

ESTUDO DO DESEMPENHO DE ALGORITMOS NUMÉRICOS
NA SOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES DE
ESTRUTURAS FORMADAS POR BARRAS DE TRELIÇA

AUTOR: Eng^o Jose Benaque Rubert

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ESTUDO DO DESEMPENHO DE ALGORITMOS NUMÉRICOS
NA SOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES DE
ESTRUTURAS FORMADAS POR BARRAS DE TRELIÇA

AUTOR : ENG. JOSE BENAQUE RUBERT

ORIENTADOR: PROF. DR. SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

São Carlos
JANEIRO 1993

AGRADECIMENTOS

Ao orientador Prof. Dr. Sergio Persival Baroncini Proença pela compreensão e incentivo.

Ao Prof. Dr. Márcio Roberto Silva Corrêa pela colaboração e aos demais professores e colegas de pós-graduação que, de alguma forma, certamente contribuíram para que fosse possível a realização deste trabalho.

A minha família e a Sandra pelo apoio nos momentos mais difíceis ao longo destes anos.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo comparativo entre algumas técnicas para solução numérica de sistemas não-lineares. Os algoritmos estudados são aplicados a sistemas estruturais formados por barras de treliças segundo arranjos unidimensional, bidimensional e tridimensional.

Os métodos da Rigidez Inicial, Newton-Raphson incremental, Newton-Raphson modificado e quasi-Newton (BFGS), associados ou não à busca unidimensional, são aplicados na análise de estruturas sujeitas a manifestação de não-linearidade física e/ou geométrica. Os resultados obtidos para os exemplos estudados oferecem alguns elementos importantes para o julgamento do desempenho dos vários algoritmos, destacando-se uma vantagem significativa no uso do algoritmo proposto por Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS).

ABSTRACT

The aim of this work is to present a comparative study among some numerical techniques for the solution of non-linear systems. The algorithms studied are applied to the analysis of bars systems (trusses) assembled in one, two or tree dimensions. So, the initial stiffness, incremental Newton-Raphson, modified Newton-Raphson and quasi-Newton (BFGS) methods, with an optional line search, are used to the analysis of the geometric and material non-linear behavior of such structures. The results obtained from the examples offer important elements to evaluate the algorithms performance. In particular a significative advantage is detected in the use of Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shano (BFGS) technique.

LISTA DAS VARIÁVEIS MAIS IMPORTANTES

σ	- Tensão
ϵ	- Deformação ^M
σ_y, σ_e	- Tensão de escoamento
ϵ_p	- Deformação plástica
E	- Módulo de elasticidade
H	- Parâmetro de endurecimento
a	- Deslocamentos
f, P	- Forças
α	- Coeficiente de busca unidimensional

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	1
2.	EFEITOS NÃO-LINEARES.....	6
2.1.	Introdução.....	6
2.2.	Comportamento elasto-plástico.....	7
2.3.	A não-linearidade geométrica.....	12
3.	MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	20
3.1.	Introdução.....	20
3.2.	Conceitos Fundamentais.....	23
3.2.1.	Motivação Através da Função Energia Potencial.....	24
3.2.2.	Busca Unidimensional.....	29
3.3.	Métodos do tipo Newton-Raphson	.32
3.3.1.	Formulação clássica do método de Newton.	32
3.3.2.	Newton-Raphson incremental iterativo....	33
3.4.	Método de Newton-Raphson Modificado.....	36
3.5.	Métodos do tipo quasi-Newton.....	37
3.5.1.	Conceituação e motivação.....	37
3.5.2.	O algoritmo BFGS.....	38
4.	CÓDIGO DE CÁLCULO PARA ESTRUTURAS DE BARRAS.....	40
4.1.	Introdução.....	40
4.2.	Descrição do programa.....	41
4.3.	Fluxogramas e diagramas.....	44
4.3.1.	Método da rigidez inicial.....	45

4.3.2.	Método de Newton-Raphson clássico.....	47
4.3.3.	Método de Newton-Raphson modificado 1..	49
4.3.4.	Método de Newton-Raphson modificado 2..	51
4.3.5.	Método de Newton-Raphson modificado 2 com pesquisa unidirecional.....	53
4.3.6.	Método quasi-Newton: BFGS clássico.....	55
4.3.7.	Método quasi-Newton com pesquisa unidirecional: BFGS.....	57
5.	EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	59
5.1.	Introdução.....	59
5.2.	Exemplos em uma dimensão.....	60
5.2.1.	Exemplo de duas barras com não-linearidade física.....	60
5.2.2.	Exemplo com dez barras e não-linearidade física.....	62
5.3.	Exemplos em duas dimensões.....	64
5.3.1.	Estrutura em duas barras e não-linearidade geométrica.....	64
5.3.2.	Estrutura de cinco barras com dupla não-linearidade.....	67
5.4.	Exemplos de treliças espaciais.....	70
5.4.1.	Torre esbelta no espaço com dupla não-linearidade.....	70
5.4.2.	Cúpula invertida no espaço com dupla não-linearidade.....	74
6.	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES.....	80
7.	BIBLIOGRAFIA.....	84
APÊNDICES		
A	Conceitos gerais da plasticidade para o meio contínuo..	87
B	Implementação da não-linearidade geométrica.....	93
C	Fluxograma para o BFGS com atualização da matriz direta.....	96

1. INTRODUÇÃO

Há séculos, quando se iniciou a construção de estruturas com a finalidade de atender necessidades diversas das sociedades, principalmente templos religiosos no início, e logo outras tais como transportes, abastecimento de água e moradias, as técnicas de construção limitavam-se apenas à experiência acumulada pelos construtores ao longo do tempo e à realização de ensaios em modelos reduzidos. A aplicação prática de resultados obtidos por meio de ensaios muitas vezes conduziu a fracassos porque não se conheciam as relações básicas da resistência dos materiais; embora Leonardo da Vinci, já durante a fase do renascimento, tenha realizado estudos do comportamento de materiais, chegando mesmo a determinar analiticamente esforços internos em elementos de modelo por ele idealizado.

Já de há muito, egípcios, romanos e gregos executavam obras cujas dimensões e durabilidade impressionam até hoje, mas foi apenas em 1594 com Galileo que o estudo da resistência dos materiais teve seu primeiro grande impulso no aspecto teórico, com a publicação do tratado de mecânica intitulado "Della Scienza Meccanica". A crescente complexidade das obras e a dificuldade em se produzir modelos adequados para ensaio, impulsionou decisivamente o desenvolvimento de modelos matemáticos capazes de descrever a geometria, as deformações e os esforços internos nas estruturas.

Os trabalhos experimentais e a teoria das estruturas caminharam juntos e ao mesmo tempo em que os ensaios de

laboratório tornaram-se mais sofisticados, as técnicas matemáticas ganharam corpo e permitiram avaliar de modo melhor aproximado o comportamento de um número cada vez maior de estruturas. Um exemplo deste fato diz respeito à plasticidade. Em 1868, Tresca apresentou resultados experimentais sobre o comportamento plástico de metais submetidos a grandes pressões. Estes resultados logo despertaram o interesse de outro grande estudioso da época, Saint-Venant, que publicaria a partir daí uma série de artigos nos quais formalizaria as equações fundamentais da plasticidade com base em três suposições:

- 1-) O volume do material permanece inalterado durante a deformação plástica.
- 2-) A direção das deformações principais coincide com a direção das tensões principais.
- 3-) A máxima tensão de cisalhamento em cada ponto é igual a uma constante específica.

Iniciava-se assim o estudo de um campo totalmente novo da resistência dos materiais, a plasticidade. Outros autores, a partir de 1868, apresentaram contribuições importantes. Entre eles está Bauschinger.

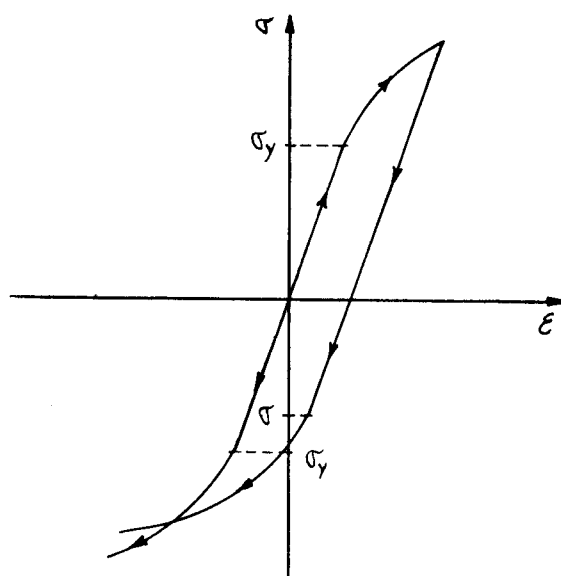


Fig. 1.01 - Efeito Bauschinger

Em 1879, Bauschinger desenvolveu um tipo de extensômetro que permitia medir alongamentos dos materiais ensaiados com precisão de 10^{-6} . Com este instrumento, ele foi capaz de determinar a tensão de proporcionalidade dos materiais e percebeu que quando superado esse limite, seja na tração ou na compressão, surgiam deformações permanentes e os limites de proporcionalidade ficavam alterados; a figura 1 mostra o efeito que recebeu seu nome.

Outra importante contribuição ao estudo da resistência dos materiais foi dada por Alberto Castigliano; em 1873 ele formulou o teorema que leva seu nome. A generalização do teorema de Castigliano, feita em 1889 por Engesser, eliminou a limitação de sua aplicação a casos em que a relação entre forças externas aplicadas e deslocamentos é linear. A noção de energia complementar introduzida por Engesser permitiu tratar problemas cuja relação entre forças externas aplicadas e deslocamentos era não-linear.

Estavam assim lançados os fundamentos do que é hoje conhecido como estudo do comportamento não-linear de estruturas: a não-linearidade física, ligada às características mecânicas dos materiais e a não-linearidade geométrica, relacionada à geometria da estrutura. O conhecimento deste aspecto do comportamento estrutural tornou-se indispensável em projetos onde se exige leveza, economia e esbeltez. Exemplos clássicos onde efeitos não-lineares são importantes compreendem edifícios altos, estruturas formadas por cabos e estruturas construídas com material muito deformável entre outras.

Uma vez bem fundamentados os estudos teóricos acerca do comportamento não-linear das estruturas, um problema de natureza prática surgiu: as estruturas que manifestam comportamento não-linear originam sistemas de equações também não-lineares cuja solução só é possível com a aplicação de procedimentos incrementais/iterativos.

A partir do surgimento dos computadores digitais tornou-se possível o desenvolvimento de algoritmos, cuja implementação, permitiu resolver grandes estruturas. O método de Newton-Raphson foi de início largamente utilizado com bons

resultados.

Uma infinidade de algoritmos surgiram a partir de 1960, na medida que os procedimentos clássicos do tipo Newton-Raphson mostraram-se ineficientes ou incapazes de produzir solução para determinados problemas. O método de Newton-Raphson modificado e da rigidez inicial permitiram pequenos progressos, mas foram os métodos do tipo quasi-Newton que representaram de fato algo novo nas técnicas de solução numérica dos sistemas não-lineares de equações.

Estudos sobre a aplicação dos diversos métodos e resultados de comparações elaboradas para alguns problemas usando elementos finitos, encontram-se nos trabalhos de Matthies e Strang [1] e também em Owen [2]. Ambos os trabalhos apontam para as vantagens, nos aspectos de confiabilidade, convergência e estabilidade, do uso do algoritmo quasi-Newton segundo a regra de atualização proposta pelos pesquisadores Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno (BFGS). A pesquisa unidimensional associada aos métodos de Newton e quasi-Newton é também objeto de estudo nos referidos artigos.

Neste trabalho apresenta-se um estudo cujo objetivo é destacar as diferenças e avaliar o desempenho de cada um dos métodos, tomando-se por base um determinado tipo de estrutura. Inicialmente, no capítulo 2, encontram-se os conceitos fundamentais teóricos relacionados ao comportamento não-linear. Na sequência, o capítulo 3 contém a motivação matemática para os métodos numéricos utilizados, a apresentação dos algoritmos de Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado, rigidez inicial e BFGS bem como um estudo sobre a busca unidimensional.

O capítulo 4 traz a descrição das sub-rotinas elaboradas, os fluxogramas resumidos e diagramas que traduzem graficamente, para uma estrutura a uma variável de deslocamento, o andamento dos cálculos para cada tipo de algoritmo. Exemplos de estruturas onde se manifesta acentuado comportamento não-linear, encontram-se resolvidos no capítulo 5; os resultados estabelecem a comparação pretendida entre os métodos.

Os capítulos 6 e 7 contêm as conclusões e a bibliografia consultada, respectivamente. Além dos trabalhos já citados nesta introdução, encontra-se em Arcaro [5] e Proença [9] uma clara exposição teórica das técnicas numéricas empregadas. A não-linearidade geométrica é assunto dos artigos de Victor M. de Souza Lima e Fernando Venâncio Filho [4] e [10], sendo que um vasto estudo dos modelos empregados em sistemas estruturais de edifícios é feito em Corrêa [7]. Os trabalhos de Nadai [21], Owen e Hinton [8], Mendelson [24] e Proença [9] fundamentam os assuntos ligados a plasticidade. Os exemplos numéricos contidos em [3], [7] e [8] foram usados para comparação de resultados.

O programa elaborado se presta à solução de estruturas formadas por barras de treliça, porém a organização geral das rotinas permite sua extensão ao caso de estruturas mais complexas.

2. EFEITOS NÃO-LINEARES

2.1. Introdução

As estruturas, de um modo geral, apresentam um comportamento não-linear resultante da variação das propriedades dos materiais e/ou da geometria da estrutura ao longo da aplicação das cargas de serviço. Estes dois tipos de efeitos correspondem à não-linearidade física e geométrica, respectivamente.

Na maioria dos projetos de estruturas as não-linearidades não são consideradas, a partir da justificativa de que tais efeitos produzem pouca ou quase nenhuma influência no resultado de deslocamentos e esforços finais. Em muitos casos, porém, pode-se chegar a um projeto inadequado em razão de não terem sido considerados justamente aqueles efeitos. Tem-se como exemplos ilustrativos os projetos de treliças muito deformáveis, de edifícios altos, de estruturas pênseis e outras. Nessas situações ao avaliarem-se, por exemplo, deslocamentos de pontos da estrutura tendo como base a análise elástica linear, obtém-se, certamente, resultados otimistas com relação àqueles da análise não-linear.

Na sequência deste capítulo, estuda-se, inicialmente, o comportamento elasto-plástico ligado ao fenômeno da não-linearidade física.

A variação das propriedades mecânicas dos materiais durante a aplicação das cargas, pode conduzir, para a

estrutura global, a uma resposta de deslocamentos fora do regime elástico; o aparecimento deste tipo de não-linearidade pode ou não, dependendo do tipo de estrutura, estar combinada a manifestação de não-linearidade do tipo geométrica.

Ao final deste capítulo trata-se a questão da não-linearidade geométrica. A ocorrência deste tipo de comportamento se manifesta, de modo muito mais evidente, em estruturas construídas com materiais muito deformáveis, como por exemplo o alumínio, cujo módulo de elasticidade é igual a cerca de um terço do valor correspondente ao aço.

2.2. Comportamento elasto-plástico

Os materiais que apresentam comportamento elasto-plástico são aqueles que após a aplicação de um ciclo completo de carga e descarga, sofrem deformações permanentes irrecuperáveis.

Pode-se representar graficamente esse fenômeno conforme mostra a fig. 2.01, correspondente a um ensaio de tração uniaxial executado em corpo de prova de um certo material bastante deformável. É importante observar, nessa representação, que as deformações permanentes estão associadas às tensões que excedem a tensão limite de escoamento σ_e , característica do material em estudo.

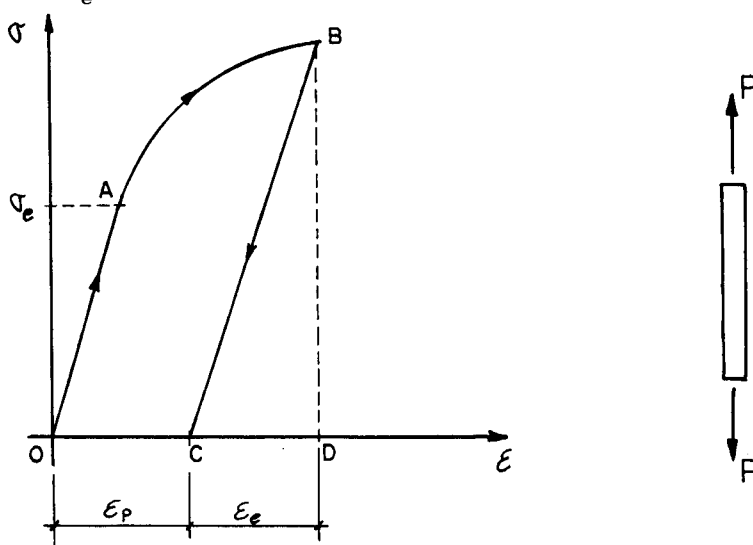
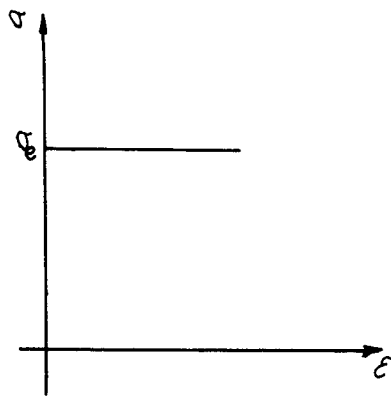


Fig. 2.01- Curva tensão-deformação

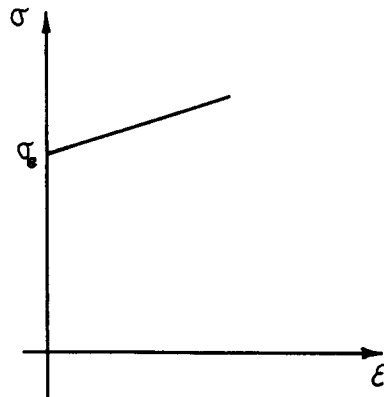
Assim, enquanto a tensão no material não atingir o valor limite σ_e , quando houver o descarregamento toda a deformação será recuperada; em caso contrário, surgirão deformações permanentes. Pode-se escrever que a deformação total acumulada ϵ é a soma das deformações elástica ϵ_e e plástica ϵ_p .

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (\text{Eq. 2.01})$$

Os comportamentos idealizados plástico perfeito e elasto-plástico com ou sem endurecimento, estão representados nas figuras 2.02 e 2.03.

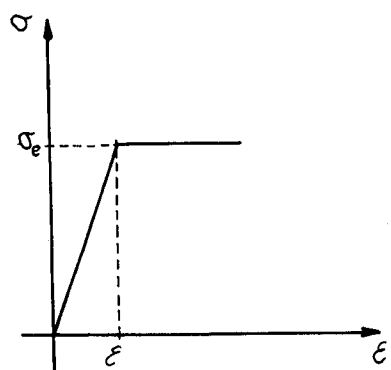


a) Modelo plástico perfeito

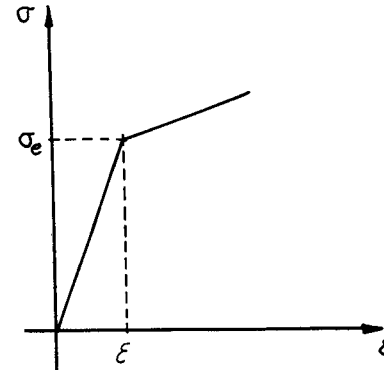


b) Modelo plástico com endurecimento

Fig. 2.02- Modelos plásticos no ensaio uniaxial



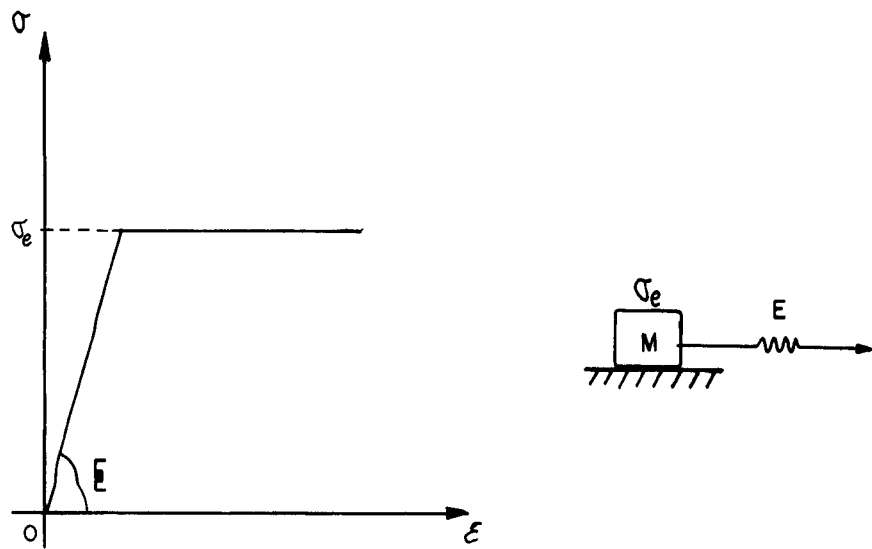
a) Modelo elasto-plástico perfeito



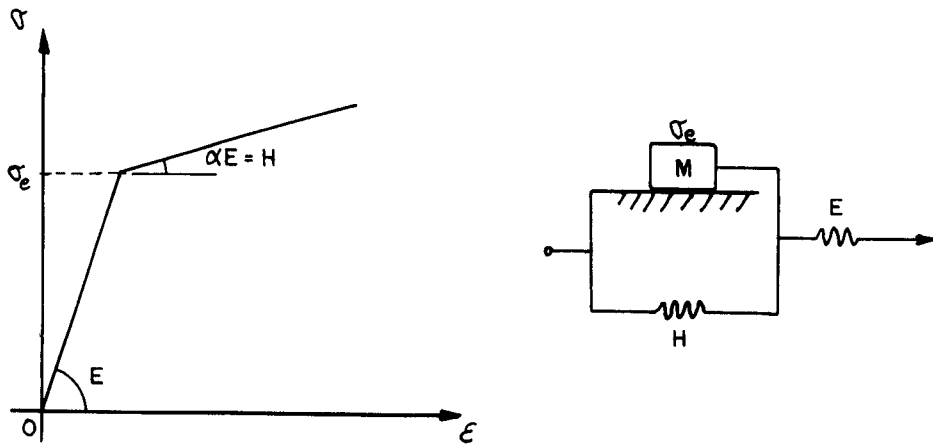
b) Modelo elasto-plástico com endurecimento

Fig. 2.03- Modelos elasto-plásticos no ensaio uniaxial

Uma outra representação para os comportamentos estudados é feita através dos chamados modelos reológicos.



a) Modelo elasto-plástico perfeito



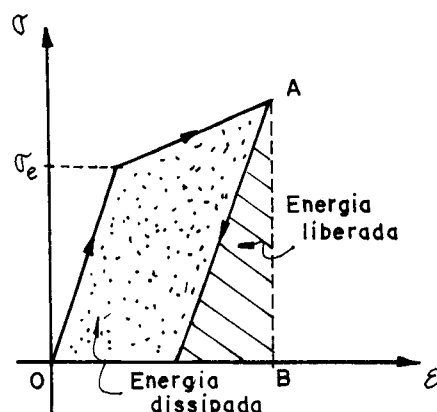
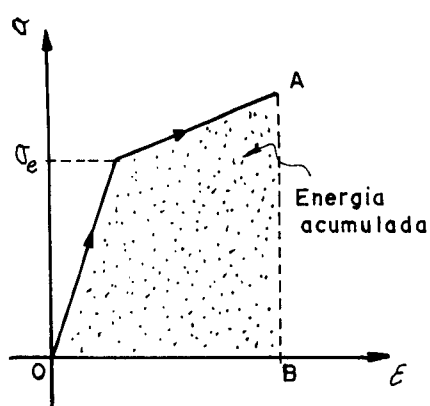
b) Modelo elasto-plástico com encruamento

Fig. 2.04- Modelos reológicos elasto-plásticos

Nos modelos reológicos, fig. 2.04, o atrito do bloco (M) com a superfície representa a tensão de escoamento e o atrito desse bloco associado a uma mola, com constante elástica H, simula o endurecimento do material. Se a qualquer uma dessas situações, associa-se em série uma mola de constante elástica E, equivalente ao módulo de elasticidade do material, tem-se a caracterização dos dois tipos de comportamento elasto-plástico.

Por outro lado, do ponto de vista da energia, quando se aplica um conjunto de solicitações a um sistema, levando-o a um estado plastificado, e em seguida retira-se a solicitação a deformação permanente resultante está associada, na verdade, à energia dissipada ao longo do processo de carga e descarga (ver fig. 2.05)

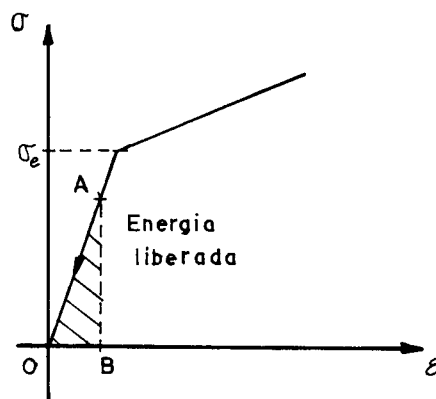
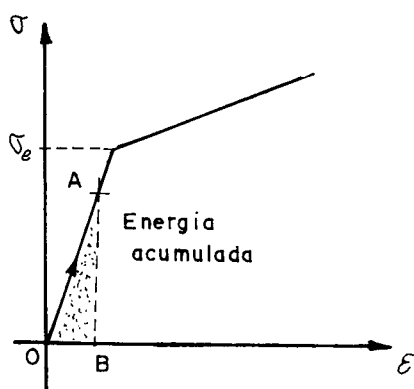
No caso uniaxial, pode-se calcular a energia dissipada determinando a área delimitada pelas curvas de carga e descarga. Evidentemente, se um sistema esta solicitado apenas na sua fase elástica, a área correspondente é nula, o que significa não haver dissipação de energia (ver fig. 2.06).



a) Carga na fase plástica

b) Descarga elástica

Fig. 2.05- Ciclo de carga e descarga na fase plástica



a) Carga na fase elástica

b) Descarga na fase elástica

Fig. 2.06- Ciclo de carga e descarga na fase elástica

Não se admite fisicamente de um sistema, ao qual se fornece energia através da aplicação de um conjunto de solicitações, que este libere energia maior do que aquela fornecida inicialmente, quando cessam as solicitações, conforme ilustra a figura 2.07.

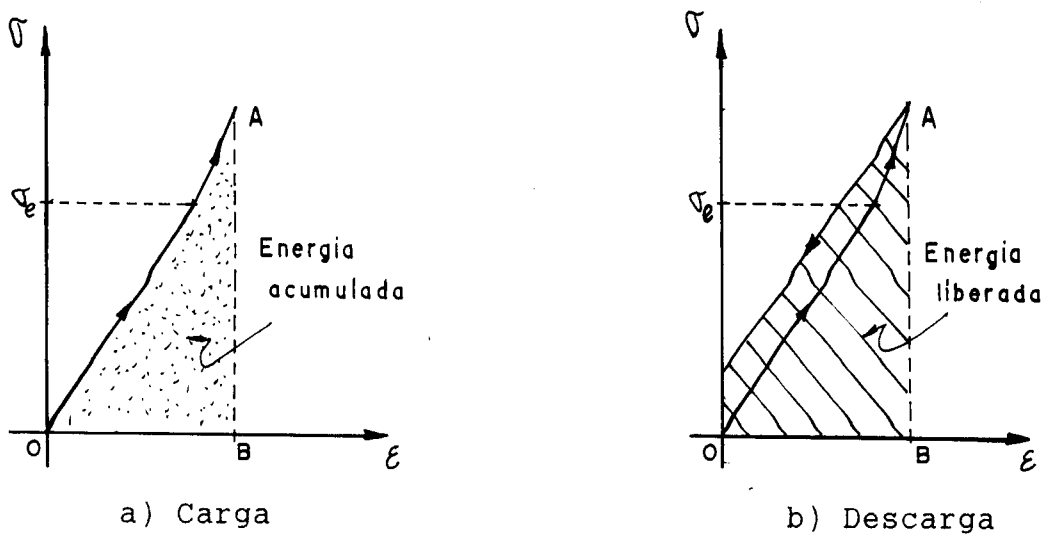


Fig. 2.07- Ciclo de carga e descarga em um sistema hipotético

A maneira de reproduzir as limitações ao comportamento dos materiais através de relações matemáticas, se faz por meio da aplicabilidade dos dois postulados de Drucker, que no caso uniaxial representam-se pelas expressões seguintes.

$$d\sigma \cdot d\epsilon \geq 0 \quad (\text{Eq. 2.02})$$

$$\oint \epsilon \, d\sigma \leq 0 \quad (\text{Eq. 2.03})$$

O primeiro dos postulados obriga a que as tensões e deformações tenham o mesmo sentido, ou seja, para uma variação positiva ou negativa corresponde uma deformação também positiva ou negativa. A mesma condição exclui deste estudo os materiais que apresentam amolecimento, materiais estes que a partir de uma determinada deformação passam a sofrer uma redução das tensões à medida que aumentam as deformações. Este processo está representado na figura 2.08.

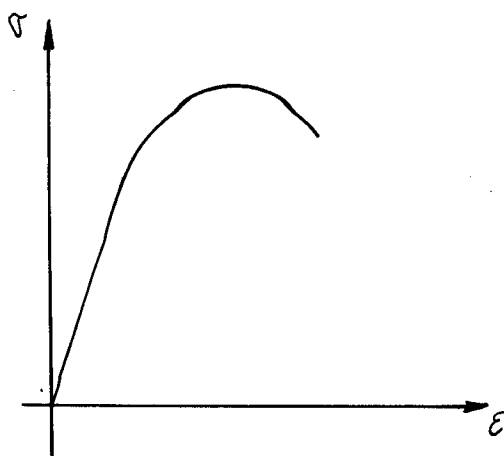


Fig. 2.08- Material com amolecimento

O segundo postulado obriga o sistema a ser dissipativo ou conservativo, ou seja, em termos de energia, ao longo de um ciclo fechado (carga e descarga) o sistema só pode liberar uma quantidade de energia menor ou igual àquela fornecida pelo conjunto de ações aplicadas.

A extensão destes conceitos aos casos mais complexos de tensão está apresentada no apêndice A.

2.3. A NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

O estudo da não-linearidade geométrica é particularmente importante para estruturas cujas esbeltezes e/ou deformabilidades excessivas fazem com que na configuração final de equilíbrio da estrutura surjam esforços internos, ditos de segunda ordem, cuja magnitude não pode ser desprezada.

Considerando que as deformações são suficientemente pequenas, de modo que não se atinja a deformação de proporcionalidade dos materiais estruturais, o que equivale a imposição da lei de Hooke, a resposta não-linear de uma estrutura será consequência apenas dos deslocamentos nodais ou em última análise das rotações sofridas pelos elementos que formam a estrutura. As formulações gerais sobre não-linearidade geométrica admitem simplificações para facilitar a implementação de algoritmos de resolução, as quais, entretanto, exigem o acompanhamento e controle da ordem de grandeza das rotações sofridas pelos elementos da estrutura.

No caso da dupla não-linearidade, é conveniente que se

determine com exatidão as sucessivas posições de equilíbrio, uma vez que quando ocorre a plastificação de elementos da estrutura, o forte comportamento não-linear leva, invariavelmente, a grandes rotações dos elementos. Os algoritmos estudados, contemplam problemas sujeitos ao comportamento duplamente não-linear; por isso, optou-se por não introduzir simplificações.

As definições matriz de rigidez secante e tangente são fundamentais para o estudo da não-linearidade geométrica. Ambas podem ser explicadas a partir da função energia potencial total escrita para uma determinada conformação de equilíbrio da estrutura global, ou seja:

$$\Pi(a) = U(a) - f^T a \quad (\text{Eq. 2.04})$$

Na equação 2.04, $U(a)$ é a energia de deformação acumulada pela estrutura global associada ao estado de deslocamentos correspondente ao vetor $\{a\}$ (deslocamentos nodais). O vetor $\{f\}$ corresponde às cargas nodais equivalentes atuantes na estrutura (sistema conservativo).

O conjunto das variáveis que representam os deslocamentos nodais são também as variáveis da função $\Pi(a)$, de modo que, para se obter o mínimo para essa função, é necessário determinar as derivadas parciais de $\Pi(a)$ para cada deslocamento possível e fazê-las igual a zero, desta forma tem-se:

$$\frac{\partial \Pi(a)}{\partial a_i} = 0 \quad (\text{Eq. 2.05})$$

portanto

$$\frac{\partial U(a)}{\partial a_i} - f_i = 0 \quad (\text{com } i=1, \dots, n) \quad (\text{Eq. 2.06})$$

onde f_i representa a componente i do vetor f

As derivadas sobre os deslocamentos finais no equilíbrio geram um sistema cujo número de equações será igual ao número de incógnitas de deslocamento. A matriz formada pelos coeficientes desses deslocamentos, recebe o nome de matriz de rigidez secante, isto porque sua determinação está ligada às condições inicial e final para os deslocamentos nodais da estrutura. Assim sendo, a reta que representa essa matriz intercepta a curva carga x deslocamento no ponto "A" conforme mostra a figura 2.09a, para um caso unidimensional, e passa também pela origem.

Reescrevendo a equação 2.06 na forma matricial e chamando de $B(a)$ o operador das derivadas parciais sobre os deslocamentos, tem-se:

$$B(a) = f \quad (\text{Eq. 2.07})$$

Para um incremento no vetor de forças, a equação passa a ser escrita, na nova situação de deslocamentos, por:

$$B(a+\Delta a) = f+\Delta f \quad (\text{Eq. 2.08})$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade na forma de uma série de Taylor truncada no termo linear tem-se:

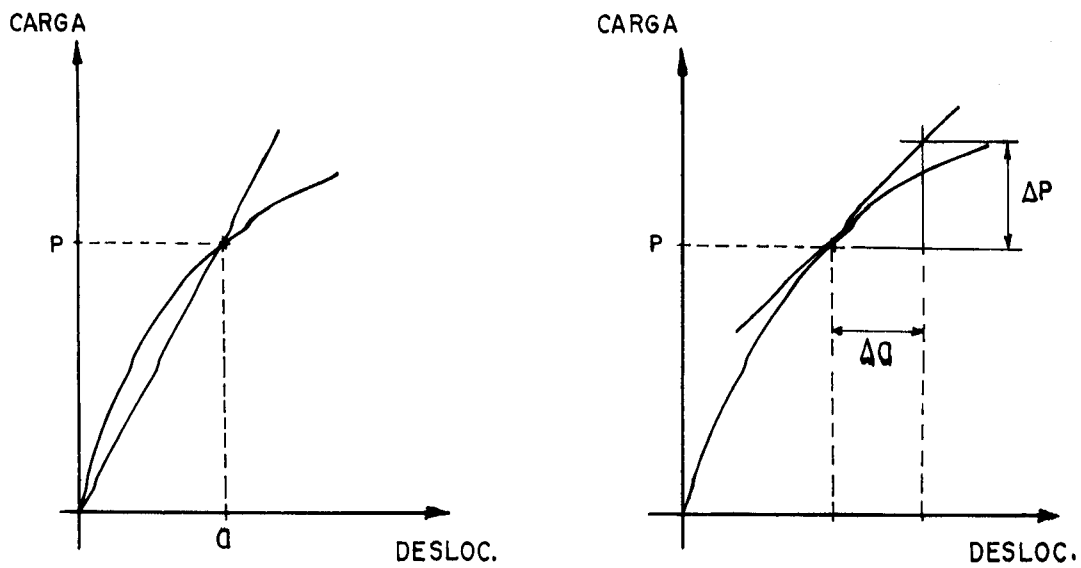
$$B(a) - f + B'(a)\Delta a - \Delta f = 0 \quad (\text{Eq. 2.09})$$

Com base em 2.07 pode-se reescrever à equação 2.09, lembrando que sendo $B(a)$ um operador de derivadas parciais sobre os deslocamentos sua derivada corresponde às segundas derivadas sobre cada deslocamento. Desta forma chega-se a:

$$\frac{\partial^2 U(a)}{\partial a_i \partial a_j} \Delta a_i = \Delta f_j \quad (\text{Eq. 2.10})$$

Neste caso, os termos da derivada parcial da equação 2.10 correspondem a uma aproximação aos termos da chamada matriz de rigidez tangente. Por construção é fácil observar

juntamente com a figura 2.09b a razão dessa denominação.



a) Matriz de Rigidez Secante b) Matriz de Rigidez Tangente

Fig. 2.09 - Comportamento Não-Linear

Na forma matricial, as equações 2.07 e 2.10 ficam:

$$K_s a = f \quad (\text{Eq. 2.11})$$

e

$$K_t \Delta a = \Delta f \quad (\text{Eq. 2.12})$$

Onde: K_s é a matriz de rigidez secante e K_t é a matriz de rigidez tangente.

Neste trabalho utilizou-se sempre o conceito de rigidez tangente, mais adequado ao tratamento incremental iterativo dos exemplos estudados. Assim, a solução do problema, de forma geral, se apresenta como uma sucessão de análises puramente lineares em cada incremento de carga.

No início do procedimento numérico, a matriz tangente confunde-se com aquela da teoria linear; à medida que se incrementa o carregamento, a matriz de rigidez vai sofrendo modificações.

Para obter $[K_t]$ em um determinado instante, partindo da teoria simplificada de 2ª ordem [7], [10], pode-se escrever,

com o que assinala a figura 2.10, o seguinte:

$$A'C = A'B' \cos \theta \quad (\text{Eq. 2.13})$$

e

$$f_3 = -f_1 = N \cos \theta \quad (\text{Eq. 2.14})$$

$$f_4 = -f_2 = N \sin \theta \quad (\text{Eq. 2.15})$$

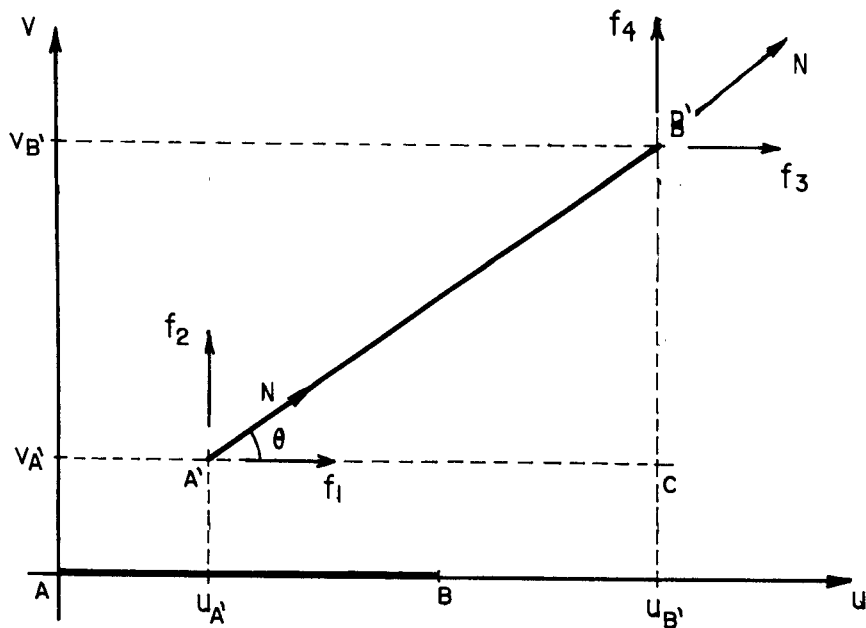


Fig. 2.10 - Barra AB no sistema local "uv"

Sendo ϵ' dado por:

$$\epsilon' = \frac{A'B' \cos \theta - AB}{L} \quad (\text{Eq. 2.16})$$

a 2.13 passa a ser:

$$A'C = L (1 + \epsilon') \quad (\text{Eq. 2.17})$$

Como:

$$L(1+\epsilon') = L(1+\epsilon) \cos \theta \quad (\text{Eq. 2.18})$$

então,

$$\epsilon = \epsilon' + (1+\epsilon)(1-\cos\theta) \quad (\text{Eq. 2.19})$$

Supondo pequenas deformações e rotações, pode-se aproximar as parcelas $(1+\epsilon)$ pela unidade e o valor de $\cos\theta$ pela série truncada no segundo termo, dada a seguir.

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (\text{Eq. 2.20})$$

Com isto, a deformação ϵ real da barra, pode ser expressa em função de sua projeção no eixo "u", do sistema local, e do ângulo de rotação θ .

$$\epsilon = \epsilon' + \frac{\theta^2}{2} \quad (\text{Eq. 2.21})$$

Ainda com base nas hipóteses de pequenas rotações, pode-se reescrever as equações 2.14 e 2.15 bem como as suas variações conforme segue:

$$f_3 = -f_1 = N \quad (\text{Eq. 2.22})$$

$$f_4 = -f_2 = N\theta \quad (\text{Eq. 2.23})$$

$$df_3 = -df_1 = dN \quad (\text{Eq. 2.24})$$

$$df_4 = -df_2 = dN\theta + N d\theta \quad (\text{Eq. 2.25})$$

Para a obtenção de uma expressão para a matriz de rigidez tangente é necessário, inicialmente, exprimir as variações dos deslocamentos "u" e "v", desta forma:

$$u = u_B - u_A \quad (\text{Eq. 2.26})$$

$$v = v_B - v_A \quad (\text{Eq. 2.27})$$

$$du = du_B - du_A \quad (\text{Eq. 2.28})$$

$$dv = dv_{B'} - dv_{A'} \quad (\text{Eq. 2.29})$$

Por outro lado, a lei de Hooke relaciona o esforço na barra com a sua deformação " ϵ ", assim:

$$N = EA\epsilon = EA\left(\epsilon' + \frac{\theta^2}{2}\right) \quad (\text{Eq. 2.30})$$

e sua derivada é:

$$dN = EA(d\epsilon' + \theta d\theta) \quad (\text{Eq. 2.31})$$

com:

$$d\epsilon' = \frac{du}{L} \quad (\text{Eq. 2.32})$$

$$d\theta = \frac{dv}{L} \quad (\text{Eq. 2.33})$$

Substituindo as expressões 2.32 e 2.33 em 2.31 e esta em 2.24 e 2.25 obtém-se:

$$df_3 = -df_1 = \frac{EA}{L} (du + \theta dv) \quad (\text{Eq. 2.34})$$

$$df_4 = -df_2 = \frac{EA}{L} \theta (du + \theta dv) + \frac{N}{L} dv \quad (\text{Eq. 2.35})$$

As variações " du " e " dv " são dadas pelas expressões 2.28 e 2.29 que substituídas em 2.34 e 2.35 produzem a expressão seguinte:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \\ df_4 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & \theta & -1 & \theta \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \theta & 1 & \theta \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} du_{A'} \\ dv_{A'} \\ du_{B'} \\ dv_{B'} \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. 2.36}) \end{aligned}$$

A soma das tres matrizes entre parentesis fornece a matriz de rigidez tangente. Sendo {da} o vetor das variações de deslocamentos pode-se escrever que:

$$\{df\} = [K_t]\{da\} \quad (\text{Eq. 2.37})$$

ou ainda que:

$$\{df\} = ([k_0] + [\Delta k_0] + [k_g])\{da\} \quad (\text{Eq. 2.38})$$

onde:

$[k_0]$ - Matriz de rigidez da teoria linear.

$[\Delta k_0]$ - Correção para o sistema local de coordenadas.

$[k_g]$ - Matriz geométrica função do nível de solicitações axiais das barras

A rotação da matriz de cada barra para o sistema global de coordenadas, e a posterior determinação da matriz de rigidez completa da estrutura, são feitas de maneira análoga à da teoria elástica-linear.

No apêndice B encontram-se informações acerca da implementação da não-linearidade geométrica nos algoritmos estudados.

3. MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

3.1. Introdução

Tradicionalis técnicas numéricas, e a correspondente estratégia computacional, encontram aplicação na solução de problemas de não-linearidades física e geométrica, tanto em estruturas complexas formadas por elementos planos, tridimensionais ou sólidos axissimétricos, cuja solução envolve o método dos elementos finitos, como em estruturas de barras, em geral compondo sistemas mais simples.

A estratégia de solução numérica de problemas que envolvem não-linearidades é concebida, tradicionalmente, segundo algoritmos que combinam duas etapas sucessivas. A primeira, que leva a uma aproximação para o vetor incógnito deslocamentos, emprega a matriz de rigidez global da estrutura, atualizada ou não, e o vetor das cargas nodais equivalentes calculado para um determinado nível de carga; a segunda, consiste na determinação das forças residuais que deverão ser reduzidas por um procedimento iterativo. As seguintes relações descrevem as duas etapas:

$$K a = f \quad (\text{Eq. 3.01})$$

$$\Psi = \int_{\Omega} B^t \sigma d\Omega - f = 0 \quad (\text{Eq. 3.02})$$

Onde:

$\sigma \Rightarrow$ Tensão total num ponto genérico da estrutura, compatível com a lei constitutiva do material.

$B \Rightarrow$ Operador de derivadas parciais, dependente dos deslocamentos nos casos de não-linearidade de natureza geométrica.

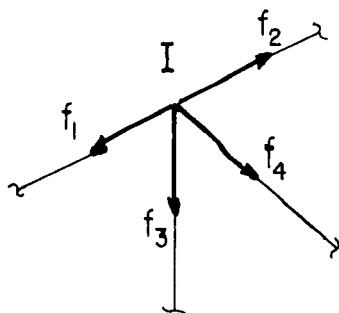
$d \Rightarrow$ Vetor que contém os deslocamentos nodais.

$f \Rightarrow$ É o vetor de cargas nodais aplicadas.

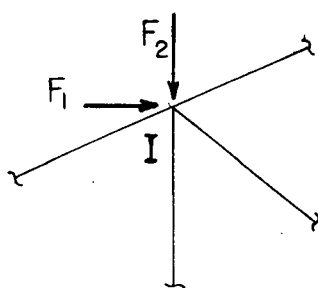
Como ilustração, considere-se o caso de problemas unidimensionais de estruturas formadas por barras. Nesses casos pode-se obter, de modo imediato, a deformação de cada elemento, em qualquer instante, partindo-se dos deslocamentos nodais calculados, para um certo nível de carregamento externo, por meio da equação 3.01. Conhecidas as deformações, impondo-se a lei constitutiva do material, obtêm-se as correspondentes tensões nas barras. A aplicação da equação 3.02 fornecerá um vetor " ψ " de resíduos o qual, superando a tolerância máxima admitida, deve ser reduzido mediante um processo iterativo.

Suponha-se, então, que para uma treliça plana tenham sido calculados os deslocamentos nodais devidos à aplicação de um conjunto de cargas, admitindo-se, inicialmente, um comportamento elástico linear para a estrutura. Admita-se, ainda, que um nó típico "I" (fig. 3.1.a) não apresenta carregamento externo aplicado. Se o resultado obtido para os esforços nas barras, consistente com o modelo constitutivo adotado, não produzir o equilíbrio com o carregamento inicialmente aplicado, isto é, a diferença entre as forças nodais resultantes, e o carregamento externo, F_1 e F_2 (fig. 3.1.b) no caso do nó "I", existirá um resíduo local que deverá ser reduzido a zero por um processo iterativo. A redução do resíduo visa restabelecer o equilíbrio com o carregamento aplicado por meio de uma redistribuição de esforços entre seus elementos. Assim, tal procedimento iterativo consiste em reaplicar o vetor de forças residuais, calculando-se novos incrementos para os deslocamentos, que

somados àqueles obtidos inicialmente fornecerão um novo estado de deformação, e conseqüentemente um novo esforço para cada barra, conduzindo a um resíduo na média menor, se o processo é convergente.



a) Nó genérico "I" de uma estrutura treliçada



b) Diferença entre o carregamento externo e as forças nodais resultantes

Fig. 3.01 - Ilustração do processo de resolução

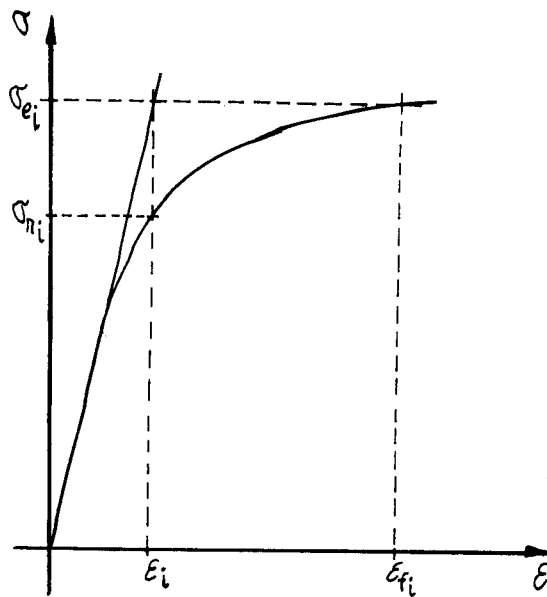
Para a barra " i " genérica temos:

Δl_i = variação do comprimento da barra " i ".

$$\epsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_i}, \text{ deformação da barra " i " .}$$

A lei constitutiva do material estabelece a relação entre deformações e tensões. As forças nas barras da treliça são então facilmente obtidas.

$$\epsilon_i \longrightarrow \sigma_{ri} = \epsilon_i E \longrightarrow F_{ri} = \sigma_{ri} S_i$$



- σ_{ei} = tensão na barra considerado regime elástico linear.
- σ_{ri} = tensão real nessa barra.
- F_{ei} = esforço na fase elástica linear, $F_{ei} = \sigma_{ei} S_i$
- F_{ri} = esforço real nessa barra, $F_{ri} = \sigma_{ri} S_i$

Fig. 3.02 - Relação constitutiva

Em termos gerais, os diversos algoritmos normalmente usados para a determinação dos deslocamentos e deformações reais, se diferenciam pela forma como se processa a atualização da matriz que representa a rigidez da estrutura global durante o processo incremental/iterativo, em consequência da variação das propriedades físicas dos materiais e até mesmo das características geométricas da estrutura (não-linearidade geométrica).

Alguns algoritmos que consideram as variações mencionadas anteriormente serão objeto de estudo na sequência deste trabalho.

3.2. Conceitos Fundamentais

Nesta seção apresenta-se uma discussão sobre a minimização irrestrita de funções quadráticas, a qual tem por principal objetivo construir uma moldura única para o entendimento claro das diferenças entre os algoritmos aqui

tratados.

3.2.1. Motivação Através da Função Energia Potencial

Na teoria da elasticidade o equilíbrio estável de uma estrutura é atingido quando a função energia potencial total, dada por $\Pi(x)$, é mínima, o que equivale a termos:

$$\frac{d\Pi(a)}{da} = 0 \quad (\text{Eq. 3.03})$$

e

$$\frac{d^2\Pi(a)}{da^2} > 0 \quad (\text{Eq. 3.04})$$

Assim, o problema matemático que se põe é o de minimização, sem restrições, de uma função, no caso convexa.

Para estabelecer a correspondência, entre as condições matemáticas impostas às derivadas da função energia potencial total e a análise estrutural, considere-se um vetor $\{a\}_0$ que contém os deslocamentos nodais iniciais quaisquer, não necessariamente em correspondência a uma situação de equilíbrio. Supondo, ainda, que se possa representar um vetor $\{a\}$ de forma simplificada conforme segue:

$$a = a_0 + \alpha d \quad (\text{Eq. 3.05})$$

O vetor $\{d\}$, suposto conhecido, determina uma certa direção de descida a qual conduz necessariamente a um ponto que leva a função Π a um valor menor. Como o vetor $\{a\}_0$ é também determinado, essa função passa a depender apenas do valor de α , ou seja:

$$\Pi(a) = \bar{\Pi}(\alpha) \quad (\text{Eq. 3.06})$$

A representação gráfica da equação 3.05 pode ser feita conforme mostrado na figura 3.03 supondo um sistema a uma

Derivando-se mais uma vez a equação 3.07, obtém-se:

$$\frac{d^2\bar{\Pi}(\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{\partial\bar{\Pi}(\alpha)}{\partial a} \cdot d \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\bar{\Pi}(\alpha)}{\partial a_i \partial a_j} d_i d_j \quad (\text{Eq. 3.09})$$

que pode ser escrita também como segue:

$$\frac{d^2\bar{\Pi}(\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{\partial\bar{\Pi}(\alpha)}{\partial a} \cdot d \right) = d^t S(a) d \quad (\text{Eq. 3.10})$$

A matriz $[S(a)]$ é chamada de Hessiana de $\bar{\Pi}(\alpha)$ e na análise estrutural representa a matriz de rigidez da estrutura.

Reescrevendo a equação de $\bar{\Pi}$ em função de $\{a\}_0$ e $\{d\}$ e expandindo-a em uma série de Taylor truncada, teremos:

$$\bar{\Pi}(a_0 + \alpha d) = \bar{\Pi}(a_0) + \bar{\Pi}'(a_0) \cdot \alpha + \bar{\Pi}''(a_0) \frac{\alpha^2}{2!} \quad (\text{Eq. 3.11})$$

substituindo as derivadas em relação a α conhecidas tem-se:

$$\bar{\Pi}(a_0 + \alpha d) = \bar{\Pi}(a_0) + \alpha r(a_0)^t \cdot d + 0.5\alpha^2 d^t S(a_0) d \quad (\text{Eq. 3.12})$$

que fornece:

$$\bar{\Pi}(a_0 + \alpha d) - \bar{\Pi}(a_0) = \alpha \left[r(a_0)^t d + 0.5\alpha d^t S(a_0) d \right] \quad (\text{Eq. 3.13})$$

Para pequenos valores de α ($\alpha > 0$), o sinal do segundo membro da equação 3.12 é definido pelo produto interno $r(a_0)^t d$, que predomina.

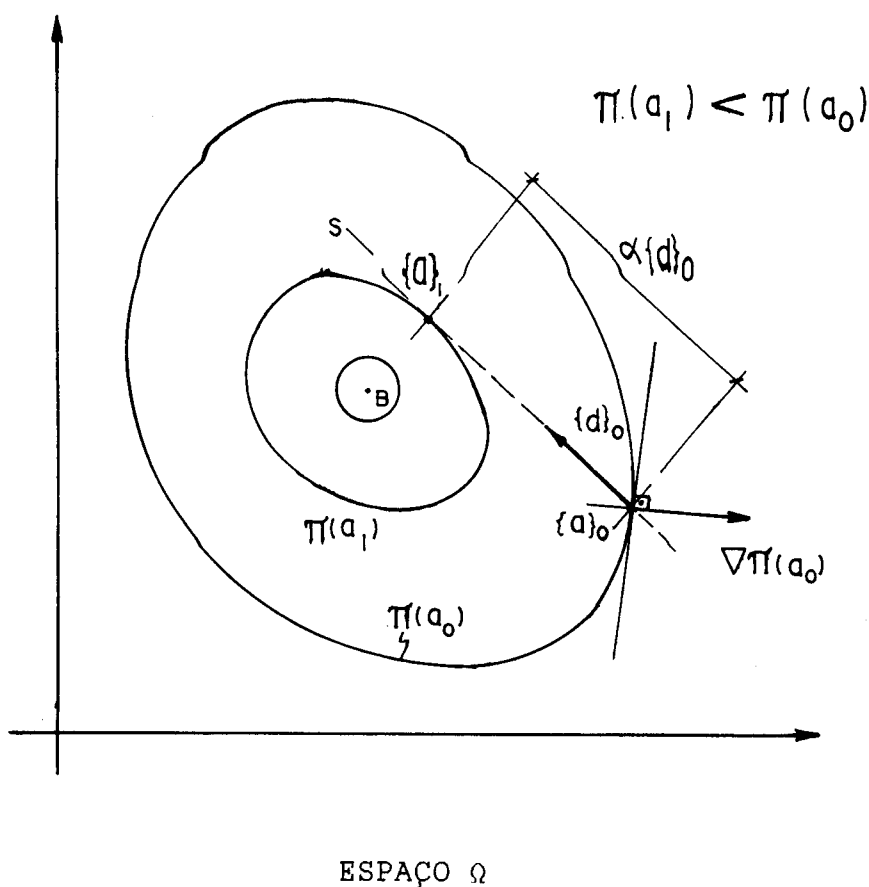
Para que numa nova situação dada por $a = a_0 + \alpha d$ resulte, efetivamente, um progresso na direção de se obter a energia potencial mínima, deve-se ter:

$$\bar{\Pi}(a_0 + \alpha d) < \bar{\Pi}(a_0) \quad (\text{Eq. 3.14})$$

E, portanto, é necessário que se tenha em 3.13:

$$r(a_0)^t d < 0 \quad (\text{Eq. 3.15})$$

A interpretação gráfica para os vetores $\{a\}_0$, $\{a\}$ e direção de descida $\{d\}$ bem como para α num espaço, cujos pontos são deslocamentos, representado por Ω , está dada na figura 3.04.



Onde:

$\nabla \Pi(a_0) = r(a_0) \rightarrow$ Vetor gradiente da função $\Pi(a=a_0)$

$s \rightarrow$ Reta definida pelo vetor de descida $\{d\}_0$

Fig. 3.04 - Interpretação gráfica

É fácil notar que sobre a reta "s" existe um ponto $\{a\}$ que está mais próximo do ponto de mínimo "B" da função Π e que atende à exigência feita na equação 3.14.

Observando as equações 3.05 e 3.15 verifica-se que uma

vez conhecido o vetor $\{a\}_0$ e supondo o parâmetro " α " igual a 1, resta determinar o vetor de descida $\{d\}$ de modo a ter-se $r(a_0)^t d < 0$. Para isso faz-se, por exemplo:

$$d_0 = -A r(a_0) \quad (\text{Eq. 3.16})$$

Onde:

$[A] \rightarrow$ É uma matriz definida positiva

Justamente a determinação da matriz "A" é que diferencia os métodos aqui estudados, já que ela pode ser a matriz de rigidez tangente determinada a cada iteração (método de Newton) ou ainda uma aproximação fornecida por uma certa expressão (método quasi-Newton).

No processo computacional, como se verá, a primeira aproximação do vetor solução $\{a\}_0$ é dada por 3.01, e o primeiro resíduo por:

$$r(a) = \psi = \int_{\Omega} B^t \sigma d\Omega - f \quad (\text{Eq. 3.17})$$

Para obter na sequência o vetor direção de descida $\{d\}_0$ aplica-se:

$$d_0 = [K]^{-1} r(a_0) \quad (\text{Eq. 3.18})$$

Onde:

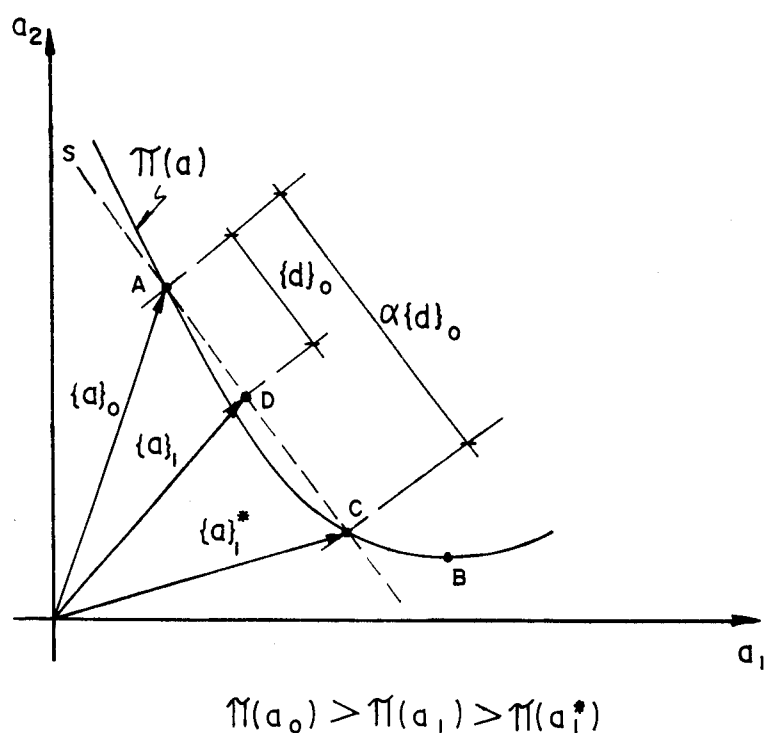
$[K] \rightarrow$ É a matriz de rigidez tangente ou uma aproximação para ela.

Uma vez determinada a direção de descida $\{d\}_0$, basta calcular o vetor $\{a\}$ que fornece a posição atualizada da estrutura. O coeficiente " α " (que foi imposto igual a 1) pode ser determinado de maneira a fornecer um vetor $\{a\}$ mais próximo do mínimo de Π ; na sequência estudam-se critérios para a sua determinação.

3.2.2. Busca Unidimensional

A busca unidimensional consiste em encontrar um valor para α de modo que na direção de descida já determinada, a função $\bar{\Pi}(\alpha)$ assumo o menor valor possível, num ponto que não é necessariamente o mínimo absoluto de $\bar{\Pi}(\alpha)$. Essa busca, pode ser feita de várias formas diferentes, dentre elas pode-se citar os métodos do ajuste cúbico, da bipartição e o da interpolação linear.

A interpretação gráfica para a busca unidimensional, pode ser feita por meio da figura 3.05. Se a função $\Pi(a)$ for uma superfície, a curva plotada representa a intersecção da superfície com um plano no qual estaria contida a direção de descida.



Onde: $\{a\} = \{a_1, a_2\}$

Fig. 3.05- Interpretação gráfica para α

Na figura 3.05 vê-se que o ponto D, leva a uma situação de energia potencial menor que o ponto A, ou seja $\Pi(D) < \Pi(A)$.

Caminhando sobre a reta s definida pela direção de busca $\{d\}$, vê-se que existe um ponto C , sobre a curva que representa a função, que proporciona um valor ainda menor para Π . Assim, pode-se escrever que:

$$\overline{AC} = \alpha \overline{AD} \quad (\text{Eq. 3.19})$$

Uma maneira simples de obter o melhor α consiste em definir uma sequência de valores e calcular para eles o valor da função $\bar{\Pi}$, por exemplo $\alpha = \{0.25; 0.5; 1.0\}$. Digamos que para esses valores de α , a função $\bar{\Pi}$ apresente os seguintes valores conhecidos:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Pi}(0.5) = \Pi_1 \quad \text{com } \Pi_1 > \Pi_{\min} \\ \bar{\Pi}(1.0) = \Pi_2 \quad \text{com } \Pi_2 < \Pi_{\min} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\Pi}(0.5) > \Pi_{\min} > \bar{\Pi}(1.0)$$

Onde Π_{\min} é o menor valor na direção de descida considerada.

Neste caso, no intervalo entre $\alpha=0.5$ e $\alpha=1.0$, a função $\bar{\Pi}$ passa pelo mínimo local, e é possível então, por meio de uma interpolação linear, obter um valor aproximado de α para o qual $\bar{\Pi}(\alpha) = \Pi_{\min}$.

De forma mais completa, fazendo-se partições sucessivas que sempre contenham a solução, obtém-se, com boa precisão, o melhor valor para a busca unidimensional.

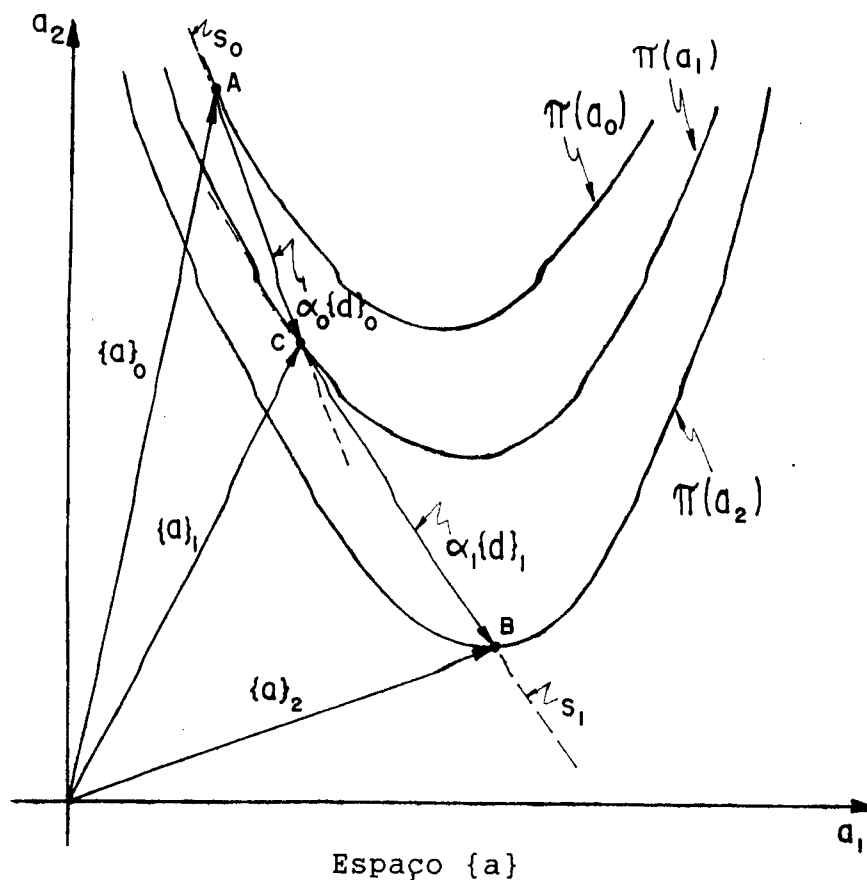
Este último método, foi o empregado nos algoritmos estudados neste trabalho.

Uma vez conhecidas a direção de descida e o melhor valor de α na busca unidimensional, a equação 3.19 nos fornece um ponto correspondente ao ponto C da figura 3.05, ou seja:

$$a_1 = a_0 + \alpha d_0 \quad (\text{Eq. 3.20})$$

Para este novo ponto a_1 , monta-se a nova função energia potencial total, determina-se uma nova direção de descida e o procedimento descrito anteriormente é repetido até que se atinja o ponto de mínimo absoluto. A figura 3.06 ilustra o

caminho percorrido até a determinação do ponto de mínimo absoluto da função $\Pi(a)$ que corresponde a posição de equilíbrio estável da estrutura considerada.



"s" → É a direção definida pelo vetor de descida $\{d\}$

Fig. 3.06- Procura do ponto de mínimo absoluto da função energia potencial total

É interessante resaltar que, no programa desenvolvido, por não se estar minimizando de forma explícita a energia potencial, mas sim resolvendo diretamente o sistema de equações não-lineares, foi necessário definir um critério para a determinação de " α ". Assim, o valor de " α " é obtido por aproximações sucessivas, até que o produto interno dado pela expressão a seguir, atinja um valor pequeno.

$$G(\alpha) = d^t \cdot r(a_0 + \alpha d) \quad (\text{Eq. 3.21})$$

Não é preciso forçar $G(\alpha)$ a ser o mais próximo possível de zero. Em muitos casos o esforço dispendido nessa tarefa não produz resultados satisfatórios. Podem ser experimenta-

dos valores como $G(\alpha) \leq 0.5$ ou $G(\alpha) \leq 0.1$. Quanto menor for o valor da tolerância, mais operações são necessárias para encontrar " α ", tornando lento o processamento de cada iteração. Na verdade seria preciso que para cada caso fosse adotada uma tolerância específica em razão de testes feitos previamente. É possível também ocorrer que o uso da busca unidirecional seja dispensável.

Este trabalho não contempla todas as possíveis técnicas de busca unidimensional, aponta apenas aquela que foi utilizada e que, de acordo com a literatura disponível [1], [2], [5], [27], [28], produz resultados satisfatórios como será demonstrado no capítulo 5.

3.3. Métodos do tipo Newton-Raphson

3.3.1. Formulação clássica do método de Newton

De forma genérica, o método de Newton na sua formulação clássica objetiva determinar para uma função qualquer seus pontos extremos, sejam eles de máximo ou de mínimo, que se encontrem dentro de um intervalo inicialmente definido e onde a função seja contínua. Na análise estrutural, a função para a qual se deseja encontrar um ponto de mínimo é a da energia potencial total $\Pi(X)$ e tal ponto está sempre associado a um determinado nível de carregamento.

Para o claro entendimento da formulação em questão, considere-se o desenvolvimento da função $\Pi(a)$ em série de Taylor truncada conforme a equação 3.11. Se a expansão obtida é uma boa aproximação para $\Pi(a)$, numa vizinhança de $\{a\}_0$, o ponto de mínimo dessa aproximação pode ser considerado uma boa aproximação para o ponto de mínimo de $\Pi(a)$. Desta forma, escreve-se para a vizinhança do ponto $\{a\}_0$ o seguinte.

$$\Pi(a_0 + \Delta a) = \Pi(a_0) + \Pi'(a_0)\Delta a + \Pi''(a_0)\frac{\Delta a^2}{2} \quad (\text{Eq. 3.22})$$

sendo que $\Delta a = a - a_0$. A derivada da aproximação de $\Pi(a)$ com relação a $\{a\}$ fica:

$$\frac{d\Pi(a)}{da} = 0 + \Pi'(a_0) + \Pi''(a_0)(a-a_0) \quad (\text{Eq. 3.23})$$

Para determinar o mínimo da aproximação, basta fazer:

$$\Pi'(a_0) + \Pi''(a_0)(a-a_0) = 0 \quad (\text{Eq. 3.24})$$

Na expressão acima, sabe-se que a primeira derivada corresponde ao gradiente da função $\Pi(a_0)$ e a segunda derivada é a matriz Hessiana de $\Pi(a_0)$, desta forma reescreve-se a expressão 3.23 como segue:

$$r(a_0) + S(a_0)(a-a_0) = 0 \quad (\text{Eq. 3.25})$$

Fazendo-se, então, as operações matriciais convenientes, obtém-se:

$$a = a_0 - S(a_0)^{-1}r(a_0) \quad (\text{Eq. 3.26})$$

O vetor $\{a\}$ assim obtido será, a aproximação para o ponto de mínimo da função energia potencial total $\Pi(a)$.

O método clássico de Newton apresenta inconvenientes, na medida que a primeira aproximação do vetor solução para os deslocamentos, dado pela equação 3.01, fica muito distante da posição final de equilíbrio global. Isto leva o método a uma convergência lenta e nem sempre precisa, visto que se pode ir em direção a um ponto de equilíbrio instável correspondente a um ponto de sela da função $\Pi(a)$.

Outro inconveniente pode ser evidenciado do confronto entre a equação 3.26 com as 3.18 e 3.20, tomando-se $\alpha=1$. Quando a matriz $[S(a_0)]$ não fôr definida positiva o vetor $\{d\}$, calculado conforme 3.18, não resulta, como seria desejável, uma direção de descida, de modo que não se tem com $a_1 = a_0 + \alpha d$ a desejada aproximação na direção do mínimo de $\Pi(a)$.

É justamente no sentido de evitar este último inconveniente que surgem diferentes propostas que visam garantir a obtenção da solução desejada, adotando-se matrizes alternativas a $S(a_0)^{-1}$.

3.3.2. Newton-Raphson incremental iterativo

Na análise estrutural, procede-se à resolução direta do sistema de equações em lugar da minimização da expressão da energia potencial. Em particular, para a solução de sistemas não-lineares adota-se uma estratégia incremental/iterativa a qual segue, como se mostra adiante, um procedimento ditado pela formulação clássica do método de Newton.

Segundo tal estratégia o carregamento total é aplicado em vários incrementos, sendo necessário que se anule dentro de um passo de carga através de um processo iterativo o resíduo fornecido pela equação 3.02. A rapidez com que se anula o valor do resíduo está também ligada ao tamanho do passo de carga fornecido, assim, quanto menor for o incremento de carga mais rapidamente se encontra o ponto de equilíbrio.

Sendo $r(a)$ um resíduo genérico, de maneira análoga ao que foi feito para a função $\Pi(a)$, escreve-se a aproximação para a vizinhança de um ponto $\{a\}_0$, na forma de uma série de Taylor truncada no segundo termo

$$r(a) = r(a_0) + r'(a_0)\Delta a \quad (\text{Eq. 3.27})$$

Neste caso, tem-se operações sobre vetores de modo que uma componente do resíduo genérico $r_i(a)$, é dada por:

$$r_i(a) = r_i(a_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i(a)}{\partial a_j} \cdot (a_j - a_{0j}) \quad (\text{Eq. 3.28})$$

Fica claro que os termos correspondentes à derivada parcial interna ao somatório são os termos da linha "i" e coluna "j" de uma matriz. Pode-se reescrever 3.25 da

seguinte forma:

$$r(a) = r(a_0) + J(a_0)(a-a_0) \quad (\text{Eq. 3.29})$$

onde $[J(a_0)]$ é a matriz Jacobiana que na análise estrutural coincide com a matriz de rigidez tangente correspondente ao estado de deslocamentos $\{a\}_0$ (ver fig. 3.07).

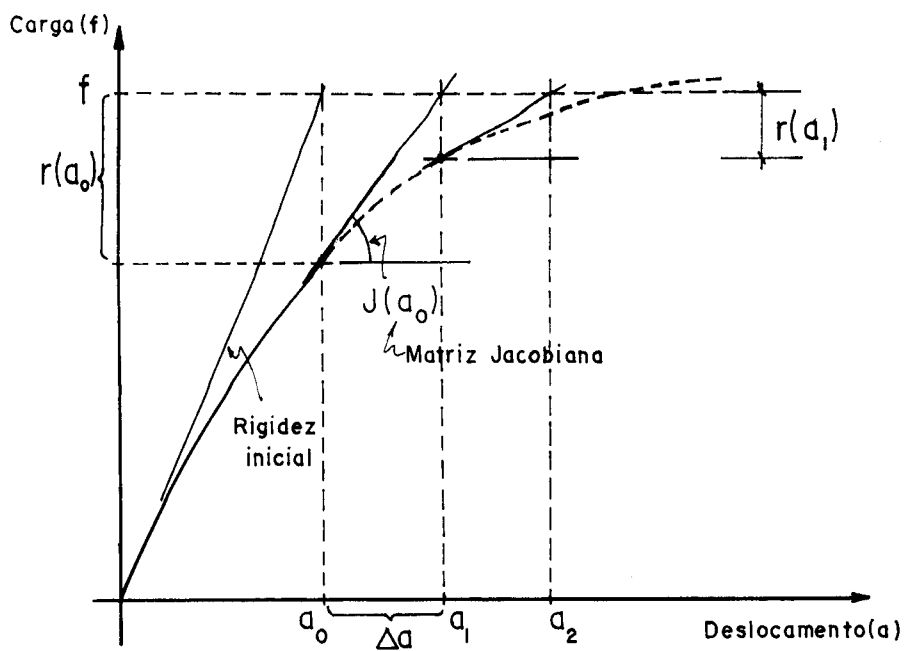


Fig. 3.07 - Etapas do processo iterativo

Como, se deseja que $r(A)=0$, ou seja, que o resíduo se anule, tem-se:

$$a = a_0 + J(a_0)^{-1}r(a_0) \quad (\text{Eq. 3.30})$$

que é a nova aproximação para os deslocamentos.

Em função da não-linearidade do problema, a nova solução (a_1 na figura 3.07) gera, por sua vez, um novo resíduo e o processo se repete até que os resíduos de forças sejam suficientemente pequenos. Adotou-se como critério de parada para o processo iterativo a seguinte expressão:

$$\frac{\| r(a_i) \|}{\| f \|} \leq \tau \quad (\text{Eq. 3.31})$$

onde $\| r(a_i) \|$ e $\| f \|$ correspondem as normas Euclidianas do vetor de resíduos e do vetor de forças nodais aplicadas respectivamente. O valor de " τ " é a precisão desejada, e usualmente fica entre 0.01 e 0.0001 [2], [8].

Uma vez encontrada a posição final de equilíbrio para um determinado nível de carregamento, estes valores serão conservados para que possam ser somados àqueles a serem obtidos nos incrementos seguintes.

3.4. Método de Newton-Raphson modificado

Algumas modificações podem ser introduzidas no método de Newton-Raphson para melhorar alguns aspectos relativos a tempo de processamento e precisão, dentre elas destaca-se, em primeiro lugar, o método da rigidez inicial.

Ao contrário do algoritmo clássico de Newton-Raphson, neste caso a matriz de rigidez é determinada no início do incremento de carga permanecendo inalterada até o final do processo iterativo correspondente a esse incremento. O objetivo desta modificação é reduzir o número de vezes em que é necessário calcular a matriz global; por ser este um processo custoso, principalmente em se tratando de elementos finitos.

Embora o tempo envolvido no cálculo das matrizes seja reduzido, perde-se nos casos em que há não-linearidade acentuada, pois ocorre um fatal aumento no número de iterações necessárias para se obter o equilíbrio. A forma de viabilizar esta modificação também passa pela redução dos acréscimos sucessivos de carga.

Uma variante desta modificação seria o cálculo da matriz apenas uma vez no início do processamento e não no início de cada incremento como proposto anteriormente. Esta modificação é útil apenas quando a não-linearidade é pequena.

Outra modificação que pode ser introduzida com sucesso, consiste na computação de uma nova matriz de rigidez apenas uma vez ao final da segunda iteração além da usualmente

feita no início.

Esta modificação traz vantagens significativas, uma vez que a maior perturbação do equilíbrio global da estrutura, se manifesta mais intensamente nas primeiras iterações de cada incremento de carga. Contudo, ainda são necessários cuidados na determinação do tamanho dos passos de carga utilizados para que se possa obter resposta precisa.

Tanto no método clássico como nas modificações aqui apresentadas, pode ser utilizado o procedimento de busca unidimensional; em alguns casos estudados tal combinação produz resultados melhores, como os que se discutem no capítulo 5.

3.5. Métodos do tipo quasi-Newton

3.5.1. Conceituação e Motivação

A construção da matriz de rigidez global de qualquer estrutura já é por si só uma tarefa normalmente de alto custo computacional. A utilização do método dos elementos finitos, leva necessariamente ao cálculo de matrizes muito complexas obtidas através da integração numérica de funções sobre cada elemento da estrutura discretizada. A própria obtenção dos resíduos de carga também é feita por meio de integração das mesmas funções sobre os elementos. É interessante, portanto, evitar ao máximo o cálculo dessas matrizes. Os métodos do tipo quasi-Newton se baseiam em fórmulas deduzidas para a atualização da matriz que envolvam sempre operações simples sobre vetores.

As fórmulas para atualização da matriz de rigidez global da estrutura devem respeitar a equação matricial seguinte:

$$K_i(a_i - a_{i-1}) = r(a_i) - r(a_{i-1}) \quad (\text{Eq. 3.32})$$

e, portanto, trata-se de uma aproximação para a matriz tangente do método incremental.

Além disso, se a matriz na iteração "i-1" for simétrica

e definida positiva, o que é usual na análise estrutural, a fórmula de atualização deve produzir para a iteração "i", uma matriz também simétrica e definida positiva. Aliás a positividade da matriz deve ser condição necessária para que a direção de busca resultante conduza a uma diminuição no valor da função, conforme visto no item 3.2.1.

Para que os algoritmos com base nas exigências acima sejam eficientes, a direção de descida {d} quando calculada na iteração "i", deve ser determinada usando uma matriz $[K]_i$ atualizada cujos valores numéricos de seus componentes são próximos a àqueles de sua predecessora.

3.5.2. O BFGS

A fórmula de atualização proposta por Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shano (BFGS) [1], [2], [11], [27], [28], atende 3.32 e produz uma matriz inversa atualizada de acordo com a expressão abaixo.

$$K_i^{-1} = (I + w_i v_i^t) K_{i-1}^{-1} (I + v_i w_i^t) \quad (\text{Eq. 3.33})$$

onde "I" representa a matriz identidade e os vetores $\{w\}_i$ e $\{v\}_i$ são dados pelas seguintes expressões:

$$v_i = \left[\frac{\delta_i^t \gamma_i}{\delta_i^t K_{i-1} \delta_i} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot K_{i-1} \delta_i - \gamma_i \quad (\text{Eq. 3.34})$$

$$w_i = \frac{1}{\delta_i^t \gamma_i} \cdot \delta_i \quad (\text{Eq. 3.35})$$

sendo $\{\delta\}_i$ e $\{\gamma\}_i$ vetores obtidos a partir das seguintes diferenças:

$$\delta_i = a_i - a_{i-1} \quad (\text{Eq. 3.36})$$

$$\gamma_i = r(a_i) - r(a_{i-1}) \quad (\text{Eq. 3.37})$$

Por construção, a matriz atualizada manterá as mesmas características que a matriz original já que esta será multiplicada por $(I+w_i v_i^t)$ e em seguida pela sua transposta.

Neste trabalho, optou-se pela atualização da matriz direta ao invés de sua inversa através da seguinte fórmula:

$$K_i = K_{i-1} + \frac{\gamma \gamma^t}{\gamma^t \delta} - \frac{(K_{i-1} \delta)(K_{i-1} \delta)^t}{\delta^t K_{i-1} \delta} \quad (\text{Eq. 3.38})$$

onde os vetores $\{\delta\}$ e $\{\gamma\}$ são definidos da mesma forma que em 3.36 e 3.37.

O condicionamento numérico do algoritmo é controlado pela determinação do valor "c" dado pela equação abaixo:

$$c = \left[\frac{\delta_i^t K_{i-1} \delta_i}{\delta_i^t \gamma_i} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Eq. 3.39})$$

Para alguns casos, o valor de "c" pode se tornar muito pequeno, o que significa que o algoritmo gera uma matriz quase singular; neste caso é mais conveniente não executar a atualização fazendo-se $[K]_i = [K]_{i-1}$. Outra opção é fazer um novo cálculo da matriz de rigidez global e continuar o processo iterativo partindo dessa nova matriz.

Neste trabalho a proposta BFGS foi empregada dentro do espírito do método incremental de Newton-Raphson em lugar da matriz Jacobiana. Isto leva ao fato de que ao final do processo iterativo a matriz atualizada resultante será coincidente com a matriz de rigidez tangente da estrutura.

4. CÓDIGO DE CÁLCULO PARA ESTRUTURAS DE BARRAS

4.1. Introdução

Apresenta-se, neste capítulo, a documentação relativa ao código de cálculo para análise de estruturas de barras. Merecem destaque os fluxogramas básicos dos diferentes algoritmos tratados e suas correspondentes representações gráficas, que ilustram o encaminhamento da solução dos problemas não-lineares. Tais representações, na forma de diagramas carga-deslocamento, colocam em evidência os diferentes modos de atualização da matriz de rigidez global da estrutura ao longo do procedimento incremental-iterativo.

Do ponto de vista da organização dos algoritmos, as estratégias de solução apresentadas se aplicam a qualquer tipo de estrutura.

No sentido de realizar um estudo comparativo, foram implementados os seguintes algoritmos: Rigidez Inicial, Newton-Raphson no sentido clássico, isto é, com recálculo da matriz de rigidez a cada iteração, Newton-Raphson modificado com recálculo da matriz no início da primeira iteração, Newton-Raphson modificado com recálculo da matriz no início da segunda iteração, Newton-Raphson modificado com pesquisa unidirecional e recálculo da matriz no início da segunda iteração, BFGS na sua forma clássica onde se atualiza a matriz de rigidez ao final de cada iteração e finalmente o BFGS na sua forma clássica com pesquisa unidirecional. O programa permite algumas variações a mais, porém, os processamentos preliminares executados,

demonstraram que os algoritmos acima são suficientes para atingir os objetivos deste trabalho.

4.2. Descrição do Programa

O programa implementado tem por objetivo, a determinação dos deslocamentos nodais e dos esforços axiais em estruturas formadas por barras. Aplica-se na solução de estruturas unidimensionais, planas e espaciais levando em consideração as não-linearidades física e geométrica.

Na sequência, apresentam-se as sub-rotinas que formam o programa completo, destacando-se as suas características mais importantes. O encadeamento adequado destas sub-rotinas é dado pelos fluxogramas.

Subrotina "ARQUIV"

Esta subrotina abre todos os arquivos utilizados pelo programa, zera alguns dos vetores utilizados e cria os cabeçalhos para os arquivos que armazenam os dados de propriedades geométricas e de carregamentos na estrutura.

Subrotina "DADOSG"

Realiza a leitura de todos os dados de geometria e vinculação da estrutura, permitindo a geração de nós e barras. Aqui também é definido o tipo de análise que será empregada por meio de códigos apropriados (não-linearidade física e/ou geométrica).

Subrotina "CARGAS"

Nesta sub-rotina, é feita a leitura dos carregamentos, os quais, para algumas situações, também podem ser gerados. Além disso, monta-se o vetor de cargas nodais e escreve-se o relatório que contém os dados do carregamento.

Subrotina "INCREM"

Faz a leitura do fator de carga e da tolerância admitida em cada incremento. Calcula e armazena o vetor que conterà o incremento de carga.

Subrotina "SOLVER"

Resolve o sistema de equações formado a cada iteração pelo método de eliminação de Gauss.

Subrotina "RELATS"

Escreve em um arquivo de saída os resultados obtidos. Aqui pode-se optar por resultados parciais ao final da primeira iteração, ou apenas pelos resultados ao final do processo iterativo a cada incremento de carga.

Subrotina "ASSEMB"

Monta a matriz de rigidez global da estrutura.

Subrotina "ALGORT"

E a sub-rotina que define o tipo de algoritmo que será utilizado entre os disponíveis mencionados na introdução deste capítulo.

Subrotina "MATBAR"

Monta a matriz de rigidez de cada barra, adiciona a matriz geométrica se a opção estiver ativa e rotaciona a matriz das barras para o sistema global.

Subrotina "RESIDS"

Calcula os resíduos de carga a cada iteração.

Subrotina "DEFORM"

Calcula a deformação das barras a cada iteração.

Subrotina "FORCES"

Calcula os esforços nas barras da estrutura.

Subrotina "CONSTA"

Para uma deformação calculada, esta sub-rotina determina a correspondente tensão real, respeitando as leis constitutivas de cada material.

Subrotina "SEARCH"

Acumula os deslocamentos parciais obtidos a cada iteração.

Subrotina "LINESH"

Realiza a pesquisa unidirecional, determinando o fator que, multiplicado pelos deslocamentos parciais a cada iteração, leva ao menor resíduo possível.

Subrotina "BFGS01"

Atualiza a matriz de rigidez de acordo com procedimento quasi-Newton.

Subrotina "TESTAR"

Compara a norma do vetor de resíduos com a tolerância máxima admitida para cada problema.

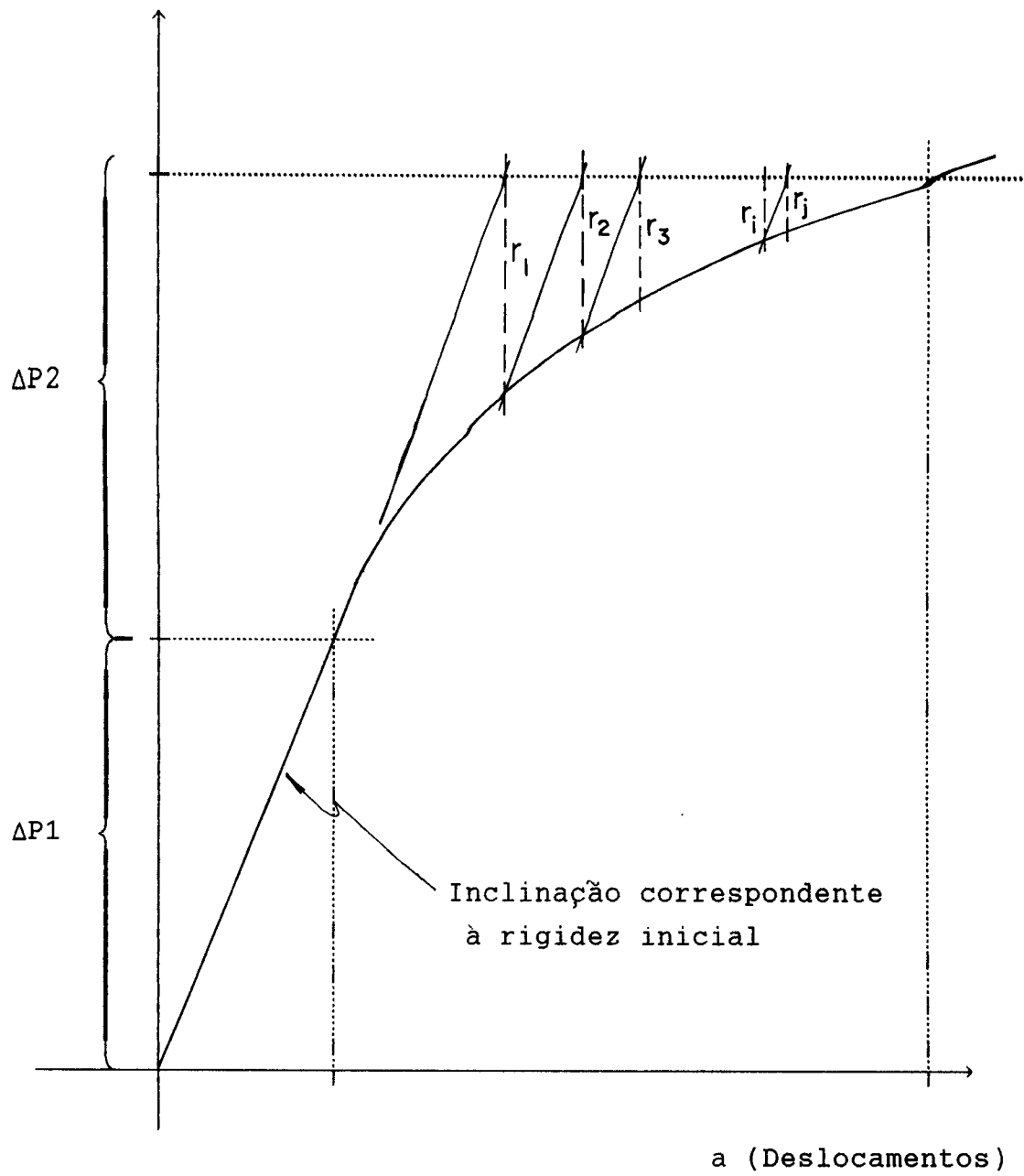
4.3. Fluxogramas e Diagramas

Os fluxogramas apresentados a seguir mostram a organização das sub-rotinas, de modo a contemplar as diversas opções de algoritmos desejados. Acompanha cada fluxograma, um diagrama que ilustra a marcha dos cálculos executados no correspondente algoritmo.

Com os diagramas, pretende-se mostrar de forma simples, em termos de alteração de rigidez e convergência, o que ocorre a cada iteração em um determinado incremento de carga; para isso, usa-se uma curva carga-deslocamento correspondente a um problema a uma variável. As alterações sofridas pela matriz de rigidez inicial em cada um dos algoritmos, são ilustradas graficamente mediante a variação das inclinações das retas representativas da rigidez ao longo do processo iterativo.

Diagrama: CARGA x DESLOCAMENTO

P (Cargas)



r_i = resíduo na iteração "i"
 ΔP_i = incremento de carga "i"

Fig. 4.02

4.3.2. Método de Newton-Raphson Clássico

Aqui, a matriz de rigidez é recalculada ao início de cada iteração.

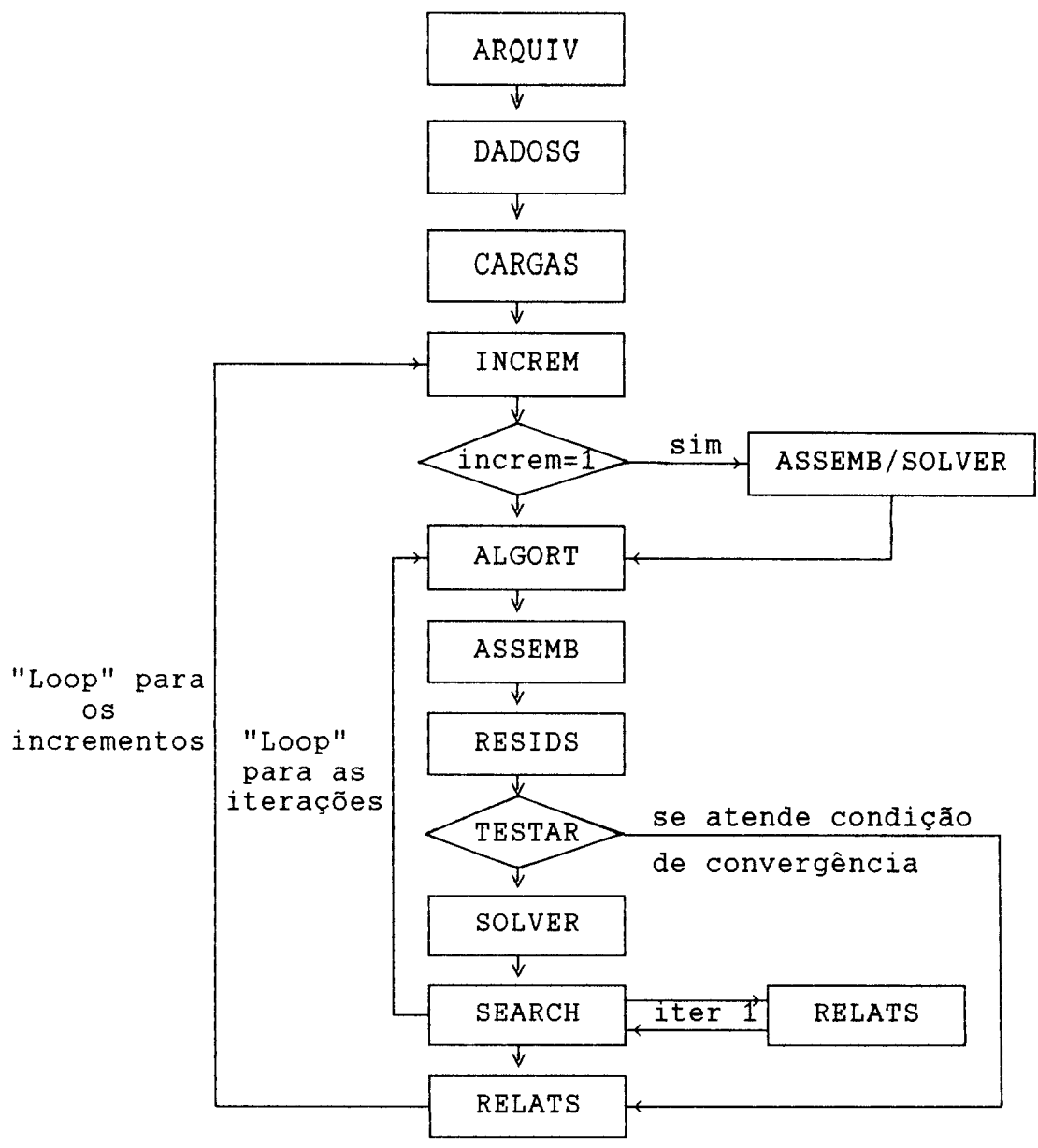
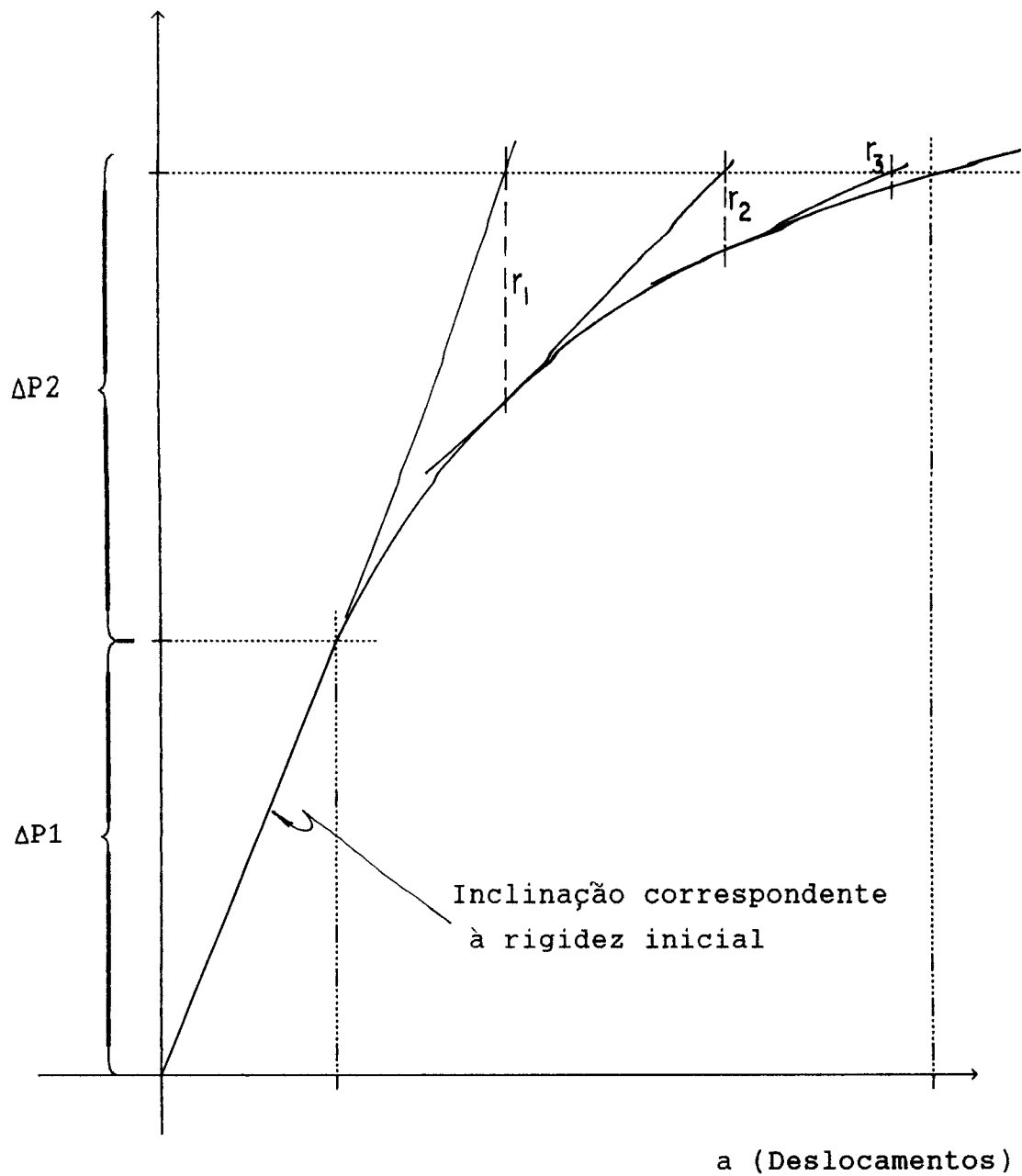


Fig. 4.03

Diagrama: CARGA x DESLOCAMENTO

P (Cargas)



r_i = resíduo na iteração "i"
 ΔP_i = incremento de carga "i"

Fig. 4.04

4.3.3. Método de Newton-Raphson Modificado do "TIPO 1"

Neste algoritmo, a matriz de rigidez é atualizada no início da primeira iteração de cada incremento de carga, mantendo-se constante durante todo o processo iterativo.

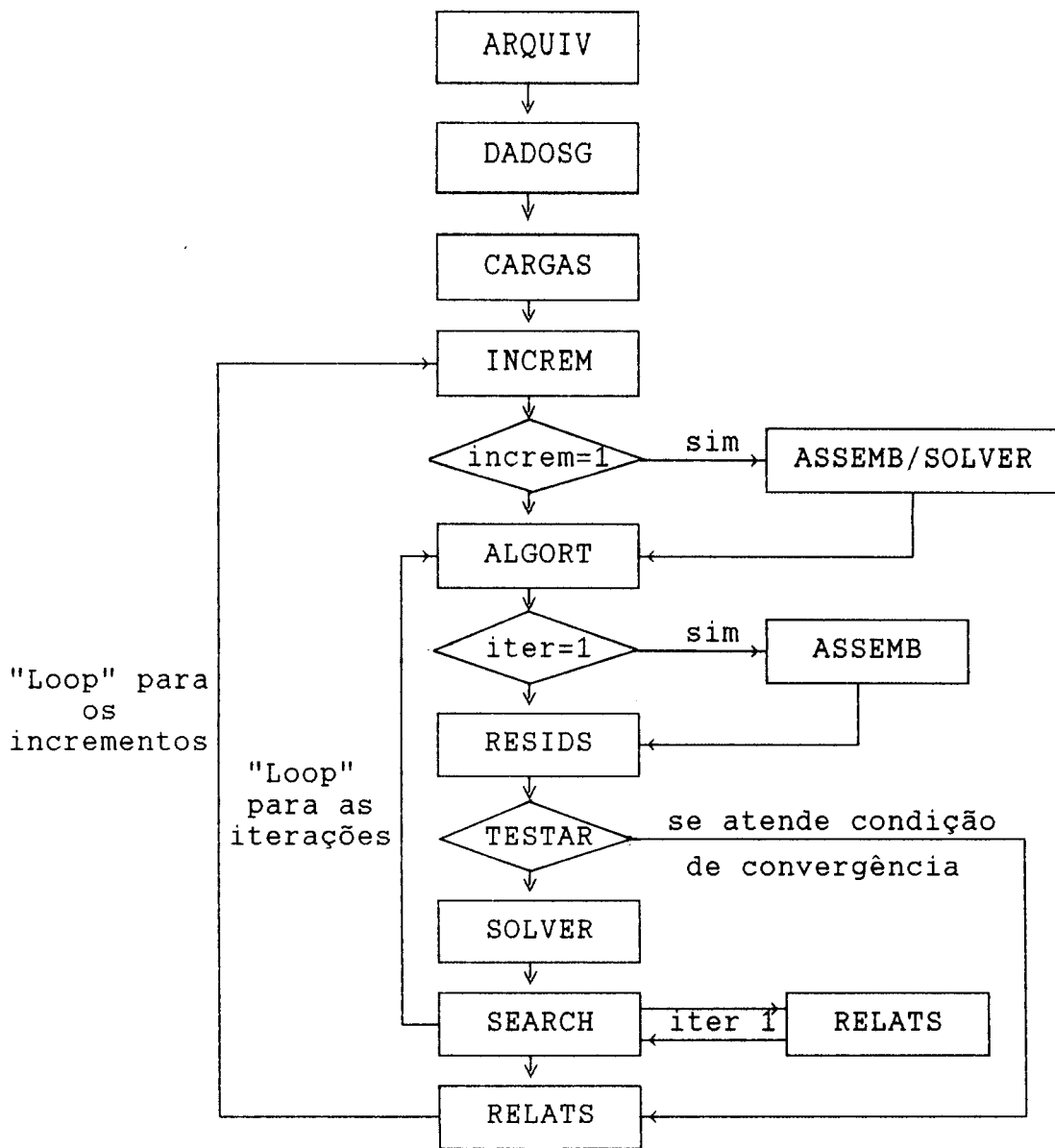
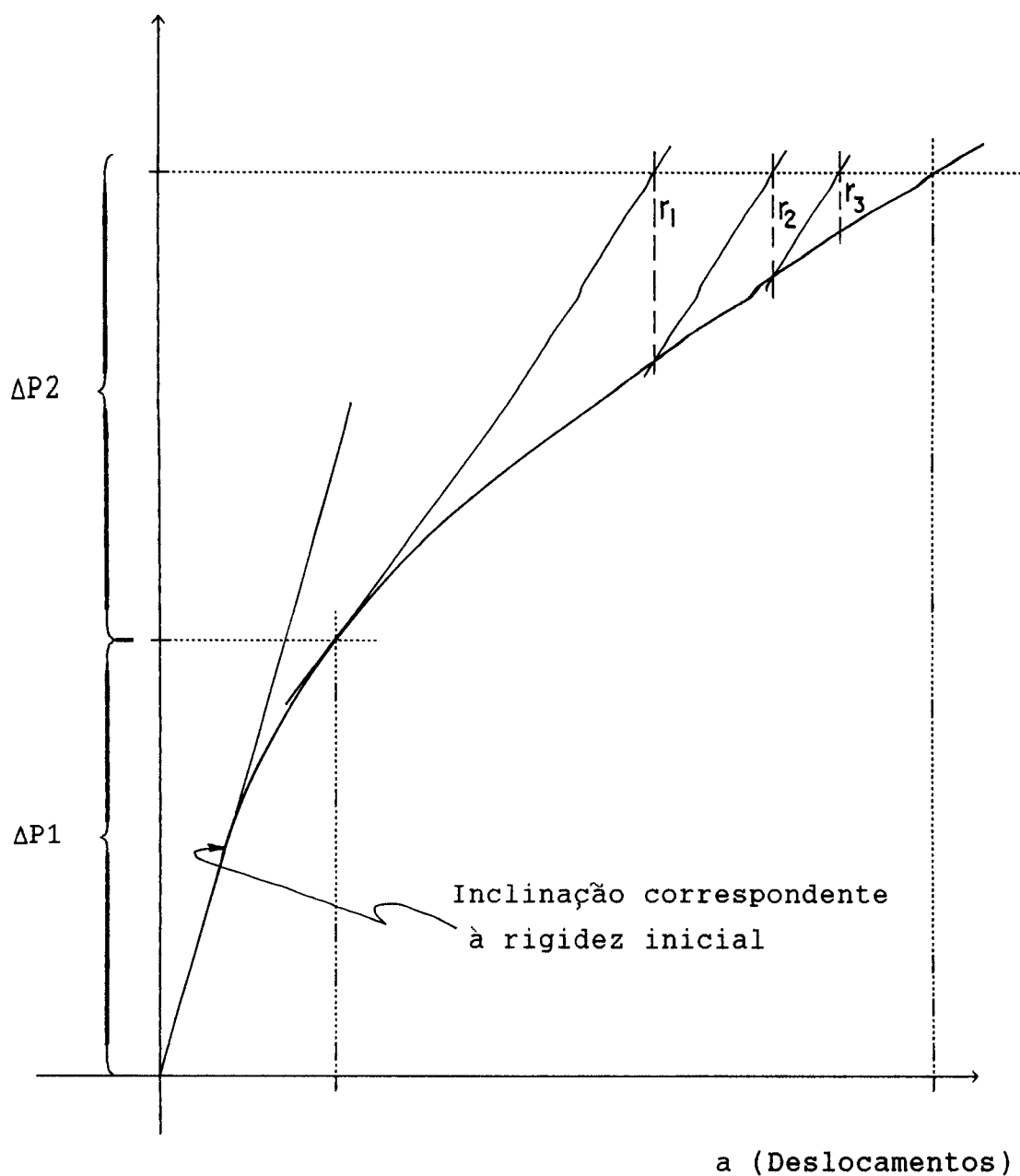


Fig. 4.05

Diagrama: CARGA x DESLOCAMENTO

P (Cargas)



r_i = resíduo na iteração "i"
 ΔP_i = incremento de carga "i"

Fig. 4.06

4.3.4. Método de Newton-Raphson Modificado do "TIPO 2"

Neste algoritmo, o recálculo da matriz de rigidez se dá ao início da segunda iteração em cada incremento de carga, sendo a partir daí, mantida constante no incremento.

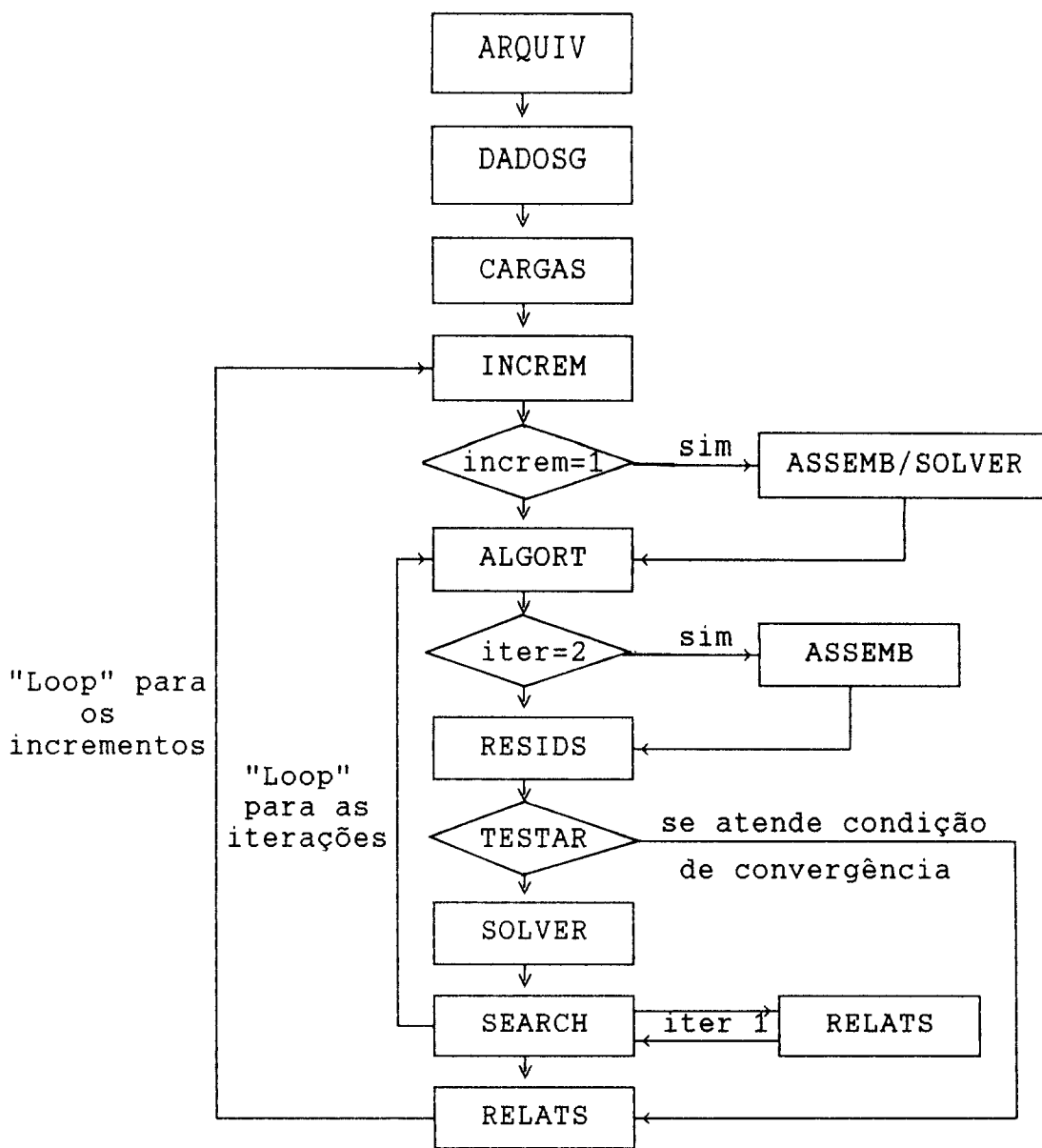
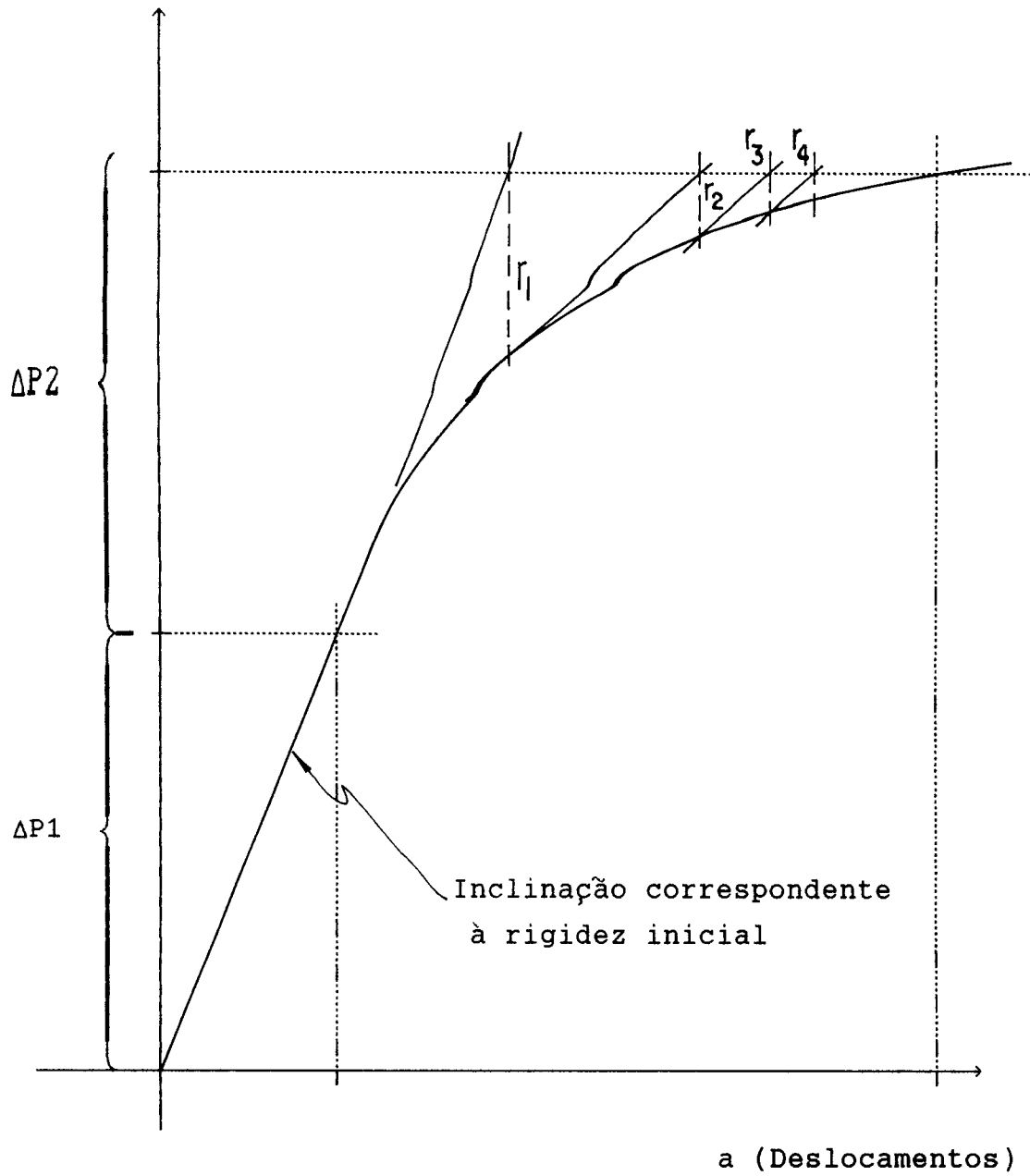


Fig. 4.07

Diagrama: CARGA x DESLOCAMENTO

P (Cargas)



r_i = resíduo na iteração "i"
 ΔP_i = incremento de carga "i"

Fig. 4.08

4.3.5. Método de Newton-Raphson Modificado do "TIPO 2" com Pesquisa Unidirecional

Este algoritmo é semelhante ao anterior no tratamento da matriz, porém inclui a pesquisa unidirecional a cada iteração.

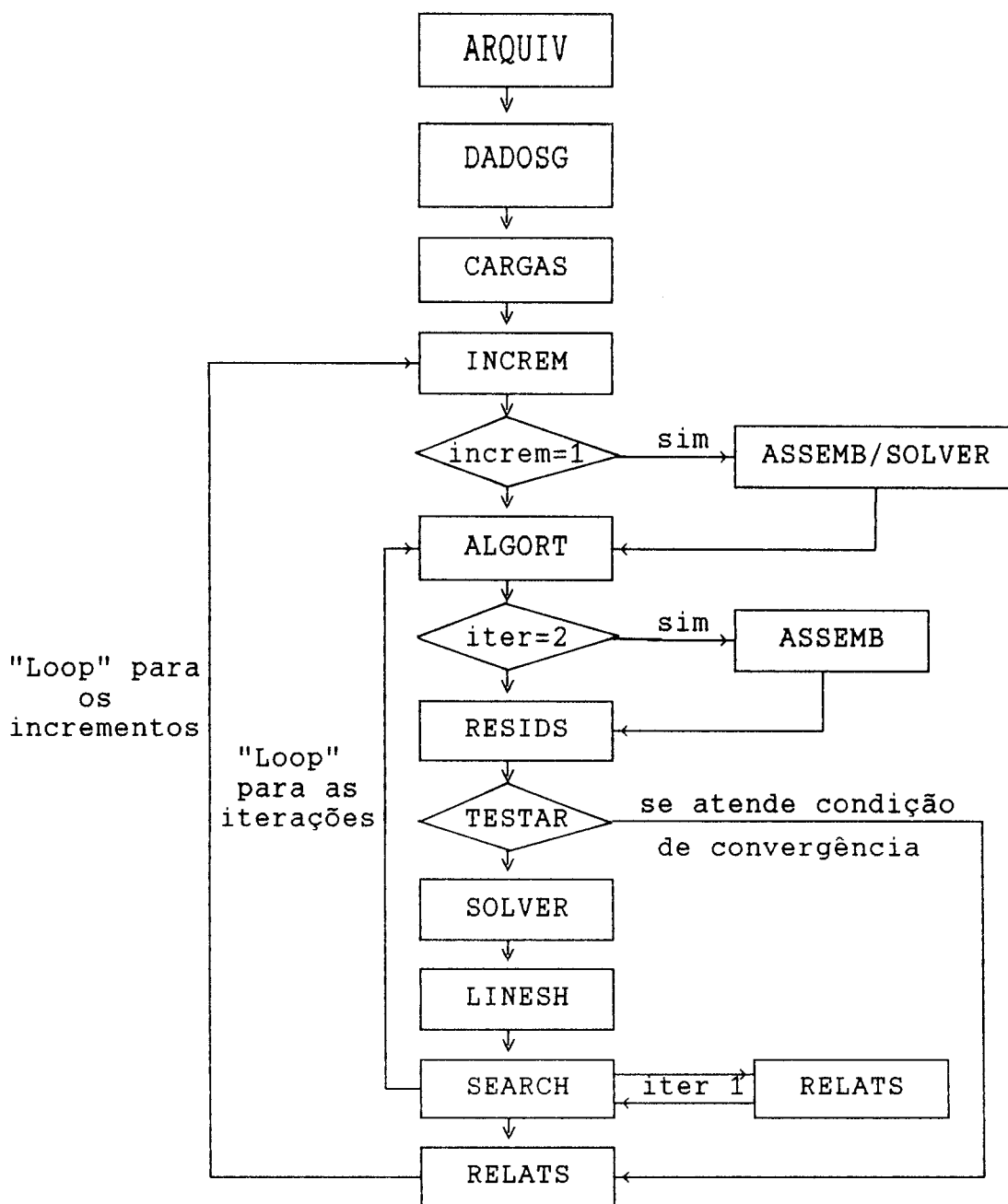
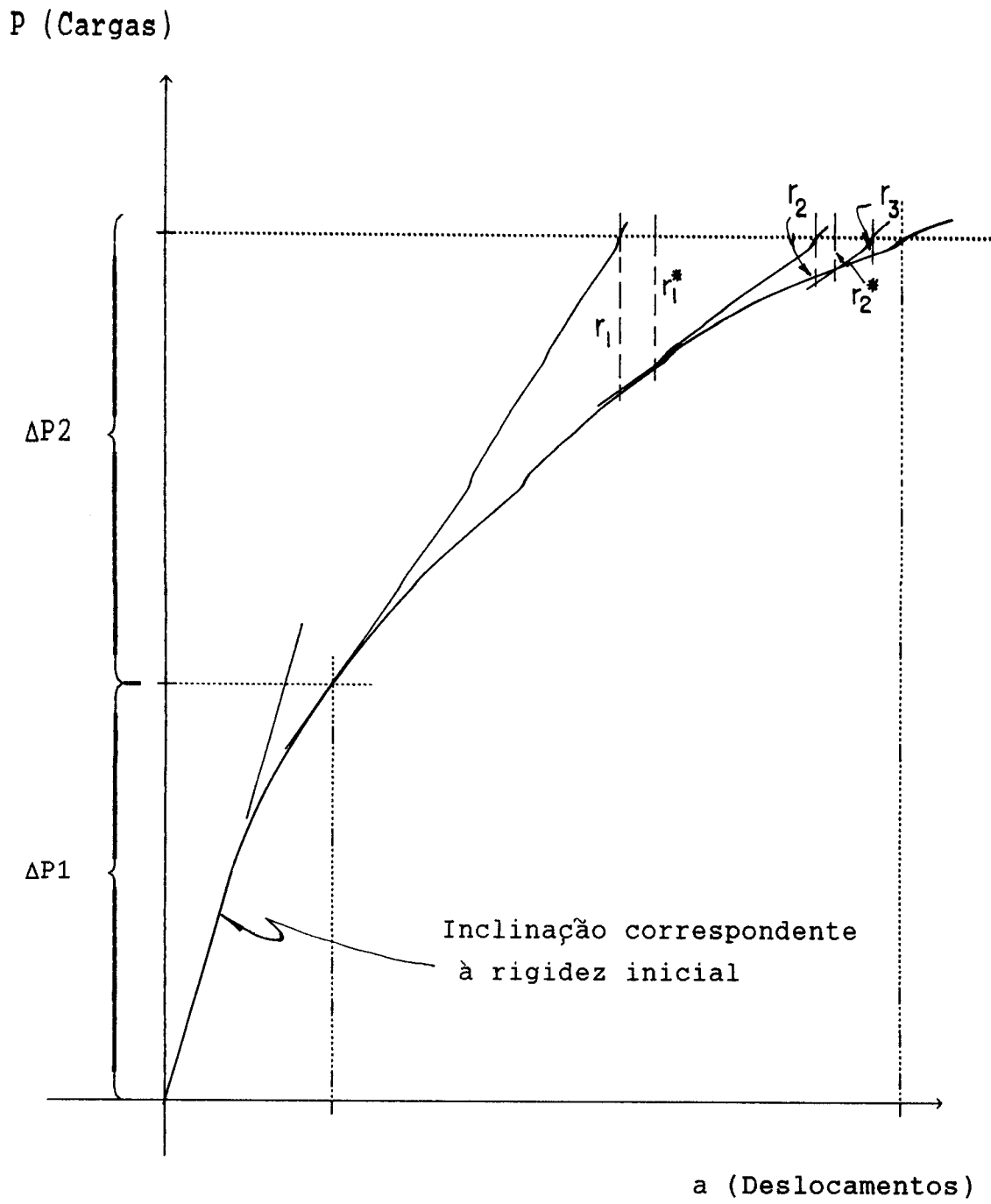


Fig. 4.09

Diagrama: CARGA x DESLOCAMENTO



r_i = resíduo na iteração "i"
 ΔP_i = incremento de carga "i"

Fig. 4.10

4.3.6. Método quasi-Newton: BFGS

Neste algoritmo, a matriz de rigidez é calculada no início de cada incremento e atualizada durante o processo iterativo com base nos resultados da iteração atual e a anterior seguindo a fórmula proposta pelo BFGS.

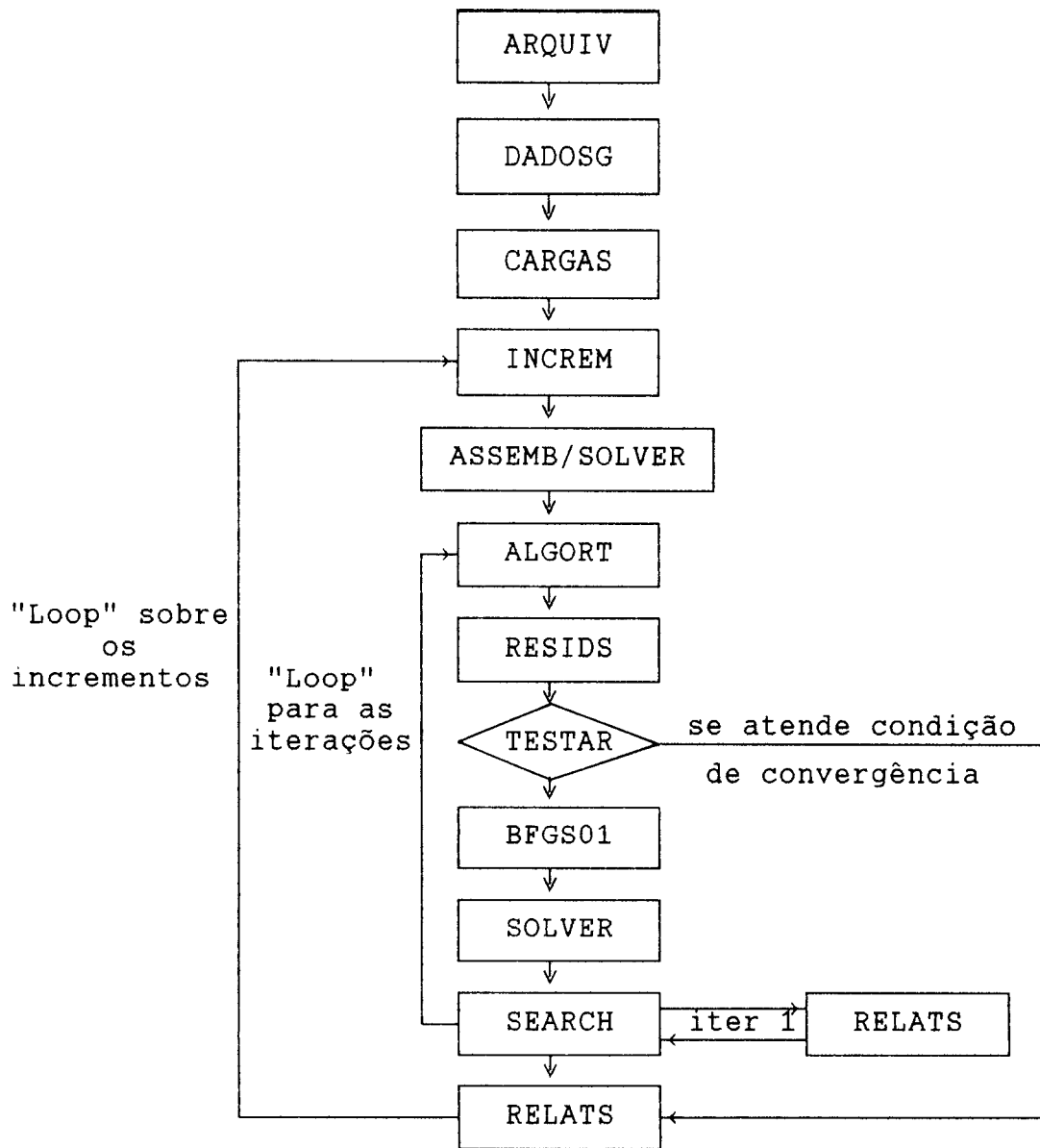
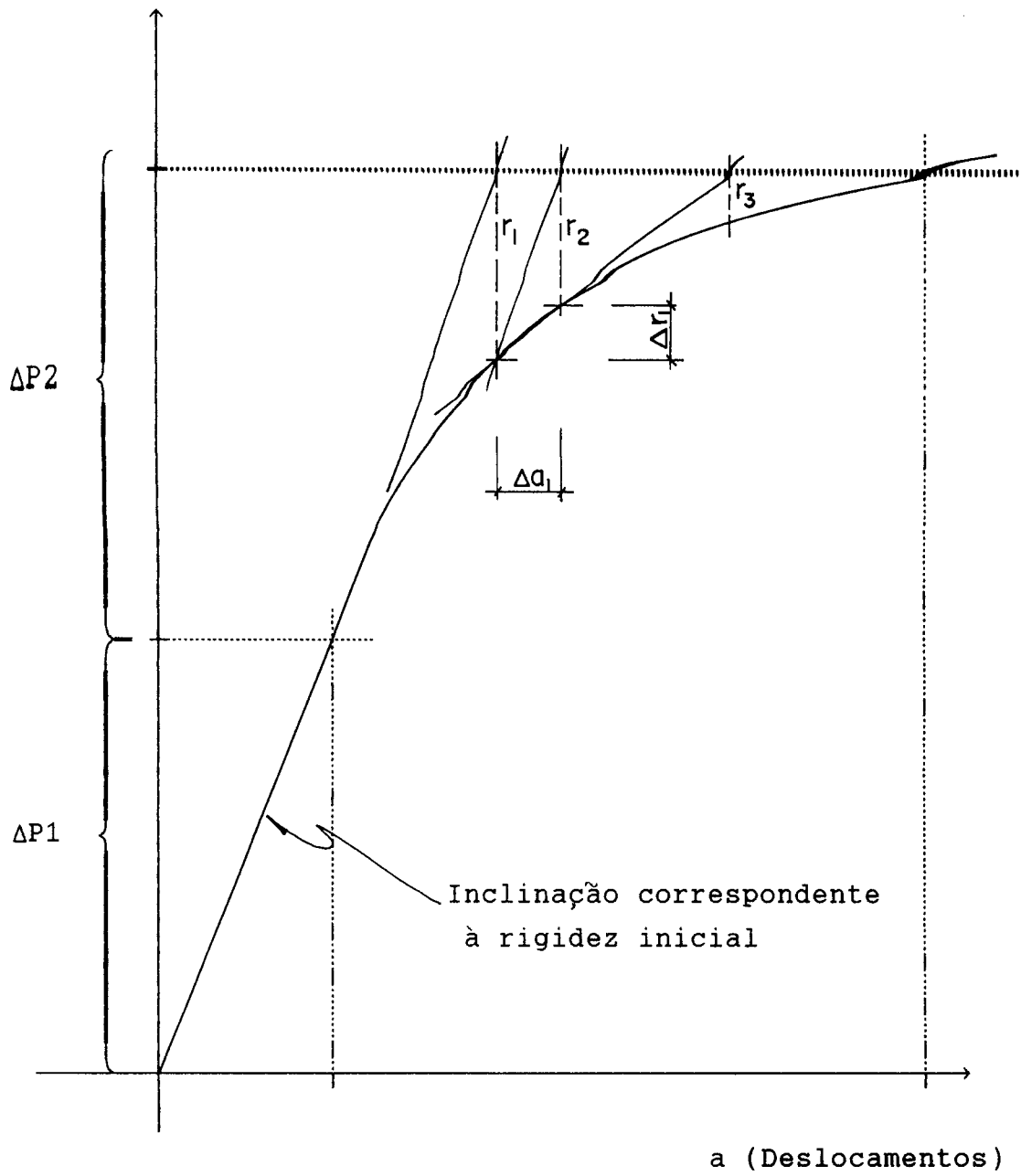


Fig. 4.11

Diagrama: CARGA x DESLOCAMENTO

P (Cargas)



r_i = resíduo na iteração "i"
 ΔP_i = incremento de carga "i"

Fig. 4.12

4.3.7. Método Quasi-Newton: BFGS com Pesquisa Unidirecional

O tratamento da matriz aqui é o mesmo de 4.3.6., acrescenta-se apenas a pesquisa unidirecional representada no fluxograma abaixo pela subrotina LINESH.

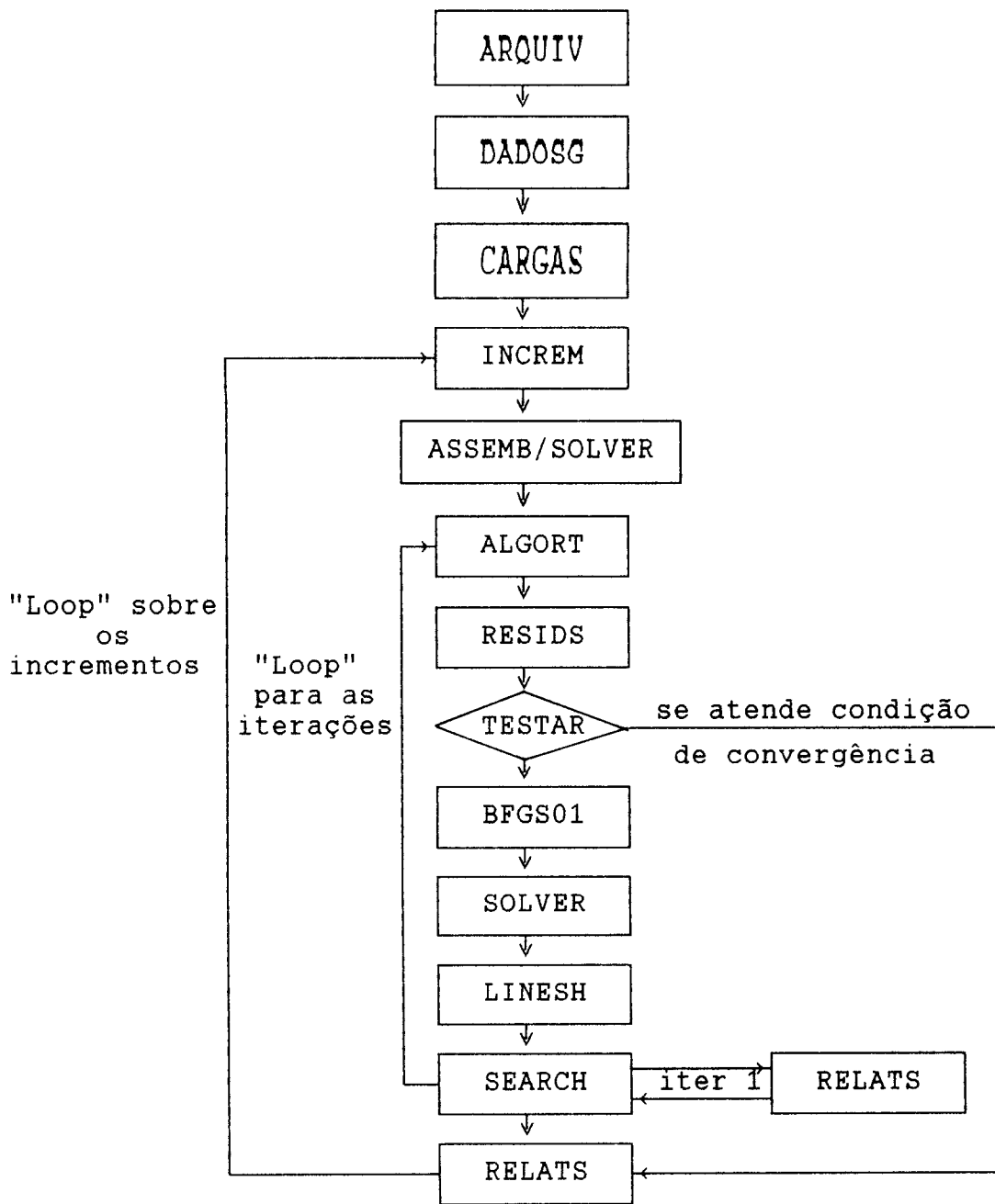
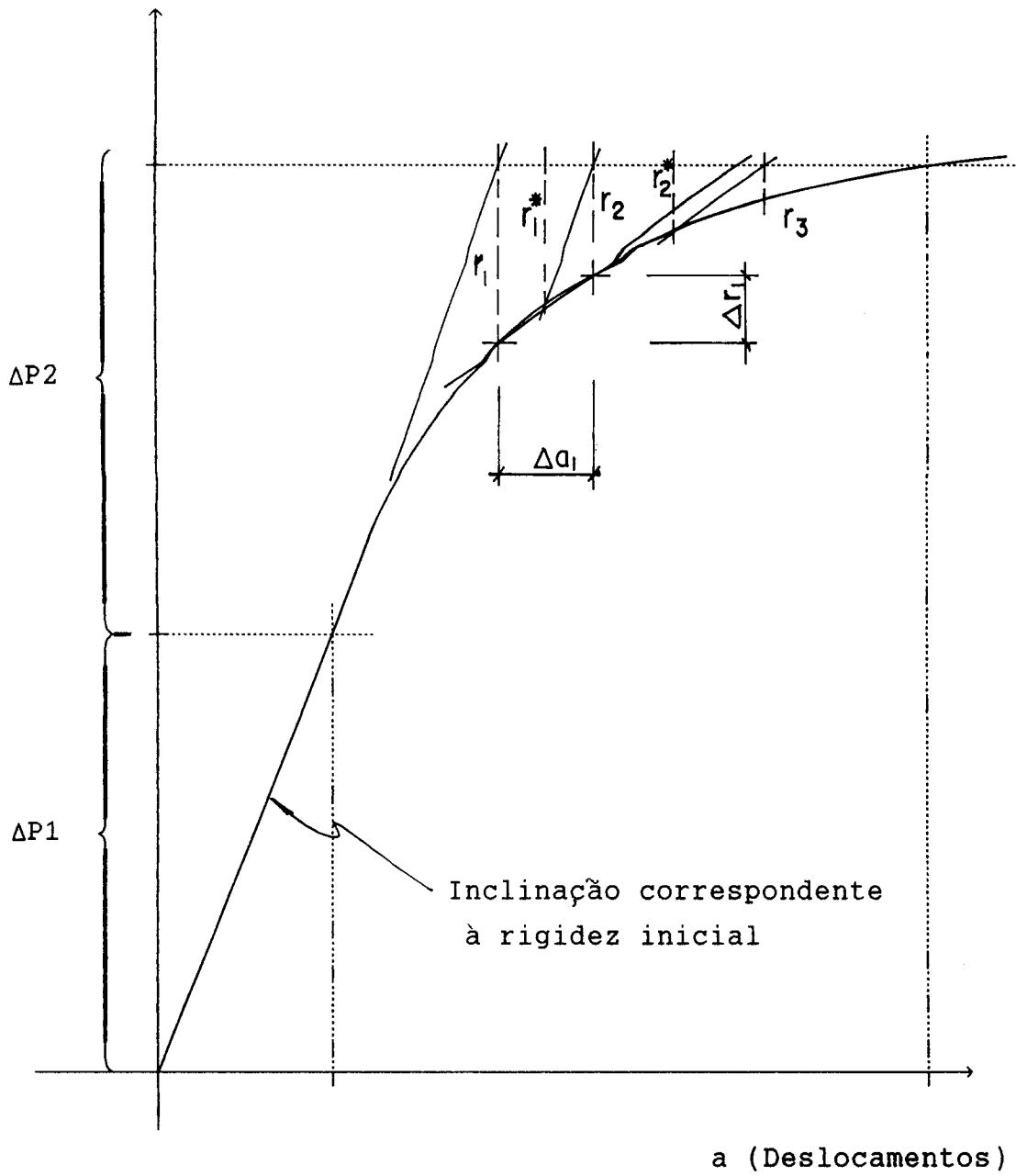


Fig. 4.13

Diagrama: CARGA x DESLOCAMENTO

P (Cargas)



r_i = resíduo na iteração "i"
 ΔP_i = incremento de carga "i"

Fig. 4.14

5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1. Introdução

Para demonstrar sua aplicação e avaliar a resposta dos algoritmos estudados, definiu-se um conjunto de exemplos, sendo que, em alguns casos, os resultados obtidos foram comparados aos de exemplos idênticos encontrados na literatura. Um outro objetivo dos ensaios numéricos foi o de reunir, em um mesmo trabalho, vários casos clássicos envolvendo os dois tipos de não-linearidades tratadas, resolvendo-os repetidas vezes com o uso dos diferentes algoritmos.

Para facilitar a compreensão dos resultados tabelados, atribuiu-se a cada algoritmo uma sigla, como se mostra em seguida.

NRIN - Método da Rigidez Inicial
NRM1 - Método de Newton-Raphson modificado 1
NRM2 - Método de Newton-Raphson modificado 2
NRCS - Método de Newton-Raphson clássico
NR2L - Método de Newton-Raphson modificado 2 com pesquisa unidirecional
BFGS - Método Quasi-Newton: BFGS
BFGL - Método Quasi-Newton: BFGS com pesquisa unidirecional

As tabelas que aparecem logo em seguida aos diagramas de carga-deslocamento apresentam, em correspondência às colunas de cada algoritmo, o total de iterações necessárias

para obter, no incremento de carga arrolado, a precisão desejada. Para evidenciar as vantagens do uso de cada algoritmo, a carga total foi aplicada de diferentes modos ou casos, cada qual com uma quantidade diferente de incrementos. Tais tabelas permitem, fundamentalmente, avaliar a eficiência de cada um dos algoritmos utilizados, sendo que as últimas linhas mostram os tempos gastos para a resolução do problema em cada caso e a última coluna, os deslocamentos obtidos para os pontos evidenciados.

Foi utilizado no processamento dos exemplos um computador do tipo PC-AT-286 operando a 16Mhz.

Para alguns dos exemplos foi acrescentada uma tabela que mostra os esforços em algumas das barras. Isto foi feito a título de proporcionar um melhor entendimento sobre o comportamento global da estrutura em questão, identificando seus pontos críticos, passíveis de sofrerem, numa análise posterior, modificações a nível de geometria e das seções inicialmente adotadas.

Outro ponto que deve ser observado diz respeito aos valores dos deslocamentos. Em alguns casos a consideração das não-linearidades física e geométrica, como é de se esperar, levam a resultados bem superiores àqueles obtidos pela análise elástica-linear, o que certamente influi significativamente no dimensionamento.

5.2. Exemplos em uma dimensão

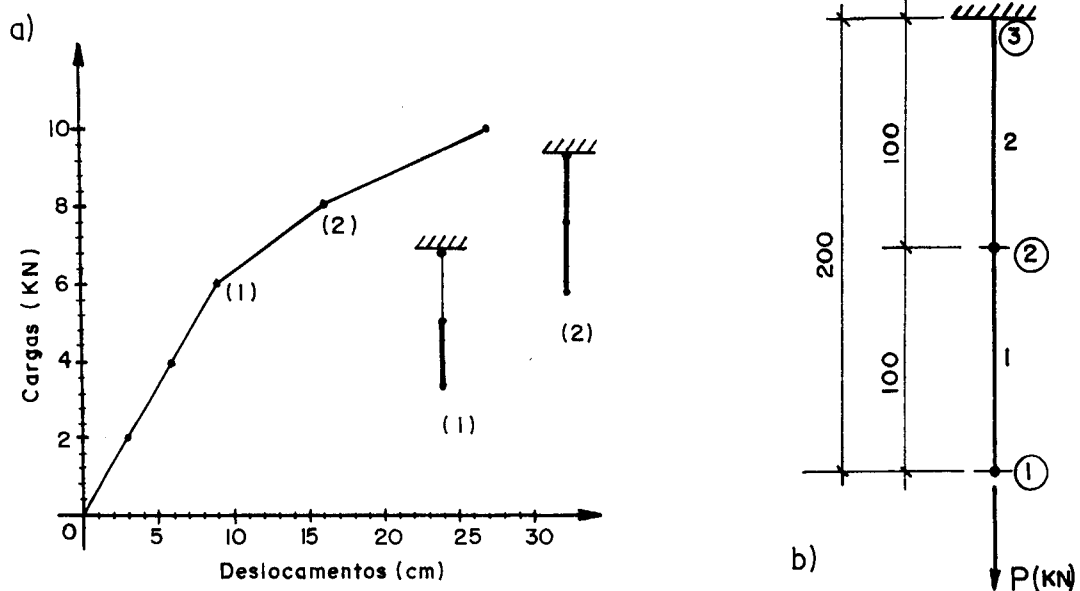
5.2.1. Exemplo de duas barras com não-linearidade física

A estrutura considerada consiste em duas barras de um mesmo material, mesmo comprimento e seções transversais diferentes. As barras estão dispostas como mostra a figura 5.01.

Neste exemplo, a carga de 10 KN atuante no ponto "1" assinalado na figura 5.01, é aplicada de três formas diferentes. No primeiro caso, toda a carga é aplicada em apenas um passo, no segundo em dois passos iguais e no

terceiro, atinge-se a carga total com cinco incrementos iguais conforme mostrado na tabela 5.01.

Os resultados obtidos, mostram claramente que com o algoritmo NRIN, obtém-se a precisão desejada com um número exagerado de iterações em qualquer situação de carregamento. Para o algoritmo NRM1 o resultado é melhor, embora tenham ocorrido, em todos os casos, um total de 33 a 37 iterações devido à plastificação da primeira barra; isto porque no início desse incremento a matriz de rigidez global da estrutura é recalculada considerando uma situação ainda sem plastificação. Neste exemplo, dada a sua simplicidade, não seria necessário aplicar o carregamento total em muitos incrementos. De fato, os resultados mostram que nos três primeiros passos de carga (caso III) não se deflagra o processo iterativo. Quanto ao tempo de processamento, não há diferenças significativas.



Dados do material: $E_1 = E_2 = 100.0 \text{ KN/cm}^2$; $H_1 = H_2 = 20.0 \text{ KN/cm}^2$
 $S_1 = 1.0 \text{ cm}^2$; $S_2 = 2.0 \text{ cm}^2$

- a) Deslocamento vertical do ponto "1" e evolução da plastificação com o carregamento
- b) Estrutura de duas barras unidimensional

Fig. 5.01 - Representação gráfica dos resultados

Confrontando-se o total de iterações, é clara a vantagem dos algoritmos NRCS, NRM2, NR2L, BFGS e BFGL. A busca unidimensional, levou à necessidade de apenas uma iteração para obter-se a solução exata em todos os casos.

CASO	CARGAS		ALGORITMO / NUMERO DE ITERAÇÕES							DESLOC. (cm)
	INCR	FATOR	NRIN	NRCS	NRM1	NRM2	NR2L	BFGS	BFGL	
I	1	1.00	37	3	37	3	1	2	1	-27.0
II	1	0.50	0	0	0	0	0	0	0	-7.5
	2	0.50	37	2	37	2	1	2	1	-27.0
III	1	0.20	0	0	0	0	0	0	0	-3.0
	2	0.40	0	0	0	0	0	0	0	-6.0
	3	0.60	0	0	0	0	0	0	0	-9.0
	4	0.80	33	2	33	2	1	2	1	-16.0
	5	1.00	35	0	1	0	0	0	0	-27.0
TEMPO (s)	I		7	5	7	5	6	5	5	
	II		7	6	7	5	6	6	5	
	III		10	6	8	6	6	6	5	

Tab. 5.01 - Resultados para o exemplo

5.2.2. Exemplo com dez barras e não-linearidade física

Esta estrutura, Owen [2], é formada por dez barras divididas em dois grupos de cinco, sendo que as barras do lado esquerdo possuem propriedades diferentes das barras do lado direito. Os dados dos materiais e o arranjo das barras estão mostrados na figura 5.02.

Aplicou-se no ponto de número 6 da estrutura, uma carga total, equivalente a 10 unidades, vertical para baixo. Da mesma forma que no exemplo anterior, o carregamento é aplicado de acordo com três casos diferentes no que se

refere ao número total de incrementos. A diferença de propriedades entre os grupos de barras do lado esquerdo e direito, conferem, ao conjunto, um comportamento que simula um hipotético material cuja lei constitutiva é tri-linear.

Dados para os materiais:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 10000.0 & ; & & E_2 &= 10000.0 \\
 H_1 &= 1000.0 & ; & & H_2 &= 1000.0 \\
 \sigma_{e1} &= 5.0 & ; & & \sigma_{e2} &= 7.5
 \end{aligned}$$

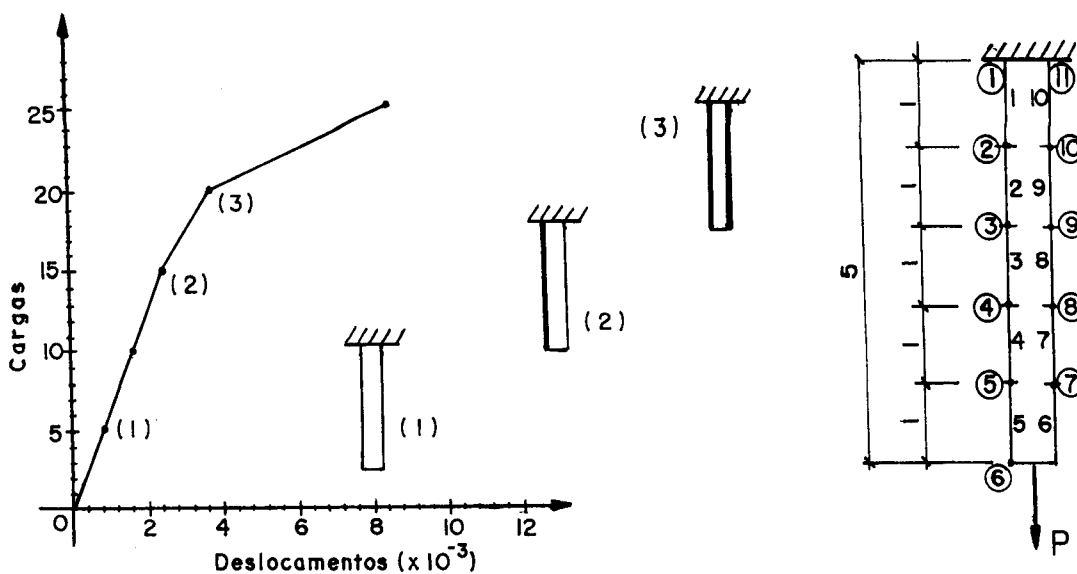


Fig. 5.02 - Deslocamento vertical do ponto "6" com evolução da plastificação

A mesma consideração feita no exemplo anterior com relação aos algoritmos NRIN e NRM1 é válida também neste caso, verificando-se, entretanto, um significativo aumento no tempo de processamento para ambos. As vantagens no que diz respeito ao número de iterações continuam as mesmas, assim como também há uma equivalência dos tempos de processamento entre os demais algoritmos. É importante observar que os resultados para o deslocamento do ponto evidenciado coincidentes com a previsão analítica, são os mesmos em todos os casos, ou seja, a precisão desejada é atingida em todos os incrementos de cada caso.

CASO	CARGAS		ALGORITMO / NUMERO DE ITERAÇÕES							DESLOC.
	INCR	FATOR	NRIN	NRCS	NRM1	NRM2	NR2L	BFGS	BFGL	
I	1	2.50	42	3	42	2	2	2	2	0.00850
II	1	1.25	0	0	0	0	0	0	0	0.00208
	2	1.25	42	2	42	2	2	2	2	0.00850
III	1	0.50	0	0	0	0	0	0	0	0.00083
	2	1.00	0	0	0	0	0	0	0	0.00167
	3	1.50	0	0	0	0	0	0	0	0.00250
	4	2.00	6	2	6	2	2	2	2	0.00369
	5	2.50	41	2	28	2	2	2	2	0.00850
TEMPO (s)	I		29	8	29	7	8	8	8	
	II		30	9	30	8	9	9	9	
	III		35	14	29	12	13	14	13	

Tab. 5.02 - Resultados para o exemplo

5.3. Exemplos em duas dimensões

5.3.1. Estrutura em duas barras e não-linearidade geométrica

Neste exemplo, Corrêa [7], a estrutura é composta por duas barras de mesmo material cujo módulo de elasticidade é igual a 30000.0 Ksi. As barras são iguais e formam com a horizontal um ângulo de 30° conforme mostra a figura 5.03, ambas tem comprimento de 100.0 in e seção transversal de 1.0 in².

No ponto 1 da estrutura, aplicou-se uma carga total de 1659.0 Kips dividida em um número diferente de incrementos para cada caso considerado conforme a tabela 5.03.

Para o caso III (ver tabela 5.03) em que o carregamento foi aplicado em incrementos de 200 kips até atingir 1600 kips, chega-se próximo à carga limite. Para obter-se uma

aproximação ainda melhor para o valor limite, foi acrescentado o incremento de número nove que totaliza 1659 kips. A partir deste nível de carregamento, a convergência não foi obtida.

CASO	CARGAS		ALGORITMO / NUMERO DE ITERACÕES							DESLOC. (in)
	INCR	FATOR	NRIN	NRCS	NRM1	NRM2	NR2L	BFGS	BFGL	
I	1	8.295	198	15	198	99	176	9	30	-22.77
II	1	4.150	6	3	6	4	2	3	2	-6.49
	2	4.145	198	14	139	74	139	8	27	-22.30
III	1	1.000	3	2	3	2	2	2	2	-1.38
	2	2.000	3	2	3	2	2	2	2	-2.85
	3	3.000	4	2	3	2	2	2	2	-4.45
	4	4.000	5	2	3	2	2	2	2	-6.21
	5	5.000	7	2	3	2	2	2	2	-8.19
	6	6.000	9	2	4	2	1	2	1	-10.52
	7	7.000	13	3	5	3	2	2	2	-13.45
	8	8.000	30	4	10	6	1	4	1	-18.14
	9	8.295	192	11	37	26	1	6	1	-22.28
TEMPO (s)	I		16	7	16	10	35	5	12	
	II		16	8	13	10	30	5	12	
	III		22	13	11	9	9	9	8	

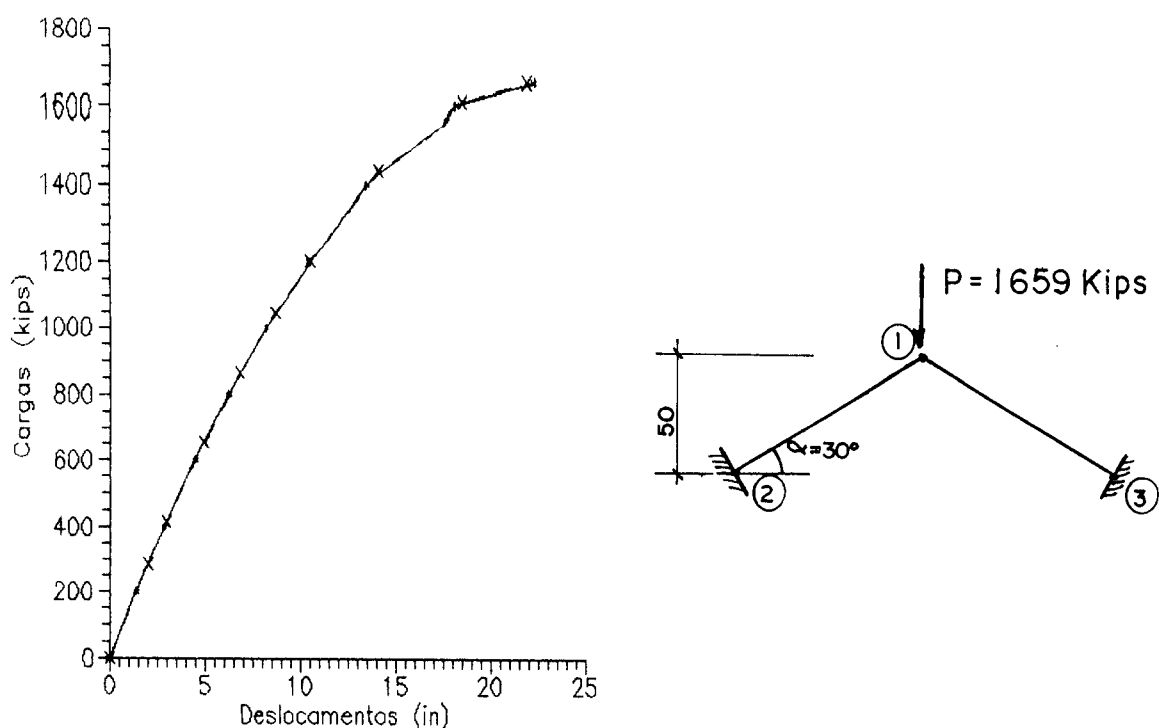
Tab. 5.03 - Resultados para o exemplo

Fica evidente, neste exemplo, a vantagem que os algoritmos BFGS e BFGL apresentam, pois com apenas um incremento de carga é possível conhecer com precisão e rapidez qual o deslocamento real do ponto evidenciado conforme mostram os resultados contidos na tabela 5.03.

Nota-se, que quando o carregamento total é aplicado em um número maior de incrementos (Caso III), os algoritmos do tipo Newton-Raphson tornam-se competitivos, em particular a

alternativa NRCS.

Para ilustrar a resposta não-linear do modelo, coincidente com aquela obtida por Corrêa [7], apresenta-se na figura 5.03 uma curva carga x deslocamento para o caso III. Para efeito de confronto no mesmo gráfico estão representados os resultados analíticos obtidos para várias rotações atribuídas às barras do modelo.



" x " - Pontos que representam a solução analítica.

" . " - Pontos que correspondem aos resultados obtidos.

Fig. 5.03 - Deslocamento vertical do ponto "1"

A pesquisa unidirecional na forma como foi proposta neste programa não produziu, para este exemplo, bons resultados, conforme mostram as colunas correspondentes aos algoritmos NR2L e BFGL nos casos I e II, embora tenha se revelado satisfatória no caso III.

5.3.2. Estrutura de cinco barras com dupla não-linearidade

A estrutura deste exemplo, Szilard [14], é formada por cinco barras de mesmo material, cuja lei constitutiva é bilinear com parâmetro de encruamento igual a zero, caracterizando um material elasto-plástico perfeito; o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento são constantes. A disposição das barras no plano é dada na figura 5.04 e todas as barras tem a mesma área de seção transversal.

Ao ponto 1 dessa estrutura, aplica-se a carga total de 180 kN, vertical para baixo, dividida em um número diferente de incrementos para cada caso. Aqui é considerada a plastificação das barras e a variação da geometria.

Dados do Material: $E = 2.0 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$
 $\epsilon_p = 0.002$
 $S = 0.001 \text{ m}^2$

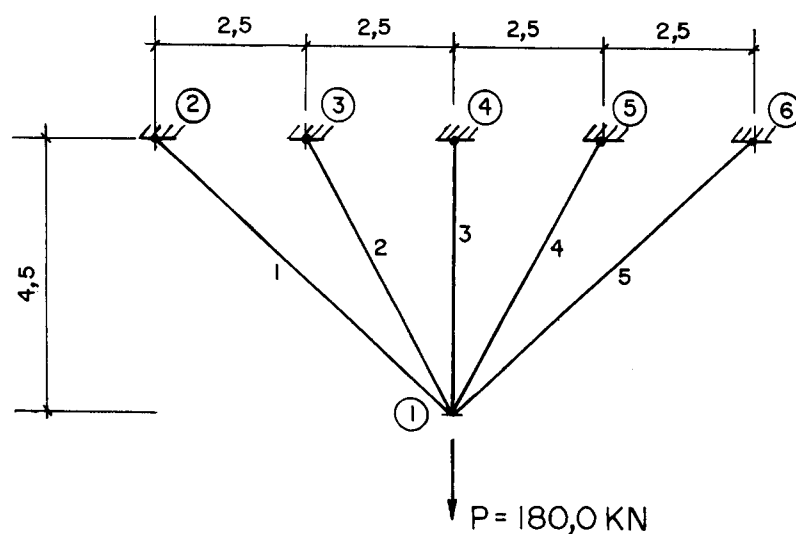


Fig. 5.04 - Treliça plana formada por cinco barras

Dado ao forte comportamento não-linear desta estrutura, observa-se, pelos resultados (ver tabela 5.04), que os algoritmos NRIN e NRM1 não conduzem a uma resposta precisa mesmo com um grande número de iterações. Nos casos I e II não se obteve sequer uma resposta; evidentemente pode-se aumentar o número máximo de iterações, o que não é

interessante do ponto de vista do tempo de execução. Já o algoritmo NRM2 no caso III, produz resultado preciso sem grande esforço computacional.

O algoritmo NRCS converge para a solução nos três casos com um número relativamente pequeno de iterações, revelando-se, neste caso, uma boa opção.

A pesquisa unidirecional, como mostram as colunas NR2L e BFGL, produz resultados precisos com baixo esforço computacional em todos os casos, pois reduz sensivelmente o número de iterações necessárias para alcançar a precisão desejada.

CASO	CARGAS		ALGORITMO / NUMERO DE ITERAÇÕES							DESLOC. (m)
	INCR	FATOR	NRIN	NRCS	NRM1	NRM2	NR2L	BFGS	BFGL	
I	1	1.00	300*	9	300*	300*	300*	7	6	-2.3999
II	1	0.50	1	1	1	1	1	1	1	-0.0069
	2	1.00	300*	9	300*	300*	300*	7	6	-2.3990
III	1	0.50	1	1	1	1	1	1	1	-0.0069
	2	0.60	1	0	1	0	0	0	0	-0.0083
	3	0.70	5	2	6	2	2	2	2	-0.0100
	4	0.80	24	2	14	2	2	2	2	-0.0128
	5	0.90	30	1	2	1	1	1	1	-0.0195
	6	0.95	300*	5	300*	5	4	4	3	-0.8588
	7	1.00	300*	4	8	5	2	3	3	-2.3985
TEMPO (s)	I		31	9	31	30	44	5	7	
	II		31	9	32	31	45	6	7	
	III		64	14	36	9	10	9	10	

* Não se obteve a precisão desejada no limite de iterações.

Tab. 5.04 - Resultados para o exemplo

Os resultados deste exemplo mostram, de maneira bastante acentuada, a vantagem obtida ao usarem-se os algoritmos NR2L, BFGL e BFGS, com ligeira vantagem para este último. O algoritmo BFGL apesar de executar um número menor de iterações demanda mais tempo pela execução da rotina de busca unidirecional.

Para este exemplo foi estabelecido um limite alto de 300 iterações, apenas para forçar uma resposta para todos os algoritmos. A simplicidade da matriz de rigidez permite isto sem que seja necessário um grande consumo de tempo de processamento, ainda assim não foi possível, em alguns casos, obter resposta precisa. A tabela 5.04 e a figura 5.05, mostram os resultados para aqueles algoritmos que efetivamente alcançaram o equilíbrio com a precisão desejada. Os asteriscos indicam, em cada caso, os incrementos em que se atingiu o limite máximo de iterações antes de obter-se a precisão desejada.

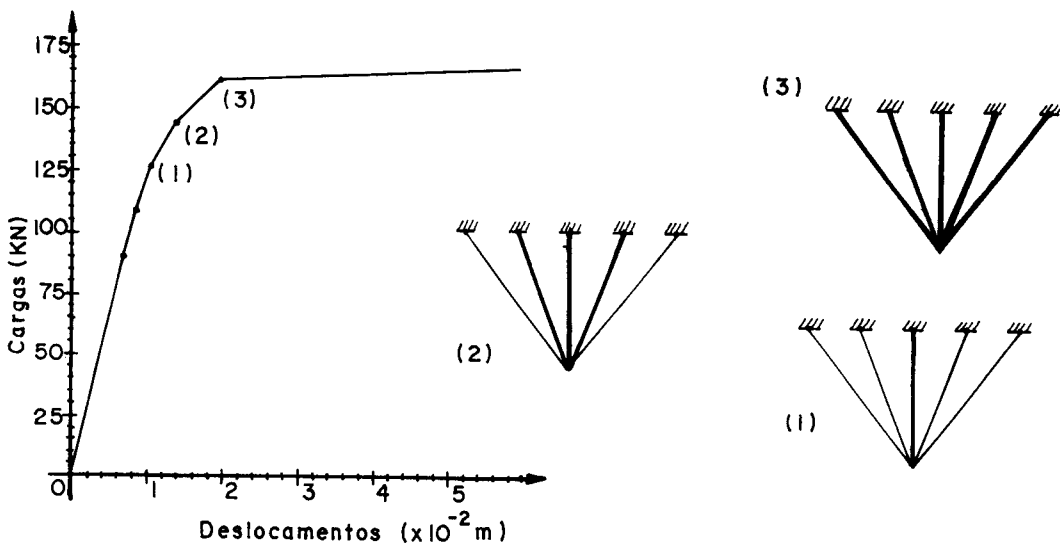


Fig. 5.05 - Deslocamento vertical do ponto "1" e evolução da plastificação

5.4. Exemplos de treliças espaciais

5.4.1. Torre esbelta no espaço com dupla não-linearidade

A torre treliçada deste exemplo tem base quadrada com lado igual a 4.0m e altura total de 20.0m, as barras que formam as quatro colunas tem seção transversal igual a 35.0cm² como mostram as figuras 5.06a e 5.06c. As demais barras tem seção transversal igual a 7.5cm². As quatro faces da torre são iguais à mostrada na figura 5.06c.

Dados do material: $E = 21000.0 \text{ KN/Cm}^2$ e $H = 2100.0 \text{ KN/Cm}^2$
 $\sigma_y = 25.0 \text{ KN/Cm}^2$

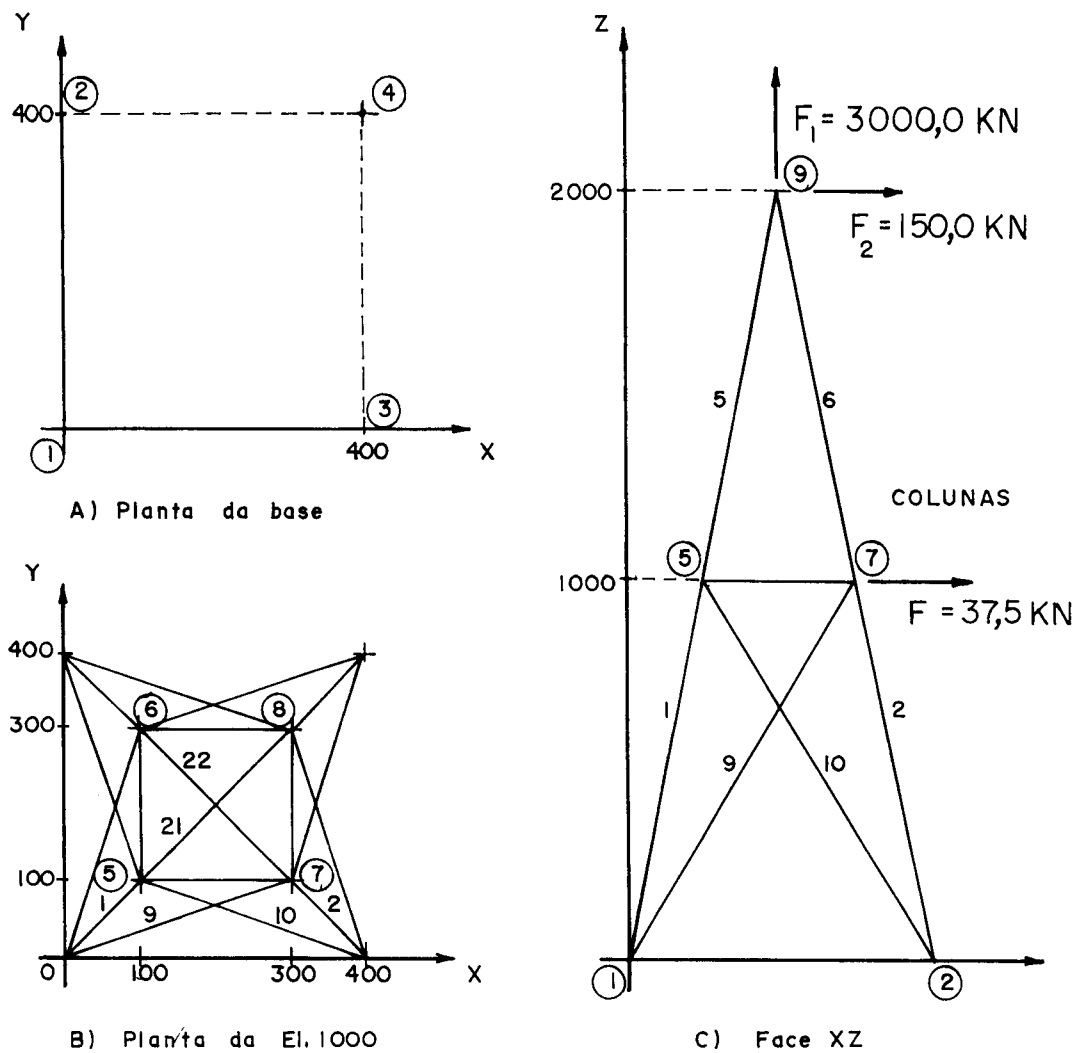


Fig. 5.06 - Torre treliçada de base quadrada

O carregamento total aplicado consiste de uma força vertical para baixo de 3000.0 KN no ponto "9" e as cargas laterais de 150.0 KN nos pontos "5" e "6" e de 37.5 KN no ponto "9", na direção do eixo "X". A carga lateral total foi considerada igual a 10% da vertical e aplicada a cada nó na proporção da sua área de influência (foram considerados também os nós de apoio no cálculo das proporções).

No processamento deste exemplo, consideraram-se os algoritmos NRCS, NRM2, NR2L, BFGS e BFGL; o método da rigidez inicial, neste caso, é bastante ineficiente. Nesta estrutura espacial, acentuam-se fortemente as vantagens dos algoritmos BFGS e BFGL. No caso I de carregamento (tabela 5.05) com apenas um passo de carga obtém-se o equilíbrio após 8 iterações com um tempo de processamento igual a 33 segundos.

CASO	CARGAS		ALGORITMO / NUMERO DE ITERAÇÕES							DESLOC. (cm)
	INCR	FATOR	NRCS	NRM2	NR2L	BFGS	BFGL			
I	1	6.0	8	90	15*	8	8			2.85
II	1	3.0	2	2	2	2	2			2.35
	2	6.0	8	89	22*	7	7			2.85
III	1	1.0	1	1	1	1	1			0.78
	2	2.0	1	1	1	1	1			1.56
	3	3.0	1	1	1	1	1			2.35
	4	4.0	3	3	2	2	2			3.11
	5	5.0	1	2	1	1	1			3.76
	6	6.0	6	19	5	5	5			2.86
TEMPO (s)	I		71	194	182*	33	49			
	II		91	205	119*	42	57			
	III		139	106	84	72	81			

Tab. 5.05 - Resultados para o exemplo

A alternativa NR2L no caso III produziu uma resposta precisa embora mais demorada. Nos demais casos deste algoritmo (assinalados com o asterisco na tabela 5.05), a busca unidimensional prejudicou a convergência e não produziu resposta, ao contrário de NRCS e NRM2. Com o método de Newton-Raphson, obteve-se precisão no caso I em apenas 8 iterações, embora o tempo gasto tenha sido maior como mostram os resultados da tabela 5.05. Os deslocamentos em destaque na última coluna correspondem ao deslocamento horizontal na direção do eixo "X" para o ponto "9".

A tabela 5.06, mostra a evolução das tensões nas barras mais solicitadas da estrutura ao longo do processo incremental correspondente ao caso III.

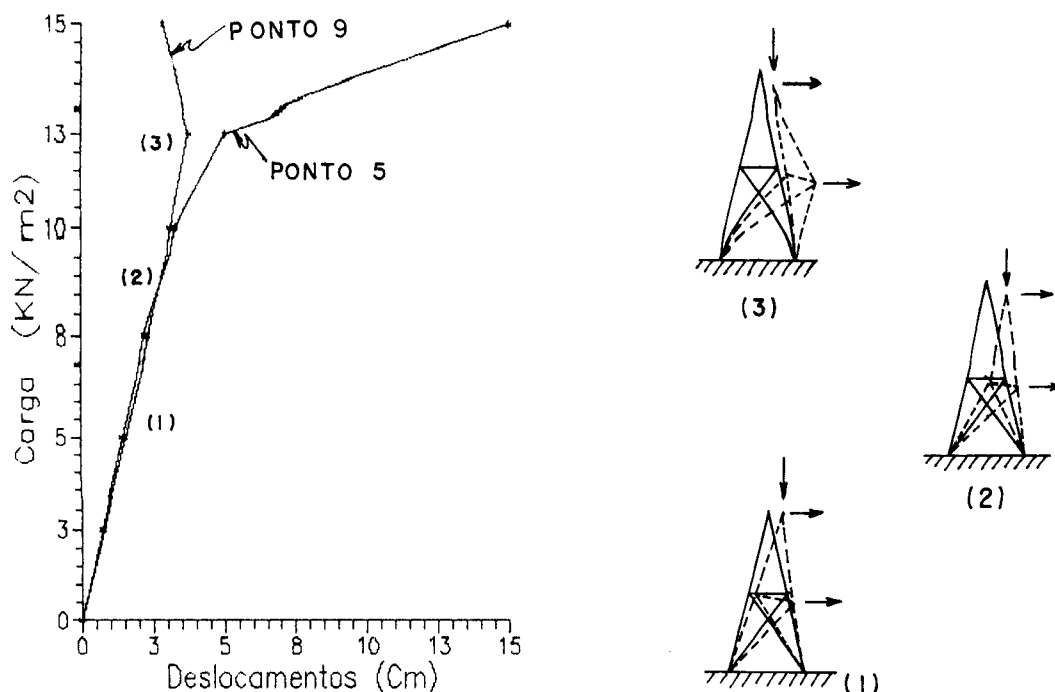
BARRA	Número do incremento do caso III					
	1	2	3	4	5	6
1	-1.5	-2.9	-4.4	-6.2	-8.7	-12.1
2	-3.7	-7.5	-11.3	-15.5	-20.2	-23.7
5	-3.2	-6.3	-9.5	-12.7	-16.0	-21.6
6	-4.1	-8.1	-12.2	-16.2	-20.1	-21.7
9	1.9	3.9	6.0	10.6	19.0	31.6
10	-6.8	-13.7	-20.7	-25.6	-27.1	-35.1
17	-0.8	-1.5	-2.3	-3.1	-6.4	-8.7

Tab. 5.06- Tensões nas barras para cada incremento

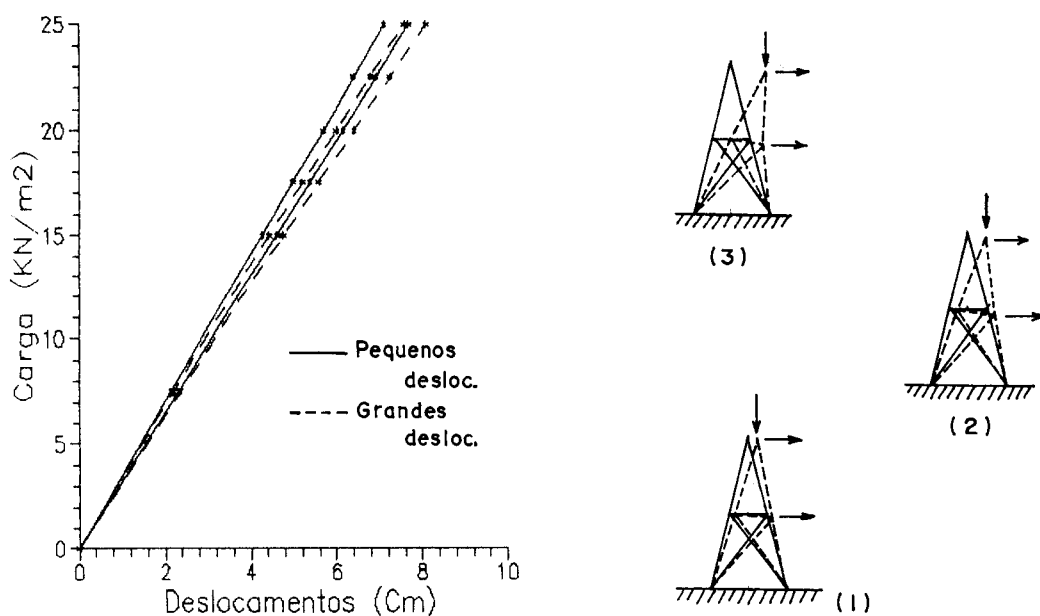
Assumiu-se que não ocorre flambagem das barras e que o exemplo tem por finalidade avaliar o desempenho de cada algoritmo. A consideração da flambagem, contudo, não altera os princípios básicos das sub-rotinas envolvidas neste trabalho.

A resposta não-linear da estrutura está representada na figura 5.07a pelas curvas de carga x deslocamento para os pontos "5" e "9". Como a carga foi aplicada proporcionalmente às áreas de influência de cada nó, no eixo vertical está representado seu valor por unidade de área. Na figura

5.07b as curvas pontilhadas representam os deslocamentos horizontais para os mesmos pontos, considerada apenas a não-linearidade geométrica. As curvas contínuas nessa mesma figura representam os deslocamentos supondo o comportamento elástico-linear. Neste exemplo a contribuição da não-linearidade geométrica nos deslocamentos finais, é pequena.



a) Deslocamentos dos pontos "5" e "9": dupla não-linearidade



b) Deslocamentos para os pontos "5" e "9" considerada a não-linearidade geométrica e o comportamento elástico.

Fig. 5.07 - Deslocamento horizontal dos pontos "5" e "9"

5.4.2. Cúpula invertida no espaço com dupla não-linearidade

Para facilitar o processamento da cúpula deste exemplo, aproveitou-se a simetria usando apenas o setor equivalente a um quarto da estrutura completa. Todas as barras são de mesmo material, cuja lei constitutiva é bilinear com parâmetro de encruamento igual a zero, caracterizando um material elasto-plástico perfeito; o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento são constantes. A disposição das barras no espaço, bem como a área das suas seções transversais, é dada na figura 5.08.

A tabela 5.07, lista os pontos da estrutura aos quais aplicou-se a carga total de 242.5 KN vertical para baixo (carga que corresponde a um quarto do carregamento total da cúpula completa) dividida em um número diferente de incrementos para quatro casos diferentes. Aqui é considerada a plastificação das barras e a variação da geometria.

Os algoritmos NRIN e NRM1 não são considerados neste exemplo por serem extremamente ineficientes, o que já se podia prever pelos exemplos anteriores.

Os resultados reunidos na tabela 5.08 mostram que os algoritmos NRM2 e NR2L também não foram eficientes; apenas a formulação clássica do método de Newton-Raphson (NRCS) no caso IV mostrou-se razoável. O forte comportamento não-linear desta estrutura também evidencia as vantagens obtidas com o uso dos algoritmos BFGS e BFGL.

A pesquisa unidirecional, como mostra a coluna BFGL na tabela 5.08, produz resultados precisos com pequena redução do esforço computacional nos casos I e IV. Houve uma economia significativa de tempo no caso III, sendo a redução sensível do número de iterações a causa desse melhor desempenho.

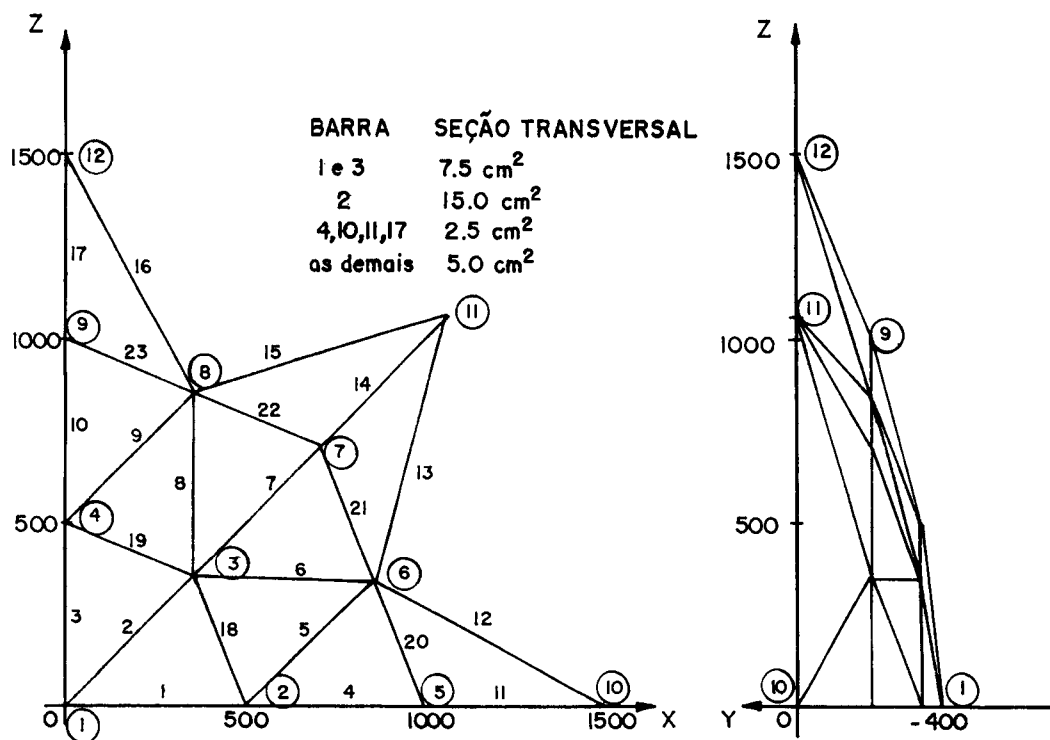
Os asteriscos indicam, em cada caso, os incrementos em que se atingiu o limite máximo de iterações antes de obter-se a precisão desejada. Neste caso o limite de iterações foi fixado em 100.

Dados do material

Módulo de Elasticidade = 21000.0 KN/Cm²
 Parâmetro de Encruamento = 0.0 KN/Cm²
 Tensão de Escoamento = 25.0 KN/Cm²

Nós	Carga	Nós	Carga	Nós	Carga
1	-42.5	5	-12.5	9	-12.5
2	-25.0	6	-25.0	10	0.0
3	-50.0	7	-25.0	11	0.0
4	-25.0	8	-25.0	12	0.0

Tab. 5.07- Dados do carregamento na cúpula



a) Planta da cúpula

b) Vista do plano "YZ"

Fig. 5.08- Estrutura em cúpula invertida

CASO	CARGAS		ALGORITMO / NUMERO DE ITERAÇÕES							DESLOC. (cm)
	INCR	FATOR	NRCS	NRM2	NR2L	BFGS	BFGL			
I	1	0.6	3	3	2	4	3			-4.97
	2	1.2	100*	100*	100*	32	22			-77.89
II	1	0.3	2	2	2	2	2			-2.59
	2	0.6	2	2	2	2	2			-4.96
	3	0.9	4	5	4	5	4			-7.95
	4	1.2	100*	100*	100*	24	17			-77.89
III	1	0.2	3	3	5	3	3			-1.76
	2	0.4	2	2	2	2	2			-3.41
	3	0.6	2	1	2	2	2			-4.96
	4	0.8	1	1	1	1	1			-6.45
	5	1.0	100*	100*	100*	7	6			-10.65
	6	1.2	100*	100*	100*	51	21			-77.89
IV	1	0.2	3	3	5	3	3			-1.76
	2	0.4	2	2	2	2	2			-3.41
	3	0.6	2	1	2	2	2			-4.96
	4	0.8	1	1	1	1	1			-6.45
	5	0.9	4	5	3	4	3			-7.95
	6	1.0	4	6	2	4	3			-10.65
	7	1.1	5	13	100*	10	7			-39.04
	8	1.2	8	100*	100*	7	7			-77.90
TEMPO (s)	I		919	399	673	210	206			
	II		981	441	671	210	216			
	III		1865	818	1297	401	291			
	IV		335	556	1269	240	237			

Tab. 5.08 - Resultados para o exemplo

Na sequência, apresentam-se na tabela 5.09 as tensões nas barras para cada incremento de carga do caso IV. E

possível observar, com a ajuda da figura 5.09, quais são pela ordem as barras plastificadas em cada incremento. Com estes resultados, pode-se analisar a estrutura sob um ponto de vista mais real, alterando as seções das barras que mais influem nas deformações.

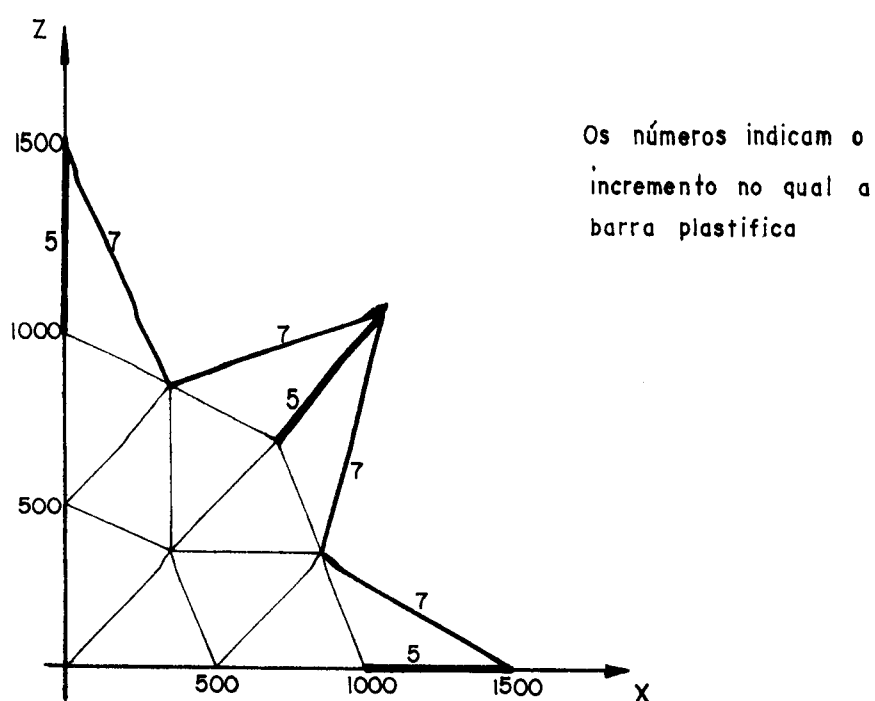


Fig. 5.09- Caminhamento da plastificação das barras

BARRA	Número do incremento do caso IV							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2	3.1	6.2	9.1	12.0	13.3	14.6	15.8	16.9
7	5.2	10.4	15.6	20.7	22.1	20.8	22.1	23.1
14	5.8	11.6	17.3	23.0	25.0	25.0	25.0	25.0
6	2.9	5.8	8.7	11.5	13.4	16.3	17.0	17.1
13	4.3	8.6	12.9	17.2	19.9	24.1	25.0	25.0
18	-0.4	-0.5	-0.3	0.1	-0.2	-1.7	-3.9	-7.2
21	0.3	0.6	0.9	1.3	1.9	3.4	1.3	-0.6

Tab. 5.09- Tensões nas barras para cada incremento

A figura 5.10 traz as curvas que representam os deslocamentos verticais para vários pontos da estrutura considerado o comportamento duplamente não-linear.

Nos diagramas que se seguem os símbolos que aparecem sobre as curvas representam o seguinte:

* - Ponto 1; ★ - Ponto 2; ✕ - Ponto 5; X - Ponto 6

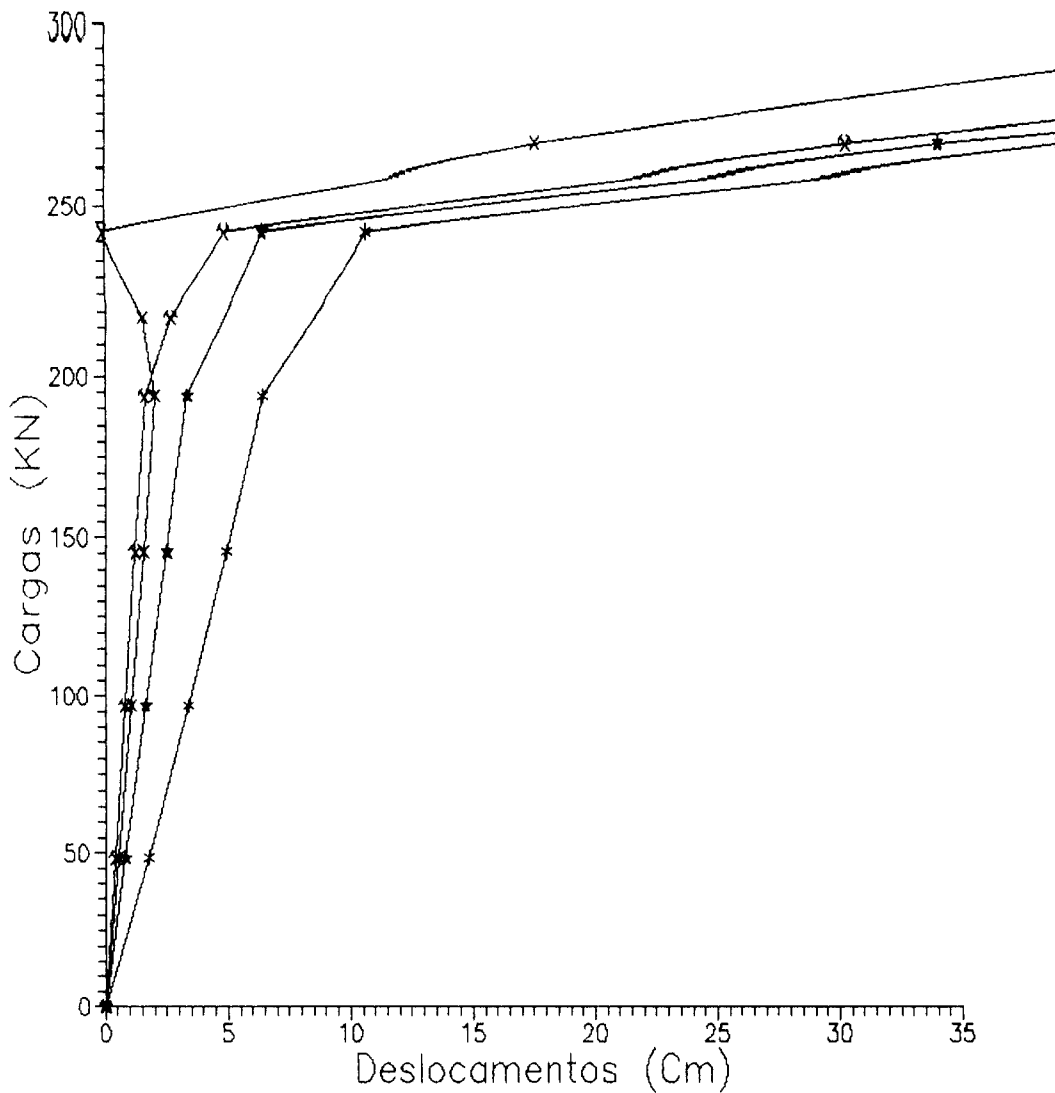


Fig. 5.10 - Deslocamentos para dupla não-linearidade

A figura 5.11 mostra as curvas em traço contínuo que representam o comportamento elástico-linear e o tracejado que representa os deslocamentos considerada apenas a não-linearidade geométrica. A convenção para os pontos evidenciados é a mesma já utilizada anteriormente. Observe-se que neste exemplo, a contribuição da não-linearidade geométrica no resultado final para os deslocamentos é pequena.

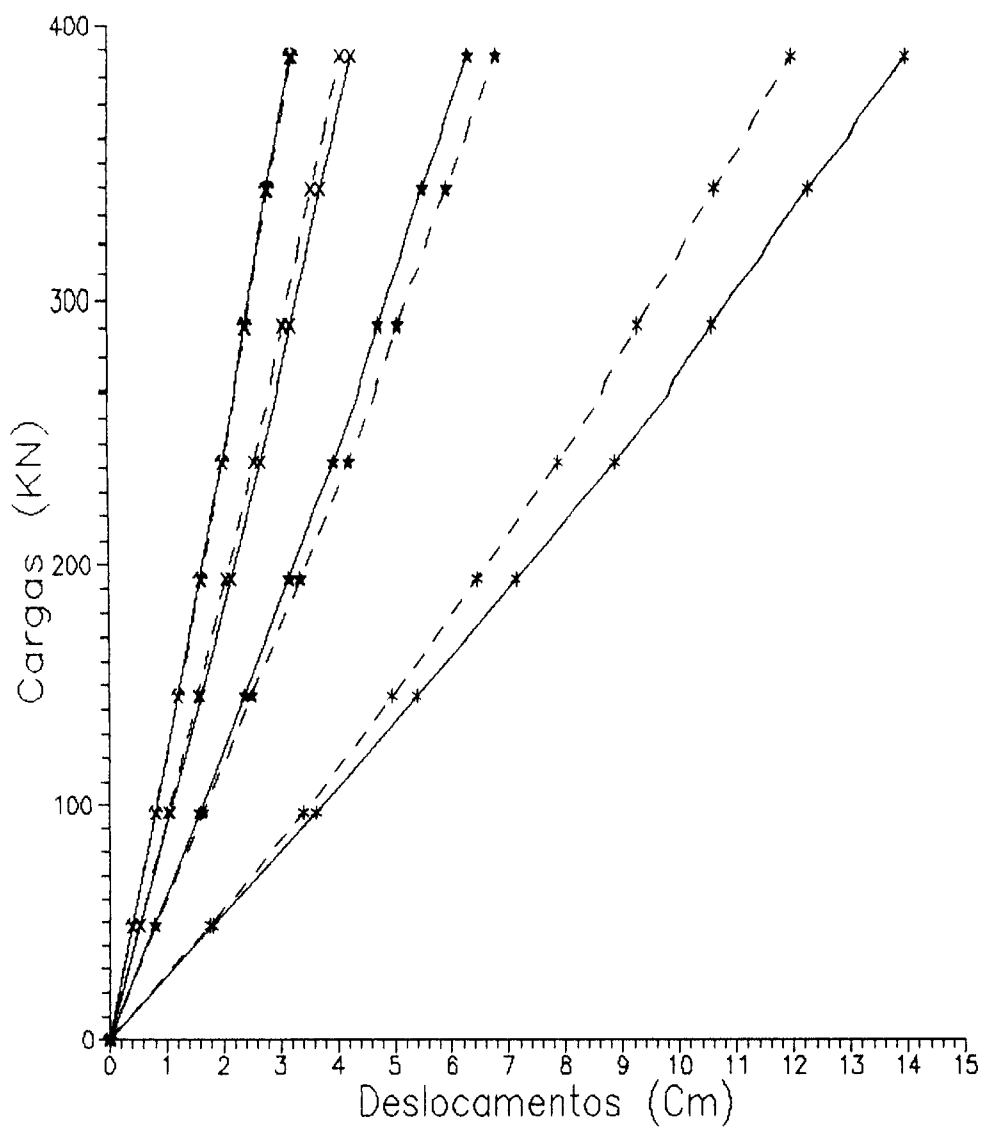


Fig. 5.11 - Deslocamentos elástico e com não-linearidade geométrica

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

O campo de estudos do comportamento não-linear das estruturas é muito vasto e envolve, para obtenção de resultados, técnicas numéricas normalmente complexas. A aplicação a treliças adotada neste trabalho é mais simples dada a facilidade de se obterem expressões explícitas para a rigidez dos elementos e da estrutura global. Tal simplificação, no entanto, não implica em mudança na estrutura dos algoritmos de solução dos sistemas de equações no confronto com casos de estruturas mais gerais. Em tais casos a diferença está no fato de que as rotinas de montagem das matrizes de rigidez e do cálculo dos resíduos envolvem um número bem maior de operações.

O melhor ou pior desempenho de cada algoritmo de solução de sistemas não-lineares aqui estudado está ligado ao tipo de estrutura, à influência maior ou menor das não-linearidades e à tolerância admitida no processo iterativo. Estruturas pouco deformáveis e/ou pouco esbeltas apresentam resposta muito próxima do comportamento elástico-linear, de modo que qualquer um dos algoritmos se mostrará eficiente no processo de resolução. Para estas estruturas não é preciso, normalmente, subdividir a carga total em muitos incrementos. Por outro lado, quando surgem fortes não-linearidades, é possível observar as diferenças no desempenho dos algoritmos; para alguns deles há a necessidade de subdivisão do carregamento total em um número maior de etapas para a obtenção de bons resultados.

Nos casos em que há a manifestação da não-linearidade física, o tipo de lei constitutiva adotada para os materiais é a causa principal da maior ou menor eficiência dos processos de busca do equilíbrio. Uma lei elastoplástica perfeita pode conduzir a uma situação em que a estrutura sofra grandes deformações antes de alcançar a posição de equilíbrio. Quando se adota uma lei bi-linear com endurecimento, o processo é menos penoso, pois a estrutura é menos deformável. Na realidade a lei bi-linear representa melhor o comportamento dos materiais de uso estrutural convencionais (Nos casos em que se usou um parâmetro de endurecimento, ele variou na faixa de 5% a 10% do módulo de elasticidade inicial do material),

Nas estruturas estudadas, em que se considerou a dupla não-linearidade, verificou-se, em particular no exemplo do item 5.3.2, o mau comportamento dos pontos "6" e "8" que levaram os algoritmos do tipo Newton-Raphson a sequer produzirem uma resposta quando ocorreu a plastificação de algumas barras. Foi preciso nestes casos dividir a carga total em diversos incrementos de modo a serem limitadas as variações de deformações entre um incremento e o seguinte. Neste ponto, evidencia-se a primeira vantagem do uso do algoritmo BFGS que é a possibilidade de se obterem, com apenas um passo de carga, os esforços e os deslocamentos finais com precisão. Ainda que seja necessário para algumas estruturas subdividir o carregamento total, os algoritmos BFGS e BFGL (BFGS com pesquisa unidimensional) permitem a definição de incrementos maiores o que reduz a quantidade de vezes em que é necessário o recálculo da matriz de rigidez global.

Nos exemplos reunidos neste trabalho, evidenciaram-se as vantagens do uso dos algoritmos BFGS e BFGL também no que diz respeito à convergência, estabilidade e tempo de processamento. Apenas nos casos unidimensionais muito simples ou nos casos em que a carga total foi subdividida em vários incrementos é que o método de Newton-Raphson mostrou-se competitivo.

A busca unidimensional associada ao BFGS (sigla BFGL)

apesar de reduzir, em todos os casos estudados, o número de iterações necessárias para obter-se o equilíbrio a cada incremento, nem sempre se revelou vantajosa do ponto de vista do tempo de processamento (embora este fato esteja ligado à precisão exigida para o produto interno da equação 3.20). De fato, aumentando-se a tolerância na busca unidimensional o tempo gasto na determinação do melhor valor de " α " (coeficiente de busca) resulta menor, porém o valor atualizado para os deslocamentos ao final da iteração não é certamente o melhor. É necessário estudar, para cada estrutura, não apenas a precisão desejada na obtenção do equilíbrio, mas também na busca unidimensional. Neste trabalho, a precisão para a busca unidimensional foi mantida constante para todos os exemplos e igual a 0.1. Uma alternativa, é considerá-la uma variável a ser fornecida, de modo a que para cada caso se possa verificar qual a tolerância suficiente.

A busca unidimensional, foi implementada também nos algoritmos do tipo Newton-Raphson com relativo sucesso. Em cinco dos seis exemplos estudados, nos quais o número de incrementos de carga foi maior, a sua utilização resultou vantajosa. Quando usou-se o método de Newton-Raphson modificado a busca unidimensional, em alguns casos, não produziu convergência. Isto está ligado ao fato de que, ao contrário da formulação clássica do método de Newton, a convergência na versão modificada não é garantida em todos os casos. Uma direção de busca calculada a partir de uma matriz global que esteja longe da rigidez real da estrutura pode, na verdade, não se constituir numa direção de descida. Deste modo a busca unidimensional jamais conduzirá a uma redução no valor do produto interno especificado na equação 3.20, para um nível menor do que o estabelecido para a tolerância.

Embora o descarregamento não tenha sido considerado neste trabalho, os algoritmos do tipo quasi-Newton, pela sua formulação matemática, são capazes de produzir convergência também neste caso ao contrário dos algoritmos do tipo Newton-Raphson.

De um modo geral, cabe resaltar que os objetivos ini-

cialmente propostos foram alcançados com êxito. Destacam-se não só os aspectos relativos aos algoritmos, já mencionados acima, como também o conjunto de exemplos que procuram reunir casos de não-linearidades isoladas ou combinadas, de modo a que possam servir como referência para futuros estudos e comparações.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MATTHIES, HERMANN e STRANG, G. The solution of nonlinear finite element equations. International Journal for numerical methods in engineering, vol 14, pp. 1613-1626, 1979.
- [2] OWEN, D. R. J. e GOMES, C. M. B. Some recent developments in solution techniques for nonlinear finite element problems. University College of Swansea.
- [3] SZILARD, R. An energy balancing strategy for solution of combined geometrical and material nonlinearity problems. Computers & Structures, vol. 23, No. 2, pp 147-162, 1986.
- [4] LIMA, V. M. S. e FILHO, F. V. Considerações sobre a não-linearidade geométrica em estruturas reticuladas. III Escola de Matemática Aplicada, Laboratório de Computação Científica-CNPQ, Rio de Janeiro, 1982.
- [5] ARCARO, V. Conceitos fundamentais e métodos computacionais básicos para encontrar configurações de equilíbrio de estruturas não lineares. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Campinas, 1992.
- [6] BATHE, K. J. Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall. Inc., 1982.
- [7] CORREA, M. R. S. Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios. Tese de doutoramento apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos, 1991.
- [8] OWEN, D. R. J. e HINTON, E. Finite elements in plasticity: theory and practice. University College of

Swansea, U.K., Pineridge Press Limited, 1980.

- [9] PROENÇA, S. P. B. Notas sobre análise não-linear física de estruturas parte I: Teoria da plasticidade e técnicas numéricas. Escola de Engenharia de São Carlos, março, 1989.
- [10] LIMA, V. M. S. e VENANCIO FILHO, F. A noção de rigidez tangente no estudo da não-linearidade geométrica de estruturas reticuladas. 5. Congresso Latino-Americano sobre métodos computacionais em engenharia, Salvador, 1984.
- [11] PAPADRAKAKIS, M. e BALOPOULOS, V. Improved Quasi-Newton methods for large nonlinear problems. Journal of Engineering Mechanics, vol. 117, No. 6, june, 1991.
- [12] ORAN, C. e KASSIMALI, A. Large deformations of framed structures under static and dynamic loads. Computers & Structures, vol 6, pp 539-547, 1976.
- [13] WEN, R. K. Nonlinear elastic frame analysis by finite element. Journal of Structural Engineering, vol. 109, No. 8, august, 1983.
- [14] SZILARD, R. Critical load and post-buckling analysis by FEM using energy balancing technique. Computers & Structures, vol 20, No 1-3, pp 277-286, 1985.
- [15] HSIAO, KUO-MO, HORNG, H. e CHEN, Y. A corotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures. Computers & Structures, vol. 27, No. 6, pp 769-781, 1987.
- [16] GERE, J. M. e WEAVER JR., W. Análise de estruturas reticuladas. Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1981.
- [17] MOREIRA, D. F. Análise matricial de estruturas. LTC/EDUSP, Rio de Janeiro, 1977.
- [18] BREBBIA, C. A. e CONNOR, J. J. Metodos de los elementos finitos en la ingenieria civil. Centro de perfeccionamiento profesional y empresarial, Colegio de ingenieros de caminos, canales y puertos, Madrid, 1975.
- [19] BURNETT, D. S. Finite element analysis: from concepts to applications. Addison Wesley, AT&T Bell Laboratories, 1987.
- [20] ZIENKIEWICZ, O. C. The finite element method. McGraw-Hill, New York, 3rd ed., 1977.
- [21] NADAI, A. Theory of flow and fracture of solids.

McGraw-Hill, New York, 2nd ed., 1950.

[22] HANSEN, B. A theory of plasticity for ideal frictionless materials. Teknisk Forlag, Copenhagen, 1965.

[23] TIMOSHENKO, S. P. History of strength of materials. McGraw-Hill, New York, 1953.

[24] MENDELSON, A. Plasticity: Theory and application. Robert E. Krieger Publ. Co., 1968.

[25] ZAGOTTIS, De, D. L. Fundamentos da teoria das estruturas. Depto. de Engenharia de Estruturas e Fundações - EPUSP, São Paulo, 1984.

[26] CHAKRABARTY, J. Theory of Plasticity. McGraw-Hill, Singapura, 1987.

[27] LUENBERGER, D. G. Linear and nonlinear programming. Addison Wiley publishers, 1982.

[28] BAZAARA, M., SHETTY, C. Nonlinear programming, theory and applications. John Wiley & Sons, 1979.

APÊNDICE A

CONCEITOS GERAIS DA PLASTICIDADE PARA O MEIO CONTÍNUO

A expressão abaixo, descreve o estado de tensões em um ponto, como função das componentes de tensões num sistema cartesiano tridimensional.

$$T = T (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \quad (\text{Eq. A.01})$$

A representação do comportamento elasto-plástico, inclui também uma função, ou critério, de plastificação que envolve as componentes do estado de tensão e um parâmetro característico que pode ser a deformação plástica acumulada. Assim, escreve-se essa função conforme segue.

$$f = f (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \epsilon_p, h) \quad (\text{Eq. A.02})$$

ou

$$f = f (T, h, \epsilon_p) \quad (\text{Eq. A.03})$$

Onde: ϵ_p - É a deformação plástica acumulada.

h - É o parâmetro de endurecimento.

No caso de um meio contínuo, diferentemente do caso uniaxial, é possível representar geometricamente a separação entre a região onde os estados de tensão são ditos elásticos da região onde surgem os estados plásticos, por meio de uma superfície convexa. Assim, estados de tensão ou pontos dentro dessa superfície são estados elásticos e sobre a superfície estados plásticos. Fora da superfície, a região é considerada inacessível, porque quando se avança no processo de plastificação a superfície que limita a região elástica se expande de modo a conter sobre si o novo estado de tensões.

Se $f(T)$ representa a superfície que limita a região elástica inicial, então $f(T)=0$ é verificada por pontos sobre a superfície.

Pode-se dizer dos pontos representativos de um estado de tensão no regime elástico que a função de plastificação, tem sempre um valor menor ou igual a zero, ou seja:

$$f(T) \leq 0 \quad (\text{Eq. A.04})$$

A região inacessível, fica representada por $f(T)>0$. Essas situações, estão indicadas na figura A.01.

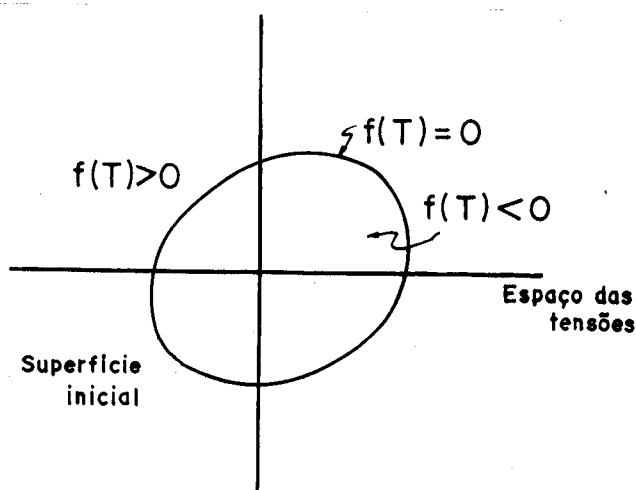


Fig. A.01- Superfície inicial de plastificação

A partir de um estado atual genérico de tensões e deformações, acréscimos a um estado de tensão que levam a um valor negativo dessa função f , representam um descarregamento ou ingresso na fase elástica.

Por outro lado, acréscimos que gerem incrementos na deformação plástica constituem um novo estado, dado geometricamente por um ponto que continuará sobre uma nova superfície de plastificação conforme mostra a figura A.02. Essa condição é expressa matematicamente sendo:

$$f(T+dT, \epsilon_p + d\epsilon_p, h+dh) = 0 \quad (\text{Eq. A.05})$$

Portanto como o novo estado de tensões $T+dT$, deve estar sobre a nova superfície, que limita agora outra região

elástica, deve-se verificar a condição de consistência descrita pela equação.

$$df=f(T+dT, \epsilon_p+d\epsilon_p, h+dh)-f(T, \epsilon_p, h)=0 \quad (\text{Eq. A.06})$$

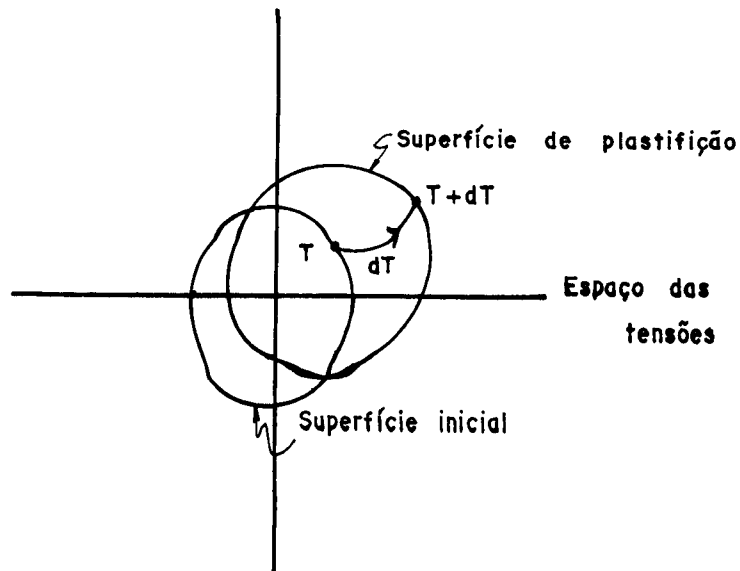


Fig. A.02- Evolução da superfície de plastificação no espaço das tensões

Os postulados de Drucker estendidos ao meio contínuo trazem duas importantes consequências: a lei da normalidade e a convexidade da superfície de plastificação. Para explicar o que vem a ser estas leis, parte-se de um estado de tensões interno à superfície de plastificação T_α , ao qual corresponde uma deformação plástica ϵ_{pa} , iniciando-se um ciclo de carga e descarga, seguindo as etapas ilustradas na figura A.03.

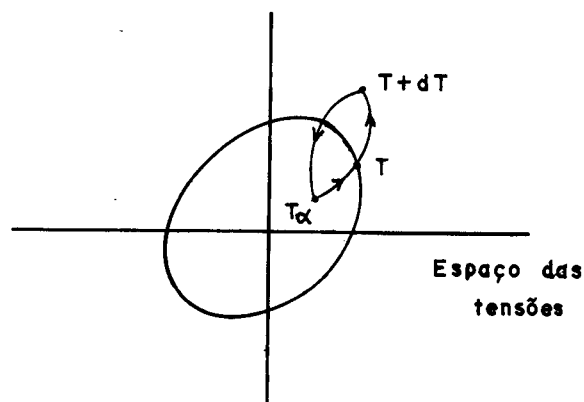


Fig. A.03- Ciclo completo de carga e descarga

O segundo postulado de Drucker, afirma que o trabalho complementar realizado em um ciclo completo de carga e descarga é menor ou igual a zero. Portanto, pode-se escrever que:

$$\oint \epsilon \cdot dT = \int_{T_a}^T \epsilon \cdot dT + \int_T^{T+dT} \epsilon \cdot dT + \int_{T+dT}^{T_a} \epsilon \cdot dT \leq 0 \quad (\text{Eq. A.07})$$

A deformação total ϵ é dada, genericamente, pela soma de uma parcela elástica ϵ_e e outra plástica ϵ_p . Além disso, pode-se escrever a variação das deformações plásticas ocorrida de T a T+dT na forma:

$$d\epsilon_p = \epsilon_p^* - \epsilon_{pa} \quad (\text{Eq. A.08})$$

Onde: ϵ_p^* - É a deformação plástica em T+dT.

Introduzindo as condições acima, na expressão A.07, chega-se a:

$$\oint \epsilon \cdot dT = \int_{T_a}^T (\epsilon_e + \epsilon_{pa}) \cdot dT + \int_T^{T+dT} (\epsilon_e + \epsilon_p) \cdot dT + \int_{T+dT}^{T_a} (\epsilon_e^a + \epsilon_p^*) \cdot dT \leq 0 \quad (\text{Eq. A.09})$$

Em seguida pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \oint \epsilon \cdot dT = & \int_{T_a}^T (\epsilon_e + \epsilon_{pa}) \cdot dT + \int_T^{T+dT} (\epsilon_e + (\epsilon_p - \epsilon_{pa}) + \epsilon_{pa}) \cdot dT + \\ & + \int_{T+dT}^{T_a} (\epsilon_e^a + \epsilon_{pa} + d\epsilon_p) \cdot dT \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. A.10})$$

a qual desenvolvida passa a ser dada por:

$$\oint \epsilon \cdot dT = \oint \epsilon_e \cdot dT + \oint \epsilon_{pa} \cdot dT + \int_T^{T+dT} (\epsilon_p - \epsilon_{pa}) \cdot dT +$$

$$+ \int_{T+dT}^T d\epsilon_p \cdot dT \leq 0 \quad (\text{Eq. A.11})$$

As integrais fechadas da equação A.11, são nulas. De fato, na primeira parcela tem-se um ciclo completo em fase elástica, que é conservativo, resultando em trabalho complementar nulo; na segunda ϵ_{pa} é uma constante e o ciclo é de tensão, portanto também seu resultado é zero. A terceira integral é um infinitésimo de ordem superior que pode ser desprezado frente as outras grandezas. Após estas considerações, a expressão se reduz a:

$$\oint \epsilon \cdot dT = \int_{T+dT}^T d\epsilon_p \cdot dT = d\epsilon_p \cdot (T_a - T) \leq 0 \quad (\text{Eq. A.12})$$

A expressão acima pode ser escrita na forma:

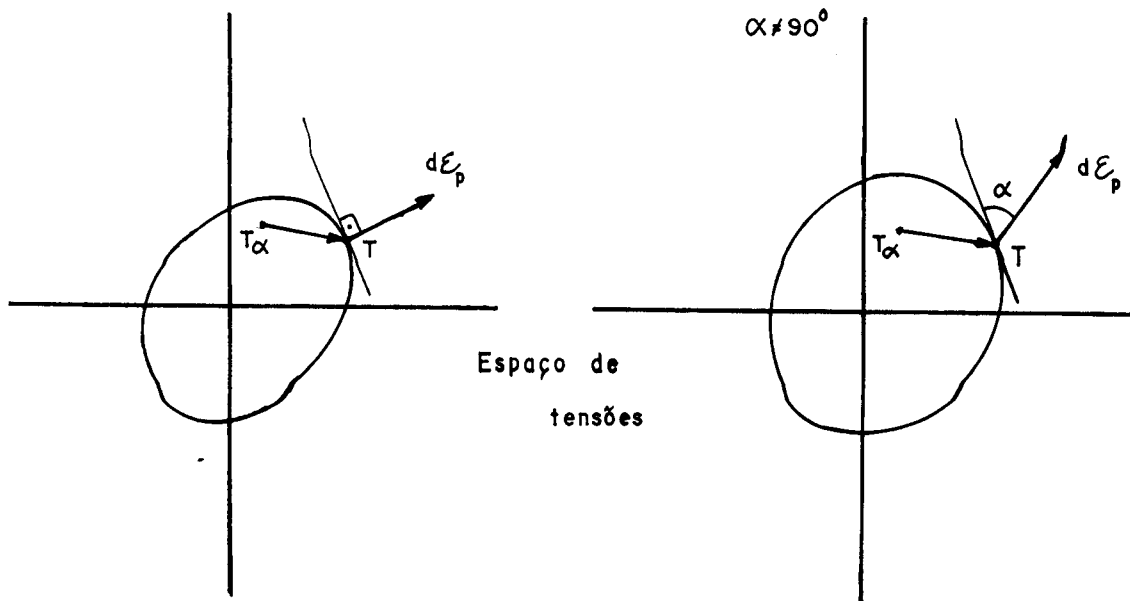
$$\oint \epsilon \cdot dT = (T - T_a) \cdot d\epsilon_p \geq 0 \quad (\text{Eq. A.13})$$

A expressão anterior pode ser interpretada geometricamente conduzindo às consequências mencionadas anteriormente.

Para que o produto interno indicado na equação A.13 seja sempre positivo ou nulo, é necessário que o vetor da variação das deformações plásticas, seja perpendicular a superfície de plastificação, caso contrário, sempre haverá um vetor variação de tensões que faz o resultado do referido produto interno ser negativo. As figuras A.04a e A.04b ilustram essa situação.

É preciso garantir ainda que a superfície seja convexa pois, do contrário, sempre será possível encontrar um ponto interno à superfície de plastificação ao qual está associado um vetor variação de tensões, cuja projeção na direção do vetor variação de deformações, leve a um resultado negativo

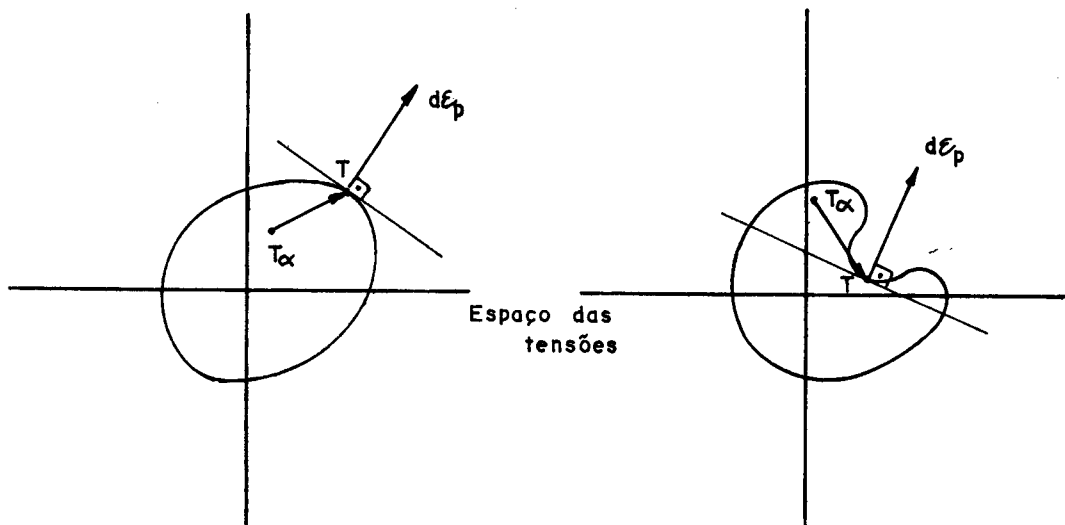
para o produto interno da equação A.13; as figuras A.05a e A.05b ilustram estas situações.



a) $d\epsilon_p$ normal a superfície de plastificação

b) $d\epsilon_p$ não perpendicular a superfície de plastificação

Fig. A.04- Lei da Normalidade



a) $d\epsilon_p$ normal a superfície côncava

b) $d\epsilon_p$ normal a superfície na parte convexa

Fig. A.05- Lei da normalidade e convexidade da superfície de plastificação

APÊNDICE B

IMPLEMENTAÇÃO DA NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Para efeito de implementação da não-linearidade geométrica nos algoritmos estudados, adotou-se um sistema de coordenadas lagrangeanas atualizadas, de modo a poder relacionar o estado de deslocamentos no equilíbrio em cada fase com a posição indeformada da estrutura. Estabelecido o sistema de coordenadas e definida a matriz geométrica dos elementos, tudo se passa a nível de um incremento de carga, como uma sucessão de etapas, correspondentes a cada iteração, que levam o elemento de um estado deformado inicial até a posição deformada final correspondente ao incremento em questão; a figura B.01 ilustra a sucessão de etapas.

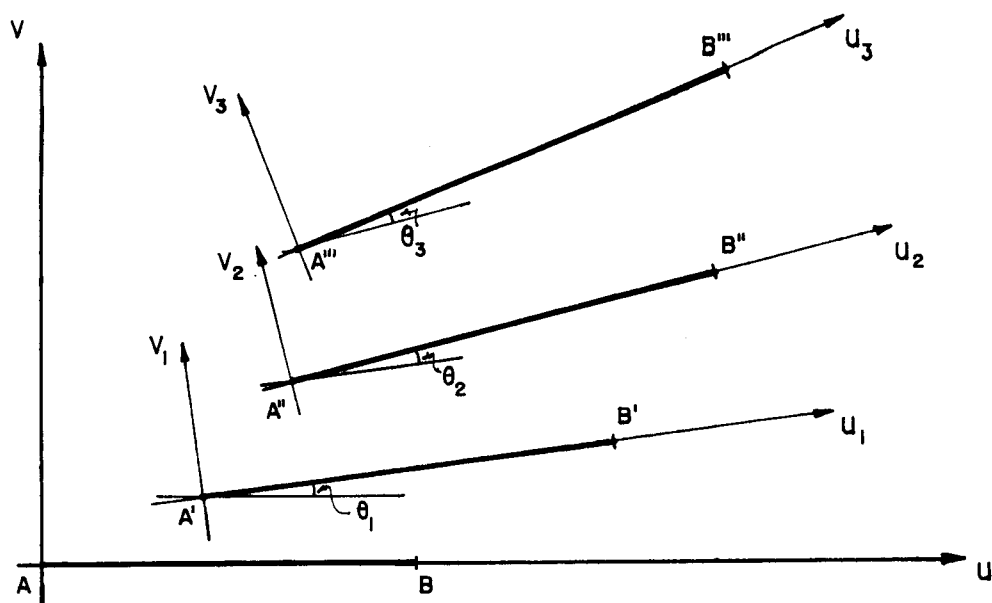


Fig. B.01 - Barra no sistema local " $u_i v_i$ " atualizado

Desta forma tem-se a cada iteração o cálculo dos novos cossenos diretores das barras. Com isto a rotação do sistema local das barras para o global da estrutura é feita sempre com base numa situação já deformada dos elementos.

É possível demonstrar que para as treliças vale a seguinte relação [4], [10]:

$$[ko] + [\Delta ko] = [T\theta]^t [ko] [T\theta] \quad (\text{Eq. B.01})$$

com:

$$[T\theta] = \begin{bmatrix} 1 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & -\theta & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. B.02})$$

Onde para valores pequenos de " θ " valem as relações " $\theta = \text{sen } \theta$ " e " $1 = \text{cos } \theta$ ".

Além disso, rotacionar a matriz da barra de um ângulo pequeno " θ " com relação ao sistema local da barra, e depois de um ângulo qualquer " α " com relação ao sistema global da estrutura, é equivalente a rotacionar a matriz da barra de um ângulo igual a " $\alpha + \theta$ ", que é a inclinação final da barra na etapa com relação ao sistema global. Assim é possível escrever que:

$$[kt] = [T\theta]^t [ko] [T\theta] + [kg] \quad (\text{Eq. B.03})$$

$$[kt]' = [T(\alpha + \theta)]^t [ko] [T(\alpha + \theta)] + [T\alpha]^t [kg] [T\alpha] \quad (\text{Eq. B.04})$$

onde:

- [T θ] - Matriz de rotação da barra para o sistema local
- [T α] - Matriz de rotação da barra para o sistema global
- [T($\alpha + \theta$)] - Matriz de rotação da barra já deformada para o sistema global
- [kt] - Matriz tangente no sistema local
- [kt]' - Matriz tangente no sistema global

No programa, por simplicidade, introduziu-se a seguinte expressão para o cálculo de [kt]':

$$[kt]' = [T(\alpha + \theta)]^t ([ko] + [kg]) [T(\alpha + \theta)] \quad (\text{Eq. B.05})$$

A diferença entre os resultados produzidos usando a equação B.04 e aqueles dados pela expressão B.05 é muito pequena já que entre uma iteração e a seguinte vale a suposição de "e" pequeno. Os exemplos estudados no capítulo 5 mostram que a formulação adotada produz bons resultados.

APÊNDICE C

FLUXOGRAMA PARA O BFGS COM ATUALIZAÇÃO DA MATRIZ DIRETA

VETBG - Diferença entre o estado deslocado "i" e "i-1"

VETBF - Diferença de resíduos nos estados "i" e "i-1"

GLOBM - Matriz de rigidez global

VBFG1, WBF1 - Escalares

VBFG3 - Controle da estabilidade numérica

NLIBS - Graus de liberdade da estrutura

