

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

SOBRE O COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DE ESTRUTURAS PLANAS DE CONCRETO
ARMADO.

ENG^o. ARQUIMEDES DIÓGENES CILONI.

Tese apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São
Paulo, como parte dos requisitos para a
obtenção do título de "Doutor em
Engenharia - Área: Engenharia de
Estruturas".

ORIENTADOR:

PROF. DR. HELENA M. C. C. ANTUNES.

COMISSÃO EXAMINADORA:

PROF. DR. HELENA M. C. C. ANTUNES - EESC-USP.

PROF. DR. WILSON SÉRGIO VENTURINI - EESC-USP.

PROF. DR. SÉRGIO P. B. PROENÇA - EESC-USP.

PROF. DR. ALOISIO ERNESTO ASSAN - EE-UNICAMP.

PROF. DR. FRANCISCO ANTONIO MENEZES - EE-UNICAMP.

SÃO CARLOS, DEZEMBRO DE 1993.

À

Carlos Leonardo, Yara Luiza, Pedro Alberto e Maria Clara,
meus filhos, razão maior ...

Aos meus saudosos pais, Antonio e Genarina, onde quer que estejam,
com minha gratidão e reconhecimento.

AGRADECIMENTOS.

À Prof^a Helena M. C. Carmo Antunes, pela orientação e acolhida que permitiram a conclusão deste trabalho.

Ao Prof. Sérgio P. B. Proença, pelo apoio.

Aos meus irmãos Weber, Newton e Aymir.

À Antonio Carlos Ciomini e Maria Rosa Ciomini Toloi, meus primo-irmãos.

À Dagoberto Camargo Caria, Dagoberto Dario Mori e à José Samuel Giongo, pela amizade e apoio.

Aos colegas Roberto Chust de Carvalho e José Sérgio Komatsu, com quem iniciei os estudos que resultaram neste trabalho, um agradecimento especial.

Aos Professores, alunos da pós-graduação e funcionários da EESC-USP, pelos quatro anos de convívio fraterno.

Aos Professores, funcionários e alunos do Departamento de Engenharia Civil da UFU, principalmente pelo incentivo e sempre pela amizade.

A Wolmar, Júlio e Renato, pelos desenhos; à Luiz Cláudio e Lucineide, pelos serviços de digitação. Um agradecimento especial à Maria Nazaréth Teixeira, cuja colaboração dedicada foi determinante para a finalização deste trabalho.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

À Deus, Pai-Maior.

II.3 - Formulação Geral de Cálculo dos Estados de Tensão e Deformação.	37
II.3.1 - Introdução.	37
II.3.2 - Seção Não Fissurada.	38
II.3.2.1 - Tensões, Deformações e Curvaturas.	38
II.3.2.2 - Tensão e Deformação Devido a Uma Variação Não-Linear de Temperatura.	41
II.3.2.3 - Variação das Tensões e Deformações com o Tempo em Seções Não Fissuradas.	44
II.3.2.3.1 - Tensão e Deformação Instantâneas (Instante t_0).	45
II.3.2.3.2 - Variação das Tensões e Deformações no Período t_0 a t .	46
II.3.3 - Seção Fissurada.	48
II.3.3.1 - Variações de Tensão e Deformação no Instante da Fissuração.	49
II.3.3.2 - Variações de Tensão e Deformação em Seção Fissurada de Concreto Armado: Considerações dos Efeitos de Retração e Fluência.	54
II.3.3.3 - Seções Fissuradas Parcialmente Protendidas.	56
II.4 - Fissuração - Modelos de Comportamento.	61
II.4.1 - Variação da Posição da Linha Neutra e dos Valores de Tensões e Deformações ao Longo do Comprimento da Peça Fissurada.	62
II.4.2 - Avaliação da Abertura de Fissuras.	63
II.4.2.1 - Espaçamento das Fissuras.	66
II.4.2.2 - Cálculo das Deformações.	73
II.4.2.3 - Verificação da Abertura das Fissuras.	75
II.4.3 - Armadura Mínima para o Controle da Fissuração.	76
II.4.4 - Controle da Fissuração Sem Avaliação da Abertura de Fissuras.	77

II.5 - Modelagem do Comportamento em Serviço de Peças Fissuradas de Concreto Armado e Concreto Protendido.	79
II.5.1 - Introdução.	79
II.5.2 - Modelos Físicos Para Consideração da Colaboração do Concreto Entre Fissuras.	81
II.5.2.1 - Tração Simples. Modelos do CEB e de Ghali-Favre.	81
II.5.2.2 - Flexão Simples.	94
II.5.2.2.1 - Modelo do Manual do CEB.	94
II.5.2.2.2 - Modelo do ACI.	98
II.5.2.3 - Flexão Composta.	100
II.5.2.3.1 - Introdução.	100
II.5.2.3.2 - Modelo de Ghali-Favre.	101
II.5.2.3.3 - Modelo do Manual do CEB.	106
II.5.2.3.4 - Modelo do ACI.	113
II.5.2.4 - Flexão Simples e Flexão Composta Segundo o MC-90 do CEB.	114
II.5.2.5 - Deformações Devido a Forças Cortantes e Momentos Torçores.	119

CAPÍTULO III - CONSIDERAÇÕES SOBRE A NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA NO ESTUDO DE PÓRTICOS PLANOS.

III.1 - Introdução.	120
III.2 - Generalidades. Um Pequeno Estudo Bibliográfico.	121
III.3 - Considerações Sobre o Sistema de Coordenadas.	125
III.3.1 - Introdução.	125
III.3.2 - Escolha do Sistema de Coordenadas.	127

III.4 - Teoria Estrutural. Campos de Deslocamentos e de Deformações.	131
III.4.1 - Definição do Modelo Elemental. Hipóteses.	131
III.4.2 - Campo de Deslocamentos e de Deformações.	132
III.4.3 - Aproximações Adotadas.	138
III.5 - Discretização Pelo Método dos Elementos Finitos (Via Formulação Energética).	141
III.5.1 - Conceitos Básicos.	141
III.5.1.1 - Energia Potencial Total.	142
III.5.1.2 - Princípio da Mínima Energia Potencial Total.	143
III.5.1.3 - Matrizes de Rigidez Secante e Tangente.	144
III.5.2 - Funções de Interpolação.	147
III.5.3 - Energia de Deformação.	149
III.5.4 - Obtenção das Matrizes de Rigidez.	152
III.5.5 - Atualização de Coordenadas.	155
CAPÍTULO IV - SOBRE A SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO-LINEARES.	
IV.1 - Introdução.	160
IV.2 - Estratégias de Solução Para Equações Não-Lineares.	161
IV.2.1 - Equações Não-Lineares de Equilíbrio.	161
IV.2.2 - Formulação Incremental.	162
IV.2.3 - Procedimentos Iterativos.	165
IV.2.3.1 - Métodos de Newton-Raphson.	165
IV.2.3.1.1 - Algoritmos Tipo Newton-Raphson com Busca Linear.	169
IV.2.3.2 - Métodos Quasi-Newton.	170
IV.2.3.2.1 - Introdução.	170
IV.2.3.2.2 - Metodologia do Quasi-Newton.	171
IV.2.3.2.3 - Descrição do Algoritmo BFGS.	174
IV.2.3.2.4 - Critérios Para a Utilização do BFGS.	176

IV.2.3.3 - Outros Métodos.	177
IV.2.3.3.1 - Newton Secante ou Newton Acelerado.	177
IV.2.3.3.2 - Métodos de Controle dos Deslocamentos e de Correção do Incremento de Carga.	177
IV.3 - Critérios de Convergência.	180
CAPÍTULO V - ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO ARMADO.	
V.1 - Introdução.	183
V.2 - Descrição do Modelo Proposto.	185
V.3 - Fluxograma.	189
V.4 - Rigidez do Elemento Fissurado Considerando a Colaboração do Concreto Tracionado Intacto Entre Fissuras.	192
V.5 - Rigidez de Um Elemento em Regime Geometricamente Não-Linear.	194
V.6 - Solução das Equações Não-Lineares.	194
V.7 - Apresentação do Programa PORANLI.	195
CAPÍTULO VI - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.	
VI.1 - Exemplos Resolvidos Utilizando-se o Programa VIGANLI.	197
VI.1.1 - Exemplo 1.	197
VI.1.2 - Exemplo 2.	204
VI.1.3 - Exemplo 3.	207

VI.2 - Exemplos Resolvidos Utilizando-se o Programa PORANLI.	211
VI.2.1 - Exemplo 4.	211
VI.2.2 - Exemplo 5.	225

CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES E PROPOSTAS.

VII.1 - Conclusões.	230
---------------------	-----

VII.2 - Propostas de Desenvolvimento.	231
---------------------------------------	-----

BIBLIOGRAFIA.	233
---------------	-----

RESUMO.

Neste trabalho são discutidos alguns aspectos referentes ao comportamento em serviço de estruturas planas de concreto armado, considerando-se os efeitos de não-linearidades física e geométrica.

Para a consideração da não-linearidade do material, o estudo baseia-se em relações momento-curvatura médias (levando-se em conta a colaboração do concreto intacto entre fissuras), sendo aqui examinadas as apresentadas pelo CEB (MC - 78 e MC - 90) e pelo ACI.

A discretização pelo Método dos Elementos Finitos fornece as matrizes elementais de rigidez tangente para um elemento de pórtico plano, obtidas mediante uma formulação Lagrangeana.

Implementa-se uma técnica incremental para conduzir uma análise estrutural não-linear, associada a um procedimento iterativo do tipo Quasi-Newton, conhecido na literatura técnica como atualização BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno).

Com base no modelo assim descrito, são implementados dois programas de cálculo automático. O principal deles destina-se à análise não-linear de pórticos planos deslocáveis de concreto armado, levando-se em conta os efeitos de não-linearidades física e geométrica. O outro é apropriado para a consideração da não-linearidade do material em estruturas planas indeslocáveis. Em sua versão atual, ambos descrevem o comportamento da estrutura nas fases elástica e fissurada.

Como aplicação são apresentados vários exemplos, com os resultados sendo comparados com os obtidos por outros pesquisadores.

ABSTRACT.

In this work some aspects regarded to the serviceability of reinforced concrete structures are discussed, taking into account geometric and material nonlinearities.

Regarding the material nonlinearity, this thesis is based on average moment-curvature relationships (which takes into account the tension stiffening phenomena), and the models presented in CEB MC - 78, CEB MC - 90 and ACI are examined.

Discretization via the Finite Element Method leads to stiffness elementary matrices for plane framed structures (Lagrangian Description).

An incremental technique is implemented to perform nonlinear analysis in association with an iterative algorithm (Quasi-Newton method) known as BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) update.

This serves as a basis for the implementation of two programs: the main is used for geometric and material nonlinear analysis of framed plane reinforced concrete structures (multistorey sway frames); the second is adequate to consider the material nonlinearity in non-sway framed structures. In present version, both programs are capable of predicting the response of these structures throughout their service load history.

Several examples are presented to study the validity and applicability of the present method. The results are compared with those obtained by other investigators.

NOTAÇÃO.

SÍMBOLOS PRINCIPAIS.

ALFABETO LATINO.

- A - Área;
- C - Coeficiente de endurecimento;
- E - Módulo de elasticidade;
- F - Força;
- I - Momento de Inércia;
- K - Parâmetro de avaliação do coeficiente de fluência de acordo com alguns modelos; coeficiente de determinação de esforços elásticos;
- L - Comprimento;
- M - Momento fletor;
- N - Esforço Axial; Normal;
- P - Protensão; Carga concentrada;
- RB - Relaxação baixa;
- RN - Relaxação normal;
- S - Esforço em geral;

- T - Temperatura;
- a - Deformação; Distância;
- b - Largura da seção
- c - Recobrimento;
- d - Altura útil de uma seção; Distância do eixo da armadura à superfície do concreto;
- e - Excentricidade da carga axial;
- f - Tensão resistente;
- g - Carga permanente;
- h - Altura total de uma seção; Altura em geral; Espessura;
- k - Coeficiente de correção das curvaturas e deformação elásticas; Coeficiente da deformação elástica: coeficiente de avaliação da distância entre fissuras;
- i - Raio de giração;
- l - Vão de uma estrutura; Comprimento: Distância;
- p - Carga distribuída total;
- q - Sobrecarga; Carga acidental;
- $\frac{1}{r}$ = Curvatura;
- s - Distância entre fissuras;
- u - Deslocamento axial;

- v - Deslocamento transversal;
- x - Posição da linha neutra; Direção do sistema de eixos;
- w - Percentagem mecânica de armadura; Abertura de fissuras;
- y - Distância ao centro de gravidade da seção; Direção do sistema de eixos;

ALFABETO GREGO.

- Δ - Variação;
- Ω - Coeficiente de avaliação da perda por relaxação;
- α - Coeficiente de homogeneização do concreto: coeficiente de dilatação térmica do concreto; Coeficiente de correção da resistência à tração;
- β - Coeficiente dos modelos de quantificação dos efeitos diferidos; Coeficiente de quantificação do concreto tracionado;
- γ - Gradiente de tensões na seção; Coeficiente de segurança;
- δ - Deslocamento lateral;
- ε - Deformação;
- θ - Rotação angular;
- λ - Parâmetro de determinação do incremento de carga; Grau de protensão; Alongamento;
- ν - Esforço axial reduzido; Coeficiente de Poisson;
- ξ - Parâmetro adimensional da Linha Neutra;
- π - Energia Potencial Total;
- ρ - Percentagem Geométrica da Armadura; Rotação Angular;
- σ - Tensão;

τ - Tensão de aderência; Coeficiente de avaliação da importância da fissuração na estrutura; Tensão de cisalhamento;

\varnothing - Diâmetro; Coeficiente de Fluência;

χ - Coeficiente de Envelhecimento do Concreto;

ψ - Curvatura;

ÍNDICE

ÍNDICES ALFABÉTICOS.

G - Centro de Gravidade; Global;

N - Neutralização;

P - Pilar; Carga concentrada;

Rd - Resistência de cálculo;

V - Viga;

ap - Apoio;

c - Concreto; Compressão do concreto; Central;

cd - Compressão de cálculo;

ck - Compressão característica;

cm - Compressão média;

cp - Compressão no concreto ao nível do cabo de protensão;

cs - Retração do concreto;

ct - Tração do concreto;

ctm- Tração média do concreto;

cu - Concreto; Último;

d - Dimensionamento; Determinante;

e - Excentricidade;

eq - Equivalente;

elast,el - Elástico;

ef - Efetiva;

f - Fibra; Largura da Viga;

g - Carga Permanente;

i - Índice; Intermédio;

inf - Inferior;

j - Idade em dias;

l - Lateral;

m - Médio;

min - Mínimo;

max - Máximo;

n - Número de Ordem; Número do passo considerado;

p - Protensão; Carga uniformemente distribuída;

pr - Relaxação da protensão;

pyk- Escoamento característico do aço de Protensão;

q - Sobrecarga; Carga acidental;

r - Relaxação; Distância da Linha Neutra à armadura; Valor relativo; Ruptura;

ref- Referência;

rm - Relativo Médio;

s - Aço; Armadura passiva ou armadura frouxa;

sd - Ações de dimensionamento à ruptura;

serv - Serviço;

sr - Relativo ao aço;

sm - Média do aço;

srm - Relativo médio do aço;

sup - Superior;

syd - Escoamento de cálculo do aço;

syk - Escoamento característico do aço;

t - Tempo; Total; Tração;

tot - Total;

w - Largura da viga;

y - Escoamento;

ÍNDICES NUMÉRICOS.

∞ - Tempo infinito;

0 - Instante inicial; Inicial;

I - Estado da seção não fissurada;

I - Estado da seção não fissurada; Armadura tracionada da seção;
Coeficiente;

II - Estado da seção fissurada;

2 - Estado da seção fissurada; Armadura comprimida da seção;
Coeficiente;

CAPÍTULO I.

INTRODUÇÃO.

I.1 - GENERALIDADES.

As estruturas de concreto armado e de concreto protendido apresentam um comportamento complexo em função das propriedades de seus materiais componentes e do trabalho destes em conjunto, o que faz com que, mesmo para baixos níveis de carregamento, as mesmas se desviem do comportamento elástico linear que se assume como válido. Além disso, para os níveis de carga considerados no cálculo de estados limites últimos o comportamento das estruturas de concreto é marcadamente não-linear, não somente devido às propriedades dos materiais mas também porque as deformações e deslocamentos produzidos não podem ser considerados "pequenos".

O concreto, por exemplo, é um material heterogêneo que se encontra em intercâmbio hidráulico constante com o meio ambiente, o que faz com que as reações químicas assim produzidas alterem suas propriedades ao longo do tempo (envelhecimento). Outras características importantes do material concreto são:

- . boa resistência à compressão e baixa resistência à tração, o que leva à fissuração do material;
- . existência de deformações diferidas produzidas ou não por tensões (fluência, retração);
- . influência do tipo e da duração da sollicitação na resistência do material (estado uniaxial ou multiaxial de tensões, fadiga, etc.);
- . relação não-linear entre tensões de compressão e deformações, com a existência de um valor máximo e de um ramo descendente (ver Fig. 2.2.a e 2.2.b, item II.2.1.2);
- . fragilidade do material quando comparado ao aço, com deformações últimas muito limitadas;
- . comportamento sob cargas dinâmicas com ciclos de histerese, degradação da rigidez e da resistência do concreto.

Por sua parte, o aço apresenta outras características próprias:

- . comportamento inicialmente elástico, com módulo sensivelmente constante, com fase plástica posterior, esta com características dependentes do tipo do aço;
- . resistência semelhante à tração e à compressão;
- . ausência de retração e fluência;
- . no caso de aços para concreto protendido, presença de relaxação e de corrosão a serem consideradas;
- . efeito Bauschinger sob a ação de ciclos de cargas.

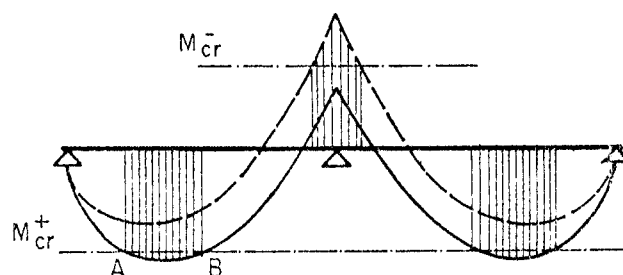
Além das propriedades de cada material, a utilização em conjunto dos mesmos também apresenta outras características importantes, como por exemplo:

- . aderência imperfeita entre as armaduras e o concreto, com deslizamentos relativos entre ambos, que tendem a aumentar sob a atuação de ciclos de carga e descarga;
- . contribuição do concreto tracionado entre fissuras.

Por outro lado, em estruturas esbeltas submetidas a altas cargas de compressão, o equilíbrio deve ser feito levando-se em conta a configuração deformada da estrutura, considerando-se os efeitos de segunda ordem; nestes, influem a não-linearidade dos materiais e a fluência do concreto.

Como consequência de todos os fenômenos mencionados, o comportamento das estruturas de concreto, como já citado, se afasta do comportamento elástico linear adotado como hipótese inicial nos métodos clássicos de cálculo estrutural.

Cite-se como exemplo o efeito da fissuração numa viga contínua de concreto armado (ver Fig. 1.1): na seção do apoio, onde se tem um pico de momento negativo, a diminuição da rigidez provocada pela fissuração provoca uma redistribuição de momentos, com o aumento dos momentos positivos e a consequente antecipação da fissuração nos vãos em relação à previsão feita pela teoria elástica.



- FIG. 1.1 - Redistribuição de momentos provocada pela fissuração numa viga contínua. -

Antigamente, as dificuldades envolvidas na consideração dos fenômenos citados levaram os engenheiros a projetar as estruturas de concreto com base em fórmulas empíricas derivadas de numerosos experimentos. O advento dos computadores permitiu o surgimento de métodos numéricos de análise (como o Método dos Elementos Finitos, por exemplo) e o consequente desenvolvimento de modelos matemáticos com os quais se tenta descrever com precisão o comportamento das estruturas de concreto, por mais complexo que seja. As soluções numéricas assim obtidas necessitam, obviamente, da experimentação para comprová-las. É possível, então, usar os modelos matemáticos como um complemento de estudos experimentais ou como substitutivo destes, como no caso de que o preço dos mesmos torne o custo dos ensaios proibitivo.

A modelagem permitiu um grande avanço das análises estruturais de forma geral e, especificamente, das análises das estruturas de concreto armado e protendido, nas quais passou-se a considerar os efeitos das não-linearidades. Neste trabalho, pretende-se apresentar alguns dos modelos que tem sido seguidos para o estudo específico de pórticos planos de concreto armado, embora o equacionamento a ser apresentado (veja-se o Capítulo II) inclua a protensão (visando trabalhos futuros, apresenta-se um equacionamento geral).

A seguir apresenta-se uma parte da pesquisa bibliográfica feita pelo autor (conduzida até meados de 1991).

1.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.

Entre os modelos de análise não-linear de estruturas de concreto armado e protendido, aqueles baseados no Método dos Elementos Finitos desempenharam um papel muito importante, devido à potência e generalidade do método. A teoria e a aplicação do MEF para a análise linear e não-linear de estruturas são encontradas em vários livros consultados inicialmente pelo autor, a saber: Zienkiewicz¹⁴⁴, Bathe¹², Desai e Abel⁴⁷, Owen e Hinton^{64,108} White¹⁴¹, etc, (os números remetem à bibliografia no final do trabalho).

Desde a primeira aplicação do MEF à análise de estruturas de concreto armado, atribuída a Ngo e Scordelis¹⁰² (1967), inúmeros pesquisadores se dedicaram a cobrir diversos aspectos do comportamento das estruturas de concreto. Mari⁸⁹ classifica esses aspectos em três grupos principais:

- I - modelagem das propriedades dos materiais (equações constitutivas^{10,11,29}, estados de tensão²⁹, comportamento ao longo do tempo^{16,17,132}, etc..);
- II - estudos a nível "microscópico" (degradação da aderência, transferência de esforços de cisalhamento, colaboração do concreto tracionado intacto entre fissuras^{76,100,109} - tension stiffening" etc ..);
- III - estudos a nível "macroscópico", em que se tenta modelar o comportamento global da estrutura ao invés de priorizar efeitos locais.

A literatura existente a respeito de cada um desses aspectos é bastante extensa. O grande número de trabalhos encontrados pelo autor que se enquadram em mais de um desses grupos levou ao abandono dessa classificação e a preferência por outra, como se verá adiante.

Há um grande número de estruturas existentes em edifícios e obras de engenharia civil que podem ser idealizados com bastante aproximação mediante o emprego de peças lineares (vigas-balcão, pilares, pórticos planos e espaciais, etc..) com a finalidade de reproduzir o comportamento das mesmas nas fases elástica, fissurada

e no estado limite último, usando-se ou não o MEF. Nesse campo específico de estruturas compostos por elementos de barras, dentre os trabalhos examinados pelo autor, a maioria trata de pórticos planos (de concreto armado e/ou protendido). Aqui se apresenta a classificação sugerida por El-Metwally e Chen⁵² para pórticos planos ou espaciais de concreto armado: a não-linearidade no comportamento pode, de uma maneira genérica, ter três origens distintas:

- a - não-linearidade física (não-linearidade do material): é decorrente das relações tensão-deformação não-lineares para os materiais, bem como de outros fenômenos ligados ao concreto armado, tais como a fissuração, o escorregamento da armadura, a fluência e a retração do concreto, etc.. (veja-se o item I.1);
- b - não-linearidade geométrica: decorre das relações não-lineares entre deformações e deslocamentos, quando se trabalha com deslocamentos finitos;
- c - flexibilidade dos nós: decorre da perda de rigidez da união viga-coluna durante o processo de carregamento.

Os dois primeiros itens são normalmente considerados nas análises dos pórticos pela maioria dos autores; o terceiro apenas mais recentemente passou a ser considerado na modelagem do comportamento estrutural (veja-se, além dos autores já citados⁵², Jordan e Kreger⁶⁹, Shi e Atluri¹³¹).

Vários autores (Kang^{71,72}, Mari⁸⁹) trazem históricos sobre o estudo das não-linearidades em pórticos de concreto armado e/ou protendido.

A tese de Kang (1977) foi um dos primeiros trabalhos examinados pelo autor, cuja atenção foi despertada pelo artigo de Scordelis¹²⁸. Kang utiliza o modelo proposto por Scordelis ao estudo de pórticos planos de concreto armado e/ou protendido levando-se em conta não-linearidades física e geométrica e o comportamento ao longo do tempo (uma breve idéia do modelo de Scordelis é dada no item II.5.1 - veja-se a Figura 2.20). Mais tarde (1984), Mari estendeu esse modelo aos pórticos espaciais. Mari tem apresentado

vários trabalhos, não só relativos a pórticos^{1,86,87,88,90,91}.

Outra linha de pesquisas sobre os efeitos das não-linearidades em pórticos planos de concreto armado e/ou protendido (comportamento em serviço) foi encontrada pelo autor no trabalho de Camara²¹, a partir do qual se tomou conhecimento de outras pesquisas nessa área (Ghali e Favre^{60,54}, CEB^{34,36}). Em todos os trabalhos, consideram-se apenas não-linearidades físicas. Além dos manuais citados, a consulta aos demais Bulletins do CEB revelou-se compensatória; vários trabalhos e linhas de pesquisa foram encontrados a partir dessa consulta: Cauvin^{24,25,26,27}, Calvi, e Gobetti²⁰, Cervenka²⁹, Kalevras⁷⁰, Macchi⁸⁰, Mancini⁸⁵, Menegotto e Via⁹⁶, etc... Os trabalhos de Cauvin abrangem o efeito das não-linearidades física e geométrica em pórticos planos de aço e de concreto armado e foram muito importantes na definição dos rumos desta pesquisa (veja-se o item V.1). Em Macchi pode ser encontrado um histórico com farta bibliografia das pesquisas sobre análises não-lineares. Kalevras traz vários fluxogramas para análises lineares e não-lineares e um estudo comparativo conduzido com as especificações do MC-78 do CEB³⁷.

A literatura existente sobre o tratamento da não linearidade geométrica também é bastante extensa. A partir de Bathe¹² e de artigos de Pimenta¹¹², Mazzilli⁹⁴ e Souza Lima e Venancio Filho¹³⁴, utilizados no início do trabalho, um número muito grande de trabalhos encontrados principalmente em periódicos foi sendo analisado e incluído na bibliografia (veja-se o item III.2) quando julgado necessário.

Uma descrição completa dos algoritmos existentes para a solução do sistema de equações não-lineares é dada por Owen e Gomes¹⁰⁶. Também em Owen e Hinton¹⁰⁸ são encontradas subrotinas de solução das equações. Ainda nessa área, outros trabalhos podem ser citados: Bathe¹², Bathe e Cimento¹³, Matthies e Strang⁹³, etc..

No decorrer da pesquisa bibliográfica, encontrou-se, principalmente nas revistas técnicas, referências a um grande número de softwares existentes (veja-se Bathe e outros¹⁵, Ghali e Elbadry^{51,59}, Gelfi e Giuriani⁵⁸, Krishnamoorthy e Mosi⁷⁵, etc..). Mackerle⁸³ traz uma revisão dos programas existentes (elementos finitos e elementos de contorno) apresentados em ordem alfabética e

descrevendo suas capacidades, abrangência, origem, etc..

Basicamente, a bibliografia utilizada para a confecção deste trabalho é a citada neste item. Nos Capítulos subsequentes (II, III e IV) é feita uma melhor abordagem daqueles itens bibliográficos necessários ao tratamento específico das não-linearidades física e geométrica; procura-se também complementar a bibliografia (veja-se especialmente os itens III.2 e IV.1).

1.3 - OBJETIVOS.

O projeto de uma estrutura de concreto deve satisfazer condições de segurança e de utilização. Para assegurar o atendimento às condições de serviço, é necessário uma previsão rigorosa dos esforços solicitantes, deslocamentos e deformações da estrutura sob cargas de utilização. A segurança contra a ruína deve ser garantida por uma estimativa também rigorosa da carga última. Portanto, projetar, sob esse ponto de vista, é tentar antecipar o comportamento da estrutura nas fases elástica, fissurada e no estado último. Essas condições, comumente respeitadas em análises simplificadas (lineares), devem ser também seguidas em análises não-lineares.

Os modelos matemáticos foram de início mais utilizados para o desenvolvimento das teorias de cálculo à ruptura (Estados Limites Últimos) das peças de concreto armado; foi dada uma menor importância para as ações de serviço (Estados Limites de Utilização). Entretanto, mais recentemente, vários autores tem se dedicado a aprofundar o conhecimento sobre diversos aspectos do comportamento em serviço das estruturas de concreto armado e protendido: Leonhardt⁷⁸, Ghali e Favre⁶⁰, Camara²¹, Debernardi⁴⁶. Merecem realce os trabalhos realizados também neste sentido pelo CEB, que permitiram avanços consideráveis.

Por outro lado, há uma tendência mundial de unificar os procedimentos de cálculo do concreto armado e do concreto protendido (MC-78³⁷ e MC-90³⁵, bem como as Recommendations 1982 do CEB; cite-se também a revisão da NBR - 6118⁹ em curso atualmente). Numa palestra proferida na EESC- USP em outubro de 1990, o Professor Bruggeling alertava para esse fato e apresentava as formulações básicas,

modelo, etc.. do que chamou de Concreto Estrutural (nada mais é do que o concreto parcialmente protendido , com armaduras ativas e passivas). A preocupação principal é unificar o procedimento para ambos os métodos de construção (o concreto armado, da década de 60 em diante, é calculado no Estado Limite Último e verificado na Estado Limite de Utilização; o concreto protendido é calculado no Estado Limite de Utilização e verificado no E.L. Último).

Esses fatos levaram à valorização, pelo autor, dos trabalhos citados, em especial os de Camara²¹ e de Ghali e Favre⁶⁰: em ambos é desenvolvido um equacionamento para análise não-linear de estruturas de concreto armado e protendido baseado no comportamento das seções nos Estádios I e II e em relações esforços/deformações médias do tipo das propostas no Manual do CEB³⁶, com modificações no tratamento da flexão composta. Não levam em conta, porem, o comportamento no Estado Limite Último e nem os efeitos de segunda ordem (não-linearidade geométrica).

Para o estudo de pórticos planos de concreto armado seria preciso, então, um método mais geral que englobasse também a não linearidade geométrica. Entre os examinados, o que pareceu mais abrangente (e mais adaptável às especificações do Manual do CEB) foi aquele apresentado por Cauvin^{24,25}, que permite a análise em condições de serviço ou no estado limite último (veja-se o item V.1.).

O que se propõe, então, como objetivo do trabalho, é a montagem de um programa de cálculo automático de pórticos planos de concreto armado para acompanhar o comportamento em serviço, levando em conta não-linearidades física e geométrica. Pelo exposto por Cauvin na idealização do método, o autor é de opinião que, embora simplificado, o mesmo é suficientemente abrangente para que, numa etapa posterior, se possa introduzir a protensão (o que seria feito no Programa VIGANLI) e o cálculo no Estado Limite Último (no programa PORANLI - veja-se o item V.2).

1.4 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.

No Capítulo I, procura-se basicamente apresentar uma parte da bibliografia e os objetivos do trabalho.

No Capítulo II é apresentado o equacionamento do comportamento em serviço (Estádios I e II) de seções de concreto armado e protendido. A protensão é incluída pensando-se na necessária generalização do método para trabalhos futuros. São apresentados os modelos físicos e as formulações existentes para a determinação dos valores médios das deformações e curvaturas.

No Capítulo III é apresentado o modelo adotado para o tratamento da não-linearidade geométrica. É apresentada também uma complementação da bibliografia.

No Capítulo IV discutem-se os modelos para a solução das equações não-lineares.

No Capítulo V é apresentado o modelo seguido para a análise não-linear de pórticos planos de concreto armado.

No Capítulo VI são apresentados os exemplos e as análises dos resultados obtidos.

No Capítulo VII apresentam-se as principais conclusões que foi possível extrair do trabalho.

CAPÍTULO II.

COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DE PEÇAS FISSURADAS DE CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO.

II.1 - INTRODUÇÃO.

A modelagem do comportamento de um elemento de concreto armado ou protendido para ações de serviço tem sido objeto de estudos experimentais e analíticos durante os últimos anos. A principal dificuldade em encontrar-se um modelo suficientemente geral e confiável reside na forma de quantificar o comportamento da ligação aço x concreto e, conseqüentemente, dos estados de tensão e deformação existentes na zona de concreto tracionado, após o aparecimento da fissuração.

Tomando como referência a avaliação dos deslocamentos imediatos de uma peça fissurada de concreto: a forma mais simples de fazê-la é através do Estádio I, mediante a aplicação das fórmulas clássicas da resistência dos materiais (exemplo: cálculo da flecha de uma viga). Essa forma simplificada leva, porém, a certos problemas, pois avalia os deslocamentos pelos seus valores extremos inferiores, menores que os reais. Com os projetos arquitetônicos exigindo estruturas cada vez mais esbeltas (por exemplo: vigamentos com limitações de altura), esse procedimento simplificado praticamente inviabilizou-se, pois sua aplicação conduziria a erros intoleráveis.

Uma solução aproximada para o mesmo problema passou a ser, então, avaliar-se os deslocamentos pelos seus valores extremos superiores, obtidos no Estádio II: supõe-se todas as seções da estrutura totalmente fissuradas e desprezam-se as zonas tracionadas no cálculo das características geométricas. Entretanto, sabe-se que no trecho entre duas fissuras vizinhas existe concreto não fissurado e que na metade desse trecho o comportamento é típico de Estádio I (ver figura 2.15). Portanto, os deslocamentos assim avaliados são maiores que os reais.

A modelagem fundamenta-se, então, no princípio de que a realidade se encontra numa situação intermediária entre o

comportamento das seções nos Estádios I e II; ou seja, para a obtenção de deslocamentos mais próximos dos reais é necessário levar-se em conta a contribuição de parte da zona tracionada, de modo a considerar-se a existência de seções não fissuradas, distribuídas por todo o elemento considerado. Essa contribuição é denominada de "colaboração do concreto entre fissuras" (na língua inglesa, "tension stiffening") e permite a obtenção de valores médios dos deslocamentos.

Neste capítulo pretende-se, para além da simples abordagem do problema da não-linearidade física, aqui tratada de forma isolada, dar uma noção geral das dificuldades que cercam a questão e dos mecanismos de solução que existem para elas. Com esse intuito, apresenta-se de início um estudo dos materiais envolvidos, seguido de uma formulação de análise da seção para as situações extremas de comportamento nos Estádios I e II. Em seguida, são apresentados os modelos físicos e formulações existentes (C.E.B., A.C.I., Ghali-Favre, etc...) para a determinação dos valores médios das deformações e curvaturas.

II.2 - ESTUDO DOS MATERIAIS.

Embora não se tenha como objetivo principal deste trabalho a análise dos modelos de quantificação dos fenômenos diferidos no tempo do concreto (fluência e retração), a análise do comportamento em serviço das estruturas de concreto armado e/ou protendido, bem como as regras de dimensionamento nos estados limites de utilização, exigem a avaliação das propriedades dos materiais. No que se segue, procurar-se-a resumir essas propriedades sem, contudo, maiores aprofundamentos, como talvez fosse desejável. Para preencher essa lacuna, principalmente para o estudo daqueles fenômenos, indica-se trabalhos como o de Amaral² ou o de Kang⁷¹, bem como o manual do CEB³⁴; cite-se também o trabalho de Smerda e Kristek¹³². Outros autores também trazem resumos muito úteis, como Camara²¹ e Ghali e Favre^{54,60}. Além desses, foram consultadas normas técnicas (ABNT^{7,9}, ACI³, CEB^{35,37})

Além disso, tenta-se salientar diferenças (pelo menos

aquelas notadas pelo autor deste trabalho, a partir de um artigo de Vasconcelos¹³⁸ sobre o tema) entre os códigos - modelo do CEB (1978³⁷ e 1990³⁵), também sem prejuízo de maiores aprofundamentos.

As estruturas de concreto (armado e protendido) consistem de dois materiais diferentes: um considerado homogêneo (o aço) e, portanto, com propriedades bem definidas; o outro, heterogêneo (o concreto) e, portanto, com dificuldades maiores na definição de suas propriedades, já que estas dependem de muitas variáveis. Contudo, definindo-se estatisticamente as propriedades médias do concreto, este pode ser considerado homogêneo (no sentido macroscópico). Assim, pode-se estudar a ação conjunta de dois materiais homogêneos, o concreto e o aço.

Ambos exibem várias propriedades não lineares. A relação tensão-deformação do concreto é não somente não-linear, mas diferente à tração e à compressão. A fissuração é um dos mais importantes fatores a contribuir para o comportamento não-linear das estruturas de concreto armado. As propriedades do concreto também dependem de outros fatores, como idade e meio ambiente. O aço exibe também relação tensão-deformação não-linear. Outro fator de não linearidade a ser notado é o comportamento de ambos os materiais quando submetidos a ciclos de carga e descarga (alguns autores, como Kang⁷¹, estabelecem modelos matemáticos estatísticos para lidar com essas características dos materiais).

Nas seções subsequentes, procura-se discutir, ainda que de forma resumida, as propriedades dos materiais relevantes para este trabalho.

II.2.1 - CONCRETO.

II.2.1.1 - A DEFORMAÇÃO DO CONCRETO.

Uma das mais importantes hipóteses no estudo da deformação do concreto é que ela é composta da soma de deformações causadas por fenômenos diferentes. Kang⁷¹ descreve a deformação uniaxial total do concreto $\epsilon_c(t)$ num instante t (supondo carga aplicada num instante t_0 , provocando tensão constante $\sigma_c(t_0)$) como sendo composta das seguintes parcelas:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c^m(t) + \varepsilon_c^{nm}(t) \quad (2.1)$$

$$\text{onde } \varepsilon_c^m(t) = \varepsilon_{ci}(t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \quad (2.2)$$

$$\text{e } \varepsilon_c^{nm}(t) = \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t) + \varepsilon_{ca}(t) \quad (2.3)$$

$\varepsilon_c^m(t)$ é a deformação mecânica ou deformação instantânea causada pelo carregamento uniaxial; $\varepsilon_c^{nm}(t)$ é a deformação não mecânica, composta por parcelas de fluência ("creep") $\varepsilon_{cc}(t)$, retração ("shrinkage") $\varepsilon_{cs}(t)$, temperatura $\varepsilon_{cT}(t)$ e idade $\varepsilon_{ca}(t)$ ¹.

Dentre essas deformações, as parcelas $\varepsilon_c^m(t)$, $\varepsilon_{cc}(t)$ e $\varepsilon_{ca}(t)$ são produzidas pelas tensões e as parcelas $\varepsilon_{cs}(t)$ e $\varepsilon_{cT}(t)$ são deformações não produzidas por tensões. Desse ponto de vista, a equação (2.1) poderia ser reescrita como:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c\sigma}(t) + \varepsilon_{cn}(t) \quad (2.1.a)$$

$$\text{onde } \varepsilon_{c\sigma}(t) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{ca}(t) \quad (2.2.a)$$

$$\text{e } \varepsilon_{cn}(t) = \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t) \quad (2.3.a)$$

1

Por facilidade, usar-se-a neste texto o termo fluência para designar a tradução do inglês "creep", como também ocorre nos textos em português de Portugal (veja-se, por exemplo, Camara²¹). Convém salientar que o assunto foi controvertido no Brasil. Amaral² sugeriu o uso da expressão deformação lenta para traduzir o "creep", reservando-se o termo fluência para designar deformações lentas irreversíveis. A NBR - 7197 também adota o termo fluência para designar o fenômeno geral, dividindo-o em duas partes, uma rápida (irreversível) e a outra lenta, composta de duas parcelas (a reversível e a irreversível).

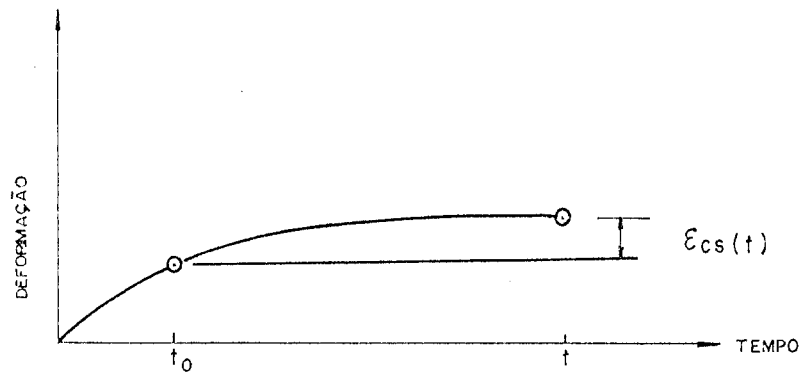
O significado de cada componente é ilustrado na Figura 2.1, exceto a parcela de deformação térmica, a qual é produzida por variações de temperatura.

Na Fig. 2.1 está representada a deformação por retração de um elemento (corpo de prova) de concreto não carregado; Fig. 2.1.b mostra a história de deformação, sob ação de compressão centrada constante, de um elemento em equilíbrio hídrico com o meio ambiente; observa-se que a deformação num instante t é maior (aumento $\epsilon_{cc}(t)$) que no instante t_0 de carregamento (efeito da fluência), e que a deformação mecânica é menor que a inicial (já que o módulo de elasticidade do concreto aumenta com a idade e , com isso, a deformação elástica decresce gradualmente). Assim, a magnitude da deformação instantânea e da fluência dependem da idade do concreto no instante do carregamento e do intervalo de tempo decorrido ($t - t_0$) no instante em que ambas são medidas. Outros fatores afetam tanto a fluência como a retração: qualidade do concreto, meio ambiente, forma do elemento considerado, etc. . Na Fig. 2.1.c tem-se a atuação no elemento de todas as componentes de deformação aqui consideradas, exceto a térmica (supõe-se um corpo de prova sob tensão e secagem), isto é, a figura c é a soma das anteriores.

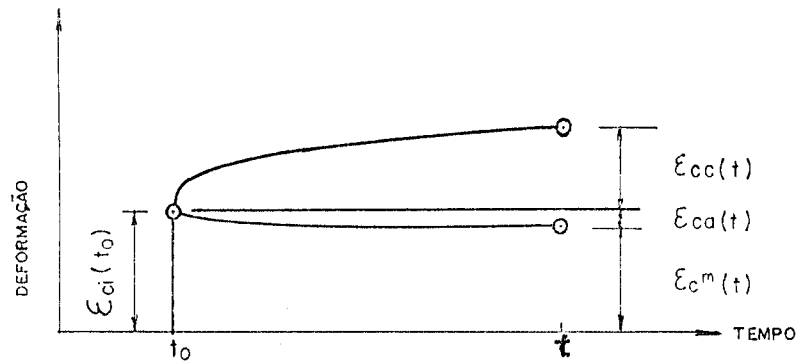
II.2.1.2 - RELAÇÕES TENSÃO - DEFORMAÇÃO INSTANTÂNEAS.

A resposta de uma estrutura a um carregamento depende em grande parte da relação tensão-deformação do material que a constitui e do tipo de tensão ao qual ela estará submetida. O concreto é basicamente usado para resistir a esforços de compressão, razão pela qual sua curva tensão-deformação à compressão é de interesse primordial. Assim, o comportamento do concreto comprimido submetido a ações instantâneas pode ser descrito, em termos médios, por curvas como as da Fig. 2.2, tiradas do CEB (a figura a apresentada no MC - 78³⁷ e a b no MC - 90³⁵) e da NBR - 6118⁹.

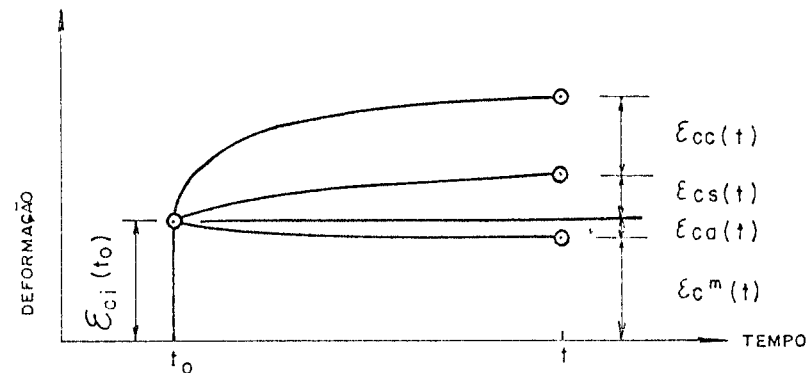
Verifica-se que a forma da curva é altamente influenciada pela resistência à compressão do concreto e que, mesmo não sendo linear, até valores da ordem de metade da tensão característica o desvio em relação a uma relação linear é relativamente pequeno; por essa razão se adota, em geral, como módulo de elasticidade para



a) DEFORMAÇÃO EM CORPO DE PROVA NÃO CARREGADO (RETRAÇÃO)



b) DEFORMAÇÃO EM CORPO DE PROVA CARREGADO, EM EQUÍLIBRIO HÍDRICO COM O MEIO AMBIENTE;



c) DEFORMAÇÃO TOTAL

- FIG. 2.1 - COMPONENTES DA DEFORMAÇÃO DO CONCRETO -

ações de curta duração, o módulo secante para tensões de 40 a 50% da tensão característica, que corresponde à ordem de grandeza de tensão máxima no concreto em serviço nas estruturas de concreto armado e protendido. Para compressão uniaxial, o MC - 78³⁷ fornece a expressão (ver Fig. 2.2.a):

$$\sigma_c = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} f_c \quad (2.4)$$

$$\text{onde } \eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad (2.5)$$

$$\text{e } k = 1.1 E_c \cdot \frac{\varepsilon_{c1}}{f_c} \quad (2.6)$$

Já o MC - 90³⁵ sugere a expressão:

$$\sigma_c = - \frac{\frac{E_c \cdot \varepsilon_c}{E_{c1} \varepsilon_{c1}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2}{1 + \left(\frac{E_c}{E_{c1}} - 2 \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} \cdot f_{cm}, \text{ para } |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{cu}| \quad (2.7)$$

onde $E_{c1} = \frac{f_{cm}}{\varepsilon_{c1}}$ é o módulo secante (Ver Fig. 2.2.b).

A deformação ε_{cu} pode ser calculada por:

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{c1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{E_c}{2E_{c1}} + 1 \right) + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{E_c}{2E_{c1}} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \right]^{1/2} \quad (2.8)$$

Para deformações superiores a ε_{cu} (ou tensões menores do que a metade de f_{cm}) é apresentada uma fórmula exageradamente complexa (veja-se o item 2.1.4.4 do MC - 90); a Fig. 2.2.c exemplifica a aplicação da fórmula para alguns concretos. Nas fórmulas acima, o valor de ε_{c1} corresponde ao máximo valor de σ_c e é considerado constante

($\epsilon_{c1} = -0,0022 =$ deformação máxima à compressão centrada).²

2

O CM-90 do CEB³⁵ apresenta a seguinte classificação do concreto (os números representam a resistência característica à compressão f_{ck} aos 28 dias, em MPa):

C12 C16 C20 C25 C30 C35 C40 C45 C50 C55 C60 C65 C70 C75 C80

Para produção e controle de qualidade, o concreto deve ser especificado em degraus de 10 MPa, sendo recomendados os valores grifados. Para verificações de projeto ou estimativa das propriedades do concreto, o valor médio da resistência a compressão f_{cm} associado à resistência característica f_{ck} pode ser estimado por:

$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta f, \text{ com } \Delta f = 8 \text{ MPa.}$$

A expressão do módulo de elasticidade passou de

$$E_{cm} = 9,5 (f_{ck} + 8)^{1/3}$$

no CM - 78 para

$$E_c = 10 (f_{ck} + 8)^{1/3}$$

no CM-90, em GPa (f_{ck} em MPa); aqui, E_c representa o módulo correspondente à curva de descarga, que é praticamente uma reta. Quando for feita apenas análise elástica o módulo a usar deve levar em conta a deformação plástica inicial:

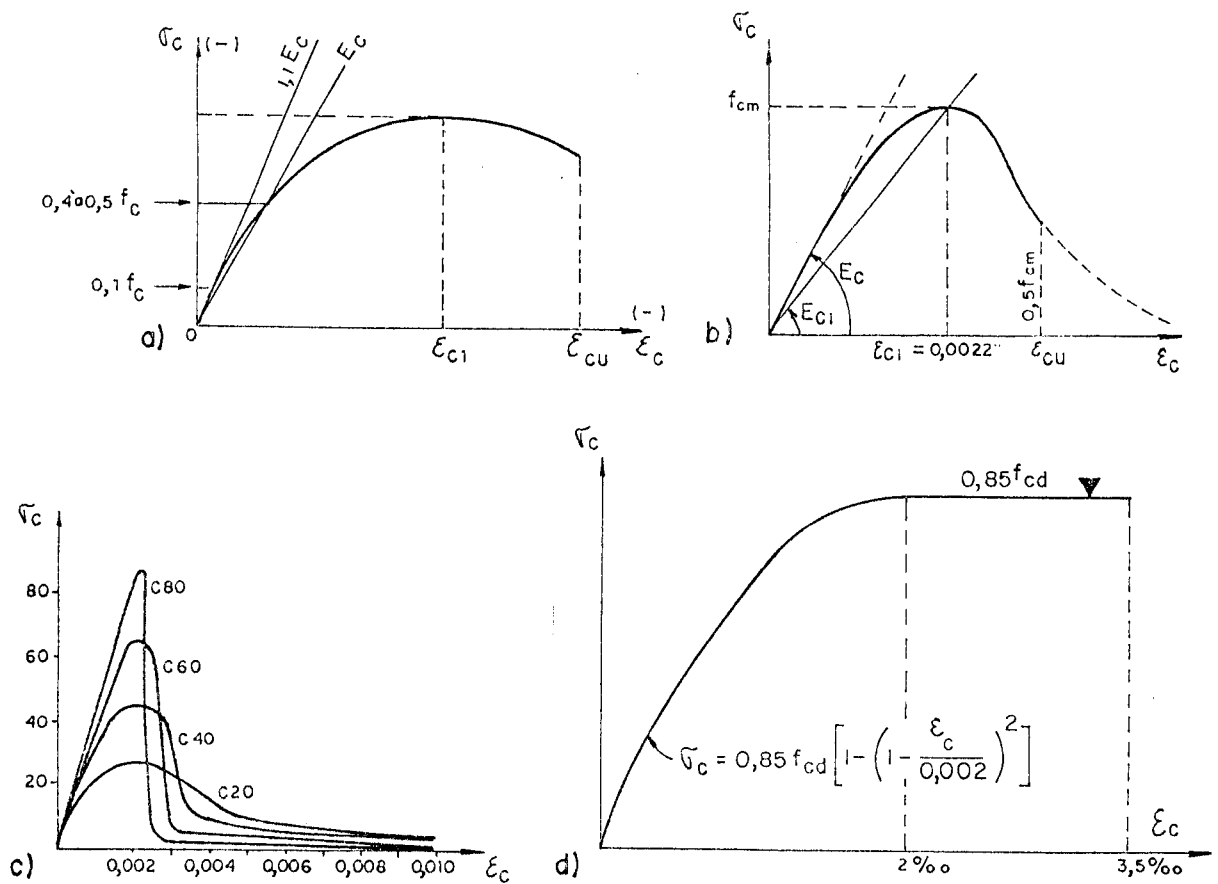
$$E_{cs} = 0,85 E_c$$

(não se fala mais no módulo secante para tensões correspondentes a 40 a 50% da tensão característica, no CM-90).

A NBR - 6118⁹ propõe para E_c a expressão:

$$E_c = 6600 \sqrt{f_{cj}}$$

onde $f_{cj} = f_{ck} + 3,5$ (em MPa)



- FIG. 2.2 - Relações Tensão-Deformação do Concreto Para Ações de Curto Prazo.

Camara²¹ salienta a importante variação do módulo de elasticidade a curto prazo com a velocidade de aplicação da carga, mais sensível para tempos de aplicação até 2 a 3 minutos (ver Fig. 2.3.a); a variabilidade do módulo de elasticidade com a idade do carregamento ou, de uma forma equivalente, com a resistência média à compressão f_{cm} , é definida por coeficientes de endurecimento C no MC - 78 (ver Fig 2.3 b), tal que:

$$C_1 = \frac{E_c(t_0)}{E_c(28)} \quad (2.9)$$

$$e C_2 = \frac{f_{cm}(t_0)}{f_{cm}(28)} \quad (2.10)$$

Já o MC - 90, item 2.1.6.1, fornece a expressão:

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) \cdot f_{cm}(28) \quad (2.11)$$

$$\text{com } \beta_{cc}(t) = e^{s(1 - 5,3 t^{-\frac{1}{2}})} \quad (2.12)$$

onde $f_{cm}(t)$ é a resistência média à compressão do concreto num instante t , $\beta_{cc}(t)$ é um coeficiente dependente da idade do concreto (t em dias), e s é um coeficiente que depende do tipo de cimento (veja-se o item citado).

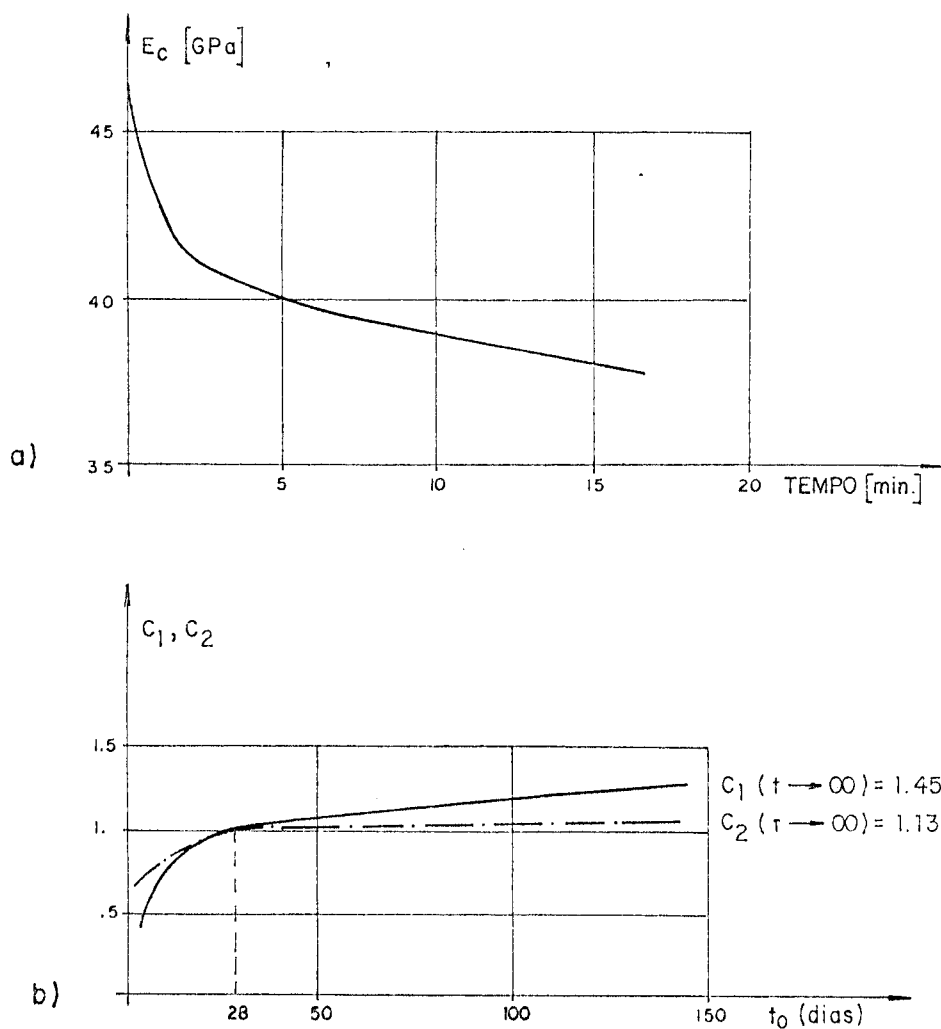
O módulo de elasticidade do concreto numa idade t (diferente de 28 dias) pode ser estimado por:

$$E_c(t) = \beta_E(t) \cdot E_c \quad (2.13)$$

$$\text{com } \beta_E(t) = \sqrt{\beta_{cc}(t)} \quad (2.14)$$

onde $\beta_E(t)$ é um coeficiente que depende da idade do concreto; β_{cc} já fora definido anteriormente (ver equação 2.12). Por causa da raiz quadrada que aparece na fórmula, conclui-se que o desenvolvimento de $E_c(t)$ é mais lento que o desenvolvimento da resistência.

Para $t = 28$ dias, resulta $E_c(28) = E_c$, independente de s , que varia com o tipo de cimento.



- FIG. 2.3 a - Variação do módulo de elasticidade com o tempo de aplicação da carga.
 b - Variação do módulo de elasticidade e da resistência à compressão com a idade de carregamento.

II.2.1.3 - RESISTÊNCIA À TRACÇÃO.

É possível relacionar a resistência à tração média com a resistência à compressão, através da fórmula dada no MC - 78:

$$f_{ctm} = 0,30 f_{ck}^{2/3} \text{ (em MPa)} \quad (2.15)$$

O MC - 90 fornece basicamente a mesma expressão, como se verá adiante. A NBR - 6118⁹ propõe:

$$f_{tk} = \frac{f_{ck}}{10} \text{ MPa, para } f_{ck} \leq 18 \text{ MPa} \quad (2.16)$$

$$\text{ou } f_{tk} = 0,06 f_{ck} + 0,7 \text{ MPa, para } f_{ck} > 18 \text{ MPa} \quad (2.17)$$

Em Camara²¹ encontra-se o relato de estudos experimentais realizados por Fouré, onde se constata que, de uma forma equivalente à resistência à compressão, a resistência à tração ao longo do tempo depende de dois fatores: o endurecimento e conseqüente aumento de resistência do concreto (devido às reações físico-químicas associadas à hidratação do cimento) e, por outro lado, a perda progressiva de resistência sob tensão constante associada, eventualmente, à formação de microfissuras.

Para a verificação da capacidade resistente do concreto armado não se considera a resistência à tração, a qual, no entanto, é um parâmetro importante em algumas verificações dos estados limites de utilização, sendo o que tem a maior variabilidade dentre os parâmetros que definem as características mecânicas do concreto. Atendendo às incertezas associadas à avaliação da resistência à tração, o CEB recomenda que os valores característicos superiores e inferiores sejam considerados consoante a verificação em questão; estes valores são dados aproximadamente por (MC - 78):

$$f_{ct,5\%} = 0,7 f_{ctm} \quad (2.18)$$

$$f_{ct,95\%} = 1,3 f_{ctm} \quad (2.19)$$

Já o MC - 90 propõe para esses valores característicos as expressões:

$$f_{ctk, \min} = \alpha f_{ct, \min} \left(\frac{f_{ck}}{f_{ck0}} \right)^{2/3} \quad (2.20)$$

$$f_{ctk, \max} = \alpha f_{ct, \max} \left(\frac{f_{ck}}{f_{ck0}} \right)^{2/3} \quad (2.21)$$

onde $f_{ck0} = 10 \text{ MPa}$,

$$\alpha f_{ct, \min} = 0,95 \text{ MPa}$$

$$\alpha f_{ct, \max} = 1,85 \text{ MPa}$$

Propõe ainda para a resistência média à tração a expressão:

$$f_{ctm} = \alpha_{fct,m} \left(\frac{f_{ck}}{f_{ck0}} \right)^{2/3} \cong 0,30 f_{ck} \quad (2.22)$$

onde $\alpha_{fct,m} = 1,40 \text{ MPa}$

No que diz respeito à relação tensão - deformação do concreto à tração, para o concreto não fissurado foram previstas pelo MC - 90 as equações:

$$\sigma_{ct} = E_c \cdot \varepsilon_{ct}, \text{ para } \sigma \leq 0,9 f_{ctm} \quad (2.23)$$

$$e \sigma_{ct} = f_{ctm} - \frac{0,1 f_{ctm}}{0,00015 - 0,9 \frac{f_{ctm}}{E_c}} \cdot (0,00015 - \varepsilon_{ct}) \text{ para } \sigma_{ct} > 0,9 f_{ctm} \quad (2.24)$$

No caso de uma seção fissurada, o MC - 90 fornece um diagrama para a leitura da abertura da fissura para cada valor da tensão de tração no concreto entre fissuras (ver Fig. 2.4), o qual é definido pelas equações:

$$\sigma_{ct} = f_{ctm} \left[1 - 0,85 \frac{W}{W_1} \right], \text{ para } 0,15f_{ctm} \leq \sigma_{ct} \leq f_{ctm} \quad (2.25)$$

$$\sigma_{ct} = \frac{0,15 f_{ctm}}{W_c - W_1} (W_c - w), \text{ para } 0 \leq \sigma_{ct} \leq 0,15 f_{ctm}. \quad (2.26)$$

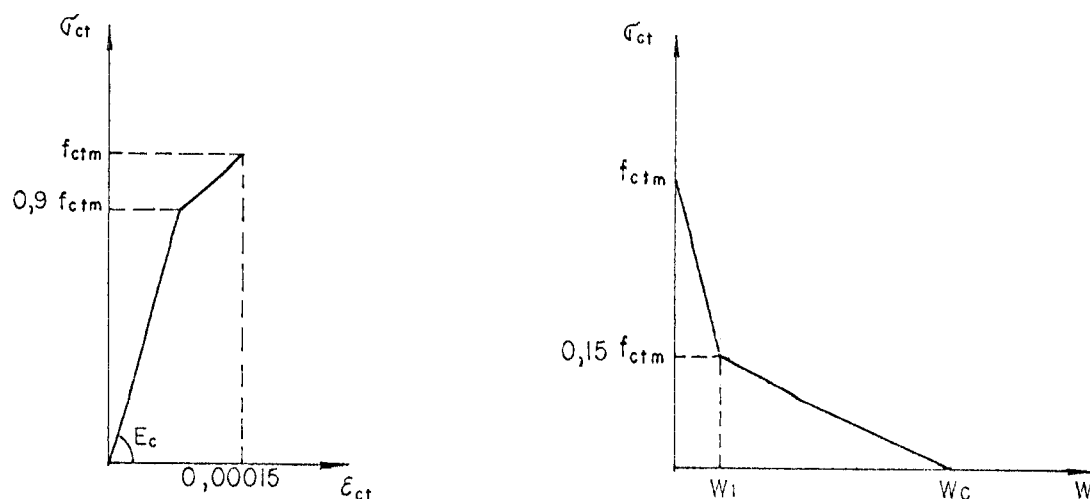
$$W_1 = 2 \frac{G_F}{f_{ctm}} - 0,15 W_c \quad (2.27)$$

$$W_c = \beta_F \frac{G_F}{f_{ctm}} \quad (2.28)$$

onde W_1 é a abertura de fissura para $\sigma_{ct} = 0,15 f_{ctm}$, W_c é o valor para σ_{ct} nulo, G_F é a energia de fratura (valor este determinado por ensaio) e β_F é um coeficiente dado em função do diâmetro máximo do agregado utilizado (veja-se o item 2.1.4.4.2 do MC-90).

Vasconcelos¹³⁸ assinala que o problema está se tornando extremamente complicado pela aridez teórica, levando o engenheiro à aplicar normas sem saber o significado físico do que está pondo em prática.

Na tabela II.1 apresenta-se os resultados da aplicação das várias fórmulas até aqui apresentadas, com os valores necessários à determinação das propriedades dos concretos (segundo o CEB, MC - 90³⁵).



- FIG. 2.4 - Tensão-Deformação e Tensão-Fissuração Para Tração Uniaxial.

TABELA 2.1 - Resistência à compressão, à tração, módulo de elasticidade e encurtamentos últimos de alguns concretos (fonte: CEB, MC - 90³⁵). Valores em MPa, exceto os encurtamentos.

CONCRETO	C12	C20	C30	C40	C50	C60	C70	C80
VALORES								
f_{ck}	12	20	30	40	50	60	70	80
$f_{ctk, min}$	1,1	1,5	2,0	2,4	2,8	3,1	3,5	3,8
f_{ctm}	1,6	2,2	2,9	3,5	4,1	4,6	5,1	5,6
$f_{ctk, max}$	2,1	2,9	3,8	4,7	5,4	6,1	6,8	7,4
$E_c [x 10^3]$	27	30,5	33,5	36,5	38,5	41	42,5	44,5
$E_{cs} [x 10^3]$	23	26	29	31	33	35	36	38
$E_{c1} [x 10^3]$	9	12,5	17,5	22	26,5	31	35,5	40
$\epsilon_{cn} [x 10^{-3}]$	-5,0	-4,2	-3,7	-3,3	-3,0	-2,8	-2,6	-2,4

II.2.1.4 - DEFORMAÇÕES DEPENDENTES DO TEMPO.

Há vários modelos de quantificação de fluência e retração do concreto, os quais tem sido adotados por recomendações internacionais e normas nacionais, visando incorporar os efeitos dependentes do tempo no estudo das deformações do concreto. Desses modelos, podem-se destacar os seguintes:

- 1 - Modelo do CEB/FIP (1970);
- 2 - Modelo do MC- 78 CEB/FIP (1978)
- 3 - Modelo do ACI (1978).
- 4 - Modelo de Bazant e Panulla (1978)^{16,17}

No Brasil, os efeitos dependentes do tempo para o cálculo das deformações em estruturas de concreto armado e protendido são dados pela NBR 7197⁷, já votada e aprovada e que, em linhas gerais, segue os conceitos expressos no Código Modelo MC - 78³⁷ do CEB; Vasconcelos¹³⁸ observa que esses conceitos estão sendo profundamente alterados no MC - 90³⁵.

Em geral, os métodos de quantificação do incremento de deformação no tempo por fluência do concreto, $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$, recorrem a formulações distintas, a saber:

. como nos modelos 1 e 2 do CEB/FIP, também seguido pelo MC - 90 e a NBR 7197:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{c28}} \varphi_{28}(t, t_0) \quad (2.29)$$

com a diferença já salientada na obtenção do módulo de elasticidade; E_{c28} é o módulo secante, termo que o MC - 90 já não usa;

. como no modelo 3 do ACI:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{c, t_0}} \varphi_{t_0}(t, t_0) \quad (2.30)$$

. Como no modelo 4 de Bazant e Panulla:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E'_c} \phi'(t, t_0) \quad (2.31)$$

em que E'_c é um módulo de elasticidade fictício dependente da resistência à compressão do concreto.

A distinção entre a deformação instantânea e a deformação por fluência é difícil devido à grande sensibilidade do módulo de elasticidade instantâneo com a velocidade de aplicação da carga e o tempo de leitura. O MC - 78 adota como módulo de elasticidade instantâneo a aplicar na equação (2.29) um valor igual a $1,25 E_{cm}$. O MC - 90 faz essa distinção separando a deformação devido a tensão em duas parcelas, uma correspondente à deformação instantânea e a outra à fluência, a saber:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_{c28}} \right] \quad (2.32)$$

(ver equação 2.2 a), onde $E_c(t_0)$ é o módulo de elasticidade no instante do carregamento, o qual pode ser calculado com o auxílio da (2.13).

Os modelos de avaliação do coeficiente de fluência do CEB/FIP 70 e do ACI 78 são expressos por uma fórmula multiplicativa. No modelo do CEB/FIP:

$$\phi_{28}(t, t_0) = K_1 K_2 K_3 K_4 K(t - t_0) \quad (2.33)$$

em que K_1 , K_2 , K_3 e K_4 representam, respectivamente, os efeitos do grau de umidade ambiente, idade de aplicação da carga, composição do concreto e espessura equivalente; o parâmetro $K(t, t_0)$ representa o desenvolvimento da fluência com o tempo.

No modelo do ACI 78

$$\phi_{t_0}(t, t_0) = 2,35 K_2 K_1 K_4 K_3 K_6 K_7 K(t - t_0) \quad (2.34)$$

em que K_2 representa o efeito da idade do concreto no instante do

carregamento e das condições de cura, K_1 as condições de umidade, K_4 e K_3 a influência das dimensões da peça e composição do concreto, K_6 e K_7 a granulometria e porcentagem de vazios, e $K(t - t_0)$ tem o mesmo significado anterior. Um estudo completo das influências que exercem cada um desses fatores no valor de $\phi(t, t_0)$ pode ser encontrado em Amaral², Smerda e Kristek¹³², bem como em Kang⁷¹. O modelo do CEB/FIP apresentado no MC - 78³⁷ é do tipo aditivo:

$$\phi_{28}(t, t_0) = \beta_a(t_0) + \phi_d \beta_d(t - t_0) + \phi_f [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] \quad (2.35)$$

em que os três termos do coeficiente de fluência representam, respectivamente, uma parcela parcialmente recuperável que se verifica nos primeiros dias (fluência rápida) e as parcelas elástica e plástica da deformação lenta; cumpre observar que esse é o modelo também adotado na NBR 7197⁷.

No modelo de Bazant e Panulla^{16,17}, também descrito em Camara²¹, a idéia base é a separação da parcela de fluência básica (sem haver troca de umidade com o ar) da parcela de secagem, sendo então o coeficiente de fluência dependente do valor da retração, e dado por:

$$\phi'(t, t_0) = \phi_b(t, t_0) + \phi_s(t, t_0) \quad (2.36)$$

$$\text{em que } \phi_b(t, t_0) = B \left[(t_0)^{-m} + 0,05 \right] (t, t_0)^n$$

$$\text{e } \phi_s(t, t_0, t_{cs0}) = \bar{B}_d K_1'' (t_0)^{-m/2} \left[1 + \frac{3t(\frac{1}{2}cs)}{t - t_0} \right]^{-0,35} \quad (2.37)$$

onde ϕ_b e ϕ_s são as parcelas de fluência básica e de secagem, B , m e n são obtidas via resistência à compressão aos 28 dias de corpos de prova cilíndricos, \bar{B}_d depende do valor final previsto para a retração, da resistência à compressão do concreto, granulometria do agregados e da relação água - cimento; K_1'' representa o efeito da umidade relativa do ambiente e $t(\frac{1}{2}cs)$ é o tempo necessário para se processar metade do valor da retração.

Já o MC - 90³⁵ fornece para se calcular o coeficiente de

fluência a expressão (notar que voltou a ser do tipo multiplicativo):

$$\sigma(t, t_0) = \sigma_0 \beta_c(t - t_0) \quad (2.38)$$

em que o multiplicando é o coeficiente básico de fluência e o multiplicador é um coeficiente que descreve o desenvolvimento da fluência com o tempo (veja-se o item 2.1.6.4.3.b do referido Código, onde podem ser encontradas as expressões desses coeficientes).

Quanto à retração do concreto, os modelos da quantificação do CEB/FIP 70 e do ACI 78 são também do tipo multiplicativo. No modelo do CEB/FIP 70:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = K_1^- K_3 K_4^- K(t - t_0) \quad (2.39)$$

em que K_3 e $K(t, t_0)$ são os mesmos do coeficiente de fluência, e K_1^- e K_4^- dependem dos mesmos parâmetros que seus correspondentes K_1 e K_4 . No modelo do ACI 78:

(2.40)

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = 780 \times 10^{-6} K_5 K_1^- K_4^- K_3^- K_6^- K_7^- K_8 \bar{K}(t - t_0)$$

fórmula esta análoga àquela anterior para fluência. O modelo do MC - 78 para quantificar a retração é dado por:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{1s} \varepsilon_{2s} \left[\beta_s(t) - \beta_s(t_0) \right] \quad (2.41)$$

em que ε_{1s} e ε_{2s} dependem respectivamente da umidade relativa do ambiente e da espessura fictícia da peça; os valores $\beta_s(t)$ e $\beta_s(t_0)$ tem em conta a evolução da retração com o tempo.

O modelo de Bazant e Panulla é descrito através da fórmula:

$$E_{cs}(t, t_{cs,0}) = k_1'' \varepsilon_{cs,\infty} \left[\frac{t - t_{cs,0}}{t \left(\frac{1}{2} cs \right) + (t - t_{cs,0})} \right]^{1/2} \quad (2.42)$$

em que k_1'' depende da umidade relativa e o valor da retração final depende dos parâmetros definidores da composição do concreto.

O MC - 90 do CEB/FIP propõe a expressão:

$$\epsilon_{cs}(t, t_s) = E_{cs,0} \beta_s(t - t_s) \quad (2.43)$$

análoga àquela da fluência, onde o multiplicando é o valor básico do coeficiente de retração e o multiplicador é um coeficiente que descreve a evolução da retração com o tempo (veja-se o item 2.1.6.4.4 do MC - 90, onde se encontra as expressões para esses coeficientes).

O fato da tensão não ser constante nas estruturas de concreto armado deve ser levado em consideração na análise do comportamento dessa estrutura ao longo do tempo. Tendo-se em conta a construção de uma estrutura em diferentes etapas (por exemplo: pontes construídas em balanços sucessivos, em que se utilizam concretos com idades diferentes e se impõe, nas diferentes fases, variações de tensão), é fundamental proceder-se a análise do comportamento estrutural mediante um processo incremental no tempo. Vários pesquisadores desenvolveram programas para tratar desse tema: Kang e Scordelis^{71,72}, Ghali e Elbadry^{50,51,59}, e outros, como aqueles citados em Camara²¹, como Catarino, Virtuoso, etc. . Pode-se mencionar também o trabalho de Tadros, Ghali e Dilger, citado em Camara²¹, e em Ghali e Favre⁶⁰.

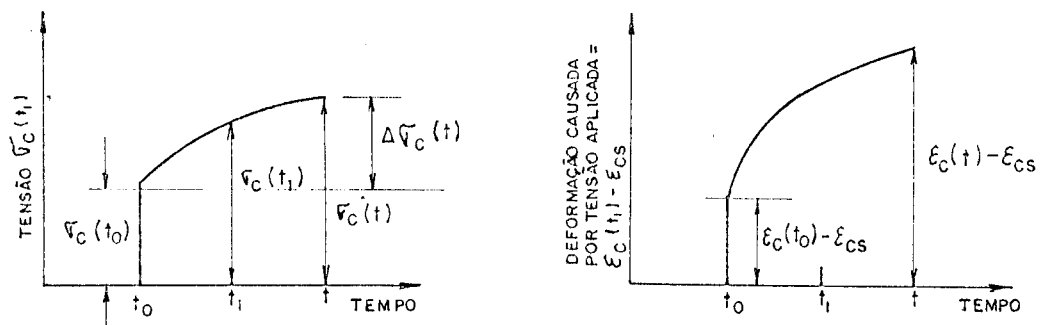
Uma equação como a (2.32) implica na hipótese de que a deformação total, composta por soma das parcelas instantânea e de fluência, é proporcional à tensão aplicada. A relação linear assim descrita, geralmente correta para o padrão de tensões que se encontra em condições de serviço, permite a superposição com deformações provindas de incremento de tensões e da retração³.

³Amaral² observa que essa aproximação tem o mérito da simplicidade, mas não da precisão: fluência e retração não são fenômenos independentes para os quais se possa aplicar o princípio da superposição de efeitos, já que, diz, o efeito da retração sobre a fluência é aumentar o valor dela. No caso de muitas estruturas, porém, fluência e retração ocorrem simultaneamente, e o tratamento das duas juntas é frequentemente conveniente do ponto de vista prático.

Assim, quando há variação de tensões ao longo do tempo, a deformação total do concreto devido à tensão aplicada e à retração é dada por (ver Fig. 2.5):

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \left[1 + \phi(t, t_0) \right] + \int_{\sigma_c(t_0)}^{\sigma_c(t)} \frac{1 + \phi(t, t_1)}{E_c(t_1)} d\sigma_c(t_1) + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \quad (2.44)$$

onde o instante t_1 é intermediário entre as idades t_0 de aplicação da carga constante e t , onde se quer conhecer a deformação; $d\sigma_c(t_1)$ é a variação (incremento ou decremento) de tensão aplicada no instante t_1 , e $\phi(t, t_1)$ é o coeficiente de fluência no instante t para carga aplicada em t_1 .



- FIG. 2.5 - Tensão e deformação em elemento de concreto submetido a tensão uniaxial variável ao longo do tempo.

A integral na equação anterior representa o efeito (deformação instantânea + fluência) da variação $\Delta\sigma_c(t)$, imposta gradualmente durante o período t_0 a t ; essa graduação produz fluência menor que aquela que ocorreria se a variação fosse aplicada totalmente no instante t_0 e mantida durante todo o período t_0 a t .

Para eliminar a integral, embora mantendo a graduação, supor-se-a aqui aplicação instantânea de $\Delta\sigma_c(t)$ no instante t_0 , corrigindo-se, porém, o coeficiente de fluência mediante a aplicação de um "coeficiente de idade" adimensional χ , menor que 1; com isso, a equação anterior pode ser reescrita:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} [1 + \phi(t, t_0)] + \frac{\Delta\sigma_c(t)}{E_c(t_0)} [1 + \chi \phi(t, t_0)] + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \quad (2.45)$$

A expressão do coeficiente $\chi = \chi(t, t_0)$ depende do modelo de quantificação dos efeitos da fluência. Tal expressão pode ser encontrada, por exemplo, em Ghali e Favre⁶⁰ ou no Manual do CEB³⁴; em ambas as publicações encontra-se tabelas e gráficos para o coeficiente χ . Para efeitos computacionais, χ pode ser inclusive adotado: seu valor geralmente varia entre 0,6 e 0,9; χ tem uma importância maior no caso de aplicação de cargas antes dos 28 dias de idade do concreto, já que, nesse caso, é grande a variação do coeficiente de fluência em relação ao seu valor inicial.

Denomina-se módulo de elasticidade ajustado o valor:

$$\bar{E}_c(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi \phi(t, t_0)} \quad (2.46)$$

a ser usado no cálculo dos incrementos de deformação causados por tensões variáveis ao longo do tempo.

No que diz respeito à comparação, o coeficiente χ é equivalente ao coeficiente β_{cc} do MC - 90 (veja-se as equações 2.12 a 2.14). Notar que ambos os coeficientes χ e β_{cc} são dados para se levar em conta a menor deformabilidade da estrutura para as variações de tensões ao longo do tempo.

II.2.2 - ARMADURAS.

II.2.2.1 - ARMADURAS PASSIVAS (AÇOS PARA CONCRETO ARMADO).

As propriedades do aço comum geralmente não são dependentes das condições ambientais ou do tempo. Assim, na definição de suas propriedades (na análise de estruturas de concreto armado), é suficiente o conhecimento da sua relação tensão - deformação. Para as ações de serviço é fundamental garantir a não plastificação das armaduras; portanto, para estas ações o comportamento do aço segue a lei de Hooke:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad (2.47)$$

tendo como limite o início da plastificação para o par:

$$(\sigma, \varepsilon) = (f_{yk}, \varepsilon_{yk}) \quad (2.48)$$

O módulo de elasticidade é considerado constante ($E_s = 200$ GPa, MC - 78³⁷ e MC - 90³⁵ do CEB; ou $E_s = 210$ GPa, NBR - 6118⁹). Diferentemente do MC - 78 e da NBR 6118, no MC - 90 do CEB não são apresentados os diagramas tensão-deformação para as diferentes classes de aços. Como simplificação, diagramas reais podem, para efeito de cálculo, ser substituídos por um diagrama idealizado (ver Fig. 2.6.a), no qual é permitido substituir o ramo inclinado por uma reta horizontal (para verificações locais e para dimensionamento da seção transversal). No diagrama, f_{yk} é a tensão característica de escoamento, f_{tk} é a resistência característica à tração e ε_{uk} é a deformação característica total sob carga máxima.

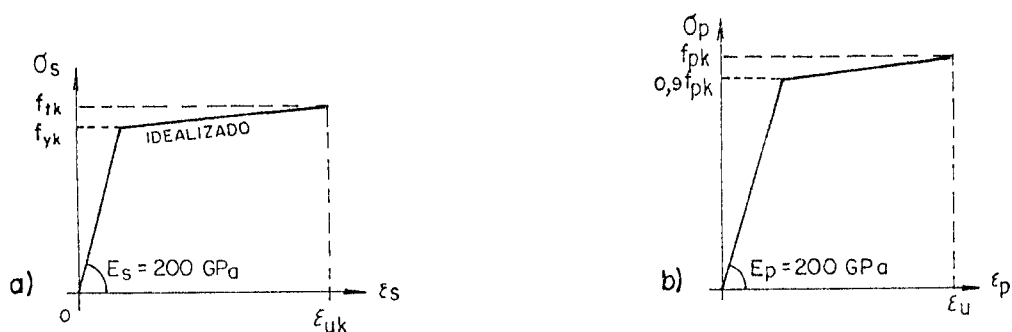
II.2.2.2 - ARMADURAS ATIVAS (AÇOS DE PROTENSÃO).

Além da grande diferença no valor da resistência à tração, a curva tensão-deformação do aço de protensão é diferente da do aço comum, já que não tem patamar de escoamento definido (MC - 78³⁷ do CEB, NBR 7197⁷); o escoamento se desenvolve mais gradualmente, e na

região não elástica a curva continua a crescer suavemente, até atingir o valor da resistência à tração.

O MC - 90³⁵ do CEB permite usar um diagrama tensão-deformação simplificado, bilinear, no intervalo de temperatura de -20 a 100°C (ver Fig. 2.6.b).

Neste diagrama, o valor do alongamento último ϵ_u deve ser tomado igual a 70% do valor característico sob carga máxima ϵ_{puk} e o módulo de elasticidade deve ser tomado igual a 200 GPa; f_{ck} é a resistência característica à tração.



- FIG 2.6 - Diagramas tensão-deformação idealizados fornecidos pelo MC-90 do CEB, conforme Vasconcelos¹³⁸:

a) Aços para concreto armado; b) Aços para concreto protendido.

Outro fator importante a influir nas propriedades das armaduras de protensão é a relaxação do aço com o tempo: quando submetido a tensão maior que 50% de sua resistência, o aço exibe alguma fluência (na prática, armaduras de protensão podem, em condições de serviço, ser submetidas a tensões entre 50 a 80% de sua resistência, devendo então se considerar a relaxação do aço).

A relaxação de um aço é definida experimentalmente para um dado período de tempo, em geral 1000 horas, sob extensão constante e para um dado valor de tensão inicial: o resultado assim obtido é denominado por Ghali e Favre⁶⁰ relaxação intrínseca ou pura (depende da qualidade do aço). Em geral, o produtor de aços de protensão deve informar as características reológicas de seus aços. O MC - 78³⁷ do

CEB e a NBR 7197⁷ definem duas classes de aços para protensão (RN, relaxação normal e RB, relaxação baixa) e exprimem a relaxação como uma fração da tensão inicial σ_{p0} . O MC -90³⁵ do CEB introduz uma terceira classe relativa apenas a barras, com valores intermediários entre as classes anteriores. Na ausência de testes, as três normas citadas sugerem os valores de relaxação intrínseca ou pura dados na tabela II.2, especificados para 1000 horas a 20°C (para o MC - 78, $0,5 \times 10^6$ horas, tempo após o qual pode-se considerar que a relaxação final tenha sido atingida). Notar que a relaxação intrínseca aumenta sensivelmente a medida que a tensão inicial se aproxima da resistência do aço.

Tabela 2.2: Valores percentuais das perdas de tensão por relaxação pura; valores intermediários são obtidos por interpolação linear; para tensões inferiores a $0,5 f_{ptk}$ admite-se que não haja perda de tensão por relaxação.

TENSÃO INICIAL	CLASSE DE RELAXAÇÃO		
	CLASSE 1 (NORMAL)	CLASSE 2 (BAIXA)	CLASSE 3 (BARRAS)
$\sigma_{p0} = 0,60 f_{ptk}$	6*	3	
	4,5**	1,5	
	4,5***	1,0	1,5
$\sigma_{p0} = 0,70 f_{ptk}$	1,2	6	
	7,0	2,5	
	8,0	2,5	4,0
$\sigma_{p0} = 0,80 f_{ptk}$	25	10	
	12,0	3,5	
	12,0	4,5	7,0

* MC - 78

** NBR-7197

*** MC - 90

Ghali e Favre⁶⁰ fornecem a seguinte equação para relacionar a relaxação intrínseca última com a tensão inicial:

$$\frac{\Delta\sigma_{pr\infty}}{\sigma_{p0}} = -\eta (\lambda - 0,4)^2 \quad (2.49)$$

$$\text{onde } \lambda = \frac{\sigma_{p0}}{f_{ptk}} \quad (2.50)$$

com $\eta = 1,5$ (aços RN) ou $\eta = 0,66$ (aços RB), de acordo com o MC - 78 do CEB. O valor da relaxação ao final de uma idade t_2 , sob uma dada tensão, pode ser estimado a partir da perda ao fim de um tempo t_1 em que a relaxação seja conhecida (sob a mesma tensão) através da fórmula:

$$\frac{\Delta\sigma_{pr}(t_2)}{\Delta\sigma_{pr}(t_1)} = \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^\beta \quad (2.51)$$

onde β varia entre 0,15 a 0,25 (em geral, $\beta = 0,2$; a NBR - 7197 adota $\beta = 0,15$). Normalmente, $t_1 = 1000$ horas ($t_2 > 1000$ horas). No MC - 90, foi suprimida esta fórmula, prescrevendo-se apenas que o valor da relaxação a longo prazo (50 anos ou mais) seja igual a três vezes o valor da relaxação após 1000 horas (ver tabela 2.2); o novo código do CEB traz também uma fórmula para a estimativa da relaxação após 30 anos (ver item 2.3.4.5 do MC - 90).

O valor da relaxação pura é altamente dependente da tensão inicial. Um estudo comparativo de dois cabos submetidos à mesma tensão inicial, sendo um num teste de relaxação pura e outro num elemento de concreto protendido, mostra que a força neste último diminui mais rapidamente devido aos efeitos de fluência e retração do concreto. A perda causada por esses dois fatores tem sobre a relaxação o mesmo efeito causado por uma tensão inicial menor; assim, o valor da relaxação a ser usado na estimativa de perdas em uma estrutura de concreto protendido deve ser menor que o valor da relaxação pura.

No MC - 78, adota-se para essa estimativa o valor da relaxação intrínseca correspondente, porem, à tensão inicial

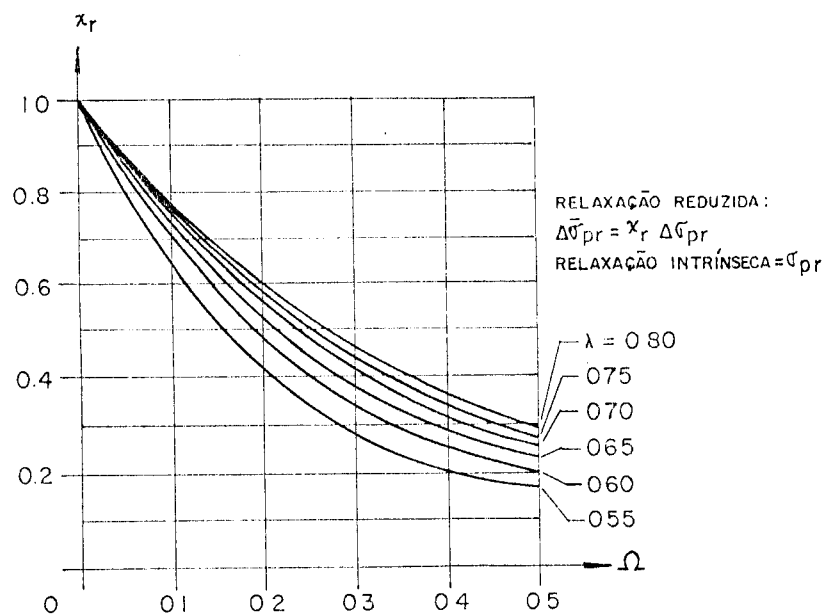
reduzida (igual ao valor real da tensão inicial menos uma fração da perda total obtida pela combinação dos efeitos de fluência, retração e relaxação; em geral, essa fração é 0,3). Ghali e Favre⁶⁰ apresentam curvas (ver Fig. 2.7) que permitem avaliar a perda real de relaxação $\Delta\sigma_{pr}$ a partir do valor da relaxação pura pela fórmula:

$$\Delta\bar{\sigma}_{pr} = \chi_r \Delta\sigma_{pr} \quad (2.52)$$

onde χ_r é um coeficiente adimensional menor que 1, obtido do gráfico em função de λ (ver equação 2.50) e de Ω , onde

$$\Omega = -\frac{\Delta\sigma_{ps} - \Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{p0}} \quad (2.53)$$

onde $\Delta\sigma_{pr}$ é o valor da relaxação pura e $\Delta\sigma_{ps}$ é a variação de tensões no aço de protensão devido ao efeito combinado de fluência, retração e relaxação.



- FIG 2.7 - Coeficiente reductor da relaxação χ_r -

II.3 - FORMULAÇÃO GERAL DE CÁLCULO DOS ESTADOS DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO.

II.3.1 - INTRODUÇÃO.

A metodologia que se segue foi apresentada originalmente no livro de Ghali e Favre⁶⁰; recomenda-se também para esse estudo a leitura de outros trabalhos, como o de Camara²¹, bem como o Manual do CEB³⁶.

Os esforços aplicados à seção referem-se a um ponto que se mantém constante no tempo, apesar das variações das características dos materiais. É vantajoso, em termos de cálculo, tomar-se para esse ponto o centro de gravidade da seção bruta de concreto, já que, se se adotasse o centro de gravidade da seção homogeneizada, o ponto de referência variaria em cada seção ao longo da barra e, ainda, mudaria com a história de carga da estrutura.

Seções transversais de vigas ou barras de pórtico são compostas de três tipos de material: concreto, aço de protensão (quando houver) e armadura passiva ou frouxa. Em alguns casos, numa mesma seção transversal emprega-se concreto de mais de um tipo (exemplo: utilização de vigas pré-fabricadas com laje concretada no local de uma ponte ou viaduto). Com o concreto sofrendo fenômenos como retração e fluência e o aço de protensão perdendo tensão por relaxação, os componentes de uma mesma seção transversal tendem a ter deformações diferentes, o que é atenuado pela aderência, havendo, porém, com o tempo, variação de tensões nos materiais, à medida que aqueles fenômenos se desenvolvem.

Assume-se que as seções aqui consideradas tenham um eixo de simetria e sejam submetidas à flexão e a uma força normal (devido, por exemplo, à protensão). Também por hipótese, presume-se perfeita aderência entre aço e concreto (deformações, portanto, supostas iguais em qualquer fibra). As seções planas permanecem planas após as deformações.

Adota-se aqui a convenção de sinais usual da Resistência dos Materiais: força normal N positiva se de tração, o momento fletor M produzindo tração nas fibras inferiores (no caso de viga

horizontal) e a curvatura correspondente ψ são valores positivos, etc. .

Para a análise de uma seção de concreto armado ou protendido, procede-se à sua homogeneização de forma a obter uma seção 'equivalente, composta de um só material (em geral o concreto), onde a área dos outros materiais é dada por:

$$A_i^h = \frac{E_i A_i}{E_r} \quad (2.54)$$

em que A_i e E_i são, respectivamente, a área e o módulo de elasticidade iniciais do material e E_r é o módulo de elasticidade do material tomado como referência. Se se tratar do concreto, para uma aplicação instantânea de carga ter-se-a:

$$E_r = E_{co} \quad (2.55)$$

e, se se tratar de uma análise num dado intervalo de tempo (t, t_0):

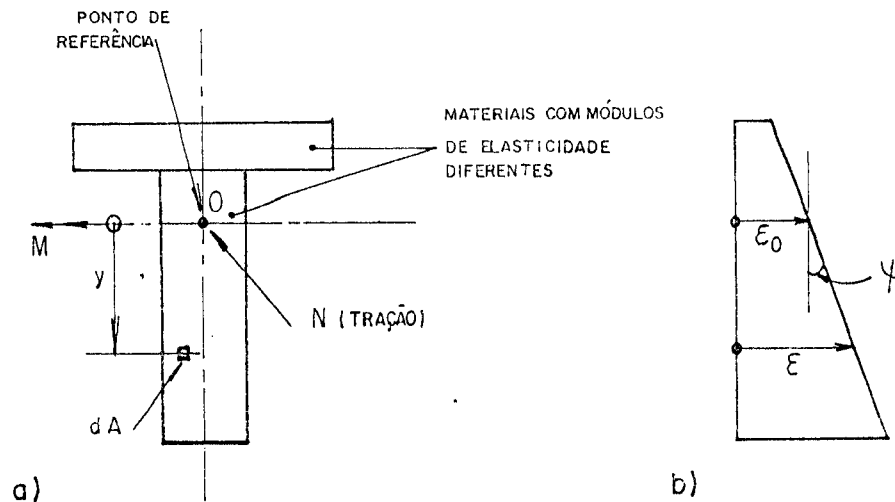
$$E_r = \bar{E}_c = \frac{E_{co}}{1 + \chi \phi (t - t_0)} \quad (2.56)$$

(ver equação 2.46).

II.3.2 - SEÇÃO NÃO FISSURADA.

II.3.2.1 - TENSÕES, DEFORMAÇÕES E CURVATURAS.

A figura 2.8.a mostra a seção transversal de um elemento de barra composto de materiais diferentes e tendo um eixo de simetria. Para analisar as tensões existentes na seção real, substitue-se a mesma por uma seção homogeneizada, através da adoção de um módulo de elasticidade de referência E_r (geralmente, o módulo de elasticidade do concreto de uma das partes da seção).



- FIG. 2.8 - Análise da distribuição de deformações numa seção composta:

a) convenção de sinais;

b) distribuição de deformações.

Suponha-se a seção submetida a uma força normal N , aplicada em algum ponto do eixo de simetria. Tal situação é estaticamente equivalente à aplicação de um sistema composto da normal N no ponto O de referência em conjunto com o momento fletor M (ver Fig. 2.8.a). Em geral, no equacionamento de problemas desse tipo toma-se o ponto O de referência como sendo o centróide da seção homogeneizada, mas aqui O é um ponto arbitrário do eixo de simetria.

Com a hipótese da seção permanecer plana após a deformação, a deformação da seção é linear (ver Fig. 2.8.b) e numa fibra qualquer situada à distância y do ponto O de referência, tem-se a deformação:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \psi \cdot y \quad (2.57)$$

onde ϵ_0 é a deformação no ponto de referência e ψ é a curvatura. Supondo que a fibra considerada está na parte i da seção composta, a tensão nessa fibra será dada por:

$$\sigma = E_i (\epsilon_0 + \psi \cdot y) \quad (2.58)$$

Integrando sobre a área da seção e tomando o momento sobre um eixo através de O , tem-se:

$$N = \int \sigma \cdot dA \quad (2.59)$$

$$M = \int \sigma \cdot y \cdot dA \quad (2.60)$$

Estendendo-se o procedimento acima para todas as m partes da seção transversal, por substituição obtem-se:

$$N = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^m E_i \int dA + \psi \cdot \sum_{i=1}^m E_i \int y \cdot dA = E_r (A \varepsilon_0 + B\psi) \quad (2.61)$$

$$M = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^m E_i \int y \cdot dA + \psi \cdot \sum_{i=1}^m E_i \int y^2 \cdot dA = E_r (B \varepsilon_0 + I\psi) \quad (2.62)$$

onde A , B e I , são, respectivamente, a área, o momento estático e o momento de inércia da seção homogeneizada em relação ao ponto O de referência. Para uma seção composta, A , B e I são obtidos pela soma da contribuição das partes, ou seja:

$$A = \sum_{i=1}^m \left[\frac{E_i}{E_r} A_i \right] \quad (2.63)$$

$$B = \sum_{i=1}^m \left[\frac{E_i}{E_r} B_i \right] \quad (2.64)$$

$$I = \sum_{i=1}^m \left[\frac{E_i}{E_r} I_i \right] \quad (2.65)$$

onde A_i , B_i e I_i são, respectivamente, a área, o momento estático e o momento de inércia da parte i em relação ao ponto O de referência. Uma camada de armadura, por exemplo, pode ser tratada como sendo uma parte; A_i , B_i e I_i , por serem grandezas geométricas, mantem-se invariáveis durante as diferentes fases de análise ao longo do tempo. As equações (2.61) e (2.62) podem ser escritas na forma matricial, tendo-se:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = E_r \begin{bmatrix} A & B \\ B & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \psi^0 \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

Invertendo-se esta relação, obtém-se as deformações de uma seção devido à aplicação de um par de esforços externos (N, M):

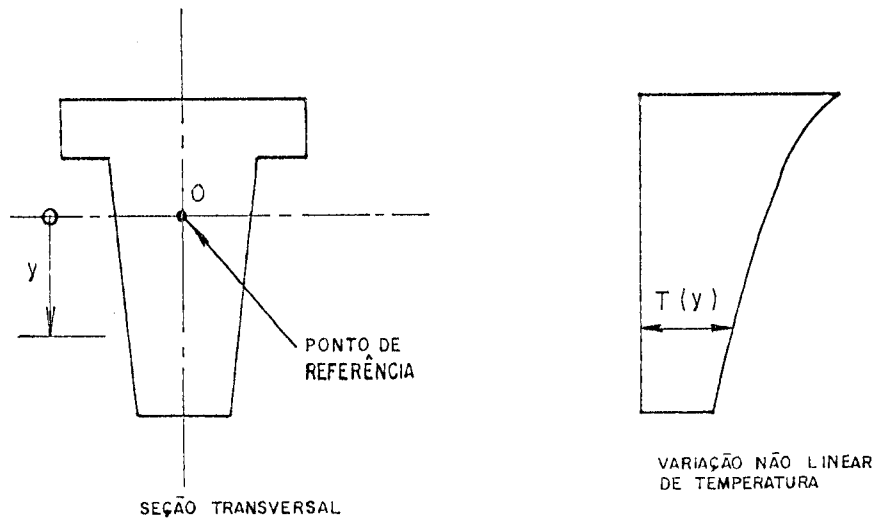
$$\begin{Bmatrix} \epsilon \\ \psi^0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_r (AI - B^2)} \begin{bmatrix} I & -B \\ -B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

O fato das relações (N, ϵ_0) e (M, ψ) serem interdependentes resulta do fato da escolha do ponto de referência não ser o centro de gravidade da seção homogeneizada, como já justificado; se assim fosse, $B = 0$ e a equação acima se escreveria:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon \\ \psi^0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_r} \begin{Bmatrix} N/A \\ M/I \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

II.3.2.2 - TENSÃO E DEFORMAÇÃO DEVIDO A UMA VARIAÇÃO NÃO-LINEAR DE TEMPERATURA.

Esta formulação, segundo Camara²¹, é extremamente eficaz na análise de deformações da seção, sejam elas instantâneas ou impostas (variações de temperatura, protensão, fluência e retração do concreto, relaxação do aço). A análise da variação de tensões produzida numa seção por todos esses fenômenos pode ser feita de maneira semelhante. Considere-se, então, visando equacioná-los, o estado de tensão e deformação numa seção submetida a um aumento de temperatura variando de forma arbitrária com a altura da mesma (ver figura 2.9).



- FIG. 2.9 - Elemento submetido a aumento de temperatura com variação não-linear com a altura da seção transversal, em estrutura isostática.

Numa estrutura estaticamente determinada (pórtico isostático, por exemplo), variação uniforme ou linear de temperatura não produziria tensões na seção. Quando, porém, a variação for não-linear (Fig. 2.9), aparecem tensões do tipo auto-equilibradas, não havendo, portanto, variação das forças internas no elemento. Se a estrutura fosse estaticamente indeterminada, os esforços produzidos pela variação não-linear de temperatura seriam também auto-equilibrados, mas resultariam em forças internas (e correspondentes tensões) estaticamente indeterminadas. O equacionamento que se segue pressupõe estrutura isostática com variação não-linear de temperatura sobre a altura da seção.

A provável deformação que ocorreria numa fibra qualquer (se ela estivesse livre para se deformar) seria:

$$\epsilon_f = \alpha_t \cdot T \quad (2.69)$$

onde $T = T(y)$ é o aumento de temperatura em qualquer fibra à distância y do ponto O de referência e α_t é o coeficiente de dilatação térmica.

Se essa deformação fosse impedida, a tensão assim produzida seria:

$$\sigma_{rest} = -E \cdot \varepsilon_f \quad (2.70)$$

onde E é o módulo de elasticidade, considerado aqui constante em toda a seção.

A resultante dessa tensão pode ser representada por uma força axial ΔN aplicada em O, em conjunto com o momento fletor ΔM , dados por:

$$\Delta N = \int \sigma_{rest} \, dA \quad (2.71)$$

$$\Delta M = \int \sigma_{rest} \cdot y \, dA \quad (2.72)$$

que, com o valor de σ_{rest} dado por (2.70), resulta:

$$\Delta N = - \int E \varepsilon_f \, dA \quad (2.73)$$

$$\Delta M = - \int E \cdot \varepsilon_f \cdot y \, dA \quad (2.74)$$

A garantia da compatibilização da seção e conseqüente manutenção do equilíbrio é feita impedindo a deformação livre do concreto através da aplicação, com sinal contrário, de um par de esforços (ΔN , ΔM); com o auxílio das equações (2.67) e (2.58), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_0 \\ \Delta \psi \end{Bmatrix} = \frac{1}{E (AI - B^2)} \begin{bmatrix} I & -B \\ -B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\Delta N \\ -\Delta M \end{Bmatrix} \quad (2.75)$$

$$\Delta \sigma = E [\Delta \varepsilon_0 + (\Delta \psi) y] \quad (2.76)$$

Se O estiver no centro de gravidade da seção, B é nulo e a equação (2.75) se reescreve:

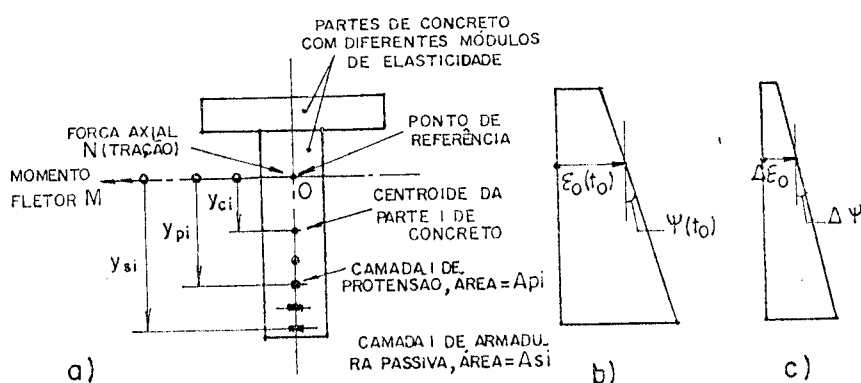
$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_0 \\ \Delta \psi \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} -\Delta N/A \\ -\Delta M/I \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

A tensão real devido à variação de temperatura é dada pela soma das equações (2.70) e (2.76):

$$\sigma = E \left[-\varepsilon_f + \Delta\varepsilon_0 + (\Delta\psi)y \right] \quad (2.78)$$

11.3.2.3 - VARIACÃO DAS TENSÕES E DEFORMAÇÕES COM O TEMPO EM SEÇÕES NÃO FISSURADAS.

A análise da variação de tensões devido à retração e fluência do concreto e à relaxação do aço de protensão pode ser feita usando-se esse mesmo equacionamento. Para isso, considere-se a seção dada (Fig. 2.10.1) submetida à idade t_0 à força de protensão P , uma carga axial N atuando sobre um ponto arbitrário de referência O no eixo de simetria e um momento fletor M . Por hipótese, são conhecidos: as dimensões da seção, os valores de P , N e M , o módulo de elasticidade do concreto $E_{c,0}$ no instante t_0 , a retração $\varepsilon_{cs}(t, t_0)$ que ocorreria em qualquer fibra livre para se deformar, o coeficiente de fluência $\varphi(t, t_0)$, o coeficiente de idade $\chi(t, t_0)$ e a relaxação intrínseca $\Delta\sigma_{pr}(t, t_0)$. O valor reduzido da relaxação $\Delta\bar{\sigma}_{pr} = \chi_r (\Delta\sigma_{pr})$, aqui suposto conhecido, será usado na análise. O fator de redução χ_r deve ser adotado no início da análise e, se necessário, ajustado posteriormente.



- FIG. 2.10 - Análise das tensões e deformações com o tempo numa seção composta; todas as variáveis são mostradas em seu sentido positivo:

- a) Seção transversal;
- b) Deformações no instante t_0 ;
- c) Variação das deformações no período $(t - t_0)$.

11.3.2.3.1 - TENSÃO E DEFORMAÇÃO INSTANTÂNEAS (INSTANTE t_0).

Antes de se aplicar o equacionamento anterior, é necessário combinar N e M com as forças de protensão, obtendo-se uma força normal equivalente N_{eq} aplicada em O e um momento M_{eq} :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_{eq} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N - \sum P_i \\ M - \sum P_i y_{psi} \end{Bmatrix} \quad (2.79)$$

onde o subscrito i indica a camada i do aço de protensão e y_{psi} a distância entre o seu centro de gravidade e o ponto O de referência. Por hipótese, supõe-se aqui protensão aplicada num único estágio. A deformação axial instantânea e correspondente curvatura, imediatamente após a protensão, com o auxílio da equação (2.67) são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_0^0 \\ \psi^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \psi \end{Bmatrix} t_0 = \frac{1}{E_r (AI - B^2)} \begin{bmatrix} I & -B \\ -B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_{eq} \end{Bmatrix} \quad (2.80)$$

onde A, B e I são, respectivamente, a área, o momento estático e o momento de inércia da seção homogeneizada no instante t_0 ; o módulo de elasticidade do concreto aqui utilizado é $E_{c,0}$ para as partes individuais que compõe a seção; E_r é o módulo de referência, geralmente tomado como aquele de uma das partes da seção composta. Quando o ponto O coincide com o centro de gravidade da seção homogeneizada, a equação anterior se escreve:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_0^0 \\ \psi^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \psi \end{Bmatrix} t_0 = \frac{1}{E_r} \cdot \begin{Bmatrix} N/A \\ M_{eq}/I \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

As deformações e tensões instantâneas em qualquer fibra da seção são dadas por:

$$\epsilon_c^0 = \epsilon_0^0 + \psi^0 y \quad (2.82)$$

$$\sigma_c^0 = [E_{c,0}]_i [\epsilon_0^0 + \psi^0 y] \quad (2.83)$$

onde o subscrito i identifica a parte do concreto à qual pertence a fibra considerada e y é a distância entre o ponto O e a mesma.

A tensão instantânea na armadura passiva é dada por:

$$\sigma_s^0 = E_s [\varepsilon_0^0 + \psi^0 y] \quad (2.84)$$

No caso de protensão com aderência inicial, a tensão no aço de protensão, imediatamente após a mesma, é dada por:

$$\sigma_p^0 = \sigma_p^{in} + E_p [\varepsilon_0^0 + \psi^0 y] \quad (2.85)$$

onde σ_p^{in} é a tensão antes da transferência. O segundo termo dessa equação representa a parcela devido ao encurtamento imediato do concreto.

No caso de protensão com aderência posterior não há perdas imediatas (a tensão no aço de protensão é a mesma, antes e depois da transferência).

II.3.2.3.2 - VARIACÃO DAS TENSÕES E DEFORMAÇÕES NO PERÍODO (t_0 a t).

Conhecidas as deformações e tensões iniciais, pode-se analisar agora a redistribuição de tensões que ocorrerá na seção ao longo do tempo, devido à fluência e retração do concreto e a relaxação do aço de protensão.

A variação das deformações durante o período t_0 a t (Fig. 2.10.c) é definida pelos incrementos $\Delta\varepsilon_0$ e $\Delta\psi$, os quais podem ser obtidos de forma análoga à variação de temperatura, isto é, a deformação livre da seção é impedida pela aplicação de esforços ΔN e ΔM , os quais são posteriormente removidos com a aplicação de esforços iguais e opostos na seção composta, obtendo-se então a variação das deformações:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_0 \\ \Delta\psi^0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\bar{E}_c (\bar{A}\bar{I} - \bar{B}^2)} \begin{bmatrix} \bar{I} & -\bar{B} \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\Delta N \\ -\Delta M \end{Bmatrix} \quad (2.86)$$

onde o módulo de elasticidade \bar{E}_c do concreto adotado é o módulo ajustado, tendo em vista o caráter gradual da aplicação da

deformação imposta; \bar{A} , \bar{B} e \bar{I} são respectivamente, a área, o momento estático e a inércia da seção homogeneizada "ajustada". O par de esforços é calculado pela soma de três termos, devidos, respectivamente, à fluência, retração e relaxação:

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_c + \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_s + \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_r \quad (2.87)$$

Se a fluência pudesse ocorrer livremente no período, a variação das deformações seria dada pelos incrementos $\varnothing(t, t_0)\varepsilon_0^0$ (axial) e $\varnothing(t, t_0)\psi^0$ (curvatura). As forças necessárias para impedir essas deformações são obtidas com o auxílio da (2.66):

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_c = - \sum_{i=1}^m \left\{ \bar{E}_c \phi \begin{bmatrix} A & B \\ B_c & I_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^0 \\ \psi^0 \end{Bmatrix} \right\}_i \quad (2.88)$$

O subscrito i indica a parte i de uma seção de concreto composta de m partes. Analogamente, o conjunto de esforços necessários para impedir as deformações livres devido à retração do concreto e relaxação do aço de protensão são dados por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_s = - \sum_{i=1}^m \left\{ \bar{E}_c \varepsilon_{cs} \begin{bmatrix} A \\ B_c \end{bmatrix} \right\}_i \quad (2.89)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_r = \sum \begin{bmatrix} A_p & \Delta\bar{\sigma}_{pr} \\ A_p \cdot y_p & \Delta\bar{\sigma}_{pr} \end{bmatrix}_i \quad (2.90)$$

onde, na penúltima equação, $\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cs}(t, t_0)$ é a retração livre no período e, na última, o índice i se refere a uma camada do aço de protensão de área A_p , a qual se encontra a distância y_p do ponto O de referência; $\Delta\bar{\sigma}_{pr}$ é a relaxação reduzida no período (quantidade negativa, por representar perda de tração).

A tensão no concreto necessária para impedir fluência e retração em qualquer fibra é dada por:

$$\sigma_{rest} = - \bar{E}_c [\varnothing(t, t_0)\varepsilon_c^0 + \varepsilon'_{cs}] \quad (2.91)$$

onde ε_c^0 é a deformação instantânea já determinada.

Finalmente, as variações de tensão na seção no intervalo de tempo (t, t_0) são dadas por superposição de efeitos; tem-se, então, respectivamente, no concreto (numa fibra qualquer de uma parte i), no aço de protensão e na armadura passiva:

$$\Delta\sigma_c = \sigma_{rest} + \bar{E}_{ci} (\Delta\varepsilon_0 + \gamma \Delta\psi) \quad (2.92)$$

$$\Delta\sigma_p = \Delta\bar{\sigma}_{pr} + E_p (\Delta\varepsilon_0 + \gamma_p \Delta\psi) \quad (2.93)$$

$$\Delta\sigma_s = E_s (\Delta\varepsilon_0 + \gamma \Delta\psi) \quad (2.94)$$

Na obtenção das equações (2.88) e (2.91) supõe-se que todas as cargas sejam aplicadas no instante t_0 . Quando houver carregamentos ao longo do tempo, as parcelas $\{\varepsilon_0, \psi\}$ na primeira delas e (σ_c) na segunda devem ser substituída pela soma de produtos das deformações instantâneas (provocadas a cada novo carregamento) por coeficiente de fluência apropriados, como recomendam Ghali e Favre⁶⁰.

II.3.3 - SEÇÃO FISSURADA.

Se, durante a análise da seção, a tensão na fibra mais tracionada atingir a resistência à tração do concreto, é necessário calcular a redistribuição de tensões que se verifica, já que, quando isto acontece, elementos de concreto armado ou parcialmente protendido apresentam fissuração. Após fissurar, as tensões no concreto normal ao plano da fissura não podem ser de tração. Assim, o equilíbrio das forças internas nessa seção é dado somente pela armadura e pela parte não fissurada do concreto, a qual estará submetida principalmente à compressão (os esforços de tração ainda existentes nessa região não superam a resistência à tração do concreto). Entre fissuras, entretanto, o concreto tracionado também contribui para o equilíbrio das forças internas e, portanto, para a rigidez do elemento.

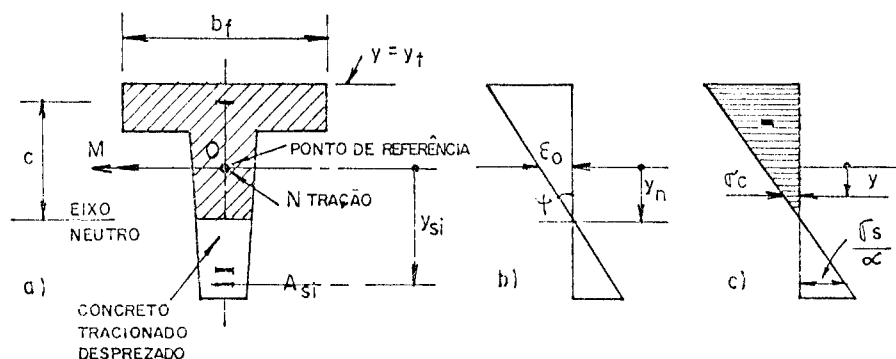
Na seção fissurada, despreza-se o concreto da zona tracionada. Por hipótese, as seções planas permanecem planas após a

deformação e as deformações no aço e no concreto são compatíveis. A área homogeneizada da seção fissurada, a ser levada em conta no equilíbrio das forças internas, é composta pela área da zona comprimida de concreto (A_c) e pela contribuição da armadura (αA_s); $\alpha = E_s/E_c$, onde E_s é o módulo de elasticidade da armadura e E_c o módulo de elasticidade do concreto no instante da aplicação do carregamento; se se considerar os efeitos de fluência e retração, E_c será o módulo ajustado.

Devido à fluência e retração, a altura da zona comprimida muda, portanto A_c varia ao longo do tempo. Porém, na análise das variações de tensão e deformação devido à fluência e retração, A_c é considerada constante e igual à área da zona comprimida no começo do intervalo de tempo. Essa hipótese simplifica a análise; o erro assim cometido é desprezível, segundo Ghali e Favre; o CEB também adota A_c da mesma forma.

II.3.3.1 - VARIÇÕES DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO NO INSTANTE DA FISSURAÇÃO.

Seja uma seção de concreto armado submetida a momento fletor M e força normal N aplicada num ponto O arbitrário de referência (Fig 2.11.a), de forma que o bordo superior esteja comprimido e o inferior tracionado, produzindo fissuração na face inferior.



- FIG. 2.11 - Distribuição de tensões (b) e deformações (c) em seção fissurada de concreto armado (a), Estádio II; convenção positiva.

Quando a região inferior da seção estiver comprimida e a superior tracionada, as expressões aqui deduzidas se aplicam mediante a inversão do eixo y ; nesse caso, a mesa de uma seção T estará na zona tracionada, e a mesma funcionará como retangular, para efeito de utilização dos gráficos e tabelas (Ghali e Favre, C.E.B.). Quando a seção estiver inteiramente comprimida, utilizam-se as equações deduzidas para seção não fissurada (ver item II.3.2); se inteiramente tracionada, despreza-se o concreto e as forças internas são equilibradas somente pela armadura; nesse caso, a fluência e retração do concreto não tem efeito algum na distribuição de tensões e deformações na seção.

A resultante da aplicação de M e N sobre a seção considerada (Fig 2.11.a) localiza-se num ponto de excentricidade e em relação ao ponto O de referência (no caso, e positivo indica que a resultante está abaixo de O), dado por:

$$e = \frac{M}{N} \quad (2.95)$$

As equações (2.96) a (2.106) permitem a determinação da altura c da zona comprimida; conhecido c , pode-se calcular a área, momento estático e momento de inércia da seção homogeneizada fissurada e aplicar-se as equações anteriormente desenvolvidas (seção não fissurada) para obter tensões e deformações em qualquer fibra da seção.

A deformação em qualquer fibra, a ordenada da linha neutra, a tensão no concreto em qualquer fibra e a tensão no aço em qualquer camada de armadura de ordenada y_s são dadas respectivamente por (Fig 2.11.b e 2.11.c):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + y\psi \quad (2.96)$$

$$y_n = \frac{-\varepsilon_0}{\psi} \quad (2.97)$$

$$\sigma_c = \begin{cases} E_c \left(1 - \frac{y}{y_n} \right) \varepsilon_0, & \text{para } y < y_n \\ 0, & \text{para } y \geq y_n \end{cases} \quad (2.98)$$

$$\sigma_s = E_s \left(1 - \frac{y_s}{y_n} \right) \varepsilon_0 \quad (2.99)$$

Observe que ε_0 é negativo, visto que o ponto 0 de referência é adotado na zona comprimida; integrando as tensões sobre a área da seção e tomando o momento em relação a um eixo que passa por 0, tem-se:

$$N = \varepsilon_0 \left\{ E_c \int_{y_t}^{y_n} \left(1 - \frac{y}{y_n} \right) dA + E_s \sum_{i=1}^n \left[A_{si} \left(1 - \frac{y_{si}}{y_n} \right) \right] \right\} \quad (2.100)$$

$$M = \varepsilon_0 \left\{ E_c \int_{y_t}^{y_n} y \left(1 - \frac{y}{y_n} \right) dA + E_s \sum_{i=1}^n \left[A_{si} y_{si} \left(1 - \frac{y_{si}}{y_n} \right) \right] \right\} \quad (2.101)$$

onde dA é um elemento de área na zona comprimida de concreto, y_t é a ordenada do bordo superior e n o número de camadas de armadura na seção.

Estando a seção submetida apenas ao momento fletor M , fazendo-se $N = 0$ na penúltima equação pode-se obter a posição da linha neutra y_n através de:

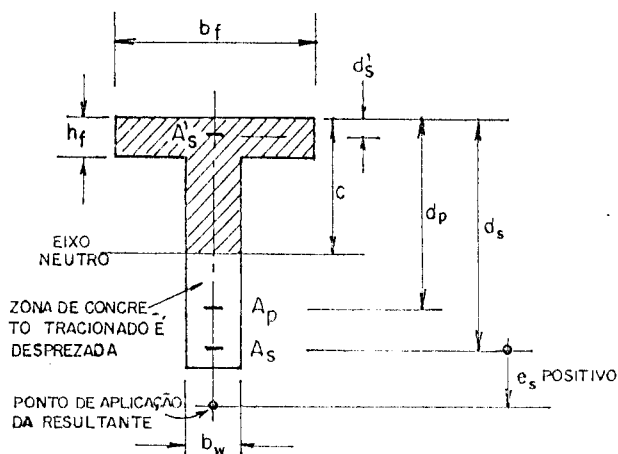
$$\int_{y_t}^{y_n} (y_n - y) dA + \alpha \sum_{i=1}^n \left[A_{si} (y_n - y_{si}) \right] = 0 \quad (2.102)$$

onde $\alpha = E_s/E_c$; N sendo nulo, o momento estático em relação à linha neutra da seção fissurada também é nulo, ou seja, o eixo neutro passa pelo centro de gravidade da seção homogeneizada fissurada; existindo força normal, não ocorre essa coincidência, e a equação a ser resolvida para obtenção da ordenada y_n da linha neutra vem da divisão daquelas equações:

$$e = \frac{\int_{y_t}^{y_n} y (y_n - y) dA + \alpha \sum_{i=1}^n \left[A_{si} y_{si} (y_n - y_{si}) \right]}{\int_{y_t}^{y_n} (y_n - y) dA + \alpha \sum_{i=1}^n \left[A_{si} (y_n - y_{si}) \right]} \quad (2.103)$$

Para uma seção transversal qualquer, o valor de y_n pode ser obtido por tentativas; a seguir as equações anteriores são aplicadas para as seções T e retangular; esse equacionamento não é válido para $y_n < y_t$.

Considere-se uma seção T (Fig. 2.12) com armadura ativa A_p (em algum ponto da zona tracionada) e armaduras passivas A_s (próxima ao bordo inferior) e A'_s (bordo superior, portanto, na região comprimida da seção); a presença de protensão implica em adicionar-se a área αA_p , quando da homogeneização da seção (onde $\alpha_p = E_p/E_c$, sendo E_p o módulo de elasticidade do aço de protensão); as equações a seguir podem ser aplicadas à seção retangular, fazendo-se $b_w = b_f$.



- FIG. 2.12 - Determinação da posição da linha neutra em seção T (estádio II).

Supondo atuar na seção apenas o momento fletor M , a aplicação da equação (2.102) fornece a equação quadrática abaixo, com a qual a altura c da zona comprimida pode ser determinada:

$$\frac{1}{2} b_w c^2 + \left[h_f (b_f - b_w) + \alpha_s A_s + \alpha_p A_p + (\alpha_s - 1) A'_s \right] c - \left[\frac{1}{2} (b_f - b_w) h_f^2 + \alpha_s A_s d_s + \alpha_p A_p d_p + (\alpha_s - 1) A'_s d'_s \right] = 0 \quad (2.104)$$

para $c \geq h_f$, onde $\alpha_s = E_s/E_c$, com E_s sendo o módulo de elasticidade da armadura passiva. A solução dessa equação é:

$$c = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}}{2a_1} \quad (2.105)$$

onde: $a_1 = b_w/2$

$$a_2 = h_f (b_f - b_w) + \alpha_s A_s + \alpha_p A_p + (\alpha_s - 1) A'_s$$

$$a_3 = -\frac{1}{2} h_f^2 (b_f - b_w) - \alpha_s A_s d_s - \alpha_p A_p d_p - (\alpha_s - 1) A'_s d'_s$$

Quando, sobre a seção, também atuar força normal N , pode-se substituir ambas as ações por sua resultante; seja e_s a excentricidade da resultante N (Fig. 2.12), medida a partir da camada A_s de armadura (e_s será, então, negativo quando estiver acima de A_s); a altura c da zona comprimida será obtida pela resolução da equação cúbica abaixo (determinada com o auxílio da equação 2.103):

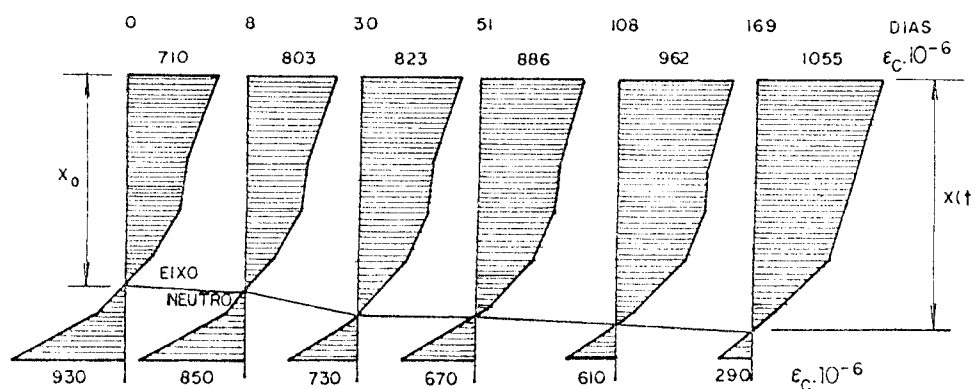
$$b_w \left(\frac{1}{2} c^2 \right) \left(d_s - \frac{c}{3} \right) + (b_f - b_w) h_f \left[c \left(d_s - \frac{h_f}{2} \right) - \frac{1}{2} h_f \left(d_s - \frac{2}{3} h_f \right) \right] + (\alpha_s - 1) A'_s (c - d'_s) (d_s - d'_s) - \alpha_p A_p (d_p - c) (d_s - d_p) + e_s \left[b_w \left(\frac{1}{2} c^2 \right) + (b_f - b_w) h_f \left(c - \frac{h_f}{2} \right) + (\alpha_s - 1) A'_s (c - d'_s) - \alpha_p A_p (d_p - c) - \alpha_s A_s (d_s - c) \right] = 0, \text{ com } c \geq h_f \quad (2.106)$$

Essa equação pode ser resolvida por tentativas ou diretamente, como indicam Ghali e Favre. Quando $c < h_f$, a seção se comporta como retangular de largura b_f , e as equações (2.104) e (2.106) se aplicam simplesmente fazendo-se $b_w = b_f$.

Ghali e Favre⁶⁰ apresentam tabelas que fornecem, para seções retangulares e T, a altura c da zona comprimida, bem como a posição do centro de gravidade e o momento de inércia (em relação ao eixo que passa pelo centróide) da seção fissurada homogeneizada.

II.3.3.2 - VARIÁÇÕES DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO EM SEÇÃO FISSURADA DE CONCRETO ARMADO: CONSIDERAÇÕES DOS EFEITOS DE RETRAÇÃO E FLUÊNCIA.

Suponha-se, na mesma seção do item anterior (Fig 2.11.a), que M e N tenham sido aplicados no instante t_0 , e que se tenha obtido as distribuições de tensão e deformação instantâneas; deseja-se conhecer a variação nessas distribuições por efeito de retração e fluência do concreto, durante um intervalo de tempo (t_0, t) , com $t > t_0$.



- FIG 2.13 - Distribuição de deformações em seção fissurada ao longo do tempo (fonte: Smerda e Kristek¹³²).

Como já salientado, considera-se numa seção fissurada apenas a área A_c da parte comprimida para o equilíbrio das forças internas. Sob efeito de fluência e retração, geralmente se observa na seção um abaixamento da linha neutra (Fig 2.13), ou seja, a área A_c aumenta com o tempo e deveria ser modificada para acompanhar a mudança de posição da linha neutra. Contudo, isso impediria a

validade da superposição de efeitos adotada na análise, assumindo-se então para A_c o seu valor no começo do intervalo de tempo; supõe-se, então, que a área A_c não seja modificada por efeito de fluência e retração. Segundo Ghali e Favre⁶⁰, o erro assim cometido é pequeno e pode ser desprezado, não se justificando sequer o uso de um possível processo iterativo que o corrigiria.

Com essa simplificação, a análise é feita de forma semelhante ao item II.3.2.3.2 anterior. O ponto O é tomado no centro de gravidade da seção homogeneizada "ajustada", composta pela soma da área comprimida de concreto com a área A_s de armadura multiplicada por $\bar{\alpha}(t, t_0)$, onde:

$$\bar{\alpha}(t, t_0) = \frac{E_s}{\bar{E}_c(t, t_0)} \quad (2.107)$$

sendo $\bar{E}_c(t, t_0)$ o módulo de elasticidade ajustado do concreto. A fluência e a retração do concreto produzem as seguintes variações da deformação axial em O, curvatura e tensões:

$$\Delta \varepsilon_0 = \eta \left[\varnothing(t, t_0) (\varepsilon_0 + \psi y_c) + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \right] \quad (2.108)$$

$$\Delta \psi = k \left[\varnothing(t, t_0) \left(\psi + \frac{\varepsilon_0 y_c}{r_c^2} \right) + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \frac{y_c}{r_c^2} \right] \quad (2.109)$$

$$\Delta \sigma_c = \bar{E}_c(t, t_0) \left[-\varnothing(t, t_0) (\varepsilon_0 + \psi y) - \varepsilon_{cs}(t, t_0) + \Delta \varepsilon_0 + \Delta \psi y \right] \quad (2.110)$$

$$\Delta \sigma_s = (E_s \Delta \varepsilon_0 + \Delta \psi y_s) \quad (2.111)$$

onde ε_0, ψ = deformação axial em O e curvatura instantâneas;
 $\varnothing(t, t_0)$ = coeficiente de fluência no instante t, supondo carregamento no instante t_0 ;
 $\varepsilon_{cs}(t, t_0)$ = retração que ocorreria no concreto (se livre para deformar-se) no período (t, t_0) ;
 y_c = ordenada do centróide da área comprimida de concreto (obtida baseando-se na distribuição de tensões no instante t_0 ; y_c é medido a partir de O, positivo se para baixo);

$r_c^2 = \frac{I_c}{A_c}$ = com A_c e I_c sendo, respectivamente, área da zona comprimida e momento de inércia em relação a um eixo através de O;

η e k = são fatores de redução, respectivamente, da deformação axial e da curvatura, dados por:

$$\eta = \frac{A_c}{\bar{A}} \quad (2.112)$$

$$k = \frac{I_c}{\bar{I}} \quad (2.113)$$

onde \bar{A} e \bar{I} são, respectivamente, a área e o momento de inércia em relação a O da seção homogeneizada "ajustada". Os coeficientes η e k representam o efeito inibidor da armadura sobre a deformação axial e a curvatura que aparecem por efeito de fluência e retração.

II.3.3.3 - SEÇÕES FISSURADAS PARCIALMENTE PROTENDIDAS.

Considere-se uma seção de concreto parcialmente protendida (com presença, portanto, de armaduras ativa e passiva), com a protensão aplicada num instante t_0 , no qual também é aplicada parte da carga permanente (peso próprio, por exemplo), o restante da mesma entrando em ação logo após, num tempo relativamente curto. Num instante t bem posterior, a entrada em ação do carregamento acidental produz fissuração.

Por hipótese, suponha-se que todas as variações na distribuição de tensões e deformações, sob efeito de fluência e retração no concreto e relaxação no aço de protensão, tenham ocorrido antes do instante t e que não haja ocorrido fissuração até essa data. Assim, o método de análise apresentado na seção II.3.2.3 (seções não fissuradas) pode ser aplicado para determinar a distribuição de tensões e deformações na seção na idade t , pouco antes da carga acidental entrar em ação. O objetivo é, portanto, discutir um processo de análise que determine a variação instantânea na distribuição de tensões e deformações causada pela aplicação de um carregamento que produz fissuração da seção parcialmente protendida considerada (ver Fig.2.14.a).

Supõe-se conhecida a distribuição de tensões na seção no instante t , com as tensões no concreto $\sigma_c(t)$ variando linearmente com a altura, sem produzir fissuração (Fig.2.14.b); essa distribuição pode ser completamente definida com o valor $\sigma_0(t)$ (num ponto arbitrário O de referência) em conjunto com o gradiente de tensões na seção de concreto $\gamma(t) = d\sigma/dy$, antes da fissuração.

O par de esforços adicionais M e N (devido ao carregamento acidental) é aplicado e produz fissuração na seção (supõe-se N atuando em O). O processo geral de cálculo pressupõe a obtenção do denominado Estado de Neutralização (tensões nulas no concreto); para isso, divide-se M e N em duas partes, a saber (ver Fig.2.14.c e 2.14 e):

$$M = M_n + M_2 \quad (2.114)$$

$$N = N_n + N_2 \quad (2.115)$$

M_n e N_n são os esforços exteriores necessários aplicar à seção para obter a neutralização, isto é, anular as tensões no concreto (no aço continua havendo tensão); M_2 e N_2 completam os esforços M e N aplicados. Sob a atuação de M_n e N_n , a seção permanece no Estádio I (não fissurada), portanto a fissuração é produzida apenas pelo par de esforços (M_2, N_2). Assim, a análise considera dois estágios de carregamento:

1º - M_n e N_n aplicados na seção não fissurada;

2º - M_2 e N_2 aplicados na seção fissurada.

A variação de deformações nos dois estágios é dada por (Fig 2.14.d e 2.14.f):

$$(\Delta\varepsilon)_n = (\Delta\varepsilon_0)_n + (\Delta\psi)_n y \quad (2.116)$$

$$(\Delta\varepsilon)_2 = (\Delta\varepsilon_0)_2 + (\Delta\psi)_2 y \quad (2.117)$$

A variação total instantânea da deformação, portanto, é:

$$\Delta\varepsilon = (\Delta\varepsilon)_n + (\Delta\varepsilon)_2 \quad (2.118)$$

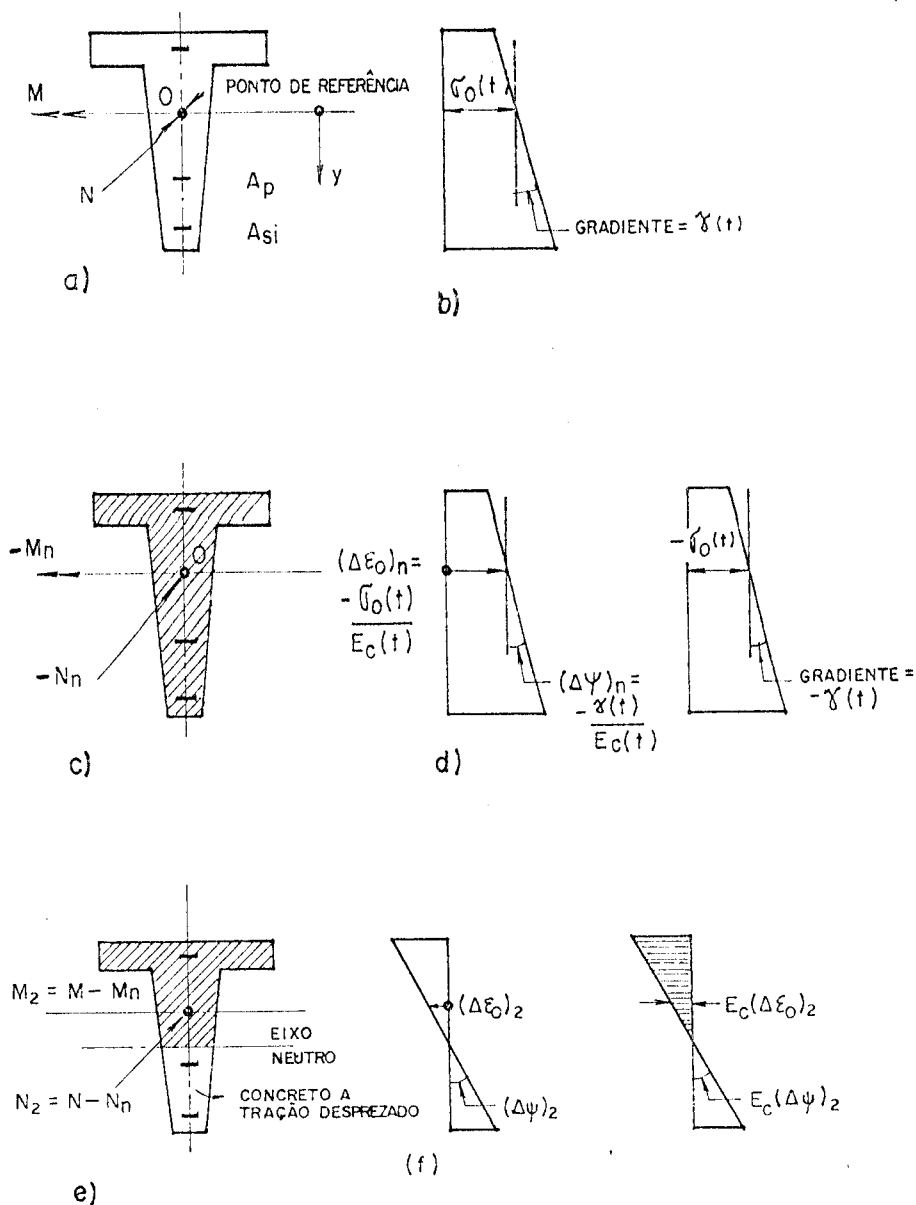


Fig. 2.14 - Análise das tensões e deformações em seção parcialmente protendida:

- a) dimensões;
- b) tensão no concreto $\sigma_c(t)$ imediatamente após a aplicação de M e N ;
- c) forças de neutralização M_n e N_n na seção não fissurada;
- d) variação na distribuição de tensões e deformações devido à aplicação de M_n e N_n ;
- e) variação na distribuição de tensões e deformações devido à aplicação de M_2 e N_2 .

A distribuição de tensões produzida no estágio de neutralização é igual e de sinal contrária àquela antes da fissuração (compare-se as figuras b e d); as deformações nesse estágio são obtidas dividindo-se as tensões pelo módulo instantâneo de elasticidade $E_c(t)$ do concreto no instante t . A distribuição final de tensões no concreto é dada, pois, pela análise dos efeitos apenas do par de esforços (M_2, N_2) . Tem-se:

$$N_n = - \int \sigma dA \quad (2.119)$$

$$M_n = - \int \sigma y dA \quad (2.120)$$

Quando as tensões variam linearmente com a altura da seção, pode-se reescrever:

$$N_n = - (A\sigma_0 + B\gamma) \quad (2.121)$$

$$M_n = - (B\sigma_0 + I\gamma) \quad (2.122)$$

ou, em notação matricial

$$\begin{bmatrix} N_n \\ M_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A & B \\ B & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_0 \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.123)$$

onde A é a área da seção homogeneizada composta pela soma da área total da seção transversal do concreto com o produto $\alpha (A_s + A_p)$, com $\alpha = E_s/E_c(t)$; B é o momento estático e I é o momento de inércia em relação a um eixo que passa por O . Se O for o centroíde da área homogeneizada, $B = 0$ e se tem:

$$N_n = - A\sigma_0 \quad (2.124)$$

$$M_n = - I\gamma \quad (2.125)$$

A variação da deformação axial e da curvatura produzida no estágio de neutralização é dada por:

$$(\Delta \varepsilon_0)_n = \frac{-1}{E_c} \sigma_0 \quad (2.126)$$

$$(\Delta \psi)_n = \frac{-1}{E_c} \gamma \quad (2.127)$$

No instante da neutralização, as distribuições de tensões e deformações são, portanto:

$$(\varepsilon_0)_n = \varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_c} \quad (2.128)$$

$$(\psi)_n = \psi - \frac{\gamma}{E_c} \quad (2.129)$$

$$(\sigma_c)_n = 0 \quad (2.130)$$

$$(\sigma_s)_n = \sigma_s - \alpha (\sigma_0 + \gamma Y_s) \quad (2.131)$$

$$(\sigma_p)_n = \sigma_p - \alpha (\sigma_0 + \gamma Y_p) \quad (2.132)$$

Em todas essas equações, a primeira parcela corresponde aos valores de tensão e deformação iniciais, no Estádio I (antes de se verificar a fissuração).

Numa seção composta com mais de um tipo de concreto, a distribuição de tensões $\sigma(t)$, em geral, é linear sobre cada parte da seção, e assim as equações (2.121) e (2.122) precisam ser ajustadas; por exemplo, ocorrendo fissuração apenas numa parte i da seção transversal, os valores de σ_0 e γ nas equações citadas devem ser substituídos por $(\sigma_0)_i$ e $(\gamma)_i$, definindo assim a distribuição de tensões $\sigma(t)$ sobre a parte i . Nesse caso, as forças de neutralização N_n e M_n anularão as tensões no concreto apenas na parte i da seção; haverá, evidentemente, variação de tensões nas outras partes, mas elas não serão necessariamente anuladas.

As distribuições de tensões e deformações no segundo estágio (devido a atuação de M_2 e N_2 sobre a seção) seguem o procedimento descrito no item II.3.3.1 para seção fissurada. Assim, os estados de tensão de deformação após a fissuração são dados por (Fig.2.14.f):

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_0)_n + (\Delta\varepsilon_0)_2 \quad (2.133)$$

$$\psi = (\psi)_n + (\Delta\psi)_2 \quad (2.134)$$

$$\sigma_c = (\Delta\sigma_c)_2 = \begin{cases} E_c \left(1 - \frac{y}{y_n}\right) (\Delta\varepsilon_0)_2, & \text{para } y < y_n \\ 0 & , \text{ para } y \geq y_n \end{cases} \quad (2.135)$$

$$\sigma_s = (\sigma_s)_n + (\Delta\sigma_s)_2 \quad (2.136)$$

$$\sigma_p = (\sigma_p)_n + (\Delta\sigma_p)_2 \quad (2.137)$$

O método de cálculo exposto permite descrever a variação de tensões na seção de uma estrutura submetida a uma história de carga incremental; a metodologia pode ser estendida (por exemplo, na análise de efeitos diferidos) a processos incrementais ao longo do tempo, ao invés de usar, como aqui, o processo de ajustar o módulo de elasticidade.

Camara²¹ faz um estudo comparativo dos diferentes métodos de cálculo de tensões em seções de concreto armado e protendido e de alguns valores experimentais, onde conclui que, para a análise de seções de concreto armado, os métodos são eficientes e que, para seções parcialmente protendidas, deve-se ter em conta de forma mais realista o efeito das armaduras passivas no comportamento ao longo do tempo no Estádio I.

Como o objetivo principal deste trabalho é estudar o comportamento de pórticos planos de concreto armado, tendo em vista o estudo comparativo mencionado, o autor não encontrou objeções em utilizar o método de cálculo aqui apresentado.

II.4 - FISSURAÇÃO. MODELOS DE COMPORTAMENTO.

Nas estruturas de concreto armado, com ou sem a presença de protensão parcial, irá ocorrer fissuração quando as tensões de tração superarem a resistência do concreto à tração e, sendo esta

baixa, pode-se dizer que a fissuração é praticamente inevitável. Assim, a necessidade de sua limitação a valores aceitáveis, tendo em vista as condições de serviço, durabilidade (corrosão da armadura) e aspecto da estrutura, tem sido o objeto da preocupação dos engenheiros desde que o concreto armado existe como material de construção. Também a redução de rigidez dos elementos que ocorre em consequência da fissuração deve ser considerada no cálculo de deslocamentos em estruturas de concreto armado. Pretende-se aqui a colocação de alguns aspectos do problema mediante a apresentação da normalização existente, salientando que atualmente não há concordância universal sobre muitos desses aspectos.

Um estudo completo, que inclui tópicos como as causas da fissuração, razões para controlá-la, critérios para tal controle, acompanhamento da formação de fissuras, avaliação da abertura de fissuras, pode ser encontrado no Manual do CEB³⁴, ou em Leonhardt⁷⁸. Cite-se também Camara²¹, que traz um breve histórico acompanhado de farta bibliografia; além dos autores ali citados, inclua-se, a título de atualização bibliográfica, Cervenka²⁹, La Tegola, Ombres e Totaro⁷⁶, Motta¹⁰⁰, Nielsen¹⁰³, Machado⁸² etc.

O manual do CEB³⁴ veio prover orientação prática para a aplicação do MC - 78³⁷ (capítulo 15); alguns aspectos foram modificados no MC - 90³⁵ (veja-se os capítulos 7 e 8 e o Apêndice d do mesmo). O MC - 90 apresenta formulações distintas para concreto armado e concreto protendido. No Brasil, a NBR - 6118⁹ e a NBR 7197⁷ trazem poucas indicações.

II.4.1 - VARIAÇÃO DA POSIÇÃO DA LINHA NEUTRA E DOS VALORES DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES AO LONGO DO COMPRIMENTO DA PEÇA FISSURADA.

Em uma peça fissurada de concreto armado ou protendido, as seções sob solicitação no Estádio II são exatamente as seções das fissuras. Fora delas, o concreto da zona tracionada é capaz de resistir às tensões de tração e assim contribuir para a rigidez do elemento. Assim, a rigidez da peça fissurada varia de um mínimo no local da fissura a um máximo entre as fissuras (ver Fig.2.15), já

que no pequeno trecho central entre duas fissuras vizinhas o comportamento é próximo do Estádio I (observe a variação da posição da linha neutra).

Havendo seções fissuradas e sem fissuração, com conseqüente variação da posição da LN entre as fissuras, os deslocamentos da peça não poderão ser calculados simplesmente com as curvaturas obtidas no Estádio II, caso em que ficariam superestimados, e nem com as curvaturas no Estádio I, caso em que ficariam subestimados.

Uma das soluções para o problema é a consideração da rigidez através de curvaturas médias, obtidas com o auxílio das deformações médias (ver fig 2.15.b e c). Para a análise mais realista das tensões e deformações em peças fissuradas, serão considerados então os valores médios, tanto para as ações imediatas como para as de longa duração. Em ambas as condições em que se encontra o elemento considerado (Estádios I e II) é válida a hipótese de Bernoulli: as seções planas permanecem planas mesmo após a fissuração.

II.4.2 - AVALIAÇÃO DA ABERTURA DE FISSURAS.

Como visto no item anterior, numa peça fissurada submetida a flexão simples ou composta (conforme os valores dos esforços equivalentes M_{eq2} e N_{eq2} - ver Fig.2.15.a), é conveniente considerar-se deformações médias obtidas a partir de dois casos limites de comportamento do elemento:

- Estádio I: peça não fissurada;
- Estádio II: peça fissurada, onde se supõe que, nas seções fissuradas, a tração é absorvida inteiramente pela armadura.

A fissuração tem início quando, para um certo valor dos esforços aplicados, o nível das tensões de tração atinge o correspondente à sua resistência. A primeira fissura aparece na seção onde a resistência à tração, que é variável ao longo do elemento, é menor, $f_{ct,1}$ (ver Fig.2.16 a). À medida que a carga continue a ser aplicada, uma segunda fissura poderá aparecer numa seção qualquer, não junto à primeira; da formação de cada fissura resulta uma redução na rigidez do elemento. Com o aumento do esforço

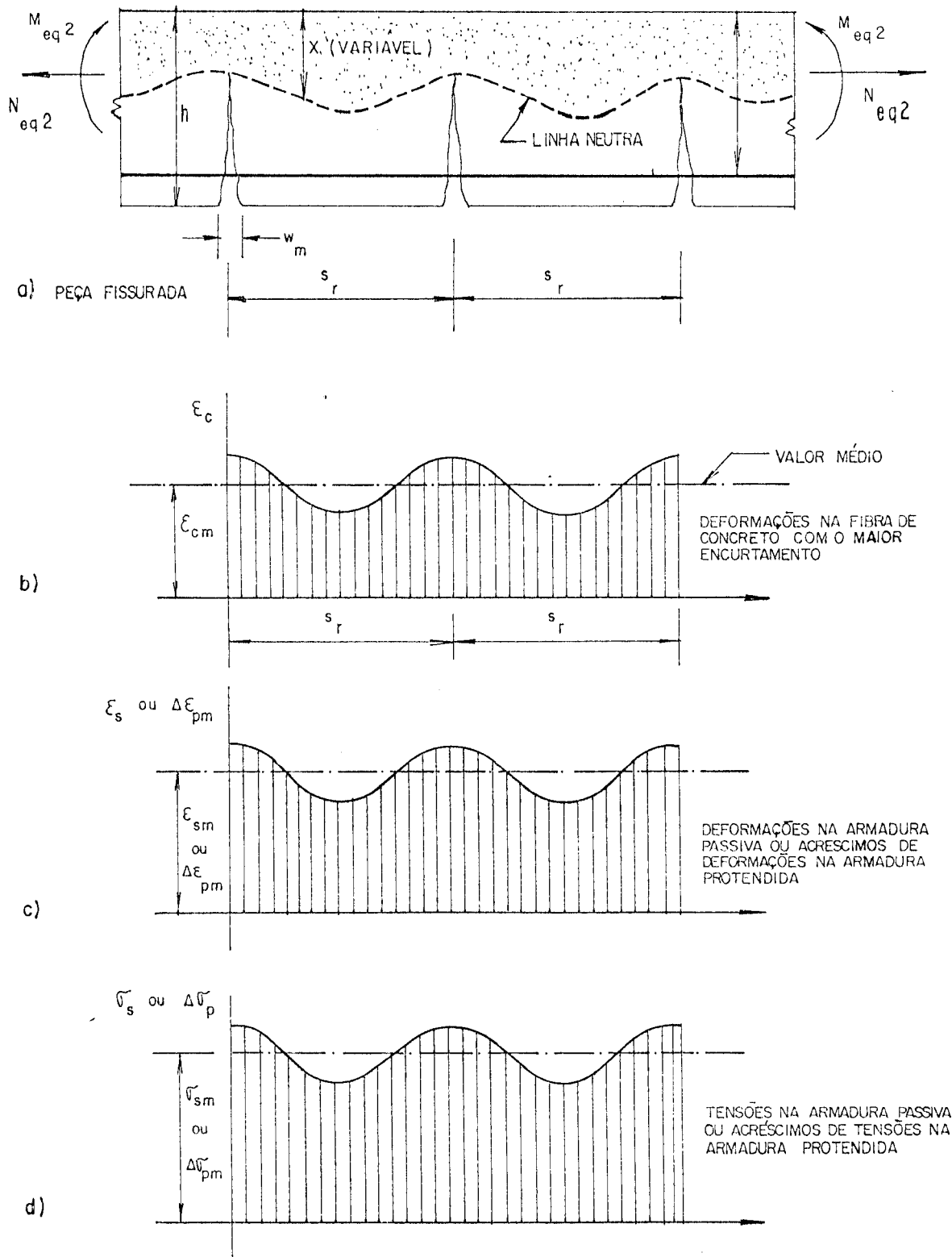


FIG. 2.15 - Variação da posição da LN e dos valores das tensões e deformações ao longo do eixo de uma peça fissurada armada ou protendida (com aderência).

aplicado aumenta o número de fissuras, com o correspondente decréscimo na rigidez do elemento, até se verificar a estabilização do processo de fissuração (ver Fig. 2.16 a), quando então a rigidez estará próxima da prevista para o Estádio II e aumentos posteriores de carregamento não levarão à formação de novas fissuras (ver Fig. 2.16 b). Observe-se que aos esforços de formação da última fissura corresponde uma tensão de tração no concreto, $f_{ct,n}$, superior a $f_{ct,1}$.

Além daquelas geradas pelo carregamento, tensões de tração suficientes para gerar fissuração também podem ocorrer por impedimento da deformação (por exemplo: retração ou variação de temperatura num elemento de estrutura hiperestática). Após estabilizada a fissuração, a abertura média das fissuras pode ser calculada por:

$$w_m = s_{rm} (\varepsilon_{srm} + \varepsilon_{cs}) \quad (2.138)$$

onde s_{rm} é o espaçamento médio entre as fissuras, ε_{cs} é o valor da retração livre e ε_{srm} é o alongamento relativo médio da armadura, dado por:

$$\varepsilon_{srm} = \varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} \quad (2.139)$$

onde ε_{sm} e ε_{cm} são, respectivamente, os alongamentos médios do aço e do concreto envolvente, valor este geralmente desprezado.

Com o valor médio pode-se obter a abertura característica w_k das fissuras de um elemento e, com isso, verificar-se a desigualdade:

$$w_k \leq w_{lim} \quad (2.140)$$

onde w_{im} é a abertura limite das fissuras, a qual é especificada em função das condições de serviço a que estará submetida a estrutura.⁴

II.4.2.1 - ESPAÇAMENTO DAS FISSURAS.

Numa seção situada entre duas fissuras, a aderência entre aço e concreto restringe a deformação da armadura; assim, parte da força de tração na armadura na seção da fissura é absorvida pelo concreto entre as fissuras; a tensão no concreto, nula na seção da fissura, cresce à medida que se afasta daquela seção até que, a uma certa distância s_{ro} da fissura (ver Fig. 2.16.a) atinge novamente a resistência à tração do concreto; s_{ro} define o ponto mais próximo a

4

O MC - 78³⁷ do CEB relaciona as aberturas característica e média das fissuras através de:

$$w_k = 1,7 w_m,$$

para fissuração devida a cargas externas; no caso de fissuração causada por deformações impedidas recomenda-se o uso do coeficiente 1,3 para o multiplicando na fórmula acima, já que provou-se experimentalmente que, neste segundo caso, o desvio padrão é menor.

O MC - 90³⁵ não se refere de início à abertura média, e calcula diretamente a abertura característica das fissuras no concreto armado por uma fórmula semelhante à (2.138), usando o espaçamento máximo $l_{s,máx}$ de escorregamento entre o aço e o concreto (ou, em outras palavras, o espaçamento máximo entre fissuras):

$$w_k = l_{s,máx} (\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} + \epsilon_{cs})$$

Com a fissuração estabilizada, a abertura média das fissuras pode ser estimada com base no espaçamento médio, dado por:

$$s_{rm} = \frac{2}{3} l_{s,máx} = \frac{2}{3} s_{r,máx}$$

o que equivale a $w_k = 1,5 w_m$. Para maiores detalhes veja-se o item 7.4.3.1.1 do referido código.

uma fissura existente no qual pode se formar uma fissura adjacente, ou seja, s_{ro} é o espaçamento mínimo entre fissuras.⁵

No modelo de comportamento que adota como hipótese o não escorregamento entre o concreto e o aço, a distância s_{ro} necessária à reintrodução das tensões de tração no concreto a partir da seção fissurada depende do recobrimento c e do espaçamento s das barras da armadura:

$$s_{ro} = 2 \left(c + \frac{s}{10} \right) \quad (2.141)$$

Na fórmula acima, quando $s > 15 \varnothing$, sendo \varnothing o diâmetro das barras da armadura, usa-se $s = 15\varnothing$; a fissura seria do tipo apresentado na Fig. 2.17.a, pois as fibras mais afastadas da armadura tem alongamentos menores (por estarem submetidas a um nível menor de tração).

Porém, à medida que a carga aplicada aumenta e o processo de fissuração evolui, como demonstrado por Leonhardt⁷ⁿ, há um deslocamento relativo entre o aço e o concreto que o envolve cuja grandeza depende das características de aderência entre os dois materiais; ou seja, a hipótese de não escorregamento não simula totalmente o fenômeno (ver Fig. 2.17.b e 2.17.c) Assim, no modelo baseado no escorregamento entre aço e concreto, o comprimento médio mínimo⁶ s_{rmo} necessário à transferência para o concreto de um nível de tensão correspondente à formação de uma nova fissura é dado por:

5

A estabilização do processo de fissuração verifica-se justamente a partir do momento em que a distância entre as fissuras existentes não é suficiente para a transferência, do aço para o concreto envolvente, de um nível de tensões suficiente para gerar uma nova fissura. Estabilizada a fissuração, a máxima distância teórica entre fissuras, é, portanto, igual a duas vezes a distância mínima s_{ro} .

⁶ Na expressão "espaçamento médio mínimo" para definir s_{rmo} o MC - 78 justifica tomar-se um valor médio devido às possíveis variações nas propriedades dos materiais, as quais influenciam o valor.

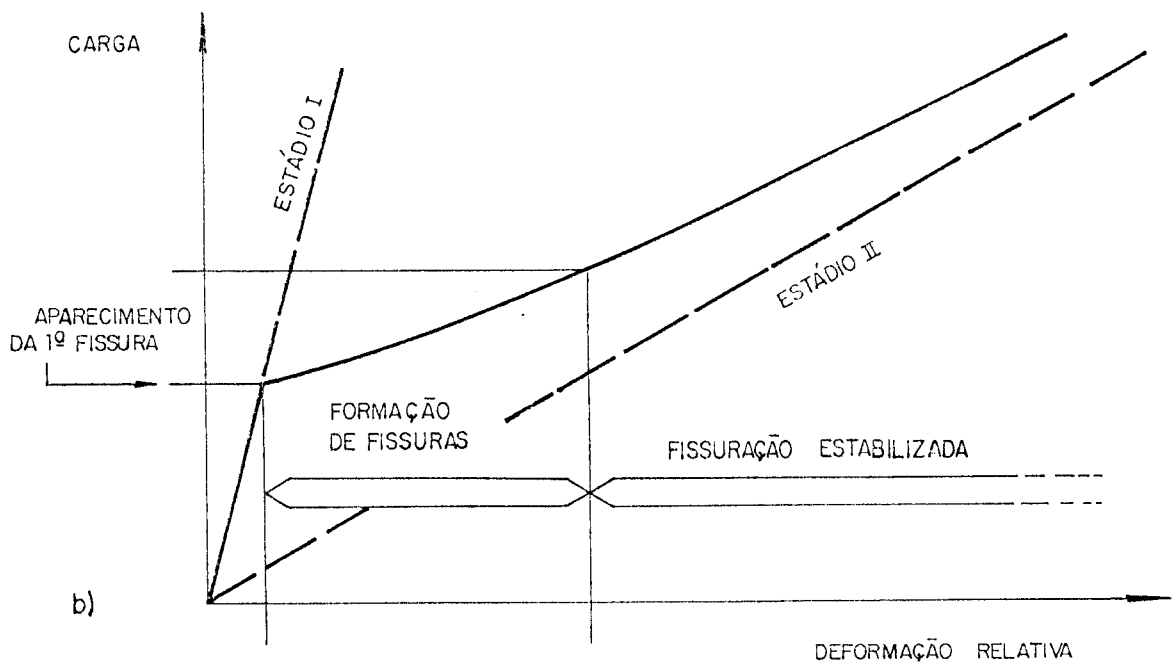
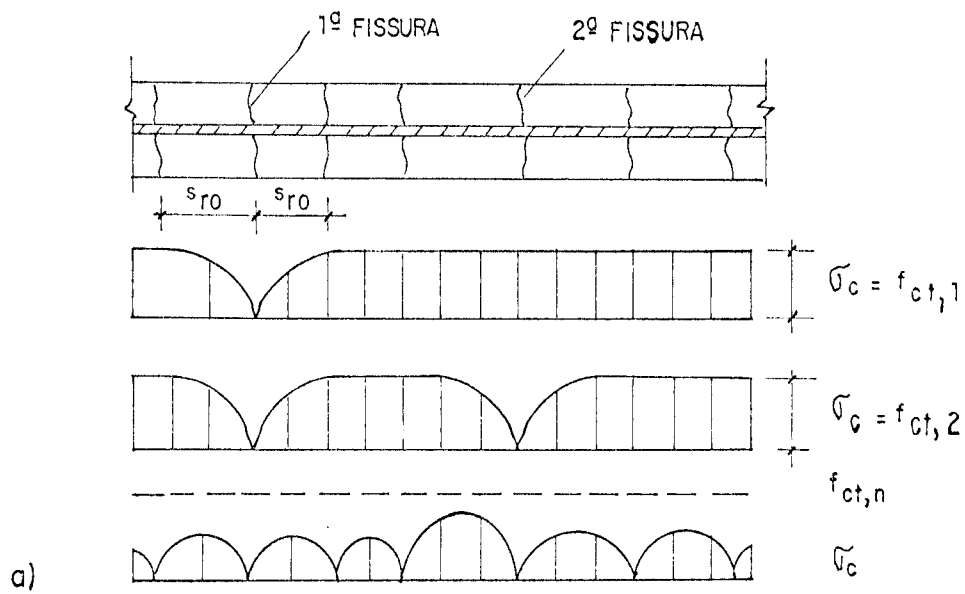


FIG. 2.16 - a) representação das tensões médias no concreto com a evolução do processo de fissuração;
 b) diagrama carga-deformação idealizado.

$$s_{rmo} = k_1 k_2 \frac{\emptyset}{\rho_r} \quad (2.142)$$

Com isso, o espaçamento médio s_{rm} entre as fissuras (a ser utilizado na equação 2.138) é então obtido pela soma das duas equações anteriores, a saber (MC - 78³⁷):

$$s_{rm} = 2 \left(c + \frac{s}{10} \right) + k_1 k_2 \frac{\emptyset}{\rho_r} \quad (2.143)$$

onde:

- k_1 = coeficiente dado em função das propriedades de aderência das barras:

- . $k_1 = 0,4$, boa aderência;
- . $k_1 = 0,8$, má aderência;

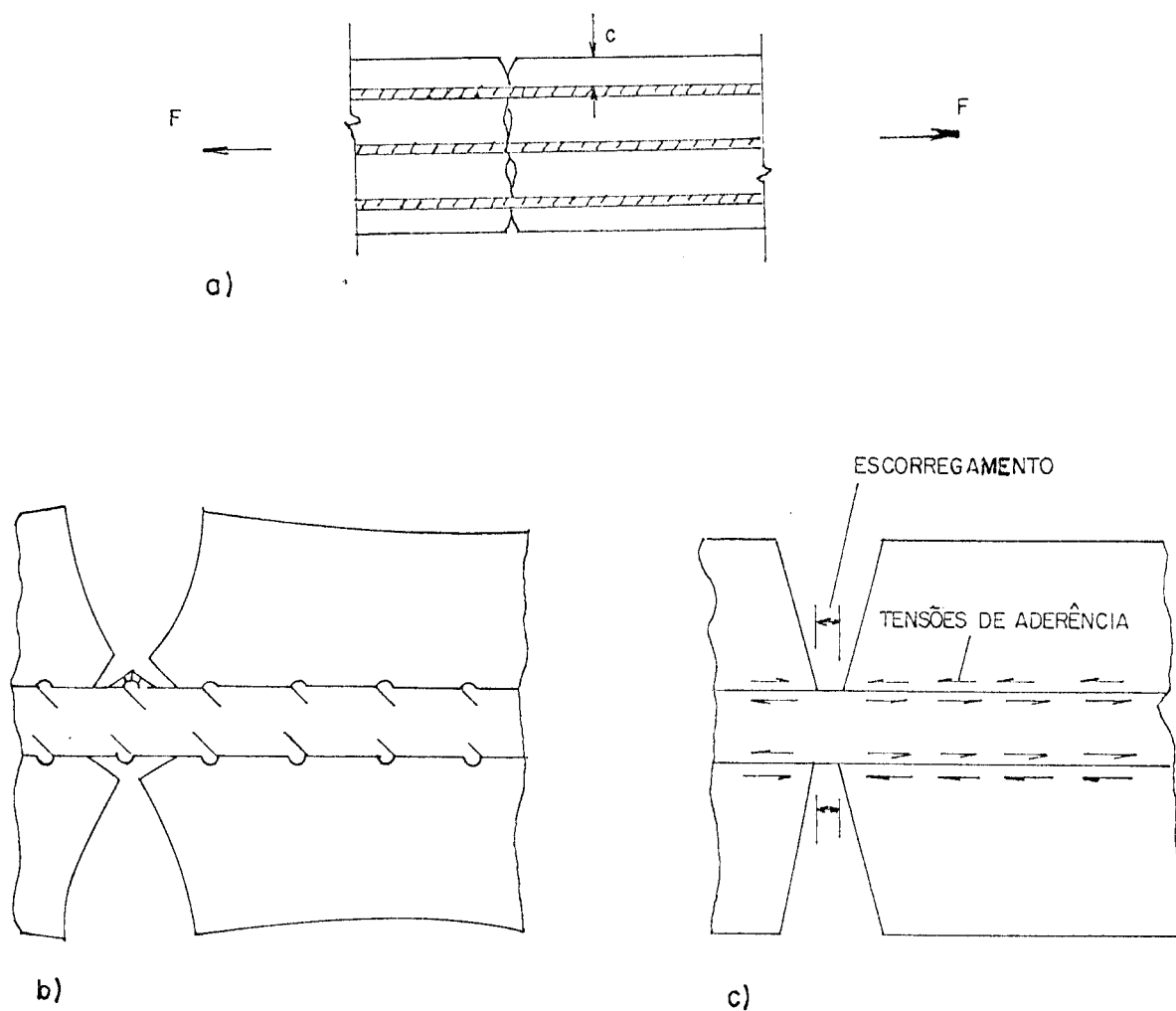
- k_2 = coeficiente dado em função da distribuição das tensões de tração na seção:

- . $k_2 = 0,125$, à flexão;
- . $k_2 = 0,25$, à tração pura;

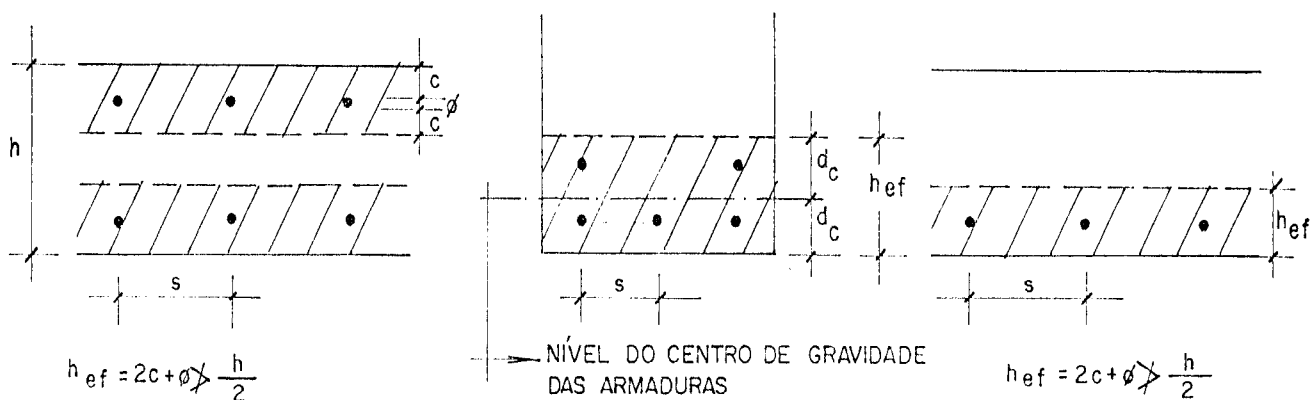
. $k_2 = 0,25 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_1}$, à tração excêntrica ou para a zona da malha de armadura de uma viga; ε_1 e ε_2 são deformações do concreto calculados com a seção fissurada (ε_1 na fibra mais inferior e ε_2 na fibra mais superior da área de envolvimento da armadura, ver Fig. 2.18.a);

. ρ_r = taxa de armadura efetiva = $\frac{A_s}{A_{c,ef}}$

. $A_{c,ef}$ = área efetiva de concreto tracionado; geralmente, é a área de envolvimento da armadura (ver Fig. 2.18.a); equivalente ao valor A_{cr} da NBR - 6118⁹ (ver item 4.2.2 da norma brasileira).



- FIG. 2.17 - a) esquematização de fissura no modelo de não escorregamento entre aço e concreto;
 b) idem para modelo de escorregamento;
 c) modelagem do caso representado em b através dos mecanismos de escorregamento e aderência.

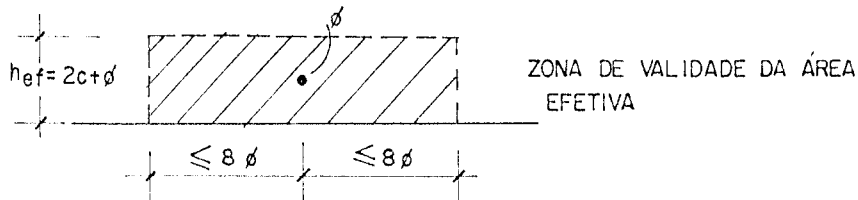


TIRANTE

VIGA

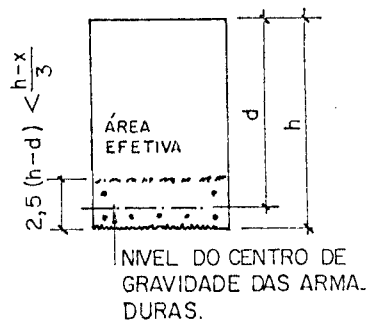
LAJE

a)

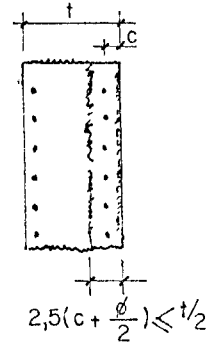


b)

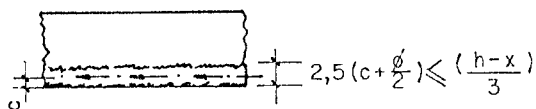
a) VIGA



c) TIRANTE



b) LAJE



- FIG. 2.18 - Área efetiva de controle da fissuração pelas armaduras nas situações de tração e flexão de vigas e lajes:

a) MC - 78;

b) MC - 90.

Como já salientado, o MC - 90³⁵ apresenta o cálculo do espaçamento máximo, e não o médio, na avaliação da abertura de fissuras. Para concreto armado, esse espaçamento máximo é apresentado para três condições, a saber (importante: adaptou-se a notação do MC - 90 àquela aqui utilizada, por facilidade; assim, por exemplo, $l_{s,máx}$ daquele código aqui será $s_{r,máx}$):

$$s_{r,máx} = 2 \frac{\sigma_{s2} - \sigma_{sE}}{4 \tau_{bk}} \varnothing \quad (2.144.a)$$

$$s_{r,máx} = \frac{\varnothing}{3,6 \rho_r}, \text{ para fissuração estabilizada;} \quad (2.144.b)$$

$$s_{r,máx} = \frac{\sigma_{s2}}{2 \tau_{bk}} \varnothing \frac{1}{1 + \alpha_e \rho_r}, \text{ para formação de uma fissura} \quad (2.144.c)$$

onde $\alpha_e = \frac{E_s}{E_c}$, σ_{s2} é a tensão no aço no local da fissura, σ_{sE} é a tensão no aço no ponto de escorregamento nulo (ponto médio entre duas fissuras) e τ_{bk} é o menor valor da tensão de aderência média (ver tabela 2.3); os demais componentes foram definidos anteriormente; a definição da área envolvente das armaduras $A_{c,ef}$ é um pouco diferente na nova versão do código (ver Fig. 2.18 b); por facilidade, recomenda-se na última das equações acima adotar $(1 + \alpha_e \rho_r)$ igual a 1.

II.4.2.2 - CÁLCULO DAS DEFORMAÇÕES.

A deformação média no aço, em relação ao concreto envolvente, necessária ao cálculo da abertura média das fissuras de um elemento (ver eq. 2.138) é dada por (MC - 78 do CEB):

$$\varepsilon_{srm} = \zeta \varepsilon_{s2} = \left[1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \varepsilon_{s2} \geq 0,4 \varepsilon_{s2} \quad (2.145)$$

onde:

$-\varepsilon_{s2}$ = deformação no aço calculada no Estádio II;

$-\zeta$ = fator de redução da deformação para levar em conta os efeitos enrijecedores do concreto intacto entre as fissuras;

$-\sigma_{sr}, \sigma_s$ = tensões na armadura na seção fissurada, quando da fissuração e devido ao esforço aplicado (ver Fig. 2.19), respectivamente.

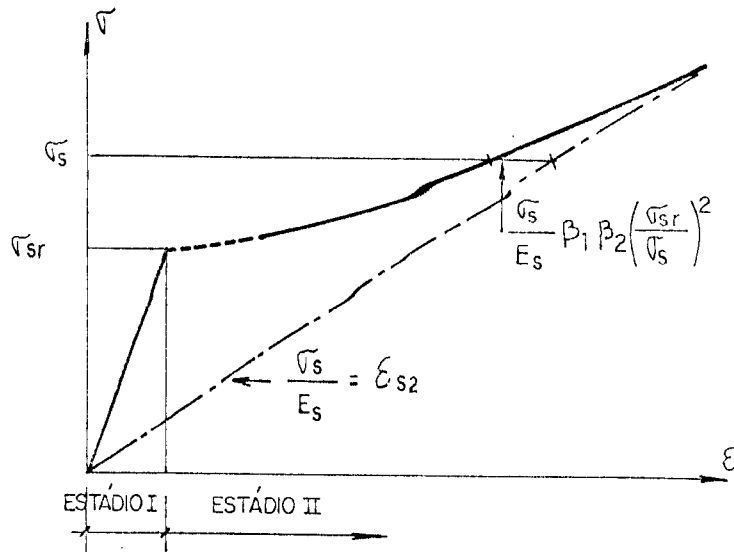
$-\beta_1$ = coeficiente que leva em consideração as características de aderência:

$$\cdot \beta_1 = \frac{1}{2,5 k_1} = \begin{cases} 1, & \text{boa aderência;} \\ 0,5, & \text{má aderência;} \end{cases}$$

$\cdot \beta_2$ = coeficiente que leva em consideração a natureza das ações solicitantes:

$\cdot \beta_2 = 1$, para o primeiro carregamento;

$\cdot \beta_2 = 0,5$, para cargas de longa duração ou para um grande número de ciclos de carregamento.



- FIG. 2.19 - Efeito da contribuição do concreto tracionado.

No MC - 90 do CEB, a deformação média no aço é calculada por:

$$\varepsilon_{srm} = \varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = (\varepsilon_{s2} - \beta \Delta \varepsilon_{sr}) - \beta \varepsilon_{sr1} = \varepsilon_{s2} - \beta \varepsilon_{sr2} \quad (2.146)$$

onde:

$$\varepsilon_{sr2} = \frac{f_{ctm}(t)}{\rho_r E_s} (1 + \sigma_e \rho_r) \quad (2.147)$$

$$\text{com } \Delta \varepsilon_{sr} = \varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1} \quad (2.148)$$

sendo:

- $f_{ctm}(t)$ = valor médio da resistência do concreto à tração no instante t em que se inicia a fissuração (ver item II.2.1.3);
- ε_{s2} = deformação no aço na seção da fissura;

- ϵ_{sr2} = deformação no aço na seção da fissura provocada pela atuação de forças que causam tensões $f_{ctm}(t)$ dentro da área de envolvimento $A_{c,ef}$; se as forças internas forem menores ou iguais a essas forças, então $\epsilon_{sr2} = \epsilon_{s2}$;
- ϵ_{sr1} = deformação no aço no ponto de escorregamento nulo;
- β = coeficiente empírico para avaliar a deformação média dentro do comprimento s_{rmax} (ver tabela 2.3).

Tabela 2.3 - Valores de β e τ_{bk} (fonte: MC - 90³⁵ do CEB).

	FORMAÇÃO DE UMA FISSURA	FISSURAÇÃO ESTABILIZADA
CARGAS DE CURTA DURAÇÃO (INSTANTÂNEAS)	$\beta = 0,6$ $\tau_{bk} = 1,8 f_{ctm}(t)$	$\beta = 0,6$ $\tau_{bk} = 1,8 f_{ctm}(t)$
CARGAS DE LONGA DURAÇÃO OU CICLOS DE CARGAS	$\beta = 0,6$ $\tau_{bk} = 1,35 f_{ctm}(t)$	$\beta = 0,38$ $\tau_{bk} = 1,8 f_{ctm}(t)$

II.4.2.3 - VERIFICAÇÃO DA ABERTURA DAS FISSURAS.

Como visto (ver eq. 2.140), deve-se verificar se o valor característico w_k da abertura de fissuras, obtido conforme os itens anteriores, não ultrapassa um valor limite w_{lim} , valor este fixado nas diferentes normas que tratam do assunto. A NBR - 6118⁹ fixa os seguintes limites (ver item 4.2.2 da referida norma):

- a) 0,1 mm - para peças não protegidas, em meio agressivo;
- b) 0,2 mm - para peças não protegidas, em meio não agressivo;
- c) 0,3 mm - para peças protegidas.

O MC - 78³⁷ (item 15.1.4.3) traz os mesmos limites, em conjunto com uma tabela em que, além das condições ambientais, traz as combinações de ações a considerar no cálculo. Não é demais lembrar que a NBR - 7197⁷, em seu Anexo, recomenda considerar as combinações frequente e rara de ações (definidas na NBR - 8681⁸) na verificação dos estados limites de fissuração.

O MC - 90³⁵ do CEB (item 7.4.3) fixa $w_{lim} = 0,3$ mm em estruturas de concreto armado sob combinação quase permanente de

ações, para classes de exposição 2 a 4 (classes estas definidas pelo item 1.5.2, tabela 1.5.1 do referido código). Para concreto protendido, o MC - 90 fornece uma tabela (ver tabela 7.4.1 do referido código).

II.4.3 - ARMADURA MÍNIMA PARA O CONTROLE DA FISSURAÇÃO.

Ocorrida a fissuração de uma seção, há uma redistribuição substancial das forças internas da mesma, e a força de tração antes suportada pelo concreto é transferida repentinamente para a armadura; se a taxa de armadura da seção for insuficiente, esta escoará e controlar a fissuração será impossível. Para evitar isso, prevê-se uma taxa mínima de armadura, capaz de sustentar a transferência brusca de tensões. O MC - 78 (item 15.2.4) prevê, portanto:

$$A_{smin} = \frac{f_{ctm} \cdot A_{c,ef}}{f_{yk}} \quad (2.149)$$

Na dúvida, permite-se tomar para $A_{c,ef}$ a área total de concreto tracionado da seção.

O MC - 90 (item 7.4.5) permite o cálculo simplificado através da fórmula:

$$A_{smin} = k_c k_f \frac{A_{ct}}{\sigma_{s2}} \quad (2.150)$$

onde A_{ct} é a área tracionada da seção antes de fissurar, σ_{s2} pode ser tomado igual a f_{yk} (pode ser necessário tomar-se um valor menor para satisfazer os valores de w_{lim} - ver tabelas 2.4 e 2.5 deste trabalho), $f_{ctmáx}$ é o valor característico superior da resistência à tração do concreto (ver item II.2.1.3 deste trabalho), k é um fator de correção da área de armadura (com valores variando entre 0,5 e 1,0) e k_c é um coeficiente (variável entre 0,4 e 1,0) que leva em conta a forma do diagrama de distribuição das tensões de tração na seção.

II.4.4 - CONTROLE DA FISSURAÇÃO SEM AVALIAÇÃO DA ABERTURA DE FISSURAS.

O MC - 90 do CEB permite, sob certas condições, efetuar o controle da fissuração sem proceder-se ao cálculo da abertura das fissuras (ver item 7.4.4 do referido código), a saber:

- a) dispensa-se o uso de medidas especiais para o controle da fissuração no caso de elementos de altura pequena submetidos principalmente à flexão;
- b) a abertura das fissuras pode ser mantida dentro de valores aceitáveis, dispensando-se o cálculo desde que se tenha respeitada a taxa mínima de armadura (citada no item anterior deste trabalho) e que se tenha escolhido apropriadamente o diâmetro das barras e o seu espaçamento.

Para fissuração causada principalmente por deformações impedidas (retração), a abertura das fissuras não será excessiva desde que o diâmetro \emptyset das barras não exceda os limites dados na tabela 2.4; no caso de fissuração devido aos carregamentos, a abertura das fissuras não será considerada excessiva desde que se respeite ao mesmo tempo os limites dados nas tabelas 2.4 e 2.5 (esta para espaçamento máximo das barras).

Para seções de concreto protendido, em geral despreza-se a contribuição dos cabos na limitação da abertura das fissuras. Para concreto armado, o diâmetro $\emptyset_{\text{máx}}$ da armadura dado na tabela 2.4 pode ser modificado como segue:

- . para fissuração devido a deformações impedidas:

$$\emptyset = \emptyset_{\text{máx}} \frac{f_{ctm}}{2,9}$$

- . para fissuração devido a carga:

$$\emptyset = \emptyset_{\text{máx}} \frac{h_t}{10(h - d)} > \emptyset_{\text{máx.}}$$

onde \varnothing é o diâmetro máximo ajustado, h é a altura total da seção, h_t é a altura da zona tracionada antes da fissuração e d é a altura útil da seção.

Tabela 2.4 - Diâmetros máximos das barras ($\varnothing_{máx}$) para os quais se dispensa o cálculo da abertura de fissuras; a tensão no aço é calculada sob combinação quase permanente de ações (concreto armado) ou combinações frequentes (concreto protendido).

TENSÃO NO AÇO (MPa)	DIÂMETRO MÁXIMO (mm)	
	C. ARMADO	C. PROTENDIDO
160	32	25
200	25	16
240	20	12
280	14	8
320	10	6
360	8	5
400	6	4
450	5	-

Tabela 2.5 - Espaçamento máximo das barras para as quais não é necessário o cálculo da abertura de fissuras.

TENSÃO NO AÇO (MPa)	* ESPAÇAMENTO MÁXIMO (mm)	
	C. ARMADO	C. PROTENDIDO
160	300	200
200	250	150
240	200	100
280	150	50
320	100	-
360	60	-

* para elementos submetidos à tração simples com altura até 200 mm ou à flexão simples com altura até 400 mm o cálculo pode resultar em espaçamentos maiores, mas não deve exceder 300 mm.

II.5 - MODELAGEM DO COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DE PEÇAS FISSURADAS DE CONCRETO ARMADO E CONCRETO PROTENDIDO.

II.5.1 - INTRODUÇÃO.

A modelagem de relações constitutivas exigida para a análise não-linear de estruturas pode ser feita de duas maneiras distintas (excetuando-se aquela referente à discretização da estrutura via elementos finitos tridimensionais), a saber:

- 1 - modelagem via relações tensão x deformação dos materiais;
- 2 - modelagem via relações momento - curvatura, em que se estabelece em cada elemento a relação entre os esforços e as deformações correspondentes médias.

Camara²¹ observa que os programas de cálculo automático que tem sido desenvolvido para simular o comportamento em serviço de estruturas reticuladas de concreto armado e protendido são, em geral, baseados em modelos do tipo 1, com os modelos do tipo 2 servindo para o desenvolvimento de métodos simplificados de cálculo a utilizar na prática, não havendo, entretanto, justificativa fundamentada que mostre serem os resultados baseados em modelos do tipo 1 melhores (mais próximos à realidade) que aqueles obtidos via modelos do tipo 2, desde que estes se encontrem suficientemente testados experimentalmente.

Entre os modelos do tipo 1 examinados pelo autor, pode-se destacar os seguintes:

- a) - o modelo proposto por Scordelis¹²⁸, adotado nas teses de Kang^{71,72} em 1977 e Mari^{88,89,90} em 1984 (ver Fig. 2.20.a), em que se admite a aderência total aço - concreto e se considera cada seção dividida em camadas;
- b) - o modelo proposto por Cauvin^{24,25,27}, em que à área de armadura tracionada se soma uma área equivalente de aço com a finalidade de simular o efeito de enrijecimento causado pela

contribuição do concreto intacto entre fissuras (ver Fig. 2.20.b);

c) - modelo baseado na definição de uma diminuição da deformação em relação àquela do Estádio II (definida pela equação 2.157) conforme proposto no Manual do CEB³⁶ para a tração (ver Fig. 2.19 e Fig. 2.22).

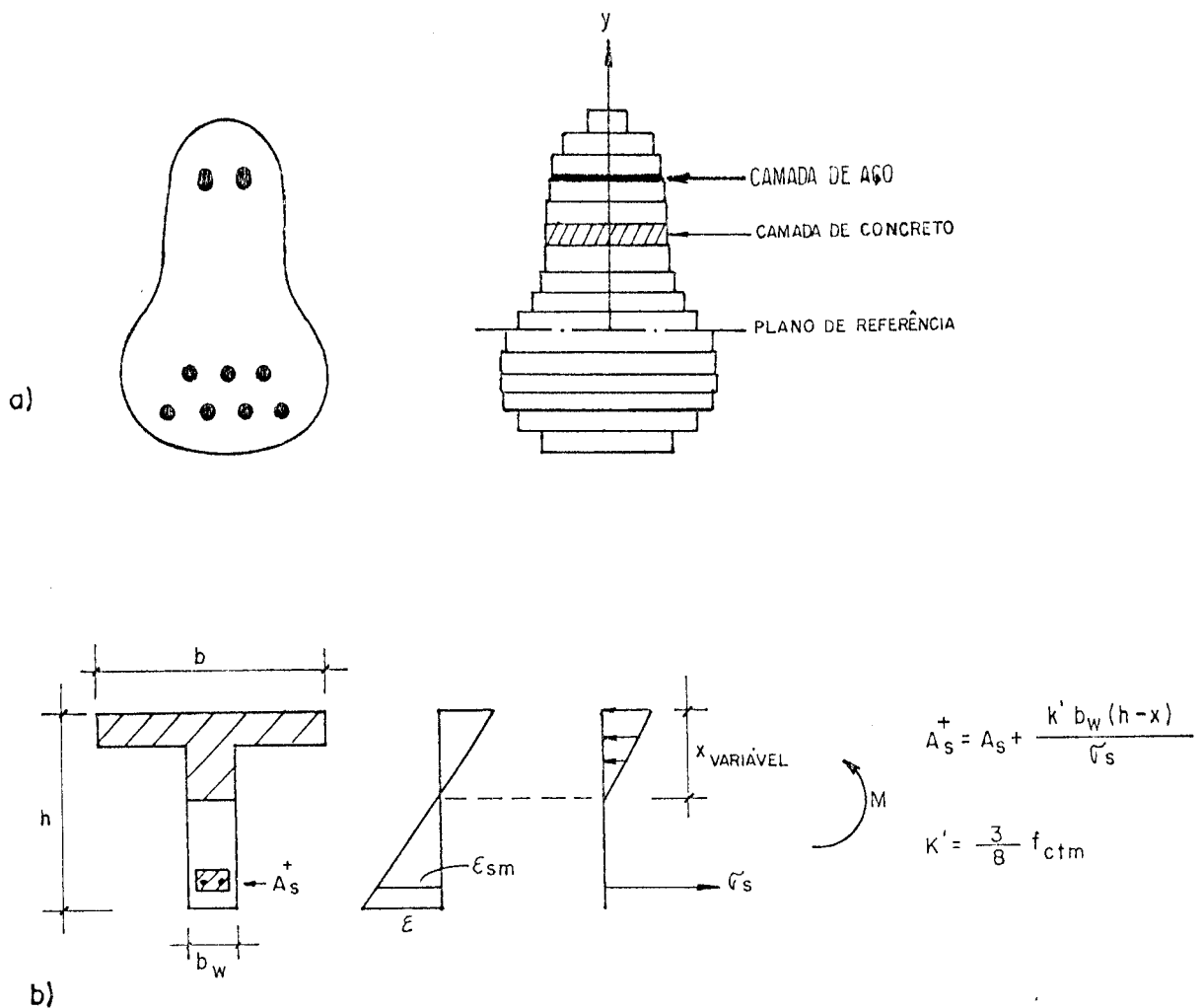


Fig. 2.20 - a) Seção transversal real e idealizada, conforme Scordelis;
b) Modelo de Cauvin.

As soluções usando valores médios das deformações (tipo 2) são obtidas por interpolação entre valores calculados analisando-se a seção fissurada (Estádio II) e não fissurada (Estádio I). São dois

tipos de modelos básicos assim desenvolvidos: um na Europa, adotado no Manual do CEB³⁶, e outro nos E.U.A., que é o recomendado pelo ACI³. Também o método de Ghali-Favre⁶⁰ é deste tipo e praticamente igual ao do CEB, havendo apenas uma diferença na abordagem da flexão composta, como se verá adiante. O método mais rigoroso existente provavelmente seja o de Debernardi⁴⁶.

Camara²¹ apresenta um estudo dos dois modelos básicos acima citados (ACI e CEB), finalizando com a apresentação de um modelo semelhante que desenvolveu e aplicou no programa de sua tese. Um estudo completo dos modelos do tipo 2 pode ser também encontrado em Machado⁸², onde o mesmo dedica um capítulo a cada um dos métodos acima citados, incluindo-se o de Debernardi.

Estudam-se a seguir os elementos básicos dos modelos que servirão para o desenvolvimento de programas de cálculo automático deste trabalho (ver capítulo V). Os modelos são analisados separadamente para tração simples (tipo 1, adotando-se aqui o modelo do CEB), flexão simples e flexão composta (tipo 2, examinando-se aqui os dois modelos básicos, CEB e ACI; no caso da flexão composta, examinar-se-á também o método de Ghali e Favre).

II.5.2 - MODELOS FÍSICOS PARA CONSIDERAÇÃO DA COLABORAÇÃO DO CONCRETO ENTRE FISSURAS.

II.5.2.1 - TRAÇÃO SIMPLES. MODELOS DO CEB^{35,36} E DE GHALI-FAVRE⁶⁰.

Num tirante de concreto armado submetido a uma força axial N (ver Fig. 2.21.a) não ocorrerão fissuras enquanto N for inferior a um valor N_r (força normal que provoca o aparecimento da primeira fissura), dado por:

$$N_r = f_{ct} [A_c + (\alpha - 1) A_s] = f_{ct} \cdot A_1 \cong f_{ct} \cdot A_c \quad (2.151)$$

onde f_{ct} é a resistência do concreto à tração e A_1 é a área da seção transversal homogeneizada no Estádio I; A_c e A_s são áreas da seção transversal, respectivamente, do concreto e do aço; $\alpha = E_s/E_c$, onde E_s é o módulo de elasticidade do aço e E_c é o módulo de elasticidade do concreto para uma carga de curta duração. Para cargas de longa

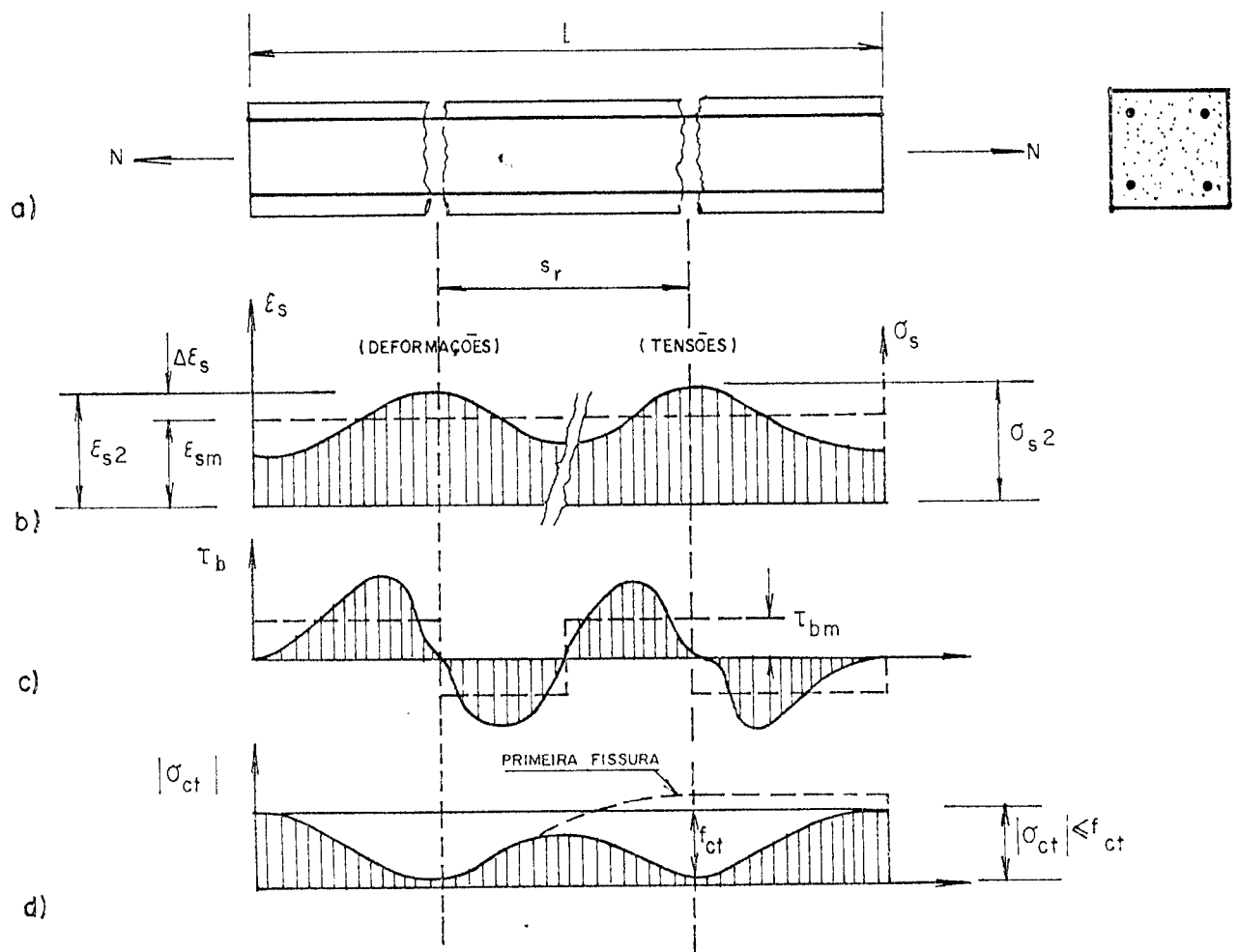
duração, devem ser levados em conta os efeitos de retração e fluência.

Pouco antes de ocorrer a primeira fissura, a seção está no Estádio I, a tensão no concreto é f_{ct} e a tensão no aço é αf_{ct} . Imediatamente após fissurar, a seção onde isto ocorreu estará no Estádio II, a tensão de tração no concreto cai a zero, com toda a tração sendo absorvida pela armadura, cuja tensão será então:

$$\sigma_{sr} = \frac{N_r}{A_s} = f_{ct} \left[\frac{A_c}{A_s} + \alpha - 1 \right] \quad (2.152)$$

O aumento de tensão no aço causado pela transferência repentina da tração antes absorvida pelo concreto produz uma deformação na armadura que é incompatível com a deformação do concreto adjacente, resultando num aumento da abertura da fissura.

Como já salientado, a colaboração do concreto intacto fora da seção fissurada tende a diminuir a deformação do aço e, a uma certa distância s_r , recobra-se a compatibilidade de deformações (Estádio I), com a tensão atingindo novamente a resistência à tração do concreto, causando o aparecimento de uma segunda fissura (ver 2.21.a), e assim por diante.



- Fig. 2.21 a) Tirante fissurado de concreto armado;
 b) Tensões e deformações na armadura;
 c) Tensões de aderência;
 d) Tensões no concreto ($\sigma \leq f_{ct}$).

Numa seção fissurada (estádio II), quando $N > N_r$ a tensão e a correspondente deformação no aço serão (ver Fig. 2.21.b):

$$\sigma_{s2} = \frac{N}{A_s} \quad (2.153)$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{N}{E_s A_s} \quad (2.154)$$

Quando $N = N_r$, a equação anterior fornece a deformação na armadura correspondente à tensão σ_{sr} , a saber:

$$\varepsilon_{sr2} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} = \frac{N_r}{E_s A_s} \quad (2.155)$$

Entre duas fissuras consecutivas, a tensão de tração no concreto e a tensão no aço terão valores menores que, respectivamente, f_{ct} e σ_{s2} ; conseqüentemente, a deformação da armadura varia ao longo do comprimento do elemento; pode-se definir a deformação média da armadura por:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.156)$$

onde l é o comprimento original do elemento e Δl o seu alongamento total; ε_{sm} representa uma média global sobre toda a peça fissurada, a ser utilizada no cálculo da abertura média das fissuras do elemento (ver equações 2.138 e 2.139) e é um valor, obviamente, menor que ε_{s2} (deformação do aço na seção fissurada). Pode-se então escrever a equação anterior de outra forma:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \Delta \varepsilon_s \quad (2.157)$$

sendo $\Delta \varepsilon_s$ a redução na deformação do aço causada pela colaboração do concreto intacto entre as fissuras na resistência às tensões de

tração. A variação de ε_{sm} com a carga aplicada N é descrita por uma curva situada entre duas retas (ver Fig. 2.22), as quais representam ε_{s1} (Estádio I) e ε_{s2} (Estádio II). O valor $\Delta\varepsilon_s$ representa então a diferença entre a deformação média ε_{sm} e a deformação da armadura ε_{s2} na seção fissurada. Essa diferença é máxima no começo da fissuração, quando $N = N_r$ ($\sigma_{ct} = f_{ct}$). Conforme resultados experimentais, segundo Ghali e Favre⁶⁰, $\Delta\varepsilon_s$ varia parabólicamente com σ_{s2} :

$$\Delta\varepsilon_s = \Delta\varepsilon_{s,msx} \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \quad (2.158)$$

Da geometria da figura citada, tem-se:

$$\Delta\varepsilon_{s,msx} = (\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1}) \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \quad (2.159)$$

Por substituição das duas equações anteriores na equação 2.157, obtem-se a expressão da deformação média no aço

$$\varepsilon_{sm} = (1 - \zeta) \varepsilon_{s1} + \zeta \varepsilon_{s2} \quad (2.160)$$

onde ζ é um coeficiente adimensional entre 0 e 1 que representa a extensão da fissuração. Quando $N < N_r$ (seção não fissurada), $\zeta = 0$. Numa seção fissurada, $0 < \zeta < 1$. O valor de ζ é dado por:

$$\zeta = 1 - \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}}\right)^2, \quad \sigma_{s2} > \sigma_{sr} \quad \text{ou} \quad (2.161)$$

$$\zeta = 1 - \left(\frac{N_r}{N}\right)^2, \quad N > N_r \quad (2.162)$$

$$\begin{cases} \zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \right)^2 = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{N_r}{N} \right)^2 \\ \zeta = 0, \quad \sigma_{s2} < \sigma_{sr} \text{ ou } N < N_r \end{cases} \quad (2.163)$$

repetindo-se aqui, por comodidade de leitura, os valores de β_1 e β_2 :

a) condições de aderência:

$\beta_1 = 1,0$ para barras de alta aderência ($\eta_b \geq 1,5$);

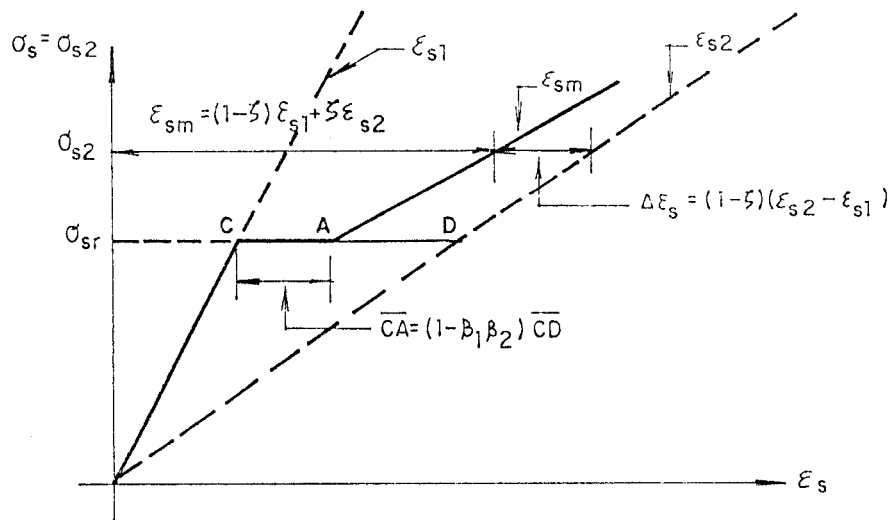
$\beta_1 = 0,5$ para barras lisas ($\eta_b = 1,0$);

b) Condições de carregamento:

$\beta_2 = 1,0$ para o primeiro carregamento ou para cargas pouco repetitivas, não permanentes;

$\beta_2 = 0,5$ para cargas permanentes ou com um grande número de ciclos.

Com essa modificação, o gráfico de ε_{sm} (ver Fig. 2.22) apresentará um patamar ao nível da tensão σ_{sr} (ver Fig. 2.23).



- FIG. 2.23 - Deformação média na armadura em um tirante, segundo o CEB³⁶.

Uma outra forma de apresentar as expressões e idéias vista até aqui é através de modelos físicos, idealizados para representar o comportamento dos elementos fissurados, levando em consideração a colaboração do concreto entre fissuras para a rigidez do elemento. No caso da tração simples, o elemento considerado, de comprimento ℓ (ver Fig. 2.21) é substituído por um modelo de igual comprimento, submetido à mesma ação externa, apresentando a mesma deformação total $\Delta\ell$, porém dividido em duas partes (ver Fig. 2.24):

- parte (I): não fissurada, trabalhando no Estádio I;
- parte (II): fissurada, trabalhando no Estádio II;

Devido à igualdade das deformações médias no modelo e no elemento considerado, obtém-se:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2}{\ell} = \frac{\ell_1 \varepsilon_{s1} + \ell_2 \varepsilon_{s2}}{\ell} \quad (2.164)$$

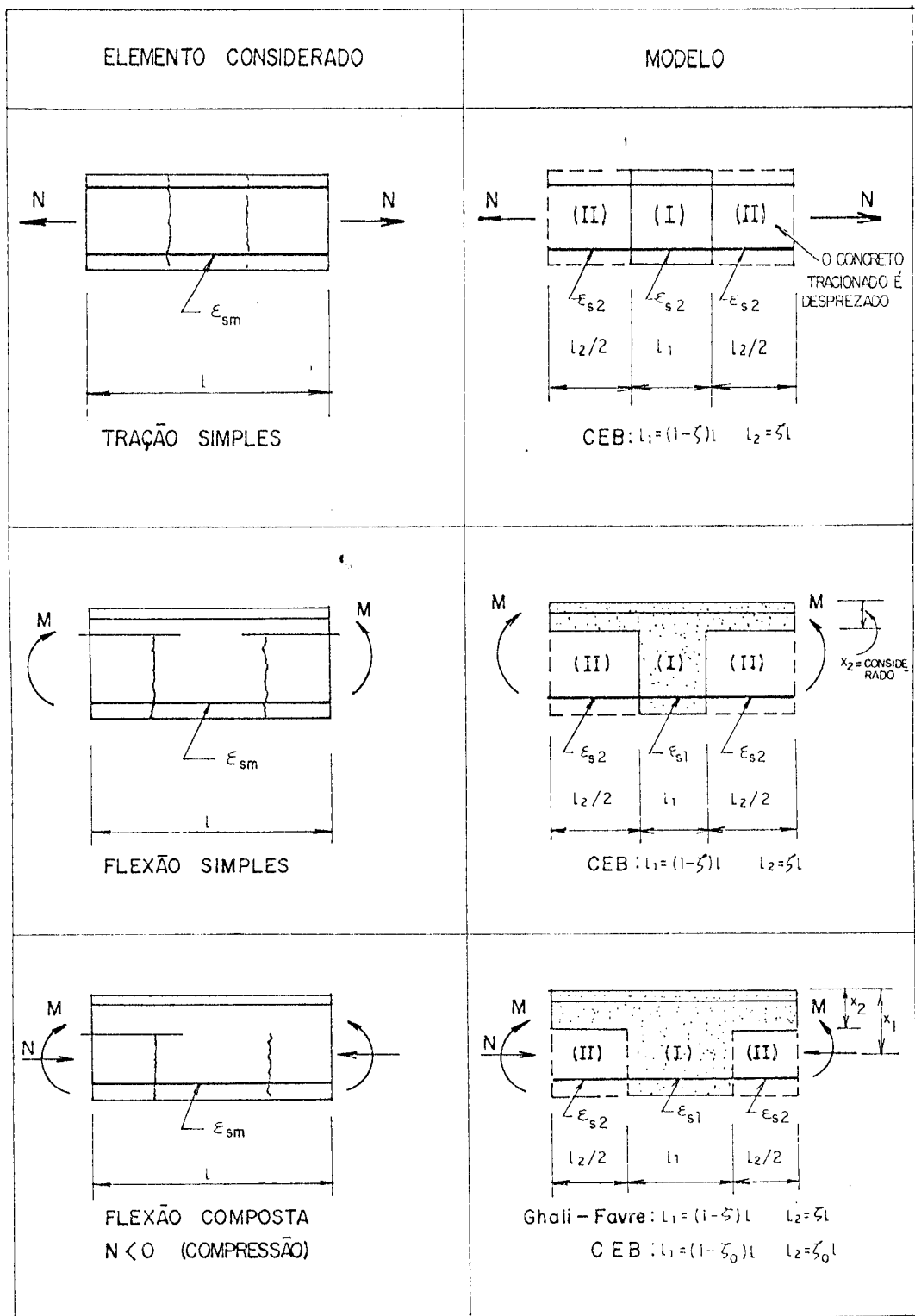
que também pode ser escrita:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\ell_1}{\ell} \varepsilon_{s1} + \frac{\ell_2}{\ell} \varepsilon_{s2} \quad (2.165)$$

Comparando-se essa expressão com a 2.160, tem-se:

$$\frac{\ell_1}{\ell} = 1 - \zeta \quad \text{e} \quad \frac{\ell_2}{\ell} = \zeta \quad (2.166)$$

Isto significa que para um elemento de comprimento unitário ($\ell = 1$) o comprimento da parte fissurada é numericamente igual ao coeficiente de interpolação ζ . Neste modelo também fica esclarecido que o alongamento médio ε_{cm} do concreto envolvente (ver eq. 2.139) vale:

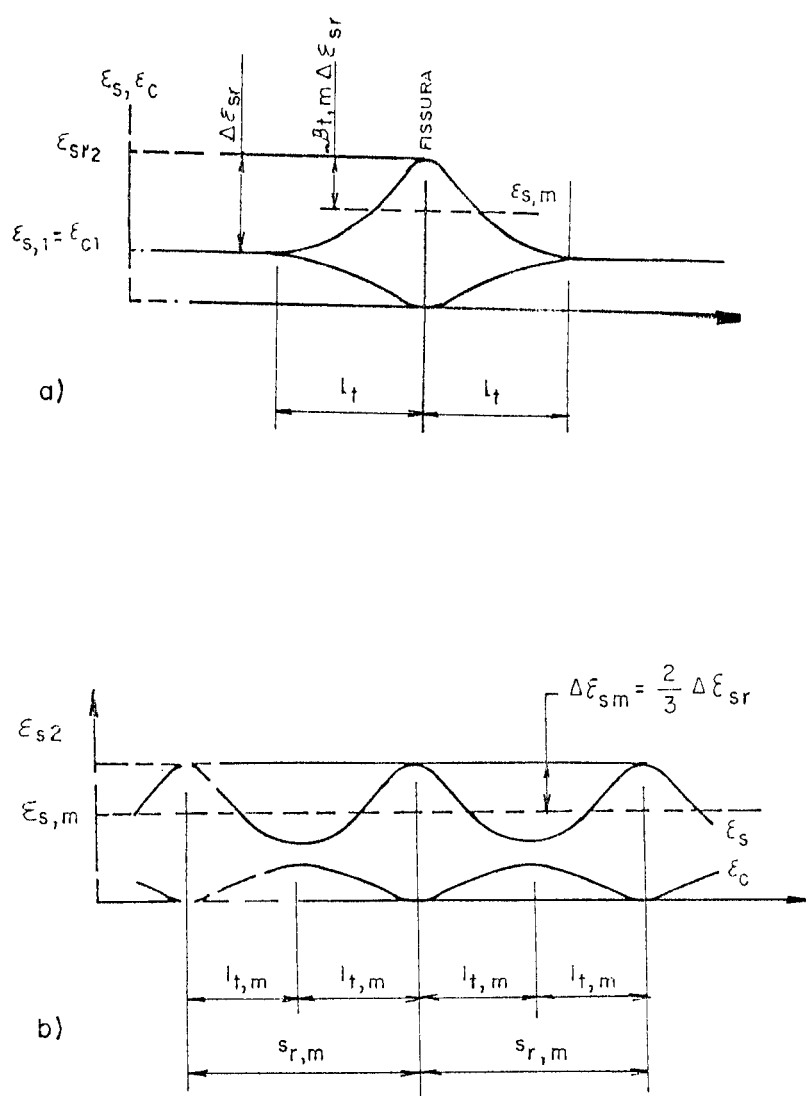


- Fig 2.24 - Modelos físicos do CEB para a consideração da colaboração do concreto entre fissuras: (I) = Estádio (I); (II) = Estádio II.

$$\epsilon_{cm} = (1 - \zeta) \epsilon_{s1} = (1 - \zeta) \epsilon_{c1} \quad (2.167)$$

já que, por aderência, as deformações na armadura e no concreto no Estádio I são iguais ($\epsilon_{s1} = \epsilon_{c1} = N/E_c A_1$). O restante da deformação (segunda parcela da equação 2.160) média é a denominada deformação relativa da armadura em relação ao concreto adjacente ϵ_{srm} empregada nos cálculos de abertura de fissuras (ver eq. 2.138; ver também a 2.145 no item II.4.2.2):

$$\epsilon_{srm} = \zeta \epsilon_{s2}$$



- FIG. 2.25 - a) - Distribuição das deformações no aço e no concreto, fissuração simples;
b) - fissuração estabilizada.

O MC - 90³⁵ do CEB propõe uma formulação análoga a do MC - 78 (equações 2.157 a 2.163), com algumas modificações. Distingue, por exemplo, o cálculo da abertura média das fissuras para as situações de fissuração simples (primeira fissura) e estabilizada (ver equações 2.146 a 2.148 e a tabela 2.3). Quando ocorre a primeira fissura, a deformação média no aço é dada por (ver Fig. 2.25 a):

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta_{t,m} \Delta\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{s2} - \beta_{t,m} (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}) \quad (2.168)$$

onde $\beta_{t,m}$ é um fator de integração para a deformação do aço ao longo do comprimento ℓ_t de escorregamento entre aço e concreto (na equação 2.146 abreviou-se, fazendo-se $\beta_{t,m} = \beta$; no caso de tração simples, $\beta_{t,m} = 0,60$). Após estabilizada a fissuração (ver Fig. 2.25b), a deformação média será dada por:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta_{t,m} \Delta\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta_t \Delta\varepsilon_{sr} \quad (2.169)$$

onde

$$\beta_t = \frac{2}{3} \beta_{t,m} \begin{cases} = 0,40, \text{ carga instantanea;} \\ 0,25, \text{ cargas de longa duração ou ciclos de cargas} \\ \text{(ver tabela 2.3).} \end{cases}$$

Para aplicações práticas, pode-se levar em conta a colaboração do concreto intacto entre fissuras ("tension stiffening") modificando-se a relação tensão-deformação do aço como segue (ver Fig. 2.26):

a) - concreto não fissurado:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s1}, \quad (0 < \sigma_s \leq \sigma_{sr1}) \quad (2.170)$$

b) - fase de fissuração:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta_t \frac{(\sigma_s - \sigma_{sr1}) + (\sigma_{srn} - \sigma_s)}{\sigma_{srn} - \sigma_{sr1}} (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1})$$

$$(\sigma_{sr1} < \sigma_s \leq \sigma_{srn}) \quad (2.171)$$

c) - fissuração estabilizada:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta_t \cdot \Delta\varepsilon_{sr}, \quad (\sigma_{srn} < \sigma_s \leq f_{yk}) \quad (2.172)$$

d) - após o escoamento da armadura:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sy} - \beta_t \cdot \Delta\varepsilon_{sr} + \delta \left[1 - \frac{\sigma_{sr1}}{f_{yk}} \right] (\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{sy}), \quad (f_{yk} < \sigma_s < f_{tk})$$

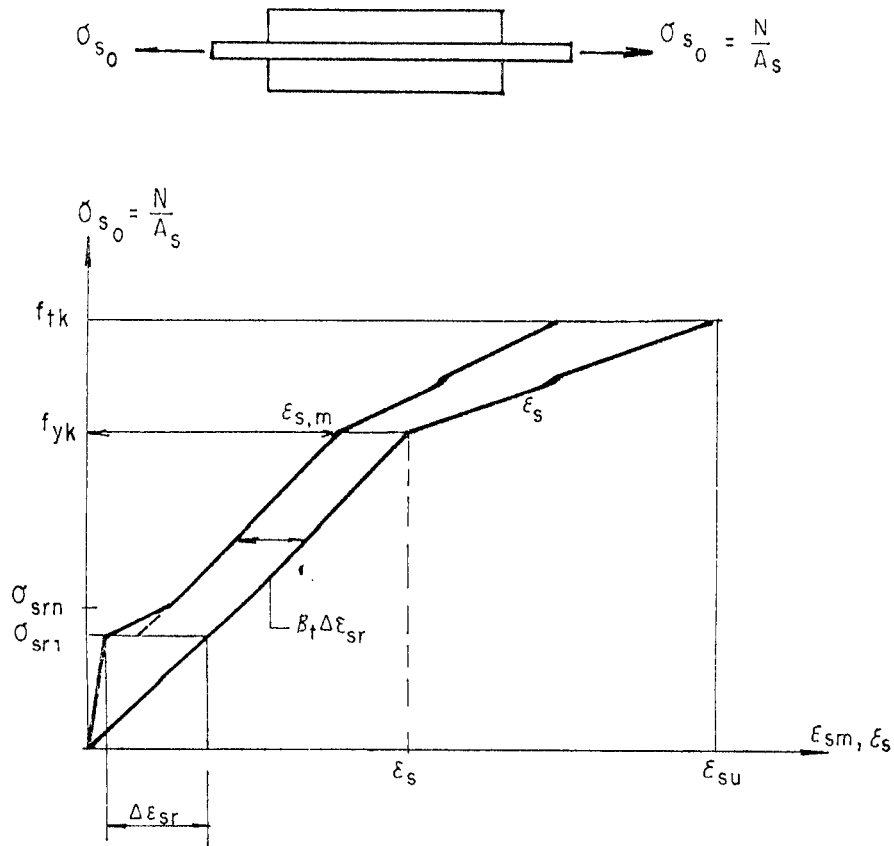
$$(2.173)$$

onde ε_{sy} é a deformação do aço correspondente ao escoamento, σ_{sr1} é a tensão no aço que ocasiona o aparecimento da primeira fissura e σ_{srn} é tensão no aço após a estabilização. β_t varia entre 0,12 a 0,40; $\delta = 0,8$ é um coeficiente que relaciona as tensões de escoamento do aço à tração e à compressão (ver item 3.2.3 do MC - 90 do CEB). Normalmente, tem-se:

$$\sigma_{srn} = 1,3 \sigma_{sr} \quad (2.174)$$

com $\sigma_{sr} = \sigma_{sr1}$ (ver equação 2.152). Neste caso, na fase de fissuração a (eq. 2.171) se escreve:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta_t \frac{(\sigma_s - \sigma_{sr}) + (1,3 \sigma_{sr} - \sigma_s)}{0,3 \sigma_{sr}} (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}) \quad (2.175)$$



- FIG. 2.26 - Deformação média na armadura em um tirante, segundo o MC - 90 do CEB.

O MC - 90 também distingue o valor do f_{ct} a ser usado no cálculo de σ_{sr} (ver eq. 2.151) em diferentes casos, propondo tomar-se:

- . no cálculo de deslocamentos, o valor médio ou o característico inferior da resistência à tração f_{ct} (ver item II.2.1.3 deste trabalho);
- . no cálculo de armadura mínima, o valor característico superior;
- . para verificações de estabilidade e cálculo da abertura das fissuras, o valor médio do f_{ct} .

II.5.2.2 - FLEXÃO SIMPLES.

II.5.2.2.1 - MODELO DO MANUAL DO CEB³⁶ (MC - 78).

O Modelo do Manual do CEB baseia-se na hipótese já mencionada no item anterior: considerar a deformação média de um elemento fissurado como equivalente à um elemento fictício em que parte deste funciona no Estádio I e a restante no Estádio II (ver Fig. 2.24). Para as peças fletidas admite-se, além da hipótese de que a deformação média ϵ_{sm} na armadura tracionada seja igual para o modelo e para o elemento considerado, também a igualdade das curvaturas, isto é, das deformações angulares por unidade de comprimento. A interpretação dos trechos l_1 e l_2 é análoga ao do caso de tração simples (ver eq. 2.166). De se notar que a posição da linha neutra x_2 no Estádio II é suposta constante e igual à da parte II (não depende do carregamento externo, somente da seção).

Considere-se então o trecho de um elemento submetido à flexão simples (ver Fig. 2.27.a), o qual não deverá fissurar enquanto o momento fletor que o solicita não atingir o valor do momento de fissuração M_r , dado por:

$$M_r = w_1 \cdot f_{ct} \cong w_c \cdot f_{ct} \quad (2.176)$$

onde w_1 é o módulo de resistência da seção ideal calculada no Estádio I, w_c é o módulo da seção de concreto apenas e f_{ct} é a resistência à tração na flexão do concreto (também conhecida como módulo de ruptura, sendo em geral maior do que a resistência à tração simples); deve-se usar f_{ctk} quando for para evitar danos na estrutura e f_{ctm} para o cálculo de deslocamentos. Quando $M > M_r$, a distribuição das tensões e deformações é semelhante ao caso de tração simples (ver Fig. 2.15 e 2.21), isto é, admite-se que os valores máximos ocorram nas seções das fissuras e os mínimos na metade do trecho intacto entre duas fissuras vizinhas. A curvatura média é definida pela relação (item 16.2.2 do MC - 78³⁷):

$$\psi_m = \frac{1}{r_m} = \frac{M}{EI_m} = \frac{\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}}{d} \quad (2.177)$$

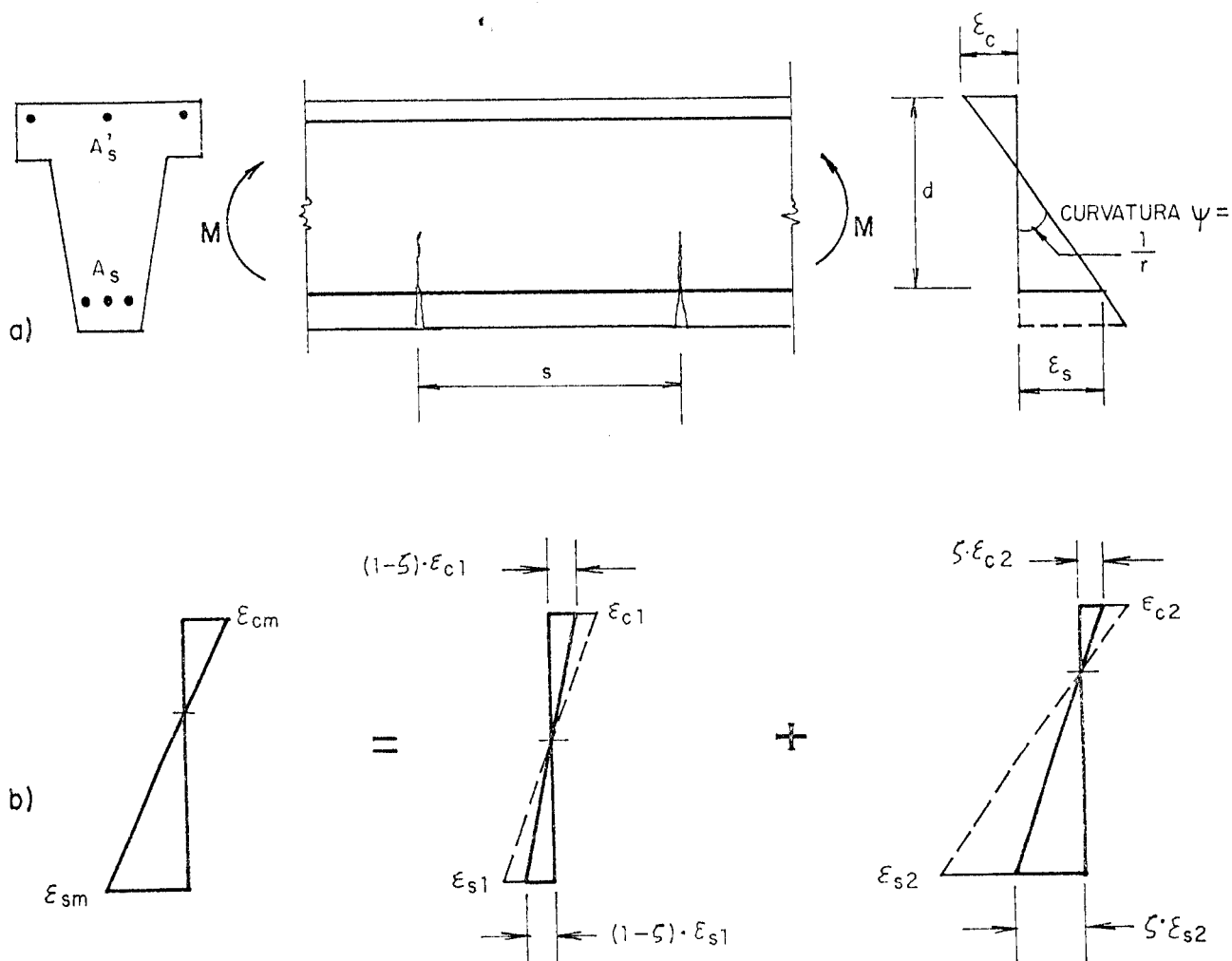
sendo d a altura útil da seção.

Com base no modelo de cálculo (ver Fig. 2.24), pode-se escrever (ver Fig. 2.27.b):

$$\begin{cases} \varepsilon_{sm} = (1 - \zeta) \varepsilon_{s1} + \zeta \varepsilon_{s2} \\ \varepsilon_{cm} = (1 - \zeta) \varepsilon_{c1} + \zeta \varepsilon_{c2} \end{cases} \quad (2.178)$$

onde:

$$\begin{cases} \zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \right)^2 = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{M_r}{M} \right)^2 \\ \zeta = 0, \text{ para } \sigma_{s2} < \sigma_{sr} \text{ ou } M < M_r \end{cases} \quad (2.179)$$



- FIG. 2.27 - a) elemento fissurado de concreto armado no caso de flexão simples;
b) curvatura média correspondente.

As tensões σ_{sr} e σ_{s2} são calculadas no Estádio II para os valores dos momentos M_r e M , respectivamente; β_1 e β_2 tem os mesmos valores do item anterior (ver eq. 2.163).

Por substituição da equação (2.178) em (2.177), obtém-se a expressão da curvatura média (ver Fig. 2.28):

$$\psi_m = \frac{1}{r_m} = (1 - \zeta) \cdot \frac{1}{r_1} + \zeta \cdot \frac{1}{r_2} \quad (2.180)$$

onde as curvaturas $1/r_1$ e $1/r_2$, correspondentes, respectivamente, aos Estádios I e II, podem ser escritas em função ou do momento fletor solicitante M ou das deformações, a saber:⁷

7

O cálculo de curvaturas (instantâneas e a longo prazo) nos Estádios I e II, para seções de concreto armado, também pode ser feito através de coeficientes corretores da curvatura elástica, como definido pelo Manual do CEB³⁶ ou por Ghali e Favre⁶⁰, baseando-se na hipótese de que a área do concreto comprimido se mantenha constante ao longo do tempo; assim, as curvaturas instantâneas nos Estádios I e II são dadas por:

$$\left(\frac{1}{r_o}\right)_I = k_{s1} \frac{1}{r_c}$$

$$\left(\frac{1}{r_o}\right)_{II} = k_{s2} \frac{1}{r_c}$$

e a longo prazo:

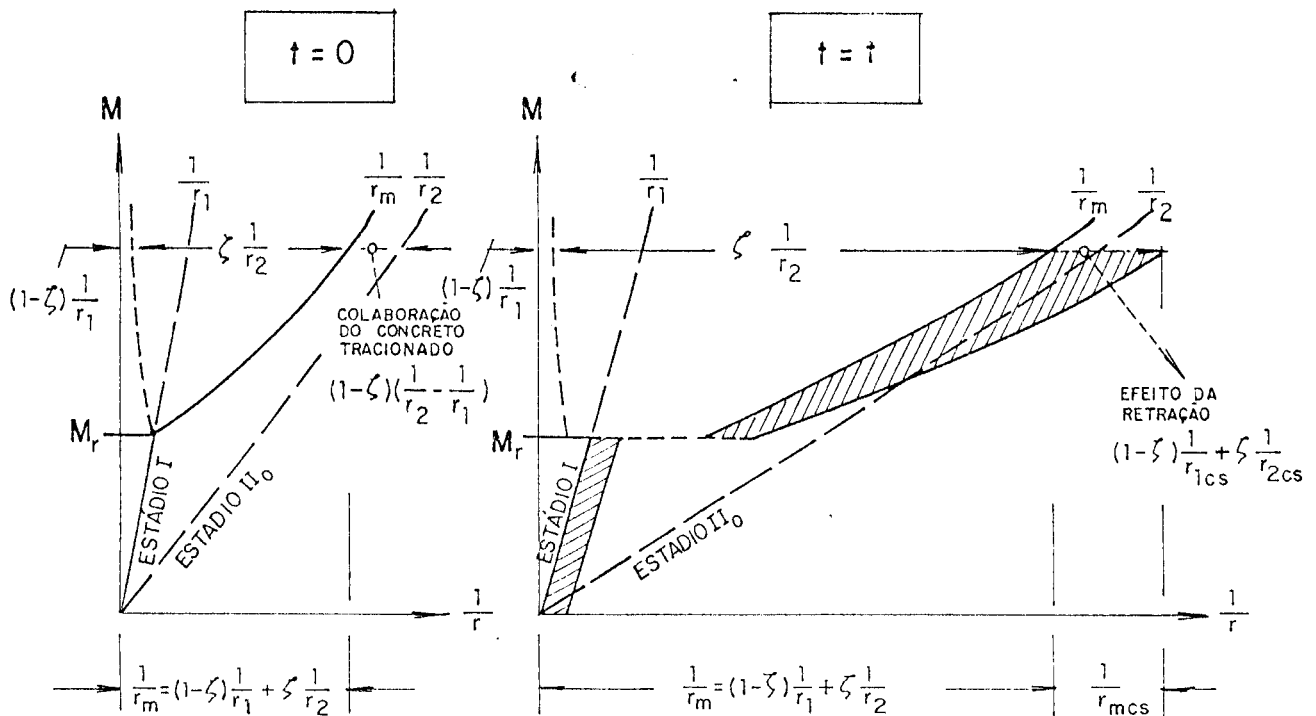
$$\left(\frac{1}{r_t}\right)_I = (1 + \varnothing k_{\varnothing 1}) k_{s1} \frac{1}{r_c} + k_{cs1} \frac{|\varepsilon_{cs}|}{d}$$

$$\left(\frac{1}{r_t}\right)_{II} = (1 + \varnothing k_{\varnothing 2}) k_{s2} \frac{1}{r_c} + k_{cs2} \frac{|\varepsilon_{cs}|}{d}$$

onde \varnothing é o coeficiente de fluência, ε_{cs} é a retração uniforme (ver item II.2.1.4) e os k são coeficientes de correção (veja-se o item 3.1.1 do Manual do CEB³⁶).

$$\psi_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{M}{E_c I_1} = \frac{\epsilon_{s1} - \epsilon_{c1}}{d} \quad (2.181)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{r_2} = \frac{M}{E_c I_2} = \frac{\epsilon_{s2} - \epsilon_{c2}}{d} \quad (2.182)$$



- FIG. 2.28 - Representação do cálculo da curvatura média a curto e longo prazo.

Se se definir uma rigidez secante para um dado nível de carga (rigidez média à flexão) tal que (ver Fig. 2.29):

$$E_c I_m = \frac{M}{1/r_m} \quad (2.183)$$

com o auxílio das equações (2.180) a (2.182) pode-se obter a expressão da inércia à flexão simples do elemento considerado, I_m , a saber:

$$I_m = \frac{I_1 I_2}{\zeta I_1 + (1 - \zeta) I_2} \quad (2.184)$$

em que I_1 e I_2 são as inércias do elemento nos Estádios I e II, respectivamente.

II.5.2.2.2 - MODELO DO ACI .

Uma outra forma de considerar a colaboração do concreto intacto entre fissuras no cálculo de deslocamentos devidos à flexão simples é através da adoção de um momento de inércia efetivo I_e , geralmente suposto constante em todo o vão do elemento considerado, e através do qual se define uma rigidez secante, considerada como uma ponderação entre os Estádios I e II (ver Fig. 2.29), tal que:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E I_e} \quad (2.185)$$

Neste modelo, adotado pelo ACI³ (veja-se o item 9.5.2.3 da referida norma), o valor de I_e é calculado através da denominada fórmula de Branson, a saber:

$$I_e = \left(\frac{M_r}{M}\right)^m I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^m\right] I_2, \quad (M \geq M_r) \quad (2.186)$$

onde I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto e I_2 é o momento de inércia da seção homogeneizada no Estádio II (em relação ao centro de gravidade da seção); o expoente $m = 3$ é empregado quando se atribue um único valor de I_e para todo o vão, como recomenda o ACI.

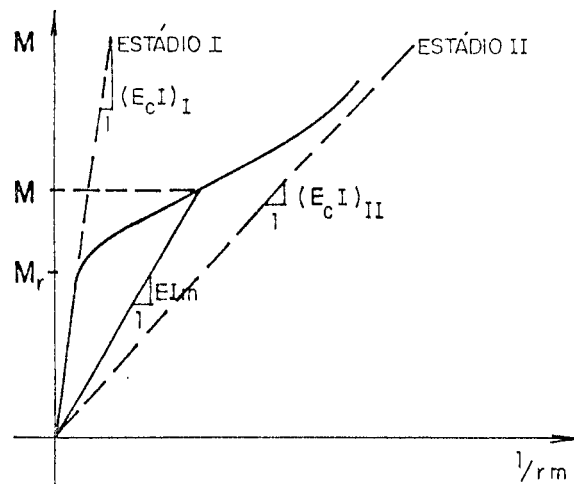
Segundo Branson, deve-se utilizar o expoente $m = 4$ no cálculo de curvaturas das seções, quando analisados isoladamente; neste caso, parece evidente ser a fórmula de Branson também uma expressão de interpolação entre os Estádios I e II (admitindo-se a

aproximação $I_1 \cong I_c$), podendo-se então calcular através dela o momento de inércia médio da seção:

$$I_m = \left(\frac{M_r}{M} \right)^4 I_1 + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M} \right)^4 \right] I_2' \quad (M \geq M_r) \quad (2.187)$$

Os efeitos do tempo não são tidos em consideração de forma direta nas relações momento-curvatura, mas através de um coeficiente corretor na avaliação da deformação (veja-se o item 9.5.2.5 do A.C.I.).

Camara²¹ traz um estudo comparativo entre os módulos de flexão secante I_m obtidos via processo do CEB (equação 2.184) e do ACI (eq. 2.187) para ações de curto prazo. Verifica-se que, para percentagens baixas de armadura ($\leq 0,5\%$), a colaboração do concreto entre fissuras tem maior importância no modelo do ACI, e que, para percentagens superiores, os dois modelos são equivalentes (isto se se tomar $\beta_1\beta_2 = 1$ no modelo do CEB).



- FIG. 2.29 - Definição da rigidez secante equivalente de um elemento de concreto armado, segundo o ACI.

II.5.2.3 - FLEXÃO COMPOSTA.

II.5.2.3.1 - INTRODUÇÃO.

No caso da atuação combinada da flexão com uma força axial (ver Fig. 2.24), a posição da linha neutra x nos estádios I e II depende não somente das propriedades mecânicas e geométricas da seção, como ocorre no caso da flexão simples, mas também do carregamento externo, mais precisamente da excentricidade da força normal $e = M/N$. O modelo físico admite as igualdades das deformações axiais e das curvaturas com as do elemento considerado; os comprimentos l_1 e l_2 dependem da interpolação considerada: Ghali-Favre ou CEB, como se verá adiante.

Considere-se o trecho fissurado de um elemento de concreto armado submetido à flexão composta (ver Fig. 2.30), supondo-se M e N aplicados no centro de gravidade G_1 da seção ideal A_1 (não fissurada) e admitindo-se que sua atuação combinada seja capaz de fissurar a fibra inferior.

No Estádio I a área A_1 da seção ideal permanece constante. A força normal pode causar flexão adicional na seção devido ao deslocamento do centro de gravidade G_1 ao longo do tempo, causado por cargas de longa duração. De fato, como já examinado (ver item II.2.1.4), o módulo de elasticidade do concreto diminui com o tempo, quando se considera a atuação das cargas permanentes, sendo maior para cargas imediatas (ver eq. 2.44 a 2.46); a menos da retração, a deformação total do concreto é dada por:

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_{c0}}{E_{c0}} (1 + \varnothing) + \frac{\Delta\sigma_c}{E_{c0}} (1 + \chi \varnothing) = \frac{\sigma_{c0}}{E_{cef}} + \frac{\Delta\sigma_c}{\bar{E}_{c0}} \quad (2.188)$$

onde \bar{E}_{c0} é o módulo de elasticidade ajustado (ver eq. 2.46) e E_{cef} é o módulo efetivo necessário ao cálculo da deformação sob a tensão σ_{c0} , dado por:

$$E_{cef} = \frac{E_{c0}}{1 + \varnothing} \quad (2.189)$$

Como resultado da atuação de cargas de longa duração, a tensão no concreto diminui e, como consequência, no caso de armaduras assimétricas, G_1 se move em direção ao centro de gravidade da armadura; com isso, a força normal pode causar flexão adicional. Entretanto, no Estádio I, todas as relações permanecem lineares (por exemplo, a relação tensão x deformação).

No Estádio II a área comprimida de concreto varia devido ao efeito da força normal e das cargas de longa duração; em particular sua altura, que aumenta com o tempo, provocando um abaixamento da linha neutra (ver Figura 2.13), mesmo para força normal constante (há um deslocamento de G_2 , centro de gravidade da seção A_2 fissurada, ver Fig. 2.30); com isto, aparece também uma flexão adicional. No Estádio II todas as relações são, então, não lineares (ver Fig. 2.31).

Como consequência, ao se calcular a curvatura média $1/r_m$, o coeficiente de interpolação ζ é difícil de se definir, ao contrário do que ocorria nos casos anteriores aqui examinados (tração e flexão simples). O Manual do CEB³⁶ indica dois tipos possíveis de soluções práticas (ver item 3.1.3 do Manual):

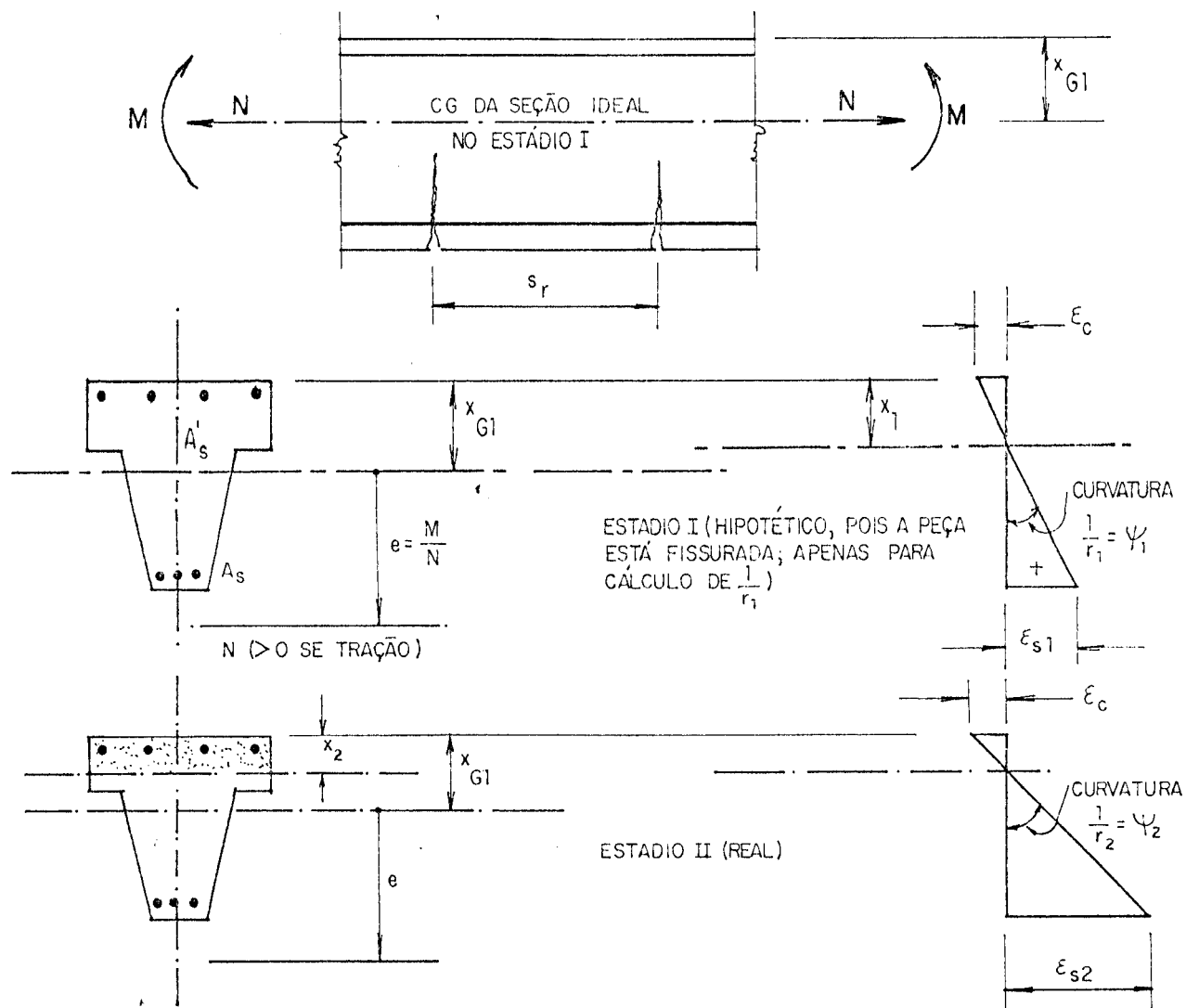
- a - adotar-se um dos valores extremos ($1/r_1$, função linear de M, ou $1/r_2$, função não-linear) para a avaliação da curvatura, conforme cada problema; obtem-se ou o limite superior ou o inferior da curvatura;
- b - adotar-se um valor médio razoável para a curvatura, a partir de um critério aproximado.

O segundo procedimento é o considerado nas soluções aproximadas apresentadas a seguir, uma sugerida por Ghali e Favre⁶⁰, ainda com o emprego do coeficiente ζ , e outra proposta pelo CEB³⁶, usando um coeficiente ζ_0 , ambas visando reduzir a complexidade do problema ao caso da flexão simples.

II.5.2.3.2 - MODELO DE GHALI E FAVRE⁶⁰.

Ghali e Favre estendem o uso das equações da flexão simples para o cálculo da curvatura média em um elemento fissurado de concreto armado submetido à flexão composta (ver Fig. 2.30), com N aplicado no centro de gravidade da seção homogeneizada A_1 não

fissurada. A convenção de sinais permanece a mesma adotada anteriormente (ver item II.3.1). Supõe-se que M e N tenham intensidade suficiente para provocar fissuração na fibra inferior do elemento.



- FIG. 2.30 - Curvaturas calculadas nos Estádios I e II para uma seção de concreto armado submetida à flexão composta.

A excentricidade da força normal será positiva quando a resultante de M e N estiver localizada abaixo de G_1 :

$$e = \frac{M}{N} \quad (2.190)$$

Ghali e Favre distinguem no equacionamento duas situações: na primeira, supõe-se que M e N cresçam simultaneamente de zero até o valor que provoca a fissuração, com excentricidade constante (ou seja, M e N são causados por carregamento externo, aplicado

gradualmente); na segunda situação, com excentricidade variável, supõe-se N aplicado inicialmente e mantido constante, com M agindo em seguida e crescendo gradualmente (é o caso, por exemplo, da protensão inicial). Seja, então, a consideração das duas situações mencionadas.

a - crescimento simultâneo de M e N, com excentricidade constante:

Supondo atuação de uma carga externa aplicada gradualmente, pode-se obter os valores N_r e do momento correspondente M_r que produzem fissuração na fibra inferior do elemento considerado (ver Fig. 2.30):

$$N_r = f_{ct} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{e}{w_1} \right)^{-1} \quad (2.191)$$

$$M_r = e \cdot N_r \quad (2.192)$$

onde w_1 é o módulo de resistência da seção homogeneizada no Estádio I, em relação à fibra mais tracionada; a equação (2.191) não é válida quando a fibra inferior estiver comprimida.

Quando $N > N_r$ e $M > M_r$, isto é, após a fissuração, a deformação média na armadura pode ser calculada pela equação (2.160), aqui repetida por comodidade:

$$\varepsilon_{sm} = (1 - \zeta) \varepsilon_{s1} + \zeta \varepsilon_{s2} \quad (2.193)$$

com o coeficiente de interpolação ζ sendo obtido por uma das seguintes expressões:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \right)^2 \quad (2.194)$$

$$\text{ou } \zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{M_r}{M} \right)^2 \quad (2.195)$$

$$\text{ou } \zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{N_r}{N} \right)^2 \quad (2.196)$$

onde ε_{s1} e ε_{s2} são as deformações na armadura de tração causadas pela atuação conjunta de M e N (obtidas supondo, respectivamente, Estádios I e II); σ_{s2} e σ_{sr} são as tensões nessa armadura calculadas no Estádio II supondo, respectivamente, atuação de M e N e de M_r e N_r . Lembrando que a posição da linha neutra numa seção fissurada depende da excentricidade $e = M/N$ e não dos valores isolados de M e N, com e suposto constante tem-se:

$$\frac{M}{N} = \frac{M_r}{N_r} \rightarrow \frac{M_r}{M} = \frac{N_r}{N} = \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \quad (2.197)$$

As expressões (2.194) a (2.196) são, portanto, equivalentes. A curvatura média é obtida por (ver eq. 2.180):

$$\psi_m = \frac{1}{r_m} = (1 - \zeta) \psi_1 + \zeta \psi_2 = (1 - \zeta) \frac{1}{r_1} + \zeta \frac{1}{r_2} \quad (2.198)$$

onde ψ_1 e ψ_2 são as curvaturas obtidas para o par de esforços (M, N), calculadas respectivamente nos Estádios I e II (ver Fig. 2.30).

b - M crescente após a aplicação de N constante:

Nesta situação, supõe-se que N seja introduzido inicialmente (com seu valor integral) e mantido constante; após isso, com a aplicação subsequente e gradual de M, ocorrerá fissuração quando $M = M_r$, este sendo dado por:

$$M_r = (f_{ct} - \frac{N}{A_1}) w_1 \quad (2.199)$$

Considerando as expressões obtidas (equações 2.192 e 2.199), conclui-se que os valores dos esforços de fissuração (bem como do coeficiente ζ que, como já visto, representa a extensão da fissuração no elemento) dependem da forma como é aplicado o carregamento na estrutura, isto é, M_r e ζ dependem da história do carregamento.

A protensão parcial pode ser citada como um exemplo ilustrativo desta segunda situação: a força de protensão é geralmente introduzida com seu valor integral e mantida constante (desprezando-se aqui para efeito de raciocínio as perdas imediatas e ao longo do tempo); com a introdução posterior de M, a equação (2.199) descreve melhor a situação, com a fissuração ocorrendo para o par de esforços N e M_r .

Numa seção fissurada (Estádio II) a posição da linha neutra depende da excentricidade e da força normal (equação 2.190), resultando portanto posições diferentes da mesma para as combinações (M, N) e (M_r, N) ; conseqüentemente, a expressão (2.197) não se aplica, isto é:

$$\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \neq \frac{M_r}{M} \quad (2.200)$$

e equações análogas às (2.194) a (2.196) não seriam equivalentes, como no caso de excentricidade constante. A rigor, dever-se-ia aplicar a equação (2.194) para o cálculo de ζ , com os valores de σ_{sr} e σ_{s2} calculados separadamente no Estádio II para as combinações (M_r, N) e (M, N) , respectivamente. Como, porém, os resultados assim obtidos são pouco diferentes daqueles obtidos ao se considerar o caso (a), Ghali e Favre⁶⁰ recomendam desprezar a história do carregamento. Na prática, portanto, as expressões (2.191), (2.192) e (2.195) ou (2.196) podem ser aplicados para os casos (a) e (b).

Elementos parcialmente protendidos são projetados de forma a que não ocorra fissuração sob o efeito de cargas permanentes, com as cargas acidentais provocando fissuração de forma transitória. Com isso, os efeitos de fluência e retração do concreto e relaxação do aço de protensão devem ser considerados apenas para seções não fissuradas.

Se não for este o caso, ou no caso de elementos de concreto armado fissurado por efeito de cargas de longa duração, os efeitos dependentes do tempo podem ser levados em conta no cálculo da deformação axial e da curvatura nos Estádios I e II (ver item II.3.3.2), com a interpolação podendo ser feita com o equacionamento visto até aqui, para levar em conta a colaboração do concreto intacto entre fissuras (lembrando que, para cargas de longa duração, $\beta_2 = 0,5$).

II.5.2.3.3 - MODELO DO MANUAL DO CEB³⁶ (MC - 78).

De acordo com a proposta do Manual do CEB, a curvatura média deve ser calculada de uma forma fictícia, transformando o problema da flexão composta num de flexão simples equivalente, com o equilíbrio estabelecido ao nível da linha neutra da flexão simples. A força normal N , suposta constante, atua, por definição, no centro de gravidade da seção homogeneizada (Estádio I). Na figura 2.31 ilustram-se graficamente relações típicas momento - curvatura, com a curvatura média entre os dois limites (inferior e superior); observa-se que o diagrama da curvatura $1/r_{2x}$ no Estádio II é uma curva, caracterizando a não-linearidade já comentada.

Para o cálculo dos valores extremos das curvaturas, algumas simplicificações podem ser introduzidas, a saber:

a - Estádio I:

Como já comentado (ver Fig. 2.30), a força normal causa flexão adicional (mudança de G_1 com o tempo) para seções armadas assimetricamente; a curvatura $1/r_1$ devida à flexão simples sofre, então, um acréscimo devido à força normal:

$$\frac{1}{r_{1x}} = \left(\frac{1}{r_1}\right)^M + \left(\frac{1}{r_1}\right)^N = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{1N}} \quad (2.201)$$

Como tal acréscimo é geralmente pequeno, não é considerado e, conseqüentemente, a curvatura $1/r_{1x}$ devido à flexo-compressão é a mesma da flexão simples $1/r_1$ (ver Fig. 2.31):

$$\frac{1}{r_{1x}} \cong \frac{1}{r_1} = \frac{M}{E_c I_1} \quad (2.202)$$

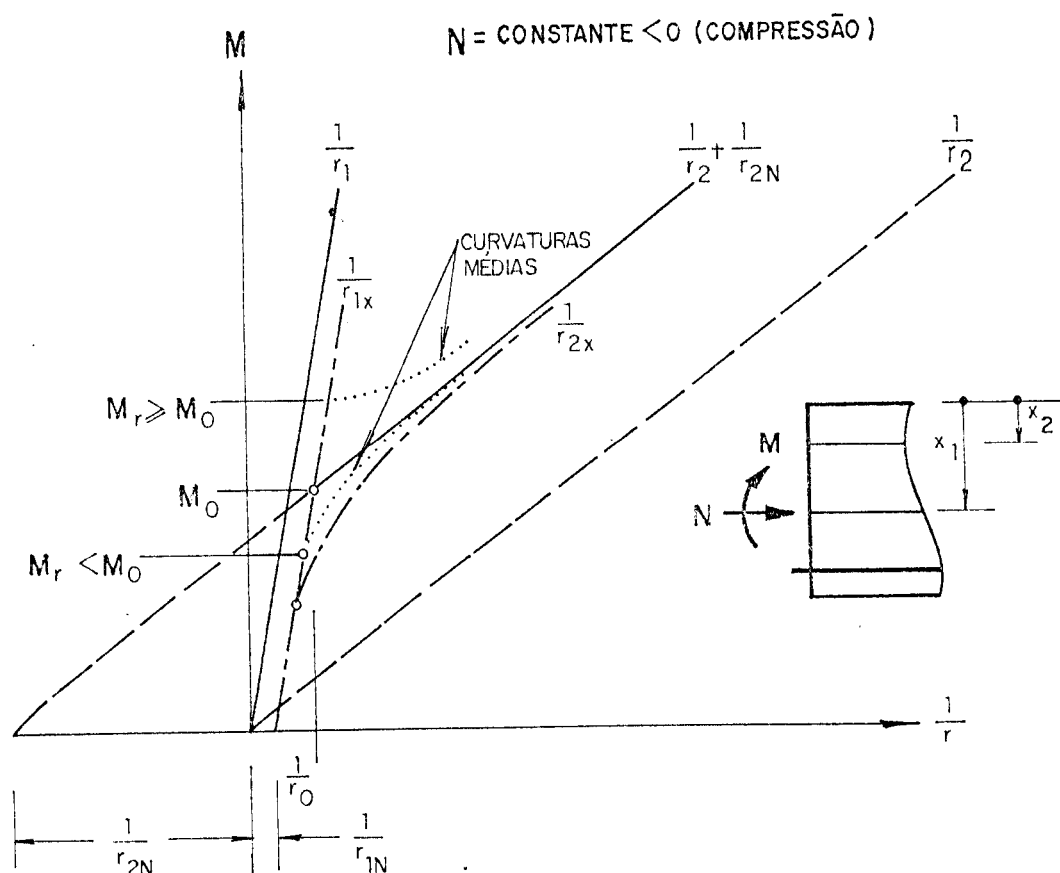
b - Estádio II:

A posição da LN é influenciada pela variação de M e pelos efeitos de longa duração, resultando no diagrama curvo de $1/r_{2x}$; no entanto, para valores elevados de M , a função tende a seguir uma reta paralela àquela do Estádio II para flexão simples $1/r_2$, com um acréscimo de curvatura devido à flexão adicional provocado pela

força normal (ao se deslocar o centro de gravidade da seção na passagem do Estádio I para o Estádio II):

$$\frac{1}{r_{2x}} \cong \left(\frac{1}{r_2}\right)^M + \left(\frac{1}{r_2}\right)^N \cong \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_{2N}} \quad (2.203)$$

onde $1/r_2$ é a curvatura de flexão simples (ver eq. 2.182).



- FIG. 2.31 - Curvaturas extremas e médias para flexo-compressão com $N = \text{constante}$.

No instante $t = 0$, esse acréscimo é dado por:

$$\frac{1}{r_{2N}} = \frac{N \cdot (x_1 - x_2)}{E_c I_2} \quad (2.204)$$

com x_1 e x_2 sendo a posição da LN na flexão simples nos Estádios I e II, respectivamente. Para pequenos valores de M , a curvatura no

Estádio II $1/r_{2x}$ é praticamente igual à curvatura no Estádio I $1/r_{1x}$, podendo-se também escrever (ver Fig. 2.31):

$$\frac{1}{r_{2x}} \cong \frac{1}{r_1} = \frac{M}{E_c I_1} \quad (2.205)$$

Assim, a curvatura $1/r_{2x}$ pode ser aproximada por dois trechos retos (diagrama bilinear) correspondendo respectivamente a (ver Fig. 2.31):

- curvatura no Estádio I, flexão simples ($1/r_1$);
- curvatura no Estádio II, flexão composta ($\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_{2N}}$).

Definindo as coordenadas do ponto de intersecção dessas duas retas como sendo $(M_0, 1/r_0)$, pode-se escrever:

$$\begin{cases} \frac{1}{r_{2x}} \cong \frac{1}{r_1} & \text{para } M < M_0; \\ \frac{1}{r_{2x}} \cong \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_{2N}} & \text{para valores elevados de } M \text{ (} M \geq M_0 \text{),} \end{cases} \quad (2.206)$$

expressões que, igualadas, permitem determinar as coordenadas citadas; impondo-se, então, $M = M_0$, com o auxílio das equações (2.182), (2.202) e (2.204) tem-se:

$$\frac{M_0}{E_c I_2} + \frac{N (x_1 - x_2)}{E_c I_2} = \frac{M_0}{E_c I_1} \quad (2.207)$$

resultando

$$M_0 = - \frac{N (x_1 - x_2) I_1}{I_1 - I_2} \quad (2.208)$$

Conhecendo-se M_0 , pode-se calcular $1/r_0$ e o acréscimo $1/r_{2N}$:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{M_0}{E_c I_1} \quad (2.209)$$

$$\frac{1}{r_{2N}} = - M_0 \frac{(I_1 - I_2)}{E_c I_1 I_2} \quad (2.210)$$

Para valores usuais dos coeficientes de fluência ϕ e de envelhecimento do concreto χ , o momento M_0 pode ser considerado constante e independente dos efeitos do tempo; o valor da curvatura $1/r_0$ é dependente do tempo, já que E_c varia com o mesmo.

A curvatura média $1/r_m$ está situada entre os valores limites $1/r_{1x}$ e $1/r_{2x}$, dados pelas equações (2.202) e (2.206), respectivamente (ver Fig. 2.31), podendo ser obtida usando um coeficiente de interpolação modificado ζ_0 , procedendo-se da mesma forma usada para levar em conta a colaboração do concreto entre fissuras no caso de flexão simples.

Para isso, é necessário efetuar-se uma mudança de coordenadas, transferindo-se a origem dos eixos de referência para o ponto de coordenadas $(M_0, 1/r_0)$, tal que (ver Fig. 2.32):

$$M^* = M - M_0 \quad (2.211)$$

$$\frac{1}{r^*} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \quad (2.212)$$

De acordo com o Manual do CEB³⁶, substituindo-se essas expressões nas equações da flexão simples (2.179) e (2.180), obtem-se a curvatura média para a flexão composta através de:

$$\psi_m = \frac{1}{r_m} = (1 - \zeta_0) \frac{1}{r_1} + \zeta_0 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_{2N}} \right) \quad (2.213)$$

onde se distinguem duas situações para o cálculo de ζ_0 :

a - se $\sqrt{\beta_1 \beta_2} M_r \geq M_0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_0 = 1 - \left[\frac{\sqrt{\beta_1 \beta_2} M_r - M_0}{M - M_0} \right]^2, \text{ para } M \geq M_r; \\ \zeta_0 = 0, \text{ para } M < M_r; \end{array} \right. \quad (2.214)$$

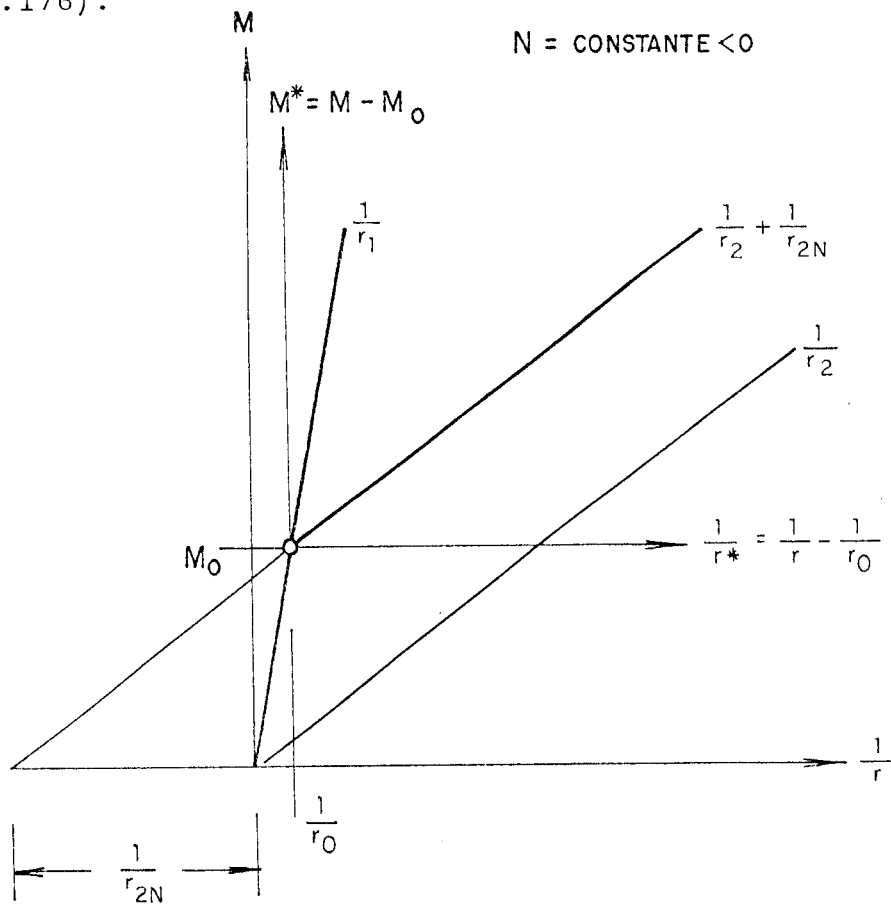
b - se $\sqrt{\beta_1 \beta_2} M_r < M_0$:

$$\begin{cases} \zeta_0 = 1, & \text{para } M \geq M_0; \\ \zeta_0 = 0, & \text{para } M < M_0, \end{cases} \quad (2.215)$$

onde β_1 e β_2 tem os mesmos valores anteriores (ver eq. 2.163) e M_r é o momento de fissuração, dado por:

$$M_r = w_1 \left(f_{ct} - \frac{N}{A_1} \right) \cong w_c \left(f_{ct} - \frac{N}{A_c} \right) \quad (2.216)$$

sendo w_1 e A_1 respectivamente o módulo de resistência e a área da seção homogeneizada no Estádio I, w_c e A_c idem, idem da seção bruta de concreto; adota-se o valor de f_{ct} com os critérios já comentados (ver eq. 2.176).



- FIG 2.32 - Diagramas momento-curvatura simplificados.

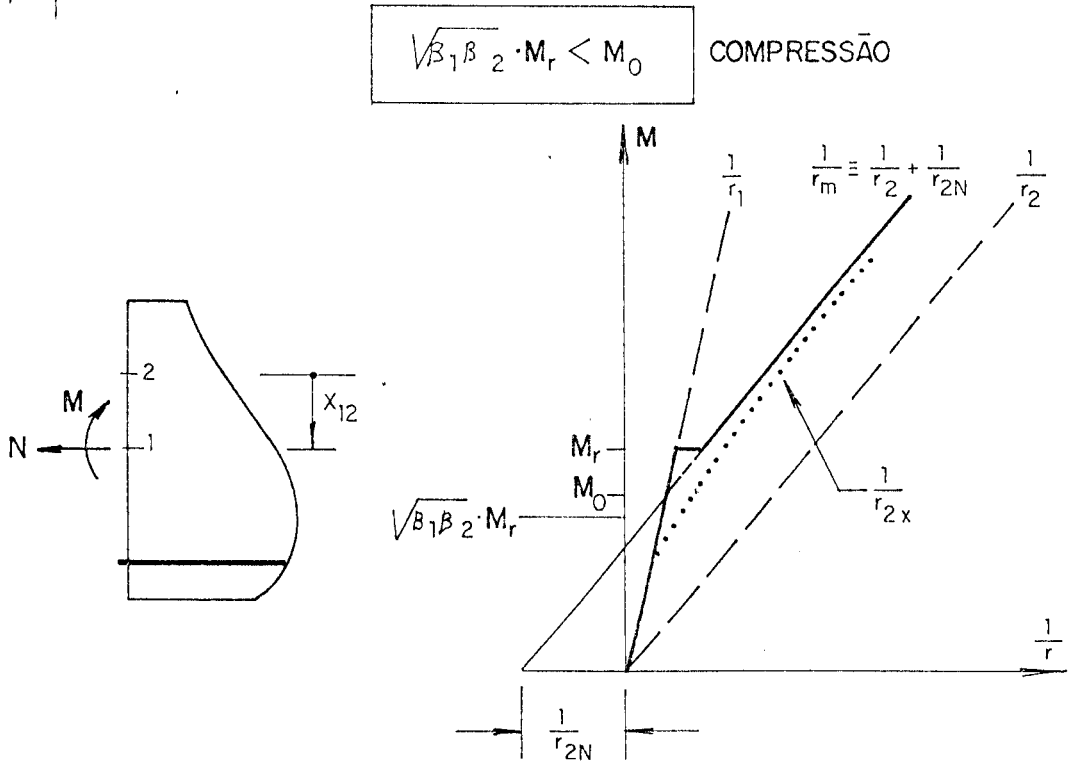
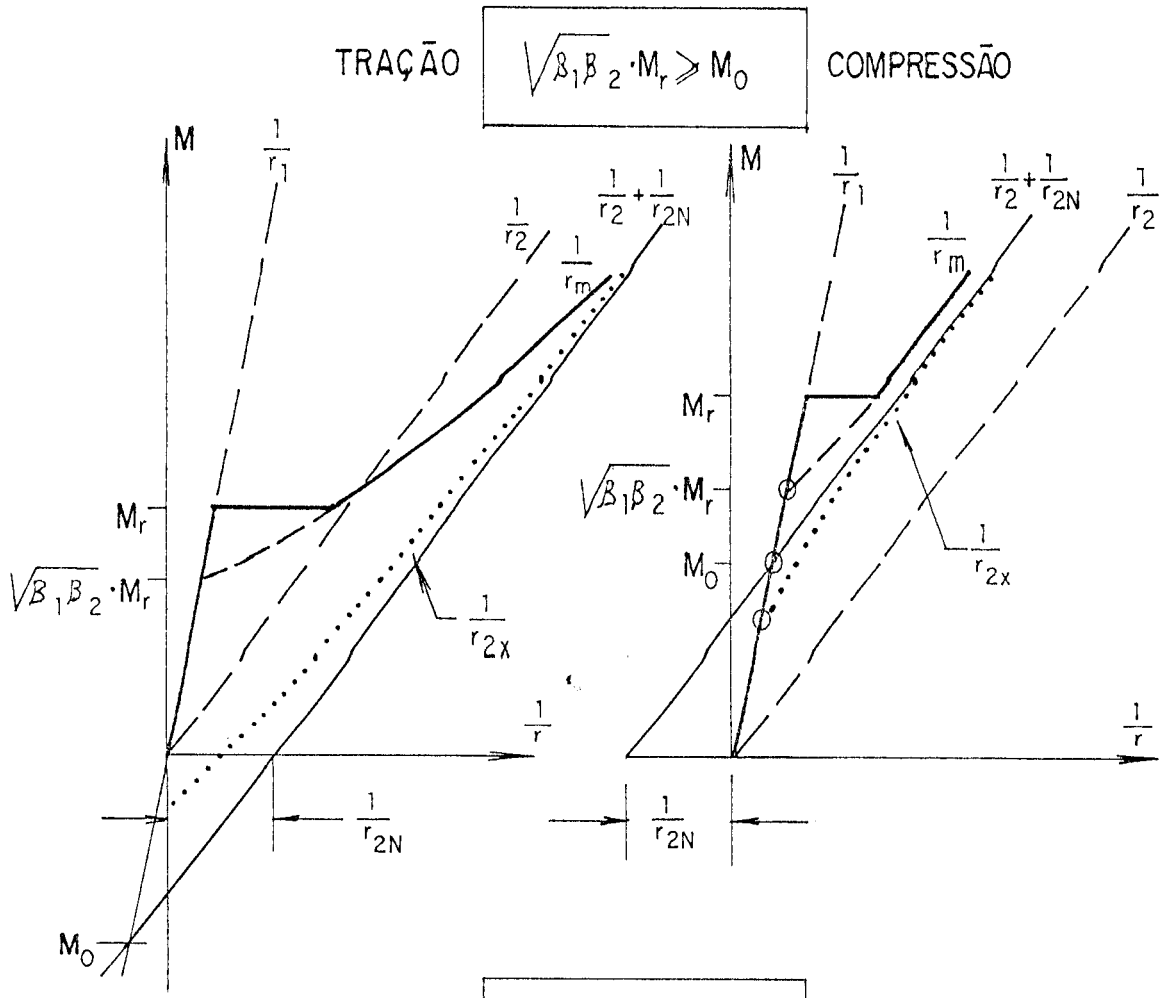
Quando N é de tração, a excentricidade ($x_1 - x_2$) provoca uma flexão com o mesmo sentido do momento fletor M, fazendo com que a parcela de curvatura devido a N provoque um aumento da curvatura devido só a flexão (ver Fig. 2.33); com isso, $1/r_{2x}$ fica à direita de $1/r_2$ no gráfico, e a intersecção se dá "fora" do mesmo. O Manual do CEB considera apenas casos em que o eixo neutro esteja dentro da seção; se estiver fora, pode-se calcular diretamente, porque a seção efetiva resistente consistirá apenas das seções de armaduras (não há colaboração do concreto).

Quando N é de compressão, a excentricidade provoca flexão em sentido contrário ao de M; com isso, a parcela de curvatura devida a N reduz a curvatura devido á flexão simples (ver Fig. 2.33).

Sobre os modelos do CEB (Fig. 2.33), Camara²¹ observa que, em relação aos casos em que ($M_0 \leq \sqrt{\beta_1 \beta_2} M_r$) o modelo pode ser considerado aceitável como método simplificado; salientando que para valores relativamente moderados da força normal já se torna necessário o uso do segundo modelo ($M_0 > \sqrt{\beta_1 \beta_2} M_r$), observa que este não é correto, por subestimar a curvatura, particularmente para valores de momentos aplicados da ordem de grandeza de M_0 .

O Manual do CEB³⁶ apresenta um roteiro (final do item 3.1.3), também encontrado em Machado⁸², com todos os passos de cálculo para a determinação da curvatura média, no caso de flexão composta. Por ser interessante para uma possível programação, o mesmo é aqui apresentado a seguir, podendo ser utilizado também para flexão simples. Por comodidade, apresenta-se também um resumo dos métodos do Manual do CEB (MC - 78) para flexão simples e composta (ver Fig. 2.34). Os passos de cálculo são:

- 1 - Calcular os momentos de inércia da seção homogeneizada nos Estádios I e II, I_1 e I_2 e, com eles, calcular os produtos de rigidez $E_c I_1$ e $E_c I_2$;



- FIG. 2.33 - Curvaturas Devido à Flexão Composta -

- 2 - Calcular o momento de fissuração com o auxílio das equações (2.176) ou (2.216), nos casos, respectivamente, de flexão simples ou composta, podendo-se usar $w_1 \cong w_c$ e $A_1 \cong A_c$; no caso de flexão composta, calcular também o parâmetro $\sqrt{\beta_1 \beta_2} M_r$ (ver valores de β_1 e β_2 no item II.5.2.1, após a equação 2.163);
- 3 - No caso de flexão composta, calcular o valor de M_0 através da expressão (2.208);
- 4 - Calcular os coeficientes de interpolação ζ (flexão simples) ou ζ_0 (flexão composta), através, respectivamente, das expressões (2.179) ou (2.214) a (2.215);
- 5 - Calcular as curvaturas limites; no caso de flexão simples, $1/r_1$ e $1/r_2$ (equações 2.181 e 2.182); para flexão composta, $1/r_1$ e $(1/r_2 + 1/r_{2N})$ (equações 2.181, 2.182 e 2.204 ou 2.210);
- 6 - Finalmente, calcular a curvatura média pela expressão (2.180), no caso de flexão simples, ou (2.213), no caso de flexão composta.

No caso da flexão simples, pode-se trabalhar diretamente com a inércia média I_m ; o quinto passo de cálculo seria, então, calcular I_m com a expressão (2.184), ou seja, não seria necessário trabalhar com as curvaturas.

II.5.2.3.4 - MODELO DO ACI³.

Vários autores tem apresentado propostas no sentido de generalizar o modelo do ACI (ver item II.5.2.2.2), que avalia a rigidez média, para levar em conta o esforço axial. Sakai e Kakuta¹²⁷ propõe a generalização ao caso de flexão com esforço axial externo em seções de concreto armado pela expressão:

$$I_m = \left(\frac{M_r}{M}\right)^m I_1 + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^m\right] I_2 \quad (2.217)$$

onde I_2 tem em conta o efeito do esforço axial (ver Fig. 2.35.a).

Com base em resultados experimentais realizados com excentricidade constante, esses autores propõem $m = 3$ em substituição ao $m = 4$ da flexão simples (ver equação 2.187). A curvatura deve ser determinada pela expressão geral:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E_c I_m} \quad (2.218)$$

onde M é o momento em relação ao centro de gravidade equivalente do elemento fissurado, dado por (ver Fig. 2.35.b):

$$x_m \cong \left(\frac{M_r}{M}\right)^m x_1 + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^m\right] x_2 \leq x_1 \quad (2.219)$$

sendo x_1 e x_2 a posição do centro de gravidade da seção nos Estádios I e II, neste último levando-se em conta o esforço axial N .

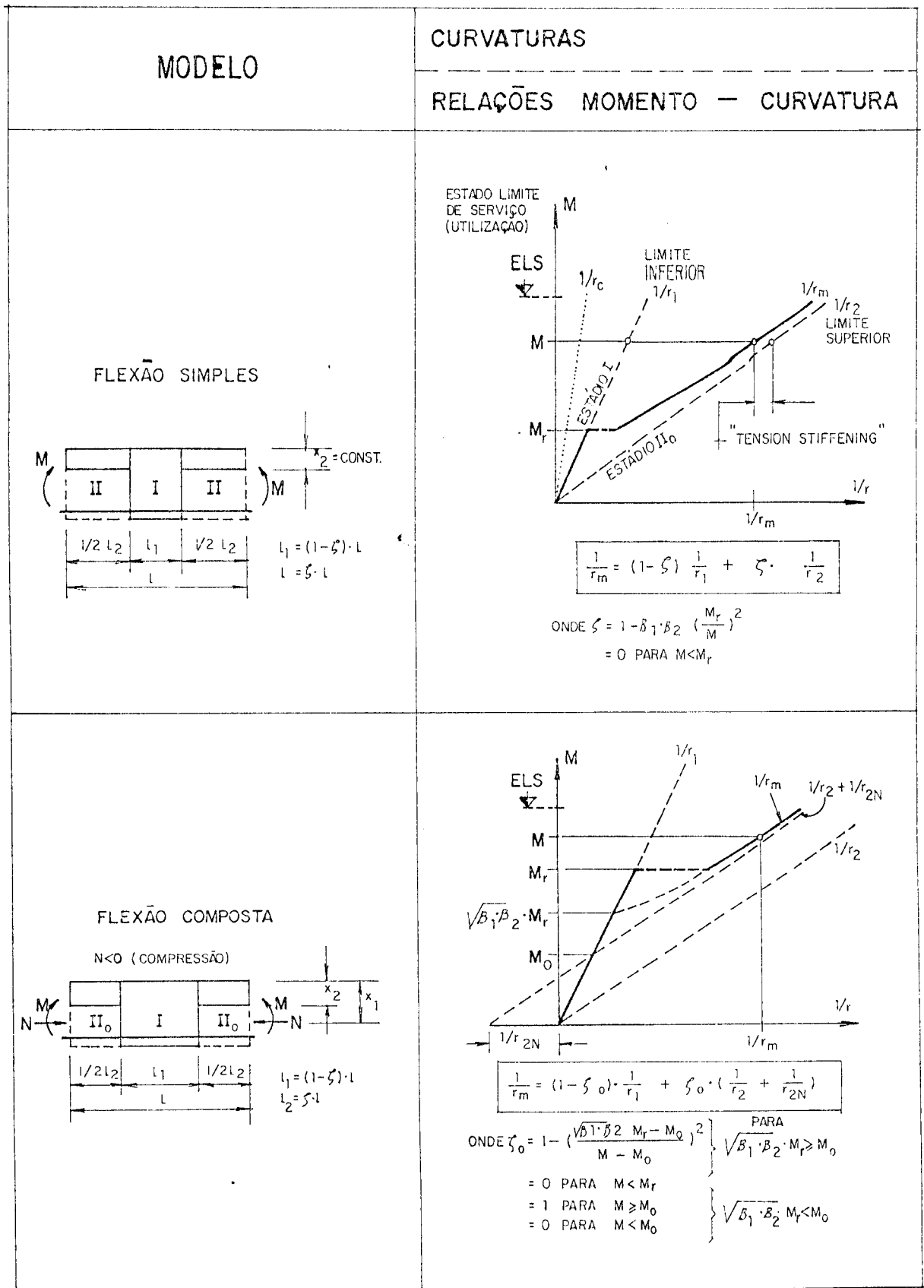
II.5.2.4 - FLEXÃO SIMPLES E FLEXÃO COMPOSTA SEGUNDO O MC-90³⁵ DO CEB.

O MC-90 do CEB (item 3.6) define a curvatura média em qualquer seção de um elemento de uma forma geral para a flexão (simples e composta), pela expressão abaixo:

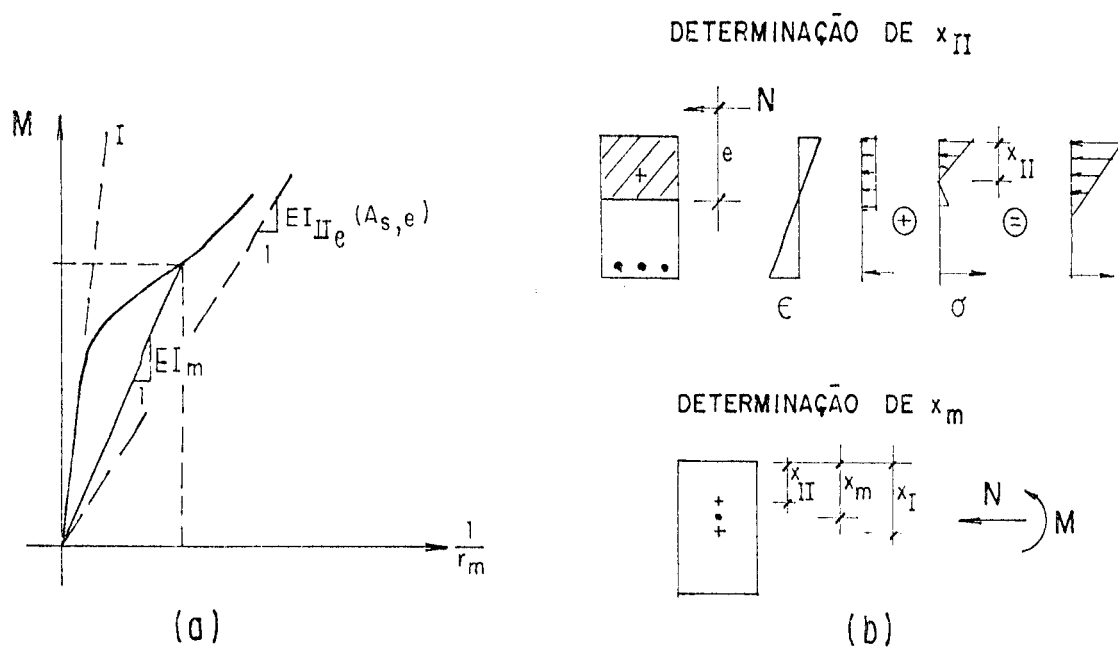
$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}}{d} \quad (2.220)$$

com a deformação média no aço ε_{sm} podendo ser calculada como no caso da tração simples (ver equações 2.170 a 2.175). Além disso, deve-se observar os seguintes pontos:

- a - deve ser levada em conta uma área efetiva de concreto tracionado ao redor da armadura;
- b - a deformação média na fibra mais comprimida do concreto (ε_{cm}) deve ser estimada levando em conta a variação da altura da zona comprimida entre fissuras adjacentes;
- c - deve-se usar um braço de alavanca apropriado.



- FIG. 2.34 - Resumo para o cálculo da curvatura média nos casos de flexão simples e composta (modelos do CEB).



- FIG. 2.35 - Modelo proposto por Sakai e Kakuta para generalização à flexão composta (com excentricidade constante) do modelo de Branson.

É possível, também, calcular a curvatura média através de diagramas (ver Fig. 2.36 e 2.37). A linha cheia nessas figuras inclui um fator geral de redução β_b para a resistência do concreto à tração, representativo de efeitos como retração, cargas mantidas por longo tempo, etc. Se o concreto estiver sendo carregado pela primeira vez com cargas de curta duração, a linha tracejada nas figuras é mais próxima da realidade, segundo o CEB. A curvatura média (instantânea ou de longa duração) em qualquer seção de um elemento pode ser determinada como segue (ver Fig. 2.36 a 2.37):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} , \text{ no Estádio I;} \tag{2.221}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{ts}} = \frac{1}{r_2} - \left(\frac{1}{r_{2r}} - \frac{1}{r_{1r}} \right) \beta_b \left(\frac{M_r}{M} \right), \text{ no Estádio II;} \tag{2.222}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_y} - \left(\frac{1}{r_{2r}} - \frac{1}{r_{1r}} \right) \beta_b \left(\frac{M_r}{M_y} \right) + \left(\frac{M - M_y}{2K_{III}} \right), \text{ para } M \geq M_y \tag{2.223}$$

onde

$$K_{III} = \frac{M_u - M_y}{\frac{1}{r_u} - \frac{1}{r_y}} \quad (2.224)$$

$$e M_r = w_1 \left(f_{ct} - \frac{N}{A_1} \right) = \text{momento de fissuração.} \quad (2.225)$$

Nas expressões acima, M é o momento fletor atuante, M_y é o momento correspondente ao escoamento do aço e M_u é o momento último; w_1 e A_1 são, respectivamente, o módulo de resistência em relação à fibra mais tracionada e a área da seção homogeneizada no Estádio I; o valor de f_{ct} a ser aplicado é dado por:

- . $f_{ct} = 0,7 f_{ctm}$, se se considera deformações locais (na seção);
- . $f_{ct} = f_{ctm}$, se se considera uma média global do deslocamento (no elemento como um todo).

N é a força normal aplicada, $1/r_y$ e $1/r_y$ são as curvaturas correspondentes, respectivamente, aos pares de esforços (M_y, N) e (M_u, N) ; $1/r_{1r}$ e $1/r_{1r}$ são curvaturas no Estádio I correspondente, respectivamente, a (M, N) e (M_r, N) ; $1/r_2$ e $1/r_{2r}$ idem, idem para o Estádio II.

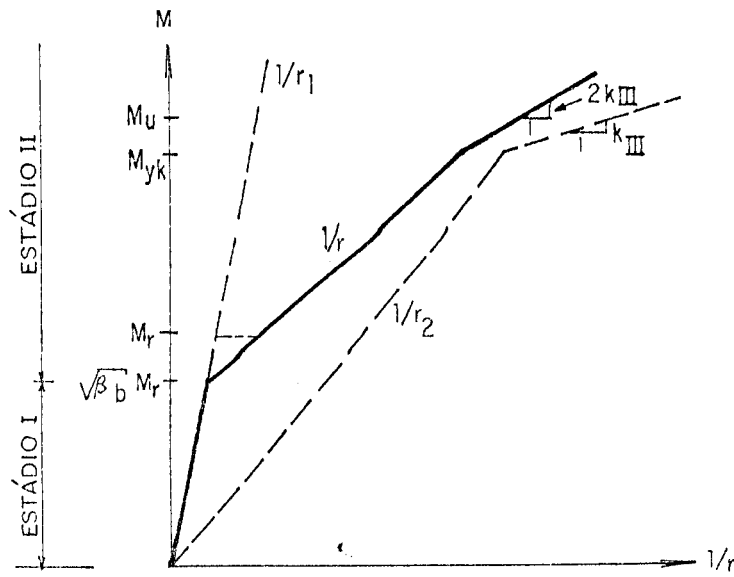
A equação (2.222) define uma lei hiperbólica para o efeito de colaboração do concreto intacto entre fissuras, dado pela expressão ($t_s = \text{"tension stiffening"}$):

$$\frac{1}{r_{ts}} = \left(\frac{1}{r_{2r}} - \frac{1}{r_{1r}} \right) \beta_b \left(\frac{M_r}{M} \right) \quad (2.226)$$

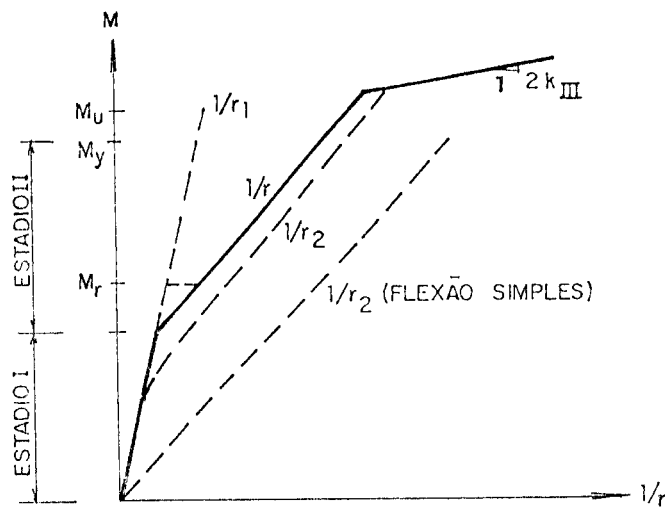
$$\text{onde } \beta_b \geq \beta_1 \beta_2 \quad (2.227)$$

sendo:

- β_1 = coeficiente função da qualidade de aderência das barras da armadura, a saber:
 - . $\beta_1 = 1,0$ para barras de alta aderência;
 - . $\beta_1 = 0,5$ para barras lisas;



- FIG. 2.36 - Curvatura média no caso de flexão simples segundo o MC-90³⁵ do CEB.



- FIG. 2.37 - Curvatura média no caso de flexão composta.

- β_2 = coeficiente que representa a influência da duração da aplicação ou da repetição do carregamento, a saber:
 - . $\beta_1 = 0,8$ para o primeiro carregamento;
 - . $\beta_1 = 0,5$ para cargas de longa duração ou para um grande número de ciclos.

Em relação ao MC-78, houve aqui uma mudança no valor de β_2 para o primeiro carregamento (já que antes $\beta_2 = 1,0$ para esta situação de cargas). No sentido de descrever o comportamento médio à retração, temperatura, ciclos de cargas acidentais, etc.. a curvatura média $1/r$ é supostamente afetada pela fissuração já para um valor de M inferior a M_r ; no caso de flexão simples, esse valor é $\sqrt{\beta_b M_r}$, obtido pela intersecção entre o ramo descendente da curvatura $1/r$ e a linha reta $1/r_1$ (ver Fig. 2.36), dadas pelas expressões (2.221) e (2.222). Para o caso de flexão composta, essa intersecção não é dada pela mesma regra simples.

Para aplicações práticas, valores numéricos de $1/r_1$ e $1/r_2$ são encontrados no Manual do CEB³⁶.

Num instante t , a curvatura média é a soma da curvatura inicial (instantânea) $1/r_0$ com um incremento $\Delta(1/r)$ devido aos efeitos dependentes do tempo:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.228)$$

onde cada um dos termos do segundo elemento da igualdade é calculada através das equações (2.221) a (2.223).

II.5.2.5 - DEFORMAÇÕES DEVIDO A FORÇAS CORTANTES E MOMENTOS TORÇORES.

Estando este capítulo já demasiadamente extenso, e não sendo objetivo principal deste trabalho o estudo dos efeitos de cortante e torçor, indicar-se-a aqui uma bibliografia mínima aos interessados.

Recomenda-se o Manual do CEB³⁶ (itens 3.5 e 3.6), Ghali e Favre⁶⁰ (final do capítulo 7), Cauvin²⁶ e Leonhardt⁷⁸ (capítulos 6 e 7).

CAPÍTULO III.

CONSIDERAÇÕES SOBRE A NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA NO ESTUDO DE PÓRTICOS PLANOS.

III.1. INTRODUÇÃO.

As duas hipóteses básicas para a análise linear (em primeira ordem) de estruturas são:

1. O material de que é feita a estrutura se comporta segundo a lei de Hooke (elasticidade linear);

2. A geometria da estrutura deformada não difere sensivelmente da geometria da não deformada (hipótese de pequenos deslocamentos), de modo que as condições de equilíbrio são as mesmas nas duas situações.

A violação de qualquer dessas hipóteses introduz uma não-linearidade no comportamento estrutural. No capítulo anterior foram tratados aspectos relacionados à violação da primeira hipótese (não-linearidade física). Neste capítulo estudam-se os problemas referentes à violação da segunda (que correspondem à não-linearidade geométrica), considerando-se apenas o caso de pórticos planos de barras esbeltas. Para essas estruturas, o efeito da não-linearidade pode ser significativo, mesmo sob pequenas variações de sua geometria.

O efeito de ambas as não-linearidades sobre o comportamento de estruturas aperticadas tem sido objeto de amplos estudos nas últimas décadas. A flambagem de pilares metálicos foi um dos primeiros problemas não-lineares a ser resolvido por engenheiros, basicamente tendo em vista considerações sobre a segurança dessas estruturas. Posteriormente, por razões econômicas, levou-se em conta a ductilidade do metal. Hoje em dia, segurança e economia são metas que se busca com a ajuda de análises não-lineares. Além disso, mesmo quando a estrutura se comporta linearmente sob cargas em serviço, é importante que se possa prever o seu comportamento após a ruína de uma seção. De fato, o uso de

peças estruturais esbeltas feitas com material de alta resistência torna a estrutura sensível à instabilidade, o que requer uma avaliação mais realista da segurança, caso em que se enquadram especialmente as estruturas metálicas. A necessidade de análise da estabilidade ou cálculo da carga crítica dessas estruturas levou à abordagem do problema via estudo da não-linearidade geométrica.

Outro caso importante que pode ser citado como exemplo de não-linearidade geométrica é o constituído por pórticos em que se deseja levar em conta a influência dos deslocamentos transversais na distribuição dos momentos fletores sobre as barras da estrutura (é necessário computar os deslocamentos no estabelecimento do equilíbrio).

Com base no exposto até aqui, pode-se dizer então que a consideração da não-linearidade geométrica interessa basicamente a dois tipos de problemas: os que se prendem ao cálculo dos efeitos de segunda ordem em estruturas de rigidez reduzida (caso em que se levam em conta os efeitos de deslocamentos nas equações de equilíbrio) e os que se ligam diretamente aos fenômenos de perda de estabilidade (por flambagem ou por aparecimento de ponto limite na configuração de equilíbrio). Pretende-se neste capítulo abordar-se apenas os aspectos referentes aos problemas do primeiro tipo.

III.2. GENERALIDADES. UM PEQUENO ESTUDO BIBLIOGRÁFICO.

Formulações teóricas gerais e técnicas computacionais para a análise não-linear (geométrica e física) de vigas e pórticos (planos e espaciais) tem sido objeto de pesquisas nas últimas décadas. Não se pretende aqui fazer um levantamento completo da história dessas pesquisas, mas sim um estudo bibliográfico suficiente que abranja todos os componentes da análise não-linear geométrica, dentre os trabalhos encontrados pelo autor em sua pesquisa bibliográfica (ver também capítulo I). Um estudo histórico mais detalhado do ponto de vista cronológico pode ser encontrado em Corrêa (veja-se capítulo 4 da bibliografia citada).

O Método dos Elementos Finitos é a ferramenta mais poderosa e versátil usada nas análises não-lineares; provou-se, contudo, que no caso de estruturas com grande número de elementos,

essas análises resultam em alto custo, levando os pesquisadores a procurarem soluções alternativas, usando (Jetteur e outros⁶⁷, por exemplo) ou não (Carol e Murcia^{22,23}, Cauvin^{24,25}) o Método dos Elementos Finitos (MEF) em sua formulação clássica (via deslocamentos). Com isso, encontram-se várias soluções que usam o MEF via formulações híbridas e mistas (como Carol e Murcia) ou particularizações do mesmo (como no caso de Cauvin, que estende programas de análise matricial em primeira ordem às análises não-lineares).

Considera-se que uma análise não-linear geométrica com a utilização do MEF tem três componentes principais: um modelo elemental (que abrange a escolha das funções de interpolação e as relações deformação-deslocamento), a fixação do sistema de coordenadas do elemento e a escolha do algoritmo a ser usado na solução do sistema de equações não-lineares. Tratar-se-á aqui do estudo dos dois primeiros componentes, visto que o terceiro será objeto exclusivo do próximo capítulo deste trabalho. Além desses três componentes, pode-se incluir um quarto (que, na ordem correta, seria o terceiro, prévio à solução do sistema de equações), como explanado por Wen e Rahimzadeh¹⁴⁰ ou por Corrêa⁴¹, o qual se refere ao formalismo adotado na decomposição da matriz de rigidez: usa-se o das matrizes incrementais (como adotado por Mallet e Marcal⁸⁴) ou o da matriz geométrica ou matriz de rigidez inicial (como adotado em Zienkiewicz¹⁴⁴).

Quase todos os trabalhos sobre o uso de elementos finitos em análises não-lineares definem, para um elemento de viga, um modelo elemental no qual se usa uma interpolação linear para os deslocamentos longitudinais e uma interpolação cúbica para os deslocamentos laterais (ver item III.5.2, equações 3.55 a 3.60).

Alguns pesquisadores (como os que seguem a orientação de Bathe¹²) usam, na definição do sistema de coordenadas do elemento, coordenadas Lagrangeanas (ou coordenadas de Lagrange para pequenas rotações - em inglês, "Lagrange - SR coordinates") para escrever os membros da matriz de rigidez, enquanto outros usam coordenadas

Eulerianas⁸. Os processos de solução do sistema de equações incluem o método incremental direto (sem iteração), o método de Newton-Raphson e suas variações (ver capítulo IV).

Mallet e Marcal⁸⁴ desenvolveram o formalismo das matrizes incrementais em coordenadas Lagrange-SR; Powell¹¹⁹, Kang^{71,72}, Scordelis¹²⁸ e Mari⁸⁹ empregaram coordenadas Eulerianas. Ebner e Ucciferro⁴⁹ apresentam comparação teórica e numérica das várias formulações para o tratamento da não-linearidade geométrica em estruturas planas compostas por barras. Haisler e Stricklin⁶² apresentam estudo comparativo das várias técnicas aplicáveis à solução de sistemas de equações não-lineares algébricas ou diferenciais. Oran¹⁰⁵ apresenta a matriz de rigidez tangente para a análise de pórticos espaciais elásticos, com hipótese de deformações pequenas com grandes rotações, com base na formulação clássica da "viga-coluna" (a qual pode ser encontrada em Chen e Lui³³). Wen e Rahimzadeh¹⁴⁰, Corrêa⁴¹, Spillers¹³⁵, Shi e Atluri^{130,131} e Meek e Loganathan⁹⁵ também tratam da solução de pórticos espaciais via análise NLG.

Alguns aspectos da discretização via MEF são tratados em Nagtegaal¹⁰¹, onde se examinam as vantagens e desvantagens dos vários procedimentos de solução do sistema de equações não-lineares. Vários outros autores tratam também do assunto, a ser melhor discutido a seguir (ver capítulo IV).

Szilard^{136,137} apresenta uma estratégia para acompanhar o comportamento de estruturas elásticas pré e pós-escoamento e definir seus pontos limite e de bifurcação, a qual reduz drasticamente ou mesmo elimina as iterações de equilíbrio dentro de cada passo de carga, usando formulação Lagrangeana total (ver item III.3).

Hsiao e outros^{65,66} apresentam uma formulação simplificada

⁸ Nas coordenadas Eulerianas, os graus de liberdade do elemento são definidos com referência à corda da barra deformada, enquanto que nas Lagrangeanas toma-se como referência o elemento antes da deformação (veja-se o item III.3). Ressalte-se que estes termos não são precisamente corretos na Mecânica do Contínuo, mas são convenientes para estruturas aporticadas.

para a análise NLG de pórticos planos baseada no modelo "viga-coluna", em que foi eliminada a restrição de pequenas rotações entre incrementos sucessivos.

Wong e Tin-Loi^{142,143} apresentam modelo para a análise não-linear geométrica e física de pórticos espaciais, incluindo a predição de ponto limite a partir da energia de deformação.

Com o intuito de diminuir o tempo computacional gasto em análises não-lineares, diversos autores (a partir da década dos oitentas, principalmente) aplicam técnicas de subestruturação e condensação, podendo-se citar: Dodds e Lopez⁴⁸, Owen e Gonçalves¹⁰⁷, Han e Abel⁶³, Roeck e outros⁴⁵ e Sheu e outros¹²⁹.

Mais recentemente, vários pesquisadores passaram a proceder às análises não-lineares física e geométrica em conjunto com a consideração da flexibilidade dos nós de pórticos planos (podendo-se citar El-Metwally e Chen⁵² e Jordan e Kreger⁶⁹) e espaciais (Shi e Atluri¹³¹).

No Brasil, além de Corrêa⁴¹, já citado, vários outros autores têm-se dedicado ao problema das análises não-lineares física e geométrica em estruturas planas e espaciais. Souza Lima e Venâncio Filho¹³⁴ trazem interessante contribuição à análise NLG de estruturas planas reticuladas, assunto também tratado no importante trabalho de Mazzilli⁹⁴. Pimenta^{111 a 116}, Pimenta e Mazzili¹¹⁷, Pimenta e Soller¹¹⁸ são outros trabalhos importantes surgidos entre nós a partir da década dos oitentas. Pimenta traz importantes contribuições à análise NLG de pórticos planos submetidos a grandes deslocamentos e grandes deformações. Brasil¹⁸ estende essa linha de pesquisas (da Escola Politécnica -USP) ao estudo do comportamento dinâmico de pórticos planos.

Proença¹²² apresenta um estudo sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear físico do concreto. Assan^{5,6} apresentou recentemente um estudo das não-linearidades física e geométrica usando um elemento finito tridimensional de viga reta.

III.3. - CONSIDERAÇÕES SOBRE O SISTEMA DE COORDENADAS.

III.3.1 - INTRODUÇÃO.

Como já mencionado, existem basicamente dois sistemas de coordenadas a escolher para a derivação da matriz de rigidez do elemento: coordenadas Eulerianas (quando os deslocamentos são definidos tomando-se como referência o elemento deformado) e coordenadas Lagrangeanas (quando os deslocamentos generalizados do elemento são medidos em relação à configuração indeformada).

Na Fig. 3.1. representam-se as configurações AB e A^*B^* de um elemento de viga (respectivamente, antes e após a deformação), onde X e Y são os eixos cartesianos no sistema global de referência (fixo), x e y são os eixos no sistema local na posição inicial do elemento e x^* é o eixo das coordenadas de Euler na barra; q_1 a q_6 são os deslocamentos generalizados em coordenadas globais.

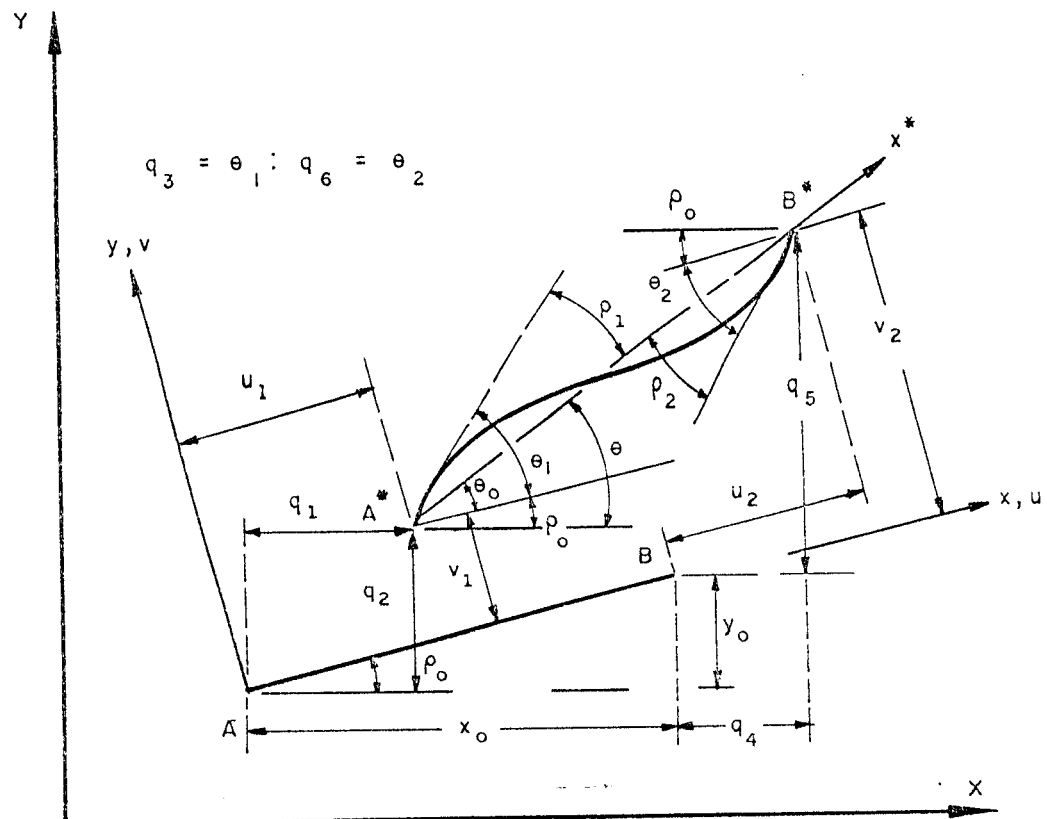


FIG. 3.1 - GEOMETRIA DE UM ELEMENTO DE VIGA EM COORDENADAS EULERIANAS (ρ_1, ρ_2, Δ), COORDENADAS LAGRANGEANAS ($u_1, v_1, \dots, \theta_2$) E COORDENADAS GLOBAIS (q_1 a q_6).

Os deslocamentos generalizados em coordenadas Eulerianas são ρ_1 , ρ_2 e Δ , este sendo a variação do comprimento da corda, com ρ_1 e ρ_2 medindo as rotações, respectivamente, das extremidades A e B em relação à corda da barra deformada (ρ_1 e ρ_2 são os giros elásticos). Da Fig. 3.1, vem:

$$\rho_1 = \rho_0 + q_3 - \theta = \theta_1 - \theta_0 \quad (3.1.a)$$

$$\rho_2 = \rho_0 + q_6 - \theta = \theta_2 - \theta_0 \quad (3.1.b)$$

$$\Delta = \left[(x_0 + q_4 - q_1)^2 + (y_0 + q_5 - q_2)^2 \right]^{1/2} - L \quad (3.1.c)$$

onde ρ_0 é a inclinação da barra AB em relação ao eixo X, θ_0 é o giro de corda, θ_1 e θ_2 são os giros de nó, x_0 e y_0 são projeções de AB sobre os eixos X e Y, respectivamente, L é o comprimento inicial da barra indeformada e θ é a inclinação da corda deformada em relação ao eixo X, estes últimos dados por:

$$L = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2} \quad (3.2.a)$$

$$\theta = \text{arc tg} \left[\frac{y_0 + q_5 - q_2}{x_0 + q_4 - q_1} \right] = \rho_0 + \theta_0 \quad (3.2.b)$$

Usando funções de forma e relações deformação-deslocamento apropriadas numa formulação matricial do MEF, obtem-se a matriz de rigidez do elemento, via uso das coordenadas Eulerianas, em função do ângulo θ que a corda da barra deformada faz com o eixo X global, isto é, obtem-se diretamente a matriz de rigidez em coordenadas globais (as expressões dos termos da matriz assim obtida podem ser encontradas em Wen e Rahimzadeh¹⁴⁰ ou em Powell¹¹⁹, ou ainda Kang⁷¹).

Os deslocamentos generalizados em coordenadas Lagrangeanas (ver Fig. 3.1) são $\{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2\}$. Naturalmente, para se obter a matriz de rigidez em coordenadas globais X e Y, seria necessária uma transformação adicional envolvendo o ângulo fixo ρ_0 (da forma usual na análise matricial de estruturas, via matriz de incidência cinemática). Portanto, o uso de

coordenadas Lagrangeanas deveria dar o mesmo resultado obtido usando-se as coordenadas Eulerianas. Contudo, computacionalmente requer-se para isto virtualmente todos os passos necessários à formulação Euleriana mais a transformação para as coordenadas globais. Assim, as coordenadas de Lagrange não oferecem vantagem computacional, a menos que seja feita uma hipótese adicional: admitir pequena rotação de corda, como se verá adiante.

III.3.2. ESCOLHA DO SISTEMA DE COORDENADAS.

Neste ponto, com vistas ao exposto no item anterior, coloca-se uma questão importante: qual sistema de coordenadas escolher? Ambos apresentam vantagens e desvantagens, merecendo uma análise mais apurada para se efetuar a escolha mais correta.

A formulação Euleriana é mais geral e engloba a Lagrangeana como caso particular, como demonstra Pimenta¹¹⁵, que acrescenta: "a vantagem da Euleriana é sua simplicidade, mesmo para elementos finitos com graus de liberdade rotacionais; o preço que se paga (desvantagem?) é a necessidade de uma integração ao longo do tempo consistente e estável para as forças nodais, de forma a obter as equações de equilíbrio ao fim de cada passo de tempo ou incremento de carga". Para elementos sólidos Pimenta demonstra como isto é feito em sua tese de Livre Docência, mas "para elementos com graus de liberdade rotacionais a pesquisa ainda está em andamento".

Bathe¹² demonstra que, na formulação Lagrangeana, acompanha-se toda as partículas de um corpo em seu movimento, na passagem da configuração original para a final, em contraste com a formulação Euleriana (geralmente usada na análise de problemas de Mecânica dos Fluidos), na qual dirige-se a atenção ao movimento do material através de um controle estacionário do volume. Recomenda, então, considerando a análise de estruturas, o uso da formulação Lagrangeana, que "geralmente representa um procedimento de análise mais natural e efetivo que uma formulação Euleriana". Exemplifica: "usando uma formulação Euleriana num problema estrutural em que se considera grandes deslocamentos, novos controles de volume tem que ser criados (porque as condições de contorno do sólido mudam continuamente), sendo difícil lidar com as não-linearidades nos termos de aceleração convectiva".

Além disso, se o giro de corda θ_0 (ver Fig. 3.1) for pequeno (segundo Wen e Rahimzadeh ¹⁴⁰, menor que 15°), a matriz de rigidez em coordenadas Lagrangeanas pode ser derivada diretamente em termos dessas coordenadas $\{u_1, v_1, \dots, \theta_2\}$, com a energia de deformação U podendo ser escrita como uma função explícita dos deslocamentos generalizados, isto é:

$$U = U(u_1, v_1, \dots, \theta_2) \approx U(q_1, q_2, \dots, q_6) \quad (3.3)$$

Finalizando, Wen e Rahimzadeh observam que o uso das coordenadas de Lagrange para pequenas rotações tem uma vantagem computacional adicional: a transformação da matriz de rigidez para as coordenadas globais é feita através de um ângulo fixo, invariante, portanto, num processo iterativo. As coordenadas Lagrangeanas para pequenas rotações podem ser usadas em problemas que envolvam "grandes" rotações, desde que o sistema de referência seja "atualizado".

Tendo em vista a exposição acima, e também ser o desejo do autor a busca de uma solução simplificada, optar-se-a aqui pela formulação Lagrangeana - SR ("Small Rotations"). A formulação Lagrangeana pode ser descrita de várias formas, dependendo de como as deformações são especificadas, havendo, em geral, quatro tipos de descrição mais comumente usados em análises do tipo NLG (ver Fig. 3.2). Uma análise não linear geralmente é feita passo a passo (incremento de carga e/ou tempo); portanto, suponha-se quatro configurações sucessivas de um corpo, sendo conhecidas $\gamma^0, \gamma^k, \gamma^{n-1}$, a partir das quais se deseja conhecer a configuração γ^n . γ^0 é a configuração inicial descarregada (indeformada), γ^k é uma configuração intermediária, γ^{n-1} e γ^n são duas configurações vizinhas (sendo γ^{n-1} a configuração atual); considere-se ainda uma configuração adicional $\bar{\gamma}^{n-1}$, muito próxima de γ^{n-1} , obtida a partir da posição indeformada γ^0 através de um movimento de corpo rígido. Em função da configuração de referência escolhida para a análise, pode-se então descrever os quatro tipos possíveis de formulação Lagrangeana, como citado acima.

O primeiro tipo é a "Formulação Lagrangeana Total" (TLD, das iniciais em inglês), onde a deformação do elemento é medida tomando γ^0 como referência (todas as variáveis estáticas e

cinemáticas são referidas à configuração inicial indeformada; no caso de uma análise ao longo do tempo, o referencial seria o instante t_0). Qualquer deformação subsequente do elemento também terá o mesmo referencial γ^0 . Este procedimento é fácil de implementar, com os deslocamentos sendo calculados diretamente. Contudo, a principal desvantagem que surge é não ser possível distinguir o deslocamento de corpo rígido do elemento das suas deformações locais, o que leva a uma descrição errada do equilíbrio, exceto para problemas com pequenos deslocamentos.

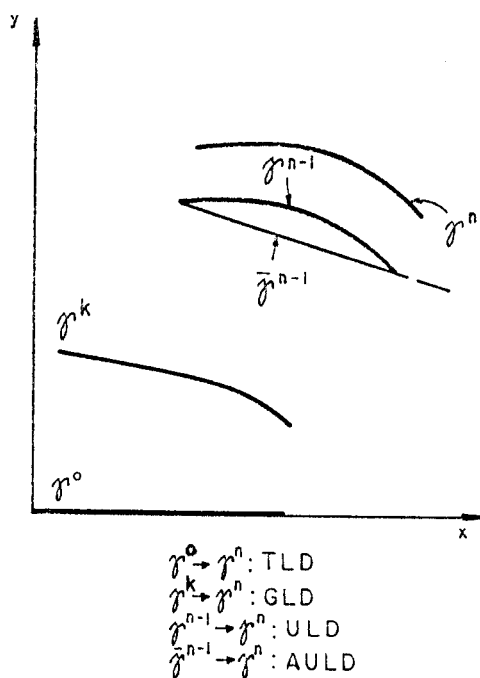


FIG. 3.2 - Configurações Possíveis de Um Elemento de Viga (Formulação Lagrangeana).

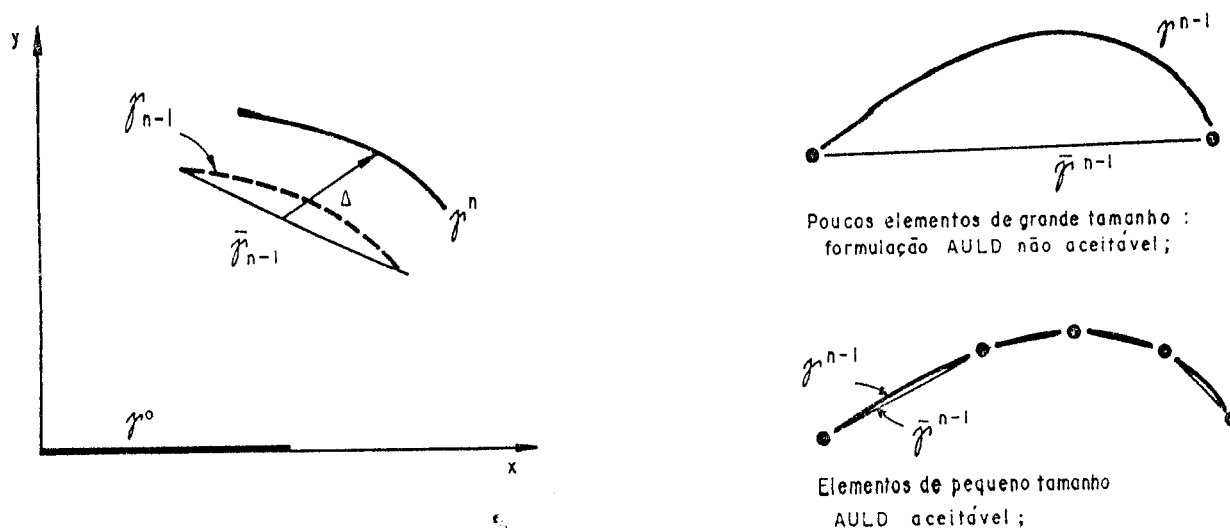


FIG. 3.3. - VALIDADE DA FORMULAÇÃO PARCIALMENTE ATUALIZADA.

O segundo tipo é a "Formulação Lagrangeana Geral" (GLD), na qual se toma γ^k como configuração de referência para se obter γ^n .

O Terceiro Tipo é a "Formulação Lagrangeana Atualizada" (ULD, iniciais em inglês de "Updated Lagrangian Description"), onde a configuração atual do elemento em qualquer instante (no caso, γ^{n-1}) é tomada como referencial para se obter γ^n (todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referidas à configuração no instante t). Dessa forma, é possível separar o deslocamento de corpo rígido do elemento das suas deformações locais. Embora este procedimento descreva de forma mais exata o campo de deslocamentos, o trabalho de cálculo das deformações locais do elemento em qualquer estágio do carregamento é enorme. Além disso, como observam Wong e Tin-Loi¹⁴³, ao se desenvolver um conjunto consistente de equações de equilíbrio para a análise incremental é necessário um grande número de operações matriciais para escrever a matriz de rigidez em coordenadas globais, partindo das coordenadas locais. Por essa razão, esse tipo de descrição dos deslocamentos não é recomendado, exceto em problemas onde se tenha que considerar grandes deslocamentos, os quais requerem o uso da formulação "atualizada" para dar resultados mais precisos. Na prática, deslocamentos muito

grandes raramente ocorrem em estruturas aporticadas sob condições normais de carregamento; esta é a razão principal que levou ao crescimento, principalmente nos últimos anos, da utilização de um quarto tipo, a "Formulação Lagrangeana Parcialmente Atualizada" (PULD), também referida como "Formulação Lagrangeana Aproximadamente Atualizada" (AULD - ver Fig. 3.2), na qual se toma $\bar{\gamma}^{n-1}$ como configuração de referência. A diferença principal nessa formulação, quando comparada com a "atualizada" (ULD), é que as coordenadas de cada elemento são atualizadas apenas no início de cada passo de carga, com os cálculos dentro do passo conduzidos como uma formulação "Total" (TLD). Observe-se que os eixos locais do elementos são então móveis, definidos em cada uma das configurações de equilíbrio e válidas até a passagem à próxima configuração, sempre feita de modo a que se mantenha o critério de pequenas rotações. Este tipo de formulação reúne, então, as vantagens da formulação "Total" (simplicidade) e da "atualizada" (exatidão); é a mesma formulação utilizada por Wen e Rahimzadeh¹⁴⁰, embora estes evitem utilizar o termo "atualizada" (usam, como já mencionado, "Lagrange - SR", de "small rotations"). Detalhes desse tipo de formulação podem também ser encontrados em Jetteur e outros⁶⁷, bem como em Peterson e Petersson¹¹⁰.

Uma limitação séria da formulação Parcialmente Atualizada está na hipótese de proximidade entre $\bar{\gamma}^{n-1}$ e γ^{n-1} , pois se assume que a diferença entre ambas seja tão pequena que elas possam ser confundidas, mas isto só funciona bem se se usar elementos finitos de pequeno tamanho (ver Fig. 3.3); daí a desvantagem em sua utilização apontada por Jetteur e outros⁶⁷: por requerer o uso de um grande número de elementos, aumenta o número de graus de liberdade da estrutura discretizada.

III.4. TEORIA ESTRUTURAL. CAMPOS DE DESLOCAMENTOS E DE DEFORMAÇÕES.

III.4.1. DEFINIÇÃO DO MODELO ELEMENTAL. HIPÓTESES.

Considere-se um elemento de uma estrutura em pórtico plano prismático, relacionada a um referencial global X, Y (ver Fig.

3.4.a), nas configurações de equilíbrio ${}^0A^0B$ e ${}^1A^1B$, respectivamente antes e depois da deformação. Os eixos x e y , fixos na posição inicial, constituem o sistema local de referência (referencial Lagrangeano, portanto) a partir do qual são medidas as translações u e v e as rotações θ (supostas positivas no sentido anti-horário dos centróides das seções transversais da barra (os nós tem, portanto, três graus de liberdade).

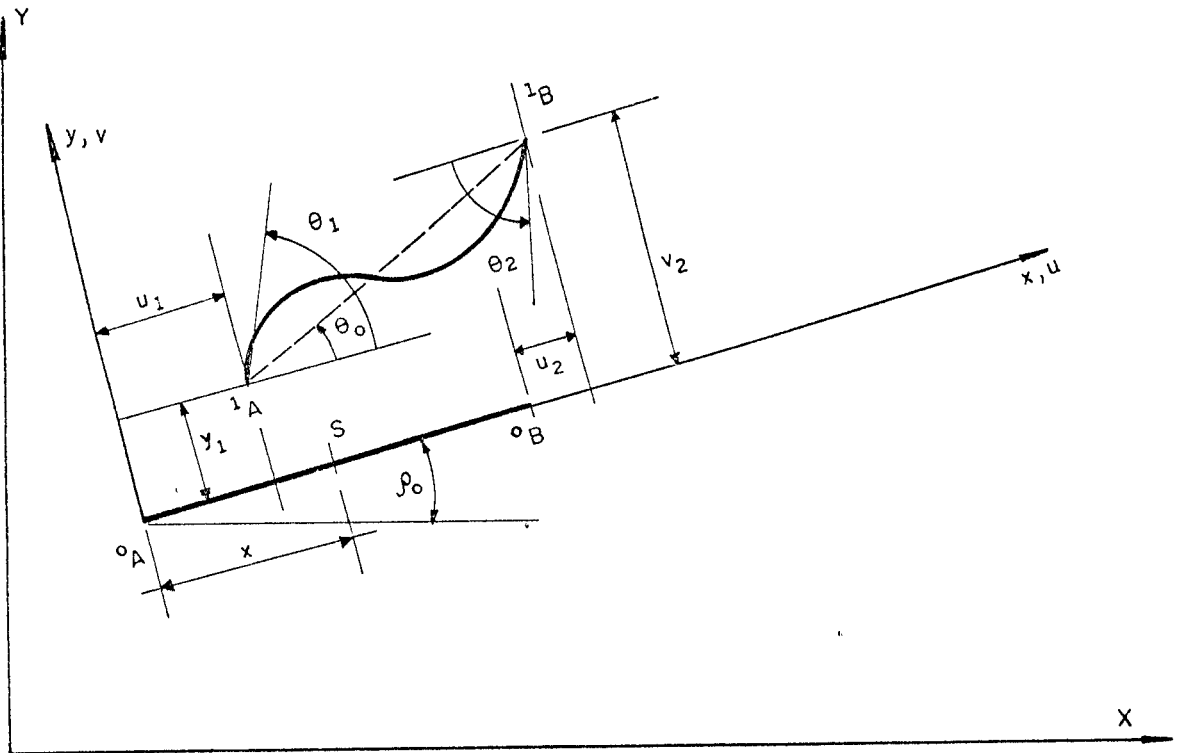
Assume-se que o material constituinte da barra é isótropo linear, com módulo de elasticidade E^9 . O elemento, inicialmente reto, possui área de seção transversal A , comprimento inicial L e momento de inércia relativo ao eixo baricêntrico ortogonal ao plano xy igual a I .

Admite-se válida a hipótese de Bernoulli-Euler: as seções transversais ortogonais ao eixo da barra permanecem indeformáveis e ortogonais ao eixo. Considera-se, portanto, desprezíveis as distorções no plano da barra e o efeito da deformação transversal ou de Poisson.

III.4.2. - CAMPO DE DESLOCAMENTOS E DE DEFORMAÇÕES.

Tomando-se um elemento diferencial de comprimento dx sobre a configuração inicial e deformada (ver Fig. 3.4.b, c e d), pode-se acompanhar a trajetória de uma fibra qualquer numa seção S de abscissa x situada a uma distância y do eixo, bem como uma fibra situada no próprio eixo (centro de gravidade da seção) e, através delas, definir o campo de deslocamentos e deformações.

⁹ Note-se que aqui procede-se a um estudo genérico, válido para qualquer material. Convém lembrar, porém, que o objeto principal deste trabalho são os pórticos planos de concreto armado, cujo módulo de elasticidade E varia ao longo do tempo, podendo esta variação ser considerada nas não-linearidades físicas (ver item II.2.1.4).



a)

FIG. 3.4 - a) Modelo Elemental;

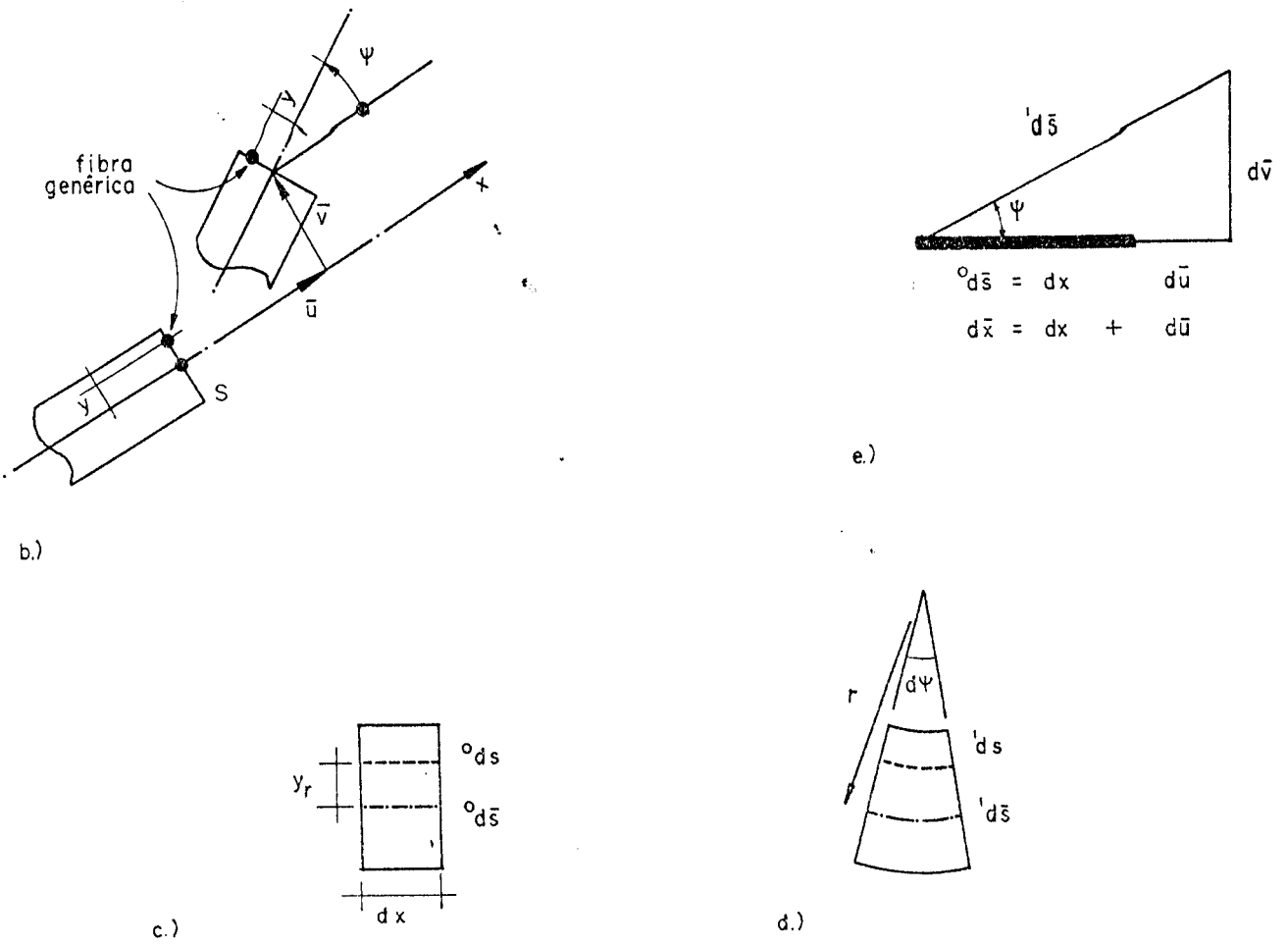


FIG. 3.4.- b) Deslocamentos da Seção S;
 c) Configuração inicial de um elemento diferencial de barra reta;
 d) Configuração deformada do mesmo elemento diferencial;
 e) Elemento diferencial do eixo da barra.

Essas duas fibras tem comprimentos iniciais 0ds e ${}^0d\bar{s}$, respectivamente, dados por:

$${}^0ds = {}^0d\bar{s} = dx \quad (3.4)$$

e, na configuração deformada, os comprimentos:

$${}^1ds = (r - y_r) d\psi \quad {}^1d\bar{s} = rd\psi \quad (3.5)$$

onde r é o raio de curvatura local e $d\psi$ é o ângulo interno. Da (3.5) vem:

$${}^1ds = {}^1d\bar{s} - y_r d\psi \quad (3.6)$$

Os estiramentos das fibras genérica e no eixo são definidos por:

$$\lambda = \frac{{}^1ds}{{}^0ds} \quad \bar{\lambda} = \frac{{}^1d\bar{s}}{{}^0d\bar{s}} \quad (3.7)$$

Como descrito por Pimenta ^{114,118}, estiramentos são grandezas positivas, sendo que valores maiores que 1 correspondem a esticamentos e valores menores que 1 a encurtamentos. Com o auxílio das equações anteriores, obtém-se:

$$\lambda = \bar{\lambda} - y_r \frac{d\psi}{dx} \quad (3.8)$$

O alongamento linear das fibras referenciais (genérica e no eixo) são definidos respectivamente por:

$$\varepsilon = \lambda - 1 \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\lambda} - 1 \quad (3.9)$$

Os alongamentos lineares são as medidas usuais de deformação; valores positivos correspondem a esticamentos enquanto valores negativos correspondem a encurtamentos. Combinando as equações (3.8) e (3.9), têm-se:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} - y_r \cdot \psi' \quad (3.10)$$

onde

$$\psi' = \frac{d\psi}{dx} = \text{rotação específica} \quad (3.11)$$

Como demonstrado por Pimenta e Mazzilli ¹¹⁷, ψ' não é a curvatura do eixo deformado da barra, a qual é dada por:

$$k = \frac{1}{r} = \frac{d\psi}{^1d\bar{s}} = \frac{d\psi}{dx} \frac{dx}{^1d\bar{s}} = \frac{\psi'}{\bar{\lambda}} \quad (3.12)$$

Pimenta observa que a rotação específica ψ' é a grandeza cinemática necessária numa teoria estrutural baseada na hipótese de Bernoulli - Euler, e não a curvatura, como comumente é afirmado. Além disso, é a rotação específica ψ' , e não a curvatura k , o deslocamento generalizado conjugado energeticamente com o momento fletor.

Os deslocamentos da fibra genérica (ver Fig. 3.4.b) são u (paralelo a x) e v (paralelo a y), dados por:

$$u = \bar{u} - y_r \text{ sen}\psi \quad (3.13)$$

$$v = \bar{v} - y_r (1 - \text{cos}\psi)$$

onde \bar{u} e \bar{v} são os deslocamentos do centro de gravidade da seção S e ψ é a rotação da seção. As eq. (3.13) definem, pois, o campo de deslocamentos adotado neste trabalho. Com o auxílio da Fig. 3.4.e, obtem-se o comprimento final $^1d\bar{s}$ da fibra do eixo da barra (na posição deformada):

$$^1d\bar{s} = \left[(dx + d\bar{u})^2 + (d\bar{v})^2 \right]^{1/2} \quad (3.14)$$

de onde, com o auxílio da (3.7), obtem-se o estiramento da fibra do eixo:

$$\bar{\lambda} = \frac{d\bar{s}}{dx} = \left[(1 + \bar{u}')^2 + (\bar{v}')^2 \right]^{1/2} \quad (3.15)$$

A notação ' indica derivação com relação a x (coordenada Lagrangeana). Também da figura citada, obtém-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\psi &= \frac{\bar{v}'}{(1 + \bar{u}')} \\ \operatorname{sen}\psi &= \frac{\bar{v}'}{\bar{\lambda}} \\ \operatorname{cos}\psi &= \frac{(1 + \bar{u}')}{\bar{\lambda}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Logo, das equações (3.13), (3.15) e (3.16), os deslocamentos dos pontos materiais são funções apenas dos deslocamentos dos pontos do eixo da barra.

A equação (3.15) é a particularização para o eixo da barra de uma equação geral que, para uma fibra genérica, pode ser escrita:

$$\lambda = \left[(1 + u')^2 + (v')^2 \right]^{1/2} \quad (3.17)$$

Derivando-se as equações (3.13), tem-se:

$$\begin{aligned} u' &= \bar{u}' - y_r \cdot \operatorname{cos}\psi \cdot \psi' \\ v' &= \bar{v}' - y_r \cdot \operatorname{sen}\psi \cdot \psi' \end{aligned} \quad (3.18)$$

que, introduzidas em (3.17), com a ajuda de (3.15), levam a:

$$\lambda = \bar{\lambda} - y_r \cdot \psi' \quad (3.19)$$

confirmando a (3.8).

Diferenciando-se ambos os membros da primeira das equações (3.16) em relação a x, com o auxílio da terceira delas, obtém-se a rotação específica:

$$\psi' = \frac{(1 + \bar{u}')\bar{v}'' - \bar{u}''\bar{v}'}{\bar{\lambda}^2} \quad (3.20)$$

Introduzindo-se (3.15) e (3.20) na (3.12), chega-se à fórmula da curvatura do eixo da barra:

$$k = \frac{1}{r} = \frac{\psi'}{\bar{\lambda}} = \frac{\bar{v}''(1 + \bar{u}') - \bar{u}''\bar{v}'}{[(1 + \bar{u}')^2 + (\bar{v}')^2]^{3/2}} \quad (3.21)$$

Da Fig. 3.4.e e da equação (3.7), tem-se que:

$$\bar{\lambda} = \lambda_c \sec \psi \quad (3.22)$$

onde λ_c é o estiramento local da corda do elemento, definido por:

$$\lambda_c = \frac{d\bar{x}}{dx} = 1 + \bar{u}' \quad (3.23)$$

De outra forma, da terceira das equações (3.16), vem:

$$\bar{\lambda} = \frac{1 + \bar{u}'}{\cos \psi} = (1 + \bar{u}') \cdot \sec \psi \quad (3.24)$$

Com (3.24) em (3.9) e esta em (3.10), obtém-se a deformação específica:

$$\epsilon = (1 + \bar{u}') \sec \psi - y_r \psi' - 1 \quad (3.25)$$

a qual define o campo de deformações a ser usado neste trabalho, com simplificações adotadas em função da hipótese de pequenas rotações, como se verá adiante. Como mostram as equações (3.20) e (3.25), os alongamentos num elemento dependem exclusivamente dos deslocamentos \bar{u} e \bar{v} do eixo.

III.4.3. - APROXIMAÇÕES ADOTADAS.

Expõe-se a seguir algumas considerações a respeito da escolha adequada da aproximação de segunda ordem a ser utilizada

neste trabalho, visando-se complementar aquelas feitas em item anterior (ver item III.3.2).

Como observam Souza Lima e Venâncio Filho¹³⁴, para a escolha adequada da aproximação de segunda ordem a ser utilizada em determinada aplicação, é necessário que sejam fixados alguns valores numéricos relativos à ordem de grandeza das deformações e dos deslocamentos angulares, sendo estes últimos os elementos que caracterizam a maior ou menor importância dos efeitos de segunda ordem.

Aceitar-se-a deformações da ordem de poucos milésimos, consideradas muito pequenas. Quanto às rotações ψ , três são os casos a distinguir:

a.) rotações muito pequenas (da ordem das deformações ϵ), para as quais pode-se, sempre, escrever:

$$\cos\psi = 1; \quad \text{sen}\psi \cong \text{tg}\psi = \psi$$

b.) rotações pequenas (da ordem da raiz quadrada do módulo de ϵ), para as quais ainda se pode admitir: $\text{sen}\psi \cong \text{tg}\psi = \psi$; a aproximação $\cos\psi = 1$ deverá, porém, ser substituída por:

$$\cos\psi = 1 - \frac{\psi^2}{2}$$

c.) grandes rotações: neste caso, as deformações podem ser muito pequenas ou não.

No presente trabalho, como já mencionado em item anterior (ver item III.3.2), adota-se a hipótese de pequenas rotações¹⁰ do eixo dos elementos em relação à suas cordas (item b acima), podendo-se utilizar as aproximações:

$$\text{tg}\psi \cong \psi \cong \bar{v}'$$

¹⁰ Isto significa rotações bem menores, em radianos, que a unidade, de modo a se poder aproximar a curvatura de flexão à segunda derivada de \bar{v} (ver equação 3.21), isto é: $k = \bar{v}''$.

$$\operatorname{sen}\psi \cong \psi \cong \bar{v}'$$

$$\cos\psi \cong 1 - \frac{\psi^2}{2} \cong 1 - \frac{\bar{v}'^2}{2} \quad (3.26)$$

$$\sec\psi \cong 1 + \frac{\psi^2}{2} \cong 1 + \frac{\bar{v}'^2}{2}$$

$$\psi' \cong \bar{v}''$$

Pimenta e Soler¹¹⁸ observam que as aproximações acima não impedem a ocorrência de grandes curvaturas, desde que os elementos sejam suficientemente curtos. Se as curvaturas forem pequenas, o que é normal em estruturas de concreto estrutural, o ângulo ψ será pequeno independentemente do comprimento dos elementos, e a hipótese de pequenas rotações se justifica sempre.

Com isso, pode-se reescrever o campo de deslocamentos (equações 3.13), obtendo-se (abandona-se aqui o índice r para a fibra genérica):

$$u = \bar{u} - y\bar{v}' \quad (3.27)$$

$$v = \bar{v} - \frac{y\bar{v}'^2}{2}$$

O campo de deformações (equação 3.25) é expresso então por:

$$\varepsilon = \bar{u}' + \frac{\bar{v}'^2}{2} + \frac{\bar{u}'\bar{v}'^2}{2} - y\bar{v}'' \quad (3.28)$$

Abandonando-se a parcela multiplicativa das derivadas primeiras dos deslocamentos no eixo \bar{u} e \bar{v} , obtem-se a expressão final do campo de deformações:

$$\varepsilon = \bar{u}' + \frac{\bar{v}'^2}{2} - y\bar{v}'' \quad (3.29)$$

onde a segunda parcela é não-linear, como se verá adiante. Como a transformação transversal v é assumida adiante como expansão cúbica

de x , a segunda parcela resulta do quarto grau em x , enquanto a primeira parcela é constante ao longo da barra, pois a translação u é assumida linear em x - ver item III.5.2. A terceira parcela resultará linear.

O abandono da terceira parcela conduziria à mesma expressão obtida por outros pesquisadores (Przemieniecki¹²³, Kang⁷¹, Venâncio Filho¹³⁹, Scordelis¹²⁸, Cauvin^{24,27}, etc...).

O campo de deformações definido acima é o mesmo utilizado por outros pesquisadores: Brasil¹⁸, Wong e Tin-Loi¹⁴³, Szilard¹³⁶, Chajes e Churchill³⁰, Corrêa⁴¹, Wen e Rahimzadeh¹⁴⁰. Nos dois últimos trabalhos citados, a expressão de ε foi alterada, tomando-se o valor médio da segunda parcela ao longo do comprimento da barra. Segundo Wen e Rahimzadeh, o uso direto da expressão (3.29) conjugado com a formulação via energia potencial do MEF resultaria num modelo excessivamente rígido, motivando a hipótese de substituir-se a segunda parcela pela média ao longo da barra, resultando para o campo das deformações a expressão:

$$\varepsilon = \bar{u}' + \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\bar{v}'^2}{2} dx - y\bar{v}'' \quad (3.30)$$

Isto resulta em modelo menos rígido, de melhor desempenho que o anterior, segundo os autores citados.

III.5. DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (VIA FORMULAÇÃO ENERGÉTICA).

III.5.1. CONCEITOS BÁSICOS.

Um pórtico plano é discretizado dividindo-se as suas barras em elementos, cujas extremidades definem os nós (ver Fig. 3.4.a). Ao conjunto de nós de uma discretização dá-se o nome de rede. Admita-se que o carregamento estático seja aplicado por ações concentradas apenas nos nós da rede.

III.5.1.1. ENERGIA POTENCIAL TOTAL.

A energia potencial total π de um sistema é composta de duas parcelas:

$$\pi = U + W \quad (3.31)$$

onde U é a energia de deformação e W é a energia potencial das forças externas na configuração deformada. Sabe-se que a energia de deformação U no volume V da estrutura é dada por:

$$U = \int_V u_0 \, dV \quad (3.32)$$

onde u_0 é a energia de deformação específica (energia de deformação por unidade de volume). Sabe-se que:

$$u_0 = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^t \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.33)$$

onde o símbolo gráfico " $\underline{\underline{\quad}}$ " indica notação matricial (coloca-se o segundo membro da igualdade em função de matrizes de componentes de tensões e de deformações, para a generalidade conveniente).

As deformações são obtidas por diferenciação das funções deslocamento (ver item III.5.2, equações 3.60), podendo-se escrever:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{Q}} \quad (3.34)$$

onde $\underline{\underline{B}}$ é a matriz que relaciona deformação aos deslocamentos e $\underline{\underline{Q}}$ é o vetor de deslocamentos nodais; observe-se que agora $\underline{\underline{B}}$ será função dos deslocamentos nodais, residindo aí a não-linearidade.

É conveniente lembrar que numa análise linear via MEF a matriz $\underline{\underline{B}}$ de cada elemento é constante e independente dos deslocamentos do elemento.

As tensões são relacionadas às deformações através da matriz dos coeficientes elásticos $\underline{\underline{D}}$, a saber:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{Q}} \quad (3.35)$$

Com o auxílio das três últimas equações, pode-se reescrever a equação (3.32):

$$U = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{Q}}^t \underline{\underline{B}}^t \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{Q}} dV \quad (3.36)$$

Dessa forma, a energia de deformação U pode ser expressa em função dos deslocamentos nodais $\underline{\underline{Q}}$, isto é:

$$U = U(\underline{\underline{Q}}) \quad (3.37)$$

como já se mencionara anteriormente (ver eq. 3.3).

Analogamente, a energia potencial das forças externas pode ser escrita em função de carregamentos nodais e dos deslocamentos nodais, obtendo-se:

$$W = -\underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{Q}} = W(\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{Q}}) \quad (3.38)$$

onde $\underline{\underline{F}}$ é o vetor de forças nodais.

III.5.1.2. - PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL TOTAL.

A expressão

$$\delta\pi = 0 \quad (3.39)$$

sintetiza o assim chamado princípio da mínima energia potencial total, que nada mais é do que o princípio dos trabalhos virtuais escrito ou interpretado sob outro aspecto: em lugar de afirmar que na posição de equilíbrio de um sistema há igualdade de trabalhos virtuais externo e interno, estabelece-se que, naquela posição, o trabalho virtual total é nulo. Como dimensionalmente trabalho e energia são iguais, diz-se, também, que a variação da energia total é nula na posição de equilíbrio.

Em outras palavras, a energia potencial total de um sistema em equilíbrio é estacionária e, como se pode provar que a

energia é sempre mínima para estruturas estáveis, estabelece-se o assim chamado princípio da energia potencial total estacionária ou, mais frequentemente, princípio da mínima energia potencial total, que pode ser descrito como segue: "de todos os deslocamentos compatíveis de um sistema que satisfazem as condições de contorno do mesmo, aquele que satisfaz as condições de equilíbrio leva a energia potencial total do sistema a assumir um valor estacionário". Num problema elasticamente linear, uma solução que satisfaz ambas as condições (equilíbrio e compatibilidade) é, obviamente, a solução correta. Contudo, na maioria dos casos tal solução é difícil (quando não impossível) de obter, e os pesquisadores optaram por adotar soluções aproximadas, assumindo deslocamentos compatíveis sob parâmetros indeterminados; para determina-los, assume-se que a energia potencial total do sistema é mínima e estacionária, isto é, a sua variação é nula ($\delta\pi = 0$); ou seja, se um conjunto de funções-deslocamento sob parâmetros Q_i desconhecidos é usado para aproximar os deslocamentos reais de um sistema, é possível determinar os Q_i fazendo-se:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_i} = 0 \quad (3.40)$$

equação intensivamente usada na obtenção de matrizes de rigidez pelo Método dos Elementos Finitos.

III.5.1.3 - MATRIZES DE RIGIDEZ SECANTE E TANGENTE.

Com o auxílio das equações (3.36) e (3.38), a equação (3.31) que fornece a energia potencial total pode ser escrita:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \underline{Q}^t \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} \underline{Q} \, dV - \underline{F}^t \underline{Q} \quad (3.41)$$

ou, simplificadamente (ver eq. 3.37):

$$\pi = U(\underline{Q}) - \underline{F}^t \underline{Q} \quad (3.42)$$

Substituindo na (3.40) e efetuando a diferenciação parcial, vem:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \underline{Q}_i} = \int_V \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} \underline{Q} dV - \underline{F}_i = 0 \quad (3.43)$$

ou, simplificando:

$$\underline{K}_s \underline{Q} = \underline{F} \quad (3.44)$$

onde \underline{K}_s é denominada matriz de rigidez secante e dada por:

$$\underline{K}_s = \int_V \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} dV \quad (3.45)$$

A matriz \underline{K}_s é obtida pela contribuição de todos os elementos. Para se obter a contribuição \underline{k}_s de um elemento basta limitar o domínio ao seu volume. Como \underline{B} é dependente dos deslocamentos nodais \underline{Q} , \underline{K}_s será variável, alterando-se à medida em que os deslocamentos ocorrerem.

A equação (3.43) também pode ser escrita:

$$\frac{\partial U}{\partial \underline{Q}_i} - \underline{F}_i = 0 \quad (3.46)$$

onde

$$\frac{\partial U}{\partial \underline{Q}_i} = \underline{K}_s \underline{Q} \quad (3.47)$$

Como se sabe da Teoria Geral da Estabilidade Elástica, define-se a matriz de rigidez tangente \underline{K}_t através da segunda diferenciação da expressão da energia potencial total:

$$\underline{K}_t = \frac{\partial^2 \pi}{\partial \underline{Q}_i \partial \underline{Q}_j} \quad (3.48)$$

ou, o que dá no mesmo:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{Q}_i \partial \tilde{Q}_j} = K_{\tilde{t}} \quad (3.49)$$

Em análises não-lineares, a solução da equação (3.46) geralmente é baseada numa estimativa inicial dos deslocamentos Q_0 . Aplicando-se uma variação finita ΔQ nos deslocamentos nodais na configuração deformada, com os consequentes incrementos de deformação $\Delta \tilde{\varepsilon}$ e de forças nodais $\Delta \tilde{F}$, têm-se:

$$Q_1 = Q_0 + \Delta Q \quad (3.50)$$

A energia de deformação, após isso, pode ser escrita em função dos deslocamentos modais Q_1 , e a equação (3.46) pode ser escrita:

$$\frac{\partial U(Q_1)}{\partial \tilde{Q}_i} - F_{\tilde{i}} = 0 \quad (3.51)$$

Expandindo-se essa equação em série de Taylor, em conjunto com a equação (3.50), truncando o desenvolvimento no termo linear, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 U(Q_0)}{\partial \tilde{Q}_i} \Delta Q = \frac{-\partial U(Q_0)}{\partial \tilde{Q}_i} + F_{\tilde{i}} \quad (3.52)$$

que também pode ser escrita:

$$K_{\tilde{t}} \Delta Q = \Delta \tilde{F} \quad (3.53)$$

onde $K_{\tilde{t}}$ é a matriz de rigidez tangente (equação 3.49).

A relação de recorrência (3.52) forma a base para a aplicação do método de Newton - Raphson (ver capítulo IV): o lado direito da igualdade representa o vetor de forças residuais a serem reduzidas em iterações sucessivas. Assim, a solução de (3.52) em qualquer passo de carregamento leva a um vetor ΔQ a ser usado na equação (3.50) para dar uma melhor estimativa dos deslocamentos. Essa solução, por sua vez, é substituída em (3.52) para gerar um novo ΔQ . Repete-se o processo até que as forças residuais se anulem ou resultem dentro de uma tolerância pré-definida.

O exame da equação (3.52) deixa claro que a solução de problemas não-lineares geométricos passa pela avaliação das primeira e segunda derivadas da energia de deformação U (matrizes de rigidez secante e tangente, cruciais ao processo de solução).

III.5.2. FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO.

As componentes do deslocamento de um elemento de pórtico plano com seis graus de liberdade (ver Fig. 3.4.a) são:

$$\underline{Q}_i^t = \left\{ u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2 \right\} \quad (3.54)$$

Admitir como válida a expressão (3.39) significa, como visto, que o elemento está em equilíbrio e que, a partir disso, pode-se obter as equações de equilíbrio, para o que serão necessárias funções aproximadoras para os deslocamentos.

Os deslocamentos \bar{u} e \bar{v} dos pontos do eixo do elemento, com relação à posição original, são então interpolados por funções $\phi_i(x)$ e $\gamma_i(x)$, na forma:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^6 Q_i \phi_i(x) \quad (3.55)$$

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^6 Q_i \gamma_i(x)$$

onde $\phi_i(x)$ e $\gamma_i(x)$ são funções com forma conhecida (são chamadas funções de forma ou funções de interpolação). Para barras prismáticas, as funções de interpolação usualmente adotadas na Análise Matricial de Estruturas são os seguintes polinômios hermitianos:

$$\phi_1(x) = 1 - x/L$$

$$\phi_4(x) = x/L$$

$$\phi_2(x) = \phi_3(x) = \phi_5(x) = \phi_6(x) = 0$$

$$\gamma_1(x) = \gamma_4(x) = 0 \tag{3.56}$$

$$\gamma_2(x) = 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3$$

$$\gamma_3(x) = x - 2x^2/L + x^3/L^2$$

$$\gamma_5(x) = 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3$$

$$\gamma_6(x) = -x^2/L + x^3/L^2$$

onde L é o comprimento da barra. É fácil verificar (substitua-se as 3.56 nas 3.55) que com isso a forma da variação adotada para os deslocamentos axiais \bar{u} é linear e para os deslocamentos transversais \bar{v} é cúbica.

Segundo Mazzilli⁹⁴ e Wen e Rahimzadeh¹⁴⁰ é conveniente reescrever as equações (3.55) na forma:

$$\bar{u} = a + bx \tag{3.57}$$

$$\bar{v} = c + dx + cx^2 + fx^3$$

As grandezas a, b, c, d, e, f desempenham o papel de coordenadas generalizadas e podem ser obtidas particularizando-se u, v e $\theta \approx \bar{v}'$ nos extremos. Obtem-se:

$$a = u_1 \quad b = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad c = v_1 \quad d = \theta_1 \quad (3.58)$$

$$e = \frac{-2\theta_1 - \theta_2 + 3\theta_0}{L} \quad f = \frac{\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_0}{L^2}$$

onde, para pequenas rotações, o giro de corda θ_0 é dado por (ver Fig. 3.4.a):

$$\theta_0 = \frac{v_2 - v_1}{L} \quad (3.59)$$

Com isso, as (3.57) podem ser escritas:

$$\bar{u} = u_1 + \frac{(u_2 - u_1) x}{L} \quad (3.60)$$

$$\bar{v} = v_1 + \theta_1 x + \frac{(-2\theta_1 - \theta_2 + 3\theta_0)x^2}{L} + \frac{(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_0)x^3}{L^2}$$

III.5.3. - ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.

No caso do elemento considerado (elemento de viga), a equação (3.35) se escreve:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.61)$$

onde E é o módulo de elasticidade.

Com isso, a energia de deformação do elemento pode ser escrita, com o auxílio das (3.32) e (3.33):

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon^2 dV \quad (3.62)$$

Substituindo a expressão de ε (equação 3.30) na anterior, vem:

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \left\{ \bar{u}'^2 + (y\bar{v}'')^2 + \frac{2\bar{u}'}{L} \int_0^L \frac{\bar{v}'^2}{2} dx + \left[\frac{1}{L} \int_0^L \frac{\bar{v}'^2}{2} dx \right]^2 - 2 \bar{u}' \bar{v}'' y - \frac{2y\bar{v}''}{L} \int_0^L \frac{\bar{v}'^2}{2} dx \right\} dV \quad (3.63)$$

O exame dessa equação indica que as quinta e sexta parcelas, por conterem y , serão nulas (já que a integração de y sobre a área da seção transversal do elemento é o momento estático, que no caso é nulo, pois o eixo do elemento passa pelo centróide da seção - ver item III.4.1). A segunda parcela contém y^2 cuja integração sobre a área do elemento fornece o momento de inércia I .

Com isso, feita as integrações sobre a área do elemento, pode-se reescrever a equação anterior como:

$$U = \frac{AE}{2} \int_0^L \bar{u}'^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \bar{v}''^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^L \bar{u}' \bar{v}'^2 dx + \frac{EA}{8L} \int_0^L \bar{v}'^4 dx \quad (3.64)$$

ou, de outra forma:

$$U = U^L + U_I^{NL} + U_{II}^{NL} \quad (3.65)$$

onde U^L é a parcela da energia de deformação proveniente da parte linear da expressão de ϵ (primeira e segunda integrais da equação 3.64) e $U_{I,II}^{NL}$ são as parcelas provenientes da não-linearidade de ϵ (terceira e quarta integrais da 3.64, respectivamente).¹¹

11

Veja-se os comentários abaixo da equação (3.29).

Com o auxílio das (3.57) em (3.64), obtêm-se:

$$U^L = \frac{EAL}{2} b^2 + \frac{EI}{2} (4e^2L + 12efL^2 + 12f^2L^3) \quad (3.66)$$

$$U_I^{NL} = \frac{EAb}{2} \left[d^2L + 2deL^2 + \frac{L^3}{3} (6df + 4e^2) + 3efL^4 + \frac{9f^2L^5}{5} \right] \quad (3.67)$$

$$U_{II}^{NL} = \frac{EAL}{8} \left[d^2 + 5deL + \frac{L^2}{3} (6df + 4e^2) + 3efL^3 + \frac{9}{5} f^2L^4 \right]^2 \quad (3.68)$$

O exame dessas expressões indica que a primeira delas é função quadrática dos parâmetros nodais de deslocamento, enquanto que a segunda é cúbica e a terceira é quadrática. Com base nisso, Wen e Rahimzadeh¹⁴⁰ escrevem a equação (3.65) sob a forma:

$$U = U_2 + U_3 + U_4 \quad (3.69)$$

A correspondência entre os termos das equações (3.69) e (3.65) é imediata.

A matriz de rigidez tangente, tendo em vista a (3.49), será então obtida pela soma de três matrizes simétricas (por se referir ao elemento, usa-se aqui a letra minúscula para anotá-la):

$$k_t = k_0 + k_1 + k_2 \quad (3.70)$$

onde

$$k_0 = \frac{\partial^2 U^L}{\partial Q_i \partial Q_j}, \quad k_1 = \frac{\partial^2 U_I^{NL}}{\partial Q_i \partial Q_j}, \quad k_2 = \frac{\partial^2 U_{II}^{NL}}{\partial Q_i \partial Q_j} \quad (3.71)$$

A matriz k_0 é a matriz de rigidez usual das análises lineares, constante e independente dos deslocamentos; k_1 e k_2 são as matrizes de rigidez incrementais, respectivamente, de primeira e segunda ordens (função dos deslocamentos nodais e, portanto, variáveis). Da equação (3.71), e tendo em vista a (3.47), pode-se obter a matriz de rigidez secante por:

$$k_s = k_0 + \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{3} k_2 \quad (3.72)$$

As equações (3.70) e (3.72) indicam que, conhecida uma das matrizes ($k_{\tilde{t}}$ ou $k_{\tilde{s}}$) a outra pode ser obtida imediatamente.

III.5.4. - OBTENÇÃO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ.

Derivando-se as parcelas U^L , U_I^{NL} e U_{II}^{NL} em relação aos parâmetros nodais de deslocamentos, chega-se às matrizes de rigidez secante e tangente. Via derivação, obter-se-a aqui a matriz de rigidez tangente, escrita nas parcelas $k_{\tilde{0}}$, $k_{\tilde{1}}$ e $k_{\tilde{2}}$. Com isso, as expressões dos termos da matriz secante serão imediatas (equação 3.72).

Com as (3.58) substituídas nas (3.66) a (3.68), obtém-se então:

$$U^L = \frac{EA}{2L} (u_2 - u_1)^2 + \frac{EI}{2L} \left[12\theta_0^2 - 12\theta_0\theta_1 - 12\theta_0\theta_2 + 4\theta_1^2 + 4\theta_2^2 + 4\theta_1\theta_2 \right] \quad (3.73)$$

$$U_I^{NL} = \frac{EA}{2} (u_2 - u_1) \left[\frac{2\theta_1^2 - \theta_1\theta_2 - 3\theta_1\theta_0 + 2\theta_2^2 - 3\theta_2\theta_0 + 18\theta_0^2}{15} \right] \quad (3.74)$$

$$U_{II}^{NL} = \frac{EAL}{8} \left[\frac{2\theta_1^2 - \theta_1\theta_2 - 3\theta_1\theta_0 + 2\theta_2^2 - 3\theta_2\theta_0 + 18\theta_0^2}{15} \right]^2 \quad (3.75)$$

Efetuando-se agora as derivações (equações 3.71), chega-se finalmente às parcelas componentes das matrizes. Com o auxílio da (3.59), obtêm-se:

$$k_{\tilde{0}} = \begin{vmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ & & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ & & & EA/L & 0 & 0 \\ \text{simétrica} & & & & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ & & & & & 4EI/L \end{vmatrix} \quad (3.76)$$

$$k_{\sim 1} = EA \begin{vmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} & 0 & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & 0 & k_{45} & k_{46} \\ & \text{sim} & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{vmatrix}$$

onde :

$$k_{12} = \frac{\partial^2 U_I^{NL}}{\partial u_1 \partial v_1} = \frac{6}{5L^2} (v_2 - v_1) - \frac{1}{10L} (\theta_1 + \theta_2)$$

$$k_{22} = \frac{\partial^2 U_I^{NL}}{\partial v_1^2} = \frac{6}{5L^2} (u_2 - u_1)$$

$$k_{13} = \frac{\partial^2 U_I^{NL}}{\partial u_1 \partial \theta_1} = \frac{1}{10L} (v_2 - v_1) + \frac{1}{30} (\theta_2 - 4\theta_1)$$

$$k_{23} = \frac{\partial^2 U_I^{NL}}{\partial v_1 \partial \theta_1} = \frac{1}{10L} (u_2 - u_1)$$

$$k_{33} = \frac{\partial^2 U_I^{NL}}{\partial \theta_1^2} = \frac{2}{15} (u_2 - u_1)$$

$$k_{16} = \frac{\partial^2 U_I^{NL}}{\partial u_1 \partial \theta_2} = \frac{1}{10L} (v_2 - v_1) + \frac{1}{30} (\theta_1 - 4\theta_2)$$

$$k_{24} = -k_{12}$$

$$k_{34} = -k_{13}$$

$$k_{15} = -k_{12}$$

$$k_{25} = -k_{22}$$

$$k_{35} = -k_{23}$$

$$k_{45} = -k_{24}$$

$$k_{55} = k_{22}$$

$$k_{26} = k_{23}$$

$$k_{36} = -\frac{k_{33}}{4}$$

$$k_{46} = -k_{16}$$

$$k_{56} = -k_{26}$$

$$k_{66} = k_{33}$$

(3.77)

$$k_2 = EA \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ \text{sim.} & & & & & k_{66} \end{vmatrix}$$

onde:

$$k_{22} = \frac{\partial^2 U_{II}^{NL}}{\partial v_1^2} = \frac{1}{100L^3} \left[9L^2 (\theta_1^2 + \theta_2^2) - 2L^2 \theta_1 \theta_2 - 36L (\theta_1 + \theta_2) (v_2 - v_1) + 216 (v_2 - v_1)^2 \right]$$

$$k_{23} = \frac{\partial^2 U_{II}^{NL}}{\partial v_1 \partial \theta_1} = \frac{1}{300L^2} \left[L^2 (6\theta_1^2 + 2\theta_1 \theta_2 + \theta_2^2) - 54L\theta_1 (v_2 - v_1) + 6L\theta_2 (v_2 - v_1) + 54 (v_2 - v_1)^2 \right]$$

$$k_{33} = \frac{\partial^2 U_{II}^{NL}}{\partial \theta_1^2} = \frac{1}{300L} \left[L^2 (8\theta_1^2 + 3\theta_2^2 - 4\theta_1 \theta_2) - 12L\theta_1 (v_2 - v_1) - 2L\theta_2 (v_2 - v_1) + 27 (v_2 - v_1)^2 \right]$$

$$k_{26} = \frac{\partial^2 U_{II}^{NL}}{\partial v_1 \partial \theta_2} = \frac{1}{300L^2} \left[L^2 (\theta_1^2 + 6\theta_2^2 + 2\theta_2 \theta_1) + 6L\theta_1 (v_2 - v_1) - 54L \theta_2 (v_2 - v_1) + 54 (v_2 - v_1)^2 \right]$$

$$k_{36} = \frac{\partial^2 U_{II}^{NL}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = \frac{1}{300L} \left[L^2 (-2\theta_1^2 - 2\theta_2^2 + 6\theta_1 \theta_2) - 2L\theta_1 (v_2 - v_1) - 2L\theta_2 (v_2 - v_1) - 3(v_2 - v_1)^2 \right]$$

$$k_{66} = \frac{\partial^2 U_{II}^{NL}}{\partial \theta_2^2} = \frac{1}{300L} \left[L^2 (3\theta_1^2 + 8\theta_2^2 - 4\theta_1 \theta_2) - 2L\theta_1 (v_2 - v_1) - 12L\theta_2 (v_2 - v_1) + 27(v_2 - v_1)^2 \right]$$

$$k_{25} = -k_{22}$$

$$k_{35} = -k_{23}$$

$$k_{55} = k_{22}$$

$$k_{56} = -k_{26}$$

(3.78)

III.5.5. - ATUALIZAÇÃO DE COORDENADAS.

A formulação anterior, válida para pequenas rotações, não pode ser aplicada diretamente a problemas que envolvam grandes rotações, necessitando para isso recorrer-se previamente à atualização de coordenadas, como já mencionado (ver item III.3.2). Recorrer-se-a aqui, pois, à Formulação Lagrangeana Parcialmente Atualizada (PULD, das iniciais em inglês, conforme Wong e Tin-Loi¹⁴³), como descrita em Wen e Rahimzadeh¹⁴⁰ e deduzida por Corrêa⁴¹. A diferença principal dessa formulação com a Formulação Lagrangeana Atualizada (ULD) é que as coordenadas de cada elemento são atualizadas apenas no início de cada incremento de carga, com os cálculos então sendo feitos, como na Formulação Lagrangeana Total (TLD). No início de um novo incremento, embora os deslocamentos iniciais nas novas coordenadas do elemento sejam nulos, as deformações não são. Essas deformações iniciais conduzirão a uma parcela adicional da matriz de rigidez, como se verá adiante.

A configuração no final de dois incrementos i e $(i + 1)$ são anotadas γ^i e γ^{i+1} , respectivamente (ver Fig. 3.5), com γ^i fixa e γ^{i+1} variável: os deslocamentos no estágio γ^{i+1} são medidos em relação à corda de γ^i . Nas extremidades do elemento, eles são ${}^i u_1, {}^i v_1, \text{ etc...}$, que são os deslocamentos generalizados para esse estágio da análise.

A análise do primeiro incremento é idêntica à da Formulação Lagrangeana Total (passagem de γ^0 a γ^1). Já na passagem da configuração γ^i para γ^{i+1} é preciso levar-se em conta a presença das deformações iniciais. A energia de deformação acumulada até este incremento é dada por:

$$U = \int_V \frac{1}{2} E ({}^{i+1} \epsilon)^2 dV = \int_V \frac{E}{2} \left[(\Delta \epsilon)^2 + 2({}^i \epsilon) \Delta \epsilon + ({}^i \epsilon)^2 \right] dV \quad (3.79)$$

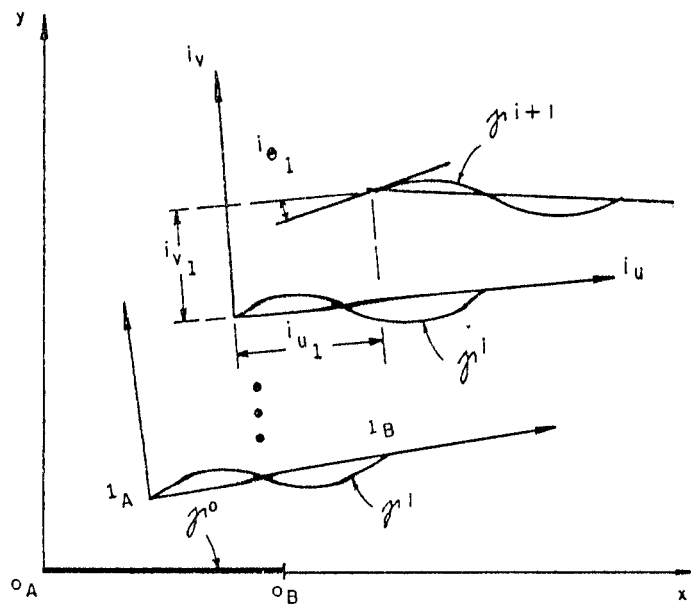


FIG.3.5 - Atualização das Coordenadas do Elemento de Viga.

onde $(^{i+1}\epsilon)$ é a deformação total, $(^i\epsilon)$ é a deformação acumulada até o estágio γ^i e $\Delta\epsilon$ é o incremento de deformação ocorrida durante a consideração do incremento de carga atual, dada por:

$$\Delta\epsilon = ^{i+1}\epsilon - ^i\epsilon \quad (3.80)$$

Como $^i\epsilon$ é independente dos deslocamentos generalizados ocorridos no atual incremento de carga, a terceira parcela da equação (3.79) pode ser desprezada, porque a sua derivada será nula. Assim, a energia de deformação U pode ser obtida pela soma de U_ϵ (correspondente à primeira parcela da 3.79) e de iU_0 (correspondente à segunda parcela da mesma equação).

As matrizes de rigidez são então obtidos como no item anterior. Por exemplo:

$$k_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial^i u_1 \partial^i v_1} = \frac{\partial^2 U_\epsilon}{\partial^i u_1 \partial^i v_1} + \frac{\partial^2 {}^i U_0}{\partial^i u_1 \partial^i v_1} \quad (3.81)$$

A primeira parcela dessa equação é obtida como anteriormente (equação 3.71), substituindo-se u_1 por $\Delta^i u_1$, v_1 por $\Delta^i v_1$, etc..., resultando nas parcelas ${}^i k_{\sim 0}$, ${}^i k_{\sim 1}$ e ${}^i k_{\sim 2}$.

Quando à segunda parcela, é obtida via segunda derivada de ${}^i U_0$, onde:

$${}^i U_0 = \int_v \frac{E}{2} 2({}^i \varepsilon) \Delta c dV = \int_v E \Delta \varepsilon {}^i \varepsilon dV \quad (3.82)$$

onde

$$\Delta \varepsilon = {}^i \bar{u}' + \frac{1}{2 {}^i L} \int_0^L {}^i \bar{v}'^2 dx - y {}^i \bar{v}'' \quad (3.83)$$

$${}^i \varepsilon = \sum_{j=0}^{i-1} \left[{}^j \bar{u}' + \frac{1}{2 {}^j L} \int_0^L {}^j \bar{v}'^2 dx - {}^j \bar{v}'' y \right] \quad (3.84)$$

A parcela da matriz de rigidez ${}^i k_{\sim G}$ causada pela presença das deformações iniciais corresponde a essa segunda parcela da (3.81). Deve-se notar também aqui que as primeira e terceira parcelas das equações (3.83) e (3.84) não contribuem com a rigidez ${}^i k_{\sim G}$ por serem lineares nos deslocamentos generalizados; $k_{\sim G}$ é a tradicional matriz de rigidez geométrica, dada por:

$$k_{\sim G} = N \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 6/5L & 1/10 & 0 & -6/5L & 1/10 \\ & & 2L/15 & 0 & -1/10 & -L/30 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & 6/5L & -1/10 \\ & & & & & 2L/15 \end{vmatrix} \quad (3.85)$$

onde N é a força normal atuante nas extremidades do elemento. Assim, as matrizes de rigidez tangente e secante, tendo em vista as equações (3.70 e (3.72), são calculadas respectivamente por:

$${}^i k_{\sim t} = {}^i k_{\sim G} + {}^i k_{\sim 0} + {}^i k_{\sim 1} + {}^i k_{\sim 2} \quad (3.86)$$

e

$${}^i k_{\sim s} = {}^i k_{\sim G} + {}^i k_{\sim 0} + \frac{1}{2} {}^i k_{\sim 1} + \frac{1}{3} {}^i k_{\sim 2} \quad (3.87)$$

Para a configuração atual, com o auxílio da (3.44), pode-se escrever:

$${}^i k_{\sim s} \Delta {}^i Q = \Delta {}^i F \quad (3.88)$$

onde

$$\Delta {}^i F = {}^{i+1} F - {}^i F \quad (3.89)$$

$\Delta {}^i F$ é o incremento do vetor de forças nodais associado ao incremento de deslocamentos $\Delta {}^i Q$ na passagem da configuração γ^i para γ^{i+1} .

${}^{i+1} F$ é o vetor de forças nodais totais até a atual configuração e ${}^i F$ é o vetor de forças nodais no início do incremento (ver Fig. 3.6), dado por:

$${}^i F^t = \left\{ \begin{array}{cccc} -iN & \frac{{}^i M_1 + {}^i M_2}{L} & {}^i M_1 & {}^i N \\ & & & - \frac{{}^i M_1 + {}^i M_2}{L} & {}^i M_2 \end{array} \right\}$$

Com as (3.87) e (3.89), a (3.88) pode ser reescrita como:

$${}^i F + {}^i k_{\sim G} \Delta {}^i Q + ({}^i k_{\sim 0} + \frac{1}{2} {}^i k_{\sim 1} + \frac{1}{3} {}^i k_{\sim 2}) \Delta {}^i Q = {}^{i+1} F \quad (3.90)$$

onde as duas primeiras parcelas à esquerda da igualdade são provocadas pelas deformações iniciais e a terceira parcela é devida às deformações do incremento atual.

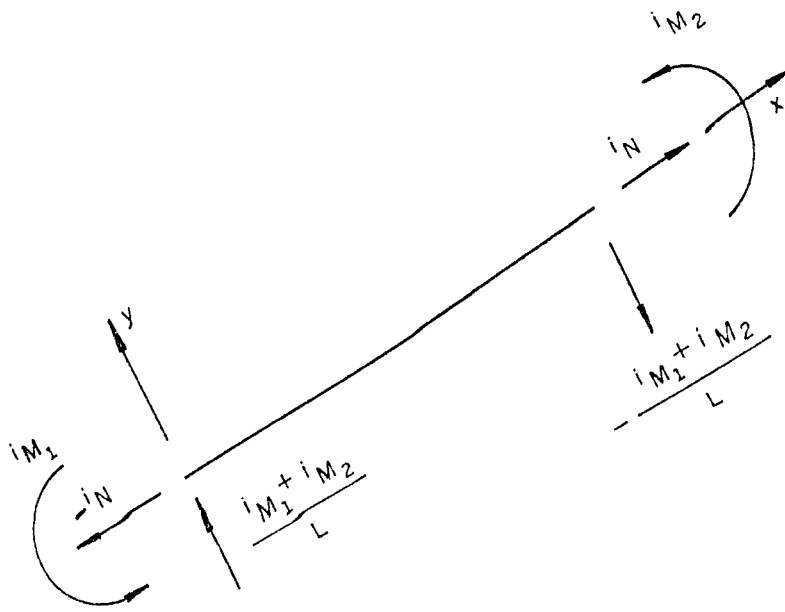


FIG 3.6 - Vetor de forças nodais iniciais.

CAPÍTULO IV.

SOBRE A SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO-LINEARES.

IV.1 - INTRODUÇÃO.

Devido ao comportamento descrito nos capítulos anteriores, uma estrutura de concreto armado só pode ser analisada mediante o emprego de técnicas numéricas de solução. Existem vários programas atualmente em uso para a análise de problemas não-lineares complexos (ver Mackerle⁸³), assim como existem programas simplificados de análise (ver Capítulo II, item II.5.1). Qualquer que seja o caso, a análise, basicamente, envolve três passos, como já salientado (veja-se o item III.2): a seleção de um modelo elemental representativo, a fixação do sistema de coordenadas do elemento e a escolha do algoritmo a ser usado na solução do sistema de equações lineares. Este terceiro passo será o objetivo de estudo neste capítulo.

Empregando-se o Método dos Elementos Finitos (M.E.F) para a análise estrutural, pode-se classificar os métodos de análise não-linear em iterativos, incrementais e mistos. Bathe e Cimento¹³ observam que, em geral, uma análise não-linear estática ou dinâmica pelo M.E.F. é feita usando uma formulação incremental, na qual as variáveis estáticas e cinemáticas são atualizadas incrementalmente, correspondente a passos de carga ou de tempo sucessivos. Nessa solução, é importante que as equações de equilíbrio sejam satisfeitas a cada passo, de forma a se assegurar suficiente precisão na resposta; para isso, deve-se usar um número grande de incrementos, o que se torna no grande inconveniente dos métodos incrementais. Além disso, o equilíbrio não é rigorosamente garantido, e a resposta obtida pode se afastar bastante da solução.

Os métodos iterativos, ao contrário, garantem o equilíbrio na convergência, tendo porém o inconveniente de requerer grande trabalho computacional, tornando, às vezes, a análise proibitiva, devido ao seu custo.

Os métodos mistos surgem da associação das vantagens dos dois métodos para se acelerar a convergência: a técnica incremental

faz a previsão da resposta, a qual será corrigida por um ciclo iterativo.

A discussão dos aspectos envolvidos na solução das equações não-lineares de equilíbrio pode ser encontrada em numerosos trabalhos, dentre os quais foram consultados pelo autor os seguintes: Owen e Hinton¹⁰⁸, Owen e Gomes¹⁰⁶, Luenberger⁷⁹, Bathe e Dvorkin¹⁴, Bathe e outros¹⁵, Proença¹²¹, Araujo⁴, Desai e Abel⁴⁷, Kao⁷³, Matthies e Strang⁹³, Crisfield⁴³, Forde e Stiemer⁵⁶, Gopalakrishna e Greimann⁶¹, Jeusette e outros⁶⁸, Lee⁷⁷, C.E.B¹³³, Haisler e outros⁶².

IV.2. - ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO PARA EQUAÇÕES NÃO-LINEARES.

IV.2.1. - EQUAÇÕES NÃO-LINEARES DE EQUILÍBRIO.

As equações que expressam o equilíbrio de uma estrutura, num determinado instante t , discretizadas através de um modelo de elementos finitos, podem também ser escritas (veja-se o item III.5.1):

$$\tilde{F}(\underline{Q}_i) = 0 \quad (4.1)$$

Num modelo de deslocamentos, as incógnitas são valores nodais; a ordem do sistema de equações representado pela equação (4.1) é função direta do número de graus de liberdade do modelo adotado: uma incógnita e uma equação para cada grau de liberdade. Como a (4.1) representa um balanço entre forças internas e externas à estrutura, ela pode ser reescrita:

$$\tilde{F}_{\text{ext}} - \tilde{F}_{\text{int}} = 0 \quad (4.2)$$

onde \tilde{F}_{ext} é o vetor que contém as forças nodais aplicadas externamente e \tilde{F}_{int} as forças nodais internas, isto é, as reações da estrutura associadas com a configuração deformada atual (em função, portanto, da evolução das incógnitas \underline{Q}_i - deslocamentos nodais). O instante t tem o significado de tempo físico para

problemas dinâmicos, ou de um parâmetro associado ao nível de carga, para problemas estáticos. Em análises dinâmicas o vetor $\underline{F}_{\text{ext}}$, além das cargas externas \underline{P} , pode conter também as forças restauradoras, podendo ser escrito numa formulação matricial como:

$$\underline{F}_{\text{ext}} = \underline{P}(t) - \underline{M} \ddot{\underline{Q}}(t) - \underline{C} \dot{\underline{Q}}(t) \quad (4.3)$$

onde $\underline{P}(t)$ é o vetor de forças elásticas, \underline{M} é a matriz de massa, \underline{C} é a matriz de amortecimento e \underline{Q} , $\dot{\underline{Q}}$ e $\ddot{\underline{Q}}$ são os vetores, respectivamente, de deslocamentos, velocidades e acelerações.

Por não ser objetivo deste trabalho, não se aprofundarão aqui os conceitos relativos à solução de problemas não-lineares dinâmicos. A formulação e equacionamento dos mesmos podem ser encontrados em Bathe¹², Bathe e Cimento¹³, Brasil¹⁸, etc ...

As estruturas de concreto armado apresentam um comportamento marcadamente dependente do processo de carregamento; com isso, o vetor $\underline{F}_{\text{ext}}$ não deve ser introduzido de forma total no cálculo estrutural, sendo conveniente fracioná-lo em incrementos de carga $\Delta \underline{F}$, para cada um dos quais se deve resolver equações do tipo da (4.1); surge, então, a primeira estratégia de resolução de problemas não-lineares, que é chamado processo incremental. Para acompanhar $\Delta \underline{F}$, não se calculam os deslocamentos da estrutura, mas sim os incrementos $\Delta \underline{Q}$ de deslocamentos.

IV.2.2. - FORMULAÇÃO INCREMENTAL.

Usando-se uma técnica incremental para conduzir uma análise estrutural não-linear, o parâmetro de carga (ou de tempo) t é subdividido em passos e a solução procurada passo a passo. Se se chega à solução num instante t , num determinado passo n , ou seja, supondo-se conhecidos os valores das incógnitas \underline{Q}_n para este passo, a solução para o passo subsequente ($n + 1$) correspondente ao instante $(t + \Delta t)$, é encontrada impondo-se um novo estado de equilíbrio:

$$\underline{F}_{\text{ext}}(t + \Delta t) - \underline{F}_{\text{int}}(t + \Delta t) = 0 \quad (4.4)$$

Em problemas estáticos, onde $\tilde{F}_{ext} = \tilde{P}$, o vetor de incógnitas \tilde{Q}_{n+1} aparece apenas na expressão do vetor de reações $\tilde{F}_{int} = \tilde{S}$, de forma que a linearização deste leva a:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tilde{Q}(t + \Delta t)) &= \tilde{S}(\tilde{Q}(t)) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{Q}} \bigg|_t (\tilde{Q}(t + \Delta t) - \tilde{Q}(t)) = \\ &= \tilde{S}_n + \tilde{K}_t \Delta \tilde{Q} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Por substituição, a equação (4.4) então se escreve:

$$\tilde{K}_t \Delta \tilde{Q} = \Delta \tilde{F} \quad (4.6)$$

onde o vetor $\Delta \tilde{F}$ é definido por:

$$\Delta \tilde{F} = \tilde{P}_{n+1} - \tilde{S}_n \quad (4.7)$$

$\Delta \tilde{Q}$ é o vetor de deslocamentos incrementais e \tilde{K}_t é a matriz de rigidez tangente, calculada por:

$$\tilde{K}_t = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{Q}} \quad (4.8)$$

(veja-se também a equação 3.49). A equação (4.6), aproximação incremental da equação (4.4), é linear em $\Delta \tilde{Q}$, o qual pode ser resolvido de forma aproximada, obtendo-se no passo $(n + 1)$:

$$\tilde{Q}_{n+1} = \tilde{Q}_n + \Delta \tilde{Q} \quad (4.9)$$

que constitui uma generalização da equação (3.50).

A equação (4.6) pode ser usada diretamente na solução de um passo para o seguinte, mas essa solução (equação 4.9) em geral é afetada por um erro devido à linearização, motivo pelo qual a equação (4.4) não é satisfeita (ver Fig. 4.1.a). Se os incrementos são bem pequenos, o erro também pode ser, e a solução é aceitável, não havendo necessidade de iterações corretivas. Porém a preocupação em não encarecer o custo da análise leva, em geral, à recomendação de se utilizar grandes incrementos de carga ou intervalos de tempo.

Nesse caso, os erros produzidos pela linearização podem não ser desprezíveis, com a sua acumulação, então, levando a resultados não confiáveis. Por isso, como já citado, recomenda-se o uso de procedimentos que incluam iterações de equilíbrio como parte da estratégia de solução, levando aos processos chamados incremental-iterativos ou mistos (ver Fig. 4.1.b).

Nos itens seguintes estudam-se os procedimentos iterativos de forma isolada. Um estudo comparativo desses procedimentos pode ser encontrado em Owen e Gomes¹⁰⁶ ou em Bathe e Cimento¹³.

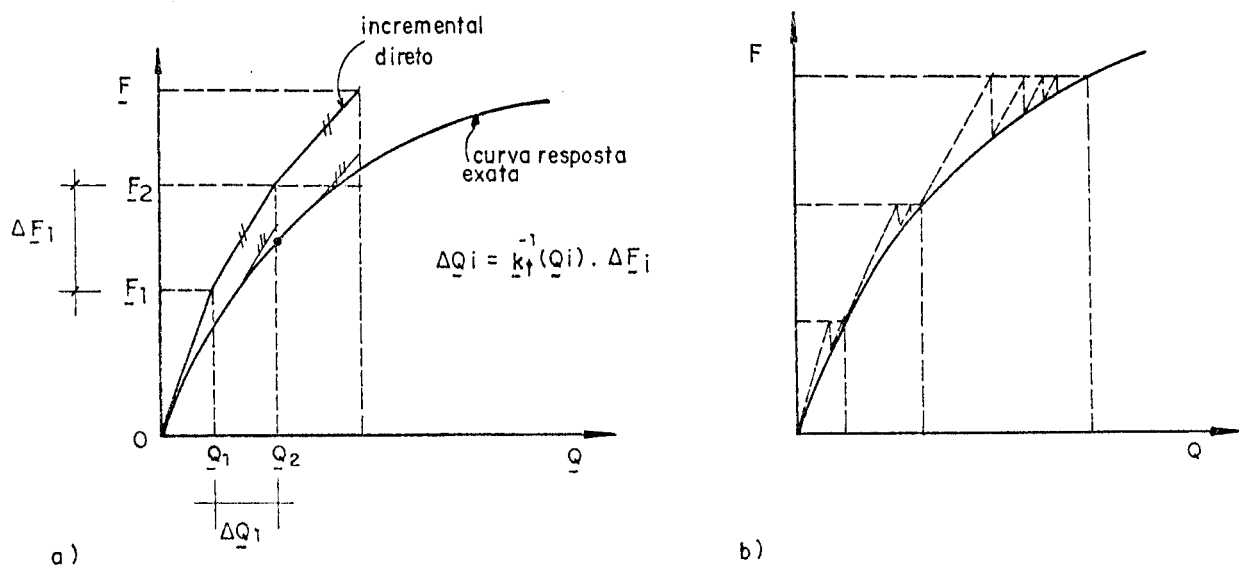


FIG. 4.1. - Procedimentos incrementais:

a. Método incremental puro ou direto;

b. Método incremental - iterativo ou misto.

IV.2.3. PROCEDIMENTOS ITERATIVOS.

IV.2.3.1 - MÉTODOS DE NEWTON - RAPHSON.

Os esquemas iterativos mais usados para a solução de equações não-lineares são sempre alguma forma dos algoritmos de Newton-Raphson, cuja fórmula de recorrência é descrita pela equação (4.6). Se, dentro do incremento $(n + 1)$, \underline{Q}_i representa a solução aproximada da equação (4.4) na iteração i , o vetor residual da solução:

$$\Delta \underline{F}_i = \underline{F}_{\text{ext}}(\underline{Q}_i) - \underline{F}_{\text{int}}(\underline{Q}_i) \quad (4.10)$$

em geral resulta não nulo (o que significa que as forças externas e internas não estão em equilíbrio, para essa aproximação). Pode-se incrementar essa aproximação e procurar uma solução melhor, representada por:

$$\underline{Q}_{i+1} = \underline{Q}_i + \Delta \underline{Q}_i \quad (4.11)$$

ou seja, os deslocamentos são atualizados entre iterações sucessivas, encontrando-se uma "direção" $\Delta \underline{Q}_i$ que anula o resíduo:

$$\Delta \underline{F}_{i+1} = \Delta \underline{F}(\underline{Q}_i + \Delta \underline{Q}_i) = 0 \quad (4.12)$$

Linearizando-se o sistema (já que o resíduo $\Delta \underline{F}$ é linear com $\Delta \underline{Q}$), os algoritmos tipo Newton-Raphson levam a equações semelhantes na forma à equação (4.6).

Para problemas estáticos:

$$\underline{K}_{t_i} \cdot \Delta \underline{Q}_i = \Delta \underline{F}_i \quad (4.13)$$

onde \underline{K}_{t_i} é a matriz de rigidez tangente correspondente aos deslocamentos \underline{Q}_i e $\Delta \underline{F}_i$ é o vetor das forças não equilibradas equação 4.10), que pode ser melhor explicitado, neste caso, por:

$$\Delta \tilde{F}_i = \tilde{P}_{n+1} - \tilde{S}(\tilde{Q}_i) \quad (4.14)$$

A expressão (4.12) expandida em série de Taylor fornece a "direção":

$$\Delta \tilde{Q}_i = - \tilde{K}_{ti}^{-1} \Delta \tilde{F}_i \quad (4.15)$$

onde a matriz Jacobiana residual coincide com a matriz de rigidez tangente \tilde{K}_{ti} correspondente ao estado de deslocamentos \tilde{Q}_i . Essa equação também pode ser obtida a partir da equação (4.13). Assim a determinação de $\Delta \tilde{Q}_i$ implica, a cada iteração e dentro de um passo n , em calcular-se a matriz de rigidez \tilde{K}_{ti} e o vetor residual $\Delta \tilde{F}_i$. Essa metodologia é conhecida como Newton-Raphson Puro ("full Newton-Raphson method") - ver Fig. 4.2.a. Aplicando-se essas equações, pode-se melhorar a compreensão do método. Assim, sendo $\tilde{F}_{ext} = \tilde{P}$ o vetor das cargas nodais aplicadas à estrutura, determina-se a primeira aproximação para os deslocamentos nodais \tilde{Q}_1 por:

$$\tilde{P} = \tilde{K}_{t0} \tilde{Q}_1 \quad (4.16)$$

onde \tilde{K}_{t0} é a matriz de rigidez tangente para a estrutura indeformada; com \tilde{Q}_1 determinam-se as ações nodais \tilde{S}_1 (considerando-se as não-linearidades presentes) e a seguir monta-se a nova matriz tangente \tilde{K}_{t1} . O incremento $\Delta \tilde{Q}_1$ nos deslocamentos é obtido através da (4.13):

$$\Delta \tilde{F}_1 = \tilde{K}_{t1} \Delta \tilde{Q}_1 \quad (4.17)$$

onde

$$\Delta \tilde{F}_1 = \tilde{P} - \tilde{S}_1 \quad (4.18)$$

é o vetor de desequilíbrio entre as cargas nodais (externas) e as ações não-lineares (internas) obtidas com os deslocamentos \tilde{Q}_1 . O novo conjunto de deslocamentos é:

$$\tilde{Q}_2 = \tilde{Q}_1 + \Delta \tilde{Q}_1 \quad (4.19)$$

e o processo é repetido até que, em uma iteração j , se tenha:

$$\frac{\|\Delta \tilde{F}_j\|}{\|\tilde{P}_j\|} \leq \varepsilon_F \quad (4.20)$$

e, simultaneamente:

$$\frac{\|\Delta \tilde{Q}_j\|}{\|\tilde{Q}_j\|} \leq \varepsilon_D \quad (4.21)$$

onde o símbolo $\|\ \|\$ representa a norma Euclidiana de vetor e os ε são tolerâncias pré-estabelecidas (ver item IV.3., Critérios de Convergência).

Para a solução do problema, portanto, é necessário a atualização da matriz de rigidez tangente a cada iteração, o que associa ao Newton-Raphson Puro custos computacionais elevados; procurando reduzir esses custos, várias alternativas são possíveis, as quais são consideradas como modificações do método de Newton-Raphson original.

Uma dessas alternativas, chamada "Método da Rigidez Inicial" (em inglês, "Initial Stiffnes Method" - IS), consiste em usar $K_{\tilde{t}_0}$ em todos os passos e iterações (evitando-se assim a redefinição e triangularização da matriz de rigidez tangente), substituindo-se a (4.11) por:

$$K_{\tilde{t}_0} \Delta \tilde{Q}_i = \Delta \tilde{F}_i \quad (4.22)$$

(ver Fig. 4.2.b); cada iteração requer apenas a avaliação do resíduo $\Delta \tilde{F}$ e uma retro-substituição. A convergência do método (se houver) é linear (enquanto a do NR - Puro é quadrática), podendo ser muito lenta se a estrutura tiver um alto grau de não-linearidade. Para acelerar a convergência (ou mesmo evitar que haja divergência) surge a alternativa que tem se mostrado a mais eficiente entre os algoritmos tipo NR: combina-se os dois métodos anteriores, calculando-se uma nova matriz de rigidez tangente no início de cada incremento, mantendo-a constante durante as iterações correspondentes a esse passo, acompanhando-se assim a evolução das não-linearidades. Essa estratégia constitui o Método de Newton-Raphson Modificado ou Misto (em inglês, "Modified Newton Method - MN) - ver Fig. 4.2.c.

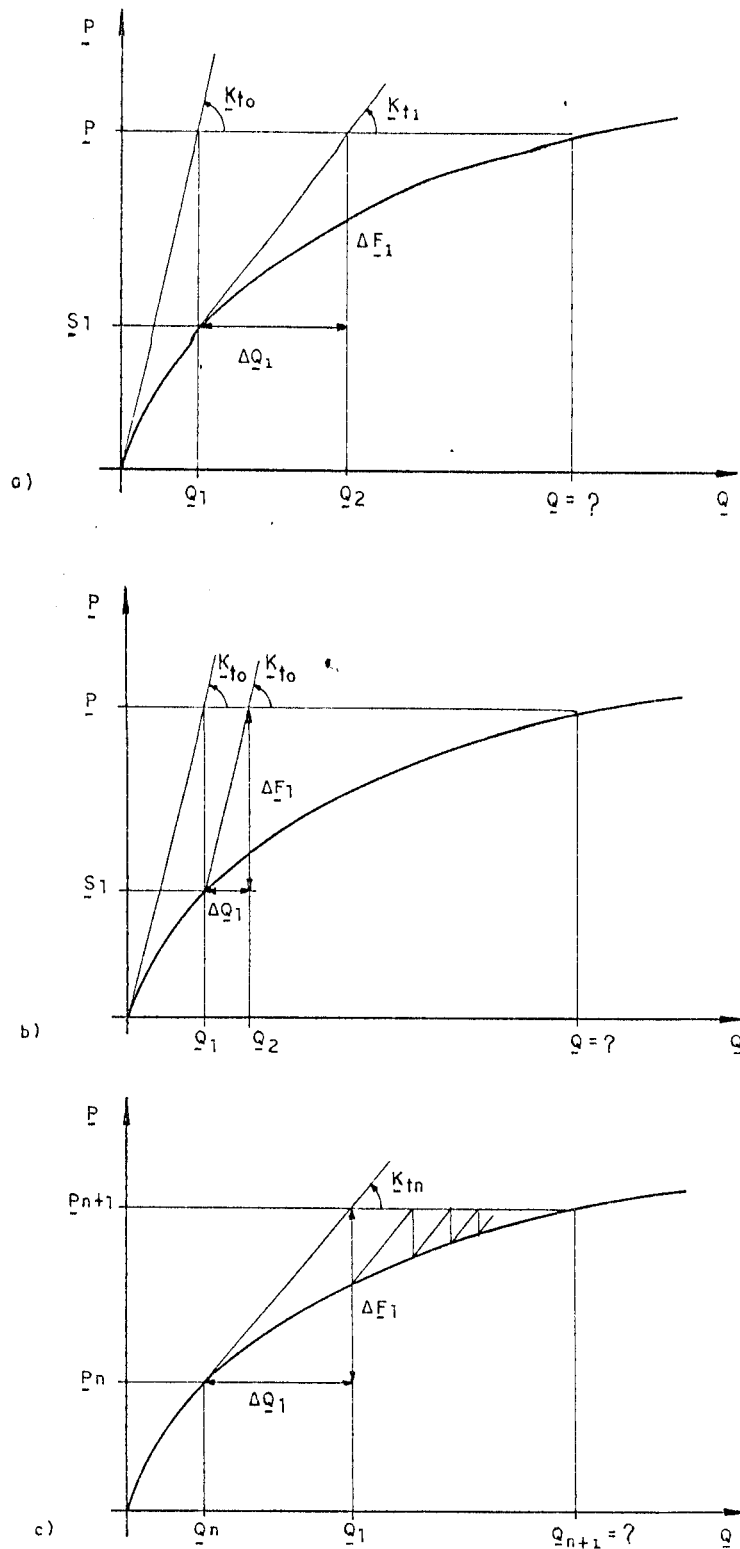


FIG. 4.2 - Métodos de Newton-Raphson:

- a.) Método de Newton-Raphson Puro;
- b.) Método da Rigidez Inicial;
- c.) Método de Newton Modificado ou Misto.

Porém, como observam Matthies e Strang⁹³, mesmo esse algoritmo MN leva a dificuldades sérias se durante o incremento houver grande variação nas propriedades do material (não-linearidade física) como ocorre no caso de plastificação, com a convergência sendo muito lenta. Nesses casos, é necessário complementar o algoritmo com um esquema de aceleração da convergência, o qual atua modificando a equação (4.11), como se verá a seguir.

IV.2.3.1.1 - ALGORITMOS TIPO NEWTON-RAPHSON COM BUSCA LINEAR.

Ao se usar uma estratégia de busca linear, o vetor de correção dos deslocamentos $\Delta \underline{Q}_i$ calculado durante as iterações é considerado apenas como um vetor direcional; é possível então seguir a aproximação usada no método do Gradiente Conjugado (veja-se Luenberger⁷⁹) e procurar ao longo da direção $\Delta \underline{Q}_i$ de forma a se encontrar a posição onde a energia potencial da estrutura é minimizada; a equação (4.11) agora se escreve:

$$\underline{Q}_{i+1} = \underline{Q}_i + \beta_i \Delta \underline{Q}_i \quad (4.23)$$

O parâmetro β_i é escolhido de forma que o resíduo

$$\Delta F_{i+1} = \Delta F(\underline{Q}_i + \beta_i \Delta \underline{Q}_i) \quad (4.24)$$

tenha um componente aproximadamente igual a zero na direção $\Delta \underline{Q}_i$, condição que é satisfeita dentro de uma certa tolerância.

A técnica de busca linear é também usada nos métodos Newton Conjugado e Quasi-Newton. O método de Newton Conjugado (CN) foi proposto como uma combinação do método de Newton Modificado (MN) com a técnica do Gradiente Conjugado. Esse método não será aqui examinado (veja-se Owen e Gomes¹⁰⁶ e Matthies e Strang⁹³ para detalhes do mesmo). Fórmulas semelhantes a (4.23) são usadas para atualizar deslocamentos em outros esquemas de aceleração, como por exemplo o esquema de Aitken^{12,14}, com a diferença de que β é uma matriz diagonal, e não um escalar.

No Método do Gradiente Conjugado o parâmetro de busca β_i é determinado explicitamente, mas aqui β_i é determinado pela condição de mínima energia:

$$G(\beta) = \Delta \underline{Q}_i^T \Delta \underline{F}_{i+1} = 0 \quad (4.25)$$

Em cada iteração é feita uma busca ao longo da direção $\Delta \underline{Q}_i$ de forma a se encontrar o valor de β_i que satisfaz a (4.25). A função escalar $G(\beta)$ é determinada simultaneamente para uma série de valores de β ; o valor de β_i correspondente a $G(\beta) = 0$ é determinado por interpolação.

IV.2.3.2 - MÉTODOS QUASI-NEWTON.

IV.2.3.2.1 - INTRODUÇÃO.

Outra classe de métodos iterativos, conhecida como Quasi-Newton, surgiu recentemente para a solução efetiva de equações não-lineares da forma (4.4). Esses métodos são baseados na atualização da matriz de rigidez (mais exatamente da sua inversa), a qual é feita após cada iteração (usando-se as informações obtidas durante a própria iteração), isto é, ela é atualizada pelo próprio processo, sendo necessário montá-la apenas uma vez; evita-se tanto a reformulação total e a inversão da matriz de rigidez a cada iteração (como no algoritmo NR - Puro) como também a manutenção da mesma (como no algoritmo IS); o fundamento principal desses métodos é obter de forma aproximada a matriz inversa Hessiana em lugar da inversa verdadeira que se requer nos métodos tipo Newton.

Essa idéia da aproximação foi proposta inicialmente por Davidson e posteriormente elaborada por Fletcher e Powell, levando ao esquema conhecido como método DFP (veja-se Luenberger⁷⁹), pelo qual a inversa Hessiana é atualizada pela adição de duas matrizes simétricas de ordem um a cada iteração. Portanto, o esquema consiste num procedimento corretivo de ordem dois, como se verá adiante.

Mais recentemente, uma das técnicas do tipo Quasi-Newton, conhecida como BFGS (Broyden - Fletcher - Goldfarb - Shanno), foi introduzida no Método dos Elementos Finitos (MEF) por Mathies e Strang⁹³; por esse procedimento, a atualização aproximada da matriz de rigidez inversa resulta num módulo secante na direção de busca. Como essas atualizações são acumuladas durante o processo, o método

BFGS ao final leva à obtenção de uma matriz de rigidez aproximadamente igual à matriz tangente. Lee⁷⁷ observa que a eficiência do método depende muito da forma como ele é implementado.

Entre as várias opções para a escolha do algoritmo de atualização da matriz, Owen e Gomes¹⁰⁶ observam que a experimentação indica o método BFGS (ordem dois) como sendo o mais eficiente para a análise não-linear de estruturas. Detalhes do método podem também ser encontrados em Bathe e Cimento¹³, além dos autores já citados neste item.

IV.2.3.2.2 - METODOLOGIA DO QUASI-NEWTON.

O método é baseado na atualização da inversa da matriz de rigidez na equação (4.13), de forma a que se obtenha para ela uma aproximação secante na passagem da iteração $(i - 1)$ para a iteração i ; supondo já calculados os vetores Q_{i-1} , Q_i , ΔF_{i-1} e ΔF_i , então a matriz atualizada K_i a ser usada em (4.13) deve satisfazer a equação básica do Quasi-Newton:

$$K_i \Delta Q_{i-1} = \Delta F_{i-1} - \Delta F_i \quad (4.26)$$

ou, de forma semelhante:

$$K_i \delta = \gamma \quad (4.27)$$

ou, ainda

$$\delta = K_i^{-1} \gamma \quad (4.28)$$

com

$$\delta = \Delta Q_{i-1} = Q_i - Q_{i-1} \quad (4.29)$$

$$e \quad \gamma = \Delta F_{i-1} - \Delta F_i \quad (4.30)$$

Observe-se que δ é a variação dos deslocamentos e γ é a variação das forças residuais, ocorridas entre as iterações $(i-1)$ e i .

A Fig. 4.3 representa geometricamente $K_{\tilde{i}}$ para um sistema com um grau de liberdade, para o qual com a (4.26) determina-se $K_{\tilde{i}}$; em problemas com muitos graus de liberdade, a (4.26) introduz na iteração corrente as informações acumuladas até a iteração prévia e, embora não se determine $K_{\tilde{i}}$, a secante na direção de busca é feita de forma correta, porque a (4.26) coloca uma restrição a ser respeitada na definição de $K_{\tilde{i}}$. Como essas direções são acumuladas durante o processo, a sequência de aproximadas Jacobianas $K_{\tilde{i}}$ deve aproximar, no limite, a matriz de rigidez tangente.

Matthies e Strang⁹³ assinalam que a nova direção de busca, dada para a iteração i corrente por:

$$d_i = \Delta Q_{\tilde{i}} = K_{\tilde{i}}^{-1} \Delta F_{\tilde{i}} \quad (4.31)$$

deve ser de fácil obtenção, de forma a não encarecer os custos computacionais, e este, para eles, é o ponto essencial. Esse objetivo requer que $K_{\tilde{i}}$ difira de $K_{\tilde{i}-1}$ por uma matriz de ordem baixa, sendo indicada por eles uma matriz de correção de ordem dois. O primeiro dos esquemas tipo Quasi-Newton, conhecido como método D.F.P. (ver item anterior), também é um procedimento corretivo de ordem dois (a inversa é atualizada a cada iteração pela adição de duas matrizes simétricas de ordem um), pelo qual se obtém:

$$K_i^{-1} = K_{i-1}^{-1} + \frac{\delta\delta^T}{\delta^T\gamma} - \frac{K_{i-1}^{-1} \gamma\gamma^T K_{i-1}^{-1}}{\gamma^T K_{i-1}^{-1} \gamma} \quad (4.32)$$

É importante observar que (4.32) satisfaz a (4.28) enquanto K_i^{-1} for positiva definida e simétrica.

Também é possível atualizar a própria matriz de rigidez, ao invés da sua inversa; para isso, em (4.32) basta intercambiar γ e δ , obtendo-se:

$$K_i = K_{i-1} + \frac{\gamma\gamma^T}{\gamma^T\delta} - \frac{K_{i-1} \delta\delta^T K_{i-1}}{\delta^T K_{i-1} \delta} \quad (4.33)$$

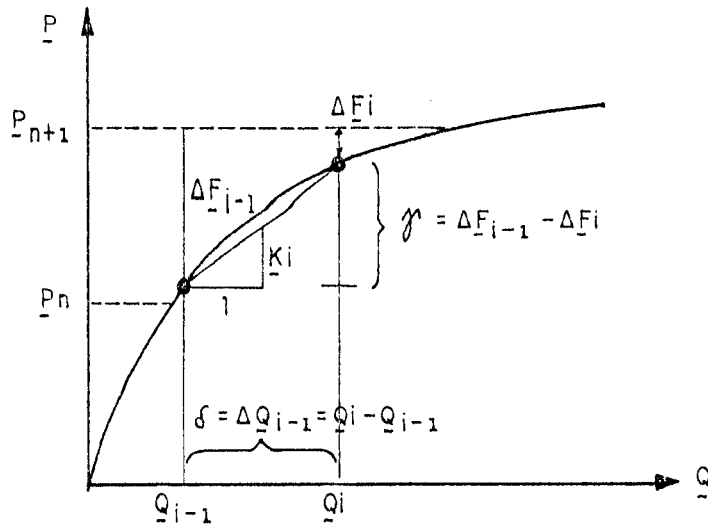


FIG. 4.3 - Métodos Quasi-Newton.

Outra maneira de encontrar a inversa da matriz de rigidez é inverter a equação (4.33) pela fórmula de Sherman-Morrison; o resultado é conhecido como a atualização BFGS (Broyden - Fletcher - Goldfarb - Shanno) para a inversa Hessiana, dada por:

$$K_i^{-1} = K_{i-1}^{-1} + \left[1 + \frac{\gamma^T K_{i-1}^{-1} \gamma}{\gamma^T \delta} \right] \frac{\delta \delta^T}{\delta^T \gamma} - \frac{\delta \gamma^T K_{i-1}^{-1} + K_{i-1}^{-1} \gamma \delta^T}{\gamma^T \delta} \quad (4.34)$$

Essa inversa também difere da sua antecessora por uma matriz de ordem dois; na equação (4.34), pode-se colocar a correção em forma de produto, escrevendo-se então de forma equivalente:

$$K_i^{-1} = (I + w_i v_i^T) K_{i-1}^{-1} (I + v_i w_i^T) \quad (4.35)$$

onde I é a matriz identidade e os vetores v e w são definidos por:

$$v_i = \left[\frac{\delta_i^T \gamma_i}{\delta_i^T K_{i-1}^{-1} \delta_i} \right]^{1/2} K_{i-1}^{-1} \delta_i - \gamma_i \quad (4.36)$$

$$w_i = \frac{\delta_i}{\delta_i^T \gamma_i} \quad (4.37)$$

A equação (4.35) ainda pode ser apresentada de forma mais resumida, por:

$$K_i^{-1} = A_i^T K_{i-1}^{-1} A_i \quad (4.38)$$

onde

$$A_i = I + v_i w_i^T \quad (4.39)$$

IV.2.3.2.3 - DESCRIÇÃO DO ALGORITMO BFGS.

O algoritmo de atualização BFGS é descrito em Matthies e Strang⁹³, Lee⁷⁷ e Owen e Gomes¹⁰⁶, dentro da bibliografia deste trabalho e se inicia com uma rigidez inicial \tilde{K}_0 (determinada em um passo anterior) que já tenha sido decomposta, isto é:

$$\tilde{K}_0 = L D L^T \quad (4.40)$$

Nessa fatoração triangular, L tem a mesma estrutura em banda de \tilde{K}_0 , com largura de banda m; L e D são armazenados para uso em iterações sucessivas, como no algoritmo Newton Modificado; o vetor direcional $d_0 = \Delta Q_0$ é obtido através da expressão:

$$\tilde{K}_0 d_0 = \Delta F_0 \rightarrow d_0 = \tilde{K}_0^{-1} \Delta F_0 \quad (4.41)$$

Uma busca linear encontra então o ponto β_0 para o qual a função escalar $G(\beta)$ se anula (ver item IV.2.3.1.1), isto é:

$$G(\beta_0) = \Delta Q_0^T \Delta F_1 = 0 \quad (4.42)$$

No segundo passo com o auxílio da 4.35, têm-se:

$$d_1 = (I + w_1 v_1^T) K_0^{-1} (I + v_1 w_1^T) \Delta F_1 \quad (4.43)$$

Para esse cálculo é necessário então que já sejam conhecidos ΔF_1 , $G(0)$ e $G(\beta_0)$; a sequência então é:

a.) calcula-se o produto interno $w_1^T \Delta F_{\sim 1}$ (o que significa N multiplicações, sendo N o número de graus de liberdade) e forma-se (com mais N multiplicações):

$$b_1 = \Delta F_{\sim 1} + (w_1^T \Delta F_{\sim 1}) v_1 \quad (4.44)$$

que envolve apenas multiplicação de vetores;

b.) por retro - substituição, calcula-se c:

$$c = K_0^{-1} b_1 \quad (4.45)$$

para o que se exige 2mN multiplicações;

c.) calcula-se o produto interno $v_1^T c$ (com mais N multiplicações), obtendo-se a nova direção de busca:

$$d_1 = c + (v_1^T c) w_1 \quad (4.46)$$

passo este que também envolve apenas multiplicação de vetores. Com iterações sucessivas, haverá mais fatores; por exemplo:

$$d_2 = (I + w_2 v_2^T) (I + w_1 v_1^T) K_0^{-1} (I + v_1 w_1^T) (I + v_2 w_2^T) \Delta F_{\sim 2} \quad (4.47)$$

Nesse caso, deve-se calcular:

$$b_2 = (I + v_2 w_2^T) \Delta F_{\sim 2} \quad (4.48)$$

e daí obter-se:

$$b_1 = (I + v_1 w_1^T) b_2 \quad (4.49)$$

com b_1 em (4.45) obtem-se c, e daí calcula-se:

$$d_1 = (I + w_1 v_1^T) c \quad (4.50)$$

obtendo-se finalmente a direção de busca:

$$d_2 = (I + w_2 v_2^T) d_1 \quad (4.51)$$

Observe-se que o procedimento permite calcular a direção de busca em diferentes iterações usando-se apenas operações com vetores, sem calcular explicitamente as matrizes atualizadas.

IV.2.3.2.4 - CRITÉRIOS PARA A UTILIZAÇÃO DO BFGS.

Lee⁷⁷ observa que a experimentação numérica indicou ser a performance do método BFGS melhor que a do método DFP, porém há casos em que a atualização via BFGS não é apropriada, a saber:

- quando a solução divergir durante a iteração corrente;
- quando a atualização via BFGS fornece \tilde{K}^{-1} ou \tilde{K} singular;
- quando dois pontos sucessivos envolvidos na geração dos vetores Quasi-Newton estiverem muito próximos;
- quando a variação obtida para a inversa for desprezível.

Outra observação importante^{93,106} (examine-se os passos a, b, c no item anterior) é que o número de multiplicações aumenta muito se o número de iterações requeridas for grande; na prática, então, pode ser aconselhável recalcular a matriz de rigidez tangente e recomeçar a sequência computacional descrita, se não se tiver atingido a convergência após 10 a 15 iterações, por exemplo.

O sucesso do algoritmo também está ligado ao condicionante (razão entre o maior e o menor autovalor) da matriz \tilde{A}_i (equação 4.39). Os autovalores de \tilde{A}_i são:

$$C_i = 1 \quad (4.52)$$

e $C_i = 1 + v_i^T w_i$

com o próprio auto valor não unitário ou sua recíproca:

$$C_i^2 = \frac{\delta_i^T K_i \delta_i}{\delta_i^T \gamma_i} \quad (4.53)$$

fornecendo o condicionante; se este resultar muito grande, K_i obtido será aproximadamente singular, caso em que a atualização via BFGS deve ser evitada, fazendo-se $K_i = K_{i-1}$.

IV.2.3.3 - OUTROS MÉTODOS.

IV.2.3.3.1 - NEWTON SECANTE OU NEWTON ACELERADO.

Outro método de atualização da matriz foi proposto por Crisfield⁴⁴ e procura satisfazer a equação "secante" (4.26), baseado em fórmula proposta por Fletcher. Novamente a matriz de rigidez atualizada não é calculada explicitamente, e a direção de busca é obtida diretamente, sem o procedimento iterativo do Quasi-Newton. Detalhes dessa formulação podem também ser encontrados em Owen e Gomes¹⁰⁶.

IV.2.3.3.2 - MÉTODOS DE CONTROLE DOS DESLOCAMENTOS E DE CORREÇÃO DO INCREMENTO DE CARGA.

Normalmente nos processos tipo Newton o carregamento externo é tratado como sendo uma função do tempo, por exemplo, com o analista prescrevendo os níveis de carga para os quais serão obtidas as configurações de equilíbrio; em geral, então, o carregamento é introduzido incrementalmente (mediante incrementos constantes) e, além disso, durante as iterações de equilíbrio em um passo considera-se o nível de carga também constante.

Ocorre que nas vizinhanças de pontos limite (ver Fig. 4.4) e pontos de bifurcação a performance da estrutura se torna altamente não-linear (pequenos acréscimos de carga podem levar a grandes deformações), e um incremento constante num determinado passo pode

ultrapassar a carga crítica, o que nos processos tipo Newton levaria o problema a não ter solução para o passo de carga considerado. A solução é encontrada modificando-se o incremento de carga, contornando-se assim o problema da instabilidade numérica. Ocorrem também problemas onde se torna necessário reduzir o nível de carga para se manter o equilíbrio da estrutura.

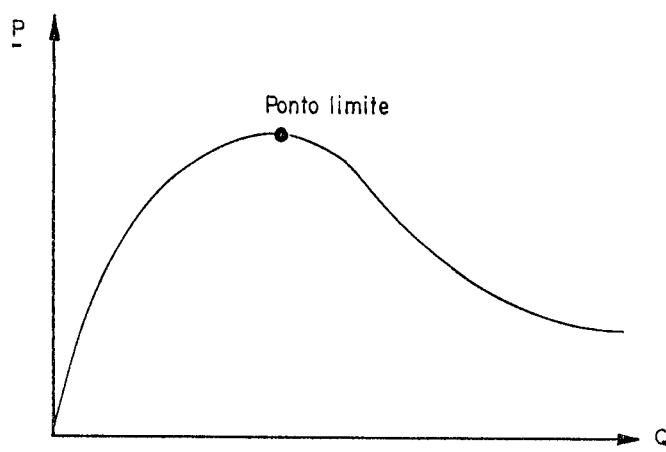


FIG. 4.4 - Ponto Limite.

Vários métodos surgiram para o enfrentamento desses problemas, como os métodos de controle dos deslocamentos e os métodos de correção do incremento de carga. Nos últimos anos várias publicações tratam dos mesmos: Owen e Gomes¹⁰⁶, Ramm¹²⁶, Crisfield^{43,44}, Bathe e Dvorkin¹⁴, Forde e Stierner⁵⁶. Pretende-se aqui, além da simples citação da bibliografia, uma abordagem, ainda que pequena, desses métodos.

A equação de equilíbrio (4.1), nesses métodos, é modificada de forma a incluir-se o nível de carga como uma variável adicional, mediante a aplicação de um parâmetro λ que descreve a intensidade do vetor referencial de cargas externas P num incremento m durante uma iteração i ; λ é considerado uma incógnita adicional, de forma que se deve também introduzir uma equação adicional para que se possa resolver o problema. Numa iteração $(i + 1)$ a equação linearizada a ser resolvida (veja-se as equações 4.13 e 4.14) se escreve:

$$K_{\tilde{t}i} \cdot \Delta Q_{\tilde{i}} = (\lambda_i + \Delta \lambda_i) P - S(Q_{\tilde{i}}) \quad (4.54)$$

Usando-se o vetor residual calculado na iteração i :

$$\Delta F_{\tilde{i}} = \lambda_i P - S(Q_{\tilde{i}}) \quad (4.55)$$

pode-se também escrever a (4.54) como:

$$K_{\tilde{t}i} \Delta Q_{\tilde{i}} = \Delta \lambda_i P + \Delta F_{\tilde{i}} \quad (4.56)$$

A solução de (4.56) pode ser escrita em duas partes, correspondendo a dois sistemas lineares, ambos com a mesma matriz dos coeficientes:

$$K_{\tilde{t}i} (\Delta Q_{\tilde{i}})_I = P \quad (4.57)$$

$$K_{\tilde{t}i} (\Delta Q_{\tilde{i}})_{II} = \Delta F_{\tilde{i}} \quad (4.58)$$

com

$$\Delta Q_{\tilde{i}} = \Delta \lambda_i (\Delta Q_{\tilde{i}})_I + (\Delta Q_{\tilde{i}})_{II} \quad (4.59)$$

Nos métodos de controle dos deslocamentos, geralmente adota-se uma componente do vetor de deslocamentos como parâmetro durante um passo; no começo do passo iterativo, prescreve-se:

$$\Delta Q_I^0 = \delta \quad (4.60)$$

e com essa equação se determina o primeiro valor do incremento de carga, $\Delta\lambda^0$. Nas iterações subsequentes, dá-se incrementos nulos à mesma componente (mantém-se δ constante):

$$\Delta Q_1^i = 0 \quad (4.61)$$

e com isso se determinam os valores subsequentes das correções incrementais do carregamento, $\Delta\lambda_i$, continuando-se o processo iterativo até encontrar uma nova posição de equilíbrio ($\Delta F \cong 0$).

Nos métodos de correção do incremento de carga, seguem-se basicamente as mesmas linhas; a diferença é que a equação com a qual se determina $\Delta\lambda_i$ durante as iterações não é função de um simples parâmetro de deslocamento, mas sim função de um comprimento de arco: os incrementos de carga são modificados a cada passo de forma a "percorrerem" um comprimento de arco (daí o nome em inglês, "arc-length method") no gráfico forças x deslocamentos.

Ambos os métodos permitem o uso de estratégias diferentes para a reformulação da matriz de rigidez e solução das equações (4.56) (algoritmos NR - Puro, MN, BFGS, etc...) e podem incluir esquemas de aceleração (como o de busca linear, por exemplo).

IV.3. CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA.

A definição do final de um processo iterativo deve ser feita através de um critério e segundo uma tolerância, ambos definidos previamente. Ao final de cada iteração a solução obtida deve ser checada para se verificar se houve convergência (dentro de tolerância pré-definida) ou divergência. A escolha de um intervalo de tolerância muito grande leva à obtenção de resultados não confiáveis; inversamente, um intervalo demasiadamente pequeno leva a custos computacionais elevados para que se obtenha a desejada precisão. Vários critérios são descritos por numerosos autores: Bathe e Cimento¹³, Corrêa⁴¹, Lee⁷⁷, Mathies e Strang⁹³, etc...

Basicamente há três critérios, em função de: deslocamentos, forças nodais e energia incremental interna.

$$\frac{\Delta F_{\tilde{i}}^T \Delta Q_{\tilde{i}}}{\Delta F_{\tilde{0}}^T \Delta Q_{\tilde{0}}} \leq \varepsilon_E \quad (4.64)$$

onde ε_E é a tolerância admitida para a energia e onde se compara o trabalho realizado no final e no início do incremento.

Matthies e Strang⁹³ aplicam simultaneamente os dois critérios; no caso do primeiro, para enfrentar o problema de aproximação de Q_f , usam um fator de contração (ou de convergência, como denominado por outros autores) quando calculado (segundo sua experiência) em função das duas últimas iterações:

$$q = \max \left[\frac{\| \Delta Q_{\tilde{i}-1} \|}{\| \Delta Q_{\tilde{i}-2} \|}, \frac{\| \Delta Q_{\tilde{i}-2} \|}{\| \Delta Q_{\tilde{i}-3} \|} \right] \quad (4.65)$$

aplicando-se então:

$$\frac{q}{1 - q} \| \Delta Q_{\tilde{i}-1} \| \leq \varepsilon_D \quad e \quad \| \Delta F_{\tilde{i}} \| \leq \varepsilon_F \quad (4.66)$$

Matthies e Strang indicam que ε_D e ε_F devem ser escolhidos como múltiplos, respectivamente, de um deslocamento e de uma força referenciais; Owen e Gomes fornecem valores para essas tolerâncias; em ambas as publicações a tolerância para a aceleração via busca linear é a mesma (STOL = 0,5).

CAPÍTULO V.

ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO ARMADO.

V.1 - INTRODUÇÃO.

A análise não-linear de estruturas pode ser uma ferramenta útil no dimensionamento de estruturas de concreto armado e de concreto protendido. Pode-se citar como exemplos:

- análise dos efeitos do comportamento reológico do concreto e do aço de protensão na avaliação das deformações em pontes construídas pelo método dos balanços sucessivos (não-linearidade física);
- verificação da estabilidade de elementos esbeltos (não linearidades física e geométrica).

O MC - 90 do CEB³⁵ prescreve que, no caso de vigas e pórticos, podem ser feitas análises não-lineares para as verificações destes elementos nos Estados Limites Último (de ruína) e de Utilização (de serviço), com os efeitos de segunda ordem, em geral, sendo levados em conta apenas para o Estado Limite Último. Quando, porém, tais efeitos influenciarem consideravelmente na distribuição dos esforços (como ocorre, por exemplo, no caso dos pórticos planos com nós deslocáveis), devem os mesmos serem considerados também no Estado Limite de Utilização (veja-se os itens 5.4.1 e 5.4.5 do código referido).

Também o anterior MC - 78 do CEB³⁷ fazia essas mesmas recomendações em seu item 8.5. No caso de pórticos deslocáveis, então, o CEB recomenda, tendo em vista os efeitos de segunda ordem, que seja feita uma análise não-linear (item 14.2 do MC - 78 ou 6.6.3.1.3 do MC - 90), podendo-se usar métodos simplificados lineares, como o chamado método "P - Δ ". Convém, entretanto, lembrar que a utilização do método "P - Δ " implica em certas limitações inerentes ao mesmo (por exemplo: não é possível considerar não linearidades físicas, só se considerando os efeitos de segunda ordem).

Torna-se então evidente a necessidade de programas de cálculo automático para a verificação da estabilidade de uma ampla classe de estruturas, devendo os mesmos atender aos requisitos:

- devem ser de fáceis utilização e compreensão, como ocorre com os programas elásticos lineares;
- o tempo computacional gasto em sua utilização deve ser mantido dentro de limites razoáveis;
- devem aceitar pórticos de geometria qualquer;
- devem considerar ambas as não-linearidades.

Dentro da bibliografia utilizada pelo autor são encontrados vários programas, simplificados ou não (em Mackerle⁸³ pode ser encontrada uma relação da maioria dos programas existentes; veja-se também o item II.5.1 deste trabalho). Dentre os métodos simplificados, foram examinados os modelos propostos por Camara²¹, Ghali e Elbadry^{51,59} e Cauvin^{24,25,27}. Os dois primeiros consideram apenas as não linearidades físicas no comportamento em serviço de estruturas de concreto armado e protendido. Cauvin considera ambas as não-linearidades no comportamento até a ruína de pórticos planos de concreto armado.

Sendo o modelo de Cauvin mais completo, o autor optou então pelo mesmo como guia inicial para a preparação dos programas de cálculo automático a serem apresentados no item seguinte; durante o desenvolvimento do trabalho, contudo, várias modificações que alteraram as linhas principais do modelo citado foram feitas pelo autor e representam sua contribuição às pesquisas nessa área; é importante então, a esta altura, salientar as alterações que o modelo aqui seguido apresenta em relação ao de Cauvin:

- na consideração das não-linearidades físicas, aqui foram seguidos modelos mais recentes (veja-se o item II.5.2) que aquele proposto por Cauvin; por exemplo, a consideração da rigidez à tração ("tension stiffening") é incorporada como nos modelos do CEB³⁶, enquanto Cauvin a considera pela adição de uma área equivalente de aço (veja-se o item II.5.1, figura 2.20); trabalhou-se, portanto, na mesma linha dos modelos de Camara e de Ghali e Elbadry, os quais são semelhantes aos modelos do CEB;
- na consideração da não-linearidade geométrica, o campo de deformações aqui utilizado (definido pela equação 3.30, no item III.4.3) é mais completo que o de Cauvin (este considera a mesma equação, abandonando porém a terceira parcela, o que implica em diferenças nas matrizes de rigidez);
- na solução do sistema de equações, Cauvin utilizou o processo

iterativo de Newton-Raphson, enquanto aqui foi usado um esquema do tipo Quasi-Newton (BFGS), adaptado das rotinas apresentadas em Matthies e Strang⁹³ (veja-se o item IV.2.3.2).

Nos itens seguintes, procurar-se-a clarificar o modelo seguido, já incorporando as alterações aqui mencionadas.

V.2 - DESCRIÇÃO DO MODELO PROPOSTO.

Durante o desenrolar desta pesquisa, desenvolveram-se dois programas de cálculo automático. O principal, denominado PORANLI, pode executar análise não-linear de pórticos planos deslocáveis de concreto armado de geometria qualquer, levando em conta as não linearidades física e geométrica. O outro, denominado VIGANLI, é apropriado para a análise não-linear de vigas contínuas, não levando em conta, porém, efeitos de segunda ordem. Ambos foram desenvolvidos via Método dos Deslocamentos, em linguagem FORTRAN, usando-se um procedimento iterativo, como se verá adiante; considera-se, em cada incremento de carga, uma distribuição de rigidez na estrutura adequada ao nível de esforços existentes no fim do incremento anterior. A estrutura é dividida em elementos de barra lineares tradicionais, com uma determinada geometria da seção e distribuição de armaduras (ver Fig. 5.1); cada elemento de barra é subdividido em subelementos, nos quais se admitem constantes as características geométricas e a distribuição das armaduras.

Descrivem-se a seguir os principais passos do programa PORANLI:

a.) leitura dos dados geométricos e de carregamento da estrutura;

b.) subdivisão do vetor de cargas \tilde{F} em um número pré-fixado de incrementos $\Delta\tilde{F}_i$ de intensidade constante ou variável; a esse respeito, Cauvin²⁴ observa que a lei de aplicação do carregamento pode variar segundo os esquemas:

- linear crescente (Fig. 5.2.a);
- linear com descarregamento a partir de um passo pré-fixado (Fig. 5.2.b);
- linear cíclica, com ciclos de carga e descarga (Fig. 5.2.c);

- linear bilateral (Fig. 5.2.d);
- senoidal (Fig. 5.2.e);
- carga permanente aplicada integralmente no primeiro incremento e carga acidental aplicada com uma lei qualquer entre as descritas previamente (Fig. 5.2.f).

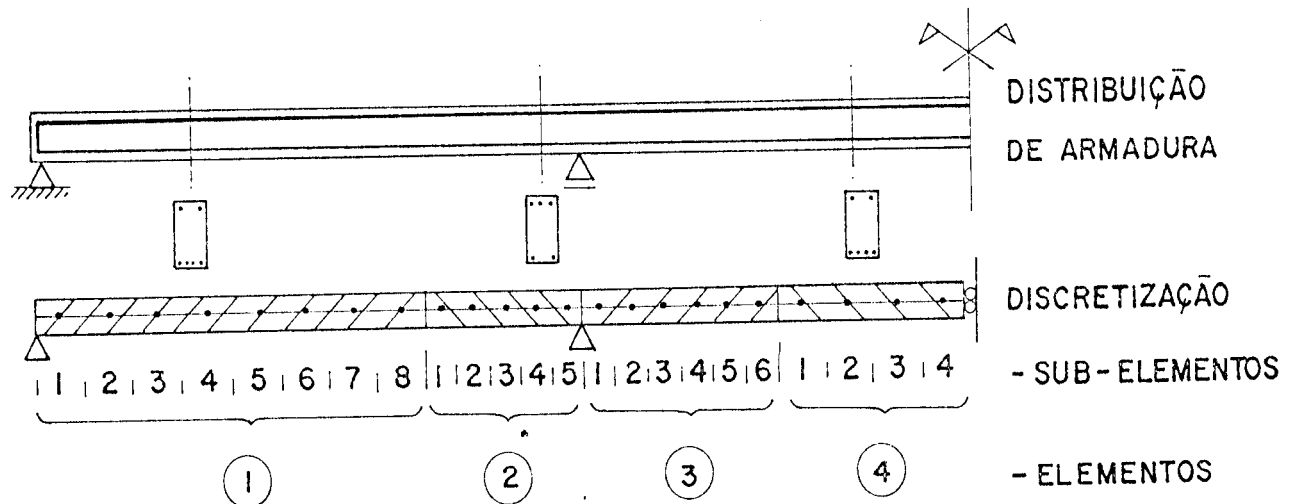


Fig.5.1.- Exemplo da discretização de uma viga contínua.

A possibilidade de se aplicar diferentemente as cargas permanentes e acidentais permite levar em conta a forma como as primeiras (em particular o peso próprio) são aplicadas, o que é particularmente importante quando da consideração de efeitos como a fluência ou quando da introdução dos coeficientes de segurança que devem afetar os carregamentos.

A adoção de leis do tipo bilateral ou senoidal tem o propósito de se assumir incrementos de carga tanto menores quanto mais a estrutura se afastar do comportamento linear; no presente trabalho adotou-se variação linear crescente para cargas permanentes e acidentais;

c.) solução, a cada incremento de carga, de um sistema linear em equilíbrio, do tipo:

$$\Delta \tilde{F}_i = K_{i-1} \Delta \tilde{Q}_i \quad (5.1)$$

onde $\Delta \tilde{Q}_i$ é o vetor de deslocamentos nodais correspondentes a $\Delta \tilde{F}_i$ e K_{i-1} é a matriz de rigidez global da estrutura calculada no passo anterior ($i - 1$), e que é corrigida a cada incremento para se levar em conta os efeitos das não linearidades física e geométrica;

d.) cálculo e atualização, a cada incremento, dos deslocamentos progressivos:

$$\tilde{Q} = \sum_1^n \Delta \tilde{Q}_i \quad (5.2)$$

e das forças internas correspondentes:

$$\tilde{S} = \sum_1^n \Delta \tilde{S}_i \quad (5.3)$$

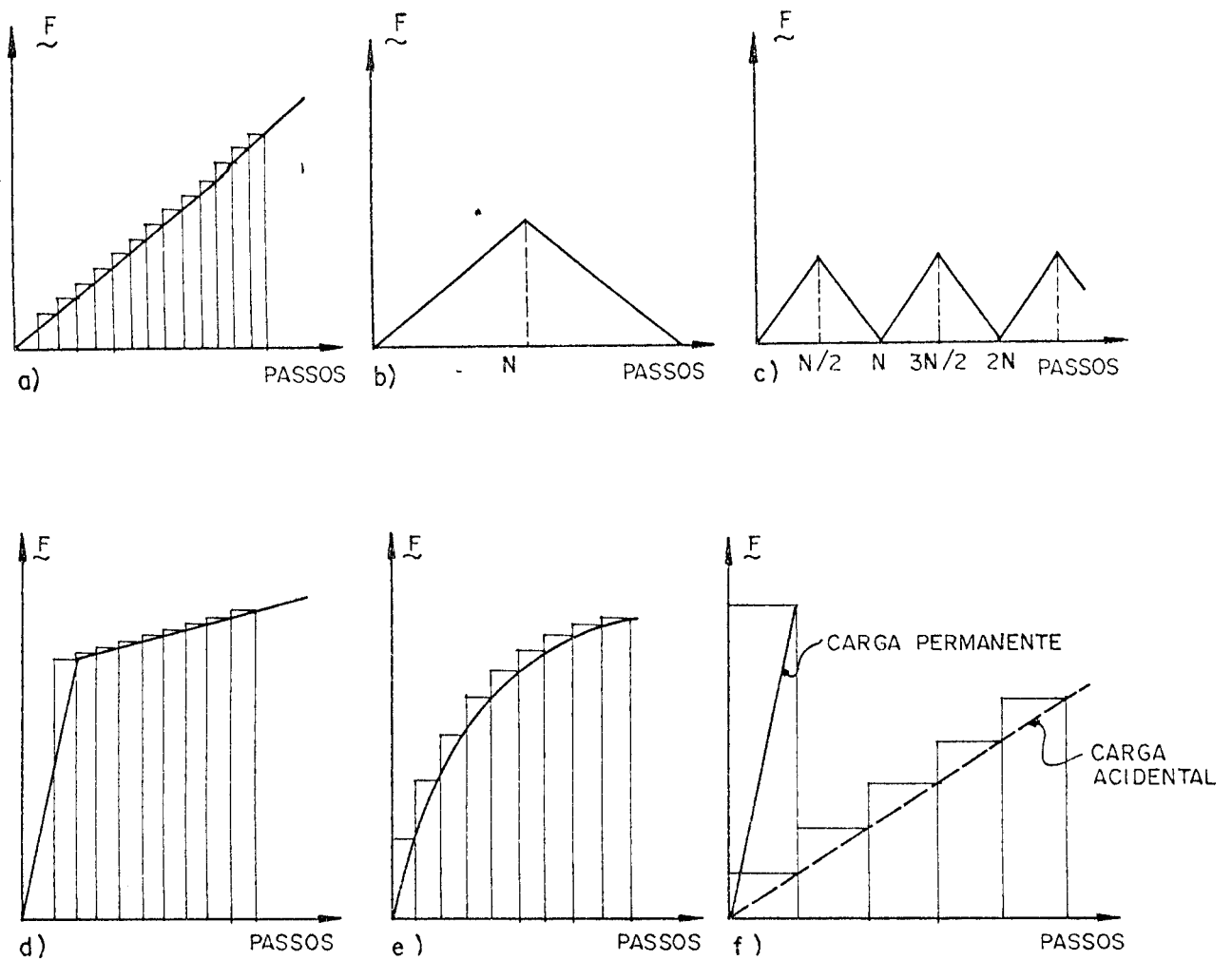


Fig. 5.2. - Variação da Lei de Aplicação do Carregamento.

As operações descritas nos itens c e d são repetidas até que se atinja o número pré-definido de incrementos em que se dividiu o carregamento. A acumulação de erros implícita nesse procedimento de linearização (principalmente se o número de incrementos for pequeno) pode ser eliminada usando-se um procedimento iterativo associado ao procedimento incremental;

e) resolução da estrutura por iterações : consiste em corrigir os valores dos deslocamentos nodais correspondentes a um certo número pré-fixado de incrementos (ver Fig. 5.3), reduzindo-se assim os erros devido à linearização a valores admissíveis (veja-se os itens IV.2.2 e IV.2.3);

f.) cálculo dos momentos de fissuração em função dos esforços normais atuantes sobre cada elemento no incremento considerado;

g.) cálculo da nova matriz de rigidez a ser utilizada no incremento subsequente, levando em conta as reduções na mesma por efeito das deformações e deslocamentos nodais de cada elemento (não-linearidades geométricas, tratadas no capítulo III); a fissuração é considerada substituindo-se o momento de inércia da seção fissurada naqueles elementos onde se tenha superado a resistência do concreto à tração (não-linearidade física, tratada no capítulo II).

No item seguinte apresenta-se o fluxograma simplificado do programa PORANLI, com a intenção de ilustrar o método aqui descrito, sem entrar em detalhes de programação.

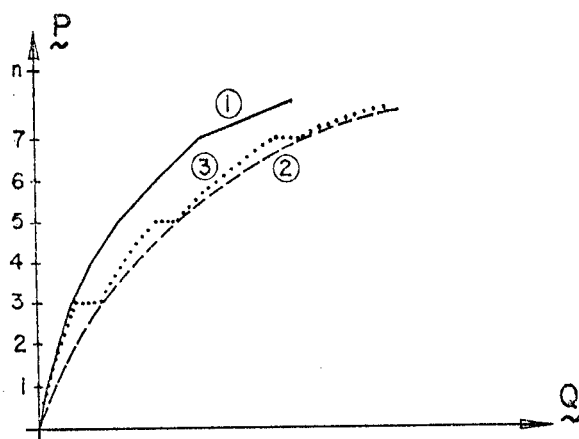
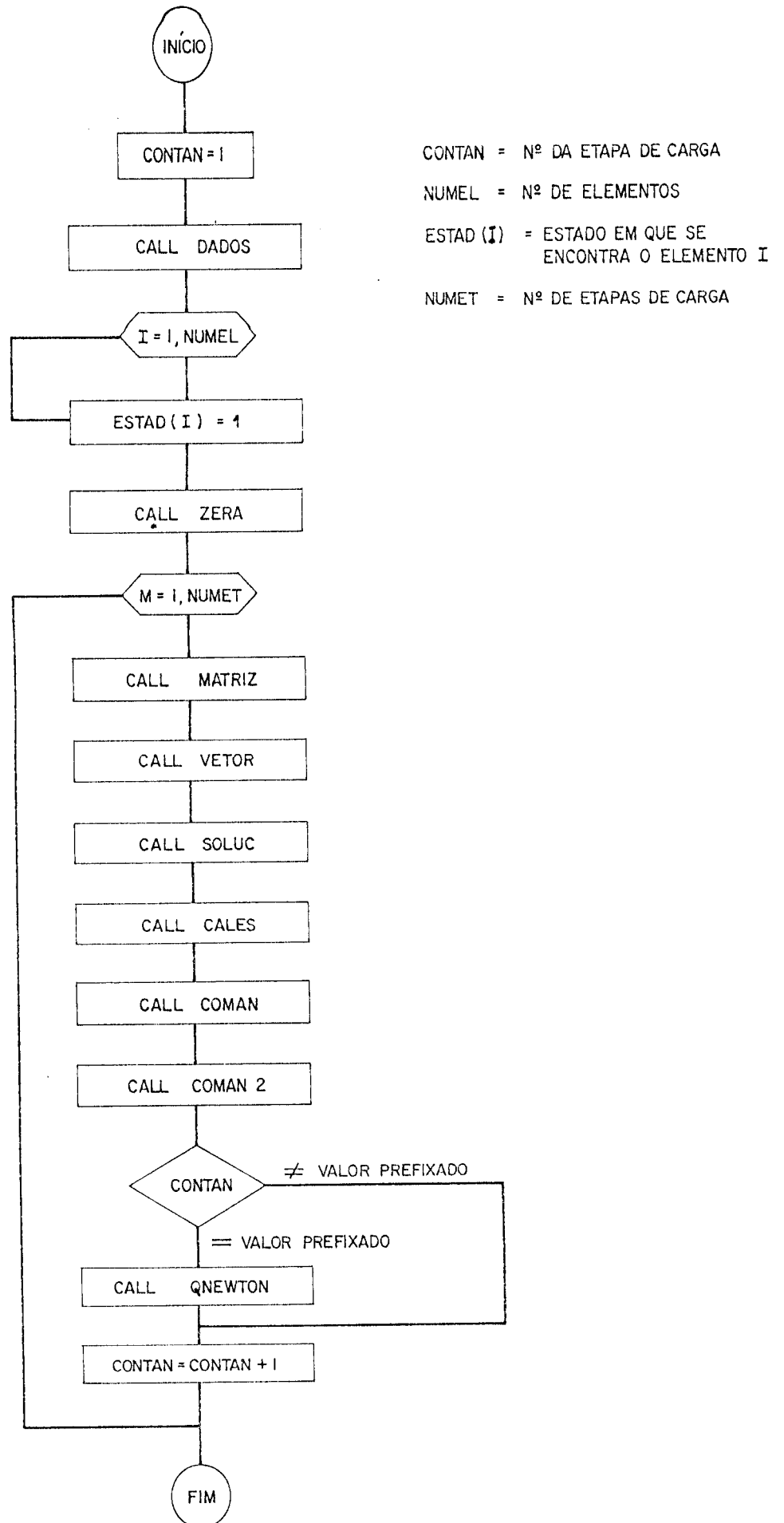


Fig. 5.3 - Curva carga-deslocamento:

- 1 - curva aproximada obtida com o procedimento incremental;
- 2 - curva real;
- 3 - curva corrigida mediante um procedimento iterativo.

V.3 - FLUXOGRAMA.



As principais subrotinas que integram o sistema são:

a.) DADOS:

Subrotina que lê e imprime os dados gerais da estrutura e dos materiais, condições de contorno, número máximo de iterações, tolerâncias, etc..

b.) ZERA:

Subrotina de zeragem dos esforços e deslocamentos.

c.) MATRIZ:

Subrotina de montagem da matriz de rigidez global da estrutura; necessita ser atualizada durante o processo incremental, para o que é auxiliada pela subrotina LEICON, a qual calcula a inércia de cada elemento para o estágio de carga em consideração; além desta, outras duas subrotinas auxiliares são solicitadas: MRIGB (que calcula a parcela k_0 da matriz de rigidez) e MRIGA (que calcula as parcelas k_1 e k_2 da matriz de rigidez de uma barra); trabalha-se com a matriz de rigidez armazenada em banda, visando economia de memória com a consequente diminuição no tempo de computação.

d.) VETOR:

Subrotina de montagem do vetor de cargas \tilde{F} da estrutura, obtida a partir das cargas nos elementos com o auxílio da subrotina VECAR.

e.) SOLUC:

Subrotina que implementa a solução do sistema linearizado (equação 5.1) pelo método de Cholesky.

f.) CALES:

Subrotina que calcula os esforços $\Delta\tilde{S}$ nas extremidades de cada elemento em função dos deslocamentos $\Delta\tilde{Q}$ relativos ao passo considerado.

g.) COMAN:

Subrotina que atualiza(acumula) e grava os deslocamentos nodais ΔQ obtidos até o incremento de carga considerado.

h.) COMAN2:

Subrotina de acumulação e gravação dos esforços nodais ΔF obtidos até o incremento de carga considerado; também calcula as reações de apoio da estrutura.

i.) QNEWTON:

Subrotina acionada em intervalos prefixados com a qual se resolve iterativamente a estrutura; com isso, corrige-se os resultados obtidos com o procedimento incremental.

Pode-se fazer algumas considerações adicionais sobre o programa:

- para obter resultados satisfatórios é necessário dividir as barras do pórtico em pequenos elementos; Cauvin sugere ainda subdividir cada elemento em subelementos (ver Fig. 5.1) com as mesmas características; calcula-se a rigidez de cada subelemento e, após, a rigidez do elemento todo, o que permite levar em conta com precisão o efeito da fissuração sem aumentar demasiadamente o número de incógnitas do problema e o tempo computacional requerido na análise, visto que são mantidos como incógnitas apenas os deslocamentos nodais em cada elemento; uma segunda versão dos programas deverá incorporar essa estratégia, bem como uma rotina de geração automática da malha; na versão atual, trabalha-se ainda com uma divisão de cada barra em um número suficiente de elementos para que se obtenha a desejável precisão, o que, portanto, requer um tempo computacional maior do que se conseguiria com a subdivisão dos elementos;

- Cauvin²⁵ aponta como grande vantagem deste método a economia de memória e tempo computacional gastos na análise, quando comparado a métodos mais exatos; a diferença básica está em que, nestes últimos, cada elemento é subdividido em camadas de módulos de elasticidade diferentes ao longo da altura da seção e o equilíbrio entre forças

internas e externas é atingido por iteração (vide, por exemplo, o método descrito em Kang⁷¹ - ver figura 2.20.a deste trabalho, item II.5.1); convém salientar que Cauvin estuda o comportamento até a ruína de pórticos planos de concreto armado pela introdução, naquelas seções onde o momento último tenha sido atingido, de rótulas plásticas com limitação de rotação das mesmas, salientando que essa aproximação é suficientemente precisa na maioria dos casos;

- em estruturas esbeltas o efeito das deformações por fluência nos esforços de segunda ordem pode ser considerável; Cauvin recomenda que a análise seja feita, então, da seguinte forma:

. aplica-se a carga permanente na forma incremental descrita anteriormente e, uma vez completado esse carregamento, a estrutura é analisada para um certo número de intervalos de tempo; mantido o carregamento, adota-se, então, valores modificados do módulo de elasticidade E_c do concreto (calculados com o auxílio da equação 2.56 - vide item II.3.1);

. após considerar totalmente o efeito da fluência, aplica-se o carregamento acidental.

V.4. RIGIDEZ DO ELEMENTO FISSURADO CONSIDERANDO A COLABORAÇÃO DO CONCRETO TRACIONADO INTACTO ENTRE AS FISSURAS.

Como visto anteriormente (ver cap. II), a literatura existente sobre o cálculo de deslocamentos em vigas de concreto armado é vasta, com vários métodos à disposição podendo ser encontrados. Os mais exatos são baseados numa análise via Método dos Elementos Finitos que leva em conta as relações constitutivas dos materiais e seu trabalho em conjunto, via relação tensões de aderência-escorregamento, etc.. (veja-se Proença¹²², Kang⁷¹, Assan^{5,6}, etc..).

Existem também modelos que analisam o comportamento global da estrutura por meio de relações tensão-deformação apropriadas, e que levam em conta a colaboração do concreto intacto entre fissuras - "tension stiffening" - (veja-se Balakrishnan e Murray^{10,11}, por exemplo). Nesses modelos, pode-se descrever numericamente a relação momento-curvatura a qual, por integração numérica, fornecerá a

estimativa dos deslocamentos; no caso de estruturas hiperestáticas, esse procedimento por si só é insuficiente, devendo, então, ser associado a um procedimento iterativo (como feito em Ghali e Elbadry⁵⁹).

Uma simplificação dessa linha de análises consiste em calcular a relação momento-curvatura média levando em conta a fissuração (procedimento adotado em Câmara²¹, por exemplo), após a qual é feita uma redistribuição por equilíbrio de esforços internos e externos em cada elemento.

O modelo aqui adotado é baseado neste último, com uma modificação importante em relação ao de Câmara: a redistribuição de esforços não é feita imediatamente após a fissuração do elemento (a qual, contudo, é levada em conta no incremento subsequente, quando será atualizada a inércia do elemento), com o equilíbrio sendo garantido pela associação do modelo a um procedimento iterativo, o qual é chamado, no caso dos programas deste trabalho, a cada três (3) incrementos de carga; como já salientado, este procedimento corresponde ao modelo adotado por Cauvin^{24,25} (veja-se item V.1).

Foram examinados no capítulo II vários modelos da relação momento-curvatura que permitem obter a inércia média de cada elemento a ser levada em conta na matriz de rigidez global, considerando-se a colaboração do concreto tracionado não fissurado (veja-se o item II.5.2). No programa VIGANLI foram testados três modelos, dois correspondentes ao equacionamento do CEB (MC - 78 e MC - 90) e o terceiro ao do ACI. Tendo em vista os resultados obtidos nesse caso (flexão simples), no programa PORANLI foram testados apenas os modelos para flexão composta do CEB, embora, no caso do MC - 90 (na opinião do autor, diga-se) esse modelo não esteja suficientemente claro; aparentemente, a diferença principal entre o mais recente e aquele modelo anterior (MC - 78) é o abandono da potência 2 na primeira das equações (2.214), quando se compara a mesma com a (2.222), além, é claro, da inclusão do terceiro ramo na relação momento-curvatura (e que retrata o comportamento após o escoamento da armadura).

Cumprе salientar que os bons resultados obtidos, principalmente com os modelos do CEB (veja-se em especial o primeiro exemplo) não descartam a necessidade de testes com outros modelos na subrotina LEICON; poder-se-ia citar modelos simplificados como os

apresentados em Gelfi e Giuriani⁵⁸ (que adotam um valor constante para a "tension stiffening") ou modelos mais complexos, como o apresentado em Debernardi⁴⁶.

V.5. RIGIDEZ DE UM ELEMENTO EM REGIME GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR.

O campo de deformações aqui utilizado é definido pela equação (3.30) - veja-se o item III.4. Aqui há outra diferença básica na modelagem: Cauvin não considera a terceira parcela da equação na descrição da não-linearidade geométrica que apresenta.

O modelo aqui adotado, portanto, é menos rígido que aquele considerado por Cauvin, e trouxe um inconveniente que deve ser mencionado.

A degeneração mais rápida da matriz de rigidez obriga à adoção de um número maior de incrementos de carga: Cauvin utilizou 10 etapas nos exemplos de pórtico plano que apresenta, e aqui foram necessárias no mínimo 21 etapas (no caso do pórtico mais esbelto - exemplo 5 - 27 etapas). Evidentemente, o tempo computacional requerido é bem maior; essa desvantagem poderá ser contornada no futuro (usando técnicas de subestruturação, por exemplo), mas na versão atual do programa representa uma desvantagem em relação ao modelo originalmente apresentado por Cauvin.

V.6. SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO-LINEARES.

A descrição do modelo proposto (ver item V.2) deixa clara a necessidade da adoção de um processo iterativo associado ao incremental, para a zeragem do vetor residual de forças.

Dentre os procedimentos examinados, optou-se aqui por um algoritmo do tipo Quasi-Newton (veja-se o item IV.2.3.), adaptado das rotinas originalmente apresentadas por Matthies e Strang⁹³.

Adota-se, portanto, a técnica de atualização conhecida como BFGS. No caso dos programas aqui desenvolvidos, essa técnica mostrou-se extremamente eficaz, praticamente zerando o vetor residual (no caso das vigas) em três a quatro iterações. A fixação das tolerâncias foi feita adotando-se os valores prescritos em Bathe e Cimento¹³: $\epsilon_F = 0,1$ para as forças e $\epsilon_D = 0,001$ para os deslocamentos.

V.7 - APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA PORANLI.

Dentro do modelo proposto, foram elaborados dois programas; passa-se a descrever algumas características do principal deles, denominado PORANLI (Pórtico - Análise Não-Linear), próprio para a solução de pórticos planos de concreto armado; ambos foram escritos em linguagem "VSFORTRAN" em equipamento IBM de grande porte - Sistema 3090, modelo 17 J, com 64 MB de memória principal - da Universidade Federal de Uberlândia - MG.

a. entrada de dados:

A entrada de dados é feita em arquivo sequencial formatado: PORANLI DADOS.

O programa foi preparado com entrada de dados e saída de resultados nas unidades kN e m.

b. dimensionamento dos "arrays":

Para determinação das dimensões dos arrays, adotou-se previamente:

- . número máximo de elementos: 300;
- . número máximo de nós: 301;

Evidentemente, isso restringe o programa a pórticos que estejam dentro desses limites. Essa restrição pode ser contornada com o redimensionamento dos "arrays". Com os limites mencionados, foram calculadas as dimensões das variáveis do programa.

c. criação de arquivos:

Como já visto ao se elaborar a sequência de programação (ver item V.3), há necessidade da criação de arquivos para guardar determinados resultados, a serem utilizados posteriormente nas diversas fases de solução da estrutura; esses arquivos acumulam deslocamentos, esforços e reações de apoio; a subrotina QNEWTON exige que também seja arquivada a matriz de rigidez, já que a mesma é triangularizada para a solução do sistema de equações na rotina principal mas deve estar intacta ao entrar na subrotina iterativa; ainda no processo de iteração, são criados arquivos que salvam e

recuperam vetores, até um número máximo de 15 arquivos (o programa correntemente fixa o número máximo de atualizações em 15).

d. saída de resultados:

É feita em um arquivo sequencial formatado: PORANLI SAÍDA; carregamentos, deslocamentos e esforços são positivos no sentido do sistema de coordenadas. (ver Fig. 5.4)

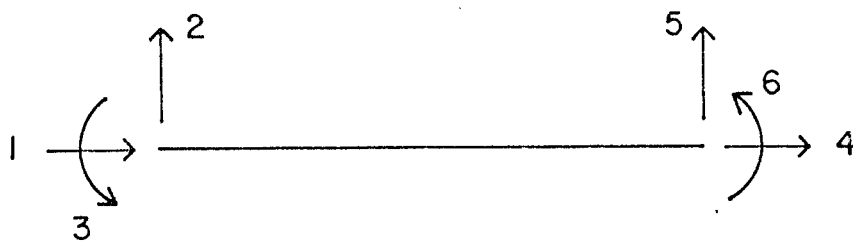


Fig. 5.4. Sistema Local de Coordenadas.

CAPÍTULO VI.

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.

VI.1 - EXEMPLOS RESOLVIDOS UTILIZANDO-SE O PROGRAMA VIGANLI.

VI.1.1 - EXEMPLO 1.

1. DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA.

Viga biengastada de concreto armado, de seção retangular (ver Fig. 6.1), originalmente resolvida no manual do CEB³⁶. Deve-se calcular a flecha no meio do vão quando a estrutura estiver submetida a um carregamento uniformemente distribuído $g = 13,1$ kN/m. O objetivo ali é comparar os resultados obtidos mediante três métodos de cálculo : o método exato (por integração), o método bilinear e o método dos coeficientes globais. Com esse intuito, no manual do CEB são apresentados vários exemplos (veja-se o item 3.8 do mesmo) e conclusões importantes, das quais o autor destaca a seguinte: o método dos coeficientes globais não dá bons resultados no caso de flexão composta, embora no caso de flexão pura funcione bem; o método bilinear fornece bons resultados nos dois casos (ambos os métodos foram cotejados com o método exato). Pretende-se aqui, aproveitando os resultados mencionados, "calibrar" os programas de cálculo automático desenvolvidos nesta pesquisa.

Assume-se que o concreto tenha as seguintes características:

- . $f_{ck} = 25$ MPa; $E_{cm} = 30,5$ GPa; $f_{ct} = 2,5$ N/mm²
- . coeficiente de fluência: $\varphi = 2,5$
- . despreza-se o efeito da retração : $\varepsilon_{cs} = 0$
- . aço: $E_s = 200$ GPa.

Cabe lembrar aqui que esses valores correspondem à aplicação do MC - 78 do CEB e foram mantidos com a finalidade de comparação dos resultados; esses valores foram ligeiramente alterados no MC - 90 (veja-se o item II.2.1).

A estrutura dada será discretizada em 20 elementos (10 correspondentes ao corte A-A e 10 ao B-B); entre as várias opções de armadura apresentadas no exemplo original, aqui se trabalhará com a segunda delas (ver Fig. 6.1), a saber: na seção A - A: $\rho' = 0$ e $\rho = 0,33\%$; na seção B - B, $\rho' = 0,33\%$ e $\rho = 0,67\%$.

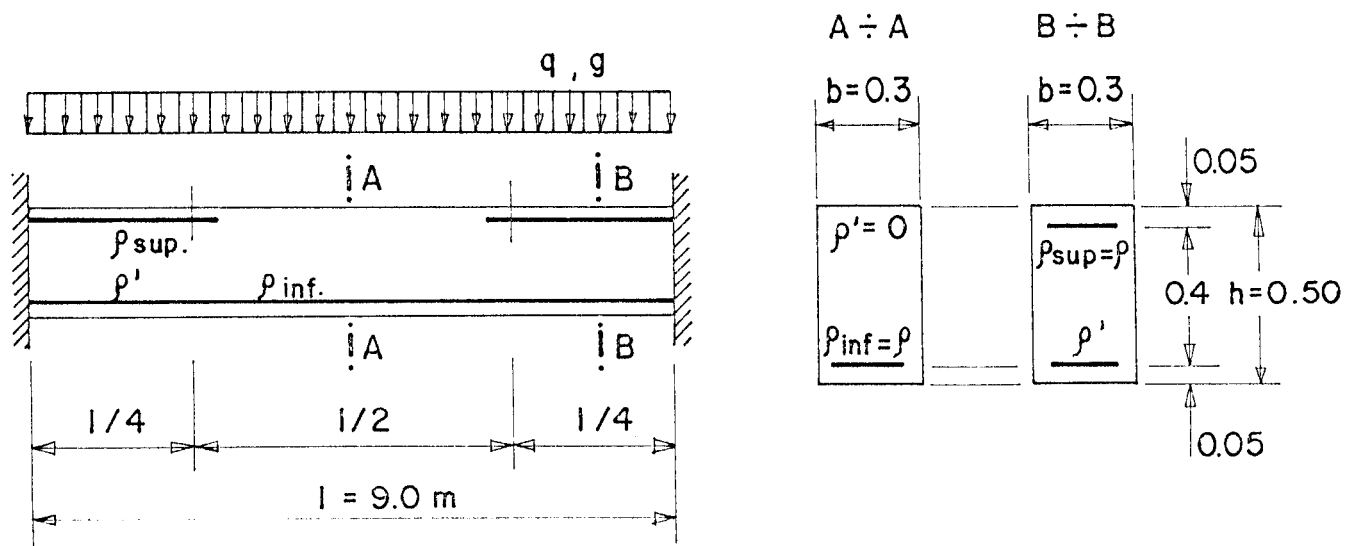


Fig 6.1 - Viga biengastada de concreto armado.

2. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS SEÇÕES.

2.1. SEÇÃO A-A.

Pode-se calcular as características geométricas na forma tradicional ou mediante o uso de tabelas como as apresentadas no manual do CEB³⁶ ou em Ghali e Favre⁶⁰. Homogeneizando a seção A-A, tem-se (Estádio I):

$$\alpha = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{30,5} = 6,56$$

$$A_h = A_1 = A_c + (\alpha - 1) A_s = 0,1525 \text{ m}^2$$

y = posição do c.g. = 0,2468m a partir da borda inferior.

Aplicando-se Steiner (Teorema dos Eixos Paralelos), obtem-se:

$$I_1 = 0,003219 \text{ m}^4$$

Com y e I_1 conhecidos, pode-se determinar o módulo de resistência da seção no Estádio I (seção homogeneizada):

$$W_1 = \frac{0,003219}{0,2468} \cong 0,0130 \text{ m}^3$$

Considerando-se agora a seção totalmente fissurada, pode-se determinar a posição da linha neutra no Estádio II, a qual, na ausência de força normal aplicada, coincidirá com o centróide da seção homogeneizada fissurada (veja-se o item II.3.3.1); com o auxílio da equação (2.105), obtem-se a altura c da zona comprimida (ver Fig. 2.11 e 2.12), a saber:

$$c = 8,436 \text{ cm} \cong 0,085 \text{ m, a partir da borda superior;}$$

Conhecida a altura da zona comprimida, por Steiner obtem-se

$$I_2 = \frac{0,3 \cdot 0,085^3}{3} + 6,56 \cdot (0,000445) \cdot (0,45 - 0,085)^2$$

$$I_2 = 0,00045 \text{ m}^4$$

I_2 é o momento de inércia da seção fissurada em relação ao eixo que passa pelo centróide.

Para efeito de comparação, com o auxílio das tabelas do CEB³⁶ obter-se-ia:

$$I_1 = 0,003238 \text{ m}^4$$

$$I_2 = 0,0004807 \text{ m}^4$$

Para a consideração de efeitos dependentes do tempo (no caso, considera-se apenas a fluência), procede-se da seguinte forma:

- calcula-se o módulo de elasticidade ajustado \bar{E}_c do concreto, com o auxílio da equação (2.46);
- recalcula-se o valor de α ;
- recalculam-se as características geométricas da seção ($A_c, I_c, A_1, I_1, \text{etc.}$) e obtem-se, ao final, o fator k de redução da curvatura com o auxílio da equação (2.113);
- calcula-se o acréscimo de curvatura ocorrido durante o período com o auxílio da equação (2.109), o qual, somado à curvatura inicial, fornece a curvatura total no instante t considerado.

As tabelas do CEB são mais práticas e fornecem coeficientes com os quais se obtém diretamente o produto de rigidez EI e a curvatura no instante t considerado.

No caso, obtem-se pelas tabelas do CEB:

- no instante $t = 0$:

$$EI_1 = 9,877 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

$$EI_2 = 1,466 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

- no instante $t = t$:

$$EI_1 = 3,039 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

$$EI_2 = 1,128 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

2.2. SEÇÃO B-B.

Homogeneizando-se a seção B-B, obtem-se as características geométricas da mesma no Estádio I, a saber:

$$A_1 = 0,1575 \text{ m}^2$$

y = posição do c.g. = 0,253 m a partir da borda inferior;

Com isso:

$$I_1 = 0,003432 \text{ m}^4$$

$$W_1 = 0,0136 \text{ m}^3$$

No Estádio II, analogamente, obtem-se:

$c = 11,06 \text{ cm} = 0,1106 \text{ m}$, a partir da borda inferior;

$$I_2 = \frac{0,3 \cdot 0,1106^3}{3} + 6,56 \cdot (0,000891) \cdot (0,45 - 0,1106)^2 + \\ + 5,56 \cdot (0,000445) \cdot (0,116 - 0,05)^2$$

$$I_2 = 0,0008176 \text{ m}^4$$

No instante $t = t$, analogamente, obtem-se:

$$EI_1 = 3,642 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

$$EI_2 \cong 1,900 \cdot 10 \text{ kNm}$$

3. MOMENTOS DE FISSURAÇÃO.

3.1. SEÇÃO A-A.

O momento de fissuração pode ser calculado com o auxílio da equação (2.176):

$$M_r = W_1 f_{ct} = 0,0130 \cdot 2500 = 32,5 \text{ kNm}$$

3.2. SEÇÃO B-B.

Analogamente, obtem-se:

$$M_r = 34 \text{ kNm}$$

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS.

Os dados dos itens anteriores são fornecidos ao programa, o qual calculará esforços e deslocamentos; o carregamento é feito, no caso, em 9 etapas. No caso deste exemplo, analisou-se a estrutura nos instantes inicial ($t = 0$) e final ($t = t$). O carregamento em etapas permite acompanhar a evolução da fissuração e a consequente

redistribuição de esforços e deslocamentos na estrutura. Convém lembrar que, a cada 3 passos de carga, a rotina iterativa é chamada para corrigir os erros nos deslocamentos decorrentes da linearização representada pelo carregamento incremental (veja-se o item IV.2.3) e, após isto, chega-se aos esforços finais correspondentes.

Para o instante inicial ($t = 0$), o manual do CEB³⁶ fornece uma estimativa de 6 mm para a deflexão no meio do vão (valor obtido pelos métodos bilinear e dos coeficientes globais). Com o programa, obtem-se:

a - lei constitutiva segundo o MC - 78 do CEB:

$$f = 6,35 \text{ mm}$$

b - lei constitutiva segundo o MC - 90 do CEB:

$$f = 6,35 \text{ mm}$$

c - lei constitutiva segundo o ACI:

$$f = 5,44 \text{ mm}$$

Os resultados para o instante t são dados na tabela 6.1 (ver também a fig. 6.2); observa-se que o modelo segundo o ACI (testado com coeficientes $m = 4$, $m = 3$ e $m = 3,5$, conforme Cosenza⁴²) é o que apresenta resultados mais em desacordo com aqueles fornecidos pelo manual do CEB, supostos exatos; já os modelos de lei constitutiva segundo o MC - 78 e o MC - 90 do CEB apresentam resultados mais próximos, com ênfase para este último, como era esperado.

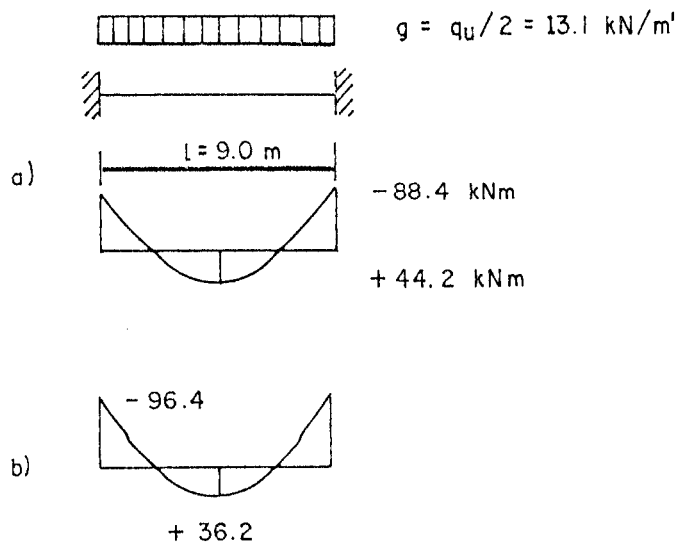


Fig. 6.2 - Momentos fletores na viga:

- a.) elásticos, $t = 0$;
- b.) redistribuição de momentos, $t = t$.

TABELA 6.1. - RESULTADOS DO 1º EXEMPLO ($t = t$)

	M_{eng} (kNm)	$M_{vão}$ (kNm)	DESLOCAMENTO($x=l/2$) (mm)
RESULTADOS DO MANUAL DO CEB ³⁶ .	-96,4	+36,2	12,2 (1)
			16,0 (2)
			16,4 (3)
			9,8 (4)
VIGANLI (CEB-78)	-94,45	+38,12	11,88
VIGANLI (CEB-90)	-95,62	+36,98	12,46
VIGANLI (ACI)	-88,04	+44,47	9,95

- (1) MÉTODO EXATO (POR INTEGRAÇÃO)
- (2) MÉTODO BILINEAR (CALCULADO COM OS MOMENTOS INICIAIS ELÁSTICOS)
- (3) MÉTODO DOS COEFICIENTES GLOBAIS (COM M ELÁSTICO)
- (4) MÉTODO DOS COEFICIENTES GLOBAIS (COM M REDISTRIBUIDO)

VI.1.2 - EXEMPLO 2.

1. DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA.

Viga simplesmente apoiada de concreto armado, de seção retangular (ver Fig. 6.3), originalmente apresentada em Ghali e Favre⁶⁰. Deve-se calcular a flecha no meio do vão no instante t ; a estrutura está submetida a uma carga de 17 kN/m. Serão assumidas aqui as mesmas características para os materiais usadas originalmente:

- concreto:

$$E_{cm} = 30 \text{ GPa} \quad f_{ct} = 2,5 \text{ MPa} \quad \varphi = 2,5$$

- aço:

$$E_s = 200 \text{ GPa.}$$

A estrutura será discretizada em 20 elementos iguais, já que a seção transversal original é suposta constante.

2. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO.

Tem-se:

$$\alpha = 6,667$$

$$A_1 = 0,2033 \text{ m}^2$$

$$y_1 = 0,318 \text{ m (referência: borda inferior)}$$

$$I_1 = 0,007519 \text{ m}^4$$

$$W_1 = 0,02364 \text{ m}^3$$

c = altura da zona comprimida na seção suposta totalmente fissurada = 0,147 m.

Conhecida a altura da zona comprimida, obtem-se:

$$I_2 = 0,00193 \text{ m}^4$$

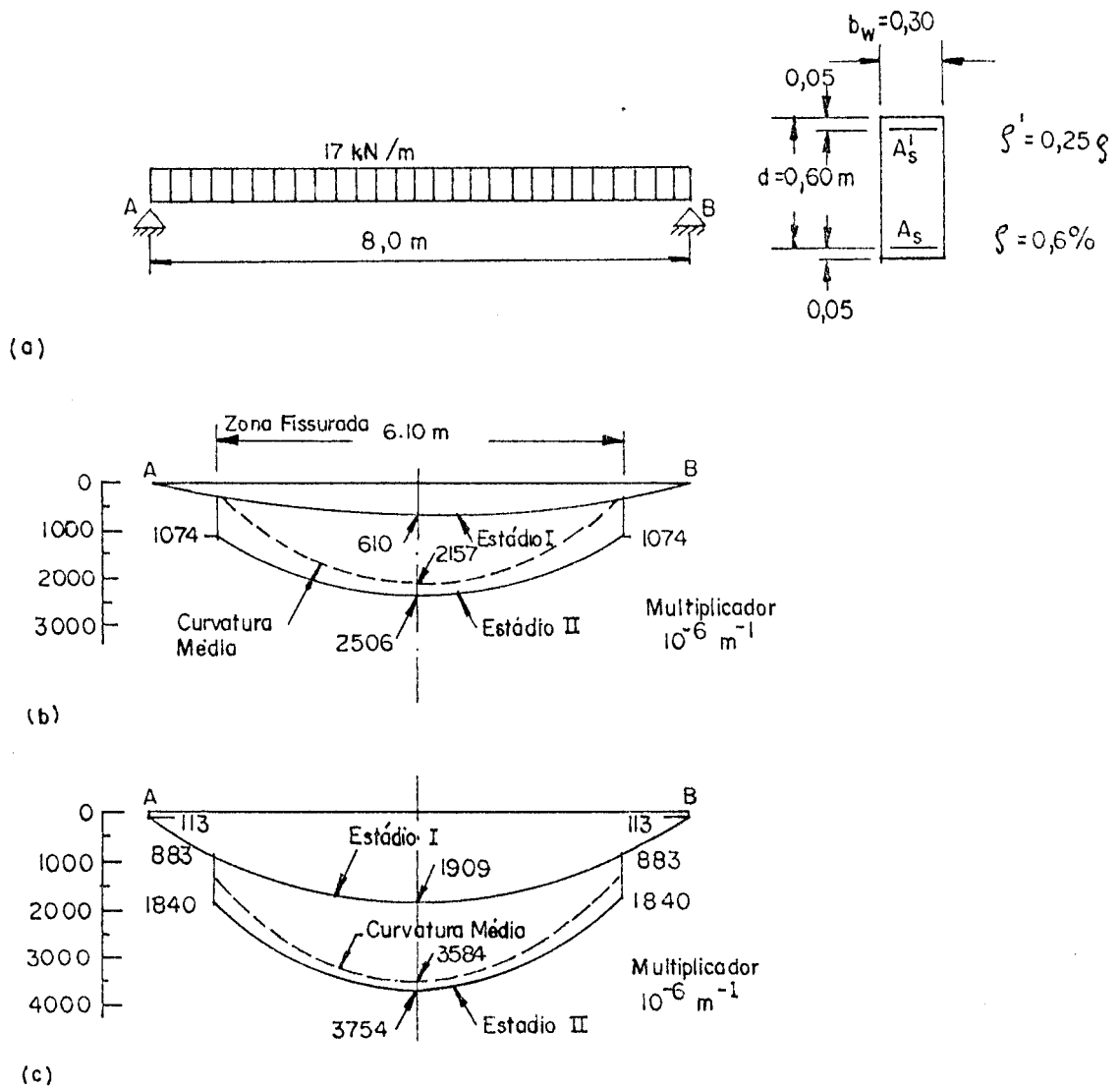


Fig 6.3. - Viga biapoiada de concreto armado:

- a - Dimensões e carregamento;
- b - Curvatura no instante inicial t_0 ;
- c - Curvatura no instante t .

Pelas tabelas do CEB³⁶, obtem-se:

. no instante $t = 0$:

$$EI_1 = 22,614 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2 \qquad EI_2 = 5,7856 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

. no instante $t = t$:

$$EI_1 = 7,6528 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2 \qquad EI_2 = 4,3176 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

3. MOMENTO DE FISSURAÇÃO.

Com o auxílio da (2.176), obtem-se:

$$M_r = 0,02364 \cdot 2500 = 59,1 \text{ kNm}$$

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS.

Ghali e Favre fornecem como flecha no meio do vão o valor 23,9 mm. Por integração, obter-se-ia 23,5 mm, segundo os autores.

Essa mesma viga analisada pelo programa indicou os resultados ($t = t$):

- lei constitutiva: ACI (coeficiente $m = 4$): $f = 19,32 \text{ mm}$
- MC - 78 do CEB: $f = 19,48 \text{ mm}$
- MC - 90 do CEB: $f = 19,32 \text{ mm}$

Observa-se a boa concordância obtida nesse caso pelos três modelos seguidos e uma discrepância com os resultados fornecidos por Ghali e Favre, que consideram uma descontinuidade média de aproximadamente 3,2 mm na seção da viga onde se inicia a zona fissurada (ver Fig. 6.3.c). O programa aqui utilizado, entretanto, compatibiliza esforços e deformações em todas as seções, não havendo sentido, na opinião do autor, na consideração dessa descontinuidade para fins comparativos. Ignorando-a, portanto, os valores obtidos por Ghali e Favre seriam de 20,7 mm e 20,3 mm (este obtido por integração), valores estes próximos aos fornecidos pelo programa.

VI.1.3 - EXEMPLO 3.

1. DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA.

Viga contínua de concreto armado, originalmente apresentada em Camara²¹ (ver Fig. 6.4). A mesma viga é ali utilizada para diversas histórias de carga. Características dos materiais:

- concreto:

$$E_{c_m} = 30,5 \text{ GPa}$$

$$f_{c_t} = 2,2 \text{ MPa}$$

$$\varphi = 2,5$$

$$\chi = 0,8$$

- aço:

$$E_s = 210 \text{ GPa}$$

(S 400)

A estrutura será discretizada em 40 elementos (10 para cada vão lateral e 20 no vão central) de 3 tipos diferentes em função das armaduras dadas.

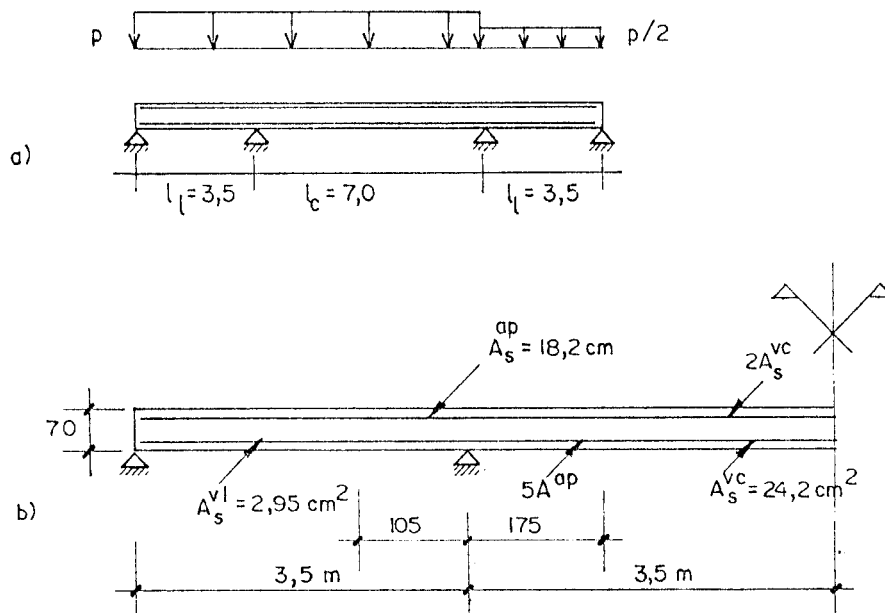


Fig 6.4. Viga contínua de concreto armado.

2. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS SEÇÕES.

2.1. SEÇÃO A-A (MEIO DO VÃO LATERAL).

$$\alpha = 6,885$$

Para todas as seções, adotou-se:

$$d'/h = 0,1$$

$$d/h = 0,9$$

$$\chi\varphi = 2$$

Com o auxílio das tabelas do CEB, obtem-se:

- no instante $t = 0$:

$$EI_1 = 26,6875 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

$$EI_2 = 1,7435 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

- no instante $t = t$:

$$EI_1 = 8,1488 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

$$EI_2 = 1,4839 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

2.2. SEÇÃO B-B (APOIO).

- no instante $t = 0$:

$$EI_1 = 30,0618 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

$$EI_2 = 8,7179 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

- no instante $t = t$:

$$EI_1 = 11,0318 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

$$EI_2 = 6,518 \text{ kNm}^2$$

2.3. SEÇÃO C-C (MEIO DO VÃO CENTRAL).

- no instante $t = 0$:

$$EI_1 = 30,4113 \text{ kNm}^2$$

$$EI_2 = 11,9587 \text{ kNm}^2$$

- no instante $t = t$:

$$EI_1 = 11,0586 \text{ kNm}^2$$

$$EI_2 = 8,1909 \text{ kNm}^2$$

O cálculo para o instante $t = 0$ traria para as seções, respectivamente, os seguintes valores:

$$I_1 = 0,009522 \text{ m}^4$$

$$I_2 = 0,000667 \text{ m}^4$$

$$W_1 = 0,0263 \text{ m}^3$$

$$I_1 = 0,009825 \text{ m}^4$$

$$I_2 = 0,003185 \text{ m}^4$$

$$W_1 = 0,0286 \text{ m}^3$$

$$I_1 = 0,00987 \text{ m}^4$$

$$I_2 = 0,003921 \text{ m}^4$$

$$W_1 = 0,029375 \text{ m}^3$$

3. MOMENTOS DE FISSURAÇÃO.

Para cada seção, respectivamente, tem-se:

$$M_{r1} = 57,98 \text{ kNm} \quad (65,88)$$

$$M_{r1} = 62,94 \text{ kNm} \quad (71,53)$$

$$M_{r1} = 64,625 \text{ kNm} \quad (73,44)$$

Esses valores correspondem ao f_{ct} fornecido originalmente, o qual, entretanto, não é o correspondente às características do concreto, que seria de 2,5 MPa. Os valores entre parênteses indicam os momentos de fissuração que seriam obtidos com o valor correto. Camara utilizou, ao menos na seção dos apoios, $M_{r1} = 60 \text{ kNm}$.

4. RESULTADOS OBTIDOS.

A estrutura foi analisada para duas condições de carga ($p = 92 \text{ kN/m}$ e $p = 70 \text{ kN/m}$) com lei constitutiva segundo o MC - 90 do CEB. Para o primeiro carregamento, no instante inicial ($t = 0$), Camara fornece para o momento negativo sobre o apoio central à esquerda o valor $313,4 \text{ kNm}$; com o programa obtem-se $307,105 \text{ kNm}$.

Para $t = t$, Camara fornece para o momento nessa mesma seção o valor $319,5$; com o programa obtem-se $305,5 \text{ kNm}$.

Para o segundo carregamento, obtem-se nessa seção um momento de 234 kNm contra 248 kNm do original.

Em ambos os casos foram fornecidos ao programa os momentos de fissuração calculados com o valor de f_{ct} fornecido no original e os teoricamente corretos; a diferença nos esforços assim obtidos é mínima.

O tempo de execução é de cerca de 85 segundos, com média de 3 iterações necessárias para zerar o vetor resíduo a cada 3 passos incrementais.

VI.2. - EXEMPLOS RESOLVIDOS UTILIZANDO-SE O PROGRAMA PORANLI.

VI.2.1. - EXEMPLO 4.

1. DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA.

As propriedades geométricas da estrutura são dadas na Fig. 6.5. Trata-se do mesmo pórtico plano de concreto armado resolvido pelo método de Cauvin²⁵; essa estrutura já fora analisada linearmente (ver resultados e comentários no Bulletin n^o 129 do CEB) e a armadura calculada para os esforços resultantes dessa análise foi adotada aqui, porém com uma redistribuição de 15%, como se verá adiante. Os materiais e ações solicitantes da estrutura são dados a seguir:¹²

- materiais:

- . concreto: C16
- . aço: S400

- ações:

. cargas permanentes:

- peso próprio do concreto : 24 kN/m³
- revestimento : 1,5 kN/m²
- parede : 10 kN/m

. cargas acidentais:

- pavimento tipo : 4 kN/m²
- pavimento superior (teto): 2 kN/m²
- vento : 1 kN/m² (distribuído ao longo da altura e perpendicular à parede, incluindo a sucção);
- neve : 0,5 kN/m²

12

O exemplo foi resolvido por Cauvin utilizando-se as especificações do MC - 78³⁷ do CEB; com a intenção de comparar os resultados, o autor usou aqui os mesmos valores (características e de cálculo).

2. CARREGAMENTOS. CONSIDERAÇÕES GERAIS.

As condições de carregamento consideradas na análise são representadas nas figuras 6.6 a 6.9: as três primeiras para combinações no Estado Limite Último e a outra para o Estado Limite de Utilização (embora o objetivo principal aqui seja considerar este último carregamento, o fato de que em nenhuma seção tenha ocorrido escoamento da armadura nas análises feitas por Cauvin permitiu que aqui também se considerasse os demais carregamentos). Cauvin selecionou os carregamentos entre treze combinações possíveis testadas previamente numa análise linear, por serem aqueles que produzem os resultados mais desfavoráveis.

Cauvin não considerou os efeitos de fluência e retração na análise. A rede que utilizou é representada na Figura 6.10. A mesma é ainda subdividida em quatro subelementos por elemento (no total, 512 subelementos). A rede aqui utilizada, tendo em vista as limitações do programa, é de 288 elementos, com 268 nós (cada viga foi subdividida em elementos de 60 cm, totalizando 24 elementos por viga; cada pilar foi dividido em 3 elementos de 120 cm).

Cauvin considera apenas cargas aplicadas nos nós; o programa PORANLI admite cargas uniformemente distribuídas e cargas nodais.

3. ARMADURAS.

As áreas de armaduras dos pilares calculadas na análise linear foram mantidas para a análise não-linear. No caso das vigas, Cauvin considerou uma redistribuição de 15% na armadura calculada para o primeiro pavimento; as armaduras assim obtidas foram mantidas para os demais pavimentos. Na figura 6.11 estão representadas as armaduras obtidas via análise linear; na figura 6.12 estão as aqui utilizadas para o cálculo das características geométricas de cada seção.

4. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS SEÇÕES.

A estrutura foi discretizada em 4 tipos de elemento: um correspondendo aos pilares (seção A-A - ver figura 6.12) e três às vigas (seção B-B e C-C, esta por sua vez subdividida em duas: na primeira considera-se a seção atuando como retangular para momentos negativos; ou, alternativamente, como seção T para momentos positivos). Para as seções T foi considerada largura colaborante, ficando as mesmas com $b_f = 130$ cm. As características de cada seção, a serem fornecidas ao programa, são relacionadas a seguir, de forma reduzida:

4.1. SEÇÃO A-A.

$$\begin{array}{lll} A_1 = 0,263 \text{ m}^2 & I_1 = 0,005847 \text{ m}^4 & W_1 = 0,0234 \text{ m}^3 \\ x_{12} = 0,154 \text{ m} & A_2 = 0,0617 \text{ m}^2 & I_2 = 0,001229 \text{ m}^4 \end{array}$$

4.2. SEÇÃO B-B.

$$\begin{array}{lll} A_1 = 0,281 \text{ m}^2 & I_1 = 0,006117 \text{ m}^4 & W_1 = 0,0185 \text{ m}^3 \\ x_{12} = 0,097 \text{ m} & A_2 = 0,0996 \text{ m}^2 & I_2 = 0,000965 \text{ m}^4 \end{array}$$

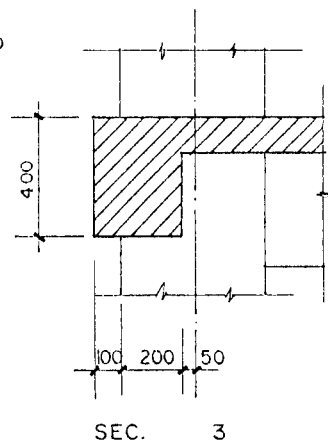
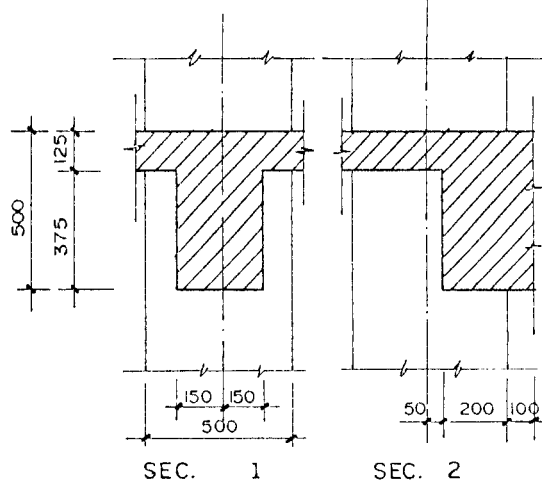
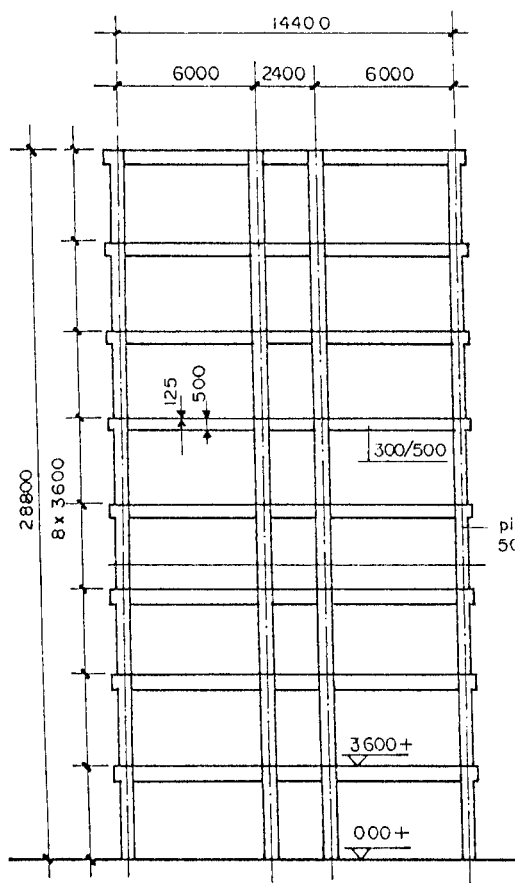
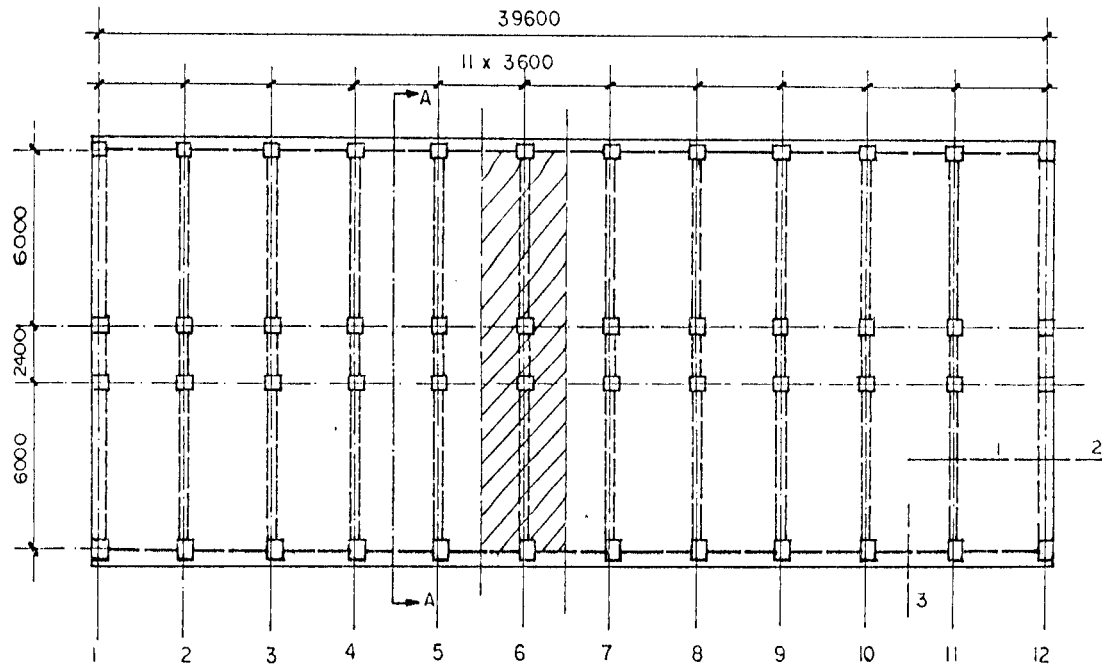
4.3. SEÇÃO C-C (RETANGULAR).

$$\begin{array}{lll} A_1 = 0,159 \text{ m}^2 & I_1 = 0,00359 \text{ m}^4 & W_1 = 0,0147 \text{ m}^3 \\ x_{12} = 0,130 \text{ m} & A_2 = 0,0478 \text{ m}^2 & I_2 = 0,00141 \text{ m}^4 \end{array}$$

4.4. SEÇÃO C-C (T).

$$\begin{array}{lll} A_1 = 0,285 \text{ m}^2 & I_1 = 0,0609 \text{ m}^4 & W_1 = 0,0182 \text{ m}^3 \\ x_{12} = 0,0099 \text{ m} & A_2 = 0,0958 \text{ m}^2 & I_2 = 0,000685 \text{ m}^4 \end{array}$$

Nota: x_{12} é a diferença entre as posições da linha neutra nos Estádios I e II, necessária nas equações (2.204) e (2.208).



SEC. AA

SEC. 3

Fig. 6.5. - Pórtico Plano de Concreto Armado.

- CARGAS ACIDENTAIS EM TODOS OS VÃOS.
- ESTADO LIMITE ÚLTIMO.
- CARGA DE VENTO : VALOR DE COMBINAÇÃO

$$\frac{\gamma_g}{\gamma_{f3}} = 1.2 \quad \frac{\gamma_q}{\gamma_{f3}} = 1.384$$

CARGAS PERMANENTES			
g_d	22.68	F_d	43.20
F_{cd}	25.92		
CARGAS ACIDENTAIS			
q_{fd}	19.93	q_{Rd}	9.97
q_{sd}	2.492	q_{wd}	4.98

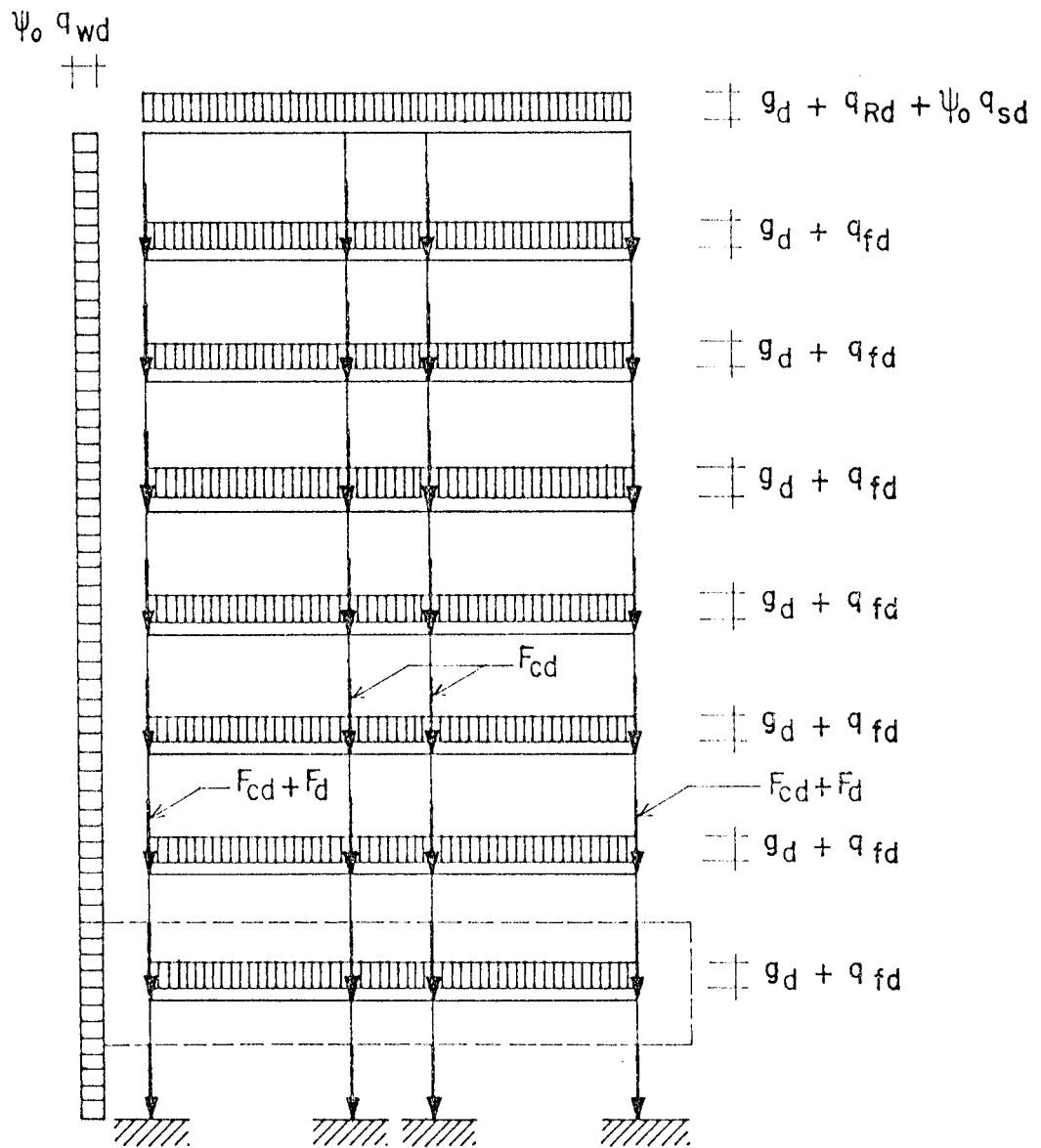


Fig. 6.6. - Carregamento Número 1.

- CARGA ACIDENTAL EM TODOS OS VÃOS.
- ESTADO LIMITE ÚLTIMO
- CARGA DE VENTO : VALOR BÁSICO

CARGAS PERMANENTES			
g_d	22.68	F_d	43.20
F_{cd}	25.92		
CARGAS ACIDENTAIS			
q_{fd}	19.93	q_{Rd}	9.97
q_{sd}	2.462	q_{wd}	4.98

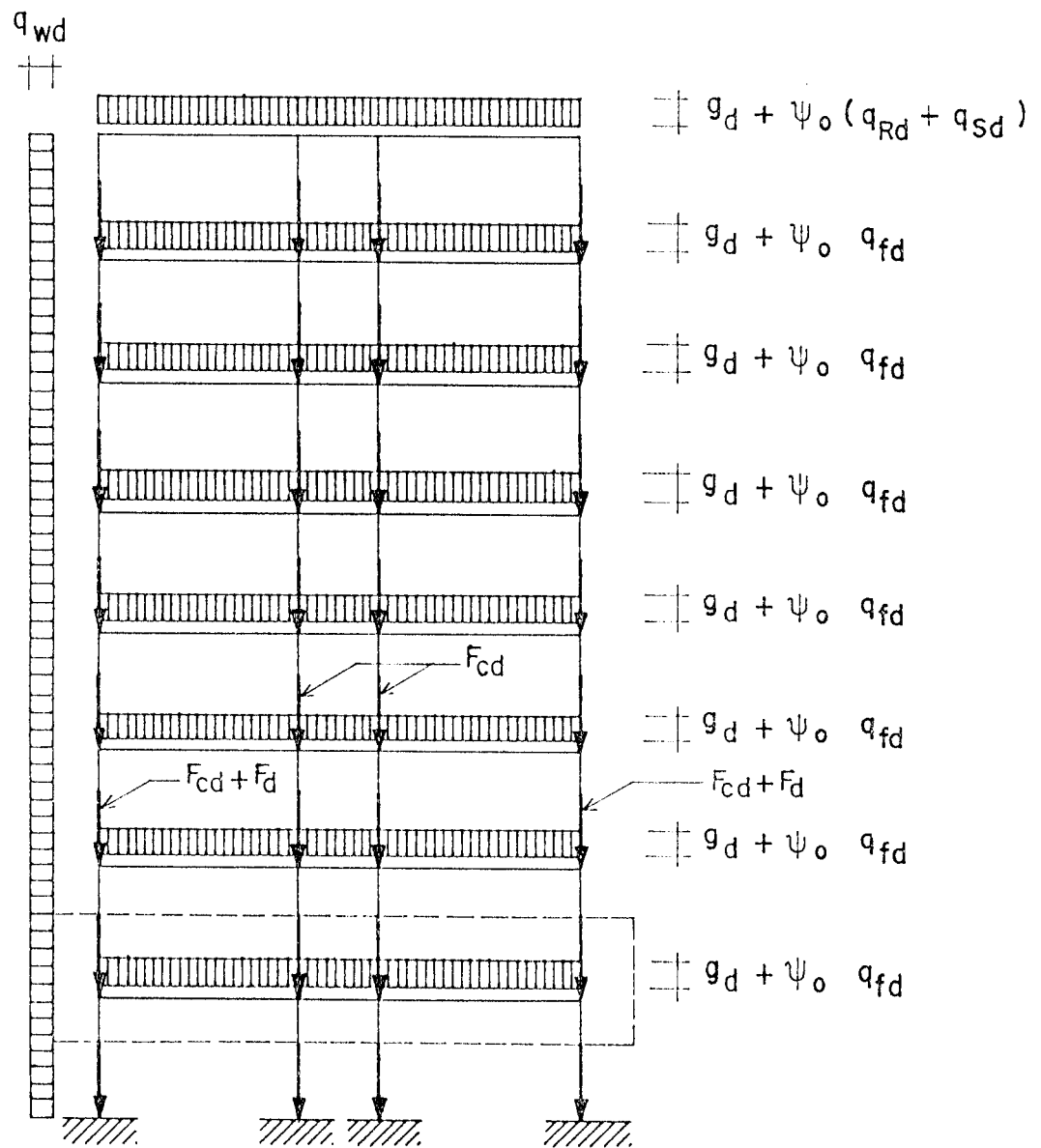


Fig. 6.7. - Carregamento Número 2.

- SEM CARGAS ACIDENTAIS VERTICAIS
- VALOR BÁSICO DA CARGA DE VENTO

CARGAS PERMANENTES			
g_d	22.68	F_d	43.20
F_{cd}	25.92		
CARGAS ACIDENTAIS			
		q_{wd}	4.98

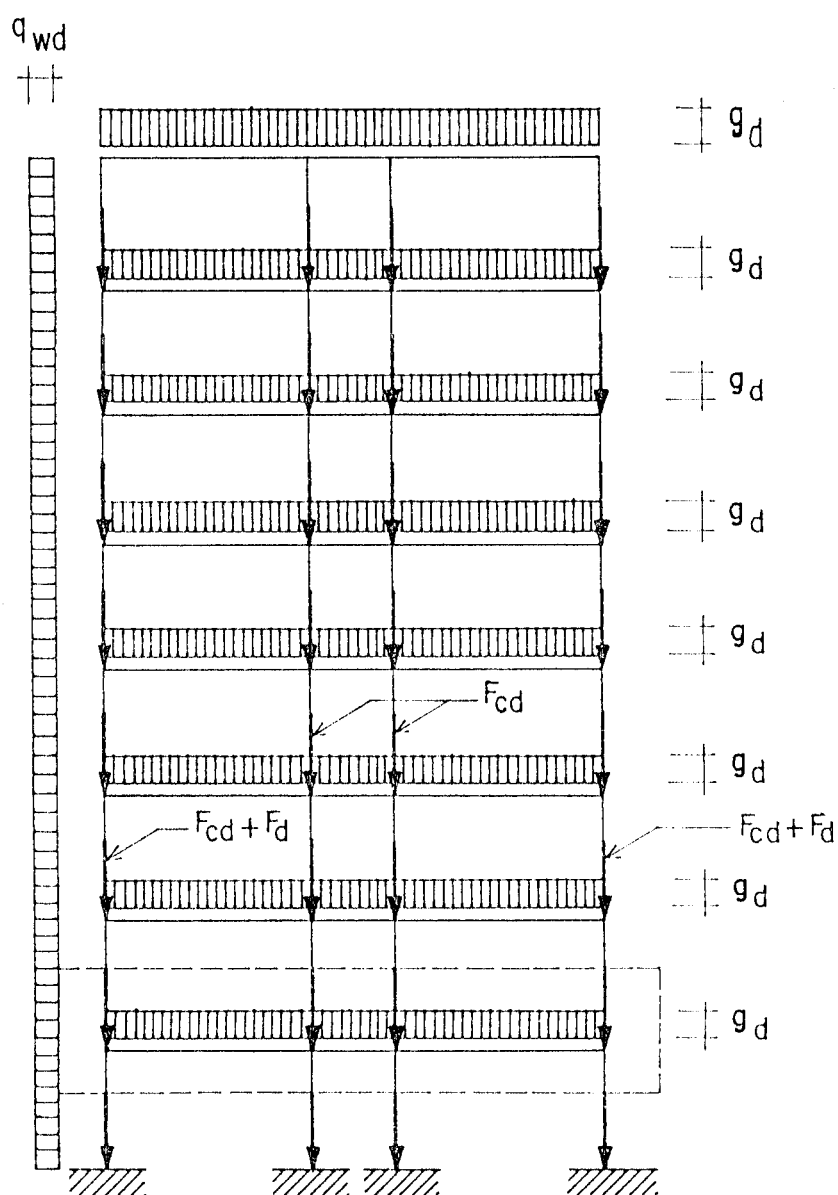
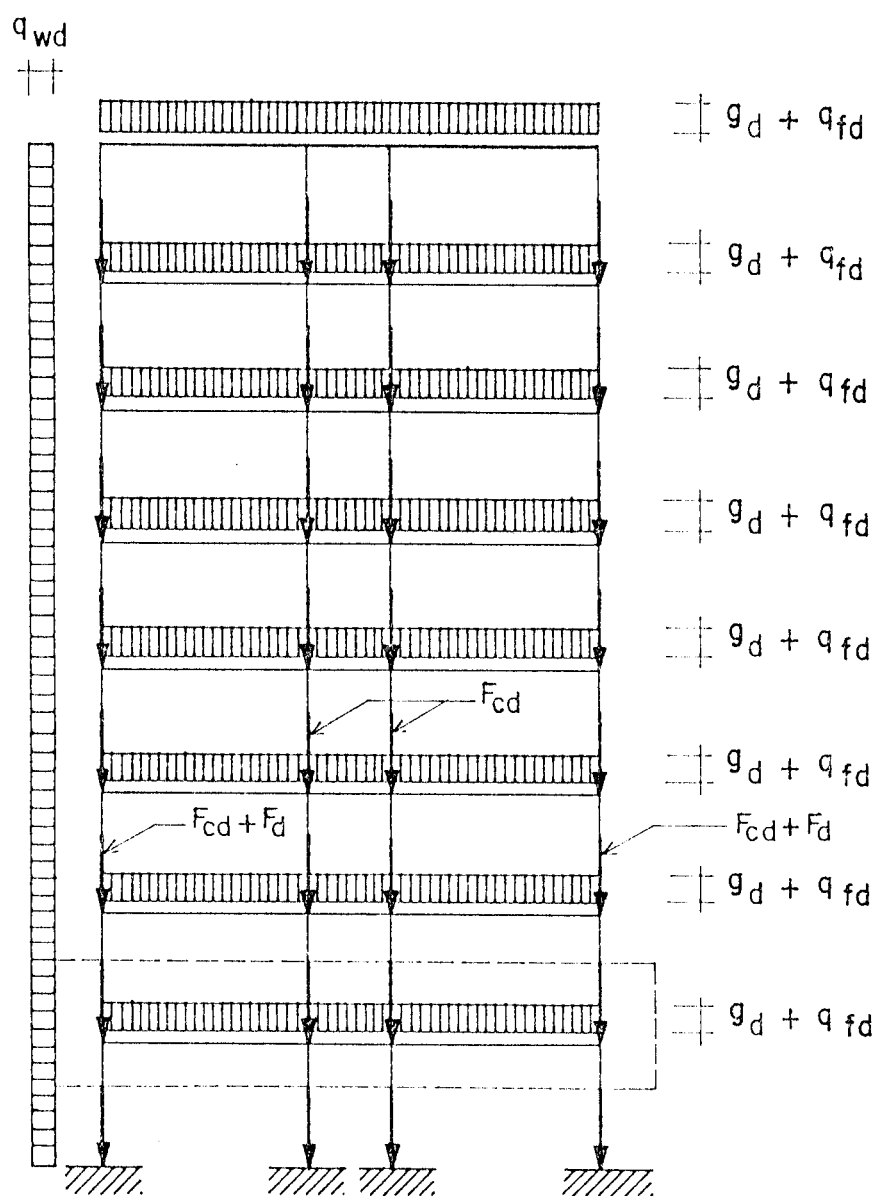


Fig. 6.8. - Carregamento Número 3.

- CARGAS DE SERVIÇO
(COMBINAÇÃO FREQUENTE)
- CARGA ACIDENTAL EM TODOS
OS ANDARES

CARGAS PERMANENTES			
g_d	18.90	F_d	36
F_{cd}	21.60		
CARGAS ACIDENTAIS			
q_{fd}	8.64	q_{wd}	0



$$q_{fd} = \psi_1 q_{fk} = 0.6 q_{fk}$$

Fig. 6.9. - Carregamento Número 4.

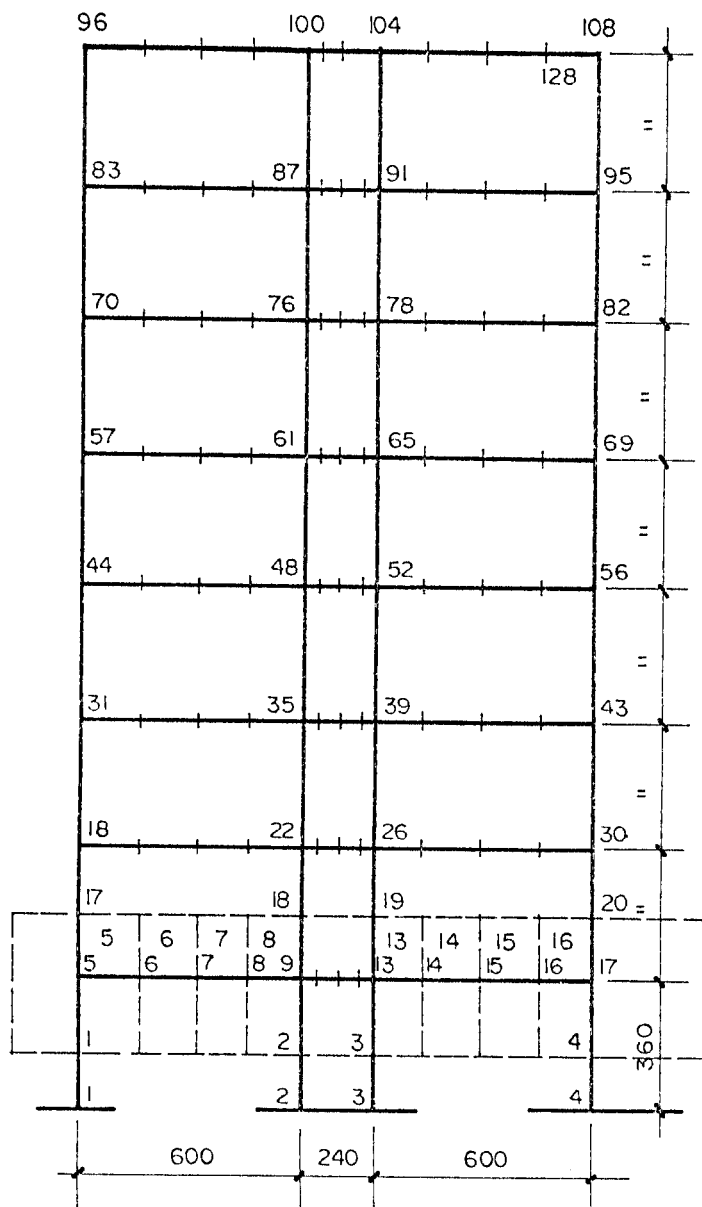


Fig. 6.10. - Rede.

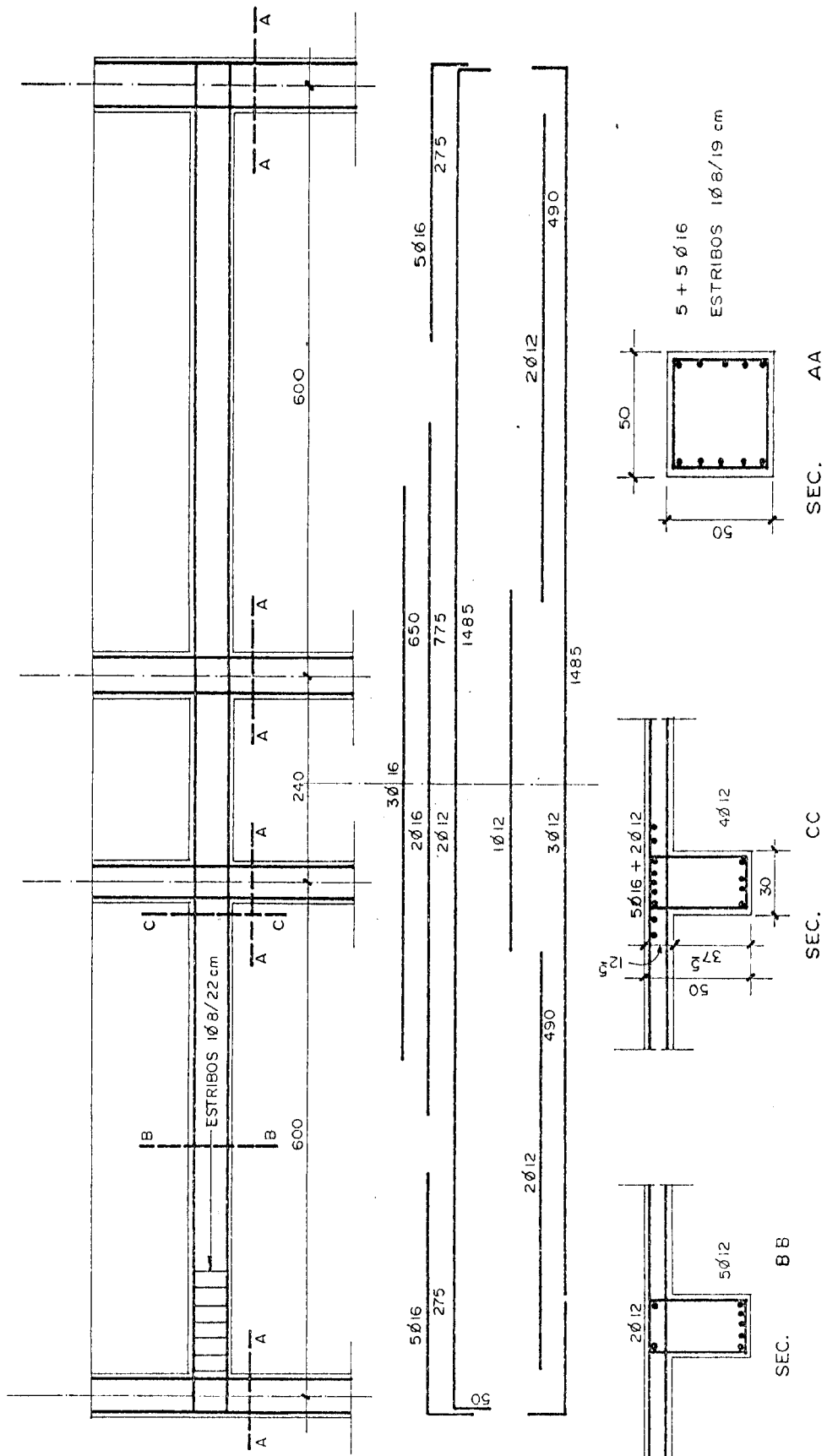


Fig. 6.11. - Armaduras (análise linear)

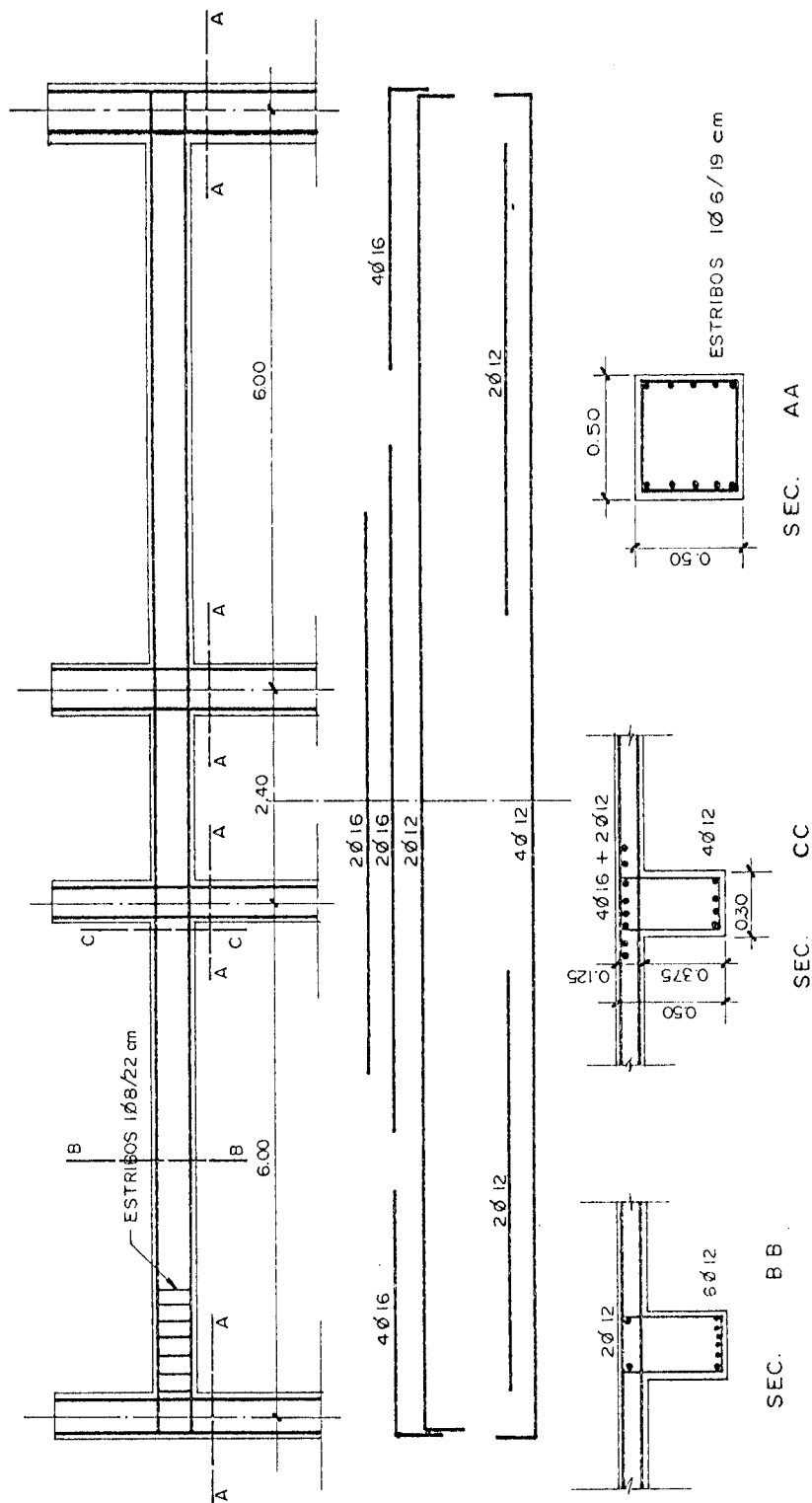


Fig. 6.12. - Armaduras (análise não-linear).

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS.

As tabelas 6.2 e 6.3 trazem uma comparação entre deslocamentos e momentos fletores obtidos via programa PORANLI com lei constitutiva segundo o MC - 90 do CEB e aqueles fornecidos por Cauvin. No que diz respeito aos deslocamentos, era esperado que fossem maiores que os obtidos pelo programa SICA NL, já que o modelo aqui adotado é menos rígido. Para o carregamento 1, mesmo assim pode-se observar a boa concordância entre os deslocamentos. No caso do carregamento 2, em que se considera a atuação da carga total de vento, já se observa uma discrepância acentuada (o maior deslocamento obtido pelo programa PORANLI é 26% maior que o correspondente apresentado por Cauvin).

Do exame da tabela 6.3 observa-se que os momentos máximos obtidos foram: 133,39 kNm contra 143,07 kNm obtidos pelo programa PORANLI.

Cauvin não apresenta resultados para o carregamento número 3. No caso do carregamento 4, fornece apenas o momento na seção 9 à esquerda: -78,28 kNm. Com o programa, obteve-se aqui: -87,198 kNm.

TABELA 6.2 _ DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO X GLOBAL (mm)

PAVIMENTO	SICA NL	PORANLI
8	12,913	13,641 *
	22,778	28,759 **
7	12,285	12,295
	21,635	27,275
6	11,375	11,787
	20,133	25,421
5	10,053	10,342
	17,647	22,753
4	8,482	8,494
	14,919	18,869
3	6,401	6,27
	11,024	13,936
2	4,036	3,811
	6,924	8,387
1	1,520	1,405
	2,557	2,982

* CARREGAMENTO 1

** CARREGAMENTO 2

TABELA 6.3 - MOMENTOS FLETORES - 1º PAVIMENTO

SEÇÃO	SICA NL	PORANLI
5	78,32	108,924 *
	20,41	63,237 **
7	-85,70	-65,188
	-71,08	-55,56
9 esq.	-132,34	-144,065
	-130,61	-137,342
9 dir.	-41,46	-14,767
	-69,00	-66,875
11	-5,30	-4,874
	-8,02	-3,384
13 esq.	-91,94	-66,379
	-115,39	-109,999
13 dir.	79,50	111,999
	-25,84	-83,009
15	-82,95	-64,202
	-65,74	-45,978
17	-133,39	-143,07
	132,49	136,754

* CARREGAMENTO 1

** CARREGAMENTO 2

VI.2.2 - EXEMPLO 5.

1. DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA.

Trata-se de um pórtico plano de concreto armado, originalmente apresentado no artigo de Corradi, De Donato e Maier⁴⁰. A mesma estrutura foi resolvida por outros autores, como Cauvin²⁴, Krishnamoorthy e Mosi⁷⁵, etc... (veja-se figura 6.13).

A estrutura será discretizada em 96 elementos (8 em cada viga e 4 elementos por pilar). Os autores não fornecem valores característicos dos materiais aço e concreto utilizados. Adotar-se-á aqui:

$$\begin{aligned} f_{ck} &= 20 \text{ MPa} & E_{cm} &= 29 \text{ GPa} & f_{ctm} &= 2,2 \text{ N/mm}^2 \\ E_s &= 200 \text{ GPa} \end{aligned}$$

(valores esses correspondentes aos utilizados por Krishnamoorthy e Mosi).

2. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS SEÇÕES.

2.1. ELEMENTOS DAS VIGAS.

Os cortes A-A e B-B (ver Fig. 6.13) mostram que os elementos das vigas do pórtico terão as mesmas características, as quais, portanto, serão aqui calculadas em conjunto. Obtém-se:

$$\alpha = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{29} = 6,896$$

$$A_1 = A_c + (\alpha - 1) A_s = 0,0883 \text{ m}^2$$

$$y_1 = \text{posição do c.g.} \cong 0,136 \text{ m}, \text{ a partir da borda inferior.}$$

$$x_1 = 0,28 - 0,136 = 0,144 \text{ m} \qquad I_1 = 0,000600 \text{ m}^4$$

$$W_1 = \frac{0,000600}{0,136} = 0,0044 \text{ m}^3$$

Considerando-se agora a seção totalmente fissurada, obtém-se:

$$c = 0,0706 \text{ m} = x_2 \qquad A = 0,0262 \text{ m}^2$$

$$x_{12} = 0,144 - 0,0706 = 0,0734 \text{ m}$$

$$I_2 = 0,000176 \text{ m}^4$$

2.2. ELEMENTOS DOS PILARES.

Analogamente, obtém-se:

$$A_1 = 0,0912 \text{ m}^2 \qquad Y_1 = 0,14 \text{ m} \qquad x_1 = 0,14 \text{ m}$$

$$I_1 = 0,000637 \text{ m}^4 \qquad W_1 = 0,00455 \text{ m}^3$$

$$x_2 = c = 0,0659 \text{ m} \qquad x_{12} = 0,0741 \text{ m}$$

$$I_2 = 0,000177 \text{ m}^4 \qquad A_2 = 0,0276 \text{ m}^2$$

3. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS.

A tabela 6.4 apresenta os resultados comparativos entre os valores obtidos por Cauvin²⁴ e os obtidos com o programa PORANLI. Cauvin apresenta apenas os deslocamentos de cada pavimento, sem apresentar os esforços.

Como era esperado, aqui também foram obtidos deslocamentos pouco maiores que os apresentados por Cauvin, visto ser o modelo aqui utilizado menos rígido. A concordância obtida nos deslocamentos pode ser considerada boa.

Com o objetivo de comparar esforços, procedeu-se a um segundo carregamento, com a carga uniformemente distribuída de 45 kN/m (em lugar da de 50 kN/m do artigo de Corradi), como a adotada em Krishnamoorthy e Mosi. Os resultados são apresentados na tabela 6.5; a comparação dos valores obtidos pelo programa PORANLI (com lei constitutiva segundo o MC - 90 do CEB) com aqueles fornecidos no artigo mostra a boa concordância dos mesmos; QPFRAM e CONFAP são dois

programas de cálculo automático relatados no artigo em questão.

Com a finalidade de comparação de valores, aqui foram mantidas as ações descritas no artigo (nos carregamentos não foram considerados os coeficientes relativos às condições de serviço).

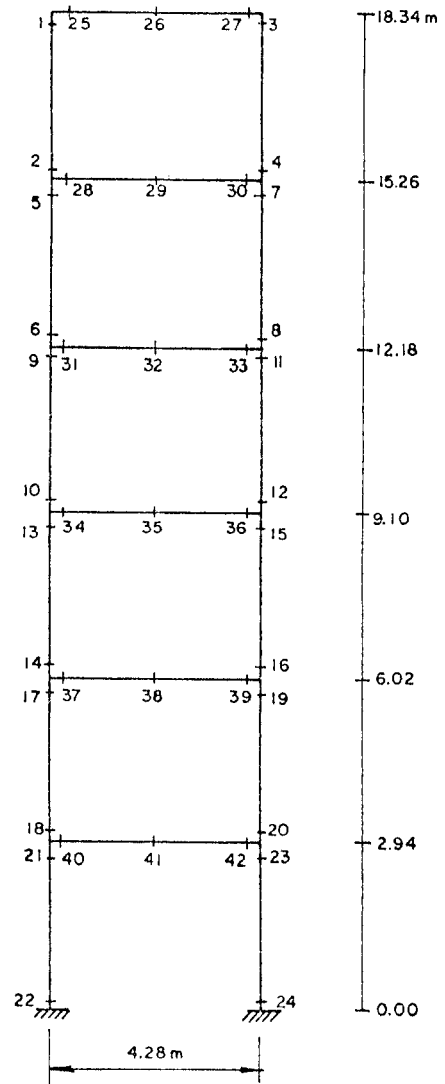
Nas seções 33, 36, 39 e 42 (ver tabela 6.5) ocorre o escoamento das armaduras; a conseqüente redistribuição de inércia, deslocamentos e esforços que então deve ocorrer ainda não pode ser implementada no programa; para isso, como já mencionado, deverá ser incluída na subrotina LEICON a consideração dos efeitos da passagem do Estádio II para o Estado Limite Último.

TABELA 6.4- DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO X GLOBAL
EXEMPLO 5

PAVIMENTO	SICA NL	PORANLI
6	52,65	56,9
5	48,77	51,78
4	42,148	43,51
3	32,417	32,69
2	19,655	19,893
1	6,759	7,079

TABELA 6.5_ MOMENTOS FLETORES (kNm)

SEÇÃO	QPFRAM	CONFAP	PORANLI
1	-48,98	-48,96	-48,808
2	34,40	34,40	33,895
3	60,25	60,25	58,701
4	-38,53	-38,53	-37,713
5	-16,09	-16,45	-19,113
6	27,38	27,71	26,663
7	38,61	39,08	38,734
8	-35,66	-35,85	-34,556
9	-15,02	-15,14	-19,523
10	25,19	25,29	26,778
11	46,58	46,70	47,827
12	-39,82	-39,99	-40,560
13	-10,04	-10,35	-15,501
14	18,15	18,25	19,749
15	46,82	46,96	48,583
16	-42,98	-43,28	-43,358
17	-11,77	-12,11	-19,753
18	8,39	8,17	16,832
19	46,49	46,49	48,895
20	50,67	50,79	58,708
21	24,42	25,22	25,776
22	-26,66	-27,38	-26,826
23	36,51	36,67	29,547
24	-49,44	-49,35	-54,572
25	48,98	48,96	48,807
26	50,58	48,44	48,172
27	-60,25	-60,25	-58,718
28	-50,49	-50,85	-53,020
29	40,66	38,81	37,297
30	-77,14	-77,61	-76,461
31	-42,39	-42,85	-46,194
32	42,15	40,34	37,895
33	-82,24	-82,55	-82,397
34	-35,24	-35,64	-42,276
35	43,54	41,74	-36,687
36	-86,64	-86,96	-89,161
37	-29,93	-30,36	-39,502
38	44,77	42,97	36,773
39	-89,47	-89,77	-92,258
40	-32,81	-33,38	-42,610
41	44,47	42,62	37,475
42	-87,19	-87,46	-88,255



CAPÍTULO VII.

CONCLUSÕES E PROPOSTAS.

VII.1 - CONCLUSÕES.

Este trabalho fundamenta-se no desenvolvimento de programas de cálculo automático para análise do comportamento em serviço de estruturas planas de concreto armado, levando em consideração os efeitos de não-linearidades física e geométrica.

Para a consideração da não-linearidade do material, o estudo baseia-se em relações momento-curvatura de um elemento de concreto armado submetido à flexão simples ou composta e que permitem levar em conta os efeitos de fissuração e do tempo (fluência e retração do concreto); os modelos dessas relações aqui tratados são os do MC - 78 e MC - 90 do CEB, além do modelo do ACI, baseado nos estudos de Branson.

Para a consideração da não-linearidade geométrica, estabelece-se uma formulação Lagrangeana e obtêm-se as matrizes elementais de rigidez tangente para um elemento de pórtico plano.

Com essa base, implementa-se uma técnica incremental para conduzir uma análise estrutural não-linear, com incrementos em número suficiente para que se possa acompanhar a evolução do processo de fissuração em cada elemento em que se subdivide a estrutura; uma vez fissurado, o elemento tem sua inércia atualizada (calculada com base nas relações momento-curvatura) e incorporada à matriz de rigidez, impondo-se então o equilíbrio no incremento considerado.

A linearização representada por essa técnica em geral leva a que a equação de equilíbrio não seja satisfeita, permanecendo uma diferença residual entre forças internas e externas. A eliminação desse resíduo e a consequente atualização dos deslocamentos e, posteriormente, dos esforços internos, é feita em passos pré-fixados associando-se ao modelo incremental um procedimento iterativo do tipo Quasi-Newton, conhecido na literatura técnica como atualização BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno).

O modelo assim descrito é, portanto, basicamente diferente daqueles considerados mais exatos e em que cada elemento é subdividido em camadas de módulos de elasticidade diferentes, com o equilíbrio entre forças internas e externas sendo atingido por iteração.

A aplicação desse modelo à análise de vigas e pórticos planos conduz a resultados que, quando comparados àqueles existentes e testados por outros programas, mostram ser o método aqui proposto suficientemente abrangente, podendo, na versão atual, descrever o comportamento da estrutura nas fases elástica e fissurada (comportamento em serviço). Há potencialidades ainda a serem exploradas, como se verá no item seguinte.

O autor considera que o objetivo inicial do trabalho tenha, então, sido atingido, crendo ter demonstrado a validade do método proposto, apesar dos poucos resultados obtidos.

VII.2 - PROPOSTAS DE DESENVOLVIMENTO.

O que se obteve neste trabalho é apenas a parte inicial de um estudo que pode ser bem mais abrangente. Há uma série de medidas a serem tomadas, para melhorar o funcionamento dos programas ainda no estágio em que os mesmos se encontram, o que seria um trabalho a ser feito pelo próprio autor. Por exemplo, a inclusão de um módulo de pré-processamento que gerasse automaticamente a malha de elementos e os subdividisse em subelementos (nos moldes seguidos por Cauvin²⁵), providência esta que deverá contribuir para diminuir o tempo computacional ainda elevado (o pórtico do exemplo 4 leva, na versão atual, cerca de 20 minutos rodando para 27 etapas de carregamento; o modelo de Cauvin gasta 12 minutos para 10 etapas de carga); também pode ser incorporada aos programas uma rotina de geração das características geométricas, ainda calculadas manualmente e fornecidas na rotina de dados.

A partir desse ponto, as possibilidades de desenvolvimento e aplicação do método são amplas e podem ser exploradas por outros pesquisadores que se interessem pelo assunto.

No caso do programa para análise não-linear física de

vigas (VIGANLI), pode-se citar:

- . o equacionamento (ver Capítulo II) está direcionado para a introdução de armadura ativa (protensão); pode-se ainda estendê-lo para a análise de pórticos indeslocáveis (como os utilizados em pontes, por exemplo);

- . o programa pode ser utilizado de imediato, para, por exemplo, servir a um estudo paramétrico nos moldes seguidos por Câmara²¹, o que pode levar ao aperfeiçoamento dos modelos de cálculo existentes;

- . a introdução e testes de outras relações momento-curvatura existentes, o que pode levar ao aperfeiçoamento do próprio método, embora se deva destacar que os resultados conseguidos (principalmente com o CEB - 90) tenham sido satisfatórios.

No caso do programa para análise não-linear física e geométrica de pórticos, pode-se citar:

- . incorporação de técnicas de subestruturação com o objetivo de diminuir o tempo computacional, para o que se indica uma extensa bibliografia (ver item III.2);

- . consideração da perda de rigidez também nos nós, esta uma tendência ainda pouco explorada, a julgar pelo pequeno número de publicações a respeito.

Há também aperfeiçoamentos a serem buscados para ambos os programas, como por exemplo a inclusão do terceiro ramo na relação momento-curvatura (veja-se as figuras 2.36 e 2.37) ou procedimento equivalente (método das rotações impostas, como seguido por Cauvin), que permita acompanhar o comportamento da estrutura após ocorrer o escoamento da armadura em alguma seção.

Por fim, pode-se citar como viável a própria extensão do modelo a outras estruturas, como grelhas e pórticos espaciais, por exemplo. Pode-se ainda estender o modelo para a análise de estruturas metálicas.

BIBLIOGRAFIA.

- 01 - AGUADO, A., MARÍ, A., MIRAMBELL, E. Estudio del comportamiento de la estructura del edificio de control de la Central Nuclear de Ascó - Grupo II. Hormigon y Acero, Madrid, n. 156, p. 127-144, 1985.
- 02 - AMARAL FILHO, E. M. do. Deformação lenta. In: Colóquio Sobre Retração e Deformação Lenta do Concreto, São Paulo, 22-24 maio. 1978. p. 01-44.
- 03 - AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Building code requirements for reinforced concrete (ACI 318M-83). Detroit, 1985. (metric version)
- 04 - ARAÚJO, J. M. Optimization of Newton-Raphson methods in RC nonlinear analysis. Computers & Structures, v.33, n.3, p. 735-741, 1989.
- 05 - ASSAN, A. E. Matriz de rigidez de elemento finito tridimensional de viga para análise não linear física e geométrica. In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 11., Rio de Janeiro, 29-31 out. 1990. Anais. Rio de Janeiro: COPPE-UFRJ/AMC, 1990. v.2, p. 707-716
- 06 - ASSAN, A. E. Vigas de concreto armado com não linearidade física. In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 11., Rio de Janeiro, 29-31 out. 1990. Anais. Rio de Janeiro: COPPE-UFRJ/AMC, 1990. v.2, p. 741-749
- 07 - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). Projeto de estruturas de concreto protendido: NBR - 7197. Rio de Janeiro, 1989.
- 08 - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). Ações e segurança nas estruturas: NBR-8681. Rio de Janeiro, 1984.

- 09 - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). Projeto e execução de obras de concreto armado: NBR-6118. Rio de Janeiro, 1980.
- 10 - BALAKRISHNAN, S., ELWI, A. E., MURRAY, D. W. Effect of modeling on NLFE analysis of concrete structures. Journal of Structural Engineering, v.114, n.7, p. 1467-1487, July, 1988.
- 11 - BALAKRISHNAN, S., MURRAY, D. W. Concrete constitutive model for NLFE analysis of structures. Journal of Structural Engineering, v.114, n.7, p. 1449-1466, July, 1988.
- 12 - BATHE, K. J. Finite element procedures in engineering analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1982. 735p.
- 13 - BATHE, K. J., CIMENTO, A. P. Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.22, n.1, p. 59-85, April, 1980.
- 14 - BATHE, K. J., DVORKIN, E.N. On the automatic solution of nonlinear finite element equations. Computers & Structures, v.17, n.5-6, p. 871-879, 1983.
- 15 - BATHE, K. J. et alii. Nonlinear analysis of concrete structures. Computers & Structures, v.32, n.3/4, p. 563-590, 1989.
- 16 - BAZANT, Z. P., PRASANNAN, S. Solidification theory for concrete creep - I. Formulation. Journal of Engineering Mechanics, v.115, n.8, p. 1691-1703, Aug. 1989.

- 17 - BAZANT, Z. P., PRASANAN, S. Solidification theory for concrete creep - II. Verification and application. Journal of Engineering Mechanics, v.115, n.8, p. 1705-1725, Aug. 1989.
- 18 - BRASIL, R.M.L.R.F. Non-linearidade geométrica na dinâmica de estruturas aperticadas planas: um tratamento pelo método dos elementos finitos. São Paulo, 1990. 211p. Tese (Doutorado em Engenharia) - Escola Politécnica-USP.
- 19 - BREYSSE, D., MAZARS, J. Simplified approach of nonlinearity in R-C beams. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 114, n.2, p.251-268, Feb. 1988.
- 20 - CALVI, G. M., GOBETTI, A. Numerical models for the non-linear analysis of prestressed concrete frames. CEB: Bulletin D'Information, n.178/179, p. 213-224, 1987.
- 21 - CAMARA, J.M.M.N. Comportamento em serviço de estruturas de betão armado e pré-esforçado. Lisboa, 1988. 381p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Instituto Superior Técnico.
- 22 - CAROL, I., MURCIA, J. Nonlinear time-dependent analysis of planar frames using an 'exact' formulation - I. Theory. Computers & Structures, v.33, n.1, p. 79-87, 1989.
- 23 - CAROL, I., MURCIA, J. Nonlinear time-dependent analysis of planar frames using an 'exact' formulation - II. Computer implementation for R.C. structures and examples. Computers & Structures, v.33, n.1, p. 89-102, 1989.
- 24 - CAUVIN, A. Analisi non lineare di telai piani in cemento armato. Gionarle del Genio Civile, v.116, n.1-2-3, p. 47-66, 1978.

- 25 - CAUVIN, A. Non linear analysis of a multistorey sway frame according to CEB model code. CEB: Bulletin D'Information, n.134, p. 83-107, abr. 1979.
- 26 - CAUVIN, A. Simulation of cracked behaviour due to flexure shear and torsion in non-linear analysis of monodimensional statically indeterminate structures. CEB: Bulletin D'Information, n.178/179, p. 225-242, 1987.
- 27 - CAUVIN, A. Studio di telai piani in regime elasto-plastico e di grandi spostamenti. Costruzioni Metalliche, n.2, p. 88-102, 1975.
- 28 - CEDOLIN, L., NILSON, A. H. A convergence study of iterative methods applied to finite element analysis of reinforced concrete. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.12, p. 437-451, 1978.
- 29 - CERVENKA, V. Constitutive model for cracked reinforced concrete under general load histories. CEB: Bulletin D'Information, n.178/179, p. 157-167, 1987.
- 30 - CHAJES, A., CHURCHILL, J. E. Nonlinear frame analysis by finite element methods. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.113, n.6, p. 1221-1235, June, 1987.
- 31 - CHEN, W. F. Plasticity in reinforced concrete. New York: McGraw-Hill, 1982. 474p.
- 32 - CHEN, W. F., HAN, D. J. Plasticity for structural engineers. New York: Springer-Verlag, 1988. 606p.
- 33 - CHEN, W. F., LUI, E. M. Structural stability: theory and implementation. New York: Elsevier, 1987. 490p.

- 34 - COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON (CEB). CEB design manual on structural effects of time-dependent behaviour of concrete. Saint-Saphorin: Georgi Publishing, 1984. 391p.
- 35 - COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. CEB: Bulletin D'Information, ns.203-205, July, 1991.
- 36 - COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-Manual on cracking and deformations. CEB: Bulletin D'Information, n. 158E, 1985.
- 37 - COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Code Modèle CEB-FIP pour les structures en béton. CEB: Bulletin D'Information, n.124/125, part. 2, 1978.
- 38 - COPE, R. J., RAO, P. V., EDWARDS, K. R. Non-linear finite element analysis techniques for concrete slabs. In: TAYLOR, C., HINTON, E., OWEN, D.R.J. (eds) Numerical methods for non-linear problems. Swansea, UK: Pineridge Press, 1980. v.1, p. 445-470.
- 39 - CORRADI, L. , POGGI, C. A refined finite element model for the analysis of elastic-plastic frames. International Journal of Numerical Methods in Engineering, v.20, p. 2155-2174, 1984.
- 40 - CORRADI, L., DONATO, O., MAIER, G. Inelastic analysis of reinforced concrete frames. Journal of the Structural Division, v. 100, n.9, p. 1925-1943, sept. 1974.
- 41 - CORRÊA, M.R.S. Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios. São Carlos, 1991. 331p. Tese (Doutorado) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos-USP.

- 42 - COSENZA, E. Finite element analysis of reinforced concrete elements in a cracked state. Computers & Structures, v.36, n.1, p. 71-79, 1990.
- 43 - CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through". Computers & Structures, v.13, p. 55-62, 1981.
- 44 - CRISFIELD, M. A. Solution procedures for non-linear structural analysis. In: HINTON, E., OWEN, D.R.J., TAYLOR, C. (eds) Recent advances in non-linear computational mechanics. Swansea, UK: Pineridge Press, 1982. p. 1-39
- 45 - DE RHOECK, G., VAN LAETHEM, M., CHYI-HORNG, S. Multi-level substructuring in the elasto-plastic domain. Computers & Structures, v.31, n.5, p. 757-765, 1989.
- 46 - DEBERNARDI, P. G. Behavior of concrete structures in service. Journal of Structural Engineering, v.115, n.1, p. 32-50, Jan. 1989.
- 47 - DESAI, C. S., ABEL, J. F. Techniques for nonlinear analysis. In:_____. Introduction to the finite element method: a numerical method for engineering analysis. New York: Van Nostrand Reinhold, 1972. p. 215-244
- 48 - DODDS JR., R. H., LOPEZ, L. A. Substructuring in linear and nonlinear analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.15, p. 583-597, 1980.
- 49 - EBNER, A. M., UCCIFERRO, J. J. A theoretical and numerical comparison of elastic nonlinear finite element methods. Computers & Structures, v.2, p. 1043-1061, 1972.
- 50 - ELBADRY, M. M., GHALI, A. Serviceability design of continuous prestressed concrete structures. PCI Journal; v.34, n.1 p. 2-39, jan/fev, 1989.

- 51 - ELBADRY, M. M., GHALI, A. User's manual and computer program CPF: cracked plane frames in prestressed concrete: version 3.0. Calgary: University of Calgary, 1990. 82p. (Research Report, CE85-2)
- 52 - EL-METWALLY, S. E., CHEN, W.-F. Nonlinear behavior of R/C frames. Computers & Structures, v.32, n.6, p. 1203-1209, 1989.
- 53 - ELLWANGER, R. J. Aplicação da subestruturação na análise de estruturas com não-linearidade física localizada. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 25., Porto Alegre, RS, Brasil, 11-15 nov. 1991. Anais. Porto Alegre: CPGEC-UFRGS, 1991. v.1, p. 81-92
- 54 - FAVRE, R., GHALI, A., Effets du fluage et du retrait sur les structures en béton. Lausanne: Biblioteque Centrale, 1980. 5p. (Publication, 186)
- 55 - FIGUEIREDO, L. H., GATTASS, M. A database management system for efficient storage of structural loadings. Computers & Structures, v.32, n.5, p.1025-1034, 1989.
- 56 - FORDE, B. W. R., STIEMER, S. F. Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. Computers & Structures, v.27, n.5, p.625-630, 1987.
- 57 - GARCÍA, A. Analisis no lineal de marcos de hormigon armado: metodo de Jankó. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO DE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 5., Salvador, Ba, Brasil, out. 1984.
- 58 - GELFI, P., GIURIANI, E. Effetti della fessurazione sugli appoggi in campata nelle travi continue di c.a. La Prefabbricazione, Roma, v.22, n.11/12, p. 19-30, nov./dic. 1986.

- 59 - GHALI, A., ELBADRY, M. M. User's manual and computer program crack: version 2.0 University of Calgary, 1991. 106p. (Research Report, CE85-1).
- 60 - GHALI, A., FAVRE, R. Concrete structures: stresses and deformations. London/New York: Chapman and Hall, 1986. 352p.
- 61 - GOPALAKRISHNA, H. S., GREIMANN, L. F. Newton-Raphson procedure for the sensitivity analysis of nonlinear structural behavior. Computers & Structures, v.30, n.6, p. 1263-1273, 1988.
- 62 - HAISLER, W. E., STRICKLIN, J. A., STEBBINS, F. J. Development and evaluation of solution procedures for geometrically nonlinear structural analysis. AIAA Journal, v.10., n.3, p. 264-272, March, 1972.
- 63 - HAN, T. -Y., ABEL, J. F. Adaptive substructuring techniques in elasto-plastic finite element analysis. Computers & Structures, v.20., n.1-3, p. 181-192, 1985.
- 64 - HINTON, E., OWEN, D. R. J. An introduction to finite element computations. Swansea, UK: Pineridge Press, 1979. 385p.
- 65 - HSIAO, K. M., HOU, F. Y. Nonlinear finite element analysis of elastic frames. Computers & Structures, v.26, n.4, p. 693-701, 1987.
- 66 - HSIAO, K. M., HOU, F. Y., SPILIOPOULOS, K. V. Large displacement analysis of elasto-plastic frames. Computers & Structures, v.28, n.5, p. 627-633, 1988.
- 67 - JETTEUR, Ph. et al. Improved nonlinear finite elements for oriented bodies using an extension of Marguerre's theory. Computers & Structures, v.17, n.1, p. 129-137, 1983.

- 68 - JEUNETTE, J. -P., LASCHET, G., IDELSOHN, S. An effective automatic incremental/iterative method for static nonlinear structural analysis. Computers & Structures, v.32, n.1, p. 125-135, 1989.
- 69 - JORDAN S-M., R., KREGER, M. E. Modelacion de uniones viga-columna de porticos de hormigon armado. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 25., Porto Alegre, RS, Brasil, 11-15 nov. 1991. Anais. Porto Alegre: CPGEC-UFRGS, 1991. v.1, p. 247-258
- 70 - KALEVRAS, V. C. Aids for NL analysis and design of concrete frames. CEB: Bulletin D'Information, n.153, p. 117-157, abr. 1982.
- 71 - KANG, Y. J. Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced and prestressed concrete frames. Berkeley, 1977. PhD Dissertation, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, UC-SESM Report No. 77-1
- 72 - KANG, Y. J., SCORDELIS, A. C. Nonlinear analysis of prestressed concrete frames. Journal of the Structural Division, ASCE, v.106, n.2, p. 445-462, Feb. 1980.
- 73 - KAO, R. A comparison of Newton-Raphson methods and incremental procedures for geometrically nonlinear analysis. Computers & Structures, v.4, p. 1091-1097, 1974.
- 74 - KASSIN, A. M. A., TOPPING, B. H. V. The theorems of geometric variation for nonlinear finite element analysis. Computers & Structures, v.25, n.6, p. 877-893, 1987.
- 75 - KRISHNAMOORTHY, C. S., MOSI, D. R. CONFAP: a computer program for inelastic analysis of reinforced concrete framed structures. Computers & Structures, v.12, p. 677-687, 1980.

- 76 - LA TEGOLA, A., OMBRES, L., TOTARO, N. Sulla fessurazione delle travi inflesse in c.a. confronti teorici e sperimentali. Giornale del Genio Civile, v.122, n. 7-8-9, p. 227-238, 1984.
- 77 - LEE, S.H. Rudimentary considerations for effective Quasi-Newton updates in nonlinear finite element analysis. Computers & Structures, v.33, n.2, p.463-476, 1989.
- 78 - LEONHARDT, F. Construções de concreto: verificação da capacidade de utilização. Rio de Janeiro: Interciência, 1979. v.4.
- 79 - LUENBERGER, D. G. Linear and nonlinear programming. 2.ed. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1984. 491p.
- 80 - MACCHI, G. Nonlinear analysis of concrete structures code problems and applications. CEB: Bulletin D'Information, n. 134, p. 177-214, abr. 1979.
- 81 - MACHADO, C. P. Sugestões para um aprimoramento do método aproximado de avaliação de flechas de peças de concreto armado da NBR 6118-78. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 1., São Paulo, 22-24 ago. 1989. Anais. v.2, p. 659-689.
- 82 - MACHADO, C. P. Tensões, deformações e deslocamentos em estruturas de concreto armado e protendido. São Paulo, 1989. 4v. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola Politécnica-USP.
- 83 - MACKERLE, J. Survey of general purpose finite element and boundary element computer programs for structural and solid mechanics applications. In: NIKU-LARI, A. Structural analysis systems: software, hardware, capability, compatibility, applications. Oxford: Pergamon Press, 1986. v.1, p. 257-298.

- 84 - MALLETT, R. H., MARCAL, P. V. Finite element analysis of nonlinear structures. Journal of the Structural Division, ASCE, v.94, n.9, p.2081-2105, Sept. 1968.
- 85 - MANCINI, G. On the procedure to be adopted for the non-linear analysis of monodimensional elements in reinforced concrete. CEB: Bulletin D'Information, n.178/179, p. 203-211, 1987.
- 86 - MARÍ, A. R. Aplicación de los elementos finitos al análisis no lineal de pórticos tridimensionales de hormigón armado y pretensado. Hormigón y Acero, Madrid, n. 156, p. 63-82, 1985.
- 87 - MARÍ, A. R. Ductilidad seccional y redistribución de esfuerzos en estructuras hiperestáticas de hormigón armado y pretensado. Hormigón y Acero, Madrid, n.163, p.31-54, 1987.
- 88 - MARÍ, A. R. Estudio comparativo entre diversos metodos de analisis no lineal de estructuras reticulares de hormigón armado y pretensado: estado actual y lineas de futura actuación. Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña. 45p.
- 89 - MARÍ, A. R. Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames. Berkeley: University of California, Department of Civil Engineering, 1984. 142p. Report no. UCB/SESM-84/12
- 90 - MARÍ, A. R., CHAN, E. C., SCORDELIS, A. C. Nonlinear material, geometric and time dependent analysis of 3-D reinforced and prestressed concrete frames. In: TAYLOR, C., HINTON, E., OWEN, D.R.J. (eds.) Numerical methods for non-linear problems. Swansea, UK: Pineridge Press, 1984. v.2, p. 339-361

- 91 - MARÍ, A. R., MURCIA, J. Análisis en segundo orden de estructuras de hormigón armado. Hormigón y Acero, Madrid, n.145, p. 49-64, 1982.
- 92 - MARQUES, S. P. C., CREUS, G.J. Análise não linear física e geométrica de pórticos espaciais. In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 11., Rio de Janeiro, 29-31 out. 1990. Anais. Rio de Janeiro: COPPE-UFRJ/AMC, 1990. v.1, p. 13-24
- 93 - MATTHIES, H., STRANG, G. The solution of nonlinear finite element equations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.14, n.11, p. 1613-1626, 1979.
- 94 - MAZZILLI, C. E. N. Considerações sobre não-linearidade geométrica em estruturas reticuladas planas. São Paulo: Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações-EPUSP, 1989. (BT/PEF-8701)
- 95 - MEEK, J. L., LOGANATHAN, S. Geometric and material non-linear behaviour of beam-columns. Computers & Structures, v.34, n.1, p. 87-100, 1990.
- 96 - MENEGOTTO, M., VIA, G. Check of the proposed design rules of the CEB-FIP draft "Model Code for concrete structures": trials and comparison calculations. CEB: Bulletin D'Information, n.134, p. 141-174, abr. 1979.
- 97 - MENEZES, F. A., ARCARO, V. Pórticos planos: grandes deslocamentos e deformações. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 25., Porto Alegre, RS, Brasil, 11-15 nov. 1991. Anais. Porto Alegre: CPGEC-UFRGS, 1991. v.1, p.69-80

- 98 - MIRAMBELL, E., MARI, A. R., AGUADO, A. A simple method for nonlinear analysis of concrete structures: application to a real case. In: TAYLOR, C., HINTON, E., OWEN, D.R.J. (eds.) Numerical methods for non-linear problems. Swansea, UK: Pineridge Press, 1984. v.2, p. 326-338
- 99 - MO, Y. L. Moment redistribution in reinforced concrete frames. ACI Journal, v.83, n.4, p. 577-587, July-Aug. 1986.
- 100 - MOTTA, F. Teoria generalizzata della fessurazione nelle travi in cemento armato. Giornale del Genio Civile, v.123, n.4-5-6, p. 119-132, 1985.
- 101 - NAGTEGAAL, J. C. Some recent developments in combined geometric and nonlinear finite element analysis. In: HINTON, E., OWEN, D.R.J., TAYLOR, C. (eds.) Recent advances in non-linear computational mechanics. Swansea, UK: Pineridge Press, 1982. p. 87-117
- 102 - NGO, D., SCORDELIS, A. C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. ACI Journal, v.64, n.3, p. 152-163, 1967.
- 103 - NIELSEN, M. P. Limit analysis and concrete plasticity. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1984. 420p.
- 104 - NIKU-LARI, A. Structural analysis systems: software, hardware, capability, compatibility, applications. Oxford: Pergamon Press, 1986. 6v.

- 105 - ORAN, C. Tangent stiffness in space frames. Journal of the Structural Division, ASCE, v.99, n.6, p. 987-1001, June 1973.
- 106 - OWEN, D.R.J., GOMES, C.M.B. Some recent developments in solution techniques for nonlinear finite element problems. Swansea: Department of Civil Engineering, Univ. College of Swansea, 1984. p. 137-153
- 107 - OWEN, D.R.J., GONÇALVES F., O.J.A. Substructuring techniques in material nonlinear analysis. Computers & Structures, v.15, n.3, p. 205-213, 1982.
- 108 - OWEN, D. R. J., HINTON, E. Finite elements in plasticity: theory and practice. Swansea, UK: Pineridge Press, 1980. 594p.
- 109 - PALAZOTTO, A. N., MERCER, J. G. Finite element elastic-plastic analysis of cracks. Computers & Structures, v.33, n.2, p. 363-373, 1989.
- 110 - PETERSON, A., PETERSSON, H. On finite element analysis of geometrically nonlinear problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.51, p. 277-286, 1985.
- 111 - PIMENTA, P. M. Análise não-linear de arcos. São Paulo: Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações-EPUSP, 1988. 14p. (BT/PEF-8816)
- 112 - PIMENTA, P. M. Análise não-linear de pórticos planos. São Paulo: Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações-EPUSP, 1986. (BT/PEF-8611)

- 113 - PIMENTA, P. M. Análise não-linear de treliças espaciais. São Paulo: Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações-EPUSP, 1986. (BT/PEF-8604)
- 114 - PIMENTA, P. M. Aspectos da análise não linear de estruturas reticuladas. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 7., São Carlos, 4-7 nov. 1986. Anais. São Carlos: EESC-USP, 1986. v.1, p. 449-464
- 115 - PIMENTA, P. M. Derivation of tangent stiffness matrices of simple finite elements: I. Straight bar elements. São Paulo: Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da EPUSP, 1989. 34p. (BT/PEF-8912)
- 116 - PIMENTA, P. M. Non-linear analysis of plane frames: I. Quasi-static analysis of plane frames with initially curved members. São Paulo: Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da EPUSP, 1989. 20p. (BT/PEF-8910)
- 117 - PIMENTA, P. M., MAZZILLI, C. E. N. Minima correctio methodi inveniendi lineas curvas elasticici. São Paulo: Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da EPUSP, 1986. (BT-PEF-8613)
- 118 - PIMENTA, P.M., SOLER, J.G.M. Estabilidade de pórticos planos de concreto armado. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 1., São Paulo, 22-24 ago. 1989. Anais. v.2, p. 501-527
- 119 - POWELL, G. H. Theory of nonlinear elastic structures. Journal of the Structural Division, ASCE, v.95, n.12, p.2687-2701, Dec. 1969.

- 120 - PROENÇA, S. P. B. Noções básicas de reologia. São Carlos: EESC-USP, 1986 27p. (Publ. 045/86)
- 121 - PROENÇA, S. P. B. Notas sobre análise não-linear física de estruturas - Parte 1: Teoria da plasticidade e técnicas numéricas. São Carlos: EESC-USP, 1989. 110p.
- 122 - PROENÇA, S. P. B. Sobre modelos matemáticos do comportamento non-linear do concreto: análise crítica e contribuições. São Carlos, 1988. 330p. Tese (Doutorado) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
- 123 - PRZEMIENIECKI, J. S. Theory of matrix structural analysis. New York: McGraw-Hill, 1968. 468p.
- 124 - RAHMAN, H. H. A., HINTON, E., HUG, M. M. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete slab and slab-beam structures. In: TAYLOR, C., HINTON, E., OWEN, D.R.J. (eds) Numerical methods for non-linear problems. Swansea, UK: Pineridge Press, 1980. v.1, p. 493-502
- 125 - RAMAKRISHNAN, V., BALAKRISHNAN, S. Elastic and limit state deformations of reinforced concrete space frames. The Indian Concrete Journal, v.50, n.3, p. 85-91, March, 1976.
- 126 - RAMM, E. The Riks/Wempner approach: an extension of the displacement control method in nonlinear analyses. In: HINTON, E., OWEN, D.R.J., TAYLOR, C. (eds.) Recent advances in non-linear computational mechanics. Swansea, UK: Pineridge Press, 1982. p. 63-86
- 127 - SAKAI, K., KAKUTA, Y. Moment curvature relationships of reinforced concrete members subjected to combined bending and axial force. ACI JOURNAL, p. 189 - 194, may, june, 1980.

- 128 - SCORDELIS, A.C. Computer models for nonlinear analysis of reinforced and prestressed concrete structures. PCI Journal, v.29, n.6, p. 116-135, Nov.-Dec. 1984.
- 129 - SHEU, C.H. et al. Multi-level substructuring and an experimental self-adaptive Newton-Raphson method for two-dimensional non-linear analysis. Computers & Structures, v.33, n.2, p. 489-497, 1989.
- 130 - SHI, G., ATLURI, S. N. Elasto-plastic large deformation analysis of space-frames: a plastic-hinge and stress-based explicit derivation of tangent stiffnesses. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.26, p. 589-615, 1988.
- 131 - SHI, G., ATLURI, N. Static and dynamic analysis of space frames with nonlinear flexible connections. International Journal for numerical methods in engineering, v.28, p. 2635-2650, jan. 1989
- 132 - ŠMERDA, Z., KRÍSTEK, V. Creep and shrinkage of concrete elements and structures. Amsterdam: Elsevier, 1988. 296p.
- 133 - SOLUTION strategies for non-linear structural equations. CEB: Bulletin D'Information, n.210, p. 277-295, July, 1991.
- 134 - SOUZA LIMA, V. M., VENANCIO FILHO, F. A noção de rigidez tangente no estudo da não-linearidade geométrica de estruturas reticuladas. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO DE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 5., Salvador, BA, out. 1984 30p.

- 135 - SPILLERS, W. R. Geometric stiffness matrix for space frames. Computers & Structures, v.36, n.1, p. 29-37, 1990.
- 136 - SZILARD, R. An energy balancing strategy for solution of combined geometrical and material nonlinearity problems. Computers & Structures, v.23, n.2, p. 147-162, 1986.
- 137 - SZILARD, R. Critical load and post-buckling analysis by FEM using energy balancing technique. Computers & Structures, v.20, n.1/3, p. 277-286, 1985.
- 138 - VASCONCELOS, A. C. O código modelo CM 90 do CEB. Construção, São Paulo, p. 11-14, nov. 1989. (Encarte Técnico IBRACON/PINI, 003)
- 139 - VENÂNCIO FILHO, F. Análise matricial de estruturas: estática, estabilidade, dinâmica. Rio de Janeiro: Almeida Neves Ed., 1975. 256p.
- 140 - WEN, R. K., RAHIMZADEH, J. Nonlinear elastic frame analysis by finite element. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.109, n.8, p.1952-1971, Aug. 1983.
- 141 - WHITE, R. E. An introduction to the finite element method with applications to nonlinear problems. New York: John Wiley & Sons, 1985. 354p.
- 142 - WONG, M. B., TIN-LOI, F. Analysis of frames involving geometrical and material nonlinearities. Computers & Structures, v.34, n.4, p. 641-646, 1990.

- 143 - WONG, M. B., TIN-LOI, F. Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures. Computers & Structures, v.34, n.4, p. 633-640, 1990.
- 144 - ZIENKIEWICZ, O. C. The finite element method in engineering sciences. London: McGraw-Hill, 1971. 521p.