

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO PARA PROBLEMAS ELASTO-LINEARES
AXISSIMÉTRICOS

AUTOR: ENG. CARLOS ALBERTO FUDOLI

ORIENTADOR: PROF.DR. WILSON S. VENTURINI

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA
PROBLEMAS ELASTO-LINEARES AXISSIMÉTRICOS

Tese apresentada a Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São
Paulo como parte dos requisitos para
obtenção do título de "Mestre em
Engenharia de Estruturas".

Eng.^o CARLOS ALBERTO FUDOLI
ORIENTADOR: PROF. DR. WILSON S. VENTURINI

São Carlos, janeiro de 1991

Não há palavras...

Apenas dedico:

A meus pais!

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini, pelo dedicado acompanhamento e eficiente orientação, e pela paciência, compreensão e amizade. Por tudo isto, sua atuação foi decisiva para a conclusão deste trabalho.

Aos amigos do Departamento de Estruturas, professores, colegas e funcionários.

A dedicação e eficiência dos funcionários Antonio Valdair Carneiro, na edição do texto, Nadir Minatel, na preparação da bibliografia e Francisco Carlos Guete de Britto, na confecção dos desenhos.

À FAPESP e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

E, especialmente, à Tania, que suportou os momentos difíceis envolvidos na conclusão deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho trata da formulação direta do Método dos Elementos de Contorno para problemas elasto-lineares axissimétricos. É dada ênfase à obtenção das equações integrais de contorno para problemas axissimétricos, incluindo-se a dedução da solução fundamental para o caso da torção axissimétrica. A implementação desta formulação, que representa a solução aproximada das equações integrais, é ilustrada, e as principais dificuldades para a avaliação numérica destas equações são discutidas em detalhes, a partir do programa computacional que foi construído para o caso da torção axissimétrica.

ABSTRACT

This work concerns on the direct formulation of the Boundary Element Method applied to axisymmetric elastostatic problems. Emphasis is given to derive the boundary integral equations for this type of problem, including the fundamental solution obtention for the axisymmetric torsion case. The implementation of that formulation, which represents the approximate solution of the integral equations, is illustrated and the main difficulties for that numerical analysis are discussed in details, from a computational code written for the axisymmetric torsion case.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	01
1.1 - Breve Histórico do Método	03
1.2 - Formulação Axissimétrica	06
1.3 - Objetivos e Conteúdo do Trabalho	08
CAPÍTULO II - ELEMENTOS DE MECANICA DOS SÓLIDOS	10
2.1 - Análise Tensorial	10
2.2 - Tensor Tensão e Tensor Deformação	20
2.3 - Caso Axissimétrico	28
CAPÍTULO III - EQUAÇÕES INTEGRAIS	37
3.1 - Caso Tridimensional	37
3.1.1 - Solução Fundamental	38
3.1.2 - Equações Integrais de Contorno	41
3.1.2.1 - Identidades Somiglianais: Teorema de Betti	41
3.1.2.2 - Identidades de Somiglianais: Resíduos Ponderados	46

3.1.3 - Pontos do Contorno	49
3.2 - Caso Axissimétrico	52
3.2.1 - Plano Radial-Axial	53
3.2.1.1 - Soluções Fundamentais	54
3.2.1.2 - Identidades Somiglianas e Desconti- nuidades no Contorno	61
3.2.2 - Torção Axissimétrica	65
3.2.2.1 - Solução Fundamental	65
3.2.2.2 - Identidades de Somiglianas e Descon- tinidade no Contorno	74
CAPÍTULO IV - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	80
4.1 - Formulação do Método dos Elementos de Contorno ..	80
4.1.1 - Pontos Nodais	81
4.2 - Tensões no Contorno	85
4.3 - Descontinuidades nas Integrais	86
4.3.1 - Caso Axissimétrico	87
4.4 - Subregiões	90
4.5 - Programa Computacional	95
4.5.1 - Esquemas para a Integração Numérica	99
CAPÍTULO V - EXEMPLOS NUMÉRICOS	108
5.1 - Exemplo 1 — Eixo de Seção Variável	108
5.1.1 - Exemplo 1.1	109
5.1.2 - Exemplo 1.2	109

5.1.3 - Exemplo 1.3	109
5.2 - Exemplo 2 — Sapata Circular Apoiada em Muro	
Semi-infinito	113
5.2.1 - Exemplo 2.1	116
5.2.2 - Exemplo 2.2	116
5.2.3 - Exemplo 2.3	119
5.2.4 - Exemplo 2.4	119
5.2.5 - Exemplo 2.5	122
5.2.6 - Exemplo 2.6	122
5.2.7 - Coeficientes de Rigidez	125
CAPÍTULO VI - CONSIDERAÇÕES FINAIS	127
BIBLIOGRAFIA	130

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A importância dos métodos numéricos na mecânica do contínuo decorre da carência de soluções analíticas para os problemas de engenharia. As relações entre as propriedades dos corpos da mecânica do contínuo são regidas por equações de campo, para as quais são conhecidas soluções analíticas somente para alguns casos especiais de geometria e de condições de contorno. Por isso, soluções numéricas destas equações de campo são bastante valiosas.

Até o advento dos poderosos computadores eletrônicos, os únicos métodos numéricos satisfatórios eram os que implicavam numa quantidade aceitável de operações, de modo que pudessem ser executadas manualmente, com um dispêndio aceitável de esforço e de tempo. O Método das Diferenças Finitas é um dos métodos capazes de satisfazerem a esses requisitos, ao menos em certos casos. No Método das Diferenças Finitas, as equações diferenciais de campo são

aproximadas por equações de diferenças finitas — nas quais as derivadas de certas funções são expressas em termos dos valores destas funções em certos pontos: os nós.

Outro método numérico, de maior sucesso, mas que aparece mais ligado à computação eletrônica, é o dos Elementos Finitos. Neste método, o corpo sob análise é subdividido num conjunto de elementos, e, originariamente, um princípio variacional válido para o domínio é aproximado de um modo peculiar, com base na divisão do corpo em elementos que foi adotada.

Tanto no Método das Diferenças Finitas quanto no dos Elementos Finitos o domínio de um corpo é discretizado — em um conjunto de pontos, no caso das diferenças finitas, ou num conjunto de elementos, no caso dos elementos finitos. Por isso eles são denominados métodos de domínio. Em tais métodos, as equações de campo, válidas no interior e no contorno do domínio, são aproximadas pela resolução numérica no domínio discretizado — impondo-se as condições de contorno.

Por outro lado, nos métodos de contorno, as equações de campo — definidas no domínio e no contorno —, são transformadas em equações integrais definidas sobre o contorno, apenas.

O Método dos Elementos de Contorno, obviamente, é um método de contorno, e seu desenvolvimento está diretamente vinculado ao aparecimento dos computadores eletrônicos de maior porte.

Em comparação com o Método dos Elementos Finitos, a principal vantagem do Método dos Elementos de Contorno está no volume de dados. Enquanto no Método dos Elementos Finitos todo o domínio é discretizado, no Método dos Elementos de Contorno a discretização restringe-se ao contorno, o que, basicamente, significa que:

- 1) a preparação e introdução de dados é mais rápida e

mais simples;

- ii) o sistema de equações a ser resolvido é bem menor, economizando memória e tempo de processamento;
- iii) o volume de resultados também é menor, restringindo-se à obtenção daqueles dados que são realmente de interesse, o que facilita e torna mais rápida a interpretação desses resultados.

Além do mais, a formulação convencional do Método dos Elementos Finitos tende a fornecer resultados menos precisos para tensões do que para deslocamentos — pois as tensões são calculadas a partir dos deslocamentos, enquanto que no Método dos Elementos de Contorno ambos são obtidos diretamente.

Finalmente, em regiões em que as tensões variam rapidamente, no interior do domínio, o Método dos Elementos Finitos exige uma discretização mais refinada, enquanto que a qualidade da solução no Método dos Elementos de Contorno depende apenas da discretização no contorno.

Todavia, todas estas vantagens têm um preço, que é a maior complexidade matemática da formulação do Método dos Elementos de Contorno, em geral. Mas este preço deve ser pago uma só vez no início, isto é, na obtenção da formulação; uma vez que a formulação tenha sido obtida para o caso desejado, as vantagens acima tornam-se disponíveis para qualquer aplicação admissível sob aquela formulação.

1.1 - BREVE HISTÓRICO DO MÉTODO

Historicamente, o Método dos Elementos de Contorno originou-se da conjunção da aplicação da teoria de potencial com a teoria das equações integrais, quando certas identidades integrais relacionando potenciais newtonianos foram obtidas.

Todavia, a forte analogia entre a teoria de potencial e

a teoria da elasticidade foi notada e explorada já no século passado. Destacam-se, neste ponto, os trabalhos de BETTI [14] e de SOMIGLIANA [86], que estabeleceram identidades integrais (de contorno), a partir das equações da elasticidade (de campo).

FREDHOLM ([45],[46]) e LAURICELLA [62] deram grande impulso à teoria das equações integrais¹ e sua aplicação à elasticidade. Progressos nesta direção foram obtidos ainda por SHERMAN [82], KELLOG [58], MUSKHELISHVILI [71], MIKHLIN [67], SMIRNOV [85], KUPRADZE [60] — este último tendo sido o primeiro a propor uma aproximação numérica para as equações integrais da elasticidade. Nestes casos, porém, as soluções só eram obtidas por intermédio da aplicação de fontes fictícias, a partir das quais, então, eram obtidas as variáveis físicas reais no contorno. Estes constituíam os chamados métodos indiretos. JASWON [55] obteve uma formulação utilizando diretamente as variáveis reais do problema, mas ainda recorrendo conjuntamente à utilização de uma função auxiliar de tensão — método semi-direto.

As primeiras formulações de um Método de Elementos de Contorno propriamente dito devem-se aparentemente a JASWON e PONTER [57], em problemas de torção, e SYMM [89], em problemas de potencial em duas dimensões. Estes dois casos são porém bem mais simples do que o abordado por RIZZO [76], o primeiro a formular um tal método para a elasticidade bidimensional. Na formulação de Rizzo, uma equação integral relaciona, no contorno, os deslocamentos e as correspondentes reações. CRUSE [35] estendeu esta técnica à elasticidade tridimensional.

JASWON, MAITI e SYMM [56] iniciaram o desenvolvimento do método na análise de placas. CRUSE e RIZZO [40] e CRUSE

¹ Destaque-se também o trabalho posterior de HILBERT [54], no campo da teoria das equações integrais.

[36] introduziram o tratamento de problemas elásticos com a consideração da dinâmica. RIZZO e SHIPPY [77] sugeriram a utilização de sub-regiões em domínios não homogêneos. CRUSE e VAN BUREN [42] introduziram uma análise não-linear, decorrente da presença de uma fratura. SMELLOW e CRUSE [88] mostraram como simular o comportamento de materiais elastoplásticos, anisotrópicos e compressíveis, com encruamento, embora sem concluírem a implementação numérica, o que no entanto foi feito por RICARDELLA [74], que estendeu o método à elastoplasticidade. CRUSE [37] mostrou que o método é capaz de proporcionar melhores resultados que o Método dos Elementos Finitos, em problemas em que é grande a concentração de tensões. CRUSE [38] e RICARDELLA [75] apresentaram formulações em que deslocamentos e reações no contorno, na aproximação, variam linearmente. LCHAT e WATSON ([63],[64]) propuseram formulações em que, na aproximação, a geometria recebe variação quadrática e os deslocamentos e reações (no contorno) podem variar alternativamente de forma linear, quadrática ou cúbica.

BREBBIA [21] obteve as equações integrais que fundamentam o método de um modo alternativo, utilizando a técnica de resíduos ponderados, o que proporcionou uma nova perspectiva para o relacionamento do Método dos Elementos de Contorno com outras técnicas numéricas.

Uma série de congressos internacionais serviu para ampliar a divulgação do método — BREBBIA ([22], [23], [24], [25]). As perspectivas do método se ampliaram. Áreas de pesquisa existentes se afirmaram e outras novas foram criadas: plasticidade, viscoelasticidade e viscoplasticidade, mecânica das fraturas, mecânica das rochas e dos solos, interação solo-estrutura, utilização combinada do Método dos Elementos de Contorno com outros métodos numéricos, etc. Alguns exemplos destes desenvolvimentos são mencionados a seguir. No campo da

não-linearidade física e geométrica: BUI [27], TELLES e BREBBIA ([91],[92],[93]), MUKHERJEE [68], CHANDRA e MUKHERJEE [32], MUKHERJEE e CHANDRA [69], MUKHERJEE e PASIYAH [70], CATHIE e BANERJEE [30], BANERJEE e DAVIES [12], BANERJEE *et al.* [13], ROCHA [80], entre outros. Na plasticidade e viscoplasticidade: BRADY e BRAY ([19],[20]) e VENTURINI ([95],[96]) (entre outros). Placas e cascas: TOTTENHAM [94], BÉZINE ([15],[16]) e BÉZINE e BONNEAU [17], WU e ALTIERO [101], COSTA Jr. e BREBBIA [34], SILVA [84] (e outros). Mecânica dos fluidos: BÉZINE e BONNEAU [18], YANO e KIEDA [104], WU ([97], [98], [99], [100]), EL REFAEE *et al.* [44] (entre outros).

1.2 - FORMULAÇÃO AXISSIMÉTRICA

O desenvolvimento da formulação do Método dos Elementos de Contorno para problemas axissimétricos foi omitida do item anterior, para ser tratada aqui separadamente.

O primeiro a propor uma solução numérica para problemas elásticos com simetria axial (para geometria e condições de contorno) foi KERMANIDIS [59], embora trabalhando ainda com um carregamento fictício, em vez da formulação direta.

A primeira formulação do Método dos Elementos de Contorno para problemas elásticos axissimétricos foi proposta por MAYR [65], que no entanto implementou numericamente sua formulação apenas para problemas axissimétricos sem torção. Mayr chegou a sugerir também um modo de admitir condições de contorno arbitrárias, isto é, deslocamentos e reações desprovidos de simetria axial, utilizando expansão de série de Fourier. No entanto, Mayr não chegou a desenvolver esta sugestão.

CRUSE, SNOW e WILSON [41] propuseram uma formulação para o caso elástico axissimétrico sem torção na qual eram utilizados elementos com geometria linear e circular, com

deslocamentos e reações variando de forma quadrática no contorno. Eles incluíram também forças centrífugas e comportamento termoelástico.

BAKR [04] e BAKR e FENNER ([08],[09]) introduziram variação quadrática isoparamétrica nos elementos, para deslocamentos, reações e geometria. RIZZO e SHIPPY [78], RIZZO *et al.* [79], NIGAM [72] e MAYR *et al.* [66] implementaram numericamente a formulação para problemas com geometria axissimétrica com condições de contorno arbitrárias.

Desenvolvimentos do método para problemas de potencial axissimétricos foram efetuados por WROBEL e BREBBIA [103], GUPTA [51], SHIPPY *et al.* [83], BAKR e FENNER [10], WROBEL [102], YOSHIKAWA e TANAKA [105], AU e BREBBIA [03].

Aplicações do método a problemas axissimétricos também se estenderam à consideração da elastoplasticidade, por CATHIE E BANERJEE [31], DOBLARE *et al.* [43]; à viscoplasticidade, por SARIHAN e MUKHERJEE [81]; à mecânica das fraturas, por BAKR e FENNER [11]; além da aplicação a caldeiras, por BAKR *et al.* [06]; e ao carregamento por forças volumétricas, por ABDUL-MISHEIN *et al.* [01], BAKR *et al.* [07].

Alguns livros acerca do Método dos Elementos de Contorno em geral passaram a incluir uma exposição do problema axissimétrico — como em BREBBIA *et al.* [26]. Também foi editado um pequeno livro (BAKR [05]) acerca de varios problemas axissimétricos, sem torção: potencial, elasticidade, termoelasticidade, forças centrífugas, mecânicas das fraturas.

No entanto, o caso da torção axissimétrica tem sido bem menos abordado do que o do plano radial-axial, especialmente no que se refere à sua implementação numérica e aplicações — embora isto possa ser em parte justificado devido à ocorrência de torção axissimétrica em problemas práticos de

engenharia ser menos frequente.

1.3 - OBJETIVOS E CONTEÚDO DO TRABALHO

Neste trabalho pretende-se apresentar uma formulação do Método dos Elementos de contorno para problemas elasto-lineares axissimétricos. Especial atenção é dedicada aos fundamentos desta formulação. Isto parece interessante porque, embora a formulação aqui considerada já seja bem conhecida dos poucos especialistas que a estudaram, a literatura sobre o tema aparece sempre apresentada de forma concisa e resumida, deixando ao leitor a tarefa de compreender os detalhes de sua obtenção.

Desta forma, o Capítulo II trata, em detalhes, da formulação do problema axissimétrico na elasticidade linear isótropa. Para isto, alguns conceitos básicos de análise tensorial são recordados, já que este constitui o instrumental mais conciso e elegante para se tratar não apenas do problema axissimétrico, mas de outros problemas de geometria especial, em geral. As equações da elasticidade linear para o caso axissimétrico são então introduzidas, na linguagem tensorial.

O Capítulo III trata das equações integrais de contorno que fundamentam o Método dos Elementos de Contorno. Inicialmente, a obtenção e o comportamento destas equações é analisado para o caso tridimensional (em coordenadas cartesianas), que é menos complexo que o axissimétrico. Só então é que o caso axissimétrico é abordado, utilizando-se os resultados expostos no Capítulo II, além dos conceitos da teoria das equações integrais apresentados para o caso tridimensional. A fim de se compreender ainda melhor a extensão das equações integrais para o caso axissimétrico, a solução fundamental da torção axissimétrica é deduzida. Esta dedução é feita, neste trabalho, a partir da solução

fundamental do caso tridimensional (Kelvin) — embora também seja possível resolver diretamente a equação de Navier, utilizando-se métodos de transformação de integrais.

O Capítulo IV mostra como a discretização de uma estrutura em elementos pode constituir um método aproximado de resolução dessa estrutura, a partir das equações integrais de contorno descritas no Capítulo III. Em seguida, são discutidos detalhes que devem ser atendidos quando se pretende construir um algoritmo computacional para o cálculo aproximado proposto. Mostra-se como as principais dificuldades para a construção de um tal algoritmo podem ser superadas, utilizando-se o caso da torção axissimétrica como ilustração. A torção axissimétrica foi escolhida como o caso a ser melhor detalhado exatamente por ser o menos tratado na literatura, sobretudo a nível de implementação numérica.

Quanto ao Capítulo V, o objetivo é, através da apresentação de alguns exemplos numéricos, ilustrar as potencialidades da formulação. Para isto foi elaborado um programa computacional para a resolução da torção axissimétrica.

A meta geral do trabalho, então, é alcançar uma compreensão mais precisa da formulação do Método dos Elementos de Contorno para problemas axissimétricos. A formulação aqui proposta é estratégica, no sentido de que a partir dela é mais fácil abordar problemas axissimétricos mais complexos, utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno, bem como torna-se mais viável procurar por aplicações mais sofisticadas e interessantes.

CAPÍTULO II

ELEMENTOS DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Antes de obter a formulação das equações integrais de contorno para o problema elasto-linear axissimétrico, é conveniente recordar alguns pontos de um instrumental teórico adequado: a mecânica dos sólidos. A introdução de conceitos elementares de análise tensorial, feita neste capítulo, é bastante conveniente, já que o problema axissimétrico constitui um caso especial de coordenadas curvilíneas.

2.1 - ANÁLISE TENSORIAL¹

A variação das componentes de grandezas tais como vetores e tensores — sob transformação de coordenadas —

¹ Maiores detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em FUNG [48].

constitui o cerne da análise tensorial.

Sejam dois sistemas de coordenadas genéricas, x^i e θ^i , com $\theta^i = f_i(x^1, \dots, x^n)$. As funções f_i especificam a transformação de coordenadas, que é dita própria se forem injetoras, contínuas, com primeira derivada contínua, e se o determinante do Jacobiano for não nulo:

$$\left| \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} \right| \neq 0 .$$

Um tensor é uma quantidade que, sob transformação de coordenadas, varia de acordo com a seguinte regra:²

$$\bar{T}(\theta^1, \dots, \theta^n) \begin{matrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_p \\ \beta_1 & \dots & \beta_q \end{matrix} = \frac{\partial \theta^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial \theta^{\alpha_p}}{\partial x^{k_p}} \frac{\partial \theta^{\beta_1}}{\partial x^{m_1}} \dots$$

$$\frac{\partial \theta^{\beta_q}}{\partial x^{m_q}} t(x^1, \dots, x^n) \begin{matrix} k_1 \dots k_p \\ m_1 \dots m_q \end{matrix} , \quad (ii-1,1)$$

onde \bar{T} e t representam um campo tensorial no sistema θ^i e x^i , respectivamente. t (ou \bar{T}) é chamado campo tensorial de ordem $(p+q)$, contravariante de ordem p e covariante de ordem q .

Tensores de ordem zero são denominados *escalares*, e são constantes sob transformação de coordenadas, isto é, possuem o mesmo valor em qualquer sistema de coordenadas.

Se x representa um sistema de coordenadas retangulares (cartesiano), é possível definir o tensor métrico Euclidiano do sistema e^i :

$$g_{ij}(e^1, e^2, e^3) = \frac{\partial x^k}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^l}{\partial \theta^j} \delta_{kl} = \frac{\partial x^k}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^k}{\partial \theta^j} , \quad (ii-1,2)$$

² Utilizando-se notação tensorial: convenção da soma.

Exemplo: $a_{ij} x^j = \sum_{j=1}^n a_{ij} x^j$.

onde δ_{k1} representa o delta de Kronecker ($\delta_{k1} = 1$ se $k = 1$ e $\delta_{k1} = 0$ se $k \neq 1$).

O tensor métrico euclidiano fornece o comprimento de um elemento diferencial ds no sistema θ^i . Pela Regra de Pitágoras, $ds^2 = dx^i dx^i$. Pela regra usual de diferenciação parcial,³

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} d\theta^j . \quad (\text{ii-1,3})$$

Portanto, de (ii-1,2):

$$ds^2 = dx^i dx^i = g_{kn} d\theta^k d\theta^n . \quad (\text{ii-1,4})$$

De modo similar, define-se o tensor métrico (euclidiano) associado como

$$g^{ij}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^k} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^l} \delta^{kl} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^k} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^k} . \quad (\text{ii-1,5})$$

O tensor misto $g^i_j(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \theta^j} \delta^k_l = \delta^i_j$ tem pouca importância na análise tensorial, por não se relacionar diretamente com as forças de superfície — cf. seção 2.2.

Outro conceito fundamental na análise tensorial é o de derivada covariante de um campo tensorial, de ordem $(p+q)$, contravariante de ordem p e covariante de ordem q :

³ Observe-se que, embora os diferenciais $d\theta^i$ representem um vetor contravariante, o mesmo em geral não ocorre com θ^i , que não obedece à lei de transformação para tensores. Dessa forma, a posição dos índices das coordenadas (x^i ou θ^i) é desprovida de significado (tensorial).

$$\begin{aligned}
t \begin{matrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_p \\ \beta_1 & \dots & \beta_q \end{matrix} \Big|_{\gamma} &= \frac{\partial t \begin{matrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_q \\ \beta_1 & \dots & \beta_q \end{matrix}}{\partial \theta^{\gamma}} + \Gamma \begin{matrix} \alpha_1 \\ \sigma \ \gamma \end{matrix} t \begin{matrix} \sigma \ \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ \beta_1 & \dots & \beta_q \end{matrix} \\
&+ \Gamma \begin{matrix} \alpha_p \\ \sigma \ \gamma \end{matrix} t \begin{matrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_{p-1} \ \sigma \\ \beta_1 & \dots & \beta_q \end{matrix} - \Gamma \begin{matrix} \sigma \\ \beta_1 \ \gamma \end{matrix} t \begin{matrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_p \\ \sigma \ \beta_2 & \dots & \beta_q \end{matrix} \\
&- \Gamma \begin{matrix} \sigma \\ \beta_q \ \gamma \end{matrix} t \begin{matrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_p \\ \beta_1 & \dots & \beta_{q-1} \ \sigma \end{matrix} \quad (ii-1,6)
\end{aligned}$$

onde $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ representa o símbolo euclidiano de Christoffel, que é definido em função do tensor métrico e do tensor métrico associado:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\sigma\gamma}}{\partial \theta^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial \theta^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial \theta^{\sigma}} \right\}. \quad (ii-1,7)$$

Note-se que os símbolos de Christoffel não representam um tensor — ou seja, não variam como um tensor sob transformação de coordenadas. No entanto, a derivada covariante de um campo tensorial representa outro campo tensorial, de ordem superior.

A derivada covariante representa a generalização do conceito de derivada parcial. Numa transformação de coordenadas entre dois sistemas cartesianos, as derivadas parciais de um tensor comportam-se como componentes de outro tensor de ordem superior, por outro lado, num sistema de coordenadas curvilíneo genérico, as derivadas covariantes de um campo tensorial — e não suas derivadas parciais simplesmente — comportam-se como um tensor de ordem superior. De fato, pode-se observar que, numa transformação entre dois sistemas cartesianos, as derivadas covariantes reduzem-se às derivadas parciais, já que os símbolos de

Christoffel são todos nulos num sistema cartesiano.

Outra propriedade fundamental dos campos tensoriais reside no fato de que, se uma equação entre tensores vale num determinado sistema de coordenadas, então esta equação pode ser estabelecida em qualquer outro sistema de coordenadas obtido do primeiro por meio de uma transformação admissível.

Por exemplo: para mostrar que as equações tensoriais

$$g^{ij}|_k = g_{ij}|_k = 0 \quad (\text{ii-1,8})$$

valem em qualquer sistema de coordenadas, basta mostrar que estas equações tensoriais valem num sistema cartesiano — o que é fácil, pois em qualquer sistema cartesiano as componentes do tensor métrico são constantes e, portanto, suas derivadas covariantes são nulas.

Também é interessante lembrar — ainda tomando um sistema retangular cartesiano x^i e um sistema curvilíneo genérico θ^i — que, para o sistema θ^i , os vetores da base e os vetores da base recíproca são dados por:

$$\underline{g}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} \underline{i}^j$$

e

$$(\text{ii-1,9})$$

$$\underline{g}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} \underline{i}^j$$

onde \underline{i}_i e \underline{i}^j representam os vetores da base e os da base dual ou recíproca, respectivamente, no sistema cartesiano (É claro que, num sistema cartesiano $\underline{i}_j = \underline{i}^j$). Os vetores $\underline{g}^1, \dots, \underline{g}^n$ são tangentes às coordenadas θ^i , enquanto $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$ são perpendiculares, respectivamente, a $(\underline{g}^2, \dots, \underline{g}^n)$.

$(\underline{g}^1, \underline{g}^2, \dots, \underline{g}^n), \dots, (\underline{g}^1, \dots, \underline{g}^{n-2}, \underline{g}^{n-1})$.

Assim, um vetor \underline{v} pode ser escrito tanto em suas componentes contravariantes v^i , na base \underline{g}_i , quanto em suas componentes covariantes v_i , na base \underline{g}^i :

$$\underline{v} = v^i \underline{g}_i = v_i \underline{g}^i, \quad (\text{ii-1,10})$$

permanecendo invariante sob transformações de coordenadas.

Utilizando-se a definição de tensor (ii-1,1) para os diferenciais contravariantes e covariantes ($dx^i, d\theta^i$ e $dx_i, d\theta_i$, respectivamente), mais as relações (ii-1,9), pode-se chegar às seguintes expressões, que relacionam os vetores das bases com os tensores métricos euclidianos:

$$\begin{aligned} \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j &= g_{ij}, & \underline{g}^i \cdot \underline{g}^j &= g^{ij}, \\ \underline{g}^i \cdot \underline{g}_j &= g^i_j = \delta^i_j, & & \\ \underline{g}^i &= g^{ij} \underline{g}_j, & \underline{g}_i &= g_{ij} \underline{g}^j. \end{aligned} \quad (\text{ii-1,11})$$

Quanto às componentes covariantes e contravariantes de um vetor \underline{v} , valem as relações

$$v_i = g_{ij} v^j \quad \text{e} \quad v^i = g^{ij} v_j. \quad (\text{ii-1,12})$$

Observe-se ainda que a derivada covariante $v^i|_j$ representa as componentes de $\partial \underline{v} / \partial \theta^j$, com relação à base \underline{g}_i :

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial \theta^j} = \underline{g}_k \frac{\partial v^k}{\partial \theta^j} + \frac{\partial \underline{g}_m}{\partial \theta^j} v^m = \underline{g}_k \frac{\partial v^k}{\partial \theta^j} +$$

$$+ \Gamma_{m i}^k \underline{g}_k v^m = \left(\frac{\partial v^k}{\partial \theta^j} + v^m \Gamma_{m i}^k \right) \underline{g}_k, \quad (\text{ii-1,13})$$

pois é possível mostrar (cf. FUNG [48], p. 474, que

$$\frac{\partial \underline{g}_m}{\partial \theta^j} = \Gamma_{m j}^k \underline{g}_k. \quad (\text{ii-1,14})$$

Utilizando-se (ii-1,6) em (ii-1,13), pode-se escrever

$$\frac{\partial v}{\partial \theta^j} = v^k |_{,j} \underline{g}_k. \quad (\text{ii-1,15})$$

Em geral \underline{g}_i e \underline{g}^i não são vetores unitários, nem tampouco possuem as mesmas dimensões físicas. Seus comprimentos são:

$$||\underline{g}_i|| = \sqrt{g_{i i}} \quad \text{e} \quad ||\underline{g}^i|| = \sqrt{g^{i i}} \quad (\text{ii-1,16})$$

Portanto,

$$\frac{\underline{g}_i}{\sqrt{g_{i i}}} \quad \text{e} \quad \frac{\underline{g}^i}{\sqrt{g^{i i}}} \quad (\text{ii-1,17})$$

(não valendo a convenção da soma)

são vetores unitários. Se os vetores \underline{g}_i e \underline{g}^i forem tomados como a base e a base recíproca do sistema de coordenadas, um vetor \underline{v} , de acordo com (ii-1,10), possuirá as componentes contravariantes e covariantes

$$v^j \sqrt{g_{j,j}} \quad e \quad v_j \sqrt{g^{j,j}} \quad (ii-1,18)$$

(não valendo a convenção da soma),

as quais possuem todas as mesmas dimensões físicas, sendo denominadas componentes físicas do vetor \underline{v} . Em geral, as componentes físicas não se comportam como tensores.

Também são relevantes as observações que se seguem.

O operador nabla ($\underline{\nabla}$), num sistema de coordenadas genérico (curvilíneo), é definido como

$$\underline{\nabla} = \underline{g}^j \frac{\partial}{\partial \theta^j} \quad , \quad (ii-1.19)$$

de modo que o gradiente de um campo escalar ϕ é dado por

$$\text{grad } \phi = \underline{\nabla} \phi = \underline{g}^j \frac{\partial \phi}{\partial \theta^j} \quad . \quad (ii-1,20)$$

Por sua vez, o divergente de um campo vetorial \underline{v} é definido como o produto escalar $\text{div } \underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v}$. De (ii-1,19), (ii-1,15) e (ii-1,11), obtem-se

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \underline{g}^j \frac{\partial v^j}{\partial \theta^j} = g^j v^k |_{,j} g_k = v^k |_{,j} \delta_j^k = v^j |_{,j} \quad . \quad (ii-1,21)$$

Portanto, o divergente de um vetor \underline{v} é dado por

$$\text{div } \underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = v^j |_{,j} \quad . \quad (ii-1,22)$$

O rotacional de um vetor \underline{v} é definido como

$$\text{rot } \underline{v} = \underline{\nabla} \wedge \underline{v} = \epsilon^{j,k} v_j |_{,k} \underline{g}_k \quad . \quad (ii-1,23)$$

onde $\epsilon^{ijk} = \frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}}$, sendo e^{ijk} o tensor de permutação (ou alternador⁴) e g o determinante $|g^{ij}|$.

O Laplaciano (em coordenadas genéricas) é definido como $\nabla^2 = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}$. De (ii-1,19) e (ii-1,15) pode-se escrever o Laplaciano como

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} = \underline{\nabla} \cdot \left(g^i \frac{\partial}{\partial \theta^i} \right) = \underline{\nabla} \cdot \left(g_{ij} g^{ij} \frac{\partial}{\partial \theta^i} \right) = \\ &= \nabla^2 = \left(g^{ij} \frac{\partial}{\partial \theta^i} \right) \Big|_j \end{aligned} \quad (\text{ii-1,24})$$

Utilizando-se a definição de derivação covariante, pode-se mostrar que ela segue as regras usuais de derivação parcial. Por isso, pode-se escrever

$$\nabla^2 = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} = g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial \theta^i} \right) \Big|_j \quad (\text{ii-1,25})$$

Se o operador de Laplace é aplicado a um vetor, então, com o auxílio de (ii-1,15), tem-se

$$\nabla^2 \underline{v} = g^{ij} \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial \theta^i} \right) \Big|_j = g^{ij} \left(v^k \Big|_i g_k \right) \quad (\text{ii-1,26})$$

Aplicando-se a definição de derivação covariante a g observa-se que, de (ii-1,14),

⁴ $e^{123} = e^{231} = e^{312} = 1$; $e^{321} = e^{213} = e^{132} = 0$; $e^{ijk} = 0$ nos demais casos.

$$\underline{g}_k|_{,j} = 0 . \quad (ii-1,27)$$

Utilizando-se as regras usuais de derivação e (ii-1,27), (ii-1,26) resulta em

$$\nabla^2 \underline{v} = (\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} = (g^{ij} v^k|_{,ij}) \underline{g}_k . \quad (ii-1,28)$$

Do mesmo modo, o laplaciano aplicado a um escalar resulta

$$\nabla^2 \varphi = (\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}) \varphi = g^{ij} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta^i} \right) |_{,j} . \quad (ii-1,29)$$

Mas, como um escalar é um tensor de ordem zero, pode-se escrever (ii-1,29) como

$$\nabla^2 \varphi = g^{ij} \varphi|_{,ij} . \quad (ii-1,30)$$

No caso de coordenadas cartesianas, o operador de Laplace é o usual:

$$\nabla^2 \varphi = g^{ij} \varphi|_{,ij} = \delta^{ij} \varphi_{,ij} = \varphi_{,ii} . \quad (ii-1,31)$$

É conveniente considerar também o operador biharmônico, aplicado a um vetor:

$$\nabla^2 \nabla^2 \underline{v} = \nabla^2 (\nabla^2 \underline{v}) = \nabla^2 (g^{ij} v^k|_{,ij} \underline{g}_k) = g^{mn} (g^{ij} v^k|_{,ij})|_{,mn} \underline{g}_k . \quad (ii-1,31)$$

Aplicando-se as regras usuais de derivação e lembrando-se de (ii-1,8), então (ii-1,31) resulta em

$$\nabla^2 \nabla^2 \underline{v} = (g^{mn} g^{ij} v^k|_{,ijmn}) \underline{g}_k . \quad (ii-1,32)$$

2.2 - TENSOR TENSÃO E TENSOR DEFORMAÇÃO⁴

O vetor tensão (ou força de superfície) num elemento de superfície cuja direção normal é $\underline{\eta}$ (fig. 11-1) pode ser escrito, em função das bases \underline{g}_i e \underline{g}'^i , através de (11-1,10), como

$$\underline{\eta} = T^j \underline{g}_j = T_j \underline{g}'^j . \quad (11-2,1)$$

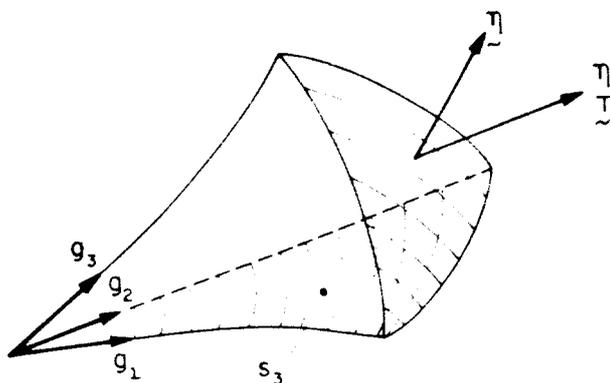


Figura 11-1 : Tetraedro elementar num sistema de referência genérico.

O equilíbrio das forças sobre a superfície de um elemento infinitesimal de volume, nas direções \underline{g}_j e \underline{g}'^i , respectivamente, resulta em

$$T^j = \tau^{ij} \eta_i \quad \text{e} \quad T_j = \tau_j^i \eta_i . \quad (11-2,2)$$

⁴ (Cf. FUNG [48] e GREEN & ZERNA [50]).

onde τ^{ij} é o tensor tensão contravariante, e τ_j^i o tensor tensão misto. η_i são os cossenos diretores (na base g^i) do vetor normal unitário $\underline{\eta}$. O tensor τ_{ij} tem pouca importância na mecânica dos sólidos, pois não pode ser diretamente relacionado a \underline{T} .

As componentes físicas do tensor tensão podem ser obtidas a partir de (ii-2,2) utilizando-se (ii-1,17) e (ii-1,18):

$$\begin{aligned} \sum_j (\underline{T}^j \cdot \underline{g}_j) &= \sum_{i,j} (\tau^{ij} \eta_i \cdot \underline{g}_j) = \sum_{i,j} \left[\sqrt{g_{jj}} \tau^{ij} \eta_i \left(\frac{\underline{g}_j}{\sqrt{g_{jj}}} \right) \right] = \\ &= \sum_{i,j} \left[\left[\frac{\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g^{ii}}} \tau^{ij} \right] (\eta_i \sqrt{g^{ii}}) \left(\frac{\underline{g}_j}{\sqrt{g_{jj}}} \right) \right] \end{aligned}$$

(não se aplicando a convenção da soma)

(ii-2,3)

Em (ii-2,3) aparecem apenas um vetor unitário e componentes físicas; ou seja, as componentes físicas do tensor tensão contravariante são

$$\sigma^{ij} = \sqrt{\frac{g_{jj}}{g^{ii}}} \tau^{ij} \quad (ii-2,4)$$

(não se aplicando a convenção da soma)

Analogamente, podem ser obtidas as componentes físicas do tensor tensão misto:

$$\begin{aligned} \sum_j (\underline{T}_j^i, \underline{g}^j) &= \sum_{i,j} (\tau_j^i, \eta_i, \underline{g}^j) = \sum_{i,j} \left[\sqrt{g^{jj}} \tau_j^i \eta_i \left(\frac{\underline{g}^j}{\sqrt{g^{jj}}} \right) \right] = \\ &= \sum_{i,j} \left[\left[\frac{\sqrt{g^{jj}}}{\sqrt{g^{ii}}} \tau_j^i \right] (\eta_i \sqrt{g^{ii}}) \left(\frac{\underline{g}^j}{\sqrt{g^{jj}}} \right) \right] \quad e \\ \sigma^{ij} &= \sqrt{\frac{g_{jj}}{g^{ii}}} \tau^{ij} \quad (ii-2,5) \end{aligned}$$

(não se aplicando a convenção da soma)

Pode-se obter também a relação⁵

$$\underline{T}^i = \sum_j \left(\sigma^{ij} \frac{g_j}{\sqrt{g_{jj}}} \right) = \sum_j \left(\sigma_j^i \frac{g^j}{\sqrt{g^{jj}}} \right)$$

(não se aplicando a convenção da soma),

(ii-2,6)

onde \underline{T}^i representa o vetor tensão que atua sobre a superfície S_i do tetraedro elementar (fig. ii-1), a qual é perpendicular a \underline{g}^i — ou seja, \underline{T}^i atua sobre a superfície infinitesimal paralela ao plano definido por \underline{g}_m e \underline{g}_n , $m \neq i$, $n \neq i$. Isto significa que σ^{ij} representa as componentes físicas do vetor tensão \underline{T}^i na direção dos vetores unitários

⁵ Cf. FUNG [48], pp. 83-84.

da base $\underline{g}_i / \sqrt{g_{ii}}$, enquanto que σ_j^i representa as componentes físicas de \underline{T} na direção dos vetores unitários $\underline{g}^i / \sqrt{g^{ii}}$ — não se aplicando a convenção da soma.

O equilíbrio das forças volumétricas num elemento infinitesimal de um sistema de coordenadas genérico, o resultado é

$$\tau^{ij}|_j + F^i = 0, \quad (\text{ii-2,7})$$

que representa uma generalização da equação de equilíbrio volumétrico num sistema cartesiano:

$$\frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x_j} + F^i = 0, \quad (\text{ii-2,8})$$

onde F^i é a força volumétrica na direção i .

Quanto ao tensor de deformação, considere-se um corpo em dois sistemas de referência, um no tempo $t = t_1$, outro no tempo $t = t_2$. No intervalo de t_1 até t_2 , o corpo pode sofrer

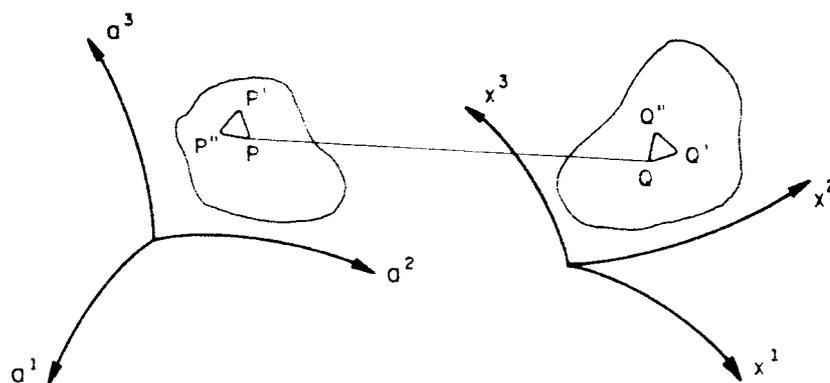


Figura ii-2: Dois estados de um corpo no tempo

deslocamentos e deformações, sendo descrito em t_1 , no sistema de coordenadas (a^1, a^2, a^3) , e em t_2 , no sistema (x^1, x^2, x^3) . Ambos os sistemas são genéricos (fig. ii-2).

O elemento infinitesimal ds , definido por PP' , é dado por (ii-1,4):

$$dS_a^2 = a_{ij} da^i da^j, \quad (ii-2,9)$$

onde a_{ij} representa o tensor métrico cartesiano do sistema a^i .

Utilizando-se (ii-1,3) em (ii-2,9), resulta:

$$dS_a^2 = a_{ij} \frac{\partial a^i}{\partial x^m} \frac{\partial a^j}{\partial x^n} dx^m dx^n. \quad (ii-2,10)$$

Analogamente,

$$dS_x^2 = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial a^m} \frac{\partial x^j}{\partial a^n} da^m da^n, \quad (ii-2,11)$$

onde, g_{ij} é o tensor métrico euclidiano do sistema x^i :

Pode-se escrever, então, que

$$dS_x^2 - dS_a^2 = \left(g_{ij} - a_{mn} \frac{\partial a^m}{\partial x^i} \frac{\partial a^n}{\partial x^j} \right) dx^i dx^j. \quad (ii-2,12)$$

O termo

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(g_{ij} - a_{mn} \frac{\partial a^m}{\partial x^i} \frac{\partial a^n}{\partial x^j} \right) \quad (ii-2,13)$$

é denominado tensor deformação de Almansi, e

$$dS_x^2 - dS_a^2 = 2e_{ij} dx^i dx^j. \quad (ii-2,14)$$

Analogamente, pode-se definir o tensor deformação de

Green,

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(g_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial a^i} \frac{\partial x^n}{\partial a^j} - a_{ij} \right) , \quad (\text{ii-2,15})$$

com

$$dS_x^2 - dS_a^2 = 2E_{ij} da^i da^j . \quad (\text{ii-2,16})$$

Introduzindo-se agora o vetor deslocamento,

$$u^i = x^i - a^i , \quad (\text{ii-2,17})$$

e fazendo-se a derivação (covariante) de ambos os lados de (ii-2,17), em relação ao sistema x^i , chega-se a

$$\frac{\partial a^i}{\partial x^j} = \delta_j^i - u^i |_{j} . \quad (\text{ii-2,18})$$

De (ii-1,8) e (ii-1,12), obtem-se

$$a_{ij} u^i |_{k} = (a_{ij} u^i) |_{k} = u_j |_{k} \quad (\text{ii-2,19})$$

(levando-se em conta que as regras usuais de derivação aplicam-se à derivação covariante).

Substituindo-se (ii-2,17) em (ii-2,12) e utilizando-se de (ii-2,19), resulta

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_i |_{j} + u_j |_{i} - u_k |_{i} u^k |_{j}) . \quad (\text{ii-2,20})$$

Analogamente,

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (u_i ||_{j} + u_j ||_{i} + u_k ||_{i} u^k ||_{j}) , \quad (\text{ii-2,21})$$

onde || indica apenas que a derivada covariante é relativa ao

sistema a^i .

Se u é pequeno, tal que $(u_k|_i, u^k|_j)$ pode ser desprezado, e_{ij} reduz-se a

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_i|_j + u_j|_i) . \quad (ii-2,22)$$

Se as configurações inicial e final são ambas descritas num mesmo sistema de referência cartesiano x^i , (ii-20) é expresso por

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \frac{\partial u^k}{\partial x^j} \right) , \quad (ii-2,23)$$

equanto (ii-22) expressa o tensor deformação infinitesimal de Cauchy:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^i} + \frac{\partial u^j}{\partial x^j} \right) . \quad (ii-2,24)$$

As componentes físicas do vetor dx^i são dadas por (ii-1,18):

$$dx_f^i = \sqrt{g_{ii}} dx^i . \quad (ii-2,25)$$

(não se aplicando a convenção da soma)

Substituindo-se (ii-2,25) em (ii-2,14), obtêm-se as componentes físicas de e_{ij} ,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} e_{ij} , \quad (ii-2,26)$$

que são adimensionais — pois $\sqrt{g_{ii}} dx^i$ possui sempre a dimensão de comprimento.

Resta agora considerar as relações tensão-deformação.

Estas relações são dadas pela Lei de Hooke. Para materiais homogêneos isotrópicos com comportamento elasto-linear, a Lei de Hooke é expressa por

$$\tau^{ij} = C^{ijkl} e^{mn} , \quad (\text{ii-2,27})$$

com

$$C^{ijkl} = \mu \left(g^{im} g^{jn} + g^{in} g^{mk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{mn} \right) ,$$

e
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} , \quad (\text{ii-2,28})$$

sendo C^{ijkl} o tensor de constantes elásticas, μ o módulo de cisalhamento, e ν o coeficiente de Poisson do material.

Substituindo-se (ii-2,27) em (ii-2,7) e depois em (i-2,22) (deslocamentos infinitesimais) — ou seja, substituindo-se as tensões pelas deformações, por meio da relação entre elas, e escrevendo-se as deformações em função dos deslocamentos infinitesimais — e utilizando-se as expressões (ii-1,19) a (ii-1,30), é possível se chegar às equações de Navier:

$$\nabla^2 \underline{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \underline{u}) = - \frac{1}{\mu} \underline{F} , \quad (\text{ii-2,29})$$

onde $\partial^2 \underline{u}$ é dado por (ii-1,28), e $\nabla(\nabla \cdot \underline{u})$ por (ii-1,22) e (ii-1,20), de modo que (ii-2,29) é o mesmo que

$$g^{ij} u^k |_{ij} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \theta^i} (g^{ik} u^j |_{ji}) = - \frac{1}{\mu} F^k . \quad (\text{ii-2,30})$$

Num sistema de coordenadas cartesiano, as equações de Navier assumem a forma

$$u_{k',ij} + \frac{1}{1-2\nu} u_{i',jk} = \frac{1}{\mu} F_k \quad (\text{ii-2,31})$$

(considerando-se que componentes covariantes e contravariantes coincidem, nos sistemas cartesianos).

Em alguns casos, é conveniente introduzir um vetor de Galerkin a fim de se resolver as equações de Navier:⁶

$$\underline{u} = \nabla^2 \underline{G} - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla(\nabla \cdot \underline{G}) \quad , \quad (\text{ii-2,32})$$

onde \underline{G} é um vetor de Galerkin. (cf. FUNG [48], pp. 191 a 193).

A substituição do vetor de Galerkin nas equações de Navier resulta na equação biarmônica

$$\nabla^2 \nabla^2 \underline{G} = - \frac{1}{\mu} \underline{F} \quad , \quad (\text{ii-2,33})$$

a qual, por meio de (ii-1,32), pode ser escrita como

$$g^{mn} g^{ij} G^k |_{ijmn} = - \frac{1}{\mu} F^k \quad . \quad (\text{ii-2,34})$$

O vetor deslocamento pode então ser obtido imediatamente de (ii-2,33) e (ii-2,32), satisfazendo as condições de compatibilidade de deformação.

2.3 - CASO AXISSIMÉTRICO

Problemas axissimétricos são os que possuem simetria em relação a um eixo de rotação. Esta simetria é imposta, neste trabalho, tanto à geometria da estrutura quanto à sua vinculação e carregamento.

⁶ Para a formulação do Método dos Elementos de Contorno, é conveniente definir um vetor de Galerkin a fim de se obter a solução fundamental das equações de Navier.

É extremamente conveniente descrever a configuração axissimétrica no sistema de coordenadas polar cilíndrico:

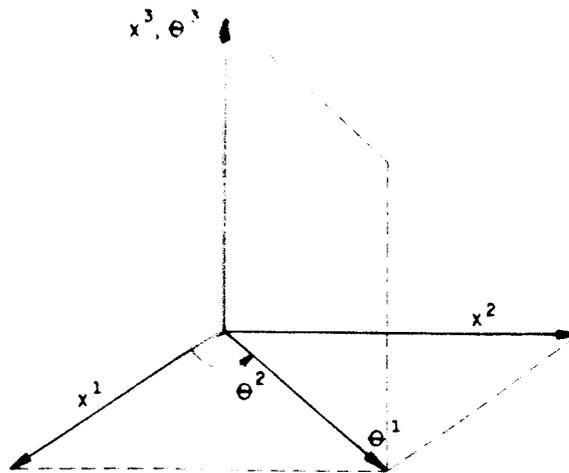


Figura ii-3: Sistema de coordenadas polar cilíndrico

Da figura ii-3

$$\begin{aligned}
 \theta^1 &= r, & \theta^2 &= \theta, & \theta^3 &= z, \\
 x^1 &= r \cos\theta, & x^2 &= r \operatorname{sen}\theta, & x^3 &= z, \\
 r &= \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, & \theta &= \operatorname{arctg}\left[\frac{x^2}{x^1}\right], & z &= x^3.
 \end{aligned}$$

(ii-3,1)

De (ii-1,2) e (ii-1,5):

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= g_{rr} = 1 & g_{22} &= g_{\theta\theta} = r^2 & g_{33} &= g_{zz} = 1 \\
 e & & g_{ij} &= 0 \text{ para } i \neq j, & & \\
 g^{11} &= g^{rr} = 1 & g^{22} &= g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} & g^{33} &= g^{zz} = 1
 \end{aligned}$$

e $g^{ij} = 0$ para $i \neq j$,

ou seja,

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

(ii-3,2)

O comprimento de um elemento ds no sistema polar θ^i é obtido de (ii-1,4):

$$ds^2 = g_{km} d\theta^k d\theta^m = dr^2 + r^2 d\theta + dz^2 . \quad (ii-3,3)$$

Os símbolos de Christoffel em θ^i , obtidos de (ii-1,7), são

$$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma_{ji}^i = 0 \text{ nos demais casos.}$$

(ii-3,4)

De (ii-1,19), tem-se o operador ∇ no sistema cilíndrico θ^i :

$$\nabla = \underline{g}^r \frac{\partial}{\partial r} + g^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \underline{g}^z \frac{\partial}{\partial z} . \quad (ii-3,5)$$

⁷ Também é possível obter a relação $g^{ij} = (D^{ij}/g)$, a partir de (ii-1,2) e (ii-1,5), onde D^{ij} é o cofator do termo g do determinante $g = |g_{ij}|$. (No caso axissimétrico, $g = r^2$).

Mas, como qualquer derivação em θ é nula no caso axissimétrico, ∇ reduz-se a

$$\underline{\nabla} = \underline{g}^r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{g}^z \frac{\partial}{\partial z} \quad . \quad (ii-3,6)$$

De (ii-1,17), nota-se que \underline{g}^r , \underline{g}^z , \underline{g}_r e \underline{g}_z são vetores unitários, e então, de (ii-1,11), obtém-se

$$\underline{g}_r = \underline{g}^r \quad \text{e} \quad \underline{g}_z = \underline{g}^z \quad . \quad (ii-3,7)$$

O gradiente de um escalar e de uma componente de um vetor é, então,

$$\underline{\nabla} \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial r} \underline{g}^r + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \underline{g}^z \quad . \quad (ii-3,8)$$

O divergente de um vetor, a partir de (ii-1,22), é dado por:

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{v} &= v^i |_{,i} = \frac{\partial v^r}{\partial r} + \Gamma_{kr}^r v^k + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \Gamma_{k\theta}^\theta v^k + \frac{\partial v^z}{\partial z} + \Gamma_{kz}^z v^k = \\ &= \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{\partial v^r}{\partial r} + 0 + 0 + \frac{1}{r} v^r + \frac{\partial v^z}{\partial z} + 0 \quad , \end{aligned}$$

ou

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{v^r}{r} + \frac{\partial v^z}{\partial z} \quad . \quad (ii-3,9)$$

O Laplaciano de um escalar, de (ii-1,30), fica

$$\nabla^2 \varphi = g^{ij} \varphi |_{,ij} = g^{rr} \varphi |_{,rr} + g^{\theta\theta} \varphi |_{,\theta\theta} + g^{zz} \varphi |_{,zz} \quad , \quad (ii-3,10)$$

pois os demais g^{ij} são nulos no sistema cilíndrico. Resolvendo-se as derivações covariantes de acordo com (ii-1,6) e utilizando-se (ii-3,4) para os símbolos de Christoffel no sistema cilíndrico, chega-se a

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (\text{ii-3,11})$$

O Laplaciano de um vetor é dado por (ii-1,28):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \underline{v} = (g^{ij} v^k |_{ij}) \underline{g}_k &= g^{ij} v^r |_{ij} \underline{g}_r + g^{ij} v^\theta |_{ij} \underline{g}_\theta + \\ &+ g^{ij} v^z |_{ij} \underline{g}_z \quad (\text{ii-3,12}) \end{aligned}$$

Cada um dos termos de (ii-3,11) pode ser escrito de modo mais detalhado. Para $k=r$, tem-se:

$$\nabla^2 v^r = g^{ij} v^r |_{ij} = g^{rr} v^r |_{rr} + g^{\theta\theta} v^r |_{r\theta} + g^{zz} v^r |_{zz} \quad (\text{ii-3,13})$$

que resulta em

$$g^{ij} v^r |_{ij} = \frac{\partial^2 v^r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^r}{\partial r} - \frac{v^r}{r^2} + \frac{\partial^2 v^r}{\partial z^2} \quad (\text{ii-3,14})$$

Repetindo-se o mesmo procedimento para $k=\theta$, obtém-se

$$g^{ij} v^\theta |_{ij} = \frac{\partial^2 v^\theta}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial v^\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 v^\theta}{\partial z^2} \quad (\text{ii-3,15})$$

Finalmente, para $k=z$,

$$g^{ij} v^z |_{ij} = \frac{\partial^2 v^z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v^z}{\partial z^2} \quad (\text{ii-3,16})$$

Por outro lado, as componentes físicas do tensor tensão, no sistema cilíndrico, são obtidas de (ii-2,4):

$$\sigma^{rr} = \tau^{rr}, \quad \sigma^{\theta\theta} = r^2 \tau^{\theta\theta}, \quad \sigma^{zz} = \tau^{zz},$$

$$\sigma^{\theta z} = r \tau^{\theta z}, \quad \sigma^{zr} = \tau^{zr} \quad \text{e} \quad \sigma^{r\theta} = r \tau^{r\theta},$$

ou seja,
$$\sigma^{ij} = \begin{bmatrix} \tau^{rr} & r \tau^{r\theta} & \tau^{rz} \\ r \tau^{r\theta} & r^2 \tau^{\theta\theta} & r \tau^{\theta z} \\ \tau^{rz} & r \tau^{\theta z} & \tau^{zz} \end{bmatrix}. \quad (\text{ii-3,17})$$

De (ii-1,18), as componentes físicas do vetor deslocamento, no sistema cilíndrico, são:

$$\xi_r = u_r, \quad \xi_\theta = r u_\theta, \quad \text{e} \quad \xi_z = u_z, \quad (\text{ii-3,18})$$

enquanto que as componentes físicas do tensor deformação (infinitesimal, (ii-2,26), no sistema cilíndrico são:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} & \frac{\epsilon_{r\theta}}{r} & \epsilon_{rz} \\ \frac{\epsilon_{r\theta}}{r} & \frac{\epsilon_{\theta\theta}}{r^2} & \frac{\epsilon_{\theta z}}{r} \\ \epsilon_{rz} & \frac{\epsilon_{\theta z}}{r} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (\text{ii-3,19})$$

Agora, de (ii-2,22) (deslocamentos infinitesimais) e e (ii-3,16), chega-se ao tensor deformação (componentes físicas) no sistema cilíndrico:

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial \xi_r}{\partial r}, & \epsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_{\theta}}{\partial r} - \frac{\xi_{\theta}}{r} \right], \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\xi_r}{r}, & \epsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \xi_r}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right], \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial \xi_z}{\partial z}, & \epsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \xi_{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial \theta} \right], \end{aligned}$$

(ii-3,20)

Utilizando-se a Lei de Hooke (ii-2,27) e aplicando-se (ii-3,17), (ii-3,19) e (ii-3,20), obtêm-se as tensões (físicas) em função dos deslocamentos (físicos); lembrando-se que anulam-se as derivadas em θ no axissimétrico:

$$\begin{aligned} \sigma^{rr} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left[\frac{\xi_r}{r} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \right], \\ \sigma^{\theta\theta} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left[\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} + \frac{1-\nu}{\nu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \xi_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\xi_r}{r} \right] \right], \\ \sigma^{zz} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left[\frac{\xi_r}{r} + \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right], \\ \sigma^{r\theta} &= \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_{\theta}}{\partial r} - \frac{\xi_{\theta}}{r} \right], \\ \sigma^{rz} &= \mu \left[\frac{\partial \xi_r}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right], \end{aligned}$$

$$\sigma^{\theta z} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_\theta}{\partial z} \right] .$$

(ii-3,21)

Finalmente, as equações de equilíbrio (ii-2,6), utilizando-se (ii-3,14) (no sistema cilíndrico), ficam:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma^{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma^{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma^{\theta\theta}}{r} = -F^r ,$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2\sigma^{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{\theta z}}{\partial z} = -F^\theta ,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma^{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma^{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} = -F^z .$$

(ii-3,22)

É importante observar, das expressões (ii-3,21) e (ii-3,22), que no problema axissimétrico, por serem nulas as derivadas em θ , as estruturas com tais configurações ficam divididas em dois casos completamente independentes: o caso de forças externas na direção θ causam deslocamento somente na direção θ ; e o de forças externas na direção r ou z provocam deslocamentos em r e z , mas não em θ . Isto pode ser melhor observado consideram-se as equações de equilíbrio de Navier no caso axissimétrico, para cada direção k .

Para $k=r$, tem-se, de (ii-2,30), que

$$g^{ij} u^r|_{,ij} + \frac{1}{1-2\nu} g^{jr} u^i|_{,ij} = -\frac{1}{\mu} F^r . \quad (ii-3,23)$$

Do mesmo modo, para $k=z$, tudo o que foi dito acerca de $k=r$:

$$g^{11} u^r|_{,1} + \frac{1}{1-2\nu} g^{1r} u^1|_{,1} = -\frac{1}{\mu} F^r \quad (11-3,24)$$

Portanto, de (11-3,9), observa-se que $u^1|_{,j}$ introduz a componente u^r em (11-3,23) e a componente u^r em (11-3,24).

Por outro lado, para $k=\theta$,

$$g^{j\theta} u^i|_{,j} = g^{\theta\theta} u^i|_{,\theta} = 0 \quad ,$$

pois as derivadas em θ são nulas no axissimétrico. Portanto, para $k=\theta$ (11-2,30) reduz-se a

$$g^{ij} u^\theta|_{,j} = -\frac{1}{\mu} F^\theta \quad (11-3,25)$$

Isto mostra como o problema axissimétrico divide-se em dois, completamente independentes um do outro.

CAPÍTULO III

EQUAÇÕES INTEGRAIS

3.1 - CASO TRIDIMENSIONAL¹

É conveniente introduzir inicialmente a equação integral de contorno para problemas tridimensionais. Maiores detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em Cruse [39].

O problema elasto-linear isótropo é regido pelas equações de Navier (ii-2,29). Para o caso tridimensional, em coordenadas cartesianas, estas equações reduzem-se a (ii-2,31),²

$$u_{i,j,j} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,j,i} = -\frac{1}{\mu} F_i \quad (\text{iii-1,1})$$

¹ Neste ítem não se tomará o cuidado de distinguir entre tensores contravariantes, covariantes ou mistos, uma vez que apenas sistemas de coordenadas cartesianos serão tratados, nos quais aqueles tensores coincidem.

² Introduzindo-se a notação $\frac{\partial u}{\partial x^i} = u_{,i}$ para indicar derivação (simples) em relação a x^i .

que também podem ser expressas por meio de um vetor de Galerkin, como em (ii-2,34):

$$G_{i,jjkk} = - \frac{1}{\mu} F_i \quad . \quad (iii-1,2)$$

3.1.1 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Conforme será descrito na seção 3.1.2, a equação integral de contorno é obtida supondo-se dois estados de equilíbrio para um corpo qualquer. Um destes estados corresponde à solução fundamental aplicada àquele corpo.

A solução fundamental é a solução das equações de Navier quando a força de volume é substituída pela função delta de Dirac.

A função Delta de Dirac, Δ , é definida como tendo as seguintes propriedades:

$$\Delta(p,q) = 0 \quad \text{se } p \neq q$$

$$\Delta(p,q) = \alpha \quad \text{se } p = q \quad e$$

(iii-1,3)

$$\int_R \rho(q) \Delta(p,q) dV(q) = \rho(p),$$

onde ρ representa uma função contínua qualquer e R é o domínio.

A solução fundamental u_i^* é portanto a solução da equação

$$u_{i,jj}^*(p,q) + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji}^*(p,q) + \frac{1}{\mu} \Delta(p,q) e_i = 0 \quad ,$$

(iii-1,4)

onde e_i representa a i -ésima componente de um versor e ,
 — isto é, $e_i = 1$, para todo i .

A solução de u_i^* é mais facilmente obtida se u_i^* é escrita em função de um vetor de Galerkin, de acordo com (iii-1,2):

$$G_{i,jjkk}^*(p,q) = -\frac{1}{\mu} \Delta(p,q) e_i \quad (\text{iii-1,5})$$

A solução de (iii-1,5) relaciona-se diretamente com a equação de Laplace. Com efeito, é um resultado bastante conhecido na matemática (ver Cruse [39]) que

$$G_{i,jj}^*(p,q) = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{1}{r(p,q)} e_i \quad (\text{iii-1,6})$$

onde $r(p,q)$ é a distância entre p e q .

(iii-1,6) é a solução fundamental da equação de Laplace (a menos da constante $1/\mu$). Não é difícil verificar que a solução de (iii-1,6) é

$$G_i^*(p,q) = \frac{1}{8\pi\mu} r(p,q) e_i \quad (\text{iii-1,7})$$

De acordo com (ii-2,32), os deslocamentos são definidos em função do vetor de Galerkin, em coordenadas cartesianas, como

$$u_i = G_{i,jj} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{j,ji} \quad (\text{iii-1,8})$$

A solução fundamental para deslocamentos pode então ser obtida de (iii-1,7) e (iii-1,8):

$$u_i^*(p,q) = \left[\frac{1}{r(p,q)} - \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} ((3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}) \right] e_j \quad (\text{iii-1,9})$$

onde $r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial y_i} = -\frac{\partial r}{\partial x_i}$, x_i representa as coordenadas de p

y_i as coordenadas de q ; $r = \left(\sum_i (y_i - x_i)^2 \right)^{1/2}$.

A solução fundamental para reações pode ser obtida de (iii-1,9) a partir da definição de reação como equilíbrio de uma superfície elementar arbitrária, (ii-2,2),³ da lei de Hooke, (ii-2,27), e do tensor de deformação de Cauchy (ii-2,24) — sempre em coordenadas cartesianas —, resultando em

$$t_i^*(p, q) = \left\{ -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{8\pi(1-\mu)} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left((1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j} \right) - (1-2\mu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right] \right\} e_j, \quad (\text{iii-1,10})$$

onde n refere-se ao vetor normal (unitário) à superfície analisada, no ponto q , positivo para fora do corpo considerado, e n_i é a componente deste vetor na direção i .

Considerando-se uma esfera S_ϵ de raio ϵ com centro no ponto p , e fazendo-se $\epsilon \rightarrow 0$, chega-se a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} t_i^* dS = \delta_{ij} e_j = e_i, \quad (\text{iii-1,11})$$

de onde se depreende que a solução fundamental corresponde à solução do problema de Kelvin — carga pontual no interior de um sólido infinito —, com a carga pontual em p , neste caso, equivalendo a uma carga unitária em cada direção i , como mostra a expressão anterior.

As seguintes expressões podem ser definidas a partir de (iii-1,9) e (iii-1,10), para as quais o primeiro índice indica a direção em que a carga unitária é aplicada no ponto p e o segundo índice representa a direção da componente do deslocamento ou de reação provocada no ponto q devido a esta

³ $t_{ij} = \sigma_{ij} n_j$ (em coordenadas cartesianas).

carga em p:

$$u_i^*(p,q) = u_{ji}^*(p,q) e_j \quad , \quad (iii-1,12)$$

$$t_i^*(p,q) = t_{ji}^*(p,q) e_j \quad .$$

Ou seja, u_{ji}^* e t_{ji}^* representam as expressões entre colchetes em (iii-1,9) e (iii-1,10), respectivamente.

3.1.2- EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

As equações que servem de base para o Método dos Elementos de Contorno — isto é, as Identidades de Somigliana — podem ser obtidas de dois modos: utilizando-se os teoremas de Betti ou empregando-se a técnica dos Resíduos Ponderados. Estes dois casos serão abordados a seguir.

3.1.2.1- Identidades Somiglianas: Teoremas de Betti

Considerando-se um corpo elástico R que satisfaz a dois estados de equilíbrio, representados por¹ σ_{ij}^1 , ϵ_{ij}^1 , u_i^1 e σ_{ij}^2 , ϵ_{ij}^2 , u_i^2 e utilizando-se a Lei de Hooke (e ii-2,27) e lembrando-se que $\epsilon_{kk} = \delta_{ij} \epsilon_{ij}$, pode-se mostrar facilmente que vale a seguinte identidade:

$$\int_R \sigma_{ij}^1 \epsilon_{ij}^2 dV = \int_R \sigma_{ij}^2 \epsilon_{ij}^1 dV \quad , \quad (iii-1,13)$$

que é o Primeiro Teorema de Betti.

Por outro lado, recorrendo-se (ii-2,2), ao teorema da

¹ Lembrando novamente que, em coordenadas cartesianas, $\sigma_{ij} = \tau_{ij}$ e $\epsilon_{ij} = e_{ij}$ — e que a posição dos índices não importa.

divergência,² a propriedades dos tensores σ_{ij} e $u_{i,j}$ e supondo-se que as forças volumétricas em R são nulas, chega-se à identidade

$$\int_S t_i u_i dS = \int_R \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV, \quad (\text{iii-1,14})$$

onde S representa a superfície do corpo R .

De (iii-1,13) e (iii-1,14) obtém-se o Segundo Teorema de Betti:⁴

$$\int_S t_i^1 u_i^2 dS = \int_S t_i^2 u_i^1 dS, \quad (\text{iii-1,15})$$

Considere-se agora que um dos estados de tensão de (iii-1,15) corresponde à solução fundamental das equações de Navier, enquanto que o outro estado é desconhecido:

$$\int_S t_i(Q) u_i^*(p,Q) dS(Q) = \int_S u_i(Q) t_i^*(p,Q) dS(Q), \quad (\text{iii-1,16})$$

² O Teorema da Divergência estabelece que

$$\int_R \nabla \cdot \tilde{F} dV = \int_S \tilde{F} \cdot \tilde{n} dS,$$

onde \tilde{F} é uma função vetorial qualquer, contínua e com primeira derivada contínua numa região regular R ; S é a superfície de R , e \tilde{n} a normal a S , unitária e voltada para fora de R .

A prova deste teorema é simples, e pode ser encontrada, por exemplo, em Cruse [39], p. 10.

³ $u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$ e σ_{ij} é simétrico, lembrando-se ainda que $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ ((ii-2,24) e (ii-2,26)).

⁴ Com a inclusão de forças volumétricas, obtém-se

$$\int_S t_i^1 u_i^2 dS + \int_R X_i^1 u_i^2 dV = \int_S t_i^2 u_i^1 dS + \int_R X_i^2 u_i^1 dV,$$

onde X representa forças de volume.

onde a letra maiúscula "Q" é utilizada para indicar que o ponto q pertence à superfície s.

De (iii-1,9) e (iii-1,10) observa-se que u_i^* e t_i^* possuem singularidades $1/r$ e $1/r^2$, respectivamente. A fim de se analisar o comportamento destas singularidades nas integrais acima, é conveniente extrair do domínio R uma esfera R_ϵ de raio ϵ com centro em p e com superfície s_ϵ . Neste caso, o domínio das integrais de (iii-1,16) passa a ser $(s + s_\epsilon)$ em vez de s. Basta então analisar o que ocorre no limite, quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Efetuando-se este limite, verifica-se que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s+s_\epsilon} t_i(Q) u_i^*(p, Q) dS(Q) = \int_s t_i(Q) u_i^*(p, Q) dS(Q) \quad , \quad (iii-1,17)$$

pois (vide CRUSE [39], p. 86)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_\epsilon} t_i(Q) u_i^*(p, Q) dS(Q) = 0 \quad . \quad (iii-1,18)$$

Quanto à segunda integral em (iii-1,16), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_\epsilon} u_i(Q) t_i^*(p, Q) dS(Q) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_\epsilon} (u_i(Q) - u_i(p)) t_i^*(p, Q) dS(Q) \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_\epsilon} u_i(p) t_i^*(p, Q) dS(Q) \quad . \quad (iii-1,19) \end{aligned}$$

Os deslocamentos u_i são contínuos no ponto p, e fazem com que o valor da segunda integral em (iii-1,19) seja zero no limite de $\epsilon \rightarrow 0$. Quanto à terceira integral na equação acima, pode-se escrever, lembrando-se de (iii-1,11):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_\epsilon} u_i(p) t_i^*(p, Q) dS(Q) = u_i(p) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_\epsilon} t_i^*(p, Q) dS(Q) =$$

$$= u_i(p) \delta_{ij} e_j = u_j(p) e_j . \quad (\text{iii-1,20})$$

Portanto, devido à singularidade de t_j^* , o segundo Teorema de Betti, neste caso, não é expresso por (iii-1,16), mas sim por

$$\int_S t_i(Q) u_i^*(p, Q) dS(Q) = u_j(p) e_j + \int_S u_i(Q) t_i^*(p, Q) dS(Q) . \quad (\text{iii-1,21})$$

Substituindo-se (iii-1,12) em (iii-1,21), obtêm-se as equações integrais de contorno

$$u_j(p) = \int_S t_i(Q) u_{ji}^*(p, Q) dS(Q) - \int_S u_i(p) t_{ji}^*(p, Q) dS(Q) . \quad (\text{iii-1,22})$$

Observe-se que o mesmo resultado poderia ser obtido a partir do Segundo Teorema de Betti em sua forma completa, isto é, contendo os termos com força de volume (nota 7), fazendo-se $X_1^1 = X_1 = 0$ e $X_1^2 = X_1^* = \Delta(p, q) e_1$. Por outro lado, tomando-se $X_1^1 = X_1 \neq 0$ e $X_1^2 = X_1^* = \Delta(p, q) e_1$, obtém-se

$$u_j(p) = \int_S t_i(Q) u_{ji}^*(p, Q) dS(Q) - \int_S u_{ji}(Q) t_{ji}^*(p, Q) dS(Q) + \int_R X_i(q) u_{ji}^*(p, q) dV(q) , \quad (\text{iii-1,23})$$

que representa equações integrais que não se reduzem ao contorno — forças volumétricas introduzem uma integral de volume a (iii-1,22).⁵

⁵ No entanto, expressando-se u_{ji}^* em termos do vetor de Galerkin, de acordo com (iii-1,8), pode-se aplicar o Teorema da Divergência (nota 5), de modo que a integral de volume em (iii-1,23) transforma-se numa integral de superfície.

A expressão (iii-1,22) - ou (iii-1,23) - é conhecida como Identidade Somigliana para deslocamentos.

O que é importante destacar acerca da identidade Somigliana é o fato de que ela possibilita a obtenção dos deslocamentos num ponto do interior de um corpo em exame conhecendo-se somente os deslocamentos e reações na superfície deste corpo, num estado de tensões genérico submetido a análise.

A Identidade Somigliana para tensões, por sua vez, pode ser obtida de (iii-1,22) por diferenciação de $u_i(p)$. As tensões no ponto p , $\sigma_{ij}(p)$, podem ser obtidas da Lei de Hooke — (ii-2,27) e (ii-2,28) — e da definição do tensor deformação — (ii-2,24) e (ii-2,26). Deste modo, $\sigma_{ij}(p)$ pode ser obtido em função de $u_i(p)$, sendo $u_i(p)$ fornecido por (iii-1,22).

No caso tridimensional,

$$\sigma_{ij}(p) = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} + \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad , \quad (\text{iii-1,24})$$

onde $x_i (i=1,3)$ representa as coordenadas do ponto p .

A partir de (iii-1,24), a Identidade Somigliana para tensões pode ser escrita como

$$\sigma_{ij}(p) = \int_S t_k(Q) D_{kij}^*(p,Q) dS(Q) - \int_S u_k(Q) S_{kij}^*(p,Q) dS(Q) \quad ,$$

$$\text{com} \quad D_{kij}^* = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_{mk}^*}{\partial x_m} + \mu \left[\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right]$$

$$\text{e} \quad S_{kij}^* = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial t_{mk}^*}{\partial x_m} + \mu \left[\frac{\partial t_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial t_{jk}^*}{\partial x_i} \right] \quad .$$

(iii-1,25)

Lembrando-se que

$$r = \left(\sum_1^3 (y_i - x_i)^2 \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial x_i} = - \frac{\partial r}{\partial y_i} \quad (\text{iii-1,26})$$

onde y_i ($i=1,3$) representa as coordenadas do ponto Q, resulta

$$L_{kij}(p,Q) = \frac{1}{r^2} \left((1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + S_{kj}r_{,i}) + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right) \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad \text{e}$$

$$S_{kij}(p,Q) = \frac{2\mu}{r^3} \left(3 \frac{dr}{dn} \left((1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right) + 3\nu(n_{i}r_{,j}r_{,k} + n_{j}r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(3n_{k}r_{,i}r_{,j} + n_{j}\delta_{ik} + n_{i}\delta_{jk}) - (1-4\nu)n_{k}\delta_{ij} \right) \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad (\text{iii-1,27})$$

onde a normal e as derivadas são relativas ao ponto Q.

3.1.2.2 - Identidades Somiglianas: Resíduos Ponderados

As Identidades Somiglianas também podem ser obtidas aplicando-se o Método dos Resíduos Ponderados. Maiores detalhes podem ser encontrados em BREBBIA et al. [26].

Considere-se um corpo qualquer, de domínio V, num de seus estados de equilíbrio, $u_i^1, \varepsilon_{ij}^1, \sigma_{ij}^1, t_i^1, X_i$. A equação de equilíbrio no volume, (ii-2,8), permite que se escreva, para o domínio V, a equação

$$\int_V (\sigma_{ij,j}^1 + X_i^1) u_i^2 dV = 0 \quad , \quad (\text{iii-1,28})$$

onde u_i^2 representa o deslocamento num outro estado de equilíbrio, arbitrário, do corpo V.

Integrando-se o termo com $\sigma_{ij,j}^1 u_i^2$ por partes, obtém-se

$$\int_V X_i^1 u_i^2 dV - \int_V \sigma_{ij}^1 \epsilon_{ij}^2 dV = - \int_S t_i^1 u_i^2 dS, \quad (\text{iii-1,29})$$

Integrando-se novamente por partes a segunda integral de volume em (iii-1,29), obtém-se, após algumas passagens,

$$\int_V X_i^1 u_i^2 dV - \int_V u_i^1 \sigma_{ij,j}^2 dV = - \int_S t_i^1 u_i^2 dS + \int_S u_i^1 t_i^2 dS \quad . \quad (\text{iii-1,30})$$

Suponha-se agora que $u_i, \epsilon_{ij}, \sigma_{ij}, t_i$ representam uma aproximação de $u_i^1, \epsilon_{ij}^1, \sigma_{ij}^1, t_i^1$. Suponha-se, porém, que são conhecidos os deslocamentos exatos, u_i^1 , numa parte do contorno, S_1 , enquanto que no restante do contorno, S_2 , são conhecidas as reações, t_i^1 , de modo exato. (X_i também é conhecida.) u_i^1, t_i^1 poderiam então ser introduzidos na equação (iii-1,30), que ficaria assim:

$$\begin{aligned} \int_V X_i^1 u_i^2 dV - \int_V u_i^1 \sigma_{ij,j}^2 dV = & - \int_{S_1} t_i^1 u_i^2 dS - \int_{S_2} t_i^1 u_i^2 dS \\ & + \int_{S_1} u_i^1 t_i^2 dS + \int_{S_2} u_i^1 t_i^2 dS \quad . \quad (\text{iii-1,31}) \end{aligned}$$

Novamente, integrando-se duas vezes por partes a segunda integral de volume em (iii-1,31) chega-se a

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + X_i^1) u_i^2 dV = \int_{S_2} (t_i - t_i^1) u_i^2 dS + \int_{S_1} (u_i^1 - u_i) t_i^2 dS \quad .$$

(iii-1,32)

Agora é possível notar mais claramente que as funções correspondentes ao segundo estado de equilíbrio, em (iii-1,32), podem ser interpretadas como funções ponderadoras, enquanto os resíduos resultam da representação aproximada do estado 1. Dessa forma, a primeira integral em (iii-1,32) corresponde à distribuição do resíduo (ou erro) no domínio, enquanto as integrais de contorno representam a ponderação do erro na superfície, devido ao relaxamento das condições de contorno. (Se a aproximação do estado 1 fosse substituída em (iii-1,28), se estaria admitindo que esta aproximação satisfaria identicamente às condições de contorno. Mas isto não daria origem ao método dos elementos de contorno, como é o caso de (iii-1,32).)

Escolhendo-se como funções ponderadoras, correspondentes ao segundo estado de equilíbrio, as soluções fundamentais, u_{ji}^* , t_{ji}^* — (iii-1,9) e (iii-1,10) —, então $\sigma_{ij,j}^2 = \sigma_{ij,j}^* = -\Delta e_i$, onde Δ é a função delta de Dirac, de modo que (iii-1,31) pode ser escrita como

$$\int_V X_i u_i^* dV - u_i e_i = - \int_S t_i u_i^* dS + \int_S u_i t_i^* dS \quad ,$$

(iii-1,33)

lembrando-se que $u_i = u_i^1$ em S_1 e $t_i = t_i^1$ em S_2 . Utilizando-se (iii-1,12) e (iii-1,33) fica:

$$u_i = \int_S t_i u_{ji}^* dS + \int_S u_i t_{ji}^* dS + \int_V X_i u_{ji}^* dV \quad ,$$

(iii-1,34)

que é igual a (iii-1,23).

Ressalte-se que uma vantagem desta formulação, por meio de resíduos ponderados, é que ela facilita a compreensão de relações do método dos elementos de contorno com outros métodos numéricos.

3.1.3 - PONTOS DO CONTORNO

As equações integrais de contorno (iii-1,22) ou (iii-1,34) da seção 3.1.2 possibilitam a obtenção dos deslocamentos num ponto interno p , em função dos deslocamentos e reações no contorno. Todavia, aquelas equações não são válidas para um ponto P do contorno, pois a integral em t_i^* apresenta uma descontinuidade, devido à singularidade de t_i^* , neste caso.

O valor desta descontinuidade em $t_i^*(P,Q)$ pode ser calculado de duas formas.

Brebbia [21], pp. 120-123, calcula esta descontinuidade para o caso em que a superfície que contém o ponto P possua segunda derivada contínua.

Considere-se que uma semi-esfera de raio a , com centro em P , faz parte do corpo considerado — figura iii-1. Neste caso, P deixa de ser um ponto da superfície, pertencendo então ao interior do corpo, de modo que as equações (iii-1,22) ou (iii-1,34) podem ser aplicadas a P :

$$u_j(P) = \int_{s'+s_\epsilon} t_i(Q) u_{ji}^*(P,Q) dS(Q) - \int_{s'+s_\epsilon} u_i(Q) t_{ji}^*(P,Q) dS(Q) \quad , \quad (iii-1,35)$$

onde s' representa a superfície do corpo subtraída da área da inserção da semi-esfera, e s_ϵ é a superfície da semi-esfera.

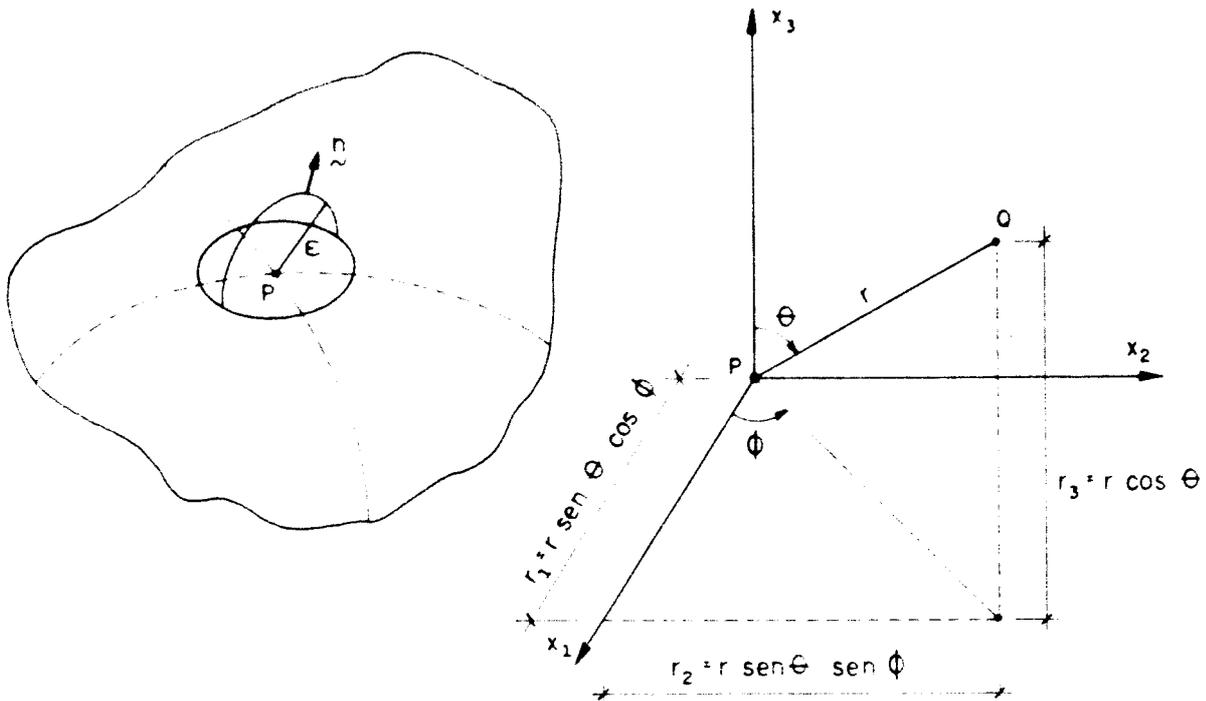


Figura iii-1 . Esquema para avaliação da descontinuidade no integral de t_i^* (P,Q)

A descontinuidade procurada é obtida calculando-se o limite $\epsilon \rightarrow 0$. É preciso calcular o limite para a semi-esfera. As expressões (iii-1,9) e (iii-1,10) devem ser substituídas em (iii-1,35).

Note-se que, em S_ϵ , $\epsilon=r$. Portanto, o segundo termo em (ii-1,10) é nulo, pois, em S_ϵ ,

$$n_i = \frac{\partial r}{\partial x_i} = r_{,i} = \frac{r_i}{r} \quad , \quad (\text{iii-1,36})$$

o que implica que

$$n_j r_{,i} - n_i r_{,j} = 0 \quad . \quad (\text{iii-1,37})$$

A parcela da segunda integral de (iii-1,35), em S_ϵ , que resta calcular, então, é

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S_\epsilon} u_i \frac{1}{r^2} \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{\partial r}{\partial n} (1-2\nu)\delta_{ji} + 3r_{,j}r_{,i} \right) dS \quad , \quad (iii-1,38)$$

Resolvendo-se a expressão acima resulta $-\frac{1}{2}u_i$. O mesmo ocorre para $i=2$ e $i=3$.

Portanto, pode-se escrever que o valor da segunda integral em (iii-1,29), em S_ϵ , para $\epsilon \rightarrow 0$, é

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S_\epsilon} u_i(Q) t_{ji}^*(P,Q) dS(Q) \right) = -\frac{1}{2} u_j(P) \quad . \quad (iii-1,39)$$

Procedimentos similares podem ser aplicados à primeira integral de (iii-1,29) em S_ϵ , chegando-se a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S_\epsilon} t_i(Q) u_{ji}^*(P,Q) dS(Q) \right) = 0 \quad . \quad (iii-1,40)$$

Dessa forma, a equação integral para um ponto do contorno, (iii-1,35), resulta em

$$\frac{1}{2} u_j(P) = \int_S t_i(Q) u_{ji}^*(P,Q) dSQ - \int_S u_i(Q) t_{ji}^*(P,Q) dS(Q) \quad . \quad (iii-1,41)$$

Cruse [39], pp.82-85, chega a este mesmo resultado considerando um círculo de raio ϵ na superfície do corpo, com centro num ponto P deste contorno. Cruse calcula então o valor da integral em t_i^* quando o ponto P está a uma distância δ de p , $\delta \ll \epsilon$, no interior do corpo em análise:

calcula também o valor da integral em t_i^* quando $p = P$ (isto é, quando p está no contorno, coincidindo com P). A diferença entre o valor da integral de t_i^* para p no contorno ($p=P$) e para p no interior do corpo, quando $r \rightarrow 0$, fornece a descontinuidade desta integral devido à singularidade de t_i^* .

O cálculo da integral de t_i^* , para pontos P do contorno nos quais esta superfície apresenta mais de uma derivada, não resulta em $-\frac{1}{2} u_i(P)$. No próximo capítulo se indicará como estes valores podem ser obtidos sem a resolução dos limites, recorrendo-se à imposição de deslocamentos de corpo rígido no corpo em estudo.

O cálculo das tensões na superfície, por sua vez, pode ser obtido por diferenciação de $u_i(p)$, de modo similar ao que foi mostrado para as tensões em pontos internos (cf. seção 3.1.2.1). No entanto, no próximo capítulo também será indicada uma maneira prática e econômica de se efetuar o cálculo numérico das tensões no contorno.

3.2 - CASO AXISSIMÉTRICO

A obtenção das equações integrais de contorno no caso axissimétrico é análoga à do caso tridimensional. As soluções fundamentais podem ser obtidas substituindo-se, nas equações de Navier, a força de volume pela função delta de Dirac, de modo similar ao do tridimensional. Mas as soluções fundamentais do axissimétrico também podem ser obtidas de modo alternativo, partindo-se da solução fundamental do caso tridimensional, conforme se mostra na seção 3.2.2.

Não se deve esquecer que, conforme observado na seção 2.3, o problema axissimétrico divide-se em dois problemas completamente independentes: o dos deslocamentos tangenciais, e o dos deslocamentos nas direções radial e axial. Ou seja, são completamente independentes o problema

dos deslocamentos no plano de revolução (plano radial-axial) e o dos deslocamentos perpendiculares a este plano (torção axissimétrica).

Em 3.2.1. será abordado o caso do plano axissimétrico, que aparece com maior frequência na literatura sobre Elementos de Contorno, reservando-se para 3.2.2 um tratamento mais detalhado da torção axissimétrica.

3.2.1 - PLANO RADIAL-AXIAL

No plano radial-axial axissimétrico, para corpos elasto-lineares isótropos, as equações de Navier, (ii-2,34), ou

$$g^{mn} g^{ij} G^k |_{ijmn} = - \frac{1}{\mu} F^k \quad , \quad (\text{iii-2,1})$$

com \underline{u} dado em função de \underline{G} por (ii-2,32), isto é,

$$\underline{u} = \nabla^2 \underline{G} - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla(\nabla \cdot \underline{G}) \quad , \quad (\text{iii-2,2})$$

são expressas em coordenadas polares cilíndricas. Neste sistema, o operador ∇^2 aplicado sobre um vetor \underline{v} resulta num vetor, cujas componentes na direção \underline{g}_r e \underline{g}_z são dadas por (ii-3,14) e (ii-3,16), respectivamente:

$$g^{ij} v^r |_{ij} = \frac{\partial^2 v^r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^r}{\partial r} - \frac{v^r}{r^2} + \frac{\partial^2 v^r}{\partial z^2} \quad , \quad (\text{iii-2,3})$$

$$g^{ij} v^z |_{ij} = \frac{\partial^2 v^z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v^z}{\partial z^2} \quad .$$

O produto vetorial $\nabla \cdot \underline{v}$ no axissimétrico, onde \underline{v} é um

vetor qualquer, é dado por (ii-3,9),

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{v^r}{r} + \frac{\partial v^z}{\partial z} \quad , \quad (\text{iii-2,4})$$

lembrando-se ainda que \underline{v} , de (ii-3,6), é

$$\underline{v} = \underline{g}^r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{g}^z \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad (\text{iii-2,5})$$

3.2.1.1- Soluções Fundamentais

Tal como no caso tridimensional, as soluções fundamentais do plano radial-axial axissimétrico podem ser obtidas substituindo-se a função delta de Dirac no lugar das forças volumétricas, nas equações de Navier, (iii-2,1) (Também seria possível obter estas soluções a partir da solução fundamental do tridimensional, como na seção 3.2.2).

Em cada direção, radial ou axial, as equações (iii-2,1) tomam uma forma diferente, de acordo com (iii-2,3).

Quanto à função Delta de Dirac, sua aplicação não equivale à aplicação de uma carga unitária concentrada num ponto, como no caso tridimensional. No axissimétrico, a função delta de Dirac deve equivaler a uma carga unitária aplicada em uma circunferência, como ilustrado na figura (iii-2), para o caso do plano radial-axial. Uma carga unitária radial e outra axial são distribuídas ao longo de uma circunferência. Desta forma, no ponto p a carga vale, em cada direção,

$$f = \frac{1}{2\pi r(p)} \quad . \quad (\text{iii-2,6})$$

Convém utilizar-se a seguinte notação:

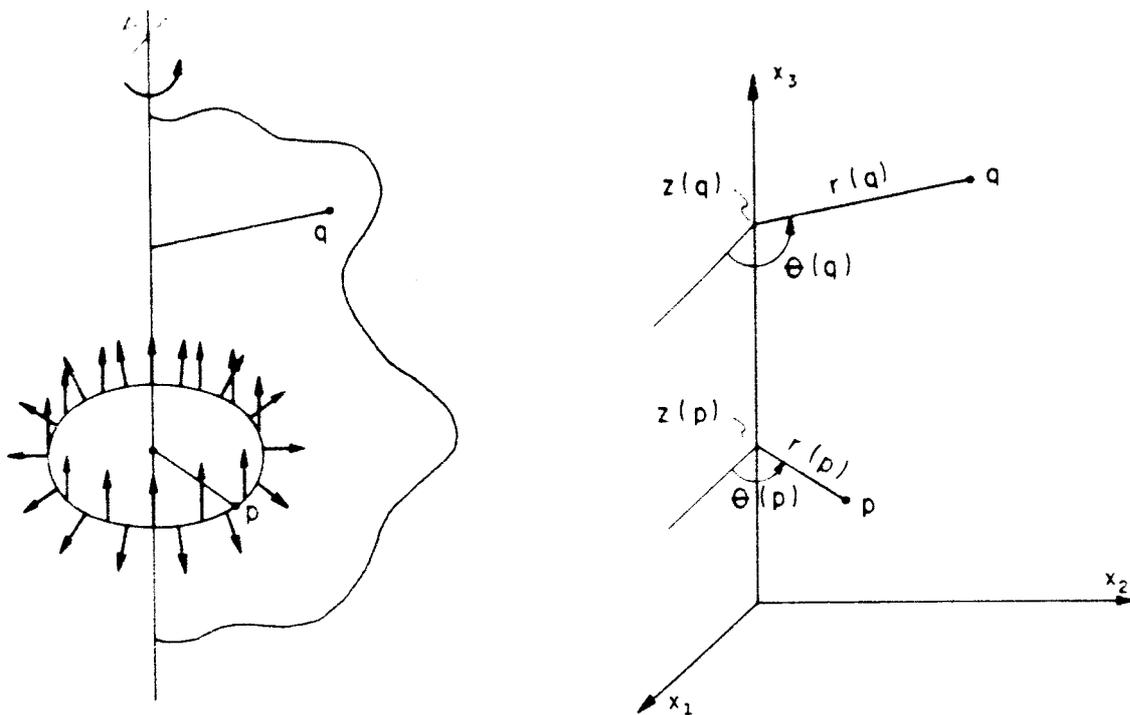


Figura iii-2 . Anéis de carga unitários nas direções radial e axial

$$\begin{aligned}
 r &= r(p), & R &= r(q), & \bar{Z} &= Z-z, \\
 z &= z(p), & Z &= z(q), & \gamma &= 1 + \frac{\bar{Z}^2 + (R-r)^2}{2Rr} .
 \end{aligned}$$

(iii-2,7)

Lembrando-se ainda que, no sistema cilíndrico, os vetores \underline{g}_r e \underline{g}_z são unitários, então, de (ii-2,18), conclui-se que as componentes de um vetor qualquer nas direções de \underline{g}_r e \underline{g}_z coincidem com as componentes físicas nestas nestas direções.

A solução fundamental é então a solução das equações:

$$g^{mn} g^{ij} G^k|_{ij,rr} = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta(p,q)}{2\pi r} e^k, \quad (\text{iii-2,8})$$

onde $k=r,z$ e $e^k=1$ — e^k é a componente de um vetor no qual as componentes nas direções de \underline{g}_r e \underline{g}_z são iguais à unidade. Assim, a função delta de Dirac é aplicada em cada direção k — representando um anel de carga unitário em cada direção k . Portanto, num domínio infinito,

$$\int_V \frac{\Delta}{2\pi r} e^k dV = 1. \quad (\text{iii-2,9})$$

As equações (iii-2,8) podem ser resolvidas utilizando-se métodos de transformação de integrais.¹

As soluções de (iii-2,8) são²

$$*G^r(p,q) = \frac{1}{8\pi^2\mu} \sqrt{Rr} \sqrt{\gamma^2-1} Q_{+1/2}^{-1}(\gamma) e^r$$

e (iii-2,10)

$$*G^z(p,q) = \frac{1}{8\pi^2\mu} \sqrt{Rr} \sqrt{\gamma^2-1} Q_{-1/2}^{-1}(\gamma) e^z,$$

onde $Q_{+1/2}^{-1}(\gamma)$ e $Q_{-1/2}^{-1}(\gamma)$ são funções de Legendre de segundo tipo, de ordem (-1) e graus (+1/2) e (-1/2). As constantes $e^k = 1$ ($k = r,z$) são acrescentadas apenas para indicar a direção de aplicação da carga.

* u^r e * u^z podem então ser obtidos de (iii-2,2) e de (iii-2,10) (ou (ii-2,30), lembrando-se de que $g^{rr}=g^{zz}=1$ e de que as derivadas em θ são nulas no sistema cilíndrico):

¹ Como o método de transformação de integrais de Hankel. Ver BAKR [05] e BAKR e FENNER [09].

² Cf. em CRUSE, SNOW e WILSON [41] ou BAKR [05].

$${}^*u^k(p,q) = g^i{}^j G^k|_{i,j} - \frac{1}{2(1-\nu)} G^i|_{i,k} \quad , \quad (\text{iii-2,11})$$

onde $k=r,z$.

Lembrando-se também que o sistema cilíndrico é ortogonal e que $\underline{g}_r, \underline{g}_z$ são unitários -- de onde resulta (ii-3,7) — conclui-se que tensores covariantes e contravariantes coincidem, nas componentes que envolvem apenas os índices r e z . Este é o caso do problema axissimétrico, portanto. Então, por uma questão de conforto, os índices dos tensores envolvendo apenas os índices r e z podem ser escritos sempre como inferiores — e é assim que eles costumam aparecer na literatura de elementos de contorno para problemas axissimétricos.

Por uma questão de conforto, então, os índices no caso radial-axial serão todos inferiores, daqui por diante. Pois ${}^*u^k = u_k^*$ e ${}^*G^k = G_k^*$.

Recordando-se agora de (iii-1,12), a seguinte expressão pode ser escrita:

$${}^*u^i(p,q) = u_i^*(p,q) = u_{j,i}(p,q) e_j \quad , \quad (\text{iii-2,12})$$

onde o primeiro índice em $u_{j,i}^*$ representa a direção de aplicação da carga em p , e o segundo, o deslocamento na direção i , em q .

Deve-se notar que em $u_{j,i}^*$ aparece apenas a componente de \underline{G} na direção j . Pois, substituindo-se (iii-2,10) em (iii-2,11), observa-se que os deslocamentos na direção r , quando a carga é aplicada na direção r , são dados apenas em função de G_r^* ($= {}^*G^r$), enquanto os deslocamentos em r devido à carga em z , apenas por G_z^* ($= {}^*G^z$). Analogamente para os deslocamentos na direção z , que ficam em função apenas de G_r^* quando a carga é aplicada em r , e apenas em termos de G_z^* ,

quando a aplicação da carga é na direção z . Os u_{ji}^* , definidos por (iii-2,12) (para $i,j=r,z$) e por (iii-2,10) e (iii-2,11), são, portanto,

$$u_{rr}^* = g^{ij} G_r^* |_{ij} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial G_r^*}{\partial r} + \frac{G_r^*}{r} \right] ,$$

$$u_{zz}^* = - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 G_z^*}{\partial r \partial z} ,$$

$$u_{rz}^* = - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial G_r^*}{\partial r} + \frac{G_r^*}{r} \right] \quad e$$

$$u_{zz}^* = g^{ij} G_z^* |_{ij} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 G_z^*}{\partial z^2} , \quad (iii-2,13)$$

Escritas em termos de funções de Legendre de ordem zero, as expressões (iii-2,13) ficam³

$$u_{rr}^* = \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)\mu\sqrt{Rr}} \left[(3-4\nu)Q_{+1/2}(\gamma) + \frac{\bar{z}^2}{Rr} \frac{\partial Q_{+1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} \right] ,$$

$$u_{rz}^* = \frac{-\bar{z}}{16\pi^2(1-\nu)\mu R\sqrt{Rr}} \left[\frac{1}{2}Q_{+1/2}(\gamma) - \left(\gamma - \frac{R}{r} \right) \frac{\partial Q_{+1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} \right] ,$$

$$u_{zz}^* = \frac{\bar{z}}{16\pi^2(1-\nu)\mu\sqrt{Rr}} \left[\frac{1}{2}Q_{-1/2}(\gamma) + \left(\gamma - \frac{R}{r} \right) \frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} \right] ,$$

³ CRUSE, SNOW e WILSON [41], BREBBIA, TELLES e WROBEL [26].

$$u'_{zz} = \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)\mu\sqrt{Rr}} \left[(3-4\nu)Q_{-1/2}(\gamma) - \frac{\bar{z}^2}{Rr} \frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} \right],$$

(iii-2,14)

onde $Q_{+1/2}(\gamma)$ e $Q_{-1/2}(\gamma)$ são funções de Legendre, de ordem zero.

No entanto, para se realizar a aproximação numérica destas expressões, costuma-se expressá-las em termos de integrais elípticas completas de primeiro e segundo tipos, pois há algoritmos mais simples e precisos para o cálculo numérico dessas integrais elípticas do que os algoritmos existentes para a avaliação numérica daquelas funções de Legendre (BAKR [05], p.9).

As relações entre as funções de Legendre e as integrais elípticas são dadas por⁴

$$Q_{+1/2}(\gamma) = \gamma k K(k) - \frac{2}{k} E(k),$$

$$\frac{\partial Q_{+1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{k}{2} \left(K(k) - \frac{\gamma}{\gamma-1} E(k) \right),$$

$$Q_{-1/2}(\gamma) = k K(k),$$

$$\frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} = -\frac{k}{2} \frac{1}{\gamma-1} E(k), \quad (\text{iii-2,15})$$

onde $K(k)$ e $E(k)$ representam integrais elípticas completas de primeiro e de segundo tipo, respectivamente, sendo

$$k = \sqrt{m} \quad \text{e} \quad m = \frac{2}{1+\gamma}. \quad (\text{iii-2,16})$$

⁴ Cf. TELLES [86], BREBBIA, TELLES e WROBEL [26].

Se as derivações de u_{ij}^* , para obtenção das soluções fundamentais de reação, forem realizadas com u_{ij}^* em termos de $K(k)$ e $E(k)$, é conveniente conhecer também suas derivadas,⁵

$$\frac{\partial K(k)}{\partial m} = \frac{\partial K(k)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial m} = \frac{E(k) - (1-m)K(k)}{2m(1-m)} \quad e$$

$$\frac{\partial E(k)}{\partial m} = \frac{\partial E(k)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial m} = \frac{E(k) - K(k)}{2m} \quad (iii-2,17)$$

Ressalte-se novamente que, sendo \underline{g}^r e \underline{g}^z unitários no axissimétrico, as soluções fundamentais para deslocamentos, u_{ij}^* em (iii-2,13) ou (iii-2,14), já se referem a componentes físicas. O mesmo pode ser dito das soluções fundamentais de reações, t_{ij}^* .

As t_{ij}^* podem ser obtidas de u_{ij}^* a partir da Lei de Hooke para o axissimétrico, (ii-3,21), e da equação de equilíbrio de superfície, (ii-2,2). Da Lei de Hooke, as componentes não-nulas, no caso do plano radial-axial, são:

$$\sigma_{krr}^* = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left[\frac{u_{kr}^*}{r} + \frac{\partial u_{kz}^*}{\partial z} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u_{kr}^*}{\partial r} \right],$$

$$\sigma_{k rz}^* = \mu \left[\frac{\partial u_{kz}^*}{\partial r} + \frac{\partial u_{kr}^*}{\partial z} \right] = \sigma_{k z r}^*,$$

$$\sigma_{k z z}^* = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left[\frac{u_{kr}^*}{r} + \frac{\partial u_{kr}^*}{\partial r} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u_{kz}^*}{\partial z} \right] \quad e$$

⁵ *Ibidem* (nota anterior).

$$\sigma_{\nu\theta}^* = \frac{2\nu\nu}{1-2\nu} \left[\frac{\partial u_{kr}^*}{\partial r} + \frac{\partial u_{kz}^*}{\partial z} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{u_{kr}^*}{r} \right] \quad (\text{iii-2,18})$$

onde o primeiro índice, k , em $\sigma_{kij}^*(p,q)$, representa a direção da aplicação da carga em p . Na superfície, $t_{ij}^*(p,Q) = \sigma_{kij}^*(p,Q)$, onde $n_i(Q)$ é a componente na direção i do vetor normal a superfície, no ponto Q . Ou seja,

$$t_{rr}^* = \sigma_{rrr} n_r + \sigma_{rrz} n_z \quad ,$$

$$t_{rz}^* = \sigma_{rrz} n_r + \sigma_{rzz} n_z \quad ,$$

$$t_{zr}^* = \sigma_{zrr} n_r + \sigma_{zrz} n_z \quad e$$

$$t_{zz}^* = \sigma_{zrz} n_r + \sigma_{zzz} n_z \quad . \quad (\text{iii-2,19})$$

3.2.1.2 - Identidades Somiglianais e descontinuidades no contorno

O deslocamento em um ponto interno é fornecido por (iii-1,22). No entanto, devido à simetria axial, as integrais de superfície podem ser transformadas em integrais de linha, de acordo com o seguinte esquema:

$$\int_S AdS = \int_l \int_0^{2\pi} ARd\theta dL = 2\pi \int_l ARdL \quad , \quad (\text{iii-2,20})$$

onde $R = r(Q)$ e a curva l está contida no plano r,z .

Dessa forma, (iii-1,22) torna-se

$$u_i(P) = 2\pi \int_1 t_{ji}(Q) u_{ji}^*(P, Q) R(Q) dL(Q) \\ - 2\pi \int_1 u_j(Q) t_{ji}^*(P, Q) R(Q) dL(Q) \quad . \quad (iii-2,21)$$

As descontinuidades nas integrais acima podem ser obtidas procedendo-se de modo análogo ao da seção 3.1.3; para um ponto P no contorno, adicionando-se uma esfera de raio ϵ , com centro em P — como na figura iii-1 — e impondo-se o limite $\epsilon \rightarrow 0$. A integral com descontinuidade é a segunda da equação (iii-2,21), devendo-se calcular

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(2\pi \int_{L_\epsilon} u_j(Q) t_{ji}^*(P, Q) R(Q) dL_\epsilon(Q) \right) \quad , \quad (iii-2,22)$$

que é igual a $(-1/2)u_i(P)$, quando a curva Γ possui segunda derivada contínua em P. HARTMANN [53] mostrou que a expressão (iii-2,22) é correspondente à do caso bidimensional; portanto, pode-se escrever:⁶

$$C_{rr}(P) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left(4(1-\nu)(\phi_1 - \phi_2) + \text{sen } 2\phi_1 - \text{sen } 2\phi_2 \right) \quad ,$$

$$C_{zr}(P) = C_{rz}(P) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left(\text{sen}^2 \phi_1 - \text{sen}^2 \phi_2 \right) \quad ,$$

$$C_{zz}(P) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left(4(1-\nu)(\phi_1 - \phi_2) - \text{sen } 2\phi_1 + \text{sen } 2\phi_2 \right)$$

$$\text{e} \quad \phi_2 = \phi_1 - \phi_d \quad , \quad (iii-2,23)$$

com ϕ_1 e ϕ_d definidos na figura iii-3. C_{ij} fornece o valor

⁶ Conferir, por exemplo, em TELLES [90], BREBBIA, TELLES e WROBEL [26].

das descontinuidades de (iii-2,22) para um ponto genérico, P, no contorno; ou seja, os C_{ij} fornecem o valor das descontinuidades mesmo quando a segunda derivada do contorno não é contínua em P.

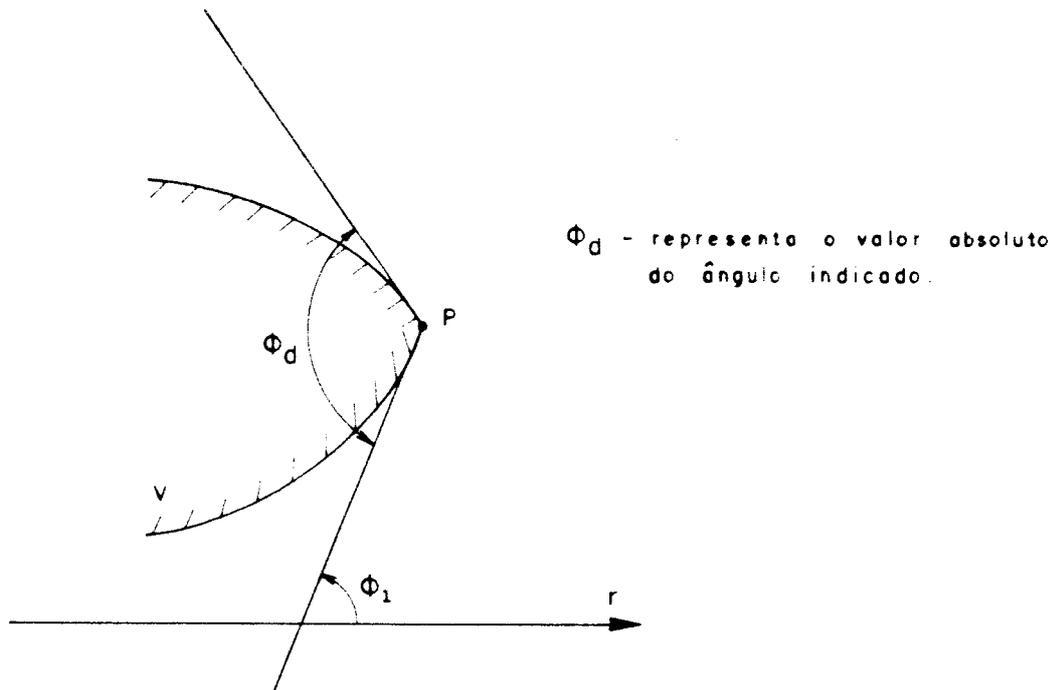


Figura iii-3 : Esquema para a avaliação de descontinuidades no contorno (plano r,z)

Utilizando-se a expressão C_{ij} de (iii-2,23) para levar em conta as descontinuidades obtidas de (iii-2,22), (iii-2,21) torna-se

$$C_{ji}(p)u_j(p) = 2\pi \int_L t_j(Q)u_{ji}^*(p,Q)R(Q)dL(Q) - 2\pi \int_L u_j(Q)t_{ji}^*(p,Q)R(Q)dL(Q) \quad , \quad (iii-2,24)$$

com $C_{ij}(p) = \delta_{ij}$ se p é um ponto do interior de domínio.

Incluindo-se forças volumétricas, (iii-2,24) torna-se

$$C_{ij} u_j = 2\pi \int_V t_{ij}^* u_j^* RdL - 2\pi \int_V u_j t_{ji}^* RdL + 2\pi \int_S b_j u_j^* RdS \quad ,$$

(iii-2,25)

onde b_j é a força volumétrica e s representa a superfície de revolução.

As tensões em pontos do interior do corpo considerado podem ser obtidas de modo análogo ao da seção 3.1.2.1, ou seja, por derivação dos deslocamentos no ponto em que se deseja conhecer as tensões e utilizando-se a Lei de Hooke — de modo que as tensões no ponto sob análise fiquem expressas em termos dos deslocamentos do mesmo ponto. Este é o mesmo procedimento indicado em (iii-1,25). Entretanto, devido à maior complexidade das soluções fundamentais do problema axissimétrico, as derivações são muito mais numerosas e trabalhosas — pois são distintas as derivações em cada direção e cada coordenada. Estas derivações, com os deslocamentos expressos em termos de funções elípticas, podem ser encontradas em BAKR [05]. (pp. 200-207). Estas derivações também podem ser avaliadas numericamente. Utilizando-se diferenças finitas, as diferenciações podem ser aproximadas de acordo com o esquema

$$\frac{\partial}{\partial r(p)} f(r(p), z(p)) = \frac{f(r(p) + \alpha r(p), z(p)) - f(r(p), z(p))}{\alpha r(p)} \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial z(p)} f(r(p), z(p)) = \frac{f(r(p), z(p) + \alpha z(p)) - f(r(p), z(p))}{\alpha z(p)} \quad ,$$

(iii-2,26)

onde $\alpha r(p)$ e $\alpha z(p)$ representam incrementos finitos em $r(p)$ e $z(p)$, respectivamente, tais que $\alpha r(p) \ll r(p)$ e $\alpha z(p) \ll z(p)$. A

função f representa os deslocamentos ou as reações fundamentais.

As tensões no contorno podem ser também trabalhadas analiticamente, de modo análogo às tensões nos pontos internos, apesar de mais complicado, devido às singularidades para pontos de contorno. No entanto, para o método dos elementos de contorno é mais conveniente obter as tensões nos pontos externos de um modo alternativo, a partir das soluções em deslocamentos e forças de superfícies obtidas no contorno, conforme indicado no próximo capítulo.

3.2.2- TORÇÃO AXISSIMÉTRICA

Obviamente, a torção, no caso axissimétrico, deve ser tratada de modo semelhante ao do plano radial-axial.

A solução fundamental da torção axissimétrica pode ser obtida como em 2.1, resolvendo-se a equação de Navier na forma de (iii-2,1), impondo-se a função delta de Dirac no lugar das forças de volume, como em (iii-2,8).

No entanto, como no caso do plano radial-axial, a solução fundamental pode ser obtida a partir da solução do caso tridimensional. Este procedimento alternativo será aplicado aqui ao caso da torção axissimétrica.

3.2.2.1- Solução fundamental

A solução fundamental para deslocamentos, na torção axissimétrica, será obtida aplicando-se a função delta de Dirac em uma circunferência — carga tangente unitária distribuída num anel, como em (iii-2,6). O esquema é o mesmo da figura iii-2, mas agora a carga é aplicada na direção tangencial. A mesma notação é utilizada neste caso, acrescentando-se ainda as seguintes definições:

$$a = r(p)^2 + r(q)^2 + (z(q) - z(p))^2 = r^2 + R^2 + Z^2 ,$$

$$b = 2r(p) r(q) = 2Rr . \quad (\text{iii-2,27})$$

A solução fundamental para deslocamentos, no caso tridimensional, é dada por (iii-1,9):

$$u_{i,j}^*(p,q) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{r(p,q)} ((3-4\nu)\delta_{ij} + r(p,q)_{,i} r(p,q)_{,j}) , \quad (\text{iii-2,28})$$

com

$$r(p,q) = \left(\sum_{i=1}^3 (x_i(q) - x_i(p))^2 \right)^{1/2} \quad (\text{iii-2,29})$$

onde x_i representa coordenadas cartesianas.

Por outro lado, tem-se que (ver figura iii-2)

$$r(p,q) = (r^2 + R^2 - 2rR\cos|\theta(q)-\theta(p)| + Z^2)^{1/2} ,$$

$$\text{e} \quad r(p,q) = \sqrt{a-b\cos\theta} ,$$

$$\text{com} \quad \theta = |\theta(q) - \theta(p)| . \quad (\text{iii-2,30})$$

A fim de facilitar os cálculos, considere-se que o ponto q pertence ao plano $x_1 x_3$, conforme ilustra a figura iii-4.

O deslocamento em q na direção de x_2 , $u_{22}^*(p,q)$, representa o deslocamento tangencial em q devido ao carregamento tangencial f no ponto p . A carga f pode ser decomposta em f_1 e f_2 , de modo que as soluções fundamentais $u_{12}^*(p,q)$ e $u_{22}^*(p,q)$, do tridimensional, podem ser usadas. $u_{22}^*(p,q)$ resultará, assim, da superposição dos efeitos em q das cargas f_1 e f_2 em p :

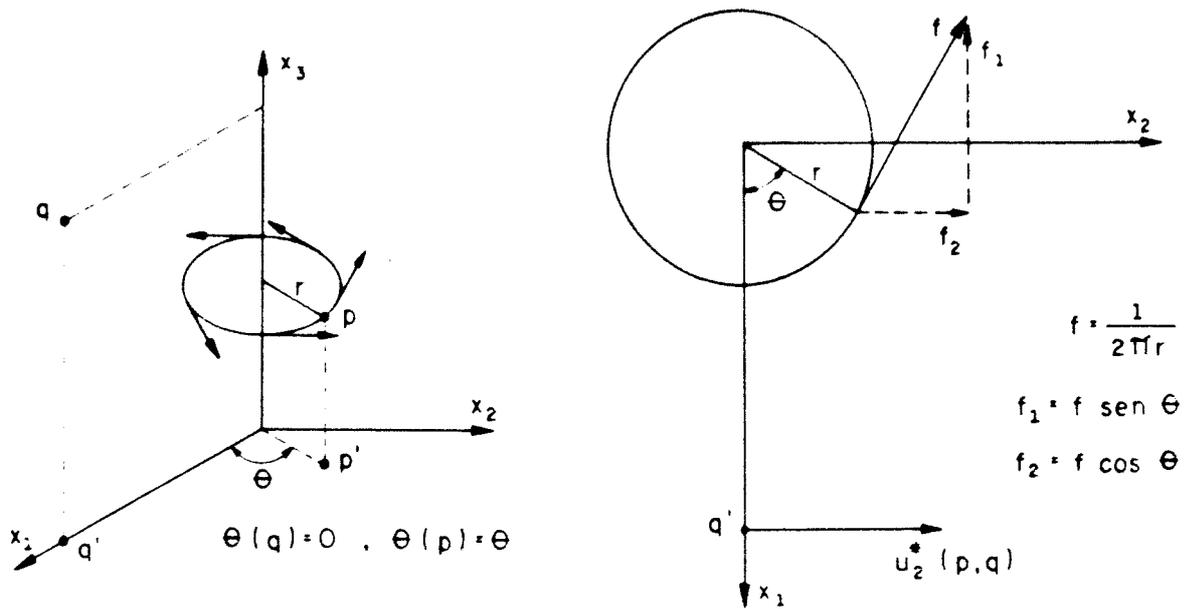


Figura iii-4 : Esquema para obtenção da solução fundamental da torção axissimétrica.

$$u_2^*(p,q) = -u_{12}^* f \operatorname{sen}\theta + u_{22}^* f \operatorname{cos}\theta \quad ,$$

$$f = \frac{1}{2\pi r} \quad . \quad (\text{iii-2,31})$$

Somando-se a contribuição de cada ponto do anel de carga, obtém-se o deslocamento tangencial da torção axissimétrica, que será válido também para qualquer valor de $\theta(q)$, devido à simetria axial:

$$\xi_{\theta\theta}^*(p,q) = \int_0^{2\pi} u_2^*(p,q) r d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-u_{12}^* \operatorname{sen}\theta + u_{22}^* \operatorname{cos}\theta) d\theta \quad ,$$

(iii-2,32)

onde o primeiro índice em $\xi_{\theta\theta}^*$ indica apenas a direção de aplicação da carga.

Deve-se notar que trata-se aqui do deslocamento físico — pois (iii-2,32) é obtida a partir dos deslocamentos físicos no tridimensional (cartesiano). No sistema cilíndrico, vetores covariantes e contravariantes na direção θ não coincidem; no entanto, suas componentes físicas coincidem devido à ortogonalidade deste sistema de coordenadas. Neste caso, portanto, é indiferente a posição dos índices. Por isso, os deslocamentos e reações físicos na direção θ , ξ_θ e ρ_θ , aparecerão aqui sempre com índices inferiores, como em (iii-2,32).

Como os dois termos do integrando, em (iii-2,32), são simétricos em relação ao plano $x_1 x_3$, pode-se escrever:

$$\xi_{\theta\theta}^* = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (-u_{12}^* \text{sen}\theta + u_{22}^* \text{cos}\theta) d\theta . \quad (\text{iii-2,33})$$

Observando-se que

$$\frac{\partial}{\partial x_i(q)} r(p,q) = \frac{x_i(q) - x_i(p)}{r(p,q)} ,$$

$$x_1(p) = r(p)\text{cos}\theta = r\text{cos}\theta ,$$

$$x_1(q) = R ,$$

$$x_2(p) = r\text{sen}\theta ,$$

$$x_2(q) = 0 ,$$

(iii-2,34)

*

e utilizando-se (iii-2,27) e (iii-2,28), é então possível expressar (iii-2,33) como:

$$\xi_{\theta\theta}^* = \frac{1}{16\pi^2(1-\nu)\mu} \left((3-4\nu) \int_0^\pi \frac{\cos\theta}{\sqrt{a-b\cos\theta}} d\theta + \right. \\ \left. + \frac{b}{2} \int_0^\pi \frac{1}{(a-b\cos\theta)\sqrt{a-b\cos\theta}} d\theta - \frac{b}{2} \int_0^\pi \frac{\cos^2\theta}{(a-b\cos\theta)\sqrt{a-b\cos\theta}} d\theta \right) .$$

(iii-2,35)

As integrais em (iii-2,35) são elípticas. Utilizando-se fórmulas de transformação adequadas, é possível expressar estas integrais em termos de funções elípticas completas de primeiro e segundo tipos.

Para isto, foi utilizado aqui o livro de BYRD e FRIEDMAN [28].

Considere-se a primeira integral em (iii-2,35). Ela pode ser expressa, inicialmente, em termos de funções elípticas de Jacobi. Se $a > b > 0$, como ocorre neste caso, pode-se escrever

$$A = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{a-b\cos\theta}} d\theta = h \int_0^{\mu_1} \frac{1}{b} (b-ak^2su^2u) nd^2u du ,$$

com

$$h = \frac{2}{\sqrt{a+b}} ,$$

$$k^2 = \frac{2b}{a+b} = \frac{2}{1+\gamma} = m ,$$

$$\gamma = \frac{a}{b} ,$$

$$\text{sn}^2u = \frac{b(1-\cos\theta)}{k^2(a-b\cos\theta)} ,$$

$$u_1 = K(k) ,$$

e

$$K(k) = K(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 \phi}} d\phi ,$$

(iii-2,36)

onde snu , ndu são funções elípticas de Jacobi e $K(k)=K(k, \pi/2)$ é uma integral elíptica completa de primeiro tipo, de módulo k .

Utilizando-se algumas relações entre funções de Jacobi, a integral A em (iii-2,36) pode ser expressa como

$$A = h \left(\int_0^u \text{nd}^2 u \, du - \frac{a}{b} \int_0^u \text{nd}^2 u \, du + \frac{a}{b} \int_0^u 1 \, du \right) ,$$

(iii-2,37)

Sabe-se também que

$$\int_0^u \text{nd}^2 u \, du = \frac{1}{1-k^2} \left(E(k) - k^2 \text{snu} \, \text{cdu} \right) \Big|_0^u = \frac{E(k)}{1+k^2} ,$$

$$E(k) = E(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 \phi} \, d\phi ,$$

(iii-2,38)

onde cdu é outra função elíptica de Jacobi e $E(k) = E(k, \pi/2)$ é uma integral elíptica completa de segundo tipo, de módulo k .

Finalmente, a integral A pode ser escrita como

$$A = \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta}{\sqrt{a-b \cos \theta}} d\theta = h \left(\frac{a}{b} K(k) - \left(1 + \frac{a}{b} \right) E(k) \right) .$$

(iii-2,39)

As duas outras integrais em (iii-2,35) podem ser trabalhadas de maneira semelhante à integral A, resultando em

$$\int_0^r \frac{1}{(a-b\cos\theta)\sqrt{a-b\cos\theta}} d\theta = h \frac{a}{a-b} E(k) \quad e$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2\theta}{(a-b\cos\theta)\sqrt{a-b\cos\theta}} d\theta = h \frac{1}{b^2(a-b)} \left(-2a(a-b)K(k) + (2a^2 - b^2) \right).$$

(iii-2,40)

Retornando-se com (iii-2,39) e (iii-2,40) em (iii-2,35), obtem-se a solução fundamental para deslocamentos, na torção axissimétrica:

$$\xi_{\theta\theta}^* = \frac{1}{2n^2\mu b \sqrt{a+b}} \left(aK(k) - (a+b)E(k) \right) ,$$

(iii-2,41)

Esta solução é equivalente à obtida primeiramente por KERMANIDIS [59]. A mesma solução também pode ser encontrada em BREBBIA, TELLES e WROBEL [26], em FUDOLI e VENTURINI [47] e em CARRER, TELLES e MANSUR [29] — embora esta mesma solução fundamental seja expressa de um modo mais ou menos diferenciado nestas referências.

(iii-2,41) também pode ser escrita em termos de funções de Legendre. Escolhendo-se $Q_{-1/2}(\gamma)$ para expressar $\xi_{\theta\theta}^*(p,q)$,¹ resulta

¹ BREBBIA, TELLES e WROBEL [26] escolhem $Q_{+1/2}(\gamma)$.

$$\xi_{\theta\theta}^* = \frac{1}{4\pi^2\mu\sqrt{Rr}} \left[\gamma Q_{-1/2}(\gamma) + 2(\gamma^2-1) \frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} \right] , \quad (iii-2,42)$$

com a função de Legendre $Q_{-1/2}(\gamma)$ e sua derivada, $\frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma}$, sendo dadas por (iii-2,15).

Novamente, a solução fundamental para reações é obtida a partir de $\xi_{\theta\theta}^*$, utilizando-se a lei de Hooke — e o equilíbrio de superfícies. Mas, para as derivações de $\xi_{\theta\theta}^*$, é necessário conhecer, além de $Q_{-1/2}(\gamma)$, a sua derivada,

$$\frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{k}{\gamma^2-1} \left(-\frac{1}{4} K(k) + \frac{\gamma}{\gamma-1} E(k) \right) , \quad (iii-2,43)$$

(cf. BYRD e FRIEDMAN [28]).

No caso da torção axissimétrica, componentes (físicas) não-nulas do tensor, analogamente a (iii-2,18), são:

$$\sigma_{\theta r \theta}^*(p, q) = \mu \left[\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial r} - \frac{\xi_{\theta\theta}^*}{r} \right] \quad e$$

$$\sigma_{\theta z \theta}^*(p, q) = \mu \frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial z} , \quad (iii-2,44)$$

O equilíbrio de superfície, em termos de componentes físicas, pode ser obtido substituindo-se (ii-2,5) em (ii-2,2) e distribuindo-se $\sqrt{g_{jj}}$ e $\sqrt{g^{ii}}$ de modo que todos os termos passem a representar componentes físicas, de acordo com (ii-1,17):

$$\rho^j = t^j \sqrt{g_{jj}} = \sigma^{ij} n_i \sqrt{g^{ii}} \quad , \quad (\text{iii-2,45})$$

onde ρ^j são as componentes físicas das reações — recordando-se que, no sistema cilíndrico, $\rho^j = \rho_j$. Recorrendo-se a (ii-3,2), e lembrando-se que $n_\theta = 0$ e $\sigma^{\theta\theta} = 0$ na torção axissimétrica, pode-se escrever a solução fundamental para reações,

$$\rho_{\theta\theta}^*(p, q) = \mu \left(\sigma_{\theta r \theta}^* n_r + \sigma_{\theta z \theta}^* n_z \right) \quad \text{ou}$$

$$\rho_{\theta\theta}^* = \mu \left[\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial r} n_r - \frac{\xi_{\theta\theta}^*}{r} n_r + \frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial z} n_z \right] \quad . \quad (\text{iii-2,46})$$

As derivadas em (iii-2,46) são calculadas no ponto de observação no contorno (Q), ou seja, em R e Z.

De (iii-2,32),

$$\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial R} = \frac{1}{4\pi^2 \mu \sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{\sqrt{R}} \left[\gamma Q_{-1/2}(\gamma) + 2(\gamma^2 - 1) \frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} \right] \right] \quad .$$

(iii-2,47)

Recordando-se que

$$\frac{\partial \gamma}{\partial R} = \frac{\partial(a/b)}{\partial R} = \frac{2R}{2Rr} - \frac{a}{2R^2 r} = \frac{1}{r} - \frac{\gamma}{R} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial R} = \frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial R} \quad , \quad (\text{iii-2,48})$$

resolve-se (iii-2,47) até se chegar a

$$\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial P} = \frac{1}{8\pi^2 \mu R \sqrt{Rr}} \left[\left(\frac{2P}{r} - 3\gamma \right) Q_{-1/2}(\gamma) + 2 \left(1 + \frac{5R}{r} \gamma - 6\gamma^2 \right) \frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} + 4R(\gamma^2 - 1) \left(\frac{1}{r} - \frac{\gamma}{R} \right) \frac{\partial^2 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^2} \right] .$$

(iii-2,49)

De modo similar, obtem-se

$$\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial Z} = \frac{\bar{Z}}{4\pi^2 \mu R r \sqrt{Rr}} \left[Q_{-1/2}(\gamma) + 5\gamma \frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} + 2(\gamma^2 - 1) \frac{\partial^2 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^2} \right] .$$

(iii-2,50)

A solução fundamental para reações, $\rho_{\theta\theta}^*(p, g)$, pode então ser obtida, substituindo-se (iii-2,42), (iii-2,48) e (iii-2,50) em (iii-2,46).

3.2.2.2 - Identidades Somigianas e descontinuidade no contorno

Na torção axissimétrica, a equação (iii-2,21), que fornece o deslocamento i num ponto interno p , é dada por

$$\xi_{\theta}(p) = 2\pi \int_L \rho_{\theta}(Q) \xi_{\theta\theta}^*(p, Q) R(Q) dL(Q) - 2\pi \int_L \xi_{\theta}(Q) \rho_{\theta\theta}^*(p, Q) R(Q) dL(Q) .$$

(iii-2,51)

Analogamente ao caso do plano radial-axial, a descontinuidade em (iii-2,51) pode ser avaliada

calculando-se

$$C' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-2\pi \int_{l_\epsilon} \xi_\theta(Q) \rho_{\theta\theta}^*(P, Q) R(Q) dL_\epsilon(Q) \right) , \quad (\text{iii-2,52})$$

onde l_ϵ representa a circunferência de raio ϵ com centro em p — analogamente à figura iii-1.

Quando $\epsilon \rightarrow 0$, $r \rightarrow R$ e $k \rightarrow 1$, de modo que o limite acima deve ser avaliado no caso em que $K(k)=K(1)$ e $E(k)=E(1)$.

A equação (iii-2,51) pode ser escrita então como

$$C_{\theta\theta} \xi_\theta = 2\pi \int_l \rho_\theta \xi_{\theta\theta}^* R dL - 2\pi \int_l \xi_\theta \rho_{\theta\theta}^* R dL , \quad (\text{iii-2,53})$$

onde $C'=0$ e $C_{\theta\theta}=1$ se o ponto é interno, e $C_{\theta\theta}=1-C'$ se o ponto é de contorno.

No próximo capítulo mostra-se como $C_{\theta\theta}$ pode ser obtida numericamente, através do método dos elementos de contorno.

As tensões no interior do domínio podem novamente ser obtidas da Lei de Hooke, expressa em termos do deslocamento tangencial no ponto desejado — (iii-3,44). As derivadas de ξ_ϵ são agora em relação a r e z , e são descritas a seguir; mas antes, deve-se obter $\frac{\partial^3 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^3}$, que aparecerá nestas derivadas.

São conhecidas as relações (iii-2,15) a (iii-2,176), além das definições de $K(k)$, em (iii-2,36), e de $E(k)$, em (iii-2,38). Pode-se escrever, então,

$$\frac{\partial F(k)}{\partial \gamma} = \frac{\partial K(k)}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \gamma} = \frac{K(k)}{2(1+\gamma)} + \frac{E(k)}{2(1-\gamma)} ,$$

$$\frac{E(k)}{\partial \gamma} = \frac{K(k)-E(k)}{2(1+\gamma)} ,$$

$$\frac{\partial k}{\partial \gamma} = -\frac{k^3}{4} \quad , \quad (\text{iii-2,54})$$

obtendo-se

$$\frac{\partial^3 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^3} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{\partial^2 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^2} \right] = \frac{k}{(\gamma^2-1)} \gamma K(k) - \frac{(9+23\gamma^2)}{8(\gamma-1)} E(k) \quad .$$

(iii-2,55)

Para que se possa calcular as tensões no interior, precisa-se conhecer as derivadas do deslocamento no ponto p, ou seja, $\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial r}(p, q)$ e $\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial z}(p, q)$. Para isto, é necessário conhecer as derivadas das funções nas integrais de (iii-2,52) que dependem de $r(p)=r$ ou de $z(p)=z$:

$$\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial R} \right] \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial R} \right] \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial Z} \right] \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial Z} \right] \quad . \quad (\text{iii-2,56})$$

Estas derivadas podem ser obtidas utilizando-se relações dadas anteriormente. Resolvendo-se estas derivadas, tem-se

$$\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial r} = \frac{1}{8\pi^2 \mu r \sqrt{Rr}} \left[\left(\frac{2r}{R} - 3\gamma \right) Q_{-1/2}(\gamma) + \left(2 + 10 \frac{r}{R} \gamma - 12\gamma^2 \right) \frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} + 4 \left(\frac{r}{R} - \gamma \right) (\gamma^2 - 1) \frac{\partial^2 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^2} \right] \quad ,$$

$$\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial z} = \frac{-z}{4\pi^2 \mu R r \sqrt{Rr}} \left[Q_{-1/2}(\gamma) + 5\gamma \frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} + 2(\gamma^2 - 1) \frac{\partial^2 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^2} \right].$$

(iii-2,57)

E como, além de relações anteriores, tem-se também

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} = \frac{1}{R} - \frac{\gamma}{r},$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{\bar{z}}{Rr} \quad e$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{-\bar{z}}{Rr}. \quad \text{(iii-2,58)}$$

as demais derivadas de (iii-2,46) podem ser obtidas. $\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial R}$ é fornecida por (iii-2,49). Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial R} \right] &= \frac{1}{16\pi^2 \mu R r \sqrt{Rr}} \left[\left(9\gamma - 6 \left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right) \right) Q_{-1/2}(\gamma) + \right. \\ &+ \left(22 - 54\gamma \left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right) + 66\gamma^2 \right) \frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} + \\ &+ \left((12 - 48\gamma^2) \left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right) + 20\gamma + 52\gamma^3 \right) \frac{\partial^2 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^2} + \\ &\left. + 8 \left(-1 + (\gamma - \gamma^3) \right) \left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right) + \gamma^4 \right) \frac{\partial^3 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^3} \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial R} \right] = \frac{\bar{Z}}{8\pi^2 \mu R^2 r \sqrt{Rr}} \left[\left(3Q_{-1/2}(\gamma) + \left(-12\frac{R}{r} + 27\gamma \right) \frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(-6 - 18\frac{R}{r}\gamma + 24\gamma^2 \right) \frac{\partial^2 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^2} - 4R \left(\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{R} \right) (\gamma^2 - 1) \frac{\partial^3 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^3} \right] .$$

(iii-2,59)

Analogamente, com $\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial z}$ dada por (iii-2,48):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial z} \right] = \frac{\bar{Z}}{8\pi^2 \mu r^2 R \sqrt{Rr}} \left[-3Q_{-1/2}(\gamma) + \left(12\frac{r}{R} - 27\gamma \right) \frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} + \right. \\ \left. + \left(6 + 18\frac{r}{R}\gamma - 24\gamma^2 \right) \frac{\partial^2 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^2} + 4 \left(\frac{r}{R} - \gamma \right) (\gamma^2 - 1) \frac{\partial^3 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^3} \right] ,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \xi_{\theta\theta}^*}{\partial z} \right] = - \frac{1}{4\pi^2 \mu r^2 R^2 \sqrt{Rr}} \left[RrQ_{-1/2}(\gamma) + \left(5Rr\gamma + \right. \right. \\ \left. \left. + 6\bar{Z}^2 \right) \frac{\partial Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma} + \left(2Rr(\gamma^2 - 1) + 9\bar{Z}^2\gamma \right) \frac{\partial^2 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^2} + \right. \\ \left. + 2\bar{Z}^2(\gamma^2 - 1) \frac{\partial^3 Q_{-1/2}(\gamma)}{\partial \gamma^3} \right] .$$

(iii-2,60)

Finalmente, utilizando-se as expressões (iii-2,57), (iii-2,59) e (iii-2,60), pode-se encontrar as tensões internas, $\sigma_{r\theta}$ e $\sigma_{\theta z}$, dados por (iii-2,42), com $\xi_{\theta\theta}^*$ fornecido por (iii-2,53).

O cálculo numérico das tensões na superfície, obtido a

partir das condições de contorno, é preferível ao cálculo analítico dessas tensões, e será indicado no capítulo a seguir.

CAPÍTULO IV

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Este capítulo trata da formulação do Método dos Elementos de contorno, a partir das equações integrais apresentadas no capítulo III. A técnica da introdução de subregiões também será descrita, e serão discutidos detalhes de um programa computacional para o cálculo de torção axissimétricas, utilizando o método dos elementos de contorno.

4.1 - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O ponto de partida do Método dos Elementos de Contorno são as equações integrais descritas no capítulo anterior — (iii-1,22), (ii-1,24), (iii-2,53), por exemplo. Estas equações — se, por simplicidade de apresentação, tomarem-se como nulas as forças volumétricas — podem ser escritas como

$$C_{ij}(p)u_j(p) - \int_S t_j(Q)u_{ij}^*(p,Q)dS(Q) + \int_S u_j(Q)t_{ij}^*(p,Q)dS(Q) = 0. \quad (iv-1,1)$$

Deve-se notar que, se p é um ponto do interior do domínio, $C_{ij}(p) = \delta_{ij}$ — e, se for externo, $C_{ij}(p) = 0$.

O método dos elementos de contorno consiste na obtenção de um sistema de equações algébricas a partir de (iv-1,1). Para isto, a geometria corpo a ser examinado e as variáveis — deslocamento e reação — em seu contorno devem ser descritas de um modo aproximado.

Isto é feito dividindo-se o contorno do corpo em elementos, e adotando-se aproximações para as variáveis (u_j, t_j) em cada um destes elementos. A geometria dos elementos é definida em função de certos pontos destes elementos.

As variáveis u_j, t_j , nestes elementos, são definidas em função dos valores que estas variáveis assumem em pontos particulares destes elementos os pontos nodais (ou nós). (A figura iv-1 ilustra o caso em que um contorno constituindo uma curva é substituído por elementos lineares, nos quais as variáveis variam linearmente, de acordo com funções interpoladoras ϕ_1 e ϕ_2).

4.1.1- PONTOS NODAIS

A posição de um ponto qualquer de um elemento é dada em função de seus pontos nodais. Assim, para um ponto Q_m de um elemento m , tem-se

$$x(Q_m) = \phi(Q_m) \tilde{x}_m, \quad (iv-1,2)$$

onde m representa o m -ésimo elemento da discretização, \tilde{x}_m é

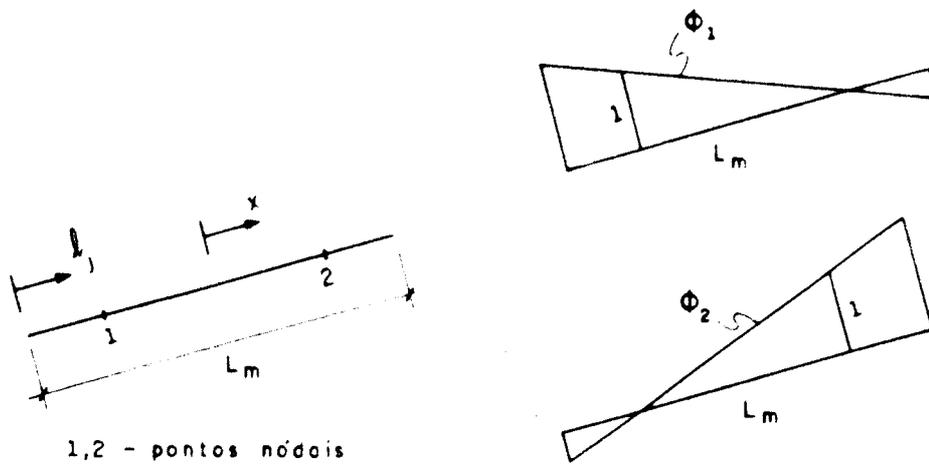


Figura iv-1 Elemento linear (contorno bidimensional) com aproximação linear das variáveis

o vetor coluna contendo as posições dos pontos nodais e $\underline{\phi}$ contém as funções interpoladoras correspondentes a cada ponto nodal. (A figura iv-1 apresenta a forma das funções interpoladoras quando a aproximação das variáveis e a da geometria são lineares.)

De modo análogo, os valores das variáveis no contorno são escritas como

$$u_i(Q_m) = \underline{\phi}(Q_m)^m \underline{u}_i \quad (iv-1,3)$$

e

$$t_i(Q_m) = \underline{\phi}(Q_m)^m \underline{t}_i$$

onde \underline{u}_i^m e \underline{t}_i^m são vetores coluna contendo os valores de u_i e t_i nos pontos nodais do elemento m .

Com a discretização do contorno em M elementos e com as variáveis no contorno dadas por (iv-1,3), a equação (iv-1,1) transforma-se em

$$C_{ij}(p)u_j(p) - \sum_{m=1}^M \int_{S_m} u_{ij}^*(p, Q_m) \phi(Q_m) {}^m t_{ij} dS_m(Q_m) + \sum_{m=1}^M \int_{S_m} t_{ij}^*(p, Q_m) \phi(Q_m) {}^m u_{ij} dS_m(Q_m) = \epsilon, \quad (iv-1,4)$$

onde ϵ representa o erro resultante da introdução das aproximações. Escrito apenas em termos matriciais, (iv-1,3) torna-se, lembrando-se que os valores nodais ${}^m u_{ij}$ e ${}^m t_{ij}$ são constantes em cada elemento m ,

$$\underline{C}(p)\underline{u}(p) - \sum_{m=1}^M {}^m g(p) {}^m \underline{t} + \sum_{m=1}^M {}^m h(p) {}^m \underline{u} = \underline{0}, \quad (iv-1,5)$$

sendo

$${}^m \underline{u} = \begin{bmatrix} {}^m u_1 \\ \dots \\ {}^m u_k \end{bmatrix},$$

$${}^m \underline{t} = \begin{bmatrix} {}^m t_1 \\ \dots \\ {}^m t_k \end{bmatrix},$$

$${}^m \underline{g}(p) = [{}^m g_{ij}]_p = \int_{S_m} u_{ij}^*(p, Q_m) \underline{\psi}(Q_m) dS_m(Q_m),$$

$${}^m \underline{h}(p) = [{}^m h_{ij}]_p = \int_{S_m} t_{ij}^*(p, Q_m) \underline{\psi}(Q_m) dS_m(Q_m),$$

$$\underline{\psi}(Q_m) = \begin{bmatrix} \underline{\phi} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\phi} \end{bmatrix}_{(Q_m)},$$

$$c(p) = [c_{ij}]_{(p)}, \quad (iv-1,6)$$

onde k é o número de dimensões do problema e $i, j=1, \dots, k$.

(iv-1,5) pode ainda ser escrita como

$$c(p)u(p) + [{}^1h(p) \dots {}^m h(p)]U - [{}^1g(p) \dots {}^n g(p)]T = 0, \quad (iv-1,7)$$

onde U é o vetor coluna contendo todos os deslocamentos nodais, enquanto o vetor coluna T contém as reações em cada ponto nodal, em cada uma das direções.

Finalmente, o Método dos Elementos de Contorno consiste em se escrever a equação (iv-1,7) para cada ponto nodal, obtendo-se assim um sistema de equações algébricas de ordem $(N.k)$, sendo k é o número de dimensões do problema e N o número de pontos nodais da discretização adotada.

Este sistema de equações pode ser representada como

$$C U + H U - G T = 0 \quad (iv-1,8)$$

ou

$$\bar{H} U - G T = 0. \quad (iv-1,9)$$

O sistema (iv-1,9) pode ser rearranjado, de modo que as incógnitas — isto é, os valores não conhecidos de U ou T — apareçam somente do lado esquerdo, de forma a resultar em

$$A X = B, \quad (iv-1,10)$$

quando os termos integrais em \underline{H} e \underline{G} forem calculados e multiplicados pelos valores prescritos correspondentes de \underline{U} e \underline{T} .

A consideração de forças volumétricas não acarreta grandes alterações na formulação do método dos elementos de contorno. A diferença na equação (iv-1,8), seria a inclusão de mais um termo, correspondente às forças volumétricas:

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{T} + \underline{D} \underline{B} \quad , \quad (\text{iv-1,11})$$

onde \underline{B} corresponde às forças volumétricas nos pontos nodais do domínio discretizado, e \underline{D} representa as integrais correspondentes (analogamente a (iv-1,7)):

$$\underline{d}(\underline{p}) = \int_{V_m} u_{ij}^*(\underline{p}, \underline{q}) \underline{\psi}'(\underline{q}_m) dV_m(\underline{q}_m) \quad , \quad (\text{iv-1,12})$$

onde m refere-se aos elementos que discretizam o domínio e $\underline{\psi}'$ representa as funções interpoladoras desta discretização. Dessa forma, a inclusão de forças de volume também conduz a um sistema de equações algébricas do tipo de (iv-1,9).

4.2. TENSÕES NO CONTORNO

Além da obtenção das expressões para o cálculo das tensões no contorno, conforme abordado no capítulo anterior, o método dos elementos de contorno proporciona um modo alternativo para a avaliação das tensões.

Os deslocamentos, em um ponto qualquer do contorno, podem ser obtidos de (iv-1,3). Para a obtenção das tensões no contorno, considere-se a Lei de Hooke, (ii-2,27), e o tensor deformação (infinitesimal), (ii-2,22). Pode-se

escrever, então,

$$\tau^{ij} = C^{ijklmn} (u_i|_j + u_j|_i) \quad , \quad (\text{iv-2,1})$$

que possibilita a obtenção das tensões em função dos deslocamentos. Portanto, basta substituir (iv-1,3) em (iv-2,1) para se obterem as tensões no contorno:

$$\tau^{ij} = C^{ijklmn} (\phi|_j \quad {}^m u_i + \phi|_i \quad {}^m u_j) \quad . \quad (\text{iv-2,2})$$

Dessa forma, as tensões no contorno podem ser encontradas a partir dos deslocamentos obtidos numericamente de (iv-1,9).

4.3 - DESCONTINUIDADES NAS INTEGRAIS

Além da avaliação analítica da descontinuidade das integrais contendo a solução fundamental para reações, ilustrada no capítulo anterior, é também possível avaliar essas dscontinuidades numericamente.

Considere-se para isto o sistema de equações em (iv-1,9). Impondo-se um deslocamento de corpo rígido na direção i , tem-se

$$\tilde{T} = 0 \quad e$$

$$\tilde{U} \text{ tal que } {}^m u_j \begin{cases} = 1 & \text{se } j = i \\ = 0 & \text{se } j \neq i \end{cases} \quad ,$$

com

$$U = \begin{bmatrix} {}^1 u \\ \vdots \\ {}^m u \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{iv-3,1})$$

sendo que ${}^m u$, $1 \leq m \leq M$, é dado por (iv-1,6).

Neste caso, cada linha do sistema (iv-1,9), que são dadas por (iv-1,4) — ou (iv-1,5) — reduz-se a

$$C_{ii}({}^k P) + \sum_{m=1}^M {}^m g_{ii}({}^k P) = \varepsilon, \quad (\text{iv-3,2})$$

onde k representa o k -ésimo ponto nodal e ${}^m g_{ii}(x)$ é dado por (iv-1,6). (É claro que a convenção da soma não é utilizada aqui.)

Impondo-se erro nulo ($\varepsilon=0$), encontra-se então $C_{ii}({}^k P)$.

Analogamente, atribuindo-se um deslocamento de corpo rígido em duas direções, i e j , simultaneamente, obtém-se $C_{ij}({}^k P)$:

$$C_{ij}({}^k P) = - \left(\sum_{m=1}^M {}^m g_{ii} + \sum_{m=1}^M {}^m g_{ij} + C_{ij}({}^k P) \right). \quad (\text{iv-3,3})$$

Prosseguindo-se neste processo, todos os coeficientes $C({}^k P)$ podem ser determinados. E isto vale para qualquer linha do sistema (iv-1,9).

4.3.1 - CASO AXISSIMÉTRICO

A imposição de movimentos de corpo rígido constitui uma excelente alternativa para se obter os coeficientes C — de (iv-1,5) —, sem que se tenha de recorrer a sofisticados procedimentos matemáticos para a avaliação do valor principal de Cauchy de integrais singulares.

No entanto, a imposição de movimento de corpo rígido, no caso axissimétrico, só é possível nas direções axial e tangencial.

A determinação dos coeficientes C sempre é possível quando se conhecem problemas para os quais todas as incógnitas no contorno podem ser determinadas analiticamente. No caso da direção radial do axissimétrico, por exemplo, os coeficientes C_{zz} podem ser obtidos impondo-se um estado de tensão hidrostático.

Assim, se um corpo está sujeito a pressão hidrostática unitária, então, no contorno, são conhecidas

$$t_r(P) = n_r(P) \quad \text{e} \quad t_z(P) = n_z(P) \quad , \quad (\text{iv-3,4})$$

onde t_r e t_z representam componentes da reação nas direções radial e axial, respectivamente, e n_r , n_z são as componentes do vetor unitário normal ao contorno. P é um ponto qualquer do contorno.

No estado hidrostático unitário,

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = 1 \quad \text{e} \quad \sigma_{rz} = 0 \quad , \quad (\text{iv-3,5})$$

o que pode ser verificado substituindo-se (iv-3,4) na equação de equilíbrio na superfície, lembrando-se que $n_\theta = 0$:

$$t_r = \sigma_{rr} n_r + \sigma_{rz} n_z \quad , \quad (\text{iv-3,6})$$

$$t_z = \sigma_{rz} n_r + \sigma_{zz} n_z \quad .$$

A Lei de Hooke para o caso axissimétrico (ii-3,21) fornece

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \quad ,$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) ,$$

e

$$\sigma_{rz} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) . \quad (\text{iv-3,7})$$

Substituindo-se a segunda equação na primeira, em (iv-3,7), obtem-se

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial r} . \quad (\text{iv-3,8})$$

Retornando-se com (iv-3,8) e (iv-3,5) em (iv-3,7), tem-se

$$1 = \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$$

$$e \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = - \frac{\partial u_z}{\partial r} . \quad (\text{iv-3,9})$$

É fácil verificar que as equações (iv-3,9) são satisfeitas por

$$u_r(P) = \frac{1-2\nu}{2\mu(1+\nu)} (r(P) - r_0)$$

e

(iv-3,10)

$$u_z(P) = \frac{1-2\nu}{2\mu(1+\nu)} (z(P) - z_0) ,$$

que é a mesma solução correspondente à pressão hidrostática no caso tridimensional. (r_0 e z_0 são constantes.)

Agora, é possível calcular $C_{rr}^k(P)$, já que os

deslocamentos e reações em cada ponto do contorno podem ser obtidos de (iv-3,4) e (iv-3,10). De (iv-1,4) ou (iv-1,5),

$$C_{rr}({}^kP) = \frac{1}{u_r({}^kP)} \left(\sum_{n=1}^M m_g t - \sum_{n=1}^M m_h u - C_{zr}({}^kP)u_z({}^kP) \right) , \quad (iv-3,11)$$

onde $C_{zr}({}^kP)$ deve ser previamente obtido, impondo-se deslocamento de corpo rígido na direção z.

Quanto ao coeficiente $C_{\theta\theta}$, referente ao problema da torção axissimétrica, vale dizer que o programa computacional do qual trata a seção 4.5 confirmou que

$$C_{\theta\theta}(P) = \frac{1}{2} , \quad (iv-3,12)$$

quando no ponto P o contorno possui segunda derivada contínua. Este valor de $C_{\theta\theta}$ é obtido se uma rotação de corpo rígido, unitária, é imposta ao corpo em exame.

4.4 - SUBREGIÕES

A técnica da introdução de subregiões possibilita o tratamento, através do método dos elementos de contorno, de corpos constituídos de duas ou mais subregiões com características elásticas distintas.

A introdução de subregiões pode ser ilustrada com o exemplo seguinte.

Considere-se o corpo constituído por três regiões, mostrado na figura iv-2.

Os vetores deslocamento e reação, em cada subregião, podem ser representados como segue. O índice superior refere-se à subregião considerada e o índice inferior denota a subregião com que aquela primeira está em contato — o

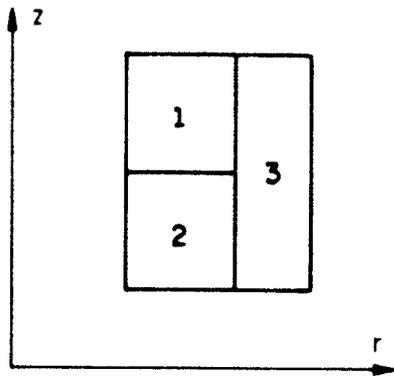


Figura iv-2 : Corpo constituído por três subregiões

índice "e" indica que a interface é feita com o lado externo ao corpo.

$$\begin{aligned}
 \underset{\sim}{U}^1 &= \begin{bmatrix} U^1 \\ e_{\sim} \\ U^1 \\ U^2 \\ U^1 \\ U^3 \end{bmatrix}, & \underset{\sim}{U}^2 &= \begin{bmatrix} U^2 \\ U^1 \\ U^2 \\ e_{\sim} \\ U^2 \\ U^3 \end{bmatrix}, & \underset{\sim}{U}^3 &= \begin{bmatrix} U^3 \\ U^1 \\ U^3 \\ U^2 \\ U^3 \\ e_{\sim} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(iv-4,1)

$$\begin{aligned}
 \underset{\sim}{T}^1 &= \begin{bmatrix} T^1 \\ e_{\sim} \\ T^1 \\ T^2 \\ T^1 \\ T^3 \end{bmatrix}, & \underset{\sim}{T}^2 &= \begin{bmatrix} T^2 \\ T^1 \\ T^2 \\ e_{\sim} \\ T^2 \\ T^3 \end{bmatrix}, & \underset{\sim}{T}^3 &= \begin{bmatrix} T^3 \\ T^1 \\ T^3 \\ T^2 \\ T^3 \\ e_{\sim} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

O sistema de equações (iv-1,9) pode ser escrito para cada uma das subregiões, dividindo-se as matrizes de

influência \bar{H} e \bar{G} em submatrizes correspondentes a cada interface da subregião considerada. Ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{H}_{e\sim}^1 & \bar{H}_{2\sim}^1 & \bar{H}_{3\sim}^1 \end{bmatrix} \bar{U}_{\sim}^1 &= \begin{bmatrix} \bar{G}_{e\sim}^1 & \bar{G}_{2\sim}^1 & \bar{G}_{3\sim}^1 \end{bmatrix} \bar{T}_{\sim}^1, \\ \begin{bmatrix} \bar{H}_{1\sim}^2 & \bar{H}_{e\sim}^2 & \bar{H}_{3\sim}^2 \end{bmatrix} \bar{U}_{\sim}^2 &= \begin{bmatrix} \bar{G}_{1\sim}^2 & \bar{G}_{e\sim}^2 & \bar{G}_{3\sim}^2 \end{bmatrix} \bar{T}_{\sim}^2, \\ \begin{bmatrix} \bar{H}_{1\sim}^3 & \bar{H}_{2\sim}^3 & \bar{H}_{e\sim}^3 \end{bmatrix} \bar{U}_{\sim}^3 &= \begin{bmatrix} \bar{G}_{1\sim}^3 & \bar{G}_{2\sim}^3 & \bar{G}_{e\sim}^3 \end{bmatrix} \bar{T}_{\sim}^3. \end{aligned}$$

(iv-4,2)

Por outro lado, os deslocamentos e as reações nas interfaces devem satisfazer às seguintes condições de compatibilidade e equilíbrio:

$$\bar{U}_{j\sim}^i = \bar{U}_{i\sim}^j \quad e$$

$$\bar{T}_{j\sim}^i + \bar{T}_{i\sim}^j = \bar{T}_{\sim}^{ij}, \quad \text{com } i < j,$$

(iv-4,3)

onde \bar{T}_{\sim}^{ij} representa a reação externa aplicada na interface ij .

Utilizando-se (iv-4,3), pode-se escrever

$$\bar{G}_{j\sim}^i \bar{T}_{j\sim}^j = \bar{G}_{j\sim}^i (\bar{T}_{\sim}^{ij} - \bar{T}_{j\sim}^i) \quad (i < j).$$

(iv-4,4)

Os três sistemas de (iv-4,2) podem então ser combinados num só, utilizando-se (iv-4,3) e (iv-4,4):

$$\begin{bmatrix} \overset{1}{H} & \overset{1}{H} & 0 & \overset{1}{H} & 0 & 0 \\ \underset{e}{\sim} & \underset{2}{\sim} & \sim & \underset{3}{\sim} & \sim & \sim \\ 0 & \overset{2}{H} & \overset{2}{H} & 0 & \overset{2}{H} & 0 \\ \sim & \underset{1}{\sim} & \underset{e}{\sim} & \sim & \underset{3}{\sim} & \sim \\ 0 & 0 & 0 & \overset{3}{H} & \overset{3}{H} & \overset{3}{H} \\ \sim & \sim & \sim & \underset{1}{\sim} & \underset{2}{\sim} & \underset{e}{\sim} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{1}{U} \\ \underset{e}{\sim} \\ \overset{1}{U} \\ \underset{2}{\sim} \\ \overset{2}{U} \\ \underset{e}{\sim} \\ \overset{1}{U} \\ \underset{3}{\sim} \\ \overset{2}{U} \\ \underset{3}{\sim} \\ \overset{3}{U} \\ \underset{e}{\sim} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \overset{1}{G} & \overset{1}{G} & 0 & 0 & \overset{1}{G} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underset{e}{\sim} & \underset{2}{\sim} & \sim & \sim & \underset{3}{\sim} & \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & -\overset{2}{G} & \overset{2}{G} & \overset{2}{G} & 0 & 0 & \overset{2}{G} & 0 & 0 \\ \sim & \underset{1}{\sim} & \underset{e}{\sim} & \underset{e}{\sim} & \sim & \sim & \underset{3}{\sim} & \sim & \sim \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\overset{3}{G} & \overset{3}{G} & -\overset{3}{G} & \overset{3}{G} & \overset{3}{G} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \underset{1}{\sim} & \underset{1}{\sim} & \underset{2}{\sim} & \underset{2}{\sim} & \underset{e}{\sim} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{1}{T} \\ \underset{e}{\sim} \\ \overset{1}{T} \\ \underset{2}{\sim} \\ \overset{12}{T} \\ \underset{\sim}{\sim} \\ \overset{2}{T} \\ \underset{e}{\sim} \\ \overset{1}{T} \\ \underset{3}{\sim} \\ \overset{13}{T} \\ \underset{\sim}{\sim} \\ \overset{2}{T} \\ \underset{3}{\sim} \\ \overset{23}{T} \\ \underset{\sim}{\sim} \\ \overset{3}{T} \\ \underset{e}{\sim} \end{bmatrix} .$$

(iv-4,5)

Para que um sistema do tipo de (iv-1,10) seja obtido, as incógnitas devem ficar todas no vetor do lado esquerdo de (iv-4,5). Por isso, os vetores $\overset{i}{T}_{\underset{j}{\sim}}$ ($j \neq e$) devem ser transportados para o lado esquerdo, juntamente com as submatrizes correspondentes. A nova matriz à esquerda, \bar{H}' ,

assim obtida, será então de ordem quadrada. O resultado é o seguinte:

$$\begin{bmatrix}
 {}^1\tilde{H}_{e\sim} & {}^1\tilde{H}_{2\sim} & {}^1\tilde{G}_{2\sim} & 0 & {}^1\tilde{H}_{3\sim} & {}^1\tilde{G}_{3\sim} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & {}^2\tilde{H}_{1\sim} & -{}^2\tilde{G}_{1\sim} & {}^2\tilde{H}_{e\sim} & 0 & 0 & {}^2\tilde{H}_{3\sim} & {}^2\tilde{G}_{3\sim} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & {}^3\tilde{H}_{1\sim} & -{}^3\tilde{G}_{1\sim} & {}^3\tilde{H}_{2\sim} & -{}^3\tilde{G}_{2\sim} & {}^3\tilde{H}_{e\sim}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 {}^1\tilde{U}_{e\sim} \\
 {}^1\tilde{U}_{2\sim} \\
 {}^1\tilde{T}_{2\sim} \\
 {}^2\tilde{U}_{e\sim} \\
 {}^1\tilde{U}_{3\sim} \\
 {}^1\tilde{T}_{3\sim} \\
 {}^2\tilde{U}_{3\sim} \\
 {}^2\tilde{T}_{3\sim} \\
 {}^3\tilde{U}_{e\sim}
 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}
 {}^1\tilde{G}_{e\sim} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & {}^2\tilde{G}_{1\sim} & {}^2\tilde{G}_{e\sim} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & {}^3\tilde{G}_{1\sim} & {}^3\tilde{G}_{2\sim} & {}^3\tilde{G}_{e\sim}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 {}^1\tilde{T}_{e\sim} \\
 {}^{12}\tilde{T}_{\sim} \\
 {}^2\tilde{T}_{e\sim} \\
 {}^{13}\tilde{T}_{\sim} \\
 {}^{23}\tilde{T}_{\sim} \\
 {}^3\tilde{T}_{e\sim}
 \end{bmatrix} .$$

(iv-4,6)

As incógnitas nas interfaces devem ser rearranjadas da mesma forma que o restante do sistema. Isto é, se as reações externas aplicadas sobre as interfaces, ${}^{ij}\tilde{T}_{\sim}$, são prescritas,

não há necessidade de se alterar (iv-4,6). Mas se em algumas (ou em todas as) interfaces o deslocamento é prescrito, então é necessário trocar U_j com T_j , bem como os respectivos coeficientes nas matrizes H' e G' de (iv-4,6).

Este esquema pode ser generalizado para qualquer número de subregiões ou de interfaces — como foi feito no tratamento computacional do qual trata a seção seguinte. A inclusão de forças volumétricas também pode ser feita sem maiores dificuldades.

4.5 - TRATAMENTO COMPUTACIONAL

A fim de ilustrar a aplicação do método dos elementos de contorno a problemas axissimétricos, foi desenvolvido um algoritmo em linguagem FORTRAN-77 — compatível com microcomputadores do tipo PC — para o caso da torção axissimétrica.

Neste programa, a discretização do contorno foi feita do modo proposto por GIL e VENTURINI [49]. Esta discretização emprega elementos "contínuos", nos quais pontos nodais (nós) coincidem com os pontos que definem a geometria dos elementos, e elementos "descontínuos", nos quais esta coincidência não ocorre, total ou parcialmente. (ver figura iv-3). Nesta programação a curva que constitui o contorno no caso axissimétrico é aproximada por segmentos de reta. As variáveis no contorno também recebem aproximação linear. A utilização de elementos "contínuos" é interessante porque minimiza o número de nós e, portanto, a ordem do sistema algébrico. Por outro lado, elementos "descontínuos" são indicados para os elementos situados nos vértices do contorno, evitando-se assim o uso de nós duplos — pontos onde são definidos dois nós —, bem como o emprego de equações extras, como a relação derivada da invariância do traço do tensor de deformação (CHAUDONNERET [33]), que em geral

empobrecem os resultados da análise numérica.

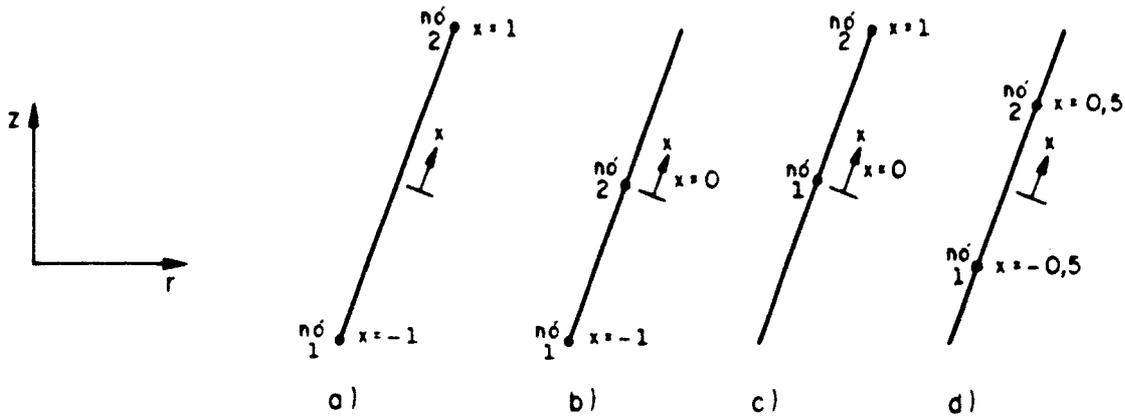


Figura iv-3 : Discretização adotada: elementos "Contínuos" - a) - e "Descontínuos" - b), c) e d).

A definição das funções interpoladoras é ilustrada na figura iv-1. $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são lineares, tais que $\phi_1(\text{nó 1}) = \phi_2(\text{nó 2}) = 1$ e $\phi_1(\text{nó 2}) = \phi_2(\text{nó 1}) = 0$. Em cada lado da figura iv-3, tem-se:

a) $\phi_1(x) = 0,5(1-x)$,

$\phi_2 = 0,5(1+x)$;

b) $\phi_1(x) = -x$,

$\phi_2 = 1+x$;

b) $\phi_1(x) = 1-x$,

$\phi_2 = x$;

d) $\phi_1(x) = 0,5(1-2x)$,

$\phi_2 = 0,5(1+2x)$.

(iv-5,1)

De acordo com (iv-1,2), em cada elemento m,

$${}^m \xi_\theta(\mathbf{x}) = \underline{\phi}(\mathbf{x}) {}^m \xi_\theta \quad ,$$

$${}^m \rho_\theta(\mathbf{x}) = \underline{\phi}(\mathbf{x}) {}^m \rho_\theta \quad ,$$

$$\underline{\phi} = [\phi_1 \quad \phi_2] \quad ,$$

$${}^m \xi_\theta = \begin{bmatrix} {}^m \xi_\theta(\text{nó 1}) & {}^m \xi_\theta(\text{nó 2}) \end{bmatrix} \quad ,$$

$${}^m \rho_\theta = \begin{bmatrix} {}^m \rho_\theta(\text{nó 1}) & {}^m \rho_\theta(\text{nó 2}) \end{bmatrix} \quad ,$$

(iv-5,2)

Como, na torção axissimétrica, só ocorrem deslocamentos e esforços na direção θ , então (iv-1,5), conforme (iii-2,51), fica

$$C_{\theta\theta} \xi_\theta + 2\pi \sum_{m=1}^m {}^m h_{\theta\theta} {}^m \rho_\theta - 2\pi \sum_{m=1}^m {}^m g_{\theta\theta} {}^m \xi_\theta = \epsilon \quad ,$$

(iv-5,3)

com

$${}^m h_{\theta\theta} = \int_{-1}^1 \rho_{\theta\theta}^*(P, \mathbf{x}) \underline{\phi}(\mathbf{x}) r(\mathbf{x}) \frac{L_m}{2} dx$$

$$e \quad {}^m g_{\theta\theta} = \int_{-1}^1 \xi_{\theta\theta}^*(P, \mathbf{x}) \underline{\phi}(\mathbf{x}) r(\mathbf{x}) \frac{L_m}{2} dx \quad ,$$

(iv-5,4)

sendo L_m o comprimento do elemento m e $r(\mathbf{x})$ a coordenada do ponto \mathbf{x} na direção radial.

O valor de $C_{\theta\theta}(P)$ pode ser encontrado impondo-se uma rotação unitária de corpo rígido na estrutura sob análise, de acordo com (iv-3,2):

$$C_{\theta\theta}(P) = - 2\pi \sum_{m=1}^M \tilde{g}_{\theta\theta}(p) \quad (\text{iv-5,5})$$

Utilizando-se este programa, confirmou-se que $C_{\theta\theta}(P)=0,5$ quando a segunda derivada do contorno é contínua em P — o que ocorre sempre que o nó considerado não coincide com a extremidade. Assim, mesmo em elementos que contém um vértice (ou dois) pode-se fazer com que os coeficientes $C_{\theta\theta}$ correspondentes a seus nós tenham valor 0,5: basta que se utilizem elementos "descontínuos" em tais vértices.

Neste programa computacional, então,

$$C_{\theta\theta} = 0,5 \quad (\text{iv-5,6})$$

Com uma equação como (iv-5,3) escrita para cada nó (e com $\epsilon=0$), obtem-se um sistema do tipo de (iv-1,10):

$$\tilde{A} \tilde{X} = \tilde{B} \quad (\text{iv-5,7})$$

Ressalte-se porém que, embora o sistema (iv-5,7) seja montado para os pontos nodais, as variáveis $\xi_{\theta\theta}$ e $\rho_{\theta\theta}$ na entrada de dados e na saída (dos resultados) referem-se à extremidade dos elementos.

E ainda, para que a integração numérica de cada $\tilde{h}_{\theta\theta}$ e $\tilde{g}_{\theta\theta}$, de (iv-5,4), possa ser obtida, é necessário antes obter o valor das integrais elípticas completas de primeiro e segundo tipos que aparecem e $\xi_{\theta\theta}^*$ e $\rho_{\theta\theta}^*$ (cf. seção 3.2.1.1). O algoritmo então adotado para a avaliação numérica destas integrais elípticas, $K(k)$ e $E(k)$, foi extraído de ABRAMOWITZ e STEGUN [02], e consiste nas seguintes aproximações:

$$K(k) = 1,3862944 + 0,1119723m_1 + 0,0725296m_1^2$$

$$- (0,5 + 0,1213478m_1 + 0,0288729m_1^2) \ln(m_1) ,$$

$$E'(k) = 1 + 0,4630151m_1 + 0,1077812m_1^2$$

$$- (0,2452727m_1 + 0,0412496m_1^2) \ln(m_1) ,$$

com
$$m_1 = 1 - k^2 , \quad (\text{iv-5,8})$$

onde k é dado por (iii-2,7) e (iii-2,15) ou (iii-2,26) e (iii-2,34).

4.5.1 - Esquemas para a integração numérica

No cálculo das integrais ${}^m\xi_{\theta\theta}$ e ${}^mg_{\theta\theta}$, de (iv-5,4), deve-se tomar cuidado com as parcelas singulares do integrando. Para isso, deve-se lembrar de (iii-2,7), (iii-2,16), (iii-2,27) e (iii-2,36), especialmente que

$$a = r^2 + R^2 + \bar{z}^2 ,$$

$$b = 2Rr ,$$

$$\gamma = 1 + \frac{(R-r)^2 + \bar{z}^2}{2Rr} = \frac{a}{b} ,$$

$$k = \sqrt{\frac{2b}{a+b}} = \sqrt{\frac{2}{a+\gamma}} . \quad (\text{iv-5,9})$$

Observando-se $\xi_{\theta\theta}^*$, de (iii-2,39), e $\rho_{\theta\theta}^*$, de (iii-2,46), (iii-2,41), (iii-2,49), (iii-2,50), (iii-2,15) e (iii,2,43), constata-se que ocorre singularidade quando o ponto de observação (Q , ou x) ou o ponto de aplicação da função delta de Dirac (p , ponto fonte) situam-se sobre o eixo de simetria

($R=0$ ou $r=0$). Portanto, os pontos nodais não devem se situar sobre o eixo de simetria — o que é possível utilizando-se elementos "descontínuos" quando necessário. Por outro lado, nas aproximações das integrais ${}^m h_{\theta\theta}$ e ${}^m g_{\theta\theta}$, não se pode tomar pontos nas extremidades dos elementos entre aqueles que serão calculados na interpolação; ou seja, pontos de extremidade dos elementos não podem ser pontos a serem ponderados na interpolação. Desta forma, garante-se que $r \neq 0$ e $R \neq 0$. Ressalte-se porém que, se $\xi_{\theta\theta}^*$ e $\rho_{\theta\theta}^*$ são reescritos de um modo adequado, levando-se em conta que $R=0$ ou $r=0$, esta singularidade desaparece. Trata-se então de um caso de "falsa" singularidade.

Fora este caso, observando-se novamente (iii-2,41), constata-se que não ocorre singularidade em nenhuma das parcelas que constituem $\xi_{\theta\theta}^*$, exceto nas expressões (iv-5,8), utilizadas para a aproximação de $K(k)$ e $E(k)$. Esta singularidade nas integrais elípticas é do tipo logarítmica, e ocorre quando $m_1=0$, isto é, quando $k=1$, o que, por sua vez, ocorre quando $\gamma=1$. E $\gamma=1$ aparece quando Q (ou seja, x) coincide com P — isto é, quando $\bar{Z}=0$ e $r=R$.

Portanto, devem-se utilizar formulas para quadratura de Gauss logarítmicas, a fim de se avaliarem os termos de ${}^m g_{\theta\theta}$ multiplicados por $\ln(m_1)$. Note-se, porém, que a quadratura logarítmica pode ser dispensada quando $\ln(m_1)$ aparece multiplicado por m_1 ou m_1^2 — pois $\lim_{m_1 \rightarrow 0} (m_1 \ln(m_1)) = \lim_{m_1 \rightarrow 0} (m_1^2 \ln(m_1)) = 0$.

Nos termos que não aparecem multiplicados por $\ln(m_1)$, mas também, ou especialmente, quando sabe-se que $m_1 \neq 0$, podem-se efetuar as integrações numéricas utilizando-se fórmulas de quadratura de Gauss simples. Olhando-se (iv-5,9), verifica-se que $m \neq 0$ (ou $\gamma \neq 1$) quando o ponto P não pertence ao elemento m no qual a integração deve ser

realizada. Portanto, só ocorre singularidade logarítmica, em ${}^m g_{\theta\theta}$, quando a integração é feita no elemento ao qual o ponto nodal P pertence.

Ambos os tipos de quadratura de Gauss, simples e logarítmica, podem ser encontradas, por exemplo, em HAMMER, MARLOVE e STROUD [52], ou STROUD e SECREST [87].

Voltando-se a observar $\rho_{\theta\theta}^*$ — (iii-2,15), (iii-2,41), (iii-43), (iii-2,46), (iii-2,49) e (iii-2,50) —, constata-se igualmente a presença de termos não-singulares e de termos com singularidade logarítmica. A diferença é que, em $\rho_{\theta\theta}^*$, aparecem ainda termos multiplicados por $1/\gamma-1$. Está claro que o elemento no qual ocorre a integral singular é, novamente, o que contém o ponto nodal que estiver atuando como ponto fonte. No caso dos termos das integrais $h_{\theta\theta}$ nos quais ocorre a singularidade $1/\gamma-1$, deve-se recorrer à utilização das fórmulas de quadratura para integrais de parte finita, fornecidas por KUTT [61].

Na avaliação das integrais ${}^m h_{\theta\theta}$ quando o ponto fonte é um nó de m, portanto, alguns termos são aproximados utilizando-se quadratura de Gauss simples, outros por quadratura de Gauss logarítmica, e outros ainda por quadratura para integrais de parte finita, de Kutt.

Olhando-se novamente para as expressões que constituem $\rho_{\theta\theta}^*$, observa-se que, se (iii-2,49) for expressa em termos de $K(k)$ por intermédio de (iii-2,15) e (iii-2,43), o termo com singularidade de $1/\gamma-1$ reduz-se a

$$a_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{\gamma}{R} \right) \frac{1}{\gamma-1} \quad , \quad (\text{iv-5,10})$$

onde a_1 representa um número real, finito, diferente de zero.

Analogamente, expressando-se (iii-2,50) em termos das integrais elípticas $K(k)$ e $E(k)$ a serem utilizadas na

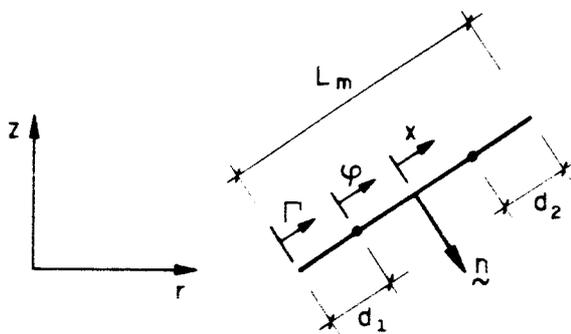
integração numérica das matrizes de influência, observa-se que o termo no qual aparece a singularidade $1/\gamma-1$ é apenas

$$a_2 \frac{z}{Rr} \frac{1}{\gamma-1} \quad , \quad (\text{iv-5,11})$$

onde a_2 representa um número real, finito diferente de zero.

(iv-5,10) e (iv-5,11) são os únicos termos com singularidade $1/\gamma-1$ em $\rho_{\theta\theta}^*$ — pois $\xi_{\theta\theta}^*/R$ não apresenta esta singularidade, conforme se observa de (iii-2,41).

Considere-se agora o elemento "descontínuo" d), da figura iv-3. Os outros tipos de elemento — a), b), c) — podem ser considerados como caso especial de d). Fazendo-se $d_1=0$, $d_2=0$ ou $d_1=d_2=0$ (figura iv-4).



- a) $d_1 = d_2 = 0$
- b) $d_1 = 0, d_2 \neq 0$
- c) $d_1 \neq 0, d_2 = 0$
- d) $d_1 = d_2 \neq 0$

Figura iv-4: Representação de um elemento genérico.

Da figura iv-4, obtém-se

$$\varphi = \Gamma - \Gamma(\text{nó}) \quad , \quad (\text{iv-5,12})$$

onde $\Gamma(\text{nó})=\Gamma(1)$ se a origem de φ estiver sobre o nó 1 e $\Gamma(\text{nó})=\Gamma(2)$ se a origem da coordenada φ estiver sobre o nó 2.

Como \tilde{n} é o vetor normal ao elemento (figura iv-4),

pode-se escrever, quando o ponto fonte é um dos nós, que

$$R = r - n_r \varphi \quad \text{e}$$

$$\bar{Z} = n_r \varphi \quad , \quad (\text{iv-5,13})$$

onde $r=r(1)$ (ou $r=r(2)$), $\bar{Z}=Z-z(1)$ (ou $\bar{Z}=Z-z(2)$), e R, Z referem-se ao ponto de observação.

De (iv-5,9) e (iv-5,13), obtem-se (iv-5,10) na forma

$$a_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{\gamma}{R} \right) \frac{1}{\gamma-1} = - a_1 \left[\frac{2n_z}{\varphi} + \frac{1}{R} \right] \quad , \quad (\text{iv-5,14})$$

e (iv-5,11) como

$$a_2 \frac{\bar{Z}}{Rr} \frac{1}{\gamma-1} = a_2 \frac{2n_r}{\varphi} \quad , \quad (\text{iv-5,15})$$

Portanto, as singulares em $1/\gamma-1$ se reduzem a

$$- a_1 \frac{2n_z}{\varphi} = b_1 \frac{1}{\varphi}$$

$$\text{e} \quad a_2 \frac{2n_r}{\varphi} = b_2 \frac{1}{\varphi} \quad . \quad (\text{iv-5,16})$$

Ou seja, a única singularidade é do tipo $1/\varphi$.

Isto completa a análise das singularidades. Resta apenas considerar os algoritmos de integração para ${}^m g_{\theta\theta}$ e ${}^m h_{\theta\theta}$, propriamente ditos.

A fórmula para quadratura de Gauss simples é

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \epsilon_n, \quad (\text{iv-5,17})$$

onde $f(x)$ é a função a ser integrada, no intervalo $[-1;1]$; x_i é o i -ésimo ponto em que $f(x)$ será ponderada e w_i é o correspondente fator ponderador (ou peso); ϵ_n é o erro da aproximação (em n pontos).

Observe-se que ${}^m h_{\theta\theta}$ e ${}^m g_{\theta\theta}$ já se encontram na forma de (iv-5,17).

A quadratura de Gauss logarítmica é dada por

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) f(x) dx = \sum_{i=1}^m w_i f(x_i) + \epsilon_n. \quad (\text{iv-5,18})$$

Como o intervalo de integração, em (iv-5,18), é $[0;1]$, cada integral em ${}^m h_{\theta\theta}$ e ${}^m g_{\theta\theta}$ deverá ser dividida em duas partes:

$$\int_{-\gamma(n\delta)}^L {}^m -\Gamma(n\delta) F(\varphi) d\varphi = \int_{-\Gamma(n\delta)}^0 F(\varphi) d\varphi + \int_0^L {}^m -\Gamma(n\delta) F(\varphi) d\varphi, \quad (\text{iv-5,19})$$

onde φ é dado em (iv-5,12).

Isto pode ser feito a partir de (iv-5,8), (iv-5,9), (iv-5,12) e (iv-5,13):

$$m_1 = 1 - k^2 = \frac{\varphi^2}{a+b} \geq 0, \quad (\text{iv-5,20})$$

$$\ln(m_1) = \ln(\varphi^2) - \ln(a+b).$$

Para $\varphi \leq 0$,

$$\ln(m_1) = \ln(\varphi^2) - \ln(a+b) + \ln(\Gamma(n\delta)^2) - \ln(\Gamma(n\delta)^2) =$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left[\left(\frac{\varphi}{\Gamma(n\delta)} \right)^2 \right] + \ln \left[\frac{\Gamma(n\delta)^2}{a+b} \right] = -\ln \left[\left(\frac{\Gamma(n\delta)}{\varphi} \right)^2 \right] + \ln \left[\frac{\Gamma(n\delta)^2}{a+b} \right] = \\
&= -\ln \left[\left(\frac{1}{(\varphi/\Gamma(n\delta))} \right)^2 \right] + \ln \left(\frac{\Gamma(n\delta)^2}{a+b} \right) .
\end{aligned}$$

(iv-5,21)

O termo singular é $\left(\frac{1}{(\varphi/\Gamma(n\delta))} \right)^2$. Fazendo-se

$$y = \left(\frac{\varphi}{\Gamma(n\delta)} \right)^2 , \quad (\text{iv-5,22})$$

o primeiro termo de (iv-5,20) torna-se, então,

$$\begin{aligned}
\int_{-\Gamma(n\delta)}^0 -\ln \left[\left(\frac{1}{(\varphi/\Gamma(n\delta))} \right)^2 \right] f(\varphi) d\varphi &= \int_1^0 -\ln \left(\frac{1}{y} \right) f \left(\Gamma(n\delta) \sqrt{y} \right) \frac{\Gamma(n\delta)}{2\sqrt{y}} dy = \\
&= \int_1^0 -\ln \left(\frac{1}{y} \right) F(y) dy = \int_0^1 \ln \left(\frac{1}{y} \right) F(y) dy ,
\end{aligned}$$

(iv-5,23)

e a quadratura logarítmica pode então ser aplicada.

Analogamente, para $\varphi \geq 0$, obtém-se

$$\ln(m_1) = -\ln \left[\frac{1}{\left(\frac{\varphi}{L_m - \Gamma(n\delta)} \right)^2} \right] + \ln \left(\frac{a+b}{(L_m - \Gamma(n\delta))^2} \right)$$

(iv-5,24)

e

$$\int_0^{L_m - \Gamma(n\delta)} -\ln \left[\frac{1}{\left(\frac{\varphi}{L_m - \Gamma(n\delta)} \right)^2} \right] f(\varphi) d\varphi =$$

$$= \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{y}\right) (-1) f\left[\left(L_m - \Gamma(n\phi)\right)\sqrt{y}\right] \frac{L_m - \Gamma(n\phi)}{2\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{y}\right) F(y) dy ,$$

$$\text{com } y = \left(\frac{\phi}{(L_m - \Gamma(n\phi))}\right)^2 . \quad (\text{iv-5,25})$$

Finalmente, a fórmula para a quadratura de integrais de parte finita, de Kutt, para $\alpha \geq 1$ e inteiro, e $r > s$, é dada por

$$\int_s^r \frac{f(x)}{(x-s)^\alpha} dx \approx (r-s)^{1-\alpha} \sum_{i=1}^n \left(w_i + c_i \frac{\ln|r-s|}{(\lambda-1)!} \right) f[(r-s)x_i + s] ,$$

(iv-5,26)

onde \int indica a parte finita da integral, w_i é o peso e c_i é o coeficiente para a aproximação da $(\alpha-1)$ -ésima derivada de f , no ponto s ($f^{\alpha-1}(s)$).

Neste caso, a singularidade é $1/\gamma-1$, ou $1/\phi$ — (iv-5,16). Portanto, (iv-5,26) fornece

$$\int_s^r \frac{f(x)}{x-s} dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f[(r-s)x_i + s] + f(s) \ln|r-s| ,$$

(iv-5,27)

pois $f^{\alpha-1} = f^0 = f$, neste caso, e não precisa ser aproximada pelos coeficientes c_i .

O ponto s é o da singularidade. Portanto, deve-se dividir a integração em duas partes, de modo similar a (iv-5,19):

$$\int_{-I(n\delta)}^{L_m - \Gamma(n\delta)} \frac{F(\varphi)}{\varphi} d\varphi = - \int_0^{-\Gamma(n\delta)} \frac{F(\varphi)}{\varphi} d\varphi + \int_0^{L_m - \Gamma(n\delta)} \frac{F(\varphi)}{\varphi} d\varphi. \quad (\text{iv-5,28})$$

Como em (iv-5,26) deve-se ter $r > s$, é preciso ajustar o primeiro termo no lado direito de (iv-5,28) a esta exigência. Fazendo-se $\bar{\varphi} = -\varphi$:

$$\begin{aligned} - \int_0^{-\Gamma(n\delta)} \frac{F(\varphi)}{\varphi} d\varphi &= - \int_0^{\Gamma(n\delta)} \frac{F(-\bar{\varphi})}{-\bar{\varphi}} (-d\bar{\varphi}) = \int_0^{\Gamma(n\delta)} \frac{-F(-\bar{\varphi})}{\bar{\varphi}} d\bar{\varphi} = \\ &= \int_0^{\Gamma(n\delta)} \frac{F(\bar{\varphi})}{\bar{\varphi}} d\bar{\varphi}. \end{aligned} \quad (\text{iv-5,29})$$

O segundo termo à direita, em (iv-5,28), já se encontra na forma de (iv-2,26), como é fácil notar.

Ressalte-se ainda que as integrais de parte finita poderiam ser trabalhadas de modo diferente, assumindo a forma de (iv-5,10) e (iv-5,11), por exemplo. Mesmo as parcelas sem singularidade poderiam ser tratadas como integrais de parte finita. Para isto poderiam ser utilizadas algumas propriedades das integrais de parte finita, tais como

$$\begin{aligned} \int_0^v dx &= \int_0^v \frac{x}{x} dx, \\ \int_0^v dx + \int_0^v \frac{1}{x} dx &= \int_0^v \frac{x+1}{x} dx, \end{aligned} \quad (\text{iv-5,30})$$

Isto é válido porque a integral de parte finita é uma extensão consistente da integral regular, ou seja, a integral regular é uma integral de parte finita.

CAPÍTULO V

EXEMPLOS NUMÉRICOS

A fim de ilustrar a aplicabilidade da formulação do método dos elementos de contorno, são apresentados alguns exemplos numéricos envolvendo corpos axissimétricos submetidos a torção axissimétrica.

Foram escolhidas duas séries de exemplos, definidas a partir de dois exemplos padrão aos quais são adicionados algumas variações.

5.1 - EXEMPLO 1 — EIXO DE SEÇÃO VARIÁVEL

O tipo padrão do exemplo 1 é constituído de um segmento de eixo de diâmetro variável, com uma carga uniformemente distribuída aplicada na face de diâmetro maior e com a rotação impedida na extremidade do eixo de menor diâmetro. São consideradas três variações deste padrão-tipo.

5.1.1 - EXEMPLO 1.1

A figura v-1 mostra o eixo variável examinado. A geometria e a discretização desta estrutura encontram-se definidas naquela figura. O momento torçor resultante é 64π , provocando reações linearmente distribuídas na extremidade de eixo de menor diâmetro, onde deslocamentos nulos são prescritos. O valor máximo destas reações é 16,16, ou seja, 1% acima do valor analítico.

Este mesmo exemplo foi resolvido com outra discretização, contendo o dobro de elementos da que é mostrada na figura v-1. O resultado mostrou um erro de apenas 0,03%.

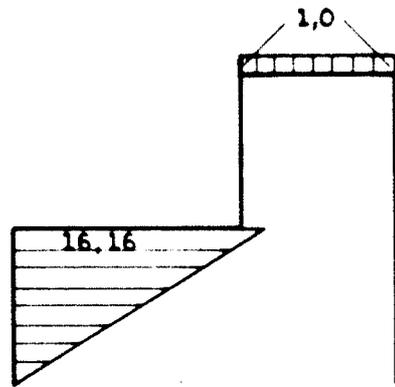
Observe-se que os elementos "contínuos" e "descontínuos" são utilizados de maneira conveniente. Elementos "descontínuos" são utilizados nos vértices e em pontos com singularidade ou com descontinuidade de reações, ou ainda em elementos com extremidade sobre o eixo de simetria. Isto ficará mais claro nos demais exemplos.

5.1.2 - EXEMPLO 1.2

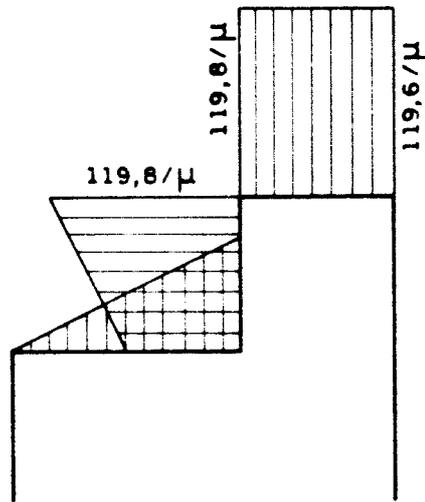
Neste exemplo (figura v-2) o eixo de menor diâmetro é mais curto que o do exemplo 1.1. Em decorrência disto, as forças de superfície na extremidade deste eixo não são mais linearmente distribuídas, como era o caso no exemplo 1.1. A figura v-2 também mostra as distribuições de tensão nas seções que contém o ponto em que ocorre a singularidade de tensão no vértice reentrante. Nestas seções as tensões também não são linearmente distribuídas, conforme esperado.

5.1.3 - EXEMPLO 1.3

A figura v-3 mostra uma estrutura bem parecida com a do



FORÇAS DE SUPERFÍCIE



GIROS

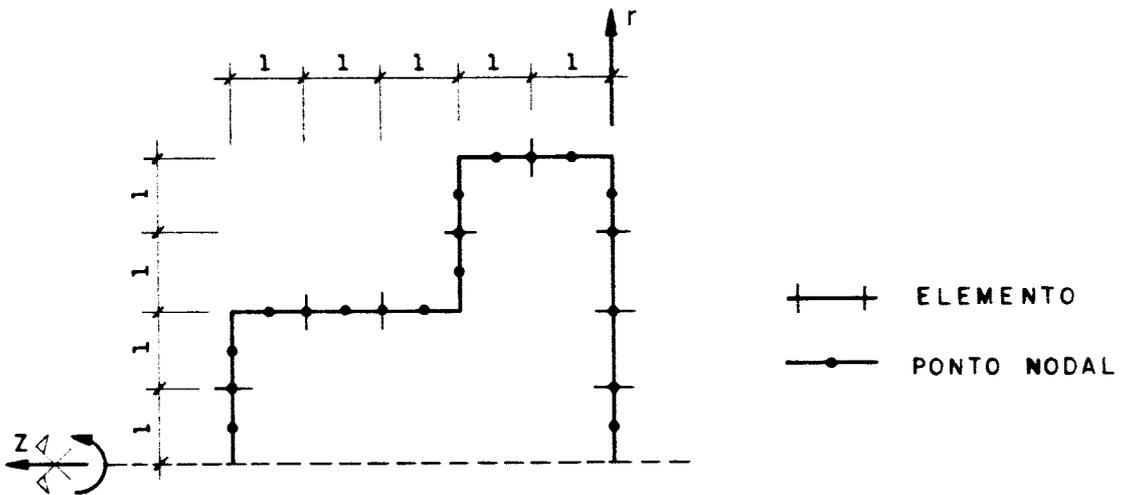
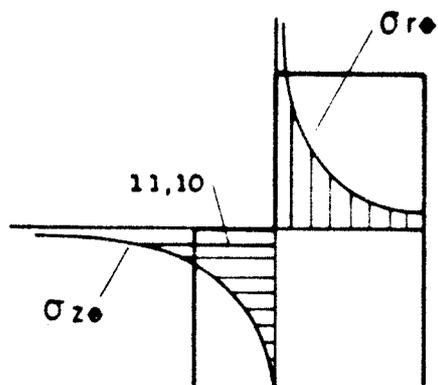
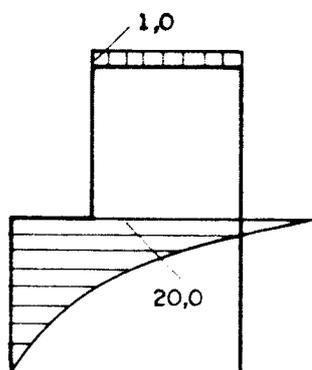


Figura v-1 : Exemplo 1.1



TENSÕES INTERNAS



FORÇAS DE SUPERFÍCIE

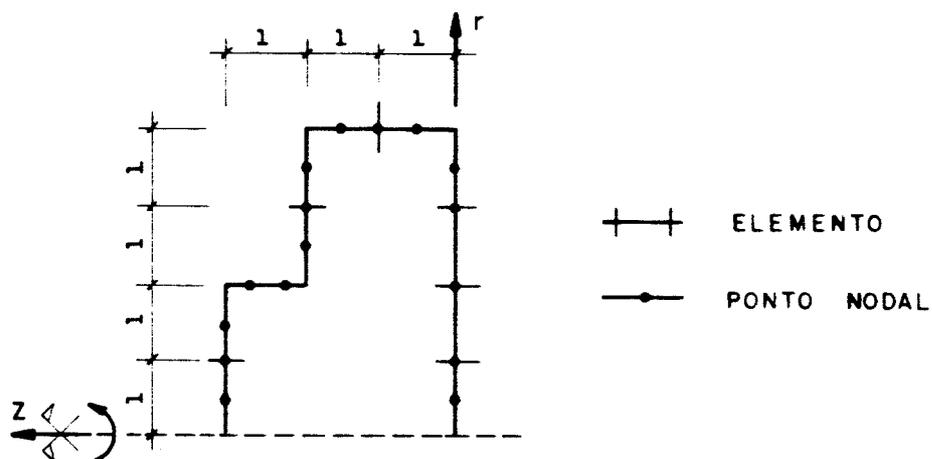


Figura v-2 : Exemplo 1.2

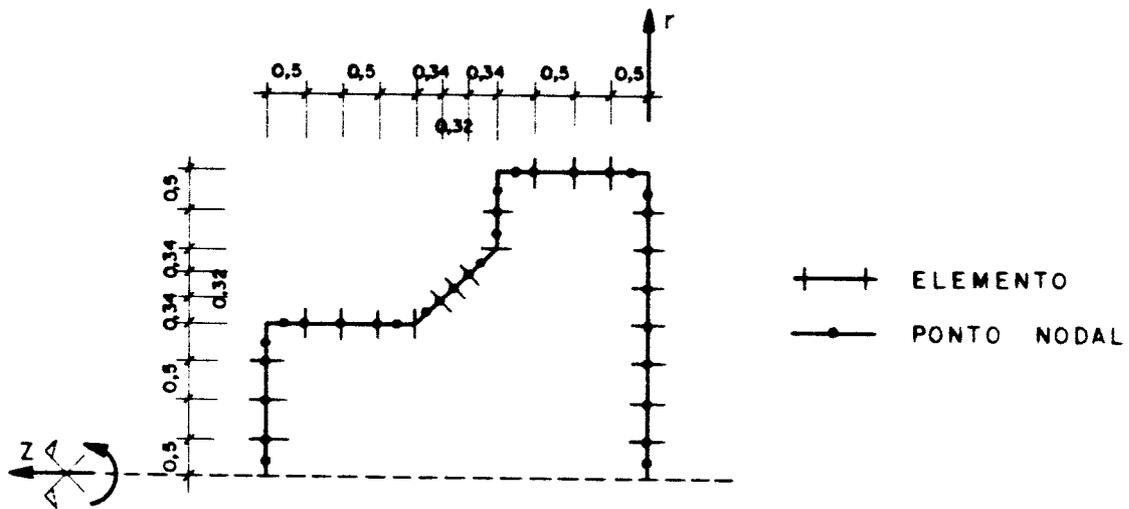
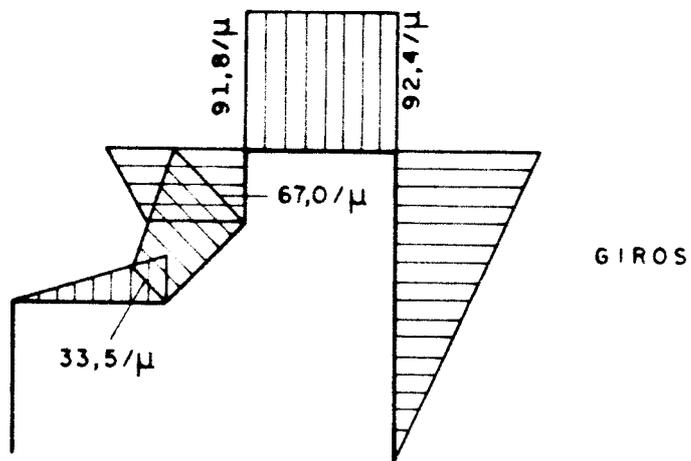
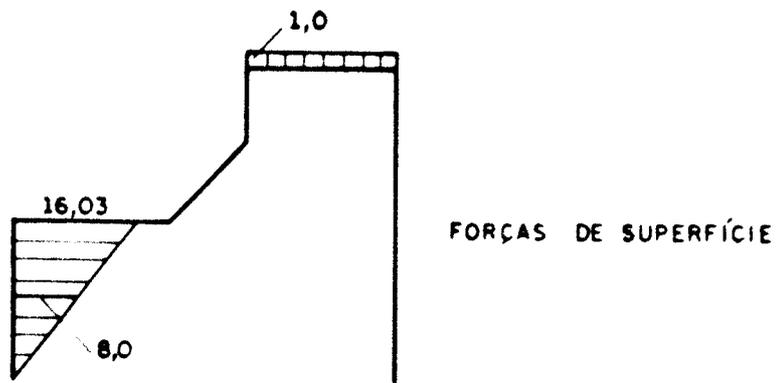


Figura v-3 : Exemplo 1.3

exemplo 1.1, mas com uma discretização bem mais refinada que a da figura v-1. A diferença na geometria é que a transição do diâmetro maior para o menor é feita através de um trecho inclinado. As reações na extremidade do eixo de menor diâmetro continuam linearmente distribuídas, embora a precisão, próxima de 0,2%, seja ligeiramente inferior àquela obtida no exemplo 1.1, com a discretização mais refinada (0,03%).

5.2 - EXEMPLO 2 — SAPATA CIRCULAR APOIADA EM MEIO SEMI-INFINITO

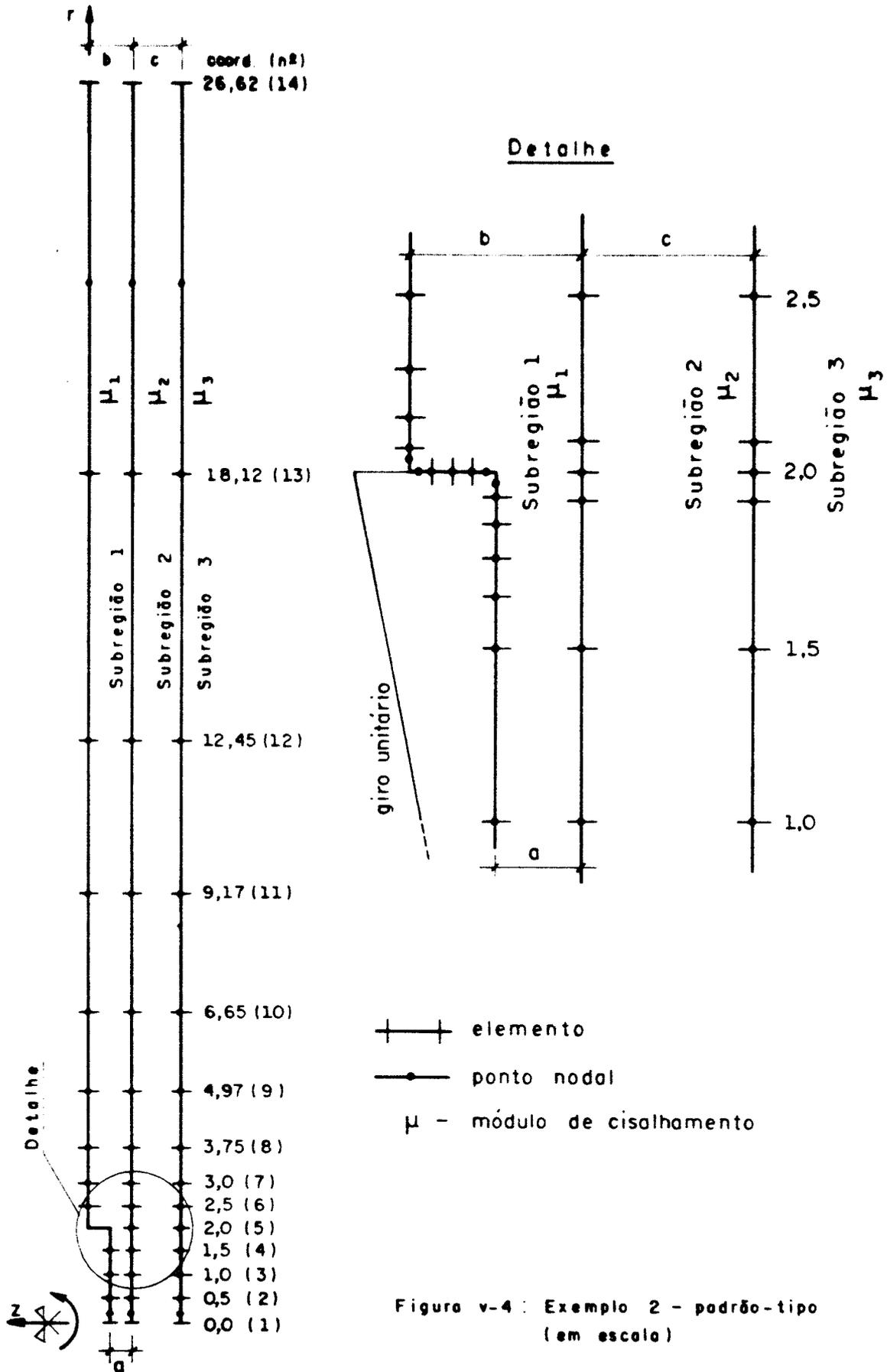
O exemplo 2, cujo tipo padrão é exposto nas figuras v-4 e v-5, considera um corpo semi-inifinito submetido a carregamentos axissimétrico de torção. Este corpo elástico semi-infinito pode estar constituído de subregiões, neste exemplo, com interfaces paralelas à superfície.

Este exemplo pode ser interpretado como uma fundação axissimétrica, colocada sobre um solo semi-infinito, submetida a torção axissimétrica.

As condições de contorno impostas são devidas a uma rotação unitária prescrita na superfície da fundação. Dessa forma, pode-se considerar que o diagrama de reações na superfície da fundação fornece o coeficiente de rigidez da fundação naquele solo. Esta situação é análoga à proposta por RAMALHO e VENTURINI [73]. O momento torçor resultante pode ser obtido das reações $\rho_{\theta\theta}$ na superfície da fundação, de acordo com a seguinte expressão:

$$M_t = 2\pi \int_0^{r(f)} \rho_{\theta\theta}^{\theta}(r) r^2 dr \quad , \quad (v-2,1)$$

onde $r(f)$ representa o raio da fundação.



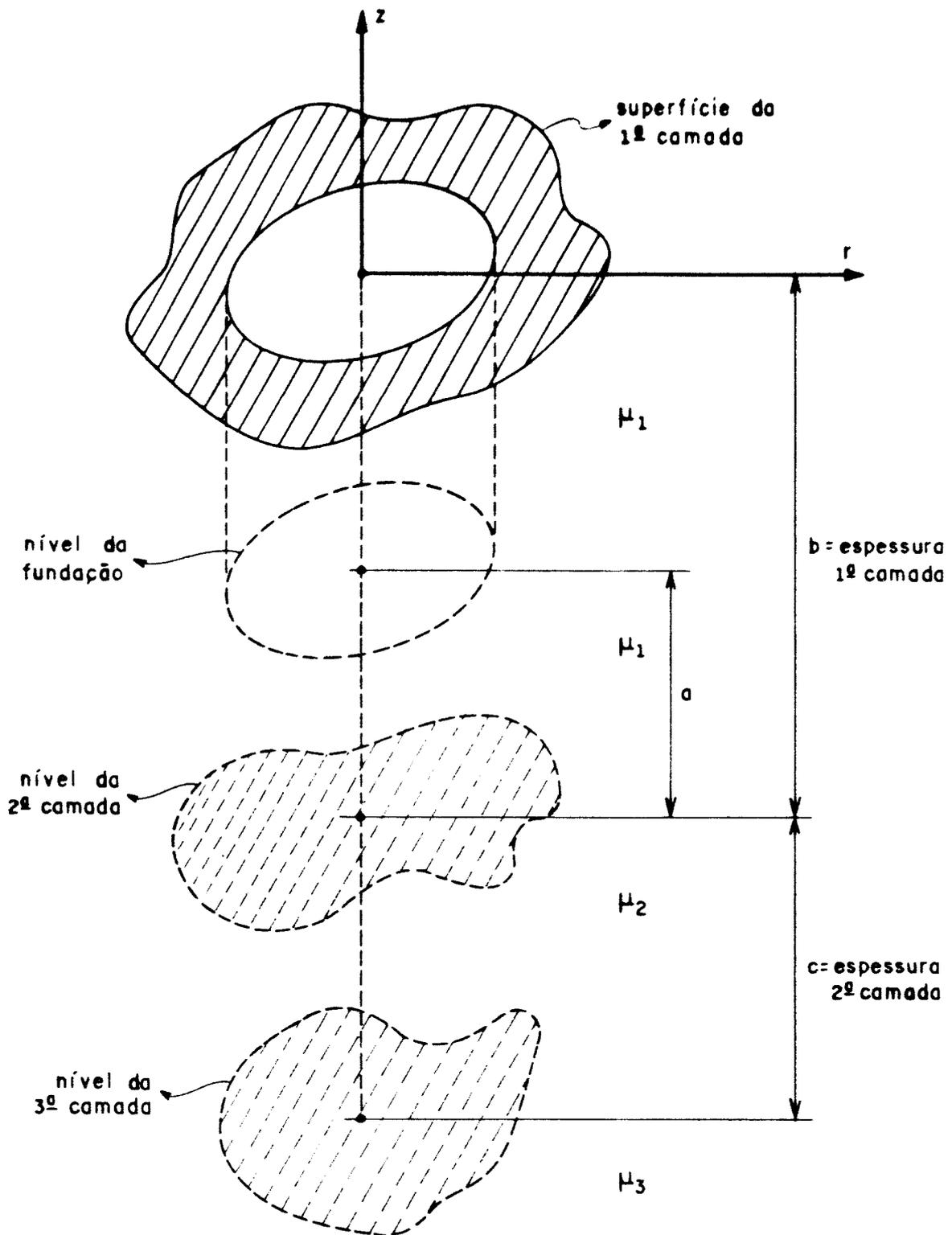


Figura v-5: Exemplo 2 - pedrão-tipo
(fora de escala)

5.2.1 - EXEMPLO 2.1

Na figura v-6 é mostrado o diagrama de rotações e o de forças de superfície, no caso da ausência de camadas, admitindo-se $\mu=100$. Repare-se na singularidade que ocorre na extremidade da fundação. Observe-se também como os giros decaem rapidamente nos pontos na vizinhança da extremidade da fundação, à medida que estes pontos se afastam da fundação.¹

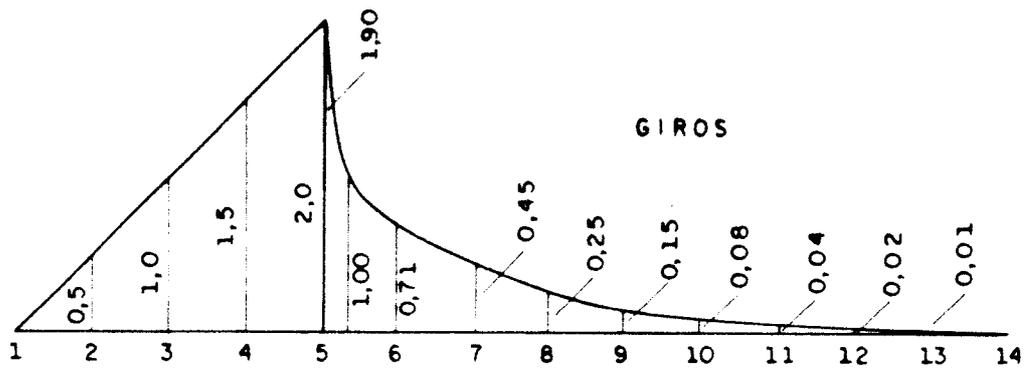
5.2.2 - EXEMPLO 2.2

O exemplo 2.2 (figura v-7) exhibe o caso em que há duas subregiões, com o módulo de cisalhamento menor na camada superior.

Além da rápida diminuição dos giros, à medida que os pontos se distanciam da extremidade da fundação — o que já observou-se no exemplo 2.1 —, note-se como os efeitos também diminuem drasticamente a uma distância bastante pequena da superfície, onde a carga da fundação é aplicada. Estes dois aspectos mostram como os efeitos são absorvidos sobretudo pela porção de solo que se encontra mais próxima da fundação.

A comparação do exemplo 2.1 com 2.2 exhibe mais um indicador da consistência da formulação. Em 2.2, apenas a pequena camada da superfície possui o mesmo módulo de cisalhamento que o solo de 2.1; conseqüentemente, o

¹ Cabe também uma explicação quanto à existência, neste exemplo e nos outros seguintes, de pontos para os quais estão definidos dois valores de giros. Isto pode ocorrer devido à utilização de elementos "descontínuos", especialmente em pontos singulares. O ponto nodal é retirado da extremidade dos dois elementos que contém o ponto singular, gerando um duplo valor para as variáveis neste ponto, conforme este valor seja calculado a partir de um elemento ou de outro.



$a = b = c = 0$

$\mu_1 = 100$

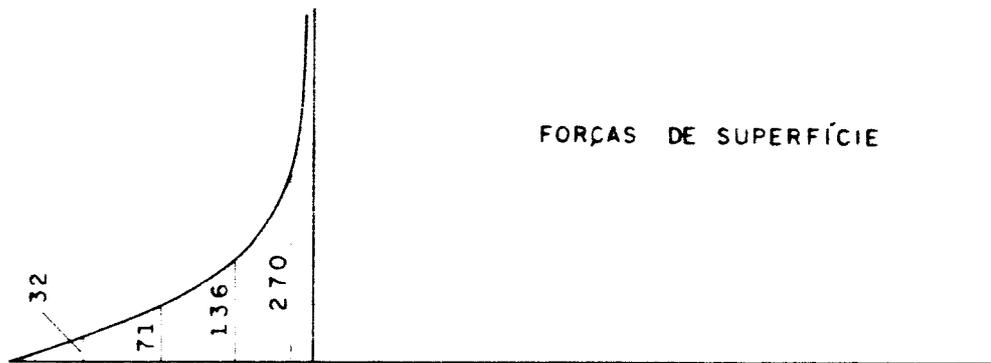


Figura v-6 : Exemplo 2.1 - Geometria fora de escala

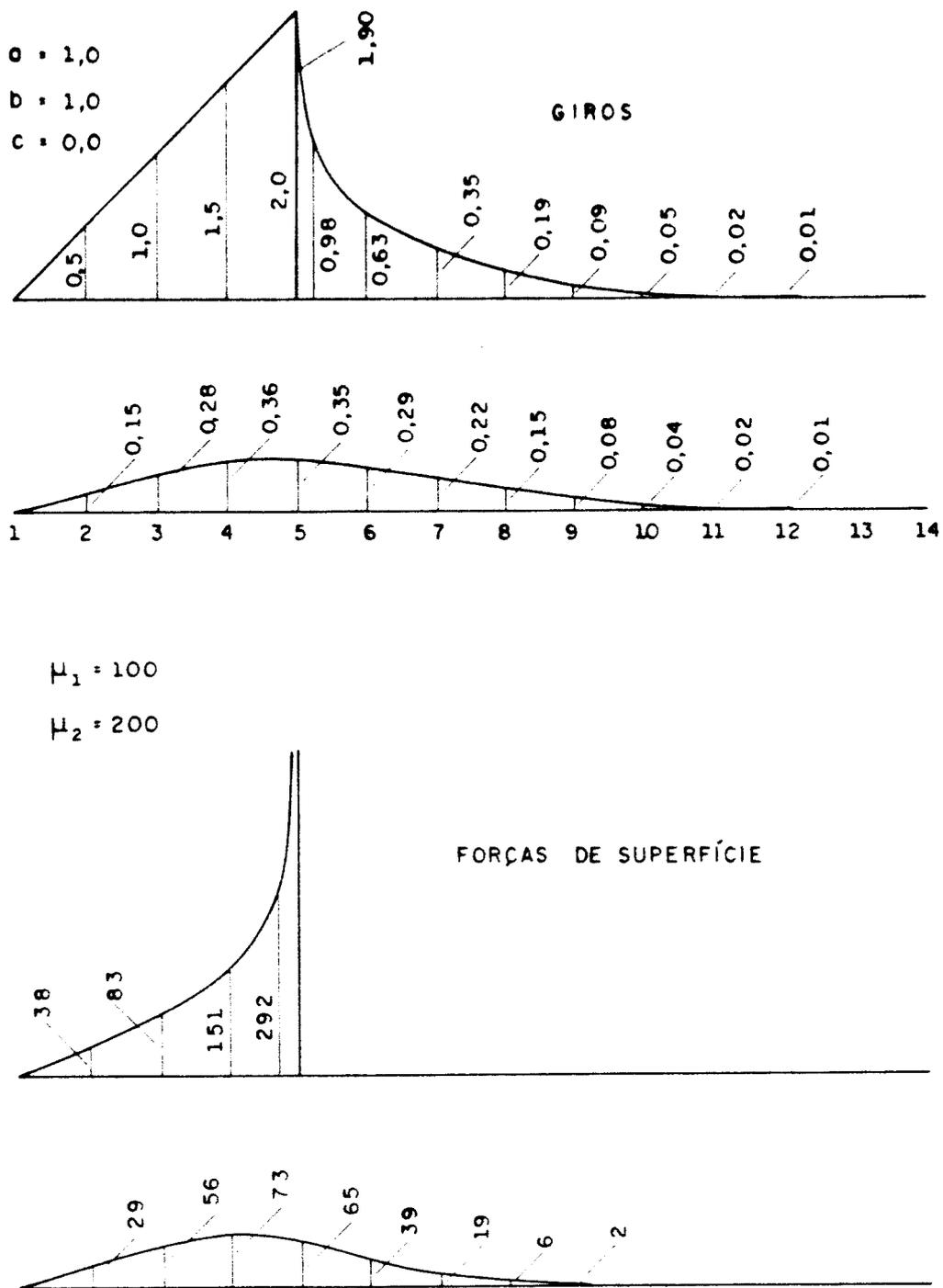


Figura v-7 : Exemplo 2.2 - Geometria fora de escola

coeficiente de rigidez em 2.2 deve ser maior que o de 2.1 como mostra a figura v-7. A estrutura 2.2, como um todo, opõe-se mais à rotação que a de 2.1. Em relação a 2.1, as tensões se concentram ainda mais nas proximidades da fundação, em 2.2; os giros diminuem ainda um pouco mais rapidamente em 2.2, enquanto os pontos se afastam da fundação, do que ocorre em 2.1. De qualquer maneira, deve-se notar que a influência exercida pela introdução da segunda camada em 2.2 é bem pequena, comparada aos resultados de 2.2, em que só há uma camada. Isto confirma, novamente, que a ação da fundação é absorvida sobretudo pela região do solo próxima à fundação — especialmente perto da extremidade da fundação.

5.2.3 - EXEMPLO 2.3

No exemplo 2.3 (figura v-8) é introduzida uma terceira camada, ainda mais resistente à torção que a segunda. As tendências apontadas em 2.2, com relação à introdução da segunda camada, são reafirmadas com a introdução desta terceira camada. Os comentários feitos em 2.2 podem ser estendidos a 2.3.

5.2.4 - EXEMPLO 2.4

A figura v-9 apresenta o exemplo 2.4, cuja diferença em relação a 2.3 consiste em que a fundação não está mais sobre a primeira camada, mas encaixada dentro nela. Supõe-se, em 2.4, que há reações somente na extremidade da fundação. A parede cilíndrica da fundação é livre de tensões. (Isto torna o exemplo 2.4 mais parecido com os anteriores). Observe-se apenas que, como nas proximidades da fundação diminui (em relação a 2.3) a espessura de solo com menor módulo de rigidez, então o coeficiente de rigidez aumenta

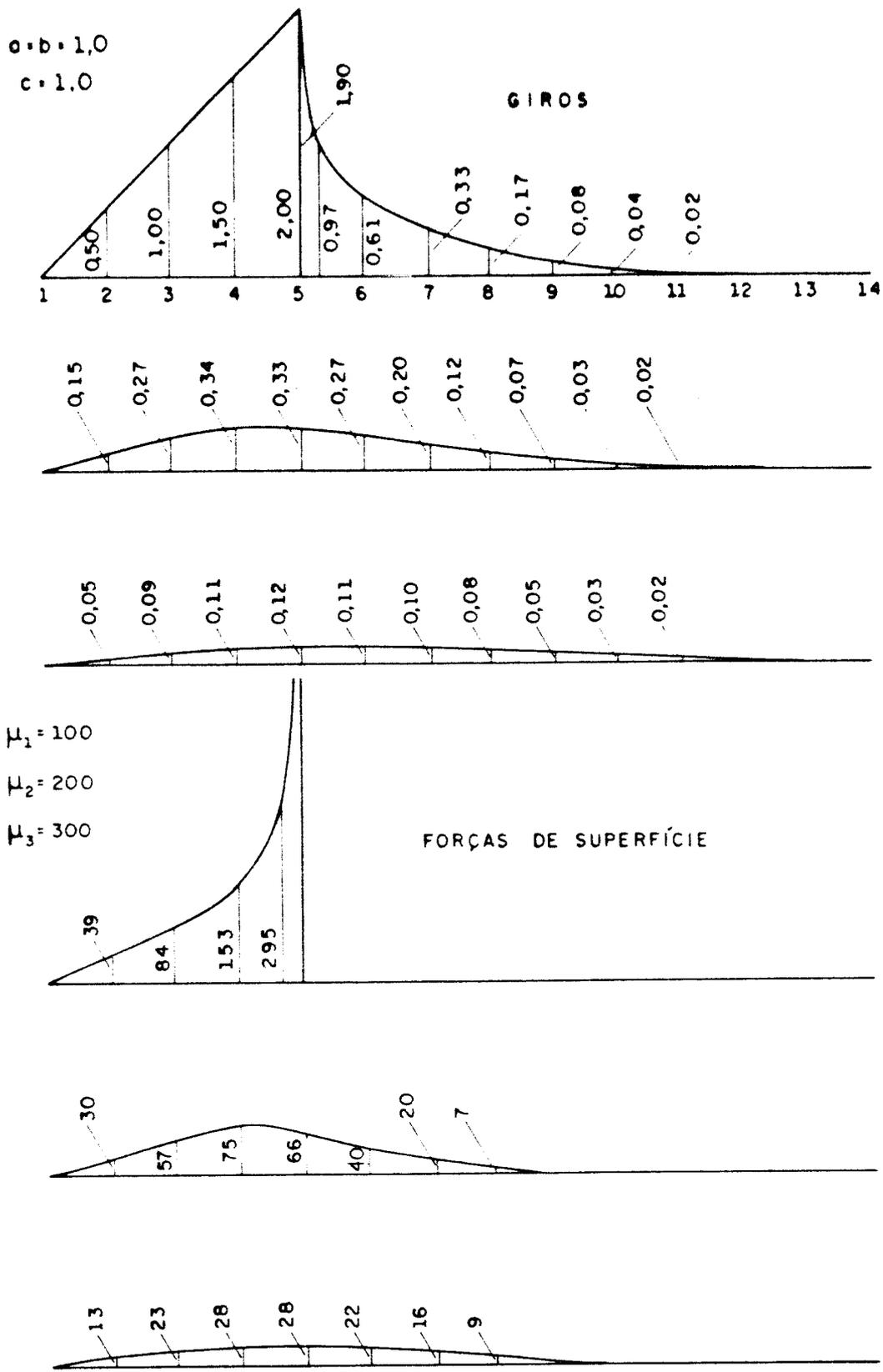


Figura v-8 : Exemplo 2.3 - Geometria fora de escala

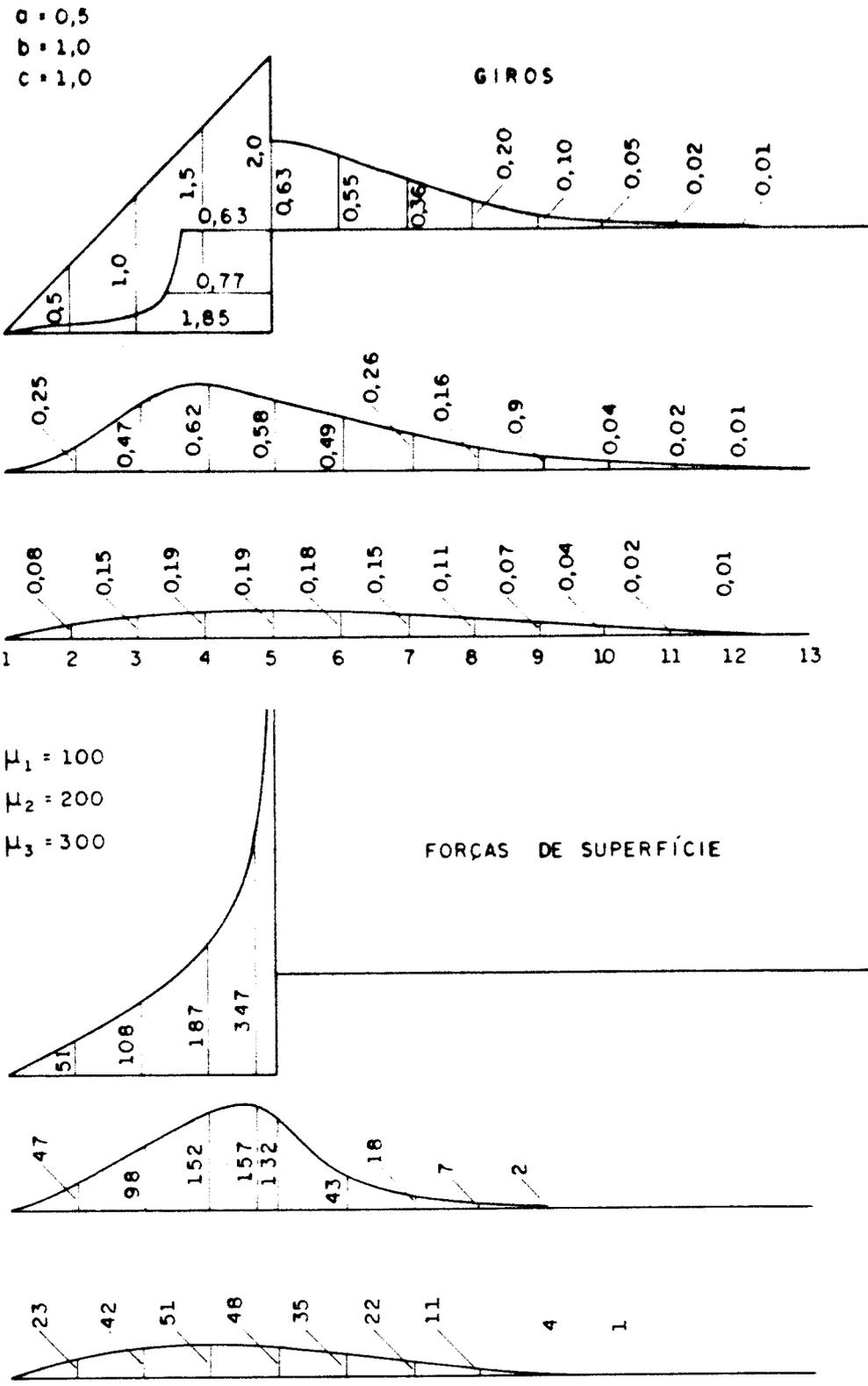


Figura v-9: Exemplo 2.4 - Geometria fora de escala

(em 2.4).

5.2.5 - EXEMPLO 2.5

O exemplo 2.5 (figura v-10) apresenta uma variação um pouco mais diferenciada que as anteriores. No exemplo 2.5 aparece um corpo sólido com a forma de um cilindro, cujo raio corresponde ao da fundação, nos exemplos anteriores. Este corpo cilíndrico, por sua vez, apoia-se em duas camadas semi-infinitas, que possuem rigidez à torção menor que a do corpo.

Isto permite que este exemplo seja interpretado como se o corpo cilíndrico fosse a própria fundação. A rotação unitária seria entendida como causada pela estrutura sobre a fundação.

A rotação unitária, neste exemplo, é aplicada no topo do corpo cilíndrico. Como o corpo cilíndrico (que representa a fundação) não é rígido, os giros em sua base não correspondem a uma rotação unitária, como no topo. Quanto às duas camadas sob o corpo cilíndrico, elas comportam-se como as do exemplo 2.2 (figura v-7), mas desta vez sujeitas a um giro menor que o unitário. Portanto, os efeitos nas duas camadas inferiores são menores que os encontrados nas camadas de 2.2.

5.2.6 - EXEMPLO 2.6

Finalmente, o exemplo 2.6 (figura v-11) apresenta o caso em que a fundação está encaixada no solo, como em 2.4. A diferença desta vez, é que a fundação repousa sobre a segunda camada. Supõe-se também que a parede da fundação não está ligada ao solo, como em 2.4.

Analogamente a 2.4 em relação a 2.3, o coeficiente de rigidez à torção em 2.6 é ainda maior que em 2.4.

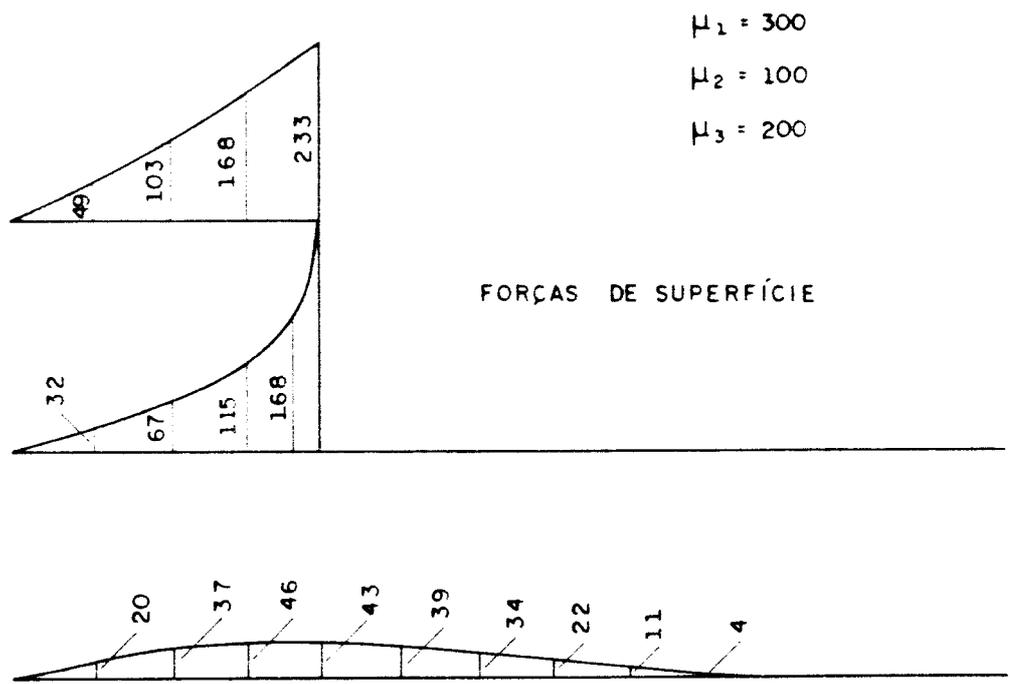
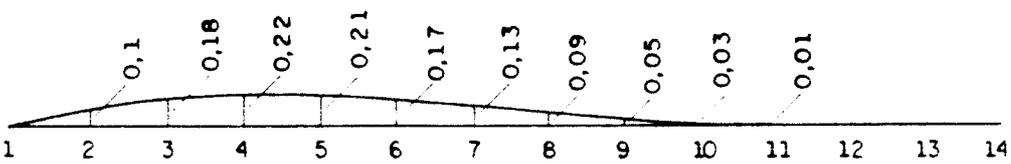
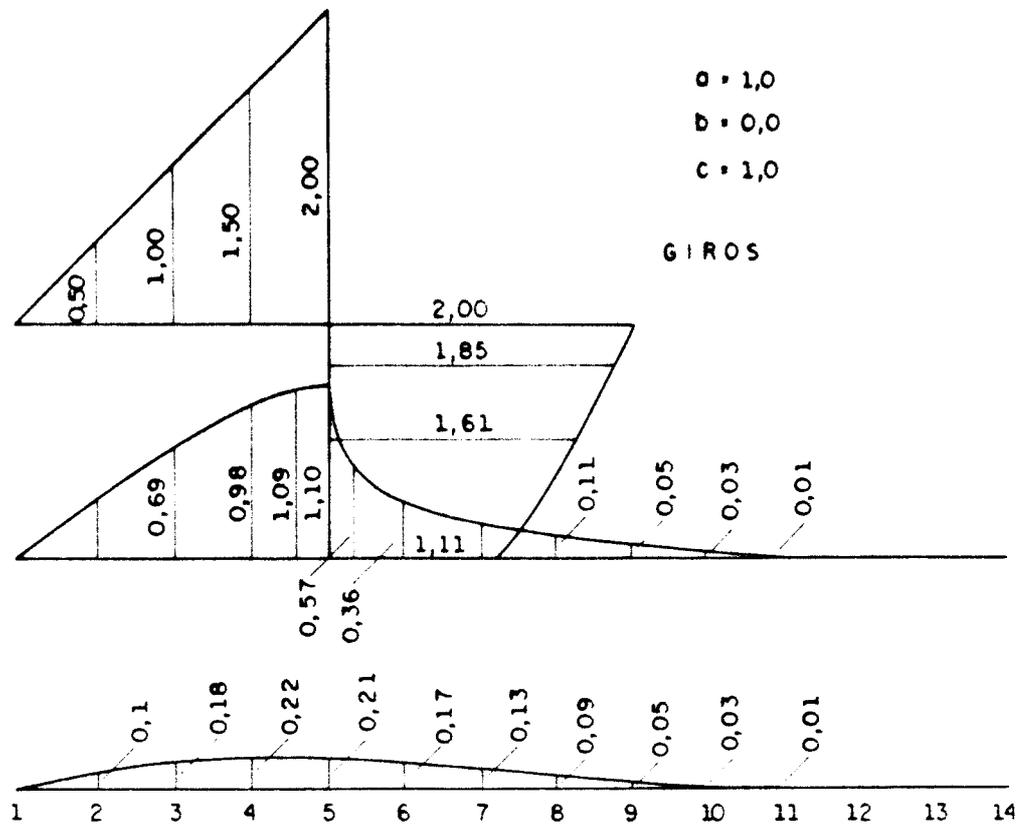


Figura v-10: Exemplo 2.5 - Geometria fora de escala

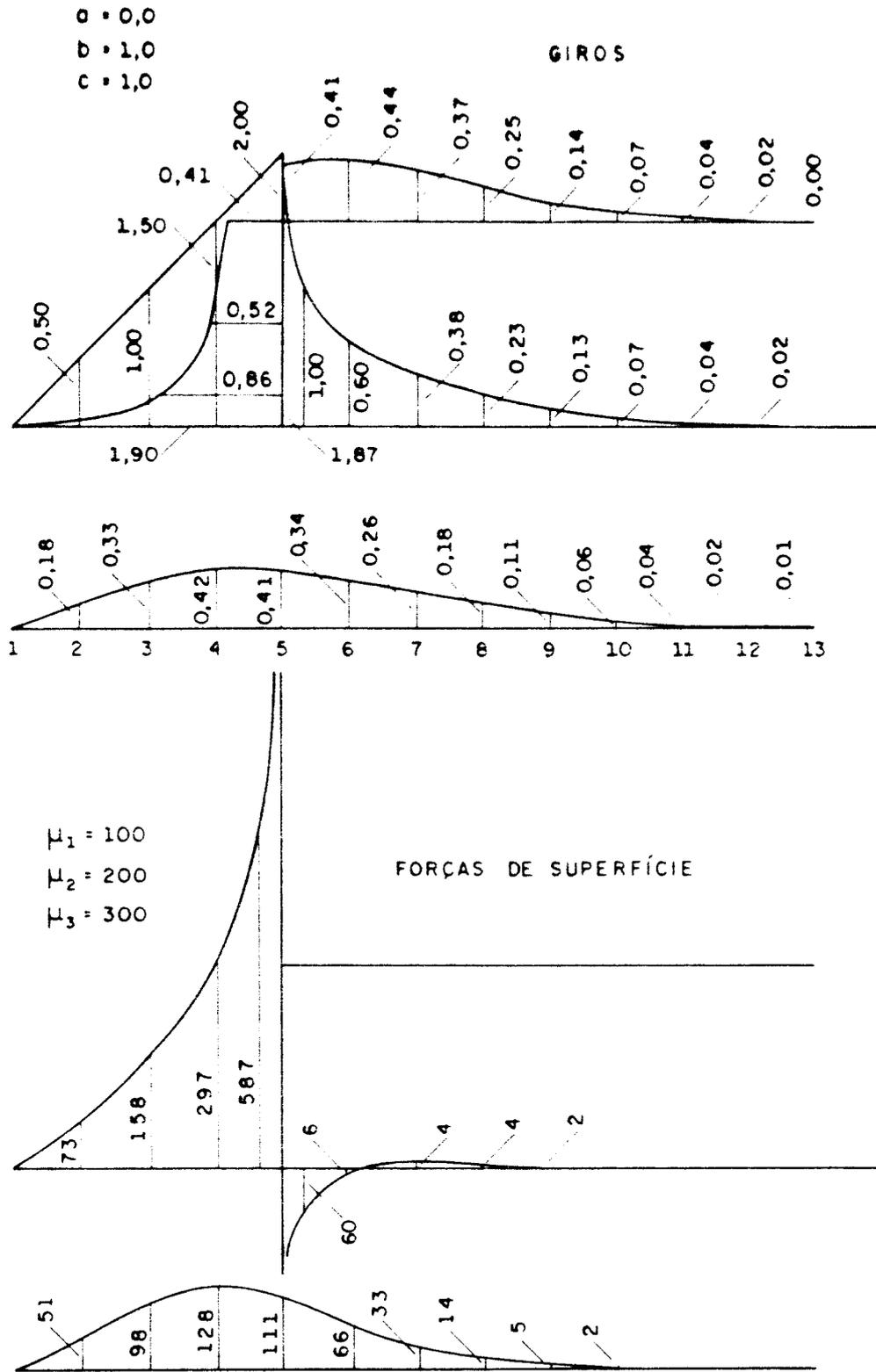


Figura v-11 : Exemplo 2.6 - Geometria fora de escala

Mas o que é realmente interessante ressaltar em 2.6, é o fato de que a força de superfície na segunda camada, na vizinhança da fundação, possui um sinal invertido — em relação ao que ocorre nos outros casos —, e logo a seguir retorna ao sinal usual (em baixa magnitude). Isto ocorre porque nesta região a primeira camada oferece resistência à rotação da segunda (camada) — enquanto em nenhum caso dos anteriores uma camada opõe-se ao deslocamento da outra camada imediatamente abaixo dela, mas sim o contrário.

5.2.7 - TABELA 1 — COEFICIENTES DE RIGIDEZ

A tabela 1 pode servir como um resumo do exemplo 2. Nos exemplos 2.1, 2.2 e 2.3, os coeficientes de rigidez, fornecidos por $(v-2,1)$, crescem à medida que são introduzidas camadas inferiores com módulos de cisalhamento maiores. No entanto, apesar de as camadas estarem muito próximas da fundação, naqueles exemplos, a introdução daquelas camadas produz um aumento muito pequeno da rigidez à torção. Os coeficientes de rigidez são determinados, basicamente, pelo solo imediatamente próximo à fundação. As camadas abaixo, ainda que a uma pequena distância da fundação, exercem pouca influência sobre o coeficiente de rigidez; a influência da camada que recebe a fundação é largamente preponderante. Somente quando a fundação é colocada sobre a segunda camada, como em 2.6, a rigidez tem um aumento mais significativo. Quanto a 2.5, trata-se de uma variação de 2.2, com a rotação unitária aplicada no topo da fundação, que neste caso não é considerada como totalmente rígida.

Exemplos	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
M_t	639,1	694,5	702,0	879,3	479,6	1447,4

Tabela 1 : Coeficientes de rigidez, M_t ,
correspondentes ao exemplo 2.

CAPÍTULO VI

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho representa apenas uma etapa preliminar para se atingirem níveis de pesquisa mais avançados. A formulação do método dos elementos de contorno para problemas axissimétricos representa uma tarefa relativamente complexa, devido à conjugação de dois fatores. Em primeiro lugar, porque as próprias equações integrais que fundamentam o método dos elementos de contorno implicam no emprego de técnicas matemáticas um tanto sofisticadas. Por outro lado, os problemas axissimétricos também envolvem uma certa complexidade em sua elaboração. Na conjugação destes fatores — às complexidades do axissimétrico têm de ser aplicadas as técnicas sofisticadas das equações integrais — obtem-se como resultado uma formulação que não tem na simplicidade um de seus maiores méritos. No entanto, esta formulação tem suas vantagens, por reduzir um problema a um em que aparecem apenas integrais de linha, unidimensional, o

que acarreta numa significativa simplificação e redução na manipulação de dados.

A formulação dos elementos de contorno para problemas axissimétricos elasto-lineares, isotropos, constitui a base para a abordagem de problemas mais avançados. Uma vez constituída esta base, é possível prosseguir, aqui também em duas direções. Por um lado, pode-se avançar no nível da análise teórica, sem que isto implique num salto exagerado de complexidade. Por exemplo, pode-se pensar na extensão desta formulação básica, de modo que se possa lidar também com a axissimetria elasto-plástica. Por sua vez, a crescente familiarização com estas formulações e com a tentativa de implementá-las, visando aplicações, pode conduzir à elaboração de exemplos aplicativos mais interessantes e complexos, ou mais práticos e realistas (de ponto de vista da aplicação). Estas foram motivações para a realização do presente trabalho.

Neste espírito é que se situa a preocupação com os aspectos mais básicos da formulação presente nesta dissertação. Em geral, nos artigos da literatura especializada que tratam da formulação do método dos elementos de contorno para problemas axissimétricos, os detalhes decorrentes da geometria axissimétrica na elasticidade são omitidos — no máximo indicando-se onde encontrar estes detalhes na literatura físico-matemática —, apresentando-se apenas os resultados que serão utilizadas na formulação. Este é um procedimento correto em publicações especializadas, economizando espaço e indo direto ao ponto de interesse do especialista. Mas este procedimento não é o mais indicado para atingir a um público mais amplo, menos familiarizado com o tema. Então, por haver uma certa carência de tratamentos mais detalhadas do tema desta dissertação, pareceu conveniente abordá-lo aqui de um modo mais sistemático. Por isso foi dada ênfase à formulação de

problemas isótopos elasto-lineares axissimétricos, detalhando-se um tanto melhor o modo de obtê-la, nos termos concisos e elegantes da análise tensorial. E então se procurou mostrar, de modo um pouco mais pormenorizado, como a teoria das equações integrais que fundamenta o método dos elementos de contorno deve ser aplicada ao problema axissimétrico — de modo a se obter a formulação do método dos elementos de contorno para problemas axissimétricos. Foi inclusive deduzida a solução fundamental para o caso da torção axissimétrica, justamente o caso menos abordado na literatura sobre este tema.

Quanto à construção de um algoritmo computacional, foram fornecidos detalhes que possibilitam a superação das dificuldades mais importantes encontradas na construção de um tal programa.

Por fim, os exemplos ilustrativos do capítulo também podem trazer alguma sugestão para o desenvolvimento de aplicações. Neste sentido, a segunda série de exemplos, no capítulo V, sugere ao menos a possibilidade da realização de uma avaliação numérica completa, na tentativa de se chegar a uma correlação "analítico-numérica" entre os parâmetros indicados na figura v-4 — espessura e módulo de cisalhamento das camadas — e o coeficiente de rigidez à torção (expresso por $(v-2,1)$) e ilustrado na tabela 1.

BIBLIOGRAFIA

- [01] ABDUL-MIHSEIN, M.J., BAKR, A.A., PARKER, A.P.
Stresses in axisymmetric rotating bodies determined
by th boundary integral equation method. J. Strain
Anal., v.20, p.79-86, 1985.

- [02] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A., Handbook of
mathematical functions. Dover, 1965.

- [03] AU, M.C., BREBBIA, C.A. A three-dimensional boundary
element approach for rotationally symmetrical
problems. In: INT. CONF. ON BOUNDARY ELEMENTS,
5th., Hiroshima, Japan, 1983. Proc. p.915-928

- [04] BAKR, A.A. Boundary integral equation analysis of
axisymmetric stress and potential problems. PhD
Thesis, Imperial College, University of London,
1983.

- [05] BAKR, A.A. The boundary integral equation method in axisymmetric stress analysis problems. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [06] BAKR, A.A., ABDUL-MIHSEIN, M.J., FENNER, R.T. Application of the boundary integral equation method to some axisymmetric and three-dimensional pressure vessel problems. In: INT. CONF. ON NUM. METHODS IN ENG. THEORY AND APPLICATIONS, Swansea, 1985. Proc. p.615-624
- [07] BAKR, A.A., ABDUL-MIHSEIN, M.J., FENNER, R.T. Treatment of thermoelastic effects in the axisymmetric boundary integral equation method. J. Thermal Stresses, 1985.
- [08] BAKR, A.A., FENNER, R.T. Boundary integral equation analysis of axisymmetric potential problems using isoparametric quadratic elements. Mech. Eng. Dept., Imperial College, 1981. (Report AM-SA-281)
- [09] BAKR, A.A., FENNER, R.T. Use of the Hankel transform in boundary integral methods for axisymmetric problems. Int. J. Num. Methods Eng., v.19, p. 1765-69, 1983.
- [10] BAKR, A.A., FENNER, R.T. Boundary integral equation analysis of axisymmetric thermoelastic problems. J. Strain Anal., v.18, p.329-51, 1983.
- [11] BAKR, A.A., FENNER, R.T. Axisymmetric fracture mechanics analysis by the boundary integral equation method. Int. J. Press. Ves. & Piping, v.18, p.55-75, 1985.

- [12] BANERJEE, P.K., DAVIES, T.G. Advanced implementation of boundary element methods for three-dimensional problems of elastoplasticity and viscoplasticity. In: MUKHERJEE, S., BANERJEE, P.K. (eds). Developments in boundary element methods 3. Barking, UK: Elsevier Appl. Sci., 1984.
- [13] BANERJEE, P.K., WILSON, R.B., MILLER, N. Development of a large B.E.M. system for three-dimensional analysis. In: CRUSE, T.A. et alii (eds.) Advanced topics in boundary element analysis. ASME, 1985.
- [14] BETTI, E. Teoria dell elasticita. Il Nuovo cimento, v.7-10, 1872.
- [15] BÉZINE, G. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. Mech. Research Communications, v.5, n.4, p.197-206, 1978.
- [16] BEZINE, G. A mixed boundary integral: finite element approach to plate vibration problems. Mech. Research Communications, v.7, n.3, p.141-150, 1980.
- [17] BEZINE, G., BONNEAU, D. Integral equation method for the study of two dimensional stokes flow. Acta Mechanica, v.41, p.197-209, 1981.
- [18] BÉZINE, G., BONNEAU, D. Integral equation method for the study of two dimensional stokes flow. Acta Mechanica, v.41, p.197-209, 1981.

- [19] BRADY, B.H., BRAY, J.W. The boundary element method for elastic analysis of tabular orebody extraction, assuming complete plane strain. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., v.15, p.29-37, 1978.
- [20] BRADY, B.H.G. & BRAY, J.W. The boundary element method for determining stresses and displacements around long openings in a triaxial stress field. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., v.15, p.21-28, 1978.
- [21] BREBBIA, C.A. The boundary element method for engineers. London: Pentech Press, 1978.
- [22] BREBBIA, C.A. (ed.) Recent advances in boundary element methods: Proc. 1st Int. Conf. Boundary Element Methods, Southampton University. Pentech, 1978.
- [23] BREBBIA, C.A. (ed.) New developments in boundary element methods: Proc. 2nd Int. Conf. Boundary Element Methods, Southampton University. Southampton: CML Publ., 1980.
- [24] BREBBIA, C.A. (ed.) Boundary element methods: Proc. 3rd Int. Conf. Boundary Element Methods, California. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- [25] BREBBIA, C.A. (ed.) Boundary element methods in engineering: Proc. 4th Int. Conf. Boundary Element Methods, Southampton University. Berlin: Springer-Verlag, 1982.

- [26] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C. Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [27] BUI, H.D. Some remarks about the formation of three dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations. Int. J. Solids Struct., v.14, p.935-939, 1978.
- [28] BYRD, P.F., FRIEDMAN, M.D. Handbook of elliptic integrals for engineers and phisicists. Springer-Verlag, 1954.
- [29] CARRER, J.A.M., TELLES, J.C.F., MANSUR, W.J. Elasto-plastic torsion of solids of revolution by the boundary element method. In: BOUNDARY ELEMENT TECHNOLOGY CONFERENCE, 3rd., Rio de Janeiro, Brazil, 1987. Proc. p.79-88
- [30] CATHIE, D.N., BANERJEE, P.K. Numerical solutions in axisymmetric elastoplasticity by the boundary element method. In: INT. SYMP. ON INNOVATIVE NUMERICAL ANALYSIS IN APPLIED ENG. SCI., 2nd., Montreal, Canada, 1980. Proc. p.331-339
- [31] CATHIE, C.N., BANERJEE, P.K. Boundary element method for plasticity and creep including viscoplastic approach. Res. Mechanica, v.4, p.3-22, 1982.
- [32] CHANDRA, A., MUKHERJEE, S. Boundary element formulations for large strain-large deformation problems of viscoplasticity. Int. J. Solids Struct., v.20, p.41-53, 1984.

- [33] CHAUDONNERET, M. Resolution of tension discontinuity problems in boundary integral-equation method applied to stress analysis. Comptes Rendus, Academie des Sciences, Ser.A, Math., v.284, p.463-466, 1977.
- [34] COSTA JR., J.A., BREBBIA, C.A. The boundary element method applied to plates on elastic foundations. Engineering Analysis, v.2, n.4, p.174-183, 1985.
- [35] CRUSE, T.A. A direct formulation and numerical solution of the general elastodynamics problem II. J. Math. Anal. Appl., v.22, 1968.
- [36] CRUSE, T.A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. Int. J. Solids Struct., v.5, p. 1259-1274, 1969.
- [37] CRUSE, T.A. Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis. Computers & Structures, v.3, p. 509-527, 1973.
- [38] CRUSE, T.A. An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. Computers & Structures, v.4, p.741-754, 1974.
- [39] CRUSE, T.A. Mathematical foundation of the boundary integral equation method in solid mechanics. Pratt & Whitney Aircraft, 1977. Report AFQSR-TR-77-1002

- [40] CRUSE, T.A., RIZZO, F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I. J. Math. Anal. Appl., v.22, p.224-259, 1968.
- [41] CRUSE, T.A., SNOW, D.W., WILSON, R.B. Numerical solutions in axisymmetric elasticity. Comp. & Struct., v.7, p.445-451, 1977.
- [42] CRUSE, T.A. & VAN BUREN, W. Three dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. Int. J. Fract. Mech., v.7, p.1-15, 1971.
- [43] DOBLARE, M. et alii. Boundary element formulation for elastoplastic analysis of axisymmetric bodies. Appl. Math. Modelling, v.6, p.130-135, 1982.
- [44] EL REFAEE, M.M., WU, J.C., LEKOUDIS, S.G. Solutions of the compressible Navier-Stokes equations using the integral methods. AIAA Journal, v.20, p.356-362, 1982.
- [45] FREDHOLM, I. Sur une classe d'equations fonctionnelles. Acta Math., v.27, p.365-390, 1903.
- [46] FREDHOLM, I. Solution d'un problème fondamental de la theorie de l'elasticité. Arch. Mat. Astronom. Fysik, v.2, 1905.

- [47] FUDOLI, C.A., VENTURINI, W.S. Formulação do método dos elementos de contorno para análise de corpos axissimétricos com carregamento tangente. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE METODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 7., São Carlos, nov. 1986. Anais. v.1, p.61-69
- [48] FUNG, Y.C. Foundations of solid mechanics. New Jersey: Prentice Hall, 1965.
- [49] GIL R., J.C., VENTURINI, W.S. Boundary element technique for the analysis on tension discontinuity problems. In: BOUNDARY ELEMENT TECHNOLOGY CONFERENCE, 1st., Adelaide, Australia, 1985.
- [50] GREEN, A.E., ZERNA, W. Theoretical elasticity. Oxford: Oxford University Press, 1968.
- [51] GUPTA, A.K. The boundary integral equation method for potential problems involving axisymmetric geometry and arbitrary boundary conditions. Ms Thesis, University of Kentucky, 1980.
- [52] HAMMER, P.C., MARLOVE, O.J., STROUD, A.H. Numerical integration over simplex and cones. Math. Tables and Other aids to Computations, v.10, 1956.
- [53] HARTMANN, F. Computing the C-matrix on non-smooth boundary points. In: BREBBIA, C.A. (ed). New developments in boundary element methods. Southampton: CML Publ., 1980.

- [54] HILBERT, D. Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen integralgleichungen. New York: Chelsea Publishing, 1953.
- [55] JASWON, M.A. Integral equation methods in potencial theory I. Proc. Royal Society, v.A 275, p.23-32, 1963.
- [56] JASWON, M.A., MAITI, M., SYMM, G.T. Numerical biharmonic analysis and some applications. Int. J. Solids Structures, v.3, p.309-332, 1967.
- [57] JASWON, M.A., PONTER, A.R. An integral equation solution of the torsion problem. Proc. Roy. Soc. Ser.A, v.273, 1963.
- [58] KELLOG, O.D. Foundations of potential theory. New York: Dover, 1953.
- [59] KERMANIDIS, T. A numerical solution for axially symmetrical elasticity problems. Int. J. Solids Struct., v.11, p.493-500, 1975.
- [60] KUPRADZE, V.D. Potential methods in theory of elasticity. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1965.
- [61] KUTT, H.R. Quadratura formulae for finite-part integrals. CSIR Special Report, Pretoria, 1975.
- [62] LAURICELLA, G. Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Acta Math., v.32, 1909.

- [63] LACHAT, J.C., WATSON, J.O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: formulation for three-dimensional elastostatics. Int. J. Num. Methods Eng., v.10, p.991-1005, 1976.
- [64] LACHAT, J.C., WATSON, J.O. Progress in the use of boundary integral equations illustrated by examples. Comp. Methods Appl. Mech. Eng., v.10, p.273-289, 1977.
- [65] MAYR, M. The numerical solution of axisymmetric elasticity problems using an integral equation approach. Mech. Res. Com., v.3, p.393-398, 1976.
- [66] MAYR, M., DREXLER, W., KHUN, G. A semi-analytical boundary integral approach for axisymmetric elastic bodies with arbitrary boundary conditions. Int. J. Solids Struct., v.16, p.863-871, 1980.
- [67] MIKHLIN, S.G. Integral equations. London: Pergamon Press, 1957. (International series of monographs in pure and applied mathematics)
- [68] MUKHERJEE, S. Boundary element method in creep and fracture. Barking, UK: Elsevier Applied Science, 1982.
- [69] MUKHERJEE, S., CHANDRA, A. Boundary element formulations for large strain-large deformation problems of plasticity and viscoplasticity. In BANERJEE, P.K., MUKHERJEE, S., (eds). Developments in boundary element methods 3. Barking, UK: Elsevier Appl. Sci., 1984.

- [70] MUKHERJEE, S., RAJIYAH, H. Analysis of metal forming problems by the boundary element method. In: BREBBIA, C.A., VENTURINI, W.S. (eds). Boundary element techniques: applications in stress analysis and heat transfer. Southampton: CML Publ. 1987.
- [71] MUSKHELISHVILI, N.I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Noordhoff: Groningen Holland, 1953.
- [72] NIGAM, R.K. The boundary integral equation for elastostatics problems involving axisymmetric geometry and arbitrary boundary conditions. MS Thesis, University of Kentucky, 1980.
- [73] RAMALHO, M.A., VENTURINI, W.S. The Use of a Foundation Element in a Three-Dimensional Structural Analysis Code. In: INT. CONF. ON BOUNDARY ELEMENT TECHNOLOGY, 6TH., Southampton, 1991. Proc. p.173-184
- [74] RICCARDELLA, P.C. An improved implementation of the boundary integral technique for two dimensional elasticity problems. Pittsburgh, Canergie-Mellon Institute of Technology, 1972.
- [75] RICCARDELLA, P.C. An implementation of the boundary and elasto-plasticity. PhD Thesis, Canergie-Mellon University, 1973.
- [76] RIZZO, F.J. An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quarterly of Applied Mathematics, v.25, n.1, p.83-92, 1967.

- [77] RIZZO, F.J., SHIPPY, D.J. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. Int. J. Solids Struct., v.4, p.1161-1179, 1968.
- [78] RIZZO, F.A., SHIPPY, D.J. A formulation integral approach to potencial and elasticity problems for axisymmetric bodies with arbitrary boundary conditions. Mech. Res. com., v.6, p.99-103, 1979.
- [79] RIZZO, F.J., SHIPPY, D.J., NIGAM, R.K. A boundary integral equation method for axisymmetric elastostatic bodies under arbitrary surface loads. In: INT. SYMP. ON INNOVATIVE NUMERICAL ANALYSIS IN APPLIED ENG. SCI., 2nd., Montreal, Canada, 1980. Proc. p.423-432
- [80] ROCHA, F.S. Análise de descontinuidades pelo método dos elementos de contorno. São Carlos, 1988. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos-USP
- [81] SARIHAN, V., MUKHERJEE, S. Axisymmetric viscoplastic deformation by the boundary element method. Int. J. Solids Struct., v.18, p.1113-28, 1982.
- [82] SHERMAN, D.I. Dokl. Akad. Nauk SSSR, v.27-28, 1949; v.32, 1941.
- [83] SHIPPY, D.J., RIZZO, F.J., GUPTA, A.K. Boundary integral solution of potential problems involving axisymmetric bodies and nonsymmetric boundary conditions. In: SOUTH-EASTERN CONF. ON THEORETICAL AND APPL. MECH., 10th., Tennessee, 1980. Proc. p.189-206

- [84] SILVA, N.A. Análise de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno. São Carlos, 1988. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
- [85] SMIRNOV, V.J. Integral equations and partial differential equations in a course in higher mathematics. London: Addison-Wesley, 1964.
- [86] SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. Il Nuovo cimento, v.17-19, 1886.
- [87] STROUD, A.H., SCREST, D. Gaussian quadrature formulas. New York: Prentice Hall, 1966.
- [88] SWEDLOW, J.L., CRUSE, T.A. Formulation of boundary integral equations for three dimensional elastoplastic flow. Int. J. Solids Struct., v.7, p.1673-1683, 1971.
- [89] SYMM, G.T. Integral equation methods in potential theory II. Proc. Royal Society, v.A 275, p.33-46, 1963.
- [90] TELLES, J.C.F. Elementos de contorno aplicados à plasticidade axissimétrica. Revista Brasileira de Engenharia, v.1, p.103-115, 1982.
- [91] TELLES, J.C.F., BREBBIA, C.A. On the application of the boundary element method to plasticity. Appl. Math. Modelling, v.3, p.466-470, 1979.

- [92] TELLES, J.C.F., BREBBIA, C.A. The boundary element method in plasticity. In: BREBBIA, C.A., (ed.). New development in boundary element methods. Southampton: CML Publ., 1980. p.295-317
- [93] TELLES, J.C.F., BREBBIA, C.A. Elastoplastic boundary element analysis. In: EUROPE-U.S. WORKSHOP ON NONLINEAR FINITE ELEMENT ANALYSIS IN STRUCTURAL MECHANICS, 1980. Proc. Berlin: Springer-Verlag, 1980. p.403-434
- [94] TOTTENHAM, H. Boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P.K., BUTTERFIELD, R., (eds). Developments in boundary element methods. Appl. Sci. Publ., 1979.
- [95] VENTURINI, W.S. Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems. PhD Thesis, University of Southampton, 1982.
- [96] VENTURINI, W.S., BREBBIA, C.A. Boundary element formulation for nonlinear applications in geomechanics. Appl. Math. Modelling, v.8, p.251-260, 1984.
- [97] WU, J.C. Integral representation approach for the numerical solution of turbulent flow problems. AIAA Journal, v.16, p.948-955, 1980.
- [98] WU, J.C. Problems of general viscous flow. In: BANERJEE, P., SHAW, R.P., (eds). Development in boundary element method 2. Barking, UK: Appl. Sci. Publ., 1982.

- [99] WU, J.C. Boundary element methods and in homogeneous elliptic differential equations. In: BREBBIA, C.A., MAIER, G., (eds). Boundary elements VII. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [100] WU, J.C. Boundary element solution of viscous flow problems. In: BREBBIA, C.A., VENTURINI, W.S., (eds). Boundary element techniques: application in fluid flow and computational aspects. Southampton: CML Publ., 1987.
- [101] WU, J.C., ALTIERO, N.J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form an arbitrary boundary conditions. Computers & Structures, v.10, p.703-707, 1979.
- [102] WROBEL, L.C. Potential and viscous flow problems using the boundary element method. PhD Thesis, Southampton University, 1981.
- [103] WROBEL, L.C., BREBBIA, C.A. Axisymmetric potential problems. In: INT. SEMINAR ON RECENT ADVANCES IN BOUNDARY ELEMENTS METHODS, 2nd., Southampton, 1980.
- [104] YANO, H., KIEDA, A. An approximate method for solving two-dimensional low-Reynolds-number flow past arbitrary cylindrical bodies. J. Fluid Mec., v.97, p.157-179, 1980.
- [105] YOSHIKAWA, F., TANAKA, M. Boundary elements in axisymmetric potential problems. In: INT.SEMINAR ON BOUNDARY ELEMENTS METHODS, 4th., Southampton, 1982. Proc. p.101-111