

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ESTUDO DE DEFORMABILIDADES DE LIGAÇÕES PARA ANÁLISE LINEAR  
EM PÓRTICOS PLANOS DE ELEMENTOS PRÉ-MOLDADOS DE CONCRETO

MARCELO DE ARAUJO FERREIRA

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos, da Universidade de São Paulo,  
como parte dos requisitos para obtenção do  
título de mestre em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Mounir Khalil El Debs

São Carlos  
1993

ESTUDO DE DEFORMABILIDADES DE LIGAÇÕES PARA ANÁLISE LINEAR  
EM PÓRTICOS PLANOS DE ELEMENTOS PRÉ-MOLDADOS DE CONCRETO

ENG. MARCELO DE ARAUJO FERREIRA

*Dedico este trabalho à  
minha querida esposa,  
Iza.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a oportunidade que me foi dada de poder realizar este trabalho. Assim, inicio agradecendo Aquele que me tem dado a oportunidade de viver, trabalhar e provar do seu amor e fidelidade, ao meu Deus.

Em seguida quero agradecer a todos aqueles que de uma maneira ou de outra, participaram, colaboraram ou acompanharam este trabalho:

- ao meu orientador, Prof. Dr. Mounir Khalil El Debs, pela disposição, interesse, orientação e principalmente pela oportunidade de ter sido seu orientado;
- aos funcionários do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, pela colaboração na elaboração deste trabalho. Ao Chico e à Silvia pelos desenhos, à Nadir pela ajuda na pesquisa bibliográfica e ao Toninho pelo auxílio de digitação e diagramação;
- aos colegas de estudo, pela paciência dispensada. Ao Joel Marcos e ao Humberto;
- à CAPES, pelo apoio financeiro;
- aos meus pais que, com carinho, me deram as condições e a oportunidade de continuar meus estudos.

## RESUMO

No presente trabalho apresenta-se um procedimento para análise de pórticos planos de elementos pré-moldados de concreto, considerando as deformabilidades em suas ligações. Este procedimento engloba um método de análise linear em pórticos planos com nós semi-rígidos e uma metodologia para a determinação das deformabilidades em ligações típicas de estruturas pré-moldadas.

O método empregado para análise de pórticos planos com nós semi-rígidos, válido para estruturas em geral, possui um algoritmo para uma modificação simples de modelos que utilizem o método dos deslocamentos para a análise de pórticos com nós rígidos.

Para a determinação das deformabilidades em ligações típicas de estruturas pré-moldadas de concreto, desenvolve-se uma metodologia que leva em conta os mecanismos básicos de deformação dos elementos que compõem as ligações.

Apresentam-se exemplos onde são feitas comparações de valores de cálculos teóricos com resultados experimentais para deformabilidades em algumas ligações típicas e exemplos com simulações numéricas para análise em pórticos pré-moldados de concreto.

*Palavras-chave:* *Ligações semi-rígidas, concreto pré-moldado, deformabilidade de ligações, análise estrutural.*

## ABSTRACT

In this research is showed a procedure for structural analysis of precast concrete frames, considering their semi-rigidly connections. This procedure includes a matrix analysis of plane frames structures with partial stiffness joints and a methodology to determine flexibility on typical connections in precast concrete structures.

The method used for matrix analysis of semi-rigidly connected frames, valid for general structures, has an algorithm with a simple modification to be imputed in common softwares for rigidly connected frames, taking into account partial stiffness joints.

For determination of flexibility in typical connections in precast concrete structures, it is developed a methodology that considers deformation basic mechanisms of the elements that take part in the connections.

Examples are showed making comparisons between theoretical and experimental results to flexibility in some typical connections, furthermore examples with numeric simulations for analysis of precast concrete structures are made.

*keywords: Connections, semi-rigidly joints, precast concrete, structural analysis.*

## SUMÁRIO

|   |    |
|---|----|
| 1-INTRODUÇÃO  | 01 |
| 2-MÉTODO PARA ANÁLISE LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS COM LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS                         | 06 |
| 2.1 - Considerações gerais  | 06 |
| 2.2 - Considerações sobre o método dos deslocamentos  | 08 |
| 2.3 - Método de análise de pórticos planos com ligações semi-rígidas                              | 09 |
| 2.3.1-Equações de equilíbrio  | 09 |
| 2.3.2-Esquemas de vinculação por meio de molas  | 13 |
| 2.3.3-Esforços internos em função dos deslocamentos das extremidades das barras                   | 14 |
| 2.3.4-Correção da matriz de rigidez do elemento   | 15 |
| 2.3.5-Correção dos esforços de bloqueio   | 19 |
| 2.3.6-Desenvolvimento matricial   | 23 |
| 3-ESTUDO ANALÍTICO DE DEFORMABILIDADES EM LIGAÇÕES TÍPICAS DE ESTRUTURAS PRÉ-MOLDADAS DE CONCRETO | 26 |
| 3.1 - Preliminares  | 26 |
| 3.2 - Metodologia para o cálculo de deformabilidades das ligações típicas                         | 29 |
| 3.3 - Deformabilidade dos mecanismos básicos de deformação  | 33 |
| 3.3.1-Mecanismo de deformação à compressão simples em elastômero não fretado                      | 33 |
| 3.3.1.1-Considerações gerais  | 33 |
| 3.3.1.2-Características físicas   | 34 |
| 3.3.1.3-Tensões e deformações   | 36 |
| 3.3.1.4-Equacionamento para o cálculo da deformabilidade  | 39 |

|   |    |
|---|----|
| 3.3.2-Mecanismo de deformação à compressão simples em Elastômero fretado  | 42 |
| 3.3.2.1-Condições gerais  | 42 |
| 3.3.3.2-Características físicas   | 42 |
| 3.3.3.3-Tensões e deformações   | 43 |
| 3.3.2.4-Equacionamento para o cálculo da deformabilidade  | 44 |
| 3.3.2.5-Exemplo numérico com comparação entre equacionamentos propostos   | 45 |
| 3.3.3-Mecanismo de deformação à compressão simples na superfície de contato de dois elementos de concreto               | 48 |
| 3.3.4-Mecanismos de deformação à tração de uma barra inserida em um elemento de concreto                                | 49 |
| 3.3.5-Mecanismo de deformação ao cisalhamento em elastômero não fretado   | 50 |
| 3.3.6-Mecanismo de deformação ao cisalhamento de uma barra inserida em um elemento de concreto                          | 52 |
| 3.3.6.1-Considerações gerais  | 52 |
| 3.3.6.2-Cálculo do deslocamento transversal no chumbador  | 55 |
| 3.3.6.3-Cálculo da deformabilidade do cisalhamento no chumbador   | 56 |
| 3.3.7- Mecanismo de deformação ao cisalhamento de uma barra bi-engastada em dois elementos de concreto com altura livre | 57 |
| 3.3.8- Mecanismo de deformação à flexão em elastômero não fretado   | 59 |
| 3.3.9- Mecanismo de deformação à flexão em elastômero fretado   | 61 |
| 3.3.10-Mecanismo de deformação à flexão em chapas metálicas   | 62 |
| 3.4 - Equacionamentos para cálculos de deformabilidades para ligações típicas em serviço                                | 63 |
| 3.4.1-Ligação viga-pilar articulada, em apoio sobre consolo, com almofada de elastômero                                 | 63 |

|   |     |
|---|-----|
| 3.4.1.1-Ligação viga-pilar articulada, em apoio sobre consolo, com almofada de elastômero não fretado             | 64  |
| 3.4.1.1.1-Deformabilidade à compressão simples  | 64  |
| 3.4.1.1.2-Deformabilidade ao cisalhamento   | 65  |
| 3.4.1.1.3-Deformabilidade à flexão  | 66  |
| 3.4.1.2-Ligação viga-pilar articulada, em apoio sobre consolo, com almofada de elastômero fretado                 | 67  |
| 3.4.1.2.1-Deformabilidade à compressão simples  | 67  |
| 3.4.1.2.2-Deformabilidade ao cisalhamento   | 68  |
| 3.4.1.2.3-Deformabilidade à flexão  | 68  |
| 3.4.2-Ligação viga-pilar articulada, em apoio sobre consolo, com almofada de elastômero e chumbador               | 69  |
| 3.4.2.1-Ligação viga-pilar articulada, em apoio sobre consolo, com almofada de elastômero não fretado e chumbador | 71  |
| 3.4.2.1.1-Deformabilidade ao cisalhamento   | 71  |
| 3.4.2.1.2-Deformabilidade à flexão  | 74  |
| 3.4.2.2-Ligação viga-pilar articulada, em apoio sobre consolo, com almofada de elastômero fretado e chumbador     | 77  |
| 3.4.2.2.1-Deformabilidade ao cisalhamento   | 77  |
| 3.4.2.2.2-Deformabilidade à flexão  | 77  |
| 3.4.3-Ligação viga-pilar rígida, em apoio sobre consolo, por meio de chapas soldadas: deformabilidade à flexão    | 82  |
| 3.4.4-Ligação viga-pilar rígida por meio de chumbadores ou parafusos: deformabilidade à flexão                    | 89  |
| 3.4.5-Ligação viga-viga rígida por meio de parafusos (SCARF JOINTS): deformabilidade à flexão                     | 93  |
| 3.4.6-Ligação pilar fundação rígida por meio de chapas metálicas: deformabilidade à flexão                        | 97  |
| 3.5 - Considerações sobre deformabilidades em elementos de fundação   | 102 |
| 3.5.1-Preliminares  | 102 |

|  |     |
|--|-----|
| 3.5.2-Equacionamento para o cálculo de deformabilidade em elementos de fundações nas bases de pilares                                    | 107 |
| 3.5.2.1-Fundações diretas  | 109 |
| 3.5.2.2-Bloco rígido sobre dois eixos de estacas   | 110 |
| 3.5.2.3-Deformabilidade no topo de uma estaca solicitada por momento fletor de força horizontal, na superfície do terreno                | 112 |
| <br>   |     |
| 4-EXEMPLOS DE APLICAÇÃO NUMÉRICA   | 118 |
| 4.1 - Preliminares   | 118 |
| 4.2 - Confronto de valores teóricos com resultados experimentais de deformabilidades de ligações   | 119 |
| 4.2.1-Deformabilidade à flexão em ligação viga-pilar rígida por meio de chapas soldadas  | 119 |
| 4.2.2-Deformabilidade à flexão em ligação pilar-fundação por meio de chapas parafusadas  | 122 |
| 4.2.3-Deformabilidade à flexão em ligação viga-viga por meio de chapas parafusadas   | 126 |
| 4.3 - Exemplos de aplicação na análise de estruturas pré-moldadas  | 131 |
| 4.3.1-Simulação numérica de análise de um pórtico plano para carregamentos e situações de vinculações variadas.                          | 131 |
| 4.3.2-Determinação do Parâmetro de instabilidade $\alpha$ para pórtico de múltiplos pavimentos   | 138 |
| 4.3.3-Análise em pórtico para telhado das águas, para galpão de uso múltiplo   | 143 |
| 4.3.4-Cálculo dos esforços e deslocamentos em um pórtico plano, considerando as deformabilidades nas ligações viga-pilar e nas fundações | 151 |
| <br>   |     |
| 5-CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES  | 161 |
| <br>   |     |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS   | 163 |

## NOTAÇÕES

### LETRAS ROMANAS

- A -Área de uma seção transversal de uma barra; área do diagrama de momentos fletores na viga conjugada.
- $A_b$  -Área da superfície de apoio de uma fundação direta.
- $A_n$  -Área inicial da superfície de apoio do elastômero.
- $A_o$  -Área efetiva da almofada de elastômero.
- $A_s$  -Área da seção transversal da barra de armadura ou chumbador
- a -Menor dimensão da almofada de elastômero, na direção do eixo da viga apoiada; distância do centro geométrico da área do diagrama de momentos fletores na viga conjugada até a extremidade esquerda.
- $a_h$  -Deslocamento horizontal da almofada de elastômero.
- B -Fator de forma da almofada de elastômero segundo a NBR-9062; menor dimensão de uma sapata.
- b -Maior dimensão da almofada de elastômero, transversal ao eixo da viga; distância do centro geométrico da área do diagrama de momentos fletores na viga conjugada até a extremidade direita.
- C -Matriz de correção aplicada à matriz de rigidez de um elemento de barra.
- c -Coeficiente de correção
- $C_f$  -Matriz de correção dos esforços de bloqueio
- $C_p^s, C_m^s$  -Coeficientes adimensionais devidos à aplicação da força lateral e do momento, respectivamente, em uma estaca para o cálculo dos deslocamentos.
- D -Deslocamentos nas extremidades dos elementos.
- D' -Deslocamentos nodais.
- d -Distância da barra tracionada até a borda comprimida.
- $d_b$  -Diâmetro de uma barra.

- $E$  -Módulo de elasticidade longitudinal .
- $E_f$  -Módulo de elasticidade longitudinal fictício.
- $E_n$  -Módulo de elasticidade longitudinal no elastômero.
- $E_s$  -Módulo de elasticidade longitudinal do aço.
- $E_{so}$  -Módulo de elasticidade típico no solo.
- $e$  -Excentricidade.
- $e_1$  -Distância entre a face de um pilar à extremidade de uma viga, na parte superior da ligação viga-pilar.
- $e_r$  -Largura do trecho de ruptura na borda de um elemento de concreto com uma barra semi-inserida, solicitada à força transversal ao seu eixo.
- $F$  -Forças internas nos elementos da estrutura.
- $F_c$  -Força de compressão.
- $F_{cc}$  -Força de compressão no concreto.
- $F_{cn}$  -Força de compressão no elastômero.
- $F_i, F_j$  -Esforços devidos aos deslocamentos nas extremidades  $i$  e  $j$  da barra.
- $F_t$  -Força de tração.
- $F_{tb}$  -Força de tração em uma barra.
- $G$  -Módulo de elasticidade transversal.
- $G_o$  -Módulo de elasticidade transversal inicial.
- $G_t$  -Módulo de elasticidade transversal na idade  $(t)$ .
- $H$  -Força horizontal.
- $H_t$  -Força horizontal na idade  $(t)$
- $h_n$  -Espessura da almofada de elastômero.
- $h_\ell$  -Altura livre entre dois elementos de concreto
- $h_1$  -Espessura de uma camada de elastômero; altura de uma viga.
- $h_2$  -Trecho da extremidade de uma viga sobre o consolo.

- $I_b$  - Momento de inércia de uma barra, chumbador.
- $I_{ch}$  - Momento de inércia de uma chapa.
- $I_w$  - Fator de influência da geometria da sapata para o cálculo de recalques.
- $I_z$  - Momento de inércia de uma seção em relação ao eixo (z).
- $i, j$  - Nós iniciais e finais de um elemento de barra.
- $K$  - Matriz de rigidez corrigida; módulo de reação horizontal.
- $K_c$  - Módulo de rigidez de referência do concreto.
- $K_\ell$  - Valor do módulo de reação horizontal do solo (K) na ponta da estaca ( $z = \ell$ )
- $L$  - Maior dimensão da base de apoio de uma sapata.
- $\ell$  - Comprimento de um elemento de barra; comprimento de uma estaca.
- $\ell_{br}$  - Comprimento de ancoragem de referência.
- $\ell_o$  - Distância da face do elemento de concreto ao ponto considerado para o cálculo da deformabilidade de uma barra.
- $\ell_s$  - Comprimento considerado para o cálculo da deformabilidade de uma barra.
- $\ell_y$  - Distância da borda do elemento até o máximo momento ao longo de uma barra inserida em um elemento de concreto.
- $M$  - Momento fletor.
- $M_i^z, M_j^z$  - Momentos fletores em z nas extremidades i e j.
- $M_\ell$  - Momento fletor resistido pela ligação.
- $N$  - Força normal de compressão.
- $n$  - Número de camadas no elastômero fretado.
- $P$  - Carga vertical.
- $P_i$  - Esforços de extremidade de barra.
- $\bar{P}_i$  - Esforços de bloqueio.

- $R_i, R_j$  - Força cortante na viga conjugada.
- $S$  - Matriz de rigidez elástica de um elemento; fator de forma de uma almofada de elastômero, onde  $S = B^{-1}$  e  $B$  é o fator de forma segundo NBR-9062.
- $T$  - Força de tração; matriz de transformação de coordenadas; fator de rigidez relativa estaca/solo para as areias.
- $U$  - Matriz de incidência cinemática.
- $V$  - Força cortante.
- $V_i, V_j$  - Força cortante na viga carregada.
- $x$  - Altura da linha neutra, a partir da borda comprimida.
- $y$  - Deslocamento vertical segundo o eixo  $y$ .
- $w$  - Deslocamento transversal na barra do chumbador.
- $z$  - Braço de alavanca de um binário de forças; profundidade no solo.

#### LETRAS GREGAS

- $\alpha$  - ângulo de rotação; coeficiente que está em função do módulo de rigidez de referência para o concreto,  $K$ , do diâmetro da barra inserida no concreto e da rigidez  $E I$  da barra inserida no concreto.
- $\beta_i, \beta_j$  - Parâmetros de restrição aos deslocamentos axiais nas extremidades  $i$  e  $j$  de um elemento de barra.
- $\gamma_i, \gamma_j$  - Parâmetros de restrição à rotação nas extremidades  $i$  e  $j$  de um elemento de barra.
- $\Delta h_b$  - Deformação por tração da barra do chumbador
- $\Delta h_n$  - Afundamento na almofada de elastômero
- $\Delta h_s$  - Alongamento da barra do chumbador
- $\Delta_s$  - Deslocamento transversal, relativo às extremidades da barra
- $\Delta v_f$  - Deslocamento vertical no centro da sapata

- $\delta_b$  - Deslocamento vertical na extremidade da viga-suporte.  
 $\delta_1, \delta_2$  - Deslocamentos verticais nas linhas de estacas 1 e 2.  
 $\epsilon_0$  - Deformação específica inicial.  
 $\epsilon_n$  - Deformação específica no elastômero.  
 $\epsilon_s$  - Deformação específica no aço.  
 $\epsilon_t$  - Deformação específica na idade (t).  
 $\theta$  - Rotações nodais.  
 $\theta_i^z, \theta_j^z$  - Rotações no eixo z nos nós i e j.  
 $\theta_m$  - Rotação na extremidade de um elemento de rigidez modificada  
 $\theta_b$  - Rotação na extremidade de um elemento de rigidez inicial.  
 $\lambda$  - Deformabilidade, flexibilidade.  
 $\lambda_{cn}$  - Deformabilidade à compressão no elastômero.  
 $\lambda_{hi}, \lambda_{hj}$  - Deformabilidade nas ligações na direção axial de um elemento de barra.  
 $\lambda_{tb}$  - Deformabilidade à tração de uma barra  
 $\lambda_{vf}$  - Deformabilidade à compressão em uma fundação  
 $\lambda_{\tau b}$  - Deformabilidade ao cisalhamento na barra  
 $\lambda_{\tau bi}$  - Deformabilidade ao cisalhamento em barra inserida em elemento de concreto.  
 $\lambda_{\tau bl}$  - Deformabilidade ao cisalhamento em barra bi- engastada em dois elementos com altura livre.  
 $\lambda_{\tau n}$  - Deformabilidade ao cisalhamento em elastômero não fretado.  
 $\lambda_{\phi}$  - Deformabilidade à flexão na extremidade de uma barra.  
 $\lambda_{\phi \ell}$  - Deformabilidade à flexão em uma ligação.  
 $\lambda_{\phi e}$  - Deformabilidade à flexão numa estaca.  
 $\lambda_{\phi f}$  - Deformabilidade à flexão da fundação.  
 $\mu$  - Coeficiente de Poisson.

- $\mu_n$  - Coeficiente de Poisson para o elastômero.
- $\nu_{so}$  - Coeficiente de Poisson típico para o solo.
- $\sigma_n$  - Tensão normal no elastômero.
- $\sigma_{n(máx)}$  - Máxima tensão normal no elastômero.
- $\sigma_{n(ref)}$  - Tensão normal de referência no elastômero.
- $\sigma_m$  - Tensão média de cálculo.
- $\sigma_s$  - Tensão no aço.
- $\tau$  - Tensão de cisalhamento.
- $\tau_n$  - Tensão de cisalhamento no elastômero.
- $\phi_i, \phi_j$  - Rotações das ligações nas extremidades i e j de uma viga.
- $\phi_n$  - Rotação no elastômero.
- $\phi_\ell$  - Rotação de uma ligação.
- $\phi_r$  - Rotação relativa entre as extremidades da barra; fator de rigidez relativa estaca/solo para as argilas.
- $\varphi(t)$  - Coeficiente que leva em conta a dureza no elastômero.

## ABREVIATURAS

- AASHTO - American Association of Highway and Transportation  
Officials
- CEB - Comité Euro-International du Béton
- PCA - Portland Concrete Cement
- PCI - Precast/Prestressed Concrete Institute

## SIGLAS PARA OS TIPOS DE LIGAÇÕES

As siglas para a denominação dos tipos de ligações e para os mecanismos básicos de deformação, são apresentadas na página 30.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

As bibliografias estão referenciadas pelo nome do autor, em letra maiúscula, acompanhado da data, em parênteses.

## CAPÍTULO I

### 1 - INTRODUÇÃO

Os sistemas estruturais aplicados às construções pré-moldadas de concreto podem ser divididos basicamente em três classes diferentes: estrutura em esqueleto portante; estrutura em painéis portantes e estruturas mistas.

O sistema em esqueleto portante é composto pelos elementos pilar e viga, eventualmente completados por lajes e paredes de contraventamento.

No sistema de painéis portantes, os elementos principais são os painéis correspondentes às paredes e os painéis correspondentes às lajes e coberturas.

Os sistemas mistos são aqueles formados por elementos de barras e painéis, cujos arranjos podem ser bem variados e que não se enquadram nos outros dois sistemas citados.

Delimitou-se ao estudo dos sistemas estruturais pré-moldados em esqueleto portante. Esta limitação é justificada em virtude de a maior parte das estruturas pré-moldadas, notadamente no Brasil, empregarem este sistema.

O estudo de um sistema estrutural pré-moldado diferencia-se de um sistema estrutural monolítico, em razão da existência das ligações entre os elementos estruturais.

Devido ao seu comportamento próprio, as ligações promovem a redistribuição dos esforços nos elementos e, ainda, a modificação dos deslocamentos finais. As falhas de certas ligações, frente à determinadas ações, podem provocar o colapso da estrutura. Os defeitos em sua execução podem originar esforços que provoquem falhas ou deslocamentos excessivos.

Quanto a análise estrutural, para um sistema monolítico leva-se em conta a construção acabada, enquanto em um sistema pré-moldado deve-se analisar também as várias etapas de execução.

Em ORDOÑEZ et alii (1974) é comentado que a influência das ligações na construção pré-moldada é decisiva e tal a sua importância, que alguns especialistas afirmam que a questão das ligações é que tem impedido a superação dos métodos construtivos convencionais pelos pré-moldados. Segundo estes autores, o bom funcionamento de um sistema estrutural pré-moldado e conseqüentemente o seu êxito comercial está diretamente relacionado com o desempenho das suas ligações. Estes autores comentam que, do ponto de vista econômico, a influência das ligações é muito clara, pois as ligações de montagens complicadas podem encarecer a obra, devido aos materiais e mão-de-obra especializada necessários. Ainda, sugerem uma tendência em se utilizar elementos de maior dimensões com o número menor de ligações para se obter economia, mas que esta tendência possui vantagens e desvantagens.

O *Manual on design of connections for precast and prestressed concret* do PCI (1973) alerta para a necessidade do uso da padronização nas ligações para se garantir o controle de qualidade no projeto e na produção.

Em HOLMES & MARTIN (1983) é destacado que a maior parte das estruturas pré-moldadas são projetadas com ligações articuladas, sendo quase exceção os pórticos com ligações resistentes à flexão. E que estas ligações acabam sendo evitadas em virtude da dificuldade e do custo para se conseguir a transmissão integral dos momentos entre os elementos conectados.

Analisando a questão, BALLARIN (1993) mostra que existem opiniões contrárias sobre este assunto. BIRKELAND (1966) sugere a adoção de ligações rígidas sempre que possível para se obter o mesmo grau de continuidade das estruturas monolíticas. MOKK (1969) recomenda a redução ao mínimo das ligações rígidas, tendo em vista a simplicidade de execução, o baixo custo e ainda a possibilidade das ligações articuladas poderem receber o carregamento logo após à sua execução.

Considerando-se que a maior parte das estruturas pré-moldadas serem empregadas em edificações de pequena altura, tem-se a tendência da maior utilização das ligações articuladas. Todavia, com relação a pórticos em galpões de pequenas dimensões, têm-se adotado algumas soluções de ligações resistentes à flexão.

Ao se pensar na eficiência das ligações resistentes à flexão aplicadas em sistemas estruturais pré-moldados de edifícios de múltiplos pavimentos, é importante que se tenha um bom desempenho com relação à rigidez e à ductilidade destas ligações. A falta de conhecimento do comportamento das chamadas "ligações rígidas" inviabiliza um maior desenvolvimento destes sistemas estruturais e, ainda, dos processos de cálculo da estrutura.

BALLARIN (1993) comenta que, embora alguns países venham realizando estudos experimentais sistemáticos sobre determinados tipos de ligações, nas últimas duas décadas, tal investigação não tem acompanhado a expansão na utilização das estruturas pré-fabricadas. Alerta, ainda, da importância de um estudo aprofundado e sistemático das ligações nos elementos estruturais pré-moldados.

O equacionamento dos fatores que interferem no comportamento de uma dada ligação favorece o planejamento de futuros estudos experimentais e ainda mostra-se de grande utilidade para o desenvolvimento de critérios de dimensionamento e detalhamento desta ligação.

Segundo BLJUGER (1988), as análises em projetos de estruturas pré-moldadas podem ser divididas em dois grupos básicos. No primeiro grupo estão as análises em regime de serviço,

que levam em conta o comportamento linear das ligações. No segundo grupo estão as análises do comportamento da estrutura no estado limite último, onde devem ser estudados os mecanismos de ruptura das ligações.

Neste trabalho, tratou-se da análise linear de estruturas pré-moldadas em sistemas de esqueleto portante, para o caso particular dos pórticos planos.

Tal análise requer o conhecimento do comportamento estrutural das ligações, porém as informações sobre este assunto são escassas. Uma relação importante a ser utilizada para o estudo da rigidez de uma ligação é a curva momento-rotação. Segundo esta relação pode-se distinguir as ligações, com relação à sua rigidez, em três grupos: ligações perfeitamente rígidas; ligações semi-rígidas e ligações perfeitamente articuladas.

O procedimento corrente para o cálculo dos esforços e deslocamentos em estruturas pré-moldadas apresenta várias imprecisões, pois considera as ligações resistentes à flexão como sendo perfeitamente rígidas e as não resistentes à flexão como sendo perfeitamente articuladas. Todavia, normalmente as ligações comportam-se, de um modo mais realista, como sendo semi-rígidas.

As ligações semi-rígidas liberam deslocamentos nas extremidades das barras da estrutura, promovendo uma perda de rigidez da estrutura, uma redistribuição dos esforços e, ainda, uma modificação dos deslocamentos globais. Desta forma, é necessário um procedimento de cálculo que considere a semi-rigidez de cada ligação, obtendo-se uma análise estrutural de melhor consistência, com melhores dados para o dimensionamento e para os estudos da estabilidade da estrutura.

O objetivo deste trabalho está em desenvolver um procedimento para o cálculo dos esforços e deslocamentos em estruturas pré-moldadas de concreto que considere as ligações como semi-rígidas. Para tal, emprega um método para a análise de pórticos planos de nós semi-rígidos e uma metodologia para a determinação de deformabilidades em ligações típicas em serviço.

O método de análise para pórticos com nós semi-rígidos, aqui utilizado, foi desenvolvido por MONFORTON & WU (1963). Sendo válido para estruturas em geral, utiliza-se de um processo que permite uma rápida modificação de programas para análise de pórticos de nós rígidos, que se utilizem do método dos deslocamentos, para se levar em conta as deformabilidades nas ligações. A alteração ocorre a partir das modificações das matrizes de rigidez dos elementos da estrutura e dos esforços de bloqueio nas extremidades destes elementos em função das deformabilidades nas ligações existentes.

A metodologia para o cálculo das deformabilidades nas ligações, aqui desenvolvida, utiliza-se da associação dos vários mecanismos básicos de deformações dos elementos que compõem a ligação. Entende-se por mecanismo básico de deformação, como sendo a deformação específica de um elemento de vinculação, onde o conjunto destes elementos compõe o sistema de vinculação da ligação. No desenvolvimento do cálculo, leva-se em conta três fatores relacionados entre si: os esforços a serem transmitidos; os mecanismos de vinculação a serem adotados e os mecanismos básicos de deformação a serem considerados. O equacionamento desenvolve-se pelo equilíbrio das forças, compatibilização dos deslocamentos e pelo conhecimento das deformações específicas dos mecanismos de deformação.

## CAPÍTULO II

### 2 - MÉTODO PARA ANÁLISE LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS COM LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS

#### 2.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Neste capítulo é apresentado um método que permite a modificação de programas para análise de pórticos de nós rígidos, que se utilizem do método dos deslocamentos, para se levar em conta as ligações semi-rígidas. Tal consideração é interessante, uma vez que a presença de ligações semi-rígidas gera a redistribuição dos esforços na estrutura e, por sua vez, a alteração dos deslocamentos finais.

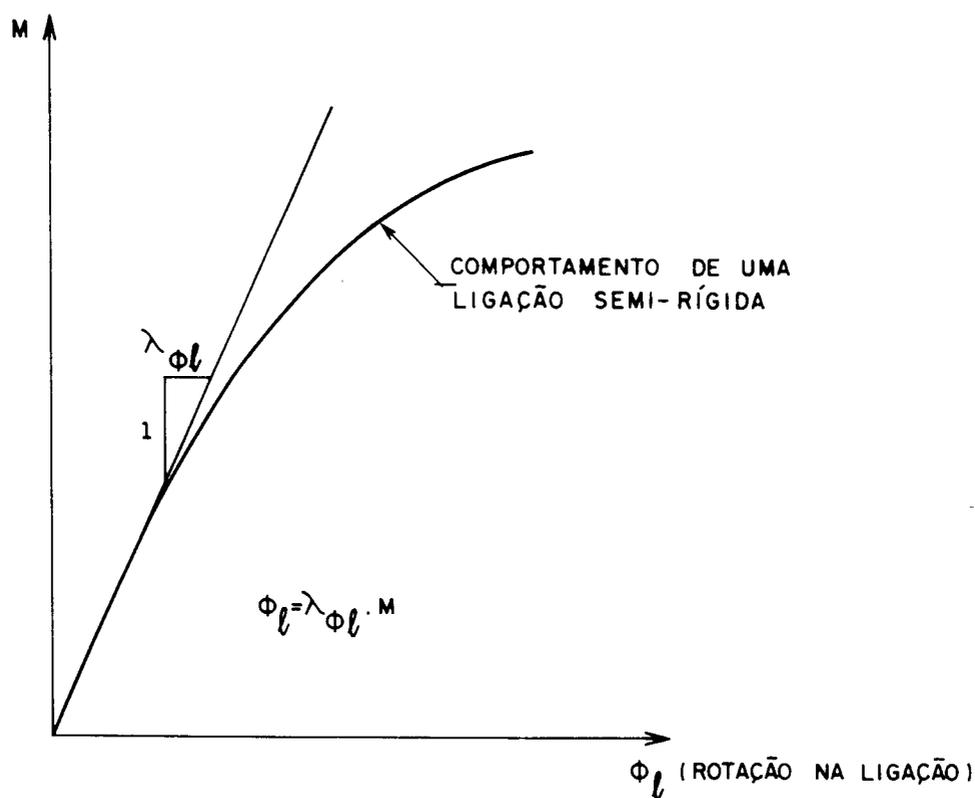
Este método, válido para estruturas em geral, foi desenvolvido por MONFORTON & WU (1963), sendo empregado posteriormente por outros autores como BRUN & PICARD (1976) e FAFARD & PICARD (1990).

Segundo MONFORTON, os estudos sobre o assunto iniciaram-se na América do Norte e na Inglaterra, sendo que os primeiros trabalhos foram experimentais, aplicados às estruturas metálicas, na década de 30. Segundo este autor, os primeiros equacionamentos foram propostos por Lothers em 1951.

A figura 2.1 ilustra o comportamento de uma ligação

semi-rígida, onde a relação momento-rotação é não linear. Todavia, postulou-se neste estudo uma momento-rotação linear, que para a análise em regime de serviço fornece uma aproximação razoável.

Segundo FAFARD (1990), vários autores têm proposto métodos aproximados considerando a linearidade. Todavia, alguns autores, como BRUN & PICARD (1976), consideraram a não-linearidade da relação momento-rotação nas ligações através de processos iterativos. Outros, como Blandford em 1980 e Savard em 1989, simularam a não-linearidade, discretizando as ligações para a análise por meio de elementos finitos.



**Figura 2.1** - Comportamento de uma ligação semi-rígida.

Uma vez definido o método de análise numérica para o problema, deve-se determinar as flexibilidades nas ligações, que constitui-se num fator fundamental nesta análise. No capítulo subsequente apresenta-se um processo para o cálculo de deformabilidades em ligações típicas em estruturas pré-moldadas de concreto.

## 2.2 - CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

No método dos deslocamentos, as incógnitas a considerar são os deslocamentos nodais da estrutura. Na resolução do problema utiliza-se a estrutura restringida, que é cinematicamente determinada, de modo que os deslocamentos desconhecidos sejam nulos. Ao se restringir os nós, associa-se os esforços de bloqueio aos deslocamentos nodais. Nos pórticos com nós rígidos, os deslocamentos das extremidades dos elementos são os mesmos que os deslocamentos nodais, sendo o número de incógnitas o mesmo que o número das deslocabilidades internas.

Ao se trabalhar com um pórtico com ligações semi-rígidas está-se, a princípio, aumentando o número de deslocabilidades internas, aumentando o número de incógnitas, mas permanecendo o mesmo número de equações.

Os momentos nas extremidades elásticamente restritas de uma barra carregada resultam de três origens:

- a) dos esforços de bloqueio;
- b) dos deslocamentos das extremidades dos elementos;
- c) dos deslocamentos relativos das extremidades dos elementos.

Ao se introduzir as deformabilidades das ligações, estas contribuirão para os momentos nas extremidades da barra. A deformabilidade na ligação está relacionada de forma interdependente aos três fatores relacionados acima. Segundo Monforton, por esta razão não é possível se obter a relação força-deslocamento pela aplicação da superposição, como é feito no caso das ligações rígidas.

No método estudado propõe-se a utilização do mesmo modelo matemático do método dos deslocamentos para pórticos com nós rígidos, mantendo-se a indeterminação cinemática. Para tal, utiliza-se da correção da matriz de rigidez do elemento e ainda dos esforços de bloqueio em função da presença ou não de molas que representam as deformabilidades das ligações. Desta forma, não se adiciona novas condições de restrições nos nós, mas corrige-se parâmetros ligados aos elementos que alteram a sua rigidez em função das ligações em suas extremidades.

## 2.3-MÉTODO DE ANÁLISE DE PÓRTICOS PLANOS COM LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS

### 2.3.1 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

O desenvolvimento utilizado para se obter a relação entre forças e deslocamentos das extremidades de um elemento, no plano x-y, com ligações semi-rígid, baseou-se no método da viga conjugada, como mostra a figura 2.3.1.. A convenção de sinais é mostrada na figura 2.3.2.. O eixo x coincide com o eixo longitudinal da barra, e os nós i e j coincidem com os nós iniciais e finais da barra.

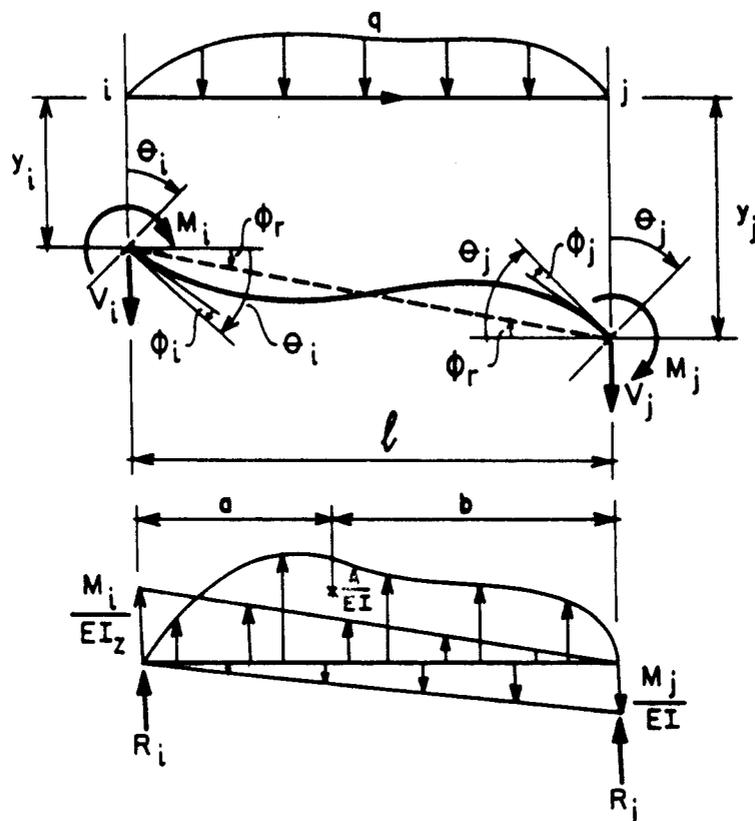


Figura 2.3.1 - Analogia da viga conjugada. [MONFORTON e WU (1963)]



Figura 2.3.2 - Sistema de coordenadas locais para o elemento.

A deformação específica à rotação de uma ligação é representada por:

$$\lambda_{\phi} = \phi / M \quad ( 2.3.1 )$$

onde:

$\lambda_{\phi}$  - Deformabilidade à rotação em uma ligação

$\phi$  - Rotação em uma ligação

M - Momento aplicado à uma ligação.

As forças cortantes nas extremidades da viga conjugada são iguais às rotações nas extremidades da viga real, tendo-se:

$$R_i = \theta_i - \phi_i - \phi_r = \left( \frac{M_i \cdot l}{3 \cdot E \cdot I_z} \right) - \left( \frac{M_j \cdot l}{6 \cdot E \cdot I_z} \right) + \left( \frac{A \cdot b}{l \cdot E \cdot I_z} \right) \quad \dots (2.3.2a)$$

$$R_j = \theta_j - \phi_j - \phi_r = \left( \frac{M_j \cdot l}{3 \cdot E \cdot I_z} \right) - \left( \frac{M_i \cdot l}{6 \cdot E \cdot I_z} \right) - \left( \frac{A \cdot a}{l \cdot E \cdot I_z} \right) \quad \dots (2.3.2b)$$

onde:

$M_i, M_j$  - Momentos fletores em z nas extremidades i e j

$R_i, R_j$  - Força cortante na viga conjugada

- $i, j$  - Nós iniciais e finais do elemento de barra  
 $\theta_i, \theta_j$  - Rotações nodais  
 $\phi_i, \phi_j$  - Rotações das ligações  
 $\phi_r$  - Rotação relativa entre as extremidades da barra  
 $V_i, V_j$  - Força cortante na viga carregada  
 $\ell$  - Comprimento de uma barra  
 $A$  - Área do diagrama de momentos fletores  
 $a, b$  - Distância do C.G. de (A) até as extremidades  
 $I_z$  - Momento de inércia da seção transversal da barra  
 $E$  - Módulo de elasticidade longitudinal.

Substituindo-se os valores das rotações específicas  $\phi_i = M_i \cdot \lambda_{\phi_i}$  e  $\phi_j = M_j \cdot \lambda_{\phi_j}$  nas equações 2.3.2a e 2.3.2b, obtém-se:

$$(\ell + 3EI_z \lambda_{\phi_i}) \frac{M_i}{\ell} = \left[ 3EI_z \frac{(\theta_i - \phi_r)}{\ell} \right] + \frac{M_j}{2} - \frac{3Ab}{\ell^2} \quad (2.3.3a)$$

$$(\ell + 3EI_z \lambda_{\phi_j}) \frac{M_j}{\ell} = \left[ 3EI_z \frac{(\theta_j - \phi_r)}{\ell} \right] + \frac{M_i}{2} - \frac{3Aa}{\ell^2} \quad (2.3.3b)$$

Introduz-se dois parâmetros de restrição à rotação  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$ , adimensionais, que dependem da deformabilidade da ligação, das propriedades geométricas e elásticas do elemento. Estes fatores variam de zero, quando as ligações forem articuladas, até um, quando forem perfeitamente rígidas. Sendo que:

$$\gamma_i = \left( 1 + 3.E.I_z.\lambda\phi_i / \ell \right)^{-1} \quad (2.3.4a)$$

$$\gamma_j = \left( 1 + 3.E.I_z.\lambda\phi_j / \ell \right)^{-1} \quad (2.3.4b)$$

Substituindo-se os valores de  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$  nas equações 2.3.3a e 2.3.3b, e isolando os termos  $M_i$  e  $M_j$  obtém-se:

$$\begin{aligned} M_i = & \left( \frac{6EI_z}{\ell} \right) \left[ \frac{\gamma_i}{(4-\gamma_i\gamma_j)} \right] \left[ 2\theta_i + \gamma_j\theta_j - (2+\gamma_j).\phi_r \right] + \\ & - \left( \frac{6A}{\ell^2} \right) \left[ \frac{\gamma_i}{(4-\gamma_i\gamma_j)} \right] (2b-\gamma_j a) \end{aligned} \quad (2.3.5a)$$

$$\begin{aligned} M_j = & \left( \frac{6EI_z}{\ell} \right) \left[ \frac{\gamma_j}{(4-\gamma_i\gamma_j)} \right] \left[ 2\theta_j + \gamma_i\theta_i - (2+\gamma_i).\phi_r \right] + \\ & - \left( \frac{6A}{\ell^2} \right) \left[ \frac{\gamma_j}{(4-\gamma_i\gamma_j)} \right] (2a-\gamma_i b) \end{aligned} \quad (2.3.5b)$$

As equações 2.3.5a e 2.3.5b apresentam as equações de equilíbrio nas extremidades i e j.

### 2.3.2 - ESQUEMA DE VINCULAÇÃO POR MEIO DE MOLAS

No desenvolvimento de Monforton considerou-se apenas a deformabilidade à flexão da ligação. Neste trabalho introduziu-se um parâmetro  $\beta$  que considera o efeito da deformabilidade da ligação na rigidez axial do elemento, onde o parâmetro  $\beta$  é dado por:

$$\beta_i = \beta_j = \frac{\ell}{EA} \cdot \left( \lambda_{hi} + \lambda_{hj} + \ell/EA \right)^{-1} \quad (2.3.6)$$

onde:

- $\beta_i, \beta_j$  - Parâmetro de restrição ao deslocamento axial na extremidade de um elemento.
- $\lambda_{hi}, \lambda_{hj}$  - Deformabilidade nas ligações na direção axial do elemento

Desta forma, a esquematização por molas para o elemento de barra fica indicada conforme a figura 2.3.3.

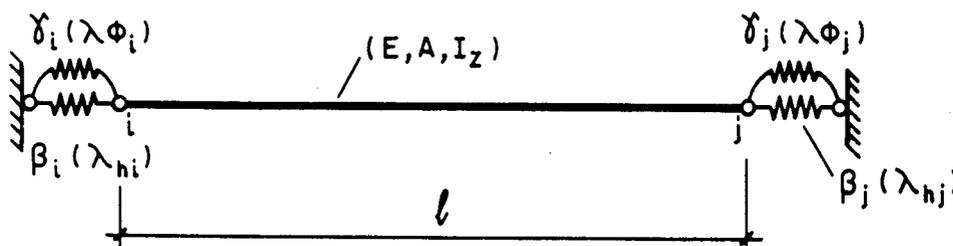


Figura 2.3.3 - Esquema de molas em um elemento de barra.

### 2.3.3 - ESFORÇOS INTERNOS EM FUNÇÃO DOS DESLOCAMENTOS DAS EXTREMIDADES DAS BARRAS

Estes esforços são apresentados nas seguintes equações:

#### A) MOMENTOS FLETORES

$$M_i = \left( \frac{4EI_z}{\ell} \right) \left[ \frac{3\gamma_i}{4-\gamma_i\gamma_j} \right] \theta_i + \left( \frac{6EI_z}{\ell^2} \right) \left[ \frac{\gamma_i(2+\gamma_j)}{4-\gamma_i\gamma_j} \right] Y_i \quad (2.3.7a)$$

$$+ \left( \frac{2EI_z}{\ell} \right) \left[ \frac{3\gamma_i\gamma_j}{4-\gamma_i\gamma_j} \right] \theta_j - \left( \frac{6EI_z}{\ell^2} \right) \left[ \frac{\gamma_i(2+\gamma_j)}{4-\gamma_i\gamma_j} \right] Y_j$$

$$M_j = \left( \frac{2EI_z}{\ell} \right) \left[ \frac{3\gamma_i\gamma_j}{4-\gamma_i\gamma_j} \right] \theta_i + \left( \frac{6EI_z}{\ell^2} \right) \left[ \frac{\gamma_j(2+\gamma_i)}{4-\gamma_i\gamma_j} \right] Y_i \quad (2.3.7b)$$

$$+ \left( \frac{4EI_z}{\ell} \right) \left[ \frac{3\gamma_i}{4-\gamma_i\gamma_j} \right] \theta_j - \left( \frac{6EI_z}{\ell^2} \right) \left[ \frac{\gamma_j(2+\gamma_i)}{4-\gamma_i\gamma_j} \right] Y_j$$

#### B) FORÇA CORTANTE

$$V_i = \left( \frac{6EI_z}{\ell^2} \right) \left[ \frac{\gamma_i(2+\gamma_j)}{4-\gamma_i\gamma_j} \right] \theta_i + \left( \frac{12EI_z}{\ell^3} \right) \left[ \frac{\gamma_i+\gamma_i\gamma_j+\gamma_j}{4-\gamma_i\gamma_j} \right] Y_i \quad (2.3.8a)$$

$$+ \left( \frac{6EI_z}{\ell^2} \right) \left[ \frac{\gamma_j(2+\gamma_i)}{4-\gamma_i\gamma_j} \right] \theta_j - \left( \frac{12EI_z}{\ell^3} \right) \left[ \frac{\gamma_i+\gamma_i\gamma_j+\gamma_j}{4-\gamma_i\gamma_j} \right] Y_j$$

$$\begin{aligned}
V_j = & - \left( \frac{6EI_z}{\ell^2} \right) \left[ \frac{\gamma_i (2 + \gamma_j)}{4 - \gamma_i \gamma_j} \right] \theta_i - \left( \frac{12EI_z}{\ell^3} \right) \left[ \frac{\gamma_i + \gamma_i \gamma_j + \gamma_j}{4 - \gamma_i \gamma_j} \right] Y_i \\
& - \left( \frac{6EI_z}{\ell^2} \right) \left[ \frac{\gamma_j (2 + \gamma_i)}{4 - \gamma_i \gamma_j} \right] \theta_j + \left( \frac{12EI_z}{\ell^3} \right) \left[ \frac{\gamma_i + \gamma_i \gamma_j + \gamma_j}{4 - \gamma_i \gamma_j} \right] Y_j
\end{aligned}
\tag{2.3.8b}$$

### C) FORÇA NORMAL

$$X_i = \left( \frac{EA}{\ell} \right) (x_i - x_j) \tag{2.3.9a}$$

$$X_j = \left( \frac{EA}{\ell} \right) (x_i - x_j) \tag{2.3.9b}$$

### 2.3.4 - CORREÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

Os esforços internos, dados nas equações 2.3.7a a 2.3.9b podem ser escritos na forma:

$$F_i = K_{ii} \cdot D_i + K_{ij} \cdot D_j \tag{2.3.10a}$$

$$F_j = K_{ji} \cdot D_i + K_{jj} \cdot D_j \tag{2.3.10b}$$

onde:

F - São as forças internas.

D - São os deslocamentos locais de extremidade.

K - Matriz de rigidez modificada.

A matriz K pode ser escrita na forma:

$$K = S \cdot C \quad (2.3.11)$$

Assim, as equações 2.3.6a e 2.3.6b podem ser escritas na forma:

$$F_i = S_{ii} \cdot C_{ii} \cdot D_i + S_{ij} \cdot C_{ij} \cdot D_j \quad (2.3.12a)$$

$$F_j = S_{ji} \cdot C_{ji} \cdot D_i + S_{jj} \cdot C_{jj} \cdot D_j \quad (2.3.12b)$$

onde:

S - Matriz de rigidez de um elemento.

C - Matriz de correção aplicada à matriz S.

As matrizes S e C são escritas na forma:

#### A) MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM ELEMENTO (S)

$$S_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{\ell^3} & \frac{6EI_z}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2} & \frac{4EI_z}{\ell} \end{bmatrix} \quad (2.3.13a)$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{\ell^3} & \frac{6EI_z}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2} & \frac{2EI_z}{\ell} \end{bmatrix} \quad (2.3.13b)$$

C) MATRIZ DE RIGIDEZ MODIFICADA (K)

$$K_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_i EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{\gamma_i + \gamma_j + \gamma_i \gamma_j}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{\gamma_i (2 + \gamma_j)}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{\gamma_i (2 + \gamma_j)}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} & \frac{4EI_z}{l} & \frac{3\gamma_i}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} \end{bmatrix} \quad (2.3.15a)$$

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_j EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & \frac{\gamma_i + \gamma_j + \gamma_i \gamma_j}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{\gamma_j (2 + \gamma_i)}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{\gamma_i (2 + \gamma_j)}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} & \frac{2EI_z}{l} & \frac{3\gamma_i \gamma_j}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} \end{bmatrix} \quad (2.3.15b)$$

$$K_{ji} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_i EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & \frac{\gamma_i + \gamma_j + \gamma_i \gamma_j}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{\gamma_i (2 + \gamma_j)}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{\gamma_j (2 + \gamma_i)}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} & \frac{2EI_z}{l} & \frac{3\gamma_i \gamma_j}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} \end{bmatrix} \quad (2.3.15c)$$

$$K_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_j EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} \frac{\gamma_i + \gamma_j + \gamma_i \gamma_j}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} & - \frac{6EI_z}{l^2} \frac{\gamma_j (2 + \gamma_i)}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} \\ 0 & - \frac{6EI_z}{l^2} \frac{\gamma_j (2 + \gamma_i)}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} & \frac{4EI_z}{l} \frac{3\gamma_j}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} \end{bmatrix} \quad (2.3.15d)$$

### 2.3.5 - CORREÇÃO DOS ESFORÇOS DE BLOQUEIO

Segundo FAFARD (1990), a matriz de correção para os esforços de engastamento, escrita em função dos parâmetros  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$ , pode ser escrita tal que:

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = [C_f] \cdot \begin{Bmatrix} M_i^D \\ M_j^D \end{Bmatrix} \quad (2.3.16)$$

sendo,

$$[C_f] = \frac{1}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} \begin{bmatrix} \gamma_i (4 - \gamma_j) & 2\gamma_i (\gamma_j - 1) \\ 2\gamma_j (\gamma_i - 1) & \gamma_j (4 - \gamma_i) \end{bmatrix} \quad (2.3.17)$$

onde,

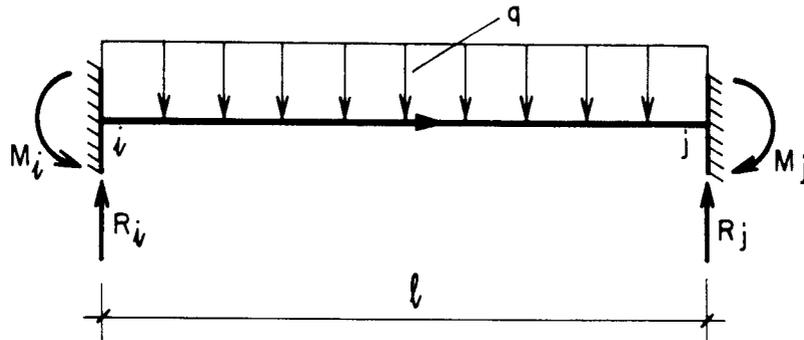
$M_i^D, M_j^D$  - momento de engastamento perfeito

$C_f$  - matriz de correção para os esforços de bloqueio

A partir da expressão 2.3.16 obtém-se as equações para os esforços de engastamento corrigidos para cada tipo de carregamento.

A seguir serão apresentadas as correções para alguns tipos de carregamentos.

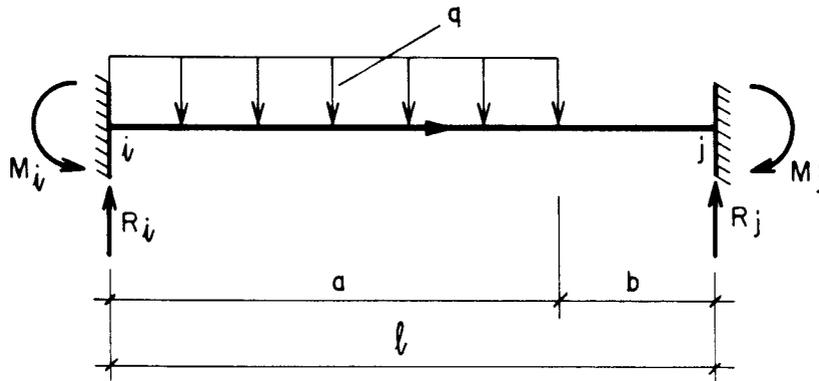
CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA [BRUN e PICARD (1976)]



$$M_i = \left( \frac{q\ell^2}{12} \right) \left[ 3\gamma_i \frac{(2-\gamma_j)}{(4-\gamma_i\gamma_j)} \right] \quad (2.3.18a)$$

$$M_j = \left( \frac{q\ell^2}{12} \right) \left[ 3\gamma_j \frac{(2-\gamma_i)}{(4-\gamma_i\gamma_j)} \right] \quad (2.3.18b)$$

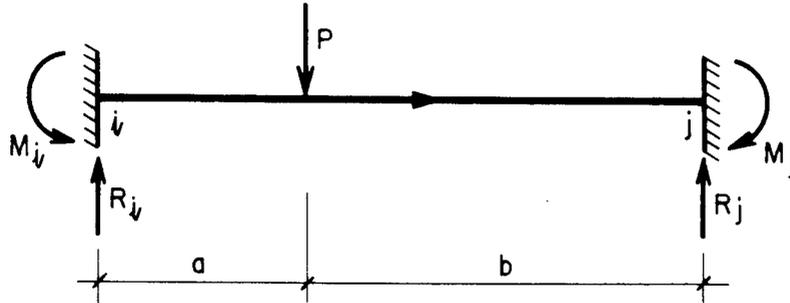
CARGA DISTRIBUÍDA



$$M_i = \frac{qa^2}{12\ell^2} \left( \frac{\gamma_i}{4-\gamma_i\gamma_j} \right) \left[ (\gamma_j-4)(6\ell^2-8\ell a+3a^3) + 2(\gamma_j-1)(4a\ell-3a^2) \right] \quad (2.3.19a)$$

$$M_j = \frac{qa^2}{12\ell^2} \left( \frac{\gamma_j}{4-\gamma_i\gamma_j} \right) \left[ -2(\gamma_i-1)(6\ell^2-8\ell a+3a^3) + (4-\gamma_i)(4a\ell-3a^2) \right] \quad (2.3.19b)$$

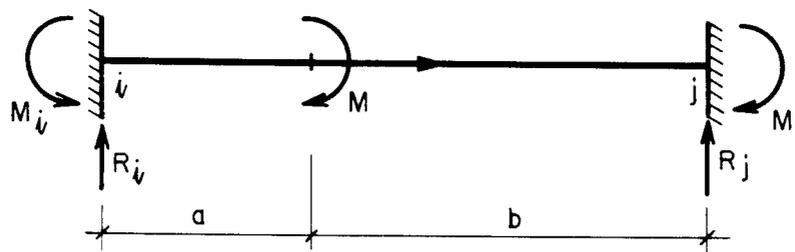
**CARGA CONCENTRADA**



$$M_i = \left( \frac{Pab^2}{\ell^2} \right) \left[ \frac{\gamma_i \ell (4 - \gamma_j) - \gamma_i a (2 + \gamma_j)}{b(4 - \gamma_i \gamma_j)} \right] \quad (2.3.20a)$$

$$M_j = \left( \frac{Pa^2 b}{\ell^2} \right) \left[ \frac{2\gamma_j \ell (1 - \gamma_i) + \gamma_j a (2 + \gamma_i)}{a(4 - \gamma_i \gamma_j)} \right] \quad (2.3.20b)$$

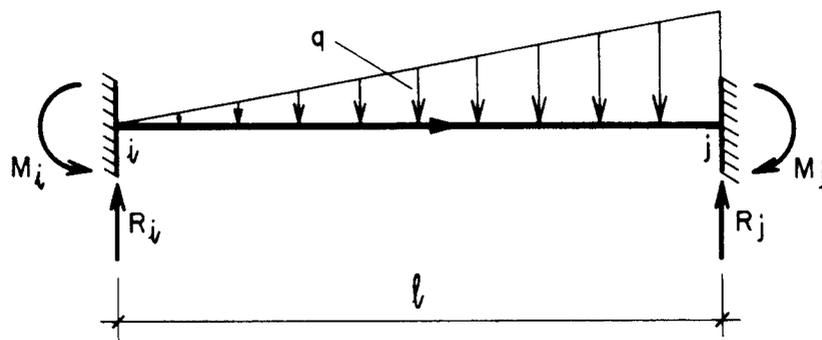
**MOMENTO APLICADO À BARRA**



$$M_i = \left( \frac{M}{\ell^3} \right) \left[ \frac{\gamma_i}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} \right] \left[ 2a^3 (1 - \gamma_j) + 3ab(2a - \gamma_j b) + b^3 (4 - \gamma_j) \right] \quad (2.3.21a)$$

$$M_j = \left( \frac{M}{\ell^3} \right) \left[ \frac{\gamma_j}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} \right] \left[ 2b^3 (1 - \gamma_i) + 3ab(2b - \gamma_i a) + a^3 (4 - \gamma_i) \right] \quad (2.3.21b)$$

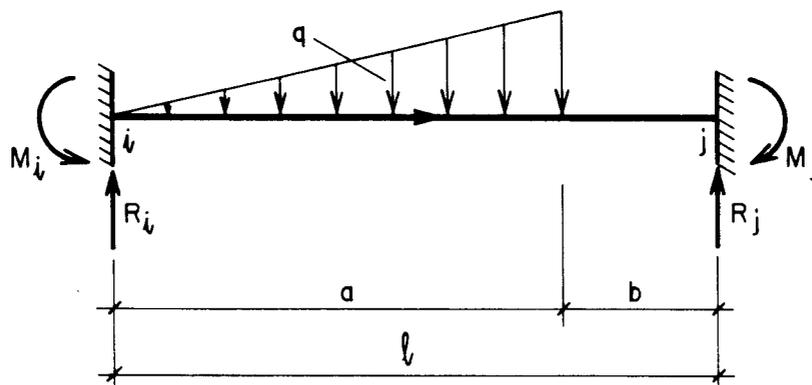
CARGA TRIANGULAR UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA [BRUN e PICARD (1976)]



$$M_i = \frac{\left(\frac{ql^2}{15}\right) \gamma_i (7-4\gamma_j)}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} \quad (2.3.22a)$$

$$M_j = \frac{\left(\frac{ql^2}{30}\right) \gamma_j (16-7\gamma_i)}{(4 - \gamma_i \gamma_j)} \quad (2.3.22b)$$

CARGA TRIANGULAR DISTRIBUÍDA



$$M_i = -\left(\frac{qa^2}{30}\right) \left[ \frac{\gamma_i (4-\gamma_j)}{(4-\gamma_i \gamma_j)} \right] \left[ 10l^2 - 15la + 6a^2 \right] + \left(\frac{qa^2}{20l^2}\right) \left[ \frac{2\gamma_i (\gamma_j - 1)}{(4-\gamma_i \gamma_j)} \right] \left[ 5l - 4a \right] \quad (2.3.23a)$$

$$M_j = -\left(\frac{qa^2}{30}\right) \left[ \frac{2\gamma_j (\gamma_i - 1)}{(4-\gamma_i \gamma_j)} \right] \left[ 10l^2 - 15la + 6a^2 \right] + \left(\frac{qa^2}{20l^2}\right) \left[ \frac{\gamma_j (4-\gamma_i)}{(4-\gamma_i \gamma_j)} \right] \left[ 5l - 4a \right] \quad (2.3.23b)$$

### 2.3.6 - DESENVOLVIMENTO MATRICIAL

Utilizando-se o método dos deslocamentos, a equação dos esforços internos na extremidade de uma barra é dada pela soma dos esforços associados dos deslocamentos locais aos esforços de bloqueio. Assim, tem-se:

$$P_i = F_i + \bar{P}_i \quad (2.3.24a)$$

$$P_j = F_j + \bar{P}_j \quad (2.3.24b)$$

onde:

$P_i$  - Esforços de extremidade das barras

$F_i$  - Esforços devido aos deslocamentos locais

$\bar{P}_i$  - Esforços de bloqueio

Tomando-se  $F$  das equações 2.3.12a e 2.3.12b e escrevendo as equações 2.3.24a e 2.3.24b na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} \\ S_{ji} & S_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{ii} & 0 \\ 0 & C_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_j \end{Bmatrix} \quad (2.3.25)$$

onde:

$S$  - Matriz de rigidez do elemento

$C$  - Matriz de correção da rigidez do elemento

$D$  - Deslocamentos nas extremidades dos elementos

Lembrando-se que:

$$C_{ii} = C_{ji} \quad \text{e} \quad C_{jj} = C_{ji}$$

Assim a equação 2.3.25 pode ser escrita na forma geral:

$$P_m = S_m C_m D_m + \bar{P}_m \quad (2.3.26)$$

Sendo a estrutura composta por n elementos, o conjunto dos esforços internos de todas as extremidades dos elementos, referidos aos sistemas de coordenadas locais, pode ser escrito por:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ P_m \\ \cdot \\ P_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & & & \\ & S_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & S_m \\ & & & & \ddots \\ & & & & & S_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ C_m \\ \cdot \\ C_n \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \cdot \\ \bar{P}_m \\ \cdot \\ \bar{P}_n \end{Bmatrix} \quad (2.3.27)$$

Seja  $D'$  os  $k$  deslocamentos nodais desconhecidos referidos ao sistema global, e  $U$  uma matriz de ordem  $6n.k$ , composta de matrizes de transformação  $T$ , relacionados a cada elemento por:

$$D = UD' \quad (2.3.28)$$

Substituindo a equação 2.3.28 em 2.3.26 têm-se:

$$P = SCUD' + \bar{P} \quad (2.3.29)$$

$$S_{ji} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{\ell^3} & -\frac{6EI_z}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2} & \frac{2EI_z}{\ell} \end{bmatrix} \quad (2.3.13c)$$

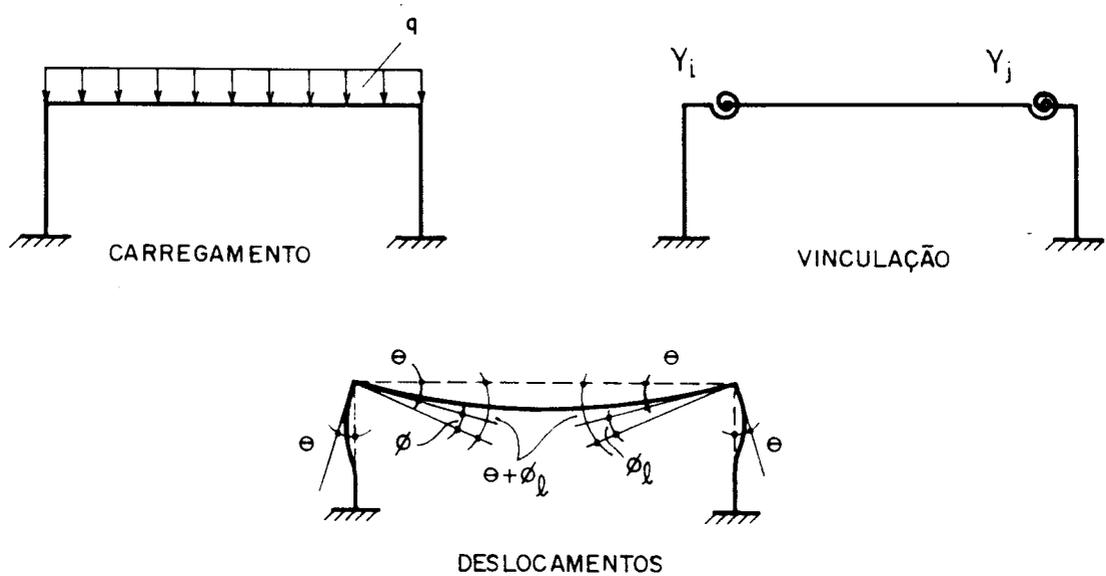
$$S_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{\ell^3} & -\frac{6EI_z}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2} & \frac{4EI_z}{\ell} \end{bmatrix} \quad (2.3.13d)$$

B) MATRIZ DE CORREÇÃO (C)

$$C_{ii} = C_{ji} = \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\gamma_j - 2\gamma_i + \gamma_i\gamma_j}{(4 - \gamma_i\gamma_j)} & \frac{-2\ell \cdot \gamma_i(1 - \gamma_j)}{(4 - \gamma_i\gamma_j)} \\ 0 & \frac{6}{\ell} \frac{\gamma_j - \gamma_i}{(4 - \gamma_i\gamma_j)} & \frac{3\gamma_i(2 - \gamma_j)}{(4 - \gamma_i\gamma_j)} \end{bmatrix} \quad (2.3.14a)$$

$$C_{ij} = C_{jj} = \begin{bmatrix} \beta_j & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\gamma_i - 2\gamma_j + \gamma_i\gamma_j}{(4 - \gamma_i\gamma_j)} & \frac{2\ell \cdot \gamma_j(1 - \gamma_i)}{(4 - \gamma_i\gamma_j)} \\ 0 & \frac{6}{\ell} \frac{\gamma_i - \gamma_j}{(4 - \gamma_i\gamma_j)} & \frac{3\gamma_j(2 - \gamma_i)}{(4 - \gamma_i\gamma_j)} \end{bmatrix} \quad (2.3.14b)$$

O desenvolvimento de Monforton e Wu (1963) fornece uma boa aproximação dos esforços de extremidade das barras, mas quanto aos deslocamentos de extremidades das barras, estes estão associados aos deslocamentos nodais, não levando em conta os deslocamentos das ligações. Os deslocamentos das ligações podem ser obtidos pela associação dos esforços de extremidades das barras, com rigidez modificada, às deformabilidades das ligações, nas respectivas extremidades. Assim, os deslocamentos finais nas extremidades das barras da estrutura podem ser obtidos pela soma dos deslocamentos das extremidades das barras, com rigidez modificada, aos deslocamentos das ligações em suas extremidades. A figura 2.3.4 ilustra este fato.



**Figura 2.3.4** - Representação das rotações nas extremidades dos elementos com rigidez modificada ( $\theta$ ), nas ligações ( $\phi_l$ ) e nas barras reais ( $\theta + \phi_l$ ).

## CAPÍTULO III

### 3 - ESTUDO ANALÍTICO DE DEFORMABILIDADES EM LIGAÇÕES TÍPICAS DE ESTRUTURAS PRÉ-MOLDADAS DE CONCRETO

#### 3.1 - PRELIMINARES

As ligações das estruturas pré-moldadas possuem a função de transmitir com eficiência os esforços entre os elementos, organizando-os estruturalmente. Segundo o MODEL CODE CEB/FIP (1990), do *Comité Euro-international du Béton*, ítem 14.4:

\_ A ligação deve ser capaz de acomodar os deslocamentos relativos para mobilizar a sua resistência.

\_ A ligação deve resistir às solicitações da análise estrutural como um todo, bem como aquelas resultantes da análise dos elementos.

\_ A resistência e a ductilidade da ligação devem assegurar a rigidez e a estabilidade da estrutura como um todo.

\_ Devem ser levados em conta as tolerâncias de fabricação e montagem.

O desempenho de um sistema estrutural pré-moldado está intimamente ligado à eficiência das suas ligações. Na avaliação desta eficiência deve-se ter em conta: a construtibilidade, a

durabilidade, a estabilidade, os esforços resistentes, a ductilidade, a rigidez e ainda as forças residuais na estrutura. As ligações são importantes, ainda, no que diz respeito à dissipação de energia e redistribuição dos esforços.

Por conter aspectos de grande abrangência, desde os executivos até os estruturais, as ligações apresentam-se como um objeto complexo de estudo.

Os primeiros estudos sobre ligações de elementos pré-moldados abordaram questões executivas, da transmissão e resistência aos esforços. Pesquisas recentes têm acrescentado questões como ductilidade, rigidez, durabilidade e ainda quanto à dissipação de energia das ligações. Este último aspecto é importante para as estruturas que estão situadas em regiões sísmicas.

A rigidez de uma ligação influirá na rigidez da estrutura. Ao serem introduzidas as deformabilidades das ligações, ocorre uma redistribuição dos esforços ao longo da estrutura e também uma alteração nos deslocamentos, afetando a sua estabilidade.

BALLARIN (1993) apresentou um estudo sistemático quanto à tipologia e classificação de ligações em estruturas pré-moldadas de concreto, utilizadas por vários autores, normas e países. No trabalho foram utilizados os dois critérios de classificação de ligações mais difundidos na literatura, que são os critérios quanto à vinculação e quanto aos elementos a serem ligados.

Na classificação quanto à vinculação tem-se as ligações "rígidas" e "articuladas". Esta classificação, bastante difundida, é interessante pois denota a proposta da concepção estrutural da ligação. Todavia, na maioria das vezes, o comportamento mais realista das ligações não é perfeitamente rígido ou articulado, mas sim semi-rígido.

Entende-se aqui por ligações rígidas, como aquelas que são capazes de retringir grande parte dos graus de liberdade, sendo adequadas para resistir à tração, compressão, cisalhamento e flexão. Entende-se por ligações articuladas, como aquelas que

podem transmitir as forças que passam pela articulação, liberando alguns graus de liberdade, principalmente deslocamentos horizontais e rotações.

A rigidez, ou a deformabilidade que é a sua relação inversa, de uma ligação pode ser obtida através de resultados experimentais ou por meio de modelos matemáticos que representem o comportamento de uma determinada ligação.

A dificuldade no uso dos modelos analíticos está no fato de que as ligações constituem-se em regiões de comportamento complexo, com concentração de tensões e influência de uma série de fatores. Todavia, podem-se obter algumas aproximações a partir de simplificações e correlacioná-las com resultados experimentais.

Quanto aos estudos experimentais existentes, vários trabalhos analisaram a questão da rigidez em ligações. Entretanto, não apresentam critérios de avaliação da rigidez para estas ligações, e ainda poucos são os trabalhos que apresentam modelos para o cálculo.

A *Portland Cement Association (PCA)* realizou um programa de pesquisa experimental em ligações de estruturas pré-moldadas de concreto, na primeira metade da década de 60. Os resultados desses ensaios foram registrados em uma série de artigos no *Journal of the Prestressed Concrete Institute*, intitulados de "*Connections in Precast Structures*". Os estudos realizados abordaram os seguintes temas: continuidade em elementos pré-moldados em duplo-T para pisos, de Rostasy em 1962; resistência do apoio no topo de colunas para vigas pré-moldadas, de Kriz e Raths em 1963; estudo de ligações viga-viga e viga-pilar com fixação por parafusos em dentes rebaixados, de GASTON & KRIZ (1964); resistência em consolos, de Kriz e Raths em 1965; ligações por chapas metálicas em bases de colunas, de LAFRAUGH & MAGURA (1966).

Mais recentemente, o *Precast Concret Institute (PCI)* realizou um amplo programa de pesquisa intitulado "*Moment resistant connections and simple connections*", onde foram ensaiados protótipos de vários tipos de ligações viga-pilar. Nestes estudos analisou-se as questões da resistência, ductilidade

e da rigidez da ligação. Um breve resumo, com os resultados obtidos, pode ser encontrado em DOLAN et alii (1987).

Em DOLAN & PESSIKI (1989), apresenta-se um estudo experimental com modelos reduzidos de um tipo de ligação viga-pilar resistente à flexão por chapas metálicas. Esta ligação foi escolhida em DOLAN et alii (1987) como sendo de grande interesse de estudo devido ao seu bom desempenho em ensaios anteriores. Os resultados apresentados em DOLAN & PESSIKI (1989) possibilitaram melhores critérios de detalhamento, onde se conseguiu um melhor desempenho da ligação quanto à resistência e à ductilidade. Porém, não se conseguiu uma eficiência quanto à rigidez, pois a ligação apresentou uma deformabilidade acentuada ainda na sua fase elástica.

Quanto aos modelos e indicações existentes para o cálculo da deformabilidade em ligações, poucos trabalhos são apresentados na literatura. MARTIN (1980), apresenta uma proposta de cálculo de deformabilidade da ligação pilar-fundação em base de coluna com chapas metálicas. BLJUGER (1988), apresenta algumas indicações para o cálculo em ligações de estruturas de painéis.

O objeto de estudo neste capítulo consiste no desenvolvimento de uma metodologia para o cálculo de deformabilidades em ligações a partir do equacionamento dos mecanismos de deformação.

No capítulo seguinte, apresentam-se algumas comparações numéricas entre os equacionamentos aqui desenvolvidos com resultados experimentais publicados.

### **3.2 - METODOLOGIA PARA O CÁLCULO DE DEFORMABILIDADES DAS LIGAÇÕES TÍPICAS**

Para o cálculo da deformabilidade de uma ligação, utilizou-se uma metodologia que consiste em avaliar três fatores interdependentes:

- a) os esforços a serem transmitidos;

- b) os mecanismos de vinculação adotados;
- c) os mecanismos básicos de deformação considerados.

A consideração dos esforços a serem transmitidos depende da função estrutural que se pretende dar a ligação, tendo-se em vista a distribuição dos esforços ao longo dos elementos e a estabilidade geral da estrutura. A escolha do sistema de vínculos em uma ligação depende dos esforços a serem transmitidos e da sua construtibilidade.

Definido um sistema de vinculação, identificam-se os mecanismos de deformação. Entende-se por mecanismo básico de deformação, como sendo a deformação específica de um elemento que compõe a ligação.

O cálculo é desenvolvido a partir da montagem do sistema de forças, associando-se a cada força a deformação correspondente a um dado mecanismo. A expressão final, para a deformabilidade de uma ligação, resulta da associação das deformabilidades dos elementos desta ligação.

Para cada tipo de ligação, deve-se estudar a forma de associação entre os mecanismos básicos de deformação presentes na ligação.

Seguindo-se esta metodologia, para a associação dos respectivos mecanismos de deformação, desenvolveu-se o cálculo das deformabilidades à compressão, ao cisalhamento e à flexão para a respectiva ligação.

Como já foi mencionado, quanto à classificação de ligações, optou-se pela utilização de duas notações, a saber, quanto à sua rigidez e quanto aos elementos a serem ligados. Assim, para facilidade de estudo, adotou-se uma nomenclatura que relaciona estas duas notações e ainda, relaciona os componentes presentes na ligação. Esta nomenclatura apresenta-se na seguinte forma:

|  |
|--|
| (ELEMENTO, A) (ELEMENTO, B) (RIGIDEZ) - (COMPONENTES DA LIGAÇÃO) |
|--|

Onde, utilizou-se a seguinte notação:

a) Para os ELEMENTOS a serem ligados:

V - Viga.

P - Pilar.

F - Fundação.

b) Para o tipo de RIGIDEZ da ligação:

R - Rígida.

A - Articulada.

c) Para os COMPONENTES existentes na ligação:

EN - Elastômero não fretado.

EF - Elastômero fretado.

C - Chumbador.

PAR- Parafuso.

CHS- Chapa soldada.

CHP- Chapa parafusada.

No presente trabalho, estudou-se a deformabilidade nas seguintes ligações típicas:

- VPA-EN - Ligação viga-pilar articulada, em apoio sobre consolo, com almofada de elastômero não fretado.
- VPA-EF - Ligação viga-pilar articulada, em apoio sobre consolo, com almofada de elastômero fretado.
- VPA-ENC - Ligação viga-pilar articulada, em apoio sobre consolo, com elastômero não fretado e chumbador.
- VPA-EFC - Ligação viga-pilar articulada, em apoio sobre consolo, com elastômero fretado e chumbador.
- VPR-CHS - ligação viga-pilar rígida por meio de chapas soldadas.
- VPR-CPAR - Ligação viga-pilar rígida por meio de chumbadores parafusados.
- VVR-PAR - Ligação viga-viga rígida por meio de parafusos.
- PFR-CHP - Ligação pilar-fundação rígida por meio de chapas parafusadas.

Com a finalidade de sistematizar o estudo adotou-se,

também, uma nomenclatura para os mecanismos de deformação. Esta nomenclatura considera o esforço que gera a deformação e o componente envolvido, definindo assim, um mecanismo básico de deformação. Esta nomenclatura apresenta-se na seguinte forma:

(MECANISMO DEVIDO AO ESFORÇO) - (COMPONENTE DO MECANISMO)

Onde, utilizou-se a seguinte notação:

a) MECANISMO DE DEFORMAÇÃO gerado por um ESFORÇO:

MDC - Mecanismo de deformação por compressão.

MDT - Mecanismo de deformação por tração.

MDCI - Mecanismo de deformação por cisalhamento.

MDF - Mecanismo de deformação por flexão.

b) COMPONENTE presente no mecanismo:

EN - Elastômero não fretado.

EF - Elastômero fretado.

CC - Superfície de contato concreto-concreto.

BA - Barra.

BI - Barra semi-inserida no concreto.

BL - Barra bi-engastada em dois elementos com altura livre entre si.

CH - Chapa metálica.

Estudaram-se os seguintes mecanismos básicos de deformação:

MDC-EN - Mecanismo de deformação à compressão em elastômero não fretado.

MDC-EF - Mecanismo de deformação à compressão em elastômero fretado.

MDC-CC - Mecanismo de deformação à compressão em uma superfície de contato entre elementos de concreto.

MDT-BA - Mecanismo de deformação à tração em uma barra.

MDT-BI - Mecanismo de deformação à tração em uma barra inserida

no concreto.

- MDCI-EN - Mecanismo de deformação ao cisalhamento em elastômero não fretado.
- MDCI-EF - Mecanismo de deformação ao cisalhamento em elastômero fretado.
- MDCI-BI - Mecanismo de deformação ao cisalhamento em uma barra inserida no concreto.
- MDCI-BL - Mecanismo de deformação ao cisalhamento em uma barra bi-engastada em elementos de concreto com uma altura livre.
- MDF-EN - Mecanismo de deformação à flexão em elastômero não fretado.
- MDF-EF - Mecanismo de deformação à flexão em elastômero fretado.
- MDF-CH - Mecanismo de deformação à flexão em chapas metálicas.

### **3.3 - DEFORMABILIDADE DOS MECANISMOS BÁSICOS DE DEFORMAÇÃO**

#### **3.3.1 - MECANISMO DE DEFORMAÇÃO À COMPRESSÃO SIMPLES EM ELASTÔMERO NÃO FRETADO**

##### **3.3.1.1- CONSIDERAÇÕES GERAIS**

Para os aparelhos de apoio tem sido empregada uma borracha sintética, conhecida comercialmente como neoprene. A borracha sintética apresenta um bom desempenho de durabilidade e de conservação de suas características físicas ao longo da idade e quando submetida às intempéries. As placas de elastômero formadas apenas por borracha são denominadas de almofadas de elastômeros simples, ou neoprene não fretado.

As placas de elastômero simples são utilizadas para pequenas cargas, porém para cargas maiores, como de pontes, são empregadas placas de borracha intercaladas com chapas de aço unidas por meio de vulcanização, conhecidas como almofadas de elastômero cintadas, ou neoprene fretado.

### 3.3.1.2- CARACTERÍSTICAS FÍSICAS

Quanto às características físicas e químicas dos aparelhos de apoio, só estão normalizadas para os aparelhos de apoio de elastômero fretado, através da NBR-9783/86. No entanto, a NBR-9062/85, no item 7.2.1.5, estabelece algumas especificações gerais. Em relação ao módulo transversal G, permite-se adotar valores correspondentes à dureza shore A, para uma temperatura de (20<sup>0</sup>C), conforme se apresenta na tabela 3.3.1.

TABELA 3.3.1 - Módulo (G) em função da dureza  
[Segundo a NBR-9062]

| Dureza shore A   | 50  | 60  | 70  |
|------------------|-----|-----|-----|
| Módulo G ( MPa ) | 0.8 | 1.0 | 1.2 |

O módulo G está sujeito a alteração em função do tipo do carregamento, estático ou dinâmico, da temperatura e ainda por influência da deformação lenta.

A NBR-9785/86 apresenta o método para o ensaio de distorção provocada pelas ações de aplicação lenta, consideradas como estáticas, porém de pequena duração. Segundo BRAGA (1985), sob o efeito de ações dinâmicas o módulo de elasticidade transversal G tem o seu valor dobrado.

Quanto à influência da temperatura no módulo G, apresentam-se algumas discrepâncias na literatura. A NBR-9062/86 prescreve que para a utilização em temperaturas inferiores a (0<sup>0</sup>C) deve-se considerar o módulo de elasticidade transversal igual ao dobro do determinado à (20<sup>0</sup>C). Já o PCI, fornece outras indicações, como mostra a tabela 3.3.2.

TABELA 3.3.2 - Módulo (G) (MPa) em função de T(<sup>0</sup>C)  
[Segundo o PCI (1973)]

| DUREZA SHORE A          | 50   | 70   |
|-------------------------|------|------|
| Temp. 21 <sup>0</sup> C | 0.77 | 1.51 |
| Temp. -7 <sup>0</sup> C | 0.85 | 1.66 |

Se for considerada a deformação lenta, a deformação final será dada por:

$$\epsilon_t = [ 1 + \varphi(t) ] \epsilon_0 \quad (3.3.1.1)$$

onde:

$\epsilon_t$  - deformação final no elastômero no tempo t

$\epsilon_0$  - deformação inicial

$\varphi(t)$  - coeficiente que leva em conta a dureza

A consideração da deformação lenta não é levada em conta em diversas normas. Todavia, segundo BRAGA, o dimensionamento, em geral, fica a favor da segurança.

Segundo BRAGA (1985), o coeficiente  $\varphi(t)$ , estudado por Topaloff, evolue rapidamente com a idade, atingindo metade do seu valor a 10 dias e o seu valor total em 180 dias. O coeficiente  $\varphi(t)$  varia com a dureza, conforme indicado na tabela 3.3.3.

TABELA 3.3.3 - Módulo (G) em função de  $\varphi(t)$

| Dureza Shore A | $\varphi$ ( total ) |
|----------------|---------------------|
| 50             | 0.45                |
| 60             | 0.35                |
| 70             | 0.25                |

O valor final de G, considerando a deformação lenta, para um elastômero de dureza shore 60, será:

$$G_t = 0,7G_0 \quad (3.3.1.2)$$

onde:

$G_t$  - módulo de elasticidade transversal considerando a deformação lenta

$G_0$  - módulo de elasticidade transversal inicial

A este respeito, a NBR-9062 recomenda que se adote o valor do  $G$  (cargas de longa duração), nos esforços de cisalhamento, como sendo a metade do valor do  $G$  (inicial). Na figura 3.3.1 são apresentadas as variações do módulo  $G$  em função do tipo de carregamento propostas por Topaloff e pela NBR-9062.

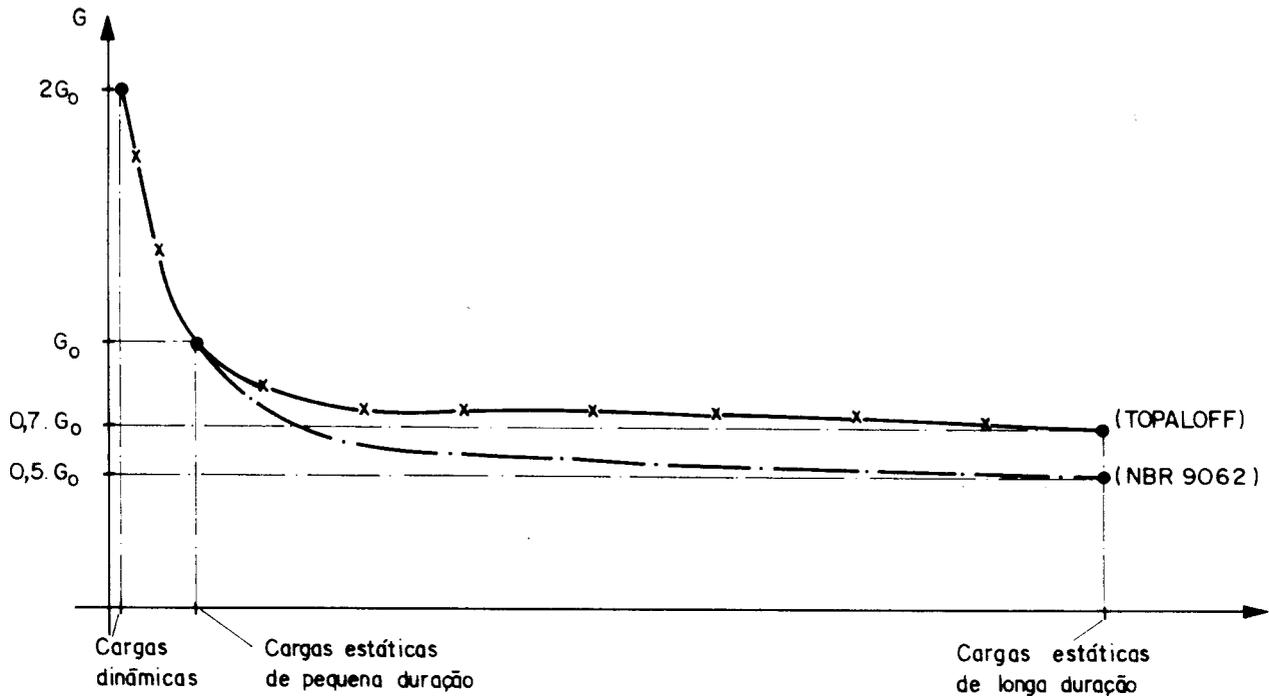
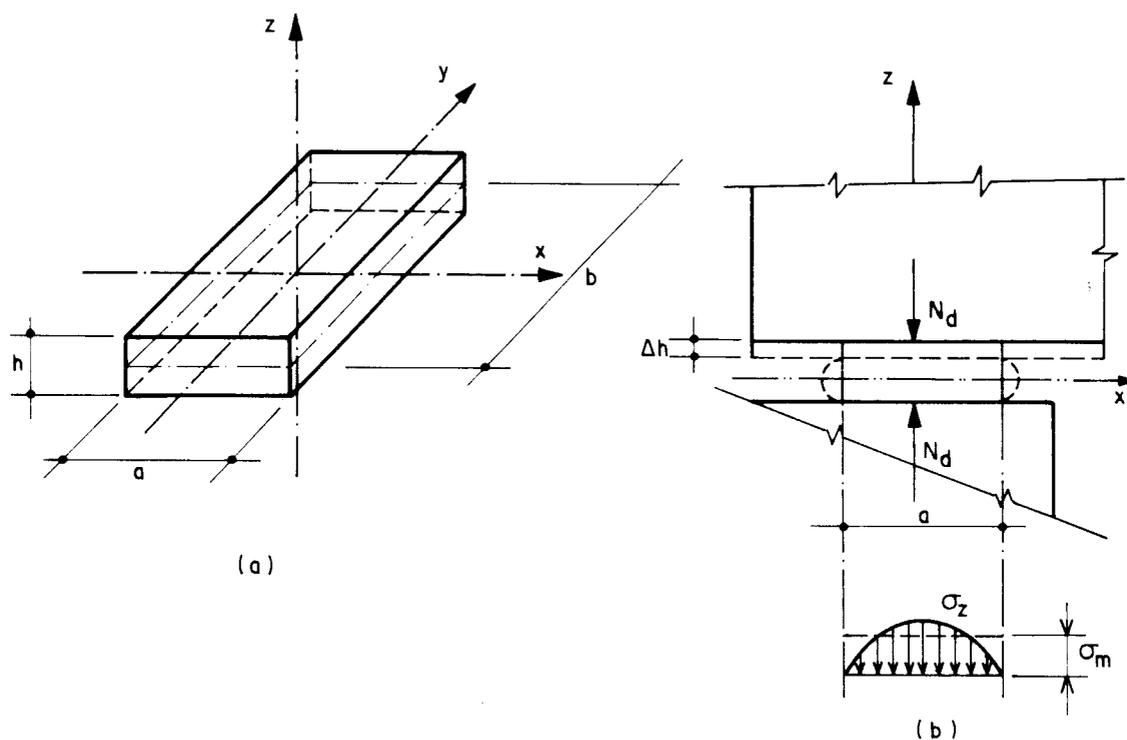


Figura 3.3.1 - Variação do módulo ( $G$ ) em função do tipo e duração do carregamento.

### 3.3.1.3- TENSÕES E DEFORMAÇÕES

A almofada foi considerada como sendo uma placa elástica comprimida por dois elementos rígidos, cujas superfícies permanecem planas. O elastômero se deforma conforme é mostrado na figura 3.3.2. Próximo às bordas livres, não se apresenta quase nenhuma resistência à deformação transversal, caindo praticamente a zero o valor das tensões normais nestes pontos. No centro do elastômero, tem-se um estado triplo de tensões, o que confere maior resistência às deformações.

A nível de dimensionamento, utiliza-se uma tensão média  $\sigma_m$  distribuída uniformemente no elastômero, conforme a figura 3.3.2.b.



**Figura 3.3.2 - (a)** Sistema de eixos para almofada de elastômero.  
**(b)** Distribuição das tensões normais numa almofada de elastômero não fretado.

Sob o efeito da reação normal, o elastômero tende a se expandir lateralmente. Considerando-se ( $b \gg a$ ), pode-se aproximar à situação do estado plano de deformações. Assim, para se utilizar o equacionamento do estado plano de tensões, deve-se substituir o módulo de elasticidade longitudinal por um módulo fictício ( $E_f$ ).

Segundo BRAGA (1985), os elastômeros podem sofrer tanto deslocamentos quanto deformações não desprezíveis, da mesma ordem de grandeza das suas próprias dimensões. Desta forma, dever-se-ia aplicar uma teoria de terceira ordem. Todavia, os estudos teóricos mais simplificados servem como base para o estabelecimento de critérios de dimensionamento. Os estudos teóricos têm sido ajustados por estudos experimentais por diversos autores.

Quanto ao estudo da deformabilidade à compressão simples em elastômeros não fretados, existe pouca referência na literatura

sobre o assunto, sendo que a maior parte dos estudos destina-se aos elastômeros fretados. A NBR-9062/85, quanto à deformação por compressão, prescreve, no seu item 7.2.1.5.19, que para a verificação da máxima deformação por compressão, de (15%), deve-se utilizar valores experimentais em função da dureza e do fator de forma. A NBR-9784/86 prescreve o método pelo qual deve ser realizado o ensaio de compressão simples apenas para elastômero fretado.

Embora a NBR-9062 não apresente diretamente o cálculo da deformação a compressão simples em elastômeros, ela fornece uma indicação indireta sobre o assunto, quando prescreve a condição de não levantamento da borda menos carregada. Considerando-se, para as almofadas de elastômeros simples, que toda a almofada deverá estar comprimida e que a deformação à compressão ( $\Delta h_n$ ) será tomada no centro da almofada, conforme indicado na figura 3.3.3, então a rotação da almofada será dada por:

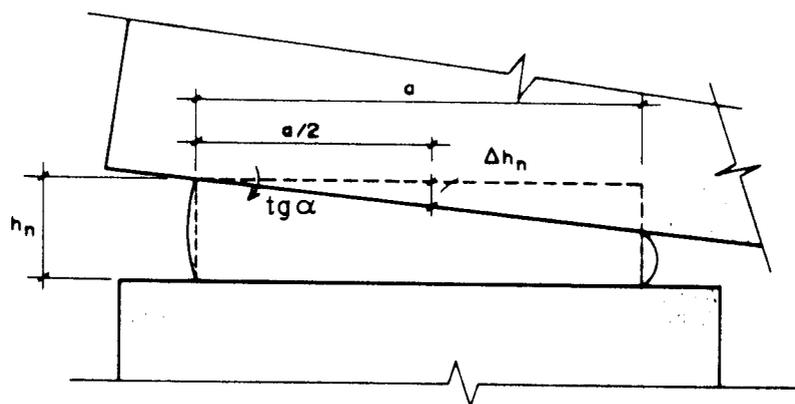
$$\text{tg } \alpha = 2\Delta h_n / a \quad (3.3.1.3)$$

onde:

$\text{tg } \alpha$  - rotação da almofada de elastômero

$\Delta h_n$  - afundamento da almofada de elastômero

$a$  - menor dimensão da almofada de elastômero



**Figura 3.3.3** - Rotação da almofada de elastômero, para o não levantamento da borda menos carregada.

Desenvolvendo-se as expressões do item 7.2.1.5.22 da NBR-9062, o afundamento  $\Delta h_n$  pode ser obtido por:

$$\Delta h_n = ( h_n \sigma_m ) / ( 10GB + 2\sigma_m ) \quad (3.3.1.4)$$

onde:

$\sigma_m$  - tensão média de cálculo

B - fator de forma da almofada

G - módulo transversal

$h_n$  - altura do elastômero

A equação 3.3.1.4 foi abordada por se tratar de uma indicação de norma e ainda por constituir uma boa indicação para o dimensionamento. Todavia, o seu uso para determinação da deformabilidade à compressão torna-se inviável, pois necessita do valor da tensão sobre o elastômero. A seguir será apresentado um equacionamento para o cálculo da deformabilidade à compressão.

#### 3.3.1.4- EQUACIONAMENTO PARA O CÁLCULO DA DEFORMABILIDADE

O equacionamento aqui abordado baseou-se em CATANIA & MENDITTO (1981). Desenvolvido por LEONHARDT, este equacionamento baseou-se no estudo da teoria da elasticidade, levando-se em conta resultados experimentais. Segundo os autores, a deformação no elastômero, devido à compressão simples, é dada por:

$$\Delta h_n = ( N h_n ) / ( E_f A_n ) \quad (3.3.1.5)$$

onde:

$\Delta h_n$  - afundamento da almofada de elastômero

N - força normal de compressão

$h_n$  - espessura da almofada de elastômero

$E_f$  - módulo de elasticidade fictício

$A_n$  - área inicial da superfície de apoio

Assim, a deformabilidade pode ser escrita por:

$$\lambda_{cn} = (h_n) / (E_f A_n) \quad (3.3.1.6)$$

sendo:

$$E_f = c E_n \quad (3.3.1.6a)$$

$$c = (1 + 0,5 \mu_n (a/h_n)^2) / (1 - \mu_n^2) \quad (3.3.1.6b)$$

$$E_n = 2G (1 + \mu_n) \quad (3.3.1.6c)$$

onde

$c$  - coeficiente de correção

$E_n$  - módulo de elasticidade longitudinal

Para o elastômero adota-se o coeficiente de Poisson  $\mu_n$  igual a:  $\mu_n = 0,5$ .

Assim, a equação 3.3.1.6c pode ser escrita por:

$$E_n = 3G \quad (3.3.1.6d)$$

A relação entre  $E_n$  e  $G$ , dada na eq. 3.3.1.6d, refere-se ao estudo no estado plano de tensões. Como já foi mencionado anteriormente, o fato de se ter considerado ( $b \gg a$ ) possibilita a simplificação de se estar trabalhando no estado plano de deformações, para o plano paralelo à menor dimensão do elastômero. Desta forma, para se utilizar o equacionamento do estado plano de tensões, deve-se usar um módulo fictício ( $E'_f$ ), tal que:

$$E'_f = E_n / (1 - \mu_n^2) \quad (3.3.1.7)$$

onde:

$E'_f$  - módulo de deformação fictício para o estado plano de tensões

Escrevendo-se a expressão para  $E_f$ , substituindo os valores das equações 3.3.1.6b e 3.3.1.6c, tem-se:

$$E_f = 3G ( 1 + 0,5\mu_n ( a/h_n )^2 ) / ( 1 - \mu_n^2 ) \quad (3.3.1.8)$$

O denominador  $( 1 - \mu_n^2 )$  aparece na equação (3.3.1.8) em virtude do módulo de elasticidade fictício do estado plano de deformações para o estado plano de tensões. A parcela  $(1+0,25(a/h_n)^2)$  leva em conta um fator de forma  $(a/h_n)$ , relacionado à menor dimensão do elastômero.

Em ROEDER et alii (1987) foi apresentada uma proposta para modificação de especificações para aparelhos de apoio de elastômeros da *Standard Specifications for Highway Bridges 1983*, AASHTO, onde a relação entre o módulo  $E_f$  e o módulo  $G$  é dada por:

$$E_f = E_f^* = 3G ( 1 + 2KS^2 ) \quad (3.3.1.9)$$

sendo:

$$S = 2h_n ( a + b ) / ( ab ) \quad (3.3.1.9a)$$

onde:

$S$  - fator de forma do elastômero, onde  $S = B^{-1}$  e  $B$  é o fator de forma segundo NBR-9062.

$K$  - constante que depende da dureza

O coeficiente ( $K$ ), dado em função da dureza (shore A) é apresentado na tabela 3.3.4, dada abaixo.

TABELA 3.3.4 - ( $K$ ) em função da dureza

| Dureza Shore A | 50   | 60   | 70   |
|----------------|------|------|------|
| ( $K$ )        | 0.75 | 0.60 | 0.55 |

### 3.3.2 - MECANISMO DE DEFORMAÇÃO À COMPRESSÃO SIMPLES EM ELASTÔMERO FRETADO

#### 3.3.2.1- CONDIÇÕES GERAIS

O aparelho de neoprene fretado é composto por placas de neoprene, intercaladas por chapas de aço vulcanizadas, formando uma placa única, conforme indicado na figura 3.3.4. As chapas de aço fazem um cintamento, que aumentam as tensões de cisalhamento transversal ( $\tau$ ) e diminuem as deformações verticais na placa, aumentando a sua resistência.

Geralmente os aparelhos de apoio fretado são utilizados para carregamentos de maior intensidade, como para apoios em pontes, não sendo utilizados costumeiramente em obras de porte menor, nas estruturas pré-moldadas correntes.

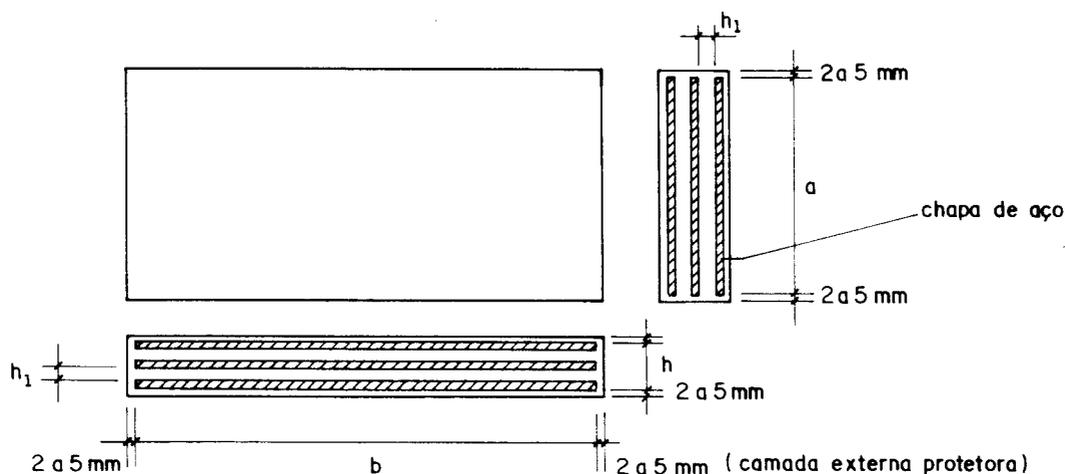


Figura 3.3.4 - Almofada de elastômero fretado. [BRAGA (1985)]

#### 3.3.2.2- CARACTERÍSTICAS FÍSICAS

Os aparelhos de elastômero fretado estão normalizados pela NBR-9783/86, que além das características físicas estabelece as condições de aceitação do elastômero.

Quanto ao módulo  $G$ , permanece válido o que foi apresentado no item 3.3.1.

### 3.3.2.3- TENSÕES E DEFORMAÇÕES

Quanto à distribuição de tensões normais à placa, devido ao efeito de cintamento das chapas de aço, o elastômero oferece também uma certa resitência próximo às suas bordas. Assim, tem-se uma melhor distribuição das tensões normais ao longo da placa. O módulo E varia pouco em função de x e y. A figura 3.3.5 apresenta a distribuição de tensões e deformações para a almofada.

Para o cálculo da deformação  $\Delta h_n$ , BRAGA (1985) propõe que se utilize a seguinte expressão:

$$\Delta h_n = ( \sigma_m n h_1 ) / ( 4GB^2 + 3\sigma_m ) \quad (3.3.2.1)$$

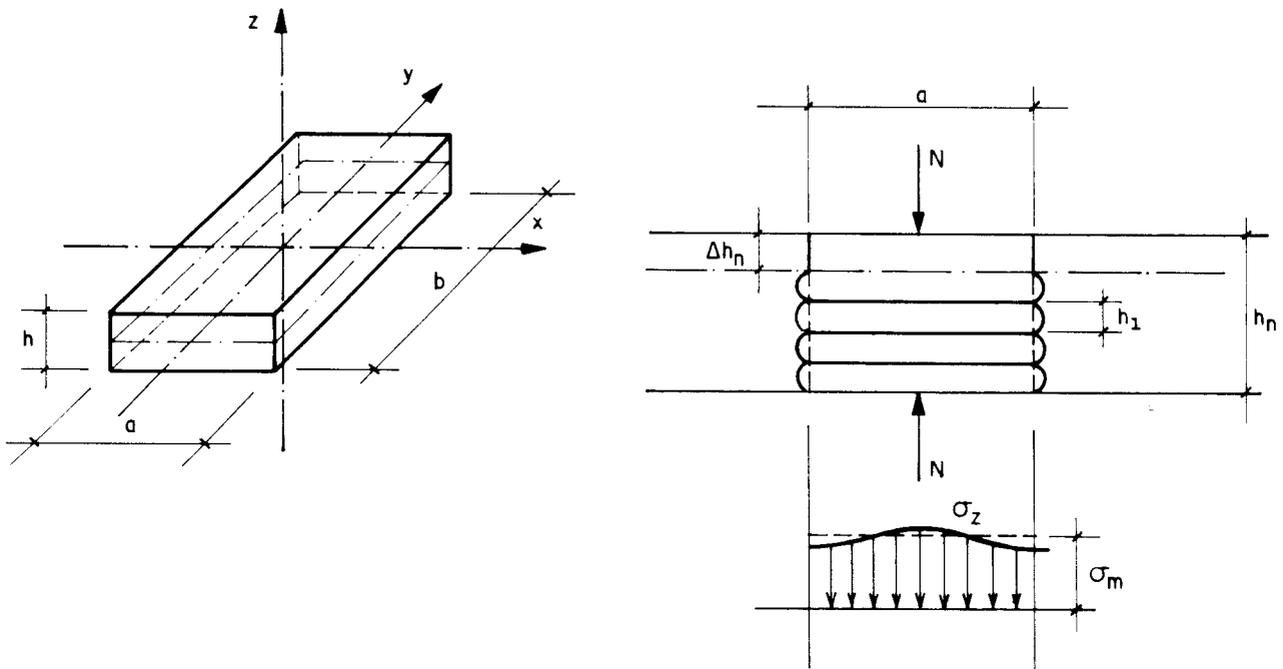


Figura 3.3.5 - a) Sistema de eixos para almofada de elastômero  
b) Distribuição de tensões e deformações para a almofada de elastômero fretado.

sendo:

$$B = ( ab ) / ( 2h_1 ( a + b ) ) \quad (3.3.2.1a)$$

$$\sigma_m = N / A_0 \quad ; \quad A_0 = ( a - a_h ) b \quad (3.3.2.1b)$$

onde:

$\Delta h_n$  - deformação por compressão da almofada

$\sigma_m$  - tensão média na almofada

n - número de camadas de elastômero

$h_1$  - espessura de uma camada de elastômero

$A_0$  - área da superfície efetiva de apoio

a - menor largura da almofada de elastômero

$a_h$  - deformação horizontal ao cisalhamento

b - maior largura da almofada de elastômero

N - força normal de compressão na almofada

#### 3.3.2.4- EQUACIONAMENTO PARA O CÁLCULO DA DEFORMABILIDADE

Para o cálculo da deformabilidade à compressão, CATANIA e MENDITTO (1981) recomendam o equacionamento proposto por Leonhardt, donde a deformabilidade pode ser escrita por:

$$\lambda_{cn} = nh_1 / (E_f A_n) \quad (3.3.2.2)$$

sendo:

$$E_f = 3G (1 + 0,5\mu_n (a/h_1)^2) / (1 - \mu_n^2) \quad (3.3.2.2a)$$

onde:

$\lambda_{cn}$  - deformabilidade à compressão no elastômero

$E_f$  - módulo de elasticidade fictício

$A_n$  - área inicial

$\mu_n$  - coeficiente de poisson no elastômero

O denominador  $(1 - \mu_n^2)$  aparece na equação 3.3.2.2a em virtude do módulo de elasticidade fictício do estado plano de deformações para o estado plano de tensões. O termo  $(1 + 0,5\mu_n (h_1/a)^2)$  aparece como fator de correção em função do coeficiente de Poisson e de um fator de forma  $(a/h_1)$ , em virtude de se estar trabalhando com grandes deformações.

Em ROEDER et alii (1987), recomenda-se para este caso:

$$\lambda_{cn} = nh_1 / (E_f A_n) \quad (3.3.2.3)$$

sendo:

$$E_f = E_f^* = 3.G. (1 + 2.K.S^2) \quad (3.3.2.3a)$$

$$S = B^{-1} \quad (3.3.2.3b)$$

$$K = f(\text{dureza shore A}) \quad (\text{ver tabela 3.3.4})$$

onde:

S - fator de forma do elastômero, onde  $S = B^{-1}$  e B é o fator de forma segundo NBR-9062.

K - constante que depende da dureza

$A_n$  - área inicial da superfície de apoio

### 3.3.2.5- EXEMPLO NUMÉRICO COM COMPARAÇÃO ENTRE EQUACIONAMENTOS PARA DETERMINAÇÃO DA DEFORMABILIDADE À COMPRESSÃO SIMPLES

Este exemplo compara os valores obtidos por equacionamentos de autores diferentes. Os dados para o problema foram extraídos de um exemplo numérico em BRAGA (1985).

DADOS:

$$F = N = 1900 \text{ KN}$$

$$G = 1000 \text{ kN/m}^2 ; \quad \mu_n = 0,5$$

$$h_n = 4 \text{ cm} ; \quad h_1 = 1 \text{ cm} ; \quad n = 4$$

$$a = 20 \text{ cm} ; \quad b = 80 \text{ cm}$$

$$A = 0,1600 \text{ m}^2 ; \quad A_0 = 0,1408 \text{ m}^2$$

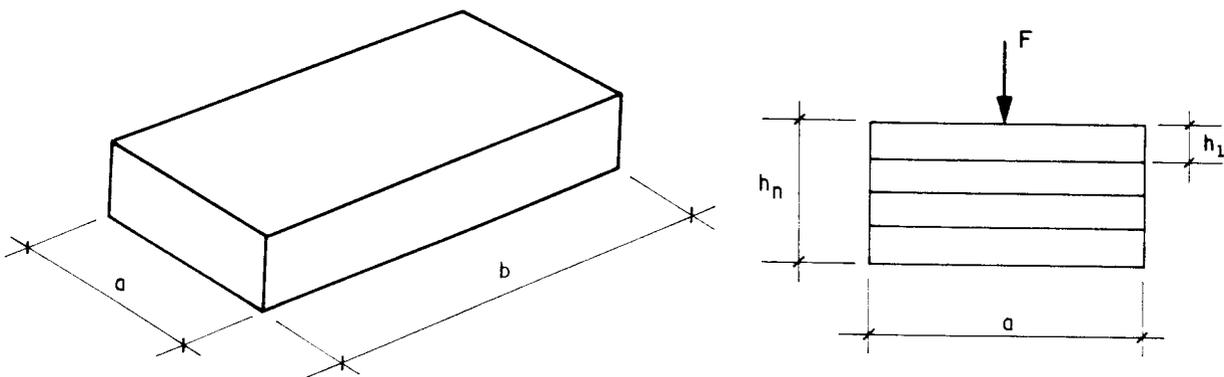


Figura 3.3.6 - Elastômero fretado solicitado à compressão.

**A) Equacionamento proposto pela norma da UNION INTERNACIONALE DES CHEMINS DE FER (UIC) apresentado por BRAGA (1985)**

Segundo este equacionamento, apresentado no item 3.3.2, o afundamento do elastômero foi de:  $\Delta h_n = 0,2E-02m$

Assim, tem-se a deformabilidade à compressão dada por:

$$\lambda_{cn} = 0,2E-02 / 1900 = 1,05E-06 \text{ m/kN}$$

**B) Equacionamento estudado experimentalmente POR TOPALOFF, apresentado por BRAGA (1985)**

A deformabilidade à compressão é escrita por:

$$\lambda_{cn} = n \cdot h_1 / [E_f \cdot A_n]$$

onde:

$E_f$  - módulo de elasticidade fictício

$A_n$  - área inicial da superfície de apoio

Segundo TOPALOFF,  $E_f$  é dado por:

$$E_f = G \cdot (a/h_1)^2$$

Substituindo-se os dados na expressão acima, tem-se:

$$\lambda_{cn} = 0,04 / [1000 \cdot (0,20/0,01)^2 \cdot 0,1600] = 6,25E-07 \text{ m/kN}$$

**C) Equacionamento proposto por LEONHARDT, apresentado por CATANIA e MENDITTO (1988)**

A deformabilidade à compressão é escrita por:

$$\lambda_{cn} = n \cdot h_1 / (E_f A_n)$$

$E_f$  é dada pela eq. 3.2.2.2a, onde substituindo-se os dados, tem-se:

$$E_f = 3.1000. (1 + 0,25. (0,20/0,010)^2) / 0,75 = 404000 \text{ kN/m}^2$$

A área do almofada é dada por:

$$A_n = 0,1600 \text{ m}^2$$

Assim, tem-se que:

$$\lambda_{cn} = 0,04 / (404000.0,1600) = 6,19E-07 \text{ m/kN}$$

#### D) Equacionamento proposto para a AASHTO, em ROEDER et alli (1987)

Segundo a eq. 3.3.2.3, a deformabilidade é dada por:

$$\lambda_{cn} = nh_1 / (E_f A_n)$$

O módulo ( $E_f$ ) é dado por:

$$E_f = 3.G. (1 + 2KS^2)$$

onde:

$$K = 0,60 \text{ (para DUREZA SHORE 60, segundo tabela 3.3.4)}$$

$$S^2 = (2.0,01. (0,20+0,80) / (0,20.0,80))^2 = 0,0156$$

Assim, tem-se:

$$E_f = 3(1000)(1 + 2.0,60.0,0156) = 3056,16 \text{ kN/m}^2$$

A deformabilidade fica:

$$\lambda_{cn} = h_n / E_f A_n = 0,04 / (3056,16.0,1600) = 8,18E-05 \text{ m/kN}$$

#### Observação:

Pode-se notar que os resultados apresentados em (B) e (C) possuem valores muito próximos, o que indica que o equacionamento analítico proposto por Leonhardt, forneceu bons

resultados em comparação com o equacionamento proposto por Topaloff, que foi obtido por estudos experimentais. Neste trabalho empregou-se o equacionamento proposto por Leonhardt, apresentado nas equações 3.3.1.6 e 3.3.2.2 para os elastômeros não fretados e fretados, respectivamente. Estas equações apresentam bons resultados e ainda um número maior de parâmetros, que serão úteis para as interpretações nas análises numéricas.

### 3.3.3\_ MECANISMO DE DEFORMAÇÃO À COMPRESSÃO SIMPLES NA SUPERFÍCIE DE CONTATO DE DOIS ELEMENTOS DE CONCRETO

Geralmente a transmissão da compressão de um elemento pré-moldado de concreto para outro é efetuada através do contato direto ou com a utilização de uma camada intermediária de argamassa, ou de concreto in-loco. Desta forma a deformabilidade depende também da argamassa.

A figura 3.3.8 apresenta as deformações nas juntas de ligações em colunas para: (1) juntas sem argamassa; (2) juntas com argamassa de resistência de 10MPa.

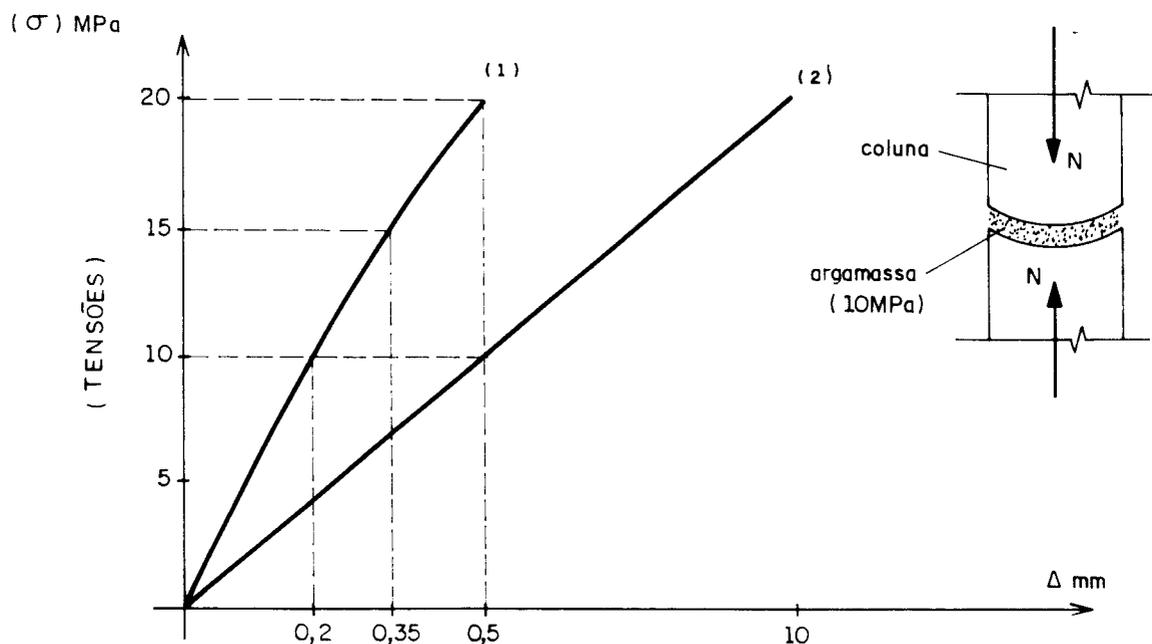


Figura 3.3.8 - Resultados experimentais de deformabilidades em juntas horizontais segundo BLJUGER (1988)

BLJUGER (1988) recomenda, para o contato entre dois elementos pré-moldados de concreto que a deformabilidade, expressa em unidade de comprimento por tensão, seja adotada de:

0,5E-04 m/MPa ( sem argamassa )

0,2E-04 m/MPa ( com argamassa )

### 3.3.4 - MECANISMO DE DEFORMAÇÃO À TRAÇÃO DE UMA BARRA INSERIDA NO CONCRETO

Para este mecanismo, considerou-se a deformação axial de uma barra de comprimento  $l_s$  conforme indicado na figura 3.3.8.

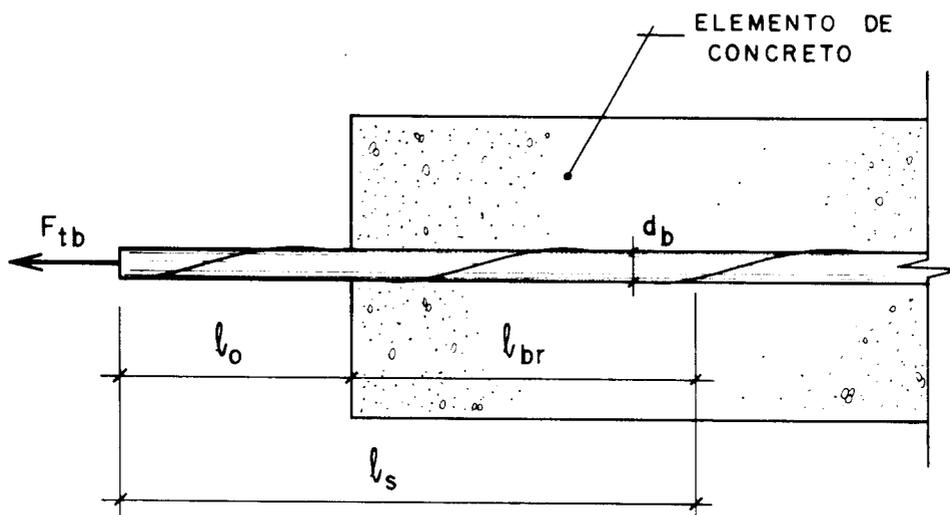


Figura 3.3.8 - Barra semi-inserida em um elemento de concreto.

A deformabilidade é dada por:

$$\lambda_{tb} = l_s / ( A_s \cdot E_s ) \quad (3.3.4.1)$$

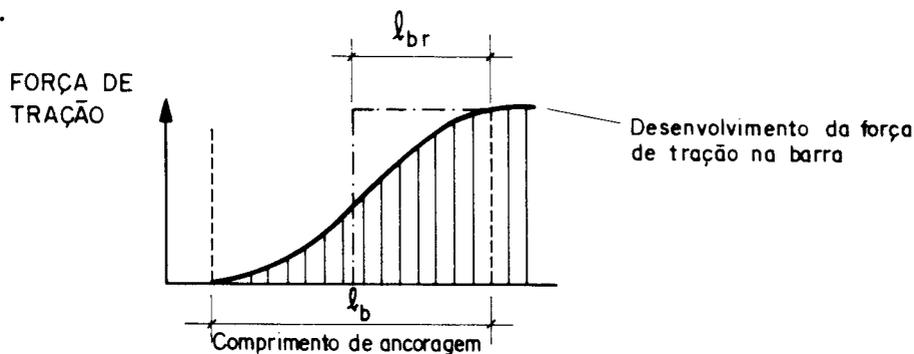
sendo:

$$l_s = l_o + l_{br} \quad (3.3.4.2)$$

onde:

- $\lambda_{tb}$  - deformabilidade à tração da barra
- $l_s$  - comprimento da barra, considerado para o cálculo da deformabilidade.
- $l_o$  - distância da face do elemento de concreto ao ponto considerado para o cálculo
- $l_{br}$  - comprimento de ancoragem de referência
- $A_s$  - área da seção transversal da barra
- $E_s$  - módulo de elasticidade longitudinal

O desenvolvimento da força de tração em uma barra, ao longo do comprimento de ancoragem  $l_b$ , é apresentado na figura 3.3.9. Para este caso, o comprimento de ancoragem de referência  $l_{br}$  foi adotado para  $l_{br}=0,5l_b$ . Todavia, o valor de  $l_{br}$  deve ser analisado para cada caso nas regiões de implantação próximas à ligação.



**Figura 3.3.9-** Desenvolvimento da força de tração em uma barra, ao longo do comprimento de ancoragem [LEONHARDT (1977)]

### 3.3.5 - MECANISMO DE DEFORMAÇÃO AO CISALHAMENTO EM ELASTÔMERO NÃO FRETADO

O ensaio de distorção em aparelhos de apoio de elastômero é prescrito pela NBR-9785/86. A NBR-9062, de pré-moldados, no item 7.2.1.5.20, limita a deformação por cisalhamento ( $a_h$ ) ao valor da metade da altura  $h_n$ .

Segundo BRAGA (1985), sob o efeito de uma força  $H$  sobre o elastômero, mantendo-se o deslocamento  $a_h$  constante, esta diminui com o tempo, tal que:

$$H_t = ( A_0 G_t a_h ) / h_n \quad (3.3.5.1)$$

sendo:

$$A_0 = b ( a - a_h ) \quad (3.3.5.1a)$$

$$G_t = G_0 e^{-\varphi(t)} = 0,7G_0 \quad (3.3.5.1b)$$

Observa-se que a NBR-9062 prescreve que se utilize  $G_t=0,5G_0$  para o cálculo da deformação por cisalhamento, devido às cargas permanentes.

A distorção é dada por:

$$\text{tg } (\gamma) = a_h / h_n \quad (3.3.5.2)$$

onde:

$A_0$  - área efetiva da almofada de elastômero

$H$  - força horizontal ao plano da almofada

$H_t$  - força horizontal na idade (t)

$G_0$  - módulo transversal inicial

$G_t$  - módulo transversal na idade (t)

$\varphi(t)$  - coeficiente que leva em conta a dureza

$a_h$  - deformação horizontal por cisalhamento

$h_n$  - altura do elastômero

$\gamma$  - distorção por cisalhamento na almofada

Como em geral os elementos em contato com o elastômero podem ser considerados como corpos muito rígidos, pode-se usar a hipótese de que as tensões  $\tau_{zy}$  e  $\tau_{zx}$  são uniformes. Cabe lembrar que esta é apenas uma aproximação, uma vez que nas bordas livres não há tensões de cisalhamento, sendo estas nulas. A nível de simplificação convencionou-se tratar apenas com  $\tau_h$ , que é dado por:

$$\tau_h = H / A_0 \quad (3.3.5.3)$$

onde:

$\tau_h$  - tensão de cisalhamento na almofada de elastômero

A distribuição das tensões  $\tau_h$  é muito próxima a de uma forma retangular, caindo apenas nas bordas, podendo-se fazer uma aproximação para uma distribuição uniforme, conforme indicado na figura 3.3.10.

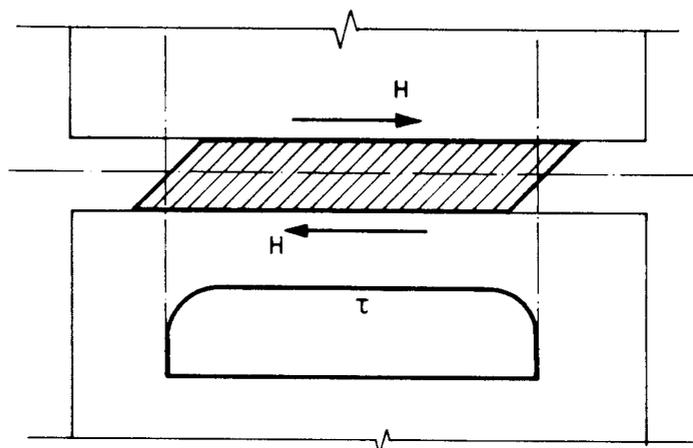


Figura 3.3.10 - Distribuição das tensões de cisalhamento numa almofada de elastômero.

A deformabilidade do elastômero devida ao cisalhamento é dada por:

$$\lambda_{\tau n} = h_n / GA_o \quad (3.3.5.4)$$

### 3.3.6 - MECANISMO DE DEFORMAÇÃO AO CISALHAMENTO DE UMA BARRA INSERIDA EM UM ELEMENTO DE CONCRETO

#### 3.3.6.1- CONSIDERAÇÕES GERAIS

O mecanismo de cisalhamento em um chumbador inserido no concreto pode ser modelado por diferentes aproximações, dependendo do tipo de análise a ser realizada.

Segundo DEI POLI et alii (1992), resultados

experimentais demonstraram que, para esforços da ordem de até 40% dos valores últimos, a consideração da linearidade é bem realística. Para a obtenção dos chamados "modelos lineares", tem-se utilizado a analogia de uma viga (elástica ou rígida) sob apoio elástico aplicada à teoria da reação do solo. Em conjunto desta teoria, utiliza-se ainda a notação do módulo de reação, que possibilita uma relação direta entre as forças e os deslocamentos transversais à barra, fato que simplifica também os procedimentos experimentais. O parâmetro do módulo de reação do material equivale a uma constante de rigidez elástica, dada em  $(F/L^3)$ .

Em relação a este mecanismo, DEI POLI et alii (1992) apresenta dois estudos importantes. O primeiro é quanto ao comportamento do sistema na fase elástica, no qual utilizou-se a analogia já mencionada, ilustrada na figura 3.3.11. O segundo estudo é em relação da situação última, onde utilizou-se uma análise-limite baseada na formação simultânea de uma rótula plástica na barra do chumbador e uma zona de plastificação (ou ruptura) na borda do concreto, ilustrada na figura 3.3.12. Embora não seja um objetivo direto deste trabalho o tratamento do mecanismo na fase plástica, abordou-se aqui este assunto pelo seu interesse para futuros estudos e ainda no dimensionamento.

Para a modelagem, baseada no estado limite, os dois parâmetros mais importantes são a resistência à compressão do concreto e a localização da rótula plástica no chumbador  $\ell_y$ , coincidente com o ponto de maior momento fletor na barra, conforme a figura 3.3.12. Valores experimentais, quanto a localização do maior momento, sugerem para os valores mais prováveis para  $\ell_y$ , tais que:

$$\ell_y \cong (1,6 \text{ a } 1,7) d_b \quad (3.3.6.1)$$

onde:

$\ell_y$  - distância da borda do concreto até o máximo momento no chumbador

$d_b$  - diâmetro da barra do chumbador

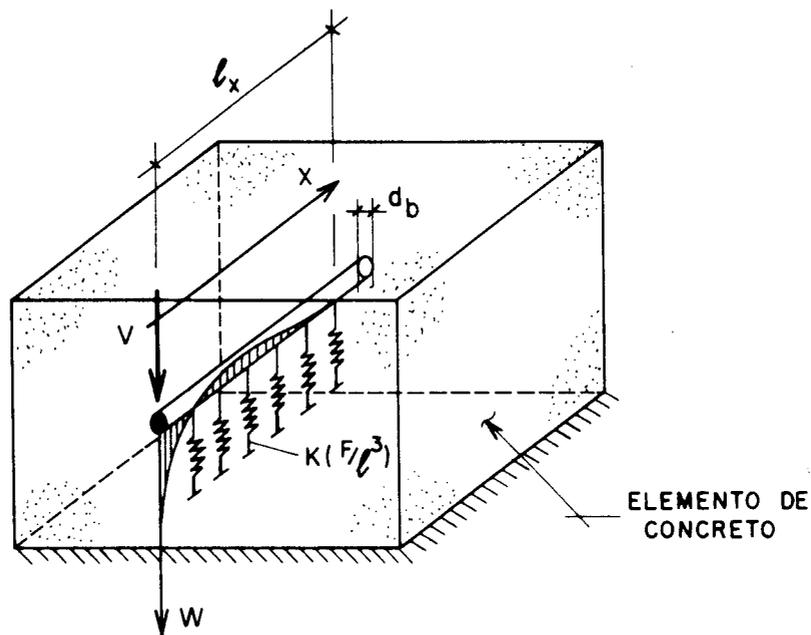


Figura 3.3.11 - Chumbador semi-inserido em um elemento de concreto carregado transversalmente; analogia da viga sobre apoio elástico. [DEI POLI et alii (1992)]

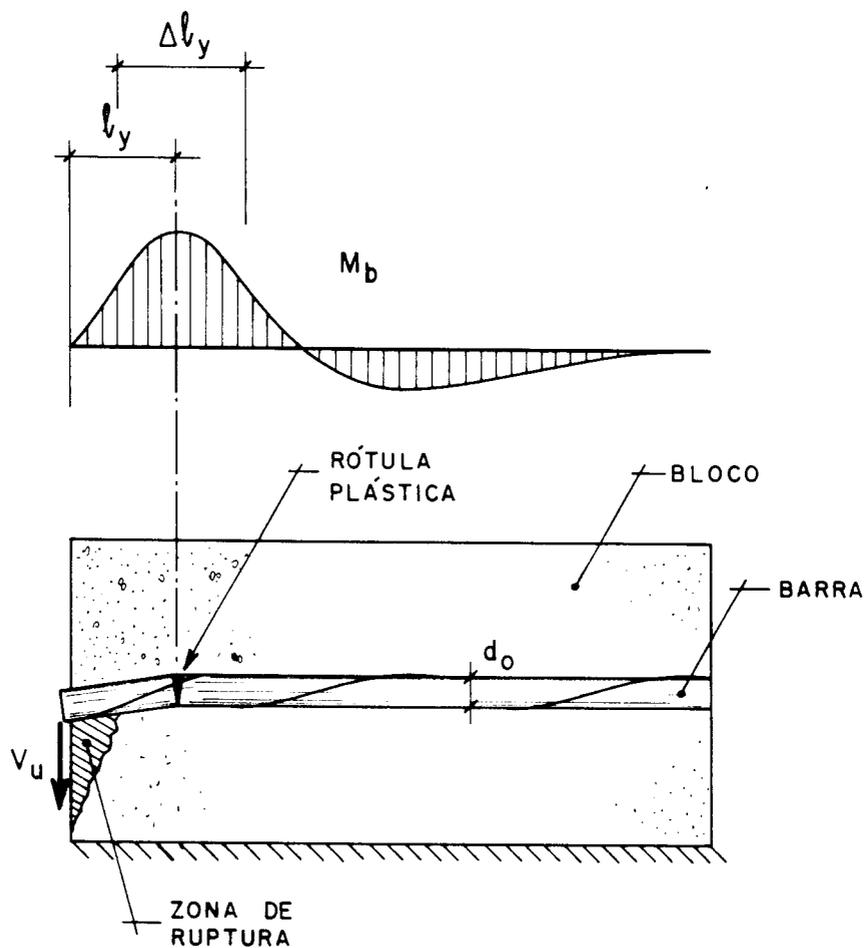


Figura 3.3.12 - Formação simultânea da rótula plástica na barra do chumbador e zona de ruptura no bordo de concreto. [DEI POLI et alii (1992)]

A espessura da zona de ruptura no bordo do concreto, dada por  $e_{zr}$ , mostrada na figura 3.3.13, varia na função inversa do diâmetro da barra.

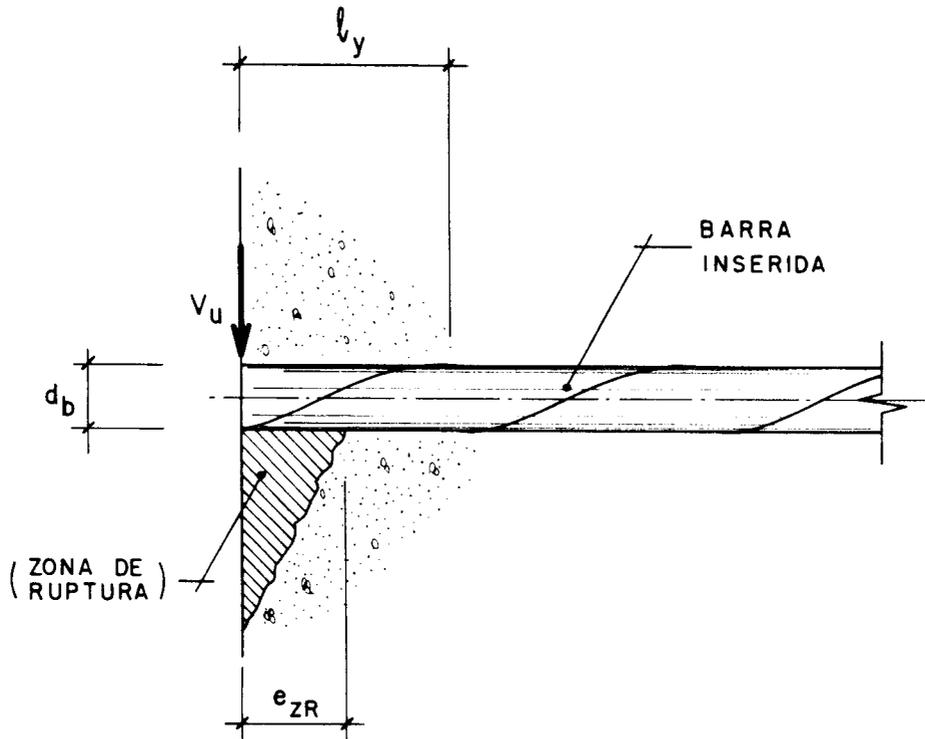


Figura 3.3.13 - Mecanismo de ruptura, indicando  $e_{zr}$  e  $l_y$ .

Em DEI POLI (1992), sugere-se que:

$$e_{zr}/d_b = 0,6 \quad ; \quad \text{para: } d_b = 12 \text{ mm} \quad (3.3.2a)$$

$$e_{zr}/d_b = 0,4 \quad ; \quad \text{para: } d_b = 25 \text{ mm} \quad (3.3.2b)$$

OBS: Para demais valores interpolar linearmente.

### 3.3.6.2- CÁLCULO DO DESLOCAMENTO TRANSVERSAL NO CHUMBADOR

Baseando-se na analogia da viga sobre apoio elástico, DEI POLI apresenta o seguinte equacionamento:

$$w = V / ( 2\alpha^3 E_s I_b ) \quad [L] \quad (3.3.6.3)$$

onde:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{K_C d_b}{4E_S I_b}} \quad [L^{-1}] \quad (3.3.6.4)$$

sendo:

$$K_C = 127 \sqrt{f'_C} / (d_b)^{2/3} \quad [FL^{-3}] \quad (3.3.6.5)$$

sendo:

$K_C$  - dado em MPa/mm

$d_b$  - dado em mm

onde:

$w$  - deslocamento transversal na barra do chumbador

$V$  - força constante aplicada à barra do chumbador

$E_S$  - módulo de elasticidade longitudinal da barra

$I_b$  - momento de inércia da barra

$f'_C$  - resistência à compressão do concreto

$K_C$  - módulo de rigidez de referência do concreto  
[DEI POLI et alii (1992)]

$d_b$  - diâmetro da barra

O equacionamento acima é válido para o mecanismo de cisalhamento na sua fase elástica. Para um estudo mais abrangente, além da fase elástica, DEI POLI et alii (1992) apresenta algumas indicações para o cálculo na fase plástica.

### 3.3.6.3- CÁLCULO DA DEFORMABILIDADE AO CISALHAMENTO NO CHUMBADOR

Para o cálculo da deformabilidade admite-se o mecanismo na situação elástica com  $V/V_u < 0,4$ . Assim, a partir da analogia da viga sobre apoio elástico, aplicada à teoria de reação do solo, e do desenvolvimento da equação 3.3.6.3, tem-se:

$$\lambda_{\tau b} = ( 2\alpha^3 E_S I_b )^{-1} \quad (3.3.6.6)$$

com:

$\alpha$  - dado pela expressão 3.3.6.4

### 3.3.7 - MECANISMO DE DEFORMAÇÃO AO CISALHAMENTO DE UMA BARRA BI-ENGASTADA EM DOIS ELEMENTOS DE CONCRETO COM ALTURA LIVRE

A deformabilidade da barra na altura livre do elastômero pode ser obtida pelo desenvolvimento mostrado na figura 3.3.14. O deslocamento  $\Delta s$ , provocado pela aplicação da força  $H$ , é dado por:

$$\Delta s = \lambda_{\tau b} \cdot H \quad (3.3.7.2)$$

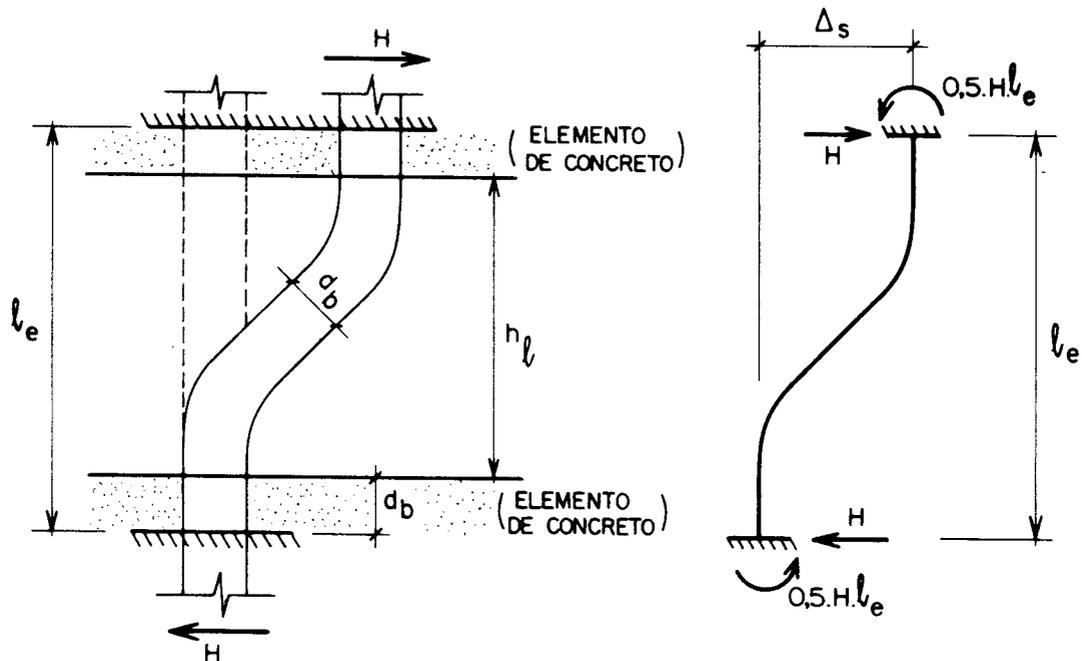


Figura 3.3.14 - Deformação da barra do chumbador devido à força horizontal [BLJUGER (1988)].

sendo:

$$\lambda_{\tau b} = \frac{\ell_e^3}{12E_s I_b} \quad (3.3.7.1a)$$

$$M = 0,5\ell_e H \quad (3.3.7.1b)$$

$$\sigma_s = \frac{M \cdot d_b}{I_b \cdot 2} \quad (3.3.7.1c)$$

$$I_b = \pi d_b^4 / 64 \quad (3.3.7.1d)$$

onde:

$$H = 4\sigma_s I_b / \ell_s \quad (3.3.7.1e)$$

BLJUGER (1988) orienta que para a altura livre efetiva ( $\ell_e$ ), seja adotada:

$$\ell_e = h_\ell + 2d_b$$

Neste caso, considera-se uma parcela de deformação da barra inserida no concreto. Assim, o deslocamento horizontal  $\Delta_s$  é dado por:

$$\Delta_s = (h_\ell + 2d_b^2) \sigma_s / 3E_s d_b \quad (3.3.7.2)$$

$$\text{com: } (\sigma_s = \sigma_{sk})$$

Para o cálculo da deformabilidade tem-se:

$$\lambda_{\tau b} = \frac{16(h_\ell + 2d_b)^3}{3\pi E_s d_b^4} \quad (3.3.7.3)$$

onde:

$\lambda_{\tau b}$  - deformabilidade ao cisalhamento na barra

$h_{\ell}$  - altura livre entre os elementos

$\ell_e$  - altura livre efetiva entre os elementos

$d_b$  - diâmetro da barra do chumbador

$\Delta_s$  - deslocamento transversal relativo às extremidades da barra

$I_b$  - momento de inércia da barra

### 3.3.8 - MECANISMO DE DEFORMAÇÃO À FLEXÃO EM ELASTÔMERO NÃO FRETADO

A nível de dimensionamento tem-se inicialmente a consideração desta deformabilidade como sendo infinita, uma rótula perfeita. Todavia, a nível de sistematização do estudo analisou-se também esta questão.

A condição de não levantamento da borda menos carregada, preescrita na NBR-9062, subentende que toda a almofada deve estar comprimida, onde a linha neutra não deve cortar a almofada. Também que  $\Delta h$ , afundamento, é medido no meio da almofada. Tem-se que a deformabilidade à rotação é dada por:

$$\lambda_{\phi n} = \phi_n / M \quad ( 3.3.8.1 )$$

onde:

$\lambda_{\phi n}$  - deformabilidade à flexão no elastômero

$\phi_n$  - rotação no elastômero

M - momento fletor solicitante no elastômero

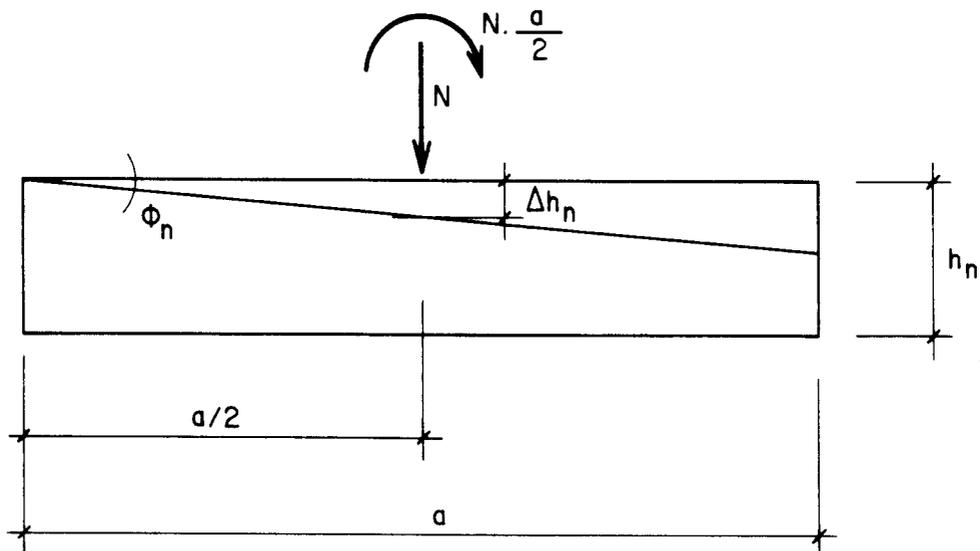


Figura 3.3.15 - Flexão da almofada de elastômero

A rotação do elastômero  $\phi_n$ , para  $\Delta h_n$  medido no centro da almofada, é dada por:

$$\phi_n = \Delta h_n / (0,5.a) \quad (3.3.8.1a)$$

onde:

$\Delta h_n$  - afundamento da almofada, medido em seu centro, desenvolvido no ítem 3.3.1.

Sendo:

$$\Delta h_n = \lambda_{cn} \cdot N \quad (3.3.8.1b)$$

$$\lambda_{cn} = h_n / (A_n \cdot 4 \cdot G \cdot (1 + 0,25 \cdot (a/h_n)^2)) \quad (3.3.8.1c)$$

$$N = 2 \cdot M / a \quad (3.3.8.1d)$$

onde:

$\lambda_{cn}$  - deformabilidade à compressão no elastômero

$N$  - força de compressão no elastômero

desenvolvendo a expressão 3.3.8.1a, tem-se:

$$\phi_n = 4 \cdot \lambda_{cn} \cdot M / a^2 \quad (3.2.8.2)$$

substituindo os valores na expressão 3.2.8.1 tem-se a deformabilidade  $\lambda_{\phi n}$ , dada por:

$$\lambda_{\phi n} = \frac{h_n}{(a^2 \cdot A_n \cdot G \cdot (1 + 0,25 \cdot (a/h_n)^2))} \quad (3.3.8.3)$$

### 3.3.9 - MECANISMO DE DEFORMAÇÃO À FLEXÃO EM ELASTÔMERO FRETADO

Os esforços resistentes à rotação são muito pequenos, mesmo nos elastômeros fretados. Quando a dimensão  $a$  é aumentada, os esforços podem deixar de ser desprezíveis.

A equação a seguir foi desenvolvida por TOPALOFF e apresentada em BRAGA (1985).

$$\lambda_{\phi n} = 60 \cdot n \cdot h_1^3 / (G \cdot b \cdot a^5) \quad (3.3.9.1)$$

onde:

$\lambda_{\phi n}$  - deformabilidade à flexão no elastômero

$n$  - número de camadas do elastômero fretado

$h_1$  - espessura de uma camada de elastômero

$G$  - módulo transversal para cargas de curta duração

$b$  - maior dimensão da almofada de elastômero

$a$  - menor dimensão da almofada de elastômero

LEONHARDT (1984), apresenta uma pequena diferença para a mesma equação, que origina:

$$\lambda_{\phi n} = 75 \cdot n \cdot h_1^3 / (G \cdot b \cdot a^5) \quad (3.3.9.2)$$

Cabe lembrar que o equacionamento proposto por TOPALOFF baseia-se em que  $b \gg a$ .

### 3.3.10 - MECANISMO DE DEFORMAÇÃO À FLEXÃO EM CHAPAS METÁLICAS

As deformabilidades, ou flexibilidades, à flexão das chapas metálicas são obtidas diretamente pela relação inversa da respectiva rigidez, obtida a partir da aplicação do método dos deslocamentos. Para tal, serão consideradas as vinculações nas extremidades e a rigidez do elemento de chapa metálica. Os desenvolvimentos para estes equacionamentos são amplamente encontrados na literatura, razão pela qual não serão apresentados neste ítem.

### 3.4 - EQUACIONAMENTOS PARA CÁLCULOS DE DEFORMABILIDADES PARA LIGAÇÕES TÍPICAS EM SERVIÇO

#### 3.4.1 - LIGAÇÃO VIGA-PILAR ARTICULADA, EM APOIO SOBRE CONSOLO, COM ALMOFADA DE ELASTÔMERO

Neste tipo de ligação, a almofada de elastômero situa-se na interface entre um elemento de viga e a sua superfície de apoio, no consolo. Desta forma a ligação possui um processo de montagem bastante simples, com maiores tolerâncias de fabricação, constituindo-se numa solução utilizada com certa frequência em galpões pré-moldados de concreto. Os elastômeros não fretados são empregados com maior frequência nas estruturas pré-moldadas correntes, sendo que os elastômeros fretados são mais empregados nos casos onde se tenham cargas elevadas.

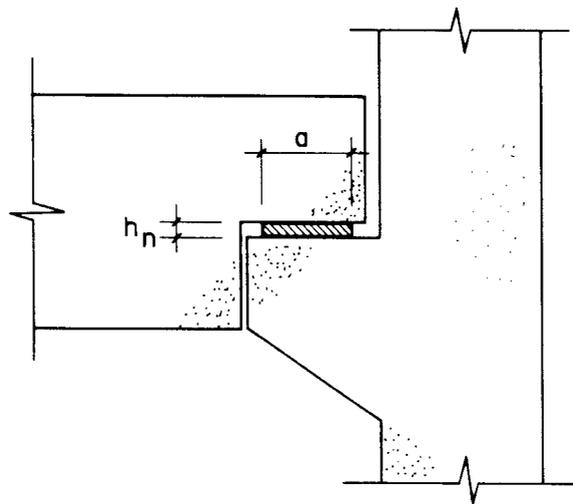


Figura 3.4.1 - Ligação viga-pilar articulada, em apoio sobre consolo, com almofada de elastômero.

Esta ligação restringe muito pouco os deslocamentos horizontais e de rotação das extremidades da viga, podendo-se assumi-la como sendo uma rótula sobre apoio móvel. Este fato

libera a viga para as deformações devidas à fluência, à retração e à temperatura, evitando-se que ocorra a propagação dos esforços, devidos a estes movimentos, ao longo da estrutura. Todavia, a falta de um elemento de travamento na ligação, acarreta o inconveniente de não garantir a estabilidade lateral da viga, necessitando-se de um mecanismo extra para este travamento.

#### **3.4.1.1 - LIGAÇÃO VIGA-PILAR ARTICULADA, EM APOIO SOBRE CONSOLO, COM ALMOFADA DE ELASTÔMERO NÃO FRETADO (ligação VPA-EN)**

##### **3.4.1.1.1 - DEFORMABILIDADE À COMPRESSÃO SIMPLES (ligação VPA-EN com mecanismo MDC-EN)**

Para o cálculo desta deformabilidade, considerou-se apenas o mecanismo de deformação à compressão simples em elastômero não fretado, mecanismo (MDC-EN). As hipóteses adotadas são discutidas no item 3.3.1 deste trabalho. A figura 3.4.2 apresenta a esquematização por molas para o mecanismo (MDC-EN) na ligação.

O cálculo para deformabilidade à compressão para elastômeros não fretados, apresentada na equação 3.3.1.6, é dado por:

$$\lambda_{cn} = h_n / (4GA_n (1 + 0,25 (a/h_n)^2))$$

onde:

$\lambda_{cn}$  - deformabilidade à compressão no elastômero

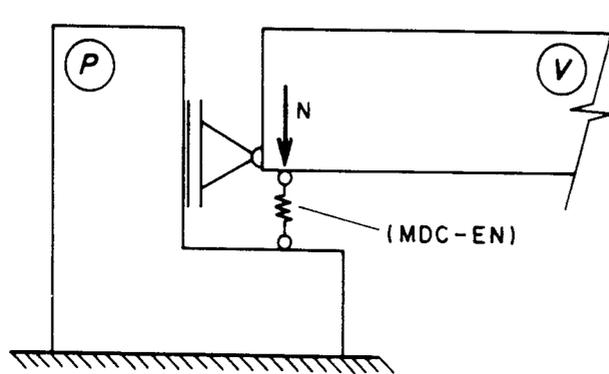
$h_n$  - altura do elastômero

G - módulo de deformação transversal inicial

a - dimensão da almofada paralela ao eixo da viga

$A_n$  - Área da superfície de apoio do elastômero.

Observa-se que esta equação está escrita para:  $\mu_n = 0,5$

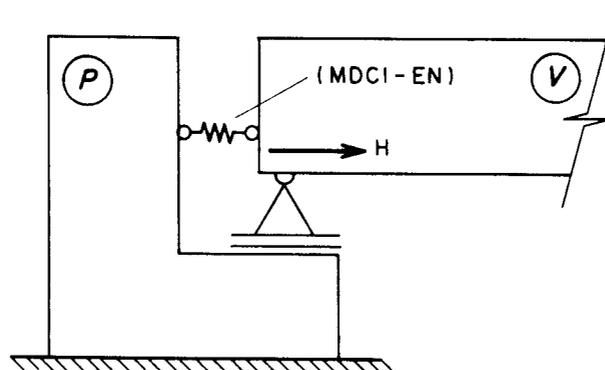


**Figura 3.4.2** - Esquemáticação por meio de molas para o mecanismo de deformação à compressão simples em almofada de elastômero. (ligação VPA-EN com mecanismo MDC-EN)

#### 3.4.1.1.2- DEFORMABILIDADE AO CISALHAMENTO

(ligação VPA-EN com mecanismo MDCI-EN)

Para o cálculo desta deformabilidade, considerou-se apenas o mecanismo de deformação ao cisalhamento em elastômero não fretado, mecanismo (MDCI-EN). As hipóteses de cálculo estão apresentadas no item 3.3.5.A figura 3.4.2 apresenta a esquematização por meio de molas para o mecanismo (MDCI-EN) na ligação.



**Figura 3.4.3** - Esquemáticação por meio de molas para o mecanismo de deformação ao cisalhamento em almofada de elastômero não fretado. (ligação VPA-EN com mecanismo MDCI-EN)

O equacionamento para o cálculo da deformabilidade, apresentado pela equação 3.3.5.4, é dado por:

$$\lambda_{\tau n} = h_n / (GA_0)$$

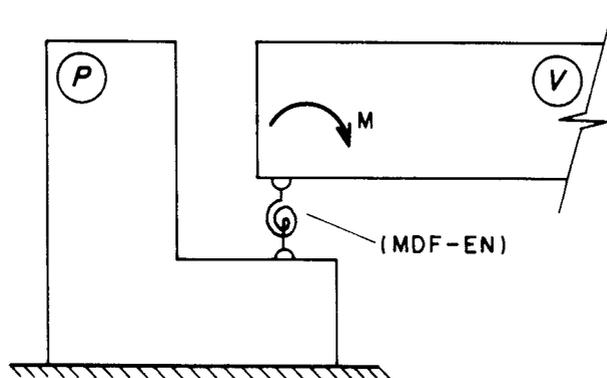
onde:

$\lambda_{\tau n}$  - deformabilidade ao cisalhamento no elastômero

$A_0$  - área efetiva da superfície de apoio da almofada

#### 3.4.1.1.3- DEFORMABILIDADE À FLEXÃO (ligação VPA-EN com mecanismo MDF-EN)

Para o cálculo desta deformabilidade, considerou-se apenas o mecanismo de deformação por flexão no elastômero não fretado, mecanismo (MDF-EN). As hipóteses de cálculo estão apresentadas no item 3.3.8. A figura 3.4.4 apresenta o esquema por molas para o mecanismo (MDF-EN) na ligação.



**Figura 3.4.4** - Esquematização por meio de molas para mecanismo de deformação à flexão em almofada de elastômero não fretado. (ligação VPA-EN com mecanismo MDF-EN)

O equacionamento para o cálculo da deformabilidade, apresentado pela equação 3.3.8.3, é dado por:

$$\lambda_{\phi n} = \frac{h_n}{(a^2 A_n G (1 + 0,25 (a/h_n)^2))}$$

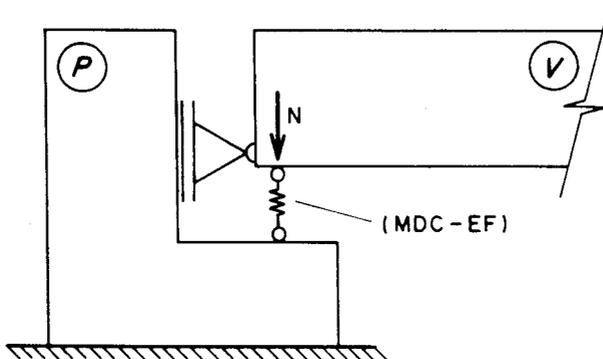
onde:

$\lambda_{\phi n}$  - deformabilidade à flexão no elastômero

### 3.4.1.2 - LIGAÇÃO VIGA-PILAR ARTICULADA, EM APOIO SOBRE CONSOLO, COM ALMOFADA DE ELASTÔMERO FRETADO (ligação VPA-EF)

#### 3.4.1.2.1- DEFORMABILIDADE À COMPRESSÃO SIMPLES (ligação VPA-EF com mecanismo MDC-EF)

Para o cálculo desta deformabilidade, considerou-se apenas o mecanismo de deformação à compressão simples em elastômero fretado, mecanismo (MDC-EF). As hipóteses de cálculo estão apresentadas no item 3.3.2. A figura 3.4.5 apresenta a esquematização por meio de molas para o mecanismo (MDC-EF) na ligação.



**Figura 3.4.5** - Esquematização por meio de molas para mecanismo de deformação à compressão simples em almofada de elastômero fretado. (ligação VPA-EF com mecanismo MDC-EF)

O cálculo para esta deformabilidade, apresentado pela equação 3.3.2.2, é dado por:

$$\lambda_{cn} = nh_1 / (4GA_n(1+0,25(a/h_1)^2))$$

onde:

$\lambda_{cn}$  - deformabilidade à compressão no elastômero

Observa-se que esta equação está escrita para:  $\mu_n = 0,5$

#### **3.4.1.2.2 - DEFORMABILIDADE AO CISALHAMENTO**

**(ligação VPA-EF com mecanismo MDCI-EF)**

A deformabilidade para o elastômero fretado é a mesma que a do elastômero não fretado. O equacionamento é apresentado pela equação 3.3.5.4.

#### **3.4.1.2.3 - DEFORMABILIDADE À FLEXÃO**

**(ligação VPA-EF com mecanismo MDF-EF)**

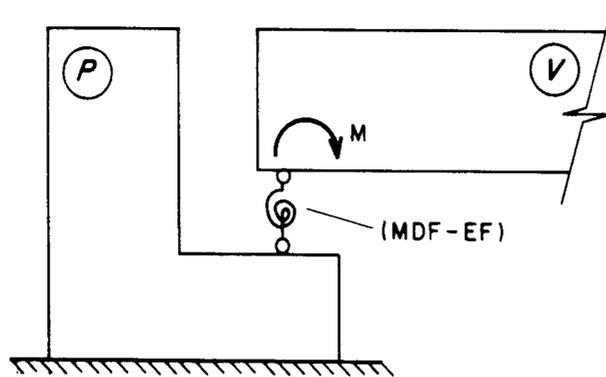
Para o cálculo desta deformabilidade, considerou-se apenas o mecanismo de deformação por flexão em elastômero fretado, mecanismo (MDF-EF). O equacionamento utilizado foi desenvolvido por TOPALOFF, a partir de resultados experimentais, conforme exposto no item 3.3.9. A figura 3.4.6 apresenta o esquema por molas para o mecanismo (MDF-EF) na ligação.

O equacionamento para o cálculo da deformabilidade, apresentado pela equação 3.3.9.1, é dado por:

$$\lambda_{\phi n} = 60nh_1^3 / (Gba^5)$$

onde:

$\lambda_{\phi n}$  - deformabilidade à flexão no elastômero



**Figura 3.4.6-** Esquemáticação por meio de molas para o mecanismo de deformação à flexão em almofada de elastômero fretado. (ligação VPA-EF com mecanismo MDF-EF)

### 3.4.2 - LIGAÇÃO VIGA-PILAR ARTICULADA, EM APOIO SOBRE CONSOLO, COM ALMOFADA DE ELASTÔMERO E CHUMBADOR

Este tipo de ligação tem sido bastante utilizado nas estruturas pré-moldadas para galpões. A princípio, o chumbador possui apenas a função de garantir a estabilidade lateral do elemento, e não a de resistir aos esforços horizontais. Todavia, em virtude do detalhamento construtivo corrente, apresentado na figura 3.4.8.a, onde se preenche os furos para os chumbadores com "grout" expansivo, ocasiona a solidarização do chumbador com o elemento. Desta forma, a ligação apresenta uma pequena restrição aos deslocamentos da viga. Neste estudo, preocupou-se com este tipo de detalhamento.

Um outro detalhamento realizado, é o da utilização de algum material plástico no preenchimento do nicho do chumbador, conforme a figura 3.4.9.b. A estabilidade da viga é garantida pela fixação do chumbador por uma chapa de topo parafusada. Neste caso, faz-se uma proteção contra a corrosão do chumbador.

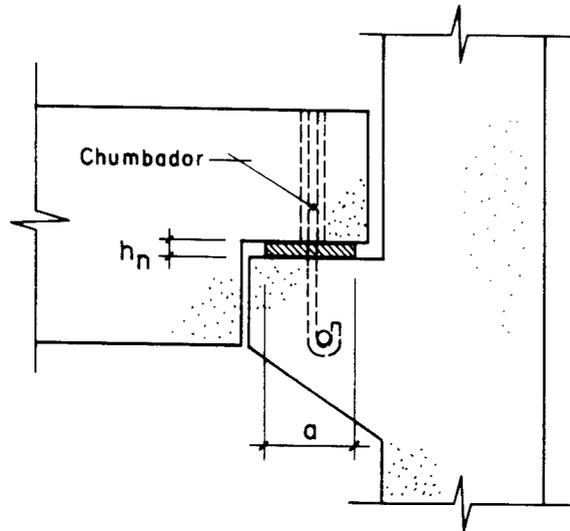
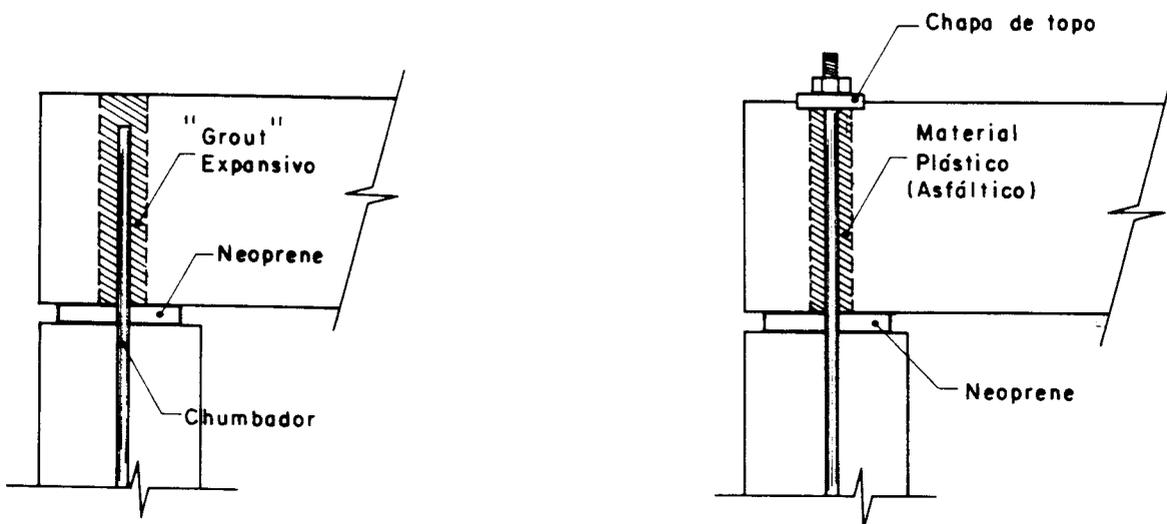


Figura 3.4.7 - Ligação viga-pilar articulada, em apoio sobre consolo com almofada de elastômero.



a) Preenchimento do nicho com "grout" expansivo.

b) Preenchimento do nicho com material plástico.

[CATANIA e MENDITTO (1981)]

Figura 3.4.8 - Detalhes de fixação de pino de chumbador em ligação em apoio sobre consolo por almofada de elastômero.

3.4.2.1 - LIGAÇÃO VIGA-PILAR ARTICULADA, EM APOIO SOBRE CONSOLO, COM ALMOFADA DE ELASTÔMERO NÃO FRETADO E CHUMBADOR (ligação VPA-ENC)

3.4.2.1.1 - DEFORMABILIDADE AO CISCALHAMENTO

(ligação VPA-ENC ;mecanismos: MDCI-EN, MDCI-BI e MDCI-BL)

Para o cálculo desta deformabilidade, considerou-se três mecanismos de deformação: mecanismo de deformação ao cisalhamento no elastômero não fretado, (MDCI-EN); mecanismo de deformação ao cisalhamento em uma barra inserida no concreto, (MDCI-BI); mecanismo de deformação ao cisalhamento em uma barra bi-engastada em dois elementos de concreto com altura livre entre si, (MDCI-BL).

Os mecanismos MDCI-BL e MDCI-BI estão associados em série entre si. Estes dois mecanismos, por sua vez, estão associados em paralelo ao mecanismo MDCI-EN. A figura 3.4.9 apresenta a esquematização por meio de molas com os mecanismos de deformação.

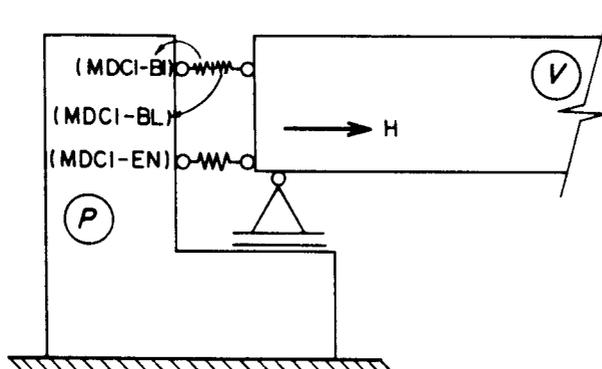


Figura 3.4.9 - Esquematização por meio de molas para mecanismo de deformação ao cisalhamento em ligação viga-pilar articulada em apoio sobre consolo com almofada de elastômero não fretado e chumbador. (ligação VPA-ENC : mecanismos MDCI-EN, MDCI-BI e MDCI-BL)

A deformabilidade ao cisalhamento  $\lambda_{\tau}$ , obtida pela associação em paralelo das deformabilidades dos mecanismos (MDCI-EN), (MDCI-BI) e (MDCI-BL), é dada por:

$$\lambda_{\tau} = \left[ \frac{1}{\lambda_{\tau n}} + \frac{1}{\lambda_{\tau bl} + \lambda_{\tau bi}} \right]^{-1} \quad (3.4.2.1)$$

onde:

- $\lambda_{\tau n}$  - deformabilidade ao cisalhamento em elastómero não fretado ( apresentada na equação 3.3.5.4 )
- $\lambda_{\tau bi}$  - deformabilidade ao cisalhamento em barra inserida em elemento de concreto ( apresentada na equação 3.3.6.6 )
- $\lambda_{\tau bl}$  - deformabilidade ao cisalhamento em barra bi-engastada em dois elementos com altura livre ( apresentada na equação 3.3.7.3 )

Considerando-se os equacionamentos dos mecanismos MDCI-EN, MDCI-BI e MDCI-BL, dados nos itens 3.3.5, 3.3.6 e 3.3.7, respectivamente, a equação 3.4.2.1 pode ser obtida de duas formas distintas.

A deformabilidade  $\lambda_{\tau bl}$  para o mecanismo MDCI-BL apresentada na equação 3.3.7.3, considera o trecho para deformação ao cisalhamento da barra,  $\ell_e$ , como sendo:  $\ell_e = h_{\ell} + 2d_b$ , onde  $h_{\ell}$  é a altura livre entre os elementos de concreto e  $d_b$  é o diâmetro da barra do chumbador. Nesta indicação, proposta por BLJUGER (1988), para o comprimento  $\ell_e$  considerou-se uma parcela de deformação nos trechos da barra inserido nos elementos de concreto. Assim, optando-se pelo uso da equação 3.3.7.3 pode-se dispensar a consideração do mecanismo MDCI-BI e a equação 3.4.2.1 é escrita por:

$$\lambda_{\tau} = \left[ \frac{GA_o}{h_n} + \frac{3\pi E_s d_b^4}{16 (h_{\ell} + 2d_b)^3} \right]^{-1} \quad (3.4.2.1a)$$

onde:

- G - módulo de deformação transversal
- $A_o$  - área da superfície de apoio efetiva do elastômero
- $h_n$  - espessura da almofada de elastômero
- $E_s$  - módulo de elasticidade do aço
- $I_b$  - momento de inércia da barra do chumbador
- $K_c$  - módulo de rigidez de referência do concreto
- $d_b$  - diâmetro da barra do chumbador
- $h_\ell$  - altura livre entre os elementos de concreto

Outra opção para o desenvolvimento da equação 3.4.2.1 é fazer a consideração, na equação 3.3.7.3, de  $\ell_e = h_\ell$ . Assim, o mecanismo MDCI-BI, será considerado separadamente do mecanismo MDCI-BL e a equação 3.4.2.1 pode ser escrita na seguinte forma:

$$\lambda_\tau = \left[ \frac{GA_o}{h_n} + \frac{12\alpha^3 E_s I_b}{6 + \alpha^3 h_\ell^3} \right]^{-1} \quad (3.4.2.1b)$$

sendo

$$\alpha = \left[ \frac{K_c d_b}{4E_s I_b} \right]^{-1/4} \quad [L^{-1}]$$

e

$$K_c = 127 \sqrt{f'_c} / (d_b)^{2/3} \quad [FL^{-3}] \text{ MPa/mm}$$

onde:

- $I_b$  - momento de inércia da barra do chumbador
- $K_c$  - módulo de rigidez de referência do concreto

### 3.4.2.1.2 - DEFORMABILIDADE À FLEXÃO

(ligação VPA-ENC ; mecanismos: MDC-EN e MDT-BI)

A solidarização entre o chumbador e o elemento pré-moldado, por meio do enchimento com "grout" expansivo, proporciona uma pequena restrição à rotação da extremidade da viga. Isto ocorre pela formação de um binário composto pela tração na barra do chumbador, mecanismo MDT-BI, e pela compressão de um trecho da almofada de elastômero, mecanismo MDC-EN. A figura 3.4.10 apresenta a esquematização por meio de molas para os mecanismos de deformação. A distribuição das tensões no elastômero não fretado foi considerada conforme indicada na figura 3.4.11a, embora na distribuição real, as tensões se anulem próximo às bordas. Os elementos de concreto foram considerados suficiente rígidos, de tal forma que as relações entre os deslocamentos na ligação sejam escritos conforme a figura 3.4.11b.

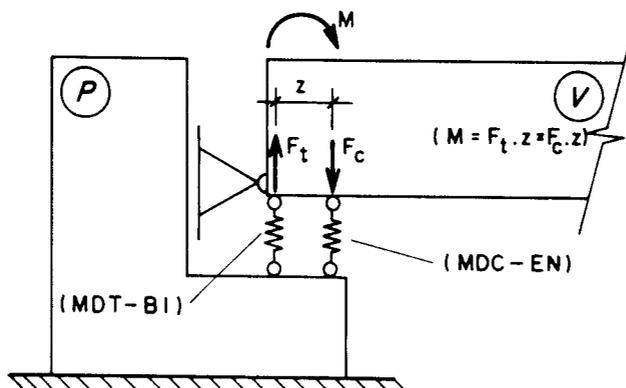


Figura 3.4.10- Esquematização por meio de molas para os mecanismos de deformação MDT-BI e MDC-EN na ligação VPA-ENC.

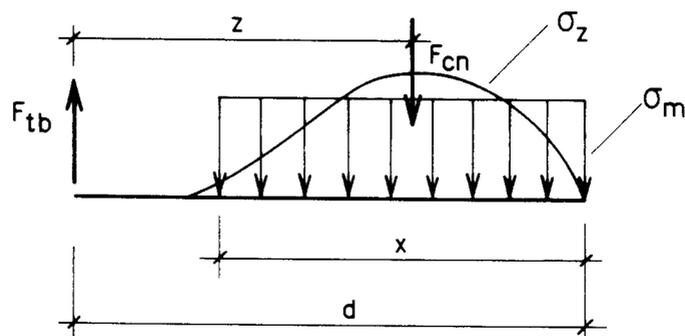
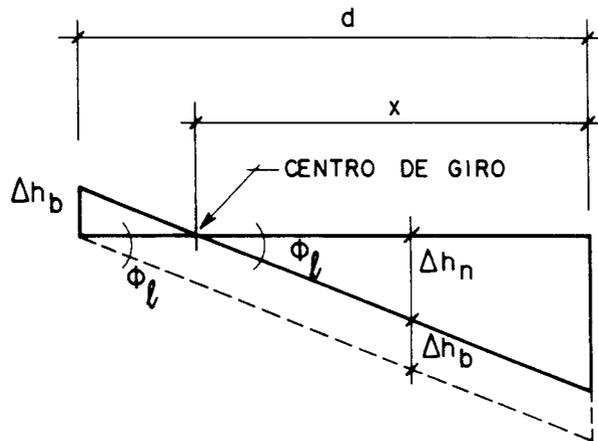


Figura 3.4.11a - Esquema de equilíbrio de forças e distribuição de tensões no elastômero não fretado.



**Figura 3.4.11b** - Relação de deslocamentos entre os componentes da ligação.

A partir da aproximação adotada para a distribuição de tensões no elastômero e utilizando-se para o cálculo do afundamento  $\Delta h_n$ , medido no centro do trecho comprimido do elastômero, o desenvolvimento apresentado pela equação 3.3.1.5, tem-se:

$$\Delta h_n = F_{cn} h_n / (4Gxb(1+0,25(x/h_n)^2)) \quad (3.4.2.2)$$

onde:

$\Delta h_n$  - afundamento do trecho comprimido do elastômero

$F_{cn}$  - força normal de compressão no elastômero

$b$  - maior dimensão da almofada de elastômero

$a$  - menor dimensão da almofada de elastômero

$h_n$  - espessura da almofada de elastômero

$x$  - altura da linha neutra na seção.

Do equilíbrio, tem-se:

$$F_{cn} = F_{tb} = M_\ell / z \quad ; \quad z = (d - 0,5x) \quad (3.4.2.3)$$

onde:

$M_\ell$  - momento fletor resistido pela ligação

$z$  - braço de alavanca do binário de forças

$d$  - distância da barra tracionada até a borda comprimida

$x$  - altura da linha neutra, a partir da borda comprimida

Substituindo  $F_{cn}$  na equação 3.4.2.3, obtem-se:

$$\Delta h_n = M_\ell h_n / (4zGxb(1+0,25(x/h)^2)) \quad (3.4.2.4)$$

O deslocamento da barra do chumbador será dado por:

$$\Delta h_b = M_\ell \ell_s / E_s A_s z \quad (3.4.2.5)$$

Da figura 3.4.11b tem-se que:

$$\phi_\ell = (\Delta h_b + \Delta h_n) / (d - 0,5x) \quad (3.4.2.6)$$

onde:

$\phi_\ell$  - rotação na ligação

$\Delta h_b$  - deformação por tração da barra do chumbador

$\Delta h_n$  - deformação por compressão do elastômero

$\ell_s$  - comprimento da barra considerado para deformação.

A expressão para o cálculo da deformabilidade à flexão é dada por:

$$\lambda_{\phi\ell} = \left( \frac{\ell_s}{E_s A_s z^2} + \frac{h_n}{4z^2 Gxb(1+0,25(a/h_n)^2)} \right) \quad (3.4.2.7)$$

Onde, para a solução desta expressão deve-se estimar o valor de  $x$ . No capítulo de exemplos apresenta-se uma sugestão para esta estimativa.

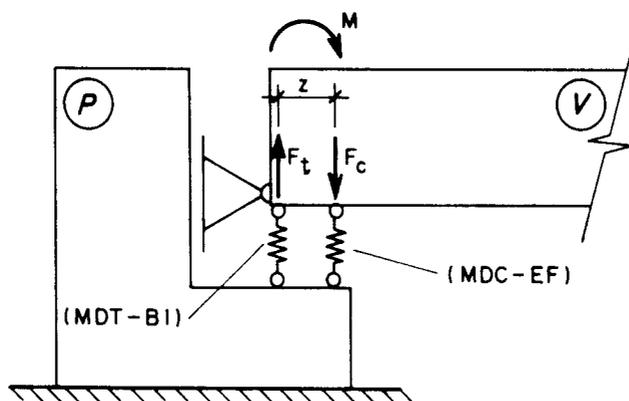
**3.4.2.2 - LIGAÇÃO VIGA-PILAR ARTICULADA, EM APOIO SOBRE CONSOLO, COM ALMOFADA DE ELASTÔMERO FRETADO E CHUMBADOR (ligação VPA-EFC)**

**3.4.2.2.1 - DEFORMABILIDADE AO CISALHAMENTO (ligação VPA-EFC ; mecanismos: MDCI-EF, MDCI-BI e MDCI-BL)**

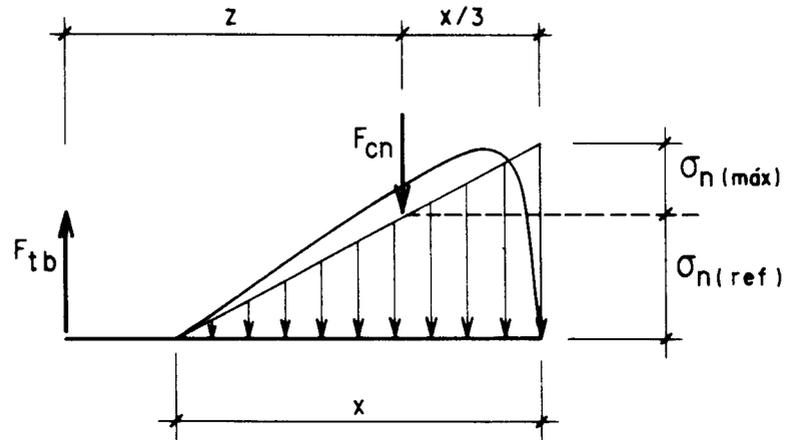
Para o cálculo desta deformabilidade vale a expressão utilizada para a ligação equivalente com elastômero não fretado, (LIGAÇÃO: VPA-ENC).

**3.4.2.2.2- DEFORMABILIDADE À FLEXÃO (ligação VPA-EFC ; mecanismos: MDC-EF e MDT-BI)**

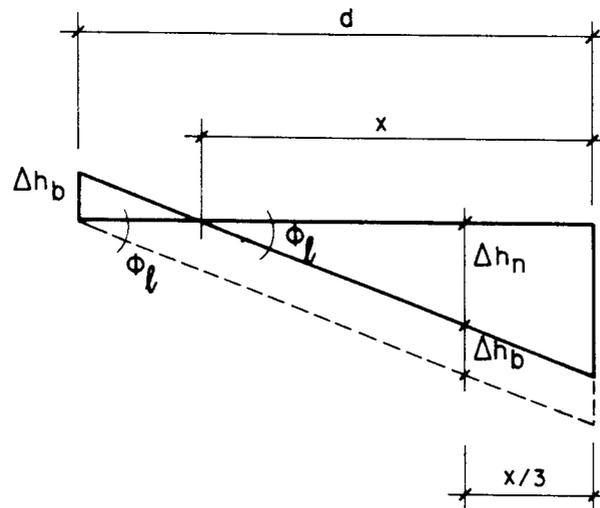
O equacionamento é análogo ao utilizado no item 3.4.2.1.2. A figura 3.4.12 apresenta a esquematização por molas para os mecanismos de deformação. Todavia, a diferença está na distribuição de tensões para o elastômero fretado. Esta foi aproximada conforme indicada na figura 3.4.13a.



**Figura 3.4.12-** Esquematização por meio de molas para os mecanismos de deformação MTD-BI e MDC-EF na ligação VPA-EFC.



a) Esquema de equilíbrio de forças e distribuição de tensões no elastômero fretado.



b) Relação de deslocamentos entre os componentes da ligação.

**Figura 3.4.13-** Equilíbrio de forças e relações de deslocamentos na ligação.

A relação entre a tensão na borda da almofada,  $\sigma_{n(\text{máx})}$ , e a tensão de referência,  $\sigma_{n(\text{ref})}$ , tomada a uma distância ( $x/3$ ) da borda comprimida da almofada, foi adotada como sendo:

$$\sigma_{n(\text{máx})} = 1,5 \sigma_{n(\text{ref})} \quad (3.4.2.8)$$

A força de compressão  $F_{cn}$ , escrita em função de  $\sigma_{n(\text{máx})}$ , pode ser escrita por:

$$F_{cn} = \sigma_{n(\text{máx})} \frac{xb}{2} \quad (3.4.2.9)$$

onde:

$\sigma_{n(\text{máx})}$  - máxima tensão, na borda do elastômero  
 $b$  - maior largura do elastômero, transversal à viga

Substituindo-se  $\sigma_{n(\text{máx})}$ , da relação da eq. 3.4.2.8, na eq. 3.4.2.9, tem-se:

$$F_{cn} = 0,75xb\sigma_{n(\text{ref})} \quad (3.4.2.10)$$

A força de tração na barra do chumbador é escrita por:

$$F_{tb} = A_{sb}\sigma_s \quad (3.4.2.11)$$

onde:

$A_{sb}$  - área da seção transversal do chumbador  
 $\sigma_s$  - tensão na barra do chumbador

Da relação de equilíbrio de momentos, tem-se que:

$$M_\ell = F_{cn}z = F_{tb}z \quad (3.4.2.12)$$

sendo:

$$z = (d - x/3) \quad (3.4.2.12a)$$

Considerando os elementos de concreto suficiente rígidos, de tal forma, que as superfícies de contato permaneçam planas, tem-se as seguintes relações entre as deformações no elastômero e na barra do chumbador:

$$\frac{1,5\epsilon_n}{x} = \frac{\epsilon_s}{d - x} \quad (3.4.2.13)$$

sendo que:

$$\epsilon_s = \sigma_s / E_s \quad (3.4.2.14)$$

$$\epsilon_n = \sigma_{n(\text{ref})} / E_n \quad (3.4.2.15)$$

Tomando-se o módulo  $E_n$  igual ao módulo fictício  $E_f$  proposto por TOPALOFF, apresentado em BRAGA (1985), tal que:

$$E_n = E_f = G(a/h_1)^2 \quad (3.4.2.16)$$

tem-se a seguinte relação para  $E_s/E_n$ :

$$\frac{E_s}{E_n} = \frac{(h_1^2 E_s)}{(a^2 G)} \quad (3.4.2.17)$$

Reescrevendo as equações 3.4.2.14 e 3.4.2.15, com a substituição dos valores das tensões  $\sigma$  e dos módulos  $E$ , tem-se:

$$\frac{\sigma_n}{E_n} = \frac{h_1^2 M_\ell}{0,75 G x b (d - x/3) a^2} \quad (3.4.2.18)$$

$$\frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{2 h_1^2 M_\ell (d-x)}{G a^2 x^2 b (d - x/3)} \quad (3.4.2.19)$$

Arranjando-se a seção resistente como se fosse uma seção homogeneizada de elastômero, a altura da linha neutra  $x$  será dada por:

$$x = \frac{h_1^2 E_s A_{sb}}{G a^2 b} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2 a^2 d G}{h_1^2 E_s A_{sb}}} \right) \quad (3.4.2.20)$$

Para o cálculo da deformabilidade à flexão, tem-se que:

$$\lambda_{\phi\ell} = \phi_{\ell} / M_{\ell} \quad (3.4.2.21)$$

onde:

$\lambda_{\phi\ell}$  - deformabilidade à flexão da ligação

$M_{\ell}$  - momento fletor aplicado à ligação

Da figura 3.4.13 obtém-se a relação para  $\phi_{\ell}$ , tal que:

$$\phi_{\ell} = (\Delta h_n + \Delta h_b) / (d - x/3) \quad (3.4.2.22)$$

Assim, a eq. 3.4.2.21 pode ser escrita na forma:

$$\lambda_{\phi\ell} = (\Delta h_n + \Delta h_b) / (M_{\ell} (d - x/3)) \quad (3.4.2.23)$$

Escrevendo-se  $\Delta h_n$  e  $\Delta h_b$  em função de  $\epsilon_n$  e  $\epsilon_s$ , tomando-se os valores das eq. 3.4.2.18 e 3.4.2.19, e substituindo-se na eq. 3.4.2.23, obtém-se:

$$\lambda_{\phi\ell} = \frac{nh_1^3}{a^2 G x b (d - x/3)^2} \left( \frac{1}{0,75} + \frac{2(d - x)}{x} \right) \quad (3.4.2.24)$$

sendo que:  $x$  dado pela eq. 3.4.2.20

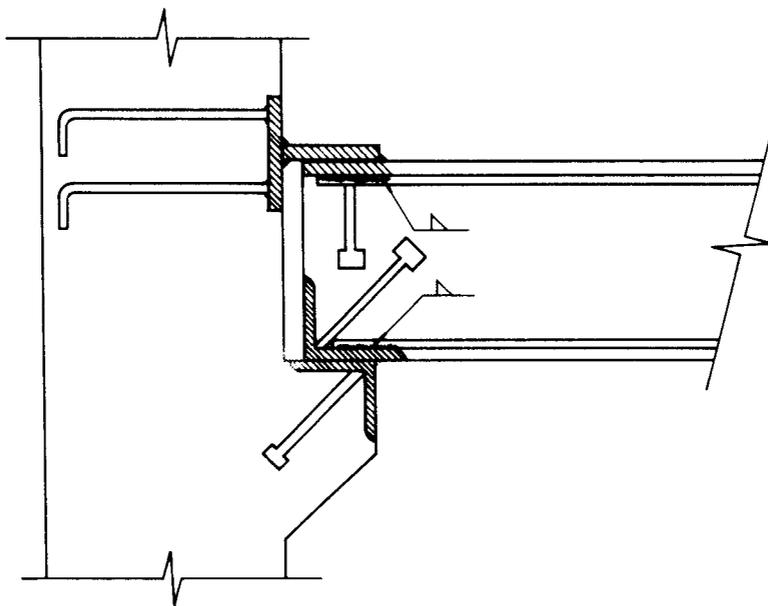
Tomando-se uma aproximação para  $x = 0,87d$ , tem-se que:

$$\lambda_{\phi\ell} = 18,65h_1^3 n / (a^2 b d^3 G)$$

**3.4.3- LIGAÇÃO VIGA-PILAR RÍGIDA, EM APOIO SOBRE CONSOLO, POR MEIO DE CHAPAS SOLDADAS: DEFORMABILIDADE À FLEXÃO**  
(ligação VPR-CHS; mecanismos: MDT-BI e MDF-CH)

As ligações "rígidas" são essenciais para a obtenção da continuidade nas estruturas pré-moldadas. Elas devem desenvolver resistência aos esforços e ainda ter rigidez suficiente para limitar a deslocabilidade da estrutura global.

O interesse pelo estudo desta ligação está ligado ao seu processo de montagem e ainda ao fato de ser uma tipologia, para ligações rígidas, de uso potencial.



**Figura 3.4.14-** Ligação viga-pilar rígida, em apoio sobre consolo, por chapas soldadas (VPR-CHS)

Em DOLAN et alii (1987) apresentou-se os resultados experimentais realizados em um programa de pesquisa para *Precast Concrete Institute* PCI, onde realizaram-se uma série de estudos com protótipos deste tipo de ligação. Posteriormente em DOLAN (1989), ensaiou-se modelos reduzidos, onde se verificou um bom desempenho quanto à resistência e à ductilidade para esta ligação.

Porém, quanto ao desempenho da rigidez, a ligação apresentou um desempenho menor do que o desejado, pois teve uma flexibilidade acentuada ainda na fase de serviço. Este fato aponta para a necessidade de um estudo dos fatores que interferem na rigidez desta ligação e, ainda, estabelecer critérios de detalhamento da ligação, levando-se em conta a sua rigidez.

Estes ensaios forneceram informações importantes, no que diz respeito ao detalhamento da ligação. A primeira delas é quanto às excentricidades das armaduras da viga, positivas e negativas, em relação as chapas de vinculação, na ligação. Neste caso, deve-se fazer o detalhamento de modo a diminuí-las. Quanto à fixação, por solda, das barras da armadura da viga nas cantoneiras metálicas da ligação, recomenda-se a utilização da solda de filete em lugar da solda de topo, pois com a rotação da ligação ocorre um efeito de alavanca da viga sobre o consolo, aumentando a concentração de tensões e podendo ocorrer uma ruptura frágil na solda.

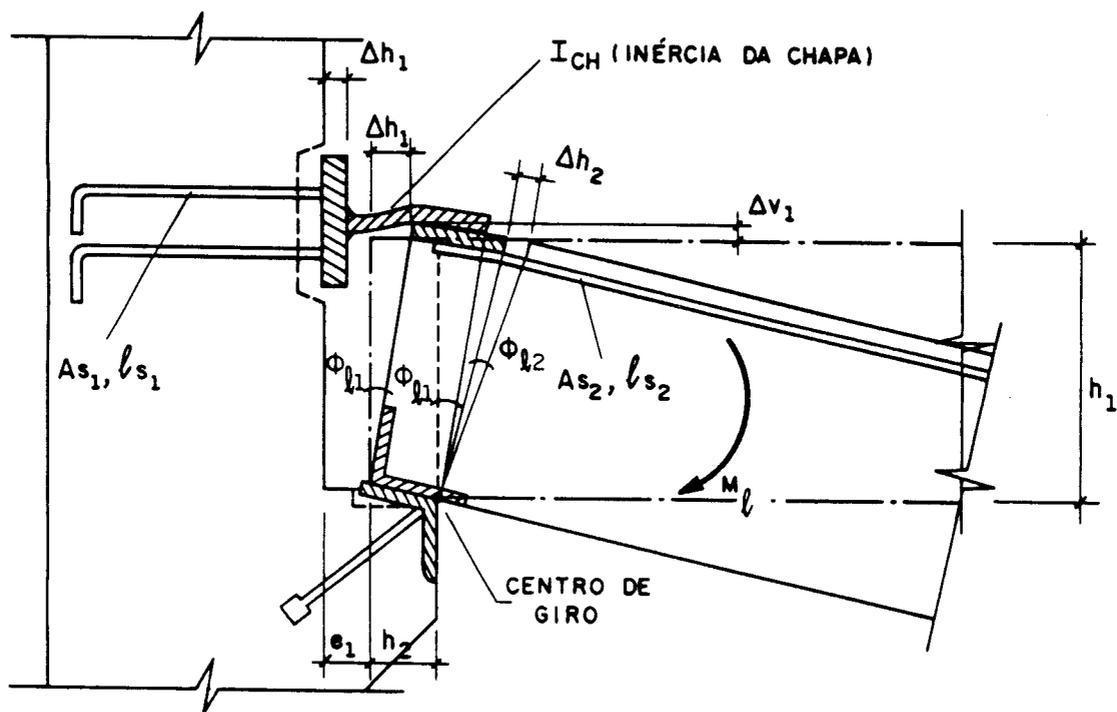
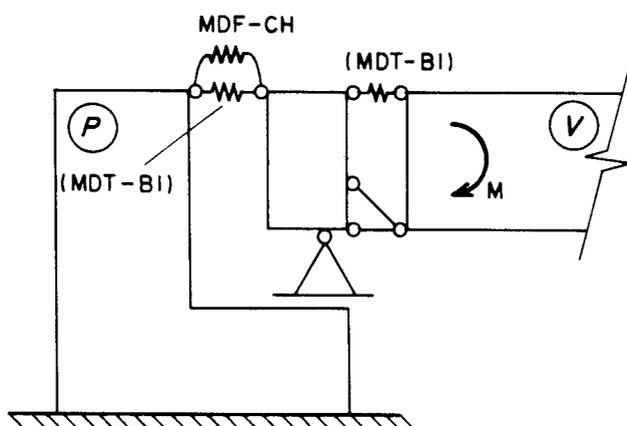


Figura 3.4.15 - Modelo da ligação rígida viga-pilar por chapas soldadas, (VPR-CHS), deformada.

O desenvolvimento deste equacionamento baseou-se no cálculo da deformabilidade à flexão para uma rotação causada por um momento negativo na ligação. A figura 3.4.15 apresenta a ligação deformada. O consolo foi considerado como sendo um corpo rígido e sua extremidade como centro de rotação da ligação. O trecho da extremidade da viga, sobre o consolo, também foi considerado como um elemento rígido. Para o equacionamento, consideraram-se os seguintes mecanismos:

- a) a deformação por tração das barras de ancoragem da parte superior da ligação no pilar (MDT-BI);
- b) a deformação por flexão nas chapas soldadas da parte superior da ligação (MDF-CH);
- c) a deformação por tração da armadura negativa, na região de ancoragem, (MDT-BI).

A figura 3.4.16 apresenta a esquematização por meio de molas que representa os mecanismos de deformação considerados. O esquema de forças aplicadas na ligação é apresentado na figura 3.4.17.



**Figura 3.4.16-** Esquematização por meio de molas para mecanismo de deformação à flexão em ligação viga-pilar rígida com chapas soldadas. (ligação VPR-CHS : mecanismos MDT-BI, MDF-CH e MDT-BI)

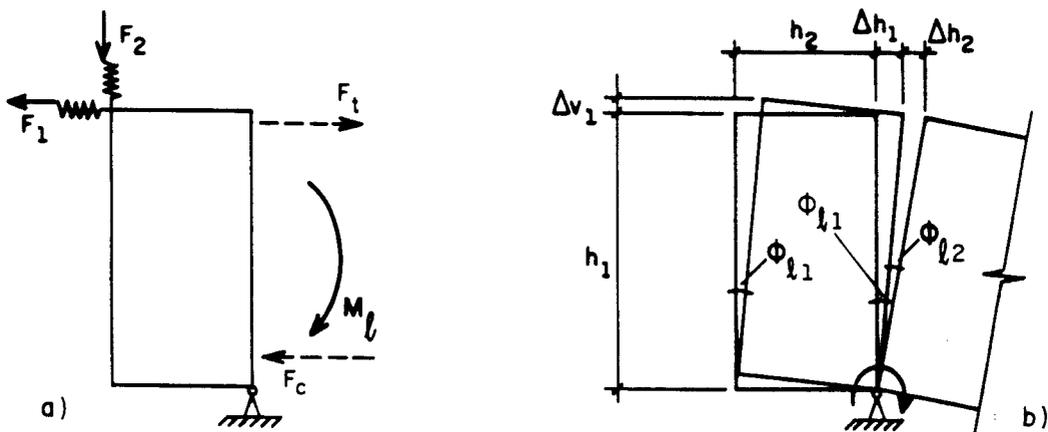


Figura 3.4.17 - a) Esquema de forças aplicadas à ligação.  
b) Esquema de deslocamento de corpo rígido.

Do equilíbrio de forças, tem-se:

$$F_1 h_1 + F_2 h_2 + F_c (h_1 - z) - F_t h_1 = 0 \quad (3.4.3.1)$$

sendo:

$$M_l = F_c z = F_t z \quad (3.4.3.2)$$

$$F_c = F_t \quad (3.4.3.3)$$

onde:

$M_l$  - momento fletor na ligação

$F_c$  - força de compressão

$F_t$  - força de tração na armadura negativa

$F_1$  - força de tração na barra de ancoragem, na ligação negativa viga-pilar

$F_2$  - força de reação na chapa soldada, na ligação negativa viga-pilar

$h_1$  - altura da viga

$h_2$  - extremidade da viga sobre o consolo

$z$  - braço de alavanca

Desenvolvendo-se a eq. 3.4.3.1, tem-se:

$$F_1 h_1 + F_2 h_2 - F_t z = 0 \quad (3.4.3.4)$$

Substituindo o termo  $F_t z$  por  $M_\ell$ , então fica:

$$F_1 h_1 + F_2 h_2 = M_\ell \quad (3.4.3.5)$$

A deformabilidade à flexão da ligação é dada por:

$$\lambda_{\phi_\ell} = \phi_\ell / M_\ell \quad (3.4.3.6)$$

A rotação da ligação  $\phi_\ell$  é composta por duas parcelas, tal que:

$$\phi_\ell = \phi_{\ell 1} + \phi_{\ell 2} \quad (3.4.3.7)$$

onde:

$\phi_{\ell 1}$  - giro da extremidade da viga sobre o consolo, em função da deformação do vínculo (neg.) viga-pilar.

$\phi_{\ell 2}$  - giro da extremidade da viga sobre o consolo, em função da deformação da armadura (neg.), na região da ancoragem.

Da figura 3.4.17.b tira-se as relações para  $\phi_{\ell 1}$  e  $\phi_{\ell 2}$ , sendo que:

$$\phi_\ell = \phi_{\ell 1} + \phi_{\ell 2} = \frac{\Delta h_1}{h_1} + \frac{\Delta h_2}{h_1} \quad (3.4.3.8)$$

Assim, a equação 3.4.3.6 fica:

$$\lambda_{\phi_\ell} = \frac{\Delta h_1}{h_1 M_\ell} + \frac{\Delta h_2}{h_1 M_\ell} \quad (3.4.3.9)$$

Os deslocamentos, indicados na figura 3.4.17 são dados por:

$$\Delta h_1 = \frac{\ell_{s1} F_1}{E_s A_{s1}} \quad (3.4.3.10)$$

$$\Delta h_2 = \frac{\ell_{s2} F_t}{E_s A_{s2}} \quad (3.4.3.11)$$

$$\Delta v_1 = \frac{e_1^3 F_2}{12 E_s I_{ch}} \quad (3.4.3.12)$$

onde:

$\ell_{s1}$  - comprimento de deformação da barra ancorada no pilar: neste caso,  $\ell_{s1} = \ell_{be}$  (comprimento de ancoragem reta)

$\ell_{s2}$  - comprimento de deformação da armadura negativa da viga: neste caso,  $\ell_{s2} = \ell_{br}$  (comp. de ancoragem de referência)

$e_1$  - espaço livre entre o pilar e a viga

$A_{s1}$  - área da seção transversal das barras de ancoragem para a vinculação negativa viga-pilar

$A_{s2}$  - área da seção transversal da armadura negativa da viga

$I_{ch}$  - momento de inércia da chapa da vinculação negativa viga-pilar

$E_s$  - módulo de elasticidade longitudinal do aço

Para pequenos deslocamentos, na figura 3.4.17 tem-se:

$$\frac{\Delta v_1}{h_2} = \frac{\Delta h_1}{h_1} \quad (3.4.3.13)$$

Substituindo-se as relações das eqs. 3.4.3.10, e 3.4.3.12 na eq. 3.4.3.13, obtem-se que:

$$F_1 = \left( \frac{e_1^3 A_{s1} h_1}{12 \ell_{s1} I_{ch} h_2} \right) F_2 \quad (3.4.3.14)$$

Substituindo-se a eq. 3.4.3.14 na eq. 3.4.3.5, obtem-se:

$$F_2 = \left( \frac{e_1^3 A_{s1} h_1^2}{12 \ell_{s1} I_{ch} h_2} + h_2 \right)^{-1} M_\ell \quad (3.4.3.15)$$

Escrevendo-se os deslocamentos  $\Delta h_1$ ,  $\Delta v_1$  e  $\Delta h_2$  em função dos valores de  $F_1$  e  $F_2$ , tem-se que:

$$\Delta h_1 = \left( \frac{e_1^3 \ell_{s1} h_1}{E_s (e_1^3 A_{s1} h_1^2 + 12 \ell_{s1} I_{ch} h_2)} \right) M_\ell \quad (3.4.3.16)$$

$$\Delta v_1 = \left( \frac{e_1^3 \ell_{s1} h_2}{E_s (e_1^3 A_{s1} h_1^2 + 12 \ell_{s1} I_{ch} h_2)} \right) M_\ell \quad (3.4.3.17)$$

$$\Delta h_2 = \left( \frac{\ell_{s2}}{E_s A_{s2} z} \right) M_\ell \quad (3.4.3.18)$$

Considerando a deformabilidade associada a rotação  $\phi_{\ell 1}$ , tem-se:

$$\lambda_{\phi \ell 1} = \frac{e_1^3}{12 E_s I_{ch} h_2} \left( \frac{e_1^3 A_{s1} h_1^2}{12 \ell_{s1} I_{ch} h_2} + h_2 \right) \quad (3.4.3.19)$$

Considerando a deformabilidade associada à rotação

$\phi_{l2}$ , tem-se:

$$\lambda_{\phi l2} = \frac{l_{s2}}{E_s A_{s2} z h_1} \quad (3.4.3.20)$$

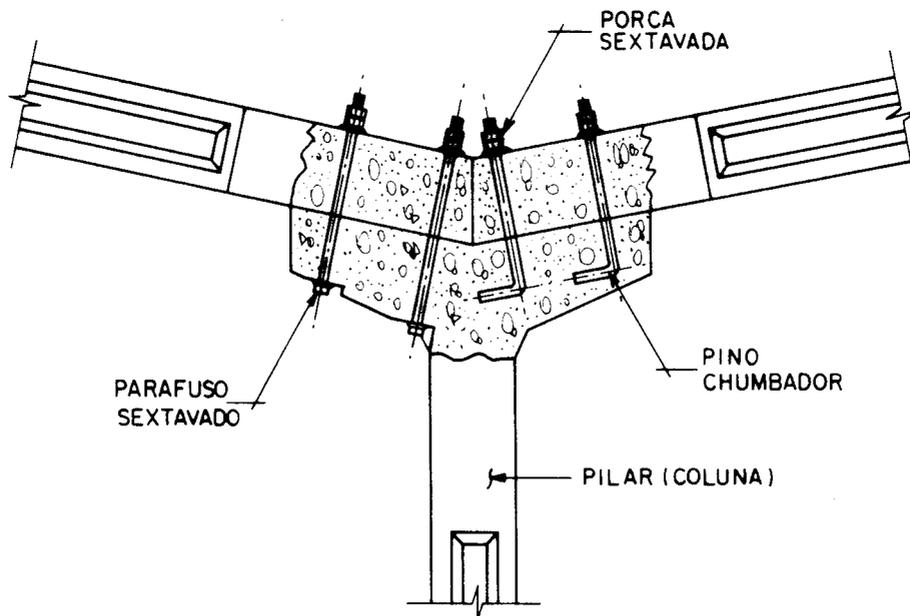
Assim, a deformabilidade à flexão total na ligação será dada por:

$$\lambda_{\phi l} = \lambda_{\phi l1} + \lambda_{\phi l2} \quad (3.4.3.21)$$

#### 3.4.4 - LIGAÇÃO VIGA-PILAR RÍGIDA POR MEIO DE CHUMBADORES OU PARAFUSOS: DEFORMABILIDADE À FLEXÃO (ligação VPR-CPAR; mecanismos: MDC-CC e MDT-BI)

Este tipo de ligação tem sido empregado em pequenos galpões de uso múltiplo. Seu interesse decorre da sua simplicidade de execução. Entretanto a ligação não oferece muita rigidez.

O desempenho real desta ligação apresenta-se, ainda, com uma série de incertezas. Em virtude disto, normalmente no dimensionamento, considera-se a ligação como sendo articulada, e em alguns casos, faz-se a envoltória dos esforços para a ligação nas duas situações, articulada e rígida. Utiliza-se também tirantes, que aliviam as solicitações atuantes nos nós e garantem o equilíbrio, no caso de se ter uma ligação "articulada". A utilização da análise de pórtico com nós semi-rígidos possibilita uma melhor avaliação da distribuição dos esforços ao longo da estrutura, otimizando o cálculo. A figura 3.4.18 apresenta alternativas de detalhamento para esta ligação.



**Figura 3.4.18-** Alternativas para a ligação viga-pilar rígida por parafusos. (ligação VPR-CPAR)

Para o cálculo da deformabilidade à flexão na ligação, considerou-se a deformação por alongamento do chumbador tracionado, mecanismo (MDT-BI), associado à deformação por flexão da viga suporte em balanço. Esta consideração é válida para o caso em que a viga suporte não se comporte como um consolo curto. O centro de rotação na ligação dependerá da posição da linha neutra, na seção resistente da ligação, e da deformação elástica da viga-suporte. A figura 3.4.18 ilustra o esquema de forças e a distribuição de tensões na ligação. A figura 3.4.19 esquematiza as relações dos deslocamentos.

A deformabilidade à flexão é escrita na forma:

$$\lambda_{\phi_l} = \phi_l / M_l \quad (3.4.4.1)$$

Sendo:

$$\phi_l = \Delta h / d \quad (3.4.4.2)$$

onde:

$\phi_l$  - giro na ligação

$\Delta h$  - deslocamento relativo vertical total na ligação

$d$  - distância da borda comprimida até a força de tração

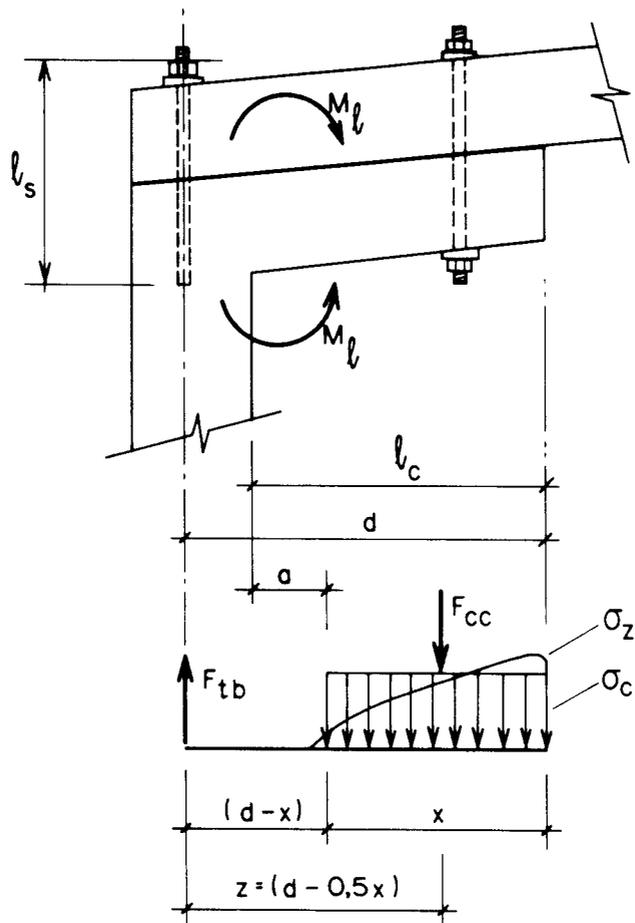


Figura 3.4.19 - Distribuição de tensões e equilíbrio de forças na ligação rígida viga-pilar por chumbadores.

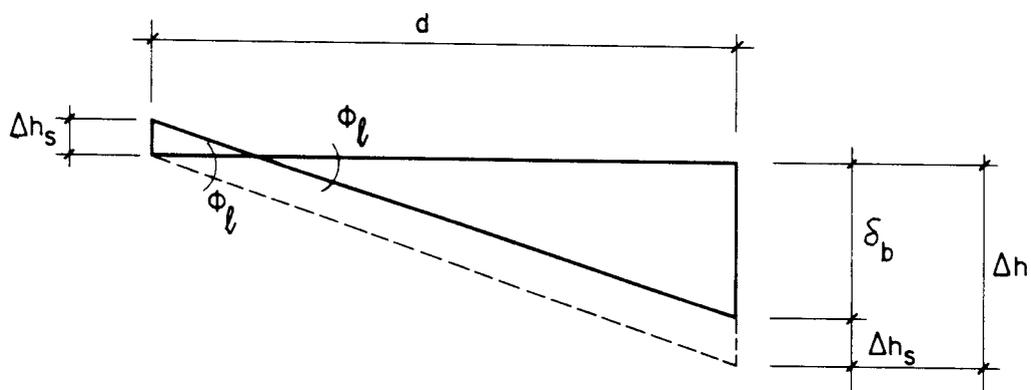


Figura 3.4.20 - Compatibilidade de deslocamentos dos componentes da ligação.

Pela relação de equilíbrio, da figura 3.4.19, tem-se:

$$M_{\ell} = F_{tb}z = F_{cc}z \quad (3.4.4.3)$$

$$z = (d - 0,5x) \quad (3.4.4.4)$$

onde:

$M_{\ell}$  - momento fletor na ligação

$F_{tb}$  - força de tração aplicada à barra do chumbador

$F_{cc}$  - força de compressão, da reação da viga-suporte

$x$  - eixo neutro na seção resistente da ligação

$z$  - braço de alavanca entre o binário  $F_{tb}$  e  $F_{cc}$

Segundo a figura 3.4.20 o deslocamento  $\Delta h$  pode ser dado por:

$$\Delta h = \delta_b + \Delta h_s \quad (3.4.4.5)$$

onde:

$\delta_b$  - deslocamento vertical na borda da viga-suporte

$\Delta h_s$  - alongamento da barra do chumbador

Substituindo-se as forças  $F_{tb}$  e  $F_{cc}$  pelo valor  $M_{\ell}/z$  nas equações dos deslocamentos, os termos  $\delta_b$ , e  $\Delta h_s$  podem ser obtidos por:

$$\delta_b = \frac{M_{\ell} (3\ell^4 - 4a^3\ell + a^4)}{24E_c I_{vc} xz} \quad (3.4.4.6)$$

onde:

$E_c$  - módulo de elasticidade long. tangente do concreto

$I_{vc}$  - momento de inércia da seção da viga-suporte

$\ell$  - comprimento do balanço da viga-suporte

$a$  - distância entre o eixo neutro e o engaste da viga-suporte

A deformação na barra do chumbador é dada por:

$$\Delta h_s = \frac{M_l l_s}{E_s A_s z} \quad (3.4.4.7)$$

onde:

$A_s$  - área da seção transversal do chumbador

Substituindo-se os valores dos deslocamentos parciais  $\delta_b$  e  $\Delta h_s$  na eq. 3.4.4.5 e 3.4.4.2, e posteriormente desenvolvendo-se a eq. 3.4.4.1, tem-se que:

$$\lambda_{\phi l} = \left[ \left( \frac{l_s}{E_s A_s z d} \right) + \left( \frac{3l^4 - 4a^3 l + a^4}{24 E_c I_{vc} z x d} \right) \right] \quad (3.4.4.8)$$

A altura  $x$  poderá ser determinada a partir do uso da homegeinização da seção resistente, ou estimada para um valor de:  $x = 0,87d$ .

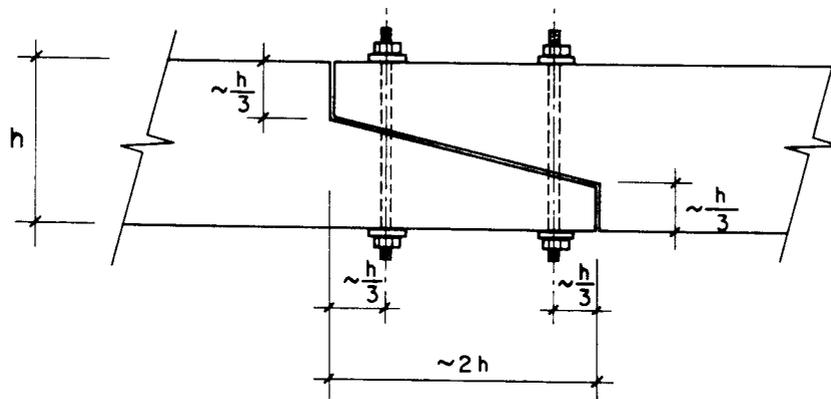
### 3.4.5 - LIGAÇÃO VIGA-VIGA RÍGIDA POR MEIO DE PARAFUSOS: DEFORMABILIDADE À FLEXÃO (ligação VVR-PAR com mecanismo MDT-BAR)

Esta ligação é empregada com frequência em pequenos pórticos para galpões de uso múltiplo, pois apresenta uma execução bastante simples.

GASTON e KRIZ (1963) realizaram estudos experimentais com protótipos de vigas pré-moldadas, para este tipo de ligação solicitada à flexão e força cortante e somente à força cortante. Para a ligação solicitada à flexão, observou-se, no trecho da ligação, uma queda de rigidez e acréscimos aos deslocamentos da viga monolítica original. Para o caso da ligação solicitada apenas ao esforço cortante, a deformação por flexão dos dentes de apoio

da ligação não constituiu em acréscimos aos deslocamentos da viga monolítica original. GASTON e KRIZ encontraram em seu estudo uma relação entre a rigidez do trecho da ligação e da rigidez original da viga, como sendo igual a um terço. Assim, a análise dos esforços ao longo da viga pode ser realizada pela utilização de uma rigidez equivalente  $I'$  no trecho da ligação, que no caso foi de  $I'=I/3$ . Todavia, não se pode generalizar esta relação, ainda porque, a rigidez da ligação está fortemente relacionada com o diâmetro do parafuso de fixação, variando assim para cada caso.

Embora não indicado pelos autores, analisando-se os dados no estudo realizado por Gaston e Kriz, estabeleceram-se duas hipóteses básicas para o cálculo. A primeira hipótese é que a deformação por flexão do dente de concreto da ligação é desprezível em relação à deformação por alongamento da barra do parafuso de fixação. Esta hipótese estará próxima do comportamento real, se o dente de concreto na ligação se comportar como consolo curto, o que em muitos casos não ocorrerá, sendo esta uma primeira aproximação para o caso. A segunda hipótese é que a deformabilidade à rotação da ligação dependerá da deformação do parafuso e da distribuição das tensões e resultantes de forças na região da ligação.



**Figura 3.4.21-** Ligação rígida viga-viga por parafusos, tipo SCARF JOINTS. (ligação VVR-PAR) [BALARIN (1993)]

Para o cálculo da deformabilidade à flexão nesta

ligação, considerou-se apenas o mecanismo de deformação na barra do parafuso de fixação, mecanismo (MDT-BA). A figura 3.4.22 apresenta o esquema de vinculação por molas para a ligação. A figura 3.4.23 apresenta as hipóteses para as relações de equilíbrio e distribuição de tensões no trecho da ligação.

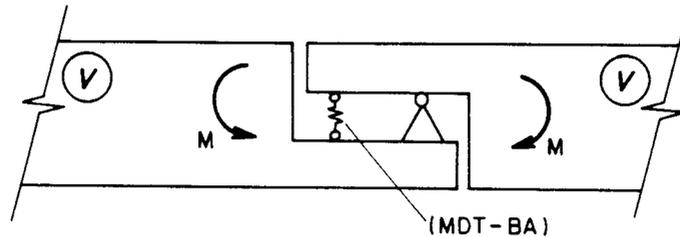


Figura 3.4.22- Esquemática da vinculação por meio de molas para a ligação viga-viga rígida por parafusos. (VVR-PAR)

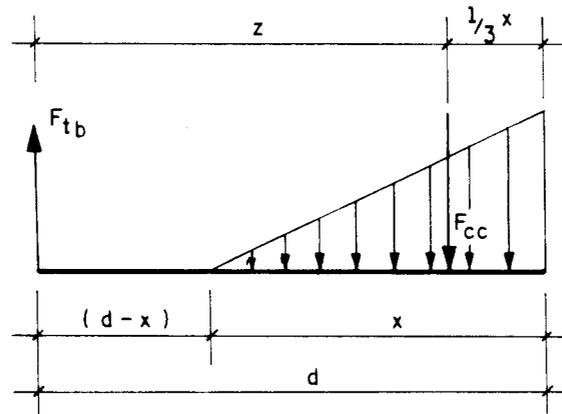


Figura 3.4.23- Esquema de distribuição de tensões e equilíbrio de forças na ligação VVR-PAR

Das relações de equilíbrio tem-se que:

$$M_{\ell} = F_{cc} z = F_{tb} z \quad (3.4.5.1)$$

onde:

$M_{\ell}$  - momento fletor na ligação

$d$  - distância da barra tracionada até a borda do trecho comprimido

$F_{cc}$  - força de compressão no concreto

$F_{td}$  - força de tração na barra de fixação

A rotação da ligação, escrita em função da variação do comprimento do parafuso de fixação, é dada por:

$$\phi_{\ell} = \Delta h_s / (d-x) \quad (3.4.5.2)$$

onde:

$\phi_{\ell}$  - rotação da ligação

$\Delta h_s$  - variação do comprimento do parafuso.

O deslocamento  $\Delta h_s$  é dado por:

$$\Delta h_s = (\ell_s M_{\ell}) / (E_s A_s z) \quad (3.4.5.3)$$

onde:

$\ell_s$  - comprimento da barra de fixação considerado para a deformação

$E_s$  - módulo elástico da barra de fixação

$A_s$  - área da seção transversal da barra de fixação.

Assim, a deformabilidade à flexão da ligação pode ser escrita por:

$$\lambda_{\phi \ell} = \frac{\ell_s}{E_s A_s z (d-x)} \quad (3.4.5.4)$$

A altura da linha neutra  $x$  pode ser obtida pela homogeneização da seção resistente. Todavia, o valor deste cálculo para  $x$  deverá ser menor que o real, devido a não consideração da deformação da viga suporte. Para uma aproximação inicial, para se levar em conta uma parcela de deformação na viga suporte, considerou-se um valor de  $z = 0,8d$ , e assim  $x=0,6d$ . Desta forma, a deformabilidade para a ligação será dada por:

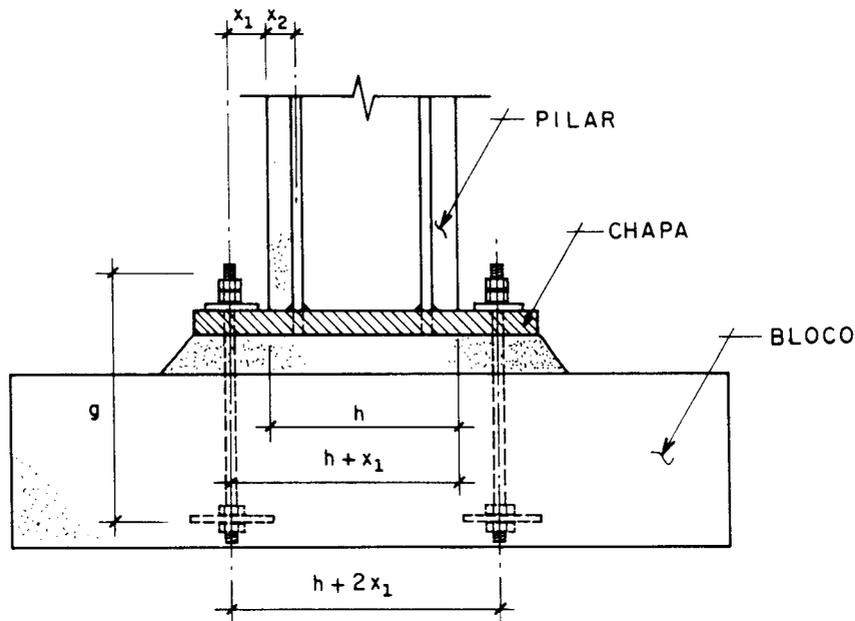
$$\lambda_{\phi \ell} = \frac{3,125 \ell_s}{E_s A_s d^2}$$

### 3.4.6- LIGAÇÃO PILAR-FUNDAÇÃO RÍGIDA POR MEIO DE CHAPAS METÁLICAS: DEFORMABILIDADE À FLEXÃO

(ligação PFR-CHP com mecanismos: MB-4 e MB-10)

Este tipo de ligação fundação-pilar é executado por meio de chapas metálicas, soldadas à armadura do pilar, fixadas por parafusos que estão ancorados no elemento de fundação. Este tipo de ligação tem o seu interesse de uso favorecido pela simplicidade de execução.

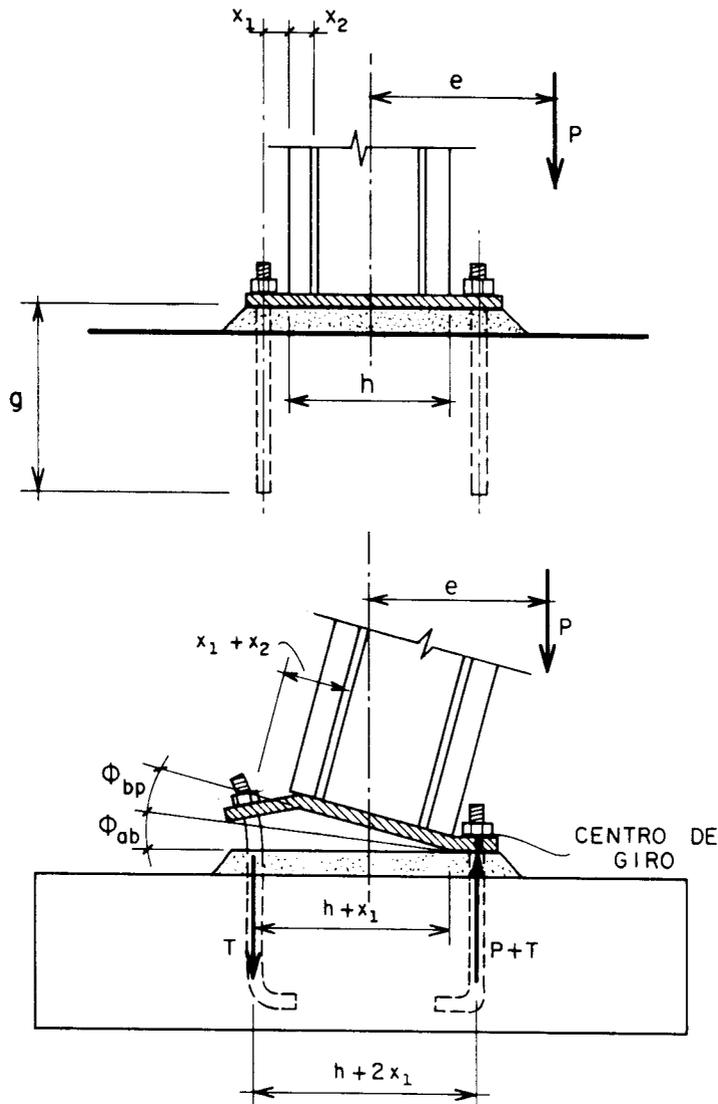
BALLARIN (1993) apresenta uma análise detalhada sobre este tipo de ligação. O equacionamento apresentado neste trabalho baseia-se na proposta de cálculo apresentada por MARTIN (1980).



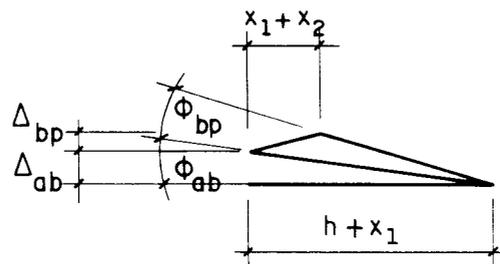
**Figura 3.4.24** - Ligação pilar-fundação rígida por meio de chapas parafusadas. (ligação PFR-CHP)

Para o cálculo da deformabilidade à flexão da ligação, MARTIN considerou dois mecanismos associados em série, sendo o mecanismo de deformação à tração de uma barra inserida no elemento de fundação, (MDT-BI), e o mecanismo de deformação de flexão da chapa metálica na base do pilar, (MDF-CH). Todavia, neste estudo, acrescentou-se o mecanismo de deformação por tração da armadura

tracionada do pilar, (MDT-BI). A figura 3.4.25 apresenta o esquema de forças e de deformação da ligação, conforme indicado por MARTIN (1980).



a) Esquema de forças e configuração deformada da ligação PFR-CHP.



b) Relações entre deslocamentos.

Figura 3.4.25 - Esquema de forças, deformações e deslocamentos da ligação. [MARTIN (1980)]

As rotações  $\phi_{ab}$  e  $\phi_{bp}$ , indicadas na figura 3.4.25, são dadas por:

$$\phi_{ab} = \Delta_{ab} / (h + x_1) \quad (3.4.6.1)$$

$$\phi_{bp} = \Delta_{bp} / (h + x_1) \quad (3.4.6.2)$$

onde:

$\phi_{ab}$  - rotação devido ao alongamento da barra do chumbador de fixação na fundação

$\phi_{bp}$  - rotação devido à flexão da chapa na ligação

$\Delta_{ab}$  - alongamento da barra do chumbador

$\Delta_{bp}$  - deslocamento vertical devido à flexão da chapa

$h$  - largura do pilar

$x_1$  - distância da face do pilar até o eixo do chumbador de fixação na ligação.

O deslocamento  $\Delta_{bp}$  é dado por:

$$\Delta_{bp} = T(x_1+x_2)^3 / (3E_s I_{bp}) \quad (3.4.6.3)$$

onde:

$x_2$  - distância da face do pilar até o eixo de gravidade na armadura tracionada

$T$  - força de tração no chumbador de fixação

$E_s$  - módulo elástico do aço

$I_{bp}$  - momento de inércia da chapa da ligação

$\sigma_s$  - tensão no aço

$e$  - excentricidade da força  $P$ .

Sendo:

$$T = \frac{P}{2} \left( \frac{2e}{h+2x_1} - 1 \right) \quad (3.4.6.4)$$

$$\sigma_s = \frac{P}{2A_b} \left( \frac{2e}{h+2x_1} - 1 \right) \quad (3.4.6.5)$$

O deslocamento  $\Delta_{ab}$  é dado por:

$$\Delta_{ab} = \epsilon_{ab} g = \frac{\sigma_s}{E_s} g \quad (3.4.6.6)$$

Substituindo a expressão 3.4.6.5 em 3.4.6.6, tem-se:

$$\Delta_{ab} = \frac{Pg}{2A_b E_s} \left( \frac{2e}{h+2x_1} - 1 \right) \quad (3.4.6.7)$$

Assim, a rotação  $\phi_{ab}$  pode ser escrita por:

$$\phi_{ab} = \frac{Pg}{2A_b E_s (h+x_1)} \left( \frac{2e}{h+2x_1} - 1 \right) \quad (3.4.6.8)$$

A deformabilidade à flexão  $\lambda_{ab}$  será dada por:

$$\lambda_{ab} = \phi_{ab} / (Pe) \quad (3.4.6.9)$$

Assim:

$$\lambda_{ab} = \frac{g}{2eA_b E_s (h+x_1)} \left( \frac{2e}{h+2x_1} - 1 \right) \quad (3.4.6.10)$$

Analogamente tem-se para  $\lambda_{bp}$ , tal que:

$$\lambda_{bp} = \frac{(x_1+x_2)^3}{6eE_s I_{bp} (h+x_1)} \left( \frac{2e}{h+2x_1} - 1 \right) \quad (3.4.6.11)$$

A deformabilidade à flexão da ligação, segundo MARTIN, poderá ser escrita por:

$$\lambda_{\phi l} = \frac{(\phi_{ab} + \phi_{bp})}{Pe} \quad (3.4.6.12)$$

Finalmente, tem-se que:

$$\lambda_{\phi l} = \frac{1}{2eE_s(h+x_1)} \left( \frac{2e}{h+2x_1} - 1 \right) \left( \frac{g}{A_b} + \frac{(x_1+x_2)^3}{3I_{bp}} \right) \quad (3.4.6.13)$$

Neste estudo, além das considerações feitas por MARTIN (1980), considerou-se ainda a parcela de deformação da armadura tracionada do pilar, que proporciona um acréscimo de rotação,  $\phi$ , na ligação, onde:

$$\phi_{l2} = \Delta b_s / (h-x_2) \quad (3.4.6.14)$$

onde:

$\Delta b_s$  - deslocamento axial da armadura tracionada.

O deslocamento  $\Delta b_s$  pode ser obtido por:

$$\Delta b_s = \frac{l_{s2} \cdot F_t}{E_s A_{s2}} \quad (3.4.6.15)$$

A força de tração na armadura,  $F_t$ , é dada por  $F_t = (P.e) \cdot z$ , onde  $z$  é o braço da alavanca entre o binário resistente da seção do pilar. Assim, a deformabilidade à flexão devido à deformação da armadura tracionada do pilar, a ser acrescentada à eq. 3.4.6.13, pode ser escrita por:

$$\lambda_{\phi l2} = \frac{l_{s2}}{E_s A_{s2} (h-x_2) z} \quad (3.4.6.16)$$

onde:

$l_{s2}$  - comprimento assumido para deformação da armadura tracionada do pilar, na região da ligação.

$A_{s2}$  - área da seção transversal da armadura tracionada do pilar.

Para esta consideração, a deformabilidade total da ligação seria dada por:

$$\lambda_{\phi l} = \lambda_{\phi l1} + \lambda_{\phi l2} \quad (3.4.6.17)$$

### 3.5 - CONSIDERAÇÕES SOBRE DEFORMABILIDADES EM ELEMENTOS DE FUNDAÇÃO

#### 3.5.1 - PRELIMINARES

Neste trabalho apresentou-se um enfoque bastante prático sobre este assunto, tendo-se por objetivo a estimativa de alguns deslocamentos em elementos de fundação para determinação da deformabilidade nas bases dos pilares.

A partir do momento em que se trabalhe com a análise de pórticos com nós semi-rígidos, é também interessante a avaliação das deformabilidades em suas fundações. O maior interesse, neste caso, está relacionado às análises de pequenos galpões pré-moldados, onde a consideração destas deslocabilidades pode gerar uma significativa redistribuição dos esforços ao longo da estrutura.

O cálculo exato dos deslocamentos das fundações torna-se muito complexo, por se tratar de um problema tridimensional em um meio não homogêneo e pouco conhecido. Todavia, encontram-se na literatura várias teorias baseadas em hipóteses simplificadoras que forneceram modelos para o cálculo. Dentre estes, pode-se destacar os modelos baseados na *Teoria de Reação do Solo*, os modelos baseados na *Teoria da Elasticidade*, para um meio elástico contínuo, e ainda os modelos baseados na aplicação dos *Elementos Finitos*.

Para o cálculo de estacas solicitadas por forças horizontais, o modelo mais utilizado tem sido o modelo de Winkler. CINTRA (1983) esclarece que Winkler introduziu a *Teoria de Reação do Solo* em 1867, mas foi na década de 1960 onde surgiram a maioria dos métodos de cálculo baseados nesta teoria, que baseou-se no problema de uma viga sobre apoio elástico. Considera-se que a reação do solo é proporcional ao deslocamento num ponto.

Para uma base de apoio, a forma da distribuição das tensões dependerá não apenas do tipo do solo mas também da rigidez do elemento de fundação, sendo variável para diferentes pontos da

base. No caso das estacas, estas atravessam várias camadas com diferentes características elásticas, constituindo-se num problema complexo. Em virtude deste fato, os métodos analíticos, desenvolvidos a partir de 1960, deixaram de utilizar o conceito de coeficiente de reação do solo, que relaciona tensão com deslocamento, e passaram a utilizar o conceito de módulo de reação do solo, que relaciona força com deslocamento. Com base no trabalho de TERZAGHI, vários autores desenvolveram estudos que empregaram o conceito de módulo de reação do solo.

O módulo de reação horizontal do solo é definido como sendo a relação entre a reação do solo e o seu deslocamento associado, tal que:

$$K = F / y \quad [F L^{-2}] \quad (3.5.1.1)$$

onde:

K - módulo de reação horizontal

F - Força por unidade de comprimento da estaca

y - deslocamento horizontal correspondente

A variação do módulo K com a profundidade z. Segundo CINTRA (1983), para o estudo da variação do módulo K, é interessante a função apresentada por Palmer (1948), dada por:

$$K = K_{\ell} (z/\ell)^n \quad (3.5.1.2)$$

onde:

z - profundidade

$\ell$  - comprimento da estaca

$K_{\ell}$  - Valor de (K) na ponta da estaca ( $z = \ell$ )

n - expoente empírico positivo

Onde, para os casos particulares das argilas e das areias, tem-se que:

a) Para as argilas: ( $n = 0$ )

$$K = (\text{constante}) \quad (3.5.1.3)$$

b) Para as areias: (n = 1)

$$K = n_h z \quad (3.5.1.4)$$

onde:

$n_h$  - coeficiente de reação horizontal do solo.

Na tabela 3.5.1 são apresentados os valores de K para as argilas pré-adensadas, que foram adaptados por CINTRA (1983) a partir do trabalho de Terzaqui (1955). A tabela 3.5.2, extraída de ALONSO (1986), apresenta valores típicos de  $n_h$  para as areias propostos por Davisson (1970).

**Tabela (3.5.1) - Valores de (K) para argila pré-adensada**

| Consistência da argila | K (MN/m <sup>2</sup> ) |
|------------------------|------------------------|
| média                  | 0,8                    |
| rija                   | 5,0                    |
| muito rija             | 10,0                   |
| dura                   | 20,0                   |

**Tabela (3.5.2) - Valores típicos de ( $n_h$ ) para as areias**

| Tipo do solo       | seca (MN/m <sup>3</sup> ) | submersa (MN/m <sup>3</sup> ) |
|--------------------|---------------------------|-------------------------------|
| areia fofa         | 2,60                      | 1,50                          |
| areia medianamente | 8,00                      | 5,00                          |
| areia compactada   | 20,00                     | 12,50                         |
| silte muito fofo   | —                         | 0,1 a 0,3                     |

A solução do problema para os deslocamentos horizontais em estacas passa pela relação entre a rigidez do solo e a rigidez à flexão da estaca. Definiu-se um fator de rigidez relativa estaca-solo que dependente da forma da variação do módulo de

reação com a profundidade. Para os casos particulares, das argilas e das areias, as expressões para o fator de rigidez relativa são dadas por:

a) Para as argilas: (n = 0)

$$R = \sqrt[4]{\frac{EI}{K}} \quad (3.5.1.5)$$

b) Para as areias: (n = 1)

$$T = \sqrt[5]{\frac{EI}{n_h}} \quad (3.5.1.6)$$

onde:

R - fator de rigidez relativa para as argilas

T - fator de rigidez relativa para as areias

E - módulo elástico do material da estaca

I - momento de inércia da seção transversal da estaca

A rigidez axial de uma estaca depende da vinculação à que mesma está submetida. Assim, para a definição de rigidez axial da estaca, dada na eq. 3.5.1.7, tem-se a hipótese da estaca ser admitida como uma barra bi-rotulada, no bloco e em sua ponta, desconsiderando-se a atuação do solo ao longo do fuste. Esta hipótese se ajusta ao caso em que a estaca trabalhe predominantemente por ponta, ou seja, atravesse camadas de baixa resistência. Assim, tem-se que:

$$S = EA / \ell \quad (3.5.1.7)$$

Nos casos onde a estaca trabalhe por atrito lateral, a hipótese anterior está longe da realidade. Assim, admite-se uma transferência de carga linear ao longo do fuste até se anular na ponta da estaca. Para este caso, ALONSO (1985) sugere que:

$$S = 2EA / \ell \quad (3.5.1.8)$$

As estacas podem ser classificadas como flexíveis, intermediárias ou rígidas, em função da relação entre o

comprimento da estaca e do fator de rigidez relativa estaca-solo. Neste trabalho adotou-se a notação proposta por Davisson (1970), onde:

$$\begin{aligned} \text{ESTACA FLEXÍVEL:} & \quad \{ \ell/R > 4 \quad ; \quad \text{ou} \quad \ell/T > 4 \} \\ \text{ESTACA INTERMEDIÁRIA:} & \quad \{ 2 < \ell/R < 4 \quad ; \quad \text{ou} \quad 2 < \ell/T < 4 \} \\ \text{ESTACA RÍGIDA:} & \quad \{ \ell/R < 2 \quad ; \quad \text{ou} \quad \ell/T < 2 \} \end{aligned}$$

As tabelas 3.5.3 e 3.5.4 apresentam os coeficientes de poisson e os módulos elásticos típicos para os respectivos tipos de solo.

**Tabela 3.5.3 - Coeficiente de Poisson típico do solo.**

| Solo                         | $(\nu_{SO})$ |
|------------------------------|--------------|
| Argila saturada              | 0,40 a 0,50  |
| Argila parcialmente saturada | 0,10 a 0,30  |
| Argila arenosa               | 0,20 a 0,30  |
| Silte                        | 0,30 a 0,35  |
| Areia compacta               | 0,20 a 0,40  |
| Areia compacta grossa        | 0,45         |
| Areia compacta fina          | 0,25         |

**Tabela 3.5.4 - Módulo elástico típico do solo.**

| Solo                        | $E_{SO} (kN/m^2)$ |
|-----------------------------|-------------------|
| Argila muito mole           | 300 a 300         |
| Argila mole                 | 2000 a 4000       |
| Argila média                | 4500 a 9000       |
| Argila dura                 | 7000 a 20000      |
| Argila arenosa              | 30000 a 42500     |
| Silte                       | 2000 a 20000      |
| Areia siltosa               | 5000 a 20000      |
| Areia fofa                  | 10000 a 25000     |
| Areia compacta              | 50000 a 100000    |
| Areia compacta e pedregulho | 80000 a 200000    |

estado plano de tensões, desde que se substitua o módulo elástico típico do solo por um módulo elástico fictício  $E'_{SO}$ , tal que:.

$$E'_{SO} = E_{SO} / (1 - \nu_{SO}^2) \quad (3.5.2.1)$$

Com base na *Teoria da Elasticidade*, para um estado plano de tensões no plano paralelo ao lado B, para um módulo elástico fictício  $E'_{SO}$ , o cálculo de deformação específica para uma camada de solo sob uma sapata rígida à compressão centrada, é dado por:

$$\lambda_{vf} = \left( \frac{1 - \nu_{SO}^2}{E_{SO}} \right) \frac{BI_w}{A_b} \quad (3.5.2.2)$$

onde:

$\lambda_{vf}$  - deformação específica à compressão centrada

B - menor dimensão da sapata

$I_w$  - fator de influência

$A_b$  - área da base de apoio

O fator de influência  $I_w$ , apresentado na tabela 3.5.5, é um fator de correção às hipóteses iniciais que leva em conta a forma e a rigidez da fundação, é apresentado em CINTRA (1983).

**Tabela 3.5.5 - Fator de influência ( $I_w$ ).**

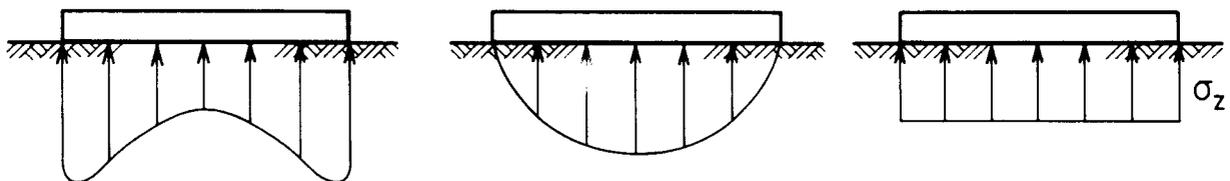
| FORMA          | FUNDAÇÃO FLEXÍVEL |       |       | RÍGIDA    |
|----------------|-------------------|-------|-------|-----------|
|                | centro            | canto | médio | ( $I_w$ ) |
| Circular       | 1,00              | 0,64  | 0,85  | 0,88      |
| Quadrada       | 1,12              | 0,56  | 0,95  | 0,82      |
| Retangular     |                   |       |       |           |
| $\ell/B = 1,5$ | 1,36              | 0,68  | 1,15  | 1,06      |
| 2,0            | 1,53              | 0,77  | 1,30  | 1,20      |
| 5,0            | 2,10              | 1,05  | 1,83  | 1,70      |
| 10,0           | 2,54              | 1,27  | 2,25  | 2,10      |
| 100,0          | 4,01              | 2,00  | 3,69  | 3,40      |

### 3.5.2 - EQUACIONAMENTO PARA O CÁLCULO DE DEFORMABILIDADES DE ELEMENTOS DE FUNDAÇÕES NAS BASES DE PILARES

#### 3.5.2.1 - FUNDAÇÕES DIRETAS

Considerou-se o solo como sendo um meio isotrópico, homogêneo e perfeitamente elástico e a sapata como sendo rígida, respeitando-se as restrições geométricas para tal.

A forma de distribuição das tensões, desenvolvidas entre uma placa uniformemente carregada e o solo de fundação, depende da rigidez da placa e do tipo do solo. Para uma placa considerada rígida, os requalques serão uniformes. Dependendo da coesão do solo, haverá um aumento ou diminuição das tensões nas bordas da placa. Desta forma, as tensões nas bordas deverão ser maiores para as argilas, conforme indicado na figura 3.5.1a, e menores para as areias, conforme indicado na figura 3.5.1b. Neste estudo, adotou-se, de forma simplificada, uma distribuição uniforme ao longo da placa, conforme indicado na figura 3.5.1c.



a) solos coesivos

b) solos não coesivos

c) aproximado

**Figura 3.5.1** - Pressão de contato na base de uma sapata rígida.

Considerando-se uma das dimensões da base da sapata bem maior que a outra, ( $L \gg B$ ), a distribuição das tensões pode ser considerada uniforme no plano que contém a maior dimensão ( $L$ ). Segundo BAZANT (1979), fazendo-se esta consideração para ( $L \cong 20B$ ) tem-se um erro menor do que (1%) e, para ( $L \cong 6B$ ) tem-se a um erro menor do que (3%). Neste caso, tem-se um estado plano de deformações, para o plano que contém a menor dimensão da base da sapata ( $B$ ). Todavia, pode-se trabalhar com o equacionamento no

Para o caso de uma sapata rígida à compressão não centrada, a deformabilidade à rotação para a sapata, considerando o não levantamento da borda menos carregada, pode ser escrita como:

$$\lambda_{\phi_f} = \frac{\phi_f}{M} = \frac{2\Delta v_f}{BM} \quad (3.5.2.3)$$

onde:

$\lambda_{\phi_f}$  - deformação específica à rotação da sapata

$\phi_f$  - rotação da sapata

$M$  - momento fletor aplicado à sapata

$\Delta v_f$  - deslocamento vertical no centro da sapata

A distribuição de tensões sobre a base de apoio e as resultantes de equilíbrio são apresentadas na figura 3.5.2, donde tem-se que:

$$P = M / e \quad (3.5.2.4)$$

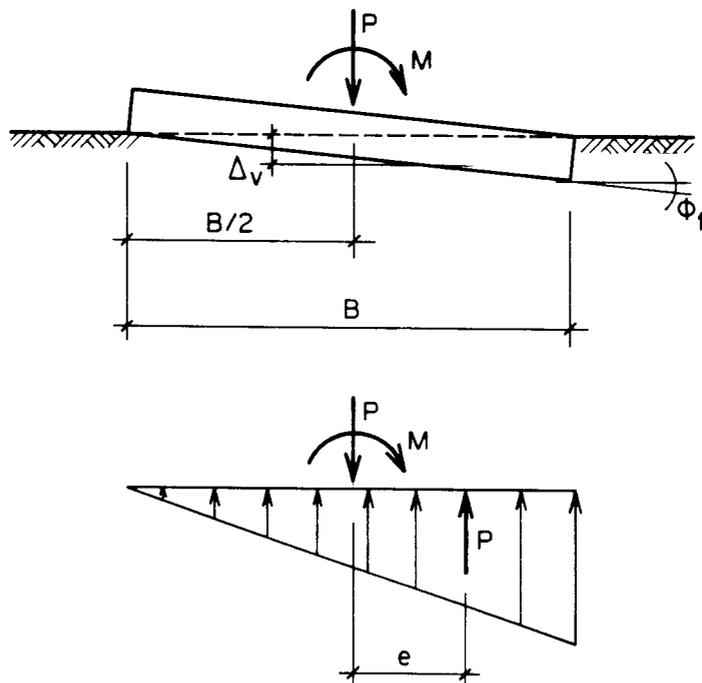


figura 3.5.2 - Distribuição das forças de equilíbrio na sapata.

Admitindo-se que toda a base de apoio permaneça comprimida, então pode-se considerar  $e \cong 1/6B$ , tendo-se:

$$\lambda_{\phi f} = \frac{2P\lambda_{vf}}{BM} = \left( \frac{1-\nu_{so}^2}{E_{so}} \right) \frac{2BI_w}{eA_b B} \quad (3.5.2.5)$$

Para  $e = 1/6B$ , tem-se que:

$$\lambda_{\phi f} = \left( \frac{1-\nu_{so}^2}{E_{so}} \right) \frac{12I_w}{A_b B} \quad (3.5.2.6)$$

### 3.5.2.2 - BLOCO RÍGIDO SOBRE DUAS LINHAS DE ESTACAS

Para o cálculo da rotação de um bloco rígido sobre duas linhas de estacas, considerou-se a hipótese de que as estacas se comportassem como barras bi-rotuladas. Este cálculo pode ser realizado pela automatização do processo dos esforços, todavia, apresenta-se aqui uma aproximação para o problema. A rigidez axial para este tipo de estaca está explicada no item 3.5.1, sendo representada pelas eqs. 3.5.1.7 e 3.5.1.8. A figura 3.5.3 apresenta uma esquematização por meio de molas, que representa as deformações axiais nas estacas, sendo  $K_1$  e  $K_2$  as rigidezes elásticas axiais de cada estaca, ou o somatório das rigidezes nas linhas de estacas.

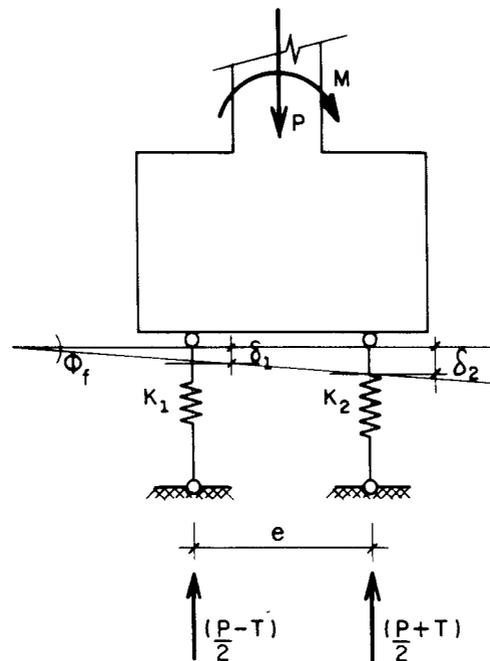


Figura 3.5.6 - Esquema de forças e molas de deformação.

Os deslocamentos  $\delta_1$  e  $\delta_2$  nas estacas são dados por:

$$\delta_1 = (P/2 - T) / K_1 \quad (3.5.2.7)$$

$$\delta_2 = (P/2 + T) / K_2 \quad (3.5.2.8)$$

sendo:

$$T = M / e \quad (3.5.2.9)$$

onde:

$\delta_1, \delta_2$  - deslocamento devido à deformação axial da estaca

$K_1, K_2$  - rigidez à deformação axial da estaca

Segundo a figura 3.5.3, a rotação  $\theta_f$  pode ser dada por:

$$\theta_f = (\delta_2 - \delta_1) / e \quad (3.5.2.10)$$

O termo  $(\delta_2 - \delta_1)$  pode ser escrito por:

$$(\delta_2 - \delta_1) = [P(K_1 - K_2) + T(K_1 + K_2)] / (K_1 K_2) \quad (3.5.2.11)$$

A deformabilidade à flexão da fundação ( $\lambda_{\phi_f}$ ) pode ser obtida através da expressão  $\lambda_{\phi_f} = \phi_f / M$ , sendo que a rotação  $\phi_f$  pode ser escrita por:

$$\phi_f = [P(K_1 - K_2) + T(K_1 + K_2)] / (K_1 K_2) e \quad (3.5.2.12)$$

Para o caso particular em que ( $K_1 = K_2 = K$ ), tem-se:

$$\phi_f = 2T / Ke \quad (3.5.2.13)$$

Assim, a deformabilidade à flexão  $\lambda_{\phi_f}$  fica:

$$\lambda_{\phi_f} = 2 / Ke^2 \quad (3.5.2.14)$$

Para a estaca trabalhando por ponta, tem-se que:

$$\lambda_{\phi f} = 2\ell / AEe^2 \quad (3.5.2.15)$$

sendo:

$$K = AE / \ell \quad (3.5.2.15a)$$

onde:

$\ell$  - comprimento da estaca

A - área da seção transversal da estaca

E - módulo de elasticidade da estaca

e - excentricidade entre os eixos de estacas

Para a estaca trabalhando por atrito, tem-se que:

$$\lambda_{\phi f} = \ell / AEe^2 \quad (3.5.2.16)$$

sendo:

$$K = 2AE / \ell \quad (3.5.2.16a)$$

### 3.5.2.3 - DEFORMABILIDADE NO TOPO DE UMA ESTACA SOLICITADA POR MOMENTO FLETOR E FORÇA HORIZONTAL, NA SUPERFÍCIE DO TERRENO.

Na literatura, apresentam-se vários métodos para o cálculo de deslocamentos horizontais e de rotações em estacas solicitadas por forças transversais. Em CINTRA (1983), pode-se encontrar uma abordagem sobre os principais métodos existentes. Todavia, muitos destes métodos não são aplicáveis no estudo das deformabilidades em estacas, pois não permitem que se eliminem os termos das forças.

No presente trabalho, aponta-se dois métodos para o cálculo de deslocamentos em estacas, que podem ser convertidos para o cálculo da deformabilidade. O primeiro é o método proposto por Matlock e Reese em 1961, cuja forma simples torna interessante o seu uso. O segundo é o método proposto por Werner em 1970, que apresenta soluções para várias combinações de carregamentos e vinculações em estacas, e ainda para diferentes variações do módulo K com a profundidade z.

A seguir é apresentada uma adaptação do método de Matlock e Reese para o cálculo da deformabilidade à flexão no topo de estaca solicitada por momento fletor e força horizontal, na superfície do terreno. Este método aplica-se às estacas de grande comprimento, onde  $l/T > 4$ , e para solos onde a variação do módulo K em função da profundidade z seja linear, onde  $K = n_h z$ . O método considera de forma separada os efeitos da força horizontal e do momento aplicados e posteriormente relaciona-os por meio da superposição. Assim, o deslocamento horizontal total  $y_t$  e a rotação total  $S_t$  podem ser dados por:

$$Y_t = Y_p + Y_m \quad (3.5.3.1)$$

$$S_t = S_p + S_m \quad (3.5.3.2)$$

onde:

$Y_p$  - deslocamento horizontal devido à força horizontal

$Y_m$  - deslocamento horizontal devido ao momento fletor

$S_p$  - rotação devida à força horizontal

$S_m$  - rotação devida ao momento fletor

A solução para a rotação da estaca, em uma profundidade z, é dada por:

$$S_t = \frac{HT^2}{EI} C_p^s + \frac{MT}{EI} C_m^s \quad (3.5.3.3)$$

onde:

H - força horizontal no topo da estaca

T - fator de rigidez relativa

M - momento fletor no topo da estaca

EI - rigidez à flexão da estaca

$C_p^S$ ,  $C_m^S$  - coeficientes adimensionais devidos à aplicação da força lateral e do momento, respectivamente, para as rotações ( $S_p$  e  $S_m$ ).

A deformabilidade à flexão no topo da estaca pode ser escrita pela seguinte relação:

$$\lambda_{\phi et} = \lambda_{\phi ep} + \lambda_{\phi em} \quad (3.5.3.4)$$

onde:

$\lambda_{\phi et}$  - deformabilidade à flexão total

$\lambda_{\phi ep}$  - deformabilidade à flexão relacionada à  $S_p$

$\lambda_{\phi em}$  - deformabilidade à flexão relacionada à  $S_m$ .

Considerando-se apenas a parcela  $\lambda_{\phi em}$ , no cálculo da deformabilidade específica total, tem-se que:

$$\lambda_{\phi et} = \lambda_{\phi em} = \frac{T}{EI} C_m^S \quad (3.5.3.5)$$

O coeficiente  $C_p^S$  encontra-se tabelado em CINTRA (1983) e está em função da profundidade relativa  $z/T$  ao longo da estaca. Todavia, no topo da estaca, para  $z=0$ , tem-se:

$$C_m^S = -1,750 \quad \text{para: } (z=0) \text{ e } (K=n_h z)$$

A seguir é apresentada uma adaptação do método de Werner para o cálculo de deformabilidade no topo de uma estaca solicitada por momento e força horizontal, na superfície do terreno. Este método apresenta maiores possibilidades de utilização pois considera cinco variações distintas para o módulo de reação  $K$  com a profundidade  $z$ , conforme a figura 3.5.4, e ainda quatro sistemas estáticos para a estaca a ser estudada, conforme a figura 3.5.5. O equacionamento proposto é análogo ao apresentado por Matlock. Assim, o cálculo da deformabilidade à flexão ao longo da estaca pode ser escrito pela seguinte expressão:

$$\lambda_{\phi et} = \frac{\beta}{EI} C_m^S \quad (3.5.3.6)$$

onde:

$\lambda_{\phi et}$  - deformabilidade à flexão ao longo da estaca  
 $\beta$  - fator de rigidez para qualquer variação de  $K$

O coeficiente  $C_m^S$  encontra-se na tabela 3.5.3, estando em função da relação entre o comprimento da estaca  $l$  pelo fator de rigidez  $\beta$ , dada por  $l/\beta$ , do tipo do sistema estático, dado pelos diagramas da figura 3.5.5, e do tipo de variação do módulo  $K$ , dado pelos diagramas da figura 3.5.4.

O fator  $\beta$  é dado pela expressão:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{EI}{K_\ell}} \quad (3.5.3.7)$$

onde:

$K_\ell$  - valor do módulo  $K$  na ponta da estaca

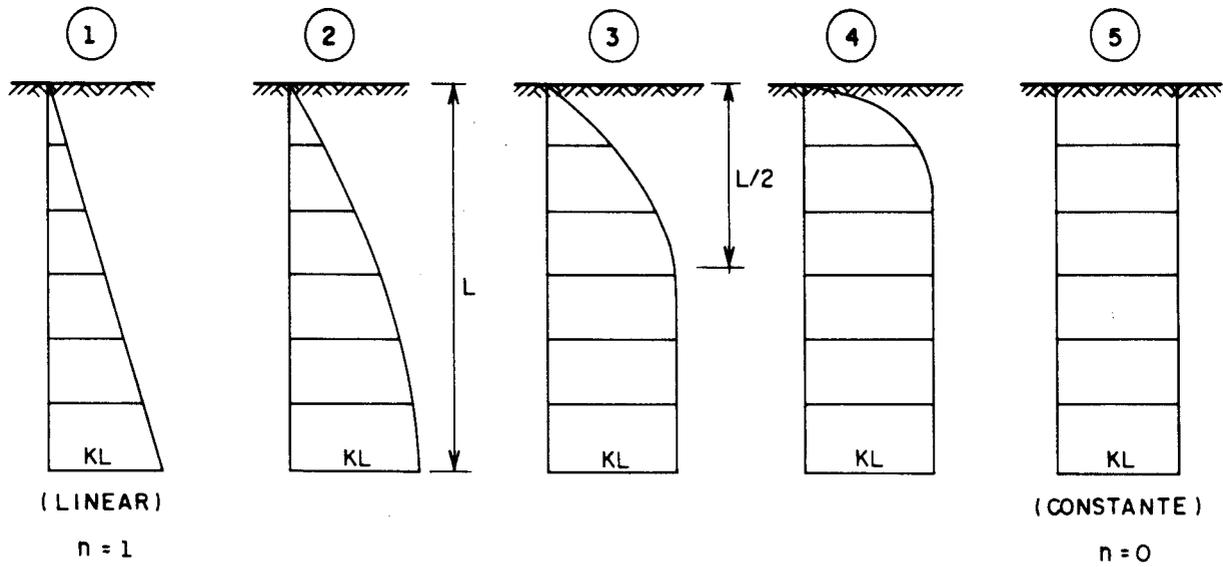


Figura 3.5.4- Variação do módulo de reação  $K(z)$ , nos casos de números de 1 a 5.

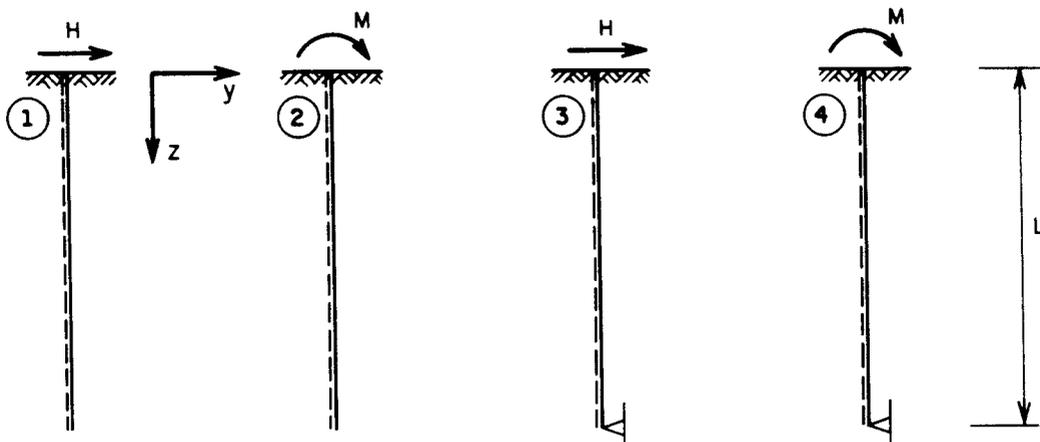


Figura 3.5.5- Sistemas estáticos e carregamentos das estacas de números de 1 a 4.

**Tabela 3.5.3 -** Coficientes adimensionais para rotação (S) da cabeça da estaca. [CINTRA (1983)]

| SISTEMA ESTÁTICO | VARIACÃO DE K(Z) | $l/\beta$ |       |       |       |       |       |
|------------------|------------------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                  |                  | 1,0       | 1,5   | 2,0   | 3,0   | 4,0   | 6,0   |
| 1                | 1                | -6,09     | -2,09 | -1,91 | -1,80 | -1,61 | -1,88 |
|                  | 2                | -4,03     | 1,96  | -1,35 | -1,16 | -1,26 | -1,45 |
|                  | 3                | -2,75     | -1,37 | -0,98 | -0,90 | -0,98 | -1,11 |
|                  | 4                | -2,11     | -1,06 | -0,78 | -0,72 | -0,87 | -0,87 |
|                  | 5                | -1,55     | -0,78 | -0,57 | -0,50 | -0,50 | -0,50 |
| 2                | 1                | -9,46     | -9,98 | -2,08 | -1,68 | -1,74 | -1,88 |
|                  | 2                | -6,76     | -2,55 | -1,69 | -1,48 | -1,54 | -1,65 |
|                  | 3                | -5,08     | -2,02 | -1,43 | -1,92 | -1,37 | -1,45 |
|                  | 4                | -4,20     | -1,73 | -1,27 | -1,17 | -1,23 | -1,29 |
|                  | 5                | -3,37     | -1,44 | -1,08 | -1,00 | -1,00 | -1,00 |
| 3                | 1                | -3,14     | -1,66 | -1,31 | -1,40 | -1,61 | -1,88 |
|                  | 2                | -2,01     | 1,13  | -0,98 | -1,11 | -1,26 | -1,45 |
|                  | 3                | -1,34     | -0,81 | -0,75 | -0,88 | -0,98 | -1,11 |
|                  | 4                | -1,07     | -0,66 | -0,62 | -0,71 | -0,78 | -0,87 |
|                  | 5                | -0,84     | -0,51 | -0,47 | -0,50 | -0,50 | -0,50 |
| 4                | 1                | -3,57     | -1,75 | -1,50 | -1,62 | -1,74 | -1,88 |
|                  | 2                | -2,43     | 1,39  | -1,31 | -1,46 | -1,54 | -1,65 |
|                  | 3                | -1,76     | -1,16 | -1,17 | -1,31 | -1,37 | -1,45 |
|                  | 4                | -1,48     | -1,04 | -1,07 | -1,19 | -1,23 | -1,29 |
|                  | 5                | -1,23     | -0,92 | -0,95 | -1,00 | -1,00 | -1,00 |

## CAPÍTULO IV

### 4 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO NUMÉRICA

#### 4.1 - PRELIMINARES

Este capítulo está dividido em duas partes.

Na primeira parte apresentam-se três exemplos com comparações de valores de cálculo de deformabilidades à flexão com resultados experimentais publicados na literatura de ligações, a saber, ligações VPR-CHS, PFR-CHP e VVR-PAR.

Na segunda parte apresentam-se um exemplo de simulação e três exemplos de aplicações numéricas para análises de estruturas pré-moldadas, considerando-se as deformabilidades de suas ligações, determinadas analiticamente.

No quarto exemplo apresenta-se uma simulação de análise para um pórtico plano, variando-se as posições das molas nas extremidades dos elementos para três casos de solicitação, onde observou-se a influência desta variação na distribuição dos esforços e deslocamentos na estrutura.

No quinto exemplo apresenta-se uma aplicação do procedimento de análise para a determinação do parâmetro de instabilidade  $\alpha$  em uma estrutura para edifício de múltiplos pavimentos.

No sexto exemplo apresenta-se o cálculo dos esforços em

um pórtico para telhado duas águas, empregado em um galpão de uso múltiplo.

No sétimo exemplo analisa-se um pórtico plano com ligações viga-pilar do tipo VPA-ENC, para algumas ações, com a consideração das deformabilidades nas ligações e fundações.

#### 4.2 - CONFRONTO DE VALORES TEÓRICOS COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS DE DEFORMABILIDADES DE LIGAÇÕES

##### 4.2.1 - DEFORMABILIDADE À FLEXÃO EM LIGAÇÃO VIGA-PILAR RÍGIDA POR MEIO DE CHAPAS SOLDADAS.

O modelo de ligação a ser analisado é um caso típico de ligação por meio de chapas soldadas, conforme indicado na figura 4.1. Protótipos deste tipo de ligação foram estudados em um programa de pesquisa do PCI em 1986, cujos resultados estão apresentados em DOLAN et alii (1987). Este tipo de ligação foi considerado como sendo de interesse de estudo e indicado para pesquisas posteriores.

DOLAN e PESSIKI (1989) estudaram modelos reduzidos deste tipo de ligação, onde analisaram algumas variações do detalhamento da ligação. O parâmetro escolhido por estes autores para a avaliação da rigidez na ligação foi a relação momento-rotação da ligação, onde montou-se uma curva que representou o comportamento da ligação. Dolan avaliou a rigidez inicial elástica da ligação, dada pela relação momento/rotação, interceptando o trecho elástico da curva para um momento da ordem de 25% do momento máximo atingido pela ligação ( $M_u$ ), sendo  $M=0,25M_u$ . Assim, a rigidez inicial atingiu cerca de 16% da rigidez da seção não fissurada da viga.

Os dados apresentados a seguir baseiam-se em um modelo de ligação estudado por DOLAN e PESSIKI (1989).

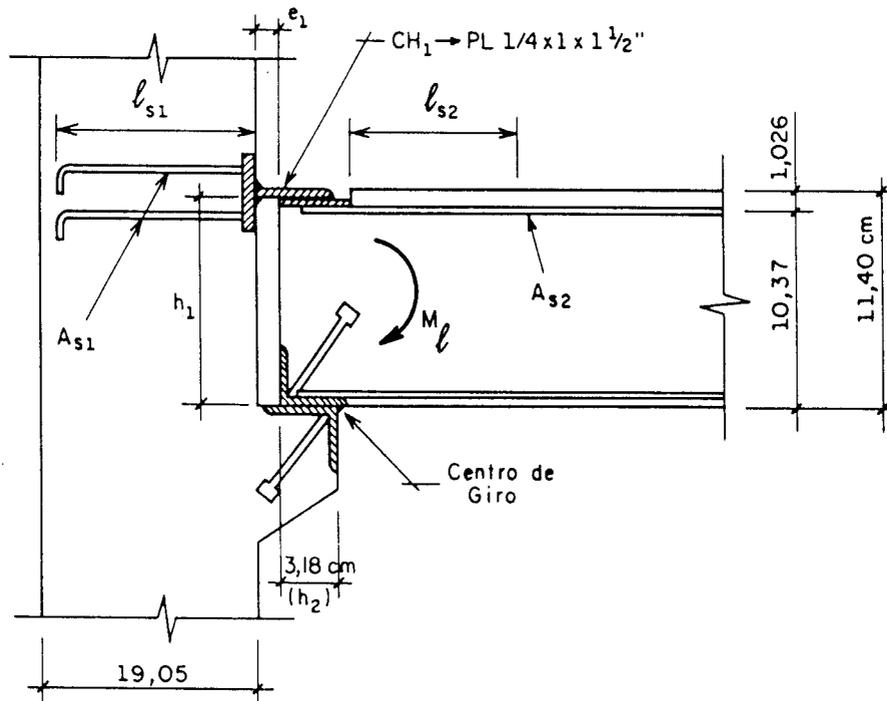


Figura 4.1 - Modelo de ligação viga-pilar por chapas soldadas.  
[DOLAN e PESSIKI (1989)]

Dados da ligação

|   |                                |
|---|--------------------------------|
| $A_{s1} = 1,92 \text{ cm}^2$                    | $e_1 = 0,635 \text{ cm}$       |
| $A_{s2} = 1,28 \text{ cm}^2$                    | $h_1 = 11,40 \text{ cm}$       |
| $E_s = 20000 \text{ kN/cm}^2$                   | $h_2 = 3,18 \text{ cm}$        |
| $\text{CH-1/4x1x1}^{1/2} \text{''} \rightarrow$ | $I_{ch} = 0,0813 \text{ cm}^4$ |

Foram considerados os seguintes comprimentos de deformação ( $l_s$ ) para as barras:

$$l_{s1} = l_{be} = 15,24 \text{ cm} \quad \text{e} \quad l_{s2} = l_b = 34,29 \text{ cm}$$

Considerou-se o seguinte valor para o braço de alavanca ( $z$ ) na seção resistente ao momento negativo na extremidade da viga:  $z \cong 0,87d = 0,87(10,37) = 9,03 \text{ cm}$

O cálculo da deformabilidade à flexão é dado pelas eq. 3.4.3.19, 3.4.3.20 e 3.4.3.21, do ítem 3.4.3 do terceiro capítulo deste trabalho. Assim, reescrevendo a eq. 3.4.3.21 tem-se:

$$\lambda_{\phi l} = \lambda_{\phi l1} + \lambda_{\phi l2}$$

Substituindo-se os valores numéricos tem-se:

$$\lambda_{\phi l1} = \frac{(0,635)^3}{12.20000.0,0813.3,18} \left( \frac{0,635^3.1,92.11,40^2}{12.15,24.0,0813.3,18+3,18} \right)^{-1}$$

$$\lambda_{\phi l1} = 9,11E-07 \text{ rad/kN.cm} = 9,11E-05 \text{ rad/kN.m}$$

$$\lambda_{\phi l2} = \frac{34,29}{20000.1,28.9,03.11,40} = 1,30E-05 \text{ rad/kN.cm}$$

$$\lambda_{\phi l2} = 1,30E-03 \text{ rad/kN.m}$$

Assim, a deformabilidade total  $\lambda_{\phi l}$  será de:

$$\lambda_{\phi l} = 0,09E-03 + 1,30E-03 = 1,39E-03 \text{ rad/kN.m}$$

Pode-se notar que a parcela da deformação da armadura negativa da viga  $\lambda_{\phi l2}$ , neste caso, foi bem maior do que a parcela  $\lambda_{\phi l1}$ . A consideração da parcela da armadura negativa no cálculo da deformabilidade total da ligação, foi razoável neste caso uma vez que os dados de leitura foram tomados em pontos fora do trecho de apoio no consolo, a uma distância de  $0,56h_1$  da extremidade da viga.

No trabalho experimental de DOLAN & PESSIKI para um momento  $M= 7,5\text{kip.in} = 0,85\text{kN.m}$ , obteve-se uma rotação  $\phi= 1,30 \text{ E-3 rad}$ . Assim, a deformabilidade à flexão da ligação, que é a relação rotação/momento, será dada por:

$$\lambda_{\phi l} = 1,53 \text{ E-03 rad/kN.m}$$

Na figura 4.2 é apresentada uma comparação entre os resultados analíticos e experimentais através da curva

Ensaaiou-se também um protótipo monolítico pilar-fundação, que serviu como parâmetro de referência para a avaliação da rigidez. A figura 4.3 apresenta os dados com o modelo da ligação estudada.

|   |  |                                |
|---|--|--------------------------------|
| Pilar   |  |                                |
| seção transversal   | $\rightarrow h=38,1 \text{ cm}$                        | $:b=25,4 \text{ cm}$           |
| armadura tracionada   | $\rightarrow A_s=12,9 \text{ cm}^2$                    | $(2 \times 6,45 \text{ cm}^2)$ |
| Chapa da base   |  |                                |
|   | $\rightarrow 60,9 \times 40,6 \times 4,1 \text{ cm}^3$ |                                |
|   | $\rightarrow I_{bp}=233,18 \text{ cm}^4$               |                                |
| Chumbador   |  |                                |
| $d_b=2,5 \text{ cm}$  | $g= l_s=43,2 \text{ cm}$                               | $A_{sb}=10,0 \text{ cm}$       |
| Excentricidade inicial da carga $\rightarrow e=38 \text{ cm}$ |  |                                |
| Dados geométricos   |  |                                |
| $x_1=6,35 \text{ cm}$   | $x_2=5,15 \text{ cm}$                                  |                                |
| $(h+x_1)=43,25 \text{ cm}$                                    | $:(h+2x_1)=48,40 \text{ cm}$                           |                                |

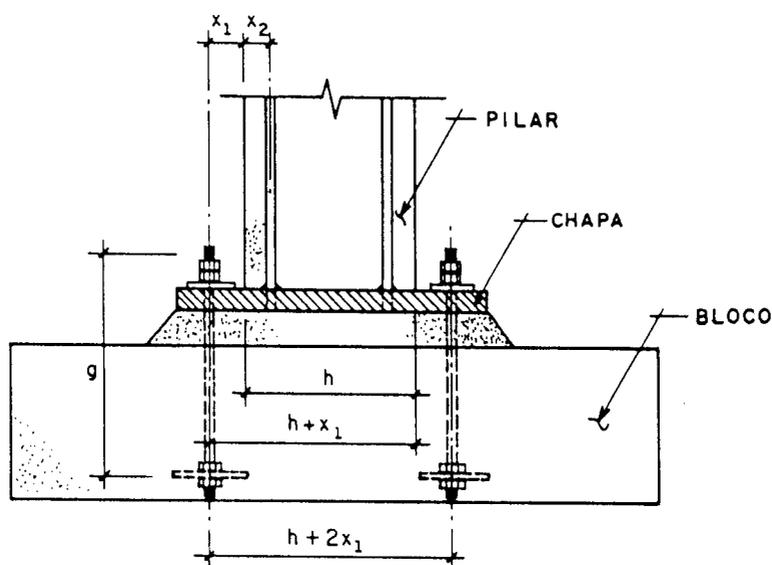


Figura 4.3 - Dados da ligação pilar-fundação por chapas metálicas parafusadas. [LAFRAUGH e MAGURA (1966)]

Cálculo da deformabilidade à flexão é dado pelas eq. 3.4.6.13, 3.4.6.16 e 3.4.6.17, no ítem 3.4.6 do terceiro capítulo deste trabalho. Assim, reescrevendo a eq. 3.4.6.17 tem-se:

$$\lambda_{\phi l} = \lambda_{\phi l1} + \lambda_{\phi l2}$$

Substituindo-se os valores numéricos tem-se:

$$\lambda_{\phi l1} = \frac{\left(\frac{2.38}{48,4} - 1\right)}{2.38.20000.43,25} \left(\frac{43,2}{10,0} + \frac{11,5^3}{3.233,18}\right) = 5,63E-08 \text{ rad/kN.cm}$$

Para a consideração da deformação da armadura tracionada do pilar na região de implantação da ligação, considerou-se o comprimento para a deformação da barra  $\ell_{s2} \cong h = 38,1 \text{ cm}$ . Assim, a deformabilidade  $\lambda_{\phi l2}$  fica:

$$\lambda_{\phi l2} = \frac{38,1}{20000.12,9.48,4.38,1} = 8,0 \text{ E-08 rad/kN.cm}$$

A deformabilidade total fica:

$$\lambda_{\phi l} = 5,63E-08 + 8,0 \text{ E-08} = 1,36 \text{ E-07 rad/kN.cm}$$

Na figura 4.4 são apresentadas as curvas momento-rotação dos protótipos, com a ligação e o monolítico, estudados por LAFRAUGH e MAGURA (1966).

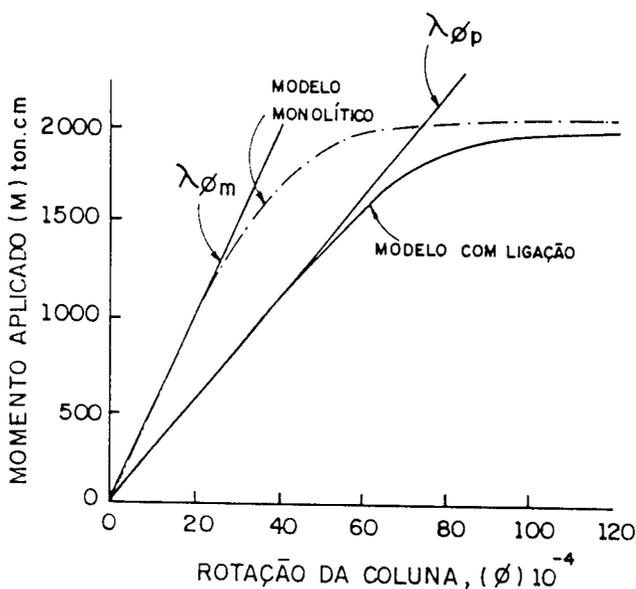
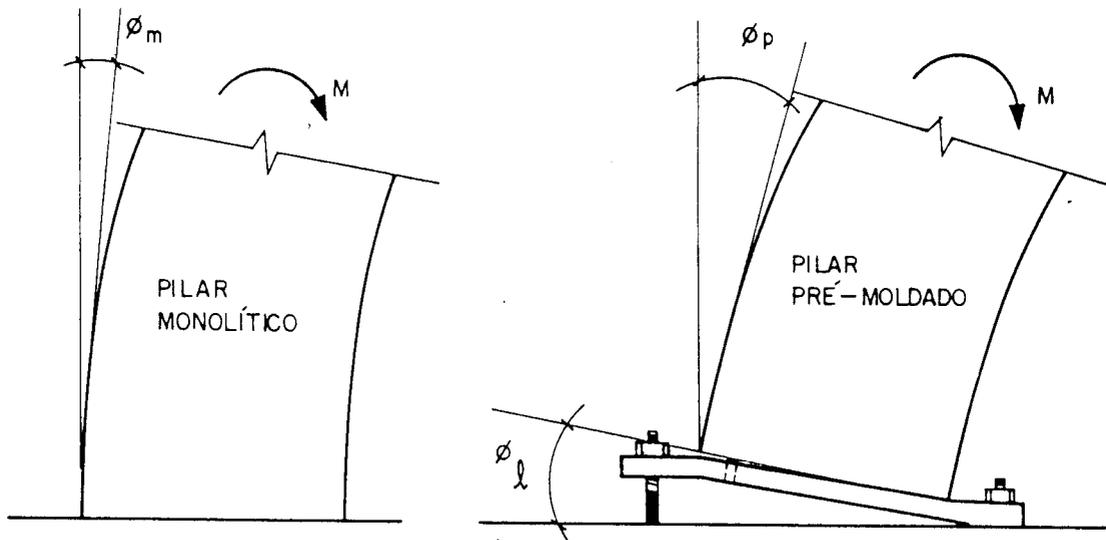


Figura 4.4 - Curvas momento-rotação para o protótipo de ligação para base de pilar por chapas metálicas e para o protótipo monolítico. [LAFRAUGH e MAGURA (1966)]

A figura 4.5 representa esquematicamente as rotações do protótipo monolítico e do protótipo com a ligação. Assim, a rotação do protótipo com ligação é igual a soma da rotação do protótipo monolítico à rotação da ligação. Desta forma pode-se obter o valor experimental para a deformabilidade à flexão na ligação subtraindo-se as deformabilidades encontradas nos trechos retos das curvas momento-rotação para o protótipo com ligação e do protótipo monolítico, da figura 4.4.



**Figura 4.5** - Esquemática para as rotações dos protótipos pilar-fundação monolítico e pré-moldado.

Da curva momento-rotação original, a deformabilidade à flexão para o trecho reto desta curva para o protótipo com ligação, foi obtida para:

$$\lambda_{\phi_p} = 20 \text{ E-04} / 5950 = 3,36 \text{ E-07 rad/kN.cm}$$

A deformabilidade à flexão para o trecho elástico da curva momento-rotação para o protótipo monolítico, foi obtida para:

$$\lambda_{\phi_m} = 10 \text{ E-04} / 6550 = 1,53 \text{ E-07 rad/kN.cm}$$

Subtraindo-se os dois valores, obteve-se:

$$\lambda_{\phi_l(\text{exper.})} = 3,36 \text{ E-07} - 1,53 \text{ E-07} = 1,83 \text{ E-07 rad/kN.cm}$$

Confrontando-se o valor teórico com o resultado experimental para  $\lambda_{\phi\ell}$ , tem-se:

$$\lambda_{\phi\ell}(\text{teórico}) = 1,36 \text{ E-07 rad/kN.cm}$$

$$\lambda_{\phi\ell}(\text{exper.}) = 1,83 \text{ E-07 rad/kN.cm}$$

Estes resultados apresentam-se como satisfatórios para uma primeira análise do problema. Todavia, necessita-se de uma investigação experimental mais detalhada para uma melhor definição do comprimento da barra tracionada do pilar, a ser considerado no cálculo, na região de implantação da ligação, visto a sua influência nos resultados.

#### 4.2.3- DEFORMABILIDADE À FLEXÃO EM LIGAÇÃO VIGA-VIGA POR MEIO DE PARAFUSOS

Neste exemplo, comparou-se valores obtidos no cálculo analítico e numérico com valores experimentais, para as flechas ao longo de um protótipo de viga, apresentados por GASTON & KRIZ (1963). Na execução destes ensaios utilizou-se um protótipo de viga monolítica e dois protótipos de vigas não monolíticas com detalhes diferentes para a ligação viga-viga por meio de parafusos, estando estas vigas sobre dois apoios e estando um dos lados em balanço. A figura 4.6 apresenta o esquema com o modelo dos protótipos estudados. Foram analisadas duas situações de carregamento, sendo a primeira com carga concentrada  $P_1$ , centrada entre os apoios, e uma segunda situação com o acréscimo de uma carga concentrada  $P_2$  na extremidade do balanço, de tal modo que a ligação estivesse com momento aproximadamente nulo. Para este exemplo, considerou-se o protótipo monolítico e um dos protótipos não monolíticos estudados por GASTON & KRIZ. Estes protótipos foram aqui analisados apenas para a primeira situação de carregamento, com  $P_1$ , por ser esta a situação que produz flexão na ligação, podendo-se avaliar a sua deformabilidade à flexão.

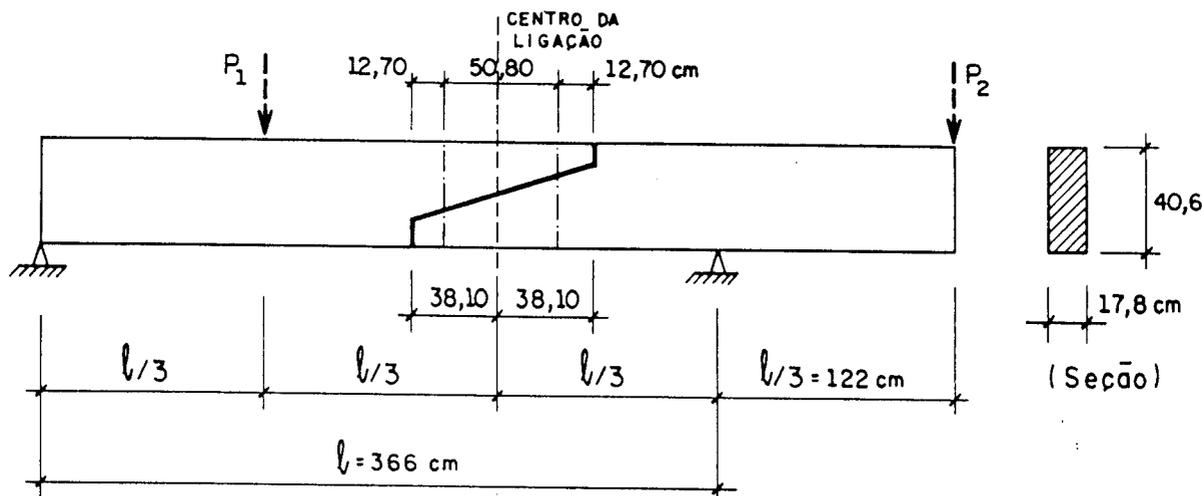


Figura 4.6 - Modelo do protótipo estudado em GASTON e KRIZ (1963).

São dados:

Área da seção transversal do parafuso ( $A_s$ ):

$$A_s = 5,0 \text{ cm}^2 \quad (d_p = 25 \text{ mm})$$

Comprimento do parafuso para a deformação ( $l_s$ ):

O comprimento do parafuso é 40,6 cm. Houve um acréscimo neste comprimento devido à presença de uma célula de carga com 10,0 cm de altura. Assim, teve-se:

$$l_s = 40,6 + (10,0) = 50,6 \text{ cm}$$

A distância entre a borda comprimida até o parafuso tracionado, na seção resistente da ligação, foi de:  $d = 63,5 \text{ cm}$ .

O módulo de elasticidade para o aço foi admitido para este exemplo de:  $E_s = 20000 \text{ kN/cm}^2$

Para a análise numérica, considerando a semi-rigidez na ligação, utilizou-se o esquema apresentado na figura 4.7 onde a deformabilidade da ligação é representada por parâmetros de restrição  $\gamma$ .

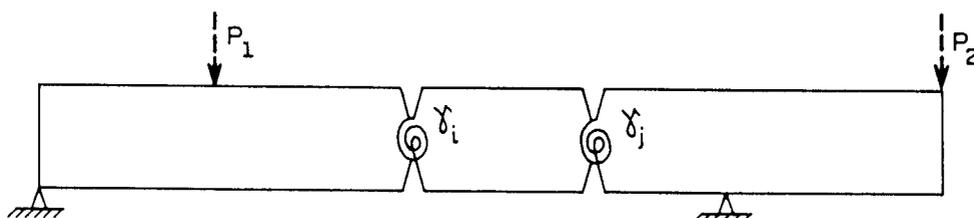


Figura 4.7 - Esquema com molas nas extremidades do trecho da ligação na viga estudada.

A deformabilidade à flexão neste tipo de ligação pode ser calculada pela eq. 3.4.5.4, reescrita por:

$$\lambda_{\phi\ell} = \frac{\ell_s}{E_s A_s z (d-x)}$$

Sendo  $z=d-x/3$ , e assumindo  $z=0,8d$ , tem-se  $x=0,6d$ . Assim, a deformabilidade  $\lambda_{\phi\ell}$  fica:

$$\lambda_{\phi\ell} = \frac{3,125\ell_s}{E_s A_s d^2}$$

Substituindo-se os valores dados, tem-se que:

$$\lambda_{\phi\ell} = \frac{3,125 \cdot 50,6}{20000 \cdot 5,0 \cdot 0,63,5^2} = 3,92 \text{ E-07 rad/kN.cm}$$

$$\lambda_{\phi\ell} = 3,92 \text{ E-07 rad/kN.cm} = 3,92 \text{ E-05 rad/kN.m}$$

O fator de restrição  $\gamma$ , para o trecho da ligação, depende da rigidez da seção ( $EI$ ), da deformabilidade da ligação ( $\lambda_{\phi\ell}$ ) e do comprimento deste trecho ( $\ell$ ). Para o cálculo de  $\gamma$ , considerou-se a rigidez da seção ( $EI$ ) dada a partir da resistência do concreto e do momento de inércia para a seção não fissurada, dada por:  $EI = 34310,25 \text{ kN-m}^2$

Para o cálculo dos fatores  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$ , considerou-se a metade da deformabilidade da ligação, distribuída nas extremidades  $i$  e  $j$ . Assim, substituindo-se os valores, tem-se:

$$\gamma_i = \gamma_j = \left( 1 + \frac{3 \cdot 34,50 \text{E}+06 \cdot 9,945 \text{E}-04 \cdot 1,96 \text{E}-05}{0,762} \right)^{-1} = 0,27$$

Para a situação com a carga concentrada  $P_1$ , provocando um momento positivo na ligação, Gaston e Kriz encontraram uma relação entre o momento de inércia no trecho da ligação, dado por  $I'$ , e o momento de inércia da seção da viga não fissurada, dada por  $I$ , tal que:  $I' \cong I/3$ . A figura 4.8 apresenta o esquema com o momento de inércia fictício  $I'$  no trecho da ligação.

#### 4.3 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS PRÉ-MOLDADAS

##### 4.3.1- SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ANÁLISE DE UM PÓRTICO PLANO PARA CARREGAMENTOS E SITUAÇÕES DE VINCULAÇÕES VARIADAS

O objetivo deste exemplo consistiu em verificar os efeitos nas distribuições dos deslocamentos e dos esforços ao longo da estrutura, causados pela variação na disposição das "molas" nas extremidades dos elementos. A colocação de uma "mola" na extremidade de uma viga ou de um pilar dependerá do sistema construtivo a ser empregado. A figura 4.10 apresenta o esquema para o pórtico estudado.

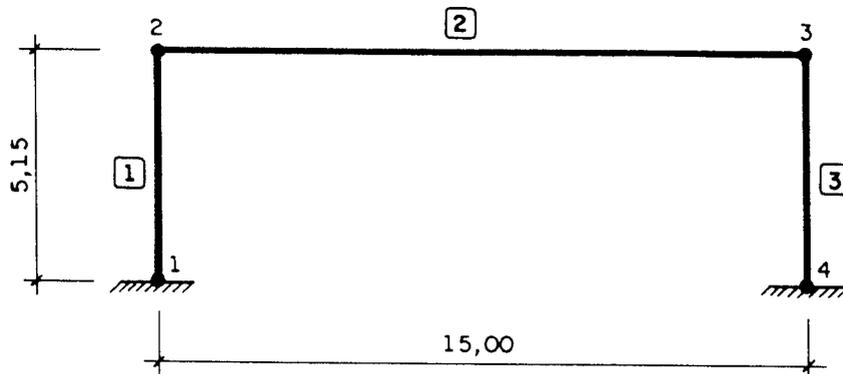


Figura 4.10 - Esquema geométrico para o pórtico plano estudado.

Módulo de elasticidade para o material:

$$E_c = 32740000 \text{ kN/m}^2$$

Áreas das seções transversais da viga ( $A_v$ ) e pilar ( $A_p$ ):

$$A_v = 0,38 \text{ m}^2$$

$$A_p = 0,20 \text{ m}^2$$

Momentos de inércia da viga ( $I_v$ ) e do pilar ( $I_p$ ):

$$I_v = 0,00286 \text{ m}^4$$

$$I_p = 0,00267 \text{ m}^4$$

Para este estudo, fixaram-se três tipos de carregamentos básicos, conforme figura 4.11a, estando cada um deles atuando sobre três disposições diferentes de vinculações por meio de molas nos elementos da estrutura, conforme figura 4.11b.

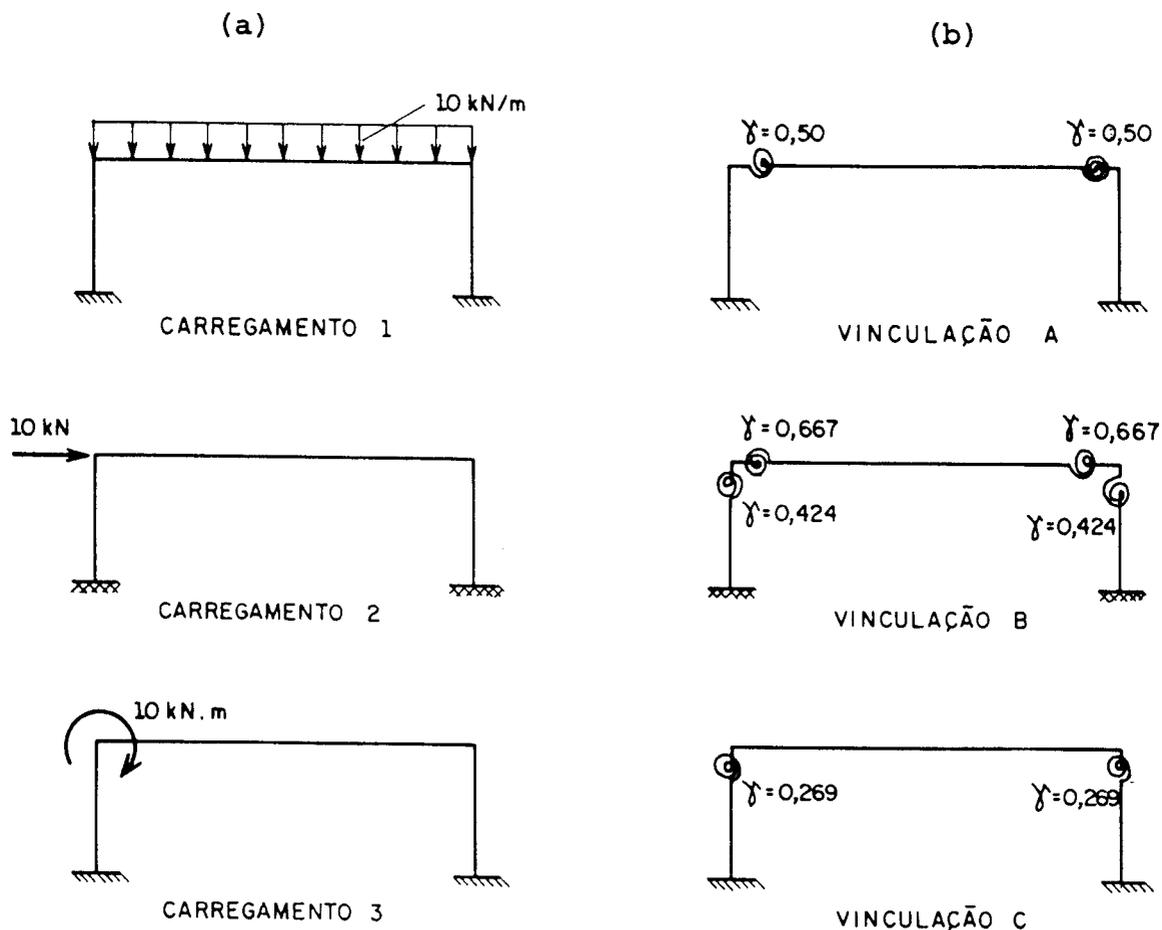


Figura 4.11- a) Tipos de carregamentos aplicados.

b) Posicionamento das molas nos elementos da estrutura.

A deformabilidade à flexão na ligação foi adotada para um valor que fornecesse um fator de restrição  $\gamma=0,5$  para as extremidades da viga. Desta forma, o seu valor foi dado por:

$$\lambda_{\phi l} = 5,34 \text{ E-}05 \text{ rad/kN.m}$$

O fator de restrição  $\gamma$  para um nó  $i$  na extremidade de uma barra de comprimento  $\ell$  e rigidez  $EI$ , é dado por:

$$\gamma_i = \left( 1 + \frac{3EI\lambda_{\phi_i}}{\ell} \right)^{-1}$$

onde:  $\lambda_{\phi_i}$  a deformabilidade da ligação no nó  $i$ .

O fator  $\gamma$  será dado para três disposições possíveis para as molas, conforme indicado na figura 4.11b. Assim, para cada situação de vinculação tem-se:

**a) Vinculação A** - Molas nas extremidades da viga.

Considerando-se que toda a deformabilidade da ligação esteja influenciando na rigidez da viga, tem-se que:

$$\gamma_i = \left( 1 + \frac{3(32,74E+6)(28,6E-4)(5,34E-5)}{15,00} \right)^{-1} = 0,50$$

**b) Vinculação B** - Molas na viga e nos pilares.

Considerando-se que a deformabilidade da ligação esteja influenciando na rigidez da viga e do pilar, com a metade do seu valor para cada elemento, tem-se que:

**b.1) Para o pilar:**

$$\gamma_i = \left( 1 + \frac{3(32,74E+6)(26,7E-4)(2,67E-5)}{5,15} \right)^{-1} = 0,424$$

**b.2) Para a viga:**

$$\gamma_i = \left( 1 + \frac{3(32,74E+6)(28,6E-4)(2,67E-5)}{15,00} \right)^{-1} = 0,667$$

**c) Vinculação C** - Molas na extremidade do pilar.

Considerando-se que toda a deformabilidade da ligação esteja influenciando na rigidez do pilar, tem-se que:

$$\gamma_i = \left( 1 + \frac{3(32,74E+6)(26,7E-4)(5,34E-5)}{5,15} \right)^{-1} = 0,269$$

A seguir são apresentados os resultados dos esforços e dos deslocamentos nas extremidades dos elementos para cada situação de carregamento, variando-se as posições das molas.

**A) Carregamento (1) aplicado às situações de vinculação por molas**

O quadro 4.1 apresenta os momentos fletores para o pórtico monolítico, com  $\gamma=1,0$  em todas as extremidades das barras, e para os pórticos com posições de molas variadas em seus nós, com os respectivos valores de  $\gamma$  nas extremidades dos elementos. (Os momentos são positivos para um giro anti-horário na extremidade da barra).

| QUADRO 4.1 |    | Momentos fletores nas extremidades das barras para o carregamento 1 associado às situações de vinculação. |          |          |              |
|------------|----|---|----------|----------|--------------|
| POSIÇÃO    |    | SITUAÇÕES DE CÁLCULO  |          |          | unid. = kN.m |
| BARRA      | NÓ | CASO(1)   | CASO(1A) | CASO(1B) | CASO(1C)     |
| 1          | 1  | - 78.9  | - 50.5   | - 50.5   | - 50.5       |
|            | 2  | -158.3  | -101.3   | -101.3   | -101.3       |
| 2          | 2  | 158.3   | 101.3    | 101.3    | 101.3        |
|            | 3  | -158.3  | 101.3    | 101.3    | 101.3        |
| 3          | 3  | 158.3   | 101.3    | 101.3    | 101.3        |
|            | 4  | 78.9  | 50.5     | 50.5     | 50.5         |

Neste caso, observou-se que o posicionamento das molas nas extremidades da viga, do pilar ou em ambos, não afetou os valores dos esforços finais, obtendo-se os mesmos esforços para as diferentes posições das molas. Os quadros 4.2 e 4.3 apresentam as rotações nodais ( $\theta$ ), das extremidades dos elementos com rigidez modificada ( $\theta_m$ ), das ligações ( $\phi_\ell$ ) e os totais nas extremidades das barras ( $\theta_b$ ).

| QUADRO 4.2 |    | ROTAÇÕES (1E-03 rad) |            |             |            |           |            |             |            |
|------------|----|----------------------|------------|-------------|------------|-----------|------------|-------------|------------|
| posição    |    | CASO (1)             |            |             |            | CASO (1A) |            |             |            |
| BARRA      | Nº | $\theta$             | $\theta_m$ | $\phi_\ell$ | $\theta_b$ | $\theta$  | $\theta_m$ | $\phi_\ell$ | $\theta_b$ |
| 1          | 1  | 0.0                  | 0.0        | 0.0         | 0.0        | 0.0       | 0.0        | 0.0         | 0.0        |
|            | 2  | -2.34                | -2.34      | 0.0         | -2.34      | -1.50     | -1.50      | 0.0         | -1.50      |
| 2          | 2  | -2.34                | -2.34      | 0.0         | -2.34      | -1.50     | -1.50      | -5.40       | -6.90      |
|            | 3  | 2.34                 | 2.34       | 0.0         | 2.34       | 1.50      | 1.50       | 5.40        | 6.90       |
| 3          | 3  | 2.34                 | 2.34       | 0.0         | 2.34       | 1.50      | 1.50       | 0.0         | 1.50       |
|            | 4  | 0.0                  | 0.0        | 0.0         | 0.0        | 0.0       | 0.0        | 0.0         | 0.0        |

| QUADRO 4.3 |    | ROTAÇÕES (1E-03 rad) |            |             |            |           |            |             |            |
|------------|----|----------------------|------------|-------------|------------|-----------|------------|-------------|------------|
| posição    |    | CASO (1B)            |            |             |            | CASO (1C) |            |             |            |
| BARRA      | Nº | $\theta$             | $\theta_m$ | $\phi_\ell$ | $\theta_b$ | $\theta$  | $\theta_m$ | $\phi_\ell$ | $\theta_b$ |
| 1          | 1  | 0.0                  | 0.0        | 0.0         | 0.0        | 0.0       | 0.0        | 0.0         | 0.0        |
|            | 2  | -4.20                | -4.20      | 2.70        | -1.50      | -6.90     | -6.90      | 5.40        | -1.50      |
| 2          | 2  | -4.20                | -4.20      | -2.70       | -6.90      | -6.90     | -6.90      | 0.0         | -6.90      |
|            | 3  | 4.20                 | 4.20       | 2.70        | 6.90       | 6.90      | 6.90       | 0.0         | 6.90       |
| 3          | 3  | 4.20                 | 4.20       | -2.70       | 1.50       | 6.90      | 6.90       | -5.40       | 1.50       |
|            | 4  | 0.0                  | 0.0        | 0.0         | 0.0        | 0.0       | 0.0        | 0.0         | 0.0        |

**B) Carregamento (2) aplicado às situações de vinculação por molas**

O quadro 4.4 apresenta os momentos fletores nas extremidades dos elementos para cada situação de vinculação. Neste caso, observou-se que o posicionamento das molas nas extremidades da viga, do pilar ou em ambos, não afetou os esforços finais, obtendo-se os mesmos valores para as diferentes posições das molas. Os quadros 4.5 e 4.6 apresentam as rotações  $\theta$ ,  $\theta_m$ ,  $\phi_\ell$  e  $\theta_b$ .

| QUADRO 4.4 |    | Momentos fletores nas extremidades das barras para o carregamento 2 associado às situações de vinculação. |           |           |              |
|------------|----|---|-----------|-----------|--------------|
| POSIÇÃO    |    | SITUAÇÕES DE CÁLCULO  |           |           | unid. = kN.m |
| BARRA      | Nº | CASO (2)  | CASO (2A) | CASO (2B) | CASO (2C)    |
| 1          | 1  | 16.9  | 20.3      | 20.3      | 20.3         |
|            | 2  | 8.9   | 5.5       | 5.5       | 5.5          |
| 2          | 2  | - 8.9   | - 5.5     | - 5.5     | - 5.5        |
|            | 3  | - 8.9   | - 5.5     | - 5.5     | - 5.5        |
| 3          | 3  | 8.9   | 5.5       | 5.5       | 5.5          |
|            | 4  | 16.9  | 20.3      | 20.3      | 20.3         |

| QUADRO 4.5 |    | ROTAÇÕES (1E-04 rad) |            |             |            |           |            |             |            |
|------------|----|----------------------|------------|-------------|------------|-----------|------------|-------------|------------|
| posição    |    | CASO (2)             |            |             |            | CASO (2A) |            |             |            |
| BARRA      | Nº | $\theta$             | $\theta_m$ | $\phi_\ell$ | $\theta_b$ | $\theta$  | $\theta_m$ | $\phi_\ell$ | $\theta_b$ |
| 1          | 1  | 0.0                  | 0.0        | 0.0         | 0.0        | 0.0       | 0.0        | 0.0         | 0.0        |
|            | 2  | -2.40                | -2.40      | 0.0         | -2.40      | -4.35     | -4.35      | 0.0         | -4.35      |
| 2          | 2  | -2.40                | -2.40      | 0.0         | -2.40      | -4.35     | -4.35      | 2.90        | -1.45      |
|            | 3  | -2.40                | -2.40      | 0.0         | -2.40      | -4.35     | -4.35      | 2.90        | -1.45      |
| 3          | 3  | -2.40                | -2.40      | 0.0         | -2.40      | -4.35     | -4.35      | 0.0         | -4.35      |
|            | 4  | 0.0                  | 0.0        | 0.0         | 0.0        | 0.0       | 0.0        | 0.0         | 0.0        |

| QUADRO 4.6 |    | ROTAÇÕES (1E-04 rad) |            |             |            |           |            |             |            |
|------------|----|----------------------|------------|-------------|------------|-----------|------------|-------------|------------|
| posição    |    | CASO (2B)            |            |             |            | CASO (2C) |            |             |            |
| BARRA      | Nº | $\theta$             | $\theta_m$ | $\phi_\ell$ | $\theta_b$ | $\theta$  | $\theta_m$ | $\phi_\ell$ | $\theta_b$ |
| 1          | 1  | 0.0                  | 0.0        | 0.0         | 0.0        | 0.0       | 0.0        | 0.0         | 0.0        |
|            | 2  | -2.90                | -2.90      | -1.45       | -4.35      | -1.45     | -1.45      | -2.90       | -4.35      |
| 2          | 2  | -2.90                | -2.90      | 1.45        | -1.45      | -1.45     | -1.45      | 0.0         | -1.45      |
|            | 3  | -2.90                | -2.90      | 1.45        | -1.45      | -1.45     | -1.45      | 0.0         | -1.45      |
| 3          | 3  | -2.90                | -2.90      | -1.45       | -4.35      | -1.45     | -1.45      | -2.90       | -4.35      |
|            | 4  | 0.0                  | 0.0        | 0.0         | 0.0        | 0.0       | 0.0        | 0.0         | 0.0        |

C) Carregamento (3) aplicado às situações de vinculação por molas

O quadro 4.7 apresenta os momentos fletores nas extremidades dos elementos para cada situação de vinculação. Neste caso, observou-se que o posicionamento das molas afetou os diagramas dos esforços finais, obtendo-se esforços diferentes para as diferentes posições das molas. Os quadros 4.8 e 4.9 apresentam as rotações  $\theta$ ,  $\theta_m$ ,  $\phi_\ell$  e  $\theta_b$ .

| QUADRO 4.7 |    | Momentos fletores nas extremidades das barras para o carregamento 3 associado às situações de vinculação. |           |           |              |
|------------|----|---|-----------|-----------|--------------|
| POSIÇÃO    |    | SITUAÇÕES DE CÁLCULO  |           |           | unid. = kN.m |
| BARRA      | NO | CASO (3)  | CASO (3A) | CASO (3B) | CASO (3C)    |
| 1          | 1  | - 0.54  | 0.64      | - 0.13    | - 0.39       |
|            | 2  | - 5.80  | - 7.40    | - 5.50    | - 3.70       |
| 2          | 2  | - 4.20  | - 2.60    | - 4.50    | - 6.30       |
|            | 3  | - 2.70  | - 1.60    | - 1.68    | - 1.74       |
| 3          | 3  | 2.70  | 1.60      | - 1.68    | 1.74         |
|            | 4  | 3.70  | 5.13      | 3.72      | 2.30         |

| QUADRO 4.8 |    | ROTAÇÕES (1E-04 rad) |            |             |            |           |            |             |            |
|------------|----|----------------------|------------|-------------|------------|-----------|------------|-------------|------------|
| posição    |    | CASO (3)             |            |             |            | CASO (3A) |            |             |            |
| BARRA      | NO | $\theta$             | $\theta_m$ | $\phi_\ell$ | $\theta_b$ | $\theta$  | $\theta_m$ | $\phi_\ell$ | $\theta_b$ |
| 1          | 1  | 0.0                  | 0.0        | 0.0         | 0.0        | 0.0       | 0.0        | 0.0         | 0.0        |
|            | 2  | -1.50                | -1.50      | 0.0         | -1.50      | -2.36     | -2.36      | 0.0         | -2.36      |
| 2          | 2  | -1.50                | -1.50      | 0.0         | -1.50      | -2.36     | -2.36      | 1.40        | -0.96      |
|            | 3  | -0.30                | -0.30      | 0.0         | -0.30      | -1.03     | -1.03      | 0.87        | -0.16      |
| 3          | 3  | -0.30                | -0.30      | 0.0         | -0.30      | -1.03     | -1.03      | 0.0         | -1.03      |
|            | 4  | 0.0                  | 0.0        | 0.0         | 0.0        | 0.0       | 0.0        | 0.0         | 0.0        |

| QUADRO 4.9 |    | ROTAÇÕES (1E-04 rad) |            |             |            |           |            |             |            |
|------------|----|----------------------|------------|-------------|------------|-----------|------------|-------------|------------|
| posição    |    | CASO (3B)            |            |             |            | CASO (3C) |            |             |            |
| BARRA      | NO | $\theta$             | $\theta_m$ | $\phi_\ell$ | $\theta_b$ | $\theta$  | $\theta_m$ | $\phi_\ell$ | $\theta_b$ |
| 1          | 1  | 0.0                  | 0.0        | 0.0         | 0.0        | 0.0       | 0.0        | 0.0         | 0.0        |
|            | 2  | -3.14                | -3.14      | 1.47        | -1.67      | -2.92     | -2.92      | 1.96        | 0.96       |
| 2          | 2  | -3.14                | -3.14      | 1.20        | -1.94      | -2.92     | -2.92      | 0.0         | -2.92      |
|            | 3  | -0.15                | -0.15      | 0.45        | 0.30       | 0.76      | 0.76       | 0.0         | 0.76       |
| 3          | 3  | -0.15                | -0.15      | -0.45       | 0.60       | 0.76      | 0.76       | -0.93       | -0.17      |
|            | 4  | 0.0                  | 0.0        | 0.0         | 0.0        | 0.0       | 0.0        | 0.0         | 0.0        |

Observando-se os valores obtidos da aplicação do carregamento 3, nota-se a necessidade do cuidado ao se adotar a posição as molas, pois estas deverão reproduzir o comportamento da ligação. Assim, deve-se estudar em qual elemento a ligação deverá interferir em sua rigidez, para então considerar-se os fatores  $\gamma$ .

#### 4.3.2 - DETERMINAÇÃO DO PARÂMETRO DE INSTABILIDADE $\alpha$ PARA PÓRTICO DE MÚLTIPLOS PAVIMENTOS.

Este exemplo baseou-se num exemplo numérico apresentado por FRANÇA (1985), onde se estudou os casos de um pórtico plano com nós rígidos e um outro com nós articulados. Trata-se de um edifício de treze pavimentos, cuja planta do pavimento tipo está apresentada na figura 4.12. No referido exemplo chegou-se a um parâmetro  $\alpha < \alpha_{lim}$  para o pórtico com nós rígidos, indicando que não houve necessidade para a consideração do efeito de segunda ordem. Todavia, para o pórtico com nós articulados o valor do parâmetro  $\alpha$  foi muito alto,  $\alpha > \alpha_{lim}$ , fazendo com que a estrutura fosse inaceitável. A idéia aqui é a de analisar o mesmo pórtico para uma situação intermediária, com nós semi-rígidos.

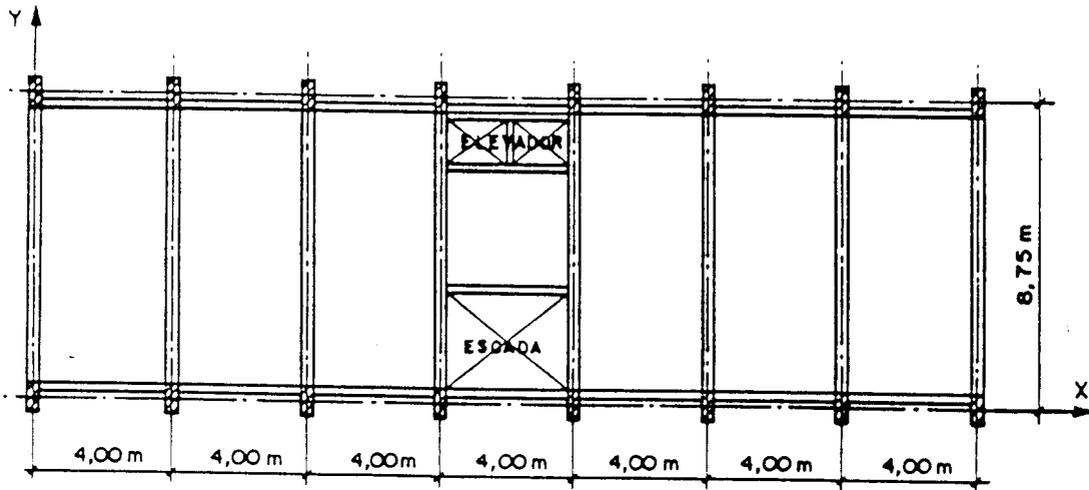


Figura 4.12 - Planta do pavimento tipo. [ FRANÇA (1985) ]

Para este exemplo optou-se pelo tipo de ligação viga-pilar "rígida" por meio de chapas soldadas, ligação VPR-CHS, conforme apresentada na figura 4.13.

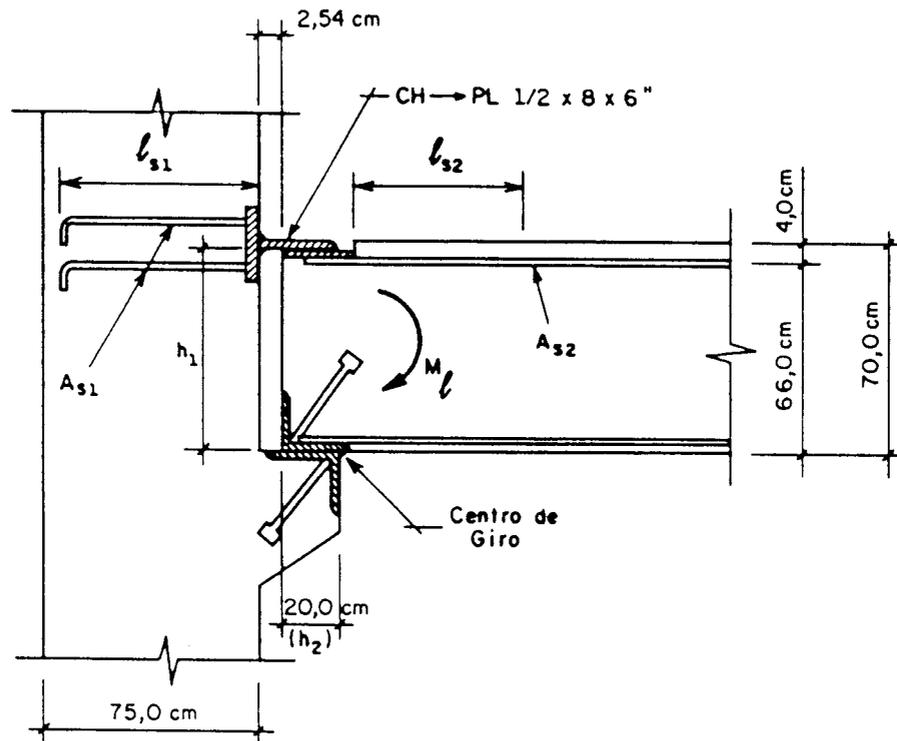


Figura 4.13- Ligação viga-pilar rígida por chapas soldadas.  
(ligação VPR-CHS)



Dados gerais

|  |
|--|
| Pavimentos = 13                              |
| Altura de pavim. = 2,90 m                    |
| Lajes = 10 cm                                |
| $E_c = 27,50 E+6 \text{ KN/m}^2$             |
| Carga total nas fundações = 30,64 MN         |
| Pilares (20x75): $J_x = 0,00703 \text{ m}^4$ |
| Vigas (20x70): $J_x = 0,00572 \text{ m}^4$   |

Dados da ligação

|                               |                              |
|-------------------------------|------------------------------|
| $A_{s1} = 12,5 \text{ cm}^2$  | $e_1 = 2,54 \text{ cm}$      |
| $A_{s2} = 20,0 \text{ cm}^2$  | $h_1 = 70,00 \text{ cm}$     |
| $E_s = 20000 \text{ kN/cm}^2$ | $h_2 = 20,00 \text{ cm}$     |
| CH 1/2x8x6" →                 | $I_{ch} = 2,60 \text{ cm}^4$ |

Foram considerados os seguintes comprimentos de deformação  $l_s$  para as barras:

$$l_{s1} = l_{be} = 70,00 \text{ cm} \quad \text{e} \quad l_{s2} = l_b = 108,0 \text{ cm}$$

Considerou-se o seguinte valor para o braço de alavanca  $z$  na seção resistente ao momento negativo, na extremidade da viga:

$$z \cong 0,87d = 0,87(65,50) = 57,0 \text{ cm}$$

Para esta ligação, o cálculo da deformabilidade à flexão é dado pelas eq. 3.4.3.19, 3.4.3.20 e 3.4.3.21, reescritas a seguir:

$$\lambda_{\phi l1} = \frac{e_1^3}{12E_s I_{ch} h_2} \left[ \frac{e_1^3 A_{s1} h_1^2}{12l_{s1} I_{ch} h_2} + h_2 \right]^{-1}$$

$$\lambda_{\phi l 2} = \ell_{s2} / (E_s A_{s2} z h_1)$$

$$\lambda_{\phi l} = \lambda_{\phi l 1} + \lambda_{\phi l 2}$$

Assim, substituindo-se os valores numéricos nestas expressões tem-se:

$$\lambda_{\phi l 1} = 3,06 \text{ E-06 rad/KN.m}$$

$$\lambda_{\phi l 2} = 6,77 \text{ E-06 rad/KN.m}$$

$$\lambda_{\phi l} = 3,06 \text{ E-06} + 6,77 \text{ E-06} = 9,83 \text{ E-06 rad/KN.m}$$

Para a deformabilidade à flexão da ligação  $\lambda_{\phi l}$ , para uma rigidez à flexão EI para a seção não fissurada da viga de comprimento  $\ell$ , tem-se o seguinte valor para  $\gamma$ :

$$\gamma_i = \gamma_j = [1 - (3.27,5E+6.5,72E-4.9,83E-06)/8,75]^{-1}$$

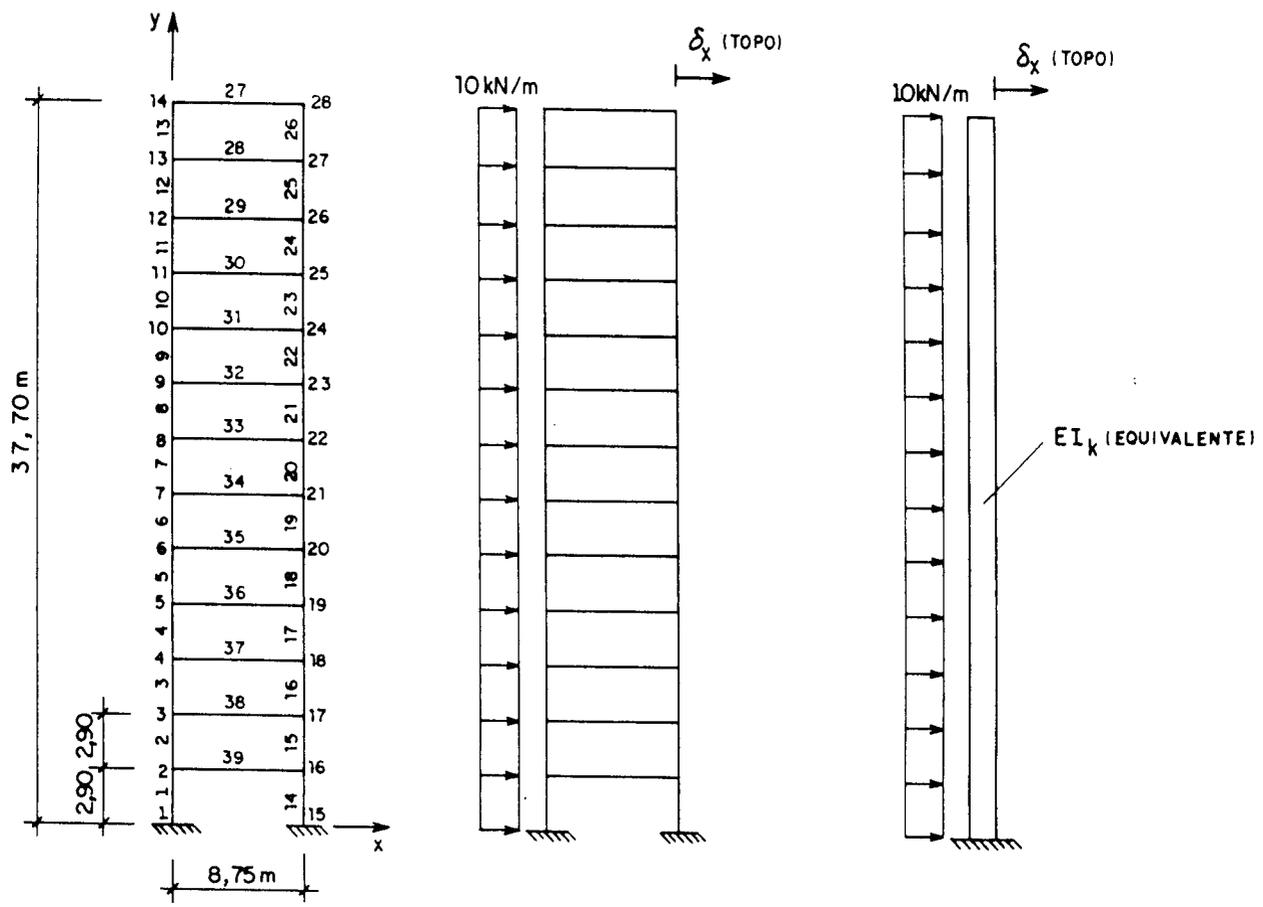
$$\gamma_i = \gamma_j = 0,65$$

Para o pórtico com nós rígidos tem-se:

$$\gamma_i = \gamma_j = 1,0$$

Neste exemplo as vigas foram computadas apenas com a sua seção retangular, não se levando em conta a colaboração da laje.

Na análise do deslocamento lateral do pórtico utilizou-se uma força uniformemente distribuída. A figura 4.14 apresenta o esquema com a discretização, ações e pilar de rigidez equivalente para o pórtico estudado.



a) discretização

b) ações

c) rigidez  
equivalente

Figura 4.14 - Esquemas para o pórtico lateral estudado.

Feito o processamento para os pórticos com nós rígidos e semi-rígidos, respectivamente, obteve-se:

Pórtico com nós rígidos ( $\gamma = 1,00$ )

Deslocamento hor. no topo:  $\delta_x(\text{topo}) = 0,11 \text{ m}$

Rigidez equivalente:  $EI_k(\text{equiv.}) = 183640 \text{ MN.m}^2$

O parâmetro  $\alpha$  na direção  $x$  é dado por:

$$\alpha_x = 37,70 \cdot \sqrt{34,64 / 183640} = 0,51 < 0,60$$

Assim, não se necessita considerar os efeitos de 2ª ordem.

### Pórtico com nós semi-rígidos ( $\gamma = 0,65$ )

Deslocamento hor. no topo:  $\delta_x(\text{topo}) = 0,19 \text{ m}$

Rigidez equivalente:  $EI_k(\text{equiv.}) = 106320 \text{ MN.m}^2$

O parâmetro  $\alpha$  na direção  $x$  é dado por:

$$\alpha_x = 37,70 \cdot \sqrt{34,64 / 106320} = 0,68 > 0,60$$

Deste modo, teria-se um pórtico deslocável, devendo-se considerar o efeito de 2ª ordem. Todavia, como  $\alpha_x$  está ainda próximo de  $\alpha_{lim} = 0,60$ , poderia-se obter um melhor resultado adequando-se o projeto dos elementos que formaram os mecanismos de deformação da ligação.

#### 4.3.3 - ANÁLISE EM PÓRTICO PARA TELHADO DUAS ÁGUAS, PARA GALPÃO DE USO MÚLTIPLO.

A estrutura aqui estudada emprega ligações viga-pilar do tipo VPR-CPAR, apresentada no item 3.4.4 deste trabalho. Os dados geométricos deste exemplo foram extraídos de manual técnico de um fabricante de elementos pré-moldados de concreto, CSM (1990). A figura 4.15 apresenta o pórtico estudado e a figura 4.16 apresenta os detalhes dos elementos da estrutura.

Geralmente este tipo de estrutura é calculada a partir do uso de envoltórias de esforços, onde analisa-se duas situações limites para a ligação viga-pilar, trabalhando ora como uma rótula, ora como um engaste. Neste trabalho, determinou-se analiticamente a deformabilidade da ligação VPR-CPAR e em seguida calculou-se os esforços para a estrutura considerando a semi-rigidez da ligação.

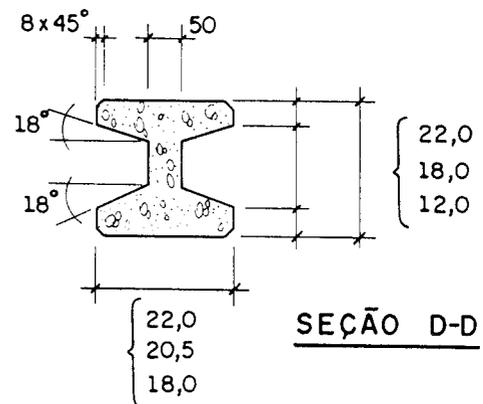
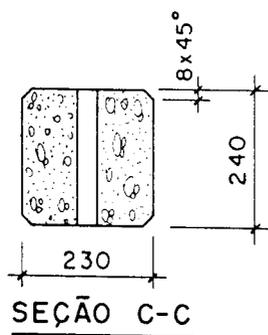
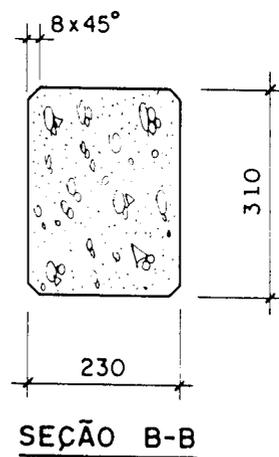
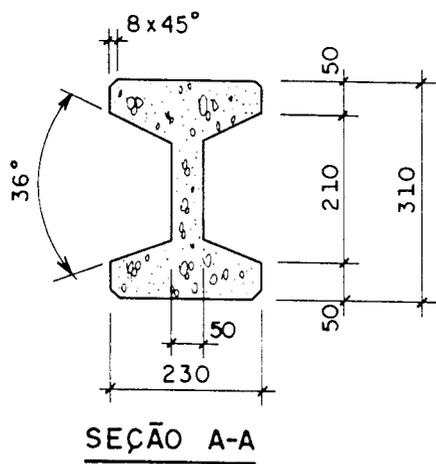
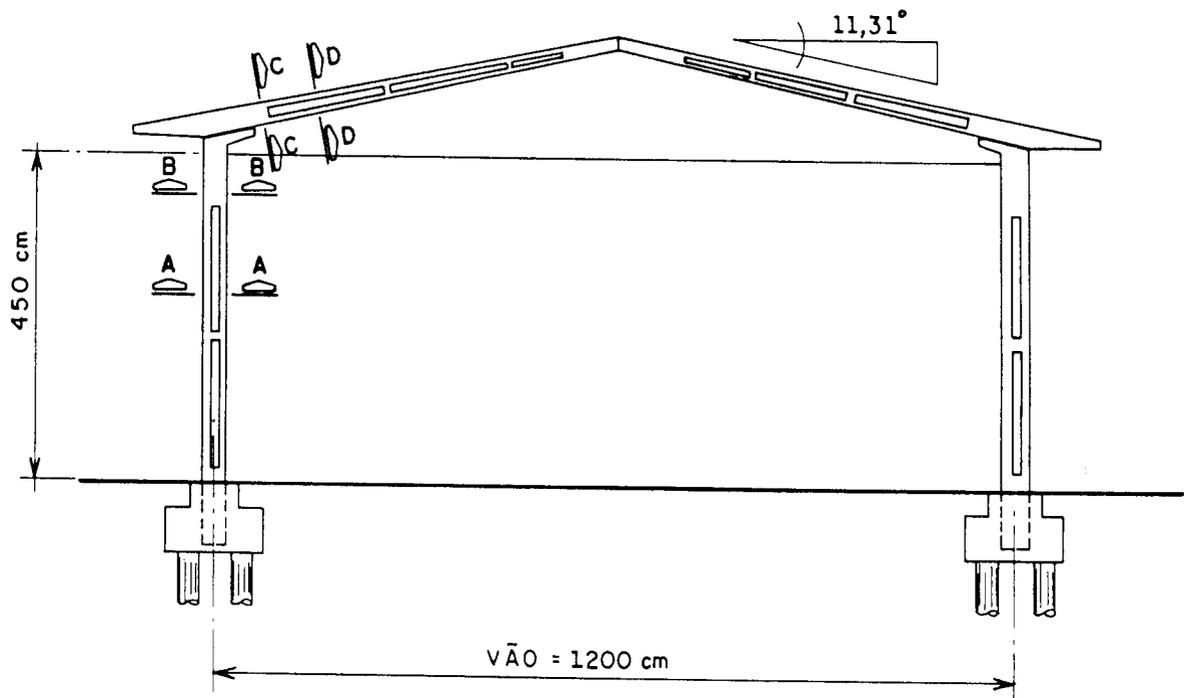


Figura 4.15 - Pórtico com ligações viga-pilar VPR-CPAR.  
 [CSM (1990)]

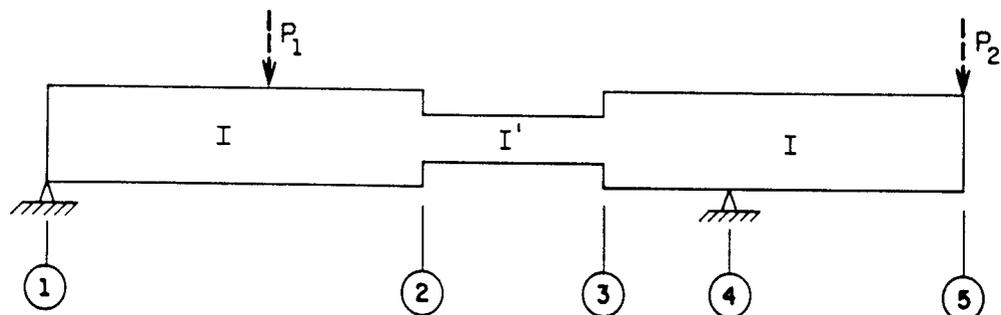


Figura 4.8 - Esquema de viga equivalente, com momento de inércia fictício no trecho da ligação.

Para a comparação dos valores numéricos e dos resultados experimentais para as flechas ao longo da viga, fez-se três simulações numéricas. A primeira foi feita para uma viga monolítica com seção constante, a segunda foi feita para uma viga monolítica com seção reduzida no trecho da ligação, com  $I' = I/3$ , e a terceira foi feita para uma viga com "molas" nas extremidades i e j do trecho da ligação, sendo estas "molas" representadas por parâmetros de restrição  $\gamma$ . A figura 4.9 apresenta a discretização para a viga estudada.

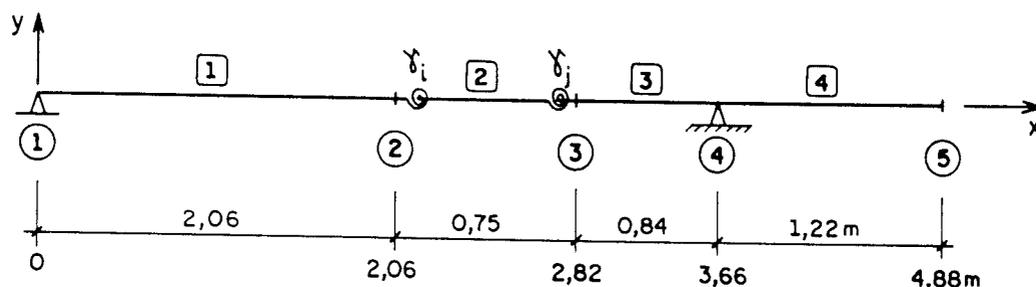


Figura 4.9 - Discretização para a viga estudada.

Para o confronto dos resultados experimentais, no cálculo dos esforços e deslocamentos ao longo da estrutura, considerou-se a rigidez para a seção fissurada, dada em GASTON e KRIZ (1963) por:  $EI = 12111,4 \text{ kN-m}^2$

O momento de inércia (I) da seção é dado por:

$$I = 9,945 \text{ E-04 } m^4$$

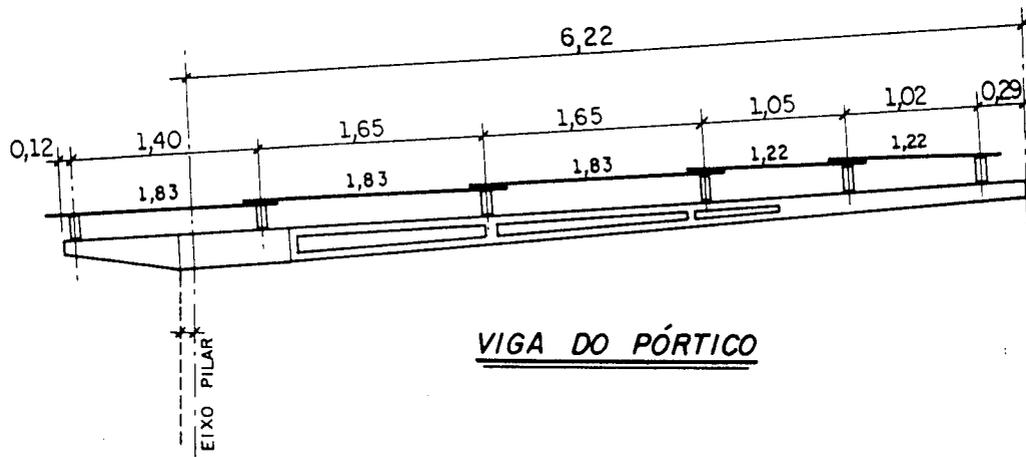
Assim, o módulo de elasticidade equivalente será:

$$E_{eq} = 12,18 \text{ E+06 } kN/m$$

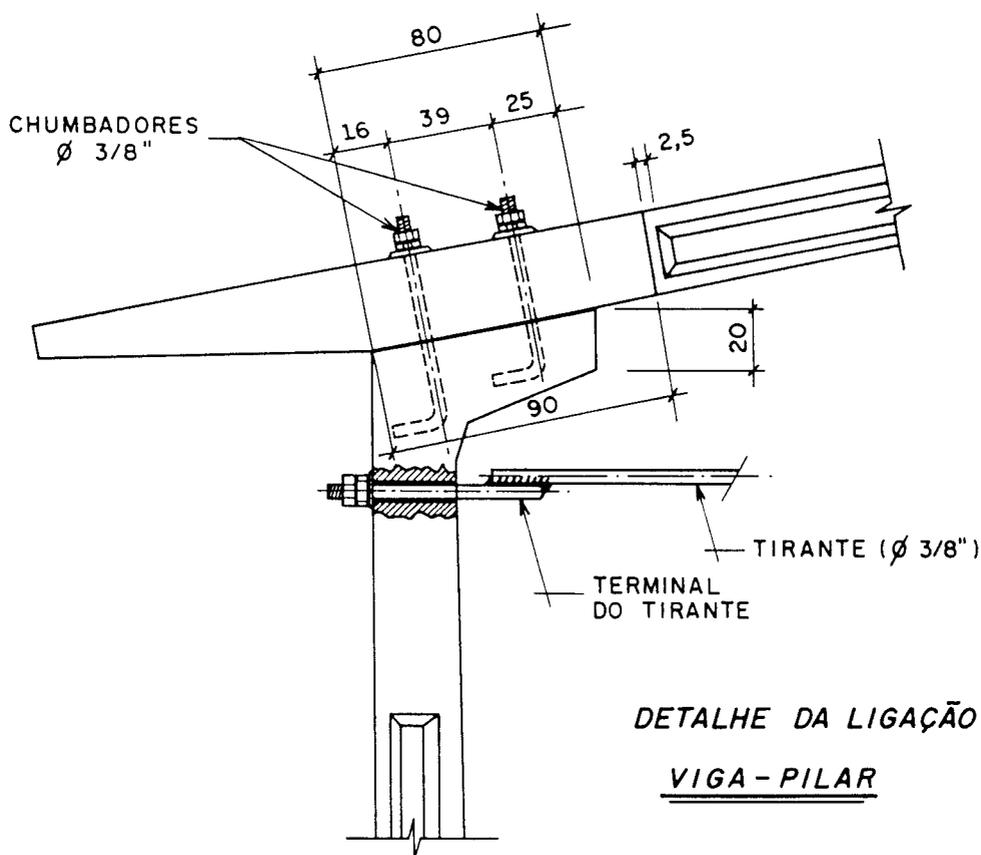
Obtidos os valores numéricos para as flechas, para os cinco pontos discretizados na figura 4.9, comparou-os com os resultados experimentais obtidos para a viga monolítica e para a viga não monolítica com a ligação. No quadro 4.0 apresentam-se os resultados experimentais para as flechas nos protótipos ensaiados e os valores calculados nos modelos de simulação numérica, com um módulo de elasticidade equivalente ( $E_{eq}$ ).

| Quadro 4.0-Deslocamentos verticais (cm): resultados experimentais e valores para as simulações em vigas. |                         |                         |                                    |                         |                                 |
|--|-------------------------|-------------------------|------------------------------------|-------------------------|---------------------------------|
| PONTO  | VIGA MON.<br>(experim.) | VIGA MON.<br>(simulada) | VIGA PRÉ-<br>MOLDADA<br>(experim.) | VIGA (I')<br>(simulada) | VIGA ( $\gamma$ )<br>(simulada) |
| 1  | 0.00                    | 0.00                    | 0.00                               | 0.00                    | 0.00                            |
| 2  | -0.87                   | -0.91                   | -1.50                              | -1.39                   | -1.37                           |
| 3  | -0.48                   | -0.57                   | -0.95                              | -0.95                   | -0.90                           |
| 4  | 0.00                    | 0.00                    | 0.00                               | 0.00                    | 0.00                            |
| 5  | 0.64                    | 0.88                    | 1.44                               | 1.43                    | 1.36                            |

Pode-se observar que os valores obtidos da simulação numérica foram próximos dos resultados experimentais tanto para o protótipo monolítico, quanto para o protótipo não monolítico. Os valores obtidos para a simulação da viga com o momento de inércia reduzido, (I'), no trecho da ligação apresentaram uma forte correlação com os resultados experimentais. Todavia, este procedimento mostra-se de difícil utilização pois o momento de inércia I' deve ser determinado experimentalmente estando em função do detalhamento da ligação e principalmente do chumbador, variando para cada caso. Assim, a utilização do cálculo analítico para a deformabilidade à flexão da ligação torna-se interessante em relação ao procedimento experimental.



a) detalhe da viga do pórtico



b) Detalhe da ligação viga-pilar VPR-CPAR.

Figura 4.16 - Detalhes dos elementos estruturais. [CSM (1990)]

| NO | X (m) | Y (m) | BARRA | NOI | NOF | A (m <sup>2</sup> ) | I <sub>Z</sub> (m <sup>4</sup> ) | ℓ (m) | TISEC |
|----|-------|-------|-------|-----|-----|---------------------|----------------------------------|-------|-------|
| 1  | 0.00  | 0.00  | 1     | 1   | 2   | 7.1E-2              | 5.7E-4                           | 0.80  | 1     |
| 2  | 0.00  | 0.80  | 2     | 2   | 3   | 3.9E-2              | 4.8E-4                           | 3.00  | 2     |
| 3  | 0.00  | 3.80  | 3     | 3   | 4   | 7.1E-2              | 5.7E-4                           | 0.70  | 1     |
| 4  | 0.00  | 4.50  | 4     | 4   | 5   | 5.5E-2              | 2.7E-4                           | 0.66  | 3     |
| 5  | 0.65  | 4.67  | 5     | 5   | 6   | 3.2E-2              | 1.8E-4                           | 1.50  | 4     |
| 6  | 2.12  | 4.92  | 6     | 6   | 7   | 2.9E-2              | 9.8E-5                           | 1.50  | 5     |
| 7  | 3.59  | 5.22  | 7     | 7   | 8   | 2.2E-2              | 2.6E-5                           | 2.47  | 6     |
| 8  | 6.00  | 5.70  | 8     | 8   | 9   | 2.2E-2              | 2.6E-5                           | 2.47  | 6     |
| 9  | 8.43  | 5.22  | 9     | 9   | 10  | 2.9E-2              | 9.8E-5                           | 1.50  | 5     |
| 10 | 9.90  | 4.92  | 10    | 10  | 11  | 3.2E-2              | 1.8E-4                           | 1.50  | 4     |
| 11 | 11.37 | 4.63  | 11    | 11  | 12  | 5.5E-2              | 2.7E-4                           | 0.66  | 3     |
| 12 | 12.00 | 4.50  | 12    | 4   | 12  | 7.9E-5              | 4.9E-10                          | 12.00 | 7*    |
| 13 | 12.00 | 3.80  | 13    | 12  | 13  | 7.1E-2              | 5.7E-4                           | 0.70  | 1     |
| 14 | 12.00 | 0.80  | 14    | 13  | 14  | 3.9E-2              | 4.8E-4                           | 3.00  | 2     |
| 15 | 12.00 | 0.00  | 15    | 14  | 15  | 7.1E-2              | 5.7E-4                           | 0.80  | 1     |

(\* - neste caso a seção tipo 7 foi multiplicada por  $(E_S)/(E_C)$ .)

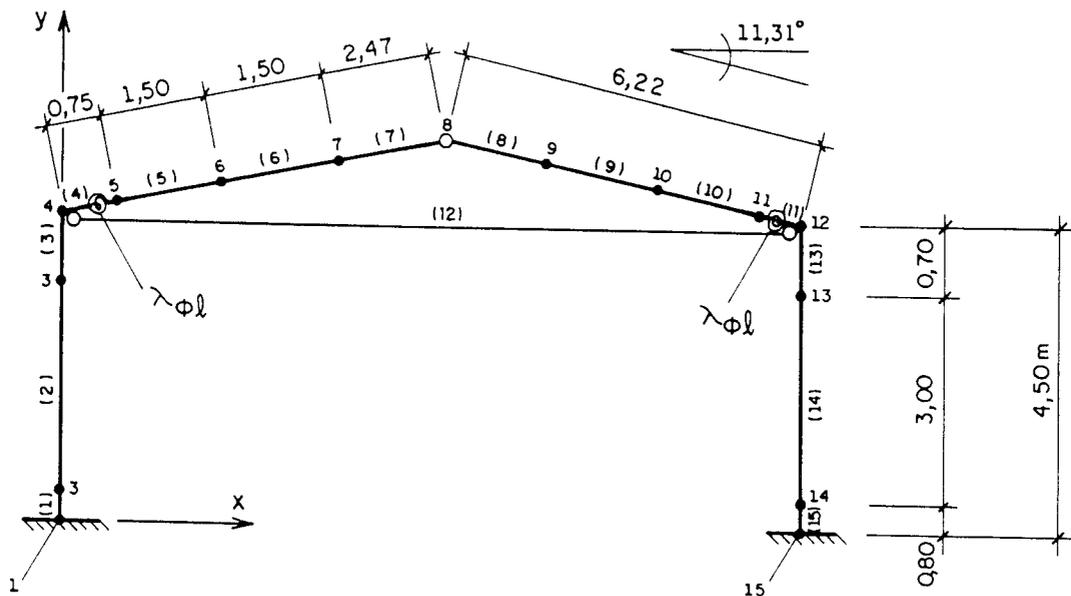


Figura 4.17 - Discretização e características geométricas da estrutura.

Dados da ligação

|                                 |                        |
|---------------------------------|------------------------|
| $E_s = 200E6 \text{ kN/m}^2$    | $d = 0.73 \text{ m}$   |
| $E_c = 28E6 \text{ kN/m}^2$     | $l_c = 0.64 \text{ m}$ |
| $A_{sb} = 7.85E-5 \text{ m}$    | $a = 0.45 \text{ m}$   |
| $I_{vc} \cong 3E-4 \text{ m}^4$ |                        |

Para este exemplo, fez-se a aproximação de  $z \cong 0,87d$ . Sendo  $z = d - 0,5x$ , tem-se  $x \cong 0,26d$ . Assim, obteve-se os seguintes valores:

$$z = 0,63 \text{ m} \quad (z \cong 0,87d)$$

$$x = 0,19 \text{ m} \quad (x \cong 0,26d)$$

Considerou-se o comprimento para a deformação da barra do chumbador como sendo a soma da altura da viga do pórtico, de 24 cm, a um comprimento de ancoragem de referência, considerado para um trecho reto da ancoragem, de 36 cm. Assim, obteve-se:

$$l_s = 0,24 + 0,36 = 0,60 \text{ m}$$

A deformabilidade à flexão para esta ligação é dada pela equação 3.4.4.10, escrita na seguinte forma:

$$\lambda_{\phi l} = \left[ \left( \frac{l_s}{E_s A_s z d} \right) + \left( \frac{3l_c^4 - 4a^3 l_c + a^4}{24E_c I_{vc} z x d} \right) \right]$$

Substituindo-se os valores desta expressão pelos dados fornecidos acima, tem-se:

1<sup>o</sup> termo: (Deformação do chumbador)

$$\frac{0,60}{(200E+6 \cdot 7,85E-5 \cdot 0,63 \cdot 0,73)} = 8,31 \text{ E-05}$$

2<sup>o</sup> termo: (Deformação na viga suporte)

$$\frac{3.0,64^4 - 4.0,45^3 \cdot 0,64 + 0,45^4}{24.200E+6.3E-4.0,63.0,73.0,19} = 2,47 E-06$$

Assim, a deformabilidade na ligação fica:

$$\lambda_{\phi\ell} = \lambda_{\phi\ell 1} + \lambda_{\phi\ell 2} = 8,57 E-05 \text{ rad/kN.m}$$

O fator de rigidez  $\gamma$ , para as molas posicionadas nos nós 4 e 12, nas barras 4 e 11 respectivamente, como indicado na figura 4.17, pode ser obtido por:

$$\gamma_i = \left( 1 + \frac{3.28E+6.3E-4.8,57E-5}{0,66} \right)^{-1} = 0,23$$

Para o cálculo dos esforços e deslocamentos ao longo da estrutura utilizou-se o seguinte carregamento permanente:

Ações nos nós

| NO | F <sub>x</sub> (kN) | F <sub>y</sub> (kN) | M <sub>z</sub> (kN.m) |
|----|---------------------|---------------------|-----------------------|
| 4  | 0.00                | -4.28               | 0.00                  |
| 5  | 0.00                | -6.96               | 0.00                  |
| 6  | 0.00                | -7.36               | 0.00                  |
| 7  | 0.00                | -6.31               | 0.00                  |
| 9  | 0.00                | -6.31               | 0.00                  |
| 10 | 0.00                | -7.36               | 0.00                  |
| 11 | 0.00                | -6.96               | 0.00                  |
| 12 | 0.00                | -4.28               | 0.00                  |

A seguir apresenta-se os resultados para os esforços nas extremidades das barras, deslocamentos nodais e rotações nas ligações semi-rígidas.

Esforços nas extremidades das barras

| BARRA | NO | NORM. (kN) | CORT. (kN) | MOM. (kN.m) |
|-------|----|------------|------------|-------------|
| 1     | 1  | 24.88      | -9.36      | -17.50      |
|       | 2  | -24.88     | 9.36       | 10.01       |
| 2     | 2  | 24.88      | -9.36      | -10.01      |
|       | 3  | -24.88     | 9.36       | -18.09      |
| 3     | 3  | 24.88      | -9.36      | 18.09       |
|       | 4  | -24.88     | 9.36       | -24.64      |
| 4     | 4  | 18.71      | 17.26      | 24.64       |
|       | 5  | -18.71     | -17.26     | -13.20      |
| 5     | 5  | 17.32      | 10.48      | 13.20       |
|       | 6  | -17.32     | -10.48     | 2.52        |
| 6     | 6  | 15.92      | 3.16       | -2.52       |
|       | 7  | -15.92     | -3.16      | 7.26        |
| 7     | 7  | 14.67      | -2.95      | -7.26       |
|       | 8  | -14.67     | 2.95       | 0.00        |
| 8     | 8  | 14.69      | 2.87       | 0.00        |
|       | 9  | -14.69     | -2.87      | 7.11        |
| 9     | 9  | 15.93      | -3.21      | -7.11       |
|       | 10 | -15.93     | 3.21       | 2.80        |
| 10    | 10 | 17.33      | -10.54     | -2.80       |
|       | 11 | -17.33     | 10.54      | -13.52      |
| 11    | 11 | 18.83      | -17.20     | 13.52       |
|       | 12 | -18.83     | 17.20      | -24.59      |
| 12    | 4  | -5.60      | -0.00      | 0.00        |
|       | 12 | 5.60       | 0.00       | 0.00        |
| 13    | 12 | 24.94      | 9.36       | 24.59       |
|       | 13 | -24.94     | -9.36      | 18.03       |
| 14    | 13 | 24.94      | 9.36       | 18.03       |
|       | 14 | -24.94     | -9.36      | 10.06       |
| 15    | 14 | 24.94      | 9.36       | 10.06       |
|       | 15 | -24.94     | -9.36      | 17.55       |

Deslocamentos nodais

| NÓ | DESLOC.X (m) | DESLOC.Y (m) | ROTAC.Z (rad) |
|----|--------------|--------------|---------------|
| 1  | 0.0          | 0.0          | 0.0           |
| 2  | -3.0E-04     | -9.97E-06    | 6.88E-04      |
| 3  | -2.6E-03     | -7.92E-05    | -2.11E-04     |
| 4  | -2.1E-03     | -8.79E-05    | -1.14E-03     |
| 5  | -1.5E-03     | -3.04E-03    | -5.29E-03     |
| 6  | 3.0E-04      | -1.25E-02    | -6.84E-03     |
| 7  | 2.0E-03      | -2.09E-02    | -4.17E-03     |
| 8  | 1.3E-06      | -1.13E-02    | 1.33E-04      |
| 9  | -1.9E-03     | -2.07E-02    | 4.22E-03      |
| 10 | -2.3E-04     | -1.22E-02    | 6.79E-03      |
| 11 | 1.6E-03      | -2.87E-03    | 5.16E-03      |
| 12 | 2.2E-03      | -8.81E-05    | 1.13E-03      |
| 13 | 2.6E-03      | -7.94E-05    | 1.97E-04      |
| 14 | 3.0E-04      | -9.99E-06    | -6.81E-04     |
| 15 | 0.0          | 0.0          | 0.0           |

Rotações nas ligações semi-rígidas

|               |                                       |
|---------------|---------------------------------------|
| Para o nó 4:  | $\phi_{\ell} = -2.46E-03 \text{ rad}$ |
| Para o nó 12: | $\phi_{\ell} = 2.46E-03 \text{ rad}$  |

Pode-se observar que neste caso, para o carregamento permanente, a ligação conseguiu mobilizar os deslocamentos de rotação e assim ofereceu resistência aos momentos nos nós. Embora o fator de restrição  $\gamma$  para os nós 4 e 12, nas barras 4 e 11 respectivamente, tenha sido relativamente pequeno,  $\gamma=0.23$ , os esforços de momentos fletores nestes pontos chegaram a atingir 90% dos esforços que se teria para o caso com nós rígidos, com  $\gamma=1$ .

#### 4.3.4 - CÁLCULO DOS ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS EM UM PÓRTICO PLANO, CONSIDERANDO AS DEFORMABILIDADES NAS LIGAÇÕES VIGA-PILAR E NAS FUNDAÇÕES.

Neste exemplo analisou-se um pórtico plano simples para algumas situações de carregamento, considerando-se as deformabilidades nas ligações viga-pilar e nas fundações.

A figura 4.18 apresenta o pórtico estudado. Para a ligação viga-pilar utilizou-se um tipo de ligação articulada com apoio simples sobre almofada de elastômero não fretado e com chumbador, ligação VPA-ENC. Esta ligação foi discutida no item 3.4.2 deste trabalho. Para as fundações utilizou-se blocos sobre estacas, conforme indicado na figura 4.19.

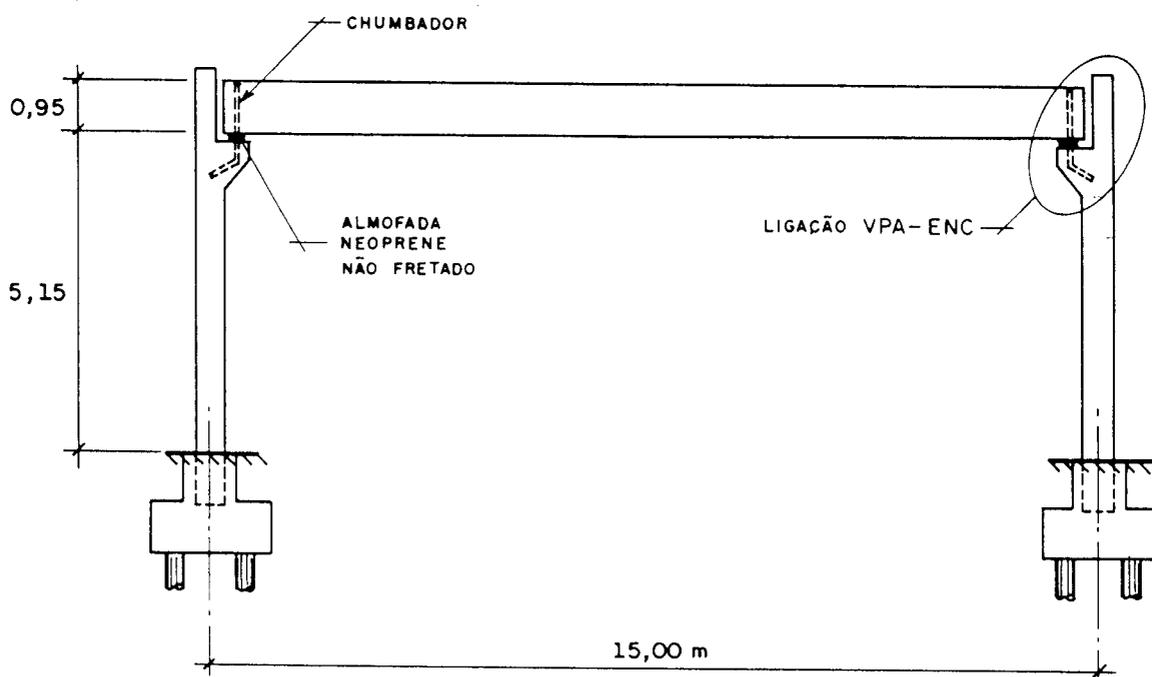


Figura 4.18 - Esquema do pórtico estudado.

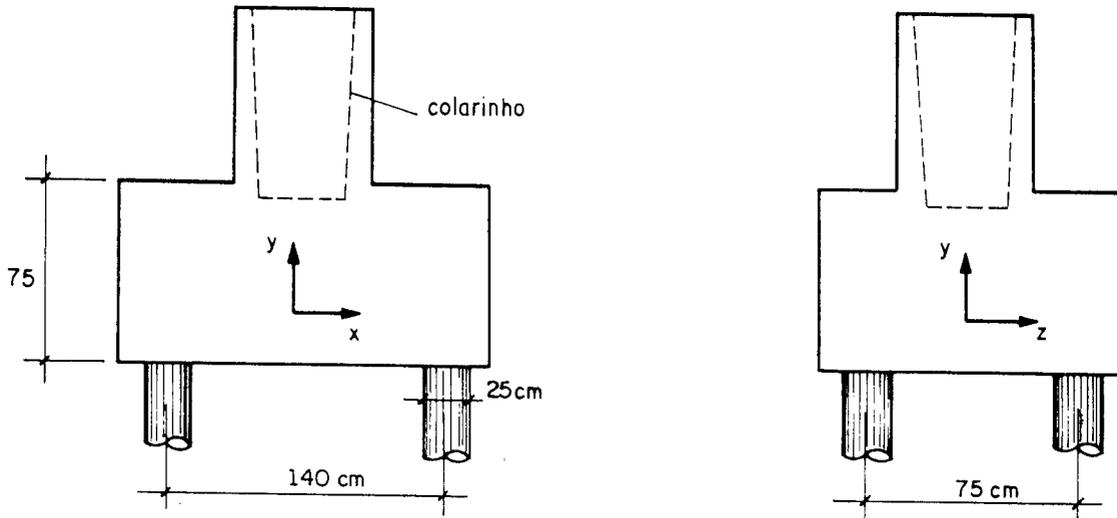


Figura 4.19 - Blocos de fundação adotados.

A figura 4.20 apresenta a discretização utilizada para o problema. Os dados geométricos da estrutura são apresentados a seguir:

| NO | X (m) | Y (m) | BARRA                                    | NOI | NOF | A (m <sup>2</sup> ) | I <sub>Z</sub> (m <sup>4</sup> ) | ℓ (m) | TISEC |
|----|-------|-------|--|-----|-----|---------------------|----------------------------------|-------|-------|
| 1  | 0.00  | 0.00  | 1  | 1   | 2   | 0.20                | 4.2E-3                           | 5.15  | 1     |
| 2  | 0.00  | 5.00  | 2  | 2   | 3   | 0.22                | 2.5E-3                           | 15.00 | 2     |
| 3  | 15.00 | 5.00  | 3  | 3   | 4   | 0.20                | 4.2E-3                           | 5.15  | 2     |
| 4  | 15.00 | 0.00  | $E_C = 34.4 \text{ E}+06 \text{ kN/m}^2$ |     |     |                     |                                  |       |       |

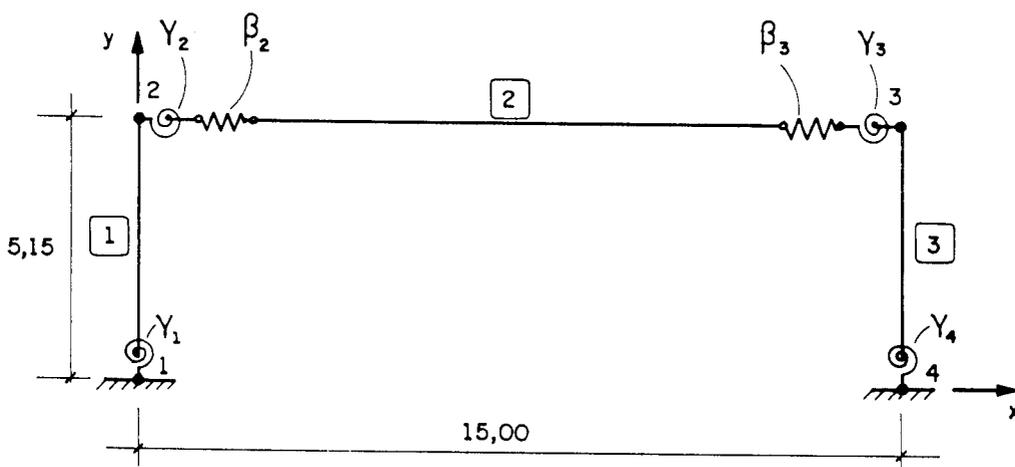


Figura 4.20 - Discretização da estrutura.

A figura 4.21 apresenta as situações de carregamento impostas a estrutura.

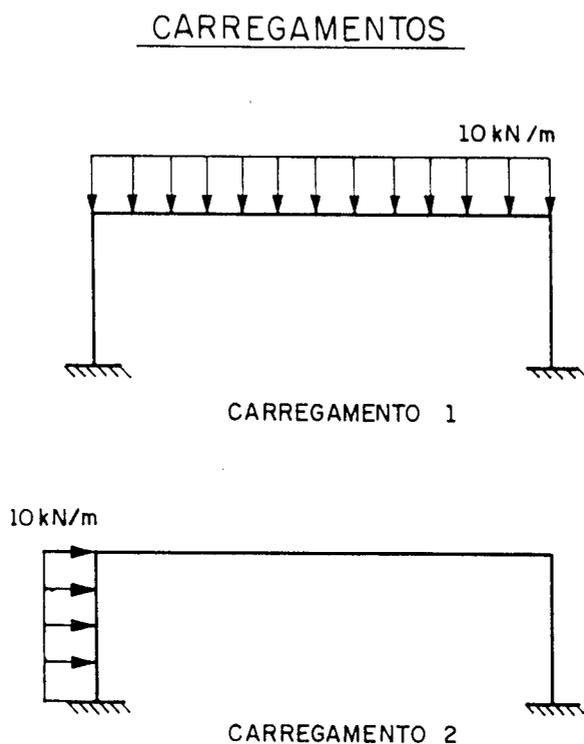


Figura 4.21 - Situações de carregamento para a estrutura.

Para a ligação viga-pilar VPA-ENC, foram dados:

| Dados do elastômero (não fretado) |   |
|-----------------------------------|---|
| $a = 15 \text{ cm}$               | $A_n = 0.045 \text{ m}^2$                   |
| $b = 30 \text{ cm}$               | $A_o = 0.044 \text{ m}^2$                   |
| $h_n = 1.0 \text{ cm}$            | $G = 1.0 \text{ MPa} = 1000 \text{ kN/m}^2$ |
| Dados do chumbador                |   |
| $b_b = 20 \text{ mm}$             | $E_s = 200 \text{ E}+06 \text{ kN/m}^2$     |
| $A_s = 3.14 \text{ cm}^2$         | $l_s = 95 \text{ cm}$ (altura da viga)      |

A deformabilidade à flexão para este tipo de ligação foi estudada no ítem 3.4.2.2 deste trabalho, podendo assumir duas hipóteses básicas. A primeira é de que a deformabilidade axial do chumbador é desprezível em relação à deformabilidade à compressão de meia almofada de elastômero, considerando-se apenas esta última para o cálculo. A segunda, e a que foi assumida neste exemplo, é a que leva em conta as deformabilidades do chumbador e do elastômero para o cálculo.

Para se estimar uma relação geométrica entre os deslocamentos no chumbador  $\Delta h_b$  e a deformação no elastômero  $\Delta h_n$ , estimou-se preliminarmente a relação entre a deformabilidade axial no chumbador  $\lambda_{tb}$  e a deformabilidade à compressão simples para um trecho da almofada do elastômero  $\lambda_{cn}$ . Esta relação corresponde à relação entre  $\Delta h_b$  e  $\Delta h_n$  para a aplicação de forças unitárias em  $\lambda_{tb}$  e  $\lambda_{cn}$ , respectivamente. Em seguida, considerou-se a linha neutra coincidindo com o ponto de intersecção da reta que une os deslocamentos  $\Delta h_b$  e  $\Delta h_n$  ao eixo horizontal.

A) Deformabilidade axial na barra do chumbador:

$$\lambda_{tb} = \frac{0,95}{200E+06 \cdot 3,14E-04} = 1,5 E-05 \text{ m/kN}$$

B) Deformabilidade à compressão para meia almofada (EN):

$$\lambda_{cn} = \frac{0,01}{4 \cdot 1000 \cdot (4,5E-2/2) \cdot (1+0,25 \cdot (7,5/1)^2)} = 7,38E-6 \text{ m/kN}$$

C) Deformabilidade à compressão para 1/3 da almofada (EN):

$$\lambda_{cn} = \frac{0,01}{4 \cdot 1000 \cdot (4,5E-2/3) \cdot (1+0,25 \cdot (5,0/1)^2)} = 2,30E-5 \text{ m/kN}$$

D) Deformabilidade à compressão para 1/4 da almofada (EN):

$$\lambda_{cn} = \frac{0,01}{4 \cdot 1000 \cdot (4,5E-2/4) \cdot (1+0,25 \cdot (3,8/1)^2)} = 4,82E-5 \text{ m/kN}$$

Considerando-se os valores acima obteve-se os seguintes valores:

| RELAÇÃO $\lambda_{tb} / \lambda_{cn}$ | valor de (x) escrito em função de (a) |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| A / B $\cong$ 2.00                    | x $\cong$ 0.33a                       |
| A / C $\cong$ 0.65                    | x $\cong$ 0.38a                       |
| A / D $\cong$ 0.30                    | x $\cong$ 0.42a                       |

Para os valores do quadro acima, considerou-se a hipótese de que apenas 1/3 da almofada esteja comprimida, tomando-se as relações de  $\lambda_{tb} / \lambda_{cn} = 0.65$  e  $x = 0.38a$ . Para uma distribuição de tensões no elastômero não fretado conforme a indicada na figura 3.4.10, tem-se que:

$$z = (a/2 - 0.5x) = 0.31a$$

O cálculo da deformabilidade à flexão, dado pela equação 3.4.2.9, é escrito por:

$$\lambda_{\phi l} = \left( \frac{l_s}{E_s A_s z^2} \right) + \left( \frac{h_n}{4Gz^2 x b (1 + 0,25 (x/h_n)^2)} \right)$$

Substituindo-se os valores desta expressão, tem-se:

$$\lambda_{\phi l} = (7,0 \text{ E-}3) + (8,8 \text{ E-}3) = 15,8 \text{ E-}3 \text{ rad/kN.m}$$

Para o cálculo do parâmetro  $\gamma$  considerou-se toda a deformação na ligação influenciando na rigidez da viga, conforme indicado na figura 4.20. Assim, tem-se o valor de  $\gamma$  dado por:

$$\gamma_i = \left( 1 + \frac{3.34,4\text{E}+2,5\text{E}-4.15,8\text{E}-3}{15,00} \right)^{-1} = 0,04$$

Este valor para  $\gamma$  corresponde a uma baixíssima capacidade de restrição à rotação da ligação, o que já era esperado.

A deformabilidade ao cisalhamento pode ser obtida a partir da equação 3.4.2.1a, dada por:

$$\lambda_{\tau} = \left[ \frac{GA_o}{h_n} + \frac{3\pi E_s d_b^4}{16(h_{\ell} + 2d_b)^3} \right]^{-1}$$

Substituindo-se os valores na expressão acima, tem-se:

$$\lambda_{\tau} = [(4,4 \text{ E}+3) + (150,8 \text{ E}+3)]^{-1} = 6,4 \text{ E}-6 \text{ m/kN}$$

Uma outra opção é obter  $\lambda_{\tau}$  pela equação 3.4.2.1b, dada por:

$$\lambda_{\tau} = \left[ \frac{GA_o}{h_n} + \frac{12\alpha^3 E_s I_b}{6 + \alpha^3 h^3} \right]^{-1}$$

com:

$$\alpha = \left[ \frac{K_c d_b}{4E_s I_b} \right]^{1/4}$$

e

$$K_c = 127 \sqrt{f'_c} / (d_b)^{2/3} \quad [ \text{MPa/mm} ]$$

Para  $f'_c = 33,5 \text{ MPa}$ , tem-se:

$$K_c = 127 \sqrt{33,5} / (20)^{2/3} = 99,8 \text{ MPa/mm}$$

Assim,  $\alpha$  será dado por:

$$\alpha = [(99,8 \cdot 20) / (4 \cdot 200 \text{E}+3 \cdot 7,85 \text{E}-9)]^{1/4} = 23,74 \text{ m}^{-1}$$

Substituindo os valores na expressão para  $\lambda_{\tau}$ , tem-se:

$$\lambda_{\tau} = \left[ \frac{GA_o}{h_n} + \frac{12\alpha^3 E_s I_b}{6 + \alpha^3 h_{\ell}^3} \right]^{-1} = [(4,4 \text{ E}+3) + (41,92 \text{ E}+3)]^{-1}$$

Assim:

$$\lambda_{\tau} = 2,16 \text{ E}-05 \text{ m/kN}$$

Os valores obtidos pelo uso das equações 3.4.2.1a e 3.4.2.1b foram bem diferentes. Embora, seja difícil avaliar qual seja o melhor resultado, a equação 3.4.2.1b apresenta uma consistência melhor do ponto de vista teórico. Assim, adotou-se um valor para a deformabilidade de  $\lambda_\tau = 2,16 \text{ E-5 m/kN}$ , que oferecerá uma menor restrição aos deslocamentos na ligação.

O parâmetro  $\beta$  para uma das extremidades na viga deve ser calculado pela expressão:

$$\beta_i = \frac{\ell_v}{E_c A_v} \left( 2\lambda_\tau + \frac{\ell_v}{E_c A_v} \right)^{-1}$$

Substituindo-se os valores na expressão acima tem-se que:

$$\beta_i = \beta_j = \frac{5,00}{34,4\text{E}+06 \cdot 0,22} \left( 2 \cdot 2,2\text{E-}5 + \frac{5,00}{34,4\text{E}+06 \cdot 0,22} \right)^{-1} = 0,015$$

Assim, a ligação restringe pouco aos deslocamentos horizontais.

Para a estimativa da deformabilidade à flexão na direção x, indicada na figura 4.19, do bloco sobre duas linhas de estacas, considerou-se as deformações axiais das estacas, sendo o bloco um elemento rígido, onde se utilizou a equação 3.5.2.14. Adotou-se, ainda, as seguintes condições:

| DADOS DO SOLO   | DADOS DA FUNDAÇÃO  |
|---|--|
| TIPO DE SOLO: Argila rijá<br>$E_{\text{SO}} = 20000 \text{ kN/m}^2$<br>$\nu_{\text{SO}} = 0,25$ | $E_c = 25,5 \text{ E}+06 \text{ kN/m}^2$<br>$I = 1,92 \text{ E-}04 \text{ m}^4$<br>$A = 0,049 \text{ m}^2 ; \ell = 10,0 \text{ m}$ |

O módulo de reação do solo R, para  $n=0$ , é tal que:

$$R = \sqrt[4]{\frac{25,5(1,92\text{E-}4)}{20,0}} = 0,13$$

Assim, tem-se uma estaca flexível, pois  $\ell/R > 4$ . Para estas condições do solo e da estaca, considerou-se a estaca trabalhando por ponta. Para este caso, a rigidez axial para uma linha de duas estacas é dada por:

$$K = 2AE/\ell = (2.0,049.25,5E+6)/10,0 = 25 E+4 \text{ kN/m}$$

Assim, a deformabilidade à flexão para a fundação fica:

$$\lambda_{\phi_f} = 2/Ke^2 = 2/(25E+4.1,40^2) = 4 E-06 \text{ rad/kN.m}$$

O parâmetro de restrição  $\gamma$  para as bases dos pilares devido à deformabilidade à flexão na fundação é dado por:

$$\gamma_i = \left( 1 + \frac{3.34,4E+.4,2E-4.4E-6}{5,15} \right)^{-1} = 0,75$$

A seguir apresenta-se os resultados para os esforços e deslocamentos na estrutura para cada solicitação.

a) Para o carregamento 1 ( carga distribuida na viga )

Esforços nas extremidades das barras

| BARRA | NO | NORM (kN) | CORT (kN) | MOM. (kN.m) |
|-------|----|-----------|-----------|-------------|
| 1     | 1  | 75.0      | -2.5      | - 2.1       |
|       | 2  | -75.0     | 2.5       | -10.9       |
| 2     | 2  | 2.5       | 75.0      | 10.9        |
|       | 3  | -2.5      | 75.0      | -10.9       |
| 3     | 3  | 75.0      | 2.5       | 10.9        |
|       | 4  | -75.0     | -2.5      | 2.1         |

Deslocamentos nodais

| NÓ | DESLOC.X (m) | DESLOC.Y (m) | ROTAC.Z (rad) |
|----|--------------|--------------|---------------|
| 1  | 0.0          | 0.0          | 0.0           |
| 2  | 1.7E-04      | -5.6E-05     | -1.5E-04      |
| 3  | -1.7E-04     | -5.6E-05     | 1.5E-04       |
| 4  | 0.0          | 0.0          | 0.0           |

Deslocamentos nas ligações

| BARRA | NO | DESL.X (m) | DESL.Y (m) | ROT.Z (rad) |
|-------|----|------------|------------|-------------|
| 1     | 1  | 0.0        | 0.0        | 8.3E-05     |
|       | 2  | 0.0        | 0.0        | 0.0         |
| 2     | 2  | 3.3E-04    | 0.0        | -1.5E-02    |
|       | 3  | -3.3E-04   | 0.0        | 1.5E-02     |
| 3     | 3  | 0.0        | 0.0        | 0.0         |
|       | 4  | 0.0        | 0.0        | -8.3E-05    |

b) Para o carregamento 2 ( força horizontal no nó 2 )

Esforços nas extremidades das barras

| BARRA | NO | NORM (kN) | CORT (kN) | MOM. (kN.m) |
|-------|----|-----------|-----------|-------------|
| 1     | 1  | -9.7E-02  | 42.5      | 85.3        |
|       | 2  | 9.7E-02   | 9.1       | 0.7         |
| 2     | 2  | 9.1       | -9.7E-02  | -0.7        |
|       | 3  | -9.1      | 9.7E-02   | -0.7        |
| 3     | 3  | 9.7E-02   | 9.1       | 0.7         |
|       | 4  | -9.7E-02  | -9.1      | 45.9        |

Deslocamentos nodais

| NÓ | DESLOC.X (m) | DESLOC.Y (m) | ROTAC.Z (rad) |
|----|--------------|--------------|---------------|
| 1  | 0.0          | 0.0          | 0.0           |
| 2  | 5.0E-03      | 7.2E-08      | -1.1E-03      |
| 3  | 3.8E-03      | -7.2E-08     | -1.1E-03      |
| 4  | 0.0          | 0.0          | 0.0           |

Deslocamentos nas ligações

| BARRA | NO | DESL. X (m) | DESL. Y (m) | ROT. Z (rad) |
|-------|----|-------------|-------------|--------------|
| 1     | 1  | 0.0         | 0.0         | -3.4E-04     |
|       | 2  | 0.0         | 0.0         | 0.0          |
| 2     | 2  | 1.2E-03     | 0.0         | 10.4E-04     |
|       | 3  | -1.2E-03    | 0.0         | 9.8E-04      |
| 3     | 3  | 0.0         | 0.0         | 0.0          |
|       | 4  | 0.0         | 0.0         | -1.8E-04     |

No caso deste pórtico o maior interesse de aplicação foi quanto à transmissão das forças horizontais na ligação viga-pilar. A consideração da semi-rigidez na ligação apresentou uma alternativa intermediária entre a restrição total ou a liberação aos deslocamentos. Desta forma pode-se obter melhores resultados para os esforços nos elementos e para as reações da estrutura.

## CAPÍTULO V

### 5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

A segurança do cálculo estrutural está relacionada com o grau de conhecimento que se possui do comportamento da estrutura e dos seus elementos. Quando se trata de uma estrutura pré-moldada, ou de uma estrutura onde os elementos sejam interligados após a sua execução, a consideração da semi-rigidez nas ligações assume um fator importante para que se conheça o seu comportamento.

A análise de estruturas com nós semi-rígidos no regime linear apresenta-se como primeira, porém uma boa aproximação. Esta análise aponta para um objetivo direto que é a obtenção de esforços e deslocamentos mais realísticos na estrutura, oferecendo valores para o dimensionamento e para a análise da estabilidade. Em um segundo momento, o conhecimento do comportamento das estruturas pré-moldadas possibilitará o desenvolvimento de novos sistemas estruturais pré-moldados.

Ficou claro, durante o desenvolvimento deste trabalho, o papel que a determinação das deformabilidades nas ligações tem para esta análise estrutural, recebendo um carácter prioritário de estudo. A metodologia para a determinação de deformabilidades baseada no equacionamento dos mecanismos básicos de deformação presentes na ligação, apresentou-se como um método interessante

pois fornece parâmetros que possibilitam o desenvolvimento de critérios para a análise de rigidez em ligações, e ainda poderão orientar estudos no campo experimental.

As comparações de resultados do cálculo analítico de deformabilidades em ligações com alguns resultados experimentais existentes na literatura, apresentaram coerência dos cálculos teóricos, no regime linear. Todavia, não se pode tirar conclusões definitivas devidos aos poucos dados e resultados experimentais que se tem disponível, dificultando-se fazer uma análise mais consistente.

É intenção futura, no prosseguimento desta pesquisa, a análise experimental de ligações típicas viga-pilar rígidas com o objetivo de calibrar e melhorar o equacionamento desenvolvido a partir dos mecanismos básicos de deformação dos elementos da ligação.

Atingidos estes objetivos, a pesquisa deverá, ainda, prosseguir em dois sentidos. O primeiro deles é a automatização do cálculo para a determinação das deformabilidades nas ligações, gerando os dados para programas de análises de pórticos com nós semi-rígidos. O segundo é o estudo do comportamento não linear das ligações, visando sistematizar os mecanismos de ruptura de ligações típicas de estruturas pré-moldadas, que serão úteis para critérios de dimensionamento.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, (ABNT), (1985).  
*NBR-9062: Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado.* RJ.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, (ABNT), (1986).  
*NBR-9783: Aparelhos de apoio de elastômero fretado.* RJ.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, (ABNT), (1986).  
*NBR-9784: Aparelhos de apoio de elastômero fretado: compressão simples.* RJ.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, (ABNT), (1986).  
*NBR-9785: Aparelhos de apoio de elastômero fretado: distorção.* RJ.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, (ABNT), (1986).  
*NBR-9786: Aparelhos de apoio de elastômero fretado: Deslizamento.* RJ.
- ALONSO, U. R., (1989). *Dimensionamento de fundações profundas.* São Paulo. Edgard Blucher. 169p.
- BALLARIN, A. W., (1993). *Desempenho das ligações de elementos estruturais pré-moldados de concreto.* São Carlos, Tese (Doutorado). EESC-USP.

- BAZANT, Z., (1979). *Methods of foundation engineering*. Czechoslovakia. Elsevier Scientific.
- BIRKELAND, A. B., BIRKELAND, A. B., (1966). Connections in precast concret construction. *Journal of Americam Concret Institute*. v.63, n.3, p.345-368.
- BLJUGER, F. E., (1988). *Design of precast concret structures*. New York, John Wiley & Sons. 297p.
- BRAGA, W. A., (1985). *Aparelhos de apoio das estruturas*. São Paulo, Edgard Blücher. 107p.
- BRUN, P., PICARD, A., (1976). *Étude d'un assemblage imparfaitement rigide et des effets de son utilisation dans un multi-étagé.*, Rapport gct76-03. Quebec, Universitté Laval, Departament de Génie Civil.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETÓN, (1990). CEB/FIP MODEL CODE 1990, *Bulletin d'information N° 205*. final draft.
- CATANIA, M., MENDITTO, G., (1978). *Problema di statica delle strutture prefabbricate*. Quaderni n° 5 dei corsi di aggiornamento. Milano. CTE.
- CINTRA, J.C.A., (1983), *Carregamento lateral em estacas*. São Carlos, EESC-USP.
- CINTRA, J.C.A., ALBIERO, J.H., (1983). *Capacidade de carga e recalques de fundações diretas*. São Carlos, EESC-USP.
- CSM, (1990). *Manual técnico*. Santa Catarina. Metalúrgica CSM.

- DEI POLI, S., DI PRISCO, M., GAMBAROVA, P.G., (1992). Shear response, deformations, and subgrade stiffness of a dowel bar embedded in concrete. *(ACI) Structural Journal*. v.89, n.6.
- DOLAN, C.W., STANTON, S.F., ANDERSON, R.G., (1987). Moment resistant connections and simple connections. *PCI Journal*. v.32, n.2, p.62-74.
- DOLAN, C.W., PESSIKI, S.P., (1989). Model testing of precast concrete connections. *PCI Journal*. Mar-Apr. p.84-103.
- FAFARD, M., PICARD, A., BEAULIEU, D., (1990). Analyse des structures avec joints à rigidité partielle: une approche unifiée. *Canadian Journal of Civil Engineering*. v.17, p.730-738.
- FRANÇA, R.L.S., (1985). Exemplo de cálculo do esforço de 2ª ordem em um edifício de concreto armado. In: REUNIÃO ANUAL DO IBRACON São Paulo. 43p.
- GASTON, A., KRIZ, B., (1964). Connections in precast concrete structures: Scarf joints. *PCI Journal*. v.9, n.6.
- HOLMES, A., MARTIN, B., (1983). *Analysis and design of structural connections: Reinforced concrete and Steel*. England. Ellis Horwood.
- LAFRAUGH, R.W., MAGURA, D.D., (1966). Connections in precast concrete: Column base plates. *PCI Journal*.
- LEONHADT, F., MÖNING, E., (1977). *Construções de concreto: princípios básicos sobre a armação de estruturas de concreto armado*. v.3. R.J.. Editora Interciência.

- LEONHADT, F., MÖNING, E., (1984). *Construções de concreto: casos especiais de dimensionamento de estruturas de concreto armado*. v.2. R.J.. Editora Interciência.
- MARTIN, L.D., (1980). Derivation of stiffness coefficients for column base plates. *PCI Journal*. Jan-Feb. appendix A. p.39-41.
- MONFORTON, G.R., WU, T.S., (1963). Matrix analysis of semi-rigidly connected frames. *Journal of the structural Division, (ASCE)*. v.89, Dec., p.13-42.
- ORDOÑEZ, J. A. F., (1974), *Prefabricacion teórica y práctica*, Barcelona, v.2.
- PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE, (PCI), (1973), *Manual on design of connections for precast prestressed concrete*, Illinois
- ROEDER, C.W., STANTON, J.F., TAYLOR, A.W., (1987). Performance of elastomeric bearing. NCHRP, Transportation Research Board. Report 298, (Oct.).