

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ESTUDO DE UM MODELO DE DANO PARA O CONCRETO:  
FORMULAÇÃO, IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA E APLICAÇÃO  
COM O EMPREGO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

ENG. MANOEL DA SILVA ÁLVARES

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título "Mestre em Engenharia de Estruturas".

**COMISSÃO JULGADORA**

Prof. Dr. Sergio Persival Baroncini Proença (Orientador)

Prof. Dr. Mounir Khalil El Debs

Prof. Dr. Tarcisio Barreto Celestino

**SUPLENTES**

Prof. Dr. Libânio Miranda Pinheiro

Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan

SÃO CARLOS, DEZEMBRO DE 1993  
SÃO PAULO, BRASIL

À minha esposa Delaine  
e ao meu filho Frederico Manoel  
dedico este trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Sergio Persival Baroncini Proença, pela orientação segura, permanente incentivo e amizade demonstrada durante a realização deste trabalho.

Ao Prof. Toshiaki Takeia e funcionários do laboratório do Departamento de Estruturas, pela competência na realização dos experimentos.

A Maria Nadir Minatel pelo auxílio no trabalho de referência bibliográfica.

A Rosi Aparecida Jordão Rodrigues pelo atendimento e consideração.

A Francisco Carlos G. Brito e Sylvia Helena Morette Villani pelos trabalhos de desenho.

Ao colega Geraldo Donizetti de Paula pelo apoio e amizade demonstrada ao longo destes anos.

A minha mãe e irmãs pela luta por dias melhores, muito obrigado.

Ao Prof. Dr. Alfredo Ribeiro da Costa pelo apoio no momento certo.

A Universidade Católica de Goiás e CAPES/PICD pela confiança e apoio financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

A DEUS por tudo.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS  
LISTA DE SÍMBOLOS  
RESUMO  
ABSTRACT

### CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1	Considerações preliminares e síntese do conteúdo da dissertação.....	1
1.2	Breve exposição dos modelos constitutivos para o concreto..	3
1.3	Uma breve exposição da mecânica do dano contínuo com especial referência ao concreto.....	10
1.4	Evidências experimentais do dano no concreto.....	13
1.5	Aspectos gerais da mecânica do dano contínuo.....	30
1.5.1	Generalidades.....	30
1.5.2	Variáveis de dano.....	31
1.5.2.1	Definição.....	31
1.5.2.2	Hipóteses de isotropia.....	32
1.5.2.3	Conceito de deformação equivalente.....	32
1.5.2.4	Dano anisótropo.....	35

### CAPÍTULO 2 - MODELO CONSTITUTIVO DE MAZARS PARA CONCRETO

2.1	Introdução.....	37
2.2	Comportamento microestrutural do concreto.....	38
2.2.1	Considerações sobre a microestrutura do concreto..	38
2.2.2	Propagação das microfissuras no concreto: observações experimentais e simulação numérica....	39
2.3	Modelo constitutivo de Mazars.....	42
2.3.1	Hipóteses fundamentais.....	42
2.3.2	Definição de deformação equivalente.....	44
2.3.3	Critério de dano.....	45

2.4	Lei de evolução da variável de dano.....	47
2.4.1	Dano em tração e compressão uniaxial.....	48
2.4.2	Dano no caso de solicitação pluriaxial.....	49
2.5	Análise paramétrica do modelo de Mazars.....	54

### CAPÍTULO 3 - IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA E ENSAIOS REALIZADOS

3.1	Generalidades.....	64
3.2	Testes de compressão uniaxial.....	65
3.3	Testes de compressão diametral.....	70
3.4	Processo analítico de identificação paramétrica.....	72
3.5	Resultados numéricos.....	73

### CAPÍTULO 4 - EMPREGO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM LEI CONSTITUTIVA DE DANO

4.1	Alguns comentários sobre o método dos elementos finitos.....	75
4.1.1	Introdução.....	75
4.1.2	Reduções a problemas bidimensionais.....	78
4.2	Análise por elementos finitos isoparamétricos bidimensionais.....	79
4.3	Elementos finitos isoparamétricos degenerados.....	82
4.3.1	Generalidades.....	82
4.3.2	Sistemas de coordenadas.....	84
4.3.3	Geometria do elemento.....	87
4.3.4	Campo dos deslocamentos.....	88
4.3.5	Deformações e tensões.....	91
4.3.6	Integração numérica discretizando a espessura em estratos ("layered model").....	93
4.4	Análise por elemento finito com lei constitutiva a dano de Mazars.....	97

### CAPÍTULO 5 - APLICAÇÃO A VIGAS DE CONCRETO ARMADO: ANÁLISE EXPERIMENTAL E NUMÉRICA

5.1	Introdução.....	102
5.2	Elemento estrutural: características e experimentação..	103

5.3	Análise numérica.....	106
5.3.1	Análise com elementos finitos tridimensionais....	108
5.3.2	Análise com elementos finitos bidimensionais....	111
5.3.2.1	Procedimento iterativo para regularização da resposta.....	112
5.3.2.2	Procedimento para reduzir o problema de não-objetividade.....	113
5.3.2.3	Resultados numéricos.....	116

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES

6.1	Algumas considerações sobre o estudo desenvolvido.....	120
6.2	Conclusões gerais e perspectivas.....	122

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	B-1
---------------------------------	-----

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA	TÍTULO	PÁG.
1.1	Classificação dos modelos constitutivos para o concreto.....	04
1.2	a) Influência da anisotropia inicial em testes uniaxiais.....	15
	b) Influência da anisotropia inicial em testes triaxiais.....	15
1.3	Mapa de fissuras em diferentes níveis de deformação...	17
1.4	Curva deformação volumétrica-tensão axial.....	18
1.5	Emissão acústica ocorrida durante carregamento e descarregamento.....	19
1.6	Redução progressiva da rigidez inicial.....	20
1.7	Emissão acústica em correspondência à diferentes estágios de carregamento em um espécime de concreto com abertura inicial em uma das extremidades.....	21
1.8	a) Interface meio-agregado.....	22
	b) Relação $dh/dV$ correspondente aos quatro níveis de carregamento para os pontos A-B.....	23
	c) Relação $dh/dV$ correspondente aos quatro níveis de carregamento para os pontos C-D.....	23
	d) Curva de compressão uniaxial.....	23
1.9	a) Energia dissipada por um material ideal.....	24
	b) Energia dissipada por um espécime de concreto.....	24
1.10	a) Mudanças no módulo inicial para diferentes relações água/cimento.....	26
	b) Energia dissipada para diferentes relações água/cimento.....	26

1.11	Curva tensão-deformação típica em tração uniaxial.....	27
1.12	Curvas $\sigma_1 \div \epsilon_1$ , $\sigma_1 \div \epsilon_3$ e $\sigma_2 \div \epsilon_1$ para diferentes níveis da menor tensão principal.....	28
1.13	Curvas tensão-deformação para testes de compressão triaxial com diferentes níveis intermediários de tensão.....	29
1.14	Classificação dos modos de ruptura.....	29
1.15	Elemento de volume com dano.....	31
1.16	Hipótese de deformação equivalente.....	34
2.1	Superfície de contato entre os agregados.....	39
2.2	Modos básicos de abertura da superfície de uma fissura.....	40
2.3	Aberturas das microfissuras no concreto.....	41
2.4	Comportamento unilateral do concreto.....	42
2.5	a) comportamento experimental.....	43
	b) modelo constitutivo.....	43
2.6	Prova de tração uniaxial: definição de $\epsilon_{d0}$ .....	45
2.7	Superfícies de ruptura.....	46
2.8	Espaço das deformações principais.....	47
2.9	a) Microfissuração em tração.....	48
	b) Microfissuração em compressão.....	48
2.10	Tração uniaxial a) curva experimental.....	53
	b) relação constitutiva.....	53
	Compressão uniaxial c) curva experimental.....	53
	d) relação constitutiva.....	53
2.11	a) Influência dos parâmetros A e $\beta$ .....	57
	b) Lei constitutiva de um material elastoplástico.....	57
2.12	a) Curva $\rho$ - $\eta$ para valores de $A > 1$ .....	58
	b) Diagrama $\sigma$ - $\epsilon$ de uma prova de tração uniaxial.....	58
2.13	Comportamento qualitativo do concreto a) tração.....	59
	b) compressão... ..	59
2.14	a) Influência do parâmetro $\epsilon_{d0}$ .....	61
	b) Influência do parâmetro $A_T$ .....	61
	c) Influência do parâmetro $B_T$ .....	62



2.15	a) Influência do parâmetro $B_c$ .....	62
	b) Influência dos parâmetros $A_c$ e $B_c$ .....	63
3.1	Esquema da prensa servocontrolada.....	65
3.2	Detalhe dos extensômetros externos no corpo de prova submetido à compressão uniaxial.....	66
3.3	Destaque da posição do extensômetro interno.....	67
3.4	Avaliação do módulo de elasticidade (dados coletados da prensa).....	68
3.5	Curvas $\sigma$ - $\epsilon$ : extensômetros externos e interno.....	68
3.6	Curva tensão-deformação típica dos ensaios realizados em compressão uniaxial.....	69
3.7	Teste de compressão diametral.....	70
3.8	Curva força-deslocamento transversal para compressão diametral.....	71
3.9	Curvas tensão-deformação: experimental e numérica.....	73
4.1	a) Elemento finito isoparamétrico de 8 nós.....	79
	b) Exemplos de funções de forma.....	79
4.2	Posição dos pontos de Gauss e valores dos ponderadores.....	81
4.3	a) Elemento finito de volume.....	83
	b) Elemento finito isoparamétrico de volume degenerado.....	83
	c) Elemento finito isoparamétrico degenerado.....	83
4.4	a) Sistema de referência global.....	87
	b) Sistema de coordenadas nodais.....	87
	c) Sistema de coordenadas curvilíneas.....	87
	d) Sistema de coordenadas locais.....	87
4.5	Deslocamentos de um ponto da 'normal' ao ponto k.....	89
4.6	a) Subdivisão da seção transversal em estratos.....	94
	b) Diagrama de esforços normais.....	94
4.7	Resultantes dos esforços por unidade de comprimento...	96
4.8	Representação uniaxial do processo iterativo.....	100

5.1	Geometria e armação das vigas.....	104
5.2	Posição dos relógios comparadores e aplicação do carregamento.....	105
5.3	Distribuição das fissuras (viga 5 muito armada; viga 3 pouco armada).....	106
5.4	a) Relação constitutiva do concreto.....	107
	b) Relação constitutiva do aço.....	107
5.5	Discretização em elementos finitos tridimensionais...	108
5.6	a) Resultados numéricos: viga super armada.....	109
	b) Resultados numéricos: viga normalmente armada.....	110
	c) resultados numéricos: viga pouco armada.....	110
5.7	Instabilidade numérica da resposta $\sigma$ - $\epsilon$ .....	111
5.8	Procedimento iterativo.....	113
5.9	Discretização em elementos finitos bidimensionais....	117
5.10	a) Resultados numéricos: viga super armada.....	118
	b) Resultados numéricos: viga normalmente armada.....	118
	c) Resultados numéricos: viga pouco armada.....	119

## LISTA DE SÍMBOLOS

### GREGOS

- $\alpha_T, \alpha_C$  ..... Componentes da combinação linear  $0 \leq \alpha_T, \alpha_C \leq 1$
- $\beta_{ik}$  ..... Rotação do ponto k em torno do eixo i
- $\Gamma$  ..... Superfície do domínio
- $\delta \underline{u}, \delta \underline{\epsilon}$  ..... Variações dos campos de deslocamentos e deformações
- $\delta_{1k}, \delta_{2k}$  ..... Deslocamentos nas direções de  $\bar{v}_{1k}$  e  $\bar{v}_{2k}$
- $\delta$  ..... Tolerância pré-fixada (no item 4.4)
- $\epsilon_i$  ..... Deformação segundo a direção i
- $\epsilon_p$  ..... Deformação permanente
- $\langle \epsilon_i \rangle_+$  ..... Parte positiva da deformação principal na direção i
- $\tilde{\epsilon}$  ..... Deformação equivalente
- $\epsilon_{do}$  ..... Deformação correspondente ao esforço máximo em uma prova de tração uniaxial
- $\tilde{\epsilon}_{corrig}$  ..... Deformação equivalente corrigida
- $\epsilon_M$  ..... Nível de deformação máxima
- $\epsilon_{Ti}, \epsilon_{Ci}$  ..... Componentes de tração e compressão da deformação principal
- $\epsilon_V^+$  ..... Variável cinemática representativa do estado local de extensão
- $\xi$  ..... Coordenada linear na direção da espessura
- $\bar{\xi}$  ..... Inclinação da curva no ponto de início de dano
- $\nu$  ..... Coeficiente de Poisson

$\xi, \eta$ .....Coordenadas curvilíneas  
 $\sigma_i$ .....Tensão normal segundo a direção  $i$   
 $\underline{\sigma}$ .....Tensor de tensões  
 $\langle \sigma_i \rangle$ .....Parte negativa da tensão principal  $\sigma_i$   
 $\langle \underline{\sigma} \rangle_+, \langle \underline{\sigma} \rangle_-$ .....Componentes, positiva e negativa, do tensor de tensões  $\underline{\sigma}$   
 $\tilde{\sigma}$ .....Esforço efetivo  
 $\tilde{\underline{\sigma}}$ .....Tensor de tensões efetivas  
 $\sigma_0$ .....Tensão de início de dano, correspondente a  $\epsilon_{d0}$   
 $\sigma_t$ .....Resistência à tração  
 $\underline{\Psi}$ .....Vetor resíduo  
 $\psi_0$ .....Energia elástica livre  
 $\Omega$ .....Volume do corpo estudado  
 $\delta \underline{u}, \delta \underline{\epsilon}$ .....Variações dos campos de deslocamentos e deformações  
 $\delta_{1k}, \delta_{2k}$ .....Deslocamentos nas direções de  $\bar{v}_{1k}$  e  $\bar{v}_{2k}$   
 $\delta$ .....Tolerância pré-fixada (no item 4.4)

#### ROMANOS

$A_T$  e  $B_T$ .....Parâmetros do modelo relativos à tração uniaxial  
 $A_C$  e  $B_C$ .....Parâmetros do modelo relativos à compressão uniaxial  
 $\underline{a}^T$ .....Vetor dos  $\underline{n}$  parâmetros a serem identificados  
 $\underline{b}$ .....Vetor de forças de volume

$\underline{\underline{C}}_n$ .....	Matriz de conexão entre os graus de liberdade globais e locais
$D_n$ .....	Dano local
$\underline{\underline{D}}$ .....	Tensor constitutivo elástico de quarta ordem com dano anisótropo
$\underline{\underline{D}}_0$ .....	Tensor constitutivo elástico de quarta ordem do material íntegro
$\underline{\underline{D}}$ .....	Tensor simétrico de quarta ordem
$D$ .....	variável escalar de dano
$D_T$ .....	Componente da variável de dano em tração
$D_C$ .....	Componente da variável de dano em compressão
$D$ .....	Diâmetro do corpo de prova (no item 3.3)
$E_0$ .....	Módulo de elasticidade (Young) do material íntegro
$\tilde{E}$ .....	Módulo de Young do material com dano
$E$ .....	Função erro
$F$ .....	Força sobre a superfície de área $S$ e normal $\underline{n}$
$f(\tilde{\epsilon}, D)$ .....	Função de dano
$F(\tilde{\epsilon})$ .....	Função contínua e positiva da deformação equivalente $\tilde{\epsilon}$
$\underline{f}_n^e$ .....	Vetor de forças nodais equivalentes
$\mathcal{S}$ .....	Operador diferencial de primeira ordem
$g_t$ .....	Energia total dissipada por unidade de volume em tração uniaxial
$G_f$ .....	Energia de fratura por unidade de área
$g_c$ .....	Energia total dissipada por unidade de volume em compressão uniaxial
$H_1$ .....	Função degrau de Heaviside
$h$ .....	Espessura do contínuo no ponto considerado

$\underline{\underline{I}}$ .....Tensor identidade de quarta ordem  
 $\underline{I}$ .....Matriz identidade  
 $\underline{J}$ .....Matriz jacobiana  
 $\underline{K}_n$ .....Matriz de rigidez do elemento finito n  
 $\ell^*$ .....Comprimento característico do elemento finito  
 $M_x, M_y$  e  $M_{xy}$ .....Momentos fletores e volventes  
m.....Número de estratos  
 $\underline{n}$ .....Normal que individualiza a seção do sólido  
 $\underline{N}$ .....Matriz das funções de forma  
n.....Número de elementos  
 $\tilde{N}_i$ .....Funções de interpolação geométrica  
 $N_i$ .....Funções de forma  
 $N_x, N_y$ .....Esforços normais  
P.....Carga de 'pico' (no item 3.3)  
 $\underline{p}$ .....Vetor de forças de superfície  
P.....Carga aplicada  
 $\underline{q}_n$ .....Vetor dos graus de liberdade  
 $Q_x, Q_y$ .....Esforços cortantes  
 $\underline{R}$ .....Vetor da carga total aplicada  
S.....Área de uma seção do domínio  
 $\tilde{S}$ .....Área resistente efetiva  
 $S_0$ .....Área total de defeitos  
 $s_k$ .....Espessura da casca no ponto k  
t.....Espessura do corpo de prova (no item 3.3)  
 $\underline{T}$ .....Matriz de transformação  
 $\underline{u}_n$ .....Vetor campo de deslocamentos

$u, v$  e  $w$ .....Deslocamentos de um ponto genérico no sistema global  
 $u', v'$  e  $w'$ .....Componentes do deslocamento no sistema local  
 $x'_i$   
 $y^c(x, \underline{a})$ .....Resposta numérica, dependente dos parâmetros  $\underline{a}$   
 $y^s(x)$ .....Resposta experimental  
 $\underline{x}$ .....Vetor posição de um ponto do elemento  
 $x_i, y_i$ .....Coordenadas dos  $m$  pontos do elemento finito  
 $\bar{x}_i$ .....Versores dos eixos cartesianos  
 $x'_i$ .....Coordenadas locais  
 $\bar{x}', \bar{y}'$  e  $\bar{z}'$ .....Versores unitários nas direções  $\underline{x}', \underline{y}'$  e  $\underline{z}'$   
 $w_i, w_j$ .....Fatores ponderadores  
3D.....Tridimensional  
2D.....Bidimensional

## RESUMO

O trabalho consiste no estudo e aplicação de um modelo constitutivo não-linear, baseado na Mecânica do Dano, para análise do comportamento de elementos estruturais em concreto.

O modelo de dano isótropo adotado é analisado em todos os seus aspectos fundamentais, destacando-se suas hipóteses básicas, o critério de início e propagação de dano, a lei de evolução da variável escalar representativa do processo de deterioração e a correspondência entre cada parâmetro do modelo e o desenvolvimento da curva tensão-deformação uniaxial do material.

A identificação dos parâmetros do modelo, e a determinação das propriedades do concreto, é realizada com base em testes de compressão uniaxial e diametral. Em particular, nos testes de compressão uniaxial, além dos extensômetros externos usa-se um outro no interior do corpo de prova para melhor descrição do comportamento 'pós-pico' da curva tensão-deformação.

Quanto à implementação numérica do modelo matemático, segundo a técnica dos elementos finitos, destaca-se o uso de elementos isoparamétricos degenerados para o estudo tridimensional.

Os resultados numéricos (análise bidimensional e tridimensional) fornecidos pelo modelo de dano são confrontados com os experimentais de vigas em concreto armado (biapoiadas e com diferentes taxas de armadura).



## ABSTRACT

This work comprises the studies and application of a non-linear constitutive model based on Continuum Damage Mechanics for analysing the behaviour of concrete structural elements.

The isotropic damage model adopted is analysed in all of its fundamental aspects, emphasizing the basic hypothesis, the damage threshold, the law of evolution of the scalar variable representative of the degradation process and the relationship between each parameter of the model and the uniaxial stress-strain curve development.

The identification of the parameters and the determination of concrete properties, is performed on the basis of uniaxial and diametral compression tests. Aiming to have a better description of the stress-strain curve at softening region, the uniaxial compression test is developed using three strain gauges, two external and one internal to the specimen.

On what concerns to the numerical implementation of the mathematical model, according to the finite element technique, it must be emphasized the use of degenerate isoparametric elements for the tridimensional studies.

The numerical results (bidimensional and tridimensional analysis) supplied by the damage model are compared with the experimental results obtained from reinforced concrete beams (simply supported and with different reinforcement rates).

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES E SÍNTESE DO CONTEÚDO DA DISSERTAÇÃO

Desde a introdução do método dos elementos finitos para análise de estruturas de concreto armado, muita ênfase tem sido dada ao desenvolvimento de modelos constitutivos para os materiais constituintes, sobretudo os modelos que descrevem o comportamento não-linear, e suas inter-relações.

O desenvolvimento de técnicas experimentais sofisticadas (que permitem observar a evolução microestrutural do material e, por consequência, individualizar a natureza de seu comportamento macroestrutural), a disponibilidade de meios de cálculo mais potentes e o aperfeiçoamento dos métodos numéricos permitem, entre outros aspectos, identificar parâmetros de modelos através da descrição do trecho

descendente da curva tensão-deformação (trecho "softening"), verificar condições de segurança em elementos estruturais e analisar estruturas com alto grau de complexidade (centrais nucleares, edifícios altos, pontes de grande vão, etc.).

Nesta dissertação é feito um estudo crítico do modelo de dano para carregamento proporcional proposto por MAZARS (1984). A análise qualitativa do modelo é feita com base em um confronto de resultados numéricos (análise por elementos finitos) e experimentais de vigas em concreto armado.

### Rápida descrição do conteúdo desta dissertação

No capítulo 1, introdução da dissertação, mostra-se uma síntese das principais proposições apresentadas na bibliografia para descrever o comportamento não-linear do concreto. Em seguida uma especial atenção é dada às evidências experimentais de dano no concreto, aos aspectos gerais da mecânica do dano e aos modelos constitutivos isótropo e anisótropo.

No capítulo 2 se apresenta o modelo de dano para carregamento proporcional proposto por Mazars. Inicialmente coloca-se em evidência o dano no concreto como um processo resultante da evolução do estado de microfissuração. No que diz respeito ao modelo de Mazars dá-se uma particular atenção ao critério de dano, à lei de evolução da variável representativa e ao estudo dos parâmetros do modelo.

O capítulo 3, que trata da identificação dos parâmetros característicos do modelo, mostra os processos para determinação das curvas experimentais de tração e compressão (compressão diametral e uniaxial) e o processo analítico (por mínimos quadrados) utilizado para determinação da melhor aproximação numérica e, conseqüentemente, dos melhores parâmetros.

No capítulo 4 faz-se uma exposição sobre a utilização do método dos elementos finitos, com especial referência ao emprego de elementos finitos tridimensionais degenerados. Também vem descrito o algoritmo utilizado para a resolução do

problema não-linear incremental.

O capítulo 5 ilustra a aplicação da lei constitutiva de dano a estruturas em concreto armado (vigas biapoiadas). Destaca-se neste capítulo a descrição do processo de determinação da curva experimental carga-deslocamento e o confronto destes resultados com os numéricos para dois tipos de discretizações (tridimensional e plana). Neste capítulo são também descritos os problemas de ordem numérica que surgiram (estabilidade e objetividade dos resultados) e os procedimentos adotados para contorná-los.

Finalmente as conclusões deste estudo são apresentadas no capítulo 6.

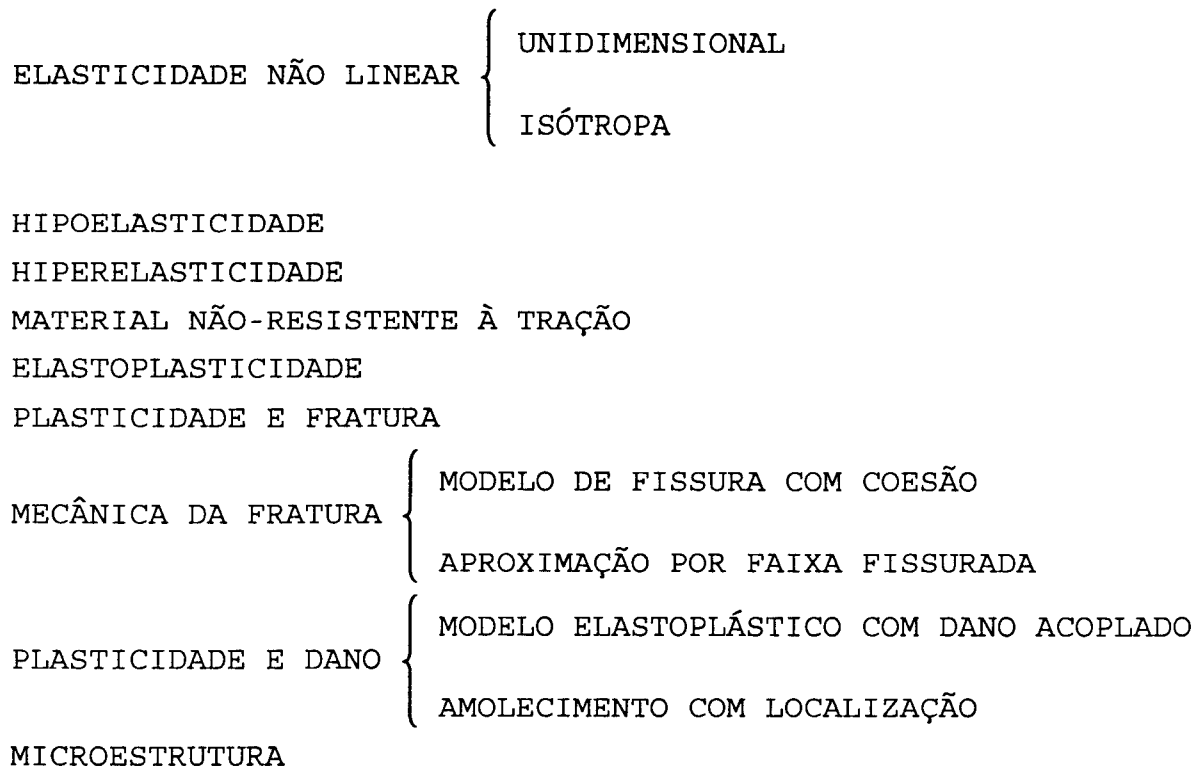
## 1.2 BREVE EXPOSIÇÃO DOS MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO

Nas últimas duas décadas intensivas atividades de pesquisa tem sido desenvolvidas no campo dos modelos constitutivos para o concreto, com o objetivo de descrever o comportamento não-linear do material para fins de aplicação em engenharia.

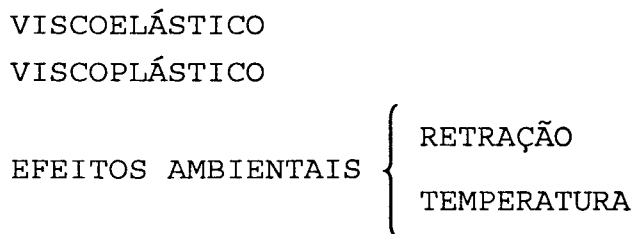
A complexa natureza do concreto (heterogeneidade, resposta assimétrica à tração e à compressão, mudanças nas propriedades mecânicas devidas à evolução da microfissuração), produz uma enorme dificuldade para formular um modelo constitutivo completo e geral. Não obstante esse fato, modelos baseados em elasticidade, teoria da plasticidade e, mais recentemente, mecânica do dano tem sido propostos, procurando reproduzir algumas das propriedades do material e exibindo, cada um deles, um bom desempenho dentro de uma determinada faixa de aplicabilidade.

Na literatura encontram-se diversos trabalhos intencionados a classificar os modelos constitutivos para o concreto, como por exemplo: ASCE (1982), CHEN (1982), BANGASH (1989), ISDRA (1989) e CEDOLIN (1982). A figura 1.1 apresenta um resumo das diferentes proposições, listando-as de acordo com a sua fundamentação teórica, sem observância de uma ordem de importância ou sequência cronológica.

MODELOS QUE NÃO CONSIDERAM VARIAÇÃO NO TEMPO  
(MATERIAL INVÍSCIDO)



MODELOS QUE CONSIDERAM A VARIAÇÃO DE PROPRIEDADES NO TEMPO



MODELOS DE DANO

ISÓTROPO  
ANISÓTROPO

Figura 1.1 Classificação dos modelos constitutivos para o concreto

Os modelos elásticos não-lineares apresentam, basicamente, uma expressão que representa uma relação não-linear reversível entre os estados de tensão e deformação. A formulação unidimensional de SAENZ (1965), constitui-se de uma expressão analítica representativa do comportamento à compressão e envolve quatro parâmetros do material (resistência máxima à compressão e correspondente deformação; deformação última; módulo de elasticidade inicial). Este tipo de modelo pode ser facilmente estendido à estados multiaxiais considerando também propriedades de isotropia e ortotropia.

Um modelo isótropo para análises multiaxiais, é representado em partes denominadas "volumétrica" e de "forma", que são particularmente relacionadas às componentes esféricas e desviadoras (anti-esféricas) dos estados de tensão e deformação. A lei elástica não-linear expressa os módulos de compressibilidade volumétrica (K) e secante de cisalhamento (G) como funções de invariantes dos tensores de tensão e deformação, assim a propriedade de isotropia é mantida. KUPFER; GERSTLE (1973), CEDOLIN; DEI POLI (1977) fornecem importantes contribuições para tal linha de pensamento.

O modelo ortotrópico de LIU; NILSON; SLATE (1972) deriva diretamente de uma prova de compressão biaxial de concreto. A relação constitutiva pode ser observada como aquela de SAENZ (1965) estendida ao estado biaxial. Os autores fazem referência a direções principais de tensões e deformações e incluem relações aptas a descrever estados combinados de compressão e tração.

O modelo elástico não-linear de OTTOSEN (1979) é baseado em hiperelasticidade, no sentido em que postula a existência de uma energia elástica. O modelo descreve com boa exatidão o comportamento do concreto nas fases de endurecimento ("hardening") e amolecimento ("softening") em condições uniaxial, biaxial e triaxial de carregamento. Contudo, ele não permite considerar a irreversibilidade de deformações.

Os modelos hipoelásticos são formulações incrementais que relacionam linearmente os incrementos (ou taxas) de tensão com

incrementos (ou taxas) de deformação. Os módulos tangente, nestes modelos, são expressos como funções do estado de tensão; assim a resposta incremental torna-se dependente da história do carregamento. Neste campo, o trabalho de DARWIN; PECKNOLD (1974) é adequado para análises bidimensionais e considera o concreto como um material ortotrópico elástico não-linear. ELWIN; MURRAY (1976) generalizam a proposição de Darwin para situações triaxiais.

As denominações hiperelástica e hipoelástica foram propostas por TRUESDELL (1955), que formulou as bases para o desenvolvimento da teoria dos modelos constitutivos.

Todos os modelos elásticos não-lineares são potencialmente apropriados para situações de carregamento proporcional. Tais modelos não permitem tratar adequadamente as situações com arbitrárias histórias de carregamento, porque a matriz tangente não é distinta para processos de carregamento e descarregamento. Além disso, eles são inadequados para descrever deformações plásticas permanentes do material, as quais são completamente ignoradas pelos modelos hiperelásticos.

Os modelos elastoplásticos são mais realistas com respeito à irreversibilidade da resposta do material e descrevem com boa exatidão o comportamento nas situações de carga e descarga. As primeiras proposições (SCHNOBRICH (1973), CHEN; CHEN (1975), OWEN; FIGUEIRAS (1983), MAIER (1968 e 1969) e ARGYRIS et al. (1974)) assumem para o material um comportamento elastoplástico (perfeito ou com endurecimento), quando o estado de tensão é predominantemente de compressão, e um comportamento elástico linear, com limitada resistência a tração, quando o estado de tensão é predominantemente de tração. Além disso, admite-se que uma vez atingida a resistência à tração, as tensões se anulam. Baseados em aproximações similares, no âmbito da teoria da plasticidade incremental, um número grande de modelos tem sido propostos, diferenciando-se entre si, basicamente quanto à superfície de ruptura e à regra de endurecimento.

Posteriores desenvolvimentos incluem uma análise 'pós-ruptura' introduzindo uma lei de amolecimento para o comportamento em tração.

Outra linha de pesquisa em modelos constitutivos para o concreto surgiu da consideração de que as principais não-linearidades observadas são frequentemente causadas por processos de fissuração. Conceitos originados na mecânica da fratura (linear e não-linear) constituem-se em bases apropriadas para tais formulações.

O modelo de fissura com coesão ("cohesive crack model") de HILLERBORG (1976) considera a propagação de uma fissura como um processo originado numa região à frente da fissura (zona de processo) e apresenta uma relação linear (com coeficiente angular negativo) entre as tensões e a abertura da fissura. O modelo de fissura com coesão, CEDOLIN (1977), MAIER (1979), CARPINTERI (1989), BORRÈ; MAIER (1989), dá particular ênfase ao fenômeno da localização de deformações anelásticas. Tal modelo tem sido numericamente implementado, através do método dos elementos finitos, discretizando-se a fissura e procurando-se acompanhar sua evolução. Contudo tal procedimento requer um alto custo computacional (INGRAFFEA; SOUMA (1985)) a fim de executar a nova arrumação obrigatória da malha. Recentemente o método dos elementos de contorno tem sido utilizado, CEN; MAIER (1990), MAIER et al. (1991), com alguma vantagem sobre o método dos elementos finitos no sentido de que apenas o contorno da fratura é discretizado.

Uma abordagem alternativa para a consideração da fissuração é dada pelo modelo de fissuras continuamente distribuídas, DE BORST (1984), que supõe o material como um contínuo equivalente, sendo que a relação tensão-deformação apresenta uma região de amolecimento ("softening"). A nível de discretização numérica consideram-se as fissuras, continuamente distribuídas sobre cada elemento finito, ou sobre cada região de influência em torno de um ponto de integração, contudo, a direta implementação do modelo constitutivo com amolecimento pode conduzir à perda de



objetividade, no sentido de que a resposta torna-se dependente da malha (isto é, uma malha fina de elementos fornece resultados menos exatos e significativamente diferentes que uma menos refinada). A aproximação usando faixas onde se localizam as fissuras ("crack band approach"), BAZANT; OH (1983), é uma formulação proposta com a finalidade de recuperar a objetividade da resposta, pré-definindo-se as direções das fissuras continuamente distribuídas e impondo-se uma correta dissipação da energia associada a estas fissuras. Este modelo foi especializado por OTTOSEN; DAHLBLOM (1986) considerando o cisalhamento no processo de fissuração. O fenômeno da localização e o comportamento 'pós-pico' nos testes de tração e cisalhamento são tratados nos trabalhos de DE BORST (1987), WILLAM (1984), BICANIC et al. (1984).

Enquanto as formulações da plasticidade e fratura apresentam uma relação entre os incrementos (ou taxas) de tensões e deformações em uma forma linear, a teoria endocrônica de BAZANT; BHAT (1976) formula esta relação em uma forma não-linear. Isto caracteriza a acumulação de deformações anelásticas por um certo parâmetro escalar, denominado "tempo intrínseco", cujos incrementos são funções dos incrementos de deformação. Este modelo pode prever os fenômenos de endurecimento, as situações de descarregamento e contrações dos ciclos de histerese em carregamentos cíclicos e o efeito da taxa de deformação. Ainda que esta teoria seja capaz de descrever atentamente a maior parte das propriedades do concreto, sua aplicabilidade torna-se limitada à medida que esta requer um grande número de funções e, logo, de parâmetros a serem identificados.

Totalmente distintos dos modelos até aqui mencionados (análise fenomenológica, a nível macroscópico) modelos microestruturais tem sido propostos. O objetivo destes modelos é prever a resposta macroscópica com base em uma descrição quantitativa dos fenômenos físicos ocorridos a nível microestrutural no material. Neste campo os trabalhos de BUYUKOZTURK; NILSON; SLATE (1972) e GAMBAROVA; FLORIS (1986)

são particularmente dignos de citação. O primeiro consiste de um estudo por elementos finitos planos da estrutura interna idealizada como uma reunião de agregados de forma circular e envolvidos por argamassa; elementos articulados são introduzidos a fim de modelar o comportamento na interface agregado-argamassa. A proposição de Gambarova e Floris basicamente interpreta o material como um sistema dotado de planos de orientações aleatórias. O comportamento macroscópico é simulado pela superposição dos comportamentos anelásticos de cada plano.

Outras formulações permitem tomar em consideração a influência do tempo sobre os processos de deformação anelástica do concreto. Conceitos básicos do comportamento viscoelástico e viscoplástico do material são ajustados nestes modelos constitutivos usando elementos reológicos (isto é, amortecedores em diferentes combinações com molas e falta de atrito). Extensões a estados multiaxiais seguem um caminho similar àquele da teoria incremental da plasticidade (uma regra de escoamento viscoplástico e uma lei de endurecimento são definidas). Modelos deste tipo são aplicados principalmente para simular a deformação lenta no concreto ("creep"), ZIENKIEWICZ; WATSON (1966) e BANGASH; ENGLAND (1982).

Os modelos viscoplásticos existentes, contudo, não descrevem a influência de ações ambientais no processo de deformação lenta. De fato, a maioria das propriedades mecânicas do concreto (tais como elasticidade, deformação e resistência) são mais ou menos dependentes da temperatura corrente e da umidade do material (BANGASH; ENGLAND (1982)). BAZANT; CHERN (1987) sugerem que o coeficiente de viscosidade seja dependente dos valores correntes de temperatura e umidade a fim de permitir suas influências sobre a deformação lenta.

Em algumas situações na engenharia, seria desejável que os modelos constitutivos para o concreto fossem capazes de descrever as mudanças nas propriedades mecânicas em virtude da hidratação, principalmente na fase inicial pós-moldagem,

HILSDORF (1969). A consideração da interação entre efeitos físico-químicos e mecânicos é particularmente complicada porque, como indicado pelas observações experimentais, a taxa total de deformação pode não ser descrita por uma soma direta das taxas de deformações mecânicas e ambientais, THELANDERSON (1987). Contudo, tal decomposição aditiva é assumida como uma aproximação simplificadora em certos modelos, BAZANT; CHERN (1985), os quais postulam que as taxas de deformações ambientais são dependentes do estado de tensão corrente.

Os campos de tensões associados com ações ambientais podem ser a principal causa do fenômeno da fissuração, localizada ou distribuída, dependendo da situação específica. O tipo de processo não está suficientemente claro até o presente estado de conhecimento.

### **2.3 UMA BREVE EXPOSIÇÃO DA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO COM ESPECIAL REFERÊNCIA AO CONCRETO**

O trabalho de KACHANOV (1958) pode ser considerado como referência às origens da mecânica do dano ("damage mechanics"). O conceito de dano foi introduzido para modelar o efeito da fissuração distribuída na ruptura frágil observada em metais após um período de deformação lenta. Ainda no campo da análise de deformação lenta, RABOTNOV (1969) propõe incluir a perda de rigidez do material como consequência da fissuração.

Originalmente foi suposto que a deterioração não determinava mudanças das características da isotropia inicial, de maneira que um campo de variável escalar poderia representar tal fenômeno.

Usando a idéia de Rabotnov, HUECKEL; MAIER (1977,1979) formularam um modelo elastoplástico acoplado ao qual foi incluído o efeito do módulo de elasticidade com aumento da deformação plástica. Posteriormente a denominada mecânica do dano contínuo ("continuum damage mechanics") foi formalizada com base na termodinâmica dos processos irreversíveis

(LEMAITRE; CHABOCHE (1985)).

A mecânica do dano permite considerar os efeitos dos processos de deterioração no comportamento mecânico macroscópico. O processo de deterioração ou dano, é relativo à fissuração (em um nível de média escala), que causa união e crescimento das microfissuras e outros tipos de cavidades com distribuições e orientações não uniformes. Os principais efeitos do dano no comportamento mecânico macroscópico são a redução das propriedades elásticas (como o módulo de Young) e da resistência (amolecimento).

No caso do concreto, um material no qual a fissuração é o fenômeno dominante que comanda o comportamento não-linear, a mecânica do dano é sem dúvida capaz de formular modelos realísticos.

Com especial referência ao concreto, diversos modelos tem sido propostos nos últimos anos. Estes podem ser classificados como escalares (ou isótropos) e anisótropos, segundo a natureza da variável de dano usada.

Os modelos escalares são conceitualmente simples e tem a vantagem de um reduzido número de parâmetros a identificar. Por outro lado, a representação da zona de dano com base nesses modelos pode ter sua utilidade limitada, considerando uma gama mais geral de problemas.

O modelo escalar de MAZARS (1984) é indicado para estudo de processo de dano do concreto submetido a carregamento proporcional ou cíclico. A variável de dano é identificada como uma função de uma deformação equivalente, que caracteriza o estado local de extensões do material. Esta variável é definida de tal forma a recuperar, como um caso particular, os resultados experimentais dos testes de tração e compressão uniaxiais: os mesmos servem de base para identificar os parâmetros do modelo (cinco no total).

A proposição de Mazars foi estendida para reproduzir a resposta do material em presença de carregamento de fadiga, incluindo a presença de deformações anelásticas (PAPA, 1990).

Outras generalizações desse modelo envolvem o

comportamento unilateral do concreto, isto é, recuperam a rigidez quando ocorre uma inversão de sinal do carregamento e fissuras previamente abertas, por exemplo, se fecham, MAZARS; BAZANT (1989).

O modelo de dano de RESENDE (1985) é adequado especialmente para materiais semelhantes às rochas tratadas como meios homogêneos e isotrópicos. Os fenômenos de dano são modelados pelos recursos de uma variável escalar separada em duas contribuições independentes associadas às partes hidrostática (esférica) e desviadora (anti-esférica) do tensor de tensões, respectivamente. Como uma consequência de tal subdivisão a relação constitutiva também é representada por duas partes, uma volumétrica e outra desviadora.

Apesar de ser um dos mais completos entre os modelos escalares, a proposição de Resende tem a desvantagem de um número relativamente alto de parâmetros a identificar, requerendo observações que incluem testes triaxiais.

No modelo de KRAJCINOVIC; FONSECA (1981), a variável de dano é um campo vetorial expresso como uma função de coordenadas do ponto e das variáveis do estado. A idéia básica é associar o dano ao plano de normal  $\underline{n}$  que contém os microdefeitos; a variável interna proposta é a densidade de vazios, de valor inicial estabelecido em base empírica. A evolução do dano é o resultado de uma combinação de mudanças da área e da orientação dos microdefeitos. Esta formulação não considera as deformações anelásticas devido ao processo de dano e requer a identificação de cinco parâmetros.

Entre os modelos anisótropos, a proposição de ORTIZ (1985a, b) permite representar algumas das características do comportamento do concreto associado ao dano, incluindo a anisotropia induzida por deformações anelásticas. Basicamente, o concreto é tratado como um material composto formado por uma fase argamassa e uma fase agregado, cada uma tendo uma particular lei constitutiva. Para o agregado um modelo elastoplástico não-associado é assumido, enquanto para a argamassa prevalece o modelo de dano. A hipótese da teoria das

misturas, onde os efeitos são proporcionais aos volumes de cada parte, é aplicada para combinar as duas fases, a fim de obter a resposta global do material. No que diz respeito à argamassa o estado de dano num ponto é representado por uma quantidade tensorial expressa pelo valor corrente da flexibilidade elástica. A evolução do dano depende do estado de tensões em uma forma implícita e os parâmetros do modelo podem ser identificados por resultados experimentais de testes de tração uniaxial.

Outra categoria de modelos de dano emergem de uma formulação que combina a teoria clássica da plasticidade e a teoria da fratura de DOUGILL (1976). Nesta aproximação considera-se que as deformações anelásticas do concreto sejam causadas por microfissurações e deslizamentos plásticos, o primeiro predominante em limites de baixas pressões e o último em limites de altas pressões. Os trabalhos de HAN; CHEN (1986) e BAZANT; KIM (1978) dizem respeito a tal grupo de formulações.

A teoria da plasticidade e os aspectos fundamentais do modelo de fissura localizada em faixas ("crack band model") de BAZANT; OH (1983) são combinados no modelo de dano plástico de OLLER et al. (1988a, b), onde mudanças nas propriedades da rigidez são tratadas por apropriadas variáveis internas. Tal modelo exhibe objetividade e boa precisão com respeito a resultados experimentais de tração localizada e deformações por cisalhamento.

#### 1.4 EVIDÊNCIAS EXPERIMENTAIS DO DANO NO CONCRETO

As evidências experimentais do dano no concreto são relacionadas com os mecanismos de propagação de fissuras e com as características da ruptura do concreto sujeito a cursos de carga proporcionais e quaisquer (HILSDORF (1969), VAN MIER (1984), SPOONER; DOUGILL (1975)).

O entendimento e a correta interpretação das alterações na estrutura interna do material assumem um papel fundamental na formulação dos modelos de dano, os quais permitem

relacionar mudanças reais ocorridas a nível de microescala com fenômenos evidenciados macroscopicamente.

Formação de fissuras e mecanismos de fratura são típicos fenômenos que podem ser estudados na denominada submacroscópica ou média escala e são relativos a 'rearranjos' internos. Em um nível "fenomenológico" macroscópico, eles se refletem nas não-linearidades descritas por relações tensão-deformação.

A heterogeneidade do concreto, devido aos diferentes constituintes, influencia as propriedades de deformação (formação e propagação de fissuras) e a resistência final da mistura. O comportamento observado é também afetado por fatores externos, tais como taxa de carregamento, condições de umidade e temperatura, etc... De fato, a presença de partículas de agregado envolvidas por argamassa introduz um vínculo fraco ao sistema na interface dos dois ingredientes. A heterogeneidade também é causa da não-uniformidade do estado de tensões interno, quando o concreto é externamente carregado ou quando o sistema suporta cargas independentes e mudanças de volume durante a moldagem e hidratação. Por outro lado a presença de vazios favorece a concentração de tensões, servindo desse modo como pontos potenciais para formação de fissuras. Além disso, as microfissuras estão presentes mesmo antes da aplicação do carregamento.

O efeito da anisotropia inicial é ilustrada na figura 1.2a (VAN MIER (1985)). As duas curvas correspondem a dois testes uniaxiais: um paralelo e outro perpendicular à direção de moldagem. A deformação  $\epsilon_1$  é a variável independente nos testes de deformação controlada. Observar-se que no ramo ascendente das curvas, a inclinação inicial encontrada é diferente nos dois casos. Efeitos similares, porém mais acentuados, são verificados em testes triaxiais (fig. 1.2b). Nota-se, portanto, que a resposta tensão-deformação na fase 'pré-pico' é consideravelmente afetada pela orientação do campo inicial de dano com respeito ao estado de tensões governante.

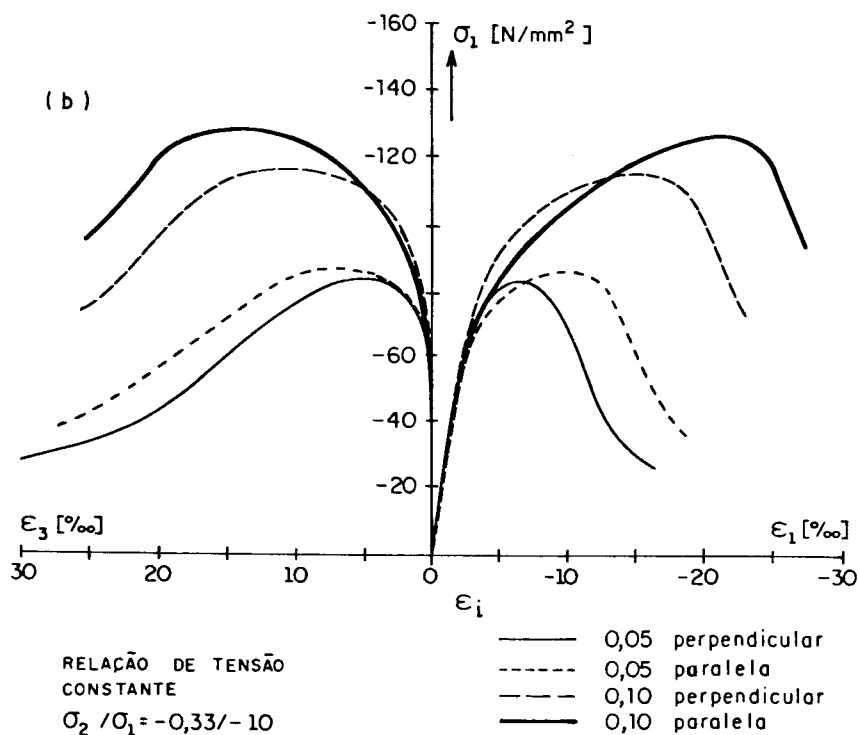
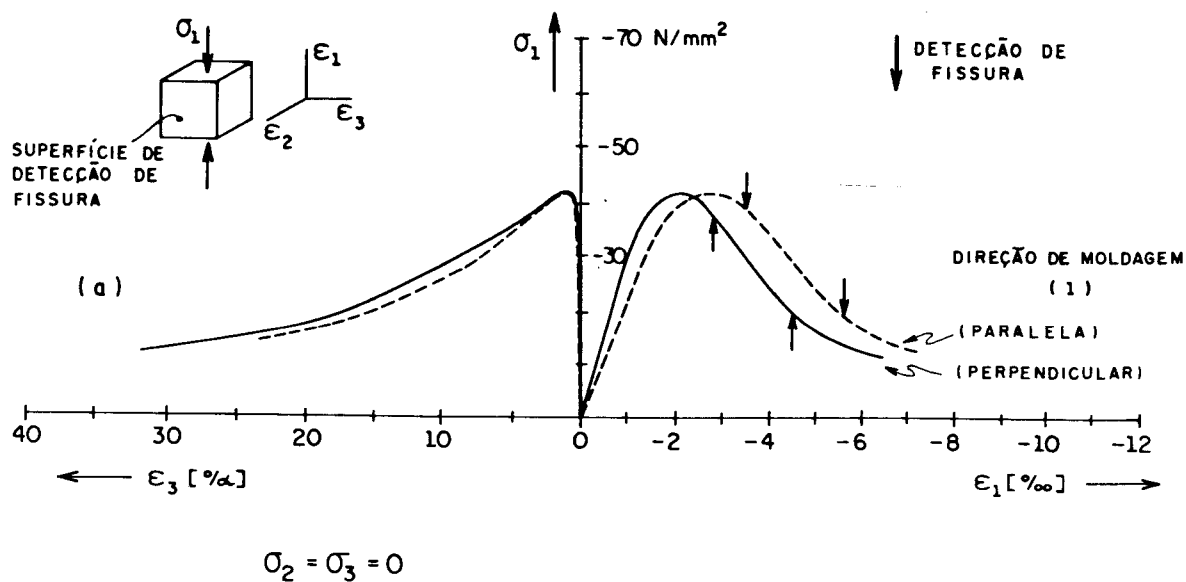


Figura 1.2 a) Influência da anisotropia inicial em testes uniaxiais;  
 b) Influência da anisotropia inicial em testes triaxiais; [VAN MIER (1985)].



Em geral, três tipos de microfissuras podem ser distinguidas: fissuras de interface (na interface da matriz cimentícia com agregado), fissuras da argamassa (através da matriz do material) e fissuras do agregado (através dos agregados).

As técnicas experimentais desenvolvidas para estudar a evolução do processo de fissuração podem ser classificadas em métodos diretos e métodos indiretos. Nos métodos indiretos, as alterações em um fenômeno particular, tal como a emissão acústica, são registradas e relacionadas à formação e propagação das fissuras. Nos métodos diretos a formação e propagação das fissuras são estudadas visualmente, pelo uso de microscópio ótico e petrografia, por exemplo.

Uma das primeiras aplicações do método direto relacionando a propagação de microfissuras com a resposta tensão-deformação do concreto, foi desenvolvida por HSU (1963). As mudanças observadas a nível macroscópico (comportamento tensão-deformação) em corpos de prova cilíndricos sob compressão uniaxial foram acompanhadas por mudanças na densidade e tipo de fissuração.

Como ilustrado na figura 1.3, no nível zero de deformação somente fissuras de interface são observadas. Estas fissuras começam a crescer em um nível de tensão de aproximadamente 30% do valor último ou de pico. O aumento de fissuras de interface em quantidade e comprimento, é acompanhado por um desvio de linearidade da curva macroscópica tensão-deformação. O aumento em quantidade dessas fissuras segue até que 70% da carga máxima seja atingida. Entre os níveis de 70% a 90% da carga máxima, fissuras da argamassa começam a propagar e também são observadas formações de pontes unindo-as. A partir de um nível de deformação de 0,3% (fig. 1.3d) as fissuras permanecem estáveis somente quando um aumento de deformação fôr acompanhado por uma diminuição de tensão, isto é, sob condições de ensaio com controle de deslocamento.

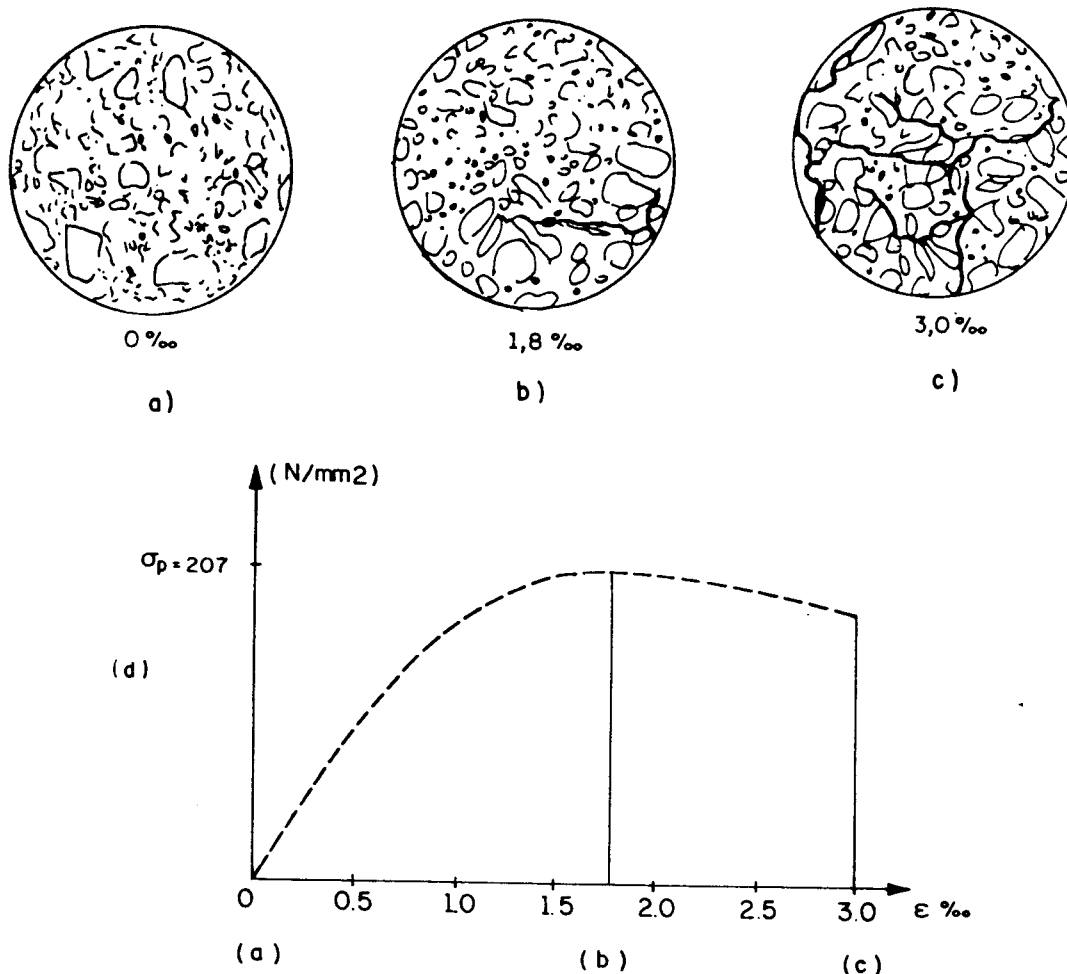


Figura 1.3 Mapa de fissuras em diferentes níveis de deformação [VAN MIER (1985)].

Resultados similares de observações diretas são reportados no trabalho de HILSDORF (1969). A evolução da fissuração foi estudada em prismas sujeitados à compressão uniaxial, nos chamados ensaios rápidos. Foi observado que em cargas correspondentes à 85% do valor máximo, a fissuração difere pouco daquela inicial (carga zero) no sentido que a evolução das fissuras desenvolveu-se, predominantemente ao longo da interface e que um pequeno número delas estendeu-se na argamassa. Finalmente, o crescimento das fissuras foi mais rápido no trecho descendente do diagrama tensão-deformação.

As observações que relacionam a fissuração submacroscópica com macrofenômenos em compressão uniaxial podem ser estendidas às situações de carregamento triaxial de compressão.

Nesse caso, a propagação de microfissuras inicia-se de

uma maneira estável até que um volume mínimo ou de máxima densidade seja atingido. O correspondente nível de carga é referido como tensão crítica e a partir deste nível, um aumento de tensão é acompanhado por uma inversão na deformação do volume. A figura 1.4 apresenta o comportamento da deformação volumétrica e a área específica de fissuração em relação à tensão axial aplicada.

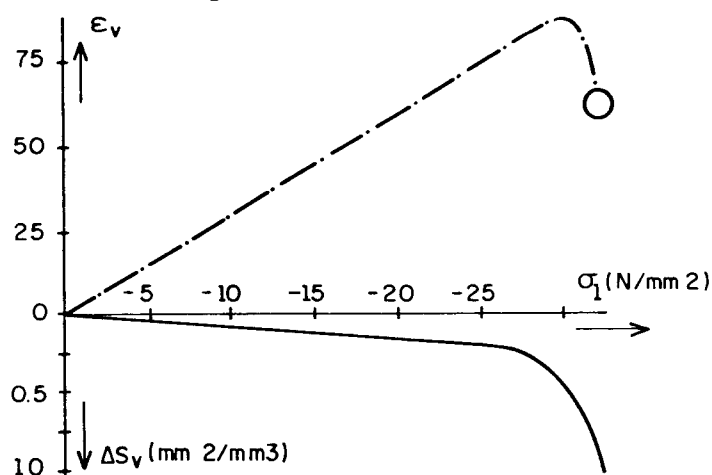


Figura 1.4 Curva deformação volumétrica-tensão axial;  
[VAN MIER (1985)].

De interesse direto para os modelos de dano são a diminuição de rigidez associada ao crescimento das microfissuras e a resposta "softening" que segue à região de pico nas tensões. SPOONER et al. (1976) estudou a emissão acústica no concreto entre consecutivos ciclos de carregamento de compressão uniaxial e usou tais medidas como indicadores da degradação do material.

Em todos os testes averiguou-se que a emissão acústica detectada durante o primeiro carregamento para um particular nível de deformação foi ausente durante o descarregamento (fig. 1.5). No recarregamento não foi detectada emissão acústica, até que a deformação máxima previamente atingida fosse ultrapassada. Exceções para este comportamento foram observadas nas regiões próximas ao pico e na porção descendente da curva tensão-deformação, onde a emissão acústica ocorreu novamente antes que a prévia deformação máxima fosse atingida.

A inclinação inicial das curvas de recarregamento reduz-se progressivamente em aparente correspondência à degradação do espécime. Assim, a variação do módulo tangente inicial de elasticidade como uma função da máxima deformação previamente atingida, pode fornecer um indicativo com relação à mudança na integridade ou dano no espécime durante o carregamento.

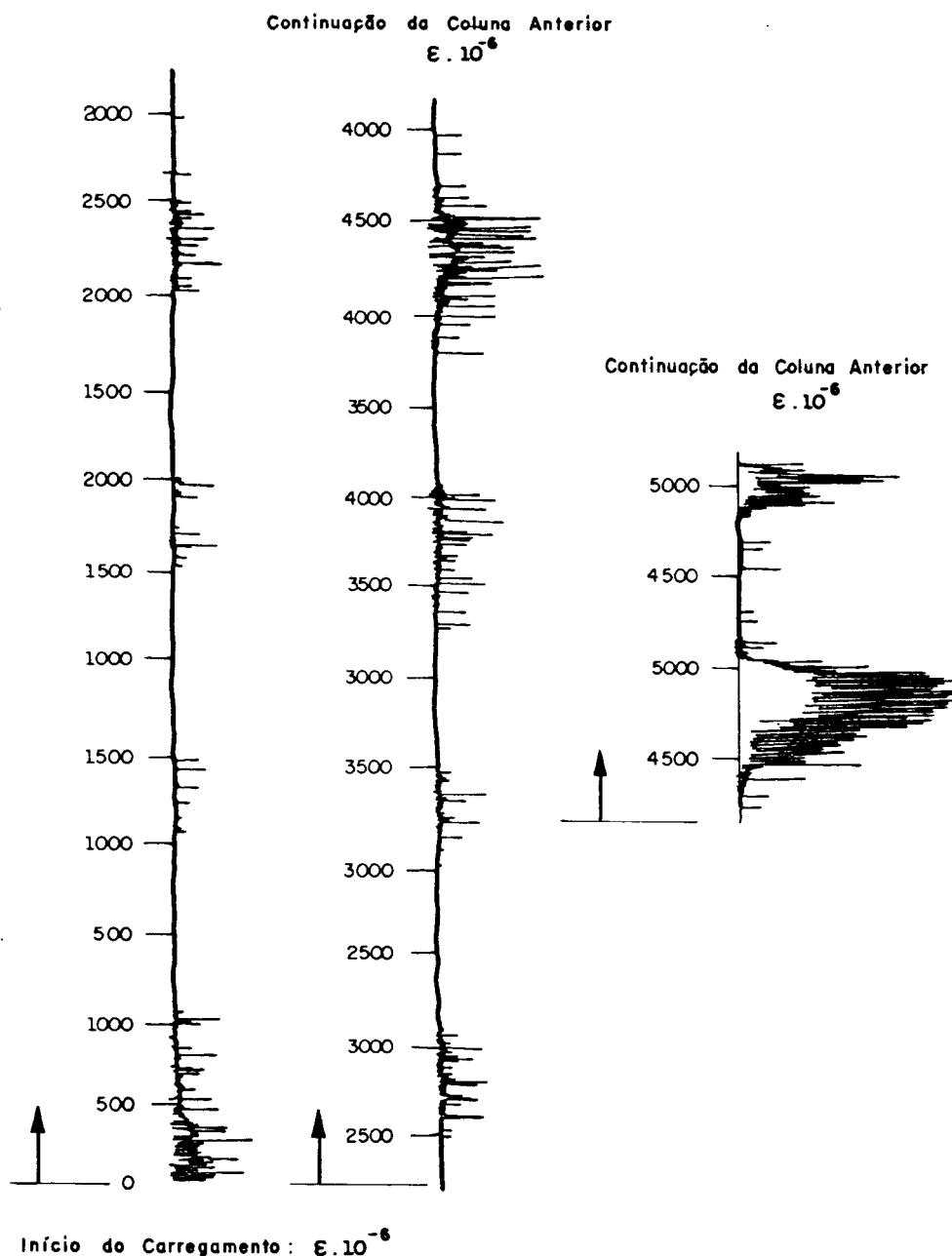


Figura 1.5 Emissão acústica ocorrida durante carregamento e descarregamento; [SPOONER et al. (1976)].

A redução do módulo elástico inicial é aparente já em deformações muito baixas, mas a taxa de mudança torna-se grande na região que segue ao pico da curva tensão-deformação. A figura 1.6 ilustra a progressiva redução na rigidez inicial à medida que se aumenta o nível de deformação previamente aplicada.

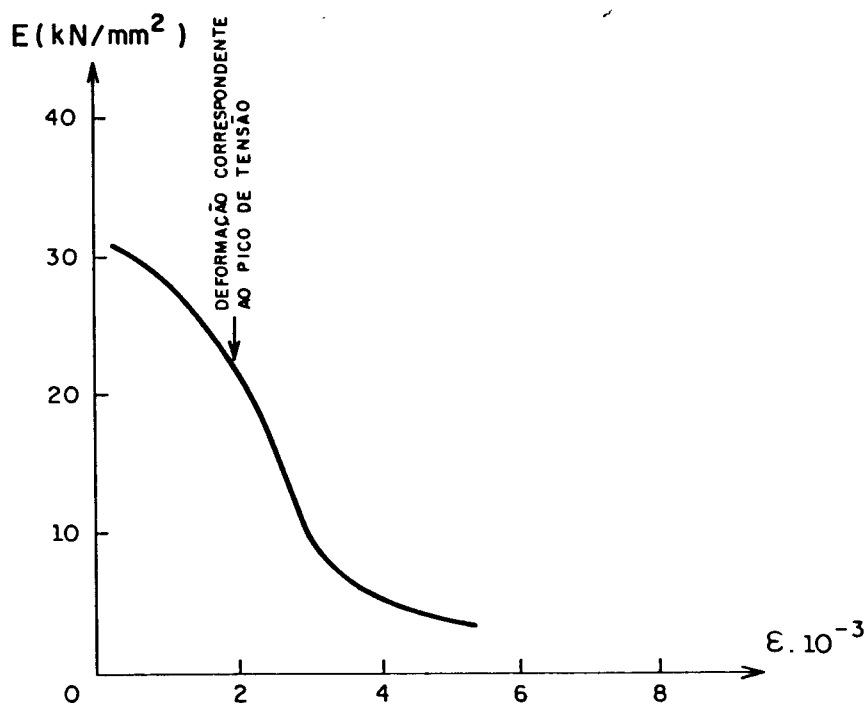
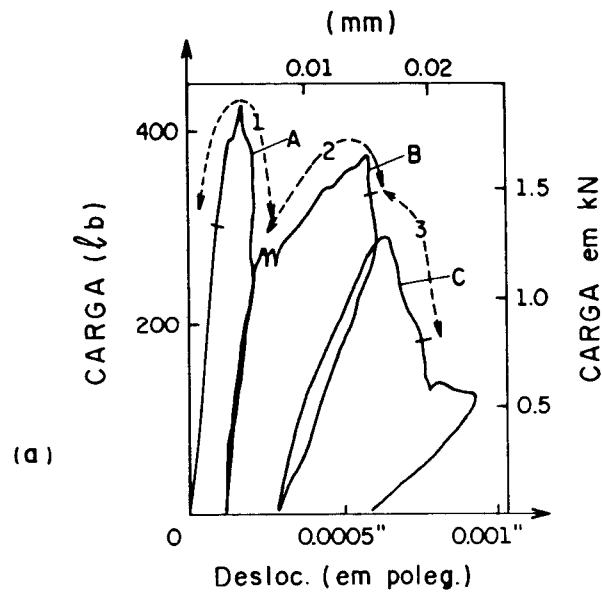
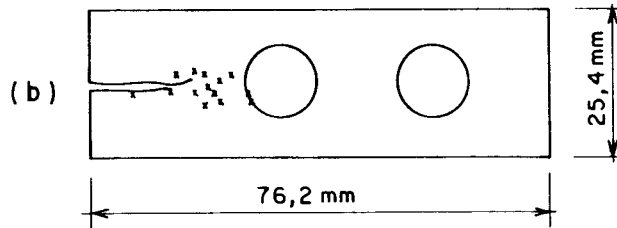


Figura 1.6 Redução progressiva da rigidez inicial;  
[PROENÇA (1986)].

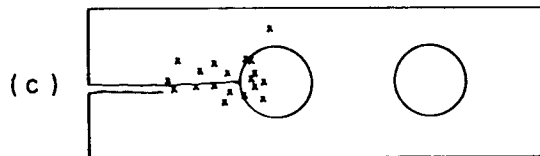
A detecção de emissão acústica é usada por exemplo para estudar propagação de uma fissura inicial em espécimes de concreto testados em tração uniaxial (em particular, os espécimes de concreto são usados para observar o efeito das inclusões em uma propagação de fissura). Os resultados obtidos, ilustrados pela indicação dos pontos de emissão acústica (AE) em correspondência com diferentes estágios de carregamento, são apresentados na figura 1.7.



PRIMEIRAS POSIÇÕES DE AE  
DURANTE ESTÁGIO DE CARREGAMENTO 1



ESTÁGIO DE CARREGAMENTO 2



ESTÁGIO DE CARREGAMENTO 3

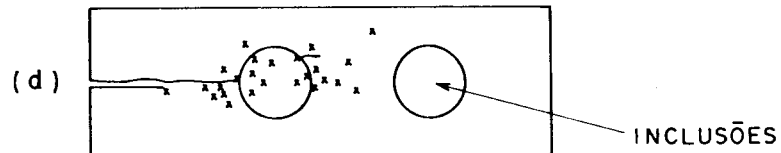
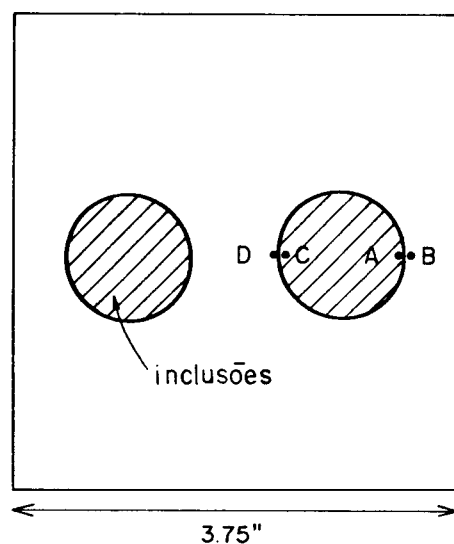


Figura 1.7 Emissão acústica em correspondência à diferentes estágios de carregamento em um espécime de concreto com abertura inicial em uma das extremidades. [SPOONER et al. (1976)].

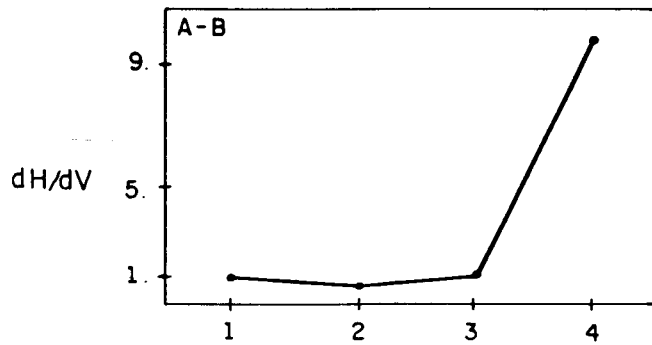
Pode-se observar que a emissão acústica continua a ocorrer mesmo numa região anterior à ponta da fissura indicando que ligamentos internos continuam transmitindo carga a despeito da fissuração da superfície.

A técnica da espectrografia (usando luz monocromática de um laser) foi usada para estudar os deslocamentos relativos de pontos da interface argamassa-agregado (A-B e C-D na fig. 1.8a) em um espécime carregado verticalmente com duas inclusões de agregado. As figuras 1.8b e 1.8c apresentam, para os pontos de observação, os gráficos da relação  $dh/dv$  ( $dh$ =diferença entre os deslocamentos horizontais;  $dv$ =diferença nos deslocamentos verticais) em correspondência ao nível de compressão uniaxial (veja-se, também, fig. 1.8d). Nestas figuras podem ser observadas que a relação  $dh/dv$  esteve próxima a 1,0 durante os estágios iniciais de carregamento indicando que a fissura de interface deslizou e abriu simultaneamente. Junto à carga de pico, a relação tornou-se muito maior indicando que a fissura foi predominantemente de abertura. As fissuras de interface passam, portanto, de um modo misto para um modo de abertura pura durante a evolução do carregamento.

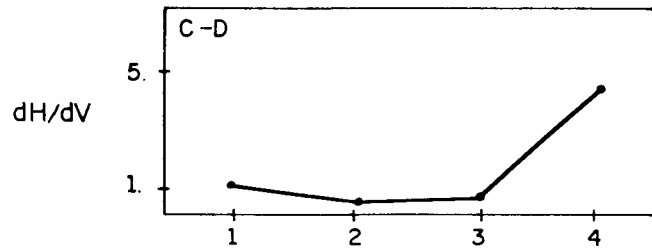


a)

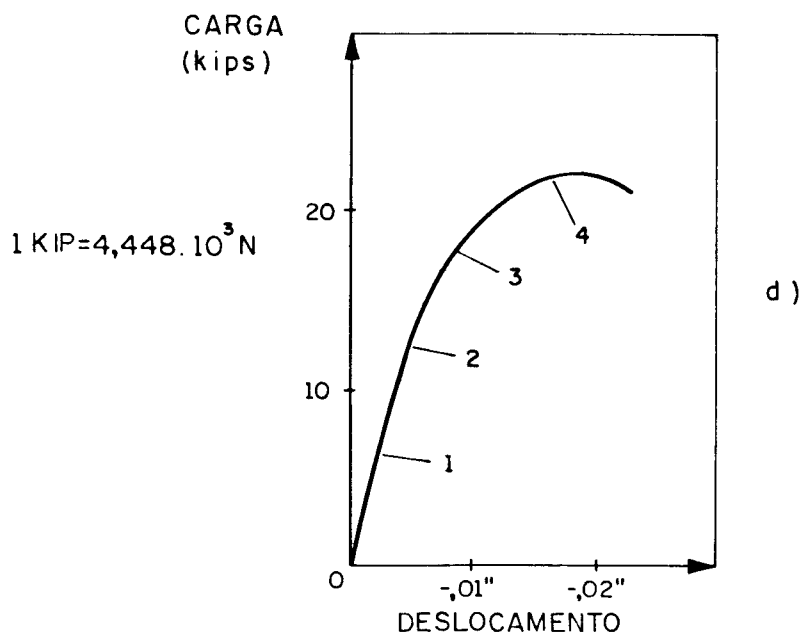
Figura 1.8 a) Interface meio-agregado



b)



c)



d)

Figura 1.8 b) Relação  $dh/dV$  correspondente aos quatro níveis de carregamento para os pontos A-B  
 c) Relação  $dh/dV$  correspondente aos quatro níveis de carregamento para os pontos C-D  
 d) Curva de compressão uniaxial



Outro indicador da degradação estrutural do material é a energia dissipada no dano definida por SPOONER; DOUGILL (1975) como a energia dissipada por um material ideal exibindo comportamento similar àquele do concreto (fig. 1.9a). A figura 1.9b mostra a evolução da energia dissipada acumulada em um espécime de concreto.

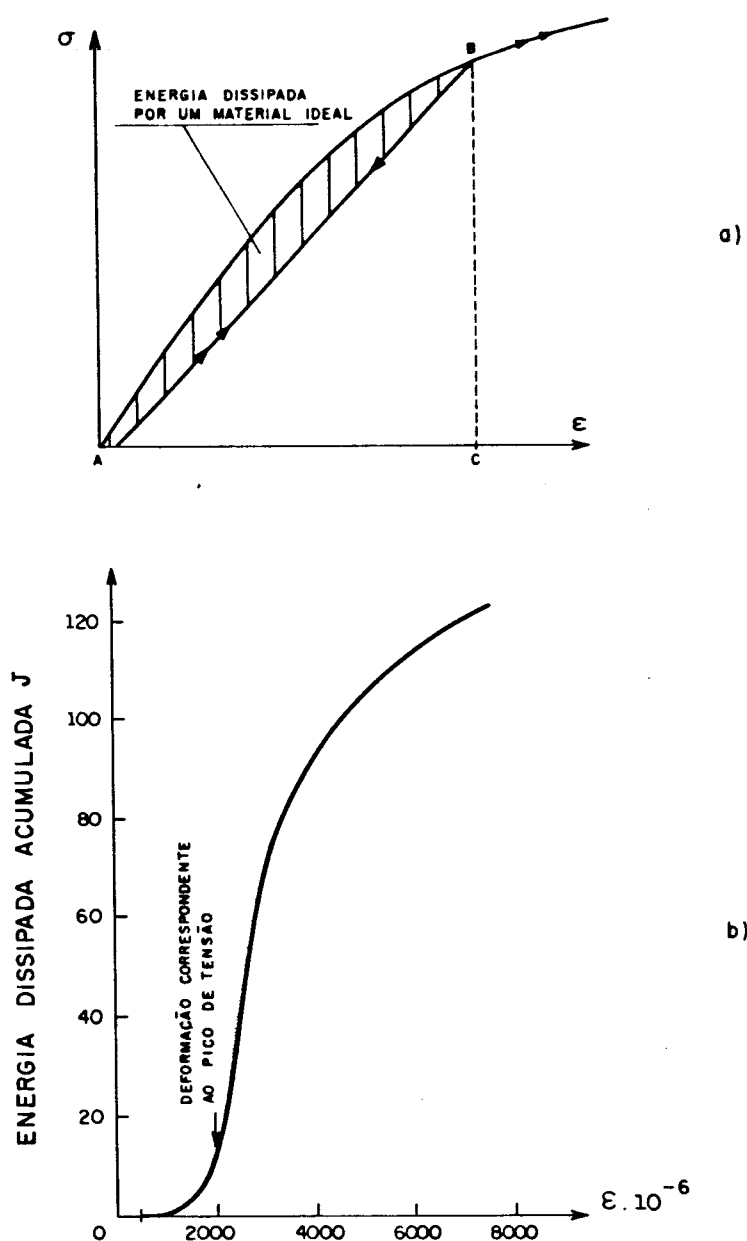


Figura 1.9 a) Energia dissipada por um material ideal;  
 b) Energia dissipada por um espécime de concreto;  
 [SPOONER; DOUGILL (1975)].

Em ambos os casos ilustrados nas figuras 1.6 e 1.9, observa-se que o dano inicia com pequenas deformações, desenvolvendo-se progressivamente atingindo uma taxa máxima logo após o pico de tensão e tendendo a um valor assintótico com o crescimento da deformação. É interessante notar que, em alguns casos, o pico de tensão tem pouco ou nenhuma influência em termos de progressão de dano no espécime.

Por outro lado, sabe-se que as propriedades do concreto são governadas pelas componentes pasta de cimento e agregado. As propriedades dependentes da idade (ganho de resistência, aumento no módulo elástico) são relacionadas principalmente às mudanças na da pasta de cimento causadas pela hidratação. SPOONER et al. (1976) estudou o dano e a dissipação de energia em modelos de argamassa de cimento submetidos à compressão uniaxial; os resultados obtidos, indicam que a mudança absoluta no módulo inicial, para uma certa ordem de deformação, é aproximadamente a mesma indiferente da idade ou da relação água/cimento (fig. 1.10a). Também a energia dissipada para uma certa deformação aplicada anterior ao pico de tensão parece ser a mesma para todas as relações água/cimento e todas as idades (fig. 1.10b).

Uma importante e geral conclusão a respeito dos resultados experimentais condensados nas figuras 1.6 a 1.9, é que não parece haver um limite ou critério inicial de dano baseado em tensão ou deformação, abaixo do qual o material permanece íntegro.

Como a redução de rigidez é mais evidente após o pico, a caracterização experimental do comportamento "softening" é essencial. Esta caracterização é também de fundamental importância para uma apropriada modelagem, por uma teoria contínua, do comportamento 'pós-pico'.

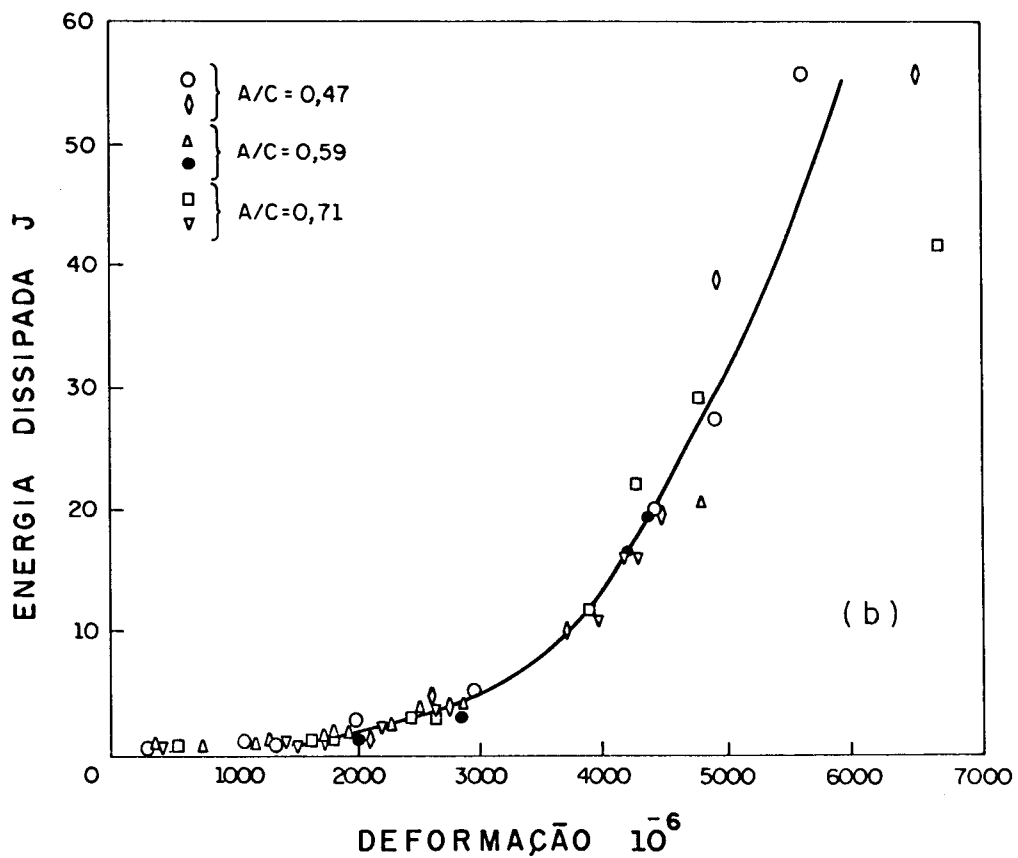
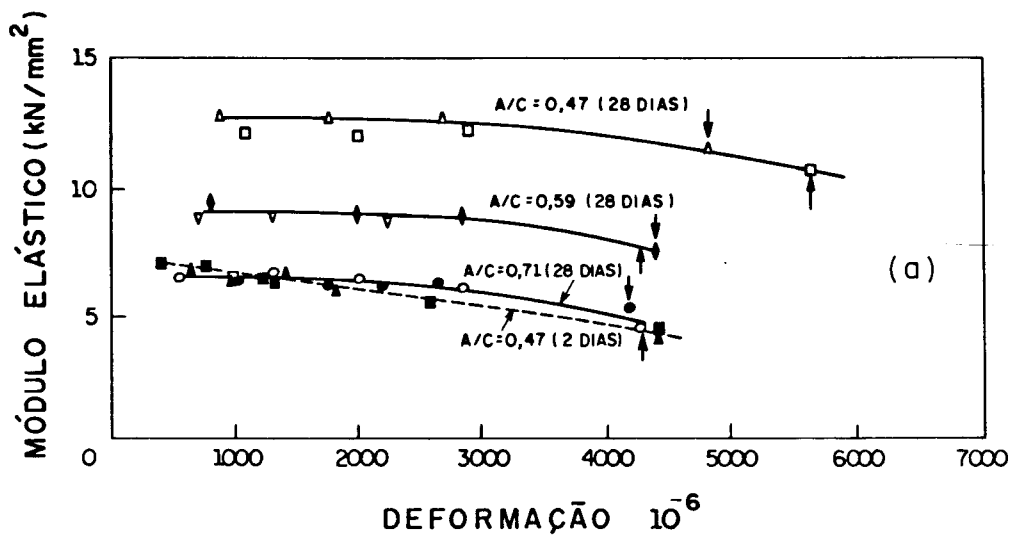


Figura 1.10 a) Mudanças no módulo inicial para diferentes relações água/cimento  
 b) Energia dissipada para diferentes relações água/cimento  
 [SPOONER et al. (1976)].

Em tração uniaxial, como ilustrado na figura 1.11, o diagrama tensão-deformação exibe uma resposta quase linear até que se iniciam as fissuras, momento em que se verifica um significativo comportamento de amolecimento na região pós-pico, PETERSSON (1980). Processos de fissuração são fenômenos bastante localizados; após a tensão ter caído para aproximadamente 50% da carga de pico, quase todo o acréscimo de deformação do espécime é causado pelo processo de abertura de fissuras.

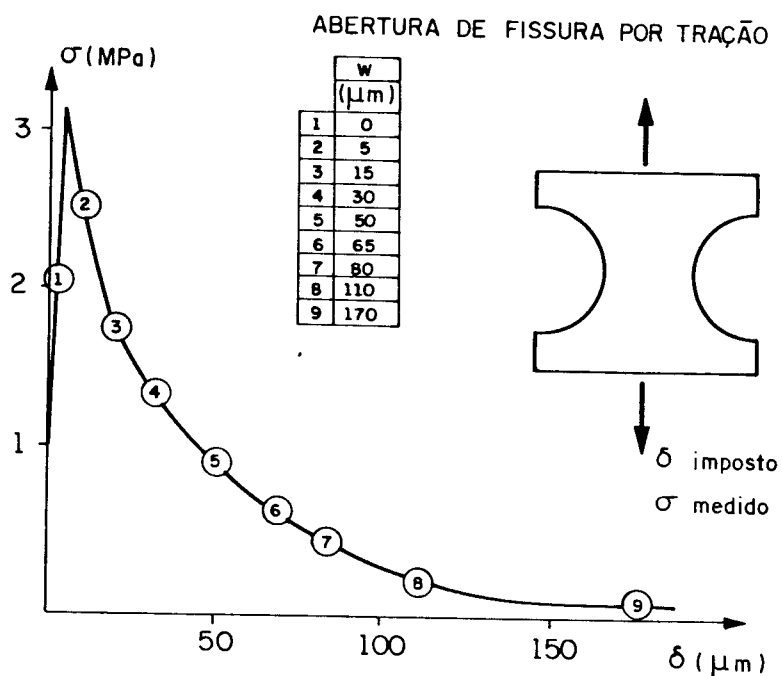


Figura 1.11 Curva tensão-deformação típica em tração uniaxial; [PETERSSON (1980)].

VAN MIER (1984) reporta uma série de resultados de comportamentos tensão-deformação de testes em corpos de prova submetidos à compressão triaxial e tração-compressão biaxial.

Na figura 1.12 três curvas de experimentos sob condições de deformação plana ( $\epsilon_2=0$ ) são mostradas, a fim de se verificar a influência da tensão principal de menor valor. Na parte superior da figura, são plotadas as deformações  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_3$  em função da maior tensão de compressão  $\sigma_1$ ; no gráfico abaixo, o aumento de  $\sigma_2$  é mostrado (efeito de Poisson). O efeito do

confinamento ( $\sigma_3 = \beta \sigma_1$ ) é evidenciado pelo aumento da resistência. O ramo "softening" mostra uma forma similar para os três níveis de confinamento (comparando a inclinação da curva nesse trecho) mas com o aumento do nível de tensão residual com a relação ( $\sigma_3/\sigma_1$ ).

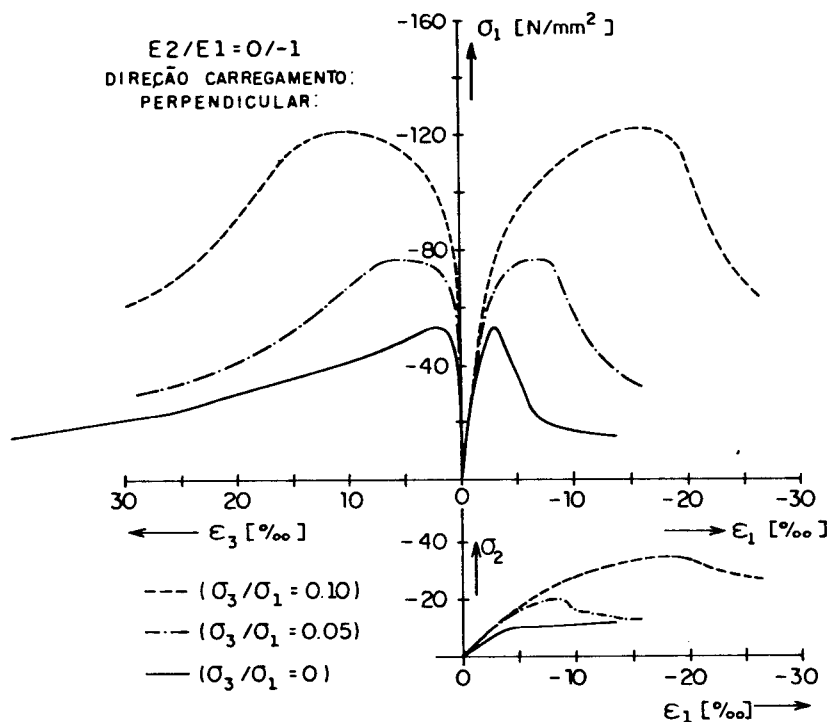


Figura 1.12 Curvas  $\sigma_1 \div \epsilon_1$ ,  $\sigma_1 \div \epsilon_3$  e  $\sigma_2 \div \epsilon_1$  para diferentes níveis da menor tensão principal; [VAN MIER (1984)].

Na figura 1.13 curvas tensão-deformação para testes de compressão triaxial com diferentes níveis intermediários de tensão são plotados, onde observam-se diferenças no comportamento pós-pico.

A conclusão geral das observações experimentais é que o ramo "softening" é o resultado da localização estável de deformações; de fato, todos os experimentos triaxiais mostram ruptura localizada. Na figura 1.14 os diferentes modos de ruptura observados para diferentes níveis intermediários são mostrados.

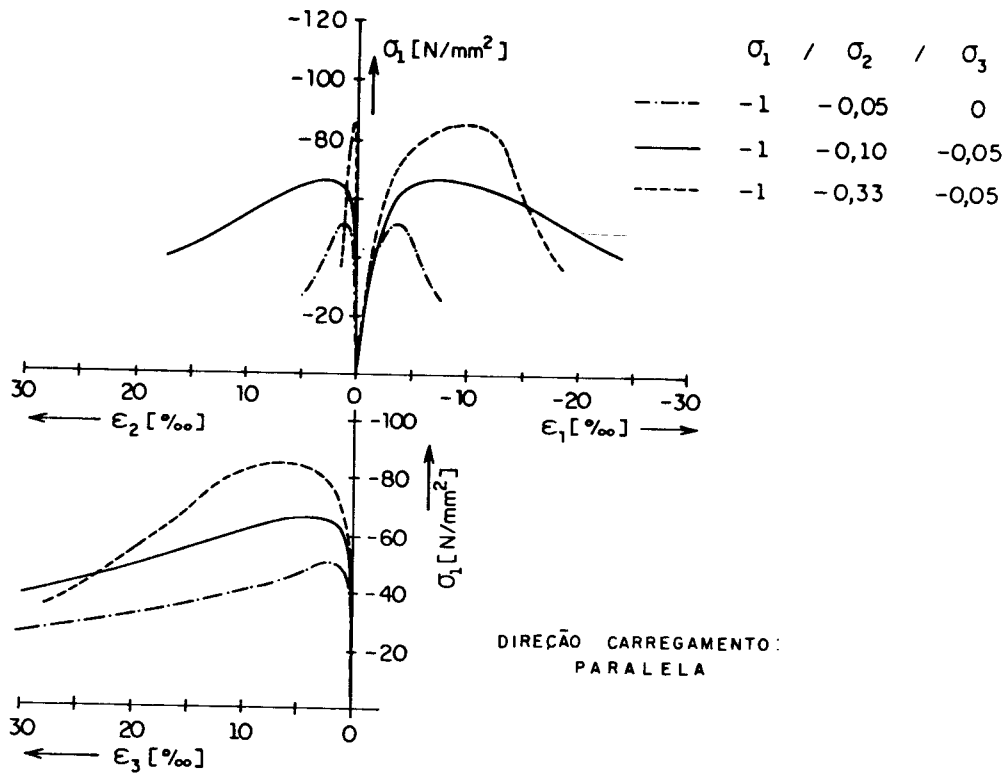


Figura 1.13 Curvas tensão-deformação para testes de compressão triaxial com diferentes níveis intermediários de tensão; [VAN MIER (1984)].

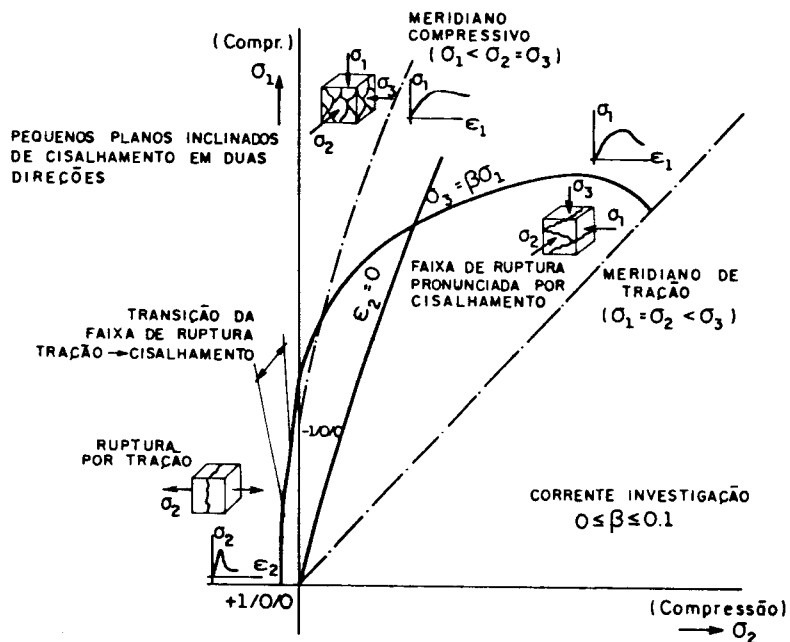


Figura 1.14 Classificação dos modos de ruptura; [VAN MIER (1984)].

Na região de tração-compressão biaxial aparece uma única fissura provocada por alongamento. Na região de compressão triaxial dois diferentes modos de ruptura são observados:

- o modo segundo um preferencial plano, caracterizado por uma grande deformação de extensão, mostra planos cisalhantes localizados no plano formado pelas componentes principais extremas de tensão de compressão;
- para os estados de tensão próximos ao meridiano compressivo, fig. 1.14, é observada uma multidão de pequenos planos inclinados de fratura. Duas grandes deformações extensivas permitem o desenvolvimento de planos de fratura em ambos os planos  $\sigma_1 - \sigma_3$  e  $\sigma_1 - \sigma_2$ . Este tipo de ruptura é referido como um modo cilíndrico de ruptura.

## 1.5 ASPECTOS GERAIS DA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

### 1.5.1 Generalidades

O objetivo final da mecânica do dano contínuo, fundamentada na termodinâmica dos processos irreversíveis, é a formulação de leis constitutivas que permitam prever com suficiente precisão, a resposta não-linear de estruturas em correspondência a ações externas (carregamento mecânico e térmico).

A 'teoria do dano' descreve a evolução local do processo de deterioração do material partindo de uma configuração inicial ideal, sem defeitos, até um estado final onde fissuras discretas ou microfissuras possam ser observadas.

O estado de dano local pode ser quantificado pela definição de adequadas variáveis internas. Estas variáveis, de um ponto de vista geral, devem ter uma natureza tensorial a fim de levar em consideração a anisotropia induzida pelo processo de carregamento.

É possível relacionar estas variáveis diretamente a uma redução progressiva das propriedades macroscópicas do material tais como o módulo de elasticidade. Como consequência desta

aproximação, o meio deteriorado pode ser tratado como um contínuo de rigidez reduzida e/ou resistência reduzida.

## 1.5.2 Variáveis de dano

### 1.5.2.1 Definição

Considere-se um sólido com dano do qual é retirado um elemento de volume representativo. Tal elemento é pequeno a fim de ser interpretado como um ponto material do contínuo e, por outro lado, é suficientemente grande para incluir as imperfeições e os vários ingredientes do meio.

Seja  $S$  a área de uma seção deste elemento definida no ponto em função do versor  $\underline{n}$ , normal exterior. Nesta seção as microfissuras e microdefeitos que contribuem para o dano tem uma distribuição aleatória (fig. 1.15).

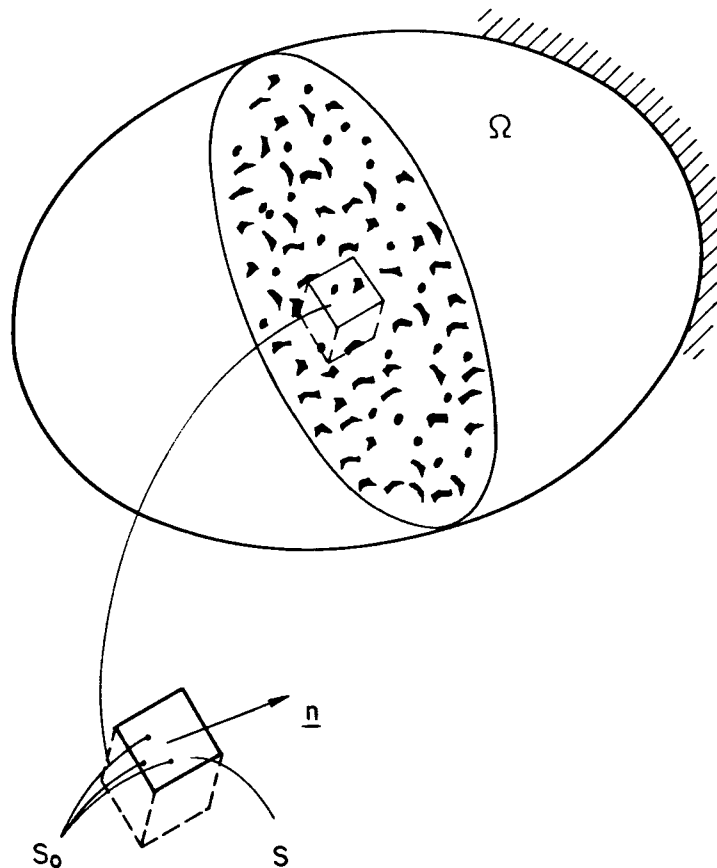


Figura 1.15 Elemento de volume com dano



Se  $\tilde{S}$  é a área resistente efetiva, a diferença

$$S_0 = S - \tilde{S} \quad (1.1)$$

é a área dos defeitos.

Empregando a hipótese de continuidade, o processo limite

$$D = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S_0}{S} \quad (1.2)$$

fornece uma medida mecânica do dano local, ou densidade superficial do dano, associada a um plano de normal  $\underline{n}$ .

Esta variável é sempre positiva e assume valores contidos no intervalo  $0 \leq D_n \leq 1$ : particularmente  $D_n = 0$  corresponde a um estado de dano inexistente ou de material íntegro e  $D_n = 1$  é o estado limite local de fraturamento (material totalmente deteriorado).

#### 1.5.2.2 Hipóteses de isotropia

Como foi proposto, o valor de  $D_n$  depende do plano, isto é, da orientação da normal  $\underline{n}$ . Entretanto é possível definir outra situação teórica, denominada dano isótropo ou escalar, na qual considera-se que os microdefeitos tenham uma distribuição uniforme independente da orientação da normal  $\underline{n}$ . Nesse caso uma variável escalar caracteriza completamente o estado local de dano e pode ser definido por

$$D_n = D \quad \forall \underline{n} \quad (1.3)$$

#### 1.5.2.3 Conceito de deformação equivalente

A definição de uma variável de dano, que representa a densidade de defeitos do material, conduz à noção de tensão

efetiva, isto é a tensão aplicada na parte realmente resistente da seção.

Considere-se, por simplicidade, um caso unidimensional onde  $F$  é a força agindo numa seção  $S$  de um elemento de volume e  $\sigma = F/S$  a distribuição de tensões que satisfaça a equação de equilíbrio. Assumindo que nesta seção o estado de dano seja medido pelo escalar  $D$ , a área efetiva da seção será

$$\tilde{S} = S - S_0 = S (1 - D) \quad (1.4)$$

Assim, a tensão efetiva é definida por

$$\tilde{\sigma} = F/\tilde{S} \quad (1.5)$$

Segue da (1.4) e (1.5) que

$$\tilde{\sigma} = \sigma/(1-D) \quad (1.6)$$

Obviamente,  $\tilde{\sigma} \geq \sigma$  e, em particular,  $\tilde{\sigma} = \sigma$  para um material íntegro e  $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$  quando se aproxima o estado de deterioração do elemento.

No caso tridimensional de dano isótropo, a relação  $S/S_0$  é independente da normal e o fator  $(1-D)$  modifica todas as componentes do tensor de tensões  $\underline{\sigma}$ . Então, segue-se que

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\sigma}/(1-D) \quad (1.7)$$

onde  $\underline{\tilde{\sigma}}$  representa o efetivo tensor de tensões.

A hipótese de deformação equivalente desempenha um papel central dentro da formulação de uma relação constitutiva para um material com dano, tratado como um contínuo. Tal hipótese deve ser estabelecida como a seguir (LEMAITRE; CHABOCHE (1985)):

"O mesmo estado de deformações de um material com dano pode ser derivado do material íntegro onde a tensão usual é substituída pela tensão efetiva". (fig. 1.16).

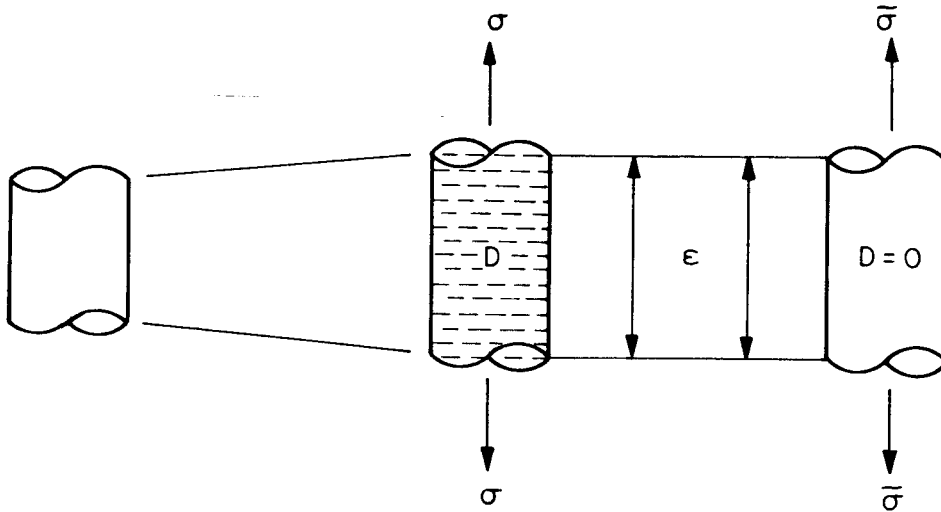


Figura 1.16 Hipótese de deformação equivalente;  
[LEMAITRE; CHABOCHE (1985)].

Assim, a deformação elástica unidimensional de um material com dano pode ser descrita em função de um material íntegro pela seguinte relação:

$$\epsilon = \tilde{\sigma}/E = \sigma/(1-D)E \quad (1.8)$$

onde  $E$  é o módulo de Young do material íntegro.

Por outro lado o mesmo estado de deformações pode ser expresso como

$$\epsilon = \sigma/\tilde{E} \quad (1.9)$$

onde  $\tilde{E}$  é o módulo de Young do material com dano.

Comparando as equações (1.8) e (1.9), tem-se a seguinte relação entre os módulos de elasticidade

$$\tilde{E} = (1-D)E \quad (1.10)$$

Tal relação mostra a possibilidade de proceder uma medida indireta do estado de dano, por meio de mudanças de uma propriedade mecânica.

#### 1.5.2.4 Dano anisótropo

De fato a hipótese de dano escalar impõe alguma simplificação no modelo constitutivo. Na realidade, a distribuição de microfissuras e cavidades volumétricas, induzida pelo processo de carregamento, exhibe diferenças dependendo do plano de análise e constitui um estado chamado de dano anisótropo. Neste caso a variável de dano é associada uma natureza tensorial.

Os conceitos de tensão efetiva e deformação equivalente permanecem válidos. Para simplificar a discussão, a definição do tensor de tensão efetiva será apresentado aqui considerando o caso de elasticidade linear isotérmica (no entanto, este conceito pode ser aplicado a um material num estado mais complexo, LEMAITRE; CHABOCHE (1985)).

Em outros termos, a relação elástica para um meio com dano pode ser expressa na seguinte forma:

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{\underline{D}}} \underline{\epsilon} \quad (1.11)$$

onde  $\underline{\underline{\underline{D}}}$  é o tensor constitutivo elástico de quarta ordem do material com dano anisótropo.

Da hipótese de deformação equivalente, a tensão efetiva  $\underline{\tilde{\sigma}}$  aplicada ao material íntegro é capaz de reproduzir o mesmo estado de deformações. Assim, tem-se a seguinte relação

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{D}}_0} \underline{\epsilon} \quad (1.12)$$

Combinando as equações (1.11) e (1.12), obtém-se:

$$\underline{\sigma} = \left( \begin{array}{c} \underline{\underline{\underline{D}}} \\ \underline{\underline{\underline{D}}_0}^{-1} \end{array} \right) \underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{A}}} \underline{\tilde{\sigma}} \quad (1.13)$$

Introduzindo o operador simétrico de quarta ordem  $\underline{D}$ , tal que

$$(\underline{I} - \underline{D}) = \underline{A} \quad (1.14)$$

A relação entre  $\underline{D}_0$  e  $\underline{\tilde{D}}$  pode ser formulada como:

$$\underline{\tilde{D}} = (\underline{I} - \underline{D}) \underline{D}_0 \quad (1.15)$$

onde  $\underline{I}$  representa o tensor identidade de quarta ordem. Como consequência, segue-se que

$$\underline{\sigma} = (\underline{I} - \underline{D}) \underline{\tilde{\sigma}} \quad (1.16)$$

Claramente, a equação (1.16) pode também ser derivada diretamente das equações (1.13) e (1.14).

## CAPÍTULO 2

### MODELO CONSTITUTIVO DE MAZARS PARA CONCRETO

#### 2.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo é dedicado ao estudo do modelo de dano proposto por **MAZARS** (1984) para o concreto submetido a carregamento proporcional crescente.

Inicialmente, para justificar o critério de dano adotado no modelo, faz-se uma análise do comportamento micro-estrutural do concreto, destacando-se o processo de microfissuração.

Em seguida, com base nas considerações anteriores, são apresentadas as hipóteses básicas do modelo proposto por Mazars, a definição de deformação equivalente e a lei constitutiva do material elástico com dano.

Finalmente este capítulo apresenta uma análise dos parâmetros do modelo.

## 2.2 COMPORTAMENTO MICROESTRUTURAL DO CONCRETO

### 2.2.1 Considerações sobre a microestrutura do concreto

Constituído por um conjunto de materiais duros e inertes (agregados), ligados entre si por uma pasta de cimento, o concreto apresenta uma microestrutura complexa que afeta diretamente as características globais relativas ao seu comportamento mecânico. Assim, as propriedades deste conglomerado dependem, ao mesmo tempo, da qualidade da pasta de cimento, das características dos agregados e da lei que se estabelece na interface pasta-agregado.

Muitos estudos mostram que a resistência mecânica efetiva do concreto é muito baixa em relação à resistência teórica necessária para vencer a coesão molecular considerando o meio como homogêneo e livre de defeitos. Tal discrepância entre a resistência teórica e a efetiva é atribuída, por diversos autores, à presença de defeitos internos do material.

Os defeitos internos podem variar de forma e dimensão e se apresentam, no caso do concreto, sob a forma de poros, microfissuras ou vazios.

-Os **poros** tem dimensões da ordem de alguns centésimos de mm, são sempre encontrados na pasta de cimento, fazendo esta assumir a forma de material poroso. Os agregados podem apresentar poros de dimensões ainda maiores que os da pasta de cimento, mas em percentual bem menor.

-As **microfissuras** já se fazem presentes antes mesmo da aplicação dos esforços, principalmente nas proximidades da interface pasta-agregado, como resultado do fenômeno de retração mais liberação de calor, que se desenvolve na fase inicial da cura.

-Os **vazios** tem dimensões notavelmente maiores que os poros capilares, forma irregular e são causados por uma insuficiência no adensamento e/ou cura do concreto fresco.

### 2.2.2 Propagação das microfissuras no concreto: observações experimentais e simulação numérica

A complexidade da microestrutura do concreto tem provocado divergências de opiniões sobre o mecanismo de propagação das microfissuras. Tal fato, pode ser atribuído à presença do agregado, que confere ao material um enorme grau de heterogeneidade, alterando suas propriedades ponto a ponto e criando superfícies de contato entre pasta e agregado, e entre agregados, com diferentes orientações em relação à direção de uma eventual força aplicada. Como consequência, os níveis de sollicitação local podem variar consideravelmente em relação ao valor nominal da sollicitação aplicada (fig. 2.1).

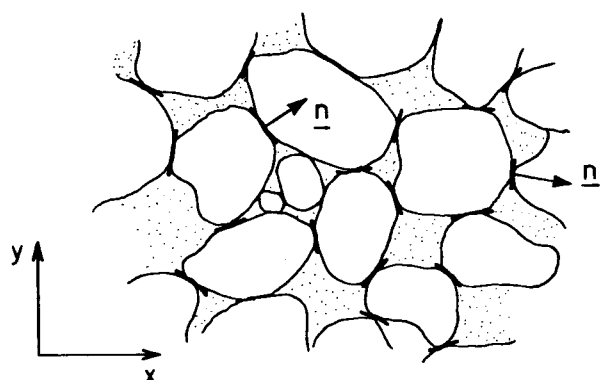


Figura 2.1 Superfície de contato entre os agregados

Alguns pesquisadores verificaram que o nível de sollicitação para o qual a microfissura, existente entre a pasta e agregado, se propaga rapidamente depende, em grande parte, da natureza do agregado grosso (superfície, composição química, e condição eletrostática influenciam na adesão pasta-agregado).

De fato observações experimentais tem mostrado como a microfissuração (e em seguida o dano) nasce, em geral, na zona de interface e se propaga no interior da pasta nas proximidades dos agregados. Por outro lado, simulações numéricas aliadas a observações experimentais, tem evidenciado



diferentes tipos de dano, na evolução do processo de microfissuração, em relação a diferentes histórias de carregamento (WILLAM (1984), SMITH (1990), LINO (1973)).

Para melhor compreensão das principais conclusões sobre as observações descritas, é conveniente revisar, da mecânica da fratura, as definições dos três tipos básicos de abertura de uma fissura.

a) Modo I: consiste da abertura da fissura por um esforço perpendicular à superfície que contém o defeito (fig. 2.2a).

b) Modo II: corresponde ao mútuo escorregamento das superfícies da fissura devida a um esforço cisalhante aplicado no plano dessas superfícies e na direção paralela ao defeito (fig. 2.2b).

c) Modo III: consiste em um escorregamento das superfícies da fissura devido a um esforço cisalhante que atua no plano dessas superfícies e em direção perpendicular ao defeito (fig. 2.2c).

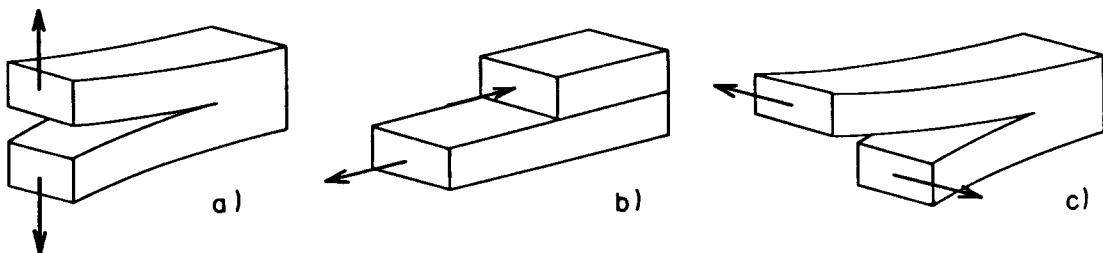
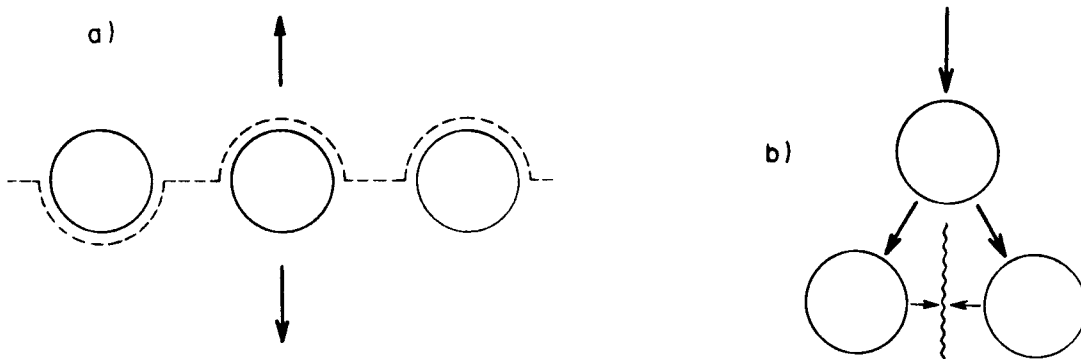


Figura 2.2 Modos básicos de abertura da superfície de uma fissura

Os resultados das observações ao nível microestrutural levam, nos casos de estados de tensões simples, às seguintes conclusões:

- em tração uniaxial o crescimento dos microdefeitos, inicialmente presente somente na interface pasta-agregado, se dá através do meio em direção perpendicular à da solicitação, segundo o modo I de abertura, até a formação de uma microfissura (fig. 2.3a);

- em compressão uniaxial, o efeito do coeficiente de Poisson e a heterogeneidade do material produzem alongamentos e tensões de tração que fazem com que as microfissuras se desenvolvam em uma direção paralela à da sollicitação segundo um modo misto de abertura (I + II) (fig. 2.3b).



*Figura 2.3 Aberturas das microfissuras no concreto*

Destas observações é possível concluir que as microfissuras crescem predominantemente em modo I, sempre que o material, sujeito a um esforço genérico, apresentar alongamentos.

Este fato explica o comportamento antissimétrico do concreto (resposta diferente na tração e na compressão) em caráter unilateral. De fato, submetendo um corpo de prova de concreto à tração uniaxial até obter um nível de dano elevado e em seguida descarregando e invertendo-se a sollicitação, observa-se, na resposta à sucessiva prova de compressão uniaxial, um restabelecimento da rigidez inicial devido ao fechamento das microfissuras (fig. 2.4).

A associação dos defeitos com a presença de alongamentos justificará o critério de dano adotado pelo modelo constitutivo descrito a seguir.

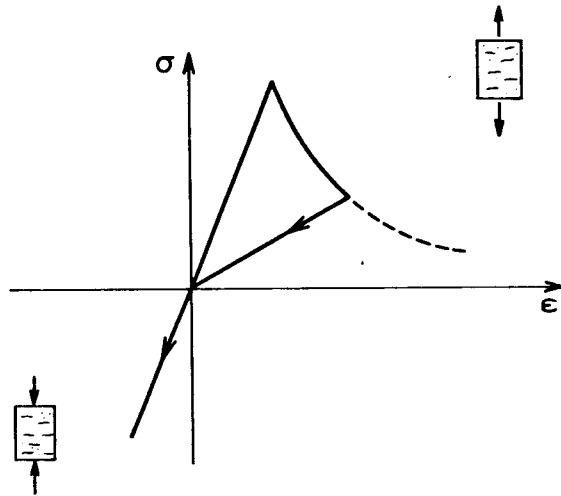


Figura 2.4 Comportamento unilateral do concreto

### 2.3 MODELO CONSTITUTIVO DE MAZARS

O modelo apresentado a seguir, proposto por MAZARS (1984), permite representar adequadamente algumas evidências experimentais do concreto. Para tal, são expostas as hipóteses básicas, as equações e, em particular, a variante indicada para descrever, de modo simplificado, o comportamento sob carregamento proporcional crescente.

#### 2.3.1 Hipóteses fundamentais

As hipóteses fundamentais em que o modelo se baseia são as seguintes:

- o concreto em processo de dano evolutivo apresenta comportamento elástico, sendo, portanto, desprezadas deformações permanentes evidenciadas, experimentalmente, numa situação de descarregamento (fig. 2.5a, b);

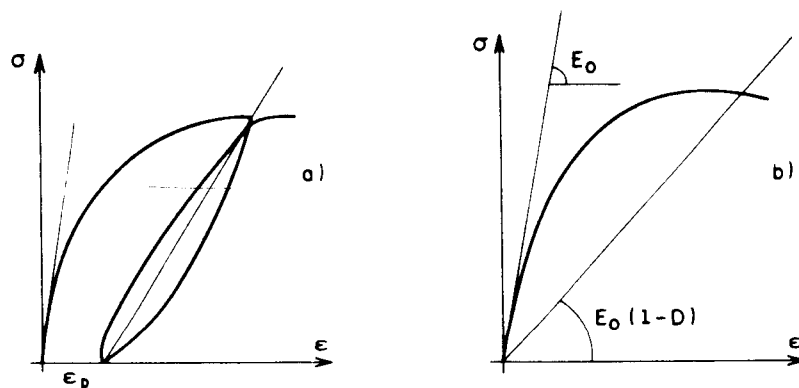


Figura 2.5 a) comportamento experimental  
b) modelo constitutivo

- supõe-se que o dano seja causado somente pela existência de extensões (alongamentos) ao menos ao longo de uma das direções principais de deformação ( $\epsilon_i > 0$ ). Isto significa supor que a ruptura local se desenvolve no modo I ou no modo misto I + II (conf. item 2.2.2);

- análises experimentais mostram que o dano conduz, em geral, a uma anisotropia do concreto (o qual pode ser considerado inicialmente como isótropo). Para reduzir o número de variáveis em jogo, simplificar o modelo e o cálculo da estrutura, considera-se que o dano seja isótropo, isto é, o estado de dano num ponto é representado por uma grandeza escalar. Porém essa hipótese não impede que o modelo leve em consideração a não simetria do comportamento entre tração e compressão.

- o dano é representado localmente por uma variável escalar  $D$  ( $0 \leq D \leq 1$ ), cuja evolução ocorre quando for superado um certo valor de referência para o alongamento equivalente;

As hipóteses básicas assumidas pelo modelo consolidam o raciocínio de que a degradação (dano) do material seja causada principalmente pela presença de extensões (alongamentos), por isso torna-se de fundamental importância definir uma "deformação equivalente" ( $\tilde{\epsilon}$ ) como um parâmetro representativo do estado local de extensão do material.

### 2.3.2 Definição de deformação equivalente

A expressão proposta é

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{ \langle \epsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_3 \rangle_+^2 } \quad (2.1)$$

onde  $\langle \epsilon_i \rangle_+$  é a parte positiva da deformação principal na direção  $i$  e definida como

$$\langle \epsilon_i \rangle_+ = \frac{1}{2} \left[ \epsilon_i + | \epsilon_i | \right] \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Desta forma: } \langle \epsilon_i \rangle_+ &= \epsilon_i & \text{se } \epsilon_i > 0 \\ \langle \epsilon_i \rangle_+ &= 0 & \text{se } \epsilon_i \leq 0 \end{aligned}$$

As seguintes considerações evidenciam as características anteriormente citadas.

- No caso de tração na direção  $i$ :

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_i$$

-No caso de compressão na direção 1:

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{ \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 } = - \nu \epsilon_1 \sqrt{2}$$

-No caso de compressão biaxial nas direções 1 e 2 ( $\epsilon_1 < 0$  e  $\epsilon_2 < 0$ ):

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{ \epsilon_3^2 } = - \frac{\nu}{1-\nu} ( \epsilon_1 + \epsilon_2 )$$

-No caso de compressão hidrostática:

$$\tilde{\epsilon} = 0$$

### 2.3.3 Critério de dano

O critério para início e evolução do dano está diretamente relacionado com a deformação equivalente que traduz o estado local de extensão do material.

De fato, admite-se que o dano aparece quando a deformação  $\tilde{\epsilon}$  atinge um valor inicial  $S(0)$ , que por convenção é igual à deformação  $\epsilon_{d0}$  correspondente ao esforço máximo em uma prova de tração uniaxial (fig. 2.6).

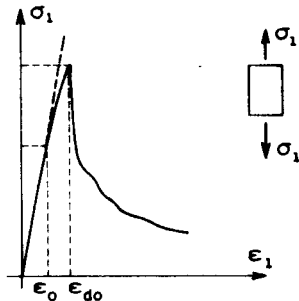


Figura 2.6 Prova de tração uniaxial: definição de  $\epsilon_{d0}$

Em uma forma geral, o critério de dano é dado pela seguinte função:

$$f(\tilde{\epsilon}, D) = \tilde{\epsilon} - S(D) \leq 0 \quad \text{com} \quad S(0) = \epsilon_{d0} \quad (2.3)$$

onde  $D$  representa a variável escalar de dano e a função  $S(D)$  esta definida no que segue.

A forma da superfície inicial  $f$  no espaço das tensões principais é representada na figura (2.7). Na mesma figura é feita uma comparação entre esta superfície e o resultado elástico experimental obtido por KUPFER (1969). Nela pode ser observado que o domínio de não existência de dano ( $f \leq 0$ ) é convexo e não simétrico com respeito a tração e compressão.

Além dessas superfícies, aparece na figura uma superfície dita corrigida que consiste simplesmente em multiplicar  $\tilde{\epsilon}$  por um coeficiente  $\gamma \leq 1$

$$\tilde{\epsilon}_{\text{corrig}} = \gamma(\sigma_i) \tilde{\epsilon} \quad (2.4)$$

$$\text{onde, } \gamma(\sigma_i) = \frac{\sqrt{\sum_i (\langle \sigma_i \rangle_-)^2}}{\sum_i (\langle \sigma_i \rangle_-)}$$

e  $\langle \sigma_i \rangle_-$  é a parte negativa da tensão principal  $\sigma_i$ .

Tal correção é proposta, sobretudo, para aliviar a discrepância entre o resultado apresentado pelo modelo e o resultado experimental de Kupfer no caso de compressão biaxial. Porém, para o desenvolvimento deste trabalho foi considerada a superfície inicial.

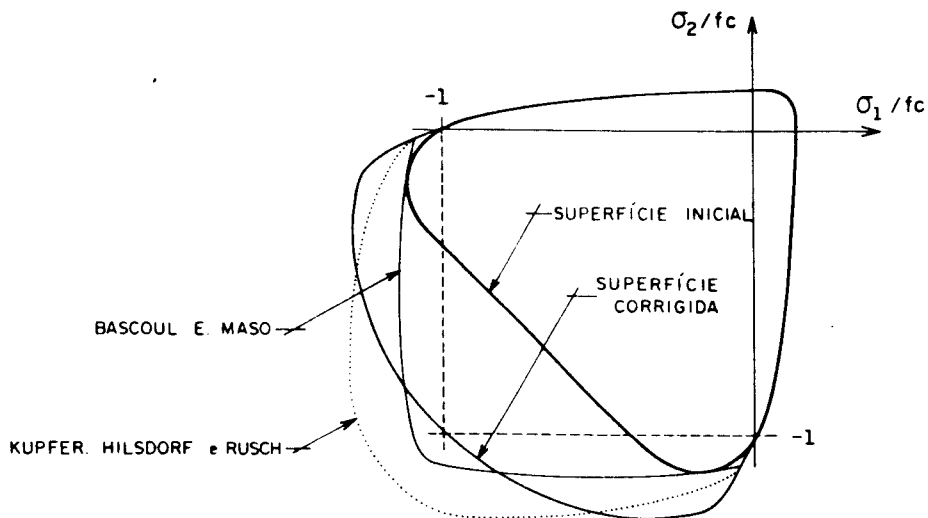


Figura 2.7 Superfícies de ruptura; [PEREGO (1989)].

Substituindo a expressão (2.1) na relação  $f(\tilde{\epsilon}, D) = 0$  obtém-se

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\langle \epsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_3 \rangle_+^2} = S(D) \quad (2.5)$$

Tal expressão define a função  $S(D)$  e representa no espaço das deformações principais uma superfície de um quarto de uma esfera de raio  $S(D)$ , dentro da qual não existe dano. Tal representação garante a mesma importância às três deformações principais (fig. 2.8).

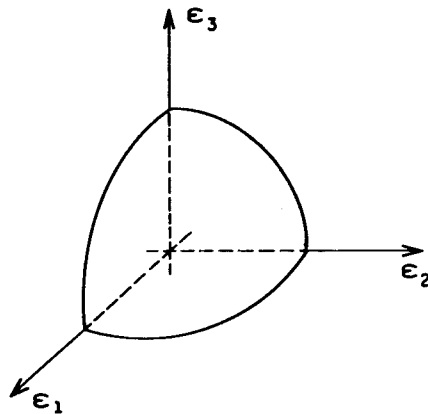


Figura 2.8 Espaço das deformações principais

#### 2.4 LEI DE EVOLUÇÃO DA VARIÁVEL DE DANO

A lei de evolução da variável escalar  $D$ , que atende aos princípios da termodinâmica dos processos irreversíveis (LEMAITRE e CHABOCHE, 1985), é representada por:

$$\begin{aligned} \dot{D} &= 0 & \text{se } f < 0, \text{ ou } f=0 & \text{ e } \dot{f} < 0 \\ \dot{D} &= F(\tilde{\epsilon}) < \dot{\tilde{\epsilon}} >_+ & \text{se } f = 0 & \text{ e } \dot{f} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde  $F(\tilde{\epsilon})$  é uma função contínua e positiva da deformação equivalente  $\tilde{\epsilon}$  (de modo que  $\dot{D} \geq 0 \forall \tilde{\epsilon}$ ) e  $(\dot{\phantom{x}}) = \partial(\phantom{x})/\partial t$ . Sendo  $t$  uma variável ordenadora do processo evolutivo.

A função  $F(\tilde{\epsilon})$ , que governa a evolução do dano, deve respeitar o comportamento experimental do material, isto é, a função deve permitir a reprodução das curvas experimentais obtidas em ensaios uni, bi e triaxiais.



No caso particular de uma prova uniaxial de tração na direção 1 tem-se:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_1 \quad \text{e} \quad \dot{D} = F(\epsilon_1) \epsilon_1$$

e supondo que a sollicitação seja monotona crescente é possível obter o valor de D correspondente a um certo nível de deformação  $\epsilon_M$  em forma explícita

$$D(\epsilon_M) = \int_0^{\epsilon_M} F(\epsilon_1) d\epsilon_1 \quad (2.7)$$

#### 2.4.1 Dano em tração e compressão uniaxial

Devido ao comportamento não simétrico do concreto submetido a tração e compressão, verifica-se uma diferença no processo de evolução da microfissuração. Em tração as microfissuras se desenvolvem perpendicularmente à direção do esforço, enquanto na compressão as microfissuras se desenvolvem paralelamente ao esforço (fig. 2.9a, b).

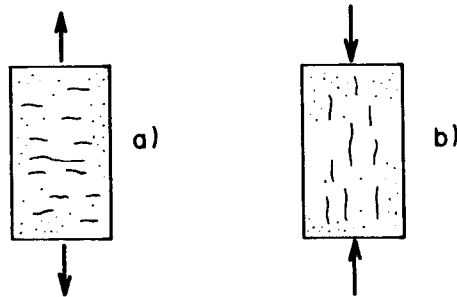


Figura 2.9 Microfissuração a) em tração  
b) em compressão

Para descrever este aspecto diferenciado foi proposta a definição, no modelo isótropo, de duas variáveis escalares  $D_T$  e  $D_C$ , representativas, respectivamente, do dano na tração e na compressão e cuja evolução é governada por leis independentes.

$$\dot{D}_T = F_T (\tilde{\epsilon}) \langle \dot{\tilde{\epsilon}} \rangle_+ \quad (\text{ para tração } ) \quad (2.8)$$

$$\dot{D}_C = F_C (\tilde{\epsilon}) \langle \dot{\tilde{\epsilon}} \rangle_+ \quad (\text{ para compressão } ) \quad (2.9)$$

#### 2.4.2 Dano no caso de sollicitação pluriaxial

Quando em um ponto do contínuo o estado de tensão é pluriaxial, (por exemplo combinação de tração-compressão), fica complexo dar uma definição realística da variável local  $D$ , visto que cada uma das componentes de tensão pode contribuir para a evolução do dano.

Para esta situação MAZARS (1984) propõe para  $D$  a seguinte expressão :

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (2.10)$$

sendo  $D$  uma combinação linear de  $D_T$  e  $D_C$ .

Os coeficientes da combinação  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  assumem valores entre 0 e 1 e devem satisfazer às condições:

- no caso de tração pura  $\alpha_T=1 \quad \alpha_C=0 \Rightarrow D=D_T$
- no caso de compressão pura  $\alpha_T=0 \quad \alpha_C=1 \Rightarrow D=D_C \quad (2.11)$
- no caso de esforço genérico  $\alpha_T + \alpha_C = 1$

Para melhor esclarecer a definição dada aos coeficientes da combinação, torna-se conveniente separar cada deformação principal em duas componentes  $\epsilon_{Ti}$  e  $\epsilon_{Ci}$

$$\epsilon_i = \epsilon_{Ti} + \epsilon_{Ci} \quad (2.12)$$

Sendo cada uma delas obtidas a partir do procedimento que se segue.

Através da relação elástica isótropa, define-se, em correspondência ao estado de deformação atual, um estado de tensão principal fictícia

$$\underline{\sigma} = \underline{D}_0 \underline{\epsilon} \quad (2.13)$$

onde  $\underline{D}_0$  é o tensor elástico do material íntegro.

Em seguida procede-se a separação do tensor de tensões  $\underline{\sigma}$  em partes positiva e negativa:

$$\underline{\sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle_+ + \langle \underline{\sigma} \rangle_- \quad (2.14)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i \rangle_+ &= \frac{1}{2} (\sigma_i + |\sigma_i|) \\ \langle \sigma_i \rangle_- &= \frac{1}{2} (\sigma_i - |\sigma_i|) \end{aligned} \quad (2.15)$$

A separação do tensor de deformações principais  $\underline{\epsilon}$ , proposta por Mazars, é a seguinte:

$$\begin{aligned} \epsilon_T &= \frac{1 + \nu}{E} \langle \underline{\sigma} \rangle_+ - \frac{\nu}{E} \langle \sum_i \sigma_i \rangle_+ \underline{I} \\ \epsilon_C &= \frac{1 + \nu}{E} \langle \underline{\sigma} \rangle_- - \frac{\nu}{E} \langle \sum_i \sigma_i \rangle_- \underline{I} \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde  $\underline{I}$  é a matriz identidade e E é o módulo de elasticidade do material.

Finalmente, as expressões propostas para os coeficientes  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$ , são as seguintes:

$$\begin{aligned} \alpha_T &= \sum_i H_i \frac{\epsilon_{Ti} (\epsilon_{Ti} + \epsilon_{Ci})}{\tilde{\epsilon}^2} \\ \alpha_C &= \sum_i H_i \frac{\epsilon_{Ci} (\epsilon_{Ti} + \epsilon_{Ci})}{\tilde{\epsilon}^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde  $H_i(\epsilon_i)$  é a função degrau de Heaviside, tal que:

$$H_i = 1 \quad \text{se} \quad \epsilon_i = \epsilon_{Ti} + \epsilon_{Ci} > 0$$

$$H_i = 0 \quad \text{se} \quad \epsilon_i < 0$$

As relações (2.17) evidenciam uma dependência anômala dos coeficientes  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  do produto  $\epsilon_{Ti} \epsilon_{Ci}$ . Por este motivo utiliza-se neste trabalho a seguinte definição alternativa (PEREGO, 1989)

$$\alpha_T = \alpha_T ( < \epsilon_T >_+ ) \tag{2.18}$$

$$\alpha_C = \alpha_C ( < \epsilon_C >_+ )$$

onde se supõe que somente os alongamentos (componentes positivas de  $\epsilon_T$  e  $\epsilon_C$ ) contribuam para a avaliação do dano, respeitando assim a hipótese assumida pelo modelo que atribui o aparecimento do dano à presença de extensões ( $\epsilon_i > 0$ ).

Para tal, efetua-se a seguinte partição dos tensores de deformações :

$$\underline{\epsilon}_T = < \epsilon_T >_+ + < \epsilon_T >. \tag{2.19}$$

$$\underline{\epsilon}_C = < \epsilon_C >_+ + < \epsilon_C >.$$

Enfim,  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  são determinados do seguinte modo:

$$\alpha_T = \frac{\sum_i < \epsilon_{Ti} >_+}{\epsilon_V^+} \tag{2.20}$$

$$\alpha_C = \frac{\sum_i < \epsilon_{Ci} >_+}{\epsilon_V^+}$$

onde  $\epsilon_V^+$  é uma variável cinemática representativa do estado local de extensão, definida por:

$$\epsilon_V^+ = \sum_i \langle \epsilon_{Ti} \rangle_+ + \langle \epsilon_{Ci} \rangle_+ \quad (2.21)$$

É oportuno notar que esta definição também respeita as condições (2.11).

Uma forma incremental da expressão (2.10) é escrita assumindo a hipótese de sollicitação radial, de modo que  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  passam a ser constantes. Assim sendo:

$$\dot{D} = \alpha_T \dot{D}_T + \alpha_C \dot{D}_C \quad (2.22)$$

Já no caso em estudo, de carregamento proporcional, é possível utilizar diretamente a forma integral (2.10) para a determinação da variável escalar D.

As expressões para as variáveis representativas do dano,  $D_T$  e  $D_C$ , são estabelecidas a partir de resultados experimentais de tração e compressão uniaxial, de modo a reproduzir, com suficiente precisão, os andamentos das curvas experimentais respectivas e, em particular, os seus ramos descendentes ("softening").

As expressões propostas para  $D_T$  e  $D_C$ , em função da deformação equivalente  $\tilde{\epsilon}$ , são:

$$D_T(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{do} (1 - A_T)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_T}{\exp [B_T (\tilde{\epsilon} - \epsilon_{do})]} \quad (2.23)$$

$$D_C(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{do} (1 - A_C)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_C}{\exp [B_C (\tilde{\epsilon} - \epsilon_{do})]} \quad (2.24)$$

onde  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $A_C$ ,  $B_C$  e  $\epsilon_{do}$  são parâmetros característicos do material a serem determinados mediante procedimento de identificação.

A figura (2.10) mostra como o modelo proposto permite, após uma prévia identificação dos parâmetros citados, reproduzir aproximadamente o andamento da curva experimental.

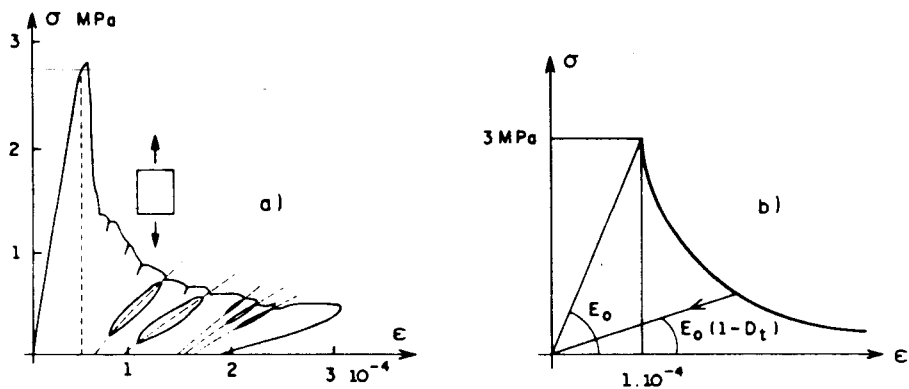


Figura 2.10 Tração uniaxial a) curva experimental b) relação constitutiva

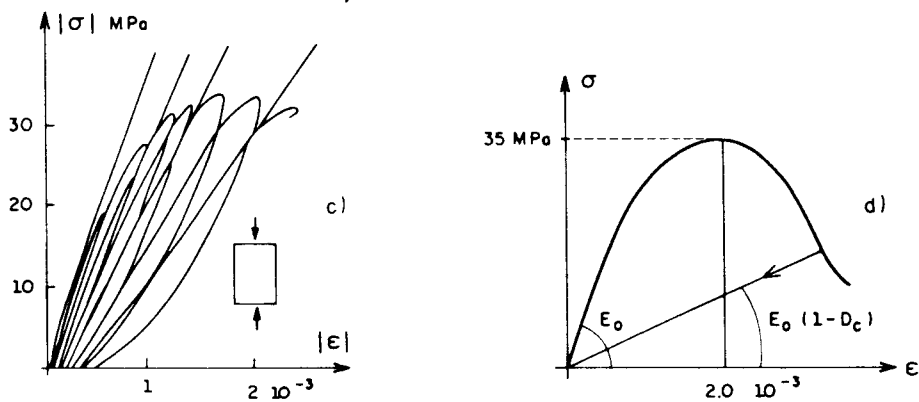


Figura 2.10 Compressão uniaxial c) curva experimental d) relação constitutiva

Em resumo, a lei constitutiva completa para o caso de carregamento proporcional é:

$$\underline{\sigma} = (1-D) \underline{D}_0 \underline{\epsilon}$$

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\langle \epsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_3 \rangle_+^2}$$

$$f(\tilde{\epsilon}, D) = \tilde{\epsilon} - S(D) \leq 0 \quad \text{com} \quad S(0) = \epsilon_{do}$$

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C$$

$$D_T(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{do} (1 - A_T)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_T}{\exp [B_T (\tilde{\epsilon} - \epsilon_{do})]}$$

$$D_C(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{do} (1 - A_C)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_C}{\exp [B_C (\tilde{\epsilon} - \epsilon_{do})]}$$

$$\alpha_T = \frac{\sum_i \langle \epsilon_{Ti} \rangle_+}{\epsilon_V^+}$$

$$\alpha_C = \frac{\sum_i \langle \epsilon_{Ci} \rangle_+}{\epsilon_V^+}$$

onde:  $\epsilon_V^+ = \sum_i \langle \epsilon_{Ti} \rangle_+ + \langle \epsilon_{Ci} \rangle_+$

## 2.5 ANÁLISE PARAMÉTRICA DO MODELO DE MAZARS

Nesta seção é feita uma análise da influência que cada parâmetro ( $\epsilon_{do}$ ,  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $A_C$ ,  $B_C$ ) exerce sobre a curva tensão-deformação.

A lei constitutiva do concreto no caso de esforço uniaxial na direção 1 é a seguinte:

$$\sigma_1 = E_0 (1 - D_H(\tilde{\epsilon})) \epsilon_1 \quad \begin{cases} D_H(\tilde{\epsilon}) = 0 & \text{se } \tilde{\epsilon} \leq \epsilon_{do} \\ D_H(\tilde{\epsilon}) \neq 0 & \text{se } \tilde{\epsilon} > \epsilon_{do} \end{cases} \quad (2.25)$$

$$D_H(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{do} (1 - A_H)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_H}{\exp [B_H (\tilde{\epsilon} - \epsilon_{do})]} \quad (2.26)$$

onde  $A_H, B_H, \epsilon_{do} \geq 0$

$$\text{com } H = T \quad \tilde{\epsilon} = \epsilon \quad \text{no caso de tração} \quad (2.27)$$

$$H = C \quad \tilde{\epsilon} = -\nu \sqrt{2} \epsilon \quad \text{no caso de compressão}$$

Omitindo-se o índice 1 e substituindo (2.27) na (2.25) obtém-se a lei,  $\sigma = \sigma(\epsilon)$

$$\sigma = E_0 (1 - D(\epsilon)) \epsilon \quad \begin{cases} D=0 & \text{se } \epsilon \leq \epsilon_{0H} \\ D=D(\epsilon) & \text{se } \epsilon > \epsilon_{0H} \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\text{onde } \epsilon_{0H} = \epsilon_{0T} = \epsilon_{do} \quad \text{se tração}$$

$$\epsilon_{0H} = \epsilon_{0C} = \frac{\epsilon_{do}}{(-\nu \sqrt{2})} \quad \text{se compressão}$$

Desta última relação se nota que assumindo para o coeficiente de Poisson um valor entre 0,18 e 0,20 obtém

$$\epsilon_{0C} \cong 3,55 \epsilon_{0T}$$

que corresponde à superfície de início de dano na compressão e esta é aproximadamente 3,5 vezes maior que aquela na tração. Tal resultado tem sido comprovado em análises experimentais.

A relação (2.28) também pode ser escrita na forma adimensional dividindo-a pelo esforço de início de dano  $\sigma_0$

$$\rho_H = [1 - D(\epsilon)] \frac{\epsilon}{\epsilon_{0H}} = [1 - D(\epsilon)] \eta_H \quad (2.29)$$

$$\text{onde } \eta_H = \frac{\epsilon}{\epsilon_{0H}} \quad ; \quad \rho_H = \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad ; \quad \sigma_0 = E_0 \epsilon_{0H} \quad (2.30)$$



Substituindo (2.26) em (2.29) se obtém a lei constitutiva na seguinte forma adimensional:

$$\rho_H(\eta) = \begin{cases} \eta & \text{para } \eta \leq 1 \\ 1 - A + \frac{A\eta}{e^{\beta(\eta-1)}} & \text{para } \eta > 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

onde:  $\beta = \beta_H = B_H \epsilon_{0H}$  (2.32)

Portanto a relação tensão-deformação assume duas expressões, uma para região elástica ( $\eta \leq 1$ ) e outra para região não linear ( $\eta > 1$ ). Para avaliar a influência de cada parâmetro ( $A_H, B_H, \epsilon_{0H}$ ) sobre a região não linear da curva  $\rho = \rho(\eta)$ , calculam-se as seguintes quantidades:

$$\zeta = \frac{d\rho}{d\eta} = A(1-\beta\eta)e^{-\beta(\eta-1)} \quad \frac{d\rho}{d\eta} = 0 \Leftrightarrow 1-\beta\eta = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{d^2\rho}{d\eta^2} = A\beta(\beta\eta-2)e^{-\beta(\eta-1)} \quad \frac{d^2\rho}{d\eta^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta\eta-2=0 \\ A=0 \\ B=0 \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \rho(\eta) = 1 - A \quad (2.35)$$

A inclinação da curva no ponto de início de dano vale:

$$\left[ \frac{d\rho}{d\eta} \right]_{\eta=1^+} = \bar{\zeta} = A(1-\beta) = A(1-B\epsilon_{0H}) \quad (2.36)$$

Assim

$$\left[ \frac{d\rho}{d\eta} \right]_{\eta=1^+} = \bar{\zeta} = \begin{cases} > 0 & \text{se } \beta < 1 \\ = 0 & \text{se } \beta = 1 \\ < 0 & \text{se } \beta > 1 \end{cases} \quad (2.37)$$

A inclinação inicial  $\zeta$  da região não linear da curva  $\rho = \rho(\eta)$  é governada pelos parâmetros  $A$  e  $\beta$ . Em particular enquanto  $A$  amplia ou diminui o valor absoluto da inclinação, (fig. 2.11a), o parâmetro  $\beta$  influencia o sinal e o valor (relação 2.34). De fato ao diminuir  $A$  se suaviza a inclinação  $\zeta$  e para  $A=0$  se obtém

$$\rho(\eta) = 1 \quad \forall \eta \geq 1 \quad (2.38)$$

Neste caso a lei constitutiva é similar à de um material elastoplástico. A diferença está no fato de que se ocorrer um descarregamento não haverá deformação residual (fig 2.11b).

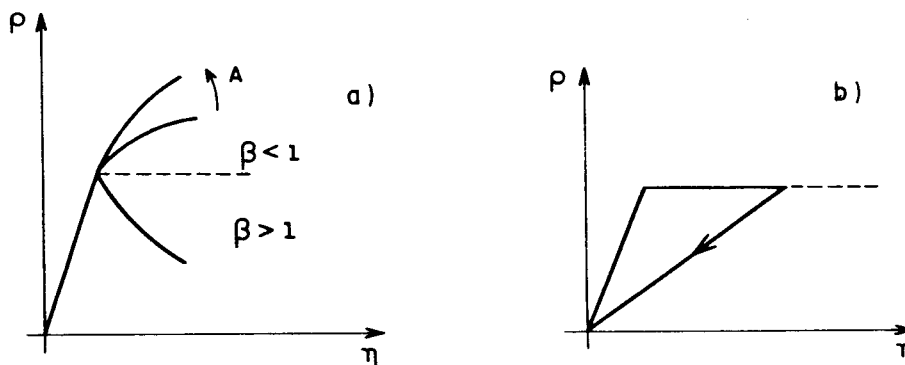


Figura 2.11 a) Influência dos parâmetros  $A$  e  $\beta$   
 b) Lei constitutiva de um material elastoplástico

Enfim, observando (2.35) e (2.31), nota-se que valores de  $A > 1$  produzem uma assíntota horizontal negativa, e por isso para  $\eta$  elevados ( $\eta > \eta^*$ ) resultam valores de  $\rho$  negativos (fig. 2.12a). Esta situação não tem significado físico, e portanto deve ser evitada utilizando-se valores de  $A \leq 1$ . Todavia nos casos em que dos procedimentos de identificação conduzem a valores de  $A$  maiores que a unidade, (por exemplo em compressão uniaxial), é possível que estes sejam utilizados na simulação numérica introduzindo no código de cálculo um teste de controle do tipo:

$$\rho(\eta) = 0 \quad \forall \eta \geq \eta^*$$

O parâmetro  $\epsilon_{do} = \epsilon_{0H}$  pode ser facilmente identificado a partir do diagrama experimental  $\sigma$ - $\epsilon$  relativo a uma prova de tração uniaxial (fig. 2.12b). De fato por hipótese  $\epsilon_{0T} = \epsilon_{0H} = \sigma_0 / E_0$ , onde  $E_0$  é o módulo de elasticidade do material íntegro.

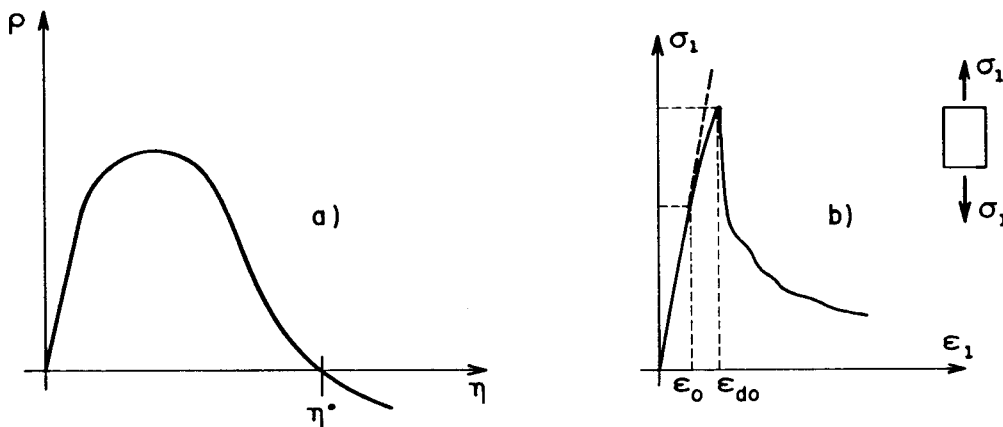


Figura 2.12 a) Curva  $\rho$ - $\eta$  para valores de  $A > 1$

b) Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  de uma prova de tração uniaxial

Assim, o estudo qualitativo da lei proposta por Mazars se distingue nos dois casos seguintes:

1) se a inclinação do trecho que segue ao início do dano é negativa (fig. 2.13a), então

$$\beta > 1 \quad \text{e} \quad B \geq 1/\epsilon_{do}$$

O máximo da curva será alcançado em  $\eta=1$  ( $\epsilon = \epsilon_{0H}$ ) e vale

$$\rho_{\max} = 1 \tag{2.39}$$

Para  $\eta > 1$  a curva  $\rho = \rho(\eta)$  é sempre descendente, com a concavidade voltada para cima ( $d^2\rho/d\eta^2 \geq 0$  para  $\eta \geq 2/\beta$ ) e tende a uma assíntota horizontal  $\rho = 1 - A$ .

2) se a inclinação daquele trecho é positiva (fig. 2.13b), então

$$\beta < 1 \quad \text{e} \quad B \leq 1/\epsilon_{d0}$$

A curva alcança o máximo em correspondência com  $\eta=1/\beta$  e este vale

$$\rho_{\max} = 1 + A(\beta^{-1} e^{-(1-\beta)} - 1) \quad (2.40)$$

A região descendente da curva apresenta um ponto de inflexão que corresponde a  $\eta=2/\beta$  e tende a uma assíntota horizontal  $\rho=1-A$  para  $\eta \rightarrow \infty$ .

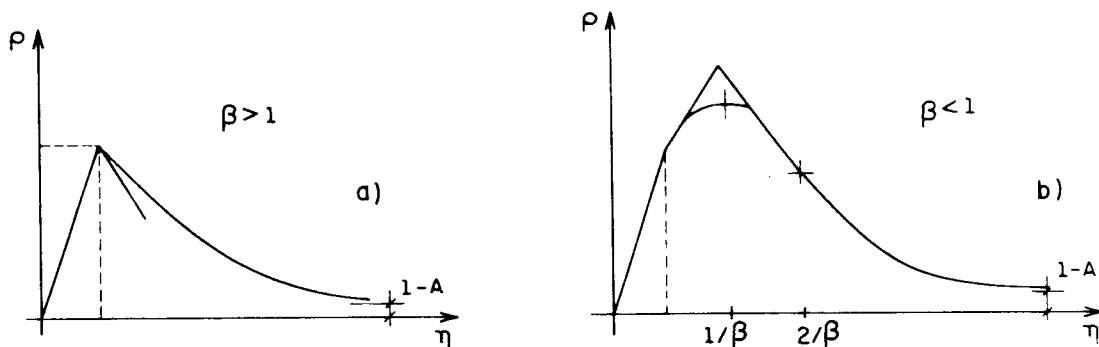


Figura 2.13 Comportamento qualitativo do concreto a) tração  
b) compressão

Observando o comportamento qualitativo do concreto em uma prova uniaxial de tração e compressão se nota:

Em compressão a inclinação inicial do trecho não linear é positiva e o esforço assume valores crescentes até alcançar o máximo em  $\eta=1/\beta$  (fig. 2.13b). Por isso deve se ter:

$$\beta_C < 1 \quad \Rightarrow \quad B_C < 1/\epsilon_{do} \quad (2.41)$$

$$A_C \leq 1$$

Em tração a inclinação inicial é negativa e o esforço é, em valor absoluto, sempre positivo. Por isso, deve-se ter:

$$\beta_T > 1 \quad \Rightarrow \quad B_T > 1/\epsilon_{do} \quad (2.42)$$

$$A_T \leq 1$$

Tomando como referencial as análises acima, MAZARS (1984) propõe os seguintes intervalos de validade para os valores dos parâmetros  $\epsilon_{do}$ ,  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $A_C$  e  $B_C$ :

$$\begin{aligned} 10^{-5} \leq \epsilon_{do} \leq 10^{-4} & \quad 1 \leq A_C \leq 1,5 \\ 0,7 \leq A_T \leq 1,0 & \quad 10^3 \leq B_C \leq 2 \cdot 10^3 \\ 10^4 \leq B_T \leq 10^5 & \quad (2.43) \end{aligned}$$

Para o caso de esforço uniaxial de tração as relações (2.43) fornecem os gráficos das figuras 2.14a, b, c.

Na figura 2.14a se observa que a escolha da variável  $\epsilon_{do}$  tem influência sobre o início e a inclinação inicial do trecho não linear ("softening") e também sobre o valor assintótico de  $\sigma$ , pois  $\sigma(\infty) = E_0 \epsilon_{do} (1 - A_T)$ .

A figura 2.14b mostra a influência do parâmetro  $A_T$  na inclinação inicial do trecho não linear e no valor da assíntota horizontal.

Quanto ao parâmetro  $B_T$ , a figura 2.14c mostra sua influência sobre o sinal da inclinação inicial do trecho não-linear e sobre o valor de pico do diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$ .

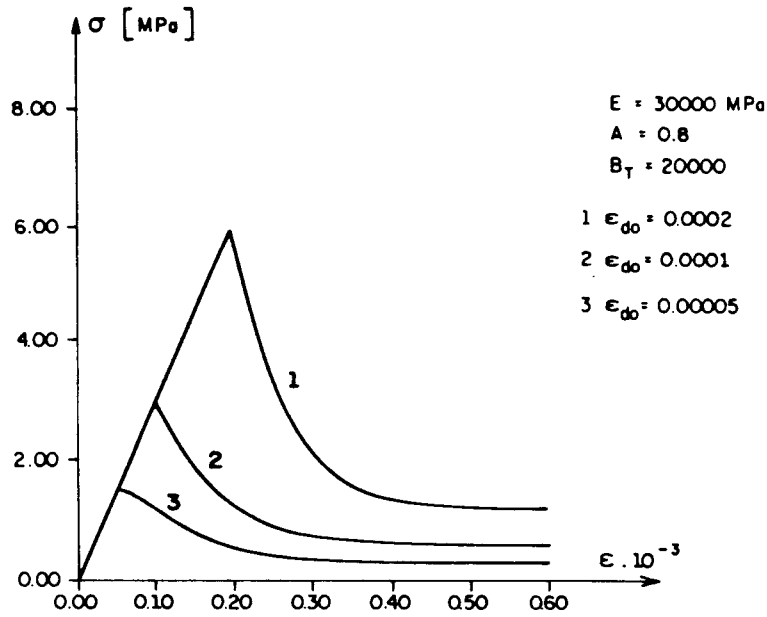


Figura 2.14 a) Influência do parâmetro  $\epsilon_{d0}$

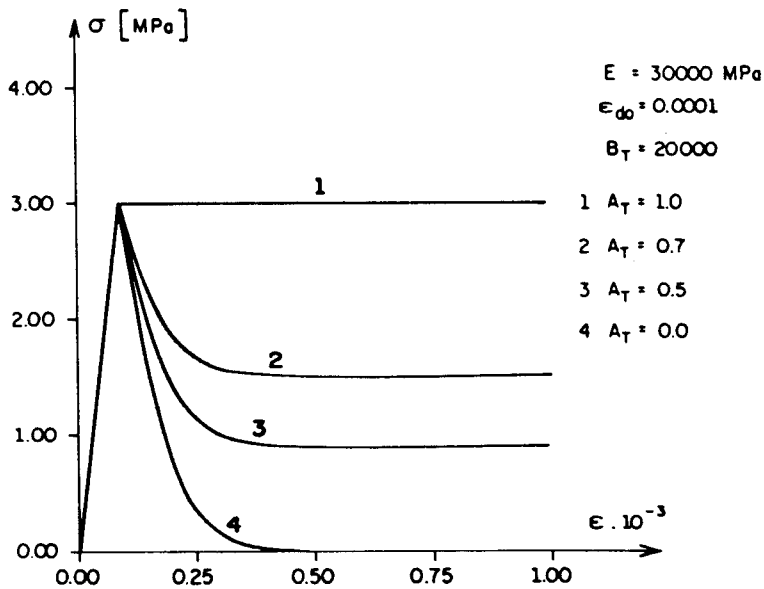


Figura 2.14 b) Influência do parâmetro  $A_T$

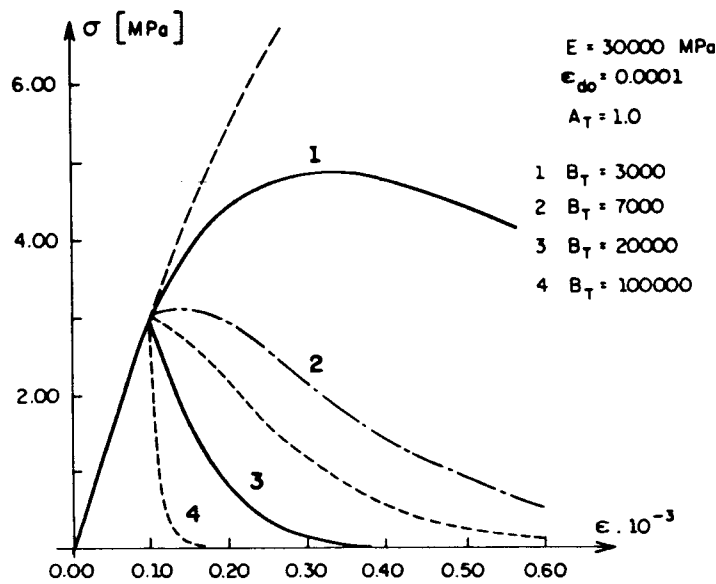


Figura 2.14 c) Influência do parâmetro  $B_T$

Para o caso de esforço uniaxial de compressão as relações (2.43) fornecem os gráficos das figuras 2.15a, b.

Da figura 2.15a, observa-se que a influência do parâmetro  $B_C$  é análoga àquela do parâmetro  $B_T$ . A figura 2.15b pode ser utilizada para confrontar respostas, com  $B_C$  fixo, variando  $A_C$  e vice-versa.

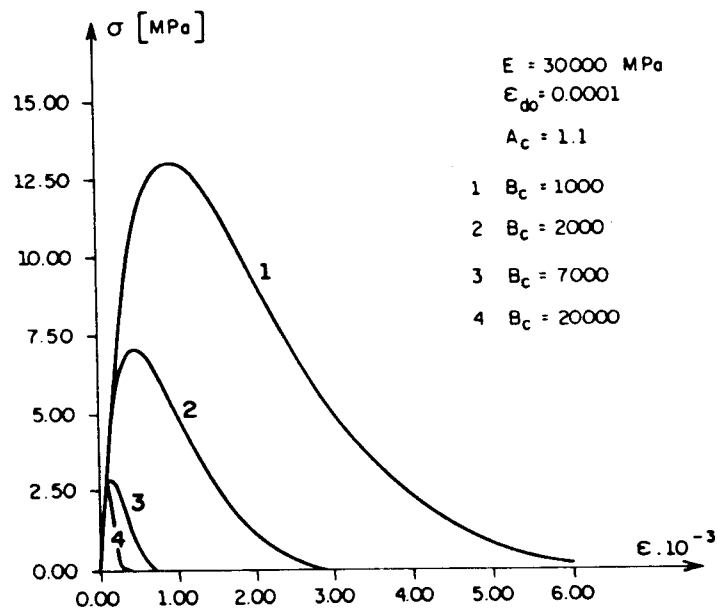


Figura 2.15 a) Influência do parâmetro  $B_C$

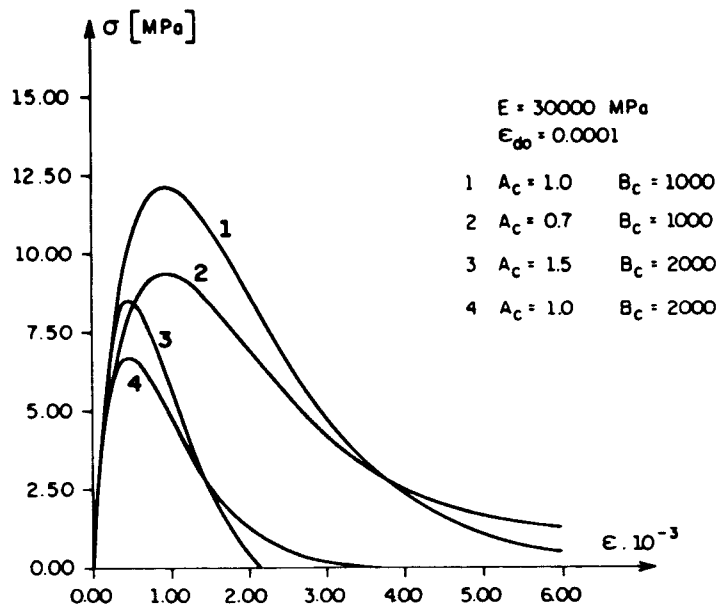


Figura 2.15 b) Influência dos parâmetros  $A_c$  e  $B_c$



## CAPÍTULO 3

### IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA E ENSAIOS REALIZADOS

#### 3.1 GENERALIDADES

A identificação paramétrica é uma das fases mais delicadas da utilização de um modelo, sobretudo se este é caracterizado por poucos parâmetros (por exemplo o modelo de Mazars). Para executar uma correta identificação e, conseqüentemente, um ajuste do modelo, é indispensável dispor de resultados experimentais confiáveis.

Neste capítulo são comentados os ensaios realizados em corpos de prova sujeitos a compressão uniaxial e diametral, e o processo analítico utilizado na identificação paramétrica do modelo em estudo. Os testes de compressão diametral em função da maior facilidade de execução vem substituir os testes de tração uniaxial no que se refere à determinação do parâmetro

$\epsilon_{do}$ . A identificação apresentada tem, também, como objetivo verificar os intervalos de validade propostos por MAZARS (1984) para os parâmetros  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $A_C$ ,  $B_C$  e  $\epsilon_{do}$  (conf. item 2.5).

### 3.2 TESTES DE COMPRESSÃO UNIAXIAL

Utilizando corpos de prova cilíndricos de concreto, de 15cm de diâmetro por 30cm de altura, os testes de compressão uniaxial foram realizados numa prensa servocontrolada (fig.3.1) com deslocamentos impostos a uma velocidade de 0,4mm/min. Estes corpos de prova foram equipados com dois extensômetros externos colocados simetricamente na metade da altura e um extensômetro interno posicionado na fôrma previamente à moldagem. Os extensômetros foram ligados a canais de leitura que, juntamente com um canal ligado à prensa (LVDT), forneceram os dados necessários para o traçado da curva tensão-deformação ( $\sigma$ - $\epsilon$ ).

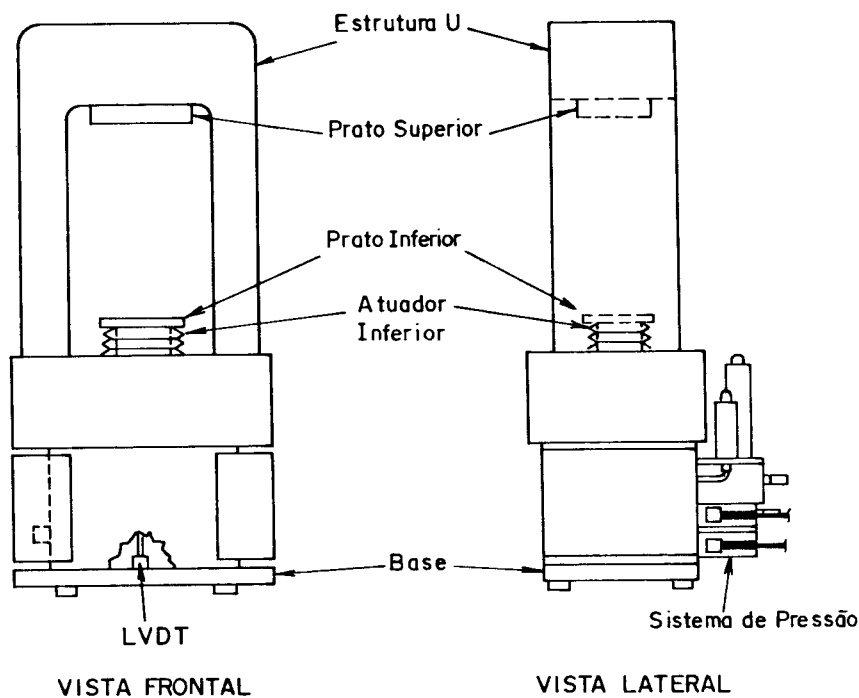
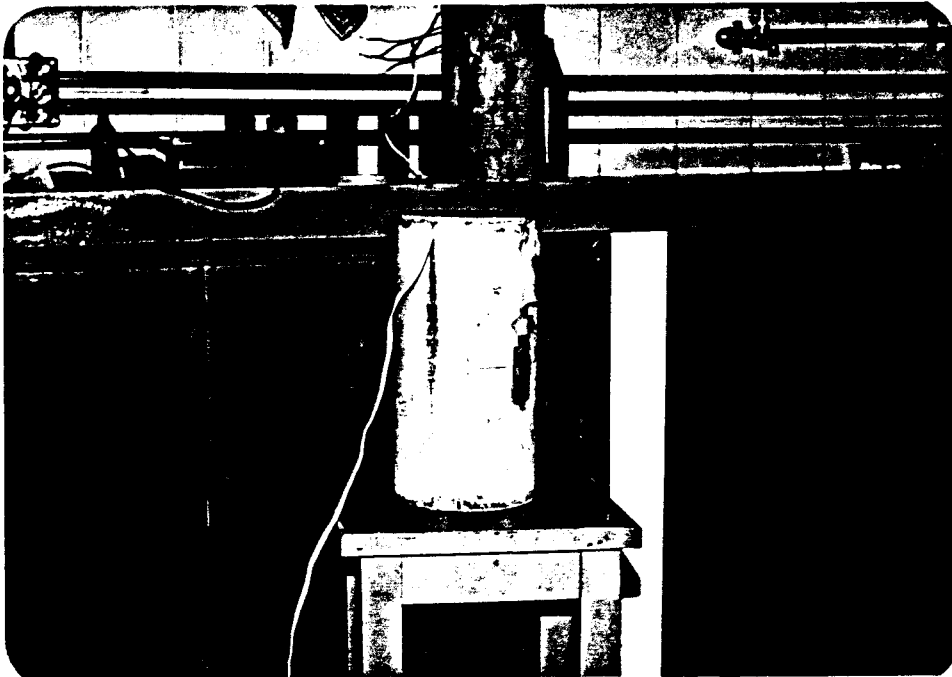


Figura 3.1 Esquema da prensa servocontrolada

A figura 3.2 mostra um corpo de prova após teste de compressão uniaxial, podendo-se observar os extensômetros externos, o canal de ligação do extensômetro interno (mais claro) e o modo de ruptura predominante no caso (cisalhamento).



*Figura 3.2 Detalhe dos extensômetros externos no corpo de prova submetido à compressão uniaxial*

Na figura 3.3 destaca-se a posição do extensômetro no interior do espécime (envolvido por uma cápsula na forma de um "waffer"). As especificações deste extensômetro são:

- Marca: Kyowa
- Tipo: KM-120-H2-11L100-3
- Dimensões: comprimento = 120mm (base de medida)  
largura = 15mm  
espessura = 4,5mm



*Figura 3.3 Destaque da posição do extensômetro interno*

Os corpos de prova ensaiados (7 séries de 3) apresentaram resistência média de pico em 21 dias de 25,509 MPa (desvio padrão de  $\pm 2,785$  MPa) e as análises dos dados coletados mostraram que:

- a curva  $\sigma$ - $\epsilon$  obtida a partir das leituras feitas através do canal ligado à prensa apresenta uma região inicial pouco resistente ou de grandes taxas de deformação (veja fig.3.4). Este fenômeno é atribuído, principalmente, à não-uniformidade inicial da superfície de contato do corpo de prova com os pratos de apoio e ao fechamento de vazios e poros presentes no interior do espécime; tal fenômeno também foi observado por VAN MIER (1984). Para reduzir esse efeito, foi realizado um ciclo inicial de carga-descarga com tensão máxima próxima a 1/3 do limite elástico previsto.

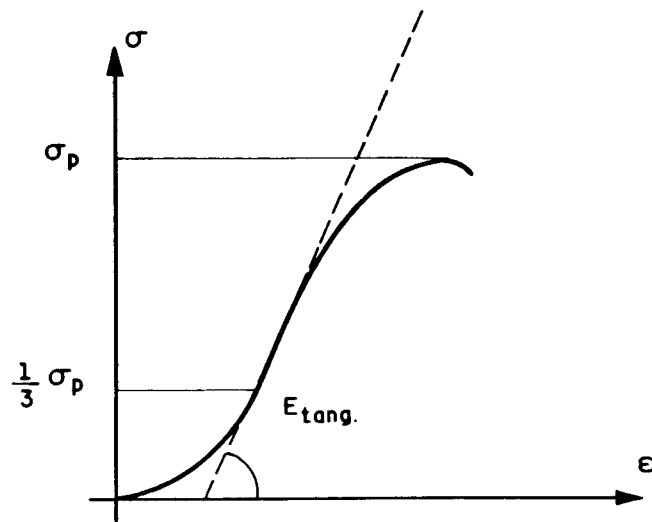


Figura 3.4 Avaliação do módulo de elasticidade (dados coletados da prensa)

- as curvas  $\sigma$ - $\epsilon$  relativas aos dados coletados dos canais ligados aos extensômetros são bastante semelhantes (fig. 3.5). A determinação do módulo de elasticidade  $E$  foi feita com base numa tangente à curva tensão-deformação na região de quase proporcionalidade (a cerca de 1/3 do valor da resistência de pico). O valor final do módulo de elasticidade foi obtido pela média dos valores encontrados.

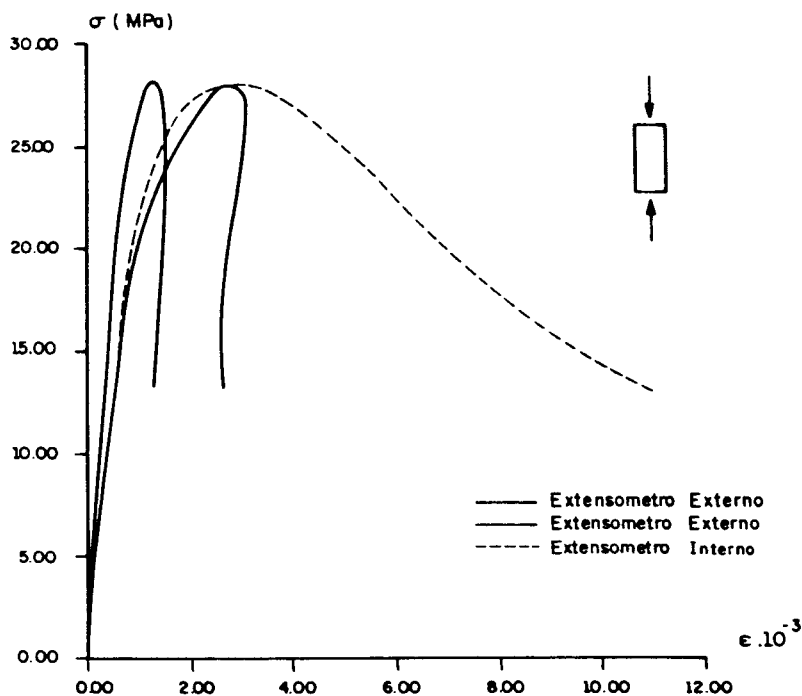


Figura 3.5 Curvas  $\sigma$ - $\epsilon$  : extensômetros externos e interno

A identificação dos parâmetros  $A_c$  e  $B_c$  do modelo tem por base a região 'pós-pico' da curva tensão-deformação. No que diz respeito aos dados coletados dos extensômetros, o canal ligado ao extensômetro interno forneceu uma curva que descreve com suficiente precisão o comportamento 'pós-pico', já os canais ligados aos extensômetros externos não apresentaram o mesmo desempenho devido, principalmente, à abertura de fissuras nos pontos de fixação dos mesmos (veja fig. 3.5).

Desse modo, os parâmetros foram identificados com base nas curvas traçadas com os dados fornecidos pelos canais ligados ao extensômetro interno e à prensa. Tais leituras se mostraram bastante confiáveis e, além disso, capazes de reproduzir observações experimentais feitas por diversos autores quanto ao comportamento em etapas sucessivas de carregamento e descarregamento (nessas etapas observam-se a perda progressiva de rigidez e a presença de deformações permanentes (fig. 3.6)).

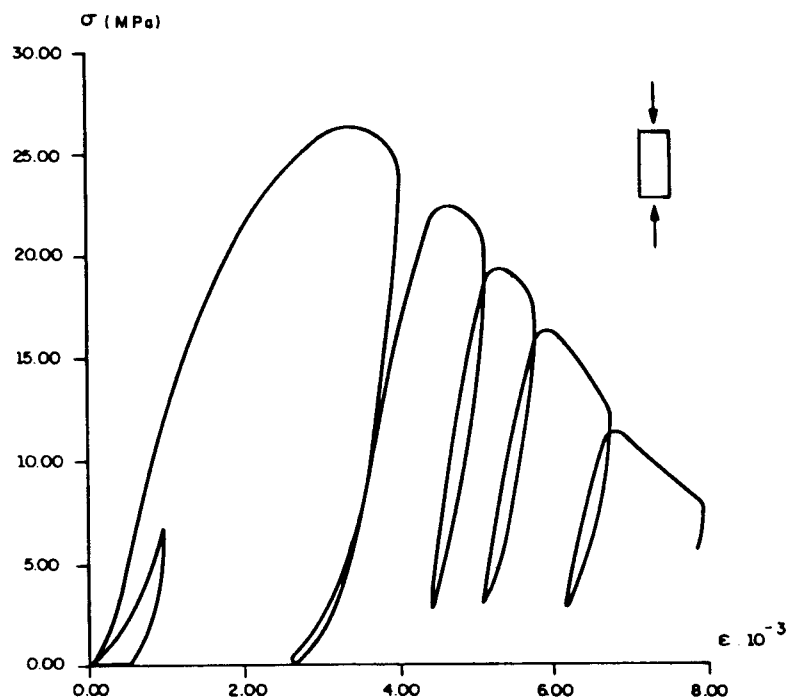


Figura 3.6 Curva tensão-deformação típica dos ensaios realizados em compressão uniaxial

### 3.3 TESTES DE COMPRESSÃO DIAMETRAL

Utilizando o mesmo mecanismo servocontrolado comentado no item 3.2, os testes de compressão diametral foram realizados em corpos de prova cilíndricos de concreto, com diâmetro de 15cm e espessura de 7,5cm. Essas dimensões não são as normalizadas para testes deste tipo em concreto. Na verdade, optou-se pela padronização indicada para testes de compressão diametral em corpos de prova de rocha, para que o ensaio pudesse ser realizado na prensa servocontrolada. Os modos de ruptura e os resultados obtidos para os valores de deformação limite  $\epsilon_{d0}$  foram absolutamente compatíveis com aqueles usualmente descritos na bibliografia.

Para a realização dos ensaios foi necessário a confecção de uma peça em aço (berço), que tem como função acomodar o corpo de prova e transferir a ele o esforço aplicado. Os espécimes foram equipados com um extensômetro externo colocado sobre o diâmetro perpendicular à direção do esforço aplicado, a fim de medir os alongamentos nesta direção (conf. item 2.2.2). A figura 3.7 mostra um corpo de prova sendo submetido à compressão diametral, podendo-se observar o berço em aço, o extensômetro externo e o tipo de ruptura característico.

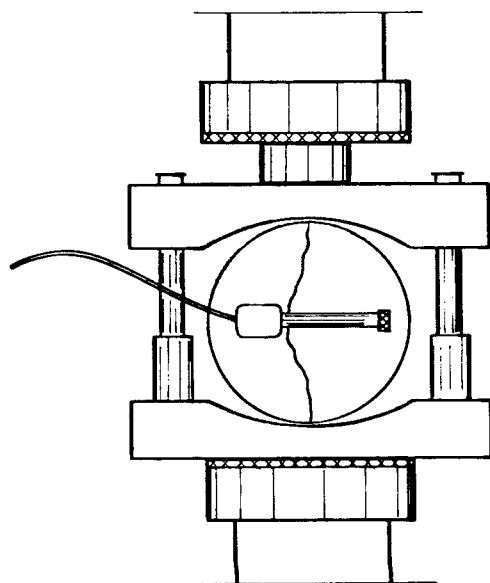


Figura 3.7 Teste de compressão diametral

O principal objetivo destes testes foi a determinação do parâmetro de tração  $\epsilon_{d0}$ , ou a deformação por alongamento em correspondência à tensão de pico. Quanto aos parâmetros  $A_T$  e  $B_T$  por razões de natureza numérica, a serem descritas no capítulo 5, foram obtidos indiretamente a partir de indicações bibliográficas e de uma correlação com a energia de fratura (análise plana).

Foram ensaiados 12 corpos de prova (carga média de pico de 56,608 kN e desvio padrão de  $\pm 3,9827$  kN), controlando-se a deformação diametral transversal à carga e empregando-se a seguinte expressão para a determinação da tensão de pico em função da carga aplicada (BIENIAWSKI, 1981).

$$\sigma_t = \frac{0,636P}{Dt} \quad (\text{MPa}) \quad (3.1)$$

onde  $\sigma_t$  é a resistência a tração do espécime,  $P$  é a carga de 'pico' (N),  $D$  é o diâmetro do corpo de prova (mm) e  $t$  é a espessura do corpo de prova (mm).

A figura 3.8 apresenta uma curva força-deslocamento transversal obtida por este tipo de teste.

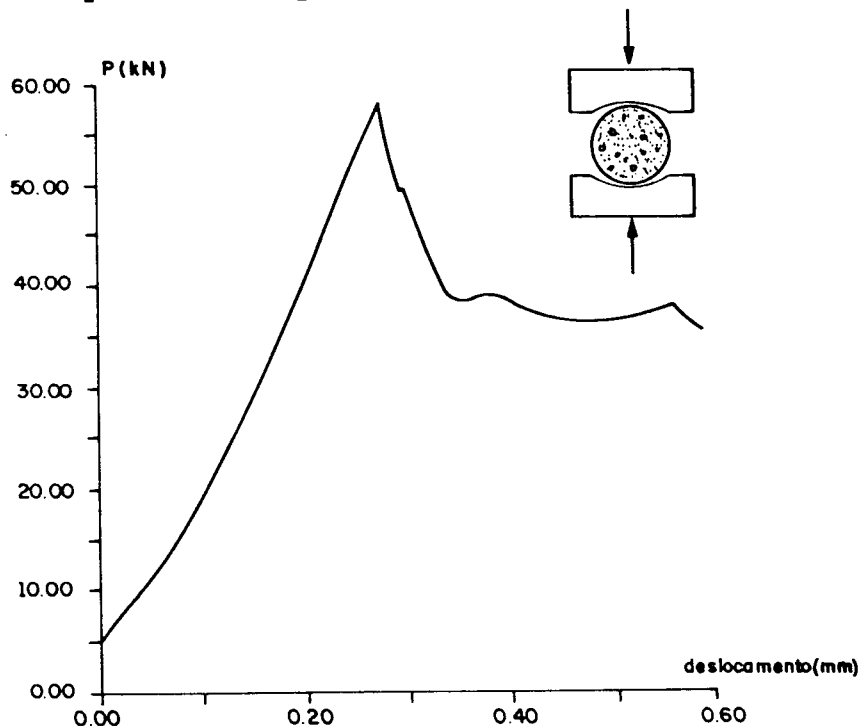


Figura 3.8 Curva força-deslocamento transversal para compressão diametral



### 3.4 PROCESSO ANALÍTICO DE IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA

O primeiro passo para a identificação consiste na escolha de uma função erro, que consiste num critério para avaliação da resposta numérica em relação à experimental, ou seja:

$$E = E (y^c (x, \underline{a}), y^s (x)) = E (\underline{a}) \quad (3.2)$$

onde:

$\underline{a}^T = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  é o vetor dos  $n$  parâmetros a serem identificados

$y^c (x, \underline{a})$  é a resposta numérica, dependente dos parâmetros  $\underline{a}$

$y^s (x)$  é a resposta experimental, normalmente registrada mediante pares de valores  $[n, y^c (n)]$

A função erro, é definida como uma integral ou uma somatória sobre um intervalo de observação, por este motivo não depende da variável  $x$ .

Numa formulação por mínimos quadrados, o erro é estimado pelo somatório dos quadrados das diferenças entre as duas funções  $y^c$  e  $y^s$

$$E (\underline{a}_i) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left[ y_k^c (x_k, \underline{a}_k) - y_k^s (x_k) \right]^2 \quad (3.3)$$

onde  $N$  é o número de pontos.

Utiliza-se o somatório porque a resposta experimental geralmente é fornecida de modo discreto.

Definida a função erro, o problema da identificação consiste na determinação do vetor de parâmetros que fornece o menor erro, ou seja, na resposta numérica que melhor descreve o comportamento experimental. Assim,

$$E_m = \min_{\underline{a}} \{ E \} \quad (3.4)$$

### 3.5 RESULTADOS NUMÉRICOS

No caso de compressão uniaxial os dados experimentais permitiram traçar a curva tensão-deformação no seu todo, inclusive com boa definição do trecho "softening". Mesmo não sendo possível reproduzir exatamente a curva experimental (em função do número reduzido de parâmetros) a identificação por mínimos quadrados conduziu a uma solução que está perfeitamente em acordo com as indicações bibliográficas consultadas, em especial MAZARS (1984), PEREGO (1989) e PROENÇA (1989). A figura 3.9 mostra as curvas tensão-deformação experimental e a traçada a partir da identificação dos parâmetros  $A_c=0,85$  e  $B_c=1620$ .

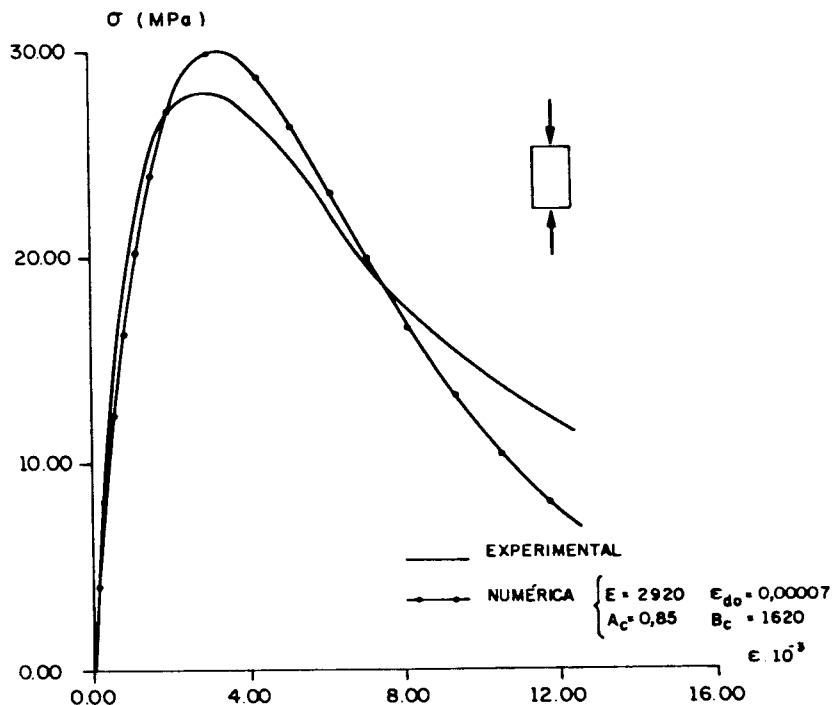


Figura 3.9 Curvas tensão-deformação: experimental e numérica

Com respeito ao parâmetro de tração  $\epsilon_{do}$ , os testes de compressão diametral forneceram dados suficientes para obter o valor 0,00007, referente à tensão de pico do diagrama tensão-deformação.

Em resumo, os parâmetros a serem utilizados pelo modelo na análise numérica de elementos estruturais, são os seguintes:

- Módulo de elasticidade do concreto:  $E = 29200$  MPa

- Parâmetros relativos à tração

$$A_T = 0,995 \quad B_T = 8000 \quad \epsilon_{do} = 0,00007$$

- Parâmetros relativos à compressão

$$A_C = 0,85 \quad B_C = 1620$$

Para  $A_T$  e  $B_T$  estão sendo sugeridos valores médios usados na bibliografia consultada; entretanto, como se verá mais adiante, seus valores serão uma função da malha de elementos finitos adotada na análise plana.

## CAPÍTULO 4

### EMPREGO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM LEI CONSTITUTIVA DE DANO

#### 4.1 ALGUNS COMENTÁRIOS SOBRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

##### 4.1.1 Introdução

Pela técnica dos elementos finitos o contínuo (bi ou tridimensional) é discretizado por um conjunto de pontos nodais que definem uma malha de elementos. O campo de deslocamentos de cada elemento é obtido por interpolação de funções polinomiais tendo como parâmetros (graus de liberdade) os deslocamentos nodais.

As características de convergência da aproximação dependem em primeiro lugar da escolha das funções interpolantes e em segundo lugar do número e da distribuição

dos elementos.

A qualidade da aproximação aumenta também ao crescer o grau do polinômio interpolador. Para garantir a convergência das funções interpolantes deve-se assegurar a "conformidade" do elemento, ou seja, a continuidade da função e de sua derivada, até a ordem  $m$  requerida pelas integrais características do método e apresentadas no que segue ( $m=1$  nos contínuos elásticos bi ou tridimensionais). No entanto usam-se (para chapas e cascas) elementos não conformes, de formulação mais simples, que, no entanto, fornecem convergência (não-monotônica) ao refinar a discretização.

Indicando por  $n$  o elemento genérico e por  $\underline{u}_n$  o vetor campo de deslocamentos deste elemento, a interpolação realizada sobre o elemento pode ser representada por:

$$\underline{u}_n(\underline{x}) = \underline{N}_n(\underline{x}) \underline{q}_n \quad (4.1)$$

onde  $\underline{q}_n$  é o 'vetor dos graus de liberdade' que reúne os deslocamentos nodais;

$\underline{N}_n(\underline{x})$  é a matriz das 'funções de forma' e  $\underline{x}$  é o vetor posição de um ponto do elemento.

Para o caso de pequenos deslocamentos, as equações de compatibilidade assumem a forma:

$$\underline{\epsilon}_n(\underline{x}) = \mathcal{S}(\underline{u}_n) = \mathcal{S}(\underline{N}_n(\underline{x}) \underline{q}_n) = \underline{B}_n(\underline{x}) \underline{q}_n \quad (4.2)$$

onde  $\mathcal{S}$  é um operador diferencial de primeira ordem.

A afirmação variacional de equilíbrio, para um domínio de volume  $\Omega$  e superfície  $\Gamma$ , pode ser feita mediante o princípio dos trabalhos virtuais:

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \underline{u}^T \underline{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \underline{u}^T \underline{p} \, d\Gamma \quad (4.3)$$

$\forall \delta \underline{u}, \delta \underline{\epsilon}$  congruentes (variações, respectivamente, dos campos de deslocamentos e deformações compatíveis com as condições de contorno).

onde  $\underline{b}$  é o vetor de forças de volume e  $\underline{p}$  o vetor de forças de superfície.

Interpretando a estrutura ou sólido como uma reunião de  $n$  elementos ( $\Omega = \sum_n \Omega_n$ ), os graus de liberdade passam a ser reunidos num vetor global  $\underline{q}$  de que para cada elemento  $\underline{q}_n = \underline{C}_n \underline{q}$ ,  $\underline{u}_n = \underline{N} \underline{q}$  e  $\underline{\epsilon}_n = \underline{B} \underline{q}$  onde  $\underline{C}_n$  é uma matriz de conexão entre os graus de liberdade globais e locais. Nessas condições, a expressão de trabalho virtual assume a forma:

$$\sum_{n=1}^N \int_{\Omega_n} \delta \underline{q}^T \underline{B}^T \underline{\sigma} \, d\Omega = \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_n} \delta \underline{q}^T \underline{N}^T \underline{b} \, d\Omega = \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_n} \delta \underline{q}^T \underline{N}^T \underline{p} \, d\Gamma \quad (4.4)$$

$\forall \delta \underline{q}$  representando o vetor variação dos deslocamentos globais compatíveis com as condições de contorno.

Omitindo o símbolo de somatória a expressão (4.4) pode ser reescrita, em forma mais compacta, no seguinte modo:

$$\int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{\sigma}(\underline{\epsilon}) \, d\Omega = \underline{R} \quad (4.5)$$

com

$$\underline{R} = \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{N}^T \underline{p} \, d\Gamma \quad (4.6)$$

Nota-se que, na expressão (4.5), o esforço depende do vetor incógnita  $\underline{q}$ , através da relação constitutiva  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\epsilon})$ .

No caso elástico, a lei constitutiva assume a simples forma de proporcionalidade (lei de Hooke generalizada).

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon} \quad (4.7)$$

Nesse caso, o primeiro termo da expressão (4.5) torna-se:

$$\int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{D} \underline{\epsilon} \, d\Omega = \left( \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d\Omega \right) \underline{q} = \underline{K} \underline{q} \quad (4.8)$$

onde  $\underline{\underline{K}}_n$  é a matriz de rigidez da estrutura obtida, através de um procedimento de reunião, pela contribuição das matrizes de rigidez de cada elemento finito. A matriz de rigidez do elemento finito  $n$ , no sistema local ( $q_n$ ) pode ser escrita, genericamente, como:

$$\underline{\underline{K}}_n = \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}_n^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_n \, d\Omega \quad (4.9)$$

#### 4.1.2 Reduções a problemas bi-dimensionais

Uma significativa diminuição do número de incógnitas e de carga computacional, ocorre quando é possível simplificar, mediante oportunas hipóteses, um problema tridimensional, passando-se a um problema plano. Neste caso a discretização se efetua num plano,  $(x, y)$  por exemplo, enquanto as variáveis em jogo são funções de  $x$  e  $y$  e o número de graus de liberdade por nó se reduz a dois. Esta simplificação é típica em duas classes de problemas: estados planos de tensão e estados planos de deformação. A expressão da matriz de rigidez em um problema elástico plano é um caso particular da expressão (4.9):

$$\underline{\underline{K}}_n = \int_{\Omega_n} \underline{\underline{B}}_n^T(x, y) \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_n(x, y) \, d\Omega = \int_{\Gamma_n} \underline{\underline{B}}_n^T \underline{\underline{D}}_s \underline{\underline{B}}_n \, d\Gamma \quad (4.10)$$

onde

$$\underline{\underline{D}}_s = \int_h \underline{\underline{D}} \, dz \quad (4.11)$$

é a matriz de rigidez da relação constitutiva e  $h$  é a espessura do contínuo no ponto considerado.

## 4.2 ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS BIDIMENSIONAIS

A necessidade de analisar domínios com contornos irregulares levou à formulação de particulares tipos de elementos finitos ditos isoparamétricos (fig. 4.1a). Tais elementos permitem reduzir os erros consequentes do processo de discretização da estrutura uma vez que estão em condição de modelar, além do campo das variáveis incógnitas, também a geometria do corpo.

A formulação destes elementos caracteriza-se pela existência de uma transformação de coordenadas que permite passar do sistema inicialmente estabelecido (cartesiano ortogonal), no domínio de forma irregular, a um sistema definido em um domínio normalizado ("master element") dotado de uma métrica mais simples. Tal transformação deve ser inversível para garantir uma correspondência biunívoca.

Como consequência da formulação isoparamétrica é possível executar as integrações das expressões derivadas da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, por exemplo, sobre o "master element".

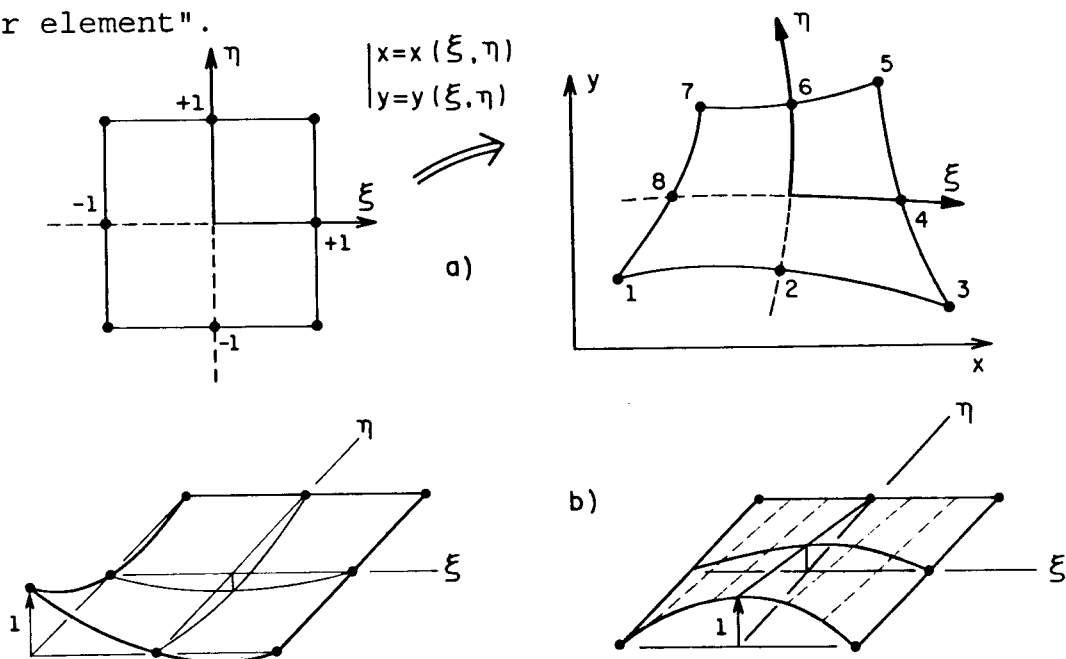


Figura 4.1 a) elemento finito isoparamétrico de 8 nós  
b) exemplos de funções de forma



As transformações de coordenadas geralmente empregadas são do tipo:

$$x = x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m x_i \tilde{N}_i(\xi, \eta) \quad (4.12)$$

$$y = y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m y_i \tilde{N}_i(\xi, \eta)$$

onde  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas dos  $m$  pontos do elemento finito,  $\tilde{N}_i$  são as funções de interpolação geométrica. O elemento finito é chamado isoparamétrico quando os  $m$  pontos coincidem com todos os nós do elemento ( $m=n$ ) e as funções  $\tilde{N}_i$  coincidem com as funções de forma empregadas na modelagem do campo dos deslocamentos ( $\tilde{N}_i = N_i$ ). Estas funções, (fig. 4.1b), são expressas na seguinte forma:

- para elemento de quatro nós

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.13a)$$

- para elemento de oito nós

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \quad i = 1, 3, 5, 7$$

$$N_i = (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) \frac{\xi_i^2}{2} + (1 + \eta \eta_i) (1 - \xi^2) \frac{\eta_i^2}{2} \quad i = 2, 4, 6, 8 \quad (4.13b)$$

A determinação da matriz de rigidez do elemento é quase sempre irrealizável em forma fechada, por isso a integração vem executada numericamente utilizando a quadratura Gaussiana. Para o caso bidimensional, uma função genérica "f" pode ser escrita na seguinte forma (BREBBIA, 1975):

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (4.14)$$

onde  $n^2$  é o número de pontos de Gauss,  $(\xi_i, \eta_j)$  são as suas coordenadas e  $w_i$  e  $w_j$  são fatores ponderadores. A figura 4.2 ilustra a posição dos pontos de Gauss (G.P.) e os valores dos ponderadores para os elementos de 4 e 8 nós (para os elementos de 8 nós não é possível integrar exatamente a matriz de rigidez; de norma assume-se  $n=3$  com  $3^2$  G.P.).

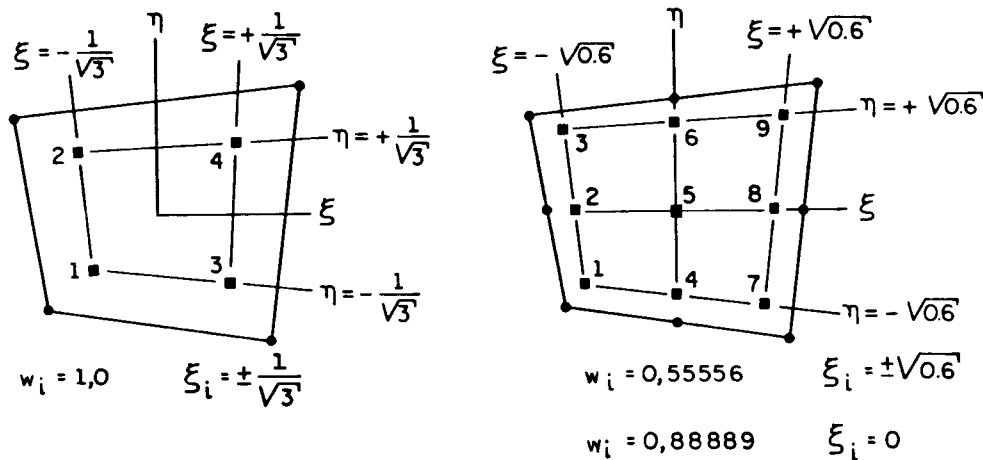


Figura 4.2 Posição dos pontos de Gauss e valores dos ponderadores

Para o elemento isoparamétrico plano a matriz de rigidez pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 K_n &= \int_{\Gamma_n} \underline{B}_n^T(x, y) \underline{D}_s \underline{B}_n(x, y) d\Gamma \\
 &= \sum_i \sum_j \underline{B}_n^T(\xi_i, \eta_j) \underline{D}_s \underline{B}_n(\xi_i, \eta_j) \det(\underline{J}) w_i w_j \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

onde  $\underline{D}_s$  é definida pela expressão (4.11) e  $\underline{J}$  é a matriz jacobiana da transformação definida pela seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

### 4.3 ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS DEGENERADOS

Descrevem-se, no que segue, alguns aspectos relativos à formulação dos elementos tridimensionais isoparamétricos degenerados e dos elementos quadriláteros isoparamétricos planos empregados neste trabalho.

#### 4.3.1 Generalidades

A figura 4.3a mostra um elemento finito tridimensional, do tipo isoparamétrico, dotado de três graus de liberdade por nó. Tal elemento é utilizado nos casos em que não é possível o uso de hipóteses simplificadoras que permitam reduzir o problema a um caso plano.

Para uma ampla classe de estruturas, entre as quais as cascas e placas, é possível empregar particulares tipos de elementos finitos, ditos "degenerados" (fig. 4.3b), obtidos a partir de elementos finitos tridimensionais (HINTON, 1984).

As hipóteses que conduzem à simplificação são relativas à deformação da seção transversal (REISSNER e MINDLIN). Admite-se que a normal à superfície média da casca permaneça reta após a deformação mas não necessariamente normal à superfície deformada. Além disso, se desprezam os esforços normais à superfície média da casca e as correspondentes deformações. Estas hipóteses são razoáveis nos casos em que a espessura do elemento estrutural é "pequena" em relação às outras duas dimensões.

Com as hipóteses acima citadas é possível adotar elementos situados sobre a superfície média da casca e dotados com cinco graus de liberdade por nó (fig. 4.3c), três deslocamentos e duas rotações. As definições dos graus de liberdade associados aos deslocamentos independentes das rotações permitem levar em conta as deformações por cisalhamento, uma vez que as rotações não correspondem diretamente à inclinação da superfície média.

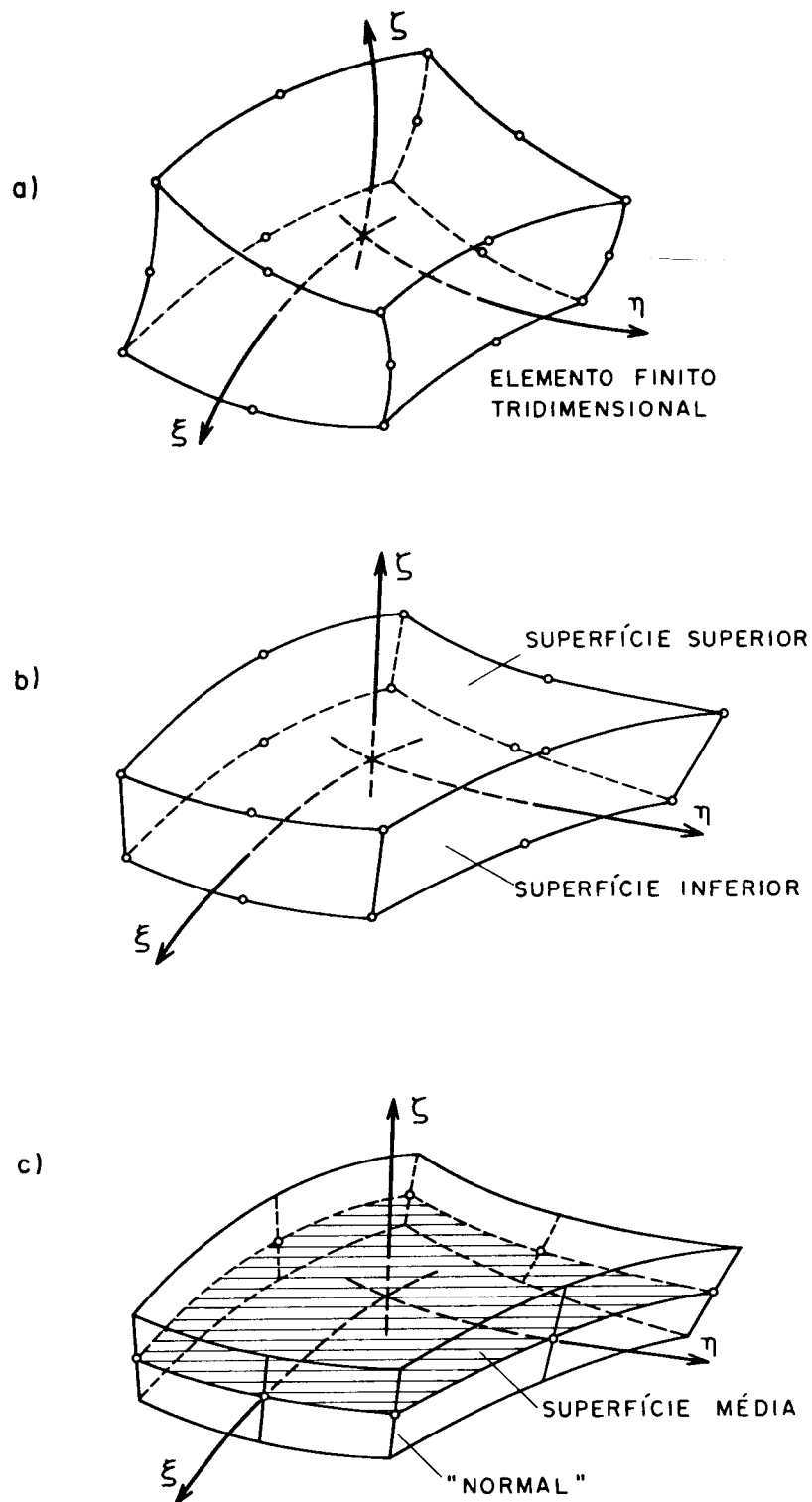


Figura 4.3 a) Elemento finito de volume  
 b) Elemento finito isoparamétrico de volume degenerado  
 c) Elemento finito isoparamétrico degenerado [HINTON (1984)].

#### 4.3.2 Sistemas de coordenadas

Na formulação dos elementos finitos degenerados é necessário o uso de diferentes sistemas de coordenadas. Os sistemas de coordenadas, em número de quatro, usados na presente formulação são os seguintes:

a) sistema global de coordenadas

É um sistema cartesiano, escolhido livremente, em relação ao qual a geometria da estrutura é definida no espaço. Coordenadas nodais, deslocamentos, matriz de rigidez global e vetor de forças aplicado são referidos a este sistema (fig. 4.4a).

A seguinte notação é usada:

para os versores dos eixos cartesianos,

$$\bar{x}_i \quad (i=1,3) \quad \text{onde} \quad \bar{x}_1 = x \quad \bar{x}_2 = y \quad \bar{x}_3 = z$$

para as coordenadas,

$$x_i \quad (i=1,3) \quad \text{onde} \quad x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z \quad (4.17)$$

e para os deslocamentos

$$u_i \quad (i=1,3) \quad \text{onde} \quad u_1 = u \quad u_2 = v \quad u_3 = w$$

b) sistema de coordenadas nodais

Um sistema de coordenadas nodais é definido em cada ponto nodal (fig. 4.4b) com origem na superfície de referência (superfície média). O vetor  $\underline{V}_{3k}$  é definido a partir das coordenadas dos pontos sobre as superfícies superior e inferior em correspondência do nó k,

$$\underline{V}_{3k} = \underline{x}_k^{\text{Sup}} - \underline{x}_k^{\text{Inf}} \quad (4.18)$$

onde  $\underline{x}_k^T = [ x_k \ y_k \ z_k ]$ .

É oportuno notar que este vetor tem por módulo o

comprimento  $s_k$  da espessura da casca no ponto  $k$ .

O vetor  $\underline{V}_{1k}$  é perpendicular a  $\underline{V}_{3k}$  e paralelo ao plano de referência global  $xz$  e o vetor  $\underline{V}_{2k}$  é perpendicular ao plano definido por  $\underline{V}_{1k}$  e  $\underline{V}_{3k}$

$$\underline{V}_{2k} = \underline{V}_{3k} \times \underline{V}_{1k} \quad (4.19)$$

O sistema de referência nodal é determinado, a partir dos versores obtidos dos precedentes vetores, da seguinte forma:

$$\bar{v}_{ik} = \underline{V}_{ik} / \|\underline{V}_{ik}\| \quad \text{com } i=1,3 \quad (4.20)$$

O versor  $\bar{v}_{3k}$  define a direção da normal ao nó  $k$ , a qual não é necessariamente perpendicular à superfície média da casca. Os graus de liberdade locais são os deslocamentos nas direções dos versores  $\bar{v}_{ik}$  e as rotações em termo dos versores  $\bar{v}_{1k}$  e  $\bar{v}_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$  e  $\beta_{1k}$  respectivamente. A vantagem desta definição para o versor  $\bar{v}_{3k}$  (não necessariamente perpendicular à superfície média da casca) é que se evita, na modelação da geometria, sobreposição ao longo do contorno da estrutura.

#### c) sistema de coordenadas curvilíneas

Neste sistema  $\xi$  e  $\eta$  são duas coordenadas curvilíneas situadas sobre a superfície média do elemento e  $\zeta$  é a coordenada linear na direção da espessura (fig. 4.4c). É suposto que  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  variem de -1 a +1 entre as respectivas faces do elemento.

#### d) sistema de coordenadas locais

É um sistema cartesiano de coordenadas definido somente nos pontos onde devem ser impostas as relações entre tensões e deformações (pontos de Gauss). A direção  $x'_3$  é tomada como perpendicular à superfície  $\zeta=\text{constante}$  (fig. 4.4d), podendo ser obtida pelo produto vetorial

$$\underline{x}'_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

A direção  $\underline{x}'_1$  é tomada como tangente ao plano  $\zeta = \text{constante}$  na direção  $\xi$ ,

$$\underline{x}'_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Enquanto a direção  $\underline{x}'_2$  é perpendicular às duas direções e é definida por:

$$\underline{x}'_2 = \underline{x}'_3 \times \underline{x}'_1 \quad (4.23)$$

Este sistema de coordenadas varia de ponto a ponto da casca uma vez que depende da curvatura e espessura, em geral variáveis.

A matriz de transformações  $\underline{T}$ , que permite passar de um sistema local para um sistema global de coordenadas, é definida por

$$\underline{T} = [ \underline{\bar{x}}' , \underline{\bar{y}}' , \underline{\bar{z}}' ] \quad (4.24)$$

onde  $\underline{\bar{x}}'$ ,  $\underline{\bar{y}}'$  e  $\underline{\bar{z}}'$  são os versores unitários nas direções dos eixos  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  respectivamente.

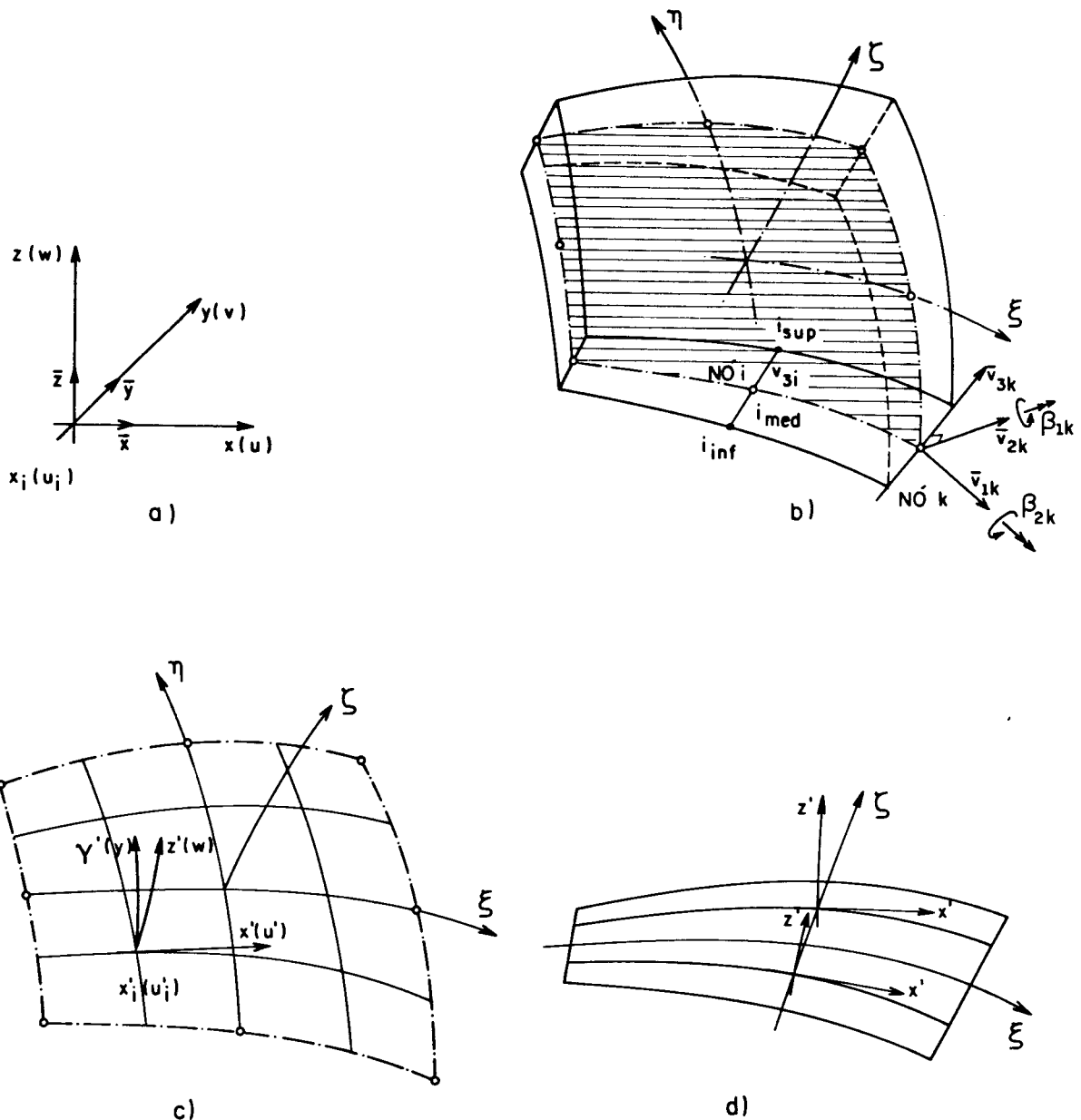


Figura 4.4 a) sistema de referência global  
 b) sistema de coordenadas nodais  
 c) sistema de coordenadas curvilíneas  
 d) sistema de coordenadas locais  
 [HINTON (1984)].

#### 4.3.3 Geometria do elemento

Supondo-se conhecidas as coordenadas globais  $x_{ik}^{Sup}$  e  $x_{ik}^{Inf}$  dos pontos situados, respectivamente, nas superfícies inferior e superior em correspondência do nó  $k$  na formulação



isoparamétrica as coordenadas de um ponto no interior do elemento são obtidas mediante interpolações, efetuadas através de funções de forma, no seguinte modo:

$$\bar{x}_i = \sum_{k=1}^n N_k \frac{1+\zeta}{2} x_{ik}^{Sup} + \sum_{k=1}^n N_k \frac{1-\zeta}{2} x_{ik}^{Inf} \quad (4.25)$$

ou

$$\bar{x}_i = \sum_{k=1}^n N_k x_{ik}^{Med} + \sum_{k=1}^n N_k \frac{h_k}{2} \zeta \bar{v}_{3k}^i \quad (4.26)$$

com

$$x_{ik}^{Med} = \frac{1}{2} (x_{ik}^{Sup} + x_{ik}^{Inf}) \quad (4.27)$$

$$h_k \bar{v}_{3k}^i = (x_{ik}^{Sup} - x_{ik}^{Inf})$$

onde o índice  $i=1,3$  indica as três direções do sistema de referência global,  $n$  é o número de nós do elemento,  $N_k = N_k(\xi, \eta)$  ( $k=1, n$ ) as funções de forma,  $\xi, \eta, \zeta$  as coordenadas curvilíneas e  $h_k$  é a espessura do elemento no ponto considerado.

O primeiro termo da equação (4.26) representa a interceptação da normal com a superfície média e o segundo termo define a posição do ponto ao longo da normal. Mais explicitamente a equação (4.26) pode ser escrita,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}_{Med} + \sum_{k=1}^n N_k \frac{h_k}{2} \zeta \begin{bmatrix} \bar{v}_{3k}^x \\ \bar{v}_{3k}^y \\ \bar{v}_{3k}^z \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

#### 4.3.4 Campo dos deslocamentos

Levando em consideração as duas hipóteses do processo de degeneração (conf. 4.3.1), o campo de deslocamentos é definido

pelos cinco graus de liberdade do nó k: três deslocamentos ( $u_{ik}^{Med}$ ) e duas rotações ( $\beta_{1k}, \beta_{2k}$ ). Os deslocamentos de um ponto sobre a normal em k resultantes das duas rotações são calculados como,

$$\delta_{1k} = \zeta h_k \beta_{1k} \quad (4.29)$$

$$\delta_{2k} = \zeta h_k \beta_{2k}$$

onde  $\delta_{1k}$  é o deslocamento na direção de  $\bar{v}_{1k}$ ,  $\delta_{2k}$  é o deslocamento na direção oposta a  $\bar{v}_{2k}$ , em relação à superfície média (fig. 4.5).

As correspondentes componentes do deslocamento  $u_i$  são obtidas por,

$$(u_i)_{\beta_{1k}} = \delta_{1k} \bar{v}_{1k}^i \quad (4.30)$$

$$(u_i)_{\beta_{2k}} = \delta_{2k} (-\bar{v}_{2k}^i)$$

Na expressão (4.29) a relação linear empregada assume que as rotações (variações dos ângulos) sejam pequenas.

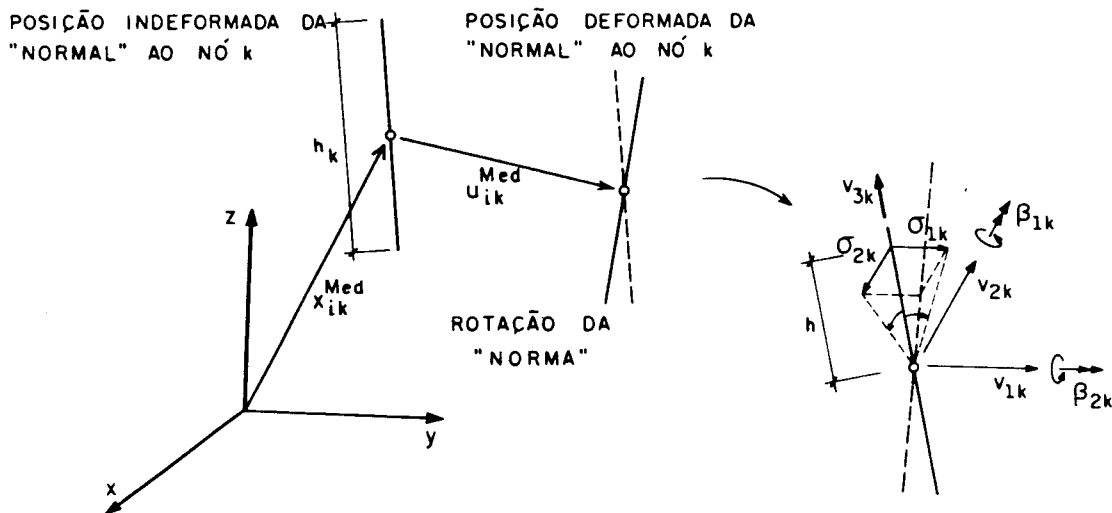


Figura 4.5 Deslocamentos de um ponto da 'normal' ao ponto k [HINTON (1984)].

Na formulação isoparamétrica o campo dos deslocamentos pode também ser expresso na seguinte forma:

$$\underline{u}_i = \sum_{k=1}^n N_k u_{ik}^{Med} + \sum_{k=1}^n N_k \frac{h_k}{2} \zeta \left( \bar{v}_{1k}^i, -\bar{v}_{2k}^i \right) \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

ou

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^n N_k \frac{h_k}{2} \zeta \begin{bmatrix} \bar{v}_{1k}^x & , & -\bar{v}_{2k}^x \\ \bar{v}_{1k}^y & , & -\bar{v}_{2k}^y \\ \bar{v}_{1k}^z & , & -\bar{v}_{2k}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

A contribuição do nó k ao deslocamento global do genérico ponto do elemento finito é:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_k & 0 & 0 & N_k \frac{h_k}{2} \zeta \bar{v}_{1k}^x & -N_k \frac{h_k}{2} \zeta \bar{v}_{2k}^x \\ 0 & N_k & 0 & N_k \frac{h_k}{2} \zeta \bar{v}_{1k}^y & -N_k \frac{h_k}{2} \zeta \bar{v}_{2k}^y \\ 0 & 0 & N_k & N_k \frac{h_k}{2} \zeta \bar{v}_{1k}^z & -N_k \frac{h_k}{2} \zeta \bar{v}_{2k}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

ou

$$\underline{u}_k = \underline{N}_k \underline{\delta}_k \quad (4.34)$$

Do mesmo modo é possível exprimir a expressão (4.31) na forma mais compacta

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{\delta} \quad (4.35)$$

onde  $\underline{N} = [\underline{N}_1, \dots, \underline{N}_k, \dots, \underline{N}_n]$  é a matriz das funções de forma do elemento finito degenerado, e  $\underline{\delta}^T = [\underline{\delta}_1^T, \dots, \underline{\delta}_k^T, \dots, \underline{\delta}_n^T]$  é o vetor das variáveis incógnitas nodais.

#### 4.3.5 Deformações e tensões

Para utilizar convenientemente a hipótese de deformação transversal nula, as componentes do tensor de deformações devem ser expressas em referência ao sistema de coordenadas locais  $x'_i$ . Neste sistema de referência as cinco componentes do tensor são,

$$\underline{\underline{\epsilon}}' = \begin{bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

onde  $u'$ ,  $v'$  e  $w'$  são as componentes do deslocamento no sistema local  $x'_i$ . Estas derivadas locais são obtidas a partir de derivadas globais dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  através da seguinte operação,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{J}}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \underline{\underline{T}} \quad (4.37)$$

onde  $\underline{\underline{J}}$  é a matriz jacobiana definida por

$$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Na expressão (4.37) as derivadas dos deslocamentos referidas às coordenadas curvilíneas são obtidas a partir da equação (4.31), enquanto a matriz jacobiana resulta da equação (4.25).

Desta maneira é possível construir uma relação entre as componentes de deformações  $\underline{\underline{\epsilon}}'$ , no sistema local, e os graus de liberdade  $\underline{\underline{\delta}}$  do elemento

$$\underline{\underline{\epsilon}}' = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\delta}} \quad (4.39)$$

onde  $\underline{\underline{\epsilon}}'$  e  $\underline{\underline{\delta}}$  são definidos em (4.36) e (4.35) respectivamente e  $\underline{\underline{B}}$  é uma matriz com cinco linhas e um número de colunas igual ao número de variáveis nodais dos elementos.

Levando em consideração a hipótese de tensão nula na direção perpendicular à superfície média da casca ( $\sigma_z = 0$ ), as cinco componentes de tensões no sistema local são:

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}}_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

onde a matriz  $\underline{\underline{D}}_0$  para um material homogêneo e isotrópico é

$$D_0 = \begin{bmatrix} D_1 & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & D_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_5 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

com

$$D_1 = D_2 = E_0 / (1-\nu^2) \quad ; \quad D_3 = G_0 \quad ; \quad D_4 = D_5 = KG_0$$

onde  $G_0$  é o módulo de elasticidade transversal e  $K$  é o coeficiente de correção da cortante transversal.

O coeficiente  $K$  (para seções retangulares  $K=5/6$ ) é introduzido, (HINTON, 1984), para corrigir os esforços tangenciais, pois, partindo-se da hipótese de que a normal à superfície média permanece reta, os esforços  $\tau_{x',z'}$  e  $\tau_{y',z'}$  resultam constantes ao longo da espessura da casca contrariando assim a distribuição real (nas proximidades da superfície da casca  $\tau_{x',z'} = \tau_{y',z'} = 0$ ).

#### 4.3.6 Integração numérica discretizando a espessura em estratos ("layered model")

A integração numérica dos elementos finitos mediante quadratura de Gauss tem sido largamente empregada. No caso particular dos elementos finitos degenerados empregados na análise não-linear esta integração exige um número mais elevado de pontos de integração. Um procedimento simples e eficiente, que permite reduzir o esforço de integração nos casos não-lineares, "Layered Model", baseia-se numa discretização da espessura do elemento em estratos.

Este tipo de procedimento é aplicável a cascas ou a elementos estruturais delgados (nos quais se demonstram razoáveis as hipóteses cinemáticas adotadas no processo de

degeneração), e demonstra-se particularmente eficaz quando estas estruturas são constituídas por uma série de estratos de materiais diferentes.

No processo de discretização subdivide-se o elemento finito em um número  $m$  de estratos de espessura variável, os quais são numerados a partir da superfície inferior (fig 4.6a). As componentes do estado de tensão relativas a um estrato são calculadas em pontos situados sobre a superfície média do mesmo e consideradas constantes na sua espessura. No caso particular de material homogêneo e elástico, esta simplificação conduz a um diagrama de esforços normais caracterizado por descontinuidades sobre a superfície de separação dos estratos (fig. 4.6b). Quanto aos esforços tangenciais, estes resultam constantes ao longo da espessura em função das hipóteses cinemáticas adotadas. É importante salientar que estratos de diferentes em número e espessura podem ser empregados por elemento.

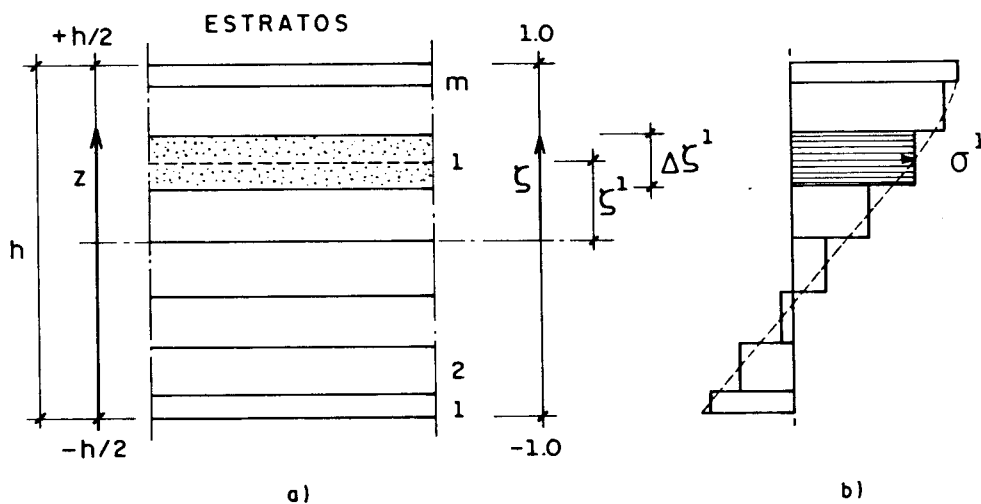


Figura 4.6 a) subdivisão da seção transversal em estratos  
b) diagrama de esforços normais

Da integração das componentes dos esforços ao longo da espessura (direção  $\zeta$ ) obtém-se os esforços generalizados resultantes. Tais resultantes, em acordo com a convenção de sinais ilustrada na fig. 4.7, são:

- esforços normais

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(z) dz = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^m \sigma_x^i \Delta \zeta^i \quad (4.42a)$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y(z) dz = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^m \sigma_y^i \Delta \zeta^i \quad (4.42b)$$

- momentos fletores e volventes

$$M_x = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(z) z dz = - \frac{h^2}{4} \sum_{i=1}^m \sigma_x^i \zeta^i \Delta \zeta^i \quad (4.42c)$$

$$M_y = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y(z) z dz = - \frac{h^2}{4} \sum_{i=1}^m \sigma_y^i \zeta^i \Delta \zeta^i \quad (4.42d)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}(z) z dz = - \frac{h^2}{4} \sum_{i=1}^m \tau_{xy}^i \zeta^i \Delta \zeta^i \quad (4.42e)$$

- esforços cortantes

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}(z) dz = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^m \tau_{xz}^i \Delta \zeta^i \quad (4.42f)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}(z) dz = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^m \tau_{yz}^i \Delta \zeta^i \quad (4.42g)$$

onde  $m$  é o número de estratos e  $\zeta = \frac{z}{h/2}$  é a variável adimensional ao longo da espessura.



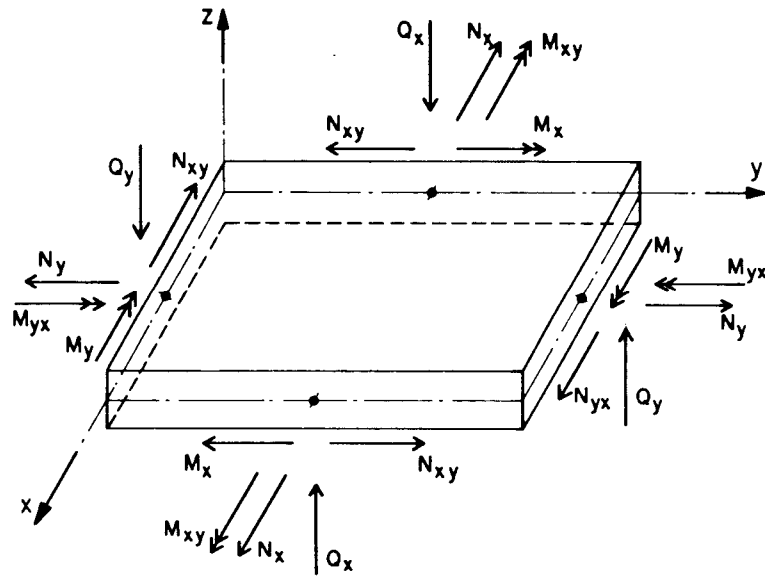


Figura 4.7 Resultantes dos esforços por unidade de comprimento

O procedimento em análise tem aplicação direta na obtenção da matriz de rigidez do elemento finito  $n$ , expressa em forma geral por

$$\underline{\underline{K}}_n = \int_{\Omega_n} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}_0 \underline{\underline{B}} \, d\Omega \quad (4.43)$$

a qual, a seguir, vem escrita em forma mais apropriada para a integração.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_n &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ \int_{-1}^{+1} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}_0 \underline{\underline{B}} \, J \, d\zeta \right] d\xi d\eta \cong \\ &\cong \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ \sum_{i=1}^m \left( \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}_0 \underline{\underline{B}} \right)_i \Delta\zeta^i \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.44)$$

O somatório resulta da discretização da espessura em estratos.

Analogamente o vetor de forças nodais equivalente pode ser obtido a partir de:

$$\begin{aligned} \underline{f}_n^e &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T \underline{\sigma} J d\zeta \right] d\xi d\eta \cong \\ &\cong \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ \sum_{i=1}^m \left( \underline{B}^T \underline{\sigma} J \right)_i \Delta \zeta^i \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde  $J$  é o determinante da matriz jacobiana  $\underline{J}$ .

Este procedimento de integração requer um grande espaço na memória do computador mas é muito oportuno para análise de estruturas compostas de elementos estruturais de espessura variável e constituídos de diferentes materiais (casca, placas e vigas em concreto armado por exemplo).

#### 4.4 ANÁLISE POR ELEMENTO FINITO COM LEI CONSTITUTIVA A DANO DE MAZARS

A matriz de rigidez de um elemento finito de domínio  $\Omega$ , escrita no sistema de referência local, pode ser expressa na seguinte forma (BREBBIA, 1975; DESAI, 1972; COOK, 1989):

$$\underline{K}_n = \int_{\Omega} \underline{B}_n^T \underline{D} \underline{B}_n d\Omega \quad (4.46)$$

No caso de modelo constitutivo de dano proposto por Mazars, a relação tensão-deformação pode ser expressa na forma

$$\underline{\sigma} = \underline{D}_0 (1-D) \underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{\epsilon} \quad (4.57)$$

onde  $\underline{D}_0$  é a matriz de rigidez do material íntegro e isótropo, definida por

$$\underline{\underline{D}}_0 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & \text{simétrica} & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{array} \right] \quad (4.48)$$

sendo E o módulo de elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material.

Para o modelo de Mazars, partindo da expressão 4.46, tem-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_n &= \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}_n^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_n \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}_n^T \underline{\underline{D}}_0 (1-D) \underline{\underline{B}}_n \, d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}_n^T \underline{\underline{D}}_0 \underline{\underline{B}}_n \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}_n^T \underline{\underline{D}}_0 D \underline{\underline{B}}_n \, d\Omega = \underline{\underline{K}}_{0n} - \Delta \underline{\underline{K}}_n(D) \end{aligned} \quad (4.49)$$

A relação acima mostra claramente como a matriz de rigidez de um elemento finito com dano é obtida tirando da matriz de rigidez do material íntegro uma matriz ligada ao dano D.

Reunindo as contribuições de todos os elementos finitos se obtém o sistema

$$\underline{\underline{K}}(D) \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{R}} \quad (4.50)$$

ou

$$\underline{\underline{K}}_0 \underline{\underline{q}} - \Delta \underline{\underline{K}}(D) \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{R}} \quad (4.51)$$

A resolução do problema não-linear (4.50) pode ser conduzida de modo incremental, por sucessivas etapas, ao longo da história do carregamento admitindo-se que no passo inicial a matriz secante  $\underline{\underline{K}}(D)$  seja igual à matriz elástica  $\underline{\underline{K}}_0$  do material íntegro.

Dentro do procedimento de resolução, sendo conhecidos ao final de um passo  $j$  o vetor de deslocamentos  $\underline{q}_j$ , o tensor de tensões  $\underline{\sigma}_j$  em equilíbrio com a carga total aplicada  $\underline{R}_j$  e a compatível distribuição de deformações  $\underline{\epsilon}_j$ , para o próximo passo as seguintes relações devem ser verificadas:

$$\underline{\underline{K}}(D_{j+1}) \underline{q}_{j+1} = \underline{R}_j + \Delta \underline{R} = \underline{R}_{j+1}$$

$$\underline{\sigma}_{j+1} = (1 - D_{j+1}) \underline{\underline{D}}_0 \underline{\epsilon}_{j+1} \quad (4.52)$$

$$\underline{\Psi}_{j+1} = \sum_n \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}^T \underline{\sigma}_{j+1} \, d\Omega - \underline{R} \quad \text{e} \quad \|\underline{\Psi}_j\| \leq \delta$$

onde  $n$  é o número de elementos finitos adotados,  $\Psi$  é o vetor resíduo e  $\delta$  uma tolerância pré-fixada.

A estratégia de solução consiste basicamente em assumir no instante inicial a matriz secante  $\underline{\underline{K}}(D)$  igual à matriz de rigidez elástica inicial  $\underline{\underline{K}}_0$ . Também, por imposição do modelo constitutivo, o vetor resíduo é gerado da diferença entre as forças nodais equivalentes do estado de tensões e o carregamento externo aplicado. Este vetor deve ser gradualmente reduzido para próximo de zero por um processo iterativo.

O algoritmo de resolução vem apresentado no esquema 4.1 e ilustrado na figura 4.8.

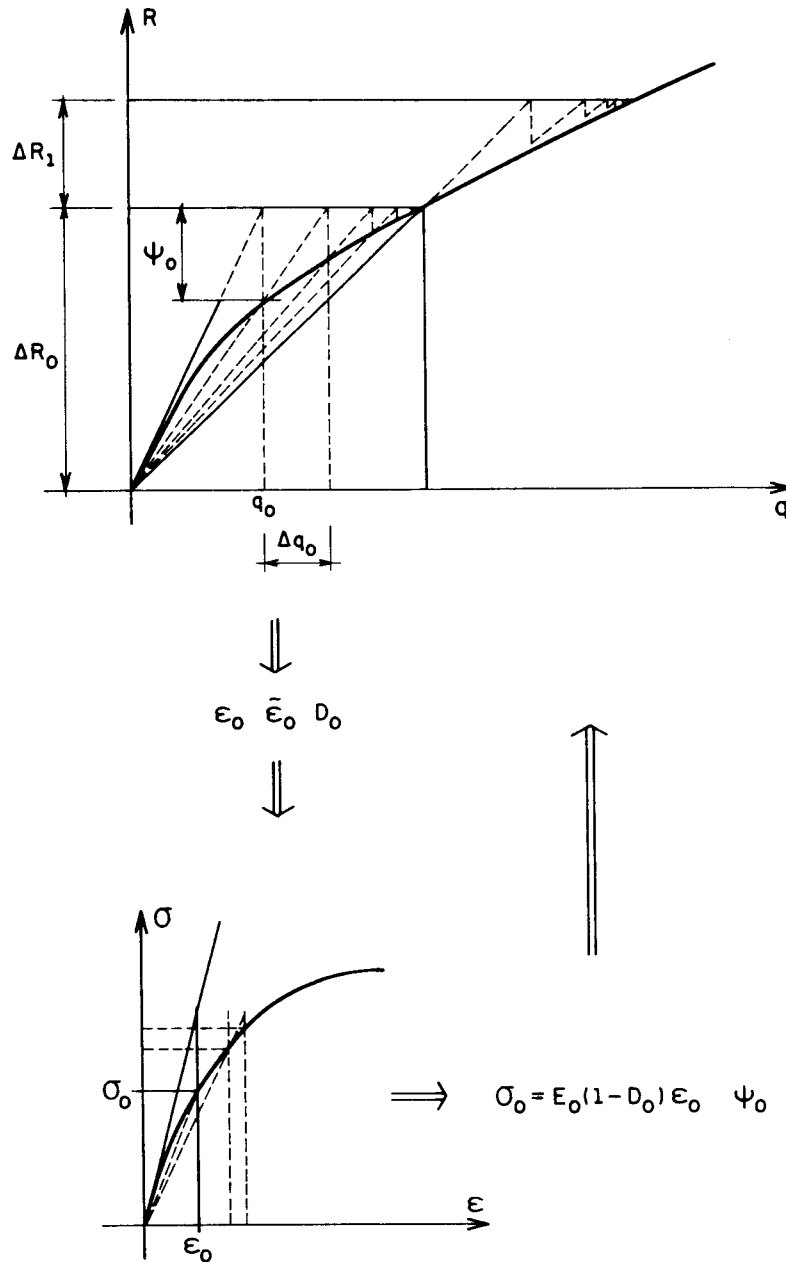
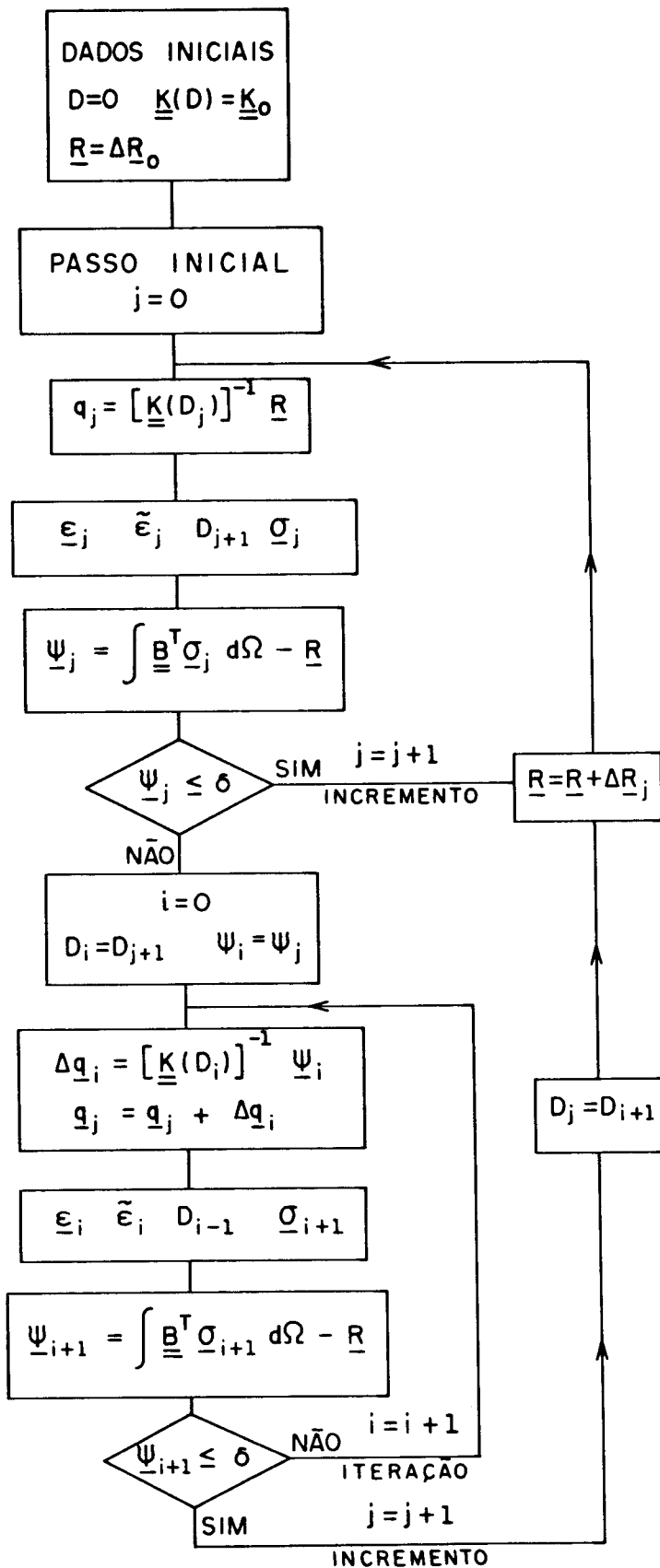


Figura 4.8 Representação uniaxial do processo iterativo



Esquema 4.1

## CAPÍTULO 5

### APLICAÇÃO A VIGAS DE CONCRETO ARMADO: ANÁLISE EXPERIMENTAL E NUMÉRICA

#### 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo faz-se um confronto entre as respostas das análises experimental e numérica, feitas em elementos estruturais de concreto armado: no caso, vigas biapoiadas.

Inicialmente, apresenta-se o elemento estrutural quanto às suas características de geometria e armadura. Posteriormente faz-se uma exposição da experimentação realizada em laboratório observando-se alguns aspectos do comportamento global.

Finalmente são detalhadas as análises numéricas, tridimensional (3D) e bidimensional (2D), por elementos finitos, a que o elemento estrutural foi submetido. Nesta fase destacam-se a discretização adotada para a viga, os algoritmos de integração e, particularmente quanto à análise bidimensional, o procedimento adotado para enfrentar o problema da não-objetividade de resultados. O confronto entre os resultados experimentais e numéricos, é ilustrado sob a forma de curvas carga aplicada por deslocamentos verticais no meio do vão.

## 5.2 ELEMENTO ESTRUTURAL: CARACTERÍSTICAS E EXPERIMENTAÇÃO

O elemento estrutural escolhido para o estudo foi uma viga em concreto armado, de 2.40m de comprimento, seção transversal de 12x30cm, apoiada nas duas extremidades e com carregamento constituído por duas forças concentradas aplicadas nos terços do vão. Três grupos de vigas foram moldados, diferindo-se entre si pela quantidade e distribuição geométrica de armadura longitudinal inferior (3 $\phi$ 10mm, 5 $\phi$ 10mm e 7 $\phi$ 10mm respectivamente); a armadura longitudinal superior é constituída por 2 $\phi$ 5mm em todos os casos. As quantidades diferentes de armadura visam cobrir as situações de viga pouco armada, normalmente armada e super armada, estabelecendo de modo mais claro as limitações da simulação numérica com modelo de dano continuamente distribuído. Além disso foi utilizada uma armadura transversal (estribos de  $\phi$ 5mm c/12cm e comprimento de 90cm) para suportar a ação do cisalhamento na zona compreendida entre a carga e o apoio. Maiores detalhes da geometria e da armadura são ilustrados na figura 5.1.



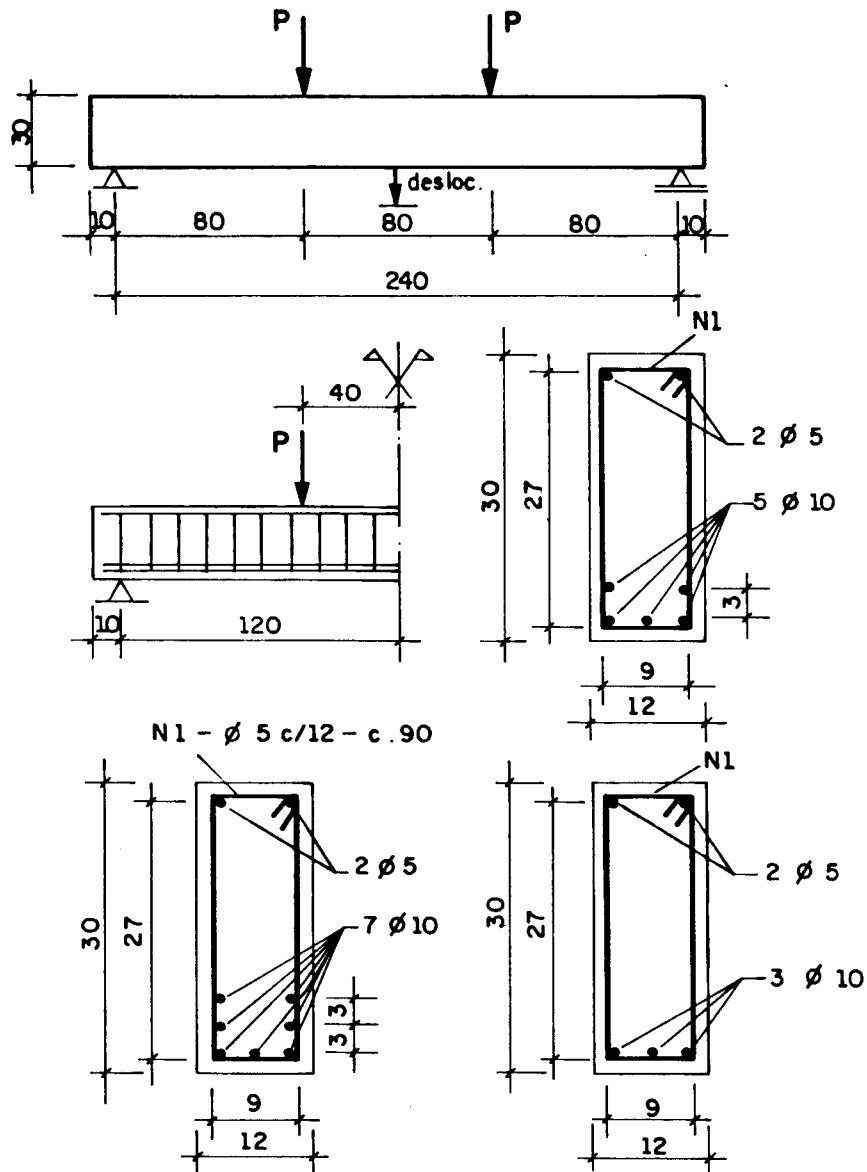


Figura 5.1 Geometria e armação das vigas

A resposta experimental de cada tipo de viga foi colhida de uma prova realizada com controle de carga, sendo as leituras de deslocamentos feitas em relógios comparadores colocados nos apoios e no trecho central, conforme ilustra a figura 5.2. Além disso foram distribuídos extensômetros elétricos nas faces superior e inferior, abrangendo a seção transversal central, e também nas armaduras longitudinais tracionadas, para caracterizar o escoamento das mesmas.

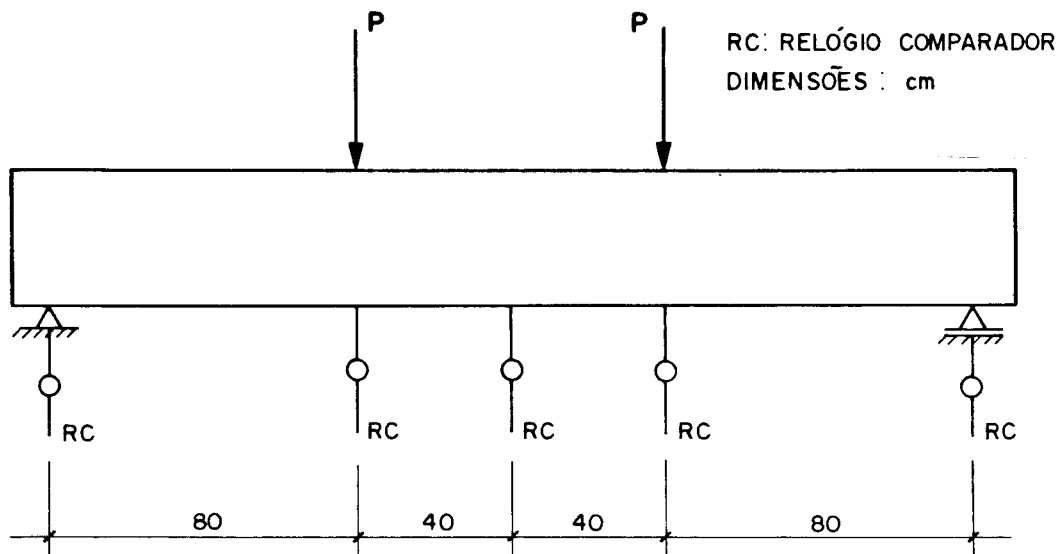


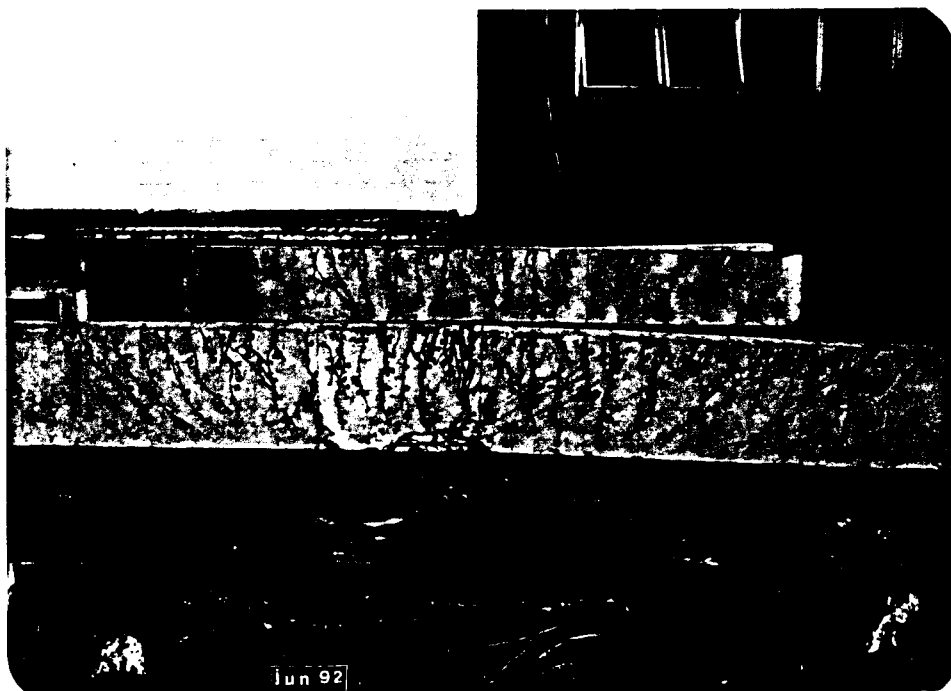
Figura 5.2 Posição dos relógios comparadores e aplicação do carregamento

Para facilitar a observação de fissuras na parte inferior as vigas foram ensaiadas na posição invertida, isto é, com carregamento aplicado de baixo para cima.

Do ponto de vista macroscópico, observações referentes aos processos de aparecimento e propagação de fissuras nas faces da viga foram feitas. Os resultados evidenciaram fenômenos já esperados, tais como:

- a) as primeiras fissuras aparecem na região central da viga, e se propagam, nesta região, paralelamente à direção de aplicação da carga;
- b) também na região central da viga, para um nível de carga elevado, nota-se um processo de esmagamento do concreto provocado pelas tensões de compressão;
- c) na região compreendida entre o apoio e o ponto de aplicação da carga, a evolução da fissura dá-se de forma inclinada com o eixo horizontal;
- d) a distribuição de fissuras é mais difusa nas vigas muito armadas e mais localizada nas vigas pouco armada.

A figura 5.3 ilustra os comentários anteriores.



*Figura 5.3 Distribuição das fissuras (viga 5 muito armada; viga 3 pouco armada)*

### 5.3 ANÁLISE NUMÉRICA

O objetivo deste estudo é analisar a resposta do modelo de dano aplicado às estruturas em concreto armado, porém considerando que apenas o concreto possui comportamento não-linear. As conclusões obtidas tem por base o confronto das curvas carga-deslocamento experimental com numérica para os diferentes grupos de vigas estudados.

As análises numéricas são conduzidas empregando dois tipos de discretização: uma com elementos finitos tridimensionais degenerados (descritos no item 4.3) e outra com elementos finitos bidimensionais (descritos no item 4.2). Nas análises foi feito uso da simetria de carregamento e geometria, analisando, portanto, somente metade da viga.

Adotou-se para o concreto o modelo constitutivo para carregamento proporcional proposto por Mazars, cujos parâmetros foram determinados conforme procedimento descrito no capítulo 3. Os parâmetros de interesse para aço e concreto são apresentados na tabela 5.1.

<u>PROPRIEDADES DO CONCRETO</u>	
Módulo de Young	$E = 29200 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,2 \text{ (adotado)}$
<u>PROPRIEDADES DO AÇO</u>	
Módulo de Young	$E = 196000 \text{ MPa}$
<u>PARÂMETROS DO MODELO</u>	
$A_T = 0,995 \text{ (adotado)}$	$B_T = 8000 \text{ (adotado)}$
$A_C = 0,85$	$B_C = 1620$
$\epsilon_{do} = 0,00007$	

Tabela 5.1 Parâmetros dos materiais empregados

Com respeito ao comportamento do aço, admite-se uma relação constitutiva elástica linear. A figura 5.4 ilustra as respostas unidimensionais adotadas para os dois materiais.

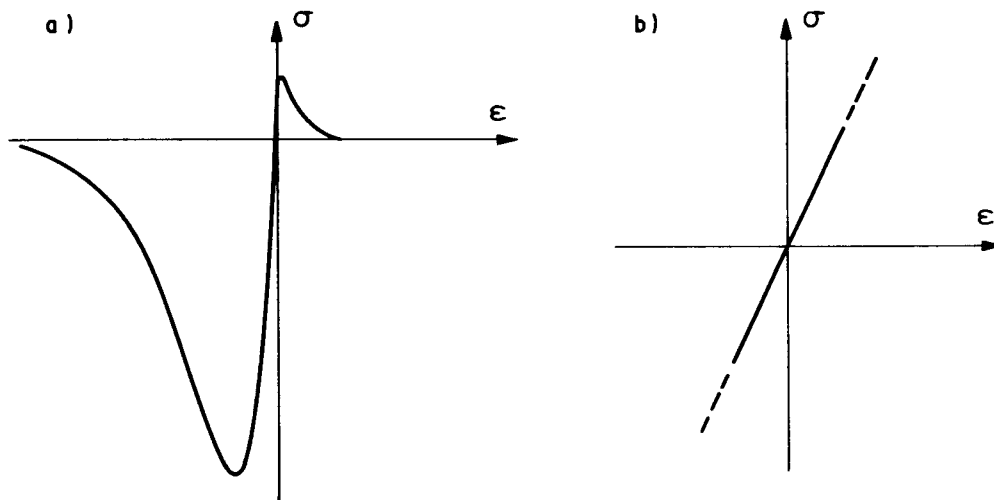


Figura 5.4 a) Relação constitutiva do concreto  
b) Relação constitutiva do aço

Com relação à interação entre os dois materiais assumiu-se a hipótese simplificadora de perfeita aderência entre aço e concreto, descartando-se desta maneira a possibilidade de se considerar qualquer tipo de fenômeno consequente à perda de aderência na zona de interface.

### 5.3.1 Análise com elementos finitos tridimensionais

A discretização adotada para a viga é constituída por 2 elementos finitos isoparamétricos degenerados de 8 nós, dispostos no plano médio ( $xy$ ). A altura ao longo da seção transversal é subdividida em 10 estratos de concreto, sendo a armadura representada por um estrato de área equivalente, situado no baricentro geométrico da sua real distribuição, e superposta ao estrato de concreto (fig. 5.5).

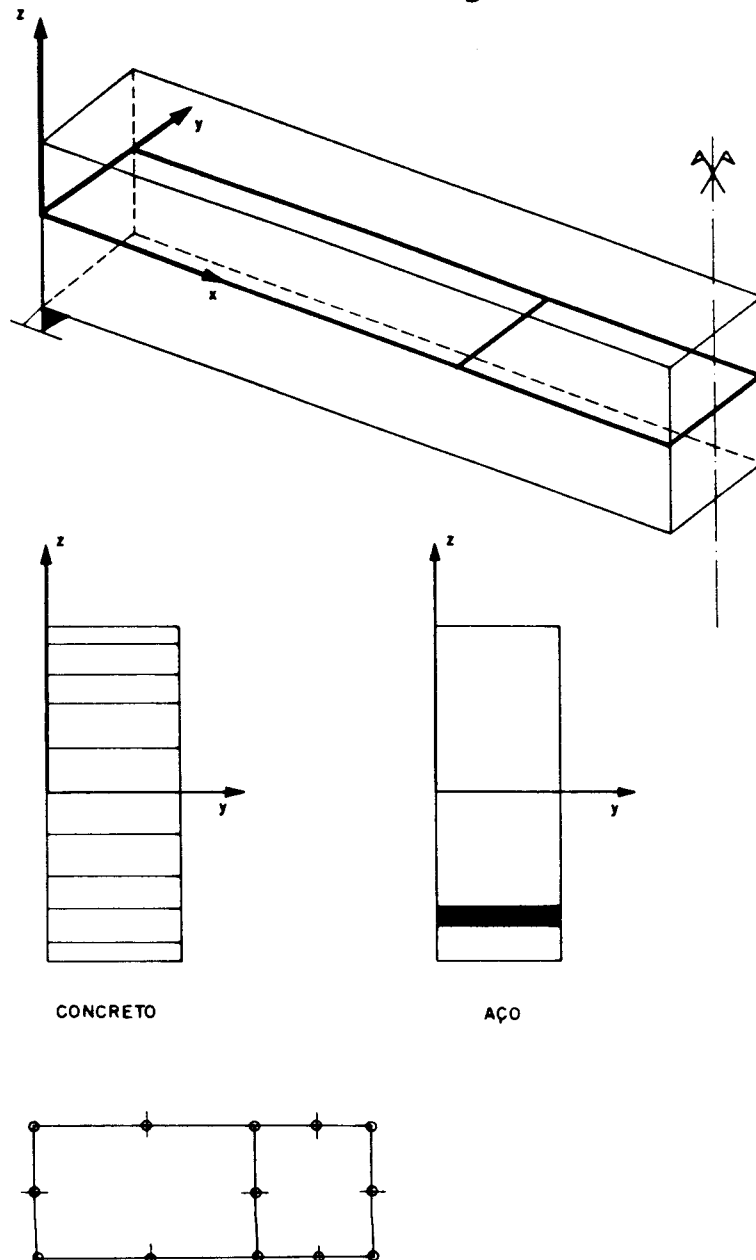


Figura 5.5 Discretização em elementos finitos tridimensionais

O desempenho numérico do modelo de dano pode ser avaliado pelos diagramas mostrados na figura 5.6. As curvas carga aplicada por deslocamento vertical no centro da viga são plotadas em comparação com os resultados experimentais.

Respostas praticamente coincidentes podem ser observadas para as duas vigas com maior taxa de armadura (fig. 5.6a,b), enquanto a viga com menor taxa apresenta uma resposta menos precisa porém ainda satisfatória do ponto de vista prático (fig. 5.6c).

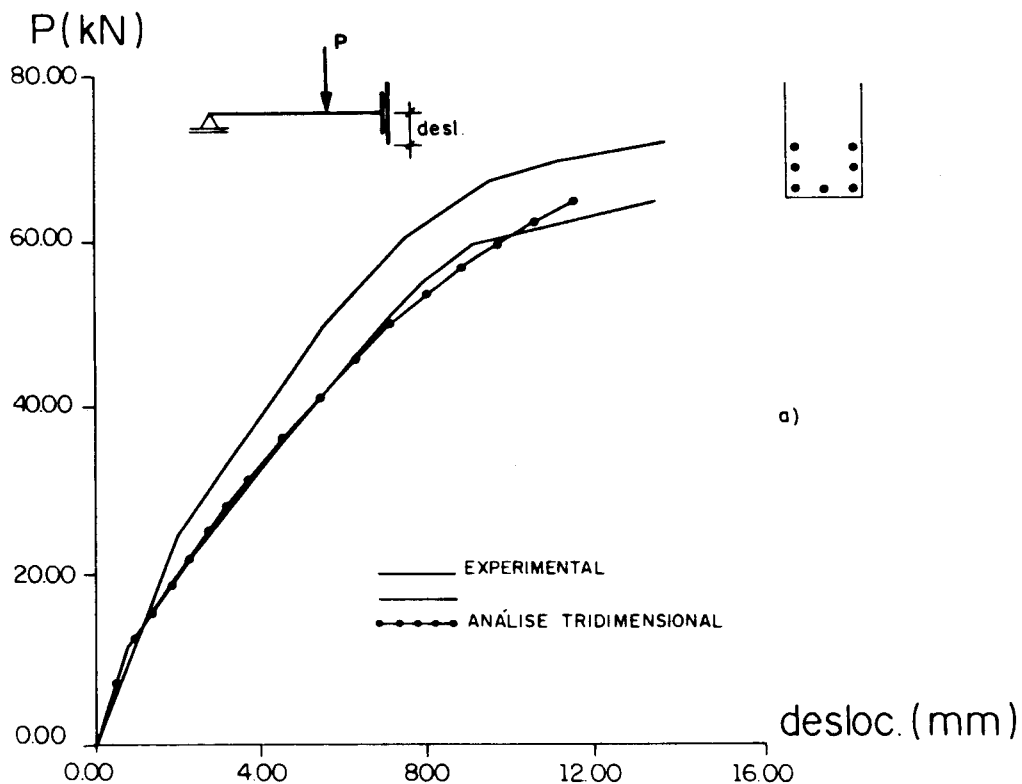


Figura 5.6 a) Resultados numéricos: viga super armada

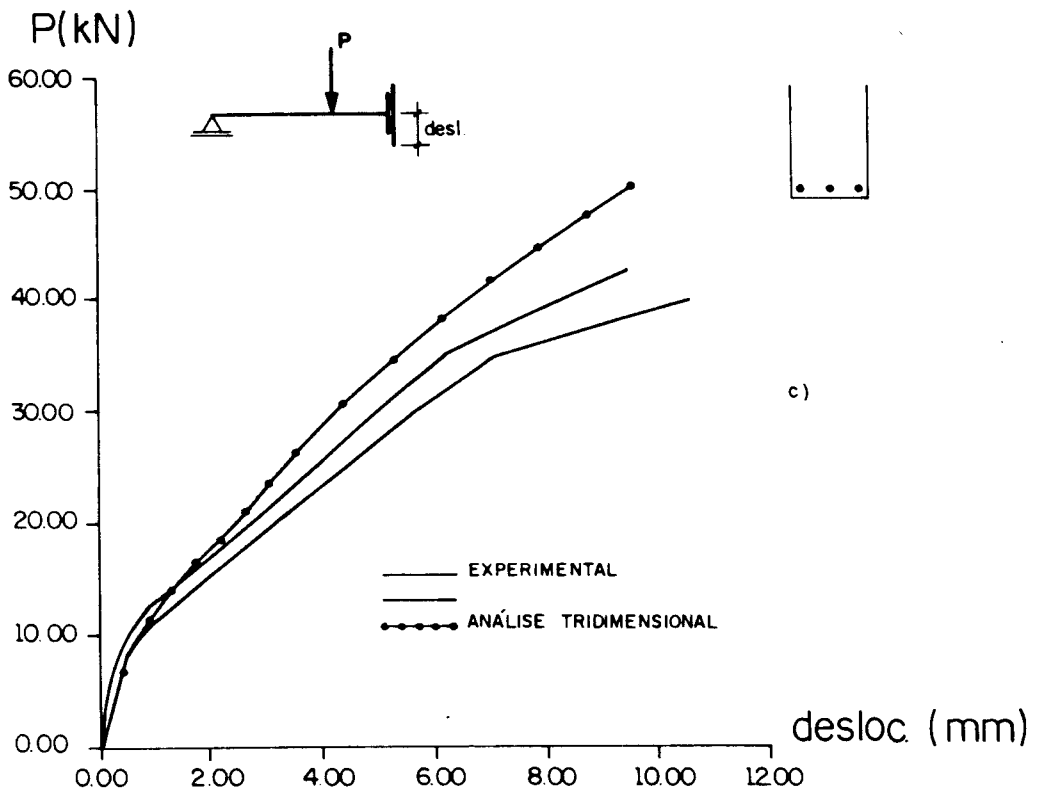
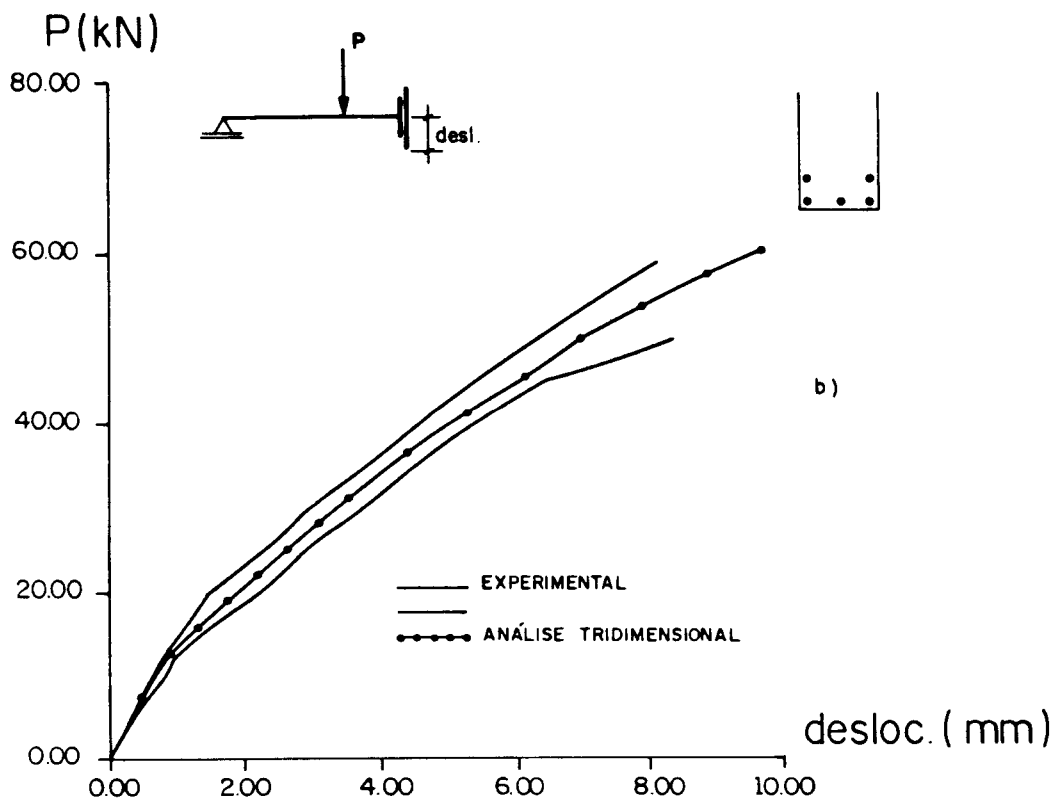


Figura 5.6 b) Resultados numéricos: viga normalmente armada  
 c) Resultados numéricos: viga pouco armada

### 5.3.2 Análise com elementos finitos bidimensionais

Neste item comentam-se inicialmente algumas particularidades da análise plana, referentes à estabilidade e objetividade de respostas. Em seguida, comparam-se os resultados das análises bidimensional e tridimensional com os experimentais.

Os primeiros testes numéricos foram feitos utilizando malhas constituídas por elementos finitos isoparamétricos retangulares de 8 nós dispostos no plano (xz) da viga. Porém estes testes apontaram dois problemas de ordem numérica (veja fig. 5.7): uma instabilidade na resposta, visualizada na curva carga-deslocamento pela irregularidade no seu desenvolvimento ('non-smooth') e uma não-objetividade caracterizada por resultados mais rígidos com o refinamento da malha. Tais problemas foram atribuídos, por PEREGO (1989), ao fato de que alguns elementos da matriz de rigidez, principalmente aqueles situados na parte inferior da viga (zona com nível de dano mais elevado), passam a assumir valores próximos a zero. No entanto, a partir dos testes realizados observou-se que o primeiro problema é consequente ao algoritmo explícito de integração do modelo constitutivo e o segundo resulta da fixação do parâmetro  $B_T$  (associado ao 'softening' em tração) independente das dimensões do elemento.

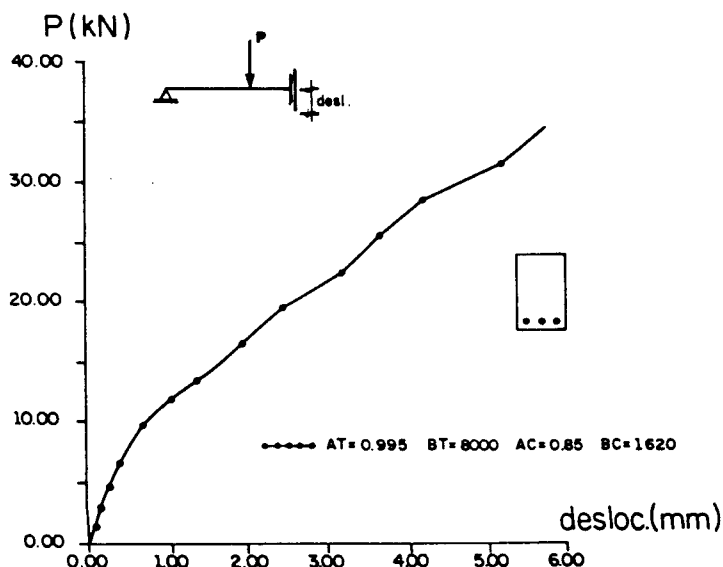


Figura 5.7 Instabilidade numérica da resposta  $\sigma$ - $\epsilon$



### 5.3.2.1 Procedimento iterativo para regularização da resposta

Como exposto no item 4.4 para a solução dos problemas de valor de contorno com lei constitutiva de dano tem sido adotado um algoritmo iterativo baseado na formulação secante.

Neste algoritmo, em uma iteração  $j \geq 1$ , o vetor de forças residuais é determinado por

$$\psi_j = \sum_n \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{\sigma}_j d\Omega - \underline{R} \quad \text{com} \quad \underline{\sigma}_j = f(D_j) \quad (5.1)$$

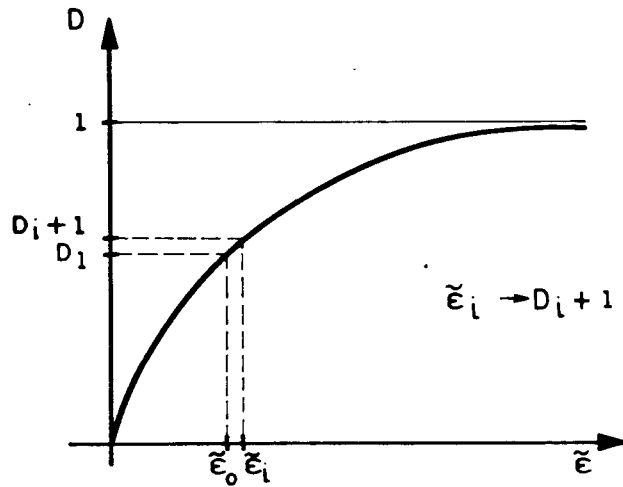
onde  $\underline{R}$  é o vetor de forças aplicadas,  $\underline{\sigma}_j$  o vetor de tensões compatível com o modelo constitutivo. A cada iteração a matriz secante é atualizada em função do último valor de dano estimado e o processo prossegue procurando anular o resíduo até que uma determinada tolerância para a norma seja verificada. Este procedimento é explícito e requer pequenos incrementos de carga para minimizar erros e apresentar uma convergência estável.

Neste trabalho foi adotado um segundo nível de iteração, prévio à determinação do vetor resíduo, cujo objetivo é o de encontrar uma aproximação melhor para o dano em correspondência a um certo nível de deslocamento. Isto é, de  $q_j$  calculam-se  $\underline{\epsilon}_j$ ,  $\tilde{\epsilon}_j$  e um correspondente  $D_{j+1}$  ( $=f(\tilde{\epsilon}_j)$ ). A partir daí um novo vetor de deslocamentos  $q_{j+1}$  é obtido da seguinte relação:

$$q_{j+1} = \underline{K}(D_{j+1})^{-1} \underline{R} \quad (5.2)$$

O dano  $D$  é sucessivamente atualizado até que uma tolerância, com base na diferença para a iteração anterior, seja verificada (fig. 5.8). Somente então é que a matriz de rigidez global é atualizada e o resíduo determinado.

Tal procedimento levou a resultados estáveis, isto é, a resposta a nível de curva carga-deslocamento apresentou um desenvolvimento regular ('smooth').



$$q_i \rightarrow \epsilon_i \rightarrow \tilde{\epsilon}_i$$

$$\psi_i = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{\sigma}_i d\Omega - \underline{R}$$

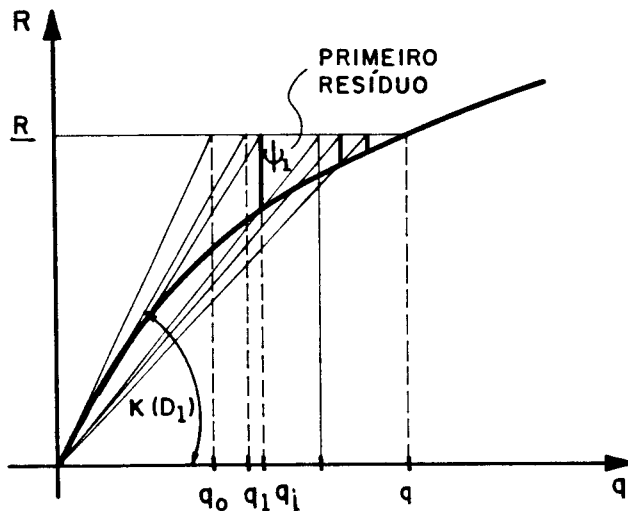


Figura 5.8 Procedimento iterativo

### 5.3.2.2 Procedimento para reduzir o problema de não-objetividade

A não-objetividade dos resultados, observada por outros textos da bibliografia, PEREGO(1989) e DAVENE; SAOURIDIS; PIAU (1989), é conseqüente do comportamento em tração. Aqui ela é contornada através de ajustes no parâmetro  $B_T$  em função das dimensões do elemento tomando-se por base a taxa de energia

dissipada em um teste de tração uniaxial (SIMO (1987), OLIVER (1989)).

Como  $B_T$  está associado com a curvatura da região 'softening' do diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  calibrar este parâmetro em função das dimensões do elemento significa admitir diferentes curvaturas naquela região. No entanto, a energia dissipada localmente para a evolução dos defeitos passará a ser considerada como uma propriedade do material, (ou a área limitada pelo diagrama) e esta consideração é que é responsável pela recuperação da objetividade de respostas.

Considere-se a energia total dissipada por unidade de volume (SIMO; JU (1987), OLIVER (1989)) na evolução de um defeito:

$$g_t = \int_0^{\infty} \psi_0 \dot{D}_T(\epsilon) dt = \int_{\epsilon_{do}}^{\infty} \psi_0 D'_T(\epsilon) d\epsilon \quad (5.3)$$

onde  $\psi_0 = \frac{\epsilon^2 E}{2}$  é a energia elástica livre e  $D'_T(\epsilon)$  a derivada da variável de dano com  $\epsilon$ .

Da relação de dano em tração uniaxial, impondo-se  $A_T=1$ , resulta:

$$D'_T(\epsilon) = B_T e^{-B_T(\epsilon - \epsilon_{do})} \quad (5.4)$$

Com os valores de  $\psi_0$  e  $D'_T(\epsilon)$  na expressão (5.3), após a integração indicada:

$$g_t = E \left( \frac{\epsilon_{do}}{B_T} + \frac{1}{B_T^2} + \frac{\epsilon_{do}^2}{2} \right) \quad (5.5)$$

No âmbito do uso dos elementos finitos é interessante empregar a relação entre  $g_t$  e  $G_f$  (energia de fratura por unidade área) válida em modelos de fissuração distribuída uniformemente numa região:

$$g_t = \frac{G_f}{l^*} \quad (5.6)$$

onde  $l^*$  é o comprimento característico do elemento finito (OLIVER, 1989).

Finalmente, com a relação (5.6) na expressão (5.5), obtém-se a seguinte expressão para  $B_T$

$$B_T = \frac{\epsilon_{do} + \sqrt{\epsilon_{do}^2 + 4 \left( \frac{G_f}{El^*} - \frac{\epsilon_{do}^2}{2} \right)}}{2 \left( \frac{G_f}{El^*} - \frac{\epsilon_{do}^2}{2} \right)} \quad (5.7)$$

Por outro lado, como  $B_T > 0$ , segue a relação:

$$l^* < \frac{2G_f}{E\epsilon_{do}^2} \quad (5.8)$$

que é o maior comprimento do elemento finito a ser utilizado na composição da malha.

A relação (5.7) permite calibrar a parâmetro  $B_T$  de acordo com a dimensão característica do elemento.

No caso dos exemplos estudados foram empregados elementos quadriláteros de deformação constante. Com relação a  $G_f$  optou-se por determiná-lo indiretamente através da relação entre as energias específicas dos processos de compressão  $g_c$  e de tração  $g_t$  uniaxiais

$$g_c = n^2 g_t \quad (5.9)$$

onde  $n$  é a relação entre as resistências de compressão e tração simples (da ordem de 10).

Assim todos os parâmetros do modelo passam a ser obtidos exclusivamente em função de um ensaio de compressão uniaxial.

Do que foi exposto acima, pode-se observar que impondo  $A_T=1$  e calibrando-se  $B_T$ , o modelo de dano tem seu número de parâmetros reduzidos a quatro ( $A_c$ ,  $B_c$ ,  $\epsilon_{do}$  e  $G_f$ ).

### 5.3.2.3 Resultados numéricos

A fim de melhor avaliar a resposta do modelo e também a eficácia dos procedimentos adotados para evitar os problemas numéricos, apresentam-se, neste item, os resultados da análise numérica bidimensional.

No que diz respeito às malhas adotadas metade da viga foi, longitudinalmente, discretizada por 108 elementos finitos (4 nós) nos casos de média e alta taxa de armadura. Para a viga com menor taxa, 342 elementos finitos (4 nós) foram empregados (fig. 5.9).

O desempenho numérico do modelo de dano pode ser avaliado observando-se os diagramas carga-deslocamento mostrados na figura 5.10. Respostas muito boas são obtidas para as duas vigas com maior taxa de armadura (fig. 5.10a, b), enquanto para a viga com menor taxa os resultados são menos precisos, no confronto com os experimentais (fig. 5.10c). Mesmo assim, o nível de precisão pode ser considerado satisfatório do ponto de vista prático.

Como verificado na análise tridimensional, a razão para a menor precisão dos resultados da viga pouco armada não ficou suficientemente clara (diversos testes complementares, incluindo um refinamento na discretização, não conduziram a melhores resultados). Porém, acredita-se que está aí uma evidência de uma limitação para o emprego do modelo de dano contínuo, uma vez que as observações experimentais registraram um panorama de fissuração mais localizado nesta viga (veja item 5.2).

De um modo geral pode-se notar que a análise plana fornece uma resposta muito próxima da tridimensional, chegando a ser mais precisa no caso da viga mais armada (fig. 5.10a). Para o caso da viga menos armada, a análise plana consegue acompanhar até um certo nível de carga e deslocamento, a resposta tridimensional. A partir daí valores de dano muito próximos da unidade nas camadas inferiores de concreto criam um mal-condicionamento da matriz de rigidez global, gerando novas perturbações numéricas. Na análise tridimensional esse

mal-condicionamento da matriz não ocorre porque a contribuição de cada ponto nodal é formada pelas parcelas relativas às camadas de concreto e de aço a elas superpostas. As camadas de aço reduzem, então, qualquer problema relativo a condicionamento tenda a ocorrer em função dos altos valores de dano nas camadas de concreto.

Uma alternativa eficaz porém podendo ser crescentemente onerosa com o avanço da análise é a não-contribuição para a atualização da matriz de rigidez global da estrutura de pontos que apresentem um certo nível de dano (0,8 por exemplo). A alternativa é custosa porque o número de iterações do processo de resolução aumenta significativamente.

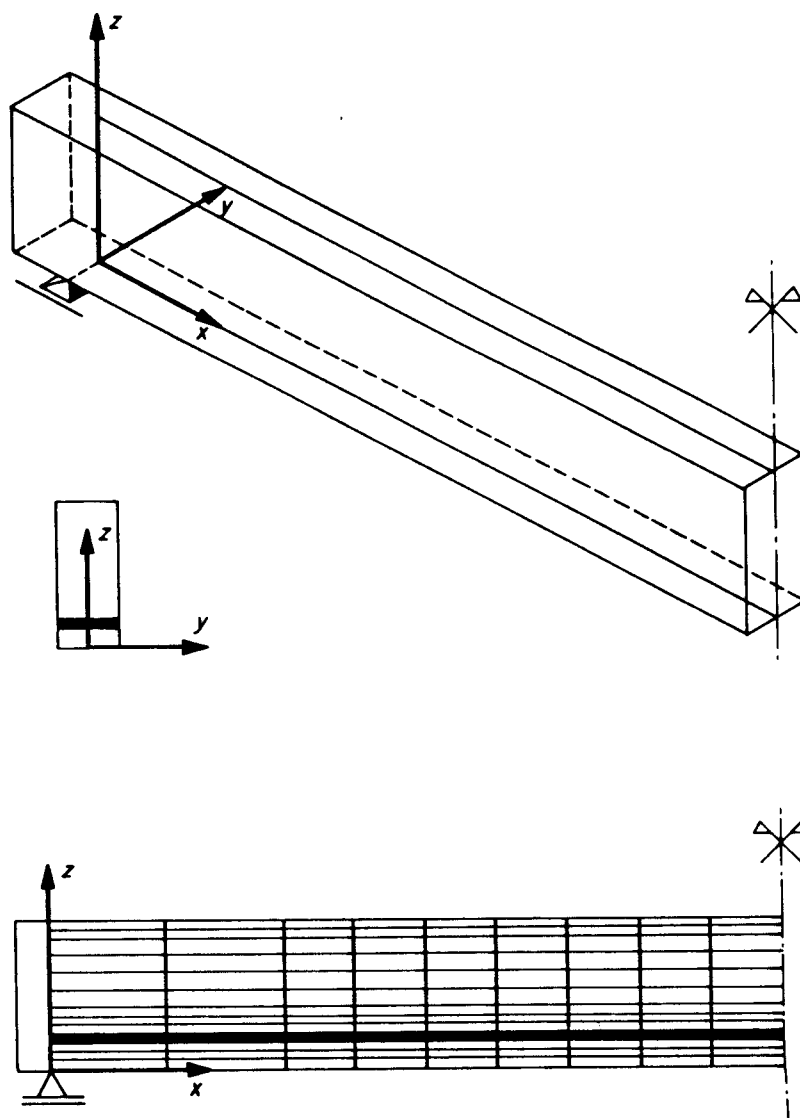


Figura 5.9 Discretização em elementos finitos bidimensionais

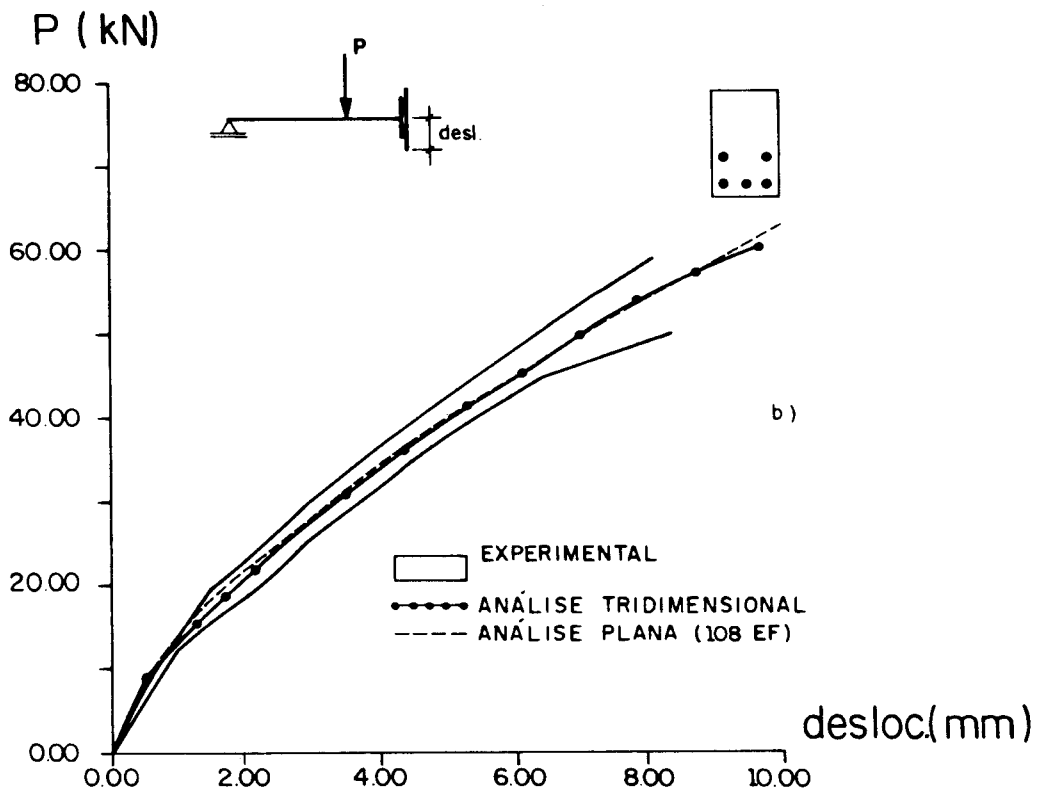
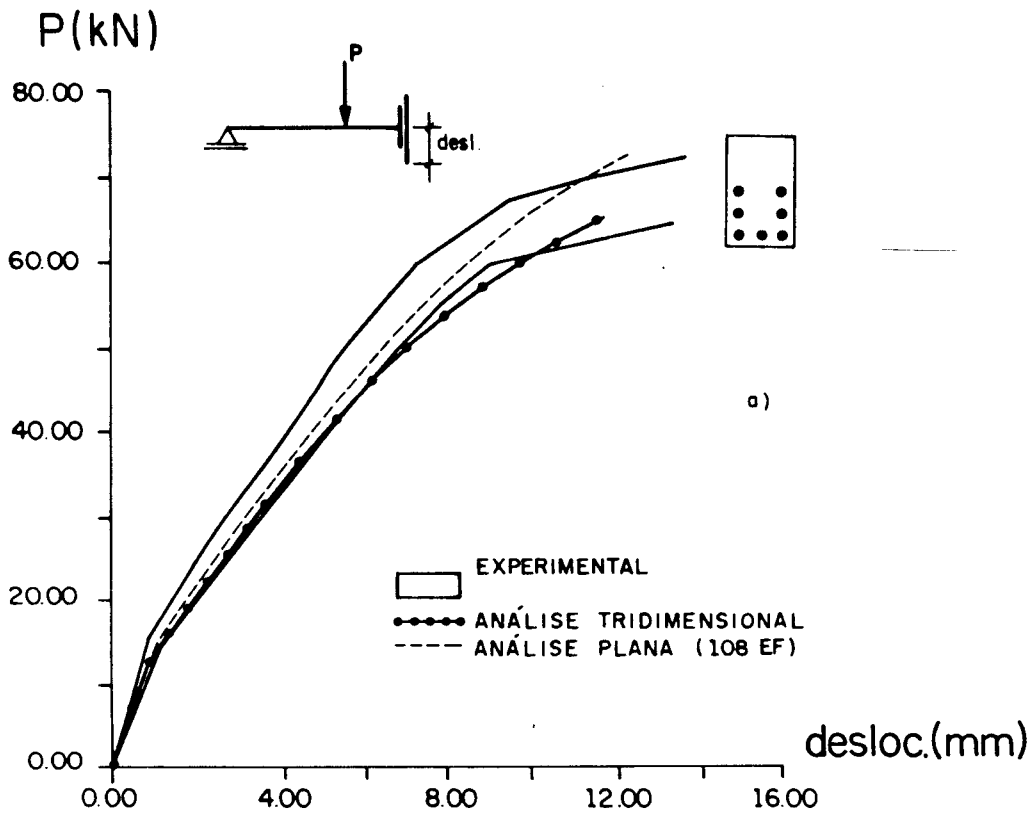


Figura 5.10 a) Resultados numéricos: viga super armada  
 b) Resultados numéricos: viga normalmente armada

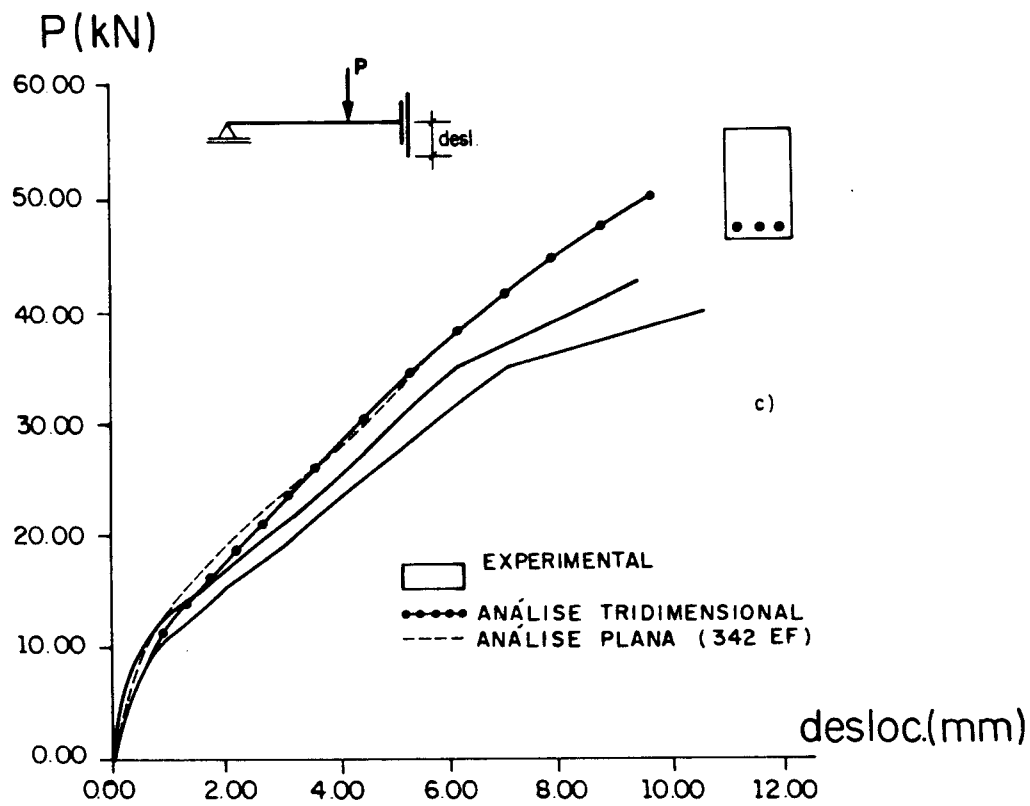


Figura 5.10 c) Resultados numéricos: viga pouco armada



## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

#### 6.1 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ESTUDO DESENVOLVIDO

Este trabalho trata do estudo, implementação numérica e verificação da resposta de uma lei constitutiva de dano para o concreto.

Inicialmente foram comentados aspectos fundamentais de alguns dos principais modelos dedicados à simulação do comportamento não-linear do concreto. Em seguida abordaram-se evidências do dano no concreto, com base em observações experimentais, como justificativa para a formulação dos modelos de dano isótropo e anisótropo.

Após relacionar localmente o processo de evolução da microfissuração microfissuração (dano) com a presença de deformações por alongamento, o modelo de dano isótropo de Mazars passou a ser descrito. Foram colocadas em destaque as hipóteses básicas assumidas pelo modelo, o critério de início

e propagação de dano, a lei de evolução da variável escalar representativa do processo de deterioração e a correspondência entre cada parâmetro do modelo e o desenvolvimento da curva tensão-deformação.

Quanto ao processo de identificação paramétrica, que teve por base testes de compressão uniaxial e diametral com controle de deslocamento, os resultados apontaram para valores dos parâmetros bem próximos aos sugeridos na bibliografia consultada. Os testes de compressão uniaxial, utilizaram dois extensômetros externos e um terceiro no interior do corpo de prova, conduzindo a curvas tensão-deformação que permitiram determinar com boa aproximação os parâmetros  $A_c$  e  $B_c$ . Os testes de compressão diametral, apesar da não-descrição do trecho 'softening' da curva tensão-deformação, serviram para caracterizar, com suficiente precisão, o pico de tensão, de fundamental importância para a determinação do parâmetro de alongamento  $\epsilon_{do}$ .

Numa última fase o modelo matemático foi implementado numericamente, sendo realizadas diversas análises envolvendo, segundo a técnica dos elementos finitos, discretizações tridimensional e bidimensional. As análises numéricas foram em vigas de concreto armado, apresentando diferentes taxas de armadura, e os resultados foram confrontados com os experimentais obtidos em laboratório.

No caso da discretização bidimensional, problemas de ordem numérica, relacionados à não-regularidade e objetividade da resposta foram observados. Estes problemas foram contornados, com sucesso, através dos procedimentos adotados os quais sugerem, inclusive, uma redução do número de parâmetros (de cinco para quatro), que podem ser obtidos exclusivamente ensaios de compressão uniaxial e diametral.

Os resultados das análises numéricas em confronto com os experimentais mostraram um bom desempenho do modelo, principalmente nas vigas muito armada e normalmente armada. No caso das vigas dotadas de baixa taxa de armadura, os resultados, apesar de apresentarem um nível de precisão

satisfatório, evidenciaram uma certa limitação para o emprego do modelo, talvez por ser o panorama de fissuração mais localizado, contrariamente às hipóteses iniciais admitidas.

## 6.2 CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS

Apesar de ser um modelo constitutivo que não leva em consideração a anisotropia do material (concreto) e de apresentar um número de parâmetros que pode ser considerado pequeno (cinco no total), o modelo de dano de Mazars teve um bom desempenho, tomando-se por base os resultados das análises realizadas em vigas de concreto armado.

Quanto às etapas do trabalho, deve-se destacar, inicialmente, a identificação paramétrica, que conduziu a resultados normalmente encontrados na bibliografia consultada para os parâmetros. A experimentação do elemento estrutural, por sua vez, permitiu, além do traçado da curva carga-deslocamento, observar e acompanhar as fases de início e propagação das fissuras.

No campo numérico, os testes realizados objetivando a solução dos problemas de não-regularidade e não-objetividade da resposta mostraram que é possível enfrentar convenientemente estes problemas com a adoção, respectivamente, de um certo nível de iteração e da energia de fratura para calibrar o parâmetro  $B_T$  em tração uniaxial. Entretanto, é preciso observar que altos níveis de dano conduzem a um mal condicionamento na matriz dos coeficientes do sistema, o que pode gerar novos problemas numéricos.

Como comentários finais acredita-se que se possa estender a aplicação do modelo para situações mais próximas da realidade, introduzindo procedimentos que envolvam a consideração da interação entre o concreto e a armadura (como por exemplo a perda de aderência), plastificação das armaduras e localização de deformações.

Os argumentos citados acima acrescidos das situações de carregamento não-proporcional, comportamento unilateral do concreto, etc., constituem, sem sombra de dúvidas, um amplo campo de pesquisas a ser explorado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS (ASCE). **State of the art report on finite element analysis of reinforced concrete.** New York, 1982.

ARGYRIS, J.H. et al. Recent developments in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels. **Int. J. Nuclear Eng. and Design**, v.28, 1974.

BANGASH, M.Y.H. **Concrete and concrete structures: numerical modeling and applications.** Elsevier Science, 1989.

BANGASH, M.Y.H.; ENGLAND, G.L. The influence of thermal creep on the operational behavior of complex structures. In: INT. CONF. ON FUNDAMENTAL RESEARCH ON CREEP AND SHRINKAGE, Lausanne, 1982. **Proc.** Dordrecht, Martinus Nijhoff, 1982.

BAZANT, Z.P.; BHAT, P.D. Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete. **J. Eng. Mech.**, ASCE, v.102, n.EM4, Aug. 1976.

BAZANT, Z.P.; CHERN, J.C. Strain softening with creep and exponential algorithm. **J. Eng. Mech.**, ASCE, v.111, n.3, March 1985.

BAZANT, Z.P.; CHERN, J.C. Stress-induced thermal and shrinkage strain in concrete. **J. Eng. Mech.**, ASCE, v.113, n.10, 1987.

BAZANT, Z.P.; KIM, S.S. Plastic fracturing theory for concrete. In: ASCE CONVENTION, Chicago, Oct. 1978. **Proc.**

BAZANT, Z.P.; OH, B.H. Crack band theory for fracture of concrete, materials and structures. **Materiaux et Constructions**, RILEM, v.16, 1983.

BICANIC, N. et al.-- On the prediction of the peak and post-peak behavior of concrete structures. In: INT. CONF. COMPUTER-AIDED ANALYSIS AND DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES, 1984. **Proc.**

BIENIAWSKI, Z.T. Suggested methods for determining tensile strength of rock materials. In: BROWN, E.T., ed. **Rock characterization testing & monitoring: ISRM suggested methods**. Oxford, Pergamon, 1981. p.119-121

BORRÈ, G.; MAIER, G. On linear versus nonlinear flow rules in strain localization analysis. **Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei**, Serie VIII, v. 82, p.451-459, 1988; extended version in **Meccanica**, n.24, p.36-41, 1989.

BREBBIA, C.A.; CONNOR, J.J. **Metodos de los elementos finitos en la ingenieria civil**. Madrid, Colegio Oficial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos/CPPE, 1975.

BUYUKOZTURK, O.; NILSON, A.H.; SLATE, F.O. Deformation and fracture of particulate composite. **J. Eng. Mech.**, ASCE, v.98, n.EM3, June 1972.

CARPINTERI, A. Softening and snap-back instability in cohesive solids. **J. Struct. Div.**, ASCE, v.108, 1982.

CEDOLIN, L. **Leggi costitutive e criteri di rottura per il calcestruzzo**. Genova, Atti dell'Istituto di Meccanica Teorica ed Applicata dell'Universita degli Studi di Udine, 1982.

CEDOLIN, L.; DEI POLI, S. Finite element studies of shear-critical r/c beams. **J. Eng. Mech. Div.**, ASCE, v.103, n.EM3, Jun. 1977.

CEN, Z.; MAIER, G. Fracture propagation and instabilities in elastic-cohesive crack models: a boundary element analysis. In: FIRRAO, D., ed. **On Fracture behaviour and design of materials and structures**. 1990. v.2, p.694-699

CHEN, A.C.T.; CHEN, W.F. Constitutive relations for concrete. **J. Eng. Mech. Div.**, ASCE, v.101, n.EM4, Aug. 1975.

CHEN, W.F.; SALEEB, A.F. **Constitutive equations for engineering materials**. John Wiley & Sons, 1982. v.1

COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. **Concepts and applications of finite element analysis**. 3.ed. New York, John Wiley & Sons, 1989.

DARWIN, D.; PECKNOLD, D.A.W. **Inelastic model for cyclic biaxial loading of reinforced concrete**. Report n.UILU-ENG 74-2018, Univ. Illinois at Urbana, July 1974.

DAVENNE, L.; SAOURIDIS, C.; PIAU, J.M. Un code de calcul pour la prévision du comportement de structures endommageables en béton armé ou en béton de fibres. **Annales de l'ITBTP**, série béton, n.478, 1989.

DE BORST, R. Application of advanced solution techniques to concrete cracking and non-associated plasticity. In: TAYLOR, C.; HINTON, E.; OWEN, D.R.J., eds. **Numerical methods for non-linear problems**. Swansea, Pineridge Press, 1984. v.2

DE BORST, R. Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids. **Computers & Structures**, v.25, n.2, p.211-224, 1987.

- DESAI, C.S.; ABEL, J.F. **Introduction to the finite element method.** Van Nostrand Reinhold, 1972.
- DOUGILL, J.W. On stable progressively fracturing solids. **Z. Angew Math. Phys. (ZAMP)**, v.27, n.4, 1976.
- ELWIN, A.; MURRAY, D.W. A three-dimensional hypo-elastic concrete constitutive relationship. **J. Eng. Mech. Div., ASCE**, v.105, n.EM4, 1976.
- GAMBAROVA, P.G.; FLORIS, E. Microplane model for concrete subjected to plane stress. **Nuclear Eng. and Design**, v.97, 1986.
- HAN, D.J.; CHEN, W.F. Strain space plasticity formulation for hardening softening material with elastoplastic coupling. **Int. J. Solids & Struct.**, v.22, n:8, 1986.
- HILSDORF, H.K. **Drying and shrinkage of concrete and reinforced concrete structures.** Ernst and Sohn, 1969.
- HILLERBORG, A.; MODEER, M.; PETERSON, P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of concrete research. **Cement and Concrete Research**, v.6, 1976.
- HINTON, E.; OWEN, D.R.J. **Finite element software for plates and shells.** Swansea, Pineridge Press, 1984.
- HSU, T.C. et al. Micro-cracking of plain concrete and the shape of the stress-strain curve. **A.C.I. Journal**, v.60, 1963.
- HUCKEL, T.; MAIER, G. Incremental boundary value problems in the presence of coupling of elastic and plastic deformations: a rock mechanics oriented theory. **Int. J. Solids & Struct.**, v.13, 1977.



- HUECKEL, T.; MAIER, G. Non associated and coupled flow rules of elastoplasticity for geotechnical media. **Int. J. Rock Mech. Min. Sci.**, v.16, p.77-92, 1979.
- INGRAFFEA, A.R.; SAOUMA, V. Numerical modelling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete. In: SIH, G.C.; TOMMASO, A.D., ed. **Fracture mechanics of concrete: structural application and numerical calculation.** Dordrecht, Martinus Nijhoff, 1985.
- ISDRA. **Review of constitutive models for concrete.** Report to Commission of the European Communities, Joint Research Centre, 1989.
- KACHANOV, L.M. **Time of the rupture process under creep conditions.** T.V.Z. Akad. Nauk. S.S.R. Otd. Tech. Nauk., 8, p.26-31, 1958.
- KRAJČINOVIC, D.; FONSEKA, G.Y. The continuous damage theory of brittle materials. **J. Appl. Mech.**, v.48, 1981.
- KUPFER, H.B.; HILSDORF, H.K.; RUSCH, H. Behavior of concrete under biaxial stresses. **A.C.I. Journal**, p.656-666, 1969.
- KUPFER, H.B.; GERSTLE, K.H. Behavior of concrete under biaxial stresses. **J. Eng. Mech.**, ASCE, v.99, n.EM4, Aug. 1973.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.C. **Mécanique des matériaux solides.** Paris, Dunod-Bordas, 1985.
- LINO, M. **Etude d'un modele de beton par la methode des elements finis.** T.F.E.-E.N.P.C.-L.C.P.C., 1973.
- LIU, T.C.Y.; NILSON, A.H.; SLATE, F.O. Biaxial stress strain relations for concrete. **J. Struct. Div.**, ASCE, v.98, n.ST5, May 1972.

- LUBLINER, J. On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics. **Int. J. Non-Linear Mech.**, v.7, p.237-254, 1972.
- LUBLINER, J. et al. A plastic damage model for concrete. **Int. J. Solids & Struct.**, v.25, p.299-326, 1989.
- MAIER, G. 'Linear' flow-laws of elastoplasticity: a unified general approach. **Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei**, Serie VIII, v.47, n.5, p.266-276, 1969.
- MAIER, G. Sul comportamento flessionale instabile nelle travi inflesse elastoplastiche. **Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere**, v.102, p.648-677, 1968.
- MAIER, G. et al. Fracture, path bifurcations and instabilities in elastic-cohesive softening models: a boundary element approach. In: INT. CONF. ON FRACTURE PROCESSES IN BRITTLE DISORDERED MATERIALS, Noordwijk, The Netherlands, June 1991. **Proc.** p.19-21
- MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure.** Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, 1984.
- MAZARS, J.; BAZANT, Z.P. **Cracking and damage: strain localization and size effect.** Elsevier Applied Science, 1989.
- OLIVER, J. A consistent characteristic length for smeared cracking models. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, v.28, p.461-474, 1989.

- OLLER, S. et al. Un modelo constitutivo de dano plástico para materiales friccionales; parte I: variables fundamentales, funciones de fluencia y potencial. **Rev. Int. de Met. Num. para Calc. y Diseno en Ingenieria**, v.4, n.4, 1988a.
- OLLER, S. et al. Un modelo constitutivo de dano plástico para materiales friccionales; parte II: generalización para procesos con degradacion de rigidez. Ejemplos. **Rev. Int. de Met. Num. para Calc. y Diseno en Ingenieria**, v.4, n.4, 1988b.
- ORTIZ, M. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. **Mech. of Mat.**, v.4, p.67-93, 1985a.
- ORTIZ, M. **A continuum theory of inelasticity and failure of concrete under general states of stress.** Brown University, 1985b.
- OTTOSEN, N.S. Constitutive model for short-time loading of concrete. **J. Eng. Mech. Div.**, v.105, n.EM1, Feb. 1979.
- OTTOSEN, N.S.; DAHLBLOM, O. Smearred crack analysis using a nonlinear fracture model for concrete. In: TAYLOR, C. et al., ed. **Numerical methods for non-linear problems.** Swansea, Pineridge Press, 1986. v.3
- OWEN, D.R.J.; FIGUEIRAS, J.A.; DAMJANIC, F. Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading. **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, v.41, 1983.
- PAPA, E. **Sulla meccanica del danneggiamento con particolare riferimento alle murature.** Tesi di Dottorato, Politecnico di Milano, 1990.

- PEREGO, M. **Danneggiamento dei materiali lapidei: leggi costitutive, analisis per elementi finiti ed applicazioni.** Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, DIS, Anno accademico, 1989.
- PETERSSON, P.E. **Fracture energy of concrete: method of determination.** *Cement and Concrete Research*, v.10, 1980.
- PROENÇA, S.P.B. **Aplicação de um modelo matemático para análise não-linear de estruturas em argamassa armada.** In: CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 10., Porto, Portugal, set. 1989. **Anais.**
- PROENÇA, S.P.B. **Simulação numérica do comportamento de elementos estruturais em concreto e argamassa armada pelo emprego de um modelo de dano.** In: CONGRESO LATINO AMERICANO SOBRE METODOS COMPUTACIONALES PARA INGENIERIA, 12., Santa Fé, Argentina, set. 1991. **Anais.**
- PROENÇA, S.P.B. **Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições.** São Carlos, 1988. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PROENÇA, S.P.B.; ÁLVARES, M.S. **On numerical performance of a damage model applied to the analysis of concrete structural members.** In: INT. CONGRESS ON NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING AND APPLIED SCIENCES, Concepción, Chile, nov. 1992. **Proc.**
- RABOTNOV, Y.N. **Creep problems in structural members.** Amsterdam, North-Holland, 1969.

- RESENDE, L. **A damage mechanism constitutive theory for the inelastic behavior of concrete.** Technical Report n.64, UCT/CSIR, Appl. Mech. Res. Unit, 1985.
- SAENZ, L.P. Equation for stress strain curve of concrete in uniaxial and biaxial compression of concrete. **A.C.I. Journal**, v.61, 1965.
- SIMO, J.C.; JU, J.W. Strain and stress based continuum damage models j. formulation. **Int. J. Solids & Structures**, v.23, p.821-840, 1987.
- SMITH, S.S. et al. Concrete over the top, or: is there life after peak. **ACI Materials Journal**, v.86, 1990.
- SPOONER, D.C.; DOUGILL, J.W. A quantitative assessment of damage sustained in concrete during compressive loading. **Magazine of Concrete Research**, v.27, n.92, Sept. 1975.
- SPOONER, D.C.; POMEROY, C.D.; DOUGILL J.W. Damage and energy dissipation in cement pastes in compression. **Magazine of Concrete Research**, v.28, n.94, March 1976.
- SUIDAN, M.; SCHNOBRICH, W.C. Finite element analysis of reinforced concrete. **J. Struct. Div., ASCE**, v.99, Oct. 1973.
- THELANDERSSON, S. Modeling of combined thermal and mechanical action in concrete. **J. Eng. Mech., ASCE**, v.113, n.6, 1987.
- TRUESDELL, C. The simplest rate theory of pure elasticity. **Communic. Pure Appl. Mathem.**, v.8, 1955.
- VAN MIER, G.M. **Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions.** PhD Thesis, Eindhoven Tech. Univ., Nov. 1984.

VAN MIER, G.M. Influence of damage orientation distribution on the multiaxial stress-strain behavior of concrete. **Cement and Concrete Research**, v.15, p.849-862, 1985.

WILLAM, K.J. Experimental and computational aspects of concrete fracture. In: INT. CONF. COMPUTER-AIDED ANALYSIS AND DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES, 1984. **Proc.**

ZIENKIEWICZ, O.C.; WATSON, M. Some creep effects in stress analysis with particular reference to concrete pressure vessels. **Nuclear Eng. and Design**, n.4, 1966.