

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

"FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO PARA PLACAS SOBRE FUNDAÇÃO  
ELÁSTICA"

AUTOR: ENG. OSVALDO LUIS MANZOLI

ORIENTADOR: PROF. DR. JOÃO BATISTA DE PAIVA

Dissertação apresentada à Escola  
de Engenharia de São Carlos, da  
Universidade de São Paulo, como  
parte dos requisitos para  
obtenção do título de "Mestre em  
Engenharia de Estruturas".

São Carlos  
Maio de 1992

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. João Batista de Paiva, pela orientação e pelo incentivo.

Ao Professor Dr. Wilson Sérgio Venturini, pela colaboração.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela concessão da bolsa de estudos.

À Sra. Maria Nadir Minatel, pela colaboração na pesquisa bibliográfica e à Sra. Sylvia H. M. Villani, pelos desenhos.

À Eliana A. Placco Simões Braga pela colaboração na redação.

A todos amigos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, Orlindo e Geny  
e à minha esposa, Silvana.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma formulação pelo método dos elementos de contorno para placas sobre fundação elástica tipo Winkler. Nesta formulação é utilizada uma solução fundamental que leva em consideração a fundação, permitindo que as aproximações envolvidas sejam restritas aos valores das variáveis de contorno. Para ilustrar a eficiência da formulação, alguns exemplos numéricos são apresentados e os resultados são comparados com os obtidos analiticamente.

## ABSTRACT

The aim of this work is to present a boundary element method formulation to analyse plates resting on Winkler-type elastic foundations. The fundamental solution takes the foundation into consideration and the approximations are limited to the boundary variables. In order to illustrate the efficiency of the formulation, some numerical examples are presented and the results are compared with the analytical solutions.

## SUMÁRIO

I.	INTRODUÇÃO .....	1
II.	FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS DELGADAS .....	8
	2.1 - Introdução .....	8
	2.2 - Hipóteses básicas .....	9
	2.3 - Relações básicas para placas isotrópicas.....	9
	2.3.1 - Deslocamentos.....	9
	2.3.2 - Deformações.....	11
	2.3.3 - Tensões.....	13
	2.3.4 - Esforços.....	14
	2.3.5 - Equação diferencial de placas.....	16
	2.3.6 - Esforços segundo um sistema genérico de coordenadas $(n,s)$ .....	18
	2.3.7 - Cortante equivalente.....	20
	2.4 - Equações de placas em coordenadas polares... ..	22
	2.5 - Placas sobre fundação elástica.....	31
	2.6 - Solução fundamental de placas sobre fundação elástica.....	31
III.	EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS.....	43
	3.1 - Introdução.....	43
	3.2 - Equação integral de um ponto do domínio da placa.....	55
	3.3 - Equação integral de um ponto do contorno....	
	3.4 - Transformações das integrais de domínio.....	76

IV.	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	81
	4.1 - Introdução.....	81
	4.2 - Discretização das equações integrais.....	82
	4.2.1 - Elemento linear contínuo.....	86
	4.2.2 - Transformação das equações integrais em equações algébricas.....	90
	4.2.3 - Contribuição das integrais de domínio.....	94
	4.3 - Sistema de equações.....	95
	4.4 - Integrações sobre os elementos.....	100
	4.5 - Propriedades da matriz H.....	102
	4.6 - Deslocamentos e esforços para pontos internos.....	107
V.	AVALIAÇÃO NUMÉRICA.....	115
	5.1 - Introdução.....	115
	5.2 - Exemplo 1: Placa retangular simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada.....	116
	5.3 - Exemplo 2: Placa retangular engastada no contorno e uniformemente carregada.....	118
	5.4 - Exemplo 3: Placa circular engastada no con- torno e uniformemente carregada.....	121
	5.5 - Exemplo 4: Placa quadrada uniformemente carregada, com diferentes discretizações do contorno.....	121
	5.6 - Exemplo 5: Placa quadrada apoiada no con- torno e submetida a uma carga central.....	122
	5.7 - Exemplo 6: Placa quadrada engastada no con- torno e submetida a uma carga central.....	124
	5.8 - Exemplo 7: Placa quadrada com carga excên- trica.....	126
	5.9 - Exemplo 8: Sapata associada.....	128
VI.	CONCLUSÕES.....	131

VII.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	133
VIII.	BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR.....	142
IX.	APÊNDICE.....	A1



# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

A grande importância de se poder analisar casos arbitrários de um determinado problema físico faz dos métodos numéricos uma valiosa ferramenta de cálculo, já que frequentemente os métodos analíticos de solução são restritos a casos particulares com geometria e condições de contorno simples. Um dos primeiros métodos numéricos desenvolvidos com esta finalidade, foi o Método das Diferenças Finitas - M.D.F. [1] que, apesar de ter sido utilizado pela primeira vez no início deste século por C. Runge, é até os dias atuais adequado para a solução de diversos problemas de engenharia.

O advento do computador, em meados deste século, e seu progressivo desenvolvimento ampliaram a utilização dos métodos numéricos em larga escala. Destaca-se neste contexto, o Método dos Elementos Finitos - M.E.F. [2,3,4], que atualmente encontra-se em um estágio de desenvolvimento muito avançado, atingindo praticamente todos os campos da engenharia.

O M.E.F, assim como o M.D.F., são denominados "métodos de domínio", uma vez que aproximam a solução da equação diferencial que rege o problema físico, utilizando valores

das variáveis básicas do problema, associadas a pontos do domínio e do contorno do espaço em análise.

Recentemente, o Método dos Elementos de Contorno - M.E.C. - tem despertado um grande interesse de pesquisadores de diversas áreas, por apresentar, como característica principal, a diminuição da dimensão do problema, já que as aproximações envolvidas referem-se apenas ao contorno. Esta redução dimensional traz, como principais vantagens, a redução das aproximações, a simplificação dos dados de entrada e a diminuição da área de armazenamento de informações necessária no processamento.

A origem do M.E.C. está ligada à evolução dos esquemas de resolução de equações integrais, já conhecidas há muito tempo. Segundo ELLIOT [5], em 1823, ABEL [6] deduziu uma equação integral para resolver o problema chamado de pêndulo isócrono. A partir de então, surgiram outros estudos envolvendo as equações integrais. Dentre eles, destacam-se BETTI [7] e SOMIGLIANA [8].

Avanços importantes neste campo foram dados por VOLTERRA [10] e FREDHOLM [11], no estudo de problemas da teoria do potencial. FREDHOLM apresentou a primeira teoria clássica das equações integrais com núcleos definidos e integráveis.

Vários trabalhos publicados por autores russos, como MUSKHELISHVILI [12], MIKHLIN [13], SMIRNOV [14] e KUPRADZE [15], abriram caminho para o uso das equações integrais na resolução de problemas físicos. É atribuída a KUPRADZE a primeira formulação dos ditos métodos de contorno com a utilização do método indireto, onde a solução do problema é obtida em termos de fontes fictícias aplicadas ao contorno, que, após a determinação de seus valores, permitem o cálculo das variáveis físicas do problema. Este método também foi utilizado por outros pesquisadores, como MASSONET [16] e HESS [17]. Em 1963, JASWON [18] e SYMM [19], usaram as variáveis reais, além de manter uma função de tensão

auxiliar no equacionamento do problema elástico bidimensional, sendo por isto chamado método semi-direto.

RIZZO [20] foi o primeiro a propor a formulação direta para o tratamento das equações integrais, onde as incógnitas que aparecem nos integrandos são as variáveis físicas do problema. Somente com este trabalho, o tratamento das equações integrais toma a forma de técnica numérica. Até então, nenhum dos trabalhos citados tinha sido interpretado como tal.

Seguindo a linha iniciada por RIZZO [20], vários outros autores estenderam e aperfeiçoaram o método proposto, então denominado método das equações integrais de contorno. Destacam-se os trabalhos de CRUSE [21,22,23], voltados a problemas de elasticidade e de RIZZO & SHIPPY [24], onde é sugerido o uso de sub-regiões para o tratamento de domínios não-homogêneos de problemas lineares. CRUSE & RIZZO [25] apresentaram uma formulação do método para análise de problemas elastodinâmicos, usando transformadas de Laplace com relação ao tempo.

A utilização da formulação direta do método das equações integrais de contorno na análise de problemas não lineares é apresentada nos trabalhos de CRUSE & VAN BUREN [26], que aplicam o método a um sólido tridimensional, considerando a influência de um "crack". SWEDLON & CRUSE [27] apresentam a formulação para simular materiais elastoplásticos, anisotrópicos e compressíveis, considerando ainda o encruamento na relação tensão-deformação. Dando prosseguimento a este trabalho, RICARDELLA [28] aplicou pela primeira vez a formulação direta do método na análise de problemas elastoplásticos. CRUSE [29] propôs a adoção de elementos triangulares, com variação linear das variáveis de problemas de sólidos tridimensionais.

A tese de LACHAT [30], voltada ao estudo de problemas elásticos bi e tridimensionais, conseguiu dar uma generalização ainda maior ao método, dando uma enorme

contribuição ao desenvolvimento dos chamados métodos de contorno. Neste trabalho são utilizadas aproximações de ordem superior, com auxílio de representações paramétricas dos elementos de superfície e das funções aproximadoras dos deslocamentos e forças de superfície. As integrais são calculadas numericamente, através da quadratura gaussiana, e a técnica das sub-regiões é proposta como recurso para facilitar na resolução do sistema final de equações.

Com este trabalho, torna-se evidente a interpretação das técnicas de resolução das equações integrais como método numérico. Somente em 1978, com o trabalho de BREBBIA [31], esta interpretação fica demonstrada. Neste trabalho o autor formula as equações integrais a partir do método dos resíduos ponderados, permitindo também a combinação entre o método, que passa a ser denominado "Método dos Elementos de Contorno", com outras técnicas numéricas.

A partir deste trabalho, o M.E.C. passa a ser largamente difundido em diversos centros importantes de pesquisa, ganhando novas áreas de estudos em problemas de engenharia, tais como: plasticidade; viscoplasticidade; viscoelasticidade; não-linearidade física; mecânica da fratura; mecânica das rochas e dos solos; adensamento; percolação e efeitos dinâmicos; vibrações; propagação de ondas; radiação; acústica; placas; cascas; concentrações de tensão; interação solo-estrutura, fluido-estrutura e acústica-estrutura; combinação com outros métodos numéricos e outros.

A aplicação do método das equações integrais de contorno na análise de flexão de placas teve, como marco inicial, o trabalho de JASWON et alii [32], que propôs a solução, via equação integral, da equação bi-harmônica, aplicando-a posteriormente, para a resolução de placas. HANSEN [33] propôs uma formulação direta para a análise de placas infinitas com furos de contorno não carregados, utilizando a equação integral do deslocamento transversal e

de sua derivada direcional. Em 1978, ALTIERO & SIKARSKIE [34] apresentaram uma formulação indireta para análise de placas engastadas, onde a placa real era considerada como sendo contida numa placa fictícia de função de Green conhecida. Posteriormente WU & ALTIERO [35] estenderam a formulação para placas com condições de contorno arbitrárias. Um trabalho similar foi apresentado por TOTTENHAN [36] para análise de cascas abatidas.

BEZINE [37,38] e STERN [39,40] desenvolveram a formulação direta para placas finitas com condições de contorno arbitrárias.

Subsequentemente, contribuições diversas em problemas de placas foram dadas. BEZINE [41] propôs uma formulação mista, envolvendo o contorno e o domínio, para a análise de vibrações. KAMIYA [42] utilizou o método para placas sujeitas a efeitos de temperatura. TANAKA [43] e KAMIYA [44] apresentaram uma formulação para placas com grandes deslocamentos. VAN DER WEEËN [45] propôs uma formulação para a análise de placas espessas, baseado na teoria de REISSNER [46]. COSTA & BREBBIA [47] e BEZINE [48], analisaram a instabilidade de placas. MORJARIA [49] desenvolveu uma formulação para a análise da não-linearidade física.

A análise de placas sobre fundação elástica, através das equações integrais, teve como precursor TOTTENHAN [36] em 1979. Em 1984, KATSIKADELIS & ARMENAKAS [50,51] apresentaram uma formulação para placas apoiadas no contorno sobre fundação elástica tipo WINKLER [52], utilizando solução fundamental própria. Posteriormente, COSTA & BREBBIA [53,54,55] estenderam a formulação para casos de placas com vinculações arbitrárias.

No trabalho de SILVA [56] é apresentada uma formulação onde é utilizada uma solução fundamental que não leva em consideração a fundação, recaindo em uma integral de domínio, correspondente à reação da fundação. Esta integral de domínio de densidade desconhecida é então aproximada em

termos de valores em pontos do domínio e do contorno, através do uso de células e do processo da reciprocidade dual. Neste trabalho foi considerado inclusive o comportamento não-linear da fundação.

Nesta mesma linha, CALDERON [57] apresentou uma formulação, utilizando uma função adequada para a aproximação da densidade da integral de domínio, que permitiu sua transformação em integral de contorno, através de sucessivas integrações por partes. Esta alternativa foi inicialmente proposta por VENTURINI [58] e pode ser utilizada em qualquer outro problema que apresente integral de domínio de densidade desconhecida.

O objetivo do presente trabalho é apresentar uma formulação pelo M.E.C. para a análise de placas sobre fundação elástica tipo Winkler, utilizando uma solução fundamental que leva em consideração o efeito da fundação.

A principal característica desta formulação é a limitação das aproximações envolvidas às variáveis de contorno, proporcionando, desta forma, todas as vantagens oferecidas pela diminuição da dimensão do problema.

No capítulo II deste trabalho, é apresentada uma revisão da teoria de placas, segundo a teoria de KIRCHHOFF [59] e são obtidas as expressões dos esforços em função do deslocamento transversal,  $w$ , em coordenadas cartesianas e polares. Em seguida, são determinadas as expressões dos esforços e deslocamentos correspondentes à solução fundamental.

A partir do método dos resíduos ponderados, no capítulo III são desenvolvidas duas equações integrais de placas, correspondentes às representações integrais do deslocamento transversal e de sua derivada direcional,  $\partial w / \partial m$ , para pontos do domínio e do contorno.

O capítulo IV é dedicado à aplicação do Método dos Elementos de Contorno, que consiste na divisão do contorno em segmentos, denominados elementos de contorno, sobre os quais as variáveis de contorno são aproximadas por funções

interpoladoras sobre pontos (nós) previamente escolhidos do elemento. Desta forma, as equações integrais podem ser discretizadas, passando a ser equações algébricas, relacionando esforços e deslocamentos nodais do contorno. Escrevendo-se as equações para um número adequado de pontos tomados no contorno da placa, obtém-se um sistema de equações que, após a imposição das condições de contorno e sua resolução, fornece os deslocamentos e esforços incógnitos do contorno. A partir da representação integral do deslocamento transversal de um ponto interno, escrita na forma discretizada, e de suas derivadas, são obtidos os deslocamentos e esforços de pontos internos. Neste capítulo também é apresentada a transformação das integrais de domínio em integrais de contorno.

O capítulo V é destinado à avaliação da formulação apresentada. São obtidos resultados pela formulação para placas com diversos tipos de geometria e condições de contorno e , quando possível, estes resultados são comparados com os obtidos analiticamente.

## CAPITULO II

### FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS DELGADAS

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

Define-se como placa o elemento estrutural limitado por duas superfícies planas, sendo admissíveis casos de pequena curvatura. A distância entre estas duas superfícies, denominada espessura, é pequena quando comparada as demais dimensões do elemento, caracterizando a placa como um elemento de superfície. A superfície equidistante às duas superfícies que definem a placa é denominado de superfície ou plano médio da placa. O carregamento é sempre transversal ao plano médio, podendo estar combinado com outro carregamento contido neste plano.

Pode-se classificar a placa de acordo com as propriedades do material que a constitui. Desta forma uma placa pode ser:

- a) anisótropa: com propriedades diferentes em qualquer direção;
- b) ortótropa: com propriedades diferentes em duas direções ortogonais;
- c) isótropa: quando as propriedades são iguais em todas as direções.



Pode-se também classificar a placa de acordo com sua espessura, podendo ser: muito delgada, delgada ou espessa.

Neste trabalho serão estudados somente casos de placas delgadas e isotrópicas submetidas a carregamentos transversais e ortogonais ao plano médio.

## 2.2 - HIPÓTESES BÁSICAS

Definido o elemento estrutural a ser estudado no item 2.1, são necessárias as seguintes hipóteses para que seja possível se escreverem as equações diferenciais básicas das placas delgadas:

- 1 - a placa é constituída de material elástico linear;
- 2 - os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados com a espessura "t" da placa;
- 3 - não há deformações no plano médio da placa;
- 4 - os pontos situados inicialmente em uma normal ao plano médio permanecem, após a flexão, em uma normal à sua superfície elástica, que é o plano médio da placa;
- 5 - as tensões normais atuantes na direção transversal à placa são desprezíveis.

## 2.3 - RELAÇÕES BÁSICAS PARA PLACAS ISOTROPAS

### 2.3.1 - Deslocamentos

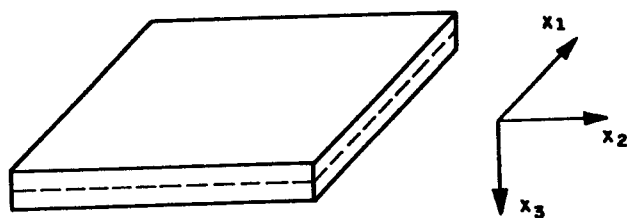


FIG. 2.1 - Sistema de referência sobre a placa.

O deslocamento de um ponto qualquer da placa fletida, pode ser escrito através de componentes  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , segundo as direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , respectivamente, dados pelo sistema cartesiano ilustrado na figura 2.1, onde o plano  $x_1 - x_2$  do sistema coincide com o plano médio da placa.

No caso de placas delgadas, pode-se considerar que o deslocamento transversal  $u_3$  é o próprio deslocamento transversal do plano médio da placa, ou seja:

$$u_3 = w(x_1, x_2)$$

onde a função  $w(x_1, x_2)$  representa os deslocamentos transversais do plano médio.

Tomando-se a seção transversal paralela ao plano  $x_1 - x_3$  de um elemento de placa (fig. 2.2), nota-se que num dado ponto "p", a superfície média sofre, após a flexão, uma rotação dada por  $w_{,1}$ .

Considerando-se que não há deformação no plano médio da placa (3<sup>a</sup> hipótese), e que os pontos permanecem na mesma normal ao plano médio após a flexão (4<sup>a</sup> hipótese), conclui-se que um ponto "p", de coordenada  $x_3$ , sofre um deslocamento segundo a direção  $x_1$  dado por:

$$u_1 = -x_3 w_{,1}$$

Analogamente, obtém-se para a outra direção:

$$u_2 = -x_3 w_{,2}$$

Na forma geral, pode-se escrever:

$$u_i = -x_3 w_{,i} \quad (i=1,2) \quad \dots(2.1)$$

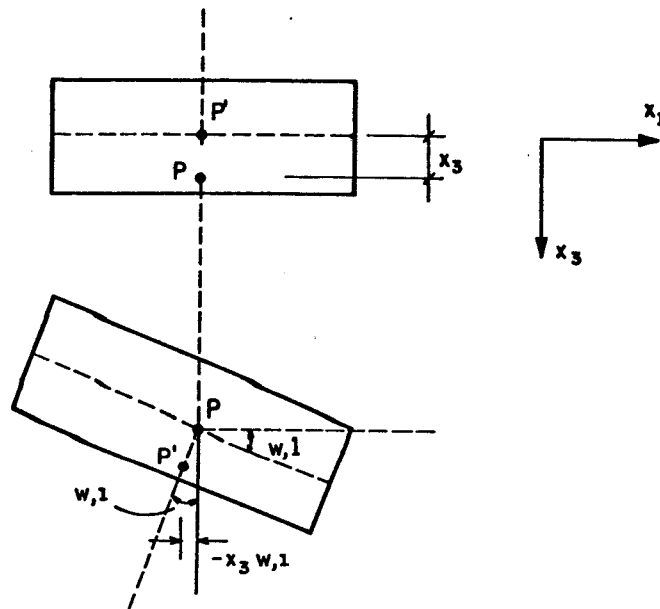
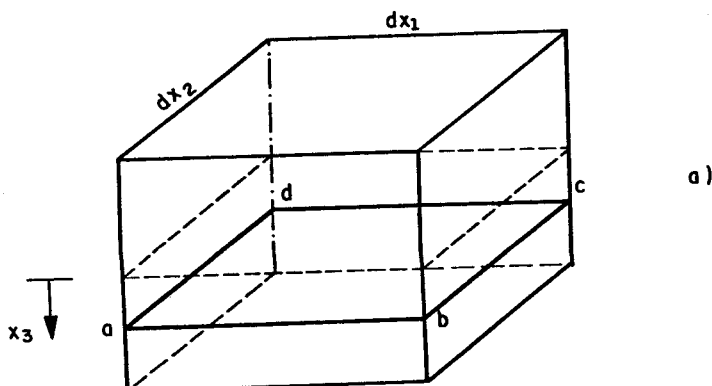


FIG. 2.2 - Posições inicial e final da seção transversal paralela a  $x_1$ - $x_3$  de um elemento de placa.

### 2.3.2 - Deformações

Considere-se agora a figura 2.3.a onde é mostrada a lâmina de placa "abcd", paralela ao plano médio a uma distância  $x_3$  deste, cujos lados "ab" e "dc" são paralelos ao eixo  $x_1$ , enquanto os lados "ad" e "bc" paralelos a  $x_2$ .

Considerando-se apenas pequenos deslocamentos na placa, o elemento indeformado abcd, após a flexão da placa, ganhará a nova forma, dada pelos pontos a', b', c' e d' (fig. 2.3.b).



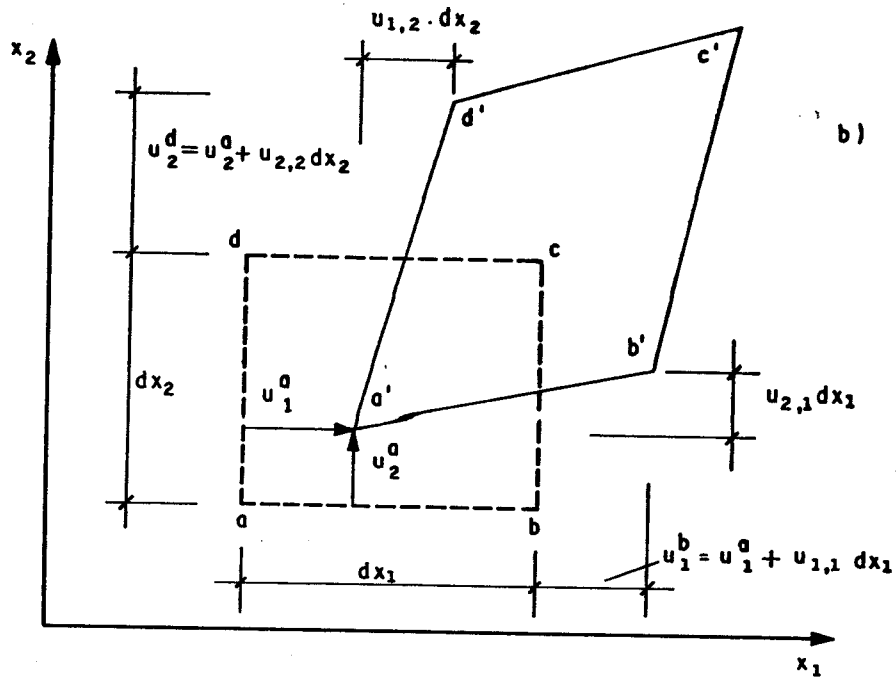


FIG. 2.3 - Posições inicial e final da lâmina de placa "abcd".

Considerando-se que o deslocamento do ponto "a" seja dado pelas componentes  $u_1^a$  e  $u_2^a$ , os deslocamentos dos pontos "b" e "d" serão dados por:

$$u_1^b = u_1^a + u_{1,1} dx_1$$

$$u_2^b = u_2^a + u_{2,1} dx_1$$

$$u_1^d = u_1^a + u_{1,2} dx_2$$

$$u_2^d = u_2^a + u_{2,2} dx_2$$

Como se trata de pequenos deslocamentos, a deformação relativa na direção  $x_1$  fica dada por:

$$\varepsilon_{11} = \frac{u_1^b - u_1^a}{dx_1} = u_{1,1}$$

e na direção  $x_2$  por:

$$\varepsilon_{22} = \frac{u_2^d - u_2^a}{dx_2} = u_{2,2}$$

A semi-variação do ângulo reto, formado pelos lados "ab" e "ad", fica dada por:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = (u_{1,2} + u_{2,1})/2$$

Na forma geral, conclui-se que:

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (i, j=1, 2) \quad \dots (2.2)$$

Levando-se (2.1) em (2.2), chega-se à relação entre as deformações e os deslocamentos transversais:

$$\varepsilon_{ij} = -x_3 w_{,ij} \quad (i, j=1, 2) \quad \dots (2.3)$$

### 2.3.3 - Tensões

Como as tensões relativas à direção normal ao plano da placa são consideradas desprezíveis, a lei de Hooke que relaciona tensões e deformações é dada por:

$$\sigma_{ij} = 2 G \varepsilon_{ij} + \frac{2 G \nu}{1 - \nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (i, j, k=1, 2) \quad \dots (2.4)$$

sendo:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

onde:

E: módulo de elasticidade longitudinal;

G: módulo de elasticidade transversal;

$\nu$ : coeficiente de Poisson.

Levando-se (2.3) em (2.4), chega-se a:

$$\sigma_{ij} = - \frac{E x_s}{(1-\nu^2)} \left[ \nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij} \right] \quad (2.5)$$

(i, j, k=1, 2)

#### 2.3.4 - Esforços

Os esforços podem ser obtidos através das resultantes das componentes de tensão que atuam em um elemento de placa.

Para isso, considere-se o elemento de placa representado na figura 2.4.a, onde são mostradas as componentes de tensão atuantes,  $\sigma_{ij}$ :

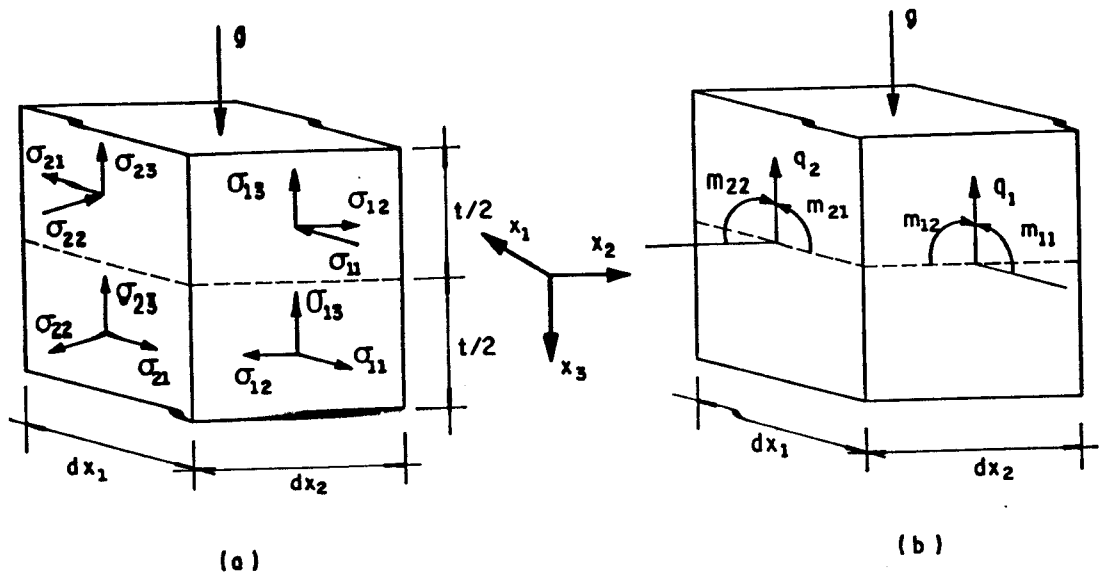


FIG. 2.4 - Tensões e esforços atuantes em um elemento de placa.

Os esforços por unidade de comprimento, representados pela figura 2.4.b, serão dados pelas seguintes integrais sobre a espessura de placa:

$$m_{ij} = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3 \quad (i, j=1, 2) \quad (2.6)$$

$$q_i = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{i3} dx_3 \quad (i=1, 2) \quad (2.7)$$

Substituindo-se (2.5) em (2.6) e efetuando-se a integração, obtêm-se as equações dos momentos em termos dos deslocamentos transversais:

$$m_{ij} = -D \left[ \nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij} \right] \quad (i, j, k=1, 2) \quad (2.8)$$

com:

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$

Por envolverem tensões atuantes na direção normal ao plano da placa, as cortantes  $q_i$ , serão expressas em função dos deslocamentos transversais a partir das equações de equilíbrio do elemento, como será visto no próximo item.

### 2.3.5 - Equação diferencial de placas

Considere-se o elemento de placa da figura 2.5, onde estão indicados os momentos, as cortantes e o carregamento distribuído atuantes sobre o elemento.

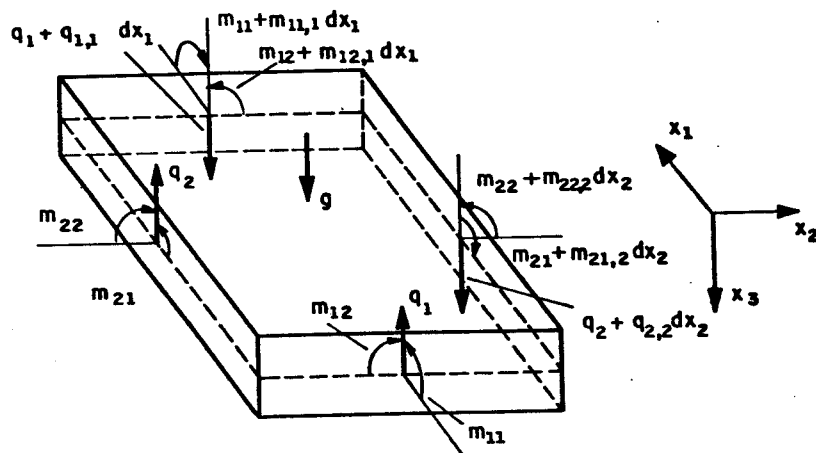


FIG. 2.5 - Elemento de placa

As equações de equilíbrio de forças verticais e de momentos em torno dos eixos  $x_1$  e  $x_2$ , fornecem:



$$\begin{cases} q_{i,i} + g = 0 & (2.9) \\ m_{ij,i} - q_j = 0 & (2.10) \end{cases} \quad (i, j=1, 2)$$

A partir das equações (2.10) e (2.8), pode-se escrever as cortantes  $q_j$  em função dos deslocamentos transversais:

$$q_j = -D w_{,kkj} \quad (j, k=1, 2) \quad (2.11)$$

Substituindo-se (2.11) em (2.9), chega-se a equação diferencial de placas, envolvendo apenas os deslocamentos transversais:

$$w_{,kkll} = g/D \quad (k, l=1, 2)$$

que, reescrita usando-se o operador de Laplace dado por:

$$\nabla^2 = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} \right]$$

fica:

$$\nabla^2 w = g/D \quad (2.12)$$

É possível também, obter-se a equação diferencial de placas em termos dos momentos, a partir das equações de equilíbrio (2.9) e (2.10), chegando-se a:

$$m_{ij,ij} + g = 0 \quad (i, j=1, 2) \quad (2.13)$$

2.3.6 - Esforços segundo um sistema genérico de coordenadas (n, s).

Conhecidas as componentes do tensor de momentos referidos às direções  $x_1$  e  $x_2$ , é possível obter-se as componentes deste tensor, escritas em relação a um sistema genérico de coordenadas n e s.

Para isso, considere-se o elemento de placa "abc" (fig. 2.6.a), paralelo ao plano médio da placa e distanciada de  $x_3$ , deste plano.

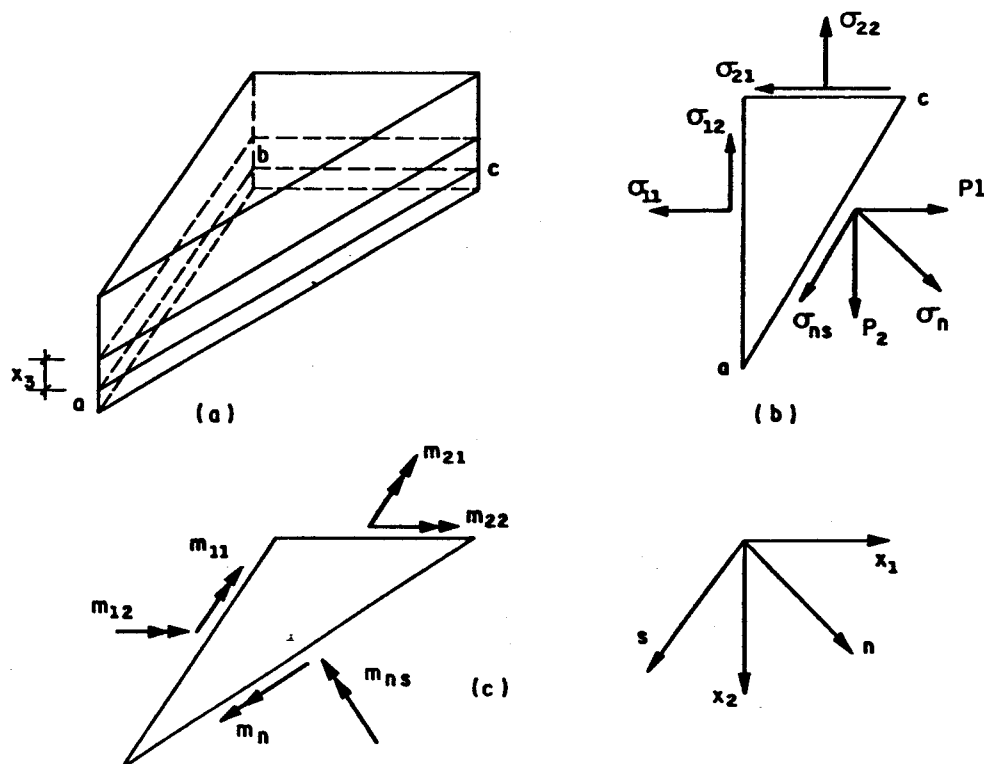


FIG. 2.6 - Componentes de tensão no elemento de placa "abc" e os respectivos esforços resultantes.

Uma vez conhecidas as componentes de tensão  $\sigma_{ij}$ , as componentes  $P_i$  da tensão que atua no lado "ac", (fig. 2.6.b), podem ser obtidas a partir das condições de

equilíbrio do elemento, chegando-se a:

$$P_i = \sigma_{ji} n_j \quad (i, j=1, 2) \quad (2.14)$$

onde  $n_j$  representa os cossenos diretores da normal ao plano "ac".

Escrevendo-se a tensão atuante em "ac" em coordenadas relativas às direções normal,  $\underline{n}$ , e tangencial,  $\underline{s}$ , ao lado "ac", obtém-se:

$$\sigma_n = P_i n_i \quad (2.15.a)$$

$$(i=1, 2)$$

$$\sigma_{ns} = P_i s_i \quad (2.15.b)$$

onde  $n_i$  e  $s_i$  representam os cossenos diretores de  $\underline{n}$  e  $\underline{s}$ , respectivamente.

Os momentos  $m_n$  e  $m_{ns}$ , atuantes na face "ac" (fig. 2.6.c), podem ser obtidos através da integração das tensões  $\sigma_n$  e  $\sigma_{ns}$ , sobre a espessura da placa, ou seja:

$$m_n = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_n x_3 dx_3 \quad (2.16.a)$$

$$m_{ns} = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{ns} x_3 dx_3 \quad (2.16.b)$$

Em vista de (2.15), (2.14) e (2.6), as integrais dadas em (2.16) ficam:

$$m_n = m_{ij} n_i n_j \quad (2.17.a)$$

$$m_{ns} = m_{ij} n_i s_j \quad (2.17.b)$$

Assim como os momentos, a cortante atuante na face "ac" do elemento pode ser relacionada com as cortantes  $q_i$ , relativas aos eixos  $x_1$  e  $x_2$  (fig. 2.7).

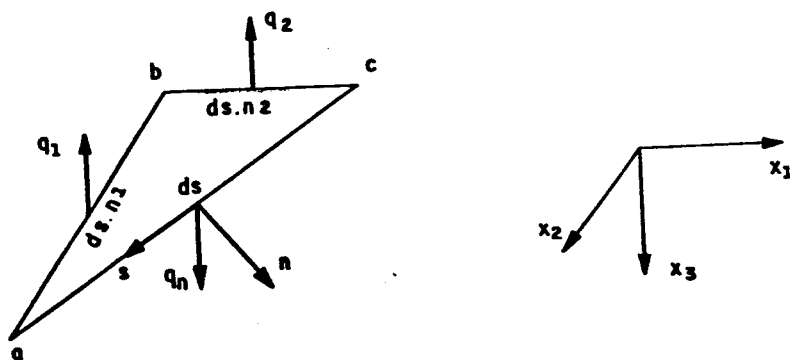


FIG. 2.7 - Forças cortantes atuantes no elemento de placa "abc".

Fazendo-se o equilíbrio de forças verticais sobre o elemento, chega-se a:

$$q_n = q_i n_i \quad (2.18)$$

### 2.3.7 - Cortante equivalente

Para a solução da equação diferencial de placas (2.12) é necessário que sejam satisfeitas as condições de contorno do problema. Nos problemas usuais, as condições de contorno são referentes ao deslocamento transversal do plano médio,

$w$ , à sua derivada,  $\partial w / \partial n$ , e aos esforços  $m_n$ ,  $m_{ns}$  e  $q_n$  dos pontos do contorno da placa, segundo direções normal e tangencial à borda (fig. 2.6.c e 2.7).

Entretanto, Kirchoff [60] demonstrou que as condições de contorno relativas à cortante,  $q_n$ , e ao momento volvente  $m_{ns}$ , podem ser agrupadas em uma única condição, relativa a um esforço denominado cortante equivalente,  $V_n$ .

Considere-se um ponto "p" pertencente ao contorno de uma placa, sobre o qual se define um sistema cartesiano  $(n, s)$ , direção normal e tangencial ao contorno, respectivamente, e adjacentes a este ponto, considerem-se 2 elementos infinitesimais de comprimento  $ds$  (fig. 2.8.a).

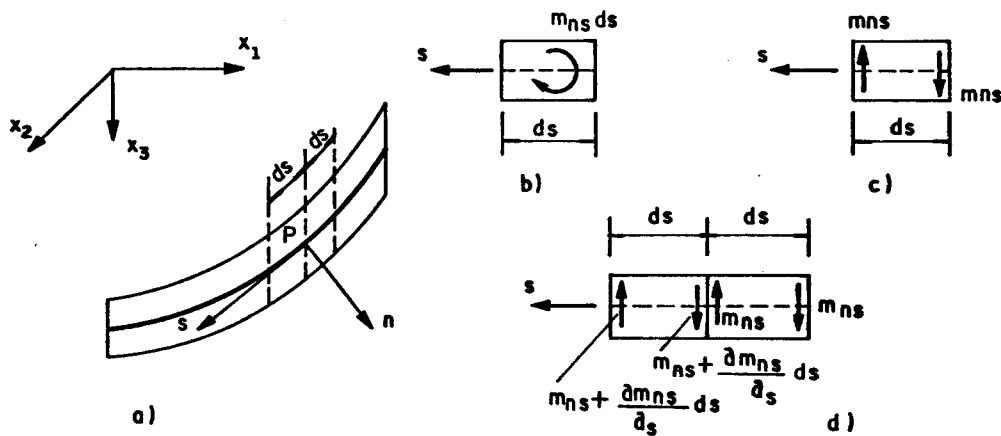


FIG. 2.8 - Sistema de referência  $(n, s)$  e momentos volventes atuantes no contorno da placa.

Sobre um elemento infinitesimal de contorno, de comprimento  $ds$ , atua um momento volvente resultante dado por  $m_{ns} ds$  (fig. 2.8.b), que pode ser considerado como sendo resultante de um binário de forças de intensidade  $m_{ns}$  aplicadas nas extremidades do elemento (fig. 2.8.c). Tomando-se dois elementos consecutivos, como mostra a figura 2.8.d, verifica-se que na junção dos elementos existe uma resultante de forças, dada por  $(\partial m_{ns} / \partial s) ds$ . A soma desta

força com a cortante que atua no ponto "p",  $q_n ds$ , resulta em uma cortante equivalente, cuja intensidade por unidade de comprimento é dada por:

$$V_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} \quad (2.19)$$

#### 2.4 - EQUAÇÕES DE PLACAS EM COORDENADAS POLARES

Para a maior facilidade na análise da solução fundamental de placas, é conveniente que a equação diferencial, assim como as equações de esforços obtidas anteriormente, estejam referidas a um sistema de coordenadas polares.

Para isso, consideram-se os sistemas de coordenadas cartesianas e polares definidas sobre o plano da placa (figura 2.9), onde  $\underline{r}$  é o vetor posição do ponto "p",  $\theta$  é o ângulo que  $\underline{r}$  faz com o semi-eixo positivo  $x_1$  e  $\underline{t}$  é o versor correspondente à direção perpendicular a  $\underline{r}$ .

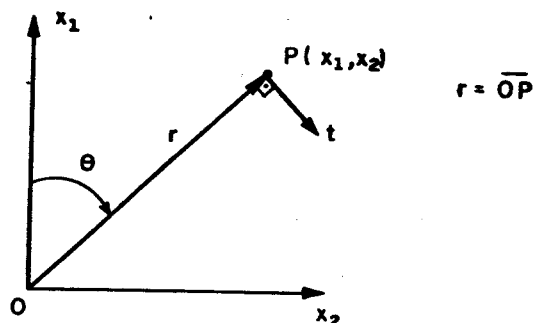


FIG. 2.9 - Sistemas de coordenadas cartesianas e polares sobre o plano da placa.

A relação direta entre coordenadas polares e cartesianas é dada por:

$$x_1 = r_1 = r \cos(\theta) \quad (2.20. a)$$

$$x_2 = r_2 = r \sin(\theta) \quad (2.20. b)$$

A partir de (2.20), obtém-se a relação inversa entre as coordenadas:

$$r^2 = r_i r_i \quad (2.21. a)$$

$$\theta = \arctang(r_2/r_1) \quad (2.21. b)$$

Com as relações entre os sistemas cartesiano e polar definidas em (2.20) e (2.21), é possível chegar-se a:

$$r_{,1} = r_1/r = \cos(\theta) \quad (2.22. a)$$

$$r_{,2} = r_2/r = \sin(\theta) \quad (2.22. b)$$

$$\theta_{,1} = -r_2/r^2 = -\sin(\theta)/r \quad (2.23. a)$$

$$\theta_{,2} = r_1/r^2 = \cos(\theta)/r \quad (2.23. b)$$

Derivando-se as equações (2.22) em relação a  $\theta$  e as equações (2.23) em relação a  $r$ , obtém-se:

$$\partial r_{,1} / \partial \theta = -\sin(\theta) \quad (2.24. a)$$

$$\partial r_{,2} / \partial \theta = \cos(\theta) \quad (2.24. b)$$

$$\partial \theta_{,1} / \partial r = \sin(\theta)/r^2 \quad (2.25. a)$$

$$\partial \theta_{,2} / \partial r = -\cos(\theta)/r^2 \quad (2.25. b)$$

Os cossenos diretores correspondentes ao versor  $\underline{t}$ , ortogonal a  $\underline{r}$ , são dados por:

$$t_1 = -r_2 = -\sin(\theta) \quad (2.26.a)$$

$$t_2 = r_1 = \cos(\theta) \quad (2.26.b)$$

Em vista de (2.26), as equações (2.23), (2.24) e (2.25) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\theta_{,i} = t_i / r \quad (2.27)$$

$$\partial r_{,i} / \partial \theta = t_i \quad (2.28)$$

$$\partial \theta_{,i} / \partial r = -t_i / r^2 \quad (2.29)$$

Tomando-se a função dos deslocamentos transversais  $w$ , escrita segundo as variáveis  $r$  e  $\theta$ , a derivada de  $w(r, \theta)$  em relação a  $x_j$  fica dada por:

$$w_{,j} = \frac{\partial w}{\partial r} r_{,j} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \theta_{,j} \quad (2.30)$$

A partir de (2.30), pode-se definir o operador diferencial de primeira ordem:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial r} r_{,j} + \frac{\partial}{\partial \theta} \theta_{,j} \quad (2.31)$$

Aplicando-se o operador definido em (2.31) sobre a equação (2.30), chega-se a:



$$w_{,ij} = \left[ \frac{\partial}{\partial r} r_{,j} + \frac{\partial}{\partial \theta} \theta_{,j} \right] \left[ \frac{\partial w}{\partial r} r_{,j} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \theta_{,j} \right] \quad (2.32)$$

que, após as derivações, fica:

$$\begin{aligned} w_{,ij} = & \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (r_{,i} r_{,j}) + \frac{\partial w}{\partial r} \left[ \frac{\partial r_{,j}}{\partial \theta} \theta_{,i} \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} (\theta_{,j} r_{,i} + \\ & + \theta_{,i} r_{,j}) + \frac{\partial w}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial \theta_{,j}}{\partial r} r_{,i} + \frac{\partial \theta_{,j}}{\partial \theta} \theta_{,i} \right] + \\ & + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} (\theta_{,i} \theta_{,j}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Em alguns casos, em particular no caso do problema fundamental de placas descrito adiante, o problema apresenta simetria com relação a origem do sistema de coordenadas polares, ou seja, o deslocamento vertical  $w$  de um ponto da placa depende exclusivamente da distância  $r$  que este ponto está da origem.

Para estes casos de simetria, a equação (2.33) pode ser reescrita de forma simplificada, uma vez que  $w$  é constante com relação ao ângulo  $\theta$ , obtendo-se:

$$w_{,ij} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (r_{,i} r_{,j}) + \frac{\partial w}{\partial r} \left[ \frac{\partial r_{,j}}{\partial \theta} \theta_{,i} \right] \quad (2.34)$$

Observando-se as igualdades (2.27) e (2.28), pode-se definir o operador diferencial de segunda ordem a partir de (2.34), obtendo-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \left[ (r_{,i} r_{,j}) \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} (t_i t_j) \frac{d}{dr} \right] \quad (2.35)$$

Usando-se índice repetido em (2.35) e lembrando-se que  $r_{,k} r_{,k} = t_k t_k = 1$ , chega-se ao operador de Laplace em coordenadas polares, dado por:

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} = \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \quad (2.36)$$

Portanto, para problemas simétricos, a equação diferencial de placas (2.12) escrita em coordenadas polares ficará:

$$\nabla \nabla w = \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{g}{D} \quad (2.37)$$

que, após as derivações, torna-se:

$$\nabla \nabla w = \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{g}{D} \quad (2.38)$$

Assim como a equação diferencial de placas, as equações de esforços podem também ser escritas em coordenadas polares.

Utilizando-se os operadores diferenciais (2.35) e (2.36) nas equações de momentos (2.8), deduz-se:

$$m_{ij} = -D \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} \left[ \delta_{ij} \nu + (1-\nu) (r_{,i} r_{,j}) \right] + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \left[ \delta_{ij} \nu + (1-\nu) (t_i t_j) \right] \right\} \quad (2.39)$$

Através dos operadores (2.31) e (2.36) pode-se obter a seguinte derivada de terceira ordem:

$$w_{,kki} = r_{,i} \left[ \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right] \quad (2.40)$$

Substituindo-se (2.40) na equação das cortantes (2.11), obtém-se:

$$q_i = -D r_{,i} \left[ \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right] \quad (2.41)$$

Obtidas as equações dos momentos  $m_{ij}$  e das cortantes  $q_i$  em coordenadas polares, é possível agora deduzir as expressões dos momentos e cortante de um ponto pertencente ao contorno da placa, em coordenadas polares.

Substituindo-se (2.39) em (2.17) e (2.41) em (2.18), deduz-se:

$$m_n = -D \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} \left[ \nu + (1-\nu) (r_{,i} n_i)^2 \right] + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \left[ \nu + (1-\nu) (r_{,i} s_i)^2 \right] \right\} \quad (2.42)$$

$$m_{ns} = -D (1-\nu) (r_{,i} n_i) (r_{,j} s_j) \left[ \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] \quad (2.43)$$

$$q_n = -D (r_{,i} n_i) \left[ \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right] \quad (2.44)$$

Para se obter a equação da cortante equivalente  $V_n$ , definida em (2.19), em coordenadas polares, é necessário obter primeiramente a derivada de  $m_{ns}$  em relação à direção  $\underline{s}$ .

Considere a figura 2.10, onde é mostrado um ponto genérico "P", pertencente ao contorno, sobre o qual se define um sistema de referência (n,s), respectivamente, direções normal e tangencial ao contorno.

Considerando-se que o ponto "P" está inserido num sistema de coordenadas polares, sua posição fica definida pelo ângulo  $\theta$  e pela distância  $r$ , dada pelo módulo de vetor posição,  $\underline{r}$ . Na figura, são mostrados também o vetor  $\underline{t}$ , associado à direção normal a  $\underline{r}$ , e o ângulo  $\beta$  entre as direções do vetor posição  $\underline{r}$  e a normal  $\underline{n}$ .

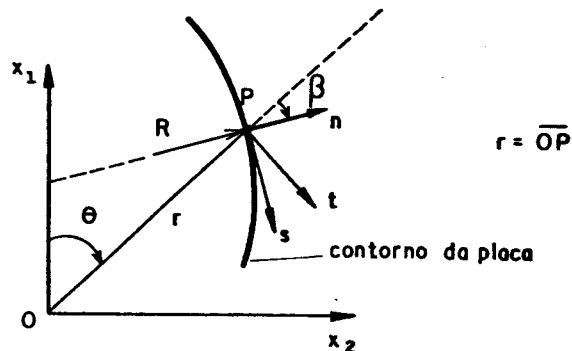


FIG. 2.10 - Ponto "P" do contorno da placa e os respectivos vetores  $\underline{n}$  e  $\underline{s}$ .

Os produtos escalares envolvidos na equação de  $m_{ns}$ , dada em (2.43), podem ser expressos em função do ângulo  $\beta$ , da seguinte forma:

$$r_i n_i = \cos(\beta) \quad (2.45.a)$$

$$r_i s_i = \cos(\pi/2 + \beta) = -\text{sen}(\beta) \quad (2.45.b)$$

com isto, a equação de  $m_{ns}$ , dada em (2.43), fica:

$$m_{ns} = D (1-\nu) \cos(\beta) \operatorname{sen}(\beta) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.48)$$

e sua derivada em relação à direção  $s$  será dada por:

$$\frac{\partial m_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial m_{ns}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} \quad (2.47)$$

Sabe-se que:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = r_{,i} s_i = - \operatorname{sen}(\beta) \quad (2.48)$$

e

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{1}{R} - \frac{\cos(\beta)}{r} \quad (2.49)$$

onde R é o raio de curvatura do contorno no ponto "P" (fig.2.10).

Obtendo-se as derivadas  $\partial m_{ns} / \partial \beta$  e  $\partial m_{ns} / \partial r$  a partir de (2.46) e substituindo-as, juntamente com os valores dados em (2.48) e (2.49), na equação (2.47), deduz-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} = & D (1-\nu) \cos(\beta) \left[ \operatorname{sen}(\beta) \left( - \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{4 \operatorname{sen}^2(\beta) - 1}{r} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{D(1-\nu)}{R} [1 - 2 \operatorname{sen}^2(\beta)] \left( \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.50)$$

Introduzindo-se na equação (2.19) os valores de  $q_n$  e de  $\partial m_{ns} / \partial s$ , dados em (2.44) e (2.50), chega-se finalmente a:

$$\begin{aligned} V_n = & -D(1-\nu)(r_i, n_i) \left\{ \left[ (s_j, r_j)^2 + \frac{1}{(1-\nu)} \right] \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \\ & + \left. \frac{1 - 4(s_j, r_j)^2}{r} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right\} + \\ & + \frac{D(1-\nu)}{R} [1 - 2(s_i, r_i)^2] \left( \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.51) \end{aligned}$$

Além dos esforços de contorno, é necessário obter-se a expressão de  $\partial w / \partial n$ , em coordenadas polares.

Lembrando-se que, para casos simétricos,  $w$  é função apenas de  $r$ , sua derivada direcional é dada por:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{dw}{dr} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.52)$$

Como  $\partial r / \partial n = (n_i, r_i)$ , a equação (2.52) fica:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = (n_i, r_i) \frac{dw}{dr} \quad (2.53)$$

## 2.5 - PLACAS SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA

Até agora, toda a formulação foi feita para o problema de flexão de placas que não interagem com o solo.

Nos problemas em que a placa se encontra sobre o solo, como nos casos de pavimentos rígidos, radiers ou sapatas flexíveis, a reação do solo sobre a placa deve ser considerada.

Neste trabalho, será assumido que o solo segue o comportamento dado pelo modelo de Winkler, no qual a reação do solo se dá através de uma pressão  $g'$ , exercida sobre a superfície da placa, de intensidade proporcional ao deslocamento vertical  $w$ , ou seja:

$$g' = - K w \quad (2.54)$$

onde  $K$  é o módulo da fundação, expresso em unidade de pressão por unidade de comprimento. O valor de  $K$  está associado ao tipo de solo, podendo variar entre 5 e 150  $MN/m^3$ .

A equação diferencial de placas sobre fundação elástica pode então ser obtida a partir da equação diferencial (2.12), somando-se ao carregamento transversal,  $g$ , a parcela correspondente à reação do solo, dada em (2.54), obtendo-se:

$$\nabla^2 w = (g - K w)/D \quad (2.55)$$

## 2.6 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE PLACAS SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA

Define-se como problema fundamental, o caso particular de uma placa de domínio infinito, denominado domínio fundamental, sujeita a uma carga transversal unitária em um ponto "q" deste domínio.

Pode-se definir este carregamento através da

distribuição delta de Dirac, fazendo-se:

$$g = \delta(q, p) \quad (2.56)$$

onde "q" é o ponto de carregamento e "p" é um ponto qualquer do domínio fundamental.

A distribuição delta de Dirac apresenta as seguintes propriedades:

$$\delta(q, p) = 0 \quad \text{para} \quad p \neq q \quad (2.57. a)$$

$$\delta(q, p) = \infty \quad \text{para} \quad p \equiv q \quad (2.57. b)$$

e

$$\int_{\Omega_{\infty}} \phi(p) \delta(q, p) d\Omega_{\infty} = \phi(q) \quad (2.58)$$

onde  $\phi$  é uma função contínua qualquer.

Da equação (2.58), conclui-se que:

$$\int_{\Omega_{\infty}} \delta(q, p) d\Omega_{\infty} = 1$$

ou seja, a resultante do carregamento, definido pela distribuição delta de Dirac sobre o domínio fundamental, é uma força unitária aplicada no ponto "q", como era esperado.

Neste caso particular, a equação diferencial de placas sobre fundação elástica, dada em (2.55), fica dada por:

$$D \nabla^2 w + K w = \delta(q, p) \quad (2.59)$$



Deve-se ter como solução fundamental, uma função  $w^*$  que satisfaça a equação diferencial (2.59), para todos os pontos do domínio, com exceção do ponto de carregamento "q", ou seja:

$$\nabla \nabla w^* + \frac{K}{D} w^* = 0 \quad (2.60)$$

Tomando-se um sistema de coordenadas polares com origem no ponto "q" (fig. 2.11), recai-se num problema com simetria em relação à origem do sistema, tornando-se possível a utilização da formulação feita para tais casos no item anterior.

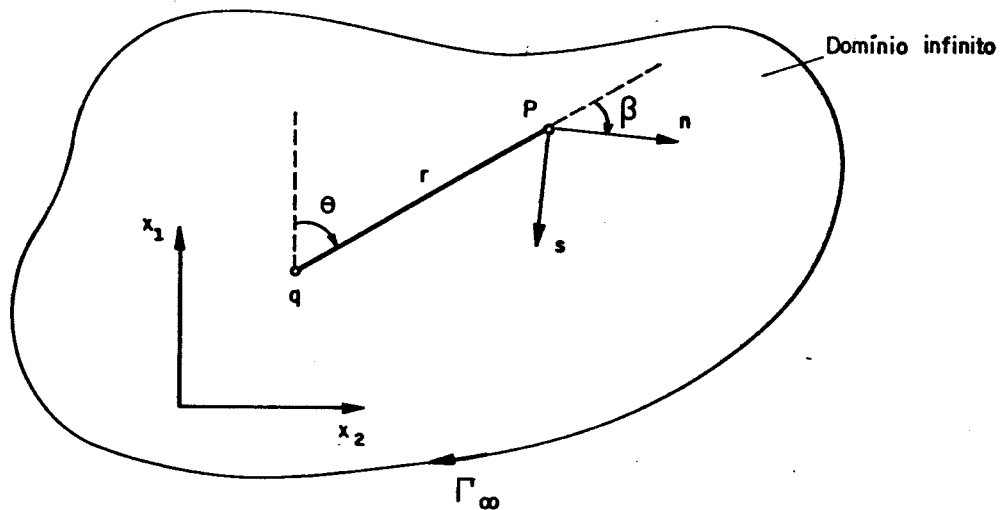


FIG. 2.11 - Pontos de carregamento "q" e de deslocamentos "p".

A equação (2.60) escrita em coordenadas polares fica (ver equação 2.38).

$$\frac{d^4 w^*}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w^*}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw^*}{dr} + \frac{K}{D} w^* = 0 \quad (2.61)$$

Efetuando-se a seguinte mudança de variável:

$$r = \frac{\rho}{\lambda^{1/4}} \quad (2.62. a)$$

com:

$$\lambda = K/D \quad (2.62. b)$$

a equação diferencial (2.61) fica:

$$\rho^4 \frac{d^4 w^*}{d\rho^4} + 2 \rho^3 \frac{d^3 w^*}{d\rho^3} - \rho^2 \frac{d^2 w^*}{d\rho^2} + \rho \frac{dw^*}{d\rho} + \rho^4 w = 0 \quad (2.63)$$

cuja solução é dada por

$$w^* = C_1 \text{ber}(\rho) + C_2 \text{bei}(\rho) + C_3 \text{kei}(\rho) + C_4 \text{ker}(\rho) \quad (2.64)$$

onde ber, bei, ker e kei são funções de Kelvin de ordem 0 (ver apêndice) e  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  são constantes.

As primeiras duas funções de (2.64) crescem indefinidamente com o aumento de argumento, e a função ker torna-se infinitamente grande na origem, permitindo-se concluir que, para que (2.64) seja solução de problema de placas, deve-se ter:

$$C_1 = C_2 = C_4 = 0$$

Desta forma, a solução (2.64) fica reduzida a:

$$w^* = C_3 \operatorname{kei}(\rho) \quad (2.65)$$

Considere-se um círculo de raio  $r$  em torno do ponto de carregamento "q", como mostra a figura 2.12, onde estão representadas a cortante equivalente  $V_n$  atuante no contorno e a resultante  $G_s$  da reação do solo sobre a placa.

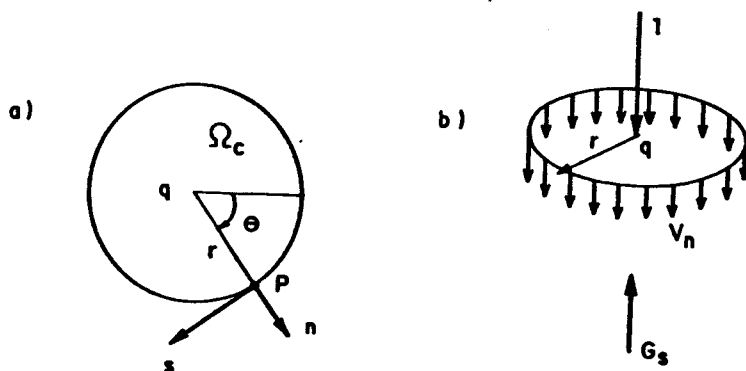


FIG. 2.12 - Forças verticais atuantes no círculo de raio  $r$  em torno do ponto  $q$ .

A condição de equilíbrio de forças verticais sobre o elemento fornece a relação:

$$V_n 2 \pi r + 1 - G_s = 0 \quad (2.66)$$

Reescrevendo-se a equação de  $V_n$ , dada em (2.51), em função da variável  $\rho$ , e como o ângulo  $\beta$  é nulo para todos os pontos do contorno da circunferência, chega-se a:

$$V_n = -D \lambda^{3/4} \left[ \frac{d^3 w^*}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 w^*}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{dw^*}{d\rho} \right] \quad (2.67)$$

Substituindo-se em (2.67),  $w^*$ , por sua expressão dada em (2.65), e considerando-se as relações diferenciais entre as funções de Kelvin dadas em (A.6'), chega-se a:

$$V_n = -D \lambda^{3/4} C_3 \text{ker}'(\rho) \quad (2.68)$$

A parcela  $G_s$ , relativa a reação do solo, é dada pela seguinte integral sobre a superfície circular:

$$G_s = \int_{\Omega_c} K w^* d\Omega_c \quad (2.69)$$

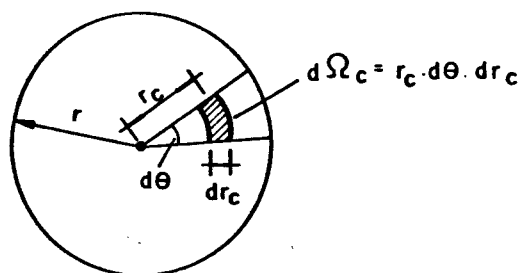


FIG. 2.13 - Elemento de superfície do círculo.

Considerando-se a figura 2.13, o elemento da superfície do círculo fica dado por:

$$d\Omega_c = r_c d\theta dr_c \quad (2.70)$$

Fazendo-se a mudança de variável indicada em (2.70) na equação (2.69), obtém-se:

$$G_s = K \int_0^r \int_0^{2\pi} w^* r_c d\theta dr_c = K 2\pi \int_0^r w^* r_c dr_c \quad (2.71)$$

Substituindo-se a expressão de  $w^*$ , dada por (2.65), em (2.71), e em vista de (2.62), chega-se a:

$$G_s = 2\pi D C_s \lambda^{1/2} \int_0^{\rho} \rho_c \operatorname{kei}(\rho_c) d\rho_c \quad (2.72)$$

com:

$$\rho_c = \lambda^{1/4} r_c$$

Com a relação descrita em (A.7.a), pode-se concluir que:

$$\int_0^{\rho} \rho_c \operatorname{kei}(\rho_c) d\rho_c = - [ \rho \operatorname{ker}'(\rho) + 1 ] \quad (2.73)$$

Substituindo-se o valor da integral (2.73) em (2.72), obtém-se finalmente:

$$G_s = -2\pi C_s \lambda^{1/2} [ \rho \operatorname{ker}'(\rho) + 1 ] \quad (2.74)$$

A equação de equilíbrio (2.66), após as substituições das expressões de  $G_s$  e  $V_n$ , dadas em (2.74) e (2.68), fornece:

$$C_s = - \frac{1}{2\pi D \lambda^{1/2}} \quad (2.75)$$

Portanto, a solução fundamental de placas sobre fundação elástica fica dada por:

$$w^* = - \frac{kei(\rho)}{2 \pi D \lambda^{1/2}} \quad (2.76)$$

Substituindo-se a expressão de  $w^*$ , dada em (2.76), nas equações de esforços e deslocamentos dadas em (2.42), (2.43), (2.51) e (2.53), chega-se às expressões das componentes do momento, da derivada do deslocamento e da força cortante equivalente de um ponto genérico, "p", segundo um sistema de coordenadas (n,s) qualquer (fig. 2.11), dadas por:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = - \frac{kei'(\rho)}{2 \pi D \lambda^{1/4}} (r_i, n_i) \quad (2.77)$$

$$m_n^* = \frac{1}{2 \pi} \left\{ - (1-\nu) \left[ 2 (n_i, r_i)^2 - 1 \right] \frac{kei(\rho)}{\rho} + \ker(\rho) \left[ \nu + (1-\nu) (n_i, r_i)^2 \right] \right\} \quad (2.78)$$

$$m_{ns}^* = \frac{(1-\nu)}{2 \pi} (r_i, n_i) (r_j, s_j) k1(\rho) \quad (2.79)$$

$$V_n^* = \frac{(1-\nu) (r_i, n_i) \lambda^{1/4}}{2 \pi} \left\{ \left[ (s_j, r_j)^2 + \frac{1}{(1-\nu)} \right] \ker'(\rho) + \left[ 1 - 4 (r_j, s_j)^2 \right] k1(\rho)/\rho \right\} + \frac{(1-\nu)}{2 \pi R} \left[ 1 - 2 (r_i, s_i)^2 \right] k1(\rho) \quad (2.80)$$

com:

$$k_1(\rho) = -2 \operatorname{kei}'(\rho)/\rho + \operatorname{ker}(\rho)$$

e

$$\rho = r \lambda^{1/4}$$

sendo:

$$r = \left\{ \left[ x_1(p) - x_1(q) \right]^2 + \left[ x_2(p) - x_2(q) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (2.81)$$

É importante também, se obter as derivadas dos deslocamentos e esforços fundamentais, em relação à direção  $\underline{m}$  do sistema de eixos cartesianos  $(m, u)$  de origem no ponto de carregamento "q" (fig. 2.14).

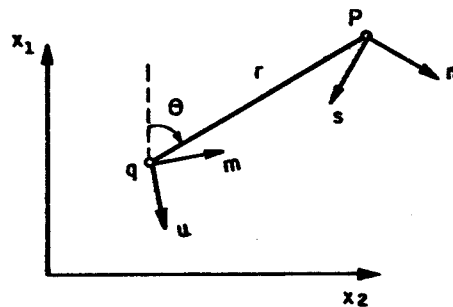


FIG. 2.14 - Sistemas de coordenadas  $(m, u)$  e  $(n, s)$ .

A derivada de  $w^*$ , (2.76), em relação à direção  $\underline{m}$  será dada por:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{dw^*}{dr} \frac{\partial r}{\partial m} \quad (2.82)$$

Sabe-se que:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial x_i(q)} \frac{\partial x_i(q)}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial x_i(q)} m_i \quad (2.83)$$

As derivadas de  $r$  em relação à direção  $x_i$ , definida no ponto "q", são obtidas a partir de (2.81) e valem:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(q)} = \frac{x_i(q) - x_i(p)}{r} = -r_{,i} \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial r_{,i}}{\partial x_j(q)} = - \frac{(\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j})}{r} \quad (2.85)$$

Levando-se (2.84) em (2.83), conclui-se que:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = - (r_{,i} m_i) \quad (2.86)$$

Portanto,  $\partial w^* / \partial m$  fica dada por:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{k e l'(\rho)}{2 \pi D \lambda^{1/4}} (r_{,i} m_i) \quad (2.87)$$

De forma semelhante, obtêm-se as derivadas de  $\partial w^* / \partial n$ ,  $m_{ns}^*$  e  $V_n^*$  em relação à direção  $\underline{m}$ , que ficam expressas por:



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial W^*}{\partial n} \right) &= \frac{1}{2 \pi D} \left\{ \ker(\rho) (r_i m_i) (r_j n_j) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ (m_i n_i) - 2 (r_j m_j) (r_k n_k) \right] \ker'(\rho)/\rho \right\} \quad (2.88) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_n^*}{\partial m} &= \frac{(1-\nu) \lambda^{1/4}}{2 \pi} \left\{ \left\{ (r_i m_i) \left[ 4 (r_j n_j)^2 - 1 \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 (r_j n_j) (n_k m_k) \right\} k_1(\rho)/\rho + \right. \\ &\quad \left. - \ker'(\rho) \left[ \frac{\nu}{(1-\nu)} + (r_j n_j)^2 \right] (r_k m_k) \right\} \quad (2.89) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{ns}^*}{\partial m} &= \frac{(1-\nu) \lambda^{1/4}}{2 \pi} \left\{ - \left\{ (m_i n_i) (r_j s_j) + (m_i s_i) (r_j n_j) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4 (r_i n_i) (r_j s_j) (r_k m_k) \right\} k_1(\rho)/\rho + \right. \\ &\quad \left. - (r_i n_i) (r_j s_j) (r_k m_k) \ker'(\rho) \right\} \quad (2.90) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^*}{\partial m} &= \frac{(1-\nu) \lambda^{1/2}}{2 \pi} \left\{ \left\{ \left[ (r_i s_i)^2 + \frac{1}{(1-\nu)} \right] + \left[ - (n_j m_j) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 (r_j n_j) (r_k m_k) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (r_i n_i) \left[ 8 (r_j m_j) (r_k s_k)^2 - (r_j m_j) + \right. \\
 & \left. + 2 (r_j s_j) (s_k m_k) \right] \} k e r'(\rho) / \rho + \\
 & + (r_i m_i) (r_j n_j) \left[ (r_k s_k)^2 + \frac{1}{(1-\nu)} \right] k e l(\rho) + \\
 & - \left\{ (r_i n_i) \left[ 24 (r_j m_j) (r_k s_k)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. - 4 (r_j m_j) - 8 (r_j s_j) (s_k m_k) \right] + \right. \\
 & \left. + (m_j n_j) - 4 (m_j n_j) (r_k s_k)^2 \right\} k l(\rho) / \rho^2 + \\
 & + \frac{(1-\nu) \lambda^{1/4}}{2 \pi R} \left\{ \left\{ (m_i r_i) \left[ 2 - 8 (r_j s_j)^2 \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4 (s_i r_i) (s_j m_j) \right\} k l(\rho) / \rho + \right. \\
 & \left. - (r_i m_i) \left[ 1 - 2 (r_j s_j)^2 \right] k e r'(\rho) \right\} \quad (2.91)
 \end{aligned}$$

## CAPÍTULO III

### EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

O método dos Elementos de Contorno consiste basicamente na resolução numérica de equações integrais que definem o problema. Entre outras opções, tais equações podem ser obtidas através do teorema da reciprocidade de Betti ou através do método dos resíduos ponderados.

Neste capítulo, através do método dos resíduos ponderados, são obtidas duas equações integrais, referentes às representações integrais do deslocamento transversal,  $w(q)$ , e de sua derivada direcional,  $\partial w(q)/\partial m$ , de um ponto "q" do domínio da placa. Posteriormente estas equações são estendidas para representações destas variáveis em pontos do contorno.

#### 3.2 - EQUAÇÃO INTEGRAL DE UM PONTO DO DOMÍNIO DA PLACA

Considere-se a placa de contorno  $\Gamma$  e domínio  $\Omega$ , apoiada sobre fundação elástica de Winkler e submetida a um carregamento  $g$  em uma superfície  $\Omega_g$ , conforme a figura 3.1.

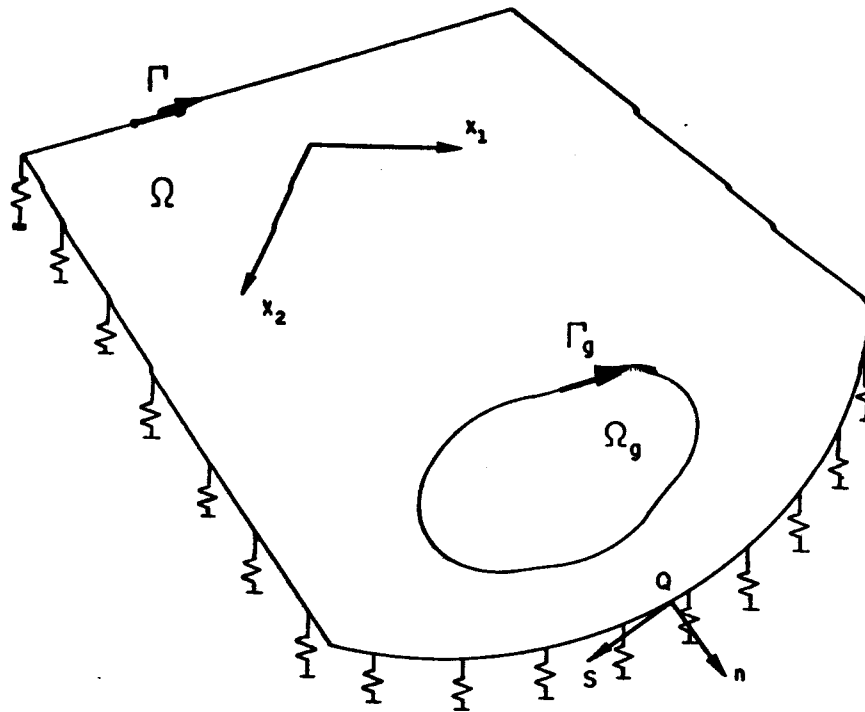


FIG. 3.1 - Placa sobre fundação elástica de Winkler de contorno  $\Gamma$  e domínio  $\Omega$ .

Como visto anteriormente, o problema de placas é governado pela equação diferencial expressa em termos dos momentos, (2.13), que, no caso da existência de fundação elástica, deve ser acrescida do termo correspondente à reação do solo, ficando:

$$m_{ij,ij} + g - K w = 0 \quad (3.1)$$

O erro originado pela introdução de uma solução aproximada, em (3.1), pode ser minimizado pela aplicação do Método dos Resíduos Ponderados [60], fazendo-se a ponderação do erro em todo do domínio do problema, ou seja:

$$\int_{\Omega} \left[ m_{ij,ij} + g - K w \right] w^* d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

onde  $w^*$  é interpretado como uma função poderadora.

A equação (3.2) pode ser reescrita na forma:

$$\int_{\Omega} m_{ij,ij} w^* d\Omega + \int_{\Omega} g w^* d\Omega - K \int_{\Omega} w w^* d\Omega = 0 \quad (3.3)$$

Integrando-se por partes o primeiro termo de (3.3), obtém-se:

$$\int_{\Omega} m_{ij,ij} w^* d\Omega = \int_{\Gamma} m_{ij,i} n_j w^* d\Gamma - \int_{\Omega} m_{ij,i} w^*_{,j} d\Omega \quad (3.4)$$

onde  $n_j$  representam os cossenos diretores da direção normal ao contorno da placa (Fig. 3.1).

Integrando-se por partes o último de termo de (3.4), chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m_{ij,ij} w^* d\Omega &= \int_{\Gamma} m_{ij,i} n_j w^* d\Gamma - \int_{\Gamma} m_{ij} n_i w^*_{,j} d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} m_{ij} w^*_{,ij} d\Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

A partir de (2.10) e (2.18), chega-se a:

$$m_{ij,i} n_j = q_n \quad (3.6)$$

Sabendo-se que  $\partial w / \partial n = w_{,k} n_k$  e que  $\partial w / \partial s = w_{,k} s_k$  onde  $n_k$  e  $s_k$  representam os cossenos diretores de  $n$  e  $s$ , respectivamente (fig. 3.1), e considerando-se ainda as expressões (2.17), pode-se concluir que:

$$m_{ij} n_i w_{,j}^* = m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} \quad (3.7)$$

Substituindo-se (3.7) e (3.6) na equação (3.5), deduz-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m_{ij,ij} w^* d\Omega &= \int_{\Gamma} q_n w^* d\Gamma - \int_{\Gamma} m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} m_{ij} w_{,ij}^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

Integrando-se por partes o penúltimo termo de (3.8), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = (m_{ns} w^*) \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.9)$$

onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são as coordenadas extremas do contorno onde está sendo realizada a integração. Para um contorno fechado e sem angulosidades (cantos), a primeira parcela de (3.9) é nula. Por outro lado, se o contorno contém angulosidades, a função  $m_{ns}$  é contínua nos trechos entre estas, ficando a equação (3.9) dada por:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = - \sum_{i=1}^{Nc} R(c_i) w^*(c_i) - \int_{\Gamma} \frac{\delta m_{ns}}{\delta s} w^* d\Gamma \quad (3.10)$$

onde:

$$R(c_i) = m_{ns}^+(c_i) - m_{ns}^-(c_i)$$

sendo  $m_{ns}^+(c_i)$ ,  $m_{ns}^-(c_i)$ , respectivamente, os valores do momento volvente posterior e anterior ao canto  $c_i$  do contorno da placa, e  $Nc$  é o número total de cantos do contorno, como mostra a figura 3.2.

A variável  $R(c_i)$ , definida acima, pode ser interpretada como sendo a reação do canto  $c_i$ .

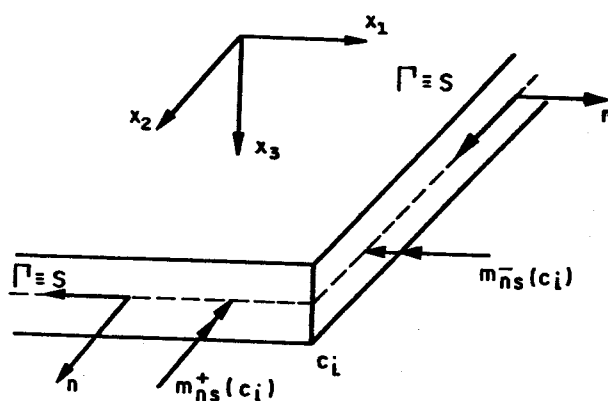


FIG. 3.2 - Momentos volventes anterior e posterior ao canto  $c_i$  da placa.

Substituindo-se (3.10) em (3.8), obtém-se:

$$\int_{\Omega} m_{ij, ij} w^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left[ \left( q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} \right) w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right] d\Gamma +$$

$$+ \sum_{i=1}^{Nc} R(c_i) w^*(c_i) + \int_{\Omega} m_{ij} w^*_{, ij} d\Omega \quad (3.11)$$

Considerando-se a expressão da cortante equivalente,  $V_n$ , dada em (2.19), a equação (3.11) resulta em:

$$\int_{\Omega} m_{ij, ij} w^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left[ V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right] d\Gamma +$$

$$+ \sum_{i=1}^{Nc} R(c_i) w^*(c_i) + \int_{\Omega} m_{ij} w^*_{, ij} d\Omega \quad (3.12)$$

Escrevendo-se os momentos  $m_{ij}$  envolvidos na integral de domínio de (3.12) em função dos deslocamentos transversais, através da relação dada em (2.8), e efetuando-se a operação distributiva sobre o produto resultante, chega-se a:

$$\int_{\Omega} m_{ij} w^*_{, ij} d\Omega = - \int_{\Omega} D \left[ \nu w_{, kk} w^*_{, ij} \delta_{ij} + (1-\nu) w^*_{, ij} w_{, ij} \right] d\Omega \quad (3.13)$$

Como:



$$w_{,ij}^* \delta_{ij} = w_{,kk}^*$$

e

$$w_{,kk} = w_{,ij} \delta_{ij}$$

a equação (3.13) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} m_{,ij} w_{,ij}^* d\Omega = - \int_{\Omega} D \left[ \nu w_{,kk}^* w_{,ij} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij}^* w_{,ij} \right] d\Omega \quad (3.14)$$

Colocando-se termo  $w_{,ij}$  em evidência em (3.14), e considerando-se novamente a relação dada em (2.8), chega-se a:

$$\int_{\Omega} m_{,ij} w_{,ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} m_{,ij}^* w_{,ij} d\Omega \quad (3.15)$$

Integrando-se duas vezes por partes a última integral de (3.15), num procedimento semelhante ao feito anteriormente, deduz-se:

$$\int_{\Omega} m_{,ij} w_{,ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left[ -V_n^* w + m_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right] d\Gamma +$$

$$- \sum_{i=1}^{Nc} R^*(c_i) w(c_i) + \int_{\Omega} m_{,ij,i}^* w d\Omega \quad (3.16)$$

Substituindo-se (3.16) em (3.12), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} m_{ij, ij}^* w^* d\Omega &= \int_{\Gamma} \left[ V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} R(c_i) w^*(c_i) + \\
 &+ \int_{\Gamma} \left[ -V_n^* w + m_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right] d\Gamma - \sum_{i=1}^{Nc} R^*(c_i) w(c_i) + \\
 &+ \int_{\Omega} m_{ij, ij}^* w d\Omega \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Substituindo-se agora (3.17) em (3.3), conclui-se que:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} \left[ m_{ij, ij}^* - K w^* \right] w d\Omega + \int_{\Gamma} \left[ V_n^* w - m_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right] d\Gamma + \\
 + \sum_{i=1}^{Nc} R^*(c_i) w(c_i) &= \int_{\Gamma} \left[ V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right] d\Gamma + \\
 + \sum_{i=1}^{Nc} R(c_i) w^*(c_i) + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Será tomado em (3.2), a função ponderadora,  $w^*$ , como sendo o deslocamento transversal da solução fundamental, correspondente à resposta de uma placa infinita sobre base

elástica, solicitada por uma força unitária aplicada num ponto "q" de seu domínio, como mostrado no capítulo anterior. Neste caso, os valores representados com asteriscos na equação (3.18) ficam associados aos esforços e deslocamentos fundamentais e, portanto, são funções do ponto de carregamento, "q", e do ponto de deslocamento, "p", definido no domínio  $\Omega$  ou "P", quando definido no contorno  $\Gamma$ . Já os esforços e deslocamentos do problema são funções apenas do ponto de deslocamento, uma vez que são provenientes da carga distribuída, g, previamente fixada.

Assim sendo, a equação (3.18) deve ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \left[ m_{ij,ij}^*(q,p) - K w^*(q,p) \right] w(p) \, d\Omega(p) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(q,p) w(P) + \right. \\
 & \quad \left. - m_n^*(q,p) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} R^*(q,c_i) w(c_i) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) w^*(q,P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{Nc} R(c_i) w^*(q,c_i) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) \, d\Omega_g(p) \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Como a função ponderadora adotada satisfaz a equação diferencial de placas (3.1) para uma carga unitária aplicada em "q", deve-se ter:

$$m_{ij,ij}^*(q,p) - K w^*(q,p) = - \delta(q,p) \quad (3.20)$$

Substituindo-se (3.20) na integral de domínio do primeiro membro de (3.19), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left[ m_{ij, ij}^*(q, p) - K w^*(q, p) \right] w(p) d\Omega(p) =$$
$$= - \int_{\Omega} w(p) \delta(q, p) d\Omega(p) \quad (3.21)$$

Aplicando-se a propriedade da distribuição delta de Dirac, dada em (2.58), a última integral de (3.21) resultará no deslocamento transversal do ponto "q", obtendo-se:

$$\int_{\Omega} \left[ m_{ij, ij}^*(q, p) - K w^*(q, p) \right] w(p) d\Omega(p) = - w(q) \quad (3.22)$$

Como a solução fundamental corresponde a um problema de domínio infinito, e aqui entra apenas como função ponderadora, não é necessário que o ponto de carregamento, "q", seja tomado internamente à placa. Para um ponto de carregamento tomado fora do domínio da placa, a integral do segundo membro de (3.21) se anula, devido à própria definição de distribuição delta de Dirac (2.57). Com isto, a igualdade (3.22) pode ser escrita numa forma mais geral por:

$$\int_{\Omega} \left[ m_{ij, ij}^*(q, p) - K w^*(q, p) \right] w(p) d\Omega(p) = - c_v(q) w(q) \quad (3.23)$$

com:

$$c_v = \begin{cases} 1 & \text{para "q" interno ao domínio} \\ 0 & \text{para "q" externo ao domínio} \end{cases}$$

Substituindo-se (3.23) em (3.19), chega-se finalmente à representação integral do deslocamento transversal de um ponto "q", interno ou externo à placa:

$$\begin{aligned} & c_v(q) w(q) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(q, p) w(p) + \right. \\ & \left. - m_n^*(q, p) \frac{\partial w}{\partial n}(p) \right] d\Gamma(p) + \sum_{i=1}^{Nc} R^*(q, c_i) w(c_i) = \\ & = \int_{\Gamma} \left[ V_n(p) w^*(q, p) - m_n(p) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, p) \right] d\Gamma(p) + \\ & + \sum_{i=1}^{Nc} R(c_i) w^*(q, c_i) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.24) \end{aligned}$$

Derivando-se a equação (3.24) em relação à coordenada  $\underline{m}$ , definida no ponto "q" (figura 2.14), obtém-se a representação integral da derivada direcional  $\partial w(q)/\partial m$ , dada por:

$$\begin{aligned}
 & c_d(q) \frac{\partial w}{\partial m}(q) + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V^*}{\partial m}{}^n(q, P) w(P) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial m^*}{\partial m}{}^n(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial R^*}{\partial m}(q, c_i) w(c_i) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{Nc} R(c_i) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, c_i) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

As derivadas da solução fundamental, envolvidas em (3.25), já foram definidas anteriormente e são dadas por (2.88) a (2.91).

### 3.3 - EQUAÇÃO INTEGRAL DE UM PONTO DO CONTORNO

Para a formulação do problema pelo Método dos Elementos de Contorno, proposta adiante, é necessária a obtenção das representações integrais do deslocamento e de sua derivada direcional para um ponto "Q" do contorno da placa. Para isto, será efetuado o limite das equações (3.24) e (3.25) para o ponto interno "q" tendendo para o contorno.

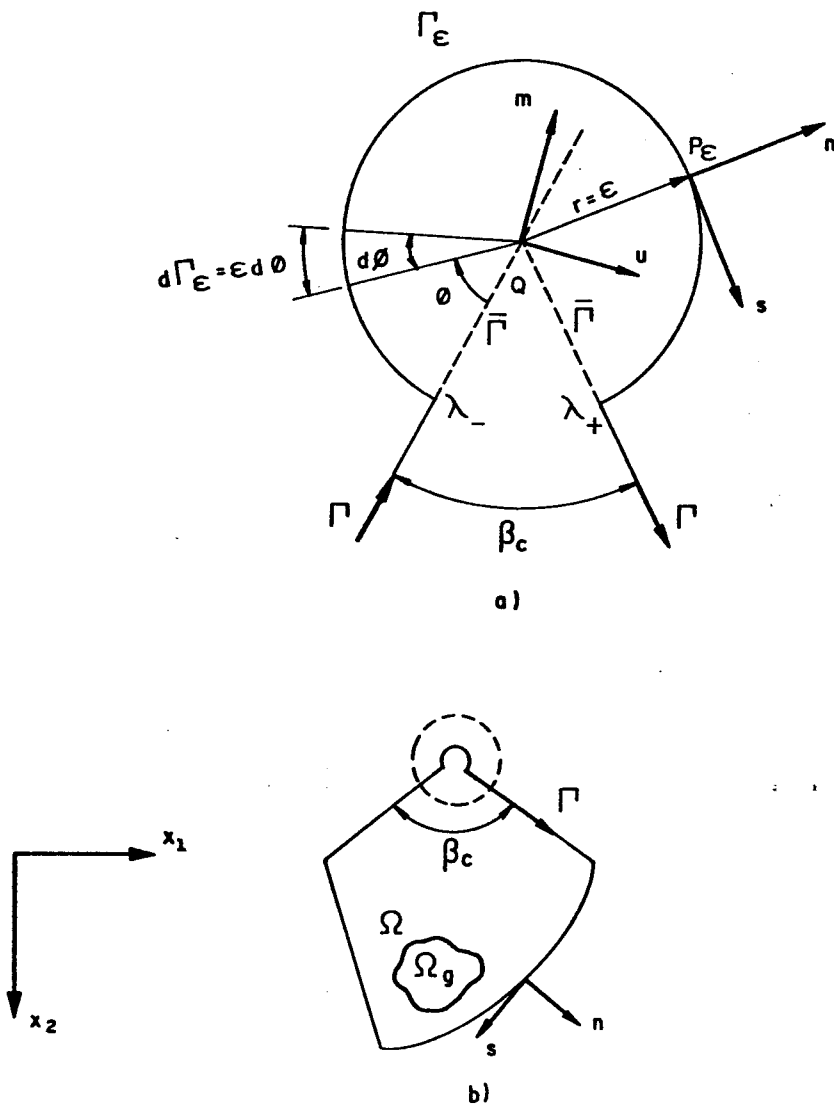


FIG. 3.3 - Contorno circular acrescido ao contorno da placa.

Assumindo-se que a placa pode ser representada como mostra a figura 3.3, onde o contorno inicial foi acrescido de um contorno circular  $\Gamma_\epsilon$  de raio  $\epsilon$ , serão originados novos cantos  $\lambda^+$  e  $\lambda^-$  no novo contorno da placa e o ponto "Q", inicialmente de contorno, passa a ser de domínio. Com isto a equação (3.24) pode ser escrita para este ponto, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 w(Q) &+ \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ V_n^*(Q,P) w(P) - m_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 &+ \int_{\Gamma_\epsilon} \left[ V_n^*(Q,P_\epsilon) w(P_\epsilon) - m_n^*(Q,P_\epsilon) \frac{\partial w}{\partial n}(P_\epsilon) \right] d\Gamma_\epsilon(P_\epsilon) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{Nc-1} R^*(Q,c_i) w(c_i) + R^*(Q,\lambda^-) w(\lambda^-) + R^*(Q,\lambda^+) w(\lambda^+) = \\
 &= \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ V_n(P) w^*(Q,P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \\
 &+ \int_{\Gamma_\epsilon} \left[ V_n(P_\epsilon) w^*(Q,P_\epsilon) - m_n(P_\epsilon) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P_\epsilon) \right] d\Gamma_\epsilon(P_\epsilon) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{Nc-1} R(c_i) w^*(Q,c_i) + R(\lambda^-) w^*(Q,\lambda^-) + R(\lambda^+) w^*(Q,\lambda^+) + \\
 &+ \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(p) \tag{3.26}
 \end{aligned}$$



Fazendo-se  $\epsilon$  tender a zero, o ponto "Q" se aproxima do contorno e, na condição limite, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & w(Q) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[ V_n^*(Q, P) w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \left[ V_n^*(Q, P_\epsilon) w(P_\epsilon) - m_n^*(Q, P_\epsilon) \frac{\partial w}{\partial n}(P_\epsilon) \right] d\Gamma_\epsilon(P_\epsilon) + \\
 & Nc-1 \\
 & + \sum_{i=1} R^*(Q, c_i) w(c_i) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ R^*(Q, \lambda^-) w(\lambda^-) + R^*(Q, \lambda^+) w(\lambda^+) \right] = \\
 & = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[ V_n(P) w^*(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \left[ V_n(P_\epsilon) w^*(Q, P_\epsilon) - m_n(P_\epsilon) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P_\epsilon) \right] d\Gamma_\epsilon(P_\epsilon) + \\
 & Nc-1 \\
 & + \sum_{i=1} R(c_i) w^*(Q, c_i) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ R(\lambda^-) w^*(Q, \lambda^-) + R(\lambda^+) w^*(Q, \lambda^+) \right] + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

Os limites das integrais sobre  $\Gamma - \bar{\Gamma}$  são, por definição, os valores principais das integrais sobre  $\Gamma$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[ V_n^*(Q, P) w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) = \\ = \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(Q, P) w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) \end{aligned} \quad (3.28)$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[ V_n(P) w^*(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) = \\ = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) w^*(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Antes de se passar para o estudo das integrais sobre o trecho  $\Gamma_\epsilon$ , é interessante escrever-se primeiramente os limites das funções fundamentais envolvidas. Considerando-se que  $r = \epsilon$  no trecho  $\Gamma_\epsilon$ , os limites das funções fundamentais serão dadas por:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} w^*(Q, P_\epsilon) = \frac{1}{8 D \lambda^{1/2}} \quad (3.30)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P_\epsilon) = 0 \quad (3.31)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} m_n^*(Q, P_\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left\{ (1-\nu) \left[ \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\lambda^{1/4}}{2} \epsilon \right] + \frac{1}{4} \right] + \right.$$

$$- \left[ \ln \left( \frac{\lambda^{1/4}}{2} \varepsilon \right) + 0.5772157 \right] \} \quad (3.32)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_{ns}^* (Q, P_\varepsilon) = 0 \quad (3.33)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_n^* (Q, P_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \frac{1}{2 \pi \varepsilon} \quad (3.34)$$

Serão estudadas agora separadamente os limites de cada integral sobre  $\Gamma_\varepsilon$  da equação (3.27).

O primeiro termo da primeira integral pode ser reescrito por:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} V_n^* (Q, P_\varepsilon) w(P_\varepsilon) d\Gamma_\varepsilon (P_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} V_n^* (Q, P_\varepsilon) \left[ w(P_\varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. - w(Q) \right] d\Gamma_\varepsilon (P_\varepsilon) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} V_n^* (Q, P_\varepsilon) w(Q) d\Gamma_\varepsilon (P_\varepsilon) \quad (3.35) \end{aligned}$$

Da figura 3.3 obtém-se a seguinte relação:

$$d\Gamma_\varepsilon (P_\varepsilon) = \varepsilon d\phi \quad (3.36)$$

Fazendo-se a mudança de variável indicada em (3.36), substituindo-se  $V_n^*$  por sua expressão dada em (3.34), e considerando-se válida a condição de HÖLDER [61],

$$| w(P_\epsilon) - w(Q) | \leq c \epsilon^b(Q, P_\epsilon) \quad (3.37)$$

onde  $c$  é constante e

$$0 < b \leq 1 \quad (3.38)$$

a primeira integral de (3.35), quando levada ao limite, se anula e, sendo  $w(Q)$  um valor de domínio, a equação (3.35) fica dada por:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} V_n^*(Q, P_\epsilon) w(P_\epsilon) d\Gamma_\epsilon(P_\epsilon) = w(Q) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi - \beta_c} - \frac{1}{2\pi\epsilon} \epsilon d\phi \quad (3.39)$$

onde  $\beta_c$  é o ângulo do canto da placa (fig. 3.3).

Integrando-se e calculando-se o limite indicado em (3.39), obtém-se:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} V_n^*(Q, P_\epsilon) w(P_\epsilon) d\Gamma_\epsilon(P_\epsilon) = - \frac{2\pi - \beta_c}{2\pi} w(Q) \quad (3.40)$$

Procedendo-se de forma semelhante, as demais integrais indicadas em (3.27) conduzem a valores nulos. Já as parcelas que envolvem as reações de canto, quando levadas ao limite, conduzem a:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{Nc-1} R^*(Q, c_i) w(c_i) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ R^*(Q, \lambda^-) w(\lambda^-) + R^*(Q, \lambda^+) w(\lambda^+) \right] = \\
 & = \sum_{i=1}^{Nc} R^*(Q, c_i) w(c_i) \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{Nc-1} R(c_i) w^*(Q, c_i) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ R(\lambda^-) w^*(Q, \lambda^-) + R(\lambda^+) w^*(Q, \lambda^+) \right] = \\
 & = \sum_{i=1}^{Nc} R(c_i) w^*(Q, c_i) \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

Com isto, a equação integral do deslocamento para um ponto do contorno fica dada por:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\beta_c}{2\pi} w(Q) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(Q, p) w(p) + \right. \\
 & \left. - m_n^*(Q, p) \frac{\partial w}{\partial n}(p) \right] d\Gamma(p) + \sum_{i=1}^{Nc} R^*(Q, c_i) w(c_i) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left[ V_n(p) w^*(Q, p) - m_n(p) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, p) \right] d\Gamma(p) +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^{Nc} R(c_i) w^*(Q, c_i) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.43)$$

e na forma geral pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & c_v(q) w(q) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(q, p) w(P) + \right. \\ & \left. - m_n^*(q, p) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} R^*(q, c_i) w(c_i) = \\ & = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) w^*(q, P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{i=1}^{Nc} R(c_i) w^*(q, c_i) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.44) \end{aligned}$$

com:

$$c_v(q) = \begin{cases} \frac{\beta_c}{2\pi} & \text{para "q" tomado no contorno;} \\ 0 & \text{para "q" tomado externo à placa;} \\ 1 & \text{para "q" tomado interno à placa.} \end{cases} \quad (3.45)$$

Para o caso particular de pontos tomados no contorno sem angulosidades, tem-se:

$$c_v(q) = 1/2$$

Passa-se agora à determinação da representação integral da derivada  $\partial w(Q)/\partial m$  para um ponto "Q" do contorno da placa.

Assim como anteriormente, o contorno será acrescido de um contorno circular  $\Gamma_\epsilon$  em torno do ponto "Q", inicialmente de contorno, como mostra a figura 3.3. Com isto, o ponto "Q" passa a ser de domínio e a equação integral (3.25) pode ser escrita para este ponto, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial m}(Q) &+ \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ &+ \int_{\Gamma_\epsilon} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P_\epsilon) w(P_\epsilon) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q, P_\epsilon) \frac{\partial w}{\partial n}(P_\epsilon) \right] d\Gamma_\epsilon(P_\epsilon) + \\ &+ \sum_{i=1}^{Nc-1} \frac{\partial R}{\partial m}(Q, c_i) w(c_i) + \frac{\partial R}{\partial m}(Q, \lambda^-) w(\lambda^-) + \frac{\partial R}{\partial m}(Q, \lambda^+) w(\lambda^+) = \\ &= \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ V_n(P) \frac{\partial w}{\partial m}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w}{\partial n}(Q, P) \right) \right] d\Gamma(P) + \\ &+ \int_{\Gamma_\epsilon} \left[ V_n(P_\epsilon) \frac{\partial w}{\partial m}(Q, P_\epsilon) - m_n(P_\epsilon) \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w}{\partial n}(Q, P_\epsilon) \right) \right] d\Gamma_\epsilon(P_\epsilon) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Nc-1 \\
 & + \sum_{i=1}^{Nc-1} R(c_i) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, c_i) + R(\lambda^-) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, \lambda^-) + R(\lambda^+) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, \lambda^+) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega_g(p) \tag{3.46}
 \end{aligned}$$

Fazendo-se o ponto "Q" tender para o contorno, ou seja, fazendo-se o limite de  $\varepsilon$  tendendo a zero, a equação (3.46) resulta:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[ \frac{\partial V^*}{\partial m}{}^n(Q, P) w(P) - \frac{\partial m^*}{\partial m}{}^n(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[ \frac{\partial V^*}{\partial m}{}^n(Q, P_\varepsilon) w(P_\varepsilon) - \frac{\partial m^*}{\partial m}{}^n(Q, P_\varepsilon) \frac{\partial w}{\partial n}(P_\varepsilon) \right] d\Gamma_\varepsilon(P_\varepsilon) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Nc-1 \\
 & + \sum_{i=1}^{Nc-1} \frac{\partial R}{\partial m}{}^*(Q, c_i) w(c_i) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial R}{\partial m}{}^*(Q, \lambda^-) w(\lambda^-) + \frac{\partial R}{\partial m}{}^*(Q, \lambda^+) w(\lambda^+) \right] = \\
 & = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[ V_n(P_\varepsilon) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P_\varepsilon) - m_n(P_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P_\varepsilon) \right) \right] d\Gamma_\varepsilon(P_\varepsilon) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Nc-1 \\
 & + \sum_{i=1}^{Nc-1} R(c_i) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, c_i) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ R(\lambda^-) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, \lambda^-) + R(\lambda^+) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, \lambda^+) \right] +
 \end{aligned}$$



$$+ \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.47)$$

Lembrando-se que os limites das integrais sobre  $\Gamma-\bar{\Gamma}$  são os valores principais das integrais sobre  $\Gamma$ , a equação (3.47) fica dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P_\epsilon) w(P_\epsilon) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q, P_\epsilon) \frac{\partial w}{\partial n}(P_\epsilon) \right] d\Gamma_\epsilon(P_\epsilon) + \\ & + \sum_{i=1}^{Nc-1} \frac{\partial R}{\partial m}(Q, c_i) w(c_i) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial R}{\partial m}(Q, \lambda^-) w(\lambda^-) + \frac{\partial R}{\partial m}(Q, \lambda^+) w(\lambda^+) \right] = \\ & = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) \right] d\Gamma(P) + \\ & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \left[ V_n(P_\epsilon) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P_\epsilon) - m_n(P_\epsilon) \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P_\epsilon) \right) \right] d\Gamma_\epsilon(P_\epsilon) + \\ & + \sum_{i=1}^{Nc-1} R(c_i) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, c_i) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ R(\lambda^-) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, \lambda^-) + R(\lambda^+) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, \lambda^+) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.48)$$

Para se retirar as singularidades que esta equação integral apresenta quando  $\varepsilon$  tende a zero, será imposto à placa um deslocamento vertical de corpo rígido de  $-w(Q)$ . Com isto, todas as derivadas envolvidas na equação ficam inalteradas e aparece uma nova integral de domínio correspondente à reação do solo ao deslocamento imposto,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) [w(P) - w(Q)] - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma(P) + \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P_\varepsilon) [w(P_\varepsilon) - w(Q)] - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q, P_\varepsilon) \frac{\partial w}{\partial n}(P_\varepsilon) \right\} d\Gamma_\varepsilon(P_\varepsilon) + \\ & + \sum_{i=1}^{N_c-1} \frac{\partial R^*}{\partial m}(Q, c_i) [w(c_i) - w(Q)] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial R^*}{\partial m}(Q, \lambda^-) [w(\lambda^-) - w(Q)] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial R^*}{\partial m}(Q, \lambda^+) [w(\lambda^+) - w(Q)] \right\} = \\ & = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) \frac{\partial w}{\partial m}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w}{\partial n}(Q, P) \right) \right] d\Gamma(P) + \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[ V_n(P_\varepsilon) \frac{\partial w}{\partial m}(Q, P_\varepsilon) - m_n(P_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w}{\partial n}(Q, P_\varepsilon) \right) \right] d\Gamma_\varepsilon(P_\varepsilon) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & NC-1 \\
 & + \sum_{i=1} R(c_i) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, c_i) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ R(\lambda^-) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, \lambda^-) + R(\lambda^+) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, \lambda^+) \right] + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega_g(p) = \int_{\Omega} K w(Q) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega(p) \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

Lembrando-se que  $r = \varepsilon$  e que  $r_i, n_i = 1$  no contorno  $\Gamma_\varepsilon$ , os limites das funções fundamentais envolvidas em (3.49) ficam dadas por:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P_\varepsilon) = 0 \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P_\varepsilon) \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(r_i, m_i)}{2 \pi D} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\lambda^{1/4}}{2} \varepsilon \right) + \right. \\
 & \left. + 0.53861 \right] \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial m^*}{\partial m}{}^n(Q, P_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(r_i, m_i)}{4 \pi \varepsilon} (1+\nu) \quad (3.52)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial m^*}{\partial m}{}^{ns}(Q, P_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(s_i, m_i)}{4 \pi \varepsilon} (1-\nu) \quad (3.53)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial V^*}{\partial m}{}^n(Q, P_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(r_i, m_i)}{2 \pi} \left[ -\frac{(3-\nu)}{2 \varepsilon^2} + \frac{\pi (\nu-5) \lambda^{1/2}}{32} \right] \quad (3.54)$$

O conceito de derivada de uma função permite que se escreva a seguinte relação, válida quando  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$w(P_\epsilon) - w(Q) = \epsilon \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \quad (3.55)$$

onde  $\partial w(Q)/\partial n$  é a derivada do deslocamento em "Q" segundo a direção normal ao contorno  $\Gamma_\epsilon$ , como mostra a figura 3.4.

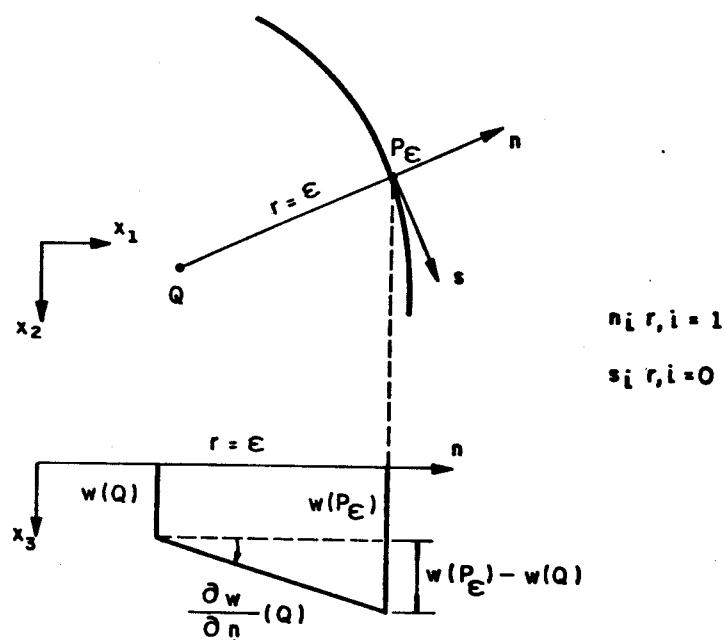


Fig. 3.4 - Deslocamentos verticais do ponto de domínio "Q" e do ponto de contorno  $P_\epsilon$ .

Substituindo-se as expressões de  $\partial V_n^*(Q, P_\epsilon)/\partial m$  e de  $w(P_\epsilon) - w(Q)$ , dadas por (3.54) e (3.55), no primeiro termo da primeira integral sobre  $\Gamma_\epsilon$  da equação (3.49), e fazendo-se a mudança de variável indicada em (3.36), chega-se a:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P_\epsilon) [w(P_\epsilon) - w(Q)] d\Gamma_\epsilon(P_\epsilon) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \frac{(3-\nu)}{4\pi} \int_{\phi} \frac{\partial w}{\partial n}(Q) (r, i, m_i) d\phi \right\} \quad (3.56)$$

O segundo termo da primeira integral sobre  $\Gamma_{\varepsilon}$  de (3.49) pode ser reescrito por:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q, P_{\varepsilon}) \frac{\partial w}{\partial n}(P_{\varepsilon}) d\Gamma_{\varepsilon}(P_{\varepsilon}) &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q, P_{\varepsilon}) \left[ \frac{\partial w}{\partial n}(P_{\varepsilon}) - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right] d\Gamma_{\varepsilon}(P_{\varepsilon}) + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q, P_{\varepsilon}) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) d\Gamma_{\varepsilon}(P_{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Substituindo-se em (3.57),  $\partial m_n^* / \partial m$ , por sua expressão dada em (3.52), fazendo-se a mudança de variável indicada em (3.36) e considerando-se válida a condição de Hölder,

$$\left| \frac{\partial w}{\partial n}(P_{\varepsilon}) - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right| \leq c \varepsilon^b(Q, P_{\varepsilon}) \quad (3.58)$$

com:

$$0 < b \leq 1$$

a primeira integral de (3.57), quando levada ao limite, se anula, resultando:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial m^*}{\partial m}{}^n(Q, P_\epsilon) \frac{\partial w}{\partial n}(P_\epsilon) d\Gamma(P_\epsilon) &= \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{(1+\nu)}{4\pi} \int_{\phi} \frac{\partial w}{\partial n}(Q) (r, i, m_i) d\phi \right\} \end{aligned} \quad (3.59)$$

A partir de (3.56) e (3.59), conclui-se que a primeira integral sobre  $\Gamma_\epsilon$  de (3.49) fica dada por :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \left\{ \frac{\partial v^*}{\partial m}{}^n(Q, P_\epsilon) [w(P_\epsilon) - w(Q)] - \frac{\partial m^*}{\partial m}{}^n(Q, P_\epsilon) \frac{\partial w}{\partial n}(P_\epsilon) \right\} d\Gamma(P_\epsilon) &= \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\phi} \frac{\partial w}{\partial n}(Q) (r, i, m_i) d\phi \right\} \end{aligned} \quad (3.60)$$

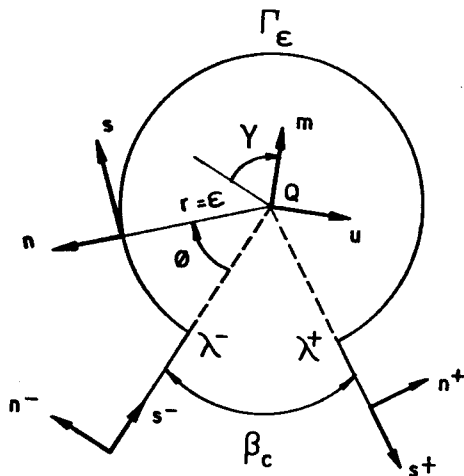


Fig. 3.5 - Sistemas de referências  $(n^-, s^-)$  e  $(m, u)$

Definindo-se o ângulo  $\gamma$  formado entre os eixos dos sistemas cartesianos  $(\bar{n}, \bar{s})$  e  $(m, n)$ , como mostra a figura 3.5, pode-se escrever, para qualquer ponto do contorno  $\Gamma_\epsilon$ , que:

$$r_i m_i = \text{sen}(\phi - \gamma) \quad (3.61)$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial n}(Q) = \frac{\partial w}{\partial m}(Q) \frac{\partial m}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial u}(Q) \frac{\partial u}{\partial n} \quad (3.62)$$

com:

$$\frac{\partial m}{\partial n} = m_i n_i = \text{sen}(\phi - \gamma) \quad (3.63)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u_i n_i = -\text{cos}(\phi - \gamma) \quad (3.64)$$

Substituindo-se em (3.60),  $\partial w(Q)/\partial n$  e  $r_i m_i$  por seus valores dados em (3.61) e (3.62), efetuando-se a integração e calculando-se o limite, deduz-se:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \left\{ \frac{\partial V^*}{\partial m}{}^n(Q, P_\epsilon) [w(P_\epsilon) - w(Q)] - \frac{\partial m^*}{\partial m}{}^n(Q, P_\epsilon) \frac{\partial w}{\partial n}(P_\epsilon) \right\} d\Gamma(P_\epsilon) =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{4\pi} \left\{ \left[ (4\pi - 2\beta_c) + \operatorname{sen} 2(\gamma + \beta_c) - \operatorname{sen} 2\gamma \right] \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \right. \\
 &\left. + \left[ \cos 2(\gamma + \beta_c) - \cos 2\gamma \right] \frac{\partial w}{\partial u}(Q) \right\} \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

Procedendo-se de forma semelhante, a parcela de (3.49), referente à reação de canto  $\partial R^*/\partial m$ , conduz a:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial R^*}{\partial m}(Q, \lambda^-) \left[ w(\lambda^-) - w(Q) \right] + \frac{\partial R^*}{\partial m}(Q, \lambda^+) \left[ w(\lambda^+) - w(Q) \right] \right\} = \\
 = \frac{(1-\nu)}{4\pi} \left\{ - \left[ \operatorname{sen} 2\gamma - \operatorname{sen} 2(\gamma + \beta_c) \right] \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \right. \\
 \left. + \left[ -\cos 2\gamma + \cos 2(\gamma + \beta_c) \right] \frac{\partial w}{\partial u}(Q) \right\} \quad (3.66)
 \end{aligned}$$

e as demais parcelas dependentes de  $\varepsilon$  em (3.49) conduzem a valores nulos. Assim, após as substituições de (3.65) e (3.66) em (3.49), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + C_2 \frac{\partial w}{\partial u}(Q) + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) \left[ w(P) - w(Q) \right] + \right. \\
 \left. - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc-1} \frac{\partial R^*}{\partial m}(Q, c_i) \left[ w(c_i) - w(Q) \right] =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) \right] d\Gamma(P) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{N_c-1} R(c_i) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, c_i) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega_g(p) + \\
 &- \int_{\Omega} K w(Q) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega(p) \tag{3.67}
 \end{aligned}$$

onde

$$C_1 = \frac{\beta_c}{2\pi} + \frac{\nu}{4\pi} \left[ \text{sen } 2\gamma - \text{sen } 2(\gamma + \beta_c) \right] \tag{3.68}$$

$$C_2 = \frac{\nu}{4\pi} \left[ \text{cos } 2\gamma - \text{cos } 2(\gamma + \beta_c) \right] \tag{3.69}$$

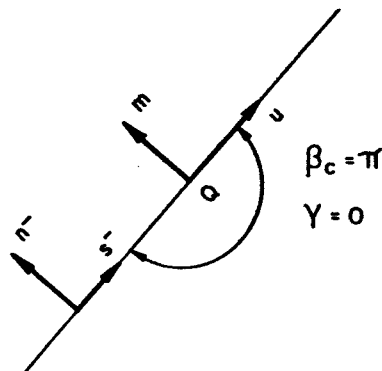


Fig. 3.6 - Ponto "Q" tomado num contorno sem angulosidade.

Tomando-se o ponto "Q" no contorno sem angulosidade e a direção  $\underline{m}$  coincidente com a normal ao contorno, como mostra a figura 3.6, tem-se que:

$$\beta_c = \pi$$

e

$$\gamma = 0$$

Neste caso, a equação (3.67) fica reduzida a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial V^*}{\partial m^n}(Q, P) \left[ w(P) - w(Q) \right] + \right. \\ & \left. - \frac{\partial m^*}{\partial m^n}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial R^*}{\partial m}(Q, c_i) \left[ w(c_i) - w(Q) \right] = \\ & = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) \right] d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{i=1}^{Nc} R(c_i) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, c_i) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega_g(p) + \\ & - \int_{\Omega} K w(Q) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega(p) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Como a derivada da solução fundamental é outra solução

fundamental, correspondente à resposta de um momento unitário aplicado num ponto "Q" de uma placa de domínio infinito [62] , as funções  $\frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P)$ ,  $\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P)$ , e  $\frac{\partial R}{\partial m}(Q,P)$  são, respectivamente, o deslocamento vertical, a cortante equivalente e a reação de canto da placa sobre fundação de Winkler, solicitada por um momento unitário aplicado em "Q". Neste caso, a condição de equilíbrio de forças verticais fornece:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial R}{\partial m}(Q,c_i) - \int_{\Omega} K \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,p) d\Omega(p) = 0 \quad (3.71)$$

Considerando-se a igualdade (3.71) e lembrando-se que  $w(Q)$  é um deslocamento de corpo rígido, portanto uma constante, a equação (3.70), fica reduzida a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P) w(P) + \right. \\ & \left. - \frac{\partial m}{\partial m}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial R}{\partial m}(Q,c_i) w(c_i) = \\ & = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) \frac{\partial w}{\partial m}(Q,P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w}{\partial n}(Q,P) \right] \right] d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{i=1}^{Nc} R(c_i) \frac{\partial w}{\partial m}(Q,c_i) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w}{\partial m}(Q,p) d\Omega_g(p) \quad (3.72) \end{aligned}$$

Na forma geral, a derivada da equação integral fica dada por:

$$\begin{aligned}
 & c_d(q) \frac{\partial w}{\partial m}(q) + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) w(P) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial R^*}{\partial m}(q, c_i) w(c_i) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{Nc} R(c_i) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, c_i) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

onde:

$$c_d(q) = \begin{cases} 1/2 & \text{para "q" tomado no contorno sem angulosidade;} \\ 0 & \text{para "q" tomado externo à placa;} \\ 1 & \text{para "q" tomado interno à placa.} \end{cases}$$

(3.74)

### 3.4 - TRANSFORMAÇÃO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO

As integrais de domínio que aparecem nas equações integrais (3.44) e (3.73) serão agora transformadas em integrais de contorno, de forma a preservar-se a característica da redução dimensional inerente ao M.E.C.

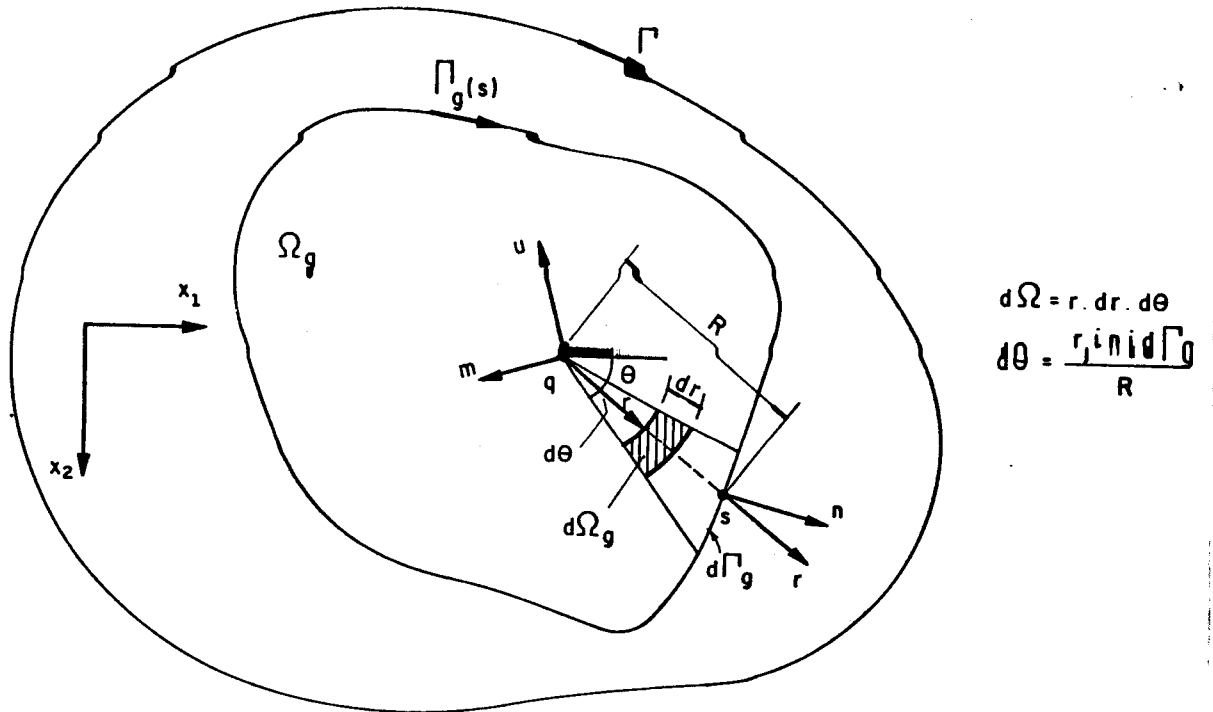


FIG. 3.7 - Região carregada  $\Omega_g$

A partir da figura 3.7, onde são representados a região carregada,  $\Omega_g$ , seu contorno,  $\Gamma_g$ , e o ponto de carregamento "q", é possível obterem-se as seguintes relações:

$$d\Omega_g = r \, dr \, d\theta \quad (3.75)$$

$$d\theta = \frac{r_{,i} n_i}{R} d\Gamma_g \quad (3.76)$$

onde  $r_{,i}$  e  $n_i$  representam os cossenos diretores do vetor  $\underline{r}$  e da normal ao contorno,  $\underline{n}$  (ver figura 3.7).

Substituindo-se (3.76) em (3.75), obtém-se:

$$d\Omega_g = r \, dr \, \frac{r_{,i} n_i}{R} d\Gamma_g \quad (3.77)$$

Através da mudança de variável indicada em (3.77), as integrais de domínio de (3.43) e de (3.73) ficam expressas por:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) = \int_{\Gamma_g} F_1 \frac{r_i n_i}{R} d\Gamma_g(s) \quad (3.78)$$

e

$$\int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega_g(p) = \int_{\Gamma_g} F_2 \frac{r_i n_i}{R} d\Gamma_g(s) \quad (3.79)$$

com:

$$F_1 = \int_0^R g(p) w^*(q, p) r dr \quad (3.80)$$

$$F_2 = \int_0^R g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) r dr \quad (3.81)$$

Admitindo-se um carregamento linearmente distribuído sobre o domínio  $\Omega_g$ , a expressão de  $g(p)$  em relação ao sistema de coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2)$  fica dada por:

$$g(p) = A x_1(p) + B x_2(p) + C \quad (3.82)$$

A partir da relação entre os sistemas de coordenadas cartesianas e de coordenadas polares com origem em "q" (fig.

3.8), dada por:

$$x_1(p) = x_1(q) + r \cos(\theta) \quad (3.83)$$

$$x_2(p) = x_2(q) + r \sin(\theta) \quad (3.84)$$

pode-se escrever o carregamento  $g(p)$  na forma:

$$g(p) = A r \cos(\theta) + B r \sin(\theta) + g(q) \quad (3.85)$$

com:

$$g(q) = A x_1(q) + B x_2(q) + C \quad (3.86)$$

Substituindo-se em (3.80),  $g(p)$  e  $w^*(q,p)$ , por suas expressões dadas em (3.85) e (2.76), respectivamente, e fazendo-se a seguinte mudança de variável:

$$r = \frac{\rho}{\lambda^{1/4}} \quad (3.87)$$

obtém-se:

$$F_1 = -\frac{1}{2\pi D} \left\{ \left[ \frac{A \cos(\theta) + B \sin(\theta)}{\lambda^{5/4}} \right] \int_0^P \rho^2 \operatorname{kei}(\rho) d\rho + \right.$$

$$+ \frac{g(q)}{\lambda} \int_0^P \rho \operatorname{kei}(\rho) d\rho \} \quad (3.88)$$

com:

$$P = R \lambda^{1/4} \quad (3.89)$$

De forma semelhante, obtém-se:

$$F_2 = \frac{r_i n_i}{2 \pi D} \left\{ \left[ \frac{A \cos(\theta) + B \operatorname{sen}(\theta)}{\lambda} \right] \int_0^P \rho^2 \operatorname{kei}'(\rho) d\rho + \right. \\ \left. + \frac{g(q)}{\lambda^{3/4}} \int_0^P \rho \operatorname{kei}'(\rho) d\rho \right\} \quad (3.90)$$

As integrais de (3.88) e (3.90), que envolvem as funções de Kelvin, podem ser calculadas analiticamente, enquanto que as integrais sobre o contorno,  $\Gamma_g$ , de (3.78) e (3.79), são calculadas numericamente, como será visto adiante.



## CAPITULO IV

### MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

#### 4.1 - Introdução

Neste capítulo será descrito um procedimento numérico para a solução das equações (3.44) e (3.73), enquanto representações integrais do deslocamento,  $w(Q)$ , e de sua derivada direcional,  $\partial w/\partial m(Q)$ , de um ponto "Q" do contorno da placa.

A solução analítica destas equações é uma tarefa muito difícil e possível de ser obtida, apenas para casos que apresentam geometria e condições de contorno simples. Torna-se viável, portanto, a utilização do Método dos Elementos de Contorno (M.E.C.) que, embora corresponda a uma solução aproximada, pode ser empregado em uma vasta variedade de casos.

O M.E.C. consiste na divisão do contorno da placa em segmentos, denominados elementos de contorno, sobre os quais as variáveis  $w$ ,  $\partial w/\partial n$ ,  $V_n$  e  $m_n$  são aproximadas por funções interpoladoras sobre pontos previamente escolhidos do elemento, ditos nós. Desta forma, as equações integrais transformam-se em equações algébricas, envolvendo os valores nodais das variáveis de contorno.

Escrevendo-se as duas equações para cada ponto nodal do contorno, obtém-se um conjunto de equações algébricas, cujas incógnitas são os deslocamentos e esforços nodais do contorno. Após a imposição das condições de contorno e a resolução do sistema de equações resultante, tornam-se conhecidas todas as variáveis de contorno, e então, através da representação integral do deslocamento de um ponto de domínio e de suas derivadas, são obtidos os deslocamentos e esforços para ponto internos.

#### 4.2 - Discretização das equações integrais

Representando-se os deslocamentos genericamente por  $\underline{u}$  e os esforços por  $\underline{p}$ , as equações (3.44) e (3.73) podem ser expressas por uma única equação, escrita na forma matricial a seguir :

$$\begin{aligned} \underline{C}(Q) \underline{u}(Q) + \int_{\Gamma} \underline{p}^*(Q, P) \underline{u}(P) d\Gamma(P) + \underline{H}_c(Q) \underline{w} &= \\ &= \int_{\Gamma} \underline{u}^*(Q, P) \underline{p}(P) d\Gamma(P) + \underline{G}_c(Q) \underline{R} + \\ &+ \int_{\tilde{\Omega}_g} \underline{u}_g^*(Q, p) \underline{g}(p) d\tilde{\Omega}_g(p) \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde:

$$\underline{u}(Q) = \begin{Bmatrix} u_1(Q) \\ u_2(Q) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(Q) \\ \partial w / \partial m(Q) \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\underset{\sim}{u}(P) = \begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(P) \\ \partial w / \partial m(P) \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\underset{\sim}{p}(P) = \begin{Bmatrix} p_1(P) \\ p_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_n(P) \\ m_n(P) \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\underset{\sim}{u}^*(Q, P) = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^*(Q, P) & - \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \\ \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) & - \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\underset{\sim}{p}^*(Q, P) = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_n^*(Q, P) & - m_n^*(Q, P) \\ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) & - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q, P) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\underset{\sim}{z}_c(Q) = \begin{bmatrix} R_{11}^* & \dots & R_{1 Nc}^* \\ R_{21}^* & \dots & R_{2 Nc}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^*(Q, c_1) & \dots & R^*(Q, c_{Nc}) \\ \frac{\partial R^*}{\partial m}(Q, c_1) & \dots & \frac{\partial R^*}{\partial m}(Q, c_{Nc}) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\underset{\sim}{z}_c(Q) = \begin{bmatrix} w_{11}^* & \dots & w_{1 Nc}^* \\ w_{21}^* & \dots & w_{2 Nc}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^*(Q, c_1) & \dots & w^*(Q, c_{Nc}) \\ \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, c_1) & \dots & \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, c_{Nc}) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$w^t = \left\{ w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_{N_c} \right\} = \left\{ w(c_1) \quad w(c_2) \quad \dots \quad w(c_{N_c}) \right\} \quad (4.9)$$

$$R^t = \left\{ R_1 \quad R_2 \quad \dots \quad R_{N_c} \right\} = \left\{ R(c_1) \quad R(c_2) \quad \dots \quad R(c_{N_c}) \right\} \quad (4.10)$$

$N_c$  : número de cantos da placa;

$$u_{\sim g}(Q, p) = \left\{ \begin{array}{l} u_{g1}^*(Q, p) \\ u_{g2}^*(Q, p) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} w^*(Q, p) \\ \partial w / \partial m^*(Q, p) \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

$$c(Q) = \left\{ \begin{array}{cc} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} c_v(Q) & 0 \\ 0 & c_d(Q) \end{array} \right\} \quad (4.12)$$

Para "Q" tomado no contorno sem angulosidade, tem-se que:

$$c(Q) = \left\{ \begin{array}{cc} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{array} \right\} \quad (4.13)$$

As equações (4.1) podem ser escritas na forma discretizada, através da divisão do contorno em segmentos. Para isto, considere a placa da figura 4.1, onde o contorno foi dividido em segmentos, ditos elementos de contorno.

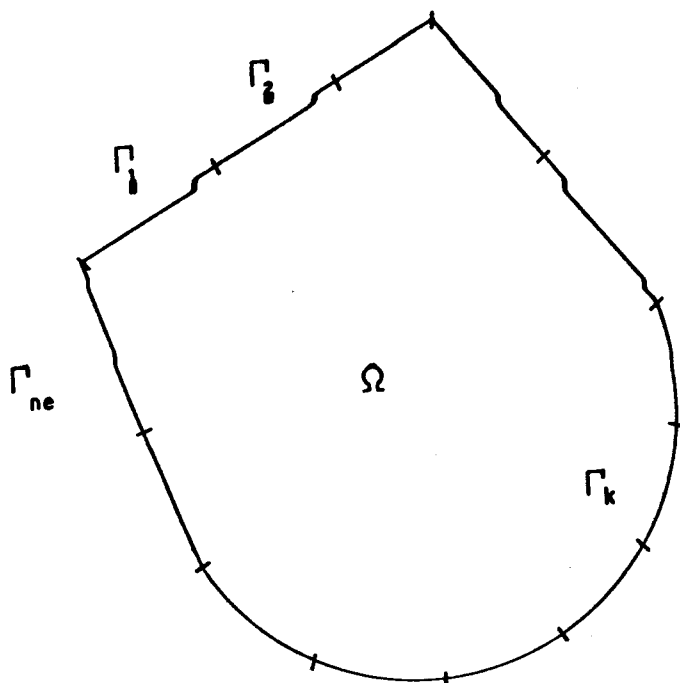


FIG. 4.1 - Contorno da placa dividido em elementos decontorno.

Esta divisão do contorno tem como objetivo, a transformação das integrais de (4.1) em uma soma de integrais sobre cada elemento que constitui o contorno. Desta forma, a aproximação das variáveis de contorno por funções interpoladoras pode ser feita a nível de cada elemento, ficando a melhor representação do contorno ligada a escolha adequada do número e forma dos elementos usados.

As funções interpoladoras geralmente utilizadas são a constante, a linear e quadrática, o que implica em interpolações sobre um, dois e três pontos pertencentes ao elemento, respectivamente. Tais pontos usados na interpolação das variáveis de contorno são denominados "nós" ou "pontos nodais", e as variáveis associadas à estes "nós" são denominadas "variáveis nodais".

Neste trabalho será assumido que os valores de contorno variam linearmente sobre cada elemento, fazendo-se uso do elemento linear contínuo.

### 4.2.1 - Elemento linear contínuo

No elemento linear contínuo são definidos dois pontos nodais, localizados nas extremidades do elemento, como indica a figura 4.2.

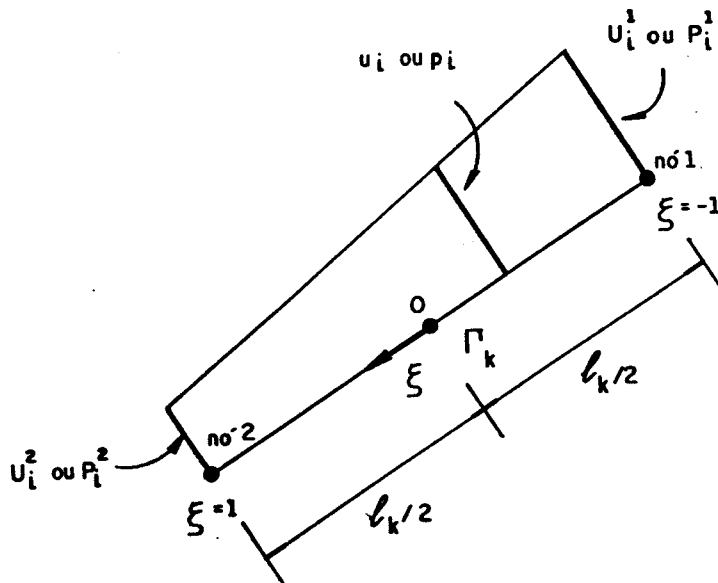


FIG. 4.2 - Elemento linear contínuo

Os valores de  $\underline{u}$  e  $\underline{p}$  em qualquer ponto do elemento podem ser expressos em termos de seus valores nodais, através de duas funções interpoladoras,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , fazendo-se:

$$u_i(P) = \phi_1(P) U_i^1 + \phi_2(P) U_i^2 = \begin{Bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i^1 \\ U_i^2 \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

$$p_i(P) = \phi_1(P) P_i^1 + \phi_2(P) P_i^2 = \begin{Bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i^1 \\ P_i^2 \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são funções da coordenada adimensional  $\xi$  e são dadas por:

$$\phi_1(P) = (1-\xi)/2 \tag{4.10}$$

$$\phi_2(P) = (1+\xi)/2$$

com:

$$\xi = \frac{\Gamma_k}{(L_k/2)} \tag{4.17}$$

e os termos  $U_i^n$  e  $P_i^n$  representam, respectivamente, os valores nodais dos deslocamentos e esforços do ponto nodal  $\underline{n}$  do elemento.

A partir de (4.14) e (4.15), pode-se concluir que as variáveis de contorno em um elemento  $\Gamma_k$  ficam dadas por:

$$\underline{u}(P) = \underline{\phi}(P) \underline{U}_k \tag{4.18.a}$$

$$\underline{p}(P) = \underline{\phi}(P) \underline{P}_k \tag{4.18.b}$$

onde:

$$\underline{u}(P) = \left\{ \begin{array}{c} u_1(P) \\ u_2(P) \end{array} \right\} \tag{4.19}$$

$$\tilde{p}(P) = \left\{ \begin{array}{l} p_1(P) \\ p_2(P) \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

$$\tilde{U}_k = \left\{ \begin{array}{l} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{array} \right\}_{\Gamma_k} \quad (4.21)$$

$$\tilde{P}_k = \left\{ \begin{array}{l} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \end{array} \right\}_{\Gamma_k} \quad (4.22)$$

$$\phi(P) = \left[ \begin{array}{cccc} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{array} \right] \quad (4.23)$$

Assim como as variáveis de contorno, as coordenadas de um ponto qualquer do elemento podem se expressas em termos das coordenadas dos pontos nodais, ou seja:

$$\tilde{x}(P) = \phi(P) \tilde{X} \quad (4.24)$$

com:



$$\tilde{x}(P) = \begin{Bmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\tilde{x}_k = \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_1^2 \\ X_2^1 \\ X_2^2 \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} \quad (4.26)$$

onde  $X_i^n$  representa a coordenada do nó  $n$  do elemento na direção  $i$ .

O uso de elementos contínuos sugere que as variáveis sejam contínuas ao longo do contorno. No entanto, podem ocorrer situações onde existam angulosidades ou vinculações diferentes entre elementos concorrentes a um mesmo nó. Nestes casos, serão utilizados nós duplos com mesmas coordenadas, de modo a permitir que um mesmo ponto do contorno possa apresentar dois valores nodais distintos de uma mesma variável de contorno, ficando cada nó associado a um dos elementos adjacentes, como mostra a figura 4.3.

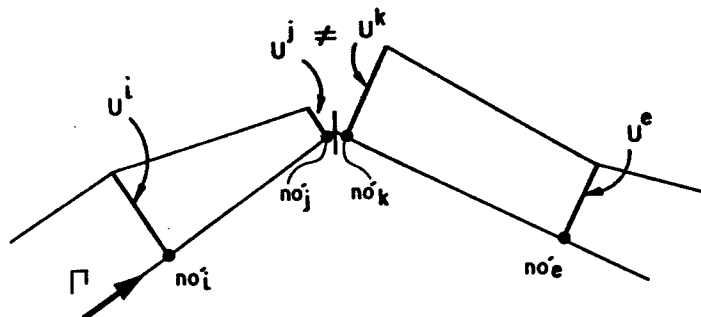


FIG. 4.3 - Nó duplo em canto de placa.

#### 4.2.2 - Transformação das equações integrais em equações algébricas

Para a maior simplicidade na apresentação do M.E.C., serão omitidas, por ora, as parcelas das equações (4.1), correspondentes às integrais de domínio.

Após a discretização do contorno em elementos de contorno, as equações (4.1) ficam expressas por:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(Q) \tilde{u}(Q) + \sum_{k=1}^{Ne} \int_{\Gamma_k} \tilde{p}^*(Q,P) \tilde{u}(P) d\Gamma(P) + \tilde{H}_c(Q) \tilde{w} &= \\ &= \sum_{k=1}^{Ne} \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(Q,P) \tilde{p}(P) d\Gamma(P) + \tilde{G}_c(Q) \tilde{R} \end{aligned} \quad (4.27)$$

sendo  $Ne$  o número de elementos de contorno.

Escrevendo-se as variáveis de contorno envolvidas na equação (4.27) na forma aproximada, segundo (4.18), as integrações sobre cada elemento fornecem:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_k} \tilde{p}^*(Q,P) \tilde{u}(P) d\Gamma(P) &= \int_{\Gamma_k} \tilde{p}^*(Q,P) \phi(P) U_k d\Gamma(P) = \\ &= \int_{\Gamma_k} \begin{bmatrix} \tilde{p}_{11}^* & \tilde{p}_{12}^* \\ \tilde{p}_{21}^* & \tilde{p}_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} d\Gamma(P) \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \Big|_{\Gamma_k} = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} h_{11}^1 & h_{11}^2 & h_{12}^1 & h_{12}^2 \\ h_{21}^1 & h_{21}^2 & h_{22}^1 & h_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} \quad (4.28)$$

e

$$\int_{\Gamma_k} u^*(Q, P) p(P) d\Gamma(P) = \int_{\Gamma_k} u^*(Q, P) \phi(P) P_k d\Gamma(P) =$$

$$= \int_{\Gamma_k} \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} d\Gamma(P) \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} =$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}^1 & g_{11}^2 & g_{12}^1 & g_{12}^2 \\ g_{21}^1 & g_{21}^2 & g_{22}^1 & g_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} \quad (4.29)$$

onde:

$$h_{ij}^m(Q) = \int_{\Gamma_k} p_{ij}^*(Q, P) \phi_m(P) d\Gamma(P) \quad (4.30)$$

$$g_{ij}^m(Q) = \int_{\Gamma_k} u_{ij}^*(Q, P) \phi_m(P) d\Gamma(P) \quad (4.31)$$

Portanto, a integração sobre cada elemento, em (4.27), fornece os coeficientes multiplicativos,  $h_{ij}^m$  e  $g_{ij}^m$ , dos valores nodais do elemento.

Fazendo-se as integrações sobre todos os elementos e agrupando-se os coeficientes multiplicativos de um mesmo valor nodal, oriundos das integrações sobre elementos vizinhos a um mesmo nó, as equações (4.27) ficam dadas por:

$$\underset{\sim}{C}(Q) \underset{\sim}{u}(Q) + \underset{\sim}{\hat{H}}(Q) \underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{H}_c(Q) \underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{G}(Q) \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{G}_c(Q) \underset{\sim}{R} \quad (4.32)$$

onde:

$\underset{\sim}{\hat{H}}(Q)$  e  $\underset{\sim}{G}(Q)$  : são matrizes dos coeficientes dos deslocamentos e esforços nodais, respectivamente, cujos elementos são obtidos através das integrais (4.30) e (4.31) e, por isto, dependem apenas da geometria e das constantes físicas envolvidas no problema;

$\underset{\sim}{H}_c(Q)$  e  $\underset{\sim}{G}_c(Q)$  : são dados por (4.7) e (4.8) e representam os vetores dos coeficientes dos deslocamentos e das reações de canto;

$w$  e  $R$  : são dados por (4.9) e (4.10) e representam  
~ ~ os valores dos deslocamentos transversais  
e das reações de todos os cantos da placa.

$U$  e  $P$  : são vetores que representam os valores no-  
~ ~ dais dos deslocamentos e esforços, respecti-  
vamente, de todos os pontos nodais do  
contorno, e são dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{U}^t &= \left\{ \begin{array}{cc} U_1^1 & U_2^1 \\ U_1^2 & U_2^2 \\ U_1^3 & U_2^3 \\ \dots & \dots \\ U_1^{Nn} & U_2^{Nn} \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} w^1 \frac{\partial w^1}{\partial n} & w^2 \frac{\partial w^2}{\partial n} \\ w^3 \frac{\partial w^3}{\partial n} & \dots \\ w^{Nn} \frac{\partial w^{Nn}}{\partial n} & \end{array} \right\} \quad (4.33.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}^t &= \left\{ \begin{array}{cc} P_1^1 & P_2^1 \\ P_1^2 & P_2^2 \\ P_1^3 & P_2^3 \\ \dots & \dots \\ P_1^{Nn} & P_2^{Nn} \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} V_n^1 & m_n^1 \\ V_n^2 & m_n^2 \\ V_n^3 & m_n^3 \\ \dots & \dots \\ V_n^{Nn} & m_n^{Nn} \end{array} \right\} \quad (4.33.b) \end{aligned}$$

onde  $Nn$  é o número de nós do contorno da placa.

### 4.2.3 - Contribuição das integrais de domínio

Conforme visto no item 3.4, as integrais de domínio de (4.1) podem ser transformadas em integrais sobre o contorno da superfície do carregamento, fazendo-se:

$$\int_{\tilde{\Omega}_g} u_g^*(Q,p) g(p) d\Omega_g(p) = T(Q) = \int_{\tilde{\Gamma}_g} F \frac{r_{,i} n_i}{R} d\Gamma_g(s) \quad (4.34)$$

onde:

$$F^t = \left\{ F_1 \quad F_2 \right\}$$

sendo que os termos  $F_1$  e  $F_2$  são dados por (3.80) e (3.81).

Assim como anteriormente, o contorno do carregamento também pode ser dividido em segmentos lineares, permitindo-se que a integral sobre  $\tilde{\Gamma}_g$  possa ser escrita como uma soma das integrações sobre cada um dos  $N_g$  segmentos que constitui o contorno do carregamento, ou seja :

$$T(Q) = \sum_{k=1}^{N_g} \int_{\tilde{\Gamma}_{g_k}} F \frac{r_{,i} n_i}{R} d\Gamma_{g_k}(s)$$

Desta forma, conclui-se que:

$$\tilde{T}^k(Q) = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{k=1}^{N_g} t_1^k(Q) \\ \sum_{k=1}^{N_g} t_2^k(Q) \end{array} \right\} \quad (4.35)$$

com:

$$t_n^k(Q) = \int_{\Gamma_k} F_n \frac{r_i n_i}{R} d\Gamma_g(s) \quad (4.36)$$

Note que a única aproximação feita, foi com relação a geometria do contorno do carregamento que, no caso, é substituído por uma sequência de segmentos lineares.

As equações integrais discretizadas, dadas em (4.32), devem ser acrescidas os termos independentes, oriundos das integrais de domínio, dados por (4.35), obtendo-se:

$$\tilde{C}(Q)u(Q) + \hat{H}(Q)U + H_c(Q)w = G(Q)P + G_c(Q)R + T(Q) \quad (4.37)$$

#### 4.3 - Sistema de equações

Para um ponto "Q" tomado no contorno da placa, os deslocamentos  $u(Q)$ , na equação (4.37), podem ser escritos em termos dos deslocamentos nodais do elemento ao qual pertence, através de (4.18.a), obtendo-se:

$$\tilde{C}(Q)\phi(Q)U_k + \hat{H}(Q)U + H_c(Q)w = G(Q)P + G_c(Q)R + T(Q) \quad (4.38)$$

Cabe observar que, no caso do ponto "Q" ser um nó do contorno, o produto  $\phi(Q)U_k$ , em (4.38), resulta nos próprios

deslocamentos deste nó.

Como  $U_k$  é formado por deslocamentos nodais, os coeficientes oriundos do produto  $C(Q)\phi(Q)$  podem ser incorporados à matriz  $\hat{H}(Q)$  de coeficientes dos deslocamentos nodais, resultando em:

$$\underset{\sim}{H}(Q)\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{H}^c(Q)\underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{G}(Q)\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{G}^c(Q)\underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{T}(Q) \quad (4.39)$$

Escrevendo-se as duas equações dadas por (4.39) para  $N_n$  pontos distintos tomados no contorno da placa, são originadas  $2.N_n$  equações distintas, relacionando os esforços e deslocamentos do contorno. Tais equações podem ser agrupadas no seguinte sistema de equações:

$$\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{H}^c\underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{G}\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{G}^c\underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{T} \quad (4.40)$$

sendo:

$\underset{\sim}{H}$  e  $\underset{\sim}{G}$  : matrizes quadradas de ordem  $(2.N_n)$ , compostas pelas submatrizes  $H(Q)$  e  $G(Q)$ , obtidas para cada nó;

$\underset{\sim}{H}^c$  e  $\underset{\sim}{G}^c$  : matrizes de  $(2.N_n) \times (N_c)$  elementos, compostas pelas submatrizes  $H_c(Q)$  e  $G_c(Q)$ , obtidas para cada nó;

$\underset{\sim}{T}$  : vetor de  $(2.N_n)$  elementos, constituído pelos subvetores  $T(Q)$ .

Com a finalidade de se obter um algoritmo conveniente para a solução numérica do problema, as equações (3.39) são escritas para os nós que definem o contorno da placa. No caso de existir nós duplos, as equações escritas para cada



nó do par podem produzir singularidade no sistema de equações (3.40), já que os nós apresentam mesmas coordenadas cartesianas.

Para se evitar este problema, as equações (3.39) não são escritas para os nós duplos e sim para pontos internos ao seus respectivos elementos de contorno adjacentes, deslocados destes nós de  $1/3$  do comprimento de elemento, como mostra a figura 4.4.

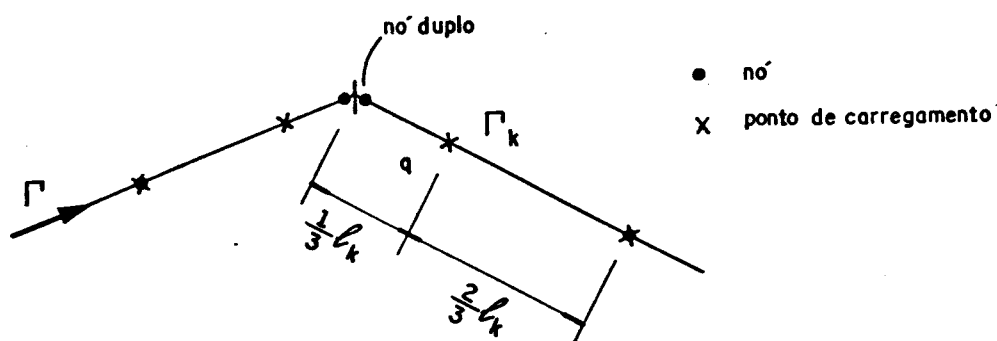


FIG. 4.4 - Ponto de carregamento "q" deslocado do nó duplo.

Ao sistema de equações (4.40) devem ser impostas as condições de contorno da placa. Das quatro variáveis nodais,  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $P_1$  e  $P_2$ , duas são sempre conhecidas. De um modo geral, quando um deslocamento  $U_i$  é conhecido, o esforço correspondente é incognita e vice-versa. Desta forma, é sempre possível ter-se quatro tipos de vinculações:

- $U_1$  e  $U_2$  conhecidos, sendo  $P_1$  e  $P_2$  incognitas;
- $U_1$  e  $P_2$  conhecidos, sendo  $P_1$  e  $U_2$  incognitas;
- $P_1$  e  $P_2$  conhecidos, sendo  $U_1$  e  $U_2$  incognitas;
- $P_1$  e  $U_2$  conhecidos, sendo  $U_1$  e  $P_2$  incognitas;

Se os valores conhecidos acima forem nulos, as vinculações descritas corresponderão, respectivamente, aos seguintes casos clássicos de vinculação:

- a) borda engastada (  $w = 0$  ;  $\partial w / \partial n = 0$  );  
 b) borda simplesmente apoiada (  $w = 0$  ;  $m_n = 0$  ) ; (4.41)  
 c) borda livre (  $V_n = 0$  ;  $m_n = 0$  ) ;

Com relação aos valores dos deslocamentos transversais e das reações associados aos cantos, em (4.40), tem-se que, nos casos clássicos de vinculações, um destes valores pode ser conhecido. Quando o valor da reação de um canto é conhecida, o deslocamento transversal é incognita e vice-versa.

Portanto, após a imposição das condições de contorno para todos os nós e cantos da placa, recai-se em um sistema de  $2.N_n$  equações com  $2.N_n$  incógnitas relativas aos nós e  $N_c$  incógnitas relativas aos cantos.

Uma das alternativas para a montagem de um sistema de mesmo número de incógnitas e equações, consiste na obtenção de  $N_c$  equações adicionais. Para isto, é escrita somente a equação do deslocamento de (4.39) para cada canto da placa. Estas equações, juntamente com as equações (4.40), resultam no seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} H & H_c \\ \tilde{H} & \tilde{H}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \tilde{W}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G & G_c \\ \tilde{G} & \tilde{G}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ \tilde{R}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T \\ \tilde{T} \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

onde as submatrizes  $\hat{H}$ ,  $\hat{H}_c$ ,  $\hat{G}$  e  $\hat{G}_c$ , assim como o subvetor  $\hat{T}$ , são semelhantes a  $H$ ,  $H_c$ ,  $G$ ,  $G_c$  e  $T$ , respectivamente, e são provenientes das equações integrais de deslocamentos, escritas para os cantos da placa.

Desta forma, para uma placa quadrada, os pontos de carregamentos tomados no contorno ficam dados segundo ilustra a figura 4.5.

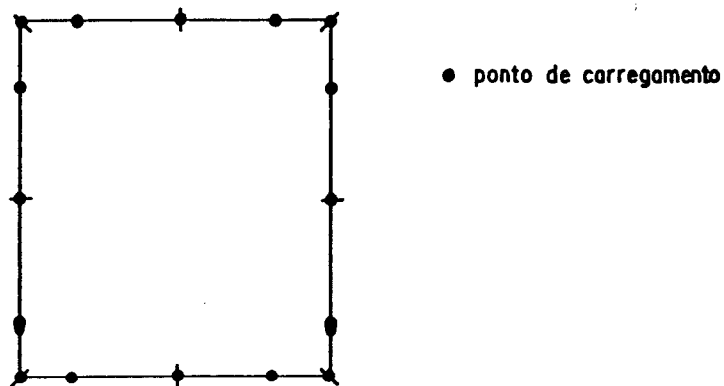


FIG. 4.5 - Pontos de carregamento tomados no contorno de uma placa quadrada

O sistema de equações lineares (4.42) pode ser resolvido levando-se todas as incógnitas para o primeiro membro, obtendo-se um sistema da seguinte forma:

$$\begin{matrix} A & X & = & B \\ \sim & \sim & & \sim \end{matrix} \quad (4.43)$$

onde  $X$  é o vetor das incógnitas, composto pelos deslocamentos e esforços dos nós e dos cantos da placa.

Resolvendo-se o sistema de equações (4.43), todas as incógnitas do contorno (esforços e deslocamentos nodais) tornam-se conhecidas.

#### 4.4 - Integração sobre os elementos

Na obtenção das equações (4.39) foi visto que as matrizes  $H(Q)$  e  $G(Q)$  são provenientes das integrações dadas em (4.30) e (4.31), sobre cada elemento que constitui o contorno.

Tais integrações envolvem as funções fundamentais, que são expressas em termos da coordenada adimensional  $\xi$ .

Da relação entre as coordenadas  $\xi_k$  e  $\Gamma_k$ , dada em (4.17), pode-se escrever que:

$$\Gamma_k = \xi \ell_k / 2 \quad (4.46)$$

Fazendo-se a mudança de variável indicada em (4.46), as integrações (4.30) e (4.31) ficam dadas, respectivamente, por:

$$h_{ij}^m(Q) = \frac{\ell_k}{2} \int_{-1}^1 p_{ij}^*(Q,P) \phi_m(P) d\xi(P) \quad (4.47)$$

$$g_{ij}^m(Q) = \frac{\ell_k}{2} \int_{-1}^1 u_{ij}^*(Q,P) \phi_m(P) d\xi(P) \quad (4.48)$$

Para os casos em que o ponto "Q" não pertence ao elemento a ser integrado, as itegrações (4.47) e (4.48) podem ser feitas numericamente, empregando-se a quadratura de Gauss, dada pela seguinte expressão:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^N W_i f(\xi_i) \quad (4.49)$$

onde:

- N : número de pontos de integração;
- $\xi_i$  : coordenada adimensional do i-ésimo ponto de integração, definido em função de N;
- $W_i$  : fator ponderador, também definido em função de N.

Para se obter resultados satisfatórios destas integrações numéricas, o número de pontos de integrações deve ser escolhido em função de alguns parâmetros, tais como a distância entre o ponto de carregamento, "Q", e o elemento a ser integrado, o tamanho do elemento, e a função a ser integrada [63].

Quando o ponto de carregamento, "Q", pertence ao elemento, como por exemplo ocorre quando o ponto de carregamento coincide com um dos nós do elemento a ser integrado, as funções fundamentais envolvidas nas integrações podem apresentar singularidades do tipo  $\ln(r)$ ,  $1/r$  e  $1/r^2$ . Nestes casos, as integrações devem ser calculadas no sentido de valor principal de Cauchy e, em termos da automação dos calculos, é conveniente que as integrações sejam feitas analiticamente.

Os termos do vetor de cargas  $\underline{I}$ , correspondentes às integrais de domínio, são obtidos a partir das integrações representadas por (4.36), sobre os segmentos lineares em que o contorno do carregamento é dividido. No caso do contorno do carregamento coincidir com o contorno da placa em uma determinada região, pode ocorrer de se ter o ponto de carregamento, "Q", pertencente ao segmento a ser integrado. Nesta situação, as integrações conduzem a valores nulos, já que o

produto escalar  $r_i n_i$ , em (4.36), é nulo para qualquer ponto "S" do segmento (ver figura 4.6).

Se o ponto "Q" não pertence ao segmento, as integrações podem ser feitas numericamente, através da quadratura de Gauss. Para isto, como anteriormente, deve-se fazer a mudança de variável indicada em (4.46) nas integrações (4.36), obtendo-se:

$$t_n^k(Q) = \frac{t_k}{2} \int_{-1}^1 F_n \frac{r_i n_i}{R} d\xi(s) \quad (4.50)$$

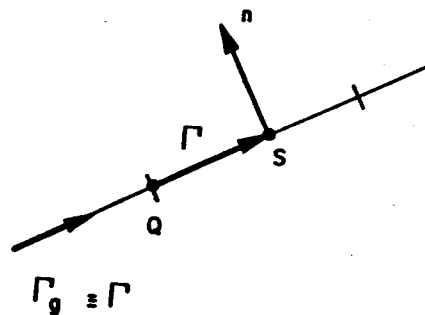


FIG. 4.6 - Ponto "Q" pertencente ao segmento linear do contorno do carregamento.

#### 4.5 - Propriedades da matriz H

Como visto anteriormente, a análise de placas pelo Método dos Elementos de Contorno recai na resolução de um sistema formado a partir das equações (4.39), que condicionam os esforços e deslocamentos do contorno à uma configuração de equilíbrio.

É possível estabelecer-se algumas possíveis configurações de equilíbrio para as variáveis de contorno, a partir da consideração de deslocamento de corpo rígido da placa, ou seja, deslocamento transversal e rotação em torno

de um eixo arbitrário. Estas configurações implicam em esforços nulos em toda a placa e, conseqüentemente, em vetores de esforços nodais,  $\underline{P}$ , e de reações de canto,  $\underline{R}$ , nulos na equação (4.39), obtendo-se:

$$\underline{H}(Q) \underline{\bar{U}} + \underline{H}_c(Q) \underline{\bar{W}} = \underline{T}(Q) \quad (4.51)$$

Admitindo-se um movimento transversal de corpo rígido,  $w_0$ , os vetores relativos aos deslocamentos em (4.51) ficam dados por:

$$\underline{\bar{U}}^t = \left\{ w_0 \ 0 \ w_0 \ 0 \ w_0 \ 0 \ \dots \ w_0 \ 0 \right\} \quad (4.52)$$

$$\underline{\bar{W}}^t = \left\{ w_0 \ w_0 \ w_0 \ \dots \ w_0 \right\} \quad (4.53)$$

Neste caso, para que as condições de equilíbrio sejam satisfeitas, a placa deve estar submetida a um carregamento transversal igual à reação oferecida pelo solo ao deslocamento imposto, ou seja, uma carga uniformemente distribuída,

$$g = K w_0 \quad (4.54)$$

onde  $K$  é o módulo da fundação.

Para esta carga, o vetor de carregamento da equação (4.51) fica dado por (ver equação (4.34)):

$$\bar{T}(Q) = K w_o \int_{\tilde{\Omega}_g} u_g^*(Q, p) d\tilde{\Omega}_g(p) = K w_o \begin{Bmatrix} \bar{t}_1(Q) \\ \bar{t}_2(Q) \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

sendo:

$$\bar{t}_1(Q) = \int_{\Omega_g} w^*(Q, p) d\Omega(p)$$

$$\bar{t}_2(Q) = \int_{\Omega_g} \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega(p)$$

Os termos  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  podem ser calculados, transformando-se as integrais sobre o domínio do carregamento em integrais de contorno, como mostrado no item 3.4.

Substituindo-se (4.52), (4.53) e (4.55) em (4.51), chega-se à seguinte propriedade, envolvendo os deslocamentos das colunas ímpares da matriz  $H(Q)$  e os elementos da matriz  $H_c(Q)$ :

$$\sum_{j=1}^{Nn} h_{i,2j-1}(Q) + \sum_{j=1}^{Nc} h_{c_{i,j}}(Q) = K \bar{t}_i(Q) \quad (4.56)$$

$i=1,2$

Para se definir a rotação de corpo rígido, considere a figura 4.7, onde  $\underline{e}$  representa o versor associado a um eixo arbitrário de rotação que passa por um ponto "E".  $D^k$  é a distância entre um nó genérico, "k", e o eixo de rotação, e  $\underline{d}$  é o versor correspondente à direção normal ao eixo.



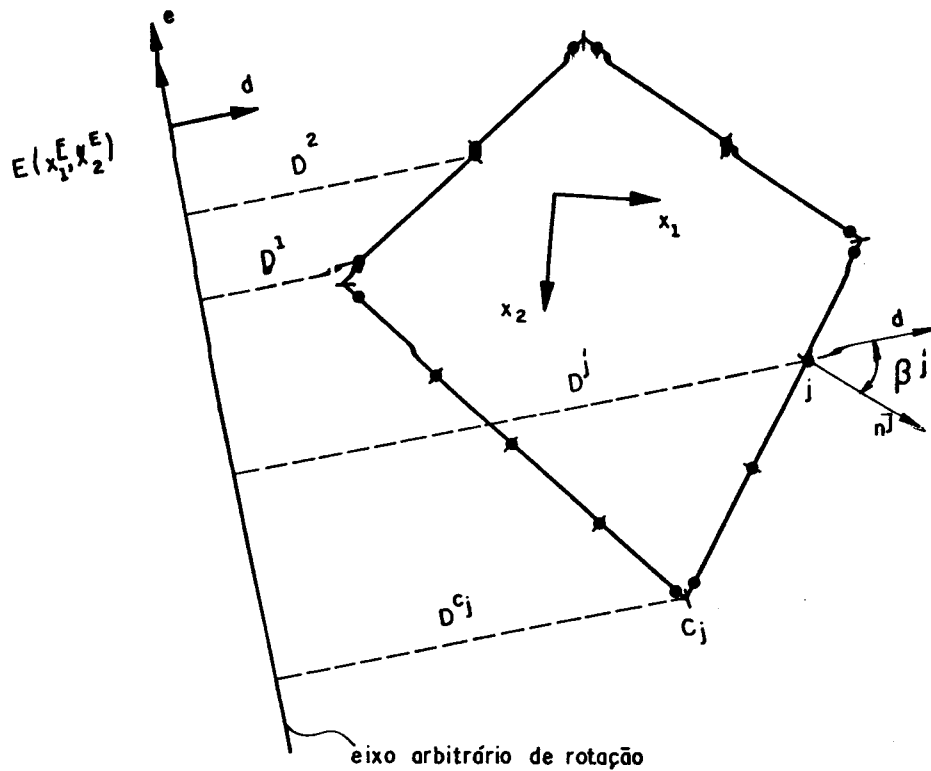


FIG. 4.7 - Placa indeformada sobre fundação elástica.

Considerando-se um giro de corno rígido  $\alpha$  no sentido indicado pelo versor  $\underline{e}$ , os vetores relativos aos deslocamentos em (4.50) ficam dados por:

$$\bar{U}^t = \alpha \left\{ D^1 \cos\beta^1 \quad D^2 \cos\beta^2 \quad \dots \quad D^{Nn} \cos\beta^{Nn} \right\} \quad (4.57)$$

$$\bar{w}^t = \alpha \left\{ D^{C1} \quad D^{C2} \quad \dots \quad D^{CNc} \right\} \quad (4.58)$$

sendo:

$$\cos\beta^j = n_k^j d_k$$

onde  $n_k^j$  e  $d_i$  representam os cossenos diretores da normal ao contorno no nó "j" e do versor  $\underline{d}$ , respectivamente.

Para este caso, o carregamento que equilibra a reação do solo é dado por:

$$\bar{g} = K \alpha D = K \alpha ( A x_1 + B x_2 + C ) \quad (4.59)$$

com:

$$A = d_1 = - e_2$$

$$B = d_2 = e_1$$

$$C = - d_i x_i^E$$

onde  $d_i$  e  $e_i$  representam os cossenos diretores de  $\underline{d}$  e  $\underline{e}$ , respectivamente, e  $x_i^E$  representam as coordenadas cartesianas do ponto "E".

Nestas condições, o vetor de carregamentos da equação (4.51) fica dado por:

$$\bar{T}(Q) = K \alpha \begin{Bmatrix} \bar{t}_1(Q) \\ \bar{t}_2(Q) \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

sendo:

$$\bar{t}_1(Q) = \int_{\Omega_g} ( A x_1 + B x_2 + C ) w^*(Q, p) d\Omega(p)$$

$$\bar{t}_2(Q) = \int_{\Omega_g} ( A x_1 + B x_2 + C ) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega(p)$$

Como anteriormente, os valores de  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  podem ser calculados como mostrado no item 3.4.

Substituindo-se (4.57), (4.58) e (4.60) em (4.51), chega-se à seguinte propriedade:

$$\sum_{j=1}^{Nn} \left[ h_{i,2j-1}(Q) D^j + h_{i,2j}(Q) \cos \beta^j \right] + \sum_{j=1}^{Nc} h_{c_{i,j}}(Q) D^j = K \bar{t}_i(Q) \quad (4.61)$$

$i=1,2$

Estas propriedades obtidas podem ser usadas para a determinação dos elementos da matriz  $H(Q)$  que seriam obtidos a partir de integrações singulares. Neste trabalho, as propriedades acima são usadas apenas para a verificação das matrizes  $H(Q)$  e  $H_c(Q)$ , já que as integrações singulares são calculadas analiticamente.

#### 4.6 - Deslocamentos e esforços para pontos internos

Nos problemas usuais de placas, além dos valores de contorno, é importante a determinação dos deslocamentos e esforços para pontos do interior da placa.

A partir da representação integral do deslocamento transversal de um ponto interno "q", dada por (3.43), é possível chegar-se às representações integrais das curvaturas de pontos internos, segundo as direções  $x_1$  e  $x_2$  de um sistema cartesiano de origem em "q":

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_1 \partial x_2} + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) w(P) - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{nc} \frac{\partial^2 R^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, c_i) w(c_i) = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) + \right. \\
 & \left. - m_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{nc} R(c_i) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, c_i) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, p) d\Omega_g(p) \tag{4.62}
 \end{aligned}$$

Denominando-se os deslocamentos genericamente por  $\underline{u}$  e os esforços por  $\underline{p}$ , a equação do deslocamento, (3.44), e as equações das curvaturas, (4.62), podem ser escritas por uma única equação, expressa na forma matricial por:

$$\begin{aligned}
 \underline{u}(q) + \int_{\Gamma} \underline{p}^*(q, P) \underline{u}(P) d\Gamma(P) + \underline{H}_c(q) \underline{w} & = \\
 = \int_{\Gamma} \underline{u}^*(q, P) \underline{p}(P) d\Gamma(P) + \underline{G}_c(q) \underline{R} + \\
 + \int_{\Omega_g} \underline{u}_g^*(q, p) g(p) d\Omega_g(p) \tag{4.63}
 \end{aligned}$$

onde:

$$\tilde{u}(q) = \begin{Bmatrix} w(q) \\ \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_1 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_2 \partial x_2} \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

$$\tilde{u}^*(q, P) = \begin{Bmatrix} w^*(q, P) & - \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) & - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) & - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2 \partial x_2}(q, P) & - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \end{Bmatrix} \quad (4.65)$$

$$\tilde{p}^*(q, P) = \begin{Bmatrix} V_n^*(q, P) & - m_n^*(q, P) \\ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) & - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) \\ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) & - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) \\ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_2 \partial x_2}(q, P) & - \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_2 \partial x_2}(q, P) \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

$$\underset{\sim}{u}^*(q, p) = \begin{bmatrix} w^*(q, p) \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, p) \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, p) \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2 \partial x_2}(q, p) \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Após a discretização do contorno da placa em elementos de contorno (item 4.2), as equações (4.63) ficam expressas em termos dos valores nodais, ou seja:

$$\underset{\sim}{u}(q) + \begin{Bmatrix} H'(q) & H'_c(q) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \underset{\sim}{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G'(q) & G'_c(q) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ \underset{\sim}{R} \end{Bmatrix} + \underset{\sim}{T}(q) \quad (4.68)$$

Como os deslocamentos e esforços nodais já foram calculados anteriormente, a partir de (4.68) é possível obter-se os deslocamentos e curvaturas de um ponto do domínio, fazendo-se:

$$\underset{\sim}{u}(q) = - \begin{Bmatrix} H'(q) & H'_c(q) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \underset{\sim}{w} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G'(q) & G'_c(q) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ \underset{\sim}{R} \end{Bmatrix} + \underset{\sim}{T}(q) \quad (4.69)$$

Os momentos fletores para pontos internos podem então ser obtidos a partir das curvaturas, através da relação dada em (2.8).

Os valores das forças cortantes podem ser obtidas de forma análoga.

As funções fundamentais envolvidas na equação integral

das curvaturas, (4.62), são obtidas derivando-se as funções dadas por (2.76) a (2.80), com relação aos eixos  $x_1$  e  $x_2$ , de origem no ponto interno "q", chegando-se a:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2 \pi D} \left\{ \text{Ker}(\rho) r_{,i} r_{,j} + \left[ \delta_{ij} + \right. \right. \\ \left. \left. - 2 r_{,i} r_{,j} \right] \text{Ker}'(\rho)/\rho \right\} \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) = - \frac{\lambda^{1/4}}{2 \pi D} \left\{ \left[ \delta_{ij} (r_{,k} n_{,k}) + r_{,i} n_{,j} + \right. \right. \\ \left. \left. + n_{,i} r_{,j} - 4 (r_{,k} n_{,k}) r_{,i} r_{,j} \right] \text{K1}(\rho)/\rho + \right. \\ \left. + (r_{,k} n_{,k}) r_{,i} r_{,j} \text{Ker}'(\rho) \right\} \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_i \partial x_j} = - \frac{\lambda^{1/2}(1-\nu)}{2 \pi} \left\{ \left[ 4 (r_{,k} n_{,k})^2 (\delta_{ij} - 6 r_{,i} r_{,j} + \right. \right. \\ \left. \left. + 8 (r_{,k} n_{,k}) (n_{,i} r_{,j} + r_{,i} n_{,j}) + 4 r_{,i} r_{,j} + \right. \right. \\ \left. \left. - 2 n_{,i} n_{,j} - \delta_{ij} \right] \text{K1}(\rho)/\rho^2 + \left[ (r_{,k} n_{,k})^2 (8 r_{,i} r_{,j} + \right. \right. \\ \left. \left. - \delta_{ij}) + (2 r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}) \nu/(1-\nu) + \right. \right. \\ \left. \left. - 2 (r_{,k} n_{,k}) (r_{,i} n_{,j} + n_{,i} r_{,j}) - r_{,i} r_{,j} \right] \text{Ker}'(\rho)/\rho + \right.$$

$$+ \left[ \left( \frac{\nu}{(1-\nu)} + (r_k n_k)^2 \right) r_i r_j \right] \text{Kel}(\rho) \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_{ns}^*}{\partial x_i \partial x_j} = & - \frac{\lambda^{1/2} (1-\nu)}{2\pi} \left\{ - \left\{ \left[ s_j - (r_k s_k) r_j \right] \left[ n_i + \right. \right. \right. \\ & - 4 (r_k n_k) r_i \left. \right] + \left[ n_j - (r_k n_k) r_j \right] \left[ s_i + \right. \\ & - 4 (r_k s_k) r_i \left. \right] - 4 (r_k n_k) (r_k s_k) (\delta_{ij} + \\ & - r_i r_j) - 3 r_j \left[ n_i (r_k s_k) + s_i (r_k n_k) + \right. \\ & \left. \left. - 4 (r_k n_k) (r_k s_k) r_i \right\} \text{Kl}(\rho)/\rho^2 + \right. \\ & + (r_k n_k) (r_k s_k) r_i r_j \text{Kel}(\rho) + \\ & - \left\{ \left[ n_j - (r_k n_k) r_j \right] (r_k s_k) r_i + \left[ s_j + \right. \right. \\ & - (r_k s_k) r_j \left. \right] (r_k n_k) r_i + \left[ \delta_{ij} + \right. \\ & \left. - r_i r_j \right] (r_k n_k) (r_k s_k) + \\ & \left. - 5 (r_k n_k) (r_k s_k) r_i r_j + r_j \left[ n_j (r_k s_k) + \right. \right. \\ & \left. \left. + s_i (r_k n_k) \right] \right\} \text{Ker}'(\rho)/\rho \left. \right\} \quad (4.73) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 v_n^*}{\partial x_i \partial x_j} = & - \frac{\lambda^{3/4}(1-\nu)}{2\pi} \left\{ \left\{ \left[ \frac{\nu}{(1-\nu)} + (r_k s_k)^2 \right] \left[ -n_i + \right. \right. \right. \\
 & + 2(r_k n_k) r_i \left. \right] + \left\{ r_i + \left[ 6(r_k s_k)^2 - 1 \right] + \right. \\
 & - 2(r_k s_k) s_i \left. \right\} (r_k n_k) \left. \right\} r_i \left[ -2 \frac{\text{Ker}'(\rho)}{\rho^2} - \frac{\text{Kei}(\rho)}{\rho} \right] + \\
 & + \left\{ 2 \left[ \frac{\nu}{(1-\nu)} + (r_k s_k)^2 \right] \left\{ \left[ n_j - (r_k n_k) r_j \right] r_i + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left[ \delta_{ij} - r_i r_j \right] (r_k n_k) \right\} + 2(r_k s_k) \left[ s_j + \right. \right. \\
 & - (r_k s_k) r_j \left. \right] \left[ 2(r_k n_k) r_i - n_i \right] + \\
 & + \left[ n_j - (r_k n_k) r_j \right] \left\{ r_i \left[ 6(r_k s_k)^2 - 1 \right] + \right. \\
 & - 2(r_k s_k) s_i \left. \right\} + (r_k n_k) \left\{ \left[ \delta_{ij} - r_i r_j \right] \left[ -1 + \right. \right. \\
 & + 6(r_k s_k)^2 \left. \right] + \left[ s_j - (r_k s_k) r_j \right] \left[ -2s_i + \right. \\
 & \left. \left. + 12(r_k s_k) r_i \right] \right\} \left. \right\} \text{Ker}'(\rho)/\rho^2 + \\
 & + \left[ \frac{\nu}{(1-\nu)} + (r_k s_k)^2 \right] r_i r_j (r_k n_k) \text{Kei}'(\rho) + \\
 & + \left\{ 2(r_k s_k) (r_k n_k) r_i \left[ s_j - (r_k s_k) r_j \right] + \right. \\
 & + \left. \left[ \frac{\nu}{(1-\nu)} + (r_k s_k)^2 \right] \left\{ \left[ \delta_{ij} - r_i r_j \right] (r_k n_k) + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \left[ n_{,j} - (r_{,k} n_{,k}) r_{,j} \right] r_{,i} \right\} \left. \right\} \text{Ker}(\rho) / \rho + \\
 & + \left\{ (r_{,k} n_{,k}) \left\{ r_{,i} \left[ 24 (r_{,k} s_{,k})^2 - 4 \right] - 8 (r_{,k} s_{,k}) s_{,i} \right\} + \right. \\
 & + \left. \left[ 1 - 4 (r_{,k} s_{,k})^2 \right] n_{,i} \right\} r_{,j} \left[ \frac{4 \text{Kl}(\rho)}{\rho^3} - \frac{\text{Ker}'(\rho)}{\rho^2} \right] + \\
 & - \left\{ \left[ n_{,j} - (r_{,k} n_{,k}) r_{,j} \right] \left\{ r_{,i} \left[ 24 (r_{,k} s_{,k})^2 - 4 \right] + \right. \right. \\
 & - \left. \left. 8 (r_{,k} s_{,k}) s_{,i} \right\} + (r_{,k} n_{,k}) \left\{ \left[ \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right] \left[ -4 + \right. \right. \right. \\
 & + \left. \left. 24 (r_{,k} s_{,k})^2 \right] + \left[ s_{,j} - (r_{,k} s_{,k}) r_{,j} \right] \left[ 48 (r_{,k} s_{,k}) r_{,i} + \right. \right. \\
 & - \left. \left. 8 s_{,i} \right] \right\} - 8 n_{,i} (r_{,k} s_{,k}) \left[ s_{,j} + \right. \\
 & \left. \left. - (r_{,k} s_{,k}) r_{,j} \right] \right\} \text{Kl}(\rho) / \rho^3 \left. \right\} \tag{4.74}
 \end{aligned}$$

## CAPÍTULO V

### AVALIAÇÃO NUMÉRICA

#### 5.1 - Introdução

Neste capítulo a formulação desenvolvida anteriormente é aplicada na análise de alguns exemplos de placas sobre fundação elástica de Winkler.

As funções de Kelvin, envolvidas nas funções fundamentais, são calculadas numericamente a partir das aproximações polinomiais (A.9). Tais aproximações são válidas com boa precisão para parâmetros compreendidos entre 0 e 8, que englobam grande parte dos casos práticos.

Para a avaliação dos resultados, é empregado o seguinte parâmetro:

$$K^* = \frac{K b^4}{D} = \lambda b^4 \quad (5.1)$$

onde  $b$  é a dimensão característica da placa. Para placas retangulares,  $b$  é o tamanho do maior lado e para placas circulares,  $b$  é o diâmetro.  $K$  é o módulo da fundação e  $D$  é

rigidez da placa à flexão.

Nos exemplos apresentados são assumidos diferentes valores de  $K'$ . Em particular, para placas que não interagem com o solo deve-se ter  $K=0$  e, portanto,  $K'=0$ . Entretanto, devido a dificuldade computacional encontrada para este valor de  $K'$ , placas que não interagem com o solo são avaliadas utilizando-se pequenos valores do parâmetro. Valores tomados entre 0.001 e 1 indicaram ser apropriados para representar tais casos.

Em todos os exemplos é assumido um coeficiente de Poisson igual a 0.3 e, com exceção do último exemplo, os resultados são comparados com os obtidos analiticamente.

## 5.2 - Exemplo 1 - placa retangular simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada.

Neste exemplo é analisada uma placa retangular de lados  $a$  e  $b$ , sobre fundação elástica, simplesmente apoiada no contorno e submetida à uma carga uniformemente distribuída,  $q$ , como mostra a figura 5.1.

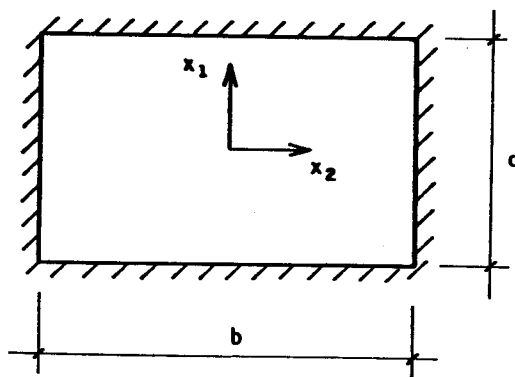


FIG. 5.1 - Placa retangular uniformemente carregada sobre fundação elástica.

A figura 5.2 ilustra os deslocamentos transversais do ponto central da placa, para a relação entre os lados ( $b/a$ ) variando entre 1 e 2, obtidos analiticamente [64] e pelo M.E.C. (20 a 30 elementos) para diferentes valores de  $K'$  ( $K' = K b^4/D$ ).

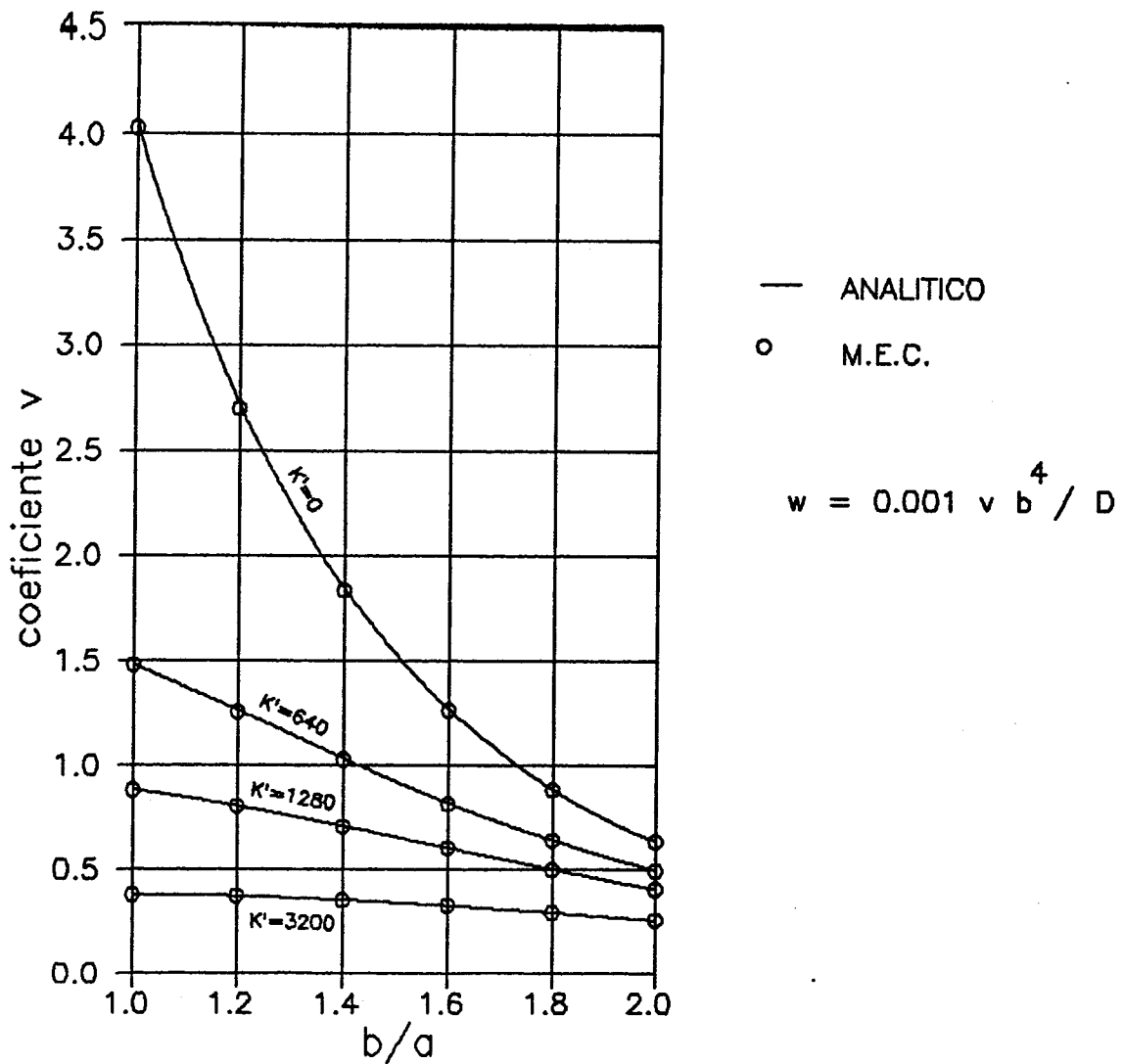


FIG. 5.2 - Deslocamentos transversais no centro da placa.

Na tabela 5.1 estão indicados os momentos fletores no centro da placa, segundo as direções  $x_1$  e  $x_2$  (fig. 5.1), obtidos para  $K'=3200$ .

TABELA 5.1 - Momentos fletores centrais para placa retangular uniformemente carregada (fig. 5.1), obtidos pelo M.E.C. e analiticamente.

b/a	M. E. C.		Analítico[64]	
	$m_1$	$m_2$	$m_1$	$m_2$
1.0	0.00195	0.00195	0.00194	0.00194
1.2	0.00385	0.00257	0.00384	0.00255
1.4	0.00575	0.00311	0.00575	0.00308
1.6	0.00743	0.00352	0.00745	0.00350
1.8	0.00877	0.00378	0.00880	0.00377
2.0	0.00972	0.00390	0.00974	0.00389
	Fator: $q a^2$			

**5.3 - Exemplo 2 - placa retangular engastada no contorno e uniformemente carregada.**

Neste exemplo é analisada uma placa retangular de lados  $a$  e  $b$ , engastada no contorno e submetida a um carregamento,  $q$ , uniformemente distribuido.

A figura 5.3 ilustra a variação do deslocamento do ponto central da placa com a relação  $b/a$ , para diferentes valores do parâmetro  $K'$  ( $K' = K b^4/D$ ).

A figura 5.4 mostra a variação do momento fletor no ponto central e do máximo momento fletor na borda com a relação  $b/a$ , para diferentes valores de  $K'$ .

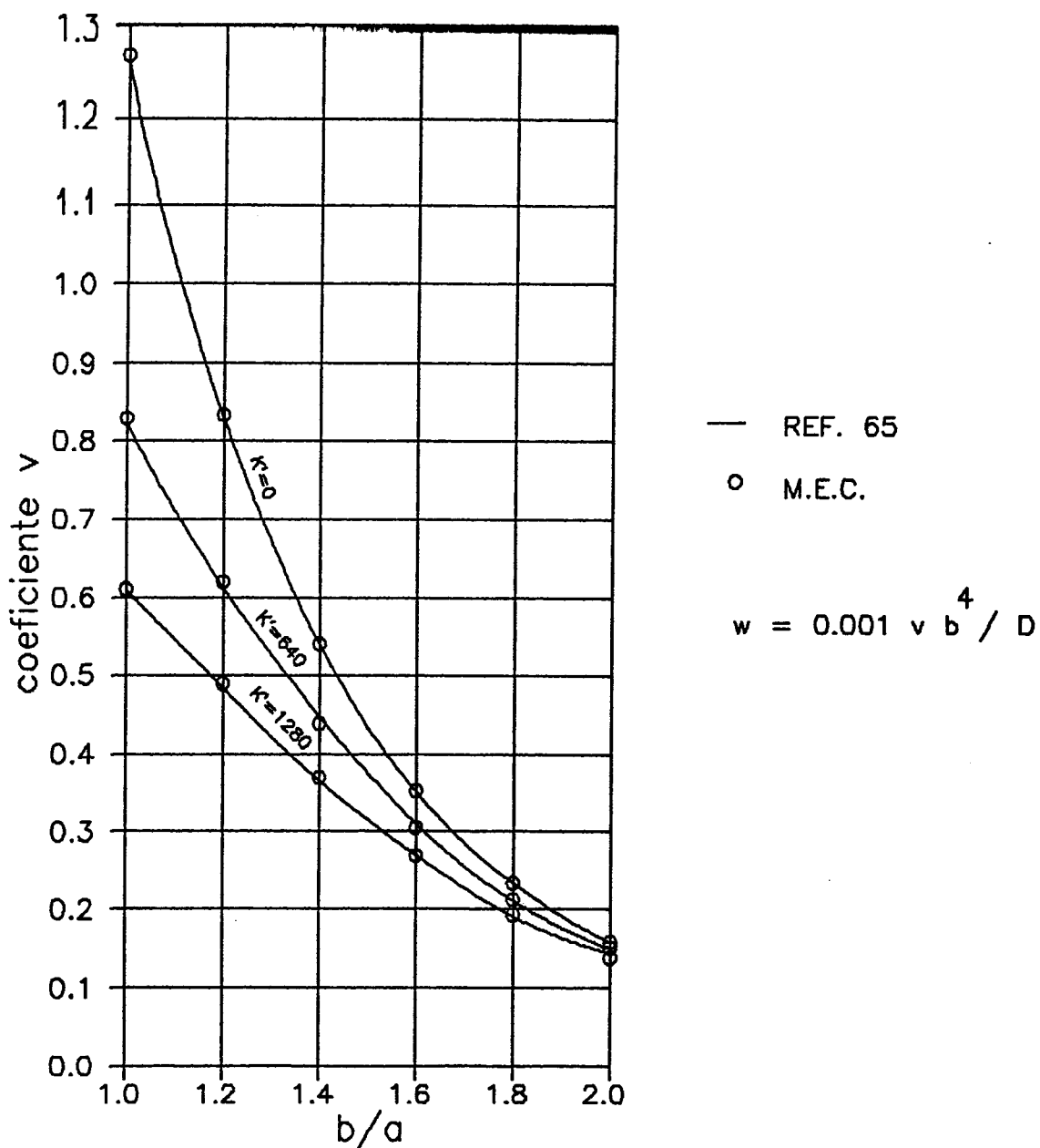


FIG. 5.3 - Variação do deslocamento do ponto central com o parâmetro  $K'$  e com a relação  $b/a$ , para placas retangulares.

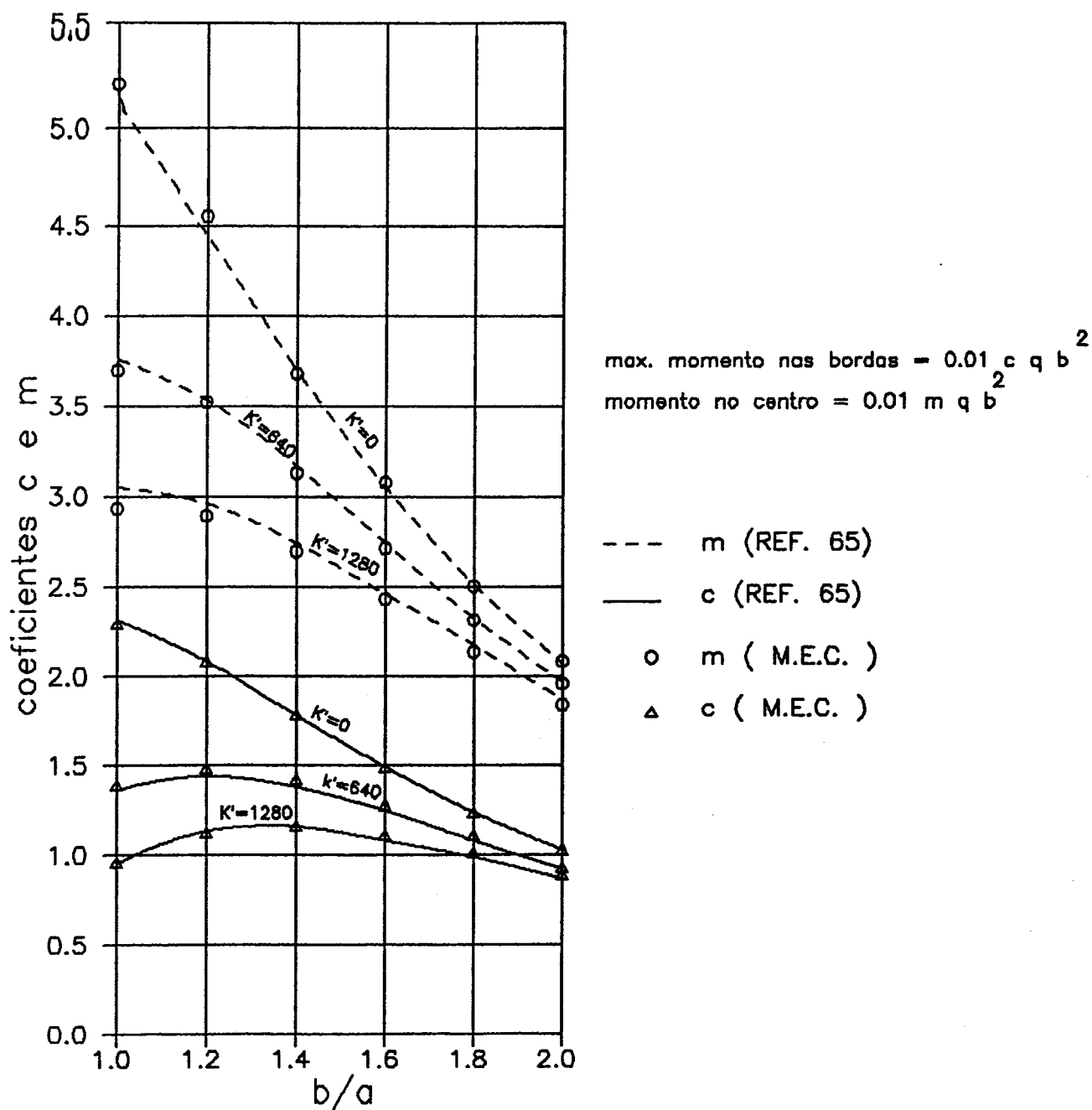


FIG. 5.4 - Variação do momento fletor central e do máximo momento fletor na borda com  $K'$  e  $b/a$ , para placas retangulares.



**5.4 - Exemplo 3 - placa circular engastada no contorno e uniformemente carregada.**

Na tabela 5.2 estão indicados os valores dos deslocamentos e momentos fletores do ponto central e do contorno de uma placa circular de diâmetro  $b$ , engastada no contorno e submetida a um carregamento uniformemente distribuído,  $q$ , obtidos para diferentes valores do parâmetro  $K'$  ( $K' = K b^4 / D$ ).

TABELA 5.2 - Deslocamentos e momentos fletores no centro e nas bordas para placas circulares.

K'	deslocamento no centro w		momento flet. no centro m		momento flet. na borda m <sub>n</sub>	
	REF[65]	M. E. C	REF[65]	M. E. C	REF[65]	M. E. C
0	1.562	1.550	8.125	8.093	12.50	12.43
640	1.112	1.106	5.486	5.480	9.666	9.638
1280	0.858	0.854	4.011	4.013	8.047	8.032
1920	0.695	0.692	3.076	3.082	6.993	6.985
2560	0.581	0.580	2.435	2.442	2.249	6.246
3200	0.498	0.497	1.972	1.980	5.694	5.690
fator	$\frac{q b^4}{16 D} (10^{-2})$		$\frac{q b^2}{4} (10^{-2})$		$\frac{q b^2}{4} (10^{-2})$	

**5.5 - Exemplo 4 - placa quadrada uniformemente carregada com diferentes discretizações do contorno**

Para se verificar a precisão do método para diferentes discretizações do contorno, é analisada uma placa quadrada de lado  $a$ , simplesmente apoiada no contorno e submetida à uma carga uniformemente distribuída,  $q$ .

Os momentos fletores centrais, obtidos para divisões do contorno em diferentes números de elementos, são comparados

com os obtidos analiticamente [64]. As variações do erro com o número de elementos, para  $K'=0$  e  $K'=200$  ( $K' = K a^4/D$ ), estão ilustradas na figura 5.5.

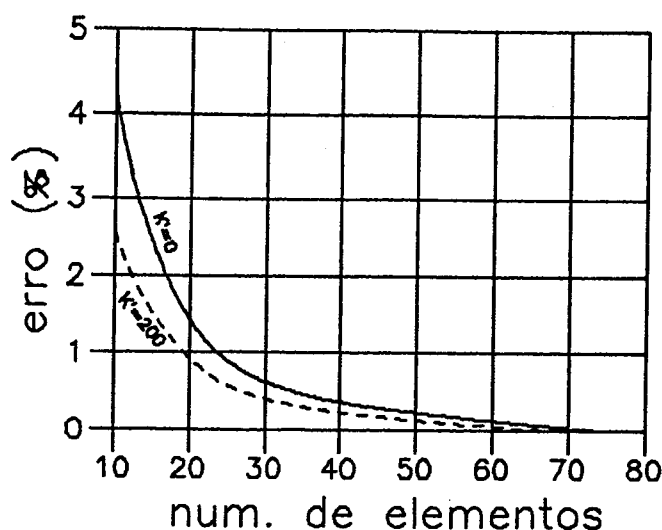


FIG. 5.5 - Variação do erro dos momentos centrais com o número de elementos de contorno para uma placa quadrada uniformemente carregada.

Com base nos resultados apresentados, verifica-se que, mesmo para divisões do contorno em poucos elementos, são atingidos valores muito próximos aos analíticos.

#### 5.6 - Exemplo 5 - placa quadrada apoiada no contorno e submetida a uma carga centrada

Em muitos problemas de engenharia, tais como no estudo de radiers e sapatas flexíveis, podem ocorrer situações onde existem cargas atuantes em uma pequena região da placa. Para se avaliar a eficiência da formulação para estas situações, é analisada uma placa quadrada sobre fundação elástica com  $K'=200$ , simplesmente apoiada no contorno e submetida a uma força transversal,  $P$ , distribuída numa região central, como ilustra a figura 5.6.

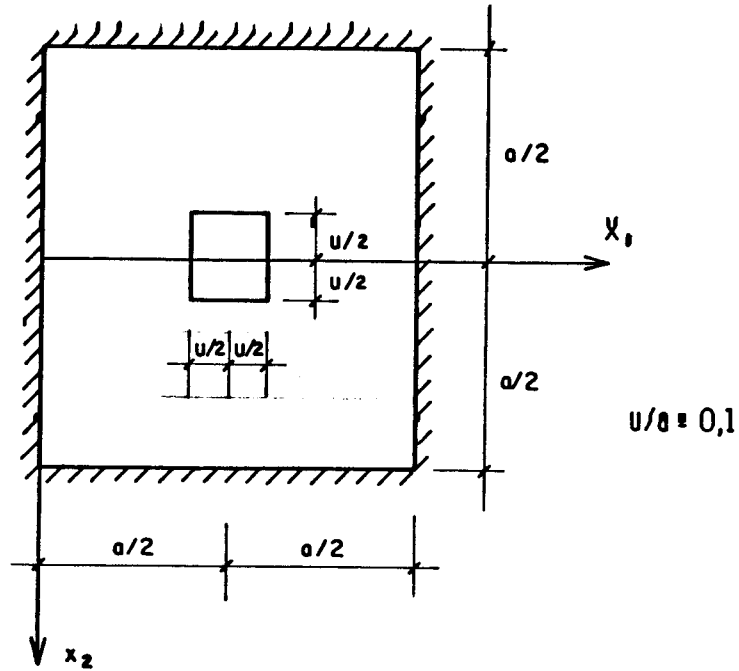


FIG. 5.6 - placa quadrada sobre fundação elástica com carga centrada.

As figuras 5.7 e 5.8 mostram as variações dos deslocamentos transversais e dos momentos fletores, respectivamente, ao longo do eixo  $x_1$ , obtidos analiticamente [64] e pelo M.E.C. para uma divisão do contorno em 16 elementos.

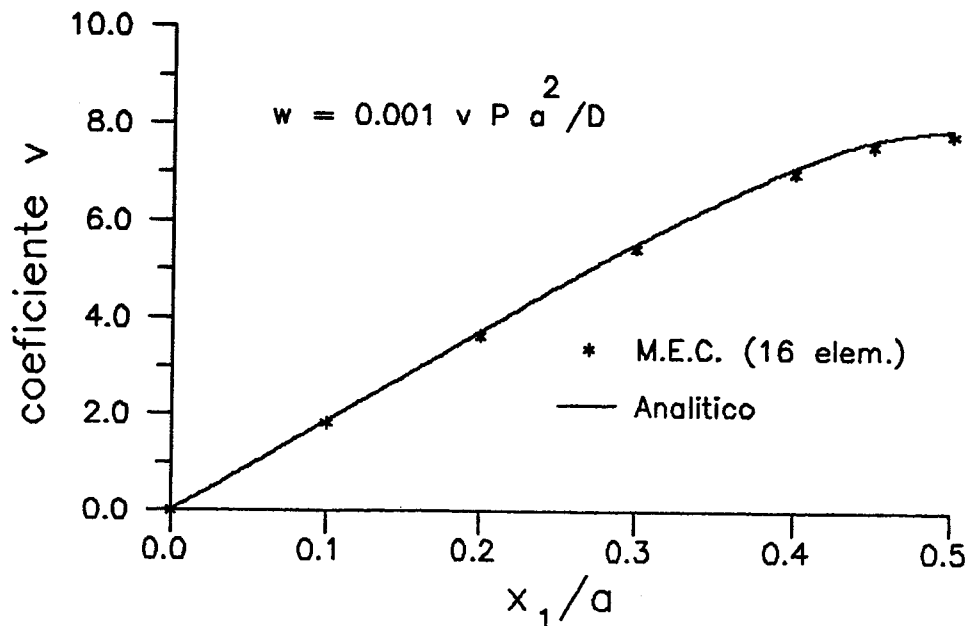


FIG. 5.7 - Variação dos deslocamentos transversais ao longo do eixo  $x_1$ .

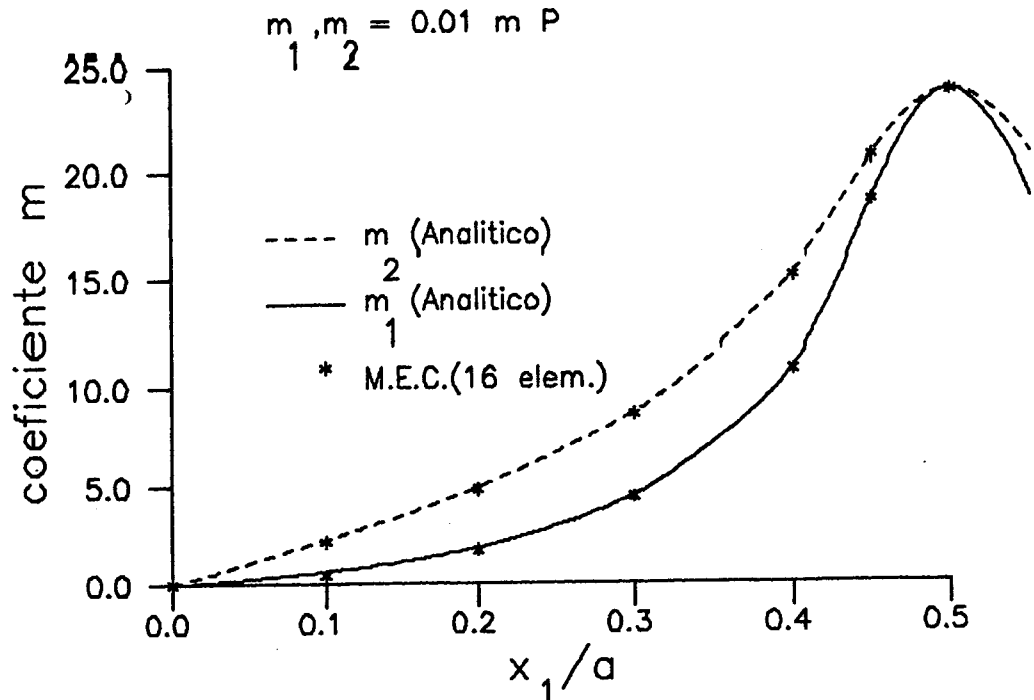


FIG. 5.8 - Variação dos momentos fletores ao longo do eixo  $x_1$ .

5.7 - Exemplo 6 - Placa quadrada de bordas livres e submetida a uma carga centrada

É avaliada agora a situação onde a placa com mesma geometria do do exemplo anterior se encontra exclusivamente apoiada sobre a fundação elástica, ou seja, considerando-se todas as bordas da placa livres, como mostra a figura 5.9.

Para efeito de comparação, é usado o resultado analítico, obtido para uma placa de rigidez infinita, apoiada sobre uma fundação de módulo,  $K$ , pequeno [64]. No exemplo foi adotado um valor de  $K'=0.8$ , que indicou ser um valor suficientemente bom para representar o caso rígido, já que os deslocamentos transversais apresentaram-se praticamente uniformes ao longo da placa.

Na figura 5.10 estão ilustradas as variações dos momentos fletores ao longo do eixo de simetria, para as relações  $u/a=0.1$  e  $u/a=0.2$ , obtidas analiticamente e pela

formulação para uma divisão do contorno em 16 elementos.

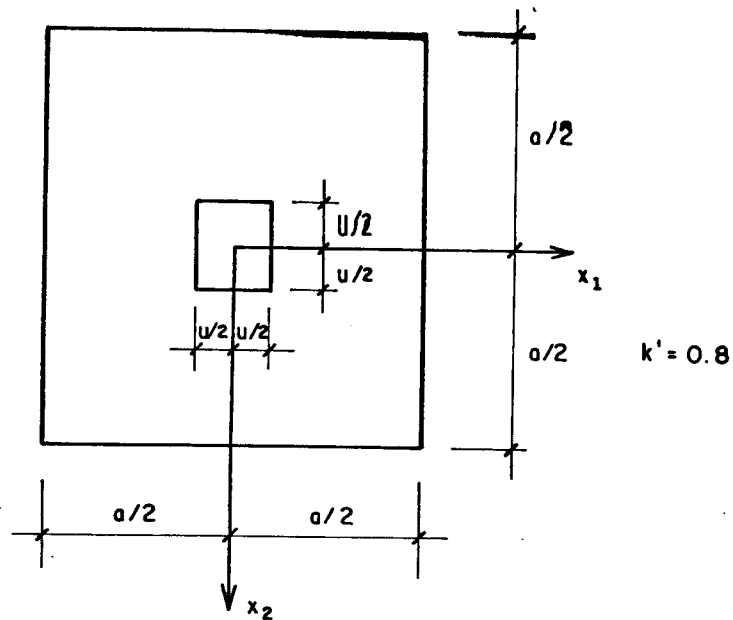


FIG. 5.9 - Placa quadrada sobre fundação elástica com carga centrada.

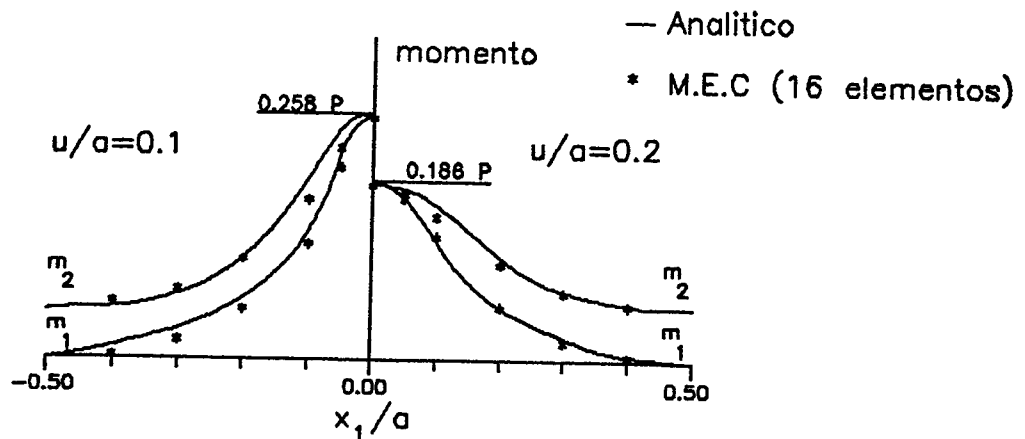


FIG. 5.10 - Variação dos momentos fletores ao longo do eixo de simetria da placa.

Os valores dos momentos fletores centrais da placa, obtidos pela formulação e analiticamente, estão indicados na tabela 5.3.

TABELA 5.3 - Momentos fletores centrais para a placa quadrada sobre fundação elástica da figura 5.10.

$u/a$	M.E.C 16 elem.	Analítico Ref. [64]
0.1	0.253 P	0.258 P
0.2	0.181 P	0.186 P

5.8 - Exemplo 7 - placa quadrada com carga excêntrica.

A mesma placa do exemplo anterior é agora analisada para uma carga transversal,  $P$ , aplicada com uma excentricidade de  $e_1 = 0.25a$ , como ilustra a figura 5.11.a.

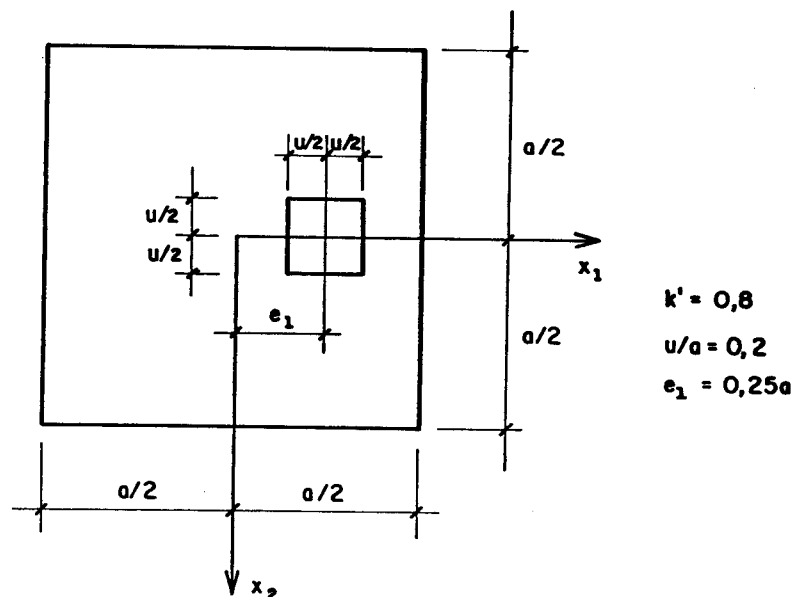


FIG. 5.11.a - Placa com carga excêntrica.

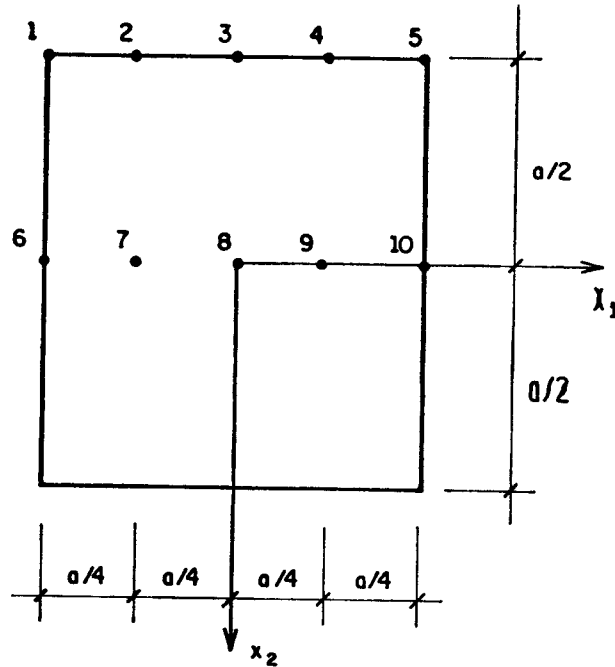


FIG. 5.11.b - Pontos tomados para avaliação.

Na tabela 5.4 estão indicados os valores da reação do solo em alguns pontos tomados no contorno e no interior da placa (ver figura 5.11.b), obtidos pelo M.E.C. e analiticamente.

TABELA 5.4 - Reação do solo para placa rígida com carga excêntrica.

PONTO	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO	
	M. E. C. 16 elem.	Valores teóricos
1	-0.50	-0.50
2	0.25	0.25
3	1.00	1.00
4	1.74	1.75
5	2.49	2.50
6	-0.49	-0.50
7	0.25	0.25
8	1.00	1.00
9	1.75	1.75
10	2.50	2.50
Fator: $P/a^2$		

Os valores negativos da tabela representam reações de tração na superfície da placa, associados à deslocamentos transversais negativos.

### 5.9 - Exemplo 8 - sapata associada

Para ilustrar a resolução de um caso prático de sapata associada, neste exemplo é analisada uma placa trapezoidal sobre fundação elástica, solicitada por carregamentos provenientes de três pilares, como mostra a figura 5.12. A carga de cada pilar sobre a placa é considerada uniformemente distribuída sobre a área da projeção do pilar.

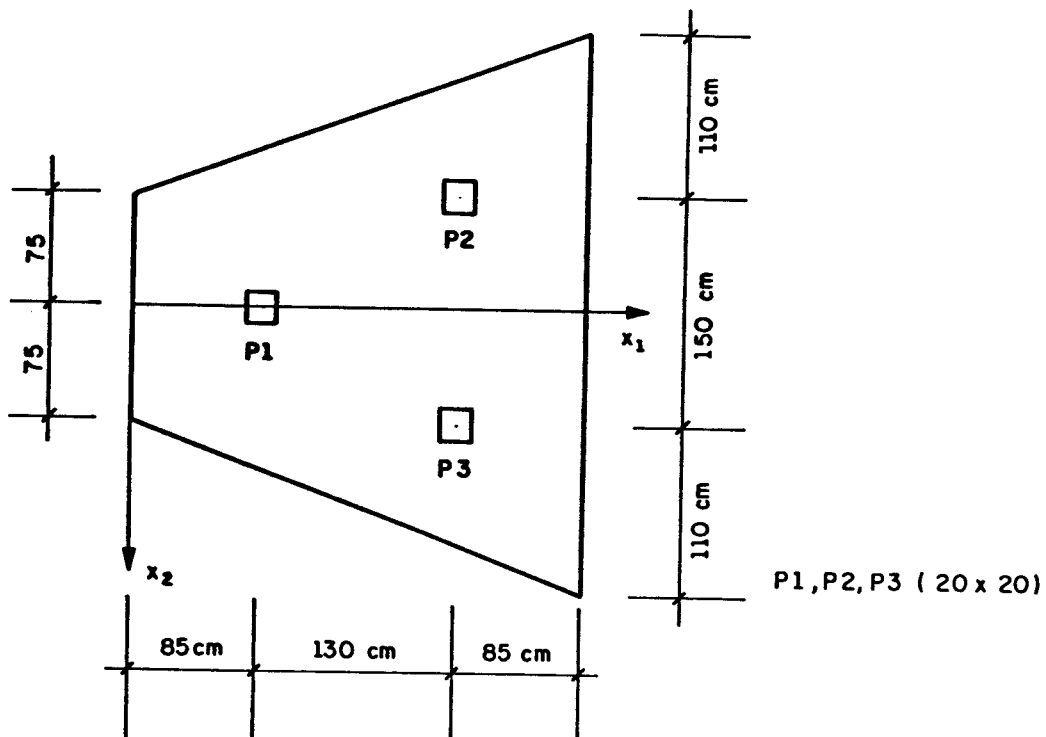


FIG. 5.12 - Sapata associada solicitada por cargas provenientes de 3 pilares.

No exemplo são assumidos os seguintes valores:



- Módulo de deformação longitudinal :  $E = 2 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$ ;
- Coeficiente de Poisson :  $\nu = 0.3$ ;
- espessura da placa :  $t = 0.25 \text{ m}$  ;
- Módulo da fundação :  $K = 5 \times 10^4 \text{ KN/m}^2/\text{m}$  ;
- Carga em cada pilar :  $P = 400 \text{ KN}$  ;
- Seção transversal dos pilares :  $20 \times 20 \text{ cm}^2$ .

A figura 5.13 mostra as variações dos deslocamentos transversais ao longo das bordas  $x_1 = 0$  e  $x_1 = 3 \text{ m}$ . A figura 5.14 mostra a variação dos deslocamentos transversais ao longo do eixo  $x_1$ .

Na tabela 5.5, estão indicados os deslocamentos transversais e os momentos fletores nos pontos P1, P2 e P3 da placa, correspondentes os pontos de aplicação das cargas dos pilares.

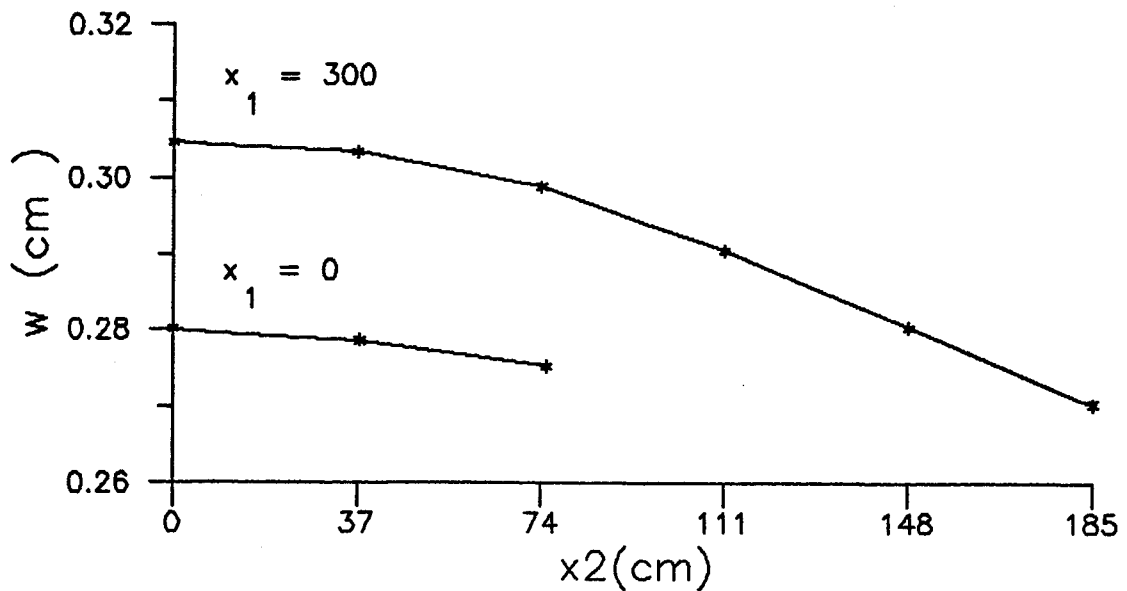


FIG. 5.13 - Variação dos deslocamentos transversais ao longo das bordas  $x_1 = 0$  e  $x_1 = 3 \text{ m}$ .

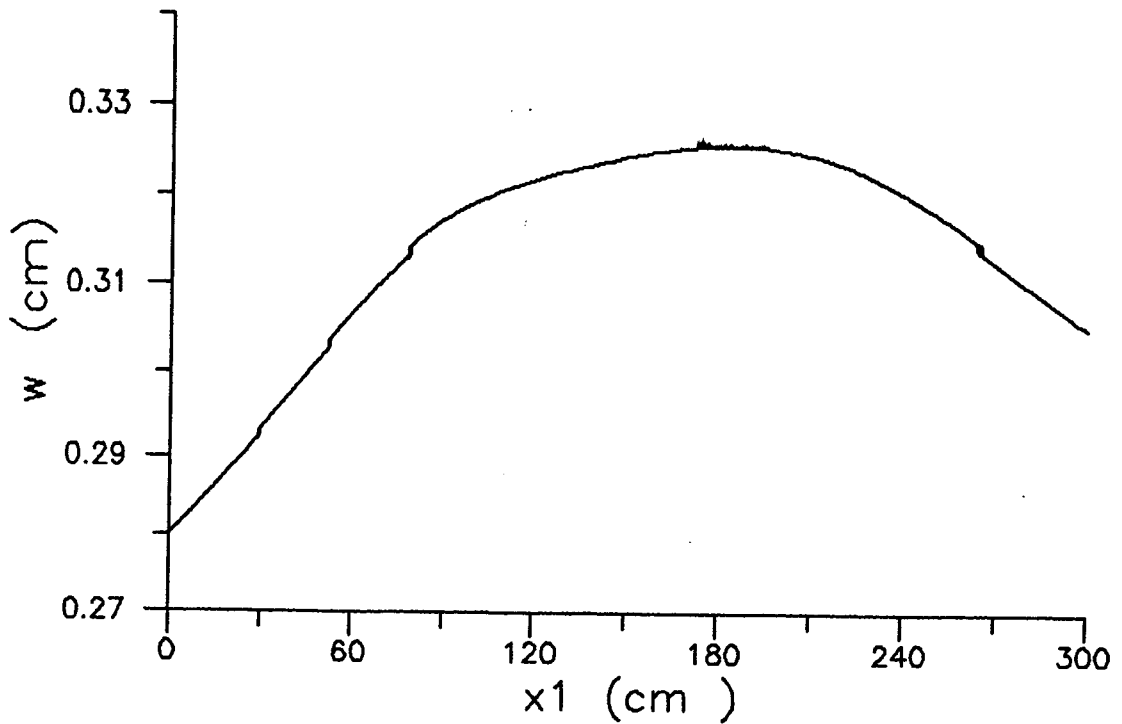


FIG. 5.14 - Variação dos deslocamentos transversais ao longo do eixo  $x_1$ .

TABELA 5.5 - Deslocamentos transversais e momentos fletores para pontos internos.

PONTO	$w \times 10^3$ (cm)	$m_1$ (KN. m/m)	$m_2$ (KN. m/m)
P1	3.16	94.8	99.2
P2	3.22	102.4	95.3
P3	3.22	102.4	95.3

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES

A finalidade deste trabalho foi apresentar uma formulação pelo Método dos Elementos de Contorno (M.E.C), para a análise de placas sobre fundação elástica de Winkler, utilizando-se uma solução fundamental própria, que incorpora o efeito da base elástica. Tal formulação tem como principal característica, a restrição das aproximações envolvidas aos valores associados ao contorno da placa, ao contrário de outras formulações pelo M.E.C., que não utilizam soluções fundamentais próprias [56], [57].

Os resultados apresentados no capítulo V apresentaram-se de acordo com os obtidos analiticamente, demonstrando a eficiência da formulação na modelagem de placas com diferentes tipos de geometria, vinculação e de carregamento. Deve-se ressaltar a boa precisão dos resultados obtidos, mesmo para divisões do contorno em poucos elementos. Isto decorre principalmente do fato de se restringir as aproximações aos valores do contorno. Outra importante característica verificada, é a simplicidade na manipulação dos dados de entrada, uma vez que, praticamente, só é necessário definir os dados referentes ao contorno da placa.

Apesar desta formulação permitir a avaliação de placas que não interagem com o solo, é conveniente que estes casos sejam analisados através de formulação própria, na qual as soluções fundamentais implicam em expressões de esforços e deslocamentos fundamentais mais simples, demandando menores tempos de processamento.

Cabe observar que a formulação apresentada se limita a casos envolvendo fundações bi-laterais, onde é admitido um perfeito contato entre a placa e o solo, mesmo para o caso de tensão de tração atuante na interface (ver exemplo 7 ).

A formulação pode ser estendida para a análise de placas apoiadas sobre fundação com distintos módulos em diferentes regiões da interface, ou para placas parcialmente apoiadas sobre fundação elástica. Para isto, deve-se dividir o domínio da placa em sub-regiões, correspondentes aos diferentes módulos de fundação. Outra possível forma de tornar a formulação mais abrangente, se faz através da associação da placa com outros elementos estruturais, tais como: pilares, vigas e estacas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SOUTHWELL, R.V. Relaxation methods in theoretical physics. London, Oxford University Press, 1946.
- [2] TURNER, M.J.; CLOUGH, R.W.; MARTIN, H.C.; TOPP, L.J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. J. Aero Sciences, 23: 805-823, 1956.
- [3] CLOUGH, R.W. The finite element in plane stress analysis. In: A.S.C.E. CONF. ON ELETRONIC COMPUTATION, 2nd., Pittsburg, 1960 - Proc.
- [4] ARGYRIS, J.H. & KELSEY S. Energy theorems and structural analysis. Aircraft Engineering, 26-27, 1955.
- [5] ANDERSSEN, R.S. et alii. The application and numerical solution of integral equations. Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Sijthoff and Noordhoff, 1980.
- [6] ABEL, N.H. Ouevres complètes. Norvegien Christiania, 1, 1881.
- [7] BETTI, E. Teoria dell' elasticità. Il Nuovo Cimento, 7-10, 1872.
- [8] SOMIGLIANA, C. Sopra L' equilibrio di un corpo elastico isotropo. Il Nuovo cimento, 17 - 19, 1886.

- [10] VOLTERRA, V. Opere matematiche. Acad. Naz. Lincei, Rome, 2: 216-275, 1956.
- [11] FREDHOLM, I. Sur une classe d' equations fonctionnelles. Acta Math, 27: 365-390, 1903.
- [12] MUSKHELISHVILI, N.I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Groningen Holland, Noordhoff, 1953.
- [13] MIKHLIN, S.G. Integral equations. London, Pergamon Press, 1957. (International series of monographs in pure and applied mathematics).
- [14] SMIRNOV, V.J. Integral equations and partial differential equations. In: COURSE in higher mathematics. London, Addison-Wesley, 1964. v. 4.
- [15] KUPRADZE, V.D. Potential methods in the theory of elasticity. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1965.
- [18] JASWON, M.A. Integral equation methods in potential theory I. Proc. Royal Society, A275: 23-32, 1963.
- [19] SYMM, G.T. Integral equation methods in potential theory II. Proc. Royal Society, A275: 33-46, 1963.
- [20] RIZZO, F.J. An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quarterly of Applied Mathematics. 25 (1): 83-92, 1967.
- [21] CRUSE, T.A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. Int. J. Solids Structures, 5: 1259-1272, 1969.

- [22] CRUSE, T.A. Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis. Computers and Structures, 3: 509-527, 1973.
- [23] CRUSE, T.A. An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. Computers and Structures, 4: 741-754, 1974.
- [24] RIZZO, F.J. & SHIPPY, D.J. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. Int. J. Solids Structures, 4: 1161-1179, 1968.
- [25] CRUSE, T.A. & RIZZO, F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamics problem.I. J. Math. Anal. Appl., 22, 1968.
- [26] CRUSE, T.A. & VANBUREN, W. Three dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. Int. J. Fract. Mech. 7: 1-15, 1971.
- [27] SWEDLOW, J.L. & CRUSE, T.A. Formulation of boundary integral equations for three dimensional elastoplastic flow. Int. J. Solids & Structures, 7: 1673-1683, 1971.
- [28] RICARDELLA, P.C. An implementation of the boundary-integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity. Pittsburg, Dept. Mech. Engng., Carnegie-Mellon University, 1973. (Report No. SM-73-10)

- [29] CRUSE, T.A. An improved boundary integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. Computers & Structures, 4: 741-754, 1974.
- [30] LACHAT, J.C. A further development of the boundary-integral technique for elastostatics. University of Southampton, 1975. (Ph. D. Thesis)
- [31] BREBBIA, C.A. The boundary element method for engineering. London, Pentech Press, 1978.
- [32] JASWON, M.A.; SYMM, G.T. Numerical biharmonic analysis and some applications. Int. J. Solids Structures, 3: 309-332, 1967.
- [33] HANSEN, E.B. Numerical solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems. Journal of Elasticity, 6 (1): 39-56, Jan. 1976.
- [34] ALTIERO, N.J. & SIKARSKIE, L.D. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. Computer & Structures, 9: 163-168, 1978.
- [35] WU, B.C. & ALTIERO, N.J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. Computer & Structures, 10: 107-107, 1979.
- [36] TOTTENHAM, H. The boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P.K. & BUTTERFIELD, R. eds. Developments in boundary element methods. London, Elsevier, 1979.



- [37] BEZINE, G. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. Mechanics Research Communications, 5 (4): 197-206, 1978.
- [38] BEZINE, G. & GAMBI, D.A. A new integral equation formulation for plate bending problems. In: BREBBIA, C.A., ed. Recent advances in boundary element methods. London, Pentech Press, 1978.
- [39] STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. Int. Journal of Solids and Structures, 15: 769-782, 1979.
- [40] STERN, M. Boundary integral equations for bending of thin plates. In: BREBBIA, C.A., ed. Progress in boundary element methods, vol. 2. London, Pentech Press, 1983.
- [41] BÉZINE, G. A mixed boundary-integral: finite element approach to plate vibration problems. Mechanics Research Communications, 7 (3): 141-150) 1980.
- [42] KAMIYA, N. et al. An approximate finite deflection analysis of a heated elastic plate by the boundary element method. Appl. Math. Modelling, 6 (1): 23-27, Feb. 1982.
- [43] TANAKA, M. Large deflection analysis of thin elastic plates. In: BANERJEE, P.K. & MUKHERJEE, S. eds. Developments in boundary element methods-3. London, Elsevier, 1984. Chap. 5, p. 115-136.

- [44] KAMIYA, N. & SAWARY, An integral equation approach to finite deflection of elastic plates. Int. J. Non-Linear Mechanics, 17 (3): 187-194, 1982.
- [45] VANDER WEEEN, F. Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model. In: BREBBIA, C.A., ED. Boundary Element Methods in Engineering: Proceedings of the Fourth International Seminar, Southampton, England, sept. 1982. Berli.
- [46] REISSNER, E. The effect of tranverse shear deformation on the beding of elastic plates. J.Appl. Mech.,12: A69-A77, 1945.
- [47] COSTA, JR. J.A. & BREBBIA, C.A. Elastic buckling of plates using the boundary element method. In: BREBBIA, C.A. & MAIER, G., eds. Boundary element VII: Proceedings of the 7th International Conference, Villa Olmo, Lake Como, Italy, Sept. 1985. Berlin, Springer-Verlag, 1985. V.1, p.4.29-4.42.
- [48] BÉZINE, G.; CIMETIERE, A.; GELBERT, J.P. Unilateral buckling of thin elastic plates by the boundary integral equation method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21: 2189-2199, 1985.
- [49] MORJARIA, M. & MUKHERJEE, S. Inelastic analysis of transverse deflection of plates by the boundary elemnt method. Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 47(2): 291-296, June 1980.
- [50] KATSIKADELIS, J.T. & ARMENAKAS, A.E. Plates on elastic foundation by BIE method. Journal of Engineering Mechanics. ASCE, 110 (7): 1086-1104, 1984.

- [51] KATSIKADELIS, J.D. & ARMENAKAS, A.E. Analysis of clamped plates on elastic foundation by the boundary integral method. Journal of applied Mechanics, 54: 544-580, 1984.
- [52] WINKLER, E. Die Lehre von der Elastizitaet und Festigkeit. Plaque, Dominicus, 1867.
- [53] COSTA JR., J.A. & BREBBIA, C.A. The boundary element method applied to plates on elastic foundations. Engineering Analysis, 2 (4): 174-183, 1985.
- [54] COSTA JR., J.A. & BREBBIA, C.A. On the reduction of domain integrals to the boundary for the BEM formulation of plates on elastic foundations. Engineering Analysis, 3 (2): 123-126, 1986.
- [55] COSTA JR., J.A. & BREBBIA, C.A. Bending of plates on elastic foundations using the boundary element method. In: INTERNATIONAL CONFERENCE, 2nd, Southampton, 1985. Proc. Berlin, Springer-Verlag, 1985.
- [56] SILVA, N.A. Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas sobre fundações elásticas. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1988. (Dissertação de Mestrado).
- [57] CALDERÓN, E.T. Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno. São Carlos. Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1991. (Dissertação de Mestrado)

- [58] VENTURINI, W.S. Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia. São Carlos. Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1988. (Tese de Livre-Docência).
- [59] KIRCHHOFF, G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. J. Math., Crelle, 40: 51-58, 1850.
- [60] FINLAYSON, B.A. The method of Weighted Residuals and Variational Principles. Academic Press, New York, 1972.
- [61] JASWON, M.A. & SYMM, G.T. Integral equation methods in potential theory and elastostatics. London, Academic Press, 1977. 287 p.
- [62] TOTTENHAM, H. The boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P.K. & BUTTERFIELD, R., eds. Developments in boundary element methods-1. London, Applied Science Publ., 1979. Chap. 8, p. 173-205.
- [63] GIL RODRIGUEZ, J.C. Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais. Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1986. (Dissertação de Mestrado).
- [64] TIMOSHENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells. New York, McGraw-Hill, 1959.
- [65] NG., S.S.F. Influence of elastic support on the behavior of clamped plates, developments in mechanics, Vol. 5, Proc. 11th Midwestern Conference, pp.353-371, 1969.

[66] ABRAMOWITZ, M. AND STEGUN, I. Handbook of mathematical Functions, Dover, 1970.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

1. BREBBIA, C. A. ; TELLES, J. C. F. ; WROBEL, L. C. Boundary Element Techniques: Teory and Applications in Engineering. Berlin, heidelberg, Springer-Verlag, 1984.
2. COSTA, J. A. and BREBBIA, C. A. On the reduction of domain integrals to the boudary for the formulation of plate on elastic foundation. Engineering Analysis, 3(2), 123-126, 1986.
3. LACHAT, J. C. & WATSON, J. O. Progress in the use of boundary integral equations, illustrated y examples. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. , 10, 273-289, 1977.
4. OLIVEIRA NETO, L. Analise de placas de borda curva pelo método dos elementos de contorno. Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1991. (Dissertação de Mestrado).
5. PAIVA, J. B. Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1987. (Tese de Doutorado).
6. PAIVA, J. B. Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas apoiadas em base elástica. MECOM-89, Vol. 1, A47-A59, 1989.

## APÊNDICE

### 1 - Introdução

Neste apêndice são apresentadas as expressões das funções de Kelvin e algumas de suas propriedades, transcritas da referência [66].

Nos próximos itens,  $\nu$  é real,  $x$  é real positivo e  $n$  é um inteiro positivo ou zero.

### 2 - Equação diferencial

A equação diferencial definida por:

$$x^4 w^{(4)} + 2x^3 w^{(3)} - (1+2\nu^2)(x^2 w'' - xw') + (\nu^4 - 4\nu^2 + x^4)w = 0 \quad (\text{A.1})$$

apresenta como solução, as seguintes funções de Kelvin:

$$w = \text{ber}_{\pm\nu} x, \text{bei}_{\pm\nu} x, \text{ker}_{\pm\nu} x, \text{kei}_{\pm\nu} x \quad (\text{A.2})$$

### 3 - Séries ascendentes

As funções de Kelvin utilizadas neste trabalho são definidas pelas seguintes expansões em séries:

$$\text{ber}_\nu x = \left(\frac{1}{2}x\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \left\{ \left[ \frac{3}{4}\nu + \frac{1}{2}k \right] \pi \right\}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k \quad (\text{A. 3. a})$$

$$\text{bei}_\nu x = \left(\frac{1}{2}x\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{sen} \left\{ \left[ \frac{3}{4}\nu + \frac{1}{2}k \right] \pi \right\}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k \quad (\text{A. 3. b})$$

$$\begin{aligned} \text{ker}_n x &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \left\{ \left[ \frac{3}{4}n + \frac{1}{2}k \right] \pi \right\} \\ &\quad \times \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k - \ln(x/2) \text{ber}_n x + \pi/4 \text{bei}_n x + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \cos \left\{ \left[ \frac{3}{4}n + \frac{1}{2}k \right] \pi \right\} \\ &\quad \times \frac{\{\psi(k+1) + \psi(n+k+1)\}}{k!(n+k)!} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k \end{aligned} \quad (\text{A. 3. c})$$

$$\begin{aligned} \text{kei}_n x &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \text{sen} \left\{ \left[ \frac{3}{4}n + \frac{1}{2}k \right] \pi \right\} \\ &\quad \times \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k - \ln(x/2) \text{bei}_n x - \pi/4 \text{ber}_n x + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} x \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{sen} \left\{ \left( \frac{3}{4} n + \frac{1}{2} k \right) \pi \right\} \\
 & \times \frac{\{\psi(k+1) + \psi(n+k+1)\}}{k!(n+k)!} \left( \frac{1}{4} x^2 \right)^k
 \end{aligned} \tag{A. 3. d}$$

As funções de Kelvin de ordem zero ficam definidas por:

$$\operatorname{ber} x = 1 - \frac{(x^2/4)^2}{(2!)^2} + \frac{(x^2/4)^4}{(4!)^2} - \dots \tag{A. 4. a}$$

$$\operatorname{bei} x = x^2/4 - \frac{(x^2/4)^3}{(3!)^2} + \frac{(x^2/4)^5}{(5!)^2} - \dots \tag{A. 4. b}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ker} x &= -\ln(x/2) \operatorname{ber} x + \pi/4 \operatorname{bei} x + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{\psi(2k+1)}{((2k+1)!)^2} \left( \frac{1}{4} x^2 \right)^{2k}
 \end{aligned} \tag{A. 4. c}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{kei} x &= -\ln(x/2) \operatorname{bei} x - \pi/4 \operatorname{ber} x + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{\psi(2k+2)}{((2k+1)!)^2} \left( \frac{1}{4} x^2 \right)^{2k+1}
 \end{aligned} \tag{A. 4. d}$$

sendo que as funções  $\psi$  e  $\Gamma$  são dadas por:

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1} \quad (n \geq 2) \tag{A. 4. e}$$

$$\Gamma(n+1) = 1.2.3\dots(n-1).n = n! \quad (\text{A. 4. f})$$

onde  $\gamma$  é a constante de Euler,  $\gamma = 0.5772157$ .

#### 4 - Relações diferenciais

As próximas equações definem a derivada primeira das quatro funções de ordem zero, em termos de funções de ordem superiores:

$$\sqrt{2} \operatorname{ber}' x = \operatorname{ber}_1 x + \operatorname{bei}_1 x \quad (\text{A. 5. a})$$

$$\sqrt{2} \operatorname{bei}' x = -\operatorname{ber}_1 x + \operatorname{bei}_1 x \quad (\text{A. 5. b})$$

$$\sqrt{2} \operatorname{ker}' x = \operatorname{ker}_1 x + \operatorname{kei}_1 x \quad (\text{A. 5. c})$$

$$\sqrt{2} \operatorname{kei}' x = -\operatorname{ker}_1 x + \operatorname{kei}_1 x \quad (\text{A. 5. d})$$

As derivadas de segunda ordem das 4 funções de Kevin em termos de suas primeiras derivadas e das próprias funções são dadas por:

$$\operatorname{ber}''x = -\operatorname{bei} x - x^{-1} \operatorname{bei}' x \quad (\text{A. 6. a})$$

$$\operatorname{bei}''x = \operatorname{ber} x - x^{-1} \operatorname{bei}' x \quad (\text{A. 6. b})$$

$$\operatorname{ker}''x = -\operatorname{kei} x - x^{-1} \operatorname{ker}' x \quad (\text{A. 6. c})$$

$$\operatorname{kei}''x = \operatorname{ker} x - x^{-1} \operatorname{kei}' x \quad (\text{A. 6. d})$$

## 5 - Integrais indefinidas

Duas das propriedades envolvendo as integrais das funções de Kelvin são dadas a seguir:

$$\int x^{1+\nu} f_{\nu} dx = -x^{1+\nu} \left[ \frac{\nu}{x} g_{\nu} - g'_{\nu} \right] \quad (\text{A. 7. a})$$

$$\int x^{1-\nu} f_{\nu} dx = x^{1-\nu} \left[ \frac{\nu}{x} g_{\nu} + g'_{\nu} \right] \quad (\text{A. 7. b})$$

onde  $f_{\nu}$  e  $g_{\nu}$  são dados por qualquer um dos pares abaixo:

$$f_{\nu} = \text{ber}_{\nu} x \quad ; \quad g_{\nu} = \text{bei}_{\nu} x \quad (\text{A. 8. a})$$

$$f_{\nu} = \text{bei}_{\nu} x \quad ; \quad g_{\nu} = -\text{ber}_{\nu} x \quad (\text{A. 8. b})$$

$$f_{\nu} = \text{ker}_{\nu} x \quad ; \quad g_{\nu} = \text{kei}_{\nu} x \quad (\text{A. 8. c})$$

$$f_{\nu} = \text{kei}_{\nu} x \quad ; \quad g_{\nu} = -\text{ker}_{\nu} x \quad (\text{A. 8. d})$$

## 6 - Aproximações polinomiais

Para o parâmetro,  $x$ , compreendido no intervalo  $-8 \leq x \leq 8$ , as funções de Kelvin podem ser aproximadas pelos seguintes polinômios:

$$\begin{aligned} \text{ber } x &= 1 - 64(x/8)^4 + 113.77777\ 774(x/8)^8 + \\ &- 32.36345\ 652(x/8)^{12} + 2.64181\ 397(x/8)^{16} + \\ &- 0.08349\ 609(x/8)^{20} + 0.00122\ 552(x/8)^{24} + \\ &- 0.00000\ 901(x/8)^{28} + \epsilon \end{aligned}$$

$$|\epsilon| < 1 \times 10^{-9} \quad (\text{A. 9. a})$$

$$\begin{aligned} \text{bei } x &= 16(x/8)^2 - 113.77777\ 774(x/8)^6 + \\ &+ 72.81777\ 742(x/8)^{10} - 10.56765\ 779(x/8)^{14} + \\ &+ 0.52185\ 615(x/8)^{18} - 0.01103\ 667(x/8)^{22} + \\ &+ 0.00011\ 346(x/8)^{26} + \epsilon \end{aligned}$$

$$|\epsilon| < 6 \times 10^{-9} \quad (\text{A. 9. b})$$

$$\begin{aligned} \text{ker } x &= -\ln(x/2) \text{ ber } x + \pi/4 \text{ bei } x - 0.57721\ 566 + \\ &- 59.05819\ 744(x/8)^4 + 171.36272\ 133(x/8)^8 + \\ &- 60.60977\ 451(x/8)^{12} + 5.65539\ 121(x/8)^{16} \\ &- 0.19636\ 347(x/8)^{20} + 0.00309\ 699(x/8)^{24} + \\ &- 0.00002\ 458(x/8)^{28} + \epsilon \end{aligned}$$

$$|\epsilon| < 1 \times 10^{-8} \quad (\text{A. 9. c})$$

$$\begin{aligned} \text{kei } x &= -\ln(x/2) \text{ bei } x - \pi/4 \text{ ber } x + 6.76454\ 936(x/8)^2 + \\ &- 142.91827\ 687(x/8)^6 + 124.23569\ 650(x/8)^{10} + \\ &- 21.30060\ 904(x/8)^{14} + 1.17509\ 064(x/8)^{18} \\ &- 0.02695\ 875(x/8)^{22} + 0.00029\ 532(x/8)^{26} + \epsilon \end{aligned}$$

$$|\epsilon| < 3 \times 10^{-9} \quad (\text{A. 9. d})$$

$$\begin{aligned} \text{ber}' x &= x [-4(x/8)^2 + 14.22222\ 222(x/8)^6 + \\ &- 6.068146810(x/8)^{10} + 0.66047\ 849(x/8)^{14} + \\ &- 0.02609\ 253(x/8)^{18} + 0.00045\ 957(x/8)^{22} + \\ &- 0.00000\ 394(x/8)^{26}] + \epsilon \end{aligned}$$

$$|\epsilon| < 2.1 \times 10^{-8} \quad (\text{A. 9. e})$$

$$\begin{aligned} \text{bei}'x &= x [1/2 - 10.66666\ 666(x/8)^4 + \\ &+ 11.37777\ 772(x/8)^8 - 2.31167\ 514(x/8)^{12} + \\ &+ 0.14677\ 204(x/8)^{16} - 0.00379\ 386(x/8)^{20} + \\ &+ 0.00004\ 609(x/8)^{24}] + \epsilon \end{aligned}$$

$$|\epsilon| < 7 \times 10^{-8}$$

(A. 9. f)

$$\begin{aligned} \text{ker}'x &= -\ln(x/2) \text{ber}'x - x^{-1} \text{ber } x + \pi/4 \text{bei}'x + \\ &+ x [-3.69113\ 734(x/8)^2 + 21.42034\ 017(x/8)^6 + \\ &- 11.36433\ 272(x/8)^{10} + 1.41384\ 780(x/8)^{14} + \\ &- 0.06136\ 358(x/8)^{18} + 0.00116\ 137(x/8)^{22} + \\ &- 0.00001\ 075(x/8)^{26}] + \epsilon \end{aligned}$$

$$|\epsilon| < 8 \times 10^{-8}$$

(A. 9. g)

$$\begin{aligned} \text{kei}'x &= -\ln(x/2) \text{bei}'x - x^{-1} \text{bei } x - \pi/4 \text{ber}'x + \\ &+ x [0.21139\ 217 - 13.39858\ 846(x/8)^4 + \\ &+ 19.41182\ 758(x/8)^8 - 4.65950\ 823(x/8)^{12} + \\ &+ 0.33049\ 424(x/8)^{16} - 0.00926\ 707(x/8)^{20} + \\ &+ 0.00011\ 997(x/8)^{24}] + \epsilon \end{aligned}$$

$$|\epsilon| < 7 \times 10^{-8}$$

(A. 9. h)