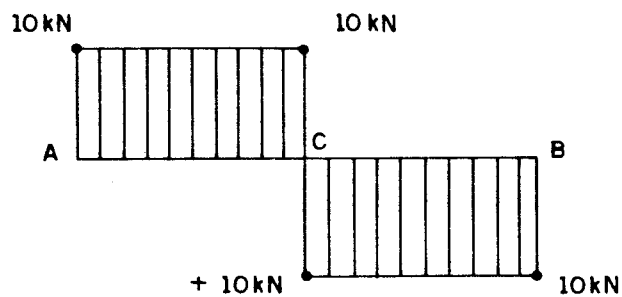


FIG. 5.12- Diagrama de esforço cortante para  $P_{Q1} = 20\text{ kN}$

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES E COMENTARIOS

Através deste trabalho procurou-se mostrar que, dentro do campo das estruturas de aço, existe uma ampla concentração de estudos e pesquisas na área da flambagem dos perfis estruturais. Embora para uma barra fletida se faça a verificação da sua capacidade de resistência à flexão, e ao cisalhamento ou mesmo aos deslocamentos vê-se que no caso específico das vigas de perfis estruturais em aço, além dessas verificações, a condição de segurança vai mais além, em virtude principalmente da esbeltez dos elementos componentes dos perfis (chapas) surgem os aspectos da flambagem local e flambagem global, que podem dependendo do grau de importância levar a estrutura ao colapso.

Também se constatou que no campo teórico a análise plástica contribui muito para o desenvolvimento das teorias estruturais, reconhecendo que evidentemente constitui um campo complexo, pois envolve conhecimentos

profundos do campo matemático e da análise estrutural, que, graças a muitos estudiosos do passado, que legaram aos dias atuais uma grande contribuição para esse desenvolvimento científico, apesar de tudo, torna-se necessário uma continuação da busca do conhecimento, principalmente no campo dos trabalhos experimentais, através de ensaios de modelos, o que certamente resultará em benefícios às futuras gerações.

Um aspecto importante diz respeito aos tipos de perfis estruturais utilizados como vigas. Ficou claro que as mais notáveis contribuições no campo de resultados experimentais, foram obtidos em perfis estruturais laminados, com padrões americano e europeu e, no Brasil a maior faixa de utilização constitui-se de perfis laminados e soldados, entretanto o campo da pesquisa desses elementos aqui é pequeno principalmente quando destacado alguns tópicos de importância para a análise estrutural tais como: fator de forma, módulo plástico, tensões residuais, flambagem local e global.

Na esfera da estabilidade dos elementos fletidos notou-se que a maior parcela de contribuições ao dimensionamento foram dados através de ensaios experimentais no campo da flambagem local e lateral dos perfis estruturais, principalmente analisando o aspecto do comportamento elástico e inelástico desses elementos.

Com relação ao aspecto normativo, constatou-se que as normas tiveram calçadas as suas formulações e critérios de dimensionamento após longos anos de trabalhos no campo dos ensaios experimentais. No Brasil vê-se que a área do projeto estrutural em aço é dotada de uma norma que, evidentemente, no seu conteúdo tem muita coisa absorvida de normas de outros países. É primordial que, não do ponto de vista teórico, pois esse é um campo universal do conhecimento, mas no campo experimental sejam feitos estudos e ensaios em

laboratórios de institutos de pesquisa, dos perfis estruturais produzidos pelos fabricantes do Brasil, para que os resultados desses ensaios possam comprovar as formulações teóricas propostas e dar um maior suporte ao exercício e à utilização das normas técnicas no campo do projeto estrutural de obras como: edifícios industriais, edifícios de andares múltiplos, pontes e grandes estruturas, etc.

No capítulo relacionado aos exemplos, procurou-se simplificar de maneira objetiva, a se dar um exemplo numérico, a fim de que se pudesse ter uma melhor compreensão deste trabalho e daquilo que foi proposto, que era uma melhor compreensão da norma brasileira NBR 8800/86 e confrontá-la com outras normas, para verificar, procedimentos e recomendações. Notou-se que, nos resultados finais de verificação da estabilidade e da resistência de uma determinada viga solicitada por ações externas, não houve muita discrepância de valores, com relação à resistência nominal ao momento fletor, resistência nominal ao cortante e aos valores das solicitações de cálculo ao momento e ao cortante.

Este trabalho muito contribuiu no esclarecimento do autor, sobre os procedimentos normativos da NBR 8800, em relação ao dimensionamento das barras solicitadas na flexão principalmente se for levado em conta o aspecto da mudança da filosofia dos métodos de dimensionamento, com a introdução do método dos estados limites, e acredita-se que também contribuirá no esclarecimento de possíveis dúvidas de outros profissionais da área.

## CAPÍTULO VII

### BIBLIOGRAFIA

Neste trabalho como foi o objetivo primordial esclarecer os procedimentos normativos da especificação [12] em relação ao dimensionamento de barras fletidas, apresenta-se a seguir uma relação que pode ser considerada em primeira instância como bastante extensa, mas em se tratando da importância do assunto em questão e também pela escassez de material bibliográfico sobre o campo das Estruturas de Aço no Brasil, tanto no campo de publicações quanto o de periódicos, apenas se relacionou este volume razoável de informações a fim de permitir abrir mais o campo de interesse da pesquisa com relação ao campo de aplicação do aço nas Estruturas de um modo geral em nosso país.

1. AÇO MINAS GERAIS. Edifícios de andares múltiplos. Belo Horizonte: Açominas, 1979. 103p. (Coletânea Técnica do Uso do Aço, v.1)
2. AÇO MINAS GERAIS. Elementos estruturais e ligações. 2.ed. Belo Horizonte: Açominas, 1982. 161p. (Coletânea Técnica do Uso do Aço, v.3)

3. AÇO MINAS GERAIS. Galpões em estrutura metálica. 2.ed. Belo Horizonte: Açominas, 1981. v.2, 123p. (Coletânea Técnica do Uso do Aço, v.2)
4. ADAMS, P.F., KRENTZ, A., KULAK, G.L. Limit states design in structural steel SI units. 2.ed. Ontario: Canadian Institute of Steel Construction, 1981. 303p.
5. ALBERT, C., DAWE, J.L. Buckling of continuous steel girders with flange restraint. Canadian Journal of Civil Engineering, v.17, p.121-128, September, 1989.
6. ALVAREZ, A. La estructura metálica hoy. 2.ed. Madrid: Libreria Tecnica Bellisco, 1975. v.2
7. AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. Manual of steel construction allowable stress design (AISC-90). 9.ed. Chicago, 1990.
8. AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. Manual of steel construction load & resistance factor design (AISC-86). Chicago, 1986.
9. AMON, R., KNOBLOCH, B., MAZUMDER, A. Steel design for engineers and architects. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982. 412p.
10. ANDERSON, J.M., TRAHAIR, A.M. Stability of monosymmetric beams and cantilevers. Journal of the Structural Division, ASCE, v.98, n.1, p.269-286, January, 1972.

11. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8681: Ações e segurança nas estruturas. Rio de Janeiro, 1984.
12. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8800: Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios (método dos estados limites). Rio de Janeiro, 1986.
13. AUSTIN, W.J. Strength and design of metal beam-columns. Journal Structural Division, ASCE, v.87, n.4, p.1-32, April, 1961.
14. AZCUNAGA, F.R.A. Construcciones metálicas. 4.ed. Madrid: Patronato de Publicaciones de La Escuela Especial de Ingenieros Industriales, 1958. 799p.
15. BAKER, J., HORNE, M.R., HEYMAN, J. The steel skeleton plastic behaviour and design. 2.ed. Cambridge: At The University Press, 1965. v.2, 408p.
16. BALLIO, G., MAZZOLANI, F.M. Theory and design of steel structures. 2.ed. London: Chapman and Hall, 1983. 632p.
17. BARRETO, A.F. Como adquirir aço. Construção, São Paulo, v.14, n.165, p.29-32, julho, 1990.
18. BARSOM, J.M. Material considerations in structural steel design. AISC Engineering Journal, p.127-139, Third Quarter, 1987.
19. BASLER, K., THÜRLIMANN, B. Plate girders strength in bending. Transactions ASCE, Part 2, v.128, p.655-735, August, 1961.

20. BATDORF, S.B. Theories of plastic buckling. Journal of the Aeronautical Sciences, v.16, n.7, p.405-408, January, 1949.
21. BEEDLE, L.S. Diseño plástico de marcos de acero. México: Cia. Ed. Continental, 1970. 452p.
22. BEEDLE, L.S. Ductility as a basis for steel design. In: HEYMAN, J., LECKIE, F.A. (eds). Engineering plasticity. Cambridge: At the University Press, 1968. p.41-76
23. BEEDLE, L.S., TALL, L. Basic column strength. Journal of the Structural Division, ASCE, v.86, n.7, p.139-173, July, 1960.
24. BELLEI, I.H. Proteção do aço à corrosão. Construção, São Paulo, v.14, n.161, p.5-8, março, 1990. (Encarte Técnico CTCEN/PINI, CTCEN-007)
25. BELLEI, I.H. et alii. Aço na construção: produtos de aço para uso estrutural. Construção, São Paulo, p.7-12, outubro, 1987. (Encarte Técnico ABCEN/PINI, 03/86)
26. BEZERRA, L.H. Estruturas metálicas: introdução à norma brasileira NB-14/84. Niterói: Centro Tecnológico da Universidade Federal Fluminense, 1984. 52p. (notas de aulas).
27. BIJLAARD, P.P., ITHACA, N.Y. Theory of plates and application to simply supported plates subjected to bending or eccentric compression in their plane. Journal of Applied Mechanics, ASME, p.27-34, March, 1956.



28. BLEICH, F. Buckling strength of metal structures. New York: McGraw-Hill, 1952. 507p.
29. BOOTHBY, T.E. The application of flexural methods to torsional analysis of thin-walled open sections. AISC Engineering Journal, p.189-198, Fourth Quarter, 1984.
30. BOSE, B. The influence of torsional restrain stiffness at supports on the buckling strength of beams. The Structural Engineer, v.60B, n.4, p.69-75, December 1982.
31. BOWER, J.E. Experimental stress in wideflange beams with holes. Journal of the Structural Division, ASCE, v.92, n.5, p.167-185, October, 1966.
32. BOWLES, J.E. Diseño de acero estructural. México: Limusa, 1984. 602p.
33. BRADFORD, M.A. Buckling of longitudinally stiffened plates in bending and compression. Canadian Journal of Civil Engineering, v.16, n.5, p.607-614, October, 1989.
34. BRADFORD, M.A. Inelastic buckling of tapered monosymmetric I-beams. Engineering Structures, v.11, p.119-126, April, 1989.
35. BRASIL. Ministério da Indústria e Comércio. Secretaria de Tecnologia Industrial. Manual brasileiro para cálculo de estruturas metálicas. Brasília: MIC/STI, 1986. v.1 e 2

36. BRESLER, B., LIN, T.Y., SCALZI, J.B. Diseño de estructuras de acero. Mexico: Limusa, 1978. 926p.
37. BRUSH, D.O., ALMROTH, B.O. Buckling of bars, plates and shells. New York: McGraw-Hill, 1975. 379p.
38. CAMPORA, G.F. Cálculo plástico: análisis y diseño limite de sistemas estructurales planos. Macagno: Landa y Cia, 1967. 428p.
39. CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION. Steel structures for buildings (limit states design). Ontario, 1984. 186p. (CAN3-S16.1-M84)
40. CATÁLOGO de perfis soldados. Rio de Janeiro: FEM - Fábrica de Estruturas Metálicas, 1984. 40p.
41. CHAJES, A. Principles of structural stability theory. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1974. 336p.
42. CHAJES, A. Stability behaviour illustrated by simple models. Journal of the Structural Division, ASCE, v.95, n.6, p.1153-1188, June, 1969.
43. CHAKRABARTY, J. Theory of plasticity. 2.ed. Singapore: McGraw-Hill, 1988. 791p.
44. CHEN, W.F., HAN, D.J. Plasticity for structural engineers. New York: Springer-Verlag, 1988. 606p.
45. CHEN, W.F., LUI, E.M. Stability design criteria for steel members and frames in the United States. Journal of Constructional Steel Research, v.5, p.31-74, 1985.

46. CHEN, W.F., LUI, E.M. Structural stability: theory and implementation. Barking, UK: Elsevier, 1987. 490p.
47. CHERNENKO, D.E., KENNEDY, D.J.L. An analysis of the performance of welded wide flange columns. Canadian Journal of Civil Engineering, v.18, p.537-555, 1991.
48. CHIA, C.Y. Nonlinear analysis of plates. New York: McGraw-Hill, 1980. 422p.
49. CLARK, J.W., HILL, H.N. Lateral buckling of beams. Transactions ASCE, Part 2, v.127, p.180-201, 1962.
50. CLARK, J.W., JOMBOCK, J.R. Lateral buckling of I-beams subjected to unequal end moments. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.83, n.3, p.1291.1-19, July, 1957.
51. CLARKE, A.B., COVERMAN, S.H. Structural steelwork: limit state design. London: Chapman and Hall, 1987. 282p.
52. COLUMN Research Council Symposium on Metal Compression Members. Transactions ASCE, Part 2, v.127, p.77-560, 1962.
53. COMPANHIA SIDERÚRGICA NACIONAL. Sistema Siderbrás. Gerência de Assistência Técnica. Catálogo de produtos. Rio de Janeiro, 1980. 151p.
54. COOPER, S.E. Designing steel structures methods and cases. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1985. 762p.

55. CRAWLEY, S.W., DILLON, R.M. Steel buildings analysis and design. 3.ed. Washington: John Wiley & Sons, 1984. 673p.
56. DERRY, T.K., WILLIAMS, T.J. A short history of technology from the earliest times to a.d. 1900. 3.ed. Oxford: Oxford University Press, 1973. 782p.
57. DIMAGGIO, F. et alii. Lateral buckling of beams in bending and compression. Journal of the Aeronautical Sciences, p.574-576, August, 1952.
58. DOUGHERTY, B.K. Buckling of beams subject to distributed loadings. The Structural Engineer, v.69, n.1, p.5-8, January, 1991.
59. DOWLING, P.J. New directions in european structural steel design. Journal of Constructional Steel Research, v.17, p.113-140, 1990.
60. DOWLING, P.J. et alii. A development in the automed design and fabrication of portal framed industrial buildings. The Structural Engineer, v.60A, n.10, p.311-319, October, 1982.
61. DOWLING, P.J., KNOWLES, P., OWENS, G.W. Structural steel design. Cambridge: Butterworths, 1988. 399p.
62. DRIVER, R.G., KENNEDY, D.J.L. Combined flexure and torsion of I-shaped steel beams. Canadian Journal of Civil Engineering, v.16, n.2, p.124-139, April, 1989.
63. DUBAS, P., MAQUOI, R., MASSONET. C. Behaviour and design of steel plated structures. IABSE Periodica, n.S31/85, p.17-44, 1985.

64. ELGAALY, M. Web design under compressive edge loads. AISC Engineering Journal, v.20, n.4, p.153-166, 1983.
65. EUROPEAN CONVENTION FOR CONSTRUCTIONAL STEELWORK. FCCS-EG77-2E/78: European recommendations for steel construction. London, 1978. 354p.
66. EVANS, H.R., MOUSSEF, S. Design aid for plate girders. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, v.85, p.89-104, March, 1988.
67. EVANS, H.R., TANG, K.H. The influence of longitudinal web stiffeners upon the collapse behaviour of plate girders. Journal of Constructional Steel Research, v.4, p.201-234, 1984.
68. EVANS, H.R., TANG, K.H. Longitudinal stiffeners for girder webs; their behaviour and design. Journal of Constructional Steel Research, v.6, p.173-197, 1986.
69. FAELLA, C., MAZZOLANI, F.M. Instabilità-flessotorsionale inelastica de travi metalliche sotto carichi trasversali. Costruzioni Metalliche, v.24, n.6, p.433-450, nov.-dic. 1972.
70. FERRAZ, M.J.O. Perfis de abas largas e paralelas: fabricação e emprego. Metalurgia, São Paulo, ABM, v.33, n.260, p.3-14, janeiro, 1977.
71. FLEISCHER, W.H. Design optimization of plate girders and weld-fabricated beams for building construction. AISC Engineering Journal, v.22, n.1, p.1-10, 1985.

72. FRUCHTENGARTEN, J. Dimensionamento de estruturas de aço I e II. São Paulo: EPUSP, FDTE/COSIPA, 1988. v.1, p.217; v.2, p.1.1-5.29
73. GALAMBOS, T.V. Guide to stability design criteria for metal structures. 4.ed. New York: John Wiley & Sons, 1988. 786p.
74. GALAMBOS, T.V. History of steel beam design. AISC Engineering Journal, p.141-147, Fourth Quarter, 1977.
75. GALAMBOS, T.V. Inelastic lateral buckling. Journal of the Structural Division, ASCE, v.89, n.5, p.217-242, October, 1963.
76. GALAMBOS, T.V. Structural members and frames. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1968. 373p.
77. GALAMBOS, T.V., RAVINDRA, M.K. Proposed criteria for load and resistance factor design. AISC Engineering Journal, v.15, n.1, p.8-17, 1978.
78. GATASS, M., ANDRADE, S.A.L. Comportamento de estruturas de aço: vigas. Rio de Janeiro: PUC-RJ/DEC, 1986. v.7, 61p. (Notas de aula, NA 06/86)
79. GATASS, M., ANDRADE, S.A.L. Estruturas de aço: formulários e tabelas. Rio de Janeiro: PUC-RJ/DEC, 1985. 75p. (Notas de aula, NA 02/85)
80. GATASS, M., ANDRADE, S.A.L. Introdução à NB-14/86. Rio de Janeiro: PUC-RJ/DEC, 1986. 19p. (AT 08/86)
81. GAYLORD, E.H., GAYLORD, C.N. Design of steel structures. 2.ed. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1972. 663p.

82. GAYLORD, E.H., GAYLORD, C.N. Structural engineering. New York: McGraw-Hill, 1968. Section 7, p.1-46
83. GOMES, F.M. História da siderurgia no Brasil. Belo Horizonte: Ed. Itatiaia, 1983. 409p.
84. HAAIJER, G. Plate buckling in the strain-hardening range. Transactions ASCE, v.124, p.117-148, 1959.
85. HAAIJER, G., THÜRLIMANN, B. Inelastic buckling in steel. Transactions ASCE, v.125, p.308-344, 1960.
86. HARRIS, C.O. Introduction to stress analysis. New York: The MacMillan Company, 1959. 329p.
87. HENN, W. Proyectos y construcciones. Barcelona: Gustavo Gili, 1966. 424p.
88. HEREDIA, O.B.L. Estructuras de acero: comportamiento y diseño. México: Ed. Limusa, 1980. 637p.
89. HEYMAN, J., LECKIE, F.A. (eds). Engineering plasticity. Cambridge: At the University Press, 1968. 706p.
90. HIGGINS, R.A. Propriedades e estruturas dos materiais em engenharia. 2.ed. São Paulo: Difusão Editorial, 1982. 471p.
91. HILL, H.N. The lateral instability of unsymmetrical I-beams. Journal of the Aeronautical Sciences, v.9, n.5, p.175-180, March, 1942.

92. HOADLEY, P.W. Pratical significance of LFRD beam buckling factors. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.117, n.3, p.988-996, March, 1991.
93. HORNE, M.R. The flexural torsional buckling of members of symmetrical I-section under combined trust and unequal terminal moments. Quarter Journal Mechanics and Applied Mathematics, London, v.7, n.4, p.410-426, 1954.
94. JOHNSTON, B.G. Guide to stability design criteria for metal structures. 3.ed. New York: John Wiley & Sons, 1976. 616p.
95. JOHNSTON, B.G., LIN, F.J., GALAMBOS, T.V. Basic steel design. 3.ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall International, 1986. 378p.
96. JONG, H. An approach to more complicated lateral buckling problems. Journal of Constructional Steel Research, v.16, p.231-246, 1990.
97. KEMP, A.R. Quantifying limit-states of rotation capacity in flexural members. Proceedings of the Institution Civil Engineers, Part 2, v.89, p.387-406, 1990.
98. KIRBY, P.A., NETHERCOT, D.A. Design for structural stability. London: Granada Publishing, 1979. 164p.
99. KITIPORNCHAI, S., CHUNG, A.D.W. Inelastic buckling of welded monosymmetric I-beams. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.113, n.4, p.740-756, April, 1987.



100. KITIPORNCHAI, S., DUX, P.F., RICHTER, N.J. Buckling and bracing of cantilevers. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.110, n.9, p.2250-2262, Sept. 1984.
101. KITIPORNCHAI, S., TRAHAIR, N.S. Buckling of inelastic I-beams under moment gradient. Journal of the Structural Division, ASCE, v.101, n.5, p.991-1004, May, 1975.
102. KITIPORNCHAI, S. THAHAIR, N.S. Buckling properties of monosymmetric I-beams. Journal of the Structural Division, ASCE, v.106, n.5, p.941-957, May, 1980.
103. KITIPORNCHAI, S., WANG, C.M., TRAHAIR, N.S. Buckling of monosymmetric I-beams under moment gradient. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.112, n.4, p.781-799, April, 1986.
104. KNOWLES, P.R. Castellated beams. Proceedings of the Institution Civil Engineers, Part 1, v.90, p.521-536, June, 1991.
105. KOMATSU, S. et alii. Ultimate strength of girders in combined load. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.110, n.4, p.754-769, April, 1984.
106. KUZMANOVIC, B.O., WILLEMS, N. Steel design for structural engineers. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977. 509p.
107. LAIER, J.E. Critérios de resistência. São Carlos: EESC-USP, 1988. 44p.

108. LAWSON, R.M., NETHERCOT, D.A. Lateral stability of I-beams restrained by profiled sheeting. The Structural Engineer, v.63B, n.1, p.1-13, March, 1985.
109. LAY, M.G. Flange local buckling in wide-flange shapes. Journal of the Structural Division, ASCE, v.91, n.6, p.95-116, December, 1965.
110. LAY, M.G., GALAMBOS, T.V. Inelastic steel beams under uniform moment. Journal of the Structural Division, ASCE, v.91, n.6, p.67-93, December, 1965.
111. LEECH, L.V. Structural steelwork for students. 2.ed. London: Butterworths, 1988. 75p.
112. LOTHERS, J.E. Cálculo superior de estruturas de acero. Barcelona: C.E.C.S.A., 1976. 622p.
113. MacGINLEY, J.J., ANG, T.C. Structural steelwork: design to limit state theory. 2.ed. London: Butterworths, 1988. 359p.
114. MALITE, M. Sobre o cálculo de vigas mistas aço-concreto: ênfase em edifícios. São Carlos, 1990. 144p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
115. MARCUS, S.H. Basics of structural steel design. 2.ed. Virginia: Reston Publishing, 1991. 527p.
116. MASSEY, C., PITMAN, F.S. Inelastic lateral stability under a moment gradient. Journal of the Engineering Mechanics, ASCE, v.92, n.2, p.101-111, April, 1966.

117. MASSONET, C. Stability considerations in the design of steel columns. Journal of the Structural Division, ASCE, v.85, n.7, p.75-111, September, 1959.
118. MASSONET, C., SAVE, M. Cálculo plástico de las construcciones. Barcelona: Montaner y Simon, 1966. 2v.
119. McCORMARC, J.C. Diseño de estructuras metálicas. México: Representaciones y Serviços de Ingeniería, 1972. 789p.
120. McDERMOT, J.F. Plastic bending of A514 steel beams. Journal of the Structural Division, ASCE, v.95, n.9, p.1851-1871, September, 1969.
121. McGUIRE, W. Steel structures. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1968. 1112p.
122. MOREIRA, C.A.J. Novos tempos. Revista ABNT, Rio de Janeiro, v.4, n.1, p.5-11, jan./fev. 1990.
123. MORI, D.D. Flexo-torção: barras com seção transversal aberta e paredes delgadas. São Carlos: EESC-USP, 1988. 129p. (Publicação 048/88)
124. MORRIS, L.J., PLUM, D.R. Structural steelwork design to BS 5950. London: Longman Scientific and Technical, 1988. 280p.
125. MRAZIK, A., SKALOUD, M., ; TUCHACEK, M. Plastic design of steel structures. Chichester: Ellis Horwood, 1987. 637p.

126. MURRAY, N.W. Introduction to the theory of thin walled structures. Oxford: Oxford University Press, 1986. 447p.
127. NAIR, R.S. Vertically curved girder flanges. AISC Engineering Journal, v.21, n.1, p.14-20, 1984.
128. NARAYANAN, R. Beams and beam-columns: stability and strength. Barking: Applied Science Publishers, 1983. 242p.
129. NARAYANAN, R. Design of slender webs having rectangular holes. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.111, n.4, p.777-787, April, 1985.
130. NARAYANAN, R. Plated structures: stability and strength. Barking: Applied Science Publishers, 1983. 260 p.
131. NEAL, B.G. The plastic methods of structural analysis. 3.ed. London: Chapman and Hall, 1977. 205p.
132. NETHERCOT, D.A. Factors affecting the buckling stability of partially plastic beams. Proceedings of the Institution Civil Engineers, Part 2, p.285-304, November, 1972.
133. NETHERCOT, D.A. Inelastic buckling of steel beams under non uniform moment. The Structural Engineer, v.53, n.2, p.73-78, February, 1975.
134. NETHERCOT, D.A. Limit states design of structural steelwork. Berkshire: Van Nostrand Reinhold, 1986. 175p.

135. NETHERCOT, D.A., KERDAL, D. Lateral-torsional buckling of castellated beams. The Structural Engineer, v.60B, n.3, p.53-61, September, 1982.
136. NETHERCOT, D.A., ROCKEY, K.C. Lateral buckling with mixed end conditions. The Structural Engineer, v.51, n.4, p.133-138, April, 1973.
137. NETHERCOT, D.A., ROCKEY, K.C. A unified approach to the elastic lateral buckling of beams. The Structural Engineer, v.49, n.7, p.321-330, July, 1971.
138. NORTON, P.G. Computer analysis of AASHTO plate girder in pure bending with load-factor design. Transportation Research Record, n.950, p.13-21, September, 1984. (Second Bridge Engineering Conference, Minneapolis, v.1)
139. O'HEACHTAIRN, P., NETHERCOT, D.A. Lateral buckling behaviour of monosymmetric plate girders. Journal of Constructional Steel Research, v.11, n.4, p.261-282, 1988.
140. O'HEACHTAIRN, P., NETHERCOT, D.A. Lateral buckling tests on monosymmetric plate girders. Journal of Constructional Steel Research, v.11, n.4, p.241-259, 1988.
141. ODEH, M.D. Fast check for laterally supported beam capacity. AISC Engineering Journal, v.21, n.1, p.24-31, 1984.

142. PANC, V. Theories of elastic plates. Prague: Noordhoff International, 1975. 716p.
143. PANDEY, M.D., SHERBOURNE, A.N. Unified integrated approaches in lateral-torsional buckling of beams. The Structural Engineer, v.67, n.13, 245-240, July, 1989.
144. PERFIS formados a frio: tabelas de características dos perfis metálicos. São Paulo: COFERRAÇO, 1991 26p.
145. PERFIS soldados de aço: tabelas de características geométricas. São Paulo: COSIPA/Grupo Siderbrás, s.d. v.1, 64p.
146. PFEIL, W. Estruturas de aço. 4.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1986. v.2, p.285-506
147. PFEIL, W. Estruturas de aço: dimensionamento prático. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1989. 300p.
148. PINKHAM, C.W., HANSELL, W.C. An introduction to load and resistance factor design for steel buildings. AISC Engineering Journal, v.15, n.1, p.2-7, First Quarter, 1978.
149. QUEIROZ, G. Elementos das estruturas de aço. 2.ed. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 1988. 455p.
150. RACHID, M. Instabilidade de barras de secção delgada. São Carlos: EESC-USP, 1975. 119p. Tese (Doutorado)-Escola de Engenharia de São Carlos-USP

151. RACHID, M., MORI, D.D. Instabilidade: conceitos - aplicação na flambagem por flexão. São Carlos: EESC-USP, 1989. 127p.
152. RAVINDRA, M.K., GALAMBOS, T.V. Load and resistance factor design for steel. Journal of the Structural Division, ASCE, v.104, n.9, p.1337-1353, September, 1978.
153. SALES, J.J. Tópicos especiais de estruturas metálicas. São Carlos: EESC-USP, 1990. (Notas de Aula).
154. SALMON, C.G., JOHNSON, J.E. Steel structures: design and behaviour emphasizing load and resistance factor design. 3.ed. New York: Harper & Row, 1990. 1086p.
155. SALVADORI, M.G. Lateral buckling of eccentrically loaded I-columns. Transactions ASCE, v.121, p.1163-1178, 1956.
156. SALVADORI, M.G. Lateral buckling of I-beams. Transactions ASCE, n.291, p.1165-1182, October, 1953.
157. SANTOS, A.F. Estruturas metálicas: projeto e detalhes para fabricação. 3.ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982. 476p.
158. SAWYER, H. Post-elastic behaviour of wide-flange steel beams. Journal of the Structural Division, ASCE, v.87, n.8, p.43-71, December, 1961.
159. SCHMITKE, C.D., KENNEDY, D.J.L. Effective lengths of laterally continuous, laterally unsupported steel beams. Canadian Journal of Civil Engineering, v.12, p.603-616, 1985.

160. SCHULTE, H., YAGUI, T. Estruturas de aço: elementos básicos. 2.ed. São Carlos: EESC-USP, 1981. 347p.
161. SHANLEY, F.R. Strenght of materials. New York: McGraw-Hill, 1957. 783p.
162. SHERBOURNE, A.N., PANDEY, M.D. Elastic lateral-torsional stability of beams: moment modification factor. Journal of Constructional Steel Research, v.13, p.337-356, 1989.
163. SOLUÇÕES em aço com critério e sensibilidade. Construção Metálica, São Paulo, ABCEM, n.1, p.10, 1991.
164. SPIEGEL, L., LIMBRUNNER, G.F. Applied structural steel design. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1986. 388p.
165. TABELAS para dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio. Belo Horizonte: Tecnofer, s.d. 21p.
166. TANG, K.H., EVANS, H.R. Transverse stiffeners for plate girders webs: an experimental study. Journal of Constructional Steel Research, v.4, p.253-280, 1984.
167. TIMOSHENKO, S.P. History of strenght of materials. Ontario: Dower Publications, 1983. 452p.
168. TIMOSHENKO, S.P. Resistência dos materiais. 2.ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1969. v.2, 518p.



169. TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. Theory elastic stability.  
2.ed. Singapore: McGraw-Hill, 1963. 541p.
170. TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N. Teoria da elasticidade. 3.ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980. 545p.
171. TIMOSHENKO, S.P., KRIEGER, W.S. Theory of plates and shells. 2.ed. Tokyo: McGraw-Hill International, 1959. 580p.
172. TRAHAIR, N.S. The behaviour and design of steel structures. London: Chapman and Hall, 1977. 320p.
173. UGURAL, A.C., FENSTER S.K. Advanced strength and applied elasticity. London: Edward Arnold, 1984. 423p.
174. USIMINAS. O Ferro na história do Brasil e de Minas Gerais. Revista Usiminas, Belo Horizonte, v.17, n.14, 76p., outubro, 1976.
175. VENKATRAMAN, B., PATEL S.A. Structural mechanics with introductions to elasticity and plasticity. New York: McGraw-Hill, 1970. 648p.
176. VRIES, K. Strength of beams as determined by lateral buckling. Transactions ASCE, v.112, p.1245-1320, 1947.
177. WANG, C.M., KITIPORNCHAI, S. Buckling capacities of monosymmetric I-beams. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.112, n.11, p.2373-2391, November, 1986.

178. WANG, Y.C., EL-KHENFAS, M.A., NETHERCOT, D.A. Lateral-torsional buckling of end-restrained beams. Journal of Constructional Steel Research, v.7, p.335-363, June, 1987.
179. WIESNER, K.B. LRFD design office study. AISC Engineering Journal, v.15, n.1, p.18-25, 1978.
180. WINTER, G. Strength of thin steel compression flanges. Transactions ASCE, v.112, p.527-576, 1947.
181. WRC-ASCE COMMITTEE ON PLASTICITY RELATED TO DESIGN. Commentary on plastic design in steel basic concepts. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.85-86, n.1-4, July 1959 to April 1960.
182. YOSHIDA, H., MAEGAWA, W. Lateral instability of I-beams with imperfections. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.110, n.8, p.1875-1893, August, 1984.
183. YOUNGER, J.E. Mechanics of aircraft structures. 2.ed. New York: McGraw-Hill, 1942. 396p.
184. YURA, J.A., GALAMBOS, T.V., RAVINDRA, M.K. The bending resistance of steel beams. Journal of the Structural Division, ASCE, v.104, n.9, p.1355-1370, September, 1978.
185. ZAHN, C.J. Plate girder design using LRFD. AISC Engineering Journal, p.11-20, First Quarter, 1987.

186. ZAHN, J.J. Bracing requeriments for lateral stability. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.110, n.8, p.1786-1803, August, 1984.
187. ZAHN, J.J. Lateral stability of beams with elastic end restraints. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, v.111, n.4, p.500-511, April, 1985.
188. ZIGNOLI, V. Construcciones metálicas. 2.ed. Madrid: Editorial Dossat, 1979. v.1, 1113p.

## ANEXO - 1

### FLAMBAGEM DE CHAPAS

#### 1- INTRODUÇÃO

Considere-se uma chapa de espessura uniforme  $t$  e que sofra flexão através de uma ação transversal uniformemente distribuída que não varie ao longo do seu comprimento.

A superfície deformada de uma porção da chapa a uma distância considerável das extremidades pode ser assumida como sendo cilíndrica, sendo os eixos do cilindro paralelos ao comprimento da chapa, conforme pode ser visto na figura 01. Pode-se restringir a análise da flexão a um elemento da chapa através de uma faixa de largura unitária através de dois planos perpendiculares ao comprimento da chapa, como se fosse uma viga de seção transversal, retangular de comprimento  $l$  e altura  $t$ .

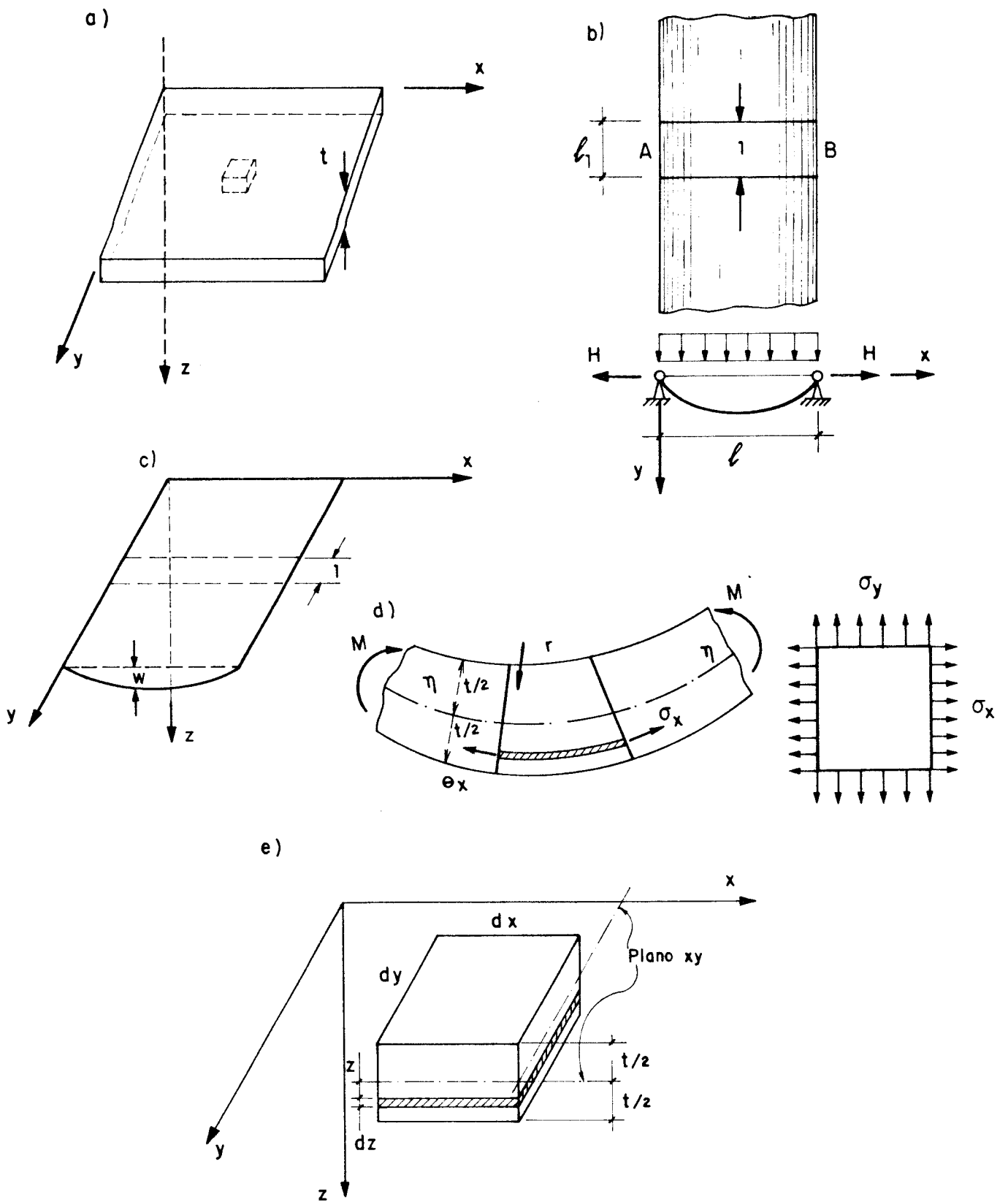


FIG. 1- Diferentes etapas do comportamento de uma chapa plana na flexão [41, 154, 168, 169, 171]

Para se obter a equação diferencial da faixa deformada o tratamento matemático, segundo [171], será similar a equação da deformação para uma viga flexionada. No cálculo das tensões de flexão [171], assume também tal como na teoria ordinária de flexão de vigas que a seção transversal da barra permanece plana durante a flexão e que elas sofrem apenas uma rotação com relação ao eixo neutro.

Inicialmente as deformações serão obtidas em função dos deslocamentos, como mostra muito bem os autores [154, 169, 170, 171], sendo  $u$ ,  $v$  e  $w$ , os deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente e conforme a figura 1 (e). Considere-se, um elemento de chapa  $dx dy$  e assumindo que não há alongamento no plano assumido que não ha alongamento no plano neutro com  $z = 0$ . Examinando a faixa elementar do elemento de chapa  $dx dy dz$  localizado a uma distância  $z$  do eixo neutro conforme a figura 2, esse corpo ao sofrer uma deformação e sendo  $u$ ,  $v$  e  $w$  os componentes do deslocamento de um ponto  $P$ , o deslocamento na direção  $x$  de um ponto adjacente  $C$  sobre o eixo  $x$  e até a primeira ordem em  $dx$ :

$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ , devido ao acréscimo  $(\partial u/\partial x) dx$  da função  $u$  com o acréscimo da coordenada  $x$ .

Portanto a deformação linear específica no ponto  $P$ , na direção  $x$  e na direção  $y$  serão:

$$\epsilon_x = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

$$\epsilon_y = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

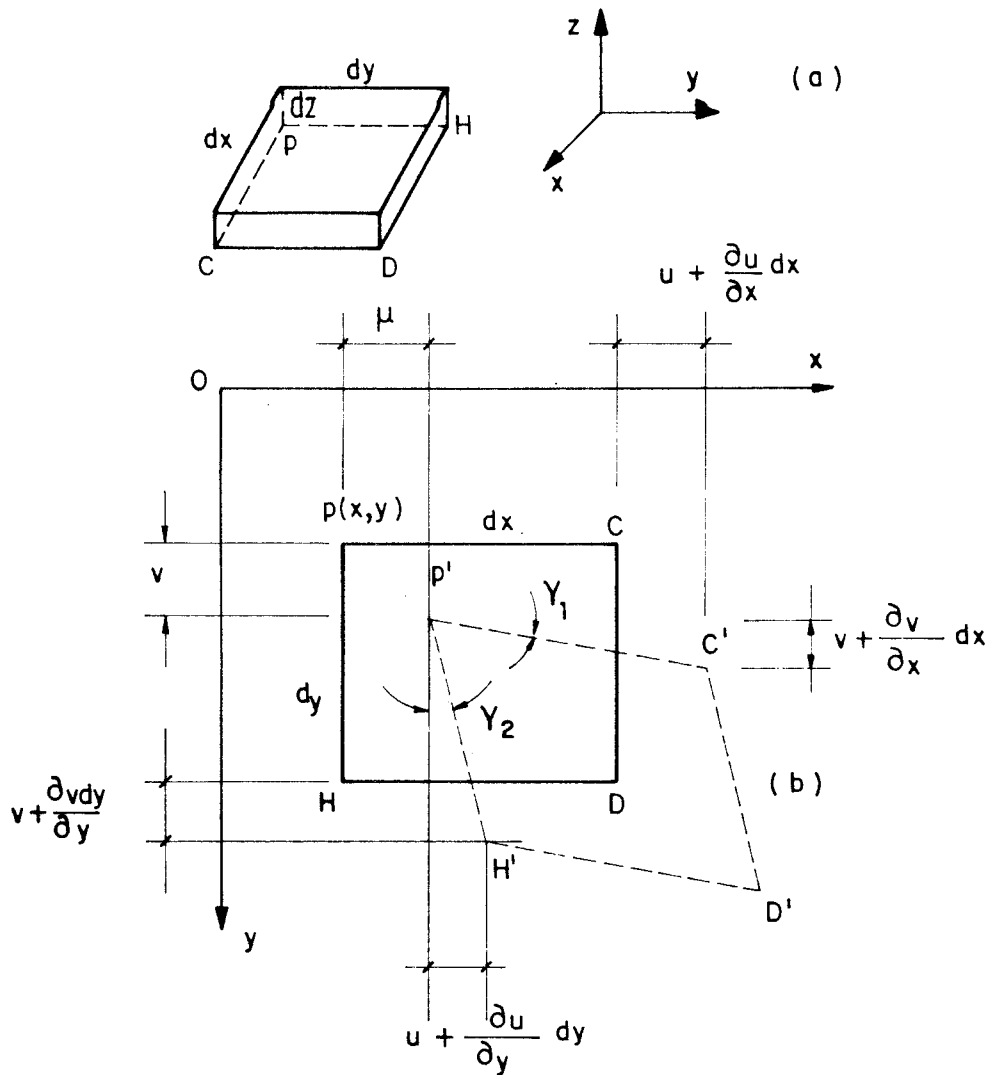


FIG. 2- Deformações do Elemento de chapa no plano xy [154, 170]

A deformação por cisalhamento ou distorção  $\gamma_{xy}$ , será:

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

Em seguida será determinado os deslocamentos no plano da chapa em função da deformação lateral  $w$ , como mostra a figura 3 e reconhecendo que a rotação é positiva e o deslocamento negativo  $u$ , ou  $v$ , pode-se estabelecer segundo [154] que

$$-u = z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad -v = z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3)$$

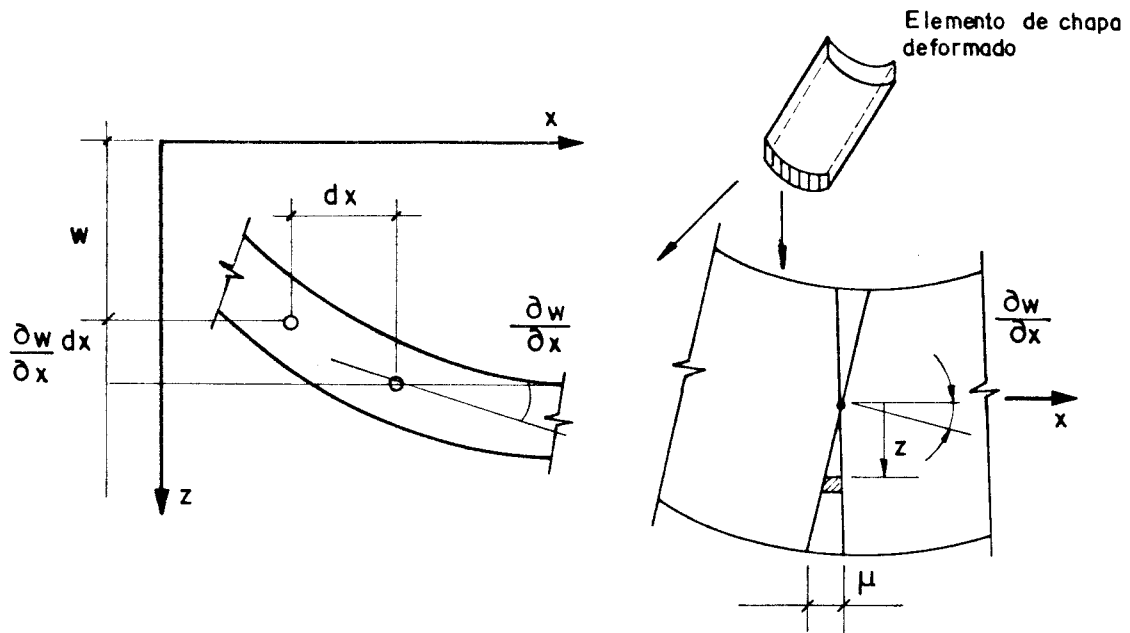


FIG. 3- Deformação do elemento de chapa perpendicular ao plano  $xy$  [154]

Substituindo as equações (3) em (1) e (2) tem-se:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -z \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4)$$



$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -z \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Fazendo o uso da lei de Hooke, ou seja expressando as deformações unitárias em termos das tensões,  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  normais as direções x e y, conforme o elemento sombreado da figura 1d, aparecerá os seguintes valores:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y]; \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (5)$$

onde E é o módulo de Elasticidade e  $\nu$  o coeficiente do Poisson do material da chapa.

A deformação lateral na direção do eixo y segundo [171] deve ser zero para manter a continuidade na chapa durante a flexão. Logo:

$$\epsilon_y = 0 = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \rightarrow \sigma_y = \nu \sigma_x$$

Levando o valor de  $\sigma_y$  em  $\epsilon_x$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu^2 \sigma_x] = \frac{\sigma_x}{E} (1 - \nu^2)$$

e

$$\sigma_x = \frac{E \epsilon_x}{1 - \nu^2}, \text{ mas } \epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\sigma_x = - \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{d^2w}{dx^2} \quad (6)$$

expressão esta que mostra, as tensões normais em função da curvatura da curva deformada.

Neste caso se a chapa é solicitada pela ação de tensões de tração ou compressão que atuam na direção do eixo x e sendo uniformemente distribuídas ao longo dos lados longitudinais da chapa, pode-se expressar os momentos fletores em função da curvatura dada a partir evidentemente da expressão (6). Olhando a faixa elementar da figura 1 (d), pela condição de equilíbrio, tem-se que o momento de flexão M em qualquer seção transversal da faixa é:

$$M = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz; \quad \text{mas } \sigma_x = - \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{d^2w}{dz^2}$$

Substituindo o valor de  $\sigma_x$  na integral,

$$M = - \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{Ez}{1-\nu^2} \right) \frac{d^2w}{dz^2} (z dz) = - \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{Ez^2}{1-\nu^2} \right) \frac{d^2w}{dz^2} dz$$

$$M = - \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right) \frac{d^2w}{dz^2} \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz = - \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dz^2} \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-t/2}^{t/2}$$

$$\left( \frac{E}{1-\nu^2} \right) \left( \frac{d^2w}{dz^2} \right) \left[ \frac{t^3}{24} - \left( - \frac{t^3}{24} \right) \right]$$

$$M = - \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{d^2w}{dz^2} \right) \quad (7)$$

Introduzindo a notação segundo [171] de  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

A expressão (7) pode também ser escrita na forma

$$M = -D \left( \frac{d^2 w}{dz^2} \right)$$

$$\left( \frac{d^2 w}{dz^2} \right) = - \frac{M}{D} \quad (8)$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{D} \quad (9)$$

Esta equação representa a equação diferencial da faixa elementar (figura 1.d) e a quantidade D toma o lugar da quantidade EI no caso das vigas e é chamada de módulo de rigidez cilíndrica ou módulo de rigidez de chapas à flexão

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (10)$$

## 2- Flambagem de chapas uniformemente comprimidas

### 2.1- Flambagem de chapas retangulares por uma ação compressiva ao longo de duas extremidades livres

O estudo da flambagem de chapas retangulares comprimidas apresenta segundo [168], uma importância prática no estudo da estabilidade elástica dos elementos comprimidos formados por chapas encontradas com muita frequência nas

estruturas de aço. A ruptura desses elementos pode ser produzida pela flambagem da alma ou das mesas, sem, entretanto flambar todo o elemento.

Os autores [153, 161, 183], mostram como se determina a carga crítica de flambagem para chapas submetidas a compressão uniforme com bordas livres e bordas apoiadas como se vê a seguir:

a) Chapa submetida à compressão com bordas livres

Seja uma chapa, de largura  $b$ , comprimento  $l$ , e espessura  $t$  solicitada por tensões de compressão, conforme a figura 4,

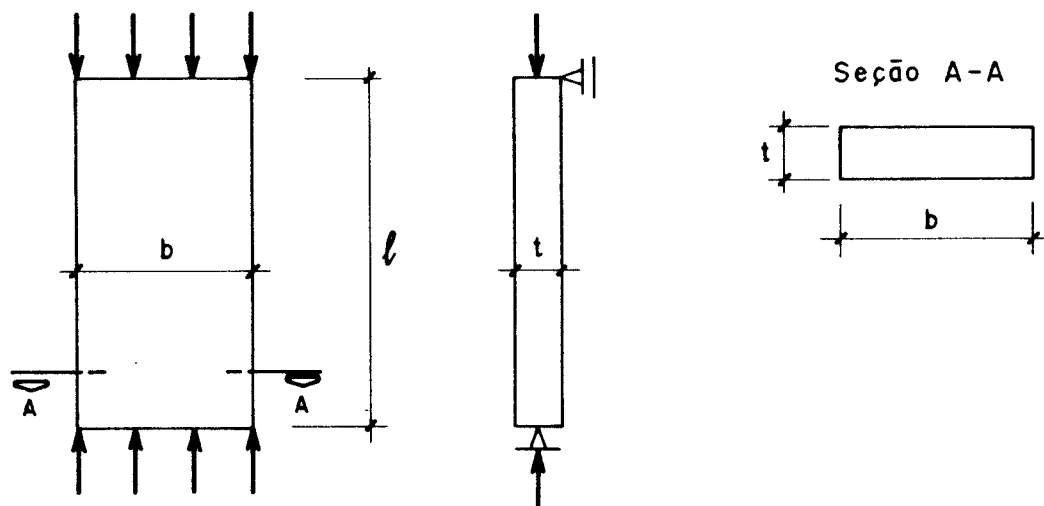


FIG. 4- Chapa submetida à compressão com bordas livres [153]

De acordo com a teoria das barras submetida a compressão centrada, a carga crítica de flambagem é:

$$F_{\text{crit}} = \frac{P_{\text{crit}}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2 A}$$

mas

$$\frac{I}{A} = r^2;$$

$$F_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 Er^2}{\ell^2}; \quad \frac{r^2}{\ell^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$F_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Para a chapa em questão tem-se:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{bt^3}{12} \times \frac{1}{bt}} = \sqrt{\frac{t^2}{12}}$$

$$r = \frac{t}{\sqrt{12}}; \quad \lambda^2 = \frac{\ell^2}{r^2} = \frac{\ell^2}{\frac{t^2}{12}} = \frac{12\ell^2}{t^2}$$

Logo

$$F_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 E}{\frac{12\ell^2}{t^2}}; \quad F_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 Et^2}{12\ell^2};$$

$$F_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 E}{12} \left( \frac{t}{\ell} \right)^2 \quad (11)$$

b) Chapas com bordas apoiadas

Na figura 5 é mostrada uma chapa com as 4 bordas apoiadas submetidas a tensões de compressão

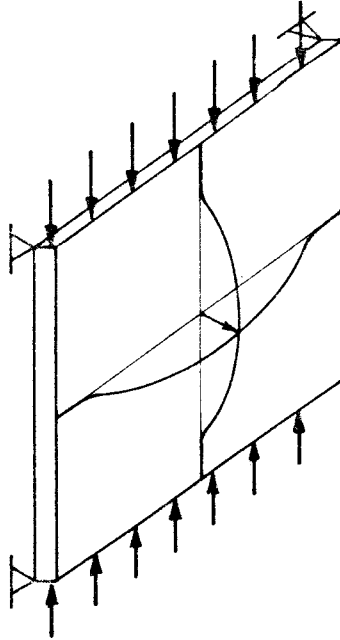


FIG. 5- Chapa apoiada nos quatro bordos solicitada por tensões de compressão.

Nesse caso da flambagem não se pode tomar o valor de  $EI$  e sim  $D$ , portanto

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \longrightarrow \text{com } EI = D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 Et^3}{12(1-\nu^2)\ell^2} \quad ; \quad F_{\text{crit}} = \frac{P_{\text{crit}}}{A}$$

$$A = bt; \quad b = 1,00 \text{ (largura unitária)}$$

$$A = t$$

Logo

$$F_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 Et^3}{12(1-\nu^2)\ell^2 t}$$

$$F_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{\ell} \right)^2 \quad (12)$$

## 2.2- Flambagem de chapas longas comprimidas

A análise da flambagem desses elementos é feita de uma maneira bastante rigorosa segundo os autores [41, 121, 154, 169, 171], para diversas condições de suporte e de carregamento e o caso mais generalizado para determinação da carga crítica de flambagem é o que se mostra na figura 6, sendo uma chapa de dimensões, a, b e t solicitada sob compressão uniforme na direção do eixo dos x.

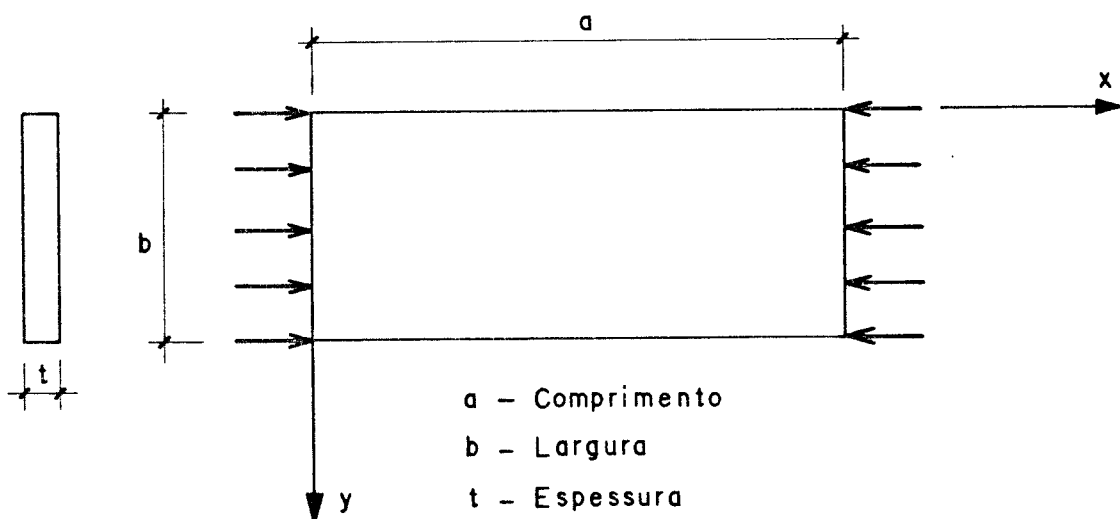


FIG. 6- Chapa longa submetida à compressão uniforme

Antes de tratar do problema da estabilidade será visto a formulação da equação diferencial para a flexão de chapas segundo [154, 169, 171, 173].

Olhando na Figura 1, as diferentes etapas de comportamento de uma chapa plana na flexão e assumindo que o material é isotrópico, homogêneo e que as tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  são expressas em função da deformação através da lei de Hooke, então para uma chapa fina tem-se

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] \quad (5)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x]$$

e cujos valores de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  em função de  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$  será:

$$\epsilon_x E = \sigma_x - \nu \sigma_y \quad ; \quad \sigma_y = \epsilon_y E + \nu \sigma_x$$

$$\epsilon_y E = \sigma_y - \nu \sigma_x \quad ; \quad \sigma_x = \epsilon_x E + \nu \sigma_y$$

$$\sigma_x = \epsilon_x E + \nu (\epsilon_y E + \nu \sigma_x) \quad ; \quad \sigma_x = \epsilon_x E + \nu \epsilon_y E + \nu^2 \sigma_x$$

$$(1 - \nu^2) \sigma_x = E (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}$$

(13)



Das expressões, (4) tem-se

$$\epsilon_Y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \epsilon_Y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{XY} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{XY} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Substituindo esses valores nas expressões (13) tem-se:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left( -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_x = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

(14)

$$\sigma_y = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{-Ez}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

a) Relação entre Momentos de Flexão ( $M_x$ ,  $M_y$ ); Momento de torção ( $M_{xy} = M_{yx}$ ) e a Curvatura na Flexão das chapas.

Seja portanto uma chapa retangular submetida à flexão pura através de momentos que são uniformemente distribuídos ao longo das extremidades da chapa como mostra a figura 7 e considere, que o plano xy coincida com o plano médio da chapa antes da deformação e que os eixos x e y passem pelas extremidades ao longo da chapa.

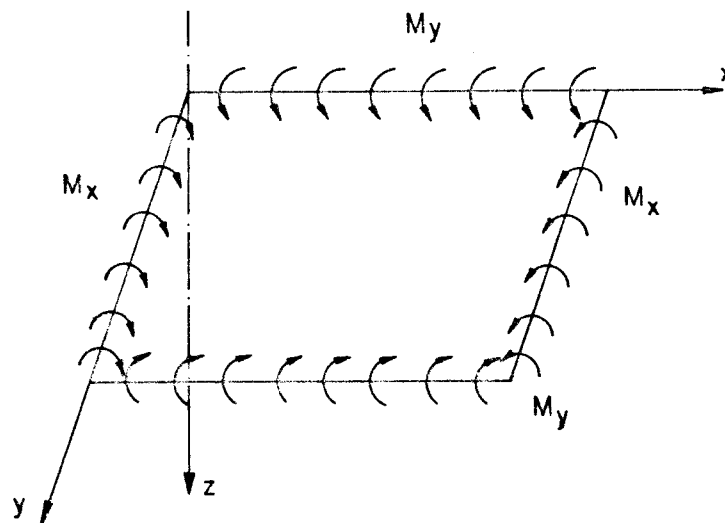


FIG. 7- Chapa retangular submetida à flexão pura [171]

$M_x$  - momento fletor por unidade de comprimento atuando nas extremidades paralelas ao eixo y

$M_y$  = momento fletor por unidade de comprimento atuando, nas extremidades paralelas ao eixo x.

Os momentos são considerados positivos na figura 7 quando produzem compressão na superfície superior da chapa e tração na parte mais baixa. A espessura da chapa é  $t$  e será considerada pequena comparada com as outras dimensões. Seja retirar um elemento cortado fora da chapa através de dois pares de planos paralelos aos planos  $xy$  e  $yz$  conforme a figura 8, e desde que na figura 7 se tenha uma combinação das duas flexões uniformes as condições de tensões são idênticas em todos os elementos mostrados na figura 8 e portanto tem-se uma flexão uniforme da chapa.

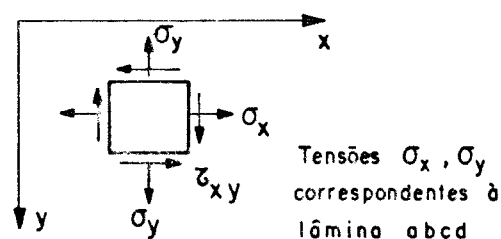
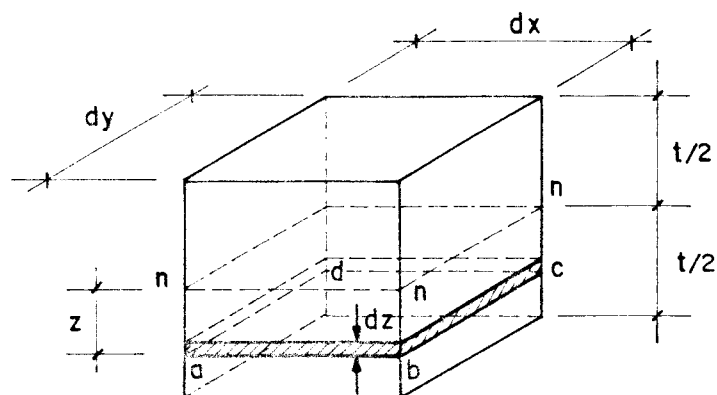


FIG. 8- Elemento de chapa na flexão [154]

As tensões normais distribuídas sobre os lados laterais do elemento acima podem ser reduzidos aos pares de momentos cujos valores são por unidade de comprimento, iguais aos momentos externos  $M_x$  e  $M_y$ .

Portanto, têm-se:

$$\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z d_y d_z = M_x d_y$$

$$\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z d_x d_z = M_y d_x$$

ou

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z d_z$$

(15)

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z d_z$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z d_z$$

Substituindo os valores das expressões (14) em (15) tem-se:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{-Ez^2}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz$$

$$M_x = \frac{-E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz$$

$$M_x = \frac{-E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-t/2}^{t/2}$$

$$M_x = \frac{-Et^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

mas de acordo com (10)  $D = Et^3/12(1-\nu^2)$

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \tag{16}$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

b) Equação diferencial de uma chapa deformada com ação normal a superfície

Considere agora um elemento de chapa de dimensões  $dx$   $dy$  solicitada por uma ação lateral por unidade de área  $q$  conforme a figura 9 e inicialmente são determinadas as forças cortantes verticais  $Q_x$  e  $Q_y$  (força por unidade de comprimento), atuando nos lados do elemento.

Os valores dessas forças cortantes por unidade de comprimento e paralelas aos eixos  $y$  e  $x$  serão dadas por:

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz; \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \tag{17}$$

Nota-se que ao observar a figura 9, as forças no corpo são consideradas desprezíveis relativas a superfície de carregamento e que não há cortante e forças normais atuando nos lados do elemento.

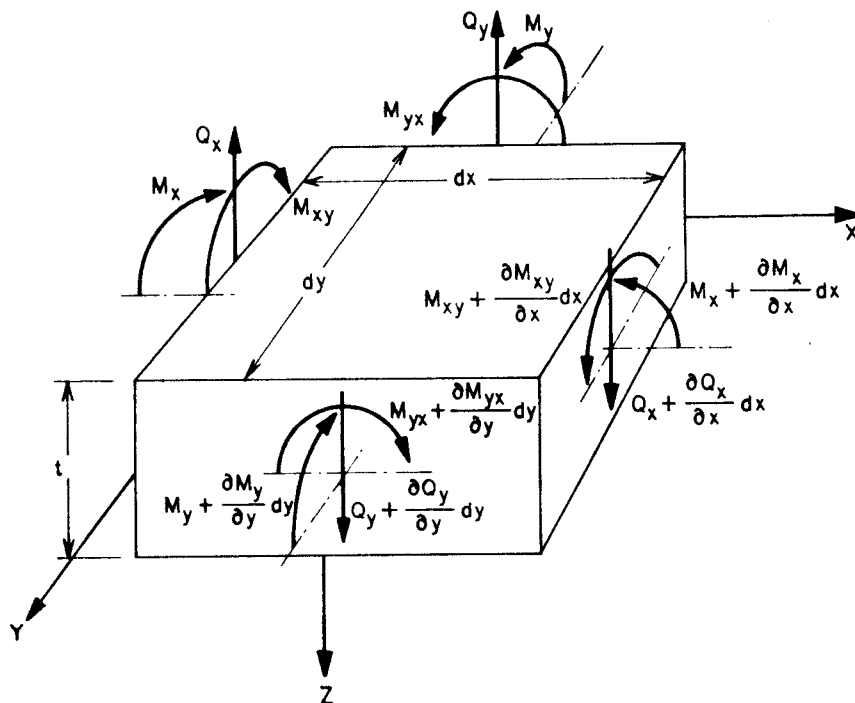


FIG. 9- Momentos fletores, momentos de torção e cortantes em um elemento de chapa [41]

As condições de equilíbrio das forças na direção do eixo dos z será:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + q dx dy = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (18)$$

Tomando os momentos de todas as forças que atuam no elemento com relação ao eixo dos x, tem-se:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + Q_y dx dy = 0$$

O momento da ação q é o momento devido a mudança na força  $Q_y$  onde são desprezíveis nesta equação, desde que eles sejam quantidades pequenas devido a infinitésimos de ordem superior.

Logo, tem-se, simplificando a expressão acima:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (19)$$

Igualmente em relação ao eixo y tem-se

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy dx + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy - Q_x dy dx = 0$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (20)$$

Desde que não há forças nas direções x e y e nem momentos com relação ao eixo dos z as expressões (18), (19) e (20) definem o equilíbrio do elemento trabalhando (19) e (20) vem:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

Derivando em relação a x e y, tem-se:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Somando membro a membro e observando que

$$M_{yx} = -M_{xy}; \text{ pois } \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{2\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = q \quad (21)$$

Substituindo os valores da expressão (16) na expressão (21) ter-se-á:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q}{D} \quad (22)$$

Esta representa portanto a equação diferencial para a flexão de chapas homogêneas e cuja solução, através de condições de contorno apropriadas fornece a deformação  $w=w(x,y)$  da superfície média da chapa através da atuação de uma carga lateral  $q$  uniformemente distribuída por unidade de área. A formulação da mesma é apresentada por [41, 154, 169, 171].



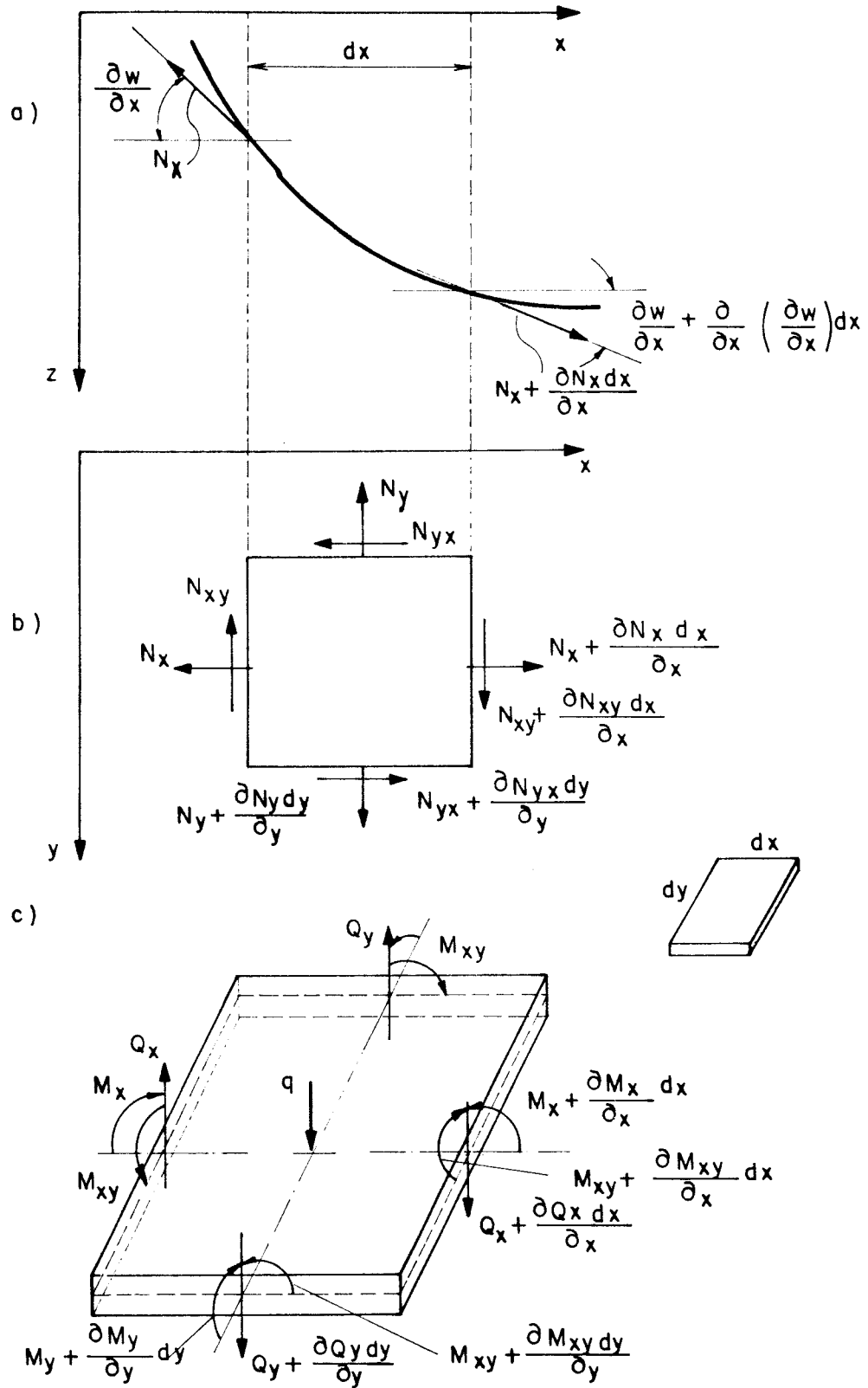


FIG. 10- Elemento de chapa submetido a ações combinadas [169, 171]

c) Flexão de chapas através de ações combinadas de cargas laterais e forças no plano médio da chapa

Esta análise é feita segundo [169, 171] onde é desenvolvida a formulação da equação diferencial da superfície deformada da chapa.

Considere portanto o equilíbrio de um pequeno elemento retirado da chapa na configuração deformada através de dois planos paralelos a  $xz$  e  $yz$  em coordenadas planas conforme a figura 10. Além das ações que atuam na chapa na sua superfície cuja intensidade será indicada por  $q$  quando no elemento serão adicionadas forças que atuam no plano médio da chapa e a intensidade das mesmas segundo [169, 171] são designadas por  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_{xy} = N_{yx}$  e a intensidade das mesmas são por unidade de comprimento.

Projetando as forças ( $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_{xy}$ ) na direção do eixo dos  $x$  e  $y$  e admitindo que não existe forças na barra ou forças tangenciais nas faces da chapa (obs. fig. 10), tem-se:

$$N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx - N_x + N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy - N_{yx} = 0$$

$$N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy - N_y + N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx - N_{xy} = 0$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

(23)

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

Analisando o equilíbrio do elemento na posição deformada da chapa em teoria de 2a. ordem [150, 151] onde os cálculos levam em conta os deslocamentos no estudo do equilíbrio da estrutura. Após as simplificações, tem-se:

Na direção do eixo dos z (Figura 10 (a) e (c))

$$\begin{aligned}
 & -N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left( N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy \\
 & -N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + N_x \frac{\partial w}{\partial x} dy + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \\
 & + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx (dx dy) \\
 & N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \tag{24}
 \end{aligned}$$

Projetando a normal  $N_y$  na direção do eixo z, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & -N_y dx \frac{\partial w}{\partial y} + \left( N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) dx \\
 & -N_y dx \frac{\partial w}{\partial y} + N_y dx \frac{\partial w}{\partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy dx + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy dx
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} dy \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy dx$$

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy dx \quad (25)$$

Projetando as forças de cisalhamento  $N_{xy}$  e  $N_{yx}$  na direção do eixo dos  $z$  conforme mostra a figura 11, têm-se:

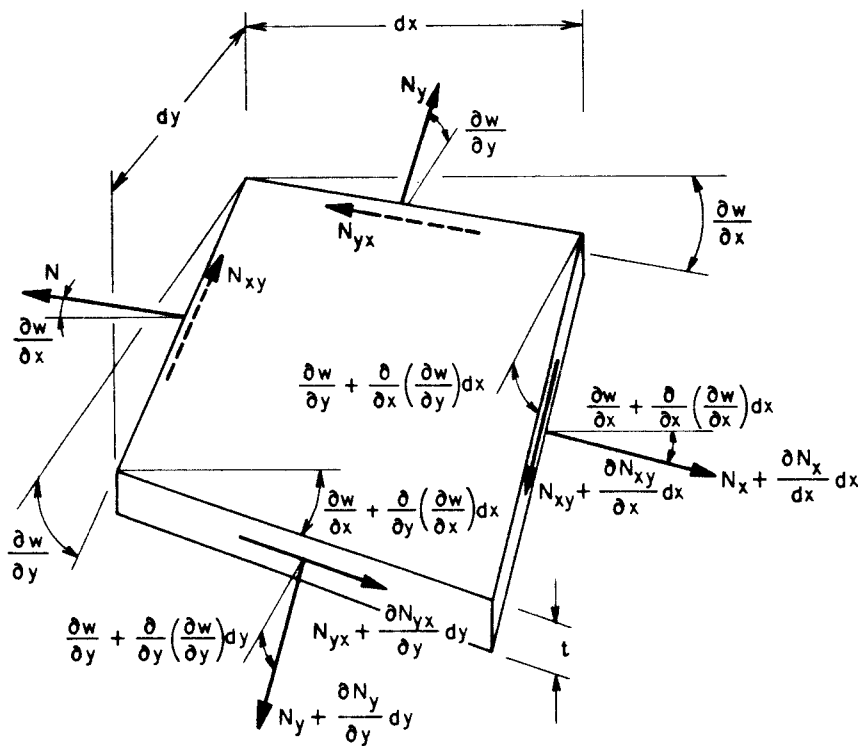


FIG. 11- Forças atuando no plano do elemento de chapa [41]

$$N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (26)$$

$$N_{YX} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{YX}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (27)$$

Somando membro a membro as expressões (24), (25), (26), (27) e (18) tem-se:

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy +$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy dx + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy +$$

$$N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy +$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + q dx dy = 0 \quad \begin{array}{l} \text{(Lembrando que} \\ N_{yx} = N_{xy}) \end{array}$$

Simplificando, tem:

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} +$$

$$\left( \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

Observando as expressões (21) e (23)

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (28)$$

$$-N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Observando as expressões (16) tem-se:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\nu \partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = -D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\nu \partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\nu \partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -D (1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$$

Substituindo esses valores na expressão (28)

$$-D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\nu \partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\nu \partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right)$$

$$+ 2D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Somando e simplificando

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (29)$$

Esta expressão representa a equação diferencial da superfície deformada de uma chapa em que  $w = w(x, y)$ , sendo que na mesma atuam ações laterais e existem forças no plano médio da chapa.

Aplicando a expressão (29) para o caso da figura 12 onde se quer determinar a carga crítica ( $F_{crit}$ ) de flambagem, aquela equação diferencial torna a seguinte forma.

$$\text{Nesse caso: } q = 0, \quad N_y = 0, \quad N_{xy} = 0$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( -N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (30)$$

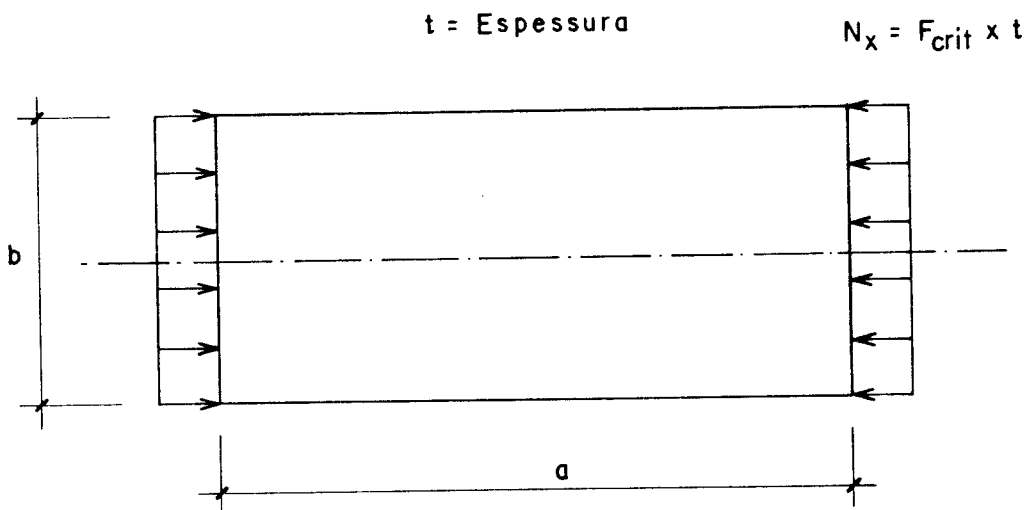


FIG. 12- Chapa uniformemente comprimida [154]

A equação diferencial representa a deformação  $w$  que é uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$ . Essa deformação  $w$  segundo [154, 169] pode ser expressa segundo o produto de duas funções  $X(x)$  e  $Y(y)$ .

Portanto

$$w = X(x) Y(y) \quad (31)$$

em que  $Y(y)$  é uma função isolada de  $y$  e que será determinada posteriormente. Assumindo de acordo com [154, 169] sob a sollicitação das ações compressivas a placa flamba em meias-ondas, pode se ter o seguinte tipo de solução para (31).

$$w = Y(y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (32)$$

onde  $X(x) = \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$

A expressão (32) satisfaz as condições de contorno ao longo dos lados simplesmente apoiadas da chapa;  $w = 0$  para  $x = 0$  e  $x = a$ .

$$\frac{\partial w}{\partial x} = Y(y) \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -Y(y) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = - \frac{dY}{dy} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$



$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = - \frac{d^2 Y}{dx^2} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = - Y(Y) \frac{m^2 \pi^2}{a^3} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = + Y(Y) \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dY}{dx} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{d^2 Y}{dx^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} ; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \frac{d^3 Y}{dx^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{d^4 Y}{dx^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Substituindo esses valores em (30)

$$Y \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} - 2 \frac{d^2 Y}{dx^2} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

$$+ \frac{d^4 Y}{dx^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = + \frac{N_x}{D} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y}{dx^2} + \left[ \left( \frac{m\pi x}{a} \right)^4 - \frac{N_x}{D} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] Y = 0$$

Equação diferencial ordinária de quarta ordem.

Solução Geral

Equação Característica

$$r^4 - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 r^2 + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] = 0$$

$$r = \pm \sqrt{2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \pm \sqrt{4\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - 4\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 4\frac{N_x}{D}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}}$$

$$r = \pm \sqrt{2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \pm 2\sqrt{\frac{N_x}{D}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}}$$

$$r = \pm \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \pm \sqrt{\frac{N_x}{D}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}}$$

$$r_1 = + \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{N_x}{D}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}}$$

$$r_2 = - \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{N_x}{D}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}}$$

$$r_3 = + \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \sqrt{\frac{N_x}{D}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}} =$$

$$+ \sqrt{-\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{N_x}{D}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}\right]}$$

$$r_4 = - \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \sqrt{\frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}} =$$

$$- \sqrt{-\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}\right]}$$

$$r_3 = \left( \sqrt{-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}} \right) i$$

$$r_4 = - \left( \sqrt{-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}} \right) i$$

raízes reais e complexas, a solução geral é do tipo:

$$Y = C_1 e^{-\alpha Y} + C_2 e^{+\alpha Y} + C_3 \operatorname{sen} \beta Y + C_4 \operatorname{cos} \beta Y$$

onde

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}} ;$$

$$\beta = - \sqrt{-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}}$$

A deformação total da chapa será

$$w = \left( \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \right) (C_1 e^{-\alpha Y} + C_2 e^{+\alpha Y} + C_3 \operatorname{sen} \beta Y + C_4 \operatorname{cos} \beta Y)$$

(33)

Da Teoria das Equações Diferenciais  $e^{-\alpha Y}$  e  $e^{\alpha Y}$  pode ser escrita da forma:

$$C_1 \operatorname{senh} \alpha y + C_2 \operatorname{cosh} \alpha y$$

ou

$$w = \left( \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \right) (C_1 \operatorname{senh} \alpha y + C_2 \operatorname{cosh} \alpha y + C_3 \operatorname{sen} \beta y + C_4 \operatorname{cos} \beta y) \quad (34)$$

Expressão que deverá satisfazer as condições de contorno, onde [154] mostra que assumindo o eixo  $x$  um eixo de simetria mediante a chapa ou seja as condições de suporte ao longo de duas extremidades paralelas na direção do carregamento os coeficientes ímpares  $C_1$  e  $C_3$  devem ser nulos.

Então:

$$w = (C_2 \operatorname{cosh} \alpha y + C_4 \operatorname{cos} \beta y) \left( \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \right)$$

Usando as condições de suporte para  $y = b/2$  e  $y = -b/2$  ou  $y = \pm b/2$

$$w = 0 = (C_2 \operatorname{cosh} \alpha \frac{b}{2} + C_4 \operatorname{cos} \beta \frac{b}{2}) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = (\alpha C_2 \operatorname{senh} \alpha y - \beta C_4 \operatorname{sen} \beta y) \left( \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 = (C_2 \alpha^2 \operatorname{cosh} \alpha \frac{b}{2} - C_4 \beta^2 \operatorname{cos} \beta \frac{b}{2}) \left( \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \right)$$

Para uma outra solução em que  $C_2 = C_4 = 0$ , é necessário para o determinante dos coeficientes ser nulo, ou seja:

$$\begin{cases} C_2 \cosh \alpha \frac{b}{2} - C_4 \cos \beta \frac{b}{2} = 0 \\ C_2 \alpha^2 \cosh \alpha \frac{b}{2} - C_4 \beta^2 \cos \beta \frac{b}{2} = 0 \end{cases}$$

$$-\cosh \alpha \frac{b}{2} \cos \beta \frac{b}{2} \beta^2 - \alpha^2 \cosh \alpha \frac{b}{2} \cos \beta \frac{b}{2} = 0$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) \cosh \alpha \frac{b}{2} \cos \beta \frac{b}{2} = 0$$

Desde que  $\alpha^2 = -\beta^2$  a menos que  $N_x = 0$  (solução trivial) e desde que  $\cosh \alpha \left(\frac{b}{2}\right) > 1$  a única solução que satisfaz o problema é

$$\cos \beta \frac{b}{2} = 0$$

ou

$$\beta \frac{b}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$$

Logo

$$\beta \frac{b}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ (o menor valor)}$$

$$\beta = \sqrt{-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}}$$

$$\frac{\beta^2 b^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} \quad \beta^2 = \frac{\pi^2}{b^2}$$

$$\frac{\pi^2}{b^2} = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} = \left[ \frac{\pi^2}{b^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right]$$

Elevando ao quadrado

$$\frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 = \left[ \frac{\pi^2}{b^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right]^2$$

$$N_x = D \frac{\left[ \frac{\pi^2}{b^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right]^2}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}$$

$$N_x = \frac{a^2}{m^2 \pi^2} \left[ \frac{\pi^2}{b^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right]^2 D$$

$$N_x = \frac{a^2}{m^2 \pi^2} \left( \frac{\pi^4}{b^4} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{2\pi^2 m^2 \pi^2}{b^2 a^2} \right) D$$

$$N_x = \left( \frac{a^2 \pi^2}{m^2 b^4} + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{2\pi^2}{b^2} \right) D$$

$$N_x = \frac{D\pi^2}{b^2} \left[ \frac{1}{m^2} \frac{a^2}{b^2} + 2 + \frac{m^2 b^2}{a^2} \right]$$

$$N_x = \frac{D\pi^2}{b^2} \left[ \frac{1}{m} \frac{a}{b} + m \frac{b}{a} \right]^2$$

A força compressiva  $N_x$  da componente transversal é dada por

$$N_x = F_{\text{crit}} \times t \quad (t - \text{espessura da chapa})$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Logo a tensão crítica de flambagem será expressa por:

$$F_{\text{crit}} \times t = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\pi^2}{b^2} K$$

$$F_{\text{crit}} = K \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2) b^2/t^2}$$

$$F_{\text{crit}} = K \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2) (b/t)^2} \quad (35)$$

Esta expressão representa a tensão crítica de flambagem elástica e

$$K = \left[ \frac{1}{m} \frac{a}{b} + m \frac{b}{a} \right]^2 \quad (36)$$

representa o coeficiente de flambagem que é uma função do tipo de tensões e das condições de suporte das extremidades da chapa e também da grandeza da relação a/b [41, 154, 169]. O número inteiro  $m$  indica o número de meias-ondas que ocorrem na direção do eixo x da flambagem. A figura 13 mostra que existe um valor mínimo de K para um dado número de meia-ondas, ou seja a condição crítica, quando  $m = a/b$ .

Da expressão:

$$N_x = \frac{D\pi^2}{b^2} \left[ \frac{1}{m} \frac{a}{b} + m \frac{b}{a} \right]^2$$

minimizando em relação a m, tem-se:

$$\frac{dN_x}{dm} = \frac{2D\pi^2}{b^2} \left[ \frac{a}{b} \frac{1}{m} + m \frac{a}{b} \right] \left[ -\frac{1}{m^2} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right] = 0$$

$$-\frac{1}{m^2} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 0 \quad \frac{b}{a} = \frac{a}{bm^2} \therefore m^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$m = a/b \quad N_x = \frac{D\pi^2}{b^2} \left[ \frac{a}{b} \frac{1}{a/b} + \frac{a}{b} \frac{b}{a} \right]^2$$

$$N_x = \frac{4D\pi^2}{b^2} = \frac{4 Et^3 \pi^2}{12(1-\nu^2)b^2}$$

$$N_x = F_{\text{crit}} t = \frac{4 \pi^2 E t^3}{12(1-\nu^2)b^2}$$

$$F_{\text{crit}} = \frac{4 \pi^2 E}{12(1-\nu^2)(b/t)^2} \quad (37)$$

Isto significa que para uma chapa muito longa ela flamba em meia-ondas, onde os comprimentos se aproximam com a largura da chapa, então a flambagem da mesma subdivide aproximadamente em quadrados [41, 121, 154, 169]. Na figura 14 pode ser observada a configuração de flambagem de chapas quando solicitadas por cargas axiais de compressão.



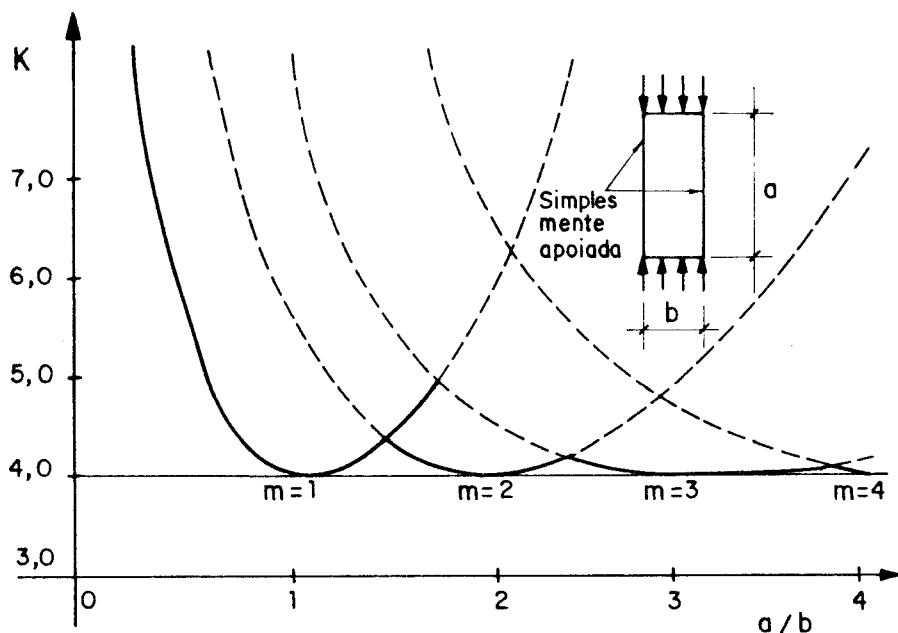
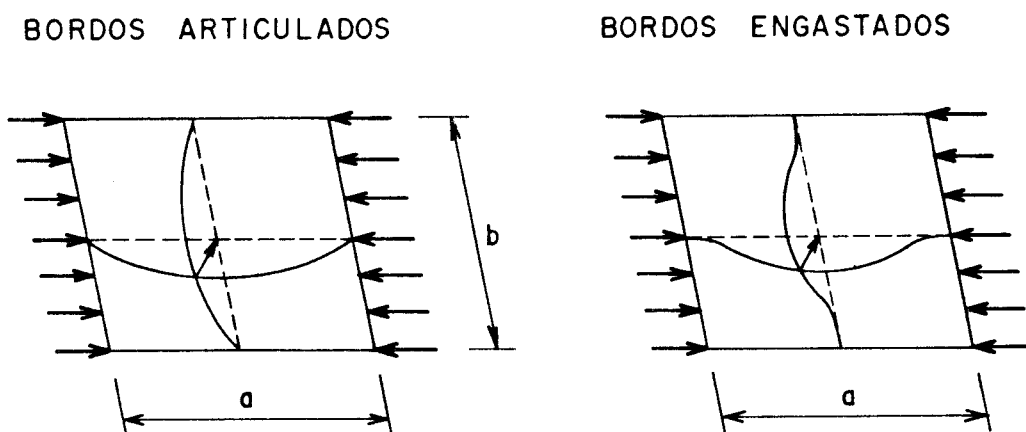


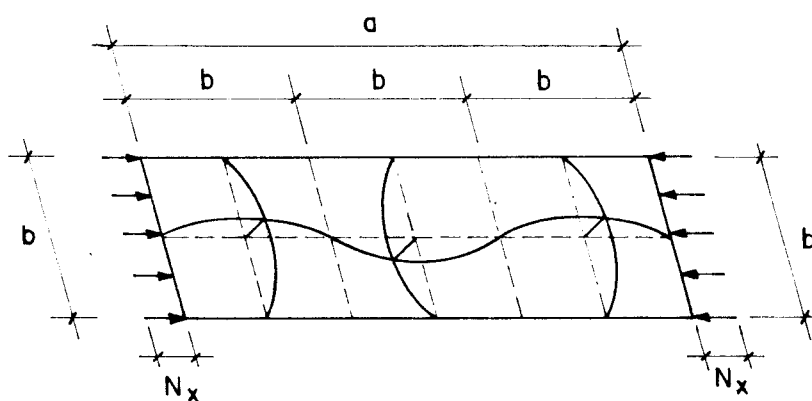
FIG. 13- Coeficiente de flambagem para chapas uniformemente comprimidas com extremidades longitudinais simplesmente apoiadas [44, 121, 154, 169].

OB. IMPORTANTE: Cumpre salientar que a análise da instabilidade de chapas representa um fator bem complexo principalmente quando se leva em conta que os elementos estruturais, que compõe a Estrutura de aço são formados por chapas e que a compreensão dos fatores normativos leva-se em conta a obtenção de resultados experimentais. Por exemplo a expressão (35) trata da obtenção da carga crítica de flambagem elástica de chapas solicitadas por ações de compressão uniforme na direção do comprimento das mesmas, quase a maioria dos estudiosos como [16, 28, 41, 61, 73, 88, 94, 113, 121, 154, 169] citam essa expressão, entretanto alguns como [28, 41, 73, 88, 121, 154, 169] tratam o assunto com mais reelevância, principalmente com relação ao

coeficiente de flambagem  $K$ , evidentemente todas essas obras podem ser consultadas sobre a teoria da estabilidade de chapas, mas as obras [28, 88, 121, 154, 169] tratam com maior profundidade esse assunto.



a) Flambagem Elástica de uma chapa retangular delgada



b) Flambagem de uma chapa retangular longa apoiada livremente em suas quatro bordas

FIG. 14- Flambagem de chapas delgadas sob esforços de compressão nas bordas [32, 36, 41, 121].

### 3- Flambagem Local dos Elementos de chapas

A flambagem local consiste no fenômeno da flambagem de um elemento componente de um determinado perfil estrutural, isto é, representa a possibilidade em que uma parte da seção pode flambar fora de seu próprio plano, conforme a figura 15. Os três casos mais importantes de flambagem local são:

a) Compressão uniforme, tal como ocorre nas mesas dos perfis estruturais das vigas e na alma e mesas das colunas.

b) Flexão Pura tal como a alma do perfil de uma viga na região onde é nulo o esforço cortante.

c) Cisalhamento Puro, tal como a alma de uma viga na região de momento fletor nulo

A flambagem local ocorre quando os elementos de parede fina de uma barra são submetidas a esforços de compressão. Isto ocorre principalmente nas mesas dos perfis estruturais comprimidos e também nas respectivas almas, quando tensões de compressão surgem da flexão da barra e de ações concentradas de carregamentos externos aplicados nos topos das mesas perfis estruturais; a outra forma de flambagem local também ocorre nas almas das chapas desses perfis estruturais quando são solicitadas por tensões de cisalhamento e em barras de seções tubulares de parede fina podem aparecer o fenômeno da flambagem local [16, 61, 151].

Segundo [134] a flambagem local é um aspecto de importância fundamental na verificação da estabilidade estrutural principalmente em vigas que devem vencer grandes vãos principalmente destinadas a suportarem ações pesadas, encontradas com frequência nas estruturas dos edifícios industriais as chamadas vigas de rolamento e a solução normal neste caso é partir para um perfil estrutural soldado comumente chamado de viga esbelta e a prática nos dias de hoje é comum utilizar os processos de soldagem das chapas

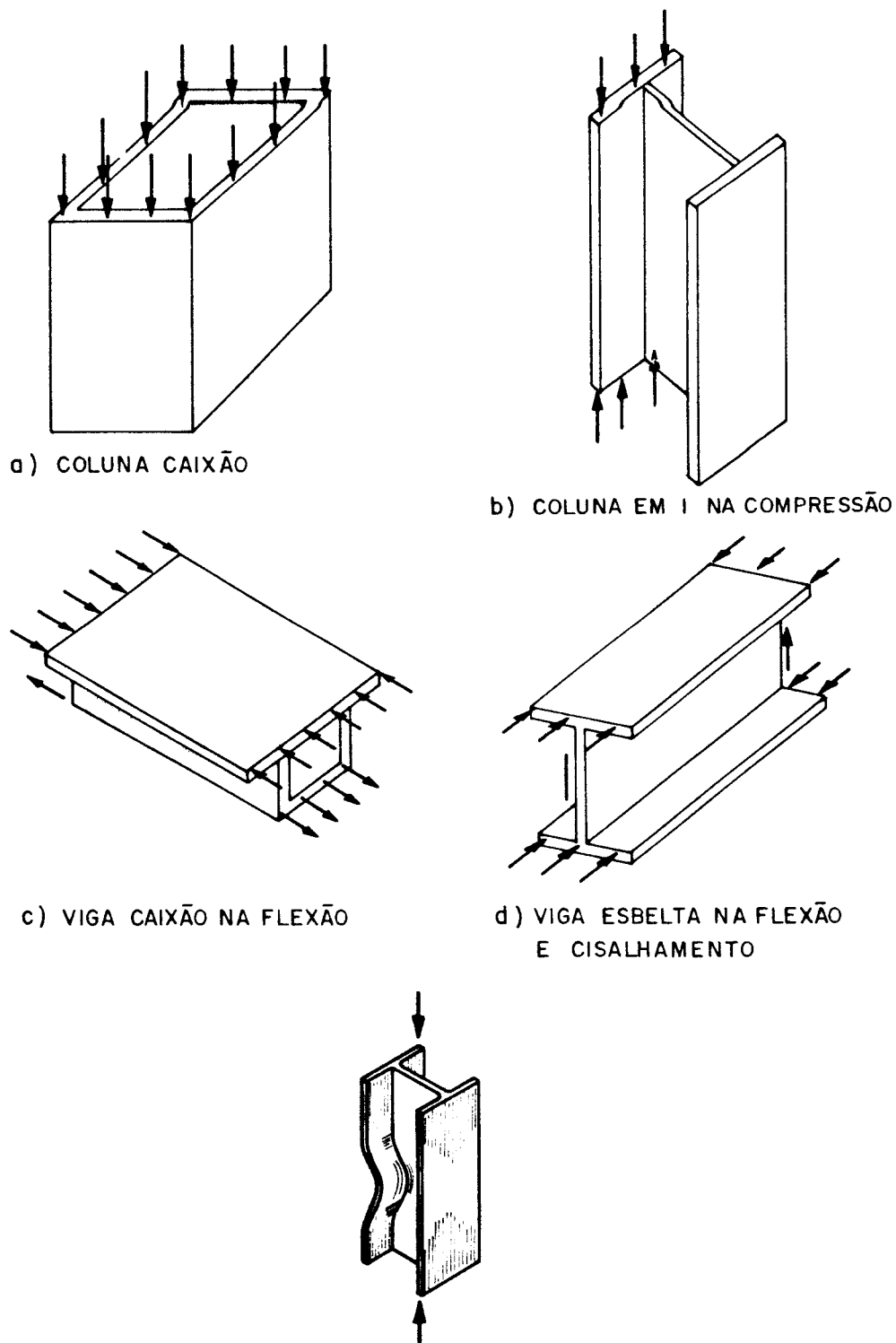


FIG. 15 Tipos de chapas susceptíveis à flambagem e flambagem local de mesas comprimidas de alguns perfis estruturais [36, 61, 115, 134]

que formarão a mesma. Contudo por causa dessa liberdade de opção do projetista maiores cuidados o mesmo deve tomar para essas seções, com muito mais atenção do que os perfis laminados. E ainda segundo [134] o mais importante, desses cuidados se diz respeito à flambagem da mesa comprimida e a flambagem de cisalhamento da alma.

#### 4.4- Resistência a Compressão de chapas com Extremidades Comprimidas

A flambagem local das chapas que constituem os perfis estruturais podem causar falha prematura da seção inteira ou no mínimo causará tensões não uniformes e que reduzem a resistência global. A flambagem local geralmente ocorre em barras que possuem placas de espessura finas tais como os tubos, vigas I, vigas U, etc [61, 121, 154].

Usualmente alguns autores como [151] costumam definir a flambagem local como sendo o comprimento de onda da mesa consideravelmente menor do que o comprimento da própria barra.

A flambagem local ocorre em elementos delgados de uma determinada barra quando são submetidos a tensões de compressão, e isto é frequente não somente em mesas comprimidas de vigas, mas também nas almas desses perfis, onde as tensões compressivas aparecem da flexão da barra bem como das ações concentradas aplicadas nas mesas, e a flambagem local ocorre também nas chapas das almas das seções estruturais das vigas, quando elas são solicitadas por tensões de cisalhamento. A flambagem local é principalmente relacionada com barras de parede fina, isto é seções fabricadas de chapas finas, e também um fenômeno relacionado com as barras tubulares de parede fina [61].