

ELEMENTOS DE AÇO FLEXO-COMPRESSOS

ERNANI CARLOS DE ARAÚJO

ORIENTADOR: PROF. DR. JOSÉ ELIAS LAIER

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
Departamento de Estruturas

ELEMENTOS DE AÇO FLEXO-COMPRIADOS

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

ERNANI CARLOS DE ARAÚJO

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São Paulo, como
parte dos requisitos para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: PROF. DR. JOSÉ ELIAS LAIER

SÃO CARLOS, 20 DE JANEIRO DE 1993

Class.	7250
PHA	A6580
Tombo	1000000000

DEDICATÓRIA

"Como é que bicho aprende? Como é que é? Tem diversas classes, não é? Passarinho. Conhece? Conhece. Já viu filhote no ninho, alí, no ninho dele? Então, aquilo leva tempo. Nasce miúdo, mais do que depois. Nasce alí, não sabe nada. É só abrindo o bico, esperando comida que a mãe traz. Aprende muito, até aprende a voar que é coisa que é mais do passarinho depois que ele cresceu. Pois aprende. Tudo é aprendido. Outras criações, eu não sei...boi, porco, cachorro. Cachorro aprende. Aprende com eles, aprende com nós, com o homem. Não é assim? Então. Criança aprende também, só que mais. Tá em casa, uma filha olhando uma mãe. Tá aprendendo. Um filho na roça, olha o pai, vê como ele faz. Faz do mesmo jeito, aprende. E mesmo que ninguém não ensine, ele aprende o ensino dele mesmo. De ver os mais velhos, do fazer igual, errando, pelejando."

(Trecho de uma entrevista feita com "Antônio Cícero de Sousa, lavrador de sítio entre Andradas e Caldas, no sul de Minas Gerais. O texto reproduz fielmente a fala do entrevistado.)

A meus pais Aparecido e Zuleide,

a minha esposa Luciana,

e a meus filhos Lucas e Francisco.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. José Elias Laier por sua orientação e estímulos na área das estruturas metálicas.

Aos professores José L. Z. Bonfá, Maximiliano Malite, Pierre A. Prelorentzou, Roberto Martins Gonçalves, e, em especial, ao professor José Jairo de Sales, pelo incentivo e colaboração.

À saudosa República dos Deuses pelas amizades e minha juventude.

A Escola de Minas / UFOP por suas virtudes acadêmicas e por minha formação.

Ao Escritório Piloto dos Estudantes da UFOP, por ter me possibilitado, acima de tudo, o senso crítico da vida.

Aos funcionários do Departamento de Estruturas / EESC/USP e, em especial, à Maria Nadir Minatel pelo apoio bibliográfico.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para esta realização e, em especial, à sociedade que despendeu os seus recursos.

RESUMO

A Norma Brasileira NBR 8800, baseada no "método dos estados limites" utilizada para projeto e execução de estruturas de aço de edifícios, é relativamente recente. Devido a este e a outros fatores, a sua utilização ainda é restrita nos meios técnicos e nas universidades.

Neste trabalho, são demonstradas e/ou discutidas as expressões regulamentadas pela norma brasileira. Estas expressões são relativas aos elementos "flexo-comprimidos", trabalhando como peças isoladas ou em conjuntos estruturais. Na sequência, é apresentado um roteiro de cálculo, onde se comparam os resultados com os de outras normas estrangeiras.

Nos apêndices, são fornecidas as teorias básicas utilizadas ao longo do trabalho.

ABSTRACT

Brazilian Standard NBR 8800, based on "limit state design", utilized to design and execution of building steel structure, it is relatively new. Due to this and others factors, its utilization is still restricted in technical means and in the universities.

In this work are demonstrated and/or discussed the expressions regulated by Brazilian Standard. These expressions are related to the "beam-column" elements, working as isolated members or as in structural members of a whole structure. In the sequence, it is introduced a computation scheme, where are compared the results with others due to foreign standards.

In the appendices, are provided the basic theories which were utilized along the work.

SUMÁRIO

DEDICATÓRIA	1
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	v
ABSTRACT	vii
SUMÁRIO	ix
SIGLAS	xix
SÍMBOLOS	xxi
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1 - MATÉRIA PRIMA	1
2 - PESQUISADORES	3
3 - NORMALIZAÇÕES	5
4 - ELEMENTOS FLEXO-COMPRESSOS	7

1	-	INTRODUÇÃO.....	19
2	-	FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO (FLT)	
	-	REGIME ELÁSTICO.....	21
2.1	-	Generalidades	21
2.2	-	Momento crítico de uma viga "I".....	22
2.3	-	FLT de seções retangulares estreitas e caixaõ bissimétricas de acordo com a NBR 8800.....	32
2.4	-	FLT de seções "U" simétricas em relação ao eixo "x", de acordo com a NBR 8800.....	33
2.5	-	FLT de seções "I" e "H" bissimétricas, de acordo com a NBR 8800.....	36
2.6	-	FLT de seções "I" simétricas em relação ao eixo "y", de acordo com a NBR 8800.....	37
2.7	-	FLT de seções "T" simétricas em relação ao eixo "y", de acordo com a NBR 8800.....	45
2.8	-	Momento Gradiente.....	48
2.9	-	Influência das condições de apoio e de carga no momento crítico.....	55
3	-	FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO	
	-	REGIME INELÁSTICO.....	60
3.1	-	Generalidades.....	60
3.2	-	Fórmula recomendada em projetos.....	65

3.3	-	Parâmetro de esbeltez " λ_r " para perfis "U" e "I", de acordo com a NBR 8800.....	68
3.4	-	Parâmetro de esbeltez " λ_r " para seções retangulares estreitas e caixaó bissimétricas, de acordo com a NBR 8800.....	68
3.5	-	Parâmetro de esbeltez " λ_r " para seções "I" monossimétricas, de acordo com a NBR 8800.....	69
3.6	-	Parâmetro de esbeltez " λ_r " para seções "T", de acordo com a NBR 8800.....	69
3.7	-	Espaçamentos entre apoios laterais de vigas sujeitas a momento de plastificação constante.....	69
3.8	-	Comprimento crítico e parâmetro de esbeltez " λ_p " para perfis "U" e "I", de acordo com a NBR 8800.....	72
3.9	-	Comprimento crítico e parâmetro de esbeltez " λ_p " para perfis "I" monossimétricos, de acordo com a norma NBR 8800.....	75
3.10	-	Comprimento crítico e parâmetro de esbeltez " λ_p " para perfis retangulares estreitos e caixaó bissimétricos, de acordo com a NBR 8800.....	78
4	-	FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO - REGIME PLÁSTICO.....	83
5	-	FLAMBAGEM LOCAL.....	94
5.1	-	Introdução.....	94

5.2	-	Flambagem de placas devido ao cisalhamento e tensões longitudinais não-uniformes.....	99
5.3	-	Simplificações para o cálculo de placas submetidas à compressão uniforme e sujeitas à flambagem ou pós-flambagem elásticas.....	107
5.4	-	Flambagem no regime de endurecimento por deformação.....	117
5.5	-	Flambagem local da mesa (FLM).....	124
5.5.1	-	Parâmetros de esbeltez " λ_r " de acordo com a NBR 8800.....	124
5.5.2	-	Parâmetros de esbeltez " λ_p " de acordo com a NBR 8800.....	127
5.6	-	Flambagem local da alma (FLA).....	129
5.6.1	-	Parâmetros de esbeltez " λ_r " de acordo com a NBR 8800.....	129
5.6.2	-	Parâmetros de esbeltez " λ_p " de acordo com a NBR 8800.....	134

CAPÍTULO 3 - COMPRESSÃO 137

1	-	GENERALIDADES.....	137
2	-	FLAMBAGEM POR FLEXÃO.....	143
2.1	-	Introdução.....	143
2.2	-	Flambagem de barras retas.....	144
2.3	-	Flambagem de barras com curvatura inicial.....	150
2.4	-	Flambagem de barras com cargas excêntricas.....	155
2.5	-	Flambagem inelástica.....	160

2.6	-	Curvas de flambagem.....	165
2.7	-	Comprimentos efetivos de flambagem.....	173
3	-	FLAMBAGEM POR TORÇÃO.....	175
4	-	FLAMBAGEM POR FLEXO-TORÇÃO.....	186
4.1	-	Equações diferenciais.....	186
4.2	-	Carga crítica para perfis assimétricos.....	198
4.3	-	Carga crítica para perfis monossimétricos..	201
CAPÍTULO 4 - FLEXO-COMPRESSÃO			205
1	-	INTRODUÇÃO.....	205
2	-	VIGAS-COLUNAS SUJEITAS A CURVATURA REVERSA.....	210
3	-	VIGAS-COLUNAS SUJEITAS A CURVATURA SIMPLES.....	216
4	-	MOMENTO EQUIVALENTE.....	221
5	-	EFEITOS P-DELTA.....	225
5.1	-	Generalidades.....	225
5.2	-	Efeito P- δ	225
5.3	-	Efeito P- Δ	232
6	-	VIGAS COLUNAS SUJEITAS A FLAMBAGEM POR FLEXO-TORÇÃO.....	240
7	-	EQUAÇÕES DE INTERAÇÃO.....	248

7.1	-	Equações para a estabilidade no plano de flexão no regime elástico.....	248
7.2	-	Equações para a estabilidade no plano de flexão no regime inelástico.....	253
7.3	-	Equações para estabilidade por flexo-torção nos regimes elástico e inelástico.....	265
7.4	-	Equações para estabilidade por flexão biaxial.....	270
CAPITULO 5 - EXEMPLO			285
1	-	OBJETIVOS.....	285
2	-	EXEMPLO PROPOSTO.....	285
2.1	-	Dados geométricos e ações.....	288
2.2	-	Esforços.....	289
2.3	-	Combinações das ações de acordo com a NBR 8800/86.....	296
2.4	-	Combinações das ações de acordo com a AISC/LRFD/86.....	299
2.5	-	Combinações das ações de acordo com a CAN3-S16.1-M84.....	301
2.6	-	Combinações das ações de acordo com a ECCS/81.....	302
2.7	-	Escolha dos perfis.....	305
2.8	-	Verificação da viga-coluna $\bar{24}$ de acordo com a norma NBR 8800.....	308
2.9	-	Verificação da viga-coluna $\bar{24}$ de acordo com a norma AISC/LRFD.....	314

2.10 - Verificação da viga-coluna $\overline{24}$ de acordo com a norma CAN3-S16.1-M84.....	326
2.11 - Verificação da viga-coluna $\overline{24}$ de acordo com a norma da ECCS/81.....	331
2.12 - Quadros resumos.....	336
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES	339
CAPÍTULO 7 - BIBLIOGRAFIA	347
APÊNDICE	
A - CONCEITOS BÁSICOS	367
1 - AÇO ESTRUTURAL.....	367
1.1 - Propriedades.....	367
1.2 - Tensões residuais.....	367
1.3 - Imperfeições geométricas.....	382
2 - COMPORTAMENTO ELASTO-PLÁSTICO.....	384
2.1 - Generalidades.....	384
2.2 - Flexão plástica.....	389
2.3 - Relação momento-curvatura.....	397
2.4 - Rótula plástica.....	403
2.5 - Redistribuição de momentos.....	406
3 - EQUAÇÕES DE INTERAÇÃO.....	414

3.1	-	Generalidades.....	414
3.2	-	Equação de interação para uma seção flexo-comprimida no limite elástico.....	417
3.3	-	Equação de interação para seções retangulares e "I" flexo-comprimidas na plastificação.....	420
4	-	ESTABILIDADE.....	427
4.1	-	Generalidades.....	427
4.2	-	Flambagem elástica na compressão simples...	433
4.3	-	Flambagem de placas.....	436
4.4	-	Flambagem por torção.....	445
4.5	-	Flambagem por flexo-torção.....	446
4.6	-	Flambagem lateral.....	448
B	-	PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS	453
1	-	ÁREA SETORIAL.....	453
2	-	RELAÇÃO DA ÁREA SETORIAL COM AS COORDENADAS.....	456
3	-	CENTRO DE CISALHAMENTO.....	458
4	-	MOMENTO ESTÁTICO SETORIAL.....	471
5	-	MOMENTO DE INERCIA SETORIAL.....	471
C	-	TORÇÃO	475
1	-	GENERALIDADES.....	475
2	-	TORÇÃO UNIFORME.....	476

2.1	-	Introdução.....	476
2.2	-	Deslocamentos.....	476
2.3	-	Deformações.....	478
2.4	-	Equação de equilíbrio e função de tensão...	480
2.5	-	Momento de torção em eixos.....	484
2.6	-	Analogia da membrana.....	486
2.7	-	Empenamento.....	505
3	-	TORÇÃO NÃO-UNIFORME.....	509
3.1	-	Introdução.....	509
3.2	-	Equação diferencial da torção não-uniforme.	513
D	-	MOMENTO GRADIENTE EM VIGAS	523
1	-	INTRODUÇÃO.....	523
2	-	MODELO ANALÍTICO.....	524
3	-	COEFICIENTES DE FLAMBAGEM.....	527
4	-	LIMITES PARA O FATOR DE MODIFICAÇÃO DOS MOMENTOS...	534
5	-	FATOR DE MOMENTO EQUIVALENTE (C_b).....	536
E	-	COMPRIMENTO EFETIVO DE ELEMENTOS DE PÓRTICOS	539
1	-	GENERALIDADES.....	539
2	-	ESTRUTURAS INDESLOCÁVEIS E DESLOCÁVEIS.....	540
3	-	RIGIDEZ.....	544

4	-	RIGIDEZ DE ELEMENTOS INDESLOCÁVEIS.....	545
5	-	RIGIDEZ DE ELEMENTOS DESLOCÁVEIS.....	550
6	-	FLAMBAGEM DE ESTRUTURAS INDESLOCÁVEIS DE NÓS RÍGIDOS.....	556
7	-	FLAMBAGEM DE ESTRUTURAS DESLOCÁVEIS DE NÓS RÍGIDOS.....	565

SIGLAS

- AISC - American Institute of Steel Construction
- ASCE - American Society of Civil Engineers
- ASD - Allowable Stress Design
- CAN - Norma canadense (Canadian Standards Association)
- CRC - Column Research Council
- ECCS - European Convention for Constructional Steelwork
- LRFD - Load and Resistance Factor Design
- LSD - Limit States Design

SÍMBOLOS

Letras romanas minúsculas

a	: constante genérica;
α	: ângulo;
a_o	: distância de um elemento de área ao eixo de torção;
b	: constante genérica;
b	: largura genérica;
b_c	: largura da mesa comprimida;
b_e	: largura efetiva;
b_f	: largura da mesa;
b_t	: largura da mesa tracionada;
d	: diâmetro em geral;
d	: altura da seção;
e	: constante (2.718281828);
e	: excêntricidade genérica;
e	: distância do eixo neutro ao final do núcleo elástico;
f	: tensão genérica;
f_a	: tensão aplicada;
f_e	: tensão elástica;
f_{ex} , f_{ey}	: tensões críticas de flambagem elástica por flexão, em relação aos eixos "x" e "y", respectivamente;
f_{ez}	: tensão crítica de flambagem elástica por torção;
f_{cr}	: tensão crítica;
f_{cr}	: tensão crítica de Euler;
f_i	: tensão ($i = 1, 2$);

f_i	: função em "s" ($i = 1, 2$);
f_{max}	: tensão máxima;
f_{re}	: tensão média reduzida;
f_p	: tensão no limite de proporcionalidade;
f_{pr}	: tensão no limite de proporcionalidade;
f_r	: tensão crítica na teoria do módulo reduzido;
f_r	: tensão residual;
f_{rc}	: tensão residual máxima na compressão;
f_t	: tensão crítica na teoria do módulo tangente;
f_x	: tensão normal na direção "x";
f_{xcr}	: tensão crítica de uma placa, na direção "x";
f_y	: tensão no limite de escoamento;
$f(z)$: função em "z";
h	: altura genérica;
h	: distância entre as faces internas das mesas;
h_c	: distância do centro de gravidade da mesa comprimida ao centro de gravidade da seção;
h_t	: distância do centro de gravidade da mesa tracionada ao centro de gravidade da seção;
i	: unidade imaginária ($\sqrt{-1}$);
i	: índice que assume valores genéricos;
j	: dimensão geométrica;
j	: distância de um eixo principal a uma posição genérica;
j	: letra utilizada em artifício matemático;
j	: número de soluções particulares linearmente independentes, de uma equação diferencial;

k	: constante genérica;
k	: coeficiente de flambagem de colunas;
k	: coeficiente de flambagem de placas;
k	: coeficiente linear de uma mola;
k	: coeficiente da variável "z", na solução particular $\theta = e^{kz}$;
k_i	: rigidez ($i = 1, 2$);
k_i	: raízes da equação característica ($i = 1, 2, 3$);
k_x	: propriedade de monossimetria;
k_x, k_y, k_z	: coeficientes de flambagem, relativos aos eixos "x", "y", e "z", respectivamente;
m	: constante genérica;
m	: relação adimensional entre tensões;
m	: relação entre o módulo de elasticidade longitudinal e o módulo de endurecimento por deformação;
m	: utilizada como artifício matemático;
m_z	: momento de torção por unidade de comprimento;
n	: constante genérica;
n	: letra utilizada em artifício matemático;
n	: número de soluções particulares linearmente independentes, de uma equação diferencial;
n	: grau de um polinômio;
p	: pressão (força por unidade de área);
q	: carga uniformemente distribuída;
q	: constante genérica;
q	: letra utilizada em artifício matemático;
r	: raio vetor;
r	: letra utilizada em artifício matemático;
r	: relação entre o menor e o maior momento de extremidade;

r_o	: raio de giração em relação ao centro de torção;
r_1	: raio de giração quando o centro de gravidade coincide com o centro de torção;
r_y	: raio de giração em relação ao eixo "y";
r_e	: raio de giração equivalente;
r_x, r_y	: raio de giração em relação ao eixo "x" e "y", respectivamente;
s	: relação entre a deformação unitária no regime de endurecimento por deformação e a deformação unitária no limite de escoamento;
s	: percurso ao longo da linha média da seção de um perfil genérico de paredes finas;
t	: espessura genérica de uma placa;
t_c	: espessura da mesa comprimida;
t_f	: espessura da mesa;
t_i	: temperatura ($i = 1, 2$);
t_t	: espessura da mesa tracionada;
t_v	: espessura da alma;
u	: componente de deslocamento na direção "x";
u_h	: solução geral da equação diferencial homogênea, do deslocamento "u";
u_p	: solução particular da equação diferencial do deslocamento "u";
v	: componente de deslocamento na direção "y";
v	: deslocamento de pontos do contorno médio de um perfil genérico de paredes finas, na direção "s";
v_o	: deslocamento;

x	: coordenada genérica na direção do eixo "x";
x_o	: coordenada do centro de torção;
x_{cc}	: diferença entre a coordenada do centro de cisalhamento e do polo "P ₁ ";
y	: coordenada genérica na direção do eixo "y";
y_o	: coordenada do centro de torção;
y_{cc}	: diferença entre a coordenada do centro de cisalhamento e do polo "P ₁ ";
y_1	: distância do centro de gravidade da seção ao centro de gravidade "C ₁ ";
y_2	: distância do centro de gravidade da seção ao centro de gravidade "C ₂ ";
z	: coordenada genérica na direção do eixo "z";
w	: componente de deslocamento na direção "z";

Letras romanas maiúsculas

A	: área da seção transversal;
A_1, A_2	: área da seção transversal, abaixo e acima do eixo neutro, respectivamente;
A_{ef}	: área efetiva;
A_F	: fator de amplificação dos momentos;
A_g	: área bruta;
A_i	: coeficientes de um polinômio de n-ésimo grau, da solução particular da equação diferencial não-homogênea ($i = 1, 2, \dots, n$);

- A_e : área descrita por raios vetores, desde um ponto tomado como origem, até um ponto qualquer ao longo do percurso "s" da linha média da seção;
- A_t, A_c : área da mesa tracionada e da mesa comprimida, respectivamente;
- A_t, A_ω : coeficientes de flambagem, associados aos dois casos hipotéticos de flambagem de vigas;
- A_v : área da alma;
- C : coeficiente experimental, determinado por Winter;
- C : constante devido à mudança de origem da área setorial;
- C : força de compressão;
- C_1, C_2 : centro de gravidade das áreas " A_1 " e " A_2 ", respectivamente;
- C_b : fator de momento equivalente para vigas;
- C_c : coeficiente numérico que depende da distribuição das cargas transversais ao longo do vão de uma viga;
- C_f : fator de correção que leva em consideração o grau de restrições de vãos adjacentes;
- C_i : constantes genéricas ($i = 1, 2, \dots$);
- C_m : fator de momento equivalente;
- C_{mx}, C_{my} : fator de momento equivalente para vigas-colunas, em relação ao eixo "x" e "y", respectivamente;
- C_ω : momento de inércia setorial, ou constante de empenamento;
- D : diâmetro;
- D_r : rigidez à flexão de uma placa;
- D_x, D_y : módulos ortotrópicos;

$D_{xy}, D_{yx}, 2H$: módulos ortotrópicos;
E	: módulo de elasticidade longitudinal;
E_r	: módulo reduzido;
E_{st}	: módulo de endurecimento por deformação longitudinal;
E_t	: módulo tangente;
G	: rigidez relativa genérica de um elemento;
G	: módulo de elasticidade transversal;
G_A	: rigidez relativa na extremidade "A";
G_B	: rigidez relativa na extremidade "B";
G_{st}	: módulo de endurecimento por deformação transversal;
H	: parâmetro utilizado na flambagem por flexo-torção;
I	: momento de inércia;
I_o	: momento de inércia polar;
I_c	: momento de inércia da coluna em relação a um dos eixos principais;
I_c	: momento de inércia da mesa comprimida em relação ao eixo "y";
I_f	: momento de inércia da mesa em relação ao eixo "y";
I_i	: momento de inércia do i-ésimo elemento, no plano de flexão;
I_p	: momento de inércia polar;
I_t	: momento de inércia da mesa tracionada em relação ao eixo "y";
I_T	: momento de inércia à torção;
I_v	: momento de inércia da seção de uma viga em relação a um dos eixos principais;
I_x, I_y	: momento de inércia em relação ao eixo "x" e "y", respectivamente;
L	: comprimento genérico;

L_1	: comprimento efetivo de flambagem;
L_b	: comprimento do trecho sem contenção lateral (ou destravado);
L_c, L_v	: comprimento da coluna e de uma viga, respectivamente;
L_{fl}	: comprimento de flambagem;
L_i	: comprimento do i-ésimo elemento;
L_p	: valor limite do comprimento de um trecho sem contenção lateral, correspondente ao momento de plastificação, sem redistribuição posterior de momentos;
L_{pd}	: valor limite do comprimento de um trecho sem contenção lateral, correspondente ao momento de plastificação, com redistribuição de momentos;
L_r	: comprimento do trecho sem contenção lateral, correspondente ao momento resistente elástico " M_r ";
M	: momento de flexão genérico;
M	: constante genérica;
M_1	: momento fletor total em uma posição genérica do eixo "z";
M_A, M_B	: momento de flexão nas extremidades "A" e "B" de uma barra, respectivamente;
M_{cr}	: momento crítico de flambagem lateral com torção;
M_{cru}	: momento crítico de flambagem uniforme;
M_{ct}	: momento crítico à torção hipotético, quando a rigidez ao empenamento é nula;
M_{cv}	: momento crítico de empenamento hipotético, quando a rigidez à torção é nula;

M_{dx}, M_{dy}	: momento fletor de cálculo fatorado, em relação aos eixos "x" e "y", respectivamente;
$M_{\theta q}$: momento uniforme equivalente;
$M_{I(max)}$: momento primário máximo de flexão;
M_m	: momento máximo de flexão;
M_{max}	: momento máximo de flexão;
M_n	: momento crítico nominal;
M_P	: momento das forças tangenciais em relação a um polo "P";
M_{pc}	: momento de plastificação modificado pela força axial de compressão;
M_{pL}	: momento de plastificação;
M_{px}, M_{py}	: momento de plastificação em relação aos eixos "x" e "y", respectivamente;
M_r	: momento fletor correspondente ao início do escoamento, incluindo ou não o efeito das tensões residuais;
M_t	: momento de torção;
M_t	: momento uniforme para flambagem sob tensões torcionais puras;
M_{tf}	: momento de torção resistente da mesa;
M_{tw}	: momento de torção resistente da alma;
M_u	: momento de flexão último;
M_{ux}, M_{uy}	: momento de flexão último, em relação aos eixos "x" e "y", respectivamente;
M_v	: parcela do momento de torção, resistida na forma de Saint Venant;
M_v	: parcela do momento de torção, resistida pela flexão na torção;
M_ω	: momento uniforme para flambagem sob tensões de empenamento puras;
M_x	: momento fletor em relação ao eixo "x";
M_y	: momento fletor em relação ao eixo "y";

M_y	: momento de flexão no limite do escoamento;
M_z	: momento de torção resultante em torno do eixo "z";
N	: força normal em geral;
N	: constante genérica;
N_y	: força normal de compressão no limite de escoamento;
P	: carga axial de compressão genérica;
P_c	: carga crítica;
P_{cr}	: carga crítica de Euler;
P_{cr}	: carga crítica elástica de flambagem por torção;
P_d	: carga axial de cálculo fatorada;
P_{ex}, P_{ey}	: cargas críticas de Euler em relação aos eixos "x" e "y", respectivamente;
P_E	: carga crítica de Euler;
P_i	: carga últimas em estágios de carregamentos ($i = 1, 2, 3$);
P_{max}	: carga máxima;
P_r	: carga crítica na teoria do módulo reduzido;
P_t	: carga crítica na teoria do módulo tangente;
P_u	: carga axial de compressão última;
P_{ux}, P_{uy}	: carga axial de compressão última, na ausência de momento de flexão, para flambagem em relação aos eixos "x" e "y", respectivamente;
$P(z)$: polinômio em "z";
P_y	: carga crítica de flambagem por flexão, em relação ao eixo "y";
P_y	: carga axial de compressão, no limite de escoamento;

P_z	: carga crítica de flambagem por torção;
Q	: força genérica;
Q	: fator de redução de um perfil que leva em conta a flambagem local;
Q_a	: fator de perfil para um elemento comprimido enrijecido;
Q_a	: fator de perfil para elemento comprimido não enrijecido;
Q_x, Q_y	: momentos estáticos em relação aos eixos "x" e "y", respectivamente;
R	: raio genérico de curvatura;
R	: capacidade de rotação de uma viga;
R_i	: relação genérica entre carregamentos ou tensões;
S_F	: rigidez genérica;
S_ω	: momento estático setorial;
T	: força de tração;
T_T	: torque total;
V	: energia potencial total;
V_x, V_y	: forças cortantes relativas aos eixos "x" e "y", respectivamente;
W	: módulo de resistência elástico;
W_x, W_y	: módulos de resistência elásticos em relação aos eixos "x" e "y", respectivamente;
W_c	: módulo de resistência elástico da mesa comprimida;
W_{ef}	: módulo de resistência elástico da seção transversal efetiva, relativo ao eixo de flexão;
Z	: módulo de resistência plástico;
Z_x, Z_y	: módulo de resistência plástico em relação aos eixos "x" e "y", respectivamente;

Letras gregas minúsculas

α	: parcela real de um número complexo;
α	: relação de aspecto ($\alpha = a/b$);
α	: ângulo;
α	: parâmetro característico das curvas de flambagem;
α	: rigidez de um elemento estrutural;
α_n	: fator de modificação dos momentos;
α_i	: rigidez do i-ésimo elemento;
α_i	: coeficientes que dependem das condições de apoio ($i = 1, 2, 3$);
α_t	: coeficiente de dilatação térmica linear do aço;
β	: coeficiente da parte imaginária de um número complexo;
β_x	: propriedade de monossimetria de um perfil;
γ	: esbeltez à torção ($\gamma = \pi^2 EC_{\omega} / L^2 GI_T$);
γ	: letra utilizada em artifício matemático;
γ	: deformação devido ao cisalhamento;
γ_{xy}	: deformação de cisalhamento, correspondente às direções "x" e "y";
γ_{xz}	: deformação de cisalhamento, correspondente às direções "x" e "z";
γ_{yz}	: deformação de cisalhamento, correspondente às direções "y" e "z";
δ	: deslocamento genérico;
δ	: coeficiente da variável "z", na função $f(z) = P(z) \cdot e^{\delta z}$;
δ_o	: deslocamento inicial no meio da barra;
δA	: área elementar;
$\delta\theta$: ângulo de rotação elementar;
δ_I	: deslocamento máximo primário;

δ_{II}	: deslocamento máximo secundário;
ε	: deformação unitária genérica;
ε_m	: deformação unitária máxima;
ε_t	: deformação unitária na tração;
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: deformações unitárias nas direções "x", "y", e "z", respectivamente;
ε_y	: deformação no limite de escoamento;
η	: parâmetro das imperfeições (constante de Perry);
η	: expoente da equação de interação não-linear, proposta por Chen;
θ	: ângulo de rotação da seção transversal em torno do centro de torção;
θ	: rotação das extremidades de um elemento estrutural;
θ	: rotação de uma viga;
θ_h	: solução geral da equação diferencial homogênea do ângulo de torção;
θ_H	: capacidade de rotação de uma viga;
θ_p	: rotação de uma viga comportando elásticamente, quando atinge o momento de plastificação;
θ_p	: solução particular da equação diferencial do ângulo de torção;
λ	: parâmetro de esbeltez genérica;
λ	: parâmetro de esbeltez de uma coluna ou de uma viga;
λ	: coeficiente da variável "z", na solução particular $u = e^{\lambda z}$;
λ_o	: parâmetro de esbeltez de uma placa no início do endurecimento por deformação;
λ_c	: parâmetro de esbeltez genérico de uma placa;

λ_p	: parâmetro de esbeltez correspondente à plastificação;
λ_{pr}	: parâmetro de esbeltez de uma placa no limite de proporcionalidade;
λ_r	: parâmetro de esbeltez correspondente ao início do escoamento;
λ_y	: esbeltez no limite de escoamento;
$\bar{\lambda}$: esbeltez reduzida ($\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_y$);
μ	: coeficiente de Poisson de um material genérico;
μ_i	: coeficiente que depende da diagrama de flexão de uma i-ésima viga;
ν	: fator de forma;
ν_a	: coeficiente de Poisson do aço;
ρ	: raio de genérico;
ρ	: relação entre resistências ($\rho = f/f_y = N/N_y$);
ρ_o	: distância do eixo de torção à fibra longitudinal média da seção do perfil;
ρ_1	: menor distância entre o centro de torção e um ponto genérico situado sobre a linha média da seção transversal de um perfil delgado aberto;
σ	: tensão normal genérica;
σ_z	: tensão na direção "z";
τ	: tensão genérica de cisalhamento;
τ_{max}	: tensão máxima de cisalhamento;
τ_v	: tensão de cisalhamento secundária;
τ_{xz}	: componente de cisalhamento na direção "z", atuante na face perpendicular ao eixo "x";
τ_{xy}	: componente de cisalhamento na direção "y", atuante na face perpendicular ao eixo "x";

τ_{yz}	: componente de cisalhamento na direção "z", atuante na face perpendicular ao eixo "y";
ϕ	: letra utilizada como artifício matemático;
ϕ	: função de tensão;
ϕ	: coeficiente genérico de resistência;
ϕ_b	: coeficiente de resistência para vigas;
ϕ_c	: coeficiente de resistência para colunas;
ϕ_l	: coeficiente de resistência para elementos tracionados;
φ	: fator de amplificação dos momentos;
χ	: curvatura ($\chi = 1/R$);
ψ	: letra utilizada em artifício matemático;
ψ	: ângulo;
ψ^i	: curvatura ($\chi = \psi^i = d\psi/dz = 1/R$);
ψ_y^i	: curvatura no limite de escoamento;
ψ_m^i	: curvatura máxima;
ω	: área setorial;
ω_o	: área setorial relativa a uma origem adotada;
ω_1	: área setorial em relação a um polo "P ₁ ";
ω_2	: área setorial em relação a um polo "P ₂ ";
ω_b	: fator de modificação dos momentos;
ω_{p1}	: área setorial, em relação a um polo arbitrário "P ₁ ";

Letras gregas maiúsculas

Γ	: definido pela expressão (87);
Δ	: deslocamento;
Δ	: deslocamento final;

Δ_I : deslocamento de primeira ordem;
 Δ_B : flexa no ponto "B";
 Δ_{ij} : determinante de linha "i" e coluna "j";
 ΔL : variação do comprimento;
 Ω : coeficiente da variável "z", da solução
 geral $\theta = e^{\Omega z}$;
 Ω_1, Ω_2 : raízes da equação característica.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1 - MATERIA PRIMA

Por mais de 5000 anos, a metalurgia do ferro e do aço foi exercida de maneira artesanal. Ela obteve aperfeiçoamentos com a descoberta de várias ligas metálicas. Chegou-se, assim, ao ferro gusa e ao aço.

Somente a partir do século XII, começou-se a utilizar o ferro como tirantes e pendurais. Devido às condições de desenvolvimento tecnológico da época, somente em meados do século XVI, iniciaram-se os processos de laminação, com a produção de laminados planos. Isto possibilitou a construção das primeiras estruturas de telhados com este material.

Por volta do início do século XVIII, surgiram os primeiros projetos de cilindros que permitiram a laminação de barras. Desta forma, foi possível o surgimento de grandes obras estruturais com elementos trabalhando exclusivamente à compressão, como por exemplo, em estruturas de pontes.

A tecnologia da laminação se desenvolveu e permitiu que, a partir do século XIX, surgissem as seções atualmente conhecidas como: os perfis "L", "U", "T", e "I".

Sendo que os primeiros trilhos surgiram em 1830, e os primeiros perfis "I" de ferro forjável apareceram na França em 1854. Com o aumento do consumo da produção, foi necessário desenvolver novos tipos de laminadores, surgindo em 1866 o primeiro laminador universal para vigas, em Saint Chamond, na França. Assim, as vigas de ferro forjado foram substituídas pelas vigas de aço laminado, a partir de 1885 nos Estados Unidos.

Já no final da última década do século passado, ao explorarem as características mecânicas do aço, obras de destaque foram construídas na Europa e nos Estados Unidos. Maiores progressos foram obtidos a partir da segunda guerra mundial com o aparecimento da solda elétrica e dos parafusos de alta resistência, que vieram a substituir os rebites. Isto possibilitou aperfeiçoar os métodos de execução das ligações nas estruturas de aço.

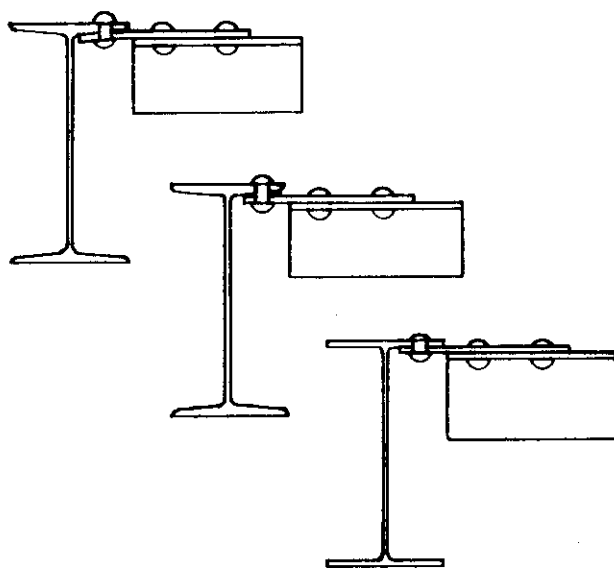


FIG.1 - Simplificações em ligações, obtidas pelo emprego de perfis de abas paralelas

No Brasil, os perfis de abas inclinadas, ou do tipo americano, são fabricados desde 1947 pela Companhia Siderúrgica Nacional (CSN). Nesta década, iniciaram-se na Europa os estudos dos perfis de abas paralelas, os quais foram lançados no mercado em 1959, substituindo e tornando obsoletos os perfis americanos de abas inclinadas (fig.1).

Nossas usinas tendem a laminar, a quente, os perfis estruturais como o perfil "I" de abas paralelas do tipo europeu (IPE), com suas dimensões no sistema métrico, seguindo as séries normalizadas e usadas naqueles países. Estes tipos de perfis ficam ao nível do desenvolvimento tecnológico das instalações de laminação e dos conhecimentos estáticos, capazes de garantir maior economia e um elevado padrão de qualidade das construções. A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) já possui nomenclatura para estes perfis, sendo: (a) perfil "IP"; (b) perfis "HP" ("HPL"-leves, "HPM"-médios, "HPP"-pesados); (c) perfis "U"; e (d) perfis "L" de abas iguais e desiguais.

Cumprе ressaltar que os perfis laminados sejam eles importados ou produzidos no nosso país, provavelmente não eliminarão a necessidade de se ter disponível uma gama de perfis soldados e dobrados, pois, somente da combinação destes produtos é que se obtém a mistura ideal para o desenvolvimento da estrutura metálica [8,9,10,49] [52,56,65] [68,70,89,104,109,110,120,123,128,129,136,153].

2 - PESQUISADORES

Os estudos dos corpos deformáveis iniciaram-se a partir de Leonard da Vinci (1452-1519) e Galileo (1564-1642). Sendo que Galileo foi o primeiro a apresentar estudos das propriedades dos materiais estruturais e o primeiro estudo da resistência das vigas. A lei de Hooke (1635-1703), formulada em 1678, simplificou estes estudos. O desenvolvimento, nesta área, conseqüentemente teve um novo impulso. Prosseguindo no estudo das deformações das barras,

Jacobi Bernoulli (1654-1705) deduziu a equação diferencial da linha elástica, e, mais tarde, Leonard Euler (1707-1783) apresentou a teoria da flambagem. Mas, foi somente a partir de Coulomb (1736-1806) e Navier (1785-1836) que houve maiores aperfeiçoamentos no estudo da flexão das vigas.

Durante mais de 100 anos, a teoria de Euler foi considerada incorreta, pois os seus resultados não concordavam com os resultados experimentais, e os recursos de cálculos tinham que se basear em fórmulas empíricas. Em 1845, Lanarle verificou que o erro não estava na fórmula, mas na sua aplicação em casos para os quais a fórmula não tem validade. Em 1889, Engesser advertiu a possibilidade de modificar a fórmula de Euler para torná-la aplicável ao cálculo da carga crítica da flambagem inelástica de colunas. Apresentou para isso a "teoria do módulo tangente". Em 1895, Jasinsky considerou incorreta a teoria deste módulo. Em consequência, Engesser formula outra teoria denominada de "teoria do módulo reduzido". Em 1947, Shanley mostrou o verdadeiro significado das duas teorias apresentadas por Engesser, pondo fim a uma controvérsia que durou mais de cinquenta anos.

Estudos apurados da torção e de flambagem lateral tiveram início a partir do século XIX. Em 1820, o engenheiro francês A. Duleau publicou uma solução analítica das hipóteses sobre a torção. Esta confirmou os estudos e hipóteses de Coulomb. Sendo que as investigações dos estudos relacionados com a flambagem lateral, acompanhada de torção em elementos sujeitos à flexo-compressão, foram iniciadas em 1899 por L. Prandtl. Em 1929, H. Wagner descobre a flambagem por flexo-torção. Dando seqüência a este desenvolvimento, em 1940, B. Z. Vlasov introduz a teoria das barras de seção delgada.

O desenvolvimento da teoria linear da flambagem de placas iniciou-se com Saint-Venant, o qual estabeleceu em 1870 a equação diferencial da flambagem de placas no plano. Em 1891, Bryan desenvolveu a expressão da energia de deformação de uma placa curva e tratou alguns casos simples

de flambagem de placas.

Avanços importantes têm sido levados a efeito por pesquisadores no nosso século. Em 1910, Timoshenko aplicou as teorias de Rayley (1877) e Ritz (1908) para resolver, de forma pioneira, os problemas de placas enrijecidas. Richardson (1910) sugeriu uma técnica de diferenças finitas para calcular as cargas críticas de flambagem. Von Karman (1910) foi o primeiro a desenvolver as equações que governam o comportamento elástico não-linear de placas isotrópicas homogêneas na forma de duas equações diferenciais parciais simultâneas de quarta ordem, em termos de deflexões transversais da placa, e de uma função de tensões para este comportamento. Além destes, outros pesquisadores deram contribuições importantes no estudo de placas carregadas transversalmente ao plano e com imperfeições iniciais. Dentre estes, podem ser citados: Maguerre (1937), Levi (1942), Conway (1949), Coan (1951), Bleich (1952), Yamaki (1959), e Bauer (1964) [2,58,59].

3 - NORMALIZAÇÕES

Normas são documentos oficiais utilizados na elaboração de projetos. Estas são escritas principalmente com o objetivo de proteger o público. Elas possuem um conjunto de regras, recomendações, especificações das propriedades dos materiais, pormenores de ligações, limitações das dimensões das peças estruturais, especificações construtivas, montagens, formulações, etc..

Embora o nosso país tenha reconhecimento internacional em construções de grandes obras de engenharia, em muitos casos, nós ainda dependemos largamente de princípios de cálculos adotados em outros países, o que, muitas vezes, foge da nossa realidade e confundem os projetistas pela adoção de um emaranhado conjunto de normas técnicas. No caso de cálculo de pontes metálicas, por exemplo, as normas brasileiras, em certos casos, são

inexistentes ou omissas. Recorre-se, então, às normas alemãs ou americanas. Portanto, para participar de concorrências nacionais ou internacionais existe a necessidade do conhecimento destas normas.

As primeiras Normas Brasileiras (NB) para edifícios foram aprovadas em 1958. Estas foram sendo usadas para o cálculo e a execução de estruturas de aço (NB-14) e para o cálculo e a execução de estruturas soldadas (NB-117), de acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Estas normas foram canceladas, englobadas e substituídas por outra. Esta foi também denominada de NB-14. Tal norma foi revisada em 1968 e, posteriormente, em 1981, foi baseada na norma norte americana AISC (American Institute of Steel Construction), com adaptações às condições ambientais e fatores meteorológicos de nosso país. É bom lembrar que até 1968, os critérios de cálculos eram baseados nas "tensões admissíveis", enquanto que, a partir de 1981, foi introduzido o critério dos "estados limites".

Somente em 1986, o Comitê Brasileiro de Construção Civil (CB-2) da ABNT apresentou a Norma Brasileira ABNT-NB-14 ou NBR 8800 com vistas a ser mais permanente. A norma NBR 8800 limita-se a projetos e execução de estruturas de aço de edifícios. Ela é baseada no "método dos estados limites" e substitui a antiga NB-14. Apresenta notável mudança em formato e escopo, e fornece vantagens nas simplificações dos dimensionamentos, assim como: melhor compreensão dos requisitos que uma estrutura deve preencher; níveis de confiabilidade mais coerentes; maiores visões de situações de projeto fora da rotina; possibilita dimensionar barras e ligações tanto na fase elástica como na fase plástica. E é baseada em critérios de dimensionamentos aceitos pela "International Organization for Standardization (ISO)". A norma NBR 8800 segue as recomendações do "Load and Resistance Factor Design" do American Institute of Steel Construction (AISC/LRFD), exceto para o caso das curvas múltiplas de flambagem, as quais são baseadas no modelo proposto pela "European Convention of Construction

Steelworks (ECCS)". Estas tenderão a ser usadas internacionalmente.

Apesar de todas as vantagens apresentadas pela norma NBR 8800, a maioria dos projetistas ainda não a utilizam ou não a dominam de forma segura e satisfatória. Os fatores que contribuem pela sua difícil utilização, nos meios técnicos são: sua recente introdução no nosso país; rejeições devido ao conservadorismo; difíceis adaptações de novas regras; falta de informações teóricas nas interpretações do seu conteúdo. Quanto às Universidades a dificuldade decorre de: falta de curriculum adequado, pequena ênfase no estudo das estruturas metálicas, poucas produções científicas na área, e a falta de bibliografia para apoio didático [8,9] [10,52,68,89,109,110,136].

4 - ELEMENTOS FLEXO-COMPRIADOS

Barras em compressão axial pura não existem praticamente em estruturas reais. Devido à continuidade entre os diversos elementos que a compõem, a compressão aparece quase sempre acompanhada por flexão.

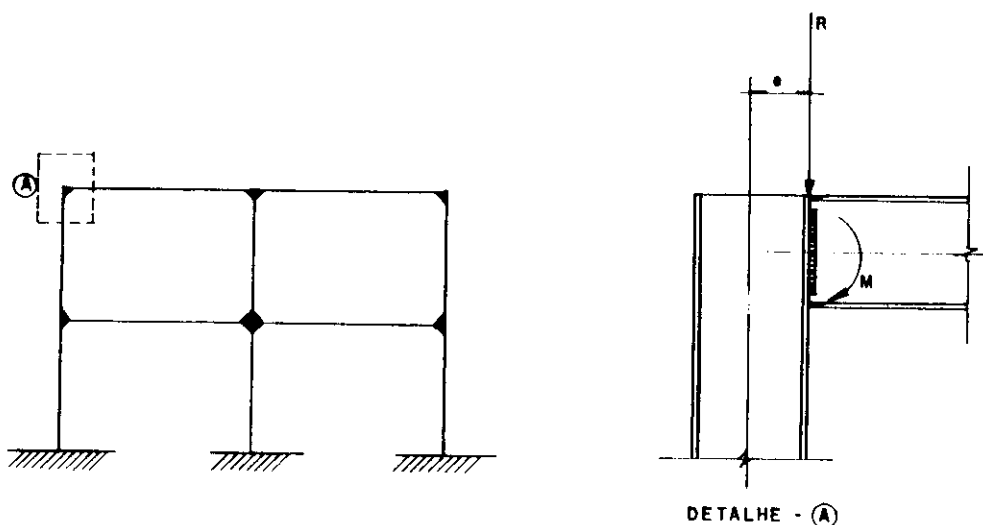


FIG.2 - Pórtico rígido

Neste trabalho, serão estudadas apenas as barras flexo-comprimidas de eixo reto e de seções constantes. Isto porque constituem a maioria dos elementos de pórticos e de treliças. Nestes elementos, além das forças axiais, aparecem os momentos de flexão devido às ações intermediárias. Estas atuam sobre os elementos, transmitindo momentos nos nós das ligações. Pode ocorrer ainda a flexão devido às ações paralelas aos eixos das barras que não coincidam com ele. Nos pórticos rígidos, os momentos de flexão são transmitidos através da rigidez dos nós ou dos apoios excêntricos (fig.2).

Nos pórticos contraventados, os momentos fletores são transmitidos pelas ligações excêntricas articuladas em relação aos eixos dos elementos que as apoiam (fig.3).

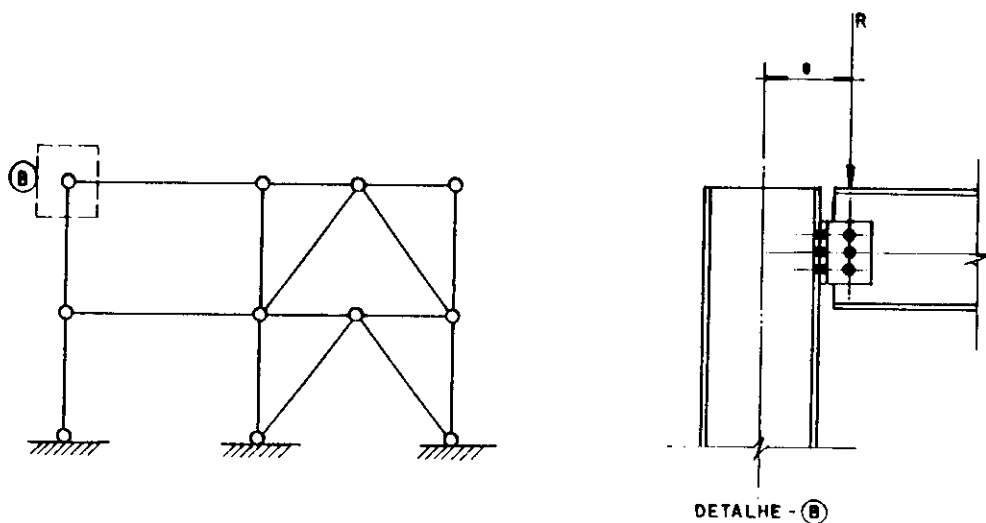


FIG.3 - Pórtico contraventado

Nas treliças, a flexão normalmente aparece na corda superior quando as ações são aplicadas fora dos seus

nós ou nas extremidades das barras, quando a rigidez dos nós não asseguram as articulações (fig.4). Nas treliças de coberturas e em vigas de rolamentos, as posições dos apoios também podem provocar excêntriciades, como mostra a figura 4.

Peças "flexo-comprimidas" são elementos estruturais submetidos à ação simultânea de forças normais de compressão e momentos fletores. Estas podem atuar em torno de um dos eixos principais (flexão uniaxial), ou podem ter componentes segundo os dois eixos principais (flexão biaxial) das seções transversais (fig.5).

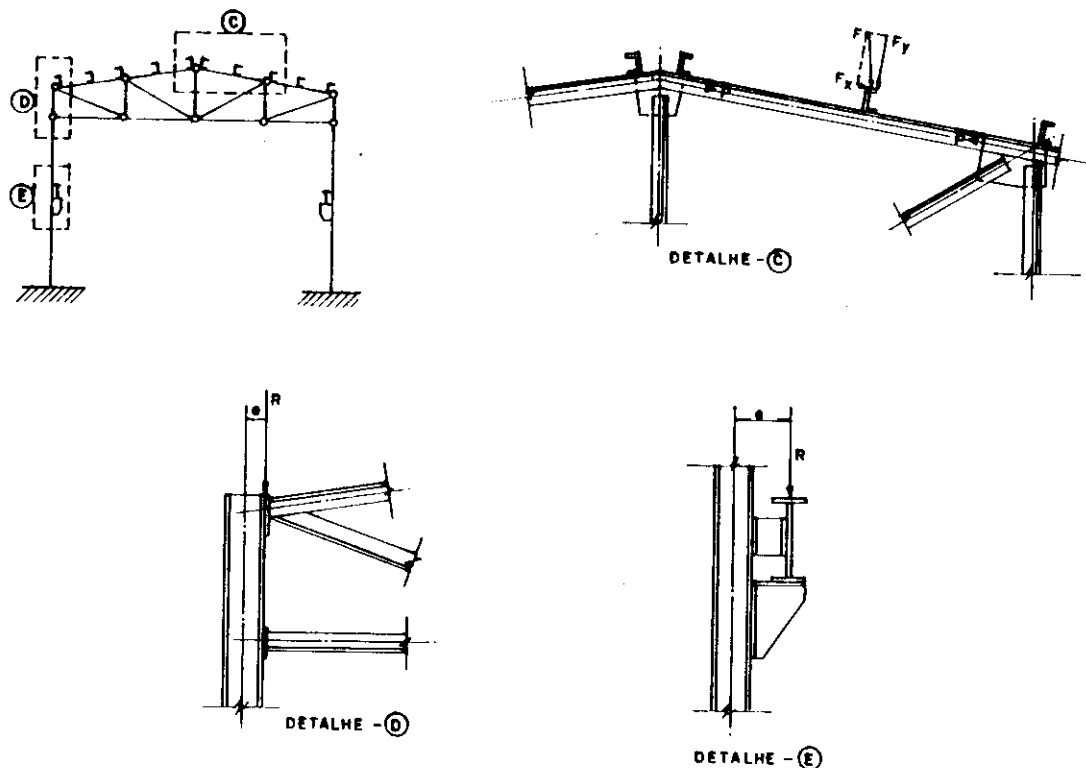


FIG.4 - Pórtico industrial treliçado

Os elementos flexo-comprimidos serão estudados como elementos isolados, em condições ideais de apoio de suas extremidades. Na realidade, a maioria dos elementos estão conectados a outros elementos, para formar a estrutura. Como resultado, o comportamento destes elementos será afetado por todos os elementos adjacentes da estrutura.

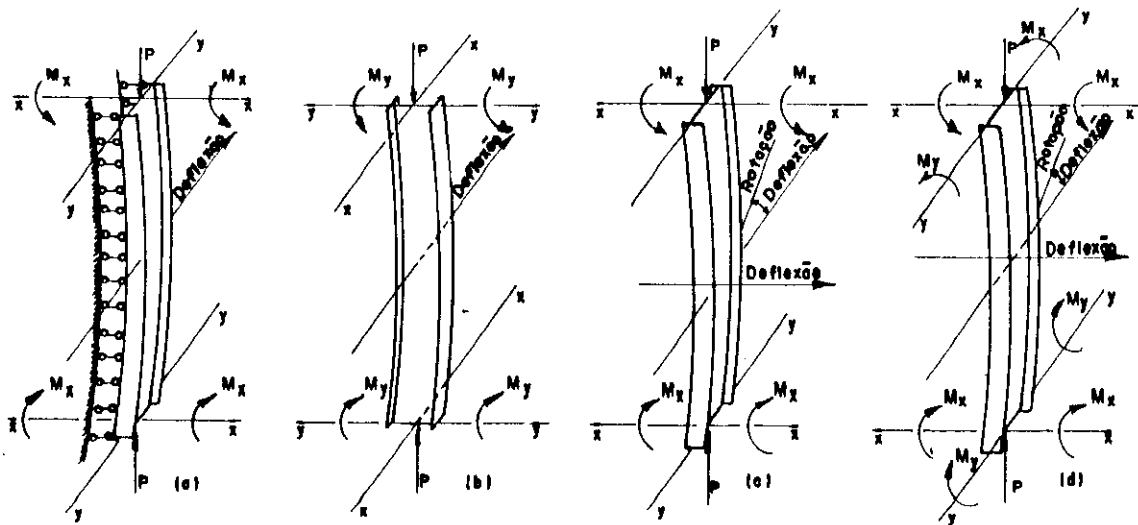


FIG.5 - Elementos flexo-comprimidos

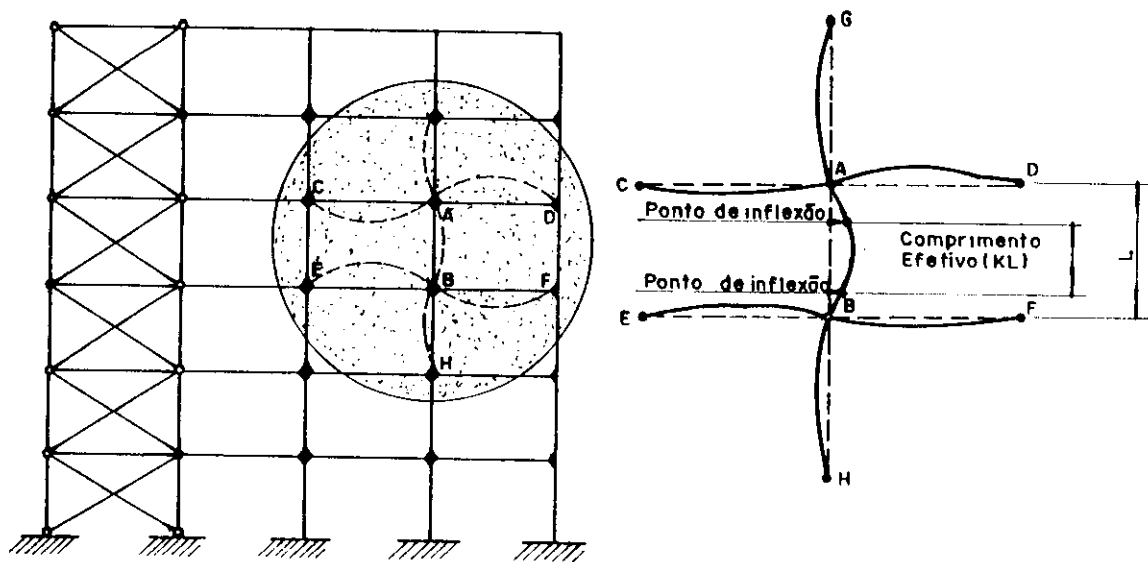


FIG.6 - Estrutura indeslocável: no detalhe, observa-se que o comprimento efetivo de flambagem (kL) tende a ser menor do que o comprimento real (L).

Então, a influência de outros elementos no elemento particular em questão deve ser levada em consideração nos dimensionamentos ao investigar a estabilidade da estrutura como um todo, e ao observar em particular, que os comportamentos dos elementos são diferentes, quando estes pertencem a estruturas indeslocáveis (fig.6) ou deslocáveis (fig.7).

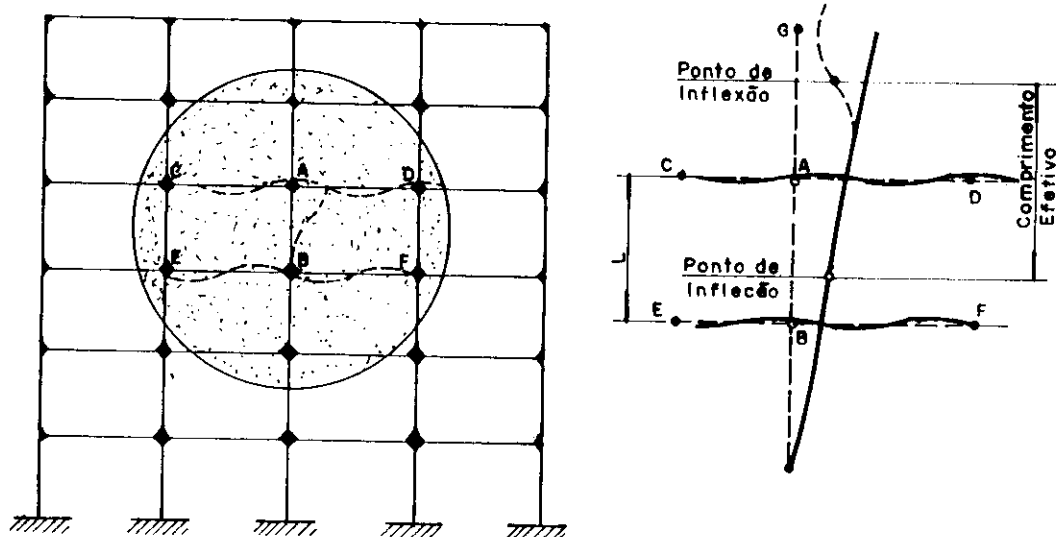


FIG.7 - Estrutura deslocável: no detalhe, observa-se que o comprimento efetivo de flambagem (kL) tende a ser maior do que o comprimento real (L).

Com a exceção de peças muito curtas, o comportamento de barras flexo-comprimidas constitui um problema de instabilidade, pois a interação da força axial com a flexão provocam deformações que crescem rapidamente com as aplicações das cargas. As deformações continuam aumentando até um limite em que estas cessam caracterizando

a ruína. Este fenômeno se deve ao fato de que, ao deformar o eixo da barra por ação das forças transversais, e/ou dos momentos aplicados em seus extremos, (fig.8), as forças axiais produzem momentos fletores secundários proporcionais aos deslocamentos e às intensidades das cargas aplicadas. Isto faz com que a resposta das peças flexo-comprimidas não seja linear na análise elástica.

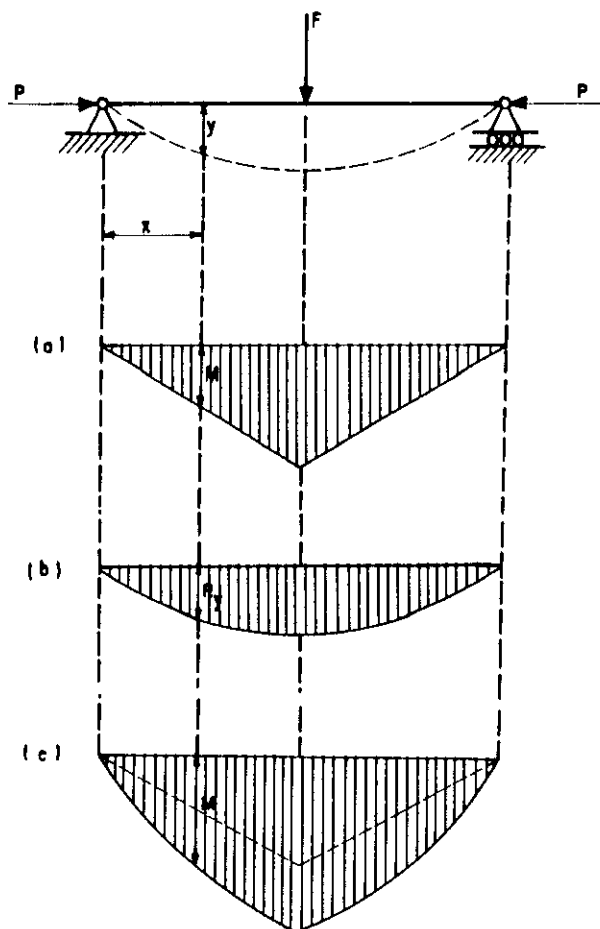


FIG.8 - Interação da compressão axial com a flexão: (a) diagrama de momentos primários; (b) diagrama de momentos secundários; (c) diagrama de momentos totais.

Um elemento flexo-comprimido pode estar sujeito aos seguintes prováveis modos de ruínas:

- **RUÍNA POR ESCOAMENTO.** Isto ocorre devido ao momento (uniaxial ou biaxial) e à força axial combinados, ao formar articulações plásticas na seção, ou nas seções em que

o momento tem sua maior intensidade.

Este modo é crítico em peças curtas e de chapas grossas não havendo possibilidade de ruptura por instabilidade. Pode ser crítico também em peças maiores. Estas em determinadas condições de apoios e de carga podem formar-se articulações plásticas em um ou em dois extremos (fig.9).

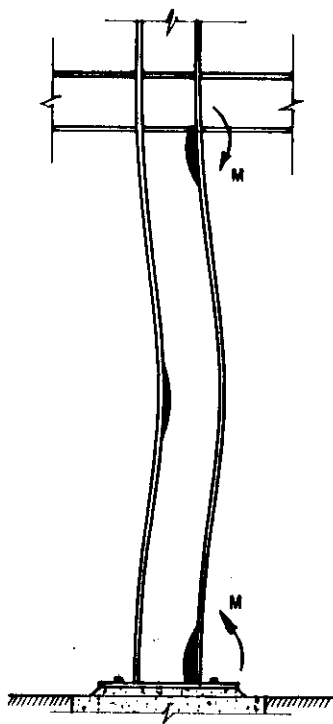


FIG.9 - Instabilidade plástica por flexo-compressão: formações de rótulas plásticas.

- RUÍNA POR INSTABILIDADE EM APENAS UM PLANO. Este modo é crítico em barras fletidas em torno de seus eixos de menor ou maior inércia. Porém, no caso da flexão em torno do eixo de maior inércia, a flambagem lateral deve ser impedida ou pelas características geométricas das seções (tubulares, ou outras com grande resistência à torção), ou pela presença de elementos externos de contraventamentos (fig.10).

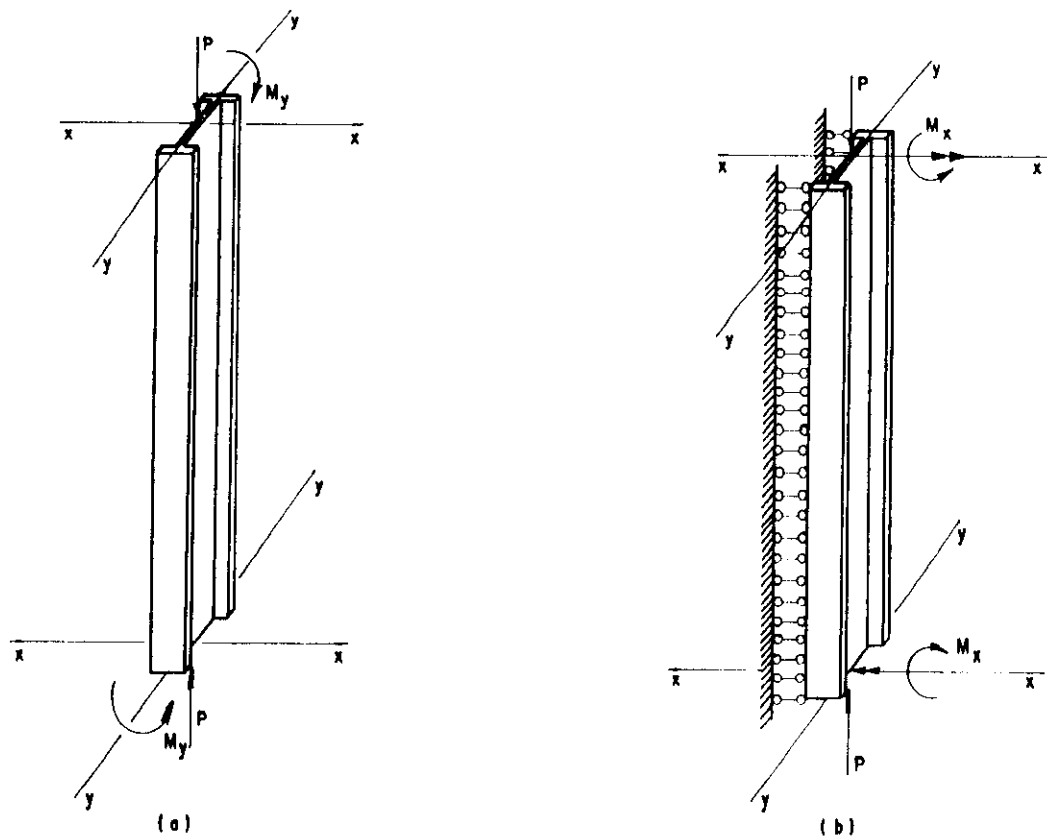


FIG.10 - Instabilidade em um plano: (a) para o eixo de menor inércia, (b) para o eixo de maior inércia.

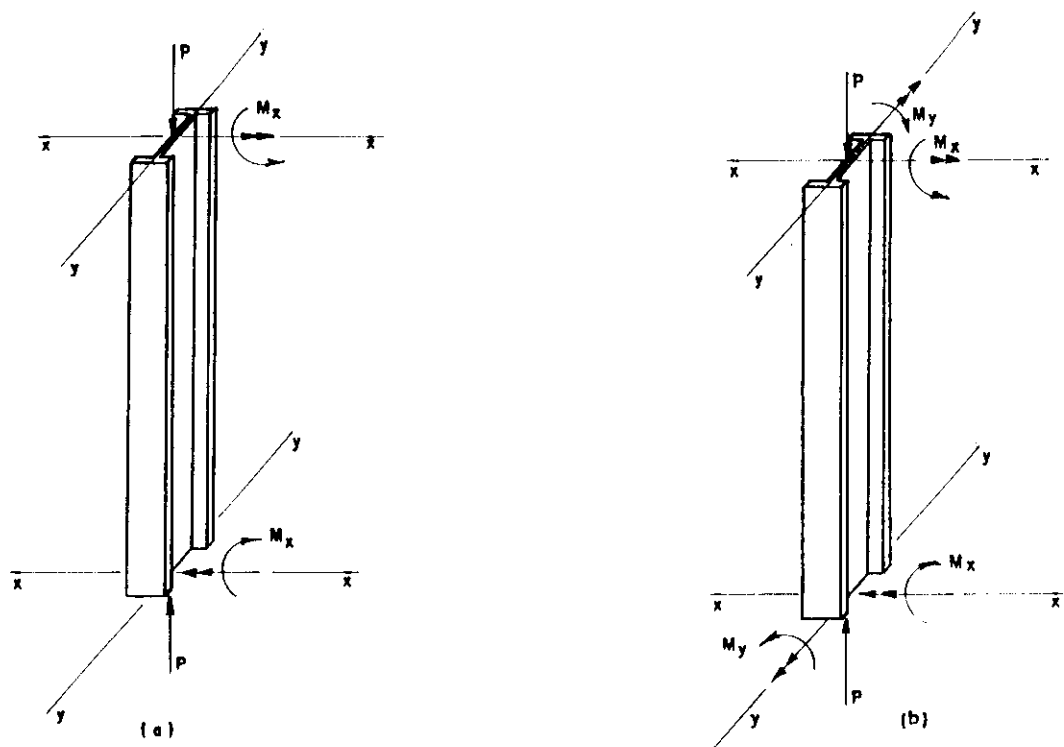


FIG.11 - Instabilidade por flexo-torção: (a) uniaxial, (b) biaxial.

- **RUÍNA POR FLAMBAGEM LATERAL, DEVIDO A FLEXO-TORÇÃO.** Durante este tipo de flambagem, a deformação de uma seção transversal constitui de translação e de rotação simultâneas em torno do centro de cisalhamento. Por este motivo, é de fundamental importância a determinação deste centro geométrico.

A flambagem por flexo-torção é crítica em elementos de seção "I" ou similares de seções abertas, por se flexionarem em torno dos seus eixos de maior inércia, ou por estarem desprovidos de elementos externos adequados de contraventamentos (fig.11). Isto pode ocorrer também em elementos comprimidos axialmente com flexão biaxial simultânea (fig.11), cujas seções são abertas e fracas torcionalmente.

Os fatores que influenciam a flexão e a torção simultâneas (flexo-torção) são: (a) baixa rigidez torcional, tendo em vista que esta varia com o cubo das espessuras das chapas; (b) falta de simetria dupla da seção, isto faz com que o centro de gravidade e o centro de cisalhamento não coincidam; (c) falta de elementos externos de contraventamentos para impedir a flambagem lateral ou a torção.

- **RUÍNA POR FLAMBAGEM LOCAL.** Os perfis que constituem os elementos estruturais, sejam laminados, soldados, ou dobrados, são formados por um conjunto de chapas planas retangulares ligadas entre si. Quando os perfis trabalham submetidos à compressão, à flexão, ou cortante, seus elementos de chapas podem alcançar um estado de equilíbrio instável, conseqüentemente, flambam-se localmente antes que a peça rompa integralmente, originando, daí, uma ruína prematura caracterizada por uma distorção das seções transversais do perfil (fig.12).

A flambagem local é crítica quando as relações entre a largura e a espessura dos elementos planos que compõem o perfil estão acima de certos limites previstos nos estudos da flambagem de chapas.

De maneira análoga ao que sucede em outros elementos estruturais, é difícil, em geral, saber previamente qual será a forma de ruptura de um elemento flexo-comprimido, submetido a solicitações conhecidas, pois pode ser necessário determinar várias cargas de ruína, sendo que a menor delas, corresponderá à capacidade real de carga do elemento estrutural.

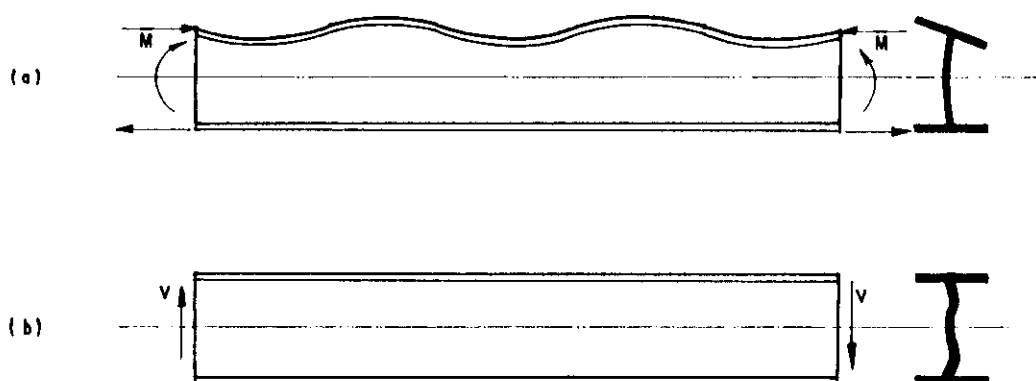


FIG.12 - Flambagem local: (a) flambagem da mesa comprimida; (b) flambagem devido ao cisalhamento.

Várias técnicas analíticas e verificações experimentais possibilitaram solucionar os problemas relacionados com os elementos flexo-comprimidos. Quando a flexão e a compressão atuam simultaneamente em regime elástico, a relação momento-curvatura é linear, e as soluções das equações de forma analítica são perfeitamente tratáveis. Mas, se aqueles efeitos ocorrerem em regime inelástico, a relação momento-curvatura torna-se não-linear, então o uso da matemática formal, para solucionar as equações diferenciais que governam o problema, tornam-se

muito complexas, e os recursos dos métodos numéricos são inevitáveis [2,14,26] [28,41,58,69] [79,93,107] [119,125,141,158].

CAPÍTULO 2

FLEXÃO

1 - INTRODUÇÃO

A figura 1 mostra o comportamento geral de uma viga, cuja seção transversal pode ser de simples ou de dupla simetria fletindo em torno de seu eixo de maior inércia.

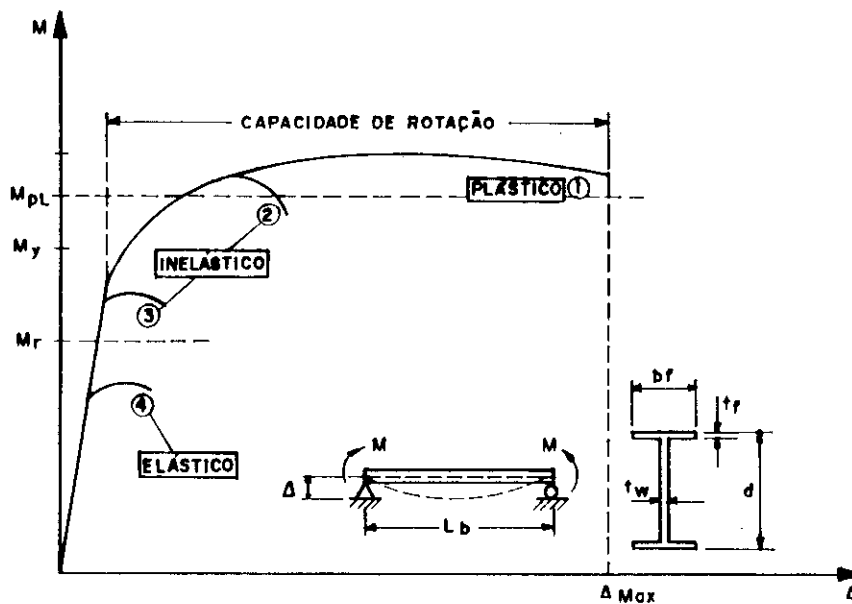


FIG.1 - Comportamento de uma viga "I"

Considera-se, ainda, como base para o estudo da flambagem lateral, que a viga esteja bi-apoiada tal que o comprimento destravado seja igual ao vão e que a distribuição de momentos seja uniforme. Fazendo uma analogia entre a mesa comprimida da viga com uma coluna, observa-se que o momento uniforme causará compressão constante ao longo do comprimento destravado. No entanto se existir variação do momento, a força de compressão será variável resultando em uma diminuição média da força de compressão e, conseqüentemente, diminuindo a probabilidade de ocorrer flambagem lateral.

A viga pode falhar por flambagem lateral, pela flambagem da mesa comprimida ou pela flambagem da alma. De modo que qualquer um destes estados limites pode ocorrer em qualquer estágio do carregamento, independente de ter alcançado ou não o momento de plastificação.

O comportamento de uma viga pode ser classificado em três categorias:

I - regime plástico: é caracterizado pela capacidade da seção transversal em atingir o momento de plastificação, " M_p ", e manter sua resistência através de rotação suficiente capaz de permitir a redistribuição de momentos em estruturas indeterminadas (curva-1, fig.1);

II - regime inelástico: a instabilidade ocorre após ocorrer o escoamento parcial ou total da seção transversal. Mas, antes da falha, ocorre apenas um pequeno acréscimo da deformação inelástica, (curvas 2 e 3, fig.1);

III - regime elástico: a flambagem ocorre enquanto a seção transversal se mantém na fase elástica.

As vigas reais usualmente falham nos regimes I e II, enquanto que o regime III fornece a base teórica para o estudo dos regimes I e II. Além disso tem a sua importância nas verificações de peças que estão em fase de montagem e

que ainda não estão adequadamente contraventadas.

Para muitos perfis usuais, a esbeltez da mesa e da alma são suficientes para permitir que a viga atinja a região plástica; isto se o espaçamento entre os contraventamentos laterais forem satisfatórios. Devido a estes motivos será dada uma importância maior ao estudo da flambagem lateral com torção [171].

2 - FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO (FLT) - REGIME ELÁSTICO

2.1 - Generalidades

Quando uma viga flete em torno de seu eixo de maior inércia, ocorrerá flexão fora do plano desta ação e, simultaneamente, ocorrerá torção. Isto acontecerá quando a carga aplicada atingir o seu valor crítico e se não existirem travamentos laterais que impeçam o livre deslocamento da viga. Em uma viga geometricamente perfeita, sua carga crítica corresponde ao ponto de bifurcação do equilíbrio, quando a deformação no plano de flexão deixar de ser estável, e as deformações fora do plano de flexão e de torção tornam-se a configuração estável do elemento. Como no estudo das barras comprimidas para encontrar a carga crítica de uma viga, deve-se estabelecer primeiro suas condições de equilíbrio em uma configuração levemente deformada. A carga crítica ou de flambagem lateral com torção é assim obtida como sendo o menor valor que satisfaz a equação característica das equações diferenciais que traduzem o comportamento da viga. Neste caso, as hipóteses a serem consideradas são:

- viga geometricamente perfeita;
- cargas aplicadas somente no plano do eixo de menor inércia;
- deflexão pequena do elemento;

- a geometria da seção transversal não varia durante a flambagem [41].

2.2 - Momento crítico de uma viga "I"

Considere-se uma viga "I" simplesmente apoiada sujeita a um par de momentos iguais e opostos atuando no plano "yz" (fig.2-a). A condição de apoios simples, usada no contexto da instabilidade de vigas, significa que as suas extremidades são livres para girar em torno de dois eixos principais "x" e "y", mas a rotação da seção transversal em torno do eixo "z" é impedida (fig.2-b e 2-c).

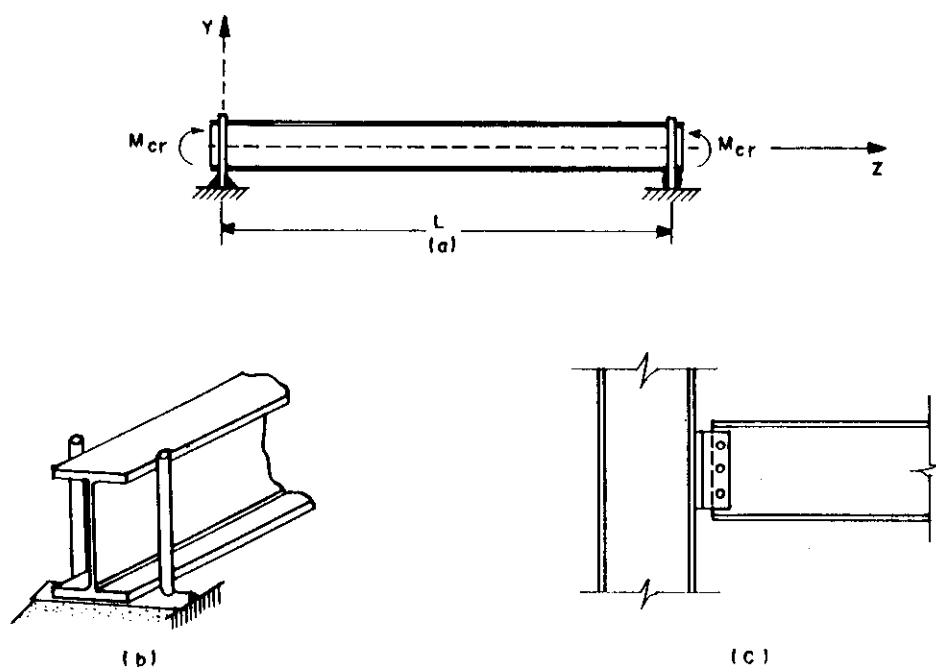


FIG.2 - a) Viga "I" ; b) Apoio ideal ; c) Apoio real

Sob a ação dos momentos aplicados, a viga fletirá no plano "yz". Com o aumento dos momentos, a condição de estabilidade será atingida. A deformação no plano da viga deixa de ser estável, e esta assume pequenas deformações, possibilitando a torção e a flexão fora do seu plano. A viga é estável e parecida com esta nova configuração. A menor carga, para a qual esta condição ocorre, é a carga crítica

da viga.

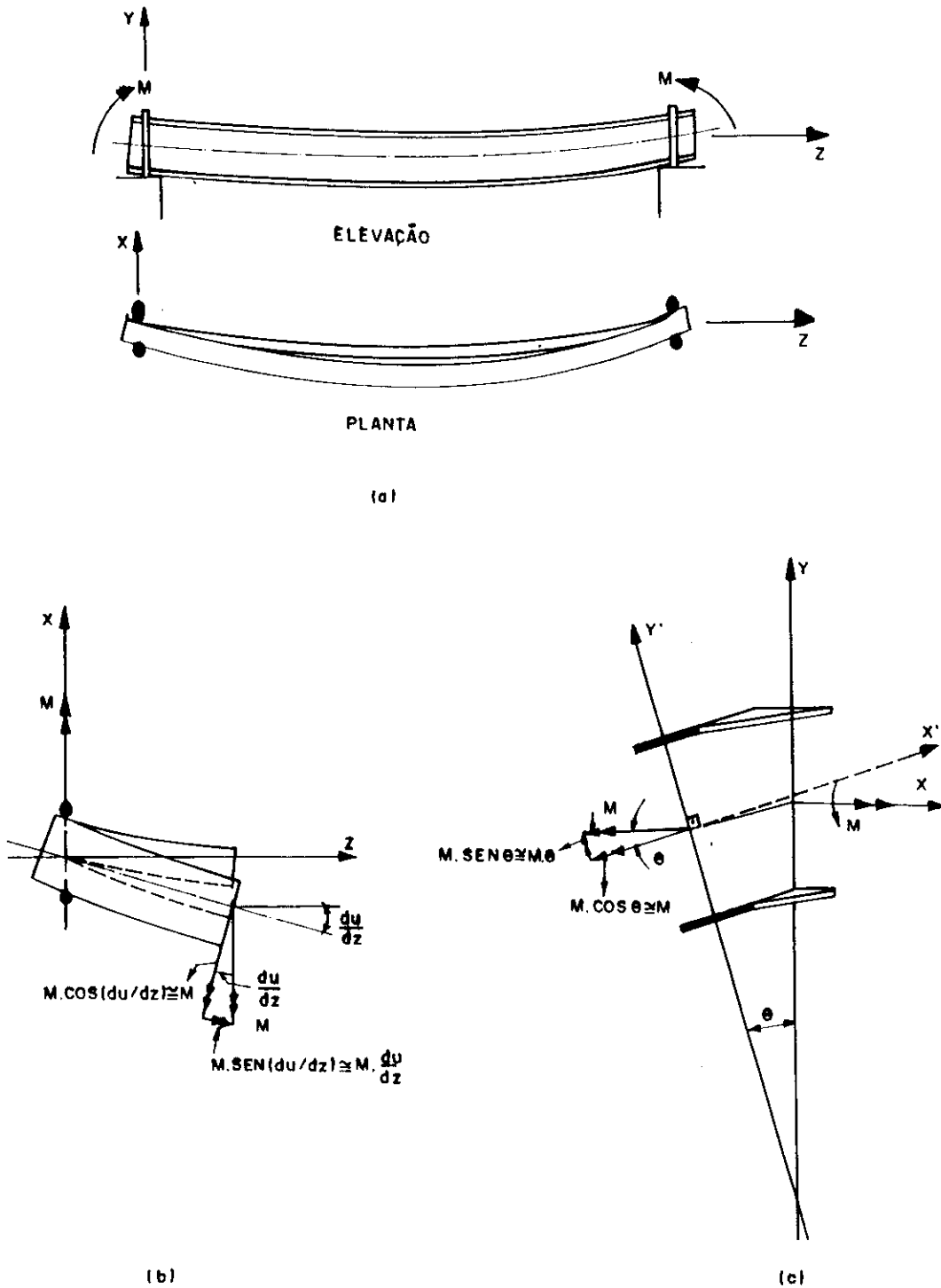


FIG.3 - Viga de perfil "I" em posição levemente deformada

Para determinar a carga crítica da viga, é necessário estabelecer as equações de equilíbrio que governam a configuração estável ligeiramente deformada da

viga. Através da figura 3, observa-se que para uma seção transversal genérica, três componentes de deslocamentos diferentes são necessários para definir a posição da seção transversal. Eles são: o deslocamento "v" no plano; o deslocamento "u" fora do plano e a rotação "θ" da seção transversal. Para facilitar a análise, serão estabelecidos dois sistemas de coordenadas. O primeiro é formado pelos eixos "xyz". Estes serão fixos na posição original indeformada da viga. O segundo sistema é formado pelos eixos "x'y'z'". Estes são coordenados fixos, em relação à seção transversal, que movimenta para uma posição genérica deformada (fig.3).

Os eixos "x'" e "y'" coincidem com os eixos principais da seção, e o eixo "z'" é sempre tangente à linha de centro na posição defletida da viga.

Primeiramente, estabelece as expressões para os momentos provocados pelas cargas externas em uma posição arbitrária do eixo "z". As equações diferenciais são, então, obtidas igualando os momentos externos com os correspondentes momentos internos resistentes da seção transversal. Como se trata de considerar as flexões no plano da viga e fora dele, assim como a torção, o problema da flambagem lateral com torção deve ser resolvido tridimensionalmente sendo, portanto, mais complexo do que o estudo no plano. Será usada a regra da mão-direita para representar os vetores momentos. Serão considerados positivos, quando estiverem nos mesmos sentidos dos eixos coordenados e negativos, em caso contrário. Lembrando que o momento de torção externo na direção do eixo "z'" será negativo, pois este momento penetra na seção transversal. Usando estas convenções, da figura 3, os momentos externos que atuam na seção transversal em relação aos eixos "x'", "y'" e "z'", serão:

$$\left[M_{x'} \right]_{EX} = - M \cdot \cos \theta \quad (1)$$

$$\left[M_{y'} \right]_{EX} = M \cdot \sin \theta \quad (2)$$

$$\left[M_{z'} \right]_{EX} = - M \cdot \text{sen}(du/dz) \quad (3)$$

sendo $\cos\theta \cong 1$, $\text{sen}\theta \cong \theta$ e $\text{sen}(du/dz) \cong du/dz$ para ângulos pequenos, então (1), (2) e (3) tornam-se:

$$\left[M_{x'} \right]_{EX} = - M \quad (4)$$

$$\left[M_{y'} \right]_{EX} = M \cdot \theta \quad (5)$$

$$\left[M_{z'} \right]_{EX} = - M \cdot (du/dz) \quad (6)$$

Os momentos internos resistentes, serão:

$$\left[M_{x'} \right]_{IN} = E \cdot I_x \cdot (dv^2/dz^2) \quad (7)$$

$$\left[M_{y'} \right]_{IN} = E \cdot I_y \cdot (d^2u/dz^2) \quad (8)$$

$$\left[M_{z'} \right]_{IN} = G \cdot I_T \cdot (d\theta/dz) - E \cdot C_\omega \cdot (d^3\theta/dz^3) \quad (9)$$

sendo que as equações (7) e (8) são deduzidas em estudos clássicos da linha elástica, enquanto que a equação (9) foi deduzida no apêndice "C", no item correspondente à torção não-uniforme.

Analisando as equações (7), (8) e (9) e assumindo-se que o ângulo de rotação " θ " é pequeno então, as curvaturas e momentos de inércia em relação aos planos " $y'z'$ " e " $x'z'$ ", podem ser representados por seus correspondentes valores nos planos " yz " e " xz ", respectivamente. Os sentidos das curvaturas estão de acordo com aquelas provocadas pelos momentos aplicados em torno dos eixos " x " e " y ". Portanto, os dois membros das equações (7) e (8) são positivos. Por outro lado, deve ser lembrado que, na dedução da equação (9), o momento de torção aplicado foi considerado positivo quando o sentido deste momento, de

acordo com a regra da mão-direita, saiu da seção transversal. Tendo em vista estas observações, e igualando-se as equações correspondentes aos momentos externos e internos, tem-se:

$$EI_x v'' + M = 0 \quad (10)$$

$$EI_y u'' - M\theta = 0 \quad (11)$$

$$-EC_\omega \theta'' + GI_T \theta' + Mu' = 0 \quad (12)$$

As equações anteriores mostram que a equação (10) possui somente a variável "v" e é independente das outras duas equações. De fato, esta equação descreve o comportamento no plano de flexão da viga, e esta ocorre antes da instabilidade lateral. Ela não é importante para o comportamento da flambagem lateral com torção fora do plano de flexão em análises de flambagem de pequenos deslocamentos. O comportamento da flambagem da viga é descrito pelas equações (11) e (12), sendo estas acopladas, tendo "u" e "θ" como variáveis.

Diferenciando a equação (12), em relação a "z", e combinando com a equação (11), tem-se:

$$-EC_\omega \theta'' + GI_T \theta'' + M^2 \theta / EI_y = 0 \quad (13)$$

que é a equação diferencial para o ângulo de torção. Dividindo a equação (13) por "EC_ω", e chamando de:

$$2a = GI_T / EC_\omega \quad (14)$$

$$b = M^2 / E^2 I_y C_\omega \quad (15)$$

obtem-se:

$$\theta'' - 2a\theta'' - b\theta = 0 \quad (16)$$

A equação (16) é uma equação diferencial de quarta ordem com coeficientes constantes. A solução particular é do tipo $\theta = e^{kz}$. Introduzindo suas derivadas em (16) e simplificando, chega-se na sua equação característica:

$$k^4 - 2ak^2 - b = 0 \quad (17)$$

Chamando de $m = k^2$ em (17) e resolvendo chega-se a:

$$m = a \pm \sqrt{a^2 + b} \quad (18)$$

Então, sendo $m = k^2$, de (18) determinam-se as raízes da equação característica (17) :

$$k_1 = + \sqrt{a + \sqrt{a^2 + b}} \quad (19)$$

$$k_2 = - \sqrt{a + \sqrt{a^2 + b}} \quad (20)$$

$$k_3 = + \sqrt{a - \sqrt{a^2 + b}} \quad (21)$$

$$k_4 = - \sqrt{a - \sqrt{a^2 + b}} \quad (22)$$

como $\sqrt{a^2 + b} > a$, " k_1 " e " k_2 " serão raízes reais, e " k_3 " e " k_4 " serão imaginárias. Chamando de $n = a + \sqrt{a^2 + b}$ em (19) e (20), e de $(-q) = a - \sqrt{a^2 + b}$ em (21) e (22), tem-se que $k_1 = +\sqrt{n}$, $k_2 = -\sqrt{n}$, $k_3 = +\sqrt{q} \cdot i$, $k_4 = -\sqrt{q} \cdot i$, onde " i " é uma unidade imaginária. Para simplificar os desenvolvimentos algébricos será feito $j = \sqrt{n}$ e $r = \sqrt{q}$. Como a toda raiz real simples corresponde a uma solução particular $\theta = e^{kz}$, tem-se que $\theta_1 = e^{k_1 z} = e^{jz}$ e

$\theta_2 = e^{k_2 z} = e^{-jz}$. E ainda, a todo o par de raízes complexas $k = \alpha \pm \beta i$, correspondem a duas soluções particulares $e^{\alpha z} \cos \beta z$ e $e^{\alpha z} \sin \beta z$, então $\theta_3 = \cos rz$ e $\theta_4 = \sin rz$. Tendo-se "n" soluções particulares linearmente independentes " θ_1 ", " θ_2 ", " θ_3 " e " θ_4 " forma-se a solução da equação (16) [133]:

$$\theta = C_1 \cdot \theta_1 + C_2 \cdot \theta_2 + C_3 \cdot \theta_3 + C_4 \cdot \theta_4 \quad (23)$$

Sendo " C_1 ", " C_2 ", " C_3 " e " C_4 " constantes arbitrárias e substituindo os valores de " θ_1 ", " θ_2 ", " θ_3 " e " θ_4 " em (23), tem-se:

$$\theta = C_1 \cdot e^{jz} + C_2 \cdot e^{-jz} + C_3 \cdot \cos rz + C_4 \cdot \sin rz \quad (24)$$

as constantes " C_1 ", " C_2 ", " C_3 " e " C_4 " podem ser determinadas a partir das condições de extremidades da viga. Sendo as rotações das seções transversais impedidas nos apoios, tem-se $\theta = 0$ em $z = 0$ e $\theta = 0$ em $z = L$. As outras duas condições de contorno podem ser obtidas, verificando-se que o empenamento é livre nas extremidades da viga (ver apêndice "C"). Neste caso, $\theta^{II} = 0$ em $z = 0$ e $\theta^{II} = 0$ em $z = L$. Impondo as duas primeiras condições em (24), e as duas últimas, na derivada segunda de (24), obtém-se:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0 \quad (25)$$

$$C_1 e^{jL} + C_2 e^{-jL} + C_3 \cos rL + C_4 \sin rL = 0 \quad (26)$$

$$C_1 j^2 + C_2 j^2 - C_3 r^2 = 0 \quad (27)$$

$$C_1 j^2 e^{jL} + C_2 j^2 e^{-jL} - C_3 r^2 \cos rL - C_4 r^2 \sin rL = 0 \quad (28)$$

multiplicando (25) por j^2 e subtraindo de (27), tem-se:

$$C_3 (j^2 + r^2) = 0 \quad (29)$$

sendo $(j^2 + r^2) \neq 0$, conclui-se que:

$$C_3 = 0 \quad (30)$$

levando (30) em (25), tem-se:

$$C_2 = -C_1 \quad (31)$$

Levando (30) e (31) em (26) e (28), encontram-se:

$$C_1 \left(e^{jL} - e^{-jL} \right) + C_4 \operatorname{sen} rL = 0 \quad (32)$$

$$C_2 j^2 \left(e^{jL} - e^{-jL} \right) - C_4 r^2 \operatorname{sen} rL = 0 \quad (33)$$

fazendo $(e^{jL} - e^{-jL})/2 = \operatorname{sen} hjL$ em (32) e (33), tem-se:

$$2C_1 \operatorname{sen} hjL + C_4 \operatorname{sen} rL = 0 \quad (34)$$

$$2C_1 j^2 \operatorname{sen} hjL - C_4 r^2 \operatorname{sen} rL = 0 \quad (35)$$

multiplicando (34) por " r^2 " e somando com (35), tem-se:

$$2C_1 (j^2 + r^2) \operatorname{sen} hjL = 0 \quad (36)$$

como $(j^2 + r^2)$ não pode ser zero, e $\operatorname{sen} hjL$ pode ser zero somente se $j = 0$, então " C_1 " deve ser igual a zero. Finalmente, sendo $C_1 = 0$, $C_2 = -C_1 = 0$ e $C_3 = 0$, da equação (24), conclui-se que a solução geral da posição deformada da viga é dada por:

$$\theta = C_4 \operatorname{sen} rz \quad (37)$$

Na flambagem lateral com torção para que a viga assuma uma posição diferente da situação reta " C_4 " não pode ser igual a zero. A rotação " θ " deverá ser zero nas duas extremidades da viga, a partir de (37). Fazendo $z = 0$, tem-se uma solução e para $z = L$, tem-se:

$$\text{senrL} = 0 \quad (38)$$

o valor mínimo de "r" que satisfaz (38) é:

$$r = \frac{N\pi}{L} \quad (39)$$

onde "N" é um número inteiro, e para o modo fundamental de flambagem, assume o valor "1".

O valor de "M" que satisfaz (39) é o momento crítico da viga. Sendo $(-q) = a - \sqrt{a^2+b}$ e $q = -a + \sqrt{a^2+b}$, tem-se que $r = \sqrt{q} = \sqrt{-a + \sqrt{a^2+b}}$. Levando "r" em (39), e elevando ao quadrado ambos os membros da equação, encontra:

$$-a + \sqrt{a^2+b} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \quad (40)$$

levando (14) e (15) em (40) e explicitando $M = M_{cr}$, tem-se finalmente:

$$M = M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{\pi E}{L}\right)^2 I_y C_\omega + E I_y G I_T} \quad (41)$$

A equação (41) mostra que o momento crítico depende de três tipos de rigidez: a flexão ($E I_y$), a torção ($G I_T$) e ao empenamento ($E C_\omega$). Para uma viga "I", de espessura das chapas $t = \text{constante}$, largura "b" das mesas e altura "h" entre os mesmos, o momento de inércia setorial é igual a $C_\omega = t h^2 b^3 / 24$ (ver apêndice "B"). Neste caso, supondo "t" e "b" invariáveis, aumentando-se a distância entre as mesas, aumenta-se o momento crítico, pois " C_ω " é proporcional ao quadrado da altura "h".

Na dedução da equação (41), assumiu-se a postura de que a deflexão no plano yz não afeta no comportamento da flambagem lateral com torção da viga. Esta hipótese é justificada quando a rigidez à flexão " $E I_x$ " é muito maior do que a rigidez " $E I_y$ ", tal que a deflexão, neste plano, será

desprezível comparada com a deflexão fora do plano da viga. Se a rigidez " EI_x " e " EI_y " são de mesma intensidade, o efeito da flexão, no plano vertical "yz", pode ser importante, e teria de ser considerado na determinação do momento crítico. Uma solução aproximada, que inclui os efeitos da deflexão, no plano, é dada na referência [93]. Esta usa um coeficiente " γ " que divide o segundo termo sob o radical da equação (41), ficando assim:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{\pi E}{L}\right)^2 \frac{I_y C \omega}{\gamma} + \frac{EI_y G I_T}{\gamma}} \quad (42)$$

onde:

$$\gamma = \frac{I_x - I_y}{I_x} \quad (43)$$

Em (43), fazendo-se $I_x = I_y$, tem-se $\gamma = 0$; então o momento crítico, fornecido por (42), será infinito. Se $I_y > I_x$, " γ " torna-se negativo, e o momento crítico será imaginário. Então, para os casos onde " I_y " é igual ou superior a " I_x ", não existe solução. Assim, pode-se concluir que a flambagem lateral com torção da viga só é possível, se a seção transversal possuir rigidez diferentes em dois planos principais, e as cargas aplicadas atuarem no plano do eixo de menor inércia. Como resultado, a flambagem lateral torcional nunca ocorrerá em seções transversais circulares, ou seções caixão quadradas, em que todos os elementos de placas têm a mesma espessura.

As análises anteriores sugerem que a forma da seção transversal seja um parâmetro particularmente importante na avaliação da capacidade de flambagem lateral de uma viga. Portanto, o problema da instabilidade lateral pode ser minimizado, ou até eliminado através de uma judiciosa escolha da seção.

Serão ilustrados agora os efeitos das grandezas geométricas " I_y " e " I_T ", no cálculo do momento crítico. A equação (41) mostra que o valor do momento crítico pode ser

aumentado, aumentando-se os valores de " I_y " e/ou " I_T ". Assim, perfis como aqueles mostrados na figura 4, possuem momentos críticos maiores do que perfis "I" usuais. Comparando os perfis das figuras 4-a e 4-b com um perfil "I" de medidas totais semelhantes, verifica-se que as seções das figuras 4-a e 4-b possuem inércia em relação ao eixo "y" maior do que a de um perfil "I" visto que os enrijecimentos das mesas aumentam consideravelmente a inércia " I_y ", devido às suas distâncias àquele eixo. Esta mesma observação é válida para o perfil da figura 4-c, onde o material das duas almas aumenta muito o valor de " I_y " quando comparado com um perfil "I" de mesma área. Portanto, a maior estabilidade lateral é obtida usando seções fechadas, tal como vigas caixão (fig.4-d). Nestes tipos de perfis, além de " I_y " ser alto, devido as duas almas, suas rigidez a torção aumentam muito com o aumento de " I_T " [2,41,72,93,119,133,140,141,157,171].

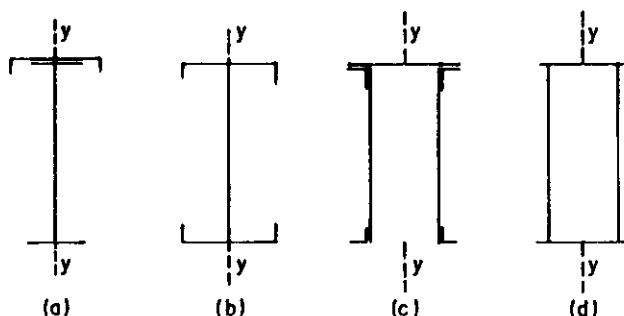


FIG.4 - Comparações entre seções

As seções do tipo "I" são mais comumente usadas porque elas são mais fáceis de fabricar e, particularmente, por serem mais fáceis de fazer união com outros elementos.

2.3 - FLT de seções retangulares estreitas e caixão bissimétricas de acordo com a NBR 8800

Nestes tipos de seções, os empenamentos das seções

transversais podem ser considerados desprezíveis.

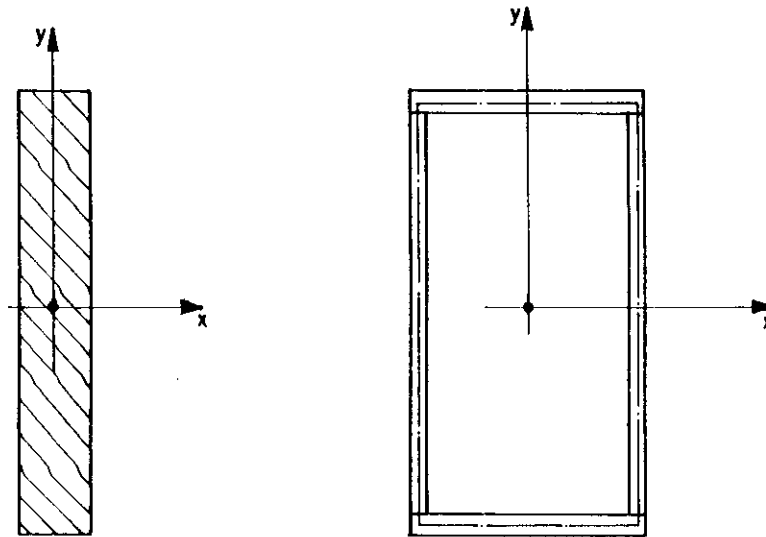


FIG.5 - Seções retangular estreita e caixão

O momento de inércia setorial pode ser desprezado, em relação ao momento de inércia à torção (fig.5). Portanto, o momento crítico para estes tipos de seções deverá ser maior devido ao significativo aumento nos valores de " I_y " e " I_T ". Fazendo-se $C_\omega = 0$, na equação (41), tem-se:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GI_T} \quad (44)$$

Da resistência dos materiais, sabe-se que $G = E/2(1+\nu_a)$, sendo $\nu_a = 0.3$ para o aço, então $G = 0.385E$. Sendo também $I_y = A.r_y^2$, e $\lambda = L/r_y$ ($L = L_b =$ trecho sem contenção lateral), a partir de (44) chega-se a:

$$M_{cr} = \frac{1.95E}{\lambda} \sqrt{I_T \cdot A} \quad (45)$$

sendo a equação (45) encontrada no anexo "D" da NBR 8800.

2.4 - FLT de seções "U" simétricas em relação ao eixo "x" de acordo com a NBR 8800

Para os propósitos de projeto, a referência [83] indica que a equação (41), para perfis "I" bissimétricos, pode ser aplicada também a perfis "U".

Esta aproximação é justificada devido ao fato de que o momento de inércia setorial aproximado de perfis "U" ($C_{\omega} = I_f h^2/2$, onde " I_f " é o momento de inércia da mesa, em relação ao eixo "y"), ser essencialmente igual ao momento de inércia setorial de perfis "I" simétricos ($C_{\omega} = I_y h^2/4$, desprezando a contribuição da alma). Na equação (41), " C_{ω} " entra somente no segundo termo sob o radical. Este termo será um valor considerável do valor total sob o radical, quando a relação C_{ω}/I_T for grande, como no caso de perfis "U" com almas finas. O segundo termo será também considerável quando o comprimento destravado for pequeno. Como foi mostrado na equação (41). Portanto, quando a equação (41) for usada para determinar o momento crítico de perfis "U", os valores do " M_{cr} " serão mais altos do que os valores corretos, mas o erro poderá ser, no máximo, igual a 6% em casos extremos.

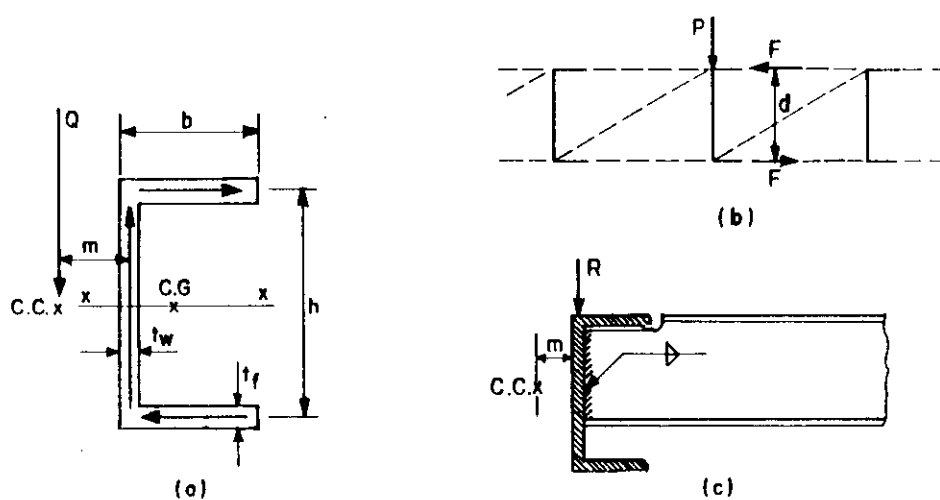


FIG.6 - Perfil "U": soluções para prevenir rotações

Para demonstrar a expressão usada pela norma brasileira, seja $I_y = A r_y^2$ e $\lambda = L/r_y$ ($L = L_b =$ trecho sem contenção lateral). Levando " I_y " e " λ " em (41), tem-se:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{GE} \sqrt{I_T A} \sqrt{1 + \frac{EC}{GI_T} \omega \left(\frac{\pi}{r_y}\right)^2 \frac{1}{\lambda^2}} \quad (46)$$

chamando de:

$$\beta_1 = \pi \sqrt{GE} \sqrt{I_T A} \quad (47)$$

$$\beta_2 = \frac{EC}{GI_T} \omega \left(\frac{\pi}{r_y}\right)^2 \quad (48)$$

chega-se a:

$$M_{cr} = \frac{\beta_1}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{\beta_2}{\lambda^2}} \quad (49)$$

sendo a equação (49) encontrada no anexo "D" da NBR 8800.

Os perfis "U", ensaiados por Hill, [83], foram considerados submetidos à flexão pura em um plano paralelo a alma, ou seja, em um plano que passa pelo centro de cisalhamento da seção. O centro de gravidade e o centro de cisalhamento de perfis "U" não são coincidentes. Sabe-se que o centro de cisalhamento é um ponto onde devem ser aplicadas as cargas externas para que se tenha flexão sem torção. Mas, nem sempre é possível carregar os perfis "U" no centro de cisalhamento. Assim, se estes perfis forem travados, horizontalmente, em cada ponto de aplicação das cargas (fig.6-a), estes travamentos ficarão sujeitos a forças que impedem a rotação do perfil. Se por exemplo, as cargas externas "P" atuarem no plano da alma, as forças necessárias para impedir a rotação do perfil serão dadas por $F = P.m/d$ (fig.6-b). Estas rotações podem também ser impedidas, se os membros que transferem as cargas para as vigas "U" forem unidos de maneira capaz de resistir os momentos de

extremidades $M = R.m$ (fig.6-c). Neste caso, a rotação do perfil "U" é, evidentemente, impedida pela rigidez a flexão do membro transversal (fig.6-c). Assim, as soluções mostradas pela figura 6 são usadas para impedir a flexão lateral primária e a torção da viga em questão, no entanto, poderá existir flambagem lateral entre os pontos contraventados. Para tais vigas, sujeitas a momentos de extremidades entre os pontos contraventados, a equação (49) pode ser usada para determinar o momento crítico [83,119,141].

2.5 - FLT de seções "I" e "H" bissimétricas, de acordo com a NBR 8800

A expressão do momento crítico para estas seções é igual à (49), sendo diferente apenas o termo " β_2 ", o qual será explicitado para perfis "I" ou "H". Para determinar este termo, despreza-se a contribuição da alma no cálculo do momento de inércia em relação ao eixo "y" (fig.7). Este será igual a:

$$I_y = \frac{t_f b_f^3}{6} \quad (50)$$

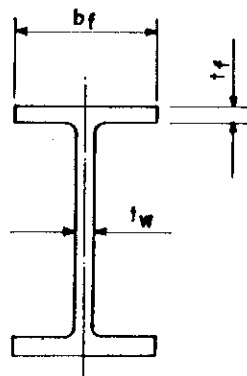


FIG.7 - Seção I típica

No apêndice "B", foi mostrado que o momento de inércia setorial depende apenas das grandezas " t_f " (espessura da mesa), " b_f " (largura da mesa) e " h " (distância entre linhas de centros das mesas), sendo que a alma não contribui no cálculo de " C_ω ", pois a área setorial, neste trecho, é nula. Neste caso, " C_ω " vale:

$$C_\omega = \frac{t_f b_f^3 h^2}{24} \quad (51)$$

Sabendo que $I_y = Ar_y^2$, e que $h = (d - t_f)$ (fig.7), e levando (50) em (51), tem-se:

$$C_\omega = \frac{Ar_y^2 (d-t_f)^2}{4} \quad (52)$$

levando (52) em (48) e sabendo que o valor exato de " G " é $G = 0.3846153846E$, chega-se a:

$$\beta_2 = \frac{\pi^2 E}{4G} \frac{A(d-t_f)^2}{I_T} = 6.415 \frac{A(d-t_f)^2}{I_T} \quad (53)$$

As expressões (47), (49) e (53) formam a equação do momento crítico para perfis "I" e "H" encontradas no anexo "D" da NBR 8800.

2.6 - FLT de seções "I" simétricas em relação ao eixo "y", de acordo com a NBR 8800

Seções "I" monossimétricas são, geralmente, mais eficientes para resistir cargas, pois as tensões de compressão devido à flexão são resistidas por uma mesa mais larga. Entretanto, os efeitos da monossimetria introduzem certas complicações na análise da flambagem elástica. Quando uma viga torce durante a flambagem, as tensões de flexão longitudinais exercem um torque em torno do eixo de torção

do elemento.

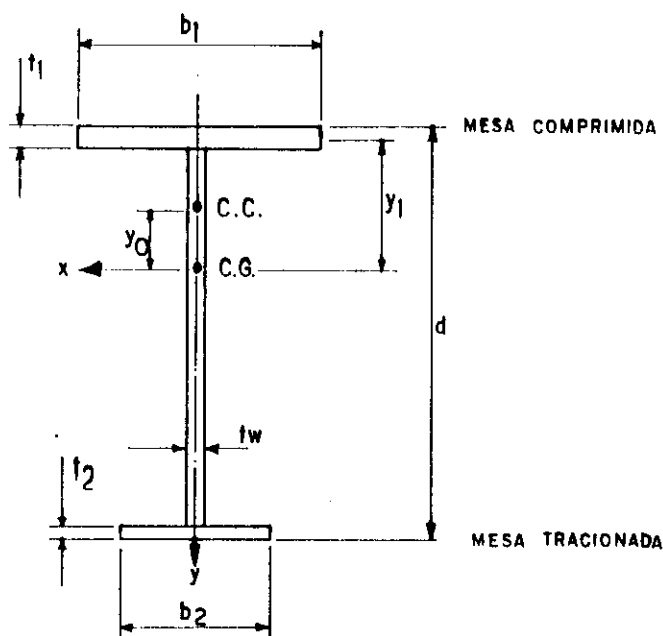


FIG.8 - Viga de seção "I" monossimétrica

Este torque causa uma variação efetiva na rigidez torcional, passando de " GI_T " para $(GI_T + M_x \beta_x)$, em que " M_x " é o momento em torno do eixo de maior inércia e " β_x " é uma propriedade de monossimetria, comumente denominada de "efeito Wagner".

Pelo fato da mesa menor estar mais afastado do centro de cisalhamento do que a mesa maior (fig.8), as tensões na mesa menor têm um braço de alavanca maior, predominando, assim, o efeito Wagner. Conseqüentemente, a capacidade à flambagem lateral para uma viga sob momento uniforme é aumentada quando a mesa menor está em tração, e diminui, quando ela está sujeita à compressão. Quando o momento aplicado não é uniforme, o efeito Wagner interage com o momento gradiente. Nesta combinação de efeitos, o comportamento de vigas "I" monossimétricas é muito complexo [166].

Tome-se uma viga "I" monossimétrica simplesmente apoiada e carregada em seu plano de simetria por momentos uniformes. Durante a flambagem, a viga, ao ser torcida, as tensões de flexão " $M_x \cdot y / I_x$ " exercerão um torque em torno do

eixo de torção (fig.9). A força longitudinal provocada pela flexão em um elemento da superfície do perfil é dada por:

$$f \cdot \delta A = \frac{M \cdot y}{I_x} \delta A \quad (54)$$

A força dada por (54) atua na área " δA " da seção transversal do elemento, cujo giro em relação a sua posição inicial é igual a " $\rho_0 (d\theta/dz)$ " (onde " ρ_0 " é a distância do eixo de torção à fibra longitudinal média da seção do perfil). Portanto, a componente transversal provocada pela força dada por (54) é igual a $(f \cdot \delta A \cdot \rho_0 \cdot d\theta/dz)$.

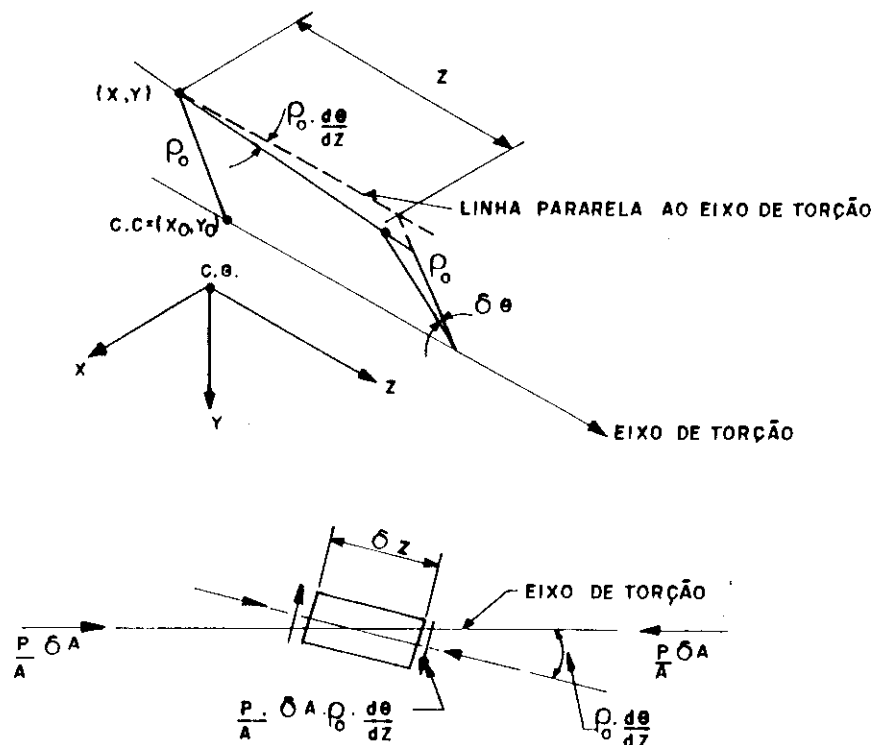


FIG.9 - Deslocamento da fibra longitudinal durante a torção

Conseqüentemente, esta componente exercerá um torque elementar igual a $(f \cdot \delta A \cdot \rho_o \cdot d\theta/dz) \cdot \rho_o$, em torno do eixo de torção. O torque total " T_T " será:

$$T_T = \frac{d\theta}{dz} \frac{M_x}{I_x} \int_A \rho_o^2 \cdot y \cdot dA \quad (55)$$

As grandezas envolvidas em (55), que estão sendo integradas na área da seção transversal, dependem apenas de "x" e "y", enquanto que as grandezas que estão fora da integral são consideradas constantes na seção, variando apenas com "z", com exceção de " I_x " que já é uma constante.

A relação de " ρ_o " com "x" e "y" é determinada pela geometria entre as coordenadas do centro de torção (x_o, y_o) , e as coordenadas genéricas (x,y) do elemento em questão, conforme ilustra a figura 10. Fazendo isto, chega-se a:

$$\rho_o^2 = (x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 \quad (56)$$

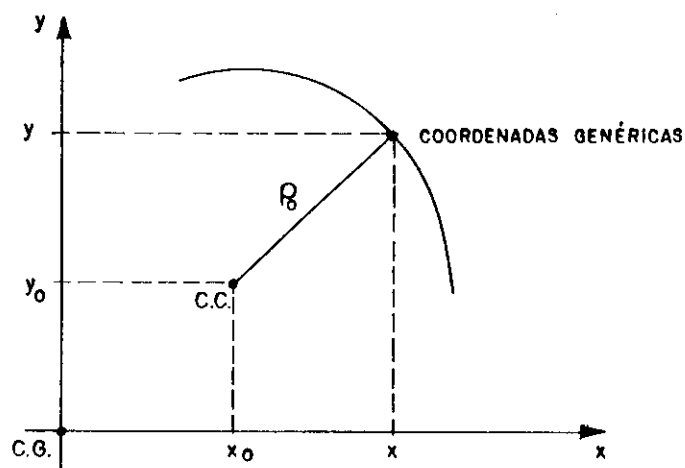


FIG.10 - Coordenadas genéricas e do centro de torção

Substituindo (56) no termo $\int_A \rho_o^2 \cdot y \cdot dA$ da equação (55), e lembrando que o momento estático em relação ao eixo "x" que passa pelo de centro de gravidade é $\int_A y dA = 0$; que o produto de inércia em relação ao sistema de eixos "xy" que também passam pelo centro de gravidade é $\int_A xy dA = 0$. Finalmente, que $I_x = \int_A y^2 dA$, tem-se:

$$\int_A \rho_o^2 \cdot y^2 \cdot dA = \int_A x^2 y dA + \int_A y^3 dA - 2y_o I_x \quad (57)$$

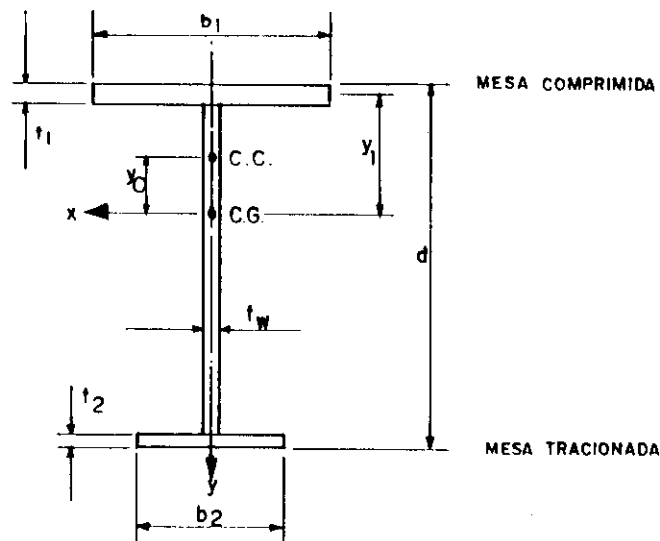


FIG.11 - Seção "I" monossimétrica

A expressão (57) pode ainda ser condensada de uma maneira mais simples, colocando os termos com integrais em evidência:

$$\int_A \rho_o^2 \cdot y^2 \cdot dA = \int_A y(x^2 + y^2) dA - 2y_o I_x \quad (58)$$

levando (58) em (55), tem-se:

$$\tau_T = \frac{d\theta}{dz} \cdot M_x \cdot \beta_x \quad (59)$$

onde:

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \int_A y(x^2 + y^2) dA - 2y_o \quad (60)$$

sendo " β_x " a propriedade de monossimetria da seção transversal.

Determine-se agora " β_x " para o perfil "I" monossimétrico da figura 11 (simplificações para o cálculo de " β_x " podem ser encontradas na referência [94]).

Para a mesa superior $y = -y_1 =$ constante e $dA = t_1 ds$, que levado no termo da integral de (60), integrada entre os limites " $-b_1/2$ " a " $b_1/2$ " fornece:

$$\int_{-b_1/2}^{b_1/2} (-y_1)(x^2 + y_1^2) t_1 ds = -\frac{y_1 t_1 b_1^3}{12} - y_1^3 t_1 b_1$$

colocando " y_1 " em evidência e fazendo $y_1 = h_c$, $I_c = t_1 b_1^3/12$ e $A_c = t_1 b_1$, tem-se:

$$\int_{-b_1/2}^{b_1/2} (-y_1)(x^2 + y_1^2) t_1 ds = -h_c (I_c + A_c h_c^2) \quad (61)$$

Para a mesa inferior $y = d - y_1 =$ constante e $dA = t_2 ds$ que levado no termo da integral de (60), integrada entre os limites " $-b_2/2$ " a " $b_2/2$ ", fornece:

$$\int_{-b_2/2}^{b_2/2} (d - y_1) [x^2 + (d - y_1)^2] t_2 ds = (d - y_1) \frac{t_2 b_2^3}{12} + (d - y_1)^3 t_2 b_2$$

colocando $(d - y_1)$ em evidência e fazendo $(d - y_1) = h_t$, $I_t = t_2 b_2^3/12$ e $A_t = t_2 b_2$, tem-se:

$$\int_{-b_2/2}^{b_2/2} (d-y_1) \left[x^2 + (d-y_1)^2 \right] t_2 ds = h_t (I_t + A h_t^2) \quad (62)$$

Para a alma $x = 0$ e $dA = t_v ds$ que levado no termo da integral de (60), integrada entre os limites $(-y_1)$ a $(d-y_1)$, fornece:

$$\int_{-y_1}^{(d-y_1)} y^3 t_v ds = \frac{t_v (d-y_1)^4}{4} - \frac{t_v y_1^4}{4}$$

Colocando " $t_v/4$ " em evidência e sabendo que $y_1 = h_c$ e $(d - y_1) = h_t$, tem-se:

$$\int_{-y_1}^{(d-y_1)} y^3 t_v ds = \frac{t_v}{4} (h_t^4 - h_c^4) \quad (63)$$

A soma das integrais (61), (62) e (63), quando levado em (60), fornece finalmente:

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \left[h_t (I_t + A h_t^2) - h_c (I_c + A h_c^2) + \frac{t_v}{4} (h_t^4 - h_c^4) \right] - 2y_o \quad (64)$$

Pode ser demonstrado que, de acordo com a referência adotada para o sistema de eixos "xy" em perfis monossimétricos, em relação ao eixo "y", o centro de cisalhamento estando acima do centro de gravidade, tem-se que $y_o < 0$. Neste caso, a expressão (64) coincidirá com a expressão dada no anexo "D" da NBR 8800.

A ação do torque " T_T " pode ser imaginada como sendo a variação da rigidez à torção efetiva da seção sendo alterada de " GI_T " para $(GI_T + M_x \beta_x)$, e é comparada com aqueles efeitos que causam flambagem por torção em elementos curtos sujeitos à compressão concêntrica. Neste caso, as tensões de compressão exercem um torque perturbador, tal que provocam

uma redução na rigidez à torção efetiva. Em vigas bissimétricas, o torque perturbador exercido pelas tensões de compressão na flexão é equilibrado pelo torque restaurador devido às tensões de tração, e " β_x " é igual a zero. Em vigas monossimétricas, no entanto, existe um desequilíbrio que é controlado pelas tensões na mesa menor. Este está mais afastado do centro de cisalhamento. Assim, quando a mesa menor estiver em compressão, existirá uma redução na rigidez à torção ($M_x \beta_x$ é negativo) e, quando esta mesa estiver em tração " $M_x \beta_x$ " será positivo. Conseqüentemente, a resistência à flambagem aumentará quando a mesa maior estiver em compressão e diminuirá, quando a mesa menor estiver em compressão.

Como explicitado anteriormente, o momento crítico " M_{cr} " de uma viga "I" monossimétrica simplesmente apoiada e com momentos de extremidades iguais e opostos pode ser obtido substituindo a rigidez à torção " GI_T " de uma viga bissimétrica, pela rigidez à torção efetiva ($GI_T + M_{cr} \beta_x$). Levando, então, esta nova rigidez na equação diferencial (13) ou na equação (41), chega-se ao momento crítico procurado. Como simplificação será feita a substituição na equação (41), a qual fornece:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{\pi E}{L}\right)^2 I_y C_\omega + EI_y \left[GI_T + M_{cr} \beta_x\right]} \quad (65)$$

Lembrando que $L = L_b =$ trecho sem contenção lateral, $I_y = Ar_y^2$ e elevando ao quadrado os dois membros de (65), chega-se a uma equação do segundo grau, cuja solução fornecerá:

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 EA \beta_x}{2(L_b/r_y)^2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \left[4GI_T / \pi^2 EA \beta_x^2 + 4C_\omega / L_b^2 \beta_x^2 A\right] (L_b/r_y)^2} \right] \quad (66)$$

chamando de:

$$B_1 = \frac{\pi^2 EA \beta_x}{2} \quad (67)$$

$$B_z = \frac{4GI_T}{\pi^2 EA \beta_x^2} + \frac{4C_\omega}{L_b^2 \beta_x^2 A} \quad (68)$$

tem-se:

$$M_{cr} = \frac{B_1}{(L_b/r_y)^2} \left[1 \pm \sqrt{1 + B_2 (L_b/r_y)^2} \right] \quad (69)$$

As expressões (64), (67), (68) e (69) formam a equação do momento crítico para perfis "I" monossimétricos. Aquelas são encontradas no anexo "D" da NBR 8800.

Os sinais que aparecem antes do radical na expressão (69), fornecem dois momentos críticos. Estes dependem da direção dos momentos de extremidades [2,72,94,96,141,160].

A dedução da expressão (69), utilizando outros caminhos, pode ser encontrada na referência [72].

2.7 - FLT de seções "T" simétricas em relação ao eixo "y", de acordo com a NBR 8800

Uma seção "T" pode ser considerada como uma seção "I" monossimétrica que tem uma mesa igual a zero [141]. O momento setorial de inércia " C_ω " pode também ser considerado igual a zero para pequenas espessuras das paredes do perfil.

Determine-se, inicialmente, a propriedade de monossimetria " β_x " para o perfil "T", da figura 12, lembrando que para este tipo de perfil o centro de cisalhamento está no encontro das linhas de centros da alma com a mesa e que nesta disposição a mesa estará comprimida (fig.12).

Para a mesa $y = (-h_1) = \text{constante}$ e $dA = t_f ds$, que levado no termo da integral de (60), integrada entre os limites " $-b_f/2$ " a " $b_f/2$ ", fornece:

$$\int_{-b_f/2}^{b_f/2} (-h_1)(x^2+h_1^2)t_f ds = -\frac{h_1 t_f b_f^3}{12} - h_1^3 b_f t_f$$

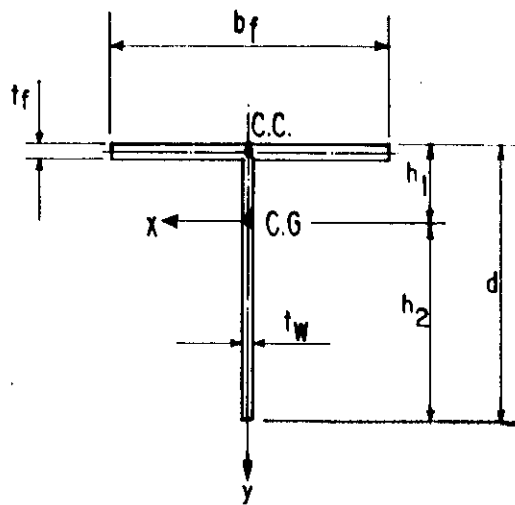


FIG.12 - Dimensões de uma seção transversal "T"

fazendo $I_f = t_f b_f^3 / 12$ e $A_f = t_f b_f$, tem-se:

$$\int_{-b_f/2}^{b_f/2} (-h_1)(x^2+h_1^2)t_f ds = -h_1 I_f - h_1^3 A_f \quad (70)$$

Para a alma $x = 0$ e $dA = t_w ds$, que quando levado no termo da integral de (60), integrada entre os limites " $-h_1$ " a " h_2 ", fornece:

$$\int_{-h_1}^{h_2} y^3 t_w ds = \frac{t_w}{4} (h_2^4 - h_1^4) \quad (71)$$

A soma das integrais (70) e (71), quando levado em (60),

fornece:

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \left[\frac{t_v}{4} (h_2^4 - h_1^4) - h_1 I_f - h_1^3 A_f \right] - 2y_o \quad (72)$$

Determine-se agora " β_x " para o perfil "T" da figura (13), lembrando que nesta disposição a mesa estará tracionada:

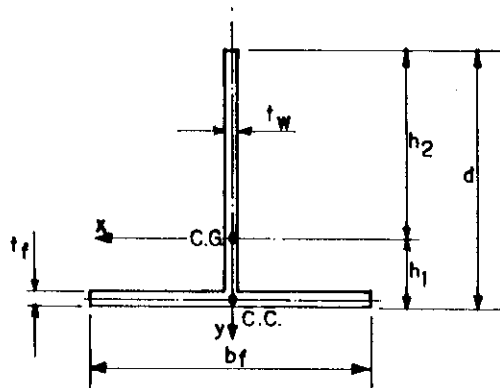


FIG.13 - Dimensões de uma seção transversal "T"

Para a mesa $y = h_1 = \text{constante}$ e $dA = t_f ds$ que levado no termo da integral de (60), integrada entre os limites " $-b_f/2$ " a " $b_f/2$ ", fornece:

$$\int_{-b_f/2}^{b_f/2} h_1 (x^2 + h_1^2) t_f ds = \frac{h_1 t_f b_f^3}{12} + h_1^3 b_f t_f$$

fazendo $I_f = t_f b_f^3 / 12$ e $A_f = t_f b_f$, tem-se:

$$\int_{-b_f/2}^{b_f/2} h_1 (x^2 + h_1^2) t_f ds = h_1 I_f + h_1^3 A_f \quad (73)$$

Para a alma $x = 0$ e $dA = t_v ds$, que levado no termo da integral de (60), integrada entre os limites " $-h_2$ "

a "h₁", fornece:

$$\int_{-h_2}^{h_1} y^3 t_v ds = - \frac{t_v}{4} (h_2^4 + h_1^4) \quad (74)$$

A soma das integrais (73) e (74) quando levado em (60) fornece:

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \left[- \frac{t_v}{4} (h_2^4 - h_1^4) + h_1 I_f + h_1^3 A_f \right] - 2y_o \quad (75)$$

A diferença entre as expressões (72) e (75) está apenas nos sinais dos termos. Basta, portanto, escrever apenas uma expressão que atenda aos dois casos simultaneamente, isto é:

$$\beta_x = \pm \frac{1}{I_x} \left[\frac{t_v}{4} (h_2^4 - h_1^4) - h_1 I_f - h_1^3 A_f \right] - 2y_o \quad (76)$$

A expressão do momento crítico para seções "T" pode ser encontrada fazendo $C_\omega = 0$ na expressão (68). Assim, as expressões (67), (68) com $C_\omega = 0$ e (69) formam a equação do momento crítico para perfis "T" e são encontradas no anexo "D" da NBR 8800.

2.8 - Momento gradiente

Nos itens anteriores, os momentos críticos foram deduzidos ao considerar-se uma viga sob momentos iguais e opostos. Sendo o momento constante, para todo o vão da viga, a equação diferencial que descreve as condições de equilíbrio da viga em seu estado deformado, é linear com coeficientes constantes. Porém, vigas reais poderão estar sujeitas a uma variedade de carregamentos que tendem a provocar momentos não-uniformes ao longo da viga. Se o momento fletor não for constante, as equações diferenciais

que governarão o comportamento da viga terão coeficientes variáveis, como pode ser observado pela referência [84]. Para tais casos, as soluções destas equações são mais complicadas, e os recursos para se obterem as cargas críticas serão as utilizações de métodos numéricos aproximados. Uma outra maneira de analisar o efeito do momento não-uniforme, no cálculo das cargas críticas de flambagem lateral, será através de um método aproximado, baseado no conceito de "momento equivalente" cuja exatidão das aproximações têm demonstrado serem suficientes para a maioria dos casos práticos [34,41,47].

O "método do momento equivalente" recomenda usar um fator " ω_b " para converter os diferentes momentos de extremidades em momentos equivalentes, como mostra a figura 14.

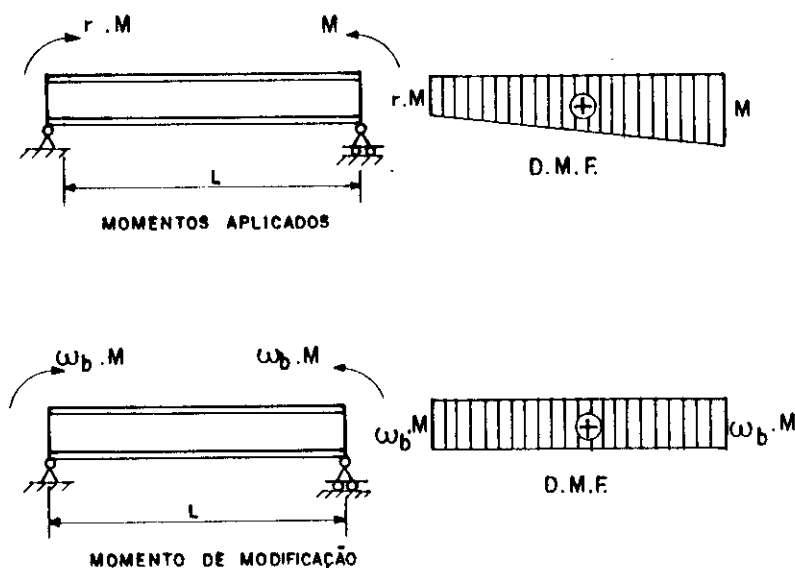


FIG.14 - Momento gradiente e momento equivalente

As expressões disponíveis para o fator de modificação dos momentos (ω_b) são baseadas em parâmetros conservadores, tais como: idealizações das seções transversais, tipos de carregamentos e condições de apoios. Estes prejudicam a precisão e economia em benefício das simplificações de projetos. Estas expressões foram deduzidas para o caso ideal de uma viga simplesmente apoiada com rigidez ao empenamento igual a zero e momento gradiente linear. Isto permitiu que " ω_b " fosse determinado somente em função da relação entre os momentos de extremidades. Portanto, o uso destas equações ficam limitadas somente ao caso de vigas simplesmente apoiadas.

Em 1947, Massonnet introduziu uma aproximação para substituir os momentos não-uniformes em momentos uniformes equivalentes (M_{eq}) (fig.14), dada por:

$$M_{eq} = \omega_b \cdot M \quad (77)$$

onde "M" é o maior momento de extremidade. Massonnet obteve uma solução simples para o fator de modificação dos momentos (ω_b). Usou o método de Rayleigh-Ritz e, implicitamente, assumindo que $\gamma = 1$, onde o termo $\gamma = \pi^2 EC_{\omega} / L^2 GI_T$ faz parte da expressão $M_{cr} = (\pi/L) \sqrt{EI_y GI_T} \cdot \sqrt{1+\gamma}$, deduzida para o caso de vigas "I", com curvatura simples e momentos de extremidades iguais e opostos. Esta simplificação permitiu reduzir certos termos da equação da energia. Concluindo que:

$$\omega_b = \sqrt{0.27(1+r^2)+0.46r} \quad (78)$$

sendo "r" a relação entre os momentos aplicados nas extremidades. Assumiu que o maior momento atua no apoio da direita (fig.14). Neste caso, "r" é considerado positivo quando os momentos de extremidades causam curvatura simples e negativo em situação de curvatura dupla (ou reversa). Campus e Massonnet propuseram uma fórmula mais conservadora, assumindo $\gamma = 0$ nas simplificações de suas análises e

obtiveram:

$$\omega_b = \sqrt{0.3(1+r^2)+0.4r} \quad (79)$$

Salvadori resolveu o mesmo problema aplicado a vigas "I". Também usou o método de Rayleigh-Ritz. Usou ainda vários termos para a expansão do deslocamento lateral e da torção. Ele recomendou valores para " ω_b ", assumindo que a viga era simplesmente apoiada e $\gamma \leq 0.2467$. Mais tarde, a entidade americana SSRC (Structural Stability Research Council) aproximou os resultados de Salvadori e adotou a seguinte expressão:

$$\omega_b = 1/(0.3r^2+1.05r+1.75) \geq 0.435 \quad (80)$$

porém, a expressão (80) fornece valores de " ω_b " mais conservadores do que aqueles originalmente deduzidos por Salvadori.

Aplicando também o método da energia, Horne recomendou valores para " ω_b ", considerando $\gamma = 0$. Posteriormente, Horne mostrou que o efeito do parâmetro geométrico " γ " da viga torna-se mais pronunciado quando a relação entre os momentos de extremidades " r " for menor do que zero. Ele definiu duas curvas para " ω_b " correspondendo a dois casos de rigidez ao empenamento, sendo um com grande rigidez e outro com rigidez desprezível.

Austin observou que os valores do fator de momento equivalente, usados para descrever a resistência de vigas no plano, estavam próximos daqueles fornecidos por Massonnet e Salvadori, exceto nas vizinhanças de $r = -1$ (dupla curvatura), e que poderia ser aproximado por uma relação linear mais simples, do tipo:

$$\omega_b = 0.6 + 0.4r \geq 0.4 \quad (-1 \leq r \leq 1) \quad (81)$$

Assim, a equação (81) foi proposta, originalmente, para análises de vigas-colunas no plano, e sua aplicação para

análises da flambagem fora do plano, não é lógico, embora seja satisfeita. Este fato é também apontado na norma americana AISC-LRFD/86. A norma canadense recomenda o uso da equação (81) em análises das resistências à flambagem de viga-colunas, no plano e fora do plano. No entanto, este critério é muito simplificado e mostra uma falsa interpretação das informações. As limitações de " ω_b " fornecidos pelas equações (80) e (81) são impostas pelos respectivos investigadores como aproximações seguras. Numa discussão do trabalho de Austin, Galambos mostrou que a equação (81) é válida para todo o intervalo $-1 \leq r \leq 1$. Assim, para curvatura dupla, $r = -1$, o valor de $\omega_b = 0.2$ pode ser usado no lugar do valor $\omega_b = 0.4$, como proposto por Austin. Djalaly propôs fórmulas diferentes para o fator de modificação do momento para diferentes graus de empenamentos e condições de apoios. isto é:

empenamento livre:

$$\omega_b = \sqrt{0.283(1+r^2) + 0.434r} \quad (82)$$

empenamento impedido:

$$\omega_b = \sqrt{0.333(1+r+r^2)} \quad (83)$$

fórmula prática intermediária:

$$\omega_b = \sqrt{0.28r^2 + 0.4r + 0.32} \quad (84)$$

Nethercot e Rockey desenvolveram um detalhado estudo paramétrico da estabilidade lateral com torção de vigas através de recursos computacionais. Usaram o método dos elementos finitos baseado no trabalho de Barsoum & Gallagher. Eles propuseram uma aproximação unificada, tendo obtido a seguinte expressão para o momento crítico:

$$M_{cr} = \alpha_n \sqrt{EI_y GI_T} \cdot \Gamma \quad (85)$$

onde:

$$\Gamma = \frac{\pi}{L} \sqrt{1 + (\pi^2 EC_{\omega} / L^2 GI_T)} \quad (86)$$

e.

$$\alpha_n = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \quad (87)$$

sendo " α_n " o fator de modificação dos momentos e " α_1 ", " α_2 " e " α_3 " os coeficientes, que dependem das condições de apoios, do momento gradiente e da falta de simetria dos apoios, respectivamente. O método dos elementos finitos é usado para determinar os valores destes coeficientes para uma variedade de situações. Então, expressões simples ligadas aos dados numéricos são propostas para uso em processos de cálculos. O método é uma tentativa de generalizar a aproximação do momento de modificação.

Cuk e Trahair usaram um programa de elementos finitos. Este programa foi baseado no trabalho de Barsoum e Gallagher, para determinar os valores de " ω_b ". Consideraram dois casos de parâmetros geométricos da viga, ou seja, $\gamma = 0.09$ e $\gamma = 1.0$. Para uma viga simplesmente apoiada, a variação de " ω_b ", em relação a " γ ", é desprezível. A seguinte expressão aproximada foi assim proposta:

$$\omega_b = \left(\frac{1-r}{2}\right) + 0.4 \left(\frac{1+r}{2}\right)^3 \quad (88)$$

Os resultados dos cálculos feitos, usando a expressão (88), são praticamente iguais àqueles fornecidos pela expressão de Salvadori.

O fator de modificação dos momentos é um fator que quando multiplicado pelo maior momento de extremidade " M ", resulta em um momento equivalente uniforme " M_{eq} ". Este substitui os diferentes momentos aplicados nas extremidades " M " e " rM ", como mostra a figura 14. Assim,

$$M_{eq} = \omega_b \cdot M \quad (89)$$

De acordo com outra interpretação, o fator de modificação dos momentos " ω_b " é recíproco. Este será denominado de " C_b ", e quando multiplicado pelo momento crítico de flambagem uniforme " M_{cr} " de uma dada viga ao assumir condições de extremidades, simplesmente apoiada, fornece a resistência à flambagem " M_{cr} " de uma viga sob condições reais de carregamentos e apoios. Assim,

$$M_{cr} = \frac{M_{cr}}{\omega_b} = C_b \cdot M_{cr} \quad (90)$$

onde " M_{cr} " é o momento crítico calculado conforme os itens que vão de 2.2 a 2.7. O fator " C_b " será denominado de "fator momento equivalente uniforme" e sua expressão aceita mais comumente pelas normas internacionais, incluída a NBR 8800, é dada por:

$$C_b = 1.75 + 1.05r + 0.3r^2 \leq 2.3 \quad (91)$$

sendo $r = (M_1/M_2)$ a relação entre o menor e o maior momento de extremidade; sendo "r" positivo, quando a viga fletir em curvatura dupla, e negativo, quando fletir em curvatura simples. Esta aproximação forma a base de um método muito simples de prever a flambagem dos segmentos de uma viga sujeita somente a cargas devido a elementos transversais impedindo o deslocamento lateral e a torção. Neste caso, cada trecho da viga total pode ser considerado como se fosse uma viga menor com momentos de extremidades diferentes; e o seu momento crítico elástico pode ser estimado usando as equações dos itens que vão de 2.2 a 2.7, conforme o caso em questão, fazendo nas mesmas $L = L_b$ (comprimento de cada trecho) e corrigidas pelo fator " C_b " (eq.91). Cada momento crítico calculado corresponde a um parâmetro da carga crítica particular para a determinação da carga total, e o menor destes parâmetros fornece uma aproximação conservadora do parâmetro da carga crítica real. Este método simples ignora as interações de flambagem entre os segmentos [12,41,84,142,143,148,149,160].

O recente trabalho devido a Sherbourne e Pandey [148] apresenta uma expressão paramétrica aproximada e mais exata para o fator de modificação dos momentos (ω_b). Tal trabalho incorpora os efeitos da esbeltez da viga, o momento gradiente e as restrições laterais extremas de uma maneira mais explícita e exata do que as expressões existentes até o presente momento. No apêndice "D" são apresentados os princípios utilizados por Sherbourne e Pandey para justificar os resultados obtidos.

2.9 - Influência das condições de apoio e de carga no momento crítico

A equação (41) foi obtida supondo uma viga simplesmente apoiada fletindo com momentos iguais e opostos no seu plano de maior inércia. A flambagem lateral de vigas, com outras condições de apoios e com diferentes solicitações, são estudadas através de métodos energéticos e aqui será apresentado apenas um resumo dos resultados destes estudos.

Se as condições de apoio impedem a livre rotação das seções extremas em torno do eixo "y", o comprimento "L", que aparece fora do radical na equação (41), deve ser multiplicado por um fator " k_y " para obter o comprimento efetivo de flambagem; e, análogamente, se o empenamento das seções extremas são impedidas, deve-se introduzir um segundo fator " k_z " e este deve ser multiplicado pelo comprimento "L" que aparece dentro do radical para obter o comprimento efetivo de flambagem. Desta forma, os fatores " k_y " e " k_z " levam em consideração as condições de apoios correspondentes aos giros em torno do eixo "y" e os empenamentos das seções extremas, respectivamente. A equação (41) considerado o efeito do momento gradiente, e com as alterações anteriores, terá a forma:

$$M_{cr} = \frac{\pi C_b}{k_y L} \sqrt{\left(\frac{\pi E}{k_z L}\right)^2 I_y C_\omega + E I_y G I_T} \quad (92)$$

A referência [50] fornece valores de " k_y " e " k_z " para diferentes condições de apoios, cujos resultados foram obtidos através da referência [165]. Para simplificar a aplicação da equação (92), os valores exatos destes coeficientes podem ser substituídos por valores que dão resultados a favor da segurança [72], fazendo " k_y " e/ou " k_z " igual a 1.0 (um) quando os dois apoios são simples, 0.7 quando um apoio é livre e o outro é fixo; e 0.5, quando ambos são fixos. Para determinar " k_y ", considera-se que um extremo seja fixo quando o giro em torno do eixo "y" estiver impedido; e livre, quando não houver restrições ao giro. Para obter " k_z ", considera-se que os extremos sejam fixos quando o empenamento for impedido e livres quando o empenamento não for impedido.

Os coeficientes " k_y " e " k_z " são semelhantes aos coeficientes utilizados na determinação do comprimento efetivo de colunas com condições de apoios análogas. Desta maneira, podem ser obtidos momentos críticos correspondentes a diversas combinações de apoios.

Como visto no item 2.8, os efeitos do momento gradiente devem ser levados em consideração, multiplicando a equação do momento crítico uniforme pelo fator " C_b ". Este depende dos momentos de extremidades. Além deste fator, a posição das cargas em relação ao centro de torção da seção também influi na resistência à flambagem. As cargas que são aplicadas na mesa superior são mais desfavoráveis do que as que atuam na mesa inferior, pois, ao iniciar a flambagem, as primeiras tendem a torcer o perfil, agravando as condições em que se encontra, enquanto que as segundas têm um efeito estabilizador, uma vez que tendem a fazer com que o perfil retorne à sua posição original. Finalmente considera-se que as cargas aplicadas no centro de gravidade (coincidente com o centro de torção no perfil da fig.15) não influem neste aspecto do problema (fig.15).

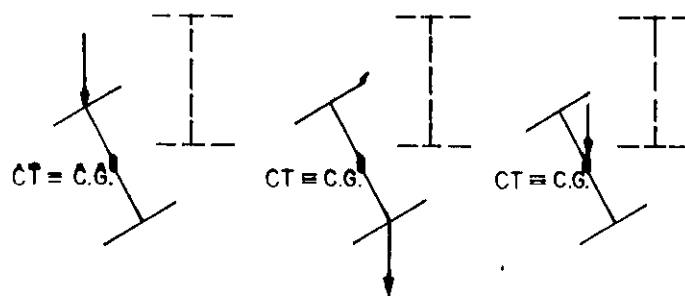


FIG.15 - Efeito da posição da carga

Em estruturas reais, o caso mais comum é quando as cargas atuam na mesa superior (fig.16-a), porém, em muitas situações, os mesmos elementos que transmitem as cargas travam lateralmente esta mesa evitando a possibilidade da flambagem lateral.

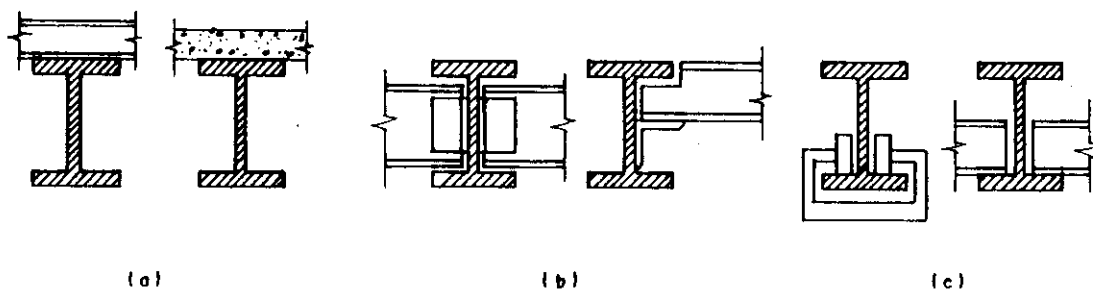


FIG.16 - Posições de cargas reais em estruturas

As cargas poderão ser transmitidas através do centro de gravidade (fig.16-b) quando vigas secundárias apoiam em uma viga principal através de cantoneiras ligadas à alma. Cargas atuando na mesa inferior (fig.16-c) podem ocorrer devido a alguns tipos de vigas secundárias que apoiam em vigas principais, guindastes móveis apoiados na mesa inferior, etc.

A posição do ponto de aplicação das cargas em relação ao centro de gravidade da seção é levado em consideração fazendo-se modificações adicionais na equação (92) [88,119]:

$$M_{cr} = \frac{C_b \pi}{k_y L} \sqrt{EI_y GI_T} \left[\sqrt{1 + \frac{EC_\omega}{GI_T} \left(\frac{\pi}{k_y L} \right)^2 (1 + C_c^2)} + \frac{C_c \pi}{k_y L} \sqrt{\frac{EC_\omega}{GI_T}} \right] \quad (93)$$

A fórmula (93) é mais geral e fornece os momentos críticos de vigas "I" bissimétricas com quaisquer condições de apoios e de cargas. Como na maioria dos casos práticos, as rotações "θ" em torno do eixo longitudinal são impedidos nos extremos. Conservadoramente pode ser incluído na equação (93) apenas o fator de comprimento efetivo "k_y". O sinal positivo que antecede o último termo da equação é usado quando as cargas atuam na mesa inferior, e o sinal negativo, quando as cargas atuam na mesa superior. Se a viga estiver sujeita a momentos de extremidades ou cargas aplicadas no centro de gravidade, C_c = 0, e a equação (93) reduz à equação (92). O coeficiente "C_c" é um coeficiente numérico que depende da distribuição das cargas transversais ao longo do vão. Para vigas simplesmente apoiadas, C_c = 0.45 para cargas uniformemente distribuídas e 0.55 para uma carga concentrada no meio do vão [119]. Para vigas "I" monossimétricas, em relação ao eixo "y", a expressão do momento crítico na sua forma mais geral, como descrito para as vigas "I" bissimétricas, é mais complicada e pode ser encontrada na referência [88].

A maioria das normas técnicas não mencionam a

necessidade de considerar os efeitos das posições reais das cargas. Esta negligência é justificada pela relativa segurança das condições de carregamentos em que as previsões são baseadas. Além disso, as próprias peças que transmitem as cargas, em mesas superiores, impedem a torção da viga, o que, inicialmente, poderia ser um efeito grave (fig.17-a). Na ausência de impedimentos laterais deste tipo, a peça é usualmente travada nos pontos de cargas concentradas (fig.17-b), ou em pequenos intervalos ao longo do vão em casos de cargas distribuídas ou móveis (fig.17-c).

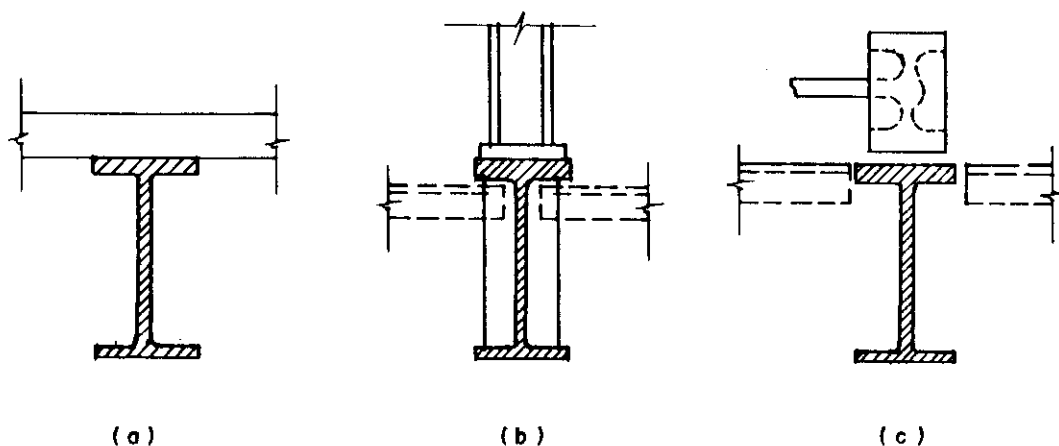


FIG.17 - Travamentos da mesa superior

Neste último caso, os momentos de flexão atuando nas extremidades de um trecho destravado do vão geralmente têm um efeito maior sobre as características de flambagem daquele comprimento do que o efeito provocado pelas próprias cargas que atuam dentro do mesmo segmento. Em casos não usuais de carregamentos, na mesa superior, as soluções citadas anteriormente, às vezes, são impraticáveis. Uma análise da possibilidade de reduzir a resistência à flambagem lateral pode ser necessária. No caso de carregamentos atuantes na mesa inferior ocasionalmente pode ser desvantajoso considerar a estabilidade adicional como

demonstrado pela teoria. Isto não está incluído em fórmulas convencionais de projetos, mas os procedimentos normais de cálculos são seguros e, razoavelmente, econômicos [72,79,88,119,165].

3 - FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO - REGIME INELÁSTICO

3.1 - Generalidades

Quando a flambagem ocorre acima do limite elástico, soluções simples são impossíveis. Até recentemente, as soluções numéricas no regime inelástico estavam limitadas ao caso de momento uniforme. Atualmente, os pesquisadores têm aumentado significativamente a compreensão da flambagem inelástica, especialmente para vigas com diagramas de momentos não-uniformes.

Devido a freqüente utilização de perfis I em estruturas de engenharia civil, Galambos [71] desenvolveu um método para estudar a flambagem no regime inelástico, partindo da expressão (41), para a qual adotou as seguintes denominações:

$$B_y = EI_y \quad (94)$$

$$C_T = GI_T \quad (95)$$

$$D_\omega = EC_\omega = \frac{EI_y (d-t)^2}{4} \quad (96)$$

Usando (94), (95) e (96) em (41), chega-se a:

$$M_{cr}^2 L^4 - \pi^4 D_\omega B_y - \pi^2 L^2 B_y C_T = 0 \quad (97)$$

Ao iniciar a flambagem, após terem sido escoadas certas porções da seção transversal, a expressão (97) deixa de ser verdadeira. Os escoamentos reduzem a rigidez do

elemento e, portanto, os valores inelásticos de " B_y " e " D_ω " não permanecerão constantes. No início da flambagem lateral, a rigidez à torção de St. Venant " C_T " não depende do acréscimo do escoamento e, portanto, o valor elástico total de $C_T = GI_T$ pode ser usado normalmente no regime inelástico.

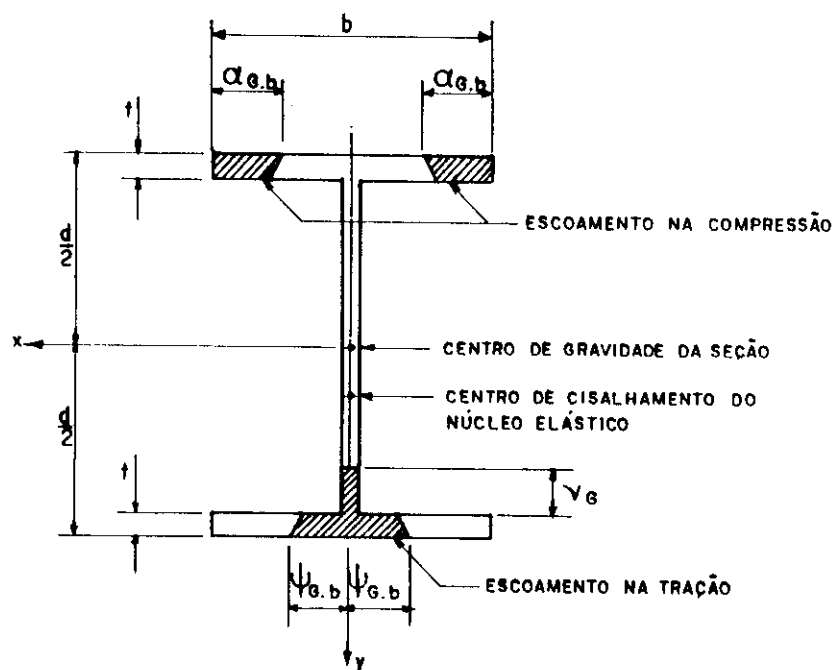


FIG.18 - Geometria da seção transversal escoada.

Como demonstrado por Galambos, a resistência à flambagem lateral no regime inelástico é garantida pelo núcleo elástico não-escoado da seção transversal. Esta resistência é representada na equação (97) pelos parâmetros de rigidez " B_y ", " D_ω ", e " C_T ". Para estabelecer as relações entre estes parâmetros e o momento de flexão aplicado, as dimensões do núcleo elástico devem ser conhecidas. A extensão do escoamento depende da geometria da seção transversal, da distribuição das tensões residuais pré-existentes e das superposições das tensões causadas pelo momento de flexão aplicado. A geometria da seção transversal

escoada para uma dada distribuição de tensões residuais e com as devidas superposições de tensões de flexão, é mostrada na figura 18. Desta forma, os parâmetros de rigidez reduzidos serão dados por:

$$B_y = EI_y B_1, \text{ onde; } B_1 = (1/2)[1+(1-2\alpha_g)^3 - 8\psi_g^3] \quad (98)$$

$$D_\omega = EI_y (d-t)^2 B_2, \text{ onde; } B_2 = \frac{(1-8\psi_g^3)(1-2\alpha_g)^3}{4B_1} \quad (99)$$

Sabendo-se que $I = Ar^2$, dividindo a expressão (97) por $M_{pL}^2 = Z^2 f_y^2$ e " r_y^4 " e substituindo os parâmetros de rigidez dados por (95), (98) e (99) na expressão (97), tem-se a equação da flambagem escrita na seguinte forma adimensional:

$$\left(\frac{M}{M_{pL}}\right)_{cr}^2 \left(\frac{L}{r_y}\right)^4 - \frac{\pi^2 EGA I_y B_1}{f_y^2 Z^2} \left(\frac{L}{r_y}\right)^2 - \frac{\pi^4 E^2 A^2 (d-t)^2 B_1 B_2}{f_y^2 Z^2} = 0 \quad (100)$$

A equação (100) é uma equação de quarta ordem em que os índices de esbeltez " L/r_y " correspondem aos momentos críticos nos quais iniciam a flambagem lateral.

Curvas dos momentos críticos em função dos comprimentos podem ser traçadas resolvendo a equação (100) para " L/r_y " e com valores especificados do momento. A figura 19 mostra uma curva para uma seção "BWF31" (WF = Wide Flange com mesas paralelas).

Para momentos variando de "0" a " $0.631M_{pL}$ ", a flambagem é governada no regime elástico. Para um momento maior do que " $0.631M_{pL}$ ", o escoamento inicia antes da seção flambar devido à presença das tensões residuais. Pontos deste trecho da curva são determinados assumindo um momento $M > 0.631M_{pL}$, determinando os valores de " B_1 " e " B_2 " correspondentes a este momento e resolvendo a equação (100) para o índice de esbeltez crítico.

O ponto do início de endurecimento por deformação (encruamento) ($L/r_y = 20$, na fig.19) é determinado

modificando os módulos de elasticidade "E" e "G" das equações (94), (95), e (96) para os módulos de endurecimento por deformação "E_{st}" e "G_{st}" e introduzindo os resultados na equação (97).

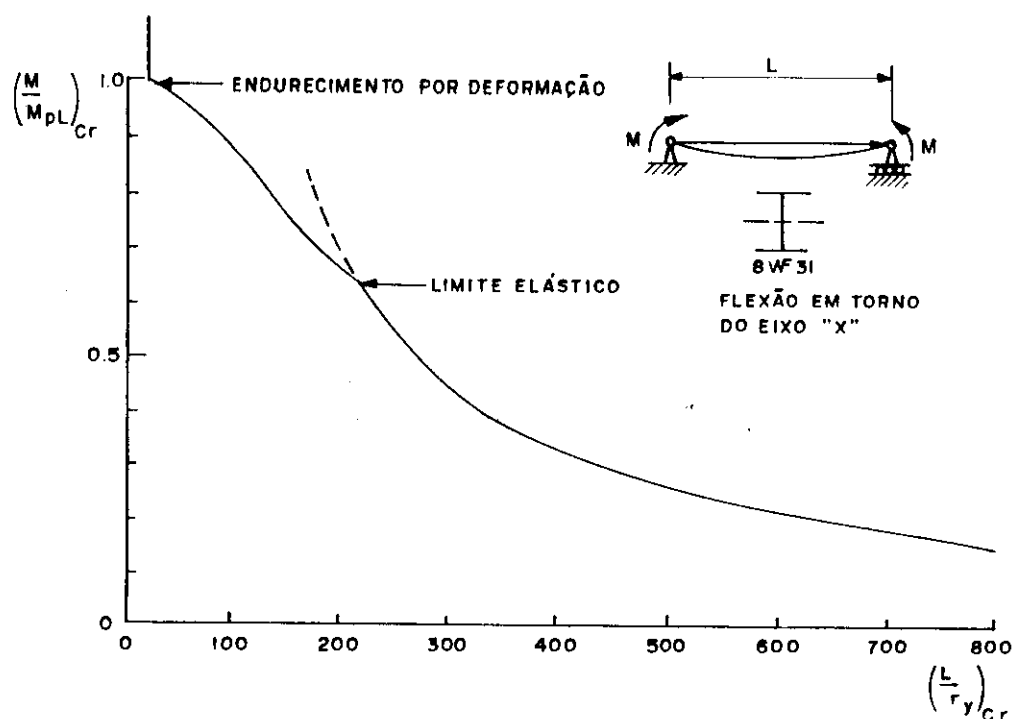


FIG.19 - Curva de flambagem para seção 8WF31

Neste ponto, na flambagem, a seção inteira estará em endurecimento por deformação, e isto ocorrerá para um índice de esbeltez, aproximadamente igual a 20 para seções wide-flange. E, como mostra a figura 19, a flambagem inelástica governará em um comprimento de aproximadamente $220r_y$, ou, aproximadamente igual a 11 metros. Assim, conclui-se que a maioria das vigas de comprimentos práticos falham no intervalo inelástico.

A influência das tensões residuais, no momento crítico, é ilustrada pelas curvas da figura 20. Nesta

figura, a curva "A" representa a solução inelástica, incluindo as tensões residuais enquanto que a curva "B" é uma continuidade da hipérbole de Euler até $M_{cr} = M_y = S_f$. Uma linha reta de transição tem sido usada a partir do momento $M_{cr} = M_{pL}$, no início do endurecimento por deformação.

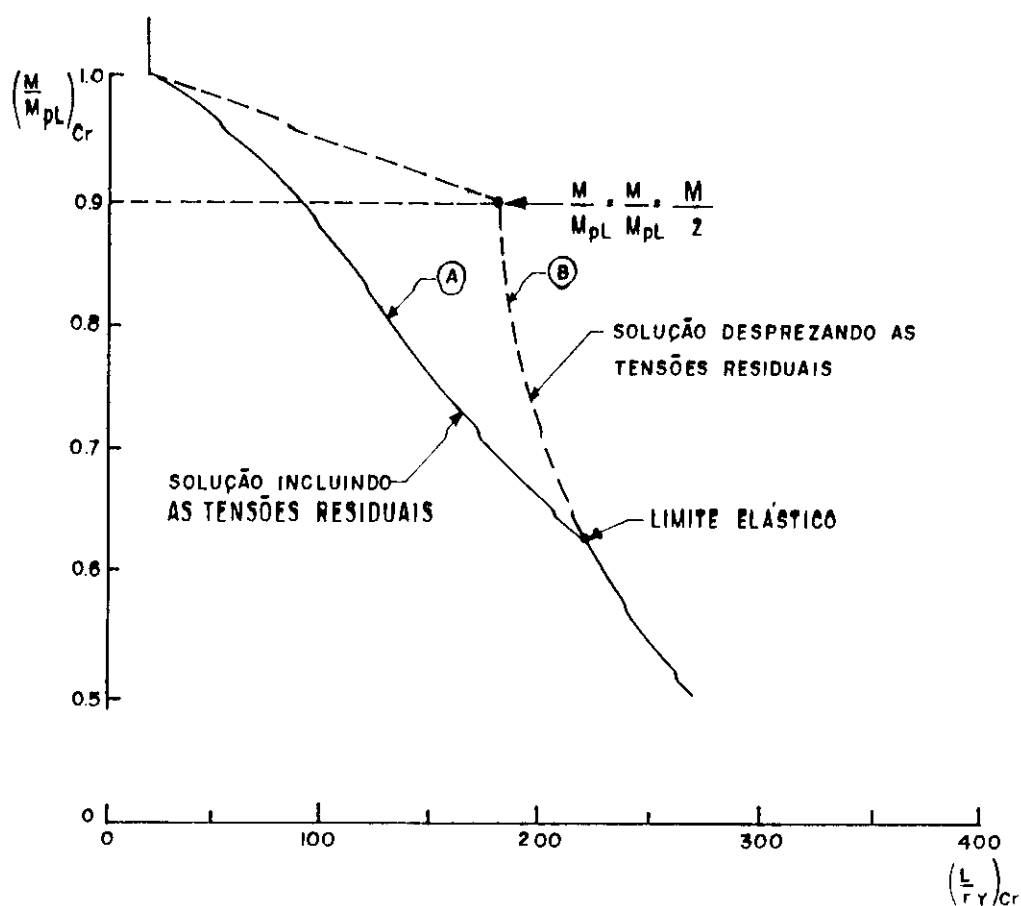


FIG.20 - Ilustração da influência das tensões residuais

Comparações entre as duas curvas indicam que as tensões residuais têm uma influência considerável na resistência à flambagem e tendem a diminuir o momento crítico. Fisicamente, esta diminuição pode ser explicada pelo fato de que a rigidez à flexão "B_y" e a rigidez ao empenamento "D_ω" são consideravelmente reduzidas por um acréscimo relativamente pequeno do escoamento, nas extremidades da mesa comprimida. A convenção usual de limitar os momentos no limite de escoamento "M_y" é mostrada pela linha horizontal tracejada na figura 20. Nota-se que

para $L/r_y > 90$ a convenção anterior leva a resultados conservadores, enquanto que no intervalo de $0 < L/r_y < 90$ a resistência total da viga não é utilizada [71].

3.2 - Fórmula recomendada em projetos

A figura 21 mostra duas curvas típicas de flambagem para uma viga "I" sujeita a dois casos de carregamentos de extremidades; uma situação com momentos uniformes e outra com momentos não-uniformes. No caso de atuar o momento uniforme, nota-se que as tensões residuais causam uma redução significativa na solução elástica.

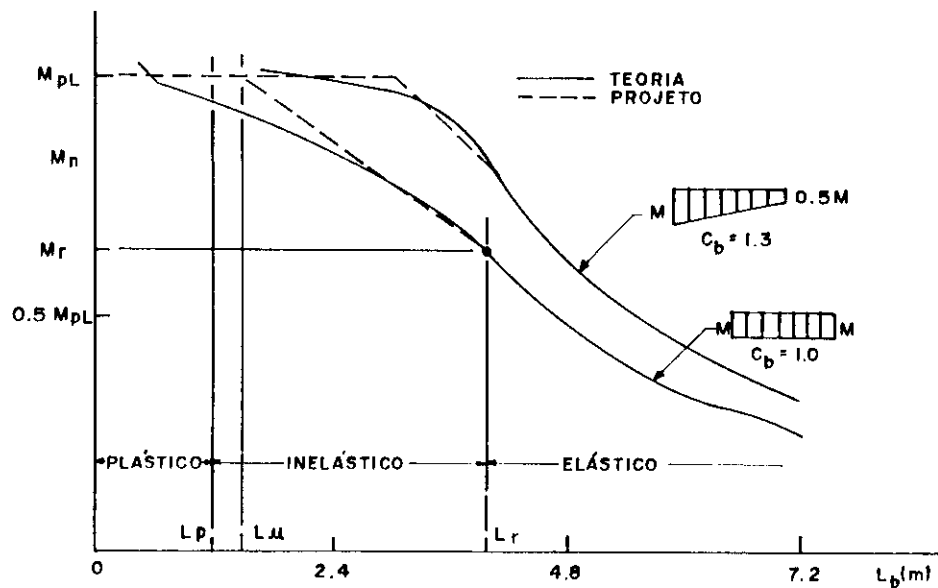


FIG.21 - Curvas de flambagem lateral

No entanto, quando atuar o momento não-uniforme com momento máximo em um dos extremos e sua metade no outro extremo, os efeitos das tensões residuais serão bastante diminuídos. E, ainda neste caso, se em uma das extremidades, o momento for igual a zero, a solução inelástica teórica desviará muito pouco da solução elástica, pois a ação inelástica ficará

restrita à região de momento máximo próximo à extremidade do vão. A redução da rigidez, próxima a uma das extremidades de uma viga tem pouca influência na carga de flambagem, considerando que a peça possui apoios simples.

Para o momento uniforme, a teoria tem demonstrado que é necessário um trecho de contenção lateral muito pequeno (aproximadamente $18r_y$) para que possa atingir o momento de plastificação " M_{pL} " sem nenhuma capacidade adicional de rotação. Porém, ensaios têm demonstrado que este espaçamento é significativamente maior (aproximadamente $30r_y$). Esta discrepância ocorre, principalmente, devido às condições de apoios assumidos na teoria.

Por causa das diferenças entre as condições teóricas e as condições reais de contorno e para justificar as imperfeições geométricas e as excêntriciades das cargas, a curva teórica de flambagem, no regime inelástico, é usualmente aproximada. Vários tipos de curvas têm sido usadas para representar a transição entre os regimes elástico e plástico (por exemplo, parábolas), mas será usada aqui a linha reta. O limite inferior é definido pelo momento resistente elástico " M_r " correspondente ao início do escoamento, incluindo ou não os efeitos das tensões residuais para um trecho de comprimento " L_r " sem contenção lateral (fig.21). O limite superior é definido pelo momento de plastificação " M_{pL} " para um trecho de comprimento " L_p " sem contenção lateral (fig.21). Para perfis laminados, a aproximação da linha reta é razoavelmente boa. No entanto, estudos teóricos e resultados de ensaios indicam que a aproximação da linha reta para perfis soldados é conservador.

A fórmula recomendada para projetos de vigas no regime inelástico é determinada através de interpolação linear no trecho inelástico (fig.22). Desta maneira, chega-se a:

$$M_n = M_{pL} - (M_{pL} - M_r) \frac{(L_b - L_p)}{(L_r - L_p)} \quad (101)$$

onde:

M_n = resistência nominal do momento crítico;

$M_{pL} = Z_y \cdot f_y$ = momento de plastificação;

M_r = momento resistente elástico, $M_r = (f_y - f_r) W_x$,
sendo f_r = tensão residual (69MPa para perfis laminados, 114MPa para perfis soldados, referência [102]).

L_b = comprimento do trecho destravado;

L_p = comprimento do trecho destravado, correspondente ao momento de plastificação;

L_r = comprimento do trecho destravado, correspondente ao momento resistente elástico.

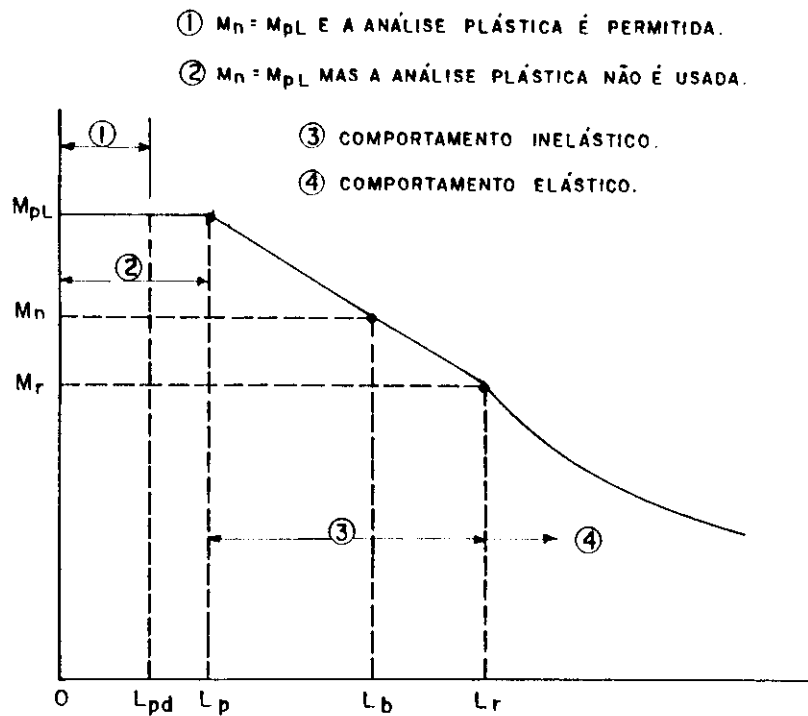


FIG.22 - Curva adotada no regime inelástico

Chamando de $\lambda = L_b/r_y$, $\lambda_p = L_p/r_y$, e $\lambda_r = L_r/r_y$, a expressão (101) terá a seguinte forma:

$$M_n = M_{pL} - (M_{pL} - M_r) \frac{(\lambda - \lambda_p)}{(\lambda_r - \lambda_p)} \quad (102)$$

onde:

λ = parâmetro de esbeltez;

λ_p = valor de " λ " para o qual a seção pode atingir o momento de plastificação;

λ_r = valor de " λ " para o qual $M_{cr} = M_r$.

As fórmulas (101) e (102) são fornecidas pela NBR 8800 no item 5.4.5.2 e anexo "D", respectivamente.

3.3 - Parâmetro de esbeltez " λ_r " para perfis "U" e "I", de acordo com a NBR 8800

O parâmetro " λ_r " é obtido introduzindo-se o fator " C_b " na equação (49), fazendo $M_{cr} = M_r$ e $\lambda = \lambda_r$, chegando-se a:

$$\lambda_r = \frac{0.707 C_b \beta_1}{M_r} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4 \beta_2 M_r^2 / C_b \beta_1^2}} \quad (103)$$

sendo " β_1 " definido por (47), para perfis "U" e "I", " β_2 " definido por (48), para perfis "U" e " β_2 " definido por (53) e para perfis "I". A expressão (103) é encontrada no anexo "D" da NBR 8800.

3.4 - Parâmetro de esbeltez " λ_r " para seções retangulares estreitas e caixa bissimétricas, de acordo com a NBR 8800

O parâmetro " λ_r " é obtido introduzindo o fator " C_b " na equação (45), fazendo $M_{cr} = M_r$ e $\lambda = \lambda_r$, chegando-se a:

$$\lambda_r = \frac{1.95 C_b E \sqrt{I_r A}}{M_r} \quad (104)$$

A expressão (104) é encontrada no anexo "D" da NBR 8800.

3.5 - Parâmetro de esbeltez " λ_r " para seções "I" monossimétricas de acordo com a NBR 8800

Devido às dificuldades em explicitar o índice de esbeltez na expressão (69), determina-se o comprimento $L_b = L_r$ com " B_1 " e " B_2 " fornecidos por (67) e (68), respectivamente, e, simultaneamente, iguala-se o momento crítico " M_{cr} " fornecido por (69) (com o fator " C_b " introduzido) com o momento resistente elástico " M_r ". Feito isto, o índice de esbeltez será igual a $\lambda_r = L_r / r_y$.

3.6 - Parâmetro de esbeltez " λ_r " para seções "T", de acordo com a NBR 8800

A norma brasileira não prevê a utilização destes tipos de seções no regime inelástico, portanto não será definido o parâmetro de esbeltez " λ_r ".

3.7 - Espaçamentos entre apoios laterais de vigas sujeitas a momento de plastificação constante

Para vigas sujeitas a momento de flexão, a instabilidade pode iniciar por flambagem lateral entre os apoios laterais da viga e por flambagem local devido à compressão dos elementos de placas da seção transversal. A

flambagem local pode ser retardada até o material atingir o início do endurecimento por deformação (strain-hardening), ao limitar a relação entre a largura e a espessura de cada elemento de placa. A instabilidade causada pela flambagem lateral pode ser impedida usando-se apoios laterais espaçados convenientemente.

A figura 23 mostra uma curva do momento crítico em função do comprimento de uma viga simplesmente apoiada e sujeita a momentos de extremidades iguais e opostos em torno do eixo de maior inércia. Esta curva consiste essencialmente de duas partes: (1) o regime elástico, onde ocorre a flambagem lateral, quando a viga ainda está totalmente elástica (curva "BCD"), e (2) o regime inelástico, em que ocorre a flambagem, quando partes da viga já estiverem escoadas em regiões de altas tensões residuais. A localização do ponto "A" apresenta grande interesse, pois possibilita determinar o comprimento crítico em que uma rótula plástica pode formar.

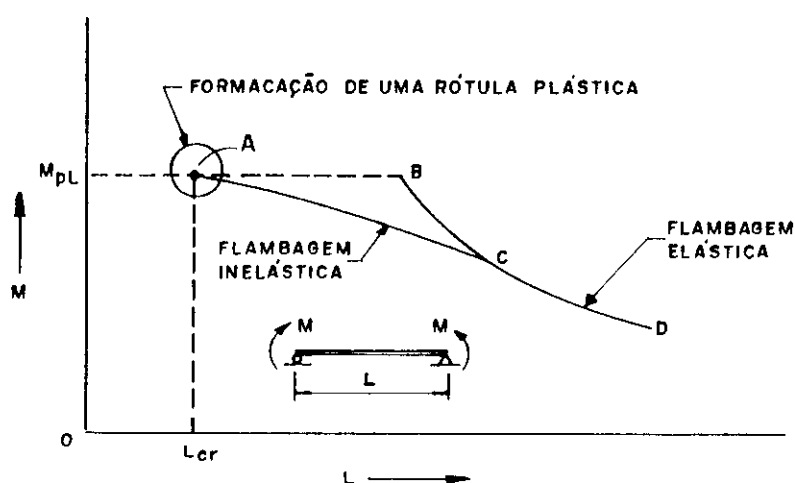


FIG.23 - Diagrama do momento em função do comprimento

Por outro lado, a figura 24 mostra uma curva do momento em função das rotações de extremidades de uma viga obtida experimentalmente. Esta curva é constituída de quatro partes: (1) o regime elástico (trecho "OA"), no qual a relação "M- θ " é linear; (2) o regime inelástico (trecho "AB"), no qual a curva torna-se não linear devido ao escoamento parcial; (3) o "patamar da rótula plástica" (trecho "BC"), no qual a viga está totalmente escoada e não é capaz de absorver momentos adicionais; e (4) o regime de descarregamento (trecho "CD"), no qual a viga está em equilíbrio instável.

Experimentos têm demonstrado que a flambagem lateral usualmente inicia no ponto "B" (fig.24). Se o comprimento da viga for maior do que o comprimento crítico (" L_{cr} " na fig.23), então os pontos "B" e "C" coincidirão e não haverá formação de rótula plástica.

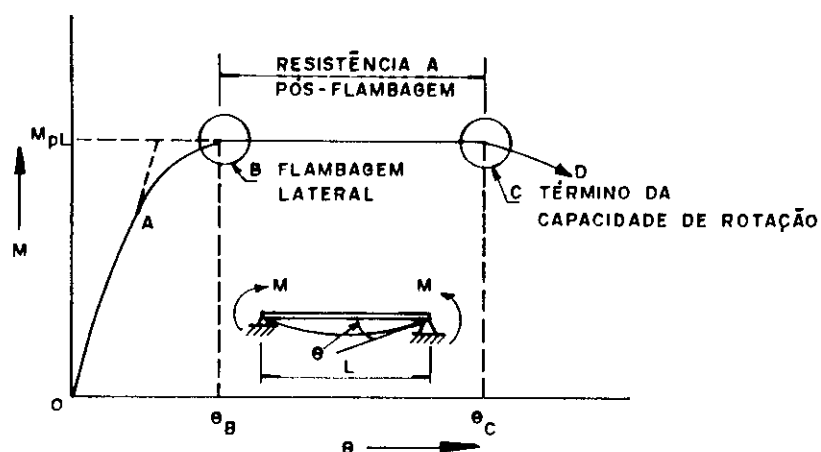


FIG.24 - Diagrama do momento em função da rotação

Se, por outro lado, a viga for suficientemente curta, o início da flambagem lateral não terá efeito na formação da rótula plástica, e a ruína iniciará por flambagem local no ponto "C" após ter ocorrido uma suficiente rotação da

rótula. O trecho plano da curva entre os ângulos " θ_B " e " θ_C " representa a resistência pós-flambagem da viga. O comprimento deste trecho é da maior importância em cálculos plásticos, pois é nesta região que existe a verdadeira rótula plástica [103].

3.8 - Comprimento crítico e parâmetro de esbeltez " λ_p " para perfis "U" e "I", de acordo com a NBR 8800

O espaçamento ótimo de apoios laterais pode ser determinado experimentalmente [101,103] ou, teóricamente considerando a resistência à flambagem lateral como um todo.

A relação crítica entre o momento "M" e o comprimento "L" de uma viga simplesmente apoiada sob momento uniforme é fornecida pela equação (41). Sabendo-se que os apoios laterais estarão localizados onde, possivelmente, ocorrerá o momento plástico " M_{pL} ", e as distâncias entre os pontos de apoios laterais são relativamente curtos, foi demonstrado [101] que, neste caso o termo envolvendo a rigidez à torção " GI_T " pode ser desprezado. Assim, desprezando o termo que envolve esta rigidez na equação (41), torna-se:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{\pi E}{L}\right)^2 I_y C_\omega} \quad (105)$$

Fazendo $L = L_b$ = comprimento lateralmente destravado, sendo $I_y = A \cdot r_y^2$ e $C_\omega = I_y h^2 / 4$, e sabendo-se que o momento " M_{cr} " deve atingir o momento $M_{pL} = Z_x \cdot f_y$, e, finalmente, substituindo estas grandezas na equação (105), tem-se:

$$\lambda_p = \frac{L_b}{r_y} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{2 f_y} \left(\frac{Ah}{Z_x}\right)} \quad (106)$$

O termo " Ah/Z_x ", na equação (106), representa o fator de forma da seção transversal, e ele será igual a 2 quando for desprezada a contribuição da alma. Então, a equação (106)

tornará:

$$\lambda_p = \frac{L_b}{r_y} = 3.14 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (107)$$

Um limite superior pode ser obtido pela equação anterior, se não forem consideradas as tensões residuais e se o material for perfeitamente elasto-plástico. Fazendo $E = 205000 \text{ MPa}$ e $f_y = 250 \text{ MPa}$ (para aço A-36) na equação (107) encontra-se:

$$\lambda_p = \frac{L_b}{r_y} \cong 90 \quad (108)$$

A partir da figura 21, o valor de " L_b/r_y ", esperado para a região plástica, deveria ser um valor bem abaixo do fornecido pela expressão (108). Além do mais, se o momento gradiente, escoamento parcial, rigidez torcional e restrições de extremidades, se consideradas, aumentariam o limite de " λ_p ".

Por outro lado, a carga de flambagem lateral com torção, de acordo com o conceito do módulo tangente, é determinada a partir da hipótese que somente ocorre carregamento, portanto, o módulo de elasticidade "E" pode ser substituído pelo módulo de elasticidade em endurecimento por deformação $E_{st} = 6205,5 \text{ MPa}$ (para aço A-36) na equação (107). Feito isto, chega-se a :

$$\lambda_p = \frac{L_b}{r_y} \cong 16 \quad (109)$$

O valor de $L_b = 16r_y$ da relação (109) fornece o espaçamento máximo necessário entre as contenções laterais da viga para que não ocorra a flambagem lateral até o instante em que também estiver na eminência da flambagem local. Assim, os espaçamentos das contenções laterais fornecidos pela relação (109) possibilitam um valor ótimo de deformação (deflexão ou rotação) que será distribuído pela viga antes que ocorra alguma forma de flambagem. Espaçamentos menores não

proporcionariam maiores deformações de pré-flambagem devido ao efeito da flambagem local. Espaçamentos maiores resultariam em flambagem lateral prematura. Conseqüentemente, o espaçamento entre as contenções laterais fornecido pela relação (109), será considerado espaçamento ótimo.

Uma das maiores dificuldades apresentadas pelas relações (108) e (109), trata-se do não fornecimento de informações sobre o problema de contenções sub-ótimas. A extensão desta dificuldade pode ser observada na medida em que for analisada a solução elástica da equação (107). Esta forneceu $L_b/r_y = 90$, como sendo o espaçamento máximo entre as contenções laterais. Isto assegurará que o momento de plastificação " M_{pL} " seja atingido. Tal solução despreza o escoamento, e os valores de cálculos recomendados são menores do que este. Por outro lado, a relação (109) fornece o espaçamento máximo assegurando de modo que seja atingido o ponto de flambagem local. Conseqüentemente, não existem informações no grande e importante intervalo de " L_b/r_y ", entre 16 e 90. A expressão (107) foi deduzida desprezando-se as restrições devido aos vãos elásticos adjacentes da viga. Lay e Galambos [101] deduziram uma expressão baseada em um modelo de seção transversal "I". Supuseram a existência das articulações longitudinais no centro da alma e na sua união com a mesa tracionada. Esta expressão relaciona a capacidade de rotação da viga com seu comprimento destravado " L_b ", considerando-se as restrições de vãos adjacentes para os quais o coeficiente de comprimento efetivo $k = 0.54$. A expressão é:

$$\frac{kL}{r_y} = \frac{0.54L_b}{r_y} = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_y} \sqrt{1 + 0.7 \left(\frac{R \cdot m}{s-1} \right)}} \quad (110)$$

onde, $\epsilon_y = f_y/E$, $s = \epsilon_{st}/\epsilon_y$, $m = E/E_{st}$ e a máxima capacidade de rotação do perfil é $R = 0.8(s - 1)$.

Supondo $E = 205000$ MPa, $E_{st} = 6205.5$ MPa, e $f_y = 250$ MPa, cujas características mecânicas sejam válidas para

o aço A-36. Levando-se isto na equação (110), tem-se:

$$\frac{L_b}{r_y} = 1.32 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \cong 38 \quad (111)$$

A equação (111) foi verificada por uma variada série de ensaios de laboratório. Foi demonstrado ainda que ela representa uma equação razoável para projetos.

Outros fatores afetam a determinação do espaçamento das contenções laterais como por exemplo o momento gradiente. Este faz com que a flambagem local ocorra antes da flambagem lateral [72]. Ensaios feitos por outros pesquisadores, como os realizados por Lee e Galambos [103], foram usados para estabelecer um limite para " L_b ", chegando-se ao seguinte valor:

$$\frac{L_b}{r_y} = 1.76 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (112)$$

A norma brasileira utiliza esta mesma expressão no anexo "D", com uma insignificante diferença no número que aparece fora do radical da expressão (112). Este é igual a 1.75. O espaçamento entre as contenções laterais, considerando aço A-36 seria igual a $50r_y$.

3.9 - Comprimento crítico e parâmetro de esbeltez " λ_p " para perfis "I" monossimétricos, de acordo com a norma NBR 8800

O estudo inelástico de vigas monossimétricas é mais complicado do que no regime elástico. Este tem recebido pouca atenção, tanto que as soluções que cobrem este comportamento não têm sido publicadas. Assim, o tratamento deste assunto, nas normas, tende a ser um tanto intuitivo.

Os efeitos do escoamento parcial nestes tipos de seções são, geralmente, menos graves quando a mesa maior for comprimida em comparação com as seções "I" bissimétricas

semelhantes. Quando a mesa menor da seção estiver em compressão, em geral, a plasticidade tem efeito mais grave do que para o caso de seções bissimétricas [126].

Uma análise aproximada pode ser feita seguindo os passos do item 3.8, porém considerando agora as expressões (67), (68) e (69).

Pelos motivos considerados no item 3.8, aqui também será considerado desprezível o termo que envolve a rigidez à torção " GI_t ". Assim, desprezando este termo na expressão (68), sabendo-se ainda que $I_y = Ar_y^2$, $C_\omega = h^2 I_c I_t / I_y$ [88], e que o momento crítico " M_{cr} " deve atingir o momento de plastificação $M_{pL} = Z_{xy} f_y$, finalmente substituindo estas grandezas nas expressões (67), (68) e (69), chega-se a:

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{2f_y} \left(\frac{Ah}{Z_x}\right)} \sqrt{\beta_x / h + \sqrt{(\beta_x / h)^2 + 4I_c I_t / I_y^2}} \quad (113)$$

O módulo de plastificação " Z_x " tende a ser menor para seções monossimétricas, mas, para efeito de simplificação, será considerado igual ao módulo de plastificação de seções "I" bissimétricas. Conseqüentemente, se as áreas e alturas destes dois perfis comparativos forem iguais, o fator de forma será o mesmo para ambos, e o termo do primeiro radical da expressão (113) será igual à expressão (106).

A propriedade de monossimetria " β_x " pode ser determinada de uma maneira mais simples como ficou demonstrado na referência [94], cuja expressão pode ser dada por:

$$\frac{\beta_x}{h} = 0.9 \left[\frac{2I_c}{I_y} - 1 \right] \left[1 - \frac{I_y^2}{I_x^2} \right] \quad (114)$$

Na expressão (114), "h" é a distância entre os centros de gravidade das mesas; " I_c " é o momento de inércia da mesa comprimida, em relação ao eixo de menor inércia e, " I_x " e

"I_y" são os momentos de inércia, em relação aos eixos de maior e menor inércia da seção, respectivamente.

Utilizando-se destes recursos e comparando-se duas vigas: uma de seção monossimétrica e outra de seção bissimétrica com áreas e alturas iguais, desprezando-se as tensões residuais e outros fatores que afetariam as simplificações, pode-se demonstrar que, quando a mesa maior de uma seção monossimétrica for comprimida, o seu parâmetro de esbeltez " λ_p " será, aproximadamente 28%, maior do que o parâmetro " λ_p " de seções bissimétricas (eq.106). No entanto, quando a mesa menor for comprimida, o parâmetro " λ_p ", para seções monossimétricas, será 49% do valor de " λ_p " de seções bissimétricas (eq.106). Pelas expressões (108) e (109), considerando aço A-36, quando a mesa maior for comprimida, o limite superior de $\lambda_p \cong 115$ e o inferior será $\lambda_p \cong 21$. Por outro lado, se a mesa menor for comprimida, o limite superior de $\lambda_p \cong 44$ e o inferior será $\lambda_p \cong 8$. Pelo anexo "D" da NBR 8800, se considerado o mesmo tipo de aço usado anteriormente encontrar-se-a $\lambda_p \cong 43$. Este estará entre o intervalo do limite superior $\lambda_p \cong 44$ e do limite inferior $\lambda_p \cong 8$. Este representa o caso da mesa menor como estando em compressão. Os limites 8 e 44 são conservadores devido às simplificações adotadas, mas demonstra aproximadamente que faz sentido o valor menor adotado pela NBR 8800, para o parâmetro de esbeltez de perfis monossimétricos, quando este parâmetro é comparado com aquele utilizado em perfis bissimétricos.

A expressão de " λ_p ", adotada pela NBR 8800 para perfis monossimétricos ao atender os casos em que a mesa maior ou a mesa menor estejam comprimidas, será dada por:

$$\lambda_p = 1.5 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (115)$$

A flambagem de uma viga monossimétrica pode ser tratada como um problema envolvendo a instabilidade da mesa comprimida [96]. Para uma mesa comprimida de largura " b_c " e espessura " t_c ", o raio de giração em relação ao eixo de

menor inércia da seção será $r_y = \sqrt{I_y/A} = b_c / \sqrt{12}$. Sendo L_b = comprimento sem contenção lateral, o parâmetro de esbeltez $\lambda = L_b/r_y$, será:

$$\lambda = \frac{L_b \sqrt{12}}{b_c} \quad (116)$$

3.10 - Comprimento crítico e parâmetro de esbeltez " λ " para perfis retangulares estreitos e caixa bissimétricos, de acordo com a NBR 8800

A solução do problema de flambagem lateral para vigas de seções retangulares (fig.25) merece uma atenção particular, pois ela é simples e pode ser usada diretamente no cálculo de vigas caixa.

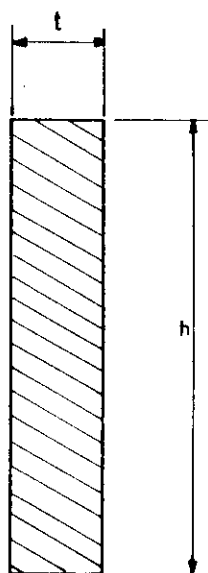


FIG.25 - Seção retangular

Devido a sua inerente estabilidade lateral, as vigas caixão podem ser usadas em grandes vãos sujeitos a altas cargas.

O diagrama momento/curvatura de uma seção transversal retangular constitui o princípio básico de análise do comportamento das vigas inelásticas (fig.26).

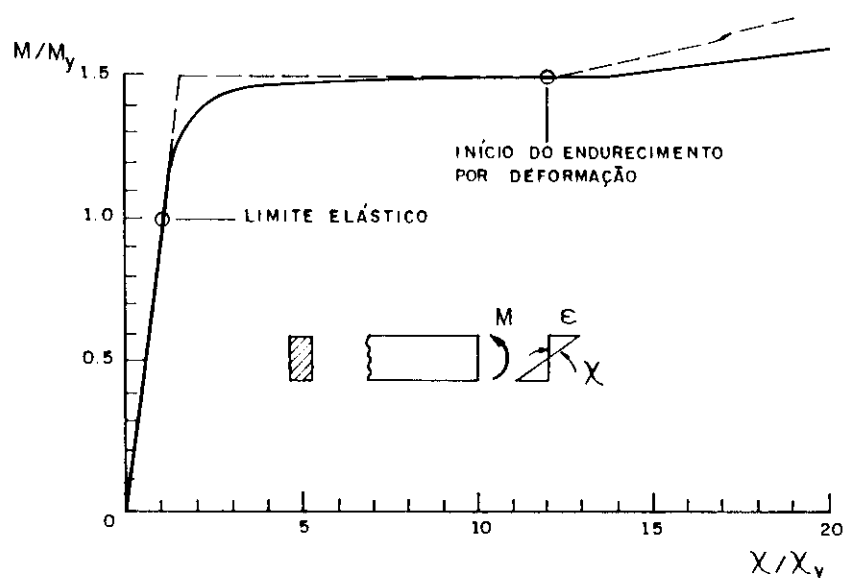


FIG.26 - Diagrama momento/curvatura de seção retangular

Para uma viga de seção retangular, sujeita a momentos de extremidades uniformes, foi demonstrado que o momento crítico pode ser calculado pela expressão (45). Nesta expressão, o valor do momento de inércia à torção é dado por $I_T = h.t^3/3$, porém este valor é pequeno, quando comparado com o momento de inércia à torção de perfis caixão. Este, por sua vez pode ser calculado de acordo com a expressão abaixo (fig.27) [88]:

$$I_T = \frac{4A^2}{\int_s ds/t} = \frac{2b^2 h^2}{(b/t + h/t_v)} \quad (117)$$

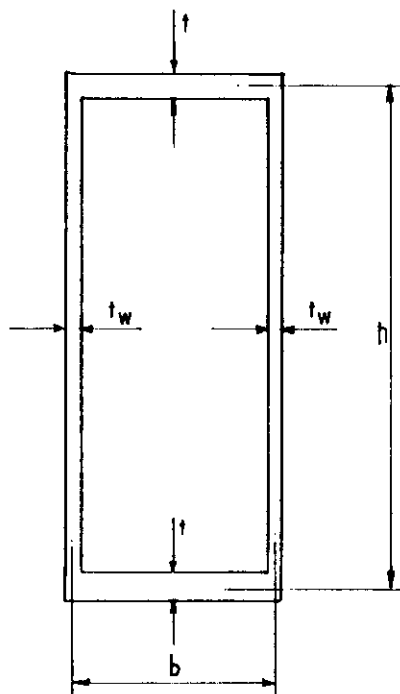


FIG.27 - Seção caixão

A flambagem lateral de vigas caixão de proporções usuais ocorre acima do limite de proporcionalidade do material. Neste caso, a ruína será por flambagem lateral inelástica.

No item 2.3 chegou-se à expressão (44) fazendo-se $C_\omega = 0$. Sendo a rigidez à flexão secundária em relação ao eixo "y" igual a $B = EI_y$ e a rigidez à torção $C = GI_T$, a expressão (44) pode ser colocada na seguinte forma:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{B.C} \quad (118)$$

Na dedução de (118) a curvatura da viga devido ao momento de flexão primário foi desprezado (fig.28).

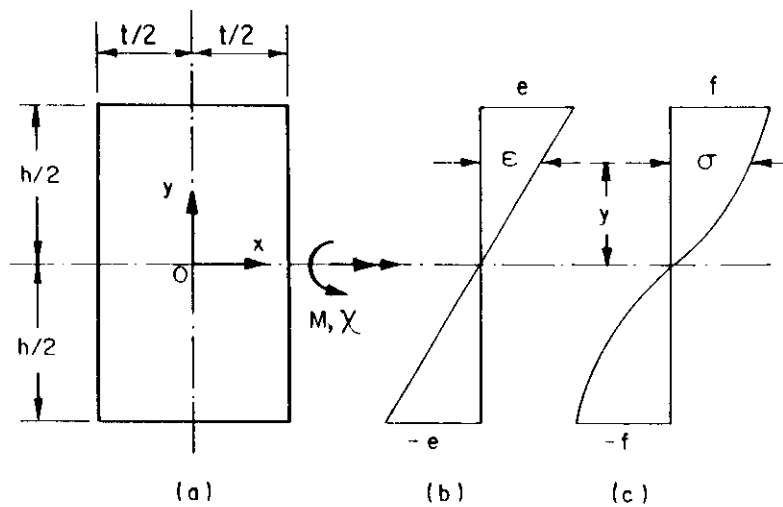


FIG.28 - Condições devido ao momento de flexão primário

Isto é justificado somente se a rigidez à flexão primária $A = EI_x$ for muito maior do que as rigidez "B" e "C". O que ocorrerá quando a relação largura/altura de uma seção retangular for pequena (fig.29).

Neal (WITTRICK, W. H. Journal of the aeronautical sciences, december, 1952) deduziu a equação do momento crítico para uma seção retangular considerando-se a rigidez "A". Esta equação é dada por:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{1}{\left[1/B - 1/A\right] \left[1/C - 1/A\right]}} \quad (119)$$

Neal demonstrou que se forem dadas definições mais precisas das rigidez "A", "B" e "C", a equação (119) ainda se manterá aplicável no regime plástico. Nota-se que quando a rigidez "A" tende ao infinito a equação (119) se reduzirá à equação (118).

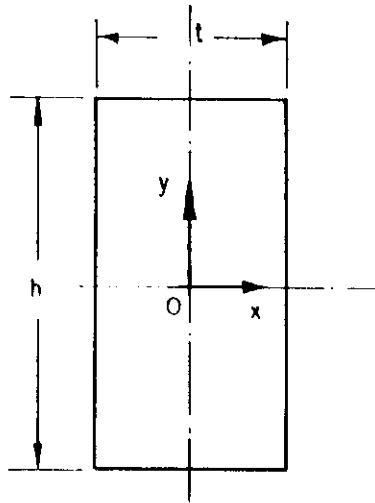


FIG.29 - Relação largura/altura de uma seção retangular

Para determinar o parâmetro de esbeltez " λ "_p deve ser imposta a condição de que o momento crítico " M "_{cr} atinja o momento de plastificação " M "_{pL}. Levando em conta esta consideração e fazendo-se $I_y = A \cdot r_y^2$ na expressão (118), no início do endurecimento por deformação tem-se:

$$M_{cr} = M_{pL} = \frac{\pi}{L} r_y \sqrt{E_{st} \cdot G_{st} \cdot I_T \cdot A} \quad (120)$$

De acordo com as referências [72,100] o módulo de endurecimento por deformação é dado por:

$$G_{st} = \frac{2G}{1 + E / [4E_{st} (1 + \nu_{\alpha})]} \quad (121)$$

onde,

$$G = E / 2(1 + \nu_{\alpha}) \quad (122)$$

Fazendo-se $\nu_{\alpha} = 0.3$ em (122) tem-se:

$$G = 0.385 \times E \quad (123)$$

Sendo $E_{st} = 0.03E$, $\nu_{\alpha} = 0.3$ e introduzindo-se (123) em (121) tem-se:

$$G_{st} = 0.1039 \times E \quad (124)$$

e finalmente, fazendo-se $\lambda_p = L/r_y$, $E_{st} = 0.03E$ e $G_{st} = 0.1039E$ em (120) tem-se:

$$\lambda_p = \frac{0.175E}{M_{pL}} \sqrt{I_T \cdot A} \quad (125)$$

Para aço carbono estrutural pode-se adotar $E_{st} = 0.025E$ [ver ref.72]. Com este valor pode se chegar a resultados melhores para a expressão (125).

A expressão regulamentada pela norma NBR 8800 é dada por:

$$\lambda_p = \frac{0.13E}{M_{pL}} \sqrt{I_T \cdot A} \quad (126)$$

4 - FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO - REGIME PLÁSTICO

Vigas dimensionadas no regime plástico são denominadas de compactas ou classe 1. Neste regime, o momento de plastificação $M_{pL} = f_y \cdot Z_x$ pode ser atingido ou excedido mantendo-se constante para rotações relativamente

grandes com uma redistribuição de esforços e, finalmente, podendo formar um mecanismo, enquanto no regime elástico a situação é clara, isto é, o membro flamba ou é estável. Desse modo, conclui-se que os fatores que afetam o regime plástico são complexos e intimamente relacionados. A flambagem local, a flambagem da alma e as distorções laterais-torcionais interagem, e elas tendem a crescer gradualmente antes de ter uma formação de rótula repentina. O endurecimento por deformação e a instabilidade atuam um contra o outro e tendem ao equilíbrio. Atingem o momento de plastificação $M = M_{pL}$ em um comprimento crítico $L = L_{cr pd}$.

Embora se tenha muito conhecimento experimental no regime plástico, dos relacionamentos do comprimento destravado e das relações largura-espessura da mesa e da alma para a capacidade de rotação, geralmente, as análises não satisfazem as complexas inter-relações apresentadas anteriormente. Realmente, sempre que elas existirem, sua utilização em situações de projetos de escritório seriam questionáveis. Não seria prático exigir que os projetistas determinassem o aumento necessário da capacidade de rotação de uma determinada viga para permitir uma desejada redistribuição de momentos uniformes. Os procedimentos de cálculos são difíceis, inseguros e consomem muito tempo.

Na teoria "plástica comum" do cálculo estrutural assume-se que todos os elementos, de uma dada seção transversal de uma peça sujeita à flexão, permanecem elásticos até atingir o "momento de plastificação M_{pL} ", permanecendo constante para todos os acréscimos da curvatura. Assim, a primeira seção transversal, ao atingir o momento " M_{pL} " de uma estrutura indeterminada, gira sob o efeito deste momento até que outras seções também se plastifiquem formando um mecanismo instável. Este comportamento conservador despreza a capacidade adicional do momento devido aos efeitos do endurecimento por deformação (encruamento). Além disso, é também ignorada a possibilidade de ser reduzida a capacidade do momento numa rótula plástica, devido ao fenômeno da instabilidade, com uma

rotação menor do que aquela necessária para formar um mecanismo na estrutura.

A figura 30, mostra um gráfico da relação entre os momentos " M/M_{pL} ", em função da rotação " θ " para uma viga "I" simplesmente apoiada e com uma carga concentrada no meio do vão.

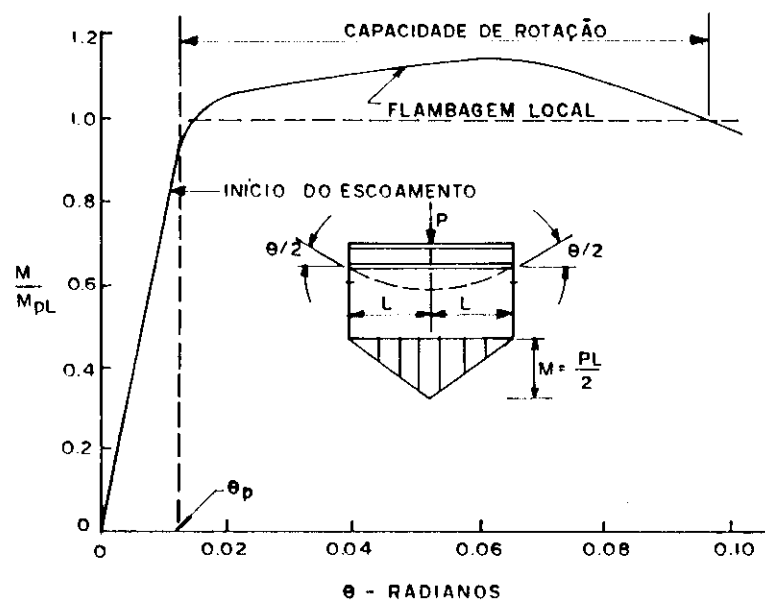


FIG.30 - Diagrama momento-rotação

A variação dos ângulos em cada apoio é denominado de " $\theta/2$ ", e o ângulo total das rotações nas duas extremidades será igual a $\theta_p = M_{pL} \cdot L/EI$, o qual corresponde ao momento " M_{pL} " no meio do vão. A curva tracejada representa o comportamento assumido na teoria plástica simples. A curva sólida mostra o comportamento real partindo da curva idealizada no início do escoamento, mas continua a subir eventualmente acima de " M_{pL} " devido ao endurecimento por deformação de algumas fibras. A flambagem local ocorre com o trecho escoado da mesa comprimida e antecipa uma queda

na capacidade do momento. Este comportamento é típico de vigas sujeitas a cargas, produzindo momentos que variam ao longo da viga (momento gradiente).

É comum, no estudo do comportamento de vigas, considerar a rotação como um parâmetro de deformação (fig.30). As rotações são expressas em termos de "capacidade de rotação R", onde "R" é definido por:

$$R = \frac{\theta}{\theta_p} - 1 \quad (127)$$

sendo θ = rotação e θ_p = rotação no momento " M_p ", se a viga comporta elasticamente.

O valor absoluto da rotação da rótula inelástica $\theta_H = \theta - \theta_p$ do vão total será denominado de "capacidade de rótula". Assim, ao usar também a expressão (127), conclui-se que $\theta_H = R \cdot \theta_p$.

A capacidade de rótula real de uma peça de uma dada estrutura deve ser superior à rotação necessária para formar um mecanismo. Isto para assegurar que a capacidade última de carga da estrutura seja igual ou superior àquela prevista pela teoria plástica simples.

A medida que uma viga "I" se deforma acima do limite elástico pode ocorrer eventualmente a flambagem das mesas ou da alma. Embora possa esperar que as seções robustas mantenham as formas de suas seções transversais, ainda que sob deformações plásticas consideráveis, em seções mais esbeltas, a flambagem lateral pode ocorrer imediatamente após atingir o momento plástico. Devido a incapacidade da viga de manter a forma de sua seção transversal, sua capacidade ao momento será reduzida; assim, a flambagem local impedirá que a seção resista o momento plástico em um determinado tempo necessário para que se formem articulações plásticas em outras seções. Conseqüentemente, para satisfazer o requisito da capacidade de deformação (rotação adequada sob " M_{pL} "), os elementos comprimidos devem ter uma relação largura-espessura suficiente para impedir a flambagem plástica prematura.

Como será visto no item sobre "flambagem local da mesa (FLM)", Haaijer e Thurlimann [74,75,156] chegaram a uma solução deste difícil problema da flambagem de placas, baseando na consideração de obrigar que a seção transversal tenha uma capacidade de rotação que corresponda a de uma deformação a compressão igual ao valor correspondente ao endurecimento por deformação (ϵ_{st}). Neste ponto, as propriedades do material podem ser definidas com mais precisão do que na região entre " ϵ_y " e " ϵ_{st} ".

Para vigas compactas (classe-1), isto é, vigas na região plástica, onde é permitido a redistribuição dos momentos, as regras para controlar a estabilidade foram baseadas na facilidade da seção transversal em atingir a capacidade de rotação igual a 3. Para esta capacidade de rotação, foi demonstrado ser suficiente para a maioria das estruturas de engenharia civil. Limitações para a esbeltez da mesa de uma viga para evitar a flambagem local foram primitivamente baseadas nas pesquisas desenvolvidas por Haaijer e Thurlimann e, mais recentemente, devido aos trabalhos experimentais de Lukey e Adams [106], chegou-se à seguinte relação, adotada também pela NBR 8800:

$$\lambda_p = \frac{b}{t} = 0.38 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (128)$$

Esta relação foi obtida supondo que não existem gradientes de esforços, ao longo da peça e que, no caso da flexão, não existe força axial. Será necessário levar em consideração a influência das forças axial e cortante, já que estas, em geral, estão presentes em qualquer viga.

A força axial e a força cortante não modificarão substancialmente as relações largura-espessura das mesas.

A capacidade de rotação pode ser afetada, quando as tensões de cisalhamento excederem a resistência à flambagem em perfis mais esbeltos. Como será visto no item sobre a "flambagem local da alma", o limite de esbeltez, que poderia permitir que fosse atingido o momento de plastificação " M_{pL} ", e uma capacidade de rotação de no

mínimo igual a 3, será dado também conforme a NBR 8800 por:

$$\lambda_p = \frac{h}{t} = 3.5 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (129)$$

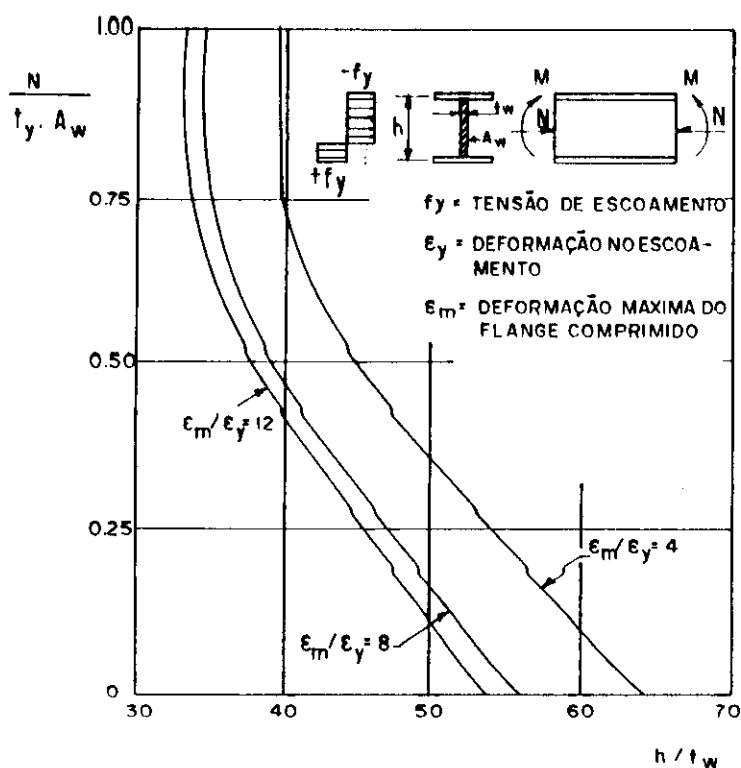


FIG.31 - Relações "h/t" admissíveis em almas de seções "I", totalmente plastificadas para o limite de escoamento $f_y = 232$ MPa

É de se esperar que seja importante o efeito da força axial na flambagem da alma, já que o efeito desta força permite aumentar as tensões nas regiões da seção transversal, desde que já estejam escoadas sob compressão. Haaijer e Thurlimann [75] estudaram teoricamente e compararam seus estudos com resultados experimentais, ou seja, com o problema da flambagem inelástica de placas sujeitas aos efeitos combinados da flexão e compressão.

Baseando-se nestes estudos, eles traçaram curvas para os valores críticos da relação "h/t" para perfis "I", com tensão de escoamento $f_y = 232$ MPa e diversas relações " ϵ_m / ϵ_y ", onde " ϵ_m " é a deformação unitária máxima da mesa comprimida (fig.31).

Perfis sujeitos a carga axial "N" e momento de flexão "M" podem estar sujeitos à deformação plástica. Obviamente, a relação crítica entre a altura e a espessura "h/t" da alma não depende somente da distribuição das tensões, mas também da deformação máxima " ϵ_m " da mesa comprimida.

De acordo com os gráficos fornecidos pela referência [75], os valores de "h/t" para uma tensão de escoamento diferente de 232 MPa podem ser obtidos multiplicando aquela relação por $\sqrt{232/f_y}$ que, por transformações algébricas, torna-se $0.034\sqrt{E/f_y}$. Para perfis laminados típicos onde $A/A_v = 2$ e $\epsilon_m / \epsilon_y = 4$, obtém-se a curva tracejada da figura 32; esta pode ser aproximada por trechos retos.

Determinando-se as equações das retas correspondentes àqueles trechos, chega-se a:

$$\lambda_p = \frac{h}{t} = 2.38 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \left[1 - 1.4 \frac{N}{N_y} \right], \text{ para } \frac{N}{N_y} \leq 0.27 \quad (130)$$

$$\lambda_p = \frac{h}{t} = 1.46 \sqrt{\frac{E}{f_y}}, \text{ para } \frac{N}{N_y} > 0.27 \quad (131)$$

Nas expressões (130) e (131) " N_y " é igual ao produto da área transversal da alma " A_v " pelo limite de escoamento " f_y " do material.

Baseada em resultados experimentais semelhantes aos aqui considerados, a NBR 8800 adota as seguintes expressões:

$$\lambda_p = \frac{h}{t} = 3.5 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \left[1 - 2.8 \frac{N_d}{0.9N_y} \right], \text{ para } \frac{N_d}{0.9N_y} \leq 0.207 \quad (132)$$

$$\lambda_p = \frac{h}{t} = 1.47 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad , \quad \text{para} \quad \frac{N_d}{0.9N_y} > 0.207 \quad (133)$$

Nas expressões (132) e (133) " N_y " é igual ao produto da área transversal bruta " A_g " pelo limite de escoamento " f_y " do material.

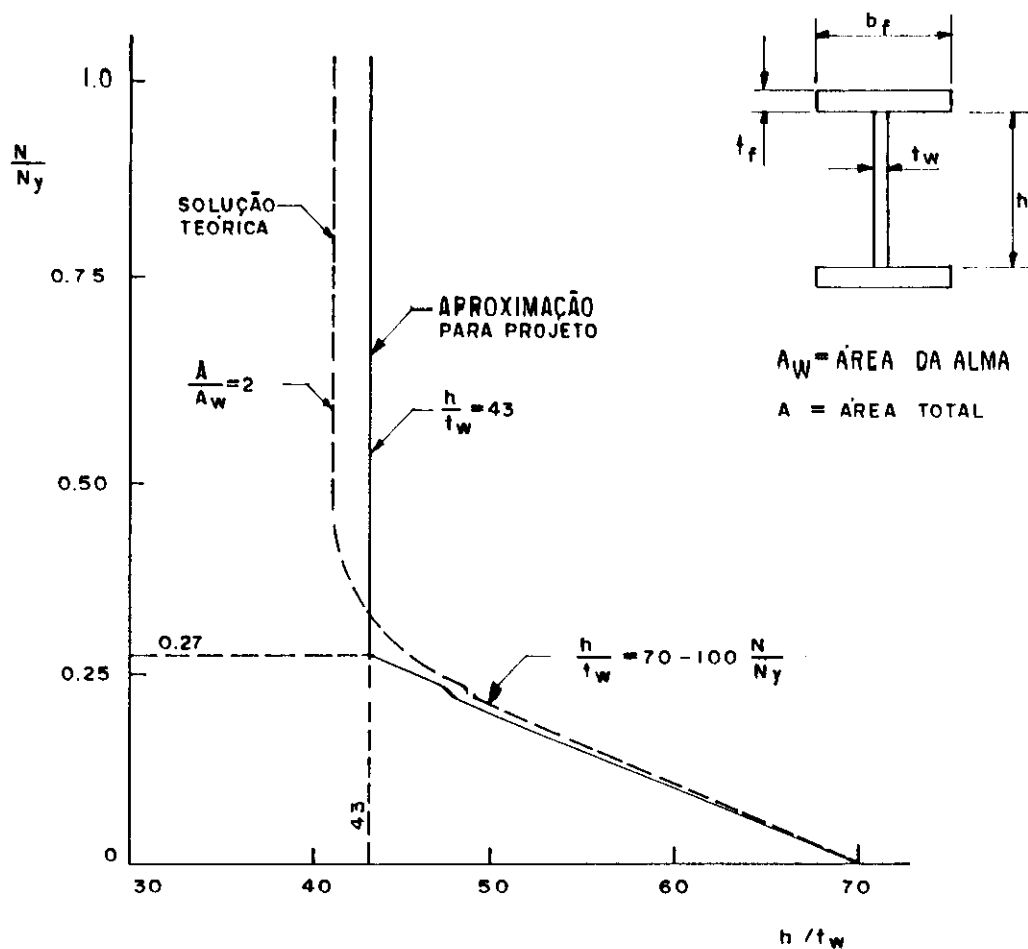


FIG.32 - Relações " h/t " admissíveis em almas de seções "I" para as quais se tem $\epsilon_m/\epsilon_y = 4$ e limite de escoamento $f_y = 232$ MPa

O problema da especificação do comprimento crítico de uma viga, de modo que não ocorra a flambagem lateral prematura, cujas mesas não se deformam até o ponto de endurecimento por deformação, ainda não está completamente solucionado. De acordo com as análises feitas para o parâmetro de esbeltez de perfis "I", bissimétricos,

considerando-se o regime de endurecimento por deformação, chegou-se que $\lambda_p = 16$ (eq.109). Análise semelhante pode ser feita aqui, chegando-se a este mesmo valor, no entanto, seria muito restritivo, visto que necessitaria de um número de pontos de apoio laterais, substancialmente maiores do que os usados na prática. Isto aumentaria o custo da estrutura. Um grande número de ensaios de laboratório têm demonstrado que este valor é muito conservador. Existem duas maneiras de obter uma solução deste problema; estas possibilitariam dimensionamentos mais racionais. A primeira é investigar se realmente existe necessidade de uma rotação total até o ponto de endurecimento por deformação. A outra é a de refinar a teoria e considerar aqueles fatores que foram desprezados nas análises. Assim, para a solução final, faz-se uma combinação destas duas análises.

Considere a situação da rotação necessária. É óbvio que certas rótulas plásticas de uma estrutura sejam obrigadas a girar mais do que as outras. A primeira rótula a se formar será a que tiver o maior ângulo de rotação, enquanto que a última rótula a se formar terá um ângulo relativamente menor; esta, na realidade, apenas atingirá o momento de plastificação " M_{pL} ". O requisito de que uma seção seja capaz de absorver rotações, até o ponto de endurecimento por deformação, foi desenvolvido como requisito máximo. Em vista da existência de diferenças significativas do parâmetro de esbeltez $\lambda_p = L_b/r_y$ como as que existem quando se considera rotação nula e a rotação total, seria muito restritivo aplicar tal requisito em todos os casos.

A segunda maneira consiste em considerar os fatores que são desprezados na teoria. É possível fazer revisões que aumentem o parâmetro de esbeltez crítico, ao considerar o momento gradiente, a torção de Saint Venant, a extensão da plastificação (parte da viga elástica e parte plástica) e o efeito das restrições de apoios nos extremos proporcionados pelas vigas adjacentes. Particularmente significativos são os momentos gradientes e as restrições de

apoios. A figura (33) mostra os resultados obtidos por Thurlimann e White [15]. Estes trataram tais problemas teóricamente.

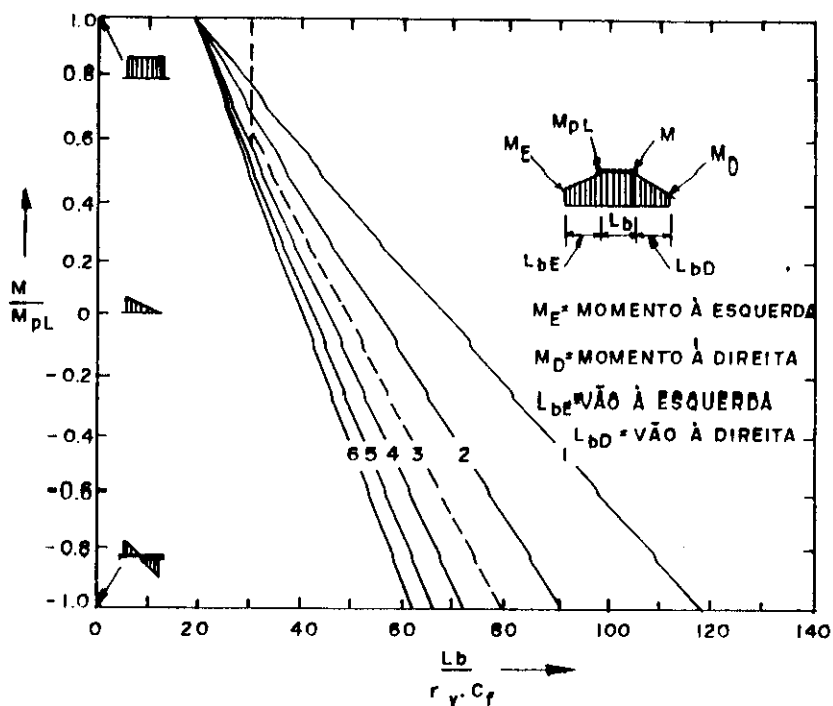


FIG.33 - Aproximação para considerar a influência da relação dos momentos, do coeficiente de restrição e da rotação da rótula plástica sobre o comprimento crítico de flambagem das vigas

Para um membro que contém uma rótula plástica, a relação entre os momentos (M/M_{pL}) é a relação entre um determinado momento em um dos extremos, e o momento plástico, no outro extremo. A abscissa ($L_b/r_y \cdot C_f$) (fig.33) é o parâmetro de esbelteza crítica para o eixo de menor inércia dividido por um fator de correção, que leva em consideração o grau de restrições proporcionado pelos segmentos adjacentes. Cada uma das linhas diagonais que partem do valor básico igual a 18 quando o momento é uniforme corresponde a um valor diferente da rotação requerida pela

rótula plástica.

A figura 33 mostra uma quebra para o valor de " $L_b/r_y C_f$ " igual a 30. Isto é aconselhável ao analisar os resultados de ensaios. Para os valores de " M/M_{pL} ", menores do que 0.6, pode ser determinada a equação de uma reta (com coeficiente angular igual a -0.0032). Esta, por sua vez será representada por:

$$\frac{L_b}{C_f \cdot r_y} = 49 - 31 \frac{M}{M_{pL}} \quad , \quad \text{para } -1.0 < \frac{M}{M_{pL}} < 0.6 \quad (134)$$

A expressão (134) é, então, a equação da reta tracejada mostrada na figura 33. Foi escolhido o valor 3.0 para a capacidade de rotação, por ser um limite superior suficiente para a maioria das estruturas de engenharia civil.

Para valores de " M/M_{pL} ", maiores do que 0.6, a equação da reta será uma constante (fig.33), ou seja:

$$\frac{L_b}{r_y C_f} = 30 \quad , \quad \text{para } 0.6 < \frac{M}{M_{pL}} < 1.0 \quad (135)$$

O fator de correção " C_f " leva em consideração o engastamento do tramo considerado pelos segmentos adjacentes da barra e depende da rigidez destes segmentos. Para estruturas comuns, " C_f " varia de 1.1 a 1.4. Usando um valor médio igual a 1.25 nas expressões (134) e (135), chega-se a:

$$\frac{L_b}{r_y} = 61 - 39 \frac{M}{M_{pL}} \quad , \quad \text{para } -1.0 < \frac{M}{M_{pL}} < 0.6 \quad (136)$$

$$\frac{L_b}{r_y} = 37 \quad , \quad \text{para } 0.6 < \frac{M}{M_{pL}} < 1.0 \quad (137)$$

A norma NBR 8800, adota os valores especificados pela norma americana AISC, ou seja:

$$\frac{L_b}{r_y} = \frac{L_{pd}}{r_y} = \frac{9480}{f_y} + 25 \quad , \quad \text{para } 1.0 > \frac{M_1}{M_2} > -0.5 \quad (138)$$

$$\frac{L_b}{r_y} = \frac{L_{pd}}{r_y} = \frac{9480}{f_y}, \text{ para } -0.5 \geq \frac{M_1}{M_2} > -1.0 \quad (139)$$

A plastificação reduz consideravelmente a resistência de uma peça à flambagem lateral, portanto será necessário contraventar aqueles pontos dos quais se espera o aparecimento de rótulas plásticas. Em regiões compreendidas entre estas seções críticas, podem ser usadas regras convencionais que evitem a flambagem lateral elástica.

Em estruturas, nas quais o sistema de piso proporciona diretamente o suporte lateral necessário, com pouco custo adicional, o cálculo plástico leva a resultados mais econômicos. Porém, o cálculo elástico pode ser preferível, no caso em que os contraventamentos laterais não sejam permitidos por exigências estruturais (arquitetônicas, etc.), ou devido a aspectos econômicos [15,69,74,75,79,100,106,117,141,156,171].

5 - FLAMBAGEM LOCAL

5.1 - Introdução

Além da flambagem lateral com torção de uma determinada viga como um todo o comportamento, no plano, pode ser modificado pela flambagem elástica dos elementos de placa, que compõem o perfil. A flambagem local é caracterizada pelo desenvolvimento de deformações em forma de ondas nos elementos de placas. Isto causa um imediato desvio do plano de reação que pode ser previsto sem que haja prejuízo para toda a seção transversal. Em alguns casos, a flambagem local pode ser a razão da ruína imediata, isto é, sem aumento da carga acima da qual o seu início é possível; ou, mais freqüentemente, ela resulta em uma redistribuição de tensões na placa, mudando, conseqüentemente a natureza da resposta da peça, após o carregamento. Portanto, a flambagem de elementos de placas podem causar, prematuramente, a ruína de uma seção inteira, ou, no mínimo, causar variações de

tensões, reduzindo a resistência total.

Problemas relativos à flambagem local elástica têm sido largamente pesquisados e representam um importante papel na análise e projeto de todos os tipos de estruturas metálicas [72].

O caso mais simples de flambagem local é o de uma placa retangular de espessura constante, sujeita a uma tensão uniforme " f_x " ao longo de duas bordas transversais (fig.34).

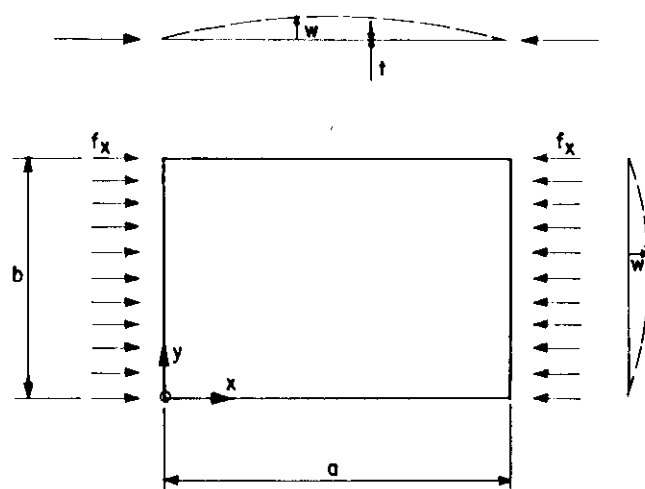


FIG.34 - Flambagem de uma placa retangular

Se a tensão " f_x " for perfeitamente axial e se, inicialmente, a placa estiver perfeitamente reta, a placa permanecerá plana até o limite em que " f_x " tornar igual à tensão crítica " f_{xcr} ". Quando a tensão crítica for atingida, a placa será capaz de se deformar fora do seu plano original, isto é, ela flambará. O problema matemático é idêntico ao problema da flambagem lateral. No entanto, agora a equação diferencial é de diferenciais parciais. Portanto, sua solução é diferente e mais complicada [ver por ex.

ref.141]. A equação diferencial de uma placa retangular, uniformemente comprimida, é então dada por [25,158]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{f_x t}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (140)$$

onde "w" é uma função de "x" e "y", e $D = Et^3/[12(1-\mu^2)]$. A solução da equação (140) para a tensão crítica será:

$$f_{xcr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)(b/t)^2} \quad (141)$$

Na equação (141), "k" é uma constante que depende do tipo de tensão, das condições de apoios dos lados e da relação entre o comprimento e a largura da placa. A constante "E" é o módulo de elasticidade, "μ" é o coeficiente de Poisson, e "b/t" é a relação entre a largura e a espessura da placa. Pode-se chegar a uma relação largura/espessura "b/t" semelhante àquela fornecida pela equação (141) de maneira mais simples, através de outros caminhos e, mostrando que a flambagem local e a flambagem torcional são fenômenos semelhantes, como demonstrado pelas referências [2,79,100,160].

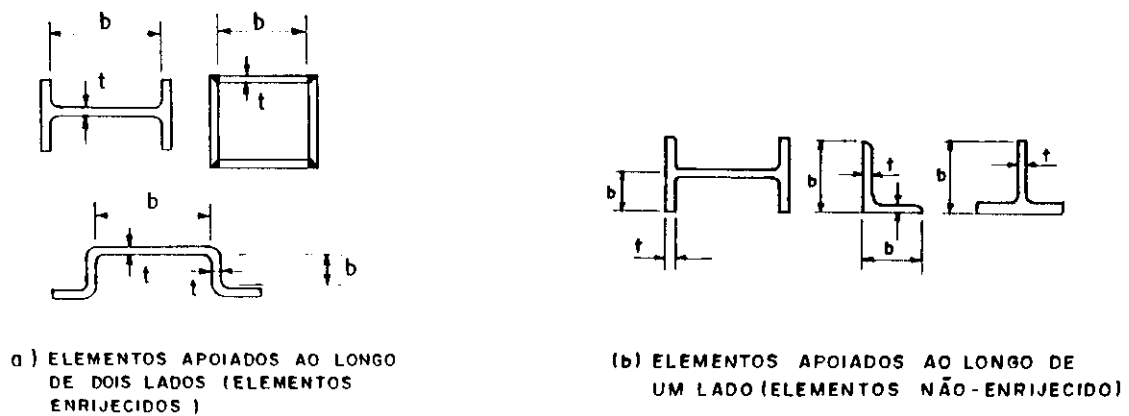


FIG.35 - Elementos comprimidos enrijecidos e não-enrijecidos

Em geral, elementos de placas comprimidas podem ser subdivididos em duas categorias: (1) elementos enrijecidos, que são aqueles que apoiados ao longo de dois lados paralelos às direções das tensões de compressão; e (2) elementos não enrijecidos, que são aqueles apoiados ao longo de um lado e livre no outro, ficando ambos paralelos às direções das tensões de compressão. A figura (35) mostra exemplos típicos destas situações.

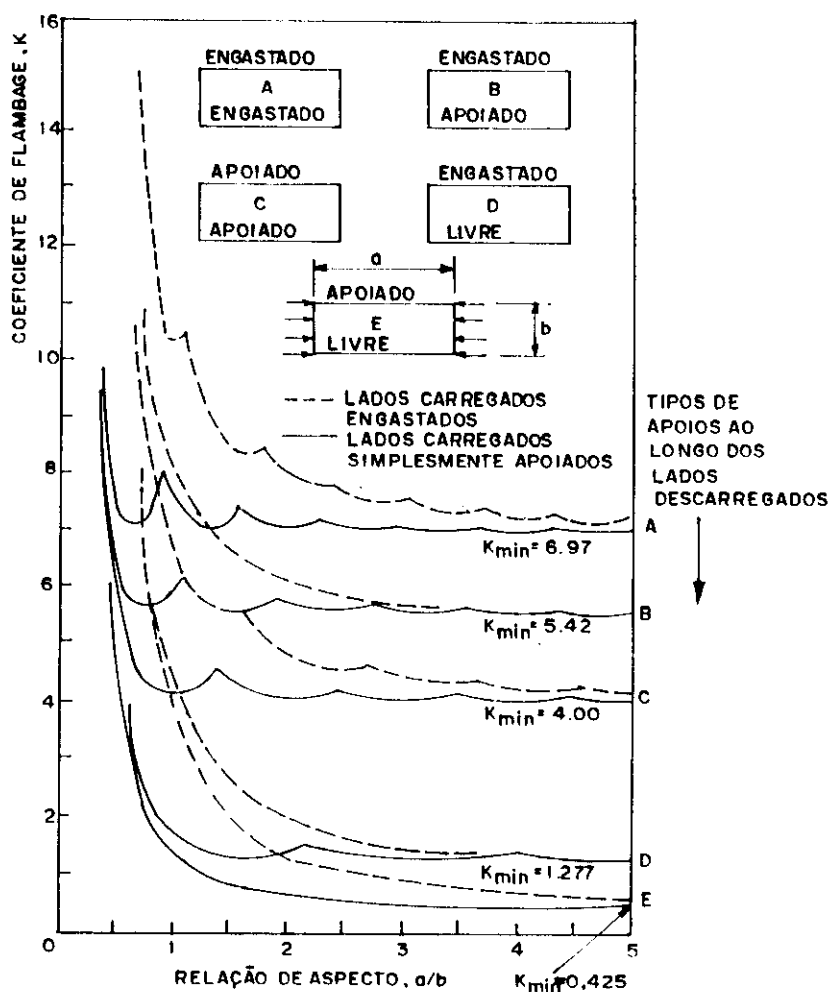


FIG.36 - Coeficientes de flambagem elástica

Como podem ser vistos na figura 35 os elementos de

placas possuem vários graus de restrições às rotações de seus lados. A figura 36 mostra a variação da constante "k" com a relação "a/b", para a maioria das condições de bordas idealizadas, isto é, fixas, simplesmente apoiadas e livres.

A resistência real de placas em compressão depende de alguns fatores que analogamente afetam a resistência global das colunas, particularmente as tensões residuais. A figura 37 mostra o comportamento típico de um placa comprimida até a sua carga última.

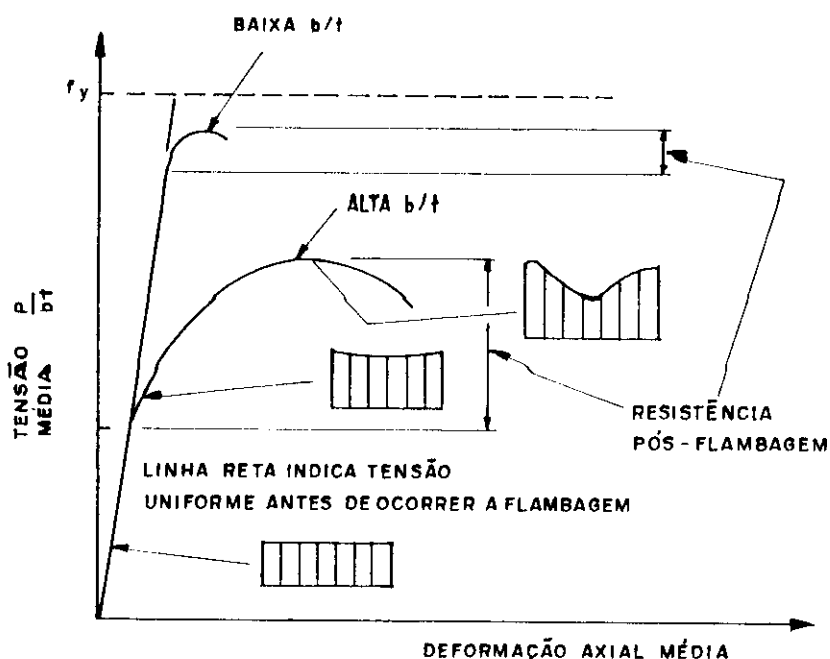


FIG 37 - Comportamento de placas sob lados comprimidos

Supondo-se um material elasto-plástico ideal, ausente de tensões residuais, a distribuição das tensões permanecem uniformes até que a tensão de flambagem elástica " f_{xcr} " seja atingida. Com o aumento das cargas, as regiões mais afastadas, em relação aos lados longitudinais da placa, sofrerão deslocamentos a partir de seu plano original. Estes deslocamentos causam distribuições de tensões equilibradas não-uniformes, embora a carga externa seja aplicada de forma

a provocar tensões uniformemente distribuídas nos lados transversais da placa.

A figura 37 mostra que a resistência de uma placa sob lados transversais comprimidos consiste na soma de duas componentes: (1) da tensão de flambagem elástica ou inelástica, representada pela equação (141) e (2) da resistência pós-flambagem. A resistência pós-flambagem será maior quando a relação largura-espessura for também maior. Com a diminuição da relação "b/t", a resistência pós-flambagem tende a desaparecer, tendendo ao escoamento e ao endurecimento por deformação, tal que a relação " f_{xcr} / f_y " pode se tornar maior do que a unidade.

5.2 - Flambagem de placas devido ao cisalhamento e tensões longitudinais não-uniformes

Em placas de vigas esbeltas, sujeitas à flexão, uma das tensões principais é de compressão. Neste caso, existe possibilidade de ocorrência de um estado de equilíbrio instável. Portanto, o cálculo convencional da estabilidade de almas pode ser complementado considerando as tensões de cisalhamento.

O problema básico pode ser ilustrado pela figura 38.

Uma placa de comprimento "a", largura "b", e espessura "t" apoiada ao longo de seus quatro lados está sujeita a cargas de cisalhamento " $\tau_{xy} t$ ", uniformemente distribuídas ao longo de todos os lados. Além disso, nas bordas $x = 0$ e $x = a$ atuam cargas longitudinais " $f_x t$ " linearmente distribuídas ao longo destes lados. A distribuição de tensões mostradas naquela figura, representa o caso mais geral de ocorrência em painéis entre dois enrijecedores de vigas esbeltas.

As placas de vigas esbeltas são, em geral, muito finas e para que se tenha um cálculo econômico com relativo aumento da resistência à flambagem é necessário recorrer ao

uso de enrijecedores. Assim, o uso de enrijecedores longitudinais ou transversais, ou uma combinação de ambos, representa uma importante regra nos cálculos de placas de almas.

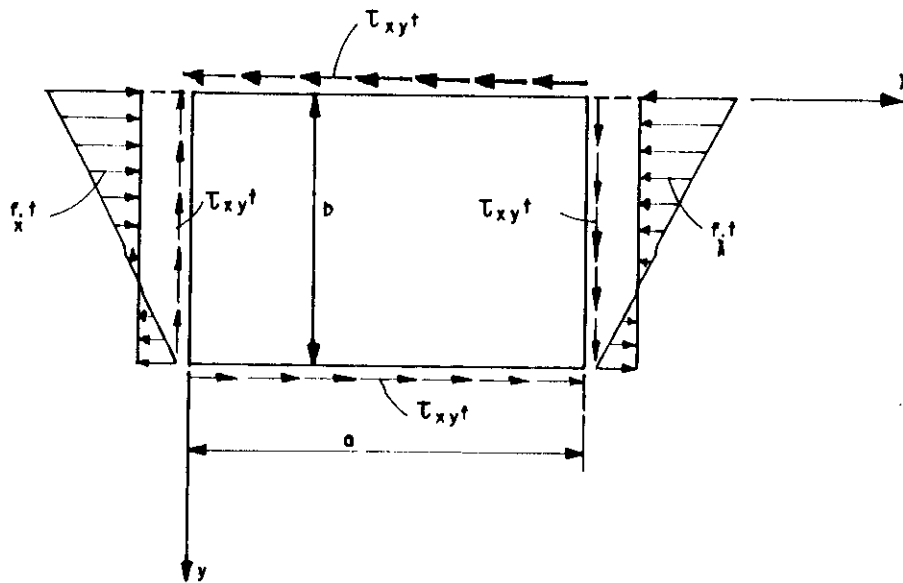


FIG.38 - Placa solicitada por flexão pura e cisalhamento

A equação diferencial para este caso mais geral, para o deslocamento "w" de uma placa fina sob ações de forças em seu plano médio com a hipótese de que "w" é pequena comparada com a espessura "t" é dada por [25,158]:

$$\frac{Ei}{(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \left[f_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = 0 \quad (142)$$

onde " f_x " e " f_y " são as tensões normais nas direções "x" e

"y", respectivamente, e " τ_{xy} " é a tensão de cisalhamento, que atua ao longo do contorno da placa. O momento de inércia $I = t^3/12$ é calculado para uma área da seção transversal de uma faixa de largura unitária e espessura "t".

Para análise da flambagem, devido às tensões de cisalhamento, considere que as tensões " f_x " sejam iguais a zero para a placa da figura 38 suposta simplesmente apoiada. A solução exata da equação (142), para esta situação não é conhecida, e uma solução aproximada utilizando o teorema da energia potencial estacionária foi considerada por Bleich [25]. Usando o método de Ritz, chegou-se a:

$$\tau_{cr} = \frac{9}{32} \frac{\pi^4 E}{12(1-\mu^2)} \left[\frac{t}{b} \right]^2 \frac{(1-\alpha^2)}{\alpha^3} \quad (143)$$

onde $\alpha = a/b$. A equação (143) tem a forma típica da expressão para a tensão crítica de placas retangulares, isto é:

$$\tau_{cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)(b/t)^2} \quad (144)$$

onde "k" é um coeficiente de placa dado por:

$$k = \frac{9\pi^2}{32} \frac{(1-\alpha^2)^2}{\alpha^3} \quad (145)$$

sendo que "k" depende da relação de aspecto " α ". Através de análises matemáticas [25] mais precisas, chegou-se à conclusão de que para $\alpha = 1$ o valor de $k = 9.34$, e para $\alpha = \infty$ o valor de $k = 5.34$. Um gráfico de "k", em função de " $1/\alpha$ " foi traçado, ao considerar uma parábola ligando estes dois pontos, cuja equação obtida para os propósitos de cálculos é dada por:

$$k = 5.34 + \frac{4}{\alpha^2} \quad (146)$$

Quando $\alpha < 1$, não é necessário deduzir uma fórmula para "k", pois, neste caso, a dimensão "a" do painel pode ser sempre selecionado como sendo a maior dimensão (fig.39).

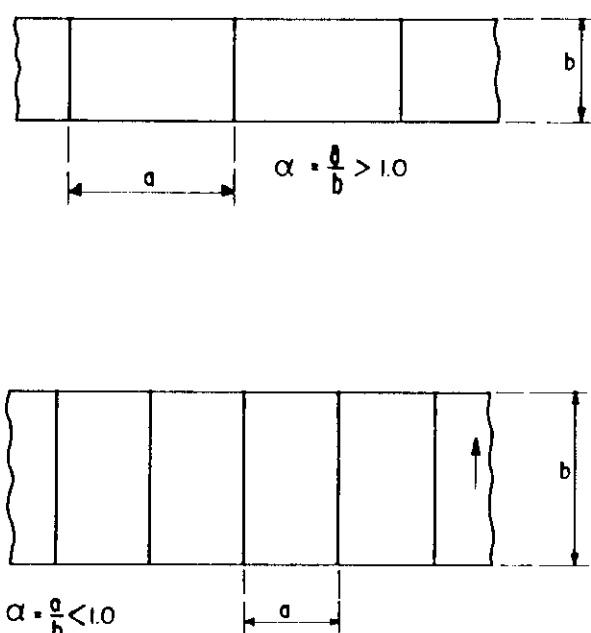


FIG.39 - Formas e dimensões dos painéis

Para placas engastadas nos quatro lados, análises semelhantes foram feitas, chegando-se à conclusão de que o coeficiente de placa "k" pode também ser aproximado por uma curva parabólica. Esta é dada por:

$$k = 8.98 + \frac{5.6}{\alpha^2} \quad (147)$$

sendo que a expressão (147) é válida para $\alpha \geq 1.0$.

Para análise da flambagem devido às tensões normais " f_x ", linearmente distribuídas ao longo das bordas transversais, considere que as tensões " τ_{xy} " sejam iguais a zero para a placa da figura 38 suposta simplesmente apoiada. Considerando as tensões "f" positivas, quando for de compressão, o valor de "f" a uma distância genérica "y", a partir do lado superior da placa, pode ser expresso pela

equação de uma reta dada por:

$$f = f_1 \left(1 - \frac{m}{b} y \right) \quad (148)$$

onde:

$$m = \frac{f_1 - f_2}{f_1} \quad (149)$$

para $m = 0$, tem-se compressão uniformemente distribuída ($f_1 = f_2$), e para $m = 2$, indica que existe flexão pura ($f_1 = -f_2$), e, finalmente, para o intervalo $0 < m < 2$ indica que existe flexão combinada com compressão.

Novamente, a solução exata da equação (142) para esta situação não é conhecida, e uma solução aproximada, utilizando o teorema da energia potencial estacionária foi considerada por Bleich [25]. Ao usar o método de Ritz, chegou-se à:

$$f_{cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)(b/t)^2} \quad (150)$$

O problema fundamental consiste em determinar os valores do coeficiente "k" correspondentes a placas com condições de apoios conhecidas. As relações $\alpha = a/b$ são variáveis, sujeitas a diferentes combinações de força normal e momento de flexão ocasionando diferentes distribuições de esforços normais nas bordas. Deve-se lembrar que o esforço crítico, calculado através da equação (150), corresponde à tensão de compressão máxima atuante na placa.

Para placas simplesmente apoiadas, a tabela da figura 40 fornece valores de "k" para diferentes parâmetros "m" e relações de aspecto " α ". Em cada caso, tem-se um valor mínimo de "k", que se apresenta para $\alpha = 2/3$, quando $m = 2$, e para $\alpha = 1$ quando $m = 0$, isto é, uma placa muito longa submetida à flexão pura, flamba em semi-ondas de amplitude igual a " $2b/3$ ". Esta aumenta, ao diminuir o valor de "m" e,

no limite em que a amplitude se torna igual a "b", a placa estará uniformemente comprimida.

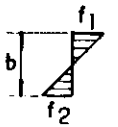
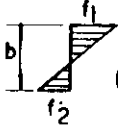
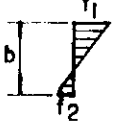
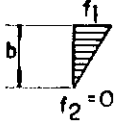
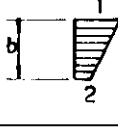
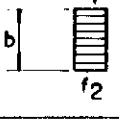
TIPO DE DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES	$\alpha = a/b$							
	0.4	0.5	0.6	0.667	0.75	0.8	1.0	1.5
 $f_2 = -f_1$ ($m=2$)	29.1	25.6	24.1	23.9	24.1	24.4	25.6	24.1
 $f_2 = -\frac{2}{3} f_1$ ($m = \frac{5}{3}$)	23.6		17.7		15.7	16.4	16.9	15.7
 $f_2 = -\frac{1}{3} f_1$ ($m = \frac{4}{3}$)	18.7		12.9		11.5	11.2	11.0	11.5
 $f_2 = 0$ ($m=1$)	15.1		9.7		8.4	8.1	7.8	8.4
 $f_2 = \frac{1}{3} f_1$ ($m = \frac{2}{3}$)	10.8		7.1		6.1	6.0	5.8	6.1
 $f_2 = f_1$ ($m=0$)	8.4	6.3	5.2		4.3	4.2	4.0	4.3

FIG.40 - Tabela dos valores de "k"

Para uma dada relação de aspecto " α ", o valor máximo de "k" corresponde à flexão pura, enquanto que o mínimo é obtido para a compressão simples. Nos casos compreendidos entre

estes dois valores extremos, tem-se os valores intermediários de "k", pois neste intervalo, o estado de tensões que varia linearmente é menos severo do que quando existe somente compressão uniforme. Deste modo, os esforços de tração, em algumas regiões, têm um efeito estabilizador, sendo cada vez mais importante, quanto maior for a amplitude da região que trabalha sob tração.

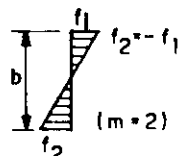
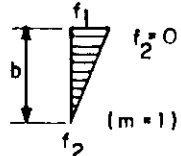
TIPO DE DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES	$\alpha = a/b$														
	0.30	0.35	0.40	0.45	0.47	0.48	0.50	0.60	0.64	0.65	0.66	0.67	0.70	0.80	0.90
 $f_2 = f_1$ $(m=2)$	47.3	43.0	40.7	39.7	39.6	39.6	39.7	41.8					45.8		
 $f_2 = 0$ $(m=1)$			17.7				14.7	13.7	13.57	13.56	13.57	13.58	13.65	14.3	15.4

FIG.41 - Tabela dos valores de "k"

Para placas engastadas em duas bordas longitudinais e para uma borda longitudinal engastada e outra livre, as tabelas das figuras 41 e 42 fornecem os valores de "k", aplicáveis a estes dois casos, respectivamente. Nos casos de placas com uma borda livre e outra rotulada, e uma borda livre e outra engastada, Bijlaard [21] considerou, entre outros casos, aquele em que $f_2 = 0$ e com solicitação máxima na borda livre, chegou-se aos seguintes valores: (1) $k = 0.57$, para uma borda livre e outra apoiada; e (2) $k = 1.61$, para uma borda livre e outra

engastada.

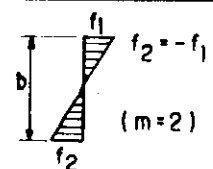
TIPO DE DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES	$\alpha = a/b$									
	0.40	0.50	0.60	0.65	0.66	0.67	0.70	0.80	0.90	1.00
 f_1 $f_2 = -f_1$ $(m=2)$	29.5	26.0	24.65	24.48	24.48	24.48	24.6	25.3	26.6	28.3

FIG.42 - Tabela dos valores de "k"

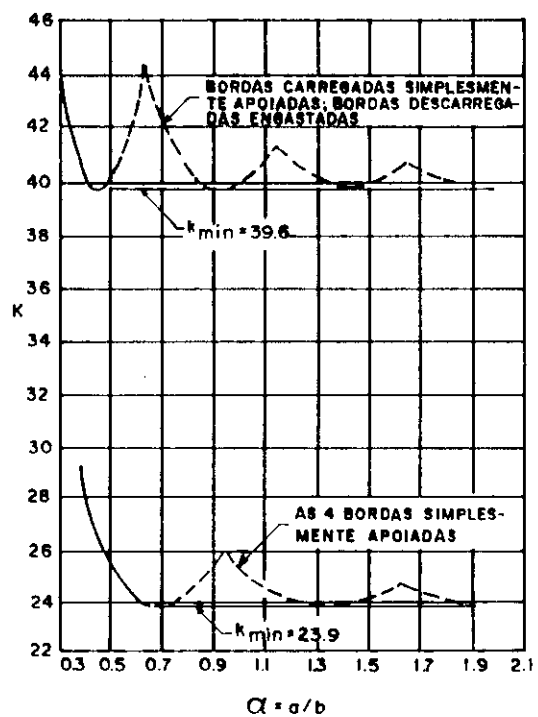


FIG.43 - Valores de "k", para placas em flexão pura

Os valores de "k" obtidos através das tabelas mostradas nas figuras 40, 41, 42, ou 43, quando substituídos na equação (150), fornecerão a tensão crítica de flambagem

de placas sujeitas a esforços longitudinais não-uniformes. Esta tensão crítica deve ser comparada com a máxima tensão de compressão existente na placa.

5.3 - Simplificações para o cálculo de placas submetidas à compressão uniforme e sujeitas à flambagem ou pós-flambagem elásticas

Elementos enrijecidos possuem grande resistência à pós-flambagem, enquanto que os não-enrijecidos possuem resistência mais baixa. A norma americana do "American Iron and Steel Institute (AISI)" para o cálculo de peças estruturais formadas a frio introduziu, em 1946, os conceitos que aqui serão relatados para avaliar a resistência de tais elementos.

A partir da figura 44, observa-se que a resistência nominal " P_n " de um elemento pode ser expressa por:

$$P_n = t \int_0^b f(x) dx \quad (151)$$

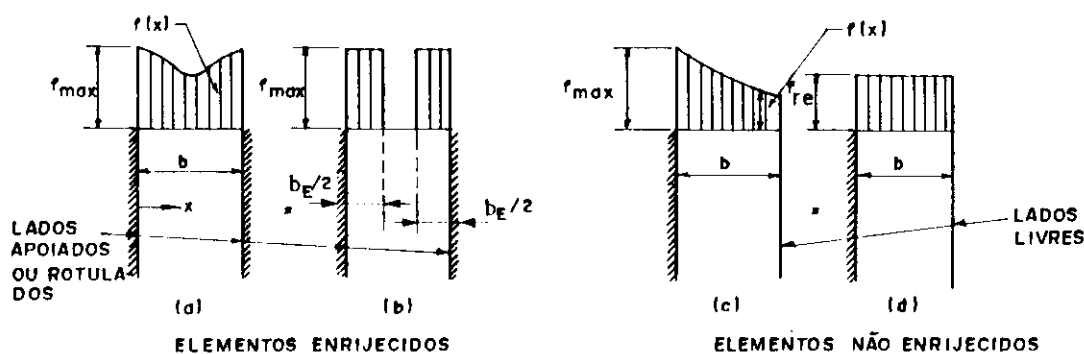


FIG.44 - Elementos de placas sob compressão axial mostram as distribuições reais de tensões e um sistema equivalente

A equação (151) deve ser integrada para uma distribuição de tensões não-uniformes. Em problemas práticos é inviável a utilização da verdadeira função " $f(x)$ " nos cálculos, porém esta dificuldade é eliminada usando o conceito de "largura efetiva" introduzida por T. von Kármán, em 1932.

A força total de compressão é igual a área sob a curva dos esforços não-uniformes multiplicados pela espessura " t " (fig.45).

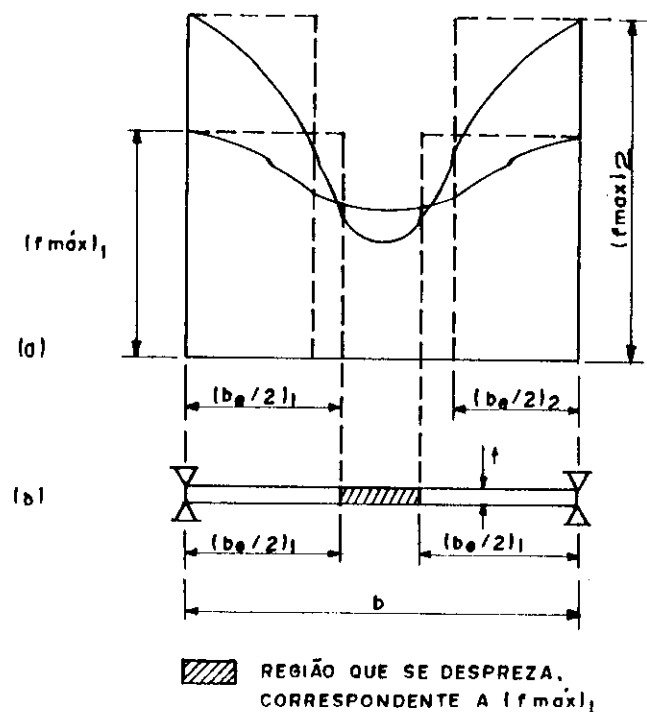


FIG.45 - Largura efetiva de uma placa comprimida

Esta força pode também ser obtida desprezando-se o efeito da porção média, onde os esforços são de pouca intensidade. Assim, considera-se que cada uma das faixas laterais são placas longas, simplesmente apoiadas, sujeitas a esforços de compressão uniformes. Estes esforços serão iguais aos reais nas bordas " f_{max} " cuja largura " $b_e/2$ " é escolhida de modo que a soma das áreas dos dois retângulos de base " $b_e/2$ " e altura " f_{max} " seja igual à área, sob a

curva correspondente aos esforços reais. Portanto, supondo suprimida a região central da placa, o comprimento real "b" é substituído por duas faixas de largura " $b_e/2$ ", cuja soma é denominada de largura efetiva " b_e ". A largura efetiva diminui com o aumento dos esforços nas bordas e é aumentada, com a diminuição dos mesmos (fig.45).

Determinada a largura efetiva " b_e ", a resistência da placa é calculada da forma usual, porém usando a largura efetiva no lugar da largura real.

A teoria das pequenas deformações, para a flambagem de placas fornece resultados limitados para os propósitos práticos e um tratamento matemático mais exato considerando-se a teoria das grandes deformações [34], verifica-se que é extremamente difícil. Theodor von Kármán sugeriu uma aproximação semi-empírica mais racional, para o cálculo da largura efetiva. Esta foi posteriormente aperfeiçoada por Winter. Tal análise será considerada oportunamente.

Portanto, utilizando o conceito de largura efetiva, a força nominal de compressão pode ser expressa por:

$$P_n = t \cdot b_e \cdot f_{max} = A_{efetiva} \cdot f_{max} \quad (152)$$

A figura 44-c mostra que a equação (151) é igualmente válida para elementos não-enrijecidos, exceto que a distribuição de tensões não seja simétrica em relação ao eixo central do elemento. Se uma tensão reduzida " f_{re} ", tal que $f_{re} < f_{max}$ for considerada, a capacidade nominal do elemento não-enrijecido poderá ser calculada por:

$$P_n = t \cdot b \cdot f_{re} = A_{bruta} \cdot f_{re} \quad (153)$$

Devido a grande resistência à pós-flambagem dos elementos enrijecidos, pode se concluir que o elemento flambou e que partes do elemento não estão mais ativas. Por outro lado, devido à resistência relativamente baixa dos

elementos não-enrijecidos, por possuírem uma tensão reduzida, estes podem ser imaginados como se não estivessem flambados.

Nos cálculos, é necessário usar as propriedades da seção bruta. Neste caso, para elementos enrijecidos, tem-se:

$$P_n = \frac{A_{efetiva}}{A_{bruta}} f_{max} \cdot A_{bruta} = Q_a \cdot f_{max} \cdot A_{bruta} \quad (154)$$

e, para elementos não-enrijecidos, tem-se:

$$P_n = \frac{f_{re}}{f_{max}} f_{max} \cdot A_{bruta} = Q_s \cdot f_{max} \cdot A_{bruta} \quad (155)$$

onde " Q_a " e " Q_s " podem ser denominados de fatores do perfil.

Um sistema comprimido, composto de elementos enrijecidos e por elementos não-enrijecidos, pode ser tratado como se fosse constituído apenas por estes para estabelecer a tensão " f_{re} ". Assim, a largura efetiva para os elementos enrijecidos é determinada fazendo-se $f_{max} = f_{re}$. Neste caso, a capacidade total poderia ser:

$$P_n = A_{efetiva} \cdot f_{max} = A_{efetiva} \cdot f_{re} \quad (156)$$

que fornece:

$$P_n = \frac{f_{re}}{f_{max}} f_{max} \frac{A_{efetiva}}{A_{bruta}} A_{bruta} = Q_s \cdot Q_a \cdot f_{max} \cdot A_{bruta} \quad (157)$$

A partir das equações (154), (155) e (157), é evidente que o efeito da flambagem local prematura, antes de ser atingida a resistência global de uma determinada peça estrutural comprimida, é de multiplicar a tensão máxima atingível pelo fator de perfil "Q". Desprezando a possibilidade de ocorrer endurecimento por deformação, a tensão máxima é a tensão de escoamento, a qual deve ser multiplicada por "Q".

Para determinar o fator de perfil " Q_s " de

elementos não-enrijecidos deve-se, inicialmente, analisar o diagrama da figura 46.

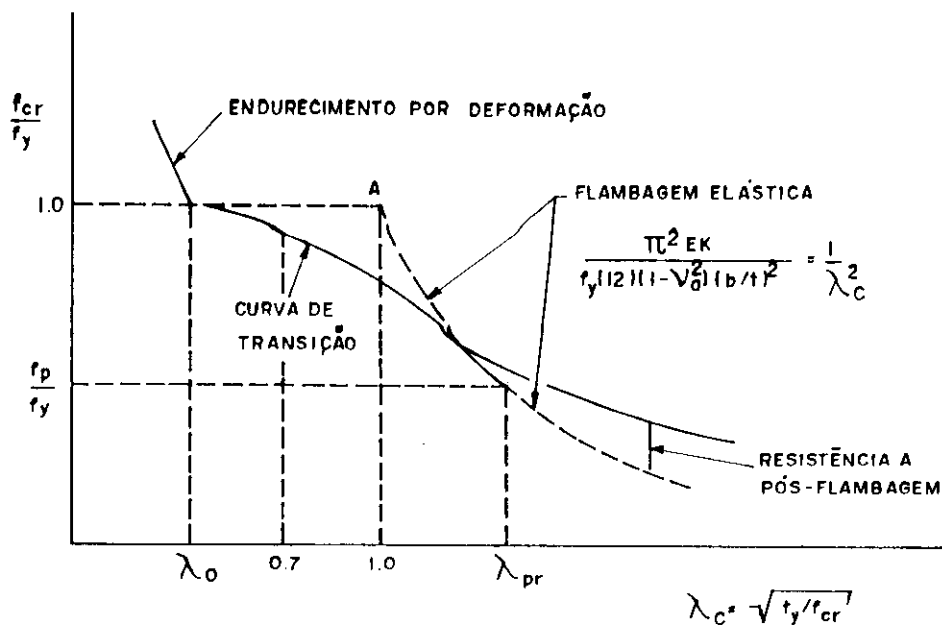


FIG.46 - Representação adimensional da resistência de placas

Nota-se que, quando "Q" é menor do que 1.0 , o valor de " λ_c " será maior do que o de " λ_0 ". Neste caso, uma parábola poderia ser usada para determinar a tensão reduzida " f_{re} ".

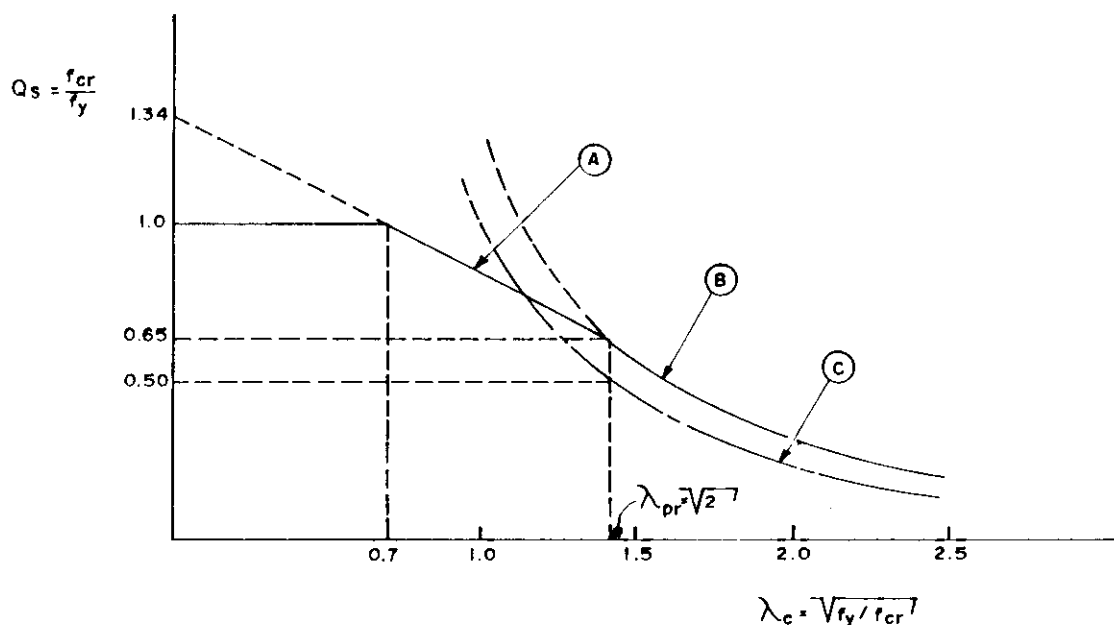


FIG.47 - Resistência de placas não-enrijecidas (cantoneiras)

Para simplificar tal procedimento uma linha reta foi utilizada para a análise de cantoneiras simples. Isto é mostrado pela curva "A" da figura 47. Esta curva usa o valor de $\lambda_c = 0.7$, como sendo o valor máximo para o qual $f_{cr} = f_y$, e considera o limite de proporcionalidade " λ_{pr} " igual a $\sqrt{2}$. No entanto, devido à resistência de pós-flambagem, a curva teórica de Euler, (curva-C), subiu para a posição da curva "B", devido ao coeficiente igual a 1.65, adotado pela norma americana (AISC). Outros tipos de expressões poderiam ser utilizadas com o mesmo resultado lógico.

A determinação de " Q_s " resume, na determinação das equações das curvas "A", "B", e "C", da figura 47. A curva "C" é determinada, considerando que; $Q_s = f_{cr} / f_y$; $f_{cr} = k\pi^2 E / 12f_y (1-\mu^2)(b/t)^2$; $k = 0.425$; e $\mu = 0.3$. Portanto tem-se:

$$Q_s = 0.38 \frac{E}{f_y (b/t)^2} \quad (158)$$

A curva "B" é determinada considerando que; $Q_s = f_{cr} / (f_y / 1.65) = 1.65 f_{cr} / f_y$. Bastaria multiplicar a expressão (158) por 1.65 para ter:

$$Q_s = 0.63 \frac{E}{f_y (b/t)^2} \quad (159)$$

Para determinar a equação da curva "A", inicialmente, devem ser determinados os dois pontos coordenados dos extremos da reta. Para isto, considera-se que apenas a ordenada "q" ainda é desconhecida. Sabendo que:

$$\lambda_{pr} = \frac{b}{t} \sqrt{12f_y (1-\mu^2) / \pi^2 k E} \quad (160)$$

e fazendo $\lambda_{pr} = \sqrt{2}$, $f_y = 250$ MPa, $\mu = 0.3$, $E = 205000$ MPa, e $k = 0.425$, na expressão (160), tem-se:

$$\frac{b}{t} = 25.1 \quad (161)$$

Levando (161) em (159), chega-se ao limite inferior da reta "A":

$$Q_s = 0.82 \quad (162)$$

assim, com os pontos coordenados (0.7;1.0) e ($\sqrt{2}$;0.82), determina-se a equação da curva "A":

$$Q_s = 1.18 - 0.25\lambda_c \quad (163)$$

pela expressão (160), tem-se ainda que:

$$\lambda_c = 1.61 \frac{b}{t} \sqrt{f_y/E} \quad (164)$$

então, levando (164) em (163), chega-se finalmente a:

$$Q_s = 1.18 - 0.4 \frac{b}{t} \sqrt{f_y/E} \quad (165)$$

Embora o fator " Q_s " tenha sido definido, previamente, como sendo igual à relação " f_{cr}/f_y ", quando ocorre a flambagem global de uma coluna (baseado no seu índice de esbeltez kL/r), a tensão média " P_u/A_g " (A_g = área bruta do perfil) é sempre menor do que " f_y ". Isto significa que a flambagem local de um elemento não-enrijecido reduzirá a eficiência da seção transversal somente quando a tensão crítica do elemento de placa ($f_{cr,placa}$) for menor que a tensão crítica global da coluna ($f_{cr,coluna}$).

Assim, em geral, para colunas tem-se a seguinte relação:

$$Q_s = \frac{f_{cr,placa}}{f_{cr,coluna}} \geq \frac{f_{cr,placa}}{f_y} \quad (166)$$

e para mesas comprimidas de vigas, tem-se:

$$Q_s = \frac{f_{cr,placa}}{f_{cr,mesa\ de\ viga}} \geq \frac{f_{cr,placa}}{f_y} \quad (167)$$

O fator de perfil " Q_a ", utilizado em elementos enrijecidos, é determinado a partir do conceito de largura efetiva.

Usando a equação (141) e fazendo $k = 4$, cujo valor corresponde a placas comprimidas e simplesmente apoiadas, supondo comportamento elástico até o limite de escoamento, T. von Kármán obteve uma expressão para determinar a largura efetiva. Assim, chegou-se a:

$$b_e = 1.9.t \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (168)$$

A relação " b_e/t ", fornecida pela equação (168), seria a máxima para a qual se poderia chegar à tensão de escoamento, sem que ocorresse a flambagem.

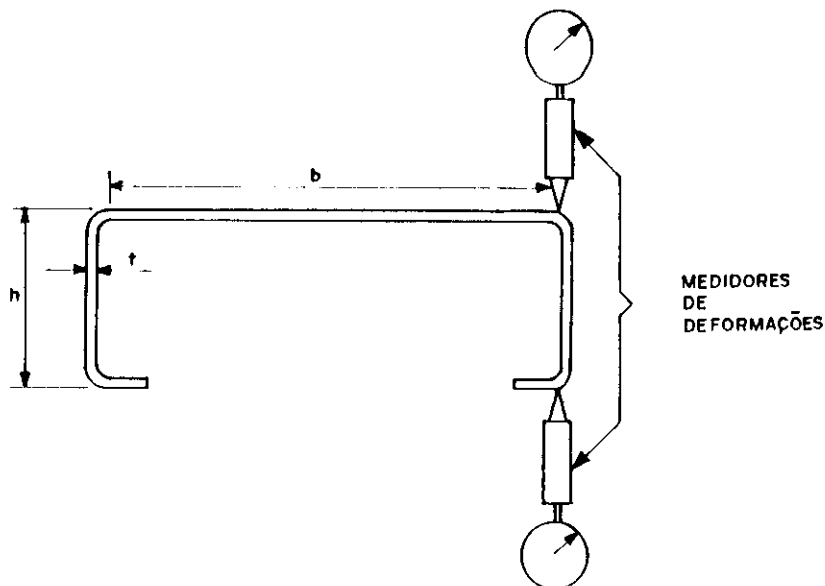


FIG.48 - Perfil utilizado nos ensaios de Winter

Com o objetivo de obter uma fórmula que permitisse determinar a largura efetiva para qualquer nível de esforços

de compressão. Winter [168] realizou um grande número de ensaios em vigas de placas delgadas, dobradas a frio, cujas seções transversais utilizadas possuíam as formas mostradas na figura 48. Estes ensaios mostraram a conveniência de introduzir modificações na expressão (168) para obter uma fórmula aplicável, tanto às cargas de ruína, como às solicitações de menor intensidade, e que fosse aceitável de acordo com os resultados de laboratórios.

Os ensaios de laboratórios demonstraram que a expressão (168), em geral, fornece resultados corretos, porém a constante 1.9 deve ser substituída por um coeficiente variável "C", determinado de acordo com resultados dos ensaios, assim:

$$b_e = C \cdot t \sqrt{\frac{E}{f}} \quad (169)$$

onde "f" é uma tensão abaixo ou no limite de escoamento. E, o coeficiente "C" foi demonstrado depender do parâmetro $\sqrt{E/f_y} \cdot (t/b)$.

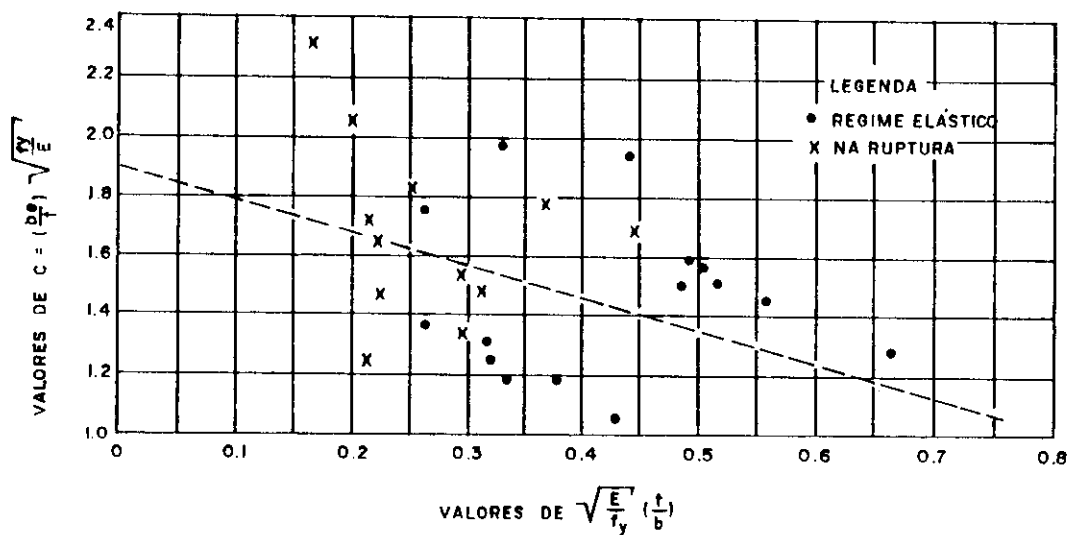


FIG.49 - Resultados experimentais obtidos por Winter

A largura efetiva foi determinada experimentalmente, e os coeficientes "C" foram determinados através da expressão (169). A figura 49 mostra os resultados experimentais obtidos por Winter.

Pela análise dos resultados (fig.49), nota-se que o coeficiente "C" diminui com o aumento do parâmetro $\sqrt{E/f} \cdot (t/b)$. O valor de "C" se aproxima de 1.9 somente quando o parâmetro $\sqrt{E/f} \cdot (t/b)$ é muito pequeno, isto é, em placas extremamente largas e finas. Por exemplo, em projetos de aviões é usual o valor 1.7.

Winter determinou a equação de uma reta, correspondente aos resultados que se distribuíram regularmente e mais próximos desta curva (linha tracejada, fig.49). As coordenadas utilizadas para a dedução desta curva podem ser, por exemplo, os pontos (0;1.9) e (0.45;1.4), os quais fornecem a equação de Winter. Portanto, tem-se:

$$C = 1.9 - 1.11 \sqrt{\frac{E}{f}} \frac{t}{b} \quad (170)$$

Substituindo a expressão (170) em (169), obtém-se a seguinte equação para a largura efetiva:

$$b_e = 1.9t \sqrt{\frac{E}{f}} \left[1 - 0.584 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{f}} \right] \quad (171)$$

A norma americana AISI/68 (American Iron and Steel Institute) utilizou uma reta com declividade menor, chegando-se a:

$$b_e = 1.9t \sqrt{\frac{E}{f}} \left[1 - 0.415 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{f}} \right] \quad (172)$$

Para seções caixão, a norma brasileira NBR 8800, em seu anexo "D", utiliza a seguinte expressão:

$$b_e = 1.9t \sqrt{\frac{E}{f}} \left[1 - 0.382 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{f}} \right] \quad (173)$$

O motivo do segundo termo da equação (173) ser menor é explicado pelos ensaios realizados em perfis de aços de padrão médio. Estes indicaram a possibilidade de se fazer esta redução.

Para outros tipos de seções adotadas pela NBR 8800, utiliza-se a seguinte expressão:

$$b_e = 1.9t \sqrt{\frac{E}{f}} \left[1 - 0.336 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{f}} \right] \quad (174)$$

A diferença entre as equações (173) e (174) pode ser explicada, pela diferença que existe entre as restrições rotuladas dos apoios das placas assumidas na teoria e nas restrições reais.

O conceito de largura efetiva permite prever satisfatoriamente as cargas últimas. Nos cálculos, utiliza-se o módulo elástico da seção transversal efetiva " W_{ef} ", com largura efetiva, ao invés de usar a largura real da mesa comprimida. Portanto, o momento fletor de flambagem elástica será:

$$M_{cr} = W_{ef} \cdot f_y \quad (175)$$

e o momento fletor de limite de flambagem elástica será:

$$M_{cr} = W \cdot f_y \quad (176)$$

5.4 - Flambagem no regime de endurecimento por deformação

Métodos de cálculos, como o "cálculo plástico" e "estados limites", são baseados na capacidade real da estrutura de suportar cargas. As cargas de trabalho são determinadas como sendo uma porcentagem da carga última. Esta carga última pode ser atingida, somente se a peça puder

sofrer deformações plásticas nas seções transversais, sem que ocorra flambagem local ou lateral, com uma conseqüente queda da resistência do momento de flexão. Este processo geralmente é interpretado como sendo a formação de rótulas plásticas e redistribuição de momentos.

Evidentemente, o cálculo plástico impõe condições mais severas nas características de flambagem local dos elementos de placas das peças estruturais e requerem uma revisão do problema da flambagem inelástica.

O comportamento das placas que flambam no regime intermediário entre o limite de proporcionalidade (tensões aplicadas mais as tensões residuais é igual à tensão de escoamento), e o regime de endurecimento por deformação, é governado pela presença das tensões residuais.

Haaiker e Thurlimann [75] analisaram o comportamento inelástico dos elementos estruturais de aço, utilizando a equação diferencial de flambagem de placas no regime de endurecimento por deformação.

Durante o escoamento, o material muda suas propriedades físicas tal que, no regime de endurecimento por deformação o material inicialmente isotrópico torna-se ortotrópico, isto é, as propriedades são dependentes das direções.

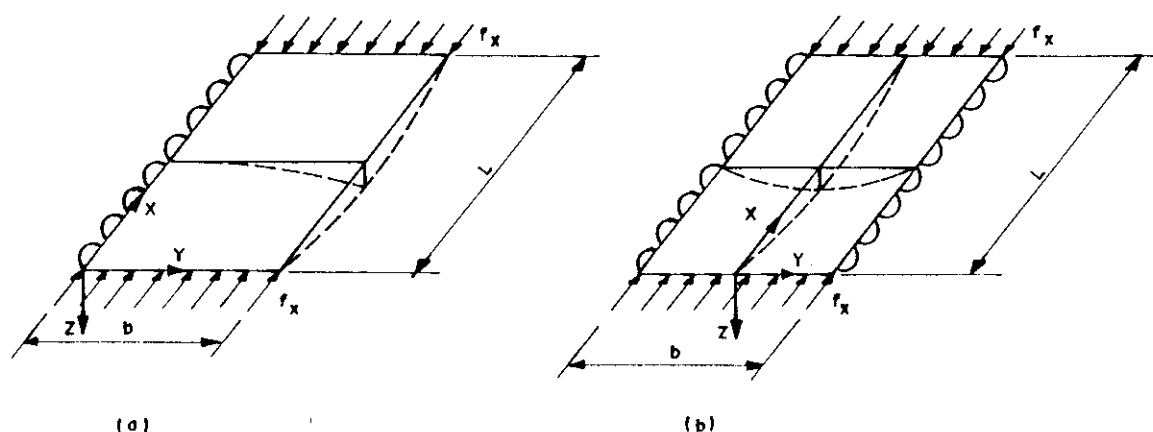


FIG.50 - a) Placa com uma borda livre; b) Placa com os quatro lados apoiados

Haaiker [74] considerou uma placa de aço retangular, comprimida na direção "x", no regime de endurecimento por deformação (fig.50). Neste caso, todas as propriedades de deformações podem ser afetadas, tais como: o módulo tangente ao cisalhamento " G_t "; os módulos tangentes " E_x " e " E_y " e os coeficientes de Poisson " μ_x " e " μ_y ". A equação diferencial deduzida por Haaiker [74] é dada a seguir por:

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = - \frac{12f_{cr}}{t^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (177)$$

onde os módulos ortotrópicos são:

$$D_x = E_x / (1 - \mu_x \mu_y) \quad (178)$$

$$D_y = E_y / (1 - \mu_x \mu_y) \quad (179)$$

$$D_{xy} = \mu_y D_x \quad (180)$$

$$D_{yx} = \mu_x D_y \quad (181)$$

$$2H = D_{xy} + D_{yx} + 4G_t \quad (182)$$

Assumindo funções de deflexões "w" apropriadas, foi possível obter soluções aproximadas da equação (177). Substituindo-se as funções "w", nesta equação diferencial, e fazendo-se as integrações determinou-se os valores de " f_x ". Os valores mínimos " f_{xcr} " de " f_x ", obtidos por Haaiker para várias condições de contorno serão resumidos a seguir:

a) - placa com uma borda livre: $x = 0$ e $x = a$ (rotulados); $y = 0$ (rotulado) e $y = b$ (livre);

$$f_{cr} = \left[\frac{t}{b} \right]^2 \left\{ \frac{\pi^2}{12} D_x \left[\frac{b}{a} \right]^2 + G_t \right\} \quad (183)$$

Para placas longas, o primeiro termo entre os colchetes da expressão (183) pode ser desprezado, e a tensão crítica

torna-se:

$$f_{cr} = \left(\frac{t}{b}\right)^2 G_t \quad (184)$$

b) - placa com uma borda livre: $x = 0$ e $x = a$ (rotulados); $y = 0$ (fixa) e $y = b$ (livre);

O valor mínimo da tensão de flambagem ocorre quando a relação entre o comprimento e a largura for igual a:

$$\frac{a}{b} = 1.46 \left(\frac{D_x}{D_y}\right)^{1/4} \quad (185)$$

então:

$$f_{cr} = \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left\{ 0.769 \sqrt{D_x D_y} - 0.270 (D_{xy} + D_{yx}) + 1.712 G_t \right\} \quad (186)$$

c) - placa apoiada nos quatro lados: $x = 0$ e $x = a$ (rotulados); $y = +b/2$ e $y = -b/2$ (rotulados)

O valor mínimo da tensão de flambagem é obtido para o seguinte valor da relação entre o comprimento e a largura:

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{D_x}{D_y}\right)^{1/4} \quad (187)$$

então:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left\{ 2 \sqrt{D_x D_y} + D_{xy} + D_{yx} + 4 G_t \right\} \quad (188)$$

d) - placa com dois lados apoiados e dois lados fixos: $x = 0$ e $x = a$ (rotulados); $y = +b/2$ e $y = -b/2$ (fixos);

O valor mínimo da tensão de flambagem é obtido para a seguinte relação entre o comprimento e a largura;

$$\frac{a}{b} = 0.66 \left(\frac{D_x}{D_y} \right)^{1/4} \quad (189)$$

então:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \left\{ 4.554 \sqrt{D_x D_y} + 1.237 (D_{xy} + D_{yx}) + 4.943 G_t \right\} \quad (190)$$

A expressão (141) pode ser escrita na forma adimensional, como a seguir:

$$\frac{f_{cr}}{f_y} = \frac{1}{\lambda_c^2} \quad (191)$$

Substituindo a equação (141) em (191), chega-se a:

$$\lambda_c = \frac{b}{t} \sqrt{12 f_y (1 - \mu^2) / \pi^2 k E} \quad (192)$$

Esta equação, em termos da relação entre a largura e a espessura da placa, pode ser explicitada da seguinte forma:

$$\frac{b}{t} = \lambda_c \sqrt{\pi^2 k E / 12 f_y (1 - \mu^2)} \quad (193)$$

Análise semelhante poderia ser feita para colunas.

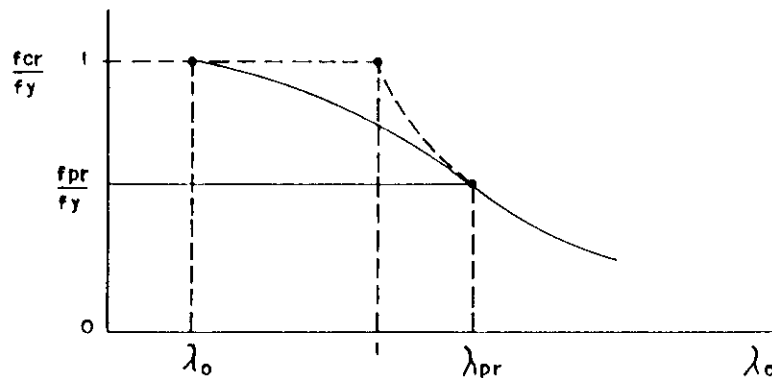


FIG.51 - Representação adimensional da resistência à flambagem das placas

A equação (191) é válida para valores de " λ_c " maiores do que o limite " λ_{pr} " (fig.51), sendo o limite de proporcionalidade correspondente igual a " f_{pr} ". Conforme já mencionada, a soma desta tensão limite com a tensão residual máxima é igual à tensão de escoamento " f_y ". A partir deste ponto ($\lambda_{pr} ; f_{pr}/f_y$), deve ser admitida uma curva de transição até o ponto, onde as tensões de flambagem se igualam às tensões de escoamento ($\lambda_c ; f_{cr}/f_y = 1$). Se um corpo de prova atingir este ponto, todo o material terá escoado e atingido o regime de endurecimento por deformação. Maiores comentários sobre a curva de transição podem ser encontrados na referência [75].

Finalmente, encontrando-se os valores de " λ_{pr} " e " λ_c ", o problema fica determinado. A equação (191) fornece o valor de " λ_{pr} " fazendo-se $f_{cr} = f_{pr}$, onde " f_{pr} " é o limite de proporcionalidade efetivo. Devido às tensões residuais, assume-se que $f_{pr} = f_y/2$, portanto da equação (191) encontra-se $\lambda_{pr} = \sqrt{2}$. Os valores de " λ_c " são determinados a partir das equações: (184), (186), (188), e (190). As constantes de placas a serem utilizadas são: $k = 0.425$ (uma borda livre e outra rotulada); $k = 1.277$ (uma borda livre e outra engastada); $K = 4.0$ (todas as bordas apoiadas); $k = 6.97$ (duas bordas engastadas). Além disso, Haaijer [74] obteve, experimentalmente, para o aço A-36, as seguintes propriedades mecânicas do material: $\mu = 0.3$; $E = 210930$ MPa; $f_y = 253$ MPa; $D_x = 21093$ MPa; $D_y = 230617$ MPa; $D_{xy} = D_{yx} = 56951$ MPa; e $G_t = 16874$ MPa. Com as constantes das placas e com as propriedades mecânicas do material, determinam-se as relações "b/t", através das equações (184), (186), (188), e (190). Introduzindo-se estes resultados na expressão (192), chega-se a:

a) - mesas longas rotuladas:

$$\frac{b}{t} = 8.16 \quad ; \quad \lambda_c = 0.455 \quad (194)$$

b) - mesas engastadas:

$$\frac{b}{t} = 14.30 \quad ; \quad \lambda_c = 0.461 \quad (195)$$

c) - almas rotuladas:

$$\frac{b}{t} = 32.29 \quad ; \quad \lambda_c = 0.588 \quad (196)$$

d) - almas engastadas:

$$\frac{b}{t} = 41.97 \quad ; \quad \lambda_c = 0.579 \quad (197)$$

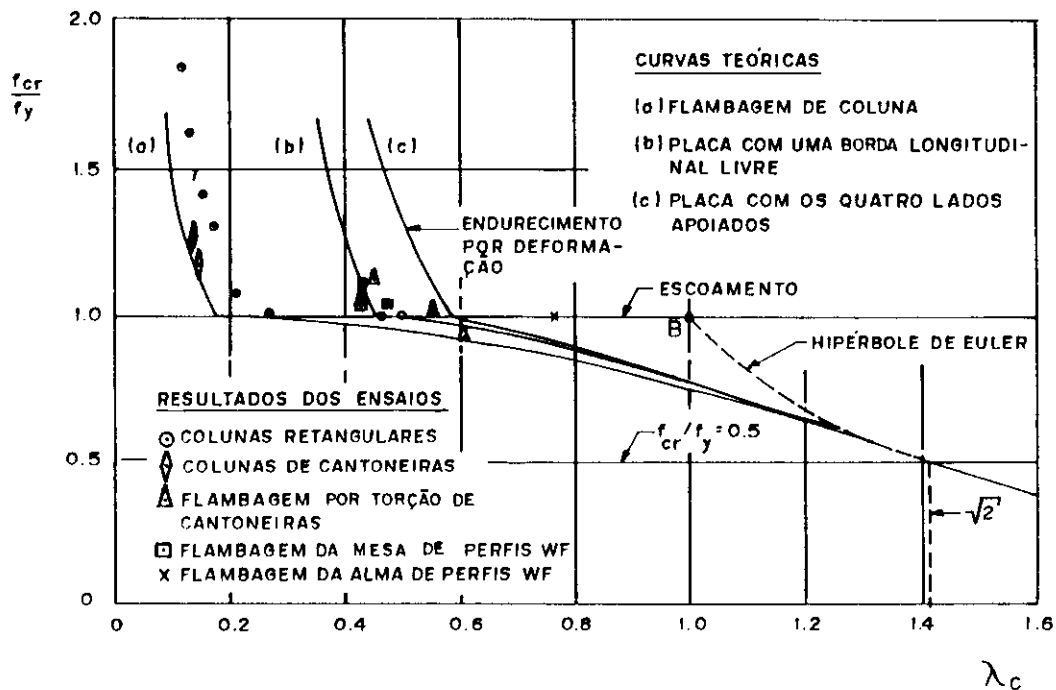


FIG.52 - Resumo dos resultados de ensaios e da teoria

Os resultados anteriores sugerem que os valores de

" λ_c " dependem somente do tipo de elemento que está sob compressão (mesa ou alma), e são praticamente independentes das condições de apoio. O problema pode, portanto, ser simplificado considerando $\lambda_c = 0.46$ para mesas (placas com uma borda livre), e $\lambda_c = 0.58$ para almas (placas apoiadas ao longo das quatro bordas).

Estes resultados são cotados na figura 52. Esta mostra que a resistência de placas comprimidas pode ser governada por: (1) flambagem elástica, representada pela hipérbole de Euler, em que " λ_c " é aproximadamente 1.4; (2) pós-flambagem, com redistribuição de tensões e grandes deformações, com " λ_c " maior do que 1.5; (3) flambagem inelástica, representada por uma curva de transição (com parte das fibras escoadas e partes elásticas); (4) escoamento, com " λ_c " variando de 0.5 a 0.6; e (5) endurecimento por deformação com baixos valores de " λ_c ".

5.5 - Flambagem local da mesa (FLM)

5.5.1 - Parâmetros de esbeltez " λ_r " de acordo com a NBR 8800

a) - Perfis "I", "H", e "U" fletidos em torno do eixo de maior inércia

As mesas destes tipos de perfis são consideradas como elementos não-enrijecidos, conforme item 5.3. Neste caso, os elementos são susceptíveis à pós-flambagem e o fator de perfil " Q_s " deve ser utilizado.

Lembrando que o parâmetro de esbeltez é igual a $\lambda = b/t$ e utilizando-se a expressão (158) para perfis soldados, tem-se:

$$Q_s = \frac{f_{cr}}{f_y} = 0.38 \frac{E}{f_y \lambda^2} \quad (198)$$

Conseqüentemente:

$$f_{cr} = 0.38 \frac{E}{\lambda^2} \quad (199)$$

A partir da expressão (199), pode ser determinado o momento fletor de flambagem elástica. Assim:

$$M_{cr} = f_{cr} \cdot W_c = 0.38 \frac{E}{\lambda^2} W_c \quad (200)$$

onde " W_c " é o módulo de resistência da mesa comprimido. Para o cálculo do momento fletor limite de flambagem elástica, as tensões residuais devem ser consideradas. Portanto, este momento será:

$$M_r = f \cdot W_c = (f_y - f_r) W_c \quad (201)$$

Fazendo $\lambda = \lambda_r$ em (200) e levando (201) em (200), chega-se a:

$$\lambda_r = 0.62 \sqrt{E \cdot W_c / M_r} \quad (202)$$

A expressão (202) coincide com aquela adotada pela NBR 8800.

Para perfis laminados, deve ser usado o fator " Q_s " fornecido pela expressão (159). Então, tem-se:

$$Q_s = \frac{f_{cr}}{f_y} = 0.63 \frac{E}{f_y \lambda^2} \quad (203)$$

conseqüentemente:

$$f_{cr} = 0.63 \frac{E}{\lambda^2} \quad (204)$$

e o momento fletor de flambagem elástica será:

$$M_{cr} = f_{cr} \cdot W_c = 0.63 \frac{E}{\lambda^2} W_c \quad (205)$$

Considerando as tensões residuais, o momento fletor limite de flambagem elástica será:

$$M_r = f_y \cdot W_c = (f_y - f_r) W_c \quad (206)$$

Introduzindo (206) em (205) e fazendo $\lambda = \lambda_r$, chega-se a:

$$\lambda_r = 0.79 \sqrt{E \cdot W_c / M_r} \quad (207)$$

a diferença entre o valor 0.79 da expressão (207) e o valor 0.82, que aparece na expressão da NBR 8800, pode ser atribuída ao coeficiente 1.65 adotado na dedução da expressão (159).

b) - Perfis "I", "H", e "U" fletidos em torno do eixo de menor inércia

Quando os perfis "I" ou "H" são fletidos em torno do eixo de menor inércia, as mesas ficarão submetidas à tensões longitudinais não-uniformes, o que passaria a ser uma análise de flambagem de almas. Tal assunto será tratado posteriormente.

A NBR 8800 recomenda utilizar o conceito de largura efetiva para uma seção que tenha uma mesa comprimida. Isto é válido apenas para o perfil "U", já que as expressões de largura efetiva " b_{ef} " fornecidas são aplicáveis somente a elementos enrijecidos. Assim, para o perfil "U", aplicam-se os mesmos critérios que são utilizados no estudo dos perfis caixão.

c) - Perfis caixão duplamente simétricos e fletidos em torno de um dos seus eixos de simetria

Os elementos destes tipos de perfis, quando sujeitos à compressão devido à flexão, são considerados enrijecidos. Então, o momento fletor de flambagem elástica, será:

$$M_{cr} = W_{ef} \cdot f_{cr} \quad (208)$$

onde " W_{ef} " é o módulo de resistência elástico relativo ao eixo de flexão para um elemento de largura efetiva " b_{ef} " calculada através da expressão (173).

O parâmetro de esbeltez é igual a $\lambda = b/t$, e o elemento comprimido do perfil é considerado que possui as quatro bordas apoiadas ($k = 4$). Introduzindo estas considerações na equação (141), e levando o resultado na equação (208), chega-se a:

$$\lambda = 0.6 \sqrt{E \cdot W_{ef} / M_{cr}} \quad (209)$$

Levando em consideração as tensões residuais, o momento fletor limite de flambagem elástica será:

$$M_r = f_y \cdot W = (f_y - f_r) W \quad (210)$$

Introduzindo (210) em (209) e fazendo $\lambda = \lambda_r$, chega-se a:

$$\lambda_r = 0.6 \sqrt{E \cdot W_{ef} / M_r} \quad (211)$$

Esta expressão não é explicitada na norma NBR 8800.

5.5.2 - Parâmetros de esbeltez " λ_p " de acordo com a NBR 8800

a) - Perfis "I", "H", e "U" fletidos em torno do eixo de maior inércia

Os efeitos das tensões residuais desaparecem no regime plástico, e as imperfeições do material têm um efeito menor no cálculo do índice de esbeltez " λ_p ".

Fazendo $\mu = 0.3$ e $\lambda_c = 0.46$ (placas com uma borda livre), na expressão (193), chega-se a:

$$\lambda_p = \frac{b}{t} = 0.437 \sqrt{\frac{kE}{f_y}} \quad (212)$$

Considerando $k = 0.425$ (uma borda livre e outra rotulada) e levando em (212), tem-se:

$$\lambda_p = 0.285 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (213)$$

Para $k = 1.277$ (uma borda livre e outra engastada), tem-se:

$$\lambda_p = 0.494 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (214)$$

Assumindo um valor de $k = 0.74$, intermediário entre 0.425 e 1.277 (ver fig.36) para aproximar das reais condições de apoios da mesa pela expressão (212), chega-se a:

$$\lambda_p = 0.38 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (215)$$

A expressão (217) coincide com aquela adotada pela NBR 8800.

b) - Perfis "I", "H", e "U" fletidos em torno do eixo de menor inércia

Pelos mesmos motivos descritos no item 5.5.1-b, aqui também não será fornecido o valor de " λ_p ".

c) - Perfis caixão duplamente simétricos e fletidos em torno de um dos seus eixos de simetria

Sendo $\mu = 0.3$ e $\lambda_c = 0.58$ (placas apoiadas ao longo das quatro bordas), a partir da expressão (193), tem-se:

$$\lambda_p = \frac{b}{t} = 0.551 \sqrt{\frac{kE}{f_y}} \quad (216)$$

fazendo $k = 4.0$ (quatro bordas apoiadas) em (216), tem-se:

$$\lambda_p = 1.102 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (217)$$

Pela tabela da figura 36, nota-se que o valor de "k" na realidade estaria entre os casos "A" e "C", sugerindo-se que poderia ser pesquisado um outro valor de "k", que fornecesse resultados mais reais.

Na expressão de " λ_p " regulamentada pela NBR 8800 o número que aparece fora do radical de (217) é igual a 1.12.

5.6 - Flambagem local da alma (FLA)

5.6.1 - Parâmetros de esbeltez " λ_r " de acordo com a NBR 8800

a) - Perfis "I", "H", e "U" fletidos em torno do eixo de maior inércia

Os valores de " λ_r ", para que a alma não flambe localmente sob a ação do momento fletor são obtidos fazendo-se $f_{cr} = f_y$.

Para placas sob flexão pura, com duas bordas longitudinais engastadas, o valor de "k" é igual a 39.6, e com as quatro bordas simplesmente apoiadas, o valor é igual a 23.9. Um valor intermediário, que se aproxime mais das condições reais de apoios é sugerido pela referência [119] como sendo igual a 35.

Fazendo $\lambda_r = b/t = h/t_v$, $f_{cr} = f_y$, $k = 35$, e $\mu = 0.3$, na equação (150), chega-se a:

$$\lambda_r = \frac{h}{t_v} = 5.6 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (218)$$

Para perfis com um eixo de simetria como mostra a figura 53, pode também ser usada a mesma expressão (218), desde que o parâmetro de esbeltez " λ " seja alterado, para

ser adaptado à nova situação.

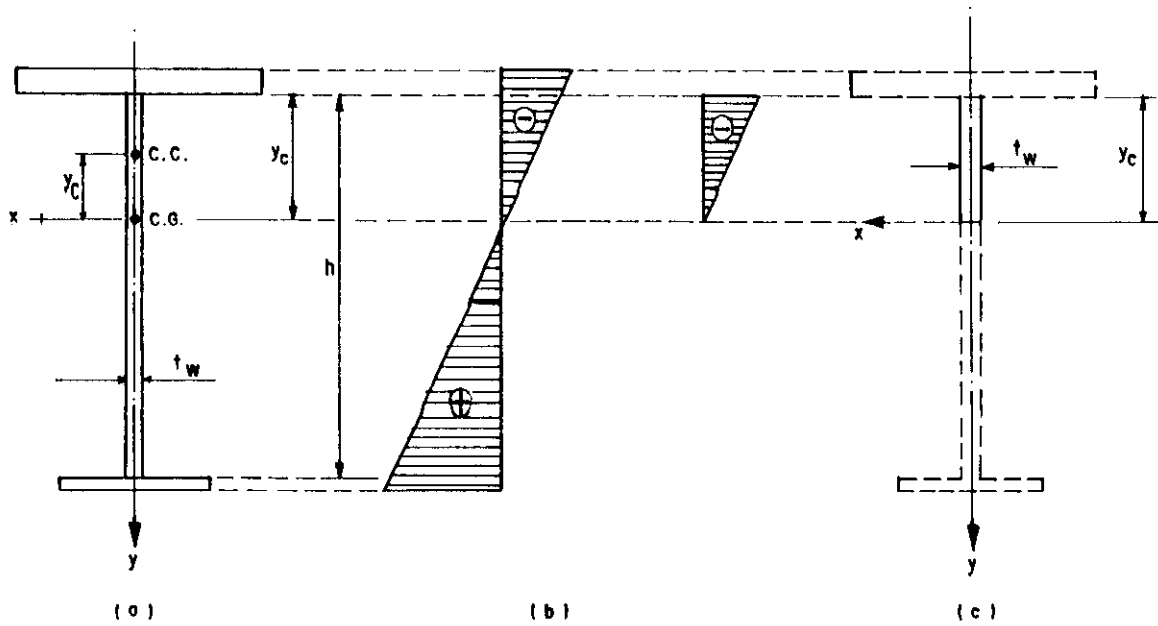


FIG.53 - Perfil com um eixo de simetria

O efeito estabilizante da tração na alma pode ser desprezado considerando apenas o efeito da compressão. O trecho da alma de altura " y_c ", a partir da linha neutra (fig.53-c), é considerado como sendo uma placa simplesmente apoiada nas quatro bordas, para a qual $k = 7.8$ (fig.40). Fazendo $b/t = y_c/t_w$, $\mu = 0.3$, e $k = 7.8$ na equação (150), chega-se a:

$$\frac{y_c}{t_w} = 2.65 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (219)$$

A relação entre as expressões (218) e (219) fornece:

$$\frac{h}{t_w} = 2.11 \frac{y_c}{t_w} \quad (220)$$

portanto, a expressão (220) pode ser aproximada para:

$$\frac{h}{t_v} = \frac{2y_c}{t_v} \quad (221)$$

As expressões (218) e (221) coincidem com aquelas regulamentadas pela NBR 8800.

b) - Perfis "I", "H", e "V" fletidos em torno do eixo de menor inércia

Será feita a análise para o perfil "I". Fazendo $\mu = 0.3$ e $f_{cr} = f_y$ na expressão (150) tem-se:

$$\frac{b}{t} = 0.95 \sqrt{\frac{kE}{f_y}} \quad (222)$$

De acordo com Bijlaard [21], para $f_2 = 0$ e com solicitação máxima na borda livre, para placas com uma borda livre e outra apoiada tem-se que $k = 0.57$. Então, a partir da expressão (222), tem-se:

$$\frac{b}{t} = 0.717 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (223)$$

Para placas com uma borda livre e outra engastada o valor de "k" será igual a 1.61. Levando em (222), chega-se a:

$$\frac{b}{t} = 1.205 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (224)$$

Assumindo um valor de $k = 0.69$, intermediário entre 0.57 e 1.61 para aproximar das reais condições de apoios da mesa. Pela expressão (222), chega-se a:

$$\frac{b}{t} = 0.79 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (225)$$

O resultado da expressão (225) seria representado por um ponto "B" (fig.52) hipotético acima da curva de transição com $\lambda_c = 1.0$. No item 5.3, utilizou-se $\lambda_c = 0.7$

como sendo o valor mínimo para o qual $f_{cr} = f_y$. Este fator de redução é usado para minimizar o desvio existente entre " f_y " e a curva de transição. Esta considera as tensões residuais e as imperfeições. Então, multiplicando-se a expressão (225) por $\lambda_c = 0.7$, tem-se:

$$\lambda_r = \frac{b}{t} = 0.55 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (226)$$

A expressão (226) coincide com aquela regulamentada pela NBR 8800.

c) - Perfis caixão duplamente simétricos e fletidos em torno de um dos seus eixos de simetria

Como no item 5.6.1-a, usando $k = 35$ na expressão (150) chega-se a:

$$\lambda_r = \frac{h}{t_v} = 5.6 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (227)$$

A expressão (227) coincide com aquela regulamentada pela NBR 8800.

d) - Perfis "T" com um eixo de simetria

Por aproximações, suponha que o diagrama de tensões de flexão seja triangular com tensões iguais a zero no encontro da alma com a mesa e tensões máximas, no extremo livre da alma. A referência [21] para este caso de flambagem de placas fornece $k = 0.57$. Então, fazendo $f_{cr} = f_y$, $\mu = 0.3$, e $k = 0.57$, na expressão (150), encontra-se:

$$\lambda_r = \frac{d}{t_v} = 0.72 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (228)$$

observando que agora foi tomada a altura total da seção "d", como referência.

Na expressão regulamentada pela NBR 8800 o número que aparece multiplicando o radical de (228) é igual a 0.74.

e) - Perfis tubulares de seção circular

Na flexão de tubos circulares existirá um considerável trecho comprimido. A ruína por flambagem ocorrerá praticamente como na compressão pura, no entanto, os coeficientes de flambagem serão maiores, pois as tensões de tração tendem a efeitos estabilizadores.

O parâmetro mais importante, na flambagem local de superfícies cilíndricas, é a relação diâmetro-espessura "D/t" (ou "R/t"). O comprimento pode afetar os resultados em função das relações "L/D" ou "L/t" [48,127], mas, na maioria das aplicações estruturais, as peças são o suficientemente longas, tal que o efeito do comprimento pode ser desprezado.

Em condições ideais, Timoshenko [158] deduziu a equação diferencial para a flambagem local de perfis tubulares cilíndricos de paredes delgadas submetidos à compressão axial uniforme dada por:

$$D_r \frac{d^4 w}{dx^4} + N_x \frac{d^2 w}{dx^2} + 4E \cdot t \frac{w}{D^2} = 0 \quad (229)$$

onde $D_r = E \cdot t^3 / 12(1-\mu^2)$ é a rigidez à flexão e "D" o diâmetro do cilindro. Para um cilindro de comprimento "L", Timoshenko assumiu a seguinte função de deslocamentos radiais durante a flambagem:

$$w = - A \cdot \text{sen}(m\pi x/L) \quad (230)$$

Substituindo a função (230) em (229) e igualando a zero os coeficientes de $\text{sen}(m\pi x/L)$, obtém-se a seguinte equação para a tensão crítica mínima:

$$f_{cr} = \frac{2E}{(D/t) \sqrt{3(1-\mu^2)}} \quad (231)$$

chamando de $k = 2 / \sqrt{3(1-\mu^2)}$, tem-se:

$$f_{cr} = k \frac{E}{(D/t)} \quad (232)$$

e, para $\mu = 0.3$, tem-se:

$$f_{cr} = 1.21 \frac{E}{(D/t)} \quad (233)$$

Para perfis tubulares cilíndricos de paredes não muito finas, a flambagem ocorre a uma tensão acima do limite de proporcionalidade, e a carga crítica pode ser obtida outra vez através da equação diferencial (229). Para isso, torna-se necessário apenas introduzir na expressão da rigidez à flexão " D_r ", o módulo tangente " E_t ", no lugar do módulo de elasticidade " E ". Shanley [147] mostrou, experimentalmente, que " k " varia entre 0.4 e 0.65, no intervalo inelástico; mas para tubos sem costura, a referência [28] sugere a utilização de $k = 0.12$ para obter resultados mais realísticos [ver tb. ref. 119.155].

Fazendo $k = 0.12$ e $f_{cr} = f_y$, na expressão (232), tem-se:

$$\lambda_r = \frac{D}{t} = \frac{0.12E}{f_y} \quad (234)$$

Na norma NBR 8800 o número que multiplica o numerador da expressão (234) é igual a 0.11.

5.6.2 - Parâmetros de esbeltez " λ_p " de acordo com a NBR 8800

a) - Perfis "I", "H", e "U" fletidos em torno do eixo de maior inércia:

A alma destes perfis são elementos enrijecidos, e o fator de correção considerando o regime de endurecimento por deformação vale $\lambda_c = 0.58$. Multiplicando a expressão

(218) por este fator, chega-se a:

$$\lambda_p = 3.3 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (235)$$

Na norma NBR 8800 o número que aparece multiplicando o radical da expressão (235) é igual a 3.5.

b) - Perfis "I", "H", e "U" fletidos em torno do eixo de menor inércia

No regime de endurecimento por deformação, os efeitos das tensões residuais desaparecem. Portanto, a expressão que deve ser multiplicada por $\lambda_c = 0.46$ (elementos não-enrijecidos) é a expressão (225). Então tem-se:

$$\lambda_p = \frac{b}{t} = 0.36 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (236)$$

Na norma NBR 8800 o número que aparece multiplicando o radical da expressão (236) é igual a 0.38.

c) - Perfis caixão duplamente simétricos e fletidos em torno de um dos seus eixos de simetria:

As almas de perfis caixão são elementos de placas enrijecidas. Portanto, no regime de endurecimento por deformação, a expressão (227) deve ser multiplicada por $\lambda_c = 0.58$. Então tem-se:

$$\lambda_p = \frac{h}{t_v} = 3.3 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (237)$$

Na norma NBR 8800 o número que aparece multiplicando o radical da expressão (237) é igual a 3.5.

d) - Perfis "T" com um eixo de simetria

A NBR 8800 não regulamenta o valor de " λ_p " para este caso.

e) - Perfis tubulares de seção circular

Considerar-se-á as paredes do perfil tubular circular, como um elemento enrijecido. Portanto, no regime de endurecimento por deformação, a expressão (234) deve ser multiplicada por $\lambda_c = 0.58$. Então, tem-se:

$$\lambda_p = \frac{D}{t} = 0.07 \frac{E}{f_y} \quad (238)$$

Na norma NBR 8800 o número que multiplica a relação " E/f_y " da expressão (238) é igual a 0.087.

CAPÍTULO 3

COMPRESSÃO

1 - GENERALIDADES

As peças comprimidas reais são conectados a outras peças para formar um conjunto estrutural. O comportamento destas peças ficam alteradas e, em geral, é difícil ocorrer somente compressão pura.

O estudo de peças isoladas comprimidas axialmente torna-se a base para o entendimento de situações mais complexas, não só para projetar barras axialmente comprimidas, mas também para as barras flexo-comprimidas, cuja utilização é comum na prática.

Os parâmetros úteis para descrever o comportamento das barras comprimidas são: (1) a deformação axial " w ", e (2) a deflexão lateral " v ". Dependendo do comportamento da carga-deformação, têm-se três tipos de barras comprimidas, as quais podem ser: curtas, intermediárias e longas. A figura 1 mostra as curvas $P = f(w)$ e $P = f(v)$ para os três casos citados anteriormente.

Para simplificar as análises dos diagramas, supõe-se que ocorra somente flambagem por flexão em torno de um dos eixos principais de cada barra ignorando a

possibilidade de ocorrer flambagem por torção ou por flexo-torção.

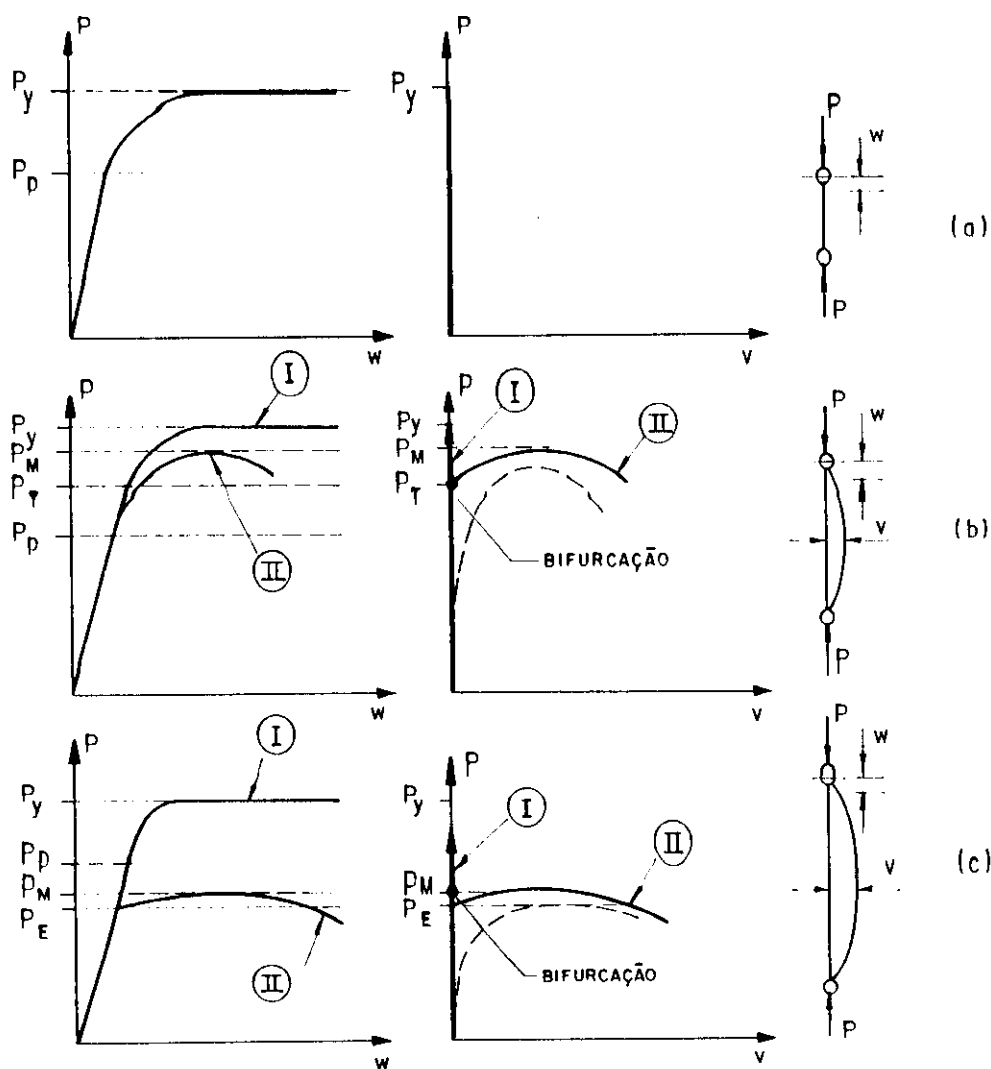


FIG.1 - Diagramas carga-deformação para barras comprimidas:
(a) curtas; (b) intermediárias; (c) longas

A figura 1-a corresponde ao caso de uma barra comprimida muito curta, onde não há possibilidade de ocorrer flambagem; e a ruína ocorrerá por escoamento, quando a carga atingir o limite de escoamento do material. Os deslocamentos laterais " v ", neste caso, são nulos durante a compressão. Já a não-linearidade da curva $P = f(w)$ indica a presença de tensões residuais na seção do perfil.

Barras comprimidas de pórticos e de treliças,

possuem, usualmente, comprimentos intermediários (fig.1-b). A flambagem inicia-se quando os esforços normais ultrapassam o limite de proporcionalidade. Porém, antes de alcançar o limite de escoamento do material, a carga alcança o valor predito pela teoria do módulo tangente " P_t ", e a barra ainda pode suportar incrementos adicionais de cargas, sendo estes pequenos e sem atingir a carga de escoamento " P_y ".

As barras comprimidas longas flambam no regime elástico (fig.1-c). O fenômeno ocorre sob esforços menores do que o correspondente no limite de proporcionalidade, e a carga crítica " P_E " é menor do que " P_y ".

As barras intermediários e as longas podem, teoricamente, permanecer retas, ou se deslocarem lateralmente, quando a carga aplicada atinge o seu valor crítico. Se permanecerem retas, as deformações serão devidas exclusivamente às deformações longitudinais " w ", e não haverá deslocamentos laterais (curva-I; fig.1b e 1c). Se ocorrer deslocamento lateral, este tenderá a provocar rápidos aumentos das deformações longitudinais " w " (curva-II; fig.1b e 1c). A carga de colapso " P_M " é um pouco maior do que a carga de flambagem. As curvas tracejadas das figuras 1-b e 1-c representam as curvas que seriam obtidas, se existissem imperfeições iniciais, e as curvas em linhas cheias descrevem o comportamento de barras perfeitas.

Quando uma barra elástica perfeitamente reta for solicitado por uma carga de compressão " P ", iniciar-se-ão deslocamentos laterais com o aumento da carga até atingir a carga crítica de Euler " P_E ". Esta carga define o ponto de transição entre os equilíbrios estável e o instável.

No regime inelástico, o limite de proporcionalidade é ultrapassado, antes de atingir a flambagem. Neste caso, as teorias do "módulo reduzido" (ou duplo módulo) ou a teoria do "módulo tangente" podem ser usadas.

Na teoria do "módulo reduzido" a inversão da deformação do lado convexo é considerado na forma flambada. Assim, o módulo de elasticidade " E " governa a relação entre

a tensão e a deformação, nesta região da seção, enquanto que o módulo tangente " E_t " governa a relação tensão-deformação do lado côncavo durante a flambagem. A carga crítica utilizando a análise do "módulo reduzido" é dada por:

$$P_r = P_E \frac{E_r}{E} \quad (1)$$

onde, " P_E " é a carga crítica de Euler, e " E_r " é o módulo reduzido. Sendo que, o módulo reduzido " E_r " é uma função de " E ", " E_t " e da forma da seção transversal. A carga " P_r " é a maior carga sob a qual uma barra real ainda pode permanecer reta, no regime inelástico.

Na teoria do módulo tangente, durante a flexão, não há inversões de deformações na seção transversal da barra comprimida. As tensões nas fibras ficarão acima do limite de proporcionalidade do material, e o módulo tangente " E_t " governará o comportamento destas fibras durante a flambagem. A carga crítica " P_t " pela teoria do módulo tangente é dada por:

$$P_t = P_E \frac{E_t}{E} \quad (2)$$

onde, " P_E " é a carga crítica de Euler, e " E_t " é o módulo tangente. A carga crítica " P_t " é a menor carga para a qual a bifurcação do equilíbrio de uma barra comprimida, perfeitamente reta, pode atingir no regime inelástico.

Em barras comprimidas, perfeitamente retas e no regime inelástico, é necessário que se considerem as deformações finitas após a carga crítica. Usando um modelo simplificado, Shanley obteve uma solução aproximada para descrever o comportamento de barras comprimidas no regime inelástico após a bifurcação.

O comportamento carga-deslocamento de uma barra comprimida no regime inelástico, após a bifurcação do equilíbrio, é mostrado na figura 2 com as três cargas de referência citadas anteriormente: " P_E ", " P_r ", e " P_t ". A

flambagem da barra iniciará com a carga crítica afetada pelo módulo tangente " P_t ". e o deslocamento lateral aumentará com o aumento da carga axial até o ponto "A" ser atingido, acima do qual o equilíbrio somente será possível com o decréscimo da carga axial. Assim, o ponto "A" definirá a carga máxima que a barra pode suportar.

Devido às imperfeições existentes em barras comprimidas reais, as cargas máximas determinadas experimentalmente tendem a se aproximarem mais das cargas críticas determinadas pela teoria do "módulo tangente". Sendo assim, o "Structural Stability Research Council", (SSRC), recomenda que a carga crítica seja determinada pela "teoria do módulo tangente".

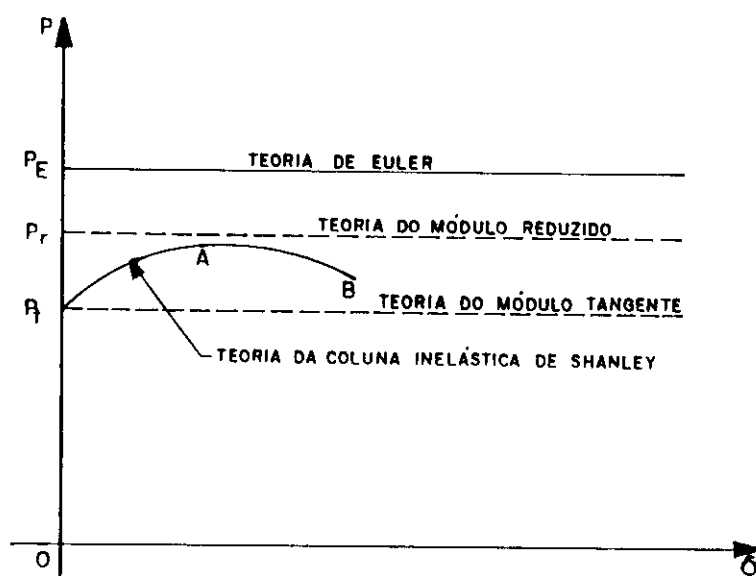


FIG.2 - Comportamento carga-deflexão de uma barra comprimida perfeitamente reta

Até agora, foram analisados apenas os princípios da flambagem de barras retas comprimidas, partindo-se da hipótese de que a flambagem tenderá a provocar apenas

flexões adicionais. Este modo de flambagem é o mais freqüente e é característico de seções fechadas com dois eixos de simetria para as quais a rigidez à torção é muita elevada.

A flambagem por flexão não é, porém a forma geral de flambagem de uma barra reta comprimida. Em certas barras, é possível que uma torção acompanhe a flexão durante a flambagem ou que esta se caracterize por uma torção pura.

A flambagem por flexão foi estudada por Euler no século XVIII, enquanto que a flambagem por flexo-torção foi descoberta somente em 1929, por Wagner.

Em estruturas metálicas, maiores razões existem para o estudo dos efeitos dos três tipos de flambagem global: por flexão, torção ou por flexo-torção, citados anteriormente. A rigidez das peças de aço sujeitas a cargas de compressão axiais diminuem gradualmente até ser atingida a capacidade máxima do carregamento. Eventualmente, a peça não poderá resistir acréscimos de cargas, neste estágio, a barra estará em ruína, isto é, a capacidade de suportar a carga máxima pode ser resultado de ruínas localizadas nas placas do perfil (flambagem local de mesas ou almas), ou ruína global da coluna (flambagem por flexão, torção, ou flexo-torção). Neste caso, para assegurar que a peça tenha flambagem global, as relações largura-espessura dos elementos de placas da seção transversal devem ser limitadas tal que as placas não flambem localmente antes da coluna entrar em ruína como um todo [40,41,72,79,152].

Nos itens subseqüentes, será estudada a flambagem global de barras comprimidas axialmente para os três tipos de flambagem.

2 - FLAMBAGEM POR FLEXÃO

2.1 - Introdução

A flambagem por flexão pode ocorrer em torno de um dos eixos principais da seção transversal de peças axialmente comprimidas. Este é o caso de flambagem que representa o maior interesse na prática.

Na análise elástica de peças prismáticas idealizadas são consideradas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- (a) material linearmente elástico;
- (b) módulo de elasticidade do material igual na tração e na compressão;
- (c) material homogêneo e isotrópico;
- (d) carga aplicada axialmente no centro de gravidade da seção;
- (e) barra articulada fixa em um dos extremos, e articulada móvel no outro extremo, o que permite deslocamentos lineares ao longo do eixo;
- (f) seção transversal da peça não sofre torção, e os elementos de placas não sofrem flambagem local;
- (g) não atuam tensões residuais na seção do perfil;
- (h) é utilizada a aproximação das pequenas deformações para definir a curvatura do eixo

deformado da peça.

O objetivo deste estudo é determinar a menor carga axial de compressão, onde a peça estará sujeita a deslocamentos laterais.

2.2 - Flambagem de barras retas

Uma barra perfeitamente reta é mostrada na figura 3-a. Partindo-se das hipóteses do item 2.1, a forma reta corresponde a um estado de equilíbrio entre as forças externas e internas, pois em qualquer seção transversal, existe um conjunto de forças internas uniformemente distribuídas, cuja resultante tem a mesma intensidade e linha de ação da carga externa "P" aplicada.

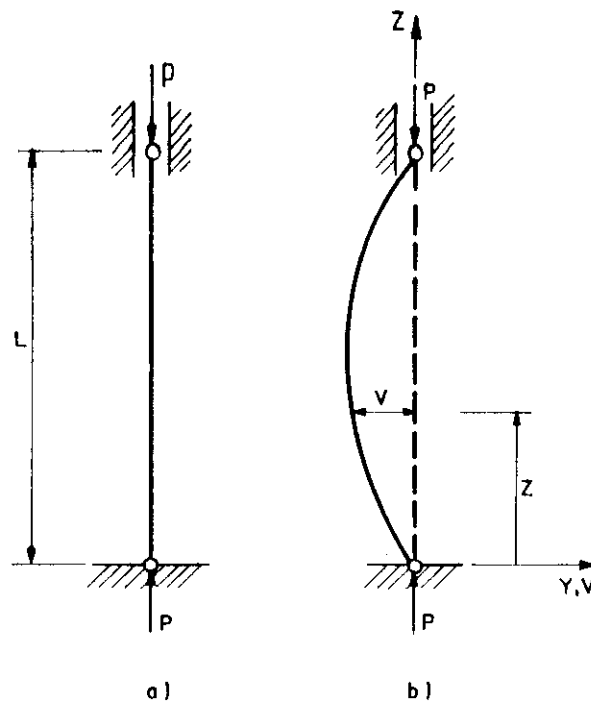


FIG.3 - Compressão axial de barra reta

Para verificar se o equilíbrio é estável, instável

ou indiferente, supõe-se que na seção central da coluna seja aplicada uma força lateral infinitamente pequena. Esta fará com que a barra fique em uma posição ligeiramente deslocada. Observando-se que, ao eliminar esta força; a barra recupera a forma reta, se aumenta o deslocamento lateral, ou se conserva a configuração deslocada sem se modificar.

A figura 3-b mostra a coluna em uma posição levemente deslocada; nestas condições, a carga externa "P", cuja linha de ação não passa pelos centros de gravidade das seções transversais, provoca momentos de flexão $M = P.v$. Este tende a aumentar a curvatura do eixo da barra, supondo que esta possa fletir somente no plano "yoz".

Em cada uma das seções transversais da coluna fletida aparecerão forças internas, mecanicamente equivalentes a momentos que se superpõem com as forças uniformemente distribuídas iniciais tendendo a fazer com que a coluna retorne à sua posição original. O momento interno $M = EI/R$, que se origina em uma seção qualquer, é uma função da curvatura $1/R$ (onde "R" é o raio de curvatura) do eixo da barra, ou seja, do valor do deslocamento que for imposto à coluna, porém não depende da intensidade da força "P" que atua sobre ela.

Em cada seção transversal, existem momentos: um externo de intensidade "P.v", que é função da geometria do eixo deformado e da força "P", e outro interno, que depende exclusivamente da configuração do eixo da peça "EI/R" de forma que, ao alcançar uma posição deslocada infinitamente próxima da posição reta original, pode ocorrer um dos seguintes casos:

$$P.v < EI/R \quad (3)$$

$$P.v > EI/R \quad (4)$$

$$P.v = EI/R \quad (5)$$

No primeiro caso, o momento externo é menor do que

o interno; ao ser eliminada a força lateral perturbadora, a coluna retorna à sua posição original e o "equilíbrio é estável". No segundo caso, o momento externo é maior do que o interno; a curvatura do eixo cresce, mesmo após eliminada a força lateral perturbadora caracterizando o "equilíbrio instável". No terceiro caso, os dois momentos são iguais e caracterizam o "equilíbrio neutro", sendo possíveis configurações de equilíbrio de flechas indeterminadas, cujos valores são pequenos e próximos da condição reta. A força axial que ocasiona o equilíbrio neutro, é a carga crítica " P_{cr} ". É de grande interesse o "equilíbrio neutro, pois ele define o término de um estado desejável e o início de um fenômeno que deve ser sempre evitado: a flexão espontânea, ou flambagem da peça.

A carga crítica elástica " P_{cr} " pode ser determinada, considerando a coluna numa posição levemente deformada (fig.3-b). O momento externo de flexão em torno do eixo principal "x" numa posição genérica "z" será:

$$M_x = -P.v \quad (6)$$

A equação da linha elástica, da curvatura ou de Euler-Bernoulli é dada por:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{1}{R} = \frac{M_x}{E.I} \quad (7)$$

Esta é válida para pequenos deslocamentos. Tal equação mostra que no equilíbrio, o momento interno $EI.d^2v/dz^2$ deve ser exatamente igual ao momento externo $P.v$ em uma posição qualquer ao longo do eixo da barra. Quando esta equação for satisfeita para todos os pontos, a posição deslocada será uma posição de equilíbrio.

Igualando as expressões (6) e (7), dividindo todos os termos por "EI" e fazendo $m^2 = P/EI$, tem-se:

$$v'' + m^2v = 0 \quad (8)$$

A equação (8) é uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes que têm solução do tipo:

$$v = e^{\Omega z} \quad (9)$$

Derivando (9) até a ordem necessária e introduzindo estes resultados em (8), tem-se:

$$\Omega^2 + m^2 = 0 \quad (10)$$

Se " Ω " satisfaz a equação (10) $e^{\Omega z}$ será solução da equação (8), e a equação (10) se chamará "equação característica" da equação (8). As raízes da equação (10) serão:

$$\Omega_1 = m.i \quad (11)$$

$$\Omega_2 = -m.i \quad (12)$$

Sendo " v_1 " e " v_2 " soluções linearmente independentes da equação (8) e " C_1 " e " C_2 " constantes arbitrárias, a solução geral da equação (8) será:

$$v = C_1.v_1 + C_2.v_2 \quad (13)$$

A cada par $(a_1 + b_1 i)$ de raízes complexas simples as funções $e^{a_1 z} \cos(b_1 z)$ e $e^{a_1 z} \sin(b_1 z)$ são soluções particulares linearmente independentes. Então tendo em vista as raízes fornecidas por (11) e (12), tem-se:

$$v_1 = \cos(mz) \quad (14)$$

$$v_2 = \sin(mz) \quad (15)$$

Levando (14) e (15) em (13), tem-se:

$$v = C_1 \cos(mz) + C_2 \sin(mz) \quad (16)$$

que é a solução geral da equação (8). Devem ser utilizadas as condições de contorno para a determinação das constantes da expressão (16). Para $z = 0$, a deflexão $v = 0$, então, a partir de (16), tem-se:

$$C_1 = 0 \quad (17)$$

conseqüentemente;

$$v = C_2 \text{sen}(mz) \quad (18)$$

mostrando que a barra deve se encurvar segundo uma senóide. A outra condição de contorno é para a posição $z = L$ com deslocamento $v = 0$. Então, chega-se a:

$$0 = C_2 \text{sen}(mL) \quad (19)$$

Analisando a expressão (19), observa-se que a constante C_2 tem que ser diferente de zero, pois para $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$, o deslocamento seria igual a zero para qualquer ponto do eixo da barra e, portanto, estaria em desacordo com a hipótese inicial para a qual foi imaginada uma pequena curvatura inicial da barra. Então, quando é considerada a solução $C_2 = 0$, esta corresponderá a $v = 0$. Esta representa a posição reta da barra, cujo equilíbrio é estável e é válida para todas as cargas "P" menores do que a carga crítica " P_{cr} ". Conclui-se, então, que para a barra ter posições diferentes da posição reta deve-se ter:

$$\text{sen}(mL) = 0 \quad (20)$$

Esta condição é satisfeita quando "mL" representa uma série infinita dos seguintes valores:

$$mL = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi \quad (21)$$

onde "n" é um número inteiro arbitrário. Então, a partir de

(21), tem-se:

$$m = \frac{n\pi}{L} \quad (22)$$

Substituindo $m^2 = P/EI$ em (22), chega-se a:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (23)$$

do ponto de vista prático, apresenta interesse somente o valor mínimo da carga crítica, isto é, quando $n = 1$, então:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (24)$$

que é denominada de carga crítica de flambagem ou carga crítica de Euler.

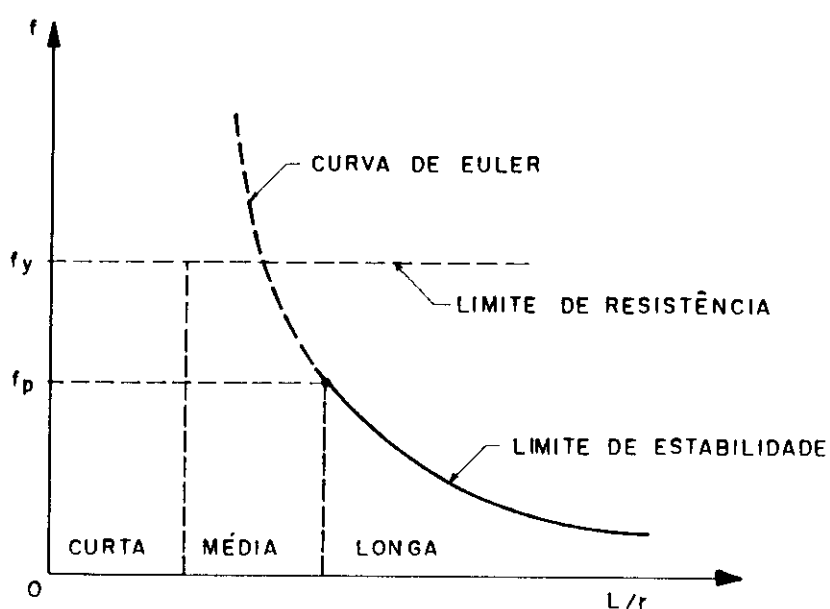


FIG.4 - Hipérbole de Euler

Esta é a carga crítica para a qual a posição deslocada pode existir. No entanto, como a constante " C_2 " é indeterminada, conclui-se que a equação (18) é determinada apenas na sua

forma. Fazendo $n = 1$ em (22) e substituindo em (18), tem-se a seguinte função da forma deslocada da coluna:

$$v = C_2 \text{sen}(\pi z/L) \quad (25)$$

Sabendo-se que $I = A.r^2$, e $\lambda = L/r$, a equação (24) pode ser colocada na seguinte forma:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (26)$$

que representa a equação de uma hipérbole, a qual está representada na figura 4.

Para outras condições de vinculações da barra, o comprimento de flambagem será:

$$L_{fl} = k.L \quad (27)$$

e o índice de esbeltez toma a forma:

$$\lambda = \frac{kL}{r} \quad (28)$$

onde "k" é o coeficiente de flambagem.

2.3 - Flambagem de barras com curvatura inicial

Colunas reais não são perfeitamente retas, mas possuem pequenas curvaturas iniciais devido às imperfeições geométricas (fig.5). O comportamento da flambagem de barras hipoteticamente retas (como discutido no item 2.2) é um caso particular em que a curvatura inicial é infinitamente pequena.

A curvatura inicial pode ser considerada aproximadamente como sendo curvas senoidais que satisfazem as condições de contorno da barra. Nestas condições, pode ser adotada a seguinte função para a curvatura inicial:

$$v_0 = \delta_0 \text{sen}(\pi z/L) \quad (29)$$

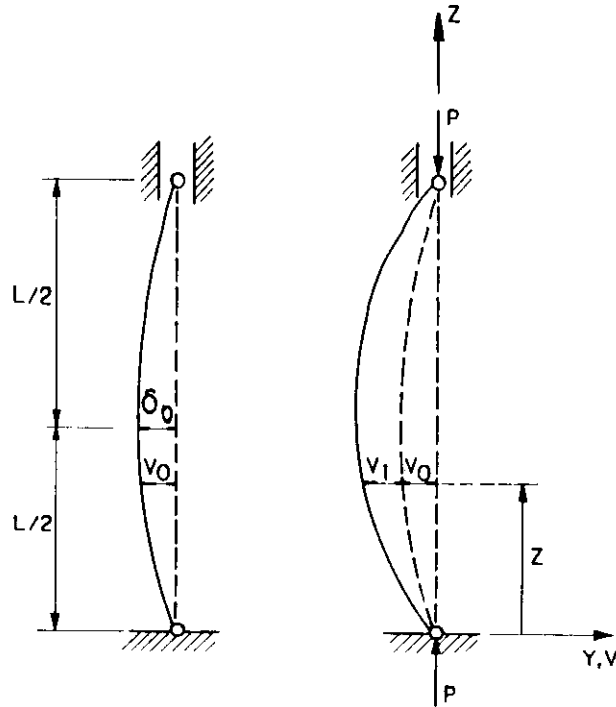


FIG.5 - Coluna idealizada com curvatura inicial

A expressão (29) mostra que o eixo da barra inicialmente tem a forma de uma curva senoidal com ordenada máxima no meio do vão igual a " δ_0 ".

Se a barra for submetida a uma força de compressão "P" aparecerão deslocamentos adicionais " v_1 " tal que as ordenadas finais da curva deslocada serão:

$$v = v_0 + v_1 \quad (30)$$

e o momento externo de flexão, em relação ao eixo "x", numa posição genérica "z" será:

$$M_x = - P.v \quad (31)$$

Os deslocamentos " v_1 " devido às deformações são

determinados como no item 2.2, partindo-se da equação diferencial de Euler-Bernoulli (eq.7), portanto:

$$EI \frac{d^2 y}{dz^2} = M_x \quad (32)$$

de modo que esta representa o momento interno na barra. Os momentos então desenvolvidos como resultados das curvaturas são induzidos somente após a aplicação da carga.

Pelas expressões (29), (30), (31) e (32), ao igualar-se o momento externo ao o momento interno, chega-se a:

$$EI \cdot v_1^{II} + P \cdot v_1 = - P \cdot \delta_0 \cdot \text{sen}(\pi z/L) \quad (33)$$

Dividindo-se todos os termos de (33) por "EI" e chamando de $m^2 = P/EI$, tem-se:

$$v_1^{II} + m^2 \cdot v_1 = - m^2 \cdot \delta_0 \cdot \text{sen}(\pi z/L) \quad (34)$$

A equação (34) é uma equação linear não-homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. A solução geral desta equação equivale à soma da solução particular " v_{1B} " da equação (34), com a solução geral " v_{1A} " da equação homogênea de (34). A equação homogênea de (34) será:

$$v_1^{II} + m^2 v_1 = 0 \quad (35)$$

Esta equação é semelhante à equação (8), cuja solução da característica forneceu raízes iguais a $\Omega_1 = m \cdot i$ e $\Omega_2 = - m \cdot i$. Portanto, a solução geral da equação (35) é:

$$v_{1A} = C_3 \cos(mz) + C_4 \text{sen}(mz) \quad (36)$$

A solução particular da equação (34) é determinada analisando o segundo membro desta equação. Esta, por sua vez, se apresenta na seguinte forma:

$$g(z) = M.\cos\xi z + N.\sen\xi z \quad (37)$$

onde "M" e "N" são constantes. O segundo membro da equação (34) fornece $\xi.i = \pi.i/L$. Portanto, " $\xi.i$ " não é uma raiz da equação característica. Então, será buscada uma solução particular da forma [94]:

$$v_{1B} = C_5 \cos\xi z + C_6 \sen\xi z \quad (38)$$

Do segundo membro de (34), tem-se que $\xi = \pi/L$, portanto da equação (38), chega-se a:

$$v_{1B} = C_5 \cos(\pi z/L) + C_6 \sen(\pi z/L) \quad (39)$$

Derivando (39) até a ordem necessária e introduzindo os resultados em (34), tem-se:

$$C_5 \left[m^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right] \cos \frac{\pi z}{L} + C_6 \left[m^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right] \sen \frac{\pi z}{L} = -m^2 \delta_0 \sen \frac{\pi z}{L} \quad (40)$$

Igualando os coeficientes de $\cos(\pi z/L)$ e $\sen(\pi z/L)$, do primeiro e segundo membro da equação (40), encontra-se:

$$C_5 = 0 \quad (41)$$

$$C_6 = - \frac{m^2 L^2}{(m^2 L^2 - \pi^2)} \delta_0 \quad (42)$$

Levando (41) e (42) em (39), tem-se:

$$v_{1B} = - \frac{m^2 L^2}{(m^2 L^2 - \pi^2)} \delta_0 \sen(\pi z/L) \quad (43)$$

Somando-se a solução geral (36) da equação homogênea com a solução particular (43) da equação não-homogênea, tem-se a seguinte solução geral da equação (34):

$$v_1 = C_3 \cos(mz) + C_4 \sin(mz) + \frac{1}{\left(\pi^2/m^2 L^2 - 1\right)} \delta_o \sin(\pi z/L) \quad (44)$$

Pelas condições de contorno, tem-se que, para $z = 0$, a deflexão $v_1 = 0$ e para $z = L$ a deflexão $v_1 = 0$. Então, levando em (44), chega-se a:

$$C_3 = 0 \quad (45)$$

$$C_4 = 0 \quad (46)$$

Levando (45) e (46) em (44) e sabendo que $m^2 = P/EI$, tem-se:

$$v_1 = \frac{1}{\left(\pi^2 EI/PL^2 - 1\right)} \delta_o \sin(\pi z/L) \quad (47)$$

A carga crítica de Euler é dada por $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$. Então, a expressão (47) pode ser colocada na seguinte forma:

$$v_1 = \frac{1}{\left(P_{cr}/P - 1\right)} \delta_o \sin(\pi z/L) \quad (48)$$

Levando (29) e (48) em (30), tem-se as ordenadas finais da curva defletida:

$$v = \frac{\delta_o}{\left(1 - \frac{P}{P_{cr}}\right)} \sin(\pi z/L) \quad (49)$$

Esta equação mostra que o deslocamento inicial " δ_o ", no meio da barra, é aumentado pelo seguinte "fator de amplificação":

$$\frac{1}{\left(1 - P/P_{cr}\right)} \quad (50)$$

quando atua a força de compressão longitudinal. Então, quando a força de compressão " P " aproxima do seu valor crítico, " P/P_{cr} " aproxima-se da unidade, e as ordenadas de deslocamento " v " aumentam indefinidamente.

O deslocamento máximo ocorrerá no meio da coluna.
Fazendo $z = L/2$ em (49), tem-se:

$$v_{\max} = \frac{\delta_0}{\left(1 - \frac{P}{P_{cr}}\right)} \quad (51)$$

A curva de "P", em função de "v", é mostrada na figura 6. Esta curva é assintótica para a carga de Euler para grandes deslocamentos desde que a coluna permaneça no regime elástico [58,79,112,133,158].

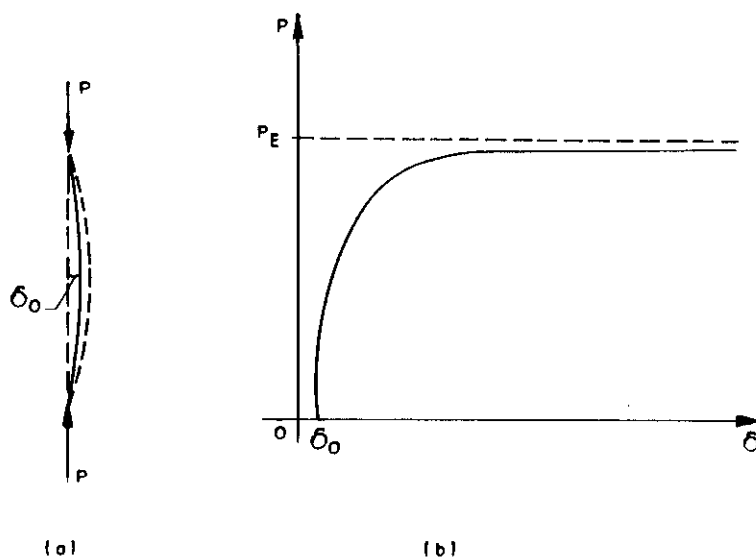


FIG.6 - Coluna elástica com curvatura inicial

2.4 - Flambagem de barras com cargas excêntricas

Considere agora uma coluna carregada excêntrica, conforme mostra a figura 7 para a geometria deformada.

O momento de flexão externo em uma posição genérica "z" para a situação deformada será:

$$M_x = -P.v = -P(v_1 + v_0) \quad (52)$$

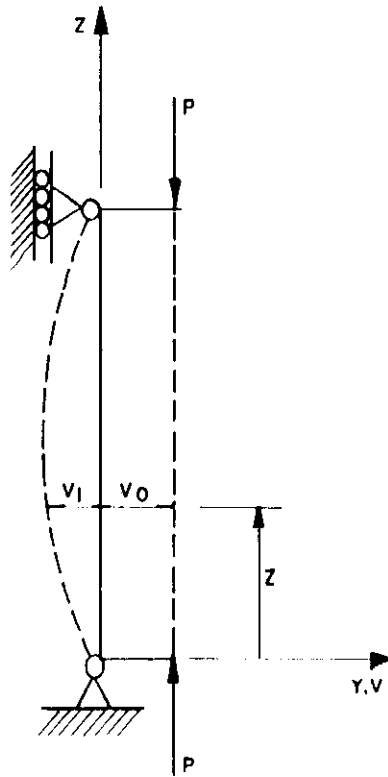


FIG.7 - Coluna idealizada com carga excêntrica

O momento de flexão interno é dado pela equação de Euler-Bernoulli (eq.7), portanto:

$$EI \frac{d^2 v_1}{dz^2} = M_x \quad (53)$$

Igualando as expressões (52) e (53), chega-se a:

$$EI \cdot v_1^{II} + P \cdot v_1 = P \cdot v_0 \quad (54)$$

Dividindo todos os termos de (54) por "EI" e chamando de $m^2 = P/EI$, tem-se:

$$v_1^{II} + m^2 \cdot v_1 = m^2 \cdot v_0 \quad (55)$$

A equação (55) é uma equação linear não-homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. A solução geral desta

equação equivale à soma da solução geral " v_{1A} " da equação homogênea de (55) com a solução particular " v_{1B} " de (55).

A equação homogênea da equação (55) será:

$$v_1'' + m^2 \cdot v_1 = 0 \quad (56)$$

Esta equação é semelhante à equação (8), cuja solução da equação característica forneceu raízes iguais a $\Omega_1 = m \cdot i$ e $\Omega_2 = -m \cdot i$. Portanto, a solução geral da equação (56) é:

$$v_{1A} = C_7 \cos(mz) + C_8 \sin(mz) \quad (57)$$

A solução particular da equação (55) é determinada analisando o segundo membro da mesma. Assim, é preciso encontrar uma solução particular da forma [94]:

$$v_{1B} = (A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n) \cdot e^{\xi z} \quad (58)$$

Como o segundo membro de (55) tem a forma $m^2 \cdot v_0 \cdot e^{0z}$, então $\xi = 0$, e " ξ " não é raiz da equação característica. Assim, será adotada a seguinte solução particular:

$$v_{1B} = A_n \quad (59)$$

Introduzindo (59) com suas respectivas derivadas, na equação (55) e igualando os coeficientes de mesma potência, situados à esquerda e à direita do sinal de igualdade, obtém-se o coeficiente " A_n ". Então:

$$A_n = -v_0 \quad (60)$$

Levando (60) em (59), tem-se a seguinte solução particular de (55):

$$v_{1B} = -v_0 \quad (61)$$

Somando (57) com (61), tem-se a solução geral de (55):

$$v_1 = v_{1A} + v_{1B} = C_7 \cos(mz) + C_8 \sin(mz) - v_0 \quad (62)$$

Pelas condições de contorno, tem-se que: para $z = 0$ o deslocamento $v_1 = 0$ e para $z = L$ o deslocamento $v_1 = 0$. Então, levando em (62), encontram-se as seguintes constantes:

$$C_7 = v_0 \quad (63)$$

$$C_8 = - \frac{v_0 (\cos(mL) - 1)}{\sin(mL)} \quad (64)$$

Levando (63) e (64) em (62), chega-se a:

$$v_1 = v_0 \left[\cos(mz) - \frac{(\cos(mL) - 1)}{\sin(mL)} \sin(mz) - 1 \right] \quad (65)$$

O deslocamento máximo ocorrerá no meio da coluna. Fazendo $z = L/2$ em (65), tem-se:

$$v_1 = v_0 \left[\cos(mL/2) - \frac{(\cos(mL) - 1)}{\sin(mL)} \sin(mL/2) - 1 \right] \quad (66)$$

Da trigonometria, tem-se as seguintes identidades:

$$\sin(mL) = 2 \sin(mL/2) \cdot \cos(mL/2) \quad (67)$$

$$\cos(mL) = 2 \cos^2(mL/2) - 1 \quad (68)$$

Levando (67) e (68) em (66), chega-se a:

$$v_1 = v_0 \left[\frac{1}{\cos(mL/2)} - 1 \right] \quad (69)$$

O deslocamento máximo total ($v = v_1 + v_0$) é medido a partir da linha de ação da carga "P", portanto, a partir de (69) tem-se:

$$v = v_1 + v_0 = \frac{v_0}{\cos(mL/2)} \quad (70)$$

Lembrando que a carga crítica de Euler é $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ e que $m^2 = P/EI$, e substituindo em (70), tem-se:

$$v = \frac{v_0}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{P/P_{cr}}} \quad (71)$$

sendo definido o "fator de amplificação", como sendo:

$$\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{P/P_{cr}}} \quad (72)$$

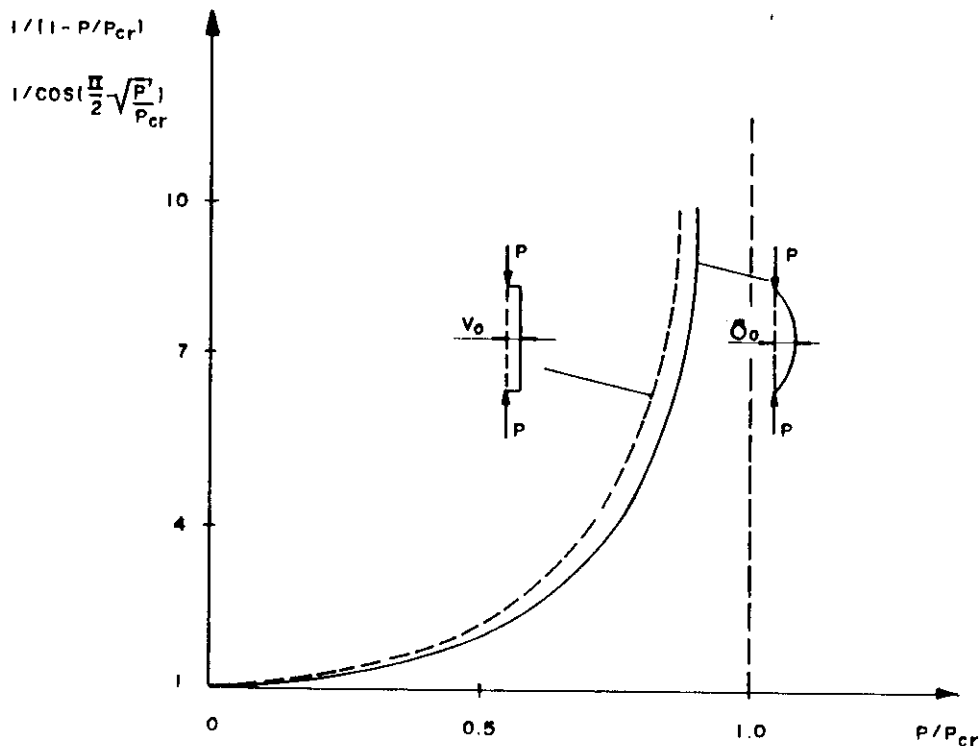


FIG.8 - Comparação dos fatores de amplificação

Um gráfico (fig.8) dos "fatores de amplificações", para os casos em que se tem imperfeições geométricas e excêntricas pode ser traçado usando as expressões (50) e

(72) em função de " P/P_{cr} ". Este diagrama mostra que os fatores de amplificações dados pelas expressões (50) e (72) fornecem resultados praticamente iguais desde que a carga "P" não esteja nas vizinhanças da carga crítica " P_{cr} ".

Esta constatação feita em 1886 por Ayrton e Perry é a base de adoção quase que geral, na prática, da curvatura inicial como "imperfeições geométricas". Conclui-se que os efeitos das imperfeições geométricas sejam realmente importantes, quando comparados com os efeitos das cargas excêntricas.

2.5 - Flambagem inelástica

A hipótese de material linearmente elástico, adotada para colunas ideais, só é válida enquanto a tensão crítica " f_{cr} " não ultrapassar o limite de proporcionalidade " f_p ".

Em colunas reais, o material possui um diagrama tensão-deformação com um trecho curvo acima do limite de proporcionalidade (fig.9). Em uma certa tensão $f > f_p$, a inclinação da curva tensão-deformação define-se através do módulo tangente " E_t ". Este é menor do que o módulo inicial "E", baseado na relação linear "f-ε". Portanto, a carga crítica " P_{cr} " com a hipótese de comportamento elástico linear do material não mais será válida, quando a tensão crítica ultrapassar o limite de proporcionalidade.

Em 1889 Engesser apresentou a teoria do "módulo tangente". De acordo com esta teoria, a resistência máxima de uma coluna que tende a flambar, no intervalo inelástico, é obtida substituindo na fórmula de Euler o módulo de elasticidade "E" pelo módulo tangente " E_t ". A fórmula de Euler modificada por Engesser é dada por:

$$f_t = \frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2} \quad (73)$$

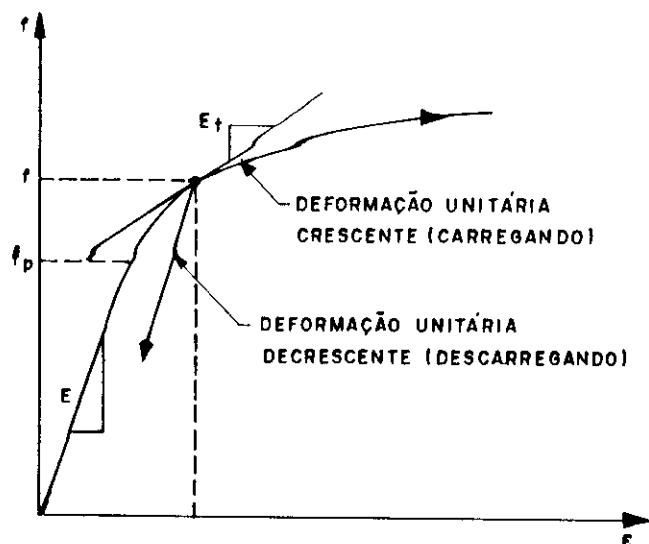


FIG.9 - Diagrama tensão-deformação

Esta consideração se baseia na hipótese de que a deformação de todas as fibras da seção transversal é controlada pela lei $df/d\varepsilon = E_t$, ou seja, não existe nenhum descarregamento das fibras longitudinais da seção. No entanto, se a coluna estiver levemente encurvada, qualquer aumento da curvatura origina um aumento das tensões de compressão no lado côncavo e uma diminuição das tensões de compressão no lado convexo. A diminuição das tensões, do lado convexo, seguirá uma relação linear tensão-deformação, enquanto que o aumento das tensões de compressão, no lado côncavo, seguirá uma relação não-linear $df/d\varepsilon = E_t$. Este conceito desenvolvido por Von Karman (1910) conduz à chamada "teoria do módulo reduzido", onde tal módulo possui valores intermediários entre o módulo tangente e o módulo de elasticidade, isto é, $E_t < E_r < E$. A tensão crítica é também uma ampliação da fórmula de Euler, dada por:

$$f_r = \frac{\pi^2 E_r}{(L/r)^2} \quad (74)$$

Shanley (1947) demonstrou que a tensão crítica depende das condições que precedem a flambagem, e que a teoria do "módulo tangente" fixa um limite inferior do valor real da tensão crítica. A teoria de Shanley pode ser justificada pela possibilidade de levar em consideração as imperfeições estruturais (tensões residuais e não-homogeneidade das propriedades mecânicas). Assim, a equação (73) geralmente é aceita como uma solução apropriada para o cálculo da tensão crítica no regime inelástico.

A equação (73) não pode ser resolvida diretamente, pois " E_t " e " $f = f_{cr}$ " são interdependentes e f_{cr} deve ser conhecido antes de encontrar " E_t ". O problema pode ser resolvido, evitando-se as tentativas, traçando uma curva que relacione as tensões críticas com os índices de esbeltez. Isto obtém-se partindo do diagrama tensão de compressão em função da deformação do material da coluna, sendo este determinado experimentalmente usando-se a equação (73). A inclinação da tangente à curva tensão-deformação (fig.10-a) em qualquer ponto da região inelástica proporciona o módulo tangente para o esforço normal correspondente, de maneira que, determinadas as inclinações das tangentes em uma série de pontos, obtém-se um conjunto de pares de valores " f e E_t ". Estes, por sua vez, permitem traçar um gráfico tensão normal, em função do módulo tangente (fig.10-b). Na região elástica, o gráfico é uma linha reta vertical, pois nesta região " E_t " é constante e igual a " E ".

Explicitando (L/r) na equação (73), tem-se:

$$\left(\frac{L}{r}\right)_{cr} = \pi \sqrt{E_t / f_t} \quad (75)$$

A equação (75) permite calcular o índice de esbeltez crítico correspondente a cada par de valores " E_t e f_t " e traçar a curva da figura 10-c. Usando-se esta curva, pode-se obter a tensão crítica para qualquer índice de

esbeltez.

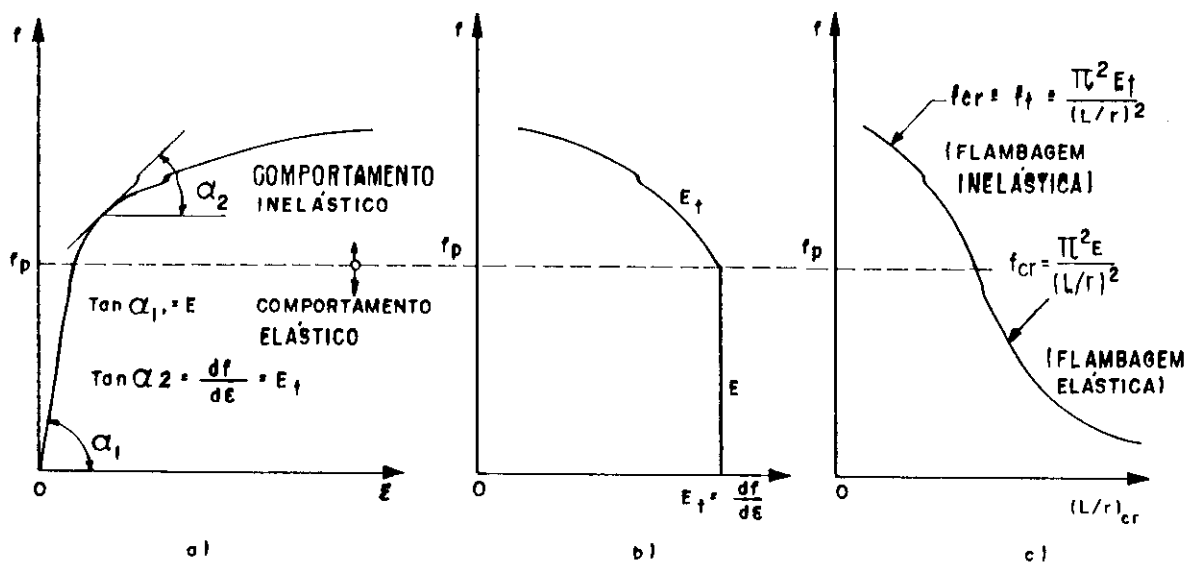


FIG.10 - Obtenção de uma curva para o cálculo de colunas carregadas axialmente

As tensões críticas calculadas, quando usada a teoria do módulo tangente, são mais facilmente calculadas e estão mais próximas dos resultados experimentais, mas fornecem resultados mais conservadores do que a teoria do módulo reduzido. Por estas razões é que a teoria do módulo tangente da flambagem inelástica ganhou larga aceitação, tanto que o "Column Research Council" (CRC, atual SSRC) sugeriu que as fórmulas de projetos de colunas de aço fossem baseadas no conceito do módulo tangente [72,79,160].

Através da teoria do módulo tangente, da contribuição de Shanley, dos estudos relativos às tensões residuais, e de uma equação parabólica tangente à hipérbole de Euler, sugerida por Bleich, chegou-se a uma curva conhecida como "curva básica para colunas do CRC". Esta foi recomendada em 1960, como adequada para a obtenção da resistência à flambagem inelástica de colunas de aço estrutural e serviu ainda de base para as fórmulas contidas

nas especificações do Instituto Americano da Construção de Aço (AISC) [28,72,79,160].

O diagrama da figura 11 mostra as curvas baseadas no conceito do módulo tangente, a curva utilizada pelo "CRC" e os resultados de ensaios para uma coluna de perfil laminado "H".

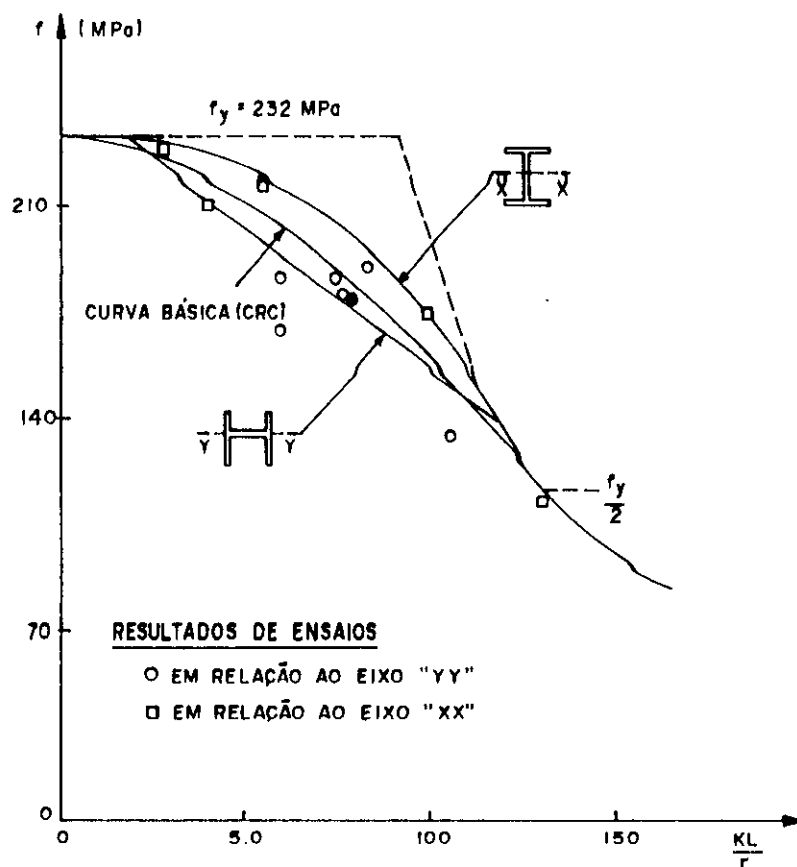


FIG.11 - Diagrama tensão-esbelteza

Colunas soldadas fabricadas com chapas que não sofreram os processos de oxi-corte possuem resistência menor do que colunas laminadas de seções semelhantes. Esta observação pode ser constatada através dos resultados de ensaios de perfis soldados ("H" e caixão) comparados com as curvas do "CRC" (fig.12). Isto ocorre devido aos efeitos das tensões residuais provocadas nos processos de soldagem e devido às imperfeições geométricas.

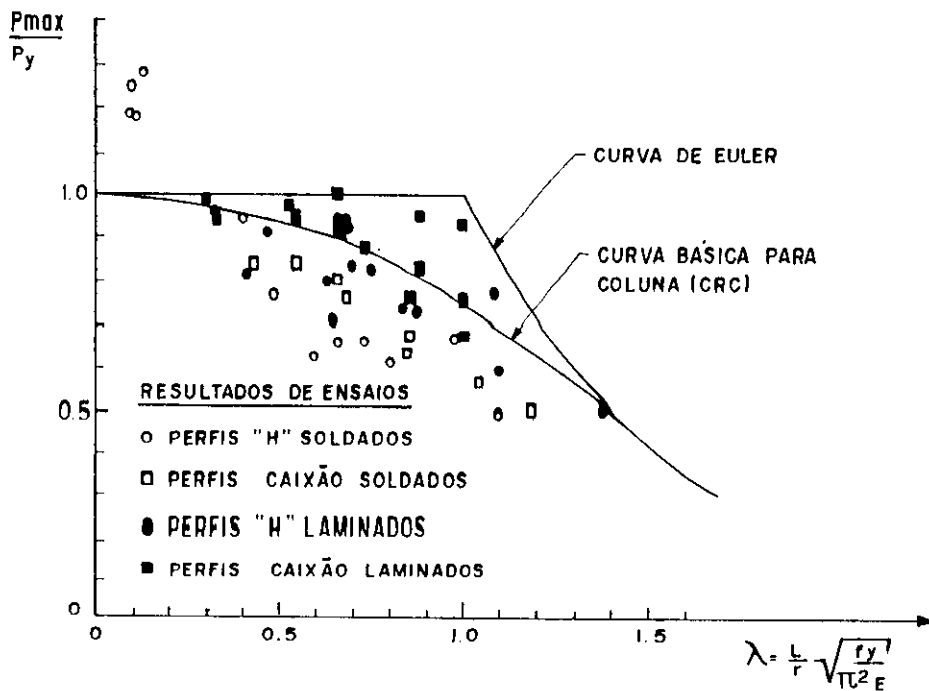


FIG.12 - Resistências à flambagem de perfis soldados

2.6 - Curvas de flambagem

O conselho americano de pesquisas em colunas (CRC, atual SSRC) e a convenção européia para interpretações das estruturas de aço (ECCS) desenvolveram suas atividades paralelamente para preparar recomendações com os propósitos de projetos de colunas de aço.

Em particular, o CRC tem o mérito de ter proporcionado o primeiro acordo orgânico de regras a cerca de estruturas de aço, especialmente no campo da estabilidade. O CRC estabeleceu uma curva de flambagem baseada em cálculos teóricos obtidos em perfis de várias formas, cujas distribuições das tensões residuais variavam parabolicamente e linearmente somente nas mesas, e com valores máximos das tensões residuais de compressão igual a 0.3 da tensão de escoamento.

O "European Convention for Constructional

Steelwork" (ECCS) foi fundado em Zurich em 1955, com o propósito fundamental de desenvolver um programa comum de pesquisas nos vários países membros e de promover os resultados correspondentes dentro do ponto de vista da aplicação.

Thomas Young (1773-1829) foi o primeiro a mostrar a importância das imperfeições na resistência das colunas. Young notou que existiam dificuldades em aplicar cargas perfeitamente centradas em colunas e observou também a heterogeneidade dos materiais. Suas análises estavam corretas, mas os tratamentos ainda eram rudimentares. Posteriormente, aos trabalhos de Young em 1889, surgiu a teoria do módulo tangente proposta por Engesser.

Young considerou uma coluna afetada por uma imperfeição inicial senoidal com amplitude δ_0 e sob a ação de uma carga axial "N" (fig.13).

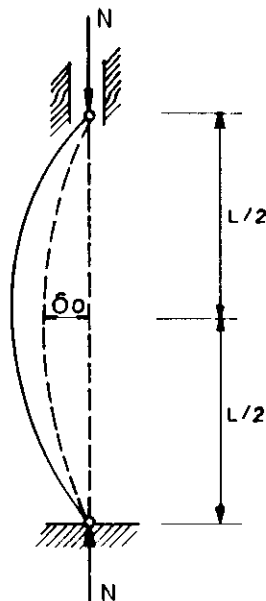


FIG.13 - Coluna com imperfeição geométrica

O deslocamento máximo no meio do vão da coluna da figura 13 pode ser calculado pela seguinte expressão (eq.51):

$$v = \frac{\delta_o}{1 - N/N_{cr}} \quad (76)$$

Devido às imperfeições geométricas, a força normal "N" provocará um momento máximo de segunda ordem no meio do vão da coluna, dado por:

$$M = N.v \quad (77)$$

substituindo (76) em (77), tem-se:

$$M = \frac{N\delta_o}{1 - N/N_{cr}} \quad (78)$$

Young postulou que a carga limite "N" de uma coluna é atingida quando a tensão normal máxima no centro daquela e de todas as fibras carregadas da seção transversal atingir a tensão máxima de escoamento do material. Então, por superposição de efeitos, pode-se escrever:

$$\frac{N}{A} + \frac{M}{W} = f_y \quad (79)$$

onde "A" é a área da seção transversal da coluna, "W" é o módulo de resistência e "f_y" é o limite de elasticidade.

Substituindo (78) em (79) e sabendo-se que $f = N/A$ e $f_{cr} = N_{cr}/A$, chega-se a:

$$f + \frac{f}{(1 - f/f_{cr})} \frac{A\delta_o}{W} = f_y \quad (80)$$

O parâmetro que está relacionado apenas ao efeito das imperfeições geométricas é representado por $\eta = A.\delta_o/W$. Então, a expressão (80) torna-se:

$$f + \frac{f}{(1 - f/f_{cr})} \eta = f_y \quad (81)$$

Desenvolvendo a expressão (81), chega-se a:

$$\left(f_{cr} - f\right)\left(f_y - f\right) = f \cdot f_{cr} \cdot \eta \quad (82)$$

O fator $\eta = A \cdot \delta_0 / W$ pode ser explicitado. Dividindo-se as grandezas do numerador e do denominador por "L" e sabendo-se que $W = I/j$, $I = A \cdot i^2$, $\lambda = L/i$, obtém-se $\eta = \lambda(\delta_0/L)/(i/j)$. Nesta expressão, λ = índice de esbeltez, δ_0/L = flecha relativa e, "i/j" será o diâmetro relativo da elipse de inércia da seção (função da sua forma para um dado eixo "x" ou "y"). Substituindo-se o valor de " δ_0/L " = 1/1000 uma expressão do tipo $\eta = 0.001\lambda/(i/j)$ é obtida. Esta expressão ainda pode ser colocada na forma adimensional sabendo-se que $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_y$ e $\lambda_y = \sqrt{\pi^2 E/f_y}$. Assim, para $E = 205000$ MPa e $f_y = 250$ MPa tem-se $\eta = 0.089\bar{\lambda}/(i/j)$. A expressão do fator $\eta = \alpha \cdot (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)$, adotado pela "ECCS", foi baseado em resultados experimentais e numéricos desenvolvidos por Rondal e Maquoi.

O conceito de imperfeições recebeu uma interpretação probabilística feita por R. H. Smith (1878). Este noticiou que a resistência é um assunto de probabilidade de teoria não exata. Seguindo este mesmo caminho, seus sucessores Ayrton e Perry (1886) propuseram expressões práticas para as imperfeições que foram mais tarde reconsideradas por formulações de A. Robertson (1925). Ayrton e Perry propuseram a adoção de uma expressão para o parâmetro de imperfeições " η " definido como sendo proporcional ao índice de esbeltez " λ " da coluna dado por:

$$\eta = \alpha \cdot \lambda \quad (83)$$

Alguns anos mais tarde, J. Dutheil (1946) [60] assumiu, como base de sua teoria, um parâmetro de imperfeições do seguinte tipo:

$$\eta = \alpha \cdot \lambda^2 \frac{f}{\pi^2 E} \frac{y}{y} \quad (84)$$

Esta expressão resume os princípios de Smith mostrando que a formulação (84) de Dutheil aponta para uma interpretação de forma estatística.

A aproximação de Dutheil foi determinante na filosofia de segurança adotada pela atual norma francesa e influenciou a base das pesquisas do "ECCS".

Do ponto de vista geral, o parâmetro " η " adotado na fórmula de Young (eq.82) pode ser aplicado não somente para interpretar os efeitos das imperfeições geométricas, tal como a curvatura inicial considerada, inicialmente, por Young, mas também para interpretar os efeitos das imperfeições mecânicas como as tensões residuais e distribuição do limite elástico sobre a seção transversal. Além das imperfeições geométricas e imperfeições mecânicas, foram feitas análises estatísticas para chegar a expressões racionais do parâmetro " η ". Maiores informações dos procedimentos de ensaios de laboratórios e dos métodos utilizados podem ser encontrados nas referências [11,16,17,20,33,60,87,97,99,112,114,115,118,144].

Com valores adequados de " η ", a equação (82) serviu como base para a representação das curvas de flambagem europeias. Para também ser atingido este mesmo objetivo, a equação (82) deve ser colocada numa forma adimensional. Assim chamando de:

$$\rho = \frac{f}{f_y} = \frac{N}{N_y} \quad (85)$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{f} \quad (86)$$

$$\lambda_y^2 = \frac{\pi^2 E}{f_y} \quad (87)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_y} \quad (88)$$

e usando (85), (86), (87) e (88) no desenvolvimento da expressão (82), tem-se:

$$(1 - \rho)(1 - \rho \cdot \bar{\lambda}^2) = \eta \cdot \rho \quad (89)$$

O desenvolvimento da expressão (89) fornece:

$$\bar{\lambda}^2 \cdot \rho^2 - (1 + \eta + \bar{\lambda}^2) \cdot \rho + 1 = 0 \quad (90)$$

Resolvendo-se esta equação do segundo grau, a carga crítica será determinada para o menor valor de " ρ ". Portanto, tem-se:

$$\rho = \frac{(1 + \eta + \bar{\lambda}^2) - \sqrt{(1 + \eta + \bar{\lambda}^2)^2 - 4\bar{\lambda}^2}}{2\bar{\lambda}^2} \quad (91)$$

chamando de:

$$\beta = \frac{1}{2\bar{\lambda}^2} \left(1 + \eta + \bar{\lambda}^2 \right) \quad (92)$$

e arranjando a expressão (91), chega-se finalmente a:

$$\rho = \beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{\bar{\lambda}^2}} \quad (93)$$

O problema consiste em encontrar corretamente o fator adimensional das imperfeições " η " (constante de Perry), tal como generalizado pelas curvas européias. Assim, a expressão (93) será válida quando $\bar{\lambda} > 0.2$, enquanto que para o intervalo $0 \leq \bar{\lambda} \leq 0.2$, onde predominam as colunas curtas, deve ser assumido $\rho = N/N_y = 1.0$.

As seguintes expressões para " η " têm sido levadas em consideração:

$$\eta_1 = \alpha_1 (\bar{\lambda} - 0.2) \quad (94)$$

$$\eta_2 = \alpha_2 \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0.04} \quad (95)$$

$$\eta_3 = \alpha_3 (\bar{\lambda} - 0.2)^2 \quad (96)$$

$$\eta_4 = \alpha_4 (\bar{\lambda}^2 - 0.04) \quad (97)$$

Resultados de estudos sistemáticos demonstraram que as expressões (94) e (95) permitem melhores resultados. No intervalo de maiores aplicações práticas ($0.6 \leq \bar{\lambda} \leq 2.1$), a expressão (95) é mais satisfatória, e esta é utilizada pela NBR 8800.

Os valores do parâmetro " α " dependem dos tipos de seções transversais, das imperfeições geométricas iniciais, e das tensões residuais. Os valores característicos de " α " para quatro curvas de flambagem, válidos para a expressão (95), são fornecidos abaixo:

$$\alpha = 0.158 \text{ (curva "a")} \quad (98)$$

$$\alpha = 0.281 \text{ (curva "b")} \quad (99)$$

$$\alpha = 0.384 \text{ (curva "c")} \quad (100)$$

$$\alpha = 0.572 \text{ (curva "d")} \quad (101)$$

Pesquisas realizadas pelo "ECCS" levaram à definição das curvas de flambagem para colunas comprimidas axialmente. Estas curvas foram traçadas considerando a relação entre as resistências " $\rho = N/N_y$ ", em função da esbeltez reduzida " $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_y = \lambda/\pi\sqrt{E/f_y}$ " (fig.14). Sendo que a curva "a" é típica para perfis tubulares, a curva "b" típica de seções caixão soldadas, e a curva "c" típica de perfis "I" com possibilidade de flambagem em torno do eixo de menor inércia, conforme as pesquisas de Beer/Schulz [17].

Além das curvas "a", "b", e "c", duas outras curvas foram sucessivamente introduzidas: a curva "a₀"

posicionada acima da curva "a" e a curva "d" posicionada logo abaixo da curva "c". Os propósitos destas introduções foi cobrir uma larga variação de casos, incluindo aços de alta resistências (curva "a₀"). Por outro lado, as seções, cujas paredes fossem mais espessas (curva "d") para considerar o efeito desfavorável da distribuição das tensões residuais em espessuras de paredes acima de 40 milímetros (fig.14).

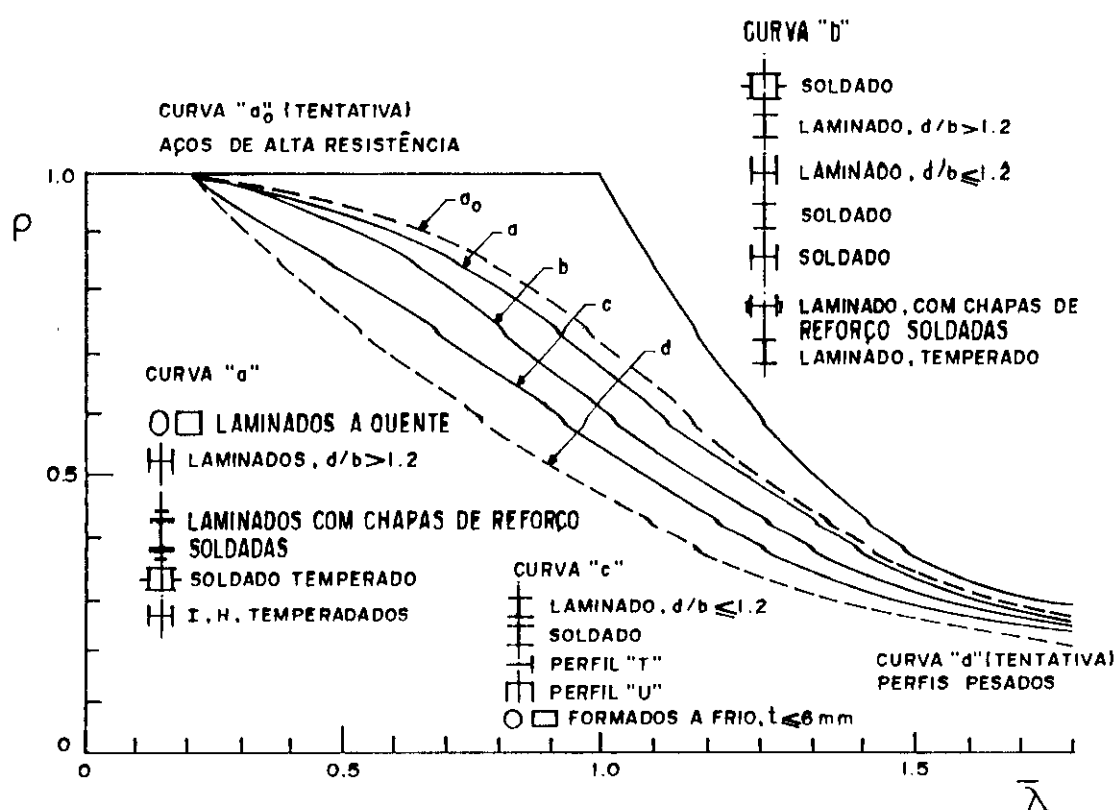


FIG.14 - Curvas múltiplas para colunas

Em perfis, cujos elementos de placas sejam susceptíveis de flambar localmente, deve ser utilizado um fator "Q" característico do tipo de enrijecimento dos elementos de placas que compõem o perfil. O fator "Q" possibilita corrigir o valor da carga de flambagem e, conseqüentemente, o índice de esbeltez. Como visto no capítulo 2 (item 5.3), pelas expressões (154), (155) e

(157), é óbvio que o efeito da flambagem local prematura, em um ou mais elementos de placa da seção transversal, ocorrendo antes de ser atingida a flambagem global da coluna, é de multiplicar a tensão máxima atingível pelo fator de perfil "Q". Desprezando a possibilidade do endurecimento por deformação, a tensão máxima será a tensão de escoamento. Esta deve ser multiplicada por "Q". Então, a partir da expressão (85) [14,28,40] [41,67,72] [73,79,111] [112,141,158], tem-se:

$$N = \rho \cdot Q \cdot N_y = \rho \cdot Q \cdot A_g \cdot f_y \quad (102)$$

e a partir da expressão (88), fazendo $\lambda = k \cdot L / r$ e $\lambda_y = \pi \sqrt{E / f_y}$ tem-se:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_y} = \frac{1}{\pi} \frac{kL}{r} \sqrt{\frac{Q \cdot f_y}{E}} \quad (103)$$

onde:

$$Q = Q_s \cdot Q_a \quad (104)$$

sendo " Q_s " e " Q_a " os fatores do perfil definidos conforme item 5.3 do capítulo 2. Torna-se necessário adaptar os valores de " Q_s " ao tipo de elemento de placa não-enrijecido e os valores de " $Q_a = A_{ef} / A_g$ " aos elementos enrijecidos do perfil.

2.7 - Comprimentos efetivos de flambagem

Uma coluna bi-rotulada representa a base de referência para que outras colunas com diferentes condições de extremidades sejam comparadas. Sendo conhecida a tensão crítica de uma coluna bi-rotulada, a tensão crítica da mesma com outras condições de extremidades pode ser obtida usando o coeficiente de flambagem "k".

Comparando-se a carga crítica " P_{cr} ", de uma coluna com extremidades restringidas com a carga crítica de Euler " P_E " para uma coluna com extremidades rotuladas com comprimento igual ao da coluna de extremidades restringidas, pode-se chegar à expressão do coeficiente de flambagem dada por:

$$k = \sqrt{P_E / P_{cr}} \quad (105)$$

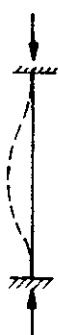

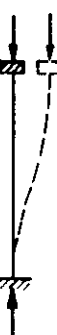

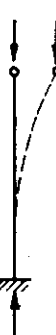
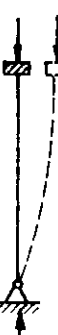

<p>A LINHA TRACEJADA INDICA A LINHA ELÁSTICA DE FLAMBAGEM</p>						
<p>VALORES TEÓRICOS DE "k"</p>	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
<p>VALORES RECOMENDADOS PARA O DIMENSIONAMENTO</p>	0.85	0.80	1.2	1.0	2.10	2.0
<p>SIMBOLOGIA PARA A CONDIÇÃO DE APOIO</p>	 <p> ROTACÃO E TRANSLAÇÃO IMPEDIDOS ROTACÃO LIVRE, TRANSLAÇÃO IMPEDIDA ROTACÃO IMPEDIDA, TRANSLAÇÃO LIVRE ROTACÃO E TRANSLAÇÃO LIVRES </p>					

FIG.15 - Coeficientes de flambagem

Para uma coluna elástica e perfeitamente reta, a carga crítica pode ser determinada escrevendo-se a equação diferencial de acordo com a condição específica de extremidades. A menor carga crítica fornecida pela solução da equação diferencial é a carga crítica para aquela coluna. Conseqüentemente, o coeficiente de flambagem pode ser determinado através da equação (105).

Os valores teóricos de "k" para várias condições de extremidades são demonstrados por uma extensa bibliografia, como por exemplo as referências [41,158]. A figura 15 mostra uma tabela com os valores de "k" teóricos e os sugeridos para projetos pela AISC para seis condições de extremidades idealizadas [41]. A determinação dos coeficientes de flambagem para pórticos indeslocáveis e deslocáveis serão tratados no apêndice "E".

3 - FLAMBAGEM POR TORÇÃO

Peças comprimidas de seções abertas de paredes finas podem flambar por torção conforme a seção cruciforme ilustrada na figura 16, ou por uma combinação de flexão com torção (fig.63 - apêndice A).

Algumas seções tais como: cantoneiras, perfis "T", "Z" e "U" possuem rigidez torcional relativamente baixa e quando sujeitas à compressão axial podem flambar por torção, mantendo os seus eixos longitudinais retos. Em determinados perfis "I" pode também ocorrer a flambagem por torção.

Wagner foi o primeiro a investigar a flambagem torcional de seções abertas de paredes finas e introduziu o conceito de "empenamento unitário". Mas, ele baseou suas teorias na hipótese de que o centro de rotação, durante a flambagem coincidia com o centro de cisalhamento. Em geral, isto não acontece como demonstrado por investigações subseqüentes. Portanto, os resultados de suas análises não foram exatas.

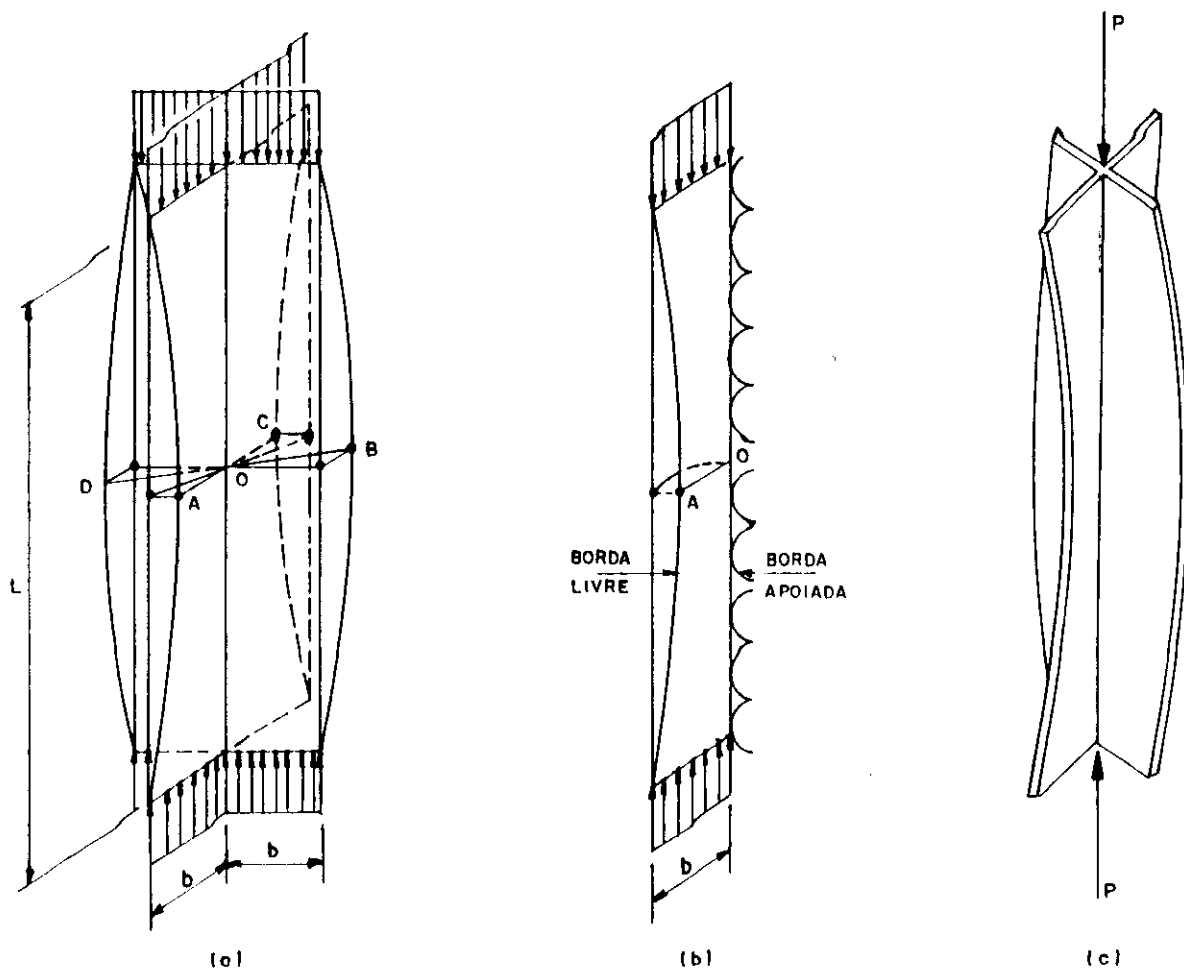


FIG.16 - Flambagem por torção.

Na flambagem por torção, as tensões de compressão axial " P/A " tendem a causar um torque que se opõe à resistência à torção da seção. Na figura 17, é mostrado um elemento de área " δA " que tende a girar de " $a_o \cdot d\theta/dz$ " (onde " a_o " é a distância do elemento ao eixo de torção) quando a seção gira de " $\delta\theta$ ". Assim, a força axial " $(P/A) \cdot \delta A$ " terá uma componente " $(P/A) \cdot \delta A \cdot a_o \cdot d\theta/dz$ " (para ângulos pequenos, o seno do ângulo será igual ao próprio ângulo), que exerce um torque " $(P/A) \cdot \delta A \cdot a_o \cdot (d\theta/dz) \cdot a_o$ " em torno do eixo de torção

que passa pelo centro de cisalhamento de coordenadas " x_0 " e " y_0 ". Neste caso, o torque elementar será:

$$dT = \frac{P}{A} dA \cdot a_o^2 \cdot \frac{d\theta}{dz} \quad (106)$$

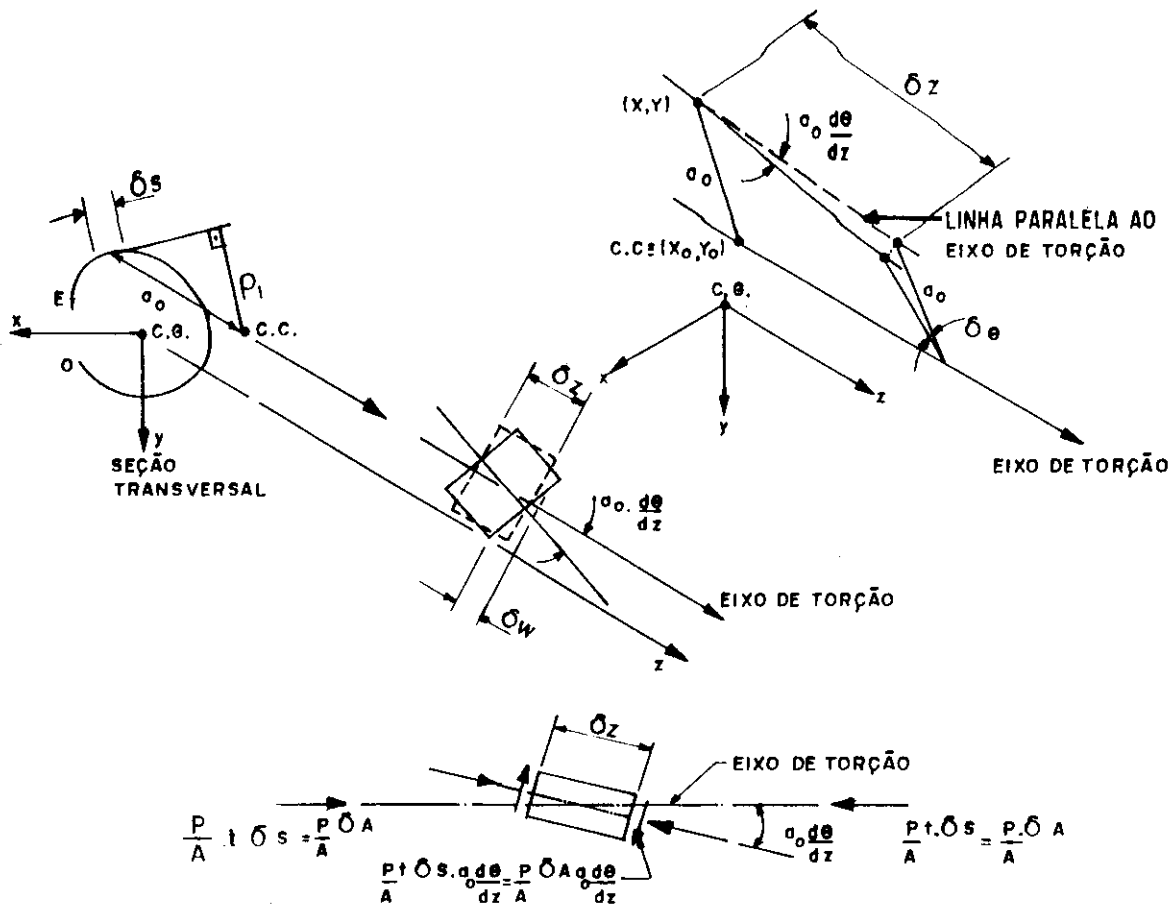


FIG.17 - Rotação de uma linha paralela ao eixo de torção.

Sabendo-se que " θ " varia ao longo de " z " e não interfere na integração global, ao longo da seção transversal, o torque total será:

$$T = \frac{P}{A} \frac{d\theta}{dz} \int_A a_o^2 \cdot dA \quad (107)$$

onde " a_o " é determinado por geometria nos eixos coordenados

da figura 18 e é dado por:

$$a_o^2 = (x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 \quad (108)$$

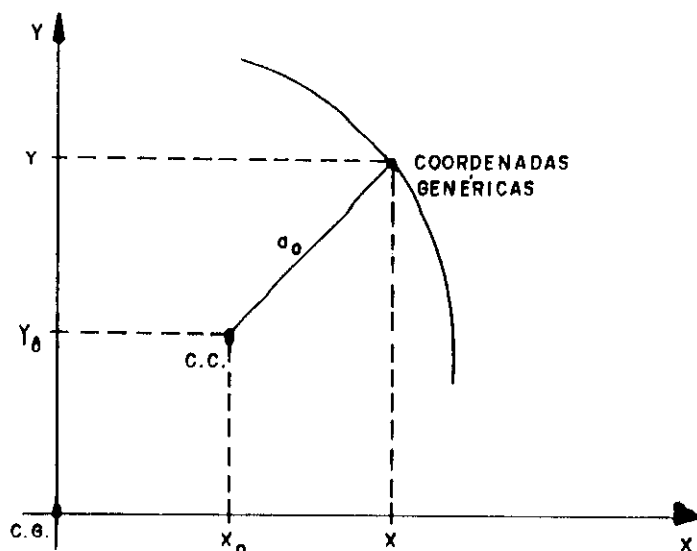


FIG.18 - Determinação de "a_o"

O termo com integral da equação (107) é resolvido, considerando que:

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (109)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (110)$$

$$\int_A x dA = \int_A y dA = 0 \quad (111)$$

então, levando a expressão (108) no termo, sob integral da expressão (107), tendo em vista (109), (110) e (111), tem-se:

$$\int_A a_o^2 dA = A \left[\frac{I_x + I_y}{A} + x_o^2 + y_o^2 \right] = A(r_1^2 + x_o^2 + y_o^2) = A \cdot r_o^2 \quad (112)$$

onde $r_1^2 = (I_x + I_y) / A$. Considerando perfil de dupla simetria ,

em que o centro de gravidade coincide com centro de cisalhamento ($x_o = y_o = 0$), tem-se:

$$\int a_o^2 dA = A.r_o^2 \quad (113)$$

Levando (113) em (107), tem-se a seguinte expressão do momento externo:

$$\tau = P.r_o^2 \cdot \frac{d\theta}{dz} \quad (114)$$

No apêndice "C", foi deduzida a seguinte equação que expressa o efeito do momento resistente interno:

$$M_z = G.I_r \frac{d\theta}{dz} - E.C_v \frac{d^3\theta}{dz^3} \quad (115)$$

Para a condição de equilíbrio, o momento externo deve ser igual ao momento interno, portanto igualando (114) e (115), tem-se:

$$P.r_o^2 \frac{d\theta}{dz} = G.I_r \frac{d\theta}{dz} - E.C_v \frac{d^3\theta}{dz^3} \quad (116)$$

A equação (116) é uma equação diferencial aplicável em situações onde o momento externo aplicado é concentrado. Para que se tenha momento torçor uniformemente distribuído no elemento, torna-se necessário diferenciar a equação (116) mais uma vez, em relação a "z". Fazendo isto e rearranjando os termos, fica:

$$\frac{d^4\theta}{dz^4} + \frac{1}{E.C_v} \left(P.r_o^2 - G.I_r \right) \frac{d^2\theta}{dz^2} = 0 \quad (117)$$

A equação (117) é diferencial linear homogênea com coeficientes constantes e de quarta ordem. Ela define a condição de flambagem para perfis, em que o centro de gravidade coincide com o centro de cisalhamento. Chamando de:

$$m^2 = \frac{1}{E \cdot C_v} \left(P \cdot r_0^2 - G \cdot I_T \right) \quad (118)$$

a equação (117) torna-se:

$$\theta^{IV} + m^2 \cdot \theta^{II} = 0 \quad (119)$$

Esta equação possui solução do tipo:

$$\theta = e^{\Omega z} \quad (120)$$

derivando (120) até a ordem necessária e introduzindo os resultados em (119), tem-se:

$$\Omega^4 + m^2 \cdot \Omega^2 = 0 \quad (121)$$

Se " Ω " satisfaz a equação (121), " $e^{\Omega z}$ " será solução da equação (119) e a equação (121) se chamará equação característica da equação (119).

As raízes da equação característica serão:

$$\Omega_1 = 0 \quad (122)$$

$$\Omega_2 = 0 \quad (123)$$

$$\Omega_3 = +m \cdot i \quad (124)$$

$$\Omega_4 = -m \cdot i \quad (125)$$

A solução geral da equação (119) será:

$$\theta = C_1 \theta_1 + C_2 \theta_2 + C_3 \theta_3 + C_4 \theta_4 \quad (126)$$

onde, θ_1 , θ_2 , θ_3 , e θ_4 são soluções, linearmente independentes da equação (119), e C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são constantes.

A toda raiz real " Ω " de multiplicidade " n ",

corresponde a "n" soluções particulares linearmente independentes [94] do tipo:

$$e^{\Omega z}, z.e^{\Omega z}, \dots, z^{n-1}.e^{\Omega z} \quad (127)$$

Então, de (122) e (123), tendo em vista (127), tem-se:

$$\theta_1 = 1 \quad (128)$$

$$\theta_2 = z \quad (129)$$

A todo o par de raízes complexas conjugadas $\Omega_3 = a_1 + b_1 i$ e $\Omega_4 = a_1 - b_1 i$, correspondem duas soluções particulares do tipo: $\theta_3 = e^{a_1 z} \cos(b_1 z)$ e $\theta_4 = e^{a_1 z} \sin(b_1 z)$, respectivamente. Então, tendo em vista (124) e (125) chega-se a:

$$\theta_3 = \cos(mz) \quad (130)$$

$$\theta_4 = \sin(mz) \quad (131)$$

Levando (128), (129), (130) e (131) em (126), tem-se a seguinte solução geral de (119):

$$\theta = C_1 + C_2.z + C_3.\cos(mz) + C_4.\sin(mz) \quad (132)$$

Se as extremidades da coluna são impedidas de girar em torno do eixo "z", tem-se que $\theta(0) = \theta(L) = 0$. Se as extremidades possuem empenamento livre, tem-se $\theta^{II}(0) = \theta^{II}(L) = 0$ (ver apêndice C). Estas condições de contorno permitem determinar as constantes da equação (132). Impondo estas condições em (132), chega-se a:

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (133)$$

$$C_1 + C_2.L + C_3.\cos(mL) + C_4.\sin(mL) = 0 \quad (134)$$

$$-m^2.C_3 = 0 \quad (135)$$

$$-C_3 \cdot m^2 \cdot \cos(mL) - C_4 \cdot m^2 \cdot \sin(mL) = 0 \quad (136)$$

As equações (133), (134), (135) e (136) são equações homogêneas simultâneas, e elas são satisfeitas somente se $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ (Solução trivial. Então $\theta = 0$, barra na posição reta) ou se o determinante dos coeficientes das constantes desconhecidas for igual a zero (solução não-trivial). Esta última condição pode ser formulada da seguinte maneira:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & \cos(mL) & \sin(mL) \\ 0 & 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & 0 & -m^2 \cos(mL) & -m^2 \sin(mL) \end{vmatrix} = 0 \quad (137)$$

A regra de Laplace para o cálculo do determinante é dada genericamente por:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \Delta_{ij} \quad (138)$$

onde:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}| \quad (139)$$

O número " Δ_{ij} " (determinante afetado pelo sinal $(-1)^{i+j}$ da submatriz " A_{ij} " obtida retirando a i -ésima linha e a j -ésima coluna), é denominado de "cofator" ou complemento algébrico do elemento " a_{ij} ". Portanto, desenvolvendo o determinante (137) pela primeira linha tem-se:

$$a_{11} \Delta_{11} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} L & \cos(mL) & \sin(mL) \\ 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & -m^2 \cos(mL) & -m^2 \sin(mL) \end{vmatrix} = L m^4 \sin(mL) \quad (140)$$

$$a_{12} \Delta_{12} = 0.(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} L \cos(mL) & \text{sen}(mL) \\ 0 & -m^2 \\ 0 & -m^2 \cos(mL) & -m^2 \text{sen}(mL) \end{vmatrix} = 0 \quad (141)$$

$$a_{19} \Delta_{19} = 1.(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & L & \text{sen}(mL) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m^2 \text{sen}(mL) \end{vmatrix} = 0 \quad (142)$$

$$a_{14} \Delta_{14} = 0.(-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & L & \cos(mL) \\ 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & 0 & -m^2 \cos(mL) \end{vmatrix} = 0 \quad (143)$$

o somatório dos resultados (140), (141), (142) e (143) será:

$$\det A = \sum_{j=1}^4 a_{1j} \Delta_{1j} = L.m^4.\text{sen}(mL) = 0 \quad (144)$$

o coeficiente " $L.m^4$ " não pode ser igual a zero, pois a solução seria trivial. Assim, a equação (144) somente pode ser verdadeira se:

$$\text{sen}(mL) = 0 \quad (145)$$

Isto ocorrerá para certos valores específicos de " m " e estes serão denominados de "valores característicos" da equação diferencial correspondentes neste caso:

$$m.L = n.\pi \quad (146)$$

onde " n " é um número inteiro qualquer (1, 2, 3,...). Substituindo (118) em (146), após arranjos algébricos e sabendo-se que quando $n = 1$ a carga crítica será mínima, tem-se:

$$P_{cr} = P = \frac{1}{r_0^2} \left(G \cdot I_T + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_v}{L^2} \right) \quad (147)$$

Esta é suficientemente precisa para seções duplamente simétricas, onde o centro de gravidade coincide com o centro de cisalhamento tal como perfis "I" e "Z".

Dividindo-se ambos os membros da equação (147) pela área da seção transversal "A", tem-se:

$$f_{\theta z} = \frac{1}{A \cdot r_0^2} \left(G \cdot I_T + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_v}{L^2} \right) \quad (148)$$

Esta solução pode ser generalizada para membros comprimidos com outras condições de extremidades. Então, a equação (148) terá a seguinte forma:

$$f_{\theta z} = \frac{1}{A \cdot r_0^2} \left(G \cdot I_T + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_v}{(k_z L)^2} \right) \quad (149)$$

O comprimento efetivo de flambagem à torção ($k_z \cdot L$) é a distância entre pontos de inflexão na forma torcida, sendo que " k_z " é um coeficiente de flambagem, cujos valores são análogos aos coeficientes utilizados em flambagem por flexão.

As tensões críticas de flambagem de perfis duplamente simétricos, em relação aos eixos "x" e "y", são deduções clássicas da flambagem elástica por flexão deduzidas por Euler. E elas são dadas, respectivamente, por:

$$f_{\theta x} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(k_x \cdot L / r_x)^2} \quad (150)$$

$$f_{\theta y} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(k_y \cdot L / r_y)^2} \quad (151)$$

Deve ser enfatizado que, dos possíveis modos de flambagem anteriores, os principais ainda são aqueles que ocorrem por flexão em torno dos eixos "x" e "y" com a carga crítica de Euler corrigida pela teoria do módulo tangente.

Para os propósitos de projetos uma verificação pode ser feita para determinar se um determinado raio de giração equivalente " r_e " está abaixo de " r_x " ou de " r_y ". Uma alternativa seria calcular a tensão crítica de flambagem à torção (eq.149) e comparar com as tensões críticas de flambagem por flexão (eqs.150 e 151). No entanto, algumas vezes será útil usar o procedimento do raio de giração equivalente " r_e ". Para isto, a equação (148) pode ser rearranjada e colocada na seguinte forma:

$$f_{ez} = \frac{\pi^2 E}{L^2} \left(\frac{GI_T L^2}{\pi^2 E Ar_o^2} + \frac{C_v}{Ar_o^2} \right) \quad (152)$$

Os termos entre parênteses podem ser denominados de " r_e^2 ", então (152) toma a forma das expressões de Euler, dada por:

$$f_{ez} = \frac{\pi^2 E}{(L/r_e)^2} \quad (153)$$

onde:

$$r_e = \sqrt{\frac{GI_T L^2}{\pi^2 E Ar_o^2} + \frac{C_\omega}{Ar_o^2}} \quad (154)$$

fazendo-se $G = 0.385E$ e $I_p = Ar_o^2$ (momento de inércia polar) em (154), chega-se a:

$$r_e = \sqrt{0.039 \frac{I_T L^2}{I_p} + \frac{C_\omega}{I_p}} \quad (155)$$

Bleich [25] analisou perfis "I" de abas paralelas e demonstrou que somente para colunas curtas, é que " r_e " será

menor do que " r_x " e " r_y ". Assim, para a maioria dos casos, considerando este tipo de perfil, a flambagem ocorrerá por flexão lateral em torno do eixo "y", e somente para as colunas curtas é que poderá ocorrer flambagem por torção. Por isto, para perfis "I" e "H", as normas de projetos tomam como referência a carga crítica de Euler como sendo o modo fundamental de flambagem. Estas normas não analisam a possibilidade de flambagem por torção. Lee [102] analisou a flambagem por torção inelástica de colunas "H" sob o efeito das tensões residuais e verificou que estes efeitos mudam muito pouco as curvas de flambagem estabelecidas para a flexão.

A flambagem por torção não deve ser desconsiderada para todos os tipos de seções onde o centro de gravidade coincide com o centro de cisalhamento. Em colunas cruciformes, sobretudo quando são formadas por placas delgadas, este tipo de flambagem deve ser verificada.

4 - FLAMBAGEM POR FLEXO-TORÇÃO

4.1 - Equações diferenciais

No caso geral, onde o centro de cisalhamento e o centro de gravidade não coincidem, a flambagem será uma combinação de flexão e torção. Para este caso, as três equações diferenciais: (1) flambagem por flexão lateral, em torno do eixo "x", (2) flambagem por flexão lateral, em torno do eixo "y" e (3) torção em torno do centro de cisalhamento, são interdependentes. Assim, três equações diferenciais simultâneas devem ser resolvidas para obter as cargas críticas de flambagem [141].

Para analisar este tipo de flambagem, considere a linha média de uma seção transversal assimétrica aberta e de paredes finas (fig.19).

Os eixos "x" e "y" são centroidais, principais da

seção transversal; e " x_0 " e " y_0 " são as coordenadas do centro de cisalhamento "O". O ponto "Q" é um ponto genérico localizado sobre a linha média da seção transversal.

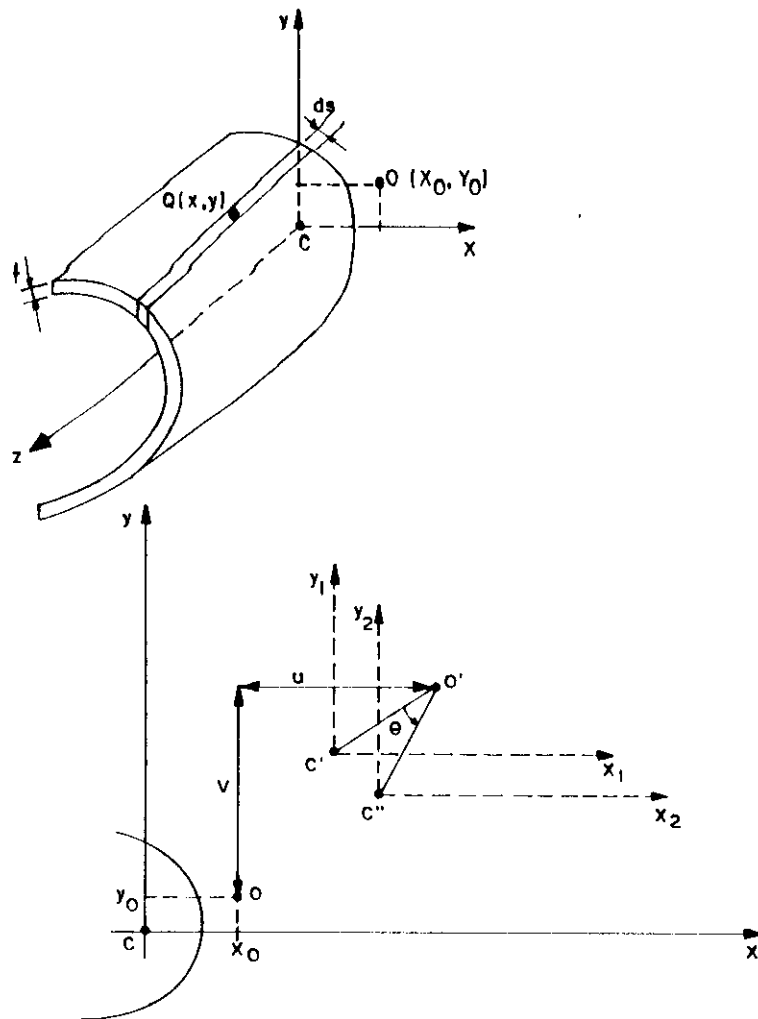


FIG.19 - Seção transversal da coluna

Durante a flambagem, a seção transversal sofrerá translação e rotação. A translação é definida pelas coordenadas " u " e " v " nas direções " x " e " y ", respectivamente, do centro de cisalhamento. Assim, durante a translação da seção transversal, o ponto (O) muda para (O')

e o centro de gravidade muda de (C) para (C'). A rotação da seção transversal, em torno do centro de cisalhamento, é representada pelo ângulo (θ), e para esta rotação o centro de gravidade assumirá a posição final (C'').

Serão analisados separadamente os casos em que ocorrem a torção e a flexão para depois ser feita uma superposição de efeitos.

Um momento de torção aplicado em uma barra não produz deslocamentos transversais do centro de cisalhamento. Conseqüentemente, o eixo longitudinal do centro de cisalhamento permanece reto durante a torção, e a seção transversal da barra gira em torno deste centro geométrico, durante a deformação (fig.20).

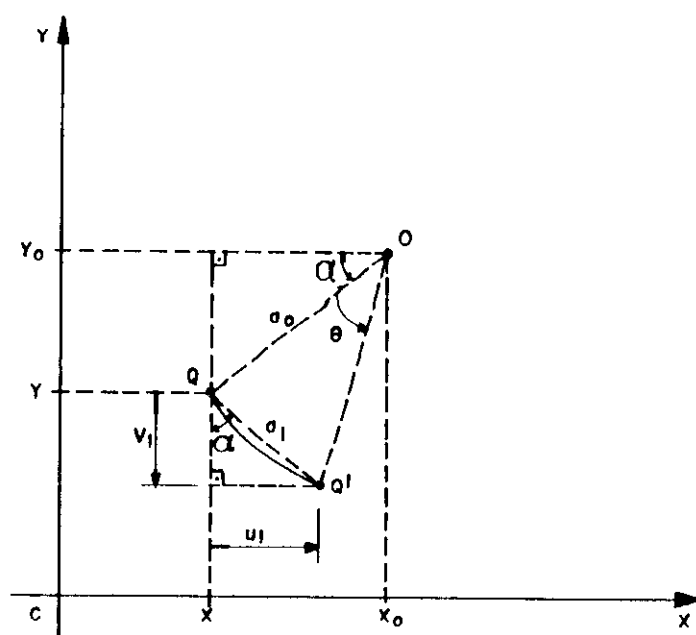


FIG.20 - Deslocamento de um ponto genérico devido a rotação.

Os deslocamentos do ponto "Q" nas direções "x" e "y" podem ser encontrados através de relações geométricas, supondo-se que " θ " é um ângulo pequeno (fig.20). Portanto, tiram-se as seguintes relações:

$$a_1 = a_0 \cdot \theta \quad (156)$$

$$\cos\alpha = \frac{u_1}{a_1} = \frac{u_1}{a_0 \theta} \quad (157)$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{v_1}{a_1} = \frac{v_1}{a_0 \theta} \quad (158)$$

$$\cos\alpha = \frac{(y_0 - y)}{a_0} \quad (159)$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{(x_0 - x)}{a_0} \quad (160)$$

igualando (157) com (159), e (158) com (160), chega-se a:

$$u_1 = (y_0 - y) \cdot \theta \quad (161)$$

$$v_1 = (x_0 - x) \cdot \theta \quad (162)$$

Cargas aplicadas transversalmente à barra através do centro de cisalhamento tendem a provocar a flexão da barra sem que ocorra torção. Conseqüentemente, o centro de cisalhamento mudará de posição devido aos efeitos das deformações provocadas pela flexão. Assim, os deslocamentos do ponto (O) serão denominados de "u" e "v", respectivamente, (fig.21).

Os deslocamentos provocados pela torção e pela flexão devem ser superpostos. Nota-se pela figura 21 que "u₁" é um deslocamento na direção de "x", e este é menor do que "u" (a torção provoca deslocamentos menores), portanto estes dois deslocamentos devem ser somados fornecendo o deslocamento do ponto genérico (Q) segundo o eixo "x":

$$u_Q = u + u_1 = u + (y_0 - y)\theta \quad (163)$$

Se "v₁" for um deslocamento contrário à direção "y", e este for também menor do que "v", portanto "v" deve ser subtraído de "v₁" fornecendo, por sua vez, o deslocamento do ponto genérico (Q), segundo o eixo "y":

$$v_Q = v - v_1 = v - (x_0 - x)\theta \quad (164)$$

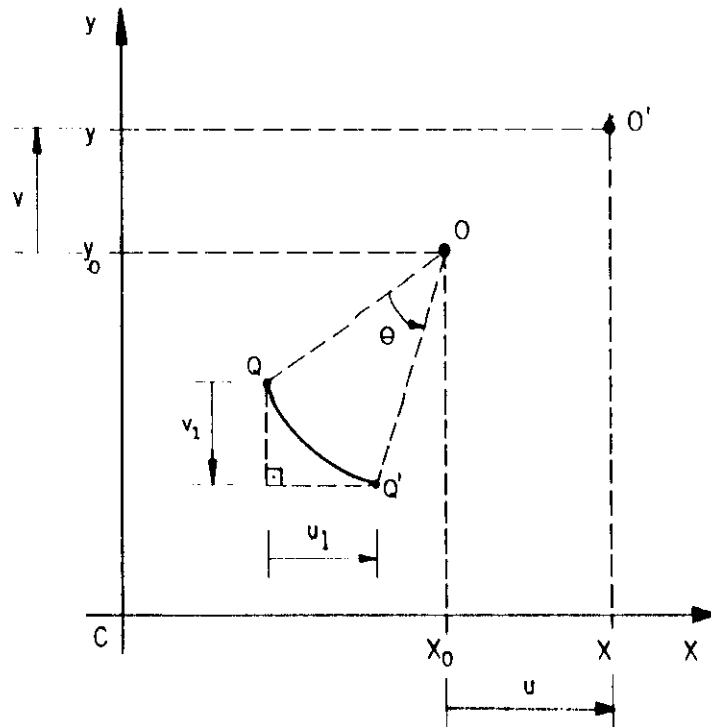


FIG.21 - Deslocamentos do ponto genérico devido à translação

Para as análises dos efeitos da flexão, é importante que sejam considerados apenas os deslocamentos dos pontos que passam pelo centro de gravidade da seção. Então, neste caso, $x = y = 0$, e as expressões (163) e (164) tornam-se:

$$u_c = u + y_0 \theta \quad (165)$$

$$v_c = v - v_0 \theta \quad (166)$$

Se na coluna atua somente uma carga centrada de compressão "P", como no caso de colunas bi-rotuladas, os momentos de flexão, em relação aos eixos principais de uma seção genérica (fig.22), serão:

$$M_x = -P.v_c = -P.(v + x_0 \theta) \quad (167)$$

$$M_y = -P.u_c = -P.(u + y_o \theta) \quad (168)$$

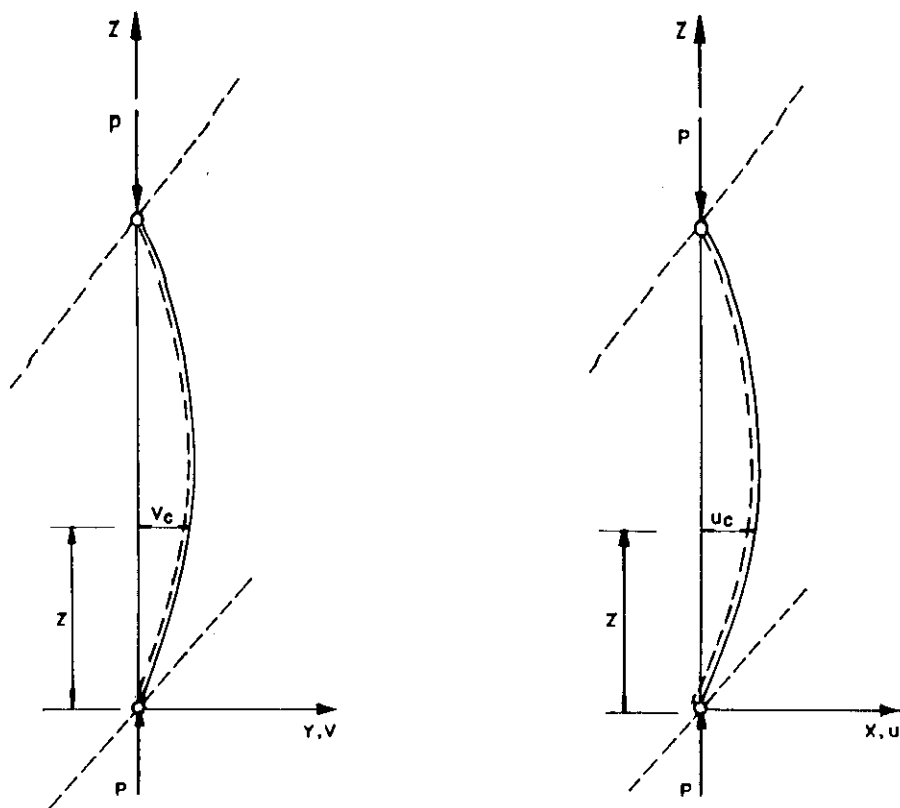


FIG.22 - Coluna com carga aplicada no centro de gravidade

Para o sentido positivo da deformação " v_c " indicada o momento fletor M_x é negativo. Se a coluna se deformasse no outro sentido o momento seria também negativo. Conseqüentemente, " v_c " seria negativo. Portanto, para tornar " $P.v_c$ " positivo, esse produto deve, da mesma forma, ser tratado como uma quantidade negativa.

Os momentos internos na barra são traduzidos pelas equações diferenciais da linha elástica de Euler-Bernoulli, respectivamente, em relação aos eixos "x" e "y" dadas por:

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} = M_x \quad (169)$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M_y \quad (170)$$

Igualando os momentos externos fornecidos por (167) e (168) com os correspondentes momentos internos fornecidos por (169) e (170), tem-se:

$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} = -P(v - x_o \theta) \quad (171)$$

$$EI \frac{d^2 u}{dz^2} = -P(u + y_o \theta) \quad (172)$$

Estas duas equações para a flexão da barra possuem: "u", "v", e "θ", como quantidades desconhecidas. A terceira equação é encontrada, considerando-se a torção da barra.

Para obter a equação para o ângulo de torção "θ", considera-se uma faixa longitudinal da seção transversal "t.ds" definida pelas coordenadas "x" e "y" do ponto genérico (Q), no plano da seção transversal, (fig.23). As componentes "u_Q" e "v_Q", da deflexão do ponto "Q", nas direções "x" e "y", durante a flambagem, são definidas respectivamente pelas expressões (163) e (164).

A curvatura "χ" da fibra \overline{AB} (fig.23) é igual a taxa de variação do ângulo "ψ", em relação ao comprimento ao longo da linha elástica, e é dada por:

$$\chi = \frac{d\psi}{dz} = \psi' = \frac{1}{R} \quad (173)$$

onde "χ" é a curvatura e "R" é o raio de curvatura.

Pelo cálculo infinitesimal, sabe-se que a derivada da ordenada em relação a abscissa é igual à tangente do ângulo no ponto considerado (fig.23), mas para os propósitos práticos será considerado que a tangente seja igual ao próprio ângulo. Portanto, tem-se:

$$\text{tag}(\psi) \cong \psi = \frac{du}{dz} \quad (174)$$

onde "u" é o deslocamento da fibra, a partir de sua posição

original. Para a curvatura representada na figura 23 a relação " $d\psi/dz$ " é negativa, pois o ângulo " ψ " decresce quando passa da origem para a extremidade superior, segundo a curva da elástica.

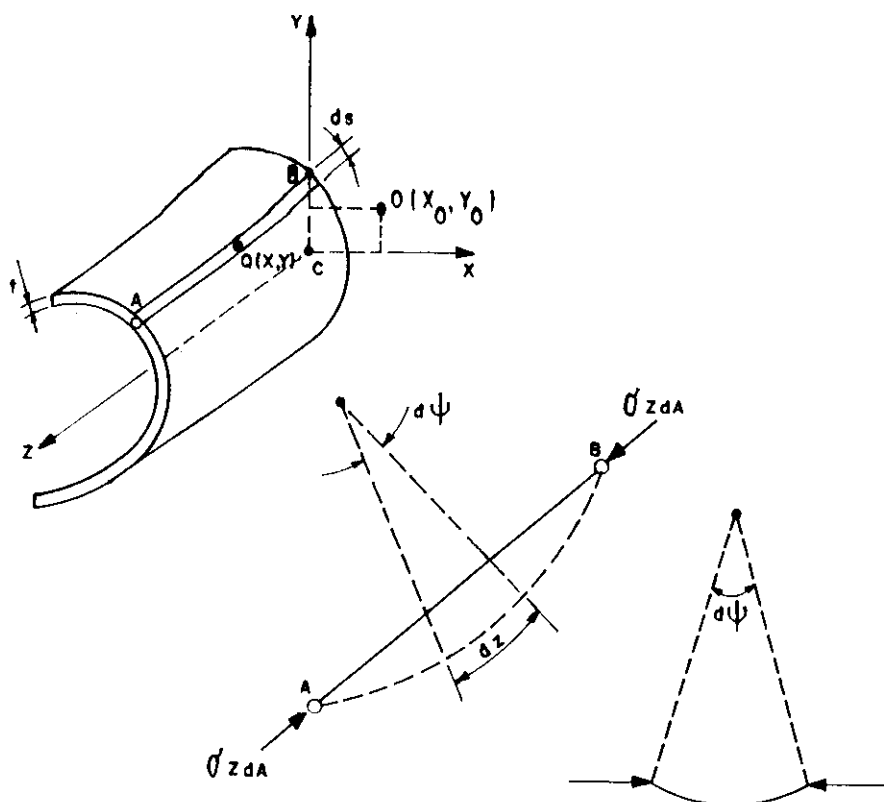


FIG.23 - Fibra longitudinal \overline{AB}

Derivando (174), em relação a "z" e tendo em vista (173), chega-se a:

$$\chi = \frac{d\psi}{dz} = \frac{d^2 u}{dz^2} \quad (175)$$

Inicialmente, a fibra \overline{AB} está reta e somente uma força de compressão centrada atua na mesma. É suposto que a força "P" atinja o seu valor crítico e, em razão disto, a fibra comprimida assume uma configuração deslocada em equilíbrio. Devido a este deslocamento, aparecerão tensões

de flexão que se superpõem às tensões iniciais uniformemente distribuídas de compressão. Cada elemento da fibra deslocada entre duas seções adjacentes está em equilíbrio. Pode-se, neste caso, concluir que as tensões de flexão produzidas durante a flambagem estão em equilíbrio com as tensões iniciais devido à compressão.

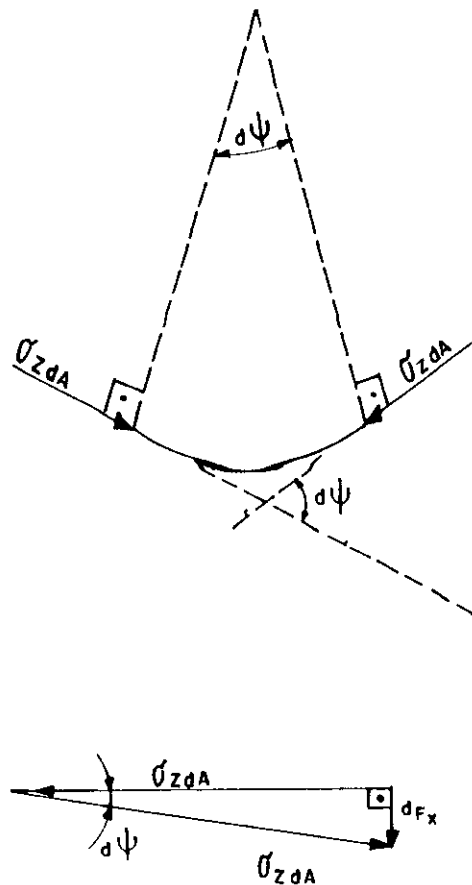


FIG.24 - Deformação elementar entre duas seções consecutivas

O ângulo entre duas seções consecutivas (figs 23 e 24), tendo em vista a relação (175) e o sinal negativo que deve estar envolvido, aquele será:

$$d\psi = - \frac{d^2 u}{dz^2} dz \quad (176)$$

onde "u" é a deformação da fibra na direção "x".

Por relação de triângulo retângulo (fig.24) e pela

relação (176), conclui-se que a ação das forças de compressão "P" nas seções das fibras fletidas, é equivalente a ação em cada elemento de fibra de uma força elementar transversal. Esta força será dada por:

$$dF_x = P.d\psi = P.\left[-\frac{d^2u}{dz^2}dz\right] = -P\frac{d^2u}{dz^2}dz \quad (177)$$

Assim, a curva elástica da fibra e as tensões de flexão correspondentes, podem ser determinadas admitindo-se que a fibra esteja solicitada por uma carga lateral fictícia, cuja intensidade é fornecida pela expressão (177). Por caminhos análogos, a carga lateral fictícia em relação ao eixo "y" será:

$$dF_y = -P\frac{d^2v}{dz^2}dz \quad (178)$$

A seção transversal "t.ds" de uma faixa longitudinal é definida pelas coordenadas "x" e "y" no plano da seção. No entanto, durante a flambagem, as componentes de deslocamentos da seção elementar "t.ds", nas direções "x" e "y", são obtidas pelas expressões (163) e (164). Tomando-se as segundas derivadas dessas expressões em relação a "z", considerando um comprimento de dimensão elementar "dz" de uma fibra e usando as expressões (177) e (178), conclui-se que as forças de compressão " $\sigma_z.t.ds$ " atuando nas extremidades do elemento ligeiramente fletido acarretam as seguintes forças fictícias transversais:

$$dF_x = -\sigma_z.t.ds.\frac{d^2\left[u + (y_o - y)\theta\right]}{dz^2}dz \quad (179)$$

$$dF_y = -\sigma_z.t.ds.\frac{d^2\left[v - (x_o - x)\theta\right]}{dz^2}dz \quad (180)$$

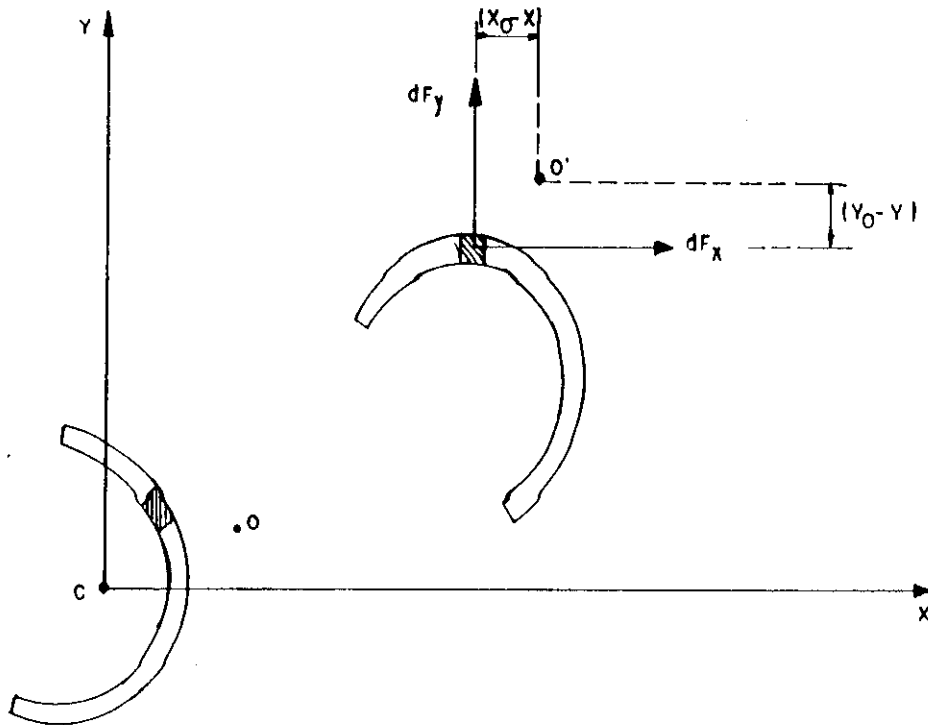


FIG.25 - Elemento da seção sujeito às forças dF_x e dF_y

As forças " dF_x " e " dF_y " atuam no volume elementar mostrado na figura 25. Será representado por " dm_z ", o momento de torção elementar por unidade de comprimento da fibra longitudinal em estudo. Então, o momento das forças " dF_x " e " dF_y ", em relação ao centro de cisalhamento (O), será:

$$dm_z \cdot dz = dF_x (y_0 - y) - dF_y (x_0 - x) \quad (181)$$

Introduzindo (179) e (180) em (181) com as respectivas derivadas dos termos entre colchetes tem-se:

$$dm_z = \alpha_z t ds \left\{ - \left[u^{II} + (y_0 - y) \theta^{II} \right] (y_0 - y) + \left[v^{II} - (x_0 - x) \theta^{II} \right] (x_0 - x) \right\} \quad (182)$$

Integrando a expressão (182) ao longo de toda a seção e observando que:

$$\sigma_z \int_A t \cdot ds = P \quad (183)$$

$$\int_A x \cdot t \cdot ds = \int_A y \cdot t \cdot ds = 0 \quad (184)$$

$$\int_A y^2 \cdot t \cdot ds = I_x \quad (185)$$

$$\int_A x^2 \cdot t \cdot ds = I_y \quad (186)$$

chega-se a:

$$m_z = \int_A dm_z = -P y_o u^{II} - P y_o^2 \theta^{II} - \sigma_z I_x \theta^{II} + P x_o v^{II} - P x_o^2 \theta^{II} - \sigma_z I_y \theta^{II} \quad (187)$$

fazendo $\sigma_z = P/A$ na expressão (187) e arranjando os termos, tem-se:

$$m_z = \left(x_o v^{II} - y_o u^{II} \right) P - P \theta^{II} \left(x_o^2 + y_o^2 + \frac{I_x + I_y}{A} \right) \quad (188)$$

chamando de:

$$r_o^2 = x_o^2 + y_o^2 + \frac{I_x + I_y}{A} \quad (189)$$

onde "r_o" é o raio de giração polar da seção em relação ao centro de torção.

A expressão (188) representa o momento de torção por unidade de comprimento da coluna. Substituindo (189) em (188) tem-se:

$$m_z = \left(x_o v^{II} - y_o u^{II} \right) P - P r_o^2 \theta^{II} \quad (190)$$

A equação diferencial que representa o momento de torção interno, uniformemente distribuído, foi deduzida no

apêndice "C" e é dada por:

$$m_z = - \frac{dM}{dz} = - G.I_T \frac{d^2\theta}{dz^2} + E.C \frac{d^4\theta}{dz^4} \quad (191)$$

Quando o torque externo, dado pela expressão (190), equilibrar com o torque interno, dado pela expressão (191), é possível ter uma posição de equilíbrio na forma torcida. Portanto, igualando as expressões (190) e (191), chega-se finalmente:

$$E.C \frac{d^4\theta}{dz^4} - \left(G.I_T - P r_o^2 \right) \frac{d^2\theta}{dz^2} - P x_o v'' + P y_o u'' = 0 \quad (192)$$

As equações (171), (172), e (192) são as três equações diferenciais simultâneas para solucionar os problemas de flambagem por flexão e torção. Elas podem ser usadas para determinar as cargas críticas para este modo de flambagem. Observa-se que o ângulo de rotação " θ " aparece em todas as três equações indicando que, em geral, a flambagem por torção é acompanhada pela flexão do eixo da barra. Neste caso, tem-se flambagens combinadas por flexão e torção.

No caso particular, em que o centro de gravidade coincide com o centro de torção ($x_o = y_o = 0$), cada uma daquelas três equações possuirá apenas uma incógnita, e cada equação pode ser tratada separadamente. As equações (171) e (172) fornecerão dois valores para a carga crítica correspondendo à flambagem em dois planos principais como na teoria de Euler. Por outro lado, a equação (192) fornecerá a carga crítica por torção simples, como visto no item 3. Destas três cargas críticas, a menor delas será a mais importante para efeitos práticos.

4.2 - Carga crítica para perfis assimétricos

Para o caso geral, representado pelas equações (171), (172) e (192), admite-se que a coluna está simplesmente apoiada, de modo que extremidades sejam livres

para permitir o empenamento e para permitir as articulações em torno dos eixos "x" e "y" sem que possa ocorrer rotação em torno do eixo "z". Em tais casos, as condições de extremidades (ver apêndice-C), serão:

$$u = v = \theta = 0 \quad ; \quad \text{para} \quad z = 0 \quad \text{e} \quad z = L \quad (193)$$

$$u'' = v'' = \theta'' = 0 \quad ; \quad \text{para} \quad z = 0 \quad \text{e} \quad z = L \quad (194)$$

Todas estas condições serão satisfeitas, se as soluções das equações (171), (172) e (192) forem da forma:

$$u = A_1 \text{sen}(\pi z/L) \quad (195)$$

$$v = A_2 \text{sen}(\pi z/L) \quad (196)$$

$$\theta = A_3 \text{sen}(\pi z/L) \quad (197)$$

Substituindo estas funções e suas respectivas derivadas, nas equações (171), (172) e (192), chega-se a:

$$\left[P - \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \right] A_1 + P y_o A_3 = 0 \quad (198)$$

$$\left[P - \frac{\pi^2 EI_x}{L^2} \right] A_2 - P x_o A_3 = 0 \quad (199)$$

$$P y_o A_1 - P x_o A_2 - \left[\frac{\pi^2 EC_w}{L^2 r_o^2} + \frac{GI_T}{r_o^2} - P \right] r_o^2 A_3 = 0 \quad (200)$$

Este sistema de equações pode ser simplificado, dividindo-se todos os termos das equações pela área "A", fazendo $I_x = A \cdot r_x^2$, $I_y = A \cdot r_y^2$ e, conseqüentemente, lembrando que:

$$f_o = \frac{P}{A} \quad (201)$$

$$f_{ex} = \frac{\pi^2 E}{(L/r_x)^2} \quad (202)$$

$$f_{ey} = \frac{\pi^2 E}{(L/r_y)^2} \quad (203)$$

$$f_{ez} = \frac{1}{Ar_o^2} \left(\frac{\pi^2 EC_\omega}{L^2} + GI_T \right) \quad (204)$$

No caso geral, para outras condições de extremidades, os comprimentos "L" das equações (202), (203) e (204) deverão ser multiplicados pelos coeficientes de flambagem: "k_x", "k_y", e "k_z", respectivamente.

Tendo em vista as equações (202), (203) e (204), além das observações anteriores, o sistema dado pelas equações (198), (199) e (200) tomará a seguinte forma:

$$(f_e - f_{ey}) \cdot A_1 + f_e \cdot y_o \cdot A_3 = 0 \quad (205)$$

$$(f_e - f_{ex}) \cdot A_2 - f_e \cdot x_o \cdot A_3 = 0 \quad (206)$$

$$f_e \cdot y_o \cdot A_1 - f_e \cdot x_o \cdot A_2 + (f_e - f_{ez}) \cdot r_o^2 \cdot A_3 = 0 \quad (207)$$

As equações (205), (206) e (207) serão satisfeitas, fazendo $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, o que corresponde à forma reta de equilíbrio da barra comprimida. Para que se tenha a forma flambada de equilíbrio, as constantes A_1 , A_2 , e A_3 não devem se anular simultaneamente. Isto é possível somente se o determinante do sistema formado pelas equações (205), (206) e (207) for igual a zero. Portanto, tem-se:

$$\begin{vmatrix} (f_e - f_{ey}) & 0 & f_e \cdot y_o \\ 0 & (f_e - f_{ex}) & -f_e \cdot x_o \\ f_e \cdot y_o & -f_e \cdot x_o & (f_e - f_{ez}) r_o^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (208)$$

Para determinar os valores das tensões críticas, o

desenvolvimento do determinante (208) fornece a seguinte equação cúbica:

$$(f_e - f_{ex})(f_e - f_{ey})(f_e - f_{ez}) - f_e^2(f_e - f_{ey}) \left(\frac{x_o^2}{r_o^2} \right) - f_e^2(f_e - f_{ex}) \left(\frac{y_o^2}{r_o^2} \right) = 0 \quad \underline{209}$$

Calculando-se os valores numéricos das grandezas " f_{ex} ", " f_{ey} ", " f_{ez} ", " x_o ", " y_o " e " r_o " e resolvendo a equação (209), encontram-se três valores para a tensão crítica dos quais o menor será o utilizado para efeitos práticos.

4.3 - Carga crítica para perfis monossimétricos

Assumindo que o eixo "y" é um eixo de simetria, tem-se que " $x_o = 0$ ", e as equações diferenciais (171), (172) e (192) tornam-se:

$$EI_x v^{II} = - Pv \quad (210)$$

$$EI_y u^{II} = - P(u + y_o \theta) \quad (211)$$

$$EC_v \theta^{IV} - (GI_T - Pr_o^2) \theta^{II} + Py_o u^{II} = 0 \quad (212)$$

A equação (210) não possui o termo em " θ ". Isto mostra que a flambagem no plano de simetria é independente da torção, e a carga crítica correspondente será dada pela equação de Euler. No entanto, a flambagem perpendicular ao plano de simetria é combinada com torção e é representada pelas equações (211) e (212).

Admitindo-se que as extremidades da coluna sejam simplesmente apoiadas, isto é, o empenamento será livre, será possível o giro em torno do eixo "x", mas a rotação em torno do eixo "z" será impedida. Assim, as condições de extremidades serão:

$$u = \theta = 0 \quad ; \quad \text{para} \quad z = 0 \quad \text{e} \quad z = L \quad (213)$$

$$u'' = \theta'' = 0 \quad ; \quad \text{para} \quad z = 0 \quad \text{e} \quad z = L \quad (214)$$

Procedendo como no caso dos perfis assimétricos, as condições (213) e (214) serão satisfeitas, se as soluções das equações (211) e (212) forem das seguintes formas:

$$u = B_1 \text{sen}(\pi z/L) \quad (215)$$

$$\theta = B_2 \text{sen}(\pi z/L) \quad (216)$$

Substituindo estas funções e suas respectivas derivadas, nas equações diferenciais (211) e (212), chega-se a:

$$\left[P - \frac{\pi^2 EI}{L^2} \right] B_1 + P y_o B_2 = 0 \quad (217)$$

$$- P y_o B_1 + \left[\frac{\pi^2 EC \omega}{r_o^2 L^2} + \frac{GI_T}{r_o^2} - P \right] r_o^2 B_2 = 0 \quad (218)$$

Dividindo todos os termos das equações (217) e (218) pela área "A", sabendo-se que $I_y = A \cdot r_y^2$ e tendo-se em vista as expressões (201), (203) e (204), chega-se a:

$$(f_e - f_{ey}) B_1 + f_e \cdot y_o \cdot B_2 = 0 \quad (219)$$

$$- f_e \cdot y_o \cdot B_1 - (f_e - f_{ez}) r_o^2 B_2 = 0 \quad (220)$$

Estas equações serão satisfeitas, fazendo $B_1 = B_2 = 0$, o que corresponde à forma reta de equilíbrio da barra comprimida. Para que se tenha a forma flambada de equilíbrio, as constantes " B_1 " e " B_2 " não devem se anular simultaneamente, o que é possível somente se o determinante do sistema formado pelas equações (219) e (220) for igual a zero. Portanto, tem-se:

$$\begin{vmatrix} (f_e - f_{ey}) & f_e \cdot y_o \\ -f_e \cdot y_o & -(f_e - f_{ez})r_o^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (221)$$

Desenvolvendo este determinante, chega-se a:

$$\left(1 - \frac{y_o^2}{r_o^2}\right) f_e^2 - (f_{ey} + f_{ez}) \cdot f_e + f_{ey} \cdot f_{ez} = 0 \quad (222)$$

chamando de:

$$H = 1 - \frac{y_o^2}{r_o^2} \quad (223)$$

e levando (223) em (222), tem-se:

$$H \cdot f_e^2 - (f_{ey} + f_{ez}) \cdot f_e + f_{ey} \cdot f_{ez} = 0 \quad (224)$$

A equação (224) é uma equação do segundo grau. Sua solução fornece:

$$f_e = \frac{(f_{ey} + f_{ez})}{2H} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4f_{ey} f_{ez} H}{(f_{ey} + f_{ez})^2}} \right] \quad (225)$$

Neste caso, a tensão crítica será a menor raiz desta equação, portanto somente será considerada a solução que leva o sinal negativo antes do radical da equação (225) [29,141.158].

CAPÍTULO 4

FLEXO-COMPRESSÃO

1 - INTRODUÇÃO

Barras flexo-comprimidas, ou vigas-colunas, são peças estruturais que combinam a função de vigas para transmitir forças ou momentos transversais com colunas com a função de transmitir forças axiais.

Teoricamente, todas as peças estruturais podem ser consideradas como sendo vigas-colunas, pois barras sujeitas exclusivamente à tração, à compressão ou à flexão são casos particulares de vigas-colunas. Vigas-colunas podem atuar como se fossem peças isoladas como no caso de barras comprimidas bi-rotuladas e carregadas excêntricamente; ou podem fazer parte de um pórtico rígido. Em pórticos, as vigas-colunas, usualmente, estão sujeitas a momentos e forças axiais (fig.1). No entanto, é possível encontrar vigas-colunas submetidas a cargas transversais, além dos momentos e forças axiais de extremidades (fig.1), cuja situação pode ser encontrada por exemplo em cordas comprimidas de treliças.

O comportamento de vigas-colunas isoladas pode ser discutido, considerando-se três situações diferentes, ou seja: (a) estabilidade no plano de flexão; (b) estabilidade

por flexo-torção e (c) estabilidade por flexão biaxial.

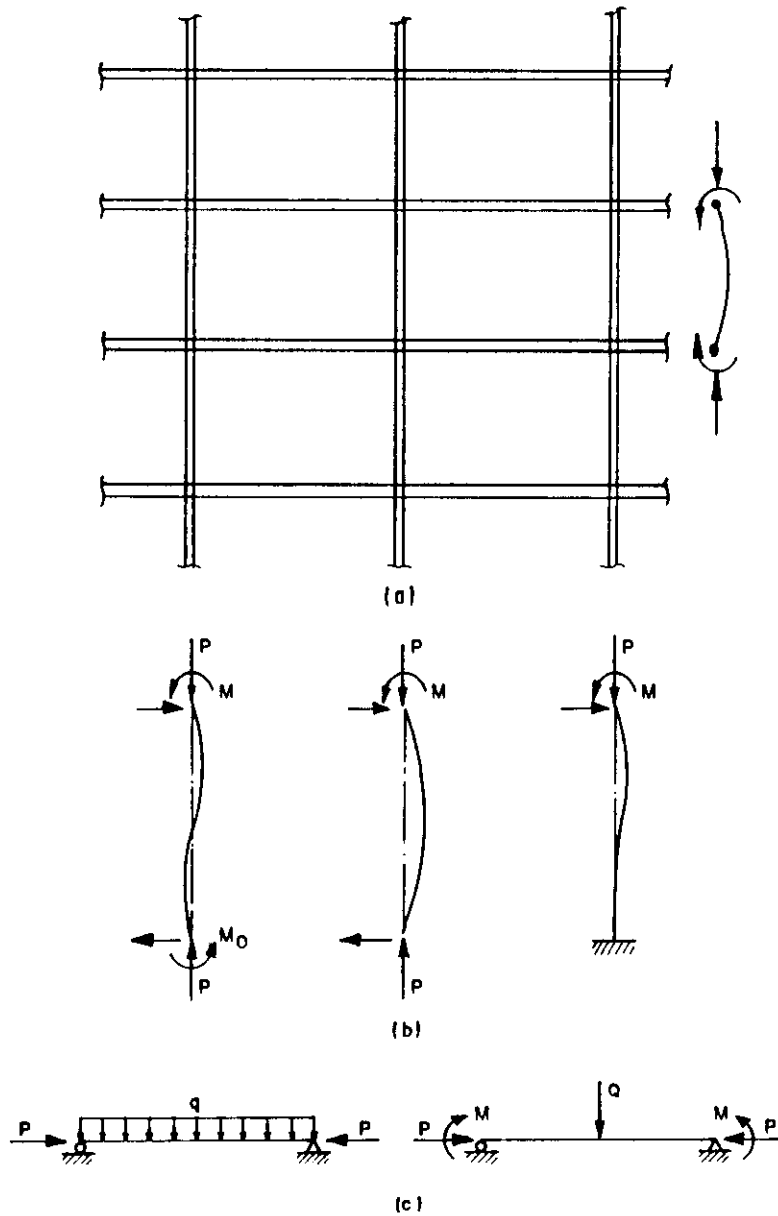


FIG.1 - Vigas-colunas: (a) Vigas-colunas em um pórtico; (b) vigas-colunas típicas de pórticos; (c) vigas-colunas típicas com cargas transversais.

Quando uma viga-coluna flete em torno de de seu eixo principal de menor inércia, ou quando ela é impedida de deslocar lateralmente, enquanto ocorre flexão em torno do eixo de maior inércia (fig.2-a), a sua estabilidade fica restrita à análise no plano de flexão. No entanto, quando uma viga-coluna flete em torno do seu eixo de maior inércia (fig.2-b) sem restrições laterais, ela pode flambar

prematuramente fora do seu plano de flexão por deslocamento lateral e torção. Este fenômeno é denominado de flambagem por flexo-torção como discutido na análise da flexão de vigas. No caso mais geral, uma viga-coluna pode fletir em torno de ambos os eixos principais e torcer (fig.2-c). Neste caso, tem-se a flexão biaxial. Esta ocorre comumente em pórticos rígidos tri-dimensionais envolvendo interações de flexão e torção de vigas com flambagem de vigas e colunas.

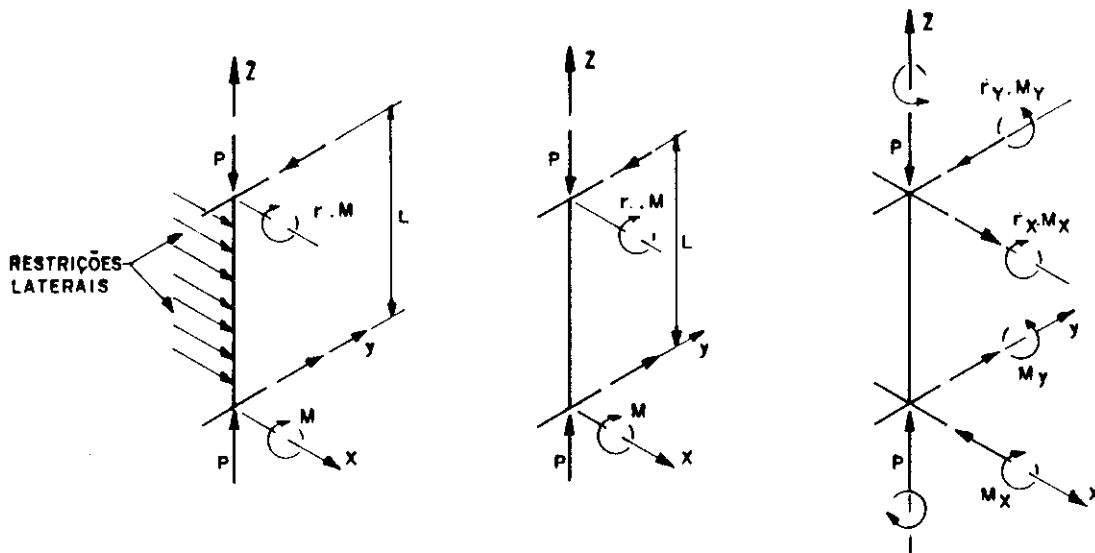


FIG.2 - Comportamento de viga-coluna: (a) Estabilidade no plano; (b) Estabilidade por flexo-torção; (c) Estabilidade por flexão biaxial.

Pórticos estruturais comportam mais ou menos da mesma forma que as vigas-colunas, visto que são constituídos destas. No caso particular de um pórtico triangular, com cargas somente em seus nós, não existe flexão primária, e as peças funcionam somente à tração ou compressão simples. A ação da flexão primária ocorre em pórticos fletidos, e o comportamento deste pórticos depende dos tipos de arranjos dos seus nós e, em todos os casos, suas ações podem ser consideradas bi-dimensionais. Em pórticos com ligações

simples (fig.3-a). para as quais os momentos transmitidos podem ser desprezados, as peças podem ser tratadas como vigas-colunas isoladas. No entanto, quando as ligações são semi-rígidas (fig.3-b), ou rígidas (fig.3-c), transmitindo momentos significativos, existirão importantes interações entre as peças.

Quando um pórtico é ou pode ser considerado como bi-dimensional, somente com cargas no seu plano, ele falhará por flexão no plano, ou por flambagem por flexo-torção fora de seu plano. Se, no entanto, o pórtico ou seu carregamento for tri-dimensional, ele falhará em um modo em que as peças estruturais estiverem sujeitas a ações de flexão biaxial primária e torção.

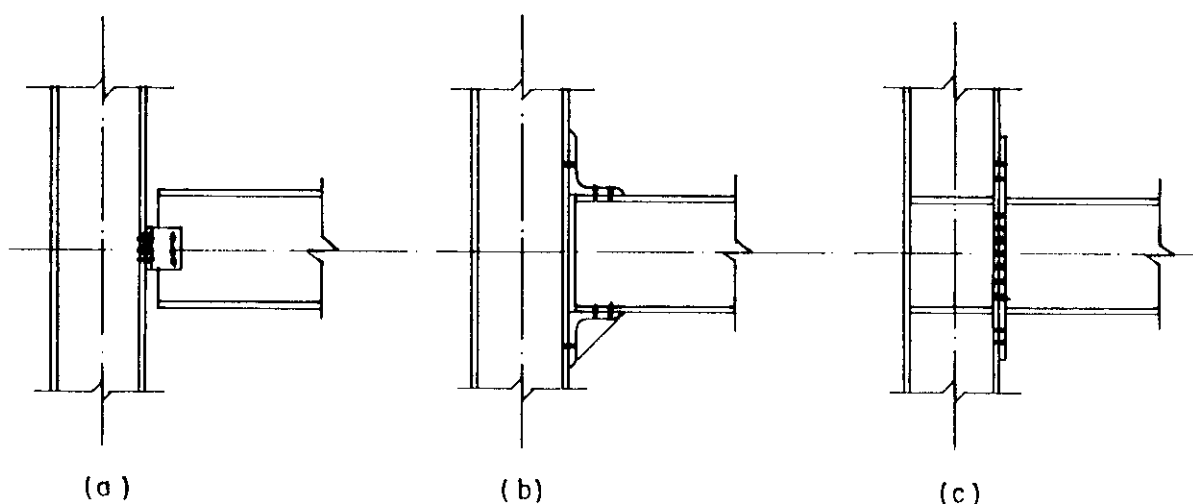


FIG.3 - Ligações de vigas-colunas: (a) Ligação simples; (b) ligação semi-rígida e (c) ligação rígida.

Se a deformação de uma viga-coluna isolada for restrita à flexão no plano (fig.2-a), seu comportamento mostrará uma interação entre flexão de viga e flambagem de peça comprimida, como mostrado pela figura 4. A curva 1 desta figura mostra o comportamento linear de uma viga, enquanto que a curva 6 mostra o comportamento limite de uma viga rígida-plástica, (Em material ideal, as tensões são

constantes e as deformações são possíveis somente quando a tensão de escoamento for atingida) no momento total de plastificação " M_{PL} ". A curva 2 mostra a transição de uma viga elasto-plástica real entre as curvas 1 e 6. A flambagem elástica de uma peça, axialmente comprimida até a sua carga crítica " P_{cr} ", é mostrada pela curva 4. A curva 3 mostra a interação entre flexão e flambagem de peças elásticas e considera o momento adicional " $P\Delta$ " exercido pela carga axial. A curva 7 mostra a interação entre o momento de flexão e a força axial que causam a plastificação total da peça. Esta curva mostra que o momento de plastificação total " M_{PL} " reduziu para " M_{PR} " devido ao efeito da carga axial e ao momento adicional " $P\Delta$ ". O comportamento real de uma viga-coluna é mostrado pela curva 5, sendo que esta é uma transição entre a curva 3 para barras elásticas, e a curva 7, para a plastificação total [41,72,79,160].

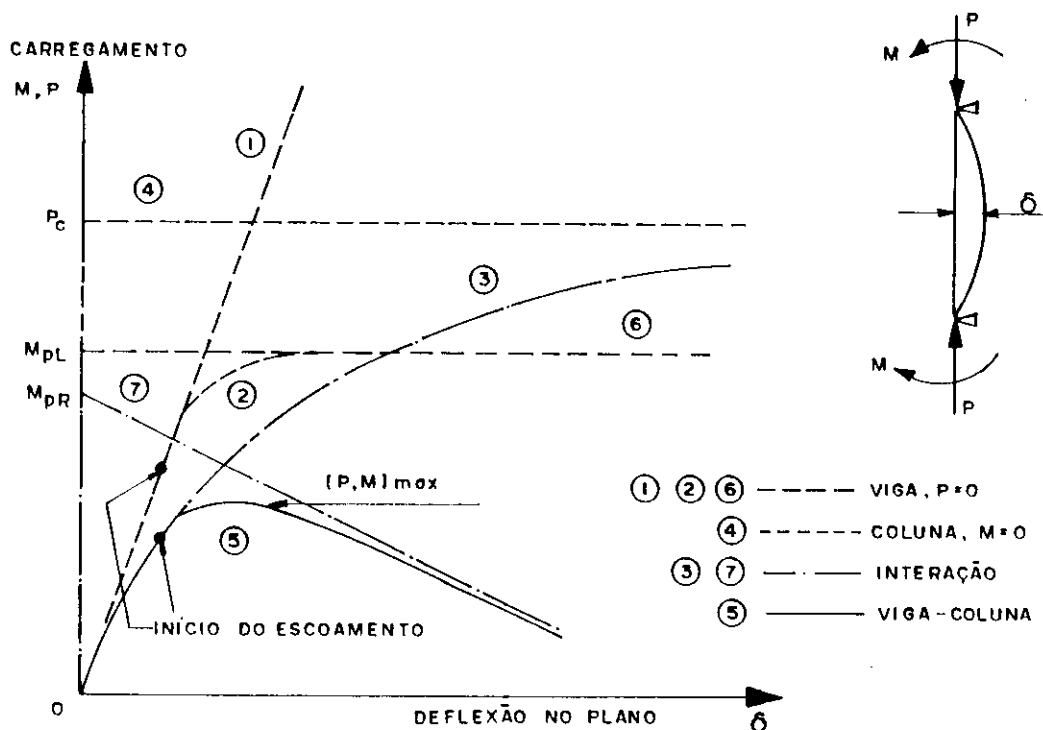


FIG.4 - Comportamento de vigas-colunas no plano

2 - VIGAS-COLUNAS SUJEITAS À CURVATURA REVERSA

Na figura 5-a é mostrada uma viga-coluna típica onde atuam forças axiais "P" e momentos de extremidades "M" e "r.M", de modo que "r" pode ter qualquer valor entre -1 (flexão em curvatura simples) e +1 (flexão em curvatura dupla), sendo "r" a relação entre o menor e o maior momento de extremidade.

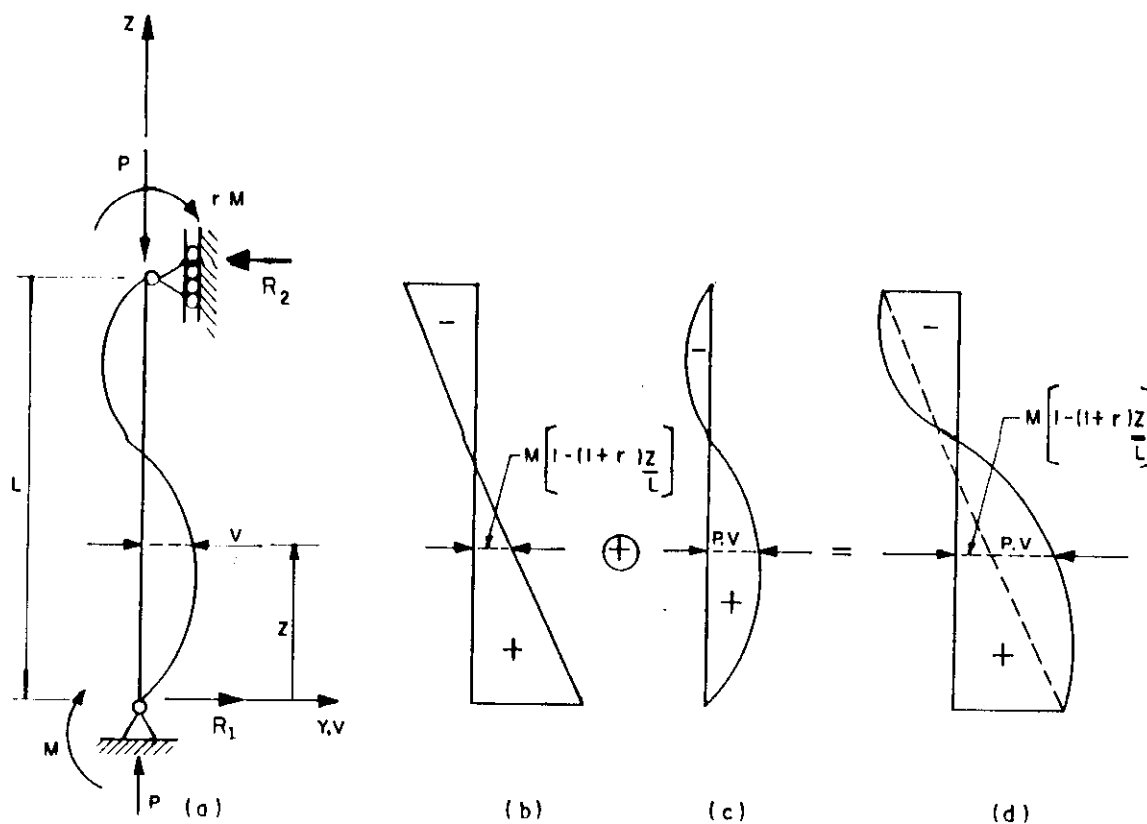


FIG.5 - Viga-coluna em curvatura reversa no plano: (a) viga-coluna; (b) diagrama de momentos primários; (c) diagrama de momentos secundários e (d) diagrama de momentos totais.

Estes momentos são independentes dos deslocamentos e não têm efeito na carga crítica elástica $P_{cr} = \pi^2 EI_x / L^2$. (Eles são

inteiramente diferentes dos momentos de engastamentos discutidos no apêndice "E". Estes aumentam com a rotação das extremidades e são profundamente afetados pela carga crítica elástica). A viga-coluna, da figura 5-a, é impedida de fletir em torno de seu eixo de menor inércia, para fora do plano de aplicação dos momentos.

Pelas condições de equilíbrio da viga-coluna, determinam-se as seguintes reações de apoios:

$$R_1 = -R_2 = \frac{M(1+r)}{L} \quad (1)$$

O momento fletor externo em torno do eixo "x", em uma posição genérica "z", será:

$$M_x = M - R_1 \cdot z + P \cdot v = \left[M - \frac{M(1+r)}{L} z \right] + P \cdot v \quad (2)$$

O momento interno em torno do eixo "x" é traduzido pela equação diferencial da linha elástica de Euler-Bernoulli dada por:

$$-EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} = M_x \quad (3)$$

Igualando o momento externo com o momento interno para que haja equilíbrio, tem-se:

$$-EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} = M - \frac{M(1+r)}{L} z + P \cdot v \quad (4)$$

dividindo toda a expressão por "EI_x", chamando de $m^2 = P/EI_x$ e isolando-se os termos em "v", da expressão (4) chega-se a:

$$-v'' - m^2 v = \frac{M}{EI_x} - \frac{M(1+r)}{EI_x L} z \quad (5)$$

A equação (5) é uma equação diferencial linear não-homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. A solução geral desta equação equivale à soma da solução geral "v₁", da equação homogênea com a solução particular "v₂" da

equação não-homogênea. A equação homogênea da equação (5) é dada por:

$$v'' + m^2 \cdot v = 0 \quad (6)$$

Esta equação é semelhante à equação (8), (cap.4), cuja solução da equação característica forneceu raízes iguais a $\Omega_1 = m \cdot i$ e $\Omega_2 = -m \cdot i$. Portanto, a solução geral da equação (6) é:

$$v_1 = C_1 \cos(mz) + C_2 \sin(mz) \quad (7)$$

A solução particular da equação (5) é determinada, analisando-se o segundo membro desta equação. Neste caso, é preciso encontrar a solução particular da forma:

$$v_2 = (A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n) e^{\xi z} \quad (8)$$

onde A_0, A_1, \dots, A_n são constantes. O segundo termo da equação (5) fornece $\xi = 0$ e $n = 1$, portanto será buscada uma solução particular da forma [133]:

$$v_2 = A_0 z + A_1 \quad (9)$$

Introduzindo a equação (9) com suas respectivas derivadas na equação (5) e igualando os coeficientes de mesma potência, situados à esquerda e à direita do sinal de igualdade, obtém-se:

$$A_0 = \frac{M}{EI_x m^2} \frac{(1+r)}{L} \quad (10)$$

$$A_1 = -\frac{M}{EI_x m^2} \quad (11)$$

Levando (10) e (11) em (9), tem-se a seguinte solução particular:

$$v_2 = \frac{M(1+r)}{EI_x m^2 L} z - \frac{M}{EI_x m^2} \quad (12)$$

Somando-se a solução geral da equação homogênea (eq.7) com a solução particular (eq.12) da equação não-homogênea, tem-se a seguinte solução geral da equação (5):

$$v = C_1 \cos(mz) + C_2 \operatorname{sen}(mz) + \frac{M(1+r)}{EI_x m^2 L} z - \frac{M}{EI_x m^2} \quad (13)$$

Para determinar as constantes da equação (13), impõe-se as seguintes condições de contorno:

$$\text{para } z = 0, \quad \text{tem-se } v = 0 \quad (14)$$

$$\text{para } z = L, \quad \text{tem-se } v = 0 \quad (15)$$

com a condição (14), chega-se a:

$$C_1 = \frac{M}{EI_x m^2} \quad (16)$$

e com a condição (15), chega-se a:

$$C_2 = -\frac{M}{EI_x m^2} \cot(mL) - \frac{M \cdot r}{EI_x m^2} \operatorname{cosec}(mL) \quad (17)$$

Levando (16) e (17) em (13) e lembrando que $m^2 = P/EI_x$, tem-se:

$$v = \frac{M}{P} \left\{ \cos(mz) - \left[\cot(mL) + r \cdot \operatorname{cosec}(mL) \right] \operatorname{sen}(mz) + \frac{(1+r)}{L} z - 1 \right\} \quad (18)$$

A expressão (18) pode ser analisada, lembrando-se da carga crítica de Euler e fazendo-se o seguinte arranjo matemático na expressão de "m":

$$m = \sqrt{\frac{P}{EI_x}} = \sqrt{\frac{(\pi^2 P/L^2)}{(\pi^2 EI_x/L^2)}} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \quad (19)$$

Nota-se, a partir das expressões (18) e (19), que, quando a carga axial "P" se aproxima da carga crítica " P_{cr} ", o valor de "m.L" se aproxima de " π ". Conseqüentemente, os termos que envolvem a cotangente e a cossecante tendem ao infinito do mesmo modo que o deslocamento "v" (fig.4, curva 3). Este comportamento é semelhante ao comportamento de peças comprimidas com imperfeições geométricas, cuja análise foi feita no capítulo 4.

A equação que representa a curva dos momentos totais é obtida substituindo a expressão (18) na expressão (2), o que fornece:

$$M_x = M \left\{ \cos(mz) - \left[\cot(mL) + r \cdot \operatorname{cosec}(mL) \right] \operatorname{sen}(mz) \right\} \quad (20)$$

A derivada primeira de (20) igualada a zero fornece a posição do momento máximo. Fazendo-se isto e, após algumas transformações algébricas, chega-se a:

$$\operatorname{tg}(mz) = \frac{(-\cos(mL) - r)}{\operatorname{sen}(mL)} \quad (21)$$

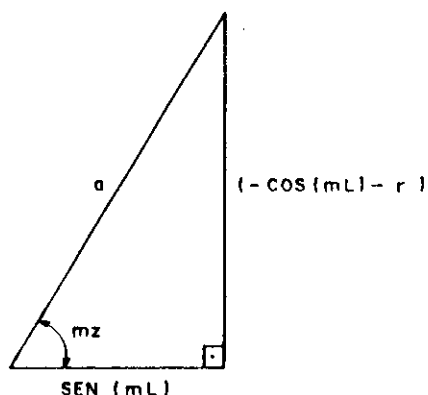


FIG.6 - Relações trigonométricas para a equação (21)

Utilizando-se o triângulo retângulo da figura 6, podem ser

tiradas as seguintes relações trigonométricas para a equação (21):

$$a = \sqrt{1 + r^2 + 2r \cdot \cos(mL)} \quad (22)$$

$$\text{sen}(mz) = \frac{(-\cos(mL) - r)}{\sqrt{1 + r^2 + 2r \cdot \cos(mL)}} \quad (23)$$

$$\cos(mL) = \frac{\text{sen}(mL)}{\sqrt{1 + r^2 + 2r \cdot \cos(mL)}} \quad (24)$$

Substituindo as relações (23) e (24), na expressão (20), chega-se a:

$$M_{\max} = M \left[\frac{1 + r^2 + 2r \cdot \cos(mL)}{\text{sen}(mL) \sqrt{1 + r^2 + 2r \cdot \cos(mL)}} \right] \quad (25)$$

Racionalizando a expressão (25), tem-se:

$$M_{\max} = M \sqrt{\frac{1 + r^2 + 2r \cdot \cos(mL)}{\text{sen}^2(mL)}} \quad (26)$$

Chamando de " φ " o radical da expressão (26), tem-se:

$$M_{\max} = M \cdot \varphi \quad (27)$$

Se " M " é o maior dos dois momentos de extremidades, então " φ " representa o "fator de amplificação" dos momentos para uma viga-coluna com momentos de extremidades " M " e " $r \cdot M$ " e uma carga axial de compressão " P ". Portanto, o fator " φ " depende da relação entre os momentos de extremidades e do valor da força axial de compressão.

Para peças fletindo em curvatura dupla (reversa), ocasionalmente, o momento máximo pode estar situado em uma das extremidades da viga-coluna. Será, portanto, igual a " M ". Se este for o caso, o fator de amplificação " φ " (eq.27) perde o sentido, pois o momento máximo ocorre fora do

comprimento da viga-coluna. Para verificar se a equação (27) é aplicável para valores dados de "M", "rM" e "P", a coordenada "z" pode ser avaliada a partir da relação (21). Se $r < -\cos(mL)$, o valor de "z" será positivo e o momento máximo ocorre no intervalo $0 < z < L$, mas se $r > -\cos(mL)$, o valor de "z" será negativo e não ocorrerá momento máximo no intervalo $0 < z < L$. Assim, a equação (27) não será aplicável, e o momento máximo ocorrerá em uma das extremidades [24,50,55,116].

3 - VIGAS-COLONAS SUJEITAS À CURVATURA SIMPLES

Embora a equação (26) tenha sido deduzida para vigas-colunas fletindo em curvatura reversa, esta mesma expressão pode ser usada para analisar as vigas-colunas, sujeitas à curvatura simples. Para isto, basta substituir o momento de extremidade "r.M" por "-r.M" (fig.7). Assim, sendo " $M_1 = -r.M$ ", o menor momento de extremidade e " $M_2 = M$ ", o maior momento de extremidade. Então $r_1 = M_1/M_2 = -r$ e, a partir da expressão (26), tem-se:

$$M_{\max} = M \sqrt{\frac{1 + r^2 - 2r \cdot \cos(mL)}{\sin^2(mL)}} \quad (28)$$

Como no caso de vigas-colunas, fletindo em curvatura reversa, o momento máximo de uma viga-coluna fletindo em curvatura simples para uma certa combinação de "M", "rM", e "P", ocasionalmente poderá estar situado em uma das extremidades (fig.7). Assim, para verificar a validade da equação (28), basta substituir "r" por "-r", na equação (21) e avaliar o valor da coordenada "z":

$$\operatorname{tg}(mz) = \frac{(-\cos(mL) + r)}{\sin(mL)} \quad (29)$$

se o valor de "z" calculado estiver fora do intervalo $0 \leq z \leq L$, o momento máximo será igual ao maior momento de

extremidade.

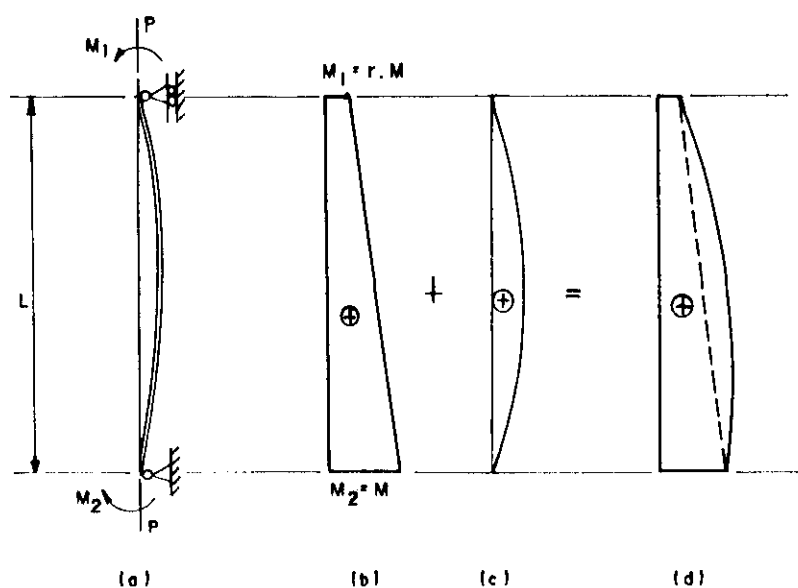


FIG.7 - Viga-coluna em curvatura simples no plano: (a) viga-coluna; (b) diagrama de momentos primários; (c) diagrama de momentos secundários e (d) diagrama de momentos totais

Como as equações (26) e (28) são semelhantes e possuem os mesmos objetivos, elas podem ser combinadas para satisfazer ambos os casos, assim:

$$M_{\max} = |M| \left[\sqrt{\frac{1 + r^2 + 2r \cdot \cos(mL)}{\sin^2(mL)}} \right] = |M| \cdot \rho \quad (30)$$

onde "r" será positivo, se a viga-coluna fletir em curvatura reversa, e será negativo, se a viga-coluna fletir em curvatura simples. Na expressão (30), é utilizado o valor absoluto para o maior momento de extremidade "M", pois é de interesse somente o valor e não a direção do momento máximo "M_{max}".

Um caso especial de viga-coluna com flexão em

curvatura simples é o caso em que os momentos de extremidades são iguais e opostos, isto é, sendo $M_2 = M$ e $M_1 = -M_2$ então $r = M_1/M_2 = -1$ (fig.8). Para este caso, o momento máximo é obtido substituindo $r = -1$ na equação (30). Lembrando-se das seguintes relações trigonométricas:

$$2.\text{sen}^2(mL/2) = 1 - \cos(mL) \quad (31)$$

$$\text{sen}(mL) = 2.\text{sen}(mL/2).\text{cos}(mL/2) \quad (32)$$

chegando-se a:

$$M_{\text{max}} = M.\text{sec}(mL/2) \quad (33)$$

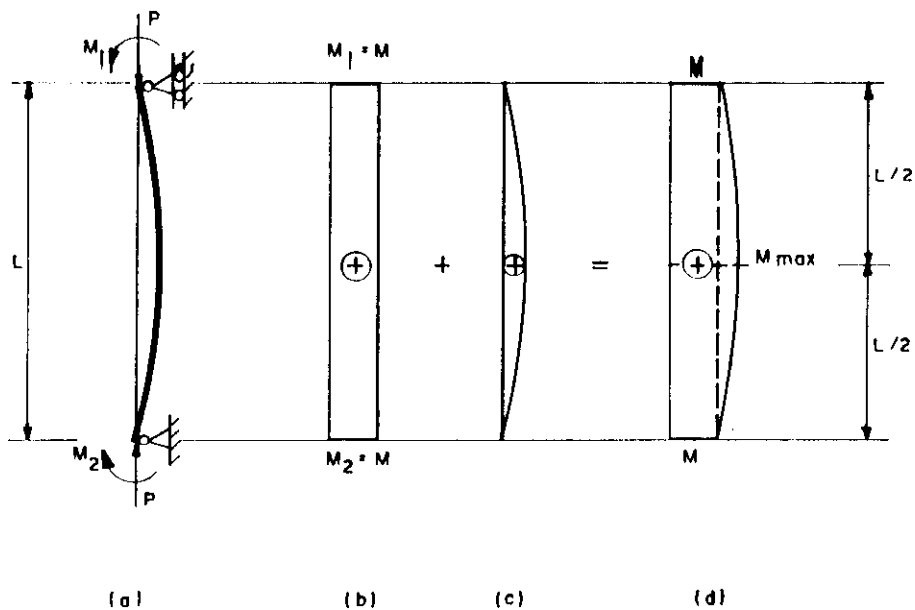


FIG.8 - Viga-coluna em curvatura simples no plano: (a) Viga-coluna; (b) diagrama de momentos primários; (c) diagrama de momentos secundários; (d) diagrama de momentos totais.

Na expressão (33), a $\sec(mL/2)$ pode ser expandida em uma série de potências da seguinte forma:

$$\sec(q) = 1 + q^2/2 + 5q^4/24 + 61q^6/720 + \dots \quad (34)$$

fazendo-se $q = mL/2$ e lembrando da relação (19), tem-se:

$$q = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \quad (35)$$

levando (35) em (34), encontra-se:

$$\sec(q) = 1 + 1.23 \left(\frac{P}{P_{cr}}\right) + 1.26 \left(\frac{P}{P_{cr}}\right)^2 + 1.27 \left(\frac{P}{P_{cr}}\right)^3 + \dots \quad (36)$$

esta série converge aproximadamente para:

$$\sec(q) = \frac{1}{1 - P/P_{cr}} \quad (37)$$

Esta representa o fator de amplificação dos momentos para viga-coluna com momentos de extremidades iguais e opostos. Levando (37) em (33), tem-se, finalmente, o momento máximo na viga-coluna:

$$M_{\max} = \frac{M}{1 - P/P_{cr}} \quad (38)$$

cuja localização está sempre no meio do vão, como mostra a figura 8.

O limite de aplicabilidade das equações para vigas-colunas é o ponto no qual as tensões máximas atingem o limite de escoamento " f_y " ou o limite de proporcionalidade do material. Se " f_y " for o limite considerado, tem-se:

$$f_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{W_x} \leq f_y \quad (39)$$

Dividindo-se os dois membros da inequação (39) por " f_y " e

sabendo-se que $P_y = A \cdot f_y$ e $M_y = W_x \cdot f_y$, obtém-se a seguinte equação de interação:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M_{\max}}{M_y} \leq 1 \quad (40)$$

Da expressão (30), tem-se que $M_{\max} = M \cdot \varphi$, portanto levando em (40), chega-se a:

$$\frac{P}{P_y} + \varphi \frac{M}{M_y} \leq 1 \quad (41)$$

Com esta equação de interação, obtém-se pares de valores dos parâmetros de carga "P" e "M" para os quais termina-se o comportamento elástico.

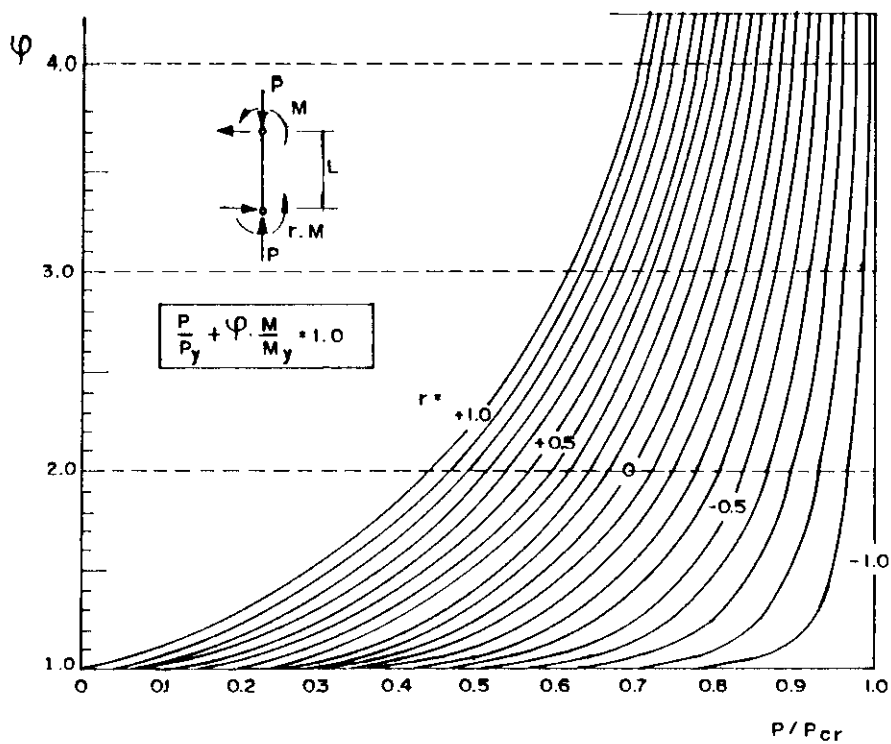


FIG.9 - Gráficos para a determinação de "φ"

Ela é aplicável no intervalo $0 \leq P \leq P_{cr}$ sendo que nos dois casos extremos, quando $P = 0$, a barra funciona como se fosse uma viga, e para $P = P_{cr}$, a barra funciona como se fosse uma coluna sujeita à compressão axial sem reserva de resistência para suportar flexão adicional.

A forma mais eficiente de usar a equação de interação elástica em projetos consiste na elaboração de gráficos para várias condições de carregamentos, evitando assim os cálculos repetidos de " ϕ ". Para alguns casos práticos, Ketter [92] desenvolveu os gráficos ilustrados na figura 9 [41,72,79,92,160].

4 - MOMENTO EQUIVALENTE

Para o caso geral de uma viga-coluna sujeita a momentos de extremidades diferentes, a expressão a ser utilizada para o cálculo do momento máximo será a equação (30). O momento máximo pode ocorrer em uma das extremidades da viga-coluna e ser igual ao maior dos dois momentos; ou ele pode ocorrer em alguma posição interna à viga-coluna, cujo valor é calculado pela expressão (30) e sua localização pela relação (21). Porém, para os propósitos de projetos, é necessário saber se o momento máximo ocorre em uma das extremidades ou se ele está em alguma posição ao longo do vão da viga-coluna. Para eliminar estes cálculos, o "conceito de momento equivalente" é introduzido na prática dos cálculos de projetos.

O "conceito de momento equivalente" é representado esquematicamente pela figura 10.

Os momentos de extremidades " M_A " e " M_B ", (fig.10), são representados por um par de momentos equivalentes iguais e opostos " M_{eq} ". O valor do momento equivalente é tal que o momento máximo produzido por ele será igual ao momento máximo, produzido pelos momentos reais de extremidades (M_A e M_B). Como mostrado pela figura 10, para a situação mais desfavorável de momentos, provocando curvatura simples, o

momento máximo para situação de momentos de extremidades diferentes deverá ser igual ao momento máximo para a situação em que se tem momentos de extremidades iguais.

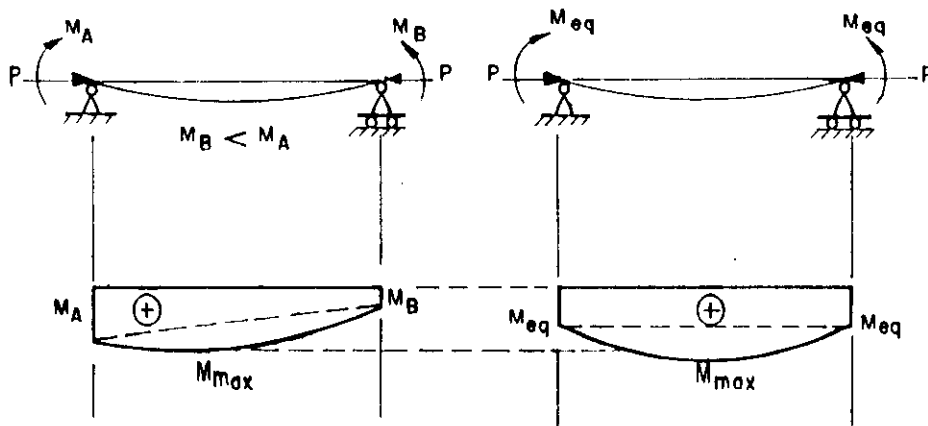


FIG.10 - Representação esquemática do conceito de momento equivalente.

Conseqüentemente, fazendo $M = M_{eq}$, na equação (33) e igualando com a equação (30), tem-se:

$$M_{eq} = |M| \frac{\cos(mL/2) \cdot \sqrt{1 + 2r \cdot \cos(mL)}}{\sin(mL)} \quad (42)$$

lembrando das relações trigonométricas (31) e (32), tem-se:

$$M_{eq} = |M| \sqrt{\frac{1 + r^2 + 2r \cdot \cos(mL)}{2(1 - \cos(mL))}} = |M| \cdot C_m \quad (43)$$

onde " C_m " é o "fator de momento equivalente" e pode ser definido a partir de (43), pela seguinte expressão:

$$C_m = \sqrt{\frac{1 + r^2 + 2r \cdot \cos(mL)}{2(1 - \cos(mL))}} \quad (44)$$

Aproveitando-se da conclusão fornecida pela expressão (43), o momento máximo, para efeitos práticos, pode ser calculado fazendo-se $M = M_{eq}$, na expressão simplificada (38), pois, teoricamente, nas extremidades da viga-coluna atuam pares de momentos " M_{eq} " iguais e opostos. Assim, tem-se:

$$M_{max} = \frac{M_{eq}}{1 - P/P_{cr}} \quad (45)$$

Substituindo (43) em (45), tem-se:

$$M_{max} = \frac{C_m |M|}{1 - P/P_{cr}} = A_F \cdot |M| \quad (46)$$

Portanto, para obter o momento máximo para uma viga-coluna "indeslocável", será necessário apenas multiplicar o maior dos dois momentos de extremidades pelo fator corretivo de amplificação dos momentos " A_F ". Para que a equação (46) tenha significado físico, o fator " A_F " deve ser maior ou igual à unidade. Se isto não ocorrer, o maior momento de extremidade será o momento máximo.

Lembrando da relação (19) e analisando a expressão (44), nota-se que o fator de momento equivalente " C_m " é uma função da relação entre os momentos de extremidades " r " e da força axial " P ". Expressões simplificadas para o cálculo de " C_m ", que eliminam a dependência com relação à força axial, foram propostas por Massonnet [116] e Austin [12]. A expressão de Massonnet e Austin são dadas, respectivamente, por:

$$C_m = \sqrt{0.3.r^2 - 0.4.r + 0.3} \quad (47)$$

$$C_m = 0.6 - 0.4.r \geq 0.4 \quad (48)$$

Estas expressões são comparadas com os resultados teóricos, conforme mostra a figura 11. Como podem ser vistas, as

expressões (47) e (48) fornecem uma média de aproximação boa, em relação aos resultados fornecidos pela expressão teórica de " C_m ".

Devido à simplicidade da expressão de Austin (eq.48), esta foi adotada pelas especificações americanas AISC/ASD e AISC/LRFD, no entanto, a especificação LRFD retirou a condição $C_m \geq 0.4$ por considerar que esta condição é muito conservadora para vigas-colunas inelásticas. Assim, a expressão linear aproximada (expressão 48) é utilizada desde 1986 para análise elástica de viga-coluna no plano, e esta expressão era considerada conservadora para o cálculo de vigas-colunas no regime inelástico no plano e no espaço.

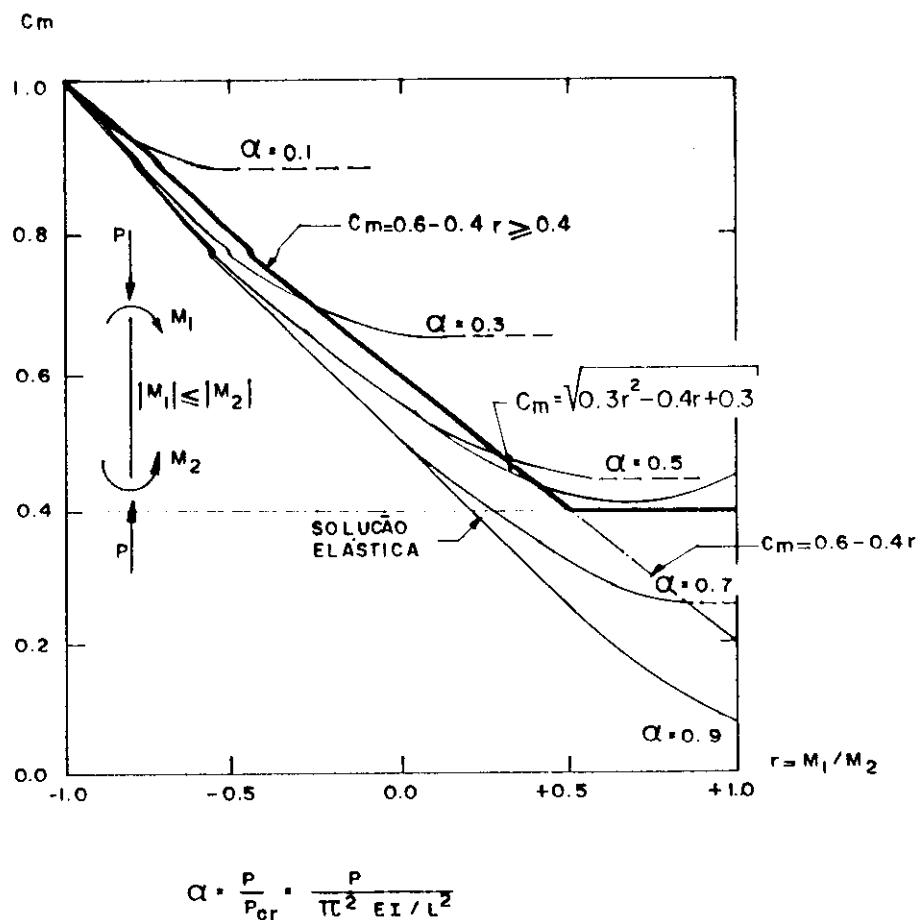


FIG.11 - Comparações entre as expressões de " C_m "

Em recentes pesquisas [44], a validade destas hipóteses foram reexaminadas para seções caixão e perfil "I", em condições de carregamentos uniaxial e biaxial. Os resultados destas pesquisas mostraram que a expressão linear (48), sem a condição $C_m \geq 0.4$ é válida para vigas-colunas, no plano e no espaço e fornece razoável aproximação comparado com os resultados exatos baseados em análise inelástica de vigas-colunas com imperfeições, assim como aqueles baseadas em análise elástica. Então, a expressão (48) é uma fórmula boa para uso geral [12,40,41,44,116,141].

5 - EFEITOS P-DELTA

5.1 - Generalidades

Uma das maiores diferenças entre viga e viga-coluna é que, além dos deslocamentos primários e momentos, existem deslocamentos e momentos secundários presentes em viga-coluna devido à força axial atuando no deslocamento primário. Em geral, dois tipos de efeitos secundários podem ser identificados: o efeito "P- δ " e o efeito "P- Δ ". Estes efeitos secundários causam mais deformações na peça provocando maiores tensões. Assim, estes efeitos tendem enfraquecer a estrutura ou a diminuir a sua estabilidade. Portanto, para aumentar a segurança nos projetos, estes efeitos devem ser considerados.

5.2 - Efeito P- δ

Considere a viga-coluna mostrada na figura 12 cujos nós são impedidos de transladar. As ações " M_1 ", " M_2 ", "Q" e "q" produzirão um momento primário " M_I " e um deslocamento primário " y_I ". A força axial "P" atuará no deslocamento primário produzindo mais momento " M_{II} " e mais deslocamento " y_{II} ". Este momento e este

deslocamento adicionais são os resultados do chamado "efeito P- δ ". Este efeito aumentará a instabilidade da peça, e, conseqüentemente, ele será também denominado de efeito de instabilidade da peça.

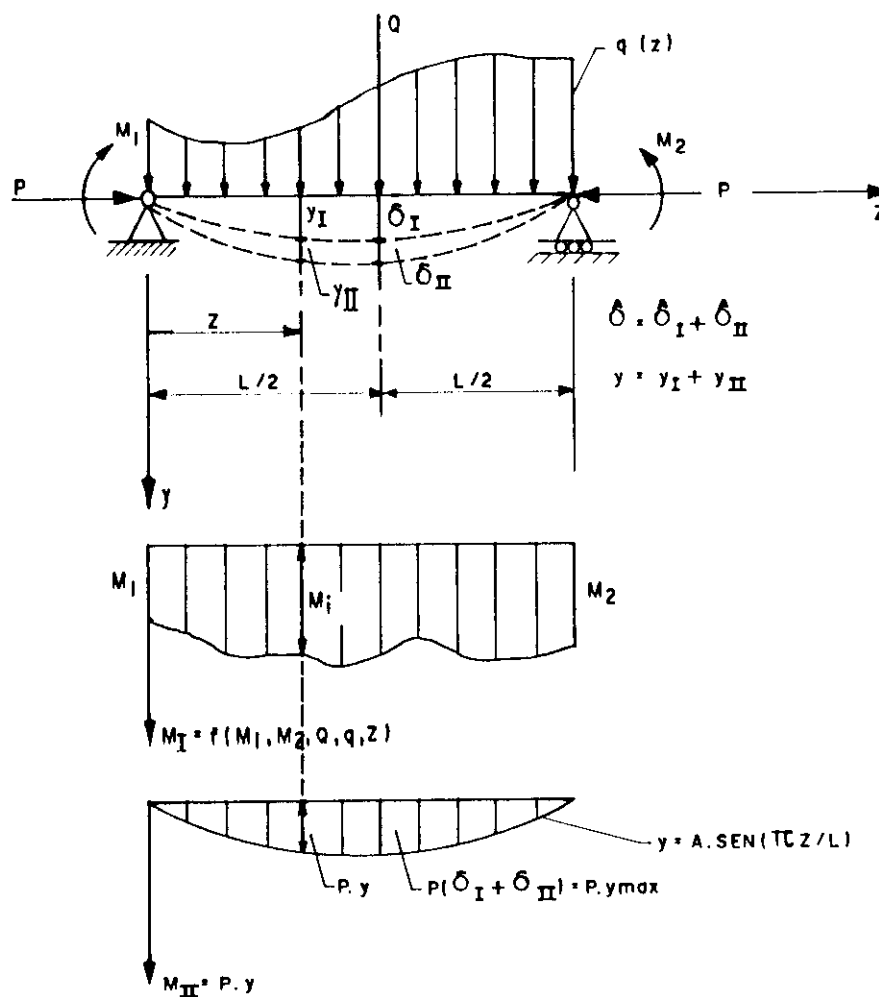


FIG.12 - Efeito P- δ

O momento total, ao longo da viga-coluna, será:

$$M_x = M_I + M_{II} \quad (49)$$

e o deslocamento total será:

$$y = y_I + y_{II} \quad (50)$$

Para que se tenha um projeto seguro, é necessário encontrar o momento máximo " M_{max} " na peça. Este momento pode ser determinado resolvendo a equação diferencial de uma viga-coluna com condições apropriadas nas extremidades. Portanto, para os propósitos de projetos é conveniente usar uma aproximação simplificada para obter o " M_{max} ".

Assumindo-se que: (a) o momento secundário " M_{II} " está na forma de uma semi-onda senoidal e (b) a deflexão máxima $y_{max} = \delta = \delta_I + \delta_{II}$ ocorre no meio do vão.

A curva de deslocamento, a ser assumida, deverá satisfazer as condições de extremidades, e esta será:

$$y = A.\text{sen}(\pi z/L) \quad (51)$$

onde a constante "A" é determinada pelas considerações assumidas anteriormente, isto é, para $z = L/2$, tem-se $y_{max} = \delta$. Então, a partir da função (51), obtém-se:

$$y = \delta.\text{sen}(\pi z/L) \quad (52)$$

O momento fletor secundário externo em torno do eixo "x" em uma posição genérica "z" levando em conta a expressão (52), será:

$$M_{II} = P.y = P.\delta.\text{sen}(\pi z/L) \quad (53)$$

O momento interno secundário em torno do eixo "x" é traduzido pela equação diferencial da linha elástica de Euler-Bernoulli. Esta será dada por:

$$- EI_x . y_{II}^{II} = M_{II} \quad (54)$$

Igualando o momento externo com o momento interno para que haja equilíbrio, tem-se:

$$EI_x y_{II}^{II} = - P.\delta.\text{sen}(\pi z/L) \quad (55)$$

Integrando a equação (55) duas vezes em relação a "z", encontra-se:

$$y_{II}^I = \frac{P\delta}{EI_x} \left(\frac{L}{\pi} \right) \cos(\pi z/L) + C_1 \quad (56)$$

$$y_{II} = \frac{P\delta}{EI_x} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \sin(\pi z/L) + C_1 z + C_2 \quad (57)$$

Para determinar as constantes "C₁" e "C₂", as condições do problema fornecem as seguintes condições de contorno:

$$y_{II}^I = 0 \quad , \quad \text{para} \quad z = L/2 \quad (58)$$

$$y_{II} = 0 \quad , \quad \text{para} \quad z = 0 \quad (59)$$

levando as condições (58) em (56), obtém-se:

$$C_1 = 0 \quad (60)$$

e com as condições (59) em (57), obtém-se:

$$C_2 = 0 \quad (61)$$

a partir de (57), (60), e (61), tem-se:

$$y_{II} = \frac{P\delta}{EI_x} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \sin(\pi z/L) \quad (62)$$

O deslocamento secundário " δ_{II} " no meio do vão é obtido fazendo-se $z = L/2$ na expressão (62). Portanto, tem-se:

$$y_{II} = \delta_{II} = \frac{P\delta}{EI_x} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \quad (63)$$

lembrando da equação de Euler $P_{cr} = \pi^2 EI_x / L^2$, a expressão (63) pode ser simplificada, tomando a seguinte forma:

$$y_{II} = \delta_{II} = \delta \frac{P}{P_{cr}} \quad (64)$$

como o deslocamento total é igual à soma do deslocamento primário máximo com o deslocamento secundário máximo, tem-se:

$$\delta = \delta_I + \delta_{II} \quad (65)$$

substituindo (64) em (65), determina-se o seguinte deslocamento total:

$$\delta = \frac{\delta_I}{(1 - P/P_{cr})} \quad (66)$$

Assumindo agora que o momento primário máximo ocorra no meio do vão, pode-se escrever:

$$M_{max} = M_{I(max)} + P \cdot \delta \quad (67)$$

substituindo (66) em (67) e colocando-se o momento "M_{I(max)}" em evidência, resulta:

$$M_{max} = M_{I(max)} \left[\frac{1 + \psi \cdot P/P_{cr}}{1 - P/P_{cr}} \right] \quad (68)$$

onde:

$$\psi = \frac{\delta_I P_{cr}}{M_{I(max)}} - 1 \quad (69)$$

A expressão (68) é semelhante à expressão (46), portanto, aqui, o fator "C_m" pode ser definido como:

$$C_m = 1 + \psi \frac{P}{P_{cr}} \quad (70)$$

Tendo-se em vista a expressão (70), a expressão (68) torna-se:

$$M_{\max} = \left[\frac{C_m}{1 - P/P_{cr}} \right] M_{I(\max)} = A_F \cdot M_{I(\max)} \quad (71)$$

e analogamente à expressão (46), aqui o coeficiente " A_F " é denominado de fator de amplificação dos momentos.

A figura 13 mostra os valores de " ψ " e " C_m " para diferentes casos de carregamentos. Nota-se que devido à hipótese feita no desenvolvimento da expressão (67), a determinação de " ψ " pela expressão (69) é válida somente para os casos 1 e 4 (fig.13), em que as barras estejam simplesmente apoiadas. Para outros casos, em que o momento máximo de primeira ordem ocorre nas extremidades (casos 2, 3 e 5, fig.13), ou ocorre simultaneamente no meio do vão e nas extremidades (caso 6), os valores exatos dos momentos máximos levando em consideração o efeito da força axial " P " são primeiramente avaliados, e os valores de " ψ ", para estes casos, são então obtidos através de calibrações usando-se para isso a equação (68).

O deslocamento " δ_I ", devido a um sistema conhecido de cargas pode ser determinado facilmente por expressões fornecidas pela resistência dos materiais. Conseqüentemente, a partir das expressões (69) e (70), é possível determinar o valor de " C_m " para várias condições de carregamentos.

Tome-se, por exemplo, o caso de uma barra sujeita a momentos de extremidades iguais e opostos. Da resistência dos materiais, sabe-se que $\delta_I = M_{I(\max)} L^2 / 8EI_x$. Levando este valor em (69), obtém-se:

$$\psi = 0.233 \quad (72)$$

e levando o resultado (72) em (70), obtém-se o seguinte valor de " C_m ":

$$C_m = 1 + 0.233 \frac{P}{P_{cr}} \quad (73)$$

Para o caso 1 da figura 13, o momento primário

máximo é igual a $M_{I(max)} = pL^2/8$, e o deslocamento primário é igual a $\delta_I = 5pL^4/384EI_x$, então pela expressão (69), tem-se :

$$\psi = 0.028 \cong 0 \quad (74)$$





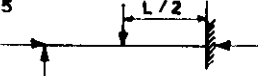
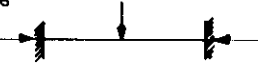
CASO	ψ	C_m
1 	0	1.0
2 	-0.4	$1 - 0.4 P/P_{Cr}$
3 	-0.4	$1 - 0.4 P/P_{Cr}$
4 	-0.2	$1 - 0.2 P/P_{Cr}$
5 	-0.3	$1 - 0.3 P/P_{Cr}$
6 	-0.2	$1 - 0.2 P/P_{Cr}$

FIG.13 - Valores de " C_m " para vigas-colunas sujeitas a carregamentos transversais.

levando (74) em (70), tem-se:

$$C_m = 1.0 \quad (75)$$

Para o caso 3 da figura 13, o momento primário máximo é igual a $M_{I(max)} = pL^2/24$, e o deslocamento primário

máximo é igual a $\delta_I = pL^4/384EI_x$, então pela expressão (69), tem-se:

$$\psi = - 0,383 \quad (76)$$

levando (76) em (70), tem-se:

$$C_m = 1 - 0,383 \frac{P}{P_{cr}} \cong 1 - 0,4 \frac{P}{P_{cr}} \quad (77)$$

Observa-se pela figura 13 que os valores de " C_m " estarão próximos de 1.0 para todos os casos, pois em situações práticas, a relação " P/P_{cr} " raramente excede o valor 0.3. Por esta razão o AISC/LRFD permite usar $C_m = 1.0$ para extremidades simplesmente apoiadas, e $C_m = 0.85$ para extremidades engastadas. O uso dos valores da figura 13 satisfazem o AISC/LRFD e indicam que " C_m " pode ser determinado por análise racional.

Com estas conclusões, deve ser lembrado que a expressão (48) é válida somente quando a viga-coluna estiver sujeita a momentos de extremidades sem cargas transversais [40,41,44,79,141].

5.3 - Efeito P-Δ

Os efeitos de segunda ordem, devido a deslocamentos relativos de translação das extremidades de vigas-colunas (efeito P-Δ), devem ser explicitamente considerados nas análises da nova norma canadense CAN3-S16.1-M89. Portanto, o método tradicional de análises, baseado no coeficiente de flambagem, foi eliminado da presente norma canadense [90].

Quando forças laterais " ΣH " atuam em um pórtico, este deslocará lateralmente até ser atingida uma posição de equilíbrio (fig.14-a). O deslocamento lateral correspondente pode ser calculado baseando-se na configuração original, denominada de deslocamento de primeira ordem, sendo

representada por " Δ_I ". Se além das forças " ΣH ", atuam forças verticais " ΣP ": no pórtico, estas forças interagirão com o deslocamento lateral " Δ_I " causado pelas forças " ΣH ", deslocando o pórtico até ser atingida uma nova posição de equilíbrio. O deslocamento lateral correspondente a esta nova posição de equilíbrio é representado por " Δ " na figura 14-b.

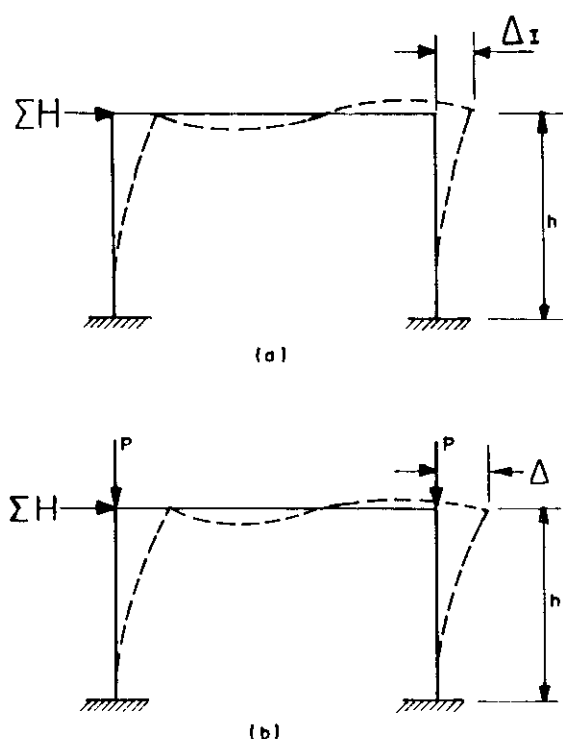


FIG.14 - Efeito P- Δ

O fenômeno, através do qual as forças verticais " ΣP " interagem com o deslocamento lateral, é chamado de "efeito P- Δ ". O deslocamento adicional e o momento de tombamento têm efeitos prejudiciais na rigidez e na estabilidade do pórtico, portanto aqueles deveriam ser considerados em projetos.

Para determinar precisamente o deslocamento final " Δ " e o momento real " M ", levando em consideração o efeito P- Δ , uma análise de segunda ordem, baseada na geometria do pórtico será necessária. Análises de segunda ordem,

usualmente, requerem um processo iterativo. Portanto, para os propósitos de projetos é mais conveniente usar aproximações simplificadas sem recorrer à iteração na avaliação de " Δ " e " M ". Algumas destas aproximações serão dadas a seguir.

a) - Método do andar ampliado

Considere-se que: (1) cada andar pode comportar, independentemente dos outros andares, e (2), os momentos adicionais nas colunas causados pelo efeito $P-\Delta$, é equivalente àquele causado por uma força lateral igual a " $\Sigma P \cdot \Delta / h$ " (onde " h " é a altura do andar), e a influência da rigidez (princípio de Hooke) do andar pode ser definida por:

$$S_F = \frac{\text{força horizontal}}{\text{deslocamento lateral}} \quad (78)$$

A rigidez do pórtico, quando atuam somente as forças horizontais " ΣH ", será:

$$k_1 = \frac{\Sigma H}{\Delta_I} \quad (79)$$

e, quando atuarem simultaneamente as forças " ΣH " e " $\Sigma P \Delta / h$ ", a rigidez será:

$$k_2 = \frac{\Sigma H + \Sigma P \Delta / h}{\Delta} \quad (80)$$

Como as rigidezas (79) e (80) devem ser iguais, tem-se:

$$S_F = \frac{\Sigma H}{\Delta_I} = \frac{\Sigma H + \Sigma P \Delta / h}{\Delta} \quad (81)$$

Isolando " Δ ", a partir da expressão (81), tem-se:

$$\Delta = \left[\frac{1}{1 - \frac{\Sigma P \cdot \Delta_I}{\Sigma H \cdot h}} \right] \Delta_I \quad (82)$$

Assim, nota-se que a deslocamento final " Δ " pode ser estimado através do deslocamento de primeira ordem " Δ_I ", fazendo-se a multiplicação deste deslocamento por um fator de amplificação (valor entre parênteses - eq.82).

Se o pórtico é rígido e, considerando-se comportamento elástico, o momento máximo de extremidade, induzido na peça devido ao deslocamento, é proporcional à deflexão lateral do andar. Assim, sendo " $M_{I(max)}$ " o momento máximo devido à translação do pórtico calculado usando-se para isso análise elástica de primeira ordem, tem-se:

$$M_{I(max)} = k \cdot \Delta_I \quad (83)$$

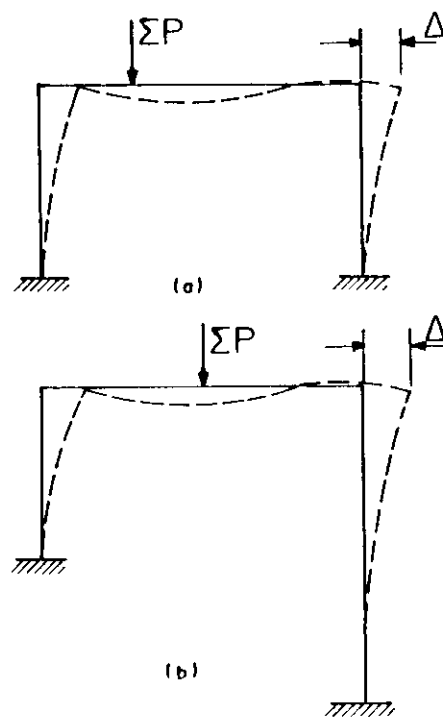


FIG.15 - Efeito P- Δ devido a cargas e estrutura assimétricas

onde "k" é a rigidez do pórtico. Para o momento máximo de extremidade, considerando o efeito P- Δ , tem-se:

$$M_{\max} = k \cdot \Delta \quad (84)$$

Como a rigidez é a mesma das equações (83) e (84), conclui-se:

$$M_{\max} = \frac{\Delta}{\Delta_I} M_{I(\max)} \quad (85)$$

substituindo (82) em (85), tem-se:

$$M_{\max} = \left[\frac{1}{1 - \frac{\sum P \Delta_I}{\sum H h}} \right] M_{I(\max)} = A_F \cdot M_{I(\max)} \quad (86)$$

onde " A_F " é o fator de amplificação dos momentos.

Um caso particular surge quando o deslocamento do pórtico é devido a cargas verticais assimétricas (fig.15-a) ou devido à assimetria do próprio pórtico (fig.15-b).

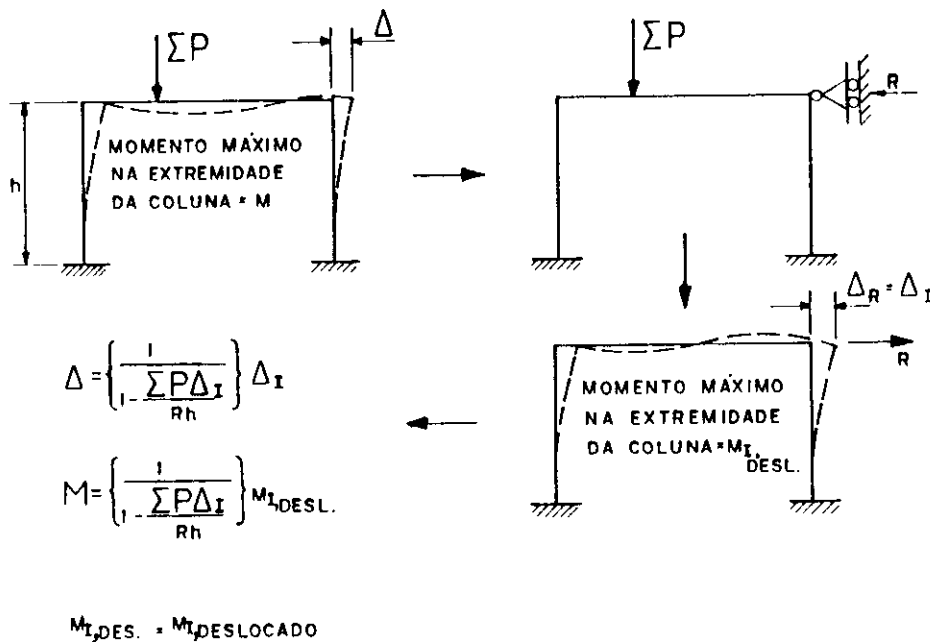


FIG.16 - Procedimentos para determinar " Δ " e " M_{\max} " para pórtico e cargas assimétricas

Se este é o caso, um apoio fictício deve ser introduzido para evitar o deslocamento do pórtico. Conseqüentemente, uma força reativa será desenvolvida no apoio. A força horizontal que equilibra esta força reativa será então utilizada no lugar de " ΣH " nas equações (82) e (86) para obter o deslocamento final e o momento máximo devido ao efeito P- Δ (fig.16).

Se o deslocamento do pórtico é provocado pelas forças horizontais " ΣH " e assimetria das cargas verticais e/ou geometria do pórtico uma aproximação semelhante ao caso anterior pode ser feita. O pórtico sujeito a estas forças é analisado com um apoio fictício para impedir o deslocamento. A força que equilibra a reação horizontal do apoio é usada no lugar de " ΣH " nas expressões (82) e (86) (fig.16).

O método do andar ampliado é utilizado em pórticos com vigas rígidas em todos os andares, de modo que um ponto de inflexão ocorre em cada uma das colunas de um determinado andar.

b) - Método da coluna múltipla ampliada

O método da coluna múltipla ampliada também conhecido como método do comprimento efetivo modificado é uma extensão direta da equação (66) (Na dedução desta equação, foram utilizadas: carga axial de compressão e cargas transversais), sob o seguinte postulado: quando ocorre instabilidade em um andar, todas as suas colunas tornarão instáveis simultaneamente. Conseqüentemente, o termo " P/P_{cr} " da equação (66) é modificado para " $\Sigma P/\Sigma P_{cr}$ ", onde o somatório é estendido a todas as colunas em um andar. Usando o mesmo argumento como no "método dos andares ampliados", isto é, se o momento máximo de extremidade induzido na peça devido ao deslocamento for proporcional ao deslocamento lateral do andar, o momento máximo devido ao efeito P- Δ será:

$$M_{\max} = \left[\frac{1}{1 - \Sigma P/\Sigma P_{cr}} \right] M_{I(\max)} = A_F \cdot M_{I(\max)} \quad (87)$$

onde " $M_{I(max)}$ " é o momento máximo de primeira ordem devido ao deslocamento do andar e " A_F " é o fator de amplificação dos momentos.

Se o efeito P- Δ não for significativo, os valores dos fatores de amplificação " A_F " das equações (86) e (87) são aproximadamente iguais.

A atual norma americana AISC baseou no modelo da figura 17 e ao assumir uma curva senoidal para o momento P- Δ , desenvolveu um fator de amplificação dos momentos baseado nos procedimentos descritos no item 5.5.2 (efeito P- δ).

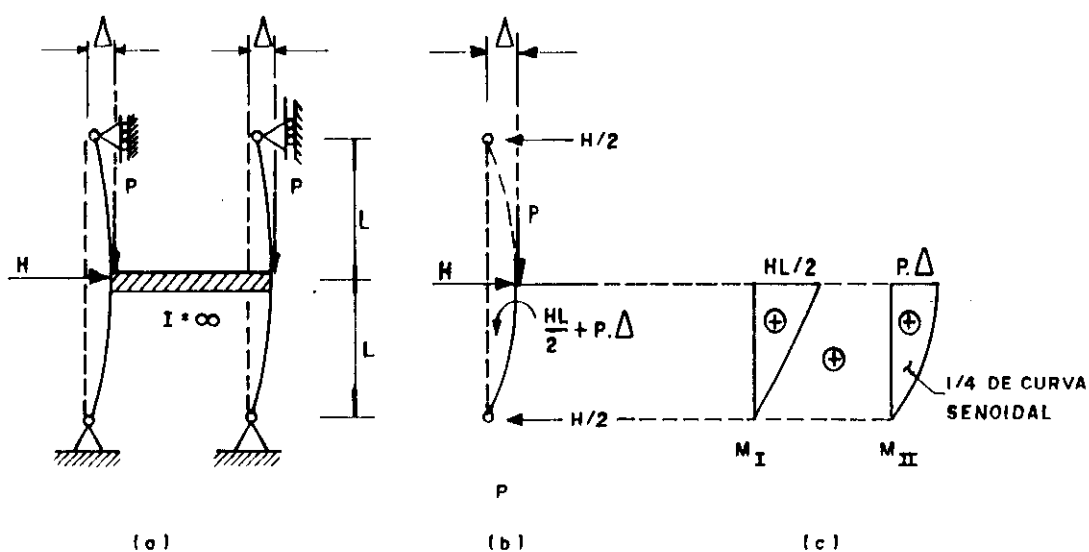


FIG.17 - Modelo para viga-coluna deslocável

De acordo com o item 5.5.2, o fator de amplificação dos momentos pela equação (71) é dado por:

$$A_F = \frac{C_m}{1 - P/P_{cr}} \quad (88)$$

onde " C_m " e " ψ " de acordo com as expressões (69) e (70) são:

$$\psi = \frac{\delta_I P_{cr}}{M_{I(max)}} - 1 \quad (89)$$

$$C_m = 1 + \psi \frac{P}{P_{cr}} \quad (90)$$

Estas equações são aproximações válidas para peças flexo-comprimidas isoladas e simplesmente apoiadas, para as quais, os momentos primários são máximos no meio ou próximo ao centro do vão.

Considere-se uma coluna de um pórtico deslocável, na qual atuam as forças "P" e "H", sendo aquela isolada do restante do pórtico. Supõe-se ainda que não existem restrições à rotação no seu extremo inferior, e que o extremo superior não gire (Isto ocorreria, se a rigidez da viga fosse infinita) (A primeira hipótese é conservadora e a segunda está do lado da insegurança). Qualquer que seja o grau de restrição, nos extremos superior ou inferior da coluna de dois andares, a curva de deslocamento, e, portanto, o momento de flexão secundário (P-Δ) pode ser considerado, aproximadamente, como sendo uma curva senoidal. Em tal caso, os procedimentos usados para uma barra indeslocável (item 5.5.2) serão válidos também aqui.

A coluna isolada pode ser considerada como sendo a metade de uma barra flexo-comprimida para a qual a flexão é provocada por uma força transversal "H", quando aplicada no centro do vão. Assim, o momento máximo primário vale $M_{I(max)} = H.L/2$, e o deslocamento máximo primário, de acordo com a resistência dos materiais vale $\delta_I = H(2L)^3/48EI$. Levando estes valores na expressão (89), tem-se:

$$\psi = - 0.18 \quad (91)$$

Substituindo-se (91) em (90) e o resultado em (88), tem-se o seguinte fator de amplificação dos momentos:

$$A_F = \frac{1 - 0.18P/P_{cr}}{1 - P/P_{cr}} \quad (92)$$

Embora a expressão (92) seja sugerida pela norma americana AISC, ela recomenda usar a seguinte expressão:

$$A_F = \frac{0.85}{1 - P/P_{cr}} \quad (93)$$

Tendo em vista a expressão (88) e comparando-se com a expressão (93), conclui-se que para projetos de pórticos deslocáveis, o valor de "C" a ser utilizado será igual a 0.85 [40,41,79,108,141].

6 - VIGAS COLUNAS SUJEITAS À FLAMBAGEM POR FLEXO-TORÇÃO

Quando uma viga-coluna não-restringida estiver sujeita à flexão, em torno do seu eixo de maior inércia, pode ocorrer flambagem por deslocamento lateral e torção, cuja carga de flambagem é significativamente menor do que a carga máxima de flambagem prevista na análise de vigas-colunas no plano.

A flambagem por flexo-torção pode ocorrer enquanto a peça ainda está elástica ou após ter ocorrido escoamento devido à flexão e compressão no plano (fig.18).

Considere-se uma viga-coluna elástica, perfeitamente reta fletindo em torno do seu eixo de maior inércia (ver fig.2-b) devido a momentos de extremidades "M" iguais e opostos ($r = -1$) e sujeita a uma força axial de compressão "P". As extremidades da viga-coluna são consideradas rotuladas e livres para empenar, mas as torções são impedidas. Será também assumido que a seção transversal da viga-coluna possui dois eixos de simetria, tal que o centro de cisalhamento coincida com o centro de gravidade.

Para simplificar os desenvolvimentos teóricos, considera-se também que a peça permanecerá reta até o início da flambagem. Esta consideração significa desprezar o deslocamento primário na direção "y" causado pelos momentos de extremidades e, conseqüentemente, a flexão secundária anterior à flambagem causada pela força axial.

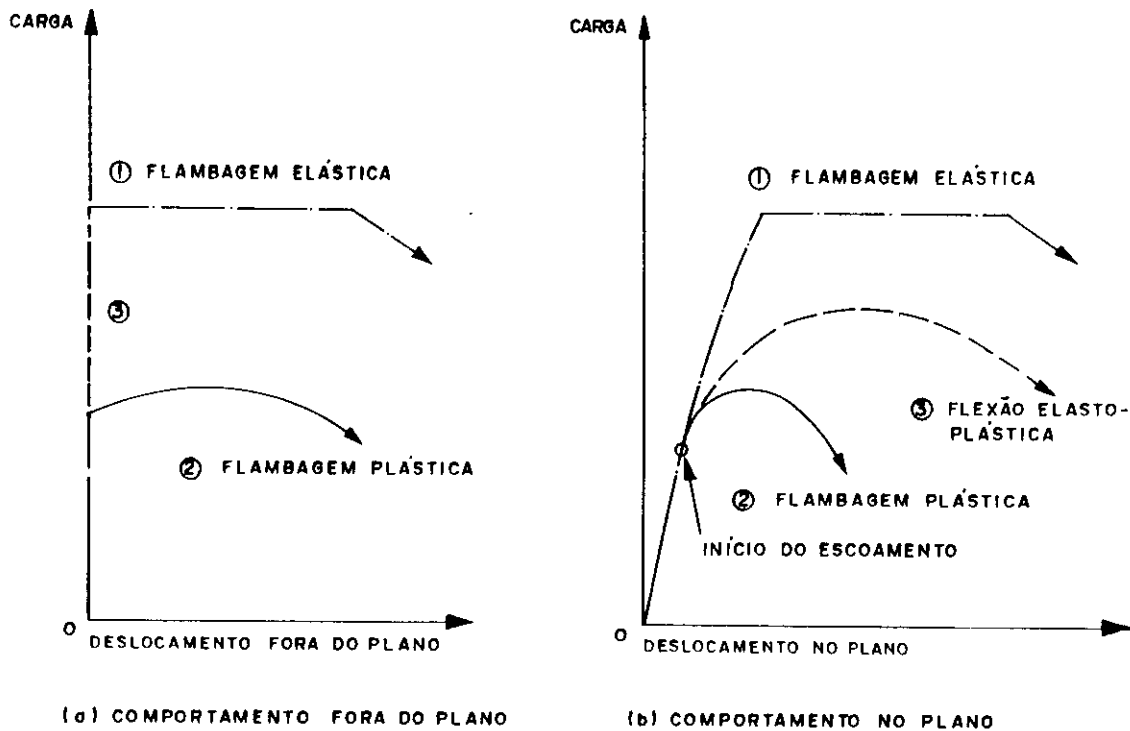


FIG.18 - Flambagem por flexo-torção de vigas-colunas

Uma vez feita esta aproximação, as equações diferenciais da configuração flambada permanecerão as mesmas como no caso da "flambagem por torção" de seções com dupla simetria e carregadas axialmente. Neste caso, duas equações diferenciais governarão a flambagem por flexão (equações 6 e 7 do capítulo 3, ajustadas para os eixos "x" e "y"), e uma equação diferencial que governará a flambagem por torção (equação 116 do capítulo 3). Porém, no presente caso, em que existem momentos de extremidades, além da força de compressão axial, considerações adicionais deverão ser feitas.

Como a coluna torce e flete durante a flambagem, o momento de flexão de extremidade "M" torna-se inclinado em relação aos eixos principais da seção transversal e em

relação às fibras longitudinais, desenvolvendo-se uma componente de flexão, em torno do eixo de menor inércia e uma componente de torção, em torno do eixo longitudinal; e, também, causando flexão, em torno do eixo de maior inércia.

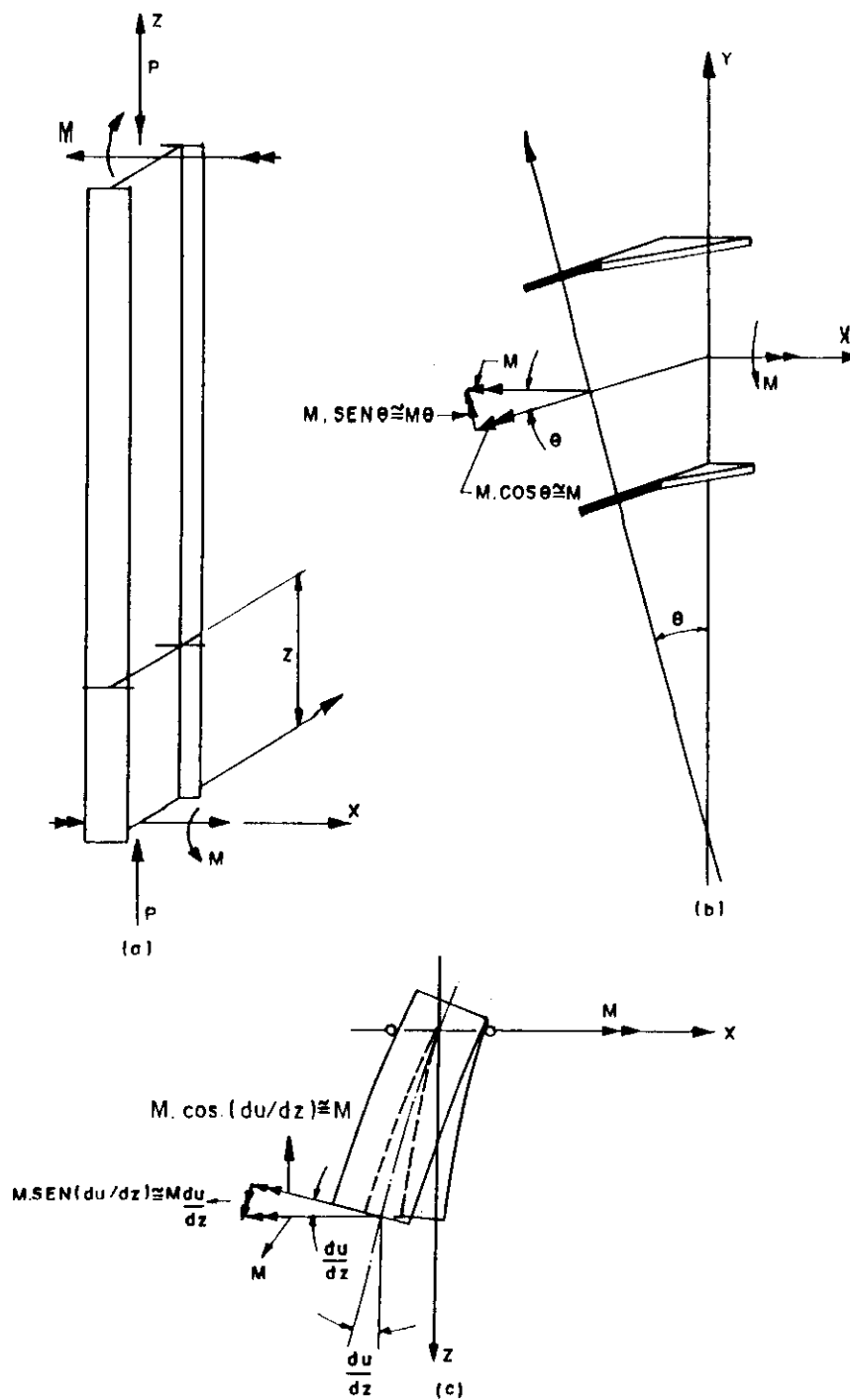


FIG.19 - Flambagem por flexo-torção

Estas componentes (" M_y " e " M_z ") podem ser melhor

visualizadas e determinadas através das figuras 19-b e 19-c, tornando-se, portanto, iguais a:

$$M_{y^{(1)}} = M \cdot \theta \quad (94)$$

$$M_{z^{(1)}} = - M \frac{du}{dz} \quad (95)$$

Para explicar a expressão (95), observa-se que, pelo cálculo infinitesimal a derivada da ordenada, em relação à abscissa, é igual à tangente do ângulo no ponto considerado, mas, para propósitos práticos, considera-se que a tangente é igual ao próprio ângulo, portanto, tem-se:

$$\text{tg}(\psi) \cong \psi = \frac{du}{dz} \quad (96)$$

onde "u" é o deslocamento da fibra longitudinal, a partir de sua posição original. Para a curvatura representada na figura 19, a relação "du/dz" é negativa, pois o ângulo "ψ" decresce quando passa da origem para a outra extremidade, segundo a curva da elástica. Uma análise mais simples do sinal negativo, que aparece na expressão (95), pode ser visto observando-se que, pela regra da mão-direita, o momento "M_z" penetra na seção.

Partindo-se das expressões (6) e (7) (ajustadas para os eixos "x" e "y"), e (116), do capítulo 3, ao serem estas repetidas aqui, tem-se:

$$- EI_x \cdot v^{II} = M_x \quad (97)$$

$$- EI_y \cdot u^{II} = M_y \quad (98)$$

$$GI_T \cdot \theta^I - EC_\omega \cdot \theta^{III} = M_z \quad (99)$$

onde (97), (98) e (99) representam os momentos internos de flexão em relação aos eixos "x", "y" e o momento interno concentrado de torção não-uniforme, respectivamente.

Lembrando que "Pr_o²θ^I" é a parcela do momento de

torção devido à carga axial de compressão. Esta de acordo com a regra da mão-direita sai da seção; sendo, portanto, positiva (ver item 3, capítulo 3). No entanto, a parcela do momento de torção, devido à componente de "M" na direção "z" deve ser negativa, pois esta componente penetra na seção transversal. Assim, levando-se em consideração estas observações, tendo em vista as expressões (94) e (95), e de acordo com a figura (20), tem-se os seguintes momentos externos:

$$M_x = P.v \quad (100)$$

$$M_y = P.u + M_{y(1)} = P.u - M.\theta \quad (101)$$

$$M_z = Pr_o^2 \theta^I + M_{z(1)} = Pr_o^2 \theta^I - M.u^I \quad (102)$$

levando (100), (101) e (102), respectivamente em (97), (98) e (99), tem-se:

$$-EI_x.v^{II} + P.v = 0 \quad (103)$$

$$EI_y.u^{II} + P.u - M.\theta = 0 \quad (104)$$

$$EC_\omega \theta^{III} - (GI_T - Pr_o^2)\theta^I - M.u^I = 0 \quad (105)$$

onde, $v^{II} = d^2v/dz^2$, $u^I = du/dz$, $u^{II} = d^2u/dz$, $\theta^I = d\theta/dz$, e $\theta^{III} = d^3\theta/dz$. Na equação (103), existe apenas a componente de deslocamento "v", enquanto que nas equações (104) e (105), aparecem as componentes "u" e " θ ". Portanto, flambagem por flexão pura pode ocorrer em torno do eixo de maior inércia, mas os outros dois modos de flambagem são uma combinação de flexão com torção.

Se as condições de extremidades são obedecidas para uma barra birrotulada, a carga crítica para o modo de flexão pura é por inspeção da equação (103) dada por:

$$P_x = \frac{\pi^2 EI_x}{L^2} \quad (106)$$

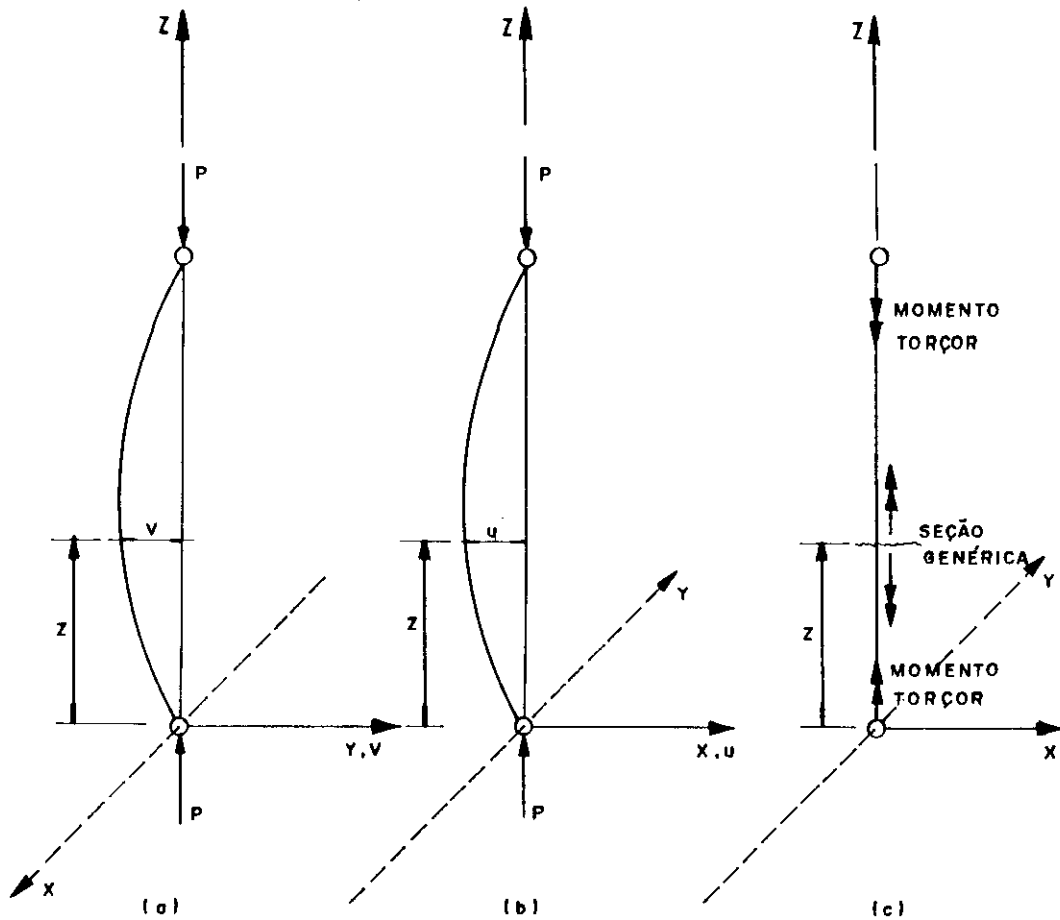


FIG.20 - Referenciais para determinações dos sinais dos momentos externos

Para determinar as cargas críticas para o modo duplo de flambagem, o deslocamento na direção "x" e o ângulo de torção serão considerados como sendo duas funções que satisfazem as condições de contorno de uma barra simplesmente apoiada. Portanto, tem-se:

$$u = A_1 \text{sen}(\pi z/L) \quad (107)$$

$$\theta = A_2 \text{sen}(\pi z/L) \quad (108)$$

onde " A_1 " e " A_2 " são constantes arbitrárias, sendo que " A_1 " tem a dimensão de comprimento e " A_2 " é adimensional.

Substituindo as funções (107) e (108), com suas respectivas derivadas nas equações (104) e (105), chega-se a:

$$\left(P - \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \right) A_1 + M.A_2 = 0 \quad (109)$$

$$M.A_1 + \left[\frac{GI_T}{r_o^2} + \frac{\pi^2 EC_\omega}{L^2 r_o^2} - P \right] r_o^2 A_2 = 0 \quad (110)$$

As equações (109) e (110) podem ser simplificadas lembrando que:

$$P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \quad (111)$$

$$P_z = \frac{1}{r_o^2} \left[GI_T + \frac{\pi^2 EC_\omega}{L^2} \right] \quad (112)$$

sendo " P_y " a carga crítica de flambagem por flexão, em relação ao eixo de menor inércia, e " P_z " a carga de flambagem por torção. Substituindo (111) e (112) em (109) e (110), respectivamente, tem-se:

$$(P - P_y) A_1 + M.A_2 = 0 \quad (113)$$

$$M.A_1 + (P_z - P).r_o^2.A_2 = 0 \quad (114)$$

Portanto, conclui-se que foram obtidas duas equações lineares algébricas a partir das equações diferenciais. Para que se tenha uma configuração flambada por flexo-torção, as constantes " A_1 " e " A_2 " devem ser diferentes de zero. Então, o valor de " P " deve ser tal que satisfaça as equações (113) e (114) simultaneamente. Isolando " A_2 " em (113) e levando em (114), tem-se:

$$\left[M - (P_z - P)(P_y - P) \frac{r_o^2}{M} \right] A_1 = 0 \quad (115)$$

para que se tenha solução diferente da trivial, a constante "A₁" deve ser diferente de zero e para que a equação (115) seja verdadeira, os termos entre colchetes devem ser igualados a zero. Assim, após arranjos algébricos, chega-se a:

$$\left(\frac{M}{r_o \sqrt{P_y \cdot P_z}} \right)^2 = \left(1 - \frac{P}{P_y} \right) \left(1 - \frac{P}{P_z} \right) \quad (116)$$

Sabe-se do capítulo 3 (expressão 112) que, para perfis com dupla simetria, o centro de gravidade coincide com o centro de cisalhamento ($x_o = y_o = 0$). Então, "r_o" será o raio de giração polar e será igual a $r_o = \sqrt{(I_x + I_y)/A}$. Assim, tendo em vista as equações (111) e (112), o denominador do primeiro membro da expressão (116) pode ser explicitado da seguinte maneira:

$$M_{cr} = r_o \sqrt{P_y \cdot P_z} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{\pi E}{L} \right)^2 I_y C_\omega + E I_y G I_T} \quad (117)$$

A expressão (117) é idêntica à expressão (41), deduzida no capítulo 2. Esta fornece o momento crítico de flambagem lateral com torção de vigas com momentos de extremidades iguais e opostos. Portanto, considerando (117), a expressão (116) ficará:

$$\left(\frac{M}{M_{cr}} \right)^2 = \left(1 - \frac{P}{P_y} \right) \left(1 - \frac{P}{P_z} \right) \quad (118)$$

A partir da expressão (118), conclui-se que, quando o momento externo "M" for igual a zero, a viga-coluna

comportará como se fosse uma coluna que pode flambar com a carga " P_y " ou " P_z ", sendo, conseqüentemente, crítica a carga que for menor. Por outro lado, quando "P" for igual a zero, a viga-coluna comportará como se fosse uma viga com flambagem lateral com torção, cujo momento crítico " M_{cr} " será dado pela expressão (117) [13,41,69,72,84,119,134,147,160].

7 - EQUAÇÕES DE INTERAÇÃO

7.1 - Equações para estabilidade no plano de flexão no regime elástico

O limite de aplicabilidade das equações para vigas-colunas elásticas, sem considerar o efeito das tensões residuais, é o ponto no qual as tensões máximas na peça atingem a tensão de escoamento " f_y " ou o limite de proporcionalidade do material. Assim, pode-se escrever:

$$f_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{W} \leq f_y \quad (119)$$

dividindo a expressão (119) por " f_y " e sabendo-se que $P_y = A \cdot f_y$, e $M_y = f_y \cdot W$, obtém-se a seguinte equação de interação:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M_{\max}}{M_y} \leq 1.0 \quad (120)$$

como visto anteriormente (equação 30), o momento máximo em uma viga-coluna sujeita à instabilidade no plano de flexão é igual ao maior momento de flexão, aplicado nas extremidades multiplicado por um fator de amplificação dos momentos ($M_{\max} = M \cdot \phi$). Então, a partir deste conceito, a expressão (120) toma a seguinte forma:

$$\frac{P}{P_y} + \phi \frac{M}{M_y} \leq 1.0 \quad (121)$$

sendo que " φ " (ver expressão 30) é dado por:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1 + r^2 + 2r \cdot \cos(mL)}{\text{sen}^2(mL)}} \quad (122)$$

onde " mL " (ver relação 19) é igual a:

$$m \cdot L = \pi \sqrt{P/P_{cr}} \quad (123)$$

fazendo-se $P_{cr} = \pi^2 EI_x / L^2 = \pi^2 EAr_x^2 / L^2$ em (123), e tendo em vista que $f_y = P_y / A$ e $\varepsilon_y = f_y / E$, tem-se:

$$mL = \frac{L}{r_x} \sqrt{\varepsilon_y} \sqrt{\frac{P}{P_y}} \quad (124)$$

Como podem ser observados através das expressões (121), (122) e (124), os parâmetros que afetam a resistência elástica de uma viga-coluna são as relações adimensionais " P/P_y ", " M/M_y ", " r ", e " $mL = (L/r_x) \sqrt{\varepsilon_y}$ ". Então, a equação (121) pode ser representada graficamente por curvas de interação das relações " P/P_y ", em função de " M/M_y " (figs. 21 e 22). Estas curvas são válidas para vigas-colunas prismáticas de simples ou dupla simetria sujeitas a forças axiais e momentos de extremidades atuando no plano de simetria.

A influência da variação do parâmetro de esbeltez $(L/r_x) \sqrt{\varepsilon_y}$ é ilustrado na figura 21, para uma viga-coluna fletindo em curvatura simples e com momentos de extremidades iguais e opostos ($r = -1$). São dadas três curvas com os seguintes parâmetros de esbeltez: 0, 1.99, e 3.98, correspondendo a " L/r_x " igual a 0, 60, e 120, respectivamente, quando se usa o módulo de elasticidade $E = 210000$ MPa e o limite de escoamento $f_y = 232$ MPa. Todas as três curvas convergem para $M = M_y$, quando $P = 0$. Neste limite, a viga-coluna comporta-se como se fosse uma viga e " M " atingirá " M_y " no limite de escoamento. No entanto,

quando $M = 0$, a viga-coluna comportar-se-á como se fosse uma coluna capaz de suportar $P = P_y$, quando $P_{cr} > P_y$ e $P = P_{cr}$, quando $P_{cr} < P_y$. Com o aumento do índice de esbeltez, diminui a resistência da viga-coluna.

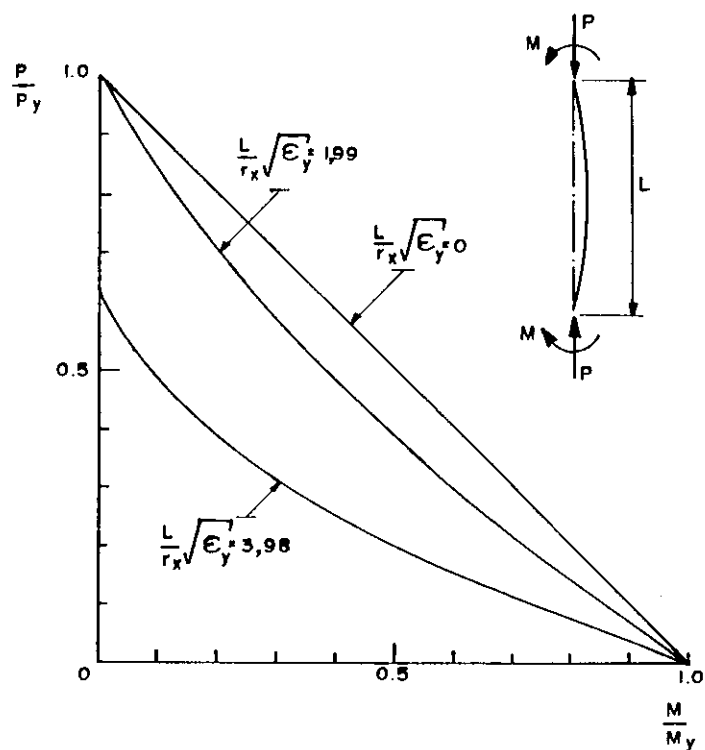


FIG.21 - Curvas de interação para o limite elástico e $r = -1$

A curva, onde o parâmetro de esbeltez é igual a 3.98, é consideravelmente menor do que a curva para o caso de uma peça cujo comprimento seja igual a zero. Isto era de se esperar, pois colunas esbeltas defletem mais, e a maior parcela do momento total ocorre devido ao efeito "P.v".

O efeito da relação, entre os momentos de extremidades "r", é ilustrado na figura 22 para um índice de esbeltez constante e igual a 4 (curvas contínuas). Nota-se que para a viga-coluna com curvatura simples, onde os momentos são iguais e opostos ($r = -1.0$), a sua resistência

é menor do que o caso de viga-coluna sujeita à flexão com dupla curvatura ($r = 1.0$). Quando "r" for igual a 1.0, o momento máximo ocorrerá nas extremidades da viga-coluna, isto é, o fator de amplificação dos momentos " φ " (eq.30) será igual a 1.0. Esta situação aplica-se somente enquanto $P < P_{cr}$. Utilizando-se a fórmula da carga crítica de Euler, na relação " P/P_y ", para o parâmetro de esbeltez $(L/r_x)\sqrt{E_y} = 4.0$, o qual corresponde a $(L/r_x) \cong 120$, determina-se que $P = 0.617.P_y$. Portanto, pela figura 22, nota-se que a curva é cortada por uma linha horizontal $P = P_{cr}$.

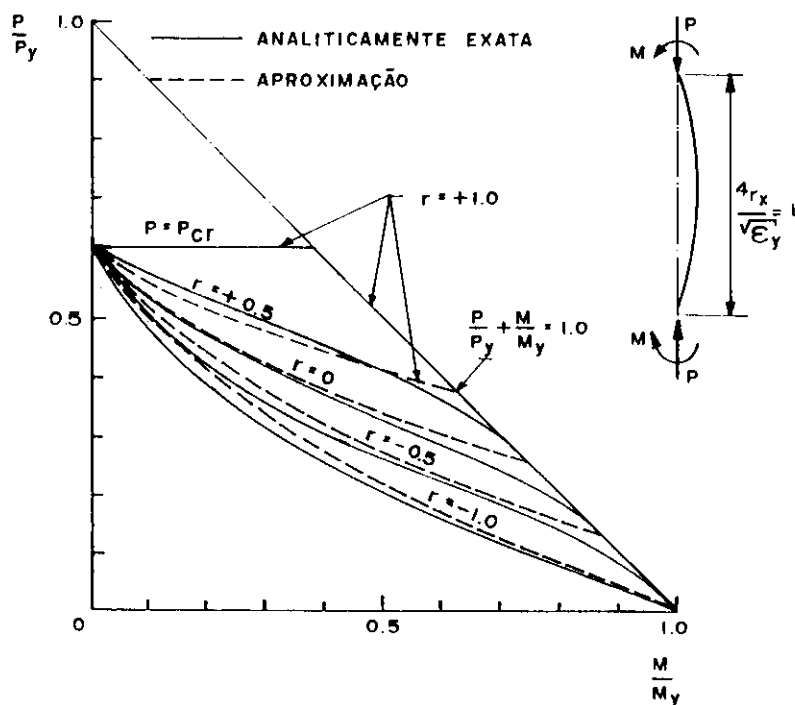


FIG.22 - Curvas de interação exatas e aproximadas no limite elástico variando com "r".

O fator de amplificação dos momentos " φ " pode ser calculado através da expressão aproximada (46). Este será dado por:

$$\varphi = A_F = \frac{C_m}{1 - P/P_{cr}} \quad (125)$$

onde, " C_m " é o fator de momento equivalente.

Substituindo (125) em (121), tem-se:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{C_m}{1 - P/P_{cr}} \frac{M}{M_y} \leq 1.0 \quad (126)$$

As equações (121) e (126) foram deduzidas para o caso de barras elásticas flexo-comprimidas. Estas falham por excesso de flexão no plano de aplicação dos momentos, incluindo o efeito do momento provocado pela força de compressão axial "P", quando a barra estiver levemente deformada.

Nas barras flexo-comprimidas elásticas, além da verificação a ser feita, utilizando a equação (121) ou a equação (126), devem ser verificados também os esforços, na extremidade crítica da viga-coluna, cujo objetivo será o de prever o escoamento da seção transversal naquela região, devido aos efeitos combinados de compressão e flexão.

Para esta outra verificação, considere uma viga-coluna curta, cujas extremidades estejam isentas da amplificação dos momentos. A tensão normal máxima, devido a força "P" e ao momento máximo "M" de primeira ordem, deverá ser menor do que a tensão de escoamento " f_y " do material. Portanto, tem-se:

$$f_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} \leq f_y \quad (127)$$

Dividindo-se os dois membros de (127) por " f_y " e sabendo-se que $P_y = A \cdot f_y$ e $M_y = W \cdot f_y$, obtém-se:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M}{M_y} \leq 1.0 \quad (128)$$

Esta equação é satisfeita para os dois casos limites, isto é, para $M = 0$, tem-se que $P \leq P_y$, e para $P = 0$ tem-se que $M \leq M_y$.

Conclui-se que, para verificar as condições de estabilidade e de resistência ao escoamento de uma viga-coluna elástica, no plano de flexão, as equações (126) e (128) devem ser satisfeitas, simultaneamente.

7.2 - Equações para estabilidade no plano de flexão no regime inelástico

A teoria elástica, discutida no item anterior, fornece um método consistente, racional e relativamente simples de analisar e projetar vigas-colunas de aço. Nesta teoria, considerou-se que o limite de aplicação é $f_{\max} = f_y$. No entanto, existem algumas correções a serem feitas nesta aproximação: (a) a resistência máxima pode ser consideravelmente maior do que a carga no limite elástico (30 a 40 por cento em alguns casos); (b) não existem maneiras satisfatórias de considerar o caso limite, quando $M = 0$, pois, neste caso, a viga-coluna comporta-se como uma coluna e existe uma transição entre a flambagem elástica e o escoamento total e (c) o limite elástico não tem significado real, em relação à resistência máxima da estrutura da qual a viga-coluna faz parte [72].

A teoria inelástica é muito mais complexa, pois as equações diferenciais tornam-se altamente não-lineares. Em alguns casos, soluções aproximadas são intratáveis, sendo possíveis apenas através de técnicas numéricas. Porém, se forem adotadas hipóteses simplificadoras, podem ser obtidas algumas soluções analíticas aproximadas para casos específicos de vigas-colunas inelásticas. Chen [36,37,38,41,42] e Galambos [72] pesquisaram o comportamento de uma viga-coluna de "seção retangular", carregada excentricamente (figs.23 e 24) e chegaram às seguintes equações de interação:

$$\frac{M}{M_y} = 3 \left(1 - \frac{P}{P_y} \right) \left[1 - \left(\frac{P}{P_{cr}} \right)^{1/3} \right] \quad (129)$$

sendo válida no seguinte intervalo;

$$\left(1 - \frac{P}{P_y}\right)^3 \leq \frac{P}{P_{cr}} \leq 1.0 \quad (130)$$

e a equação:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{P}{P_y}\right)^2 - \left(\frac{P}{P_{cr}}\right)^{2/3} \right] \quad (131)$$

válida para o intervalo;

$$0 \leq \frac{P}{P_{cr}} \leq \left(1 - \frac{P}{P_y}\right)^3 \quad (132)$$

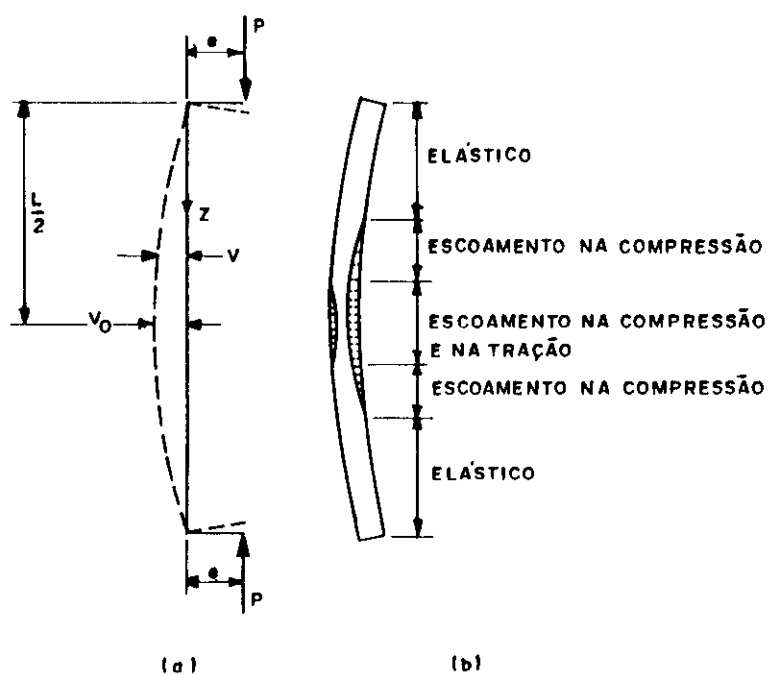


FIG.23 - Estados de plastificações em barra flexo-comprimida

Sendo que as grandezas envolvidas nas expressões anteriores são:

"e" = excêntricidade da carga de compressão "P";

"P" = força de compressão aplicada;

$M = P.e$ = momento de extremidade;

$M_y = W_y.f_y = (b.d^2/6).f_y$ = momento que ocasionaria o aparecimento da tensão " f_y " nas bordas da seção transversal, na ausência de força normal;

$$P_y = A.f_y = b.d.f_y$$

$$P_{cr} = \pi^2 EI_x / L^2$$

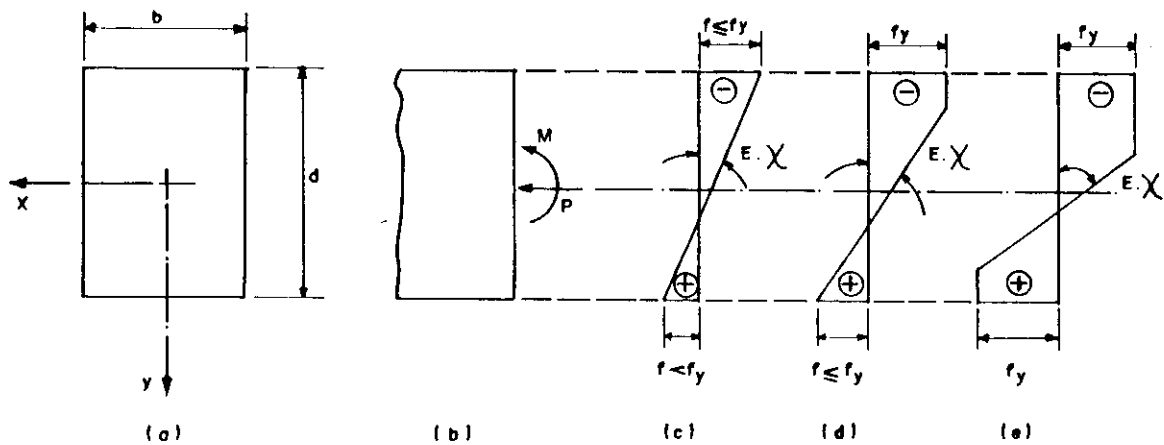


FIG.24 - Distribuições das tensões nas diferentes regiões da barra da figura 23

Usando-se as equações (129) ou (131), dependendo do intervalo de aplicabilidade das equações, podem ser

obtidas curvas de interações da resistência última para " M/M_y " e " P/P_y ". Tais curvas fornecendo o valor do $(M)_{max}$ para um dado valor de "P". A figura 25 mostra três curvas de interação da resistência última para os índices de esbeltez $L/r = 20, 60, \text{ e } 120$.

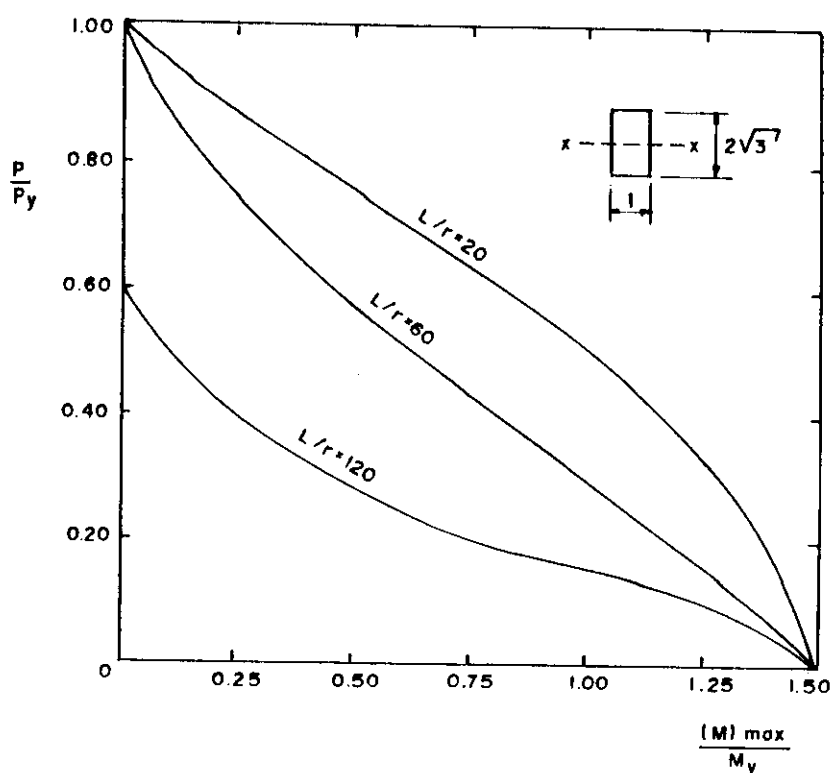


FIG.25 - Curvas de interação no regime inelástico para barra de seção retangular

Para se obter as curvas de interação (fig.25) da viga-coluna de "seção retangular" foi idealizado um diagrama tensão-deformação. Este mesmo procedimento pode ser estendido a perfis de seções "I" para traçar as curvas de interação, com ou sem tensões residuais. No entanto, as determinações das cargas últimas para estas seções envolvem um trabalho consideravelmente maior e, em alguns casos, o

recurso de técnicas de soluções numéricas será inevitável. Na referência [24], são apresentados os métodos: de Newmark e o método de integração numérica, passo-a-passo.

Mesmo com as hipóteses simplificadoras, utilizadas para deduzir as expressões (129) e (131), a determinação da carga máxima que uma viga-coluna pode suportar ainda é muito trabalhosa. Sob o ponto de vista prático, é mais conveniente determinar a carga máxima, aproximadamente de uma maneira direta e utilizando fórmulas mais simples como as "equações de interação" que serão discutidas a seguir.

As curvas de interação, mostradas na figura 25, baseadas nas equações (129) ou (131), podem ser aproximadas por uma simples equação de interação linear do tipo:

$$\frac{P}{P_u} + \frac{M_{max}}{M_u} \leq 1.0 \quad (133)$$

onde:

P = força de compressão axial;

P_u = carga axial última na ausência do momento de flexão primário, para flambagem no plano do momento aplicado;

M_{max} = momento de flexão máximo;

M_u = momento de flexão último na ausência da força axial = momento de plastificação = $M_{pL} = Z \cdot f_y$, onde "Z" é o módulo plástico.

A capacidade axial última " P_u " pode ser determinada como no capítulo 3, ou através de outras filosofias de projetos de colunas. No entanto, o momento de flexão máximo " M_{max} " é o momento amplificado na peça devido à carga axial e, como já visto, ele é dado por:

$$M_{max} = A_F \cdot M \quad (134)$$

onde " A_F " é o fator de amplificação dos momentos. Para peças carregadas excentricamente ou então sujeitos a força axial e a momentos de extremidades, a expressão de " A_f " (ver eq.125) será dada por:

$$A_F = \frac{C_m}{1 - P/P_{cr}} \quad (135)$$

sendo " C_m " o fator de momento equivalente fornecido pela expressão (48).

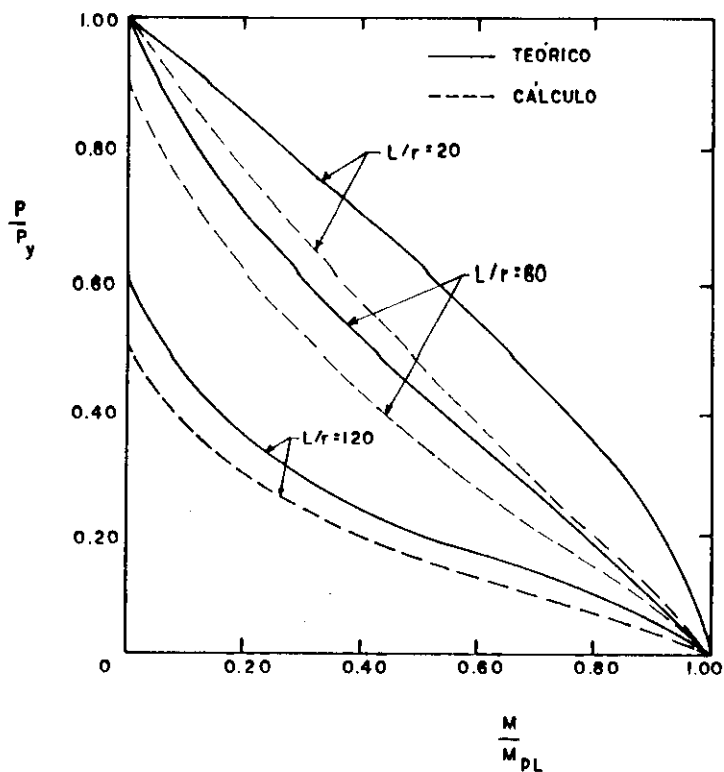


FIG.26 - Comparações entre as curvas de interação da resistência última, teóricas e de cálculo.

Substituindo a expressão (135) em (134) e o resultado em (133), obtém-se:

$$\frac{P}{P_u} + \frac{C_m M}{M_u (1 - P/P_{cr})} \leq 1.0 \quad (136)$$

A equação (136) é traçada com linhas interrompidas na figura 26, fazendo-se P_u = capacidade axial última (ver capítulo 3), $M_u = M_{pL}$ = capacidade ao momento plástico da seção transversal e $C_m = 1.0$ para $M_1/M_2 = -1.0$ na expressão (48). As curvas de interação, para as resistências teóricas últimas, são determinadas utilizando as equações (129) e (131) e são traçadas na figura 25. No entanto, para fazer comparações, estas curvas serão traçadas novamente com linhas contínuas na figura 26, usando-se nas abscissas M/M_{pL} no lugar de M/M_y . Para seções retangulares, o momento de plastificação " M_{pL} " e o momento no limite de escoamento " M_y " estão relacionados por $M_{pL} = 1.5M_y$. Como pode ser visto, exceto para pequenos índices de esbeltez, a equação de interação (136) fornece uma boa aproximação em relação à solução teórica. Para baixos índices de esbeltez, a equação (136) torna-se muito conservadora. Isto ocorre porque o efeito "P-delta" não é significativo para pequenos índices de esbeltez, isto é, o momento adicional induzido na viga-coluna, devido à força axial provocando deslocamento lateral pode ser desprezado. Conseqüentemente, a presença do termo $1/(1 - P/P_{cr})$, ao refletir o efeito "P-delta", torna a equação (133) muito conservadora. De fato, se o índice de esbeltez da viga-coluna aproxima-se de zero, não ocorrerá instabilidade.

A equação (136) refere-se a condições de ruptura por instabilidade, no entanto, quando a viga-coluna flete, produzindo rótulas plásticas em uma ou em ambas as extremidades, é necessário limitar os momentos de extremidades em " M_{pc} ", isto é, o momento de rótula plástica reduzido devido ao efeito da compressão axial tal como determinado no apêndice "A". Neste, mostra-se que a equação de interação para "seção retangular" isenta de instabilidade e sujeita a esforços combinados de compressão e flexão, é dada por (fig.27):

$$\left(\frac{P}{P_y}\right)^2 + \frac{M}{M_{pL}} \leq 1 \quad (137)$$

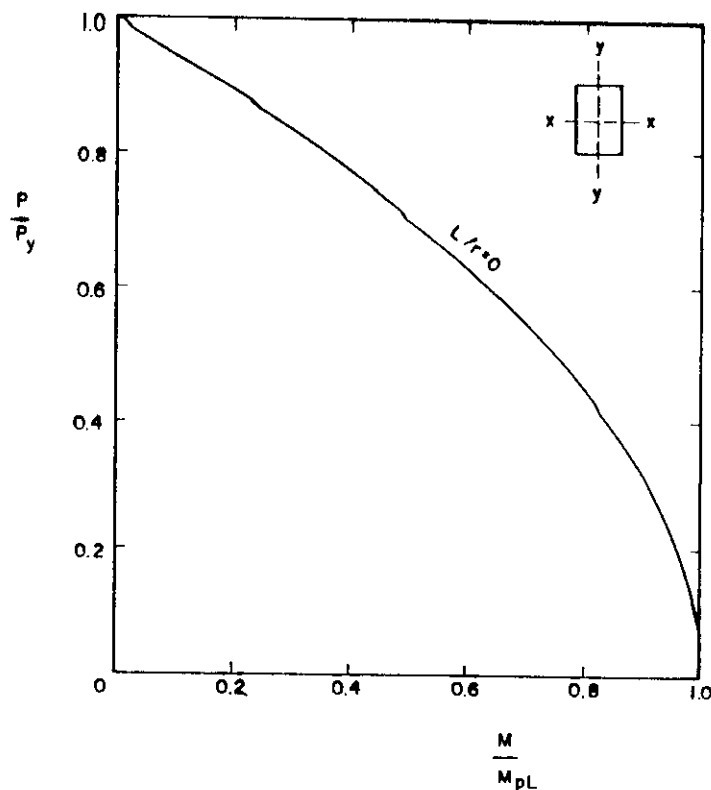


FIG.27 - Curva de interação da resistência última para uma seção retangular.

Ainda no apêndice "A", foi determinada a seguinte equação de interação para perfis "I" idealizados:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M}{M_{pL}} \leq 1.0 \quad (138)$$

cuja curva de interação para esta equação e as curvas de interação de perfis "I" reais são representadas na figura 28.

Com o objetivo de levar em consideração o efeito da carga axial de compressão, podem ser utilizadas as curvas

aproximadas mostradas na figura (29), lembrando que as curvas de interação para os perfis "I" são muito semelhantes às curvas utilizadas para perfis "H".

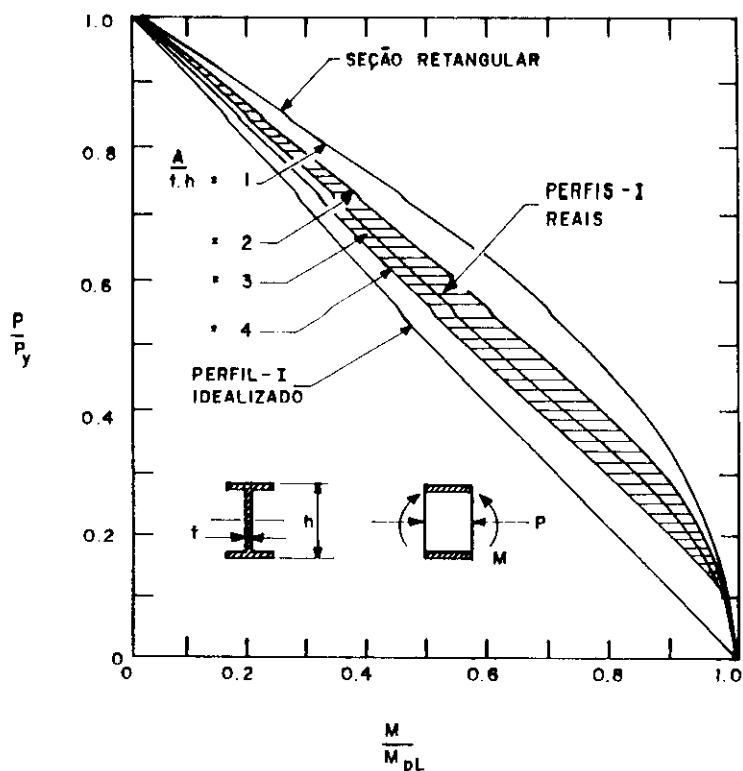


FIG.28 - Curvas de interação para perfis "I"

Com erros menores do que 5%, as cargas axiais podem ser desprezadas, supondo-se que, enquanto a relação P/P_y for menor do que 0.15, o momento de plastificação permanecerá praticamente invariável e assim poderá ser traçada uma reta unindo as coordenadas dos pontos "A" e "B". Então, pela geometria analítica a equação desta reta será dada por:

$$\frac{P}{P_y} + 0.85 \frac{M}{M_{pL}} \leq 1.0 \quad (139)$$

Sendo válidos os seguintes intervalos:

- para $0 \leq P/P_y \leq 0.15$, usa-se $M = M_{pL}$;

- para $0.15 \leq P/P_y \leq 1.0$, usa-se $M = M_{pc} = 1.18(1 - P/P_y)M_{pL}$.

Portanto, para seções "I" com flexão em torno do eixo de maior inércia, a equação (139) fornece bons resultados para a capacidade última sob flexo-compressão na ausência da instabilidade. Esta equação de interação foi obtida para o eixo de maior inércia, sendo esta posição mais vantajosa para que a viga-coluna desenvolva considerável momento de plastificação.

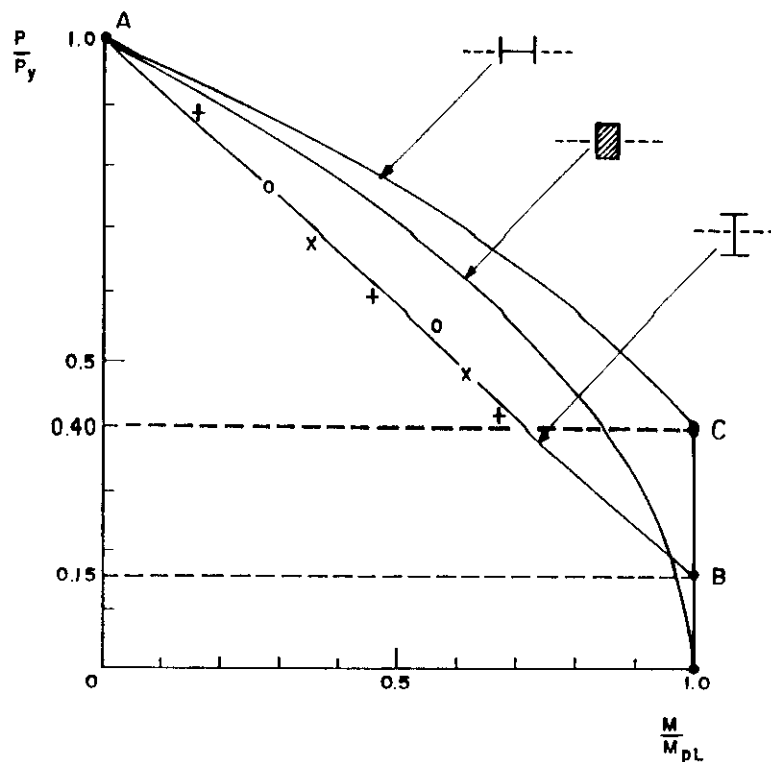


FIG.29 - Curvas aproximadas de interação

Na figura 29 foi também traçada a curva idealizada para perfis "I" ou "H", com flexão em torno do eixo de menor inércia. Para valores da relação P/P_y , compreendidos entre zero e 0.4 não há nenhuma redução significativa no momento resistente da seção e o efeito da carga axial pode ser

desprezado. No entanto, para cargas axiais de maiores intensidades, usa-se a equação de uma parábola que une os pontos "A" e "C". Esta é dada por:

$$\left(\frac{P}{P_y}\right)^2 + 0.84 \frac{M}{M_{pL}} \leq 1.0 \quad (140)$$

Pillai [91] sugeriu aproximar a equação (140), por uma equação de interação linear representada pela equação da reta que une os pontos "A" e "C" (fig.29). A equação desta reta fornece a seguinte equação de interação:

$$\frac{P}{P_y} + 0.6 \frac{M}{M_{pL}} \leq 1.0 \quad (141)$$

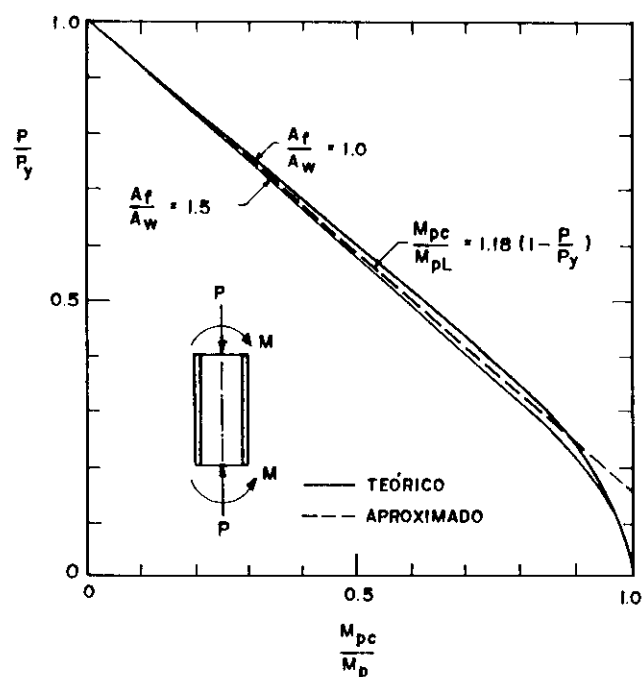


FIG.30 - Curvas de interação teóricas e aproximadas para flexão em torno do eixo de maior inércia, considerando coluna curta.

sendo válidos os seguintes intervalos:

- para $0 \leq P/P_y \leq 0.4$, usa-se $M = M_{pL}$;

- para $0.4 \leq P/P_y \leq 1.0$, usa-se $M = M_{pc} = 1.67(1-P/P_y)M_{pL}$.

As equações (139), (140) e (141) são utilizadas para traçar as curvas de interação das figuras 30 e 31.

Pela figura 31, observa-se que a equação (141) aproxima-se da equação (140), sendo levemente conservadora, mas apta a ser utilizada em cálculos práticos.

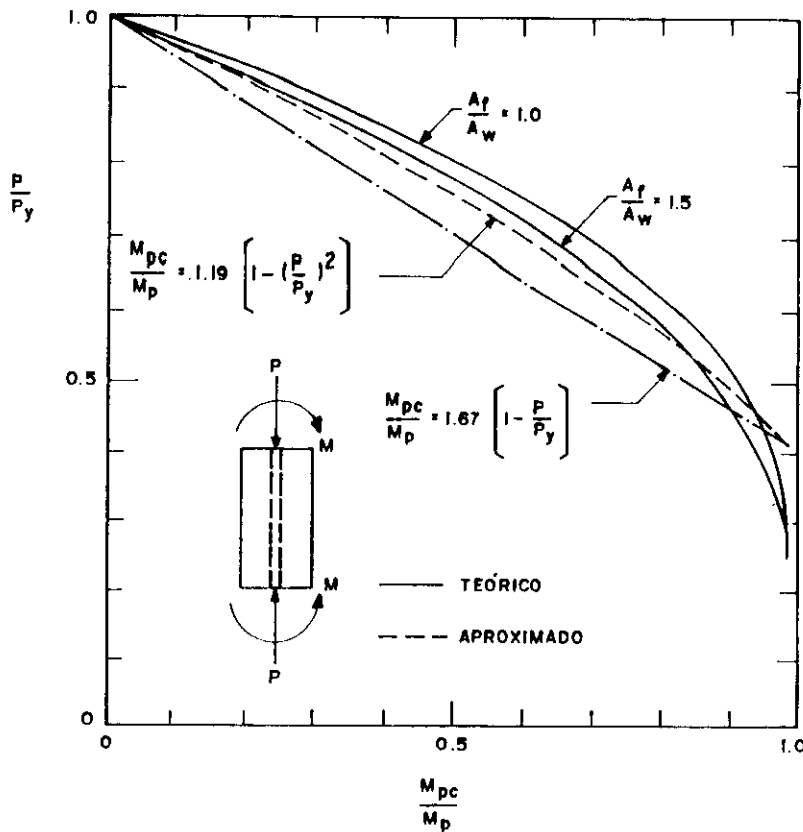


FIG.31 - Curvas de interação teóricas e aproximadas para flexão em torno do eixo de menor inércia, considerando coluna curta

Como será visto no estudo das equações de interação de vigas-colunas sujeitas à flexão biaxial, devido à característica linear da equação (141), esta poderá ser facilmente incorporada na equação de interação das vigas-colunas com flexão biaxial.

As equações (139) e (140) constituem a base utilizada nas normas AISC/ASD e AISC/LRFD. A norma brasileira NBR 8800 regulamenta uma equação semelhante à equação (138), o que constitui uma adoção conservadora.

Conclui-se que as equações de interação (136) e (139) para verificação da estabilidade e escoamento da seção de extremidade mais solicitada, respectivamente, proporcionam um método relativamente simples de estimar a resistência última de vigas-colunas inelásticas de seções "I". Tal ruptura tende a ocorrer no plano dos momentos aplicados e em torno do eixo de maior inércia. A utilização destas equações têm fornecido resultados satisfatórios para uma larga variação de perfis, incluindo seções sólidas, circulares vazadas, assim como para seções "I" fletindo em torno do eixo de menor inércia. Para este último caso, as grandezas " M_u ", " P_u " e " P_{cr} ", que aparecem na equação (136), devem ser substituídas pelas grandezas equivalentes ao eixo de menor inércia, enquanto que a equação (139) deve ser substituída pela equação (141) [15,36,37,38,41] [42,69,72,130,160].

7.3 - Equações para estabilidade por flexo-torção nos regimes elástico e inelástico

A carga crítica elástica para vigas-colunas de seção "I", submetidas à compressão e a momentos de extremidades iguais e opostos foi determinada no item 6 e é repetida aqui, sendo dada por:

$$\left(\frac{M}{M_{cr}} \right)^2 = \left(1 - \frac{P}{P_y} \right) \left(1 - \frac{P}{P_z} \right) \quad (142)$$

onde:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{\pi E}{L}\right)^2 I_y C_\omega + EI_y G I_T} \quad (143)$$

O momento crítico dado pela equação (143) representa o momento uniforme. Este, quando aplicado em torno do eixo de maior inércia da seção transversal da viga-coluna, na ausência da carga de compressão axial, causará a instabilidade lateral. As outras grandezas envolvidas na equação (142) são:

P = carga de compressão crítica na combinação com o momento de extremidade crítico;

M = momentos críticos iguais e opostos nas extremidades em torno do eixo de maior inércia na combinação com a carga de compressão crítica;

P_y = carga crítica de flambagem elástica em torno do eixo de menor inércia (não confundir com $P_y = A \cdot f_y$);

P_z = carga crítica de flambagem elástica por torção pura.

Na dedução da equação (142), desprezou-se a amplificação dada por " $M/(1-P/P_x)$ ", provocada pela carga axial em torno do eixo de maior inércia. Se esta amplificação fosse considerada nos desenvolvimentos analíticos para uma combinação crítica e elástica de " P " e " M " a equação (142) tomaria a seguinte forma:

$$\left(\frac{M}{M_{cr}}\right)^2 = \left(1 - \frac{P}{P_x}\right) \left(1 - \frac{P}{P_y}\right) \left(1 - \frac{P}{P_z}\right) \quad (144)$$

O máximo valor possível de "P" é o menor valor de "P_x", "P_y" e "P_z". Para a maioria das seções, a carga "P" é muito menor do que "P_x" tal que a equação (142) seja usualmente muito próxima da equação (144). Para a maioria das seções laminadas a quente, "P_y" é menor do que "P_z", tal que $(1-P/P_z) > (1-P/P_x)(1-P/P_y)$. Com estas considerações a expressão (144) torna-se:

$$\left(\frac{M}{M_{cr}}\right)^2 = \left(1 - \frac{P}{P_x}\right)\left(1 - \frac{P}{P_y}\right) \quad (145)$$

Quando rearranjada fornece:

$$\frac{P}{P_y} + \left(\frac{M}{M_{cr}}\right)^2 \frac{1}{(1 - P/P_x)} = 1.0 \quad (146)$$

A equação (146) pode ser seguramente aproximada pela seguinte equação de interação:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M}{M_{cr}(1 - P/P_x)} = 1.0 \quad (147)$$

A flambagem elástica por flexo-torção de vigas-colunas biarticuladas com momentos de extremidades diferentes "M" e "r.M", em relação ao eixo de maior inércia, foi investigada pelo método da energia por Massonnet [119]. Este concluiu que o momento equivalente pode ser dado por:

$$M_{eq} = M.C_m = M.\sqrt{0.27r^2 - 0.46r^2 + 0.27} \quad (148)$$

onde "M" é o maior momento de extremidade, "r" é a relação entre o menor e o maior momento de extremidade ("r" é positivo para curvatura reversa e negativo para curvatura simples), e "C_m" é o fator de momento equivalente.

Uma equação também para o caso de momentos de extremidades diferentes foi obtida por Horne [84]. Este desprezou a resistência ao empenamento de um perfil "I" e obteve a seguinte equação conservadora:

$$\left(\frac{M}{M_{cr} \sqrt{F}} \right)^2 + \frac{P}{P_y} = 1.0 \quad (149)$$

onde:

$$M_{cr} = \sqrt{\pi^2 EI_y GI_t / L^2} \quad (150)$$

Na equação (149) "M" é o maior momento de extremidade e $1 / \sqrt{F}$ varia com a relação entre os momentos de extremidades, portanto M / \sqrt{F} será o momento equivalente $M_{eq} = M.C_m$. Fazendo-se esta modificação na equação (149), obtém-se:

$$\left(\frac{M.C_m}{M_{cr}} \right)^2 + \frac{P}{P_y} = 1.0 \quad (151)$$

Assim, a flambagem elástica de vigas-colunas com diferentes momentos de extremidades pode ser aproximada, fazendo-se modificações da equação (142), obtendo-se:

$$\left(\frac{M.C_m}{M_{cr}} \right)^2 = \left(1 - \frac{P}{P_y} \right) \left(1 - \frac{P}{P_z} \right) \quad (152)$$

e seguindo o mesmo raciocínio utilizado para chegar à equação (147), obtém-se finalmente a seguinte equação de interação:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{C_m.M}{M_{cr} (1-P/P_{cr})} = 1.0 \quad (153)$$

A equação (153) tem o mesmo aspecto que a equação (136). No entanto, as grandezas " P_y " e " M_{cr} " que aparecem nos denominadores da equação (153) agora representam a instabilidade fora do plano de aplicação dos momentos.

Por analogia com a equação (136), a versão para a utilização da equação (153), em cálculos práticos, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{P}{P_{uy}} + \frac{C_m M}{M_u (1 - P/P_{ex})} \leq 1.0 \quad (154)$$

onde:

P = carga axial aplicada;

P_{uy} = carga axial última na ausência do momento de flexão para a flambagem em torno do eixo de menor inércia;

M_u = momento último na ausência de carga axial, admitindo flambagem lateral com torção;

C_m = fator de momento equivalente (ou fator de redução dos momentos) calculado pela expressão (48) (item 4).

Analogamente ao item 7.2, aqui também deve ser verificado o escoamento da seção transversal da extremidade mais solicitada, e a equação de interação a ser utilizada será análoga à equação (139), a qual será dada por:

$$\frac{P}{P_y} + 0.85 \frac{M}{M_{pL}} \leq 1.0 \quad (155)$$

Lembrando que a norma brasileira NBR 8800 utiliza a equação (138) para este tipo de verificação, sendo, portanto, conservadora.

As equações (154) e (155) devem ser satisfeitas simultaneamente. Se a equação (154) for satisfeita, a viga-coluna estará no limite de esgotar sua capacidade por flambagem lateral. Por outro lado, se a equação (155) for satisfeita, a viga-coluna estará no limite de esgotar sua resistência, sendo possível a formação de rótula plástica na extremidade mais solicitada.

Bradford e Trahair [27] pesquisaram perfis "I"

laminados a quente produzidos na Europa e na Austrália. Eles consideraram os efeitos das tensões residuais nos perfis e analisaram a flambagem por flexo-torção de vigas e vigas-colunas para diferentes tipos de seções transversais e diferentes momentos de extremidades. Nas pesquisas, foi utilizado o método dos elementos finitos, cujos resultados foram comparados com as equações (142), (152) e (154). Para a equação (142) deduzida para o limite elástico e para momentos uniformes, eles concluíram que esta equação pode conduzir a resultados satisfatórios, quando utilizada no regime inelástico, desde que os valores das grandezas " P_y " e " M_{cr} " sejam substituídos por seus equivalentes no regime inelástico. Para a equação (154), considerando momentos gradientes, os resultados foram muito conservadores, quando comparados com o método dos elementos finitos, particularmente para alto momento gradiente. Este conservadorismo foi atribuído à natureza linear e aproximada da equação (154) e devido ao fato do fator de modificação dos momentos " C_m " não variar com a carga de compressão axial. Os resultados destes estudos mostraram que a equação de interação linear, usada em normas de projetos para vigas-colunas sujeitas à flambagem lateral, é muito conservadora, quando adaptada à flambagem lateral inelástica. Uma equação de interação parabólica foi proposta e verificou-se que esta fornece resultados com boa precisão quando comparados com os resultados que utilizam o método dos elementos finitos [13,44,53], [69,79,84], [85,91,,119], e [150,160,161,162].

7.4 - Equações para estabilidade por flexão biaxial

Uma estrutura tri-dimensional ou espacial é freqüentemente tratada como sendo uma união de estruturas bi-dimensionais, isto é, de estruturas em que todos os membros e cargas estão situados num mesmo plano. Este procedimento é equivalente em considerar as interações

secundárias de momentos de flexão e de torção iguais a zero. Assim, embora as idealizações feitas para estruturas planas consideradas em projetos forneçam resultados satisfatórios, estas não representam as verdadeiras condições de carregamentos como os que existem em estruturas espaciais.

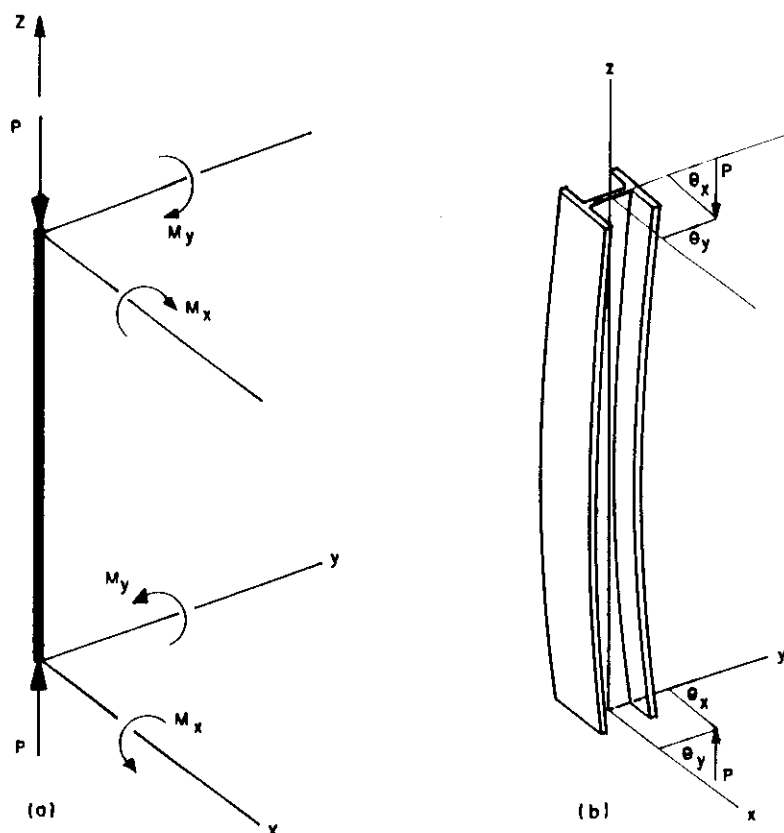


FIG.32 - Elemento estrutural com carregamento biaxial

A geometria e carregamentos da maioria das estruturas aperticadas são tri-dimensionais, e uma peça típica de tais estruturas pode estar sujeita à compressão, à flexão, em torno de ambos os eixos principais e pode ser torcida por outras peças que são conectadas na mesma (ver fig.2). A estrutura é usualmente arranjada, de modo que produza significativa flexão em torno do eixo de maior inércia da peça em questão. Porém, os deslocamentos e torções, em torno do eixo de menor inércia da peça podem ser significativos também, pois a rigidez à flexão e à torção

relacionadas ao mesmo eixo são pequenas. Além disso, estas deformações são amplificadas devido às componentes da carga axial e do momento em relação ao eixo de maior inércia provocadas pelas deformações da peça.

A sequência de aplicações das cargas afeta a resistência da estrutura, no entanto, poucos projetistas se preocupam com este detalhe. Este fato também ocorre na análise bi-dimensional, porém possui menor efeito na resistência da estrutura do que no caso da análise tri-dimensional.

As condições de carregamentos mostrados nas figuras 32-a e 32-b são estáticamente equivalentes e, freqüentemente, são considerados idênticos, em termos de tensões resultantes, mas o comportamento inelástico destas peças pode ser inteiramente diferente, dependendo da seqüência de caminhamento dos carregamentos de extremidades.

Se " P ", " M_x ", e " M_y " aumentam proporcionalmente (também denominado de carregamento radial), o comportamento inelástico da peça da figura 32-a é equivalente ao comportamento da peça da figura 32-b. O termo radial é utilizado para definir o traçado do caminho de um determinado carregamento em um espaço generalizado de tensões, como é mostrado diagramaticamente na figura 33 (veja caminho "i").

Diferentes caminhos de carregamentos para a figura 32-a são também mostrados na figura 33. No caminho "O-B-A" marcados por (ii) e (iii), a coluna é primeiramente carregada axialmente no ponto "B"; a partir daí, a carga axial " P " é mantida constante, enquanto a coluna é carregada até a ruptura por dois momentos de extremidades " M_x " e " M_y ". Estes aumentam proporcionalmente em valores a partir de zero. No caminho "O-B-C-A", como o marcado por (ii), (iv) e (v), a coluna é primeiramente carregada axialmente até atingir o ponto "B" e, então, flete através de " M_y " até atingir o ponto "C", enquanto " P " se mantém constante e, finalmente, flete através de " M_x " até a ruptura, enquanto " P " e " M_y " permanecem constantes.

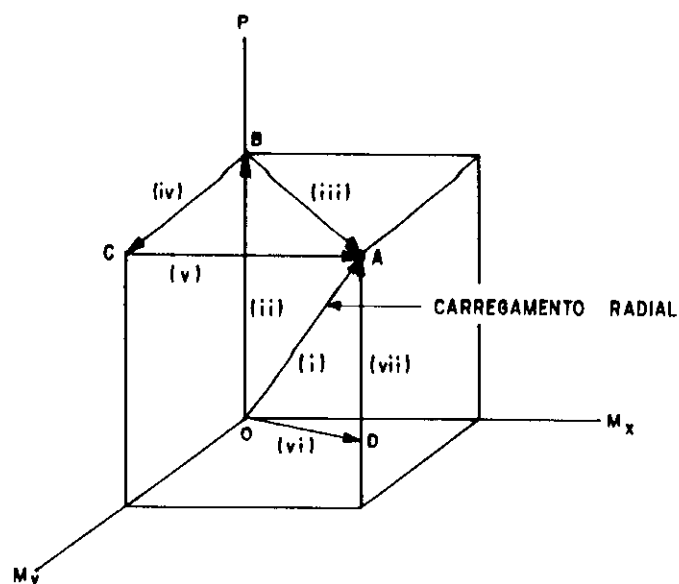


FIG.33 - Vários caminhos de carregamentos

Nas referências [54,164] pode ser encontrado o estudo da flexão biaxial elástica de uma viga-coluna isolada com momentos de extremidades iguais e opostos atuando em torno dos dois eixos principais. No entanto, estas soluções não podem ser simplificadas sem fazer aproximações. Estas análises mostraram que a flexão biaxial de vigas-colunas é semelhante ao comportamento de vigas-colunas no plano.

Embora o início do escoamento previsto para analisar a resistência de vigas-colunas esbeltas forneça uma precisão razoável, esta hipótese é conservadora para vigas-colunas mais robustas, cujos escoamentos consideráveis ocorram antes da ruptura. Sofisticadas análises numéricas têm sido feitas [77,164] para a análise de vigas-colunas inelásticas com flexão biaxial. Bons resultados foram obtidos, quando comparados com os ensaios de laboratório. No entanto, tais análises requerem laboriosos programas para

cálculo automático, utilizando-se computadores com grande capacidade de armazenamento de dados e altas velocidades. Torna-se, portanto, útil somente como instrumento de pesquisas.

Os maiores problemas associados a projetos de vigas-colunas carregadas biaxialmente correspondem à falta de informações sobre a resistência máxima de tais peças. Várias tentativas têm sido feitas para desenvolver métodos aproximados para prever a resistência de vigas-colunas inelásticas [39]. Um dos métodos mais simples é fazer a extensão das equações de interação (136), (139), (141) e (154), utilizadas para analisar vigas-colunas no plano de flexão e por flexo-torção. Assim, a equação de interação de vigas-colunas carregadas biaxialmente pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{P}{P_u} + \frac{C_{mx} \cdot M_x}{M_{ux} (1 - P/P_{ex})} + \frac{C_{my} \cdot M_y}{M_{uy} (1 - P/P_{ey})} \leq 1.0 \quad (156)$$

Na equação (156), "P" é a maior carga axial de compressão atuando na viga-coluna. A carga " P_u " é determinada fazendo-se $M_x = M_y = 0$, isto é, " P_u " será a resistência última da viga-coluna comportando-se como se fosse uma coluna carregada axialmente, desde que considerado o maior índice de esbeltez. As cargas " P_{ex} " e " P_{ey} " são as cargas críticas de Euler com possibilidade de ocorrer flambagem em torno dos dois eixos principais "x" e "y". Os momentos " M_x " e " M_y " são os maiores momentos de extremidades nos dois planos de flexão. O momento " M_{ux} " é o momento último que a viga-coluna pode resistir quando $P = M_y = 0$, isto é, a viga-coluna comporta como se fosse uma viga. Neste caso, a flexão ocorrerá em torno do eixo de maior inércia havendo, portanto, possibilidade de ocorrer flambagem lateral. Deste modo, o momento último é determinado de acordo com os requisitos estudados no capítulo 2. Deve ser lembrado que os momentos críticos elásticos ou os inelásticos de vigas (ver capítulo 2) são determinados considerando-se a viga submetida a momentos de extremidades

iguais e opostos. No entanto, se ocorrerem momentos diferentes, haverá necessidade de fazer adequadas correções, como demonstrado no capítulo 2.

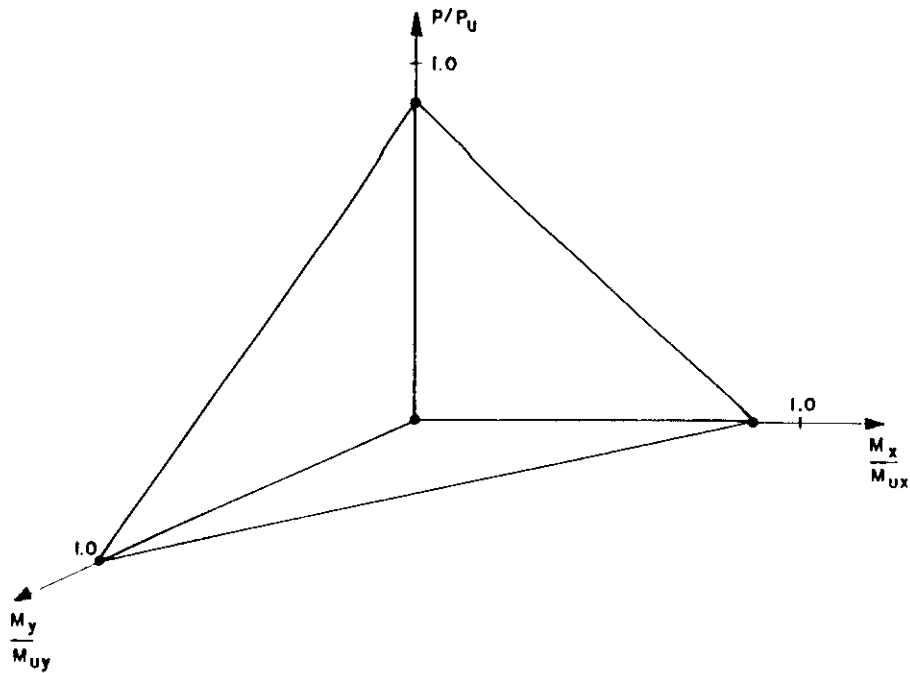


FIG.34 - Superfície de interação para a equação (156)

O momento " M_{uy} " é o momento último que a viga-coluna pode resistir quando $P = M_x = 0$, isto é, a viga-coluna comportará como se fosse uma viga, no entanto, agora a flexão ocorrerá em torno do eixo de menor inércia, e o momento último será igual ao momento de plastificação. Se as inércias em relação a ambos os eixos forem iguais, não haverá possibilidade de ocorrer flambagem por flexo-torção. Assim, os momentos últimos para ambos os eixos, serão iguais ao momento de plastificação. Finalmente, os coeficientes " C_{mx} " e " C_{my} " são os fatores de momentos equivalentes (ver item 4). Estes levam em consideração as formas dos diagramas de momentos fletores ao longo da viga-coluna quando os momentos

aplicados atuam nas direções dos eixos de maior e menor inércia, respectivamente. Portanto, " C_{mx} " e " C_{my} " convertem os momentos aplicados em momentos uniformes equivalentes.

A equação (156) pode ser representada por superfícies de interação em um sistema de eixos coordenados tri-dimensionais (fig.34). Esta superfície passará por três pontos definidos, quando a viga-coluna comporta de três formas diferentes, ou seja: (a) como coluna comprimida axialmente, o que define o ponto P/P_u , sendo este ponto menor do que 1.0 porque " P_u " possui o seu valor exato, enquanto que " P " é determinado pela equação (156); (b) como viga sujeita à flexão por momentos de extremidades (iguais e opostos, $C_{mx}=1.0$), em torno do eixo de maior inércia, lateralmente destravada com possibilidade de flambagem lateral, o que define o ponto M_x/M_{ux} , sendo este ponto menor do que 1.0 porque " M_{ux} " possui o seu valor exato, enquanto que " M_x " é determinado pela equação (156); (c) como viga sujeita à flexão por momentos de extremidades (iguais e opostos, $C_{my}=1.0$), em torno do eixo de menor inércia, ocorrendo instabilidade por flexão; isto define o ponto M_y/M_{uy} , de modo que se torna igual a 1.0. Isto ocorre porque " M_{uy} " tem o seu valor exato igual ao momento de plastificação, enquanto que o valor de " M_y " é fixo e também igual ao momento de plastificação.

A superfície de interação representada na figura 34 mostra que o plano formado pelas relações adimensionais P/P_u e M_x/M_{ux} define o comportamento de uma viga-coluna com possibilidade de ocorrer flambagem lateral. O plano formado por P/P_u e M_y/M_{uy} define o comportamento de uma viga-coluna com possibilidade de flambagem apenas no plano de flexão. E, finalmente, o plano formado por M_x/M_{ux} e M_y/M_{uy} define o comportamento de uma viga solicitada por momentos biaxialmente.

As formas das superfícies de interação dependem de alguns parâmetros como: esbeltez, tensão de escoamento, distribuição das tensões residuais, forma da seção transversal, imperfeições geométricas, procedimentos de de

carregamentos e distribuição dos momentos de flexão. Geralmente, as curvas de interação são convexas, mas para valores altos de esbeltez podem torná-las levemente côncavas. Na figura 35 são representadas superfícies de interação para perfis "H", fornecidas pela referência [154]. As linhas contínuas representam os resultados teóricos e, as linhas tracejadas mostram os resultados obtidos através da equação (156).

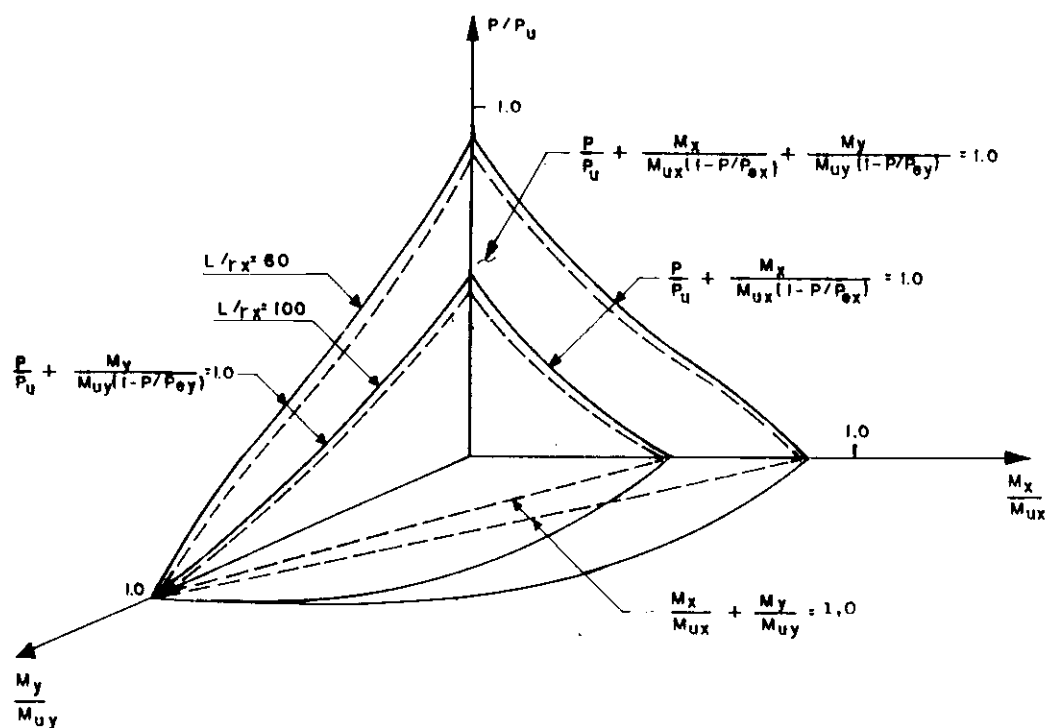


FIG.35 - Comparações entre superfícies de interação

A equação linear (156) fornece resultados conservadores da resistência. Nesta equação, não foi considerada a amplificação dos momentos em relação ao eixo de menor inércia (M_y) provocada pelo momento que atua em torno do eixo de maior inércia (M_x). Assim, no termo $(1-P/P_{ey})$ da equação (156) apenas considerou-se a amplificação causada pela carga axial de compressão "P".

Pesquisas realizadas em vigas-colunas de perfil "H" [154] demonstraram que é mais realista considerar uma equação de interação não-linear, reconhecendo-se que os efeitos ortogonais dos momentos de extremidades não são diretamente considerados. Isto pode ser melhor observado se a equação (156) for algebricamente rearranjada da seguinte forma:

$$\frac{C_{mx} M_x}{M_{ux} (1-P/P_{ex})} + \frac{C_{my} M_y}{M_{uy} (1-P/P_{ey})} = \left[1 - \frac{P}{P_u} \right] \quad (157)$$

Supondo-se que os momentos que atuam nas extremidades da viga coluna sejam iguais e opostos ($C_{mx} = C_{my} = 1.0$), definem-se os momentos " M_{ucx} " e " M_{ucy} ". Estes momentos serão, portanto, os momentos máximos de extremidades que a viga-coluna pode resistir em cada plano de flexão incluindo, em cada caso, o efeito da carga axial, a possibilidade de flambagem por flexo-torção; porém, excluindo o efeito do momento de flexão que atua em torno do outro eixo principal.

Chamando de $M_{ucx} = M_x$ e fazendo $C_{mx} = 1.0$, e $M_y = 0$, na equação (157), tem-se:

$$M_{ucx} = M_{ux} \left[1 - \frac{P}{P_u} \right] \left[1 - \frac{P}{P_{ex}} \right] \quad (158)$$

Procedendo como anteriormente em relação ao eixo "y" fazendo $M_{ucy} = M_y$, $C_{my} = 1.0$, e $M_x = 0$, na equação (157), tem-se:

$$M_{ucy} = M_{uy} \left[1 - \frac{P}{P_u} \right] \left[1 - \frac{P}{P_{ey}} \right] \quad (159)$$

Dividindo ambos os membros da equação (157) por $(1-P/P_u)$, tem-se:

$$\frac{C_{mx} M_x}{M_{ux} (1-P/P_u) (1-P/P_{ex})} + \frac{C_{my} M_y}{M_{uy} (1-P/P_u) (1-P/P_{ey})} = 1 \quad (160)$$

No primeiro membro da equação (160), os denominadores são iguais a " M_{ucx} " e " M_{ucy} ", como demonstrado pelas equações

(158) e (159). Portanto, tem-se:

$$\frac{C_{mx} M_x}{M_{ucx}} + \frac{C_{my} M_y}{M_{ucy}} \leq 1 \quad (161)$$

Chen [14] adaptou a equação (161) para perfis "I", tornando-a menos conservadora ao utilizar um expoente " η " nos termos da mesma. Este expoente é uma função da carga axial e da relação largura com a espessura da seção transversal. A equação de Chen é dada por:

$$\left(\frac{C_{mx} M_x}{M_{ucx}} \right)^\eta + \left(\frac{C_{my} M_y}{M_{ucy}} \right)^\eta \leq 1.0 \quad (162)$$

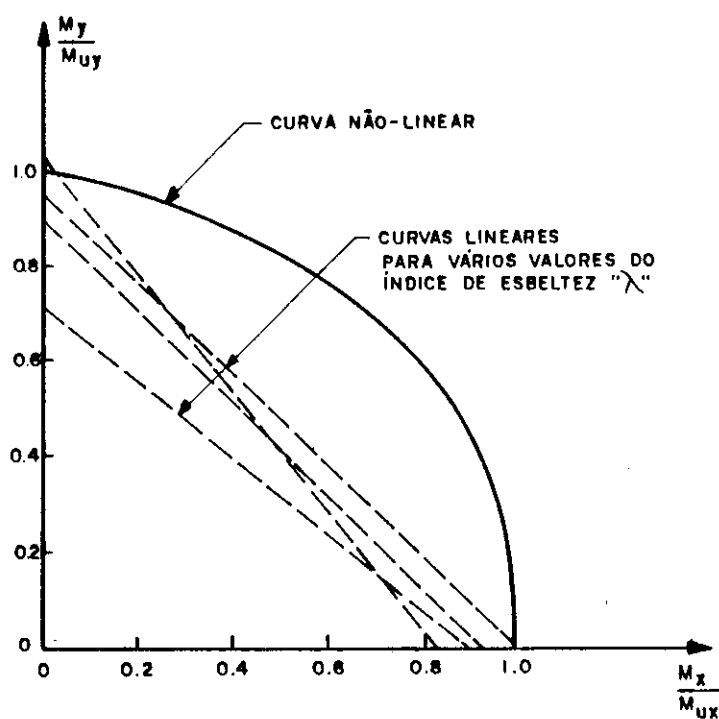


FIG.36 - Curvas de interação linear e não-linear.

Comparações entre a equação linear (161) e a equação não-linear (162) são mostradas na figura 36. Para a equação (161) são traçadas as curvas para vários índices de esbelteza. Pode-se observar que equação (161) é visivelmente conservadora.

A equação (156) é utilizada quando a estabilidade governa o estado limite. Porém, na extremidade mais solicitada das vigas-colunas, o escoamento da seção transversal é o estado limite que governará. Portanto, a equação de interação para este caso será:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M_x}{M_{px}} + \frac{M_y}{M_{py}} \leq 1.0 \quad (163)$$

onde " M_{px} " e " M_{py} " são os momentos de plastificação em relação aos eixos "x" e "y", respectivamente.

Embora seja conservador, para perfis "I", é apropriado fazer uma extensão das equações (139) e (141), o que fornece:

$$\frac{P}{P_y} + 0.85 \frac{M_x}{M_{px}} + 0.60 \frac{M_y}{M_{py}} \leq 1.0 \quad (164)$$

onde " M_{px} " e " M_{py} " são as capacidades ao momento de plastificação das seções transversais, em relação aos eixos de maior e de menor inércia, respectivamente.

A superfície de interação da equação (164) é comparada com os resultados obtidos numericamente na figura 37. As linhas tracejadas correspondem à equação (164), e as contínuas são as teóricas. Como pode ser visto para flexão uniaxial as equações se aproximam das curvas teóricas, cuja precisão é verificada através de ensaios de laboratório. Para a flexão biaxial, a equação (164) representa uma interpolação linear entre os dois casos de flexão uniaxial sendo, portanto, uma simplificação conservadora.

Utilizando métodos numéricos [154], foi possível verificar as precisões das equações (156) e (164) para seções "H". Os resultados mostraram que estas equações,

quando comparadas com os valores teóricos, são muito conservadoras para vigas-colunas curtas, conservadoras para vigas-colunas intermediárias, e pouco conservadoras para vigas-colunas longas.

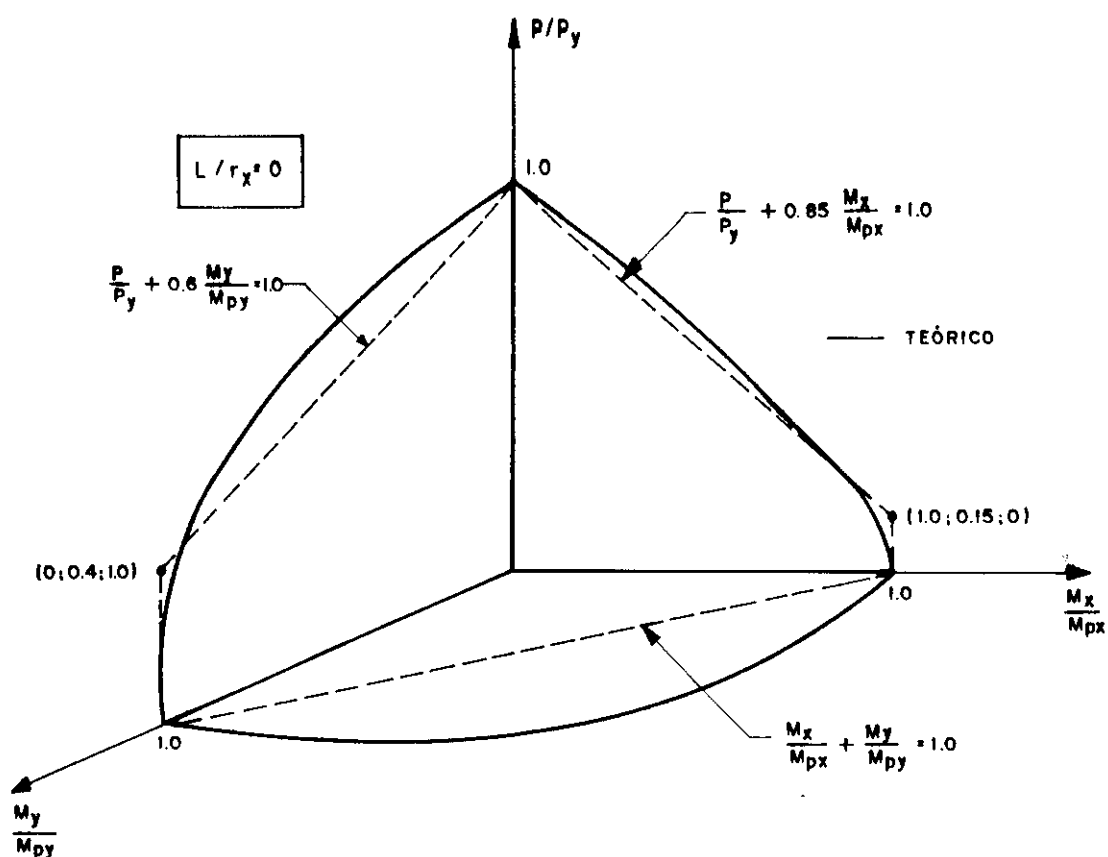


FIG.37 - Comparações entre superfícies de interação

As equações de interação regulamentadas pela norma brasileira NBR 8800 são baseadas no critério de cálculo americano utilizando-se de coeficientes de carga e de resistência (Load and Resistance Factor Design - LRFD). As pesquisas para este critério de cálculo foram realizadas na Universidade de Washington durante o período de 1969 a 1976, e os resultados passaram por revisões da AISC em 1978 com o objetivo de adaptá-las como procedimento de cálculo

alternativo para a norma AISC. Isto deu origem em 1986 à norma AISC/LRFD.

A norma brasileira fez adaptações das equações regulamentadas pela norma AISC/ASD/78. Nestas foram introduzidos os coeficientes de resistências da AISC/LRFD/86 e para as combinações das ações utilizou-se os critérios da norma europeia ECCS/81. Assim, recomendou-se que o cálculo de vigas-colunas pelo critério dos estados limites últimos pode ser feito de acordo com as equações de interação dadas a seguir.

Para a "verificação da estabilidade", tem-se:

$$\frac{P_d}{\phi_c P_u} + \frac{C_{mx} M_{dx}}{\phi_b M_{ux} \left[1 - \frac{P_d}{\phi_c P_{ex}} \right]} + \frac{C_{my} M_{dy}}{\phi_b M_{uy} \left[1 - \frac{P_d}{\phi_c P_{ey}} \right]} \leq 1 \quad (165)$$

E para a "verificação da resistência ao escoamento da seção transversal de extremidade" tem-se:

$$\frac{P_d}{\phi_c P_y} + \frac{M_{dx}}{\phi_b M_{px}} + \frac{M_{dy}}{\phi_b M_{py}} \leq 1 \quad (166)$$

onde, as grandezas das equações (165) e (166) têm os seguintes significados:

P_d = carga axial de cálculo fatorada;

P_u = carga axial última na ausência de momentos;

P_{ex} , P_{ey} = cargas de flambagem elástica (Euler);

P_y = carga de escoamento;

M_{dx} , M_{dy} = momentos de cálculo fatorados;

M_{ux} , M_{uy} = capacidades de momentos últimos na ausência de carga axial;

M_{px} , M_{py} = momentos de plastificação total.

C_{mx} , C_{my} = fatores de momentos equivalentes (ver item 4)

Os coeficientes " ϕ " que aparecem nas equações (165) e (166) são coeficientes de resistências. Estes representam as incertezas associadas aos limites de resistências das forças e momentos. Estudos baseados em cálculos estruturais pela teoria da probabilidade de primeira ordem e calibrações de normas existentes possibilitaram determinar valores de " ϕ " para os vários tipos de peças estruturais. Como as vigas e as colunas representam casos particulares de vigas-colunas os coeficientes determinados de acordo com a referência [136] são:

- vigas : $\phi_b = 0.86$;

- colunas: $\phi_c = 0.86$ para $\lambda \leq 0.16$

$\phi_c = 0.9 - 0.25\lambda$ para $0.16 \leq \lambda \leq 1.0$

$\phi_c = 0.65$ para $\lambda \geq 1.0$

onde:
$$\lambda = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \left(\frac{L}{r} \right)$$

As análises demonstraram que todos os coeficientes das equações (165) e (166) podem ser considerados iguais a $\phi = 0.86$ para permitir resultados menos conservadores. A norma AISC/LRFD adota $\phi_c = 0.85$ e $\phi_b = 0.90$. No entanto, a norma brasileira adota $\phi_c = \phi_b = 0.90$, e aqueles coeficientes que multiplicam as cargas de Euler são considerados iguais a 0.73.

Resultados menos conservadores para perfis "I" podem ser obtidos multiplicando as grandezas dos denominadores da equação (164) pelo coeficiente " ϕ_b ".

Para peças flexo-tracionadas a verificação da equação de interação (165) para a estabilidade pode ser

omitida. Neste caso, somente a equação (166) deve ser verificada, utilizando-se coeficientes de resistência $\phi_b = \phi_t = 0.88$ para a seção bruta e $\phi_b = \phi_t = 0.74$, para a seção líquida, de acordo com a referência [97]. A norma AISC/LRFD adota um único coeficiente $\phi_b = \phi_t = 0.9$ e a norma NBR 8800 adota $\phi_b = \phi_t = 0.9$ para a seção bruta e $\phi_b = \phi_t = 0.75$ para a seção líquida [14,24,39] [41,43,58,61] [77,79,88] [90,130] [136,141,154,160,164].

CAPÍTULO 5

EXEMPLO

1 - OBJETIVOS

Neste capítulo será feito o dimensionamento de uma coluna flexo-comprimida pelo método dos "estados limites", utilizando-se as normas brasileira (NBR 8800/86), americana (AISC/LRFD/86), canadense (CAN3-S16.1-M84) e européia (ECCS/81). Este dimensionamento tem por objetivos sedimentar os conceitos fornecidos nos capítulos anteriores e também fazer comparações mostrando as divergências existentes entre as citadas normas.

2 - EXEMPLO PROPOSTO

Dimensionar a viga-coluna $\overline{24}$ do pórtico central deslocável mostrado na figura 1. Considerar que a flexão ocorrerá somente em torno do eixo de maior inércia.

A estrutura pode comportar de modo diferente se esta estiver ou não contida perpendicularmente ao seu plano de flexão. Portanto, o dimensionamento deverá ser feito para os dois casos distintamente objetivando ter um exemplo mais geral.

Lembrar que quando os esforços de mesma natureza

(normais, cortantes e momentos fletores) provocados pelo peso próprio, sobrecarga e vento possuírem mesmos sentidos, deve-se usar valores de coeficientes de ações favoráveis à segurança.

Os dados a serem utilizados na resolução são fornecidos a seguir:

- aço A-36;
- ações permanentes de pequena variabilidade (controle rigoroso do peso da estrutura);
- ações:

nível 2

peso próprio (G) = 18 kN/m = 0.18 kN/cm

sobrecarga (Q) = 18 kN/m = 0.18 kN/cm

vento (Q_v) = 38 kN

nível 3

peso próprio (G) = 10.8 kN/m = 0.108 kN/cm

sobrecarga (Q) = 22.5 kN/m = 0.225 kN/cm

vento (Q_v) = 17.5 kN

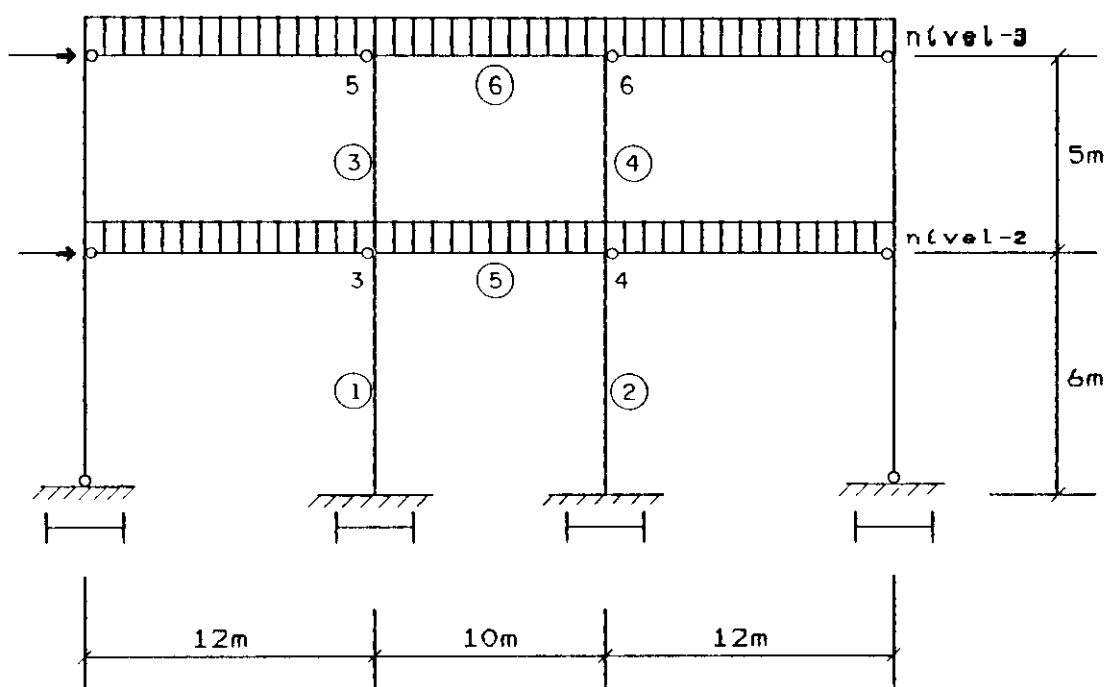


FIG.1 - Pórtico deslocável

2.1 - Dados geométricos e ações

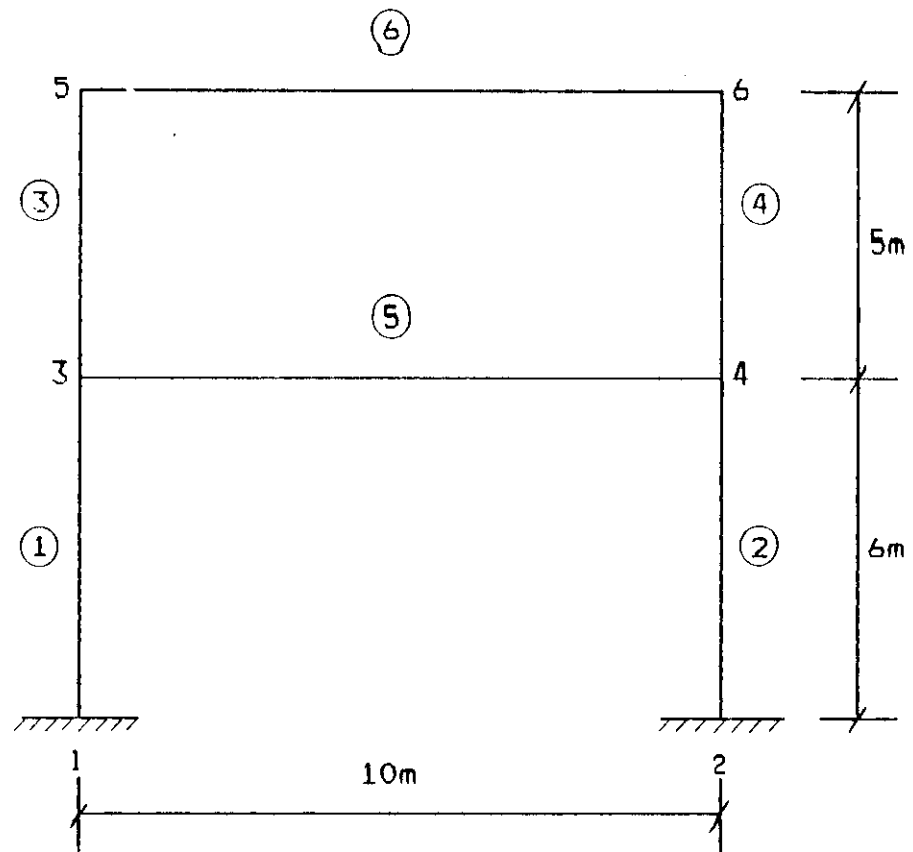


FIG.2 - Numerações de barras e nós

Características geométricas das barras			
Barras	Perfil estimado (mm x Kg _f /m)	Inércia I _x (cm ⁴)	Área (cm ²)
1, 2, 3, e 4	IS 300x71	13929	90.50
5, e 6	IS 500x124	73779	158.00

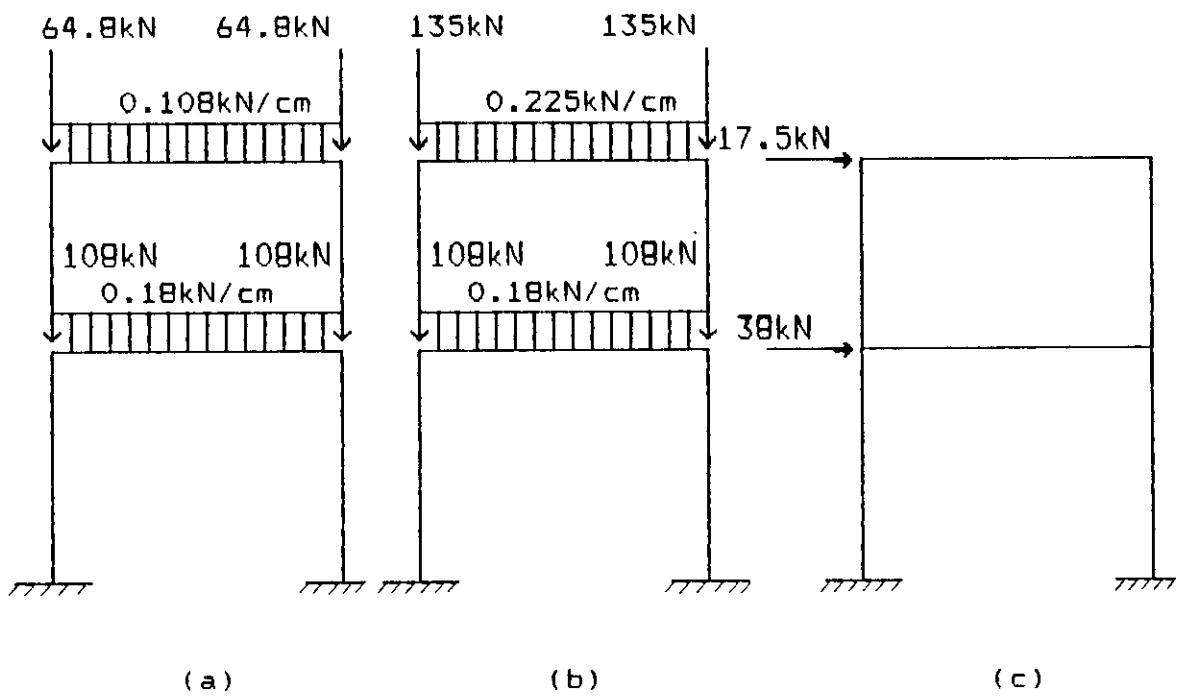


FIG.3 - a) peso próprio; b) sobrecarga; c) vento.

2.2 - Esforços

2.2.1 - Peso próprio

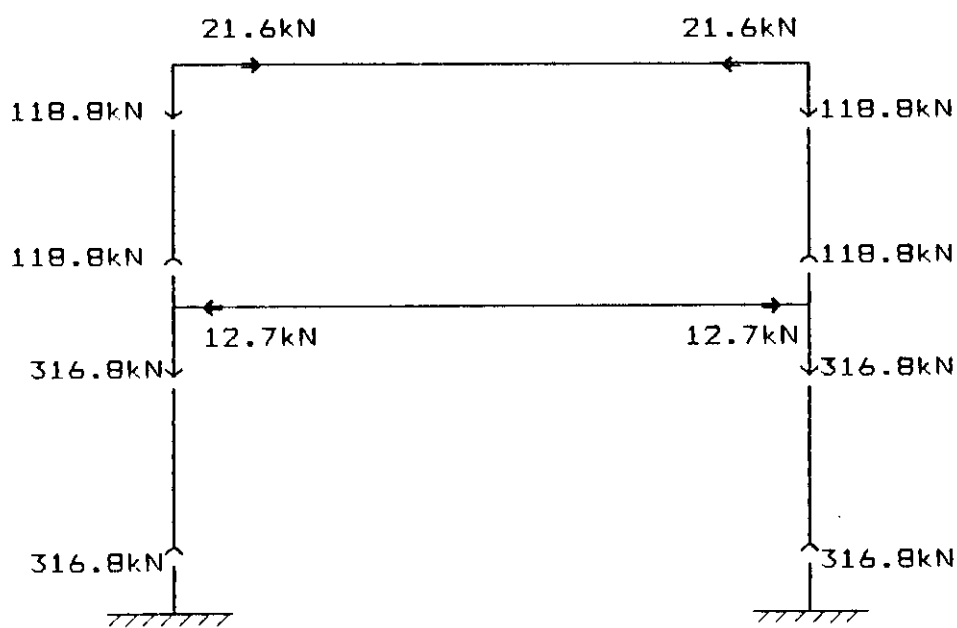


FIG.4 - Esforços axiais

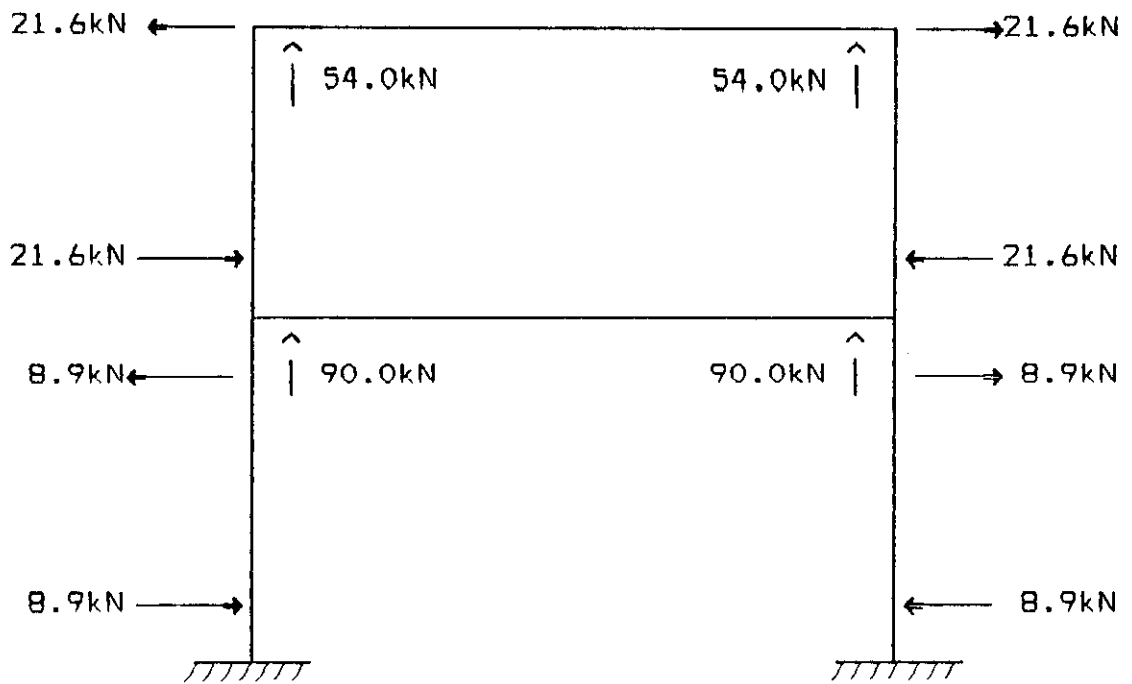


FIG.5 - Esforços cortantes

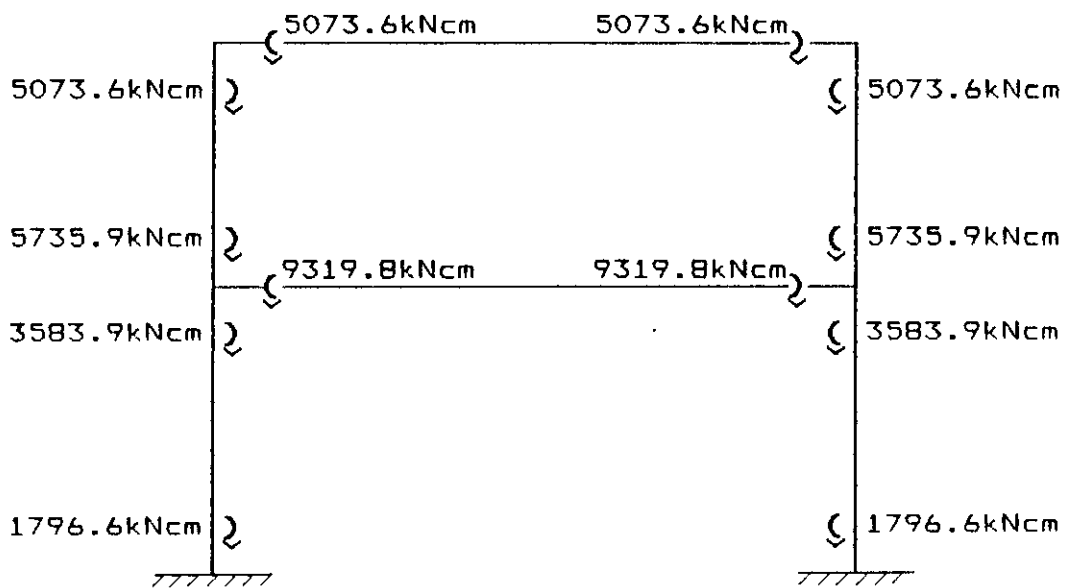


FIG.6 - Momentos fletores

2.2.2 - Sobrecarga

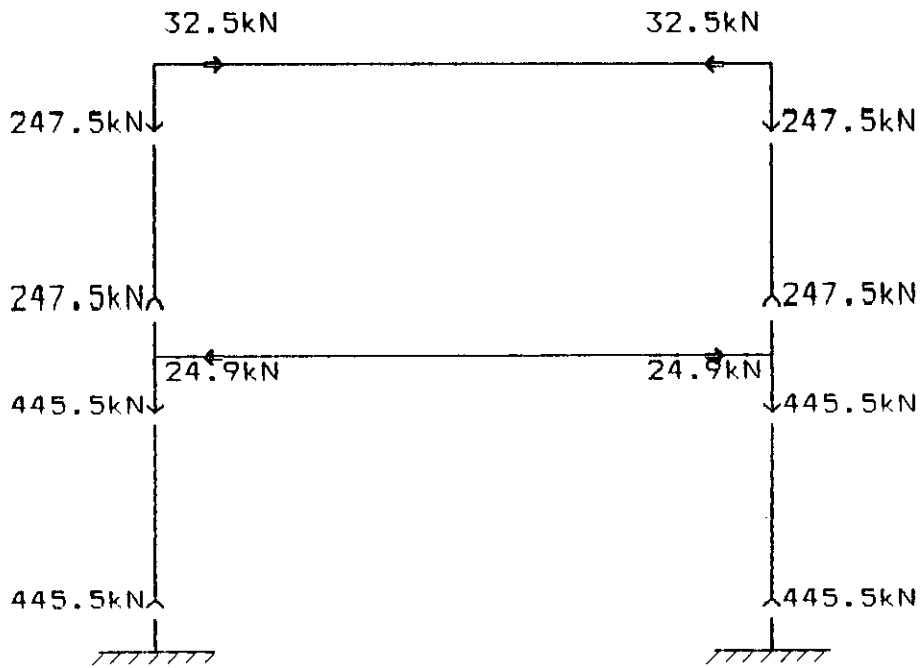


FIG.7 - Esforços normais

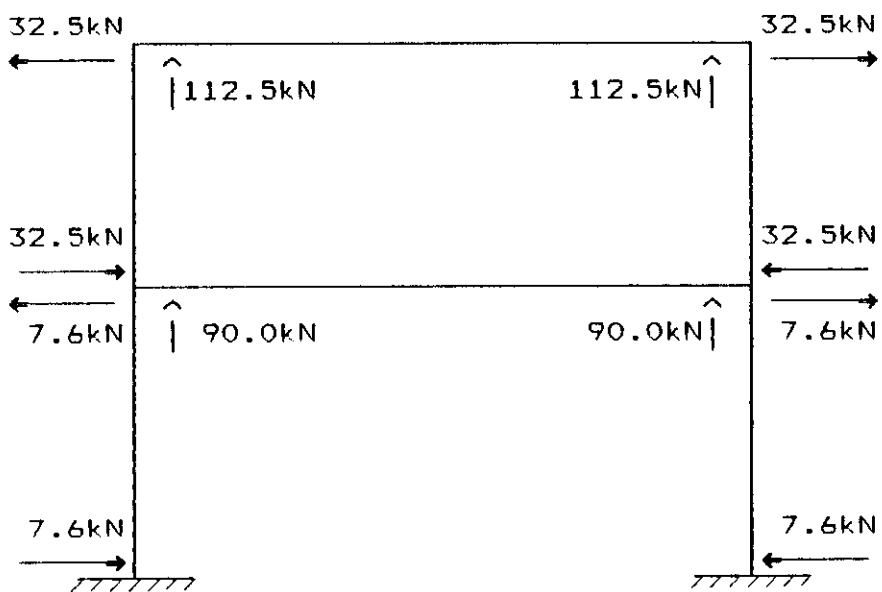


FIG.8 - Esforços cortantes

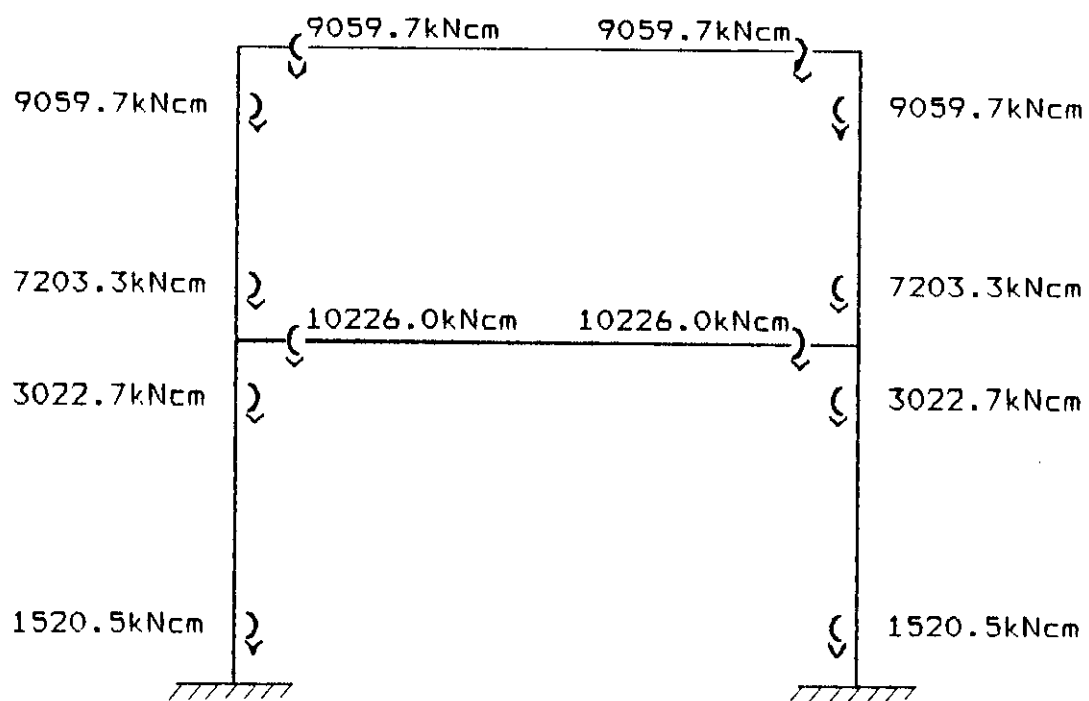


FIG.9 - Momentos fletores

2.2.3 - Vento

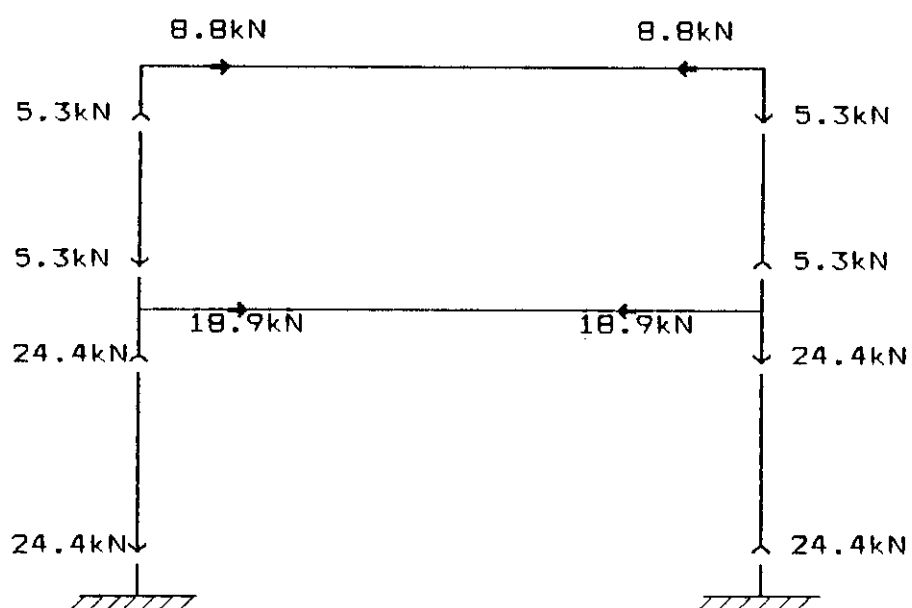


FIG.10 - Esforços normais

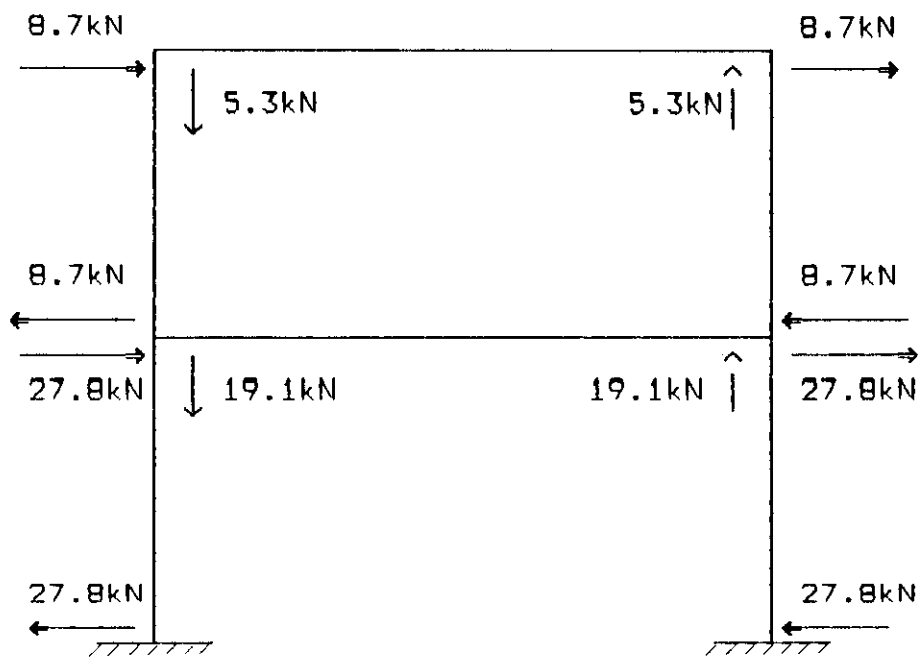


FIG.11 - Esforços cortantes

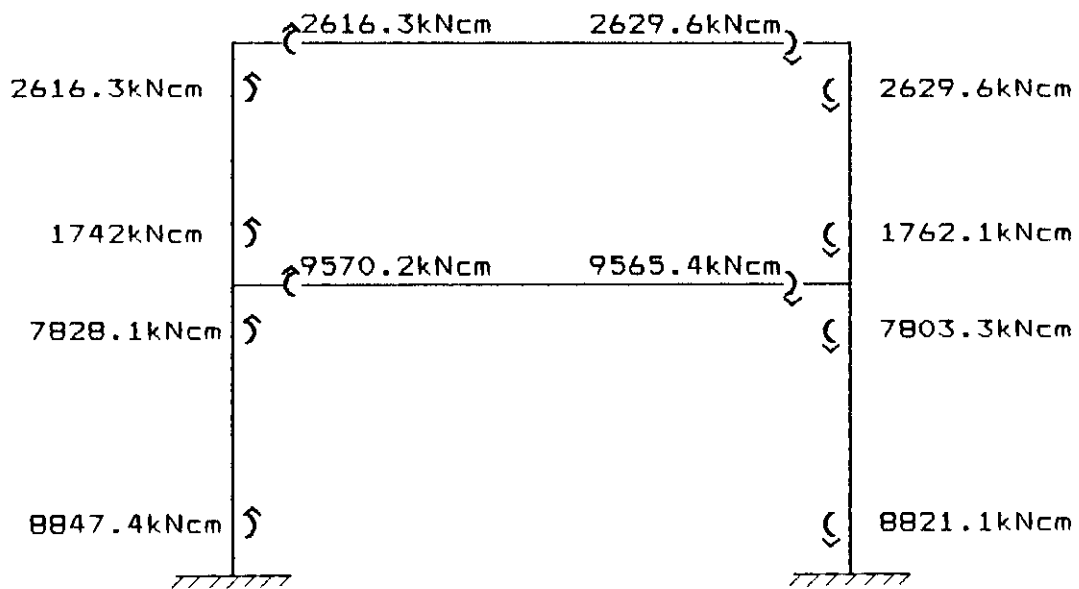


FIG.12 - Momentos fletores

2.2.4 - Resultados dos esforços

Legenda:

G = peso próprio

Q = sobrecarga

Q_v = vento

Esforços axiais (kN)			
(+) tração (-) compressão			
Barra	G	Q	Q _v
$\bar{13}$	-316.8	-445.5	+24.4
$\bar{24}$	-316.8	-445.5	-24.4
$\bar{34}$	+12.7	+24.9	-18.9
$\bar{35}$	-118.8	-247.5	+5.3
$\bar{46}$	-118.8	-247.5	-5.3
$\bar{56}$	-21.6	-32.5	-8.8

Esforços cortantes (kN)			
Barra	G	Q	Q _v
$\bar{13}$	-8.9	-7.6	+27.8
$\bar{24}$	+8.9	+7.6	+27.8
$\bar{34}$	+90.0	+90.0	-19.1
$\bar{35}$	-21.6	-32.5	+8.7
$\bar{46}$	+21.6	+32.5	+8.7
$\bar{56}$	+54.0	+112.5	-5.3

Momentos fletores (kNcm)			
Momento	G	Q	Q _v
M ₁₉	-1796.6	-1520.5	+8847.4
M ₉₁	-3583.9	-3022.7	+7828.1
M ₂₄	+1796.6	+1520.5	+8821.1
M ₄₂	+3583.9	+3022.7	+7803.3
M ₉₄	+9319.8	+10226.0	-9570.2
M ₄₉	-9319.8	-10226.0	-9565.4
M ₉₅	-5735.9	-7203.3	+1742.0
M ₅₉	-5073.6	-9059.7	+2616.3
M ₄₆	+5735.9	+7203.3	+1762.1
M ₆₄	+5073.6	+9059.7	+2629.6
M ₅₆	+5073.6	+9059.7	-2616.3
M ₆₅	-5073.6	-9059.7	-2629.6

2.3 - Combinações das ações de acordo com a NBR 8800 /86

$$C = \Sigma(\gamma G) + \gamma_{q1} Q_1 + \sum_{j=2}^n (\gamma_{qj} \psi_j Q_j)$$

a) - peso próprio + sobrecarga

$$C_1 = 1.3G + 1.5Q$$

b) - peso próprio + vento

$$C_2 = 1.3G + 1.4Q_v$$

c) - peso próprio + vento + sobrecarga (vento como ação variável predominante)

$$C_3 = 1.3G + 1.4Q_v + (1.5)(0.65)Q$$

$$C_3 = 1.3G + 1.4Q_v + 0.975Q$$

d) - peso próprio + sobrecarga + vento (sobrecarga como ação variável predominante)

$$C_4 = 1.3G + 1.5Q + 1.4(0.6)Q_v = 1.3G + 1.5Q + 0.84Q_v$$

Esforços normais (kN)				
Barra	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
$\overline{13}$	-1080.09	-377.68	-812.04	-1059.59
$\overline{24}$	-1080.09	-446.00	-880.36	-1100.59
$\overline{34}$	+53.86	-9.95	+14.33	+37.98
$\overline{35}$	-525.69	-147.02	-388.33	-521.24
$\overline{46}$	-525.69	-161.86	-403.17	-530.14
$\overline{56}$	-76.83	-40.40	-72.09	-84.22

Esforços cortantes (kN)				
Barra	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
$\bar{13}$	-22.97	+27.35	+19.94	+0.38
$\bar{24}$	+22.97	+50.49	+57.9	+46.32
$\bar{34}$	+252.00	+90.26	+178.01	+235.96
$\bar{35}$	-76.83	-15.90	-47.59	-69.52
$\bar{46}$	+76.83	+40.26	+71.95	+84.14
$\bar{56}$	+238.95	+62.78	+172.47	+234.49

Momentos fletores (kNcm)				
Momentos	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
M ₁₉	-4616.33	+10050.78	+8568.29	+2815.49
M ₃₁	-9193.12	+6300.27	+3353.14	-2617.52
M ₂₄	+4616.33	+14685.12	+16167.61	+12026.05
M ₄₂	+9193.12	+15583.69	+18530.82	+15747.89
M ₃₄	+27454.74	-1282.54	+8687.81	+19415.77
M ₄₉	-27454.74	-25507.30	-35477.65	-35489.68
M ₃₅	-18261.62	-5017.87	-12041.09	-16798.34
M ₅₉	-20185.23	-2932.86	-11766.07	-17987.54
M ₄₆	+18261.62	+9923.61	+16946.83	+19741.78
M ₆₄	+20185.23	+10277.12	+19110.33	+22394.09
M ₅₆	+20185.23	+2932.86	+11766.07	+17987.54
M ₆₅	-20185.23	-10277.12	-19110.33	-22394.09

2.4 - Combinações das ações de acordo com a AISC/LRFD/86

$$C = \sum(\gamma_i Q_i)$$

a) - peso próprio + sobrecarga

$$C_1 = 1.2G + 1.6Q$$

b) - peso próprio + sobrecarga + vento

$$C_2 = 1.2G + 0.5Q + 1.3Q_v$$

Esforços normais (kN)		
Barra	C ₁	C ₂
13	-1092.96	-571.19
24	-1092.96	-634.63
34	+55.08	+3.12
35	-538.56	-259.42
46	-538.56	-273.20
56	-77.92	-53.61

Esforços cortantes (kN)		
Barra	C ₁	C ₂
13	-22.84	+21.66
24	+22.84	+50.62
34	+252.00	+128.17
35	-77.92	-30.86
46	+77.92	+53.48
56	+244.80	+114.16

Momentos fletores (kNcm)		
Momentos	C ₁	C ₂
M ₁₃	-4588.72	+8585.45
M ₃₁	-9137.00	+4364.50
M ₂₄	+4588.72	+14383.60
M ₄₂	+9137.00	+15956.32
M ₃₄	+27545.36	+3855.50
M ₄₃	-27545.36	-28731.78
M ₃₅	-18408.36	-8220.13
M ₅₃	-20583.84	-7216.98
M ₄₆	+18408.36	+12775.46
M ₆₄	+20583.84	+14036.65
M ₅₆	+20583.84	+7216.98
M ₆₅	-20583.84	-14036.65

2.5 - Combinações das ações de acordo com a CAN3-S16.1-M84

$$C = \alpha G + \gamma \psi (\alpha Q_q + \alpha Q_v + \alpha T)$$

a) - peso próprio + sobrecarga

$$C_1 = 1.25G + (1.0)(1.0)(1.5Q)$$

$$C_1 = 1.25G + 1.5Q$$

b) - peso próprio + sobrecarga + vento

$$C_2 = 1.25G + (1.0)(0.70)(1.5Q + 1.5Q_v)$$

$$C_2 = 1.25G + 1.05Q + 1.05Q_v$$

Esforços normais (kN)		
Barra	C ₁	C ₂
13	-1064.25	-838.16
24	-1064.25	-889.39
34	+53.23	+22.18
35	-519.75	-402.81
46	-519.75	-413.94
56	-75.75	-70.37

Esforços cortantes (kN)		
Barra	C ₁	C ₂
13	-22.53	+10.09
24	+22.53	+48.29
34	+247.50	+186.95
35	-75.75	-51.99
46	+75.75	+70.26
56	+236.25	+180.06

Momentos fletores (kNcm)		
Momentos	C ₁	C ₂
M ₁₃	-4526.50	+5447.49
M ₃₁	-9013.93	+565.79
M ₂₄	+4526.50	+13104.43
M ₄₂	+9013.93	+15847.18
M ₃₄	+26988.75	+12338.34
M ₄₃	-26988.75	-32430.72
M ₃₅	-17974.83	-12904.24
M ₅₃	-19931.55	-13107.57
M ₄₆	+17974.83	+16583.55
M ₆₄	+19931.55	+18615.77
M ₅₆	+19931.55	+13107.57
M ₆₅	-19931.55	-18615.77

2.6 - Combinações das ações de acordo com a ECCS/81

$$C = \gamma_g G + \gamma_q (Q_{ik} + \sum_{i>1} \psi_{oi} Q_{ik})$$

a) - peso próprio + sobrecarga

$$C_1 = 1.3G + 1.5Q$$

b) - peso próprio + vento

$$C_2 = 1.3G + 1.5Q_v$$

c) - peso próprio + vento + sobrecarga (vento como ação variável predominante)

$$C_3 = 1.3G + 1.5Q_v + (1.5)(0.5)Q$$

$$C_3 = 1.3Q + 1.5Q_v + 0.75Q$$

- d) - peso próprio + sobrecarga + vento (sobrecarga como ação variável predominante)

$$C_4 = 1.3G + 1.5Q + (1.5)(0.5)Q_v$$

$$C_4 = 1.3G + 1.5Q + 0.75Q_v$$

Esforços normais (kN)				
Barra	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
13	-1080.09	-375.24	-709.37	-1061.79
24	-1080.09	-448.44	-782.57	-1098.39
34	+53.86	-11.98	+6.84	+39.69
35	-525.69	-146.49	-332.12	-521.72
46	-525.69	-162.39	-348.02	-529.67
56	-76.83	-41.28	-65.66	-83.43

Esforços cortantes (kN)				
Barra	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
$\bar{13}$	-22.97	+30.13	+24.43	-2.12
$\bar{24}$	+22.97	+53.27	+58.97	+43.82
$\bar{34}$	+252.00	+88.35	+155.85	+237.68
$\bar{35}$	-76.83	-15.03	-39.41	-70.31
$\bar{46}$	+76.83	+41.13	+65.51	+83.36
$\bar{56}$	+238.95	+62.25	+146.63	+234.98

Momentos fletores (kNcm)				
Momentos	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
M ₁₃	-4616.33	+10935.52	+9795.15	+2019.22
M ₃₁	-9193.12	+7083.08	+4816.06	-3322.05
M ₂₄	+4616.33	+15567.23	+16707.61	+11232.16
M ₄₂	+9193.12	+16364.02	+18631.05	+15045.59
M ₃₄	+27454.74	-2239.56	+5429.94	+20277.09
M ₄₃	-27454.74	-26463.84	-34133.34	-34628.79
M ₃₅	-18261.62	-4843.67	-10246.15	-16955.12
M ₅₃	-20185.23	-2671.23	-9466.01	-18223.01
M ₄₆	+18261.62	+10099.82	+15502.29	+19583.19
M ₆₄	+20185.23	+10540.08	+17334.86	+22157.43
M ₅₆	+20185.23	+2671.23	+9466.01	+18223.01
M ₆₅	-20185.23	-10540.08	-17334.86	-22157.43

2.7 - Escolha dos perfis

2.7.1 - Considerações preliminares

Para auxiliar a escolha das seções transversais de vigas-colunas usualmente é vantajoso converter de forma aproximada o momento de flexão resultante " M_u " em uma carga axial de compressão equivalente " P_{uEQ} ". Alternativamente, a conversão da compressão axial em momento equivalente pode ser melhor no processo de escolha.

Da equação de interação:

$$\frac{P_d}{\phi_c P_u} + \frac{C_{mx} M_{dx}}{\phi_b M_{ux} (1 - P_d / 0.73 P_{ex})} + \frac{C_{my} M_{dy}}{\phi_b M_{uy} (1 - P_d / 0.73 P_{ey})} \leq 1.0 \quad (1)$$

pode-se multiplicar todos os seus termos por $\phi_c P_u$, o que fornece:

$$P_d + \frac{C_{mx} M_{dx} \phi_c P_u}{\phi_b M_{ux} (1 - P_d / 0.73 P_{ex})} + \frac{C_{my} M_{dy} \phi_c P_u}{\phi_b M_{uy} (1 - P_d / 0.73 P_{ey})} \leq (\phi_c P_u = P_{uEQ}) \quad (2)$$

Para se fazer o cálculo preliminar, supõe-se que $M_{ux} = f_y Z_x$ e $M_{uy} = f_y Z_y$, embora podendo o momento " M_{ux} " ser menor do que o momento de plastificação, tendo a sua resistência controlada pelos estados limites de flambagem por flexo-torção, flambagem local do flange, ou flambagem local da alma; no entanto, comumente o momento " M_{ux} " igualará ao de plastificação. Assim, fazendo-se $M_u = M_{pL}$, usualmente será uma boa hipótese no início de um dimensionamento.

Na equação (2), explicitando as propriedades da seção transversal A_g / Z_x fazendo-se $\phi_c = \phi_b$ e considerando uma estrutura indeslocável sujeita à flexão uniaxial e compressão, obtém-se:

$$P_{UEQ} = P_d + \left[\frac{f_{cr}}{f_y} \right] \left[\frac{C_{mx}}{(1 - P_d / 0.73 P_{ex})} \right] \frac{A_g}{Z_x} M_{dx} \quad (3)$$

desprezando-se o efeito redutor da relação entre tensões (primeiro colchete) e o efeito do termo amplificador (segundo colchete), tem-se:

$$P_{UEQ} = P_d + \frac{A_g}{Z_x} M_{dx} \quad (4)$$

aproximadamente, para perfis "I", tem-se que:

$$A_g \cong 2A_f \quad (5)$$

$$Z_x \cong 2A_f (d/2) \quad (6)$$

então, levando (5) e (6) em (4), finalmente obtém-se:

$$P_{UEQ} = P_d + \frac{2M_{dx}}{d} \quad (7)$$

Quando o momento de flexão é o efeito predominante pode ser prático estimar o momento de flexão equivalente " M_{UEQ} " para a flexão uniaxial considerando preliminarmente a estrutura como sendo indeslocável. Multiplicando-se equação (1) por $\phi_b M_{ux}$ e seguindo os mesmos procedimentos que concluíram na equação (7), chega-se a:

$$M_{UEQ} = \frac{P_d d}{2} + M_{dx} \quad (8)$$

2.7.2 - Escolha do perfil para o elemento $\overline{56}$

$$P_d = -84.22 \text{ kN (combinação "C}_4\text{" do item 2.3)}$$

$$M_{dx} = -22394.09 \text{ kNcm (combinação "C}_4\text{" do item 2.3)}$$

$$d = 30 \text{ cm (estimado)}$$

$$M_{uEQ} = \frac{P_d d}{2} + M_{dx} = \frac{84.22 \times 30}{2} + 22394.09 = 23657.4 \text{ kNcm}$$

$$M_{uEQ} = f_y Z_x, \text{ ou } Z_x = \frac{M_{uEQ}}{f_y} = \frac{23657.4}{25} = 946.3 \text{ cm}^3$$

IS 300x63.5 (tabelado) $Z_x = 1022 \text{ cm}^3$
 (ver referência [1]) $I_x = 13929 \text{ cm}^4$

2.7.3 - Escolha do perfil para o elemento $\overline{34}$

$P_d = +37.98 \text{ kN}$ (combinação "C₄" do item 2.3)
 $M_{dx} = -35489.68 \text{ kNcm}$ (combinação "C₄" do item 2.3)
 $d = 30 \text{ cm}$ (estimado)

$$M_{uEQ} = \frac{P_d d}{2} + M_{dx} = \frac{(0) \times 35}{2} + 35489.68 = 35489.68 \text{ kNcm}$$

$$M_{uEQ} = f_y Z_x, \text{ ou } Z_x = \frac{M_{uEQ}}{f_y} = \frac{35489.68}{25} = 1419.6 \text{ cm}^3$$

IS 300x84.5 (tabelado) $Z_x = 1389 \text{ cm}^3$
 (ver referência [1]) $I_x = 18975 \text{ cm}^4$

2.7.4 - Escolha do perfil para o elemento $\overline{24}$

$P_d = -1100.59 \text{ kN}$ (combinação "C₄" do item 2.3)
 $M_{dx} = 15747.89 \text{ kNcm}$ (combinação "C₄" do item 2.3)
 $d = 35 \text{ cm}$ (estimado)

$$M_{uEQ} = \frac{P_d d}{2} + M_{dx} = \frac{1100.59 \times 35}{2} + 15747.89 = 35008.2 \text{ kNcm}$$

$$M_{uEQ} = f_y Z_x, \text{ ou } Z_x = \frac{M_{uEQ}}{f_y} = \frac{35008.2}{25} = 1400.3 \text{ cm}^3$$

HS 320x117 (tabelado) $Z_x = 1964.0 \text{ cm}^3$, $Z_y = 866.0 \text{ cm}^3$
 (ver referência [1]) $I_x = 28192.0 \text{ cm}^4$, $I_y = 8555.0 \text{ cm}^4$
 $r_x = 13.7 \text{ cm}$, $r_y = 7.57 \text{ cm}$

$$\begin{aligned}
 W_x &= 1762.0 \text{ cm}^3, & W_y &= 570.0 \text{ cm}^3 \\
 I_T &= 156.0 \text{ cm}^4 \\
 C_{\omega} &= 1936596.0 \text{ cm}^6 \\
 A_g &= 149.0 \text{ cm}^2 \\
 d &= 32.0 \text{ cm} \\
 b_f &= 30.0 \text{ cm} \\
 t_f &= 1.9 \text{ cm} \\
 t_v &= 1.25 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

2.7.5 - Resultados simplificados dos perfis escolhidos

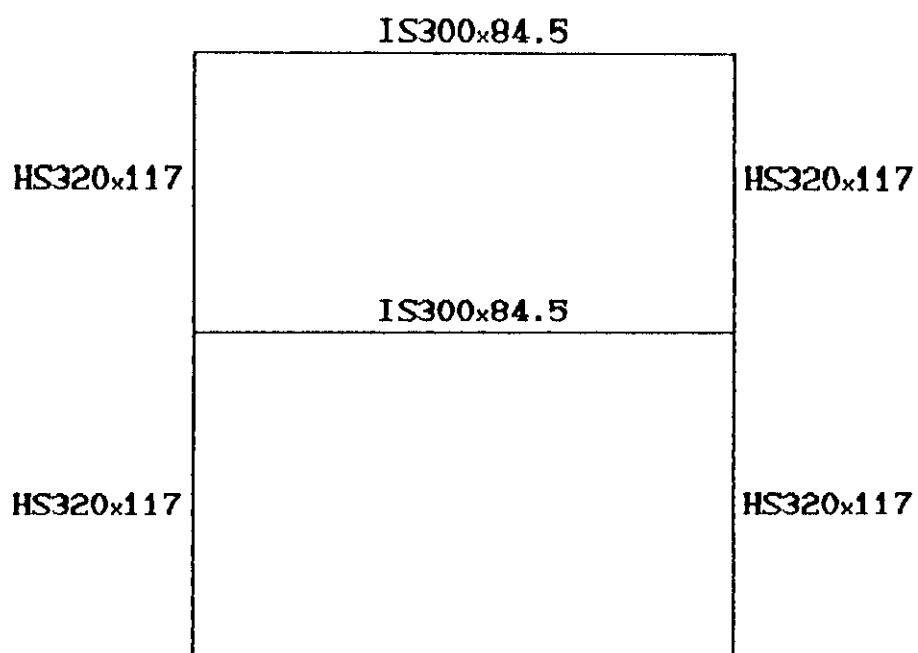


FIG.13 - Perfis escolhidos

2.8 - Verificação da viga-coluna $\bar{24}$ de acordo com a norma NBR 8800

Os esforços mais desfavoráveis são fornecidos pela combinação "C₄" (item 2.3) e estes são iguais a:

$$\begin{aligned}
 P_d &= -1100.59 \text{ kN} \\
 (M_{dx})_{24} &= 12026.05 \text{ kNcm (sentido anti-horário)} \\
 (M_{dx})_{42} &= 15747.89 \text{ kNcm (sentido anti-horário)}
 \end{aligned}$$

2.8.1 - Comportamento no plano de flexão

a) - Verificação do estado limite de flambagem local da mesa

$$\frac{b}{t_f} = \frac{(30/2)}{1.9} = 7.9$$

$$\lambda_P = 0.38 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$\lambda_P = 0.38 \sqrt{\frac{20500}{25}} = 10.9$$

$$b/t_f \leq \lambda_P \quad (\text{passa})$$

b) - Verificação do estado limite de flambagem local da alma

$$\frac{h}{t_v} = \frac{(32 - 2 \times 1.9)}{1.25} = 22.6$$

$$\lambda_P = 3.5 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$\lambda_P = 1.47 \sqrt{\frac{E}{f_y}}, \quad \text{para } \frac{P_d}{0.9P_y} > 0.207$$

$$\frac{P_d}{0.9P_y} = \frac{1100.59}{0.9 \times 149 \times 25} = 0.33$$

$$P_d / (0.9 \times P_y) > 0.207$$

$$\lambda_P = 1.47 \sqrt{\frac{20500}{25}} = 42.1$$

$$h/t_v \leq \lambda_P \quad (\text{passa})$$

c) - Estado limite de momento de plastificação em relação ao eixo "x" quando a viga-coluna trabalha como viga

$$M_{ux} = M_{pL} = f_y Z_{yx} = 1964.0 \times 25 = 49100.0 \text{ kNcm}$$

d) - Estado limite de flambagem em relação ao eixo "x" quando a viga-coluna trabalha como coluna

$$G_2 = 1.0 \quad (\text{para engastamento})$$

$$G_4 = \frac{I_{x(24)}/L_{24} + I_{x(40)}/L_{40}}{I_{x(34)}/L_{34}}$$

$$G_4 = \frac{(28192/600) + (28192/500)}{(15867/1000)} = 6.5$$

$k_x = 1.75$ (valor encontrado em ábaco, em função de "G₂" e "G₄")

$Q = 1.0$ (seção cujos elementos têm $b/t < \lambda$)

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi} \frac{k_x L}{r_x} \sqrt{\frac{Q f_y}{E}}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi} \frac{1.75 \times 600}{13.7} \sqrt{\frac{1.0 \times 25}{20500}} = 0.85$$

$\alpha = 0.281$ (curva "b")

$$\eta = \alpha \sqrt{\bar{\lambda}^2 - 0.04}$$

$$\eta = 0.281 \sqrt{(0.85)^2 - 0.04} = 0.232$$

$$\beta = \frac{1}{2\bar{\lambda}^2} \left[1 + \eta + \bar{\lambda}^2 \right]$$

$$\beta = \frac{1}{2 \times (0.85)^2} \left[1 + 0.232 + (0.85)^2 \right] = 1.35$$

$$\rho = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1/\lambda^2}$$

$$\rho = 1.35 - \sqrt{(1.35)^2 - 1/(0.85)^2} = 0.69$$

$$P_u = \rho Q A_g f_y = 0.69 \times 1.0 \times 149 \times 25 = 2570.3 \text{ kN}$$

e) - Carga de Euler em relação ao eixo "x"

$$P_{ex} = \frac{\pi^2 EA_g}{(k_x L/r_x)^2}$$

$$P_{ex} = \frac{\pi^2 \times 20500 \times 149}{(1.75 \times 600 / 13.7)^2} = 5132.2 \text{ kN}$$

f) - Verificação da estabilidade da viga-coluna

$$\frac{P_d}{\phi_c P_u} + \frac{C_{mx} M_{dx}}{\phi_b M_{ux} (1 - P_d / 0.73 P_{ex})} \leq 1.0$$

$$C_{mx} = 0.85 \text{ (pórtico deslocável)}$$

$$\frac{1100.59}{0.9 \times 2570.3} + \frac{0.85 \times 15747.89}{0.9 \times 49100 (1 - 1100.59 / (0.73 \times 5132.2))} \leq 1.0$$

$$0.91 \leq 1.0 \text{ (passa)}$$

g) - Verificação do escoamento nas extremidades da viga-coluna

$$\frac{P_d}{\phi_c P_y} + \frac{M_{dx}}{\phi_b M_{ux}} \leq 1.0$$

$$\frac{1100.59}{0.9 \times 149 \times 25} + \frac{15747.89}{0.9 \times 49100} \leq 1.0$$

$$0.69 \leq 1.0 \text{ (passa)}$$

2.8.2 - Comportamento fora do plano de flexão

- a) - Verificação do estado limite de flambagem local da mesa

Esta verificação foi feita no item 2.8.1-a.

$$b/t_f \leq \lambda_p \quad (\text{passa})$$

- b) - Verificação do estado limite de flambagem local da alma

Esta verificação foi feita no item 2.8.1-b.

$$h/t_v \leq \lambda_p \quad (\text{passa})$$

- c) - Estado limite de flambagem lateral com torção quando a viga-coluna trabalha como viga

$$\lambda = \frac{L_b}{r_y} = \frac{600}{7.57} = 79.3$$

$$\lambda_p = 1.75 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$\lambda_p = 1.75 \sqrt{\frac{20500}{25}} = 50.1$$

$$\lambda_r = \frac{0.707 C_b \beta_1}{M_r} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4 \beta_2 M_r^2 / (C_b \beta_1)^2}}$$

$$\beta_1 = \pi \sqrt{GE} \sqrt{I_T A} = \pi \sqrt{0.385 \times (20500)^2} \sqrt{156 \times 149}$$

$$\beta_1 = 6092415.8$$

$$\beta_2 = 6.415 \frac{A(d - t_f)^2}{I_T} = 6.415 \frac{149 \times (32 - 1.9)^2}{156}$$

$$\beta_2 = 5551.3$$

$$M_r = (f_y - f_r)W_x = (25 - 11.5) \times 1762 = 23787 \text{ kNcm}$$

$$C_b = 1.0 \text{ (de acordo com a NBR 8800)}$$

$$\lambda_r = \frac{0.707 \times 1.0 \times 6092415.8}{5551.26.26} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4 \times 5551.3 \times (23787)^2 / (6092415.8)^2}}$$

$$\lambda_r = 1139.6$$

$\lambda_P < \lambda < \lambda_r$ (viga no regime inelástico, deve-se fazer interpolação linear)

$$M_{ux} = M_{pL} - (M_{pL} - M_r) \frac{(\lambda - \lambda_P)}{(\lambda_r - \lambda_P)}$$

$$M_{ux} = 49100 - (49100 - 23787) \left(\frac{79.3 - 50.1}{1139.6 - 50.1} \right)$$

$$M_{ux} = 48421.6 \text{ kNcm}$$

d) - Estado limite de flambagem em relação ao eixo "y" quando a viga-coluna trabalha como coluna

$k_y = 1.0$ (nesta direção as vigas não estão engastadas no pórtico)

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi} \frac{1.0 \times 600}{7.57} \sqrt{\frac{25}{20500}} = 0.88$$

$$\alpha = 0.384 \text{ (curva "c")}$$

$$\eta = 0.384 \sqrt{(0.88)^2 - 0.04} = 0.33$$

$$\beta = \frac{1}{2 \times (0.88)^2} \left(1 + 0.33 + (0.88)^2 \right) = 1.36$$

$$\rho = 1.36 - \sqrt{(1.36)^2 - 1/(0.88)^2} = 0.61$$

$$P_u = \rho Q A f_{g y} = 0.61 \times 1.0 \times 149 \times 25 = 2272.3 \text{ kN}$$

e) - Carga de Euler em relação ao eixo "x"

Esta carga foi calculada no item 2.8.1-e.

$$P_{ex} = 5132.2 \text{ kN}$$

f) - Verificação da estabilidade da viga-coluna

$$C_{mx} = 0.85 \text{ (justificado no item 2.8.1-f)}$$

$$\frac{1100.59}{0.9 \times 2272.3} + \frac{0.85 \times 15747.89}{0.9 \times 48421.6 \times (1 - 1100.59 / (0.73 \times 5132.2))} \leq 1.0$$

$$0.97 \leq 1.0 \text{ (passa)}$$

g) - Verificação do escoamento nas extremidades da viga-coluna

Esta verificação foi feita no item 2.8.1-g.

$$0.69 \leq 1.0 \text{ (passa)}$$

2.9 - Verificação da viga-coluna $\bar{24}$, de acordo com a norma AISC / LRFD

Os esforços mais desfavoráveis são fornecidos pela combinação "C₁" (item 2.4) e estes são iguais a:

$$P_d = -1092.96 \text{ kN}$$

$$(M_{dx})_{24} = +4588.72 \text{ kNcm}$$

$$(M_{dx})_{42} = +9137.00 \text{ kNcm}$$

2.9.1 - Comportamento no plano de flexão

- a) - Verificação do estado limite de flambagem local da mesa

$$\frac{b}{t_f} = \frac{(30/2)}{1.9} = 7.9$$

$$\lambda_P = 0.38 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$\lambda_P = 0.38 \sqrt{\frac{20500}{25}} = 10.9$$

$$b/t_f \leq \lambda_P \text{ (passa)}$$

- b) - Verificação do estado limite de flambagem local da alma

$$\frac{h}{t_v} = \frac{(32 - 2 \times 1.9)}{1.25} = 22.6$$

$$\lambda_P = 1.47 \sqrt{\frac{E}{f_y}}, \text{ para } \frac{P_d}{0.9P_y} > 0.125$$

$$\frac{P_d}{0.9P_y} = \frac{1092.96}{0.9 \times 149 \times 25} = 0.33$$

$$P_d / (0.9 \times P_y) > 0.207$$

$$\lambda_P = 1.47 \sqrt{\frac{20500}{25}} = 42.1$$

$$h/t_v \leq \lambda_P \text{ (passa)}$$

- c) - Estado limite de momento de plastificação em relação ao eixo "x" quando a viga-coluna trabalha como viga

$$M_{ux} = M_{pL} = f_y Z_x = 1964 \times 25 = 49100 \text{ kNcm}$$

- d) - Estado limite de flambagem em relação ao eixo "x" quando a viga-coluna trabalha como coluna

$$G_2 = 1.0 \quad (\text{para engastamento})$$

$$G_4 = \frac{I_{x(24)}/L_{24} + I_{x(40)}/L_{40}}{I_{x(34)}/L_{34}}$$

$$G_4 = \frac{(28192/600) + (28192/500)}{(15867/1000)} = 6.5$$

$$k_x = 1.75 \quad (\text{valor encontrado em ábaco em função de "G}_2\text{" e "G}_4\text{"})$$

$$\lambda = \frac{k_x L}{r_x} \sqrt{\frac{f_y}{\pi^2 E}}$$

$$\lambda = \frac{1.75 \times 600}{13.7} \sqrt{\frac{25}{\pi^2 \times 20500}} = 0.85$$

$$\lambda < 1.5$$

$$f_{cr} = \left[0.658^{\lambda^2} \right] f_y$$

$$f_{cr} = \left[0.658^{(0.85)^2} \right] 25 = 18.5 \text{ kN/cm}^2$$

$$P_u = A_g f_y = 149 \times 18.5 = 2756.5 \text{ kN}$$

- e) - Carga de Euler em relação ao eixo "x"

- considerando pórtico indeslocável

$$G_2 = 1.0 \quad (\text{como no item 2.8.1-d})$$

$$G_4 = 6.5 \quad (\text{como no item 2.8.1-d})$$

$$k_x = 0.85 \quad (\text{valor encontrado em ábaco em})$$

função de "G₂" e "G₄")

$$P_{ex} = \frac{\pi^2 EA_g}{(k_x L/r_x)^2}$$

$$P_{ex} = \frac{\pi^2 \times 20500 \times 149}{(0.850 \times 600 / 13.7)^2}$$

$$P_{ex} = 21754.1 \text{ kN}$$

- considerando pórtico deslocável

$$G_2 = 1.0 \quad (\text{como no item 2.8.1-d})$$

$$G_4 = 6.5 \quad (\text{como no item 2.8.1-d})$$

$$k_x = 1.75 \quad (\text{valor encontrado em ábaco em função de "G}_2\text{" e "G}_4\text{"})$$

$$P_{ex} = \frac{\pi^2 EA_g}{(k_x L/r_x)^2}$$

$$P_{ex} = \frac{\pi^2 \times 20500 \times 149}{(1.75 \times 600 / 13.7)^2} = 5132.2 \text{ kN}$$

f) - Fator de amplificação dos momentos (B₁) para considerar o efeito "P-δ" em pórtico indeslocável

$$B_1 = \frac{C_{mx}}{1 - P_d/P_{ex}} \geq 1.0$$

$$C_{mx} = 0.6 - 0.4r$$

$$r = 4588.72 / 9137.00 = 0.50 \quad (\text{positivo, a curvatura é reversa})$$

$$C_{mx} = 0.6 - 0.4 \times 0.50 = 0.40$$

$$B_1 = \frac{0.40}{1 - 1092.96/21754.1} = 0.42$$

$B_1 < 1.0$, portanto fazer $B_1 = 1.0$

- g) - Fator de amplificação dos momentos (B_2) para considerar o efeito "P- Δ " em pórtico deslocável

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_d}{\sum P_{ex}}}$$

$$B_2 = \frac{1}{1 - (2 \times 1092.96) / (2 \times 5132.2)} = 1.27$$

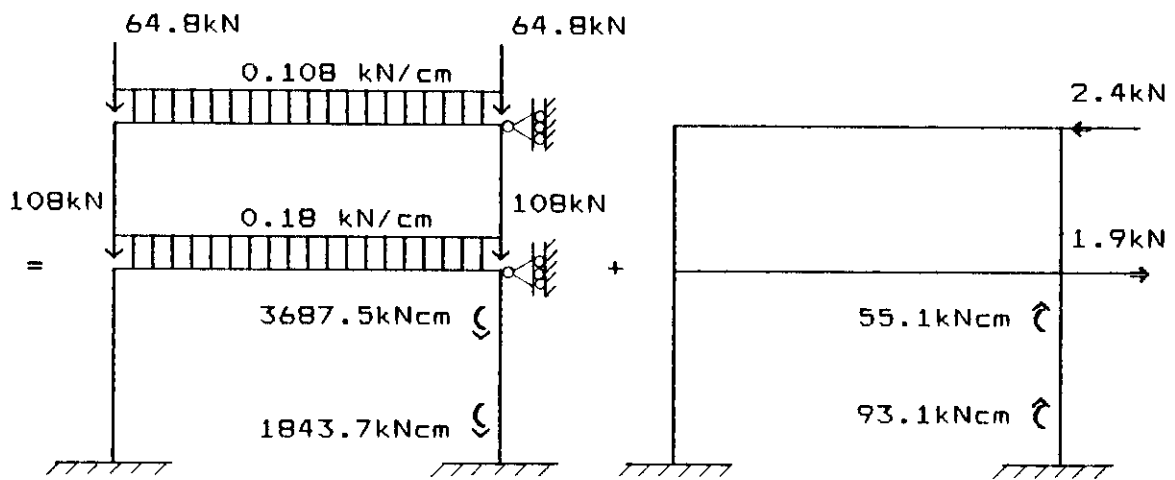
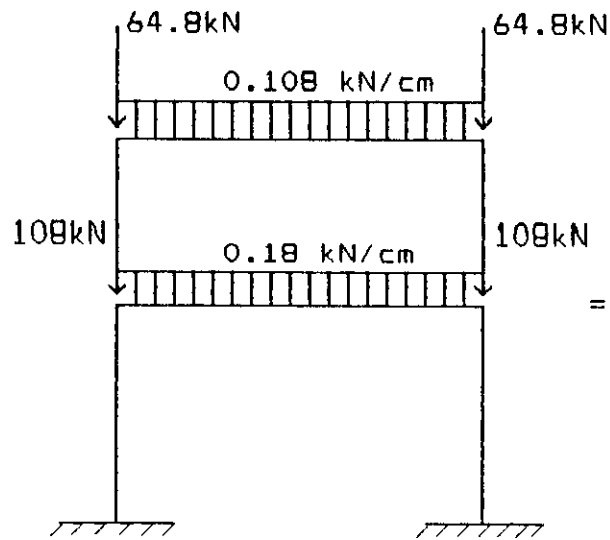
- h) - Momento máximo amplificado

$$M_{max} = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt}$$

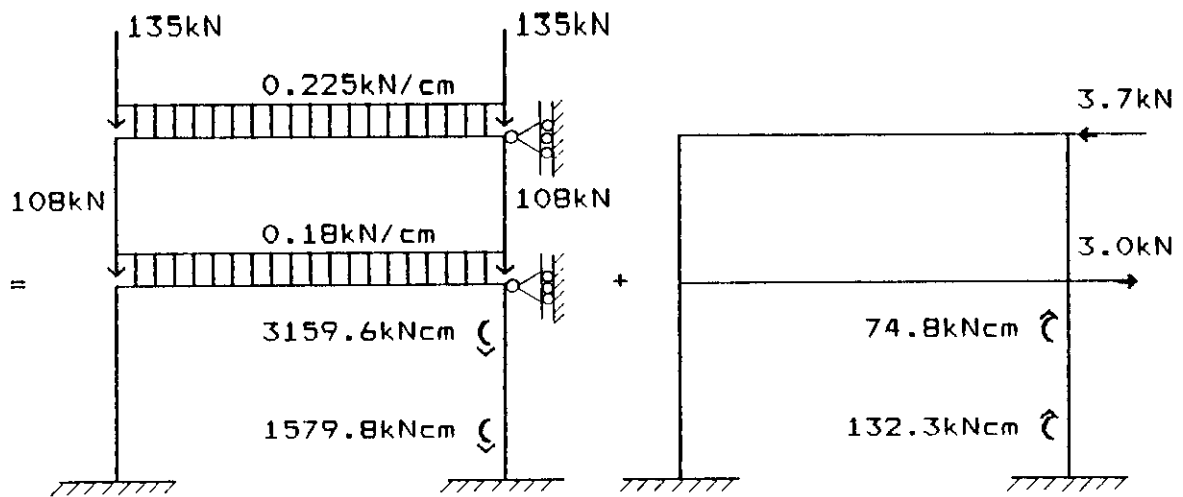
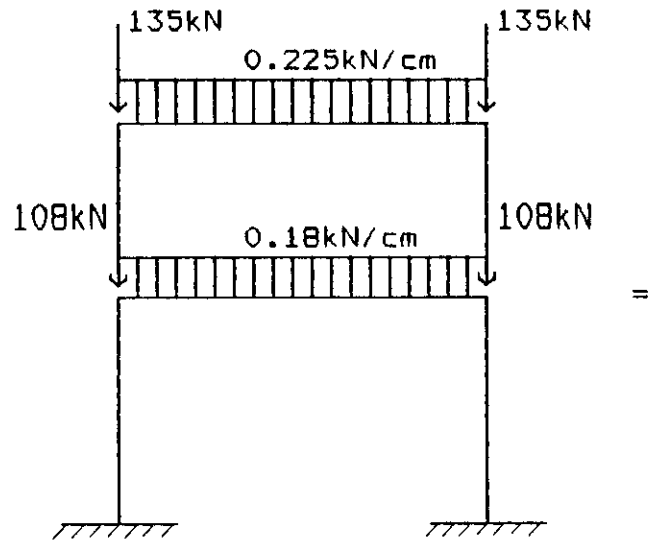
M_{nt} = momento na peça assumindo não existir translação no pórtico (no lateral translation) calculado usando análise elástica de primeira ordem.

M_{lt} = momento na peça assumindo translação lateral do pórtico (lateral translation) calculado usando análise elástica de primeira ordem.

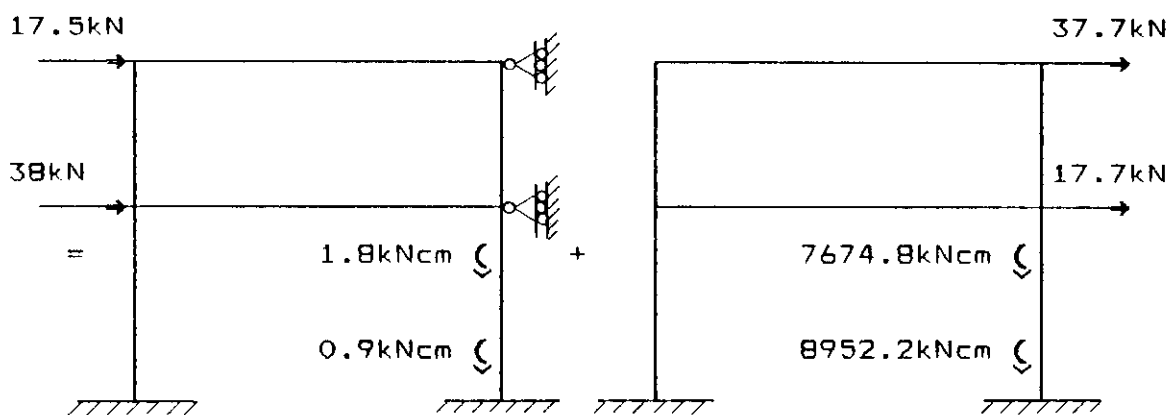
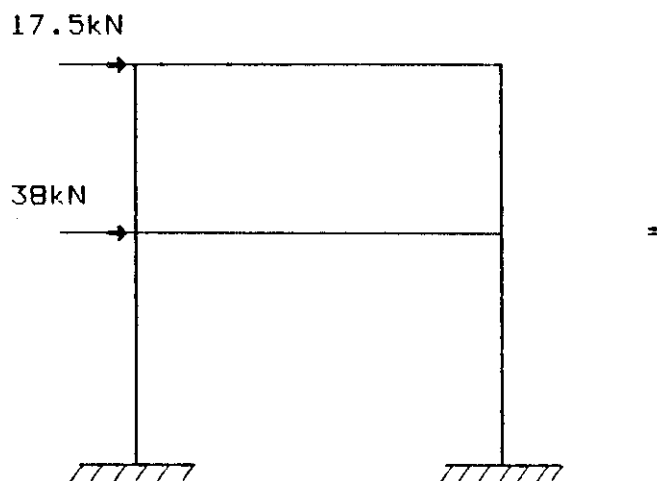
-peso próprio



- sobrecarga



- vento



Resultados dos momentos na barra $\bar{24}$

(+) anti-horário

(-) horário

Carregamentos	Pórtico indeslocável		Pórtico deslocável	
	M_{24}	M_{42}	M_{24}	M_{42}
	kNcm	kNcm	kNcm	kNcm
G	1843.7	3687.5	-93.1	-55.1
Q	1579.8	3159.6	-132.3	-74.8
Q_v	0.9	1.8	8952.2	7674.8

Combinções das ações			
Pórtico indeslocável			
$C_1 = 1.2G + 1.6Q$		$C_2 = 1.2G + 0.5Q + 1.3Q_v$	
M_{24}	M_{42}	M_{24}	M_{42}
kNcm	kNcm	kNcm	kNcm
4740.12	9480.36	3003.51	6007.14
Pórtico deslocável			
-323.4	-185.8	11459.99	9873.72

$$M_{\max} = B_1 M_{1nt} + B_2 M_{2lt}$$

$$(M_{\max})_{24} = 1.0 \times 4740.12 + 1.27 \times (-323.4) = 4329.40 \text{ kNcm}$$

$$(M_{\max})_{42} = 1.0 \times 9480.36 + 1.27 \times (-185.8) = 9244.39 \text{ kNcm}$$

1) - Verificação da estabilidade da viga-coluna

$$\frac{P_d}{\phi_c P_u} = \frac{1092.96}{0.85 \times 2756.5} = 0.47 \geq 0.2, \text{ então:}$$

$$\frac{P_d}{\phi_c P_u} + \frac{8}{9} \left[\frac{M_{\max(x)}}{\phi_b M_{ux}} \right] \leq 1.0$$

$$\frac{1092.96}{0.85 \times 2756.5} + \frac{8}{9} \left[\frac{9244.39}{0.9 \times 49100} \right] = 0.65$$

$$0.65 \leq 1.0 \quad (\text{passa})$$

- j) - Verificação do escoamento nas extremidades da viga-coluna

Sendo $P_d / \phi_c P_u \geq 0.2$ a verificação ao escoamento não é aplicável nas extremidades da viga-coluna.

2.9.2 - Comportamento fora do plano de flexão

- a) - Verificação do estado limite de flambagem local da mesa

Esta verificação foi feita no item 2.9.1-a.

$$b/t_f \leq \lambda_p \quad (\text{passa})$$

- b) - Verificação do estado limite de flambagem local da alma

Esta verificação foi feita no item 2.9.1-b.

$$h/t_v \leq \lambda_p \quad (\text{passa})$$

- c) - Estado limite de flambagem lateral com torção, quando a viga-coluna trabalha como viga

$$L_p = 1.75 r_y \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$$L_p = 1.75 \times 7.57 \times \sqrt{\frac{20500}{25}} = 379.4 \text{ cm}$$

$$L_r = \frac{r_y X_1}{(f_y - f_r)} \sqrt{1 + \sqrt{1 + X_2 (f_y - f_r)^2}}$$

$$X_1 = \frac{\pi}{W_x} \sqrt{\frac{E I_T A}{2}} = \frac{\pi}{1762} \sqrt{\frac{(20500)^2 \times 0.385 \times 156 \times 149}{2}}$$

$$X_1 = 2444.9 \text{ kN/cm}^2$$

$$X_2 = 4 \frac{C_\omega}{I_y} \left(\frac{W_x}{GI_T} \right)^2 = 4 \frac{1936596}{8555} \left(\frac{1762}{0.385 \times 20500 \times 156} \right)^2$$

$$X_2 = 0.00185 \text{ cm}^4/\text{kN}$$

$$L_r = \frac{7.57 \times 2444.9}{(25 - 11.6)} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 0.00185 \times (25 - 11.6)^2}}$$

$$L_r = 2027.2 \text{ cm}$$

$$L_p < L_b < L_r, \quad 379.4 < 600.0 < 2027.2$$

$$M_r = (f_y - f_r) W_x = (25 - 11.6) \times 1762 = 23610.8 \text{ kNcm}$$

$$M_{ux} = C_b \left[M_p - (M_p - M_r) \left(\frac{L_b - L_p}{L_r - L_p} \right) \right] \leq M_{pL}$$

$$\left(\begin{array}{l} 9137.00 \text{ kNcm} \\ \vdots \\ 4588.72 \text{ kNcm} \end{array} \right.$$

$r > 0$ (curvatura reversa)

$$\left(\begin{array}{l} 9137.00 \text{ kNcm} \\ \vdots \\ 4588.72 \text{ kNcm} \end{array} \right.$$

$$C_b = 1.75 + 1.05r + 0.3r^2 \leq 2.3$$

$$r = 4588.72 / 9137.00 = 0.50$$

$$C_b = 1.75 + 1.05 \times 0.50 + 0.3 \times (0.50)^2 = 2.35$$

$$2.35 > 2.3, \quad \text{então } C_b = 1.0$$

$$M_{ux} = 1.0 \times \left[49100 - (49100 - 23610.8) \left(\frac{600.0 - 379.4}{2027.2 - 379.4} \right) \right]$$

$$M_{ux} = 45687.6 \text{ kNcm}$$

- d) - Estado limite de flambagem em relação ao eixo "y" quando a viga-coluna trabalha como coluna

$k_y = 1.0$ (nesta direção as vigas não estão engastadas no pórtico)

$$\lambda = \frac{k_y L}{r_y} \sqrt{\frac{f_y}{\pi^2 E}} = \frac{1.0 \times 600}{7.57} \sqrt{\frac{25}{\pi^2 \times 20500}} = 0.88$$

$\lambda < 1.5$, então:

$$f_{cr} = \left[0.658^{\lambda^2} \right] f_y = \left[0.658^{(0.88)^2} \right] \times 25 = 18.1 \text{ kN/cm}^2$$

$$P_u = A_g f_{cr} = 149 \times 18.1 = 2696.9 \text{ kN}$$

- e) - Verificação da estabilidade da viga-coluna

$$\frac{P_d}{\phi_c P_u} = \frac{1092.96}{0.85 \times 2696.9} = 0.48 \geq 0.2 \text{ , então:}$$

$$\frac{P_d}{\phi_c P_u} + \frac{8}{9} \left[\frac{M_{\max(x)}}{\phi_b M_{ux}} \right] \leq 1.0$$

$$\frac{1092.96}{0.85 \times 2696.9} + \frac{8}{9} \left[\frac{9244.39}{0.9 \times 45687.6} \right] = 0.68$$

$0.68 \leq 1.0$ (passa)

- f) - Verificação do escoamento nas extremidades da viga-coluna

Sendo $P_d / \phi_c P_u > 0.2$ na norma AISC/LRFD a verificação ao escoamento não é aplicável.

2.10 - Verificação da viga-coluna $\bar{24}$ de acordo com a norma
CAN3 - S16.1 - M84

Os esforços mais desfavoráveis são fornecidos pela
combinação "C₂" (item 2.5) e estes são iguais a:

$$\begin{aligned}P_d &= -889.39 \text{ kN} \\(M_{dx})_{24} &= 13104.43 \text{ kNcm} \\(M_{dx})_{42} &= 15847.18 \text{ kNcm}\end{aligned}$$

2.10.1 - Comportamento no plano de flexão

a) - Verificação do estado limite de flambagem local da
mesa

$$\frac{b}{t_f} = \frac{(30/2)}{1.9} = 7.9$$

$$\lambda_p = \frac{170}{\sqrt{f_y \text{ (MPa)}}} = \frac{170}{\sqrt{250}} = 10.8$$

$$b/t_f \leq \lambda_p \quad (\text{passa})$$

b) - Verificação do estado limite de flambagem local da
alma

$$\frac{h}{t_v} = \frac{(32 - 2 \times 1.9)}{1.25} = 22.6$$

$$\lambda_p = \frac{1180}{\sqrt{f_y \text{ (MPa)}}} \left[1 - 0.43 \frac{P_d}{P_y} \right], \text{ para } \frac{P_d}{P_y} > 0.15$$

$$\frac{P_d}{P_y} = \frac{889.39}{140 \times 25} = 0.25$$

$$0.25 > 0.15$$

$$\lambda_p = \frac{1180}{\sqrt{250}} \left[1 - 0.43 \times 0.25 \right] = 66.6$$

$$h/t_v \leq \lambda_p \quad (\text{passa})$$

- c) - Estado limite de momento de plastificação em relação ao eixo "x" quando a viga-coluna trabalha como viga

$$M_{ux} = M_{pL} = f_y Z_x = 1964 \times 25 = 49100 \text{ kNcm}$$

- d) - Estado limite de flambagem em relação ao eixo "x" quando a viga-coluna trabalha como coluna

$$G_2 = 1.0 \quad (\text{como no item 2.8.1-d})$$

$$G_4 = 6.5 \quad (\text{como no item 2.8.1-d})$$

$$k_x = 1.75 \quad (\text{valor encontrado em ábaco em função de "G}_2\text{" e "G}_4\text{"})$$

$$\lambda = \frac{k_x L}{r_x} \sqrt{\frac{f_y}{\pi^2 E}} = \frac{1.75 \times 600}{13.7} \sqrt{\frac{25}{\pi^2 \times 20500}}$$

$$\lambda = 0.85$$

$$0.15 < \lambda \leq 1.0, \text{ então:}$$

$$P_u = A_g f_y (1.035 - 0.202\lambda - 0.222\lambda^2)$$

$$P_u = 149 \times 25 \times (1.035 - 0.202 \times 0.85 - 0.222 \times (0.85)^2)$$

$$P_u = 2618.3 \text{ kN}$$

- e) - Carga de Euler em relação ao eixo "x"

$$P_{ex} = \frac{\pi^2 E A_g}{(k_x L / r_x)^2} = \frac{\pi^2 \times 20500 \times 149}{(1.75 \times 600 / 13.7)^2} = 5132.2 \text{ kN}$$

f) - Verificação da estabilidade da viga-coluna

$$\frac{P_d}{\phi P_u} + \frac{C_{mx} M_{dx}}{\phi M_{ux} (1 - P_d/P_{ex})} \leq 1.0$$

$$C_{mx} = 0.85 \quad (\text{pórtico deslocável})$$

$$\frac{889.39}{0.9 \times 2618.3} + \frac{0.85 \times 15847.18}{0.9 \times 49100 \times (1 - 889.39/5132.2)} = 0.75$$

$$0.75 \leq 1.0 \quad (\text{passa})$$

g) - Verificação do escoamento nas extremidades da viga-coluna

$$\frac{P_d}{\phi P_u} + \frac{0.85 M_{dx}}{\phi M_{ux}} \leq 1.0$$

$$\frac{889.39}{0.9 \times 149 \times 25} + \frac{0.85 \times 15847.18}{0.9 \times 49100} = 0.57$$

$$0.57 \leq 1.0 \quad (\text{passa})$$

2.10.2 - Comportamento fora do plano de flexão

a) - Verificação do estado limite de flambagem local da mesa

Esta verificação foi feita no item 2.10.1-a.

$$b/t_f \leq \lambda_p \quad (\text{passa})$$

b) - Verificação do estado limite de flambagem local da alma

Esta verificação foi feita no item 2.10.1-b.

$$h/t_v \leq \lambda_p \quad (\text{passa})$$

c) - Estado limite de flambagem lateral com torção quando a viga-coluna trabalha como viga

$$M = \frac{\pi}{\omega L} \sqrt{EI_y GI_T + \left(\frac{\pi E}{L}\right)^2 I_y C_\omega}$$

$$\omega = 0.6 - 0.4r \geq 0.4 \quad (\text{para curvatura reversa})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 15847.18 \text{ kNcm} \\ 13104.43 \text{ kNcm} \end{array} \right.$$

$$r = \frac{13104.43}{15847.18} = 0.83$$

$$\omega = 0.6 - 0.4 \times 0.83 = 0.27$$

$$0.27 \leq 0.4 \quad , \text{ então fazer } \omega = 1.0$$

$$M = \frac{\pi}{600} \sqrt{(20500)^2 \times 0.385 \times 8555 \times 156 + \left(\frac{\pi \times 20500}{600}\right)^2 \times 8555 \times 1936596}$$

$$M = 105607.6 \text{ kNcm}$$

$$M_{pL} = 49100 \text{ kNcm}$$

$$\frac{2}{3} M_{pL} = \frac{2 \times 49100}{3} = 32733.3 \text{ kNcm}$$

$$M > \frac{2}{3} M_{pL} \quad , \text{ então:}$$

$$M_{ux} = 1.15 M_{pL} \left[1 - \frac{0.28 M_{pL}}{M} \right] \leq M_{pL}$$

$$M_{ux} = 1.15 \times 49100 \times \left[1 - \frac{0.28 \times 49100}{105607.6} \right] = 49114.4 \text{ kNcm}$$

$$M_{ux} > M_{pL} \quad , \text{ então fazer } M_{ux} = 49100 \text{ kNcm}$$

- d) - Estado limite de flambagem em relação ao eixo "y" quando a viga-coluna trabalha como coluna

$$k_y = 1.0 \text{ (nesta direção as vigas não estão engastadas no pórtico)}$$

$$\lambda = \frac{k_y L}{r_y} \sqrt{\frac{f_y}{\pi^2 E}} = \frac{1.0 \times 600}{7.57} \sqrt{\frac{25}{\pi^2 \times 20500}}$$

$$\lambda = 0.88$$

0.15 < λ < 1.0 , então:

$$P_u = A_g f_y (1.035 - 0.202\lambda - 0.222\lambda^2)$$

$$P_u = 149 \times 25 \times (1.035 - 0.202 \times 0.88 - 0.222 \times (0.88)^2)$$

$$P_u = 2552.8 \text{ kN}$$

- e) - Carga de Euler em relação ao eixo "x"

Esta carga foi calculada no item 2.10.1-e.

$$P_{ex} = 5132.2 \text{ kN}$$

- f) - Verificação da estabilidade da viga-coluna

$$\frac{P_d}{\phi P_u} + \frac{C_{mx} M_{dx}}{\phi M_{ux} (1 - P_d/P_{ex})} \leq 1.0$$

$$C_{mx} = 0.85 \text{ (pórtico deslocável)}$$

$$\frac{889.39}{0.9 \times 2552.8} + \frac{0.85 \times 15847.18}{0.9 \times 49100 (1 - 889.39/5132.2)} = 0.76$$

$$0.76 < 1.0 \text{ (passa)}$$

- g) - Verificação do esmagamento nas extremidades da viga-coluna

Esta verificação foi feita no item 2.10.1-g.

$$0.57 < 1.0 \quad (\text{passa})$$

2.11 - Verificação da viga-coluna 24 de acordo com a norma da ECCS/81

Os esforços mais desfavoráveis são fornecidos pela combinação "C₄" (item 2.6) e estes são iguais a:

$$\begin{aligned} P_d &= -1098.39 \text{ kN} \\ (M_{dx})_{24} &= 11232.16 \text{ kNcm} \\ (M_{dx})_{42} &= 15045.59 \text{ kNcm} \end{aligned}$$

2.11.1 - Comportamento no plano de flexão

a) - Verificação do estado limite de flambagem local da mesa

$$\frac{b}{t_f} = \frac{(30/2)}{1.9} = 7.9$$

$$\lambda_p = 17.5 \sqrt{\frac{235}{f_y (\text{N/mm}^2)}} = 17.5 \sqrt{\frac{235}{250}} = 16.9$$

$$b/t_f < \lambda_p \quad (\text{passa})$$

b) - Verificação do estado limite de flambagem local da alma

$$\frac{h}{t_v} = \frac{(32 - 2 \times 1.9)}{1.25} = 22.6$$

$$\lambda_p = 43 \sqrt{\frac{235}{f_y (\text{N/mm}^2)}}, \quad \text{para } \frac{P_d}{P_y} \geq 0.27$$

$$\frac{1098.39}{149 \times 25} = 0.29$$

$$0.29 > 0.27$$

$$\lambda_p = 43 \sqrt{\frac{235}{250}} = 41.7$$

$$h/t_v < \lambda_p \quad (\text{passa})$$

- c) - Estado limite de momento de plastificação em relação ao eixo "x" quando a viga-coluna trabalha como viga

$$M_{ux} = M_{pL} = f_y Z_x = 1964 \times 25 = 49100 \text{ kNcm}$$

- d) - Estado limite de flambagem em relação ao eixo "x" quando a viga-coluna trabalha como coluna

Esta carga pode ser calculada seguindo os mesmos procedimentos do item 2.8.1-d.

$$P_u = 2570.3 \text{ kN}$$

- e) - Carga de Euler em relação ao eixo "x"

Esta carga foi calculada no item 2.8.1-e.

$$P_{ex} = 5132.2 \text{ kN}$$

- f) - Verificação da estabilidade da viga-coluna

A norma ECCS assume que os coeficientes de resistências são todos iguais a 1 (um). As imperfeições do material são levadas em consideração através de excentricidades imaginárias "e_x".

A equação de interação da ECCS é dada por:

$$\frac{P_d}{P_u} + \frac{\beta M_{dx} + P_d e_x}{M_{ux} (1 - P_d/P_{ex})} \leq 1.0$$

$$\beta = 0.6 - 0.4r \geq 0.4$$

$$\beta = 0.85 \quad (\text{pórtico deslocável})$$

$$e_x = \left(\frac{P_y}{P_u} - 1 \right) \left(1 - \frac{P_u}{P_{ex}} \right) \frac{Z_x}{A_g}$$

e_x = excentricidade imaginária ou parâmetro de imperfeições que levam em consideração os efeitos combinados de todas as imperfeições tal como imperfeições geométricas, tensões residuais, não homogeneidade, etc.

$$e_x = \left(\frac{149 \times 25}{2570.3} - 1 \right) \left(1 - \frac{2570.1}{5132.2} \right) \frac{1964}{149} = 2.96 \text{ cm}$$

$$\frac{1098.39}{2570.3} + \frac{0.85 \times 15045.59 + 1098.39 \times 2.96}{49100(1 - 1098.39/5132.2)} = 0.84$$

$$0.84 < 1.0 \quad (\text{passa})$$

g) - Verificação do esmagamento nas extremidades da viga-coluna

$$\frac{P_d}{P_y} + \frac{M_{dx}}{M_{ux}} \leq 1.0$$

$$\frac{1098.39}{149 \times 25} + \frac{15045.59}{49100} = 0.60$$

$$0.60 < 1.0 \quad (\text{passa})$$

2.11.2 - Comportamento fora do plano de flexão

a) - Verificação do estado limite de flambagem local da mesa

Esta verificação foi feita no item 2.11.1-a.

$$b/t_f < \lambda_p \quad (\text{passa})$$

- b) - Verificação do estado limite de flambagem local da alma

Esta verificação foi feita no item 2.11.1-b.

$$h/t_v < \lambda_p \quad (\text{passa})$$

- c) - Estado limite de flambagem lateral com torção quando a viga-coluna trabalha como viga

$$M_{ux} = \alpha_f \frac{M}{\sqrt[n]{(M/W_x)^n + (\alpha_f)^n}}$$

n = fator do sistema = 2.5 (para todos os tipos de seções)

α = fator de forma para flexão em torno do eixo de maior inércia = 1.12

$$M = C_b \left(\frac{\pi}{L} \right) \sqrt{EI_y GI_T} \sqrt{1 + (\pi/k)^2}$$

$$k = L \sqrt{\frac{GI_T}{EI_y}}$$

$$k = 600 \sqrt{\frac{0.385 \times 20500 \times 156}{20500 \times 8555}} = 50.3$$

$$C_b = 1.75 + 1.05r + 0.3r^2 \leq 2.3$$

$$r = 11232.16/15045.59 = 0.75 \quad (\text{curvatura reversa})$$

$$C_b = 1.75 + 1.05 \times 0.75 + 0.3 \times (0.75)^2 = 2.7$$

2.7 > 2.3 , então fazer $C_b = 1.0$

$$M = 1.0 \times \left(\frac{\pi}{600} \right) \sqrt{(20500)^2 \times 0.385 \times 8555 \times 156} \sqrt{1 + (\pi/50.3)^2}$$

$$M = 77240.9 \text{ kNcm}$$

$$M_{ux} = 1.12 \times 25 \frac{77240.9}{\sqrt{(77240.9/1762)^{2.5} + (1.12 \times 25)^{2.5}}}$$

$$M_{ux} = 44069.6 \text{ kNcm}$$

d) - Estado limite de flambagem em relação ao eixo "y" quando a viga-coluna trabalha como coluna

Esta carga pode ser calculada seguindo os mesmos procedimentos do item 2.8.2-d.

$$P_u = 2272.3 \text{ kN}$$

e) - Carga de Euler em relação ao eixo "x"

Esta carga foi determinada no item 2.8.1-e.

$$P_{ex} = 5132.2 \text{ kN}$$

f) - Verificação da estabilidade da viga-coluna

$$\frac{P_d}{P_u} + \frac{\beta M_{dx} + P_d e_x}{M_{ux} (1 - P_d/P_{ex})} \leq 1.0$$

$$\beta = 0.6 - 0.4r \geq 0.4$$

$$\beta = 0.85 \text{ (pórtico deslocável)}$$

$$e_x = \left(\frac{149 \times 25}{2272.3} - 1 \right) \left(1 - \frac{2272.3}{5132.2} \right) \frac{1964}{149} = 4.69$$

$$\frac{1098.39}{2272.3} + \frac{0.85 \times 15045.59 + 1098.39 \times 4.69}{44069.6 (1 - 1098.39/5132.2)} = 1.001$$

$$1.001 \cong 1.0 \quad (\text{passa})$$

g) - Verificação do esmagamento nas extremidades da viga-coluna

Esta verificação foi feita no item 2.11.1-g.

$$0.60 < 1.0 \quad (\text{passa})$$

2.12 - Quadros resumos

Combinações mais desfavoráveis	
NBR 8800 / 86	$C_4 = 1.3G + 1.5Q + 0.84Q_v$
AISC / LRFD / 86	$C_1 = 1.2G + 1.6Q$
CAN3 - S16.1 - M84	$C_2 = 1.25G + 1.05Q + 1.05Q_v$
ECCS / 81	$C_4 = 1.3G + 1.5Q + 0.75Q_v$

Estados limites de flambagem local				
NBR 8800	FLM	$b/t_f = 7.9$	$\lambda_P = 10.9$	$b/t_f < \lambda_P$
	FLA	$h/t_v = 22.6$	$\lambda_P = 42.1$	$h/t_v < \lambda_P$
AISC/LRFD	FLM	$b/t_f = 7.9$	$\lambda_P = 10.9$	$b/t_f < \lambda_P$
	FLA	$h/t_v = 22.6$	$\lambda_P = 42.1$	$h/t_v < \lambda_P$
CAN3	FLM	$b/t_f = 7.9$	$\lambda_P = 10.8$	$b/t_f < \lambda_P$
	FLA	$h/t_v = 22.6$	$\lambda_P = 66.6$	$h/t_v < \lambda_P$
ECCS	FLA	$b/t_f = 7.9$	$\lambda_P = 16.9$	$b/t_f < \lambda_P$
	FLM	$h/t_v = 22.6$	$\lambda_P = 41.7$	$h/t_v < \lambda_P$

Estados limites de flambagem lateral com torção (FLT)		
NBR 8800	M_{ux}	48421.60 kNcm
AISC/LRFD	M_{ux}	45687.60 kNcm
CAN3	M_{ux}	49114.40 kNcm
ECCS	M_{ux}	44069.60 kNcm

Estados limites de flambagem por flexão			
NBR 8800	eixo "x"	P_u	2570.30 kN
	eixo "y"	P_u	2272.30 kN
AISC/LRFD	eixo "x"	P_u	2756.50 kN
	eixo "y"	P_u	2696.90 kN
CAN3	eixo "x"	P_u	2618.30 kN
	eixo "y"	P_u	2552.80 kN
ECCS	eixo "x"	P_u	2570.30 kN
	eixo "y"	P_u	2272.30 kN

Interações da viga-coluna 24		
NBR 8800	Comportamento no plano de flexão	$0.91 < 1.0$
	Comportamento fora do plano de flexão	$0.97 < 1.0$
	Escoamento nas extremidades	$0.69 < 1.0$
AISC/LRFD	Comportamento no plano de flexão	$0.65 < 1.0$
	Comportamento fora do plano de flexão	$0.68 < 1.0$
	Escoamento nas extremidades	não aplicável
CAN3	Comportamento no plano de flexão	$0.75 < 1.0$
	Comportamento fora do plano de flexão	$0.76 < 1.0$
	Escoamento nas extremidades	$0.57 < 1.0$
ECCS	Comportamento no plano de flexão	$0.84 < 1.0$
	Comportamento fora do plano de flexão	$1.001 \cong 1.0$
	Escoamento nas extremidades	$0.60 < 1.0$

Interações utilizando apenas a combinação mais desfavorável $C_4 = 1.3G + 1.5Q + 0.84Q_v$ da NBR 8800		
NBR 8800	Comportamento no plano de flexão	0.91 < 1.0
	Comportamento fora do plano de flexão	0.97 < 1.0
	Escoamento nas extremidades	0.69 < 1.0
AISC/LRFD	Comportamento no plano de flexão	0.82 < 1.0
	Comportamento fora do plano de flexão	0.86 < 1.0
	Escoamento nas extremidades	não aplicável
CAN3	Comportamento no plano de flexão	0.85 < 1.0
	Comportamento fora do plano de flexão	0.87 < 1.0
	Escoamento nas extremidades	0.63 < 1.0
ECCS	Comportamento no plano de flexão	0.86 < 1.0
	Comportamento fora do plano de flexão	1.02 \cong 1.0
	Escoamento nas extremidades	0.62 < 1.0

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

No estudo dos "elementos de aço flexo-comprimidos", constatou-se que os critérios de cálculos utilizados pela "norma brasileira (NBR 8800)" estão em nível de desenvolvimento das melhores normas estrangeiras. Isto porque o seu conteúdo se originou tomando-se por bases a "norma americana (AISC/LRFD/86)" e a "européla (ECCS/81)". A primeira foi adaptada para os casos de "vigas" e "vigas-colunas", e a segunda adaptada para o caso das "colunas".

Uma das principais vantagens da NBR 8800/86 se deve ao fato de que esta possibilita entender, com maior clareza, as deduções de suas formulações, pois estas obedecem em geral as hipóteses e desenvolvimentos matemáticos teóricos. No entanto, por vezes, algumas modificações via resultados de ensaios de laboratórios se fazem necessárias para adaptações aos casos reais.

No período de 1981 a 1986 a NBR 8800 sofreu mudanças significativas, mas, a partir de então, pouco se fez para promover a sua atualização. Desta forma, serão relatados, a seguir, alguns aspectos conclusivos considerados de relevância, quando analisadas as "vigas", as

"colunas" e as "vigas-colunas".

Com relação às "vigas", quando suas formulações são comparadas entre a "norma brasileira" e a "norma americana", observa-se que:

(1) as expressões que verificam a flambagem local, são idênticas em ambas;

(2) as formulações do momento crítico nas fases elástica e inelástica são deduzidas com clareza e são de fácil entendimento;

(3) as formulações que definem os momentos críticos na fase elástica e inelástica são as mesmas em ambas, com exceção do observado no item (4);

(4) existe divergência com relação ao fator " C_b ". A norma brasileira não o utiliza para corrigir o momento crítico na fase inelástica. Pesquisas são necessárias para avaliar quantitativamente o erro cometido nesta simplificação, pois implicitamente está se supondo que " C_b " é sempre igual a 1.0;

(5) a expressão para o fator " C_b " é igual nas duas normas. Como demonstrado na referência [149], esta expressão é conservadora, e as pesquisas sobre este fator continuam;

(6) as formulações que definem o comprimento crítico ou parâmetro de esbeltez " λ_{pd} " são as especificadas na norma AISC/ASD/78. Este parâmetro é susceptível de mudanças mais freqüentes por ser um assunto ainda não definitivamente esclarecido;

(7) as formulações que definem o parâmetro de esbeltez " λ_p " para flambagem lateral com torção, no regime

inelástico de perfis "I" monossimétricos não estão perfeitamente esclarecidas em ambas as normas;

(8) a expressão de " λ_p " para flambagem local de perfis tubulares é um assunto complexo e ainda não está perfeitamente esclarecido em ambas as normas.

Com relação às "colunas" quando suas formulações são comparadas entre a "norma brasileira" e a "norma européia", observa-se que:

(1) as formulações das cargas críticas, na fase elástica e na inelástica, são demonstradas com clareza de entendimento;

(2) as formulações que levam às definições das curvas de flambagem são idênticas nas duas normas;

(3) a norma brasileira introduziu o fator corretivo "Q" nas expressões de " N_n " e " $\bar{\lambda}$ ", prevendo a possibilidade de análise em perfis constituídos de elementos enrijecidos e não-enrijecidos, susceptíveis à pós-flambagem. Conseqüentemente, a flambagem local pode ser atingida em um ou mais elementos de placas da seção transversal antes de atingir a flambagem global da coluna. O fator "Q" é adotado com base na norma AISC/LRFD/86;

(4) a definição da resistência de colunas reais, em ambas as normas, limita-se em encontrar corretamente o fator adimensional das imperfeições " η " (constante de Perry);

(5) a norma brasileira não possui a curva de flambagem " a_0 ". Como esta curva prevê o dimensionamento de colunas com aços de alta resistência foram feitas adaptações. Este requisito é previsto através de ajustes feitos na tabela de "classificação de seções e curvas de

flambagem" daquela norma;

(6) a resistência de cálculo " N_n " é corrigida, adotando-se o coeficiente de resistência $\phi_c = 0.90$. Este coeficiente é baseado na norma AISC/LRFD/86 sendo que esta adota $\phi_c = 0.85$;

(7) a norma brasileira, a primeira vista, deixa transparecer que o dimensionamento de colunas de perfis "U", "L" e "T" limita-se apenas na verificação da resistência através da curva de flambagem "C". No entanto, para estes perfis, o centro de cisalhamento não coincide com o centro de gravidade. Então, pode vir a ocorrer a flambagem por flexo-torção devendo-se, neste caso, recorrer ao anexo "J", conforme determina o item 5.3.7 da NBR 8800/86.

Com relação às "vigas-colunas" quando suas formulações são comparadas entre a "norma brasileira" e as "normas americana" "AISC/ASD/78" e "AISC/LRFD/86", observa-se que:

(1) a norma brasileira adotou as antigas equações de interação para verificações da estabilidade e da resistência ao escoamento da norma AISC/ASD/78. Estas fórmulas foram adaptadas utilizando-se os coeficientes de resistência " ϕ " adotados pela norma AISC/LRFD/86;

(2) as equações de interação utilizadas pela norma NBR 8800 e a AISC/ASD/78 consideram os efeitos " $P-\delta$ " e " $P-\Delta$ " indiscriminadamente usando " $C_m = 0.85$ " na equação de interação para a estabilidade, quando se tem estrutura deslocável;

(3) a norma AISC/LRFD/86 considera os efeitos " $P-\delta$ " e " $P-\Delta$ " separadamente. Esta aproximação, usualmente, leva também a resultados conservadores. No entanto, esta

aproximação é mais racional do que as aproximações utilizadas pelas normas NBR 8800/86 e AISC/ASD/78, cujo momento total de primeira ordem, dado nas equações, é amplificado pelo fator $C_m / (1 - P/P_{ex}) = 0.85 / (1 - P/P_{ex})$;

(4) as equações de interação utilizadas pela NBR 8800, são mais fáceis de serem entendidas e utilizadas nos cálculos, do que aquelas adotadas pela norma AISC/LRFD/86;

(5) as formulações que definem o parâmetro de esbeltez " λ_p " para alma de perfis "I", "H" e caixão, sujeitos à flexo-compressão são iguais aos utilizados pela norma AISC/ASD/78.

Como observações gerais, em relação aos elementos flexo-comprimidos, conclui-se que:

(1) as regulamentações relativas às combinações das ações da NBR 8800/86 são adaptações feitas a partir da norma européia ECCS/81;

(2) as formulações das relações que limitam a relação " $(b/t)_{max}$ ", as quais possibilitam classificar as seções em classe 1, 2, e 3, ainda constituem um assunto não completamente esclarecido nas normas brasileira e americana;

(3) a equação de interação para a verificação da resistência ao escoamento utilizada pela NBR 8800 é genérica para qualquer tipo de perfil. Esta equação é conservadora tanto para a flexão uniaxial como para a flexão biaxial, quando aplicada a perfis "I" ou "H". Para estes perfis, mais comumente utilizados na prática, a utilização daquela equação leva a supor que estes perfis são idealizados considerando-se a alma como sendo desprezível. Melhores resultados poderiam ser conseguidos, se fosse adotada a equação utilizada pela norma canadense (eq. 164 - cap.4);

(4) a equação de interação (136) do capítulo 4 utilizada para verificar a estabilidade no plano de flexão no regime inelástico fornece boa aproximação, quando comparada com soluções teóricas, porém, para índices de esbeltez baixos, aquela torna-se conservadora;

(5) a equação de interação (154) do capítulo 4 utilizada para verificar a estabilidade fora do plano de flexão no regime inelástico é conservadora, quando comparada com o método dos elementos finitos (ver ref. [27]). Este conservadorismo foi atribuído à natureza linear e aproximada daquela equação e também devido ao fator " C_m " não variar com a carga de compressão axial. Uma equação de interação parabólica foi proposta [27], pois verificou-se que esta fornece resultados com boa precisão, quando comparada com o método dos elementos finitos;

(6) o fator " C_m " utilizado pela norma brasileira ainda possui a restrição $C_m \geq 0.4$. Esta limitação foi retirada da norma AISC/LRFD/86. Na referência [44] mostra-se que a expressão linear (48) do capítulo 4 sem a condição $C_m \geq 0.4$ é válida para vigas-colunas no plano e no espaço e fornece razoável aproximação no regime inelástico;

(7) as equações de interação para a flexão biaxial (156) e (164) do capítulo 4 aplicadas em verificações da estabilidade e da resistência ao escoamento, respectivamente, mostraram ser muito conservadoras para vigas-colunas curtas, conservadoras para vigas-colunas intermediárias, e pouco conservadoras para vigas-colunas longas. Estas conclusões foram possíveis, fazendo-se comparações com resultados obtidos através de métodos numéricos (ver ref. [154]);

(8) melhores resultados para as equações de interação que verificam a estabilidade e a resistência ao escoamento de vigas-colunas em flexão biaxial aplicadas

somente a estruturas indeslocáveis podem ser conseguidos, utilizando-se as equações propostas por Chen [39,40,41,154]. Tais equações são também recomendadas pela norma AISC/LRFD/86:

(9) a atual norma canadense (CAN3-S16.1-89) introduziu uma nova equação de interação, a qual considera os efeitos "P- δ " e "P- Δ ". Assim, os efeitos de segunda ordem devido a deslocamentos transversais das extremidades das vigas-colunas, efeito P- Δ , devem ser diretamente considerados nos dimensionamentos. O método tradicional baseado em comprimentos efetivos foi abandonado nesta norma. Embora as equações de interação adotadas por esta norma e a norma AISC/LRFD/86 tenham pequenas diferenças em suas formulações, observou-se [90] que estas normas fornecem resultados comparativamente próximos;

Neste trabalho, foram enfatizadas as demonstrações das formulações regulamentadas pela norma brasileira (NBR 8800/86) para os elementos de aço flexo-comprimidos. A eficiência de tais formulações somente tornarão possíveis através de suas utilizações em cálculos e execuções de projetos reais. Pesquisas se fazem necessárias para acompanhar e adaptar a norma brasileira ao atual estágio de avanço das normas estrangeiras.

CAPÍTULO 7

BIBLIOGRAFIA

- 1 - AÇO MINAS GERAIS. *Dimensionamento de estruturas de aço para edifícios*. Belo Horizonte: AÇOMINAS, 1989. 110p. (Coletânea Técnica do Uso do Aço, v.5)
- 2 - ADAMS, P.F., KRENTEZ, H.A., KULAK, G.L. *Limit states design in structural steel*. Ontario: Universal Offset Markhan, 1979. 303p.
- 3 - AL-MASHARY, F., CHEN, W.F. Simplified second-order inelastic analysis for steel frames. *The Structural Engineer*, v.69, n.23, p.395-399, December, 1991.
- 4 - ALLEN, D.E. Limit states design: what do we really want? *Canadian Journal of Civil Engineering*, v.8, p.44-50, 1981.
- 5 - AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. *Allowable stress design: specification for the design, fabrication and erection of structural steel for buildings*. Chicago: AISC, 1978.
- 6 - AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. *Load and*

resistance factor design specification for structural steel buildings. Chicago: AISC, 1986.

- 7 - ANDERSON, J.M., TRAHAIR, N.S. Stability of monosymmetric beams and cantilevers. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.98, n.1, January, 1972.
- 8 - ANDRADE, S.A.L. Normalização em estruturas de aço: o estágio atual e as necessidades futuras. In: SEMINÁRIO SOBRE OS EDIFÍCIOS DE ESTRUTURAS METÁLICAS, São Paulo, junho, 1986. *Anais.* São Paulo: EPUSP/ABCEM, 1986. p.80-89
- 9 - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NB-14: *Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios.* Rio de Janeiro: ABNT, 1981.
- 10 - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR-8800: *Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios (método dos estados limites).* Rio de Janeiro: ABNT, 1986.
- 11 - AUGUSTI, G., BARATTA, A. Teoria probabilistica della resistenza delle aste compresse. *Costruzioni Metalliche*, n.1, p.44-58, 1971.
- 12 - AUSTIN, W.J. Strength and design of metal beam-columns. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.87, n.4, p.1-32, April, 1961.
- 13 - BAKER, S.J., HORNE, M.R., HEYMAN, J. *The steel skeleton: plastic behaviour and design.* London: Cambridge University, 1965. v.2, 408p.
- 14 - BALLIO, G., MAZZOLANI, F.M. *Theory and design of steel structures.* London: Chapman and Hall, 1983. 632p.
- 15 - BEEDLE, L.S. *Diseno plastico de marcos de acero.*

México: Compañía Editorial Continental, 1970. 452p.

- 16 - BEER, H. Nuove curve per il calcolo di aste compresse. *Costruzioni Metalliche*, n.5, p.338-344, 1970.
- 17 - BEER, H., SCHULZ, G. Bases théoriques des courbes européennes de flambement. *Costruzioni Metalliche*, n.6, p.436-452, 1970.
- 18 - BENJAMIN, J.R., LIND, N.C. A probabilistic basis for a deterministic code. *ACI Journal*, p.857-865, November, 1969.
- 19 - BERNARD, A. Results of research ECSC: buckling tests on I-section beams rolled in high-yield steel. *Acier-Stahl-Steel*, n.4, p.157-160, 1978.
- 20 - BERNARD, M.A., DA RIN, M.M. Results of research ECSC: effect of the shape of the stress-strain curve upon the performance of steel frames. *Acier-Stahl-Steel*, n.3, p.103-113, 1978.
- 21 - BIJLAARD, P.P. Buckling of plates under non-homogeneous stress. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.83, n.3, p.1-31, July, 1957.
- 22 - BIRNSTIEL, C. Experiments on H-columns under biaxial bending. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.94, n.10, p.2429-2449, October, 1968.
- 23 - BIRNSTIEL, C., MICHALOS, J. Ultimate load of H-columns under biaxial bending. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.89, n.2, p.161-197, April, 1963.
- 24 - BJORHOVDE, R., GALAMBOS, T.V., RAVINDRA, M.N. LRFD criteria for steel beam-columns. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.104, n.9, p.1371-1387,

September, 1978.

- 25 - BLEICH, F. *Buckling strength of metal structures*. New York: McGraw-Hill, 1952. 508p.
- 26 - BOWLES, J.E. *Structural steel design*. São Paulo: McGraw-Hill, 1988. 536p.
- 27 - BRADFORD, M.A., TRAHAIR, N.S. Inelastic buckling of beam-columns with unequal end moments. *Journal of Constructional Steel Research*, v.5, p.195-212, 1985.
- 28 - BRESLER, B., LIN, T.Y., SCALZI, J.B. *Diseno de estructuras de acero*. México: Editorial Limusa, 1988. 926p.
- 29 - BRUSH, D.O., ALMROTH, B.O. *Buckling of bars, plates and shells*. New York: McGraw-Hill, 1975. 379p.
- 30 - CAMPANARI, F.A. *Teoria das estruturas*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1985. v.2
- 31 - CÂMPORA, G.F. *Cálculo plástico*. Argentina, 1967. 428p.
- 32 - CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION. *CAN3-S16.1-M84: Steel structures for buildings (limit states design)*. Ontario, 1984. 186p.
- 33 - CARPENA, A. Détermination des limites élastiques pour l'analyse du flambement. *Costruzioni Metalliche*, n.6, p.453-457, 1970.
- 34 - CHAJES, A. *Principles of structural stability theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1974. 336p.
- 35 - CHARLES, B. Experimentes on H-columns under biaxial bending. *Journal of the Structural Division*, ASCE,

v.94, n.10, p.2429-2449, October, 1968.

- 36 - CHEN, W.F. Aproximate solution of beam-columns. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.97, n.2, p.743-751, February, 1971.
- 37 - CHEN, W.F. Further studies of inelastic beam-column problem. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.97, n.2, p.529-544, February, 1971.
- 38 - CHEN, W.F. General solution of inelastic beam-column problem. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.96, n.4, p.421-442, August, 1970.
- 39 - CHEN, W.F., ATSUTA, T. Interaction equations for biaxially loaded sections. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.98, n.5, p.1035-1052, May, 1972.
- 40 - CHEN, W.F., LUI, E.M. Stability design criteria for steel members and frames in the United States. *Journal of Constructional Steel Research*, v.5, p.31-74, 1985.
- 41 - CHEN, W.F., LUI, E.M. *Structural stability*. New York: Elsevier Science, 1987. 490p.
- 42 - CHEN, W.F., SANTATHADAPORN, S. Curvature and solution of eccentrically load columns. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.95, n.1, p.21-40, 1969.
- 43 - CHEN, W.F., SANTATHADAPORN, S. Review of column behavior under biaxial loading. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.94, n.12, p.2999-3021, December, 1968.
- 44 - CHEN, W.F., ZHOU, S. C_m factor in load and resistance factor design. *Journal of Structural Engineering*,

ASCE, v.113, n.8, p.1738-1754, August, 1987.

- 45 - CHEONG-SIAT-MOY, F. Consideration of secondary effects in frame design. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.103, n.10, p.2005-2019, October, 1977.
- 46 - CHEONG-SIAT-MOY, F. K-factor paradox. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.112, n.8, p.1747-1760, August, 1986.
- 47 - CLARK, J.W., HILL, H.N. Lateral buckling of beams and girders. *Transactions ASCE*, v.127, part 2, p.180, 1962.
- 48 - CLARK, J.M., ROLF, R.L. Design of aluminum tubular members. *Journal of Structural Division*, ASCE, v.90, n.6, p.259-289, December, 1964.
- 49 - COHEUR, P. Évolution des caractéristiques de l'acier destiné à la construction métallique. *Acier-Stahl-Steel*, n.3, p.119-128, 1965.
- 50 - COOPER, S.E., CHEN, A.C. *Designing steel structures, methods and cases*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985. 762p.
- 51 - CORNELL, C.A. A probability-based structural code. *ACI Journal*, p.974-985, December, 1969.
- 52 - COTTA, J.M. A oferta de perfis estruturais de aço. In: SEMINARIO SOBRE OS EDIFÍCIOS DE ESTRUTURAS METÁLICAS, São Paulo, junho, 1986. *Anais*. São Paulo: EPUSP/ABCEM, 1986. p.1-9
- 53 - CUK, P.E., BRADFORD, M.A., TRAHAIR, N.S. Inelastic lateral buckling of steel beam-columns. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v.13, p.693-699, 1986.

- 54 - CULVER, G.C. Exact solution of the biaxial bending equations. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.92, n.2, p.63-83, April, 1966.
- 55 - DARKOV, A., KOUZNETSOV, V. *Curso de mecânica das estruturas*. Porto: Edições Lopes da Silva, 1982. 680p.
- 56 - DERRY, T.K., WILLIAMS, T.I. *A short history of technology*. London: Oxford University Press, 1973. 782p.
- 57 - DIAS, A.T. *Curso de cálculo infinitesimal*. Ouro Preto: Fundação Gorceix, 1962. 841p.
- 58 - DOWLING, P.J., KNOWLES, P.R., OWENS, G.W. *Structural steel design*. London: Butterworths, 1988. 399p.
- 59 - DUBAS, P., GEHRI, E. *Behaviour and design steel, plated structures*. Brussels: ECCS-CECM-EKS, 1986. 247p.
- 60 - DUTHEIL, J. Verifica delle aste compresse. *Costruzioni Metalliche*, n.4, p.266-275, 1966.
- 61 - EUROPEAN CONVENTION FOR CONSTRUCTION STEELWORK (ECCS). *European recommendations for steel construction*. London, 1981. 355p.
- 62 - FEODOSIEV, V.I. *Resistencia de materiales*. Moscu: MIR, 1988. 583p.
- 63 - FOUCRIAT, J. A propos de l'étude théorique du flambement des barras réelles. *Costruzioni Metalliche*, n.1, p.59-61, 1971.
- 64 - FRASER, D.J. Evaluation of effective length factors in braced frames. *Canadian Journal of Civil*

Engineering, v.10, p.18-26, 1983.

- 65 - FREITAS, F.M. Utilização de perfis I de abas paralelas em projetos de edifícios pesados. *Metalurgia*, ABM, v.33, n.230, p.10-11, 1977.
- 66 - FREUDENTHAL, A.M., GARRELTS, J.M., SHINOZUKA, M. The analysis of structural safety. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.92, n.1, p.267-325, February, 1966.
- 67 - FUKUMOTO, Y., ITOH, Y. Evaluation of multiple column curves using the experimental data-base approach. *Journal of Constructional Steel Research*, v.3, n.3, p.1-3, 1983.
- 68 - FUSCO, P.B. Ensino e pesquisa na construção metálica. In: SEMINÁRIO SOBRE OS EDIFÍCIOS DE ESTRUTURAS METÁLICAS, São Paulo, junho, 1986. *Anais*. São Paulo: EPUSP/ABCCEM, 1986. p.110-117
- 69 - GALAMBOS, T.V. *Guide to stability design criteria for metal structures*. New York: John Wiley & Sons, 1988. 786p.
- 70 - GALAMBOS, T.V. History of steel beam design. *AISC Engineering Journal*, p. 141-147, 1977.
- 71 - GALAMBOS, T.V. Inelastic lateral buckling of beams. *Journal of Structural Division*, ASCE, v.89, n.5, p.217-242, October, 1963.
- 72 - GALAMBOS, T.V. *Structural members and frames*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1968. 373p.
- 73 - GONÇALVES, R.M. Estudo de barras solicitadas à compressão. In: SEMINÁRIO "USO DO AÇO NA CONSTRUÇÃO", 3., São Paulo, SP, 1988. *Anais*.

p.173-186

- 74 - HAAIJER, G. Plate buckling in the strain-hardening range. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.83, n.2, p.1-47, April, 1957.
- 75 - HAAIJER, G., THURLIMANN, B. On inelastic buckling in steel. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.84, n.2, p.1-48, April, 1958.
- 76 - HAAS, A.M., BOUMA, A.L. *Shell research*. New York: Interscience, 1961. 364p.
- 77 - HARSTEAD, G.A., BIRNSTIEL, C., LEU, K. Inelastic H-columns under biaxial bending. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.94, n.10, p.2371-2398, October, 1968.
- 78 - HARTOG, J.P.D. *Advanced strength of materials*. New York: McGraw-Hill, 1952. 379p.
- 79 - HEREDIA, O.B.L. *Estructuras de acero*. México: Editorial Limusa, 1980. 673p.
- 80 - HETTICH, W. Les poutrelles IPE d'après l'Euronorm 19, les avantages du point de vues caractéristiques mécaniques et de la mise en oeuvre. *Acier-Stahl-Steel*, v.10, p.431-436, 1963.
- 81 - HIBBELER, R.C. *Mecânica - Estática*. Rio de Janeiro: Campus, 1986. 475p.
- 82 - HIGDON, A. et al. *Mecânica dos materiais*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981. 549p.
- 83 - HILL, H.N. Lateral buckling of channels and Z-beams. *Transactions ASCE*, v.119, p.829-841, 1954.

- 84 - HORNE, M.R. The flexural-torcional buckling of members of symmetrical I-section under combined thrust and unequal terminal moments. *Quart. J. Mech. and Applied Math.*, v.7, n.4, p.400,-426, 1954.
- 85 - HORNE, M.R. The stanchion problem in frame structures designed according to ultimate carrying capacity. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part 3, v.5, n.1, p.105-160, Apr. 1956.
- 86 - HOWELLS, D.A. Probabilistic concepts. *ACI Journal*, p.470-476, June, 1970.
- 87 - JACQUET, J. Essais de flambement et exploitation statistique. *Costruzioni Metalliche*, n.6, p.416-435, 1970.
- 88 - JOHNSTON, B.G. *Guide to stability design criteria for metal structures*. New York: John Wiley & Sons, 1976. 616p.
- 89 - KENNEDY, D.J.L. Normalization for metal structures. In: SEMINARIO SOBRE OS EDIFICIOS DE ESTRUTURAS METÁLICAS, São Paulo, junho, 1986. *Anais*. São Paulo: EPUSP/ABCEM, 1986. p.71-79
- 90 - KENNEDY, D.J.L., PICARD, A., BEAULIEU, D. New Canadian provisions for the design of steel beam-columns. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v.17, p.873-893, 1990.
- 91 - KENNEDY, D.J.L., QURESHI, S. Design strengths beam-columns: discussion. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v.15, p.136-140, 1988.
- 92 - KETTER, R.L. Further studies of the strength of beam-columns. *Transactions ASCE*, v.87, n.6, p.135, August, 1961.

- 93 - KIRBY, P.A., NETHERCOT, D.A. *Design for structural stability*. London: Granada, 1979. 165p.
- 94 - KITIPORNCHAI, S., TRAHAIR, N.S. Buckling properties of monosymmetric I-beams. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.106, n.5, p.941-957, May, 1980.
- 95 - KITIPORNCHAI, S., WANG, C.M., TRAHAIR, N.S. Buckling of monosymmetric I-beams under moment gradient. *Journal of the Structural Engineering*, ASCE, v.112, n.4, p.781-799, April, 1986.
- 96 - KITIPORNCHAI, S., WONG-CHUNG, A.D. Inelastic buckling of welded monosymmetric I-beams. *Journal of the Structural Engineering*, ASCE, v.113, n.4, p.740-756, April, 1987.
- 97 - KOZÁK, J. Le dimensionnement économique des barres en acier à haute résistance sollicitées au flambage. *Acier-Stahl-Steel*, n.6, p.301-305, 1966.
- 98 - LAIER, J.E. *Introdução à instabilidade das estruturas (flambagem)*. São Carlos: EESC-USP, 1988. 50p.
- 99 - LAMBOOY, W. Elements soumis à un effort de compression excentré. *Acier-Stahl-Steel*, n.2, p.85-89, 1974.
- 100 - LAY, M.G. Flange local buckling in wide-flange shapes. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.91, n.6, p.95-116, December, 1965.
- 101 - LAY, M.G., GALAMBOS, T.V. Inelastic steel beams under uniform moment. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.91, n.6, p.67-93, December, 1965.
- 102 - LEE, G.C., FINE, D.S., HASTREITER, W.R. Inelastic

- torcional buckling of H-columns. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.93, n.5, p.295-307, October, 1967.
- 103 - LEE, G.C., GALAMBOS, T.V. Post-buckling strength of wide-flange beams. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.88, n.1, p.59-75, February, 1962.
- 104 - LOUREIRO, R.C., BELLEI, I.H. Utilização de perfis de abas paralelas na fabricação de estruturas metálicas. *Metalurgia*, ABM, v.33, n.230, p.8-10, 1977.
- 105 - LU, L.W., KAMALVAND, H. Ultimate strength of laterally loaded columns. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.94, n.6, p.1509-1524, June, 1968.
- 106 - LUKEY, A.F., ADAMS, P.F. Rotation capacity of beams under moment gradient. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.95, n.6, p.1173-1188, June, 1969.
- 107 - MACGINLEY, T.J., ANG, T.C. *Structural steelwork design to limit state theory*. London: Butterworths, 1987. 359p.
- 108 - MACGREGOR, J.G., HAGE, S.E. Stability analysis and design of concrete frames. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.103, n.10, p.1953-1971, October, 1977.
- 109 - MANUAL brasileiro para cálculo de estruturas metálicas - VI. Belo Horizonte: Editora o Lutador, 1986. 413p.
- 110 - MANUAL brasileiro para cálculo de estruturas metálicas - VII. Belo Horizonte: Editora o Lutador, 1986. 420p.

- 111 - MAQUOI, R., RONDAL, J. Analytical formulation of new European buckling curves. *Acier-Stahl-Steel*, n.1, p.23-28, 1978.
- 112 - MARQUES, C.M.C.F.S., RONDAL, J. Effet des imperfections sur les phénomènes d'instabilité des structures en acier. *Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics*, n.451, p.78-99, 1987.
- 113 - MARSHALL, P.J., ELLIS, J.S. Ultimate biaxial capacity of box steel columns. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.96, n.9, p.1873-1887, September, 1970.
- 114 - MAS, E., MASSONNET, C. Part prise par la Belgique dans les recherches expérimentales de la Convention Européenne des Associations de la Construction Métallique sur le flambement centrique des barres en acier doux. *Acier-Stahl-Steel*, n.9, p.393-400. 1966.
- 115 - MASSONNET, C. Etat actuel du probleme du flambement des barras en acier, a la commission VIII (instabilite) de la Convention Européenne de la Construction Métallique. *Acier-Stahl-Steel*, n.10, p.459-466. 1966.
- 116 - MASSONNET, C. Stability considerations in the design of steel columns. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.85, n.7, p.75-111, September, 1959.
- 117 - MASSONNET, C., SAVE, M. *Cálculo plástico de las construcciones*. Barcelona: Montaner y Simon, 1966. 398p.

- 118 - MAZZOLANI, F.M. Influenza delle imperfezioni strutturali sulla instabilità delle colonne in acciaio. *Costruzioni Metalliche*, n.6, p.380-390, 1973.
- 119 - MCGUIRE, W., WINTER, G. *Steel structures*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1968. 1112p.
- 120 - MENGERINGHAUSEN, M. La composition dans l'espace; de la tente des nomades a la couple réticulée en acier. *Acier-Stahl-Steel*, n.7-8, p.333-341, 1966.
- 121 - MERIAM, J.L. *Estática*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1985. 326p.
- 122 - MORI, D.D. *Flexo-torção: barras com seção transversal aberta e paredes delgadas*. São Carlos: EESC-USP, 1988. 117p.
- 123 - MUKHANDOV, K. *Estruturas metálicas*. Moscou: MIR, 1980. 519p.
- 124 - NEAL, B.G. *The plastic methods of structural analysis*. London: Chapman and Hall, 1977. 205p.
- 125 - NETHERCOT, D.A. *Limit states design of structural steelwork*. Berkshire, UK: Van Nostrand Reinhold, 1986. 175p.
- 126 - NETHERCOT, D.A., ROCKEY, K.C. Lateral buckling of beams with mixed end conditions. *The Structural Engineer*, v.51, n.4, p.133-138, April, 1973.
- 127 - NEUFVILLE, R.L., CONNOR, J.J. Postbuckling behavior of thin cylinders. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.94, n.2, p.585-603, April, 1968.

- 128 - OLIVEIRA, A.M.R. Vantagem do uso do aço na construção civil. *Metalurgia*, ABM, v.33, n.230, p.4-5, 1977.
- 129 - PENNA, A.C.G., FERRAZ, M.J.O. Perfis de abas largas e paralelas: fabricação e emprego. *Metalurgia*, ABM, v.230, p.3-4, 1977.
- 130 - PILLAI, S.U. An assessment of CSA standard equations for beam column design. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v.8, p.130-136, 1981.
- 131 - PILLAY, S.U. Hollow tubular beam-columns in biaxial bending. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.97, n.5, p.1399-1406, May, 1971.
- 132 - PISKUNOV, N. *Cálculo diferencial e integral*. Moscou: MIR, 1973. v.1, 448p.
- 133 - PISKUNOV, N. *Cálculo diferencial e integral*. Moscou: MIR, 1973. v.2, 517p.
- 134 - POPOV, E.P. *Resistência dos materiais*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1984. 507p.
- 135 - RACHID, M., MORI, D.D. *Instabilidade: conceitos - aplicação na flambagem por flexão*. São Carlos: EESC-USP, 1989. 130p.
- 136 - RAVINDRA, M.K., GALAMBOS, T.V. Load and resistance factor design for steel. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.104, n.9, p.1337-1353, September, 1978.
- 137 - RODRIGUES, P.R.M., PREU, M.R. Vantagens tecno-econômicas das novas séries de perfis estruturais destinados às construções civis. *Metalurgia*. ABM, v.33, n.230, p.5-8, 1977.

- 138 - RONDAL, J., MAQUOI, R. Single equation for SSRC column-strength curves. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.105, n.1, p.247-250, January, 1979.
- 139 - ROSENBLUETH, E. Slenderness effects in buildings. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.91, n.1, January, p.229-252, 1965.
- 140 - SALES, J.J. *Estruturas metálicas: dimensionamento*. São Carlos: EESC-USP, 1990. 66p. (Curso apresentado na Universidade de Ponta-Grossa - PR)
- 141 - SALMON, C.G., JOHNSON, J.E. *Steel structures: design and behaviour*. New York: Harper & Row, 1990. 1086p.
- 142 - SALVADORI, M.G. Lateral buckling of eccentrically load I-columns. *Transactions ASCE*, v.121, p.1163-1178, 1956.
- 143 - SCHMITKE, C.D., KENNEDY, D.J. Effective lengths of laterally unsupported steel beams. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v.12, p.603-616, 1985.
- 144 - SFINTESCO, D. Fondement expérimental des courbes européennes de flambement. *Costruzioni Metalliche*, n.6, p.409-415, 1970.
- 145 - SHAH, H.C. The rational probabilistic code format. *ACI Journal*, p.690-697, September, 1969.
- 146 - SHAMES, I.H. *Introdução à mecânica dos sólidos*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1983. 556p.
- 147 - SHANLEY, F.R. *Strength of materials*. New York: McGraw-Hill, 1957. 783p.

- 148 - SHERBOURNE, A.N., PANDEY, M.D. Elastic, lateral-torsional stability of beams: moment modification factor. *Journal of Constructional Steel Research*, v.13, p.337-356, 1989.
- 149 - SHERBOURNE, A.N., PANDEY, M.D. Unified v. integrated approaches in lateral-torsional buckling of beams. *The Structural Engineer*, v.67, n.13, 1989.
- 150 - SOHAL, I.S., DUAN, L., CHEN, W.F. Design interaction equations for steel members. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.115, n.7, p.1650-1665, July, 1989.
- 151 - SOUZA, J.M. *Flambagem por flexo-torção*. Rio de Janeiro: PUC-RJ/USIMEC, 1976. (Fascículo 16)
- 152 - SOUZA, J.M. *Torção de perfis abertos*. Rio de Janeiro: PUC-RJ/USIMEC, 1975. 83p. (Fascículo 12)
- 153 - STAMMBACH, R. Le nouveau train à poutrelles à ailes parallèles de l'Usine Saint-Jacques de la Société de Wendel à Hayange. *Acier-Stahl-Steel*, n.6, p.275-280, 1965.
- 154 - TEBEDGE, N., CHEN, W.F. Design criteria for H-columns under biaxial loading. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.100, n.3, p.579-598, March, 1974.
- 155 - TENG, J.G., ROOTTER, J.M. Buckling pressurized axisymmetrically imperfect cylinders under axial loads. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, v.118, n.2, p.229-247, February, 1992.
- 156 - THURLIMANN, B. New aspects concerning inelastic instability of steel structures. *Transactions ASCE*, v.127, p.448-470, 1962.

- 157 - TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.E. *Mecânica dos sólidos*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1986. 450p.
- 158 - TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. *Theory of elastic stability*. Tokyo: Toshio Printing, 1961. 541p.
- 159 - TORROJA, E. Load factors. *ACI Journal*, p.567-572, November, 1958.
- 160 - TRAHAIR, N.S. *The behaviour and design of steel structures*. London: Chapman and Hall, 1979. 320p.
- 161 - TRAHAIR, N.S. Design strengths of steel beam-columns. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v.13, p.639-646, 1986.
- 162 - TRAHAIR, N.S. Design strengths of steel beam-columns: reply. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v.15, p.490-491, 1988.
- 163 - TRAHAIR, N.S., BRADFORD, M.A. Inelastic buckling of beam-columns with unequal end moments. *Journal of Constructional Steel Research*, v.5, p.195-212, 1985.
- 164 - VINNAKOTA, S., AOSHIMA, Y. Inelastic behaviour of rotationally restrained columns under biaxial bending. *The Structural Engineer*, v.52, n.7, p.245-255, July, 1974.
- 165 - VLASSOV, B.Z. *Pieces longues en voiles minces*. Paris: Editions Eyrolles, 1962. 655p.
- 166 - WANG, C.M., KITIPORNCHAI, S. Buckling capacities of monosymmetric I-beams. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.112, n.11, p.2373-2391, November, 1986.

- 167 - WILLEMS, N., EASLEY, J.T., ROLFE, S.T. *Resistência dos materiais*. São Paulo: McGraw-Hill, 1981. 497p.
- 168 - WINTER, G. Strength of thin steel compression flanges. *Transactions ASCE*, v.112, p.527-576, 1947.
- 169 - WORTHINGTON, P.M. The elastic stability of straight I-beams subject to complex loads. *Proceedings of Institution of Civil Engineers*, v.3, n.1, p.46-65, 1954.
- 170 - YOUNG, B.W. Steel column design. *The Structural Engineer*, v.51, n.9, p.323-336, September, 1973.
- 171 - YURA, J.A., GALAMBOS, T.V., RAVINDRA, M.K. The bending resistance of steel beams. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.104, n.9, p.1355-1370, September, 1978.

APÊNDICE A

CONCEITOS BÁSICOS

1 - AÇO ESTRUTURAL

1.1 - Propriedades

Os comportamentos das peças estruturais dependem de suas geometrias, das cargas e das propriedades das seções transversais. Estas dependem de suas formas, das características do material e das deformações residuais devido aos processos de fabricação.

O aço ou, mais precisamente, o aço-carbono é uma liga entre o elemento metálico ferro e o elemento não-metálico carbono. Ele é composto microscopicamente por pequenos cristais, e suas propriedades podem alterar variando-se a relação ferro-carbono e adicionando-se outros elementos de liga como: silício, manganês, níquel e cobre.

Na figura 1, compara-se, através de um conjunto de diagramas tensão-deformação, as características entre o ferro puro e três qualidades de aços. Assim, o ferro é relativamente macio e possui baixa tensão de escoamento em comparação com as tensões de escoamento dos aços. Observa-se

que o módulo de elasticidade se mantém praticamente invariável para todos os aços, no entanto, os limites elásticos aumentam, mas não varia apreciavelmente o comportamento elástico do metal base.

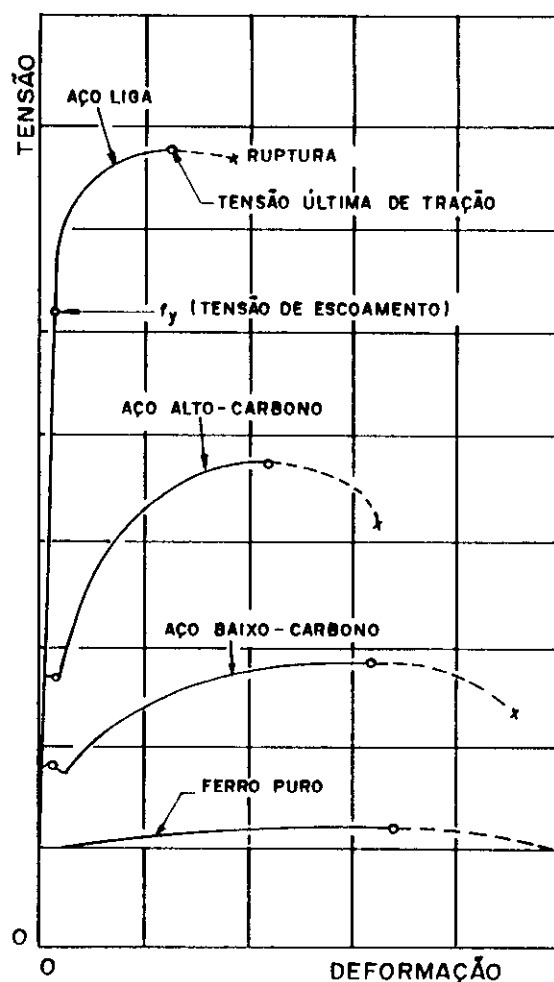


FIG.1 - Diagrama tensão-deformação para o ferro e o aço

O aço estrutural é um material importante nos projetos por possuir características favoráveis de rigidez, resistência e ductilidade. Numa curva típica de tensão-deformação para o aço, (fig.2), nota-se um trecho

linear que obedece a lei de Hooke até atingir o limite de proporcionalidade do material. Acima deste limite, o aço continua a comportar elasticamente, isto é, sem existir deformações permanentes, até atingir o limite elástico. Nos ensaios, é difícil a distinção entre o limite de proporcionalidade e o limite elástico, então, considera-se que estes são coincidentes. Passando-se do regime elástico para o plástico, inicia-se gradualmente o escoamento da seção transversal. Conseqüentemente, pode ser definido o limite de escoamento como sendo a primeira tensão no material menor do que a máxima atingível, em que um aumento ocorre nas deformações sem aumentar as tensões (fig.2).

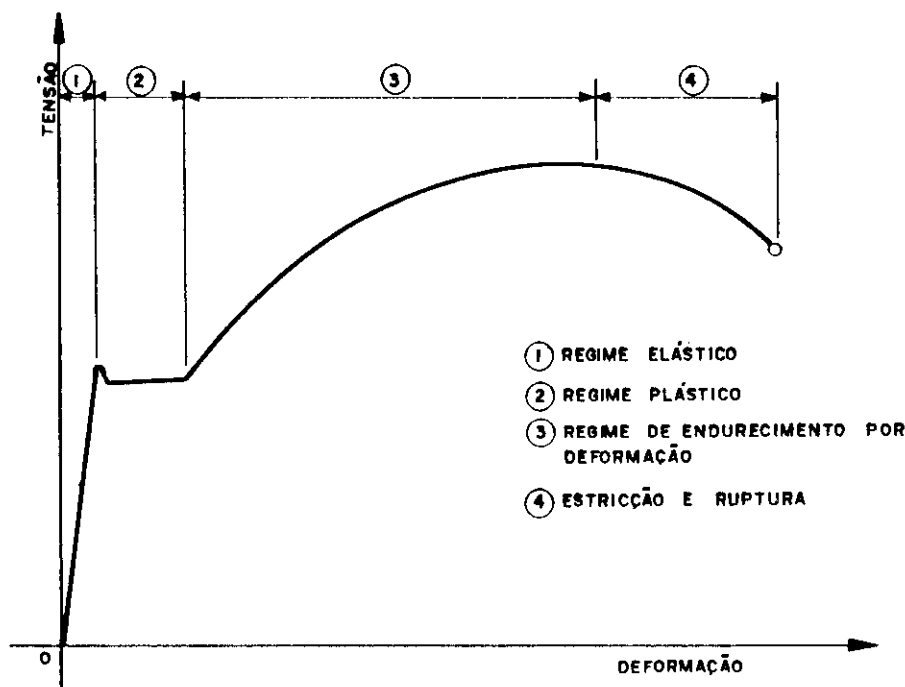
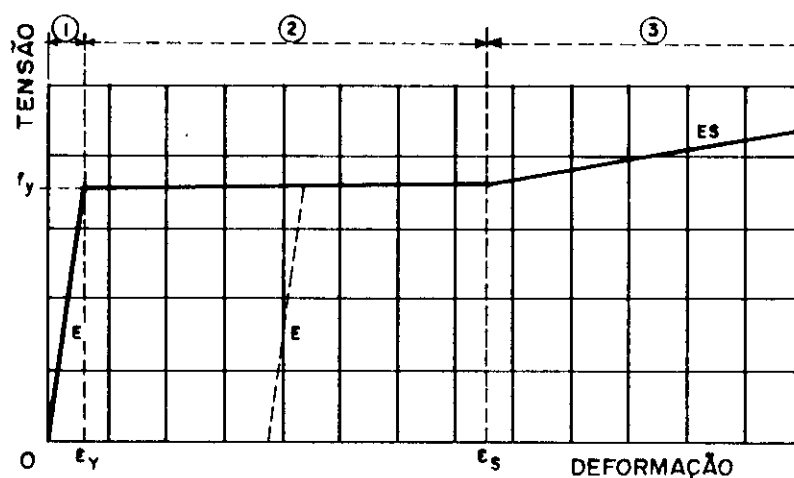


FIG.2 - Diagrama típico tensão-deformação

No trecho reto horizontal, (fig.2), diz-se que o material tornou-se plástico e, a partir do seu final, houve

uma recuperação do material. O corpo de prova atinge o endurecimento por deformação (encruamento), isto é, a capacidade de suportar cargas aumenta até atingir a carga máxima. Neste ponto, a seção transversal do corpo de prova tende a diminuir rapidamente. Conseqüentemente, a capacidade de carga diminui, e o corpo de prova rompe.

Idealizando-se a curva da figura 2 com a escala das deformações aumentada (fig.3) para um aço-carbono, a declividade do trecho linear representará o módulo de elasticidade "E". O trecho horizontal representará a plastificação do material, onde as deformações tenderão para o infinito, teoricamente. A declividade da curva, no início da recuperação do material, representará o módulo de endurecimento por deformação "E_s".



- ① REGIME ELÁSTICO
- ② REGIME PLÁSTICO
- ③ REGIME DE ENDURECIMENTO POR DEFORMAÇÃO

FIG.3 - Diagrama tensão-deformação idealizado

Neste diagrama, (fig.3), ao descarregar o corpo de prova,

após o escoamento ter iniciado, a curva tensão-deformação não retorna por seu caminho original, mas descarregará elasticamente e ficará com deformação permanente, após a remoção total da carga.

Alguns aços, notadamente os aços de alta resistência e temperados, não possuem um limite de escoamento bem definido, mas escoam gradualmente. Como o limite de escoamento é considerado pelos projetistas para marcar o limite estrutural útil, ou seja, um valor arbitrário chamado de resistência ao escoamento, definido como a tensão em que o material possui um desvio especificado a partir da proporcionalidade entre a tensão e a deformação. O termo tensão de escoamento é freqüentemente usado para simbolizar um limite de escoamento ou resistência ao escoamento como aplicável.

A ductilidade é a capacidade de um material em suportar deformações no intervalo plástico sem se romper. Esta propriedade possibilita a aplicação da análise plástica no projeto de estruturas. Permite, ainda, aliviar as sobretensões em partes da estrutura, ao possibilitar o escoamento do elemento de aço, causando, assim, uma "redistribuição de tensões na estrutura". Porém, quando a ductilidade do aço é reduzida, devido à necessidade de detalhes de projetos, ou prática da fabricação, pode resultar a ruptura quebradiça ou fadiga [2,15,72,119,147].

1.2 - Tensões residuais

Os conhecimentos das formas de seções transversais e de curvas tensão-deformação não são suficientes para definir totalmente as respostas dos perfis estruturais, quando sujeitas às ações das cargas. A hipótese de barras ideais, livres de tensões internas, perfeitamente retas e de materiais isotrópicos tem sido abandonada, pois tais barras não existem na prática. Devido aos processos de fabricação, como o resfriamento desigual dos perfis de aço, após a

laminação a quente, o corte a oxigênio, a soldagem, o desempenamento e os processos mecânicos de dobragem dos perfis de chapa fina acabam resultando em tensões residuais nos membros estruturais. Estas devem ser adicionadas às tensões causadas pelas cargas para que se obtenha a distribuição completa das tensões.

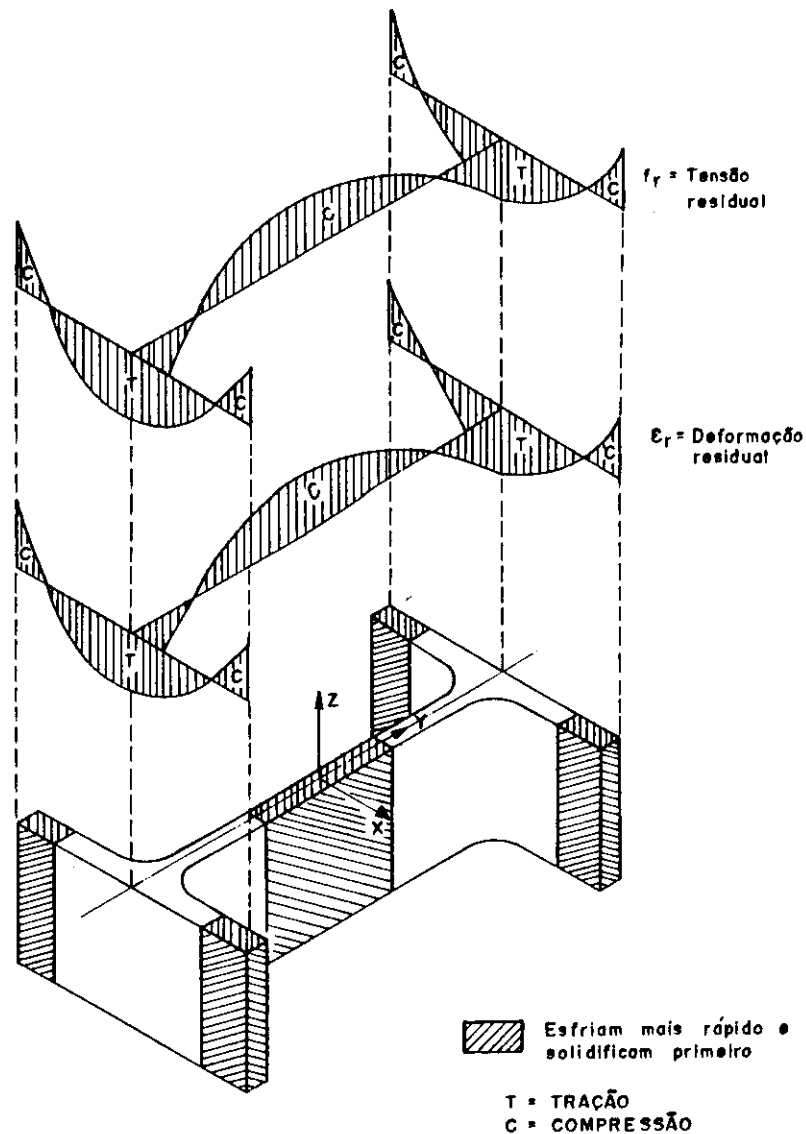


FIG.4 - Tensões residuais após ter completado o resfriamento

Para perfis de abas largas laminados a quente, durante o resfriamento, a região média da alma e os quatro extremos das abas resfriam-se mais rapidamente do que as outras regiões do perfil (fig.4).

Quando a temperatura é suficientemente baixa, o metal se solidifica, e a diferença de temperatura $(t_1 - t_2)$ entre as regiões não-tracejadas e as tracejadas implica numa diferença nas deformações das fibras correspondentes a $\epsilon_t = \alpha_t \cdot (t_1 - t_2)$, onde " α_t " é o coeficiente de dilatação térmica do aço. Após ter completado o resfriamento das regiões não-tracejadas, estas estarão em estado de tração residual enquanto a parte central da alma assim como os extremos das abas estarão em estado de compressão residual (fig.4). Certamente, como não existe força externa atuando no perfil, as tensões residuais são completamente auto-equilibradas, ou seja, a resultante na seção e os seus momentos em relação aos dois eixos principais, são nulos [14,117].

A figura 5 idealiza as distribuições das tensões residuais de três pesquisadores diferentes para o perfil "I" laminado a quente.

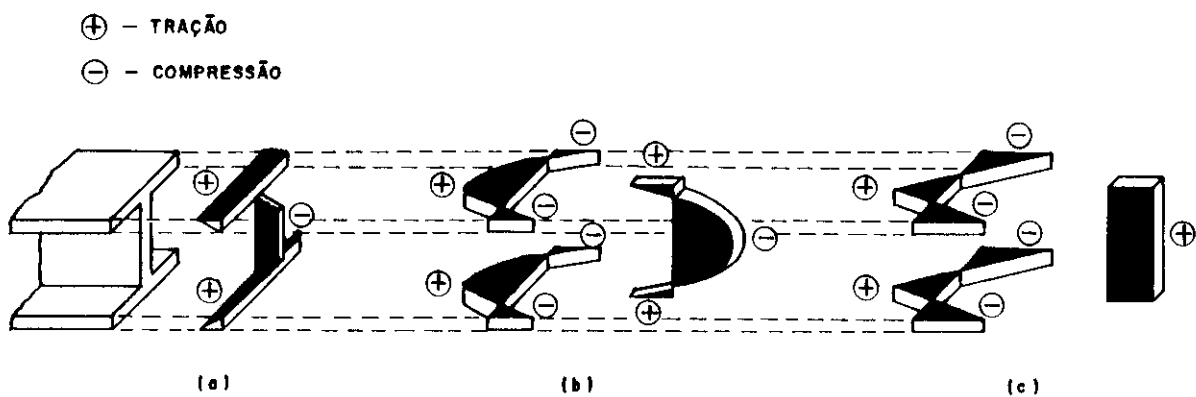


FIG.5 - Curvas de tensões residuais idealizadas por pesquisadores: (a) Massey (Austrália); (b) Young (Cambridge UK) e (c) Galambos.

Os valores e as distribuições das tensões residuais em perfis laminados a quente dependem: do tipo de seção transversal, das temperaturas de laminação, das condições de resfriamento, dos procedimentos de desempenamentos e das propriedades do material. A figura 6 mostra as curvas de distribuição das tensões residuais (ISOTENSÕES) para um perfil "I" laminado a quente.

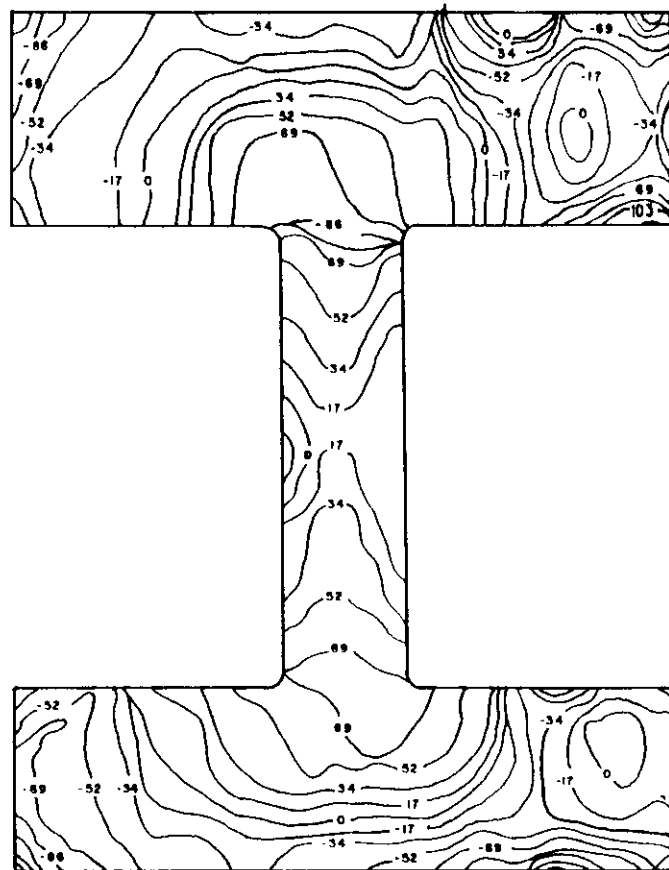


FIG.6 - Distribuição das tensões residuais em curvas de iguais tensões (ISOTENSÕES) em "MPa".

A geometria da seção transversal é mais importante do que o tipo do aço nas distribuições das tensões residuais. Medidas das tensões residuais, em abas de perfis iguais, fabricados com diferentes tipos de aços, mostraram que as distribuições e valores das tensões residuais são semelhantes.

Para fabricar os perfis soldados, utilizam-se de chapas laminadas que provêm das siderúrgicas já com as tensões residuais (fig.7-a). Quando estas chapas são submetidas a uma soldagem longitudinal, verifica-se que as tensões residuais iniciais serão alteradas conforme ilustra a figura 7-b.

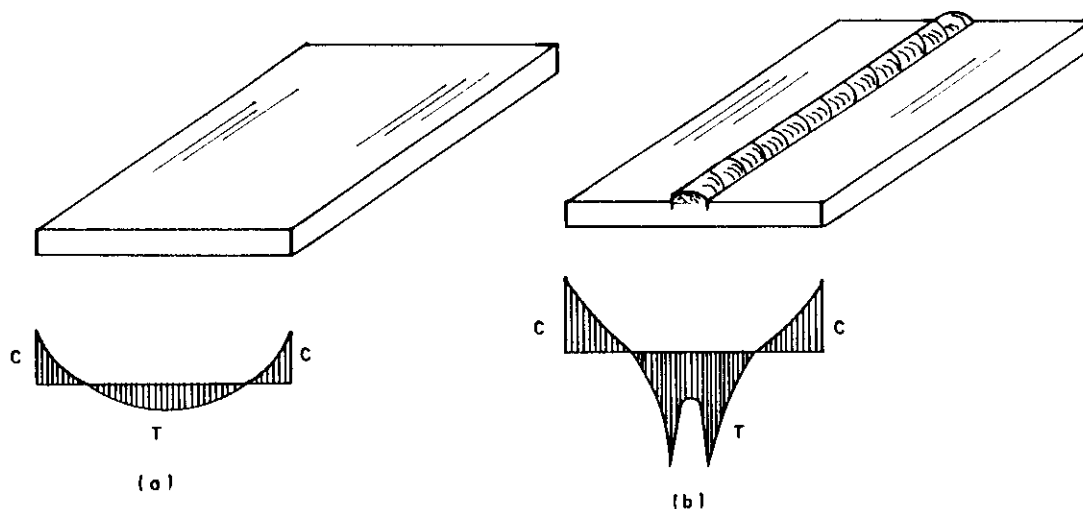


FIG.7 - Tensões residuais em chapa laminada: (a) tensões residuais no topo da superfície, antes da soldagem e (b) tensões residuais no topo da superfície após a soldagem.

Por outro lado, em chapas laminadas sujeitas a processos de oxi-corte, (fig.8-a), as tensões residuais serão alteradas devido à soldagem longitudinal, conforme

ilustra a figura 8-b.

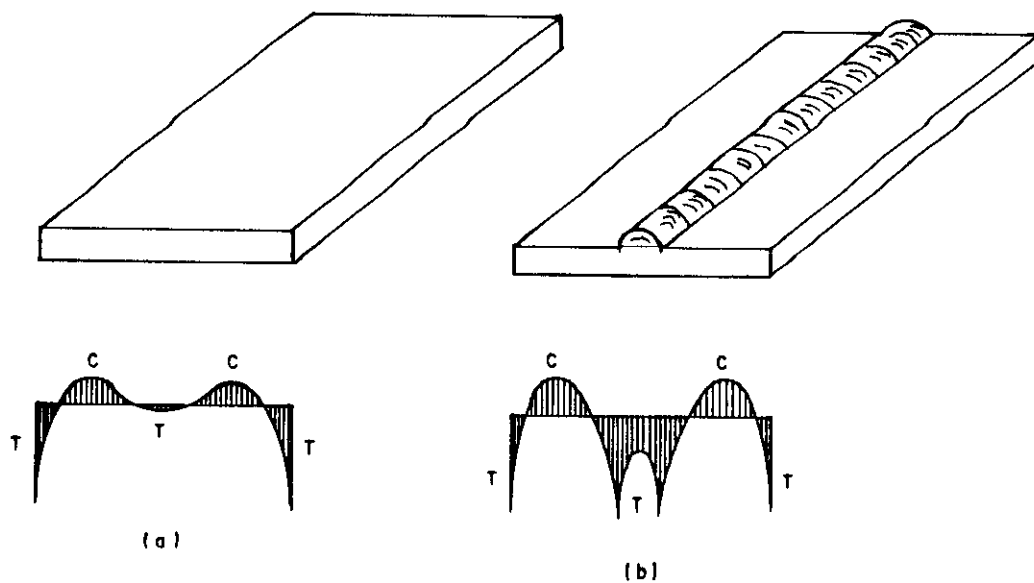


FIG.8 - Tensões residuais em chapa laminada em oxi-corte:
(a) tensões residuais no topo da superfície, antes da soldagem e (b) tensões residuais no topo da superfície após a soldagem.

As tensões residuais resultantes dos processos de soldagem, na fabricação de perfis soldados, têm influências significativas na resistência das seções "I" ou caixão. A soldagem altera as tensões residuais devido ao aquecimento localizado com posterior resfriamento. A seqüência de soldagem, o número de passos de soldas, a voltagem elétrica, a velocidade de soldagem e a temperatura de áreas pré-aquecidas são fatores que influenciam a distribuição das tensões residuais. A figura 9 mostra as curvas de isotensões para um perfil "I" soldado.

Pesquisas demonstraram que o comportamento de perfis soldados com chapas laminadas sujeitas ao oxi-corte possuem resistências comparáveis àquelas de perfis laminados

com características geométricas semelhantes, enquanto que os perfis soldados de chapas laminadas, sem os processos de oxi-corte, tendem a ser comparativamente menos resistentes [69].

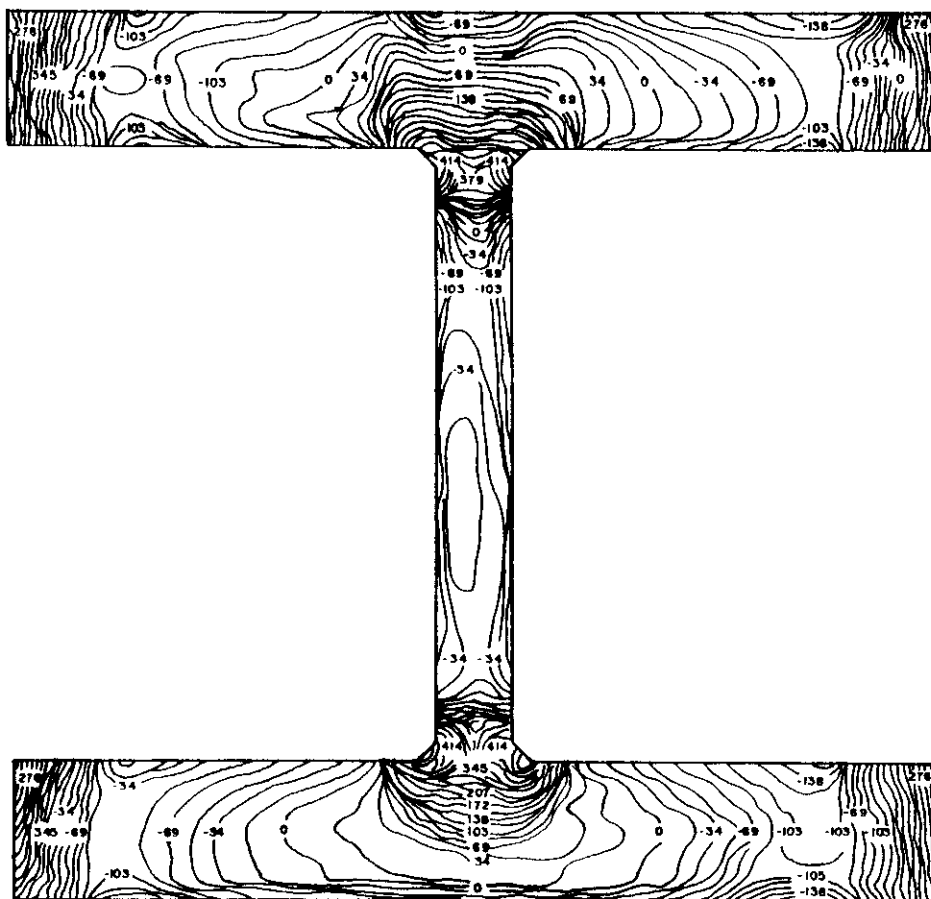


FIG.9 - Distribuição das tensões residuais em curvas de isotensões em "MPa".

Os perfis de chapas finas podem ser obtidos através de chapas laminadas a frio ou a quente. A laminação a frio provoca tensões residuais (fig.10) que variam com a espessura da chapa devido aos processos mecânicos de

laminação.

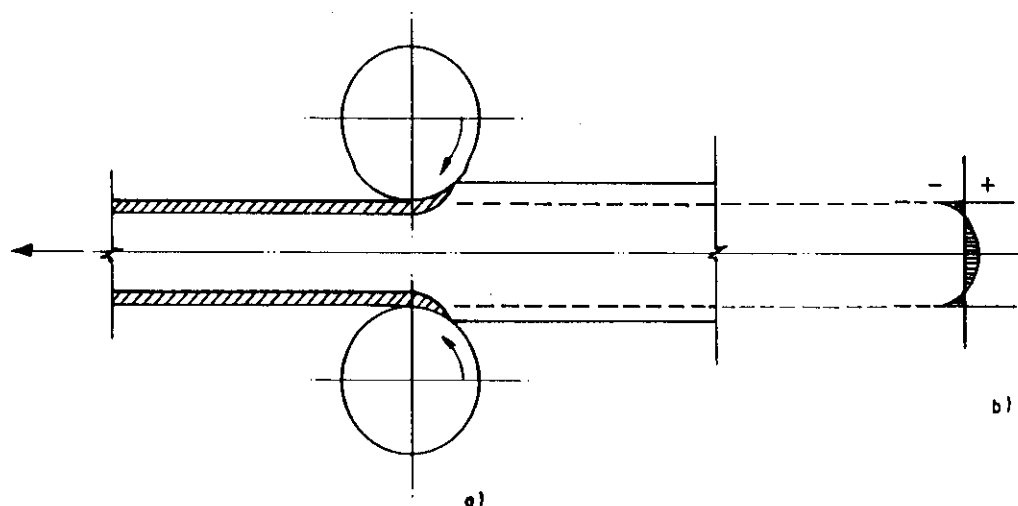


FIG.10 - Tensões residuais em chapa fina: (a) laminação a frio com sentido da laminação da direita para a esquerda e (b) tensões residuais após a laminação.

As fibras externas tendem a alongar, enquanto que as fibras centrais tendem a permanecer indeformáveis, mas podem ocorrer algumas deformações entre as fibras superficiais e as centrais ao longo da espessura. As fibras internas resistem o alongamento das fibras externas. Estas retornam provocando tração nas fibras internas. O resultado é uma distribuição de tensões de compressão na superfície e tensões de tração interna ao longo da espessura (fig.10-b).

Em chapas laminadas a quente, as tensões residuais são originadas pelo resfriamento e sua distribuição é semelhante àquela laminadas a frio, (fig.10-b). De fato, as áreas que resfriam primeiro ficam sujeitas a tensões residuais de compressão, enquanto que a área central, a qual se resfria por último, fica sujeita à tração. Portanto, os perfis de chapa fina podem ser formados por chapas laminadas a frio ou a quente e estarão sujeitos às tensões residuais distribuídas através das espessuras de cada parte que

compõem os perfis. A resultante de tal distribuição de tensões é nula na sua espessura, e seu efeito no comportamento total do perfil pode ser desprezado na maioria dos casos. Porém, tal fato deve ser considerado como um efeito que tende a aumentar o perigo de flambagem local nestes tipos de perfis. Do ponto de vista das tensões residuais pode se dizer que os perfis dobrados de chapas finas são mais acomodados quando comparados com perfis de seções semelhantes laminados a quente. Um segundo tipo de imperfeição importante, nos perfis de chapas dobradas, é o efeito do endurecimento por deformação (encruamento) ao qual o material pode estar sujeito durante os processos de fabricação do perfil. Neste caso, o limite de elasticidade do material aumenta, quando comparado com seu valor original e, como consequência negativa, tem-se uma diminuição da dureza do material nas regiões dos dobramentos.

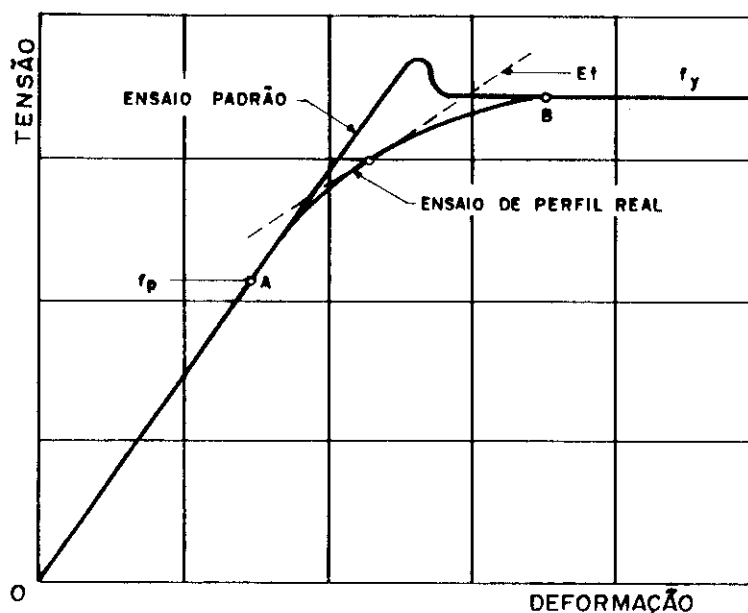


FIG.11 - Influência das tensões residuais no diagrama tensão-deformação

As tensões residuais alteram o diagrama tensão-deformação de um perfil estrutural tomado para ensaio, quando comparado com o diagrama tensão-deformação de um corpo de prova padrão do mesmo material. Se, ao invés de ensaiar um corpo de prova padrão, for ensaiado um trecho curto de um determinado perfil real, obtém-se uma curva realista. Esta inclui o efeito das tensões residuais. Assim, tem-se uma curva tensão-deformação média, onde os valores do módulo de elasticidade tangente obtidos pela curva indicam a presença de tensões residuais, assim como a variação da resistência ao escoamento através da seção (fig.11).

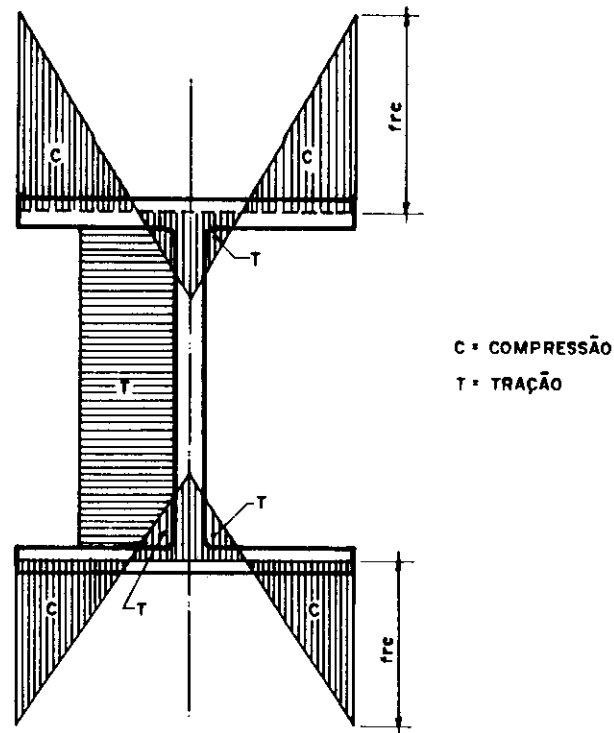


FIG.12 - Distribuição idealizada das tensões residuais

A curva tensão-deformação do perfil real mostra que o seu limite de proporcionalidade é menor do que o limite de proporcionalidade de um corpo de prova padrão. O

diagrama mostra também que, no ensaio do perfil real, o material comporta elasticamente somente até " f_p "; acima deste limite, o diagrama apresenta um trecho curvo até atingir " f_y ". Esta mudança do diagrama original pode ser facilmente compreendido. Se " f_{rc} " representa a máxima tensão residual de compressão, como mostrado pela distribuição das tensões residuais idealizada na figura 12 e, supondo que o ensaio seja feito sob compressão axial, então o escoamento iniciará naquelas regiões da seção transversal, onde atuam suas tensões máximas e ocorrerá quando $f_{rc} + f_a = f_y$ ou em uma tensão aplicada $P/A = f_a = f_y - f_{rc}$.

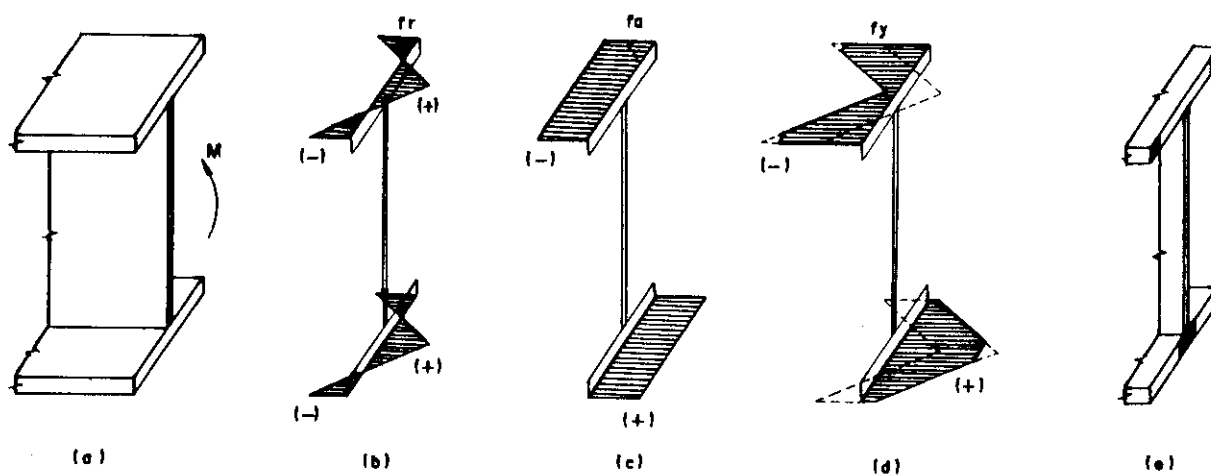


FIG.13 - Interação entre as tensões residuais e tensões aplicadas: (a) perfil "I" sujeito à flexão; (b) tensões residuais; (c) tensões aplicadas; (d) tensões resultantes e (e) início do escoamento (regiões sombreadas).

Uma vez iniciado o escoamento nesta tensão, por exemplo, nas bordas da mesa do perfil, (fig.12), estas bordas terão escoamentos com tensão constante. Cargas

adicionais podem ser resistidas pelas outras regiões da seção do perfil até finalmente o escoamento espalhar sobre toda a seção. Nas tensões em que o adequado escoamento iniciou e onde, conseqüentemente, iniciam-se as deformações plásticas permanentes, tem-se $f_p = f_y - f_{rc}$, o que representa o limite de proporcionalidade: (fig.11, ponto "A") do perfil real ensaiado. Quando o escoamento espalhar sobre toda a seção (fig.11, ponto "B"), ela continuará com carga constante, independente das tensões residuais anteriores [28,119].

A figura 13 mostra um perfil "I" com uma típica distribuição de tensões residuais.

Quando atuarem os esforços de flexão devido às cargas externas as conseqüentes deformações unitárias somam-se com as deformações unitárias já existentes. Como consequência, os esforços finais resultantes podem provocar facilmente o escoamento do perfil nas regiões de máximas tensões residuais. Como pode ser visto na figura 13-e, o escoamento pode ocorrer tanto nos extremos da mesa comprimida como no centro da mesa tracionada [15].

Os efeitos das tensões residuais devem ser considerados principalmente nos problemas que envolvem a flambagem. E estes efeitos podem ser diminuídos, quando se fizer tratamento térmico do perfil através de aquecimento prévio suficiente deixando-o, a seguir, resfriar lentamente ao ar livre ou ao forno. Com este tipo de tratamento, o limite elástico médio do aço diminui apreciavelmente, mas aumenta-se consideravelmente a ductilidade do metal. Devido aos altos custos destes tratamentos, isto só é feito em casos excepcionais [14,117].

1.3 - Imperfeições geométricas

As imperfeições geométricas podem ocorrer transversalmente, quando estiverem relacionadas com a seção transversal, ou ainda, podem ocorrer, longitudinalmente,

quando estiverem relacionadas com o eixo axial da barra.

Progressiva deterioração em rolos de laminação podem causar variações das espessuras das chapas em todas as partes que constituem um perfil laminado.

No caso de perfis soldados, os desvios geométricos podem depender das variações das espessuras das chapas, das variações das larguras ou alturas nos processos de fabricação e devido aos empenamentos inevitáveis nos processos de soldagem.

Pesquisas têm demonstrado que as imperfeições geométricas mais importantes da seção transversal são devidas às variações das espessuras das abas.

As imperfeições geométricas longitudinais de um perfil consistem essencialmente de desvio do eixo axial de sua posição ideal perfeitamente reta, causada por processos de fabricação e devido à falta de precisão durante a montagem do perfil estrutural.

Os efeitos provocados pelas imperfeições geométricas na capacidade de carga dos membros estruturais podem ser definidos por dois parâmetros:

(a) excentricidade "e" da carga na extremidade da barra,

(b) deflexão " v_0 " no meio do vão, caracterizando o deslocamento transversal da barra afetado pela curvatura inicial.

A excentricidade "e" da carga pode ocorrer devido às variações das formas das seções transversais causada pelo deslocamento do centro de gravidade.

Com relação à curvatura inicial, várias medidas em perfis laminados e soldados têm indicado uma variedade de configurações as quais podem ser consideradas aproximadamente como sendo curvas senoidais (fig.14), sem que existam erros significativos na avaliação da capacidade de carga de uma barra.

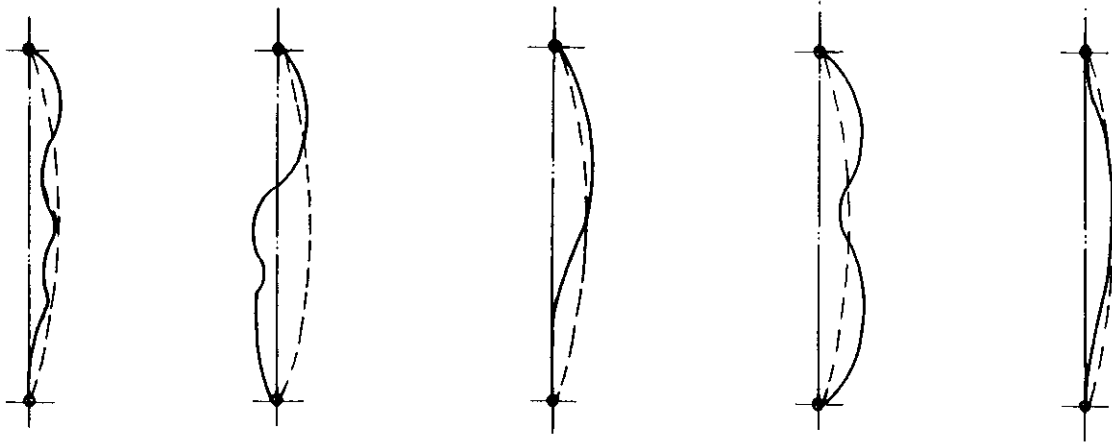


FIG.14 - Configurações das curvaturas: as linhas contínuas representam as formas reais, e as interrompidas, as formas assumidas.

O valor da curvatura inicial é limitado por especificações e é normalmente expresso como uma fração do comprimento do membro. Sendo que o valor " $L/1000$ " adotado para os deslocamentos iniciais, é justificado e tem sido adotado universalmente para caracterizar as imperfeições geométricas longitudinais para todos os elementos de aço estruturais [14,79].

2 - COMPORTAMENTO ELASTO-PLÁSTICO

2.1 - Generalidades

Os princípios básicos de cálculo plástico não são novos. Há muito tempo que os calculistas têm consciência de que os materiais dúcteis não falham no limite de escoamento.

Quando o esforço em um ponto de uma estrutura de aço dúctil alcança o limite de escoamento, essa parte da estrutura cede localmente permitindo certo reajuste dos esforços. Ao aumentar a carga, o esforço no ponto em questão permanecerá aproximadamente constante e o incremento da carga será resistido pelas partes cujos esforços serão menores [15,79].

Em um ensaio de tração de uma barra real de aço, verifica-se que o fluxo plástico inicia-se geralmente em zonas localizadas, quando sujeitas a esforços médios apreciavelmente menores do que a fluência do material. Isto ocorre devido às imperfeições geométricas transversais ou longitudinais que provocam flexões que se superpõem com a tração do ensaio. Outro fator, que apressa o aparecimento da fluência do material no ensaio, é a presença das tensões residuais de tração. Então, as imperfeições geométricas e as tensões residuais fazem com que o diagrama carga-deformação de uma barra real sujeita à tração tenha três regiões claramente definidas: uma corresponde ao comportamento elástico, outra corresponde ao fluxo plástico restrito (durante o qual as seções transversais se plastificam gradualmente), e, finalmente, quando todo o material está plastificado (provocando grandes deformações com carga constante). Para esta última região, as deformações aumentam rapidamente até o início do endurecimento por deformação, quando outra vez há aumentos da carga. Assim, esta será a região de fluxo plástico não-restrito que define um limite de utilidade do material. Este pode ter um aumento considerável na capacidade de suportar cargas.

Um bom exemplo da divergência que existe entre as indicações proporcionadas pelos esforços elásticos e a real capacidade de uma estrutura é a análise da resistência de uma placa com um pequeno furo, (fig.15). No intervalo elástico, existem concentrações de esforços nas bordas do furo, o que faz com que o limite de escoamento apareça nestas bordas antes do que no resto da seção, (fig.15-b). Com o aumento da carga, o fluxo plástico se estende para

ambos os lados do furo até que, eventualmente, toda a seção se plastifica (fig.15-d).

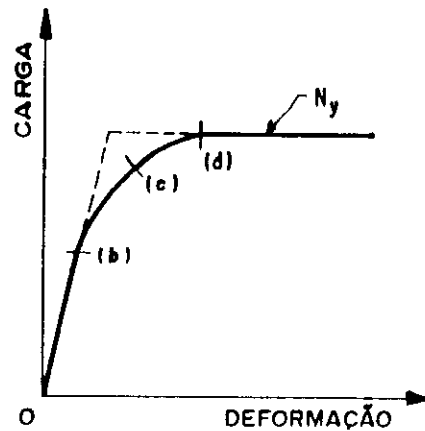
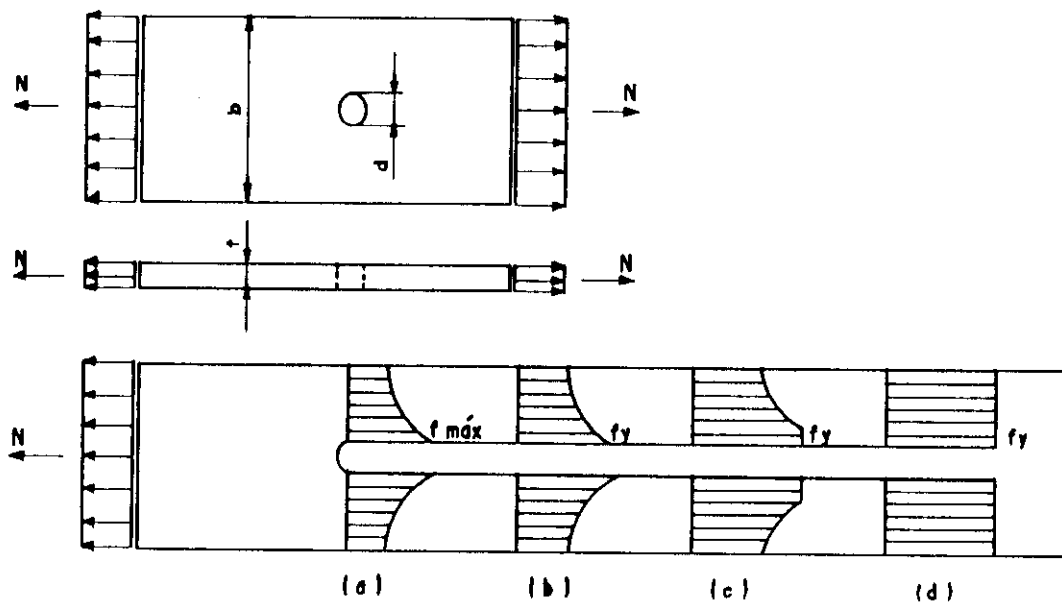


FIG.15 - Diagrama carga-deformação de uma placa perfurada

De acordo com a filosofia de cálculo elástico, o aparecimento do limite de fluência (fig.15-b) representa o limite de utilidade estrutural da barra, porém tem pouco significado em relação à sua resistência real, enquanto que a carga que ocasiona a plastificação total da seção corresponde ao limite de utilização da barra. Isto porque produz alongamentos grandes e incontrolláveis. Assim, a

distribuição de esforços será uniforme na seção, (fig.15-d), estabelecendo um fluxo plástico não-restrito, quando a carga alcança o valor do produto do limite de escoamento pela área da seção líquida. Esta será a carga última para fins práticos de projetos. Tal carga não deve ser menor do que a carga de trabalho nominal multiplicada por um coeficiente de ponderação [15,28,79,119].

As estruturas estaticamente determinadas, como no caso da barra analisada anteriormente, só podem resistir a pequenos incrementos do valor da carga após ter atingido o limite de escoamento. Para exemplificar, considera-se que com o acréscimo de cargas, o momento máximo de uma viga simplesmente apoiada cresce proporcionalmente até que o esforço na fibra externa seja igual ao limite de escoamento do aço, a partir do qual, os deslocamentos começam a aumentar rapidamente. Este processo atingirá o limite no qual se forma a rótula plástica na viga, reduzindo-se a um mecanismo incapaz de suportar cargas adicionais (fig.16). É portanto, razoável considerar a carga que ocasiona o primeiro escoamento das fibras externas como sendo a carga limite para uma viga simplesmente apoiada e considerar a pequena reserva de resistência plástica como sendo uma margem adicional de segurança.

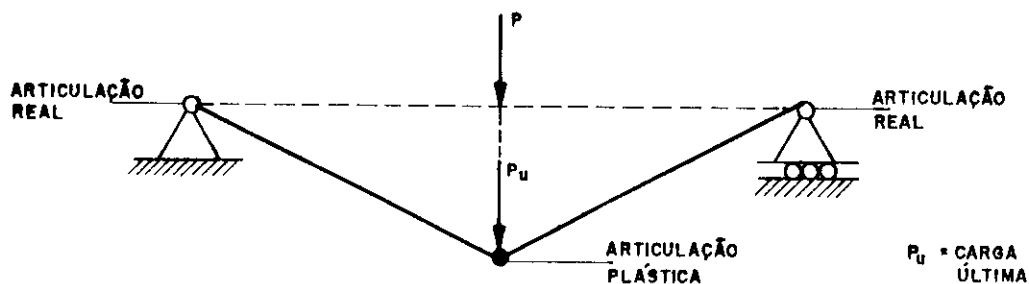


FIG.16 - Estrutura isostática na ruptura

Para estruturas estaticamente indeterminadas, o incremento da carga pode ser grande, pois devido a ductilidade do aço, estas possuem a capacidade de redistribuir os esforços. Enquanto que o diagrama de momentos para uma viga simplesmente apoiada contém somente um valor máximo ou um pico, uma estrutura hiperestática possui dois ou mais pontos de momentos máximos. Ao aplicar a carga na estrutura, a seção transversal correspondente ao maior destes máximos, alcançará o limite de escoamento. Com o aumento das cargas, o escoamento estenderá a outras fibras da seção mais solicitada até atingir a plastificação, enquanto que outras partes da estrutura permanecerão elásticas servindo, assim, para controlar a deformação total. Devido à ductilidade do aço, o momento na seção plastificada permanecerá praticamente constante, e a estrutura recorrerá às suas partes menos solicitadas para resistir incrementos adicionais de cargas. Haverá uma redistribuição de momentos tendendo a aumentar a capacidade de suportar acréscimos de cargas, pois ocorrendo a ruína de uma determinada seção, outras partes da estrutura serão capazes de suportar os acréscimos de cargas.

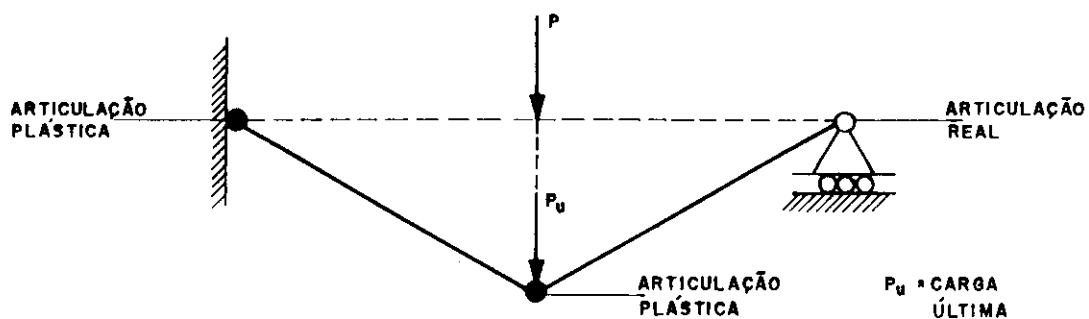


FIG.17 - Estrutura hiperestática na ruptura

Este processo se repetirá até formar uma quantidade suficiente de rótulas plásticas para reduzir a viga em um mecanismo. Nesta situação a viga será incapaz de suportar maiores aumentos de carga, e sua resistência última será atingida (fig.17) [15,28,79,119,117].

2.2 - Flexão plástica

A determinação da lei que traduz a curvatura e tensões internas devido ao momento de flexão é um problema clássico da resistência dos materiais. Para uma peça sujeita à flexão Navier considerou que uma seção transversal originalmente plana, assim permanecerá durante a flexão [119].

Tome-se como exemplo um trecho de uma barra sujeita a um par de momentos iguais e opostos. Após a deformação, os planos de duas seções transversais adjacentes "AB" e "CD" encontram-se no ponto "O". Este é o centro de curvatura do eixo longitudinal da barra onde as deformações e as tensões são nulas (fig.18). O ângulo entre estes dois planos é indicado por " $d\psi$ " e o raio de curvatura por "R". Da geometria da figura, conclui-se que:

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{d\psi}{dz} \quad (1)$$

onde " χ " é a CURVATURA e representa a taxa de variação da declividade ao longo da linha neutra na flexão pura. A curvatura em uma dada etapa é obtida a partir de uma distribuição particular das deformações ou dos esforços. Isto será visto oportunamente.

O alongamento da fibra "EF", (fig.18), é igual ao comprimento total desta fibra $(R + y)d\psi$ menos o seu comprimento original " dz ". Então, a deformação unitária ($\epsilon = \Delta L/L$) desta fibra será:

$$\epsilon = \chi \cdot y \quad (2)$$

Sendo a barra de material elástico com diagrama tensão-deformação linear tem-se que $f = E.\epsilon$ e as tensões normais serão:

$$f = E.\chi.y \quad (3)$$

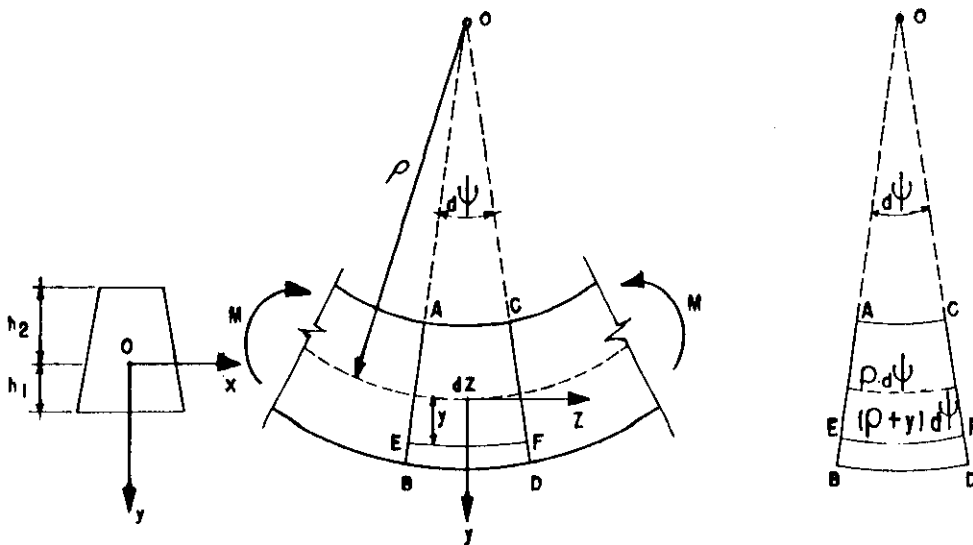


FIG.18 - Deformações na flexão pura

A posição do eixo neutro pode ser encontrado usando o diagrama tensão-deformação e uma equação da estática que mostre a condição de equilíbrio das forças horizontais (fig.19).

Como não existe força normal atuando na seção, a integral de " $f.dA$ " deve ser igual a zero, sobre toda a área. Então tem-se:

$$\Sigma F_z = 0 \quad , \quad \text{ou} \quad \int_A f.dA = \int_A E.\chi.y.dA = 0 \quad (4)$$

sendo a curvatura " χ " e o módulo de elasticidade " E "

constantes na seção. Para que a expressão (4) seja satisfeita, a integral $\int_A y \cdot dA$ deve ser igual a zero; isto mostra, conseqüentemente, que o momento estático em relação ao eixo "x" deve ser nulo. Conclui-se, assim, que o eixo neutro passa pelo centro de gravidade da seção.

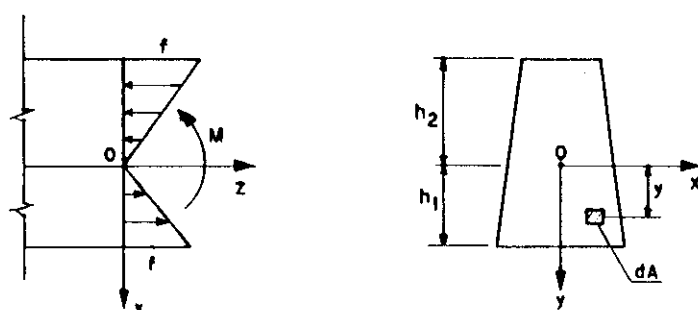


FIG.19 - Distribuição das tensões na barra

A curvatura da barra é determinada através da segunda condição de equilíbrio da estática que impõe a condição da nulidade dos momentos na seção em torno de um eixo. O momento da força elementar "f.dA" em relação ao eixo neutro é "f.y.dA". Então a integral destes momentos internos elementares sobre a área da seção deve ser igual ao momento fletor externo "M", o que fornece:

$$\Sigma M_x = 0 \quad , \quad \text{ou} \quad M_x = \int_A f \cdot y \cdot dA = \chi \cdot E \int y^2 \cdot dA = \chi \cdot E \cdot I_x \quad (5)$$

Onde " I_x " é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo "x". Das equações (1) e (5), conclui-se que:

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{M_x}{E \cdot I_x} \quad (6)$$

Sabendo-se que a equação diferencial da linha elástica é $y^{II} = -M_x/E \cdot I_x$, então a equação (6) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\chi = - y'''' \quad (7)$$

Combinando-se as equações (3) e (6), chega-se à equação que possibilita determinar as tensões normais em barras sujeitas à flexão elástica pura:

$$f = \frac{M_x \cdot y}{I_x} \quad (8)$$

Considere-se agora uma barra de material elasto-plástico que esteja sujeita à flexão pura (fig.20).

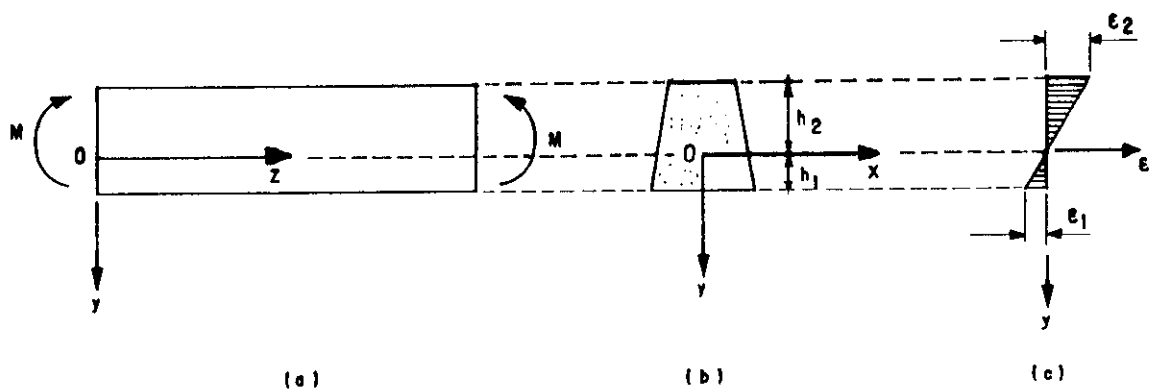


FIG.20 - Flexão inelástica de uma barra

Quando os momentos flectores são pequenos, a tensão máxima na barra é menor do que o limite de escoamento " f_y ". Assim, a barra permanecerá elástica com distribuição linear de tensões (fig.21-a). Quando a tensão no ponto mais afastado do eixo neutro atingir o limite de escoamento, (fig.21-b), o momento correspondente será denominado momento de escoamento " M_y " que pela equação (8) será:

$$M_y = \frac{f_y \cdot I_x}{y} = f_y \cdot W_x \quad (9)$$

Aumentando-se o valor do momento fletor acima do

momento de escoamento " M_y ", as deformações nas fibras das extremidades continuarão a crescer, e a deformação unitária máxima ultrapassará a deformação do escoamento " ϵ_y ". Porém, como consequência do escoamento plástico, as tensões máximas permanecerão constantes e iguais a " f_y " (fig.21-c).

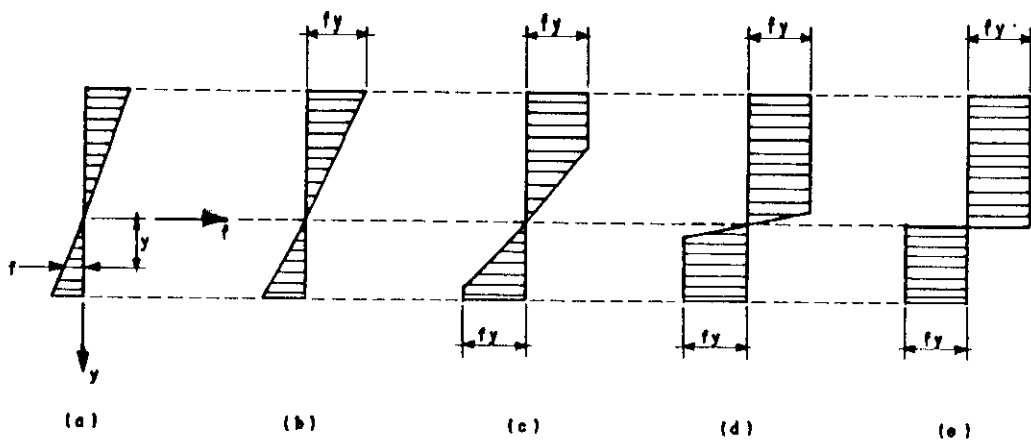


FIG.21 - Distribuição das tensões na seção da barra

A parte central da barra ainda continuará elástica enquanto as fibras extremas se plastificam. Aumentando ainda mais o momento fletor, a região plastificada vai crescendo no sentido do eixo neutro (fig.21-d). Neste estágio, o núcleo elástico quase desaparece e, para fins práticos, pode-se considerar que a barra atingiu sua capacidade limite de resistência ao momento. Isto leva a crer que o diagrama de tensões é composto por dois trechos retangulares (fig.21-e). O momento fletor correspondente é denominado de momento plástico último ou, simplesmente, "momento de plastificação" " M_{pL} ". Este momento representa o momento máximo que uma barra de material elasto-plástico pode suportar.

Para calcular o momento de plastificação " M_{pL} ", posiciona-se o eixo neutro da seção transversal, (fig.22). Acima deste eixo, todas as fibras estarão sujeitas às tensões de compressão " f_y " (fig.22-b) e, abaixo do mesmo, as fibras estarão sujeitas a tensões de tração " f_y ". A força

total de tração "T" é igual a " $f_y \cdot A_1$ ", onde " A_1 " é a área da seção transversal abaixo do eixo neutro. Analogamente, a força total de compressão "C" é igual a " $f_y \cdot A_2$ ", onde " A_2 " é a área da seção, acima do eixo neutro. A equação $\int_A f \cdot dA = 0$ mostra que a força resultante na seção transversal deve ser nula, portanto:

$$T - C = 0 \quad ; \quad f_y A_1 - f_y A_2 = 0 \quad ; \quad \text{ou} \quad A_1 = A_2 \quad (10)$$

sendo a área da seção transversal igual a $A = A_1 + A_2$ da equação (10), tem-se:

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} \quad (11)$$

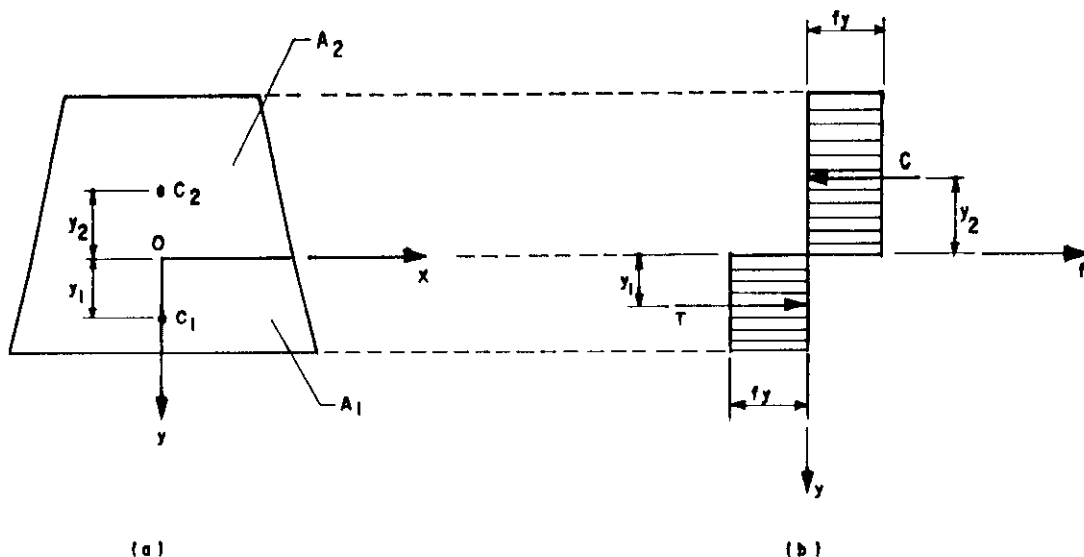


FIG.22 - Distribuição das tensões na flexão plástica

Assim, conclui-se que o eixo neutro deve dividir a seção transversal em duas partes iguais. Portanto, o eixo neutro na fase plástica possui uma posição diferente da posição do eixo, quando a análise é elástica.

O momento de plastificação pode ser determinado pela integração da equação $M_{pL} = \int_A f_y \cdot y \cdot dA$ ou através da

determinação dos momentos das forças "T" e "C" em relação ao eixo neutro (fig.22-b). Assim, tem-se:

$$M_{pL} = T \cdot y_1 + C \cdot y_2 \quad (12)$$

sendo " y_1 " e " y_2 " as distâncias do eixo neutro aos centros de gravidade " C_1 " e " C_2 " das áreas " A_1 " e " A_2 ", respectivamente. Substituindo "T" e "C" por " $f_y \cdot A/2$ " na equação (12), tem-se:

$$M_{pL} = \frac{f_y \cdot A}{2} (y_1 + y_2) \quad (13)$$

Conclui-se que para determinar o momento de plastificação de uma determinada seção transversal deve ser dividida a área total em duas partes iguais, posicionando o centro de gravidade de cada parte dividida e, em seguida, usar a equação (13).

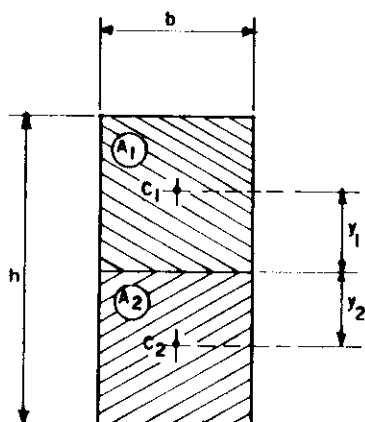


FIG.23 - Determinação do módulo plástico do retângulo

Analogamente à equação (9), a equação (13) pode ser escrita da seguinte forma:

$$M_{pL} = f_y \cdot Z_x \quad (14)$$

onde:

$$Z_x = \frac{A}{2}(y_1 + y_2) \quad (15)$$

sendo " Z_x " o "módulo plástico" em relação ao eixo "x" da seção transversal. Este módulo pode ser interpretado como sendo a soma dos momentos estáticos em relação ao eixo neutro. Para exemplificar, determine-se o módulo plástico para o retângulo da figura 23:

$$Z_x = \frac{A}{2}(y_1 + y_2) = \frac{b \cdot h}{2}(h/4 + h/4) = \frac{b \cdot h^2}{4} \quad (16)$$

A relação entre o momento de plastificação da barra e o seu momento de escoamento depende apenas da forma da seção transversal e é denominado de "fator de forma" " ν ". Então, tem-se:

$$\nu = \frac{M_{pL}}{M_y} = \frac{Z}{W} \quad (17)$$

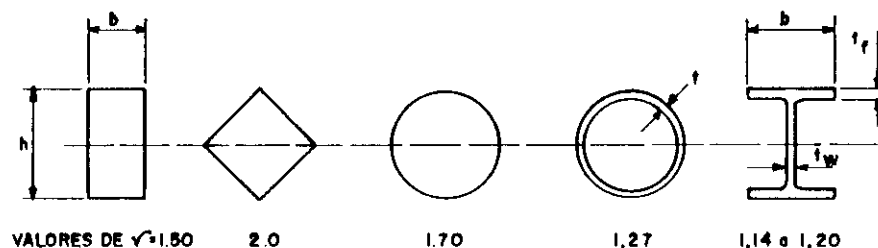


FIG.24 - Fatores de forma para seções típicas

Na figura 24 são mostrados valores do fator de forma para várias seções típicas.

2.3 - Relação momento-curvatura

A ferramenta fundamental para o estudo teórico das barras fletidas em um de seus planos de simetria é o diagrama momento-curvatura de suas seções transversais. Este depende da forma destas seções, das características do material que constitui a barra e da intensidade e lei de distribuição das tensões residuais existentes na mesma. Conhecidas estas propriedades, o diagrama pode ser obtido através da equação ao expressar que o momento interno deve ser igual ao momento aplicado externamente.

Para momentos fletores, cujos valores são menores ou iguais ao momento de escoamento, a expressão da curvatura será dada pela equação (6), conforme item 2.2. Chamando de " χ_y " a curvatura de escoamento, isto é, a curvatura quando um determinado momento externo " M " se torna igual a " M_y ", tem-se:

$$\chi_y = \frac{M_y}{E \cdot I_x} \quad (18)$$

Então, a relação momento-curvatura na região elástica pode ser expressa de forma adimensional da seguinte maneira:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\chi}{\chi_y} \quad ; \quad \text{para } (0 \leq M \leq M_y) \quad (19)$$

Esta equação é representada pela reta do diagrama momento-curvatura da figura 25.

Quando o momento aplicado ultrapassa o momento de escoamento " M_y ", parte da barra torna-se plástica, e a relação momento-curvatura torna-se não-linear (fig.25). À medida que a parte plastificada da seção se aproxima do eixo neutro, a curva da figura 25 vai se achatando e tende a se aproximar de uma assíntota horizontal. No limite, quando " χ " tende ao infinito, isto é, quando " y " na equação (2) for igual a zero, toda a seção terá plastificado, atingindo o

momento " M_{pL} ". Neste limite, a relação " M_{pL}/M_y " se torna igual ao fator de forma. Isto mostra que a equação momento-curvatura, (eq.19), depende da forma da seção transversal.

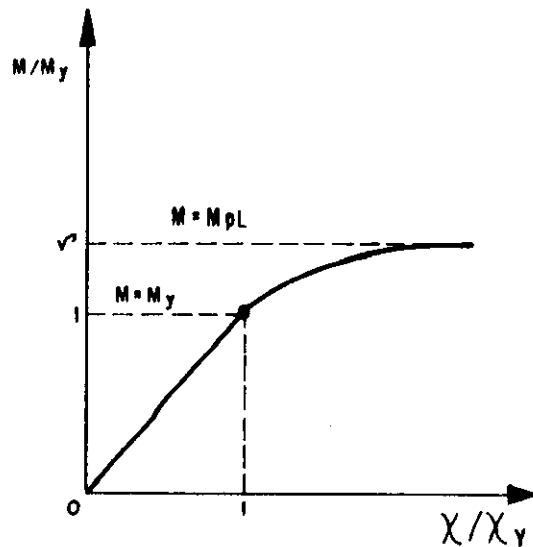


FIG.25 - Diagrama momento-curvatura

Apesar de ser pouco comum em estruturas de aço, será analisada uma seção retangular por apresentar aspectos interessantes do problema sem complicações algébricas desnecessárias. E, pela mesma razão, supor-se-á que as tensões residuais serão nulas e os efeitos do endurecimento por deformação (encruamento), desprezados. O método a ser desenvolvido também se aplica a outras formas de seções transversais com ou sem tensões residuais.

Tome-se por exemplo a determinação do momento fletor para a seção retangular parcialmente plastificada mostrada na figura 26. A extremidade do núcleo elástico está a uma distância "e" do eixo neutro e, para a distribuição de tensões mostradas na figura, tem-se:

$$M = F_1(2y_1) + F_2(2y_2)$$

$$M = f_y b \left[\frac{h}{2} - e \right] \left[\frac{h}{2} + e \right] + f_y b \cdot \frac{2e^2}{3}$$

Arranjando os termos da equação anterior, e sabendo-se que $W = bh^2/6$ e que $M_y = f_y W$, tem-se:

$$M = f_y \frac{bh^2}{6} \left(\frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2} \right) = M_y \left(\frac{3}{2} - \frac{2e^2}{h^2} \right) \quad (20)$$

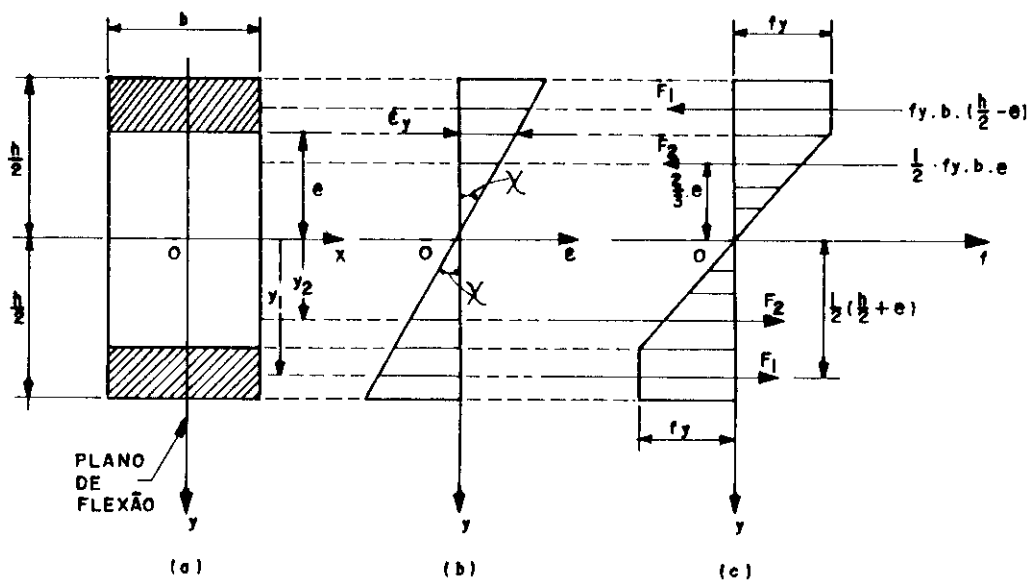


FIG.26 - Distribuição de deformações e de tensões

Quando $e = h/2$, a equação (20) dará como resultado $M = M_y$ e ter-se-á o momento de escoamento. Para $e = 0$, tem-se o momento de plastificação $M = M_{pL} = 3M_y/2$ da seção transversal retangular.

A curvatura da barra de seção retangular pode ser determinada pela equação (2), notando-se que $\epsilon = \epsilon_y$ quando $y = e$. Então, tem-se:

$$\chi = \frac{\epsilon_y}{e} \quad (21)$$

Quando $y = h/2$, as regiões escoadas desaparecem, e somente as fibras externas estarão sujeitas a tensões de escoamento " f_y ". O momento de flexão correspondente " M_y " é o maior momento que a seção pode alcançar antes do escoamento. O valor de " M_y " é determinado através da equação (20) fazendo-se $e = h/2$, o que fornece:

$$M = M_y = f_y \frac{bh^2}{6} \quad (22)$$

ou o mesmo resultado pode ser conseguido através da teoria da flexão elástica.

A curvatura correspondente a esta situação é denominada de " χ_y ". A partir da equação (21), tem-se:

$$\chi_y = \frac{2\varepsilon_y}{h} \quad (23)$$

Combinando-se as equações (21) e (23), tem-se:

$$\frac{\chi}{\chi_y} = \frac{\varepsilon_y / e}{2\varepsilon_y / h} \quad ; \quad \text{ou} \quad \frac{\chi}{\chi_y} = \frac{h}{2e} \quad (24)$$

Levando-se a equação (24) na equação (20), obtém-se a equação momento-curvatura na seguinte forma adimensional:

$$\frac{M}{M_y} = 1.5 - 0.5 \left(\frac{\chi_y}{\chi} \right) \quad (25)$$

sendo válida no intervalo $M_y \leq M \leq M_p$.

O diagrama da relação momento-curvatura, (fig.27), mostra a curva para quando o momento " M " for menor do que " M_y " (eq.19) e a curva para quando " M " for maior do que " M_y " (eq.25). É importante caracterizar que " M " tende para o valor limite igual a " $1.5M_y$ " quando " χ " torna-se muito grande.

No limite, quando $M = 1.5M_y$, " χ " torna-se infinito e a equação (21) mostra que " e " se torna igual a

zero, de modo que o núcleo elástico desaparece. Toda a seção transversal estará plastificada e o momento de flexão correspondente será o momento de plastificação " M_{pL} ".

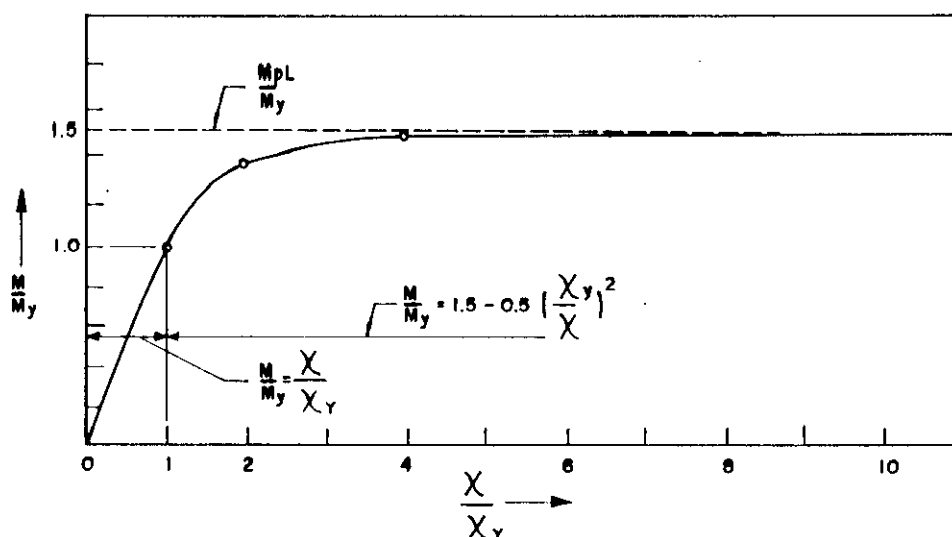


FIG.27 - Diagrama momento-curvatura para uma barra de seção retangular.

A figura 28 mostra os diagramas momento-curvatura para seções transversais romboidais, circulares, e perfil "I". Em cada caso, o diagrama começa com o trecho reto, o qual representa a região linear elástica, seguido de uma curva, em cuja região a barra está parcialmente elástica, e parcialmente plástica.

Tome-se como exemplo um perfil "I" de alma desprezível e considere que as abas se plastificam bruscamente no instante em que " ϵ " atingir " ϵ_y " na união entre a aba e a alma. Para estas condições pode ser analisada a curva momento-curvatura. Nota-se que esta será composta por dois trechos, (fig.29). O primeiro será elástico, representado pela reta "OA" cuja equação será:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\chi}{\chi_y} \quad (26)$$

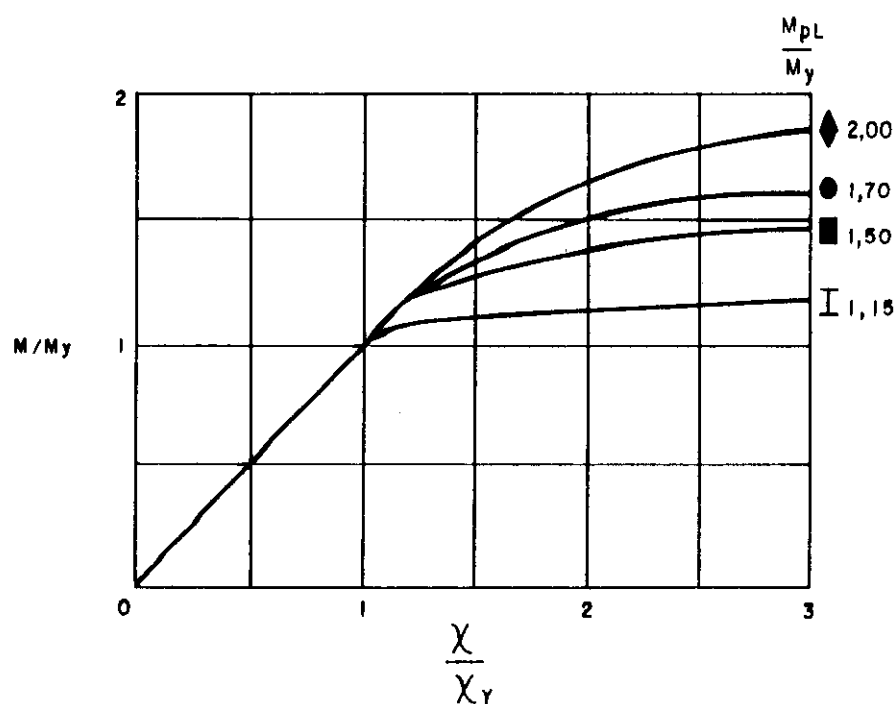


FIG.28 - Diagramas momento-curvatura para vários tipos de seções.

e o segundo trecho será a região de plastificação definida pela reta horizontal "AB", cuja equação será:

$$\frac{M}{M_y} = \nu \quad (27)$$

Na realidade, as abas se plastificam progressivamente e a alma tem uma ligeira influência sobre a forma da curva. Portanto, devido à grande curvatura no trecho "C", verifica-se que não haverá grandes erros ao substituir a curva real "OCD" pela linha quebrada "OAB". Isto equivale admitir que a barra se manterá elástica até o instante em que é atingido o momento de plastificação " M_{pL} " acima do qual a flexão ocorrerá plasticamente com momento constante. Esta hipótese simplificadora é o princípio básico

da noção de "rótula plástica" [15,117,157].

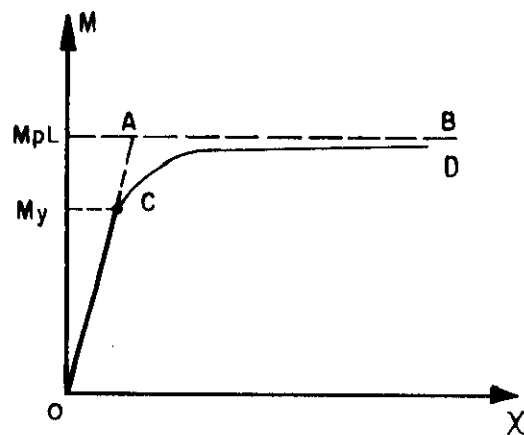


FIG.29 - Diagrama momento-curvatura para um perfil "I"

2.4 - Rótula plástica

A viga da figura 30 está sujeita a um momento máximo $M_m = PL/4$. Se este momento for maior do que " M_y " e menor do que " M_{pL} ", existirá na parte central da viga uma região de fluxo plástico limitado (fig.30). As zonas totalmente plásticas aparecerão escurecidas na figura, e a altura dessas zonas poderão ser facilmente encontrada em qualquer seção transversal, pois os momentos fletores serão conhecidos.

A curvatura da viga, (fig.30-c), aumenta linearmente das extremidades para o centro até atingir os pontos limites da região plástica onde se torna igual a seu valor de escoamento " χ_y ". Destes pontos em diante, o crescimento é mais rápido e alcança o valor máximo " χ_m " no centro da viga.

À medida que a carga aumenta, o momento fletor " M_m " se aproxima do momento de plastificação " M_{pL} " e as regiões de plasticidade aproximam-se do eixo neutro no meio

da viga (fig.31). Assim, quando o momento " M_m " se tornar igual ao momento de plastificação " M_{pL} ", a seção no meio da viga estará completamente plastificada.

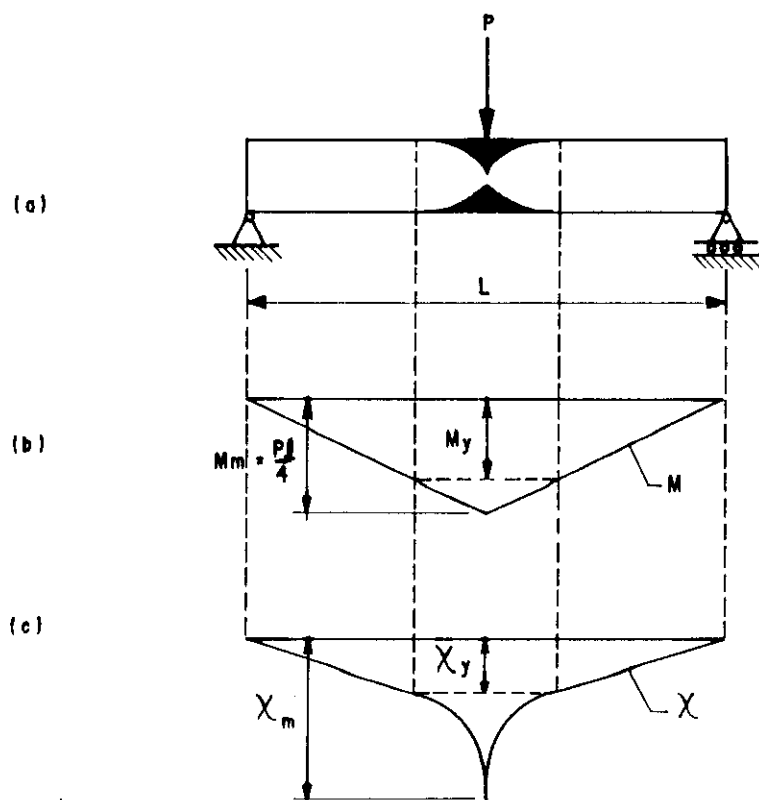


FIG.30 - Viga parcialmente plastificada

Então, a curvatura no centro da viga torna-se extremamente grande e pode ocorrer um fluxo plástico ilimitado. A viga falha por rotações excessivas. Estas tendem a ocorrer na seção transversal média, enquanto que os dois trechos retilíneos da viga permanecem relativamente rígidos. Assim, a viga se comporta como duas barras rígidas ligadas por uma articulação plástica que permite o giro das barras sob a ação de um momento constante " M_{pL} ".

O comprimento " L_p " da zona plástica, o qual envolve a articulação plástica, (fig.31-a), pode ser facilmente determinado, partindo-se do princípio de que nos limites da plastificação o momento fletor deve ser igual a

" M_y ". Assim, tem-se:

$$M_y = \frac{P}{2} \left(L/2 - L_p/2 \right) \quad (28)$$

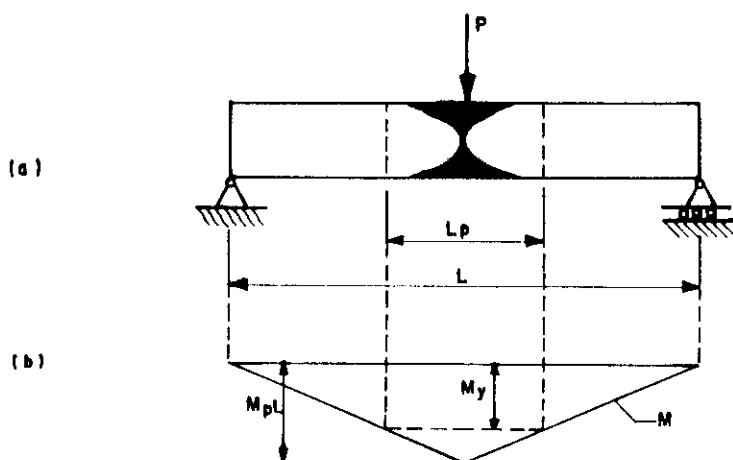


FIG.31 - Articulação plástica.

O momento máximo $M_m = PL/4$, no limite, será igual ao momento de plastificação " M_{pL} ". Assim, tem-se:

$$P = \frac{4M_{pL}}{L} \quad (29)$$

Combinando-se as equações (28) e (29) e isolando o valor de " L_p ", chega-se a:

$$L_p = L \left[1 - \frac{M_y}{M_{pL}} \right] = L \left(1 - \frac{1}{\nu} \right) \quad (30)$$

sendo que o comprimento " L_p " dado pela expressão (30) é válido para vigas simplesmente apoiadas com carga concentrada no meio do vão. Para uma viga de seção retangular, o fator de forma vale $\nu = 1.5$, o que fornece a partir de (30) $L_p = 0.33L$. Para vigas "I", cujo fator de forma varia entre 1.14 a 1.20, o valor de " L_p " variará de

0.12L a 0.17L. Então, conclui-se que a região plástica é muito menor em vigas "I" do que em seções retangulares.

Mesmo quando a região plástica da viga tem comprimento apreciável, a curvatura tende a se concentrar na seção da articulação plástica. Assim, na maioria dos casos, é possível considerar a articulação plástica como não tendo dimensão, ou seja, supõe-se que a articulação esteja localizada na própria seção transversal da viga. A presença da articulação plástica significa que a viga girará na seção transversal correspondente, enquanto o momento fletor permanecer constante e igual a " M_{pL} ". Obviamente, as articulações plásticas sempre se formarão nas seções onde os momentos fletores sejam máximos [72,157].

2.5 - Redistribuição de momentos

Além do incremento da carga que resulta na formação de rótula plástica, um segundo fator que contribui com a reserva de resistência de uma estrutura hiperestática carregada acima do limite elástico, é denominado de "redistribuição de momentos". A redistribuição de momentos é uma consequência das articulações plásticas. À medida que se acrescenta carga em uma estrutura, alcança-se eventualmente o momento de plastificação em uma determinada seção crítica, isto é, naquela seção que estiver mais solicitada elasticamente. Adicionando-se mais cargas, o valor do momento plástico se manterá constante enquanto que a seção girará na rótula plástica formada. Porém, o equilíbrio será mantido por outras seções menos solicitadas através de um incremento proporcional ao momento elástico, nas respectivas seções. Estas tenderão a absorver os novos acréscimos. Este processo de transferência de momentos devido à formação de sucessivas rótulas plásticas continuará até que se alcance a carga última [15,79,117,160].

A redistribuição de momentos de flexão pode ser melhor compreendida através da análise de uma viga

biengastada com carga concentrada a um terço do seu vão. A carga de colapso " P_u " a qual transforma a viga em um mecanismo pode ser determinada diretamente sem o conhecimento da seqüência de formação das rótulas plásticas. Neste caso, sendo os momentos máximos elásticos diferentes em três posições, conclui-se que três rótulas plásticas serão formadas, mas não simultaneamente. As formações das rótulas podem ser analisadas em três estágios elementares. No estágio "I", a viga se comporta elasticamente, e, através de conceitos estruturais, calculam-se os momentos de engastamento, o momento sob a carga e a deflexão da viga (fig.32). O diagrama de momentos mostra que a primeira rótula deverá se formar no apoio "A". O momento de plastificação " M_{pL} " é constante para qualquer seção da viga, pois este depende apenas do limite de escoamento do material e do módulo plástico da seção. Então, a carga elástica máxima correspondente será:

$$M_A = M_{pL} = \frac{4P_1 L}{27} \quad ; \quad \text{ou} \quad P_1 = 6.75 \frac{M_{pL}}{L} \quad (31)$$

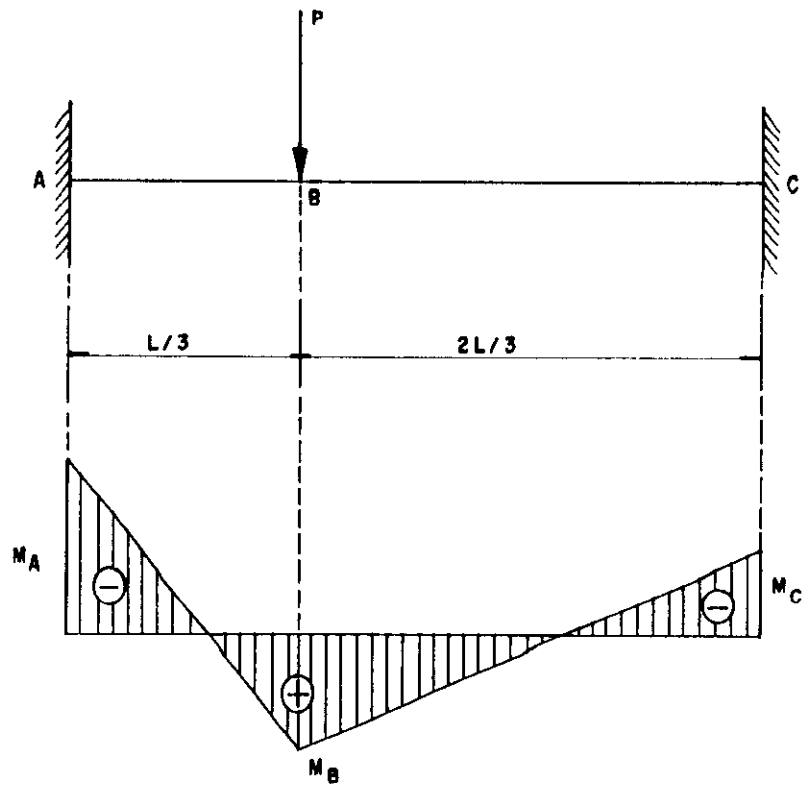
A flecha correspondente obtém-se substituindo "P" por " P_1 ", na equação de " Δ_B " fornecida na figura 32. Assim, tem-se:

$$\Delta_B = 0.0247 \frac{M_{pL} L^2}{E.I} \quad (32)$$

Estando estabilizado o momento no apoio "A", a viga se comportará como se estivesse apoiada à esquerda com rótula plástica sob momento constante " $-M_{pL}$ ". Através da carga que provocou a formação da rótula em "A" (eq.31), conclui-se que parte dos momentos nos pontos "B" e "C" foram usados. Neste caso, as resistências aos momentos que permanecem na viga nos pontos "B" e "C" serão:

$$M_B = M_{pL} = - \frac{8P_1 L}{81} \quad ; \quad \text{ou} \quad M_B = 0.33M_{pL} \quad (33)$$

$$M_c = M_{PL} - \frac{2P L}{27} \quad ; \quad \text{ou} \quad M_c = 0.50 M_{pL} \quad (34)$$



$$M_A = \frac{4PL}{27} \quad ; \quad M_B = \frac{8PL}{81} \quad ; \quad M_C = \frac{2PL}{27} \quad ; \quad \Delta_B = \frac{8PL^3}{2187EI}$$

FIG.32 - Momentos máximos e deflexão da viga

O diagrama de momentos para o estágio "I" será representado conforme ilustra a figura 33.

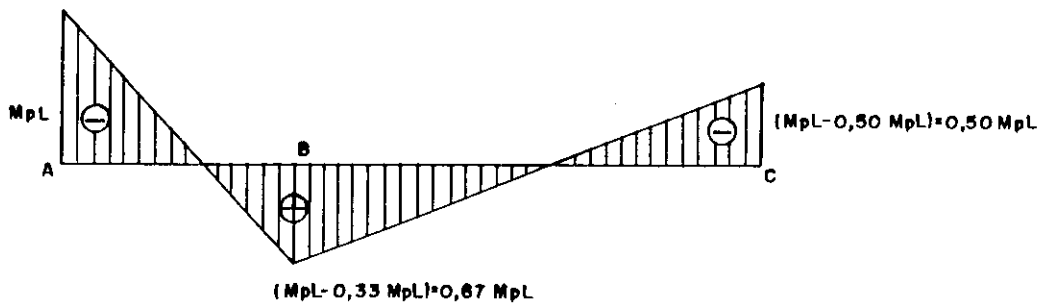
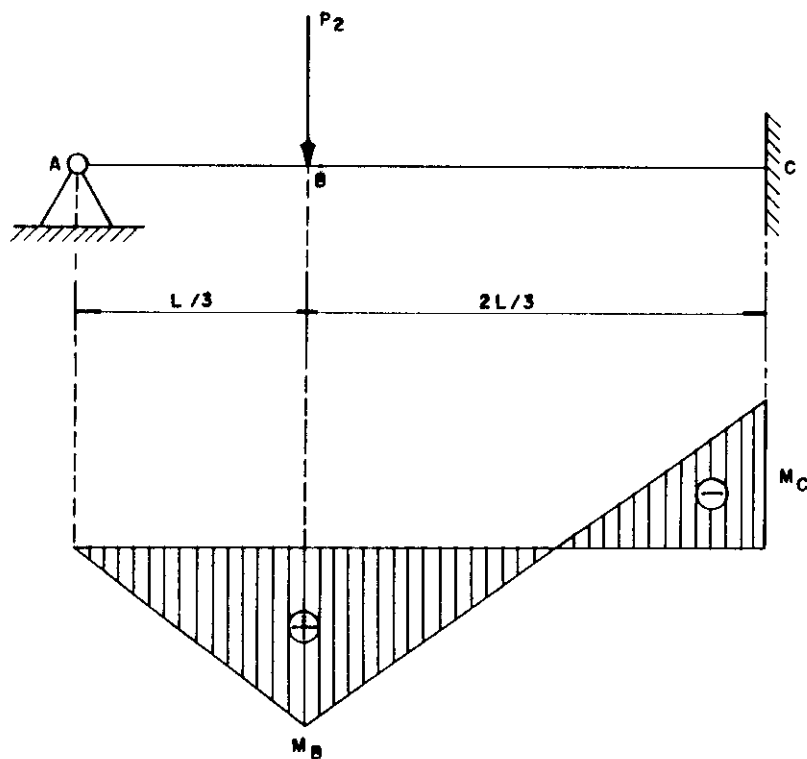


FIG.33 - Momentos absorvidos pela viga no estágio "I"

No estágio "II", a carga será aumentada acima do valor fornecido pela equação (31), e as cargas adicionais atuarão em um sistema estrutural elástico diferente (fig.34). Os momentos causados pela carga adicional não estarão distribuídos sobre o vão como no caso dos momentos causados por " P_1 ", assim o termo "redistribuição de momentos" é aplicado. Pelo diagrama de momentos deste novo sistema elástico, nota-se que a próxima rótula a se formar estará sob a carga no ponto "B" (fig.34).



$$M_B = \frac{14P_2 L}{81} \quad ; \quad M_C = \frac{12P_2 L}{81} \quad ; \quad \Delta_B = \frac{20P_2 L^3}{2187EI}$$

FIG.34 - Momentos máximos e deflexão

O momento máximo no ponto "B" para o sistema estrutural elástico deverá ser igual à capacidade de resistência que a viga ainda necessita para se plastificar no ponto "B" de acordo com os cálculos feitos no estágio "I" (eq.33). Assim, tem-se:

$$M_B = 0.33M_{pL} = \frac{14P_2 L^2}{8I} \quad ; \quad \text{ou} \quad P_2 = 1.91 \frac{M_{pL}}{L} \quad (35)$$

e a carga total acumulada nos dois estágios será:

$$P_1 + P_2 = 8.66 \frac{M_{pL}}{L} \quad (36)$$

A flecha correspondente à carga " P_2 " obtém-se substituindo o valor desta carga na equação de " Δ_B " fornecida na figura 34. Então, tem-se:

$$\Delta_B = \frac{0.017M_{pL} L^2}{EI} \quad (37)$$

A flecha total acumulada nos dois estágios será:

$$\Delta_{B(I)} + \Delta_{B(II)} = 0.0417 \frac{M_{pL} L^2}{EI} \quad (38)$$

Estando estabilizados os momentos nos pontos "A" e "B", a viga terá agora duas rótulas plásticas nestes pontos, tais rótulas terão momentos constantes e iguais a " $-M_{pL}$ " e " $+M_{pL}$ ". Portanto, o trecho " \overline{BC} " se comportará como se fosse uma viga em balanço. Nota-se pela equação (31) que parte do momento no ponto "C" foi usado e, pela equação (35), nota-se que outra parcela do momento remanescente no ponto "C" será usado. Então, a resistência ao momento que permanece na viga no ponto "C" será:

$$M_c = M_{pL} - 0.5M_{pL} \text{ (est\u00e1gio-I)} - \frac{12P_2 L^2}{8I} \quad ; \quad \text{ou}$$

$$M_c = 0.22M_{pL} \quad (39)$$

O diagrama de momentos para o estágio II será representado conforme ilustra a figura 35.

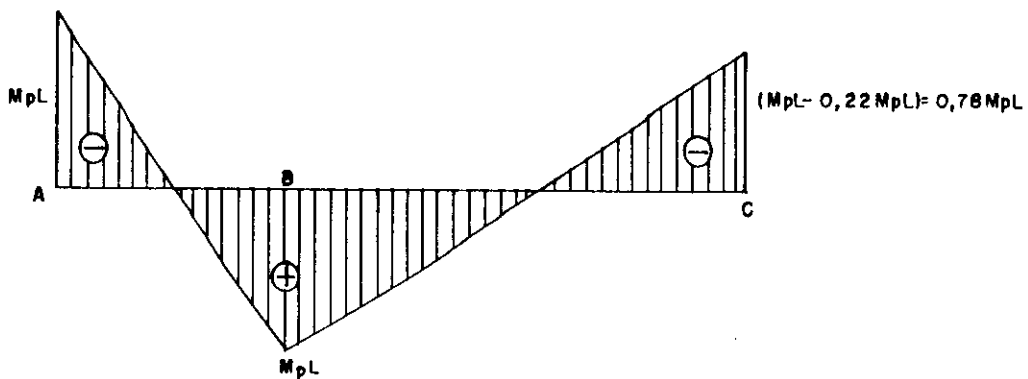


FIG.35 - Momentos absorvidos pela viga no estágio "II"

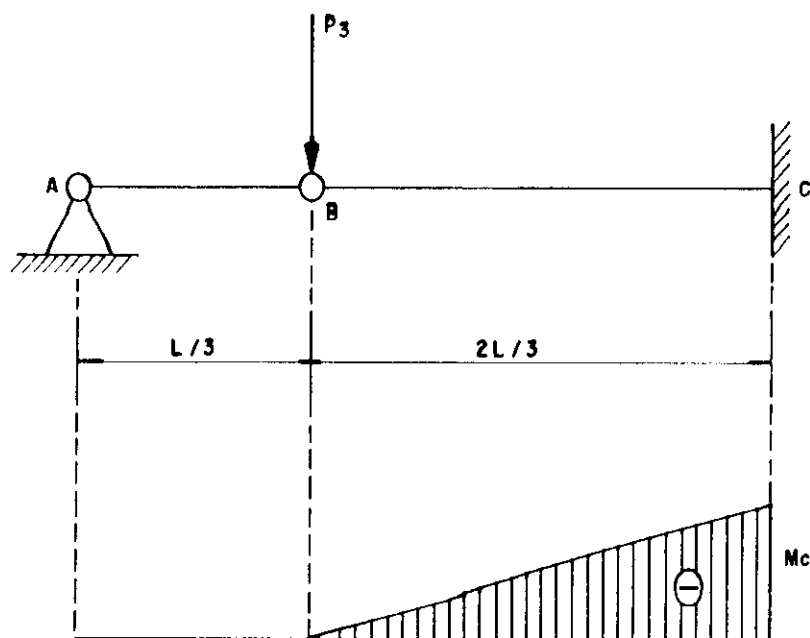
No estágio "III", a carga será aumentada acima da carga total acumulada nos dois estágios anteriores. Esta será dada pela equação (36). Neste estágio, as cargas adicionais atuarão em um sistema estrutural elástico formado por uma barra rígida " \overline{AB} " birrotulada e por uma viga em balanço " \overline{BC} " (fig.36). O momento continua a aumentar com as cargas até atingir o momento de plastificação " M_{pL} " no apoio "C" e a viga se transformará bruscamente em um mecanismo.

O momento máximo no ponto "C" para o sistema estrutural elástico, (fig.36), deverá ser igual à capacidade de resistência que a viga ainda necessitará para se plastificar no ponto "C", o que foi calculado no estágio "II" e este é dado pela equação (39). Assim, tem-se:

$$M_c = 0,22M_{pL} = P_3 \left(\frac{2L}{3} \right) ; \text{ ou } P_3 = 0,33M_{pL}/L \quad (40)$$

e a carga total acumulada nos três estágios será:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 8,99M_{pL}/L \cong 9,0M_{pL}/L \quad (41)$$



$$M_c = P_3 \cdot x \quad \text{ou} \quad M_c = P_3 \cdot \frac{2L}{3} \quad ; \quad \Delta_B = \frac{P_3 L^3}{3EI}$$

FIG.36 - Momento máximo e deflexão

A flecha correspondente à carga "P₃" obtém-se substituindo o valor desta carga na equação de "Δ_B" fornecida na figura 36. Portanto, tem-se:

$$\Delta_B = 0.033 \frac{M_{PL} L^2}{EI} \quad (42)$$

A flecha total acumulada nos três estágios será:

$$\Delta_{B(I)} + \Delta_{B(II)} + \Delta_{B(III)} = 0.0747 \frac{M_{PL} L^2}{EI} \quad (43)$$

O diagrama de momentos para o estágio "III" será representado conforme ilustra a figura 37.

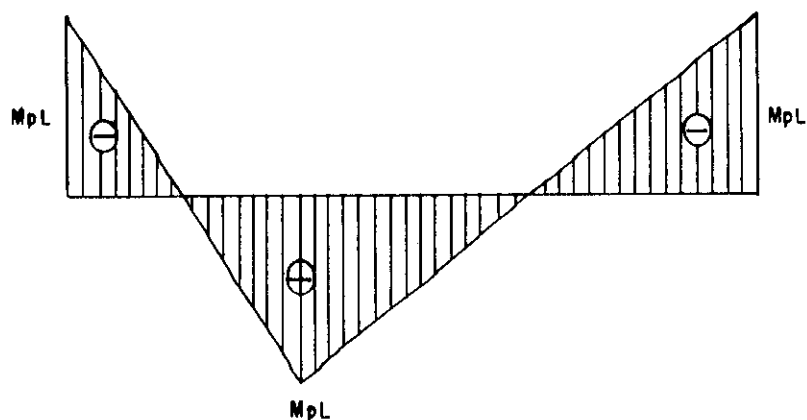


FIG.37 - Momentos absorvidos pela viga no estágio "III"

A carga última dada pela equação (41), que transforma a viga em um mecanismo, é 33% maior do que a carga que provocou a formação da primeira rótula (eq.31). Isto mostra que a "redistribuição de momentos" possibilita um aumento considerável na capacidade de resistir acréscimos de cargas com deflexões relativamente pequenas.

O gráfico carga-deflexão da figura 38 mostra os resultados dos comportamentos para os três estágios analisados anteriormente. Nota-se que a partir da formação da última rótula (ponto-C), a viga transforma-se em um mecanismo com um grau de liberdade e entra em colapso sob carga constante. Assim, neste trecho, a reta será horizontal e indefinida.

As características do cálculo plástico distinguem do cálculo elástico por considerarem a favorável redistribuição de momentos de flexão em estruturas indeterminadas após a formação da primeira rótula. Esta redistribuição pode ser considerável, e a carga final em que forma o mecanismo de colapso pode ser significativamente maior do que aquela desenvolvida na formação da primeira rótula, como foi demonstrado anteriormente. Assim, um

cálculo baseado na formação da primeira rótula, em análise elástica, pode subestimar significativamente a resistência última [117,141,160].

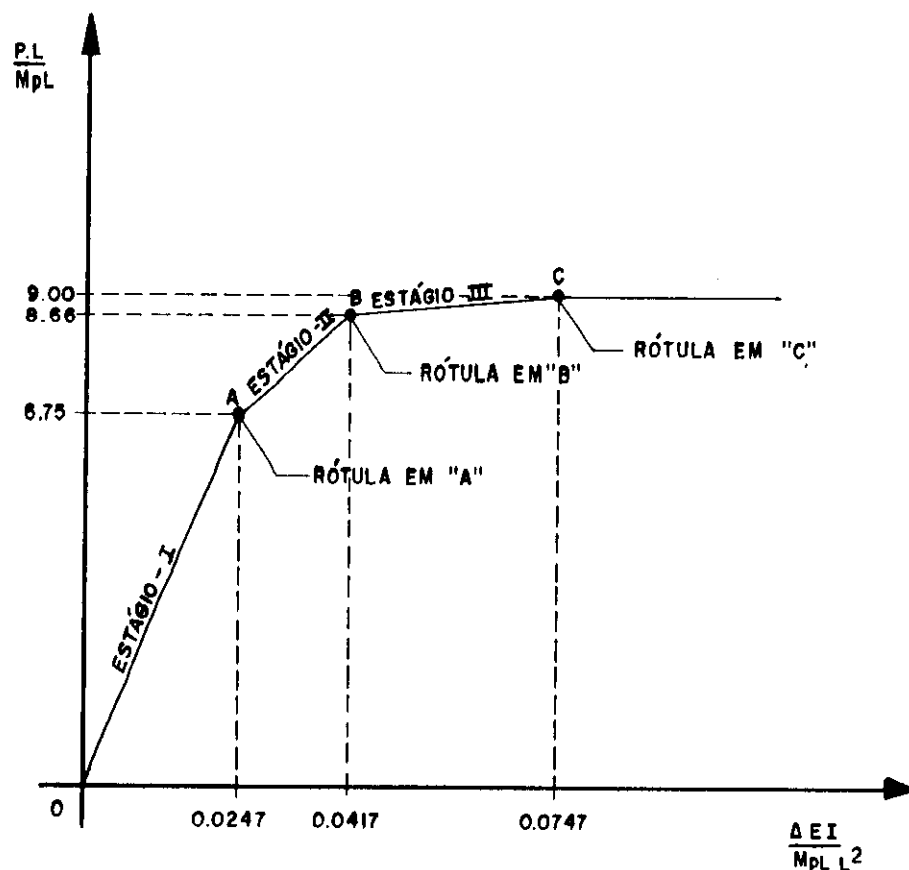


FIG.38 - Diagrama carga-deflexão

3 - EQUAÇÕES DE INTERAÇÃO

3.1 - Generalidades

A resistência sob carregamento combinado dependerá dos valores das tensões, mas isto é freqüentemente difícil de ser previsto, pois as tensões de ruína (por ruptura, escoamento, flambagem, etc.) também dependem da maneira que as cargas sejam combinadas.

Por isto, para avaliar a resistência sob carregamento combinado será conveniente adotar um critério aproximado, denominado de "método da interação". Os princípios básicos são os seguintes:

a) a resistência para cada condição de carregamento simples (tração, flexão, etc.) é primeiramente determinada por análises ou ensaios,

b) a condição de carregamento combinado é representada pela relação (R) entre cargas ou tensões em que:

$$R_i = \frac{\text{carregamento aplicado para o tipo "i"}}{\text{carregamento crítico para o tipo "i"}} \quad (44)$$

A palavra "crítica" geralmente pode ser interpretada como sendo o carregamento na ruína, caso esta ocorra por ruptura, flambagem ou por alguma outra forma. O subscrito "zero" será usado para a condição de carregamento simples. Por exemplo:

$$R_a = \frac{P}{P_o} \quad (45)$$

onde:

R_a = relação entre cargas para carregamento axial;

P = carga axial aplicada;

P_o = carga de ruína para carregamento axial simples.

Assim, atingindo-se a ruína na condição de carregamento simples, tem-se:

$$R_a = \frac{P_o}{P_o} = 1.0 \quad (46)$$

c) o efeito de um carregamento representado por " R_1 " no valor crítico ou admissível, atuando com outro carregamento " R_2 ", simultaneamente, é representado por uma equação ou gráfico envolvendo " R_1 " e " R_2 ". Para combinações com mais de dois carregamentos, o tratamento será feito desta mesma forma.

A figura 39 mostra uma curva de interação envolvendo duas condições de carregamentos combinados. Através da teoria e ensaios, comprova-se que as formas destas curvas independem da intensidade dos efeitos e dos tipos de materiais envolvidos. Elas são, primeiramente, funções dos tipos de carregamentos e dos tipos de estruturas que estão sendo analisadas.

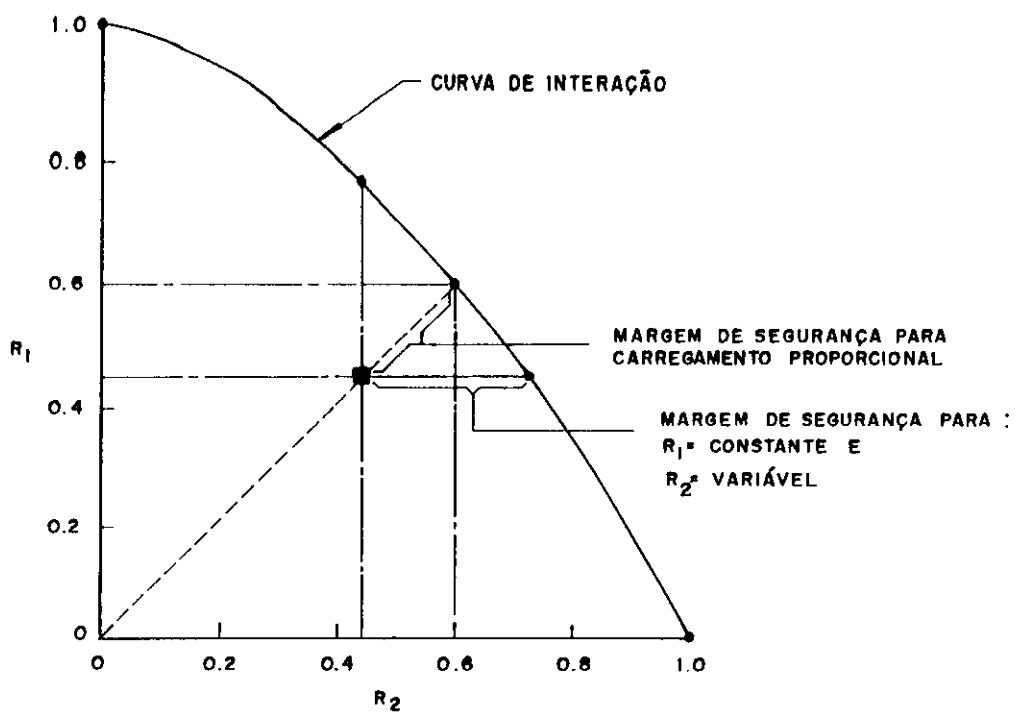


FIG.39 - Diagrama do método da interação

A curva de interação simplificada da figura 39 representa todas as combinações entre " R_1 " e " R_2 " que

causarão a ruína. Assim, se um determinado valor de " R_1 " for conhecido, o máximo valor de " R_2 ", que pode ser aplicado simultaneamente sem causar a ruína, será obtido através da curva ou através da equação de interação.

Uma importante característica do método da interação além de sua simplicidade é o fato de que todos os cálculos são feitos baseados em situações de carregamentos simples, facilmente determinados. Cada ponto extremo da curva de interação pode ser interpretado como representação de cada estado simples de carregamento. Assim, se uma das duas condições de carregamentos " R " for relativamente pequeno, não haverá grandes erros na previsão da carga de ruína combinada, sobretudo quando a forma da curva de interação não for precisamente determinada.

A figura 39 também mostra coordenadas fora da curva de interação cujo ponto de interseção é representado por um quadrado. Este ponto representa a condição de um carregamento aplicado que é consideravelmente menor do que o valor crítico. Se os carregamentos representados por " R_1 " e " R_2 " forem proporcionais, a verdadeira margem de segurança será determinada, projetando-se uma linha a partir da origem do ponto (representado na fig.39 por um quadrado) de coordenadas " R_1 " e " R_2 " até interceptar a curva de interação no ponto de carregamento crítico. Por outro lado, se uma dada condição de carregamento permanecer constante, enquanto a outra aumentar, a linha de projeção será horizontal ou vertical, dependendo do carregamento que se mantiver constante [147].

3.2 - Equação de interação para uma seção flexo-comprimida no limite elástico

Seja " P " e " M ", respectivamente, a força axial e o momento de flexão em uma seção transversal de uma peça estrutural. Considerando-se que as tensões atuantes sejam menores do que limite de escoamento, estas podem ser

determinadas através das equações clássicas da resistência dos materiais ($f = P/A$ e $f = M.y/I$). Faz-se, então, uma superposição simples destes efeitos. Conseqüentemente, a uma distância "y" a partir do centro de gravidade da seção, as tensões atuantes serão:

$$f = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} \quad (47)$$

Esta interação é mostrada graficamente na figura 40. Observa-se aí que foi adotado o sinal negativo para compressão e o sinal positivo para tração.

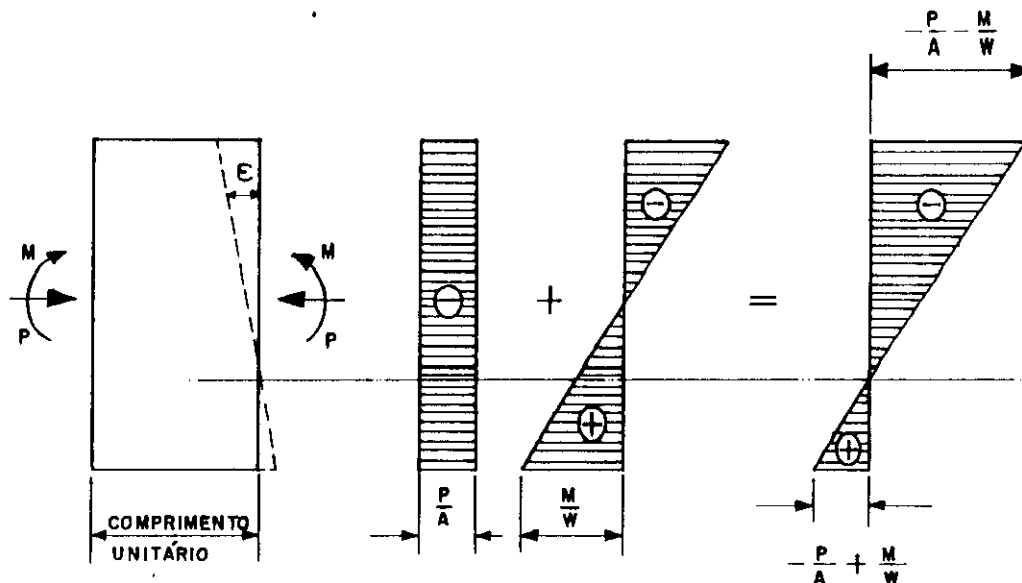


FIG.40 - Superposição das tensões elásticas

Em dimensionamentos convencionais, considera-se que a capacidade de resistência de uma peça será atingida, quando iniciar o escoamento das fibras externas da seção, isto é, quando a tensão "f" for igual à tensão " f_y ". Portanto, a equação (47) tomará a seguinte forma:

$$\frac{P}{A} + \frac{M}{W} = f_y \quad (48)$$

onde "P" e "M" serão os valores da força e do momento. Estes, quando atuam simultaneamente, causam o início do escoamento nas fibras externas da peça. Dividindo a equação (48) por " f_y ", obtém-se:

$$\frac{P}{A \cdot f_y} + \frac{M}{W \cdot f_y} = 1.0 \quad (49)$$

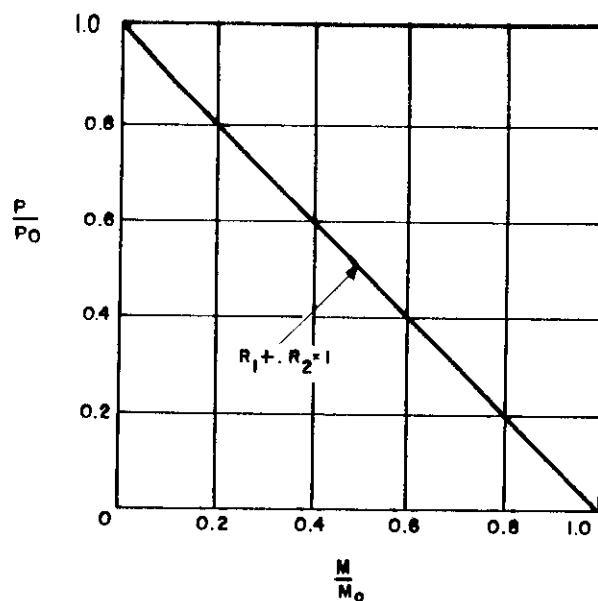


FIG.41 - Diagrama de interação ou curva de interação

Na equação (49), " $A \cdot f_y$ " é a carga concêntrica com a qual a seção iniciará o escoamento, se somente ela estiver atuando, isto é, quando "M" for igual a zero. A grandeza " $W \cdot f_y$ " é o momento de flexão para o qual a seção iniciará o escoamento, se somente ele estiver atuando, isto é, quando "P" for igual a zero. Chamando de $P_0 = A \cdot f_y$ e de $M_0 = W \cdot f_y$ e substituindo na equação (49), tem-se:

$$\frac{P}{P_0} + \frac{M}{M_0} = 1.0 \quad ; \quad \text{ou} \quad R_1 + R_2 = 1.0 \quad (50)$$

A equação (50) é uma "EQUAÇÃO DE INTERAÇÃO" de natureza adimensional, e sua curva é mostrada na figura 41.

Sendo conhecidas as resistências de uma seção para dois tipos de carregamentos simples, tal como " P_0 " em compressão simples e " M_0 " em flexão simples, será possível determinar a resistência para o carregamento combinado, ou seja, aqueles valores de " P " e " M ". Estes, atuando simultaneamente, causam o início do escoamento. Portanto, em um carregamento combinado, dado o valor de " P ", o valor máximo de " M " que a peça estrutural pode resistir quando estiver atuando simultaneamente com " P ", pode ser determinado facilmente, ou vice-versa [119].

3.3 - Equações de interação para seções retangulares e "I" flexo-comprimidas na plastificação

Se um determinado carregamento combinado " P " e " M ", ao atuarem em uma seção transversal de um membro, aumentarem na mesma proporção, a distribuição das tensões no início do carregamento será conforme ilustra a figura 42-a. Com o aumento das cargas, as fibras externas da seção escoam e a distribuição das tensões será como mostra a figura 42-b. Esta etapa foi definida por um carregamento combinado no limite de escoamento. Aquela deu origem à equação (50).

De acordo com os princípios do comportamento plástico, (item 2.2), a capacidade da seção transversal não está esgotada no limite de escoamento. Então, aumentando-se novamente os valores de " P " e de " M ", estes causarão, sucessivamente, as distribuições de tensões conforme mostra as figuras 42-c e 42-d. Devido à ação da força axial, o escoamento da seção transversal na região comprimida inicia-se antes de iniciar na região tracionada. A resistência da seção será esgotada somente quando a distribuição de tensões na seção for igual àquela mostrada na figura 42-e, isto é, quando toda a seção estiver escoada nas regiões tracionadas e comprimidas.

Portanto, serão analisadas as equações de interação de seções retangulares e "I", na fase plástica,

por representarem o limite último da capacidade de resistência de uma seção, sob efeitos combinados de flexão e compressão.

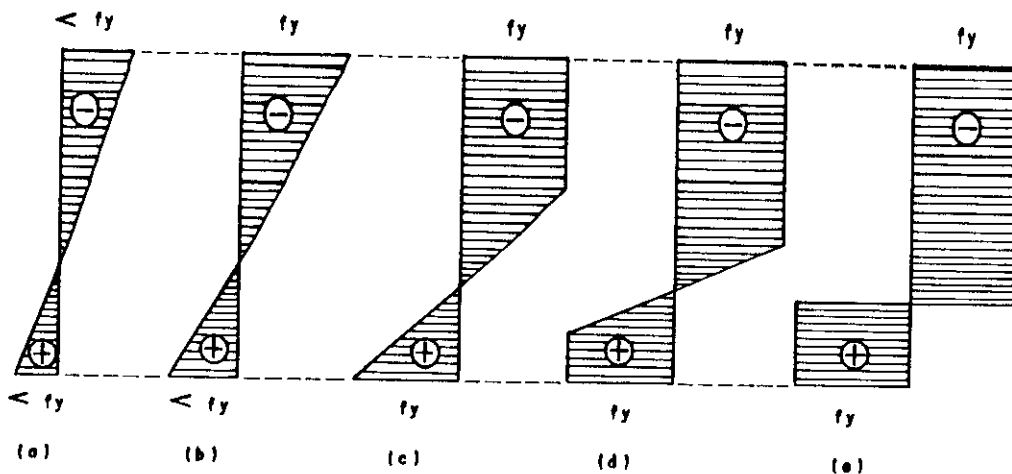


FIG.42 - Distribuição das tensões

Considere-se, inicialmente, uma seção transversal retangular, (fig.43). A distribuição total das tensões, (fig.43-b) devido a "P" e "M" pode ser considerada como sendo a soma das tensões mostradas no diagrama (c), com as tensões mostradas no diagrama (d), dados na figura 43. O diagrama de tensões da figura 43-c representa uma distribuição provocada por uma carga axial, cuja intensidade vale:

$$P = f_y . b . (h - 2j) \tag{51}$$

A distribuição de tensões mostradas pelo diagrama da figura 43-d corresponde a duas forças iguais e opostas, sendo uma de tração na parte inferior da seção, e a outra sendo de compressão na parte superior. Cada uma destas forças têm intensidade igual a " $f_y . j . b$ " e constituem um

binário, cujo momento de flexão é dado por:

$$M = f_y \cdot b \cdot j \cdot (h - j) \quad (52)$$

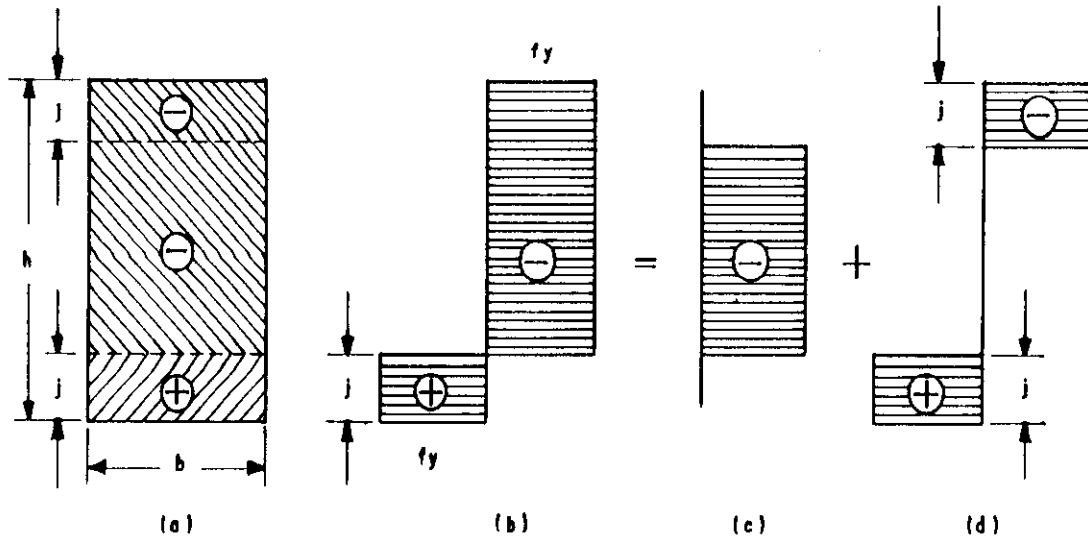


FIG.43 - Distribuição das tensões plásticas em seção retangular

Em outras palavras, a distribuição de tensões mostrada no diagrama (b) da figura 43 representa o efeito da ação simultânea de "P" e "M", cujos valores são dados pelas equações (51) e (52). Se a seção estivesse sujeita apenas à compressão axial, sua capacidade de carga, seria:

$$P_o = f_y \cdot A = f_y \cdot b \cdot h \quad (53)$$

Da mesma forma, se a seção estivesse sujeita apenas à flexão, sua capacidade plástica ao momento (eq.14) seria:

$$M_o = f_y \cdot Z = f_y \cdot \frac{b \cdot h^2}{4} \quad (54)$$

Pelas equações (51), (52), (53) e (54), tem-se:

$$\frac{P}{P_o} = (1 - 2j/h) \quad (55)$$

$$\frac{M}{M_o} = 4 \left[\frac{j}{h} - \frac{j^2}{h^2} \right] \quad (56)$$

Isolando "j/h" em (55) e levando em (56), com adequados arranjos algébricos, chega-se a:

$$\frac{P^2}{P_o^2} + \frac{M}{M_o} = 1 \quad ; \quad \text{ou} \quad R_1^2 + R_2 = 1 \quad (57)$$

A equação (57) é adimensional e representa uma curva de interação parabólica. Portanto, conhecidas as resistências plásticas de um membro em compressão simples "P_o" (ou tração simples) e a flexão simples "M_o" será possível determinar os pares de valores "P" e "M". Estes, atuando simultaneamente, tenderão a provocar o escoamento completo da seção transversal.

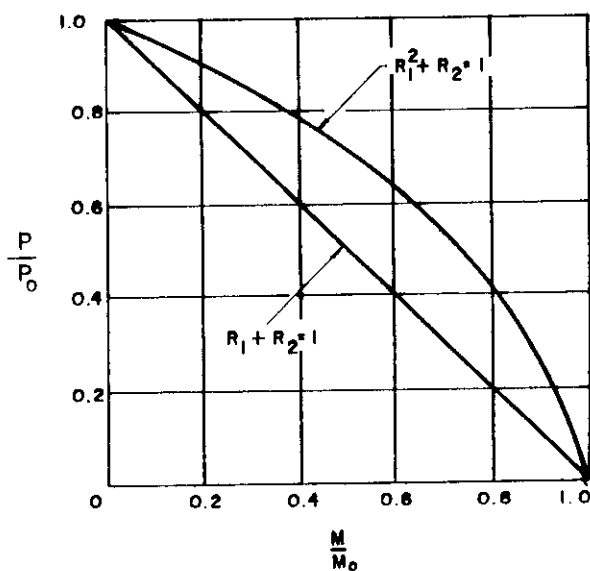


FIG.44 - Diagramas de interação ou curvas de interação.

Os gráficos das equações (50) e (57) são representados na figura 44.

Perfis retangulares raramente são usados em estruturas metálicas. Então, é mais conveniente analisar a resistência plástica de seções formadas por perfis "I" sob carregamento combinado. Para simplificar os desenvolvimentos matemáticos, será idealizado um perfil "I" constituído por duas mesas e com alma desprezível (fig.45-a). Esta simplificação será permitida, se as espessuras das mesas forem consideravelmente maiores do que a espessura da alma, seja para perfis laminados ou soldados.

Para este perfil idealizado, quando a seção estiver completamente plastificada sob carregamento combinado, a distribuição de tensões nas duas mesas será tal como representado na figura 45-b. Esta distribuição de tensões corresponde à soma das distribuições mostradas nas figuras 45-c e 45-d.

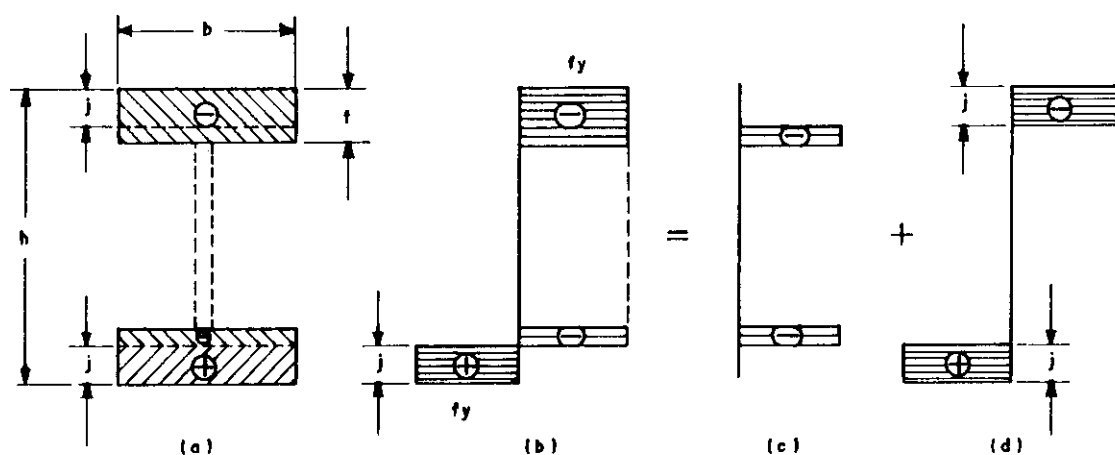


FIG.45 - Distribuição das tensões plásticas em perfil "I"

A distribuição da figura 45-c corresponde ao seguinte valor da carga axial:

$$P = f_y \cdot 2(t - j) \cdot b \quad (58)$$

e a distribuição da figura 45-d corresponde a um binário cujo momento de flexão será:

$$M = f_y \cdot b \cdot j \cdot (h - j) \quad (59)$$

Supondo-se que a seção esteja solicitada somente por força axial, sua capacidade de carga será:

$$P_o = f_y \cdot A = f_y \cdot 2t \cdot b \quad (60)$$

E, supondo-se que também a seção esteja solicitada somente à flexão, sua capacidade ao momento (eq.14), será:

$$M_o = f_y \cdot Z = f_y \cdot b \cdot t \cdot (h - t) \quad (61)$$

A partir das equações (50), (57), (60) e (61), tem-se:

$$\frac{P}{P_o} = (1 - j/t) \quad (62)$$

$$\frac{M}{M_o} = \frac{j}{t} \left(\frac{h - j}{h - t} \right) \cong \frac{j}{t} \quad (63)$$

A relação que aparece entre parênteses na expressão (63) aproxima-se da unidade porque em todas as seções da prática a espessura "t" e a pequena parcela "j" da mesma são muito pequenas, quando comparadas com a altura "h" da seção. Assim, levando a relação "j/t" dada pela equação (63), na equação (62), obtém-se a capacidade plástica à carga combinada para o perfil "I" idealizado:

$$\frac{P}{P_o} + \frac{M}{M_o} = 1 \quad ; \quad \text{ou} \quad R_1 + R_2 = 1 \quad (64)$$

A equação (64) é idêntica à equação (50),

conclui-se, então, que ambas podem ser utilizadas em análises elásticas ou plásticas, embora ainda sejam conservadoras. As curvas de interação para a resistência plástica de seções "I" reais ficam situadas entre a curva de interação para o perfil "I" idealizado, e a curva de interação para uma seção retangular (fig.46). As formas exatas destas curvas dependem das dimensões da seção particular em questão, mas em todos os casos, as curvas se baseiam no gráfico da equação (64), pois as propriedades dos perfis "I", "H", "Z", e "U" encontrados na prática se aproximam mais do perfil "I" idealizado do que do retângulo.

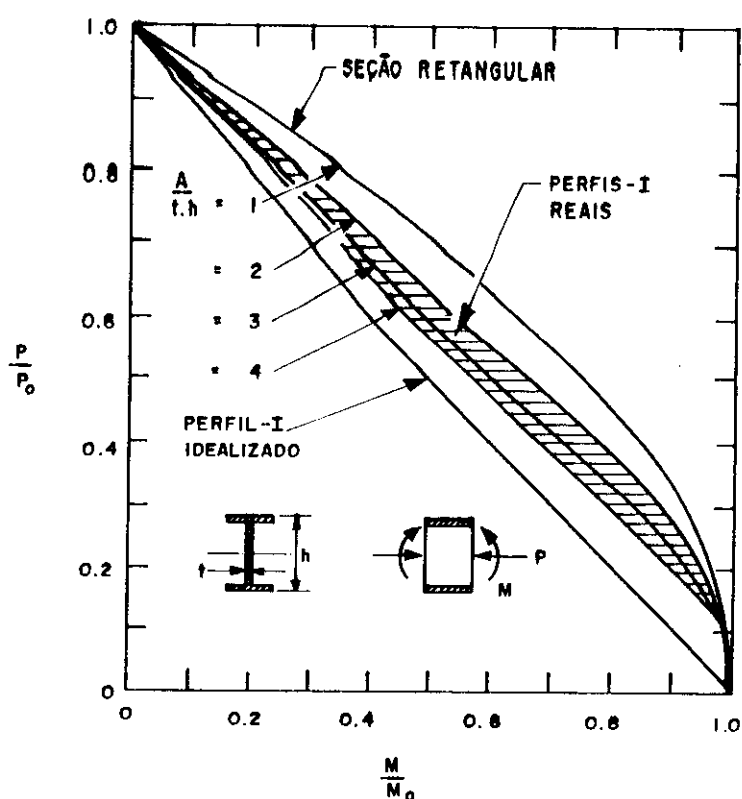


FIG.46 - Curvas de interação para seções "I" e retangulares.

As equações de interação desenvolvidas anteriormente limitam-se aos elementos sujeitos à ação combinada da força axial e do momento de flexão sem prever a

perda de estabilidade. Para tais casos, estas equações deverão sofrer correções através do fator de amplificação. Este será analisado oportunamente no estudo das peças flexo-comprimidas (ver cap. 4) [15,119].

4 - ESTABILIDADE

4.1 - Generalidades

Nos estados limites, uma estrutura, ou elemento estrutural, é calculado para resistir aos efeitos que tendem afetar à segurança ou ao desempenho da estrutura. Basicamente, existem dois tipos de estados limites: o "estado limite de resistência" e o "estado limite de serviço". O primeiro está relacionado ao comportamento da estrutura devido à sua capacidade máxima de resistir às cargas. Exemplos de estados limites de resistência inclui a ruína estrutural de uma peça, a formação de mecanismos de colapso plástico e a instabilidade da estrutura. Por outro lado, o "estado limite de serviço" está relacionado com o comportamento da estrutura, em condições normais de utilização. Preocupa-se, neste caso, com a aparência, com a durabilidade e com a manutenção. Exemplos de estados limites de serviço incluem deflexões, vibrações, corrosão, etc.

A "estabilidade" é um "estado limite de resistência" de importância reconhecida pelos engenheiros, mas este assunto ainda é, pouco esclarecido para muitos profissionais da área. A razão disto é que o uso da análise estrutural de "primeira ordem", já comum para a maioria dos engenheiros, não se aplica a uma análise de estabilidade. Em uma análise real de estabilidade, a variação da geometria da estrutura deve ser levada em consideração. Assim, as equações de equilíbrio devem ser escritas com base na geometria de uma estrutura que se torna deformada, quando sujeita a carregamentos. Esta é conhecida como "análise de

segunda ordem". Tal análise é mais complicada, pois as equações de equilíbrio resultantes são diferenciais que substituem as equações algébricas usuais. Conseqüentemente, é necessário um certo domínio de cálculo diferencial antes de tentar resolvê-las.

A estabilidade de um sistema elástico pode ser analisado através do conceito de energia potencial mínima. Na natureza, um sistema elástico sempre tende a assumir um estado de energia potencial mínimo. O sistema estará em equilíbrio "estável", se algum desvio de seu estado de equilíbrio inicial resultar em um acréscimo da energia potencial do sistema. O sistema estará em "equilíbrio instável", se algum desvio, a partir de seu estado de equilíbrio, resultar em uma diminuição da energia potencial total. Finalmente, o sistema estará em "equilíbrio neutro", se algum desvio, a partir de seu estado de equilíbrio, não provocar aumento e nem diminuição de sua energia potencial total (fig.47) [41,82].

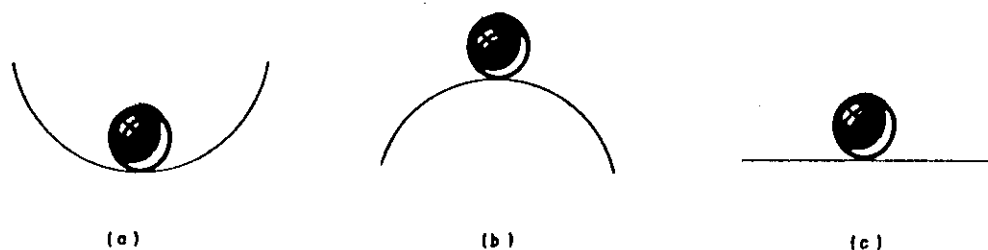


FIG.47 - Tipos de equilíbrios: (a) Estável, (b) Instável e (c) Neutro.

Para entender as noções básicas da estabilidade, que também se aplicam aos elementos estruturais reais, serão analisados os comportamentos de modelos elásticos simplificados.

Tome-se, por exemplo, uma barra rígida vertical com peso próprio desprezível sujeita a uma carga "P", na sua extremidade superior e vinculada, em sua extremidade inferior, por uma articulação e uma mola de coeficiente linear "k". Verifica-se que esta cria um momento resistente ($M_r = k.\theta$) à rotação em torno da articulação (fig.48).

A mola é ajustada de tal modo que, inicialmente, a barra se mantém na posição vertical e, portanto, se encontra em equilíbrio. Se a barra for deslocada de sua posição vertical por alguma perturbação do sistema, a mola exercerá um momento resistente que tenderá fazer com que a barra retorne à sua posição inicial (fig.48-b). Para o equilíbrio na posição deslocada tem-se:

$$\Sigma M_o = 0 \quad ; \quad P.u - k.\theta = 0 \quad (65)$$

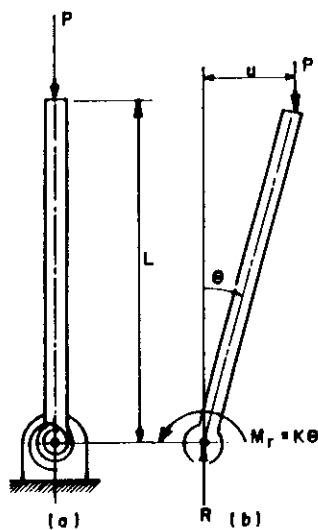


FIG.48 - Modelo elástico

Na equação de equilíbrio (65), o termo "P.u" é o momento da força externa que tende a aumentar a deformação

do sistema, enquanto que " $k\theta$ " é o momento resistente que a mola opõe a este incremento. Da comparação entre estes dois momentos obtém-se a classificação dos casos de equilíbrio:

a) se, $P.u < k.\theta$, o "equilíbrio será estável", pois a mola obriga a barra a retornar à sua posição inicial;

b) se, $P.u > k.\theta$, o "equilíbrio será instável", pois a mola não é capaz de fazer com que a barra retorne à sua posição inicial;

c) se, $P.u = k.\theta$, o "equilíbrio será neutro", pois a mola é capaz de manter a barra na posição deslocada.

É de grande interesse estudar a condição de "equilíbrio neutro". Visto que este separa o equilíbrio estável do instável. Desta forma, a equação (65) será satisfeita somente quando a barra estiver neste estado, pois somente aí, haverá configurações deformadas em equilíbrio, depois de eliminar o agente externo.

Se o deslocamento " u " da extremidade da barra for pequeno, pela geometria, ter-se-á " $u = L\theta$ ", e a equação (65) converter-se-á em:

$$P.L.\theta - k\theta = 0 \quad ; \quad \text{ou} \quad \theta.(P.L - k) = 0 \quad (66)$$

Existem duas possibilidades para que seja satisfeita esta equação:

$$\theta = 0 \quad , \quad \text{então} \quad u = 0 \quad (67)$$

$$P.L - k = 0 \quad , \quad \text{então} \quad P = P_{cr} = \frac{k}{L} \quad (68)$$

A primeira solução indica que a barra pode

permanecer reta, qualquer que seja o valor de "P". A segunda mostra que, quando "P" alcança um determinado valor " k/L ", será possível um estado de equilíbrio com uma configuração ligeiramente deformada, isto é, quando a carga tiver o valor " k/L ", poderá existir um número infinito de configurações de equilíbrio. Neste caso, tal barra estará na posição reta, e as outras ligeiramente deformadas. Este fenômeno corresponde ao "equilíbrio neutro" e indica que existem duas ou mais configurações de equilíbrio para uma mesma carga. Assim, tem-se uma "bifurcação do equilíbrio". Este define a carga crítica do sistema característica dos fenômenos de flambagem (fig.49). O deslocamento $u = L.\theta$, produzido pela carga crítica é indeterminado, pois a equação (66) é satisfeita para qualquer valor de " θ " (fig.49). Exemplos deste tipo de estabilidade incluem a flambagem de colunas geometricamente perfeitas carregadas axialmente e flambagem de placas finas submetidas à força de compressão no plano. O diagrama da figura 49 mostra os três tipos de equilíbrios analisados. Observa-se que há dois trechos para o equilíbrio neutro, pois a barra pode girar para a esquerda ou para a direita.

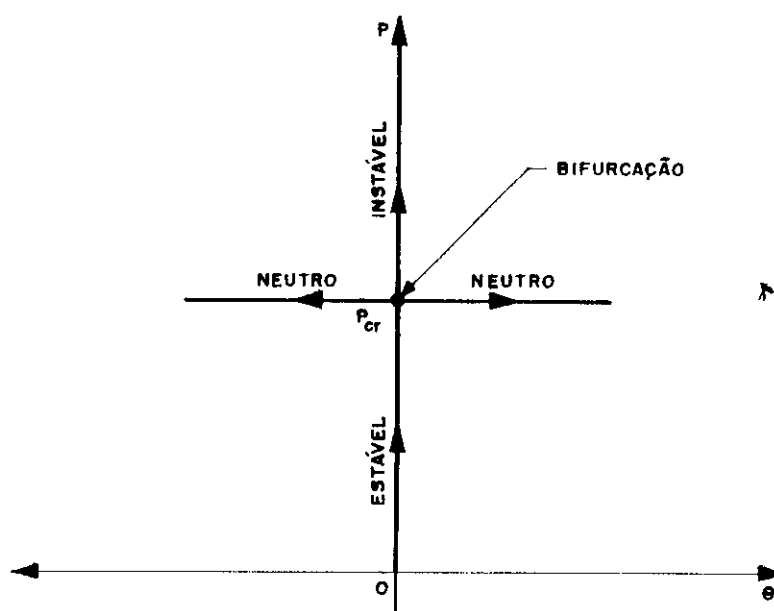


FIG.49 - Diagrama $P = f(\theta)$

A equação (66) obtida, supondo-se que $u = L.\theta$, descreve o fenômeno no instante em que se inicia a flambagem, porém deixa de ser aplicável, quando os deslocamentos "u" e os ângulos " θ " adquirem grandes valores. Para estudar o fenômeno dos grandes deslocamentos, pode-se recorrer novamente à equação (65), fazendo-se $u = L.\text{sen}(\theta)$. Portanto, tem-se:

$$P.L.\text{sen}(\theta) - k.\theta = 0 \quad (69)$$

Esta equação será satisfeita quando " $\theta = 0$ ", ou se:

$$P = \frac{k}{L} \frac{\theta}{\text{sen}(\theta)} = P_{cr} \frac{\theta}{\text{sen}(\theta)} \quad (70)$$

Ao iniciar-se a flambagem, o ângulo " θ " é muito pequeno, então pode-se considerar que $\theta = \text{sen}(\theta)$. Assim, da equação (70) obtém-se que $P = P_{cr} = k/L$, o que representa o mesmo resultado encontrado na análise dos pequenos deslocamentos. Para ângulos " θ " crescentes, " $\text{sen}(\theta)$ " é menor do que " θ ", então " $\theta/\text{sen}(\theta) > 1$ ", e a carga será maior do que " P_{cr} ". Conclui-se então que esta não será a carga máxima que pode suportar a barra.

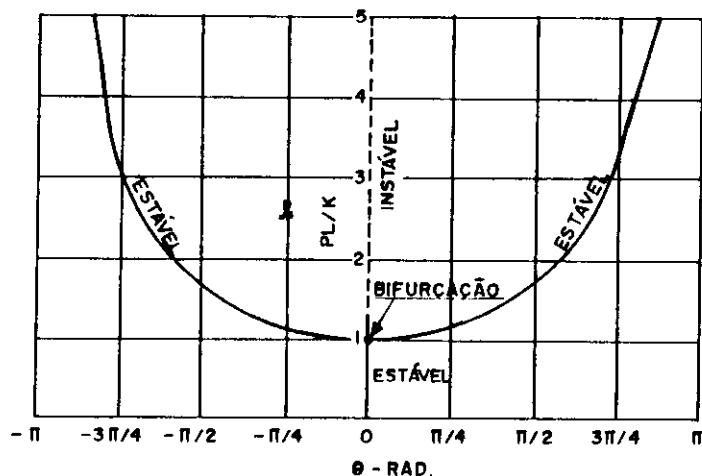


FIG.50 - Diagrama $(P/P_{cr}) = f(\theta)$

Para grandes deslocamentos, estes deixam de ser indeterminados, e a equação (70) permite determinar o ângulo " θ " para diferentes relações de " $P/P_{cr} = P.L/k$ " (fig.50).

Este comportamento é característico de estruturas sujeitas ao fenômeno da pós-flambagem, isto é, a carga necessária para manter o equilíbrio posterior à flambagem aumenta com o aumento da deformação. Assim, para estudar o comportamento de um sistema sujeito à pós-flambagem, deverá ser usada a teoria dos grandes deslocamentos, pois pela análise da teoria dos pequenos deslocamentos, isto não é possível. Exemplos de estruturas que possuem comportamento estável pós-flambagem incluem colunas elásticas carregadas axialmente e carregamentos no plano de placas finas [41,79,82].

4.2 - Flambagem elástica na compressão simples

O tipo mais simples de flambagem é a de uma barra reta sujeita a forças axiais de compressão iguais e opostas (fig.51). Aumentando-se as forças aplicadas, o estado reto do membro torna-se instável, e este tenderá a ter uma forma curva que será denominada de flambagem.

A resistência à flambagem aumenta com a rigidez à flexão do membro, com o aumento da altura e da espessura dos elementos da seção transversal. Por outro lado, a resistência à flambagem diminui com o aumento do comprimento da barra, sendo, portanto, as barras mais esbeltas as que possuem menor resistência.

Para uma barra de geometria perfeita sem curvatura inicial ou excentricidade de carregamentos e livre das tensões residuais, os seus estados de equilíbrios seguirão os caminhos mostrados no diagrama força-deslocamento da figura 52.

O diagrama da figura 52 se baseia na equação clássica da carga crítica de Euler, cujas simplificações de dedução na expressão da curvatura da elástica limita sua

aplicação apenas a pequenos deslocamentos.

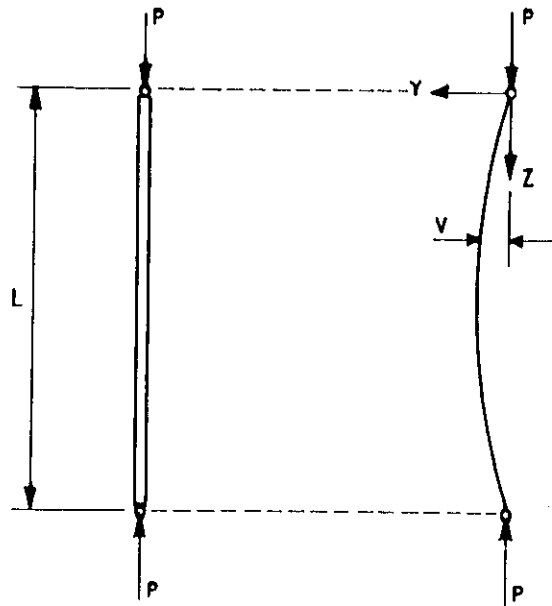


FIG.51 - Flambagem elástica na compressão simples

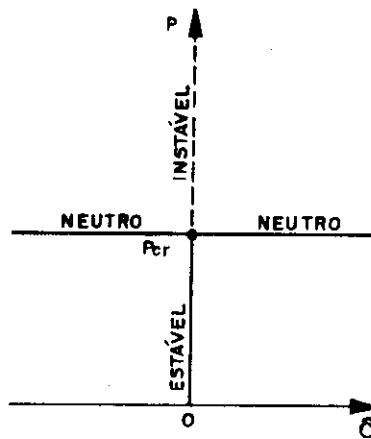


FIG.52 - Diagrama $P = f(\delta)$ para pequenos deslocamentos

Se a expressão exata da curvatura fosse usada, a fórmula, para a carga crítica seria também exata e poderia ser utilizada para grandes ou pequenos deslocamentos. No

entanto, o uso da expressão exata da curvatura leva a uma análise mais complexa, conhecida como "teoria de terceira ordem". O comportamento da flambagem analisado desta maneira leva aos caminhos dos estados de equilíbrio mostrados na figura 53.

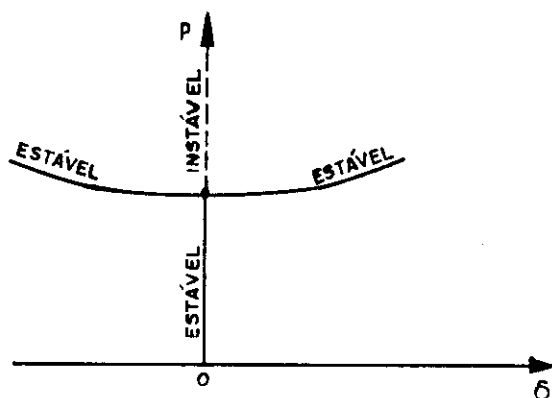


FIG.53 - Diagrama $P = f(\delta)$ para grandes e pequenos deslocamentos.

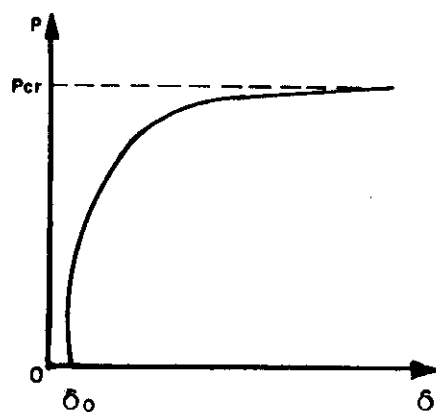


FIG.54 - Diagrama $P = f(\delta)$ considerando excentricidade

Na prática, o deslocamento aumenta rapidamente quando " $P > P_{cr}$ " e a curva pós-flambagem se aproxima de uma reta, justificando-se assim a utilização da teoria de Euler.

O diagrama da figura 54 mostra como uma excentricidade inicial " δ_0 " é amplificada quando a carga axial se aproxima do seu valor crítico.

Todos os efeitos associados a uma barra real, como: excentricidades, imperfeições geométricas, tensões residuais, condições de extremidades e as análises feitas para uma barra ideal serão vistas oportunamente (ver cap. 3) [29,93,125].

4.3 - Flambagem de placas

As solicitações mais importantes a que estão sujeitas as placas dos perfis estruturais são:

- a) "compressão uniforme" em mesas de vigas e em almas e mesas de colunas;
- b) "flexão pura" em almas de vigas nas regiões de cortante nulo;
- c) "cisalhamento puro" em almas de vigas nas regiões onde o momento fletor é nulo;
- d) "cisalhamento e os esforços normais combinados" em regiões de variações dos esforços cortantes e variações dos momentos fletores.

A "compressão uniforme" é o caso mais freqüente, enquanto que a flexão pura e o cortante puro aparecem raras vezes na prática. Desse modo, recai-se quase sempre, no caso de efeitos combinados entre o cisalhamento e o esforço normal. No entanto, esta combinação deve ser considerada somente em regiões onde estes efeitos são elevados como no

caso de vigas esbeltas.

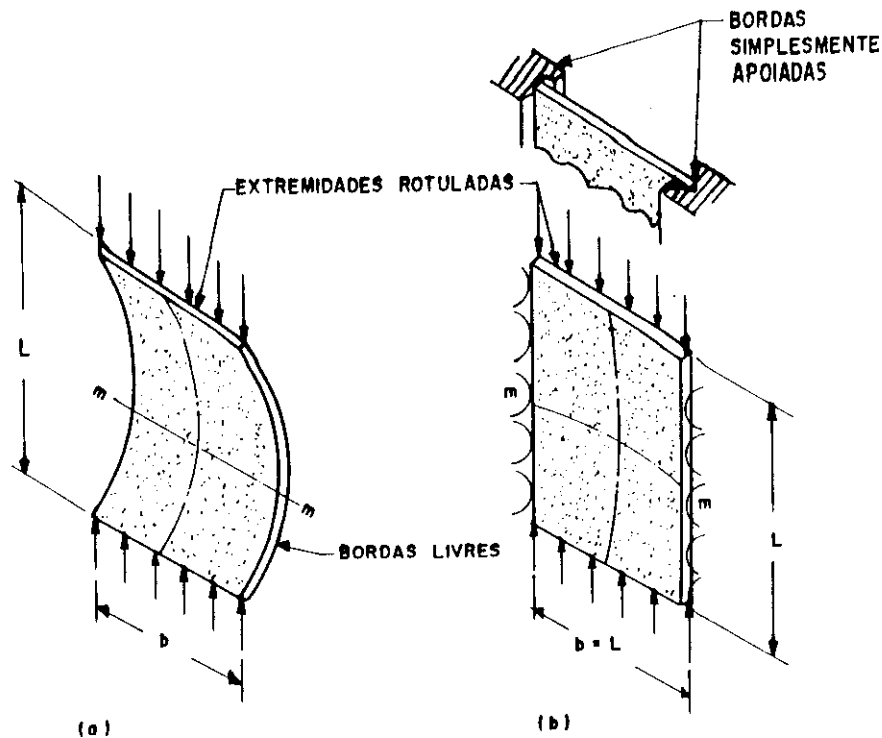


FIG.55 - Condições de bordas de uma placa quadrada.

A figura 55 mostra duas placas quadradas para as quais a largura é consideravelmente maior do que a espessura. As placas são carregadas por forças de compressão iguais e opostas. O caso mostrado na figura 55-a possui duas bordas livres, e a placa comporta-se como se fosse uma barra bi-rotulada sujeita à compressão simples, flambando apenas em torno de um eixo. Note que o eixo "mm" permanece indeformado durante a flambagem. No caso mostrado na figura 55-b, a placa é considerada simplesmente apoiada pelos entalhes, nas bordas laterais, cujas restrições obrigam a placa a se curvar em torno de dois eixos diferentes no estado de flambagem indicado pelas duas linhas de centro da placa. Conseqüentemente, as restrições impostas nas bordas

laterais da placa, alteram muito a carga de flambagem elástica do painel.

Se o comprimento da placa da figura 55-b for maior do que "b", a teoria das placas mostrará que a flambagem ocorrerá através de uma série de painéis quadrados equivalentes (fig.56) [58,79,147].

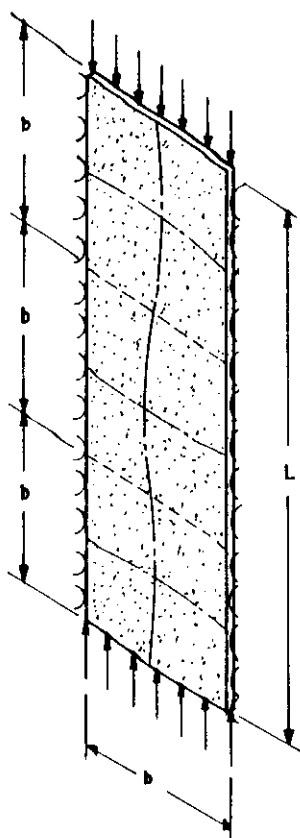


FIG.56 - Flambagem de placa: comprimento maior do que a largura.

Análises da "pós-flambagem" em placas com um ou dois lados restringidos demonstram que a resistência da placa aumenta após a flambagem do painel. Neste caso, a placa será capaz de resistir uma tensão aplicada, consideravelmente maior do que a tensão crítica. A natureza física deste fenômeno é facilmente entendida, se analisado o modelo de placa mostrado na figura 57.

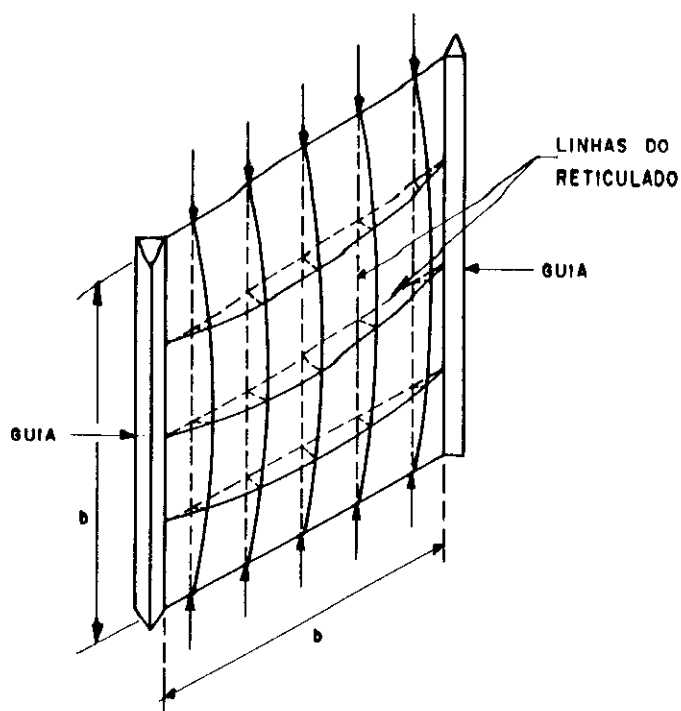


FIG.57 - Modelo de placa para análise da pós-flambagem

A placa é reticulada ortogonalmente por linhas tracejadas e, nas bordas verticais são colocadas guias. Estas representam as chapas que mantêm retas as bordas do painel. Ao alcançar a carga de flambagem, as barras comprimidas do retículo começam a se deformar. Se cada uma destas barras atuasse isoladamente das restantes, todas falhariam sob o mesmo esforço e atingiriam o colapso, imediatamente após o início da flambagem. No entanto, uma placa é um elemento estrutural de duas dimensões predominantes, e as barras horizontais do retículo colaboram com a resistência dificultando a flambagem na direção perpendicular à direção da compressão. Ao iniciar os deslocamentos laterais das barras verticais comprimidas do retículo, aparecem esforços de tração e de flexão nas barras

horizontais que se opõem a qualquer aumento dos deslocamentos e fazem com que a capacidade de carga das barras verticais do retículo cresçam acima daquelas que tenderiam a flambá-las, se estas atuassem isoladamente umas das outras. A figura 58 mostra os diagramas dos comportamentos pós-flambagem: um para uma placa sem imperfeições e outro para uma placa com imperfeições iniciais [58,79].

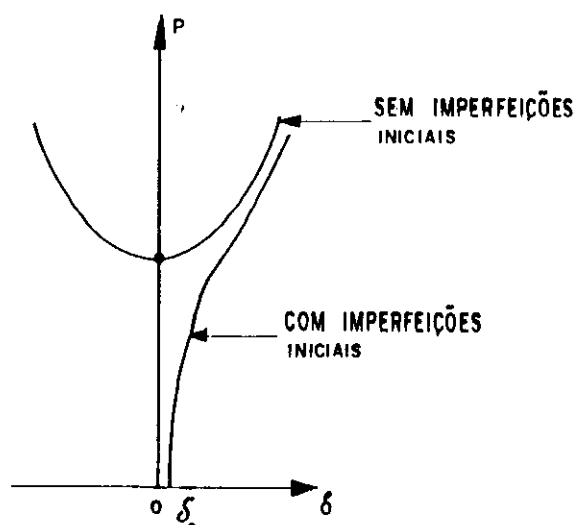


FIG.58 - Diagramas $P = f(\delta)$ para pós-flambagem

Os efeitos do "cisalhamento puro" pode ser analisado, considerando-se uma placa retangular sujeita a este tipo de esforço, como mostra a figura 59-a. Pela teoria do estado plano de tensões, mostra-se que em um ponto da placa de dimensões elementares, cujos lados são orientados em 45° em relação aos bordos da placa, estes estarão sujeitos a tensões de tração e de compressão em dois lados opostos (fig.59-a). As tensões de compressão tendem a provocar a flambagem local, dando origem a abaulamentos alongados e orientados em torno de 45° em relação às bordas da placa (fig.59-b).

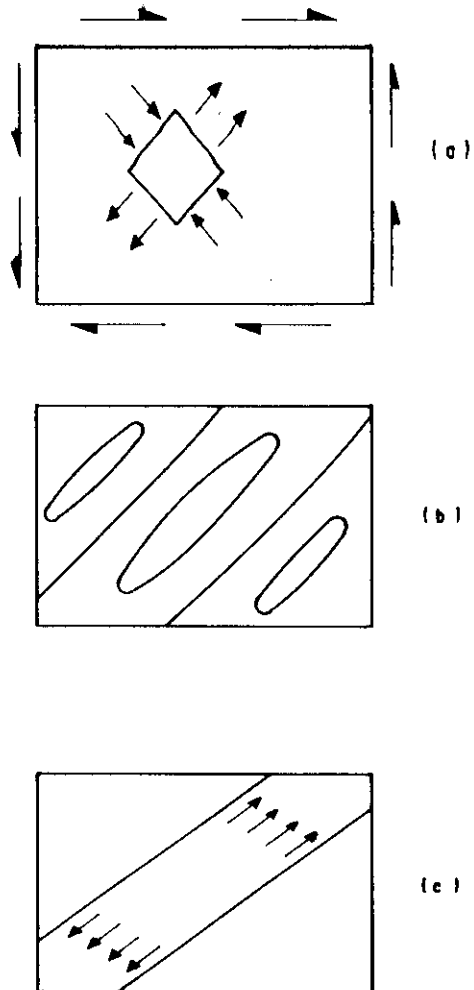
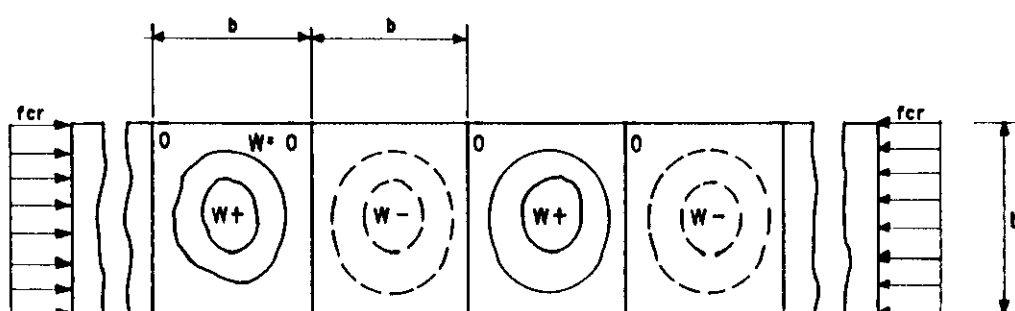


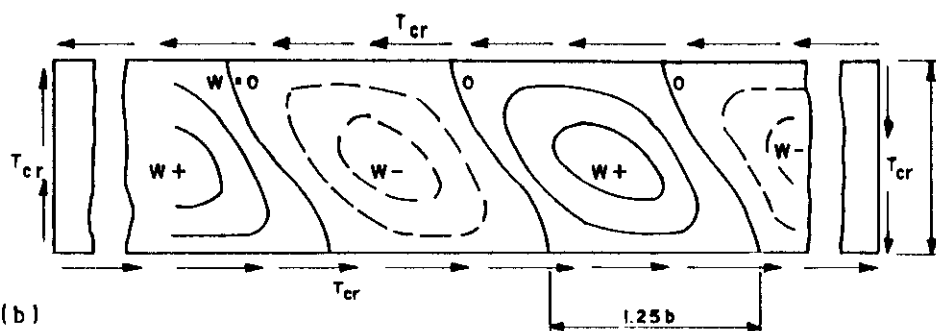
FIG.59 - (a) Painel em cisalhamento, (b) modo de flambagem e (c) campo de tração

De maneira semelhante ao comportamento de uma placa sujeita à compressão, uma placa sujeita ao cisalhamento pode também resistir a tensões bem acima da tensão crítica de flambagem elástica. Isto se deve aos efeitos da pós-flambagem. Como a tensão de cisalhamento aplicada aumenta acima da sua tensão crítica de

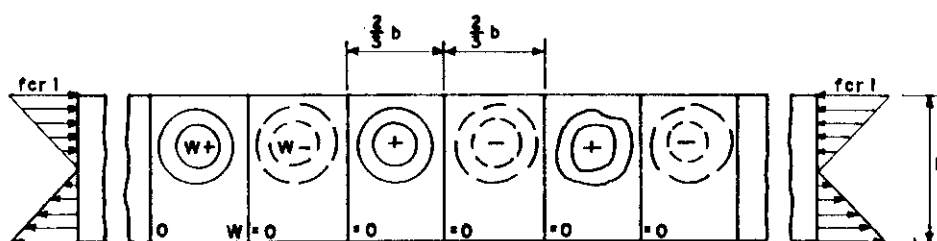
cisalhamento, a placa flamba elasticamente e mantém uma pequena rigidez na direção em que a componente de compressão atua. Porém, a componente de tração é ainda totalmente resistida pela placa. O efeito da flambagem diminui progressivamente, e a placa passa a comportar como uma série de barras na direção da tração desenvolvendo, conseqüentemente, o chamado "campo de tração", (fig.59-c).



(a)



(b)



(c)

W = DEFLEXÃO

FIG.60 - Flambagem de placas: (a) compressão axial; (b) cisalhamento puro; (c) flexão pura.

A ação do campo de tração é particularmente importante em vigas esbeltas e em vigas caixão, cujas placas de almas têm como principal função resistir ao cisalhamento. A extensão em que o campo de tração pode desenvolver depende muito da forma como as bordas dos painéis das almas são restringidos [58].

Em placas sujeitas à "flexão pura", (fig.60-c), a flambagem não é tão importante nos perfis estruturais como a flambagem por compressão axial ou por cisalhamento. Por isto, nos estudos subseqüentes não será dada ênfase neste assunto. A figura 60 resume os modos de flambagem: por compressão axial, por cisalhamento e por flexão. Nestes casos, as placas são consideradas simplesmente apoiadas ao longo das bordas longitudinais [29,58,79].

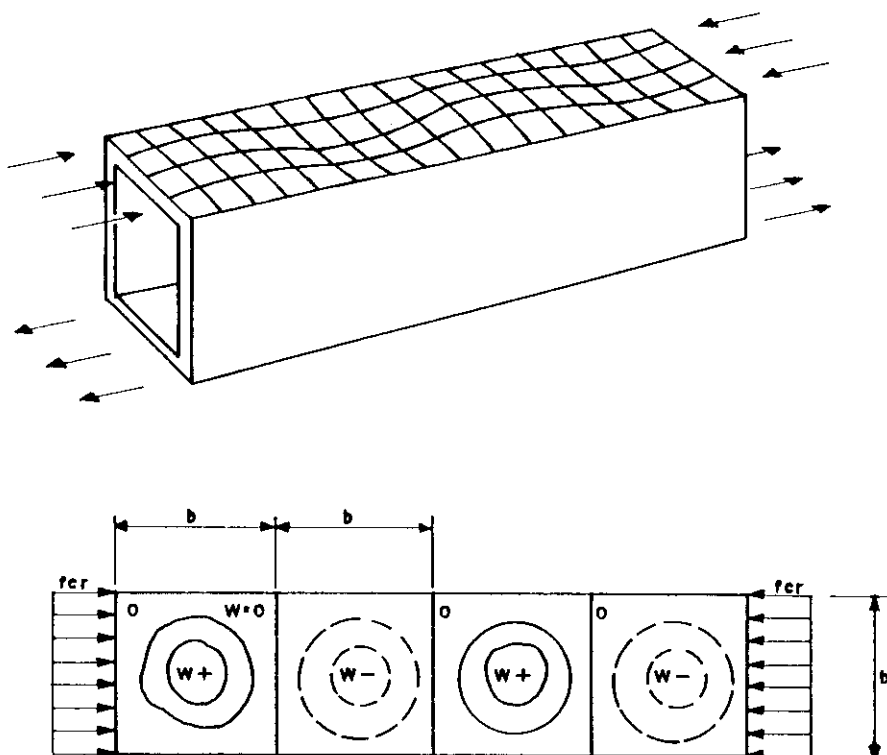


FIG.61 - Flambagem local da mesa comprimida de viga caixão

A "flambagem local" pode ocorrer em qualquer elemento dos perfis de colunas e vigas, se estes estiverem sujeitos aos efeitos analisados anteriormente. Como exemplos serão analisados dois casos de flambagem local: o primeiro consiste em uma viga caixão, (fig.61), em que as mesas inferior e superior serão consideradas como placas simplesmente apoiadas por suas bordas e o momento de flexão provocará tensão de compressão longitudinal na mesa superior. Esta tenderá a causar abaulamentos, ou mais precisamente, flambagem local. Efeitos semelhantes aparecerão se este mesmo perfil for usado como coluna. Neste caso, nas quatro placas poderão desenvolver os efeitos da flambagem local.

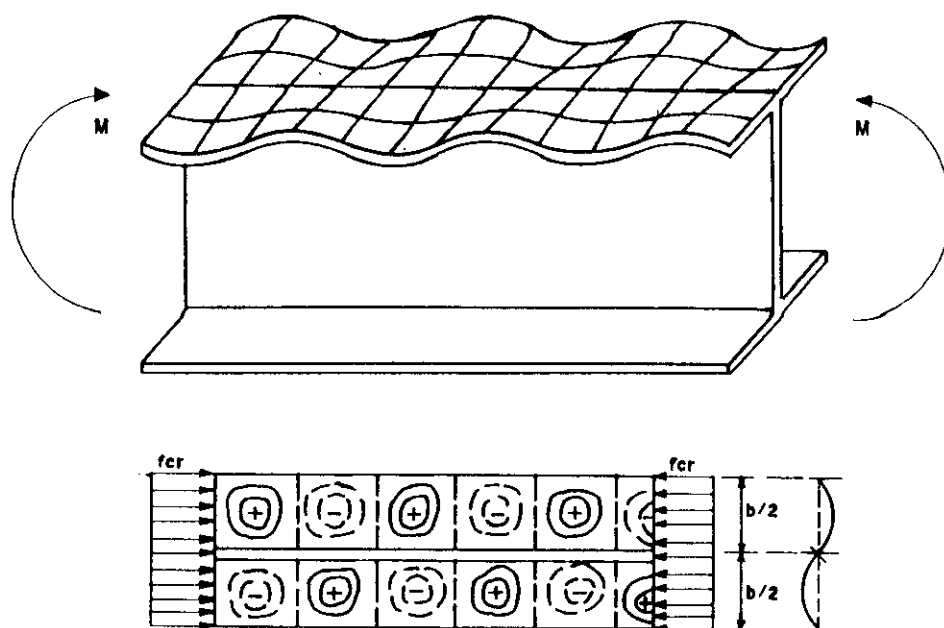


FIG.62 - Flambagem local da mesa comprimida de viga "I"

O segundo exemplo é o de uma viga "I" que também estará sujeita à flexão. A mesa comprimida é considerada como duas placas, tendo cada uma uma borda livre e outra engastada. Assim, a tensão de compressão longitudinal tende a causar abaulamentos ou flambagem local como mostra a figura 62. Efeitos semelhantes podem ocorrer nas três placas que constituem o perfil "I", quando este é utilizado como coluna [58,79,93].

4.4 - Flambagem por torção

Considere uma peça comprimida de seção cruciforme conforme ilustra a figura 63.

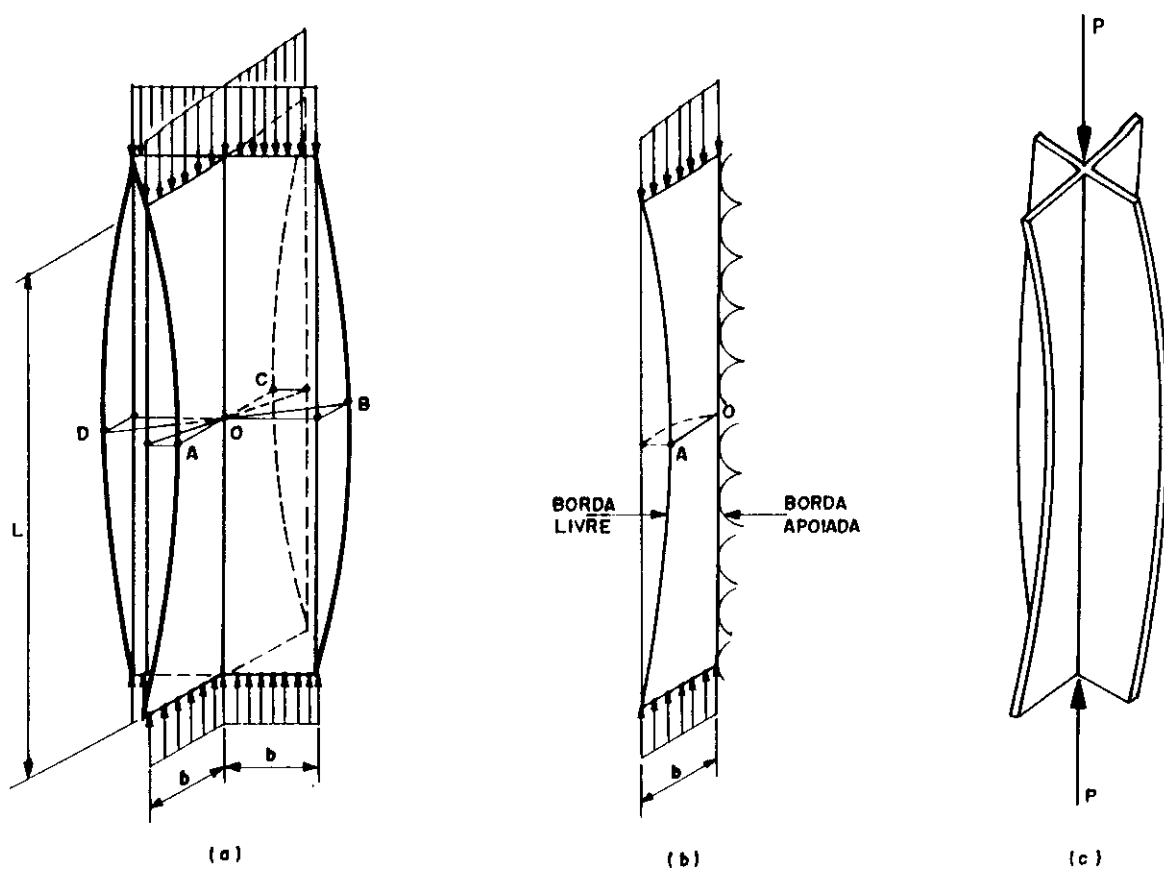


FIG.63 - (a) Flambagem por torção de uma coluna cruciforme; (b) flambagem de uma chapa com uma borda livre e outra apoiada; (c) flambagem real da coluna.

Tais seções não são de uso comum, mas permitem fácil visualização do fenômeno da flambagem por torção. Cada uma das suas quatro chapas podem ser consideradas como placas planas ao estarem sob compressão longitudinal e, portanto, possíveis de flambar. Se a borda interna de cada placa fosse simplesmente apoiada, cada placa flambaria

independentemente para o mesmo valor da tensão aplicada. Uma linha \overline{OA} desenhada transversalmente a uma das placas do perfil cruciforme permaneceria aproximadamente reta para este modo de flambagem, mas giraria em torno do centro "O" do perfil. O mesmo aconteceria com as linhas \overline{OB} , \overline{OC} , e \overline{OD} desenhadas transversalmente nas outras placas do perfil. Estas tenderiam a girar com o mesmo deslocamento e na mesma direção, (fig.63). Como estas quatro linhas encontram-se em ângulo reto em "O", o mesmo comportamento ocorreria, se as placas fossem rigidamente unidas ao longo de suas bordas comuns, como na realidade acontece com as peças cruciformes. Assim, é possível uma forma de flambagem na qual o eixo longitudinal da peça permanece reto, enquanto as seções transversais giram, ou seja, a peça torce. Este tipo de flambagem é denominado de "flambagem por torção". O modo de flambagem e a carga crítica correspondente dependem das condições de apoios das extremidades da peça.

A flambagem por torção pura somente será possível, se o centro de gravidade e o centro de cisalhamento da seção transversal forem coincidentes. Esta condição será satisfeita para perfis que possuem dupla simetria ou um ponto de simetria. Este tipo de flambagem pode ocorrer, por exemplo, em seções "Z" e perfis "H" [58,119,147].

4.5 - Flambagem por flexo-torção

Se o centro de gravidade e o centro de cisalhamento de uma seção transversal não coincidem como acontece em cantoneiras ou perfis "U", os efeitos das deformações devido à flexão e devido à torção complicam-se consideravelmente.

Admita-se uma coluna, cuja seção possua um eixo de simetria sobre o qual atua uma força axial "P", e cujo equilíbrio é perturbado por uma pequena força transversal "F" (fig.64-a), neste caso a coluna apresenta deslocamentos na direção perpendicular ao seu eixo. Estes deslocamentos

fazem com que "P" não seja mais perpendicular à seção transversal da coluna. A força "P" pode, portanto, ser decomposta numa componente normal à seção e, em outra, no plano da seção.

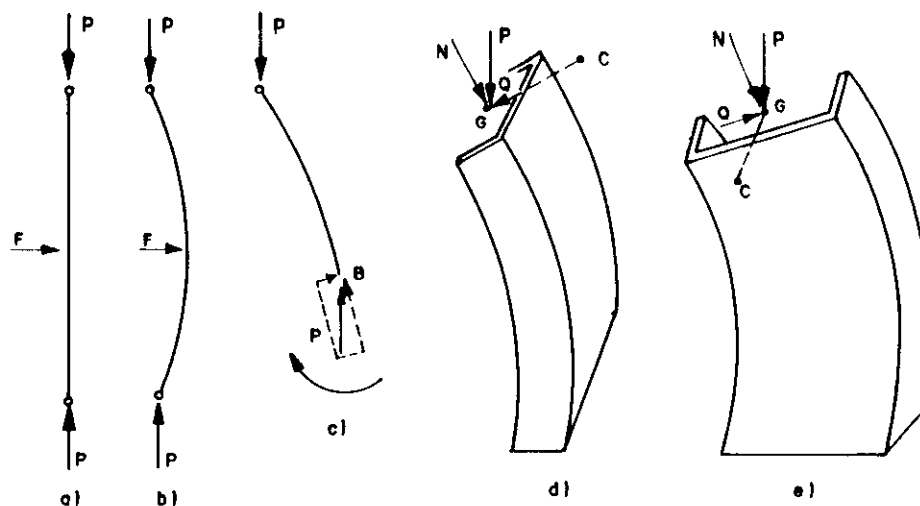


FIG.64 - Configurações deformadas de uma coluna com um eixo de simetria.

Se o deslocamento da coluna for o mostrado na figura 64-d, onde "G" é o centro de gravidade e "C" é o centro de cisalhamento, a componente de "P" no plano da seção atua ao longo da linha " \overline{GC} ". Neste caso, a torção não existe, a flambagem ocorrerá por flexão e a carga crítica será dada pela fórmula de Euler.

Se a configuração deformada for a da figura 64-e, a componente de "P" no plano da seção introduzirá um momento de torção igual ao produto de "Q" pela distância entre os centros de gravidade e cisalhamento. Assim, além das

deformações causadas pela flexão igual ao produto da componente "N" por um deslocamento "v" na posição deformada, haverá também deformações causadas pelo momento de torção devido ao produto da componente "Q" pela distância " \overline{GC} ". Então, as deformações por flexão e torção serão inseparáveis, e a forma resultante deste tipo de flambagem será denominada de "flambagem por flexo-torção".

Conclui-se que em uma coluna cuja seção transversal possua um eixo de simetria pode flambar por flexão ou por flexo-torção. No entanto, para colunas que não apresentem eixos de simetria, somente ocorrerá flambagem por flexo-torção. E ainda pode ocorrer a flambagem por flexo-torção em perfis bissimétricos com cargas excêntricas.

A flambagem por "flexo-torção" está associada principalmente a peças comprimidas com pequena rigidez à torção, isto é, a seções abertas de paredes finas tais como seções formadas a frio, cantoneiras e perfis "U" com abas largas [58,119,151].

4.6 - Flambagem lateral

A "flambagem lateral" ou "flambagem lateral com torção" é um fenômeno de flambagem que ocorre em certos tipos de vigas, cuja configuração de instabilidade é qualitativamente semelhante às peças sujeitas à "flambagem por flexo-torção".

A figura 65 ilustra a flambagem lateral com torção para uma viga "I", em balanço, sujeita a uma força vertical "F" passando pelo centro de gravidade da seção e atuando na extremidade livre da viga. O momento fletor de "F", em torno do eixo de maior inércia, provocará tensões de tração na mesa superior e tensões de compressão na mesa inferior. Se a viga não estiver travada pela alma, a mesa inferior tenderá a flambar horizontalmente ou verticalmente, como acontece com uma barra comprimida axialmente. A alma impede completamente a flambagem no plano vertical, mas restringe

somente parcialmente a flambagem horizontal. Assim, ocorrerá a torção da seção quando os eixos principais se deslocarem de suas posições vertical e horizontal. Nesta posição deformada, a força "F" aplicada no centro de gravidade da seção transversal terá uma componente na direção do eixo "xx", a qual tenderá a provocar o deslocamento da viga naquela direção (fig.65).

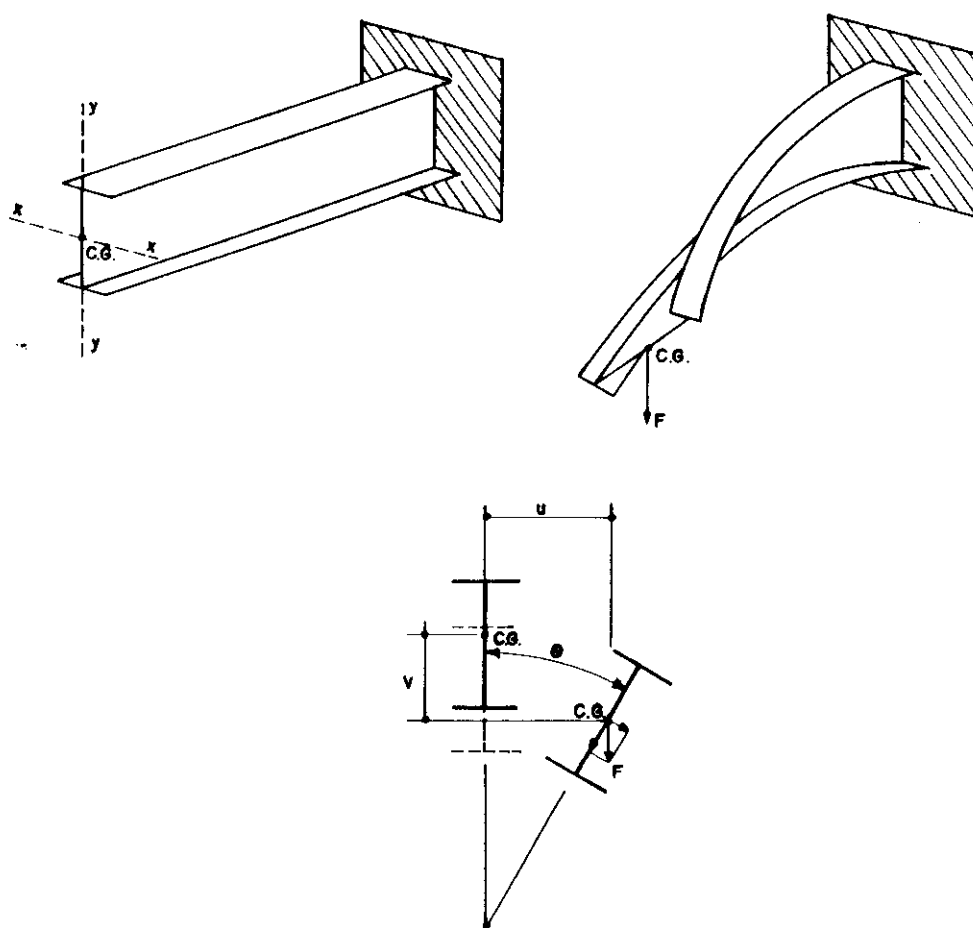


FIG.65 - Flambagem lateral com torção de uma viga em balanço

Fisicamente, conclui-se que a viga torce e

flexiona simultaneamente no plano lateral.

Os parâmetros estáticos e geométricos que influenciam este tipo de estabilidade são os seguintes: a rigidez à flexão, a rigidez à torção, a posição de aplicação da força "F", em relação ao centro de gravidade, o comprimento da viga, as condições de apoios, os tipos de cargas aplicadas que definem os momentos de flexão, e a resistência ao empenamento da seção transversal. A posição da força em relação ao centro de gravidade tem uma influência muito importante na resistência, pois se a força for aplicada na mesa superior, o seu efeito será desestabilizante; no entanto, se ela for aplicada na mesa inferior, o seu efeito será estabilizante, tendendo a aumentar a força crítica (fig.66).

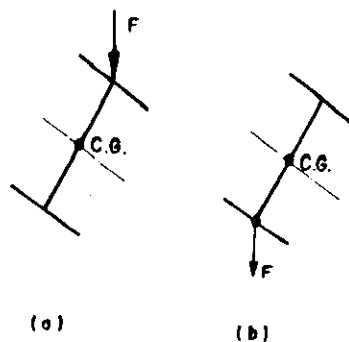


FIG.66 - Estabilidade de acordo com a posição da carga: (a) desestabilizante, (b) estabilizante.

Este tipo de comportamento também ocorre em vigas simplesmente apoiadas. Torna-se, assim, comum o caso de cargas que provocam a compressão da mesa superior (fig.67).

No caso de vigas usadas em galpões industriais, as quais estão desprovidas de contensões laterais contínuas, é necessário determinar o valor do comprimento, para o qual se faz necessário a utilização de travamentos. Isto impedirá a flambagem lateral. Algumas soluções para impedir este tipo de flambagem podem ser conseguidas: (i) através de ligações

laterais adequadas nas extremidades da viga (fig.68-a e 68-c), (ii) através de peças estruturais intermediárias (fig.68-b) e (iii) através de vigas transversais adequadamente conectadas na viga em questão (fig.68-d).

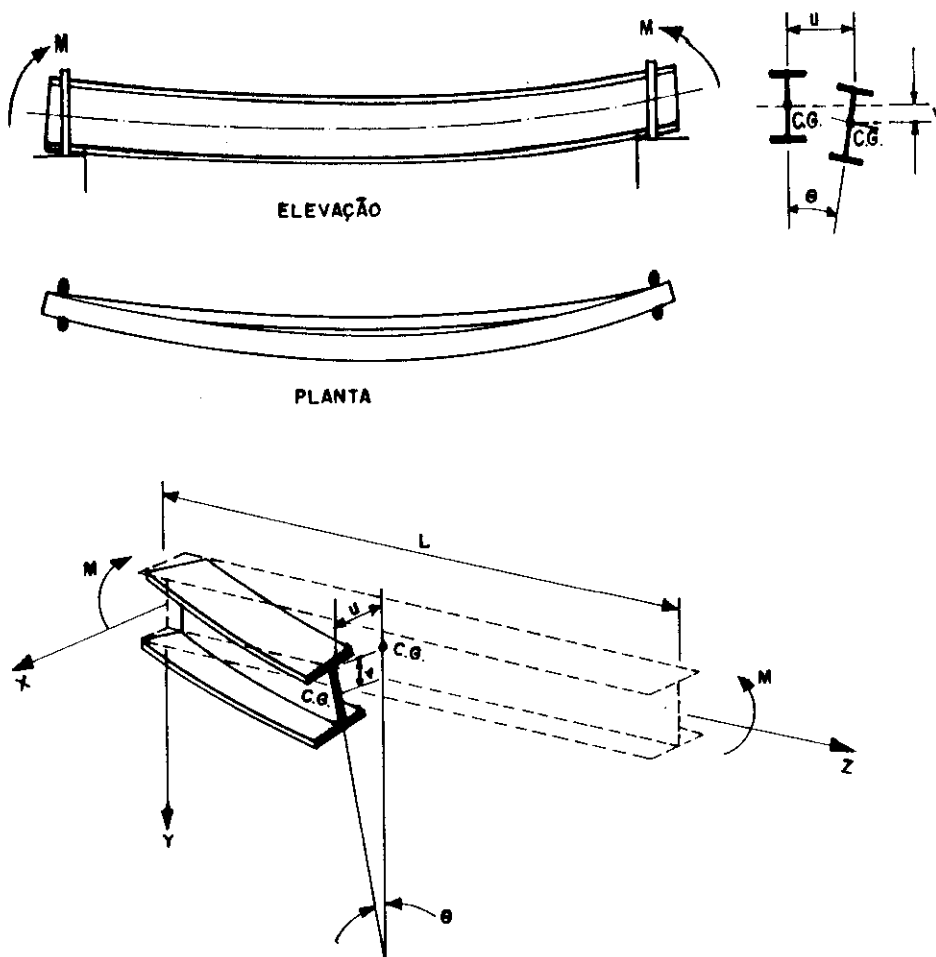


FIG.67 - Flambagem lateral com torção de viga bi-apoiada

Em vigas com contenção lateral contínua como em vigas mistas ou vigas com chapas planas ou corrugadas, soldadas ou aparafusadas sobre a mesma, a estabilidade é automaticamente satisfeita (fig.69).

Muitas causas de colapsos em vigas de aço são

provocadas pela utilização inadequada de travamentos contra a estabilidade lateral. Em situações duvidosas da solução a ser adotada é melhor assumir nos cálculos que a viga trabalhará sem restrições laterais [14,41,58,107].

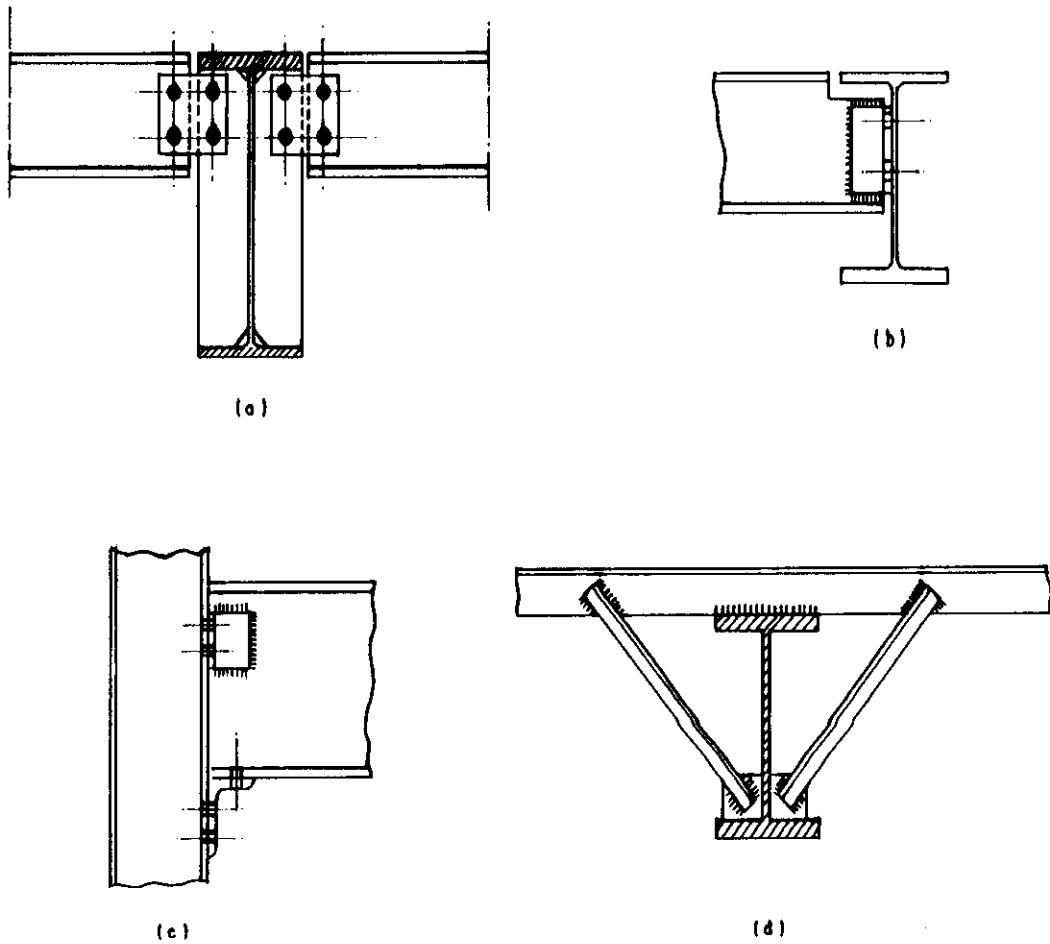


FIG.68 - Soluções para contenções laterais e torcionais

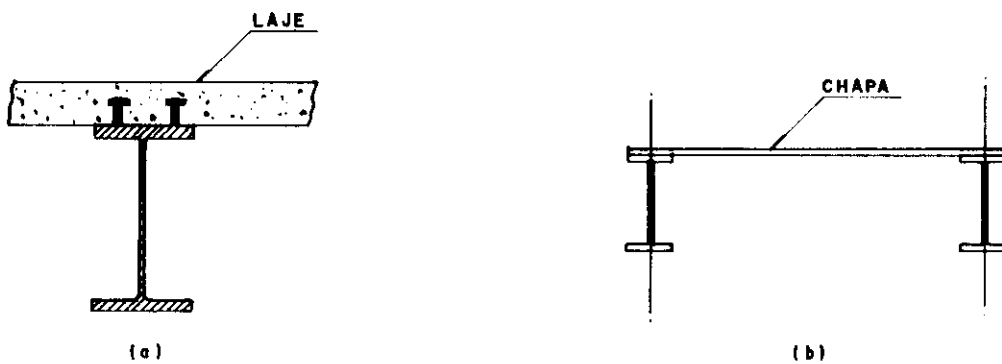


FIG.69 - Contenções contínuas

APÊNDICE B

PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

1 - ÁREA SETORIAL

Área setorial é uma característica geométrica somente de perfis abertos de paredes delgadas [62].

A figura 1 mostra o contorno médio de uma seção transversal de um perfil, sendo o ponto "P" denominado de polo e o segmento que une este polo a um ponto do contorno do perfil é denominado de raio vetor.

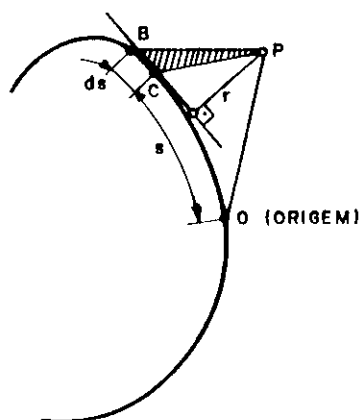


FIG.1 - Contorno médio de um perfil

Os segmentos "PB" e "PC" são denominados de raios

vetores e "A" é a área delimitada pelo contorno da figura e dois raios vetores. Para um elemento infinitesimal "ds" do contorno a área correspondente será:

$$dA = \frac{r \cdot ds}{2} \quad (1)$$

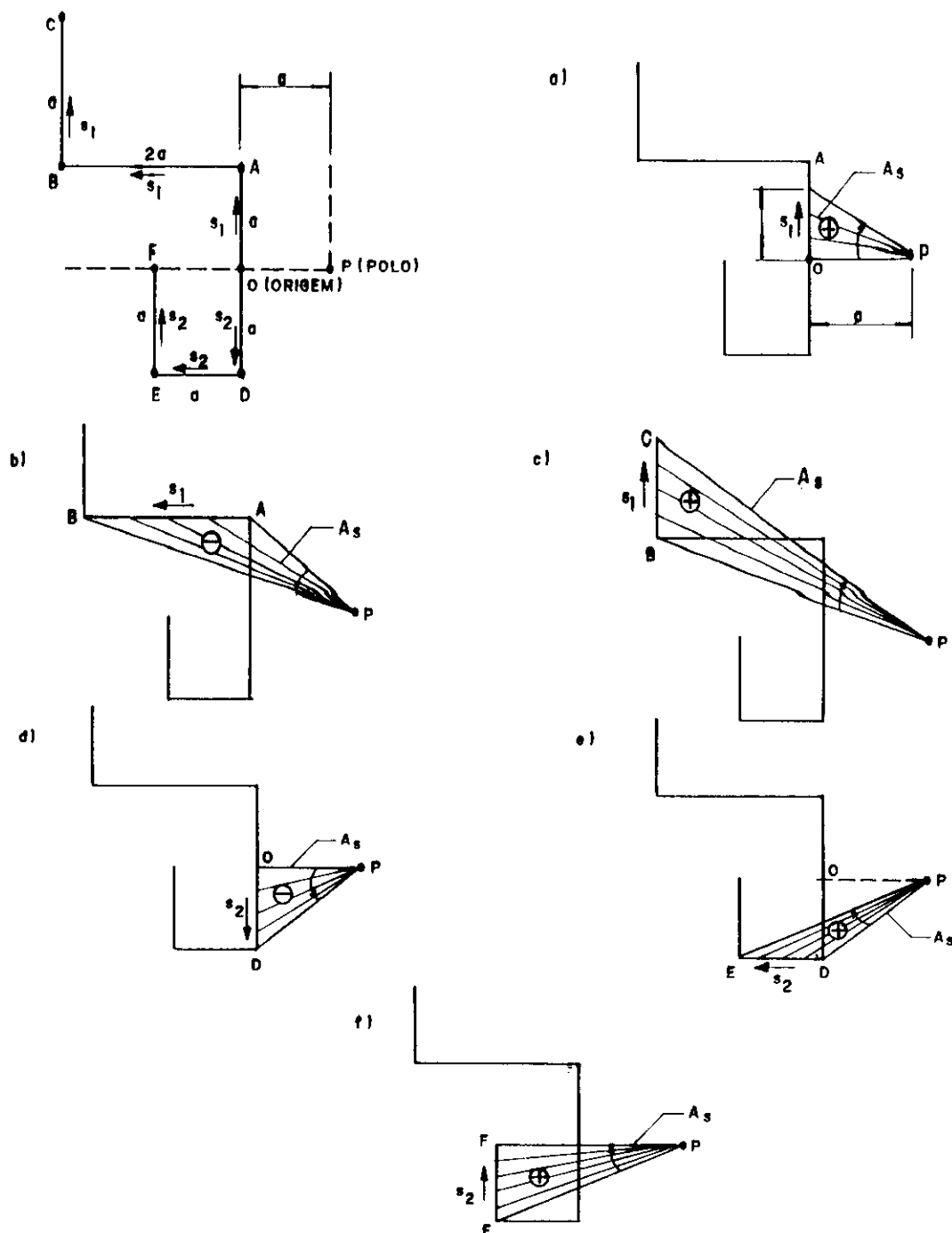
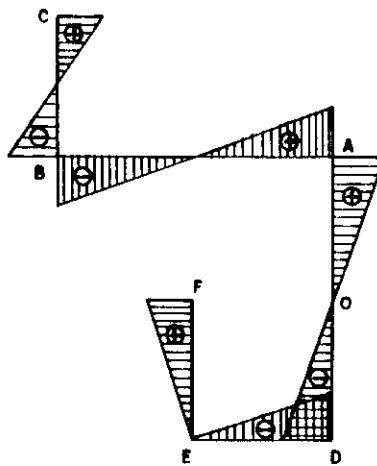


FIG.2 - Sinais e cálculos das áreas setoriais

Chamando de " $d\omega$ " o dobro da área do triângulo "PBC", tem-se:

$$\omega = [2.A_s] = \int_0^s r \cdot ds \quad (2)$$



PONTO GENÉRICO: $\omega = 2 \cdot \frac{2 \cdot a \cdot s}{2} = a \cdot s$

PONTO O: $\omega = 0,0$

PONTO A: $\omega = 2 \cdot \frac{a \cdot a}{2} = a^2$

PONTO B: $\omega = a \cdot -2 \cdot \frac{a \cdot 2a}{2} = -a^2$

PONTO C: $\omega = -a^2 + 2 \cdot \frac{3a \cdot a}{2} = +2a^2$

PONTO D: $\omega = -2 \cdot \frac{a \cdot a}{2} = -a^2$

PONTO E: $\omega = -a^2 + 2 \cdot \frac{a \cdot a}{2} = 0,0$

PONTO F: $\omega = 0,0 + 2 \cdot \frac{2a \cdot a}{2} = +2a^2$

FIG.3 - Diagrama da variação da área setorial no perfil

A equação (2) é denominada de área setorial. Sendo "A" a área descrita pelos raios vetores, desde a origem "O" até o ponto distante de "s" da mesma, com integração iniciando na origem "O" e seguindo o percurso "s". Convenciona-se que " ω " será positiva, quando o raio vetor

partindo da origem girar no sentido horário e, negativa no sentido anti-horário.

Através da geometria será possível determinar a área setorial de perfis de trechos retos, como exemplificado nas figuras 2 e 3, supondo-se como dado o polo "P" e a origem "O" [30,62].

2 - RELAÇÃO DA ÁREA SETORIAL COM AS COORDENADAS

Suponha-se que a origem das coordenadas "x" e "y" da seção do perfil coincida com o polo "P" (fig.4) [62].

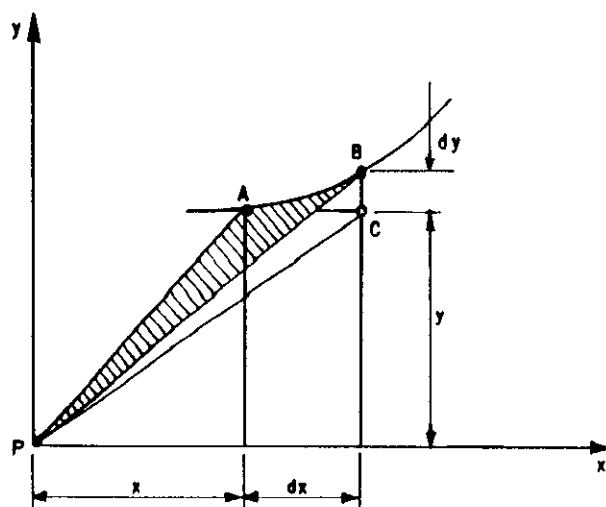


FIG.4 - Sistema de coordenadas e área setorial

A dependência entre a área setorial e a posição do polo "P" é determinada desprezando-se infinitésimos de ordem superior, possibilitando-se determinar $d\omega$ pela diferença entre as áreas duplicadas dos triângulos "PAC" e "PBC" (fig.4).

$$d\omega = \frac{2 \cdot y \cdot dx}{2} - \frac{2 \cdot x \cdot dy}{2} = y \cdot dx - x \cdot dy \quad (3)$$

Se a área setorial de um segmento de arco "Os" for dada em relação a um polo "P₁" (fig.5), a área setorial em relação a um polo "P₂" de coordenadas "a" e "b" no sistema de eixos "x₁y₁" será:

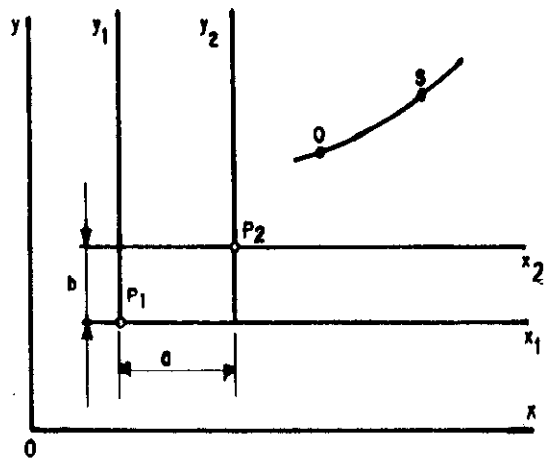


FIG.5 - Sistemas de coordenadas dos polos P_1 e P_2

$$\omega_2(s) = \int_0^s d\omega_2 = \int_0^s (y_2 \cdot dx_2 - x_2 \cdot dy_2) \quad (4)$$

sendo,

$$x_2 = x_1 - a \quad dx_2 = dx_1 \quad (5)$$

$$y_2 = y_1 - b \quad dy_2 = dy_1 \quad (6)$$

de (4), (5) e (6) tem-se,

$$\omega_2(s) = \int_0^s (y_1 dx_1 - x_1 dy_1) - b \int_{x_{01}}^{x_1} dx_1 + a \int_{y_{01}}^{y_1} dy_1 \quad (7)$$

$$\omega_2(s) = \omega_1(s) - b(x_1 - x_{01}) + a(y_1 - y_{01}) \quad (8)$$

sendo " x_1 " e " y_1 " as coordenadas do ponto " s ", e " x_{01} " e " y_{01} " as coordenadas do ponto " 0 " no sistema original " $x_1 y_1$ ".

Se as coordenadas dos pontos " 0 " e " s " forem obtidas em um sistema arbitrário de coordenadas " xy ", ter-se-á:

$$\omega_2(s) = \omega_1(s) - b(x - x_0) + a(y - y_0) \quad (9)$$

sendo "x" e "y" as coordenadas do ponto "s", e "x_o" e "y_o" as coordenadas do ponto "O" no sistema de coordenadas "xy".

Da expressão (9) conclui-se que ao deslocar o polo, a área setorial varia em valores que dependem linearmente das coordenadas "x" e "y" [62].

3 - CENTRO DE CISALHAMENTO

O centro de cisalhamento é um ponto que se situa sobre uma linha longitudinal paralela ao eixo do perfil. Qualquer força transversal passando por este ponto não provocará torção na peça [134].

Determine-se a posição do centro de cisalhamento para o caso geral de um perfil assimétrico de paredes delgadas (fig.6).

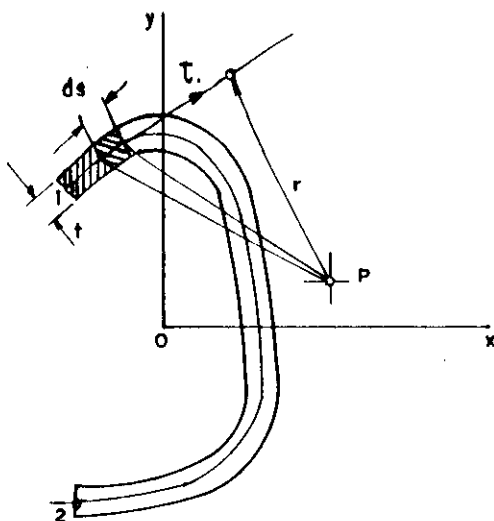


FIG.6 - Perfil delgado assimétrico

O momento das forças tangenciais em relação a um certo ponto "P" será:

$$M_P = \int_A \tau \cdot t \cdot r \cdot ds \quad (10)$$

O produto "r.ds" representa a diferencial da área setorial

(eq.2) "dω", então:

$$M_P = \int_A \tau \cdot t \cdot d\omega \quad (11)$$

As tensões "τ" se orientam segundo a tangente da linha do contorno do perfil. Quando a direção da força cortante "V" não coincide com o eixo principal da seção, tem-se o caso de cisalhamento de flexão oblíqua referida a dois eixos principais:

$$\tau = \frac{V_y \cdot Q_x}{I_x \cdot t} + \frac{V_x \cdot Q_y}{I_y \cdot t} \quad (12)$$

onde "V", "Q" e "I" constituem a força cortante, momento estático e momento de inércia relativos aos eixos principais, e "t" a espessura.

Levando-se a equação (12) na equação (11), tem-se:

$$M_P = \frac{V_y}{I_x} \int_A \frac{Q_x \cdot d\omega \cdot dA}{dA} + \frac{V_x}{I_y} \int_A \frac{Q_y \cdot d\omega \cdot dA}{dA} \quad (13)$$

Integrando por partes a primeira das integrais, tem-se:

$$\int_A \frac{Q_x}{dA} \cdot d\omega \cdot dA = \left[Q_x \cdot \omega \right]_{s1}^{s2} - \int_A \omega \cdot y \cdot dA \quad (14)$$

onde os índices de "s1" e "s2" indicam que o valor de "Q_x · ω" refere-se aos pontos 1 e 2 (fig.6). A área do trecho tracejado, correspondente ao ponto 1, é igual a zero e, portanto, Q_x = 0. No ponto 2, quando se trata de toda a seção, "Q_x" também é nulo, pois o eixo "x" é um eixo principal. Então, $\left[Q_x \cdot \omega \right]_{s1}^{s2} = 0$, e a equação (14) torna-se:

$$\int_A \frac{Q_x}{dA} \cdot d\omega \cdot dA = - \int_A \omega \cdot y \cdot dA \quad (15)$$

analogamente, a segunda integral da equação (13) será:

$$\int_A \frac{Q}{dA} \cdot d\omega \cdot dA = - \int_A \omega \cdot x \cdot dA \quad (16)$$

levando (15) e (16) em (13), tem-se:

$$M_P = - \frac{V_y}{I_x} \int_A \omega \cdot y \cdot dA - \frac{V_x}{I_y} \int_A \omega \cdot x \cdot dA \quad (17)$$

Quando o ponto "P" coincide com o centro de cisalhamento, o momento "M_P" é igual a zero, independente dos valores de "V_x" e "V_y". Isto será possível somente se:

$$\text{produtos setoriais} \left\{ \begin{array}{l} \int_A y \cdot \omega \cdot dA = 0 \quad (18) \\ \int_A x \cdot \omega \cdot dA = 0 \quad (19) \end{array} \right.$$

Ao variar a origem da área setorial, esta varia em valores constantes, o que não altera as equações (18) e (19). Isto favorece uma escolha arbitrária da mesma.

A posição do centro de cisalhamento é obtida construindo-se o diagrama das áreas setoriais " ω_{P_1} " para um polo arbitrário "P₁" (fig.7).

Posteriormente, considera-se que as diferenças das coordenadas do centro de cisalhamento "CC" e do polo "P₁" são "x_{cc}" e "y_{cc}". De acordo com a equação (9), tem-se:

$$\omega = \omega_{P_1} - y_{cc} (x - x_o) + x_{cc} (y - y_o) \quad (20)$$

levando (20) em (18):

$$\int_A y \cdot \omega_{P_1} \cdot dA - y_{cc} \int_A x \cdot y \cdot dA + y_{cc} \cdot x_0 \int_A y \cdot dA + x_{cc} \int_A y^2 \cdot dA - x_{cc} \cdot y_0 \int_A y \cdot dA = 0 \quad (21)$$

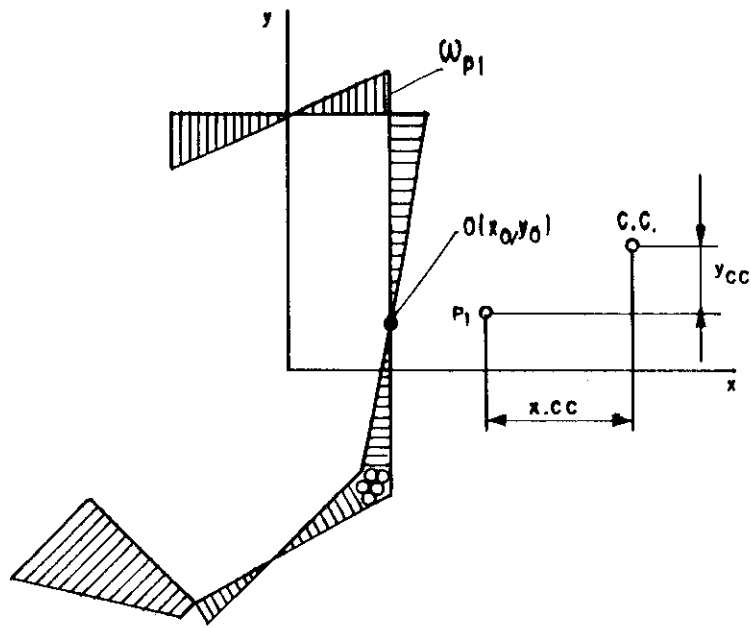


FIG.7 - Área setorial e diferenças de coordenadas

Como os eixos "x" e "y" são principais, tem-se:

$$\int x \cdot y \cdot dA = 0 ; \int y \cdot dA = 0 ; \int y^2 \cdot dA = I_x \quad (22)$$

de (21) e (22), conclui-se:

$$x_{cc} = \frac{-\int_A y \cdot \omega_{P_1} \cdot dA}{I_x} \quad (23)$$

De maneira análoga, levando (20) em (19), obtém-se:

$$y_{cc} = \frac{\int_A x \cdot \omega_{P1} \cdot dA}{I_y} \quad (24)$$

Tendo sido determinado o diagrama de " ω_{P1} ", o emprego das equações (23) e (24) é facilitado, usando-se diagramas representativos das variações das coordenadas "x" e "y" com o percurso "s" para cada trecho do perfil.

Na dedução da equação diferencial da torção não-uniforme, admite-se que a seção gira em torno do centro de cisalhamento, e que as tensões normais na seção formam um sistema nulo auto-equilibrado de forças. Portanto, deve-se escolher uma origem para a determinação da área setorial desde que seja obedecida a condição:

$$\int_A \omega \cdot dA = 0 \quad (25)$$

A área setorial tendo por polo o centro de cisalhamento e por obedecer a condição (25) é denominada ÁREA SETORIAL PRINCIPAL. No caso de um perfil simétrico, esta origem se encontra sobre o eixo de simetria. Em um caso geral, pode-se escolher uma origem arbitrária (0) e calcular a área setorial, tendo este ponto como origem e o centro de torção como polo. Depois faz-se uma mudança de origem, de modo a satisfazer a condição (25).

De acordo com a propriedade de área setorial, quando se muda a origem, a área setorial varia de uma constante. Assim, tem-se:

$$\omega = \omega_0 + C \quad (26)$$

sendo " ω_0 " a área setorial relativa à origem adotada e " ω " área setorial relativa a uma outra origem, de modo que satisfaça a condição (25), e "C" a constante devido à mudança de origem. Levando (26) em (25), chega-se a:

$$C = - \frac{\int \omega_o . dA}{A} \quad (27)$$

Assim, o diagrama da área setorial principal é obtido acrescentando-se a constante "C" a cada ordenada da área setorial " ω_o " determinada em relação à origem arbitrária "O" [30,62].

EXEMPLO:

Para o perfil da figura (8), determine-se o centro de cisalhamento.

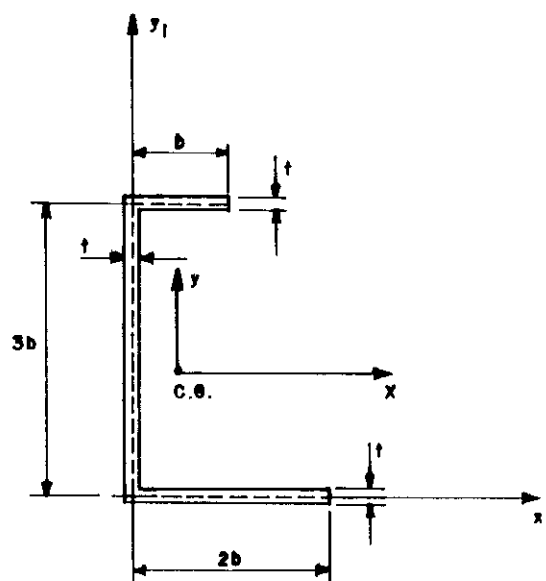


FIG.8 - Perfil de abas desiguais

a) centro de gravidade

$$x_1 = 0.42b \quad ; \quad y_1 = 1.25b$$

b) momentos de inércia

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= 18b^3.t & ; & & I_{x_g} &= 8.63b^3.t \\ I_{y_1} &= 3b^3.t & ; & & I_{y_g} &= 1.94b^3.t \end{aligned}$$

c) produtos de inércia

$$I_{x_1 y_1} = 1.5b^3.t \quad ; \quad I_{x_g y_g} = -1.65b^3.t$$

d) eixos principais

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2I_{x_g y_g}}{I_{y_g} - I_{x_g}} = 0.49 \quad ; \quad \alpha = 13.05^\circ \text{ (fig.9)}$$

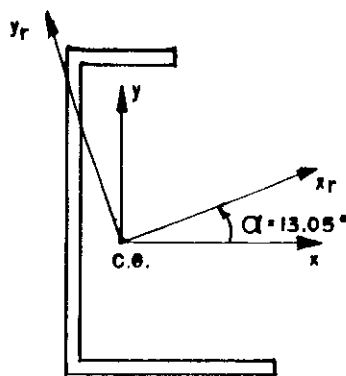


FIG.9 - Posições dos eixos principais

e) momentos de inércia principais

$$I_{\max} \quad I_{\min} = -\frac{I_{x_g} + I_{y_g}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[I_{x_g} - I_{y_g} \right]^2 + 4I_{x_g y_g}^2}$$

$I_{\max} = 9.01b^3.t$ (por inspeção, em relação ao eixo x_r , pois a maior parte da área está

afastada deste eixo)

$$I_{\min} = 1.56b^3.t$$

- f) diagrama da área setorial: tomando arbitrariamente o ponto "B" como polo (fig.10).

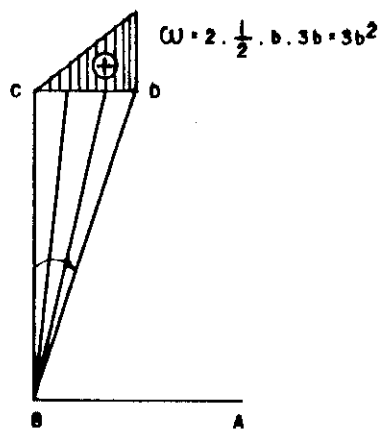


FIG.10 - Área setorial

- g) diagramas das variações das coordenadas "x" e "y" com o percurso "s"

- g.1 - equações das curvas $x = f(s)$ nos trechos do perfil (fig.11-a)

trecho AB : $x = -s + 1.58b$

trecho BC : $x = -0.42b$

trecho CD : $x = s - 0.42b$

g.2 - equações das curvas $y = f(s)$ nos trechos do perfil
(fig.11-b)

trecho AB : $y = -1.25b$

trecho BC : $y = s - 1.25b$

trecho CD : $y = 1.75b$

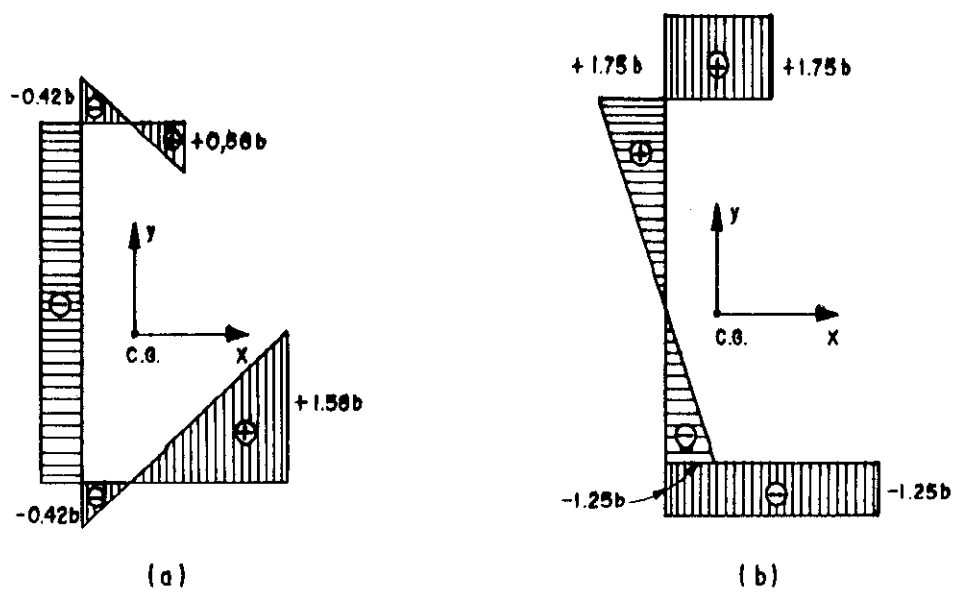


FIG.11 Variações das coordenadas em relação aos eixos xy

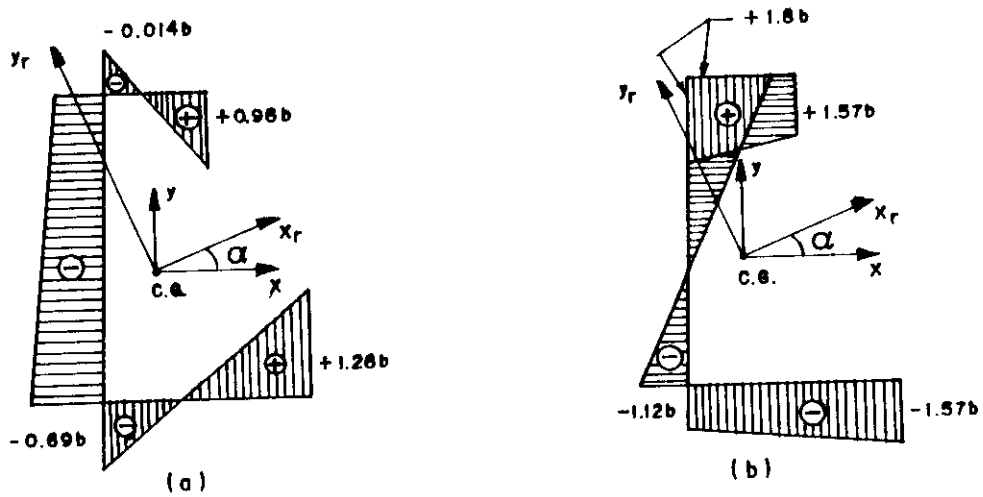


FIG.12 - Variações das coordenadas em relação aos eixos $x_r y_r$

h) rotações das coordenadas

$$x_r = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \text{sen}\alpha$$

$$y_r = -x \cdot \text{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha$$

$$A(1.58b, -1.25b) \quad ; \quad B(-0.42b, -1.25b)$$

$$C(-0.42b, 1.75b) \quad ; \quad D(0.58b, 1.75b)$$

$$x_{rA} = 1.26b \quad ; \quad y_{rA} = -1.57b$$

$$x_{rB} = -0.69b \quad ; \quad y_{rB} = -1.12b$$

$$x_{rC} = -0.01b \quad ; \quad y_{rC} = 1.80b$$

$$x_{rD} = 0.96b \quad ; \quad y_{rD} = 1.57b$$

As variações das coordenadas no sistema original "xy" são mostradas na figura 11 enquanto que, após as rotações para o sistema principal " $x_r y_r$ " são mostradas na figura 12.

i) coordenadas do centro de cisalhamento em relação aos eixos principais " $x_r y_r$ "

É suficiente fazer os cálculos apenas para o trecho "CD", pois nos outros, a área setorial é nula.

As equações das curvas serão dadas por:

$$x_r = 0.97s - 0.01b \quad (\text{fig.12})$$

$$y_r = -0.23s + 1.8b \quad (\text{fig.12})$$

$$\omega = 2A = 3b \cdot s \quad (\text{fig.10})$$

das equações anteriores e com as expressões (23) e (24), tem-se:

$$\int_A y \cdot \omega_{P1} \cdot dA = t \int_0^b y_r \cdot \omega \cdot ds = 2.47b^4 \cdot t$$

$$\int_A x \cdot \omega \cdot dA = t \int_0^b x_p \cdot \omega \cdot ds = 0.95b^4 \cdot t$$

Chegaria aos mesmos resultados usando tabelas do produto de duas funções [39]. Conseqüentemente a partir das expressões (23) e (24) encontra-se:

$$x_{rcc} = - \frac{t \int_0^b y_r \cdot \omega \cdot ds}{I_{max}} = - 0.27b$$

$$y_{rcc} = \frac{t \int x_r \cdot \omega \cdot ds}{I_{min}} = 0.61b$$

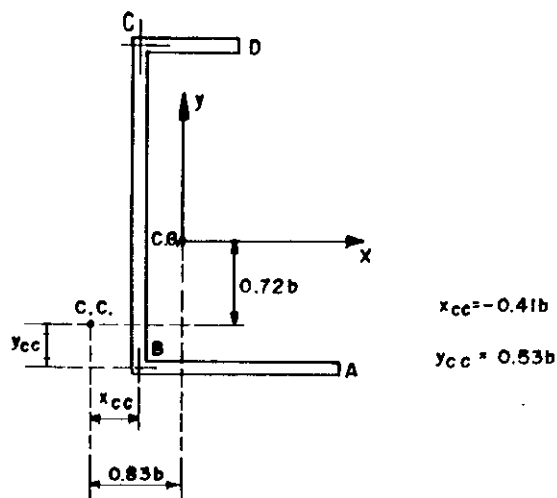


FIG.13 - Coordenadas do centro de cisalhamento

j) coordenadas do centro de cisalhamento em relação aos eixos "x" e "y"

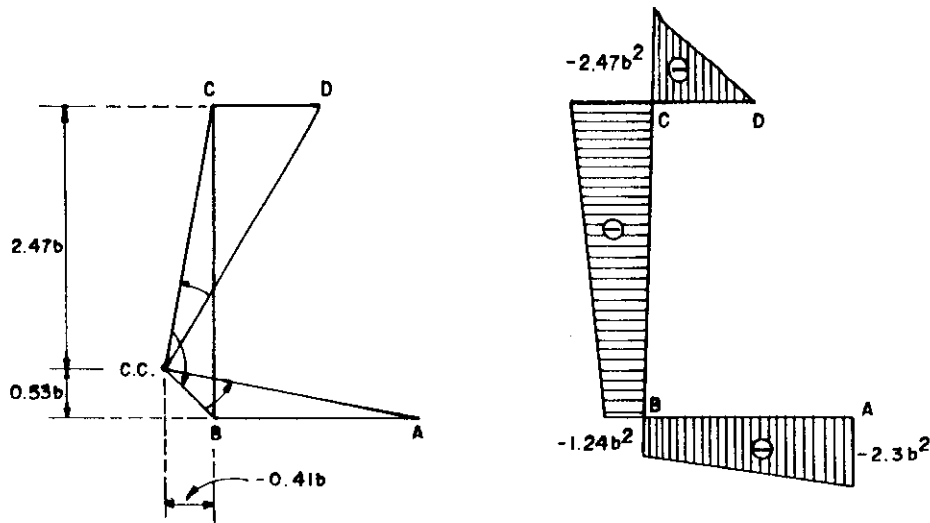
A partir dos valores de " x_{rcc} " e " y_{rcc} " encontrados no item (i) retorna-se ao sistema original "xy", através de outra rotação de eixos com $\alpha = -13.05$:

$$x_{cc} = x_{rcc} \cdot \cos\alpha + y_{rcc} \cdot \text{sen}\alpha = -0.41b$$

$$y_{cc} = -x_{rcc} \cdot \text{sen}\alpha + y_{rcc} \cdot \cos\alpha = 0.53b$$

Estas coordenadas são medidas a partir do polo "B" arbitrado, conforme a figura 13.

k) Área setorial com polo no centro de cisalhamento e origem arbitrária em "D"



$$\text{PONTO - C: } \omega = -2 \cdot \frac{b \cdot 2.47b}{2} = -2.47b^2$$

$$\text{PONTO - B: } \omega = -2.43b^2 + 2 \cdot \frac{3b \cdot 0.41b}{2} = -1.24b^2$$

$$\text{PONTO - A: } \omega = -1.24b^2 - 2 \cdot \frac{2b \cdot 0.53b}{2} = -2.30b^2$$

FIG.14 - Área setorial com origem arbitrária

1) mudança da origem de modo a satisfazer $\int_A \omega \cdot dA$

Quando muda-se a origem, a área setorial varia de uma constante (ver eq. 27) dada por:

$$C = - \frac{\int_A \omega_o \cdot dA}{A} = - \frac{\int_s \omega_o \cdot ds}{\delta b}$$

As equações das curvas da figura 14 serão:

$$\begin{aligned}\omega_o(CD) &= -2.47b \cdot s && ; && 0 \leq s \leq b \\ \omega_o(BC) &= -2.47b^2 + 0.41b \cdot s && ; && 0 \leq s \leq 3b \\ \omega_o(AB) &= -1.24b^2 - 0.53b \cdot s && ; && 0 \leq s \leq 2b\end{aligned}$$

$$\int_s \omega_o \cdot ds = \int_{AB} \omega_o \cdot ds + \int_{BC} \omega_o \cdot ds + \int_{CD} \omega_o \cdot ds = -10.34b^3$$

$$C = 1.72b^2$$

$$\begin{aligned}\omega_A &= \omega_{OA} + C = -0.58b^2 \\ \omega_B &= \omega_{OB} + C = 0.48b^2 \\ \omega_C &= \omega_{OC} + C = -0.75b^2 \\ \omega_D &= \omega_{OD} + C = 1.72b^2\end{aligned}$$

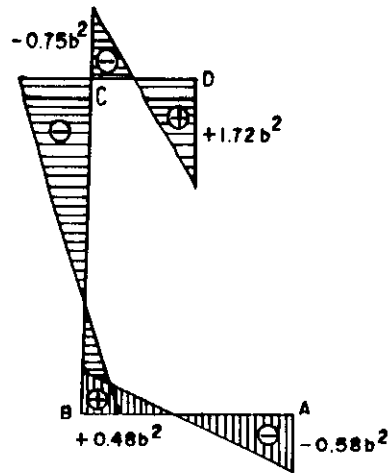


FIG.15 - Diagrama da área setorial principal

As equações das curvas nos trechos da figura 15 serão:

$$\begin{aligned}\omega_{AB} &= 0.53b \cdot s - 0.58b^2 && ; && 0 \leq s \leq 2b \\ \omega_{BC} &= -0.41b \cdot s + 0.48b^2 && ; && 0 \leq s \leq 3b \\ \omega_{CD} &= 2.47b \cdot s + 0.75b^2 && ; && 0 \leq s \leq b\end{aligned}$$

e a verificação fornecerá:

$$\int_A \omega \cdot dA = t \int_s \omega \cdot ds = t \int_{AB} \omega \cdot ds + t \int_{BC} \omega \cdot ds + t \int_{CD} \omega \cdot ds = 0$$

$$\int_A \omega \cdot dA = -0.02b^3 \cdot t \cong 0 \text{ (para perfis delgados)}$$

(isto equivale a dizer que o momento estático setorial é aproximadamente igual a "zero")

da integral $\int \omega \cdot dA$, a parcela $\int \omega \cdot ds$ é numericamente igual à área do diagrama e fornece o mesmo resultado anterior estando, portanto, verificada a condição $\int \omega \cdot dA = 0$.

4 - MOMENTO ESTÁTICO SETORIAL

O momento estático setorial " S_ω " relativo a uma seção transversal de um perfil delgado aberto é definido pela integral:

$$S_\omega = \int_A \omega \cdot dA = t \int_{s_1}^{s_2} \omega \cdot ds \quad (28)$$

O valor de " S_ω " é igual ao produto da área setorial principal pela espessura " t ", tomado até o ponto em questão. Simultaneamente, para obter os sinais de " S_ω " será necessário fixar direções positivas para os percursos " s ".

Como exemplo, determine-se " S_ω " para um perfil "I". Para facilitar a determinação da área setorial principal, deve-se supor que: o polo, a origem, o centro de gravidade e o centro de cisalhamento sejam coincidentes (fig.16).

Para determinar " S_ω " será adotado o sentido positivo para os percursos " s " como sendo da esquerda para a direita nas duas mesas. O momento estático será igual a zero

na alma, pois a área setorial é nula neste trecho. Para a mesa superior, tem-se:

$$\omega = + \frac{h.s}{2} - \frac{b.h}{4}$$

$$S_{\omega} = t \int \omega . ds = + \frac{t.h.s^2}{4} - \frac{t.h.b.s}{4} + K_1 \text{ (parábola)}$$

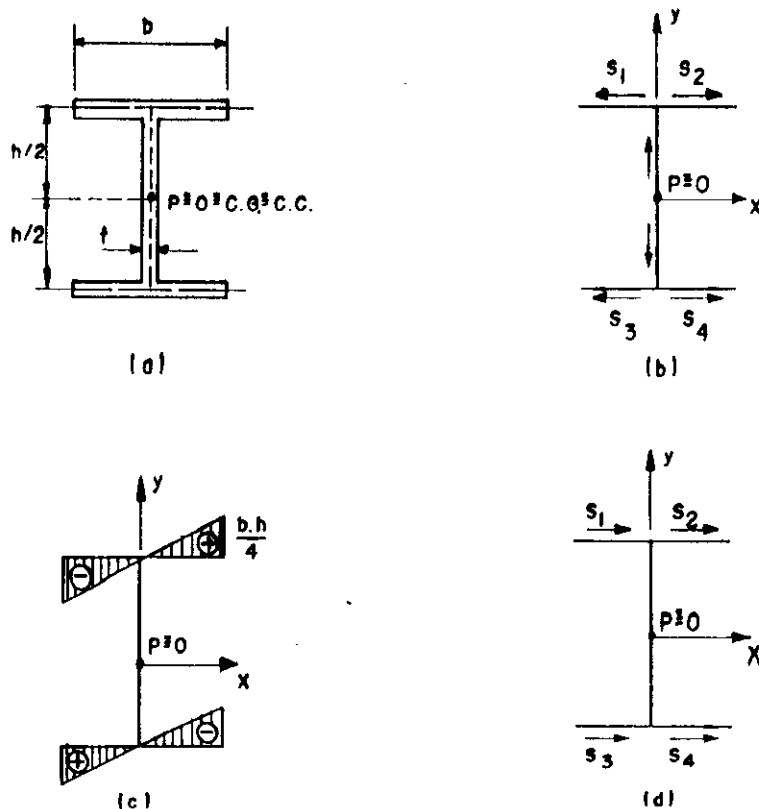


FIG.16 - a) perfil; b) percursos da área setorial; c) área setorial; d) percursos de S_{ω} .

sendo $S_{\omega}^{II} > 0$, $S_{\omega}(s)$ terá convexidade dirigida para baixo. Fazendo-se a integral definida no intervalo $0 \leq s \leq b/2$, fica:

$$S_{\omega} = - \frac{t.h.b^2}{16} \text{ (valor máximo)}$$

Para o intervalo $0 \leq s \leq b$, conclui-se que $S_{\omega} = 0$.

Para a mesa inferior, tem-se :

$$\omega = -\frac{h \cdot s}{2} + \frac{b \cdot h}{4}$$

$$S_{\omega} = t \int \omega \cdot ds = -\frac{t \cdot h \cdot s^2}{4} + \frac{t \cdot b \cdot h \cdot s}{4} + K_2 \text{ (parábola)}$$

Sendo $S_{\omega}^{II} < 0$, $S_{\omega}(s)$ terá convexidade dirigida para cima. Fazendo a integral definida no intervalo $0 \leq s \leq b/2$, obtém-se:

$$S_{\omega} = \frac{t \cdot h \cdot b^2}{16} \text{ (valor máximo)}$$

para o intervalo $0 \leq s \leq b$, conclui-se que $S_{\omega} = 0$. O diagrama de " S_{ω} " é mostrado na figura 17.

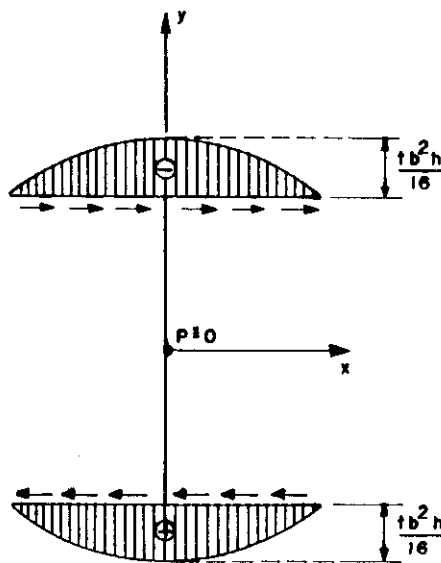


FIG.17 - Diagrama do momento estático setorial

5 - MOMENTO DE INÉRCIA SETORIAL

O momento de inércia setorial " C_ω ", ou constante de empenamento relativo à seção transversal de um perfil delgado aberto, é definido pela integral:

$$C_\omega = \int_A \omega^2 \cdot dA = \int_A [2A_s]^2 \cdot dA \quad (29)$$

onde " ω " é área setorial principal.

Voltando ao exemplo do perfil "I" do exemplo do item anterior determine-se agora o momento de inércia setorial.

Da equação (29) e de acordo com a figura (16-c), tem-se:

$$dA = t \cdot ds$$

$$[2A_s]^2 = \left[2 \left(\frac{h}{2} \cdot s \cdot \frac{1}{2} \right) \right]^2 = \frac{h^2 \cdot s^2}{4} \quad (\text{sempre } > 0)$$

$$C_\omega = t \int_0^{b/2} [2A_s]^2 \cdot ds = \frac{t \cdot h^2 \cdot b^3}{96}, \text{ para todos os trechos}$$

e para todo o perfil, tem-se:

$$C_{\omega I} = 4 \cdot C_\omega = \frac{t \cdot h^2 \cdot b^3}{24}$$

Chegar-se-á a este mesmo resultado: determinando-se as equações das curvas $\omega = f(s)$ para os trechos "AB" e "CD", fazendo as integrações no intervalo $0 \leq s \leq b$ e somando os resultados. Outra alternativa seria usar tabelas do produto de duas funções [30,62,121,122,132] [133,134,152,157,158].

APÊNDICE C

TORÇÃO

1 - GENERALIDADES

A torção desempenha um papel predominante no fenômeno da flambagem de peças sujeitas à compressão, flexão e flexo-compressão.

A primeira análise correta da torção de uma barra prismática de seção transversal não-circular foi publicada por Saint Venant em 1885. Os resultados de suas análises indicam que, em geral, as seções não permanecem planas durante a torção. Assim, uma das principais distinções que caracterizam as peças sujeitas à torção é que as seções, originalmente planas, não permanecem assim após tal fenômeno, ou seja, a seção transversal empenará. Exceção a esta regra são as seções circulares sólidas ou as tubulares e as seções de paredes finas, cujos elementos interceptam em um ponto, tal como seções cruciformes, cantoneiras e perfis "T".

Se uma seção transversal de uma barra for livre para empenar, ou se o empenamento for impedido, pode-se distinguir a torção uniforme (pura, livre ou de St.Venant) e

a torção não-uniforme (da flexo-torção), respectivamente.

2 - TORÇÃO UNIFORME

2.1 - Introdução

Para um elemento de seção transversal circular sólida ou oca, a teoria é simples e, como é sabido, as tensões de cisalhamento, em uma seção transversal normal ao eixo, variam linearmente de acordo com a expressão:

$$\tau = \frac{M_t \cdot \rho}{I_o} \quad (1)$$

onde " M_t " é o momento de torção, " ρ " é o raio genérico, onde as tensões são determinadas e " I_o " é o momento de inércia polar. Lembrando também que o ângulo de torção " θ " é determinado por:

$$\theta = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_o} \quad (2)$$

onde " l " é o comprimento do elemento e " G " o módulo de elasticidade transversal.

Nas deduções das expressões (1) e (2), assume-se que a seção transversal permanece plana após a aplicação do momento de torção e que não existem distorções da seção transversal em seu plano. Nos itens seguintes, serão analisados os elementos não circulares de seções constantes.

2.2 - Deslocamentos

Pela teoria da torção de Saint-Venant, considera-se um sistema de coordenadas " xy " no plano da seção transversal com origem no centro de cisalhamento, isto

é, no ponto, em torno do qual, a seção gira quando sujeita à torção.

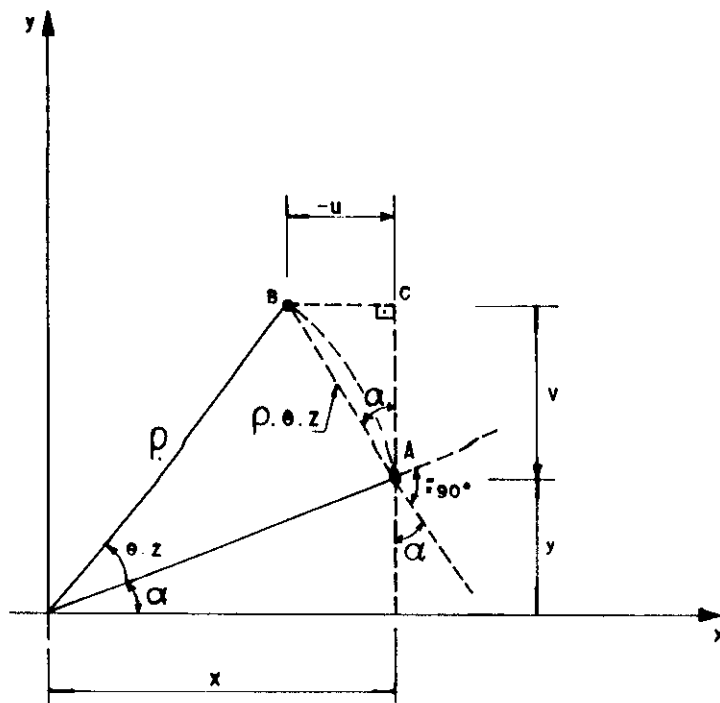


FIG.1 - Geometria dos deslocamentos

Supõe-se ainda que uma seção transversal de referência não gire, quando estiver na origem do eixo longitudinal "z". Então, de acordo com as hipóteses anteriores, os deslocamentos em uma seção genérica distanciada "z" da origem, podem ser determinados de acordo com a figura (1), por relações entre triângulos semelhantes:

$$u = - \theta . z . y \tag{3}$$

$$v = \theta . z . x \tag{4}$$

$$w = f(x,y) \tag{5}$$

Sendo "u", "v" e "w" os respectivos deslocamentos, segundo as direções "x", "y" e "z" do ponto (x,y,z) de uma fibra longitudinal da seção que, devido à torção movimenta da posição "A" para a posição "B", e "θ" sendo o ângulo de torção por unidade de comprimento. O sinal de "u" será

negativo porque para "y" positivo, um ponto move na direção negativa de "x" quando ele gira no sentido anti-horário. A expressão (5) representa o estado em que uma seção transversal empena na direção longitudinal "z", assim, o empenamento será diferente para diferentes coordenadas "x" e "y" e, sendo "w" independente de "z", todas as seções serão igualmente empenadas.

2.3 - Deformações

Existem dois tipos de deformações: as diretas " ϵ ", que são de distensão ou de contração e as deformações de cisalhamento " γ ", que são variações angulares. As equações (3) e (4) expressam a hipótese de não haver distorção na seção transversal. Então $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$ e $\gamma_{xy} = 0$.

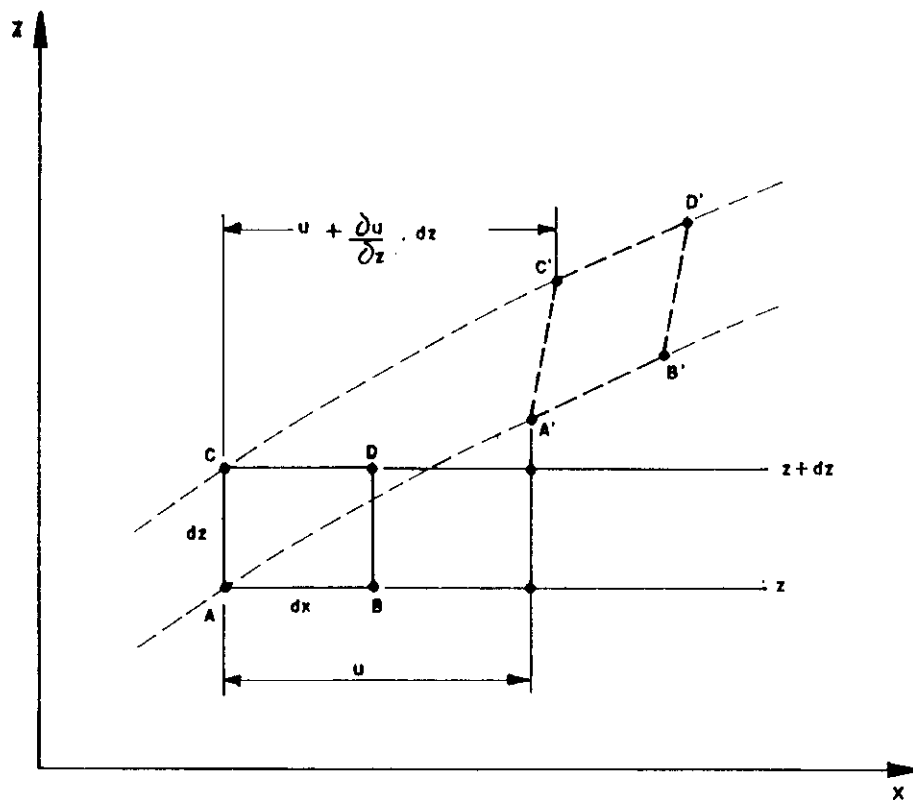


FIG.2 - Deslocamentos do elemento em um plano longitudinal

A equação (5) mostra que todas as seções empenarão igualmente, mantendo para todos os pontos de duas seções transversais as mesmas distâncias z , então $\epsilon_z = \text{constante}$. No caso particular em que não existem tensões longitudinais segundo o eixo da barra, $\epsilon_z = 0$. Neste caso, atuarão somente duas deformações, " γ_{xz} " e " γ_{yz} ".

Em um plano " xz " (com $y = \text{constante}$) paralelo ao eixo longitudinal " z ", um elemento "ABCD" desloca para a posição "A'B'C'D'" durante a torção, e duas seções originalmente planas " z " e " $z+dz$ " tornam-se empenadas, como mostram as linhas tracejadas na figura (2).

A distância entre "A" e "A'", na direção " x ", será denominada de " u " e entre "C" e "C'" será $\left[u + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right]$, pois o ponto "C" distancia de "A" de " dz ", quando "A" e "C" têm o mesmo valor de " x ". Então, a distância horizontal entre "A'" e "C'" vale " $\frac{\partial u}{\partial z} dz$ " e o pequeno ângulo entre "A'C'" e a vertical é " $\frac{\partial u}{\partial z}$ ". Seguindo este mesmo raciocínio para as distâncias "AA'" e "BB'" na direção " z ", conclui-se que o pequeno ângulo, entre "A'B'" e a horizontal, vale " $\frac{\partial w}{\partial x}$ ".

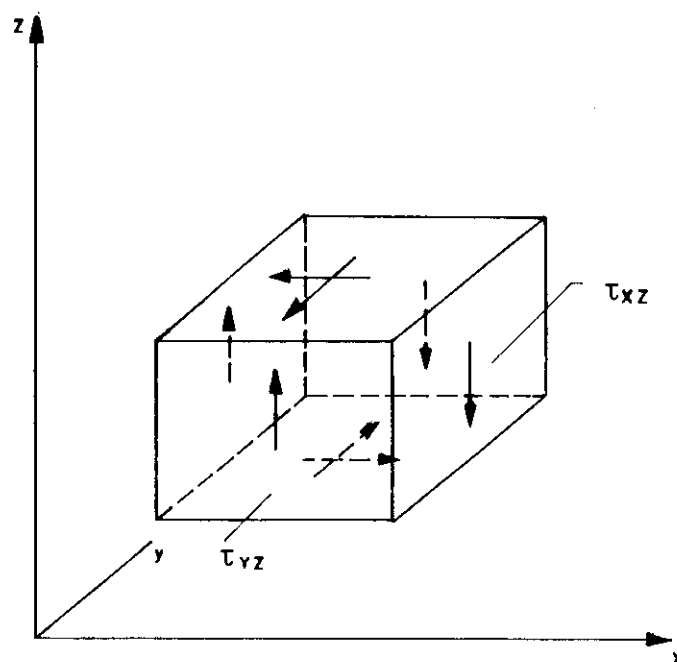


FIG.3 - Tensões de cisalhamento em um cubo elementar

Conseqüentemente, a diferença entre o ângulo "CAB" e o ângulo "C'A'B'" será $\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$ e, por definição este será o ângulo de cisalhamento " γ_{xz} " no plano "xz". Para o plano "yz", a análise será a mesma, bastando mudar as letras de "x" para "y" e de "u" para "v" nas equações algébricas, concluindo que:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \quad (6)$$

$$\gamma_{xy} = 0 \quad (7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (9)$$

Substituindo-se as equações (3), (4) e (5) em (8) e (9), tem-se:

$$\gamma_{xz} = -\theta \cdot y + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (10)$$

$$\gamma_{yz} = \theta \cdot x + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (11)$$

Através da lei de Hooke ($\tau = \gamma \cdot G$), as deformações podem ser expressas em termos de tensões:

$$\tau_{xz} = G \left[-\theta \cdot y + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (12)$$

$$\tau_{yz} = G \left[\theta \cdot x + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (13)$$

e representadas conforme foi mostrado na figura (3).

2.4 - Equação de equilíbrio e função de tensão

Como visto no item anterior, as tensões de cisalhamentos não são constantes em uma seção transversal "xy", mas diferem de ponto para ponto. Assim, as tensões nas

faces opostas do elemento "dx dy dz" (fig.4) não são exatamente iguais, mas diferem uma da outra por um pequeno acréscimo. Se, por exemplo, a tensão na face "dy dz" para o menor dos dois valores de "x" for " τ_{xz} ", mostrado pela seta tracejada, então a tensão, na face oposta, terá um acréscimo e será igual a:

$$\tau_{xz} + d\tau_{xz}$$

ou, mais precisamente:

$$\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$$

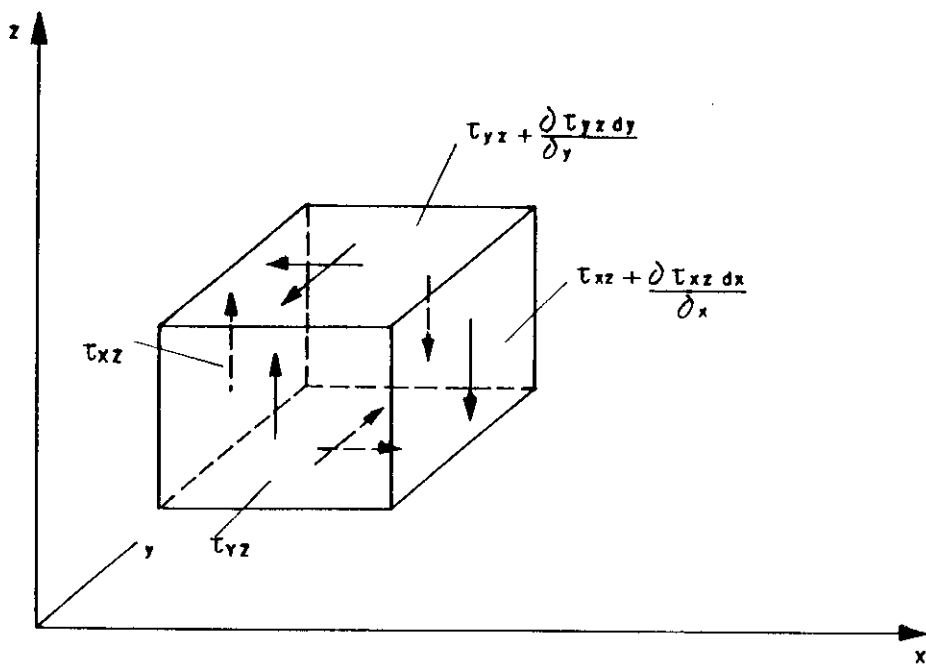


FIG.4 - Variações das tensões de cisalhamento

O desequilíbrio devido ao acréscimo da tensão na face "dy dz" é " $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$ " ao atuar na área "dy dz", conseqüentemente, a força será " $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz$ ". Analogamente, para as faces consecutivas "dx dz", o desequilíbrio das forças será " $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dx \cdot dy \cdot dz$ ". Não existem outras forças ou tensões verticais atuando no elemento da peça sujeita à torção, obviamente ele estará em equilíbrio.

Impondo-se a condição de equilíbrio, fazendo-se o somatório dos acréscimos das forças iguais a zero, e dividindo-se pelo volume elementar "dx dy dz", tem-se a equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

A equação (14) é uma equação diferencial parcial em termos de duas funções desconhecidas " τ_{xz} " e " τ_{yz} ", ambas dependendo de duas variáveis "x" e "y". Seria muito mais fácil encontrar uma solução para o problema, se fosse utilizada uma única função de (x,y), em vez de duas. Saint-Venant assumiu que existe uma função " $\phi(x,y)$ " de modo que as tensões podem ser conhecidas, a partir de sua diferenciação. Assim:

$$\tau_{yz} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (15)$$

$$\tau_{xz} = + \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (16)$$

Substituindo (15) e (16) em (14), nota-se que a equação (14) é automaticamente satisfeita por alguma função arbitrária " ϕ ", contanto que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \cdot \partial x} \quad (17)$$

Isto será sempre verdadeiro, se " ϕ " for uma função contínua.

A função " ϕ " é chamada de função de tensão do problema ou função das tensões de Saint-Venant. Esta será usada no lugar do par de tensões " τ_{xz} " e " τ_{yz} ". Portanto, deve-se reescrever as equações anteriores, em termos de " ϕ ". Das equações (12), (13), (15) e (16), chega-se a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = G \left[-\theta \cdot y + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (18)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = G \left[\theta \cdot x + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (19)$$

Nas equações (18) e (19), " w " é o empenamento da seção transversal, sendo uma função desconhecida. Mas, sabe-se que suas derivadas são funções contínuas em " x " e " y ", assim, o empenamento não terá saltos ou interrupções. Uma consequência matemática desta continuidade será:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \cdot \partial x} \quad (20)$$

Por transformações matemáticas, as equações (18) e (19) podem ser modificadas de duas maneiras: primeiro aplicando " $\partial/\partial y$ " na equação (18) e " $\partial/\partial x$ " na equação (19) e subtraindo-se os dois resultados, o que fornece:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -2 \cdot G \cdot \theta \quad (21)$$

segundo aplicando-se " $\partial/\partial x$ " na equação (18) e " $\partial/\partial y$ " na equação (19) e adicionando os dois resultados. Isto fornece:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (22)$$

A equação (21) é uma equação diferencial parcial para a função de tensão " ϕ ", e a equação (22) para a função de empenamento " w ".

Das equações deduzidas anteriormente entende-se que uma função arbitrária " ϕ ", que satisfaça ou não a

equação (21), conduzem a tensões (calculadas através das equações 15 e 16) que satisfazem a equação de equilíbrio (14). Se a função arbitrada satisfaz a equação (21), resulta em tensões que correspondem a deformações contínuas de empenamento "w". Porém, se a função " ϕ " não satisfizer a equação (21), obter-se-ão tensões de equilíbrio corretas mas a função de empenamento correspondente será descontínua. Portanto, a equação (21) é uma equação de continuidade ou também denominada de compatibilidade. Se, para uma dada seção transversal encontrar uma função " ϕ " que satisfaça a equação (21), e que também satisfaça as condições de contorno para " $\phi = \text{constante}$ ", ao longo da periferia, então as tensões encontradas, a partir de " ϕ ", será a solução correta do problema da torção.

2.5 - Momento de torção em eixos

O momento de torção anti-horário em torno da origem, fornecido por um elemento " $dx dy$ " (fig.5) de uma seção transversal será:

$$(\tau_{yz} \cdot x - \tau_{xz} \cdot y) \cdot dx \cdot dy \quad (23)$$

O momento de torção total é determinado integrando-se (23) sobre toda a seção. Partindo-se inicialmente do cálculo do momento de torção, causado apenas pela tensão " τ_{xz} " de (23) com a substituição de " τ_{xz} " fornecido por (16), tem-se:

$$\tau_{xz} \cdot y \cdot dx \cdot dz = \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot y \cdot dx \cdot dy \quad (24)$$

Integrando-se (24), primeiramente ao longo de uma faixa de largura " dx ", paralela ao eixo " y " (fig.5), então " x " será constante e " $(\partial \phi / \partial y) \cdot dy$ " pode ser representado por " $d\phi$ ", sem ambigüidade. Fazendo isto e integrando por partes,

tem-se:

$$\tau_{xz} \cdot y \cdot dx \cdot dy = \int dx \int y \cdot d\phi = \int dx \left[(y \cdot \phi)_A^B - \int \phi \cdot dy \right] \quad (25)$$

O primeiro termo de (25), que está entre colchetes, quando integrado entre os limites "A" e "B" será igual a $(y_B \phi_B - y_A \phi_A)$.

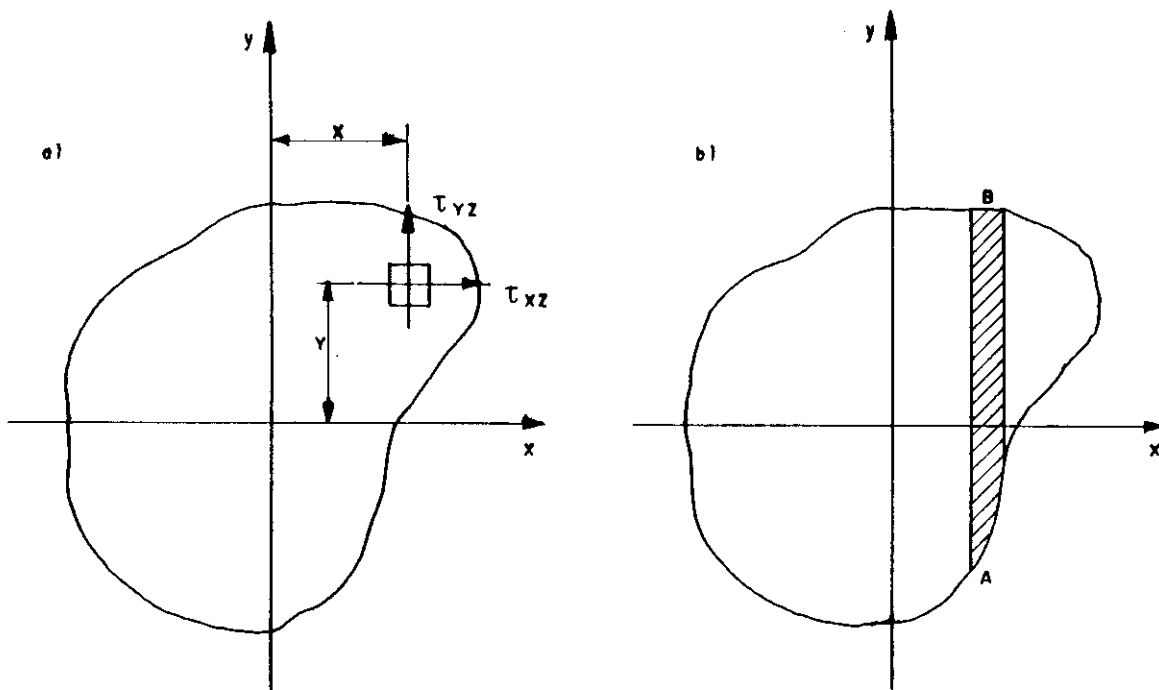


FIG.5 - Seção transversal de um eixo genérico

Sabe-se que " ϕ " deve ser constante ao longo do contorno, tal que " $\phi_A = \phi_B$ ". Então, para simplificar, adota-se o valor absoluto de " ϕ ", no contorno igual a zero. Isto pode ser feito porque " ϕ " é somente uma função auxiliar existindo somente por conveniência. A função " ϕ " tem a natureza de uma função potencial, tal como altura gravitacional. Seu valor absoluto não tem significado, somente suas diferenças é que são importantes. Sendo, portanto, " $\phi_A = \phi_B = 0$ " (fig.5b), a equação (25) torna-se:

$$\int dx \int y \cdot d\phi = - \iiint \phi \cdot dx \cdot dy \quad (26)$$

esta será positiva quando for considerado o sinal negativo de " τ_{xz} " que aparece na expressão (23).

A expressão (26) representa o volume devido a função " ϕ ". Analogamente, para uma faixa " dy " paralela ao eixo " x ", o momento de torção devido a parcela " τ_{yz} " de (23) é igual à expressão (26). Assim, o momento de torção total transmitido " M_t " é igual a duas vezes o volume sob a superfície " ϕ ", considerando-se " $\phi = 0$ " no contorno da seção:

$$M_t = 2 \iiint_A \phi \cdot dA \quad (27)$$

2.6 - Analogia da membrana

2.6.1 - Introdução

Para muitas seções importantes da prática, tal como perfis "I" e "U", o problema da torção nem sempre pode ser reduzido a uma fórmula matemática. Foi necessário criar métodos aproximados, e entre os que surgiram, o de Prandtl (1903) tem sido o melhor.

Prandtl observou que a equação diferencial (21) era semelhante a equação diferencial de uma membrana estendida, originalmente plana, então soprada para cima por pressão de ar. Esta observação permitiu visualizar, de uma maneira extremamente clara e simples, a forma da função " ϕ ", e as distribuições das tensões.

Será deduzida, no item seguinte, a equação de uma membrana fina de peso desprezível e, inicialmente, com uma grande tração " T " (expresso em força por unidade de comprimento e tendo o mesmo valor em todas as direções), soprada para cima, em um de seus lados superficiais por uma

pressão de ar "p" (expressa em força por unidade de área).

2.6.2 - Equação de equilíbrio da membrana

A figura (6) mostra uma membrana inicialmente plana. Esta assume uma configuração côncava no plano "xy" devido a uma pressão de ar em sua superfície inferior.

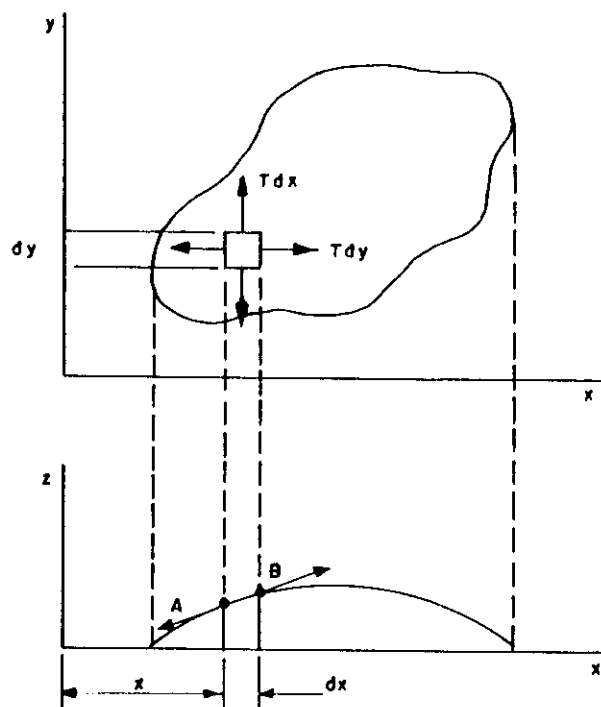


FIG.6 - Membrana deformada devido a pressão de ar

A pressão "p", sendo pequena, a ordenada "z" também o será. A equação da superfície formada terá a forma $z = f(x,y)$, e as declividades desta curva: " $\partial z / \partial x$ " e " $\partial z / \partial y$ " também serão pequenas. Em um elemento " $dx dy$ " da membrana, atuarão duas forças " Tdy " na direção "x", duas forças " Tdx " na direção "y", e uma força " $p \cdot dx \cdot dy$ " perpendicular ao elemento e, praticamente na direção "z". As componentes destas forças nas direções "x", "y" e "z" devem ser

multiplicadas pelo seno, cosseno ou tangente do ângulo. Para ângulos pequenos em que $\left[\cos(\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2/2 + \dots \right]$ e $\left[\sin(\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^3/6 + \dots \right]$, o cosseno do ângulo é igual à unidade, e o seno (ou tangente) é igual ao próprio ângulo. O equilíbrio horizontal, na direção "x" ou na direção "y" do elemento "dx dy" é automaticamente satisfeito, pois as componentes à direita e à esquerda são ambas iguais a "Tdy"; enquanto que a componente da força da pressão do ar, na direção "x" é relativamente menor e, conseqüentemente, desprezível. Na direção "z", a componente "Tdy", na face "A" (fig.6) é "T.dy.(∂z/∂x)" para baixo e, na face "B" oposta seria igual para cima, se a declividade "∂z/∂x" fosse a mesma; mas em geral não é. A declividade na face "B" devido ao incremento "dx" será $\left[\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} dx \right]$ [132] e a componente na direção "z" será:

$$T \cdot dy \left[\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} dx \right] = T \frac{\partial z}{\partial x} dy + T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \cdot dy \quad (28)$$

Portanto, a soma líquida das componentes de tração em "A" e "B" será:

$$T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \cdot dy \quad (29)$$

Para pequenos ângulos, vê-se que esta componente é proporcional à curvatura " $\partial^2 z / \partial x^2$ " [132]. Similarmente, a soma líquida das componentes de tração, nas duas faces de largura "dx", vale:

$$T \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \cdot dx \quad (30)$$

A terceira componente de força, na direção "z" também dirigida para cima, ocorre devido à pressão de ar "p.dx.dy", tal que, após adicionada com (29) e (30) e, dividindo-se todos os termos por "T.dx.dy", a equação de equilíbrio torna-se:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - \frac{p}{T} \quad (31)$$

Em outras palavras, a soma das curvaturas em duas direções perpendiculares será constante para todos os pontos da membrana.

Se a pressão "p" e a tração "T" na membrana forem ajustadas tal que "p/T" seja numericamente igual a "2G.θ", então a equação (31) será idêntica à equação (21). Além disso, se a membrana for arranjada, tal que sua altura z seja igual a zero no contorno da seção, então as alturas "z" da membrana serão numericamente iguais para a função de tensão "φ"; as declividades da membrana serão iguais às tensões de cisalhamento em direções perpendiculares às declividades. As linhas de contorno para "z = constante" da membrana são grupos de linhas onde atuam as tensões de cisalhamento, e o momento de torção será numericamente igual a duas vezes o volume sob a membrana (ver equação 27).

2.6.3 - Uso prático da analogia da membrana

Para calcular a declividade de uma membrana para uma dada seção transversal por integração da equação (31), será tão difícil como calcular a função de tensões a partir da equação (21). Mas, com a analogia da membrana, o problema pode ser resolvido de duas maneiras: através de medidas experimentais ou por visualizações intuitivas.

Experimentos têm sido feitos [76], usando-se lâmina de borracha distendida ou película de sabão. No início, pensava-se que seria necessário conhecer o valor da tração "T" e regular a pressão "p", na membrana, tal que "p/T = 2G.θ". Este procedimento seria complicado e é usualmente evitado, usando uma grande membrana e soprando simultaneamente para cima, duas seções transversais: uma de seção transversal a ser investigada, e outra de seção circular. A relação "p/T" será igual para ambas as seções, pois a mesma membrana será usada, conseqüentemente, "2G.θ"

também será o mesmo. Se forem medidos os volumes sob as duas superfícies e suas declividades, conclui-se que:

$$\frac{\text{volume}}{\text{declividade}} = \text{constante} \cdot \frac{\text{momento de torção}}{\text{tensão de cisalhamento}}$$

A constante será a mesma mesma para ambas as seções. Se forem conhecidos: o volume, a declividade, o momento de torção e a tensão de cisalhamento para a seção circular, a constante será automaticamente determinada e possibilitará determinar a relação (momento de torção)/(tensão de cisalhamento) para a outra seção.

2.6.4 - Aplicação em seções retangulares

Considere uma seção retangular estreita de dimensões "b" e "t" (fig.7). Se "b" é muito menor do que "t" nota-se, pela intuição, que os abaulamentos transversais à membrana "AA", "BB" e "CC" são idênticos e que, somente próximo às extremidades "DD" é que os abaulamentos se aproximam-se de zero. Então, as linhas de contorno, na região central, são retas paralelas ao eixo "y" e, nesta região, não existindo curvatura paralela ao eixo "y", a membrana se mantém segura apenas pelas componentes de tração na direção "x".

Analisando um trecho da região central da membrana com dimensões "2x" e "l", o equilíbrio vertical deste trecho requer que:

$$- 2T \cdot l \frac{dz}{dx} = p \cdot 2x \cdot l \quad \text{ou,} \quad \frac{dz}{dx} = - \frac{p}{2T} \cdot x \quad (32)$$

o sinal negativo é necessário porque, quando "x" for positivo, "dz/dx" será negativo. Integrando (32), ter-se-á:

$$z = - \frac{p \cdot x^2}{2T} + \text{constante} \quad (33)$$

A constante é determinada pela condição de contorno, para $z = 0$ tem-se " $x = t/2$ ". Então (33) fica:

$$z = \frac{p}{2T} \left(\frac{t^2}{4} - x^2 \right) \quad (34)$$

que é a equação de uma parábola. As declividades máximas, obviamente, ocorrem nas extremidades para " $x = \pm t/2$ ", isto é:

$$\left(\frac{dz}{dx} \right)_{\max} = \frac{p \cdot t}{2 \cdot T} \quad (35)$$

Estas ocorrem na membrana, mas, quando interpretado em termos de eixo retangular sujeito a momento de torção, torna-se:

$$\tau_{\max} = G \cdot \theta \cdot t \quad (36)$$

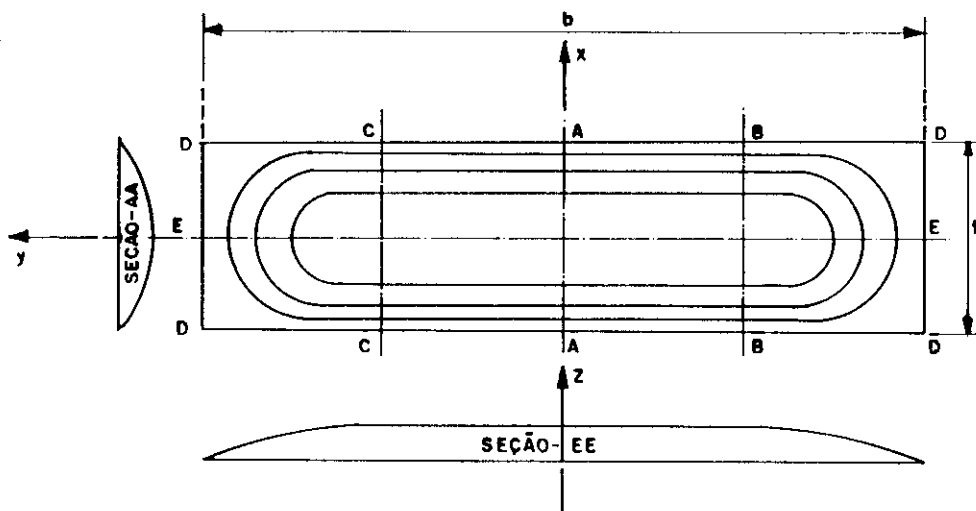


FIG.7 - Linhas de contorno e sistema de referência

No cálculo do volume sob a membrana, despreza-se o

achatamento externo próximo aos lados de ordenadas "y = ±b/2". A área da parábola é igual a $\left[\frac{2}{3}\text{base}\cdot\text{altura}\right]$, sendo a base = t, e da expressão (34) com "x = 0", tem-se z = p.t²/8T. Então o volume será:

$$V = \frac{t^3 \cdot b \cdot p}{12T} \quad (37)$$

fazendo "p/T = 2G.θ" , (37) passa a ser interpretada para eixo sujeito a torção onde "M_t = 2V". Então:

$$M_t = \frac{b \cdot t^3}{3} G \cdot \theta \quad (38)$$

levando (38) em (36), tem-se:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_t}{b \cdot t^2} \quad (39)$$

As equações (38) e (39) são válidas somente quando "b » t". Existem duas observações importantes em relação a estas equações. Primeiro, as tensões máximas ocorrem em pontos do contorno da seção que estão mais próximos do centro, enquanto que, pontos do contorno, situados mais distantes, isto é, nas quinas, têm tensões iguais a zero. Este fato, contradiz o que acontece na flexão de vigas e na torção de barras circulares. De acordo com a equação (38), percebe-se que a rigidez "M_t/θ" cresce apenas com a primeira potência de "b", enquanto que o momento polar de inércia cresce com o cubo de "b". Então, se fosse extrapolada a fórmula simples de seções circulares, onde a rigidez é "G.I_o" para seções retangulares o erro seria grande.

Uma maneira mais fácil de chegar às expressões (38) e (39) seria através da utilização da expressão (21). Para isto, deve ser observado que a forma da membrana independe de "y" para a seção retangular. Deste modo, determina-se a função de tensão "φ" por integrações sucessivas considerando-se as condições de contorno (φ = 0

em $x = \pm t/2$). Finalmente, utiliza-se as expressões (15) e (16) para determinar as tensões e, a expressão (27) para determinar o momento de torção.

Imagine agora o retângulo da figura (7), com uma dobra de 90° no meio de seu comprimento tornando-se uma cantoneira de paredes finas. A membrana não variará sua forma, exceto nas quinas. O volume sob a membrana para uma dada pressão não varia materialmente, conseqüentemente, a equação (38) será ainda aplicável para seção em cantoneira, se o comprimento "b" for considerado igual a soma dos comprimentos das abas. Esta mesma observação será válida para perfis "T", "I", tubos com fendas e, em geral, para seções que podem ser fabricadas por elementos retangulares (fig.8). No entanto, isto não é válido para seções caixão de contorno fechado, tal como tubos vazados ou seções caixão retangulares de paredes finas.

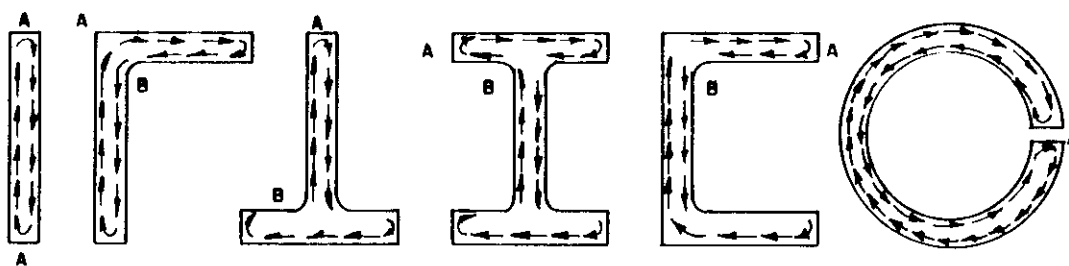


FIG.8 - Seções para as quais a equação (38) é aplicável

Se em um perfil "I", as mesas e a alma não possuem a mesma espessura, a equação (38) ainda será aplicada, no entanto, o momento " M_t " deve ser calculado separadamente para a alma e para as mesas. Estes momentos parciais devem ser somados para se obter o momento total em toda a seção.

Considere-se, por exemplo, um perfil "I", (fig.9),

omitindo as perturbações locais nas regiões de união da mesa com a alma. Pode-se supor que cada um dos retângulos do perfil comporta-se como se estivesse isolado, de modo que o momento de torção total será obtido somando-se os momentos resistentes dos três retângulos.

$$M_t = 2M_{tf} + M_{tw} \quad (40)$$

Onde, " M_t " é o momento resistente total da seção e " M_{tf} " e " M_{tw} " são, respectivamente, os momentos resistentes da mesa e da alma. Levando (38) em (40) com os dados da figura 9, tem-se:

$$M_t = \frac{G \cdot \theta}{3} (2t^3 \cdot b + c^3 \cdot h) \quad (41)$$

A partir de (41), o ângulo de giro por unidade de comprimento do perfil, será:

$$\theta = \frac{3M_t}{G (2t^3 \cdot b + c^3 \cdot h)} \quad (42)$$

A equação (36) permite obter as tensões máximas nas mesas ou na alma. Por exemplo, para as mesas, usando (36) e (42), a tensão será:

$$\tau = \frac{3M_t \cdot t}{G (2t^3 \cdot b + c^3 \cdot h)} \quad (43)$$

No caso geral de uma seção aberta qualquer constituída por retângulos estreitos, as equações (42) e (43) tornam-se:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot \sum \frac{b \cdot t^3}{3}} \quad (44)$$

$$\tau = \frac{M_t \cdot t}{\sum \frac{b \cdot t^3}{3}} \quad (45)$$

onde "t" e "b" são, respectivamente, a espessura e a largura de cada retângulo que forma a seção podendo ter valores diferentes, já que, em geral, nem todos os retângulos são iguais.

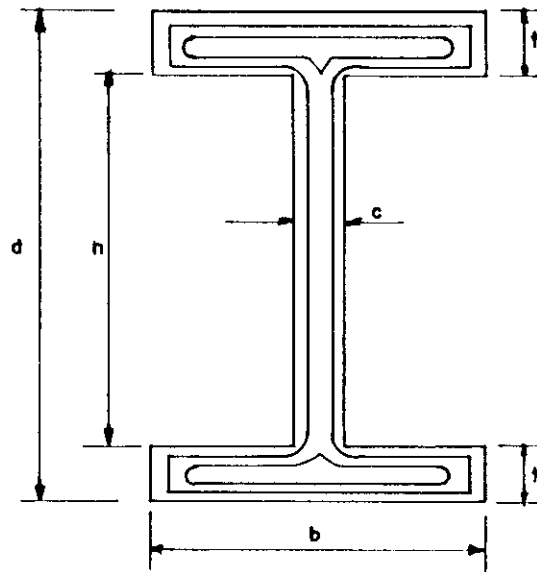


FIG.9 - Dimensões de um perfil "I"

O valor de "t", que aparece multiplicando a equação (45), varia ao mudar de retângulo no qual se deseja calcular as tensões. A grandeza $\sum(b.t^3/3)$ desempenha o mesmo papel que o momento de inércia polar " I_o " nas seções circulares e é denominado de momento de inércia a torção, ou constante de torção de Saint Venant. E será representada pelo símbolo " I_T ". Finalmente, o produto " $G.I_T$ " é denominado de rigidez a torção de Saint Venant.

2.6.5 - Quinas Inativas e quinas de tensões elevadas

A equação (39) foi deduzida para o ponto "A" (fig.7), cujas tensões estão ligadas a pontos da periferia que não situam nas quinas (fig.8). Existem dois tipos de quinas: as salientes (A) e as reentrantes (B), mostradas na figura (8). Em quinas salientes do tipo (A), a membrana é ligada por duas linhas que se interceptam não permitindo o abaulamento nas quinas. Ela permanece sensivelmente plana não existindo declividade e, conseqüentemente, não existindo tensões de cisalhamento. Tornam-se, assim, regiões de material inerte. Por outro lado, as tensões em quinas reentrantes são sempre maiores do que as tensões de cisalhamento de suas vizinhanças. Em tais quinas, a membrana é puxada para baixo, localmente pelo contorno e, conseqüentemente o abaulamento externo aumenta. Neste caso, as concentrações de tensões dependerão muito do raio local do filete de reentrância da quina: para raio do filete igual a zero pela matemática as tensões tornam-se infinitamente grandes. Isto, na prática, significa muito grande, tornando-se igual ao limite de escoamento do material.

2.6.6 - Seções vazadas

Na figura (10-b), a linha cheia mostra a membrana para um eixo sólido. Para um dado ângulo de torção " θ ", as tensões permanecem as mesmas, quando a parte central do eixo é removida.

As tensões remanescentes nos círculos concêntricos são obviamente dadas pelas declividades da membrana. Conseqüentemente, sua região central não terá significado. Analisando a região central, sabe-se que ela está em equilíbrio vertical pela força ascendente da pressão de ar ($p \cdot \pi \cdot r^2$) e as forças de tração na membrana. Agora se a região central da membrana for substituída por uma placa circular plana, fina, rígida e de peso desprezível, então,

esta placa ficaria em equilíbrio na mesma altura do contorno interno da membrana, pois o ar ascendente empurra, e a membrana desce puxada pela parte anular; igualmente ocorreria para a placa e a membrana central (fig.10-b).

Considere-se agora um eixo circular com um furo excêntrico. Supondo-se uma membrana sobre o eixo e representando o furo por uma placa plana rígida e de peso desprezível, pela pressão do ar, a placa será em geral empurrada obliquamente para cima. A condição de contorno interno requer que " ϕ " seja constante, tal que a placa deva ficar horizontal. Para isto, deve-se aplicar uma força e, talvez, um binário.

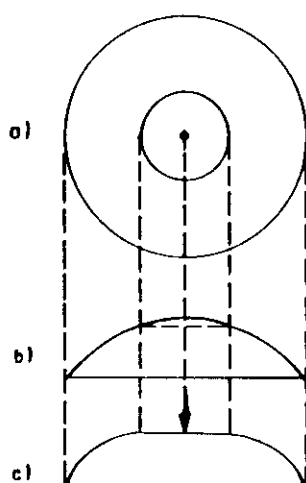


FIG.10 - Analogia da membrana para eixos vazados

A analogia da membrana fornece resultados corretos, somente se a placa for forçada a ser horizontal pela aplicação de um binário puro, sem força resultante vertical. Neste caso, a força vertical ascendente da pressão do ar igualará à tração na membrana. Para cada furo das seções vazadas é simulada uma chapa rígida sem peso e grudado na membrana. A membrana será então soprada para cima, e binários puros serão aplicados para cada uma das

chapas até que elas fiquem totalmente horizontais, provavelmente, em diferentes alturas. As declividades da membrana indicarão as tensões, e o volume indicará a metade do momento transmitido. Observando-se a figura (10), fica claro que o volume sob a membrana inclui a região sob a placa plana.

2.6.7 - Seções vazadas de paredes finas

As seções vazadas mais importantes da prática são seções de paredes finas, tal como vigas caixão de aço para edifícios, tubos fechados de paredes finas (circulares, elípticos, ou quadrados) feitos de alumínio, em construções de aeronaves (como em asas inteiras de aviões ou fuselagens). Neste caso, as espessuras das paredes consistem somente de cascas de alumínio. Para tais estruturas, a analogia da membrana torna-se particularmente simples.

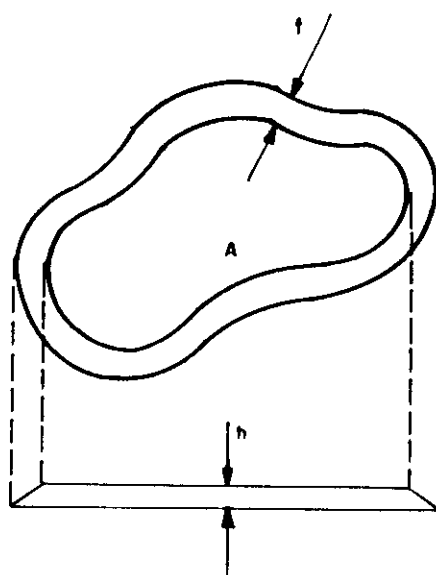


FIG.11 - Seção vazada genérica

A figura (11) mostra uma seção vazada genérica e sua membrana. A altura da placa central deve ser constante e

igual a "h". Então, a declividade da membrana será "h/t", e desde que (declividade.t = h = constante), encontra-se analogamente:

$$\tau.t = \text{constante} \quad (46)$$

ou seja, a tensão é inversamente proporcional à espessura da parede. As tensões são tangentes à parede e considera que sejam uniformemente distribuídas, ao longo da espessura "t" (pois, intuitivamente a declividade da membrana é constante transversalmente à espessura).

Determine-se, agora, a equação de equilíbrio vertical da placa, sendo "A" a sua área e "p" a pressão de ar. A força resultante ascendente devido ao ar é "p.A". A componente resultante descendente devido à tração "T" (por unidade de comprimento) na membrana deve ser integrada ao longo de toda a periferia, sendo esta igual a $\oint (T.ds).(h/t)$. Portanto, no equilíbrio, tem-se:

$$p.A = \oint (T.ds).(h/t) \quad (47)$$

Fazendo-se a correspondência entre a membrana e um eixo sujeito à torção, isto é, "p/T = 2G.θ" e "h/t = declividade = τ", tem-se:

$$2G.\theta = \frac{1}{A} \oint \tau.ds \quad (48)$$

Por outro lado, o momento transmitido em torno do ponto "O" (a escolha deste ponto não altera o resultado final) devido a uma área de elemento "t.ds" (fig.12) é:

$$\tau.t.ds.n \quad (49)$$

onde "n" é a normal ou braço de alavanca do momento. E o produto "n.ds" pode ser interpretado com sendo duas vezes a área de um pequeno triângulo de base "ds" e altura "n". Lembrando que "τ.t" é constante, em todo o contorno, tem-se:

$$M_t = \int (\tau \cdot t) \cdot n \cdot ds = \tau \cdot t \int 2dA = 2 \cdot A \cdot \tau \cdot t \quad (50)$$

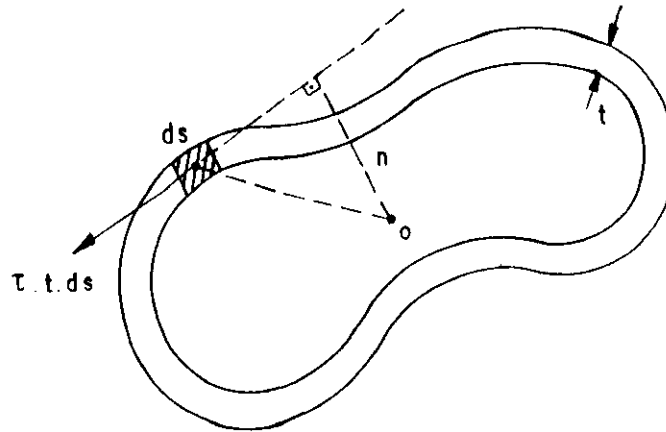


FIG.12 - Determinação do momento de torção

onde "A" é a área total da placa , ou seja, é equivalente à soma de todos os pequenos triângulos de base "ds" e altura "n". A equação (50) pode ser escrita como:

$$\tau = \frac{M_t}{2A \cdot t} \quad (51)$$

Para espessura constante "t", a equação (51) fornece tensões iguais em todo o contorno.

Outra equação de importância é a da rigidez, encontrada substituindo (51), em (48):

$$\frac{M_t}{\theta} = \frac{4G \cdot A^2}{\int (ds/t)} \quad (52)$$

que, para o caso usual de espessuras constantes, ela se torna:

$$\frac{M_t}{\theta} = \frac{4G \cdot A^2 \cdot t}{l} \quad (53)$$

onde "l" é o perímetro da parede da seção.

As conseqüências práticas das equações (51) e (53), algumas vezes, são surpreendentes. Como primeiro exemplo, considere um tubo circular de parede fina. Sendo este achatado em forma de elipse até a posição de uma placa plana dupla. Pela equação (51) e (53), nota-se que os valores "t" e "l" permanecem inalterados, mas a área "A" diminui a partir da área de um círculo até se tornar igual a zero (placa dupla). Assim, para um dado momento de torção, as tensões de cisalhamento tornam-se muito grandes na placa dobrada. Pela equação (53), vê-se que a placa dobrada não tem praticamente rigidez. Portanto, dentre os perfis vazados de um dado perímetro "l", o círculo é o que tem a maior área, conseqüentemente, o que terá maior rigidez à torção e às menores tensões para um dado momento de torção. Como segundo exemplo, considere-se uma seção caixão quadrada de parede fina. Seja analisar o que acontece quando este é comparado com outro perfil de lados iguais ao anterior, mas com duas dobras internas (fig.13).

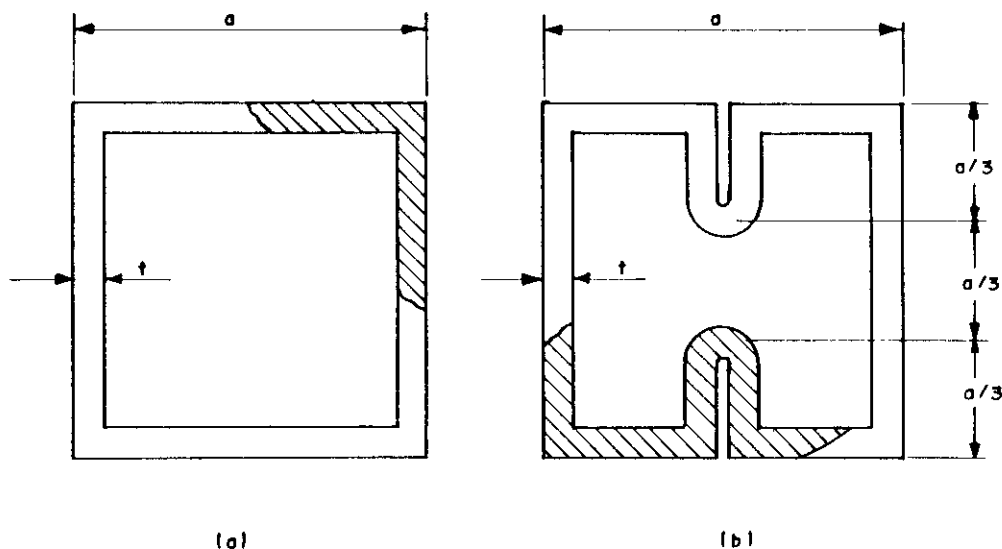


FIG.13 - Seções caixão quadradas sem e com dobra

Através das equações (51) e (53), "A" e "t" se mantêm inalteradas, mas como o perímetro do primeiro perfil é igual a "4.a", e do segundo é "16.a/3". Pela equação (51), as tensões são iguais para ambos os casos. No entanto, pela equação (53), conclui-se que o segundo perfil é 33 por cento mais flexível do que o primeiro. Com relação a concentração de tensões, o perfil com dobra é pior do que o quadrado, devido ao ângulo de reentrância de 360°. Pode ocorrer falha por fadiga no lado interno da dobra da seção da figura 13-b com um determinado momento de torção. Este poderia ser resistido pelo perfil da figura 13-a, sem maiores problemas.

2.6.8 - Seções multicelulares

A analogia da membrana envolverá várias placas rígidas de pesos desprezíveis. Tais placas devem ser sopradas pela pressão do ar até atingir determinadas alturas. Individualmente, cada placa estará sujeita a binários puros, apenas para mantê-las horizontais. As alturas das "n" placas são desconhecidas e serão denominadas de "h₁", h₂, ..., h_n. Para as paredes externas, as declividades serão "h/t", enquanto que, para as paredes internas, a declividade da membrana será "Δh/t", onde "Δh" é a diferença de alturas entre duas placas adjacentes. Então, a equação de equilíbrio vertical para cada placa será:

$$p \cdot A_n = T \oint (\Delta h/t) \cdot ds \quad (54)$$

onde "A_n" é a área da enésima placa, "Δh" é a altura da placa em questão menos a altura da placa vizinha, e a integral estende a todo o contorno desta placa.

Existem "n" equações lineares em "n" alturas desconhecidas h₁, h₂, ..., h_n, podendo ser resolvido o sistema de equações. Após determinadas as alturas, transforma-se o problema da membrana no correspondente problema de torção, fazendo "Δh/t = declividade = τ" e "p/T

= $2G.\theta$ ". Finalmente, o momento de torção total será igual a duas vezes o volume sob a membrana:

$$M_t = 2 \sum_n A_n . h_n \quad (55)$$

Para seções multicelulares com mais de duas células, o problema é mais trabalhoso, mas não apresenta dificuldades.

Como exemplo, determine-se a tensão máxima de cisalhamento e o momento de torção para a seção multicelular de paredes com espessuras diferentes mostrada na figura 14.

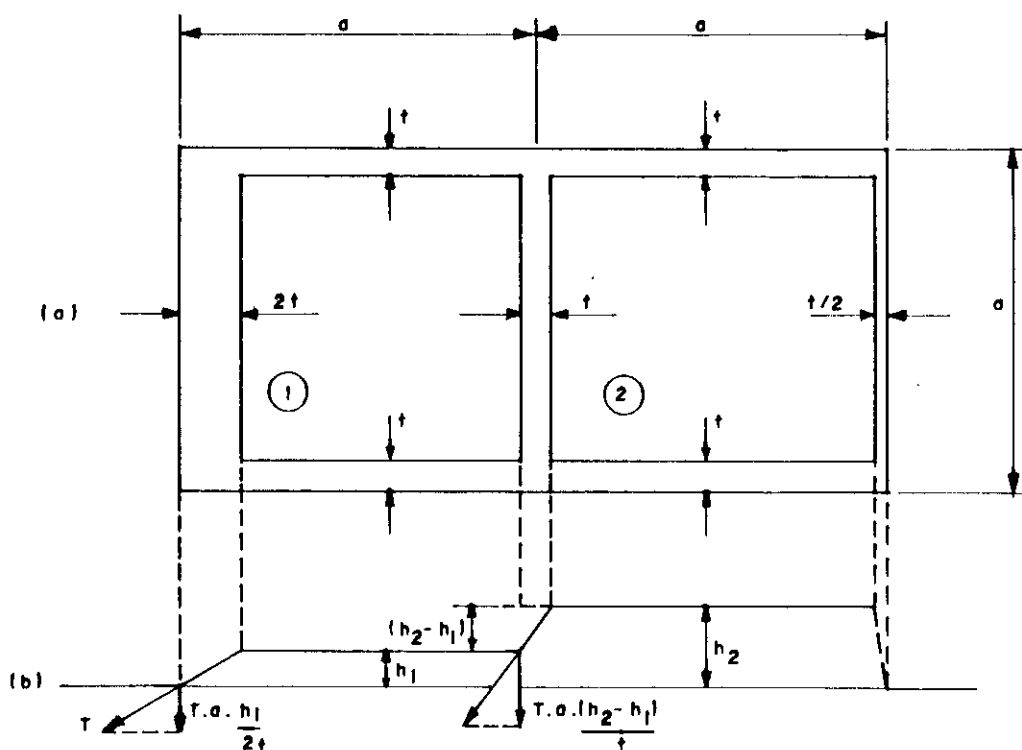


FIG.14 - Seção caixão multicelular

As equações de equilíbrio verticais para as placas (1) e (2), considerando-se a figura 14-b, serão:

$$p \cdot a^2 = T \cdot a \left(\frac{h_1}{2t} + \frac{h_1}{t} + \frac{h_1 - h_2}{t} + \frac{h_1}{t} \right) \quad (\text{placa 1})$$

$$p \cdot a^2 = T \cdot a \left(\frac{h_2 - h_1}{t} + \frac{h_2}{t} + \frac{h_2}{t/2} + \frac{h_2}{t} \right) \quad (\text{placa 2})$$

Estas equações foram deduzidas, partindo-se do lado esquerdo de cada célula e prosseguindo o contorno no sentido horário. Rearranjando estas equações, tem-se:

$$\frac{p \cdot a \cdot t}{T} = \frac{7 \cdot h_1}{2} - h_2$$

$$\frac{p \cdot a \cdot t}{T} = 5h_2 - h_1$$

Deste sistema de equações, determina-se " h_1 " e " h_2 ":

$$h_1 = 4p \cdot a \cdot t / 11T \quad \text{e} \quad h_2 = 3p \cdot a \cdot t / 11T$$

A declividade máxima ocorrerá para a menor espessura, ou seja, para " $t/2$ " e é igual a $h_2 / (t/2) = 6p \cdot a / 11T$. O volume total sob a membrana e as placas é $V = A_1 \cdot h_1 + A_2 \cdot h_2 = a^2 \cdot (h_1 + h_2)$ e, portanto, $V = 7a^3 \cdot p \cdot t / 11T$. Fazendo a equivalência da membrana para a torção, encontra-se:

$$\tau_{\max} = \text{declividade} = 12a \cdot G \cdot \theta / 11$$

$$M_t = 2V = 28a^3 \cdot t \cdot G \cdot \theta / 11$$

Algumas observações práticas podem ser feitas. Suponha-se que todos os lados da seção da figura 14 tenham a mesma espessura; conclui-se, então, pela simetria que as duas placas serão sopradas atingindo a mesma altura, e o lado central terá declividade zero na membrana e, conseqüentemente, as tensões, neste trecho, serão iguais a zero. Portanto, o trecho central da seção estará isento de tensões e assim não colaborará com a rigidez do perfil. Se o

trecho central fosse deslocado para posições não muito longe do centro do perfil, as tensões ainda seriam pequenas e, portanto, desprezíveis. No exemplo da figura 14, se fosse retirado o trecho central, a seção não seria enfraquecida materialmente. Em perfis estruturais, tais suportes são colocados por outras razões estruturais e não pelo problema da torção.

2.7 - Empenamento

Considere um tubo cilíndrico de parede fina sujeito à torção (fig.15-a). Este é um caso simples onde a distribuição das tensões de cisalhamento é radialmente linear e onde a seção transversal permanece plana.

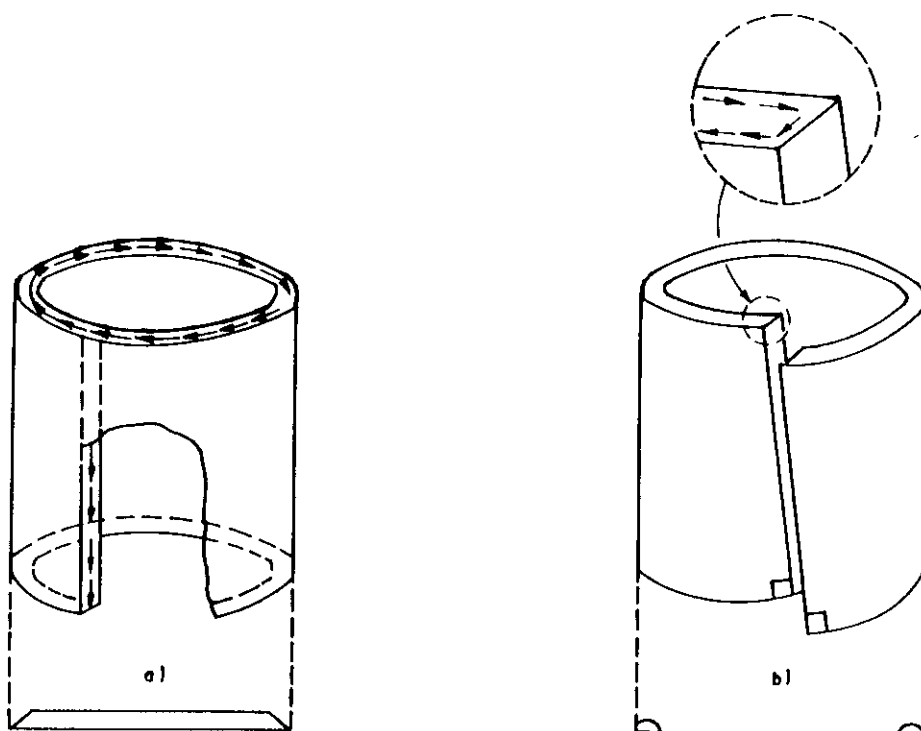


FIG.15 - Seções circulares vazadas sem e com fenda

Deve existir uma distribuição de tensões em uma determinada

seção paralela ao eixo longitudinal (fig.15-a), pois uma tensão de cisalhamento no topo desta seção está associada com uma tensão igual em um plano perpendicular.

Tome-se agora um tubo circular com uma fenda longitudinal sujeito à torção (fig.15-b). Na fenda as tensões deixam de existir e, conseqüentemente, a face esquerda longitudinal tenderá a subir, e a face direita a descer (fig.15-b). Assim, poderá ocorrer um empenamento considerável na seção transversal.

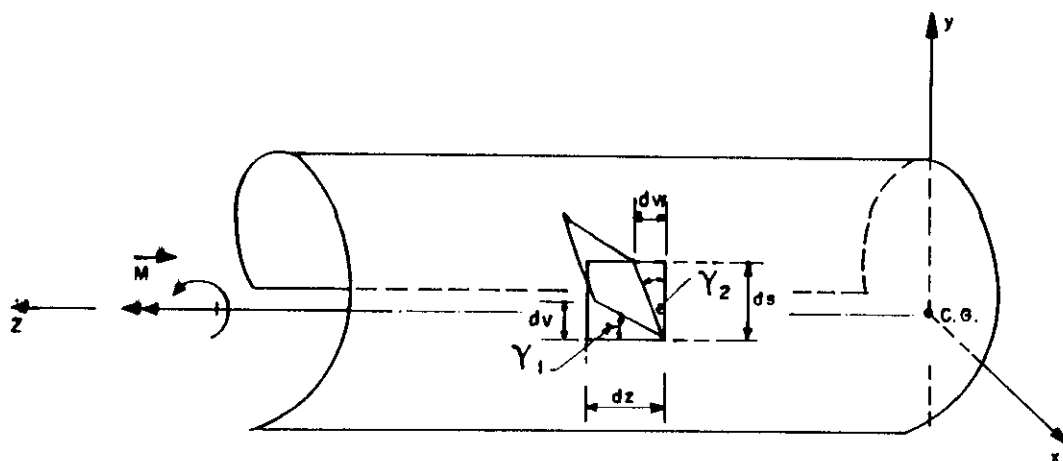


FIG.16 - Perfil de seção aberta e forma genérica

Para o caso geral de uma seção transversal de forma arbitrária, considere-se a análise de um elemento infinitesimal de dimensões " ds " e " dz ", situado na superfície média longitudinal do perfil (fig.16). Da figura 16, tem-se:

M_t = momento de torção que age na seção;

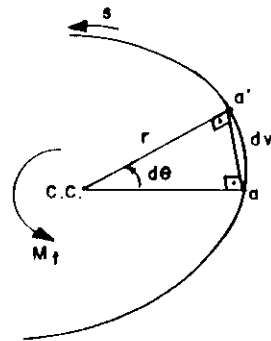
z = caminhamento ao longo do eixo longitudinal;

s = caminhamento transversal ao longo do contorno médio do perfil, com sentido e origem arbitrários;

w = empenamento, que é a deformação na direção "z" devido à torção;

v = translação dos pontos do contorno médio do perfil na direção "s".

Admite-se que a seção não sofrerá distorção, isto é, não mudará a sua forma. E, quando submetida a um momento de torção, a seção tenderá a girar em torno do seu centro de cisalhamento (c.c.), (fig.17).



a = POSIÇÃO INICIAL

a' = POSIÇÃO FINAL

FIG.17 - Contorno médio da seção

Do elemento infinitesimal "dsdz" (fig.16), as distorções serão:

$$\gamma_1 \cong \frac{dv}{dz} \quad (56)$$

$$\gamma_2 \cong \frac{dw}{ds} \quad (57)$$

Sendo "dz" medido ao longo do eixo longitudinal, e "ds", ao longo do contorno médio da seção transversal do perfil.

A distorção total " γ " será:

$$\gamma = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{ds} \quad (58)$$

Da geometria da figura 17, chega-se a:

$$aa' = dv = r \cdot d\theta \quad (59)$$

Sendo " θ ", o ângulo de rotação devido à torção.

Considerando a lei de Hooke, para as tensões de cisalhamento no regime elástico ($\tau = G\gamma$) e levando (59), em (58), tem-se:

$$dw = \left[\frac{\tau}{G} - r \cdot \theta' \right] ds \quad (60)$$

As tensões de cisalhamentos (τ) são nulas, na linha média da seção transversal de perfis abertos sujeitos à torção (fig.18). Fazendo $\tau = 0$ em (60), resulta em $dw = -\theta' r \cdot ds$, que quando, integrada em "s", desde a origem "0" até um ponto genérico "Q" do percurso, fornece:

$$w = - \int_0^Q \theta' \cdot r \cdot ds \quad (61)$$

Do estudo das áreas setoriais (apêndice-B), sabe-se que $dw = r \cdot ds$, então, a expressão (61) torna-se:

$$w = - \int_0^{\omega} \theta^I \cdot d\omega \quad (62)$$

Esta representa a função que define o empenamento. Este, por sua vez, depende da área setorial que tem como polo o centro de cisalhamento. Como " θ^I " independe da integral, ao longo de " s ", tem-se:

$$w = -\theta^I \cdot \omega \quad (63)$$

Para cada ponto, tem-se um valor de " w " que depende do sinal e do módulo da área setorial naquele ponto. Os sinais adotados, no apêndice-B para a área setorial, continuam sendo válidos. O sentido positivo de " z " é aquele adotado na figura 16. Neste caso, quando o empenamento " w " for positivo, o seu sentido será contrário ao do eixo " z " nos pontos onde " $\omega < 0$ " com " $\theta^I > 0$ ", tendo em vista a convenção adotada para as áreas setoriais. O momento de torção " M_t " será positivo quando tender a girar a seção no sentido anti-horário (fig.16), isto é, o vetor " M_t " deve ter o sentido de " z " [30].

3 - TORÇÃO NÃO-UNIFORME

3.1 - Introdução

Se os empenamentos traduzidos pela equação (63) são, de alguma forma, impedidos, seja por condições de vínculos, seja pela variação do momento de torção aplicado ao longo do eixo " z ", então além das tensões de cisalhamento de Saint Venant, aparecerão tensões normais longitudinais e também tensões de cisalhamento. O aparecimento destas tensões resultam devido ao impedimento dos empenamentos " w ". Assim, tem-se a torção não-uniforme ou flexo-torção [72].

Devido ao empenamento, tem-se a seguinte deformação unitária:

$$\epsilon = \frac{dw}{dz} \quad (64)$$

Derivando-se (63) em relação a "z" e, igualando o resultado com (64), tem-se:

$$\epsilon = -\omega \frac{d^2\theta}{dz^2} = -\omega \cdot \theta'' \quad (65)$$

Supondo-se que o perfil tem seção constante, ao longo do seu eixo longitudinal, então " ω " não variará com "z".

Se o empenamento é impedido totalmente ou parcialmente, aparecerão tensões normais. Pela lei de Hooke ($\sigma = E \cdot \epsilon$) e usando a expressão (65), chega-se a:

$$\sigma = -E \cdot \omega \cdot \theta'' \quad (66)$$

Pela expressão (66), verifica-se que as tensões normais que aparecem, além de dependerem de "z", variam ao longo da seção transversal, de acordo com a variação da área setorial. Então, a tensão " σ " em um determinado ponto da seção transversal é função do valor da área setorial relativa a este ponto.

Pode-se definir uma nova grandeza a partir da expressão (66) denominada de "bimomento". Para isto, multiplica-se os dois membros da expressão (66) por " $\omega \cdot dA$ " observando-se que " θ'' " será independente da integral ao longo da seção. No desenvolvimento deverá ser lembrado que $C_\omega = \int_A \omega^2 \cdot dA$. A integral $B = \int_A \sigma \cdot \omega \cdot dA$ será denominada de "bimomento" que levada em (66) fornece a tensão $\sigma = B \cdot \omega / C_\omega$ (sendo linear em mesas de perfis "I"). Esta é a tensão que aparece devido à "flexo-torção" de peças cujo empenamento é parcialmente ou totalmente restringido. Por superposição, a tensão devido ao "bimomento" deve ser introduzida na expressão clássica da tensão na flexão composta, fornecida

pela resistência dos materiais. Isto fornecerá uma equação dada por $\sigma = P/A \pm M_x \cdot y/I_x \pm M_y \cdot x/I_y \pm B \cdot \omega/C_\omega$. Frequentemente a tensão devido ao "bimomento" será uma parcela pequena frente às outras.

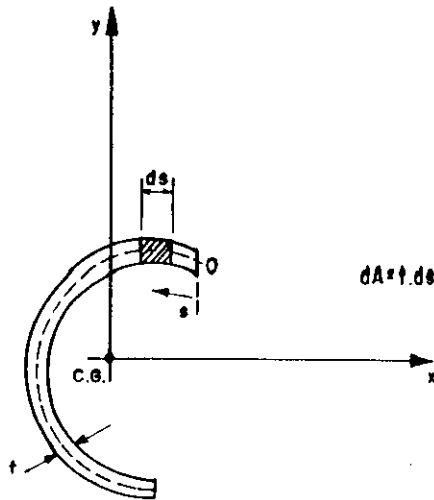


FIG.18 - Perfil da seção

Pode-se demonstrar que o centro de torção coincide com o centro de cisalhamento, lembrando que a torção será não-uniforme, quando houver impedimento do empenamento das seções. Isto provocará o aparecimento de tensões normais, na seção que formam um sistema de forças auto-equilibrado, sendo nula, portanto, a força normal e os momentos, em relação a dois eixos "x" e "y" (fig.18).

Considerando a equação (66), e sabendo-se que " θ^{II} " independe da integração na seção transversal, para o equilíbrio da força normal, tem-se:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = \int_0^s \sigma \cdot t \cdot ds = -E \cdot \theta^{II} \int_A \omega \cdot dA = 0 \quad (67)$$

A integral $\int \omega \cdot dA$ se estende a toda a seção do perfil. Como " θ^{II} " não é necessariamente nulo, tem-se:

$$\int \omega \cdot dA = 0 \quad (68)$$

Usando-se novamente a equação (66) e impondo-se a condição de equilíbrio do momento devido a resultante das tensões relativas ao eixo "x", tem-se:

$$M_x = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = -E \cdot \theta^{II} \int_A \omega \cdot y \cdot dA = 0 \quad (69)$$

Outra vez, como " θ^{II} " não é necessariamente nulo, tem-se

$$\int \omega \cdot y \cdot dA = 0 \quad (70)$$

Analogamente, em relação ao eixo "y", tem-se:

$$M_y = \int_A \sigma \cdot x \cdot dA = -E \cdot \theta^{II} \int_A \omega \cdot x \cdot dA = 0 \quad (71)$$

sendo que:

$$\int \omega \cdot x \cdot dA = 0 \quad (72)$$

Como foi considerado como polo o centro de torção (centro de rotação) da seção, conclui-se que as integrais (68), (70) e (72) são as mesmas definidas, em relação ao centro de cisalhamento considerado como polo.

Assim, no estudo da torção não-uniforme, calcula-se a área setorial e o momento de inércia setorial, tendo como polo o centro de cisalhamento.

Quanto à origem para a determinação da área setorial deve-se escolher um ponto tal que seja obedecida a condição $\int_A \omega \cdot dA = 0$, para que, por sua vez, seja nula a resultante de forças das tensões " σ " (ver apêndice-B).

3.2 - Equação diferencial da torção não-uniforme

Na torção não-uniforme, o aparecimento de tensões normais variáveis ao longo do eixo "z", provoca o aparecimento de tensões secundárias de cisalhamento (τ_v).

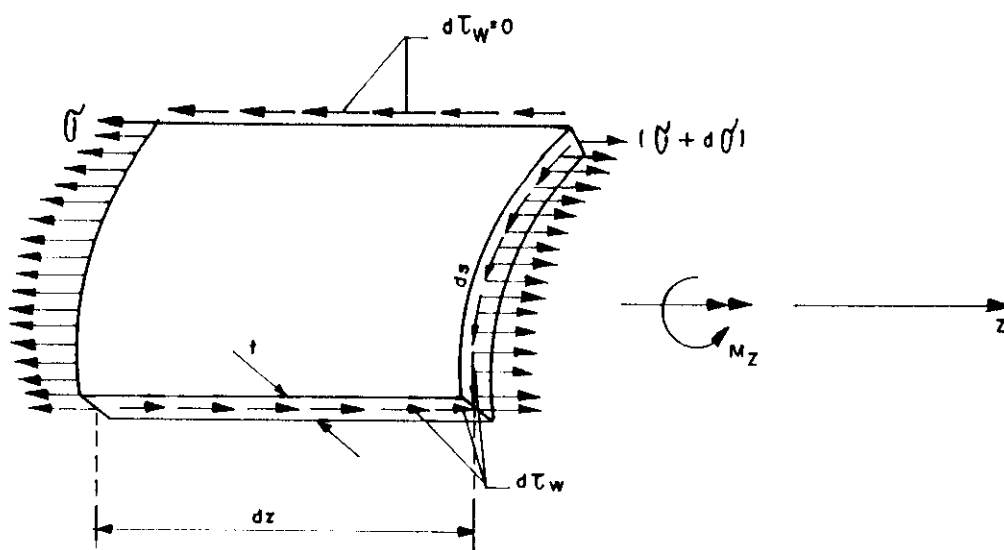


FIG.19 - Elemento infinitesimal

Considerando-se um elemento infinitesimal situado para facilidade num dos extremos da fenda longitudinal do perfil, onde as tensões são nulas (fig.19), por condições de equilíbrio chega-se à:

$$\sigma \cdot t \cdot ds + 0 - d\tau_v \cdot t \cdot dz - (\sigma + d\sigma) \cdot t \cdot ds = 0$$

$$d\tau_v \cdot t = - d\sigma \frac{dA}{dz} \quad (73)$$

Derivando-se, em relação a "z", a equação (66), substituindo-se em (73), integrando-se o resultado e sabendo-se que a derivada terceira de "theta" independe da integral na seção do perfil, tem-se:

$$\tau_v \cdot t = E \frac{d^3 \theta}{dz^3} \int_0^{s_1} \omega \cdot t \cdot ds \quad (74)$$

O produto " $\tau_v \cdot t$ " é o esforço cortante corrente ao longo do contorno do perfil, e a origem para fazer a integração indicada, está na extremidade do perfil e " τ_v " será a tensão de cisalhamento, em um ponto a uma distância " s_1 " da extremidade do perfil.

O efeito resultante das tensões de cisalhamento secundárias equivale a uma parcela do momento de torção. Pode-se considerar, então, que o momento de torção em uma seção, é resistido, parte na hipótese de Saint Venant, e parte na flexão com torção (flexo-torção), devido ao aparecimento de " τ_v ".

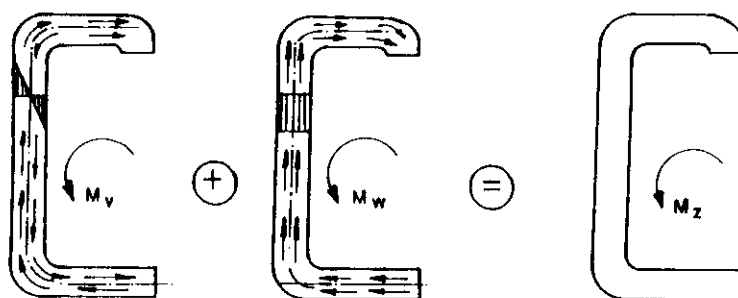


FIG.20 - Momento de torção resultante

A hipótese de Saint Venant é válida, somente

quando o empenamento da seção não for impedido. Portanto, as tensões de cisalhamento formam, na seção, um momento de torção resultante que pode ser interpretado como a soma dos seguintes momentos (fig.20):

$$M_z = M_v + M_v \quad (75)$$

onde " M_v " é a parcela do momento de torção resistida na forma de Saint Venant, e " M_v " é a parcela do momento de torção resistida pela flexão na torção.

Calcule-se, inicialmente, a parcela " M_v " (fig.20), com integração em toda a área da seção:

$$M_v = \int_A \tau_v \cdot r \cdot dA = \int_A \tau_v \cdot t \cdot r \cdot ds = \int_A \tau_v \cdot t \cdot d\omega \quad (76)$$

Substituindo a expressão (74) em (76), tem-se

$$M_v = E \frac{d^3 \theta}{dz^3} \int_A \left[\int_0^{s_1} \omega \cdot t \cdot ds \right] d\omega \quad (77)$$

De (77), seja $f_1 = \int \omega \cdot t \cdot ds$ e $f_2 = \int d\omega$ duas funções deriváveis em função de " s ". A expressão (77) constituirá uma fórmula que pode ser representada na forma de um produto de dois fatores " f_1 " e " df_2 ", ou seja, pode se fazer a integração por partes $\int f_1 \cdot df_2 = f_1 \cdot f_2 - \int f_2 \cdot df_1$ [132], então tem-se:

$$\int_A \left[\int_0^{s_1} \omega \cdot t \cdot ds \right] d\omega = \omega \int_0^{s_1} \omega \cdot t \cdot ds - \int_A \omega^2 \cdot t \cdot ds \quad (78)$$

Lembrando do apêndice-B, em que "O" é a origem de um dos extremos do perfil, e " s_1 " é o extremo final, então o momento estático setorial representado por $\int_0^{s_1} \omega \cdot t \cdot ds$ será igual a zero nestes pontos. E ainda, sendo $C_\omega = \int_A \omega^2 \cdot t \cdot ds =$

$\int_A \omega^2 \cdot dA$, então a equação (78) torna-se:

$$\int_A \left[\int_0^{s_1} \omega \cdot t \cdot ds \right] d\omega = - C_\omega \quad (79)$$

Levando (79) em (77), tem-se:

$$M_v = - E \frac{d^3 \theta}{dz^3} C_\omega \quad (80)$$

onde " C_ω " é o momento de inércia setorial da seção. Para determinar " τ_v ", em função de " M_v ", substitui (80) em (74):

$$\tau_v = - \frac{M_v}{C_\omega} \int_0^{s_1} \omega \cdot t \cdot ds \quad (81)$$

Do momento torçor resultante " M_z ", a segunda parcela " M_v " ocorre devido à torção uniforme. Então, as tensões provocadas por " M_v " serão dadas pela expressão:

$$\tau_v = \frac{M_v \cdot t}{I_T} \quad (82)$$

No modo de Saint Venant, o ângulo de torção será dado por:

$$d\theta = \frac{M_v \cdot dz}{G \cdot I_T} \quad (83)$$

Da equação (83), resulta:

$$M_v = G \cdot I_T \frac{d\theta}{dz} \quad (84)$$

Substituindo (80) e (84) em (75), tem-se:

$$M_z = G \cdot I_T \frac{d\theta}{dz} - E \cdot C_\omega \frac{d^3 \theta}{dz^3} \quad (85)$$

Resolvendo-se esta equação e determinando-se o

ângulo de rotação, estará resolvido o problema da torção não-uniforme, já que será possível determinar todas as grandezas envolvidas [122].

A equação (85) é diferencial, aplicável em situações, onde o momento aplicado é concentrado. Pode-se determinar uma equação correspondente a um momento torçor distribuído " m_z ", a partir da análise do equilíbrio dos momentos em um elemento infinitesimal do perfil, conforme mostra a figura 21.

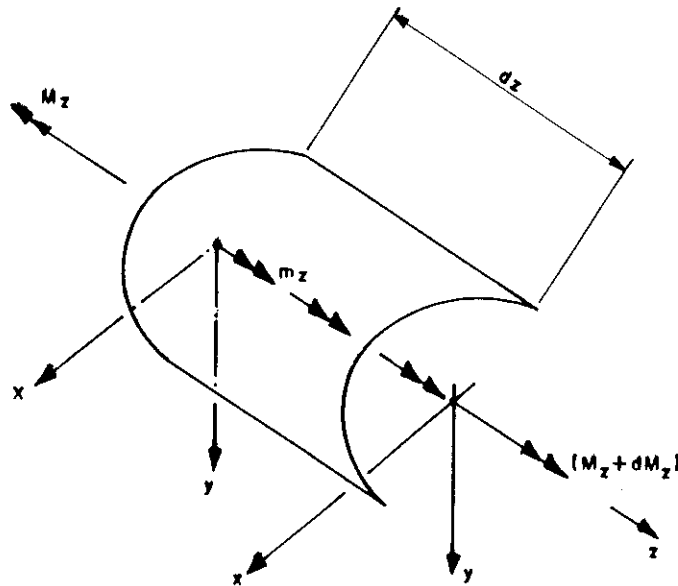


FIG.21 - Momento de torção uniformemente distribuído

$$-M_z + m_z + (M_z + dM_z) = 0$$

$$\frac{dM_z}{dz} = -m_z \quad (86)$$

De acordo com (86), diferenciando (85), tem-se:

$$\frac{dM_z}{dz} = -m_z = G \cdot I_T \frac{d^2 \theta}{dz^2} - E \cdot C_\omega \frac{d^4 \theta}{dz^4} \quad (87)$$

Dividindo (85) e (87) por "E.C_ω" e chamando de λ² = G.I_T/E.C_ω, tem-se:

$$\theta^{III} - \lambda^2 \cdot \theta^I = - \frac{M_z}{E \cdot C_\omega} \quad (88)$$

$$\theta^{IV} - \lambda^2 \cdot \theta^{II} = \frac{m_z}{E \cdot C_\omega} \quad (89)$$

As equações diferenciais (88) e (89) são lineares não-homogêneas de ordem superior, e suas soluções constituem a soma da solução da equação homogênea com uma solução particular [132].

Será resolvida, primeiramente, a equação (88). A sua equação diferencial homogênea possuidora de coeficientes constantes será:

$$\theta^{III} - \lambda^2 \cdot \theta^I = 0 \quad (90)$$

Sua solução particular é $\theta = e^{kz}$; introduzindo-se suas derivadas em (90) e simplificando-se, chega-se na sua equação característica:

$$k^3 - \lambda^2 k = 0 \quad (91)$$

As raízes de (91) são $k_1 = 0$, $k_2 = \lambda$ e $k_3 = -\lambda$. Como " k_1 " é raiz real simples, a sua solução particular é $\theta_1 = e^{kz} = 1$. No entanto, " k_2 " e " k_3 " têm raiz de multiplicidade $j = 2$, correspondendo a " j ", soluções particulares linearmente independentes, $\theta_2 = e^{kz} = e^{\lambda z}$ e $\theta_3 = z^{j-1} \cdot e^{kz} = z \cdot e^{-\lambda z}$. Tendo-se as " n " soluções particulares, linearmente independentes " θ_1 ", " θ_2 " e " θ_3 " forma-se a solução da equação homogênea (90) [94]:

$$\theta_h = C_1 \cdot \theta_1 + C_2 \cdot \theta_2 + C_3 \cdot \theta_3 \quad (92)$$

Sendo " C_1 ", " C_2 " e " C_3 " constantes arbitrárias, e substituindo-se os valores de " θ_1 ", " θ_2 " e " θ_3 " em (92),

tem-se:

$$\theta_h = C_1 + C_2 \cdot e^{\lambda z} + C_3 \cdot e^{-\lambda z} \quad (93)$$

O segundo membro da equação (88) é uma função do tipo $f(z) = P(z) \cdot e^{kz}$, sendo "P(z)" um polinômio de "z". Se "k" for uma raiz de multiplicidade "j" da equação característica, a solução particular da equação não-homogênea terá a forma $\theta_p = z^j \cdot Q(z) \cdot e^{kz}$, onde "Q(z)" é um polinômio de mesmo grau que "P(z)". Fazendo-se $k = 0$, $j = 1$ e $P(z) = Q(z) = C_4$ (pois, $M_z/E \cdot C_\omega = \text{constante}$) [133], tem-se:

$$\theta_p = C_4 \cdot z \quad (94)$$

Derivando-se (94) três vezes e, introduzindo-se os resultados em (88), conclui que $C_4 = M_z \cdot z / E \cdot C_\omega \cdot \lambda^2$. Levando "C₄" em (94) tem-se:

$$\theta_p = \frac{M_z}{E \cdot C_\omega \cdot \lambda^2} \cdot z \quad (95)$$

Somando-se as equações (93) e (95), chega-se finalmente à integral geral da equação (88):

$$\theta = C_1 + C_2 \cdot e^{\lambda z} + C_3 \cdot e^{-\lambda z} + \frac{M_z}{E \cdot C_\omega \cdot \lambda^2} \cdot z \quad (96)$$

Será resolvida, agora, a equação (89). A sua equação diferencial homogênea possuidora de coeficientes constantes, será:

$$\theta^{IV} - \lambda^2 \cdot \theta^{II} = 0 \quad (97)$$

Como os coeficientes da equação (97) são constantes, a sua solução será determinada da mesma maneira como no caso de uma equação de segunda ordem [133]. Sua solução particular

será $\theta = e^{kz}$. Introduzindo-se suas derivadas, em (97) e, simplificando-as, chega-se na sua equação característica:

$$k^4 - \lambda^2 \cdot k^2 = 0 \quad (98)$$

As raízes de (98) são $k_1 = k_2 = 0$ e $k_3 = -k_4 = \lambda$. Portanto, " k_1 " e " k_2 " são reais e têm multiplicidade $j = 2$, correspondendo a " j " soluções particulares linearmente independentes $\theta_1 = e^{kz} = 1$ e $\theta_2 = z^{j-1} \cdot e^{kz} = z$. Da mesma forma, " k_3 " e " k_4 " são reais e têm multiplicidade $j = 2$, correspondendo a " j " soluções particulares linearmente independentes $\theta_3 = e^{kz} = e^{\lambda z}$ e $\theta_4 = z^{j-1} \cdot e^{kz} = z \cdot e^{-\lambda z}$. Tendo-se as " n " soluções particulares linearmente independentes " θ_1 ", " θ_2 ", " θ_3 " e " θ_4 ", forma-se, assim, a solução da equação homogênea (97) [133]:

$$\theta_h = C_4 \cdot \theta_1 + C_5 \cdot \theta_2 + C_6 \cdot \theta_3 + C_7 \cdot \theta_4 \quad (99)$$

Sendo " C_4 ", " C_5 ", " C_6 " e " C_7 " constantes arbitrárias, e substituindo-se os valores de " θ_1 ", " θ_2 ", " θ_3 " e " θ_4 " em (99) tem-se:

$$\theta_h = C_4 + C_5 \cdot z + C_6 \cdot e^{\lambda z} + C_7 \cdot z \cdot e^{-\lambda z} \quad (100)$$

O segundo membro da equação (89) é uma função do tipo $f(z) = P(z) \cdot e^{kz}$, sendo " $P(z)$ ", um polinômio de " z ". Sendo " k ", uma raiz de multiplicidade " j " da equação característica; a solução particular da equação não-homogênea terá a forma $\theta_p = z^j \cdot Q(z) \cdot e^{kz}$, onde " $Q(z)$ " é um polinômio de mesmo grau que " $P(z)$ ". Fazendo-se $k = 0$, $j = 2$ e $P(z) = Q(z) = C_8$ (pois, $m_z/E \cdot C_\omega = \text{constante}$) [133], tem-se:

$$\theta_p = C_8 \cdot z^2 \quad (101)$$

Derivando-se (101) quatro vezes e introduzindo-se os resultados em (89), conclui que $C_8 = -m_z/2G \cdot I_T$. Então,

levando " C_θ " em (101) tem-se:

$$\theta_p = - \frac{m_z}{2G.I_T} \cdot z^2 \quad (102)$$

Somando-se as equações (100) e (102), chega-se, finalmente, à integral geral da equação (89):

$$\theta = C_4 + C_5 \cdot z + C_6 \cdot e^{\lambda z} + C_7 \cdot z \cdot e^{-\lambda z} - \frac{m_z}{2G.I_T} \cdot z^2 \quad (103)$$

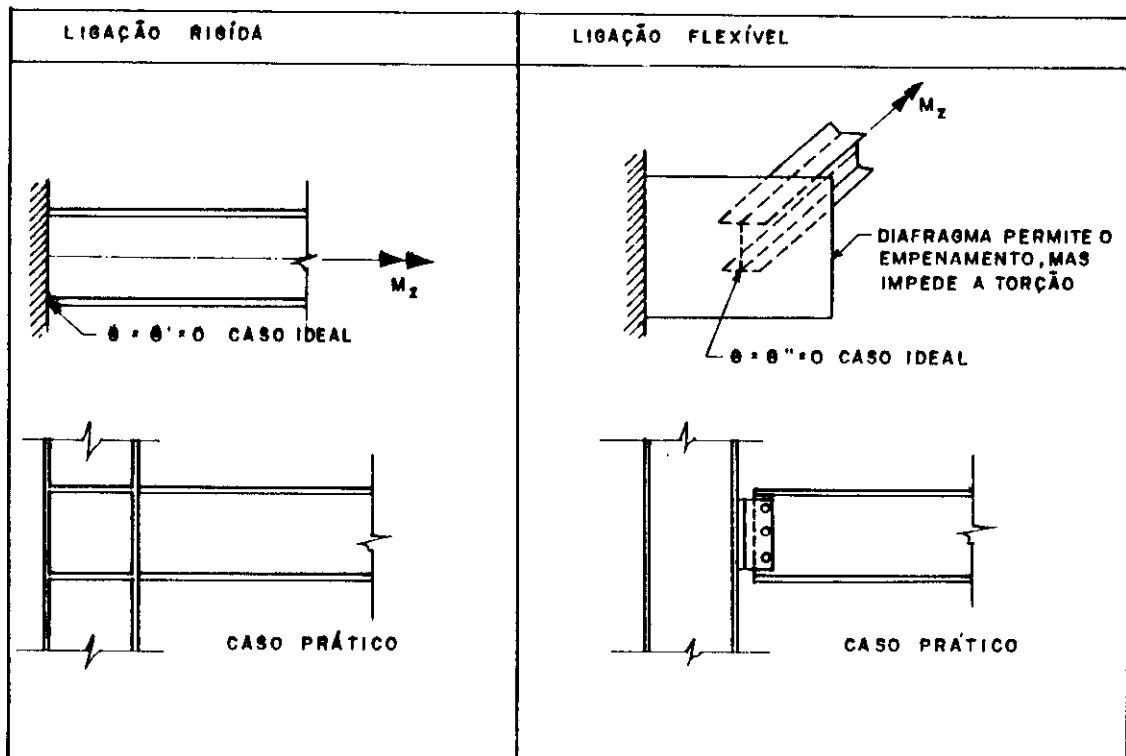


FIG.22 - Condições de contorno: "casos ideais" e "práticos"

Os coeficientes " C_1 ", " C_2 ", " C_3 ", " C_4 ", " C_5 ", " C_6 " e " C_7 " das equações (96) e (103) são constantes de integração e são determinadas através das condições de contorno, as quais definem certos valores do ângulo de torção " θ " e de suas derivadas. Se " $\theta = 0$ " corresponde a uma seção de extremidade na qual está impedido o giro em torno do eixo " z " (fig.22-a), para " $\theta^I = 0$ " a seção não poderá empenar (se $w = 0$, a equação 63 indica que $\theta^I = 0$), para " $\theta^{II} = 0$ " o empenamento é livre (neste caso $\varepsilon = 0$, e a equação 65 indica que $\theta^{II} = 0$), e se " $\theta^{III} = 0$ " em uma seção de extremidade indica que o cortante devido ao empenamento é nulo (como mostra a equação 74). Neste caso, a extremidade é livre. A figura 22 mostra dois casos práticos típicos de condições de contorno [30,62,72,78,79,119,134,158].

APÊNDICE D

MOMENTO GRADIENTE EM VIGAS

1 - INTRODUÇÃO

A flambagem lateral com torção de vigas há muito tempo tem sido um assunto de pesquisas. A interpretação correta do fenômeno em condições gerais de momentos e apoios ainda não foi totalmente resolvido [149].

Na literatura, a solução exata de Timoshenko [158], para o momento de flexão uniforme de uma viga "I", simplesmente apoiada, tem sido usada como uma solução de referência. Já os efeitos do momento gradiente e as devidas condições de apoio são ajustadas via fator de modificação empírico. Este, quando multiplicado pela solução de referência, fornece o momento de flambagem em condições reais. Esta aproximação tem sido usada há mais de 40 anos. Vários estudos têm sido publicados, considerando-se a dependência do fator de modificação no momento gradiente ao assumir condições de apoio simples [149].

De acordo com Sherbourne e Pandey [149], as correntes aproximações simplesmente ignoram o fato de que a flambagem lateral com torção seja uma superposição de dois modos fundamentais de deformação, ou seja, flexão lateral

com empenamento e torção, como descrito por Worthington [169]. Assim, os efeitos das condições de contorno considera o deslocamento lateral e torção combinados com o fator de momento gradiente, de dois modos que seriam estudados separadamente, posteriormente superpostos de acordo com certas regras. Esta interpretação conduz à necessidade de usar dois parâmetros para descrever os efeitos dos fatores citados, em dois modos fundamentais e suas posteriores superposições para obter o momento crítico do modo combinado. Isto contraria as correntes aproximações que usam um fator simples ao incorporar os efeitos de todas as variáveis [149].

O trabalho de Sherbourne e Pandey apresenta uma solução elástica mais exata para a flambagem lateral com torção de vigas "I", sob momentos de extremidades diferentes; trata, assim, o problema como uma superposição de dois casos hipotéticos, correspondendo ao empenamento igual a zero e a rigidez à torção igual a zero [149].

2 - MODELO ANALÍTICO

O modelo analítico, proposto para a flambagem lateral com torção de vigas, é baseado no teorema da superposição de componentes elementares de carga do sistema. O teorema afirma que, quando uma viga está sujeita a um sistema de cargas combinadas é possível resolver o problema, considerando-se como casos simples hipotéticos; assim, a carga crítica de cada caso hipotético pode ser superposta para se chegar ao resultado final. A flambagem lateral com torção (flexo-torção) de vigas pode, assim, ser tratada como a superposição de dois casos hipotéticos de flambagem de vigas: um caso que assume tensões à torção pura com a rigidez ao empenamento ($E.C_{\omega}$) igual a zero, e outro que assume tensões ao empenamento puro e rigidez à torção ($G.I_t$) igual a zero [149].

Worthington [169] provou que os dois casos

hipotéticos, tendo componentes principais semelhantes, podem ser superpostos para deduzir a equação geral do momento crítico para a flambagem lateral com torção de vigas, como a seguir:

$$M_{cr}^2 = M_{ct}^2 + M_{cv}^2 \quad (1)$$

onde " M_{ct} " e " M_{cv} " são momentos de flambagem para os dois casos hipotéticos, imaginando $E.C_{\omega} = 0$ e $G.I_t = 0$, respectivamente. A dedução é baseada na hipótese de que a componente principal de flexão tem a mesma amplitude nos dois casos hipotéticos assim como no caso real. Worthington provou também que se as componentes principais dos modos fundamentais, nos dois casos hipotéticos, não são semelhantes, então:

$$M_{cr}^2 > M_{ct}^2 + M_{cv}^2 \quad (2)$$

As equações (1) e (2) implicam que o teorema da superposição dá um valor crítico, que é sempre igual ou menor do que o valor crítico real. Leva assim a resultados seguros. As equações gerais, para o momento de flambagem de dois casos hipotéticos podem ser escritas como:

$$M_{ct}^2 = A_t \cdot M_t^2 \quad (3)$$

$$M_{cv}^2 = A_v \cdot M_v^2 \quad (4)$$

onde " A_t " e " A_v " são coeficientes de flambagem que dependem da distribuição do momento de flexão e das condições de apoios. " M_t " e " M_v " são definidos como o momento uniforme para a flambagem, sob tensões à torção pura e tensões ao empenamento puro, respectivamente. Portanto;

$$M_t = \frac{\pi}{L} \sqrt{E \cdot I_y \cdot G \cdot I_t} \quad (5)$$

$$M_v = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot E \cdot \sqrt{I_y \cdot C_\omega} \quad (6)$$

A superposição de " M_{ct} " e " M_{cv} ", de acordo com as equações (1), (2), (3), (4), (5) e (6), com o parâmetro de esbeltez à torção $\gamma = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_\omega}{L^2 \cdot G \cdot I_t}$ fornece a seguinte equação para o momento crítico:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{E \cdot I_y \cdot G \cdot I_t} \cdot \sqrt{A_t + A_v \cdot \gamma} \quad (7)$$

Comparando a equação (7) com a equação do momento crítico para vigas "I" em curvatura simples, sob momentos iguais e opostos, deduzida por Timoshenko [158], observa-se que o momento crítico de flambagem, para uma viga "I" simplesmente apoiada sob momento uniforme, é um caso particular da equação (7), quando se faz $A_t = A_v = 1$.

Sendo o fator modificador dos momentos (ω_b) um fator recíproco que ao ser multiplicado pelo momento crítico de flambagem uniforme (M_{cru}) de uma dada viga, assumindo condições de extremidades simplesmente apoiada, dá a resistência de flambagem (M_{cr}) da viga, sob condições reais de carregamentos e apoios, então:

$$M_{cr} = \frac{M_{cru}}{\omega_b} \quad (8)$$

e, usando a expressão de Timoshenko, tem-se:

$$M_{cr} = \frac{1}{\omega_b} \cdot \frac{\pi}{L} \sqrt{E \cdot I_y \cdot G \cdot I_t} \cdot \sqrt{1 + \gamma} \quad (9)$$

Comparando-se as equações (7) e (9), a expressão paramétrica para o fator modificador dos momentos será dada por:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{1 + \gamma}{A_t + A_v \cdot \gamma}} \quad (10)$$

3 - COEFICIENTES DE FLAMBAGEM

Os coeficientes de flambagem " A_t " e " A_v " representam os efeitos do momento gradiente e as restrições de extremidades laterais para momentos de flambagem, em torção e empenamentos puros, respectivamente. Assim, " A_t " e " A_v " estão associados com os dois casos hipotéticos de flambagem de vigas, imaginando-se que $E.C_\omega = 0$ e $G.I_t = 0$, respectivamente.

Sherbourne e Pandey [148,149] calcularam " A_t " e " A_v " pelos métodos de Ritz, Galerkin e elementos finitos para vigas com várias condições de apoios e carregamentos.

Como exemplo, " A_t " e " A_v " serão determinados para uma viga "I" simplesmente apoiada e sujeita a momento gradiente. Serão usados os princípios descritos anteriormente e o método de Rayleigh-Ritz, como suportes matemáticos.

A equação da energia potencial total, para uma viga sujeita a flexão, de seção transversal qualquer aberta e de paredes finas será dada [72] por:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[E.I_x \cdot (v^{II})^2 + E.I_y \cdot (u^{II})^2 + E.C_\omega \cdot (\theta^{II})^2 + G.I_t \cdot (\theta^I)^2 + 2M_x \cdot v^{II} - 2M_x \cdot k_x \cdot (\theta^I)^2 \right] dz \quad (11)$$

sendo:
$$k_x = \frac{1}{I_x} \int_0^{\alpha} y \left[x^2 + y^2 \right] t \cdot ds - 2y_0$$

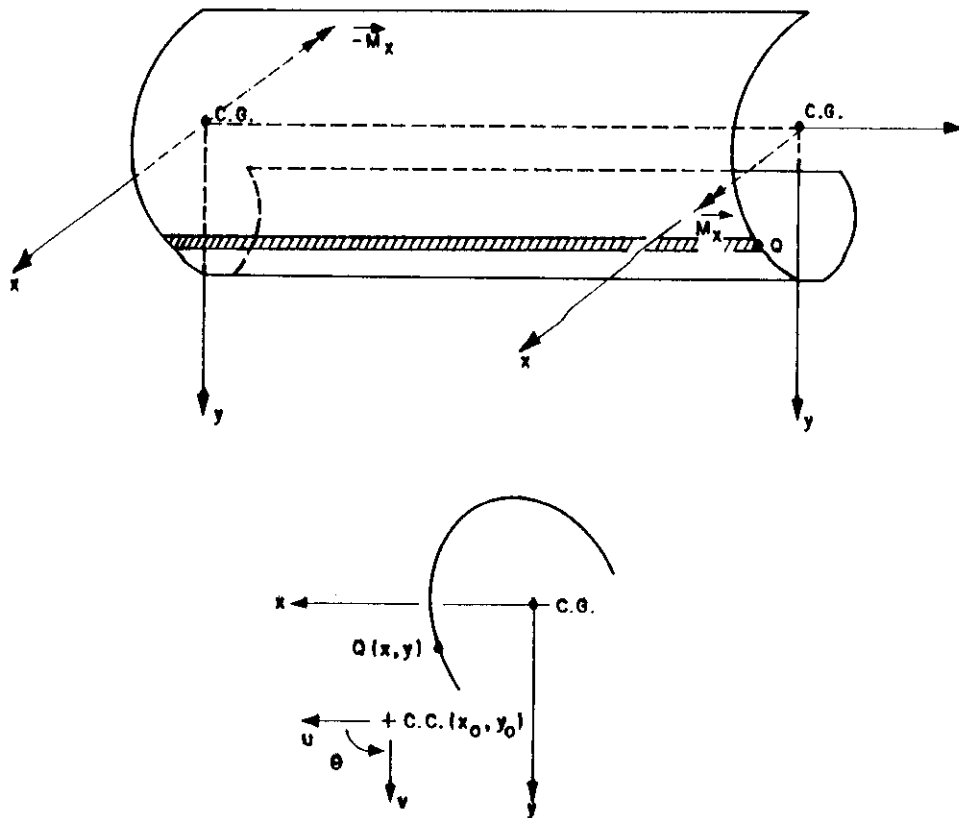


FIG.1 - Seção transversal aberta genérica

Onde "x" e "y" são eixos que passam pelo centro de gravidade da seção, "u" e "v" sendo os deslocamentos do centro de torção, enquanto que " θ " é o ângulo de rotação da seção, em torno do centro de torção.

A grandeza " k_x " é uma propriedade geométrica de monossimetria da seção. Para um perfil "I" bissetrício, o centro de gravidade coincide com o centro de torção, neste caso, demonstra-se [72] que " $k_x = 0$ ". Demonstra-se também [72] que das três equações diferenciais que traduzem o comportamento de vigas de seções abertas de paredes finas, uma delas (a que envolve "v") é independente das outras duas (as que envolvem "u" e " θ "), sendo estas últimas acopladas. Então, "u" e " θ " independem de "v" e, na equação (11), os termos que envolvem "v" serão iguais a zero, assim:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[E \cdot I_y \cdot (u^{II})^2 + E \cdot C_\omega \cdot (\theta^{II})^2 + G \cdot I_t \cdot (\theta^I)^2 - 2 \cdot M_x \cdot u^I \cdot \theta^I \right] dz \quad (12)$$

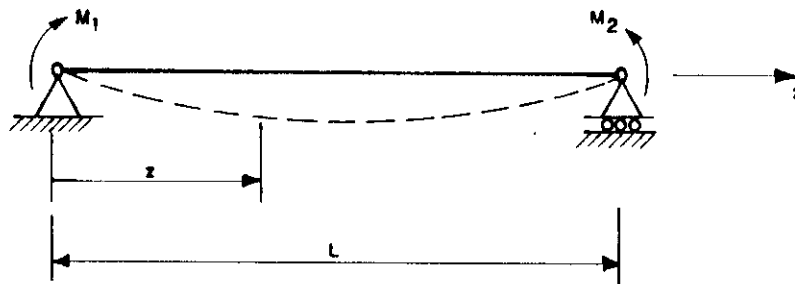


FIG.2 - Viga em curvatura simples

Será analisado o caso de uma viga simplesmente apoiada sujeita a momentos de extremidades diferentes, provocando curvatura simples.

Seja " M_1 " o valor de " $M(z)$ ", na extremidade em que " $z = 0$ ", e " M_2 "; o valor de " $M(z)$ ", na extremidade em que " $z = L$ " (fig.2). O momento " M_2 " é suposto maior do que " M_1 ", e a relação entre estes momentos é " $r = M_1/M_2$ ". Então, o momento, em uma posição genérica do eixo da barra, será dado por:

$$M(z) = M_2 \left[r + \frac{(1+r) \cdot z}{L} \right] \quad (13)$$

Iniciando-se pelo primeiro caso hipotético, para a determinação do momento crítico à torção " M_{ct} ", deve-se fazer $E \cdot C_\omega = 0$ na equação (12), a qual fornece:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[E \cdot I_y \cdot (u'')^2 + G \cdot I_t \cdot (\theta')^2 - 2 \cdot M_x \cdot u' \cdot \theta' \right] dz \quad (14)$$

Pelo método de Rayleigh-Ritz, devem-se adotar funções arbitrárias de deslocamentos que satisfaçam as condições de contorno geométrica da viga. Serão adotadas portanto, para "u" e "θ" funções senoidais em que "a" e "b" são coeficientes indeterminados da forma flambada assumida:

$$u = a \cdot \text{sen}(\pi z/L) \quad (15)$$

$$\theta = b \cdot \text{sen}(\pi z/L) \quad (16)$$

Derivando-se (15) e (16) até as ordens das derivadas necessárias em (14), e sabendo que:

$$\text{sen}^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha) / 2 \quad (17)$$

$$\text{cos}^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha) / 2 \quad (18)$$

$$\int z(\cos^2 Az) dz = z^2/4 + z \cdot \text{sen} 2Az / 4A + \text{cos} 2Az / 8A^2 \quad (19)$$

Tem-se após as integrações e os desenvolvimentos algébricos a seguinte expressão da energia potencial total:

$$V = \frac{EI_y \pi^4 a^2}{4L^3} + \frac{GI_t \pi^2 b^2}{4L} - \frac{\pi^2 M_2 r ab}{2L} - \frac{M_2 (1-r)(\pi^2 - 1) ab}{4L} \quad (20)$$

Procurando-se o extremo da função (20), fazendo-se $\partial V / \partial a = 0$ e $\partial V / \partial b = 0$, tem-se:

$$\frac{E \cdot I_y \cdot \pi^4 \cdot a}{2L^3} - \left[\frac{\pi^2 \cdot M_2 \cdot r}{2L} + \frac{M_2 \cdot (1-r) \cdot (\pi^2 - 1)}{4L} \right] b = 0 \quad (21)$$

$$\frac{G \cdot I_t \cdot \pi^2 \cdot b}{2L} - \left[\frac{\pi^2 \cdot M_2 \cdot r}{2L} + \frac{M_2 \cdot (1-r) \cdot (\pi^2 - 1)}{4L} \right] a = 0 \quad (22)$$

O determinante dos coeficientes de "a" e "b" do sistema de equações (21) e (22) deve ser igual a zero para que se tenha uma solução diferente da trivial. Assim, determina-se o valor crítico de "M₂" como função de "r". Isto fornece, após alguns arranjos algébricos:

$$M_2 = \frac{\pi \sqrt{E \cdot I_y \cdot G \cdot I_t}}{L} \frac{1}{\sqrt{0.3r^2 + 0.49r + 0.2}} \quad (23)$$

onde "M₂" corresponde ao momento crítico de flambagem à torção hipotético "M_{ct}", quando E.C_ω = 0. Sendo M_{ct}² = A_t.M_t², onde "M_t" é o momento uniforme para a flambagem, sob tensões de torção pura, e "A_t" o coeficiente de flambagem, que depende da distribuição dos momentos de flexão e condições de apoios; a partir de (23) tem-se:

$$A_t = \frac{1}{[0.3r^2 + 0.49r + 0.2]} \quad (24)$$

No segundo caso hipotético, determina-se o momento crítico de flambagem, sob tensão de empenamento pura, assumindo-se a rigidez à torção G.I_t = 0, na equação (12). Esta fornece:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L [E \cdot I_y \cdot (u^{II})^2 + E \cdot C_\omega \cdot (\theta^{II})^2 - 2 \cdot M_x \cdot u^I \cdot \theta^I] dz \quad (25)$$

As funções arbitrárias que satisfazem as condições de contorno a adotar serão iguais àquelas definidas por (15) e (16). Determinando-se, adequadamente, suas derivadas e, tendo em vista (17), (18) e (19), após as integrações e os desenvolvimentos algébricos, tem-se a seguinte expressão da energia potencial total:

$$V = \frac{E I_y \pi^4 a^2}{4L} + \frac{E C_\omega \pi^4 b^2}{4^3} - \left[\frac{\pi^2 M_2 r}{L} + \frac{M_2 (1-r)(\pi^2 - 1)}{4L} \right] ab \quad (26)$$

Procurando-se o extremo da função (26), fazendo-se $\partial V/\partial a = 0$ e $\partial V/\partial b = 0$, tem-se:

$$\frac{E \cdot I_y \cdot \pi^4 \cdot a}{2L^3} - \left[\frac{\pi^2 \cdot M_2 \cdot r}{2L} + \frac{M_2 \cdot (1-r)(\pi^2-1)}{4L} \right] b = 0 \quad (27)$$

$$\frac{E \cdot C_\omega \cdot \pi^4 \cdot b}{2L^3} - \left[\frac{\pi^2 \cdot M_2 \cdot r}{2L} + \frac{M_2 \cdot (1-r)(\pi^2-1)}{4L} \right] a = 0 \quad (28)$$

O determinante dos coeficientes "a" e "b", do sistema de equações (27) e (28) deve ser igual a zero para que se tenha uma solução diferente da trivial. Assim, determina-se o valor crítico de " M_2 ", como função de "r", fornecendo-se após alguns arranjos algébricos:

$$M_2 = \left[\frac{\pi}{L} \right]^2 \cdot E \cdot \sqrt{I_y \cdot C_\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{0.3r^2 + 0.49r + 0.2}} \quad (29)$$

onde " M_2 " corresponde ao momento crítico de flambagem ao empenamento hipotético " M_{cv} ", quando $G \cdot I_t = 0$. Sendo $M_{cv}^2 = A_v \cdot M_v^2$, onde " M_v " é o momento uniforme para a flambagem que depende da distribuição do momento de flexão e das condições de apoio, a partir de (29) então, tem-se:

$$A_v = \frac{1}{\left[0.3r^2 + 0.49r + 0.2 \right]} \quad (30)$$

Se ao contrário, fossem calculados " A_t " e " A_v ", para o mesmo tipo de viga, porém com momentos de extremidades provocando curvatura reversa (fig.3), cujo momento em uma posição genérica fosse dado por $M(z) = M_2[r - (1+r)z/L]$ e com os mesmos procedimentos anteriores, obter-se-iam:

$$A_t = \frac{1}{\left[0.3r^2 - 0.49r + 0.2 \right]} \quad (31)$$

$$A_v = \frac{1}{[0.3r^2 - 0.49r + 0.2]} \quad (32)$$

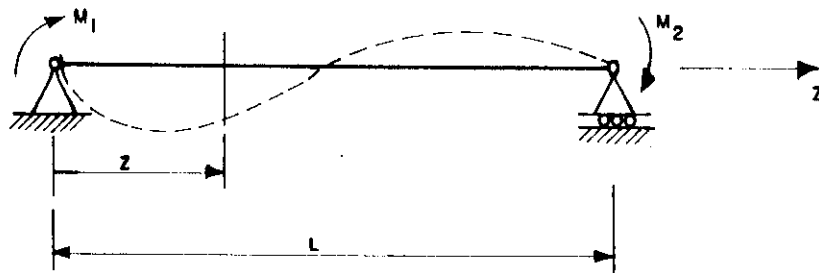


FIG.3 - Viga em curvatura reversa

Para chegar aos resultados das expressões (24), (30), (31) e (32) foram adotadas as funções $u = a \cdot \text{sen}(\pi z/L)$ e $\theta = b \cdot \text{sen}(\pi z/L)$, como sendo as funções das elásticas aproximadas. No entanto, estas funções dão desvios nos resultados finais e, para que se tenham resultados mais precisos, é aconselhável que se adotem para "u" e " θ ", séries senoidais expandidas, isto é:

$$u = \sum_1^n a_n \cdot \text{sen}(n\pi z/L) \quad (33)$$

$$\theta = \sum_1^n b_n \cdot \text{sen}(n\pi z/L) \quad (34)$$

desta maneira, Sherbourne e Pandey [148] chegaram a resultados mais exatos.

4 - LIMITES PARA O FATOR DE MODIFICAÇÃO DOS MOMENTOS

Os limites para o fator de modificação dos momentos são obtidos limitando-se os comprimentos da viga em zero e infinito. Estes demonstram a influência do vão da viga em " ω_b ", para dadas condições de apoio.

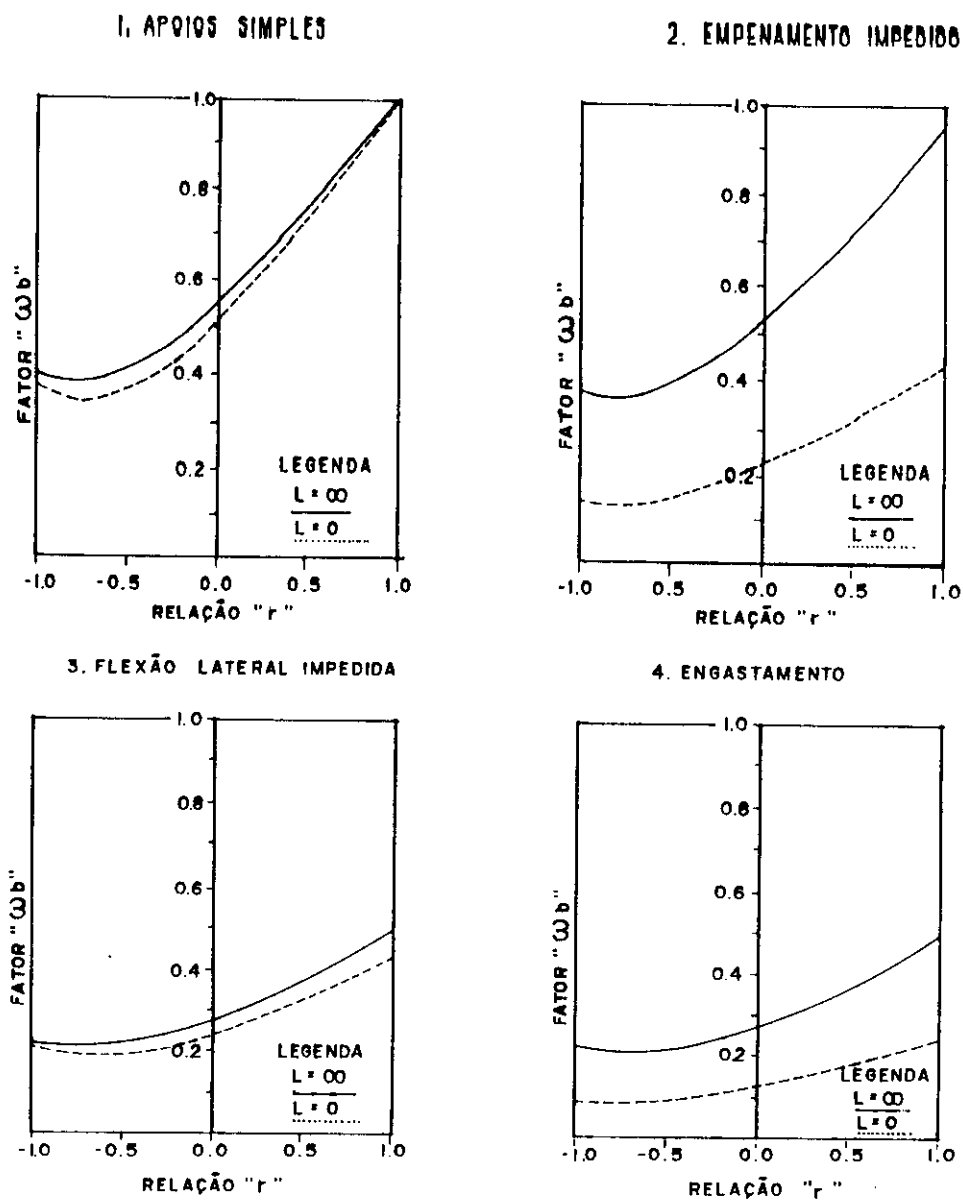


FIG.4 - Limites do fator modificador dos momentos

Rearranjando os termos da expressão (10), tem-se:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right)}{\frac{A_t}{\gamma} + A_v}} \quad (35)$$

quando "L = infinito", da expressão $\gamma = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C \omega}{L^2 \cdot G \cdot I_t}$, tem-se que "γ" será igual a zero, e a equação (10) fornecerá:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{1}{A_t}} \quad (36)$$

Quando "L = zero", "γ" será igual a infinito, e a equação (35) conduzirá:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{1}{A_v}} \quad (37)$$

Sherbourne e Pandey traçaram gráficos baseados nas equações (36) e (37) para quatro tipos de apoios. Estes gráficos (fig.4) mostram que a diferença entre os limites é muito grande para os apoios 2 e 4. Estes impedem o empenamento e são muito pequenos para os apoios 1 e 3. Estes, por sua vez, não impedem o empenamento.

Na figura 5, várias expressões para o fator de modificação dos momentos disponíveis na literatura são comparados com aqueles obtidos pelo trabalho de Sherbourne e Pandey [148]. Os gráficos obtidos pelas expressões de Austin, Salvadori e Massonnet mostram que estes estão próximos dos resultados obtidos quando se considera o caso em que "L = infinito" e, portanto, "γ = 0", isto é, a resistência ao empenamento da seção transversal seja igual a zero. Esta hipótese fornece boa aproximação, somente para apoios simples, onde os limites de "ω_b" estão muito próximos um do outro. A hipótese de empenamento igual a zero leva a soluções completamente imprecisas para outros tipos de

apoios.

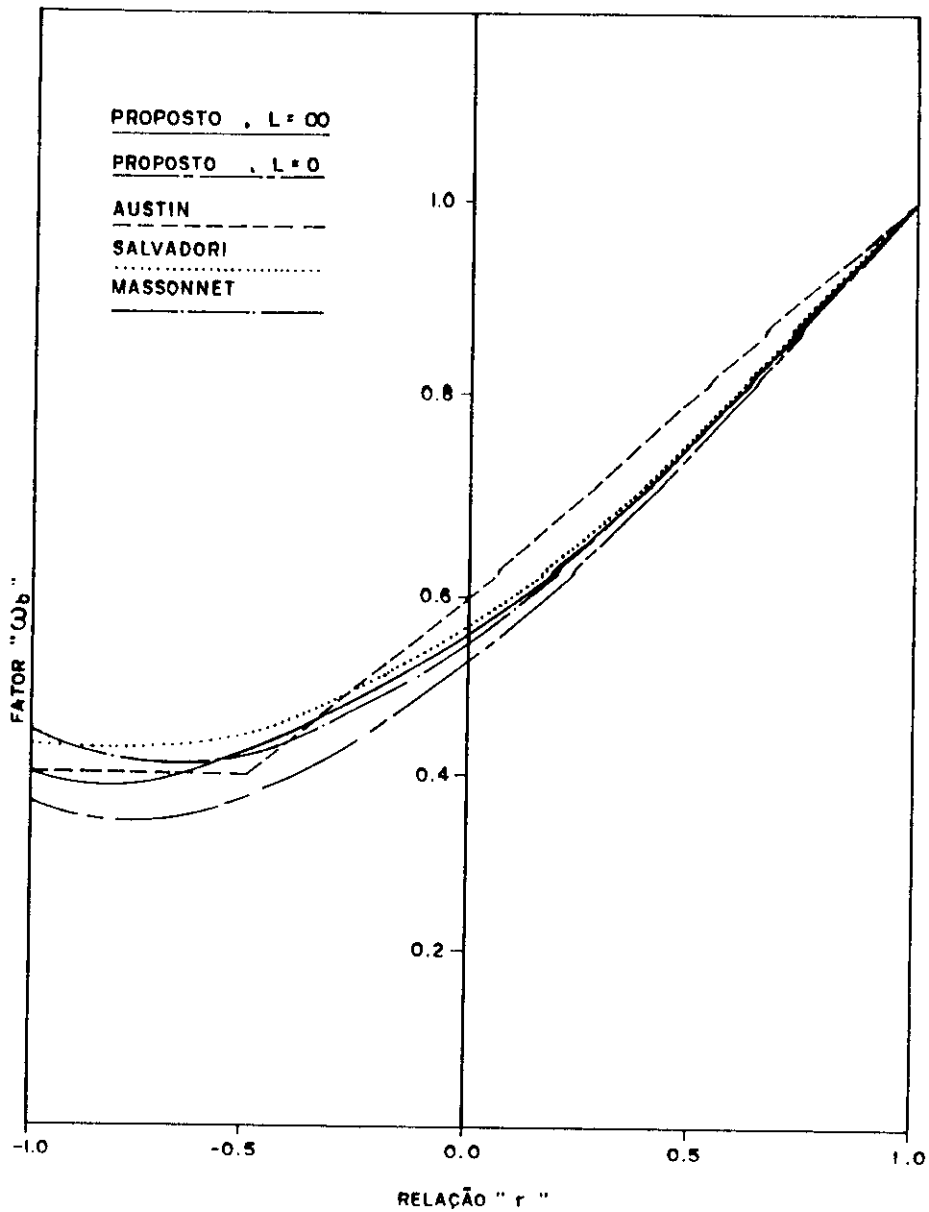


FIG.5 - Comparações entre fatores modificadores dos momentos

5 - FATOR DE MOMENTO EQUIVALENTE (C_b)

O fator de momento equivalente (C_b) é um coeficiente utilizado na prática dos dimensionamentos, definido a partir da expressão (8) como sendo:

$$M_{cr} = \frac{M_{cru}}{\omega_b} = C_b \cdot M_{cru} \quad (38)$$

Portanto:

$$C_b = \frac{1}{\omega_b} \quad (39)$$

Esclareçam-se, agora, as grandezas e os sinais envolvidos no coeficiente (C_b) usando as deduções do item 3.

Introduzindo-se a expressão (24) na (36), tem-se que:

$$\omega_b = \sqrt{0.3r^2 + 0.49r + 0.2} \quad (40)$$

sendo que "r" é considerado positivo, quando os momentos de extremidades causam curvatura simples, como demonstrado pelas equações (24) e (30), e "r" negativo, quando os momentos de extremidades causam curvatura dupla, como demonstrado pelas equações (31) e (32). Levando (40) em (39), tem-se:

$$C_b = \frac{1}{\sqrt{0.3r^2 + 0.49r + 0.2}} \quad (41)$$

Substitua-se a função (41) por outra do segundo grau, que seja mais cômoda de trabalhar. Para isto, adotam-se três valores de "r" entre 0 e 1, e determinam-se os correspondentes valores para " C_b ". A função do segundo grau que substituirá (41) terá três coeficientes a determinar. Como esta nova curva deverá também passar por aqueles pontos escolhidos entre 0 e 1 forma-se um sistema de três equações com três incógnitas, cuja solução (resultados mais precisos poderiam ser conseguidos, através de análises de regressão numérica) fornece:

$$C_b = 0.7r^2 - 1.84r + 2.12 \quad (42)$$

Como pode ser observado, houve também uma alteração de sinal na equação (42). Se esta mesma expressão fosse usada simultaneamente para atender os dois casos de

curvaturas (simples e reversa), bastaria trocar o sinal do segundo termo de (42) para o sinal positivo e dizer que: "r" é positivo, quando os momentos de extremidades causam curvatura dupla de flexão; e "r" negativo, quando os momentos de extremidades causam curvatura simples de flexão. O que se acabou de demonstrar é seguido pela norma NBR 8800. Porém, a sua expressão para o cálculo de " C_b " é baseada nos trabalhos de Salvadori [SALVADORI, M. G., Lateral buckling of I-beams. Trans. ASCE, 120 (1955) 1165-77], isto é:

$$C_b = 0.3r^2 + 1.05r + 1.75 \quad (43)$$

Os resultados que propiciaram a expressão (42) quando comparados com os de Salvadori (eq.43) não são exatamente iguais, pois os princípios utilizados nos processos são diferentes.

APÊNDICE E

COMPRIMENTO EFETIVO DE ELEMENTOS DE PÓRTICOS

1 - GENERALIDADES

A maioria das peças estruturais são unidas com outras peças para formarem uma estrutura. Por exemplo, se uma coluna de uma estrutura flamba, suas extremidades girarão. Isto causará rotações das peças adjacentes que estão unidas com a coluna. Estas tendem a causar deformações em outras peças adjacentes. Assim, para determinar a carga crítica da coluna em um pórtico é necessário investigar a sua estabilidade como um todo.

A influência de outras peças em uma peça particular em questão deve ser levado em consideração nos projetos. Uma forma conveniente, para incluir este efeito de interação será o uso do conceito de "fator de comprimento efetivo k " para uma determinada peça de um pórtico. A determinação do fator de comprimento efetivo ou coeficiente de flambagem para uma peça de pórtico é mais complicado do que para uma peça isolada, pois a rigidez de cada peça adjacente, assim como a rigidez das ligações, devem ser incluídas na determinação da restrição rotacional das extremidades da peça em questão. Na teoria, o coeficiente de flambagem " k " para uma determinada coluna de uma estrutura,

deveria ser determinado a partir de uma análise de estabilidade da estrutura inteira. No entanto, para os propósitos de projeto, este procedimento é impraticável. Julian e Lawrence propuseram um método mais simples que é utilizado pelo American Institute of Steel Construction (AISC) [41].

O comportamento de uma coluna em uma estrutura será diferente, dependendo se esta última for "indeslocável" ou "deslocável". Esta diferença será analisada no item seguinte.

2 - ESTRUTURAS INDESLOCÁVEIS E DESLOCÁVEIS

2.1 - Estruturas indeslocáveis

Uma estrutura indeslocável é aquela cuja estabilidade lateral é impedida por sistemas de contraventamentos em diagonais, por paredes de cisalhamento ou sistemas que sejam equivalentes.

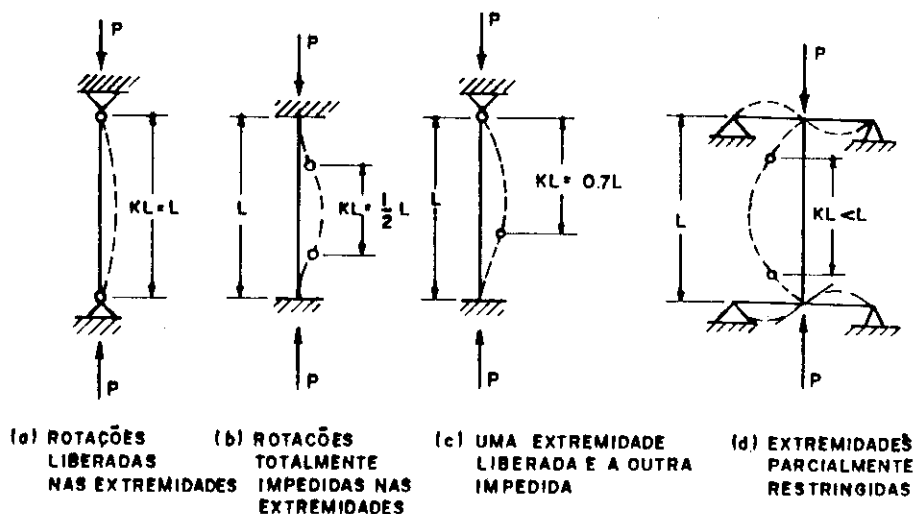


FIG.1 - Comprimentos efetivos em elementos indeslocáveis

O sistema vertical de contraventamento deve ser adequadamente determinado por análise estrutural, para impedir a flambagem e manter a estabilidade lateral da estrutura. Neste caso, uma coluna vertical em uma estrutura indeslocável não teria deslocamento de seu extremo superior em relação ao inferior.

A figura 1 ilustra os comprimentos efetivos para colunas em pórtico indeslocável.

Uma vez determinado que o pórtico seja indeslocável, supõe-se que o sistema de contraventamento previna a necessidade de restrições laterais, como na figura 2-a e 2-b. Portanto, supõe-se que os nós não moverão lateralmente (em análise estrutural de primeira ordem), e que uma coluna individual possa ser considerada como se fosse um elemento isolado, uma vez determinado o coeficiente de flambagem "k".

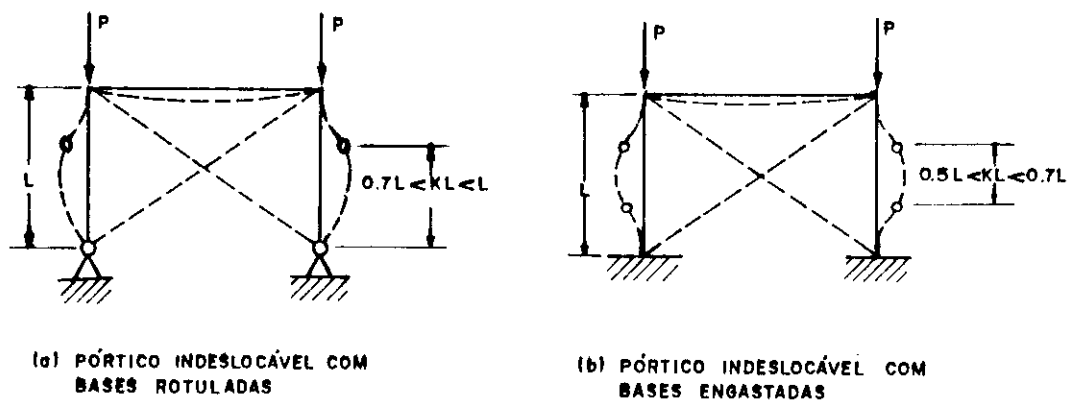


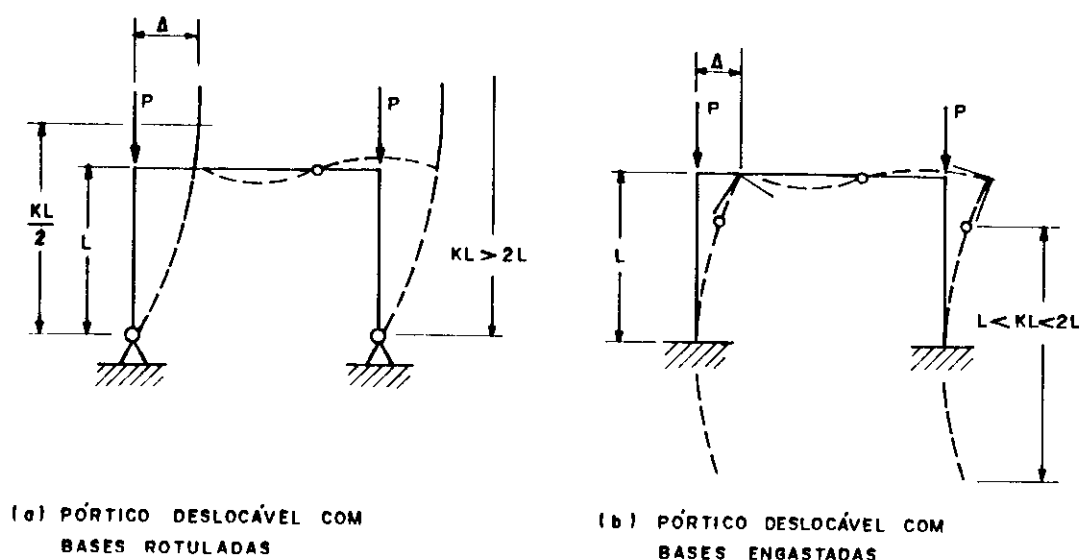
FIG.2 - Comprimentos efetivos em pórticos indeslocáveis

A partir das figuras 1, 2-a e 2-b, observa-se que as restrições de extremidades, em uma estrutura indeslocável sempre reduzirá a distância entre os pontos de inflexão, isto é, reduzirá ao comprimento efetivo "k.L", tomando-se como base a condição de extremidades rotuladas. Neste caso,

o coeficiente de flambagem "k" sempre será menor do que a unidade [141].

2.2 - Estruturas deslocáveis

Uma estrutura deslocável é aquela cuja estabilidade lateral depende da rigidez à flexão de vigas e de colunas rigidamente conectadas. A flambagem de uma estrutura deslocável é um deslocamento onde, por exemplo, o topo de uma coluna move, em relação a seu extremo inferior. Na figura 3-a e 3-b, mostra-se um pórtico deslocável, sujeito à flambagem lateral. A forma flambada e, portanto, os comprimentos efetivos das colunas dependerão da rigidez das peças participantes da flexão. Como mostram as figuras 3-a e 3-b, o comprimento efetivo " kL " sempre será maior do que o comprimento " L ".



(a) PÓRTICO DESLOCÁVEL COM BASES ROTULADAS

(b) PÓRTICO DESLOCÁVEL COM BASES ENGASTADAS

FIG.3 - Comprimentos efetivos em pórticos deslocáveis

Para compreender porque o valor mínimo de "k", em uma estrutura deslocável, é teoricamente igual a 1.0,

observe-se o pórtico da figura 3-b. A situação de maior rigidez ocorre quando a viga for infinitamente rígida, isto é, ela não poderá fletir. Neste caso, o ponto de inflexão estaria no meio da altura, e a forma flambada seria como aquela mostrada na figura 4-a.

A situação prática de uma estrutura deslocável é aquela em que "k" é sempre maior do que a unidade. Além disso, não existem maneiras simples de obter um valor, a não ser avaliando as condições de extremidades [141].

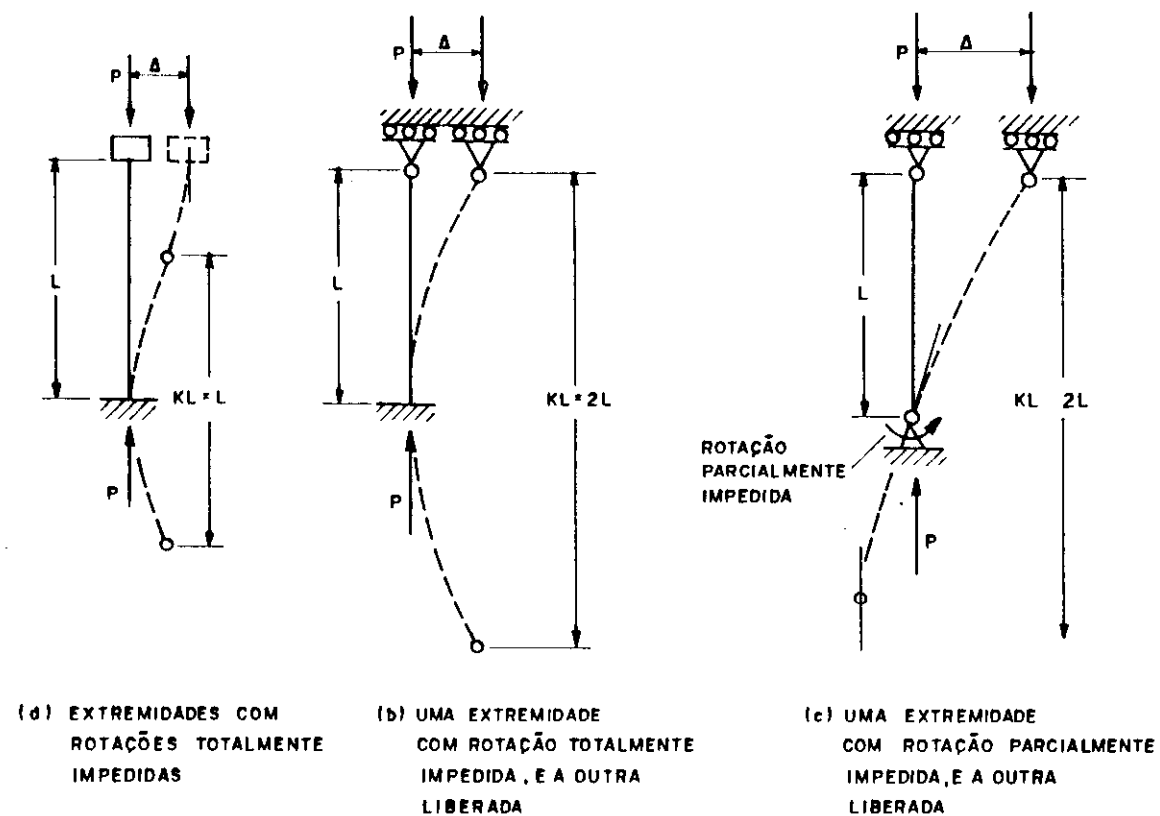


FIG.4 - Comprimentos efetivos em elementos deslocáveis

3 - RIGIDEZ

Quando uma barra comprimida fizer parte de uma estrutura de nós rígidos, como mostrado pela figura 5, então na flambagem as barras adjacentes em cada extremidade da barra em questão exercerão momentos totais de restrições " M_A " e " M_B ". Estes se opõem à flambagem, isto é, os momentos de restrições são opostos às direções positivas de " M_A " e " M_B " e proporcionais às rotações de extremidades " θ_A " e " θ_B " da barra comprimida. Estes momentos são dados por;

$$M_A = -\alpha_A \cdot \theta_A \quad (1)$$

$$M_B = -\alpha_B \cdot \theta_B \quad (2)$$

É como se existissem nos nós "A" e "B" duas molas de constantes " α_A " e " α_B ". As molas oferecem momentos de reações linearmente proporcionais aos ângulos de giro e, evidentemente, de sentidos contrários aos sentidos dos ângulos.

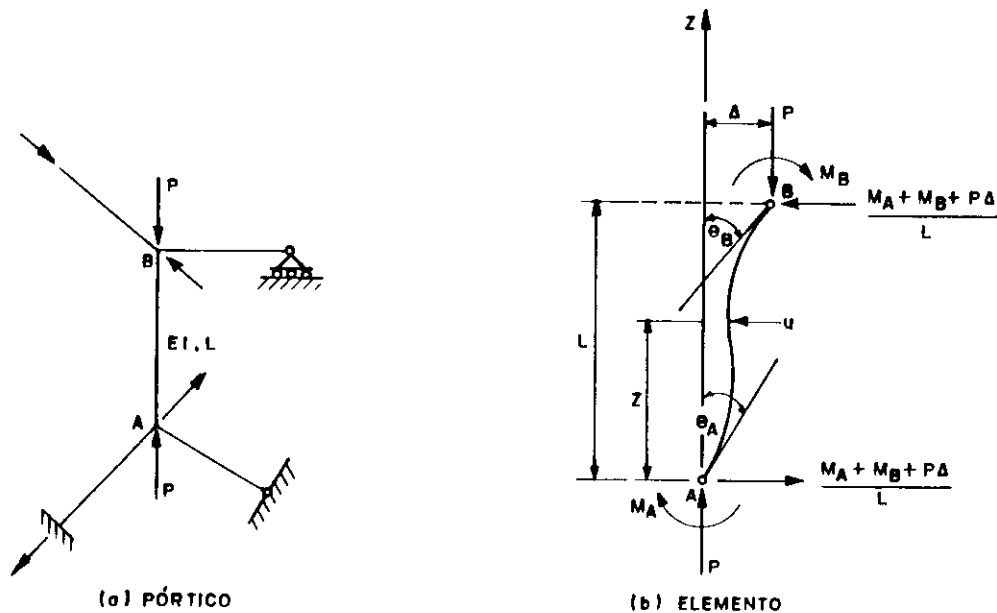


FIG.5 - Flambagem de uma barra em estrutura rígida

A rigidez no extremo "A" e no extremo "B" será:

$$\alpha_A = \sum_A \alpha \quad (3)$$

$$\alpha_B = \sum_B \alpha \quad (4)$$

onde " α " é a rigidez de qualquer barra adjacente conectada na extremidade "A" ou "B", dependendo do cálculo em questão. A rigidez " α " da barra não depende somente de sua geometria, mas também de suas condições de extremidades e da carga axial transmitida sobre ela.

4 - RIGIDEZ DE ELEMENTOS INDESLOCÁVEIS

O caso particular de uma barra indeslocável, com extremidades simplesmente apoiadas, submetida à compressão e sujeita a momentos perturbadores de extremidades iguais e opostos " M ", será mostrado na figura 6.

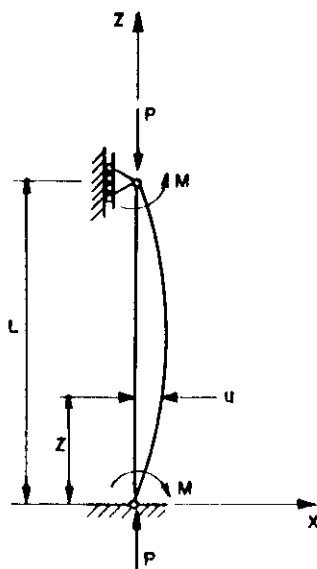


FIG.6 - Elemento indeslocável

Determine-se, agora, a equação diferencial de equilíbrio da barra indeslocável de acordo com a figura 6.

A equação da linha elástica será:

$$- E.I \frac{d^2 u}{dz^2} = M_1 \quad (5)$$

onde " M_1 " é o momento total em uma posição genérica do eixo " z " e vale:

$$M_1 = P.u + M \quad (6)$$

Levando (6) em (5), dividindo-se todos os termos por " $E.I$ " e considerando-se que $d^2 u/dz^2 = u^{II}$, tem-se:

$$- u^{II} - \frac{P}{E.I} u = \frac{M}{E.I} \quad (7)$$

chamando de:

$$\gamma^2 = P/E.I \quad (8)$$

chega-se a:

$$- u^{II} - \gamma^2 . u = M/E.I \quad (9)$$

A equação (9) é diferencial linear não-homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. A solução geral desta equação equivale à soma de uma solução geral " u_h " da equação homogênea com a solução particular " u_p " desta mesma equação.

A equação homogênea de (9) será:

$$u^{II} + \gamma^2 u = 0 \quad (10)$$

A equação (10) tem solução do tipo $u = e^{\lambda z}$, cuja derivada segunda quando levada em (10) fornece:

$$\lambda^2 + \gamma^2 = 0 \quad (11)$$

Se " λ " satisfaz a equação (11), $u = e^{\lambda z}$ será solução da equação (10), e a equação (11) se chamará equação característica da equação (10). As raízes da equação (11) serão $\lambda_1 = \gamma.i$ e $\lambda_2 = -\gamma.i$, onde " i " é uma unidade imaginária. A cada par " $\alpha + \beta i$ " de raízes complexas simples, as funções $u_1 = e^{\alpha z} \cdot \cos \beta z$ e $u_2 = e^{\alpha z} \cdot \sin \beta z$ são soluções particulares linearmente independentes, então para " λ_1 ", tem-se $u_1 = \cos \gamma z$ e, para " λ_2 " tem-se $u_2 = \sin \gamma z$. Sendo " u_1 " e " u_2 " linearmente independentes, forma-se a solução da equação homogênea (10) [133]:

$$u_h = C_1 \cdot u_1 + C_2 \cdot u_2 \quad (12)$$

Considerando-se que " C_1 " e " C_2 " são constantes arbitrárias, e substituindo os valores de " u_1 " e " u_2 " em (12), tem-se:

$$u_h = C_1 \cdot \cos \gamma z + C_2 \cdot \sin \gamma z \quad (13)$$

O segundo membro da equação (9) é uma função do tipo $f(z) = P(z) \cdot e^{\delta z}$, onde " $P(z)$ " é um polinômio de n -ésimo grau e " δ " não é uma raiz da equação característica (11). Neste caso, é preciso achar a solução particular da equação não-homogênea do tipo $u_p = (A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n) e^{\delta z}$ [133]. Sendo " $n = 0$ " e " $\delta = 0$ ", tem-se:

$$u_p = A_0 \quad (14)$$

introduzindo (14) com suas respectivas derivadas em (9), e igualando os coeficientes de mesma potência, situados à esquerda e à direita do sinal de igualdade, obtém-se $A_0 = -M/\gamma^2 EI$. Levando " A_0 " em (14), tem-se:

$$u_p = -M/\gamma^2 EI \quad (15)$$

Somando-se as equações (13) e (15), chega-se,

finalmente, à integral geral da equação (9):

$$u = C_1 \cos \gamma z + C_2 \sen \gamma z - M/\gamma^2 EI \quad (16)$$

As condições de contorno " $u(0) = 0$ " e " $u(L) = 0$ " fornecem $C_1 = M/\gamma^2 EI$ e $C_2 = (M/\gamma^2 EI) \cdot [(1 - \cos \gamma L)/\sen \gamma L]$, então (16) torna-se:

$$u = \frac{M}{\gamma^2 EI} \cos \gamma z + \frac{M}{\gamma^2 EI} \left[\frac{1 - \cos \gamma L}{\sen \gamma L} \right] \sen \gamma z - \frac{M}{\gamma^2 EI} \quad (17)$$

A partir de (8), tem-se:

$$\gamma = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \quad (18)$$

onde " P_E " é igual a:

$$P_E = \pi^2 EI/L^2 \quad (19)$$

fazendo-se $\psi = \pi \sqrt{P/P_E}$ em (18), tem-se:

$$\gamma = \psi / L \quad (20)$$

Levando (8) e (20) em (17), chega-se a:

$$u = \frac{M}{P} \left[\frac{1 - \cos \psi}{\sen \psi} \sen(\psi z/L) + \cos(\psi z/L) - 1 \right] \quad (21)$$

A rotação na extremidade em que " $z = 0$ ", é determinada fazendo-se a derivada $\theta = du/dz$ em (21) e, obviamente, com $\theta = u^I(0)$. Lembrando-se ainda que $2 \cdot \sen^2(a) = [1 - \cos(2a)]$ e $\sen(a) = 2 \cdot \sen(a/2) \cdot \cos(a/2)$, chega-se a:

$$\theta = u^I(0) = \frac{2M \cdot (\psi/2) \cdot \tg(\psi/2)}{P \cdot L} \quad (22)$$

Fazendo-se $q = \psi/2$, em (22) e, sabendo-se que $P_E = \pi^2 EI/L^2$, encontra-se:

$$P = 4EIq^2/L^2 \quad (23)$$

Levando (23) em (22), chega-se a:

$$\theta = \frac{ML}{2EIq} \text{tg}(q) \quad (24)$$

Sabendo que a rigidez vale $\alpha = M/\theta$, a partir de (24), encontra-se finalmente:

$$\alpha = \frac{2EI}{L} \frac{q}{\text{tg}(q)} \quad (25)$$

sendo $q = (\pi/2) \cdot \sqrt{P/P_E}$.

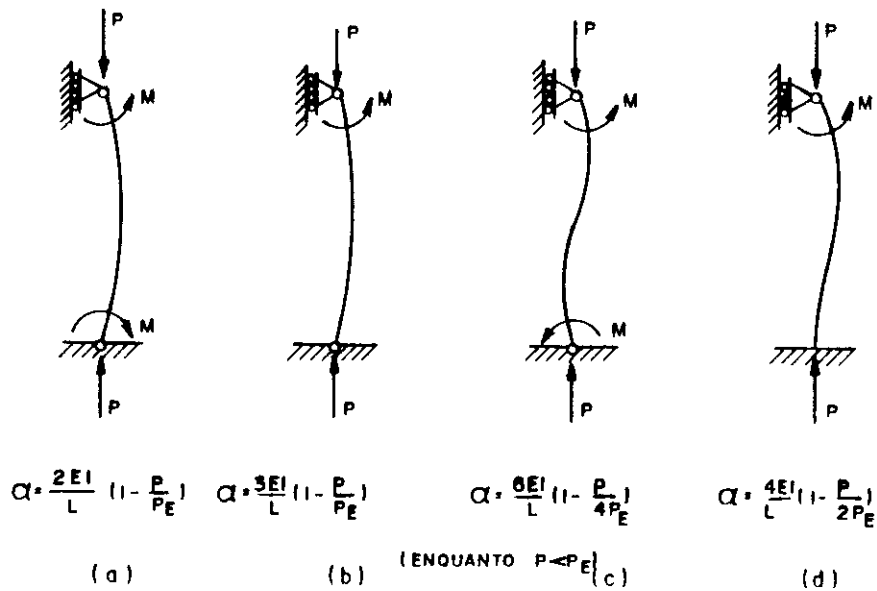


FIG.7 - Rigidez aproximada para barras indeslocáveis.

Para os propósitos de aplicações práticas é mais conveniente simplificar a expressão (25) expandindo a "tg(q)" em uma série de potências:

$$\operatorname{tg}(q) = q + \frac{q^3}{3} + \frac{2q^5}{15} + \frac{17q^7}{315} + \dots \quad (26)$$

Substituindo-se (26) em (25), com $q^2 = (\pi/2)^2 \cdot (P/P_E)$, encontra-se:

$$\alpha = (2EI/L) / [1 + 0.82(P/P_E) + 0.81(P/P_E)^2 + 0.81(P/P_E)^3 + \dots] \quad (27)$$

a série do denominador de (27), em que $0 < (P/P_E) < 1$, converge, aproximadamente, [41], para $1/[1 - (P/P_E)]$. Então (27) torna-se:

$$\alpha = \frac{2EI}{L} \left(1 - \frac{P}{P_E} \right) \quad (28)$$

O termo entre parênteses em (28) é o inverso do fator de amplificação. Este expressa o fato de que a rotação "M.L/2EI" causada somente pelos momentos de extremidades, é amplificada pela carga de compressão "P" para $(M.L/2EI)/(1 - P/P_E)$. A aproximação fornecida pela equação (28) é limitada e conservadora no intervalo $0 < P/P_E < 1$, mas, fora deste intervalo, os erros aumentam para o lado da insegurança com o aumento da carga axial.

Análises semelhantes podem ser feitas para barras indeslocáveis com outras condições de extremidades. Chega-se, assim, aos resultados da rigidez, como mostra a figura 7.

5 - RIGIDEZ DE ELEMENTOS DESLOCÁVEIS

Quando uma barra não é travada de modo que suas extremidades têm um deslocamento " Δ ", como mostrado na figura 8, serão necessários momentos de restituição "M" para que seja mantido o equilíbrio.

O momento "M" é determinado, impondo-se a condição de equilíbrio dos momentos em relação a "O", então:

$$\sum M_o = 0 \quad ; \quad M = P\Delta/2 \quad (29)$$

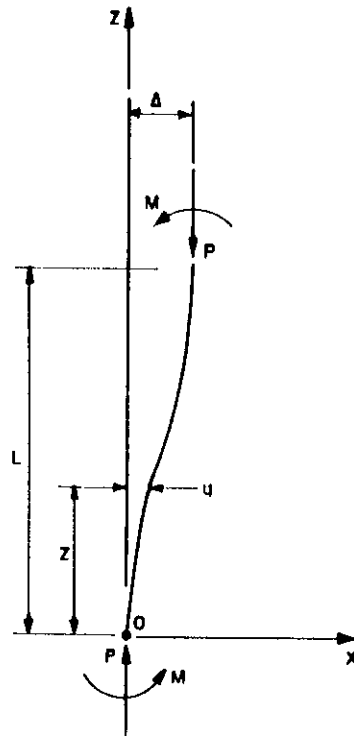


FIG.8 - Barra deslocável.

A equação diferencial para o equilíbrio de uma barra, cujos momentos de extremidades são iguais a $M = P\Delta/2$, considerando-se que o momento, em uma posição genérica "z" vale $M_1 = P.u - M$, será:

$$-EI \frac{d^2 u}{dz^2} = P.u - M \quad (30)$$

A equação (30), quando rearranjada passando "P.u" para o primeiro membro, dividindo todos os termos por "E.I" e considerando que $d^2 u/dz^2 = u^{II}$, tem-se:

$$u^{II} + \frac{P}{E.I} u = \frac{M}{E.I} \quad (31)$$

chamando de:

$$\gamma^2 = P/E.I \quad (32)$$

chega-se a:

$$u^{II} + \gamma^2.u = M/E.I \quad (33)$$

A equação (33) é diferencial linear não-homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. A solução geral desta equação equivale à soma de uma solução geral " u_h " da equação homogênea, com a solução particular " u_p " da equação não-homogênea.

A equação homogênea de (33), será:

$$u^{II} + \gamma^2.u = 0 \quad (34)$$

Esta equação é semelhante à equação (10) do item 4, cujas raízes da equação característica são $\lambda_1 = \gamma.i$ e $\lambda_2 = -\gamma.i$, e a solução da equação homogênea é dada por (13). Esta será repetida aqui como solução de (34):

$$u_h = C_1.\cos\gamma z + C_2.\sen\gamma z \quad (35)$$

O segundo membro da equação (33) é uma função do tipo $f(z) = P(z).e^{\delta z}$, onde " $P(z)$ " é um polinômio de n -ésimo grau e " δ " não é uma raiz da equação característica. Neste caso, é preciso achar a solução particular da equação não-homogênea do tipo $u_p = (A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n) e^{\delta z}$. Sendo " $n = 0$ " e " $\delta = 0$ ", tem-se:

$$u_p = A_0 \quad (36)$$

Introduzindo-se (36) com suas respectivas derivadas em (33), e igualando-se os coeficientes de mesma potência, situados à esquerda e à direita do sinal de igualdade, obtém-se $A_0 = M/\gamma^2 EI$. Levando " A_0 " em (36), tem-se:

$$u_p = M/\gamma^2 EI \quad (37)$$

Somando as equações (35) e (37), chega-se finalmente à integral geral da equação (33):

$$u = C_1 \cos \gamma z + C_2 \sin \gamma z + M/\gamma^2 EI \quad (38)$$

as condições de contorno, "u(0) = 0" e "u(L) = Δ" fornecem $C_1 = -M/\gamma^2 EI$, e, lembrando que $\Delta = 2M/P$, tem-se $C_2 = \frac{2M}{P \sin \gamma L} - \frac{M}{\gamma^2 \cdot EI} \left(\frac{1 - \cos \gamma L}{\sin \gamma L} \right)$, então (38) torna-se:

$$u = -\frac{M}{\gamma^2 \cdot EI} \cos \gamma z + \left[\frac{2M}{P \sin \gamma L} - \frac{M}{\gamma^2 \cdot EI} \left(\frac{1 - \cos \gamma L}{\sin \gamma L} \right) \right] \sin \gamma z + \frac{M}{\gamma^2 EI} \quad (39)$$

A partir de (8), sabe-se que:

$$\gamma = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \quad (40)$$

onde "P_E" é igual a:

$$P_E = \pi^2 EI/L \quad (41)$$

Fazendo-se $\psi = \pi \sqrt{P/P_E}$ em (40), tem-se:

$$\gamma = \psi / L \quad (42)$$

Levando-se (8) e (42) em (39), chega-se a:

$$u = \frac{M}{P} \left[\frac{1 + \cos \psi}{\sin \psi} \sin(\psi z/L) - \cos(\psi z/L) + 1 \right] \quad (43)$$

A rotação, na extremidade em que "z = 0", é determinada fazendo-se a derivada $\theta = du/dz$ em (43) e, obviamente, com " $\theta = u'(0)$ ". Lembrando-se ainda de que $2\cos^2(a) = [1 + \cos(2a)]$ e $\sin(a) = 2 \cdot \sin(a/2) \cdot \cos(a/2)$, após

alguns arranjos algébricos, tem-se que:

$$\theta = \frac{2M}{P \cdot L} \cdot (\psi/2) \cdot \cot(\psi/2) \quad (44)$$

Fazendo-se $q = \psi/2$ em (44) e, sabendo-se que $P_E = \pi^2 EI/L^2$, encontra-se:

$$P = 4EIq^2/L^2 \quad (45)$$

levando (45) em (44), chega-se a:

$$\theta = \frac{ML}{2EIq} \cot(q) \quad (46)$$

Sabendo que a rigidez vale " $\alpha = M/\theta$ ", a partir de (46), encontra-se finalmente:

$$\alpha = \frac{2EI}{L} \cdot q \cdot \text{tg}(q) \quad (47)$$

sendo $q = (\pi/2) \cdot \sqrt{P/P_E}$ e, além disso, a expressão (47) deve levar um sinal negativo, pois os momentos de extremidades são momentos de restituição. Assim:

$$\alpha = - \frac{2EI \cdot q \cdot \text{tg}(q)}{L} \quad (48)$$

Para os propósitos de aplicações práticas, é mais conveniente simplificar a expressão (48) expandindo-se a "tg(q)" em uma série de potências:

$$\text{tg}(q) = q + q^3/3 + 2q^5/15 + 17q^7/315 + \dots \quad (49)$$

Substituindo (49) em (48), com $q^2 = (\pi/2)^2 \cdot (P/P_E)$, tem-se:

$$\alpha = - \frac{2EI}{L} \cdot [(\pi/2)^2 (P/P_E)] \cdot [1 + 0.82(P/P_E) + 0.81(P/P_E)^2 + \dots] \quad (50)$$

A série do numerador de (50), em que $0 < (P/P_E) < 1$ converge, aproximadamente, para $1/[1-(P/P_E)]$. Então (50) torna-se:

$$\alpha = - \frac{2EI \cdot (\pi/2)^2 \cdot (P/P_E)}{L \cdot (1 - P/P_E)} \quad (51)$$

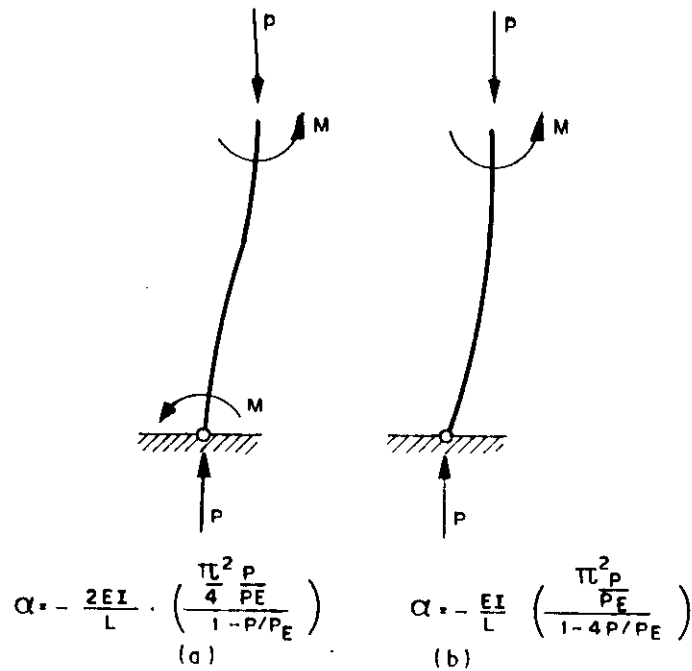


FIG.9 - Rigidez aproximadas para barras deslocáveis.

A aproximação fornecida pela equação (51) é limitada e conservadora no intervalo $0 < P/P_E < 1$.

Análises semelhantes podem ser feitas para barras deslocáveis com outras condições de extremidades, chegando-se aos resultados da rigidez, conforme apresentado na figura 9.

6 - FLAMBAGEM DE ESTRUTURAS INDESLOCÁVEIS DE NÓS RÍGIDOS

Uma estrutura de nós rígidos sujeita a cargas que induzem somente forças axiais nas peças, pode flambar elasticamente. As cargas atuantes, que causam a flambagem da estrutura, podem ser determinadas a partir da carga crítica elástica de uma peça típica da estrutura. A flambagem de tal peça será analisada, mostrando-se que a estrutura sendo indeslocável a peça em questão não movimentará e, portanto, sua carga crítica elástica "P" pode ser expressa na forma geral pela equação $P_c = \pi^2 EI / L_1^2$, onde " $L_1 = kL$ " e o coeficiente de flambagem "k" pode ser determinado através da seguinte equação:

$$\frac{G_A G_B}{4} \left(\frac{\pi}{k}\right)^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2}\right) \left(1 - \frac{\pi}{k} \cot(\pi/k)\right) + \frac{\text{tg}(\pi/2k)}{(\pi/2k)} = 1 \quad (52)$$

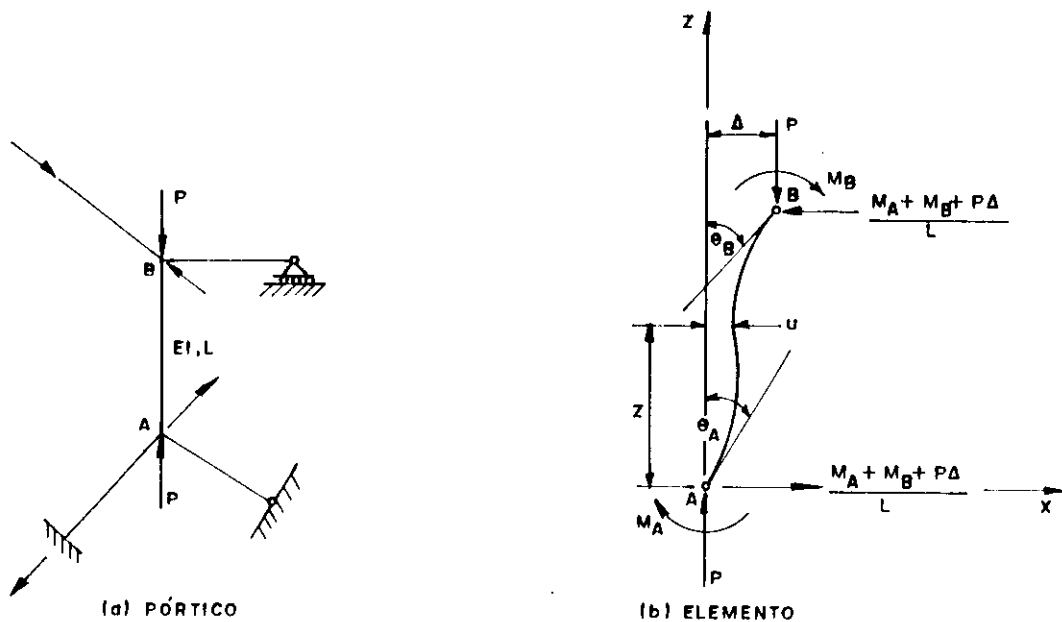


FIG.10 - Flambagem de uma barra de estrutura rígida.

Para demonstrar a origem da equação (52), tome-se uma barra típica "AB" sujeita à compressão e pertencente a uma estrutura rígida (fig.10).

Quando a estrutura flamba, a barra desloca de " Δ ", e suas extremidades giram de " θ_A " e " θ_B ", conforme ilustra a figura 10. Devido a estas ações existirão nas extremidades cisalhamentos dados por $(M_A + M_B + P\Delta)/L$ e momentos " M_A " e " M_B ".

O momento numa posição genérica "z" será:

$$M_1 = P \cdot u + M_A - (M_A + M_B) \cdot (z/L) - P \cdot \Delta \cdot (z/L) \quad (53)$$

Da equação da linha elástica tem-se:

$$-EI \frac{d^2 u}{dz^2} = M_1 \quad (54)$$

Fazendo $d^2 u/dz^2 = u^{II}$ e introduzindo-se (53) em (54), obtém-se:

$$-EIu^{II} = Pu + M_A - (M_A + M_B) \frac{z}{L} - P\Delta \frac{z}{L} \quad (55)$$

Dividindo-se todos os termos de (55) por "EI" e chamando-se de:

$$\gamma^2 = P/EI \quad (56)$$

tem-se:

$$u^{II} + \gamma^2 u = -\frac{M_A}{EI} + \left[\frac{M_A + M_B}{EIL} + \frac{\gamma^2 \Delta}{L} \right] z \quad (57)$$

A equação (57) é diferencial linear não-homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. A solução geral desta equação equivale à soma de uma solução geral " u_h ", da equação homogênea com a solução particular " u_p ", da equação não-homogênea.

A equação homogênea de (57) será:

$$u'' + \gamma^2 u = 0 \quad (58)$$

Esta equação é semelhante à (10) do item 4, cujas raízes da equação característica são $\lambda_1 = \gamma i$ e $\lambda_2 = -\gamma i$, e a solução da equação homogênea será dada por (13). Esta será repetida aqui como solução de (58):

$$u_h = C_1 \cos \gamma z + C_2 \operatorname{sen} \gamma z \quad (59)$$

O segundo membro da equação (57) é uma função do tipo $f(z) = P(z) \cdot e^{\delta z}$, onde "P(z)" é um polinômio de n-ésimo grau e "δ" não é uma raiz da equação característica. Neste caso, é preciso achar a solução particular da equação não-homogênea do tipo $u_p = (A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n) e^{\delta z}$. Sendo $\delta = 0$ e $n = 1$ (de acordo com o grau de "z", no segundo membro), tem-se:

$$u_p = A_0 z + A_1 \quad (60)$$

Introduzindo-se (60) com suas respectivas derivadas em (57) e igualando-se os coeficientes de mesma potência situados à esquerda e à direita do sinal de igualdade, obtém-se:

$$A_0 = \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{M_A + M_B}{EIL} + \frac{\gamma^2 \Delta}{L} \right] \quad (61)$$

$$A_1 = -\frac{M_A}{\gamma^2 EI} \quad (62)$$

Levando (61) e (62) em (60), tem-se:

$$u_p = \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{M_A + M_B}{EIL} + \frac{\gamma^2 \Delta}{L} \right] z - \frac{M_A}{\gamma^2 EI} \quad (63)$$

Somando-se as equações (59) e (63), chega-se, finalmente, à integral geral da equação (57):

$$u = C_1 \cos \gamma z + C_2 \sin \gamma z + \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{M_A + M_B}{EIL} + \frac{\gamma^2 \Delta}{L} \right] z - \frac{M_A}{\gamma^2 EI} \quad (64)$$

As condições de contorno: "u(0) = 0" e "u(L) = Δ" fornecem:

$$C_1 = M_A / \gamma^2 EI \quad (65)$$

$$C_2 = - (M_A \cos \gamma L + M_B) / (\gamma^2 EI \sin \gamma L) \quad (66)$$

levando (65) e (66) em (64), tem-se:

$$u = - \frac{M_A \cos \gamma L + M_B}{\gamma^2 EI \sin \gamma L} \sin \gamma z + \frac{M_A}{\gamma^2 EI} \cos \gamma z + \frac{M_A + M_B}{2 EIL} z + \frac{\Delta}{L} z - \frac{M_A}{\gamma^2 EI} \quad (67)$$

Sabendo-se que $\gamma^2 = P/EI$ e que $P = P_c = \pi^2 EI / (kL)^2$, tem-se:

$$\gamma = \pi / kL \quad (68)$$

chamando de :

$$\phi = \pi / k \quad (69)$$

tem-se:

$$\gamma = \phi / L \quad (70)$$

levando $\gamma^2 = P/EI$ (sendo agora $P = P_c$) e (70) em (67), chega-se a:

$$u = - \frac{M_A \cos \phi + M_B}{P_c \sin \phi} \sin \frac{\phi z}{L} + \frac{M_A}{P_c} \cos \frac{\phi z}{L} + \frac{M_A + M_B}{P_c L} z + \frac{\Delta}{L} z - \frac{M_A}{P_c} \quad (71)$$

Derivando (71) e impondo a condição de extremidade "u'(0) = θ_A" e "u'(L) = θ_B", encontram-se as seguintes rotações:

$$\theta_A = M_A \left[\frac{1}{P_c L} - \frac{\phi}{P_c L} \cot \phi \right] + M_B \left[\frac{1}{P_c L} - \frac{\phi}{P_c L} \operatorname{cosec} \phi \right] + \frac{\Delta}{L} \quad (72)$$

$$\theta_B = M_A \left(\frac{1}{P_c L} - \frac{\phi}{P_c L} \operatorname{cosec} \phi \right) + M_B \left(\frac{1}{P_c L} - \frac{\phi}{P_c L} \cot \phi \right) + \frac{\Delta}{L} \quad (73)$$

Lembrando-se de que $M_A = -\alpha_A \cdot \theta_A$ e $M_B = -\alpha_B \cdot \theta_B$, e levando-se em (72) e (73), respectivamente, encontram-se:

$$M_A \left[\frac{P_c L}{\alpha_A} - \phi \cot \phi + 1 \right] + M_B \left[-\phi \cdot \operatorname{cosec} \phi + 1 \right] + \Delta \cdot P_c = 0 \quad (74)$$

$$M_A \left[-\phi \operatorname{cosec} \phi + 1 \right] + M_B \left[\frac{P_c L}{\alpha_B} - \phi \cdot \cot \phi + 1 \right] + \Delta \cdot P_c = 0 \quad (75)$$

Se a barra comprimida é indeslocável, de modo que a translação do nó seja efetivamente impedida, o termo " $\Delta \cdot P_c$ " desaparecerá das equações (74) e (75). Lembrando-se de que $\operatorname{cosec}^2(a) = 1 + \cot^2(a)$ e $2\operatorname{sen}^2(a) = 1 - \cos(2a)$ e sabendo-se ainda que os momentos " M_A " e " M_B " são indeterminados (pois estes somente aparecem após ocorrer a flambagem), na bifurcação o determinante da matriz dos coeficientes de (74) e (75) deve ser igual a zero. Isto feito, chega-se a:

$$\frac{P_c^2 L^2}{\alpha_A \alpha_B \phi^2} + \frac{P_c L}{\phi^2} \left(\frac{1}{\alpha_A} + \frac{1}{\alpha_B} \right) \left(1 - \phi \cdot \cot \phi \right) + \frac{2}{\phi} \operatorname{tg}(\phi/2) = 1 \quad (76)$$

Sendo $\phi = \pi/k$ e $P_c = \pi^2 EI/L^2$, a expressão (76) torna-se:

$$\frac{(EI/L)^2}{\alpha_A \alpha_B} \left(\frac{\pi}{k} \right)^2 + \frac{EI}{L} \left(\frac{1}{\alpha_A} + \frac{1}{\alpha_B} \right) \left(1 - \frac{\pi}{k} \cot \frac{\pi}{k} \right) + \frac{\operatorname{tg}(\pi/2k)}{(\pi/2k)} = 1 \quad (77)$$

chamando-se de " G_A " rigidez relativa, na extremidade "A" e " G_B " rigidez relativa, na extremidade "B" da barra indeslocável, onde:

$$G_A = \frac{(2EI/L)}{\alpha_A} = \frac{(2EI/L)_{AB}}{\sum_A \alpha} \quad (78)$$

$$G_B = \frac{(2EI/L)}{\alpha_B} = \frac{(2EI/L)_{AB}}{\sum_B \alpha} \quad (79)$$

Levando (78) e (79) em (77), conclui-se:

$$\frac{G_A \cdot G_B}{4} \left(\frac{\pi}{k}\right)^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2}\right) \left(1 - \frac{\pi}{k} \cot(\pi/k)\right) + \frac{\text{tg}(\pi/2k)}{(\pi/2k)} = 1 \quad (80)$$

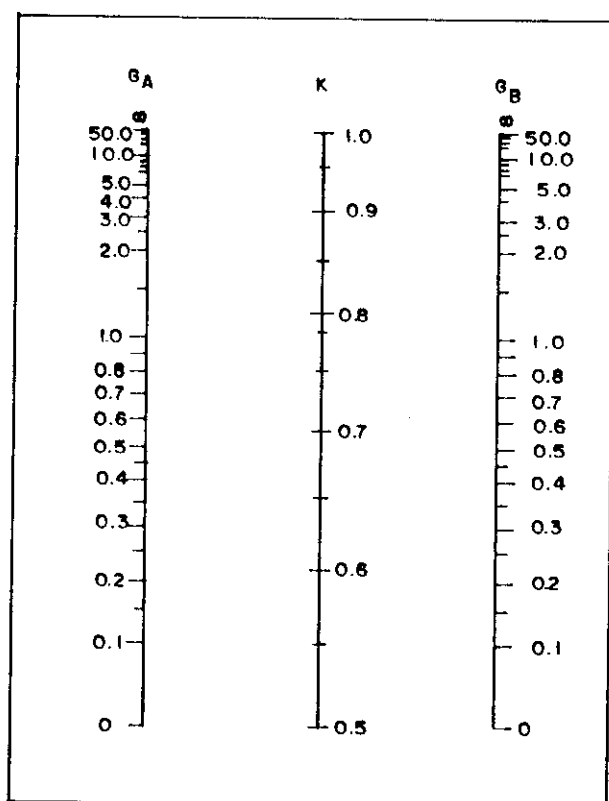


FIG.11 - Determinação de "k" para estruturas indeslocáveis

Os valores dos coeficientes de flambagem "k", determinados, a partir da expressão (80) e que satisfazem valores especificados de rigidez relativa "G_A" e "G_B" podem ser apresentados em forma de ábacos, como mostrado na figura 11.

No caso das estruturas retangulares usuais, com

carregamentos simétricos, a rigidez relativa pode ser aproximada nas extremidades do elemento em questão por:

$$G_A = \frac{\sum_A I_c / L_c}{\sum_A I_v / L_v} \quad ; \quad G_B = \frac{\sum_B I_c / L_c}{\sum_B I_v / L_v} \quad (81)$$

Isto ocorre quando as forças axiais nas vigas são desprezíveis. Nas equações (81) o numerador indica o somatório da rigidez de duas colunas que se encontram nos respectivos extremos da coluna em questão, e o denominador indica o somatório da rigidez de duas vigas que se encontram nos dois extremos da mesma coluna.

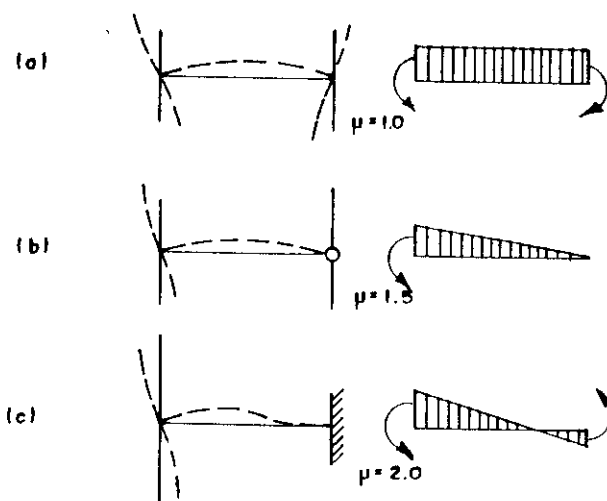


FIG.12 - Diagramas de flexão e seus coeficientes

Para determinar " G_A " e " G_B ", é necessário encontrar a rigidez das colunas e vigas. A rigidez " α_i " do i -ésimo elemento, desconsiderando-se o módulo elástico "E" pode ser expressa por:

$$\alpha_i = \mu_i \cdot I_i / L_i \quad (82)$$

onde, " μ_i " é um coeficiente que depende da curva de flexão da viga; " I_i " é o momento de inércia no plano de flexão e " L_i " é o comprimento.

A equação (80) foi obtida com a hipótese de que todos as barras da estrutura (vigas e colunas) fletiriam simetricamente com curvatura simples. Neste caso, a rigidez pode ser encontrada supondo-se uma viga de diagrama, de flexão constante, em que " $\mu_i = 1.0$ " (fig.12-a).

Se a extremidade oposta àquela que une à coluna for rotulada (fig.12-b) ou engastada (fig.12-c), os diagramas resultantes das vigas serão diferentes e, portanto, os valores de " μ_i " também serão diferentes, ou seja, " $\mu_i = 1.5$ ", se a extremidade for rotulada e " $\mu_i = 2.0$ ", se a extremidade for engastada.

Os diferentes valores de " μ_i " citados anteriormente são determinados fazendo-se a relação $\mu_i = \alpha_{i+1}/\alpha_1$. Desta maneira, " α_{i+1} " é a rigidez de uma barra com vinculação qualquer e " α_1 " é a rigidez de uma barra rígida indeslocável. As condições de vinculações e tipos de rigidez para barras mais comumente encontradas são dadas na figura (7). Nestas barras pode ser desprezado o efeito da carga axial, quando aquelas trabalham como vigas em pórticos retangulares. Com estas observações, na seqüência serão determinados os valores de " μ_i ".

A rigidez da barra mostrada na figura 12-a será calculada considerando-se o caso da figura 7-a, pois uma viga de uma estrutura rígida indeslocável poderá se deformar conforme mostra-se na figura 2-b. Para esta rigidez tem-se:

$$\alpha_1 = 2EI/L \quad (83)$$

por outro lado, a rigidez da barra mostrada na figura 12-b será calculada considerando-se o caso da figura 7-b. Para esta rigidez tem-se:

$$\alpha_2 = 3EI/L \quad (84)$$

Fazendo-se a relação entre as expressões (84) e (83) tem-se:

$$\mu_1 = \alpha_2 / \alpha_1 = 1.5 \quad (85)$$

assim, a barra da figura 12-a deverá ter sua rigidez multiplicada por $\mu_1 = 1.5$ se aquela tiver as condições de vínculos mostrados na barra da figura 12-b.

A rigidez da barra mostrada na figura 12-c será calculada considerando-se o caso da figura 7-d. Para esta rigidez tem-se:

$$\alpha_3 = 4EI/L \quad (86)$$

Fazendo-se a relação entre as expressões (86) e (83) tem-se:

$$\mu_2 = \alpha_3 / \alpha_1 = 2.0 \quad (87)$$

assim, a barra da figura 12-a deverá ter sua rigidez multiplicada por $\mu_2 = 2.0$ se aquela tiver as condições de vínculos mostrados na barra da figura 12-c.

Uma coluna pode ter uma de suas extremidades ligada a uma fundação ou em um bloco praticamente rígido. Neste caso, "G" seria igual a zero, mas em alguns casos é prudente assumir "G = 1.0". Se ao contrário, a coluna for rotulada em sua base, teoricamente, "G" seria igual a infinito, mas, conservadoramente, na prática, pode-se considerar "G = 10" [14,57,88,133,141,160].

7 - FLAMBAGEM DE ESTRUTURAS DESLOCÁVEIS DE NÓS RÍGIDOS

A flambagem de uma barra deslocável será analisada a seguir, mostrando-se que para a carga crítica de flambagem elástica $P_c = \pi^2 EI/L_1^2$, onde " $L_1 = kL$ ", o coeficiente de flambagem " k " pode ser conhecido através da solução da seguinte equação:

$$\frac{G_A G_B (\pi/k)^2 - 36}{6(G_A + G_B)} = \frac{\pi}{k} \cot(\pi/k) \quad (88)$$

Se não existirem pontos de reações ou contraventamentos para resistirem os cisalhamentos $(M_A + M_B + P\Delta)/L$, nas extremidades da barra, a mesma se deslocará como mostrado na figura 10; e o momento de deslocamento " $P\Delta$ " será completamente resistido pelos momentos de extremidades " M_A " e " M_B ". Impondo-se a condição de equilíbrio dos momentos em relação ao ponto "A" (fig.10), tem-se:

$$P \cdot \Delta = -(M_A + M_B) \quad (89)$$

Levando-se (89) em (74) e (75), tem-se:

$$M_A \left[\frac{P_c L}{\alpha_A} - \phi \cot \phi + 1 \right] + M_B \left[-\phi \operatorname{cosec} \phi + 1 \right] - (M_A + M_B) = 0 \quad (90)$$

$$M_A \left[-\phi \operatorname{cosec} \phi + 1 \right] + M_B \left[\frac{P_c L}{\alpha_B} - \phi \cot \phi + 1 \right] - (M_A + M_B) = 0 \quad (91)$$

Colocando-se em evidência os termos de " M_A " e " M_B ", nas duas equações anteriores, tem-se:

$$M_A \left[\frac{P_c L}{\alpha_A} - \phi \cot \phi \right] + M_B \left[-\phi \operatorname{cosec} \phi \right] = 0 \quad (92)$$

$$M_A \left[-\phi \operatorname{cosec} \phi \right] + M_B \left[\frac{P_c L}{\alpha_B} - \phi \cot \phi \right] = 0 \quad (93)$$

Na bifurcação, o determinante da matriz dos coeficientes de (92) e (93) deve ser igual a zero. Isto feito, encontra-se:

$$\frac{P_c^2 L^2}{\alpha_A \alpha_B \phi^2} - \frac{P_c L}{\phi} \cot \phi \left(\frac{1}{\alpha_A} + \frac{1}{\alpha_B} \right) = 1 \quad (94)$$

Sabendo-se que $P_c = \pi^2 EI / (kL)^2$ e que $\phi = \pi/k$, a equação (94) torna-se:

$$\frac{(EI/L)^2}{\alpha_A \alpha_B} \left(\frac{\pi}{k} \right)^2 - 1 = \frac{EI}{L} \left(\frac{1}{\alpha_A} + \frac{1}{\alpha_B} \right) \frac{\pi}{k} \cot(\pi/k) \quad (95)$$

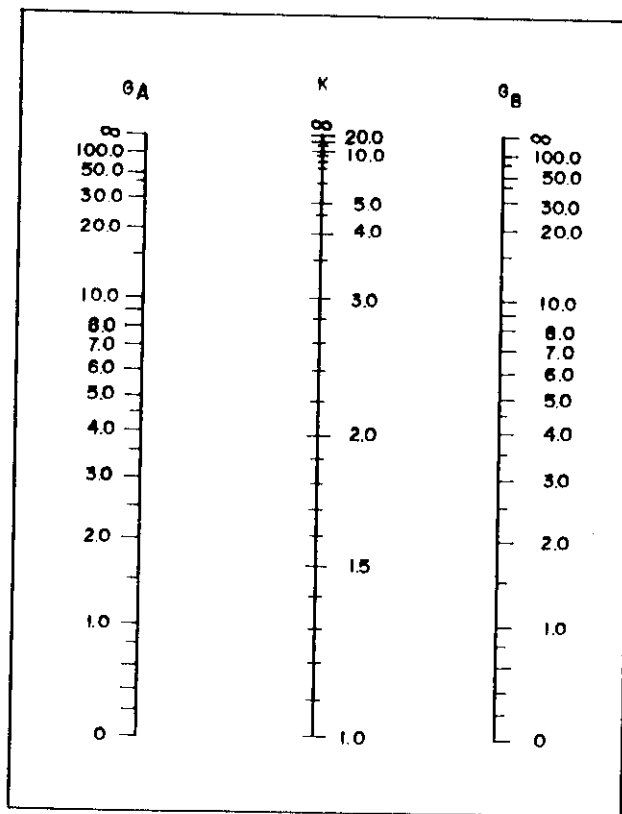


FIG.13 - Determinação de "k" para estruturas deslocáveis

chamando de " G_A ", a rigidez relativa na extremidade "A", e de " G_B ", a rigidez relativa na extremidade "B", da barra deslocável, tem-se:

$$G_A = \frac{(\delta EI/L)}{\alpha_A} = \frac{(\delta EI/L)_{AB}}{\sum_A \alpha} \quad (96)$$

$$G_B = \frac{(\delta EI/L)}{\alpha_B} = \frac{(\delta EI/L)_{AB}}{\sum_B \alpha} \quad (97)$$

Levando (96) e (97) em (95), conclui-se:

$$\frac{G_A G_B (\pi/k)^2 - 36}{\delta(G_A + G_B)} = \frac{\pi}{k} \cot(\pi/k) \quad (98)$$

Os valores dos coeficientes "k" determinados a partir da equação (98) que satisfazem valores especificados de rigidez relativa " G_A " e " G_B " podem ser apresentados em forma de ábaco, conforme ilustra a figura 13.

Se as forças axiais nas vigas podem ser consideradas desprezíveis no caso das estruturas retangulares usuais com carregamentos simétricos, então a rigidez relativa, nas extremidades da barra em questão, poderá ser aproximada pelas seguintes equações:

$$G_A = \frac{\sum_A I_c/L_c}{\sum_A I_v/L_v} \quad ; \quad G_B = \frac{\sum_B I_c/L_c}{\sum_B I_v/L_v} \quad (99)$$

No item 6, viu-se que a rigidez " $\alpha_i = \mu_i I_i/L_i$ ", de uma determinada barra é corrigida pelo coeficiente " μ_i ". Este depende da curva de flexão da viga. Para estruturas deslocáveis, " μ_i " será igual a "1.0", sempre que o diagrama de flexão da barra for bi-simétrico (fig.14-a). Se a extremidade da viga oposta àquela que une à coluna for rotulada (fig.14-b), ou impedida de girar (fig.14-c), os diagramas resultantes das vigas serão diferentes e,

portanto, os valores de " μ_i " também serão diferentes, ou seja, " $\mu_i = 0.5$ ", se a extremidade for rotulada e $\mu_i = 2/3 \cong 0.67$, se a outra extremidade for impedida de girar. Seguindo-se os mesmos procedimentos do item 6 na sequência serão determinados os valores de " μ_i ".

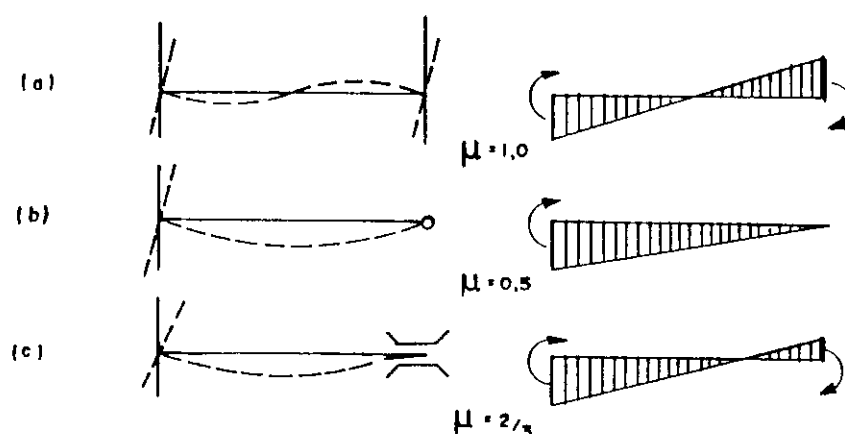


FIG.14 - Diagramas de flexão e seus coeficientes.

Uma viga de uma estrutura rígida deslocável poderá se deformar como mostra a figura 3-b. Então, a sua rigidez poderá ser calculada de acordo com o caso mostrado na figura 7-c (desprezando-se a carga axial). Assim, a rigidez da barra mostrada na figura 14-a será:

$$\alpha_1 = 6EI/L \quad (100)$$

por outro lado, a rigidez da barra mostrada na figura 14-b será calculada considerando-se o caso da figura 7-b. Para esta rigidez tem-se:

$$\alpha_2 = 3EI/L \quad (101)$$

Fazendo-se a relação entre as expressões (101) e (100) tem-se:

$$\mu_1 = \alpha_2/\alpha_1 = 0.5 \quad (102)$$

assim, a barra da figura 14-a deverá ter sua rigidez multiplicada por $\mu_1 = 0.5$ se aquela tiver as condições de vínculos mostrados na barra da figura 14-b.

A rigidez da barra mostrada na figura 14-c será calculada considerando-se o caso da figura 7-d. Para esta rigidez tem-se:

$$\alpha_3 = 4EI/L \quad (103)$$

Fazendo-se a relação entre as expressões (103) e (100) tem-se:

$$\mu_2 = \alpha_3/\alpha_1 = 2/3 \quad (104)$$

assim, a barra da figura 14-a deverá ter sua rigidez multiplicada por $\mu_2 = 2/3$ se aquela tiver as condições de vínculos mostrados na barra da figura 14-c.

Lembrando ainda, como no item 6, que se uma das extremidades da coluna apoiar sobre uma fundação, e se esta for rotulada, então "G" será igual a infinito, embora, conservadoramente, na prática, seja considerado igual a 10. Se ao contrário, a base for engastada, teoricamente "G" será igual a zero, mas estas ligações na prática não são perfeitamente rígidas e é aconselhável usar $G = 1.0$ [14,57,88], [133,141,160].

Data	____/____/19____
Proc.	_____
Pa d.	_____
Liv.	_____
Cr \$	_____