

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ANÁLISE TRIDIMENSIONAL TRANSIENTE DE ESTRUTURAS PELA COMBINAÇÃO  
ENTRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E O MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS

ENG. HUMBERTO BREVES CODA

ORIENTADOR: Prof.Dr. WILSON SERGIO VENTURINI

Tese apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos, da Universidade de São  
Paulo, como parte dos requisitos para  
obtenção do título de "Doutor em  
Engenharia de Estruturas".

SÃO CARLOS, OUTUBRO DE 1993

"Ninguém se engane a si mesmo. Se alguém entre vós se julga sábio a maneira deste mundo, faça-se louco para tornar-se sábio: porque a sabedoria deste mundo é loucura diante de DEUS. Portanto ninguém ponha sua glória nos homens. Tudo é vosso: Paulo, Apolo, Cefas, o mundo, a vida, a morte, o presente, e o futuro. Tudo é vosso! Mas vós sois de Cristo, e Cristo é de DEUS."

(ICo 3,18-23)

À Eveline,  
Rafael e Lívea

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Wilson Sergio Venturini pela excelente orientação, dedicação e amizade.

Ao Prof. José Elias Laier pelos esclarecimentos referentes ao desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Márcio Roberto Silva Corrêa pelos auxílios prestados.

Ao Sr. Norberto Costardi pela presteza em resolver dificuldades computacionais.

Ao Sr. Antonio Valdair Carneiro pela digitação, à Sr<sup>a</sup> Sylvia Helena M. Villani e Sr Francisco Carlos Guete de Brito pelas ilustrações, à Sra. Maria Nadir Minatel pela revisão das referências bibliográficas, à Sra. Wilma Provinciali Vall pelo incentivo e serviços prestados e a Enga. Silvete Mari Soares pela revisão ortográfica.

Finalmente a todos os colegas, professores e funcionários que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Neste trabalho, o problema da elastodinâmica transiente é estudado através de uma formulação mista dos métodos: Elementos de Contorno (MEC) e Elementos Finitos (MEF). Os processos de integração no tempo utilizados são o de Newmark, para o MEF, e a discretização temporal direta do teorema da reciprocidade dinâmica de Graffi, para o MEC.

A formulação espacial do Método dos Elementos Finitos abrange pórticos tridimensionais e cascas delgadas elástico-lineares; o Método dos Elementos de Contorno é utilizado para modelar sólidos tridimensionais elásticos finitos ou infinitos.

A junção entre os dois meios é feita através de elementos rígidos de ligação e a compatibilização dos métodos pela técnica de sub-regiões.

Desenvolve-se uma técnica de integração particular para elementos singulares muito precisa, dispensando assim, a avaliação destas integrais pela imposição de deslocamentos de corpo rígido ao problema estático.

Finalmente, deriva-se do tensor de Stokes uma solução fundamental alternativa que traz ao algoritmo de integração temporal do MEC grande ganho computacional.

Mostram-se exemplos numéricos visando demonstrar a eficiência da formulação apresentada. A formulação similar estática também é implementada e ilustrada com exemplos.

## ABSTRACT

In this work, the transient elastodynamic problem is studied through a mixed formulation of the methods: Boundary Element and Finite Element. The time integrations are made by Newmark's process for the Finite Element, and by direct time integration of the Graffi's dynamic reciprocity theorem for the Boundary Element.

The Finite Element Method spacial formulation includes three-dimensional elastic linear frame and thin shells structures; the Boundary Element Method is used to model finite or infinite three-dimensional elastic bodies. The connection between both media is made by rigid elements also adopting the subregion technique to combine the methods.

A new manner to integrate elements with strong singularities is presented, avoiding therefore the indirect integral technique made by enforcing a rigid body movement to the estatic equivalent problem. Finally, a great computational profit is obtained by the application of an Alternative Fundamental Solution, derived from Stokes tensor.

Examples show the efficiency of presented formulation; the estatic version is also implemented and illustrated by examples.

## SUMÁRIO

RESUMO

ABSTRACT

1	INTRODUÇÃO .....	01
2	TEORIA BÁSICA E EQUAÇÕES INTEGRAIS DA ELASTOSTÁTICA ....	07
2.1	Introdução .....	07
2.2	Equações que regem a elastostática .....	08
2.3	Solução fundamental .....	13
2.4	Equação integral de contorno .....	17
2.4.1	Equação integral de contorno para pontos internos...	17
2.4.2	Equação integral de contorno para pontos externos...	19
2.4.3	Equação integral de contorno para pontos do contorno .....	19
2.4.4	Equação integral de contorno para tensões em pontos internos .....	24
2.4.5	Equações integrais para regiões infinitas .....	25
3	TEORIA BÁSICA E EQUAÇÕES INTEGRAIS DA ELASTODINÂMICA ...	28
3.1	Introdução .....	28
3.2	Equações que regem a elastodinâmica .....	28
3.3	Soluções fundamentais .....	32
3.3.1	Solução fundamental geral .....	32
3.3.2	Solução fundamental "usual" .....	34
3.3.3	Solução fundamental alternativa .....	35
3.4	Equações integrais .....	37
3.4.1	Teorema da reciprocidade .....	37
3.4.2	Equação integral de contorno "usual" .....	39
3.4.3	Equação integral de contorno alternativa .....	40

4	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (formulação estática) ..	41
4.1	Introdução .....	41
4.2	Elementos de contorno .....	44
4.2.1	Elemento quadrangular plano com aproximação linear .	44
4.2.2	Elemento quadrático .....	47
4.3	Continuidade e descontinuidade da discretização do contorno .....	51
4.4	Transformação da equação integral em sistema algébrico	54
4.5	Integração sobre elementos .....	60
4.5.1	Integração não singular .....	60
4.5.2	Integração singular .....	62
5	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (formulação dinâmica) .	71
5.1	Introdução .....	71
5.2	Elementos temporais .....	73
5.2.1	Elemento temporal linear .....	73
5.2.2	Elemento temporal constante .....	74
5.3	Transformação da equação integral em sistema algébrico	76
5.3.1	Equação algébrica usual .....	76
5.3.2	Equação algébrica alternativa .....	80
5.4	Integrações temporais e espaciais .....	84
5.4.1	Integração sobre os elementos temporais e espaciais para a solução fundamental usual .....	84
5.4.2	Integração sobre os elementos temporais e espaciais para a solução fundamental alternativa .....	94
6	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	98
6.1	Introdução .....	98
6.2	Equações de equilíbrio .....	99
6.3	Transformação da equação de equilíbrio em sistema algébrico (estático) .....	101
6.4	Transformação da equação de equilíbrio em sistema algébrico (dinâmico) .....	104

6.5	Elementos finitos .....	105
6.5.1	Elemento de barra .....	106
6.5.2	Elemento de casca .....	113
6.6	Integração temporal .....	127
7	ASSOCIAÇÃO ENTRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....	130
7.1	Introdução .....	130
7.2	Elemento de sapata rígida .....	131
7.2.1	Nó de ligação "C" no centróide "O" .....	132
7.2.2	Nó de ligação "C" não coincidente com o centróide "O" .....	146
7.2.3	Considerações sobre a massa da sapata .....	149
7.3	Técnica de sub-regiões.....	151
8	EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	155
8.1	Introdução .....	155
8.2	Método dos elementos finitos .....	156
8.3	Método dos elementos de contorno .....	165
8.4	Ligação MEC/MEF .....	173
9	DISCUSSÕES E CONCLUSÕES .....	185
9.1	Introdução .....	185
9.2	Solução fundamental alternativa .....	186
9.3	Integração sobre elementos singulares .....	187
9.4	Elemento de ligação MEC/MEF . .....	187
10.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	189

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Na teoria matemática da elasticidade procurou-se, durante muito tempo e ainda hoje se vem fazendo, determinar o estado de tensão, ou de deformação, no interior de um corpo sólido elástico submetido a ação de um sistema equilibrado de forças, ou que esteja em um estado de pequeno movimento relativo interior (Elastodinâmica), com o objetivo de obter resultados úteis e de importância prática para os diversos ramos da Engenharia [89].

As equações gerais de equilíbrio (estático e dinâmico) de sólidos elásticos foram introduzidas por NAVIER [110] em 1821 e por CAUCHY [26] em 1828.

Foram desenvolvidos, ao longo do tempo, métodos analíticos para a obtenção de soluções exatas de grande parte das equações diferenciais de todos os ramos da física. Em particular, para a elasticidade existem inúmeros trabalhos como por ex. [89, 49, 50 e 2] , que determinam soluções exatas para muitos problemas

estáticos e dinâmicos, porém os casos estudados são limitados por sua geometria e hipóteses bastante simplificadoras.

Da necessidade de se resolver problemas mais gerais surgiram os métodos aproximados e, com eles, os métodos numéricos. O primeiro método numérico fundamentado em bases matemáticas foi o Método das Diferenças Finitas [129]. Isto se deu antes de haver uma automatização computacional [139] o que limitou bastante seu uso na época. Após o surgimento dos computadores, intensificaram-se as pesquisas para o desenvolvimento e a aplicação de tais métodos, dos quais podem-se destacar o já mencionado Método das Diferenças Finitas (MDF), que até hoje tem grande importância no tratamento de problemas da engenharia, e o Método dos Elementos Finitos (MEF), [7, 136, 29] sem dúvida, o mais aplicado.

Estes métodos, por serem baseados na aproximação da solução em todo o domínio, são conhecidos como Técnicas de Domínio. Na utilização do primeiro (MDF), aplica-se ponto a ponto o operador diferença sobre a equação diferencial; para o segundo (MEF) subdivide-se todo o corpo em pequenos subdomínios. Tais procedimentos se traduzem, na prática, em uma exaustiva discretização de todo o espaço definido pelo sólido em análise para a resolução do problema proposto.

Uma alternativa para reduzir o número de aproximações é a utilização das chamadas Técnicas de Contorno, nas quais as discretizações são impostas apenas ao contorno do sistema em consideração. Estas técnicas têm como origem um dos procedimentos usados na teoria matemática para obter a solução analítica das equações diferenciais parciais, que as transformam em suas formas integrais ou, mais simplesmente, nas chamadas equações integrais.

As equações integrais, segundo ELIOT [3], já são conhecidas desde 1823, quando ABEL [1] utilizou este procedimento para resolver o problema do pêndulo isócrono [59], porém sua introdução mais generalizada ocorreu em 1828 com GREEN [64].

Com relação a elastostática, em 1872 BETTI [18] demonstrou o teorema da reciprocidade e em 1886 SOMIGLIANA [127],

aplicando, sobre o teorema de BETTI, a solução de KELVIN [133], obteve a chamada Identidade Somigliana. Já os teoremas equivalentes da elastodinâmica foram demonstrados bem mais tarde; em 1946 GRAFFI [63] demonstrou a reciprocidade para dois estados elastodinâmicos em corpos finitos; em 1968, WEELER e STERNBERG [153] a estenderam para corpos não-finitos. Em 1904 a chamada Identidade de LOVE [88] foi apresentada; e mais tarde, obtida de maneira mais econômica e segura, aplicando a solução de STOKES [130] sobre o teorema de GRAFFI estendido [153].

Em 1903, FREDHOLM [54] utilizou uma técnica de discretização limite para demonstrar a existência e a unicidade de soluções de equações integrais de contorno. Este procedimento deu origem a uma forma de se construir respostas numéricas com erros bastante toleráveis [69].

Neste contexto surgiram duas formulações distintas do Método dos Elementos de Contorno, a formulação indireta, na qual as variáveis envolvidas não são as variáveis físicas do problema, introduzida por KUPRADZE [82], e a direta, cujas variáveis têm significado físico, iniciada por RIZZO [123] em 1967.

Alguns dos primeiros estudos em elastodinâmica pelo Método dos Elementos de Contorno foram apresentados, em 1963, por BANAUGH e GOLDSMITH [10], FRIEDMAN e SHAW [55] e CHEN e SCHWEIKERT [27], porém todos na formulação indireta. O marco inicial da formulação direta para a elastodinâmica foi em 1968, com CRUSE e RIZZO [42] e CRUSE [39], que resolveram, pela primeira vez, um problema transiente de propagação de onda em um semi-plano no espaço transformado de Laplace [17]. Alguns trabalhos posteriores podem ser citados, como por exemplo, MANOLIS e BESKOS [94], MANOLIS [92], MANOLIS e BESKOS [93], ANTES et alli [4], ESTORF et alli [145] e KONTONI [81].

Outra maneira de se tratar problemas transientes e de vibrações harmônicas pelo MEC, é através do conceito de matriz de massa. Isto pode ser feito através de várias técnicas, como mostrado nos trabalhos de NARDINI e BREBBIA [105-109], CODA e VENTURINI [33-35], LEOFFLER NETO [86]. Estas técnicas necessitam ou

de discretização de domínio ou de variáveis internas incógnitas

A formulação aplicada ao MEC neste trabalho foi desenvolvida a partir de 1983 por MANSUR e BREBBIA [97, 98, 99, 96] e é baseada no teorema da reciprocidade dinâmica de GRAFFI [63] discretizado no espaço e no tempo, tendo como um dos campos de deslocamento a solução fundamental geral de STOKES [130]. Utiliza-se também o equivalente estático já bastante difundido [20, 25, 24].

Com relação ao MEF, segundo ZIENKIEWICZ [157], no campo da mecânica dos sólidos e análise estrutural, já em 1940 MCHENRY [100], HRENIKOFF [68] e NEWMARK [111] demonstraram que se podem obter soluções razoavelmente boas de um problema contínuo, substituindo pequenas porções do meio analisado por uma simples distribuição de barras. Mais tarde, no mesmo contexto, ARGYRIS [6], TURNEI e outros [136] demonstraram que se pode substituir as propriedades do contínuo de um modo mais direto, e menos intuitivo, supondo que as pequenas porções do mesmo, ou "elementos", se comportem de uma certa forma simplificada. Muito se avançou desde a década de 1960 até hoje conforme pode ser visto nas referências [157, 15, 22, 67].

O Método dos Elementos Finitos é, atualmente, uma das ferramentas mais difundidas para solucionar diversos problemas da engenharia [121, 117, 37]. Sua aplicação na mecânica estrutural já está consagrada pela prática. É de se observar contudo que, por ser uma técnica de domínio, traz algumas complicações às análises que envolvem domínios infinitos, pois estes devem ser interrompidos para que se gere uma discretização finita, ocasionando a formação de um contorno fictício que, em análises dinâmicas, geram reflexões de ondas inexistentes no problema real [119].

Neste contexto, três vantagens principais são oferecidas pelo Método dos Elementos de Contorno: modelagem própria para domínios infinitos, grande redução de equações e volume de dados (principalmente quando se trata de meios tridimensionais infinitos como o solo) e a inexistência de erros de interpolação no domínio

[139].

Em contrapartida, o Método dos Elementos de Contorno não apresenta nenhuma característica vantajosa, no que diz respeito à análise de estruturas reticuladas e cascas, quando comparado ao MEF. Disto se conclui que, uma medida natural para a análise da interação solo-estrutura, é compor uma modelagem onde o MEF é usado para a estrutura (pórtico e cascas) e o MEC para o solo ou semi-espaço infinito.

A idéia de se acoplar o MEC ao MEF não é tão recente, já em 1977 ZIENKIEWICZ [158] e ATLURI e GRANNELL [8] discorriam sobre o assunto. Alguns trabalhos recentes, em elastodinâmica, podem ser citados como os de ESTORF et alli [144-146], ANTES et alli [5], PATEL e SPYRAKOS [116], PAPASOGLU et alli [102], GAUL et alli [58] e AVERSCH [9], GANGMING [57] e MITSUI et alli [103], que simulam a ligação MEC/MEF para casos bidimensionais. Para o caso tridimensional pode-se citar os trabalhos de XU [156], WANG e SCHMID [147], SHU [124] e KOBAYASHI et alli [76, 79].

Neste trabalho, apresenta-se uma formulação tridimensional dinâmica transiente para a análise elástica específica da ligação solo-estrutura, modulando-se a estrutura pelo MEF (casca, barra) e o solo, tratado de maneira simplista como elástico linear, pelo MEC. A junção física entre os dois meios é feita através de elementos rígidos de ligação (sapata rígida [121]) e o acoplamento numérico através da técnica de sub-regiões [59, 139].

Para atingir tal propósito, no capítulo 2 apresentam-se as equações gerais que regem a elastostática, incluindo sua representação integral e soluções fundamentais. Estendendo as expressões da elastostática, no capítulo 3, as equações gerais que governam a elastodinâmica são mostradas.

Impondo-se a discretização espacial sobre as equações da elastostática, demonstra-se no capítulo 4, a formulação básica do MEC. Já no capítulo 5, fazendo-se o mesmo com as equações integrais da elastodinâmica e efetuando-se a discretização temporal, chega-se na formulação dinâmica transiente do MEC.

No capítulo 6, uma formulação bastante simples do MEF é aplicada a estruturas reticuladas e cascas delgadas [117, 67, 37, 52], sendo a combinação entre os métodos, através do elemento rígido e da técnica de sub-regiões, desenvolvida no Capítulo 7.

No capítulo 8, alguns exemplos numéricos são resolvidos para confirmar a validade do método, comparando as respostas obtidas com soluções analíticas ou outras modelagens numéricas existentes na bibliografia.

Finalmente no capítulo 9 discute-se, de maneira global e sucinta, tudo o que se apresentou no trabalho, procurando tirar conclusões concretas e propor futuras investigações, para que o tema abordado atinja pleno desenvolvimento o mais breve possível..

## CAPÍTULO 2

### TEORIA BÁSICA E EQUAÇÕES INTEGRAIS DA ELASTOSTÁTICA

#### 2.1- INTRODUÇÃO

Introduz-se, neste capítulo, alguns conceitos básicos da teoria da elasticidade que são imprescindíveis para o desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno [89,134,24,61]

Antes de se discutir as equações que governam o comportamento linear dos corpos elásticos submetidos a ações estáticas, cabe dizer que estas são expressas em forma de notação indicial representada no sistema de coordenadas cartesianas convencional. Tal notação usa índices (1, 2, 3) para representar os eixos (x,y,z) e algumas regras básicas de manuseio são apresentadas abaixo:

##### a) Convenção de Somatório

A repetição de um índice num termo indica a soma de todas as componentes com respeito a este índice em toda a sua variação, por exemplo:

$$\begin{aligned}
 a_{ii} &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\
 a_{ij}b_i &= a_{1j}b_1 + a_{2j}b_2 + a_{3j}b_3
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

b) Convenção para derivadas parciais

A vírgula acompanhada por índices representa a derivada parcial com relação às coordenadas referidas a estes:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = f_{i,j}; \quad \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_j \partial x_k} = \phi_{i,jk}
 \tag{2.2}$$

c) Delta de Kronecker  $\delta_{ij}$

É um parâmetro auxiliar que assume os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
 \delta_{ij} &= 0 & \text{se} & \quad i \neq j \\
 \delta_{ij} &= 1 & \text{se} & \quad i = j
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Todas as expressões utilizadas ou deduzidas nesta tese, são válidas para o caso tridimensional, não houve preocupação em se fazer um paralelo para os casos planos, pois estes não são objetos do presente estudo.

## 2.2- EQUAÇÕES QUE REGEM A ELASTOSTÁTICA

Admitindo-se que a matéria de um corpo elástico é homogênea, isotrópica e distribuída continuamente em seu volume, pode-se definir tensão ( $\sigma$ ) em um ponto como [89,49,134],

$$\sigma = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF}{dS}
 \tag{2.4}$$

onde  $dF$  é o diferencial de força que atua na área elementar  $dS$ , que circunda este ponto, orientada pelo versor normal  $n$  ao plano que a contém (fig. 2.1).

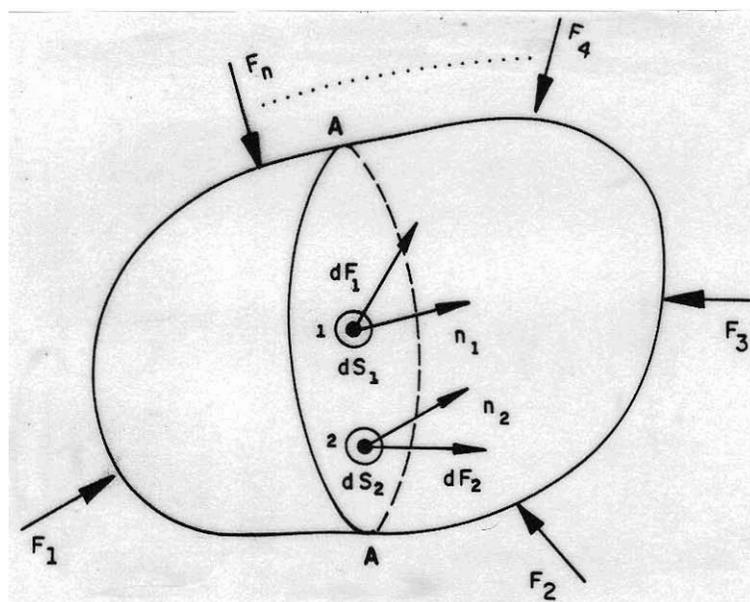


Figura 2.1- Representação de tensões em pontos internos devidas a um sistema equilibrado de forças externas atuando sobre um corpo sólido.

Pode-se decompor a tensão em duas componentes principais com relação ao plano, uma normal e outra tangencial.

Por facilidade, pode-se admitir um sistema de coordenadas cartesianas e definir as componentes de tensão ( $\sigma_{ij}$ ) como indicado na figura 2.2, com uma componente normal e duas tangenciais, todas nas direções dos eixos coordenados.

Estudando-se o equilíbrio do ponto representado pelo sólido elementar (fig. 2.2) escreve-se:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.5)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.6)$$

onde  $b_i$  são forças de volume, como o peso próprio ou forças eletromagnéticas.

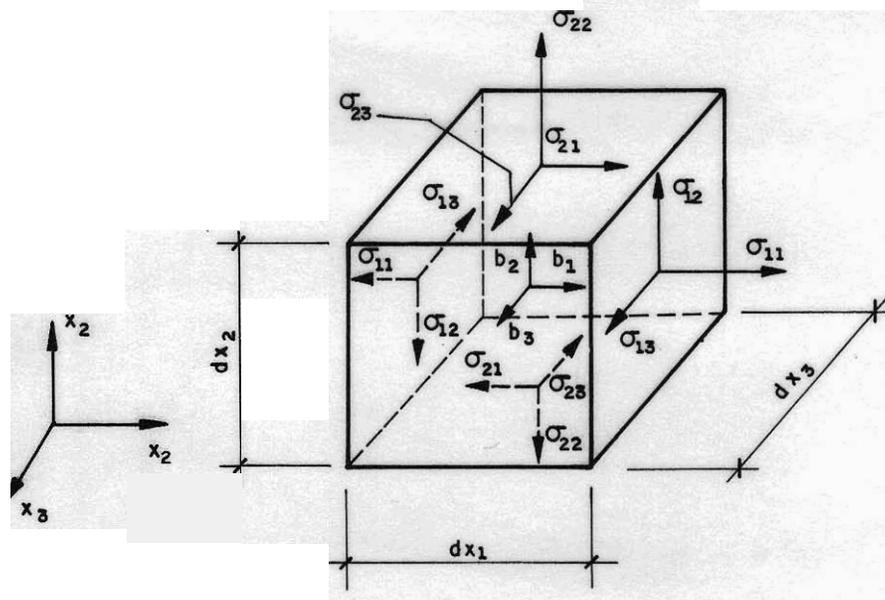


Figura 2.2- Sólido elementar submetido a esforços internos

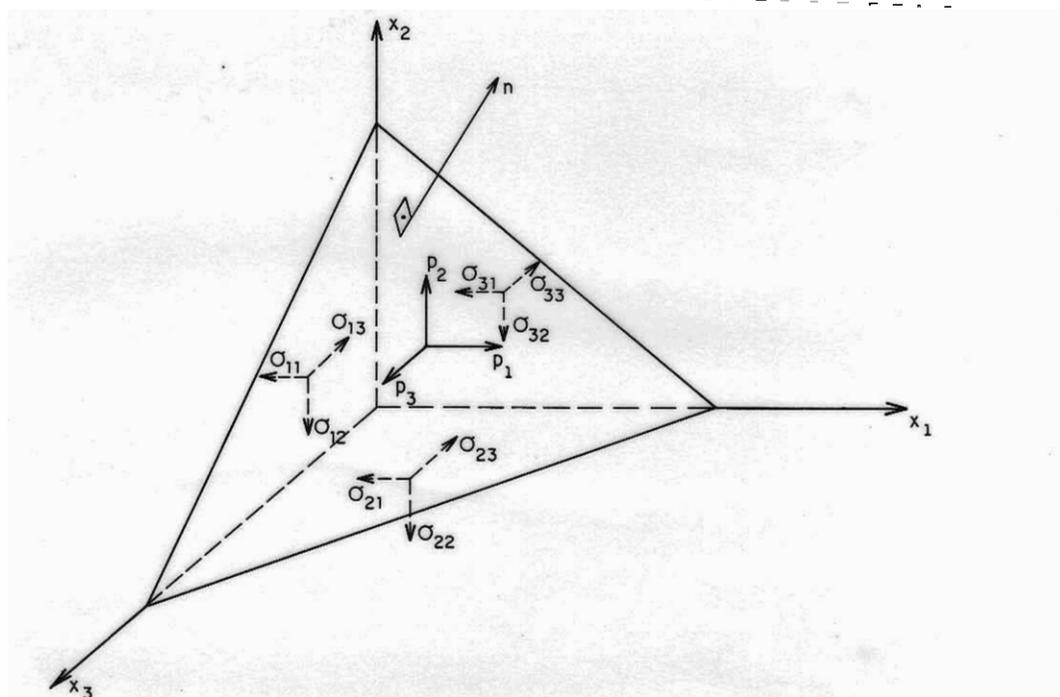


Figura 2.3- Representação das forças de superfície no contorno do corpo.

Quando se conhecem as componentes de tensão ( $\sigma_{ij}$ ) em um ponto qualquer, pode-se calcular as respectivas forças de superfície (fig. 2.3) através da relação:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.7)$$

onde  $n_j$  são os cossenos diretores da normal à superfície em questão com relação ao sistema de coordenadas definido. Esta expressão é muito importante para a adequação das condições de contorno à equação diferencial (2.5).

Sob a ação de um sistema de forças, um corpo elástico se deforma de maneira estática (forças aplicadas gradualmente até seus valores finais), ou de maneira dinâmica (forças aplicadas bruscamente ou que não possuam valor final considerado constante no tempo). Em ambos os casos, no contexto da teoria das pequenas deformações, a seguinte relação, entre as componentes do tensor de deformações ( $\epsilon_{ij}$ ) e do deslocamento ( $u_i$ ), pode ser escrita, [89, 49, 134, 24, 61]:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.8)$$

O tensor de tensão ( $\sigma$ ) relaciona-se com o tensor de deformação ( $\epsilon$ ), para sólidos elásticos, através da Lei de Hooke generalizada que, para materiais isotrópicos, é baseada em duas constantes: o módulo de Young ou de elasticidade ( $E$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). Tal relação se expressa como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij} \quad (2.9)$$

onde  $\lambda$  e  $G$  são as chamadas constantes de Lamé e se expressam em termos de  $E$  e  $\nu$  como segue:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.10)$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \quad (2.11)$$

A constante  $G$  também é conhecida como módulo de elasticidade transversal.

Substituindo-se a expressão (2.8) na (2.9) a Lei de Hooke é escrita em termos dos deslocamentos:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (2.12)$$

Levando-se em conta as expressões (2.5) e (2.12), obtém-se a conhecida equação de Navier -Cauchy em sua forma estática [110,26,89]:

$$G u_{i,jj} + (\lambda + G) u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (2.13)$$

Muitas vezes essa equação é encontrada em sua notação vetorial:

$$\nabla^2 \underline{u} + (\lambda+G) \underline{u} + \underline{b} = 0 \quad (2.14)$$

onde o operador vetorial  $\nabla$  é definido como:

$$\nabla = \underline{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \underline{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \underline{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (2.15)$$

com o símbolo " $\underline{\quad}$ " representando vetor ou matriz.

A equação (2.13) governa, portanto, o comportamento linear de um corpo elástico homogêneo e isotrópico ( $\Omega+\Gamma$ ) submetido a ações estáticas, onde  $\Omega$  define seu domínio e  $\Gamma$  seu contorno. Este comportamento só fica definido quando se conhecem as

condições as quais o corpo foi submetido, condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i(S) & S &\in \Gamma_1 \\ p_i &= \bar{p}_i(S) & S &\in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde "-" representa valores conhecidos no contorno  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , S são pontos do contorno.

A figura (2.4) representa esquematicamente os conceitos definidos nos parágrafos anteriores.

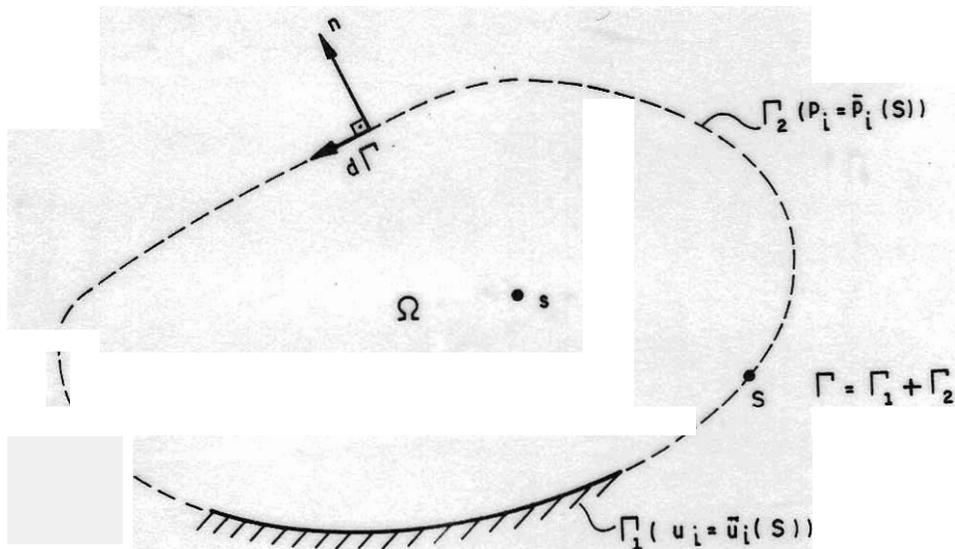


Figura 2.4- Domínio  $\Omega$  com contorno definido  $\Gamma$ , com condições de contorno  $\bar{p}_i$  e  $\bar{u}_i$  em  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_1$  respectivamente.

### 2.3- SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Para desenvolver formulações do Método dos Elementos de Contorno, devem ser utilizadas as chamadas soluções fundamentais, obtidas de problemas específicos da área em estudo. Na formulação estática, desenvolvida neste trabalho, emprega-se a solução fundamental de Kelvin [89, 133] que representa fisicamente o efeito de uma carga unitária estática atuando em um domínio

infinito.

Este problema é expresso nas equações gerais de equilíbrio (2.13) e (2.5) com a substituição das forças de volume  $b_i$  pela distribuição conhecida como Delta de Dirac  $\delta(s,q)$ :

$$b_{ki}(q) = \delta(s,q) \delta_{ki} \quad (2.17)$$

Deste modo a equação de Navier-Cauchy fica:

$$\begin{aligned} Gu_{ki,jj}^* + (\lambda+G)u_{kj,ji}^* + \delta(s,q) \delta_{ki} &= 0 \\ \sigma_{ij,j} + \delta(s,q) \delta_{ki} &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde  $s$  é o ponto onde a força está sendo aplicada (fonte),  $q$  representa os pontos do domínio,  $\delta_{ki}$  é o Delta de Kronecker indicando a direção  $k$  da força concentrada unitária atuante em  $s$  e o símbolo "\*" é usado para salientar que este deslocamento, em específico, é a solução fundamental procurada.

A distribuição Delta de Dirac tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \delta(s,q) &= +\infty & \text{se } q &= s \\ \delta(s,q) &= 0 & \text{se } q &\neq s \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\int_{\Omega} g(q) \delta(s,q) d\Omega(q) = \begin{cases} g(s) & \text{se } s \in \Omega \\ 0 & \text{se } s \in \{\Omega^{\infty} - \Omega - \Gamma\} \end{cases} \quad (2.20)$$

A solução fundamental obtida para domínios infinitos tridimensionais, a partir de (2.18), é apresentada por [20, 25, 24] como:

$$u_{ki}^*(s,q) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \left\{ (3-4\nu) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i} \right\} \quad (2.21)$$

correspondendo o primeiro índice à direção da aplicação da carga unitária em  $s$  e o segundo à direção do deslocamento gerado em  $q$ ; já  $r=r(s,q)$  é a distância entre os pontos  $s$  e  $q$  (fig. 2.6).

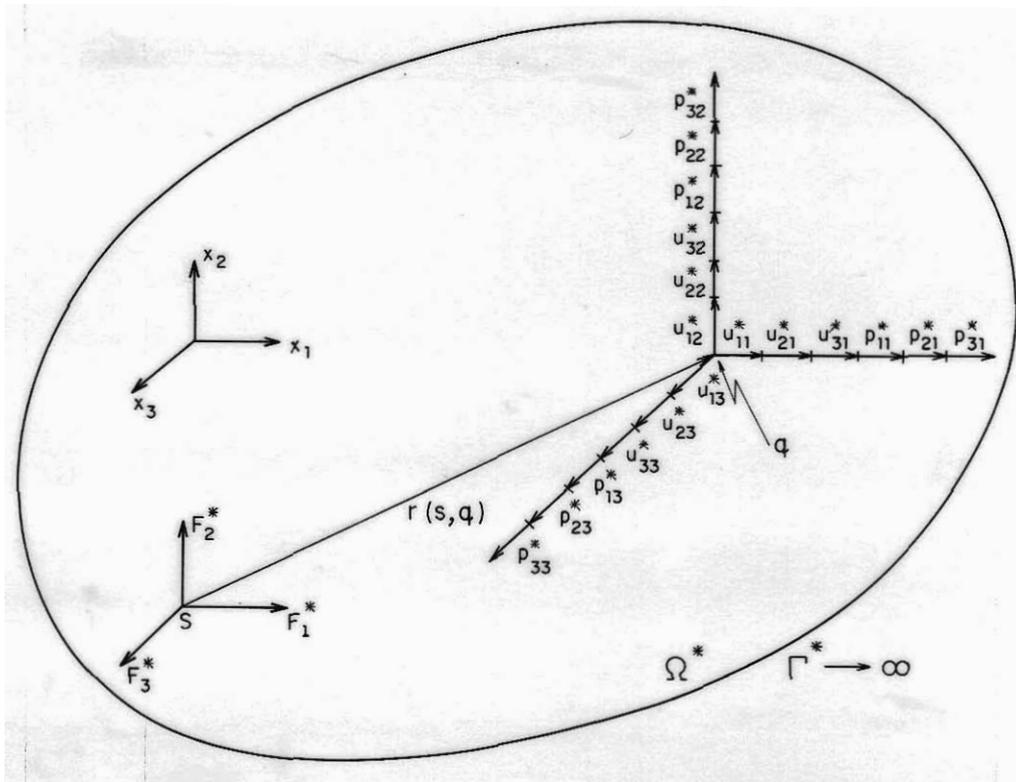


Figura 2.6- Solução fundamental

Aplicando-se a expressão (2.8) ao campo de deslocamento fundamental (2.21) obtêm-se as componentes fundamentais de deformação ( $\epsilon_{kji}^*$ ) em um ponto  $q$  devido a uma força unitária em  $s$  na direção  $K$  [89, 20, 25, 24]:

$$\epsilon_{kji}^*(s, q) = \frac{-1}{16\pi(1-\nu)Gr^2} \left\{ [(1-2\nu)(r_{,j} \delta_{ki} + r_{,k} \delta_{ij}) - r_{,i} \delta_{kj} + 3r_{,i} r_{,j} r_{,k}] \right\} \quad (2.22)$$

Da mesma forma para as tensões obtém-se a partir da substituição da expressão (2.22) na equação (2.9) a seguinte fórmula

$$\sigma_{kji}^*(s, q) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu)(r_{,j} \delta_{ki} + r_{,k} \delta_{ij}) + r_{,i} \delta_{kj} + 3r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad (2.23)$$

Ainda da expressão (2.23) substituindo-a na equação (2.7) obtém-se, em  $q$ , as componentes da força de superfície na direção  $i$  devido a carga unitária aplicada em  $s$  na direção  $k$ , em uma superfície definida pelos cossenos diretores  $(n_j)$  de um versor normal a esta:

$$p_{ki}^*(s, q) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ki} + 3r_{,k} r_{,i}] r_{,m} n_m - (1-2\nu)(r_{,k} n_i - r_{,i} n_k) \right\} \quad (2.24)$$

Para o Método dos Elementos de Contorno, esta superfície representa o contorno do corpo estudado.

Os campos fundamentais  $u_{ki}^*$  e  $p_{ki}^*$  podem ser expressos nas suas formas vetoriais, (fig. 2.6):

$$U_i^*(s, q) = u_{1i}^*(s, q) + u_{1i}^*(s, q) + u_{1i}^*(s, q) \quad (2.25)$$

$$P_i^*(s, q) = p_{1i}^*(s, q) + p_{1i}^*(s, q) + p_{1i}^*(s, q)$$

onde  $e_k$  são versores unitários na direção  $k$

## 2.4- EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

No item 2.1 apresentaram-se as equações diferenciais que regem os problemas da elastostática, no item 2.2 mostrou-se a solução fundamental de Kelvin.

Neste item pretende-se, a partir do teorema da reciprocidade de Betti [18], apresentar os passos seguidos por SOMIGLIANA [127] para obter as equações integrais de contorno, ponto de partida para todas as formulações do MEC.

### 2.4.1- Equação integral de contorno para pontos internos

O teorema generalizado de Betti [106, 105, 18], relacionando dois campos de deslocamentos possíveis de um corpo, pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega} (u_{ki}^*(S, q) \sigma_{ij,j}(q) - u_i(q) \sigma_{kij,j}^*(S, q)) d\Omega(q) = \int_{\Gamma} (u_{ki}^*(S, Q) p_i(Q) - u_i(Q) p_{ki}^*(S, Q)) d\Gamma(Q) \quad (2.26)$$

onde  $S$  é ponto fonte no contorno,  $Q$  é ponto do contorno e  $q$  é ponto do domínio. Este teorema também é válido para pontos  $s$ , fonte no domínio, como será utilizado nesta seção.

Nesta igualdade, relacionam-se dois estados elásticos distintos, a saber,  $u_i$ ,  $\sigma_{ij}$  e  $p_i$  representando um estado qualquer e  $u_{ki}^*$ ,  $\sigma_{kij}^*$  e  $p_{ki}^*$  que, como se sabe, é a solução fundamental de Kelvin para carga unitária atuando na direção  $k$ .

Retomando-se a equação (2.5), para um estado de deformação qualquer, e a equação (2.18), para o estado fundamental, e substituindo-as na expressão (2.26) tem-se:

$$\int_{\Omega} u_{ki}^*(s, q) (-b_i(q)) d\Omega(q) + \int_{\Omega} \delta(s, q) \delta_{ki} u_i(q) d\Omega(q) =$$

$$= \int_{\Gamma} (u_{ki}^*(s, Q) p_i(Q) - u_i(Q) p_{ki}^*(s, Q)) d\Gamma(Q) \quad (2.27)$$

Aplicando-se as propriedades (2.20) do Delta de Dirac para pontos no domínio, escreve-se:

$$u_k(s) = \int_{\Gamma} u_{ki}^*(s, Q) p_i(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} u_i(Q) p_{ki}^*(s, Q) d\Gamma(Q)$$

$$+ \int_{\Omega} b_i(q) u_{ki}^*(s, q) d\Omega(q) \quad (2.28)$$

Esta equação integral de contorno para pontos internos é a chamada Identidade Somigliana [127], fig. 2.7.

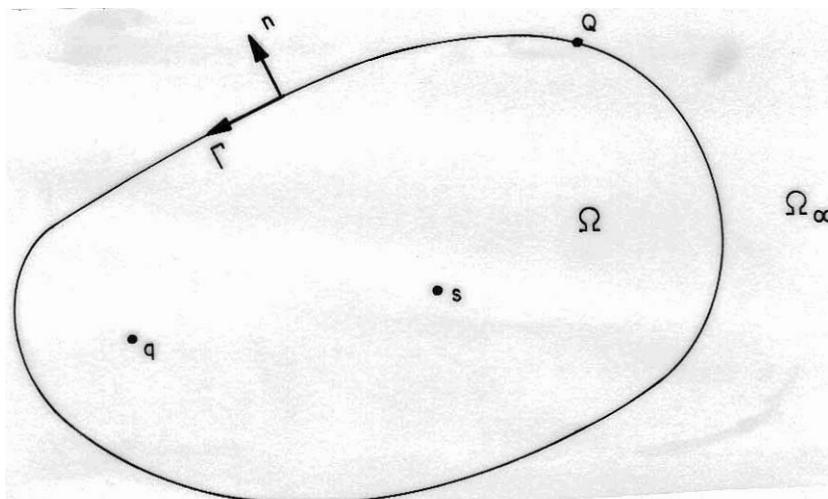


Figura 2.7- Ponto fonte interior, representação esquemática.

#### 2.4.2- Equação integral de contorno para pontos externos

Quando o ponto fonte, gerador da solução fundamental de Kelvin, não pertence nem ao domínio nem ao contorno do corpo estudado, figura 2.8, a aplicação das propriedades (2.20) do Delta de Dirac à equação (2.27) resulta em:

$$0 = \int_{\Gamma} u_{ki}^*(s, Q) p_i(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} u_i(Q) p_{ki}^*(s, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} b_i(q) u_{ki}^*(s, q) d\Omega(q) \quad (2.29)$$

que é a chamada equação integral de contorno para pontos fontes exteriores ao problema físico.

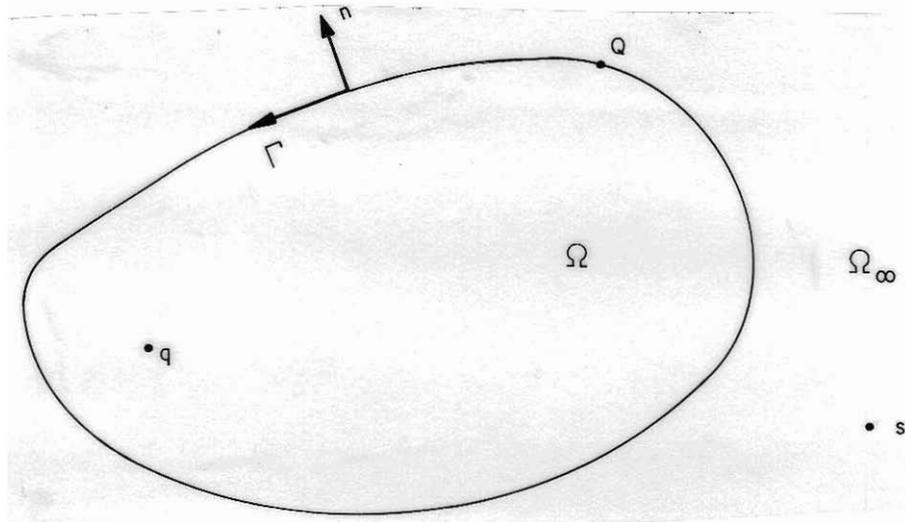


Figura 2.8- Ponto fonte exterior, representação esquemática.

#### 2.4.3- Equação integral de contorno para pontos do contorno.

A expressão geral da Identidade Somigliana completa-se quando se considera o ponto fonte localizado no contorno do corpo em estudo. Tal expressão pode ser obtida através do processo limite [59, 82, 73, 40, 66] descrito a seguir.

A equação integral (2.29) pode ser aplicada a um ponto  $S$  do contorno se o domínio  $\Omega$  do mesmo for decrescido de uma vizinhança infinitesimal  $\Omega_\epsilon$  que contenha  $S$  (fig. 2.9).

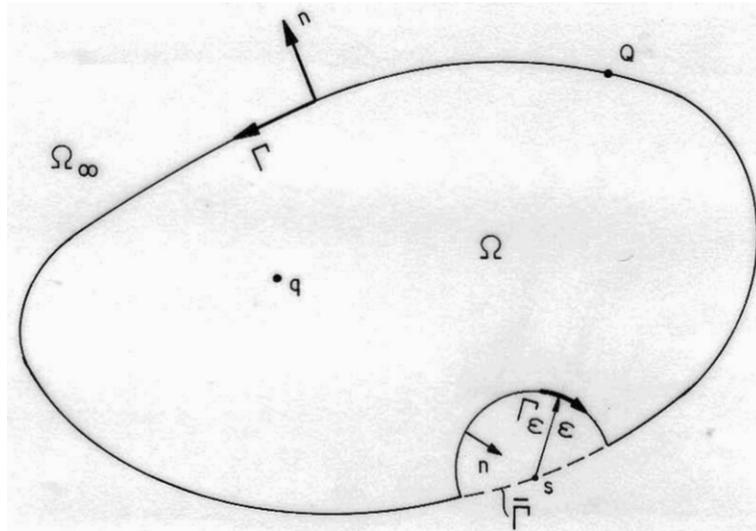


Figura 2.9- Exclusão do ponto fonte  $S$  do contorno ao domínio, representação esquemática.

Com esta modificação o contorno do novo domínio  $\Omega - \Omega_\epsilon$  passa a ser  $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon$ , para os quais a equação (2.29), pode ser aplicada,

$$0 = \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon} u_{ki}^*(S, Q) p_i(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon} p_{ki}^*(S, Q) u_i(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} b_i(q) u_{ki}^*(S, q) d\Omega(q) \quad (2.30)$$

Separando-se as integrais para cada trecho do domínio e do contorno escreve-se:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} u_{ki}^*(S, Q) p_i(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} p_{ki}^*(S, Q) u_i(Q) d\Gamma(Q) + \\
&+ \int_{\Omega} b_i(q) u_{ki}^*(S, q) d\Omega(q) + \int_{\Gamma_\epsilon} u_{ki}^*(S, Q) p_i(Q) d\Gamma(Q) \\
&- \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ki}^*(S, Q) u_i(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Omega_\epsilon} b_i(q) u_{ki}^*(S, q) d\Omega(q) \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Como pode ser visto, nas expressões (2.21) e (2.24) a singularidade dos núcleos das integrais em  $u_{ki}^*$  é  $O(1/r)$  e nas integrais em  $p_{ki}^*$  é  $O(1/r^2)$ . Desta forma para as integrais em  $u_{ki}^*$  tem-se,

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} b_i(q) u_{ki}^*(S, q) d\Omega(q) &= 0 \\
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} u_{ki}^*(S, Q) p_i(Q) d\Gamma(Q) &= 0 \quad (2.32)
\end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} u_{ki}^*(S, Q) p_i(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} u_{ki}^*(S, Q) p_i(Q) d\Gamma(Q)$$

O desenvolvimento do limite sobre  $\Gamma_\epsilon$  para o termo em  $p_{ki}^*$  pode ser feito [66,82] da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ki}^*(S, Q) u_i(Q) d\Gamma_\epsilon(Q) &= \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ki}^*(S, Q) [u_i(Q) - u_i(S)] d\Gamma_\epsilon(Q) + \\
&+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_i(S) \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ki}^*(S, Q) d\Gamma_\epsilon(Q) = -C_{ki} u_i(S) \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Sendo o termo que envolve a diferença de deslocamentos em  $Q$  e  $s$  identicamente nulo, pois o campo dos deslocamentos  $u_j$  respeita a condição de Hölder.

$$[u_j(Q) - u_j(s)] < A.r(S,Q)^\alpha \quad \text{com } A, \alpha > 0 \quad (2.34)$$

Já a integral sobre  $\Gamma-\bar{\Gamma}$  deve ser entendida como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} p_{ij}^*(S,Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S,Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) \quad (2.35)$$

onde o símbolo  $\int$  representa o valor principal de Cauchy.

Os valores assumidos por  $C_{ki}$  são dados por HARTMANN [66] e organizados como segue.

Seja um canto genérico de um corpo como mostra a figura abaixo:

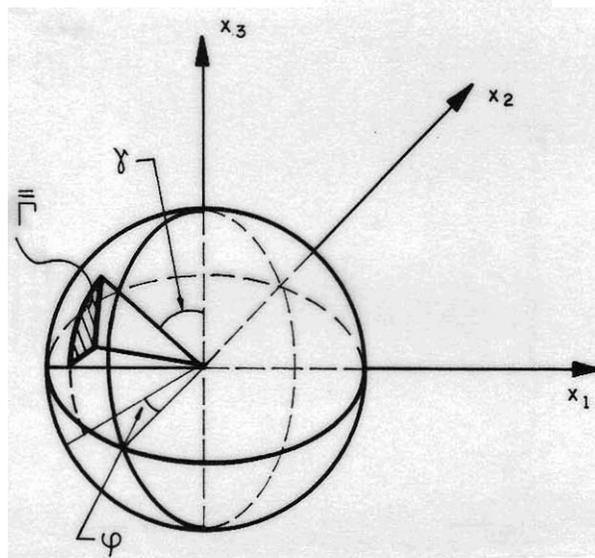


Figura 2.10- Ilustração de um canto genérico de um corpo.

Definidos os campos de varredura, sobre a superfície  $\Gamma$  da esfera unitária, para os ângulos  $\varphi$  e  $\gamma$  escreve-se:

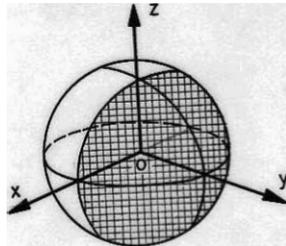
$$\bar{C}_{ki} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} a\text{sen}\gamma + 3\cos^2\varphi\text{sen}^3\gamma & 3\cos\varphi\text{sen}^3\gamma & 3\cos\varphi\text{sen}^2\gamma\cos\gamma \\ \text{sim} & a + 3\text{sen}^2\varphi\text{sen}^3\gamma & 3\text{sen}\varphi\text{sen}^2\gamma\cos\gamma \\ & & a\text{sen}\gamma + 3\cos^2\varphi\text{sen}\varphi \end{bmatrix} d\varphi d\gamma \quad (2.36)$$

sendo  $a = (1-2\nu)$ . Após a avaliação desta integral, deve-se levar o resultado da base  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  para a base global  $(x_1, x_2, x_3)$  por simples rotação, obtendo-se, assim, os valores contidos em  $C_{ki}$ .

Como ilustração apresentam-se os casos mais simples e os seus resultados para  $\bar{C}$ .

a) Semi-esfera (superfície sem angulosidade)

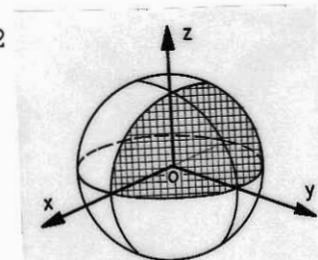
$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq \pi \\ 0 &\leq \gamma \leq \pi \end{aligned}$$



$$\bar{C}_{ki} = \frac{1}{8\pi} \begin{bmatrix} 4\pi & 0 & 0 \\ 0 & 4\pi & 0 \\ 0 & 0 & 4\pi \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

b) Um quarto da esfera

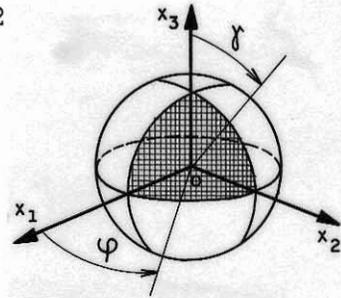
$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq \pi \\ 0 &\leq \gamma \leq \pi/2 \end{aligned}$$



$$\bar{C}_{ki} = \frac{1}{8\pi} \begin{bmatrix} 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi & \frac{2}{1-\nu} \\ 0 & \frac{2}{1-\nu} & 2\pi \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

c) Um oitavo da esfera

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \gamma \leq \pi/2 \end{aligned}$$



$$\bar{C}_{ki} = \frac{1}{8\pi} \begin{bmatrix} \pi & \frac{1}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} \\ \frac{1}{1-\nu} & \pi & \frac{1}{1-\nu} \\ \frac{1}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} & \pi \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Resumidamente a equação integral de contorno fica dada por:

$$\begin{aligned} C_{ki} u_i(S) = \int_{\Gamma} u_{ki}^*(S, Q) p_i(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} u_i(Q) p_{ki}^*(S, Q) d\Gamma(Q) + \\ \int_{\Omega} b_i(q) u_{ki}^*(S, q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (2.40)$$

com  $C_{ki}$  dado como mostrado anteriormente.

#### 2.4.4- Equação integral de contorno para tensões em pontos internos.

Para que se possa considerar o problema elastostático totalmente resolvido, deve-se estar apto a obter todas as componentes de tensão em qualquer ponto do sólido analisado; isto é feito [24, 101] substituindo-se  $u_k$  da expressão (2.28) na expressão (2.12) que relaciona diretamente as tensões ao campo de deslocamento, obtendo-se,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(s) = & \int_{\Gamma} D_{kij}^*(s, Q) p_k(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} S_{kij}^*(s, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) + \\ & + \int_{\Omega} b_k(q) D_{kij}^*(s, q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (2.40')$$

com  $D_{kij}^* = -\sigma_{kij}^*$  (expressão 2.23) e

$$\begin{aligned} S_{kij}^* = & \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^3} \left\{ 3r_{,l} n_l [ (1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - \right. \\ & \left. - 5r_{,i} r_{,j} r_{,k} ] + 3\nu (n_i r_{,i} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) \right. \\ & \left. (3n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ki} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Para se calcular as tensões em pontos do contorno, não é necessário se criar uma expressão semelhante à (2.41), tendo em vista que estas são obtidas com bastante precisão através dos valores conhecidos das tensões de superfície e dos deslocamentos, como descrito no capítulo 4.

#### 2.4.5- Equações integrais para regiões infinitas.

As equações integrais apresentadas até o momento levam em conta apenas corpos finitos. Neste item a validade das mesmas para regiões infinitas e regulares [73] é mostrada.

Seja o corpo tridimensional com uma cavidade (ou mais) definido pelo domínio  $\Omega$ , limitado pelas superfícies  $\Gamma$  e  $\bar{\Gamma}$ , como mostra a figura 10. Para este corpo com  $\bar{r}$  finito se escreve:

$$\begin{aligned} c_{ki} u_i(s) = & \int_{\Gamma} u_{ki}^*(s, Q) p_i(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} u_i(Q) p_{ki}^*(s, Q) d\Gamma(Q) + \\ & + \int_{\Omega} b_i(q) u_{ki}^*(s, q) d\Omega(q) + \int_{\bar{\Gamma}} [u_{ki}^*(s, Q) p_i(Q) + \\ & - u_i(Q) p_{ki}^*(s, Q)] d\bar{\Gamma}(Q) \end{aligned} \quad (2.42)$$

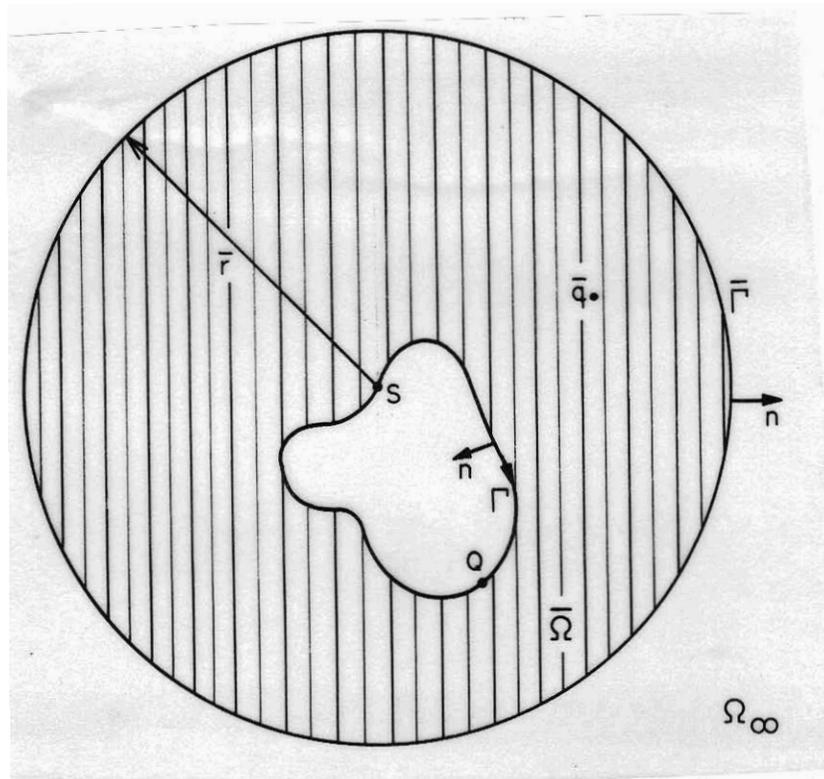


Figura 2.11- Corpo tridimensional com cavidade ou cavidades.

A equação (2.42) apresenta o significado desejado se [24]:

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} [u_{ki}^*(S, Q) p_i(Q) - u_i(Q) p_{ki}^*(S, Q)] d\Gamma(Q) = 0 \quad (2.43)$$

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b_i(q) u_{ki}^*(S, q) d\Omega(q) = A \quad (\text{valor finito}) \quad (2.44)$$

Na expressão (2.43) quando  $Q \in \Gamma_{\bar{r}}$  tem-se:

$$\begin{aligned} d\Gamma(Q) &= |G| d\varphi d\theta & |G| &= o(r^2) \\ u_{ki}^*(S, Q) & & &= o(1/r) \\ p_{ki}^*(S, Q) & & &= o(1/r^2) \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde  $o(\ )$  é o comportamento assintótico de uma função para  $\bar{r} \rightarrow \infty$  ou para  $r \rightarrow 0$ .

Portanto, se pelo menos  $u_i(Q)$  e  $p_i(Q)$  tiverem os comportamentos  $O(1/r)$  e  $O(1/r^2)$  ao infinito, respectivamente, a condição de regularidade (2.43) estará satisfeita. Se a resultante dos esforços aplicados no contorno da cavidade não for auto-equilibrada, do princípio de Saint-Venant [91] resulta  $u_i(Q)$  e  $p_i(Q)$  comportando-se como a solução fundamental de Kelvin. Assim,  $u_i(Q) = O(1/r)$  e  $p_i(Q) = O(1/r^2)$  garantem que ambos os termos de (2.43) tenham zero como limite separadamente, levando ao resultado esperado.

Já para a expressão (2.44) apresentar limite finito têm-se três alternativas:

$$\begin{aligned}
 b_i(q) &= 0 && \text{para } \forall q \in \Omega \\
 b_i(q) &= 0 && \text{para (fig.2.12) } \forall q \in \{\Omega^\infty - \bar{\Omega}\} \\
 b_i(q) &= O(1/r^3) && \text{com } r \rightarrow \infty
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

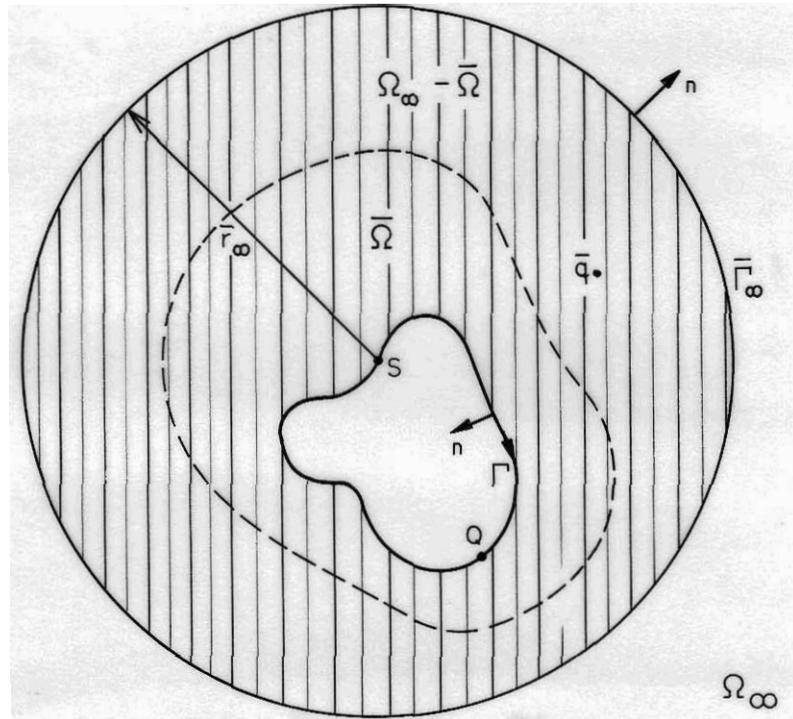


Figura 2.12- Região infinita com cavidade e campo de atuação das forças de domínio.

## CAPÍTULO 3

### TEORIA BÁSICA E EQUAÇÕES INTEGRAIS DA ELASTODINÂMICA

#### 3.1- INTRODUÇÃO

Neste capítulo, os conceitos básicos imprescindíveis para o desenvolvimento da formulação elastodinâmica transiente tridimensional do MEC são apresentados. Como no capítulo anterior, todas as expressões desenvolvidas neste trabalho, estão representadas sob a forma de notação indicial e no sistema de coordenadas cartesianas convencional.

#### 3.2- EQUAÇÕES QUE REGEM A ELASTODINÂMICA

Novamente considera-se que a matéria de um corpo elástico é homogênea, isotrópica e distribuída continuamente em seu volume. Desta maneira, algumas definições e relações importantes da teoria elastostática continuam válidas para a elastodinâmica como, tensão, simetria do tensor de tensão, relação

tensão deformação, relação deformação deslocamento, relação tensão deslocamento, que estão contidas nas equações (2.1) a (2.12).

Já a expressão (2.5) e todas as suas variantes de (2.13) a (2.16), não se aplicam ao caso dinâmico.

Analisando-se agora, o equilíbrio dinâmico do ponto representado pelo sólido elementar (figura 3.1) escreve-se:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.1)$$

onde  $b_i$  são as forças de volume, como o peso próprio ou forças eletromagnéticas,  $\rho$  é a densidade do material, e  $\ddot{u}_i$ , a aceleração do ponto com relação à direção  $x_i$  ( $\partial^2 u_i / \partial t^2$ ).

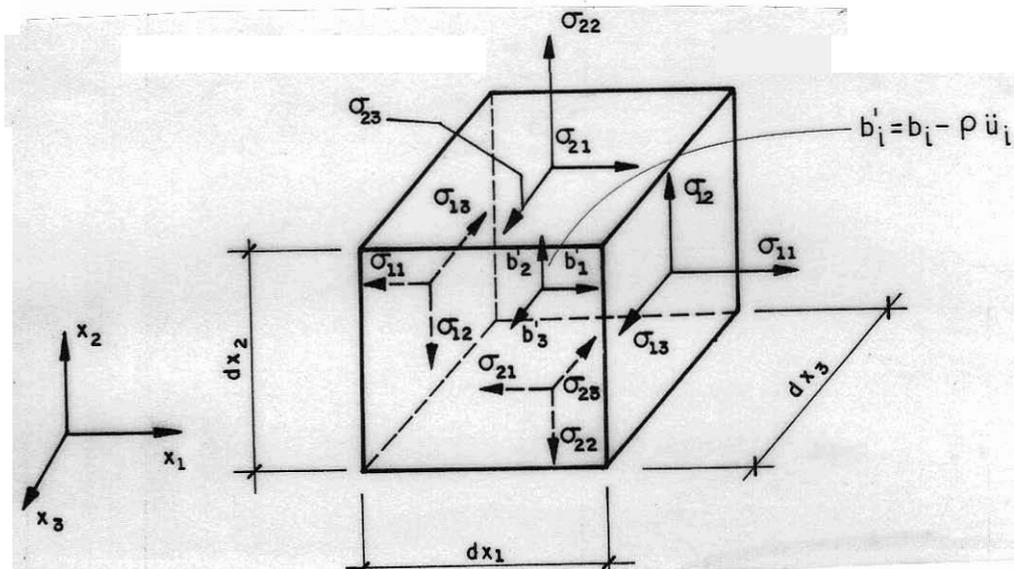


Figura 3.1- Sólido elementar submetido a esforços internos

Substituindo-se na equação (3.1) a relação (2.12) obtém-se a equação geral de Navier - Cauchy [110,26,89].

$$G u_{i,jj} + (\lambda + G) u_{j,ji} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.2)$$

muitas vezes encontrada em sua forma vetorial:

$$\underset{\sim}{G} \nabla^2 \underset{\sim}{u} + (\lambda + \underset{\sim}{G}) \nabla \nabla \underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{\rho} \underset{\sim}{\ddot{u}} \quad (3.3)$$

onde  $\lambda$  e  $G$  são as constantes de Lamé (equação 2.10 e 2.11)

A equação de Navier-Cauchy (3.2) governa, portanto, o comportamento dinâmico de um corpo elástico, homogêneo e isotrópico  $\Omega + \Gamma$ , onde  $\Omega$  define o seu domínio e  $\Gamma$  o seu contorno. Este movimento só fica definido quando se conhecem as condições às quais o corpo foi submetido, a saber:

a) Condições de contorno (mistas):

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{u}_i &= \bar{\underset{\sim}{u}}_i(S, t) & S \in \Gamma_1 \\ \underset{\sim}{p}_i &= \bar{\underset{\sim}{p}}_i(S, t) & S \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde "-" representa valores conhecidos no contorno  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ,  $S$  são os pontos do contorno e  $t$  é o tempo.

b) Condições iniciais:

$$\begin{aligned} \bar{\underset{\sim}{u}}_{i0} &= \underset{\sim}{u}_i(s, 0) \\ \bar{\underset{\sim}{v}}_{i0} &= \dot{\underset{\sim}{u}}_i(s, 0) \end{aligned} \quad t=0, \quad s \in \Omega \quad (3.5)$$

onde o índice "0" significa que os valores prescritos correspondem a  $t=0$ , o símbolo "." representa derivada parcial com relação ao tempo,  $v$  é velocidade e  $s$  são pontos do domínio.

As figuras (3.2) e (3.3) ilustram os conceitos definidos nos parágrafos anteriores.

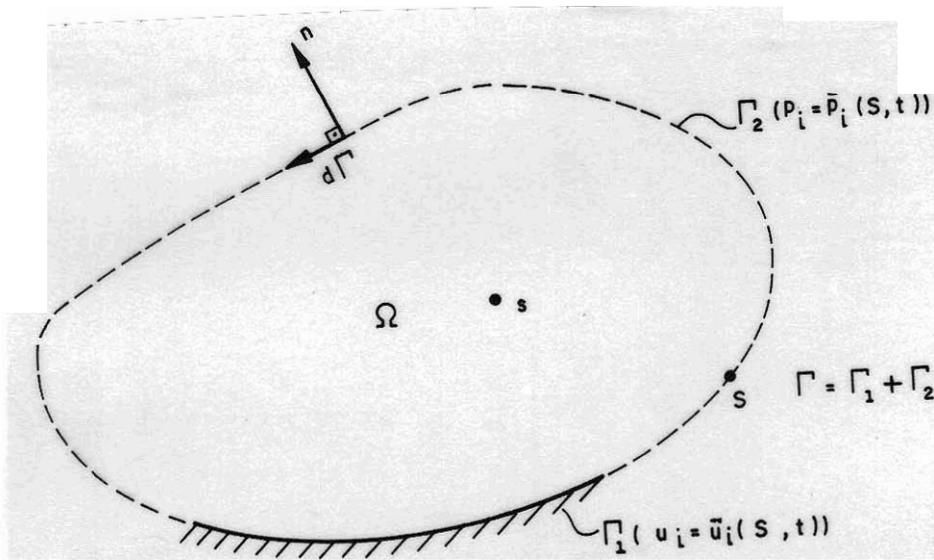


Figura 3.2- Domínio  $\Omega$  com contorno definido  $\Gamma$ , condições de contorno no tempo  $\bar{p}_i$  e  $\bar{u}_i$  em  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_1$ .

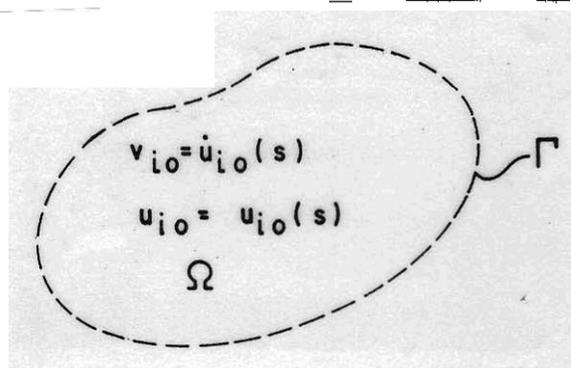


Figura 3.3- Domínio  $\Omega$  com deslocamentos e velocidades prescritas para todos os pontos  $s \in \Omega$ .

A equação geral de Navier-Cauchy (3.2), pode ser escrita em função das velocidades de propagação das ondas longitudinais ( $C_1$ ) e distorcionais ( $C_2$ ) no meio elástico.

$$C_2^2 u_{i,jj} + (C_1^2 - C_2^2) u_{j,ji} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.6a)$$

com

$$\begin{aligned} C_1^2 &= (\lambda + 2G) / \rho \\ C_2^2 &= G / \rho \end{aligned} \quad (3.6b)$$

### 3.3- SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

A formulação do MEC para a elastodinâmica, que é desenvolvida neste trabalho, usa como solução fundamental geral a devida a STOKES [130] no domínio do tempo. Outras técnicas, que empregam a solução fundamental de KELVIN [133], podem ser aplicadas, tais como, análise do problema dinâmico no espaço transformado de Laplace [75,17,94,92,93] e a técnica da reciprocidade dual [106,105,23,109,107,33].

#### 3.3.1- Solução fundamental geral

A solução fundamental de STOKES [130] representa o comportamento dinâmico de um meio elástico infinito submetido a uma força de domínio, dependente do tempo, concentrada em um ponto do espaço  $s$  e atuando em uma direção  $k$ , que se traduz pela equação (3.6) fazendo-se,

$$b_{ki} = f(t) \cdot \delta(q-s) \delta_{ki} \quad (3.7)$$

A equação (3.6), portanto, transforma-se em:

$$C_2^2 u_{i,jj}^* + (C_1^2 - C_2^2) u_{j,ji}^* + f(t) \delta(q-s) \delta_{ki} = \rho \ddot{u}_i^* \quad (3.8)$$

cuja solução é:

$$u_{ki}^* (q,t;s/f) = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \left( \frac{3r_i r_k}{r^3} - \frac{\delta_{ki}}{r} \right) \int_{C_1^{-1}}^{C_2^{-1}} \alpha f(t-\alpha r) d\alpha + \right. \\ \left. + \frac{r_i r_k}{r^3} \left[ \frac{1}{C_1^2} f\left(t - \frac{r}{C_1}\right) - \frac{1}{C_2^2} f\left(t - \frac{r}{C_2}\right) \right] + \frac{\delta_{ki}}{r C_2^2} f\left(t - \frac{r}{C_2}\right) \right\} \quad (3.9)$$

Aplicando-se a Lei de Hooke, equação (2.12), sobre o campo dos deslocamentos, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{kij}^*(q, t; s/f) &= \frac{1}{4\pi} \left\{ -6 \cdot C_2^2 \left[ \frac{r_i r_j r_k}{r^5} - \frac{\delta_{ij} r_k + \delta_{ki} r_j + \delta_{jk} r_i}{r^3} \right] \right. \\
 &\int_{C_1^{-1}}^{C_2^{-1}} \alpha f(t - \alpha r) d\alpha + 2 \left[ 6 \frac{r_i r_j r_k}{r^5} - \frac{\delta_{ki} r_j + \delta_{ij} r_k + \delta_{jk} r_i}{r^3} \right] \\
 &\left[ f\left(t - \frac{r}{C_2}\right) - \frac{C_2^2}{C_1^2} f\left(t - \frac{r}{C_1}\right) \right] + 2 \frac{r_i r_j r_k}{r^4 C_2} \left[ \dot{f}\left(t - \frac{r}{C_2}\right) - \right. \\
 &+ \frac{C_2^3}{C_1^3} \dot{f}\left(t - \frac{r}{C_1}\right) \left. \right] - \frac{r_k \delta_{ij}}{r^3} \left( 1 - 2 \frac{C_2^2}{C_1^2} \right) \left[ f\left(t - \frac{r}{C_1}\right) + \right. \\
 &+ \frac{r}{C_1} \dot{f}\left(t - \frac{r}{C_1}\right) \left. \right] - \frac{\delta_{ki} r_j + \delta_{jk} r_i}{r^3} \left[ f\left(t - \frac{r}{C_2}\right) + \right. \\
 &\left. + \frac{r}{C_2} \dot{f}\left(t - \frac{r}{C_2}\right) \right] \left. \right\} \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Substituindo-se (3.10) na relação (2.7) obtém-se, em  $q$ , as componentes  $i$  da força de superfície devida a carga concentrada em  $s$  aplicada na direção  $k$ , em uma superfície definida pelos cossenos diretores  $n_j$  de um versor normal a esta [72, 44, 74]:

$$p_{ki}^*(q, t; s/f) = \sigma_{kij}^*(q, t; s/f) n_j \quad (3.11)$$

Independentemente da variação temporal da solicitação WHEELER e STERNBERG [153] demonstraram que os comportamentos dos campos fundamentais quando  $r \rightarrow 0$  são:

$$u_{ki}^* (q,t;s/f) = 0 \quad (1/r) \quad (3.12)$$

$$p_{ki}^* (q,t;s/f) = 0 \quad (1/r^2)$$

Além disso mostraram de maneira bastante segura que o processo limite, equivalente ao da expressão (2.33), ilustrado pela figura (2.9) é:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_i(s, \tau) \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ki}^*(Q, t, S/g(\tau)) d\Gamma(Q) = -g(\tau) C_{ki} u_i(s, \tau) \quad (3.12')$$

Dois casos particulares do Estado de Stokes são empregados neste trabalho para se desenvolver a formulação transiente do MEC: solução fundamental usual e solução fundamental alternativa.

### 3.3.2- Solução fundamental usual

Usualmente se adota  $f(t) = \delta(t-\tau)$  como variação temporal da solicitação dinâmica, ficando:

$$b_{ki} = \delta(t-\tau) \delta(q-s) \delta_{ki} \quad (3.13)$$

representando um impulso unitário concentrado em um determinado ponto do espaço  $s$  na direção  $k$  e no instante  $\tau$ . Desenvolvendo-se os termos integrais de (3.9) e (3.10) tem-se:

$$\begin{aligned}
u_{ki}^*(q, t; s, \tau) = & \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \frac{t'}{r^2} \left( \frac{3r_i r_k}{r^3} - \frac{\delta_{ki}}{r} \right) \left[ H\left(t' - \frac{r}{C_1}\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. - H\left(t' - \frac{r}{C_2}\right) \right] + \frac{r_i r_k}{r^3} \left[ \frac{1}{C_1^2} \delta\left(t' - \frac{r}{C_1}\right) - \frac{1}{C_2^2} \delta\left(t' - \frac{r}{C_2}\right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\delta_{ki}}{r C_2^2} \delta\left(t' - \frac{r}{C_2}\right) \right\} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{kij}^*(q, t; s, \tau) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ -6 \cdot C_2^2 \left[ 5 \frac{r_i r_j r_k}{r} - \frac{r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ki} + r_k \delta_{ij}}{r^3} \right] \right. \\
& \frac{t'}{r^2} \left[ H\left(t' - \frac{r}{C_1}\right) - H\left(t' - \frac{r}{C_2}\right) \right] + 2 \left[ 6 \frac{r_i r_j r_k}{r^5} \right. \\
& \left. \frac{r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ki} + r_k \delta_{ij}}{r^3} \right] \left[ \delta\left(t' - \frac{r}{C_2}\right) - \left(\frac{C_2^2}{C_1^2}\right) \delta\left(t' - \frac{r}{C_1}\right) \right] + \\
& 2 \frac{r_i r_j r_k}{C_2 r^4} \left[ \dot{\delta}\left(t' - \frac{r}{C_2}\right) - \left(\frac{C_2^3}{C_1^3}\right) \dot{\delta}\left(t' - \frac{r}{C_1}\right) \right] - \frac{r_k \delta_{ij}}{r^3} \left[ 1 - 2 \frac{C_2^2}{C_1^2} \right] \\
& \left[ \delta\left(t' - \frac{r}{C_1}\right) + \frac{r}{C_1} \dot{\delta}\left(t' - \frac{r}{C_1}\right) \right] - \frac{\delta_{ki} r_j + \delta_{jk} r_i}{r^3} \left[ \delta\left(t' - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{r}{C_2}\right) + \frac{r}{C_2} \dot{\delta}\left(t' - \frac{r}{C_2}\right) \right] \quad (3.15)
\end{aligned}$$

onde  $t' = t - \tau$ .

### 3.3.3- Solução fundamental alternativa

Chamada assim por gerar a formulação alternativa proposta nesta tese, para a análise dinâmica transiente no domínio do tempo através do MEC. Sua derivação da solução de Stokes se dá pela adoção de  $f(t) = H(t - \tau)/\Delta t$  com  $\Delta t$  constante e  $H(\ )$  função de Heaveside,

$$b_{ki} = \frac{H(t-\tau)}{\Delta t} \delta(q-s) \delta_{ki} \quad (3.16)$$

representando uma carga de intensidade  $1/\Delta t$  que passa a agir, de maneira súbita, a partir de um instante  $\tau$ , em um ponto  $s$  de um meio elástico infinito, na direção  $K$ . Resolvendo-se os termos integrais de (3.9) e (3.10) tem-se:

$$\begin{aligned} u_{ki}^*(q, t; s, \tau) = & \frac{1}{4\pi\rho\Delta t} \left\{ \left( \frac{3r_i r_k}{r^3} - \frac{\delta_{ki}}{r} \right) \frac{1}{2r^2} \left[ \left( t'^2 - \frac{r^2}{c_1^2} \right) \right. \right. \\ & H\left( t' - \frac{r}{c_1} \right) - \left( t'^2 - \frac{r^2}{c_2^2} \right) H\left( t' - \frac{r}{c_2} \right) \left. \right] + \frac{r_i r_k}{r^3} \left[ \frac{1}{c_1^2} H\left( t' - \frac{r}{c_1} \right) - \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{c_2^2} H\left( t' - \frac{r}{c_2} \right) \right] + \frac{\delta_{ki}}{rc_2^2} H\left( t' - \frac{r}{c_2} \right) \right\} \quad (3.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{kij}^* = & \frac{1}{4\pi\Delta t} \left\{ -3c_2^2 \left[ 5 \frac{r_i r_j r_k}{r^5} - \frac{\delta_{ij} r_k + \delta_{ki} r_j + \delta_{jk} r_i}{r^3} \right] \right. \\ & \left[ \left( t'^2 - \frac{r^2}{c_1^2} \right) H\left( t' - \frac{r}{c_1} \right) - \left( t'^2 - \frac{r^2}{c_2^2} \right) H\left( t' - \frac{r}{c_2} \right) \right] + \\ & + 2 \left[ 6 \frac{r_i r_j r_k}{r^5} - \frac{r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ki} + r_k \delta_{ij}}{r^3} \right] \left[ H\left( t' - \frac{r}{c_2} \right) + \right. \\ & - \left. \left( \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) H\left( t' - \frac{r}{c_1} \right) \right] + 2 \frac{r_i r_j r_k}{r^4 c_2} \left[ \delta\left( t' - \frac{r}{c_2} \right) + \right. \\ & - \left. \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^3 \delta\left( t' - \frac{r}{c_1} \right) \right] - \frac{r_k \delta_{ij}}{r^3} \left[ 1 - 2 \left( \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) \right] \left[ H\left( t' - \frac{r}{c_1} \right) + \right. \\ & + \left. \frac{r}{c_1} \delta\left( t' - \frac{r}{c_1} \right) \right] - \frac{\delta_{ki} r_j + \delta_{jk} r_i}{r^3} \left[ H\left( t' - \frac{r}{c_2} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{r}{c_2} \delta\left( t' - \frac{r}{c_2} \right) \right] \right\} \quad (3.18) \end{aligned}$$

onde  $t' = t - \tau$ .

### 3.4- EQUAÇÕES INTEGRAIS

No item 3.2 apresentam-se as equações diferenciais que regem os problemas da elastodinâmica, no item 3.3, mostraram-se as soluções fundamentais, para determinados tipos de problemas, muito úteis na elaboração do MEC.

Neste item pretende-se aplicar a Solução Fundamental de Stokes [130], sobre o Teorema de Graffi [63], para escrever a Identidade de Love [88], ponto de partida para as formulações transientes dinâmicas do MEC.

#### 3.4.1- Teorema da reciprocidade

Este teorema é a versão dinâmica do Teorema de Betti (equação 2.26) para a elastostática. Ele foi demonstrado por GRAFFI [63] para domínios finitos e estendido para domínios infinitos por WHEELER e STERNBERG [153]. Seja  $\Omega$  uma região regular com contorno  $\Gamma$  e dois estados elásticos possíveis definidos por  $b_i$ ,  $u_i$  e  $\sigma_{ij}$  e  $b'_i$ ,  $u'_i$  e  $\sigma'_{ij}$ , respectivamente. O teorema de Betti é escrito como:

$$\int_{\Omega} (u'_i \sigma_{ij,j} - u_i \sigma'_{ij,j}) d\Omega = \int_{\Gamma} (u'_i p_i - u_i p'_i) d\Gamma \quad (3.19)$$

Como estes possíveis estados elásticos podem ser estados elastodinâmicos, assumidos a qualquer instante, escolhe-se avaliar o primeiro em um instante  $\tau$  e o segundo em um instante  $t-\tau$ . Integra-se agora o teorema de Betti assim descrito no intervalo de  $0-t$ . Levando-se em conta a expressão (3.1) e o fato de,

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \{ \ddot{u}_i(q, \tau) u'_i(q, t-\tau) - u_i(q, \tau) \ddot{u}'_i(q, t-\tau) \} \rho \, d\tau \\
&= \rho \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \dot{u}_i(q, \tau) u'(q, t-\tau) - u_i(q, \tau) \dot{u}'_i(q, t-\tau) \} d\tau = \\
&= \rho \{ \dot{u}_i(q, \tau) u'(q, t-\tau) - u_i(q, \tau) \dot{u}'_i(q, t-\tau) \} \Big|_0^t \quad (3.20)
\end{aligned}$$

obtém-se o Teorema de Graffi [72, 44, 74]:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Gamma} [u_i(q, \tau) b'_i(q, t-\tau) - u'_i(q, t-\tau) b_i(q, \tau)] d\Gamma d\tau + \\
&+ \rho \int_{\Omega} \{ \dot{u}_i(q, t) u'_i(q, 0) + u_i(q, t) \dot{u}'_i(q, 0) \} d\Omega = \\
&= \int_0^t \int_{\Gamma} \{ u'_i(Q, t-\tau) p_i(Q, \tau) - u_i(Q, \tau) p'_i(Q, t-\tau) \} d\Gamma d\tau + \\
&+ \rho \int_{\Omega} \{ \dot{u}'_i(q, t) u_i(q, 0) + u'_i(q, t) \dot{u}_i(q, 0) \} d\Omega d\tau \quad (3.21)
\end{aligned}$$

em sua forma indicial, seguindo as notações já definidas anteriormente.

Todas as aplicações abordadas nesta tese, estão restritas a estados elastodinâmicos que possuem condições iniciais nulas, desta forma a equação (3.21) se resume a:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Omega} [u_i(q, \tau) b'_i(q, t-\tau) - u'_i(q, t-\tau) b_i(q, \tau)] d\Omega d\tau = \\
&= \int_0^t \int_{\Gamma} \{ u'_i(Q, t-\tau) p_i(Q, \tau) - u_i(Q, \tau) p'_i(Q, t-\tau) \} d\Gamma d\tau \quad (3.22)
\end{aligned}$$

### 3.4.2- Equação integral de contorno "usual"

Quando um dos estados elastodinâmicos da equação (3.22) é a solução fundamental "usual" (equação 3.4) escreve-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \int_{\Omega} [u_i(q, \tau) \delta(t-\tau) \delta(q-s) \delta_{ki}] d\Omega d\tau = \\
 & = \int_0^t \int_{\Omega} u_{ki}^*(q, t; s, \tau) b_i(t, \tau) d\Omega d\tau + \\
 & + \int_0^t \int_{\Gamma} u_{ki}^*(Q, t; s, \tau) p_i(Q, \tau) d\Gamma d\tau - \\
 & + \int_0^t \int_{\Gamma} u_i(Q, \tau) p_{ki}^*(Q, t; s, \tau) d\Gamma d\tau \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Analogamente ao que se desenvolveu nos itens 2.4.1, 2.4.2 e 2.4.3, utilizando-se as propriedades do Delta de Dirac e levando-se em conta o comportamento limite do Estado de Stokes (equações 3.12 e 3.12'), chega-se a:

$$\begin{aligned}
 C_{ki} u_i(s, t) & = \int_0^t \int_{\Gamma} u_{ki}^*(Q, t; s, \tau) p_i(Q, \tau) d\Gamma d\tau - \\
 & - \int_0^t \int_{\Gamma} u_i(Q, \tau) p_{ki}^*(Q, t; s, \tau) d\Gamma d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} u_{ki}^*(q, t; s, \tau) b_i(q, \tau) d\Omega d\tau \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

com  $C_{ki}$  dado por

$$\begin{cases} 0 & \text{para } s \notin \Omega + \Gamma \\ \delta_{ki} & \text{para } s \in \Omega \end{cases} \quad (3.25)$$

e para  $s \in \Gamma$ ,  $C_{ki}$  assume os valores dados na expressão (2.36).

### 3.4.3- Equação integral de contorno alternativa

Quando um dos estados elastodinâmicos da equação (3.22) é a solução fundamental "alternativa" (equação 3.17) escreve-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \int_{\Omega} [u_i(q, \tau) \frac{H(t-\tau)}{\Delta t} \delta(q-s) \delta_{ki}] d\Omega d\tau = \\
 & = \int_0^t \int_{\Omega} u_{ki}^*(q, t; s, \tau) b_i(q, \tau) \cdot d\Omega d\tau + \\
 & + \int_0^t \int_{\Gamma} u_{ki}^*(Q, t; s, \tau) p_i(Q, \tau) d\Gamma d\tau - \\
 & + \int_0^t \int_{\Gamma} u_i(Q, \tau) p_{ki}^*(Q, t; s, \tau) d\Gamma d\tau \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

Para pontos  $s$  pertencentes ao domínio, exteriores, ou do contorno, utilizando-se as propriedades descritas nos itens anteriores e levando em consideração que  $t > \tau$  e portanto para o intervalo de integração considerado  $h(t-\tau)=1$ , tem-se como equação integral básica:

$$\begin{aligned}
 C_{ki} \int_0^t \frac{u_i(s, \tau)}{\Delta t} d\tau & = \int_0^t \int_{\Omega} u_{ki}^*(Q, t; s, \tau) p_i(Q, \tau) d\Gamma d\tau - \\
 - \int_0^t \int_{\Gamma} u_i(Q, \tau) p_{ki}^*(Q, t; s, \tau) d\Gamma d\tau & + \int_0^t \int_{\Omega} u_{ki}^*(q, t; s, \tau) b_i(q, \tau) d\Omega d\tau \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

com  $C_{ki}$  dados como em (3.25)

No capítulo 5, as equações integrais (3.24) e (3.27) são transformadas em equações algébricas, dando origem às duas formulações do MEC utilizadas neste trabalho.

## CAPÍTULO 4

### MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (FORMULAÇÃO ESTÁTICA)

#### 4.1- INTRODUÇÃO

No capítulo 2, a equação integral de contorno (2.40) que governa o comportamento estático dos corpos elástico homogêneos tridimensionais, é derivada. Para que o conjunto de problemas possíveis de serem analisados não se restrinja àqueles que possuem solução analiticamente determinada, surge a necessidade de se transformar a equação integral em um conjunto de equações algébricas adequadas à análise numérica.

Isto se faz, de maneira geral, através da discretização do contorno  $\Gamma$  do corpo analisado em elementos  $\Gamma_j$ , exatos ou aproximados, onde se interpolam os valores, incógnitos ou conhecidos dos deslocamentos e forças de superfície, por funções polinomiais (ver figura 4.1) associadas a um certo número de nós, ou pontos nodais, do elemento. Os valores ligados aos nós são chamados valores nodais.

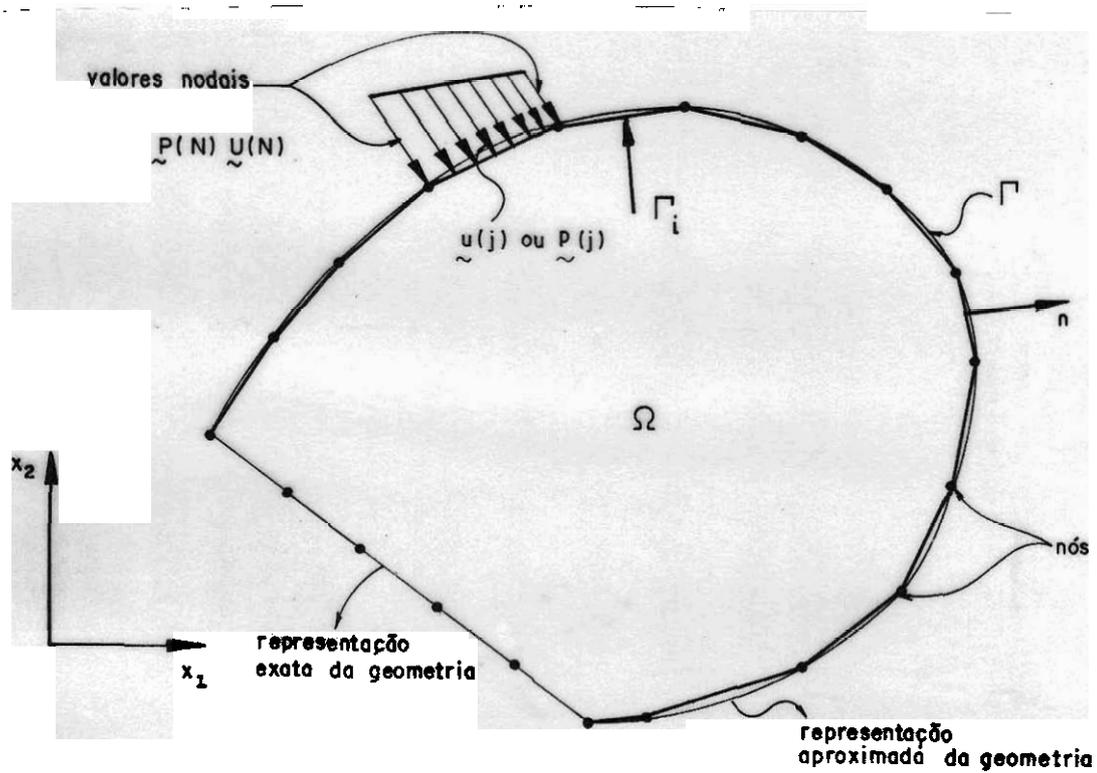


Figura 4.1- Discretização do contorno em elementos, corte esquemático.

É claro que, se tratando de corpos tridimensionais, o contorno do corpo é uma superfície, e os elementos que a discretizam devem também representar pequenas superfícies, planas ou curvas.

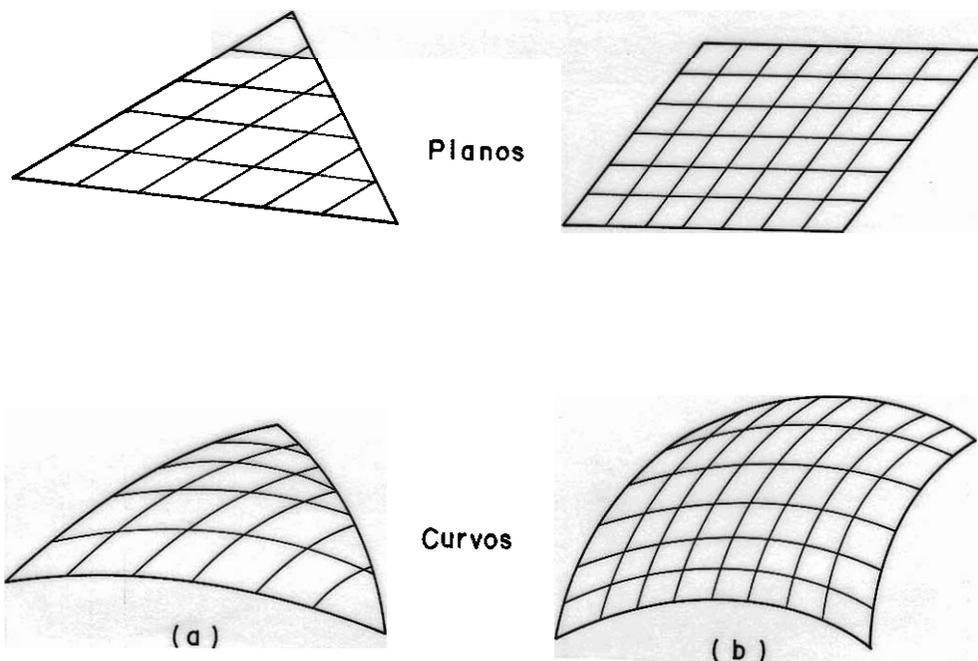


Figura 4.2- Tipos de elementos quanto a aproximação da geometria

A figura 4.3 ilustra o contorno de um corpo tridimensional discretizado por elementos do tipo que são usados neste trabalho.

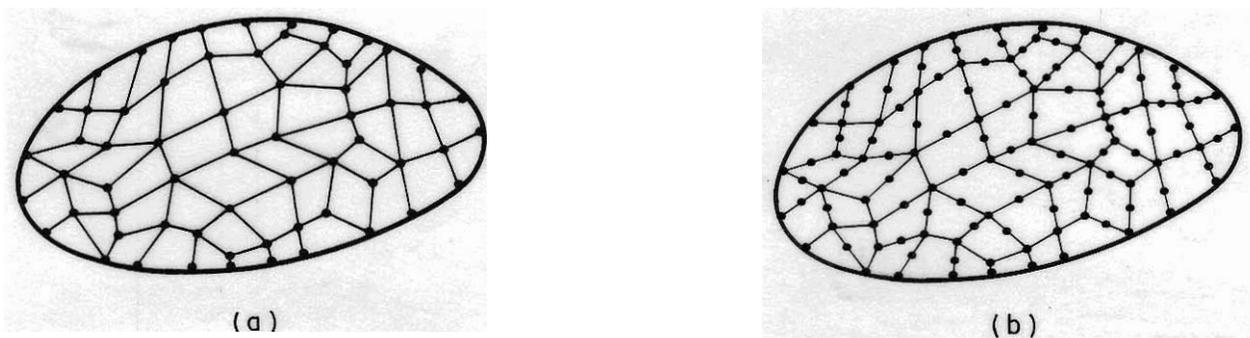


Figura 4.3- Contorno discretizado em: a) Quadrangular plano com aproximação linear. b) Quadrangular plano com aproximação quadrática.

## 4.2- ELEMENTOS DE CONTORNO

Nesta seção descrevem-se as aproximações da geometria e das variáveis físicas do problema para cada elemento utilizado.

### 4.2.1- Elemento quadrangular plano com aproximação linear

#### a) Aproximação da geometria

Conhecidas as coordenadas de quatro pontos coplanares pertencentes ao contorno do corpo (figura 4.4), as coordenadas de qualquer ponto deste elemento podem ser determinadas como segue:

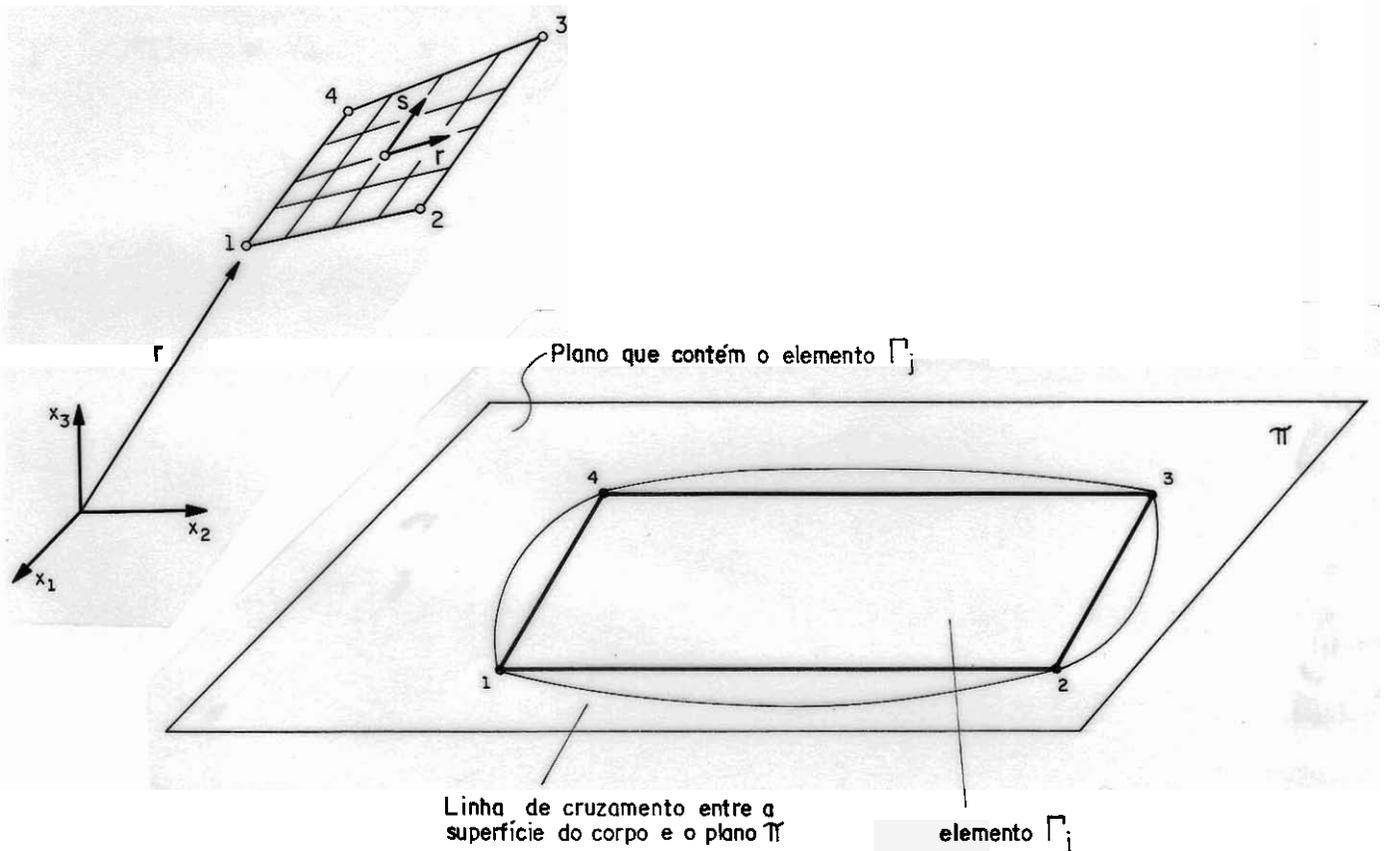


Figura 4.4- Definição da geometria do elemento linear

$$x_i(Q) = \phi_k(r,s) X_i^k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (4.1)$$

onde  $x_i(Q)$  é a coordenada  $i$  do ponto  $Q$  pertencente ao elemento  $\Gamma_j$ ,  $X_i^k$  é a coordenada  $i$  do nó  $k$  e  $\phi_k(r,s)$  é a função aproximadora associada ao nó  $k$ , que pode ser escrita em termos de coordenadas homogêneas (figura 4.5).

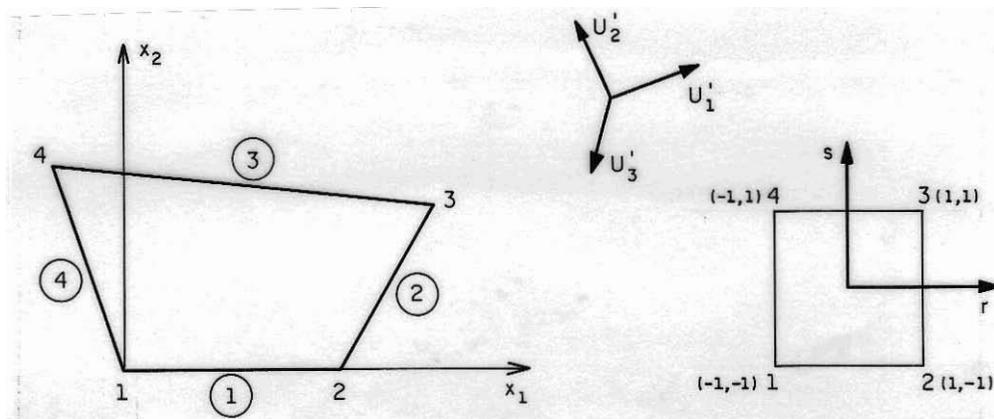


Figura 4.5- Elemento quadrangular com aproximação linear, coordenadas locais e coordenadas homogêneas.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4} (1-r) (1-s) \\ \phi_2 &= \frac{1}{4} (1+r) (1-s) \\ \phi_3 &= \frac{1}{4} (1+r) (1+s) \\ \phi_4 &= \frac{1}{4} (1-r) (1+s) \end{aligned} \quad (4.2)$$

A equação (4.1) pode ser escrita matricialmente como:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^Q = \begin{bmatrix} (\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \\ x_1^4 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \\ x_2^4 \\ x_3^1 \\ x_3^2 \\ x_3^3 \\ x_3^4 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

#### b) Aproximação das variáveis

A discretização das variáveis é feita da mesma forma que a discretização geométrica, ou seja, pode-se aproximar os valores dos deslocamentos ( $u(Q)$ ) e das forças de superfícies ( $p(Q)$ ) para pontos  $Q$  pertencentes ao elemento  $\Gamma_j$ , parametrizando-os com relação aos seus valores nodais:

$$\begin{aligned}
 u_i(Q) &= \phi_k(r,s) U_i^k \\
 (i = 1,2,3) \quad (k=1,2,3,4) & \quad (4.4) \\
 p_i(Q) &= \phi_k(r,s) P_i^k
 \end{aligned}$$

A figura 4.6 mostra o comportamento aproximado das variáveis físicas sobre os elementos de contorno.

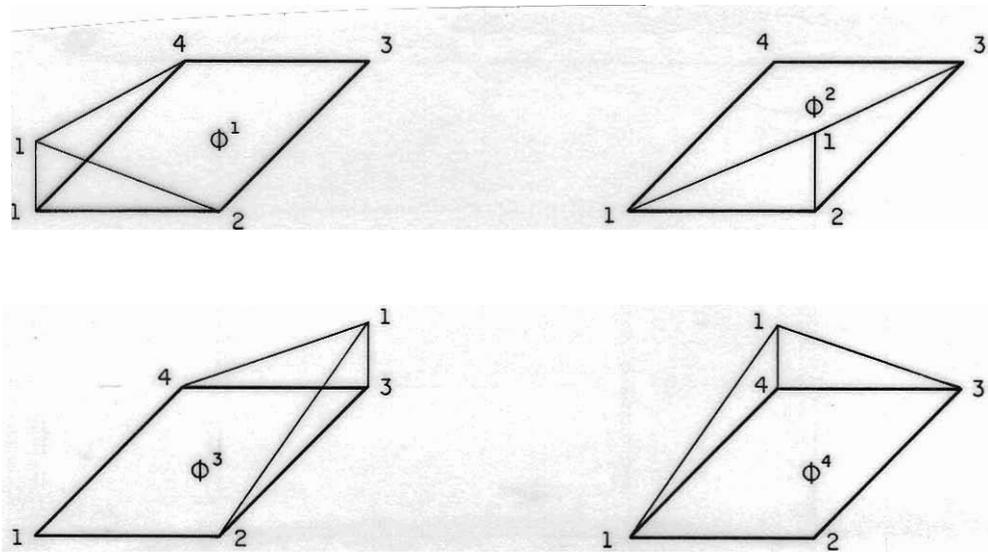


Figura 4.6- Aproximação das variáveis sobre o elemento linear.

#### 4.2.2- Elemento quadrático

##### a) Aproximação da geometria

Neste caso, o elemento utilizado é composto por oito nós, estes nós não precisam necessariamente pertencer a um mesmo plano porém devem estar contidos na superfície do corpo, figura 4.7.

Conhecidas as coordenadas destes oito nós, as coordenadas de um ponto qualquer, pertencente ao elemento, são dadas por:

$$x_i(Q) = \phi_k(r,s) X_i^k \quad \begin{matrix} (i = 1,2,3) \\ (k = 1, \dots, 8) \end{matrix} \quad (4.1')$$

com:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{4} (1-r) (1-s) (-r-s-1) \\
\phi_2 &= \frac{1}{4} (1+r) (1-s) (r-s-1) \\
\phi_3 &= \frac{1}{4} (1+r) (1+s) (r+s-1) \\
\phi_5 &= \frac{1}{2} (1-r^2) (1-s) \\
\phi_6 &= \frac{1}{2} (1-s^2) (1+r) \\
\phi_7 &= \frac{1}{2} (1-r^2) (1+s) \\
\phi_8 &= \frac{1}{2} (1-s^2) (1-r)
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

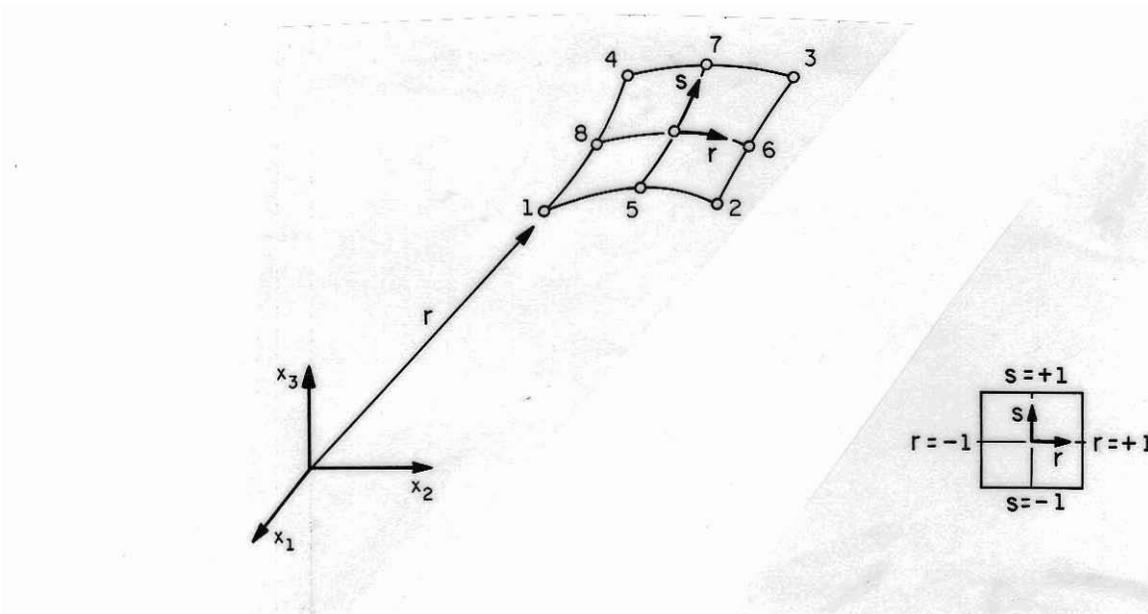


Figura 4.7- Definição geométrica do elemento quadrático e coordenadas homogêneas.

## b) Aproximação das variáveis

Novamente, as variáveis físicas ( $u(Q)$  e  $p(Q)$ ) são interpoladas sobre o elemento  $\Gamma_j$ , da mesma forma que a geometria. Assim, para um ponto  $Q$  qualquer do elemento, tem-se:

$$\begin{aligned} u_i(Q) &= \phi_k(r,s) U_i^k \\ (i = 1,2,3) \quad (k=1,\dots,8) & \end{aligned} \quad (4.6)$$
$$p_i(Q) = \phi_k(r,s) P_i^k$$

A figura 4.8 mostra algumas funções de forma para o elemento quadrático.

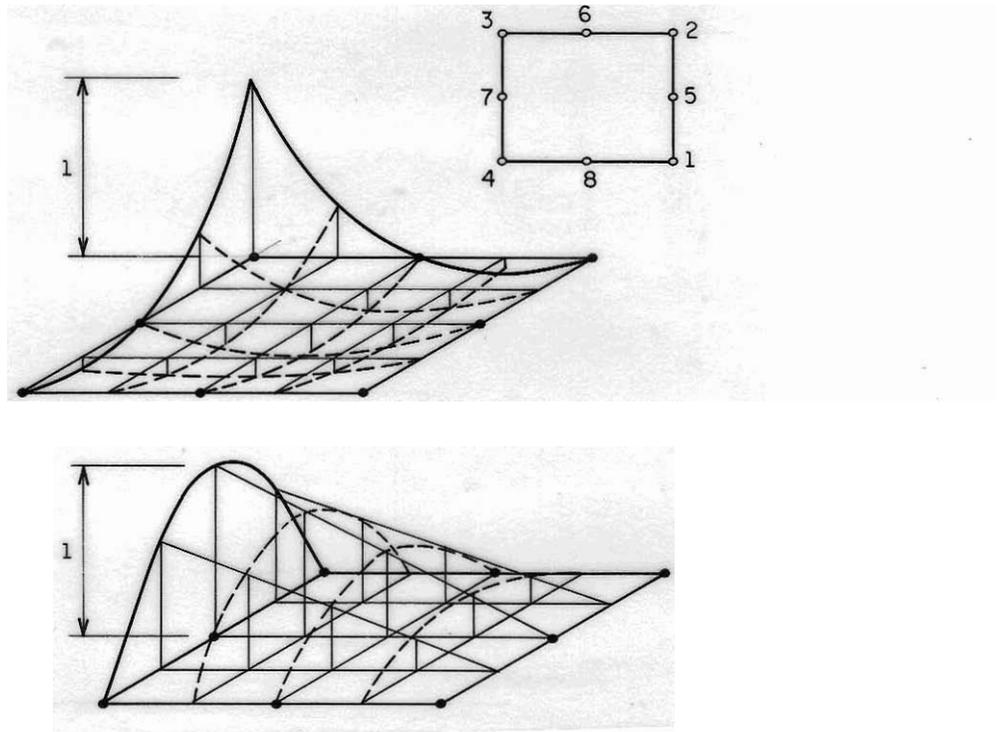


Figura 4.8- Aproximação de variáveis sobre o elemento quadrático

Apesar do elemento quadrático representar melhor geometrias complexas (figura 4.7), como neste trabalho a preocupação central é a discretização da superfície do solo, adota-se o elemento quadrático plano assumindo pontos nodais

coplanares. Desta forma, pode-se adotar como aproximação da geometria as funções interpoladoras do elemento linear.

### c) Relação entre coordenadas globais e homogêneas

Já foram definidas as funções que levam das coordenadas adimensionais  $(r,s)$  para as globais  $(x_1, x_2, x_3)$ . Porém, para que se aplique uma integração sobre um domínio transformado, precisa-se conhecer o Jacobiano de tal transformação, que irá fornecer a magnitude da alteração de área ocorrida ao se efetuar a mesma.

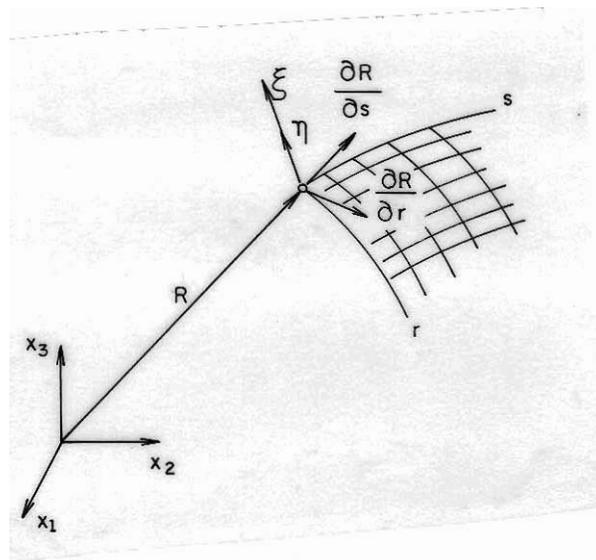


Figura 4.9- Sistemas de coordenadas

Pela regra da cadeia, escrevem-se as derivadas de  $u$  como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{pmatrix}^Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial r} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_3}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

O diferencial de área sobre a superfície é igual ao módulo do vetor normal ( $\xi$ ) ao plano, que é definido pela transformação (4.7),

$$\det \left( J(r, s) \right) = |g_1, g_2, g_3| = (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)^{1/2} \quad (4.8)$$

onde:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\partial x_2}{\partial r} \frac{\partial x_3}{\partial s} - \frac{\partial x_3}{\partial r} \frac{\partial x_2}{\partial s} \\ g_2 &= \frac{\partial x_1}{\partial s} \frac{\partial x_3}{\partial r} - \frac{\partial x_3}{\partial s} \frac{\partial x_1}{\partial r} \\ g_3 &= \frac{\partial x_1}{\partial r} \frac{\partial x_2}{\partial s} - \frac{\partial x_2}{\partial r} \frac{\partial x_1}{\partial s} \end{aligned} \quad (4.9)$$

#### 4.3- CONTINUIDADE E DESCONTINUIDADE DA DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO

A discretização do contorno do corpo em análise é classificada em descontínua ou contínua, conforme a existência ou não de descontinuidades devido a imposição de deslocamentos de contorno ou forças de superfície ao mesmo. Estes dois tipos de descontinuidades podem ser vistos esquematicamente na figura 4.10.

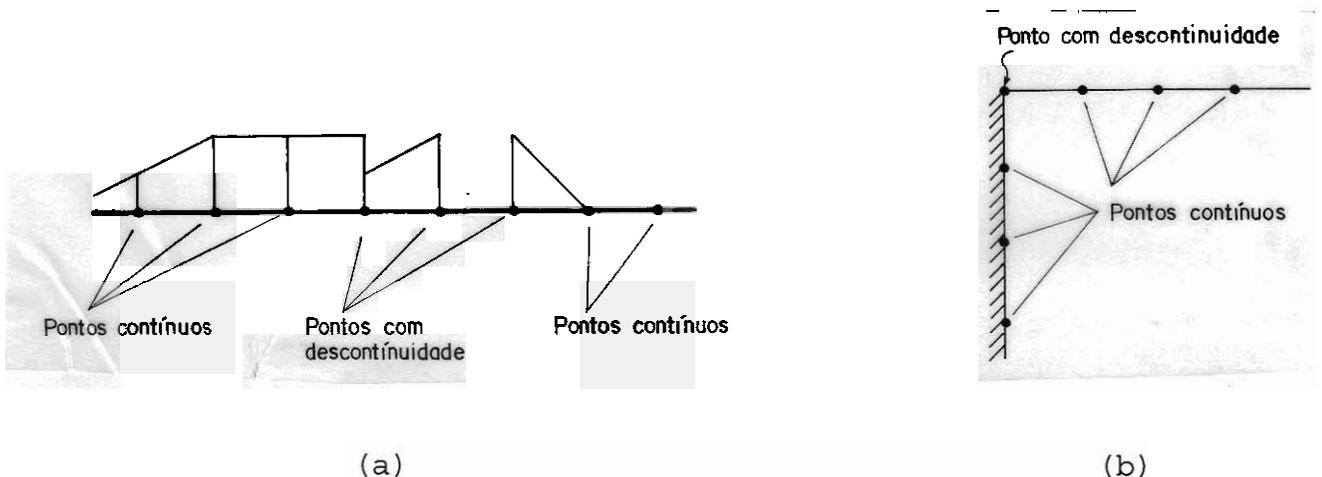


Figura 4.10- Descontinuidade de carregamentos e reações, representação esquemática.

É fácil notar que, para um ponto com descontinuidade, sempre existem dois valores (ou mais) de forças de superfície associados, quer sejam prescritos ou incógnitos. Para resolver este tipo de problema deve-se garantir que todos os elementos adjacentes a descontinuidade possam aproximar, independentes entre si, as variáveis em seus domínios. Isto se faz, gerando-se tantos nós (chamados nós duplos) quanto forem necessários, para um mesmo ponto do espaço. As figuras seguintes ilustram algumas das descontinuidades que são consideradas neste trabalho.

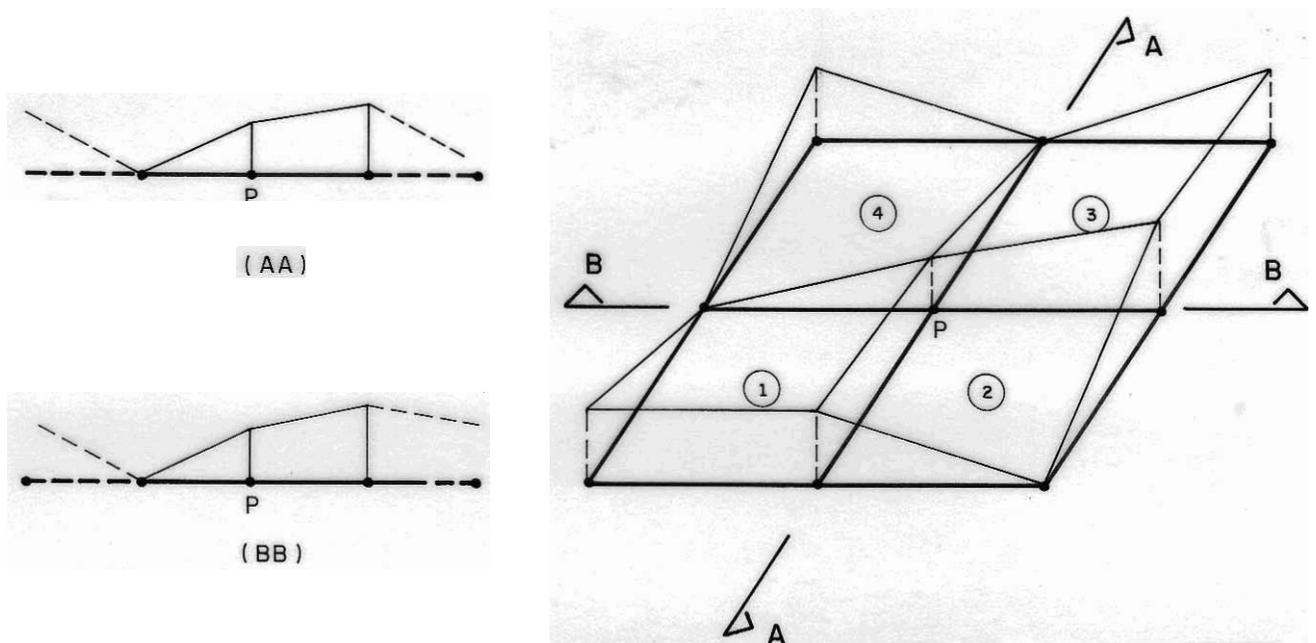


Figura 4.11- Discretização contínua, apenas um nó para ponto sem descontinuidade,  $p \in \{1,2,3,4\}$ .

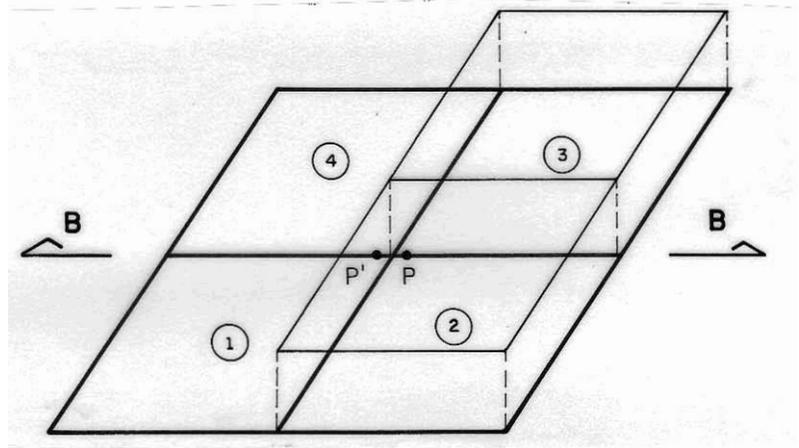
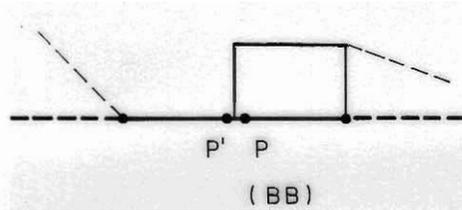


Figura 4.12- Discretização descontínua tipo 1, dois nós por descontinuidade,  $p' \in \{1,4\}$  e  $P \in \{2,3\}$ .

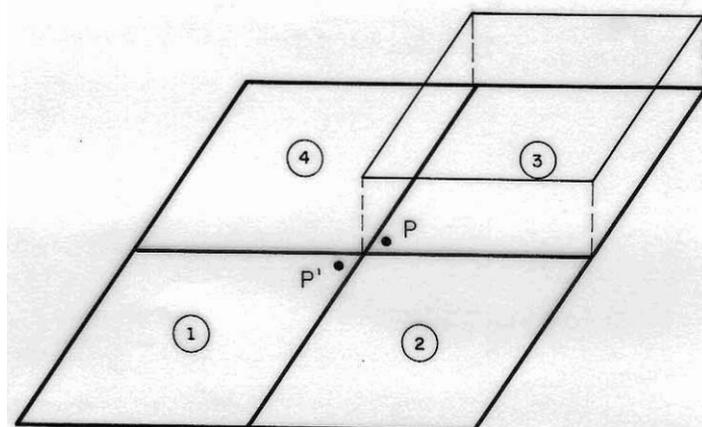


Figura 4.13- Discretização descontínua tipo 2, dois nós por descontinuidade,  $p \in \{1,2,4\}$  e  $p' \in \{3\}$ .

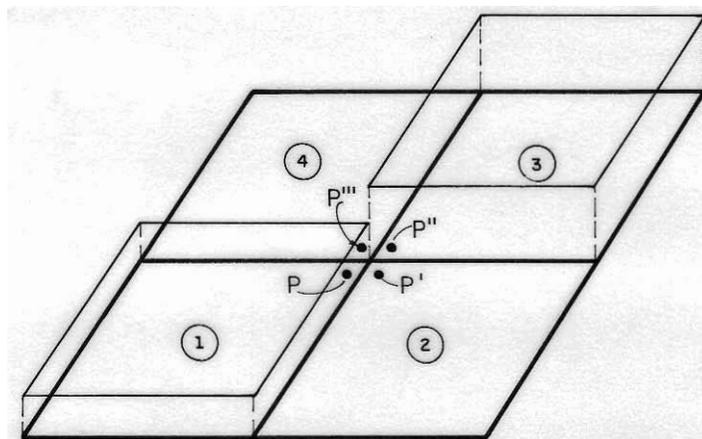


Figura 4.14<sup>f</sup>- Discretização descontínua tipo 3, quatro nós por descontinuidade,  $p \in \{1\}$ ,  $p' \in \{2\}$ ,  $p'' \in \{3\}$  e  $P''' \in \{4\}$ .

Através dos dados das figuras 4.11 a 4.14 observa-se que existem diversos tipos de descontinuidades de discretização, porém todos são tratados da mesma forma, desdobrando-se o nó geométrico.

Tudo o que foi exposto também é válido para pontos com angulosidade (figura 4.10b) sem perda de generalidade.

#### 4.4- TRANSFORMAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL EM UM SISTEMA ALGÉBRICO

Tendo-se discretizado o contorno  $\Gamma$  em elementos  $\Gamma_j$ , definidos pelos seus nós  $i$ , simples ou múltiplos, que permitem uma aproximação das variáveis por seus valores nodais, a equação integral de contorno (2.40), a menos das forças de volume, é substituída por um somatório de todas as integrais desenvolvidas em cada elemento  $\Gamma_j$  (figura 3.2), resultando:

$$C_{ki}(s) U_i(s) = \int_{\Gamma(j)} u_{ki}^*(s, Q) \phi_\alpha^j(Q) d\Gamma(Q) P_i^{\alpha j} - \int_{\Gamma(j)} p_{ki}^*(s, Q) \phi_\alpha^j(Q) d\Gamma(Q) U_i^{\alpha j} \quad (4.10)$$

onde  $C_{ki} = 0$  para  $S$  exterior,  $C_{ki} = \delta_{ki}$  para  $S$  interior e ainda assume os valores dados pela equação (2.36) para  $S$  pertencentes ao contorno,  $j=1, \dots, NE$ ;  $k, i=1, 2, 3$ ;  $\alpha=1, 2, 3, 4$ , para elementos lineares e  $\alpha = 1, \dots, 8$  para elementos quadráticos.

Desenvolvendo-se adequadamente, para cada ponto  $S$ , todas as integrais (item 4.5) da equação (4.10), escreve-se matricialmente a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{C}_S \underset{\sim}{U}_S + \begin{bmatrix} \hat{h}^{s1} & \hat{h}^{s2} & \dots & \hat{h}^{ss} & \dots & \hat{h}^{sN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \tilde{U}_s \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} g^{st} & \dots & g^{ss} & \dots & g^{sN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ \tilde{P}_s \\ \vdots \\ P_N \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $N$  é o número total de nós, cada submatriz  $\hat{h}^{sl}$  e  $\hat{g}^{sl}$  representa a influência do nó  $l$  sobre o ponto fonte  $S$ , sendo sua dimensão  $3 \times 3$  no caso tridimensional. Os vetores  $\underset{\sim}{U}_l$  e  $\underset{\sim}{P}_l$  contêm as componentes dos deslocamentos e forças superfícies correlatas ao nó  $l$ .

Pode-se escrever a equação (4.11) para qualquer ponto  $S$ . Escolhendo-se adequadamente o número de pontos fontes igual ao número de nós do contorno tem-se:

$$\begin{bmatrix} h^{11} & h^{12} & h^{1N} \\ \sim & \sim & \sim \\ h^{21} & h^{22} & h^{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h^{N1} & h^{N2} & h^{NN} \\ \sim & \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \sim \\ \cdot \\ \cdot \\ U_N \\ \sim \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & \dots & g^{1N} \\ \sim & & \sim \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ g^{N1} & \dots & g^{NN} \\ \sim & & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ \sim \\ \cdot \\ \cdot \\ P_N \\ \sim \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Onde

$$\begin{aligned} h^{SS} &= \hat{h}^{SS} + c(s) \\ \sim & \quad \sim \quad \sim \\ h^{SQ} &= \hat{h}^{SQ} \end{aligned} \quad (4.13)$$

ou de maneira resumida:

$$\begin{matrix} H & U & = & G & P \\ \sim & \sim & & \sim & \sim \end{matrix} \quad (4.14)$$

O sistema de equações representado pela equação (4.14) pode ser facilmente resolvido através das técnicas usuais do cálculo numérico, obtendo-se assim os deslocamentos e as forças de superfície incógnitas a partir dos valores prescritos.

Com um procedimento semelhante, obtém-se a expressão que fornece os deslocamentos para pontos do interior do corpo.

$$\begin{matrix} U' & = & -H'U & + & G'P \\ \sim & & \sim & & \sim \end{matrix} \quad (4.15)$$

onde  $U'$  é o vetor dos deslocamentos internos. O lado direito da expressão envolve apenas variáveis do contorno, já determinadas pela equação (4.14).

Da mesma forma, para o cálculo das tensões internas, de (2.41) obtém-se:

$$\sigma = -H''U + G''P \quad (4.16)$$

onde  $H''$  e  $G''$  são as matrizes obtidas ao se integrar todos os elementos  $\Gamma_j$  do contorno, considerando-se os termos integrais de (2.41).

As equações matriciais (4.14), (4.15) e (4.16) foram deduzidas sem a consideração das forças de domínio indicadas nas correspondentes representações integrais. No caso usual de forças de domínio conhecidas, suas integrações apenas acarretam a introdução, nas equações citadas, de termos adicionais independentes. Assim, as equações matriciais para o contorno e para pontos do domínio ficam reescritas,

$$H U = GP + B \quad (4.17)$$

$$U' = -H'U + G'P + B' \quad (4.18)$$

$$\sigma = -H''U + G''P + B'' \quad (4.19)$$

onde os valores  $B$ ,  $B'$  e  $B''$  representam integrações de domínio [142].

Estes termos podem ser calculados integrando-se regiões tridimensionais [33, 139, 59, 126, 132, 13] (células) sobre as quais uma aproximação é admitida a partir de valores conhecidos. Neste trabalho, entretanto, as integrais de domínio são transformadas em integrais de contorno pela simples aplicação do teorema de Gauss - Ostrogadsky [118, 33, 142], que pode ser escrito para uma função  $F$  como segue:

$$\int_{\Omega} F_{\ell, \ell} d\Omega = \int_{\Gamma} F_{\ell} n_{\ell} d\Gamma \quad (4.20)$$

onde  $n_{\ell}$  são os cossenos diretores da normal à superfície em

questão.

Para o caso estudado, basta determinar a função  $F$  correspondente ao núcleo da integral. Quando a densidade de domínio é constante tem-se, por exemplo:

$$\int_{\Omega} b_i(q) u_{ki}^*(s, q) d\Omega(q) = b_i \int_{\Omega} u_{ki}^*(s, q) d\Omega(q) = b_i \int_{\Gamma} B_{kil}^*(S, Q) n_{\ell} d\Gamma(Q) \quad (4.21)$$

Onde [33, 142]:

$$B_{kil}^*(S, Q) = \frac{r_{,\ell}}{32\pi(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \delta_{ki} + r_{,i} r_{,k} \right\} \quad (4.22)$$

Da mesma maneira procede-se para outras integrais com densidades conhecidas. Quando estas não são conhecidas, não é o caso em estudo, as integrais não resultam em vetores independentes, como acima mencionado. Várias formas de se tratar tais problemas podem ser vistas com bastante detalhes em VENTURINI [142].

A matriz  $H$  (equação 4.17) possui uma propriedade muito interessante, que permite verificar a precisão obtida pela aproximação proposta na equação (4.10).

Supondo-se que um corpo rígido sofre um deslocamento unitário (livre de solicitações externas) na direção  $i$ , cada nó  $m$  terá seu deslocamento expresso por:

$$U_j^m = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3; \quad m = 1, \dots, N) \quad (4.23)$$

Como as forças de superfície são nulas, da equação (4.12) escreve-se:

$$\begin{bmatrix} h^{11} & \dots & h^{1N} \\ \sim & & \sim \\ h^{N1} & \dots & h^{NN} \\ \sim & & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\sum_{n=1}^N h_{ki}^{mn} = 0 \quad \begin{array}{l} (m=1, \dots, N) \\ (i, k=1, 2, 3) \\ (n=1, \dots, N) \end{array} \quad (4.25)$$

Portanto, quanto mais próximo de zero chegar a soma indicada na expressão (4.25), maior precisão alcança-se no processo numérico.

Este fato pode ser usado também como uma alternativa para se determinar as submatrizes diagonais, utilizando-se a seguinte relação obtida das equações (4.13) e (4.25):

$$h_{ki}^{(n)(n)} = - \sum_{\substack{n=1 \\ (m \neq n)}}^N h_{ki}^{mn} \quad (4.26a)$$

Para problemas com domínios infinitos, a expressão (4.25) fica [24]:

$$\sum_{n=1}^N h_{ki}^{mn} = \delta_{ki} \quad (4.27)$$

e a equação (4.26a) passa a ser dada por,

$$h_{ki}^{(n)(n)} = \delta_{ki} - \sum_{\substack{n=1 \\ (m \neq n)}}^N h_{ki}^{mn} \quad (4.26b)$$

#### 4.5- INTEGRAÇÃO SOBRE ELEMENTOS:

As integrais sobre os elementos  $\Gamma_j$ , indicadas na equação (4.10), geram submatrizes  $h$  e  $g$  que compõem respectivamente, as matrizes globais  $\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$  (equação 4.13). Estas integrais são desenvolvidas neste capítulo de duas maneiras distintas, dependendo da posição do ponto fonte em relação ao elemento a ser integrado.

##### 4.5.1- Integração não singular (numérica)

Este tipo de integração é utilizado quando o ponto fonte não está contido no elemento considerado (figura 4.14). Neste caso, aplica-se diretamente a quadratura de Gauss para domínios bidimensionais [20, 131], isto é:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) dr ds = w_i w_j f(r_i, s_j) \quad (4.28)$$

onde  $i$  e  $j$  variam de um até o número de pontos de integração,  $r_i$  e  $s_j$  são as coordenadas homogêneas dos pontos de integração e  $w$  são os fatores ponderadores de Gauss.

Transformando-se as expressões a serem integradas sobre os elementos em funções dependentes das coordenadas locais homogêneas, figura (4.5), tem-se para cada elemento as submatrizes locais:

$$h_{ki}^{\alpha j} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_{ki}^*(S, (r,s)) \phi_{\alpha j}(r,s) \det(J(r,s)) dr ds =$$

$$\sum_{\ell=1}^{NG} \sum_{m=1}^{NG} w_{(\ell)} w_{(m)} p_{ki}^*(S, (r_{(\ell)}, s_{(m)})) \phi_{\alpha j}(r_{(\ell)}, s_{(m)}) \det$$

$$(J(r_{(\ell)}, s_{(m)})) \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}_{ki}^{kj}(S) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_{ki}^*(S, (r, s)) \phi_{\alpha j}(r, s) \det(J(r, s)) dr ds = \\
 &\sum_{\ell=1}^{NG} \sum_{m=1}^{NG} w_{(\ell)} w_{(m)} u_{ki}^*(S, (r_{(\ell)}, s_{(m)})) \phi_{\alpha j}(r_{(\ell)}, s_{(m)}) \det \\
 &(J(r_{(\ell)}, s_{(m)}))
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

onde

$S$  = ponto fonte

$Q(r, s)$  = pontos pertencentes ao elemento integrado.

$\alpha$  = nós do elemento ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$  ou  $\alpha = 1, \dots, 8$ )

$j$  = Elemento integrado.

$\det(J(r, s))$  = magnitude do diferencial de área sobre  $(r, s)$ , definido nas equações (4.8) e (4.9).

NG = número de pontos de Gauss.

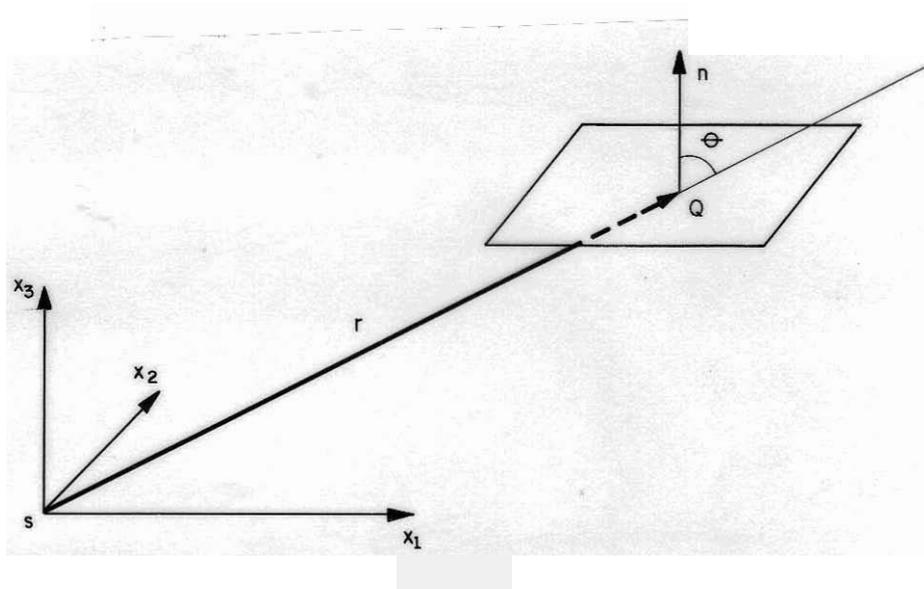


Figura 4.14- Integração numérica, fatores de influência.

O número de pontos de integração necessário para que os resultados sejam suficientemente precisos, depende principalmente dos seguintes fatores: distância do ponto fonte ao elemento, função a ser integrada, geometria do elemento e ângulo formado entre o vetor posição e o elemento (figura 4.14).

#### 4.5.2- Integração Singular

Quando o ponto fonte  $S$  pertence ao elemento, a integração sobre este não pode ser efetuada diretamente pela quadratura de Gauss. O processo de integração proposto, consiste em se aplicar a quadratura de Kutt [83] em coordenadas polares locais sobre o elemento singular.

##### a) Coordenadas polares locais

Antes de mostrar o processo de integração, deve-se apresentar o sistema de coordenadas utilizado e suas relações importantes.

Inicialmente define-se um sistema de coordenadas cartesianas local figura 4.15.

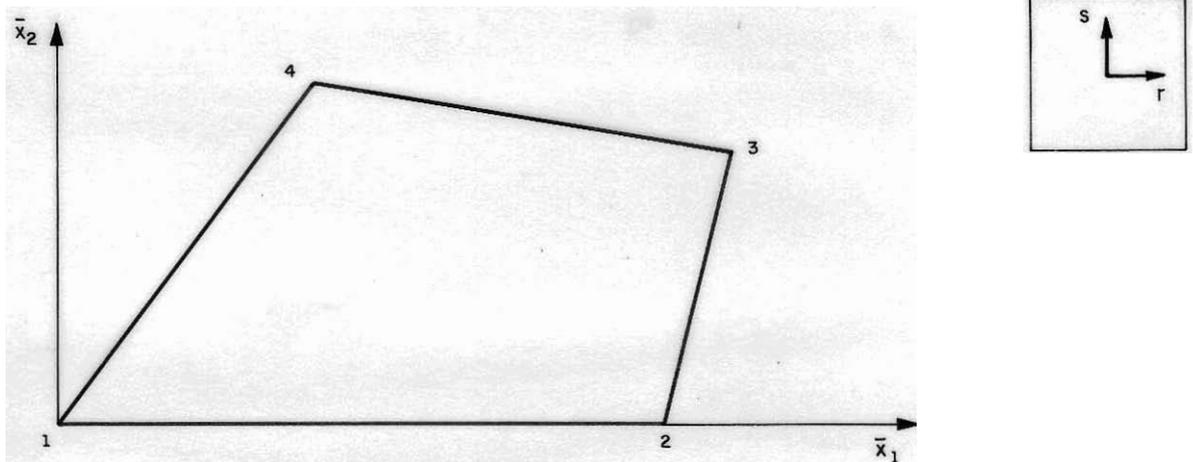


Figura 4.15- Sistema de coordenadas cartesianas local, e sistema de coordenadas homogêneas associado.

Como o elemento é plano, este sistema é válido sobre todo o elemento. O sistema de coordenadas polares local tem como origem o ponto fonte  $S$ , que pode estar localizado em cinco posições (figura 4.16) do elemento.

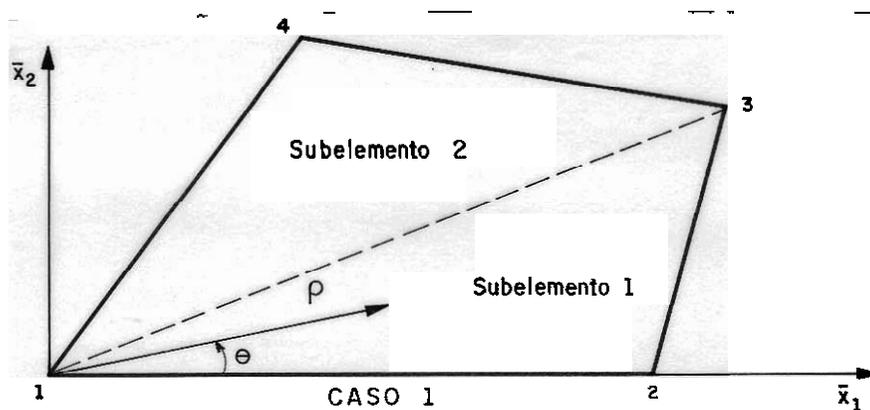


Figura 4.16a-Origem do sistema de coordenadas polares local, caso 1

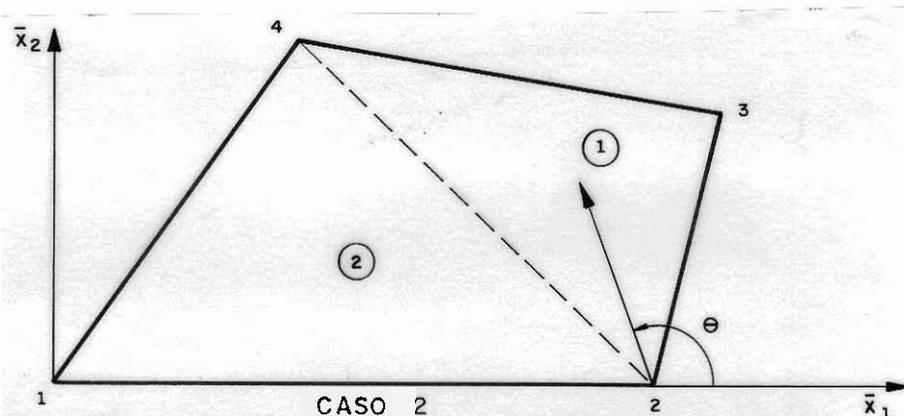


Figura 4.16b-Origem do sistema de coordenadas polares local, caso 2

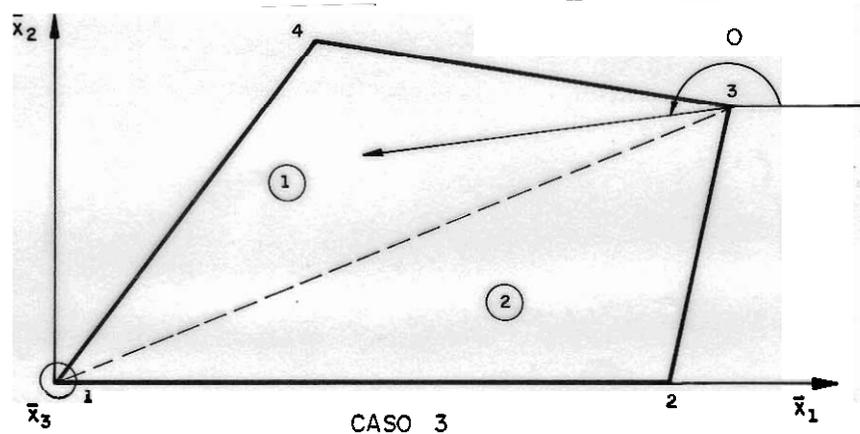


Figura 4.16c-Origem do sistema de coordenadas polares local caso 3

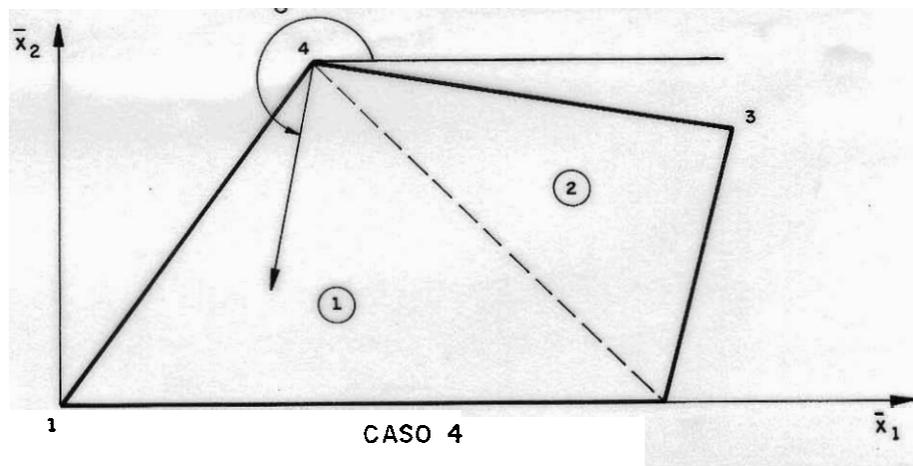


Figura 4.16d-Origem do sistema de coordenadas polares local, caso 4

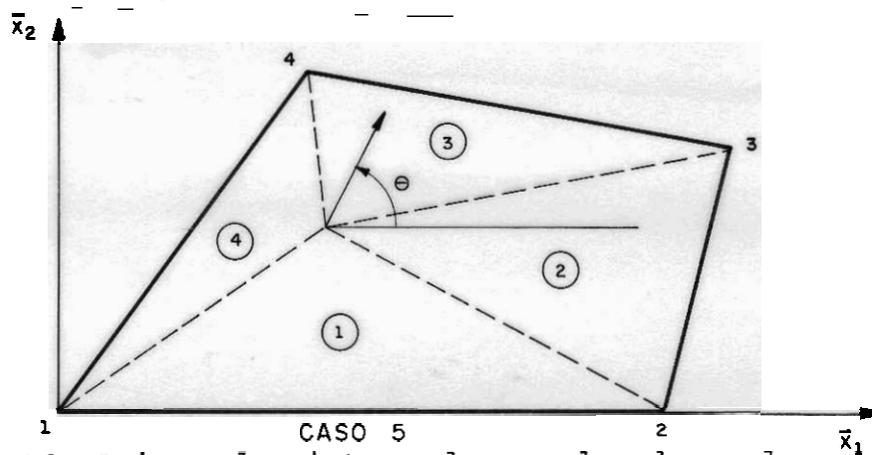


Figura 4.16e-Origem do sistema de coordenadas polares local, caso 5

Assim, a localização de um ponto qualquer sobre o elemento será dada a partir de suas coordenadas  $(\rho, \theta)$  com origem em S porém, a função interpoladora das variáveis continua sendo dada em termos das coordenadas homogêneas. Precisa-se então, a partir de  $(\rho, \theta)$ , determinar os valores de  $(r, s)$ .

Primeiramente sabe-se que:

$$\begin{aligned} X_Q &= X_S + \rho \cos \theta \\ Y_Q &= Y_S + \rho \sin \theta \end{aligned} \tag{4.31}$$

Determinados X e Y para o nó Q, da expressão (4.1) pode-se escrever

$$\begin{aligned} X_Q &= X_1 \phi_1 + X_2 \phi_2 + X_3 \phi_3 + X_4 \phi_4 \\ Y_Q &= Y_1 \phi_1 + Y_2 \phi_2 + Y_3 \phi_3 + Y_4 \phi_4 \end{aligned} \tag{4.32}$$

e além disso das equações (4.2) tem-se:

$$\begin{aligned} 1 &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 \\ \phi_4 \phi_2 &= \phi_1 \phi_3 \end{aligned} \quad \forall (r,s) \quad (4.33)$$

Juntando as equações (4.32) e (4.33) chega-se a um sistema não linear de equações em  $\phi_1$ , que resolvido gera:

$$\phi_1 = \left( FB \pm \sqrt{FB^2 + 4 \left( \frac{RB}{RA} - RC \right) U_1} \right) / \left( 4 \left( \frac{RB}{RA} - RC \right) \right) \quad (4.34)$$

com  $0 \leq \phi_1 \leq 1$  e daí:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \left( U_2 - \frac{RB}{RA} U_1 \right) + \frac{RB}{RA} \phi_1 \\ \phi_3 &= \left( U_3 - \frac{RC}{RA} U_1 \right) + \frac{RC}{RA} \phi_1 \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \phi_4 &= \phi_1 \phi_3 / \phi_2 \quad \text{para } \phi_2 \neq 0 \\ \phi_4 &= 1 - \phi_1 - \phi_3 \quad \text{para } \phi_2 = 0 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} \Delta &= (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_3 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_1) \\ U_1 &= [(y_2 - y_3) x_Q + (x_3 - x_2) y_Q + (x_2 y_3 - x_3 y_2)] / \Delta \\ U_2 &= [(y_3 - y_1) x_Q + (x_1 - x_3) y_Q + (x_3 y_1 - x_1 y_3)] / \Delta \\ U_3 &= [(y_1 - y_2) x_Q + (x_2 - x_1) y_Q + (x_1 y_2 - x_2 y_1)] / \Delta \\ RA &= [(x_4 y_3 + y_4 x_2 + x_3 y_2) - (x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_2)] / \Delta \\ RB &= [(x_1 y_3 + y_4 x_3 + x_4 y_1) - (x_4 y_3 + y_4 x_1 + x_3 y_1)] / \Delta \\ RC &= [(x_4 y_2 + y_4 x_1 + x_2 y_1) - (x_1 y_2 + x_2 y_4 + x_4 y_1)] / \Delta \\ FB &= [(RC - RB/RA) U_1 + U_2 - RA U_3] \end{aligned} \quad (4.36)$$

de (4.2) segue imediatamente:

$$r = 2(\phi_2 + \phi_3) - 1 \tag{4.37}$$

$$s = 1 - 2(\phi_1 + \phi_2)$$

Conhece-se agora, numericamente, os valores das funções aproximadoras a partir das coordenadas polares, indispensáveis para se executar o processo de integração descrito abaixo.

**b) Integração propriamente dita**

Tendo-se definido o sistema de coordenadas polares e suas propriedades, descreve-se a integração singular desenvolvida sobre a superfície do elemento. Inicialmente subdivide-se o elemento em trechos triangulares, definindo-se os limites de integração em  $\theta$  e em  $\rho$  como mostra a figura 4.17:

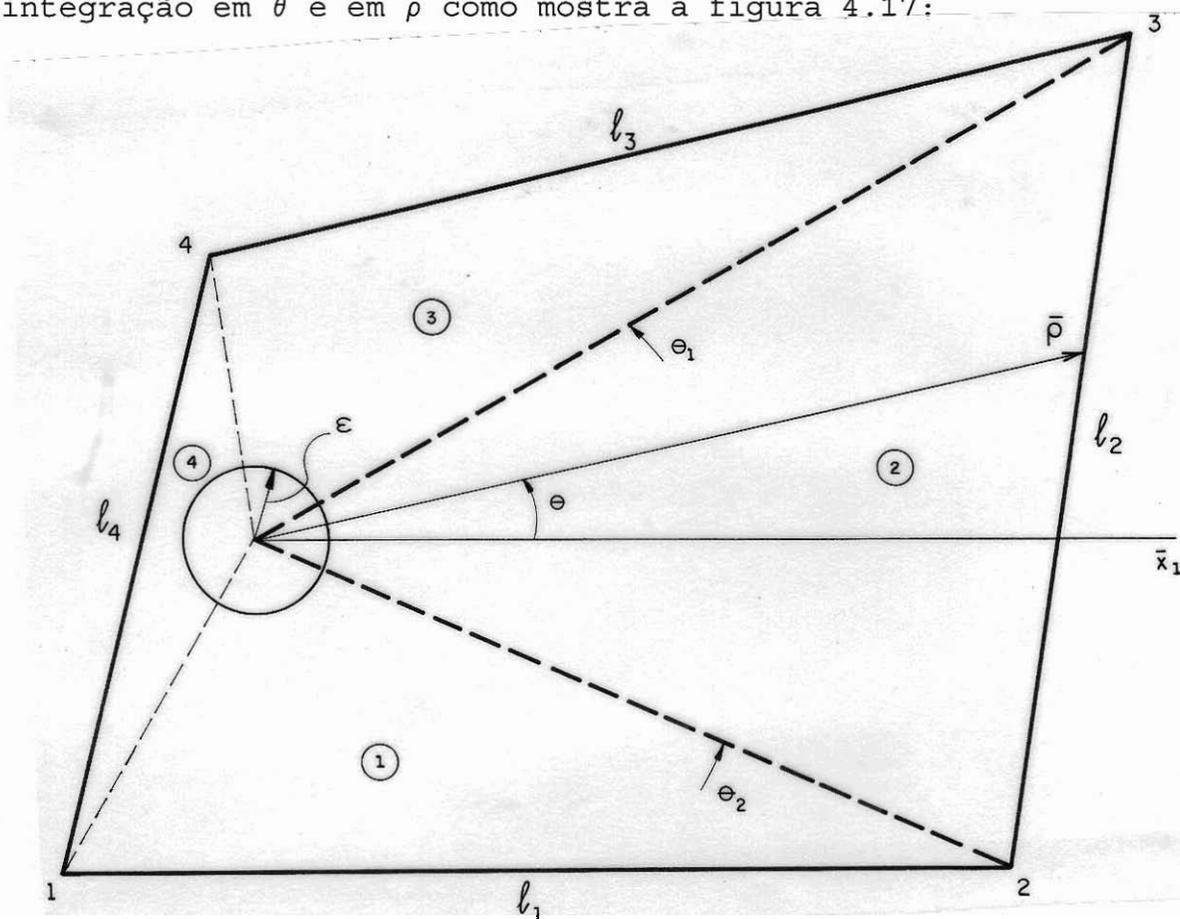


Figura 4.17- Limites de integração, caso (5)

Sendo  $\bar{\rho}$  dado por:

$$\bar{\rho}(l_j) = -A/(b_3 \cos\theta + a_3 \operatorname{sen}\theta)$$

onde

$$A = b_1 a_2 - b_2 a_1$$

$$a_i = x_k - x_m$$

$$i = 1, 2, 3; k = 2, 3, 1; m = 3, 1, 2$$

$$b_i = y_m - y_k$$

sendo os índices: "1" e "2" respectivamente o primeiro e segundo nó do contorno para o subelemento  $j$  e o índice "3" o ponto fonte  $S$ .

As integrais da equação (4.10) ficam escritas em coordenadas polares como:

$$\begin{aligned} h_{ki}^{\alpha j} &= \sum_{\ell=1}^{NS} \int_{\epsilon}^{\bar{\rho}} \int_{\theta_1^{\ell}}^{\theta_2^{\ell}} p_{ki}^*(S, (\rho, \theta)) \phi_{\alpha j}(\rho, \theta) \rho d\theta d\rho \\ g_{ki}^{\alpha j} &= \sum_{\ell=1}^{NS} \int_{\epsilon}^{\bar{\rho}} \int_{\theta_1^{\ell}}^{\theta_2^{\ell}} u_{ki}^*(S, (\rho, \theta)) \phi_{\alpha j}(\rho, \theta) \rho d\theta d\rho \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde  $NS$  é o número de subelementos. Como em  $\theta$  não existe singularidade, aplicando-se a quadratura de Gauss tem-se:

$$\begin{aligned} h_{ki}^{\alpha j} &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \sum_{\ell=1}^{NS} \sum_{m=1}^{NG} \int_{\epsilon}^{\bar{\rho}} W_{(m)} p_{ki}^*(S, (\rho, \theta_{(m)})) \phi_{\alpha j}(\rho, \theta_{(m)}) \rho d\rho \\ g_{ki}^{\alpha j} &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \sum_{\ell=1}^{NS} \sum_{m=1}^{NG} \int_{\epsilon}^{\bar{\rho}} W_{(m)} u_{ki}^*(S, (\rho, \theta_{(m)})) \phi_{\alpha j}(\rho, \theta_{(m)}) \rho d\rho \end{aligned} \quad (4.39)$$

Quando a integral é desenvolvida em  $\rho$  observa-se que, para  $u_{ki}^*$  a singularidade desaparece, já para  $p_{ki}^*$  existem alguns termos para os quais a singularidade somente cai para  $O(1/\rho)$ . Poder-se-ia então, dividir os procedimentos de integração em  $\rho$  para termos singulares e não singulares, porém o algoritmo desenvolvido é geral, não havendo necessidade de tal divisão.

A quadratura de Kutt [83,56] é aplicada para avaliar a parte finita de integrais singulares desenvolvidas sobre intervalos de integração unitários ( $0 \rightarrow 1$ ). Quando a integral é efetuada em um intervalo qualquer, dois procedimentos podem ser adotados:

O primeiro transforma o intervalo de integração em questão ( $0 \rightarrow \bar{\rho}$ ) em um intervalo unitário, como segue:

$$\int_0^{\bar{\rho}} g(\rho) d\rho = \int_0^{\bar{\rho}} \frac{f(\rho)}{\rho^\lambda} d\rho = \bar{\rho}^{(1-\lambda)} \int_0^1 \frac{f(\bar{\rho}t)}{t^\lambda} dt + \frac{f(0) \cdot \ln \bar{\rho}}{(\lambda-1)!} \quad (4.40)$$

onde a função  $g(\rho) = \frac{f(\rho)}{\rho^\lambda}$  possui grau de singularidade  $\lambda$ ,  $f(\rho)$  não é singular e  $f^{(n)}$  é a  $n$ ésima derivada da função  $f$  com relação a  $\rho$ .

Outra forma de se executar tal integração, sem a transformação de intervalo, é dividi-la em dois trechos:

$$\int_0^{\bar{\rho}} g(\rho) d\rho = \int_0^1 \frac{f(\rho)}{\rho^\lambda} d\rho + \int_1^{\bar{\rho}} g(\rho) d\rho \quad (4.41)$$

Em ambas as expressões, para integral no intervalo de 0-1, se escreve:

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^\lambda} dt = B_i f(t_i) \quad (i=1, \dots, NK) \quad (4.42)$$

Onde  $B_i$  são os pesos de Kutt e  $t_i$  as posições onde estes são avaliados.

O último termo da equação (4.40) é de avaliação difícil quando se consideram os núcleos do problema em questão, pois se conhecem as funções interpoladoras em termos de  $(\rho, \theta)$  apenas numericamente. Escolhe-se, portanto, analisar numericamente o último termo da equação (4.41), aplicando-se sobre este a quadratura de Gauss.

Assim, levando-se em consideração as equações (4.41), (4.42) e o que foi exposto acima, a equação (4.39) para  $\epsilon = 0$  fica:

$$\begin{aligned}
 h_{ki}^{\alpha j} &= \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2} \sum_{\ell=1}^{NS} \sum_{m=1}^{NG_1} \left\{ \sum_{n=1}^{NK} W_{(m)} B_{(n)} p_{ki}^* (S, (\rho_{(n)}, \theta_{(m)})) \right. \\
 \phi_{\alpha j} (\rho_{(n)}, \theta_{(m)}) \rho_{(n)} &+ \frac{(\bar{\rho}-1)}{2} \sum_{n=1}^{NG_2} W_{(m)} W_{(n)} p_{ki}^* (S, (\rho_{(n)}, \theta_{(m)})) \\
 \left. \phi_{\alpha j} (\rho_{(n)}, \theta_{(m)}) \rho_{(n)} \right\} & \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{ki}^{\alpha j} &= \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2} \sum_{\ell=1}^{NS} \sum_{m=1}^{NG_1} \left\{ \sum_{n=1}^{NK} W_{(m)} B_{(n)} u_{ki}^* (S, (\rho_{(n)}, \theta_{(m)})) \right. \\
 \phi_{\alpha j} (\rho_{(n)}, \theta_{(m)}) \rho_{(n)} &+ \frac{(\bar{\rho}-1)}{2} \sum_{n=1}^{NG_2} W_{(m)} W_{(n)} u_{ki}^* (S, (\rho_{(n)}, \theta_{(m)})) \\
 \left. \phi_{\alpha j} (\rho_{(n)}, \theta_{(m)}) \rho_{(n)} \right\} & \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

Geometricamente os intervalos de integração podem ser vistos na figura 4.18.

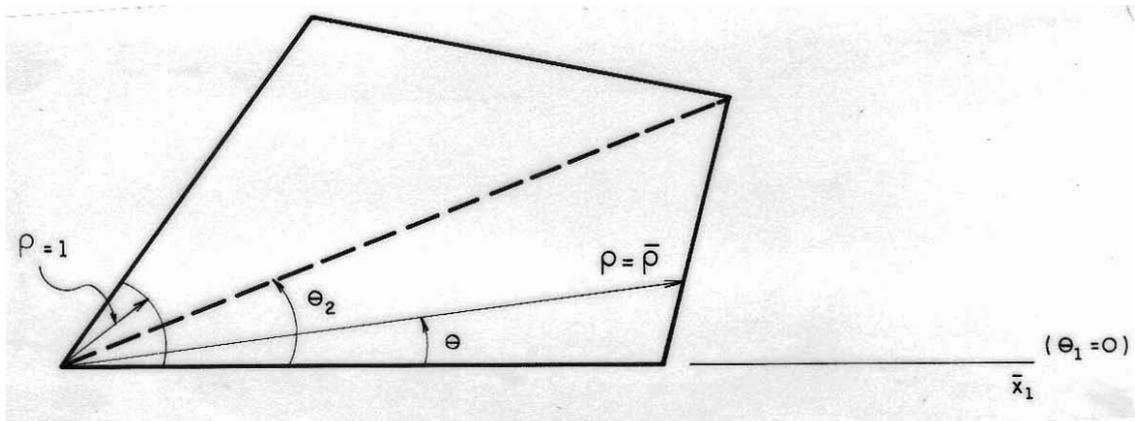


Figura 4.18- Limites de integração para algoritmo de Kutt, caso 1

Obviamente que a dimensão mínima do elemento fica restrita à unidade, porém é fácil fazer mudanças de escala no problema real, para que o programa não perca sua generalidade.

Para alguns processos de integração de elementos singulares encontrados na bibliografia, como o de Lie [87] e Silva [125], necessitam-se conhecer explicitamente as expressões das funções interpoladoras em coordenadas polares, o que é muito trabalhoso principalmente para aproximações mais elaboradas. Já o processo descrito nesta seção, por avaliar numericamente as funções interpoladoras, é de caráter geral e se aplica aos elementos quadrangulares planos com qualquer função interpoladora que se queira adotar.

## CAPÍTULO 5

### MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (formulação dinâmica)

#### 5.1- INTRODUÇÃO

No capítulo 3, deduz-se a equação integral (3.25) que governa o comportamento dinâmico dos corpos elásticos. Neste capítulo, transforma-se tal equação em um conjunto de equações algébricas susceptíveis à análise numérica.

Tal como no capítulo 4, o contorno  $\Gamma$  do corpo analisado é discretizado em elementos  $\Gamma_j$ , exatos ou aproximados, onde se interpolam parametricamente as variáveis físicas do problema, figura 5.1

Tudo o que foi descrito no capítulo 4 com relação aos elementos de contorno, ou seja, aproximação da geometria e aproximação das variáveis sobre os elementos, é válido para o caso apresentado neste capítulo.

Como, para o caso dinâmico, as variáveis também são dependentes do tempo, discretiza-se o intervalo de integração temporal em pequenos trechos, chamados elementos temporais, onde estas são parametrizadas.

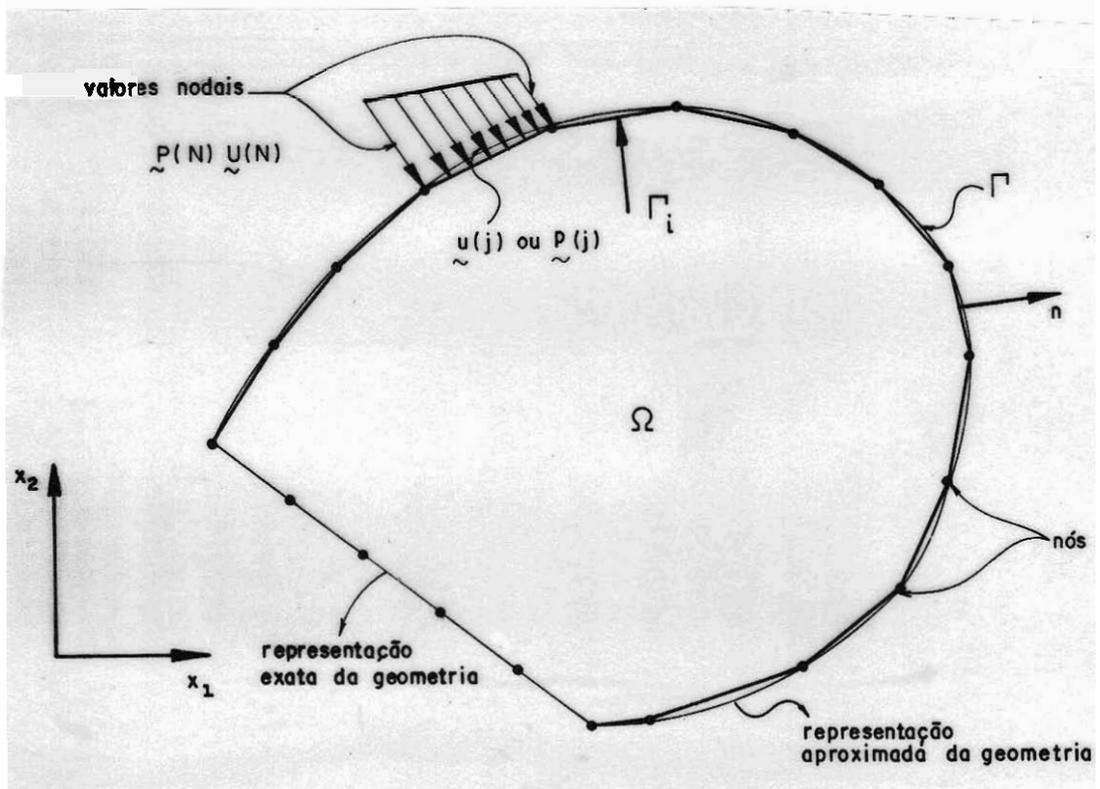


Figura 5.1- Discretização do contorno em elementos, corte esquemático

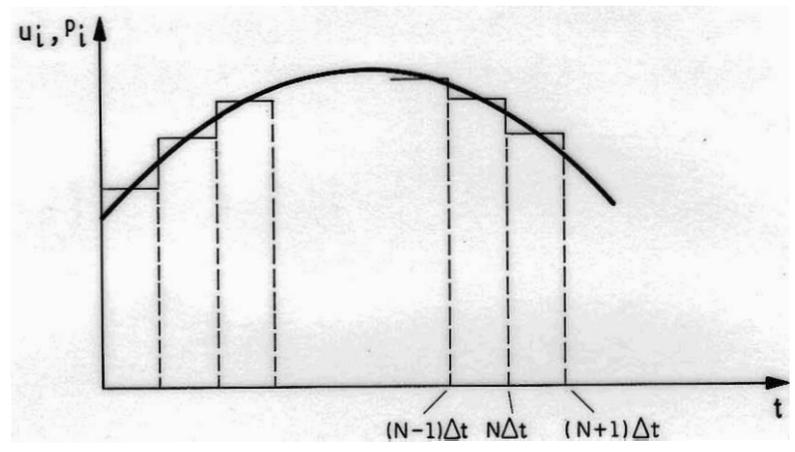


Figura 5.2- Discretização temporal

## 5.2- ELEMENTOS TEMPORAIS

Nesta seção descrevem-se os dois tipos de aproximações temporais utilizados.

### 5.2.1- Elemento temporal linear

Para um trecho de intervalo de integração  $\Delta t = (t_\theta - t_{\theta-1})$ , como mostra a figura 5.3, consideram-se as grandezas físicas variando linearmente no tempo, e aproximadas no espaço como no capítulo 4:

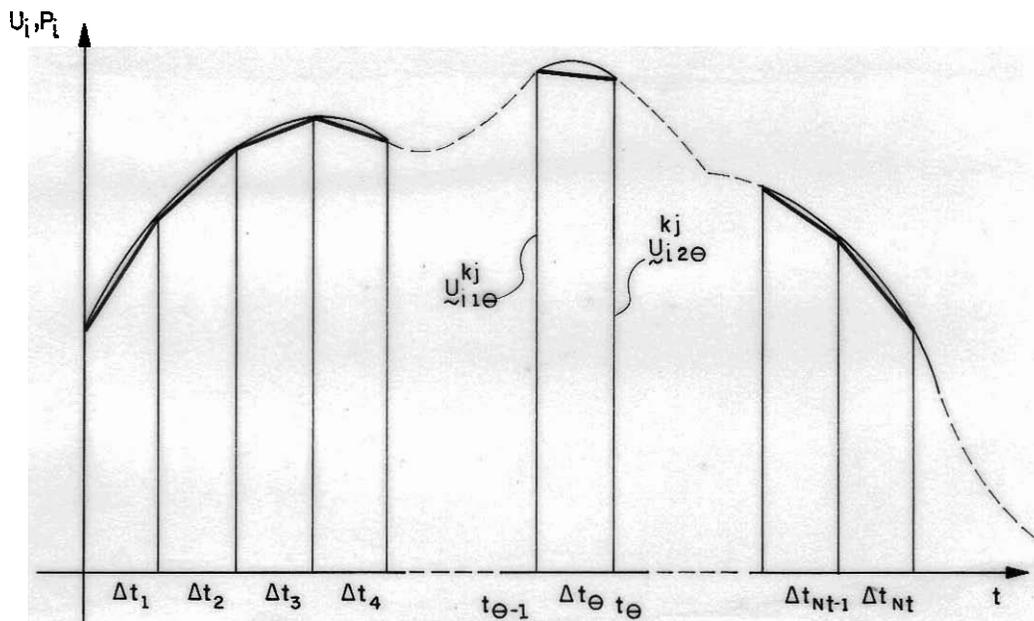


Figura 5.3- Aproximação linear

$$\begin{aligned}
 U_{i\theta}(Q^j, t) &= \phi_k^{(j)} \psi_\beta^{(\theta)} U_{i\beta}^{k(j)} \\
 P_{i\theta}(Q^j, t) &= \phi_k^{(j)} \psi_\beta^{(\theta)} P_{i\beta}^{k(j)}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

onde:

$i$  = coordenada da variável em questão

$j$  = elemento espacial

$\theta$  = elemento temporal

$\phi_k$  = funções interpoladoras do elemento espacial  $j$

$\psi_\beta$  = funções interpoladoras do elemento temporal  $\theta$

sendo

$$\psi_1^\theta(t) = \frac{t_\theta - t}{\Delta t_\theta} \quad (5.2)$$

$$\psi_2^\theta(t) = \frac{t - t_{\theta-1}}{\Delta t_\theta}$$

A discretização temporal linear é ilustrada na figura 5.4:

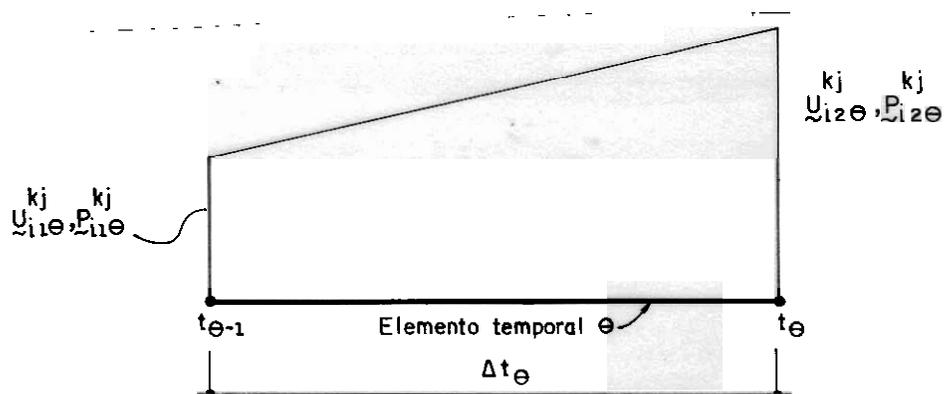


Figura 5.4- Discretização temporal linear

### 5.2.2- Elemento temporal constante

Neste caso, as variáveis físicas são consideradas constantes dentro do elemento temporal, figura 5.5.

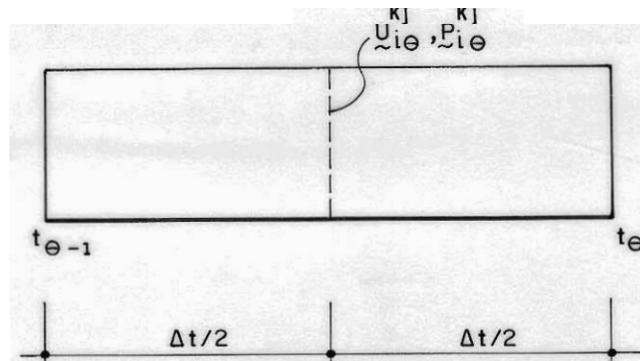


Figura 5.5- Aproximação constante.

A função aproximadora sobre o elemento temporal é unitária e poderia ser omitida da equação (5.1), porém esta continua válida para  $\beta=1$  e:

$$\psi_1^\theta(t) = 1 \quad (5.3)$$

A discretização temporal constante é ilustrada abaixo:

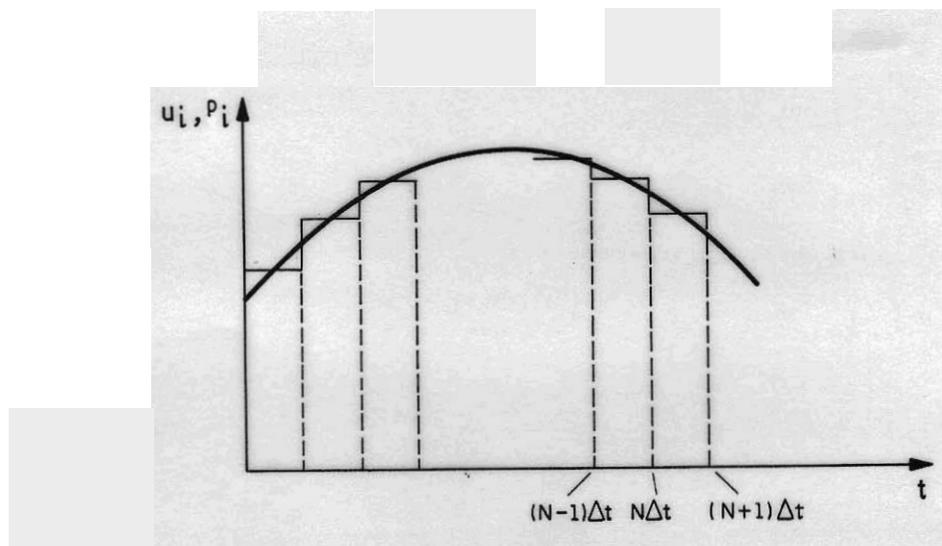


Figura 5.6- Discretização temporal constante

### 5.3- TRANSFORMAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL EM SISTEMA ALGÉBRICO

#### 5.3.1- Equação algébrica usual

Tendo-se discretizado o contorno  $\Gamma$  em elementos de contorno  $\Gamma_j$ , definidos pelos seus nós  $i$  simples ou duplos (capítulo 4), que permitem uma aproximação das variáveis por seus valores nodais espaciais e executada a discretização temporal como descrito acima, pode-se escrever a equação integral usual (3.24) como segue:

$$C_{ki}(s) U_i(s, t)^{Nt} = \int_{\Gamma(j)} \int_{t(\theta-1)}^{t(\theta)} u_{ki}^*(Q, t, D, \tau) \phi_\alpha^j(Q) \psi_\beta^\theta(\tau) d\tau d\Gamma(Q)$$

$$P_{i\beta\theta}^{\alpha j} = \int_{\Gamma(j)} \int_{t(\theta-1)}^{t(\theta)} p_{ki}^*(Q, t, s, \tau) \phi_\alpha^j(Q) \psi_\beta^\theta(\tau) d\tau d\Gamma(Q) U_{i\beta\theta}^{\alpha j} \quad (5.4)$$

Onde  $C_{ki}$ ,  $i$ ,  $j$ ,  $k$  e  $\alpha$  assumem os mesmos valores que na equação (4.10),  $\theta$  varia de 1 até o número de passos desejados ( $Nt$ ) e  $\beta$  varia, conforme seja o elemento temporal constante ou linear, como apresentado nas equações (5.2) e (5.3).

Desenvolvendo-se adequadamente todas as integrais (Item 5.4.1) da equação (5.4), para cada ponto  $S$  escreve-se matricialmente:

$$\tilde{C}(S) \tilde{U}_S^{Nt} + \left[ \hat{h}_{\theta\beta}^{S(1)} \dots \hat{h}_{\theta\beta}^{S(M)} \right] \left\{ \begin{array}{c} U_{\theta\beta}^{(1)} \\ \vdots \\ U_{\theta\beta}^{(N)} \end{array} \right\} =$$

$$\left[ \underset{\sim}{g}_{\theta\beta}^{S(1)} \dots \underset{\sim}{g}_{\theta\beta}^{S(M)} \right] \left\{ \begin{array}{c} P_{\theta\beta}^{(1)} \\ \vdots \\ U_{\theta\beta}^{(N)} \end{array} \right\} \quad (\theta = Nt \dots 1) \quad (5.5)$$

Onde  $N$  é o número total de nós do contorno. Cada sub-matriz  $\hat{h}_{\theta\beta}^{Sl}$ ,  $g_{\theta\beta}^{Sl}$  representa a influência do nó espacial  $l$  e temporal  $\beta$ , para o intervalo de tempo  $\theta$ , sobre o ponto  $S$ . Deve-se lembrar que a notação é indicial e a equação (5.5) representa uma soma em  $\theta$  e em  $\beta$ .

A equação (5.5) é escrita englobando-se todos os pontos fonte  $S$ , dando origem à seguinte expressão matricial:

$$\left[ \begin{array}{ccc} h_{ki}^{11} & \dots & h_{ki}^{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{ki}^{N1} & \dots & h_{ki}^{NN} \end{array} \right]^{\theta\beta} \left\{ \begin{array}{c} U_i^1 \\ \vdots \\ U_i^N \end{array} \right\}^{\theta\beta} = \left[ \begin{array}{ccc} g_{ki}^{11} & \dots & g_{ki}^{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{ki}^{N1} & \dots & g_{ki}^{NN} \end{array} \right]^{\theta\beta} \left\{ \begin{array}{c} P_i^1 \\ \vdots \\ P_i^N \end{array} \right\}^{\theta\beta} \quad (5.6a)$$

$$\underset{\sim}{H}_{\theta\beta} \underset{\sim}{U}_{\theta\beta} = \underset{\sim}{G}_{\theta\beta} \underset{\sim}{P}_{\theta\beta} \quad (5.6b)$$

Observa-se, da solução fundamental usual, que as integrações singulares só ocorrem quando  $t_{Nt} = \tau$  e, portanto, no intervalo de integração definido por  $\theta = Nt$ . Assim, se escreve:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{h}_{Nt2}^{ss} &= \underset{\sim}{\hat{h}}_{Nt2}^{ss} + \underset{\sim}{C} && \text{(linear)} \\ \underset{\sim}{h}_{Nt1}^{ss} &= \underset{\sim}{\hat{h}}_{Nt1}^{ss} + \underset{\sim}{C} && \text{(constante)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Para compreender o comportamento da equação (5.6b) e sua resolução, é interessante observar os dois primeiros passos de integração, como se faz abaixo, para a aproximação linear no

tempo:

Condições iniciais

$$\begin{cases} U(q, 0) = 0 \\ \tilde{U}(q, 0) = 0 \end{cases} \quad \forall q \in r \quad (5.8)$$

Condições de contorno (definem o primeiro passo)

$$\begin{cases} U_{11} = U(Q, 0) = 0 \\ \tilde{P}_{11} = \tilde{P}(Q, 0) = 0 \end{cases} \quad \forall q \in \Gamma \quad (5.9)$$

$$\begin{cases} U_{12} = U(Q, t_1) = U_1 \\ \tilde{P}_{12} = \tilde{U}(Q, t_1) = \tilde{P}_1 \end{cases} \quad \forall q \in \Gamma$$

Para o primeiro passo escreve-se:  $(0 - t_1)$

$$C_{12} U_{12} + H_{11} U_{11} + H_{12} U_{12} = G_{11} P_{11} + G_{12} P_{12} \quad (5.10)$$

donde conhecidos  $U_{11}$  e  $P_{11}$  (equação 5.9) determinam-se os valores incógnitos de  $U_{12}$  e  $P_{12}$ .

Para o segundo passo a integral temporal da equação (5.4) é feita em dois trechos,  $(0-t_1)$  e  $(t_1-t_2)$  escrevendo-se:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{22} U_{22} + \tilde{H}_{21} U_{21} + \tilde{H}_{22} U_{22} + \tilde{H}_{11} U_{11} + \tilde{H}_{12} U_{12} = \tilde{G}_{21} P_{21} + \tilde{G}_{22} P_{22} + \\
\hat{G}_{11} P_{11} + \hat{G}_{12} P_{12}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

como  $U_{11}$  e  $P_{11}$  são valores iniciais e  $P_{12} = P_{21}$  e  $U_{12} = U_{21}$  foram determinados no sistema (5.10), determinam-se em (5.11) os valores incógnitos de  $U_{22}$  e  $P_{22}$ .

O símbolo " $\hat{\phantom{x}}$ " na equação (5.11) significa que estas matrizes não são as mesmas do passo anterior, pois as soluções fundamentais, equação (5.4), estão agora referidas à fonte em  $t_2$  e não mais em  $t_1$ . Em compensação, pelo mesmo motivo acima, e pela propriedade de translação do estado de Stokes (equação 5.12), sabe-se que  $H_{22} = H_{12}$  e  $H_{21} = H_{11}$  (observe que  $H_{11}$  e  $H_{12}$  são sem  $\hat{\phantom{x}}$ ).

$$\begin{cases}
u_{ki}^*(Q, t; s, \tau) = u_{ki}^*(Q, (t+\alpha); s, (\tau+\alpha)) \\
p_{ki}^*(Q, t; s, \tau) = p_{ki}^*(Q, (t+\alpha); s, (\tau+\alpha))
\end{cases} \tag{5.12}$$

Generalizando-se o que foi descrito acima, para um passo de tempo  $\theta$ , se conhecem todos os valores de forças de superfícies e deslocamentos desde o intervalo de tempo  $\Delta t_1$  até  $\Delta t_{\theta-1}$ , e as matrizes  $\tilde{H}_{\theta\beta}$  e  $\tilde{G}_{\theta\beta}$  são computadas. Metade dos valores das forças de superfície e deslocamentos do contorno do passo de tempo  $\theta$  são prescritos (condições de contorno), então a equação (5.6b) pode ser usada para solucionar a outra metade incógnita das variáveis do contorno.

Seguindo-se o raciocínio acima, aparentemente geram-se matrizes  $H$  e  $G$  indefinidamente para a equação (5.6b), porém isto não ocorre, pois os núcelos das integrais da equação (5.4) se anulam para:

$$\left\{ \begin{array}{l} t > \frac{d_{\max}}{c_{\min}} \\ \text{ou} \\ Nt > \frac{d_{\max}}{c_{\min} \Delta t} \end{array} \right.$$

onde  $d_{\max}$  é a maior distância do problema discretizado e  $c_{\min} = c_2$ , menor velocidade de propagação de onda no meio.

### 5.3.2- Equação algébrica alternativa

Utilizando-se a mesma discretização espacial apresentada anteriormente e adotando-se apenas elementos constantes para a aproximação temporal, a equação (3.27) fica:

$$C_{ki}(s)U_i(s,t)^{Nt} = \int_{\Gamma(s)} \int_{t(\theta-1)}^{t(\theta)} u_{ki}^*(Q,t,s,\tau) \phi_{\alpha}^j(Q) \psi^{\theta}(\tau) d\tau d\Gamma(Q)$$

$$P_{i\theta}^{\alpha j} = \int_{\Gamma(j)} \int_{t(\theta-1)}^{t(\theta)} p_{ki}^*(Q,t,s,\tau) \phi_{\alpha}^j(Q) \psi^{\theta}(\tau) d\tau d\Gamma(Q) U_{i\theta}^{\alpha j} \quad (5.13)$$

Em tudo idêntica à equação (5.4), a menos da omissão do índice  $\beta$ , já que esta expressão é válida para aproximação temporal constante.

Desenvolvendo-se todas as integrais da equação (5.13) como descrito no ítem 5.4.2, escreve-se matricialmente:

$$\underset{\sim}{C}^{(S)} \underset{\sim}{U}_S^\theta + \left[ \hat{h}_\theta^{S(1)} \dots \hat{h}_\theta^{S(N)} \right] \begin{Bmatrix} U_\theta^{(1)} \\ \vdots \\ U_\theta^{(N)} \end{Bmatrix} = \quad (5.14)$$

$$\left[ \underset{\sim}{g}_\theta^{S(1)} \dots \underset{\sim}{g}_\theta^{S(N)} \right] \begin{Bmatrix} P_\theta^{(1)} \\ \vdots \\ P_\theta^{(N)} \end{Bmatrix} \quad (\theta = Nt \dots 1)$$

com nomenclatura idêntica a da equação (5.5), salientando-se apenas que para a solução fundamental alternativa, como proposta na equação (3.17), todos os intervalos de integração apresentam singularidade, motivo pelo qual o primeiro termo da expressão (5.14) também representa uma soma.

Englobando-se todos os pontos S, tem-se:

$$\begin{bmatrix} h_{ki}^{11} & \dots & h_{ki}^{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{ki}^{N1} & \dots & h_{ki}^{NN} \end{bmatrix}^\theta \begin{Bmatrix} U_1^i \\ \vdots \\ U_N^i \end{Bmatrix}^\theta = \begin{bmatrix} g_{ki}^{11} & \dots & g_{ki}^{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{ki}^{N1} & \dots & g_{ki}^{NN} \end{bmatrix}^\theta \begin{Bmatrix} p_1^i \\ \vdots \\ p_N^i \end{Bmatrix}^\theta \quad (5.15)$$

$$\underset{\sim}{H}^\theta \underset{\sim}{U}^\theta = \underset{\sim}{G}^\theta \underset{\sim}{P}^\theta \quad (5.16)$$

com

$$\underset{\sim}{h}_\theta^{SS} = \underset{\sim}{h}_\theta^{SS} + \underset{\sim}{C} \quad \forall \theta \quad (5.17)$$

Uma dificuldade no tratamento desta solução fundamental, equação (3.17), é o fato da expressão (5.17) não apresentar truncamento na integração temporal como descrito para a usual.

Esta situação é muito fácil de se contornar, basta adotar como função ponderadora uma solução fundamental composta por uma diferença de "soluções alternativas" defasadas no tempo.

Substituindo-se, portanto, a força de volume apresentada na equação (3.16) por:

$$b_i = \frac{H(t-\tau) - H(t-\tau-\Delta t)}{\Delta t} \quad (5.18)$$

tem-se a nova solução fundamental:

$$\bar{u}_{ki}^*(q, t; s, \tau) = u_{ki}^*(q, t, s, \tau) - u_{ki}^*(q, t-\Delta t; s, \tau) \quad (5.19)$$

$$\bar{p}_{ki}^*(q, t; s, \tau) = p_{ki}^*(q, t, s, \tau) - p_{ki}^*(q, t-\Delta t; s, \tau)$$

que substituídas na equação (3.27) recai em (5.13). Seguindo-se os passos já apresentados obtém-se:

$$\underset{\sim}{H}_\theta \underset{\sim}{U}_\theta = \underset{\sim}{G}_\theta \underset{\sim}{P}_\theta \quad (5.20)$$

com

$$\underset{\sim}{h}_{Nt}^{ss} = \underset{\sim}{h}_{Nt}^{ss} + \underset{\sim}{C} \quad (5.21)$$

Sendo, da mesma forma que para a equação (5.8), o único intervalo onde as integrações singulares ocorrem é definido por  $\theta=Nt$ .

Além disso, os núcleos das integrais de (5.13) para as soluções fundamentais  $\bar{u}_{ki}^*$  e  $\bar{p}_{ki}^*$  se anulam quando:

$$\left\{ \begin{array}{l} t > \frac{d_{\max}}{C_{\min}} + \Delta t \\ \text{ou} \\ Nt > \frac{d_{\max}}{C_{\min} \Delta t} + 1 \end{array} \right. \quad (5.22)$$

Desta forma o processo alternativo continua apresentando as mesmas propriedades do processo usual.

Descrevem-se agora o comportamento da equação (5.20) e sua resolução para os dois primeiros passos. As condições iniciais são as mesmas apresentadas na expressão (5.8).

Para o primeiro passo escreve-se:

$$\underset{\sim}{C} \underset{\sim}{U}_1 + \underset{\sim}{H}_1 \underset{\sim}{U}_1 = \underset{\sim}{G}_1 \underset{\sim}{P}_1 \quad (5.23)$$

onde parte de  $\underset{\sim}{U}_1 \underset{\sim}{P}_1$  são condições de contorno e parte são valores incógnitos determinados ao se resolver a equação.

Para o passo seguinte tem-se:

$$\underset{\sim}{C} \underset{\sim}{U}_2 + \underset{\sim}{H}_2 \underset{\sim}{U}_2 + \overset{\wedge}{\underset{\sim}{H}}_1 \underset{\sim}{U}_1 = \underset{\sim}{G}_2 \underset{\sim}{U}_2 + \overset{\wedge}{\underset{\sim}{G}}_1 \underset{\sim}{U}_1 \quad (5.24)$$

com  $\underset{\sim}{U}_1 \underset{\sim}{P}_1$  conhecidos (passo anterior), sendo  $\underset{\sim}{U}_2 \underset{\sim}{P}_2$  em parte condições de contorno e em parte incógnitas a serem determinadas ao se resolver este sistema. O símbolo " $\wedge$ " na equação (5.24) indica que estas matrizes não são as mesmas do passo anterior, e pelo mesmo motivo exposto ao se analisar a equação algébrica usual,  $H_2 = H_1$  e  $G_2 = G_1$  (observa que  $H_1$  e  $G_1$  são sem " $\wedge$ "), os passos subsequentes são análogos ao segundo e o truncamento do processo de integração se dá graças à expressão (5.22)

#### 5.4- INTEGRAÇÕES TEMPORAIS E ESPACIAIS

Apresentam-se neste ítem as técnica de integração dos termos aproximados, que geram os coeficientes das respectivas equações algébricas.

##### 5.4.1- Integração sobre os elementos temporais e espaciais para a solução fundamental usual.

Antes de se calcular as integrais da equação (5.4), por clareza, escrevem-se as soluções fundamentais de uma forma reduzida, como segue:

$$u_{ki}^* = A \left\{ (t-\tau) \left[ H\left(t-\tau - \frac{r}{C_1}\right) - H\left(t-\tau - \frac{r}{C_2}\right) \right] B + C \delta\left(t-\tau - \frac{r}{C_1}\right) - D \delta\left(t-\tau - \frac{r}{C_2}\right) + E \delta\left(t-\tau - \frac{r}{C_2}\right) \right\} \quad (5.25a)$$

$$p_{ki}^* = I \left\{ (t-\tau) \left[ H\left(t-\tau - \frac{r}{C_1}\right) - H\left(t-\tau - \frac{r}{C_2}\right) \right] J + L \left[ \delta\left(t-\tau - \frac{r}{C_2}\right) - \left(\frac{C_2^2}{C_1^2}\right) \delta\left(t-\tau - \frac{r}{C_1}\right) \right] + M \left[ \delta\left(t-\tau - \frac{r}{C_2}\right) - \left(\frac{C_2^3}{C_1^3}\right) \dot{\delta}\left(t-\tau - \frac{r}{C_1}\right) \right] - N \left[ \delta\left(t-\tau - \frac{r}{C_1}\right) + \frac{r}{C_1} \dot{\delta}\left(t-\tau - \frac{r}{C_1}\right) \right] - O \left[ \delta\left(t-\tau - \frac{r}{C_2}\right) + \frac{r}{C_2} \dot{\delta}\left(t-\tau - \frac{r}{C_2}\right) \right] \right\} \quad (5.25b)$$

$$\text{onde } A = \frac{1}{4\pi\rho}; \quad B = \left[ \frac{3r_i r_k}{r^5} - \frac{\delta_{ki}}{r^3} \right]; \quad C = \frac{r_i r_k}{C_1^2 r^3};$$

$$D = \frac{r_i r_k}{C_1^2 r^3}; \quad E = \frac{\delta_{ki}}{r C_2^2}; \quad I = \frac{n_j}{4\pi}; \quad J = - \frac{6C_3^2}{r^2} \left[ \frac{5r_i r_j r_k}{r^3} + \right.$$

$$- \frac{\delta_{ij}r_k + \delta_{ki}r_j + \delta_{jk}r_i}{r^3} \Big]; \quad L = 2 \left[ \frac{6 r_i r_j r_k}{r^5} - \frac{\delta_{ij}r_k + \delta_{ki}r_j + \delta_{jk}r_i}{r^3} \right]$$

$$M = \frac{2r_i r_j r_k}{r^4 C_2}; \quad N = \frac{r_k \delta_{ij}}{r^3} \left( 1 - 2 \frac{C_2^2}{C_1^2} \right) \quad e \quad O = \frac{\delta_{ki}r_j + \delta_{jk}r_i}{r^3}$$

são termos independentes de  $(t-\tau)$ .

#### 5.4.1.1- Integração temporal

##### a) Aproximação linear:

Tomando-se apenas os termos dependentes de  $(t-\tau)$ , ponderando-os com as funções interpoladoras, determinam-se:  $(TA = (t-r/c_\gamma))$ .

$$\int_{t_{\theta-1}}^{t_\theta} (t-\tau) \left( \frac{t_\theta - \tau}{\Delta t} \right) H(t-\tau - \frac{r}{c_\gamma}) dz = KI_\gamma^1(r, t) =$$

$$= \begin{cases} \frac{t}{\Delta t} \left[ \frac{t_\theta^2 + t_{\theta-1}^2}{2} - t_\theta t_{\theta-1} \right] - \frac{1}{6\Delta t} \left[ t_\theta^3 - 3t_\theta t_{\theta-1}^2 + 2t_{\theta-1}^3 \right] & \text{se } t-t_\theta \geq \frac{r}{c_\gamma} \\ \frac{t}{\Delta t} \left[ \frac{TA^2 + t_{\theta-1}^2}{2} - TAt_{\theta-1} \right] - \frac{1}{6\Delta t} \left[ TA^3 - 3TAt_{\theta-1}^2 + 2t_{\theta-1}^3 \right] & \text{se } t-t_\theta \geq \frac{r}{c_\gamma} \geq t-t_{\theta-1} \\ 0 & \text{se } \frac{r}{c_\gamma} \geq t-t_{\theta-1} \end{cases}$$

(5.26a)

$$\int_{t_{\theta-1}}^{t_{\theta}} (t-\tau) \frac{(\tau-t_{\theta-1})}{\Delta t} H(t-\tau-\frac{r}{C_{\gamma}}) d\tau = K1_{\gamma}^{\theta 2}(r,t) =$$

$$= \begin{cases} \frac{t}{\Delta t} \left[ \frac{t_{\theta}^2 + t_{\theta-1}^2}{2} - t_{\theta} t_{\theta-1} \right] - \frac{1}{6\Delta t} \left[ 2t_{\theta}^3 - 3t_{\theta}^2 t_{\theta-1} + t_{\theta-1}^3 \right] & \text{se } t-t_{\theta} \geq \frac{r}{C_{\gamma}} \\ \frac{t}{\Delta t} \left[ \frac{TA^2 + t_{\theta-1}^2}{2} - TA t_{\theta-1} \right] - \frac{1}{6\Delta t} \left[ 2TA^3 - 3TA^2 t_{\theta-1} + t_{\theta-1}^3 \right] & \text{se } t-t_{\theta-1} \geq \frac{r}{C_{\gamma}} \geq t-t_{\theta} \\ 0 & \text{se } \frac{r}{C_{\gamma}} \geq t-t_{\theta-1} \end{cases}$$

(5.26b)

$$\int_{t_{\theta-1}}^{t_{\theta}} \frac{(t_{\theta}-\tau)}{\Delta t} \delta(t-\tau-\frac{r}{C_{\gamma}}) d\tau = K2_{\gamma}^{\theta 1}(r,t) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (t_{\theta}-t+\frac{r}{C_{\gamma}}) & \text{se } t-t_{\theta-1} \geq \frac{r}{C_{\gamma}} \geq t-t_{\theta} \\ 0 & \text{se } \frac{r}{C_{\gamma}} \geq t-t_{\theta-1} \text{ ou } \frac{r}{C_{\gamma}} < t-t_{\theta} \end{cases}$$

(5.26c)

$$\int_{t_{\theta-1}}^{t_{\theta}} \frac{(\tau-t_{\theta-1})}{\Delta t} \delta(t-\tau-\frac{r}{C_{\gamma}}) d\tau = K2_{\gamma}^{\theta 1}(r,t)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (t - \frac{r}{C_\gamma} - t_{\theta-1}) & \text{se } t - t_{\theta-1} \geq \frac{r}{C_\gamma} \geq t - t_\theta \\ 0 & \text{se } \frac{r}{C_\gamma} > t - t_{\theta-1} \text{ ou } \frac{r}{C_\gamma} < t - t_\theta \end{cases} \quad (5.26d)$$

$$\int_{t_{\theta-1}}^{t_\theta} \frac{(t_\theta - \tau)}{\Delta t} \delta(t - \tau - \frac{r}{C_\gamma}) d\tau = K_3 \theta_1^\gamma (r, t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t - t_{\theta-1} \geq \frac{r}{C_\gamma} \geq t - t_\theta \\ 0 & \text{se } \frac{r}{C_\gamma} > t - t_{\theta-1} \text{ ou } \frac{r}{C_\gamma} < t - t_\theta \end{cases} \quad (5.26e)$$

$$\int_{t_{\theta-1}}^{t_\theta} \frac{(\tau - t_{\theta-1})}{\Delta t} \delta(t - \tau - \frac{r}{C_\gamma}) d\tau = K_3 \theta_2^\gamma (r, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t - t_{\theta-1} \geq \frac{r}{C_\gamma} \geq t - t_\theta \\ 0 & \text{se } \frac{r}{C_\gamma} > t - t_{\theta-1} \text{ ou } \frac{r}{C_\gamma} < t - t_\theta \end{cases} \quad (5.26f)$$

com  $\gamma=1,2$

Reescrevendo-se as equações (5.25) integradas no tempo sob a forma:

$$\bar{u}_{ki}^{\theta\beta}(s, t, q) = A \left\{ B [K1_1^{\theta\beta} - K1_2^{\theta\beta}] + [K2_1^{\theta\beta} - (D+E)K2_2^{\theta\beta}] \right\} \quad (5.27a)$$

$$\bar{p}_{ki}^{\theta\beta}(s, t, q) = I \left\{ J [K1_1^{\theta\beta} - K1_2^{\theta\beta}] + [K2_2^{\theta\beta} - \frac{C_2^2}{C_1^2} K2_1^{\theta\beta}] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + M[K3_2^{\theta\beta} - \left(\frac{C_2^3}{C_1^3}\right) K3_1^{\theta\beta}] - N[K2_1^{\theta\beta} + \frac{r}{C_1} K3_1^{\theta\beta}] - O[K2_2^{\theta\beta} - \\
& + \frac{r}{C_2} K3_2^{\theta\beta}] \} \quad (5.27b)
\end{aligned}$$

As equações (5.27a-b) deduzidas acima dependem apenas da posição do ponto fonte no espaço e no tempo ( $t \rightarrow$  limite superior de integração).

**b) Aproximação constante:**

Ponderando-se os termos dependentes do tempo pela função interpoladora determinam-se:

$$\int_{t_{\theta-1}}^{t_{\theta}} (t-\tau) H(t-\tau - \frac{r}{C_{\gamma}}) d\tau = K1_{\gamma}^{\theta}(r, t) = \begin{cases} t\Delta t + \frac{t_{\theta-1}^2 t_{\theta}^2}{2} & \text{se } t-t_{\theta} \geq \frac{r}{C_{\gamma}} \\ t(TA-t_{\theta-1}) + \frac{t_{\theta-1}^2 TA^2}{2} & \text{se } t-t_{\theta-1} \geq \frac{r}{C_{\gamma}} \geq t-t_{\theta} \\ 0 & \text{se } \frac{r}{C_{\gamma}} \geq t-t_{\theta} \end{cases} \quad (5.28a)$$

$$\int_{t_{\theta-1}}^{t_{\theta}} \delta(t-\tau - \frac{r}{C_{\gamma}}) d\tau = K2_{\gamma}^{\theta}(r, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t-t_{\theta-1} \geq \frac{r}{C_{\gamma}} \geq t-t_{\theta} \\ 0 & \text{se } \frac{r}{C_{\gamma}} > t-t_{\theta-1} \text{ ou } \frac{r}{C_{\gamma}} < t-t_{\theta} \end{cases} \quad (5.28b)$$

$$\int_{t_{\theta-1}}^{t_{\theta}} \dot{\delta}(t-\tau-\frac{r}{C_{\gamma}}) = K3_{\gamma}^{\theta}(r,t) = 0 \quad \forall \frac{r}{C_{\gamma}} \quad (5.28c)$$

O fato das constantes  $K3_{\gamma}^{\theta}$  serem nulas traz o inconveniente de não se levar em conta o termo referente à velocidade derivado da integração do  $\delta(t-\tau-\frac{r}{C_{\gamma}})$ . Para resolver esta questão [12] usa-se uma retroavaliação implícita por diferenças finitas, fazendo-se:

$$K3_{\gamma}^{\theta} \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} & t-t_{\theta-1} \leq \frac{r}{C_{\gamma}} \leq t-t_{\theta} \\ 0 & \frac{r}{C_{\gamma}} > t-t_{\theta-1} \quad \text{ou} \quad \frac{r}{C_{\gamma}} < t-t_{\theta} \end{cases}$$

A integração destes termos é computada em uma matriz  $HH^{\theta}$  separada da  $H^{\theta}$ , transformando a equação (5.6b) em:

$$\begin{aligned} [H^1 + HH^1] U^1 &= G^1 P^1 \quad (\theta=1) \\ H^{\theta} U^{\theta} + [HH^{\theta} U^{\theta} - HH^{\theta-1} U^{\theta-1}] &= G^{\theta} P^{\theta} \quad \theta=2 \dots Nt \end{aligned} \quad (5.29)$$

Para aumentar a precisão BANERJEE [12] propõe que se faça uma correção dos deslocamentos anteriores ao que se determina no passo  $\theta$  como segue:

$$U^{\theta-1} = (U^{\theta-1} + U^{\theta-2})/2 \quad (5.30)$$

#### 5.4.1.2- Integração espacial

A integração no espaço das expressões (5.27) geram as matrizes  $\hat{h}_{\theta\beta}^{sl}$  e  $\hat{g}_{\theta\beta}^{sl}$  indicadas na equação (5.5). Esta integração é desenvolvida de maneira análoga ao executado para o caso estático, item 4.5, com alguns procedimentos extras que garantem a aproximação das descontinuidades da frente de onda, caracterizadas nas equações (5.26) e (5.28).

##### a) Integral não singular:

Para aplicar-se o processo de integração descrito no item 4.5.1, com suficiente precisão ao caso dinâmico, deve-se atentar para as descontinuidades das funções a serem integradas, equações (5.27a) e (5.27b). Algumas destas descontinuidades são mostradas esquematicamente nas figuras 5.7, 5.8 e 5.9. As áreas hachuradas representam regiões onde a frente de onda está presente.

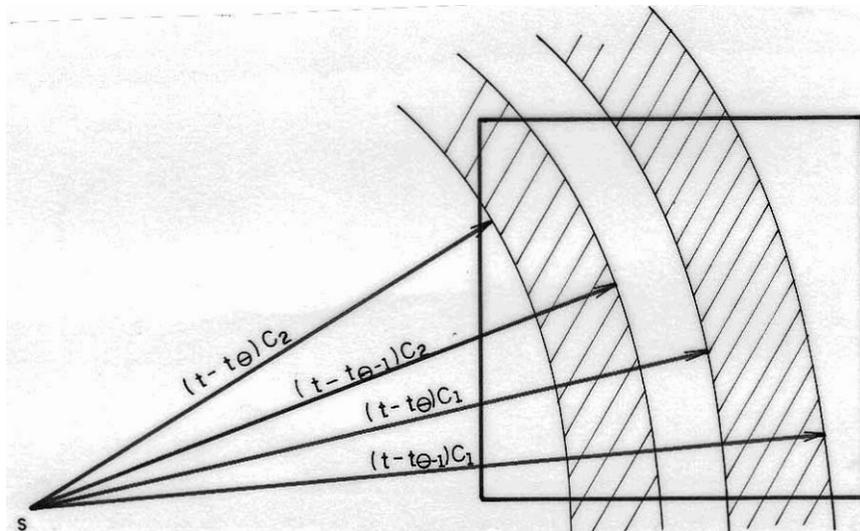


Figura 5.7- Elemento não singular, descontinuidade tipo 1.

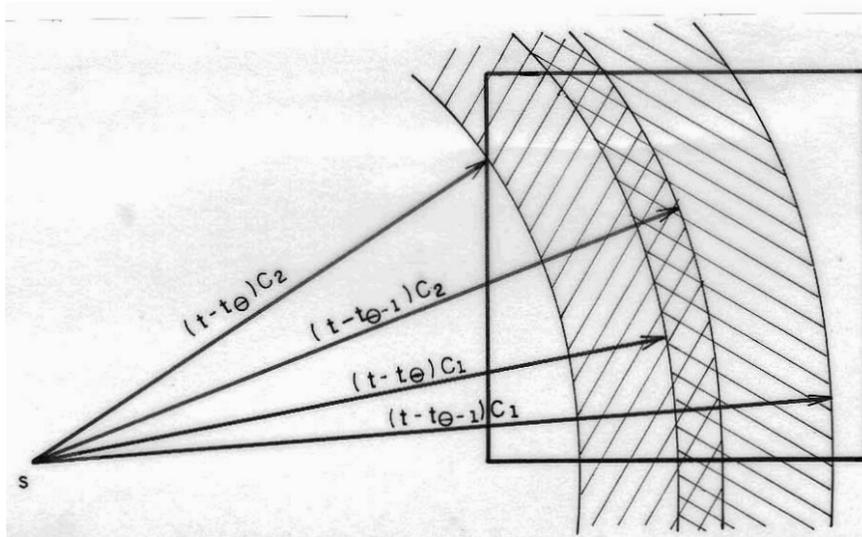


Figura 5.8- Elemento não singular, descontinuidade tipo 2.

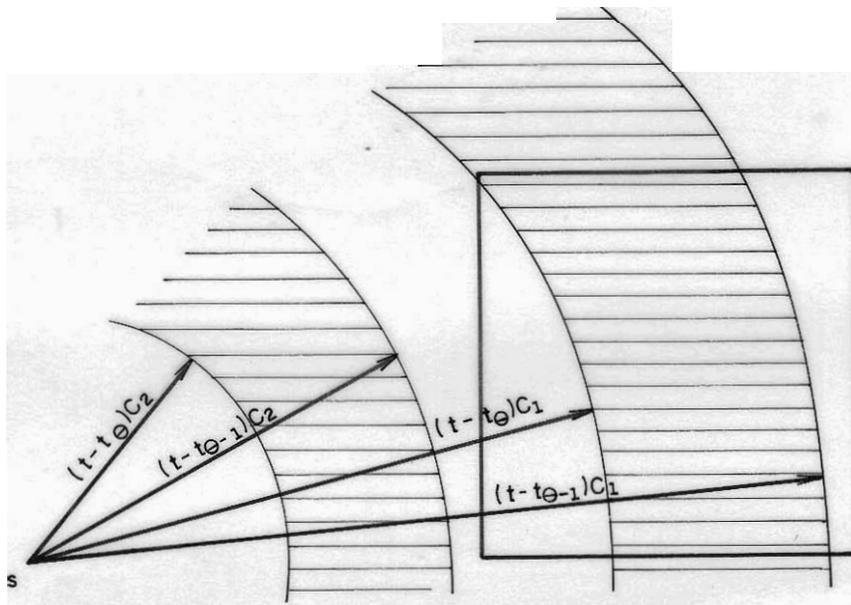


Figura 5.9- Elemento não singular, descontinuidade tipo 3.

Para representar devidamente as integrações sobre tais descontinuidades divide-se o elemento quadrangular em  $n_1 \times n_2$  subelementos, figura (5.10), sobre as quais se aplica a quadratura de Gauss descrita no item 4.5.1 com:

$$\det (J(r, s))^{\text{sub}} = \det \frac{(J(r, s))^{\text{ele}}}{n_1 \times n_2} \quad (5.31)$$

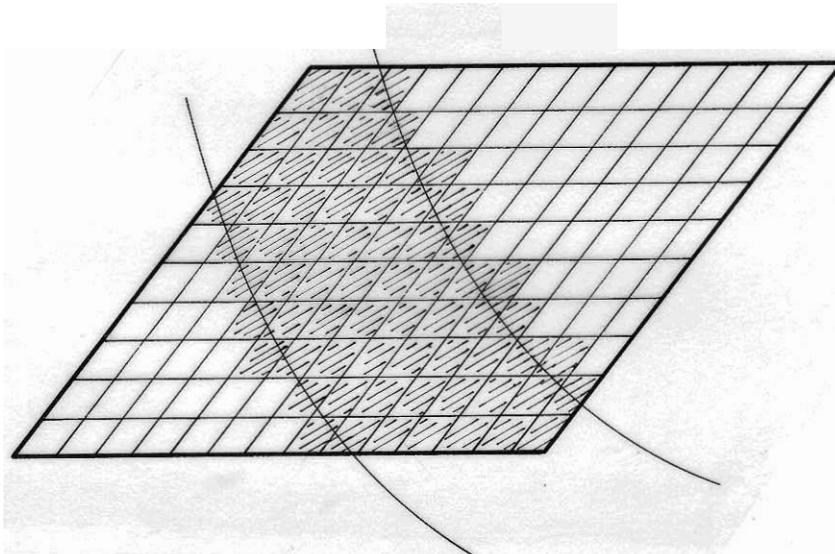


Figura 5.10- Subdivisão do elemento, os subelementos hachurados são os efetivamente integrados.

onde levou-se em conta o fato do  $\det (J(r, s))^{\text{ele}} = \text{cte}$  para elementos planos. A integral sobre o elemento fica:

$$h_{\theta\beta}^{\alpha j} = \int_{\Gamma(j)} \bar{p}_{ki}^{\theta\beta}(s, Q) \phi_{\alpha}^j d\Gamma(Q) = \sum_{SE=1}^{NS} \int_{\Gamma_{SE}} \bar{p}_{ki}^{\theta\beta}(s, Q) \phi_{\alpha}^j d\Gamma(Q) \quad (5.32)$$

$$g_{\theta\beta}^{\alpha j} = \int_{\Gamma(j)} \bar{u}_{ki}^{\theta\beta}(s, Q) \phi_{\alpha}^j d\Gamma(Q) = \sum_{SE=1}^{NS} \int_{\Gamma_{SE}} \bar{u}_{ki}^{\theta\beta}(s, Q) \phi_{\alpha}^j d\Gamma(Q)$$

onde "SE" são os subelementos, NS é o número de subelementos efetivamente integrados.

As integrais sobre os subelementos são efetuadas como segue:

$$\int_{\Gamma_{SE}} \bar{p}_{ki}^{\theta\beta}(s, Q) \phi_{\alpha}^j d\Gamma(Q) = \sum_{\ell=1}^{NG} \sum_{m=1}^{NG} w_{(\ell)} w_{(m)} \bar{p}_{ki}^{\theta\beta}(r_{(\ell)}, s_{(m)}) \frac{\det(J(r, s))}{n_1 n_2} \quad (5.33a)$$

$$\int_{\Gamma_{SE}} \bar{u}_{ki}(s, Q) \phi_{\alpha}^j d\Gamma(Q) = \sum_{\ell=1}^{NG} \sum_{m=1}^{NG} w_{(\ell)} W_{(m)} \bar{u}_{ki}^{\theta\beta}(r_{(\ell)}, s_{(m)}) \frac{\det(J(r, s))}{n_1 \times n_2} \quad (5.33b)$$

### b) Integrais singulares

Tudo o que foi descrito no item 4.5.2 é válido também neste item. Apenas se divide o intervalo de integração em  $\rho$ , de forma a adequar cada trecho de integração às partes contínuas da função integrada. Assim da expressão (4.37) vem:

$$\int_0^{\bar{\rho}} g(\rho) d\rho = \int_0^1 \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho + \int_1^{\rho_1} \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\rho_1}^{\bar{\rho}} \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho \quad (5.34)$$

Cujo equivalente numérico fica idêntico às equações (4.39) e (4.40).

Neste caso as possíveis descontinuidades são apresentadas na figura 5.11:

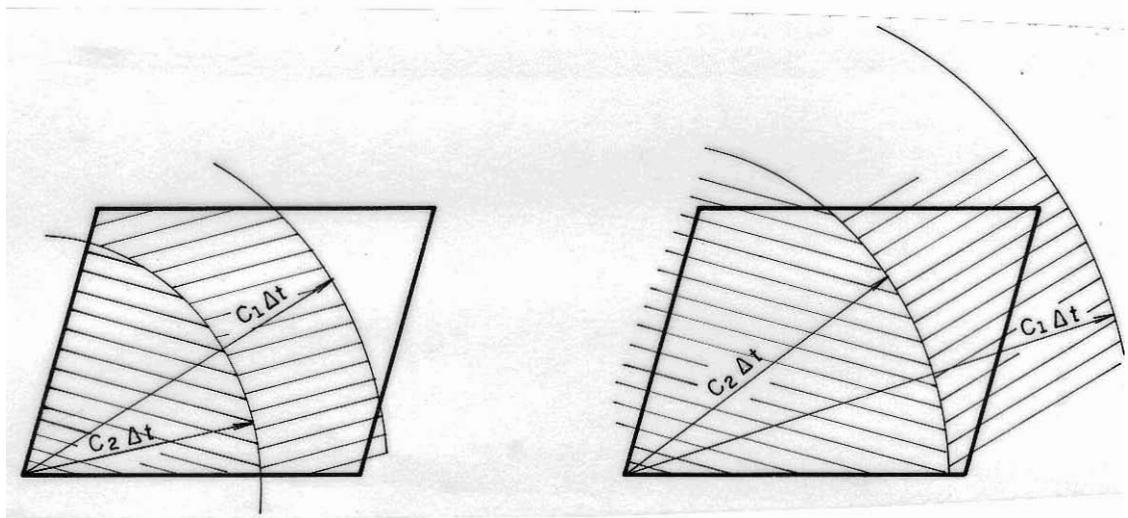


Figura 5.11-Descontinuidades da frente da onda para elemento singular ( $C_1 > C_2$ ).

#### 5.4.2- Integração sobre os elementos temporais e espaciais para a solução fundamental alternativa.

De forma análoga a utilizada para a solução usual, escreve-se a solução fundamental alternativa em sua forma reduzida: ( $t' = t - \tau$ ).

$$u_{ki}^* = \frac{A}{\Delta T} + \left\{ \frac{B}{2} \left[ \left( t' - \frac{r^2}{C_1^2} \right) H \left( t' - \frac{r}{C_1} \right) - \left( t'^2 - \frac{r^2}{C_2^2} \right) H \left( t' - \frac{r}{C_2} \right) \right] + \right. \\ \left. C \frac{1}{C_1^2} H \left( t' - \frac{r}{C_1} \right) - D \frac{1}{C_2^2} H \left( t' - \frac{r}{C_2} \right) + E H \left( t' - \frac{r}{C_2} \right) \right\} \quad (5.35a)$$

$$P_{ki}^* = \frac{A}{\Delta T} \left\{ \frac{J}{2} \left[ \left( t'^2 - \frac{r^2}{C_1^2} \right) H \left( t' - \frac{r}{C_1} \right) - \left( t'^2 - \frac{r^2}{C_2^2} \right) H \left( t' - \frac{r}{C_2} \right) \right] + \right. \\ \left. L \left[ H \left( t' - \frac{r}{C_2} \right) - \frac{C_2^2}{C_1^2} H \left( t' - \frac{r}{C_1} \right) + M \left[ \delta \left( t' - \frac{r}{C_2} \right) - \frac{C_2^3}{C_1^3} \delta \left( t' - \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{r}{C_1} \right) \right] - N \left[ H \left( t' - \frac{r}{C_1} \right) + \frac{r}{C_1} \delta \left( t - \frac{r}{C_1} \right) \right] - O \left[ H \left( t' - \frac{r}{C_2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{r}{C_2} \delta \left( t' - \frac{r}{C_2} \right) \right] \right\} \quad (5.35b)$$

##### 5.4.2.1- Integração temporal

Feita apenas para o elemento constante, seguindo-se passos semelhantes ao item 5.4.1b, integra-se os termos dependentes do tempo chegando-se a: ( $TA = t - \frac{r}{C_\gamma}$ ).

$$K1_{\gamma}^{\theta} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left( t^2 - \frac{r^2}{C_{\gamma}^2} \right) \Delta t - t(t_{\theta}^2 - t_{\theta-1}^2) + (t_{\theta}^3 - t_{\theta-1}^3) / 3 \right\} & \text{se } t - t_{\theta} \geq \frac{r}{C_{\gamma}} \\ \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left( t^2 - \frac{r^2}{C_{\gamma}^2} \right) (TA - t_{\theta-1}) - t(TA^2 - t_{\theta-1}^2) + (TA^3 - t_{\theta-1}^3) / 3 \right\} & \text{se } t - t_{\theta-1} \geq \frac{r}{C_{\gamma}} \geq t - t_{\theta} \\ 0 & \text{se } \frac{r}{C_{\gamma}} \geq t - t_{\theta-1} \end{cases} \quad (5.36a)$$

$$K2_{\gamma}^{\theta} = \begin{cases} 1 & \text{se } t - t_{\theta} \geq \frac{r}{C_{\gamma}} \\ \frac{(TA - t_{\theta-1})}{\Delta t} & \text{se } t - t_{\theta} \geq \frac{r}{C_{\gamma}} \geq t - t_{\theta} \\ 0 & \text{se } \frac{r}{C_{\gamma}} \geq t - t_{\theta-1} \end{cases} \quad (5.36b)$$

$$K3_{\gamma}^{\theta} = \begin{cases} 0 & \text{se } t - t_{\theta} > \frac{r}{C_{\gamma}} \text{ ou } \frac{r}{C_{\gamma}} > t - t_{\theta-1} \\ 1 & \text{se } t - t_{\theta-1} \geq \frac{r}{C_{\gamma}} \geq t - t_{\theta} \end{cases} \quad (5.36c)$$

Utilizando-se os parâmetros acima determinados, pode-se escrever as expressões (5.35a) e (5.35b) nas seguintes formas:

$$\bar{u}_{ki}^{\theta}(s, t, q) = \frac{A}{\Delta t} \left\{ \frac{B}{2} [K1_1^{\theta} - K1_2^{\theta}] + CK2_1^{\theta} - (D+E)K2_2^{\theta} \right\} \quad (5.37a)$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_{ki}^{\theta}(s, t, q) = & \frac{I}{\Delta t} \left\{ \frac{J}{2} [K1_1^{\theta} - K1_2^{\theta}] + L[K2_2^{\theta} - \frac{C_2^2}{C_1^2} K2_2^{\theta}] + \right. \\ & \left. + M[K3_2^{\theta} - \left(\frac{C_2^3}{C_1^3}\right) K3_1^{\theta}] - N[K2_1^{\theta} + \frac{r}{C_1} K3_1^{\theta}] - O[K2_2^{\theta} - \frac{r}{C_2} K3_2^{\theta}] \right\} \end{aligned} \quad (5.37b)$$

Como já foi mostrado na equação (5.18), aplica-se também a solução fundamental alternativa composta que, por ser uma composição da descrita acima, sua integração temporal resulta em:

$$\begin{aligned} \bar{KZ}_{\gamma}^1 &= KZ_{\gamma}^1 \\ \bar{KZ}_{\gamma}^{\theta} &= KZ_{\gamma}^{\theta} - KZ_{\gamma}^{\theta+1} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = 1, 2, 3 \\ \theta = 2, \dots, Mt \end{array} \right. \quad (5.38)$$

onde  $KZ^{\theta+1}$  são as expressões (5.37a e 5.37b) calculadas para  $(t=t-\Delta t)$  ou pela propriedade de translação substituindo-se  $(\theta)$  por  $(\theta+1)$ , resultando para  $\bar{u}_{ki}^{\theta}$  e  $\bar{p}_{ki}^{\theta}$  expressões semelhantes às (5.37a) e (5.37b) com  $\bar{KZ}_{\gamma}^{\theta}$  no lugar de  $KZ_{\gamma}^{\theta}$  ( $Z=1, 2, 3$ ).

Cabe dizer que, ao contrário do que ocorre com a solução usual, a composição das matrizes  $H^{\theta}$  e  $G^{\theta}$  com a solução alternativa, para aproximação constante, não gera nenhuma complicação, sendo válida a expressão global (5.20) para a resolução do sistema de equações no tempo.

#### 5.4.2.2- Integração espacial

Neste caso, a integração espacial da solução fundamental alternativa é idêntica a descrita para a solução usual.

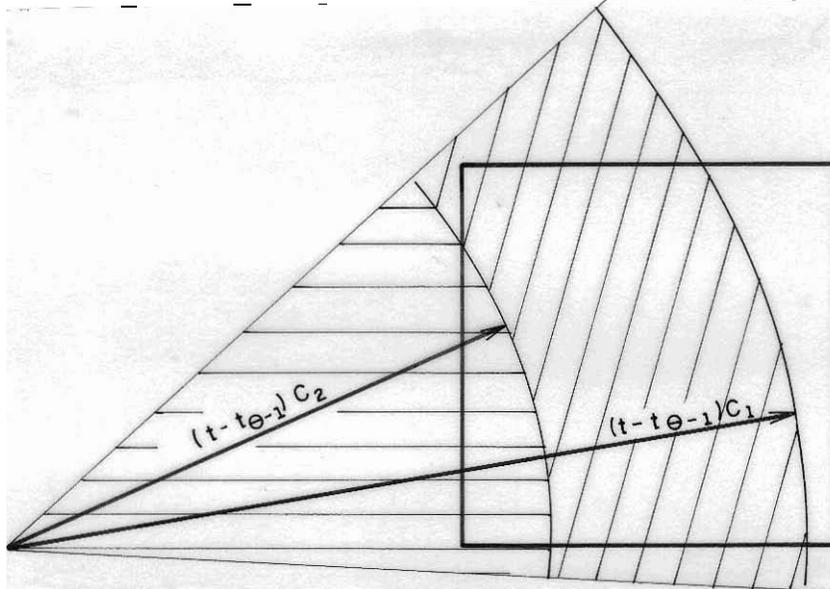


Figura 5.12- Descontinuidade da solução alternativa básica.  
(não permite troncamento do processo de integração)

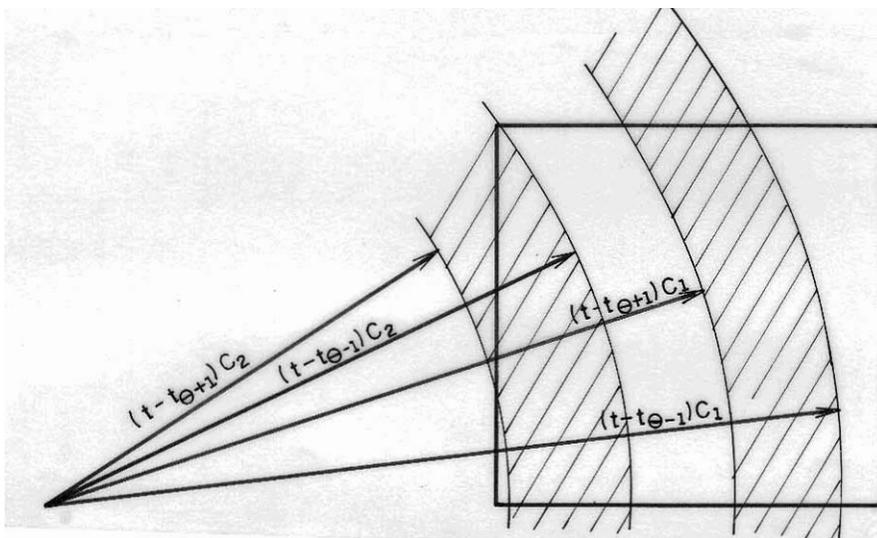


Figura 5.13- Descontinuidade da solução alternativa composta  
(permite troncamento do processo de integração)

Para o primeiro passo de integração ambas as soluções alternativas possuem descontinuidades idênticas à usual.

## CAPÍTULO 6

### MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

#### 6.1- INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresenta-se a composição básica do MEF para meios contínuos submetidos a ações estáticas ou dinâmicas [157, 15, 21,22].

Isto se faz a partir da expressão do equilíbrio de corpos elásticos obtida pela aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais [121, 15].

Utiliza-se, neste capítulo, notação vetorial por tornar mais simples as expressões referentes ao MEF, empregam-se, entretanto, índices repetidos para indicar soma, lembrando que quando um índice está entre parênteses este não representa diretamente a soma porém, acompanha a variação da mesma se esta se desenvolver sobre índices iguais a este.

## 6.2- EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Outra vez assume-se que a matéria de um corpo elástico é homogênea, isotrópica e distribuída continuamente em seu volume, e que este corpo apresenta-se com pequenos deslocamentos. Assim, todas as definições apresentadas no capítulo 2 continuam válidas.

É importante indicar que graças à simetria do tensor de tensões, equação (2.6), é possível representá-lo vetorialmente como segue:

$$\underset{\sim}{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}] \quad (6.1)$$

da mesma forma o tensor de deformações fica:

$$\underset{\sim}{\epsilon} = [\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{33} \quad \epsilon_{12} \quad \epsilon_{23} \quad \epsilon_{31}] \quad (6.2)$$

Para relação tensão deformação, Lei de Hooke equação (2.9), tem-se

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\epsilon} \quad (6.3)$$

onde, por exemplo, para o caso tridimensional elástico isotrópico, C vale:

$$\underset{\sim}{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-\nu} & 1 & \frac{1}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Considerando-se um corpo tridimensional genérico, figura (6.1), a expressão estática do princípio dos trabalhos virtuais pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \tilde{\epsilon}^t \sigma \, d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{U}^t b \, d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{U}^t p \, d\Gamma + \tilde{U}^i f^i \quad (6.5)$$

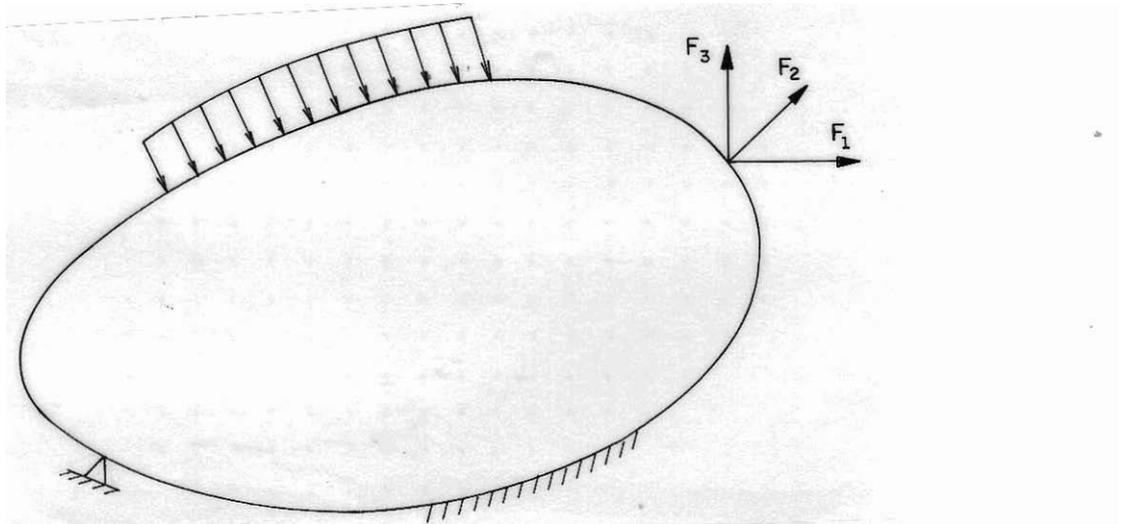


Figura 6.1- Corpo tridimensional genérico, representação esquemática.

onde o símbolo "-" representa que o estado em questão é devido a pequenos deslocamentos virtuais que satisfazem as condições de contorno,  $\tilde{U}$  é o vetor deslocamento de um ponto qualquer,  $\tilde{b}$  representa as forças de volume,  $\tilde{f}^i$  representa força concentrada em um ponto qualquer e  $\tilde{p}$  forças de superfície.

### 6.3- TRANSFORMAÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO EM SISTEMA ALGÉBRICO (ESTÁTICO)

No método dos Elementos Finitos aproxima-se o corpo mostrado na figura 6.1 por um conjunto de elementos interligados pelos pontos nodais de sua superfície, figura 6.1'.

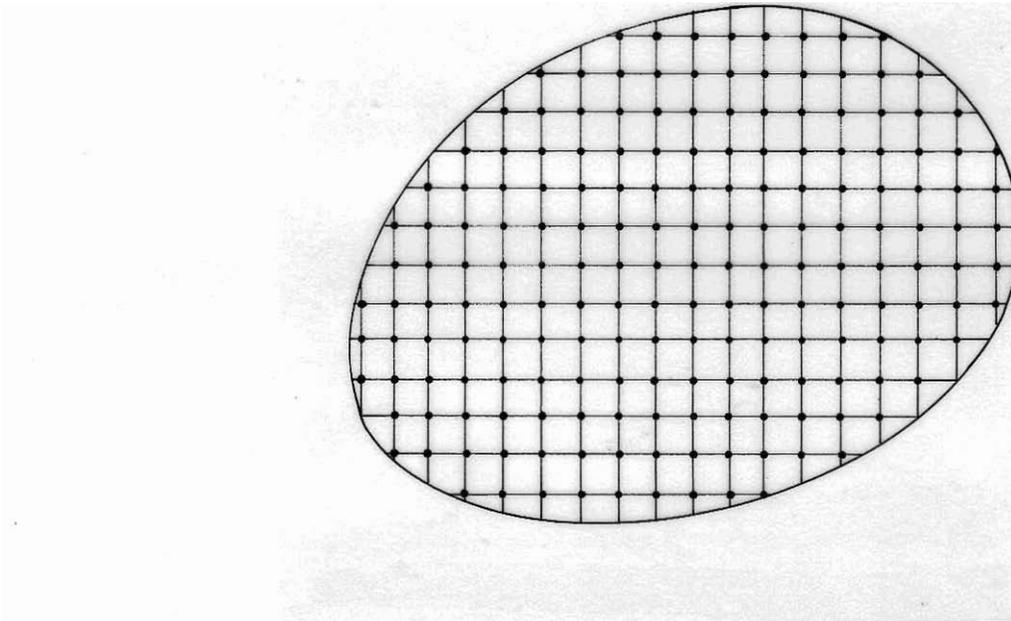


Figura 6.1'- Discretização do corpo em elementos finitos, representação esquemática.

Levando-se em consideração esta divisão do corpo, escreve-se, sem perda de generalidades, a igualdade (6.5) como uma soma de integrações sobre os volumes e áreas das superfícies de todos os elementos finitos.

$$\int_{\Omega} \bar{\epsilon}^j \sigma^j d\Omega = \int_{\Omega} \bar{u}^j b^j d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{u}^j p^j d\Gamma + \bar{u}^i f^i \quad (6.6)$$

Os deslocamentos no interior destes elementos são aproximados por funções interpoladoras parametrizadas pelos valores que estes assumem nos pontos nodais,

$$\underset{\sim}{U}^j(q) = \underset{\sim}{\phi}^{(j)}(q) \underset{\sim}{\hat{U}}^{(j)} \quad (6.7)$$

onde  $\underset{\sim}{\phi}^j$  é a matriz de interpolação dos deslocamentos,  $\underset{\sim}{U}^j$  é o vetor que contém os deslocamentos nodais e  $j$  representa o elemento.

Se o número total de nós é  $N$ , o vetor de deslocamentos global fica:

$$\underset{\sim}{\hat{U}}^t = [U_1 U_2 U_3 \ : \ U_1 U_2 U_3 \ : \ \dots \ : \ U_1 U_2 U_3] \quad (6.8)$$

ou

$$\underset{\sim}{\hat{U}}^t = [U_1 U_2 U_3 \dots \dots \dots U_{3N}] \quad (6.9)$$

Desta forma, aplicando-se convenientemente sobre a matriz interpoladora a expressão (2.8), escreve-se:

$$\underset{\sim}{\epsilon}^j(q) = \underset{\sim}{B}^j(q) \underset{\sim}{\hat{U}} \quad (6.10)$$

Substituindo-se a equação (6.10) na relação (6.3) encontra-se:

$$\underset{\sim}{\sigma}^j(q) = \underset{\sim}{C}^{(j)} \underset{\sim}{\epsilon}^{(j)}(q) = \underset{\sim}{C}^{(j)} \underset{\sim}{B}^{(j)}(q) \underset{\sim}{\hat{U}} \quad (6.11)$$

onde  $\underset{\sim}{C}^j$  é a matriz de constantes elásticas do material que constitui o elemento  $j$ .

Substituindo-se as equações (6.7), (6.10) e (6.11) na igualdade (6.6) obtém-se:

$$\tilde{U}^t \left[ \int_{\Omega(j)} B^{jt} C^{(j)} B^j d\Omega \right] \hat{U} = \tilde{U}^t \left\{ \int_{\Omega(j)} \phi^{jt} b^j d\Omega + \int_{\Gamma(j)} \phi_{\Gamma}^{jt} p^j d\Gamma + \hat{f} \right\} \hat{U} \quad (6.12)$$

onde as matrizes  $\phi_{\Gamma}^j$  interpolam os deslocamentos na superfície dos elementos e podem ser derivadas das próprias matrizes de interpolação dos deslocamentos de volume  $\phi^j$ . O símbolo " $\hat{\phantom{x}}$ " em  $f$  representa que este foi escrito de forma semelhante a da equação (6.9).

Como o vetor de deslocamentos virtuais é arbitrário, para cada componente deste impõe-se separadamente deslocamentos unitários chegando a  $\tilde{U}^t = I$  (matriz identidade), e denotando  $\hat{U}$  simplesmente por  $U$  escreve-se:

$$KU = F \quad (6.13)$$

onde:

$$K = \int_{\Omega(j)} B^{jt} C^{(j)} B^j d\Omega = \sum_j K^j \quad (6.14a)$$

$$F = f + f_{\Omega} + f_{\Gamma} \quad (6.14b)$$

$$f_{\Omega} = \int_{\Omega(j)} \phi^{jt} b^j d\Omega = \sum_j f_{\Omega}^j \quad (6.14c)$$

$$f_{\Gamma} = \int_{\Gamma(j)} \phi_{\Gamma}^{jt} p^j d\Gamma = \sum_j f_{\Gamma}^j \quad (6.14d)$$

A equação (6.13) é então resolvida pelas técnicas usuais do cálculo numérico, já muito desenvolvidas para matrizes oriundas do MEF, como pode ser visto, por exemplo, nos trabalhos de RAMALHO [121] e SORIANO [128].

#### 6.4- TRANSFORMAÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO EM SISTEMA ALGÉBRICO (dinâmico)

Quando as ações externas são aplicadas repentinamente ao corpo, as forças de inércia devem ser consideradas na obtenção da equação de equilíbrio do corpo em análise. Usando-se o princípio d'Alambert [15], pode-se simplesmente incluir as forças elementares de inércia como parte das forças de volume.

Assumindo-se que a aceleração é aproximada nos mesmos moldes que os deslocamentos (equação (6.7)) escreve-se:

$$\bar{F}_{\Omega} = \int_{\Omega(j)} \phi^{j^t} \left[ \underset{\sim}{b}^j - \rho^{(j)} \underset{\sim}{\phi}^j \ddot{U} \right] d\Omega = \underset{\sim}{f} - \underset{\sim}{M} \ddot{U} \quad (6.15)$$

onde  $\rho^{(j)}$  é a densidade do material no elemento j.

A equação de equilíbrio, neste caso fica:

$$\underset{\sim}{M} \ddot{U} + \underset{\sim}{K} U = \underset{\sim}{F} \quad (6.16)$$

com  $\underset{\sim}{U}$  e  $\underset{\sim}{F}$  dependentes do tempo e a matriz de massa  $\underset{\sim}{M}$  dada por:

$$\underset{\sim}{M} = \int_{\Omega(j)} \rho^{(j)} \phi^{j^t} \phi^j d\Omega = \sum_j \underset{\sim}{M}^j \quad (6.17)$$

Quando um corpo qualquer está vibrando, ocorre uma dissipação de energia que, em análise dinâmica, é chamada de amortecimento físico do movimento. Observa-se que as forças que causam esta dissipação de energia são proporcionais à velocidade elementar do meio, e estão relacionadas com a rigidez e densidade do mesmo [150].

Introduzindo-se as forças de amortecimento como contribuição adicional às forças de volume escreve-se:

$$\tilde{C}^j = \lambda_1^{(j)} \tilde{M}^{(j)} + \lambda_2^{(j)} \tilde{K}^{(j)} \quad (6.18)$$

onde  $\tilde{C}$  é a matriz de amortecimento  $\lambda_i^{(j)}$  os parâmetros de amortecimento do elemento  $j$ .

A equação de equilíbrio fica portanto:

$$\tilde{M}\ddot{U} + \tilde{C}\dot{U} + \tilde{K}U = F \quad (6.19)$$

com  $U$  e  $F$  dependentes do tempo.

Como os problemas dinâmicos analisados neste trabalho são transientes, a equação (6.19) deve ser integrada numericamente no tempo. O algoritmo escolhido para tal é o Newmark  $\beta$  [150, 16, 148] que será descrito oportunamente.

Finalmente, para cada elemento finito, define-se um sistema de coordenadas local ao qual se referenciam as variáveis nodais aproximadas sobre este; portanto, para se ter efetivamente válidas as somas da expressão (6.12) e, conseqüentemente tudo que deriva daí, é necessário rotacionar as matrizes de cada elemento do sistema de coordenadas local para o global antes de efetuar a soma.

## 6.5- ELEMENTOS FINITOS

Neste item, apresentam-se os elementos finitos utilizados para modelar as superestruturas. A forma de apresentá-los será a mais suscinta possível, tendo em vista que a demonstração detalhada dos mesmos é vastamente encontrada na bibliografia, por exemplo [121, 117, 120, 30].

### 6.5.1- Elemento de barra

O elemento de barra é localizado geometricamente no espaço por dois nós de extremidade  $i$  e  $j$ . Um terceiro ponto  $K$  é necessário para definir o sistema de coordenadas local do elemento, como ilustra a figura 6.2:

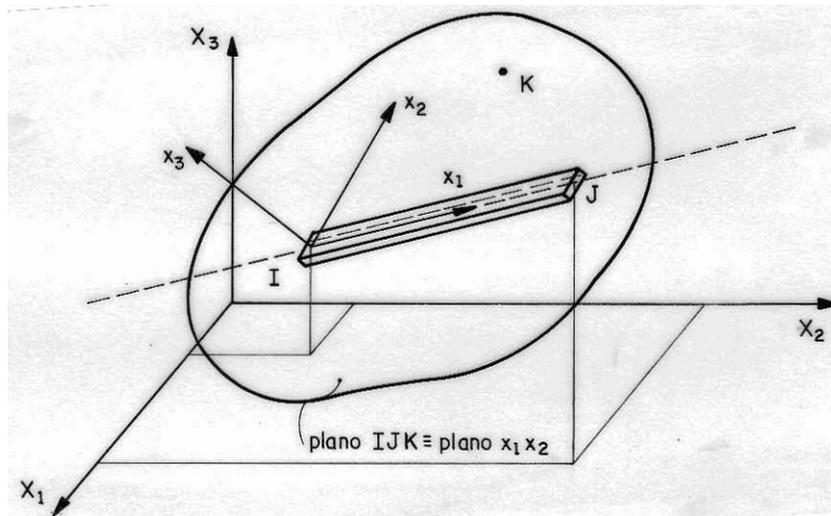


Figura 6.2- Elemento de barra, localização no espaço e sistema de coordenadas local.

A matriz transformação  $T_O$  que relaciona o sistema de coordenadas global ao sistema local e vice-versa é dada por:

$$T_O = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

onde  $l_i$ ,  $m_i$  e  $n_i$  são os cossenos diretores das coordenadas locais  $\bar{X}_i$  com relação às coordenadas globais  $X_i$ , como mostra a figura 6.3.

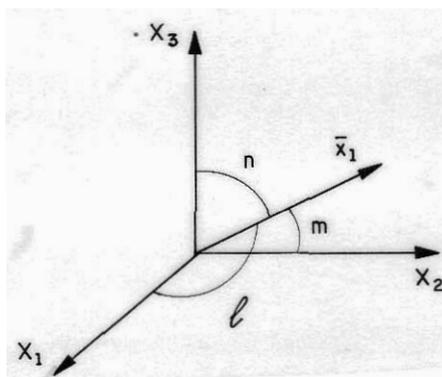


Figura 6.3- Cossenos diretores

Para transformar os valores nodais, figura 6.4, ordenados como na equação (6.23), entre os eixos locais e globais escreve-se:

$$\begin{array}{c}
 \bar{U} \\
 \sim
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 T^t \\
 \sim
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 U \\
 \sim
 \end{array}
 \tag{6.21}$$

onde o símbolo "-" representa grandezas em coordenadas locais

$$\begin{array}{c}
 T \\
 \sim
 \end{array}
 =
 \begin{bmatrix}
 T_{\circ} & 0 & 0 \\
 \tilde{0} & \tilde{T}_{\circ} & \tilde{0} \\
 \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{T}_{\circ} \\
 \sim & \sim & \sim_{\circ}
 \end{bmatrix}
 \tag{6.22}$$

Adotam-se características geométricas e físicas da barra constantes em seu comprimento e considera-se ainda que os parâmetros nodais, figura 6.4, estejam ordenados como indica o vetor abaixo:

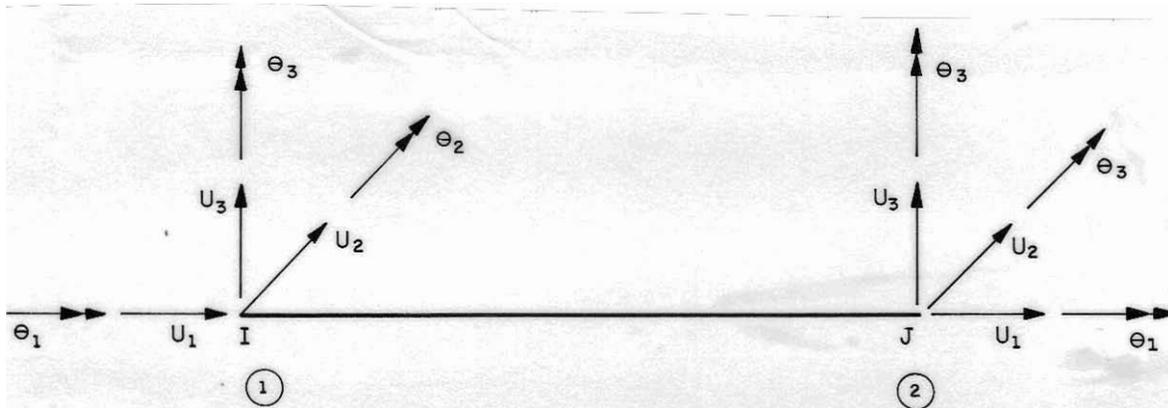


Figura 6.4- Parâmetros nodais em coordenadas locais

$$\bar{U}^t = [U_1^1 \ U_2^1 \ U_3^1 \ \theta_1^1 \ \theta_2^1 \ \theta_3^1 \ U_1^2 \ U_2^2 \ U_3^2 \ \theta_1^2 \ \theta_2^2 \ \theta_3^2] \quad (6.23)$$

Impondo-se aproximação cúbica para os deslocamentos transversais, linear para os longitudinais, assumindo-se as hipóteses do Bernoulli e desprezada a deformação por força cortante; as matrizes de rigidez e massa passam a ser expressas em coordenadas locais, como segue:

$$\tilde{K}^j = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & -K_1 & K_2 \\ \sim & \tilde{K}_3 & \tilde{K}_4 & \tilde{K}_5 \\ & \text{SIM} & \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \\ & & \sim & K_3 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

com

$$\tilde{K}_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_3}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_2}{L^3} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

$$\tilde{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_3}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI_3}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

$$\tilde{K}_3 = \begin{bmatrix} \frac{GI_1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_2}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI_3}{L} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

$$\tilde{K}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI_2}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

$$\tilde{K}_5 = \begin{bmatrix} -GI_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_2}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2EI_3}{L} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

$$\bar{M}_j = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_6 & M_4 \\ & M_3 & M_4 & M_5 \\ & \text{SIM} & M_1 & M_2 \\ & & & M_3 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

com

$$M_1 = \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 \\ 0 & 0 & 156 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22L \\ 0 & -22L & 0 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} \frac{140I_1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13L \\ 0 & 13L & 0 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} \frac{70I_1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & -3L^2 & 0 \\ 0 & 0 & -3L^2 \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 54 \end{bmatrix} \quad (6.35')$$

- $A$  = Área da seção transversal  
 $I_1$  = momento de inércia a torção  
 $I_2$  = momento de inércia em torno do eixo  $\bar{x}_2$   
 $I_3$  = momento de inércia em torno do eixo  $\bar{x}_3$   
 $\rho$  = densidade do material.  
 $L$  = comprimento da barra  
 $E$  = módulo de elasticidade longitudinal  
 $G$  = módulo de elasticidade transversal

Para ações externas, distribuídas no longo do elemento, as forças nodais equivalentes são calculadas numericamente a partir da seguinte expressão.

$$\tilde{\bar{F}}^i = L \int_0^1 \begin{pmatrix} (1 - \xi) & P_1(\xi) \\ (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1) & P_2(\xi) \\ (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1) & P_3(\xi) \\ (1 - \xi) & M(\xi) \\ L(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) & P_3(\xi) \\ L(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) & P_2(\xi) \\ \xi & P_1(\xi) \\ (1 - 2\xi^3 + 3\xi^3) & P_2(\xi) \\ (1 - 2\xi^3 + 3\xi^3) & P_3(\xi) \\ \xi & M(\xi) \\ L(\xi^3 - \xi^2) & P_3(\xi) \\ L(\xi^3 - \xi^2) & P_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi = \begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ M_1^1 \\ M_2^1 \\ M_3^1 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ M_1^2 \\ M_2^2 \\ M_3^2 \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

onde  $P_i$  e  $M$  são respectivamente as cargas distribuídas na direção  $i$  e o momento torçor distribuído (figura 6.5),  $\xi = X_1/L$ ,  $f_i^k$  e  $M_i^k$

são as forças e momentos de engastamento perfeito na direção  $i$  para o nó  $k$ . Para o caso dinâmico este vetor depende do tempo.

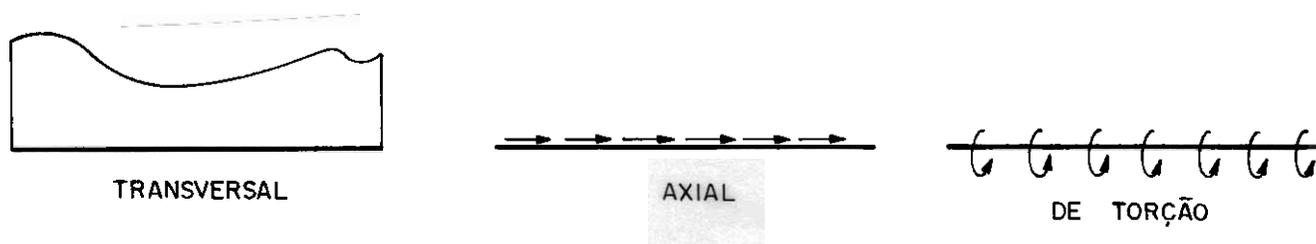


Figura 6.5- Possíveis carregamentos distribuídos

Como foi dito, as matrizes e vetores mostrados estão associados às coordenadas locais, para expressá-los em coordenadas globais basta utilizar convenientemente a matriz de rotação  $T$  definida na equação (6.22), ficando:

$$\begin{aligned}
 \tilde{K}^j &= T^t \bar{K}^j T \\
 \tilde{M}^j &= T^t \bar{M}^j T \\
 \tilde{f}^j &= T^t \bar{f}^j
 \end{aligned}
 \tag{6.37}$$

Com as matrizes de rigidez e de massa dos elementos expressas em coordenadas globais, monta-se o sistema algébrico global de equações, que resolvido fornece os deslocamentos globais de cada nó. Para finalizar a análise de estruturas reticuladas, se deve estar apto a determinar a sollicitação final em coordenadas locais, para cada nó da mesma. Para tanto faz-se:

$$\bar{f}^{(j)} = \bar{K}^{(j)} T U \quad (6.38)$$

Este elemento é largamente utilizado na prática, sua convergência e resultados obtidos são muito bons quando considerado o tipo de superestruturas a serem analisadas nesta tese.

### 6.5.2- Elemento de Casca

A modelagem para cascas é feita pela superposição de dois elementos triangulares, que simulam separadamente as características de membrana e de placa desempenhadas pelo meio modelado.

#### a) Elemento de Membrana (chapa)

O elemento utilizado para a modelagem dos efeitos de membrana será o LST (Linear Strain Triangle) [15], cujo próprio nome diz, aproxima linearmente as deformações em seu interior. Este é localizado geometricamente no espaço por três nós de extremidade i,j,k, como mostra a figura 6.6.

A matriz transformação  $T_o$  que relaciona os sistemas de coordenadas global e local é a mesma dada na equação (6.20).

Como, para este caso, a matriz de rigidez não é apresentada explicitamente, vale mostrar com mais detalhes os passos executados para obtê-la.

Os deslocamentos no interior do elemento j são parametrizados com relação aos seus valores nodais, figura (6.7), como segue:

$$u_i = \phi^\alpha(\xi) U_i^\alpha \quad (6.39)$$

ou vetoriamente

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1^j &= \tilde{\phi}(\tilde{\xi}) \tilde{U}_1^j \\ \tilde{u}_2^j &= \tilde{\phi}(\tilde{\xi}) \tilde{U}_2^j \end{aligned} \quad (6.39)$$

com a função aproximadora  $\tilde{\phi}$  dada por

$$\tilde{\phi} = [(2\xi_1^2 - \xi_1) \quad (2\xi_2^2 - \xi_2) \quad (2\xi_3^2 - \xi_3) \quad (4\xi_1 \xi_2) \quad (4\xi_2 \xi_3) \quad (4\xi_1 \xi_3)] \quad (6.41)$$

onde  $\xi_k$  são coordenadas homogêneas definidas sobre o elemento com o qual é mostrado na figura 6.8.

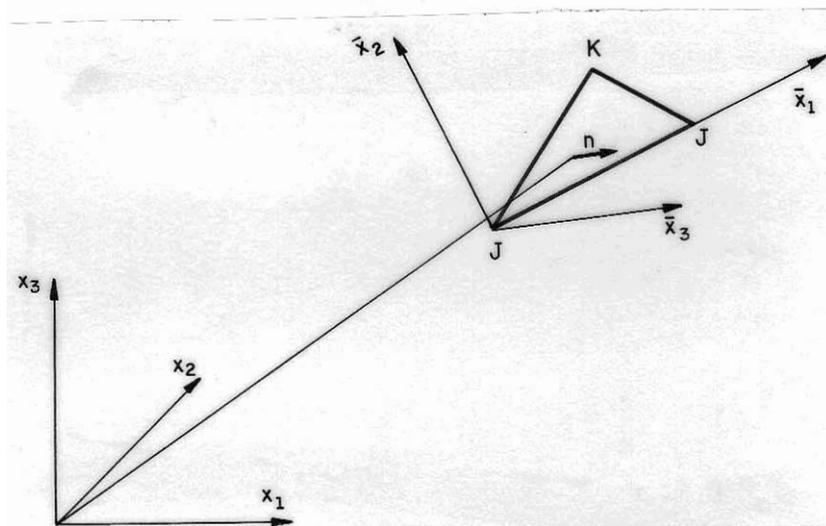


Figura 6.6- Elemento triangular, localização no espaço e sistemas de coordenadas.

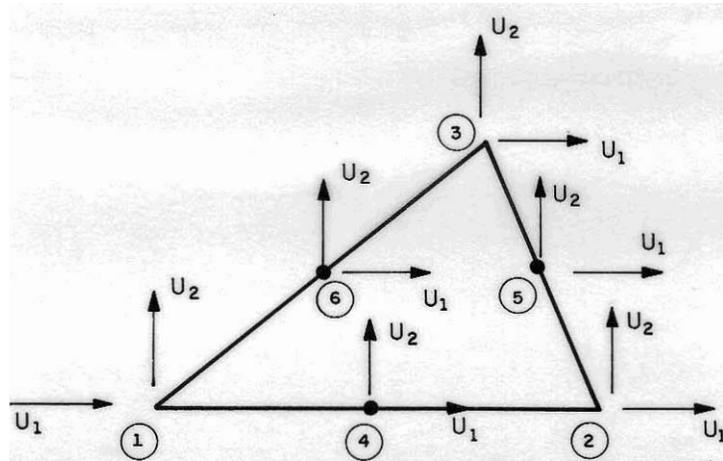


Figura 6.7- Nó do elemento e graus da liberdade em coordenadas locais.

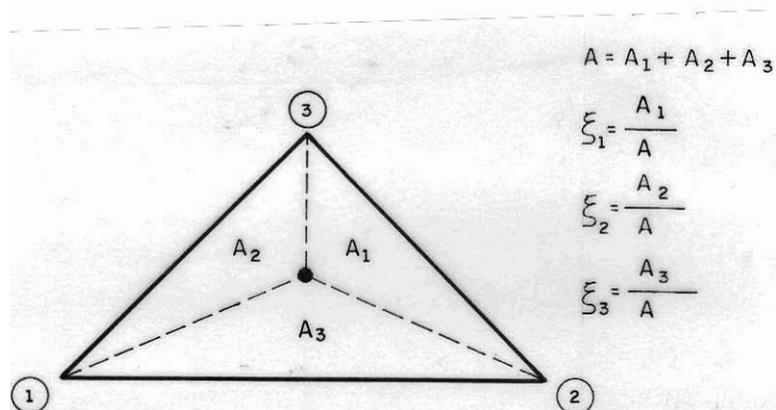


Figura 6.8- Coordenadas homogêneas

Na figura (6.9) apresentam-se as dimensões projetadas e intrínsecas, muito utilizadas no desenvolvimento dos elementos finitos triangulares, como pode ser visto nas diversas referências sobre o assunto.

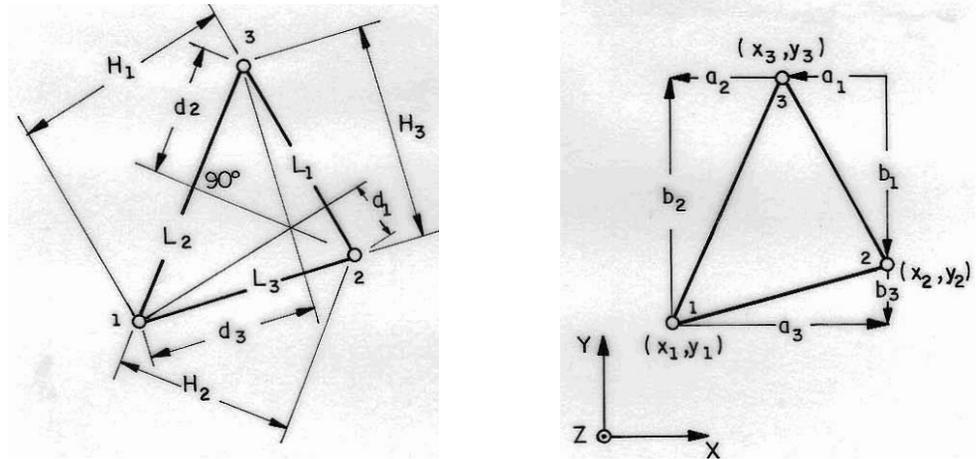


Figura 6.9- a) dimensões projetadas; b) dimensões intrínsecas,

A relação entre o sistema de coordenadas homogêneas e local é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^1 & \bar{x}_1^2 & \bar{x}_1^3 \\ \bar{x}_2^1 & \bar{x}_2^2 & \bar{x}_2^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (6.42)$$

$\bar{x}_i^k$  é a coordenada local  $i$  do nó  $k$ .

A relação constitutiva utilizada para o elemento de membrana no estado plano de tensões é:

$$\tilde{C} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

onde  $h$  é a altura da membrana.

De posse de todas estas expressões, determina-se a matriz de rigidez para o elemento em questão segundo o roteiro abaixo.

A relação deslocamento/deformação, neste caso é escrita como:

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \epsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (6.44)$$

que de maneira aproximada fica:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b & 0 \\ \tilde{0} & \tilde{a} \\ \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{\phantom{a}} & \tilde{\phantom{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ \tilde{\phantom{\psi}} & \tilde{\phantom{\psi}} \\ 0 & \psi \\ \tilde{\phantom{\psi}} & \tilde{\phantom{\psi}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^j \\ \tilde{\phantom{U}} \\ U_2^j \\ \tilde{\phantom{U}} \end{Bmatrix} = B \begin{Bmatrix} U_1^j \\ \tilde{\phantom{U}} \\ U_2^j \\ \tilde{\phantom{U}} \end{Bmatrix} \quad (6.45)$$

onde

$$\begin{aligned} b &= [b_1 \ b_2 \ b_3] \\ \tilde{\phantom{a}} & \\ a &= [a_1 \ a_2 \ a_3] \\ \tilde{\phantom{a}} & \end{aligned} \quad (6.46)$$

com  $b_i$  e  $a_i$  dados na figura 6.9.

A função  $\psi(\xi)$  que aparece na equação (6.45) é dada por:

$$\psi = \begin{bmatrix} (4\xi_1 - 1) & 0 & 0 & 4\xi_2 & 0 & 4\xi_3 \\ 0 & (4\xi_2 - 1) & 0 & 4\xi_1 & 4\xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & (4\xi_3 - 1) & 0 & 4\xi_2 & 4\xi_1 \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

Como:

$$\begin{aligned} \sigma &= C \ \epsilon \\ \tilde{\phantom{\sigma}} & \quad \tilde{\phantom{C}} \ \tilde{\phantom{\epsilon}} \end{aligned} \quad (6.48)$$

da expressão geral (6.14a) se escreve:

$$K = \int_A B^t C B dA = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} B^t C B d\xi_1 d\xi_2 \quad (6.49)$$

Aplicando-se a quadratura de Gauss para domínios triangulares [24], tem-se

$$K = A \sum_{i=1}^{NG} B^t C B w_i \quad (6.50)$$

onde NG é o número de pontos de Gauss e  $w_i$  os pesos de Gauss.

Com o intuito de reduzir as incógnitas do problema, utilizou-se a rotina de condensação estática para elementos finitos apresentada por WILSON [155]. Desta forma a ordem da matriz de rigidez cai de doze para seis, e os graus de liberdade que são diretamente determinados ficam sendo os referidos aos extremos do elemento, como mostra a figura 6.10.

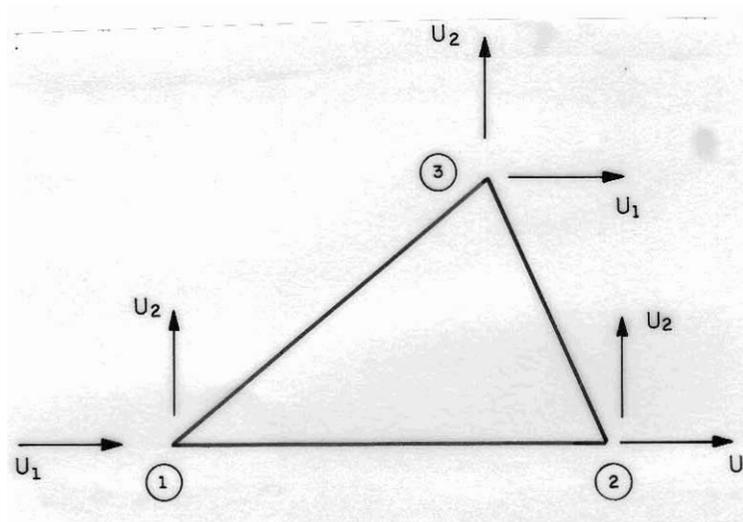


Figura 6.10- Elemento de membrana condensado, graus de liberdade

Considerando-se os graus de liberdade efetivos (figura 6.10), obtém-se a matriz de massa aproximando linearmente os deslocamentos sobre o elemento, técnica bastante difundida na análise dinâmica. Assim, da equação (6.17) se escreve diretamente:

$$\tilde{M}^j = \int_{A\sim} \phi^t \rho h \phi \, dA \quad (6.51)$$

com

$$\phi = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

resultando explicitamente:

$$\tilde{M} = \frac{\rho Ah}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

A integração do carregamento distribuído sobre o elemento nas duas direções se faz com as próprias funções interpoladoras do LST, equação (6.41), seguindo-se o modelo geral da expressão (6.14d), resultando um vetor de doze componentes, que é condensado estaticamente juntamente com a matriz de rigidez.

Deve-se observar que o cálculo dos esforços solicitantes finais, é feito da mesma forma que para o elemento de barra, equação (6.38), levando-se em consideração a condensação estática previamente estabelecida [15, 157, 155].

b) Elemento de placa:

O elemento de placa utilizado é o LCCT9 (Linear Curvature Compatible Triangle) com nove graus de liberdade, desenvolvido por CLOUGH e FELIPPA [30] para análise de placas delgadas, pela teoria de Kirchhoff. A escolha deste elemento foi baseada num estudo de desempenho feito por CLOUGH e TOCHER [32].

Este elemento é derivado do chamado LCCT12, com doze graus de liberdade, por uma simples restrição dos deslocamentos  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  e  $\theta_6$  mostrados na figura 6.11.

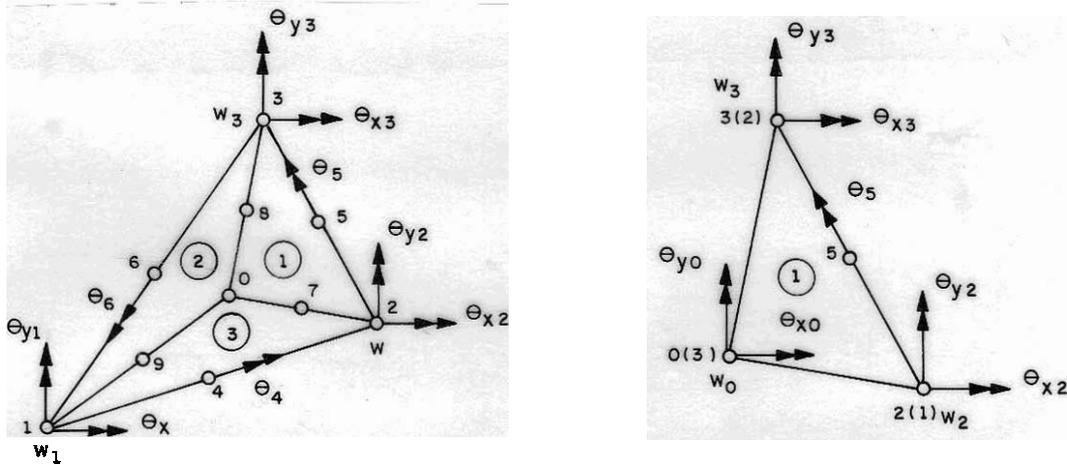


Figura 6.11- Elementos LCCT12, subelementos e graus de liberdade.

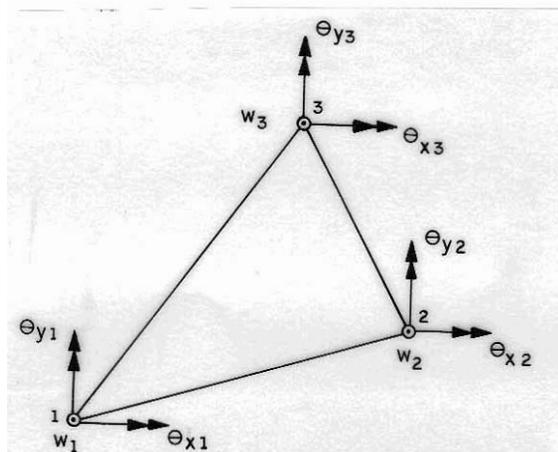


Figura 6.12- Elemento LCCT9.

Por este elemento ser triangular, as definições de sua geometria, coordenadas locais e coordenadas homogêneas são idênticas ao descrito para o LST.

Como é visto na figura 6.11 o elemento é composto por três subelementos. A aproximação do deslocamento  $w$  é cúbica em cada subelemento e sua compatibilidade é garantida pela imposição da continuidade do deslocamento  $w$  e do giro  $\partial w / \partial n$  sobre as interfaces entre os subelementos.

A partir destas considerações, chega-se ao seguinte conjunto de funções aproximadoras, que expressas para o subelemento 1 ficam:

$$\phi_{31}^{(1)} = \xi_1^2 \left[ 3(1+\mu_3) \xi_2 + 3(1+\lambda_2) \xi_3 + (1-\mu_3 - \lambda_2) \xi_1 \right]$$

$$\phi_{\theta 11}^{(1)} = \frac{1}{6} \xi_1^2 \left[ 3(3b_2 + b_3 + b_2 \lambda_2) \xi_3 + (b_3 \mu_3 - b_2 \lambda_2) \xi_1 - 3(b_2 + 3b_3 + b_3 \mu_3) \xi_2 \right]$$

$$\phi_{32}^{(1)} = \xi_2^2 (3 - 2\xi_2) + 6\mu_1 \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_1^2 \left[ 3(\lambda_3 - \mu_1) \xi_2 + 2\mu_1 + \lambda_3 \right] \xi_1 - 3\mu_1 \xi_3$$

$$\phi_{\theta 12}^{(1)} = \xi_2^2 (b_3 \xi_1 - b_1 \xi_3) + (b_2 - b_1 \mu_1) \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \frac{1}{6} \xi_1^2 \left[ 3(b_3 \lambda_3 + b_1 \mu_1 + \right. \\ \left. - 2b_2) \xi_2 + 3(b_1 \mu_1 - b_2) \xi_3 + (3b_2 - b_3 \lambda_3 - 2b_1 \mu_1) \xi_1 \right]$$

$$\phi_{33}^{(1)} = \xi_3^2 (3 - 2\xi_3) + 6\lambda_1 \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_1^2 \left[ 3(\mu_2 - \lambda_1) \xi_3 + (2\lambda_1 - \mu_2) \xi_1 - 3\lambda_1 \xi_2 \right]$$

(6.54a)

$$\begin{aligned} \phi_{\theta 13}^{(1)} &= \xi_3^2 (b_1 \xi_2 - b_2 \xi_1) + (b_1 \lambda_1 - b_3) \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \\ &+ \frac{1}{6} \xi_1^2 \left[ 3(2b_3 - b_1 \lambda_1 - b_2 \mu_2) \xi_3 + 3(b_3 - b_1 \mu_1) \xi_2 + (-3b_3 - b_2 \mu_2 + \right. \\ &\left. + 2b_1 \lambda_1) \xi_1 \right] \end{aligned}$$

$$\phi_{\theta 4}^{(1)} = \frac{4A}{3L_3} \left[ \xi_1^2 (3\xi_2 - \xi_1) \right]$$

$$\phi_{\theta 5}^{(1)} = \frac{4A}{3L_1} \left[ 6\xi_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_1^2 (5\xi_1 - 3) \right]$$

$$\phi_{\theta 6}^{(1)} = \frac{4A}{3L_2} \left[ \xi_1^2 (3\xi_3 - \xi_1) \right]$$

(6.54b)

onde os índices inferiores estão relacionados aos graus de liberdade apresentados na figura 6.11, sendo o índice entre parenteses o subelemento em questão. Estas funções aproximadoras estão expressas em termos de parâmetros e coordenadas homogêneas referentes ao elemento completo. Os giros em torno do eixo  $\bar{x}_2$  são dados pelas mesmas expressões de (6.54) trocando-se (b), por (a). Para se obter o valor das funções aproximadoras sobre os subelementos 2 e 3 basta aplicar-se permutação cíclica sobre os índices das expressões contidas em (6.54). Desta forma, tem-se:

$$\underset{\sim}{w}^{(i)} = \underset{\sim}{\phi}^{(i)} \underset{\sim}{U}^{(i)} \quad (6.55)$$

onde

$$\underset{\sim}{U}^t = [\underset{\sim}{x}_3^1 \ \underset{\sim}{\theta}_1^1 \ \underset{\sim}{\theta}_2^1 \ \underset{\sim}{x}_3^2 \ \underset{\sim}{\theta}_1^2 \ \underset{\sim}{\theta}_2^2 \ \underset{\sim}{x}_3^3 \ \underset{\sim}{\theta}_1^3 \ \underset{\sim}{\theta}_2^3 \ \underset{\sim}{\theta}^4 \ \underset{\sim}{\theta}^5 \ \underset{\sim}{\theta}^6] \quad (6.56)$$

As relações constitutivas para a placa são dadas por:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

Conhecidas as expressões acima determina-se a matriz de rigidez como descrito abaixo:

No interior de cada subelemento  $i$ , visto que o comportamento do deslocamento é cúbico, tem-se uma aproximação linear para a curvatura  $\chi$ :

$$\tilde{\chi}^{(i)} = \begin{bmatrix} U_{3,11}^{(i)} \\ U_{3,22}^{(i)} \\ 2U_{3,12}^{(i)} \end{bmatrix} = \tilde{B}^{(i)} \tilde{U}^{(i)} \quad (6.58)$$

onde da expressão (6.55):

$$\tilde{B}^{(i)} = \begin{bmatrix} \partial^2 \phi^{(i)} / (\partial x_1)^2 \\ \partial^2 \tilde{\phi}^{(i)} / (\partial x_2)^2 \\ 2\partial^2 \tilde{\phi}^{(i)} / \partial x_1 \partial x_2 \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

Esta aproximação linear pode ser parametrizada pelos valores de  $\tilde{B}^{(i)}$  nos extremos  $n$  de cada subelemento, gerando uma nova forma para a expressão (6.58), que é:

$$\tilde{\chi}^{(i)} = \tilde{\psi}^{(i)} \tilde{B}_n^{(i)} \tilde{U}^{(i)} \quad (6.60)$$

onde  $\tilde{B}_n^i$  são valores conhecidos e  $\tilde{\psi}^i$  é dada por:

$$\tilde{\psi}^i = \begin{bmatrix} (\bar{\xi}_1 \ \bar{\xi}_2 \ \bar{\xi}_3) & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{\xi}_1 \ \bar{\xi}_2 \ \bar{\xi}_3) & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{\xi}_1 \ \bar{\xi}_2 \ \bar{\xi}_3) \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

com  $\bar{\xi}_i$  coordenadas homogêneas do subelemento.

Como na expressão (6.60) as únicas variáveis são os parâmetros nodais conhecidos em  $U^i$  a matriz de rigidez total do elemento é dada por

$$\tilde{K}^j = \tilde{K}^1 + \tilde{K}^2 + \tilde{K}^3 \quad (6.62)$$

onde  $j$  é o elemento completo, e cada submatriz  $K^i$  é dada por:

$$K^i = B_n^{(i)t} \left\{ \int_{A^{(i)}} \tilde{\psi}^t C \tilde{\psi} dA \right\} B_n^{(i)} \quad (6.63)$$

O termo integral da expressão acima pode ser determinado analiticamente, já os valores nodais  $B_n^{(i)}$  são determinados numericamente.

A obtenção da matriz de massa do LCCT12 é feita utilizando-se as próprias funções interpoladoras, definidas pela expressão (6.54). Ficando:

$$\tilde{M}^j = \tilde{M}^1 + \tilde{M}^2 + \tilde{M}^3 \quad (6.64)$$

onde  $j$  é o elemento completo e cada sub matriz  $M^{(i)}$  é dada por:

$$M^{(i)} = \int_{A^{(i)}} \phi^{(i)t} \rho h \phi^{(i)} dA \quad (6.65)$$

desenvolvida numericamente como mostra a expressão (6.51) para o LST.

A eliminação dos graus de liberdade  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  e  $\theta_6$  é feita impondo-se variação linear da rotação normal aos lados do elemento, tal procedimento conserva a maior parte da flexibilidade do elemento e traz grande ganho computacional na geração da malha e na quantidade de graus de liberdade total a serem avaliados [30]. Além disso este se torna compatível com o LST condensado, apresentado no ítem 6.4.2a.

A integração do carregamento distribuído sobre o elemento, bem como a determinação dos esforços solicitantes finais são feitas do mesmo modo que para o elemento de barra, tendo-se em vista que os graus de liberdade  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  e  $\theta_6$  foram eliminados e não condensados.

### c) Composição do elemento de casca

O elemento de casca utilizado nesta tese, é composto pela simples combinação entre o elemento de membrana e o elemento de placa descritos nos ítems (a) e (b) respectivamente [115].

As variáveis nodais são apresentadas na figura (6.13) e ordenadas como segue:

$$U^{it} = \begin{bmatrix} U_1^1 & U_2^1 & U_3^1 & \theta_1^1 & \theta_2^1 & \theta_3^1 & U_1^2 & U_2^2 & U_3^2 & \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 & U_1^3 & U_2^3 & U_3^3 & \theta_1^3 & \theta_2^3 & \theta_3^3 \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

onde para os elementos deste vetor o índice superior denota o nó local do elemento e o inferior a direção do deslocamento, em coordenadas locais.

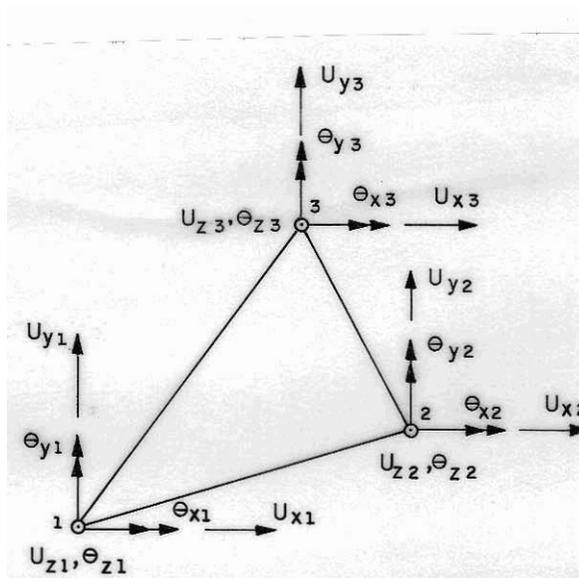


Figura 6.13- Gaus de liberdade, elemento de casca

Deve-se observar, entretanto, que os graus de liberdade  $\theta_3^1$ ,  $\theta_3^2$  e  $\theta_3^3$  não foram considerados na elaboração do elemento, gerando linhas e colunas nulas nas matrizes de massa e rigidez. Assim, a utilização de dois elementos deste tipo quase coplanares causaria um sério problema de condicionamento do sistema global de equações. Para resolver tal problema utiliza-se o artifício proposto por ZIENKIEWICZ [157], que consiste em introduzir uma matriz de rigidez fictícia, inerte com relação nos resultados globais, com as características abaixo:

$$\left\{ \begin{matrix} M_2^1 \\ M_3^2 \\ M_3^3 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \theta_3^1 \\ \theta_3^2 \\ \theta_3^3 \end{matrix} \right\} \quad (6.67)$$

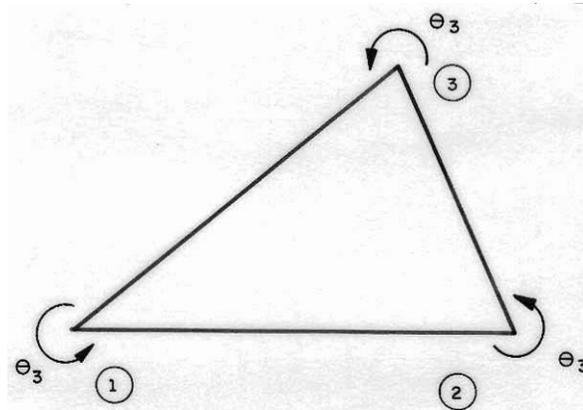


Figura 6.14- Variáveis nodais adicionais

Deve-se comentar ainda que a matriz que relaciona as coordenadas locais e globais, para este elemento, é analoga a apresentada na equação (6.22) e é composta como segue

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} T_o & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\sim} & T_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_o \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

### 6.6- INTEGRAÇÃO TEMPORAL DO MEF

A integração temporal da equação (6.19) é feita pelo algoritmo Newmark  $\beta$ , um dos algoritmos mais utilizados na prática para este fim [150, 135, 151], para o qual os estudos sobre convergência e precisão se encontram em alto grau de desenvolvimento [137, 149, 104].

O desenvolvimento detalhado das expressões apresentadas pode ser visto no trabalho de WARBURTON [150]. Neste método, se assume que o deslocamento e a velocidade no final de um intervalo de tempo podem ser expressos em termos do deslocamento, velocidade e aceleração no início e da aceleração do final do mesmo, como segue:

$$\dot{\tilde{U}}_{s+1} = \dot{\tilde{U}}_s + \frac{1}{2}\Delta t [\ddot{\tilde{U}}_s + \ddot{\tilde{U}}_{s+1}] \quad (6.69)$$

$$\tilde{U}_{s+1} = \tilde{U}_s + \Delta t \dot{\tilde{U}}_s + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\tilde{U}}_s + \beta (\Delta t)^2 \ddot{\tilde{U}}_{s+1} \quad (6.70)$$

onde

$\tilde{U}$  = é o deslocamento vetorial

$\dot{\tilde{U}}$

= representa derivação com relação ao tempo

$s$  = representa o instante  $t_s$

$\Delta t$  = intervalo de tempo entre dois instantes consecutivos

$\beta$  = parâmetro de calibração do método.

A partir da análise da equação de equilíbrio (6.19) para três instantes consecutivos chega-se a [150]:

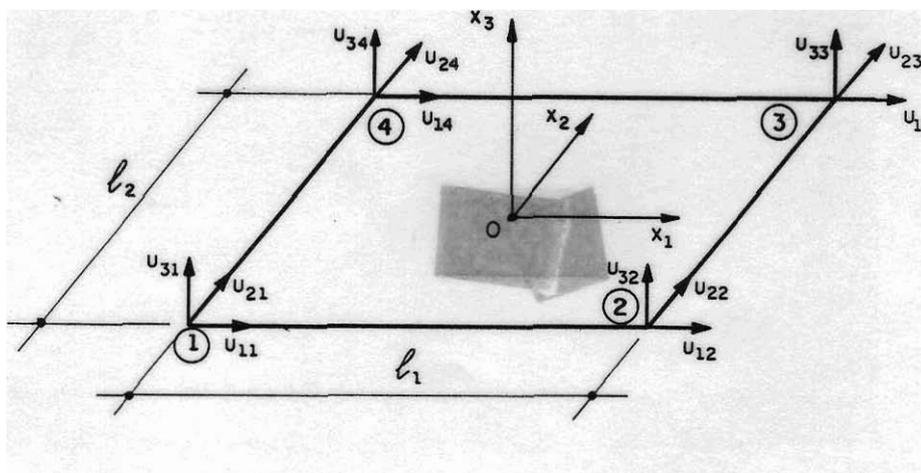
$$\begin{aligned} \left[ M + \frac{1}{2}(\Delta t)C + \beta(\Delta t)^2 K \right] \tilde{U}_{s+1} &= (\Delta t)^2 [\beta f_{s+1} + (1-2\beta)f_s + \beta f_{s-1}] + \\ + \left[ 2M - (\Delta t)^2(1-2\beta)K \right] \tilde{U}_s &- \left[ M - \frac{1}{2}(\Delta t)C + \beta(\Delta t)^2 K \right] \tilde{U}_{s-1} \quad (6.71) \end{aligned}$$

Usando-se a equação (6.71), o vetor de deslocamento no instante  $t_{s+1}$  pode ser obtido a partir de valores anteriores previamente determinados e dos valores conhecidos do vetor de carga. Isto vale para  $s=1,2,\dots,N$ .

Para o primeiro passo de tempo  $s=0$  uma expressão semelhante a (6.71) é obtida a partir da análise das equações de equilíbrio para os instantes  $t_0$  e  $t_1$ :

$$\begin{aligned} \left[ \underline{M} + \frac{1}{2}(\Delta t) \underline{C} + \underline{K}(\Delta t)^2 \right] \underline{U}_1 = (\Delta t)^2 \left\{ \beta \underline{f}_1 + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \underline{f}_0 + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{4} - \beta \right) (\Delta t) \underline{C} \underline{M}^{-1} (\underline{f}_0 - \underline{C} \dot{\underline{U}}_0 - \underline{K} \underline{U}_0) \right\} + \left[ \underline{M} + \underline{C} \frac{\Delta t}{2} - \underline{K} \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. - \beta \right) \right] \underline{U}_0 + \underline{M} \Delta t \dot{\underline{U}}_0 \end{aligned} \quad (6.72)$$

para os valores iniciais  $\underline{U}_0$  e  $\dot{\underline{U}}_0$  conhecidos.



• C

## CAPÍTULO 7

### ASSOCIAÇÃO ENTRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

#### 7.1- INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores descrevem-se separadamente as formulações do MEC e do MEF para problemas estáticos e dinâmicos transientes. A formulação aplicada ao MEF é direcionada para a análise de superestruturas (elementos de barra e casca) e a formulação desenvolvida para o MEC é própria para a análise do solo. Assim, mostra-se, neste capítulo, uma técnica de ligação MEC/MEF que permite o pleno aproveitamento de suas características individuais.

A ligação entre os dois métodos se dá através de um elemento rígido (sapata rígida) retangular que possibilita a adequação dos graus de liberdade, no espaço tridimensional, do MEF (seis por nó) com os do MEC (três por nó). Tal elemento tem origem no trabalho de RAMALHO [121], onde o caso estático é tratado utilizando-se a sapata rígida associada ao solo, modelado pelo

MEC, apenas como um artifício para determinar as constantes de mola dos vínculos da estrutura global, tratada pelo MEF.

Feita a adequação dos graus de liberdade, utiliza-se a técnica de sub-regiões [142, 143, 139], bastante difundida na bibliografia, tratando todos os meios envolvidos (MEF e MEC) como partes integrantes do sistema algébrico global.

## 7.2- ELEMENTO DE SAPATA RÍGIDA

Como comentado anteriormente, o elemento de ligação MEC/MEF foi chamado de sapata rígida, sua forma é retangular plana e o nó de ligação com a superestrutura pode se situar em qualquer lugar do espaço, figura 7.1

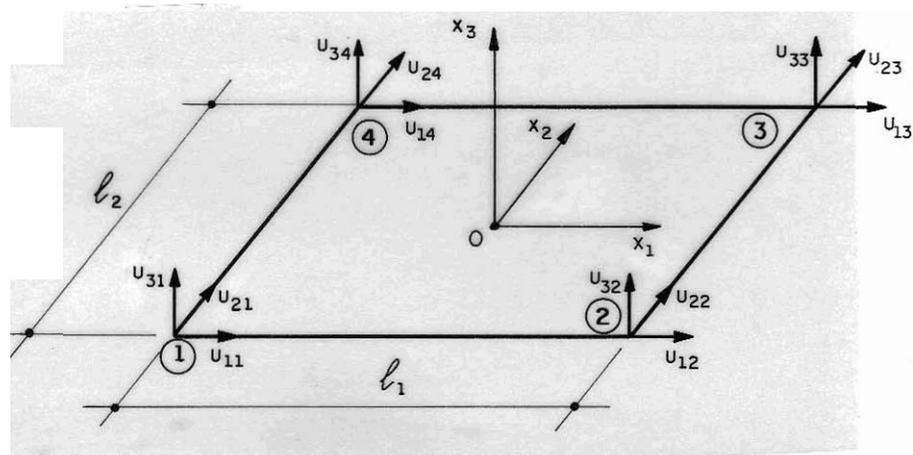


Figura 7.1- Elemento de ligação, geometria, graus de liberdade e coordenadas locais.

Este elemento faz a conexão entre os seis graus de liberdade do nó de ligação "c" (MEF) e os doze graus de liberdade dos quatro nós dos seus vértices (MEC). Cabe reforçar que as características deste elemento são anexadas às matrizes dos elementos finitos e a junção final MEC/MEF é feita através da técnica de sub-regiões.

#### 7.2.1- Nó de ligação "c" no centróide "O"

Para atingir a formulação geral do elemento de sapata rígida, nó de ligação em qualquer lugar do espaço (figura 7.1), deve-se iniciar analisando-se o caso particular quando este coincide com o centróide da sapata, figura 7.2.

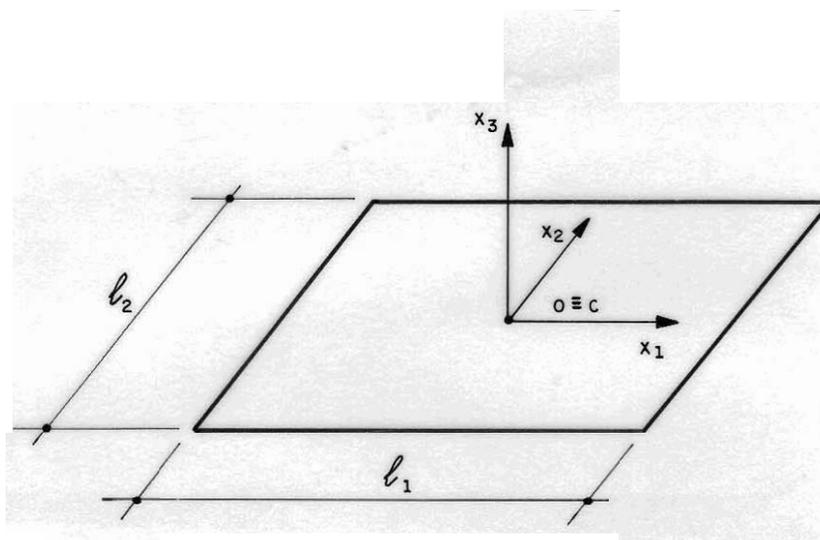


Figura 7.2- Plano da sapata com nó de ligação no centróide

##### 7.2.1.1- Relações cinemáticas entre graus de liberdade

Levando-se em consideração a rigidez deste plano, (sapata), as possíveis componentes de deslocamento podem ser observadas na figura 7.3 [121].

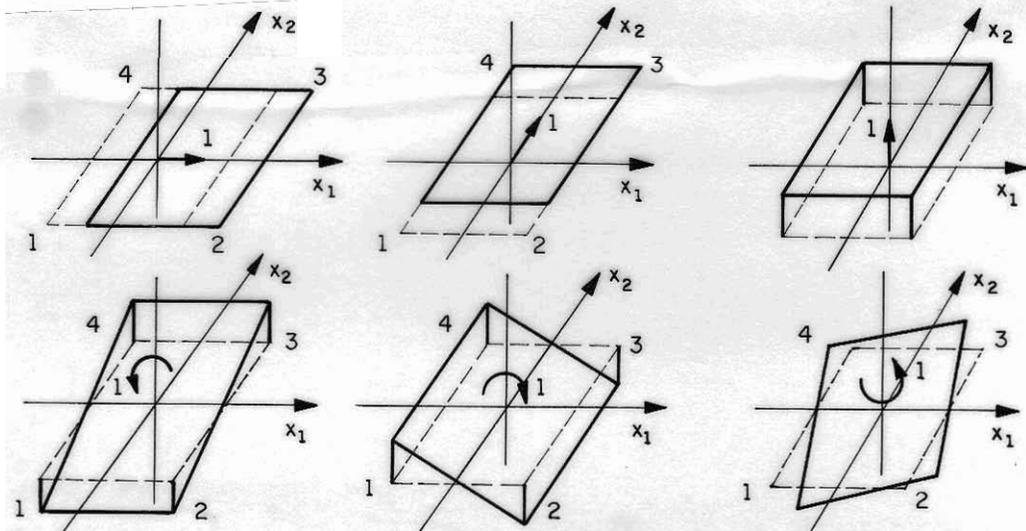


Figura 7.3- Deslocamentos possíveis do plano rígido, segundo os graus de liberdade do nó "c".

Utilizando-se a nomenclatura apresentada na figura 7.1 e as componentes de deslocamento ilustradas na figura 7.3, escreve-se a seguinte relação cinemática:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_1^3 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \\ U_2^3 \\ U_3^1 \\ U_3^2 \\ U_3^3 \\ U_4^1 \\ U_4^2 \\ U_4^3 \end{array} \right\}^{Sap} = \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -C_1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -C_2/2 & C_1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & C_1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -C_2/2 & -C_1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_2/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & C_1/2 \\ 0 & 0 & 1 & C_2/2 & -C_1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_2/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -C_1/2 \\ 0 & 0 & 1 & C_2/2 & -C_1/2 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{array} \right\}^{O \equiv C} \quad (7.1)$$

Selecionando-se seis graus de liberdade independentes entre si dos doze referentes aos quatro vértices da sapata, por exemplo  $U_3^1, U_3^2, U_3^3, U_1^1, U_2^1$  e  $U_2^2$ , pode-se obter a relação "inversa" da expressão (7.1) que, após a recuperação dos graus de liberdade dependentes, se escreve como:

$$\left\{ \begin{array}{c} U \\ \tilde{O} \\ \tilde{O} \\ \tilde{O} \\ \sim \end{array} \right\}_{12 \times 1}^{O \equiv C} \left[ \begin{array}{cc} \bar{T}_1 & \bar{T}_2 \\ \sim & \sim \\ \bar{T}_3 & \bar{T}_4 \\ \sim & \sim \end{array} \right]_{12 \times 1} \left\{ \begin{array}{c} U \\ \sim \\ \sim \end{array} \right\}_{12 \times 1}^{Sap} \quad (7.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} U \\ \sim \end{array} \right\}_{12 \times 1}^{O \equiv C} = \bar{T}_{\sim \sim} U_{\sim \sim}^{Sap} \quad (7.2b)$$

Onde:

$$\bar{T}_{\sim 1} = \left[ \begin{array}{cccccc} 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2C_2 & 0 & 0 & -1/2C_2 \\ 0 & 0 & 1/2C_1 & 0 & 0 & -1/2C_1 \\ -1/4C_2 & 1/4C_1 & 0 & -1/4C_2 & -1/4C_1 & 0 \end{array} \right] \quad (7.3a)$$

$$\bar{T}_{\sim 2} = \left[ \begin{array}{cccccc} 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2C_2 & 0 & 0 & 1/2C_2 \\ 0 & 0 & -1/2C_1 & 0 & 0 & 1/2C_1 \\ -1/4C_1 & 1/4C_1 & 0 & -1/4C_2 & -1/4C_1 & 0 \end{array} \right] \quad (7.3b)$$

$$\tilde{\bar{T}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c_2/c_1 & 0 & 0 & -c_2/c_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.3c)$$

$$\tilde{\bar{T}}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.3d)$$

Os zeros a esquerda da relação (7.2a) estão indicados para garantir, juntamente com as submatrizes  $\tilde{\bar{T}}_3$  e  $\tilde{\bar{T}}_4$ , a dependência linear entre os deslocamentos dos vértices, que se não considerada elimina a característica de rigidez da sapata. A relação cinemática (7.2a) ou (7.2b) também é aplicada para transformar velocidade e aceleração de um sistema para o outro.

### 7.2.1.2- Relação entre esforços

Como os graus de liberdade do nó de ligação são agora correlatos aos vértices da sapata, equação (7.2), necessita-se relacionar equivalentemente as reações do solo, esforços distribuídos (q) obtidos pela formulação do MEC, com esforços concentrados (f) nos vértices, como são tratados na formulação do MEF.

Tal equivalência é feita a partir das funções interpoladoras do elemento quadrilátero linear plano do MEC, as quais aproximam os esforços distribuídos como segue:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}^t (Q) = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4] \begin{bmatrix} p_1^1 & p_2^1 & p_3^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ p_1^3 & p_2^3 & p_3^3 \\ p_1^4 & p_2^4 & p_3^4 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

onde  $p_i^j$  são os valores dos esforços distribuídos nos nós j e na direção i, Q é um ponto da sapata e  $\phi_j$  são as funções aproximadoras desse nó dadas em função de suas coordenadas homogêneas como:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (1-r)(1-s)/4 \\ \phi_2 &= (1+r)(1-s)/4 \\ \phi_3 &= (1+r)(1+s)/4 \\ \phi_4 &= (1-r)(1+s)/4 \end{aligned} \quad (7.5)$$

As coordenadas homogêneas de (7.5) são definidas como no capítulo 4. As formas destas distribuições podem ser vistas na figura 7.4.

Calcula-se então o esforço resultante e sua posição no espaço, para cada função aproximadora ponderada por seu valor nodal, em cada direção, determinando-se, por equivalência

mecânica, os valores nodais concentrados desejados. Para ilustrar melhor o procedimento apresentam-se explicitamente alguns destes mecanismos.

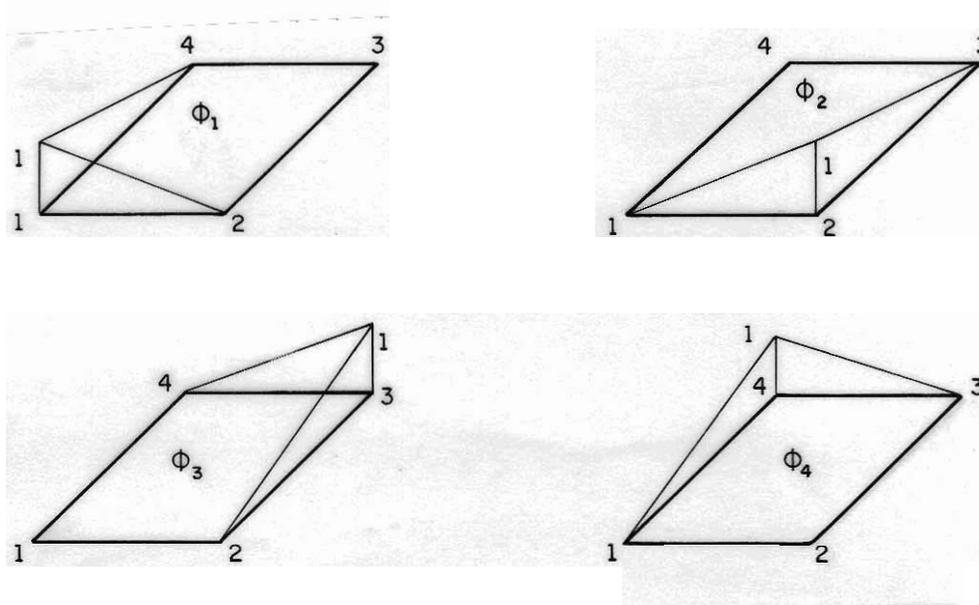


Figura 7.4- Forma da distribuição das forças de contato sob a sapata.

a) Direção 3, distribuição 1 ( $\phi_1$ ):  
Carga equivalente global

$$F_3 = p_3^1 \ell_1 \ell_2 / 4 \quad (7.6)$$

onde  $F_i$  é a força equivalente na direção  $i$ ,  $p_i^j$  é o valor no nó  $j$  da carga distribuída na direção  $i$  e  $\ell_1$  e  $\ell_2$  são dimensões da sapata.

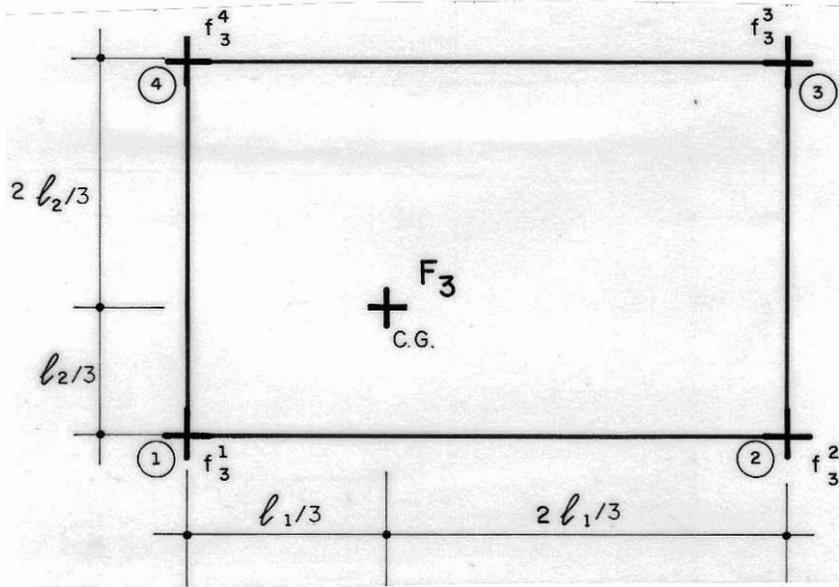


Figura 7.5- Representação esquemática do sistema equivalente de forças na direção três e segundo a distribuição um.

Equações de equivalência mecânica

$$\begin{cases}
 f_3^1 + f_3^2 + f_3^3 + f_3^4 = F_3 \\
 f_3^1 + f_3^2 = \frac{2}{3}F_3 \\
 f_3^3 + f_3^4 = \frac{1}{3}F_3 \\
 f_3^2 - f_3^4 = 0
 \end{cases} \rightarrow \text{Sistema singular} \quad (7.7)$$

Arbitrando-se  $f_3^3 = k \cdot F_3$  obtém-se:

$$\begin{cases}
 f_3^1 = F_3 (1+3k)/3 \\
 f_3^2 = F_3 (1-3k)/3 \\
 f_3^3 = F_3 k \\
 f_3^4 = F_3 (1-3k)/3
 \end{cases} \quad (7.8)$$

onde  $k$  é uma constante qualquer.

b) Direção 1, distribuição 1 ( $\phi_1$ ):  
Carga equivalente global

$$F_1 = p_1^1 l_1 l_2 / 4$$

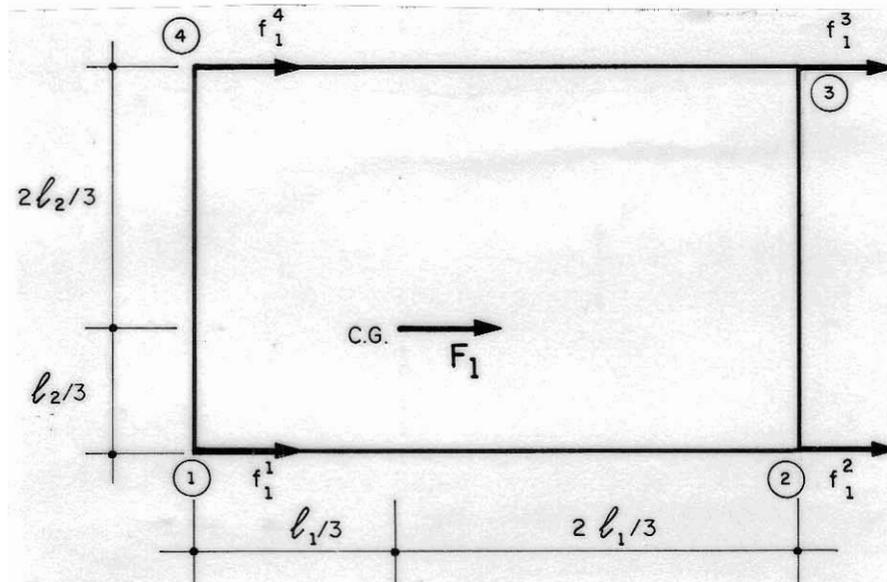


Figura 7.6- Representação esquemática do sistema equivalente de forças na direção um e segundo a distribuição um.

Equações de equivalência mecânica

$$\begin{cases} f_1^1 + f_1^2 + f_1^3 + f_1^4 = F_1 \\ f_1^1 + f_1^2 = \frac{2}{3}F_1 \\ f_1^3 + f_1^4 = \frac{1}{3}F_1 \\ f_1^1 + f_1^2 - 2f_1^3 - 2f_1^4 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Sistema singular} \quad (7.10)$$

Arbitrando-se  $f_1^3 = k \cdot F_1$  obtém-se:

$$\begin{cases} f_1^1 = F_1 \cdot 2(1-3k)/3 \\ f_1^2 = F_1 \cdot 2k \\ f_1^3 = F_1 \cdot k \\ f_1^4 = F_1 \cdot (1-3k)/3 \end{cases} \quad (7.11)$$

c) Direção 2, distribuição 1 ( $\phi_1$ ):  
Carga equivalente global

$$F_2 = p_2^1 \ell_1 \ell_2 / 4 \quad (7.12)$$

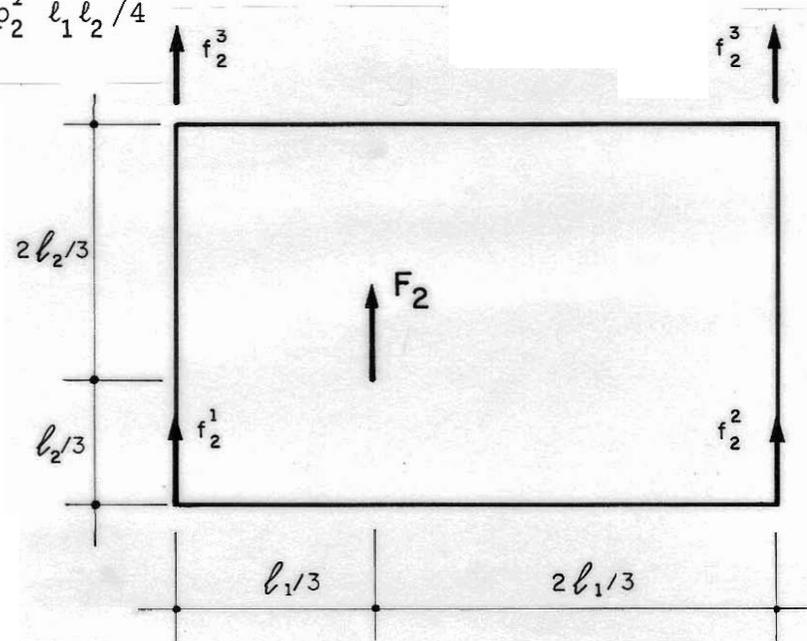


Figura 7.7- Representação esquemática do sistema equivalente de forças na direção dois e segundo a distribuição um.

Equação de equivalência mecânica

$$\begin{cases} f_2^1 + f_2^2 + f_2^3 + f_2^4 = F_2 \\ f_2^1 + \quad \quad \quad + f_2^4 = \frac{2}{3}F_2 \\ \quad \quad f_2^2 + f_2^3 = \frac{1}{3}F_2 \\ f_2^1 - 2f_2^2 - 2f_2^3 + f_2^4 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Sistema singular} \quad (7.13)$$

Arbitrando-se  $f_2^3 = k \cdot F_2$  obtém-se

$$\begin{cases} f_2^1 = F_2 \cdot 2(1-3k)/3 \\ f_2^2 = F_2 \cdot (1-3k)/3 \\ f_2^3 = F_2 \cdot k \\ f_2^4 = F_2 \cdot 2k \end{cases} \quad (7.14)$$

Fazendo-se o mesmo para as outras distribuições e se arranjando adequadamente, obtém-se a expressão final:

$$\begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_1^3 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \\ f_1^4 \\ f_2^4 \\ f_3^4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2kb & 0 & 0 & kc & 0 & 0 & kc & 0 & 0 & kb & 0 & 0 \\ 0 & 2kb & 0 & 0 & kb & 0 & 0 & kc & 0 & 0 & 2kc & 0 \\ 0 & 0 & ka & 0 & 0 & kb & 0 & 0 & kc & 0 & 0 & kb \\ 2kc & 0 & 0 & 2kb & 0 & 0 & kb & 0 & 0 & kc & 0 & 0 \\ 0 & kb & 0 & 0 & 2kb & 0 & 0 & 2kc & 0 & 0 & kc & 0 \\ 0 & 0 & kb & 0 & 0 & kc & 0 & 0 & kb & 0 & 0 & ka \\ kc & 0 & 0 & kb & 0 & 0 & 2kb & 0 & 0 & 2kc & 0 & 0 \\ 0 & kc & 0 & 0 & 2kc & 0 & 0 & 2kb & 0 & 0 & kc & 0 \\ 0 & 0 & kc & 0 & 0 & kb & 0 & 0 & ka & 0 & 0 & kb \\ kb & 0 & 0 & kc & 0 & 0 & 2kc & 0 & 0 & 2kb & 0 & 0 \\ 0 & 2kc & 0 & 0 & kc & 0 & 0 & kb & 0 & 0 & 2kb & 0 \\ 0 & 0 & kb & 0 & 0 & kc & 0 & 0 & kb & 0 & 0 & ka \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \\ p_3^3 \\ p_1^4 \\ p_2^4 \\ p_3^4 \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

com  $ka = l_1 l_2 (1+3k)/12$ ,  $kb = l_1 l_2 (1-3k)/12$ ,  $kc = l_1 l_2 k/4$

Resumidamente se escreve (7.15) como:

$$\begin{matrix} \bar{F}^{vert.} \\ \sim_{12 \times 1} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ \sim_1 & \sim_2 \\ \bar{P}_2 & \bar{P}_1 \\ \sim_2 & \sim_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} Q^{distr} \\ \sim_{12 \times 1} \end{matrix} \quad (7.16a)$$

$$\begin{matrix} \bar{F}^{vert.} \\ \sim \end{matrix} = \begin{matrix} \bar{P} \\ \sim \end{matrix} \begin{matrix} Q^{distr.} \\ \sim \end{matrix} \quad (7.16b)$$

**7.2.1.3- Transformação das coordenadas locais da sapata para as coordenadas locais do elemento finito.**

Como já foi mencionado o elemento de sapata rígida está associado sempre a um elemento finito, barra ou casca. As coordenadas locais do elemento de sapata nem sempre coincidem com as do elemento finito, figura 7.8. Deve-se, portanto, escrever as variáveis nodais da sapata rígida nas coordenadas do elemento finito.

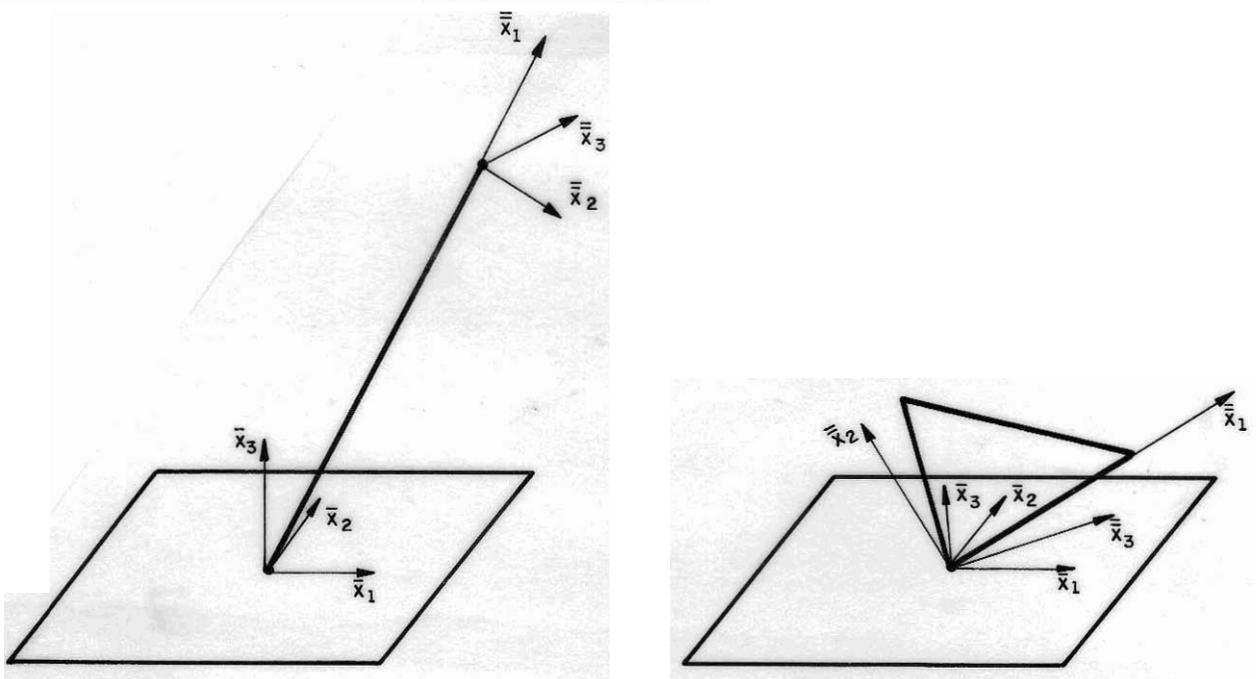


Figura 7.8- Elemento finito ligado à sapata rígida, coordenadas locais.

Referenciando ambos os sistemas de coordenadas locais, figura 7.8, ao sistema de coordenadas global, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (7.17a)$$

$$\begin{matrix} \bar{X} \\ \sim \end{matrix} = \begin{matrix} C^e \\ \sim \end{matrix} \begin{matrix} x \\ \sim \end{matrix} \quad (7.17b)$$

onde o índice "e" representa elemento e  $C_{ij}$  são os cossenos diretores dos versores que compõem as coordenadas locais  $\bar{x}$  escritas nas coordenadas globais  $x$ . Analogamente:

$$\bar{x} = C^s x \quad (7.18)$$

onde s representa sapata.

Das expressões acima escreve-se:

$$x = C^e C^{st} \bar{x} = C \bar{x} \quad (7.19)$$

sendo C a matriz que transforma as variáveis escritas no sistema de coordenadas da sapata, para o sistema de coordenadas local do elemento finito analisado.

Aplicando-se esta transformação às matrizes  $\bar{P}$  e  $\bar{T}$  reescrevem-se as equações (7.2b) e (7.16b) como segue:

$$U^{o=c} = T U^{sap} \quad (7.20)$$

$$F^{vert} = P Q^{distr} \quad (7.21)$$

onde:

$$T = \lambda \bar{T} \lambda^t \quad (7.22)$$

$$P = \lambda \bar{P} \lambda^t \quad (7.23)$$

com

$$\lambda = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{O} & \tilde{C} & \tilde{O} & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \tilde{O} & \tilde{C} & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \tilde{O} & \tilde{O} & \tilde{C} \end{bmatrix} \quad (7.24)$$



Para um elemento de casca com dois nós ligados à duas sapatas, escreve-se:

$$K^* = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \sim_{1t} & \sim_{3t} & \sim & \sim \\ 0 & T_1 & T_3 & 0 & 0 \\ \sim & \sim_{1t} & \sim_{4t} & \sim & \sim \\ 0 & T_2 & T_4 & 0 & 0 \\ \sim & \sim_2 & \sim & \sim_{2t} & \sim_{3t} \\ 0 & 0 & 0 & T_1 & T_3 \\ \sim & \sim & \sim & \sim_{2t} & \sim_{3t} \\ 0 & 0 & 0 & T_2 & T_4 \\ \sim & \sim & \sim & \sim_2 & \sim_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ei}^1 & 0 & K_{ei}^2 & 0 \\ \sim_{ie} & \sim_{ii}^1 & 0 & \sim_{ei}^3 & \sim \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \sim_{ie} & \sim_{ii}^2 & \sim & \sim_{ii}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \sim_{1t} & \sim_{2t} & \sim & \sim \\ 0 & T_1 & T_2 & 0 & 0 \\ \sim & \sim_{3t} & \sim_{4t} & \sim & \sim \\ 0 & 0 & 0 & \sim_{1t} & \sim_{2t} \\ 0 & 0 & 0 & T_3 & T_4 \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

onde o índice superior das submatrizes indica qual nó de ligação se está considerando.

Como se adotou, até agora, o nó de ligação coincidente ao centróide da sapata, ainda não é possível se escrever a expressão (7.28) para dois nós do elemento de casca ligados a mesma sapata. Tal caso é explicitado no item seguinte,

Para a matriz de massa, quando a sapata não possui massa própria, tudo o que se fez para a matriz de rigidez é válido, podendo-se escrever,

$$M^* = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \sim & \sim_{1t} & \sim_{3t} \\ 0 & T_1 & T_3 \\ \sim & \sim_{2t} & \sim_{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{ee} & M_{ei} & 0 \\ \sim_{ie} & \sim_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \sim & \sim_{1t} & \sim_{2t} \\ 0 & T_3 & T_4 \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

para apenas um nó associado a uma sapata e,

$$\sim M^* = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \sim_{1t} & \sim_{3t} & \sim & \sim \\ 0 & T_1 & T_3 & 0 & 0 \\ \sim & \sim_{1t} & \sim_{4t} & \sim & \sim \\ 0 & 0 & 0 & \sim_{2t} & \sim_{3t} \\ \sim & \sim & \sim & \sim_{2t} & \sim_{3t} \\ 0 & 0 & 0 & T_1 & T_3 \\ \sim & \sim & \sim & \sim_2 & \sim_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{ee} & M_{ei}^1 & 0 & M_{ei}^2 & 0 \\ \sim_{ie} & \sim_{ii}^1 & 0 & \sim_{ei}^3 & \sim \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \sim_{ie} & \sim_{ii}^2 & \sim & \sim_{ii}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \sim_{1t} & \sim_{2t} & \sim & \sim \\ 0 & T_1 & T_2 & 0 & 0 \\ \sim & \sim_{3t} & \sim_{4t} & \sim & \sim \\ 0 & 0 & 0 & \sim_{1t} & \sim_{2t} \\ 0 & 0 & 0 & T_3 & T_4 \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

para dois nós de um elemento de casca associados a duas sapatas diferentes.

Para o vetor de cargas, se escreve:

$$\underset{\sim}{F}^* = \begin{Bmatrix} F_e \\ \underset{\sim}{F}_e \\ F_i \\ \underset{\sim}{F}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \underset{\sim}{\sim} & \underset{\sim}{\sim} \\ 0 & P \\ \underset{\sim}{\sim} & \underset{\sim}{\sim} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_e \\ \underset{\sim}{F}_e \\ Q_i \\ \underset{\sim}{Q}_i \end{Bmatrix} \quad (7.31)$$

onde a dimensão do  $\underset{\sim}{F}_e$  é seis vezes o número de nós não ligados e de  $\underset{\sim}{F}_i$  e  $\underset{\sim}{Q}_i$  é seis.

### 7.2.2- Nó de ligação "C" não coincidente com o centróide "O"

Quando o nó de ligação não coincide com o centróide da sapata, devem-se transformar os graus de liberdade do centróide "O" para o ponto de ligação "C", separados entre si como mostra a figura 7.9.

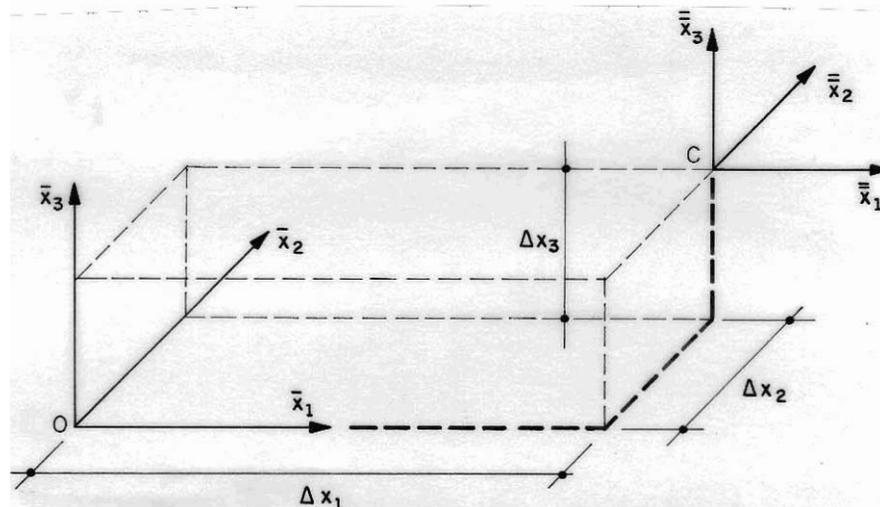


Figura 7.9- Distâncias entre O centróide "C" e o nó de ligação "O", as coordenadas locais já estão referidas ao elemento.

Observando-se a figura 7.9, a relação entre os deslocamentos fica:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_3 & -\Delta x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta x_3 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta x_2 & -\Delta x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}^O \quad (7.32a)$$

$$\begin{Bmatrix} U \\ \sim \\ Q \\ \sim \end{Bmatrix}^C = \begin{bmatrix} I & L_1 \\ 0 & I \\ \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \sim \\ Q \\ \sim \end{Bmatrix}^O = \begin{bmatrix} \bar{L} \\ \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \sim \\ Q \\ \sim \end{Bmatrix}^O \quad (7.32b)$$

Aplicando-se esta relação, sobre a expressão (7.2a), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} U \\ \tilde{Q} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\theta} \end{Bmatrix}^C = \begin{bmatrix} \bar{L} & 0 \\ \sim & \sim \\ 0 & I \\ \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ \sim & \sim \\ T_3 & T_4 \\ \sim & \sim \end{bmatrix} U^{Sap} \quad (7.33)$$

ou resumidamente:

$$\begin{Bmatrix} U \\ \sim \end{Bmatrix}^O = \begin{bmatrix} \bar{L} & T \\ \sim & \sim \end{bmatrix} U^{Sap} \quad (7.34)$$

Para generalizar as expressões (7.27), (7.28), (7.29) e (7.30), para o caso em que o nó de ligação não coincide com o centróide da sapata, parte-se da expressão (7.34) no lugar da (7.2b), resultando expressões analogas a aquelas com a matriz  $\begin{bmatrix} L & T \\ \sim & \sim \end{bmatrix}$  no lugar de  $\begin{bmatrix} \bar{L} & T \\ \sim & \sim \end{bmatrix}$ .

É interessante mostrar como fica o caso do elemento de casca com dois nós ligados a uma única sapata. Escrevendo-se a

equação (7.28) para dois nós de ligação, "C<sup>1</sup>" e C<sup>2</sup>", a partir da equação (7.33), tem-se:

$$\tilde{K}^* = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \tilde{T}_1^1 t & \tilde{T}_3^1 t & \sim & \sim \\ 0 & \tilde{T}_1^1 t & \tilde{T}_3^1 t & 0 & 0 \\ \sim & \tilde{T}_2^1 t & \tilde{T}_4^1 t & \sim & \sim \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_1^2 t & \tilde{T}_3^2 t \\ \sim & \sim & \sim & \tilde{T}_2^2 t & \tilde{T}_4^2 t \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_1^2 t & \tilde{T}_3^2 t \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \tilde{L}^1 t & \sim & \sim & \sim \\ 0 & \tilde{L}^1 t & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \tilde{L}^2 t & \sim \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{L}^2 t & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ei}^1 & 0 & K_{ei}^2 & 0 \\ \sim & \tilde{K}_{ei}^1 & \sim & \tilde{K}_{ei}^3 & \sim \\ K_{ie}^1 & K_{ii}^1 & 0 & K_{ei}^3 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ K_{ei}^2 & K_{ei}^3 & 0 & K_{ii}^2 & 0 \\ \sim & \tilde{K}_{ei}^3 & \sim & \tilde{K}_{ii}^2 & \sim \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \tilde{L}^1 & \sim & \sim & \sim \\ 0 & \tilde{L}^1 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \tilde{L}^2 & \sim \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{L}^2 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \tilde{T}_1^1 & \tilde{T}_2^1 & \sim & \sim \\ 0 & \tilde{T}_1^1 & \tilde{T}_2^1 & 0 & 0 \\ \sim & \tilde{T}_3^1 & \tilde{T}_4^1 & \sim & \sim \\ 0 & \tilde{T}_3^1 & \tilde{T}_4^1 & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \tilde{T}_1^2 & \tilde{T}_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_1^2 & \tilde{T}_2^2 \\ \sim & \sim & \sim & \tilde{T}_3^2 & \tilde{T}_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_3^2 & \tilde{T}_4^2 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

onde cada submatriz possui ordem seis, o índice superior indica o nó de ligação considerado e a ordem da matriz K\* é trinta, dos quais seis são graus de liberdade do nó livre e doze de cada sapata.

Sendo que existe apenas uma sapata, pode se considerar, na equação (7.35), T<sub>i</sub><sup>1</sup> = T<sub>i</sub><sup>2</sup> e U<sup>Sap1</sup> = U<sup>Sap2</sup>, ficando:

$$K^* = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \tilde{T}_1^t & \tilde{T}_3^t & \tilde{T}_1^t & \tilde{T}_3^t \\ 0 & \tilde{T}_1^t & \tilde{T}_3^t & \tilde{T}_1^t & \tilde{T}_3^t \\ \sim & \tilde{T}_2^t & \tilde{T}_4^t & \tilde{T}_2^t & \tilde{T}_4^t \\ 0 & \tilde{T}_2^t & \tilde{T}_4^t & \tilde{T}_2^t & \tilde{T}_4^t \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \sim & \tilde{L}^1 t & \sim \\ 0 & \tilde{L}^1 t & 0 \\ \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & I \\ \sim & \sim & \sim \\ 0 & \tilde{L}^2 t & \sim \\ \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & I \\ \sim & \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ei}^1 & K_{ei}^2 \\ \sim & \tilde{K}_{ei}^1 & \tilde{K}_{ei}^3 \\ K_{ie}^1 & K_{ii}^1 & K_{ei}^3 \\ \sim & \sim & \sim \\ K_{ei}^2 & K_{ei}^3 & K_{ii}^2 \\ \sim & \tilde{K}_{ei}^3 & \tilde{K}_{ii}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sim & \sim L^1 & \sim & \sim L^2 & \sim \\
 0 & \sim & 0 & \sim & 0 \\
 \sim & \sim & I & \sim & 0 \\
 \sim & \sim & \sim & \sim & \sim
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 I & 0 & 0 \\
 \sim & \sim T_1 & \sim T_2 \\
 0 & \sim T_3 & \sim T_4 \\
 \sim & \sim T_1 & \sim T_2 \\
 0 & \sim T_3 & \sim T_4 \\
 \sim & \sim & \sim
 \end{bmatrix}
 \quad (7.36)$$

onde a ordem da matriz  $K^*$  é dezoito, seis graus de liberdade do nó livre e mais doze da sapata.

Deve-se salientar que, o vetor de cargas, equação (7.16a)), por ser escrito diretamente em função dos vértices da sapata, que são os novos nós do elemento, não necessitam de transformação alguma.

### 7.2.3- Considerações sobre a massa da sapata

Nesta seção descreve-se como levar em consideração a massa da sapata rígida.

Seja  $\rho$  a densidade por unidade de área da sapata; calculam-se as características inerciais, com relação aos eixos coordenados locais localizados no centróide (figura 7.10) da mesma, como segue:

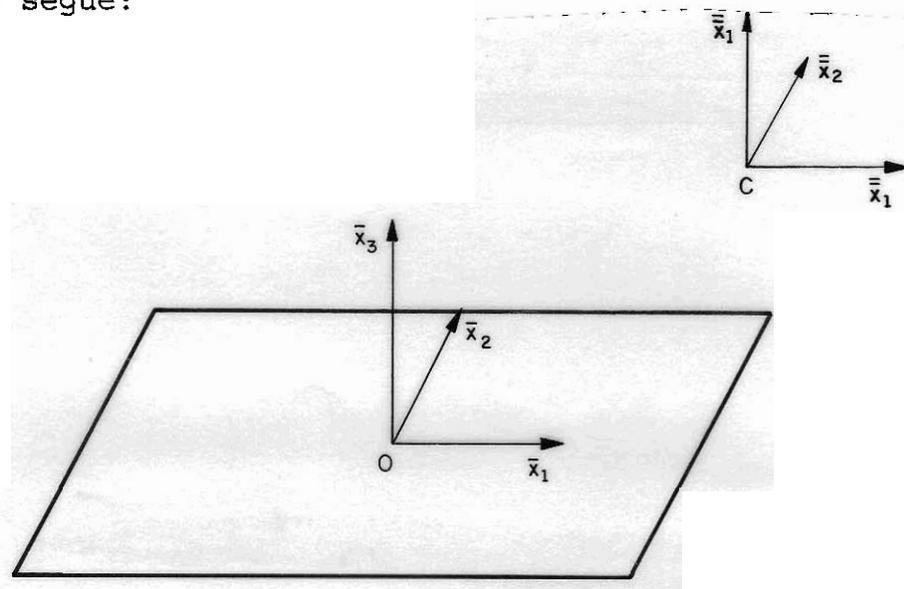


Figura 7.10- Eixos coordenados, paralelos aos do elemento finito.

$$\begin{aligned}
m &= \rho l_1 l_2 \\
J_1 &= \rho \frac{l_1 l_2^3}{12} \\
J_2 &= \rho \frac{l_2 l_1^3}{12} \\
J_3 &= J_1 + J_2
\end{aligned}
\tag{7.36}$$

Se o nó de ligação "C" for coincidente com o centróide da sapata, sendo este o segundo nó do elemento, e os eixos coordenados concordantes com os do elemento finito, a nova matriz de massa, antes da transformação dos graus de liberdade, fica:

$$\begin{matrix}
M' & = & M & + & J \\
\sim & & \sim & & \sim
\end{matrix}
\tag{7.37}$$

onde  $J$  é uma matriz diagonal dada por:

$$\text{diag}(J) = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ m \ m \ m \ J_1 \ J_2 \ J_3\}
\tag{7.38}$$

Se o nó de ligação não for coincidente com o centróide, mas os eixos coordenados já estiverem paralelos ao do elemento finito, figura 7.9, então:

$$\begin{aligned}
m &= \rho l_1 l_2 \\
J_1 &= \rho \frac{l_1 l_2^3}{12} + \rho l_1 l_2 \Delta x^2 \\
J_2 &= \rho \frac{l_2 l_1^3}{12} + \rho l_1 l_2 \Delta y^2 \\
J_3 &= J_1 + J_2
\end{aligned}
\tag{7.39}$$

valendo a expressão (7.38).

### 7.3- TÉCNICA DE SUBREGIÕES

As equações (4.17) e (6.13), para o caso estático, e as equações (5.20) e (6.71), para o caso dinâmico em um instante  $t_0$ , podem ser escritas na forma abaixo.

$$\begin{array}{cccc} H & U & = & G & P & + & A \\ \sim & \sim & & \sim & \sim & & \sim \end{array} \quad (7.40)$$

Todas elas foram formuladas para problemas bem definidos, sólidos tridimensionais (MEC) e superestruturas (MEF), e são agora extendidas para análise de sistemas estruturais formados por várias sub-regiões, cada qual com suas características físicas próprias, figura 7.11.

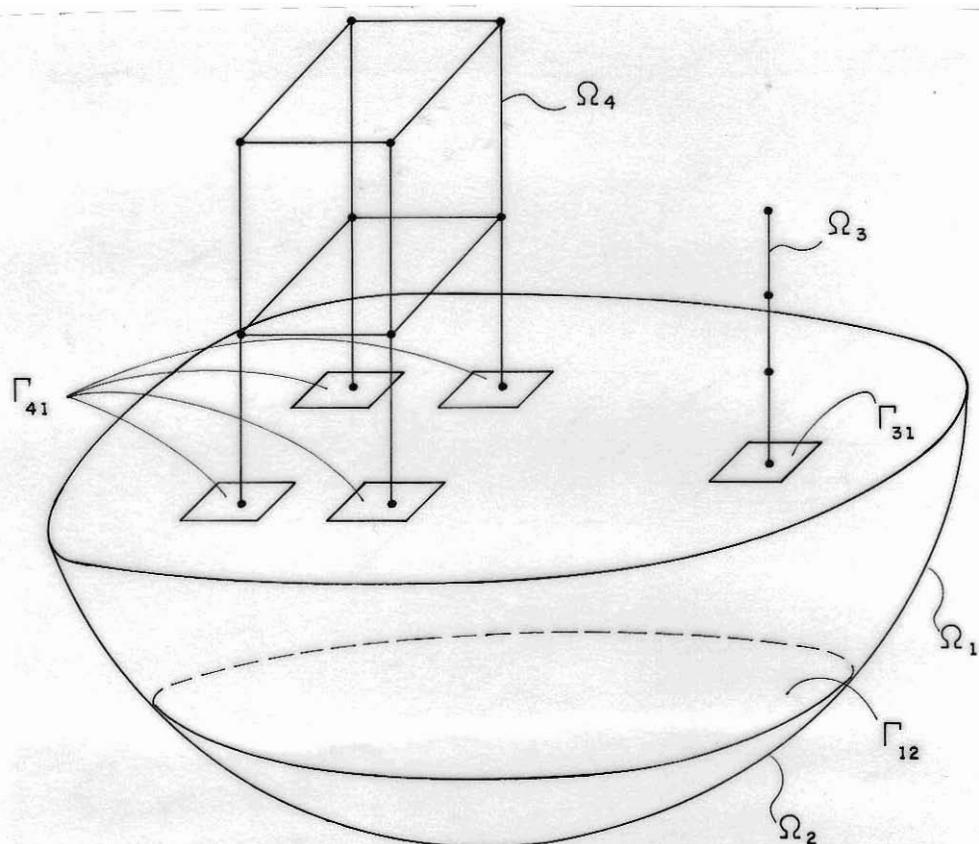


Figura 7.11- Subregiões

Isto se faz [19, 46] aplicando-se separadamente, a cada uma das sub-regiões a equação (7.40); para a sua junção aplicam-se condições de compatibilidade geométrica e de equilíbrio sobre as interfaces entre as mesmas. A utilização do elemento de sapata rígida torna possível a aplicação do conceito descrito acima para ligações do tipo mostrado na figura 7.11 [46].

Sendo assim, como expõe VENTURINI [140], para um domínio formado por muitas sub-regiões  $\Omega_i$  (figura 7.11), a equação matricial (7.40) pode ser escrita para todas as sub-regiões na forma seguinte:

$$\begin{matrix} H^{(i)} & U^{(i)} & = & G^{(i)} & P^{(i)} & + & A^{(i)} \\ \sim & \sim & & \sim & \sim & & \sim \end{matrix} \quad (7.41)$$

onde o índice entre parênteses não implica soma.

Considerando-se a interface  $\Gamma_{ij}$ , figura 7.11, entre as sub-regiões  $i$  e  $j$ , a compatibilidade de deslocamentos e as condições de equilíbrio são dadas respectivamente por:

$$\begin{matrix} U^{(ij)} & = & U^{(ji)} \\ \sim & & \sim \\ P^{(ij)} & = & -P^{(ji)} \\ \sim & & \sim \end{matrix} \quad (7.42)$$

onde o primeiro índice representa a sub-região sobre a qual o deslocamento e a força de superfície atuam, e o segundo representa a sub-região adjacente.

Os vetores  $\tilde{U}^{(ij)}$  e  $\tilde{P}^{(ij)}$  representam valores de contorno sobre a interface. Como em uma sub-região  $i$  também existem trechos de contorno exteriores ou, no caso da superestrutura, nós não ligados à sapatas, os vetores completos  $\tilde{U}^{(i)}$  e  $\tilde{P}^{(i)}$  podem ser escritos divididos em duas partes:

$$\underset{\sim}{U}^{(i)} = \begin{bmatrix} U^{(ie)} \\ \underset{\sim}{U}^{(ij)} \\ \sim \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

$$\underset{\sim}{P}^{(i)} = \begin{bmatrix} P^{(ie)} \\ \underset{\sim}{P}^{(ij)} \\ \sim \end{bmatrix} \quad (7.44)$$

onde  $\underset{\sim}{P}^{(ie)}$  e  $\underset{\sim}{U}^{(ie)}$  representam os valores externos.

A equação (7.41) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} H^{(ie)} & H^{(ij)} \\ \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(ie)} \\ \underset{\sim}{U}^{(ij)} \\ \sim \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{(ie)} & G^{(ij)} \\ \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^{(ie)} \\ \underset{\sim}{P}^{(ij)} \\ \sim \end{Bmatrix} + \underset{\sim}{A}^{(i)} \quad (7.45)$$

onde  $H^{(ie)}$  e  $G^{(ie)}$  representam os coeficientes referidos a contornos externos,

Expressões semelhantes podem ser escritas para sub-regiões  $j$ ,

$$\begin{bmatrix} H^{(je)} & H^{(ji)} \\ \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(je)} \\ \underset{\sim}{U}^{(ji)} \\ \sim \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{(je)} & G^{(ji)} \\ \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^{(je)} \\ \underset{\sim}{P}^{(ji)} \\ \sim \end{Bmatrix} + \underset{\sim}{A}^{(j)} \quad (7.46)$$

Levando-se em conta as relações (7.43) e (7.44) pode-se englobar as equações (7.45) e (7.46) em uma única expressão:

$$\begin{bmatrix} H^{(ie)} & H^{(ij)} & -G^{(ij)} & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & H^{(ji)} & G^{(ji)} & H^{(je)} \\ \sim & \sim & \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(ie)} \\ \underset{\sim}{U}^{(ij)} \\ \underset{\sim}{P}^{(ij)} \\ \underset{\sim}{U}^{(je)} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} G^{(ie)} & G^{(ij)} & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & G^{(je)} & G^{(ji)} \\ \sim & \sim & \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^{(ie)} \\ \tilde{P}^{(ij)} \\ \tilde{P}^{(ie)} \\ \tilde{P}^{(ji)} \\ \sim \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A^{(i)} \\ \tilde{A}^{(j)} \\ \sim \end{Bmatrix} \quad (7.47)$$

onde  $\tilde{P}^{ij}$  representa carregamento prescrito na interface.

A expressão (7.47) é a equação matricial de contorno que leva em consideração a interface entre a sub-região  $i$  e  $j$ . A extensão deste procedimento para mais sub-regiões é imediata, como mostram DOMINGUEZ e BREBBIA [46].

As matrizes envolvidas na equação (7.47) possuem blocos cheios e nulos, para aproveitar esta característica CROTTY [38] desenvolveu um algoritmo especial que utiliza o processo de eliminação Gaussiana [13] que organiza as matrizes, eliminando os blocos nulos, acarretando assim grande ganho computacional. Tal técnica não foi utilizada neste trabalho, pois um procedimento genérico de organização de dados para a utilização da mesma, vem sendo desenvolvido por KOMATSU [80] que, quando concluído, será acoplado ao programa desenvolvido nesta tese sem dificuldades.

Deve-se salientar que muitos pesquisadores tem dirigido esforços no sentido de aumentar a eficiência numérica do MEC, seja através de formalções que dão origem a matrizes simétricas [48, 47, 90, 65], ou por novos algoritmos de resolução de sistemas de equações [14].

## CAPÍTULO 8

### EXEMPLOS NUMÉRICOS

#### 8.1- INTRODUÇÃO

Neste capítulo, alguns exemplos simples são exibidos com o intuito de mostrar a validade das formulações apresentadas. Comparam-se os resultados obtidos com as soluções analíticas, quando existirem, ou com outras modelagens numéricas existentes na bibliografia. O programa desenvolvido foi processado em um microcomputador DFI/486 DX com 640Kb de memória principal e 16 MB de memória estendida, frequência de 66MHZ e disco rígido de 200MB.

Adota-se carregamento súbito (por exemplo figura 8.2) para a maior parte dos exemplos por gerar um comportamento de maior grau de dificuldade na simulação dos modelos adotados.

## 8.2- MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### Exemplo 8.2.1

Analisa-se o movimento da viga engastada mostrada na figura 8.1, submetida a um carregamento transversal súbito em sua extremidade, cuja intensidade e comportamento temporal são apresentados na figura 8.2.

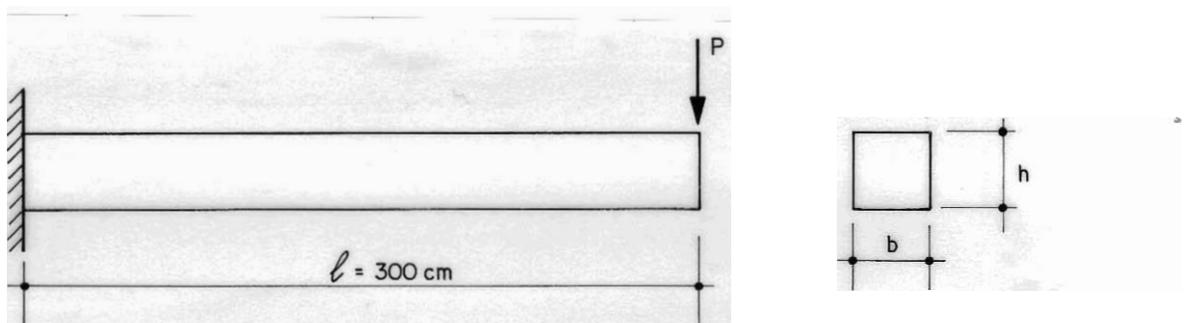


Figura 8.1- Viga engastada submetida a carregamento súbito

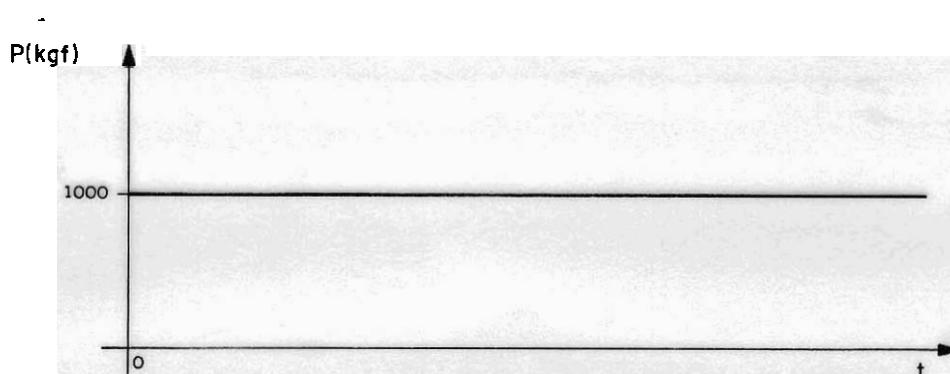


Figura 8.2- Intensidade e comportamento temporal do carregamento

Utilizam-se dois elementos finitos diferentes para compor as discretizações da barra, as quais são mostradas nas figuras que seguem. Cabe observar, que a densidade do material por unidade de volume, na modelagem por placa, é diferenciada para garantir que a densidade por unidade de comprimento da barra, grandeza relevante no problema, seja mantida.



$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Kgf/cm}^2$$

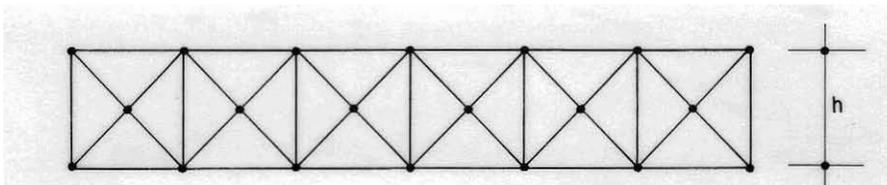
$$I = 22500 \text{ cm}^4$$

$$A = 300 \text{ cm}^2$$

$$\rho = 0,0025 \text{ kg/cm}^3$$

$$b = 10 \text{ cm} \quad h = 30 \text{ cm}$$

Figura 8.3- Discretização do problema por elemento de barra



$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\rho = 0,0007576 \text{ Kg/cm}^3$$

$$b = 60 \text{ cm} \quad h = 16,51 \text{ cm}$$

Figura 8.4- Discretização do problema por elemento de placa

Na figura seguinte mostram-se os resultados obtidos pelas discretizações utilizadas, comparando-os com a solução analítica encontrada pelo método da superposição modal [150], considerando amortecimento viscoso nulo. O intervalo de integração temporal adotado é  $\Delta t = 0,003 \text{ s}$  para ambas as discretizações.

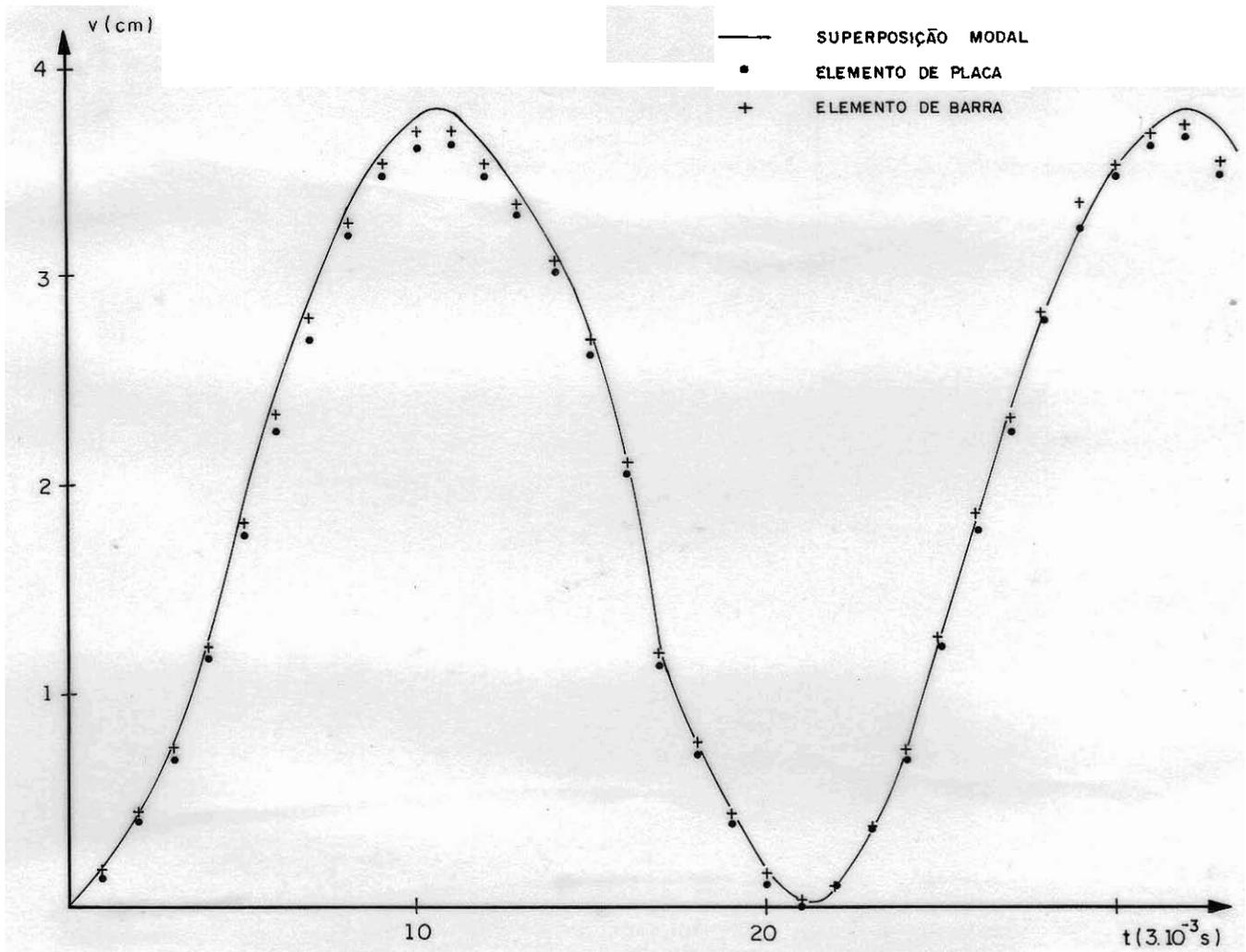


Figura 8.5- Viga submetida a carregamento transversal súbito, deslocamento transversal da extremidade livre

O erro máximo apresentado pela discretização dos elementos de barra nos cem passos de tempo analisados foi de dois por cento. Para a discretização em elementos de casca o erro máximo, para o mesmo número de passos, foi de quatro por cento.

**Exemplo 8.2.2:**

Analisa-se o movimento da barra engastada mostrada na figura 8.6, submetida a um carregamento longitudinal súbito em sua extremidade, cuja intensidade e comportamento temporal são os mesmos do exemplo anterior, figura 8.2.

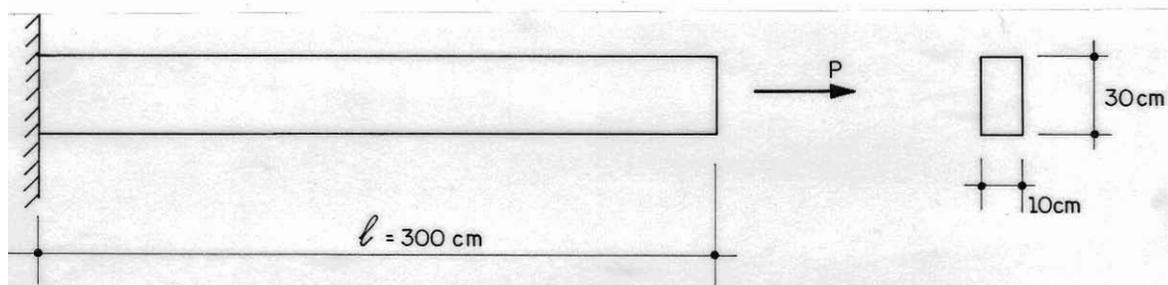


Figura 8.6- Barra engastada submetida a carregamento súbito

Para modelar este exemplo, utilizam-se elementos de barra e de chapa com as discretizações mostradas na figura 8.7:

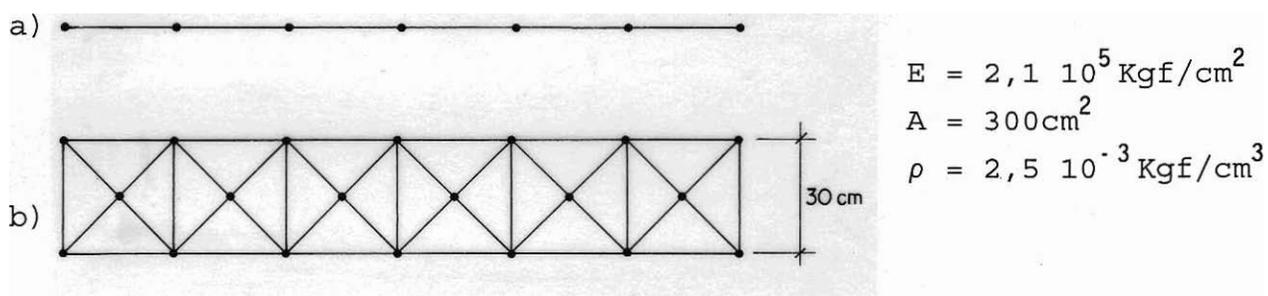


Figura 8.7- Discretizações empregadas. a) Elementos de Barra  
b) Elemento de chapa.

O intervalo de tempo adotado para ambas as discretizações é  $\Delta t = 0,0001 \text{ s}$  e os resultados obtidos são mostrados, juntamente com a solução a partir do processo de

superposição modal, na figura 8.8. Considera-se nulo o amortecimento viscoso.

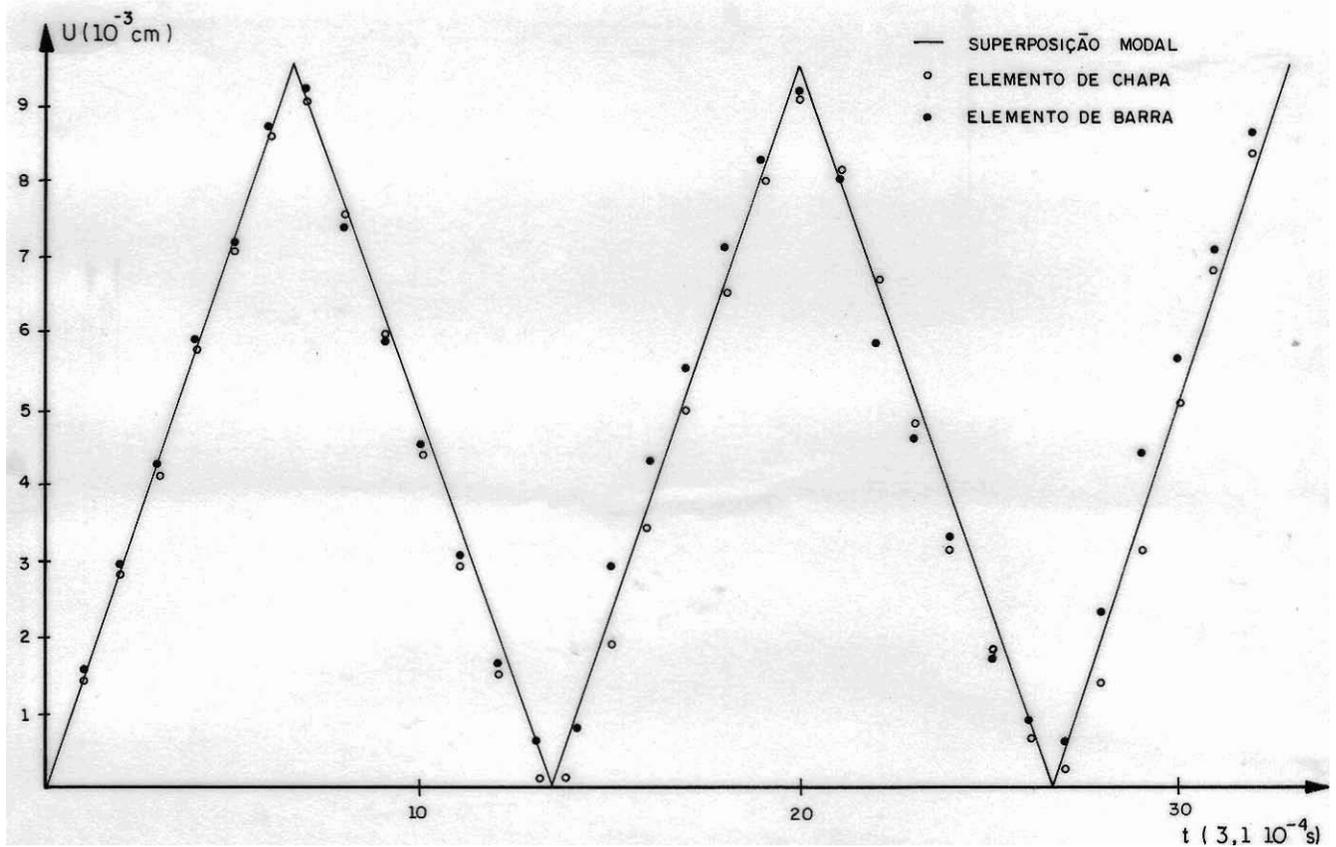


Figura 8.8- Barra submetida a carregamento longitudinal súbito, deslocamento da extremidade carregada

Conforme mostrado, as discretizações utilizadas, apesar de pobres, apresentaram bom comportamento a esta solicitação bastante difícil de se representar. O desempenho do elemento de chapa foi melhor que do elemento de barra devido a utilização de funções aproximadoras quadráticas para o primeiro e lineares para o segundo.

**Exemplo 8.2.3:**

Analisa-se o arco representado na figura 8.9 modelado por elementos de barra e de casca segundo as discretizações apresentadas na figura 8.10. A intensidade e o comportamento temporal do carregamento são mostrados também na figura 8.9.

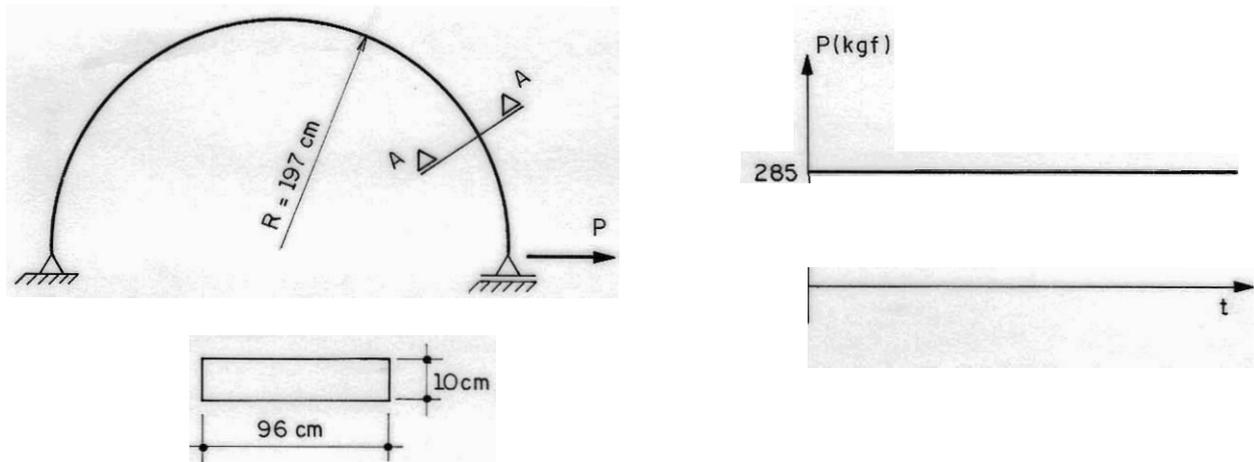


Figura 8.9- Arco analisado, intensidade e comportamento temporal do carregamento

As grandezas físicas adotadas para o material são:

$$E = 2.85 \cdot 10^5 \text{ Kgf/cm}^2 = 2.85 \cdot 10^8 \text{ Kg/(cm s}^2)$$

$$I = 8000 \text{ cm}^4$$

$$\nu = 0,3$$

$$\rho = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$$

O amortecimento foi considerado nulo e o intervalo de integração temporal adotado foi  $\Delta t = 0,028\text{s}$ . A segunda forma de escrever o módulo de elasticidade é que torna as unidades compatíveis para a execução do programa.

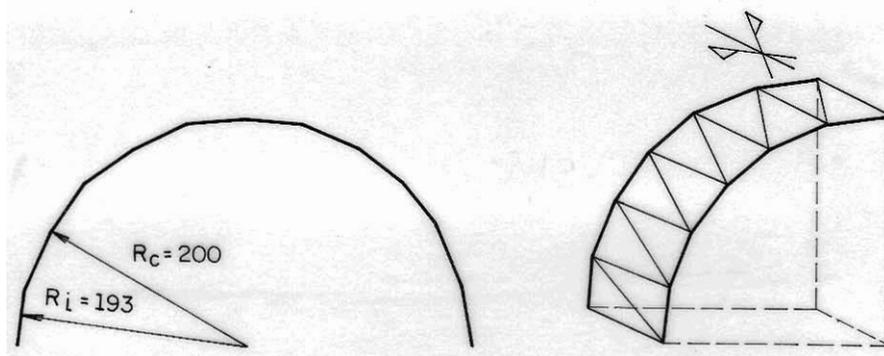


Figura 8.10- Discretizações utilizadas

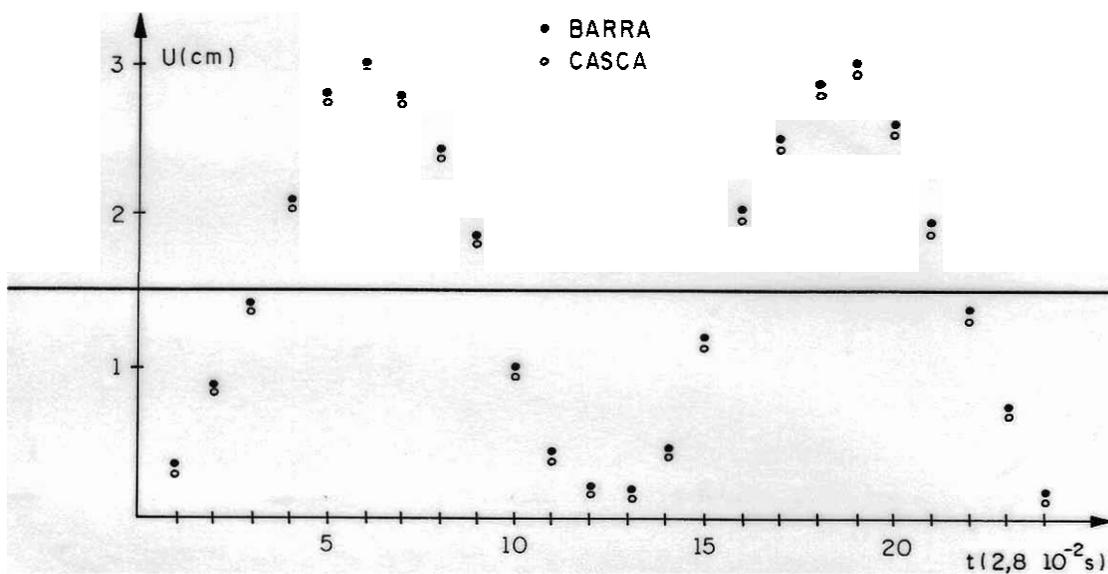


Figura 8.11- Comportamento da aplicação não colinear dos elementos de barra e não coplanar dos elementos de casca, deslocamento da extremidade carregada

Por este exemplo observa-se que os elementos de barra e de casca possuem ótimo comportamento no espaço tridimensional.

**Exemplo 8.2.4:**

Analisa-se o deslocamento do ponto central de uma placa quadrada simplesmente apoiada, solicitada por um carregamento distribuído sobre toda a sua superfície aplicado subitamente. As dimensões, propriedades físicas do problema, a intensidade e o comportamento temporal do carregamento são mostrados na figura 8.12. O resultado obtido é comparado com o apresentado por CHUEIRI [28], figura 8.14, que utiliza elementos triangulares com curvatura constante, e as discretizações adotadas são mostradas na figura 8.13.

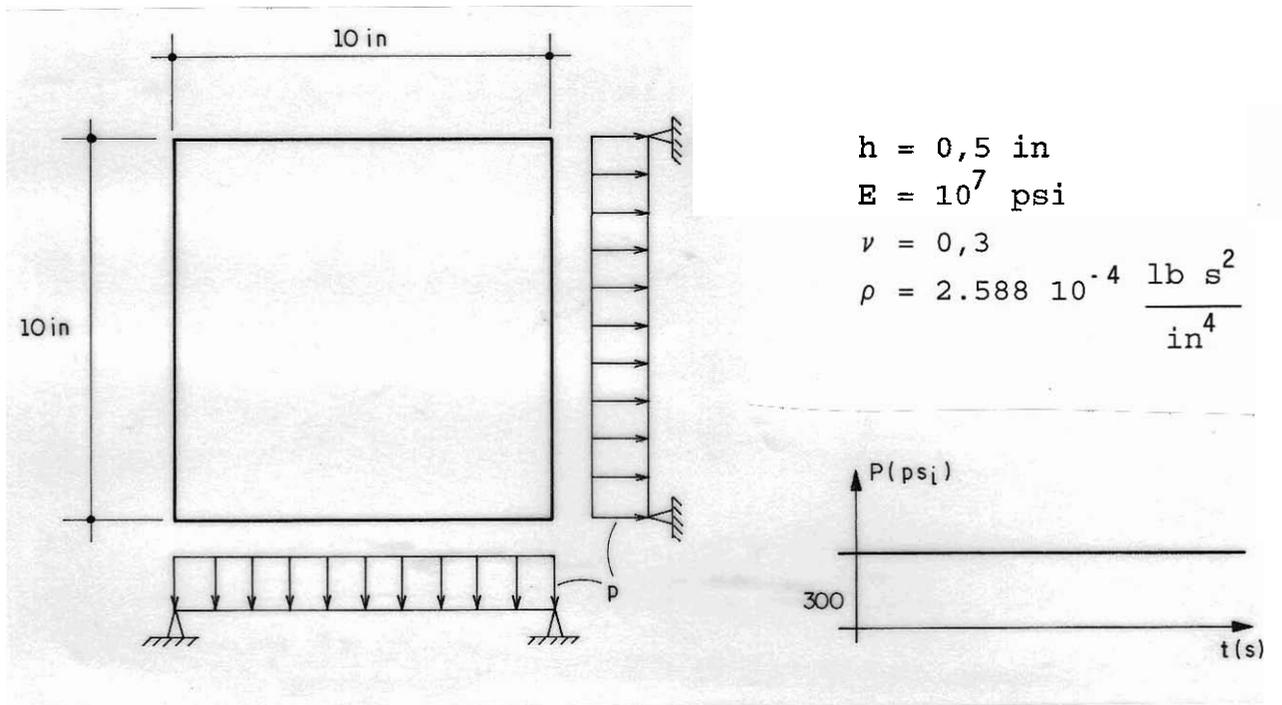


Figura 8.12- Dimensões, propriedades físicas, condições de apoio da placa analisada e carregamento.

Levando-se em conta a diferença das discretizações empregadas, comparando-se os resultados apresentados na figura 8.14, observa-se que o comportamento do elemento de placa adotado é plenamente satisfatório para as possíveis aplicações da prática.

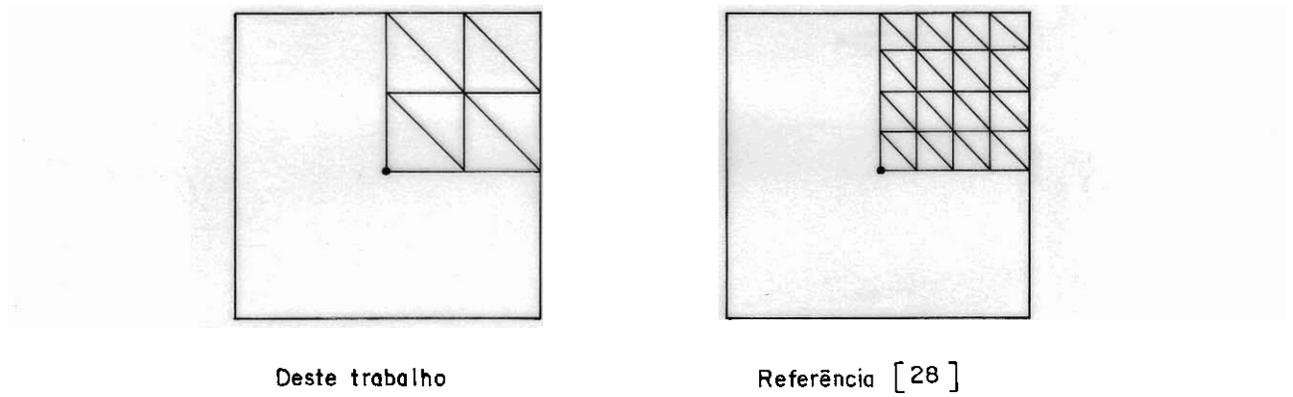


Figura 8.13- Discretizações utilizadas

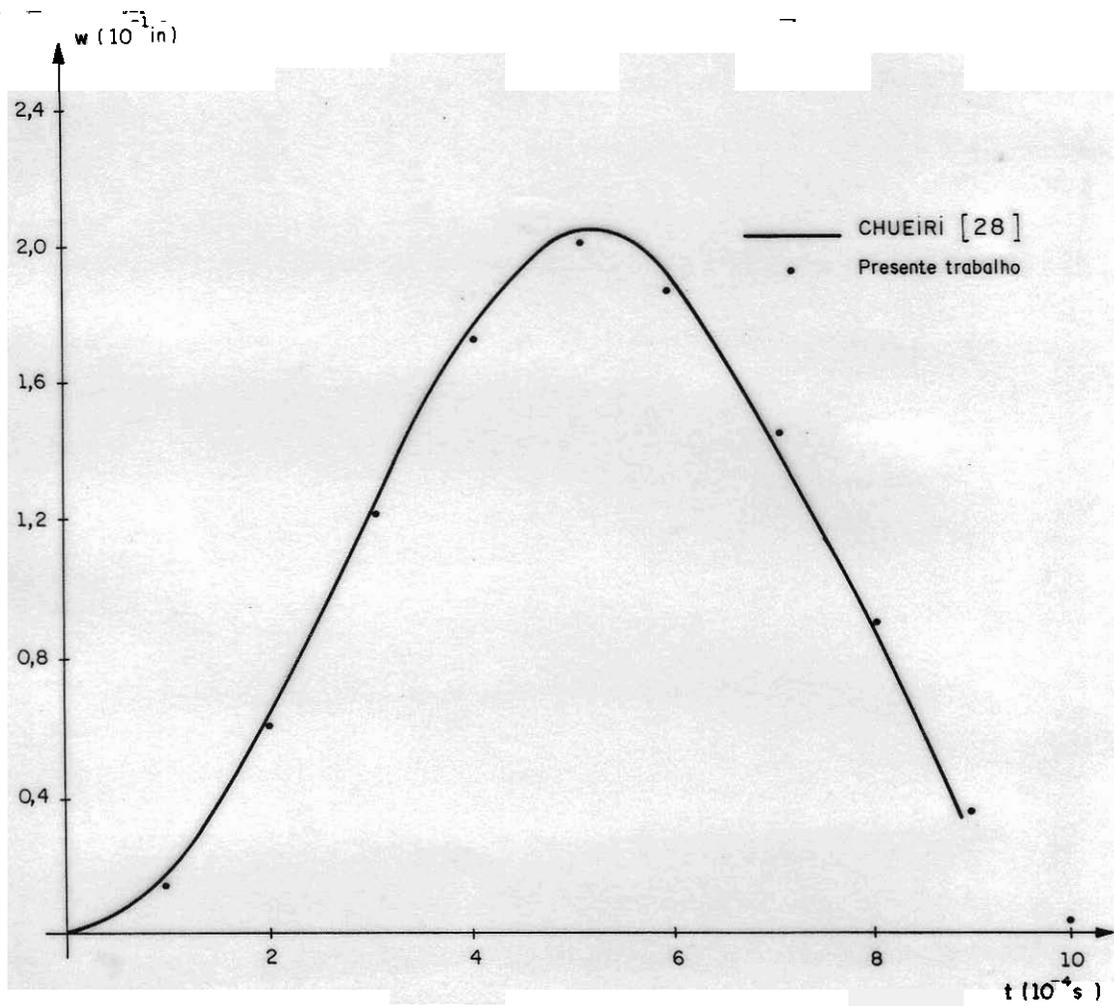


Figura 8.14- Deslocamento transversal do ponto central da placa analisada para amortecimento nulo

### 8.3- MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Em todos os exemplos mostrados utilizaram-se as soluções fundamentais alternativa e alternativa composta. Como os resultados obtidos pela aplicação de ambas foram praticamente iguais, adotou-se como solução fundamental ideal a alternativa composta, por ocupar muito menos espaço de memória. Esta será chamada, a partir de agora, simplesmente por solução alternativa.

#### Exemplo 8.3.1:

Analisa-se o comportamento de uma barra engastada solicitada subitamente, figura 8.15, por um carregamento longitudinal em sua extremidade. As discretizações adotadas são apresentadas na figura 8.16.

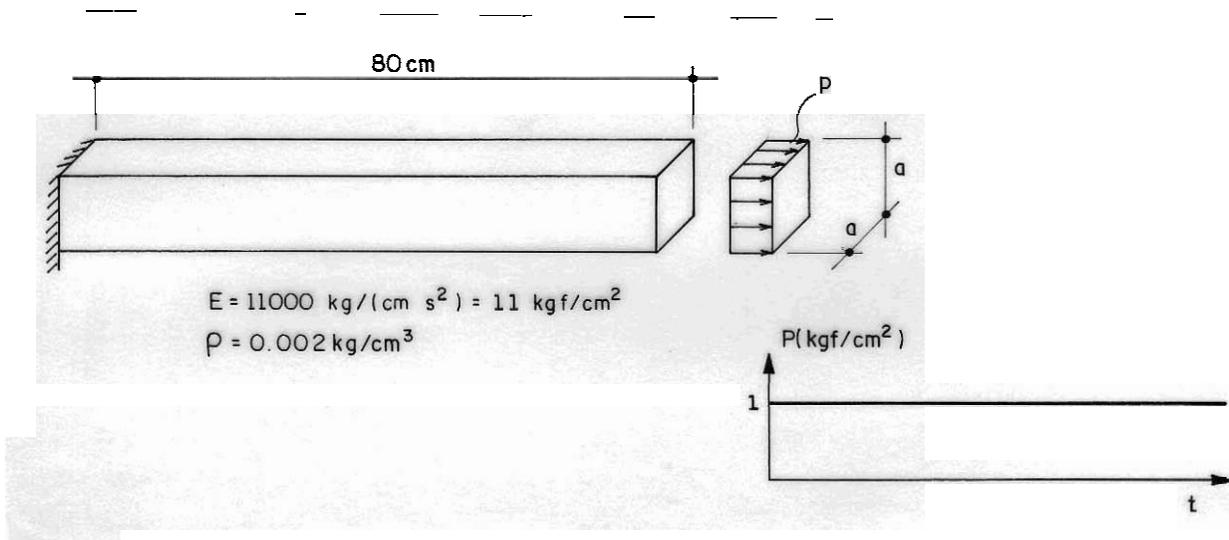


Figura 8.15- Geometria, condições de contorno, propriedades físicas e comportamento temporal da solicitação

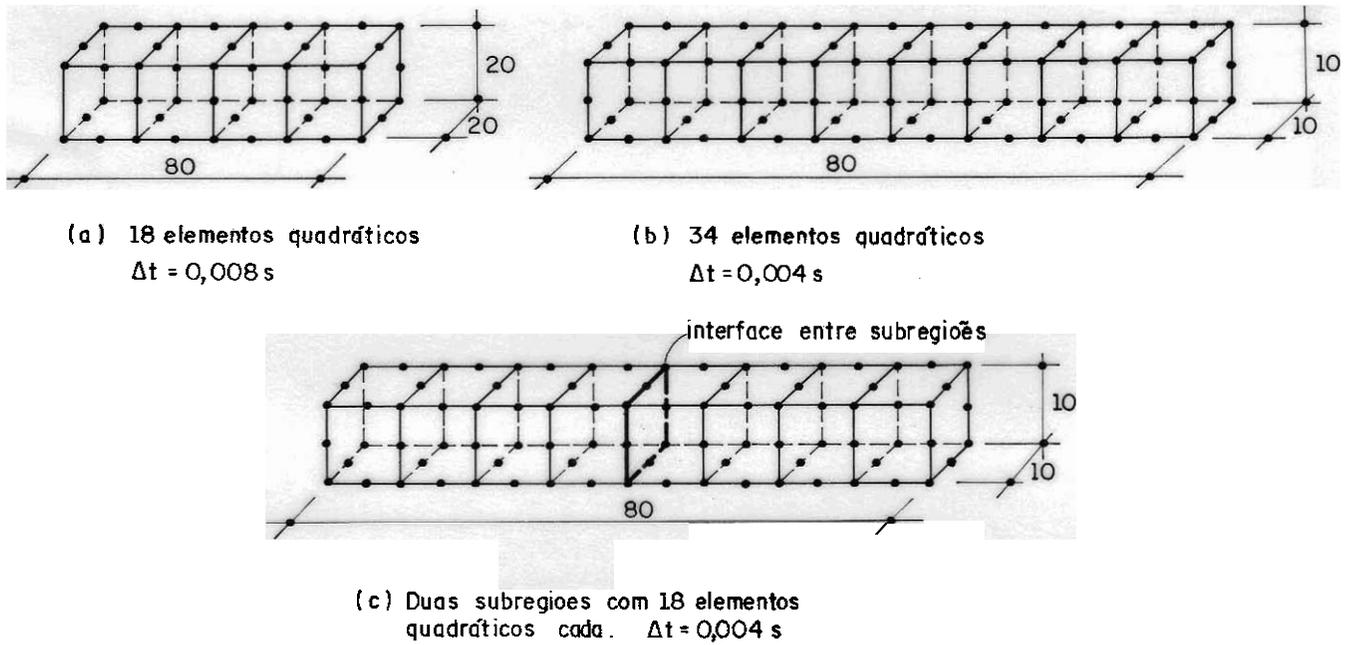


Figura 8.16- Discretizações utilizadas e intervalo de integração

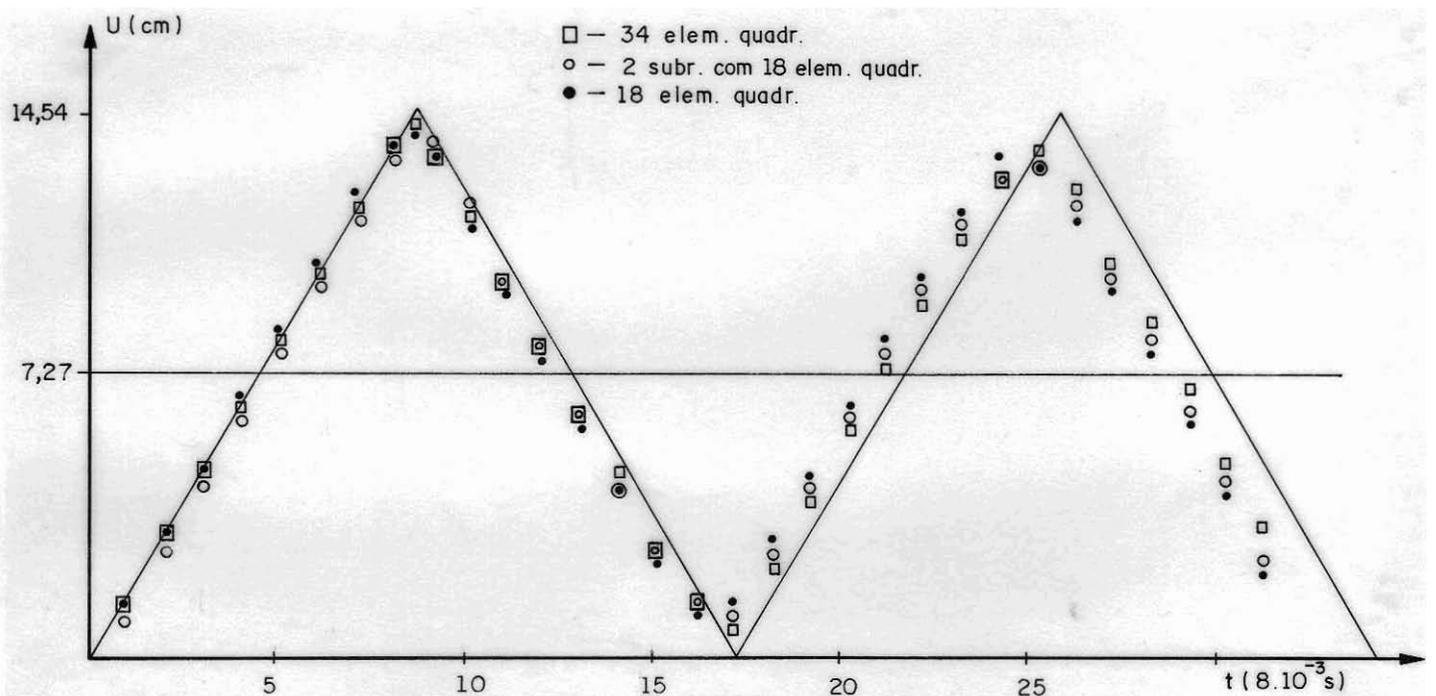


Figura 8.17- Deslocamento na extremidade carregada

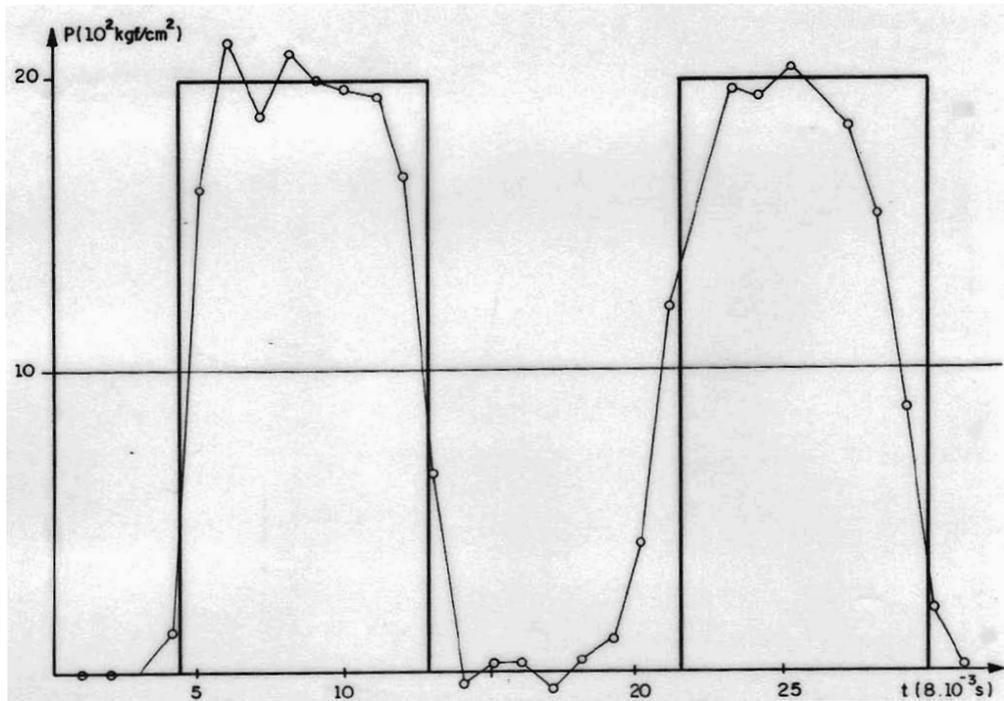


Figura 8.18- Reação de apoio discretização a

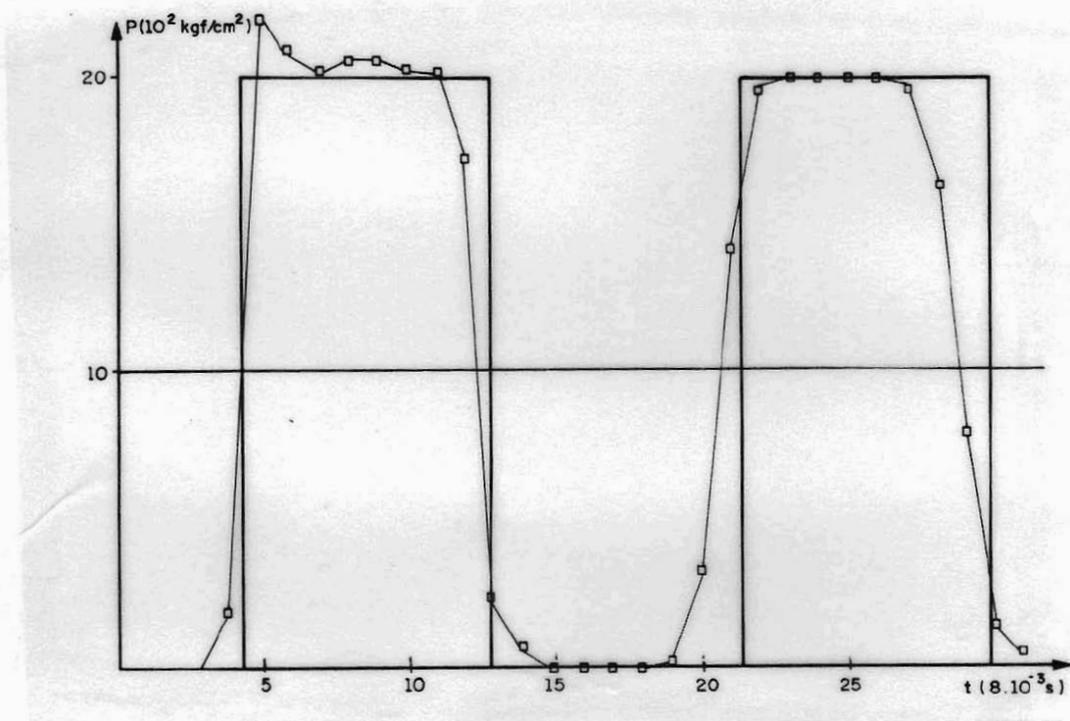


Figura 8.19- Reação de apoio discretização b

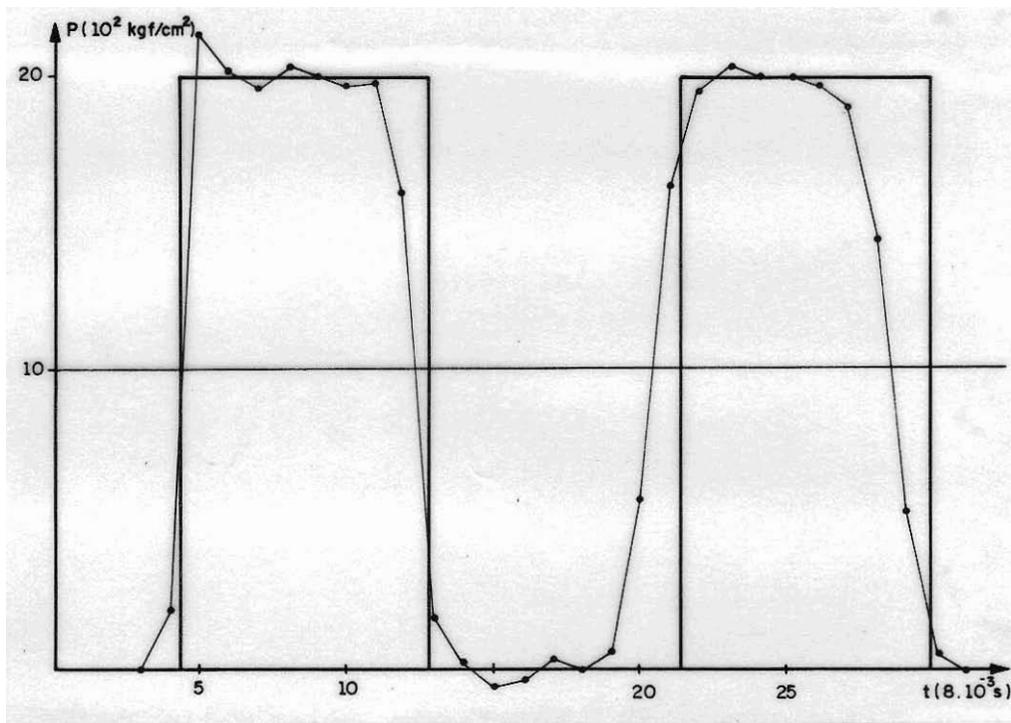


Figura 8.20- Reação de apoio discretização c

Como se observa, a resposta obtida pela utilização da formulação alternativa do MEC, para este exemplo, está em ótima concordância com a solução analítica [98, 96]. Cabe notar, que para este exemplo utilizam-se as seguintes condições de contorno relaxadas:  $\sigma_{31} = \sigma_{21} = 0$ .

### Exemplo 8.3.2:

Analisa-se o semi-espaço infinito mostrado na figura 8.21; nesta mesma figura apresentam-se a intensidade, a forma e o comportamento temporal do carregamento imposto à superfície. As constantes elásticas do meio são:

$$E = 200\text{Ksi}$$

$$\nu = 0,15$$

$$\rho = 6,885 \text{ lbf s}^2/\text{in}^4$$

Este exemplo é comparado com análises bidimensionais feitas por MANSUR e BREBBIA [98] (MEC-2D) e TSENG et alli [135] (MDF-2D), para tanto adotou-se  $\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{12} = 0$ . As discretizações utilizadas são mostradas na figura 8.22 e a comparação dos resultados nas figura 8.23, 8.24 e 8.25.

Os intervalos de tempo adotados são:

$$\Delta t = 1 \text{ ms} \quad [135]$$

$$\Delta t = 3,65 \text{ ms} \quad [98]$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta t_1 = 5 \text{ ms} \\ \Delta t_2 = 20 \text{ ms} \end{array} \right\} \text{Presente trabalho}$$

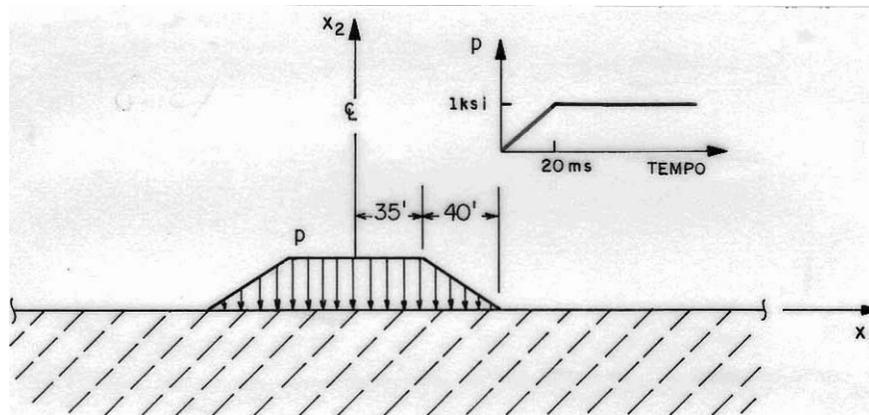


Figura 8.21- Carregamento sobre a superfície do meio, forma, intensidade e comportamento temporal.

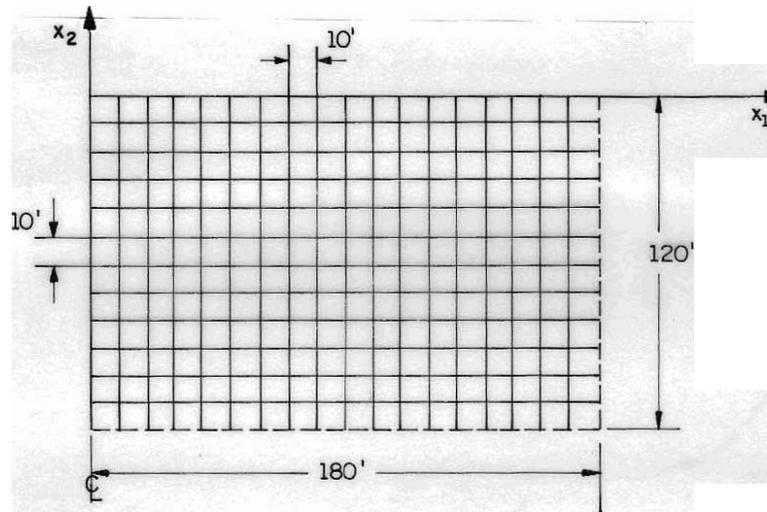


Figura 8.22a- Discretização utilizada por TSENG [135]

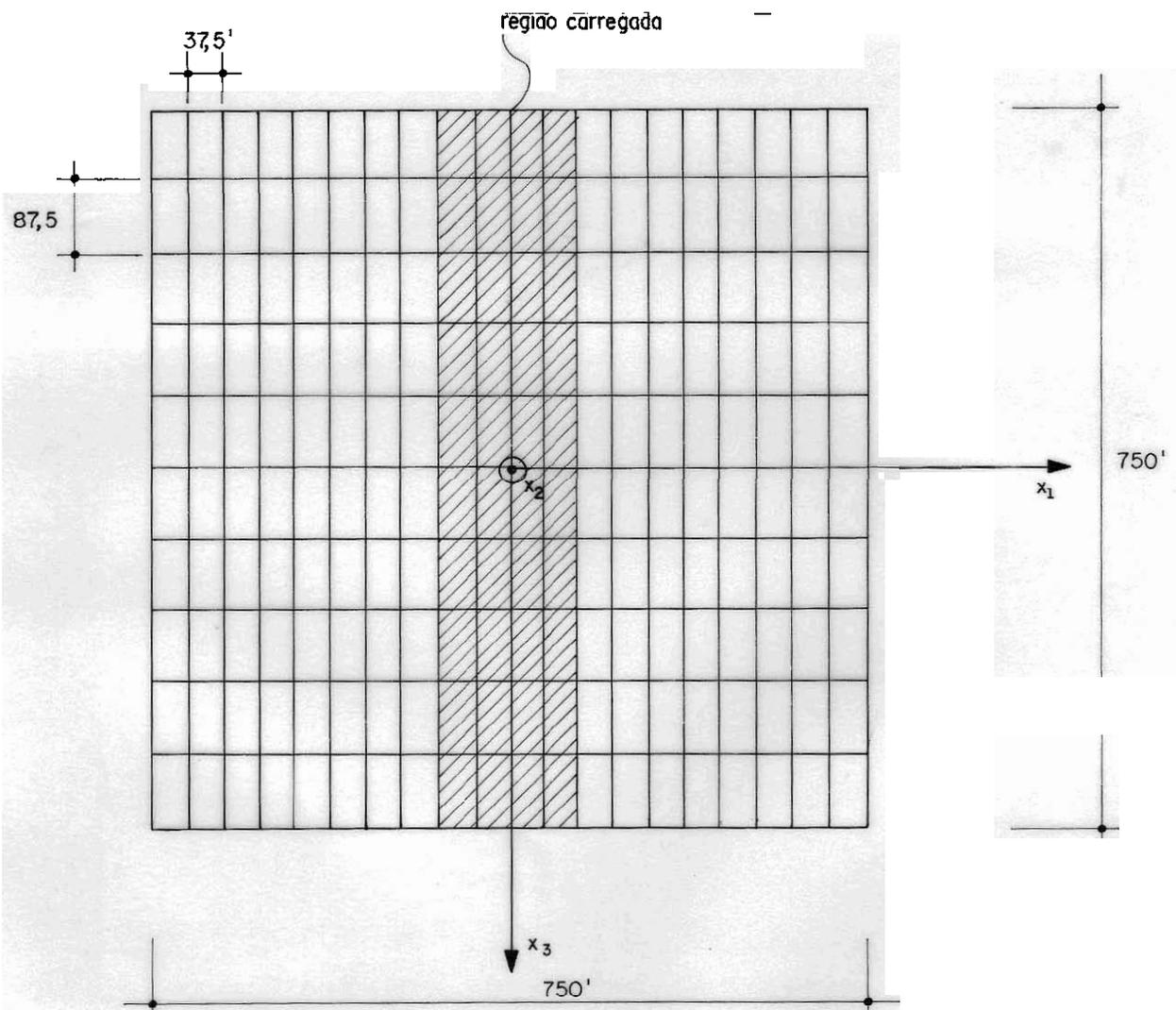


Figura 8.22b- Discretização utilizada no presente trabalho

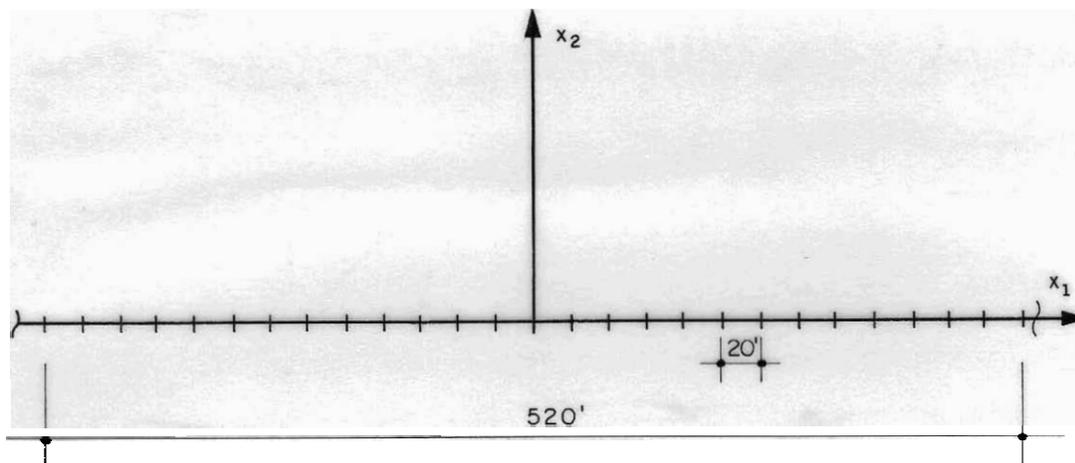


Figura 8.22c- Discretização utilizada por MANSUR [97]

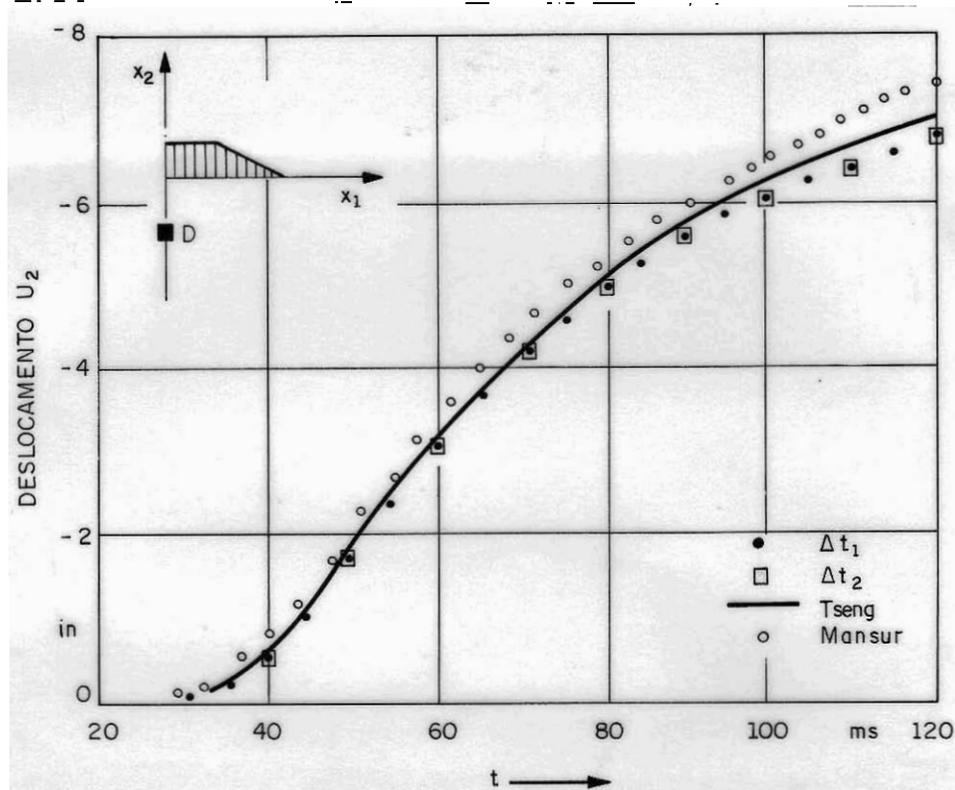


Figura 8.23- Deslocamento na direção  $X_2$  do ponto D(0', 0', -70')

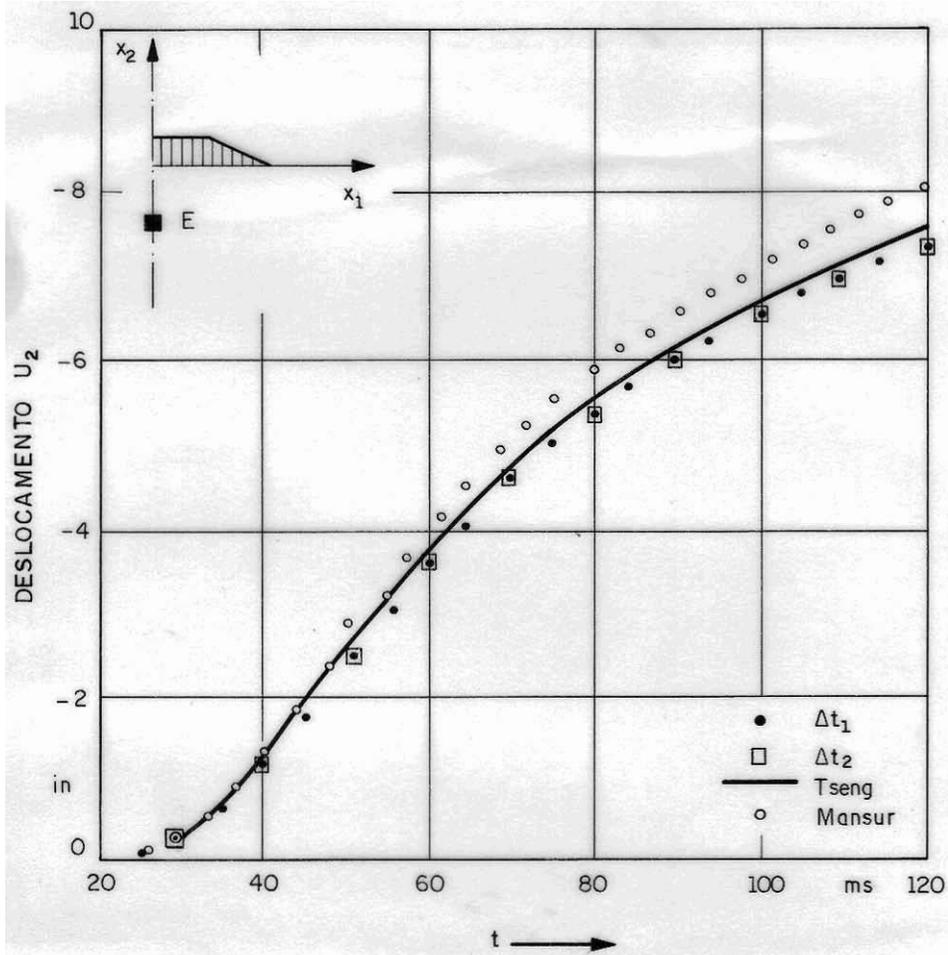


Figura 8.24- Deslocamento na direção  $X_2$  do ponto E(0', 0', -60')

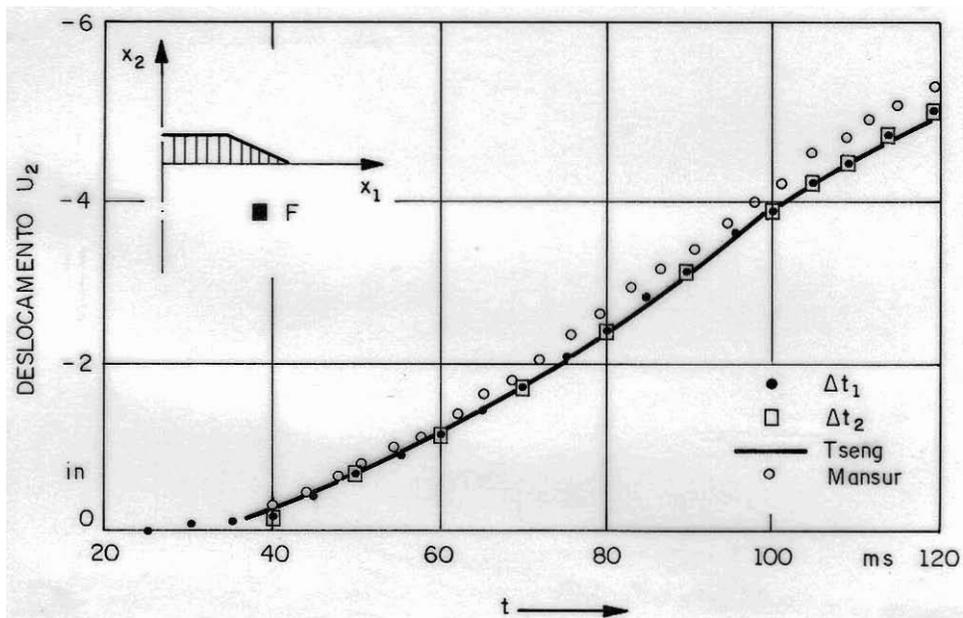


Figura 8.25- Deslocamento na direção  $X_2$  do ponto F(80', 0', -60')

Como se observa, mesmo para passos de tempo bem maiores que os adotados pelas duas referências consultadas, os resultados obtidos pela formulação proposta apresentam ótimo comportamento. Deve-se esclarecer que as respostas obtidas para  $\Delta t_1 = 5\text{ms}$  e  $\Delta t_2 = 10\text{ms}$  apresentaram diferença máxima entre si de 1%, sendo assim, os pontos do gráfico são praticamente coincidentes.

#### 8.4- LIGAÇÃO MEC/MEF

Adotando-se a formulação alternativa para o MEC, os elementos de ligação apresentados nesta tese e utilizando-se os elementos finitos descritos anteriormente, mostram-se três exemplos simples de ligação para ilustrar a validade e eficiência desta técnica.

##### Exemplo 8.4.1:

Analisa-se os comportamentos de uma sapata rígida quadrada sem massa de dimensões 5' x 5', submetida a impulsos vertical, horizontal e rotacional; tal como proposto por KARABALIS e BESKOS [72]. As intensidades das solicitações externas e suas variações temporais são mostradas juntamente com a comparação dos resultados nas figuras 8.28, 8.29 e 8.30.

As propriedades físicas do meio, mantidas as unidades da referência [72], são

$$E = 2,58984 \times 10^9 \text{ lbf/ft}^2$$

$$\nu = 1/3$$

$$\rho = 10,368 \text{ lbf s}^2/\text{ft}^4$$

Condições de contorno relaxadas são assumidas para os três movimentos, isto é, as tensões de cisalhamento de contato  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$  para os movimentos vertical e rotacional, e  $\sigma_{33} = \sigma_{23} = 0$  para o movimento horizontal.

As discretizações utilizadas são apresentadas nas figuras 8.26 e 8.27.

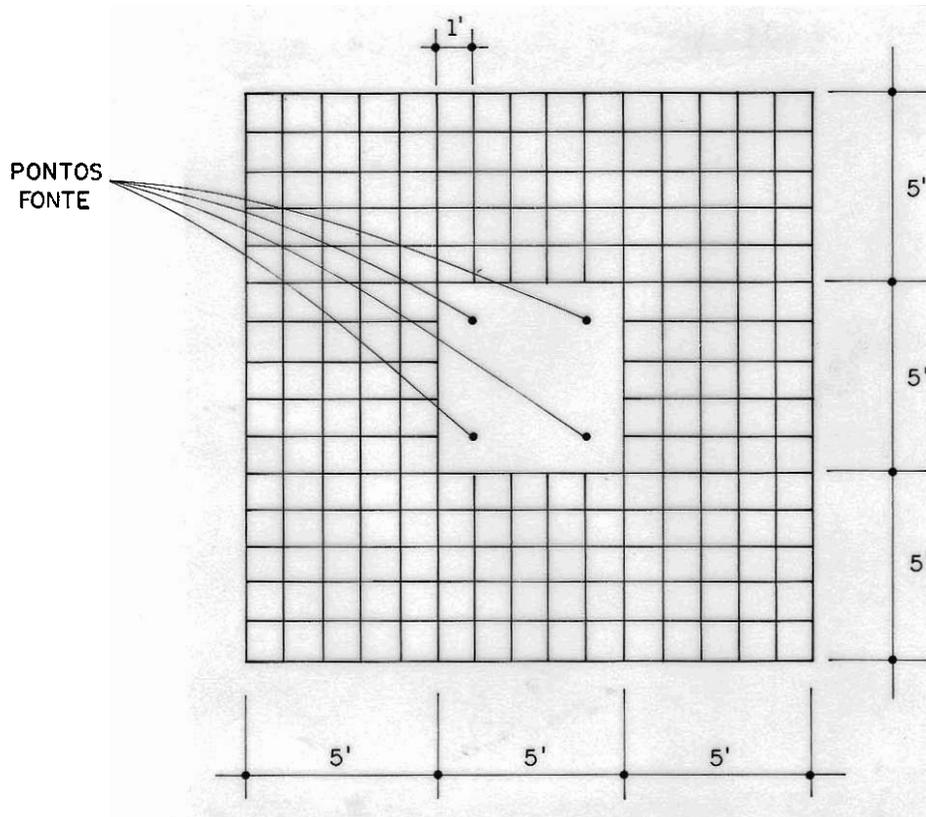
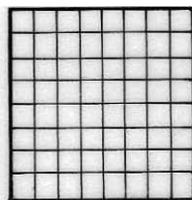
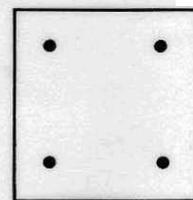


Figura 8.26- Discretização (1) da sapata rígida, posicionamento dos pontos fonte e discretização da superfície do solo



(2)



(3)

Figura 8.27- Discretização (2) utilizada por KARABALIS e BESKOS [72] e discretização (3) adotada neste trabalho

As discretizações (1) e (3) foram utilizadas para resolver o problema proposto, entre os respostas obtidas não houve diferença significativa. Conclui-se, portanto, que para a análise de sapatas isoladas não há necessidade de se discretizar a superfície livre do solo. O mesmo tipo de estudo pode ser visto no trabalho de ANTES [4], para o caso bidimensional.

Como pode ser visto, nas figuras 8.26 e 8.27, nas discretizações (1) e (3) (deste trabalho) apenas um elemento de contorno com aproximação linear foi adotado para representar a superfície de contato entre a sapata e o meio elástico; na discretização (2) [72] foram utilizados 64 elementos de contorno para representar a mesma.

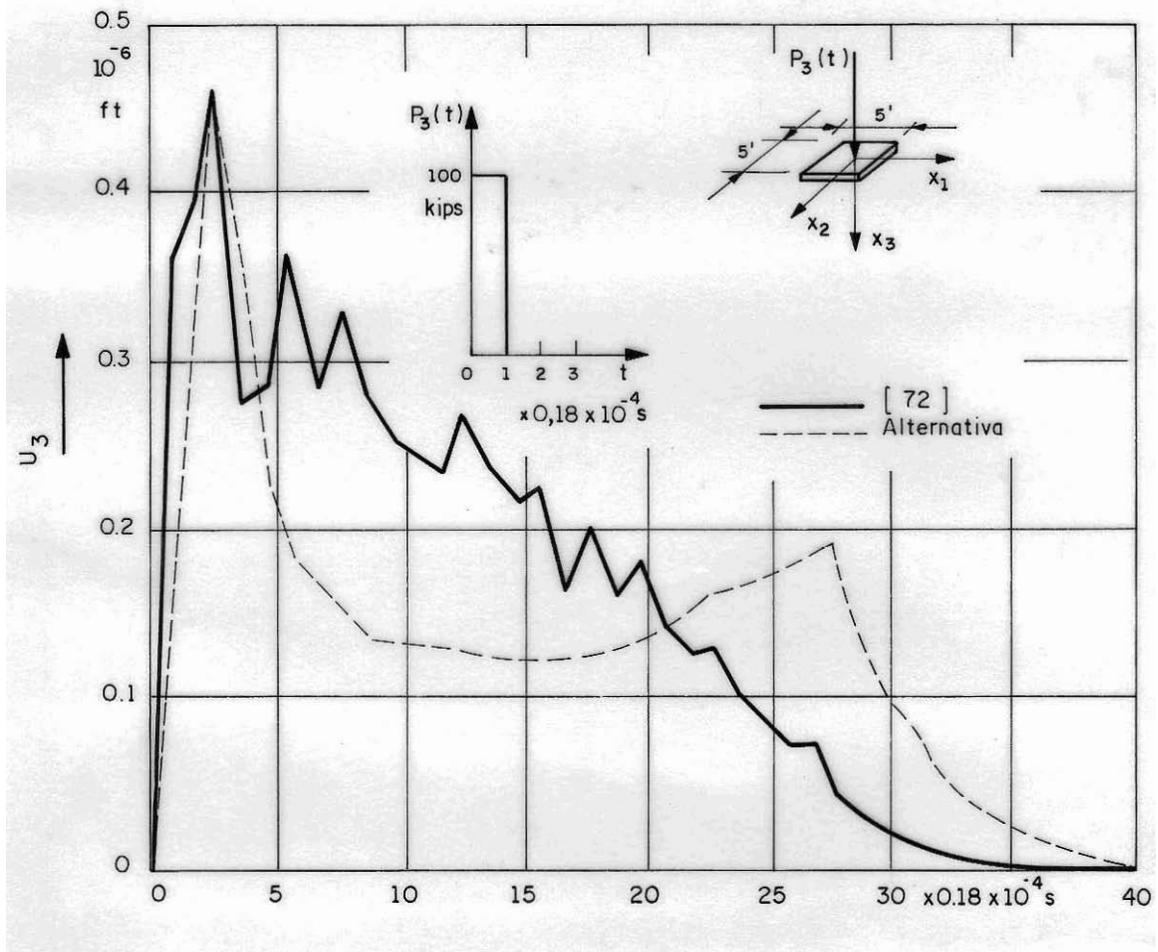


Figura 8.28- Movimento vertical da sapata, intensidade e variação temporal do carregamento

Deve-se recordar que nas figuras onde os resultados são mostrados, também se apresentam as dimensões da sapata, o comportamento temporal e a intensidade do carregamento aplicado. Além disso, é bom esclarecer que na referência [72], adotou-se a solução fundamental usual com aproximação temporal constante como formulação do MEC.

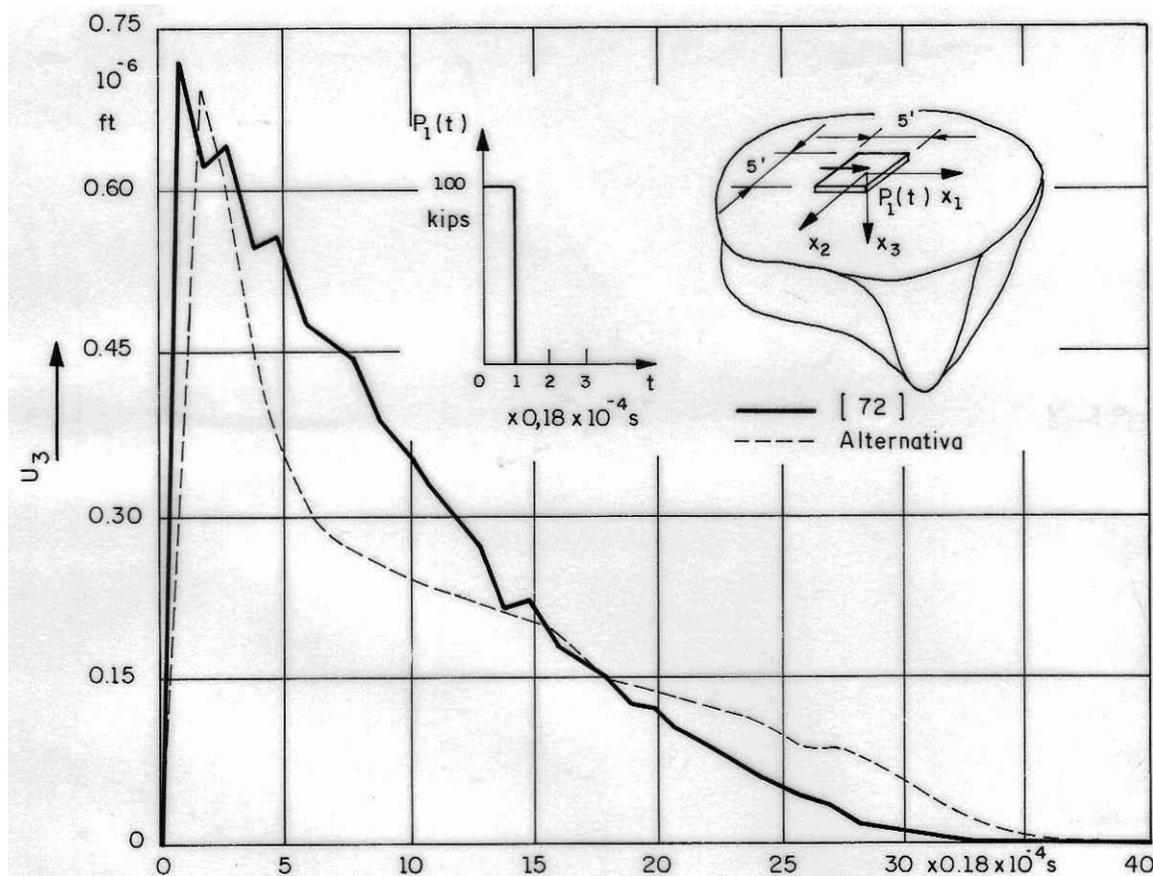


Figura 8.29- Movimento horizontal da sapata, intensidade e variação temporal do carregamento

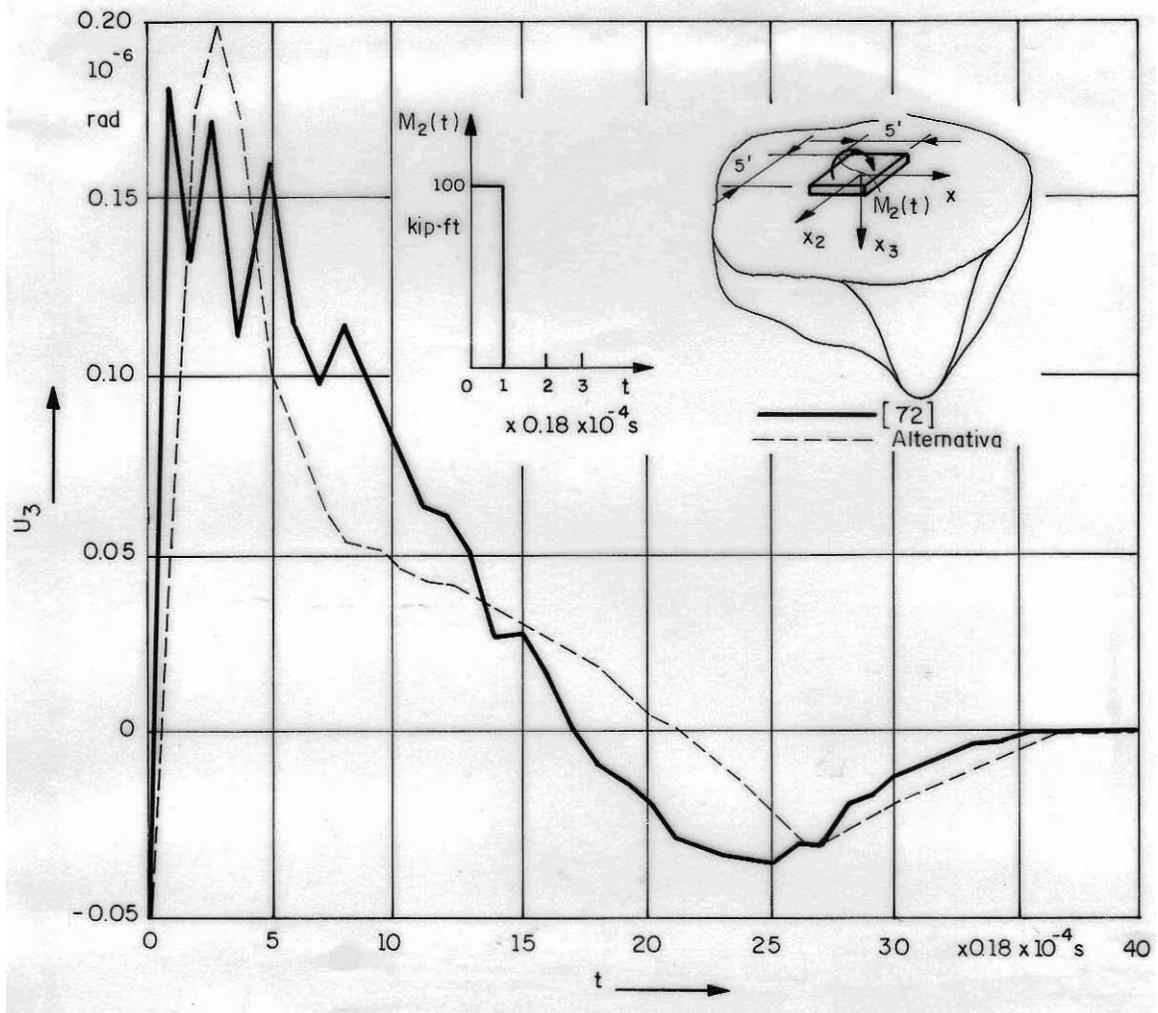


Figura 8.30- Movimento de rotação da sapata, intensidade e variação temporal do carregamento

Comparando-se os resultados mostrados por KARABALIS e BESKOS [72] com os obtidos, considerada a complexidade dos carregamentos envolvidos, observa-se grande coerência nos comportamentos dos movimentos, principalmente quando se analisa a área delimitada pelos gráficos, pois a composição de resultados de outras solicitações podem ser obtidas por um processo de convolução [70, 138] que possui como base de cálculo as respostas de impulsos deste tipo.

Deve-se observar que nenhum dos resultados acima foi comparado com uma resposta analítica, ficando difícil a avaliação real do erro de ambos os processos utilizados, apenas como indicação, pode-se observar que as oscilações apresentadas pela

solução usual [72], não aparecem em análises semelhantes feitas em modelagens bidimensionais [4]. É claro que a adoção de uma discretização mais refinada sob o elemento de sapata rígida, para o caso da solução fundamental alternativa, poderia melhorar os resultados, porém tal procedimento foge do objetivo primeiro deste trabalho, ficando para estudos posteriores.

Para solicitações de menor frequência, entretanto, os resultados de ambas as formulações estão em perfeita sintonia, como é visto na figura 8.31.

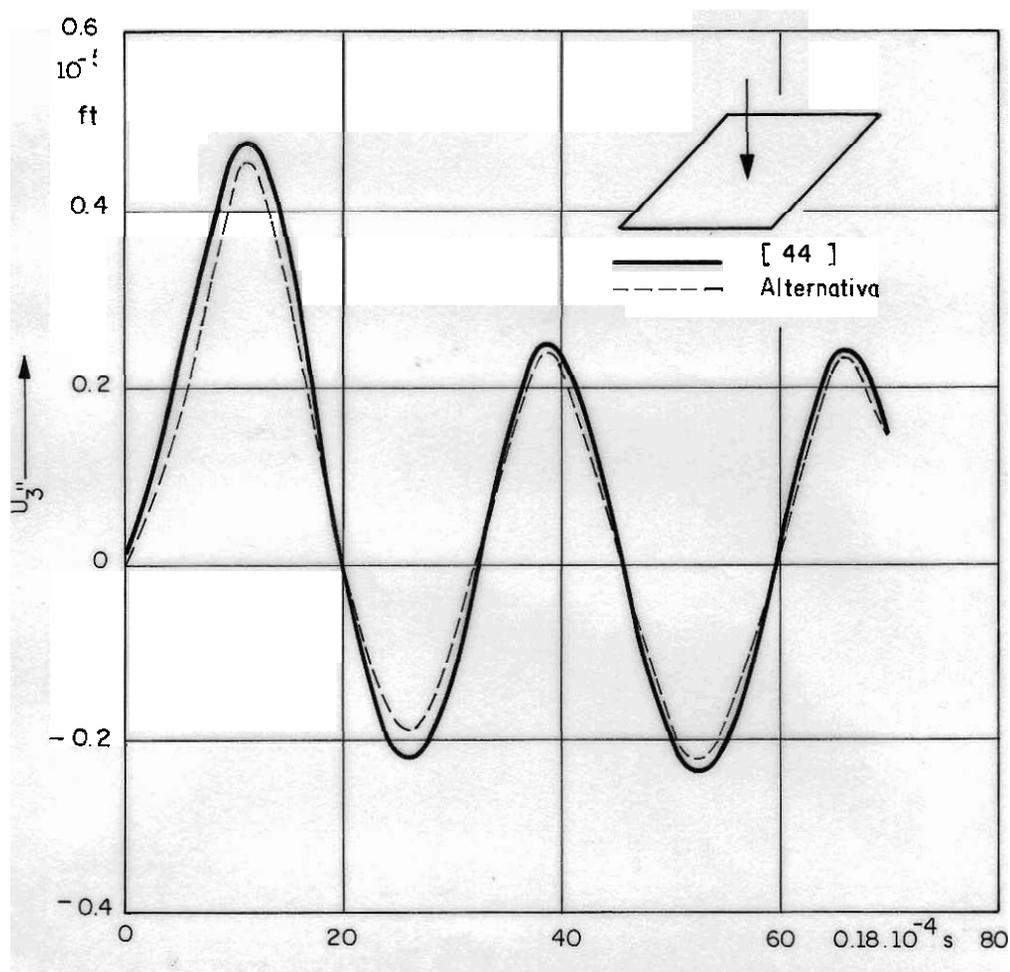


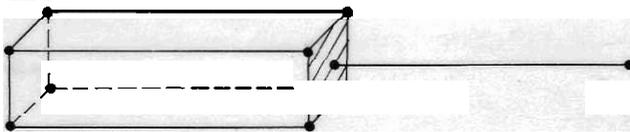
Figura 8.31- Movimento vertical de uma sapata rígida solicitada por  $P(t) = 180 \text{ sen}(13000t) \text{ kips}$

É interessante notar que o bom comportamento dos resultados obtidos, para uma discretização tão pobre, do elemento de sapata rígida desenvolvido, se deve à posição estratégica adotada para os pontos fontes (figura 8.26), que garante uma taxa de afastamento das ondas ponderadoras muito próximas daquela gerada pela discretização usada por BESKOS e KARABALIS [72].

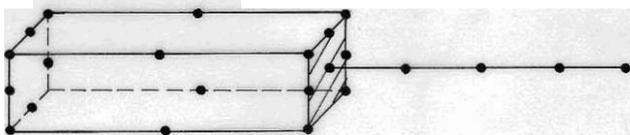
Conclui-se, portanto, que o elemento de sapata rígida proposto aqui, pode ser usado com segurança para fazer a ligação entre o MEC e o MEF.

**Exemplo 8.4.2:**

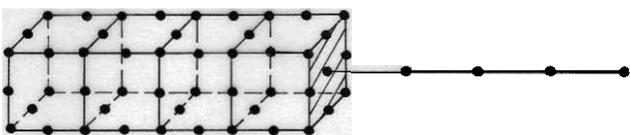
Analisa-se o problema do exemplo 8.3.1, ilustrado pela figura 8.15, utilizando quatro discretizações mistas MEC/MEF, mostradas na figura 8.32.



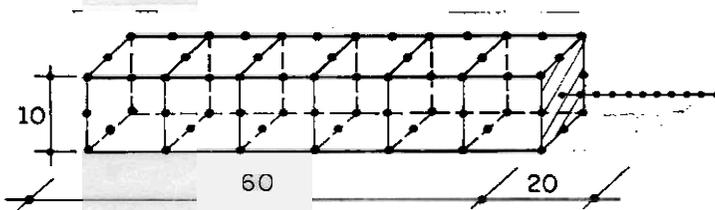
a) Seis elementos de contorno lineares e um elemento finito  $\Delta t = 0,008s$



b) seis elementos de contorno quadráticos e quatro elementos finitos  $\Delta t = 0,008s$ .



c) Dezoito elementos de contorno quadráticos e quatro elementos finitos  $\Delta t = 0,004s$ .



d) Vinte e seis elementos de contorno e dez elementos finitos  $\Delta t = 0,004s$ .

Figura 8.32- Barra modelada por elementos finitos e elementos de contorno ligados através de sapata rígida, intervalos de tempo e discretizações utilizadas

Nas figuras 8.33a e 8.33b mostram-se os deslocamentos longitudinais da extremidade livre obtidos para cada discretização e comparados com a resposta analítica.

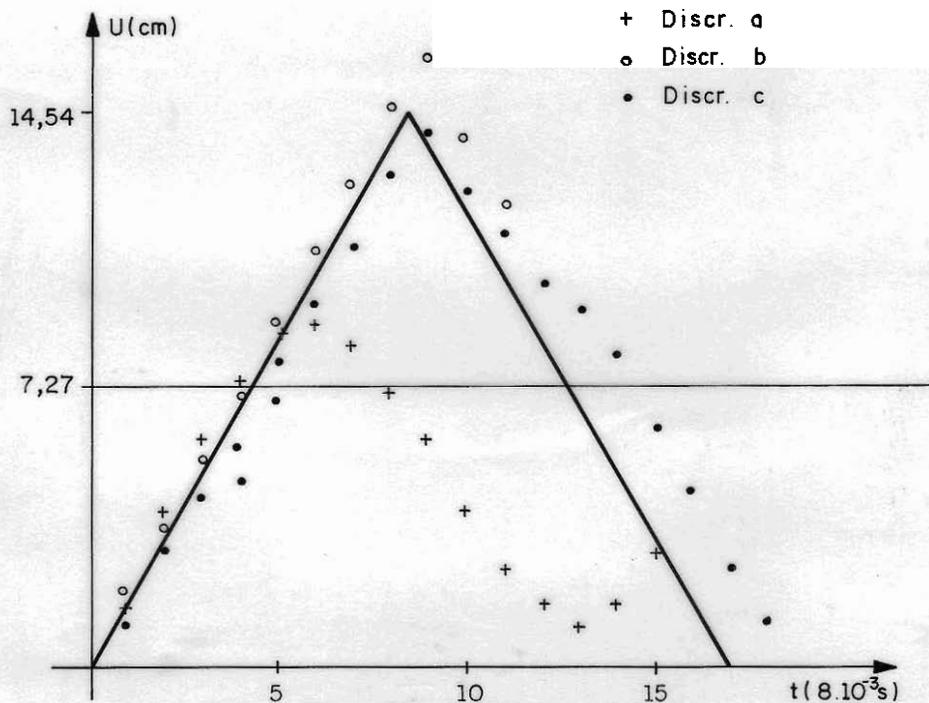


Figura 8.33a- Deslocamento da extremidade livre, discretizações a, b, c

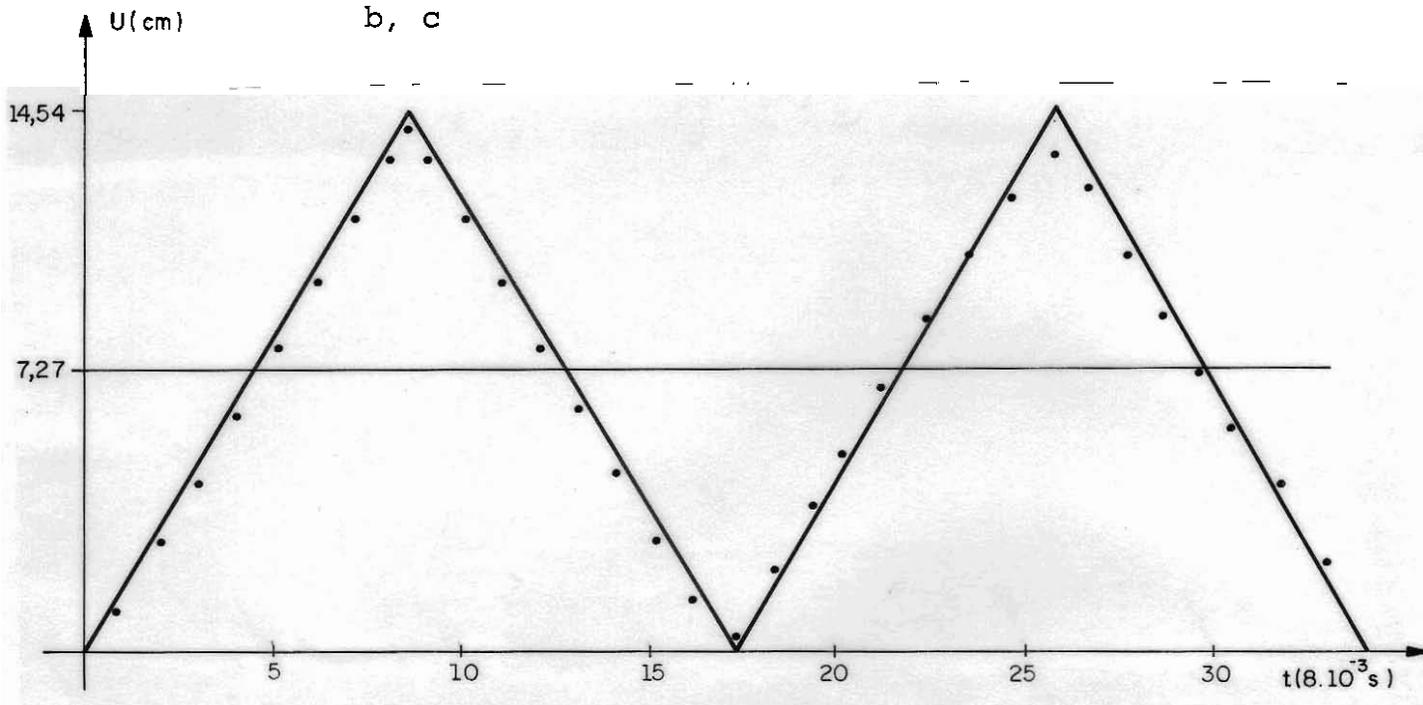


Figura 8.33b- Deslocamento da extremidade livre, discretização d

Na figura 8.33 (a e b) observa-se a variação dos resultados à medida que se melhora a discretização. Nota-se que para este tipo de problema o grau de discretização é muito importante. Para a primeira discretização, por exemplo, a onda gerada pela carga se reflete quase que integralmente na interface, pois encontra um meio, cujas restrições de deslocamento impostas pelas funções aproximadoras dos elementos o tornam externamente rígido. À medida que se melhora a discretização, obtém-se uma resposta também melhor.

**Exemplo 8.4.3:**

Analisa-se o movimento horizontal da extremidade carregada da torre mostrada na figura 8.34. A intensidade e o comportamento temporal do carregamento são mostrados na figura 8.35.

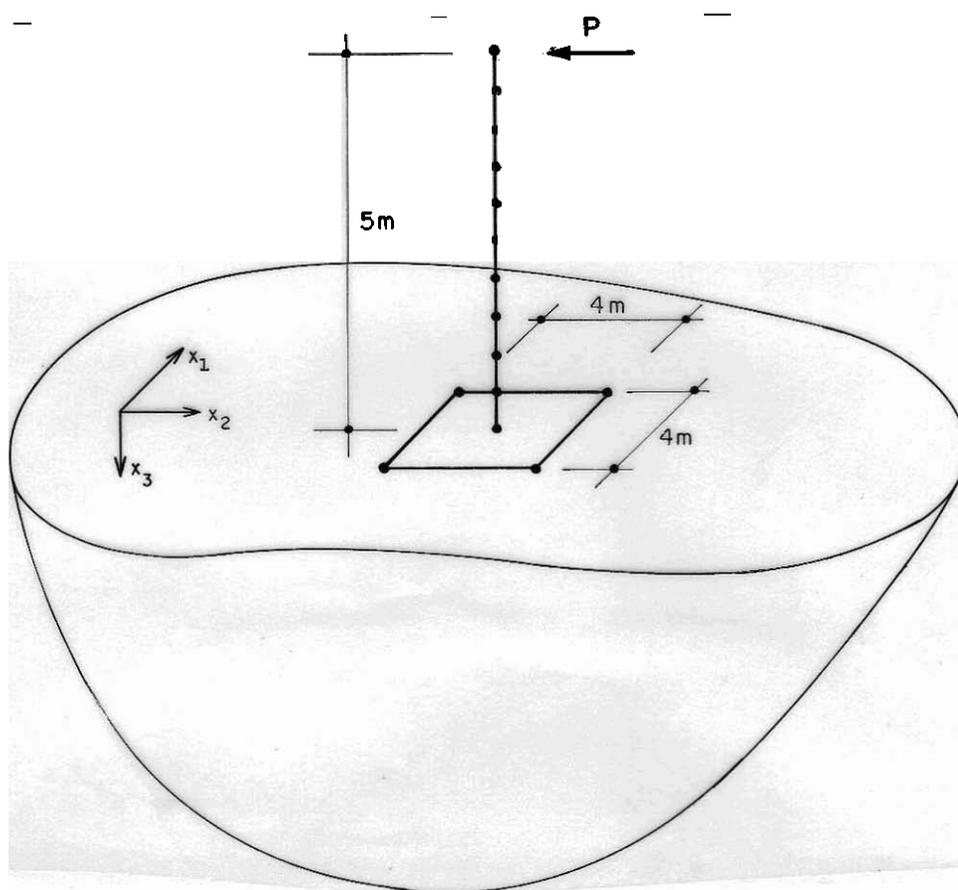


Figura 8.34- Torre solicitada por carregamento súbito e ligada ao solo por meio de sapata rígida

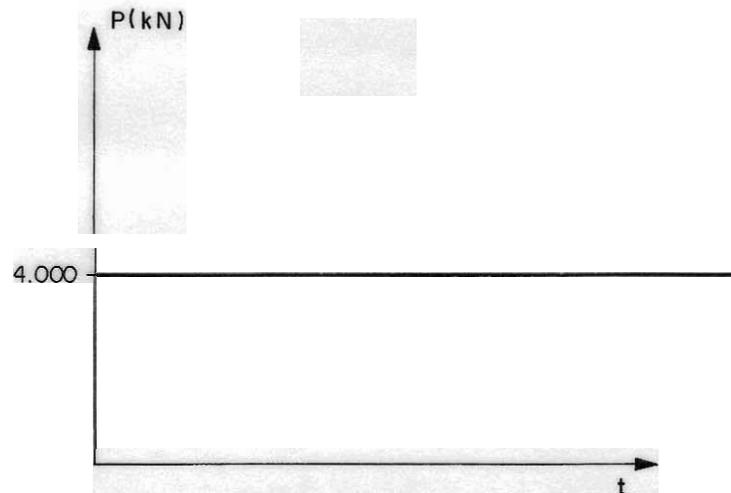


Figura 8.35- Intensidade e comportamento temporal do carregamento.

As propriedades físicas dos meios envolvidos são dadas abaixo:

Torre:

$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$\rho = 6000 \text{ kg/m}^3$$

$$A_t = 0,2 \text{ m}^2$$

$$I = 0,116666 \text{ m}^4$$

$$\nu = 0,0$$

Solo:

$$E = 2,6 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu = 0,33$$

São assumidas as condições de contorno relaxadas para o solo  $\sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$ . A discretização utilizada consiste em dez elementos finitos de barra para modelar a torre, e apenas um elemento de contorno para modelar o solo (tal como no exemplo 8.4.1), figura 8.34.

Compara-se, na figura 8.36, o resultado desta modelagem com o obtido utilizando-se apenas a discretização em elementos finitos, engastando-se a base da torre como no exemplo 8.2.1.

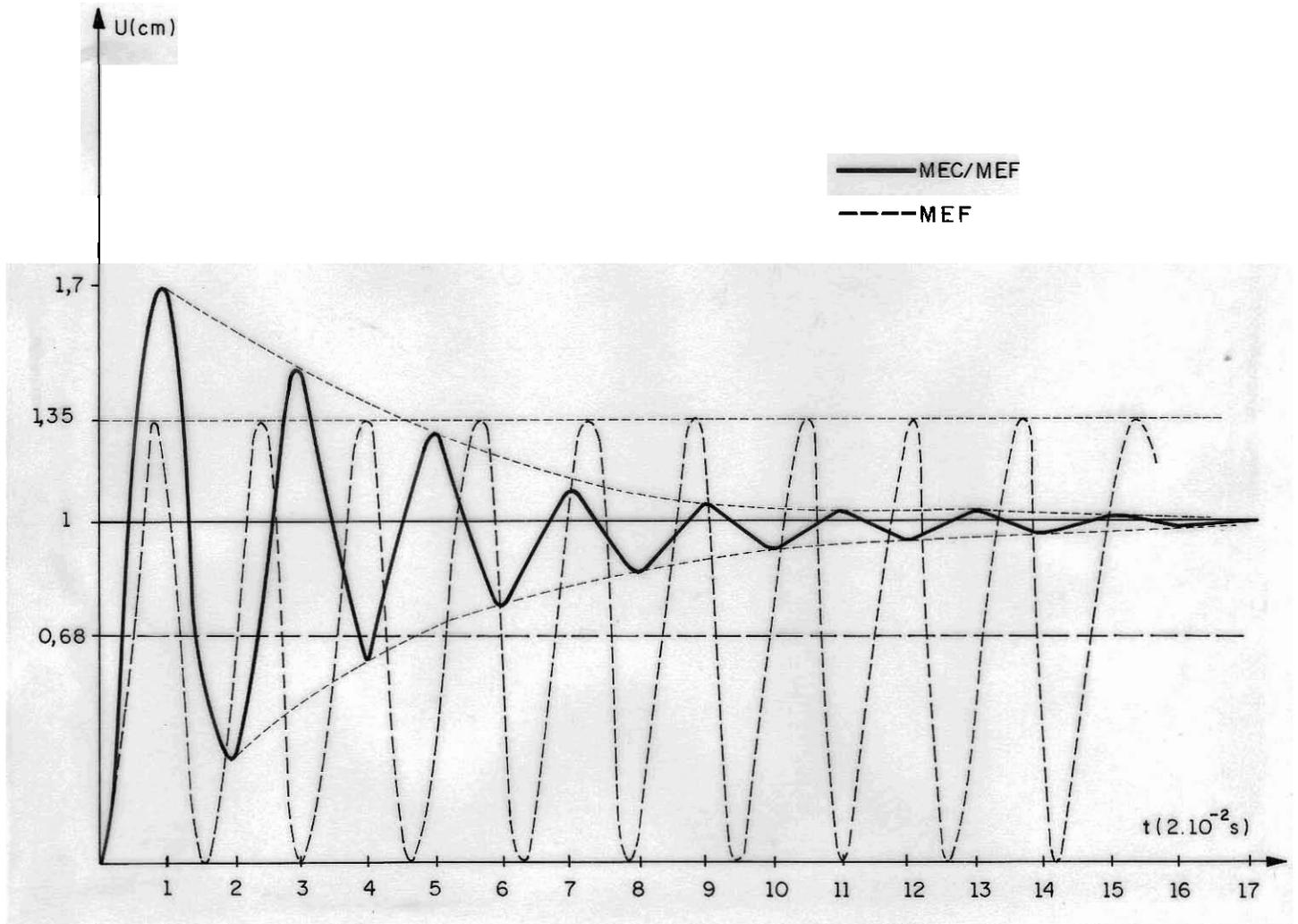


Figura 8.36- Deslocamento dinâmico e estático da extremidade solicitada da torre usando modelagens MEC/MEF e MEF.

Os resultados obtidos estão totalmente de acordo com o esperado; os deslocamentos estáticos também foram obtidos através das discretizações apresentadas. Como se vê, o primeiro e o segundo pico do deslocamento dinâmico e o valor do deslocamento estático, para o modelo MEC/MEF, são maiores do que os seus correlatos quando se usa apenas o MEF. Isto se dá devido ao giro e ao deslocamento horizontal da sapata rígida. Para o deslocamento

estático, por exemplo, tem-se:

$$U_{\text{MEC/MEF}} = U_{\text{MEF}} + U_{\text{SAP}} + \phi_{\text{SAP}} h_{\text{TORRE}}$$

onde

$$U_{\text{MEF}} = 0,675\text{cm} \quad (\text{deslocamento estático obtido pelo MEF})$$

$$U_{\text{SAP}} = 0,050\text{cm} \quad (\text{deslocamento estático horizontal da sapata})$$

$$\phi_{\text{SAP}} h_{\text{TORRE}} = 0,280\text{cm} \quad (\text{giro estático da sapata pela altura da torre})$$

$$U_{\text{MEC/MEF}} = 1,005\text{cm} \quad (\text{Deslocamento estático obtido pela composição MEC/MEF}).$$

Observa-se também um amortecimento no deslocamento da torre quando analisada pela junção MEC/MEF. Este efeito é chamado de amortecimento geométrico e é causado pelo solo; sua presença neste exemplo era totalmente esperada e demonstra como o MEC simula muito bem esta característica do solo, sem a necessidade de hipóteses adicionais como se faz necessário em análises semelhantes empregando-se apenas o MEF.

## CAPÍTULO 9

### DISCUSSÕES E CONCLUSÕES

#### 9.1- INTRODUÇÃO

Três temas principais foram abordados neste trabalho, a saber, a solução fundamental alternativa, uma técnica geral de integração de elementos singulares planos e o elemento de sapata rígida para ligação entre meios formulados pelo MEC e MEF. Procura-se neste capítulo, comentar sucintamente alguns dos aspectos mais importantes referentes a estes temas, bem como discorrer sobre futuros desenvolvimentos da formulação geral proposta.

## 9.2- SOLUÇÃO FUNDAMENTAL ALTERNATIVA

No primeiro tema, solução fundamental alternativa, devem ser salientadas três vantagens principais, com relação às formulações usuais. A primeira está relacionada com a eliminação dos termos de velocidade, que derivam da convolução temporal da solução fundamental usual, e que inexistem quando se utiliza a solução fundamental alternativa. Tal procedimento permite que se utilize aproximação constante das variáveis, para cada intervalo de tempo, sem a necessidade de um algoritmo de apoio em diferenças finitas como foi descrito no capítulo 5.

A segunda vantagem da solução fundamental alternativa está na redução do número de constantes a serem calculadas e armazenadas por passo de tempo. Isto se dá pois, na prática usual, tem-se adotado aproximação constante para o carregamento e linear para o deslocamento, como uma forma de não introduzir as inconsistências da já citada avaliação dos termos de velocidade por diferenças finitas. Neste tipo de aproximação calculam-se três matrizes por passo de integração, já no caso da aproximação constante, utilizando a solução fundamental alternativa, necessita-se de apenas duas matrizes por passo de integração temporal.

A terceira vantagem da solução alternativa é que a utilização desta, gera frentes de onda com largura maior do que as geradas quando se utiliza a solução fundamental usual, melhorando o desempenho numérico da avaliação das integrais envolvidas no processo. Neste ponto, pode-se iniciar um estudo comparativo de estabilidade e convergência entre a formulação usual e a alternativa. Deve-se observar ainda que entre a solução fundamental alternativa e a chamada alternativa composta pode-se gerar inúmeras outras a partir da função de carga  $f(t) = (H(t+n\Delta t) - H(t))/n\Delta t$  aplicada ao campo de deslocamentos geral de Stokes.

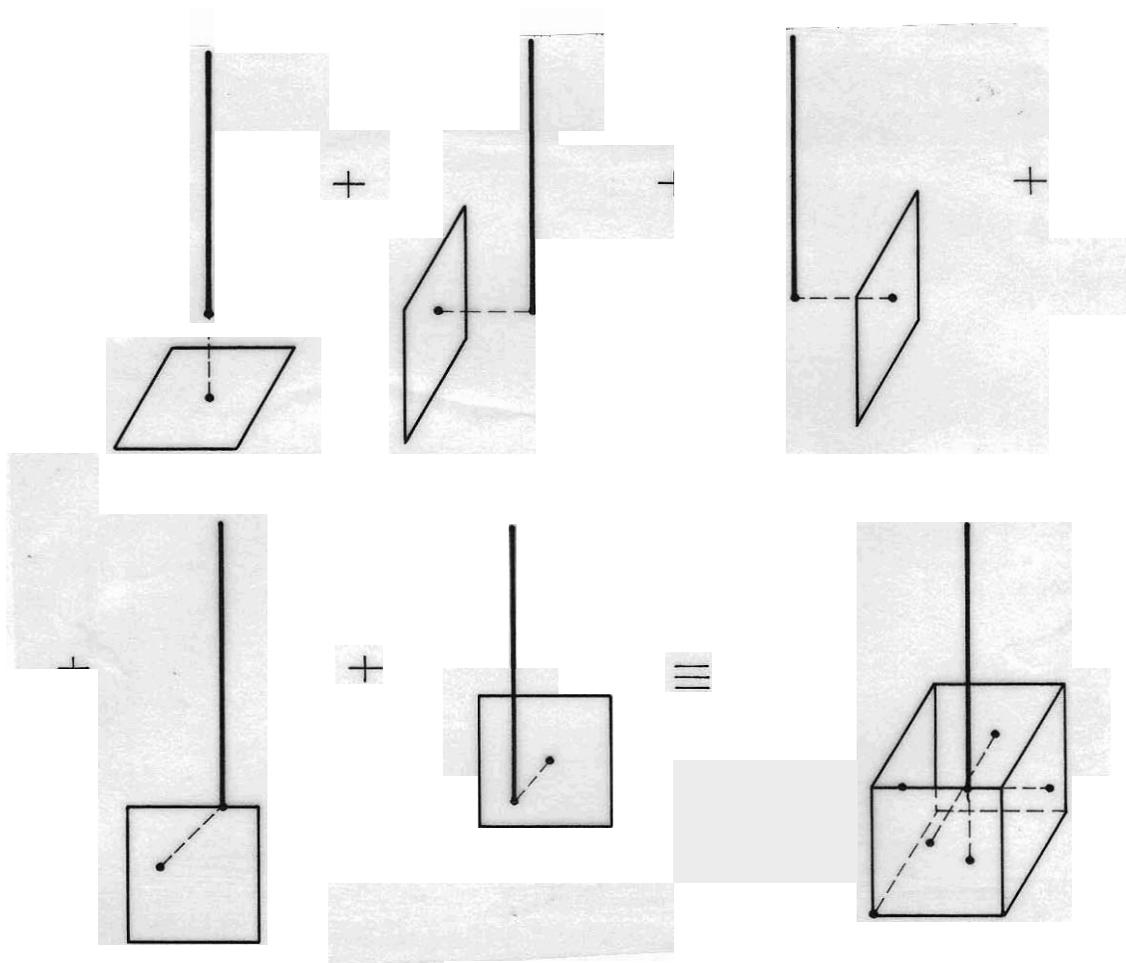
### 9.3- INTEGRAÇÃO SOBRE ELEMENTOS SINGULARES

O processo de integração singular apresentado nesta tese, elimina a necessidade de se recorrer à imposição de movimentos de corpo rígido, sobre o problema estático, com o objetivo de se determinar os coeficientes da diagonal da matriz H. Apesar de se limitar ao caso de elementos quadrangulares planos, não é difícil a sua extensão para elementos curvos. Além disso já se aplica de imediato a quaisquer funções de forma que se adote para aproximar as variáveis, sem a necessidade de se separar termos singulares dos não singulares; o que não ocorre com os processos similares existentes na bibliografia.

### 9.4- ELEMENTO DE LIGAÇÃO MEC/MEF.

O elemento de sapata rígida desenvolvido neste trabalho se associa diretamente a um elemento finito (barra ou casca), não havendo necessidade de se interferir diretamente no sistema numérico global, como é feito na maioria dos processos de análise solo-fundações-estruturas. Seu bom desempenho se deve à possibilidade de se localizar o ponto fonte do elemento de contorno associado à sapata em posições estratégicas, que garantem uma ponderação adequada dos movimentos e forças de contato estudados. Neste sentido, sugere-se que em trabalhos subseqüentes, se faça um estudo que indique, com detalhes, quais as melhores posições para o ponto fonte, dependendo da freqüência da solicitação estudada.

Outra característica interessante do elemento de sapata rígida, assim como foi proposto, é que a simples superposição de diversos elementos do mesmo tipo podem gerar ligações de formas mais complexas. Por exemplo, uma barra com propriedades geométricas  $I_1 = I_2 = I_3 = 500\text{cm}^4$  e  $A_t = 500\text{cm}^2$  pode se associar a uma caixa rígida pela superposição ilustrada na figura abaixo.



Onde cada elemento de barra mostrado possui as seguintes propriedades geométricas:  $I_1 = I_2 = I_3 = 100\text{cm}^4$  e  $A_t = 100\text{cm}^2$  e além disso a caixa rígida pode possuir massa própria ou não.

O programa desenvolvido nesta tese trata de maneira indistinta sub-regiões modeladas pelo MEC ou pelo MEF, possibilitando assim a resolução de problemas que envolvam ao mesmo tempo várias edificações e diferentes substratos de solo (meio elástico), bem como barragens modeladas em parte pelo MEC e em parte pelo MEF.

Conclui-se, de maneira geral, que a formulação proposta nesta tese apresenta vantagens sobre as formulações similares existentes, tanto em aspectos específicos quanto na generalidade de possíveis aplicações.

## CAPÍTULO 10

### BIBLIOGRAFIA

- [1] ABEL, N.H. Ouevres completes. *Norvegien Christiania*, v.1, 1881. 621p.
- [2] ACHENBACH, J.D. *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam, North-Holland, 1973.
- [3] ANDERSSEN, R.S. et al. *The application and numerical solution of integral equations*. Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [4] ANTES, H. *Anwendungen der Methode der Randelemente in der Elastodynamik und der Fluidodynamik*. Stuttgart, B.G. Teubner, 1988. 195p. (Mathematische Methoden in der Technik, Bd.9)
- [5] ANTES, H.; STEINFELD, B.; TRÖNDLE, G. Recent developments in dynamic stress analyses by time domain BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.8, n.4, p.176-184, Aug. 1991.
- [6] ARGYRIS, J.H. *Energy theorems and structural analysis*. Butterworth, 1960. (reproduzido de *Aircraft Eng.*, 1954-1955)

- [7] ARGYRIS, J.H.; KELSET, S. *Energy theorems and structural analysis*. London, Butterworths, 1960.
- [8] ATLURI, S.N.; GRANNELL, J.J. *Boundary element methods (BEM) and combination of BEM-FEM*. Atlanta, Center for the Advancement of Computational Mechanics, Georgia Institute of Technology, 1978. (Report n. GIT-ESM-SA-78-16)
- [9] AUERSCH, L. Dynamic soil-structure interaction of rigid and flexible foundations. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SOIL DYNAMICS AND EARTHQUAKE ENGINEERING V, 1., Karlsruhe, Ger., Sept. 23-26, 1991. *Proc.* Southampton, CMP Publ. 1991. p.467-478
- [10] BANAUGH, R.P.; GOLDSMITH, W. Diffraction of steady elastic waves by surfaces of arbitrary shape. *J. Appl. Mech.*, v.29, p.589-597-, 1963.
- [11] BANERJEE, P.K.; AHMAD, S.; MANOLIS, G.D. Advanced elastodynamic analysis. In: BESKOS, D.E., ed. *Boundary element methods in mechanics*. Amsterdam, North Holland, 1987. v.3, p.257-284
- [12] BANERJEE, P.K.; WATSON, J.O., ed. *Developments in boundary element methods - 4*. London, Elsevier, 1986. 346p.
- [13] BARBIRATO, J.C.C. *Formulação do método dos elementos de contorno para sólidos elásticos tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin*. São Carlos, 1991. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [14] BARRA, L.P.S.; COUTINHO, A.L.G.A.; MANSUR, W.J., TELLES, J.C.F. Iterative solution of BEM equations by GMRES algorithm. *Computers & Structures*, v.44, n.6, p.1249-1253, Sep. 1992.
- [15] BATHE, K.J. *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1982.
- [16] BATHE, K.J.; WILSON, E.L. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.1, p.283, 1973.
- [17] BESKOS, D.E. Boundary element methods in dynamic analysis. *Appl. Mech. Rev.*, v.40, p.1-23, 1988.
- [18] BETTI, E. Teoria dell elasticita. *Il Nuovo Cimento, Ser.3*, v.6-10, 1872.
- [19] BRADY, B.H.G.; WASSYNG, A. A coupled finite element - boundary element method of stress analysis. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, v.18, p.475-485, 1981.

- [20] BREBBIA, C.A. *The boundary element method for engineers*. London, Pentech Press, 1978.
- [21] BREBBIA, C.A.; CONNOR, J.J. *Fundamentals of finite element techniques*. London, Butterworths, 1973.
- [22] BREBBIA, C.A.; FERRANTE, A.J., eds. *The finite element technique: an introduction for engineers*. Porto Alegre, Ed. da UFRGS, 1975.
- [23] BREBBIA, C.A.; NARDINI, D. Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure. *Int. J. Soil Dyn. Earthquake Eng.*, v.2, 1983.
- [24] BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBÉL, L.C. *Boundary element techniques*. Berlin, Springer-Verlag, 1984.
- [25] BREBBIA, C.A.; WALKER, S. *Boundary element techniques in engineering*. London, Newnes-Butterworths, 1980.
- [26] CAUCHY, A.L. *Exercices de mathématique, sur l'équilibre et le mouvement d'un systemé de points matériels par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle*. 1828. apud LOVE, A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 4.ed. New York, Dover, 1944.
- [27] CHEN, L.H.; SCHWEIKERT, J. Sound radiation from an arbitrary body. *J. Acoust. Soc. Am.*, v.35, p.1626-1632, 1963.
- [28] CHUEIRI, L.H.M. *Um modelo simples para a representação do comportamento não-linear de estruturas de superfície*. Rio de Janeiro, 1985. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro-COPPE.
- [29] CLOUGH, R.W. The finite element in plane stress analysis. In: ASCE CONF. ON ELETRONIC COMP., 2nd, Pittsburg, 1960. Proc.
- [30] CLOUGH, R.W.; FELIPPA, C.A. A refined quadrilateral element for analysis of plate bending. In: CONFERENCE ON MATRIX METHODS IN STRUCTURAL MECHANICS, 2., 1968. Proc. p.399-440
- [31] CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. *Dynamics of structures*. McGraw-Hill, 1975.
- [32] CLOUGH, R.W.; TOCHER, J.L. Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending. In: CONFERENCE ON MATRIX METHODS IN STRUCTURAL MECHANICS, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965. Proc. p.515-545

- CODA, H.B. *Análise da vibração livre de meios elásticos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno*. São Carlos, 1990. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [34] CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. Alternative boundary element formulation for elastodynamics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON BOUNDARY ELEMENTS IN ENGINEERING, 12., Sapporo, Japan, Sept. 1990. *Proceedings*. Southampton, CMP; Berlin, Springer-Verlag, 1990. v.1, p.517-534
- [35] CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. Vibração livre de meios elásticos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno. In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 11., Rio de Janeiro, 1990. *Anais*. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ/AMC, 1990. v.2, p.781-790
- [36] COSTA JR., J.A. An alternative procedure to solve Helmholtz problems by BEM. In: BREBBIA, C.A., ed. *Boundary element X*. Berlin, Springer-Verlag, 1988. v.4, p.245-253
- [37] CRAIG JR., R.R. *Structural dynamics: an introduction to computer methods*. New York, John Wiley & Sons, 1981. 527p.
- [38] CROTTY, J.M. A block equation solver for large unsymmetric matrices arising in the boundary integral equation method. *Int. J. Num. Meth. Engng*, v.18, p.997-107, 1982.
- [39] CRUSE, T.A. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem - II. *J. Math. Anal. Appl.*, v.22, p.341-355, 1968.
- [40] CRUSE, T.A. *Mathematical foundations of the boundary integral equation method in solid mechanics*. Bolling AFB, Air Force Office of Scientific Research, USA, 1977. 116p. (Report n.AFOSR-IR-77-1002)
- [41] CRUSE, T.A. Recent advances in boundary element analysis methods. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v.62, p.227-244, 1987.
- [42] CRUSE, T.A.; RIZZO, F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem - I. *J. Math. Anal. Appl.*, v.22, p.244-259, 1968.
- [43] DANGLA, P. Plane strain soil-structure interaction model. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v.16, n.8, p.1115-1128, Nov. 1988.

- DOMINGUEZ, J.; ABASCAL, R. Dynamics of foundations. In: BREBBIA, C.A., ed. *Topics in boundary element research: applications in geomechanics*. Berlin, Springer-Verlag, 1987. v.4, p.27-75
- [45] DOMINGUEZ, J.; ALARCON, E. Elastodynamics. In: BREBBIA, C.A., ed. *Progress in boundary element methods -1*. New York, Halsted Press, 1981. p.213-257
- [46] DOMINGUEZ, J.; BREBBIA, C.A. *Boundary elements: an introductory course*. Southampton, CMP Publ., 1984.
- [47] DUMONT, N.A. The hybrid boundary element method. In: BREBBIA, C.A.; WENDLAND, W.L.; KUHN, G., eds. *Boundary elements IX (Proc. 9th Int.Conf. on Boundary Elements, Stuttgart, 1987)* Southampton, CMP Publ. 1987. v.1, p.117-130
- [48] DUMONT, N.A.; CARVALHO, M.T.M.; ALBUQUERQUE, V. HYB&F: um programa de análise estrutural com técnica de subestruturas discretizadas por elementos híbridos de contorno e elementos finitos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 10., Rio de Janeiro, dez. 1989. *Anais*. p.205-208
- [49] ERINGEN, A.C.; SUHUBI, E.S. *Elastodynamics: finite motions*. New York/London, Academic Press, 1974. v.1
- [50] ERINGEN, A.C.; SUHUBI, E.S. *Elastodynamics: linear theory*. New York/London, Academic Press, 1974. v.2
- [51] FELIPPA, C.A. *Refined finite element analysis of linear and nonlinear two-dimensional structures*. Berkeley, 1966. Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of California.
- [52] FELIPPA, C.A.; CLOUGH, R.W. The finite element method in solid mechanics. In: AMS SYMPOSIUM ON THE NUMERICAL SOLUTION OF FIELD PROBLEMS IN CONTINUUM MECHANICS, Durham, N.C., April, 1968.
- [53] FICHERA, G. Existence theorems in elasticity. In: TRUESDELL, C., ed. *Handbuch der Physik*. Berlin, Springer-Verlag, 1972. VIa/2, p.347-389
- [54] FREDHOLM, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Math.*, v.27, p.365-390, 1903.
- [55] FRIEDMAN, M.B.; SHAW, R.P. Diffraction of pulses by cylindrical obstacles of arbitrary cross-section. *J. Appl. Mech.*, v.29, p.40-46, 1962.

- FUDOLI, C.A. *Formulação do método dos elementos de contorno para problemas elasto-lineares axissimétricos*. São Carlos, 1992. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
- [57] GANGMING, L. A new boundary element method coupled with FEM packages. *Communications in Applied Numerical Methods*, v.5, p.365-371, 1989.
- [58] GAUL, L.; KLEIN, P.; PLENGE, M. Simulation of wave propagation in irregular soil domains by BEM and associated small scale experiments. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.8, n.4, p.200-, 1991.
- [59] GIL RODRIGUEZ, J.C. *Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais*. São Carlos, 1986. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [60] GOLUB, G.H.; VAN LOAN, C.F. *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, 1985.
- [61] GÓMEZ-LERA, M.S.; ALARCÓN, E. Elastostatics. In: BESKOS, D.E., ed. *Boundary element methods in mechanics*. Amsterdam, North Holland, 1987. v.3, p.107-189
- [62] GRAD, J.; BREBNER, M.A. Algorithm 343 eigenvalues and eigenvectors of a real general matrix. *Comm. ACM*, v.2, p.820-826, 1968.
- [63] GRAFFI, D. Sul teorema di reciprocità nella dinamica dei corpi elastici. *Memorie della Accademia delle Scienze*, Series 10, Bologna, v.4, p.103, 1946/47.
- [64] GREEN, G. *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of eletricity and magnetism*. Nottingham, 1828.
- [65] GUARRACINO, F.; MINUTOLO, V.; NUNZIANTE, L. Simple analysis of soil-structure interaction by BEM-FEM coupling. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.10. n.4, p.283-289, 1992.
- [66] HARTMANN, F. Computing the C-matrix on non-smoth boundary points. In: BREBBIA, C.A., ed. *New developments in boundary element methods*. Southampton, CMP Publ., 1980.
- [67] HINTON, E. *Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells*. Swansea, Pineridge Press, 1988. 550p.

- [68] HRENIKOFF, A. Solution of problems in elasticity by the framework method. *J. Appl. Mech.*, v.A8, p.169-175, 1941.
- [69] JASWON, M.A. A review of the theory. In: BREBBIA, C.A., ed. *Topics in boundary element research - 1*. Berlin, Springer-Verlag, 1985. p.13-40
- [70] KARABALIS, D.L. *Dynamic response of three-dimensional foundations*. Minneapolis, Minnesota, 1984. Ph.D. Thesis, University of Minnesota.
- [71] KARABALIS, D.L.; BESKOS, D.E. Dynamic response of 3-D flexible foundations by time domain BEM and FEM. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v.4, n.2, p.91-, 1985.
- [72] KARABALIS, D.L.; BESKOS, D.E. Three-dimensional soil-structure interaction by boundary element methods. In: BREBBIA, C.A., ed. *Topics in boundary element research: applications in geomechanics*. Berlin, Springer-Verlag, 1987. v.4, p.1-26
- [73] KELLOGG, P.D. *Foundations of potential theory*. New York, Dover, 1953.
- [74] KOBAYASHI, S. Elastodynamics. In: BESKOS, D.E., ed. *Boundary element methods in mechanics*. Amsterdam, North Holland, 1987. v.3, p.191-255
- [75] KOBAYASHI, S. Fundamentals of boundary integral equation methods in elastodynamics. In: BREBBIA, C.A., ed. *Topics in boundary element research - 2*. Berlin, Springer-Verlag, 1985. p.1-54
- [76] KOBAYASHI, S. ; MORI, K. Three-dimensional dynamic analysis of soil-structure interactions by boundary integral equation-finite element combined method. In: SHAW, R.P. (ed). *Innovative Numerical Methods in Engineering*. Berlin, Springer-Verlag, 1986. p.613-618
- [77] KOBAYASHI, S.; NISHIMURA, N. Dynamic analysis of underground structures bby the integral equation method. In: INT. CONF. METH. GEOMECH., 4., Balkema, 1982. *Proc.* v.1, p.401-409
- [78] KOBAYASHI, S.; NISHIMURA, N. Transient stress analysis of tunnels and cavities of arbitrary shape due travelling waves. In: BANERJEE, P.K.; SHAW, R.P., eds. *Developments in boundary element methods - 2*. Applied Science, 1982. chap.7

- KOBAYASHI, S. et al. Applications of boundary element-finite element combined method to three-dimensional viscoelastodynamic problems. In: QINGHUA, D.(ed.). Boundary elements. Pergamon Press, 1986. p.67-74
- [80] KOMATSU, J.S. *Estudo de problemas de escavação através da combinação elementos de contorno e elementos finitos.* São Carlos, 1993. Tese de doutorado em andamento. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [81] KONTONI, K.D.N. Dual reciprocity boundary element method for the transient dynamic analysis of elastoplastic problems. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON BOUNDARY ELEMENT TECHNOLOGY, 7., (BETECH92), Albuquerque, USA, June 1992. Proc. Southampton, CMP Publ., 1992. p.653-669
- [82] KUPRADZE, V.D. *Potential methods in theory of elasticity.* Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1965.
- [83] KUTT, H.R. *WISK 178: quadrature formulae for finite-part integrals.* Pretoria, National Research Institute for Mathematical Sciences, 1975. 156p. (CSIR Special Report)
- [84] LACHAT, J.C. *A further development of the boundary integral technique for elastostatics.* PH.D. Thesis, University of Southampton, 1975.
- [85] LACHAT, J.C.; WATSON, J.O.A. A second generation boundary integral equation program for three dimensional elastic analysis. In: CRUSE, T.A.; RIZZO, F.J., eds. *Boundary integral equation method: computational applications in applied mechanics.* ASME, 1975. p.85-100
- [86] LEOFFLER NETO, C.F. *Uma formulação alternativa do método dos elementos de contorno aplicada a problemas de campo escalar.* Rio de Janeiro, 1988. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [87] LIE, S.T. Evaluation of singular boundary element kernels using polar coordinates systems over a flat quadratic triangle in elastostatics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.10, p.173-177, 1992.
- [88] LOVE, A.E.H. The propagation of wave-motion in an isotropic elastic solid medium. *Proc. of the London Mathematical Society, Series 2*, v.1, p.291, 1904.
- [89] LOVE, A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity.* 4.ed. New York, Dover, 1944.

- [90] MA, J.; LE, M. New method for coupling of boundary element method and finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, v.16, n.1, p.43-46, Jan. 1992.
- [91] MALVERN, L.E. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1969.
- [92] MANOLIS, G.D. A comparative study on three boundary element method approaches to problems in elastodynamics. *Int. J. Num. Meth. Engng*, v.19, p.73-91, 1983.
- [93] MANOLIS, G.D.; BESKOS, D.E. Dynamic response of lined tunnel by an isoparametric boundary element method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, v.36, p.291-307, 1983.
- [94] MANOLIS, G.D.; BESKOS, D.E. Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and Laplace transform. *Int. J. Num. Meth. Engng*, v.17, p.573-599, 1981.
- [95] MANSUR, W.J. Boundary element method applications in two-dimensional transient elastodynamics. In: BREBBIA, C.A., ed. *Boundary elements X*. Southampton, CMP; Berlin, Springer-Verlag, 1988. v.4, p.387-399
- [96] MANSUR, W.J. O método dos elementos de contorno aplicado à análise de propagação transiente de ondas. *RBE, Caderno de Engenharia Estrutural*, v.2, n.2, p.49-82, 1984.
- [97] MANSUR, W.J. *A time-stepping technique to solve wave propagation problems using boundary element method*. Southampton, 1983. Ph.D. Thesis, University of Southampton.
- [98] MANSUR, W.J.; BREBBIA, C.A. Transient elastodynamics. In: BREBBIA, C.A., ed. *Topics in boundary element research - 2*. Berlin, Springer-Verlag, 1985. p.124-155
- [99] MANSUR, W.J. ; BREBBIA, C.A. Transient elastodynamic using a time-stepping technique. In: BREBBIA, C.A.; FUTAGAMI, T.; TANAKA, M., eds. *Proc. 5th. Int. Sem. BEM Eng.* Berlin, Springer-Verlag, 1983. p.677-698
- [100] McHENRY, D. A lattice analogy for the solution of plane stress problems. *J. Inst. Civ. Eng.*, v.21, p.59-82, 1943.
- [101] MIKHLIN, S.G. Singular integral equations. *Amer. Math. Soc. Trans. Series 1*, v.10, p.84-197, 1962.
- [102] MITSOPOULOU-PAPASOGLU, E.; PANAGIOTOPOULOS, P.D.; ZERVAS, P.A. Dynamic boundary integral "equation" method for unilateral contact problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.8, n.4, p.192-, 1991.

- [103] MITSUI, Y. et al. A coupling scheme for boundary and finite elements using a joint element. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, v.9, p.161-172, 1985.
- [104] MURTI, V.; WANG, Y.C.; VALLIAPPAN, S. Discrete dissipation and dispersion in the transient dynamic finite element analysis. In: INTERNATIONAL CONFERENCE IN AUSTRALIA ON FEM, 6., Sydney, 1991. *Proc.* p.41-47
- [105] NARDINI, D.; BREBBIA, C.A. Boundary integral formulation of mass matrices for dynamic analysis. In: BREBBIA, C.A., ed. *Topics in boundary element research - 2.* Berlin, Springer-Verlag, 1985. p.191-208
- [106] NARDINI, D.; BREBBIA, C.A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. In: BREBBIA, C.A., ed. *Boundary element methods in engineering.* Berlin, Springer-Verlag, 1982. p.312-326
- [107] NARDINI, D.; BREBBIA, C.A. The solution of parabolic and hiperbolic problems using an alternative boundary element formulation. In: BREBBIA, C.A.; MAIER, G., eds. *Boundary elements VII.* Berlin, Springer-Verlag, 1985. p.3.87-3.97
- [108] NARDINI, D.; BREBBIA, C.A. Solution of parabolic and hyperbolic time dependent problems using boundary elements. *Comp. & Math. with Appl.*, v.12B, n.516, p.1061-1072, 1986.
- [109] NARDINI, D.; BREBBIA, C.A. Transient dynamic analysis by the boundary element method. In: BREBBIA, C.A.; FUTAGAMI, T.; TANAKA, M., eds. *Boundary elements.* Berlin, Springer-Verlag, 1983. p.719-730
- [110] NAVIER. *Mém. Acad. Sciences*, Paris, v.7, 1827. apud LOVE, A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity.* 4.ed. New York, Dover, 1944.
- [111] NEWMARK, N.M. Numerical methods of analysis in bars plates and elastic bodies. In: GRINTER, L.E.(ed.) *Numerical methods in analysis in engineering.* Macmillan, 1949.
- [112] NIWA, Y.; KOBAYASHI, S.; AZUMA, N. An analysis of transient stresses produced around cavities of an arbitrary shape during the passage of travelling wave. *Memo. Fac. Eng.*, Kyoto Univ., v.37, n.2, p.28-46, 1975.
- [113] NIWA, Y.; KOBAYASHI, S.; FUKUI, T. Application of integral equation method to some geomechanical problems. In: INT. CONF. NUM. METH. GEOMECH., 2., ASCE, 1976. *Proc.* p.120-131

- [114] NIWA, Y.; KOBAYASHI, S.; YOKOTA, Y. Application of integral equation methods to the determination of static and steady-state dynamic stresses around cavities of arbitrary shape. *Proc. Japan Soc. Civ. Eng.*, v.195, p.27-35, 1971.
- [115] ODEN, J.T.; CAREY, G.F. *Finite elements: special problems in solid mechanics*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1984.
- [116] PATEL, P.N.; SPYRAKOS, C.C. Uplifting-sliding response of flexible structures to seismic loads. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.8, n.4, p.185-, 1991.
- [117] PAZ, M. *Structural dynamics: theory and computation*. 2.ed. Florence, Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [118] PISKOUNOV, N. *Cálculo diferencial e integral*. Porto, Lopes da Silva Ed., 1979. v.2
- [119] POON, H.C. *Application of boundary element methods in elastodynamics*. Southampton, 1981. M.Sc. Dissertation, University of Southampton.
- [120] PRZEMIENIECKI, J.S. *Theory of matrix structural analysis*. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1971.
- [121] RAMALHO, M.A. *Sistema para análise de estruturas considerando interação com meio elástico*. São Carlos, 1990. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [122] REISMANN, H. On the forced motion of elastic solids. *Appl. Sci. Res.*, v.18, p.156-165, 1967.
- [123] RIZZO, F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quart. Appl. Math.*, v.25, p.83-95, 1967.
- [124] SHU, W. Coupled boundary and finite elements for dynamic structure (3D)-foundation-soil interaction. *Computers & Structures*, v.44, n.4, p.807-812, Aug.3, 1992.
- [125] SILVA, J.J.R. *MEC3DE: um programa para análise elástica tridimensional com o método dos elementos de contorno*. Rio de Janeiro, 1989. Dissertação (Mestrado) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [126] SILVA, N.A. *Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas sobre fundações elásticas*. São Carlos, 1988. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- [127] SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. *Il Nuovo Cimento, Ser.3, v.17-20, 1885, 1886.*
- [128] SORIANO, H.L. *Sistemas de equações algébricas lineares em problemas estruturais.* Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1981. (Seminário 280)
- [129] SOUTHWELL, R.V. *Relaxation methods in theoretical physics.* London, Oxford University Press, 1946.
- [130] STOKES, G.G. On the dynamical theory of diffraction. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society, v.9, p.1, 1849.*
- [131] STROUD, A.H.; SECREST, D. *Gaussian quadrature formulas.* New York, Prentice-Hall, 1966.
- [132] TEJERINA CALDERÓN, E. *Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno.* São Carlos, 1991. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [133] THOMSON, W. (Lord KELVIN); TAIT, P.G. *Treatise on natural philosophy (reprinted as Principles of mechanics and dynamics): Part II.* New York, Dover, 1962.
- [134] TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. *Theory of elasticity.* Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1970.
- [135] TSENG, M.N.; ROBINSON, A.R. *A transmitting boundary for finite-difference analysis of wave propagation in solids.* Project n. NR 064-183, University of Illinois, Urbana, 1975.
- [136] TURNER, M.J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aero. Sci., v.23, p.805-823, 1956.*
- [137] VALLIAPPAN, S.; ANG, K.K.  $\eta$ -Method of numerical integration. *Int. J. Comput. Mech., v.5, p.321-336, 1989.*
- [138] VELETOS, A.S.; VERBIC, B. Basic response functions for elastic foundations. *J. Eng. Mech. Div., ASCE, v.100, p.189-202, 1974.*
- [139] VENTURINI, W.S. *Application of the boundary element method to solve geomechanical problems.* Southampton, 1982. Ph.D. Thesis, University of Southampton.
- [140] VENTURINI, W.S. *Boundary element method in geomechanics.* Berlin, Springer-Verlag, 1983. 246p.

- [141] VENTURINI, W.S. *Domain integral transformations in the boundary element method*. Paper presented at 10th Int. Conf. on Boundary Elements Methods, University of Southampton, UK, 1988.
- [142] VENTURINI, W.S. *Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia*. São Carlos, 1988. Tese (Livre-docência) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [143] VENTURINI, W.S.; BREBBIA, C.A. Boundary element formulation for nonlinear applications in geomechanics. *Appl. Math. Modelling*, v.8, p.251-260, Aug. 1984.
- [144] Von ESTORFF, O. Dynamic response of elastic blocks by time domain BEM and FEM. *Computers & Structures*, v.38, n.3, p.289-300, 1991.
- [145] Von ESTORFF, O.; KAUSEL, E. Coupling of boundary and finite elements for soil-structure interaction problems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.18, n.7, p.1065-1075, Oct. 1989.
- [146] Von ESTORFF, O. et al. Dynamic interaction effects in underground traffic systems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.8, n.4, p.167-, 1991.
- [147] WANG, S.; SCHMID, G. Dynamic structure-soil-structure interaction by FEM and BEM. *Computational Mechanics*, v.9, n.5, p.347-357, 1992.
- [148] WANG, Y.C.; MURTI, V.; VALLIAPPAN, S. Assessment of the accuracy of the Newmark method in transient analysis of wave propagation problems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.21, p.987-1004, 1992.
- [149] WARBURTON, G.B. Assessment of errors in the Newmark method in structural dynamics. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, v.19, p.457-467, 1990.
- [150] WARBURTON, G.B. *The dynamical behaviour of structures*. 2.ed. Oxford, Pergamon Press, 1976.
- [151] WARBURTON, G.B. *Dynamics of shells*. University of Toronto, Department of Mechanical Engineering, 1973. (Technical Publication TP 7307)
- [152] WEBSTER, A.G. *Partial differential equations of mathematical physics*. New York, Dover, 1955. 440p.

- [153] WHEELER, L.T.; STERNBERG, E. Some theorems in classical elastodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v.31, n.1, p.87-90, 1968.
- [154] WILKINSON, J.H. *The algebraic eigenvalue problem*. Oxford, Oxford University Press, 1965.
- [155] WILSON, E.L. The static condensation algorithm. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.8, n.1, p.198-203, Jan. 1974.
- [156] XU, Z. et al. Boundary element method for dynamic soil-structure interaction with complicated site. In: ASIAN PACIFIC CONFERENCE ON COMPUTATIONAL MECHANICS, Hong Kong, Dec. 11-13, 1991. *Proc. Rotterdam*, A.A. Balkema, 1991. p.541-546
- [157] ZIENKIEWICZ, O.C. *El método de los elementos finitos*. Barcelona, Reverté, 1980.
- [158] ZIENKIEWICZ, O.C.; KELLY, D.W.; BETTESS, P. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.11, p.355-375, 1977.