

UNIVERSIDADE DE SAO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SAO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ANÁLISE DE PERTURBAÇÕES EM ASSOCIAÇÕES DE PILARES PAREDE
EM BASE ELÁSTICA OU SUBMETIDOS A RECALQUES DE APOIO.

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como
parte dos requisitos para obtenção do título de
"Mestre em Engenharia de Estruturas".

Eng. JOSÉ ARTUR ROCCIA DAL POZZO ARZOLLA
ORIENTADOR: PROF.DR. JOÃO CARLOS ANTUNES DE OLIVEIRA E SOUZA

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

São Carlos, julho de 1992

A base de tudo ainda é a filosofia. Sem ficção e poesia, perde-se a capacidade de duvidar.

A Sociedade de técnicos é uma Sociedade de autômatos.

N. SIROTSKY

*Ao Dr. Arzolla pelo
exemplo a ser seguido.*

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. João Carlos Antunes de Oliveira e Souza, pela orientação, dedicação e sobretudo pela amizade cultivada nesses anos.

Ao Professor Dr. Eddie Mancini pela iniciação na pós-graduação.

Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento e Pesquisa e à CAPES - Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela concessão de bolsa de estudos.

Aos amigos do Departamento de Estruturas, professores, colegas e funcionários.

Aos funcionários Antonio Valdair Carneiro, Rui Roberto Casale, Nadir Minatel, Wilma Provinciali Val e Francisco Carlos Guete de Britto, responsáveis pela edição de texto, preparação de bibliografia, e confecção dos desenhos, respectivamente, pela boa vontade e eficiência.

A Universidade Estadual de Maringá (PR) pelo apoio e incentivo no término deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho é desenvolvida uma técnica discreta para a correção de incompatibilidades que ocorrem na formulação da Técnica do Meio Contínuo, aplicada à associação plana ou espacial de pilares, utilizada como contraventamento em estruturas de edifícios altos. Essas correções implicam em perturbações em relação aos resultados da análise simplista levando em conta só as deformações originadas da flexão global, e são tratadas considerando apenas a flexão local entre andares, para os casos de imposição de recalques de apoio e de fundação elástica independentes para os pilares.

ABSTRACT

In this work it is developed a discrete technique for correction of the incompatibilities which occur in the formulation of the continuum technique applied to plane or spacial association of shear-walls, used in high building structures. These corrections imply in perturbations in relation to the results got by the simple analysis taking in account only the strain of global bending; they are treated by considering only local bending between floors, and for the cases of imposed displacements to the supports or independent elastic foundations for the walls.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

1- INTRODUÇÃO GERAL	01
---------------------------	----

CAPÍTULO II - ASSOCIAÇÃO PLANA DE 2 PILARES

2.1- INTRODUÇÃO	07
2.2- ANÁLISE CONTÍNUA DE UMA ASSOCIAÇÃO PLANA DE 2 PILARES COMPUTANDO-SE SÓ AS DEFORMAÇÕES GLOBAIS DE FLEXÃO	08
2.3- UTILIZAÇÃO DO PROCESSO DE PROPAGAÇÃO PARA PILARES PRISMÁTICOS COM GRANDE NÚMERO DE ANDARES DE MESMO PÉ DIREITO	20
2.4- ASSOCIAÇÃO PLANA DE 2 PILARES, SUBMETIDA A RECALQUES DE FUNDAÇÃO (VERSÃO 1)	23
2.5- ASSOCIAÇÃO PLANA DE 2 PILARES, SUBMETIDA A RECALQUES DE FUNDAÇÃO (VERSÃO 2)	25
2.6- ASSOCIAÇÃO PLANA DE 2 PILARES, EM BASE ELÁSTICA, COMPUTANDO-SE FLEXÃO LOCAL ENTRE OS ANDARES (VERSÃO 1)	35
2.7- ASSOCIAÇÃO PLANA DE 2 PILARES, EM BASE ELÁSTICA, COMPUTANDO-SE FLEXÃO LOCAL ENTRE OS ANDARES (VERSÃO 2)	48

CAPÍTULO III

ASSOCIAÇÃO PLANA DE N PILARES

3.1- INTRODUÇÃO	53
3.2- ANÁLISE CONTÍNUA DE UMA ASSOCIAÇÃO PLANA DE N PILARES COMPUTANDO-SE SÓ AS DEFORMAÇÕES GLOBAIS DE FLEXÃO ..	54
3.3- ASSOCIAÇÃO PLANA DE N PILARES, SUBMETIDAS A RECALQUES DE FUNDAÇÃO (VERSÃO 1).	62
3.4- ASSOCIAÇÃO PLANA DE N PILARES, SUBMETIDA A RECALQUES DE FUNDAÇÃO (VERSÃO 2).	71
3.5- ASSOCIAÇÃO PLANA DE N PILARES, EM BASE ELÁSTICA, COMPUTANDO-SE FLEXÃO LOCAL ENTRE OS ANDARES (VERSÃO 1).	79
3.6- ASSOCIAÇÃO PLANA DE N PILARES, EM BASE ELÁSTICA, COMPUTANDO-SE FLEXÃO LOCAL ENTRE OS ANDARES (VERSÃO 2)	88

CAPÍTULO IV

ASSOCIAÇÃO ESPACIAL DE N PILARES

4.1- INTRODUÇÃO	105
4.2- LOCAÇÃO DOS PILARES	106
4.3- ASSOCIAÇÃO ESPACIAL DE N PILARES, SUBMETIDA A RECALQUES DE FUNDAÇÃO	108
4.4- ASSOCIAÇÃO ESPACIAL DE N PILARES, EM BASE ELÁSTICA, COMPUTANDO-SE FLEXÃO LOCAL ENTRE ANDARES.....	128

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES GERAIS	159
BIBLIOGRAFIA	161

CAPÍTULO I

1- INTRODUÇÃO GERAL

A análise de estruturas de edifícios altos, submetidos a cargas laterais, tem sido feita de uma maneira relativamente simples e eficiente, através da Técnica do Meio Contínuo.

Nessa técnica substitue-se o número discreto de lajes, suficientemente próximas umas das outras, por um meio contínuo com rigidez equivalente distribuída ao longo da altura do edifício; da mesma maneira, os esforços solicitantes transmitidos a um painel distribuem-se continuamente ao longo de sua altura. Esse meio contínuo equivalente às lajes dos andares, deve ter rigidez horizontal infinita, mas rigidez vertical nula. Segundo STAMATO [2], as soluções contínuas, apesar de serem analíticas, são bem mais sintéticas do ponto de vista de se esquematizar e descrever o comportamento macroscópico da estrutura em função de um número mais reduzido de parâmetros elásticos e geométricos.

Ao se tratar com pilares, como é o caso deste trabalho, assume-se que seja infinita a rigidez ao cisalhamento, isto é, as deformações devidas aos esforços cortantes são desprezíveis; computa-se apenas a deformabilidade ao momento fletor, compatibilizando-se os deslocamentos essencialmente à flexão global da associação.

A simplificação adotada acima, na Técnica do Meio Contínuo, pode levar à impossibilidade de se levar em conta problemas locais devidos a engastamentos elásticos à rotação ou a imposição de recalques de apoio independentes nos diversos pilares das associações.

A análise contínua deste tipo de problema foi tratada por MANCINI [3] que detetou as dificuldades de compatibilização de deslocamentos e as falhas na formulação matemática, delimitando as possibilidades de aplicação coerente aos casos em que se proporcionassem as rigidezes das fundações às dos pilares, ou se fossem previstos recalques de fundação iguais para os pilares da associação.

Diversas maneiras de se tratar com associações de 2 pilares ou em base elástica ou submetidas a recalques de fundação foram mostrados por SOUZA [4], quais sejam a de se considerar uma flexão local dos pilares, ao nível dos andares, ou a de se considerar a deformabilidade elástica no plano das lajes ou finalmente, a de se computar deformações a esforços cortantes nos pilares; todas essas maneiras permitiam contornar a incompatibilidade matemática do equacionamento baseado apenas em condições de flexão global dos pilares.

Este trabalho pretende analisar os problemas, acima detetados, com a utilização de pilares como painéis de contraventamento, explicando as possíveis incompatibilidades de deslocamentos na formulação, através da consideração de uma flexão local a nível dos andares, introduzida para corrigir os resultados da Técnica do Meio Contínuo.

Os efeitos de recalque à rotação de apoio ou do não condicionamento de fundações em bases elásticas às rotações, têm característica de perturbação local de esforços, com grande influência nos deslocamentos globais, mas restrita aos andares inferiores, com amortecimento muito rápido e desprezível nos andares subsequentes; ocorrem esses mesmos tipos de perturbações nas vizinhanças de descontinuidades, que impliquem em mudança brusca, não proporcional, da seção transversal de pilares.

Os esforços de perturbação poderão ser isolados em termos de problemas correspondentes a deslocamentos com elástica global retilínea mas com flexão local provocada por rotação imposta nas bases ou deslocamentos em cota iguais ao nível de cada andar; esses pilares são assimilados a vigas contínuas, de vãos iguais às alturas dos andares constantes, com rotações impostas às extremidades, permitindo-se, assim, a utilização do processo de propagação de momentos em vigas contínuas, SOUZA e ANTUNES [6]. A aplicação de uma rotação unitária à base mantendo a elástica global retilínea, implica no aparecimento de momentos fletores, esforços cortantes e esforços normais que se propagam, para um número suficientemente grande de andares através de um valor fixo $\alpha = 0,2679$ para o coeficiente de propagação, alternando-se o sinal de um andar para outro.

No Capítulo II, do presente trabalho mostra-se inicialmente a análise feita por MANCINI [3] para uma associação de 2 pilares em base elástica, computando-se exclusivamente a deformação por flexão global, mostrando a incompatibilidade de deslocamentos, exceto nos casos em que houvesse proporcionalidade entre parâmetros relativos aos pilares das fundações.

Em seguida apresenta-se a correção de origem discreta, denominada versão 1, utilizando-se o processo de propagação de momentos em vigas contínuas, baseada em flexão local ao

nível dos andares, de SOUZA [4], para uma associação plana de dois pilares submetidos a recalque de fundação, onde são utilizados dois problemas básicos, o problema (1), composto por uma estrutura indeslocável, submetida a esforços auto-equilibrados provenientes de rotações em sentidos contrários nas bases dos 2 pilares, e o problema (2), onde existe apenas a elástica linear do conjunto, não aparecendo esforços solicitantes; a seguir é mostrada a análise de uma associação plana de 2 pilares em base elástica, de SOUZA [4], a qual é feita somando-se aos problemas anteriores, o já obtido por STAMATO [2], da associação de 2 pilares em bases engastadas.

A seguir propõe-se uma outra maneira de se resolver o problema de flexão local, denominada versão 2, de SOUZA e ARZOLLA [7], constituído por 2 problemas, o problema (0), onde se dão rotações de base, ϕ_j , aos pilares, mantendo-os indeslocáveis, com o aparecimento de forças que impeçam esses deslocamentos ao nível dos andares, e o problema (1) onde se dão deslocamentos horizontais iguais às cotas dos andares, implicando em rotações relativas unitárias ao conjunto, resultando no aparecimento de forças ao nível de cada andar, proporcionais às do andar inferior; finalmente a associação em base elástica vem da superposição dos 2 problemas anteriores ao já resolvido por STAMATO [2] em base engastada.

Originalmente, no desenvolvimento deste trabalho, estudou-se uma associação plana de 2 pilares com uma descontinuidade em um nível qualquer, representada por uma mudança brusca de seção transversal dos pilares; pelo fato de os resultados obtidos terem se apresentado complicados, o que não atendia aos interesses de simplicidade proposta por este trabalho, não estão sendo aqui apresentados; posteriormente à execução deste, foi obtida uma solução mais simples, que será divulgada oportunamente através de artigo.

No Capítulo III, estendem-se as idéias apresentadas anteriormente por STAMATO [2], MANCINI [3], SOUZA [4], versão 1 e SOUZA e ARZOLLA [7], versão 2, para associações planas de n pilares, submetidas a recalques de fundação e em base elástica, sob carregamento horizontal qualquer, distribuído.

No Capítulo IV, apresenta-se uma versão única, apresentada inicialmente sob a forma de recalques de fundações por SOUZA e ARZOLLA [7], na qual são superpostos 4 problemas; o Problema (0), indeslocável, com rotações ϕ_j de apoio, e os problemas (1), (2) e (3), com deslocamentos representados por 2 translações e uma rotação de laje, todos impedidos inicialmente, ao nível das lajes, através de vínculos representados por forças nas direções x , y e z ; respectivamente, implicando na imposição de 3 elásticas globais, independentes, lineares, resultando no aparecimento de esforços proporcionais nos andares e permitindo a perfeita utilização do processo de propagação de momentos em vigas contínuas, apresentando solução simples através do equilíbrio dos somatórios de forças nos 4 problemas, obtendo-se δ_1 , δ_2 e δ_3 , coeficientes multiplicadores dos problemas (1), (2) e (3), sem necessidade de resolução de sistema de equações.

Finalmente, apresenta-se uma solução para uma associação espacial de n pilares em base elástica, sob carregamento horizontal qualquer, somando-se os 4 problemas anteriores ao problema (E), já resolvido por STAMATO [2], em base engastada. Essa solução apresenta 2 aspectos, tornando-se simples se resolvida através de processo iterativo entre os δ_1 , δ_2 e δ_3 e as rotações de base elástica, ϕ_j , dos pilares mas não atendendo aos ensejos de simplicidade de formulação da Técnica do Meio Contínuo, se for resolvida através de sistema de equações lineares com n incógnitas. Delineia-se, uma versão 3, que soluciona este problema.

Enfim, espera-se que, de alguma maneira, este trabalho venha a contribuir para a interpretação de fenômenos oriundos de perturbação de bordas, decorrentes de se considerar a rigidez finita das bases ou os recalques de fundação.

CAPÍTULO II

ASSOCIAÇÃO PLANA DE 2 PILARES

2.1- INTRODUÇÃO

Neste Capítulo estuda-se inicialmente a associação plana de 2 pilares, com propriedades geométricas constantes ao longo da altura, submetida a uma carga qualquer ou a recalques de apoio quaisquer, prevendo-se a possibilidade de engastamento rígido ou elástico dos pilares em suas bases.

Utilizando a técnica do meio contínuo para a análise estrutural, levando-se em consideração só as deformações de flexão global dos pilares verificando-se que a compatibilidade de deslocamentos nas bases só será possível se os parâmetros de rigidez das fundações forem proporcionais, no caso de bases elásticas, aos dos pilares, ou se os recalques de rotação impostos aos apoios forem idênticos; não sendo, faz-se necessária uma correção, de origem discreta, permitindo uma flexão local entre os andares.

São discutidas duas versões para as análises das associações planas de pilares, submetidos ou a recalques de rotação, ou, em base elástica, à ação de carregamento horizontal distribuído. As idéias introduzidas serão utilizadas nos capítulos subsequentes, nas generalizações para outros tipos de associações planas ou espaciais, onde ou uma ou outra dessas versões se mostrará mais conveniente.

2.2- ANÁLISE DE UMA ASSOCIAÇÃO PLANA DE 2 PILARES COMPUTANDO-SE SÓ DEFORMAÇÕES GLOBAIS DE FLEXÃO.

Sejam os 2 pilares da figura 2.1, engastados em suas bases e constrangidos a terem a mesma linha elástica horizontal, pela existência de lajes indeformáveis em seu plano, conectando-as; nesse caso as lajes são substituídas por lintéis articulados em suas extremidades. Denominam-se S_1 e S_2 as rigidezes à rotação dos engastes dos pilares 1 e 2, se forem finitas, isto é, se se quiser tratar o caso de engastamento elástico.

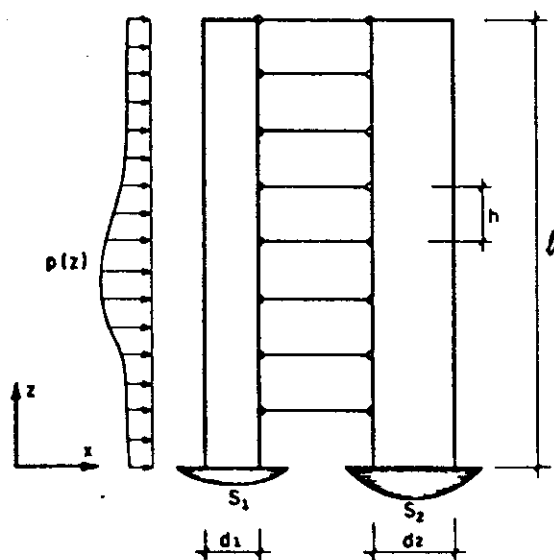


Fig. 2.1 - Associação plana de 2 pilares

2.2.1- Condições de Equilíbrio de Um Elemento de Comprimento dz de um Pilar Genérico j

Os esforços atuantes no elemento infinitesimal de comprimento dz , são positivos nos sentidos observados na figura 2.2. O deslocamento horizontal u é positivo no sentido do eixo x da figura 2.1.

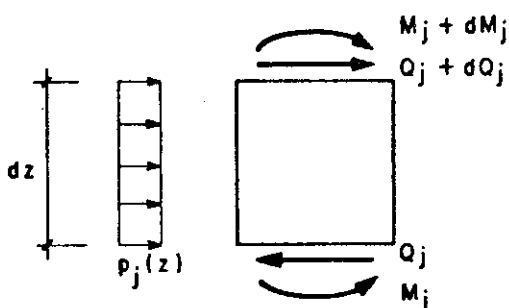


Fig. 2.2 - Esforços atuantes no pilar genérico j

Do equilíbrio do elemento infinitesimal para um pilar genérico j tem-se:

$$p_j dz + dQ_j = 0$$

$$dM_j + dQ_j dz = 0$$

donde se obtém:

$$\frac{dQ_j}{dz} = -p_j \quad (2.1)$$

$$\frac{dM_j}{dz} = -Q_j \quad (2.2)$$

2.2.2- Condições de Equilíbrio do Conjunto Lajes-Pilares

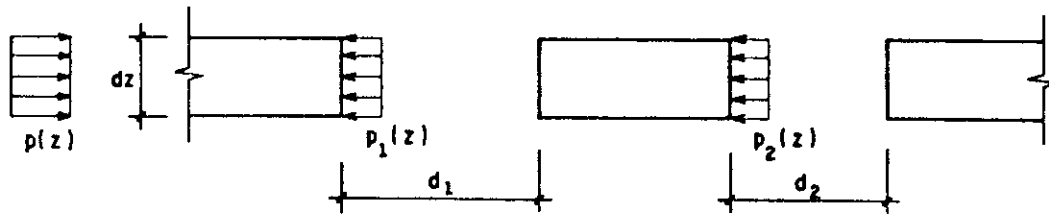


Fig. 2.3 - Esforços no conjunto lajes-pilares

Do equilíbrio da laje da figura 2.3, tem-se:

$$p_1 dz + p_2 dz = p(z) dz$$

que é o mesmo que:

$$p_1 + p_2 = p(z) \quad (2.3)$$

2.2.3- Deslocamento Horizontal do Pilar Genérico j no Nível z

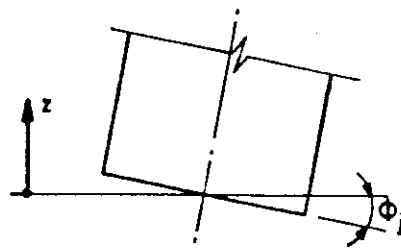


Fig. 2.4 - Rotação ϕ_j da base elástica

Levando-se em consideração apenas as deformações a flexão tem-se o seguinte deslocamento horizontal u_j :

$$u_j = \phi_j z + \int_0^z \left(\int_0^z \frac{M_z}{EI_j} dz \right) dz \quad (2.4)$$

onde:

E é o módulo de elasticidade constante para os 2 pilares

I_j é o momento de inércia do pilar genérico j .

2.2.4- Compatibilidade de Deslocamentos Horizontais

Com a suposição de distribuição contínua das lajes tem-se que u é o mesmo para os 2 pilares, portanto tem-se que, para quaisquer valores de z :

$$\phi_1 z + \int_0^z \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz dz = \phi_2 z + \int_0^z \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz dz \quad (2.5)$$

2.2.5- Obtenção da Equação Diferencial em Função de z

Derivando-se a equação (2.5) quatro vezes obtém-se:

$$\frac{M_1''}{EI_1} = \frac{M_2''}{EI_2} \quad (2.6)$$

Como das equações (2.1) e (2.2):

$$M_j'' = p_j \quad (2.7)$$

tem-se, substituindo a equação (2.7) na (2.6):

$$\frac{P_1}{EI_1} = \frac{P_2}{EI_2} \quad (2.8)$$

Substituindo-se (2.8) em (2.3) obtém-se para um pilar genérico j.

$$P_j = \frac{I_j}{\sum_{j=1}^2 I_j} P \quad (2.9)$$

Denominando-se:

$$\mu_j = \frac{I_j}{\sum_{j=1}^2 I_j} \quad (2.10)$$

tem-se:

$$P_j = \mu_j P \quad (2.11)$$

Substituindo-se a equação (2.11) na equação (2.1) e integrando-se, obtém-se, para o pilar 1:

$$Q_1 = - \int_0^z \mu_1 p dz + C_1 \quad (2.12)$$

Para o pilar 2:

$$Q_2 = - \int_0^z \mu_2 p dz + C_2 \quad (2.13)$$

Substituindo-se as equações (2.12) e (2.13) na equação (2.2) obtém-se para o pilar 1:

$$M_1 = \int_0^z \left(\int_0^z \mu_1 p dz - C_1 \right) dz + C_3 \quad (2.14)$$

Para o pilar 2:

$$M_2 = \int_0^z \left(\int_0^z \mu_2 p dz - C_1 \right) dz + C_4 \quad (2.15)$$

2.2.6- Retorno à Condição de Compatibilidade

Substituindo-se as equações (2.14) e (2.15) na equação (2.5) obtém-se:

$$\begin{aligned} \phi_1 z + \int_0^z \int_0^z \left[\int_0^z \left(\int_0^z \mu_1 p dz - C_1 \right) dz + C_3 \right] dz dz = \\ \phi_2 z + \int_0^z \int_0^z \left[\int_0^z \left(\int_0^z \mu_2 p dz - C_2 \right) dz + C_4 \right] dz dz \end{aligned} \quad (2.16)$$

Resolvendo-se a equação (2.16) chega-se a:

$$\begin{aligned} \left[\int_0^z \int_0^z \int_0^z \int_0^z \left(\frac{\mu_1}{EI_1} - \frac{\mu_2}{EI_2} \right) p dz dz dz dz \right] + \left(\frac{C_2}{EI_2} - \frac{C_1}{EI_1} \right) \frac{z^3}{6} + \\ + \left(\frac{C_3}{EI_1} - \frac{C_4}{EI_2} \right) \frac{z^2}{2} + (\phi_1 - \phi_2) z = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Devendo valer a equação (2.17) para qualquer valor de z , tem-se que:

$$\mu_1 I_2 = \mu_2 I_1 \quad (2.18)$$

$$C_2 = C_1 \frac{I_2}{I_1} \quad (2.19)$$

$$C_4 = C_3 \frac{I_2}{I_1} \quad (2.20)$$

e:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi \quad (2.21)$$

Substituindo-se a equação (2.19) na equação (2.13) obtém-se:

$$Q_2 = - \int_0^z \mu_2 p dz + C_1 \frac{I_2}{I_1} \quad (2.22)$$

Substituindo-se a equação (2.12) na equação (2.22) obtém-se:

$$Q_2 = \frac{I_2}{I_1} Q_1 \quad (2.23)$$

Substituindo-se as equações (2.19) e (2.20) na equação (2.15) obtém-se:

$$M_2 = \int_0^z \left[\int_0^z \mu_2 p dz - C_1 \frac{I_2}{I_1} \right] dz + C_3 \frac{I_2}{I_1} \quad (2.24)$$

Substituindo-se a equação (2.14) na (2.24) obtém-se:

$$M_2 = \frac{I_2}{I_1} M_1 \quad (2.25)$$

2.2.7- Condições de Contorno

Para $z = \ell$, tem-se:

$$M_1 = 0 \quad \text{e} \quad M_2 = 0 \quad (2.26)$$

$$Q_1 = 0 \quad \text{e} \quad Q_2 = 0 \quad (2.27)$$

Substituindo-se a condição de contorno $Q_2=0$ de (2.27), para $z=\ell$, na equação (2.22) obtém-se:

$$C_1 = \int_0^{\ell} \mu_1 p dz \quad (2.28)$$

Substituindo-se a equação (2.28) na equação (2.19) obtém-se:

$$C_2 = \int_0^{\ell} \mu_2 p dz \quad (2.29)$$

Substituindo-se a equação (2.28) na equação (2.14) e com a condição de contorno $M_1=0$, para $z=\ell$, obtém-se:

$$C_3 = \mu_1 \left[-\int_0^{\ell} \int_0^{\ell} p dz dz + \ell \int_0^{\ell} p dz \right] \quad (2.30)$$

Substituindo-se a equação (2.30) na equação (2.20) obtém-se:

$$C_4 = \mu_2 \left[-\int_0^{\ell} \int_0^{\ell} p dz dz + \ell \int_0^{\ell} p dz \right] \quad (2.31)$$

Basta agora, portanto, substituir as condições de contorno achadas nas equações dos esforços solicitantes.

2.2.8- Esforços Internos e Deslocamentos no Pilar Genérico j

Substituindo-se as equações (2.28) e (2.29) nas equações (2.12) e (2.13) tem-se:

$$Q_j = \mu_j \left[\int_0^{\ell} p dz - \int_0^z p dz \right] \quad (2.32)$$

Substituindo-se as equações (2.28), (2.29) e (2.30), (2.31) nas equações (2.14) e (2.15) tem-se:

$$M_j = \mu_j \left[\int_0^z \int_0^z p dz dz - z \int_0^{\ell} p dz - \int_0^{\ell} \int_0^{\ell} p dz dz + \ell \int_0^{\ell} p dz \right] \quad (2.33)$$

Substituindo-se a equação (2.33) na equação (2.4) obtém-se o deslocamento horizontal:

$$u = \phi z + \frac{1}{E(I_1 + I_2)} \int_0^z \int_0^z \left[\int_0^z \int_0^z p dz dz - z \int_0^{\ell} p dz - \int_0^{\ell} \int_0^{\ell} p dz dz + \ell \int_0^{\ell} p dz \right] \quad (2.34)$$

2.2.8.1- Carregamento Horizontal p Uniformemente Distribuído

Para este caso particular de carregamento, obtém-se para o pilar genérico j:

$$Q_j = \mu_j p (\ell - z) \quad (2.35)$$

$$M_j = \mu_j p \frac{(\ell - z)^2}{2} \quad (2.36)$$

$$u_j = \phi z + \frac{p}{E(I_1 + I_2)} \left[\frac{z^4}{24} - \ell z^2 \left(\frac{z}{6} - \frac{\ell}{4} \right) \right] \quad (2.37)$$

Observa-se das equações (2.32) e (2.33) que cada pilar genérico j resiste a um esforço solicitante diretamente proporcional a μ_j , definido pela equação (2.10), o mesmo podendo se dizer a respeito das distribuição da carga externa.

2.2.9- Condições para Existência de Compatibilidade de Deslocamentos

Vê-se pelas equações (2.32) e (2.33) que os esforços internos nos pilares independem das rotações dos mesmos, pois da equação (2.21), só deverá haver compatibilidade de deslocamentos se as rotações das bases dos pilares forem iguais. Recalques impostos às bases terão que ser sempre iguais, e se houverem bases elásticas, pensando nos esforços atuantes nas sapatas das fundações esquematizadas na figura 2.5:

ter-se-ia que:

$$M_1 - S_1 \phi = 0 \quad (2.38)$$

$$M_2 - S_2 \phi = 0 \quad (2.39)$$

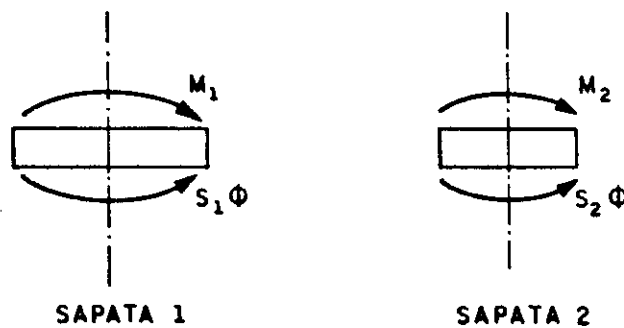


Fig. 2.5 - Equilíbrio nas sapatas

Colocando-se ϕ em evidência nas 2 equações acima e igualando-as obtém-se:

$$\frac{M_1}{S_1} = \frac{M_2}{S_2} \quad (2.40)$$

Lembrando-se que o momento absorvido por cada pilar é proporcional a um μ_j genérico, obtém-se:

$$\frac{I_1}{S_1} = \frac{I_2}{S_2} \quad (2.41)$$

De BARKAN [5], tem-se para uma sapata genérica j:

$$S_j = C_{\phi_j} I_{f_j} \quad (2.42)$$

onde:

S_j é a rigidez à rotação da sapata do pilar genérico j

I_{f_j} é o momento de inércia da sapata de fundação genérica j

e

C_{ϕ_j} é o coeficiente de compressão elástica não uniforme do solo

Convém observar que o valor de C_{ϕ_j} depende dos seguintes fatores:

E - módulo de elasticidade do solo

ν - coeficiente de Poisson do solo

α - razão entre largura e comprimento da sapata

A - área da sapata.

Substituindo-se a equação genérica (2.42) na equação (2.41) tem-se:

$$\frac{C_{\phi_1} I_{f_1}}{C_{\phi_2} I_{f_2}} = \frac{I_1}{I_2} \quad (2.43)$$

Desprezando-se a dependência do valor de C_{ϕ_j} em relação aos parâmetros enunciados, isto é, considerando-se $C_{\phi_1} = C_{\phi_2}$, tem-se:

$$\frac{I_{f_1}}{I_1} = \frac{I_{f_2}}{I_2} \quad (2.44)$$

Observe-se, das equações acima que para haver equilíbrio nas sapatas das fundações, os momentos de inércia das sapatas têm que ser proporcionais aos momentos de inércia dos pilares, além de serem respeitadas as condições das equações (2.18) a (2.21).

Para viabilizar a compatibilidade de deslocamentos ao longo dos pilares, caso não seja satisfeita a condição (2.44) ou caso se queira impor recalques de apoio diferentes entre si, utilizar-se-á um processo de origem discreta, introduzindo a possibilidade de deformações a nível local entre os andares adjacentes, diferentes para cada pilar. Como se verá poder-se-a utilizar para a análise das perturbações decorrentes, o processo de propagação de momentos, da estática clássica, de SOUZA [6].

2.3- UTILIZAÇÃO DO PROCESSO DE PROPAGAÇÃO PARA PILARES PRISMÁTICOS COM GRANDE NÚMERO DE ANDARES DE MESMO PÉ DIREITO.

Na análise subsequente, para corrigir as incoerências decorrentes da imposição de condições de contorno correspondentes às bases, poder-se-á fazer uso do processo de propagação da análise comum de vigas contínuas; as correções poderão ser reduzidas a superposições de problemas onde a flexão local poderá ser usada em cada um, mantendo a elástica global retilínea.

A imposição de uma rotação ϕ_j num nó de base, por exemplo implicará na propagação de momentos indicada na figura 2.6; para um número razoável de andares o coeficiente de propagação de momento de um nível para o imediatamente acima converge para um valor fixo $\alpha = 2\sqrt{3}$, ou aproximadamente:

$$\alpha = 0,2679 \quad (2.45)$$

Determina-se o coeficiente de rigidez β do apoio engastado com a conveniente utilização do Princípio dos Trabalhos Virtuais, obtendo:

$$\beta = \sqrt{12} \frac{EI}{h} \quad (2.46)$$

Assumindo uma orientação em planta para um certo pilar j , definida pela direção de um versor \vec{p}_j , o momento fletor será considerado positivo se provocar tração na face anterior do pilar, a força de reação da laje no pilar será positiva se tiver sentido contrário ao de \vec{p}_j e o esforço cortante será positivo se horário sobre a seção transversal.

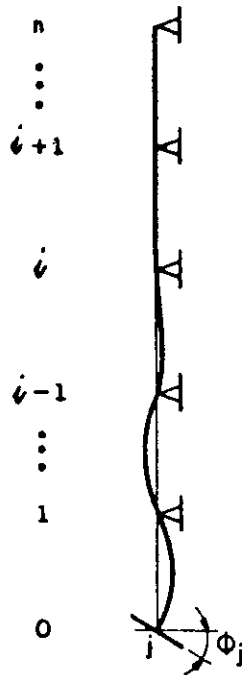


Fig. 2.6 - Pilar j com rotação em sua base

Da definição de rigidez, o momento na base é:

$$M_j = -\beta_j \phi_j \quad (2.47)$$

Para os níveis superiores este momento será propagado através do coeficiente α , notando-se que há uma mudança no sinal do momento de um andar para outro, donde obtém-se:

$$M_j = -\beta_j \phi_j (-\alpha)^i \quad (2.48)$$

A partir da equação acima, deduz-se que o esforço cortante Q , em um i -ésimo nível é:

$$Q_j = -(1+\alpha) \frac{\beta_j \phi_j}{h} (-\alpha)^i \quad (2.49)$$

A força normal no lintel é, na base do pilar:

$$N_j = (1+\alpha) \frac{\beta_j \phi_j}{h} \quad (2.50)$$

e em um i-ésimo nível:

$$N_j = -(1+\alpha)^2 \frac{\beta_j \phi_j}{h} (-\alpha)^{i-1} \quad (2.51)$$

Não se deduziram formulários para o n-ésimo nível devido ao fato de os esforços solicitantes tornarem-se desprezíveis nas proximidades deste.

A idéia inicial de se introduzir condições adicionais para viabilizar a compatibilidade de deslocamentos, em particular utilizando uma flexão local dos pilares entre os andares foi mostrada por SOUZA [4]. Observou-se que as perturbações se limitavam aos andares inferiores da estrutura e que surgiram grandes esforços cortantes nos pilares e grandes esforços aplicados às lajes. Sugeriu-se, então, outros tipos de compatibilizações que tratassem o problema de uma maneira mais próxima da realidade física de cada caso particular de associação. O objetivo principal deste trabalho é a extensão da idéia inicial a diversos tipos de associações planas ou espaciais; neste Capítulo, em particular são discutidos apenas as idéias aplicadas ao tipo mais simples de associação que é a de 2 pilares apenas.

2.4- ASSOCIAÇÃO PLANA DE 2 PILARES, SUBMETIDA A RECALQUES DE FUNDAÇÃO. (VERSÃO 1)

2.4.1- Introdução

Recorrendo ao esquema de solução da figura 2.7 é possível fazer uso do processo descrito no item anterior; ao ocorrerem perturbações de borda, originadas por rotação de apoio, surgem nestes, momentos M_j que se propagam aos demais andares, amortecendo rapidamente e sendo significativos apenas nos primeiros níveis. Para uma estrutura com um número suficientemente grande de andares, o coeficiente α , obtido anteriormente, vale 0,2679.

Seja a associação da figura 2.7, desenvolvida na superposição de problemas lá mostrada:

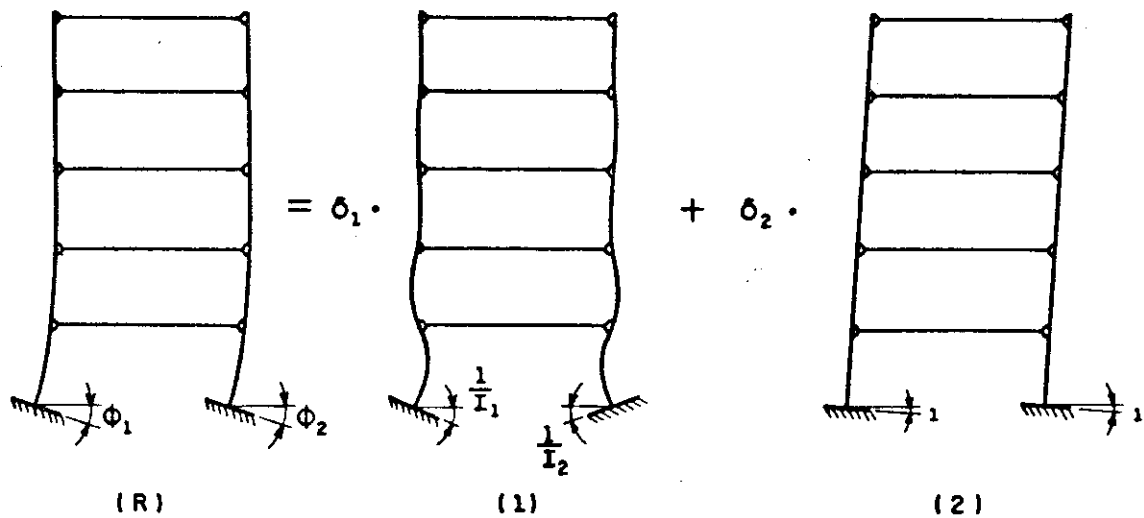


Fig. 2.7 - Associação plana de 2 pilares submetida a recalques de fundação

Os deslocamentos ϕ_1 e ϕ_2 podem ser impostos como combinações lineares dos deslocamentos δ_1 e δ_2 dos problemas (1) e (2).

No problema (1) a associação tem deslocamentos nulos no nível dos andares, dado o equilíbrio das forças aplicadas aos lintéis.

No problema (2), há uma deslocabilidade linear originada por rotações unitários dos apoios, sem aparecimento de esforços quaisquer na estrutura.

Pela superposição de efeitos da figura 2.7, podem-se obter as seguintes relações de coerência de deslocamentos:

$$\phi_1 = \delta_1 \frac{1}{I_1} + \delta_2 \quad (2.52)$$

$$\phi_2 = -\delta_1 \frac{1}{I_2} + \delta_2 \quad (2.53)$$

Resolvendo-se o sistema de equações com variáveis δ_1 e δ_2 obtém-se:

$$\delta_2 = \frac{\phi_1 I_1 + \phi_2 I_2}{I_1 + I_2} \quad (2.54)$$

e

$$\delta_1 = \phi_1 I_1 - I_1 \left(\frac{\phi_1 I_1 + \phi_2 I_2}{I_1 + I_2} \right) \quad (2.55)$$

Obtidos os valores de δ_1 e δ_2 , o próximo passo será obter os esforços solicitantes e os deslocamentos da estrutura.

2.4.2- Esforços Solicitantes e Deslocamentos

Existem esforços solicitantes apenas no problema (1), e são obtidos através da substituição das rotações $\frac{1}{I_1}$ e $-\frac{1}{I_2}$ nas

equações (2.48) ou (2.51), para os pilares 1 e 2, respectivamente.

O deslocamento linear dos 2 pilares, obtém-se do problema (2), e é dado pela equação:

$$u = z$$

Para se obterem os esforços solicitantes no problema (R) basta multiplicar os obtidos no problema (1) por δ_1 ; para obter o deslocamento horizontal no problema (R), multiplicar o obtido no problema (2) por δ_2 .

Observe-se que, partindo-se do esquema da figura 2.7, pode-se chegar a uma associação plana de n pilares, expandindo-se o problema (1) em (n-1) problemas independentes, tomando-se para cada problema 2 pilares e fazendo-se a propagação de perturbações através de rotação de apoios, e mais o problema (n) onde teríamos apenas os deslocamentos horizontais da associação, montando-se assim um sistema de n equações lineares a n incógnitas δ_j .

2.5- ASSOCIAÇÃO PLANA DE 2 PILARES, SUBMETIDA A RECALQUES DE FUNDAÇÃO (VERSÃO 2)

2.5.1- Introdução

Como uma solução alternativa para o problema de recalques de fundação adota-se a do esquema da figura 2.8. A extensão à idéia de SOUZA [4], é feita utilizando-se novamente o processo de propagação de momentos em vigas contínuas, montando outro esquema de solução diferente, levando em conta a linearidade da elástica dos andares. Com o esquema da figura 2.8, nos 2 problemas as estruturas estão inicialmente estrangidas por vínculos ao nível dos

andares; das condições de equilíbrio horizontal das forças nos vínculos, em um andar qualquer, dada a evidente proporcionalidade entre as forças, obtém-se o valor da incógnita δ_1 . Ao se estender esta solução a uma associação de n pilares, vê-se que somente há diferença no que diz respeito ao número de pilares, portanto não há necessidade de se resolver qualquer sistema de equações lineares. Faz-se também a extensão ao problema de uma associação espacial de pilares, notando-se que existiriam vínculos e correspondentes forças em 3 direções ortogonais, resultantes de 2 translações e uma rotação de laje, ao nível de qualquer andar, montando-se assim um sistema de equações lineares com incógnitas δ_1 , δ_2 e δ_3 .

Assim, seja a associação da figura 2.8.

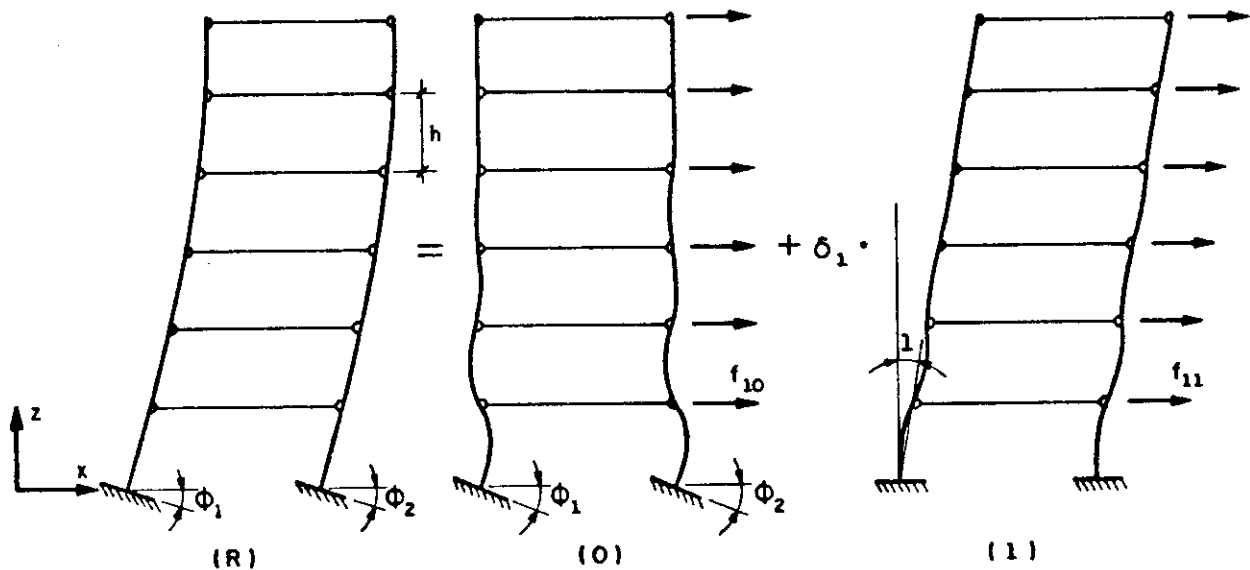


Fig. 2.8 - Esquema estrutural para 2 pilares

A superposição de efeitos recai em 2 problemas; o problema (0) é constituído de uma estrutura que sofre

rotações ϕ_1 e ϕ_2 , mas indeslocável pela presença de vínculos ao nível de cada andar, onde atuam forças segundo o eixo x; no problema (1), a estrutura tem uma deslocabilidade linear segundo o eixo x, provocando assim o aparecimento de esforços normais nos vínculos, ao longo de toda sua altura, nos 2 problemas.

A linha elástica horizontal é linear, implicando na possibilidade de utilização do processo de propagação de momentos, com o aparecimento de esforços em cada andar com uma distribuição proporcional à do anterior.

Os pilares 1 e 2 são orientados por um versor \vec{P}_j , no caso plano, apenas com componentes segundo x, conforme a figura 2.8.

2.5.2- Esforços Solicitantes e Deslocamentos

Os esforços solicitantes do problema (0), obtém-se através das equações (2.48) a (2.51); os do problema (1) obtém-se substituindo-se a rotação 1 no lugar de ϕ_j nas equações acima.

Existe apenas deslocamento linear no problema (1) obtido pela equação:

$$u = z \quad (2.57)$$

Denominando-se

$$K_j = \phi_j - \delta_1 \quad (2.58)$$

basta substituir k_j no lugar de ϕ_j nas equações (2.48) e (2.51) e obtém-se assim os esforços solicitantes no problema (R) para os pilars 1 e 2, respectivamente. O deslocamento no

problema (R) obtém-se multiplicando o obtido no problema (2) por δ_1 .

Neste item foram obtidos primeiramente os esforços solicitantes na estrutura nos problemas (0) e (1), pois eles são necessários para a obtenção das forças nos vínculos ao nível da laje do primeiro andar.

2.5.3- Obtenção das Forças nos Vínculos

Faz-se o equilíbrio de forças na laje do primeiro andar, entre as reações das forças horizontais aplicadas à laje e as forças dos vínculos, para os problemas (0), (1) e (R).

2.5.3.1- Problema (0)

$$f_{10} = - \frac{(1+\alpha)^2}{h} (\beta_1 \phi_1 + \beta_2 \phi_2) \quad (2.59)$$

2.5.3.2- Problema (1)

$$f_{11} = \frac{(1+\alpha)^2}{h} (\beta_1 + \beta_2) \quad (2.60)$$

2.5.4- Montagem da Equação em Função de δ_1

Fazendo-se o equilíbrio entre as forças dos vínculos nos problemas (0), (1) e (R), obtém-se a seguinte equação:

$$f_{11} \delta_1 = -f_{10} \quad (2.61)$$

Substituindo-se as equações (2.59) e (2.60) na equação (2.61) obtém-se:

$$(\beta_1 + \beta_2)\delta_1 = (\beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2) \quad (2.62)$$

donde obtém-se:

$$\delta_1 = \frac{(\beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2)}{(\beta_1 + \beta_2)} \quad (2.63)$$

Lembrando-se da equação (2.46), para um pilar genérico j, pode-se escrever a equação acima como:

$$\delta_1 = \frac{(I_1\phi_1 + I_2\phi_2)}{(I_1 + I_2)} \quad (2.64)$$

Esse valor de δ_1 será utilizado na obtenção dos esforços solicitantes e deslocamentos finais da estrutura.

2.5.5- Exemplo 1

Sejam os 2 pilares da figura 2.8.a. como pertencentes a uma associação plana, com altura de 10 andares e pé-direito de 3m, sendo que somente a fundação do pilar 1 sofre um recalque rotacional $\phi_1 = 0,0015$. As dimensões dos pilares são dadas em planta.



Fig. 2.8.a - Exemplo 1

Adota-se:

$$E_c = 2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$$

a) Parâmetros elásticos e geométricos dos pilares

Os momentos de inércia dos pilares 1 e 2 são respectivamente:

$$I_1 = 0.008533 \text{ m}^4 \quad I_2 = 0.01667 \text{ m}^4$$

Da equação (2.46), obtém-se os coeficientes de rigidez dos pilares 1 e 2:

$$\beta_1 = 19706,12 \text{ tfm} \quad \beta_2 = 38497,72 \text{ tfm}$$

b) Problema (0) e (1)

Substituem-se os valores de (a) na equação (2.64):

$$\delta_1 = \frac{(I_1 \phi_1 + I_2 \phi_2)}{(I_1 + I_2)}$$

obtendo-se:

$$\delta_1 = 0.0005079$$

Substituindo-se a equação (2.58) nas equações (2.48) a (2.51) obtém-se os esforços solicitantes resultantes da superposição dos problemas (0) e (1):

PILAR 1	PILAR 2
$M_1 = -\beta_1(\phi_1 - \delta_1)(-\alpha)^i$	$M_2 = -\beta_2(\phi_2 - \delta_1)(-\alpha)^i$
$Q_1 = -\frac{(1+\alpha)}{h} \beta_1(\phi_1 - \delta_1)(-\alpha)^i$	$Q_2 = -\frac{(1+\alpha)}{h} \beta_2(\phi_1 - \delta_1)(-\alpha)^i$
$N_1 = \frac{(1+\alpha)}{h} \beta_1(\phi_1 - \delta_1)$ na base	$N_2 = \frac{(1+\alpha)}{h} \beta_2(\phi_2 - \delta_1)$ na base
$N_1 = -\frac{(1+\alpha)^2}{h} \beta_1(\phi_1 - \delta_1)(-\alpha)^{i-1}$	$N_2 = -\frac{(1+\alpha)^2}{h} \beta_2(\phi_2 - \delta_1)(-\alpha)^{i-1}$

Da equação (2.57) obtém-se o deslocamento linear da associação de pilares:

$$u = \delta_1 z$$

PILAR 1	PILAR 2
$M_1 = -19,550(-\alpha)^i$	$M_2 = 19,550 (-\alpha)^i$
$Q_1 = -8,263(-\alpha)^i$	$Q_2 = 8,2631(-\alpha)^i$
$N_1 = 8,263$ na base	$N_2 = -8,263$ na base
$N_1 = 39,100 (-\alpha)^i$	$N_2 = -39,100 (-\alpha)^i$

$$u = 0.0005079z$$

c) Esforços e deslocamentos finais

Na tabela abaixo, não foram colocados os esforços correspondentes ao Pilar 2, pelo fato dos mesmos serem de mesmo valor absoluto que os do pilar 1, mas com sentidos contrários.

z(m)	PILAR 1			
	M_1 (tfm)	Q_1 (tf)	N_1 (tf)	u(m)
0	-19,55	-8,26	8,26	0.000
3	5,24	2,21	-10,47	0.0015
6	-1,40	-0,59	2,81	0.0030
9	0,38	0,16	-0,75	0.0046
12	-0,10	-0,04	0,20	0.0061
15	0,03	0,01	-0,05	0.0076
18	0,00	0,00	0,01	0.0091
21	0,00	0,00	0,00	0.0107
24	0,00	0,00	0,00	0.0122
27	0,00	0,00	0,00	0.0137
30	0,00	0,00	0,00	0.0152

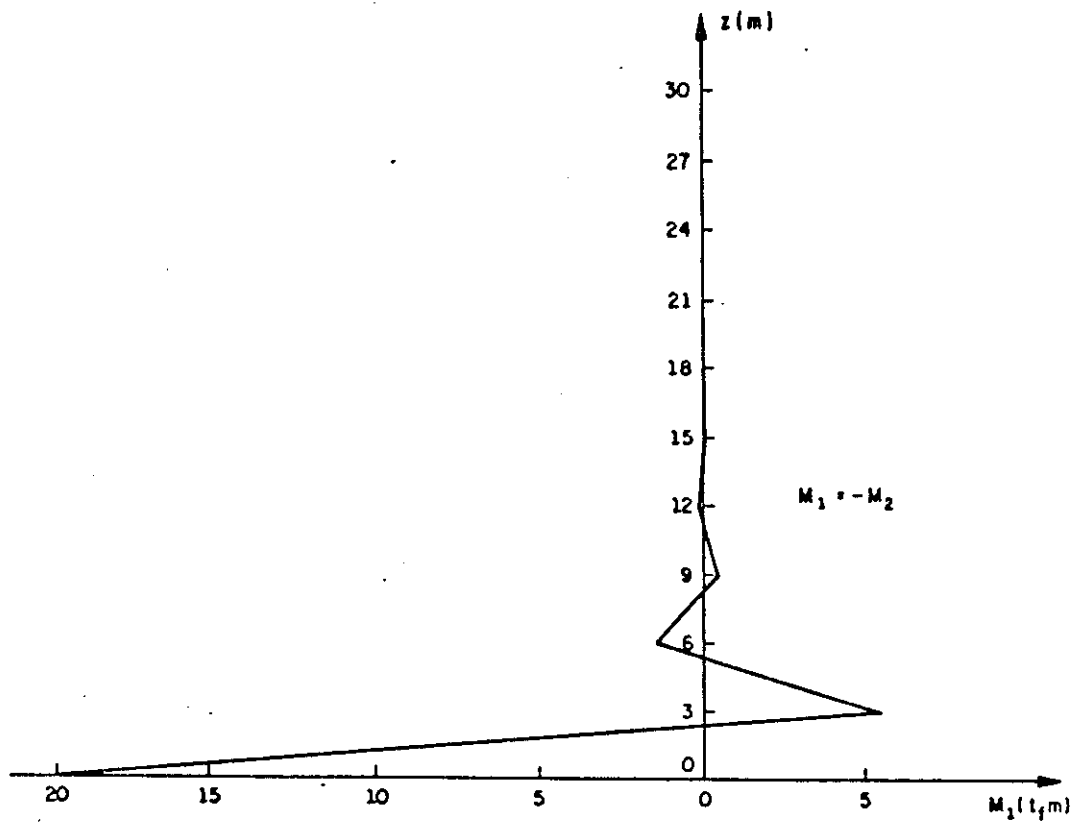


Fig. 2.8.b - Momento fletor no pilar 1

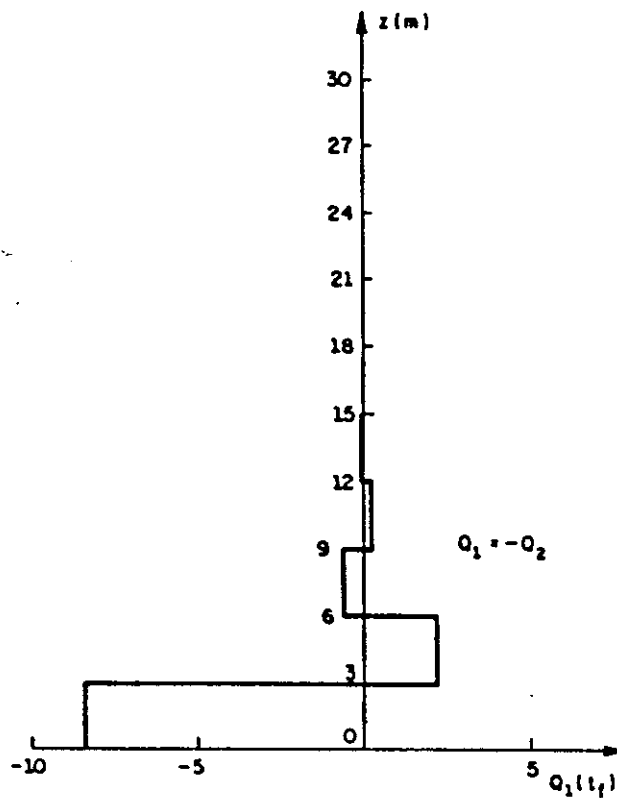


Fig. 2.8.c - Esforço cortante no pilar 1

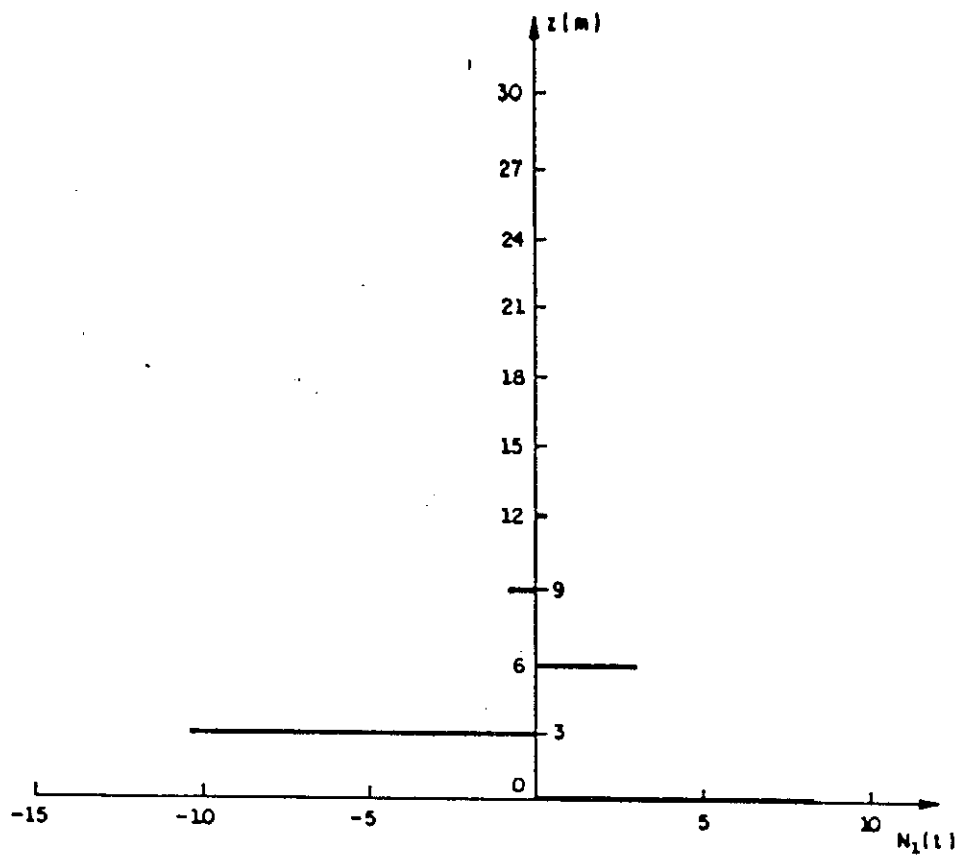


Fig. 2.8.d - Força horizontal do pilar 1 na laje

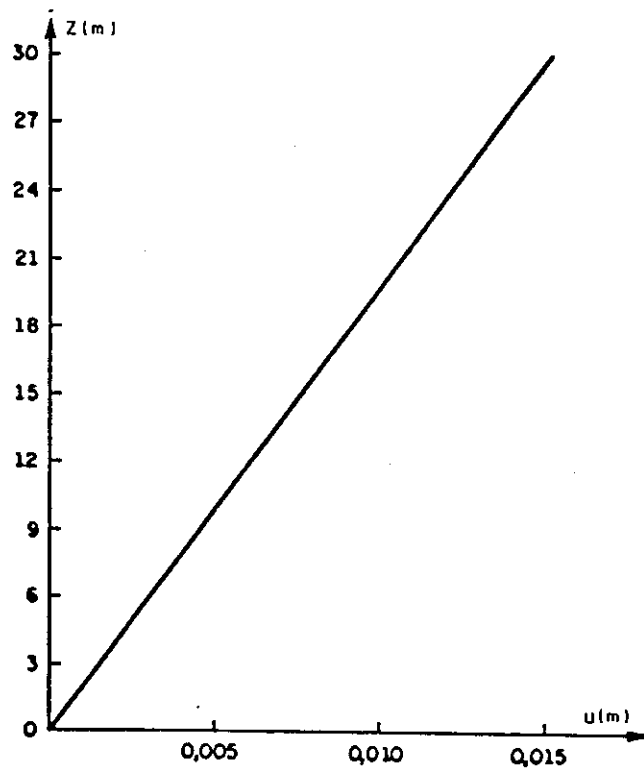


Fig. 2.8.e - Deslocamento horizontal da associação

Os esforços solicitantes decorrentes da perturbação de borda, provocada pela rotação de apoio de pilar 1, são significativos apenas nos primeiros andares da associação pelo fato de os mesmos se propagarem de um andar ao outro multiplicados pelo coeficiente $\alpha=0,2679$.

A linha elástica da associação é linear permitindo a perfeita utilização do processo de propagação de momentos.

2.6- ASSOCIAÇÃO PLANA DE 2 PILARES EM BASE ELÁSTICA COMPUTANDO-SE FLEXÃO LOCAL ENTRE OS ANDARES (VERSÃO 1)

2.6.1- Introdução

Observa-se que o esquema de solução da figura 2.9 resulta da utilização dos esquemas estruturais das figuras 2.7 e 2.1 com rotações de base nulas, cujas soluções já foram obtidas. Pode-se chegar a uma associação de n pilares adicionando-se às observações feitas no item 2.4.2, a de que deve se expandir o problema (0) para n pilares. Vê-se que para a obtenção de δ_1 e δ_2 monta-se um sistema de equações partindo-se do equilíbrio estático dos coeficientes de rigidez das bases dos pilares nos problemas (0), (1), (2) e (R). Seja a associação da figura 2.9:

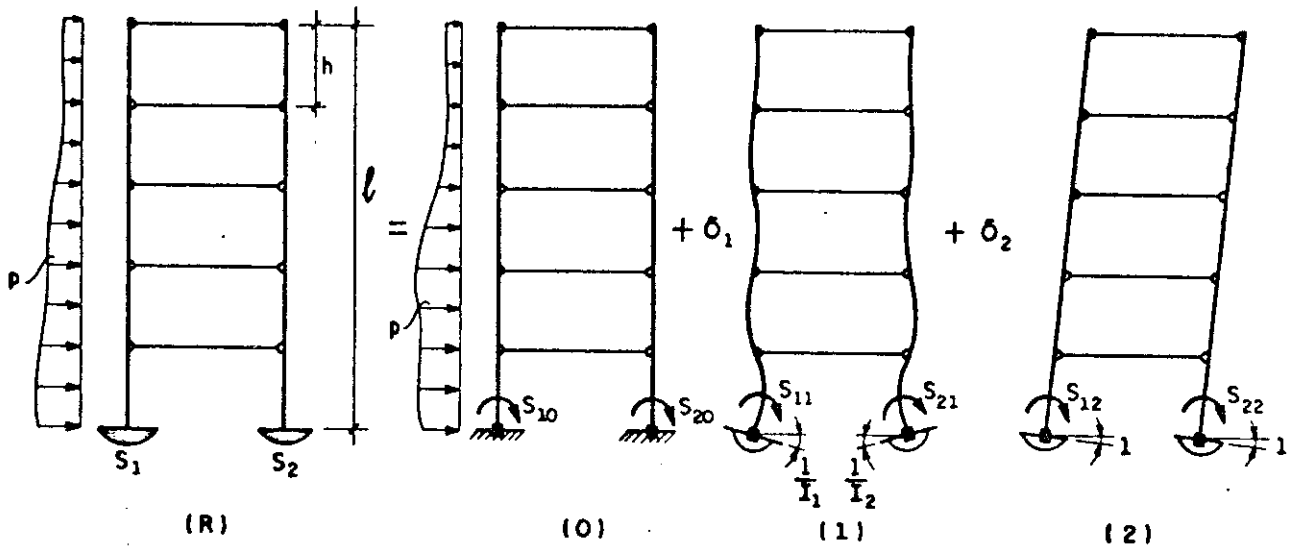


Fig. 2.9 - Superposição de efeitos

Fazendo-se o equilíbrio de momentos nas bases dos pilares 1 e 2 entre os problemas (R), (0), (1) e (2) obtém-se o seguinte sistema de equações com incógnitas δ_1 e δ_2 :

$$S_{11} \delta_1 + S_{12} \delta_2 = -S_{10} \quad (2.65)$$

$$S_{21} \delta_1 + S_{22} \delta_2 = -S_{20} \quad (2.66)$$

O próximo passo será a obtenção dos coeficientes de rigidez nos problemas (0), (1), (2)

2.6.2- Problema (0)

Notando-se que a estrutura do problema (0) já foi analisada no item 2.2, com a diferença que agora as bases estão engastadas, tem-se:

$$S_{10} = -\mu_1 M \quad (2.67)$$

$$S_{20} = -\mu_2 M \quad (2.68)$$

onde M seria um momento de tombamento, na base de um consolo único que substituiria toda a associação.

2.6.3- Problema (1)

Do equilíbrio de momentos atuantes nas sapatas e pilares obtém-se:

$$S_{11} = \sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_1}{I_1} \quad (2.69)$$

$$S_{21} = -\sqrt{12} \frac{E}{h} - \frac{S_2}{I_2} \quad (2.70)$$

2.6.4- Problema (0)

Não havendo esforços solicitantes nos 2 pilares, tem-se:

$$S_{11} = S_1 \quad (2.71)$$

$$S_{22} = S_2 \quad (2.72)$$

2.6.5- Montagem do Sistema de Equações

Substituindo-se as equações (2.67) a (2.72) nas equações (2.65) e (2.66) obtém-se:

$$\left(\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_1}{I_1} \right) \delta_1 + S_1 \delta_2 = \mu_1 M \quad (2.73)$$

$$-\left(\sqrt{12 \frac{E}{h}} + \frac{S_2}{I_2}\right) \delta_1 + S_2 \delta_2 = \mu_2 M \quad (2.74)$$

Resolvendo-se o sistema de equações acima com incógnitas δ_1 e δ_2 obtém-se:

$$\delta_2 = \left[\begin{array}{c} \frac{\mu_1}{\frac{\sqrt{12 \frac{E}{h}} + \frac{S_1}{I_1}}{S_1} + \frac{\mu_2}{\frac{\sqrt{12 \frac{E}{h}} + \frac{S_2}{I_2}}{S_2}}} + \frac{\mu_2}{\frac{\sqrt{12 \frac{E}{h}} + \frac{S_2}{I_2}}{S_2}} \\ \frac{\sqrt{12 \frac{E}{h}} + \frac{S_1}{I_1}}{S_1} \quad \frac{\sqrt{12 \frac{E}{h}} + \frac{S_2}{I_2}}{S_2} \end{array} \right] M \quad (2.75)$$

e

$$\delta_1 = \frac{\mu_1 M}{\frac{\sqrt{12 \frac{E}{h}} + \frac{S_1}{I_1}}{S_1}} - \frac{S_1}{\frac{\sqrt{12 \frac{E}{h}} + \frac{S_1}{I_1}}{S_1}} \delta_2 \quad (2.76)$$

Finalmente, substituindo-se (2.75) em (2.76) obtém-se:

$$\delta_1 = \left[\begin{array}{c} \frac{\mu_1}{\frac{\sqrt{12 \frac{E}{h}} + \frac{S_1}{I_1}}{S_1}} - \frac{S_1}{\frac{\sqrt{12 \frac{E}{h}} + \frac{S_1}{I_1}}{S_1}} \left(\frac{\mu_1}{\frac{\sqrt{12 \frac{E}{h}} + \frac{S_1}{I_1}}{S_1}} + \frac{\mu_2}{\frac{\sqrt{12 \frac{E}{h}} + \frac{S_2}{I_2}}{S_2}} \right) \\ \frac{\sqrt{12 \frac{E}{h}} + \frac{S_1}{I_1}}{S_1} \quad \frac{\sqrt{12 \frac{E}{h}} + \frac{S_2}{I_2}}{S_2} \end{array} \right] M \quad (2.77)$$

Satisfeita a equação (2.44), δ_1 é nulo, não havendo neste caso, necessidade de flexão local entre andares.

2.6.6- Esforços Solicitantes e Deslocamentos

Obtém-se os esforços solicitantes do problema (R), bastando fazer a soma dos esforços solicitantes para o problema (0), obtidos no item 2.2.8 para um carregamento p qualquer ou 2.2.8.1 para um carga p uniforme, aos para o problema (1), multiplicados por δ_1 , obtidos no item 2.4.2.

Da mesma maneira, obtém-se o deslocamento horizontal do problema (R), somando-se os obtidos no item 2.2.8 para carregamento p qualquer ou 2.2.8.1 para carregamento p constante, com a condição de ϕ igual a zero nas bases, aos obtidos no item 2.4.2.

2.6.7- Exemplo 2

Sejam os conjuntos pilar-sapata 1 e 2 correspondentes a uma associação plana em base elástica, com 10 andares de pé direito igual a 3m, submetida a uma carga de 0,1 tf/m, horizontal constante ao longo de sua altura. As dimensões dos pilares e sapatas são dadas em planta, sendo que as dimensões das sapatas dos pilares 1 e 2 são iguais.

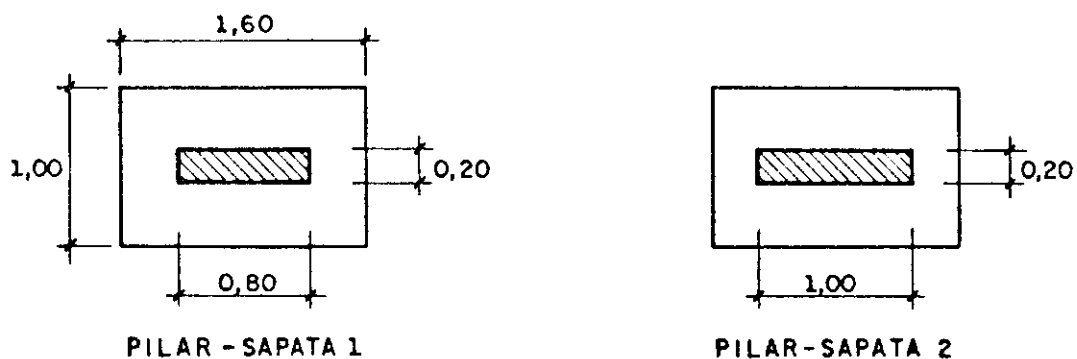


Fig. 2.9.a - Exemplo 2

Adota-se:

$$E_c = 2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$$

$$\nu = 0,325$$

$$E_s = 5400 \text{ tf/m}^2$$

a) Parâmetros elásticos e geométricos dos conjuntos pilar-sapata 1 e 2:

Para o conjunto pilar-sapata 1 tem-se:

$$I_1 = 0,008533\text{m}^4 \quad A_{f_1} = 1,60\text{m}^2 \quad I_{f_1} = 0,341\text{m}^4$$

Da (2.46) obtém-se:

$$\beta_1 = 19706,12 \text{ tfm}$$

Do item 2.2.9 obtém-se:

$$C_{\phi_1} = 8490 \text{ tf/m}^3 \quad S_1 = 2895,10 \text{ tfm}$$

Para o conjunto pilar-sapata 2 tem-se:

$$I_2 = 0,01667\text{m}^4$$

Da (2.46) obtém-se

$$\beta_2 = 38497,7 \text{ tfm}$$

Os parâmetros devidos à sapata 2 são iguais aos da sapata 1, pelo fato delas serem iguais.

Da equação (2.10) tem-se, em tf e m:

$$\mu_1 = 0,34 \quad \text{e} \quad \mu_2 = 0,66$$

De (2.6.2) tem-se:

$$M = 0,05(\ell-z)^2$$

b) Problema (0)

Das (2.35) e (2.36) obtém-se:

$$M_1 = 0,017(30-z)^2 \quad M_2 = 0,033(30-z)^2$$

$$Q_1 = 0,034(30-z) \quad Q_2 = 0,066(30-z)$$

Da equação (2.37), com $\phi = 0$, obtém-se:

$$u = 1,98389 \times 10^{-6} \left[\frac{z^4}{24} - 30z^2 \left(\frac{z}{6} - 7,5 \right) \right]$$

c) Problema (1) e (2)

Através da equação (2.75)

$$\delta_2 = \left[\frac{\frac{\mu_1}{\sqrt{\frac{12E}{h} + \frac{S_1}{I_1}}}}{S_1} + \frac{\frac{\mu_2}{\sqrt{\frac{12E}{h} + \frac{S_2}{I_2}}}}{S_2} \right] M$$

obtendo-se:

$$\delta_2 = 0,0078520110$$

Através da equação (2.76):

$$\delta_1 = \frac{\mu_1 M}{\sqrt{\frac{12E}{h} + \frac{S_1}{I_1}}} - \frac{S_1}{\sqrt{\frac{12E}{h} + \frac{S_1}{I_1}}} \delta_2$$

obtendo-se

$$\delta_1 = -2,8060508 \times 10^{-6}$$

O deslocamento horizontal no problema (2), obtém-se de (2.56) e é igual a:

$$u = \delta_2 z$$

Os esforços solicitantes no problema (1) são obtidos através da substituição das rotações $\frac{1}{I_1}$ e $-\frac{1}{I_2}$ para os pilares 1 e 2 nas equações (2.48) e (2.51), obtendo-se assim a tabela abaixo:

PILAR 1	PILAR 2
$M_1 = 6,480(-\alpha)^i$	$M_2 = -6,4801(-\alpha)^i$
$Q_1 = 2,739(-\alpha)^i$	$Q_2 = -2,7391(-\alpha)^i$
$N_1 = -2,739$ na base	$N_2 = 2,739$ na base
$N_1 = -12,960(-\alpha)^i$	$N_2 = 12,960(-\alpha)^i$

$$u = 0,007852011 z$$

d) Esforços solicitantes e deslocamentos finais

Fazendo-se a superposição dos esforços solicitantes e deslocamentos obtidos em (b) e (c) obtém-se a seguinte tabela:

z	PILAR			PILAR			
	M ₁	Q ₁	N ₁	M ₂	Q ₂	N ₂	u
0	21,78	3,76	-2,74	23,22	-0,76	2,74	0.0000
3	10,66	0,19	3,47	25,80	2,51	-3,47	0.0272
6	10,26	1,02	-0,93	18,54	1,38	0,93	0.0611
9	7,38	0,66	0,25	14,67	1,44	-0,25	0.1001
12	5,54	0,62	-0,07	10,66	1,18	0,07	0.1431
15	3,82	0,51	0,02	7,44	0,99	-0,02	0.1889
18	2,45	0,41	0,00	4,75	0,79	0,00	0.2368
21	1,38	0,31	0,00	2,67	0,59	0,00	0.2860
24	0,61	0,20	0,00	1,19	0,40	0,00	0.3358
27	0,15	0,10	0,00	0,30	0,20	0,00	0.3861
30	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0.4364

Cabe observar que, para este exemplo, o momento de interação \bar{M} entre os pilares 1 e 2, na base, de MANCINI [3], seria:

$$\bar{M} = \left[\frac{S_1}{S_1 + S_2} - \frac{I_1}{I_1 + I_2} \right] M$$

de onde obtém-se $\bar{M} = 7,20\text{tm}$, apenas 11,11% maior que o obtido na flexão local do problema (1), resultando em momentos fletores, nas bases dos pilares 1 e 2, iguais a 22,50tfm.

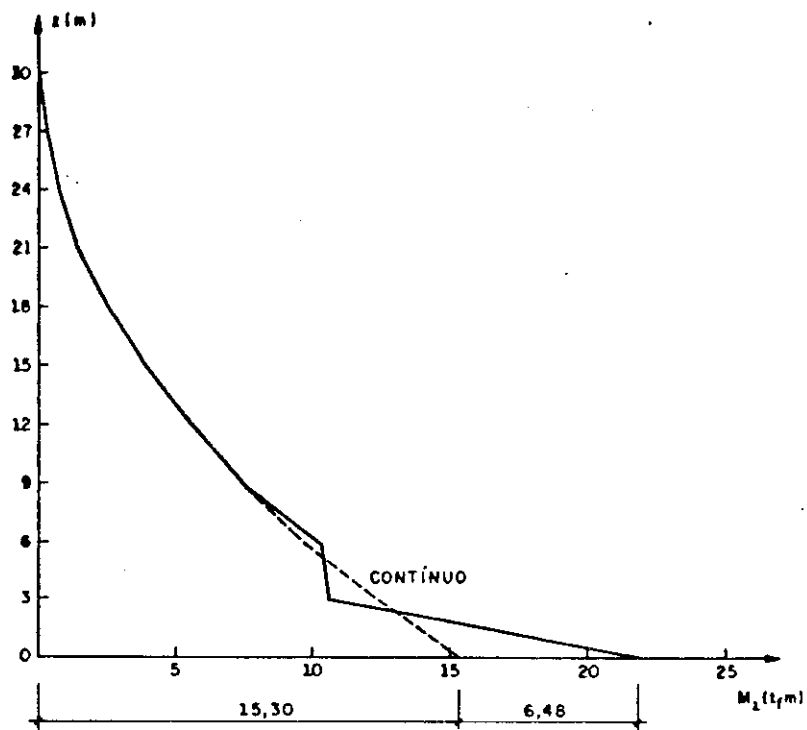


Fig. 2.9.b - Momento fletor no pilar 1

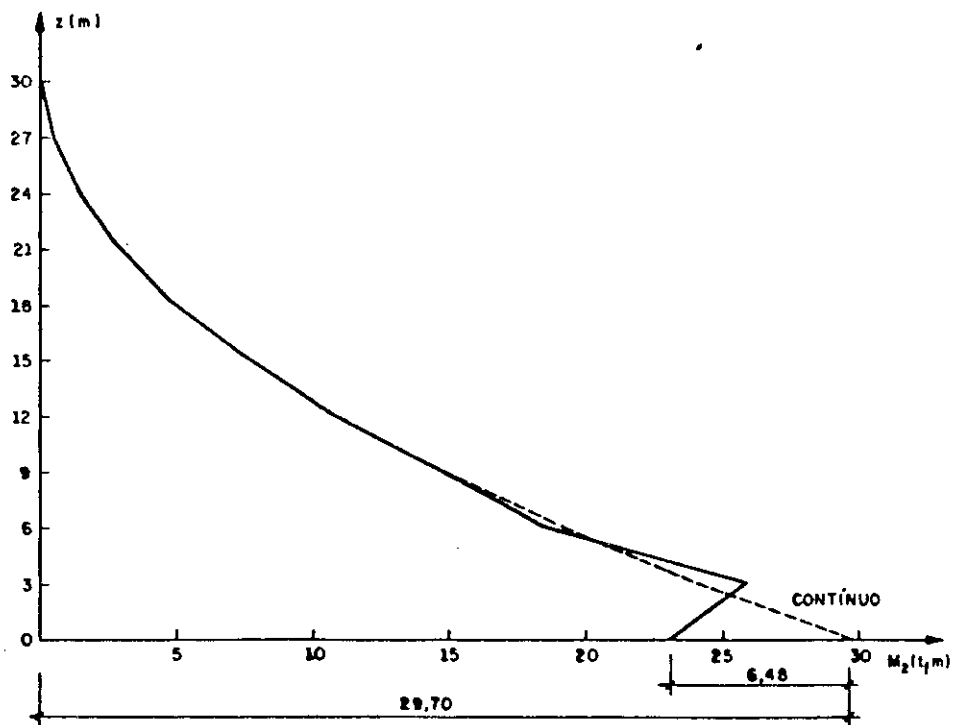


Fig. 2.9.c - Momento fletor no pilar 2

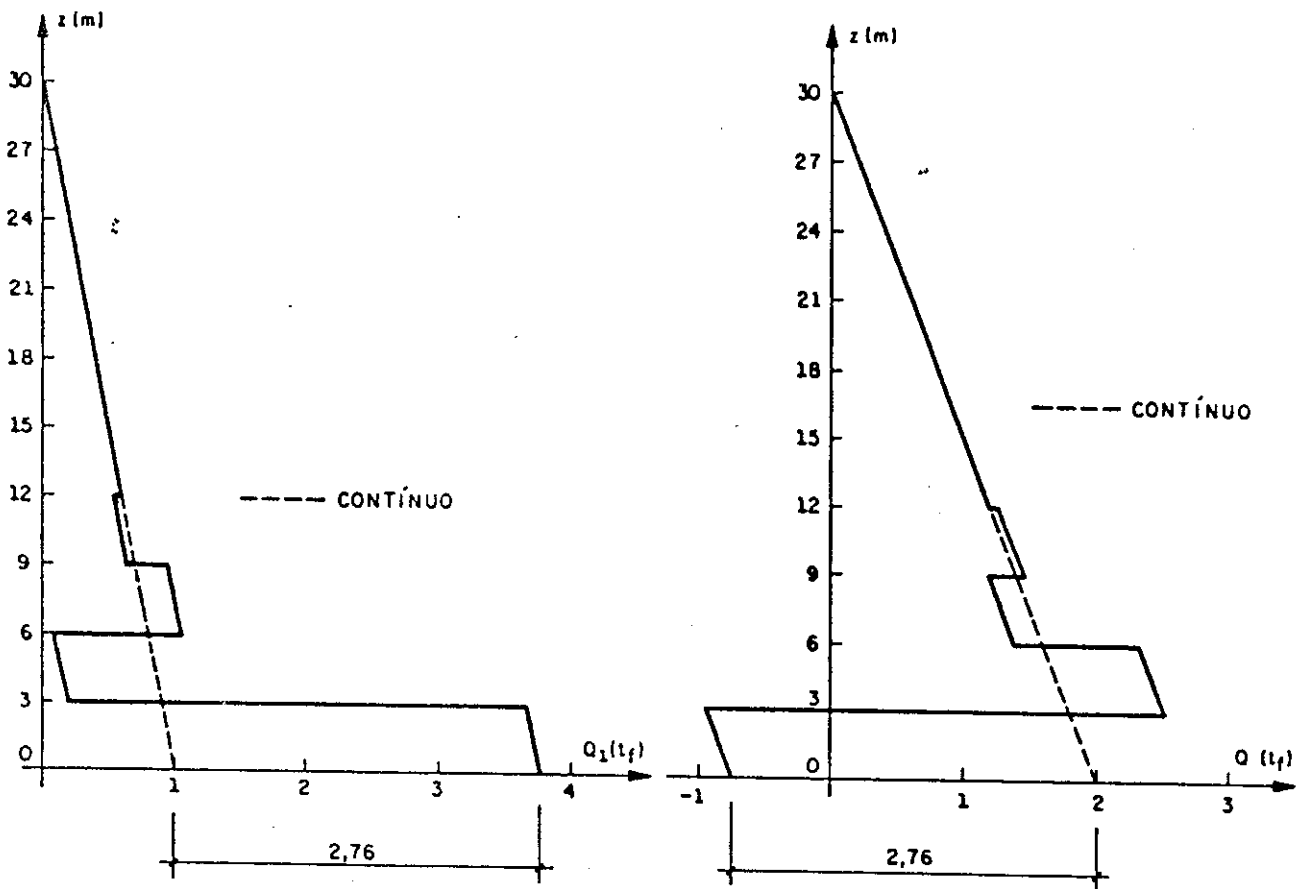


Fig. 2.9.d - Esforços cortantes nos pilares 1 e 2

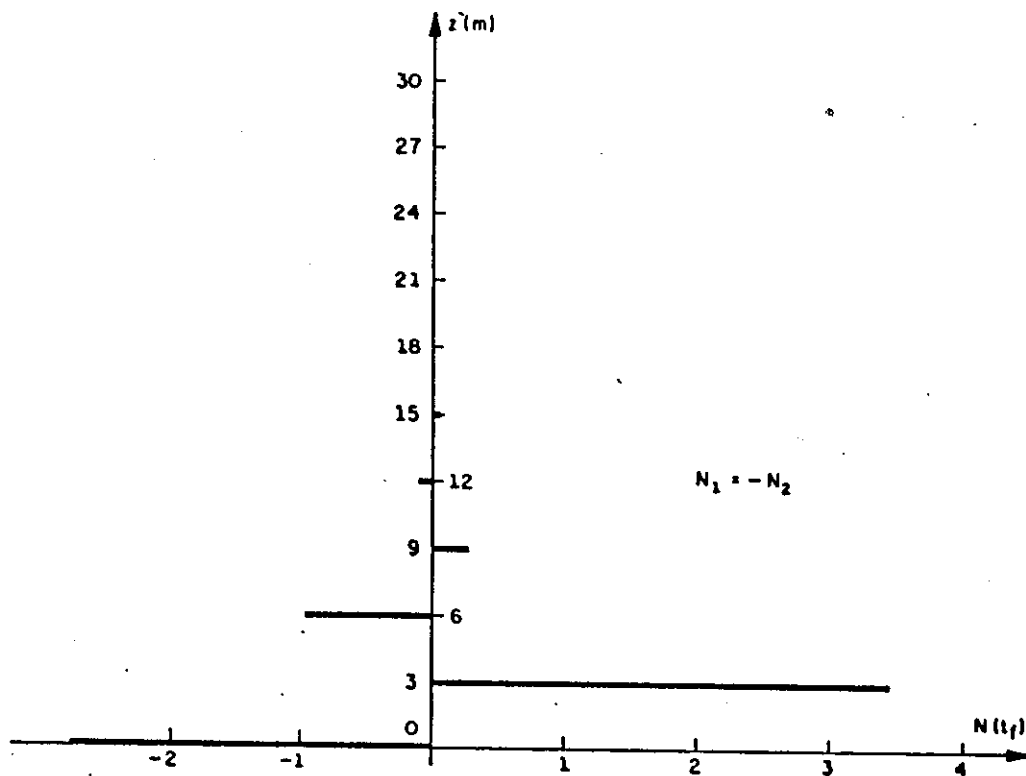


Fig. 2.9.e - Força horizontal do pilar 1 na laje

De MANCINI [3], obtém-se, devido à rotação da sapata:

$$u = \frac{M}{(S_1 + S_2)} z$$

Portanto:

$$u = 0,007772z$$

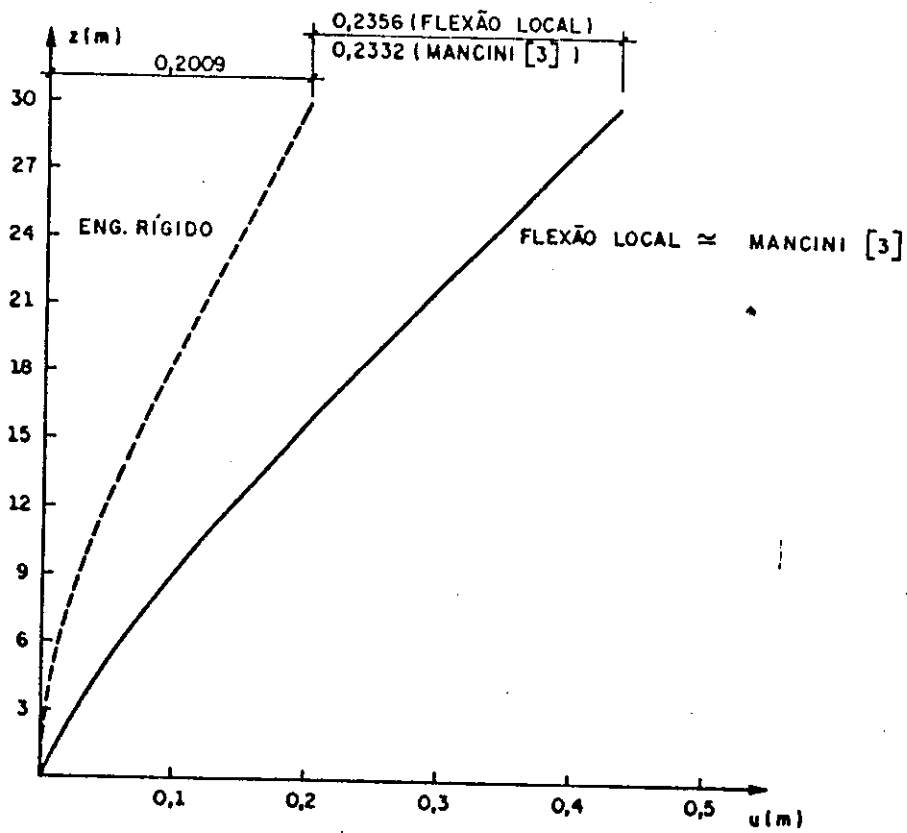


Fig. 2.9.f - Deslocamento horizontal da associação

Caso fosse satisfeita a condição da equação (2.44), isto é, os momentos de inércia dos pilares 1 e 2 fossem proporcionais aos das sapatas 1 e 2, teríamos $\delta_1=0$, não havendo necessidade da flexão local.

Observa-se que as linhas elásticas "flexão local" e "MANCINI[3]" são praticamente coincidentes.

As perturbações são significativas para os esforços cortantes e forças horizontais nos primeiros níveis e para momento fletor nas bases dos pilares.

2.7- ASSOCIAÇÃO PLANA DE 2 PILARES, EM BASE ELÁSTICA, COMPUTANDO-SE FLEXÃO LOCAL ENTRE OS ANDARES (VERSÃO 2)

2.7.1- Introdução

Da mesma maneira que na versão 1, obtém-se os coeficientes de rigidez e monta-se um sistema de equações lineares, mas com a diferença que nesta versão são incógnitas, além de δ_1 , as rotações ϕ_j para um pilar genérico j , mas δ_1 pode ser obtido em função de ϕ_j e então sendo possível obter um sistema em função apenas dos ϕ_j . Estende-se finalmente essa aplicação à associação de n pilares, pois pode-se obter uma fórmula para a rotação ϕ_j de um pilar genérico que torne explícita a solução do sistema de equações lineares em ϕ_j . A solução do problema (E) da figura 2.10, para o caso de n pilares é obtida por STAMATO [2], onde cada pilar absorve uma parcela da carga externa total proporcional ao seu momento de inércia.

Seja o esquema de solução da figura 2.10:

Aos problemas do esquema de solução da figura 2.9, para recalques de fundação, adiciona-se o problema (E), onde os pilares têm suas bases engastadas e estão submetidas a um carregamento p distribuído de uma maneira genérica ao longo da altura da estrutura.

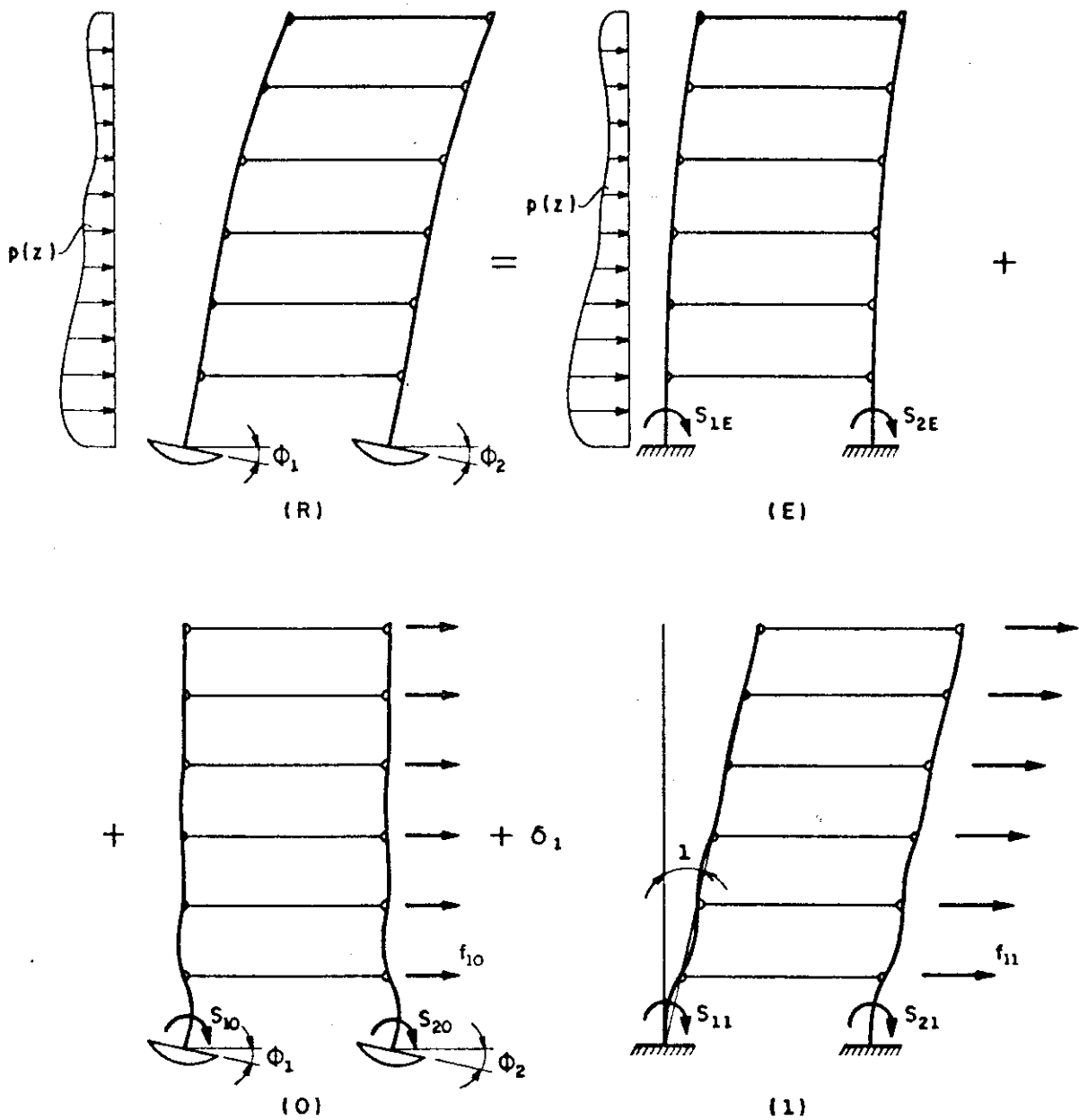


Fig. 2.10 - Esquema de solução para 2 pilares

A partir do esquema acima, e em cada problema, impõe-se as condições de equilíbrio de momento fletor nas bases dos pilares, obtendo-se assim os coeficientes de rigidez correspondentes.

2.7.2. Obtenção dos Coeficientes de Rigidez

2.7.2.1- Problema (E)

Para um pilar genérico j , tem-se:

$$S_{jE} + \mu_j M = 0 \quad (2.78)$$

Portanto:

$$S_{jE} = - \mu_j M \quad (2.79)$$

2.7.2.2- Problema (0)

Para um pilar genérico j , tem-se:

$$S_{j0} - (\beta_j + S_j)\phi_j = 0 \quad (2.80)$$

Portanto:

$$S_{j0} = (\beta_j + S_j)\phi_j \quad (2.81)$$

2.7.2.3- Problema (1)

Para um pilar genérico j , tem-se:

$$S_{j1} + \beta_j = 0 \quad (2.82)$$

Portanto:

$$S_{j_1} = -\beta_j \quad (2.83)$$

M é o momento total de tombamento, provocado pelas carga p, nas bases dos pilares.

2.7.3- Obtenção do Sistema de Equações

Somando-se os coeficientes de rigidez dos problemas (E) e (0) ao do problema (1) multiplicado por δ_1 e igualando-se esta soma aos momentos externos nas bases, que são nulos, obtem-se um sistema de equações com incógnitos δ_1 , ϕ_1 e ϕ_2 , como segue:

$$(\beta_1 + S_1) \phi_1 - \beta_1 \delta_1 = \mu_1 M \quad (2.84)$$

$$(\beta_2 + S_2) \phi_2 - \beta_2 \delta_1 = \mu_2 M \quad (2.85)$$

Analisando-se a figura 2.10 do esquema de solução para base elástica, vê-se que ela contém o esquema estrutural para recalques de fundações, para o qual já foi obtida solução simples no item 2.5.

Substituindo-se então, a equação (2.64) nas equações (2.84) e (2.85) e lembrando-se da equação (2.10), obtém-se um novo sistema de equações em função de ϕ_1 e ϕ_2 :

$$(\beta_1 + S_1) \phi_1 - \beta_1 (\mu_1 \phi_1 + \mu_2 \phi_2) = \mu_1 M \quad (2.86)$$

$$(\beta_2 + S_2) \phi_2 - \beta_2 (\mu_1 \phi_1 + \mu_2 \phi_2) = \mu_2 M \quad (2.87)$$

Resolvendo-se o sistema acima obtém-se:

$$\phi_1 = \frac{\mu_1(\beta_2 + S_2)}{(\beta_1 + S_1)(\beta_2 + S_2) - \mu_1\beta_1(\beta_2 + S_2) - \mu_2\beta_2(\beta_1 + S_1)} M \quad (2.88)$$

e:

$$\phi_2 = \frac{\mu_2(\beta_1 + S_1)}{(\beta_1 + S_1)(\beta_2 + S_2) - \mu_1\beta_1(\beta_2 + S_2) - \mu_2\beta_2(\beta_1 + S_1)} M \quad (2.89)$$

Substituindo-se a equação (2.10) para um pilar genérico j na equação (2.64), obtém-se:

$$\delta_1 = (\mu_1\phi_1 + \mu_2\phi_2) \quad (2.90)$$

Finalmente substituindo-se as equações (2.88) e (2.89) na equação (2.90) obtém-se o valor de δ_1 :

$$\delta_1 = \frac{\mu_1^2(\beta_2 + S_2) + \mu_2^2(\beta_1 + S_1)}{(\beta_1 + S_1)(\beta_2 + S_2) - \mu_1\beta_1(\beta_2 + S_2) - \mu_2\beta_2(\beta_1 + S_1)} M \quad (2.91)$$

2.7.4- Esforços Solicitantes e Deslocamentos

Para obtê-los, basta somar os esforços solicitantes e deslocamentos obtidos no item 2.5.2 aos obtidos no item 2.2.8 com a ressalva da rotação para um pilar genérico j no problema (E) ser nula.

CAPÍTULO III

ASSOCIAÇÃO PLANA DE N PILARES

3.1- INTRODUÇÃO

Inicialmente é estudada uma associação plana de n pilares, submetida a uma carga horizontal distribuída qualquer, através da Técnica do Meio Contínuo, analisando as peculiaridades de incoerências nas formulações, apresentando os resultados dessa análise e fazendo correções de origem discreta, permitindo uma flexão local entre os andares; são utilizadas 2 versões de análise das associações planas de pilares submetidos ou a recalques de rotação ou, em base elástica, à ação de carregamento horizontal distribuído. Esses problemas foram introduzidos e discutidos no Capítulo anterior, para 2 pilares, e estendidas, neste, para n pilares.

3.2- ANÁLISE CONTÍNUA DE UMA ASSOCIAÇÃO PLANA DE N PILARES COMPUTANDO-SE SÓ AS DEFORMAÇÕES GLOBAIS DE FLEXÃO

Sejam os n pilares da associação esquematizada na figura 3.1, engastados em suas bases e constrangidos a terem a mesma linha elástica horizontal pela existência de lajes indeformáveis, conectando-as; nesse caso as lajes são substituídas por lintéis articulados em suas extremidades. Denominam-se $S_1, \dots, S_{j-1}, S_j, S_{j+1}, \dots, S_n$ as rigidezes à rotação dos engastes dos pilares $1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, n$, se forem finitas, isto é, se se quiser tratar o caso de engastamento elástico.

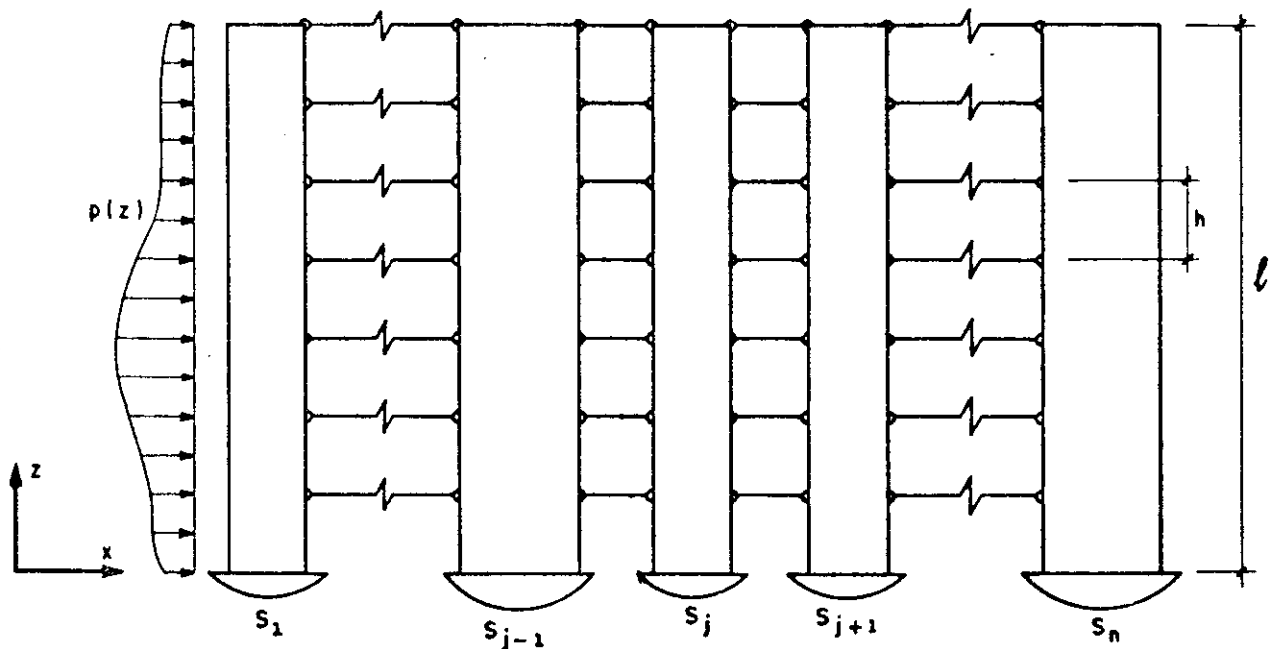


Fig. 3.1 - Associação plana de n pilares

3.2.1 - Condições de Equilíbrio de um Elemento de Comprimento dz de um Pilar Genérico j .

Os esforços atuantes no elemento infinitesimal de comprimento dz são positivos nos sentidos observados na figura 3.2. O deslocamento horizontal u é positivo no sentido do eixo x da figura 3.1.

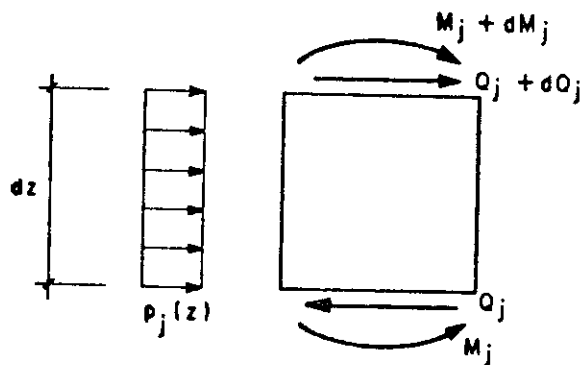


Fig. 3.2 - Esforços atuantes no pilar genérico j

Do equilíbrio do elemento infinitesimal para um pilar genérico j tem-se:

$$p_j dz + dQ_j = 0$$

$$dM_j + Q_j dz = 0$$

donde se obtém:

$$\frac{dQ_j}{dz} = -p_j \quad (3.1)$$

$$\frac{dM_j}{dz} = -Q_j \quad (3.2)$$

3.2.2- Condições de Equilíbrio do Conjunto Lajes-Pilares

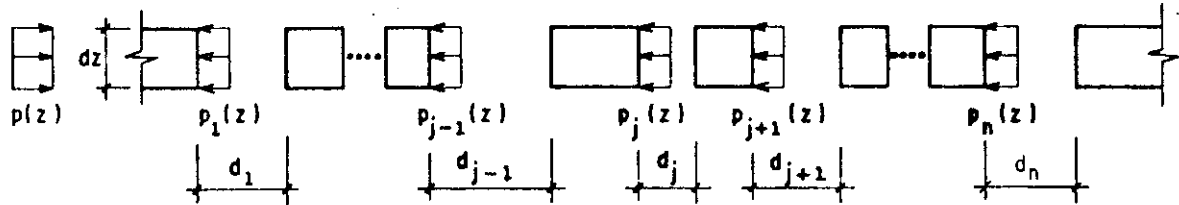


Fig. 3.3 - Esforços no conjunto lajes-pilares

Do equilíbrio horizontal das lajes da figura 3.3. tem-se:

$$p_1 dz + \dots + p_{j-1} dz + p_j dz + p_{j+1} dz + \dots + p_n dz = p(z) dz$$

que é o mesmo que:

$$p_1 + \dots + p_{j-1} + p_j + p_{j+1} + \dots + p_n = p(z) \quad (3.3)$$

3.2.3- Deslocamento Horizontal do Pilar Genérico j no Nível z

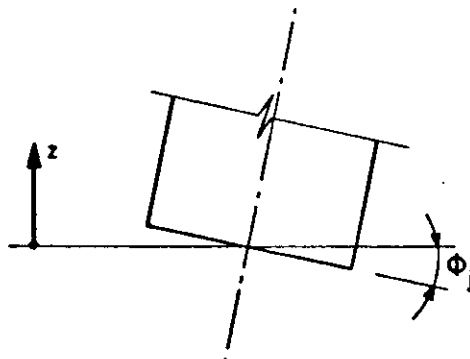


Fig. 3.4 - Rotação ϕ_j da base elástica

Levando-se em consideração apenas as deformações à flexão, tem-se o seguinte deslocamento horizontal u_j :

$$u_j = \phi_j z + \int_0^z \int_0^z \frac{M_j}{EI_j} dzdz \quad (3.4)$$

onde:

E é o módulo de elasticidade constante, para os n pilares

I_j é o momento de inércia à flexão do pilar genérico j

3.2.4- Compatibilidade de Deslocamentos Horizontais

Com a suposição de distribuição contínua das lajes tem-se que u é o mesmo para os n pilares; portanto, tem-se que, para quaisquer valores de z :

$$\begin{aligned} \phi_1 z + \int_0^z \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dzdz &= \dots = \phi_{j-1} z + \int_0^z \int_0^z \frac{M_{j-1}}{EI_{j-1}} dzdz = \\ &= \phi_j z + \int_0^z \int_0^z \frac{M_j}{EI_j} dzdz = \phi_{j+1} z + \int_0^z \int_0^z \frac{M_{j+1}}{EI_{j+1}} dzdz = \dots = \\ &= \phi_n z + \int_0^z \int_0^z \frac{M_n}{EI_n} dzdz \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2.5- Obtenção da Equação Diferencial em Função de z

Derivando-se a equação (3.5) quatro vezes, obtém-se:

$$\frac{M''_1}{EI_1} = \dots = \frac{M''_{j-1}}{EI_{j-1}} = \frac{M''_j}{EI_j} = \frac{M''_{j+1}}{EI_{j+1}} = \dots = \frac{M''_n}{EI_n} \quad (3.6)$$

Como, das equações (3.1) e (3.2):

$$M''_j = p_j \quad (3.7)$$

tem-se, substituindo-se a equação (3.7) na equação (3.6):

$$\frac{p_1}{EI_1} = \dots = \frac{p_{j-1}}{EI_{j-1}} = \frac{p_j}{EI_j} = \frac{p_{j+1}}{EI_{j+1}} = \dots = \frac{p_n}{EI_n} \quad (3.8)$$

Substituindo-se a equação acima na equação (3.3), para um pilar genérico z , obtém-se:

$$\left[\frac{I_1}{I_j} + \dots + \frac{I_{j-1}}{I_j} + \frac{I_j}{I_j} + \frac{I_{j+1}}{I_j} + \dots + \frac{I_n}{I_j} \right] p_j = p(z)$$

o que é o mesmo que:

$$p_j = \frac{I_j}{\sum_{k=1}^n I_k} p(z) \quad (3.9)$$

como:

$$\mu_j = \frac{I_j}{\sum_{k=1}^n I_k} \quad (3.10)$$

tem-se:

$$p_j = \mu_j p(z) \quad (3.11)$$

Substituindo-se a equação (3.11) na equação (3.1) e integrando-se, obtém-se para um pilar genérico j:

$$Q_j = - \int_0^z \mu_j p(z) dz + C_j \quad (3.12)$$

Substituindo a equação (3.12) na equação (3.2), obtém-se, para um pilar genérico j:

$$M_j = \int_0^z \left(\int_0^z \mu_j p(z) dz - C_j \right) dz + C_{j+n} \quad (3.13)$$

3.2.6- Retorno à Condição de Compatibilidade

Substituindo-se a equação (3.13) na equação (3.5), obtém-se:

$$\begin{aligned} \phi_1 z + \int_0^z \int_0^z \left[\int_0^z \left(\int_0^z \mu_1 p(z) dz - C_1 \right) dz + C_{1+n} \right] dz dz &= \dots = \\ = \phi_{j-1} z + \int_0^z \int_0^z \left[\int_0^z \left(\int_0^z \mu_{j-1} p(z) dz - C_{j-1} \right) dz + C_{j-1+n} \right] dz dz &= \\ = \phi_j z + \int_0^z \int_0^z \left[\int_0^z \left(\int_0^z \mu_j p(z) dz - C_j \right) dz + C_{j+n} \right] dz dz &= (3.14) \\ = \phi_{j+1} z + \int_0^z \int_0^z \left[\int_0^z \left(\int_0^z \mu_{j+1} p(z) dz - C_{j+1} \right) dz + C_{j+1+n} \right] dz dz &= \dots = \\ = \phi_n z + \int_0^z \int_0^z \left[\int_0^z \left(\int_0^z \mu_n p(z) dz - C_n \right) dz + C_{2n} \right] dz dz & \end{aligned}$$

Da equação para 2 pilares quaisquer, obtém-se:

$$\left[\int_0^z \int_0^z \int_0^z \int_0^z \left(\frac{\mu_j}{EI_j} - \frac{\mu_{j+1}}{EI_{j+1}} \right) p(z) dz dz dz dz \right] + \left(\frac{C_{j+1}}{EI_{j+1}} - \frac{C_j}{EI_j} \right) \frac{z^3}{6} + \left(\frac{C_{j+n}}{EI_j} - \frac{C_{j+1+n}}{EI_{j+1}} \right) \frac{z^2}{2} + (\phi_j - \phi_{j+1}) z = 0 \quad (3.15)$$

Devendo valer a equação (3.15) para qualquer valor de z , tem-se que:

$$\mu_j I_{j+1} = \mu_{j+1} I_j \quad (3.16)$$

$$C_{j+1} = C_j \frac{I_{j+1}}{I_j} \quad (3.17)$$

$$C_{j+1+n} = C_{j+n} \frac{I_{j+1}}{I_j} \quad (3.18)$$

e:

$$\phi_j = \phi_{j+1} = \phi \quad (3.19)$$

Substituindo-se a equação (3.17) na equação (3.12), para um pilar genérico $j+1$, obtém-se:

$$Q_{j+1} = - \int_0^z \mu_{j+1} p(z) dz + C_j \frac{I_{j+1}}{I_j} \quad (3.20)$$

Substituindo-se a equação acima na equação (3.12), obtém-se:

$$Q_{j+1} = \frac{I_{j+1}}{I_j} Q_j \quad (3.21)$$

Substituindo-se a equação (3.18) na equação (3.13) para um pilar genérico $j+1$ obtém-se:

$$M_{j+1} = \int_0^z \left(\int_0^z \mu_{j+1} p(z) dz - C_{j+1} \right) dz + C_{j+n} \frac{I_{j+1}}{I_j} \quad (3.22)$$

e substituindo-se a equação acima na equação (3.13), obtém-se:

$$M_{j+1} = \frac{I_{j+1}}{I_j} M_j \quad (3.23)$$

3.2.7- Condições de Contorno

Para $z = \ell$, tem-se:

$$M_j = 0 \quad (3.24)$$

$$Q_j = 0 \quad (3.25)$$

Substituindo-se a condição de contorno da equação (3.25) na equação (3.12), obtém-se:

$$C_j = \int_0^{\ell} \mu_j p(z) dz \quad (3.26)$$

Substituindo-se a equação (3.26) na equação (3.13), com a condição de contorno da equação (3.24), obtém-se:

$$C_{j+n} = \mu_j \left(- \int_0^{\ell} \int_0^{\ell} p(z) dz dz + \ell \int_0^{\ell} p(z) dz \right) \quad (3.27)$$

3.2.8- Esforços Solicitantes e Deslocamentos

Substituindo-se as equações (3.26) e (3.27), nas equações (3.12) e (3.13), obtém-se os esforços solicitantes e substituindo-se a equação (3.13) na equação (3.4), obtém-se o deslocamento horizontal, para um pilar genérico j ; esses resultados já foram obtidos no item 2.2.8, do Capítulo anterior.

3.3- ASSOCIAÇÃO PLANA DE N PILARES SUBMETIDOS A RECALQUES DE FUNDAÇÃO (VERSÃO 1).

3.3.1- Introdução

Analisa-se uma associação plana de n pilares sob recalques de fundação, partindo-se da idéia inicial do capítulo anterior, expandindo-se o problema (1) em $(n-1)$ problemas independentes; tomando-se, para cada um, 2 pilares fazendo a propagação de perturbações a partir de rotações de apoios; adiciona-se o problema (n) onde se tem apenas as deslocabilidades horizontais da associação, montando-se assim, um sistema de n equações lineares com incógnitas δ_j .

Seja a associação da figura 3.5:

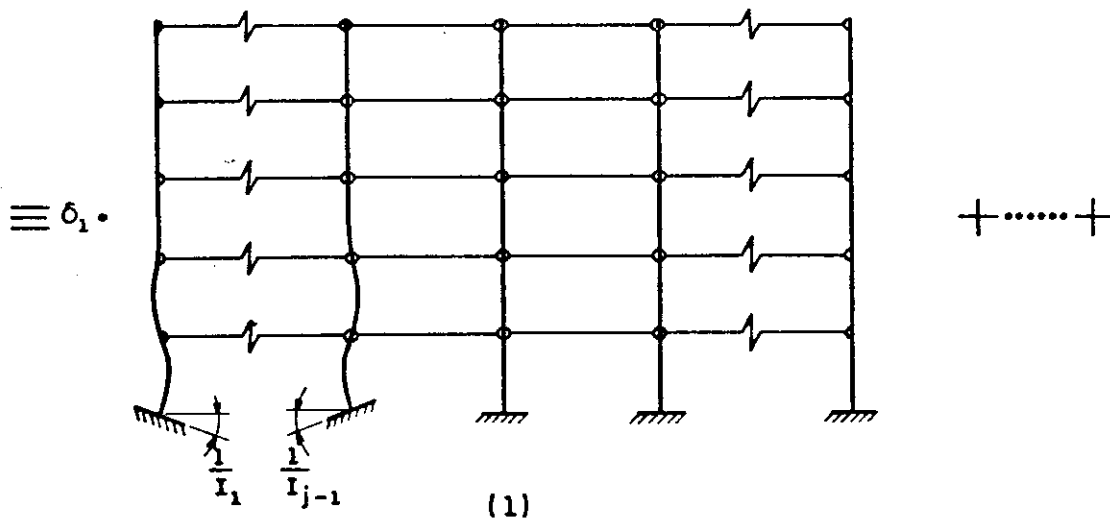
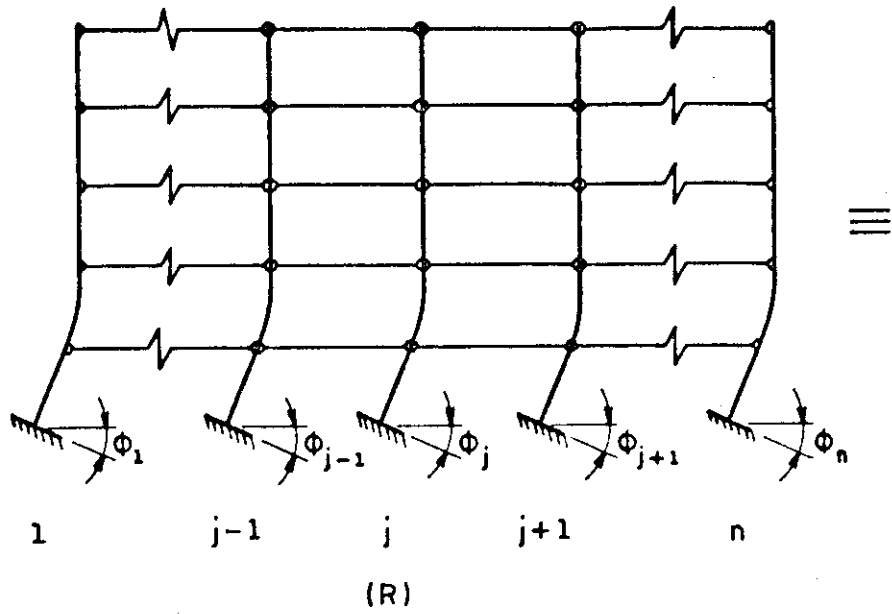


Fig. 3.5 - Associação plana de n pilares submetida a recalques de fundação (continua)

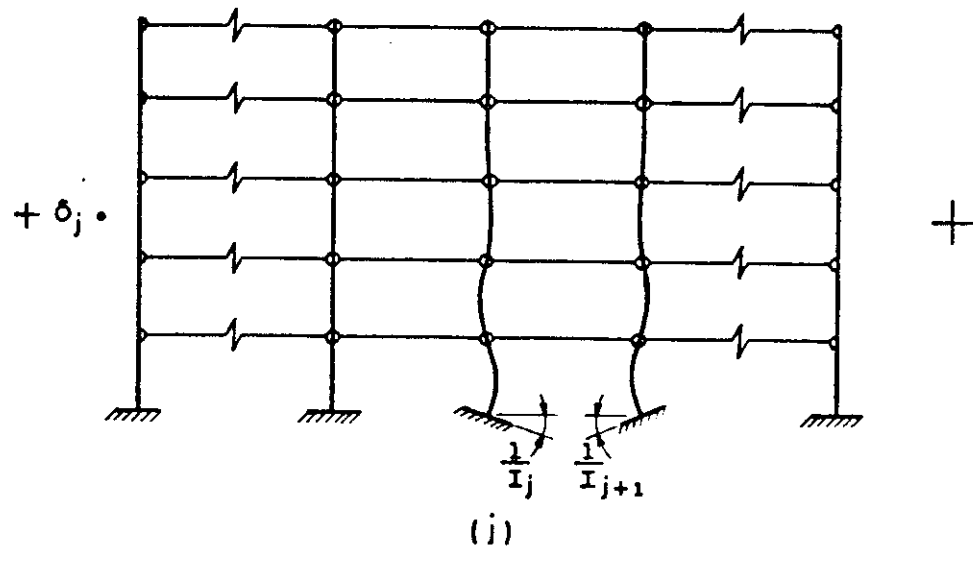
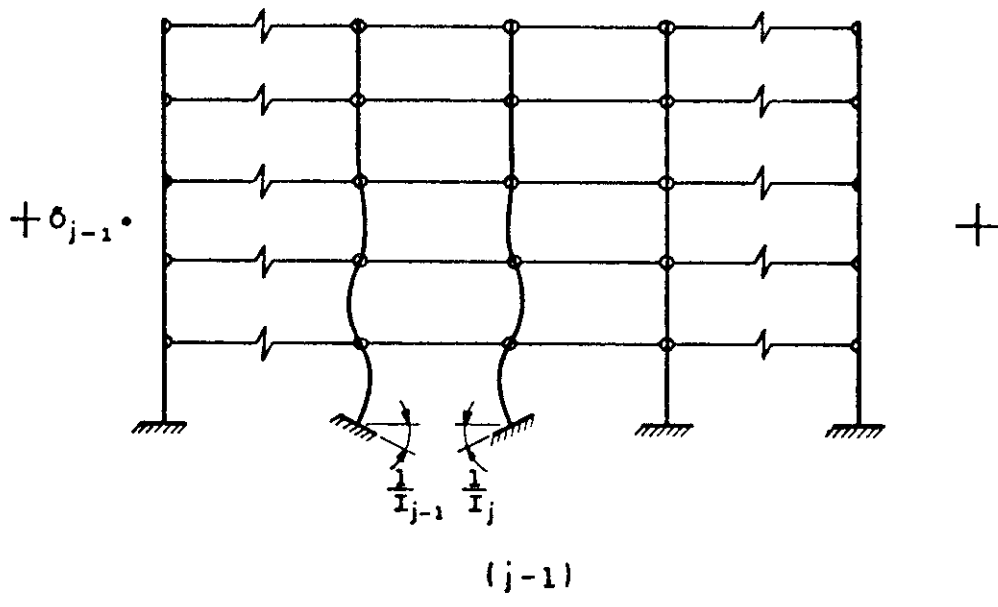


Fig. 3.5 - Associação plana de n pilares submetida a recalques de fundação (continua)

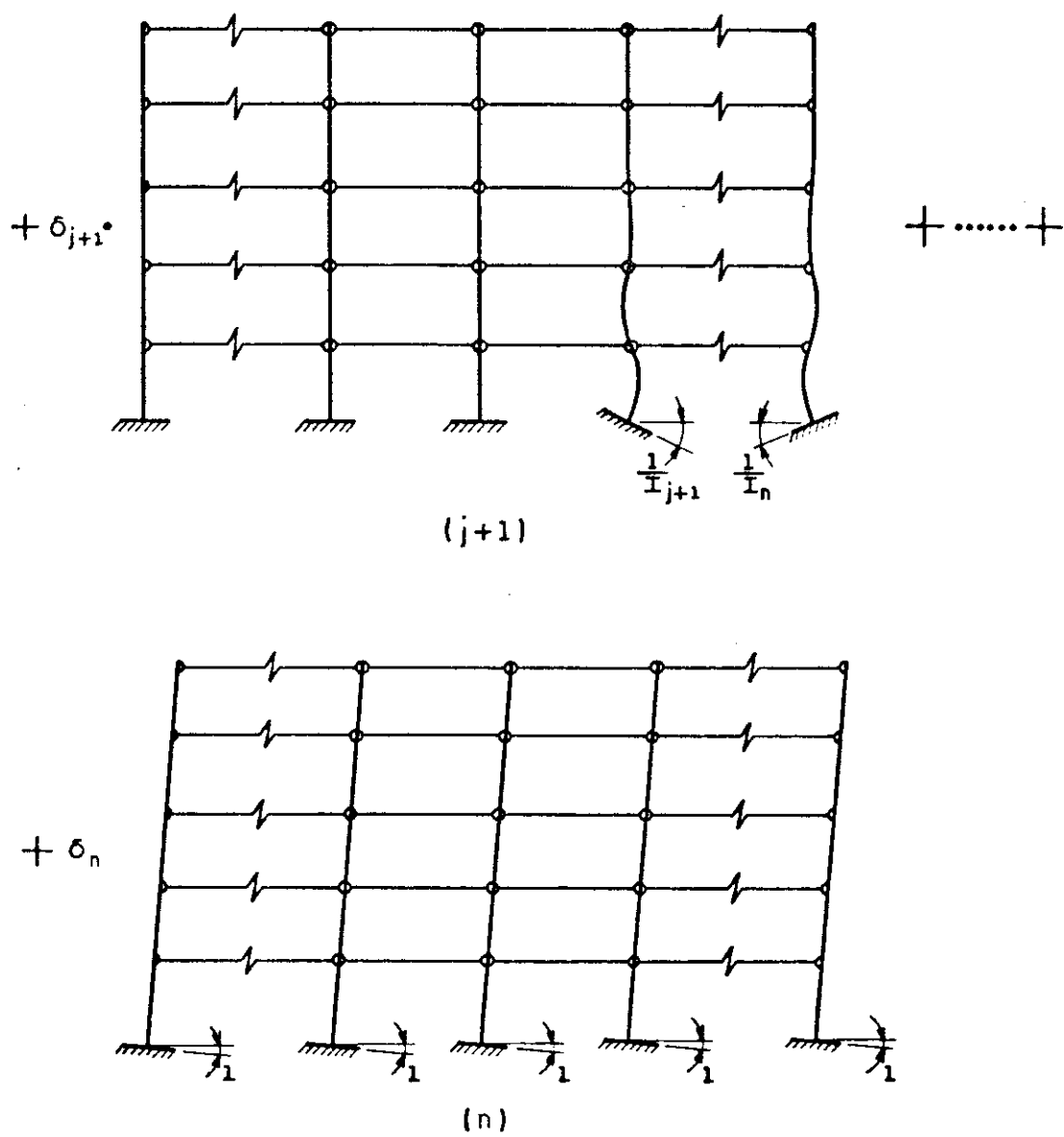


Fig. 3.5 - Associação plana de n pilares submetida a recalques de fundação (continuação)

Os n deslocamentos δ_j são impostos como combinações lineares dos deslocamentos $1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, n$ dos problemas $(1), \dots, (j-1), (j), (j+1), \dots, (n)$. Nos problemas (1) a $(n-1)$ a associação tem deslocamentos nulos no nível dos andares, dado o equilíbrio de forças aplicadas aos lintéis. No problema (n) há uma deslocabilidade linear, originada por rotações unitárias dos apoios, sem aparecimento de esforços quaisquer na estrutura. Pela superposição de efeitos da figura 3.5, obtém-se as seguintes relações de coerência de deslocamentos:

$$\phi_1 = \frac{1}{I_1} \delta_1 + \dots + 0\delta_{j-2} + 0\delta_{j-1} + 0\delta_j + 0\delta_{j+1} + \dots + 0\delta_{n-1} + \delta_n \quad (3.28)$$

$$\phi_{j-1} = 0\delta_1 + \dots + \frac{-1}{I_{j-1}} \delta_{j-2} + \frac{1}{I_{j-1}} \delta_{j-1} + 0\delta_j + 0\delta_{j+1} + \dots + 0\delta_{n-1} + \delta_n \quad (3.29)$$

$$\phi_j = 0\delta_1 + \dots + 0\delta_{j-2} + \frac{-1}{I_j} \delta_{j-1} + \frac{1}{I_j} \delta_j + 0\delta_{j+1} + \dots + 0\delta_{n-1} + \delta_n \quad (3.30)$$

$$\phi_{j+1} = 0\delta_1 + \dots + 0\delta_{j-2} + 0\delta_{j-1} + \frac{-1}{I_{j+1}} \delta_j + \frac{1}{I_{j+1}} \delta_{j+1} + \dots + 0\delta_{n-1} + \delta_n \quad (3.31)$$

$$\phi_n = 0\delta_1 + \dots + 0\delta_{j-2} + 0\delta_{j-1} + 0\delta_j + 0\delta_{j+1} + \dots + \frac{-1}{I_n} \delta_{n-1} + \delta_n \quad (3.32)$$

3.3.2- Resolução do Sistema de Equações

Resolve-se o sistema, fazendo-se a substituição das equações dos δ_j nas equações dos δ_{j+1} , até chegar-se na enésima equação, obtendo-se, assim, o valor de δ_n . Faz-se, então, a retrosubstituição de δ_n na equação de δ_{n-1} , substituindo-se o valor de δ_{j+1} na equação de δ_j , obtendo-se assim os $(n-1)$ δ_j e resolvendo-se o sistema de equações em função de δ_j , com j igual a $1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, n$.

Obtém-se δ_1 em função de δ_n , da equação (3.28):

$$\delta_1 = (\phi_1 - \delta_n)I_1 \quad (3.32)$$

Substituindo-se a equação (3.32) na equação (3.29) obtém-se:

$$\delta_{j-1} = \left[\phi_{j-1} + (\phi_1 - \phi_n) \frac{I_1}{I_{j-1}} - \delta_n \right] I_{j-1} \quad (3.33)$$

Substituindo-se a equação (3.33) na equação (3.30), obtém-se:

$$\delta_j = \left[\phi_j + \left[\phi_{j-1} + (\phi_1 - \delta_n) \frac{I_1}{I_{j-1}} - \delta_n \right] \frac{I_{j-1}}{I_j} - \delta_n \right] I_j \quad (3.34)$$

Substituindo-se a equação (3.34) na equação (3.31), obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta_{j+1} = & \left[\phi_{j+1} + \left[\phi_j + \left[\phi_{j-1} + (\phi_1 - \delta_n) \frac{I_1}{I_{j-1}} - \delta_n \right] \frac{I_{j-1}}{I_j} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \delta_n \right] \frac{I_j}{I_{j+1}} - \delta_n \right] I_{j+1} \quad (3.35) \end{aligned}$$

Substituindo-se a equação (3.35) na equação (3.32), obtém-se:

$$\delta_n = \phi_n + \left[\phi_{j+1} + \left[\phi_j + \left[\phi_{j-1} + (\phi_1 - \delta_n) \frac{I_1}{I_{j-1}} - \delta_n \right] \frac{I_{j-1}}{I_j} + \right. \right. \\ \left. \left. - \delta_n \right] \frac{I_j}{I_{j+1}} - \delta_n \right] \frac{I_{j+1}}{I_n} \quad (3.36)$$

Desenvolvendo-se a equação ((3.36), obtém-se:

$$\delta_n = \frac{I_1 \phi_1 + \dots + I_{j-1} \phi_{j-1} + I_j \phi_j + I_{j+1} \phi_{j+1} + \dots + I_n \phi_n}{I_1 + \dots + I_{j-1} + I_j + I_{j+1} + \dots + I_n} \quad (3.37)$$

ou:

$$\delta_n = \frac{\sum_{k=1}^n I_k \phi_k}{\sum_{k=1}^n I_k} \quad (3.38)$$

ou substituindo-se a equação (3.10) na equação (3.37), obtém-se:

$$\delta_n = \sum_{k=1}^n \mu_k \phi_k \quad (3.39)$$

Substituindo-se a equação (3.38) na equação (3.34) obtém-se:

$$\delta_j = \sum_{k=1}^j \phi_k I_k - \sum_{k=1}^j I_k \left[\frac{\sum_{\ell=1}^n I_\ell \phi_\ell}{\sum_{\ell=1}^n I_\ell} \right] \quad (3.40)$$

3.3.3- Esforços Solicitantes e Deslocamentos

Para a obtenção dos esforços solicitantes e deslocamentos, utilizam-se as fórmulas obtidas no item 2.3, do Capítulo anterior, com a observação de que os esforços solicitantes para um pilar genérico j com $j \neq 1$ e $j \neq n$ obtém-se da superposição dos esforços nos problemas $(j-1)$ e (j) :

3.3.3.1- Momento Fletor

a) Pilar 1

$$M_1 = - \frac{\beta_1}{I_1} \delta_1 (-\alpha)^i \quad (3.41)$$

b) Pilar j

$$M_j = - \frac{\beta_j}{I_j} (\delta_j - \delta_{j-1}) (-\alpha)^i \quad (3.42)$$

c) Pilar n

$$M_n = \frac{\beta_n}{I_n} (\delta_{n-1}) (-\alpha)^i \quad (3.43)$$

3.3.3.2- Esforço Cortante

a) Pilar 1

$$Q_1 = - \frac{(1+\alpha)\beta_1}{h I_1} \delta_1 (-\alpha)^i \quad (3.44)$$

b) Pilar j

$$Q_j = - \frac{(1+\alpha)\beta_j}{h I_j} (\delta_j - \delta_{j-1}) (-\alpha)^i \quad (3.45)$$

c) Pilar n

$$Q_n = \frac{(1+\alpha)\beta_n}{h I_n} (\delta_{n-1}) (-\alpha)^i \quad (3.46)$$

3.3.3.3- Esforço Normal

Na base do pilar:

a) Pilar 1

$$N_1 = \frac{(1+\alpha)\beta_1}{h I_1} \delta_1 \quad (3.47)$$

b) Pilar j

$$N_j = \frac{(1+\alpha)\beta_j}{h I_j} (\delta_j - \delta_{j-1}) \quad (3.48)$$

c) Pilar n

$$N_n = - \frac{(1+\alpha)\beta_n}{h I_n} (\delta_{n-1}) \quad (3.49)$$

Na i-ésima laje:

a) Pilar 1

$$N_1 = - \frac{(1+\alpha)^2 \beta_1}{h I_1} \delta_1 (-\alpha)^{i-1} \quad (3.50)$$

b) Pilar j

$$N_j = - \frac{(1+\alpha)^2 \beta_j}{h I_j} (\delta_j - \delta_{j-1}) (-\alpha)^{i-1} \quad (3.51)$$

c) Pilar n

$$N_n = \frac{(1+\alpha)^2 \beta_n}{h I_n} (\delta_{n-1}) (-\alpha)^{i-1} \quad (3.52)$$

3.3.4- Deslocamento Horizontal

$$u = \delta_n z \quad (3.53)$$

3.4- ASSOCIAÇÃO PLANA DE N PILARES SUBMETIDOS A RECALQUES DE FUNDAÇÃO (VERSÃO 2)

3.4.1- Introdução

A solução apresentada no esquema estrutural da figura 3.6 é uma extensão da idéia inicial para uma associação de 2 pilares, versão 2, levando-se em consideração as hipóteses feitas no capítulo anterior. Utiliza-se o processo de propagação de momentos em vigas contínuas, levando em conta a linearidade da elástica dos andares; inicialmente as estruturas dos problemas (0) e (1) estão constrangidos por vínculos no nível dos andares; das condições de equilíbrio

horizontal das forças nos vínculos em um andar qualquer, dada a evidente proporcionalidade entre as forças, obtém-se o valor da incógnita δ_1 .

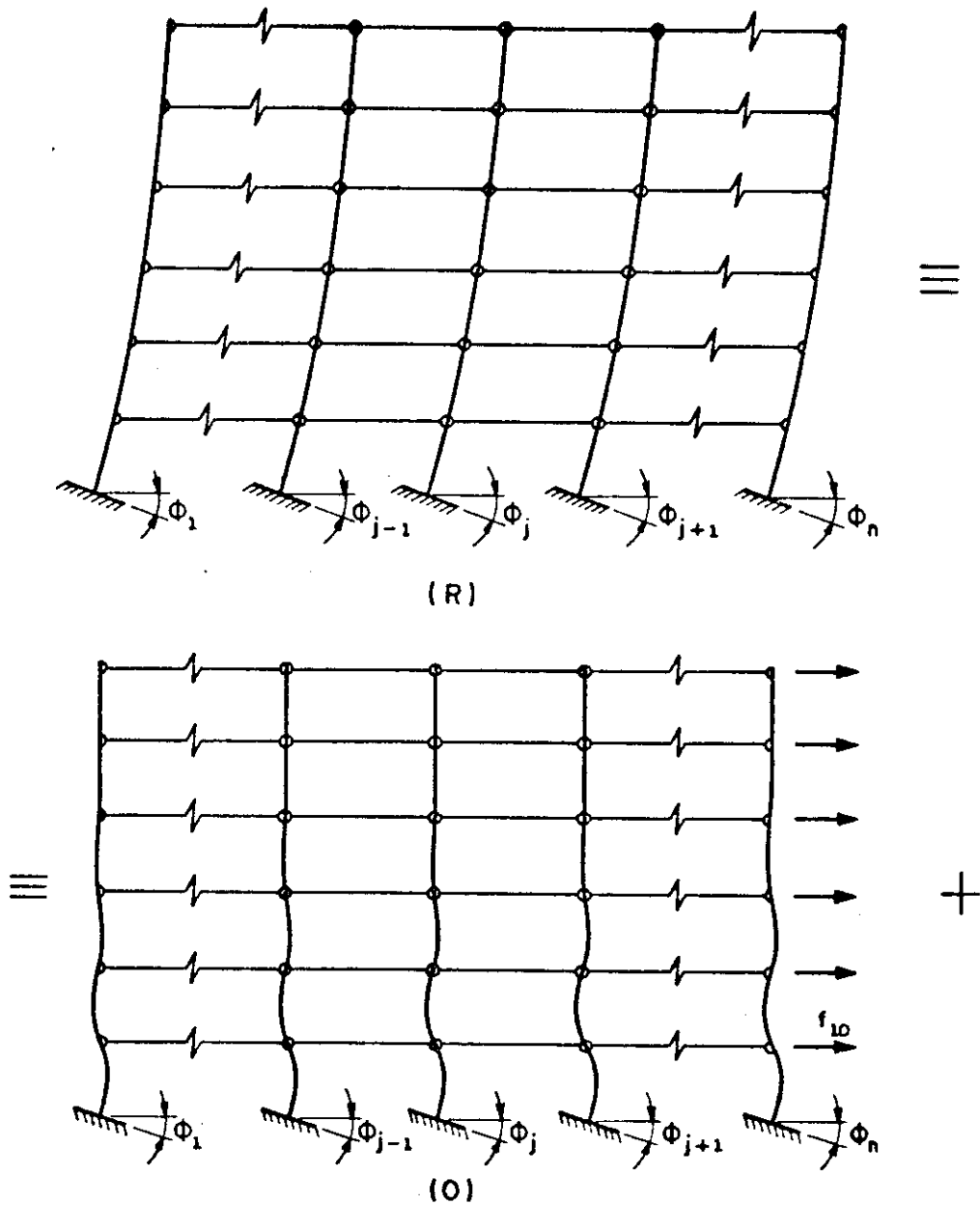


Fig. 3.6 - Esquema estrutural para n pilares (continua)

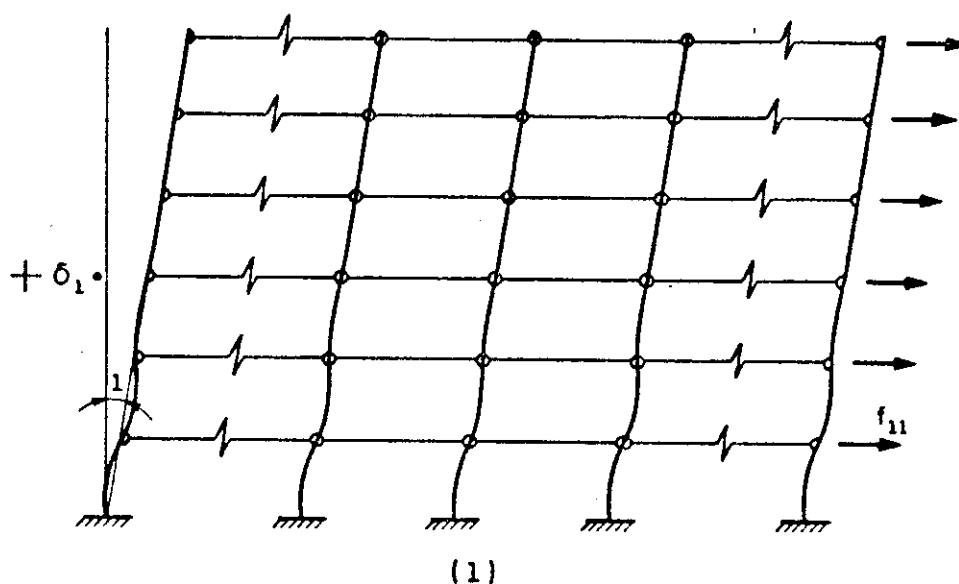


Fig. 3.6 - Esquema estrutural para n pilares (continuação)

Ao se estender essa solução a uma associação de n pilares, vê-se que somente há diferença no que diz respeito ao número de pilares.

O problema (0) é constituído de uma estrutura que sofre rotações $\phi_1, \dots, \phi_{j-1}, \phi_j, \phi_{j+1}, \dots, \phi_n$, mas indeslocável pela presença de vínculos ao nível de cada andar, onde atuam forças segundo o eixo x; no problema (1) a estrutura tem deslocabilidade linear segundo o eixo x, provocando assim o aparecimento de esforços horizontais nos vínculos ao longo de toda sua altura, nos 2 problemas.

A linha elástica horizontal é linear, permitindo a perfeita utilização do processo de propagação de momentos e implicando no aparecimento de esforços com uma distribuição em cada andar proporcional ao anterior.

Os pilares $1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, n$ são orientados por um versor \vec{p}_j , no caso plano com apenas uma componente segundo x, conforme figura 3.6.

3.4.2- Esforços Solicitantes e Deslocamentos

Obtém-se da mesma maneira que no item 2.5.2 do capítulo anterior.

3.4.3- Obtenção das Forças nos Vínculos

Obtém-se da mesma maneira, que no item 2.5.3 do capítulo anterior.

3.4.3.1- Problema (0)

$$f_{10} = \frac{-(1+\alpha)^2}{h} \sum_{k=1}^n \beta_k \phi_k \quad (3.54)$$

3.4.3.2- Problema (1)

$$f_{11} = \frac{(1+\alpha)^2}{h} \sum_{k=1}^n \beta_k \quad (3.55)$$

3.4.4- Montagem da Equação em Função de δ_1

Fazendo-se o equilíbrio entre as forças dos vínculos nos problemas (0), (1) e (R), obtém-se:

$$\delta_1 = \frac{\sum_{k=1}^n \beta_k \phi_k}{\sum_{k=1}^n \beta_k} \quad (3.56)$$

o que é o mesmo que:

$$\delta_1 = \frac{\sum_{k=1}^n I_k \phi_k}{\sum_{k=1}^n I_k} \quad (3.57)$$

3.4.5- Esforços Solicitantes e Deslocamentos

Obtém-se da mesma maneira que no ítem 2.5.2, do Capítulo anterior.

3.4.6- Exemplo 3

A estrutura apresentada em planta na figura 3.4.6.a, é composta por uma associação redutível ao plano com 10 andares, de pé-direito igual a 3,0m com suas sapatas engastadas no solo, sendo que nas sapatas 2 e 3 ocorrem os recalques rotacionais iguais a $-0,001$ e $0,001$ respectivamente. As dimensões dos pilares 1,4 e 2,3 são iguais.

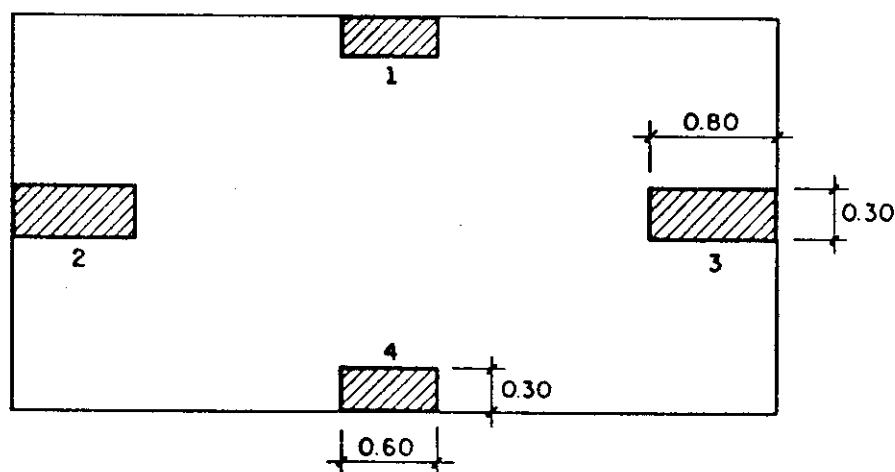


Fig. 3.6.a - Exemplo 3

Adota-se:

$$E_c = 2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$$

a) Parâmetros elásticos e geométricos dos pilares

$$I_1 = I_4 = 0,0054 \text{ m}^4 \quad I_2 = I_3 = 0,0128 \text{ m}^4$$

Da equação (2.46), obtém-se os coeficientes de rigidez dos pilares:

$$\beta_1 = \beta_4 = 12470,76 \text{ tfm} \quad \beta_2 = \beta_3 = 29560,33 \text{ tfm}$$

b) Problema (0) e (1)

Substituindo-se os valores de a) na equação (3.57):

$$\delta_1 = \frac{I_1 \phi_1 + I_2 \phi_2 + I_3 \phi_3 + I_4 \phi_4}{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}$$

obtendo-se:

$$\delta_1 = 0,00000$$

o que era de se esperar, pelo fato dos valores $I_2 \phi_2$ e $I_3 \phi_3$ se anularem.

Substituindo-se os valores de ϕ_2 e ϕ_3 nas equações (2.48) a (2.51), para os pilares 2 e 3, obtém-se os esforços; pelo fato de δ_1 ser nulo não existe deslocamento horizontal na associação.

Os esforços solicitantes são iguais nos pilares 2 e 3, mas de sinal contrário, pelo fato de as rotações neles serem iguais mas de sinal contrário.

PILAR 2	PILAR 3
$M_2 = -\beta_2 \phi_2 (-\alpha)^i$	$M_3 = -\beta_3 \phi_3 (-\alpha)^i$
$Q_2 = \frac{-(1+\alpha)}{h} \beta_2 \phi_2 (-\alpha)^i$	$Q_3 = \frac{-(1+\alpha)}{h} \beta_3 \phi_3 (-\alpha)^i$
$N_2 = \frac{(1+\alpha)}{h} \beta_2 \phi_2$ na base	$N_3 = \frac{(1+\alpha)}{h} \beta_3 \phi_3$ na base
$N_2 = \frac{-(1+\alpha)^2}{h} \beta_2 \phi_2 (-\alpha)^{i-1}$	$N_3 = \frac{-(1+\alpha)^2}{h} \beta_3 \phi_3 (-\alpha)^{i-1}$
$u = \delta_1 z$	

PILAR 2	PILAR 3
$M_2 = 29,560 (-\alpha)^i$	$M_3 = -M_2$
$Q_2 = 12,49 (-\alpha)^i$	$Q_3 = -Q_2$
$N_2 = -12,49$ na base	$N_3 = -N_2$ na base
$N_2 = -59,12 (-\alpha)^i$	$N_3 = -N_2$
$u = 0,00000$	

c) Esforços solicitantes e deslocamentos finais

	PILAR 2		
	M_2 (tm)	Q_2 (t)	N_2 (t)
0	29,56	12,49	-12,49
3	-7,19	-3,35	15,84
6	2,12	0,90	-4,24
9	-0,57	-0,24	1,14
12	0,15	0,06	-0,30
15	-0,04	-0,02	0,08
18	0,01	0,00	-0,02
21	0,00	0,00	0,00
24	0,00	0,00	0,00
27	0,00	0,00	0,00
30	0,00	0,00	0,00

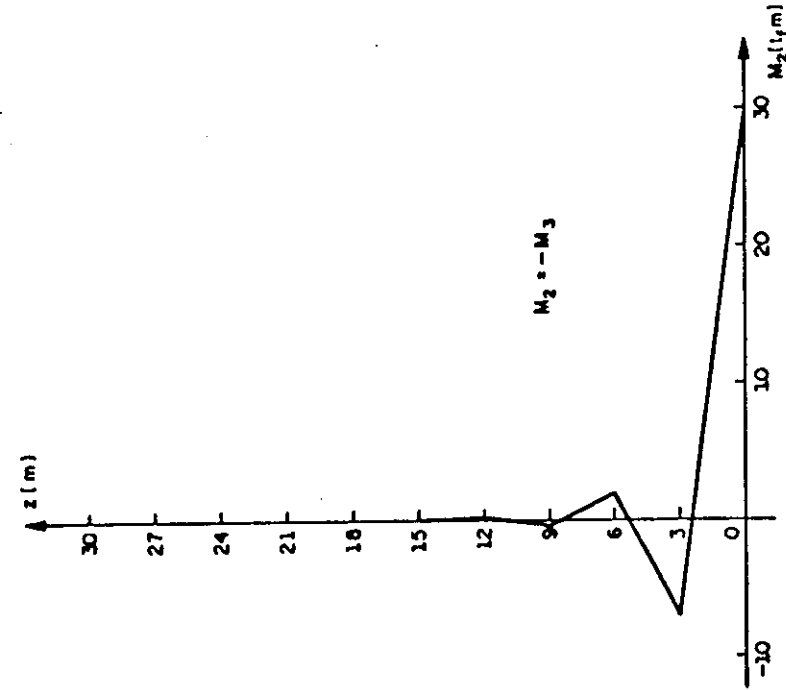


Fig. 3.6.b - Momento fletor no pilar 2

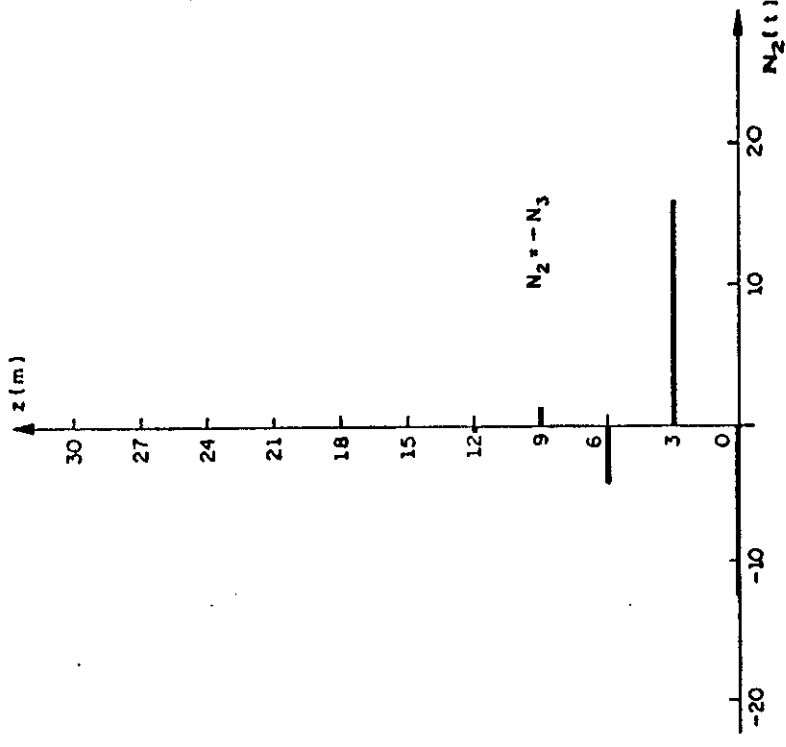


Fig. 3.6.d - Força horizontal do pilar 2 na laje

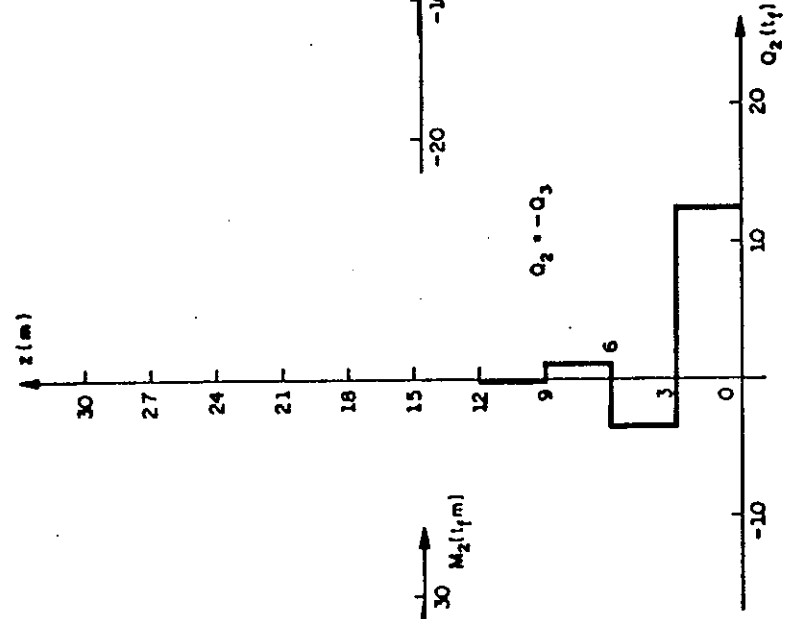


Fig. 3.6.c - Esforço cortante no pilar 2

3.5- ASSOCIAÇÃO PLANA DE N PILARES, EM BASE ELÁSTICA, COMPUTANDO-SE FLEXÃO LOCAL ENTRE OS ANDARES (VERSÃO 1)

3.5.1- Introdução

Observa-se que o esquema de solução da figura 3.7 resulta da utilização dos esquemas das figuras 3.5 e 3.1 com rotações de base nulas, cujas soluções já foram obtidas. A solução para esta associação é obtida das observações feitas no item 3.3, para uma associação plana de n pilares, sob recalques de fundação, admitindo-se flexão local entre os andares, versão 1, e dos resultados obtidos no item 3.2, para análise contínua de uma associação plana de n pilares computando-se só as deformações globais de flexão.

Para a obtenção de $\delta_1, \dots, \delta_{j-1}, \delta_j, \delta_{j+1}, \dots, \delta_n$, monta-se um sistema de equações lineares, partindo-se do equilíbrio horizontal de forças proporcionais aos coeficientes de rigidez das bases dos pilares nos problemas (0), (1), ..., (j-1), (j), (j+1), ..., (n) e (R).

Seja a associação da figura 3.7:

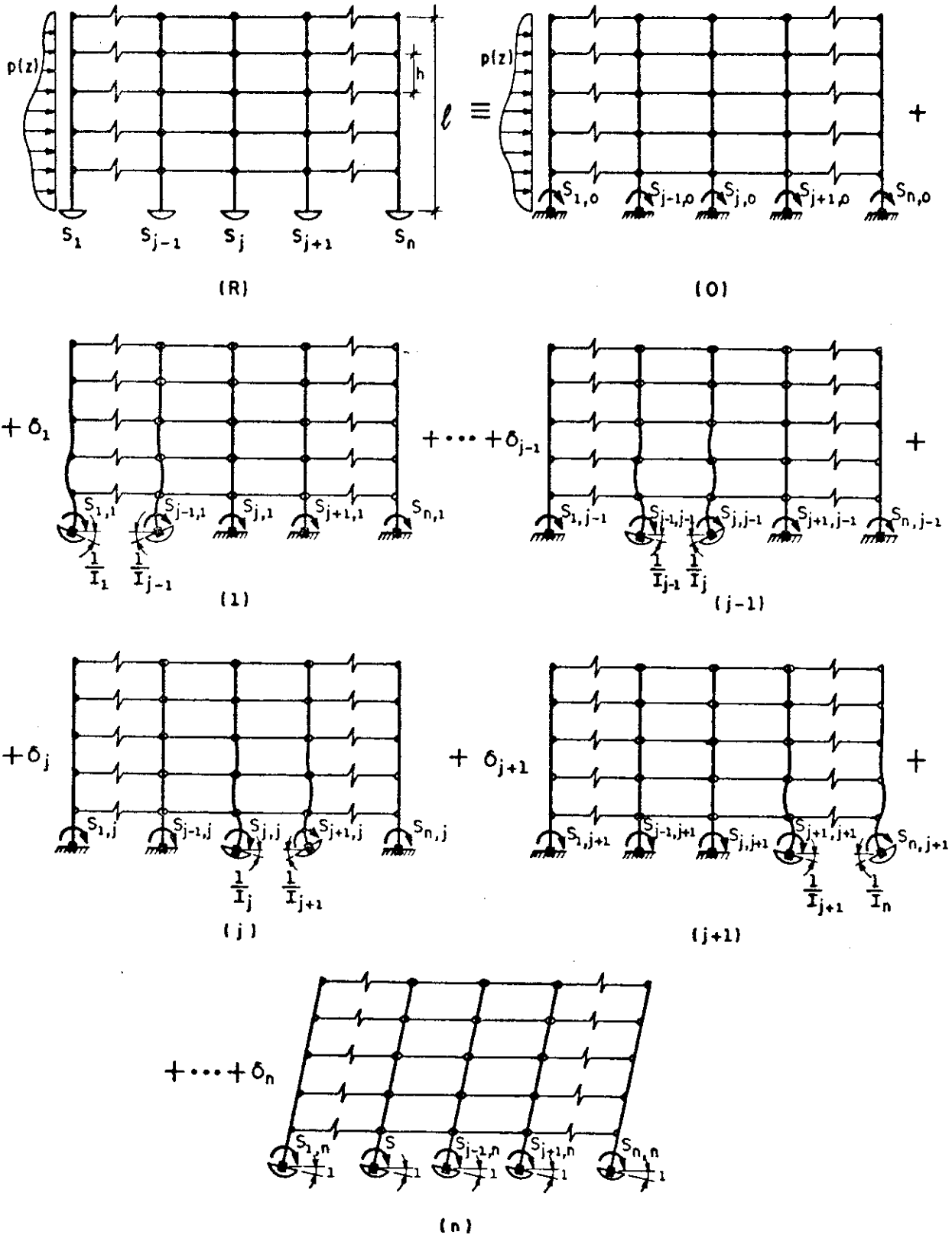


Fig. 3.7 - Superposição de efeitos

Fazendo-se o equilíbrio de momentos nas bases dos n pilares, envolvendo os problemas (R) e (0), (1), ..., (j-1), (j), (j+1), ..., (n), obtém-se o sistema de equações com incógnitas $\delta_1, \dots, \delta_{j-1}, \delta_j, \delta_{j+1}, \dots, \delta_n$:

$$S_{1,0} + \delta_1 S_{1,1} + \dots + \delta_{j-1} S_{1,j-1} + \delta_j S_{1,j} + \delta_{j+1} S_{1,j+1} + \dots + \delta_n S_{1,n} = 0 \quad (3.58)$$

$$S_{j-1,0} + \delta_1 S_{j-1,1} + \dots + \delta_{j-1} S_{j-1,j-1} + \delta_j S_{j-1,j} + \dots + \delta_n S_{j-1,n} = 0 \quad (3.59)$$

$$S_{j,0} + \delta_1 S_{j,1} + \dots + \delta_{j-1} S_{j,j-1} + \delta_j S_{j,j} + \delta_{j+1} S_{j,j+1} + \dots + \delta_n S_{j,n} = 0 \quad (3.60)$$

$$S_{j+1,0} + \delta_1 S_{j+1,1} + \dots + \delta_{j-1} S_{j+1,j-1} + \delta_j S_{j+1,j} + \delta_{j+1} S_{j+1,j+1} + \dots + \delta_n S_{j+1,n} = 0 \quad (3.61)$$

$$S_{n,0} + \delta_1 S_{n,1} + \dots + \delta_{j-1} S_{n,j-1} + \delta_j S_{n,j} + \delta_{j+1} S_{n,j+1} + \dots + \delta_n S_{n,n} = 0 \quad (3.62)$$

O próximo passo será a obtenção dos coeficientes de rigidez no problema (0), (1), ..., (j-1), (j), (j+1) ... (n).

3.5.2- Obtenção dos Coeficientes de Rigidez

3.5.2.1- Problema (0)

Notando-se que a estrutura do problema (0) já foi analisada no item 3.2, com a diferença que, agora, as bases estão engastadas tem-se, para um pilar genérico j:

$$S_{j,0} = -\mu_j M$$

onde M seria um momento de tombamento na base de um consolo único que substituiria toda a associação.

3.5.2.2- Problema (1)

$$S_{1,1} = \sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_1}{I_1} \quad (3.63)$$

⋮

$$S_{j-1,1} = -\sqrt{12} \frac{E}{h} - \frac{S_{j-1}}{I_{j-1}} \quad (3.64)$$

$$S_{j,1} = 0 \quad (3.65)$$

$$S_{j+1,1} = 0 \quad (3.66)$$

⋮

$$S_{n,1} = 0 \quad (3.67)$$

3.5.2.3- Problema (j-1)

$$s_{1,j-1} = 0 \quad (3.68)$$

⋮

$$s_{j-1,j-1} = \sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{s_{j-1}}{I_{j-1}} \quad (3.69)$$

$$s_{j,j-1} = -\sqrt{12} \frac{E}{h} - \frac{s_j}{I_j} \quad (3.70)$$

$$s_{j+1,j-1} = 0 \quad (3.71)$$

⋮

$$s_{n,j-1} = 0 \quad (3.72)$$

3.5.2.4- Problema (j)

$$s_{1,j} = 0 \quad (3.73)$$

⋮

$$s_{j-1,j} = 0 \quad (3.74)$$

$$s_{j,j} = \sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{s_j}{I_j} \quad (3.75)$$

$$s_{j+1,j} = -\sqrt{12} \frac{E}{h} - \frac{s_{j+1}}{I_{j+1}} \quad (3.76)$$

⋮

$$s_{n,j} = 0 \quad (3.77)$$

3.5.2.5- Problema (j+1)

$$s_{1,j+1} = 0 \quad (3.78)$$

⋮

$$s_{j-1,j+1} = 0 \quad (3.79)$$

$$s_{j,j+1} = 0 \quad (3.80)$$

$$s_{j+1,j+1} = \sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{s_{j+1}}{I_{j+1}} \quad (3.81)$$

⋮

$$s_{n,j+1} = -\sqrt{12} \frac{E}{h} - \frac{s_n}{I_n} \quad (3.82)$$

3.5.2.6- Problema (n)

$$s_{1,n} = s_1 \quad (3.83)$$

⋮

$$s_{j-1,n} = s_{j-1} \quad (3.84)$$

$$s_{j,n} = s_j \quad (3.85)$$

$$s_{j+1,n} = s_{j+1} \quad (3.86)$$

⋮

$$s_{n,n} = s_n \quad (3.87)$$

3.5.4- Montagem e Resolução do Sistema de Equações

Substituindo-se as equações, (3.63) a (3.87) nas equações (3.58) a (3.62) obtém-se o sistema de equações seguinte:

$$\left(\sqrt{12} \frac{E S_1}{h I_1}\right) \delta_1 + \dots + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots + S_1 \delta_n = \mu_1 M \quad (3.88)$$

$$-\left(\sqrt{12} \frac{E S_{j-1}}{h I_{j-1}}\right) \delta_1 + \dots + \left(\sqrt{12} \frac{E S_{j-1}}{h I_{j-1}}\right) \delta_{j-1} + 0 + 0 + \dots + S_{j-1} \delta_n = \mu_{j-1} M \quad (3.89)$$

$$0 + \dots - \left(\sqrt{12} \frac{E S_j}{h I_j}\right) \delta_{j-1} + \left(\sqrt{12} \frac{E S_j}{h I_j}\right) \delta_j + 0 + \dots + S_j \delta_n = \mu_j M \quad (3.90)$$

$$0 + \dots + 0 - \left(\sqrt{12} \frac{E S_{j+1}}{h I_{j+1}}\right) \delta_j + \left(\sqrt{12} \frac{E S_{j+1}}{h I_{j+1}}\right) \delta_{j+1} + \dots + S_{j+1} \delta_n = \mu_{j+1} M \quad (3.91)$$

$$0 + \dots + 0 + 0 - \left(\sqrt{12} \frac{E S_n}{h I_n}\right) \delta_{j+1} + \dots + S_n \delta_n = \mu_n M \quad (3.92)$$

Da equação (3.88), obtém-se δ_1 em função de δ_n

$$\delta_1 = \frac{\mu_1 M - S_1 \delta_n}{\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_1}{I_1}} \quad (3.93)$$

Substituindo-se a equação (3.93) na equação (3.89) obtém-se δ_{j-1} em função de δ_n :

$$\delta_{j-1} = \frac{\mu_1^M - S_1 \delta_n}{\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_1}{I_1}} + \dots + \frac{\mu_{j-1}^M - S_{j-1} \delta_n}{\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_{j-1}}{I_{j-1}}} \quad (3.94)$$

Substituindo-se a equação (3.94) na equação (3.90) obtém-se δ_j em função de δ_n :

$$\delta_j = \frac{\mu_1^M - S_1 \delta_n}{\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_1}{I_1}} + \dots + \frac{\mu_{j-1}^M - S_{j-1} \delta_n}{\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_{j-1}}{I_{j-1}}} + \frac{\mu_j^M - S_j \delta_n}{\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_j}{I_j}} \quad (3.95)$$

Substituindo-se a equação (3.95) na equação (3.91) obtém-se δ_{j+1} em função de δ_n :

$$\delta_{j+1} = \frac{\mu_1^M - S_1 \delta_n}{\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_1}{I_1}} + \dots + \frac{\mu_{j-1}^M - S_{j-1} \delta_n}{\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_{j-1}}{I_{j-1}}} + \frac{\mu_j^M - S_j \delta_n}{\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_j}{I_j}} + \frac{\mu_{j+1}^M - S_{j+1} \delta_n}{\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_{j+1}}{I_{j+1}}} \quad (3.96)$$

Da equação (3.92), obtém-se δ_{j+1} em função de δ_n :

$$\delta_{j+1} = - \frac{\mu_n^M - S_n \delta_n}{\sqrt{12 \frac{E}{h} + \frac{S_n}{I_n}}} \quad (3.97)$$

Igualando-se a equação (3.96) com a equação (3.97), obtém-se:

$$\delta_n = \frac{\frac{\mu_1^M}{\sqrt{12 \frac{E}{h} + \frac{S_1}{I_1}}} + \dots + \frac{\mu_{j-1}^M}{\sqrt{12 \frac{E}{h} + \frac{S_{j-1}}{I_{j-1}}}} + \frac{\mu_j^M}{\sqrt{12 \frac{E}{h} + \frac{S_j}{I_j}}} + \frac{\mu_{j+1}^M}{\sqrt{12 \frac{E}{h} + \frac{S_{j+1}}{I_{j+1}}}} + \dots + \frac{\mu_n^M}{\sqrt{12 \frac{E}{h} + \frac{S_n}{I_n}}}}{\frac{S_1}{\sqrt{12 \frac{E}{h} + \frac{S_1}{I_1}}} + \dots + \frac{S_{j-1}}{\sqrt{12 \frac{E}{h} + \frac{S_{j-1}}{I_{j-1}}}} + \frac{S_j}{\sqrt{12 \frac{E}{h} + \frac{S_j}{I_j}}} + \frac{S_{j+1}}{\sqrt{12 \frac{E}{h} + \frac{S_{j+1}}{I_{j+1}}}} + \dots + \frac{S_n}{\sqrt{12 \frac{E}{h} + \frac{S_n}{I_n}}}} \quad (3.98)$$

o que é o mesmo que:

$$\delta_n = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{\mu_k^M}{\sqrt{12 \frac{E}{h} + \frac{S_k}{I_k}}}}{\sum_{k=1}^n \frac{S_k}{\sqrt{12 \frac{E}{h} + \frac{S_k}{I_k}}}} \quad (3.99)$$

Substituindo-se a equação (3.99) na equação (3.95) obtém-se para um valor genérico de j , desde que $j > 0$ e $j \neq n$:

$$\delta_j = \left[\begin{array}{c} \sum_{k=1}^j \frac{\mu_k}{\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_k}{I_k}} - \sum_{k=1}^j \frac{S_k}{\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_k}{I_k}} \\ \left(\begin{array}{c} \sum_{\ell=1}^n \frac{\mu_\ell}{\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_\ell}{I_\ell}} \\ \sum_{\ell=1}^n \frac{S_\ell}{\sqrt{12} \frac{E}{h} + \frac{S_\ell}{I_\ell}} \end{array} \right) M \end{array} \right] \quad (3.100)$$

3.5.4- Esforços Solicitantes e Deslocamentos

Obtém-se somando-se os esforços solicitantes e deslocamentos obtidos no item 3.3.3 e 3.3.4 aos obtidos no item 3.2.8.

3.6- ASSOCIAÇÃO PLANA DE N PILARES, EM BASE ELÁSTICA, COMPUTANDO-SE FLEXÃO LOCAL ENTRE OS ANDARES (VERSÃO 2)

3.6.1- Introdução

Da mesma maneira que na versão 1, obtém-se os coeficientes de rigidez e monta-se um sistema de equações lineares, com a diferença que nesta versão serão incógnitas δ_1 e as n rotações dos pilares; δ_1 pode ser obtido em

função dos n valores ϕ_j e então é possível obter-se um sistema de equações em função apenas dos ϕ_j para os n pilares. Obtém-se uma fórmula para a rotação ϕ_j de um pilar genérico, que torna explícita a solução do sistema de equações lineares em ϕ_j . A solução do problema (E) da figura 3.8, para n pilares, foi obtida por STAMATO [2], onde cada pilar absorve uma parcela da carga externa total, proporcional ao seu momento de inércia. Seja o esquema de solução da figura 3.8:

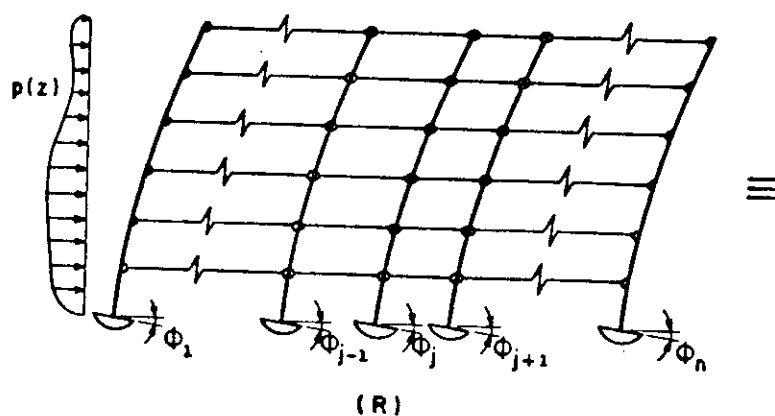


Fig. 3.8 - Esquema estrutural para n pilares (continua)

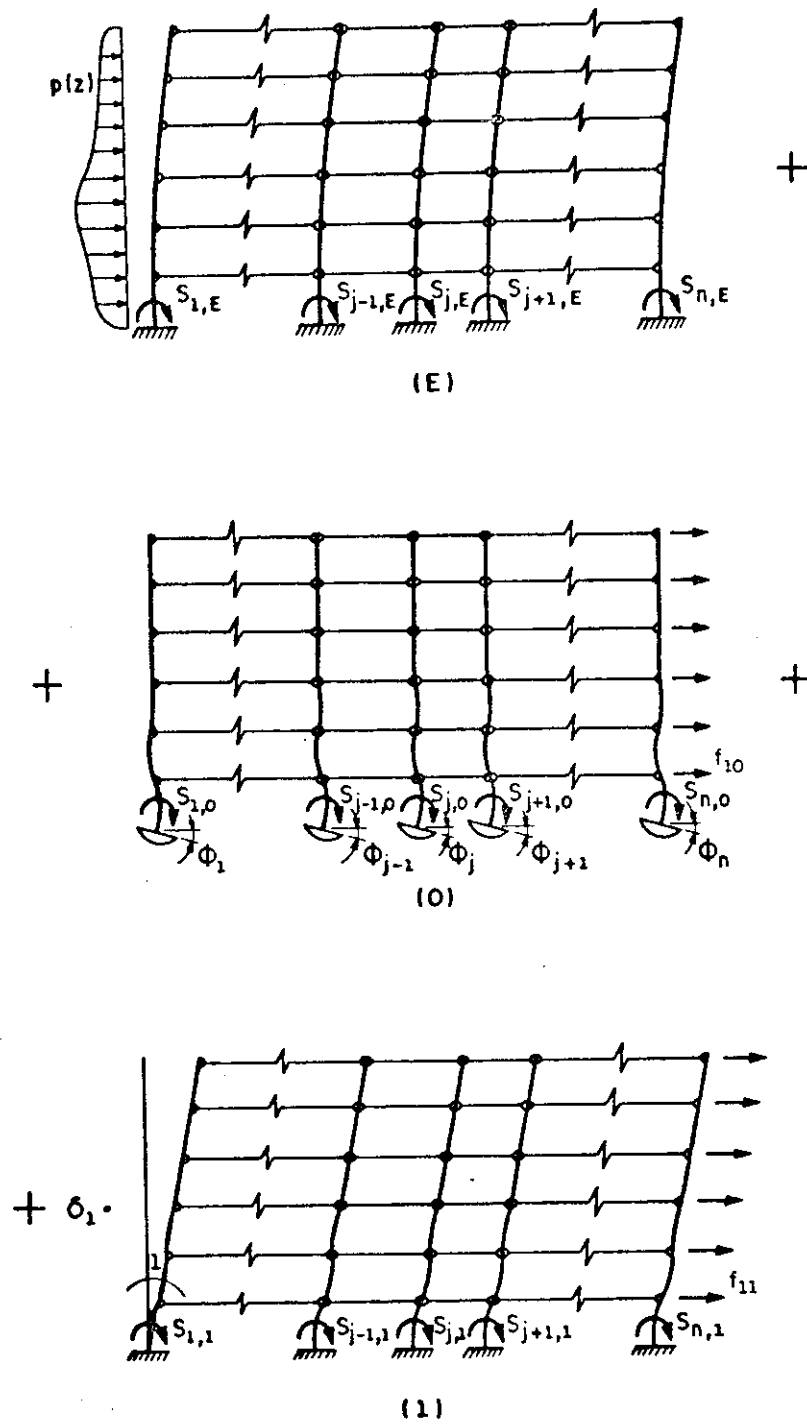


Fig. 3.8 - Esquema estrutural para n pilares

Ao esquema de solução da figura 3.6, para recalques de fundação, adiciona-se o problema (E), onde os pilares tem suas bases engastadas e estão submetidos a um carregamento horizontal p distribuído. A partir do esquema acima, e em cada problema, impõe-se as condições de equilíbrio de momentos fletores nas bases dos pilares, obtendo-se assim os coeficientes de rigidez correspondentes.

3.6.2- Obtenção dos Coeficientes de Rigidez

3.6.2.1- Problema (E)

Para um pilar genérico j , tem-se:

$$S_{j,E} = -\mu_j M \quad (3.101)$$

3.6.2.2- Problema (0)

$$S_{j,0} = (\beta_j + S_j)\phi_j \quad (3.102)$$

3.6.2.3- Problema (1)

$$S_{j,1} = -\beta_j \quad (3.103)$$

3.6.3- Obtenção do Sistema de Equações

Somando-se os coeficientes de rigidez do problema (E) e (0) aos do problema (1) multiplicados por δ_1 e igualando-se esta soma aos momentos externos nas bases, que são nulos, obtém-se um sistema de equações com incógnitas δ_1 e ϕ_j , como segue:

$$(\beta_j + S_j) \phi_j - \beta_j \delta_1 = \mu_j M \quad (3.104)$$

com $j=1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, n$.

Substituindo-se o valor de δ_1 , obtido anteriormente no item 3.4.4, obtém-se agora um sistema de equações com incógnitas ϕ_j :

$$(\beta_j + S_j) \phi_j - \beta_j \sum_{k=1}^n \mu_k \phi_k = \mu_j M \quad (3.105)$$

com $j=1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, n$.

A solução para o sistema acima é dada por:

$$\phi_j = \frac{\mu_j \sum_{m=1, m \neq j}^n \pi (\beta_m + S_m)}{\sum_{m=1}^n \pi (\beta_m + S_m) - \sum_{\ell=1, \ell \neq j}^n \mu_\ell \beta_\ell \sum_{m=1, m \neq \ell}^n \pi (\beta_m + S_m)} M \quad (3.106)$$

3.6.4- Demonstração da Validade da Fórmula para ϕ_j

No item anterior fez-se uma hipótese para a obtenção de uma fórmula para o ângulo de rotação ϕ_j , da base, de um pilar genérico j .

Agora, então, resta demonstrar a validade da hipótese formulada.

Denominando-se:

$$A = \sum_{m=1}^n \pi (\beta_m + S_m) - \sum_{\ell=1}^n \mu_\ell \beta_\ell \sum_{m=1, m \neq \ell}^n \pi (\beta_m + S_m) \quad (3.107)$$

Substituindo-se a equação (3.106) na equação (3.105),
obtem-se:

$$\left\{ (\beta_j + S_j) \mu_j \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n (\beta_m + S_m)^{-\sum_{k=1}^n \beta_j \mu_k} \left[\mu_k \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (\beta_m + S_m) \right] \right\} \frac{1}{A} = \mu_j \quad (3.108)$$

A equação acima é a mesma que a seguinte:

$$\left[\mu_j \prod_{m=1}^n (\beta_m + S_m)^{-\sum_{k=1}^n \beta_j \mu_k} \mu_k \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (\beta_m + S_m) \right] \frac{1}{A} = \mu_j \quad (3.109)$$

Lembrando-se que:

$$\mu_j B_k = \mu_k B_j$$

tem-se:

$$\mu_j \prod_{m=1}^n (\beta_m + S_m)^{-\mu_j} \sum_{k=1}^n \beta_k \mu_k \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (\beta_m + S_m) = A \mu_j \quad (3.110)$$

Colocando-se μ_j em evidência na equação acima obtém-se:

$$\mu_j \left[\prod_{m=1}^n (\beta_m + S_m)^{-\sum_{k=1}^n \beta_k \mu_k} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (\beta_m + S_m) \right] = A \mu_j \quad (3.111)$$

Comparando-se a expressão acima com a expressão
(3.107), chega-se a:

$$\mu_j A = A \mu_j$$

Portanto está demonstrada a validade da hipótese formulada para a obtenção do ângulo de rotação de base, ϕ_j , de um pilar genérico, em uma associação plana de n pilares em base elástica, sob um carregamento horizontal qualquer.

3.6.5- Obtenção de δ_1

Basta substituir-se a equação (3.106) na equação (3.56), obtendo-se:

$$\delta_1 = \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j^2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n \pi (\beta_m + S_m)}{\sum_{m=1}^n \pi (\beta_m + S_m) - \sum_{\ell=1}^n \mu_\ell \beta_\ell \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq \ell}}^n \pi (\beta_m + S_m)} M \quad (3.113)$$

Uma outra maneira de se obter δ_1 , seria substituindo-se os n valores de ϕ_j obtidos em (3.106) nas equações (3.56) ou (3.57).

3.6.6- Esforços Solicitantes e Deslocamentos

Obtêm-se somando-se os esforços solicitantes e deslocamentos calculados nos itens 3.4.5 e 3.2.8 com a condição de as rotações da base elástica serem nulas.

3.6.7- Exemplo 4

Seja a associação plana de 3 pilares em base elástica, da figura 3.8.a vista em planta e de perfil; as dimensões das 3 sapatas são iguais, adotando-se para as mesmas $c_\phi = 10000 \text{tf/m}^3$; as larguras dos 3 pilares são iguais.

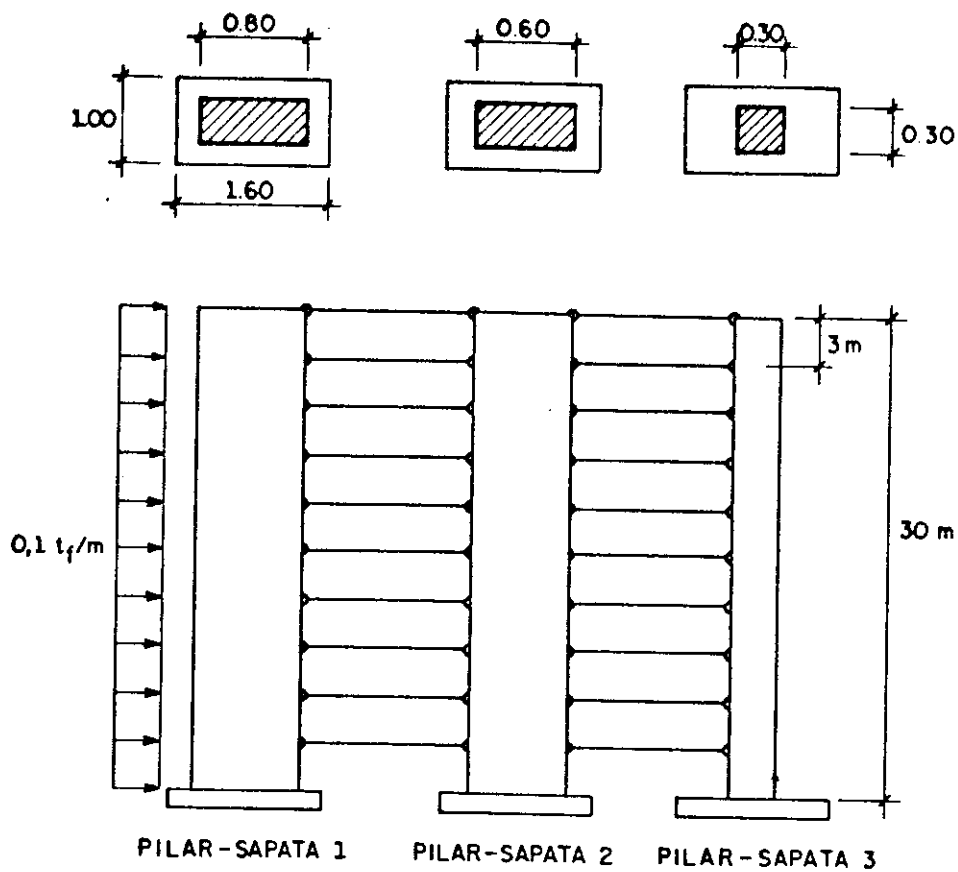


Fig. 3.8.a - Exemplo 4

Adota-se:

$$E_c = 2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$$

a) Parâmetros elásticos e geométricos dos conjuntos Pilar-sapata:

Para os pilares 1, 2 e 3 tem-se:

$$I_1 = 0,0128 \text{ m}^4 \quad I_2 = 0,0054 \text{ m}^4 \quad I_3 = 0,00068 \text{ m}^4$$

Da (2.46) obtém-se:

$$\beta_1 = 29560,3 \text{ tfm} \quad \beta_2 = 12470,8 \text{ tfm} \quad \beta_3 = 1570,4 \text{ tfm}$$

Da (2.10) obtém-se:

$$\mu_1 = 0,68 \quad \mu_2 = 0,29 \quad \mu_3 = 0,03$$

Para as sapatas 1, 2 e 3 tem-se:

$$I_f = 0,341 \text{ m}^4$$

Da (2.42) com o valor de c_ϕ adotado tem-se:

$$S = 3413,33 \text{ tfm}$$

De (2.6.2) tem-se:

$$M = 0,05(30-z)^2$$

b) Problema (E)

Das equações (2.35) e (2.36) obtém-se:

$$M_1 = 0,034(30-z)^2 \quad M_2 = 0,0145(30-z)^2 \quad M_3 = 0,0015(30-z)^2$$

$$Q_1 = 0,068(30-z) \quad Q_2 = 0,029(30-z) \quad Q_3 = 0,003(30-z)$$

Da equação (2.37) em $\phi=0$, obtém-se:

$$u = 2,660 \times 10^{-6} \left[\frac{z^4}{24} - 30z^2 \left(\frac{z}{6} - 7,5 \right) \right]$$

c) Problemas (0) e (1)

Utiliza-se a equação (3.106), para se obter as rotações ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 :

obtendo-se:

$$\phi_1 = \frac{\mu_1(\beta_2 + s_2)(\beta_3 + s_3)}{(\beta_1 + s_1)(\beta_2 + s_2)(\beta_3 + s_3) - \mu_1\beta_1(\beta_2 + s_2)(\beta_3 + s_3) - \mu_2\beta_2(\beta_1 + s_1)(\beta_3 + s_3) - \mu_3\beta_3(\beta_1 + s_1)(\beta_2 + s_2)} M$$

$$\phi_2 = \frac{\mu_2(\beta_1 + s_1)(\beta_3 + s_3)}{(\beta_1 + s_1)(\beta_2 + s_2)(\beta_3 + s_3) - \mu_1\beta_1(\beta_2 + s_2)(\beta_3 + s_3) - \mu_2\beta_2(\beta_1 + s_1)(\beta_3 + s_3) - \mu_3\beta_3(\beta_1 + s_1)(\beta_2 + s_2)} M$$

$$\phi_3 = \frac{\mu_3(\beta_1 + s_1)(\beta_2 + s_2)}{(\beta_1 + s_1)(\beta_2 + s_2)(\beta_3 + s_3) - \mu_1\beta_1(\beta_2 + s_2)(\beta_3 + s_3) - \mu_2\beta_2(\beta_1 + s_1)(\beta_3 + s_3) - \mu_3\beta_3(\beta_1 + s_1)(\beta_2 + s_2)} M$$

$$\phi_1 = 0.006055$$

$$\phi_2 = 0.005361$$

$$\phi_3 = 0.001768$$

Substituindo-se os valores de β_1 , β_2 , β_3 de (a) e os valores de ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 acima na equação (3.56) obtém-se:

$$\delta_1 = 0.00570210$$

Pode-se obter δ_1 também através da equação (3.113).

Pode-se obter ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e δ_1 através de um processo iterativo envolvendo as equações (3.104) para os pilares 1, 2 e 3:

$$(\beta_1 + S_1)\phi_1 - \beta_1 \delta_1 = \mu_1 M$$

$$(\beta_2 + S_2)\phi_2 - \beta_2 \delta_1 = \mu_2 M$$

$$(\beta_3 + S_3)\phi_3 - \beta_3 \delta_1 = \mu_3 M$$

e as equações (3.57) e (2.10) para 3 pilares:

$$\delta_1 = \mu_1 \phi_1 + \mu_2 \phi_2 + \mu_3 \phi_3$$

De (2.57), obtém-se o deslocamento horizontal da associação:

$$u = \delta_1 z$$

De (2.58), para um pilar genérico j , com as equações (2.48) a (2.51), tem-se:

$$M_j = -\beta_j (\phi_j - \delta_1) (-\alpha)^i$$

$$Q_j = -\frac{(1+\alpha)}{h} \beta_j (\phi_j - \delta_1) (-\alpha)^i, \text{ valendo a relação:}$$

$$Q_j = \frac{(1+\alpha)}{h} M_j$$

$$N_j = \frac{(1+\alpha)}{h} \beta_j (\phi_j - \delta_1)^i \text{ na base}$$

$$N_j = -\frac{(1+\alpha)^2}{h} \beta_j (\phi_j - \delta_1)^{i-1}, \text{ valendo a relação:}$$

$$N_j = -\frac{6.00}{h} M_j$$

obtendo-se, então para os três pilares:

PILAR 1	PILAR 2	PILAR 3
$M_1 = -10,432(-\alpha)^i$	$M_2 = 4,254(-\alpha)^i$	$M_3 = 6,178(-\alpha)^i$
$Q_1 = -4,410(-\alpha)^i$	$Q_2 = 1,798(-\alpha)^i$	$Q_3 = 2,611(-\alpha)^i$
$N_1 = 4,410$ na base	$N_2 = -1,798$ na base	$N_3 = -2,611$ na base
$N_1 = 20,864(-\alpha)^i$	$N_2 = -8,508(-\alpha)^i$	$N_3 = -12,356(-\alpha)^i$
$u = 0,00570210z$		

d) Esforços solicitantes e deslocamentos finais:

Somando-se os esforços solicitantes e deslocamentos obtidos em (b) e (c) obtém-se a seguinte tabela:

z	PILAR 1			PILAR 2			PILAR 3			u
	M_1	Q_1	N_1	M_2	Q_2	N_2	M_3	Q_3	N_3	
0	20.17	-2.37	4.41	17.30	2.67	-1.80	7.53	2.70	-2.61	0.0000
3	27.58	3.02	-5.59	9.37	0.30	2.28	-0.57	-0.62	3.31	0.0221
6	18.83	1.31	1.50	8.66	0.83	-0.61	1.30	0.26	-0.89	0.0530
9	15.19	1.51	-0.40	6.31	0.58	0.16	0.54	0.01	0.24	0.0908
12	10.97	1.20	0.10	4.72	0.53	-0.04	0.52	0.06	-0.06	0.1339
15	7.66	1.02	-0.03	3.26	0.44	0.01	0.33	0.04	0.02	0.1809
18	4.90	0.82	0.01	2.09	0.35	0.00	0.22	0.03	0.00	0.2306
21	2.75	0.61	0.00	1.17	0.26	0.00	0.12	0.02	0.00	0.2821
24	1.22	0.41	0.00	0.52	0.17	0.00	0.05	0.01	0.00	0.3345
27	0.31	0.20	0.00	0.13	0.09	0.00	0.01	0.00	0.00	0.3874
30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.4404

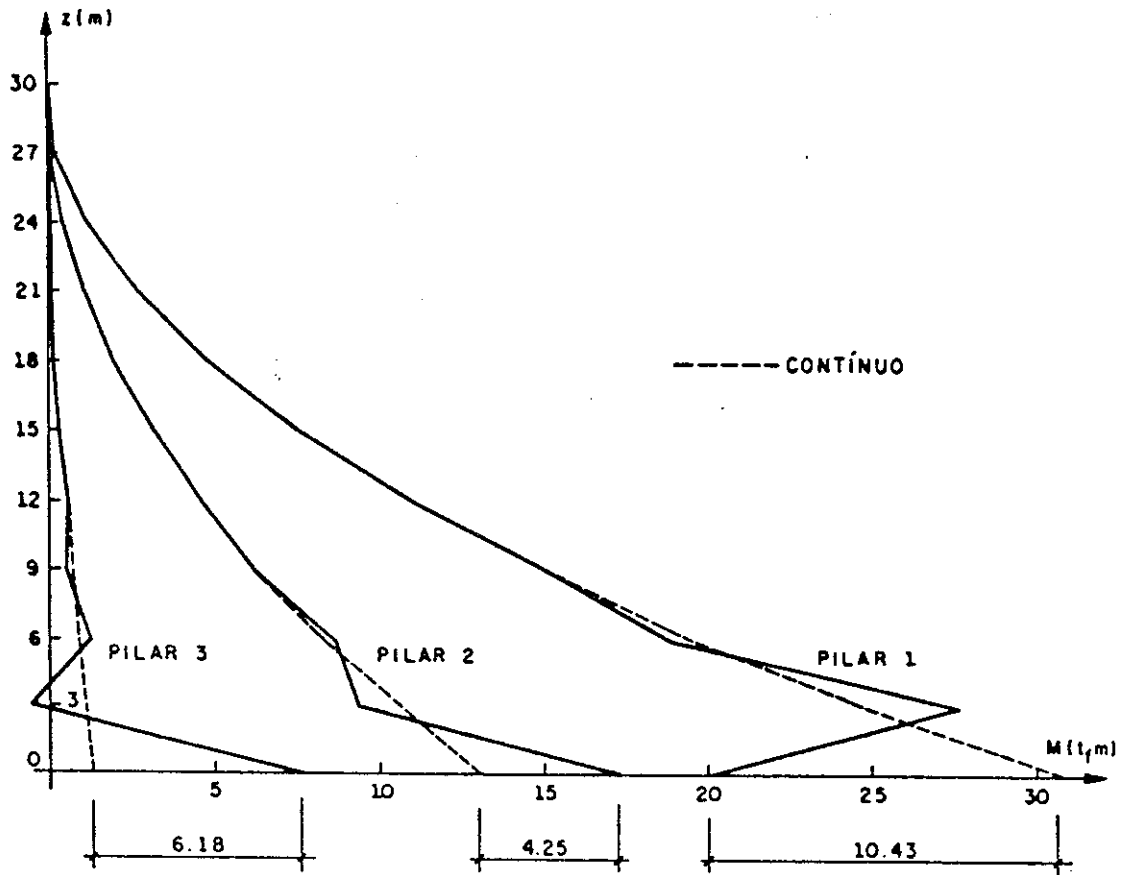


Fig. 3.8.b - Momentos fletores nos pilares 1, 2 e 3

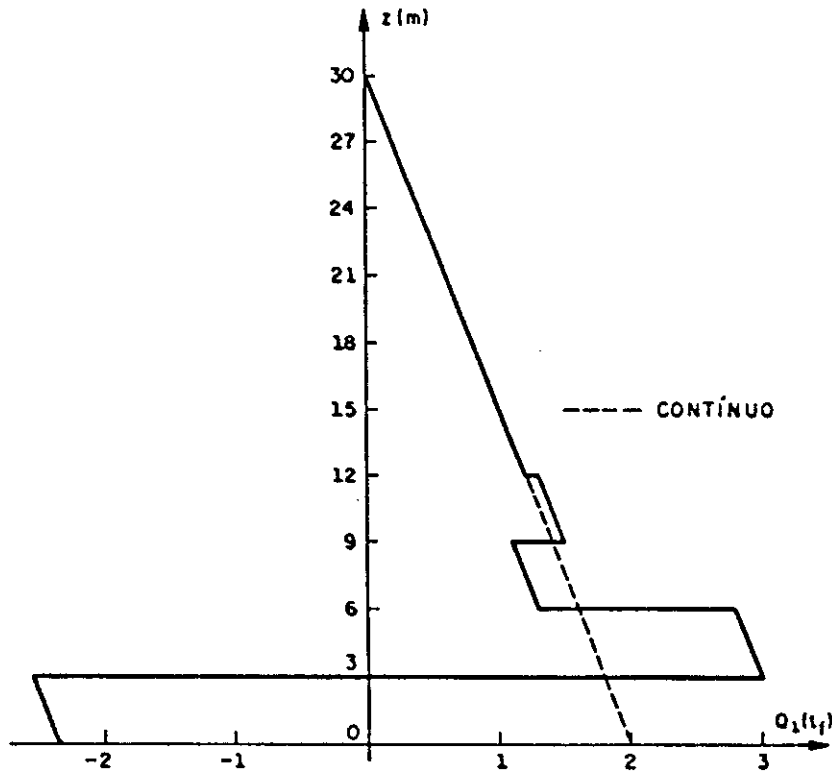


Fig. 3.8.c - Esforços cortantes no pilar 1

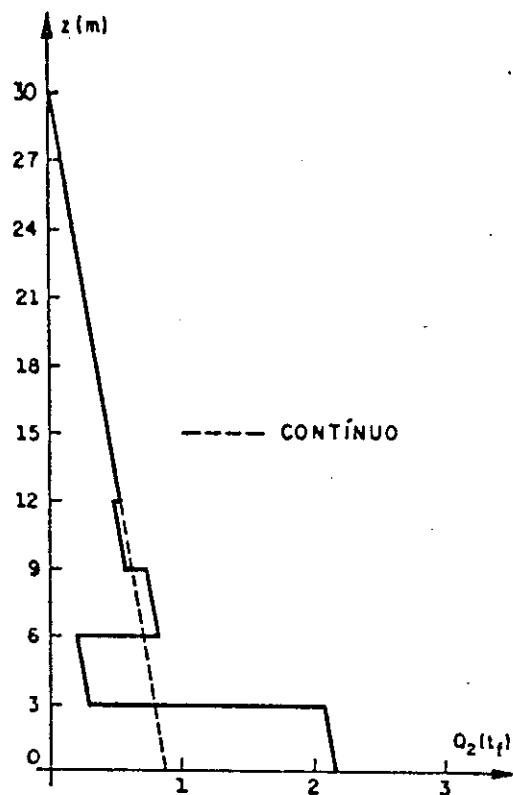


Fig. 3.8.d - Esforços cortantes no pilar 2

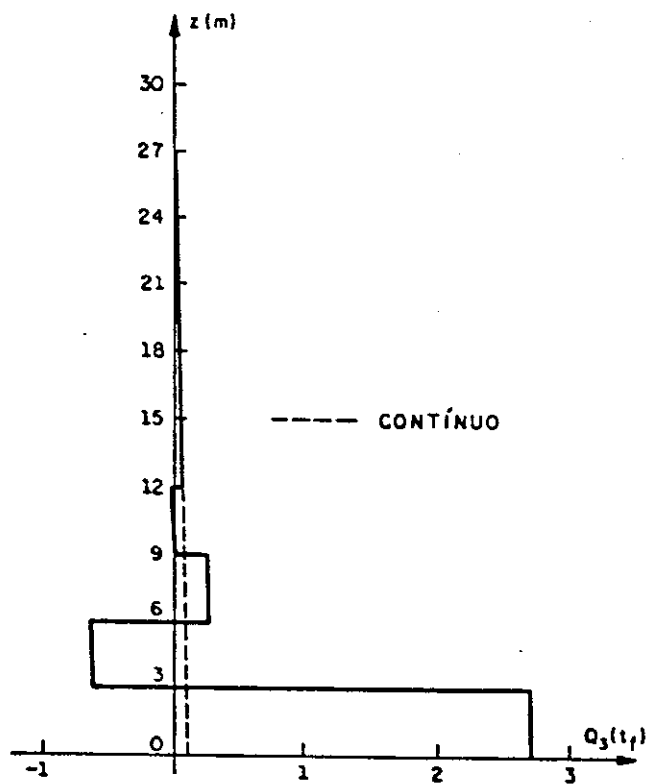


Fig. 3.8.e - Esforço cortante no pilar 3

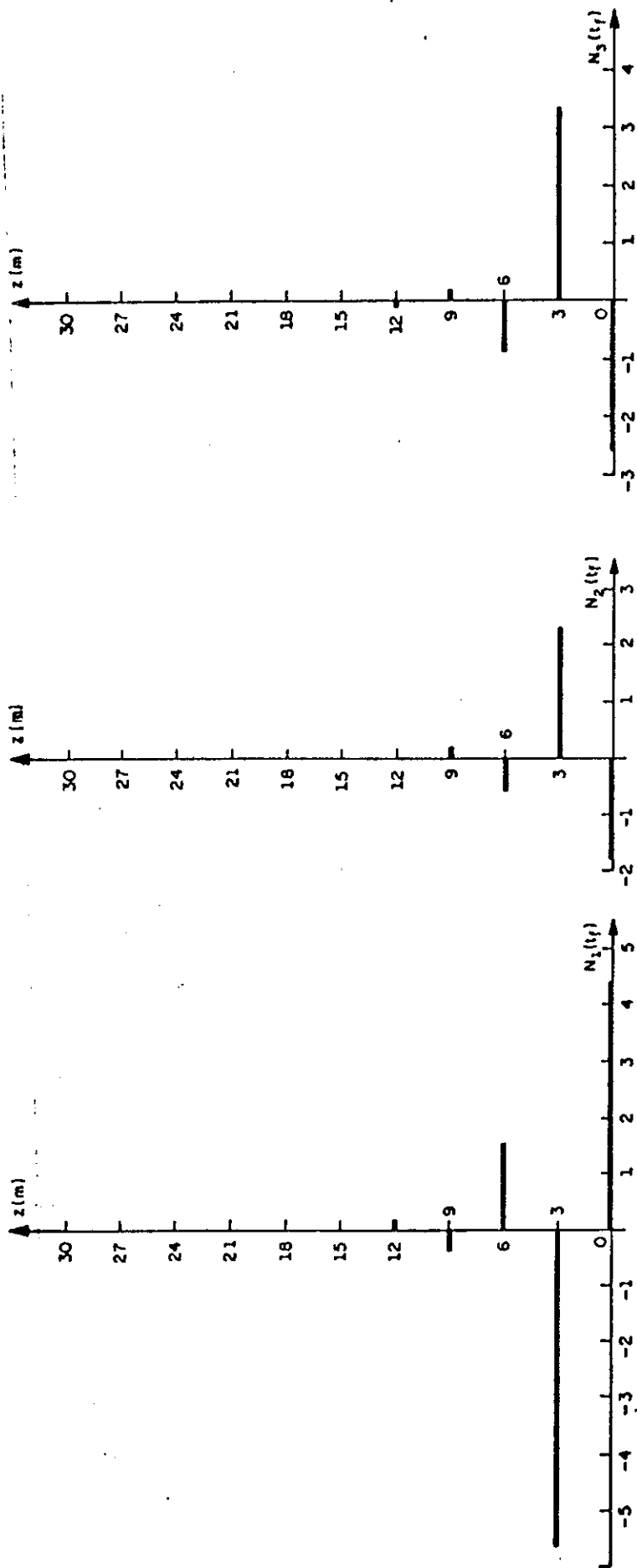


Fig. 3.8.f - Forças horizontais dos pilares 1, 2 e 3 na laje

De MANCINI [3], obtém-se a elástica devida à rotação da sapata:

$$u = \frac{M}{(S_1 + S_2 + S_3)} z$$

Portanto:

$$u = 0,0043945355z$$

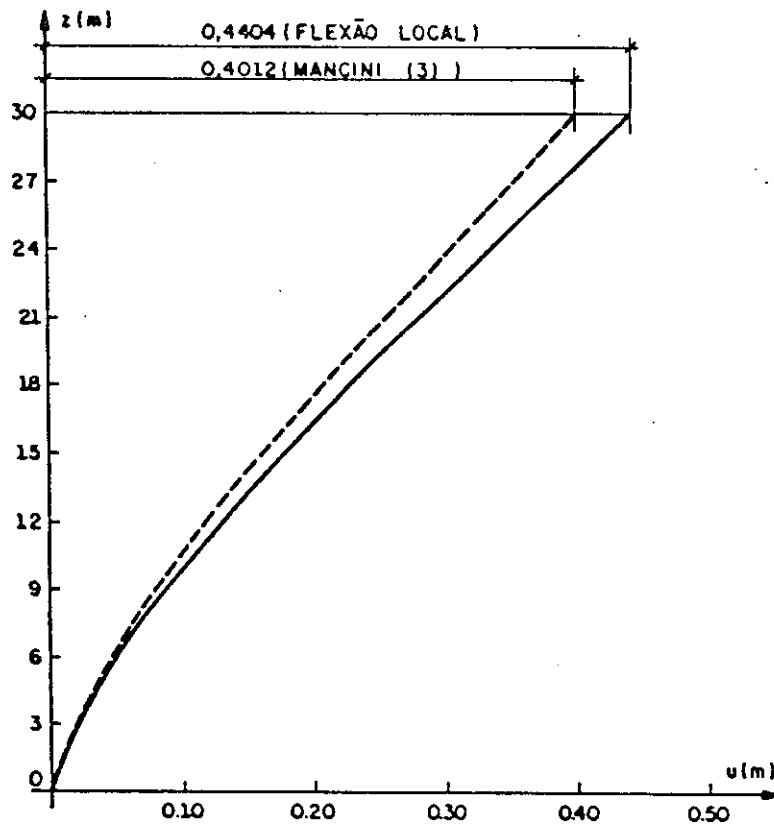


Fig. 3.8.g - Deslocamento horizontal da associação

As perturbações são significativas nos esforços cortantes e forças normais dos primeiros andares da associação, tendendo a se anularem rapidamente, devido à propagação geométrica, através do coeficiente α , menor que 1.

Pelo fato do pilar 3 ter uma rigidez bem menor que as dos outros pilares, as perturbações oriundas do modelo teórico à flexão são significativas em vários níveis, e não só na base como os demais pilares, em relação ao momento fletor, decorrendo disso o aparecimento de forças normais maiores que no pilar 2.

A linha elástica do conjunto está bem próxima da obtida por MANCINI [3].

CAPÍTULO IV

ASSOCIAÇÃO ESPACIAL DE N PILARES

4.1- INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão estudados 2 tipos de associações espaciais; a submetida a recalques de rotação e a, em base elástica, submetida à ação de carregamento horizontal distribuído.

Utilizar-se-á a análise de perturbações decorrentes do processo de propagação de momentos em vigas contínuas, implicando em correções, discretas, à formulação inicial da Técnica do Meio Contínuo.

Faz-se uma extensão à idéia inicial de SOUZA [4], de se introduzir condições adicionais para viabilizar a compatibilidade de deslocamentos, levando em conta a linearidade da elástica dos andares.

As estruturas estão inicialmente constrangidas por vínculos ao nível dos andares em 3 direções ortogonais e suas correspondentes forças resultantes de 2 translações e

uma rotação de laje; das condições de equilíbrio horizontal das forças nos vínculos, em um andar qualquer, dada a evidente proporcionalidade entre eles, obtém-se as incógnitas $\delta_1, \delta_2, \delta_3$.

As idéias iniciais estudadas nos capítulos anteriores para associações planas de 2 e n pilares, versão 2, são aqui estendidas para associações espaciais de n pilares.

Há uma certa analogia ao trabalho estudado por STAMATO [1], sobre estaqueamentos espaciais, onde do movimento do bloco, surgiam deslocamentos axiais nas estacas, com a diferença que, aqui, do movimento das lajes decorrem deslocamentos horizontais nos pilares.

4.2- LOCAÇÃO DOS PILARES

Um pilar genérico j , está localizado, no plano formado pelos eixos x, y , tendo o eixo z , normal a este plano. A direção e sentido deste pilar serão dados pelo vetor unitário \vec{p}_j , que tem como componentes: a_j , que é o cosseno do ângulo α_j , entre \vec{p}_j e o eixo x , e b_j , que é o seno do ângulo α_j , entre \vec{p}_j e o eixo y , sendo que este ângulo é positivo, no sentido anti-horário como mostra a figura 4.1:

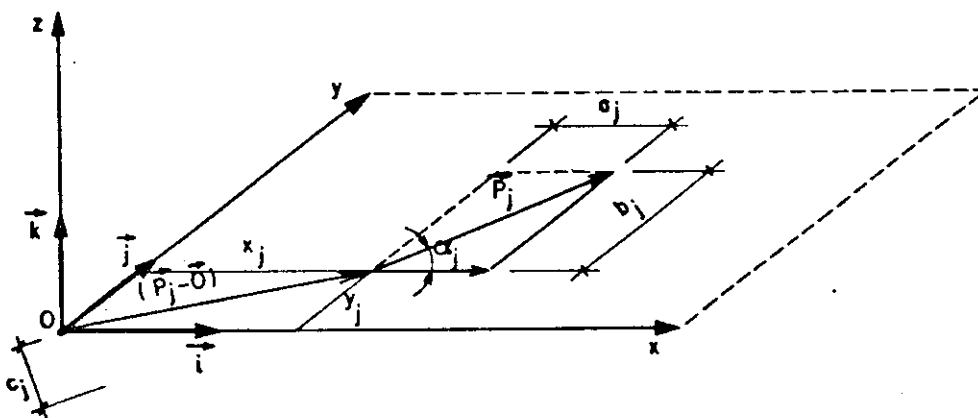


Fig. 4.1 - Localização do pilar genérico j

Tem-se, então:

$$\vec{p}_j = a_j \vec{i} + b_j \vec{j} \quad (4.1)$$

onde \vec{i} e \vec{j} são vetores unitários nas direções dos eixos x e y , respectivamente. O vetor \vec{p}_j tem seu sentido sempre da esquerda para a direita ou de baixo para cima e seu ponto inicial situa-se, no pontos final do vetor:

$$\vec{p}_j - \vec{0} = x_j \vec{i} + y_j \vec{j} \quad (4.2)$$

sendo o vetor $\vec{0}$, a origem do sistema triortogonal xyz .

Para fixar a posição do vetor \vec{p}_j , define-se \vec{c}_j como o vetor momento de \vec{p}_j , em relação à origem 0 do sistema de eixos, e obtém-se através do seguinte produto vetorial:

$$\vec{c}_j = (\vec{p}_j - \vec{0}) \times \vec{p}_j = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_j & y_j & 0 \\ a_j & b_j & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

de onde obtém-se:

$$\vec{c}_j = (x_j b_j - y_j a_j) \vec{k} \quad (4.4)$$

Fazendo-se:

$$c_j = x_j b_j - y_j a_j \quad (4.5)$$

obté-m-se:

$$\vec{c}_j = c_j \vec{k} \quad (4.6)$$

O vetor \vec{c}_j tem sentido positivo coincidente com o sentido positivo de z e, portanto, através das componentes a_j , b_j e c_j , situa-se perfeitamente um pilar genérico j em um sistema de eixos triortogonais.

As definições acima foram obtidas de STAMATO [1].

4.3- ASSOCIAÇÃO ESPACIAL DE N PILARES. SOB RECALQUES DE FUNDAÇÃO, ADMITINDO-SE FLEXÃO LOCAL ENTRE OS ANDARES

4.3.1- Introdução

A associação espacial representada como problema (R) na figura 4.2 pode ser colocada como soma dos problemas (0), (1), (2) e (3).

No problema (0), a estrutura é submetida a recalques de fundação, tornando-se inteiramente indeslocável, pela presença de 2 forças, segundo os eixos x e y, e um momento, segundo o eixo z, atuantes nos vínculos existentes ao longo de toda a estrutura, no nível dos andares. Somam-se a ele mais três problemas, com deslocabilidades de lajes, isto é, translação segundo o eixo x, translação segundo o eixo y e rotação segundo o eixo z, nos problemas (1), (2) e (3) respectivamente.

As linhas elásticas provenientes destes deslocamentos independentes são lineares, implicando em perfeita utilização do processo de propagação de momentos em vigas contínuas e no aparecimento de esforços com uma distribuição em cada andar proporcional à do andar inferior.

Seja a associação da figura 4.2:

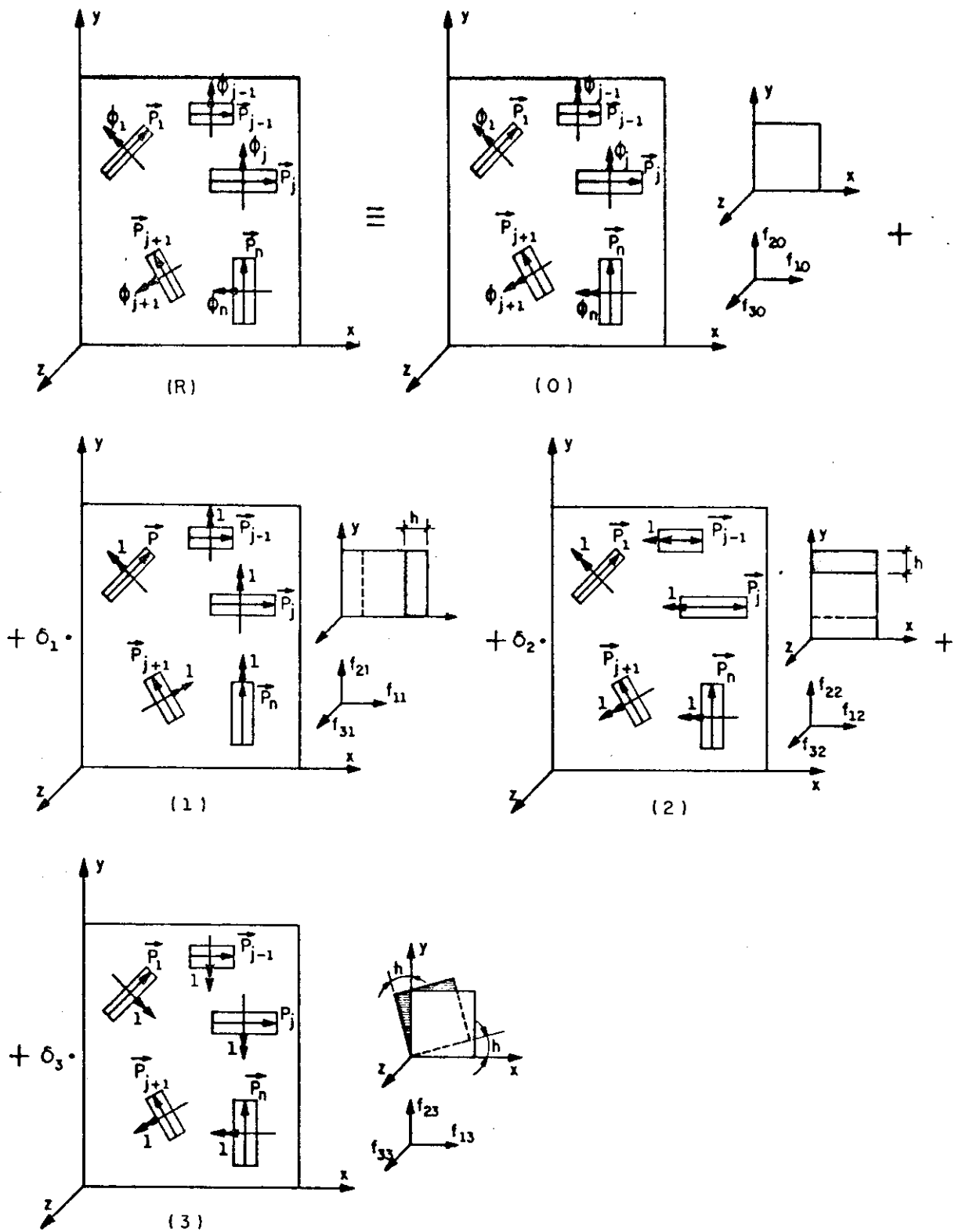


Fig. 4.2 - Associação espacial de n pilares, submetida a recalques de fundação

Nos problemas (1), (2) e (3) são dadas rotações de apoio unitárias, o que implica, para um i -ésimo nível, em deslocamentos de laje iguais à cota z desse nível, mantendo-se as elásticas retilíneas.

As rotações oriundas dos recalques de fundação são consideradas positivas, se no sentido horário, vão de encontro ao ponto final do vetor \vec{p}_j .

Nos problemas (1), (2), (3), os pilares têm deslocamentos iguais a a_j , b_j e c_j , respectivamente.

4.3.2- Esforços Solicitantes

4.3.2.1- Problema (0)

$$M_j = -\beta_j \phi_j (-\alpha)^i \quad (4.7)$$

$$Q_j = -(1+\alpha) \frac{\beta_j \phi_j}{h} (-\alpha)^i \quad (4.8)$$

$$N_j = (1+\alpha) \frac{\beta_j \phi_j}{h} \quad , \text{ na base} \quad (4.9)$$

e

$$N_j = -(1+\alpha)^2 \frac{\beta_j \phi_j}{h} (-\alpha)^{i-1} \quad (4.10)$$

4.3.2.2- Problema (1)

$$M_j = \beta_j a_j (-\alpha)^i \quad (4.11)$$

$$Q_j = (1+\alpha) \frac{\beta_j a_j}{h} (-\alpha)^i \quad (4.12)$$

$$N_j = -(1+\alpha) \frac{\beta_j a_j}{h} \quad , \text{ na base} \quad (4.13)$$

e

$$N_j = (1+\alpha)^2 \frac{\beta_j a_j}{h} (-\alpha)^{i-1} \quad (4.14)$$

4.3.2.3- Problema (2)

$$M_j = \beta_j b_j (-\alpha)^i \quad (4.15)$$

$$Q_j = (1+\alpha) \frac{\beta_j b_j}{h} (-\alpha)^i \quad (4.16)$$

$$N_j = -(1+\alpha) \frac{\beta_j b_j}{h} \quad , \text{ na base} \quad (4.17)$$

e

$$N_j = (1+\alpha)^2 \frac{\beta_j b_j}{h} (-\alpha)^{i-1} \quad (4.18)$$

4.3.2.4- Problema (3)

$$M_j = \beta_j c_j (-\alpha)^i \quad (4.19)$$

$$Q_j = (1+\alpha) \frac{\beta_j c_j}{h} (-\alpha)^l \quad (4.20)$$

$$N_j = -(1+\alpha) \frac{\beta_j c_j}{h} \quad , \text{ na base} \quad (4.21)$$

e

$$N_j = (1+\alpha)^2 \frac{\beta_j c_j}{h} (-\alpha)^{l-1} \quad (4.22)$$

Convenciona-se que toda força horizontal aplicada à laje será positiva se tiver o mesmo sentido de \vec{p}_j ; na laje, se no sentido contrário.

4.3.3- Obtenção das Forças nos Vínculos

Obtém-se, através do equilíbrio na laje do 10. andar, entre as reações das forças horizontais das lajes nos pilares ou as forças atuantes nas lajes do primeiro andar com as forças dos vínculos nas direções x, y e z, nos problemas (0), (1), (2) e (3).

Nas forças nos vínculos, o primeiro índice refere-se ao eixo ortogonal e o segundo, ao problema analisado.

4.3.3.1- Problema (0)

$$f_{10} = - \frac{(1+\alpha)^2}{h} \sum_{j=1}^n \beta_j \phi_j a_j \quad (4.23)$$

$$f_{20} = - \frac{(1+\alpha)^2}{h} \sum_{j=1}^n \beta_j \phi_j b_j \quad (4.24)$$

$$f_{30} = - \frac{(1+\alpha)^2}{h} \sum_{j=1}^n \beta_j \phi_j c_j \quad (4.25)$$

4.3.3.2- Problema (1)

$$f_{11} = \frac{(1+\alpha)^2}{h} \sum_{j=1}^n \beta_j a_j^2 \quad (4.26)$$

$$f_{21} = \frac{(1+\alpha)^2}{h} \sum_{j=1}^n \beta_j a_j b_j \quad (4.27)$$

$$f_{31} = \frac{(1+\alpha)^2}{h} \sum_{j=1}^n \beta_j a_j c_j \quad (4.28)$$

4.3.3.3- Problema (2)

$$f_{12} = \frac{(1+\alpha)^2}{h} \sum_{j=1}^n \beta_j a_j b_j \quad (4.29)$$

$$f_{22} = \frac{(1+\alpha)^2}{h} \sum_{j=1}^n \beta_j b_j^2 \quad (4.30)$$

$$f_{32} = \frac{(1+\alpha)^2}{h} \sum_{j=1}^n \beta_j b_j c_j \quad (4.31)$$

4.3.3.4- Problema (3)

$$f_{13} = \frac{(1+\alpha)^2}{h} \sum_{j=1}^n \beta_j c_j a_j \quad (4.32)$$

$$f_{23} = \frac{(1+\alpha)^2}{h} \sum_{j=1}^n \beta_j c_j b_j \quad (4.33)$$

$$f_{33} = \frac{(1+\alpha)^2}{h} \sum_{j=1}^n \beta_j c_j^2 \quad (4.34)$$

4.3.4- Montagem do Sistema de Equações

Do equilíbrio entre as forças nos vínculos, nos problemas (0), (1), (2), (3) e (R), obtém-se o sistema, que tem incógnitas $\delta_1, \delta_2, \delta_3$:

$$f_{11} \delta_1 + f_{12} \delta_2 + f_{13} \delta_3 = -f_{10} \quad (4.35)$$

$$f_{21} \delta_1 + f_{22} \delta_2 + f_{23} \delta_3 = -f_{20} \quad (4.36)$$

$$f_{31} \delta_1 + f_{32} \delta_2 + f_{33} \delta_3 = -f_{30} \quad (4.37)$$

Substituindo-se as equações (4.23) a (4.34) nas equações (4.35) a (4.37) e lembrando-se da definição de β_j , para um pilar genérico j , obtém-se o sistema de equações na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n I_j a_j^2 & \sum_{j=1}^n I_j a_j b_j & \sum_{j=1}^n I_j a_j c_j \\ \sum_{j=1}^n I_j b_j a_j & \sum_{j=1}^n I_j b_j^2 & \sum_{j=1}^n I_j b_j c_j \\ \sum_{j=1}^n I_j c_j a_j & \sum_{j=1}^n I_j c_j b_j & \sum_{j=1}^n I_j c_j^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n I_j \phi_j a_j \\ \sum_{j=1}^n I_j \phi_j b_j \\ \sum_{j=1}^n I_j \phi_j c_j \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Observa-se das expressões (4.23) a (4.34), para esforços, que $f_{gh} = f_{hg}$, o que implica na matriz simétrica acima; calculam-se portanto apenas 6 elementos da matriz.

Denominando:

$$J_{gh} = E \sum_{j=1}^n I_j g_j h_j \quad (4.39)$$

escreve-se a forma matricial (4.38) como:

$$\begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ca} & J_{cb} & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\phi a} \\ J_{\phi b} \\ J_{\phi c} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

4.3.5- Esforços Solicitantes e Deslocamentos Finais

Obtem-se os esforços solicitantes finais fazendo-se a superposição dos esforços solicitantes obtidos no item 4.4, sendo que os dos problemas (1), (2) e (3) são multiplicados

respectivamente pelos valores de δ_1 , δ_2 e δ_3 , obtidos de (4.40).

Denominando-se, para um pilar genérico j:

$$K_j = \phi_j - (\delta_1 a_j + \delta_2 b_j + \delta_3 c_j) \quad (4.41)$$

obtém-se:

$$M_j = -\beta_j K_j (-\alpha)^i \quad (4.42)$$

$$Q_j = -(1+\alpha) \frac{\beta_j K_j}{h} (-\alpha)^i \quad (4.43)$$

$$N_j = -(1+\alpha)^2 \frac{\beta_j K_j}{h} (-\alpha)^{i-1} \quad (4.44)$$

e na base:

$$N_j = (1+\alpha) \frac{\beta_j K_j}{h} \quad (4.45)$$

O deslocamento do pilar genérico j é dado por:

$$u_j = (\delta_1 a_j + \delta_2 b_j + \delta_3 c_j) \quad (4.46)$$

4.3.6- Mudança de Eixos Triortogonais

Para proceder-se à diagonalização da matriz de (4.40), faz-se uma translação dos eixos Oxyz para uma nova origem denominada centro elástico e posteriormente uma rotação deste novo sistema de eixos para novas direções chamadas principais da associação espacial de pilares, conforme MANCINI [3], de onde obtém-se:

$$\delta_1 = \frac{J_{\phi a}}{J_{aa}} \quad (4.47)$$

$$\delta_2 = \frac{J_{\phi b}}{J_{bb}} \quad (4.48)$$

$$\delta_3 = \frac{J_{\phi c}}{J_{cc}} \quad (4.49)$$

Uma boa aplicação desta diagonalização está em se situar, de início o sistema de eixos triortogonais no centro elástico, segundo as direções principais da associação espacial de n pilares, facilmente identificável em configurações simétricas.

4.3.7- Exemplo 5

Seja a associação espacial de 4 pilares da figura 4.2.a, onde o pilar 1 sofre um recalque de fundação $\phi_1 = 0,001$ e os demais permanecem engastados em suas fundações. Todos os pilares têm dimensões iguais a 0,20m de largura por 0,80m de altura, tendo suas locações representadas em planta.

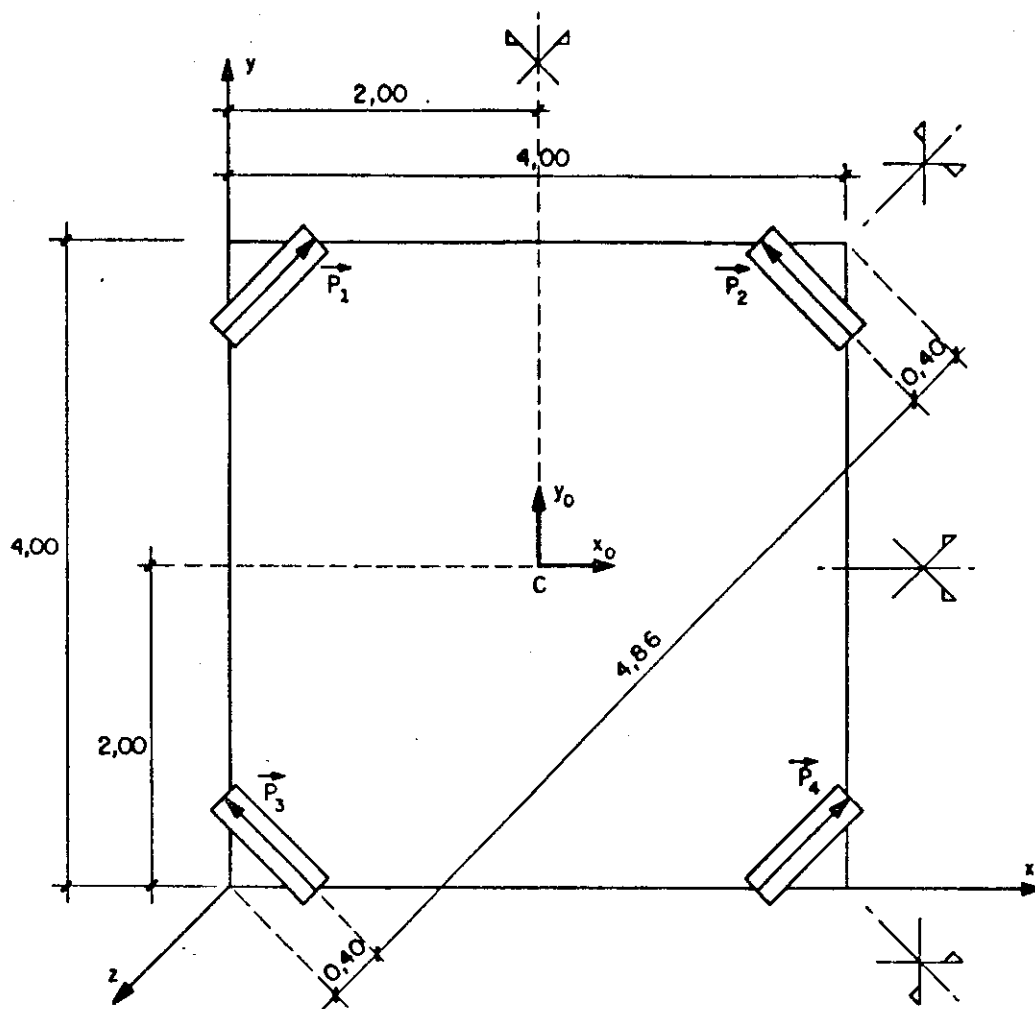


Fig. 4.2.a - Exemplo 5

Adota-se:

$$E_c = 2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$$

a) Parâmetros elásticos e geométricos dos pilares:

Como as dimensões dos 4 pilares são iguais, tem-se para um pilar genérico j:

$$I_j = 0,008533m^4$$

Da (2.46)

$$B_j = 19706,89tfm$$

b) Determinação do centro elástico $C(x_0, y_0)$

A observação da planta da associação, mostra que há 4 eixos de simetria, portanto o centro elástico situa-se na interseção deles.

Utilizando-se da figura (4.1), localiza-se perfeitamente um pilar j , através de seu vetor \vec{p}_j , com componentes a_j , b_j e c_j , em um sistema de eixos triortogonais da figura (4.2.a); lembrando-se da equação (4.54) tem-se:

Pilar	γ_j	a_j	b_j	c_j
1	17067,7	0,71	0,71	-2,43
2	17067,7	-0,71	0,71	5,26
3	17067,7	-0,71	0,71	0,40
4	17067,7	0,71	0,71	2,43

Com a equação (4.39) obtém-se:

$$J_{aa} = \sum \gamma_j a_j^2 = 34135,4 \text{ tfm}^4$$

$$J_{bb} = \sum \gamma_j b_j^2 = 34135,4 \text{ tfm}^4$$

$$J_{cc} = \sum \gamma_j c_j^2 = 676519,3 \text{ tfm}^4$$

$$J_{ab} = \sum \gamma_j a_j b_j = 0,00$$

$$J_{bc} = \sum \gamma_j b_j c_j = 68308,8 \text{ tfm}^4$$

$$J_{ac} = \sum \gamma_j c_j a_j = -68308,8 \text{ tfm}^4$$

Determinam-se as novas coordenadas (x_0, y_0) , para as quais J_{ac} e J_{bc} são iguais a zero, através de:

$$x_0 = \frac{J_{aa} J_{bc} - J_{ab} J_{ac}}{J_{aa} J_{bb} - J_{ab}^2} \Rightarrow x_0 = \frac{S_{xx} \times S_{yc} - S_{xy} \times S_{xc}}{S_{xx} \cdot S_{yy} - S_{xy}^2}$$

$$y_0 = \frac{-J_{bb} J_{ac} + J_{ab} J_{bc}}{J_{aa} J_{bb} - J_{ab}^2} \Rightarrow y_0 = \frac{-S_{yy} \times S_{xc} + S_{xy} \times S_{yc}}{S_{xx} \cdot S_{yy} - S_{xy}^2}$$

donde:

$$x_0 = 2,00 \text{ m}$$

$$y_0 = 2,00 \text{ m}$$

O ponto $C(x_0, y_0)$, denomina-se centro elástico da associação.

c) Determinação dos eixos principais

Através de uma rotação dos novos eixos correspondentes ao centro elástico, anula-se J_{ab} , através de:

$$\text{tg } 2\psi = \frac{2 J_{ab}}{J_{aa} - J_{bb}}$$

donde obtém-se:

$$\psi = 0^{\circ}$$

Portanto os eixos principais, são os próprios eixos de simetria da estrutura.

d) Determinação de $J_{\bar{g}\bar{h}}$

Para a obtenção de $C(x_0, y_0)$, houve uma translação dos eixos (x, y) . Modificando-se a componente c_j do pilar j para \bar{c}_j ; como a rotação ψ dos eixos (x_0, y_0) é nula, as componentes \bar{a}_j e \bar{b}_j dos pilares permanecem as mesmas:

$$\bar{a}_j = a_j \cos\psi + b_j \sin\psi = a_j$$

$$\bar{b}_j = a_j \sin\psi + b_j \cos\psi = b_j$$

$$\bar{c}_j = c_j - x_0 b_j + y_0 a_j = c_j - 2b_j + 2a_j$$

Obtém-se, portanto, para os 4 pilares, suas componentes segundo seus eixos centrais:

Pilar	γ_j	\bar{a}_j	\bar{b}_j	\bar{c}_j
1	17067,7	0,71	0,71	-2,43
2	17067,7	-0,71	0,71	2,43
3	17067,7	-0,71	0,71	-2,43
4	17067,7	0,71	0,71	2,43

diagonalizando-se assim a matriz de (4.40), composta agora pelos elementos de sua diagonal principal:

$$J_{\bar{a}\bar{a}} = \sum \gamma_j \bar{a}_j^2 = 34135,4 \text{ tfm}^4$$

$$J_{\bar{b}\bar{b}} = \sum \gamma_j \bar{b}_j^2 = 34135,4 \text{ tm}^4$$

$$J_{\bar{c}\bar{c}} = \sum \gamma_j \bar{c}^2 = 403132,25 \text{ tfm}^4$$

das equações (4.47) a (4.49) obtém-se:

$$\delta_1 = \frac{J_{\phi a}}{J_{\bar{a}\bar{a}}}$$

$$\delta_2 = \frac{J_{\phi b}}{J_{\bar{b}\bar{b}}}$$

$$\delta_3 = \frac{J_{\phi c}}{J_{\bar{c}\bar{c}}}$$

lembrando-se da equação (4.39):

$$J_{\phi a} = 12068,69(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + \phi_4)$$

$$J_{\phi b} = 12068,69(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)$$

$$J_{\phi c} = 41474,51(-\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 + \phi_4)$$

e finalmente:

$$\delta_1 = 0,3536(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + \phi_4)$$

$$\delta_2 = 0,3536(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)$$

$$\delta_3 = 0,1029(-\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 + \phi_4)$$

e) Problemas (0), (1), (2) e (3)

Obtidos os valores acima para δ_1 , δ_2 e δ_3 em função dos recalques ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_4 quaisquer dos pilares 1, 2, 3, 4, basta obterem-se os esforços solicitantes e deslocamentos para um pilar genérico j:

De (4.41) tem-se:

$$K_j = \phi_j - \delta_1 a_j - \delta_2 b_j - \delta_3 c_j$$

e das equações (4.42) a (4.46) tem-se:

$$M_j = -\beta_j K_j (-\alpha)^i$$

$$Q_j = -\frac{(1+\alpha)}{h} \beta_j K_j (-\alpha)^i$$

$$N_j = \frac{(1+\alpha)}{h} \beta_j K_j \quad , \text{na base}$$

$$N_j = -\frac{(1+\alpha)^2}{h} \beta_j K_j (-\alpha)^{i-1}$$

$$u_j = z(\delta_1 a_j + \delta_2 b_j + \delta_3 c_j)$$

Substituindo-se os valores das rotações ϕ_j dos 4 pilares nas equações de δ_1 , δ_2 e δ_3 obtém-se:

$$\delta_1 = 0,0003536$$

$$\delta_2 = 0,0003536$$

$$\delta_3 = -0,0001029$$

Substituindo-se os valores de ϕ_j e $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ na (4.41), obtém-se K_j , para os 4 pilares:

$$K_1 = 0,000250$$

$$K_2 = 0,000250$$

$$K_3 = -0,000250$$

$$K_4 = -0,000250$$

Para o pilar 1, tem-se:

PILAR 1	
$M_1 = -4,93(-\alpha)^i$	
$Q_1 = -2,08(-\alpha)^i$	
$N_1 = 2,08$	(na base)
$N_1 = 9,86(-\alpha)^i$	
$u_1 = 0,000750z$	

f) Esforços solicitantes e deslocamentos finais

Os esforços solicitantes dos pilares 1 e 2 são iguais e de sinais contrários aos dos pilares 3 e 4, como se vê da equação (4.41).

Pelo fato de haver recalque rotacional de fundação apenas no pilar 1, de os pilares terem todos as mesmas dimensões e pela localização em planta, observa-se que os deslocamentos horizontais dos pilares 2, 3, 4 serão 1/3 do deslocamento do pilar 1.

z(m)	PILAR 1			
	M_1 (tm)	Q_1 (t)	N_1 (t)	u_1 (m)
0	-4,93	-2,08	2,08	0,0000
3	1,32	0,56	-2,64	0,0023
6	-0,35	-0,15	0,71	0,0045
9	0,09	0,04	-0,19	0,0068
12	-0,03	-0,01	0,05	0,0090
15	0,00	0,00	-0,01	0,0113
18	0,00	0,00	0,00	0,0135
21	0,00	0,00	0,00	0,01575
24	0,00	0,00	0,00	0,01800
27	0,00	0,00	0,00	0,02025
30	0,00	0,00	0,00	0,0225

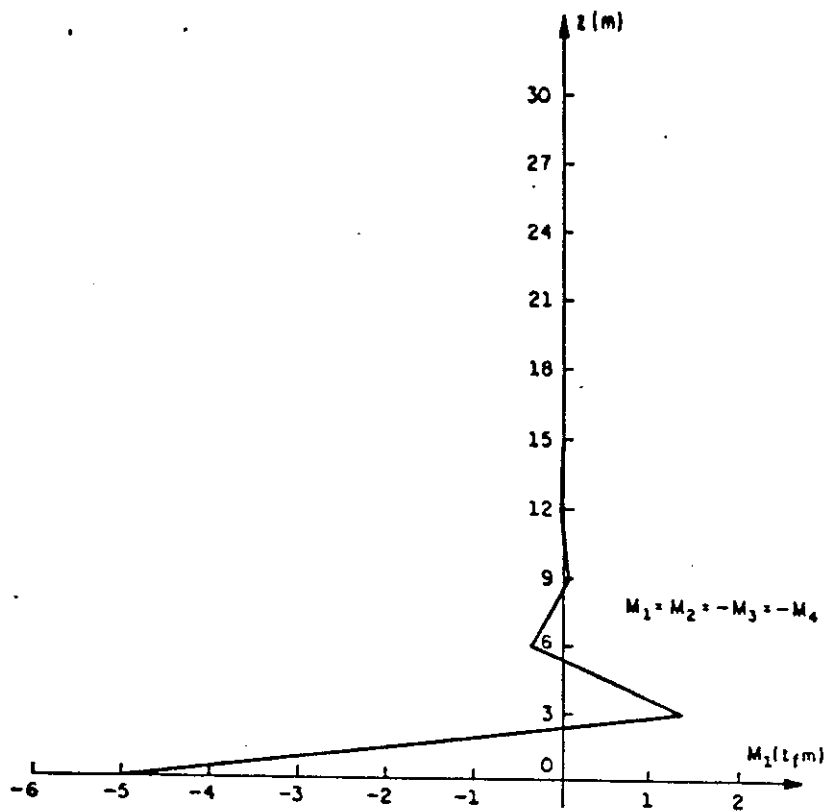


Fig. 4.2.b - Momento fletor no pilar 1

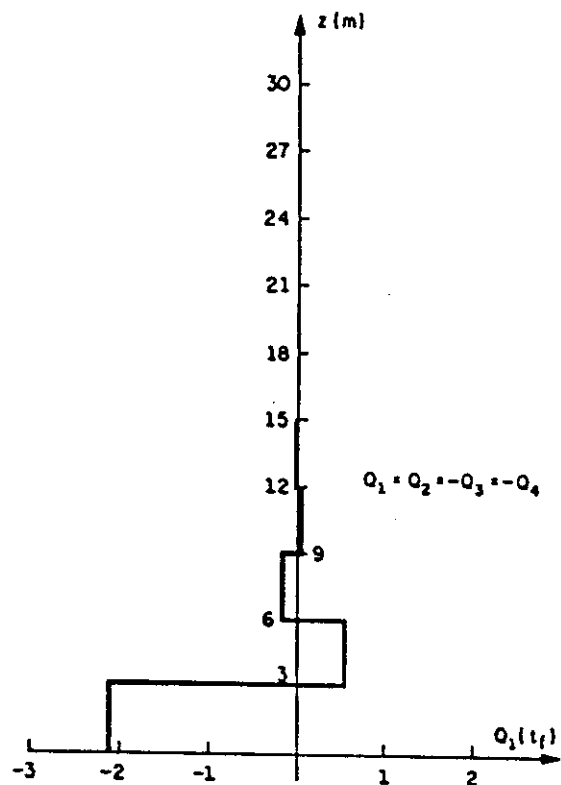


Fig. 4.2.c - Esforço cortante no pilar 1

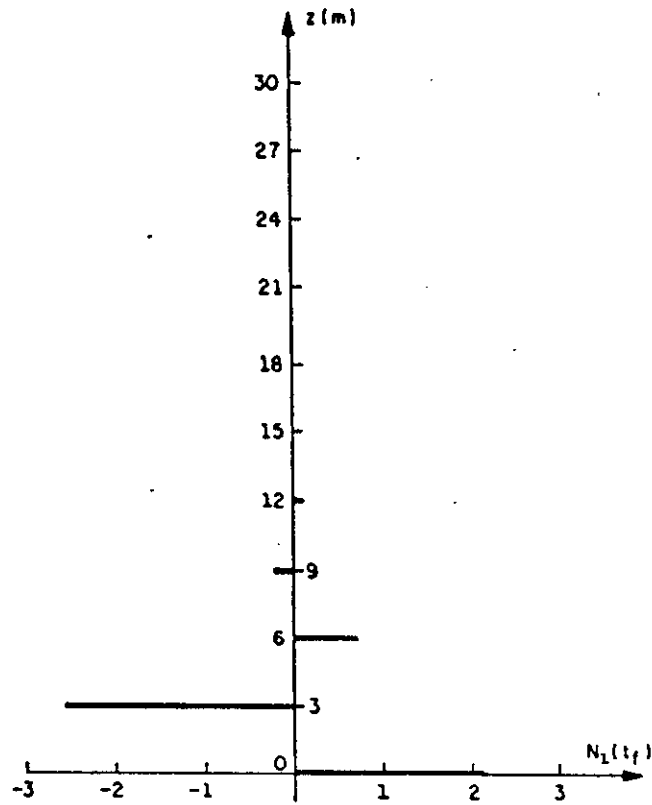


Fig. 4.2.d - Força horizontal do pilar 1 na laje

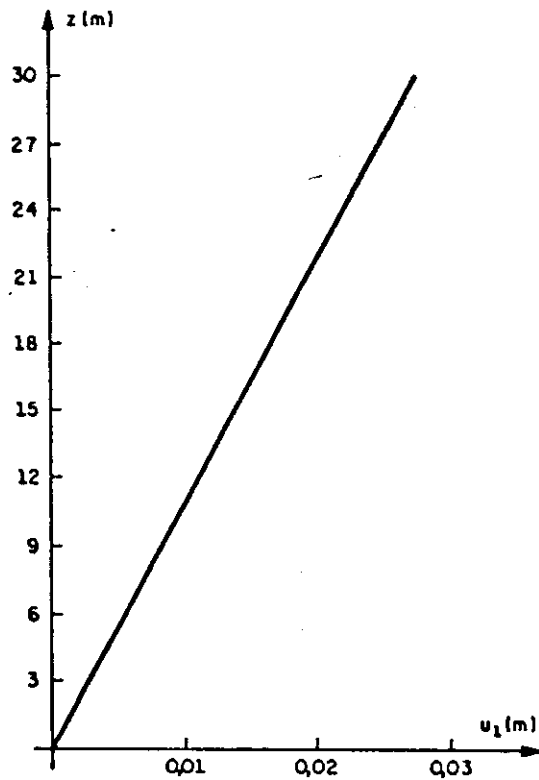


Fig. 4.2.e - Deslocamento horizontal no pilar 1

4.4- ASSOCIAÇÃO ESPACIAL DE N PILARES, EM BASE ELÁSTICA, COMPUTANDO-SE FLEXÃO LOCAL ENTRE OS ANDARES

4.4.1- Introdução

Obtém-se a solução da associação espacial, somando-se, no esquema estrutural da figura 4.2 do item 4.3 composto pelos problemas (0), (1), (2) e (3), o problema (E) da figura 4.3, onde os n pilares tem suas bases engastadas e estão submetidos a um carregamento horizontal distribuído, já estudado por STAMATO [1] e MANCINI [3].

A partir do esquema estrutural da figura 4.3, e em cada problema, faz-se o equilíbrio de momentos fletores, na base de cada pilar, obtendo-se, assim, os coeficientes de rigidez, montando-se um sistema de equações em função de δ_1 , δ_2 , δ_3 e das rotações ϕ_j dos n pilares.

Seja a associação da figura 4.3:

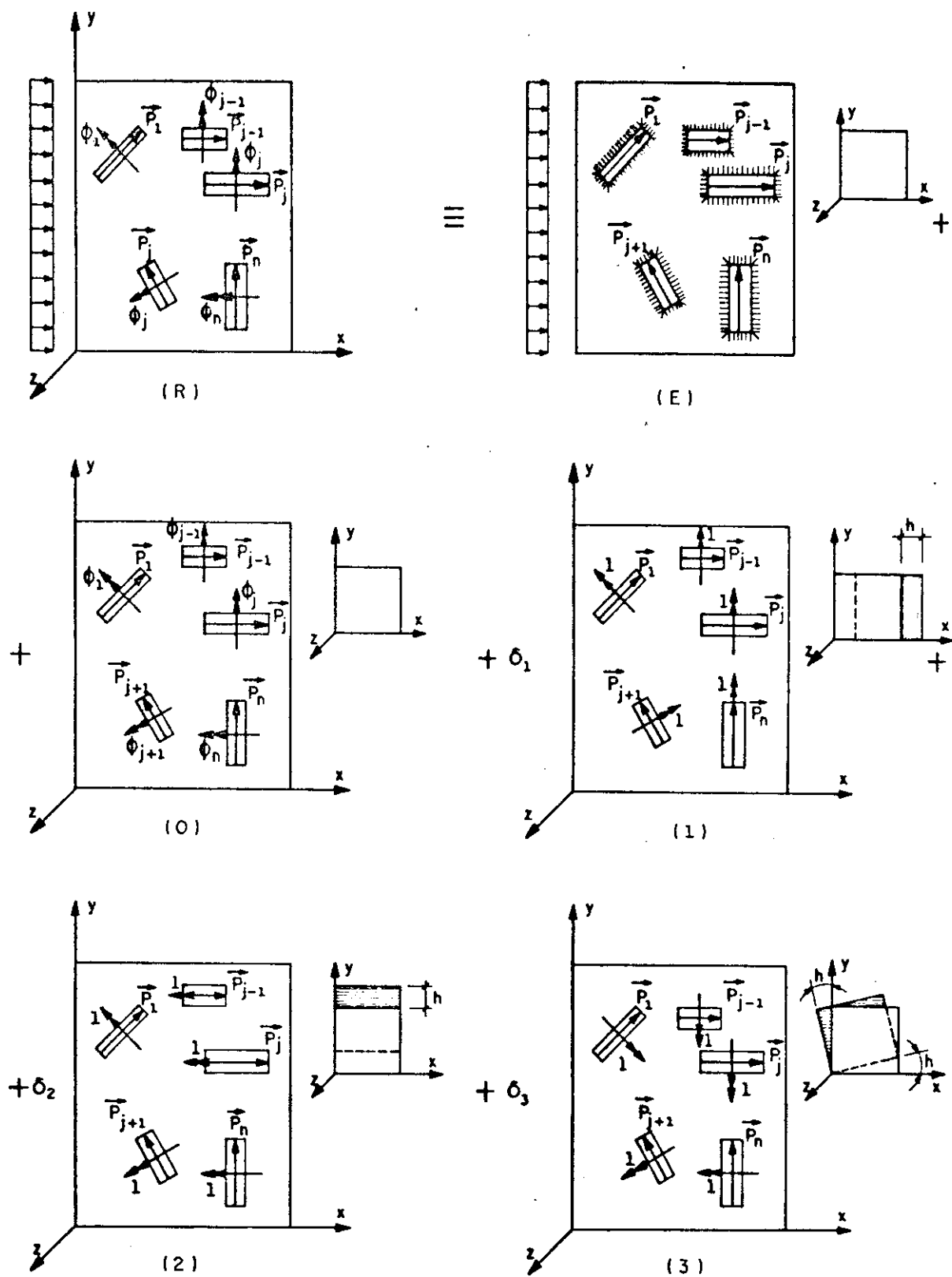


Fig. 4.3 - Associação espacial de n pilares em base elástica

4.4.2- Obtenção dos Coeficientes de Rigidez

Adota-se como positivo, o coeficiente de rigidez que tenha o mesmo sentido do ângulo de rotação de base ϕ_j , do problema (0) da figura 4.3.

4.4.2.1- Problema (E)

O carregamento externo p , verticalmente distribuído, ao longo da estrutura será caracterizado por um vetor unitário, que tem componentes a , b e c , como mostra a figura 4.4:

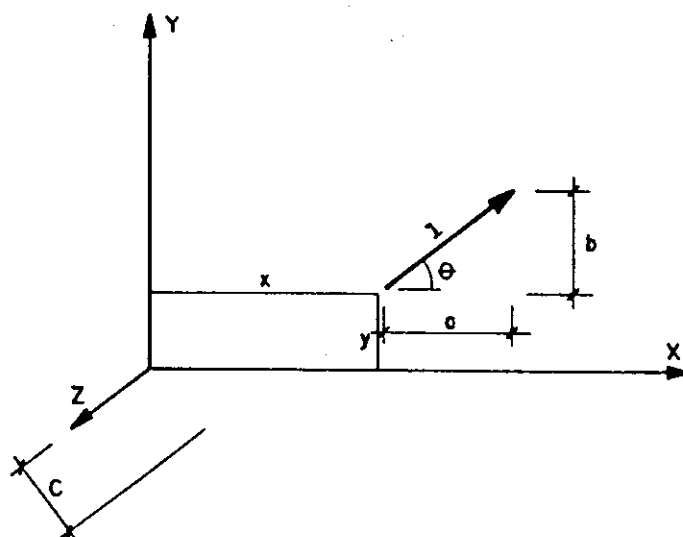


Fig. 4.4 - Definição do plano de carga

donde obtém-se:

$$a = \cos \theta \quad (4.50)$$

$$b = \sin \theta \quad (4.51)$$

$$c = xb - ya \quad (4.52)$$

Cada pilar absorverá uma parcela do carregamento externo, p , diretamente proporcional a:

$$r_j = \gamma_j \left(\frac{a_j a}{J_{aa}} + \frac{b_j b}{J_{bb}} + \frac{c_j c}{J_{cc}} \right) \quad (4.53)$$

onde:

$$\gamma_j = EI_j \quad (4.54)$$

portanto:

$$f_{j,E} = -r_j M \quad (4.55)$$

4.4.2.2- Problema (0)

$$f_{j,0} = (\beta_j + S_j) \phi_j \quad (4.56)$$

4.4.2.3- Problema (1)

$$f_{j,1} = -\beta_j a_j \quad (4.57)$$

4.4.2.4- Problema (2)

$$f_{j,2} = -\beta_j b_j \quad (4.58)$$

4.4.2.5- Problema (3)

$$f_{j,3} = -\beta_j c_j \quad (4.59)$$

4.4.3- Obtenção do Sistema de Equações

Somando-se os coeficientes de rigidez dos problemas (E) e (0) aos dos problemas (1), (2) e (3) multiplicados por δ_1 , δ_2 e δ_3 , respectivamente, e igualando-se esta soma aos momentos externos na base, que são nulos, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$(\beta_j + S_j)\phi_j - \beta_j(\delta_1 a_j + \delta_2 b_j + \delta_3 c_j) = r_j M \quad (4.60)$$

com $j = 1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, n$

4.4.4- Resolução do Sistema de Equações

Os valores de δ_1 , δ_2 , δ_3 já foram obtidos em função dos n ϕ_j no item 4.3, supondo-se que a associação espacial de n pilares tenha seu sistema de referência com origem no seu centro elástico e que os eixos deste sistema de referência estejam orientados nas direções principais; substituindo-se, portanto, as equações (4.47) a (4.49) na equação (4.60), obtém-se:

$$(\beta_j + S_j)\phi_j - \beta_j \left(\frac{J_{\phi a}}{J_{aa}} a_j + \frac{J_{\phi b}}{J_{bb}} b_j + \frac{J_{\phi c}}{J_{cc}} c_j \right) = r_j M \quad (4.61)$$

com $j = 1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, n$

Resolvendo-se o sistema de equações (4.61), em função dos ϕ_j para $j = 1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, n$ e substituindo-se nas equações (4.47) e (4.49) obtém-se os valores de δ_1 , δ_2 e δ_3 .

4.4.5- Esforços Solicitantes e Deslocamentos Finais

Obtem-se, somando-se os esforços solicitantes e deslocamentos das equações (4.41) a (4.46) do item 4.3.5 aos das equações (2.35) a (2.37), substituindo-se μ_j por r_j e fazendo-se $\phi = 0$.

4.4.6- Exemplo 6

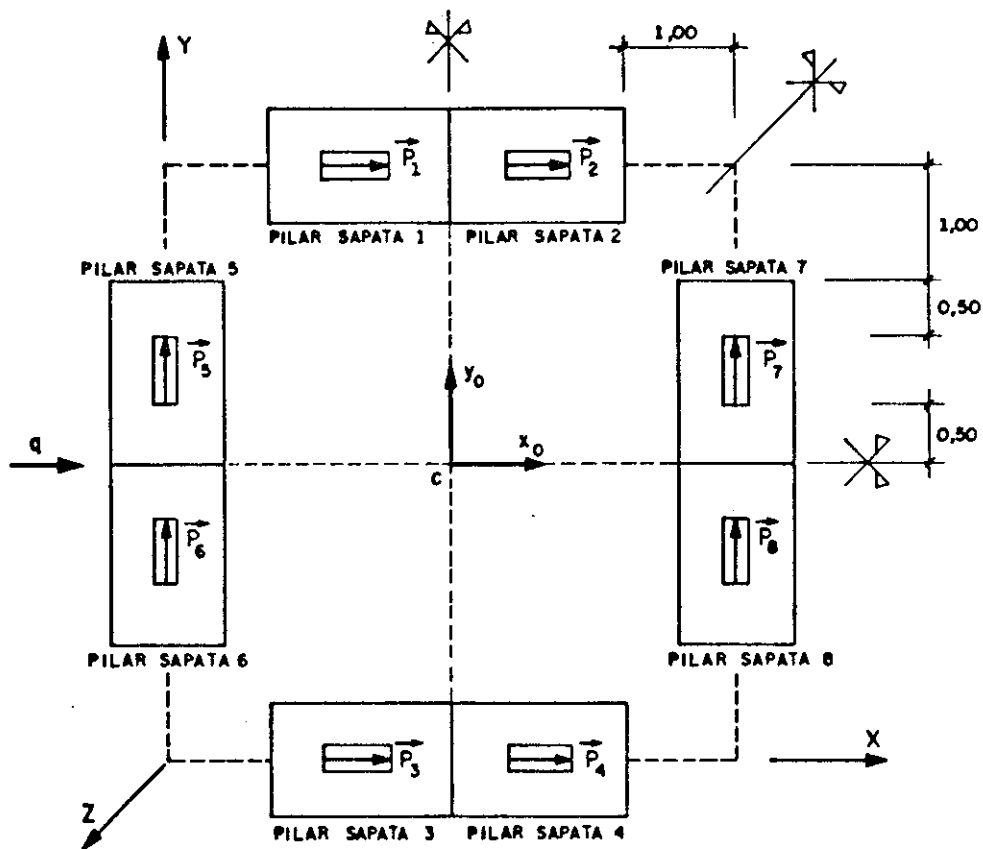


Fig. 4.5 - Exemplo 6

Seja a planta acima de uma associação espacial de 8 pilares, com pé-direito de 3,00m e altura total de 30,00m, submetida ao carregamento indicado de 0,10tf/m distribuído uniformemente ao longo de sua altura. Todas as sapatas têm dimensões 1,00x1,60 e os pilares têm dimensões 0,15x0,60, em metros.

Adota-se:

$$E_c = 2 \times 10^6 \text{tf/m}^2$$

$$\nu = 0,325$$

$$E_s = 5400 \text{tf/m}^2$$

a) Parâmetros elásticos e geométricos das sapatas e dos pilares:

Como todos os pilares são iguais, tem-se para um pilar genérico j:

$$I_j = 0,0027 \text{m}^4$$

Da (2.46) tem-se:

$$\beta_j = 6235,38 \text{tfm}$$

Como todas as sapatas são iguais, para uma sapata genérica j, tem-se:

$$I_f = 0,341 \text{m}^4$$

Do item (2.2.9) obtém-se:

$$K_{\phi} = 1,78$$

$$c_{\phi} = 8490 \text{tf/m}^3$$

$$S = 2895,10 \text{tfm}$$

b) Determinação do centro elástico $C(x_0, y_0)$

A observação da planta da associação, mostra que há 4 eixos de simetria; portanto, o centro elástico situa-se na intersecção deles.

Utilizando-se da figura 4.1, localiza-se perfeitamente um pilar j , através de seu vetor \vec{p}_j , com componentes a_j , b_j e c_j , no sistema de eixos triortogonais da figura 4.5; lembrando-se da (4.54) tem-se:

PILAR	γ_j	a_j	b_j	c_j
1	5400	1,00	0,00	-5,20
2	5400	1,00	0,00	-5,20
3	5400	1,00	0,00	0,00
4	5400	1,00	0,00	0,00
5	5400	0,00	1,00	0,00
6	5400	0,00	1,00	0,00
7	5400	0,00	1,00	5,20
8	5400	0,00	1,00	5,20

Com a equação (4.39) obtém-se:

$$J_{aa} = \Sigma \gamma_j a_j^2 = 21600$$

$$J_{bb} = \Sigma \gamma_j b_j^2 = 21600$$

$$J_{cc} = \Sigma \gamma_j c_j^2 = 584064$$

$$J_{ab} = \Sigma \gamma_j a_j b_j = 0,00$$

$$J_{bc} = \Sigma \gamma_j b_j c_j = 56160$$

$$J_{ca} = \Sigma \gamma_j c_j a_j = -56160$$

Determinam-se as novas coordenadas (x_o, y_o) , para as quais J_{ac} e J_{bc} são iguais a zero, através de:

$$x_o = \frac{J_{aa} J_{bc} - J_{ab} J_{ac}}{J_{aa} J_{bb} - J_{ab}^2}$$

$$y_o = \frac{-J_{bb} J_{ac} + J_{ab} J_{bc}}{J_{aa} J_{bb} - J_{ab}^2}$$

donde:

$$x_o = 2,60m$$

$$y_o = 2,60m$$

c) Determinação dos eixos principais

Através de uma rotação dos novos eixos correspondentes ao centro elástico, anula-se J_{ab} , através de:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2J_{ab}}{J_{aa} - J_{ab}}$$

donde obtém-se:

$$\psi = 0^\circ$$

Portanto os eixos principais são os próprios eixos de simetria em planta.

d) Determinação de $J_{\bar{g}\bar{h}}$

Para a obtenção de $C(x_0, y_0)$ houve uma translação dos eixos (x, y) , modificando-se a componente c_j do pilar j para \bar{c}_j ; como a rotação ψ dos eixos (x_0, y_0) é nula, as componentes a_j e b_j dos pilares permanecem as mesmas:

$$\begin{aligned} &= \\ \bar{a}_j &= a_j \cos\psi + b_j \operatorname{sen}\psi = a_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \\ \bar{b}_j &= -a_j \operatorname{sen}\psi + b_j \cos\psi = b_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \\ \bar{c}_j &= c_j - x_0 b_j + y_0 a_j = c_j - 2,60 b_j + 2,60 a_j \end{aligned}$$

Obtém-se, portanto, para os 8 pilares, suas componentes segundo seus eixos centrais:

PILAR	γ_j	\bar{a}_j	\bar{b}_j	\bar{c}_j
1	5400	1,00	0,00	-2,60
2	5400	1,00	0,00	-2,60
3	5400	1,00	0,00	2,60
4	5400	1,00	0,00	2,60
5	5400	0,00	1,00	-2,60
6	5400	0,00	1,00	-2,60
7	5400	0,00	1,00	2,60
8	5400	0,00	1,00	2,60

diagonalizando-se, assim, a matriz de (4.40), composta agora pelos seus elementos da diagonal principal:

$$J_{\bar{a}\bar{a}} = \sum \gamma_j \bar{a}_j^2 = 21600$$

$$J_{\bar{b}\bar{b}} = \sum \gamma_j \bar{b}_j^2 = 21600$$

$$J_{\bar{c}\bar{c}} = \sum \gamma_j \bar{c}_j^2 = 292032$$

das equações (4.47) a (4.49) obtém-se:

$$\delta_1 = \frac{J_{\phi a}}{J_{\bar{a}\bar{a}}}$$

$$\delta_2 = \frac{J_{\phi b}}{J_{\bar{b}\bar{b}}}$$

$$\delta_3 = \frac{J_{\phi c}}{J_{\bar{c}\bar{c}}}$$

Lembrando-se da equação (4.39):

$$J_{\phi a}^{==} = 5400(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)$$

$$J_{\phi b}^{==} = 5400(\phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \phi_8)$$

$$J_{\phi c}^{==} = 14040(-\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - \phi_5 - \phi_6 + \phi_7 + \phi_8)$$

e finalmente:

$$\delta_1 = 0,25(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)$$

$$\delta_2 = 0,25(\phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \phi_8) \quad (A)$$

$$\delta_3 = 0,048(-\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - \phi_5 - \phi_6 + \phi_7 + \phi_8)$$

e) Determinação da parcela de carga q_j absorvida por cada pilar j

De (4.53) tem-se que:

$$q_j = r_j q$$

onde:

$$r_j = \gamma_j \left(\frac{a a_j}{J_{aa}} + \frac{b b_j}{J_{bb}} + \frac{c c_j}{J_{cc}} \right)$$

Para a carga q da figura 4.4, tem-se:

$$a = 1,00 \quad b = 0,00 \quad c = 0,00$$

Portanto:

PILAR	γ_j	\bar{a}_j	r_j	q_j
1	5400	1,00	0,25	0,025
2	5400	1,00	0,25	0,025
3	5400	1,00	0,25	0,025
4	5400	1,00	0,25	0,025
5	5400	0,00	0,00	0,00
6	5400	0,00	0,00	0,00
7	5400	0,00	0,00	0,00
8	5400	0,00	0,00	0,00

Observa-se que os pilares com orientação do vetor \vec{p}_j perpendicular à carga externa não absorvem qualquer parcela delas, e portanto essa carga será absorvida em frações iguais a 1/4 cada, pelos pilares 1, 2, 3 e 4.

f) Determinação de δ_1 , δ_2 e δ_3 e dos ϕ_j , via processo iterativo

Para um pilar genérico j, da equação (4.60) tem-se:

$$(\beta_j + S_j)\phi_j - \beta_j(\delta_1 a_j + \delta_2 b_j + \delta_3 c_j) = r_j M$$

portanto para os 8 pilares, tem-se:

$$9130,48 \phi_1 - 6235,38(\delta_1 + 0 - 2,60 \delta_3) = 11,25$$

$$9130,48 \phi_2 - 6235,38(\delta_1 + 0 - 2,60 \delta_3) = 11,25$$

$$\begin{aligned}
9130,48 \phi_3 - 6235,38(\delta_1 + \delta_2 + 2,60 \delta_3) &= 11,25 \\
9130,48 \phi_4 - 6235,38(\delta_1 + \delta_2 + 2,60 \delta_3) &= 11,25 \quad (B) \\
9130,48 \phi_5 - 6235,38(0 + \delta_2 - 2,60 \delta_3) &= 0,00 \\
9130,48 \phi_6 - 6235,38(0 + \delta_2 - 2,60 \delta_3) &= 0,00 \\
9130,48 \phi_7 - 6235,38(0 + \delta_2 + 2,60 \delta_3) &= 0,00 \\
9130,48 \phi_8 - 6235,38(0 + \delta_2 + 2,60 \delta_3) &= 0,00
\end{aligned}$$

Fazendo-se inicialmente δ_1 , δ_2 e δ_3 iguais a zero e substituindo-se em (B), obtém-se: ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_4 iguais a 0,001232 e os demais ϕ_j iguais a zero, devido ao fato do carregamento ser absorvido por, apenas, os pilares 1, 2, 3 e 4.

Substituindo-se os valores de ϕ_j obtidos em (A), obtém-se:

$$\delta_1 = 0,001232$$

$$\delta_2 = 0,00000$$

$$\delta_3 = 0,00000$$

devido ao fato de haverem apenas deslocamentos segundo o eixo x.

Repetindo-se o processo, chega-se a:

$$\delta_1 = 0,003885$$

$$\delta_2 = 0,00000$$

$$\delta_3 = 0,00000$$

e portanto:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0,003885$$

e
$$\phi_5 = \phi_6 = \phi_7 = \phi_8 = 0,000000$$

g) Problema (E)

Das equações (2.35), (2.36) e (2.37) com $\phi = 0$, tem-se para um pilar genérico j:

$$M_j = 0,0125(30-z)^2$$

$$Q_j = 0,025(30-z)$$

$$u = 4,6296 \times 10^{-6} \left[\frac{z^4}{24} - 30z^2 \left(\frac{z}{6} - 7,5 \right) \right]$$

h) Problemas (0), (1), (2) e (3)

Como $\delta_2 = \delta_3 = 0$, só há os problemas (0) e (1); e como as rotações ϕ_j para um pilar genérico j são iguais a δ_1 , de (4.41) resulta K_j nulo para os 4 pilares, portanto não existem correções a serem feitas ao problema (E)

De (4.46), o deslocamento horizontal é:

$$u = 0,003885 z$$

i) Esforços solicitantes e deslocamentos finais

Obtém-se do problema (E) os esforços solicitantes, e os deslocamentos da superposição dos problemas (E) e (1).

z	PILAR 1 = 2 = 3 = 4			
	M_1 (tfm)	Q_1 (tf)	N_1 (tf)	u(m)
0	11,25	0,75	0,00	0,0000
3	9,11	0,68	0,00	0,0204
6	7,20	0,60	0,00	0,0561
9	5,51	0,53	0,00	0,1038
12	4,05	0,45	0,00	0,1606
15	2,81	0,38	0,00	0,2243
18	1,80	0,30	0,00	0,2927
21	1,01	0,23	0,00	0,3641
24	0,45	0,15	0,00	0,4372
27	0,11	0,08	0,00	0,5111
30	0,00	0,00	0,00	0,5853

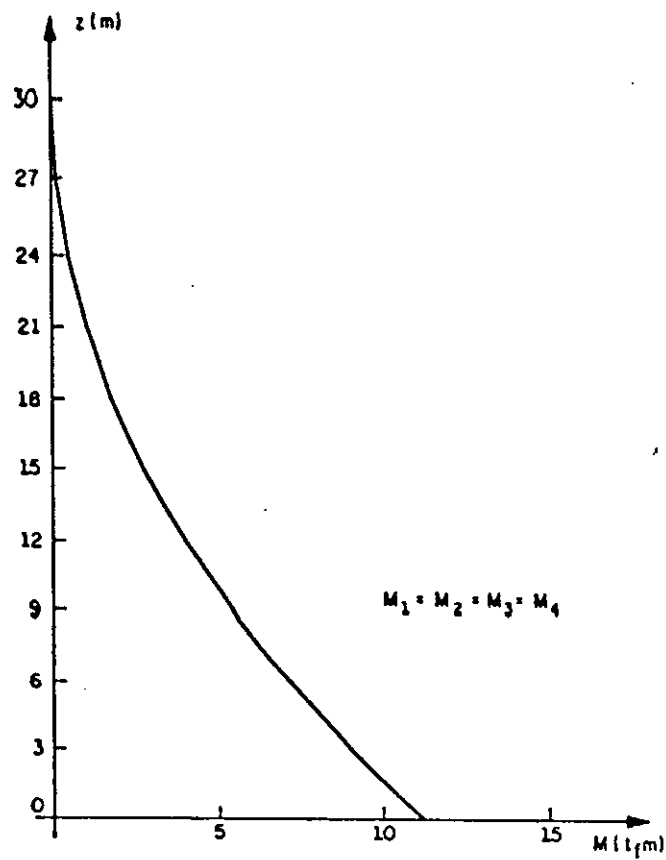


FIG. 4.5.a - Momento fletor nos pilares 1, 2, 3 e 4

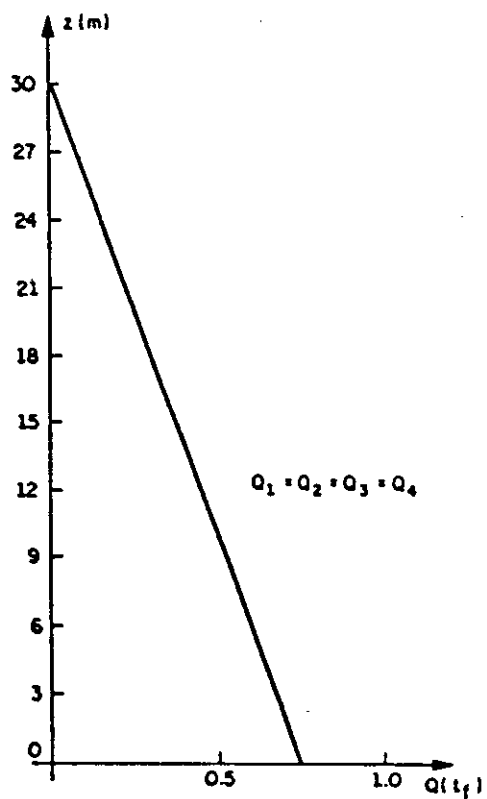


Fig. 4.5.b - Esforço cortante nos pilares 1, 2, 3 e 4

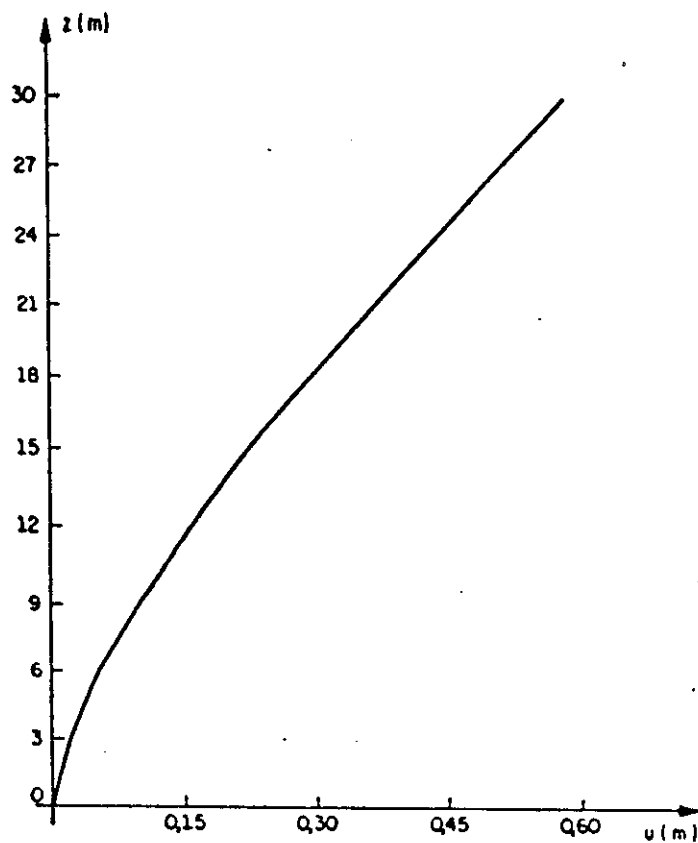


Fig. 4.5.c - Deslocamento horizontal da associação

O fato de δ_1 ser igual a ϕ_j para um pilar genérico j, vem de expressão:

$$\frac{I_j}{\sum I_i} \frac{M}{c_\phi \phi_j}$$

ser constante para todas os pilares, o que implica em os momentos de inércia das fundações serem proporcionais aos momentos de inércia dos pilares.

4.4.6- EXEMPLO 6.1

- a) Altera-se, agora as dimensões das sapatas 1 e 3 para 1,60x1,60, em metros; mantendo-se as dimensões das demais constantes.

Portanto, para as sapatas 1 e 3 tem-se:

$$I_f = 0,546m^4$$

Do item 2.2.1 e de BARKAN [5] obtém-se:

$$K_\phi = 1,99$$

$$c_\phi = 7509\text{tf}/m^3$$

$$S = 4100,85\text{tfm}$$

- b) As equações de (B), ficam da seguinte maneira:

$$10336,25 \phi_1 - 6235,38(\delta_1 + 0 - 2,60 \delta_3) = 11,25$$

$$9130,48 \phi_2 - 6235,38(\delta_1 + 0 - 2,60 \delta_3) = 11,25$$

$$10336,25 \phi_3 - 6235,38(\delta_1 + 0 + 2,60 \delta_3) = 11,25$$

$$9130,48 \phi_4 - 6235,38(\delta_1 + 0 + 2,60 \delta_3) = 11,25 \quad (\text{B.1})$$

$$9130,48 \phi_5 - 6235,38(0 + \delta_2 - 2,60 \delta_3) = 0,00$$

$$9130,48 \phi_6 - 6235,38(0 + \delta_2 - 2,60 \delta_3) = 0,00$$

$$9130,48 \phi_7 - 6235,38(0 + \delta_2 + 2,60 \delta_3) = 0,00$$

$$9130,48 \phi_8 - 6235,38(0 + \delta_2 + 2,60 \delta_3) = 0,00$$

Observa-se que houve modificações apenas nas equações dos pilares 1 e 3.

Da mesma maneira que o exemplo anterior, via processo iterativo, com as equações de (A) e (B1), obtém-se:

$$\delta_1 = 0,00325083$$

$$\delta_2 = 0,000000$$

$$\delta_3 = 0,000000$$

$$\phi_1 = \phi_3 = 0,00304946$$

$$\phi_2 = \phi_4 = 0,00345220$$

Observe-se que neste caso, as rotações dos pilares 1 e 3 são diferentes das dos pilares 2 e 4 e diferentes de δ_1 , resultando, então em K_j , da equação (4.41), diferente de zero.

c) Problema (E)

Igual ao exemplo anterior

d) Problemas (0), (1) e (3)

Como os valores de δ_2 e δ_3 são nulos, apenas existirão os problemas (0) e (1).

Das equações (4.41) a (4.46), obtém-se:

$$M_j = -\beta_j(\phi_j - \delta_1)(-\alpha)^j$$

$$Q_j = \frac{-(1+\alpha)\beta_j}{h} (\phi_j - \delta_1)(-\alpha)^i \quad Q_j = \frac{(1+\alpha)M_j}{h}$$

$$N_j = \frac{(1+\alpha)\beta_j}{h} (\phi_j - \delta_1) \quad , \text{ na base}$$

$$N_j = - \frac{(1+\alpha)^2 \beta_j}{h} (\phi_j - \delta_1)(-\alpha)^{i-1} \quad N_j = - \frac{6,00}{h} M_j$$

$$u = \delta_1 z$$

PILAR 1 = 3	PILAR 2 = 4
$M_1 = 1,255 (-\alpha)^i$	$M_2 = -1,255 (-\alpha)^i$
$Q_1 = 0,531 (-\alpha)^i$	$Q_2 = -0,531 (-\alpha)^i$
$N_1 = -0,531 \quad \text{na base}$	$N_2 = 0,531 \quad \text{na base}$
$N_1 = -2,510 (-\alpha)^i$	$N_2 = 2,510 (-\alpha)^i$
$u = 0,00325083 z$	

Observa-se que o valor de K_j igual para os pilares 1, 3 e 2, 4, mas de sinais contrários, mostra que esta associação espacial corresponde a 2 associações planas dos pilares 1, 2 e 3, 4, paralelas; implicando em esforços solicitantes iguais para os pilares 1,3 e 2,4.

e) Esforços solicitantes e deslocamentos finais

Obtém-se fazendo a superposição dos esforços solicitantes e deslocamentos obtidos nos problemas (E), (0) e (1).

z	PILR 2 = 4			PILAR 1 = 3			
	M ₁	Q ₁	N ₁	M ₂ (tfm)	Q ₂ (tf)	N ₂ (tf)	u(m)
0	9,99	0,22	0,53	12,51	1,28	-0,53	0,0000
3	9,45	0,82	-0,67	8,78	0,54	0,67	0,0185
6	7,11	0,56	0,18	7,29	0,64	-0,18	0,0523
9	5,54	0,54	-0,05	5,49	0,52	0,05	0,0980
12	4,04	0,45	0,01	4,06	0,45	-0,01	0,1530
15	2,81	0,38	0,00	2,81	0,38	0,00	0,2148
18	1,80	0,30	0,00	1,80	0,30	0,00	0,2813
21	1,01	0,23	0,00	1,01	0,23	0,00	0,3508
24	0,45	0,15	0,00	0,45	0,15	0,00	0,4220
27	0,11	0,08	0,00	0,11	0,08	0,00	0,4940
30	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,5663

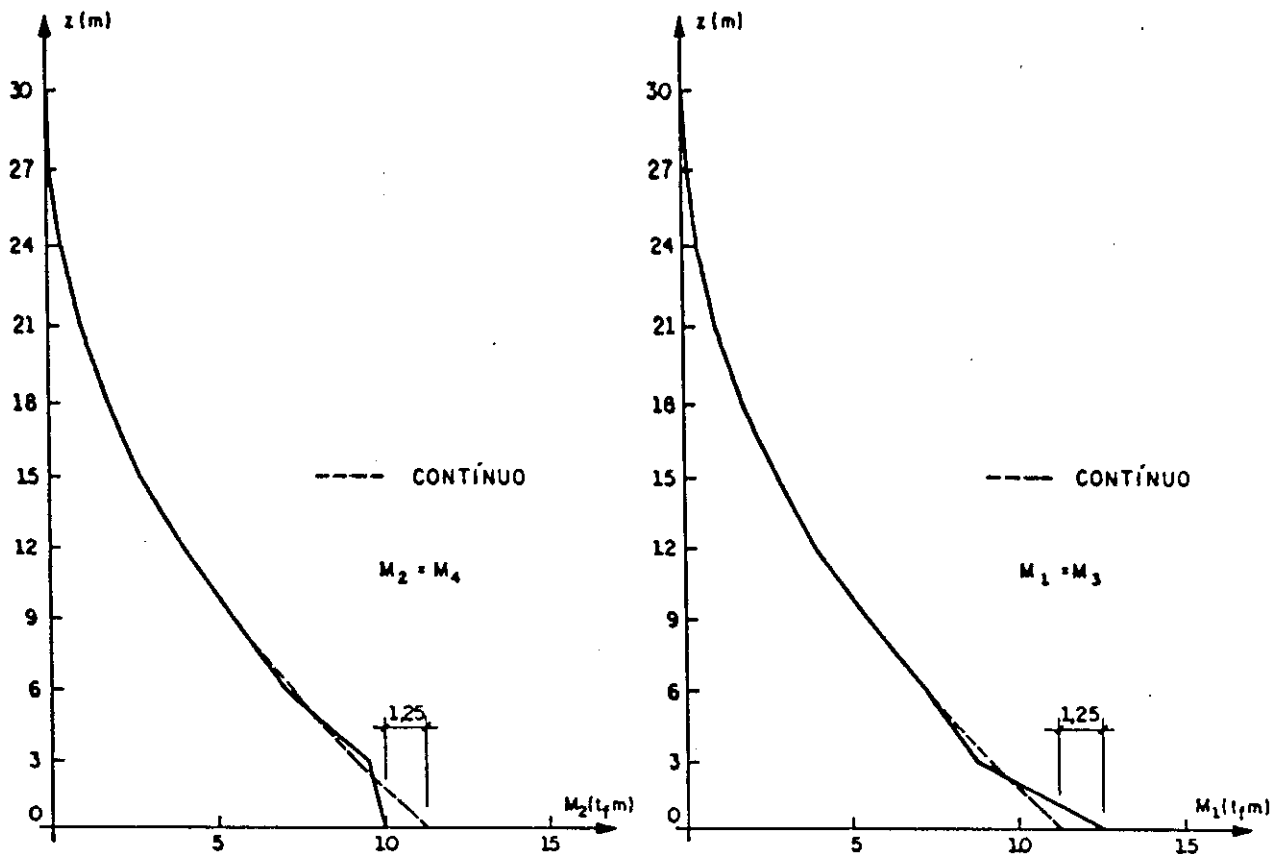


Fig. 4.5.d - Momento fletor nos pilares 1 e 2

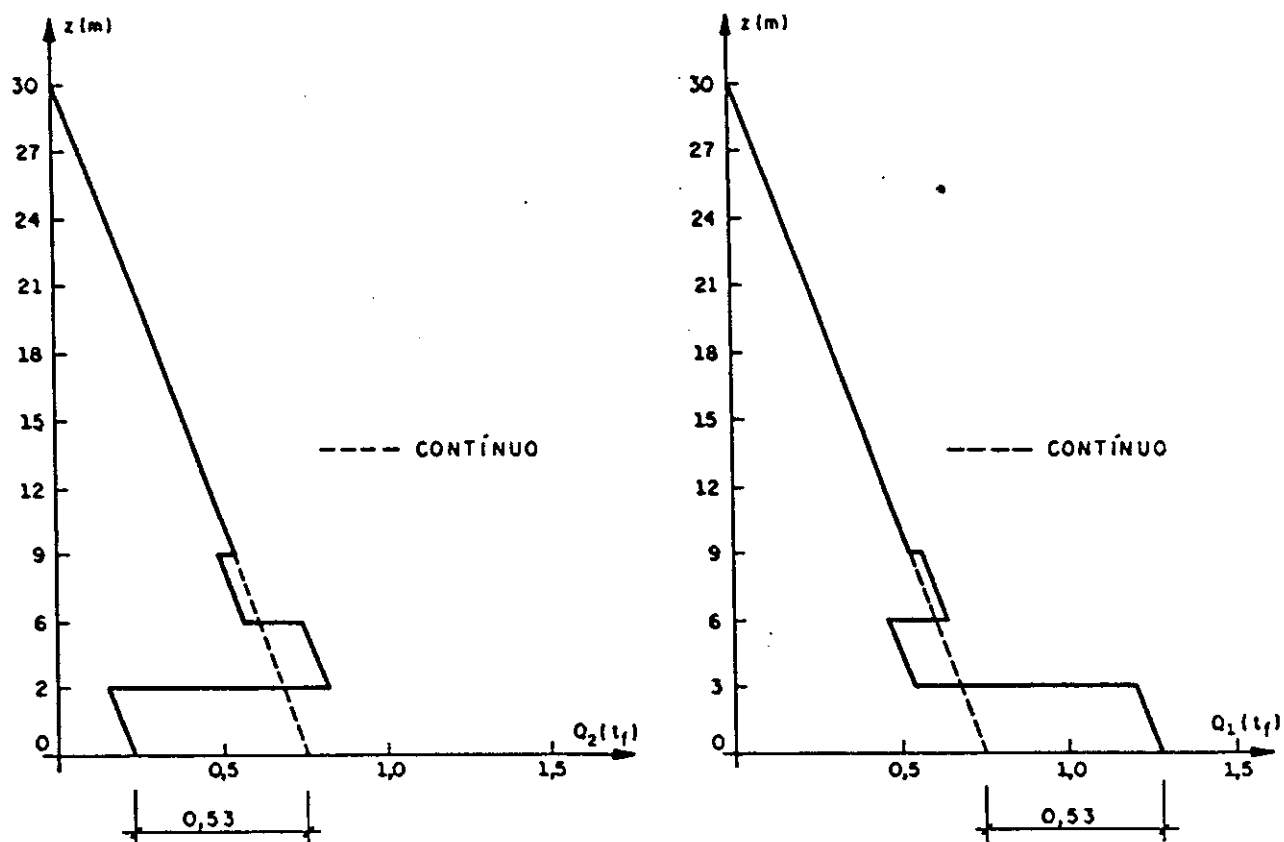


Fig. 4.5.e - Esforço cortante nos pilares 1 e 2

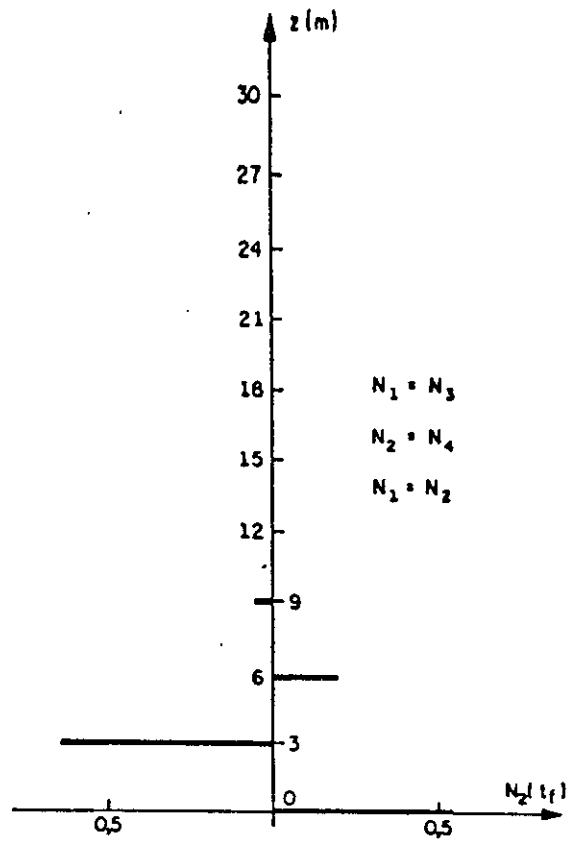


Fig. 4.5.f - Força horizontal do pilar 2 na laje

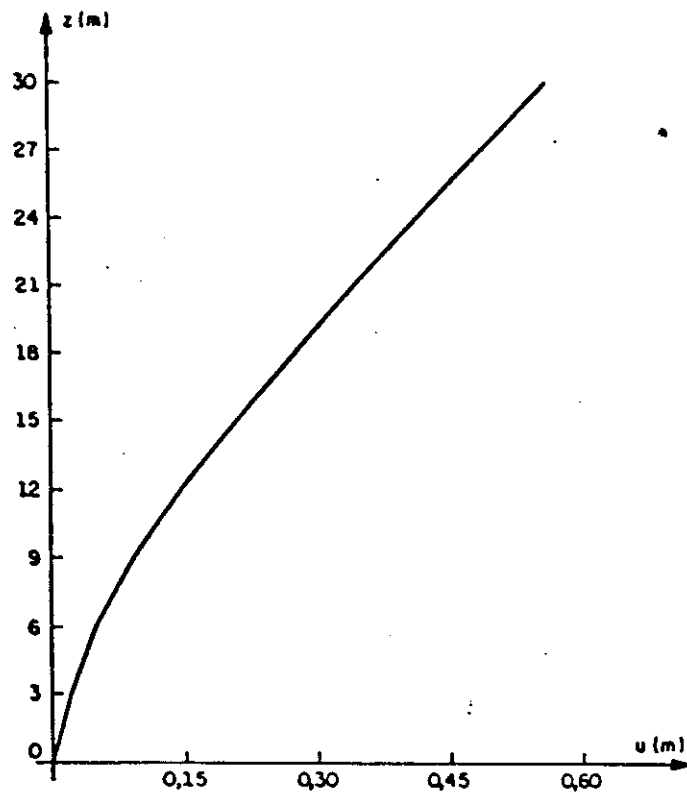


Fig. 4.5.g - Deslocamento horizontal da associação

4.4.6- Exemplo 6,2

a) Alteram-se, agora, as dimensões das sapatas 1 e 2, para 1,60x1,60 em metros, mantendo-se as demais constantes, em relação ao exemplo 6.

b) As equações de (B), ficam da seguinte maneira:

$$10336,25 \phi_1 - 6235,38(\delta_1 + 0 - 2,60 \delta_3) = 11,25$$

$$10336,25 \phi_2 - 6235,38(\delta_1 + 0 - 2,60 \delta_3) = 11,25$$

$$9130,48 \phi_3 - 6235,38(\delta_1 + 0 + 2,60 \delta_3) = 11,25$$

$$9130,48 \phi_4 - 6235,38(\delta_1 + 0 + 2,60 \delta_3) = 11,25 \quad (B.2)$$

$$9130,48 \phi_5 - 6235,38(0 + \delta_2 - 2,60 \delta_3) = 0,00$$

$$9130,48 \phi_6 - 6235,38(0 + \delta_2 - 2,60 \delta_3) = 0,00$$

$$9130,48 \phi_7 - 6235,38(0 + \delta_2 + 2,60 \delta_3) = 0,00$$

$$9130,48 \phi_8 - 6235,38(0 + \delta_2 - 2,60 \delta_3) = 0,00$$

Observa-se que houve modificações apenas nas equações dos pilares 1 e 2.

Da mesma maneira que o exemplo anterior, via processo iterativo, com as equações de (A) e (B2) obtém-se:

$$\delta_1 = 0,00328422$$

$$\delta_2 = 0,00000000$$

$$\delta_3 = 0,000115111$$

$$\phi_1 = \phi_2 = 0,00288907$$

$$\phi_3 = \phi_4 = 0,00367938$$

$$\phi_5 = \phi_6 = -\phi_7 = -\phi_8 = -0,00020439$$

c) Problema (E)

Igual ao exemplo anterior

d) Problemas (0), (1), (2) e (3)

Como $\delta_2 = 0$, apenas existirão os problemas (0), (1) e (3).

Das equações (4.41) a (4.46) obtém-se:

$$M_j = -\beta_j(\phi_j - \delta_1 a_j - \delta_3 c_j)(-\alpha)^i$$

$$Q_j = -\frac{(1+\alpha)}{h} \beta_j(\phi_j - \delta_1 a_j - \delta_3 c_j)(-\alpha)^i$$

$$Q_j = \frac{(1+\alpha)}{h} M_j$$

$$N_j = \frac{(1+\alpha)}{h} \beta_j(\phi_j - \delta_1 a_j - \delta_3 c_j)(-\alpha)^i \quad , \text{ na base}$$

$$N_j = -\frac{(1+\alpha)^2}{h} \beta_j(\phi_j - \delta_1 a_j - \delta_3 c_j)(-\alpha)^{i-1}$$

$$N_j = -\frac{6,00}{h} M_j$$

$$u_j = (\delta_1 a_j + \delta_3 c_j)z \quad \text{p/ um pilar genérico } j$$

PILAR 1 = 2	PILAR 3 = 4	PILAR 5 = 6	PILAR 7 = 8
$M_1 = 0,595(-\alpha)^i$	$M_3 = -0,595(-\alpha)^i$	$M_5 = -0,595(-\alpha)^i$	$M_7 = 0,595(-\alpha)^i$
$Q_1 = 0,250(-\alpha)^i$	$Q_3 = -0,250(-\alpha)^i$	$Q_5 = -0,250(-\alpha)^i$	$Q_7 = 0,250(-\alpha)^i$
$N_1 = -0,250$ na base	$N_3 = 0,250$ na base	$N_5 = 0,250$ na base	$N_7 = -0,250$ na base
$N_1 = -1,194(-\alpha)^i$	$N_3 = 1,194(-\alpha)^i$	$N_5 = 1,194(-\alpha)^i$	$N_7 = -1,194(-\alpha)^i$
$u_3 = 0,00358351 z$, para o pilar 3			

Observa-se que pelo fato de as sapatas 1 e 2 terem maior rigidez à rotação que as sapatas 3 e 4, ocorre um deslocamento relativo das sapatas 3 e 4 em relação às sapatas 1 e 2 e desse deslocamento decorre o giro relativo entre elas.

e) Esforços solicitantes e deslocamentos finais

Obtém-se da superposição dos problemas (E), (0), (1) e (3).

z	PILAR 1 = 2			PILAR 3 = 4			PILAR 5 = 6			PILAR 7 = 8			u_3 (m)
	M_1 (tfm)	Q_1 (tf)	N_1 (tf)	M_3	Q_3	N_3	M_5	Q_5	N_5	M_7	Q_7	N_7	
0	11,83	1,00	-0,025	10,67	0,50	0,25	-0,59	-0,25	0,25	0,59	0,25	-0,25	0,0000
3	8,95	0,61	0,32	9,27	0,75	-0,32	0,16	0,07	-0,32	-0,16	-0,07	0,32	0,0108
6	7,24	0,62	-0,09	7,16	0,58	0,09	-0,04	-0,02	0,09	0,04	0,02	-0,09	0,0215
9	5,50	0,53	0,02	5,52	0,53	-0,02	0,01	0,00	-0,02	-0,01	0,00	0,02	0,0323
12	4,05	0,45	0,00	4,05	0,45	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0430
15	2,81	0,38	0,00	2,81	0,38	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0537
18	1,80	0,30	0,00	1,80	0,30	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0645
21	1,01	0,23	0,00	1,01	0,23	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0752
24	0,45	0,15	0,00	0,45	0,15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0860
27	0,11	0,08	0,00	0,11	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,0967
30	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,1075

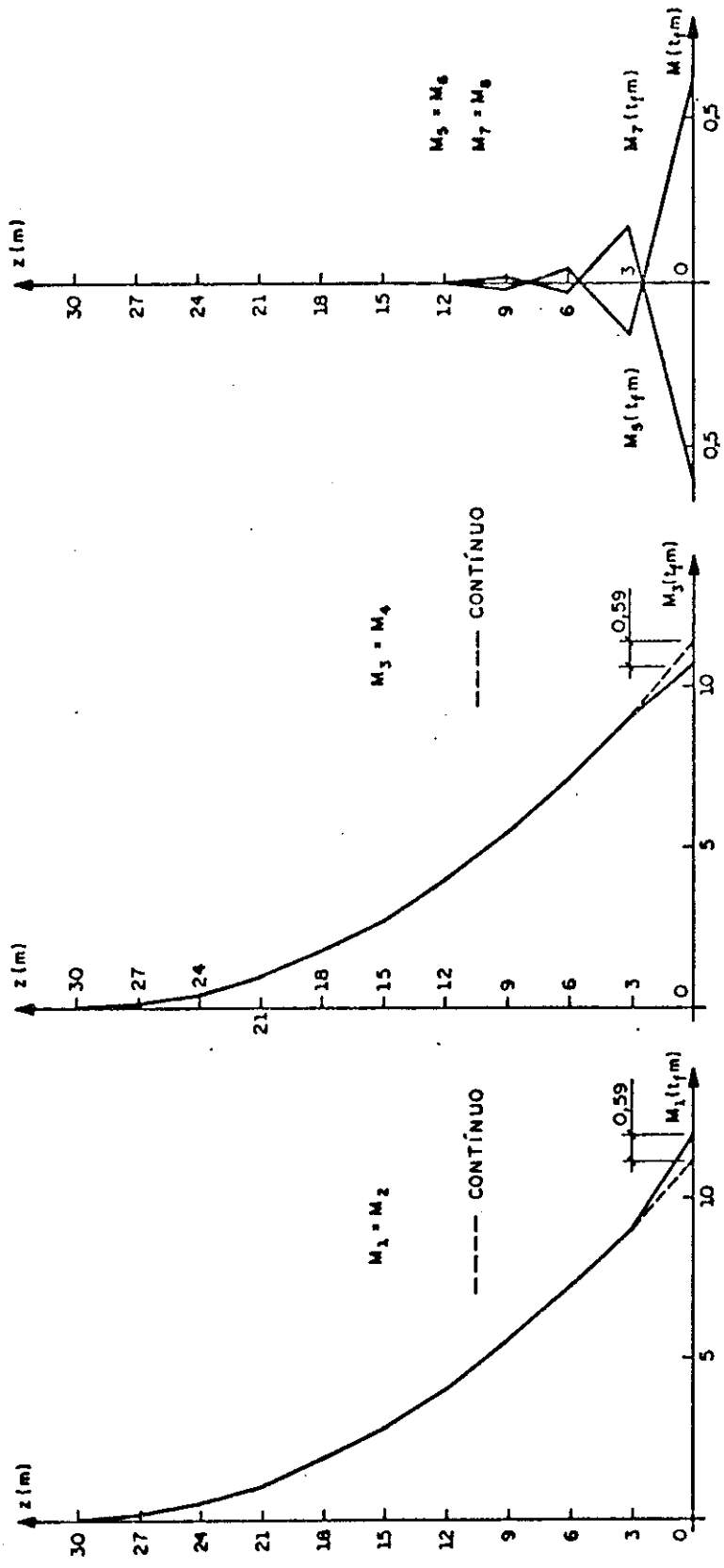


Fig. 4.5.h - Momento fletor nos pilares 1, 3, 5 e 7

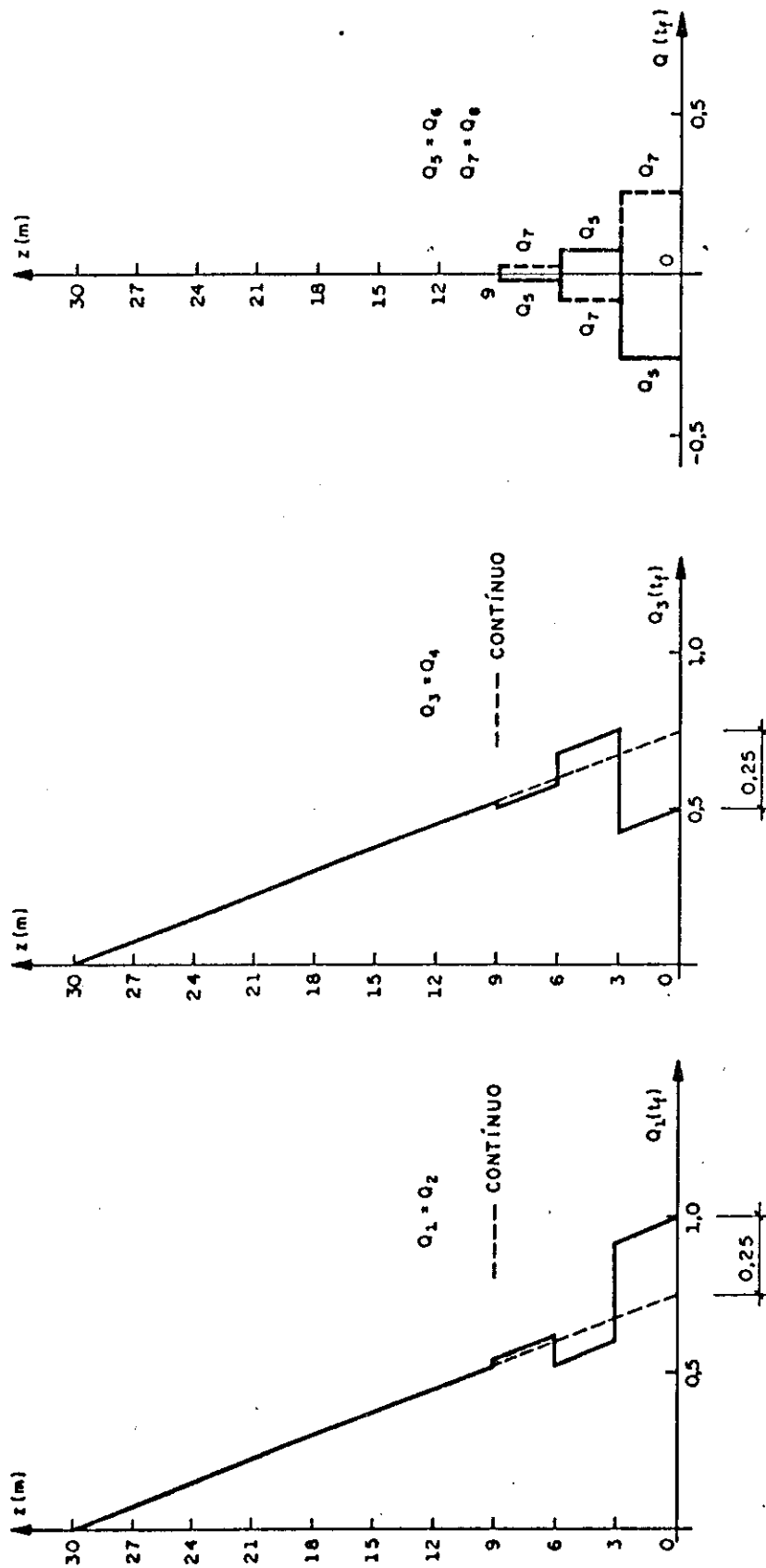


Fig. 4.5.i - Esforço cortante nos pilares 1, 3, 5 e 7

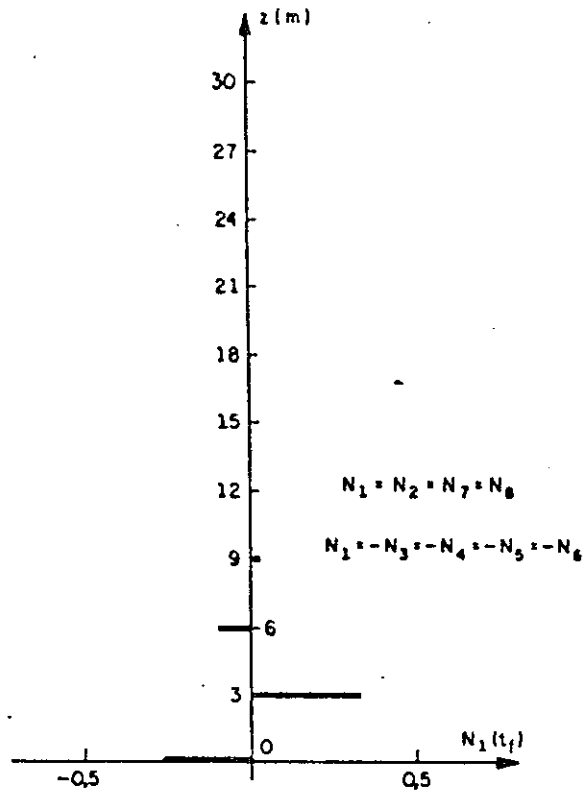


Fig. 4.5.j - Força horizontal do pilar 1 na laje

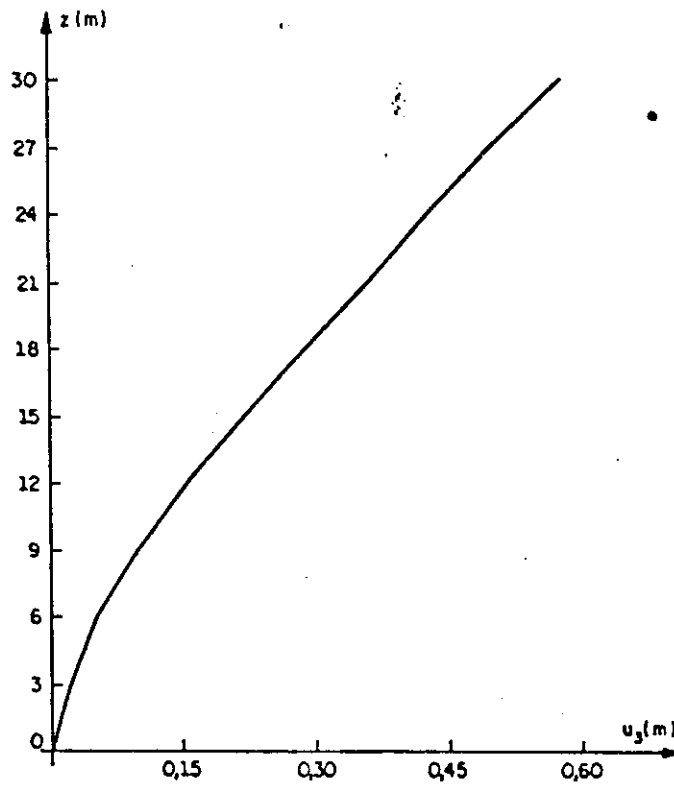


Fig. 4.5.l - Deslocamento horizontal do pilar 3

Observe-se que pelo fato de as sapatas 1 e 2 terem maior rigidez que as 3 e 4, os pilares 1 e 2 absorvem um maior esforço solicitante nas bases, e também pelo fato de os pilares 5, 6, 7 e 8 terem sua localização perpendicular ao plano da carga externa, eles absorvem os esforços solicitantes provenientes de suas rotações de base e do giro relativo dos pilares 1, 2 e 3, 4.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES GERAIS

Observa-se que, no contexto global, as variações de momento fletor devidas às perturbações de borda são pequenas, ocorrendo praticamente apenas nas bases dos pilares, o mesmo não se podendo dizer a respeito dos esforços cortantes e forças horizontais aplicadas às lajes, os quais mostraram-se significativos por vários andares até seu amortecimento total; quanto à elástica, apresentou-se de uma maneira bem comportada, apresentando pequenas variações em relação à obtida por MANCINI [3].

Como era de se esperar, caso os parâmetros elásticos e geométricos dos pilares e fundações sejam proporcionais, não há correções a serem feitas aos esforços solicitantes, obtidos da Técnica do Meio Contínuo; apenas há mudança na elástica global do conjunto, como se pode observar no exemplo 6 do item 4.4.6.

Valores adequados para as rigidezes das sapatas, através de um c_ϕ , obtido de BARKAN [5], podem atenuar as perturbações de borda.

Devido aos esforços solicitantes e forças horizontais significativos que aparecem, talvez seja melhor modelar através da técnica contínua, com deformações globais, levando em conta, nos pilares, também as deformações resultantes dos esforços cortantes ou então computar a deformabilidade da laje, como já propostos por SOUZA [4].

As descontinuidades em pilares são tratáveis de maneira análoga e resultam em perturbações acima e abaixo da mesma; é interessante evitá-las ou proporcioná-las convenientemente em situações reais.

A resolução dos problemas se apresentam, de uma maneira geral, simples, fornecendo subsídios para a interpretação teórica de problemas físicos quando se utiliza a Técnica do Meio Contínuo.

BIBLIOGRAFIA

- 1) STAMATO, M.C. - Cálculo Elástico de Estaqueamentos, Publicação No. 70 (2a. Edição) - EESC-USP - São Carlos - 1971.
- 2) STAMATO, M.C. - Associação Contínua de Painéis de Contraventamento, EESC-USP - São Carlos - 1980.
- 3) MANCINI, E. - Associação Contínua Tridimensional de Pórticos e Paredes com Engastamento Elástico - Dissertação de Mestrado - EESC-USP - São Carlos - 1983.
- 4) SOUZA, J.C.A.O. - Um Estudo de Perturbações Devidas a Engastamento Elástico em Estruturas de Edifícios Altos com a Técnica Contínua de Análise - Tese de Doutorado - EESC-USP - São Carlos - 1986.
- 5) BARKAN, D.D. - Dynamics of Bases and Foundations - McGraw Hill Book Company - EUA - 1962.
- 6) SOUZA, J.C.A.O.; ANTUNES, H.M.C.C. - Estática das Estruturas (Temas Complementares) - EESC-USP - São Carlos - 1983.
- 7) SOUZA, J.C.A.O.; ARZOLLA, J.A.R.D.P. - Recalques de Apoio em Associações de Pilares-Parede - IX Jornadas Argentinas de Engenharia Estrutural - Buenos Aires - Argentina - 1989.