

ANALISE SISMICA DE EDIFÍCIOS PELA
TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO

AUTOR: ENG. PABLO ANÍBAL LÓPEZ YÁNEZ

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
ÁREA DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

ANÁLISE SÍSMICA DE EDIFÍCIOS
PELA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO

AUTOR: ENG. PABLO ANÍBAL LÓPEZ YÁNEZ
ORIENTADOR: PROF.DR. JOSÉ ELIAS LAIER

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para obtenção do título de "Doutor em Engenharia de Estruturas".

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

COMISSÃO JULGADORA:

Prof.Dr. Reyolando M.L.R. da Fonseca Brasil (POLI-USP)
Prof.Dr. Walter Libardi (UFSCar)
Prof.Dr. Ana Lucia H. de Cresci El Debs (EESC-USP)
Prof.Dr. Miguel Martinez (POLI-USP)
Prof.Dr. José Elias Laier (EESC-USP)

SUPLENTES

Prof.Dr. Henrique de Brito Costa (POLI-USP)
Prof.Dr. Carlos Alberto N. Dias (POLI-USP)
Prof.Dr. Marcio Roberto Silva Corrêa (EESC-USP)
Prof.Dr. Munir Rachid (EESC-USP)

São Carlos, agosto de 1992

AGRADECIMENTOS

Ao Prof.Dr. José Elias Laier pela amizade, pela orientação deste trabalho e pelo tempo dedicado.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo importante apoio recebido.

Aos professores, colegas e funcionários do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos.

RESUMO

Apresenta-se uma variante da técnica do Meio Contínuo para a análise estática e dinâmica de estruturas assimétricas de edifícios altos submetidas a efeitos sísmicos. Nesse sentido, o estudo visa basicamente a determinação dos esforços produzidos pela ação sísmica.

Com esses objetivos, propõem-se modelagens contínuas para análise estática e para análise dinâmica. Na abordagem dinâmica é obtida a resposta espectral baseada na superposição modal.

Na resolução estática geral monta-se um sistema de equações diferenciais lineares, para cuja solução sugere-se um método iterativo de rápida convergência.

Na análise dinâmica de estruturas tridimensionais com colunas axialmente rígidas procede-se ao desacoplamento do sistema de equações, enquanto que para a análise geral realiza-se uma discretização do meio contínuo pela via do método dos esforços e utilizando um processo iterativo.

Neste trabalho analisam-se estruturas regulares típicas de edifícios altos, tais como: paredes estruturais, pórticos planos, núcleos estruturais e suas associações tridimensionais. Ademais o estudo é feito considerando-se comportamento elástico linear e no âmbito dos pequenos deslocamentos e deformações (teoria linear).

Vários exemplos numéricos são oportunamente inseridos no sentido de mostrar a eficiência das soluções propostas.

A B S T R A C T

A continuum model is developed for earthquake design of asymmetric tall buildings. The analysis is carried out by the mode superposition method and the response spectrum technic. The same model, in its static version, is used for the static analysis by the building code procedures.

In the general static analysis, an iterative method for the solution, of the linear equations system is proposed.

In the dynamic analysis of three dimensional structures, without axial deformations, decoupling procedure is used, while for the general analysis, a discrete model is constructed by the iterative process and forces method applied to the continuous-connexion technique.

In this work are analyzed regular structures that can consist of shear walls, frames, core walls or any combinations of them. On the other hand, it is consider that the material has a linear stress-strain relation and the analysis satisfies the limitations of the small deformation theory.

Some numerical examples show the efficiency of the proposed methods.

S U M Á R I O

1..	INTRODUÇÃO	1
2.	OS MOVIMENTOS SÍSMICOS	5
2.1.	INTRODUÇÃO	5
2.2.	BREVE INTRODUÇÃO À TEORIA DA TECTÔNICA GLOBAL	6
2.3.	AS ONDAS SÍSMICAS	9
2.4.	QUANTIFICAÇÃO DOS SÍSMOS	11
3.	ALGUMAS RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS	13
3.1.	INTRODUÇÃO	13
3.2.	MÉTODOS DE CÁLCULO	13
3.3.	AMORTECIMENTO	18
3.4.	ESPECTROS	18
4.	ANALISE ESTÁTICA DE EDIFÍCIOS ALTOS	20
4.1.	INTRODUÇÃO	20
4.2.	ESTRUTURAS PLANAS	20
4.2.1.	PAREDES ESTRUTURAIS	21
4.2.2.	PAREDES CONTRAVENTADAS POR LINTÉIS	22
4.2.3.	PÓRTICOS PLANOS	26
4.2.4.	MARCHA DO CÁLCULO	43

4.3.	ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS	48
4.3.1.	FORMULAÇÃO GERAL	49
4.3.2.	TÉCNICA DE SOLUÇÃO	55
4.3.3.	NÚCLEOS ESTRUTURAIS	59
4.3.4.	MARCHA DO CÁLCULO	64
4.4.	EXEMPLOS	69
4.4.1.	EXEMPLO 4.1	69
4.4.2.	EXEMPLO 4.2	74
4.4.3.	EXEMPLO 4.3	77
4.4.4.	EXEMPLO 4.4	80
4.4.5.	EXEMPLO 4.5	83
5.	ANÁLISE DINÂMICA DE EDIFÍCIOS ALTOS	86
5.1.	INTRODUÇÃO	86
5.2.	ESTRUTURAS PLANAS	86
5.2.1.	FORMULAÇÃO GERAL	86
5.2.2.	ANÁLISE ESPECTRAL DE PAINÉIS PLANOS COM COLUNAS INEXTENSÍVEIS	92
5.2.3.	ANÁLISE ESPECTRAL DE PAINÉIS PLANOS COM COLUNAS EXTENSÍVEIS	93
5.2.4.	MARCHA DO CÁLCULO	98
5.3.	ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS	107
5.3.1.	FORMULAÇÃO GERAL	107
5.3.2.	ANÁLISE ESPECTRAL DE ESTRUTURAS COM COLUNAS INEXTENSÍVEIS	114
5.3.3.	ANÁLISE ESPECTRAL GERAL	116
5.3.4.	MARCHA DO CÁLCULO	121
5.4.	EXEMPLOS	134
5.4.1.	EXEMPLO 5.1	134
5.4.2.	EXEMPLO 5.2	137
5.4.3.	EXEMPLO 5.3	140

6. CONCLUSÕES	143
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS E BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	145
APÊNDICE A	
Solução da Equação Diferencial de Deformação	A1
APÊNDICE B	
Solução da Equação de Esforços Normais das Colunas	A5
APÊNDICE C	
Solução do Sistema de Equações de Deformação	A8
APÊNDICE D	
Funções Q_f^c em Estruturas Tridimensionais	A10
APÊNDICE E	
Fórmulas para o Cálculo da Matriz de Flexibilidades	A16

NOTAÇÕES

1. LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

$\{A\}$: vetor de transformação de coordenadas
\bar{A}, \bar{A}_0	: amplitudes das ondas sísmicas
$[A_e]$: matriz de rigidezes
A_j	: constantes
$[A_v]$: matriz de auto-versores
$\{\bar{B}\}$: vetor de transformação
B_j	: constantes
$[B_t], [B_v]$: matrizes de rigidez
C	: coeficiente dinâmico
$\{C\}$: vetor de rigidezes
$[C]$: matriz de amortecimento
$[C_c]$: Matriz de transformação de esforços axiais
C_j	: constantes
D	: largura do edifício
D_j	: constantes
E	: módulo elástico de Young
EI, EJ	: rigidezes de colunas e vigas
$\{F\}, \{F\}^{**}$: vetores de esforços
$\{F_c\}, \{F_c\}^{**}$: vetores de esforços complementares
F_t	: força aplicada na topo
G	: módulo elástico transversal
G_j	: funções de tempo

H : altura do edifício

 I : coeficiente de impostância
 I_i : inércias das colunas
 $\{I_e\}, [I_e]$: matrizes de rigidez
 $[I_j], \{I_u\}$: matrizes de rigidez

 J_i : inércias das vigas
 $\{J_e\}, [J_g], [J_j]$: matrizes de rigidez
 $[J_t], [J_v]$: matrizes de rigidez

 K : coeficiente de rigidez da estrutura
 $[K], [K_m]$: matrizes de rigidez das vigas

 $[M], [M_a]$: matrizes das massas
 $\{M\}^*$: vetor das massas modais

 M_j^c, \bar{M} : momentos fletores atuantes nas colunas
 M_E, M_D : momentos nos extremos das vigas
 M_f : momento fletor
 $[M_R]$: matriz de rigidez
 M_S : magnitude sísmica

 $\{N\}$: vetor de esforços axiais das colunas

 P_1, P_2, P_3 : forças laterais aplicadas à estrutura

 Q_E : esforço cortante aplicado às estruturas tridimensionais
 Q_f : esforço cortante aplicado às estruturas planas
 Q_f^c : esforço cortante complementar

 R : resposta máxima provável
 R_i : respostas máximas modais

$\{R\}, \{R_b\}$: vetores de rigidezes
 $[R_a], [R_e], [R_s]$: matrizes de transformação
 $[R_\ell], [R_t]$: matrizes de transformação

 S : coeficiente de interação solo-estrutura
 $[S], [\bar{S}]$: matrizes de rigidez
 $[S]^{**}, [S]^0$: matrizes de rigidez
 S_a : aceleração espectral
 $[S_1], [S_2]$ e
 $\{S_d\}$: matrizes transformadas de $[S]^0$

 T : período fundamental da estrutura
 $[T], [\bar{T}]$: matrizes de rigidez
 $[T]^{**}, [T]^0$: matrizes de rigidez
 T_s : período característico do solo de fundação

 U_g : deslocamentos da base da estrutura

 V_0 : força cortante na base da estrutura
 V_{min} : força cortante mínima recomendada pelas normas
 V_E, V_D : reações de apoio das vigas
 V_j : formas modais

 Y : largura do edifício, transversal ao carregamento

 Z : coeficiente de zonificação sísmica

2. LETRAS ROMANAS MINÚCULAS

a, a^m	: rigidezes das vigas
b_e^m, b_d^m	: rigidezes das vigas
c	: distância entre as paredes estruturais
d_1, d_2	: posições dos eixos baricêntricos das paredes
e	: excentricidade estática
e_1, e_2	: excentricidades majoradas
f	: fator de forma da seção
$f(z)$: função de z
$f(\{u\})$: função do vetor de deslocamentos
f_1, f_2	: coeficientes das equações das frequências
h	: altura dos andares
h_d	: distância entre os planos de discretização
h_n	: altura da estrutura
i, j, k	: índices
k_1, k_2, k_3	: rigidezes dos painéis
k^m, k^c	: rigidezes de vigas e colunas
$\{\ell\}$: vetor de distâncias entre colunas
$\{\bar{\ell}\}$: vetor transformado do vetor ℓ
m	: massa distribuída do edifício
n	: índice
n_d	: número de planos de discretização

$\{q\}$: vetor de esforços axiais das colunas
 \bar{q} : esforços axiais atuantes nas vigas
 q_e, q_d : reações de apoio das vigas (distribuídas)
 $\{q_\ell\}$: carregamento lateral equivalente à ação sísmica
 $\{q_\ell\}^0$: vetor transformado do vetor q_ℓ

r : razão das frequências naturais

s : coordenada ao longo do esqueleto
 $[s]$: matriz de rigidez da unidade estrutural

t : tempo
 t^m : coeficiente de rigidez das vigas
 $[t]$: matriz de rigidezes da unidade estrutural

$\{u\}, \{u\}^m$: vetores das funções dos deslocamentos
 $\{\bar{u}\}, \{u\}^{**}$: vetores transformados do vetor u
 $\{u\}^0$: vetor transformado do vetor u
 u_f : funções das deformações dos painéis
 u_g : deslocamentos da base do painel

$\{v\}$: vetor de deslocamentos vertiviais dos nós
 $\{v_1\}, \{v_2\}$: vetores das funções de cálculo das flexibilidades
 v_p, v_s, v_r : velocidades de propagação das ondas P, S e R

w : ordenada do diagrama de área setorial

x, y, z : sistema arbitrário de coordenadas cartesianas
 x_D, y_D : coordenadas do centro de torção (núcleos)
 x_R, y_R : coordenadas de centro de rigidez da estrutura

3. LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

Δ^s, Δ^I	: deslocamentos relativos das vigas
$[\Omega^2]$: matriz de auto-versores
$\bar{\Omega}_{ij}$: frequências naturais

4. LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

α_i	: coeficientes que determinam as posições dos pontos de inflexão das vigas
$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$: coeficientes de majoração da excentricidade estática
β	: razão de amortecimento
$\bar{\beta}$: coeficiente de cálculo da excentricidade acidental
β_1, β_2	: coeficientes angulares das formas modais
$\{\gamma\}$: vetor de fatores de participação
$\{\bar{\gamma}\}$: relações dos deslocamentos verticais dos nós
$[\delta]$: matriz de flexibilidades
$\{\theta\}$: vetor dos giros dos nós
θ_2	: ângulo entre os sistemas de coordenadas xyz e XYZ
λ	: constante elástica de Lamé
$[\lambda^2]$: matriz de auto-valores
λ_f	: coeficiente de rigidez para os painéis planos
μ	: constante elástica de Lamé

ν : módulo de Poisson

\bar{n} : direção de aplicação do esforço Q_E

π_g : direção de aplicação da aceleração U_g

ρ : densidade do meio

ρ_{ij} : coeficientes de correlação modal

τ : tempo

ϕ : ângulo entre os sistemas $x y z$ e $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$

$\{\phi\}$: vetor de transformação de coordenadas

φ_c : coeficiente da deformação por cortante

$[\psi]$: matriz de auto-versores

ω : soluções das equações transcendentais

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os movimentos sísmicos produzem vibrações nas estruturas dos edifícios, as quais podem causar esforços e deformações consideráveis. De maneira geral, as normas atuais recomendam a análise sísmica das estruturas mediante os chamados métodos estáticos equivalentes ou mediante a análise espectral.

Segundo POLYAKOV, S.V. (1985), seria BIOT, M.A. (1934) o idealizador do método espectral e HOUSNER, G.W. et al (1953) teriam substituído o simulador mecânico de Biot pelo circuito elétrico análogo; posteriormente, em 1958, o método espectral teria sido adotado pelas normas americanas.

As primeiras pesquisas foram elaboradas considerando-se as estruturas como sistemas discretos; assim, por exemplo, BIOT, M.A. (1943) e HOUSNER, G.W. (1959) apresentaram trabalhos nos quais analisaram o comportamento das estruturas durante um sismo, utilizando o conceito de espectro; posteriormente HOUSNER, G.W. e BRADY, A.G. (1963) publicaram um estudo que pretendia definir os períodos de vibração dos edifícios mediante fórmulas simplificadas. Por outro lado, NIELSEN, N.N. (1966) publicou os resultados de um teste de vibração de um edifício.

Um trabalho publicado por RAVARA, A. (1967), apresenta uma formulação matricial apta para a utilização de computadores; ROESSET, J.M. et al (1973), apresentaram uma análise considerando a flexibilidade da fundação e TSAI, N.-C. (1974) formulou a análise modal para estruturas com fundações flexíveis.

A formulação discreta, em geral, acarreta um número grande de operações; conseqüentemente, muitos projetistas simplificaram os modelos estruturais e analisaram suas estruturas mediante painéis planos equivalentes, desprezando-se, por exemplo, os efeitos de torção. Alguns desses projetos foram mal sucedidos e despertaram maior interesse da comunidade científica que retomou o assunto da torção; entre outros autores, KAN, C.L. e CHOPRA, A.K. (1977 a,b, c) publicaram trabalhos nos quais é reavaliado o problema e demonstrada sua importância.

Com o objetivo de diminuir o montante de operações, alguns autores recomendaram a utilização de um número reduzido de modos de vibração, entre outros SALMONTE, A.J. (1982) e CRUZ, E.F. e CHOPRA, A.K. (1986 a,b).

Por causa da grande quantidade de operações inerente aos modelos discretos, foram elaboradas alternativas de análise mediante modelos contínuos; assim, por exemplo TSO, W.K. e CHAN, H.-B. (1971) apresentaram o cálculo de períodos de vibração para paredes associadas por lintéis; HEIDEBRECHT, A.C. e RAINA, R.K. (1971) publicaram a análise de vibrações livres de núcleos estruturais utilizando-se somas de funções harmônicas. Posteriormente, MUKHERJEE, P.R. e COULL, A. (1974) apresentaram a análise de paredes associadas por lintéis considerando-se fundações flexíveis e, DANAY et al (1975) publicaram o cálculo de núcleos estruturais utilizando a técnica das diferenças finitas. A solução espectral de estruturas do tipo paredes associadas por lintéis foi publicada por TSO, W.K. e RUTENBERG, A. (1977), enquanto que a aplicação do método de Ritz-Galerkin à análise das vibrações livres dos núcleos estruturais, era apresentada por MUKHERJEE, P.K. e COULL, A. (1977).

As vibrações livres de estruturas tridimensionais compostas por pórticos e núcleos, contendo um eixo de simetria, foram analisadas por RUTENBERG, A. et al (1977) para o qual foi utilizado o método das perturbações. Outro trabalho que apresenta a análise de vibrações livres de edifícios, mas sem eixos de

simetria, foi publicado por LAIER, J.E. (1978) o qual apresenta a solução mediante séries de potências, Ritz-Galerkin e Stodola-Vianelo. Posteriormente, e continuando a análise de vibrações livres, LAIER, J.E. (1985) publicou o método da colocação e em 1987 o método das perturbações, LAIER, J.E. (1987).

O presente trabalho tem por finalidade a análise sísmica de estruturas de edifícios altos, modelados segundo a técnica do Meio Contínuo. O estudo compreende a análise estática equivalente e a análise espectral.

Para se atingir estes objetivos, são propostas uma modelagem contínua para análise estática e outra para análise dinâmica. Na análise estática a solução é analítica direta, para o caso de estruturas planas; já para estruturas tridimensionais é proposta uma solução iterativa que permite, também, se chegar a soluções analíticas.

Na análise de estruturas planas com colunas inextensíveis utiliza-se a solução espectral. Já, para o caso da estrutura ter colunas extensíveis, faz-se uma discretização baseada na modelagem contínua (ROSMAN, R. 1973) para depois aplicar a solução espectral.

Para a análise dinâmica de estruturas tridimensionais com colunas inextensíveis a solução espectral é direta, enquanto que no caso geral a solução é conduzida por discretização do meio contínuo, para o qual propõe-se uma técnica de Meio Contínuo associada a um processo iterativo.

A técnica do meio contínuo, proposta neste trabalho, constitui uma novidade já que o cálculo de suas constantes de rigidez leva em conta as componentes de flexão e cortante da estrutura, bem como a influência das deformações axiais das colunas, sem para isto elevar a ordem das equações diferenciais e nem aumentar sua quantidade.

Para a análise sísmica de edifícios, é necessário que sejam apresentadas, de início, certas características dos movimentos sísmicos, assim, o Capítulo 2 mostra sua origem

mediante a teoria da tectônica global e seus principais efeitos.

O terceiro capítulo apresenta, brevemente, pontos importantes das normas sísmicas. Na continuação, o quarto capítulo mostra a modelação segundo a técnica do meio contínuo, a análise estática de estruturas de edifícios e apresenta alguns exemplos numéricos.

A aplicação da técnica do meio contínuo à análise dinâmica é o objetivo do quinto capítulo, no qual são apresentados alguns exemplos de aplicação. Finalmente, nos apêndices, são demonstradas as soluções das equações diferenciais utilizadas ao longo do trabalho.

CAPÍTULO 2

OS MOVIMENTOS SÍSMICOS

2.1. INTRODUÇÃO

A terra constitui um corpo em contínua transformação. Os processos que modificam sua estrutura e sua fisionomia, em sua maior parte, atuam tão lentamente que são imperceptíveis durante uma vida humana, mas eles acontecem continuamente e, considerando os milhões de anos do tempo geológico, totalizam grandes efeitos. Assim, por exemplo, forças enormes levantam cadeias montanhosas ao tempo que deformam grandes camadas de rochas, ou então movimentam continentes inteiros. Tais fenômenos deram origem a cadeias montanhosas como os Andes, a Alpina-Himalaia e as Rochosas, assim como deram origem a profundas e alongadas fossas que, invariavelmente, se localizam junto aos continentes (BURK, C. e DRAKE, C.L., 1974).

Estes processos, em geral, envolvem grandes volumes da crosta terrestre cujas movimentações e deformações chegam a envolver grande quantidade de energia, que, ao ser liberada na forma de erupções vulcânicas ou na forma de terremotos, ou mesmo maremotos, pode produzir grandes transformações em questão de dias, horas ou até minutos.

Tanto as erupções vulcânicas quanto os terremotos produzem vibrações que viajam na forma de ondas, podendo ser percebidas a grandes distâncias. Estas vibrações são, em muitos casos, capazes de produzir grandes destruições, como por exemplo, os terremotos mais recentes do Alaska em 1964, Caracas em 1967, Valparaíso em 1985, México em 1986, Armênia em 1988 e Turquia e

California em 1992, caracterizados, também e principalmente, por grandes perdas de vidas humanas e econômicas.

A história mostra que, no que diz respeito aos movimentos sísmicos, são os terremotos tectônicos os que produzem as maiores destruições, razão pela qual apresenta-se na continuação, um breve resumo sobre a origem de tais fenômenos, segundo as teorias mais aceitas atualmente.

2.2. BREVE INTRODUÇÃO À TEORIA DA TECTÔNICA GLOBAL

A teoria da tectônica global tem sua origem na teoria da deriva continental formulada por A. Wegener em 1912. Segundo tal teoria, há 165 milhões de anos todos os continentes estariam juntos formando um só continente chamado PANGEA, o qual teria-se dividido, com o passar do tempo, dando origem aos cinco continentes conhecidos na atualidade. Para Wegener, os fragmentos da crosta terrestre flutuariam sobre os materiais do manto superior por ação dos movimentos da terra; hoje sabe-se que Wegener estava errado ao apontar as causas da movimentação dos continentes, mas que estava certo ao afirmar que eles se movimentam, dando origem à atual teoria da tectônica de placas ou tectônica global.

Segundo esta teoria, a expansão do soalho oceânico produz a movimentação das placas oceânicas e continentais (Fig. 2.1a), provocando, por exemplo, a separação dos continentes americano e africano. Tal fenômeno acontece por causa da existência de uma dorsal meio-atlântica através da qual flue material do manto e do núcleo terrestres.

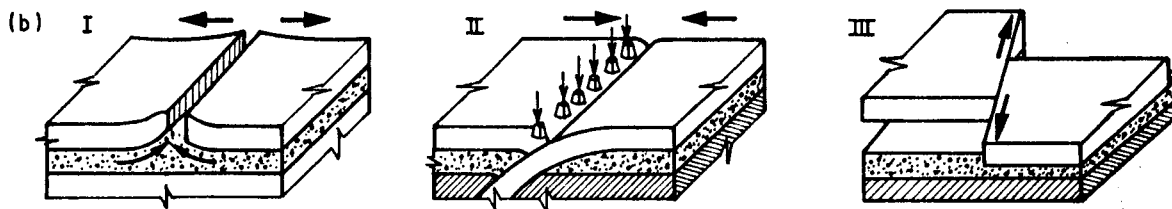
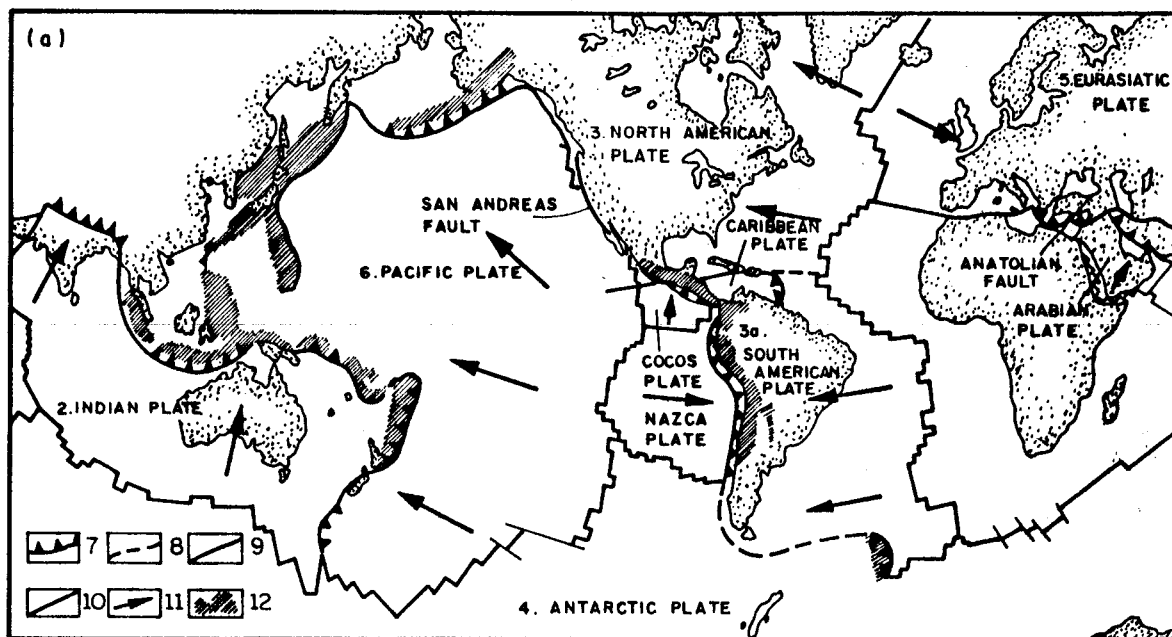


FIG.2.1(a) - Divisão da litosfera em placas: 7- Fossas oceânicas; 8- Contornos estimativos para as placas; 9- Falhas de transformação; 10- Eixos das dorsais; 11- Direção da migração das placas em relação à placa africana; 12- Regiões sísmicas com focos profundos.

(b) - I- Dorsal oceânica; II- Fossa oceânica; III- Falha de transformação.

(POLYAKOV, S.V., 1985)

Tal material vai formando, paulatinamente, o novo fundo oceânico.

A existência de mecanismos geradores de nova litosfera, como são as dorsais oceânicas, pressupõe a existência de mecanismos compensadores; de fato, a litosfera se destrói nas

fossas oceânicas (Fig. 2.1b), onde o material do fundo oceânico afunda por baixo das placas continentais. As fossas oceânicas se estendem paralelamente às bordas dos continentes (Fig. 2.1a) e, devido a grandes forças de atrito, às quais ficam sujeitas as placas, são os lugares onde se localizam os focos dos mais fortes terremotos e os maiores e mais ativos vulcões. Nestes lugares produzem-se, também, grandes dobramentos e grandes fraturas da crosta terrestre. A Figura 2.2 mostra as regiões sujeitas aos mais fortes terremotos. A teoria de tectônica global, aqui apresentada, pode ser encontrada com maiores detalhes em CLARK, S.P. (1971); GORCHKOV, G. e YAKOUCHOVA, A. (1967); MARGALEF, R. (1989) ou WIEGEL, R.L. (1970).

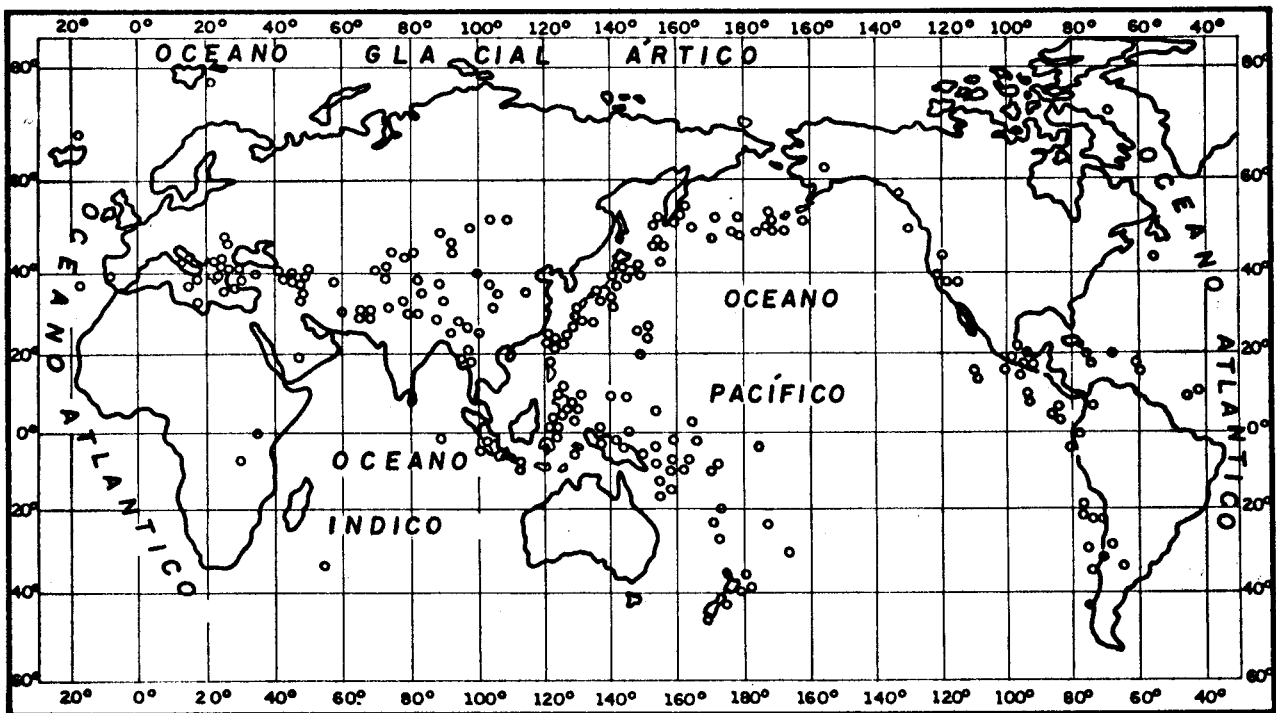


FIG. 2.2 - Localização das zonas de maior sismicidade do mundo.
(GORCHKOV, G. e YAKOUCHOVA, A., 1967)

2.3. AS ONDAS SÍSMICAS

Segundo apontado, os movimentos sísmicos geram ondas sísmicas que viajam na terra produzindo vibrações nos lugares pelos quais passam; estas vibrações são transmitidas às estruturas através de suas fundações.

As principais ondas sísmicas são as compressivas, P, e as cisalhantes, S, porém as ondas S podem ser decompostas em horizontais, SH, e verticais, SV.

As ondas P e S, viajam pelo interior da terra; assim, elas são chamadas de ondas de corpo. Por outro lado, existem também ondas superficiais que são casos especiais das ondas esferoidais e torcionais; estas ondas esferoidais e torcionais são as produzidas durante as vibrações livres da terra.

Existem dois tipos de ondas superficiais que são de especial interesse, a saber, as ondas Rayleigh, ou ondas R, e as ondas Love, ou ondas L. As ondas R são esferoidais e produzem ondulações que são um mistura de ondas P e SV, assim, as partículas descrevem elipses verticais avançando e recuando na direção do raio sísmico; por outro lado, as ondas L são oscilações torcionais, portanto, as partículas se movimentam horizontalmente na direção perpendicular ao raio sísmico, a exemplo das ondas SH (CLARK Jr., S.P., 1971).

As ondas sísmicas viajam na terra com velocidades diferentes, as quais dependem das características dos materiais que são atravessados; as velocidades das ondas de corpo podem ser expressas por (NEWMARK, N.M. e ROSENBLUETH, E., 1971).

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.1)$$

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.2)$$

onde λ e μ são as constantes elásticas de Lamé e ρ é a densidade do meio. Mediante instrumentos adequados é possível determinar a relação aproximada entre estas velocidades, assim, tem-se:

$$\frac{v_p}{v_s} \cong 1,73 \quad (2.3)$$

sendo essa relação um pouco menor, 1,67, para focos superficiais e um pouco maior, 1,78, para focos profundos; isto significa que o módulo de Poisson toma valores entre 0,22 e 0,27.

Por outro lado, tem sido observada uma relação de velocidades, entre as ondas R e as ondas P, que pode ser escrita como (POLYAKOV, S.V., 1985):

$$v_r \cong 0,547 v_p \quad (2.4)$$

para um módulo de Poisson $\nu = 0,22$.

É importante ressaltar, que dificilmente uma estrutura fica submetida a um só tipo de onda sísmica, pois as ondas sofrem uma infinidade de mudanças de trajetória; isto por causa das reflexões e refrações sofridas nas mudanças de meio, seja nos diferentes estratos da terra ou no limite que separa a litosfera da atmosfera. Como consequência destes fenômenos, as estruturas da crosta terrestre ficam, em geral, submetidas a uma complexa combinação de ondas que chegam diretamente e refletidas; entretanto, do ponto de vista da Engenharia Civil, são as ondas R e L as mais importantes.

Na análise de estruturas de edifícios é costumeiro interpretar os movimentos sísmicos como movimentos produzidos nas fundações dos prédios, esta mesma modelação é recomendada pelas normas sísmicas que, em geral, fornecem um espectro de projeto.

2.4. QUANTIFICAÇÃO DOS SISMOS

Existem várias maneiras de quantificar os sismos, mas, na atualidade, a escala do Dr. Charles Richter (1958) é a mais utilizada. Segundo este autor, a magnitude de um sismo pode ser expressa mediante a seguinte fórmula empírica:

$$M_s = \log \bar{A} - \log \bar{A}_0 \quad (2.5)$$

onde \bar{A} é a máxima amplitude verificada durante o sismo em questão e \bar{A}_0 é a amplitude correspondente a um sismo adotado como padrão.

Para relacionar a magnitude com os efeitos provocados por um sismo, apresenta-se a tabela 2.1 que fornece, de maneira aproximada, a longitude da fratura em função da magnitude do sismo (BOLT, B.A. et al, 1975):

M_s (RICHTER)	FRATURA (km)
5,5	5 - 10
6,0	10 - 15
6,5	15 - 30
7,0	30 - 60
7,5	60 - 100
8,0	100 - 200
8,5	200 - 400

TABELA 2.1 - Magnitude de Richter e Tamanho da Fratura

Os sismos mais fortes apresentam magnitudes entre 8 e 9, enquanto que um sismo moderado tem magnitude da ordem de 6 e que é capaz de causar alguns danos estruturais; todavia, o homem é capaz de perceber sismos de magnitude 3,5 para mais. Para entender

melhor o significado destes números, é importante indicar que Charles Richter definiu a magnitude sísmica como: "o logaritmo decimal da máxima amplitude da onda sísmica superficial, captada pelo simógrafo standard Wood-Anderson, a uma distância de 100 km do epicentro".

Para concluir, é importante ressaltar que os sismos são atenuados tanto pela distância, quanto pelos materiais que transmitem as ondas sísmicas. A quantificação do amortecimento pode ser feita para as localidade de interesse, em função de suas características particulares. Maiores detalhes sobre o tema podem ser encontrados em DOWRICK, D.J. (1987).

CAPÍTULO 3

ALGUMAS RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS

3.1. INTRODUÇÃO

As normas sísmicas regulamentam o projeto e a construção dos edifícios, tendo por finalidade, naturalmente, proteger vidas humanas e bens. Por causa das diferenças de magnitude dos sismos, de formação geológica, dos tipos de construção e outros fatores como a filosofia de projeto sísmico, os engenheiros e as firmas de engenharia têm diferentes padrões de cálculo. Algumas das mais conhecidas normas são: Uniform Building Code (UBC), Japanese Building Code (JBC), National Building Code of Canada, Applied Technology Council (ATC-3), Comité Euro-International du Béton (CEB).

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns pontos importantes das normas, os quais são descritos na continuação.

3.2. MÉTODOS DE CÁLCULO

Em geral, as normas aprovam dois métodos de cálculo, a saber, o método dinâmico e o método estático equivalente (CHOPRA, A.K., 1980; CHOPRA, A.K. e CRUZ, E.F., 1986).

O método estático equivalente consiste em aplicar forças estáticas horizontais nos níveis das lajes. Estas forças são calculadas de diferentes maneiras, dependendo da norma, assim, por exemplo, o UBC recomenda o cálculo da força cortante da base mediante a seguinte expressão:

$$V_o = Z I K C S W_o \quad (3.1)$$

onde:

W_0 - carga permanente do edifício mais uma parte da sobrecarga;

Z - coeficiente que depende da zonificação do risco sísmico
 $Z = \{3/16, 3/8, 3/4, 1\}$;

I - coeficiente de importância da obra:

$$I = \begin{cases} 1,50 & \text{para edifícios essenciais, tais como: hospitais,} \\ & \text{bombeiros, etc.} \\ 1,25 & \text{para edifícios de uso importante que abriguem} \\ & \text{mais de 300 pessoas.} \\ 1,00 & \text{para outras edificações.} \end{cases}$$

K - coeficiente que depende do tipo de estrutura:

$$K = \begin{cases} 0,67 & \text{para estruturas dúcteis sem contraventamento.} \\ 1,33 & \text{para estruturas contraventadas.} \end{cases}$$

C - coeficiente dinâmico calculado como:

$$C = \frac{1}{15 \sqrt{T}} \leq 0,12$$

onde T é o período fundamental da estrutura expresso em segundos, o qual pode ser calculado como:

$$T = \frac{0,09 h_n}{\sqrt{D}}$$

onde h_n é a altura, em metros, do edifício e D sua largura.

S - coeficiente que depende do tipo de solo e pode ser calculado como:

$$S = 1,0 + \frac{T}{T_s} - 0,5 \left(\frac{T}{T_s} \right)^2 \quad \text{para } \frac{T}{T_s} \leq 1,0$$

ou

$$S = 1,2 + 0,6 \frac{T}{T_s} - 0,3 \left(\frac{T}{T_s} \right)^2 \quad \text{para } \frac{T}{T_s} > 1,0$$

sendo $1,0 \leq S \leq 1,5$, $T > 0,3$ segundos e T_s o período característico do solo cujo domínio é: $0,5 \leq T_s \leq 2,5$ seg.

Uma parcela da força cortante V_o costuma ser colocada no topo da estrutura como uma força concentrada, a qual pode ser calculada como:

$$F_t = \begin{cases} 0,00 & \text{para } T \leq 0,70 \text{ seg} \\ 0,07 TV_o & 0,70 < T < 3,60 \\ 0,25 V_o & 3,60 \leq T \end{cases} \quad (3.2)$$

Em geral, o método estático equivalente está associado a uma análise torcional do edifício, para o qual as forças são aplicadas com excentricidades que variam de norma para norma. Tais excentricidades podem ser calculadas como:

$$\begin{aligned} e_1 &= \bar{\alpha}_1 e + \bar{\beta} Y \\ e_2 &= \bar{\alpha}_2 e - \bar{\beta} Y \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde e é a excentricidade estática, $\bar{\beta}$ é um coeficiente que define a excentricidade accidental e Y é a largura do edifício medida transversalmente à direção de aplicação das cargas; a tabela 3.1. apresenta os valores recomendados por algumas normas (TSO, W.K. e DEMPSLY, K.M., 1980; CHANDLER, A.M. e HUTCHINSON, G.L., 1988).

NORMA	$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\beta}$
ATC-3 (USA)	1,0	1,0	0,05
Canadá	1,5	0,5	0,10
México	1,5	1,0	0,10
Nova Zelândia	1,0	1,0	0,10
CEB	1,5	1,0	0,05
Venezuela	1,5 a 5,0	1,0	0,10

TAB. 3.1 - Coeficientes das Excentricidades para o Cálculo Estático

Em alguns casos a força cortante da base, V_o , calculada mediante o método dinâmico é menor que aquela calculada pelo método estático equivalente; então, para prevenir estes casos, as normas adotam um critério definindo o valor da força cortante mínima, V_{min} , que deve ser considerada para o projeto. A tabela 3.2 apresenta os critérios adotados por algumas normas, sendo V_o a força cortante da base e W_o a carga permanente mais 25% ou 50% da sobrecarga, dependendo da norma (TSUKURA INTERNATIONAL CENTER, 1984).

NORMA	V_{min}	EXCEÇÃO
Argentina	0,75 V_o	nenhuma
Canadá	1,00 V_o	nenhuma
Chile	0,06 w_o	nenhuma
Cuba	0,60 V_o	nenhuma
Equador	1,00 V_o	análise dinâmica
El Salvador	0,40 V_o	nenhuma
USA (UBC)	1,00 V_o	análise dinâmica

TAB. 3.2 - Força Cortante mínima segundo várias normas

O método dinâmico geralmente recomendado pelas normas é o espectral, o qual tem como base a superposição modal. A utilização deste método leva à combinação das respostas máximas modais, para o qual as normas recomendam critérios de combinação tais como:

- a) Raiz da soma dos quadrados (SRSS), publicado por GOODMAN, L.E. et al (1955), pode ser expresso como:

$$R^2 = \sum_i R_i^2 \quad (3.4)$$

onde R é a resposta em questão e R_i é a resposta máxima correspondente ao modo i .

- b) Combinação quadrática completa (CQC) publicado por WILSON, E.L. et al (1981), pode ser expresso como:

$$R^2 = \sum_i \sum_j R_i \rho_{ij} R_j \quad (3.5)$$

onde

$$\rho_{ij} = \frac{8\beta^2(1+r)r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4\beta^2r(1+r)^2}$$

onde β é a razão de amortecimento e r é a relação das frequências naturais: $r = \omega_j/\omega_i$.

Estas duas regras de combinação são as mais divulgadas, sendo que a primeira (SRSS) tem dado bons resultados na análise de estruturas planas ao tempo que tem-se mostrado deficiente na análise de estruturas tridimensionais; mais detalhes podem ser encontrados em NEWMARK, N.M. e ROSENBLUETH, E. (1971) e em AUGUSTI, G. et al (1984). A segunda regra apresentada, CQC, tem dados bons resultados na análise tanto de estruturas planas quanto tridimensionais, razão pela qual tem sido proposta para formar

parte das normas sísmicas, e está sendo utilizada em conhecidos programas de cálculo computadorizado como SAP90 de autoria de WILSON, E.L. e HABIBULLAH, A. (1988). Análises comparativas das diferentes regras de combinação modal, podem ser encontradas em MAISON, B.F. et al (1983) e em CRUZ, E. (1991). É interessante observar que para o caso da estrutura ter frequências separadas, a regra de combinação completa (CQC) reduz-se à regra de soma dos quadrados (SRSS), conforme mostra DER KIUREGHIAN, A. (1981).

3.3. AMORTECIMENTO

O amortecimento em estruturas de edifícios é pequeno, segundo fora mostrado por HART, G.C. e VASUDEVAN, R. (1975) e posteriormente por CHOPRA, A.K. (1980), o valor do amortecimento é da ordem de 5%. Várias fórmulas empíricas tem sido propostas para o cálculo do coeficiente de amortecimento, a exemplo de JEARY, A.P. (1986) que relaciona a altura do edifício com a razão de amortecimento, ou da norma francesa que limita a razão de amortecimento (β) entre 0,050 e 0,085 e recomenda a seguinte fórmula:

$$\beta = \frac{0,0605}{\sqrt{T}} \quad (3.6)$$

onde T é o período fundamental da estrutura expresso em segundos.

3.4. ESPECTROS

Os espectros são elaborados em função do risco sísmico do local e da filosofia de projeto adotada pelas normas. Portanto, cada norma apresenta espectros ajustados às particulares condições do lugar. A figura 3.1 mostra, a título de exemplo, um espectro da norma do Canadá. Trata-se de um espectro triplo que relaciona as acelerações, as velocidades e os deslocamentos com o período de

vibração; mais detalhes sobre os espectros do projeto podem ser encontrados em WIEGEL, R.L. (1970); MOSTAGHEL, N. e HERNRIED, A.G. (1986) ou TRIFUNAC, M.D. e GUPTA, V.K. (1991).

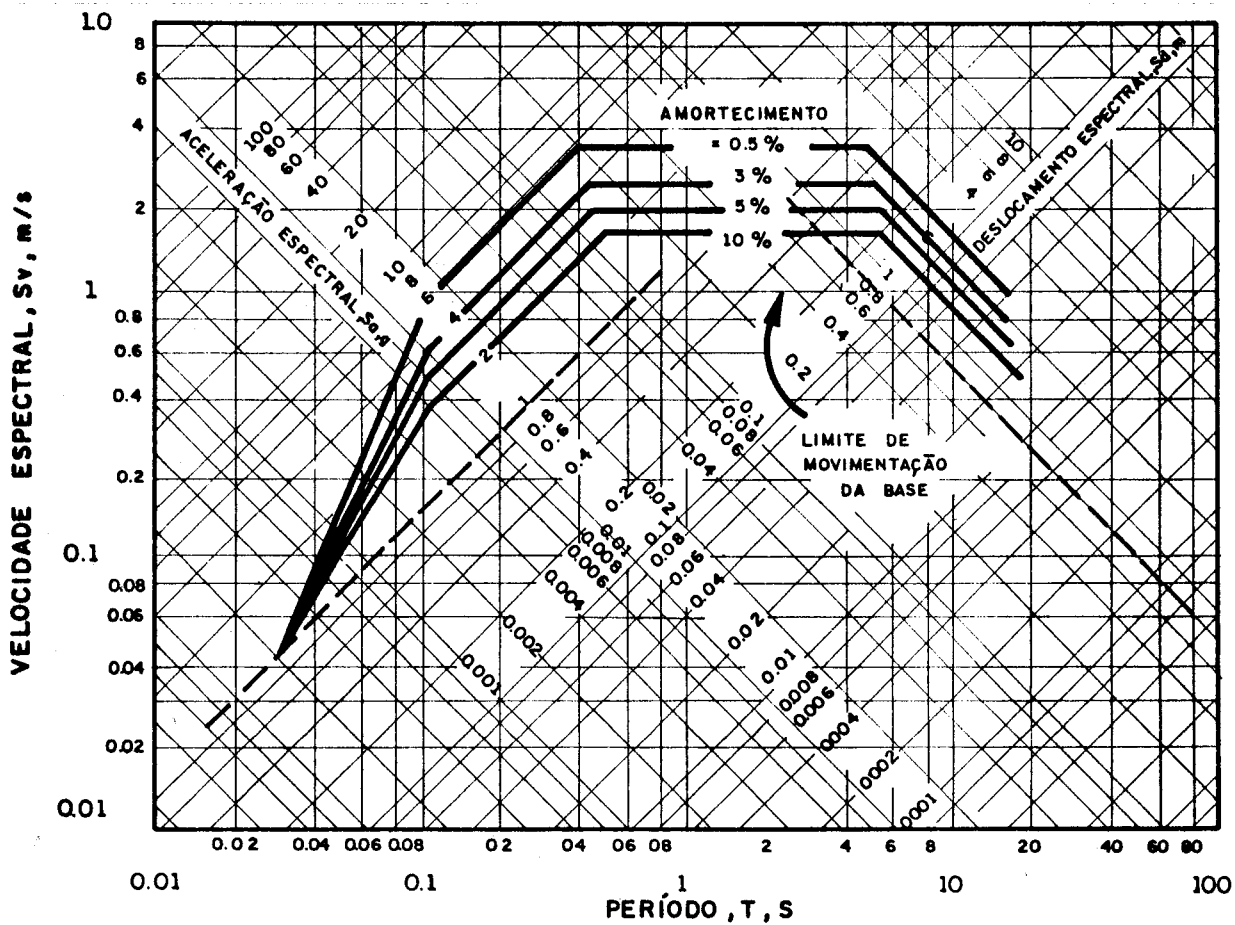


FIG. 3.1 - Espectro de projeto - National Building Code of Canada - 1980

CAPÍTULO 4

ANÁLISE ESTATICA DE EDIFÍCIOS ALTOS

4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se uma variante da técnica do meio contínuo para a análise estática de estruturas de edifícios altos. Na primeira parte do capítulo propõe-se um modelo matemático geral, para estruturas planas, representado por uma equação diferencial linear de terceira ordem. Na segunda parte do capítulo, correspondente à análise de estruturas tridimensionais, propõe-se um modelo matemático geral, representado por um sistema de três equações diferenciais lineares, e sua solução mediante um método iterativo. Na terceira parte do capítulo são apresentados exemplos numéricos que demonstram a eficiência dos modelos, e nos quais foi comprovada a rápida convergência da solução iterativa proposta.

A formulação é desenvolvida para um carregamento lateral, composto por um carga concentrada no topo e cargas distribuídas triangular e uniformemente.

4.2. ESTRUTURAS PLANAS

Apresenta-se a formulação contínua para estruturas planas tais como: paredes estruturais, paredes associadas por lintéis e pórticos planos. Tal formulação relaciona a deformação lateral da estrutura com o esforço cortante aplicado, permitindo-se a solução analítica imediata do problema.

O modelo matemático proposto, leva à formulação de uma

equação diferencial linear de terceira ordem, mesmo quando são consideradas as deformações axiais das colunas. Tal característica representa uma vantagem sobre os modelos existentes, já que nesses as deformações axiais das colunas levam a equações diferenciais de ordem superior ou a um número maior de equações diferenciais.

4.2.1. PAREDES ESTRUTURAIS

A equação diferencial de uma parede estrutural pode ser escrita como:

$$-k_1 u_f''' = Q_f \quad (4.1)$$

onde $k_1 = EI$, sendo E o módulo elástico, I o momento de inércia da seção transversal, u_f''' a terceira derivada da curva elástica de deformação (Fig. 4.1) e Q_f o esforço cortante aplicado à parede.

A força cortante Q_f pode ser expressa, para o carregamento considerado, como:

$$Q_f = P_1 + \frac{H}{2} P_2 + HP_3 - \frac{P_2}{2H} z^2 - P_3 z \quad (4.2)$$

onde P_1 é uma carga concentrada e, P_2 e P_3 são cargas distribuídas aplicadas segundo mostra a figura 4.1.

Nestas condições, a elástica de deformação fica definida pela função:

$$u_f(z) = B_3 z^5 + B_4 z^4 + B_5 z^3 + B_6 z^2$$

onde as constantes são calculadas conforme mostra-se no apêndice A.

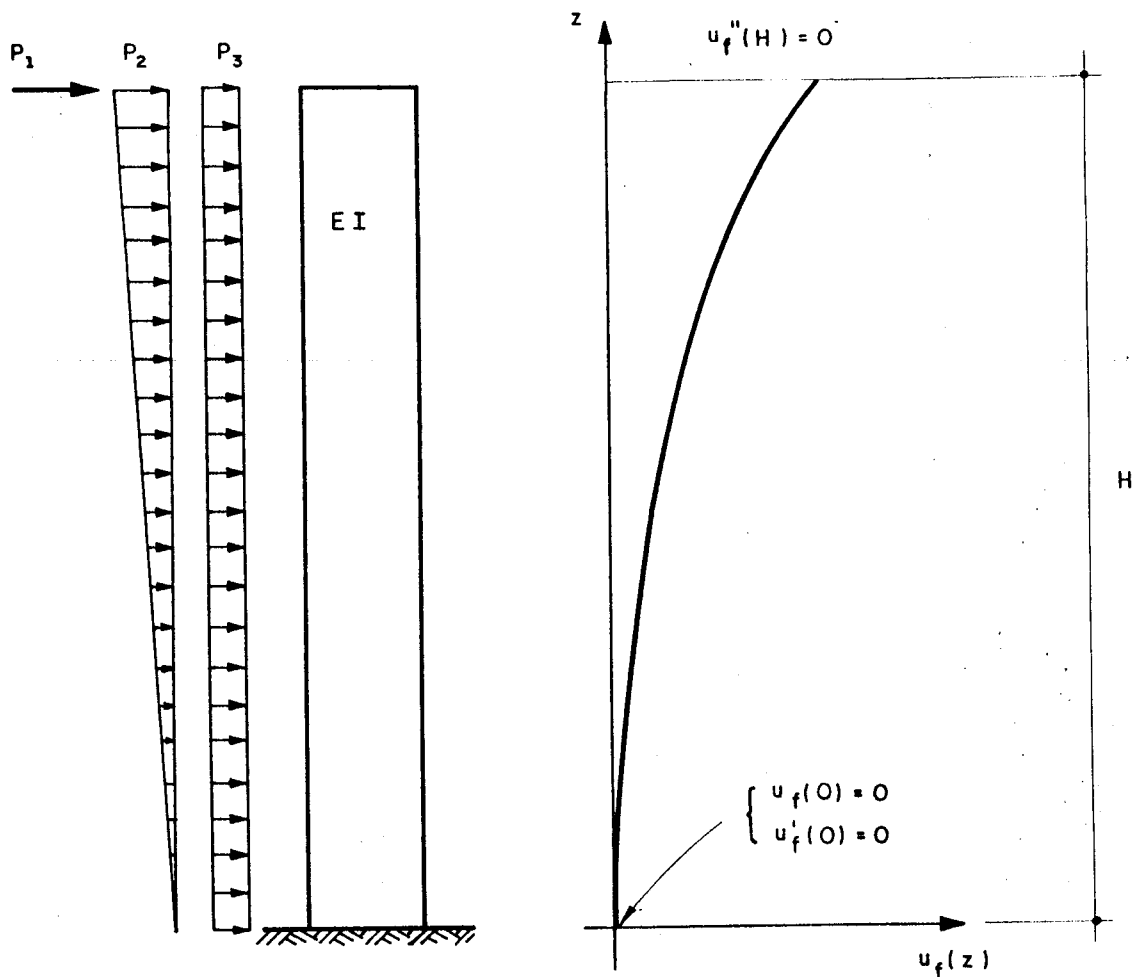


FIG. 4.1 - Parede estrutural e diagrama geral de deformação

4.2.2. PAREDES CONTRAVENTADAS POR LINTÉIS

Considere-se uma estrutura composta por duas paredes semelhantes contraventadas por lintéis, conforme mostra a figura 4.2, e considere-se também o diagrama de corpo livre correspondente a uma viga qualquer, de acordo com a figura 4.3, então, distribuindo as forças V_E e V_D das vigas na altura h que separa os lintéis, é possível escrever a equação de equilíbrio para esforços cortantes como sendo:

$$-k_1 u_f'''' + \lambda_f^2 k_1 u_f' = Q_f + k_3 \int_0^z \int_z^H Q_f dz dz \quad (4.3)$$

onde Q_f é o esforço cortante aplicado à estrutura, o termo integral do segundo membro corresponde à contribuição das deformações axiais das colunas na rigidez do conjunto, e:

$$k_1 = EI_t$$

$$k_2 = k_1 \frac{12J}{\ell^3 h} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{c^2}{I_t} \right)$$

$$k_3 = \frac{12J}{\ell^3 h} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)$$

(4.4)

$$I_t = I_1 + I_2$$

$$\lambda_f^2 = \frac{k_2}{k_1}$$

esta equação pode ser obtida a partir da formulação apresentada por ALBIGES, MM. M. e GOULET, J. (1960) ou BECK, H. (1962).

A função de deslocamentos laterais da estrutura, pode ser escrita como:

$$u_f(z) = B_1 e^{\lambda_f z} + B_2 e^{-\lambda_f z} + B_3 z^5 + B_4 z^4 + B_5 z^3 + B_6 z^2 + B_7 z + B_8$$

cujas constantes são calculadas conforme mostra-se no apêndice A.

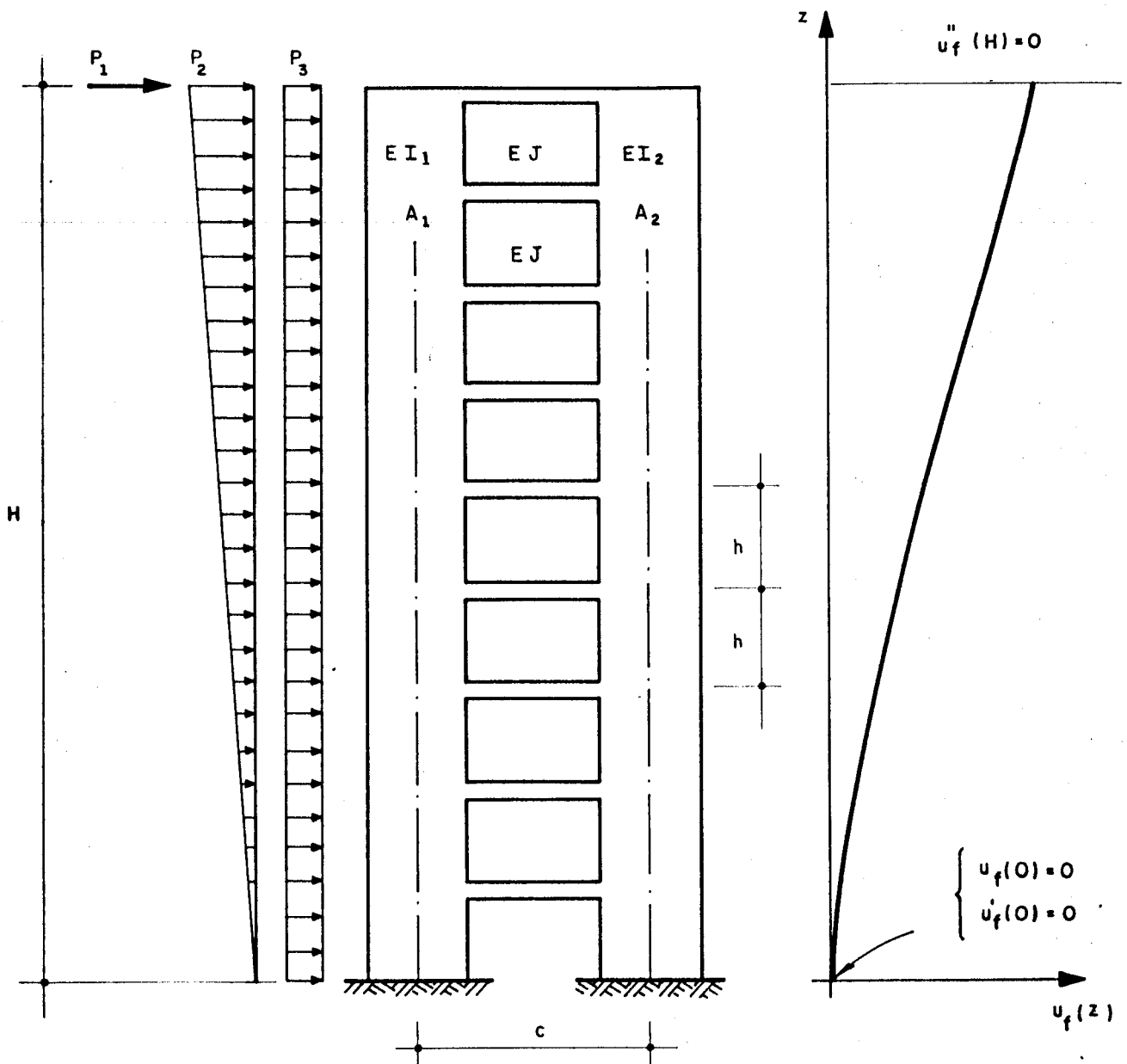


FIG. 4.2 - Paredes contraventadas por lintéis e diagrama geral de deformação

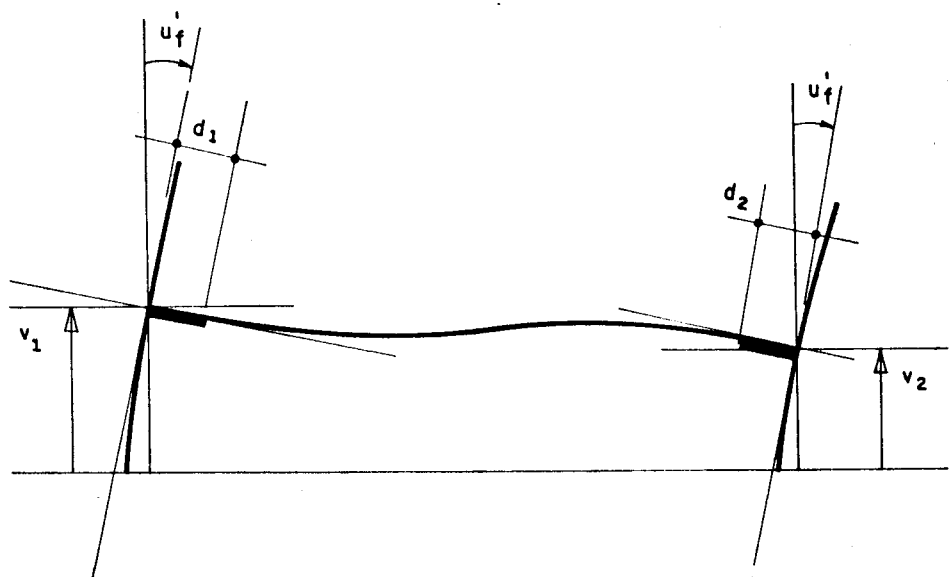
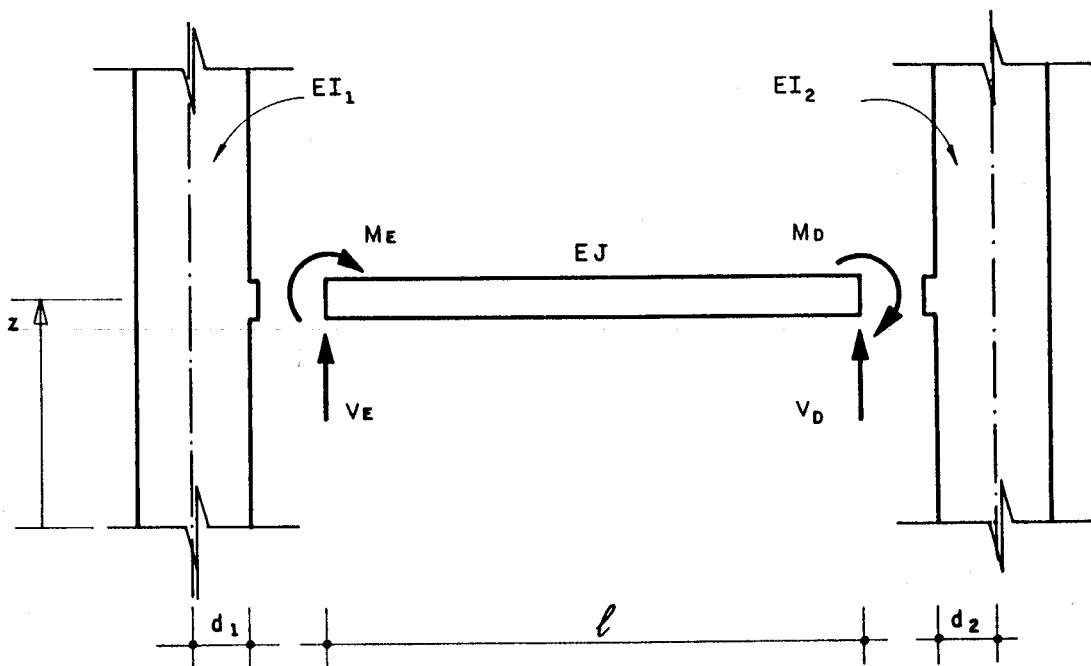


FIG. 4.3 - a) Diagrama de corpo livre de um lintel
 b) Esquema geral de deformação

4.2.3. PÓRTICOS PLANOS

Considere-se um pórtico genérico, segundo mostra a figura 4.4, e considere-se também uma viga qualquer desse mesmo

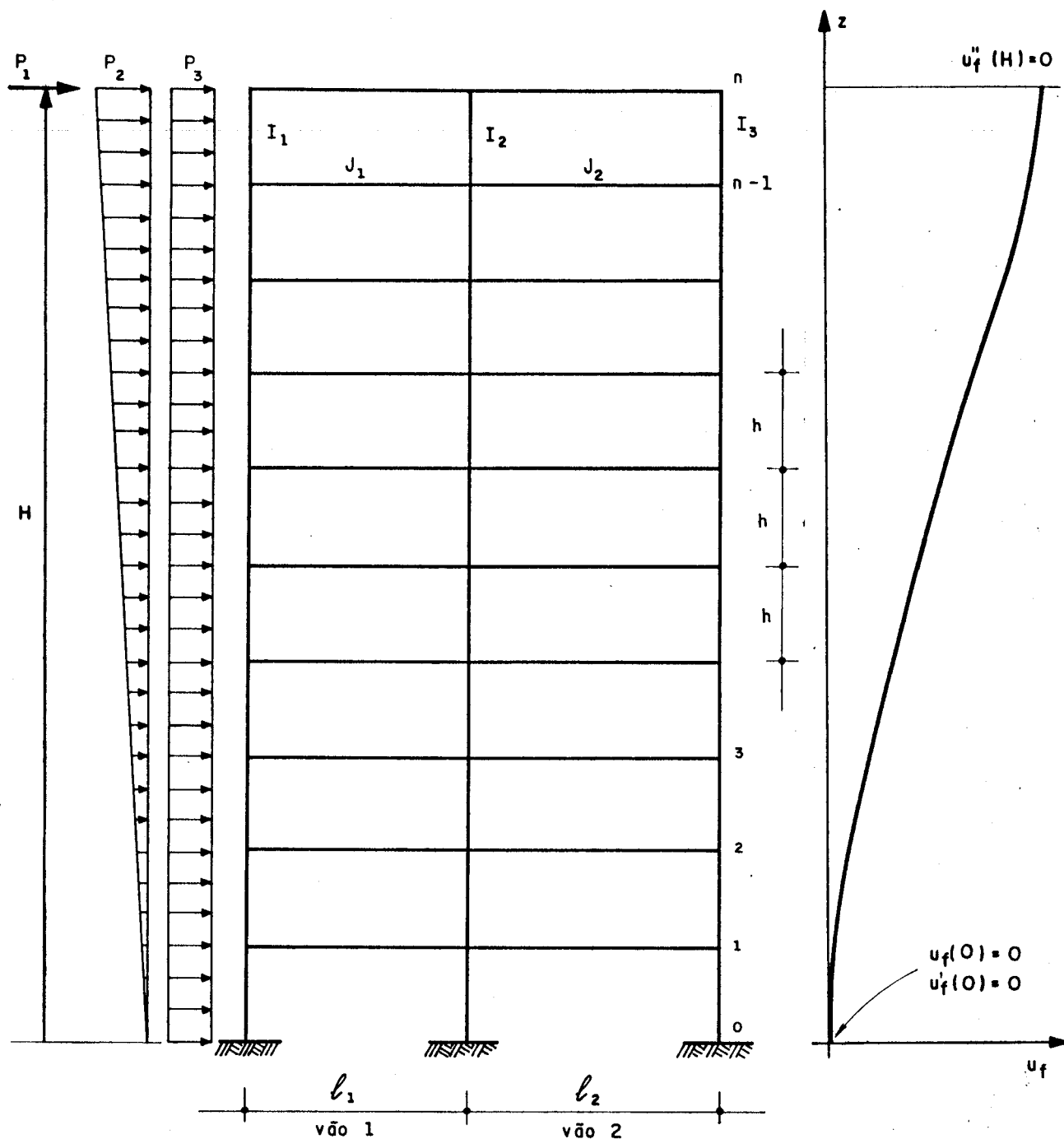


FIG. 4.4 - Pórtico plano e diagrama geral de deformação

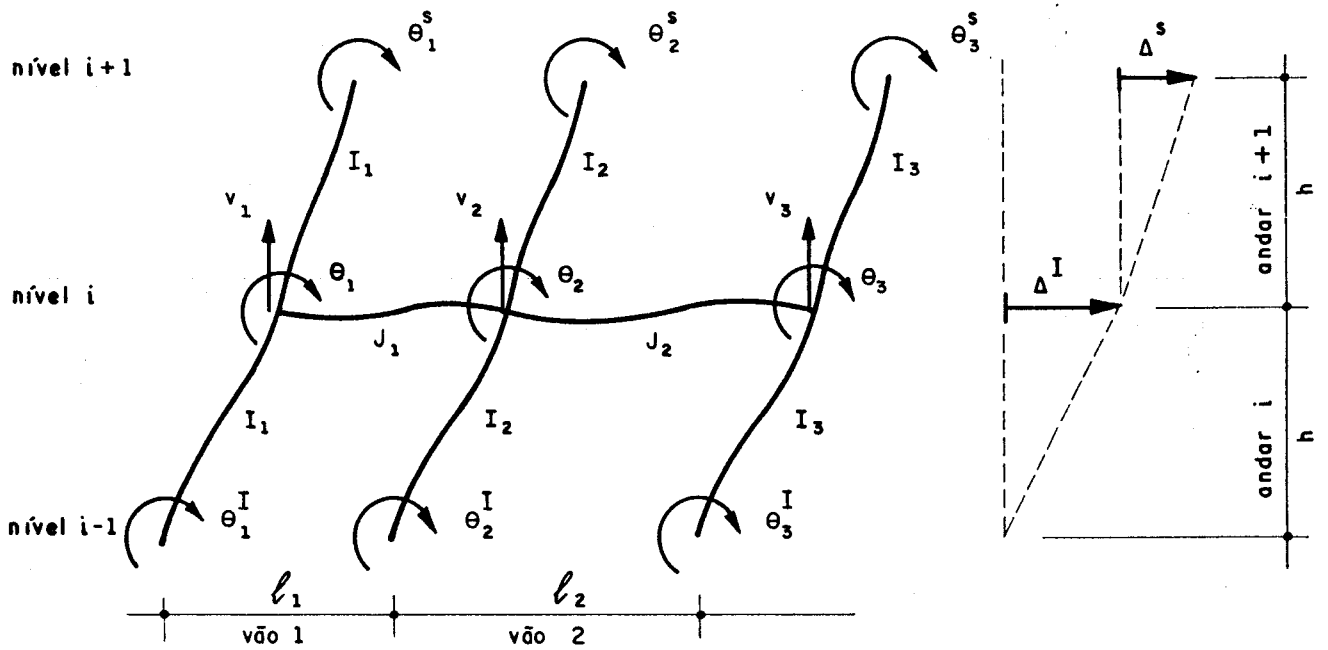


FIG. 4.5 - Esquema geral de deformações e deslocamentos do nível i

pórtico, conforme se apresenta na figura 4.5, para um estado geral de deformação. Com a finalidade de expressar a deformação lateral do pórtico, segundo a técnica do meio contínuo, apresentam-se duas simplificações, a primeira é que o giro θ de uma coluna qualquer num nível intermediário qualquer (figuras 4.4 e 4.5), seja igual ao valor médio dos giros imediatos superior e inferior θ^S e θ^I , respectivamente e na mesma coluna, assim o giro θ da coluna i , fica expresso por:

$$\theta_i = \frac{\theta_i^S + \theta_i^I}{2} \quad (4.5)$$

Por outro lado, a segunda simplificação é que a deformação lateral do pórtico possa ser representada mediante uma curva contínua $u_f(z)$, de tal maneira, que sua derivada $u_f'(z)$ possa

ser expressa, aproximadamente, por (figuras 4.4 e 4.5):

$$u'_f(z) = \frac{\Delta^S + \Delta^I}{2h} \quad (4.6)$$

onde Δ^S e Δ^I são os deslocamentos relativos das vigas, na direção horizontal.

Com estas simplificações, é possível montar um sistema de equações que relacione os giros dos nós $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$, as deformações axiais v_1, v_2, v_3, \dots , e a função u'_f , todos para o mesmo nível i e, na ordem e nos sentidos mostrados na figura 4.5, tal sistema fica:

$$\begin{cases} [I_j]\{\theta\} - [J_j]\{v\} = \{I_u\} u'_f \\ -[J_t]\{\theta\} - [J_v]\{v\} + \frac{1}{h} [A_e]\{v\} = \{0\} \end{cases} \quad (4.7)$$

onde a primeira equação representa o equilíbrio de momentos dos nós para uma viga e a segunda representa o equilíbrio de esforços axiais das colunas para um andar. As matrizes são preenchidas com as inércias das vigas e das colunas como se mostra na continuação:

Definindo-se o vetor de rigidezes para colunas como:

$$\{I_e\}^T = \{I_1, I_2, I_3\}E \quad (4.8)$$

onde o superíndice r indica transposição.

Definindo-se o vetor de rigidezes para vigas como:

$$\{J_e\}^T = \{J_1, J_2\}E \quad (4.9)$$

para o equilíbrio de momentos, definem-se as seguintes matrizes:

$$[I_j] = \begin{bmatrix} 3k^{c1} + k_e^{m1} & & a^{m1} \\ & a^{m1} & 3k^{c2} + k_d^{m1} + k_e^{m2} & a^{m2} \\ & & & 3k^{c3} + k_d^{m2} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$[J_j] = \begin{bmatrix} b_e^{m1} & & -b_e^{m1} \\ b_d^{m1} & -b_d^{m1} + b_e^{m2} & -b_e^{m2} \\ & b_d^{m2} & -b_d^{m2} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\{I_u\} = \frac{12}{h} \{I_e\} \quad (4.12)$$

para a segunda das equações 4.7, tem-se:

$$[J_t] = [J_j]^T \quad (4.13)$$

$$[J_v] = \begin{bmatrix} -t^{m1} & & t^{m1} \\ t^{m1} & -t^{m1} - t^{m2} & t^{m2} \\ & t^{m2} & -t^{m2} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$[A_e] = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{bmatrix} E \quad (4.15)$$

onde E é o módulo elástico, $k^{ci} = \frac{4}{h}EI_i$ são as constantes de rigidez das colunas, $a^{mi} = 2 \frac{EJ_i}{\ell_i}$ são as constantes de rigidez das vigas e $k_e^{mi} = k_d^{mi} = 2a^{mi}$, $b_e^{mi} = b_d^{mi} = 3a^{mi}/\ell_i$, $t^{mi} = 2b_e^{mi}/\ell_i$, finalmente, A_i são as áreas das seções transversais das colunas.

A partir da primeira das equações de equilíbrio, escreve-se:

$$\{\theta\} = \{R\} u'_f + [B_v]\{v\} \quad (4.16)$$

onde

$$\{R\} = [I_j]^{-1} \{I_u\} \quad (4.17)$$

$$[B_v] = [I_j]^{-1} [J_j]$$

e substituindo na segunda equação de equilíbrio, obtem-se:

$$\{v\} = \left[[B_t] + \frac{1}{h} [A_e] \right]^{-1} \{R_b\} u'_f \quad (4.18)$$

onde

$$[B_t] = -[J_t] [B_v] - [J_v]$$

e

$$\{R_b\} = [J_t] \{R\} \quad (4.19)$$

As reações nos extremos das vigas podem ser expressas como (figura 4.6):

$$V_E = -b_e^m \theta_e - b_d^m \theta_d + t^m v_e - t^m v_d$$

e

$$V_D = b_e^m \theta_e + b_d^m \theta_d - t^m v_e + t^m v_d$$

(4.20)

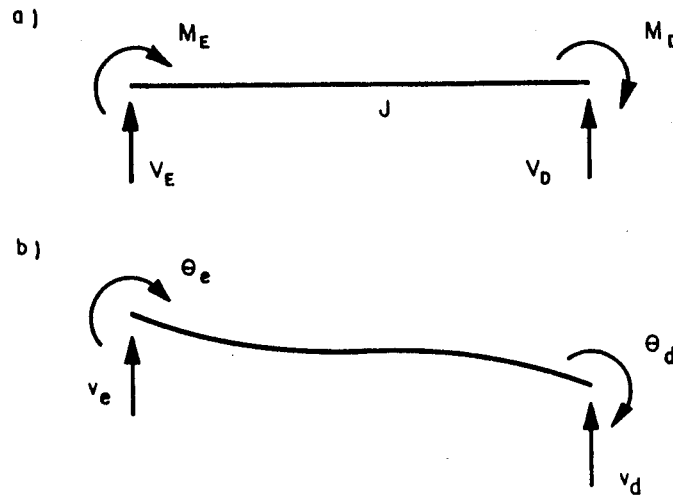


FIG. 4.6 - Equilíbrio das vigas: a) Reações de apoio, b) Diagrama geral de deformação

para transformar estas reações em ações, de acordo com a técnica contínua, definem-se:

$$q_e = -\frac{V_E}{h}$$

e

$$q_d = -\frac{V_D}{h}$$

(4.21)

e, sabendo-se que a uma mesma coluna podem chegar duas vigas, figura 4.7, e atribuindo uma variável q_i para cada coluna, tem-se:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= q_{e1} \\
 q_2 &= q_{d1} + q_{e2} \\
 q_3 &= q_{d2}
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

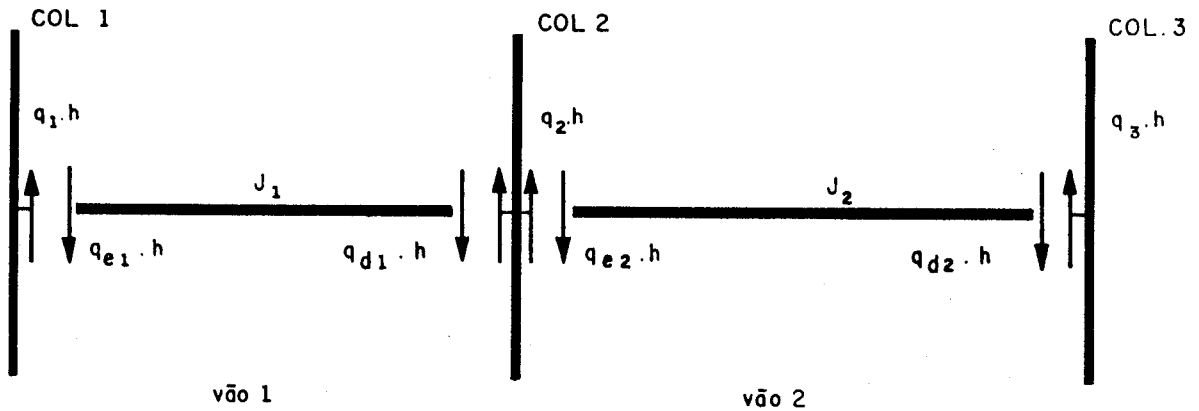


FIG. 4.7 - Esforços cortantes das vigas

finalmente, utilizando as equações 4.20, 4.21 e 4.22, é possível obter uma equação matricial para $\{q\}^T = \{q_1, q_2, q_3\}$ tal que:

$$\{q\} = \frac{1}{h} [J_t] \{\theta\} + \frac{1}{h} [J_v] \{v\}
 \tag{4.23}$$

e substituindo a equação 4.16 na equação 4.23, resulta:

$$\{q\} = \frac{1}{h} \{R_b\} u'_f - \frac{1}{h} [B_t] \{v\}
 \tag{4.24}$$

onde $\{R_b\}$ e $[B_t]$ ficam expressos pelas equações 4.19.

A partir dos esforços q_i é possível obter os esforços axiais das colunas, para o qual escreve-se (Figura 4.8):

$$N_i = \int_z^H q_i dz \quad (4.25)$$

e as deformações axiais das colunas, representadas mediante o vetor v , podem ser obtidas a partir da equação:

$$[A_e] \{v\} = \int_0^z \{N\} dz \quad (4.26)$$

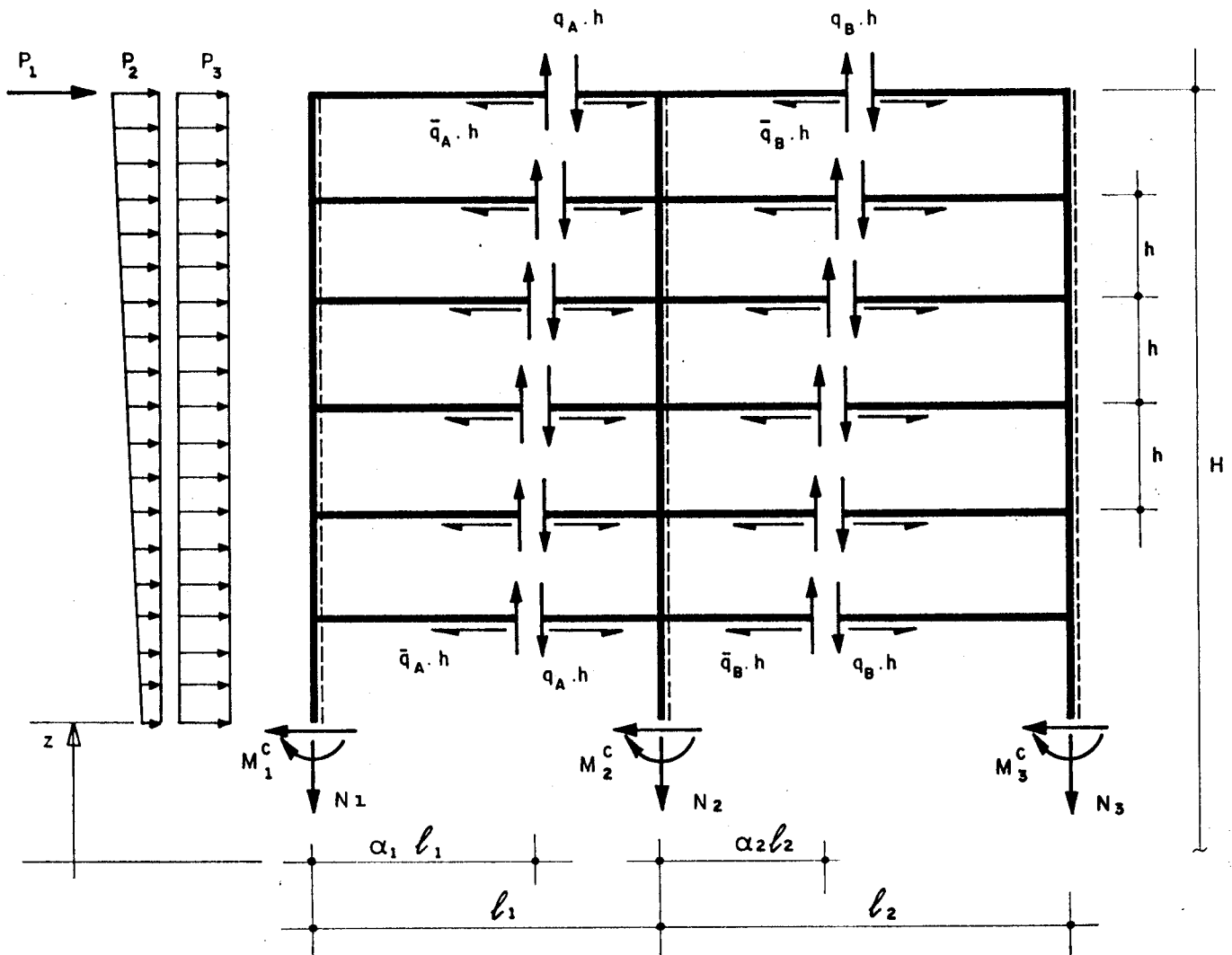


FIG.4.8 - Diagrama de corpo livre para o pórtico cortado no nível z

Analisando-se o equilíbrio global de momento do pórtico (figura 4.8), cortam-se as vigas nos seus pontos de inflexão e com isto chega-se às equações dos momentos fletores, M_1^c , correspondentes às colunas:

$$M_1^c = M_f + \int_z^H q_A \alpha_1 \ell_1 dz + \int_z^H \bar{q}_A z dz$$

$$M_2^c = \int_z^H q_A (1-\alpha_1) \ell_1 dz + \int_z^H q_B \alpha_2 \ell_2 dz + \int_z^H (\bar{q}_B - \bar{q}_A) z dz$$

$$M_3^c = \int_z^H q_B (1-\alpha_2) \ell_2 dz - \int_z^H \bar{q}_B z dz \quad (4.27)$$

onde M_f , que é o momento externo aplicado pelas forças P_1 , P_2 e P_3 mostradas na figura 4.8, pode ser expresso como:

$$M_f(z) = -HP_1 - \left(\frac{P_2}{3} + \frac{P_3}{2} \right) H^2 + \left(P_1 + \left(\frac{P_2}{2} + P_3 \right) H \right) z + \\ - \frac{P_3}{2} z^2 - \frac{P_2}{6H} z^3 \quad (4.28)$$

Chamando de $\bar{M}(z)$ à soma de momentos fletores das colunas, tem-se:

$$\bar{M} = M_f + \{\ell\}^T \int_z^H \{q\}_R dz \quad (4.29)$$

onde

$$\{\ell\}^T = \{\ell_1, \ell_2\} \quad (4.30)$$

e

$$\{q\}_R^T = \{q_A, q_B\} \quad (4.31)$$

Definindo uma matriz C_c , tal que permita fazer a transformação dos esforços cortantes das vigas em esforços normais das colunas, escreve-se:

$$\{q\}_R = [C_c] \{q\} \quad (4.32)$$

onde

$$[C_c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

com esta relação é possível escrever a soma de momentos fletores das colunas em função dos esforços normais correspondentes:

$$\bar{M} = M_f + \{\ell\}^T [C_c] \{N\} \quad (4.34)$$

Em razão do primeiro teorema de Mohr, os momentos fletores das colunas podem ser escritos em função das respectivas curvaturas, o qual pode ser expresso como:

$$\bar{M} = -\{I_e\}^T \{\theta'\} \quad (4.35)$$

onde podem ser substituídas as derivadas dos giros, chegando-se a:

$$\bar{M} = -k_1 u_f'' - \{c\}^T \{v'\} \quad (4.36)$$

onde

$$k_1 = \{I_e\}^T \{R\} \quad (4.37)$$

$$\{c\}^T = \{I_e\}^T [B_v]$$

Eliminando \bar{M} das equações 4.34 e 4.36, resulta:

$$M_f = -k_1 u_f'' - \{c\}^T \{v'\} - \{\ell\}^T [C_c] \{N\} \quad (4.38)$$

cuja integral pode ser redigida como:

$$\{\bar{\ell}\}^T [A_e] \{v\} = -k_1 u_f' - \int_0^z M_f dz \quad (4.39)$$

onde

$$\{\bar{\ell}\}^T = \{\ell\}^T [C_c] + \{c\}^T [A_e]^{-1} \quad (4.40)$$

Por outro lado, a derivada da equação 4.38, pode ser escrita como:

$$-k_1 u_f''' = Q_f + \{\bar{\ell}\}^T \{N'\} \quad (4.41)$$

substituindo nesta equação a equação 4.24, e definindo uma constante k_2 como:

$$k_2 = \frac{1}{h} \{\bar{\ell}\}^T \{R_b\} \quad (4.42)$$

obtém-se:

$$-k_1 u_f''' + k_2 u_f' = Q_f + \frac{1}{h} \{\bar{\ell}\}^T [B_t] \{v\} \quad (4.43)$$

que é a equação diferencial do pórtico. Observe-se que nesta

equação diferencial estão participando a deformação lateral do pórtico, mediante suas derivadas, e as deformações axiais, v_1 , das colunas; observe-se também, da equação 4.39, que a combinação linear das deformações axiais das colunas é proporcional à u'_f e à integral do momento, sendo assim, o último termo da direita da equação 4.43, que representa uma outra combinação linear, deverá ser também proporcional à u'_f e à mesma integral do momento. Seja $f(z)$ uma função tal que:

$$\frac{\frac{1}{h} \{\bar{\mathcal{L}}\}^T [B_t] \{v\}}{\{\bar{\mathcal{L}}\}^T [A_e] \{v\}} = \frac{f(z)}{(-k_1 u'_f - \int_0^z M_f dz)}$$

onde foi utilizada a equação 4.39, e donde resulta:

$$f(z) = \frac{\{\bar{\mathcal{L}}\}^T [B_t] \{v\}}{h \{\bar{\mathcal{L}}\}^T [A_e] \{v\}} (-k_1 u'_f - \int_0^z M_f dz) \quad (4.44)$$

Neste ponto se faz necessária uma última simplificação. Assim, supondo-se que exista a mesma relação entre as deformações das colunas, em toda a altura do edifício, isto é:

$$v_1(z) = \bar{y}_1 v_1(z) \quad (4.45)$$

a equação 4.44 fica:

$$f(z) = -k_1 k_3 u'_f - k_3 \int_0^z M_f dz \quad (4.46)$$

onde

$$k_3 = \frac{\{\bar{x}\}^T [B_t] \{\bar{y}\}}{h\{\bar{x}\}^T [A_e] \{\bar{y}\}} \quad (4.47)$$

e onde as constantes $\bar{y}_i = v_i/v_1$ podem ser calculadas a partir da equação 4.18, fazendo $u'_f = 1$ e sabendo-se que ela representa a contribuição das deformações axiais de um andar isolado. Finalmente, utilizando-se as equações 4.43 e 4.46, chega-se à equação diferencial do pórtico:

$$-k_1 u''_f + \lambda_f^2 k_1 u'_f = Q_f + k_3 \int_0^z \int_z^H Q_f dz dz \quad (4.48)$$

onde

$$\lambda_f^2 = k_3 + \frac{k_2}{k_1} \quad (4.49)$$

e cuja solução é:

$$u_f(z) = B_1 e^{\lambda_f z} + B_2 e^{-\lambda_f z} + B_3 z^5 + B_4 z^4 + B_5 z^3 + B_6 z^2 + B_7 z + B_8$$

onde as constantes ficam definidas conforme mostra a apêndice A.

Para completar a formulação, observe-se que utilizando as equações 4.24, 4.25 e 4.26, obtém-se

$$\{N''\} - \frac{1}{h} [B_t][A_e]^{-1} \{N\} = -\frac{1}{h} \{R_b\} u''_f \quad (4.50)$$

equação que define os esforços axiais correspondentes às colunas e cuja solução apresenta-se no apêndice B.

O caso de estruturas planas compostas por várias paredes associadas por lintéis, conforme mostra a figura 4.9, pode ser

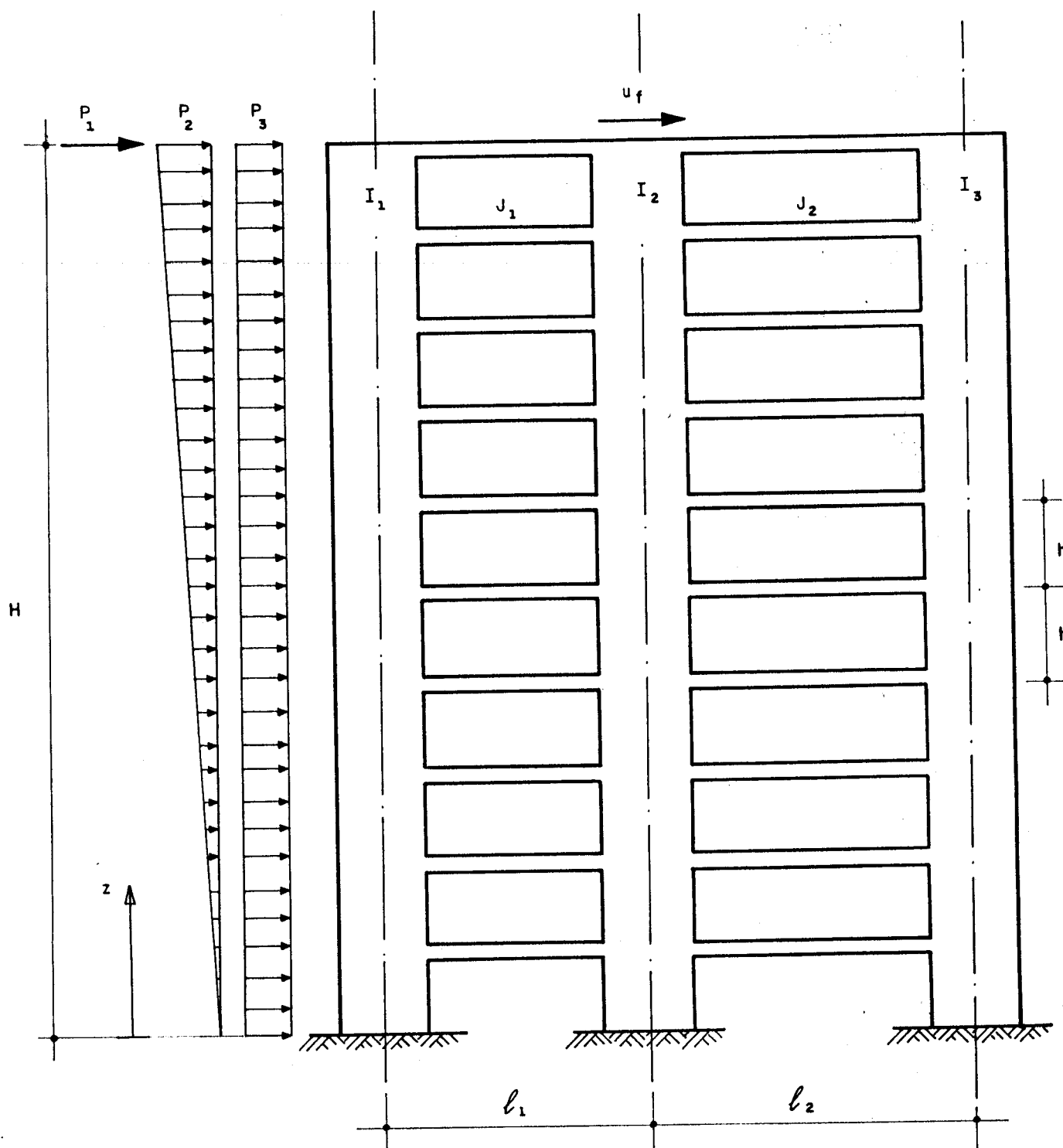


FIG. 4.9 - Pórtico plano com pilares-parede

considerado como um caso particular da análise de pórticos, para cuja análise faz-se necessária a determinação das características de rigidez das vigas, assim, levando em conta a figura 4.10, é possível mostrar a matriz de rigidez da viga, K , tal que:

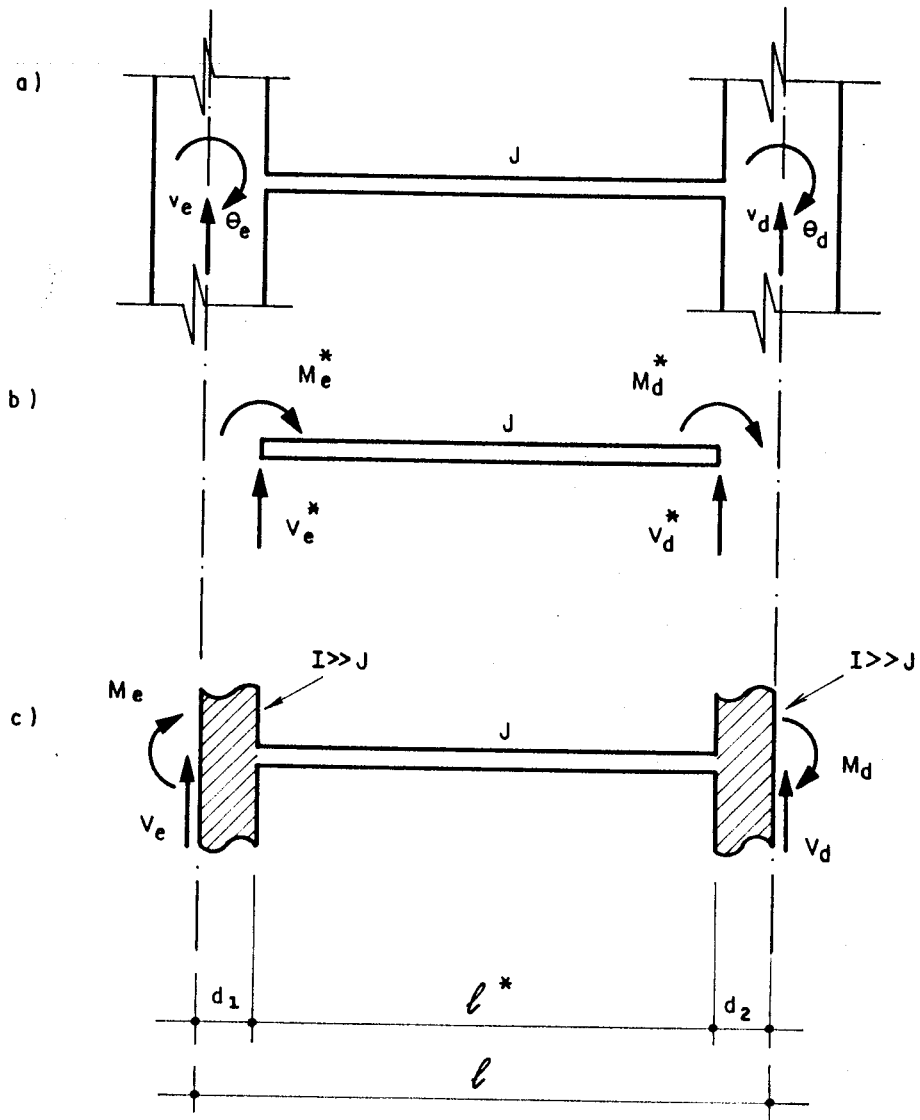


FIG. 4.10 - a) Diagrama da viga, b) Corpo livre da viga, c) Corpo livre da viga, considerando as excentricidades devidas às paredes.

$$\{M^*\} = [K] \{\theta^*\} \quad (4.51)$$

onde

$$\{M^*\}^T = \{M_e^* , M_d^* , V_e^* , V_d^*\}$$

$$\{\theta^*\}^T = \{\theta_e^* , \theta_d^* , v_e^* , v_d^*\}$$

e, para barras de seção constante,

$$[K] = \begin{bmatrix} k & a & -b & b \\ a & k & -b & b \\ -b & -b & t & -t \\ b & b & -t & t \end{bmatrix}$$

onde

$$a = 2 \frac{EJ}{\ell^*}$$

$$k = 2a$$

$$b = \frac{3a}{\ell^*}$$

$$t = \frac{2b}{\ell^*}$$

Continuando, para montar a matriz de rigidez de viga nas coordenadas globais, mostradas na figura 4.10a, utiliza-se a matriz de transformação R_ℓ , tal que

$$[K_m] = [R_\ell]^T [K] [R_\ell] \quad (4.52)$$

de maneira que a equação de equilíbrio fica:

$$\{M\} = [K_m] \{\theta\} \quad (4.53)$$

sendo:

$$[R_\ell] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ -d_1 & & 1 & \\ & d_2 & & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[K_m] = \begin{bmatrix} k_e^m & a^m & -b_e^m & b_e^m \\ a^m & k_d^m & -b_d^m & b_d^m \\ -b_e^m & -b_d^m & t^m & -t^m \\ b_e^m & b_d^m & -t^m & t^m \end{bmatrix}$$

onde

$$k_e^m = \frac{a}{\ell^{*2}} 2(\ell^{*2} + 3d_1(\ell^* + d_1))$$

$$k_d^m = \frac{a}{\ell^{*2}} 2(\ell^{*2} + 3d_2(\ell^* + d_2))$$

$$a^m = \frac{a}{\ell^{*2}} (\ell^{*2} + 3\ell^*(d_1 + d_2) + 6d_1d_2)$$

$$b_e^m = \frac{k_e^m + a^m}{\ell}$$

$$b_d^m = \frac{k_d^m + a^m}{\ell}$$

$$t^m = \frac{b_e^m + b_d^m}{\ell}$$

$$a = 2 \frac{EJ}{\ell^3}$$

Por outro lado, as rigidezes das colunas ficam:

$$k^{ci} = 4 \frac{EI_i}{h} \frac{1 + \varphi_c}{1 + 4\varphi_c}$$

onde

$$\varphi_c = \frac{3EI_i}{GA_i h^2} f$$

sendo f o fator de forma da seção e φ_c a parcela correspondente à deformação por esforço cortante.

Com estas mudanças, no cálculo das constantes de rigidez, é possível analisar este tipo de estruturas com a mesma formulação apresentada para o caso de pórticos planos.

4.2.4. MARCHA DO CÁLCULO

No desenvolvimento deste capítulo foram apresentados três tipos de estruturas planas, a saber:

- a) paredes estruturais
- b) paredes contraventadas por lintéis
- c) pórticos planos

e apresentou-se, também, o modelo matemático geral, o qual pode ser escrito como:

$$-k_1 u_f''(z) + \lambda_f^2 k_1 u_f'(z) = Q_f(z) + k_3 \int_0^z \int_z^H Q_f(z) dz^2$$

assim, a marcha de cálculo será:

- a) Determinar a função de cortante (figura 4.11)

$$Q_f(z) = P_1 + P_2 \frac{H}{2} + P_3 H - P_2 \frac{z^2}{2H} - P_3 z$$

onde

- P_1 : carga concentrada no topo
- P_2 : carga distribuída triangular
- P_3 : carga uniformemente distribuída

e determinar sua integral.

- b) Calcular as constantes k_1 , k_3 e λ_f da estrutura, para a qual é necessário identificar seu tipo e aplicar a formulação conforme o caso. Como um caso particular, o de paredes estruturais, faz-se $k_3 = \lambda_f = 0$ por não existir contribuição na primeira derivada nem deformações axiais conseqüentes da deformação lateral.

Resumindo, as constantes serão calculadas da seguinte maneira:

Caso a

$$k_1 = EI$$

$$k_3 = 0$$

$$\lambda_f = 0$$

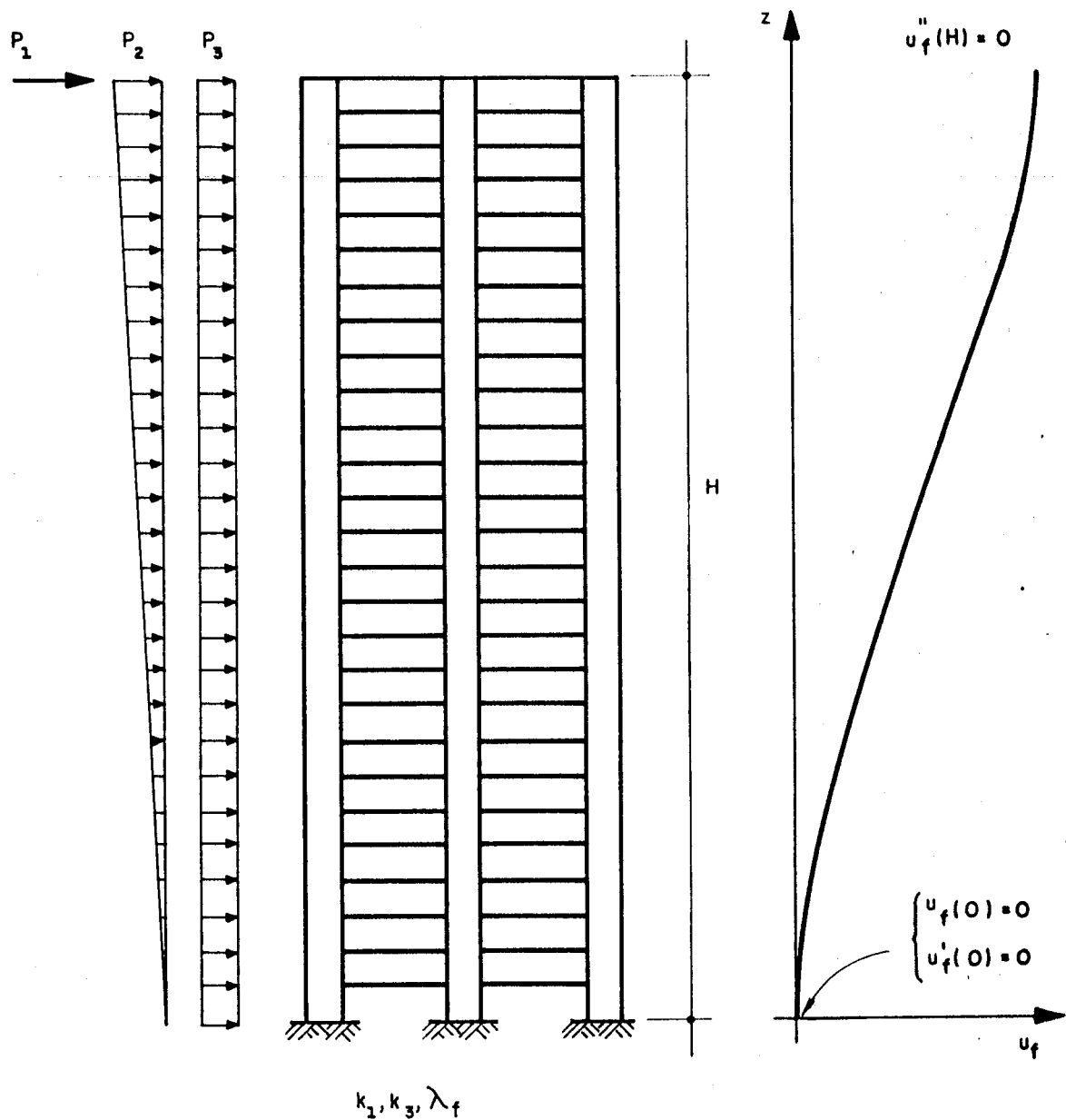


FIG. 4.11 - Estrutura plana (contínua) e seu diagrama geral de deformação lateral

Caso b

$$k_1 = EI_t$$

$$k_2 = k_1 \frac{12J}{\ell^3 h} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{c^2}{I_t} \right)$$

$$k_3 = \frac{12J}{\ell^3 h} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)$$

$$\lambda_f^2 = \frac{k_2}{k_1}$$

Casos c e d

$$\{R\} = [I_j]^{-1} \{I_u\}$$

$$[B_v] = [I_j]^{-1} [J_j]$$

$$\{R_b\} = [J_t] \{R\}$$

$$[B_t] = -[J_t] [B_v] - [J_v]$$

$$\{V\} = \left[[B_t] + \frac{1}{h} [A_e] \right]^{-1} \{R_b\}$$

$$\{\bar{y}\} = \frac{1}{V_1} \{V\}$$

onde V_1 é o primeiro elemento de $\{V\}$

$$\{C\}^T = \{I_e\}^T [B_v]$$

$$\{\bar{\mathcal{L}}\}^T = \{\mathcal{L}\}^T [C_c] + \{C\}^T [A_e]^{-1}$$

onde C_c é uma matriz triangular inferior.

Finalmente, as constantes procuradas ficam definidas por:

$$k_1 = \{I_e\}^T \{R\}$$

$$k_2 = \frac{1}{h} \{\bar{\mathcal{L}}\}^T \{R_b\}$$

$$k_3 = \frac{\{\bar{\mathcal{L}}\}^T [B_t] \{\bar{\gamma}\}}{\{\bar{\mathcal{L}}\}^T [A_e] \{\bar{\gamma}\}} \frac{1}{h}$$

$$\lambda_f^2 = k_3 + \frac{k_2}{k_1}$$

c) Conhecidas as constantes, é possível proceder à solução analítica da equação, para o qual considera-se, em primeiro lugar, a equação homogênea dada por:

$$-k_1 u_f''(z) + \lambda_f^2 k_1 u_f'(z) = 0$$

cuja solução é de tipo exponencial ou, para $\lambda_f = 0$, é de tipo polinômico.

Na continuação determina-se a solução particular, solução que será uma função analítica do tipo polinômico, para a equação escrita como:

$$-k_1 u_f'' + \lambda_f^2 k_1 u_f' = Q_f + k_3 \int_0^z \int_z^H Q_f dz^2$$

cujas condições de contorno são:

$$u_f(0) = 0$$

$$u'_f(0) = 0$$

$$u''_f(H) = 0$$

sendo as duas primeiras, condições essenciais e a terceira, uma condição natural que provem da consideração de momento fletor nulo no topo da estrutura.

Finalmente, a solução geral é uma função analítica que pode ser escrita como:

$$u_f(z) = B_1 e^{\lambda_f z} + B_2 e^{-\lambda_f z} + B_3 z^5 + B_4 z^4 + B_5 z^3 + B_6 z^2 + B_7 z + B_8$$

onde B_i são constantes que decorrem das condições de contorno e da configuração do carregamento (Apêndice A).

4.3. ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS

No desenvolvimento deste trabalho, apresentam-se estruturas tridimensionais para edifícios altos, os quais são formados pela associação de diversas estruturas, tais como: paredes estruturais, paredes contraventadas por lintéis, pórticos planos, pórticos contendo pilares e paredes, núcleos estruturais e núcleos contraventados por lintéis. Cada uma destas estruturas será chamada, doravante, de unidade estrutural

O presente estudo leva à formulação de um modelo matemático geral, expresso mediante um sistema de três equações diferenciais lineares. Para a resolução procede-se ao desacoplamento do sistema e, na continuação, aplica-se o método iterativo proposto em 4.3.2.

4.3.1. FORMULAÇÃO GERAL

Para começar, considere-se a estrutura do edifício num sistema de coordenadas cartesianas (figura 4.12), de tal maneira que o eixo z esteja na vertical e o plano xoy esteja na horizontal. Considere-se agora, uma estrutura plana de tal maneira que, em planta, possa ser localizada conforme mostra a figura 4.13; nestas condições, a deformação lateral u_f pode ser calculada em função do sistema de coordenadas arbitrário, mediante a equação (STAMATO, M.C. e MANCINI, E., 1973):

$$u_f = \{A\}^T \{u\} \quad (4.54)$$

onde

$$\{u\}^T = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$\{A\}^T = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$a_1 = -\text{sen } \theta$$

$$a_2 = \text{cos } \theta$$

$$a_3 = \text{vetor de posição}$$

Por outro lado, segundo foi mostrado, a equação geral para o cálculo das deformações laterais das estruturas planas, pode ser escrita como:

$$-k_1 u_f'' + \lambda_f^2 k_1 u_f' = Q_f + k_3 \int_0^z \int_z^H Q_f dz^2 \quad (4.55)$$

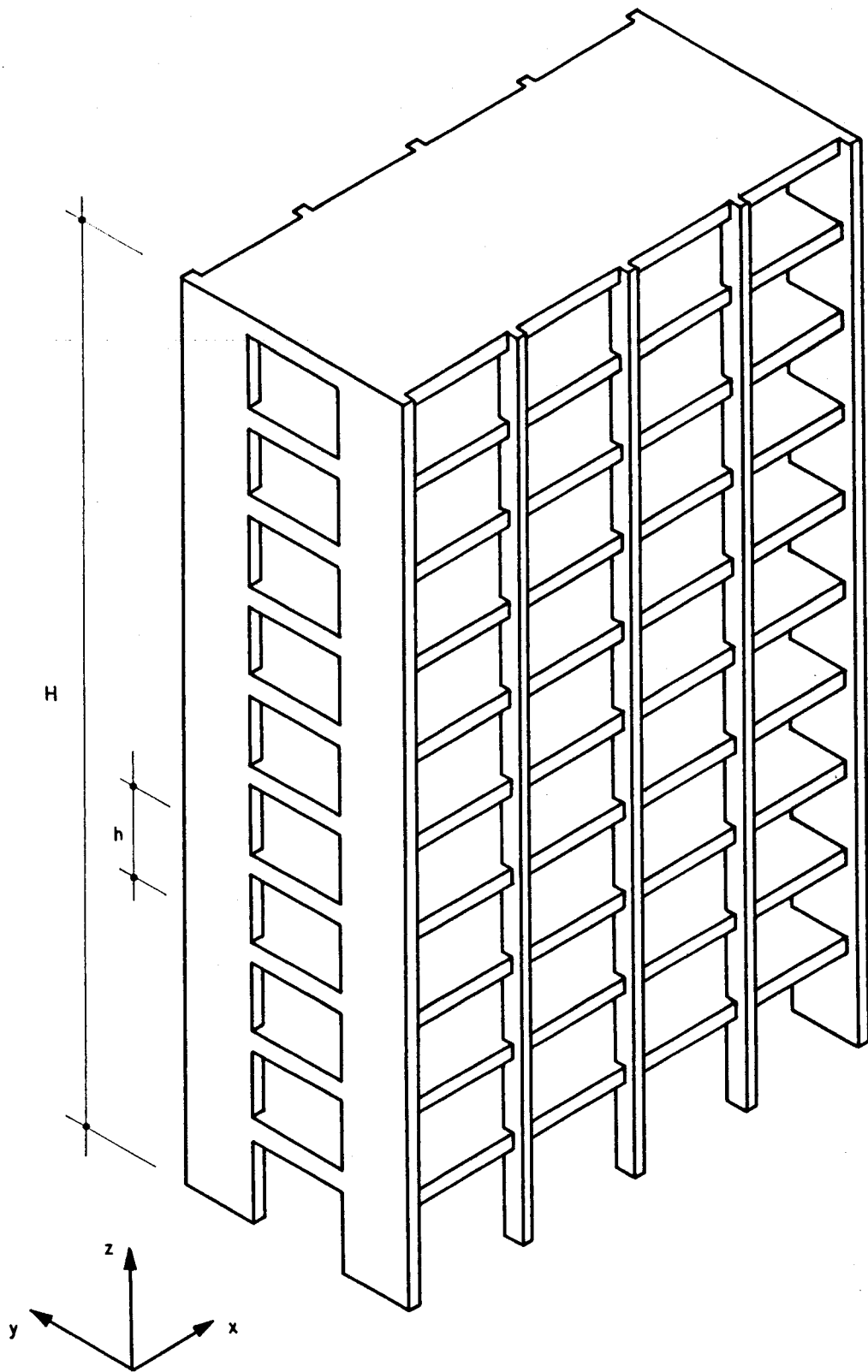


FIG. 4.12 - Estrutura e sistema de referência xyz

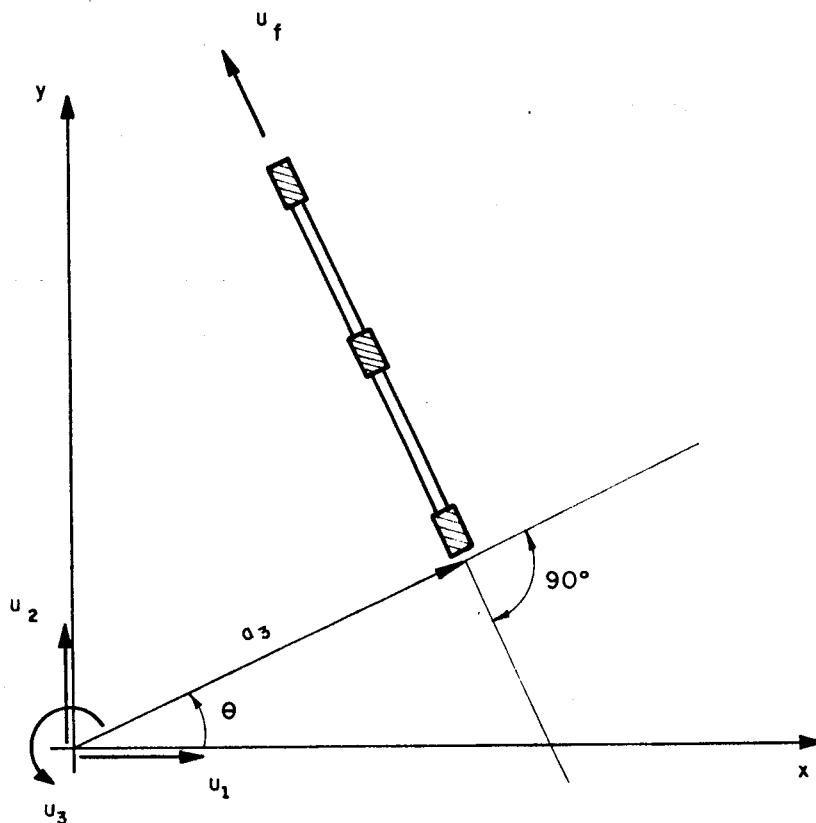


FIG. 4.13 - Localização de uma estrutura plana no sistema de coordenadas xyz

e procedendo-se à transformação de coordenadas, chega-se a equação geral das estruturas planas, no sistema arbitrário de coordenadas, ou seja:

$$-[t] \{u''\} + [s] \{u'\} = \{A\} Q_f + \{A\} Q_f^c \quad (4.56)$$

onde:

$$[t] = k_1 \{A\} \{A\}^T$$

$$[s] = \lambda_f^2 [t]$$

e:

$$Q_f^c = k_3 \int_0^z \int_z^H Q_f dz^2$$

A associação de várias unidades estruturais permite formar uma estrutura tridimensional, cujo equilíbrio fica garantido mediante o sistema de equações diferenciais dado por:

$$-[T] \{u''\} + [S] \{u'\} = \{F\} + \{F_c\} \quad (4.57)$$

onde, para n unidades estruturais, tem-se:

$$[T] = \sum_{k=1}^n [t]_k$$

$$[S] = \sum_{k=1}^n [s]_k$$

$$\{F\} = \sum_{k=1}^n \left(\{A\} Q_f \right)_k$$

$$\{F_c\} = \sum_{k=1}^n \left(\{A\} Q_f^c \right)_k$$

Observe-se que a equação geral é formada pela soma das contribuições das unidades estruturais, e que o vetor F contém as forças cortantes aplicadas ao edifício, portanto, em face da convenção apresentada nas figuras 4.14 e 4.15

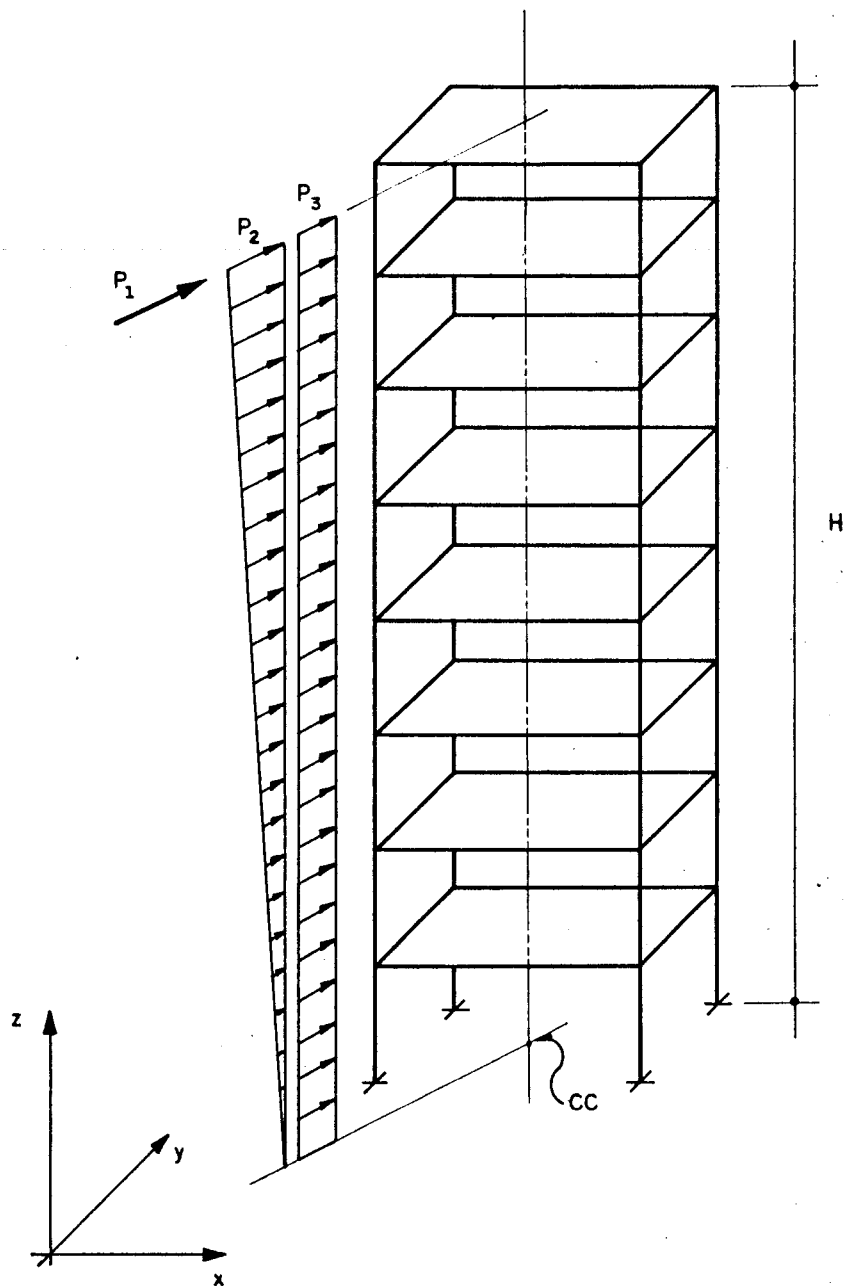


FIG. 4.14 - Estrutura tridimensional submetida a um carregamento no centro de carga (CC)

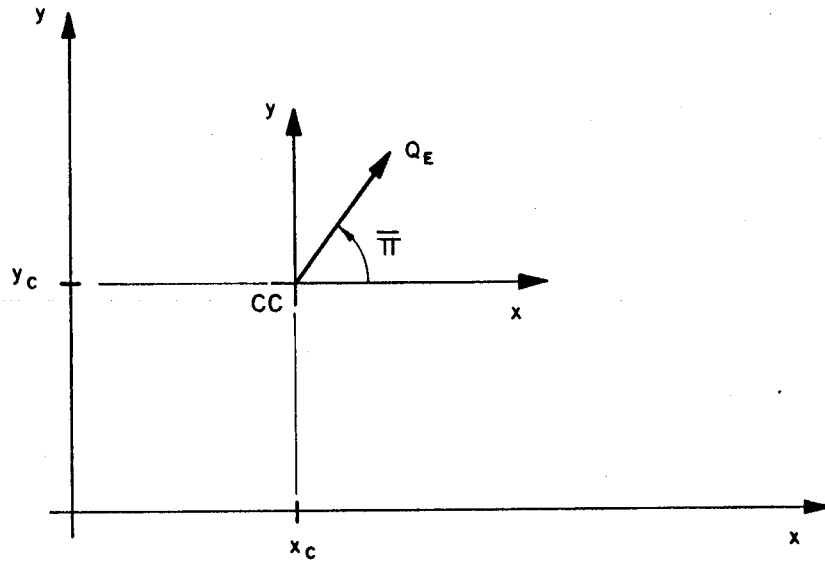


FIG. 4.15 - Localização do centro de carga, CC, no qual atua o esforço cortante externo (Q_E)

é possível escrever:

$$\{F\} = \{\bar{B}\} Q_E \quad (4.58)$$

onde:

$$\{\bar{B}\} = \begin{Bmatrix} \cos \bar{\pi} \\ \text{sen } \bar{\pi} \\ -y_c \cos \bar{\pi} + x_c \text{sen } \bar{\pi} \end{Bmatrix}$$

e:

$$Q_E = \left(\frac{P_1}{H} + \frac{P_2}{2} + P_3 \right) H - P_3 z - \frac{P_2}{2H} z^2$$

Analisando-se o vetor F_c , observa-se que pode ser expresso mediante a seguinte equação:

$$\{F_c\} = \sum_n \left(\{A\} Q_f^c \right)_n$$

cujo cálculo seria possível se fossem conhecidas as funções $Q_f^c(z)$, isto significa que o vetor F_c , em geral, é uma das incógnitas do problema.

Por outro lado, supondo que o vetor u fosse conhecido, as funções Q_f^c poderiam ser calculadas mediante a expressão:

$$Q_f^c - \frac{1}{k_3} (Q_f^c)'' = -k_1 \{A\}^T \{u''\} + \lambda_f^2 k_1 \{A\}^T \{u'\} \quad (4.59)$$

sujeita às condições de contorno dadas por:

$$Q_f^c(0) = 0 \quad (4.60)$$

$$(Q_f^c(H))' = 0$$

Observa-se que o vetor F_c depende das deformações do edifício (vetor u).

4.3.2. TÉCNICA DE SOLUÇÃO

Para resolver a equação diferencial que representa o equilíbrio da estrutura tridimensional, é necessário fazer algumas operações prévias. Considere-se a transformação linear expressa como:

$$\{u\} = [R_e] \{\bar{u}\} \quad (4.61)$$

onde, de acordo com a figura 4.16:

$$[R_e] = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi & Y_R \\ \text{sen}\phi & \cos\phi & -X_R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e utilizando os elementos da matriz T (equação 4.57):

$$X_R = \frac{-T_{13} T_{12} + T_{23} T_{11}}{T_{11} T_{22} - T_{12}^2}$$

$$Y_R = \frac{-T_{13} T_{22} + T_{23} T_{12}}{T_{11} T_{22} - T_{12}^2}$$

$$\text{tg } 2\phi = \frac{2 T_{12}}{T_{11} - T_{22}}$$

então, aplicando esta transformação, resulta:

$$-[\bar{T}] \{\bar{u}'''\} + [\bar{S}] \{\bar{u}'\} = \{\bar{F}\} + \{\bar{F}_c\} \quad (4.62)$$

onde:

$$[\bar{T}] = [R_e]^T [T] [R_e]$$

$$[\bar{S}] = [R_e]^T [S] [R_e]$$

$$\{\bar{F}\} = [R_e]^T \{F\}$$

$$\{\bar{F}_c\} = [R_e]^T \{F_c\}$$

e sendo \bar{T} uma matriz diagonal.

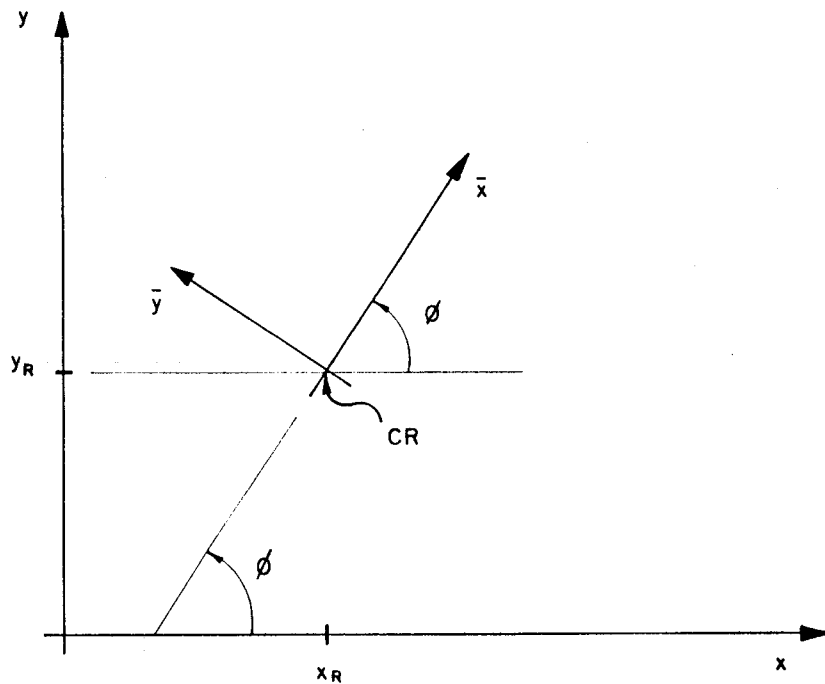


FIG. 4.16 - Localização do sistema de coordenadas $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ com origem no centro de rigidez (CR).

Continuando, observa-se que o novo sistema de equações diferenciais pode não estar desacoplado, portanto, faz-se necessária uma nova transformação:

$$\{\bar{u}\} = [R_s] \{u\}^{**} \quad (4.63)$$

onde

$$[R_s] = [\bar{T}]^{-1/2} [A_v]$$

$$[S]^* = [\bar{T}]^{-1/2} [\bar{S}] [\bar{T}]^{-1/2}$$

e onde a matriz A_v contém os auto-versores da matriz S^* e, a matriz $\bar{T}^{-1/2}$ contém os inversos das raízes dos elementos da matriz diagonal \bar{T} . Transformando, a equação de equilíbrio,

resulta:

$$-\{u'''\}^{**} + [\lambda^2] \{u'\}^{**} = \{F\}^{**} + \{F_c\}^{**} \quad (4.64)$$

onde

$$\{F\}^{**} = [R_s]^{-T} \{\bar{F}\}$$

$$\{F_c\}^{**} = [R_s]^{-T} \{\bar{F}_c\}$$

e onde a matriz λ^2 é uma diagonal que contém os auto-valores da matriz S^* . Observa-se que o novo sistema está desacoplado, portanto, cada uma das três equações pode ser escrita como:

$$-(u''')^{**} + \lambda_i^2 (u')^{**} = F_i^{**} + F_{ci}^{**} \quad (4.65)$$

Detalhes sobre estas transformações, que permitem o desacoplamento do sistema de equações, podem ser encontrados em HADLEY, G. (1979); ROSMAN, R. (1972) ou COELHO, I.R. (1987).

As equações de equilíbrio podem ser resolvidas analiticamente quando $\{F_c\}^{**} = \{0\}$, assim, cada uma das três incógnitas pode ser escrita como:

$$u_i^{**} = A_1 e^{\lambda_i z} + A_2 e^{-\lambda_i z} + A_3 z^5 + A_4 z^4 + A_5 z^3 + A_6 z^2 + A_7 z + A_8 \quad (4.66)$$

e voltando às coordenadas arbitrárias, as funções de deformação do edifício ficam:

$$\{u\} = [R_e] [R_s] \{u\}^{**} \quad (4.67)$$

com o qual o problema fica resolvido.

Por outro lado, quando $\{F_c\}^{**} \neq \{0\}$, a solução das equações pode ser feita iterativamente (APÊNDICE C), para o qual utiliza-se a equação:

$$-\{u'''\}_k^{**} + [\lambda^2] \{u'\}_k^{**} \cong \{F\}^{**} + \{F_c\}_{k-1}^{**} \quad (4.68)$$

onde

$$k = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$\{F_c\}_0^{**} = \{0\}$$

e para cada solução, k , é calculado o vetor F_c em função do vetor de deformações u :

$$\{F_c\}_i = f(\{u\}_i)$$

e mediante as transformações de coordenadas, resulta:

$$\{F_c\}_i^{**} = [R_s]^T [R_e]^T \{F_c\}_i \quad (4.69)$$

A solução do problema é $\{u\}^{**} = \{u\}_n^{**}$ com o qual ficam definidas as deformações do edifício.

4.3.3. NÚCLEOS ESTRUTURAIS

É importante destacar que a formulação apresentada permite incluir, também, núcleos estruturais. A equação de equilíbrio correspondente pode ser escrita, em relação ao centro de torção, como:

$$-[I_e] \{U'''\} + [J_g] \{U'\} = \{Q\} \quad (4.70)$$

onde (figuras 4.17 e 4.18):

$$\{Q\}^T = \{Q_x, Q_y, Q_z\}$$

$$\{U\}^T = \{U_1, U_2, U_3\}$$

$$[I_e] = \begin{bmatrix} I_y & & \\ & I_x & \\ & & J_w \end{bmatrix} E$$

$$[J_g] = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \left(GJ_t + \frac{12EJ}{\ell^3 h} \left(w_{\bar{A}} - w_{\bar{B}} \right)^2 \right)$$

onde o vetor Q contém os esforços cortantes, o vetor U contém as funções de deformação, I_x e I_y são os momentos de inércia principais do núcleo, J_w e J_t são os momentos de inércia setorial e torcional do núcleo, respectivamente; E e G são os módulos elásticos longitudinal e transversal, J é o momento de inércia do lintel e, $w_{\bar{A}}$ e $w_{\bar{B}}$ são as ordenadas de diagrama principal de área setorial.

Esta equação de equilíbrio está escrita em relação ao centro de torção (GLÜCK, J.- 1970; HEIDEBRECHT, A.C. e STAFFORD-SMITH, B-1973 e TSO, W.K. e BISWAS, J.K.- 1973), portanto, faz-se necessária a mudança de coordenadas. Considere-se a figura 4.19, que apresenta a planta de um núcleo genérico e os sistemas de referência, então, existirá uma matriz R_t que relacione os vetores

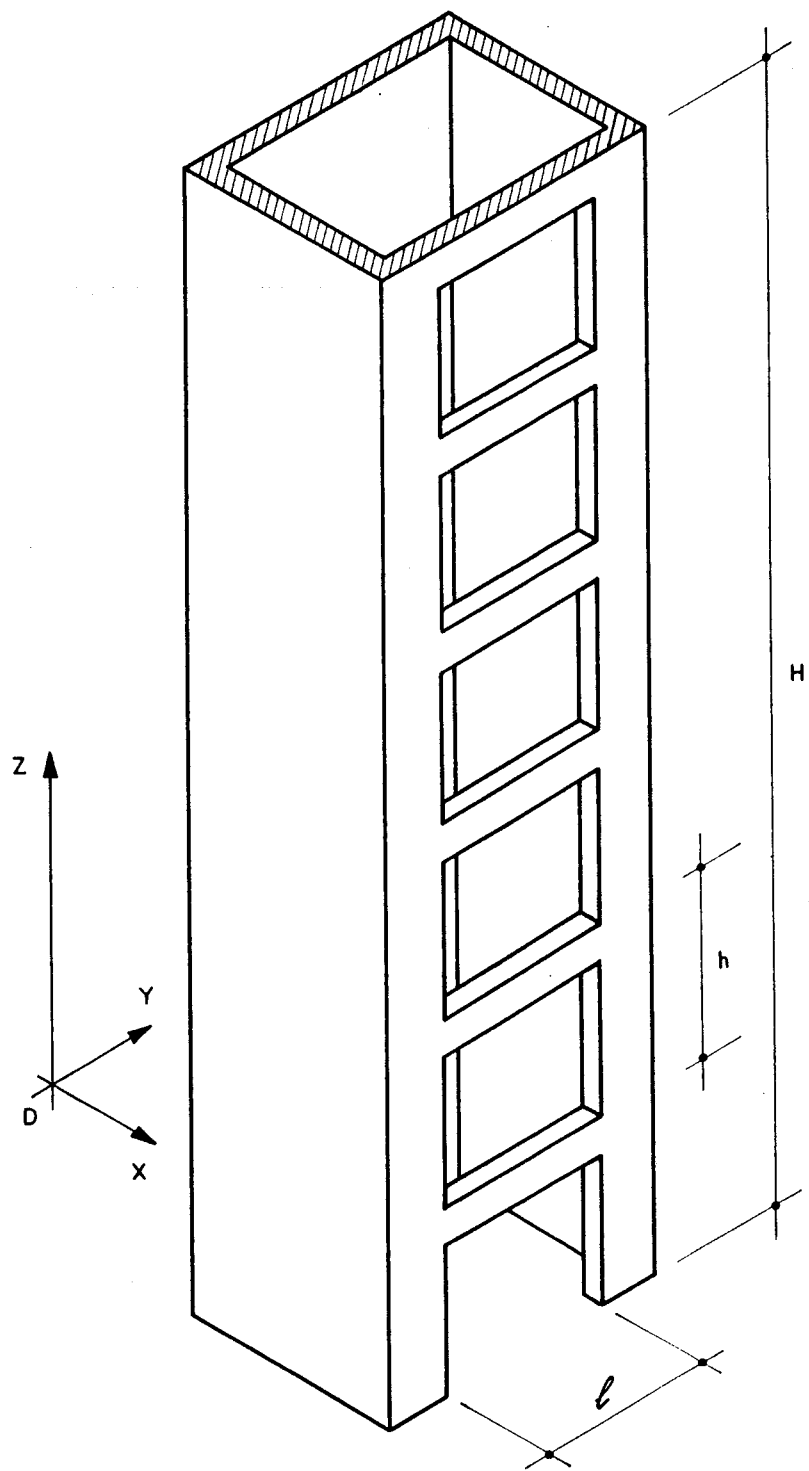


FIG. 4.17 - Núcleo estrutural contraventado

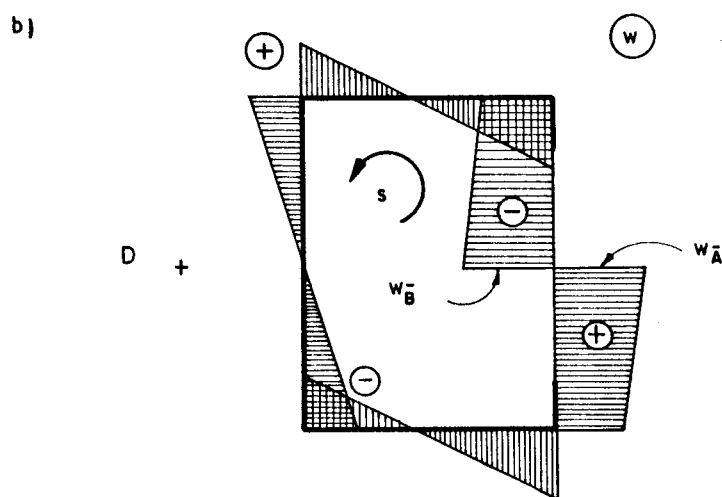
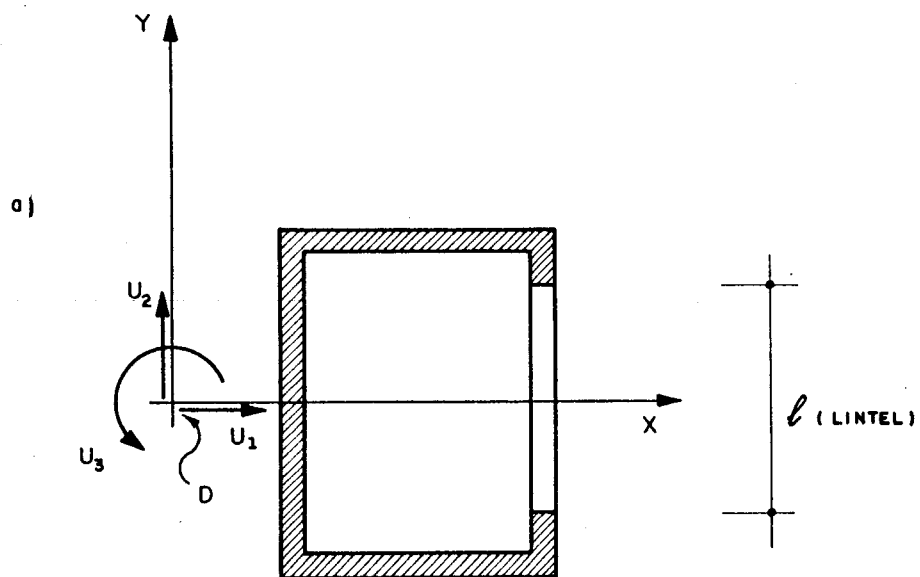


FIG. 4.18 - Núcleo estrutural: a) Seção transversal
b) Diagrama principal de área setorial

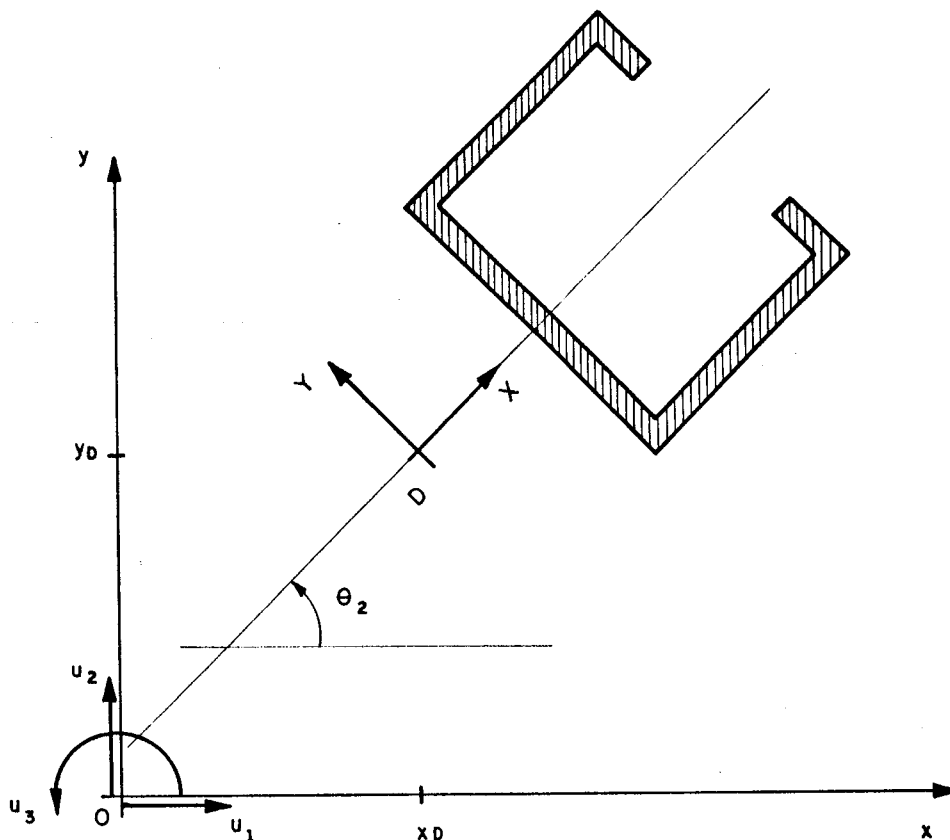


FIG. 4.19 - Núcleo estrutural referenciado ao sistema arbitrário xyz

de deformação $\{U\}$ do centro de torção e $\{u\}$ da origem, O , do sistema arbitrário, de maneira que:

$$\{U\} = [R_t] \{u\} \quad (4.71)$$

onde

$$[R_t] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \text{sen}\theta_2 & x_D \text{sen}\theta_2 - y_D \cos\theta_2 \\ -\text{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & x_D \cos\theta_2 + y_D \text{sen}\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com esta transformação, a equação de equilíbrio pode ser escrita como:

$$-[t] \{u'''\} + [s] \{u'\} = [R_t]^T \{Q\} \quad (4.72)$$

onde:

$$[t] = [R_t]^T [I_e] [R_t]$$

$$[s] = [R_t]^T [J_g] [R_t]$$

observa-se que esta equação pode ser somada à equação de equilíbrio do edifício. Mais detalhes, sobre a análise de núcleos, podem ser encontrados também em CARVALHO, F.A.C. 1980 ou em COSTA, J.L. 1984.

4.3.4. MARCHA DO CÁLCULO

A equação geral de equilíbrio para estruturas tridimensionais é montada em base das características das unidades estruturais, portanto, o primeiro passo será calcular as constantes correspondentes. A marcha do cálculo pode ser resumida nos seguintes passos (figuras 4.20 e 4.21):

a) Montar as matrizes T e S

$$[T] = \sum_k^n [t]_k$$

$$[S] = \sum_k^n [s]_k$$

b) Calcular o vetor de forças cortantes aplicadas ao edifício

$$\{F\} = \{\bar{B}\} Q_E$$

onde

$$\{\bar{B}\}^T = \{ \cos\bar{\pi}, \sin\bar{\pi}, -y_c \cos\bar{\pi} + x_c \sin\bar{\pi} \}$$

$$Q_E = \left(\frac{P_1}{H} + \frac{P_2}{2} + P_3 \right) H - P_3 z - \frac{P_2}{2H} z^2$$

c) Calcular a matriz R_e

$$[R_e] = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & Y_R \\ \sin\phi & \cos\phi & -X_R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde

$$X_R = \frac{-T_{13} T_{12} + T_{23} T_{11}}{T_{11} T_{22} - T_{12}^2}$$

$$Y_R = \frac{-T_{13} T_{22} + T_{23} T_{12}}{T_{11} T_{22} - T_{12}^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\phi = \frac{2 T_{12}}{T_{11} - T_{22}}$$

d) Calcular a matriz R_e

$$[R_e] = [\bar{T}]^{-1/2} [A_v]$$

onde

$$[\bar{T}] = [R_e]^T [T] [R_e]$$

$$[S]^* = [\bar{T}]^{-1/2} [R_e]^T [S] [R_e] [\bar{T}]^{-1/2}$$

$$[A_v] = \text{auto-versores da matriz } S^*$$

$$[\lambda^2] = \text{auto-valores da matriz } S^*$$

e) Calcular o vetor F^{**}

$$\{F\}^{**} = [R_e]^T [R_e]^T \{F\}$$

f) Montar as equações diferenciais de deformação e calcular a solução inicial (APÊNDICE C):

$$-\{u'''\}^{**} + [\lambda^2] \{u'\}^{**} = \{F\}^{**}$$

chamando de $\{u\}_1$, à solução inicial, tem-se

$$\{u\}_1^{**} = A_1 e^{\lambda_1 z} + A_2 e^{-\lambda_1 z} + A_3 z^5 + A_4 z^4 + A_5 z^3 + A_6 z^2 + A_7 z + A_8$$

g) Se nenhuma unidade estrutural tiver $k_3 \neq 0$, então $\{F_c\}^{**} = \{0\}$ e, portanto, as funções de deformação do edifício serão:

$$\{u\} = [R_e] [R_s] \{u\}_1^{**}$$

h) Se alguma unidade estrutural tiver $k_3 \neq 0$, então $\{F_c\}^{**} \neq \{0\}$ e, portanto, a solução será iterativa (APÊNDICE C):

$$-\{u'''\}_k^{**} + [\lambda^2] \{u'\}_k^{**} \cong \{F\}^{**} + \{F_c\}_{k-1}^{**}$$

onde

$$k = \{2, 3, 4, \dots, n\}$$

$$\{F_c\}_{k-1}^{**} = [R_s]^T [R_e]^T \sum_i \left(\{A\} Q_{fk-1}^c \right)_i$$

e para cada unidade estrutural i (APÊNDICE D):

$$Q_{fk-1}^c - \frac{1}{k_3} \left(Q_{fk-1}^c \right)'' = k_1 \{\phi\}^T \left(-\{u'''\}_{k-1}^{**} + \lambda_f^2 \{u'\}_{k-1}^{**} \right)$$

com $Q_f^c(0) = (Q_f^c(H))' = 0$, e $\{\phi\}^T = \{A\}^T [R_e] [R_s]$ finalmente, terminado o processo iterativo, a solução será $\{u\}_n^{**}$ e as funções de deformação do edifício serão:

$$\{u\} = [R_e] [R_s] \{u\}_n^{**}$$

Conhecidas as deformações, é possível calcular os esforços nas unidades estruturais mediante a formulação já apresentada.

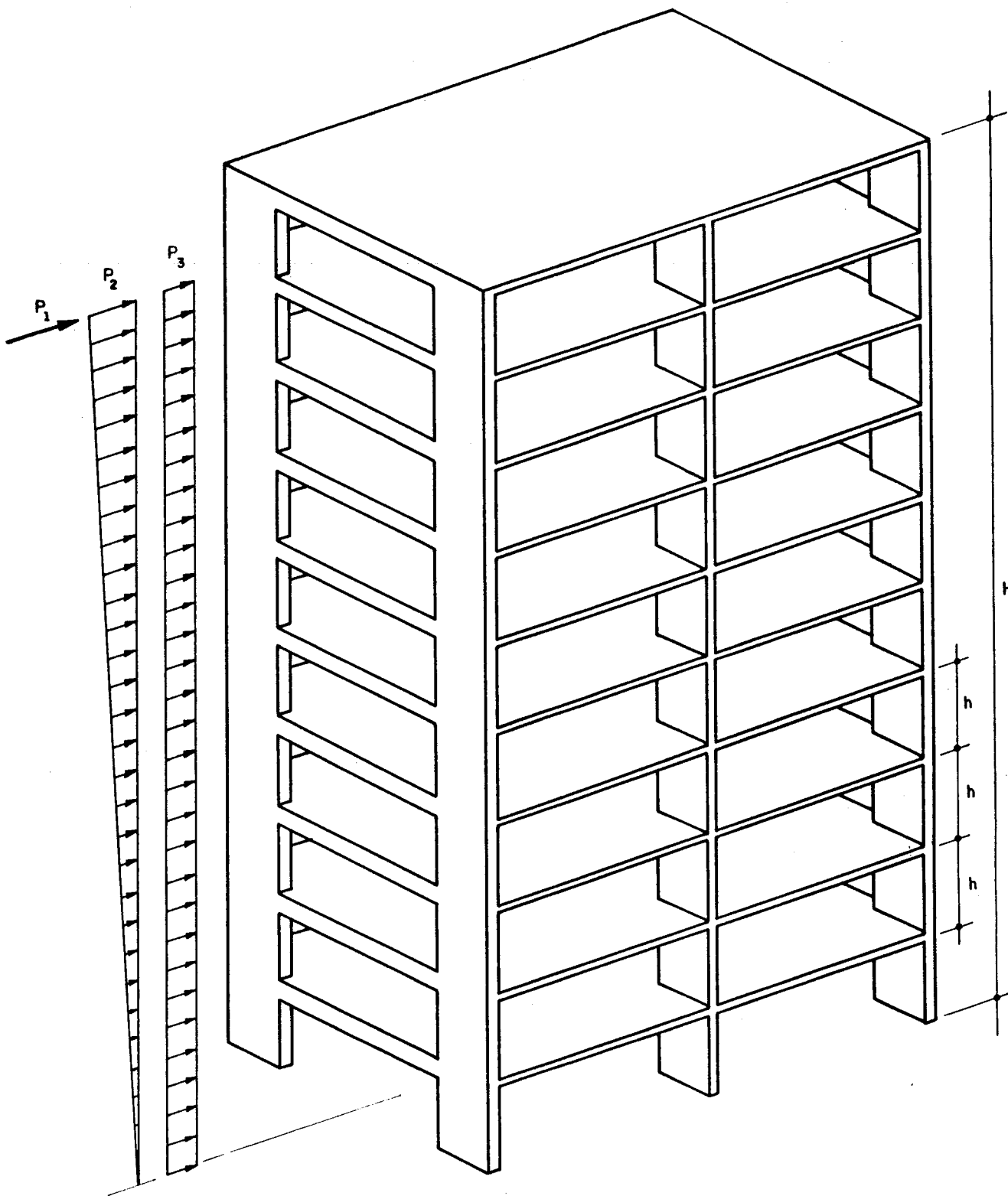


FIG. 4.20 - Estrutura tridimensional

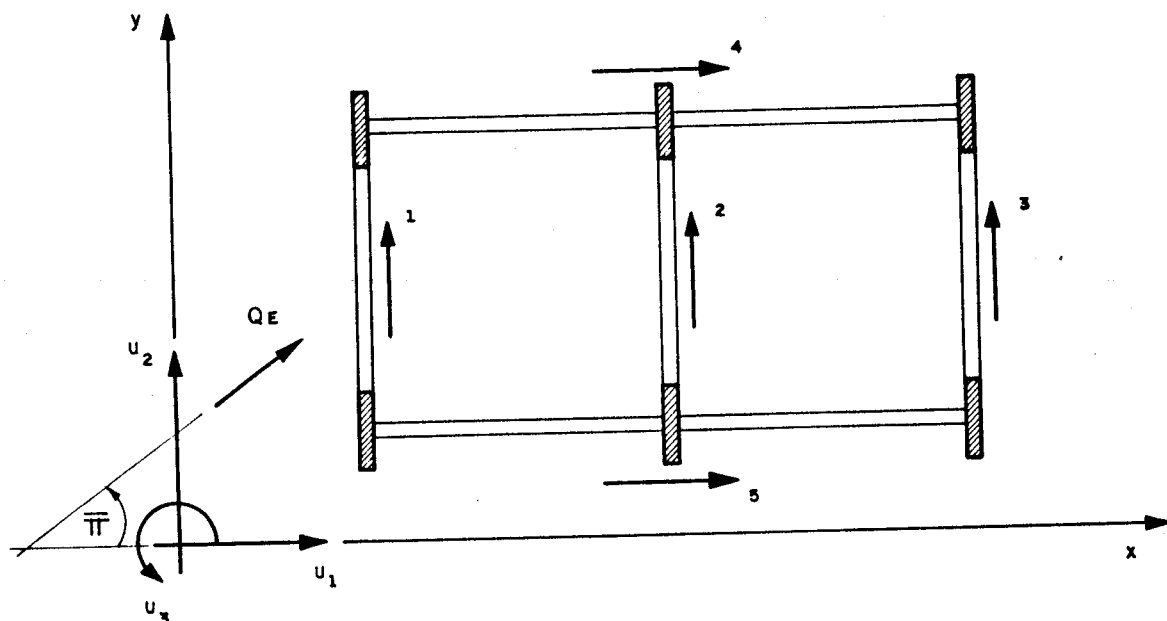


FIG. 4.21 - Planta da estrutura do edifício da FIG. 4.20, na qual as setas numeradas identificam às unidades estruturais

4.4. EXEMPLOS

Utilizando-se a formulação apresentada neste trabalho, foram elaborados programas para microcomputador; com tais programas foram resolvidos vários exemplos, alguns dos quais apresentam-se na continuação.

4.4.1. EXEMPLO 4.1

Considere-se um pórtico plano de 2 vãos e 15 andares, com colunas e vigas de seção retangular tendo dimensões $0,50 \times 0,50$ m e $0,20 \times 0,50$ m respectivamente; a altura dos andares é de 3 m enquanto que a altura total da estrutura é 45 m, conforme mostra a figura 4.22. O pórtico está constituído por um material

cujos módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson são $2'100.000 \text{ tf/m}^2$ e $0,20$ respectivamente.

Com a finalidade de analisar estaticamente a estrutura numa região sísmica, considere-se que ela será utilizada em um edifício residencial localizado em um zona sísmica 4, com um período característico $T_s = 0,6 \text{ s}$.

Com estes dados, calcula-se a força cortante da base e a força concentrada no topo (UBC):

$$V_0 = Z I K C S W_0$$

$$Z = 1$$

$$I = 1$$

$$K = 0,67$$

$$T = 1,35$$

$$C = 0,06$$

$$S \cong 1,0$$

$$W_0 = 540 \text{ tf}$$

$$V_0 = 21,6 \text{ tf}$$

$$F_t = 2,04 \text{ tf}$$

Na continuação calculam-se as forças que devem aplicar-se à estrutura, de acordo com a técnica do meio contínuo:

$$P_2 = \frac{2H (V_0 - F_t)}{(H + 0,5 h)^2} = 0,814 \text{ tf/m}$$

$$P_1 = V_0 - \frac{H}{2} P_2 = 3,282 \text{ tf}$$

e, finalmente, a tabela 4.1 apresenta as deformações laterais sofridas pelo pórtico, segundo a técnica contínua proposta e segundo uma análise discreta feita matricialmente. Observa-se que a diferença entre as duas soluções é da ordem de 3%. Também é importante observar que a técnica proposta dá bons resultados inclusive nos trechos próximos da base e do topo, apesar das perturbações provocadas pelo extremo livre e pelos engastamentos. Outras vantagens encontradas são o pequeno número de parâmetros requerido para o cálculo, o qual facilita enormemente a entrada de dados no computador, e a velocidade maior com que é realizado o processo, isto porque com a técnica contínua procura-se uma única incógnita, u_f , enquanto que com a técnica discreta são procuradas 105 incógnitas entre giros e deslocamentos verticais e horizontais dos nós.

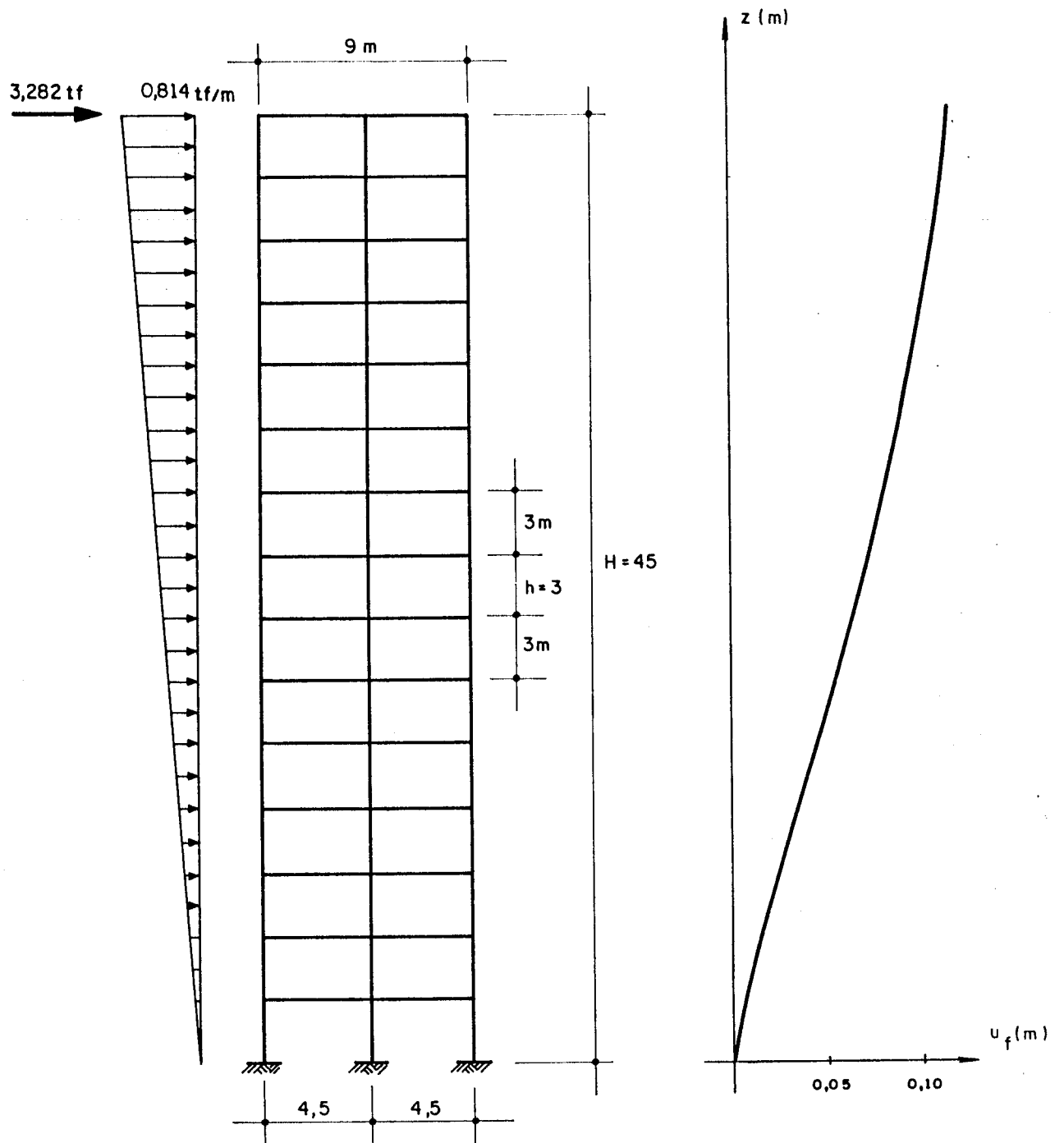


FIG. 4.22 - Exemplo 4.1

ANDAR	TEC. CONTÍNUA	TEC. DISCRETA
15	0,1193	0,1228
14	0,1151	0,1188
13	0,1102	0,1138
12	0,1043	0,1079
11	0,0976	0,1010
10	0,0902	0,0932
9	0,0820	0,0848
8	0,0733	0,0757
7	0,0640	0,0661
6	0,0543	0,0561
5	0,0443	0,0457
4	0,0341	0,0351
3	0,0239	0,0245
2	0,0138	0,0141
1	0,0048	0,0049
0	0,0000	0,0000
UD	m	

TABELA 4.1 - Deformações laterais-exemplo 4.1

4.4.2. EXEMPLO 4.2

Considere-se uma estrutura plana formada por duas paredes estruturais contraventadas por 15 lintéis, conforme mostra a figura 4.23, as paredes tem seções transversais retangulares de 0,25 x 2,00 m e as vigas de 0,25 x 0,70 m; a altura dos andares é 3 m e a altura total é 45 m, por outro lado, o material da estrutura tem módulo elástico de $2'100.000 \text{ tf/m}^2$ e um coeficiente de Poisson de 0,20.

Supondo que a estrutura esteja submetida à ação de uma carga lateral de 0,5 tf/m, são calculadas as deformações laterais apresentadas na tabela 4.2; tal tabela apresenta também uma solução aproximada obtida por um método matricial discreto, aplicado ao pórtico equivalente.

As observações que podem ser feitas a este exemplo, são análogas às apontadas no exemplo 4.1, pois neste caso existe também uma diferença desprezível entre os resultados, obtidos pelos dois métodos, ao longo de toda a altura da estrutura. Ficam, então, demonstradas a eficiência e a precisão da técnica proposta.

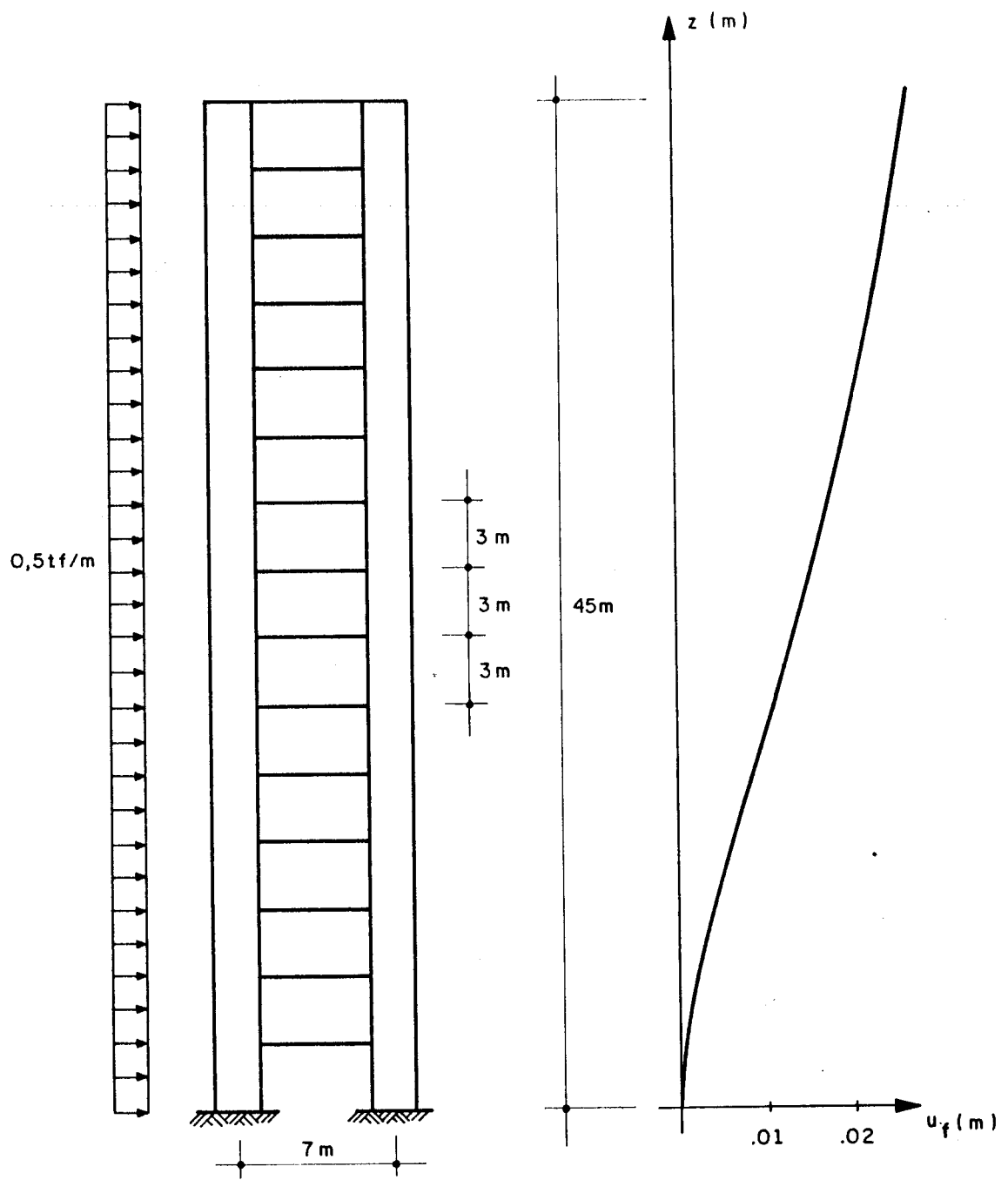


FIG. 4.23 - Exemplo 4.2

ANDAR	TEC. CONTÍNUA	TEC. DISCRETA
15	0,0266	0,0275
14	0,0254	0,0264
13	0,0241	0,0251
12	0,0226	0,0236
11	0,0211	0,0220
10	0,0193	0,0202
9	0,0175	0,0183
8	0,0155	0,0162
7	0,0133	0,0140
6	0,0111	0,0117
5	0,0087	0,0093
4	0,0064	0,0068
3	0,0042	0,0045
2	0,0022	0,0024
1	0,0006	0,0007
0	0,0000	0,0000
UD	m	

TABELA 4.2 - Deformações laterais - Exemplo 4.2

4.4.3. EXEMPLO 4.3

Considere-se uma estrutura de 15 andares formada por 5 pórticos dispostos nas direções dos eixos X e Y, de acordo com a planta apresentada na figura 4.24; tanto as colunas quanto as vigas são de seção retangular e suas dimensões são 0,50 x 0,50 m e 0,20 x 0,50 m, respectivamente. A altura dos andares é 3 m enquanto a altura total da estrutura é 45 m, por outro lado, o material do edifício tem módulos de elasticidade e de Poisson cujos valores são $2'100.0000 \text{ tf/m}^2$ e 0,20 respectivamente.

Supondo que a estrutura esteja submetida à ação de uma força distribuída lateral de 0,5 tf/m com uma excentricidade de 0,5 m, são calculadas as deformações laterais da estrutura. Assim, na tabela 4.3 apresentam-se os resultados obtidos para os painéis 1 e 2. Na mesma tabela são mostrados os resultados obtidos mediante um método matricial discreto.

Observa-se que a estrutura é simétrica tanto em rigidez quanto em massa, mesmo assim, a força é aplicada fora do plano de simetria para atender à necessidade de se considerar os efeitos de uma possível excentricidade accidental.

Na tabela de resultados é possível observar que com a técnica proposta e com a técnica discreta chega-se a resultados que guardam uma estreita relação, o qual significa que os efeitos da torção podem ser analisados mediante a técnica contínua com boa precisão. Também neste caso, isto é, considerando efeitos de torção, a técnica contínua dá bons resultados ao longo de toda a altura do edifício, inclusive nos trechos próximos do topo e da base, apesar das perturbações provocadas pelo extremo livre e pelos engastamentos.

Tratando-se de estruturas tridimensionais, as vantagens, tanto em tempo de processamento quanto em espaço de memória requerido no computador, são grandes quando se utiliza a técnica contínua, pois a análise se reduz à determinação de três funções incógnitas enquanto que mediante a técnica discreta, para este exemplo, são procuradas as respostas para 315 incógnitas.

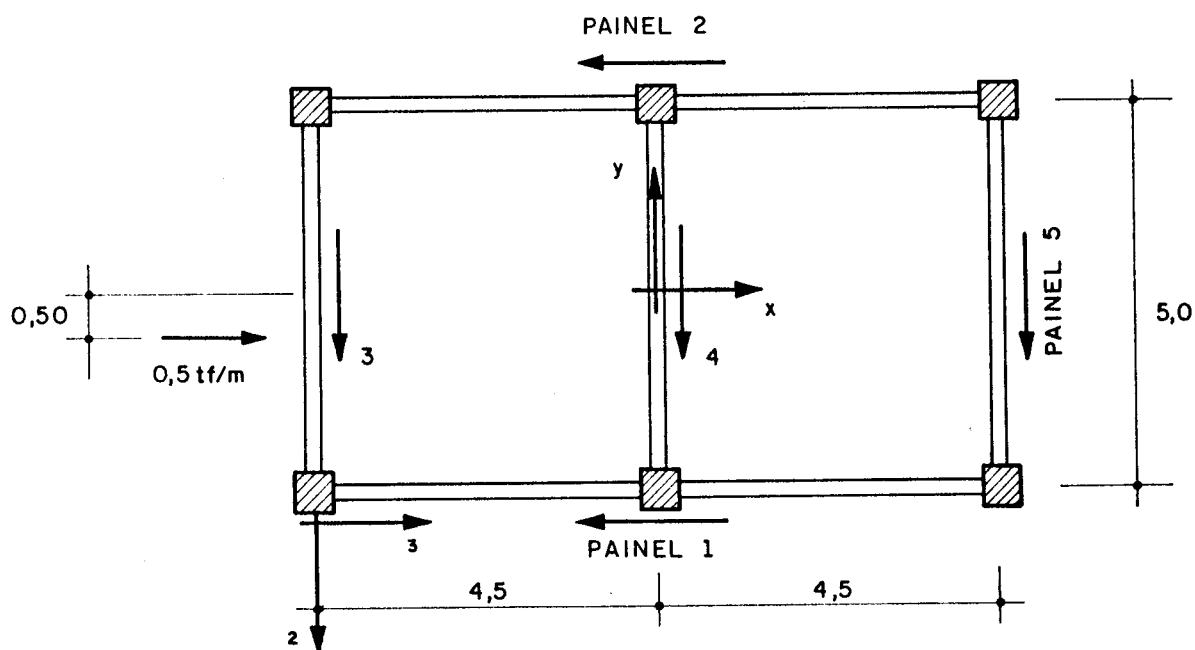


FIG. 4.24 - Exemplo 4.3

ANDAR	PAINEL 1		PAINEL 1	
	TEC. CONTÍNUA	TEC. DISCRETA	TEC. CONTÍNUA	TEC. DISCRETA
15	0,0449	0,0457	0,0381	0,0399
14	0,0439	0,0448	0,0374	0,0391
13	0,0428	0,0436	0,0364	0,0381
12	0,0412	0,0421	0,0351	0,0367
11	0,0393	0,0402	0,0335	0,0350
10	0,0371	0,0380	0,0316	0,0330
9	0,0345	0,0353	0,0294	0,0307
8	0,0315	0,0323	0,0269	0,0280
7	0,0282	0,0289	0,0240	0,0251
6	0,0246	0,0252	0,0210	0,0218
5	0,0206	0,0210	0,0176	0,0182
4	0,0163	0,0167	0,0140	0,0144
3	0,0117	0,0120	0,0101	0,0104
2	0,0070	0,0071	0,0060	0,0061
1	0,0025	0,0025	0,0022	0,0022
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
UD	m	m	m	m

TABELA 4.3 - Deformações laterais dos painéis 1 e 2
Exemplo 4.3

4.4.4. EXEMPLO 4.4

Considere-se uma estrutura de 15 andares formada por paredes estruturais e pilares ligados por lintéis, segundo a planta apresentada na figura 4.25; as paredes, colunas e vigas são de seção retangular e suas dimensões são 0,25 x 2,00m, 0,60 x 0,60m e 0,25 x 0,70m respectivamente. A altura dos andares é 3m e a altura total da estrutura é 45m, por outro lado, o material do edifício tem módulos de elasticidade e de Poisson cujos valores são $2'100.000 \text{ tf/m}^2$ e 0,20 respectivamente.

Supondo que a estrutura esteja sob a ação de uma carga distribuída lateral de 0,5 tf/m, aplicada com uma excentricidade de 0,5 m, são calculadas as deformações laterais do edifício, assim, na tabela 4.4 apresentam-se os resultados obtidos para os painéis 3 e 6, mediante a técnica contínua; na mesma tabela são mostrados, também, os resultados obtidos por métodos discretos.

As observações que podem ser feitas em relação a este exemplo, são análogas às apontadas nos exemplos anteriores, mas neste caso, é interessante observar que a estrutura está composta por painéis cujos comportamentos individuais são certamente diferentes, isto é, pórticos e paredes associadas; mesmo assim, os resultados obtidos mediante a técnica contínua são satisfatórios em toda a altura da estrutura.

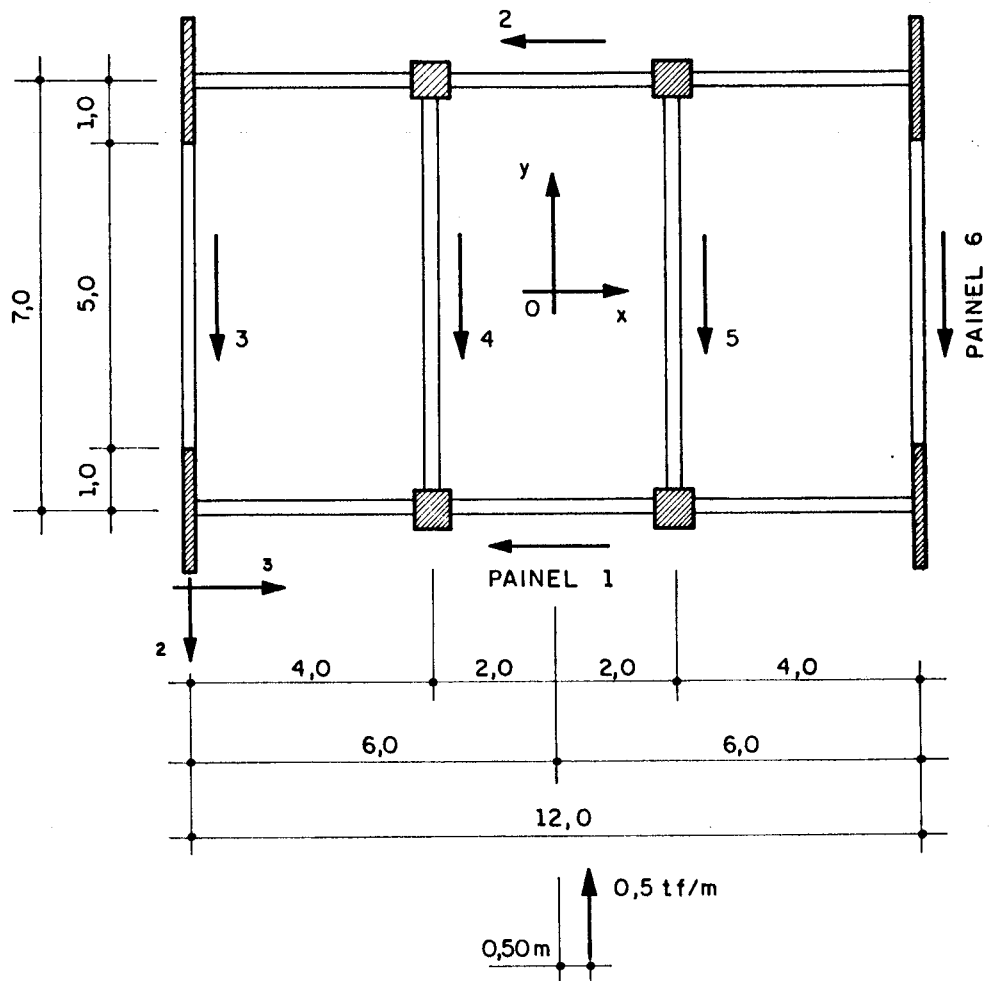


FIG. 4.25 - Exemplo 4.4

ANDAR	PAINEL 3		PAINEL 6	
	TEC. CONTÍNUA	TEC. DISCRETA	TEC. CONTÍNUA	TEC. DISCRETA
15	0,0090	0,0093	0,0104	0,0105
14	0,0086	0,0089	0,0100	0,0101
13	0,0082	0,0085	0,0095	0,0097
12	0,0078	0,0081	0,0090	0,0092
11	0,0072	0,0075	0,0084	0,0086
10	0,0067	0,0070	0,0078	0,0079
9	0,0061	0,0063	0,0071	0,0072
8	0,0054	0,0056	0,0063	0,0065
7	0,0047	0,0049	0,0055	0,0056
6	0,0039	0,0041	0,0046	0,0047
5	0,0031	0,0033	0,0037	0,0038
4	0,0023	0,0024	0,0027	0,0028
3	0,0015	0,0016	0,0018	0,0019
2	0,0008	0,0008	0,0009	0,0010
1	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	m	m	m	m

TABELA 4.4 - Deformações laterais dos painéis 3 e 6
Exemplo 4.4

4.4.5. EXEMPLO 4.5

Considere-se uma estrutura de 15 andares formada por 4 pórticos e um núcleo estrutural, segundo mostra a planta apresentada na figura 4.26; as colunas, paredes e vigas são de seção transversal retangular e suas dimensões são 0,50 x 0,50m, 0,20 x 1,50m e 0,20 x 0,50m respectivamente. A altura total do edifício é 45m e os andares têm 3m de altura, por outro lado, o material constituinte da estrutura tem módulos elástico e de Poisson cujos valores são $2'100.000 \text{ tf/m}^2$ e 0,20 respectivamente.

A estrutura está submetida à ação de uma carga uniformemente distribuída de 0,5 tf/m, segundo mostra a figura 4.26, a qual produz as deformações laterais apresentadas na tabela 4.5; na mesma tabela são mostrados, também, resultados obtidos por métodos discretos.

Os comentários feitos em relação aos exemplos anteriores, são aplicáveis a este exemplo, mas é importante ressaltar que apesar da grande excentricidade estática provocada pelo núcleo estrutural, a técnica contínua proposta dá bons resultados em toda a altura do edifício, demonstrando-se assim sua versatilidade e sua eficiência.

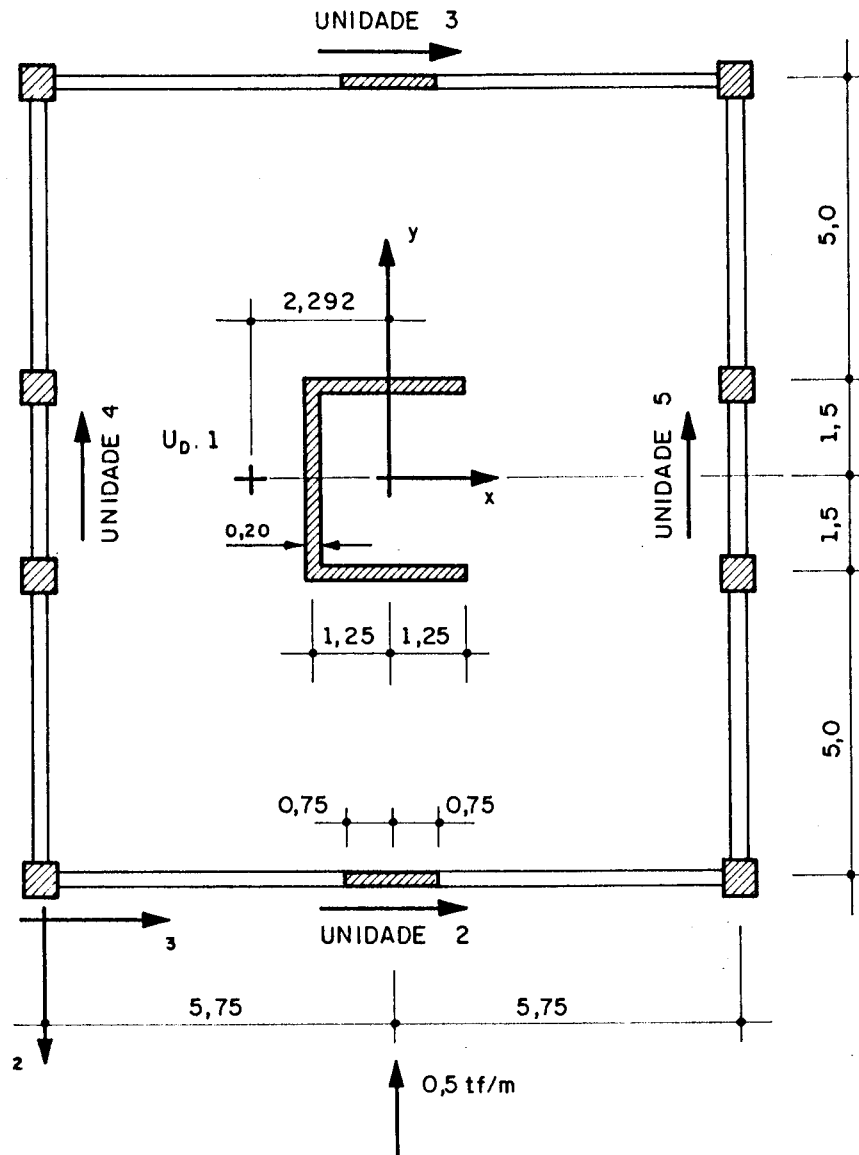


FIG. 4.26 - Planta do edifício correspondente ao exemplo 4.5

ANDAR	PAINEL 4		PAINEL 5	
	TEC. CONTÍNUA	TEC. DISCRETA	TEC. CONTÍNUA	TEC. DISCRETA
15	0,0134	0,0130	0,0175	0,0168
14	0,0124	0,0121	0,0166	0,0160
13	0,0113	0,0111	0,0156	0,0151
12	0,0102	0,0101	0,0145	0,0142
11	0,0091	0,0091	0,0134	0,0132
10	0,0080	0,0081	0,0122	0,0120
9	0,0069	0,0070	0,0109	0,0108
8	0,0058	0,0059	0,0096	0,0096
7	0,0047	0,0049	0,0082	0,0082
6	0,0036	0,0038	0,0067	0,0068
5	0,0026	0,0029	0,0052	0,0054
4	0,0017	0,0020	0,0039	0,0040
3	0,0010	0,0012	0,0025	0,0027
2	0,0004	0,0006	0,0013	0,0015
1	0,0001	0,0002	0,0004	0,0005
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	m			

TABELA 4.5 - Deformações laterais das unidades estruturais 4 e 5
Exemplo 4.5

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DINÂMICA DE EDIFÍCIOS ALTOS

5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se a análise espectral de estruturas de edifícios altos, utilizando-se a técnica do Meio Contínuo proposta no quarto capítulo e uma generalização pela via do método dos esforços. Para a determinação das flexibilidades, requeridas nos casos mais gerais, sugere-se um processo iterativo de rápida convergência.

A introdução dos efeitos sísmicos segue a modelagem mais comumente encontrada na literatura, isto é, considerando-se uma aceleração na base da estrutura, de acordo com a técnica espectral. A exemplo do capítulo anterior, inicia-se estudando-se estruturas planas e em seguida abordam-se os casos de estruturas tridimensionais.

5.2. ESTRUTURAS PLANAS

5.2.1. FORMULAÇÃO GERAL

A equação de equilíbrio dinâmico para estruturas planas pode ser escrita como:

$$-k_1 u_f'''' + \lambda_f^2 k_1 u_f' - k_3 \int_0^z \int_z^H Q_f dz^2 + \int_z^H m \ddot{x} dz = Q_f \quad (5.1)$$

onde m é a massa distribuída da estrutura, \ddot{x} é a aceleração experimentada e os outros termos são os mesmos apresentados no capítulo anterior.

No caso da análise sísmica, as acelerações da estrutura podem ser expressas em função da aceleração de sua base enquanto que a força externa aplicada ao prédio é nula, portanto, derivando-se em relação a z , a equação de equilíbrio dinâmico resulta (figura 5.1):

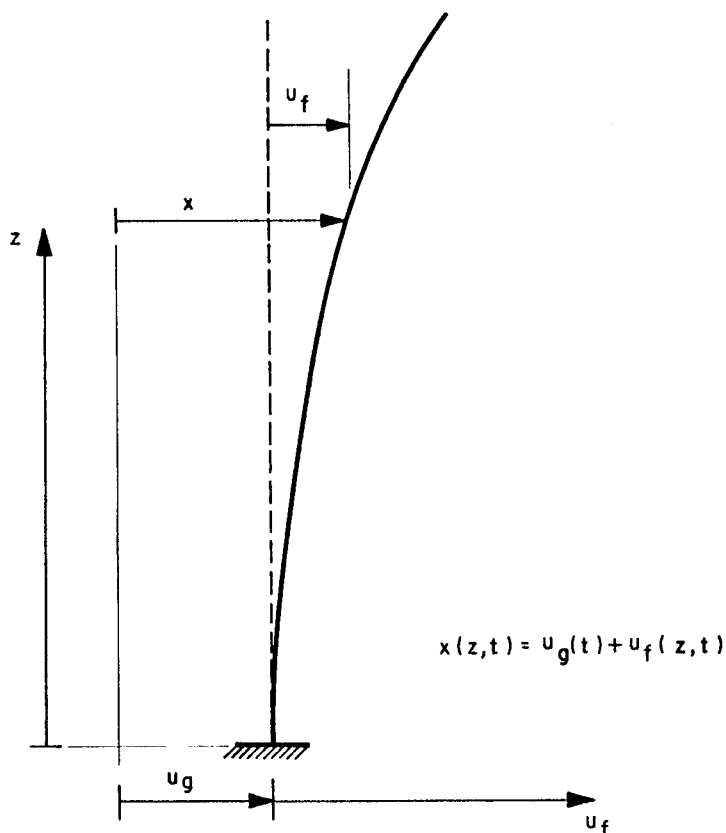


FIG. 5.1 - Deslocamentos laterais das estruturas planas

$$k_1 u_f'''' - \lambda_f^2 k_1 u_f'' + m \ddot{u}_f = k_3 M_f - m \ddot{u}_g \quad (5.2)$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_f(0,t) &= 0 \\ u_f'(0,t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$u_f''(H,t) = 0$$

$$-k_1 u_f'''(0,t) + \int_0^H m \ddot{u}_f dz = 0$$

nesta equação, o termo $k_3 M_f$ pode ser considerado como uma pseudo-força (STRICKLIN, J.A. e HAISLER, W.E.- 1977 e GESCHWINDNER, L.F.- 1981); portanto, a equação homogênea pode ser expressa como:

$$k_1 u_f'''' - \lambda_f^2 k_1 u_f'' + m \ddot{u}_f = 0 \quad (5.4)$$

cuja solução, segundo o método da superposição modal, escreve-se:

$$u_f(z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} V_j(z) G_j(t) \quad (5.5)$$

onde:

$$\begin{aligned} V_j(z) &= A_j \cosh \beta_{1j} z + B_j \sinh \beta_{1j} z + C_j \cos \beta_{2j} z + \\ &+ D_j \sin \beta_{2j} z \end{aligned}$$

$$\beta_{1j} = \sqrt{\frac{\lambda_f^4}{4} + \frac{m \omega_j^2}{k_1} + \frac{\lambda_f^2}{2}}$$

$$\beta_{2j} = \sqrt{\beta_{1j}^2 - \lambda_f^2}$$

$$A_j = \frac{-(\beta_{1j} \sinh \beta_{1j} H + \beta_{2j} \sin \beta_{2j} H)}{\beta_{1j}^2 \cosh \beta_{1j} H + \beta_{2j}^2 \cos \beta_{2j} H} \beta_{2j}$$

$$B_j = \frac{\beta_{2j}}{\beta_{1j}}$$

$$C_j = -A_j$$

$$D_j = -1$$

As constantes ω_j são calculadas mediante a seguinte equação transcendental:

$$f_1 \cosh \beta_{1j} H \cos \beta_{2j} H + f_2 \sinh \beta_{1j} H \sin \beta_{2j} H = -1$$

com:

$$f_1 = \frac{\lambda_f^4 + 2\beta_{1j}^2 \beta_{2j}^2}{2\beta_{1j}^2 \beta_{2j}^2}$$

$$f_2 = \frac{\lambda_f^2}{2\beta_{1j} \beta_{2j}}$$

O cálculo das funções $G_j(t)$, incluindo o efeito do amortecimento, pode realizar-se mediante a equação:

$$\ddot{G}_j + 2\beta \omega_j \dot{G}_j + \omega_j^2 G_j = \frac{1}{M_j^*} \int_0^H v_j q_\ell dz \quad (5.6)$$

onde β é a razão de amortecimento e M_j^* é a massa modal, a qual pode ser expressa como:

$$M_j^* = \int_0^H m v_j^2 dz \quad (5.7)$$

e onde:

$$q_\ell(z, t) = k_3 M_f - m \ddot{u}_g \quad (5.8)$$

Os fatores de participação modal, γ_j , podem ser calculados como sendo:

$$\gamma_j = \frac{m}{M_j^*} \int_0^H v_j dz \quad (5.9)$$

Definindo-se:

$$\gamma_j^c(t) = \frac{-k_3}{M_j^*} \int_0^H v_j M_f dz \quad (5.10)$$

é possível escrever a equação diferencial, para $G_j(t)$, como:

$$\ddot{G}_j + 2\beta\omega_j \dot{G}_j + \omega_j^2 G_j = -\gamma_j \ddot{u}_g - \gamma_j^c \quad (5.11)$$

a qual é uma equação linear, cuja solução pode ser obtida iterativamente. De acordo com o método das pseudo-forças, em tal caso, a equação a ser iterada fica:

$$\begin{aligned} (\ddot{G}_j)_k^{t+\Delta t} + 2\beta\omega_j (\dot{G}_j)_k^{t+\Delta t} + \omega_j^2 (G_j)_k^{t+\Delta t} = & -\gamma_j (\ddot{u}_g)^{t+\Delta t} + \\ & - (\gamma_j^c)_{k-1}^{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde $k = \{1, 2, \dots, n\}$ e, fazendo uma extrapolação linear a partir da última configuração de equilíbrio, o valor inicial de γ_j^c fica:

$$(\gamma_j^c)_0^{t+\Delta t} = (\gamma_j^c)_n^t + \Delta t \left. \frac{\partial}{\partial \tau} (\gamma_j^c(\tau))^t \right|_{\tau = t}$$

onde $\gamma_j^c(t)$ é calculada em função de M_f , que por sua vez tem a seguinte formulação:

$$M_f'' - k_3 M_f = -k_1 u_f'''' + \lambda_f^2 k_1 u_f'' \quad (5.13)$$

também na configuração de equilíbrio, e para as condições de contorno escritas como:

$$M_f(H) = 0$$

$$M_f'(0) = -k_1 u_f''(0, t)$$

Outros detalhes sobre o método das pseudo-forças podem

ser encontrados em LANDAU, L. (1983) ou em VENÂNCIO FILHO, F. et al (1988).

5.2.2. ANÁLISE ESPECTRAL DE PAINÉIS PLANOS COM COLUNAS INEXTENSÍVEIS

Com a finalidade de projetar estruturas sismo-resistentes, é prática comum utilizar espectros de projeto, fornecidos pelas normas da localidade na qual serão construídas tais estruturas. Considerando-se desprezíveis as deformações axiais das colunas, a equação diferencial de $G_j(t)$, fica:

$$\ddot{G}_j + 2\beta \omega_j \dot{G}_j + \omega_j^2 G_j = -\gamma_j \ddot{u}_g \quad (5.14)$$

cuja solução, em função da integral de Duhamel, escreve-se:

$$G_j(t) = -\gamma_j e_j \quad (5.15)$$

onde

$$e_j = \frac{1}{\omega_j^*} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \exp[-\beta\omega_j(t-\tau)] \operatorname{sen}[\omega_j^*(t-\tau)] d\tau$$

$$\omega_j^* = \omega_j \sqrt{1 - \beta^2}$$

As acelerações $\ddot{u}_g(\tau)$ são "a priori" desconhecidas, portanto, as integrais e_j não podem ser avaliadas para um sismo não acontecido; porém, as soluções podem ser expressas em função das acelerações espectrais, S_a :

$$G_j = \frac{\gamma_j S_{aj}}{\omega_j^2} \quad (5.16)$$

onde a ordenada espectral S_{aj} , é determinada em função do período natural expresso como:

$$T_j^0 = \frac{2\pi}{\omega_j} \quad (5.17)$$

finalmente, as deformações máximas modais ficam:

$$u_j(z) = V_j G_j \quad (5.18)$$

e as deformações máximas prováveis são obtidas mediante um critério de combinação das máximas modais, a exemplo da combinação quadrática completa (CQC). Detalhes sobre o método espectral podem ser encontrados em WIEGEL, R.L. (1970); CLOUGH, R.W. e PENZIEN, J. (1982) ou PAZ, M. (1985).

5.2.3. ANÁLISE ESPECTRAL DE PAINÉIS COM COLUNAS EXTENSÍVEIS

Neste caso, a solução pode ser obtida mediante a discretização do meio contínuo, o qual pode ser feito utilizando o método das forças (ROSMAN, R. 1973). Para proceder à discretização, divide-se a estrutura em partes iguais, conforme mostra-se na figura 5.2, aplicando-se cargas unitárias.

O cálculo das flexibilidades faz-se utilizando a formulação contínua apresentada no capítulo 4, para o qual utilizam-se as funções v_1 e v_2 , segundo mostra a figura 5.3 e de acordo com as seguintes equações:

$$-k_1 v_1'''(z) + \lambda_f^2 k_1 v_1'(z) = 1 + Q_{f0}^c \quad \text{para } 0 \leq z \leq z_0 \quad (5.19)$$

e

$$-k_1 v_2'''(\bar{z}) + \lambda_f^2 k_1 v_2'(\bar{z}) = Q_{fu}^c \quad \text{para } 0 \leq \bar{z} \leq z_u$$

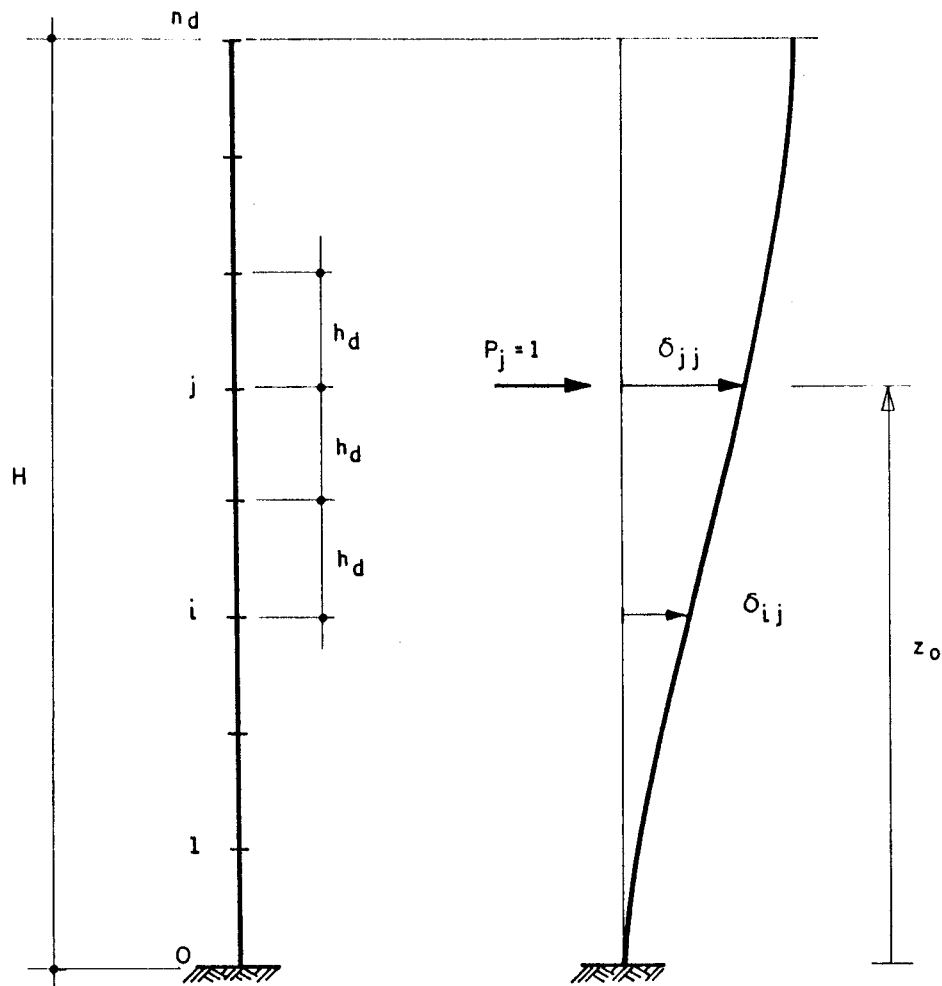


FIG. 5.2 - Discretização do modelo contínuo

onde (FIG.5.4):

$$\bar{z} = z - z_0$$

$$Q_{f0}^c = k_3 \frac{(2z_0 - z)z}{2}$$

$$Q_{fu}^c = k_3 \frac{z_0^2}{2}$$

$$z_u = H - z_0$$

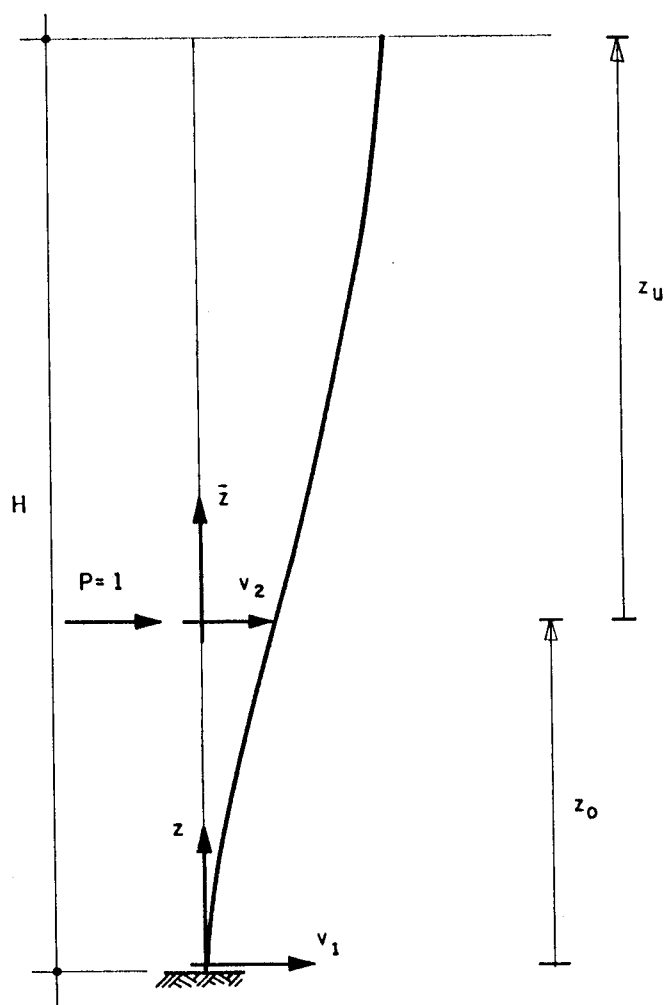


FIG. 5.3 - Domínios das funções $v_1(z)$ e $v_2(\bar{z})$

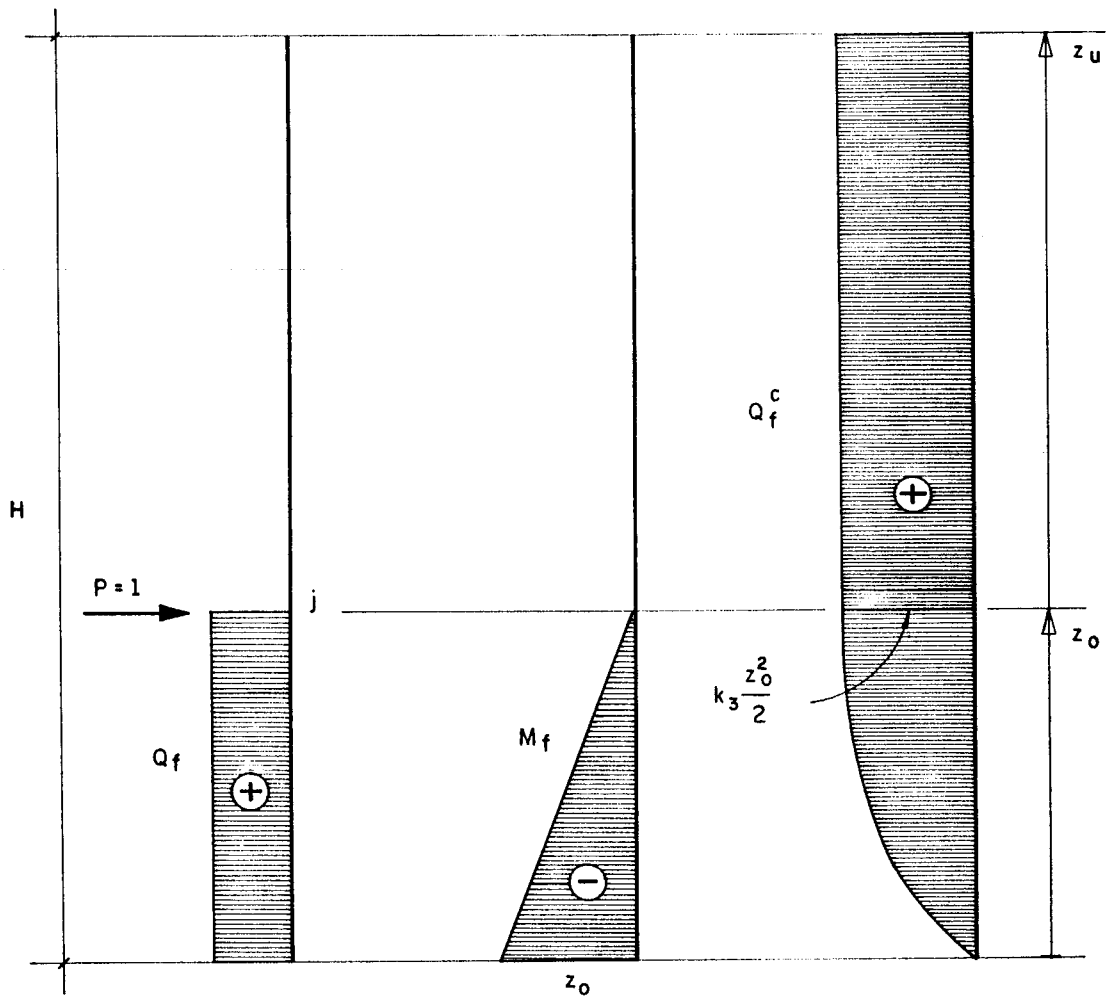


FIG. 5.4 - Esforço cortante, Q_f , e esforço cortante complementar, Q_f^c

as condições de contorno e compatibilidade ficam:

$$v_1(0) = 0$$

$$v_1'(0) = 0$$

$$v_1''(z_0) = v_2''(0)$$

$$v_2(0) = v_1(z_0)$$

$$v_2'(0) = v_1'(z_0)$$

$$v_2''(z_u) = 0$$

e as soluções gerais resultam:

$$v_1(z) = \alpha_1^0 e^{\lambda_f z} + \alpha_2^0 e^{-\lambda_f z} + \alpha_3^0 z^3 + \alpha_4^0 z^2 + \alpha_5^0 z + \alpha_6^0$$

$$v_2(\bar{z}) = \alpha_1^u e^{\lambda_f \bar{z}} + \alpha_2^u e^{-\lambda_f \bar{z}} + \alpha_3^u \bar{z} + \alpha_4^u$$
(5.20)

com o qual podem ser determinadas as flexibilidades:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = v_1(z) \quad (5.21)$$

onde

$$z = i h_d$$

$$z_0 = j h_d$$

$$i \leq j$$

Calculando a matriz inversa, obtem-se a matriz de rigidezes M_R e, concentrando a massa nos pontos de discretização (FIG. 5.2), chega-se à equação de equilíbrio dinâmico:

$$[M_a]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [M_R]\{u\} = -[M_a]\{1\} \ddot{u}_g \quad (5.22)$$

onde $[M_R] = [\delta]^{-1}$, a matriz diagonal M_a contém as massas, a matriz C , contém os coeficientes de amortecimento e o vetor u contém os deslocamentos laterais.

Para resolver o sistema de equações diferenciais, faz-se uma transformação de coordenadas com a qual tem-se:

$$\{\ddot{u}\}^0 + 2\beta[\omega]\{\dot{u}\}^0 + [\omega^2]\{u\} = -\{\gamma\} \ddot{u}_g \quad (5.23)$$

onde

$$\begin{aligned} \{u\} &= [\psi]\{u\}^0 \\ [\omega^2] &= [\psi]^T [M_R] [\psi] \\ [I] &= [\psi]^T [M_a] [\psi] \\ \{\gamma\} &= [\psi]^T [M_a] \{1\} \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde I é a matriz identidade e ψ é a matriz de auto-versores que permite o desacoplamento do sistema. Fazendo a solução espectral, obtém-se as respostas máximas modais:

$$u_j^0 = \frac{-\gamma_j S_{aj}}{\omega_j^2} \quad (5.25)$$

onde S_{aj} é a ordenada espectral correspondente ao período natural $T_i^0 = 2\pi/\omega_j$. Finalmente as respostas máximas prováveis são obtidas mediante combinação (CQC) das máximas modais.

5.2.4. MARCHA DO CÁLCULO

Segundo foi mostrado, a equação dinâmica geral para estruturas planas, submetidas a movimentos sísmicos, pode ser escrita como:

$$k_1 u_f''' - \lambda_f^2 k_1 u_f'' + m \ddot{u}_f = k_3 M_f - m \ddot{u}_g$$

onde o termo $k_3 M_f$ provem das deformações axiais das colunas e \ddot{u}_g é a aceleração da base da estrutura.

A solução espectral, para painéis de colunas inextensíveis ($k_3=0$), pode ser resumida nos seguintes pontos (FIG. 5.5):

- Calcular as constantes características, k_1 e λ_f , e a massa distribuída, m , da estrutura.
- Determinar as constantes ω_j mediante a equação transcendental seguinte:

$$\frac{\lambda_f^4 + 2\beta_1^2 \beta_2^2}{2\beta_1^2 \beta_2^2} \cosh\beta_1 H \cos\beta_2 H + \frac{\lambda_f^2}{2\beta_1 \beta_2} \sinh\beta_1 H \sen\beta_2 H = -1$$

onde

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\lambda_f^2}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_f^4}{4} + \frac{m \omega^2}{k_1}}}$$

e

$$\beta_2 = \sqrt{\beta_1^2 - \lambda_f^2}$$

para cada solução ω_j existirão duas constantes correspondentes β_{1j} e β_{2j} .

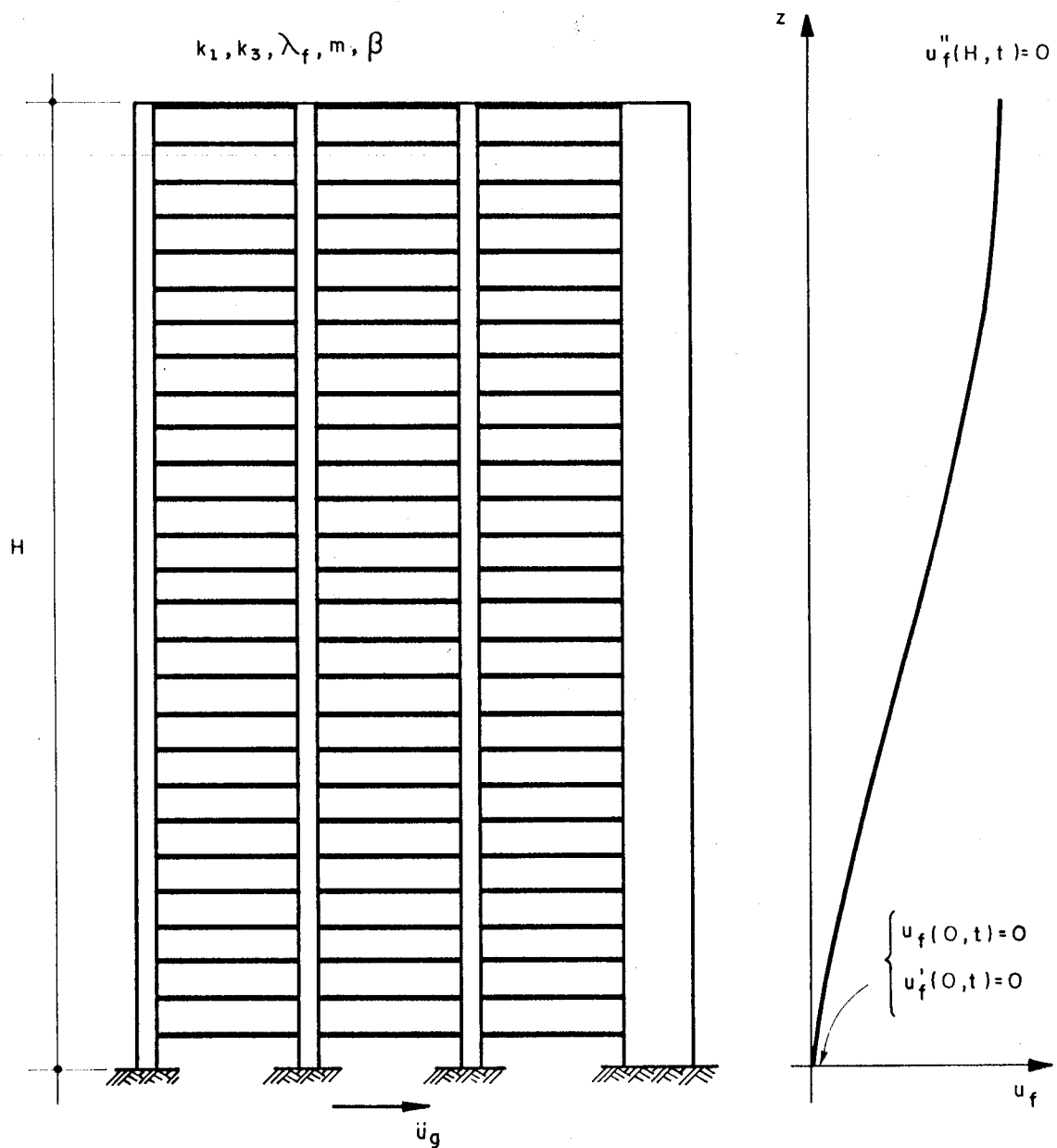


FIG. 5.5 - Modelo contínuo para estruturas planas

c) Calcular as constantes correspondentes às funções $V_j(z)$, para o qual utilizam-se as seguintes equações:

$$A_j = \frac{-(\beta_{1j} \sinh \beta_{1j} H + \beta_{2j} \operatorname{sen} \beta_{2j} H)}{\beta_{1j}^2 \cosh \beta_{1j} H + \beta_{2j}^2 \cos \beta_{2j} H} \beta_{2j}$$

$$B_j = \frac{\beta_{2j}}{\beta_{1j}}$$

$$C_j = -A_j$$

$$D_j = -1$$

$$V_j(z) = A_j \cosh \beta_{1j} z + B_j \sinh \beta_{1j} z + C_j \cos \beta_{2j} z + D_j \operatorname{sen} \beta_{2j} z$$

d) Determinar as massas modais e os fatores de participação, M_j^* e γ_j , respectivamente:

$$M_j^* = m \int_0^H V_j^2 dz$$

$$\gamma_j = \frac{m}{M_j^*} \int_0^H V_j dz$$

e) Ler as acelerações espectrais, S_{aj} , correspondente aos períodos naturais, $T_j^0 = 2\pi/\omega_j$, e calcular as incógnitas G_j mediante a equação:

$$G_j = \frac{\gamma_j S_{aj}}{\omega_j^2}$$

f) Calcular as funções de máximas deformações

$$u_j(z) = V_j(z) G_j$$

g) Fazer a combinação quadrática completa (CQC)

$$u^q = \sqrt{\sum_i \sum_j u_i \rho_{ij} u_j}$$

onde

$$\rho_{ij} = \frac{8\beta^2(1+r)r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4\beta^2r(1+r)^2}$$

e onde $r = \omega_j/\omega_i$ e β é a razão de amortecimento.

h) Calcular as funções de força cortante equivalente máxima:

$$Q_j = -k_1 u_j'' + \lambda_r^2 k_1 u_j'$$

i) Fazer a combinação quadrática completa (CQC):

$$Q^q = \sqrt{\sum_i \sum_j Q_i \rho_{ij} Q_j}$$

sendo ρ_{ij} o mesmo calculado no item g.

Por outro lado, se o painel tiver deformações axiais importantes nas colunas, $k_3 \neq 0$, a solução espectral poderá ser obtida mediante o seguinte formulário (FIG. 5.5):

- a) Calcular as características, k_1 , k_3 e λ_f ; e a massa distribuída, m , da estrutura.
- b) Dividir a estrutura em um número, n_d , de partes iguais, de altura h_d , e calcular a matriz de flexibilidade mediante a equação:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = v_1(z)$$

onde (FIG. 5.6):

$$j = \{1, 2, \dots, n_d\}$$

$$i \leq j$$

$$z = i h_d$$

$$z_0 = j h_d$$

$$z_u = H - z_0$$

$$v_1(z) = \alpha_1 e^{\lambda_f z} + \alpha_2 e^{-\lambda_f z} + \alpha_3 z^3 + \alpha_4 z^2 + \alpha_5 z + \alpha_6$$

onde

$$\alpha_3 = \frac{-k_3}{6k_1 \lambda_f^2}$$

$$\alpha_4 = \frac{k_3 z_0}{2k_1 \lambda_f^2}$$

$$\alpha_5 = \frac{(1+6k_1 \alpha_3)}{k_1 \lambda_f^2}$$

$$\alpha_1 = \left(\frac{-(e^{-\lambda_f z_0} - 2dd_2)\alpha_5}{dd_3 \lambda_f} - \frac{(d_1 - dd_2)\xi_1}{dd_1 d_3 \lambda_f^2} - \frac{d_2 \xi_3}{\lambda_f} \right) d$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{(e^{\lambda_f z_0} + 2dd_2)\alpha_5}{dd_3 \lambda_f} - \frac{(d_1 - dd_2)\xi_1}{dd_1 d_3 \lambda_f^2} - \frac{d_2 \xi_3}{\lambda_f} \right) d$$

$$\alpha_6 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$d = \frac{1}{2(e^{\lambda_f H} + e^{-\lambda_f H})}$$

$$d_1 = \frac{1}{(e^{\lambda_f z_0} - e^{-\lambda_f z_0})}$$

$$d_2 = (e^{\lambda_f z_u} - e^{-\lambda_f z_u})$$

$$d_3 = (e^{\lambda_f z_0} + e^{-\lambda_f z_0})$$

$$\xi_1 = 6\alpha_3 z_0 + 2\alpha_4$$

$$\xi_3 = 3\alpha_3 z_0^2 + 2\alpha_4 z_0 + \alpha_5 - \frac{k_3 z_0^2}{4k_1}$$

A matriz δ é quadrada de ordem n_d .

c) Montar a matriz de massas, M_a , a qual é diagonal e de ordem n_d .

$$[M_a] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} m h_d$$

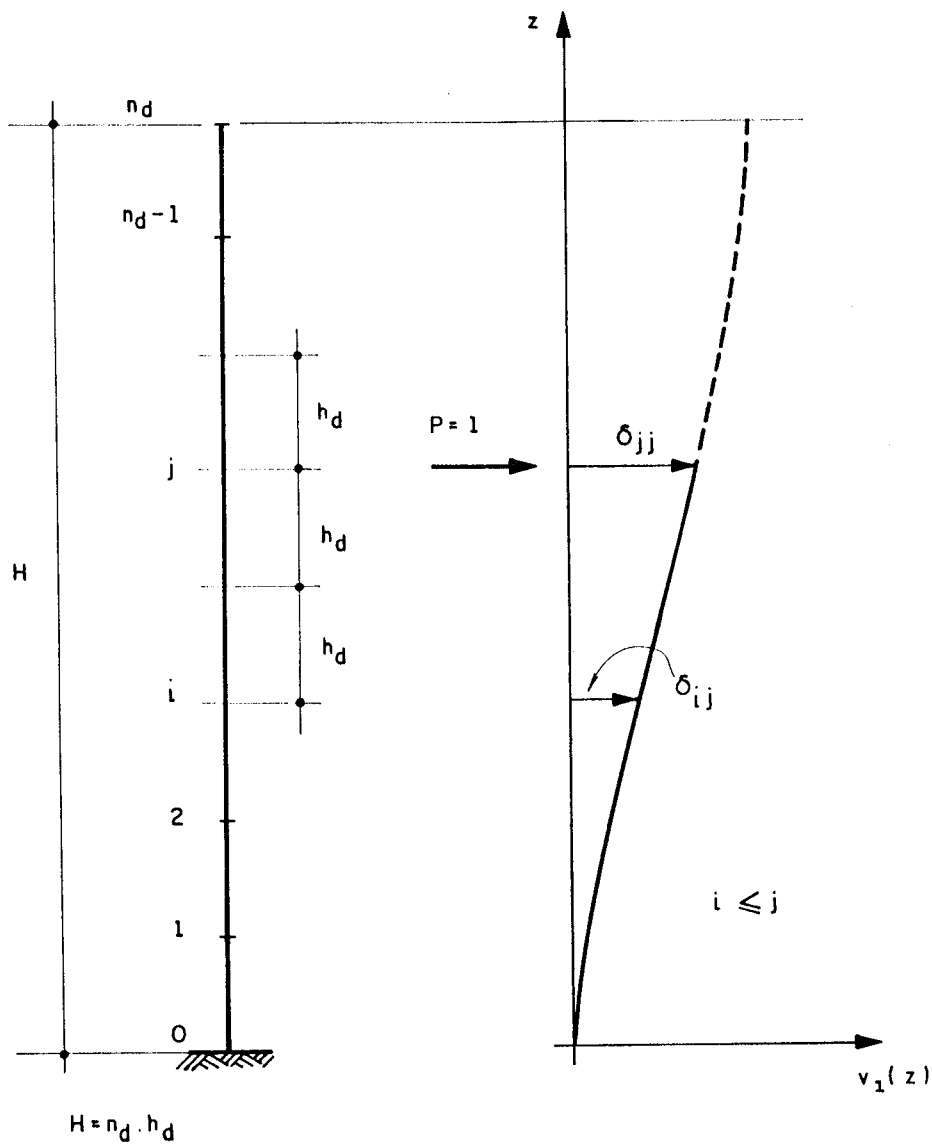


FIG. 5.6 - Esquema da análise de flexibilidade

- d) Calcular a matriz de auto-versores ψ e os auto-valores ω^2 , de maneira que:

$$[\psi]^T [M_R][\psi] = [\omega^2]$$

e

$$[\psi]^T [M_a][\psi] = [I]$$

- e) Calcular as frequências naturais, ω_j , os fatores de participação, γ_j , e os períodos naturais de vibração, T_j^0 :

$$\{\gamma\} = [\psi]^T [M_a] \{1\}$$

$$T_j^0 = \frac{2\pi}{\omega_j}$$

- f) Determinar as acelerações espectrais, S_{a_j} , correspondentes aos períodos naturais de vibração, T_j^0 , e calcular os deslocamentos máximos, u_j^m :

$$u_j^0 = \frac{-\gamma_j (S_a)_j}{\omega_j^2}$$

$$\{u\}_j^m = \{\psi\}_j u_j^0$$

onde o vetor u_j^m , correspondente ao modo j , contém um número de elementos igual a n_d .

- g) Calcular a combinação quadrática completa (CQC) dos máximos modais u_j^m :

$$u_k^q = \sqrt{\sum_i \sum_j u_{ki}^m \rho_{ij} u_{kj}^m}$$

onde

$$\rho_{ij} = \frac{8\beta^2(1+r)r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4\beta^2r(1+r)^2}$$

e onde $r = \omega_j/\omega_i$, β é a razão de amortecimento, k identifica à componente do vetor, e, i e j identificam aos modos de vibração.

h) Calcular as forças máximas modais e as forças sísmicas equivalentes

$$\{F\}_j^m = [M_R] \{u\}_j^m$$

$$F_k^q = \sqrt{\sum_i \sum_j F_{ki}^m \rho_{ij} F_{kj}^m}$$

sendo ρ_{ij} , o mesmo calculado no item 9.

5.3. ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS

5.3.1. FORMULAÇÃO GERAL

A equação de equilíbrio dinâmico, para estruturas tridimensionais submetidas a efeitos sísmicos, pode ser expressa como:

$$[T]\{u''''\} - [S]\{u''\} + [M_a]\{\ddot{u}\} = -\{B_g\}\ddot{U}_g - \{F'_c\} \quad (5.26)$$

onde

$$[M_a] = [R_m]^T [M_a^m] [R_m]$$

$$\{B_g\} = [R_m]^T [M_a^m] \{B_g^m\}$$

$$[M_a^m] = \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & I_p \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$\{B_g^m\}^T = \{\cos \pi_g, \text{sen } \pi_g, 0\}$$

$$[R_m] = \begin{bmatrix} 1 & & -y_m \\ & 1 & x_m \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

onde m é a massa uniformemente distribuída do edifício, I_p é a inércia polar distribuída, π_g é o ângulo de incidência da aceleração sísmica \ddot{U}_g aplicada à base (FIG. 5.7), R_m é a matriz de transformação de coordenadas entre os sistemas localizados no centro de massas CM e a origem arbitrária 0 e, finalmente, as matrizes T e S são as mesmas apresentadas no capítulo 4 e o vetor u contém as funções de deslocamento da estrutura (FIG. 5.7).

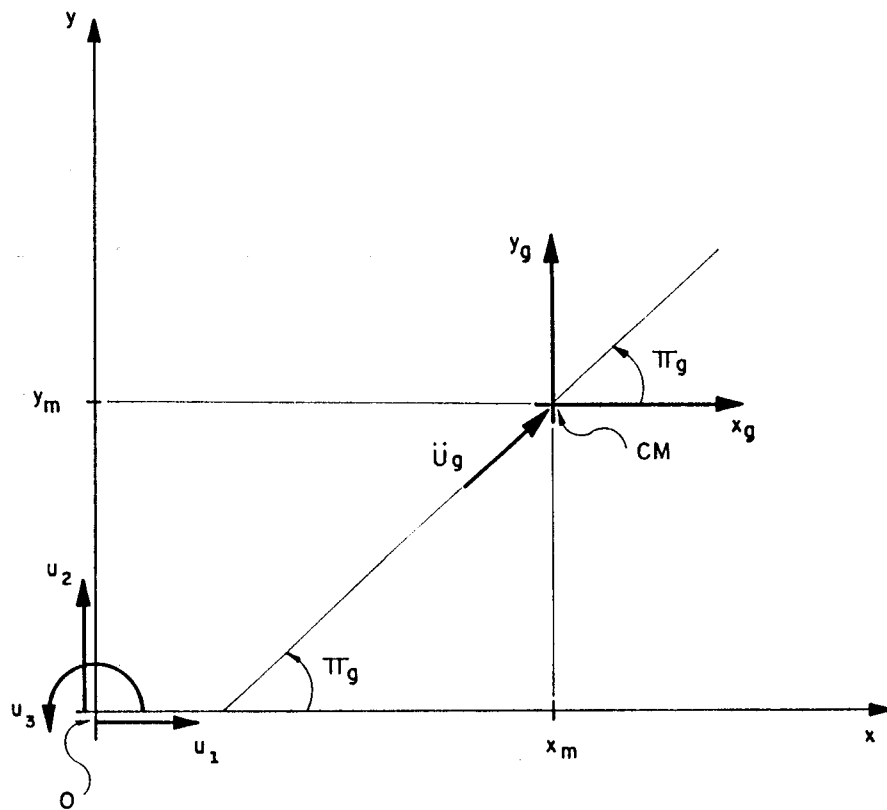


FIG. 5.7 - Localização do centro de massas
no sistema arbitrário xyz

Visando o desacoplamento do sistema de equações, são realizadas as mesmas transformações de coordenadas apresentadas no capítulo 4, desta maneira, o sistema fica:

$$\{u''''\}^{**} - [\lambda^2]\{u''\}^{**} + [M_a]^{**}\{\ddot{u}\}^{**} = -\{B_g\}^{**} \ddot{U}_g - \{F'_c\}^{**} \quad (5.28)$$

onde

$$\begin{aligned}
[M_a]^{**} &= [R_a]^T [M_a] [R_a] \\
\{B_g\}^{**} &= [R_a]^T \{B_g\} \\
\{F'_c\}^{**} &= [R_a]^T \{F'_c\} \\
[R_a] &= [R_e] [R_g]
\end{aligned}
\tag{5.29}$$

sendo os outros termos os mesmos já apresentados no capítulo anterior. Observa-se que, de maneira geral, este sistema tem acoplamento dinâmico, portanto, faz-se necessária uma nova transformação:

$$\{u\}^{**} = [R_v] \{u\}^0 \tag{5.30}$$

onde R_v contém os auto-versores da matriz M_a^{**} . Com esta nova operação, o sistema resulta:

$$\{u''''\}^0 - [S]^0 \{u''\}^0 + [\Omega^2] \{\ddot{u}\}^0 = -\{B_g\}^0 \ddot{U}_g - \{F'_c\}^0 \tag{5.31}$$

onde

$$\begin{aligned}
[S]^0 &= [R_v]^T [\lambda^2] [R_v] \\
\{B_g\}^0 &= [R_v]^T \{B_g\}^{**} \\
\{F'_c\}^0 &= [R_v]^T \{F'_c\}^{**}
\end{aligned}
\tag{5.32}$$

observa-se que a matriz Ω^2 é diagonal e contém os auto-valores da matriz M_a^{**} . É importante ressaltar que a matriz M_a é de diagonal

dominante, portanto, as matrizes R_v e S^0 também são de diagonal dominante; esta característica é aproveitada na solução que se apresenta na continuação.

A matriz S^0 pode ser decomposta em duas matrizes S_1 e S_2 , de tal maneira que

$$[S]^0 = [S_1] + [S_2] \quad (5.33)$$

onde:

$$[S_1] = \begin{bmatrix} S_{11}^0 & & \\ & S_{22}^0 & \\ & & S_{33}^0 \end{bmatrix}$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12}^0 & S_{13}^0 \\ S_{21}^0 & 0 & S_{23}^0 \\ S_{31}^0 & S_{32}^0 & 0 \end{bmatrix}$$

e substituindo estas matrizes na equação de equilíbrio dinâmico, resulta:

$$\{u''''\}^0 - [S_1]\{u''\}^0 + [\Omega^2]\{\ddot{u}\}^0 = \{q_\ell\} \quad (5.34)$$

onde

$$\{q_\ell\} = -\{B_g\}^0 \ddot{U}_g - \{F'_c\}^0 + [S_2]\{u''\}^0 \quad (5.35)$$

e onde os termos $\{F_c'\}^0$ e $[S_2]\{u''\}^0$ podem ser considerados como pseudo-forças, tal como apresentado na análise de estruturas planas.

O sistema homogêneo de equações, já desacoplado, pode ser escrito como:

$$\{u''''\}^0 - [S_1]\{u''\}^0 + [\Omega^2]\{\ddot{u}\}^0 = \{0\} \quad (5.36)$$

e, a solução geral, utilizando a superposição modal, escreve-se:

$$\{u\}^0 = \sum_{j=1}^{\infty} [V]_j \{G\}_j \quad (5.37)$$

onde

$$[V]_j = \begin{bmatrix} V_{1j} & & \\ & V_{2j} & \\ & & V_{3j} \end{bmatrix}$$

$$\{G\}_j^T = \{G_{1j}, G_{2j}, G_{3j}\}$$

observa-se que as funções $V_{ij}(z)$ são calculadas da mesma maneira que no caso de estruturas planas, já para o caso das funções $G_{ij}(t)$, é possível escrever:

$$\{\ddot{G}\}_j + 2\beta [\bar{\Omega}]_j \{\dot{G}\}_j + [\bar{\Omega}^2]_j \{G\}_j = \{q_\ell\}^0 \quad (5.38)$$

onde β é a razão de amortecimento, $\bar{\Omega}_{ij}$ são as frequências naturais de vibração as quais podem ser calculadas a partir de:

$$[\bar{\Omega}^2]_j = [\Omega^2]^{-1} [\omega^2]_j \quad (5.39)$$

continuando, o vetor q_ℓ^0 pode ser escrito como:

$$\{q_\ell\}^0 = -\{\gamma\}_j \bar{U}_g - \{\gamma^c\}_j + \{\gamma^0\}_j \quad (5.40)$$

onde

$$\{\gamma\}_j = [\Gamma]_j \int_0^H [V]_j dz \{B_g\}^0$$

$$\{\gamma^c\}_j = [\Gamma]_j \int_0^H [V]_j \{F'_c\}^0 dz$$

$$\{\gamma^0\}_j = [\Gamma]_j \int_0^H [V]_j [S_2] \{u''\}^0 dz$$

$$[\Gamma]_j = [\Omega^2]^{-1} \left[\int_0^H [V]_j^2 dz \right]^{-1}$$

A solução das funções G_{1j} pode ser obtida iterativamente e aplicando o método das pseudo-forças, da mesma forma apresentada na análise das estruturas planas, para o qual utiliza-se a equação seguinte:

$$\begin{aligned} \{\ddot{G}\}_j^k + 2\beta [\bar{\Omega}]_j \{\dot{G}\}_j^k + [\bar{\Omega}^2]_j \{G\}_j^k = -\{\gamma\}_j \ddot{U}_g + \\ - \{\gamma^c\}_j^{k-1} + \{\gamma^0\}_j^{k-1} \end{aligned} \quad (5.41)$$

para o tempo $(t+\Delta t)$, $k=\{1, 2, 3, \dots, n\}$ e, fazendo uma extrapolação linear a partir da última configuração de equilíbrio:

$$\left(\{\gamma^c\}_j^0\right)_{t+\Delta t} = \left(\{\gamma^c\}_j^n\right)_t + \Delta t \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\{\gamma^c\}_j^n\right) \Big|_{\tau=t}$$

$$\left(\{\gamma^0\}_j^0\right)_{t+\Delta t} = \left(\{\gamma^0\}_j^n\right)_t + \Delta t \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\{\gamma^0\}_j^n\right) \Big|_{\tau=t}$$

Finalmente, as funções dos deslocamentos dos centros de massas do edifício resultam:

$$\{u\}^m = [R_f] \{u\}^0 \quad (5.42)$$

onde $[R_f] = [R_m] [R_a] [R_v]$ é a matriz de transformação de coordenadas.

5.3.2. ANÁLISE ESPECTRAL DE ESTRUTURAS COM COLUNAS INEXTENSÍVEIS

No caso de se considerar desprezíveis as deformações axiais das colunas, o vetor F'_c se anula; por outro lado, a matriz S^0 geralmente é de diagonal fortemente dominante, por causa das transformações geométricas realizadas, sendo assim, os elementos não diagonais da matriz S^0 são desprezíveis quando comparados com os termos da diagonal, em cujo caso, a matriz S_2 pode ser

considerada nula.

Nestas condições, as equações diferenciais das funções $G_{ij}(t)$ podem ser escritas como:

$$\{\ddot{G}\}_j + 2\beta [\bar{\Omega}]_j \{\dot{G}\}_j + [\bar{\Omega}^2]_j \{G\}_j = -\{\gamma\}_j \ddot{U}_g \quad (5.43)$$

cujas soluções podem ser expressas em função da integral de Duhamel:

$$G_{ij}(t) = -\gamma_{ij} e_{ij} \quad (5.44)$$

onde

$$e_{ij} = \frac{1}{\Omega_{ij}^*} \int_0^t \ddot{U}_g(\tau) \exp[-\beta \bar{\Omega}_{ij}(t-\tau)] \text{sen}[\Omega_{ij}^*(t-\tau)] d\tau$$

$$\Omega_{ij}^* = \bar{\Omega}_{ij} \sqrt{1 - \beta^2}$$

e em função das acelerações espectrais é possível escrever:

$$G_{ij} = \frac{\gamma_{ij} S_{aij}}{\bar{\Omega}_{ij}^2} \quad (5.45)$$

onde S_{aij} é a ordenada espectral correspondente ao período natural $T_{ij}^0 = 2\pi/\bar{\Omega}_{ij}$.

As funções de máximos deslocamentos modais dos centros de massas ficam:

$$\{u\}_j^m = [R_r] [V]_j \{G\}_j \quad (5.46)$$

e, mediante um critério de combinação, calculam-se os máximos prováveis.

5.3.3. ANÁLISE ESPECTRAL GERAL

No caso da estrutura ter deformações axiais importantes nas colunas, ou a matriz $[S_2]$ não ser desprezível, a solução pode ser obtida por discretização do meio contínuo, para o qual a estrutura é dividida em partes de igual altura mediante planos horizontais (planos de discretização), conforme mostra a figura 5.8.

Na continuação calcula-se a matriz de flexibilidade δ , de maneira análoga à utilizada no estudo correspondente às estruturas planas, para isto, utilizam-se as equações seguintes:

$$-\{v_1''(z)\} + [\lambda^2]\{v_1'(z)\} = \{P_a\} + \{F_0^c\}^{**} \quad \text{para } 0 \leq z \leq z_0 \quad (5.47)$$

$$-\{v_2''(\bar{z})\} + [\lambda^2]\{v_2'(\bar{z})\} = \{F_u^c\}^{**} \quad \text{para } 0 \leq \bar{z} \leq z_u$$

onde $\bar{z} = z - z_0$, P_a é um vetor que permite definir a direção de aplicação da carga unitária e, as condições de contorno e compatibilidade ficam definidas por:

$$\{v_1(0)\} = \{0\}$$

$$\{v_1'(0)\} = \{0\}$$

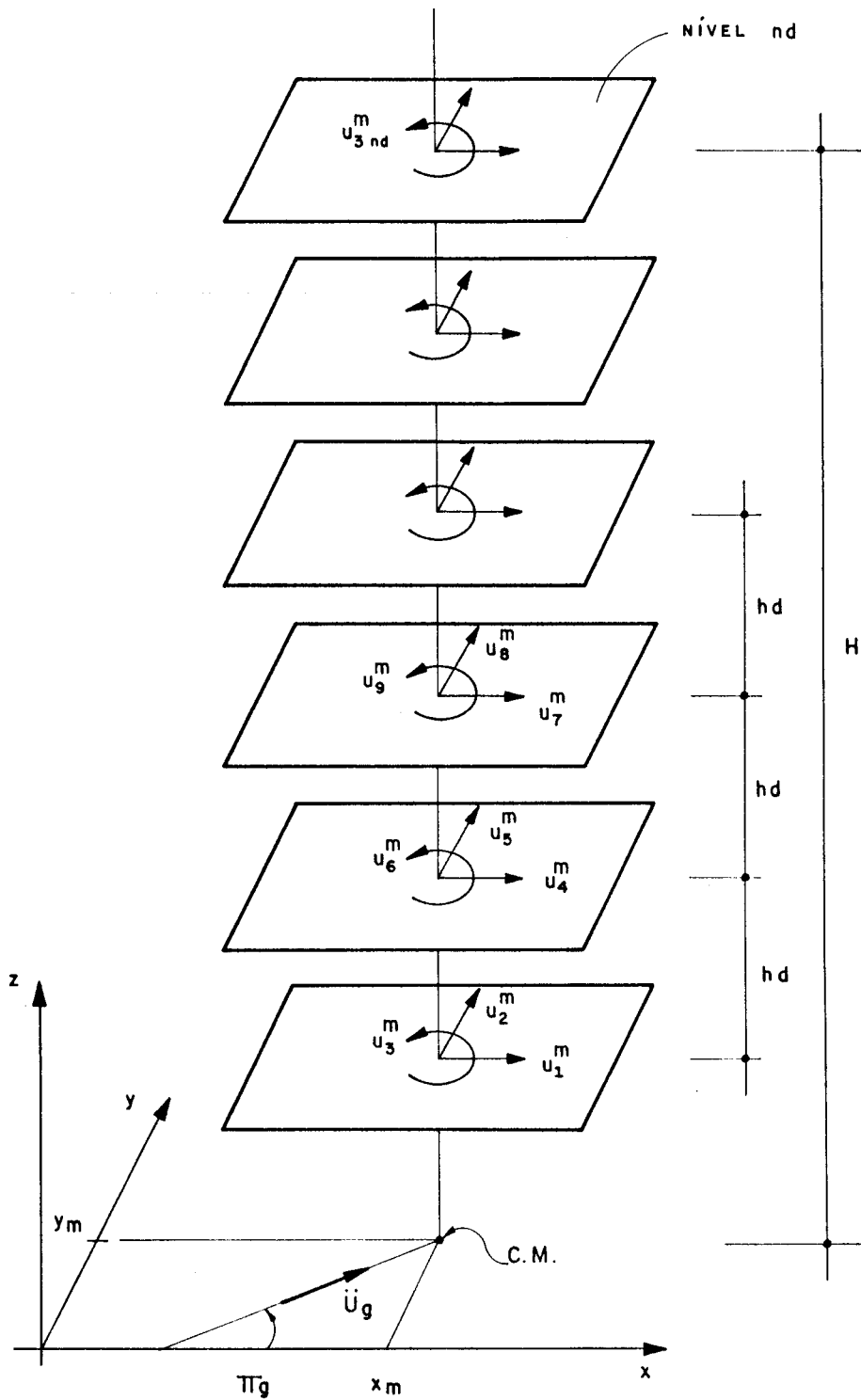


FIG. 5.8 - Esquema de deslocamentos dos planos de discretização

$$\{v_1''(z_0)\} = \{v_2''(0)\}$$

$$\{v_2(0)\} = \{v_1(z_0)\}$$

$$\{v_2'(0)\} = \{v_1'(z_0)\}$$

$$\{v_2''(z_u)\} = \{0\}$$

onde $z_u = H - z_0$, sendo z_0 o nível de aplicação da carga unitária; entretanto, as funções de cortante complementar ficam:

$$\{F_0^c\} = [R_a]^T \sum_i (\{A\} Q_{f_0}^c)_i \quad (5.48)$$

$$\{F_u^c\} = [R_a]^T \sum_i (\{A\} Q_{f_u}^c)_i$$

onde, para cada painel i , têm-se:

$$Q_{f_0}^c - \frac{1}{k_3} (Q_{f_0}^c)'' = \{\phi\}^T (-k_1 \{v_1''\} + \lambda_f^2 k_1 \{v_1'\}) \quad (5.49)$$

$$Q_{f_u}^c - \frac{1}{k_3} (Q_{f_u}^c)'' = \{\phi\}^T (-k_1 \{v_2''\} + \lambda_f^2 k_1 \{v_2'\})$$

onde $\{\phi\}^T = \{A\}^T [R_a]$ e as condições de contorno e compatibilidade correspondente ficam:

$$Q_{f_u}^c(0) = Q_{f_0}^c(z_0)$$

$$\frac{d}{dz} Q_{f_u}^c(z_u) = 0$$

$$Q_{f_0}^c(0) = 0$$

$$\frac{d}{dz} Q_{r_u}^c(0) = \frac{d}{dz} Q_{r_0}^c(z_0)$$

observa-se que a solução é iterativa. A forma geral das funções $v_1(z)$, escreve-se:

$$v_{1i} = \alpha_{1i} e^{\lambda_i z} + \alpha_{2i} e^{-\lambda_i z} + \alpha_{3i} z^5 + \alpha_{4i} z^4 + \alpha_{5i} z^3 + \alpha_{6i} z^2 + \alpha_{7i} z + \alpha_{8i} \quad (5.50)$$

e as flexibilidades ficam:

$$\delta_{ij}^{**} = \delta_{ji}^{**} = v_{1k}(z) \quad (5.51)$$

Entretanto, a matriz de flexibilidade pode ser escrita, em relação aos centros de massas, como sendo:

$$[\delta]^m = [M_{tr}^s][\delta]^{**}[M_{tr}^s]^T \quad (5.52)$$

onde

$$[M_{tr}^s] = \begin{bmatrix} [M_{tr}] & & & & & & & & \\ & [M_{tr}] & & & & & & & \\ & & [M_{tr}] & & & & & & \\ & & & [M_{tr}] & & & & & \\ & & & & [M_{tr}] & & & & \\ & & & & & [M_{tr}] & & & \\ & & & & & & [M_{tr}] & & \\ & & & & & & & [M_{tr}] & \\ & & & & & & & & [M_{tr}] \end{bmatrix}$$

$$[M_{tr}] = [R_m] [R_a] \quad (5.53)$$

A equação de equilíbrio dinâmico da estrutura pode ser escrita como:

$$[M]^m \{\ddot{u}\}^m + [C]^m \{\dot{u}\}^m + [M_R]^m \{u\}^m = -[M]^m \{B\}^m \ddot{u}_g \quad (5.54)$$

onde o super-índice m indica que a equação está referida aos centros de massas do edifício, e onde:

$$[M]^m = \begin{bmatrix} [M_a]^m & & & & \\ & [M_a]^m & & & \\ & & [M_a]^m & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [M_a]^m \end{bmatrix}$$

$$\{B^m\}^T = \{B_g^m, B_g^m, \dots, B_g^m\}$$

e a matriz C contém os coeficientes de amortecimento (proporcional à matriz de rigidez).

Para resolver o problema faz-se necessária a seguinte transformação de coordenadas

$$\{u\}^m = [\psi] \{u\}^0 \quad (5.55)$$

onde a matriz ψ contém os auto-versores que desacoplam o sistema, com tal transformação, resulta:

$$\{\ddot{u}\}^0 + 2\beta[\omega] \{\dot{u}\}^0 + [\omega^2] \{u\}^0 = -\{\gamma\} \ddot{u}_g \quad (5.56)$$

onde, os fatores de participação γ , ficam

$$\{\gamma\} = [\psi]^T \{B\}^m \quad (5.57)$$

e as soluções, em função da integral de Duhamel, resultam:

$$u_j^0 = -\gamma_j e_j \quad (5.58)$$

onde

$$e_j = \frac{1}{\omega_j^*} \int_0^t \ddot{U}_g(\tau) \exp[-\beta\omega_j(t-\tau)] \text{sen}[\omega_j^*(t-\tau)] d\tau$$

$$\omega_j^* = \omega_j \sqrt{1 - \beta^2}$$

Finalmente, em função das acelerações espectrais correspondentes aos períodos naturais $T_j^0 = 2\pi/\omega_j$, as soluções ficam:

$$u_j^0 = -\frac{\gamma_j S_{aj}}{\omega_j^2} \quad (5.59)$$

os deslocamentos máximos modais resultam:

$$\{u\}_j^m = \{\psi\}_j u_j^0 \quad (5.60)$$

e, mediante a combinação modal (CQC), chega-se aos máximos prováveis.

5.3.4. MARCHA DO CÁLCULO

Tomando como ponto de partida o sistema estático, é possível escrever:

$$-\{u'''\}^{**} + [\lambda^2] \{u'\}^{**} = \{0\}$$

assim, a montagem da equação de equilíbrio dinâmico e sua solução espectral, para estruturas com colunas inextensíveis, podem ser analisadas nos seguintes pontos:

a) Determinar a matriz de massas referida ao C.M.

$$[M_a]^m = \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & I_p \end{bmatrix}$$

onde m é a massa distribuída do edifício e I_p a inércia das lajes, também distribuída.

b) Determinar a matriz de transformação R_m

$$[R_m] = \begin{bmatrix} 1 & & -y_m \\ & 1 & x_m \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

onde x_m e y_m são as coordenadas do eixo dos centros de massas, no plano xy do sistema arbitrário de referência xyz (FIG. 5.9).

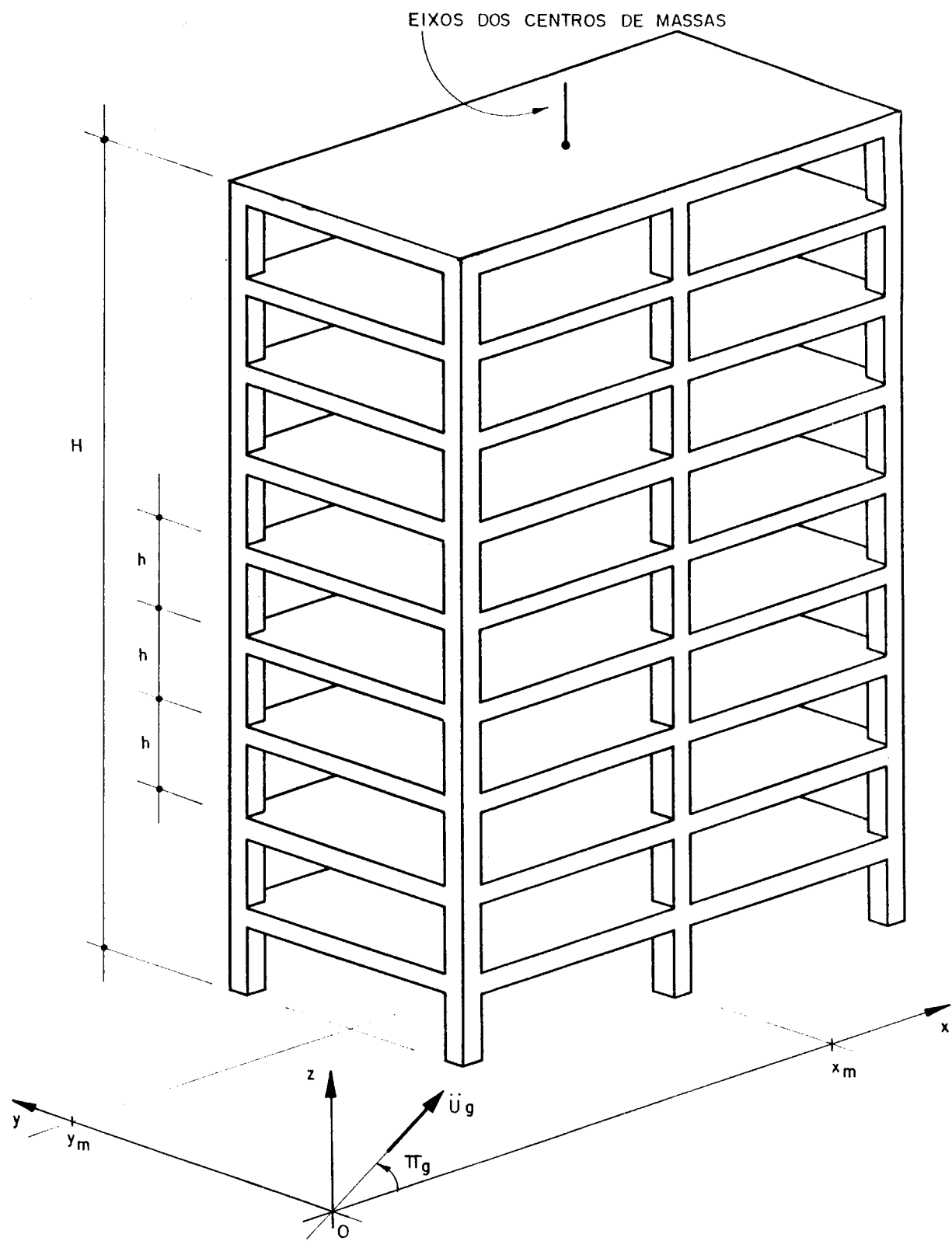


FIG. 5.9 - Estrutura tridimensional

c) Calcular a matriz de trabalho M_{tr}

$$[M_{tr}] = [R_m] [R_e] [R_g]$$

d) Calcular a matriz de massas $**$

$$[M_a]** = [M_{tr}]^T [M_a]^m [M_{tr}]$$

e) Calcular os auto-valores e os auto-versores da matriz M_a^{**}

$[\Omega^2]$: matriz diagonal de auto-valores

$[R_v]$: auto-versores

f) Calcular a matriz S^0 e suas componentes S_1 e S_2 :

$$[S]^0 = [R_v]^T [\lambda^2] [R_v]$$

e

$$[S]^0 = [S_1] + [S_2]$$

onde

$$[S_1] = \begin{bmatrix} S_{11}^0 & & \\ & S_{22}^0 & \\ & & S_{33}^0 \end{bmatrix}$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12}^0 & S_{13}^0 \\ S_{21}^0 & 0 & S_{23}^0 \\ S_{31}^0 & S_{32}^0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja o vetor S_d tal que:

$$\{S_d\}^T = \left\{ \sqrt{S_{11}^0}, \sqrt{S_{22}^0}, \sqrt{S_{33}^0} \right\}$$

g) Calcular a matriz de transformação R_f

$$[R_f] = [M_{tr}] [R_v]$$

h) Calcular os coeficientes da aceleração da base (FIG. 5.9):

$$\{B_g\}^m = \begin{Bmatrix} \cos \pi_g \\ \text{sen } \pi_g \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e

$$\{B_g\}^0 = [R_f]^T [M_a]^m \{B_g\}^m$$

assim, a equação de equilíbrio dinâmico fica:

$$\{u'''\}^0 - [S_1]\{u''\}^0 + [\Omega^2]\{\ddot{u}\}^0 = -\{B_g\}^0 \ddot{U}_g$$

i) Calcular as funções V_{ij} mediante a equação transcendental dada por:

$$\frac{(S_{di})^4 + 2\beta_{1ij}^2 \beta_{2ij}^2}{2\beta_{1ij}^2 \beta_{2ij}^2} \cosh \beta_{1ij} H \cos \beta_{2ij} H +$$

$$+ \frac{(S_{di})^2}{2\beta_{1ij} \beta_{2ij}} \sinh \beta_{1ij} H \sin \beta_{2ij} H = -1$$

onde

$$\beta_{1ij} = \sqrt{\frac{(S_{di})^2}{2}} + \sqrt{\frac{(S_{di})^4}{4} + \omega_{ij}^2}$$

$$\beta_{2ij} = \sqrt{\beta_{1ij}^2 - (S_{di})^2}$$

a solução desta equação permite obter as constantes ω_{ij} .

As constantes correspondentes às funções $V_{ij}(z)$ ficam:

$$A_{ij} = \frac{-(\beta_{1ij} \sinh \beta_{1ij} H + \beta_{2ij} \sin \beta_{2ij} H)}{\beta_{1ij}^2 \cosh \beta_{1ij} H + \beta_{2ij}^2 \cos \beta_{2ij} H} \beta_{2ij}$$

$$B_{ij} = \frac{\beta_{2ij}}{\beta_{1ij}}$$

$$C_{ij} = -A_{ij}$$

$$D_{ij} = -1$$

e as formas modais resultam:

$$V_{ij} = A_{ij} \cosh \beta_{1ij} z + B_{ij} \sinh \beta_{1ij} z + C_{ij} \cos \beta_{2ij} z + \\ + D_{ij} \sin \beta_{2ij} z$$

onde

$$i = \{1, 2, 3\}$$

$$j = \{1, 2, 3, \dots, \text{inf}, \dots, \infty\}$$

finalmente, é possível montar as matrizes diagonais V:

$$[V]_j = \begin{bmatrix} V_{1j} & & \\ & V_{2j} & \\ & & V_{3j} \end{bmatrix}$$

onde j identifica ao modo de vibração.

j) Calcular as frequência naturais de vibração $\bar{\Omega}_{ij}$:

$$[\bar{\Omega}^2]_j = [\Omega^2]^{-1} [\omega^2]_j$$

as frequências ficam:

$$\bar{\Omega}_{ij} = \frac{\omega_{ij}}{\Omega_i}$$

e os períodos naturais resultam:

$$T_{ij}^0 = \frac{2\pi}{\bar{\Omega}_{ij}}$$

onde o índice i representa a direção principal e o índice j representa ao modo de vibração.

k) Ler as acelerações espectrais, S_a , correspondentes aos períodos naturais, T^0 , e calcular os fatores de participação, γ :

$$\gamma_{ij} = \frac{\int_0^H V_{ij} dz B_{gi}^0}{\Omega_i^2 \int_0^H V_{ij}^2 dz}$$

calcular as incógnitas $\{G\}_j^T = \{G_{1j}, G_{2j}, G_{3j}\}$:

$$G_{ij} = \frac{\gamma_{ij} S_{a1j}}{\Omega_{ij}^2}$$

l) Calcular as funções de máximos deslocamentos, u^m , e de máximos esforços cortantes, F^m :

$$\{u\}_j^m = [R_g] [V]_j \{G\}_j$$

e

$$\{F\}_j^m = -[T]^m \{u''\}_j^m + [S]^m \{u'\}_j^m - \{F_c\}_j^m$$

onde

$$[R_g] = [R_m]^{-1}$$

$$[T]^m = [R_g]^T [T] [R_g]$$

$$[S]^m = [R_g]^T [S] [R_g]$$

e

$$\{F_c\}_j^m = [R_g]^T \{F_c\}_j$$

onde o vetor F_{cj} pode ser calculado, para $\{u\}_j^{**} = [V]_j \{G\}_j$, utilizando a formulação apresentada no apêndice D.

m) Calcular os deslocamentos e as forças cortantes máximas prováveis

$$u_k^q = \sqrt{\sum_i^{inf} \sum_j^{inf} u_{ki}^m \rho_{ij} u_{kj}^m}$$

e

$$F_k^q = \sqrt{\sum_i^{inf} \sum_j^{inf} F_{ki}^m \rho_{ij} F_{kj}^m}$$

onde

$$\rho_{ij} = \frac{8\beta^2(1+r) r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4\beta^2 r(1+r)^2}$$

e onde $r = \bar{\Omega}_{kj} / \bar{\Omega}_{ki}$, k identifica à componente, i e j identificam aos modos de vibração e, inf é o número de modos de vibração que estão sendo considerados na análise.

Por outro lado, a análise espectral para o caso geral de estruturas tridimensionais, pode ser realizada seguindo a formulação apresentada na continuação:

a) Dividir a estrutura em um número, n_d , de partes de igual altura, h_d , e calcular a matriz de flexibilidade mediante a equação (FIG. 5.10):

$$\delta_{ij}^{**} = \delta_{ji}^{**} = v_{1k}(z)$$

onde

$$\{v_1\}^T = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$$

$$n_d = \frac{H}{h_d}$$

$$j = \{1, 2, 3, \dots, n_d\}$$

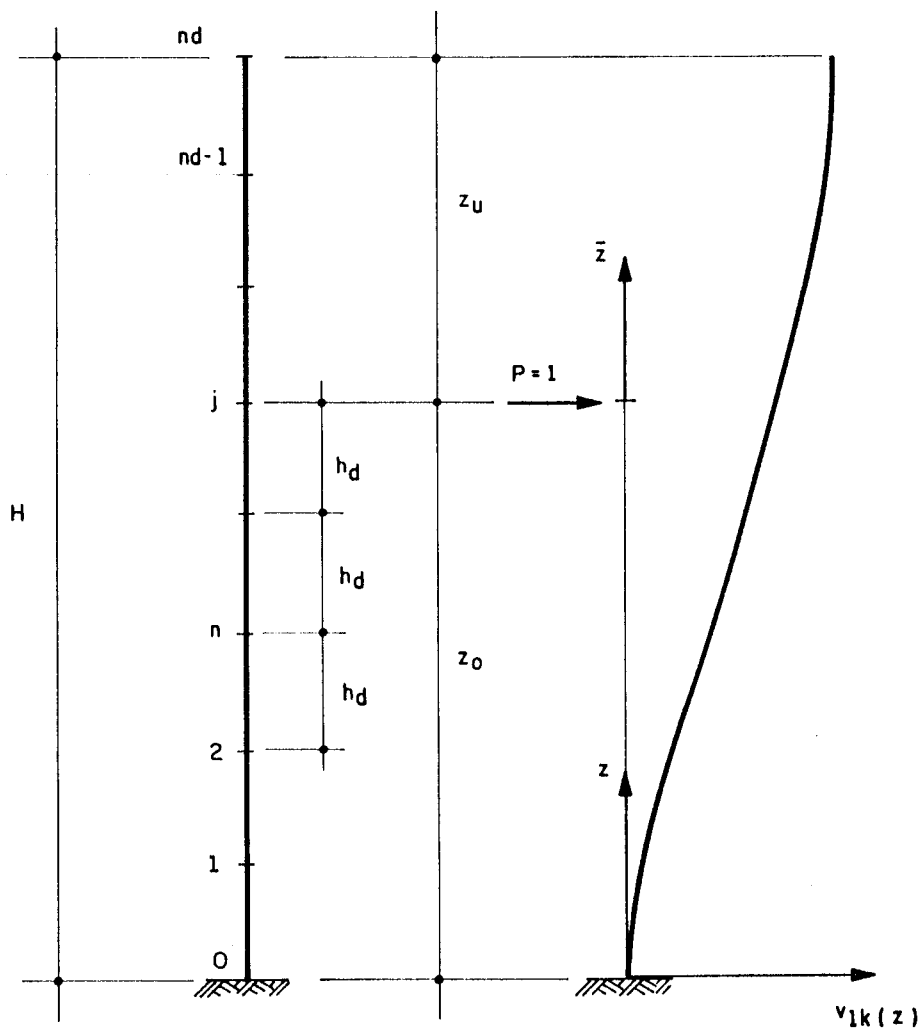


FIG. 5.10 - Esquema para o cálculo da matriz de flexibilidades

$$k = \{1, 2, 3\}$$

$$n = \{1, 2, 3, \dots, j\}$$

$$i = 3(n-1) + k$$

$$z_0 = j h_d$$

$$z_u = H - z_0$$

$$z = n h_d$$

e onde, as funções v_{ik} são calculadas mediante a formulação apresentada no apêndice E e, cuja equação diferencial pode ser expressa como

$$-\{v''_1\} + [\lambda^2]\{v'_1\} = \{P_a\} + \{F_c\}^{**}$$

onde o vetor P_a tem duas componentes nulas e uma unitária na direção considerada. A solução geral é:

$$v_{1k} = \beta_{1k} e^{\lambda k z} + \beta_{2k} e^{-\lambda k z} + \beta_{3k} z^5 + \beta_{4k} z^4 + \beta_{5k} z^3 + \beta_{6k} z^2 +$$

$$+ \beta_{7k} z + \beta_{8k}$$

assim, a matriz de flexibilidade é de ordem $3n_d$.

b) Determinar a matriz de transformação, usando a matriz M_{tr}

$$[M^s_{tr}] = \begin{bmatrix} M_{tr} & & & & & & & & & & & \\ & M_{tr} & & & & & & & & & & \\ & & M_{tr} & & & & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & & & & \\ & & & & & \cdot & & & & & & \\ & & & & & & \cdot & & & & & \\ & & & & & & & M_{tr} & & & & \end{bmatrix} \quad 3n_d$$

c) Calcular a matriz de flexibilidades no sistema de referência correspondente ao eixo dos centros de massas

$$[\delta]^m = [M_{t_r}^g] [\delta]^{**} [M_{t_r}^g]^T$$

d) Calcular as matrizes de massas, M^m , e de distribuição, B^m , utilizando as matrizes M_a^m e B_g^m :

$$[M]^m = \begin{bmatrix} M_a^m & & & & & & & & \\ & M_a^m & & & & & & & \\ & & M_a^m & & & & & & \\ & & & \dots & & & & & \\ & & & & \dots & & & & \\ & & & & & \dots & & & \\ & & & & & & M_a^m & & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix} 3n_d$$

e

$$\{B^m\}^T = \{B_g^m, B_g^m, B_g^m, \dots\}$$

de ordem $3n_d$.

e) Calcular a matriz de rigidez referida ao C.M.

$$[M_R]^m = [\delta^m]^{-1}$$

f) Calcular os auto-versores, ψ , e os auto-valores, ω^2 , de maneira que

$$[\psi]^T [M_R]^m [\psi] = [\omega^2]$$

e

$$[\psi]^T [M]^m [\psi] = [I]$$

na continuação calculam-se os fatores de participação:

$$\{\gamma\} = [\psi]^T \{B\}^m$$

g) Determinar as acelerações espectrais, S_a , correspondentes aos períodos de vibração, $T_j^0 = 2\pi/\omega_j$, calcular os deslocamentos máximos modais:

$$u_j^0 = \frac{-\gamma_j (S_a)_j}{\omega_j^2}$$

$$\{u\}_j^m = \{\psi\}_j u_j^0$$

e as forças equivalentes máximas modais:

$$\{F\}_j^m = [M_R]^m \{u\}_j^m$$

h) Calcular os deslocamentos e as força equivalentes máximas prováveis.

$$u_k^q = \sqrt{\sum_i^{inf} \sum_j^{inf} u_{ki}^m \rho_{ij} u_{kj}^m}$$

$$F_k^q = \sqrt{\sum_i^{inf} \sum_j^{inf} F_{ki}^m \rho_{ij} F_{kj}^m}$$

onde inf é o número de modos que estão sendo considerados e

$$\rho_{ij} = \frac{8\beta^2(1+r)r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4\beta^2r(1+r)^2}$$

onde $r = \omega_j/\omega_i$ e β é a razão de amortecimento.

5.4. EXEMPLOS

Utilizando-se a formulação apresentada neste trabalho, foram elaborados programas para microcomputador e foram resolvidos vários exemplos, alguns dos quais apresentam-se na continuação. Os resultados obtidos demonstram as boas eficiência e precisão tanto da técnica do Meio Contínuo quanto das outras técnicas propostas.

As observações que podem ser feitas em relação aos exemplos deste capítulo, são análogas às que foram feitas em relação aos exemplos do capítulo anterior, acrescentadas dos comentários que fazem-se na continuação.

5.4.1. EXEMPLO 5.1

Considere-se uma estrutura de 10 andares formada por 6 pórticos planos, cuja planta apresenta-se na figura 5.11. As paredes e as vigas são de seção transversal retangular cujas dimensões são $0,30 \times 2,00\text{m}$ e $0,25 \times 0,75\text{m}$ respectivamente. Os andares têm 3m de altura, perfazendo uma altura total de 30m para o edifício. Por outro lado, o peso das lajes é 108tf e a inércia polar é 2754tfm^2 ; o material constituinte da estrutura tem módulos elástico e de Poisson cujos valores são $2'100.000\text{tf/m}^2$ e 0,20 respectivamente.

O edifício é analisado sismicamente, na direção y, de acordo com o espectro de projeto da norma Canadense, obtendo-se os deslocamentos apresentados na tabela 5.1; na mesma tabela são mostrados, também, os resultados obtidos mediante métodos discretos. A tabela 5.2 contém os períodos de vibração correspondentes aos primeiros modos.

Neste caso a estrutura é simétrica e não tem excentricidade estática, os deslocamentos obtidos pela técnica do Meio Contínuo são muito bons ao longo de toda a altura do edifício, observa-se que também em relação aos períodos naturais os resultados são satisfatórios.

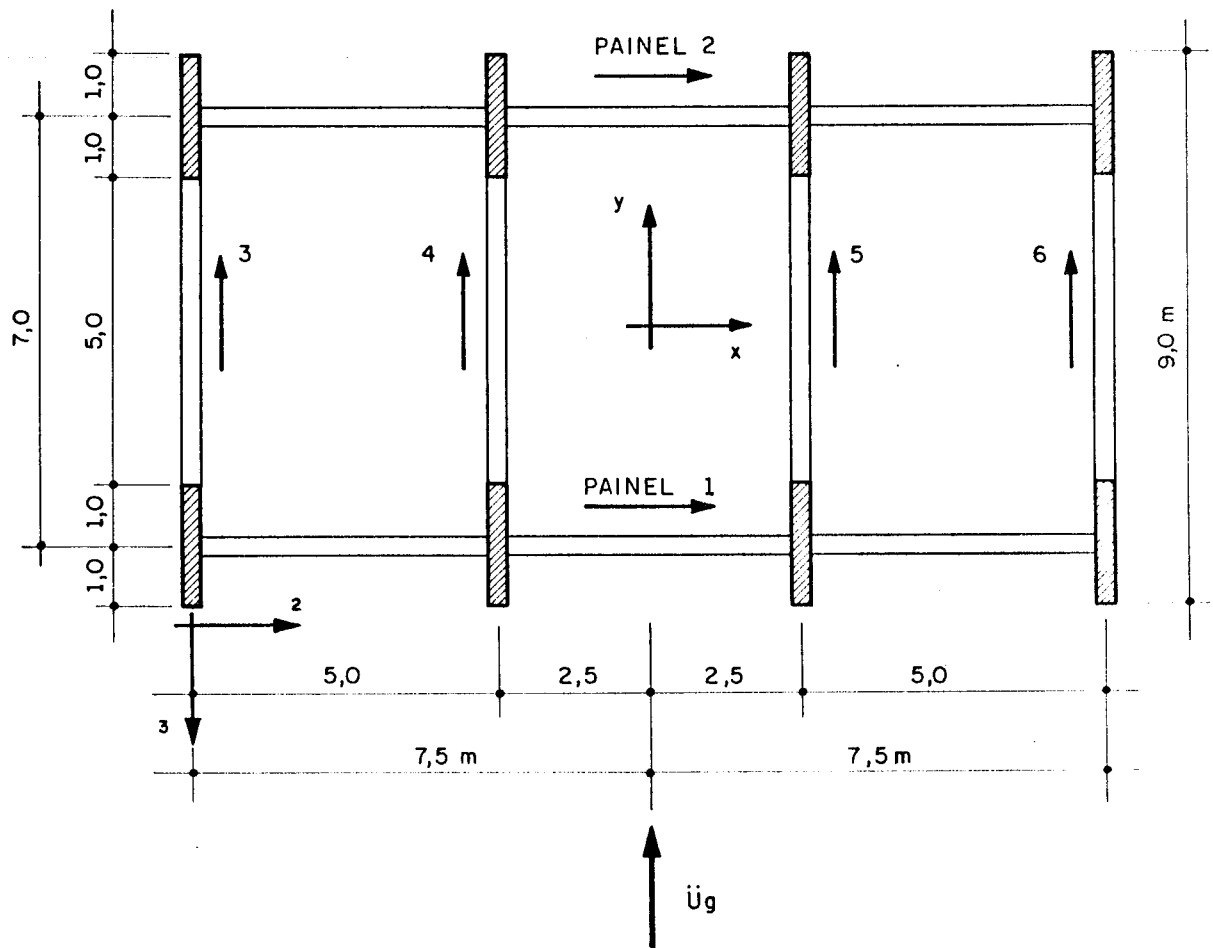


FIG. 5.11 - Planta do edifício correspondente ao exemplo 5.1

ANDAR	T. CONT.	DISC.
10	0,0036	0,0036
9	0,0033	0,0034
8	0,0029	0,0030
7	0,0025	0,0027
6	0,0021	0,0022
5	0,0017	0,0018
4	0,0013	0,0013
3	0,0008	0,0009
2	0,0004	0,0005
1	0,0001	0,0001
0	0,0000	0,0000
	m	

TABELA 5.1 - Deslocamentos máximos prováveis, dos centros de massas, na direção y - Exemplo 5.1

MODO	T. CONT.	DISC.
1	1,117	1,139
2	0,654	0,669
3	0,550	0,548
4	0,369	0,375
	S	

TABELA 5.2 - Períodos naturais correspondentes aos primeiros modos - Exemplo 5.1

5.4.2. EXEMPLO 5.2

Considere-se uma estrutura de 10 andares formada por 5 pórticos planos, cuja planta apresenta-se na figura 5.12. As colunas e as vigas são de seção retangular cujas dimensões são 0,30x0,60m, 0,30x0,60m e 0,30x0,30m. Os andares têm 3m de altura, perfazendo uma altura total de 30m para o edifício, por outro lado, as lajes tem 48tf de peso e 544tfm² de inércia polar, para completar, o material da estrutura tem módulos elástico e de Poisson cujos valores são 2'100.000tf/m² e 0,20 respectivamente.

O edifício é analisado sismicamente, na direção y, de acordo com o espectro de projeto da norma Canadense, obtendo-se os deslocamentos apresentados na tabela 5.3; na mesma tabela são mostrados, também, os resultados obtidos mediante métodos discretos. A tabela 5.4 contém os períodos de vibração correspondentes aos primeiros modos.

A estrutura é flexível e tem excentricidade estática considerável, observa-se que os deslocamentos obtidos pela técnica do Meio Contínuo são praticamente iguais aos obtidos por técnicas matriciais discretas, em toda a altura do edifício.

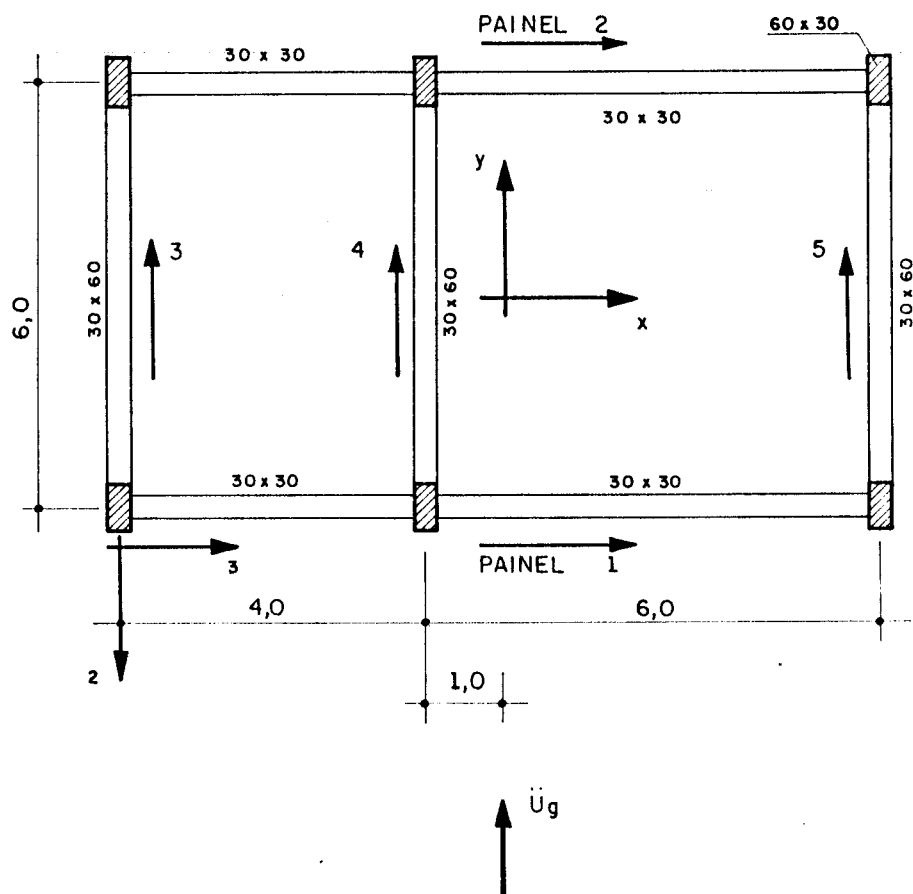


FIG. 5.12 - Planta do edifício correspondente ao Exemplo 5.2

ANDAR	T. CONT.	DISC.
10	0,0063	0,0063
9	0,0059	0,0060
8	0,0054	0,0056
7	0,0049	0,0050
6	0,0043	0,0044
5	0,0036	0,0037
4	0,0029	0,0030
3	0,0021	0,0021
2	0,0013	0,0013
1	0,0005	0,0005
0	0,0000	0,0000
	m	

TABELA 5.3 - Deslocamentos máximos prováveis, dos centros de massas, na direção y - Exemplo 5.2

MODO	T. CONT.	DISC.
1	2,477	2,482
2	1,231	1,251
3	0,935	0,931
4	0,803	0,797
	s	

TABELA 5.4 - Períodos naturais correspondentes aos primeiros modos de vibração- Exemplo 5.2

5.4.3. EXEMPLO 5.3

Considere-se um edifício de 15 andares formada por 6 painéis planos e um núcleo estrutural, cuja planta apresenta-se na figura 5.13. As colunas, paredes e vigas são de seção transversal retangular, cujas dimensões são 0,60x0,60m, 0,25x2,00m e 0,25x0,70m respectivamente; já o núcleo está constituído por paredes de 0,20x3,0m e 0,20x2,50m. Os andares têm 3m de altura, perfazendo 45m de altura total para a estrutura. Por outro lado, o material constituinte do edifício tem módulos elástico e de Poisson cujos valores são $2'100.000\text{tf/m}^2$ e 0,20 respectivamente.

As lajes do edifício tem um peso de 115,20tf e um momento de inércia polar de $3235,20\text{ tfm}^2$. Com estes dados, a estrutura é analisada sismicamente, na direção x, de acordo com o espectro de projeto da norma Canadense, obtendo-se os deslocamentos apresentados na tabela 5.5; na mesma tabela são mostrados, também, os resultados obtidos mediante métodos discretos. A tabela 5.6 contem os períodos naturais de vibração, correspondentes aos primeiros modos.

É importante observar que a estrutura tem grande excentricidade, ademais, é analisada considerando-se só 10 planos de discretização, os resultados são satisfatórios. Os exemplos apresentados demonstram a eficiência e a versatilidade das técnicas propostas neste trabalho.

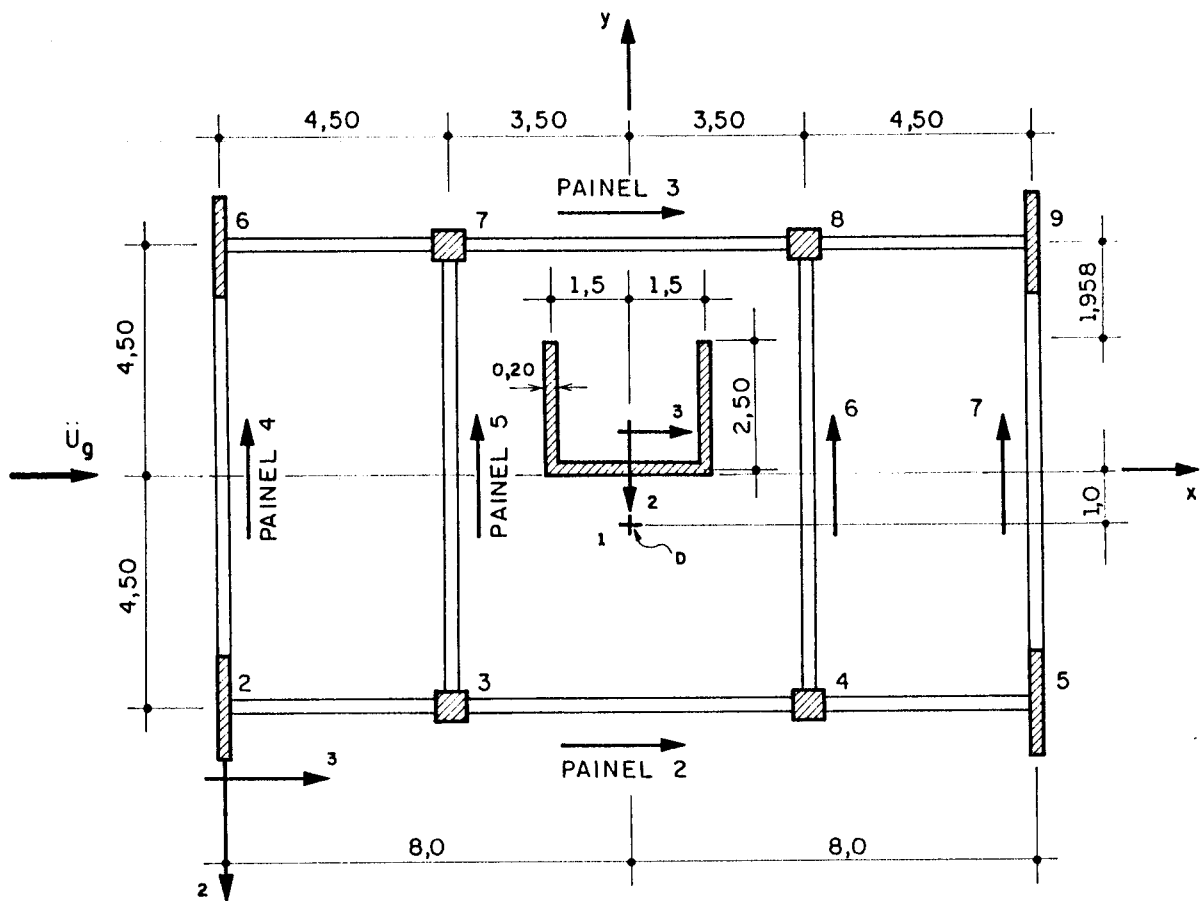


FIG. 5.13 - Planta do edifício correspondente ao exemplo 5.3

NÍVEL	T.CONT.	DISC.
45,00	0,0079	0,0078
40,50	0,0071	
36,00	0,0063	0,0064
31,50	0,0054	
27,00	0,0045	0,0047
22,50	0,0035	
18,00	0,0026	0,0028
13,50	0,0017	
9,00	0,0009	0,0010
4,50	0,0003	
0,00	0,0000	0,0000
m		

TABELA 5.5 - Deslocamentos máximos prováveis, dos centros de massas, na direção x - Exemplo 5.3

MODO	T.CONT.	DISC.
1	1,472	1,546
2	1,458	1,430
3	1,019	1,034
4	0,397	0,418
S		

TABELA 5.6 - Períodos naturais correspondentes aos primeiros modos - Exemplo 5.3

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

As normas sísmicas recomendam que as edificações sujeitas a este tipo de solicitação, sejam projetadas com estruturas regulares tanto em planta quanto em elevação. Entretanto, o trabalho aqui apresentado vai mais além, requerendo que a estrutura mantenha constantes suas características elasto-mecânicas em toda sua altura. Mesmo com esta restrição, esta metodologia é aplicável em muitos casos práticos, permitindo cálculos rápidos e com boa precisão.

Nos exemplos numéricos inseridos, é possível observar que a aplicação prática desta técnica contínua, fornece resultados tão bons quanto aqueles obtidos por métodos discretos matriciais, encontrando-se pequenas diferenças que podem ser desprezadas. É importante ressaltar que tais resultados são obtidos, apesar da técnica contínua utilizar um número muito menor de parâmetros.

A pequena quantidade de incógnitas traz outra vantagem para a técnica do Meio Contínuo que é o também pequeno número de operações e, portanto, uma grande vantagem no tempo de processamento no computador, fato que fora constatado em todos os exemplos numéricos elaborados.

As estruturas tridimensionais foram analisadas como associações de estruturas planas, sem se chegar a fazer a compatibilização das deformações axiais das colunas comuns a várias unidades estruturais. Este fato não teve influência importante sobre os resultados finais, mas permitiu diminuir o número de incógnitas e simplificar a análise.

Para finalizar, é importante realçar que o método estático equivalente, recomendado pelas normas, é uma alternativa de cálculo que permite analisar estruturas de edifícios com certa facilidade e com rapidez, mas tem restrições que devem ser observadas. Nos casos mais gerais, a solução deve ser mesmo conduzida mediante o método dinâmico, isto é, mediante a análise espectral. No presente trabalho foi aplicada a técnica do Meio Contínuo, para os dois tipos de análise, com bons resultados.

CAPÍTULO 7

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBIGES, M.M., GOULET, J. Contreventement des batiments. *Annales de L'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, n.149, p.473-500, May 1960.
- ATC-3. Applied Technology Council. *Tentative provisions for the development of seismic regulations for buildings*. 1984.
- AUGUSTI, G., BARATTA, A., CASCIATI, F. *Probabilistic methods in structural engineering*. London: Chapman and Hall, 1984.
- BECK, H. Contribution to the analysis of coupled shear walls. *Journal of the American Concrete Institute*, v.59, n.8, p.1055-70, Aug. 1962.
- BIOT, M.A. Analytical and experimental methods in engineering seismology. *Transactions ASCE*, v.108, p.365-408, 1943.
- BIOT, M.A. Theory of vibration of buildings during earthquakes. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, v.14, n.4, p.213-223, Aug. 1934.
- BOLT, B.A. et al. *Geological hazards*. New York: Springer-Verlag, 1975.

- BURK, C., DRAKE, C.L. *The geology of continental margins*. New York: Springer-Verlag, 1974.
- CARVALHO, F.A.C. *Instabilidade de edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis*. São Carlos, 1980. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
- CEB - COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. *Seismic design of concrete structures*. *CEB Bulletin D'Information*, n.149, 1982.
- CHANDLER, A.M., HUTCHINSON, G.L. *Evaluation of the secondary torsional design provisions of earthquake building code*. *Proc. Instn Civil Engrs, Part 2*, v.85, p.587-607, Dec. 1988.
- CHOPRA, A.K. *Dynamics of structures: a primer*. Berkeley: Earthquake Engineering Research Institute, 1980.
- CHOPRA, A.K., CRUZ, E.F. *Evaluation of building code formulas for earthquake forces*. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.112, n.8, p.1881-99, Aug. 1986.
- CLARK JR., S.P. *Structure of the earth*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1971.
- CLOUGH, R.W., PENZIEN, J. *Dynamics of structures*. New York: McGraw-Hill, 1982.
- COELHO, I.R. *Desacoplamento das equações da técnica do meio contínuo: análise de estruturas de edifícios altos*. São Carlos, 1987. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos-USP

- COSTA, J.L. *Núcleos estruturais sobre fundações flexíveis*. São Carlos, 1984. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
- CRUZ, E.F., CHOPRA, A.K. Elastic earthquake response of building frames. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 112, n.3, p.443-59, 1986.
- CRUZ, E.F., CHOPRA, A.K. Simplified procedures for earthquake analysis of buildings. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.112, n.3, p.461-80, 1986.
- CRUZ Z., E. Comparación de diferentes reglas de superposición para análisis modal espectral. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 25., Porto Alegre, RS, Brasil, nov. 1991. *Anais*. v.3, p.25-36
- DANAY, A., GLUCK, J., GELLERT, M. A generalized continuum method for dynamic analysis of asymmetric tall buildings. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.4, p.179-203, 1975.
- DFR KIUREGHIAN, A. A response spectrum method for random vibration analysis of MDF systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.9, p.419-435, 1981.
- DOWRICK, D.J. *Earthquake resistant design*. 2.ed. New York: John Wiley & Sons, 1987.
- GESCHWINDNER, L.F. Nonlinear dynamic analysis by modal superposition. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.107, n.12, p.2324-36, 1981.

- GLÜCK, J. Lateral load analysis of asymmetric multi-story structures. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.96, n.2, p.317-33, Feb. 1970; discussion by J.K. Biswas and W.K. Tso in Nov. 1970.
- GOODMAN, L.E., ROSENBLUETH, E., NEWMARK, N.W. Aseismic design of firmly founded elastic structures. *Transactions of the ASCE*, v.120, p.782-802, 1955.
- GORCHKOV, G., YAKOUCHOVA, A. *Géologie générale*. Moscou: Éditions MIR, 1967.
- HADLEY, G. *Algebra linear*. Tradução de Francisco R.C. Fernandes. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1979.
- HART, G.C., VASUDEVAN, R. Earthquake design of buildings: damping. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.101, n.1, p.11-30, Jan. 1975.
- HEIDEBRECHT, A.C., RAINA, R.K. Frequency analysis of thin walled shear walls. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.97, p.239-52, 1971.
- HEIDEBRECHT, A.C., STAFFORD-SMITH, B. Approximate analysis of open-section shear walls subject to torsional loading. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.99, n.12, p.2355-73, Dec. 1973; discussion by R. Rosman et al. in Sept. 1974; closure in May 1975.
- HOUSNER, G.W. Behavior of structures during earthquakes. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v. 85, n.4, p.109-29, Oct. 1959.

- HOUSNER, G.W., BRADY, A.G. Natural periods of vibration of buildings. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, v.89, n.4, p.31-65, Aug. 1963.
- HOUSNER, G.W., MARTEL, R.R., ALFORD, I.L. Spectrum analysis of strong-motion earthquakes. *Bull. of the Seism. Soc. of America*, v.43, n.2, 1953.
- JBC - Japan Building Code. *A collection of laws and regulations of building construction*. The Housing Bureau/Ministry of Construction, Japan Building Institute, 1970.
- JEARY, A.P. Damping in tall buildings: a mechanism and a predictor. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.14, p.733-50, 1986.
- KAN, C.L., CHOPRA, A.K. Effects of torsional coupling on earthquake forces in buildings. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.103, n.4, p.805-19, Apr. 1977.
- KAN, C.L., CHOPRA, A.K. Elastic earthquake analysis of a class of torsionally coupled buildings. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.103, n.4, p.821-38, Apr. 1977.
- KAN, C.L., CHOPRA, A.K. Elastic earthquake analysis of torsionally coupled multistorey buildings. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.5, p.395-412, 1977.
- LAIER, J.E. *Análise das vibrações livres de edifícios pela técnica do meio contínuo*. São Carlos, 1978. Tese (Doutorado) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos-USP.

- LAIER, J.E. Emprego do método da colocação no estudo dinâmico de estruturas de edifícios altos. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 6., Santa Fé, Argentina, 1985. *Anais.* v.2, p.93-104
- LAIER, J.E. Estudo das vibrações acopladas de edifícios altos pela teoria da perturbação: modelagem segundo a técnica do meio contínuo. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 24., Porto Alegre, RS, Brasil, jun. 1987. *Anais.* v.5, p.65-79
- LANDAU, L. *Comportamento dinâmico não-linear de estruturas pelo método de superposição modal.* Rio de Janeiro, 1983. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro-COPPE.
- MAISON, B.F., NEUSS, C.F., KASAI, K. The comparative performance of seismic response spectrum combination rules in building analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.11, p.623-47, 1983.
- MARGALEF, R. Biogeografia histórica. In: _____. *Ecología.* Barcelona: Ediciones Omega, 1989. cap.9
- MOSTAGHEL, N., HERNRIED, A.G. Seismic inelastic design spectra. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.14, p.379-89, 1986.
- MUKHERJEE, P.R., COULL, A. Free vibrations of coupled shear walls on flexible bases. *Proc. Instn Civil Engrs, Part 2*, v.57, p.493-511, Sept. 1974.
- MUKHERJEE, P.R., COULL, A. Free vibrations of open-section shear walls. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.5, p.81-101, 1977.

- NATIONAL RESEARCH COUNCIL OF CANADA. *National building code of Canada 1985*. Ottawa, 1985.
- NEWMARK, N.M., ROSENBLUETH, E. *Fundamentals of earthquake engineering*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1971.
- NIELSEN, N.N. Vibration tests of nine-story steel frame building. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, v.92, n.1, p.81-110, Feb. 1966.
- PAZ, M. *Structural dynamics: theory and computation*. 2.ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1985.
- POLYAKOV, S.V. *Design of earthquake resistant structures*. Moscow: MIR Publ., 1985.
- RAVARA, A. Aplicação dos computadores ao cálculo dinâmico de estruturas. In: JORNADAS LUSO-BRASILEIRAS DE ENGENHARIA CIVIL, 2., Rio de Janeiro, ago. 1967.
- ROESSET, J.M., WHITMANN, R.V., DOBRY, R. Modal analysis for structures with foundation interaction. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.99, n.3, p.399-415, Mar. 1973.
- ROSMAN, R. Application of variational methods in the theory of tall building structures. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON VARIATIONAL METHODS IN ENGINEERING, Southampton, England, 1972. *Proceedings*. p.11/68-11/83
- ROSMAN, R. Dynamics and stability of shear wall building structures. *Proc. Instn Civil Engrs, Part 2*, v.55, p.411, June 1973.

- RUTENBERG, A., TSO, W.K., HEIDEBRECHT, A.C. Dynamic properties of asymmetric wall-frame structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.5, p.41-51, 1977.
- SALMONTE, A.J. Considerations on the residual contribution in modal analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.10, p.295-304, 1982.
- STAMATO, M.C., MANCINI, E. Three-dimensional interaction of walls and frames. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.99, n.12, p.2375-2390, Dec. 1973; discussion by R. Rosman in Sept. 1974.
- STRICKLIN, J.A., HAISLER, W.E. Formulations and solution procedures for nonlinear structural analysis. *Computers & Structures*, v.7, p.125-36, 1977.
- TRIFUNAC, M.D., GUPTA, V.K. Pseudorelative acceleration spectrum. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, v.117, n.4, p.924-27, Apr. 1991.
- TSAI, N.C. Modal damping for soil-structure interaction. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.100, n.2, p.323-41, Apr. 1974.
- TSO, W.K., BISWAS, J.K. General analysis of nonplanar coupled shear walls. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.99, n.3, p.365-80, Mar. 1973; discussion by R. Rosman in Dec. 1973; closure July 1974.
- TSO, W.K., CHAN, H.B. Dynamic analysis of plane coupled shear walls. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.97, n.1, p.33-48, Feb. 1971.

- TSO, W.K., DEMPSEY, K.M. Seismic torsional provisions for dynamic eccentricity. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.8, p.275-89, 1980.
- TSO, W.K., RUTENBERG, A. Seismic spectral response of coupled shear walls. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.103, n.1, p.181-96, Jan. 1977.
- TSUKURA INTERNATIONAL CENTER. *Earthquake resistant regulations: a world list*. Tokyo: International Association for Earthquake Engineering, 1984.
- UBC - Uniform Building Code. International Conference of Building Officials, 1988.
- VENANCIO FILHO, F. et al. Nonlinear dynamic analysis using the pseudo-force method and the Lanczos algorithm. *Computers & Structures*, v.30, n.4, p.979-83, 1988.
- WIEGEL, R.L. *Earthquake engineering*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1970.
- WILSON, E.L., HABIBULLAH, A. *SAP90: A series of computer programs for the static and dynamic finite element analysis of structures, user's manual*. Berkeley: Computers & Structures Inc., 1988.
- WILSON, E.L., KIUREGHIAN, A., BAYO, E.P. A replacement for the SRSS method in seismic analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.9, p.187-94, 1981.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- ACI - AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Response of multistory concrete structures to lateral forces.* Detroit, 1973. (ACI SP-36)
- ACI COMMITTEE 318. *Building code requirements for reinforced concrete (ACI 318-83).* Detroit: American Concrete Institute, 1983.
- ACI COMMITTEE 442. *Response of buildings to lateral forces.* *ACI Journal*, v.68, n.2, p.81-106, Feb. 1971; discussion by O.A. Glogau et al. and closure in Aug. 1971.
- AMBROSE, J., VERGUN, D. *Design for lateral forces.* New York: John Wiley & Sons, 1987.
- BASU, A.K., DAR, G.Q. *Dynamic characteristics of coupled wall frame systems.* *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.10, n.4, p.615-31, 1982.
- BATHE, K.J. *Finite element procedures in engineering analysis.* New Jersey: Prentice Hall, 1982.
- BATHE, K.J., GRACEWSKI, S. *On nonlinear dynamic analysis using substructuring and mode superposition.* *Computers & Structures*, v.13, p.699-707, 1981.
- BAYKOV, V.N., SIGALOV, E.E. *Estructuras de hormigón armado: curso general.* Moscu: MIR, 1980.

- BIGGS, J.M. *Introduction to structural dynamics*. New York: McGraw-Hill Book, 1964.
- ELGHADAMSI, F.E., MOHRAZ, B. Inelastic earthquake spectra. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.15, p.91-104, 1987.
- FINTEL, M. Shearwalls: an answer for seismic resistance? *Concrete International*, v.13, n.7, p.48-53, July, 1991.
- FOLIC, R.J. A classification of damage to concrete buildings in earthquakes, illustrated by examples. *Materials and Structures*, v.24, p.286-292, 1991.
- GHOBARAH, A. *Earthquake engineering design*. Hamilton, Ontario: McMaster University of Canada, 1984.
- LÓPEZ-Y., P.A. *Análisis modal de edificios sometidos a efectos sísmicos*. Quito, Ecuador, 1984. (Memoria de título de ingeniero civil) - Escuela Politécnica Del Ejército-ESPE
- MEIROVITCH, L. *Elements of vibration analysis*. New York: McGraw-Hill Book, 1986.
- OKAMOTO, S. *Introduction to earthquake engineering*. New York: John Wiley & Sons, 1973.
- PUBAL, Z. *Theory and calculation of frame structures with stiffening walls*. New York: Elsevier Science, 1988. (Developments in Civil Engineering, 22)
- SCHUELLER, W. *High-rise building structures*. New York: John Wiley & Sons, 1977.

THOMSON, W.T. *Teoria da vibração com aplicações*. Prentice-Hall, 1973.

WARBURTON, G.B. *The dynamical behaviour of structures*. 2.ed. Oxford: Pergamon Press, 1976.

WIGHT, J.K. Earthquake design compared to measured response. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.112, n.1, p.149-64, Jan. 1986.

WILKINSON, J.H. *The algebraic eigenvalue problem*. Oxford: Clarendon Press, 1965.

WOOD, S.L., STARK, R., GREER, S.A. Collapse of eight-story RC building during 1985 Chile earthquake. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.117, n.2, p.600-19, Feb. 1991.

APÊNDICE A

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE DEFORMAÇÃO

A equação diferencial para estruturas planas pode ser escrita como:

$$-k_1 u_f''(z) + \lambda_f^2 k_1 u_f'(z) = Q_f(z) + Q_f^c(z) \quad (\text{A.1})$$

onde

$$Q_f^c(z) = k_3 \int_0^z \int_z^H Q(z) dz^2 \quad (\text{A.2})$$

$$Q_f(z) = P_1 + \frac{H}{2} P_2 + HP_3 - P_3 z - \frac{P_2}{2H} z^2 \quad (\text{A.3})$$

para as seguintes condições de contorno:

$$u_f(0) = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$u_f'(0) = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$u_f''(H) = 0 \quad (\text{A.6})$$

A equação diferencial pode ser re-escrita como:

$$-u_f''(z) + \lambda_f^2 u_f'(z) = D_1 z^4 + D_2 z^3 + D_3 z^2 + D_4 z + D_5 \quad (\text{A.7})$$

onde:

$$D_1 z^4 + D_2 z^3 + D_3 z^2 + D_4 z + D_5 = \frac{1}{k_1} \left(Q_f(z) + Q_f^c(z) \right) \quad (\text{A.8})$$

assim, fazendo:

$$B_3 = \frac{D_1}{5\lambda_f^2}$$

$$B_4 = \frac{D_2}{4\lambda_f^2}$$

$$B_5 = \frac{D_3 + 60 B_3}{3\lambda_f^2}$$

$$B_6 = \frac{D_4 + 24 B_4}{2\lambda_f^2}$$

$$B_7 = \frac{D_5 + 6 B_5}{\lambda_f^2}$$

$$k_4 = \lambda_f \left(e^{\lambda_f H} + e^{-\lambda_f H} \right)$$

$$k_5 = \frac{2B_6 + 6B_5 H + 12B_4 H^2 + 20B_3 H^3}{\lambda_f}$$

$$B_1 = \frac{-1}{k_4} \left(B_7 e^{-\lambda_f H} + k_5 \right)$$

$$B_2 = \frac{1}{k_4} \left(B_7 e^{\lambda_f H} - k_5 \right)$$

(A.9)

$$B_8 = -(B_1 + B_2)$$

obtém-se a solução para $u_f(z)$ como sendo:

$$u_f = B_1 e^{\lambda_f z} + B_2 e^{-\lambda_f z} + B_3 z^5 + B_4 z^4 + B_5 z^3 + B_6 z^2 + B_7 z + B_8 \quad (\text{A.10})$$

solução que é válida sempre que as funções de esforço cortante, Q_f , e de esforço cortante complementar, Q_f^c , sejam polinômios de até quarto grau.

É importante observar que em alguns casos particulares a constante λ_f pode ser nula, em tais situações, a equação diferencial de equilíbrio pode ser escrita como:

$$-k_1 u_f''(z) = Q_f(z) \quad (\text{A.11})$$

ou ainda:

$$-u_f''(z) = D_3 z^2 + D_4 z + D_5 \quad (\text{A.12})$$

cuja solução fica:

$$u_f(z) = B_3 z^5 + B_4 z^4 + B_5 z^3 + B_6 z^2 \quad (\text{A.13})$$

onde:

$$B_3 = \frac{D_3}{60}$$

$$B_4 = \frac{D_4}{24}$$

$$B_5 = \frac{D_5}{6}$$

$$B_6 = -(10B_3 H^2 + 6B_4 H + 3B_5)H$$

estes resultados são aplicáveis, por exemplo, às paredes estruturais isoladas. Observa-se que a equação A.13 pode ser considerada como um caso particular a equação A.10.

APÊNDICE B

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESFORÇOS NORMAIS DAS COLUNAS

A equação de esforços normais das colunas, para estruturas planas, escreve-se:

$$\{N''\} - \frac{1}{h} [B_t][A_e]^{-1}\{N\} = -\frac{1}{h} \{R_b\} u_f'' \quad (B.1)$$

onde (eq. A.10):

$$u_f'' = A_1 e^{\lambda_f z} + A_2 e^{-\lambda_f z} + A_3 z^3 + A_4 z^2 + A_5 z + A_6 \quad (B.2)$$

Define-se uma transformação linear tal que:

$$\{N\} = [V_r] \{N\}^0 \quad (B.3)$$

onde a matriz V_r contém os auto-versores do produto matricial $\frac{1}{h}[B_t][A_e]^{-1}$, então, sendo k_g a matriz diagonal dos auto-valores correspondentes, a equação transformada fica:

$$\{N''\}^0 - [k_g]\{N\}^0 = -\{k_7\} u_f'' \quad (B.4)$$

onde

$$\{k_7\} = \frac{1}{h} [V_r]^T \{R_b\} \quad (B.5)$$

observa-se que o sistema de equações está desacoplado, portanto, cada equação pode ser escrita como:

$$(N_i^0)'' - k_{9i} N_i^0 = -k_{7i} u_f'' \quad (\text{B.6})$$

e cujas condições de contorno são:

$$N_i(H) = N_i^0(H) = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$N_i'(0) = (N_i^0(0))' = 0$$

Na continuação definem-se as seguintes constantes:

$$S_{3i} = \frac{-k_{7i} A_1}{\lambda_f^2 - k_{9i}}$$

$$S_{4i} = \frac{-k_{7i} A_2}{\lambda_f^2 - k_{9i}}$$

$$S_{5i} = \frac{k_{7i} A_3}{k_{9i}}$$

$$S_{6i} = \frac{k_{7i} A_4}{k_{9i}}$$

$$S_{7i} = \frac{k_{7i} A_5 + 6 S_{5i}}{k_{9i}}$$

$$S_{8i} = \frac{k_{7i} A_6 + 2 S_{6i}}{k_{9i}} \quad (\text{B.8})$$

$$\gamma_{1i} = -(S_{3i} e^{\lambda_f H} + S_{4i} e^{-\lambda_f H} + S_{5i} H^3 + S_{6i} H^2 + S_{7i} H + S_{8i})$$

$$\gamma_{2i} = -\lambda_r (S_{3i} - S_{4i}) - S_{7i}$$

$$k_4 = \zeta (e^{\zeta H} + e^{-\zeta H})$$

$$S_{1i} = (\zeta \gamma_{1i} + e^{-\zeta H} \gamma_{2i}) \frac{1}{k_4}$$

$$S_{2i} = (\zeta \gamma_{1i} - e^{\zeta H} \gamma_{2i}) \frac{1}{k_4}$$

onde $\zeta = \sqrt{k_{9i}}$, assim, cada função $N_i^0(z)$ fica:

$$\begin{aligned} N_i^0 = & S_{1i} e^{\zeta z} + S_{2i} e^{-\zeta z} + S_{3i} e^{\lambda_r z} + S_{4i} e^{-\lambda_r z} + S_{5i} z^3 + \\ & + S_{6i} z^2 + S_{7i} z + S_{8i} \end{aligned} \quad (B.9)$$

finalmente, as funções de esforço normal correspondente às colunas, ficam:

$$\{N\} = [V_r] \{N\}^0 \quad (B.10)$$

onde o vetor N tem tantas funções quantas colunas tiver o painel.

APÊNDICE C

SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DE DEFORMAÇÃO

O sistema desacoplado de equações, para estruturas tridimensionais, escreve-se:

$$-\{u'''\}^{**} + [\lambda^2] \{u'\}^{**} = \{F\}^{**} + \{F_c\}^{**} \quad (C.1)$$

onde λ^2 é uma matriz diagonal e

$$F_i^{**} + F_{ci}^{**} = D_{1i} z^4 + D_{2i} z^3 + D_{3i} z^2 + D_{4i} z + D_{5i} \quad (C.2)$$

Cada uma das equações pode ser redigida como:

$$-(u_i''')^{**} + \lambda_i^2 (u_i')^{**} = D_{1i} z^4 + D_{2i} z^3 + D_{3i} z^2 + D_{4i} z + D_{5i} \quad (C.3)$$

observe-se que o sistema de equações C.1 está desacoplado, portanto, a solução se reduz a resolver a equação C.3 para $i = \{1, 2, 3\}$. Aproveitando os resultados apresentados, no apêndice A, cada uma das funções $u_i^{**}(z)$ pode ser escrita como (eq. A.10):

$$u_i^{**} = A_{1i} e^{\lambda_i z} + A_{2i} e^{-\lambda_i z} + A_{3i} z^5 + A_{4i} z^4 + A_{5i} z^3 + \\ + A_{6i} z^2 + A_{7i} z + A_{8i} \quad (C.4)$$

assim, as funções de deformação da estrutura, em um sistema de coordenadas arbitrário, ficam:

$$\{u\} = [R_e] [R_s] \{u\}^{**} \quad (C.5)$$

onde as matrizes R_e e R_s são constantes. O processo de resolução do sistema C.1 pode ser imediato quando $\{F_c\}^{**} = \{0\}$, o qual implica em que as unidades estruturais não tenham deformações axiais importantes nas colunas, isto é, $k_3 \cong 0$ para todas as unidades, por outro lado, se a estrutura tiver unidades com colunas extensíveis, isto é $k_3 \neq 0$ para uma ou várias unidades estruturais, a resolução pode ser feita iterativamente, em cujo caso o sistema C.1 escreve-se:

$$-\{u''\}_k^{**} + [\lambda^2] \{u'\}_k^{**} = \{F\}^{**} + \{F_c\}_{k-1}^{**} \quad (C.6)$$

onde

$$k = \{1, 2, \dots, n\} \quad (C.7)$$

$$\{F_c\}_0^{**} = \{0\}$$

onde as funções F_c^{**} podem ser calculadas, para um estado de deformação dado, mediante a formulação apresentada no apêndice D.

APÊNDICE D

FUNÇÕES Q_f^c EM ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS

A equação diferencial, para os esforços cortantes complementares, pode ser redigida como:

$$Q_f^c(z) - \frac{1}{k_3} \left(Q_f^c(z) \right)'' = -k_1 u_f''(z) + \lambda_f^2 k_1 u_f'(z) \quad (D.1)$$

a qual é válida para as unidades estruturais planas e, cujas condições de contorno são:

$$Q_f^c(0) = 0 \quad (D.2)$$

$$\left(Q_f^c(H) \right)' = 0$$

Sabendo que $u_f = \{\phi\}^T \{u\}^{**}$ e que uma qualquer das funções $u_i^{**}(z)$ pode ser escrita como (eq. C.4):

$$u_i^{**} = A_{1i} e^{\lambda_i z} + A_{2i} e^{-\lambda_i z} + A_{3i} z^5 + A_{4i} z^4 + A_{5i} z^3 + \\ + A_{6i} z^2 + A_{7i} z + A_{8i} \quad (D.3)$$

então, de maneira geral, a função $u_f(z)$ pode ser redigida como:

$$\begin{aligned}
u_f(z) = & \alpha_1 e^{\lambda_1 z} + \alpha_2 e^{-\lambda_1 z} + \alpha_3 e^{\lambda_2 z} + \alpha_4 e^{-\lambda_2 z} + \alpha_5 e^{\lambda_3 z} + \\
& + \alpha_6 e^{-\lambda_3 z} + \alpha_7 z^5 + \alpha_8 z^4 + \alpha_9 z^3 + \alpha_{10} z^2 + \alpha_{11} z + \\
& + \alpha_{12}
\end{aligned}
\tag{D.4}$$

Definindo-se:

$$\begin{aligned}
A_3 &= -k_1 k_3 \lambda_1 \alpha_1 \frac{\lambda_1^2 - \lambda_f^2}{k_3 - \lambda_1^2} \\
A_4 &= k_1 k_3 \lambda_1 \alpha_2 \frac{\lambda_1^2 - \lambda_f^2}{k_3 - \lambda_1^2} \\
A_5 &= -k_1 k_3 \lambda_2 \alpha_3 \frac{\lambda_2^2 - \lambda_f^2}{k_3 - \lambda_2^2} \\
A_6 &= k_1 k_3 \lambda_2 \alpha_4 \frac{\lambda_2^2 - \lambda_f^2}{k_3 - \lambda_2^2} \\
A_7 &= -k_1 k_3 \lambda_3 \alpha_5 \frac{\lambda_3^2 - \lambda_f^2}{k_3 - \lambda_3^2} \\
A_8 &= k_1 k_3 \lambda_3 \alpha_6 \frac{\lambda_3^2 - \lambda_f^2}{k_3 - \lambda_3^2}
\end{aligned}
\tag{D.5}$$

$$A_9 = 5k_1 \lambda_f^2 \alpha_7$$

$$A_{10} = 4k_1 \lambda_f^2 \alpha_8$$

$$A_{11} = -k_1 (60\alpha_7 - 3\lambda_f^2 \alpha_9) + \frac{12A_9}{k_3}$$

$$A_{12} = -k_1 (24\alpha_8 - 2\lambda_f^2 \alpha_{10}) + \frac{6A_{10}}{k_3}$$

$$A_{13} = -k_1 (6\alpha_9 - \lambda_f^2 \alpha_{11}) + \frac{2A_{11}}{k_3}$$

$$\gamma_1 = -(A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_{13})$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 = & -\lambda_1 \left(A_3 e^{\lambda_1 H} - A_4 e^{-\lambda_1 H} \right) - \lambda_2 \left(A_5 e^{\lambda_2 H} - A_6 e^{-\lambda_2 H} \right) + \\ & - \lambda_3 \left(A_7 e^{\lambda_3 H} - A_8 e^{-\lambda_3 H} \right) - \left(4A_9 H^3 + 3A_{10} H^2 + \right. \\ & \left. + 2A_{11} H + A_{12} \right) \end{aligned}$$

$$\zeta = \sqrt{k_3}$$

$$k_4 = \zeta \left(e^{\zeta H} + e^{-\zeta H} \right)$$

$$A_1 = \left(\gamma_1 \zeta e^{-\zeta H} + \gamma_2 \right) \frac{1}{k_4}$$

$$A_2 = \left(\gamma_1 \zeta e^{\zeta H} - \gamma_2 \right) \frac{1}{k_4}$$

a função $Q_f^c(z)$ fica:

$$\begin{aligned} Q_f^c = & A_1 e^{\zeta z} + A_2 e^{-\zeta z} + A_3 e^{\lambda_1 z} + A_4 e^{-\lambda_1 z} + A_5 e^{\lambda_2 z} + \\ & + A_6 e^{-\lambda_2 z} + A_7 e^{\lambda_3 z} + A_8 e^{-\lambda_3 z} + A_9 z^4 + A_{10} z^3 + A_{11} z^2 + \\ & + A_{12} z + A_{13} \end{aligned} \quad (D.6)$$

Por outro lado, a função Q_f^c pode ser expressa, de maneira aproximada, mediante um polinômio de quarto grau; assim, sejam:

$$S_5 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8$$

$$S_4 = \zeta(A_1 - A_2) + \lambda_1(A_3 - A_4) + \lambda_2(A_5 - A_6) + \lambda_3(A_7 - A_8)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 = & \frac{1}{H^2} \left(-S_4 H - S_5 + A_1 e^{\zeta H} + A_2 e^{-\zeta H} + A_3 e^{\lambda_1 H} + A_4 e^{-\lambda_1 H} + \right. \\ & \left. + A_5 e^{\lambda_2 H} + A_6 e^{-\lambda_2 H} + A_7 e^{\lambda_3 H} + A_8 e^{-\lambda_3 H} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= \frac{1}{H} \left\{ -S_4 + \zeta \left(A_1 e^{\zeta H} - A_2 e^{-\zeta H} \right) + \lambda_1 \left(A_3 e^{\lambda_1 H} - A_4 e^{-\lambda_1 H} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \lambda_2 \left(A_5 e^{\lambda_2 H} - A_6 e^{-\lambda_2 H} \right) + \lambda_3 \left(A_7 e^{\lambda_3 H} - A_8 e^{-\lambda_3 H} \right) \right\} \\
\xi_3 &= \frac{1}{H^3} \left(-\frac{S_4 H^2}{2} - S_5 H + \frac{A_1 e^{\zeta H} - A_2 e^{-\zeta H}}{\zeta} + \frac{A_3 e^{\lambda_1 H} - A_4 e^{-\lambda_1 H}}{\lambda_1} + \right. \\
&\quad + \frac{A_5 e^{\lambda_2 H} - A_6 e^{-\lambda_2 H}}{\lambda_2} + \frac{A_7 e^{\lambda_3 H} - A_8 e^{-\lambda_3 H}}{\lambda_3} - \frac{A_1 - A_2}{\zeta} + \\
&\quad \left. - \frac{A_3 - A_4}{\lambda_1} - \frac{A_5 - A_6}{\lambda_2} - \frac{A_7 - A_8}{\lambda_3} \right) \tag{D.7}
\end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{1}{H^2} (-15\xi_1 + 2,5\xi_2 + 30\xi_3)$$

$$S_2 = \frac{1}{H} (28\xi_1 - 4\xi_2 - 60\xi_3)$$

$$S_3 = -12\xi_1 + 1,5\xi_2 + 30\xi_3$$

finalmente, fazendo

$$D_1 = A_9 + S_1$$

$$D_2 = A_{10} + S_2$$

$$D_3 = A_{11} + S_3$$

$$D_4 = A_{12} + S_4$$

$$D_5 = A_{13} + S_5$$

(D.8)

é possível escrever a função $Q_f^c(z)$ como:

$$Q_f^c(z) = D_1 z^4 + D_2 z^3 + D_3 z^2 + D_4 z + D_5 \quad (D.9)$$

Finalmente, se a estrutura tiver uma ou várias unidades estruturais com colunas extensíveis, $k_3 \neq 0$, então, o vetor de esforços cortantes complementares da estrutura tridimensional será:

$$\{F_c\} = \sum_i \left(\{A\} Q_f^c \right)_i \quad (D.10)$$

$$\{F_c\}^{**} = [R_s]^T [R_e]^T \{F_c\}$$

onde i identifica aos painéis. Observa-se que as funções do vetor F_c são polinômios de quarto grau e que, na solução apresentada, as funções de deformação têm polinômios de até quinto grau. Observa-se, também, que com as funções D.10 seria possível resolver a eq. C.1, o qual faz-se na solução iterativa.

APÊNDICE E

FÓRMULAS PARA O CÁLCULO DA MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

Para calcular a matriz de flexibilidade, considere-se o sistema de equação seguinte:

$$-\{v''_1(z)\} + [\lambda^2] \{v'_1(z)\} = \{P_a\} + \{F_0^c\}^{**} \quad (E.1)$$

$$-\{v''_2(\bar{z})\} + [\lambda^2] \{v'_2(\bar{z})\} = \{F_u^c\}^{**}$$

então, é possível escrever:

$$-v''_{1i} + \lambda_i^2 v'_{1i} = f_{1i}^0 z^4 + f_{2i}^0 z^3 + f_{3i}^0 z^2 + f_{4i}^0 z + f_{5i}^0 + P_{ai} \quad (E.2)$$

e

$$-v''_{2i} + \lambda_i^2 v'_{2i} = f_{1i}^u \bar{z}^4 + f_{2i}^u \bar{z}^3 + f_{3i}^u \bar{z}^2 + f_{4i}^u \bar{z} + f_{5i}^u$$

e definindo-se:

$$\begin{aligned} \beta_{3i}^0 &= \frac{f_{1i}^0}{5\lambda_i^2} & \beta_{3i}^u &= \frac{f_{1i}^u}{5\lambda_i^2} \\ \beta_{4i}^0 &= \frac{f_{2i}^0}{4\lambda_i^2} & \beta_{4i}^u &= \frac{f_{2i}^u}{4\lambda_i^2} \end{aligned} \quad (E.3)$$

$$\beta_{5i}^0 = \frac{f_{3i}^0 + 60\beta_{3i}^0}{3\lambda_i^2}$$

$$\beta_{5i}^u = \frac{f_{3i}^u + 60\beta_{3i}^u}{3\lambda_i^2}$$

$$\beta_{6i}^0 = \frac{f_{4i}^0 + 24\beta_{4i}^0}{2\lambda_i^2}$$

$$\beta_{6i}^u = \frac{f_{4i}^u + 24\beta_{4i}^u}{2\lambda_i^2}$$

$$\beta_{7i}^0 = \frac{f_{5i}^0 + 6\beta_{5i}^0 + P_{ai}}{\lambda_i^2}$$

$$\beta_{7i}^u = \frac{f_{5i}^u + 6\beta_{5i}^u}{\lambda_i^2}$$

por outro lado, sejam:

$$\xi_1 = 20\beta_{3i}^0 z_0^3 + 12\beta_{4i}^0 z_0^2 + 6\beta_{5i}^0 z_0 + 2\beta_{6i}^0 - 2\beta_{6i}^u$$

(E.4)

$$\xi_2 = \beta_{3i}^0 z_0^5 + \beta_{4i}^0 z_0^4 + \beta_{5i}^0 z_0^3 + \beta_{6i}^0 z_0^2 + \beta_{7i}^0 z_0$$

$$\xi_3 = 5\beta_{3i}^0 z_0^4 + 4\beta_{4i}^0 z_0^3 + 3\beta_{5i}^0 z_0^2 + 2\beta_{6i}^0 z_0 + \beta_{7i}^0 - \beta_{7i}^u$$

$$\xi_4 = 20\beta_{3i}^u z_u^3 + 12\beta_{4i}^u z_u^2 + 6\beta_{5i}^u z_u + 2\beta_{6i}^u$$

$$d = \frac{1}{2 \left(e^{\lambda_i H} + e^{-\lambda_i H} \right)}$$

(E.5)

$$d_1 = \frac{1}{e^{\lambda_i z_0} - e^{-\lambda_i z_0}}$$

$$d_2 = e^{\lambda_i z_u} - e^{-\lambda_i z_u}$$

$$d_3 = e^{\lambda_i z_0} + e^{-\lambda_i z_0}$$

e fazendo:

$$\beta_{1i}^0 = \frac{-\left(e^{-\lambda_i z_0} - 2dd_2\right) \beta_{7i}^0}{d_3 \lambda_i} + \left(-1 + \frac{dd_2}{d_1}\right) \frac{\xi_1}{d_3 \lambda_i^2} - \frac{2d \xi_4}{\lambda_i^2} - \frac{dd_2 \xi_3}{\lambda_i}$$

$$\beta_{2i}^0 = \frac{\left(e^{\lambda_i z_0} + 2dd_2\right) \beta_{7i}^0}{d_3 \lambda_i} + \left(-1 + \frac{dd_2}{d_1}\right) \frac{\xi_1}{d_3 \lambda_i^2} - \frac{2d \xi_4}{\lambda_i^2} - \frac{dd_2 \xi_3}{\lambda_i}$$

(E.6)

$$\beta_{1i}^u = -2d e^{-\lambda_i z_u} \frac{\beta_{7i}^0}{\lambda_i} - \frac{d \xi_1}{d_1 \lambda_i^2} e^{-\lambda_i z_u} - \frac{2d \xi_4}{\lambda_i^2} e^{\lambda_i z_0} + \frac{dd_3 \xi_3}{\lambda_i} e^{-\lambda_i z_u}$$

$$\beta_{2i}^u = 2d e^{\lambda_i z_u} \frac{\beta_{7i}^0}{\lambda_i} + \frac{d \xi_1}{d_1 \lambda_i^2} e^{\lambda_i z_u} - \frac{2d \xi_4}{\lambda_i^2} e^{-\lambda_i z_0} - \frac{dd_3 \xi_3}{\lambda_i} e^{\lambda_i z_u}$$

$$\beta_{8i}^0 = -(\beta_{1i}^0 + \beta_{2i}^0)$$

$$\beta_{8i}^u = \beta_{1i}^0 e^{\lambda_i z_0} + \beta_{2i}^0 e^{-\lambda_i z_0} + \beta_{8i}^0 - \beta_{1i}^u - \beta_{2i}^u + \xi_2$$

finalmente, é possível escrever as funções $v_{1i}(z)$ e $v_{2i}(\bar{z})$:

$$v_{1i} = \beta_{11}^0 e^{\lambda_1 z} + \beta_{21}^0 e^{-\lambda_1 z} + \beta_{31}^0 z^5 + \beta_{41}^0 z^4 + \beta_{51}^0 z^3 + \beta_{61}^0 z^2 + \beta_{71}^0 z + \beta_{81}^0$$

e

$$v_{2i} = \beta_{11}^u e^{\lambda_1 \bar{z}} + \beta_{21}^u e^{-\lambda_1 \bar{z}} + \beta_{31}^u \bar{z}^5 + \beta_{41}^u \bar{z}^4 + \beta_{51}^u \bar{z}^3 + \beta_{61}^u \bar{z}^2 + \beta_{71}^u \bar{z} + \beta_{81}^u$$

Quando a estrutura não tem unidades estruturais com deformações axiais importantes nas colunas, tem-se:

$$\{F_0^c\}^{**} = \{F_u^c\}^{**} = \{0\} \quad (E.8)$$

assim sendo, basta aplicar a formulação, já apresentada, para obter as funções v_{1i} e v_{2i} .

Entretanto, se a estrutura tiver colunas extensíveis, a solução do sistema de equações E.1 pode ser feita, iterativamente, mediante as equações:

$$-\{v'''\}_k + [\lambda^2] \{v'\}_k = \{P_a\} + \{F_0^c\}_{k-1}^{**} \quad (E.9)$$

$$-\{v'''\}_k + [\lambda^2] \{v'\}_k = \{F_u^c\}_{k-1}^{**}$$

onde

$$k = \{1, 2, \dots, n\} \quad (E.10)$$

$$\{F_0^c\}_0^{**} = \{F_u^c\}_0^{**} = \{0\}$$

e o cálculo de F_0^c e F_u^c pode ser feito mediante a formulação apresentada na continuação.

Para qualquer unidade na qual as deformações axiais das colunas sejam importantes, isto é $k_3 \neq 0$, pode ser calculada a contribuição nas forças cortantes complementares, F^c ; para determinar tal contribuição, considere-se a deformação lateral da unidade:

$$u_f = \{\phi\}^T \{u\}^{**} \quad (E.11)$$

assim, para um estado de deformação definido pelas funções v_{11} e v_{21} , tem-se:

$$u_f^0 = \{\phi\}^T \{v_1\} \quad \text{para } 0 \leq z \leq z_0 \quad (E.12)$$

e

$$u_f^u = \{\phi\}^T \{v_2\} \quad \text{para } 0 \leq \bar{z} \leq z_u \quad (\bar{z} = z - z_0)$$

onde

$$\{\phi\}^T = \{A\}^T [R_e] [R_s] \quad (E.13)$$

portanto, as funções $u_f^0(z)$ e $u_f^u(\bar{z})$ podem ser escritas, de maneira geral, como:

$$\begin{aligned}
u_f^0 = & \alpha_1^0 e^{\lambda_1 z} + \alpha_2^0 e^{-\lambda_1 z} + \alpha_3^0 e^{\lambda_2 z} + \alpha_4^0 e^{-\lambda_2 z} + \alpha_5^0 e^{\lambda_3 z} + \alpha_6^0 e^{-\lambda_3 z} + \alpha_7^0 z^5 + \\
& + \alpha_8^0 z^4 + \alpha_9^0 z^3 + \alpha_{10}^0 z^2 + \alpha_{11}^0 z + \alpha_{12}^0
\end{aligned}
\tag{E.14}$$

$$\begin{aligned}
u_f^u = & \alpha_1^u e^{\lambda_1 \bar{z}} + \alpha_2^u e^{-\lambda_1 \bar{z}} + \alpha_3^u e^{\lambda_2 \bar{z}} + \alpha_4^u e^{-\lambda_2 \bar{z}} + \alpha_5^u e^{\lambda_3 \bar{z}} + \alpha_6^u e^{-\lambda_3 \bar{z}} + \alpha_7^u \bar{z}^5 + \\
& + \alpha_8^u \bar{z}^4 + \alpha_9^u \bar{z}^3 + \alpha_{10}^u \bar{z}^2 + \alpha_{11}^u \bar{z} + \alpha_{12}^u
\end{aligned}
\tag{E.15}$$

onde os coeficientes α_i^0 e α_i^u são calculados mediante as eq. E.12.

Definindo-se as constantes:

$$\zeta = \sqrt{k_3}$$

$$A_3^0 = -k_1 k_3 \lambda_1 \alpha_1^0 \frac{\lambda_1^2 - \lambda_f^2}{k_3 - \lambda_1^2}$$

$$A_4^0 = k_1 k_3 \lambda_1 \alpha_2^0 \frac{\lambda_1^2 - \lambda_f^2}{k_3 - \lambda_1^2}$$

$$A_5^0 = -k_1 k_3 \lambda_2 \alpha_3^0 \frac{\lambda_2^2 - \lambda_f^2}{k_3 - \lambda_2^2}$$

$$A_6^0 = k_1 k_3 \lambda_2 \alpha_4^0 \frac{\lambda_2^2 - \lambda_f^2}{k_3 - \lambda_2^2}$$

(E.16)

$$A_7^0 = -k_1 k_3 \lambda_3 \alpha_5^0 \frac{\lambda_3^2 - \lambda_f^2}{k_3 - \lambda_3^2}$$

$$A_8^0 = k_1 k_3 \lambda_3 \alpha_6^0 \frac{\lambda_3^2 - \lambda_f^2}{k_3 - \lambda_3^2}$$

$$A_9^0 = 5k_1 \lambda_f^2 \alpha_7^0$$

$$A_{10}^0 = 4k_1 \lambda_f^2 \alpha_8^0$$

$$A_{11}^0 = -k_1 (60\alpha_7^0 - 3\lambda_f^2 \alpha_9^0) + \frac{12A_9^0}{k_3}$$

$$A_{12}^0 = -k_1 (24\alpha_8^0 - 2\lambda_f^2 \alpha_{10}^0) + \frac{2A_{10}^0}{k_3}$$

$$A_{13}^0 = -k_1 (6\alpha_9^0 - \lambda_f^2 \alpha_{11}^0) + \frac{2A_{11}^0}{k_3}$$

analogamente podem ser calculadas as constantes A_3^u, \dots, A_{13}^u correspondentes α_i^u ; na continuação, calculam-se as constantes:

$$\xi_1 = A_3^0 + A_4^0 + A_5^0 + A_6^0 + A_7^0 + A_8^0 + A_{13}^0$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 = & \lambda_1 \left(A_3^u e^{\lambda_1 z_u} - A_4^u e^{-\lambda_1 z_u} \right) + \lambda_2 \left(A_5^u e^{\lambda_2 z_u} - A_6^u e^{-\lambda_2 z_u} \right) + \\
& + \lambda_3 \left(A_7^u e^{\lambda_3 z_u} - A_8^u e^{-\lambda_3 z_u} \right) + 4A_9^u z_u^3 + 3A_{10}^u z_u^2 + \\
& + 2A_{11}^u z_u + A_{12}^u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_3 = & \sum_{i=3}^8 A_i^u + A_{13}^u - A_3^0 e^{\lambda_1 z_0} - A_4^0 e^{-\lambda_1 z_0} - A_5^0 e^{\lambda_2 z_0} + \\
& - A_6^0 e^{-\lambda_2 z_0} - A_7^0 e^{\lambda_3 z_0} - A_8^0 e^{-\lambda_3 z_0} - A_9^0 z_0^4 - A_{10}^0 z_0^3 + \\
& - A_{11}^0 z_0^2 - A_{12}^0 z_0 - A_{13}^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_4 = & \lambda_1 (A_3^u - A_4^u) + \lambda_2 (A_5^u - A_6^u) + \lambda_3 (A_7^u - A_8^u) + A_{12}^u + \\
& - \lambda_1 \left(A_3^0 e^{\lambda_1 z_0} - A_4^0 e^{-\lambda_1 z_0} \right) - \lambda_2 \left(A_5^0 e^{\lambda_2 z_0} - A_6^0 e^{-\lambda_2 z_0} \right) + \\
& - \lambda_3 \left(A_7^0 e^{\lambda_3 z_0} - A_8^0 e^{-\lambda_3 z_0} \right) - 4A_9^0 z_0^3 - 3A_{10}^0 z_0^2 + \\
& - 2A_{11}^0 z_0 - A_{12}^0
\end{aligned}$$

$$d = \frac{1}{2(e^{\zeta H} + e^{-\zeta H})} \quad (\text{E.17})$$

$$d_1 = \frac{1}{e^{\zeta z_0} - e^{-\zeta z_0}}$$

$$d_2 = e^{\zeta z_u} + e^{-\zeta z_u}$$

$$d_3 = e^{\zeta z_0} + e^{-\zeta z_0}$$

$$A_1^0 = \left(e^{-\zeta z_0} - 2dd_2 \right) d_1 \xi_1 + (1 - dd_2 d_3) d_1 \xi_3 - \frac{2d\xi_2}{\zeta} + \frac{dd_2 \xi_4}{\zeta}$$

$$A_2^0 = -\left(e^{\zeta z_0} - 2dd_2 \right) d_1 \xi_1 - (1 - dd_2 d_3) d_1 \xi_3 + \frac{2d\xi_2}{\zeta} - \frac{dd_2 \xi_4}{\zeta}$$

$$A_1^u = -2d \xi_1 e^{-\zeta z_u} - dd_3 \xi_3 e^{-\zeta z_u} - \frac{2d\xi_2}{\zeta} e^{\zeta z_0} + \frac{d\xi_4}{d_1 \zeta} e^{-\zeta z_u}$$

$$A_2^u = -2d \xi_1 e^{\zeta z_u} - dd_3 \xi_3 e^{\zeta z_u} + \frac{2d\xi_2}{\zeta} e^{-\zeta z_0} + \frac{d\xi_4}{d_1 \zeta} e^{\zeta z_u}$$

Continuando, calculam-se as constantes:

$$S_5^0 = \sum_{i=1}^8 A_i^0$$

$$S_4^0 = \zeta (A_1^0 - A_2^0) + \lambda_1 (A_3^0 - A_4^0) + \lambda_2 (A_5^0 - A_6^0) + \lambda_3 (A_7^0 - A_8^0)$$

$$\begin{aligned} \xi_1^0 = & \frac{1}{z_0^2} \left(-S_4^0 z_0 - S_5^0 + A_1^0 e^{\zeta z_0} + A_2^0 e^{-\zeta z_0} + A_3^0 e^{\lambda_1 z_0} + \right. \\ & + A_4^0 e^{-\lambda_1 z_0} + A_5^0 e^{\lambda_2 z_0} + A_6^0 e^{-\lambda_2 z_0} + A_7^0 e^{\lambda_3 z_0} + \\ & \left. + A_8^0 e^{-\lambda_3 z_0} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_2^0 = & \frac{1}{z_0} \left(-S_4^0 + \zeta \left(A_1^0 e^{\zeta z_0} - A_2^0 e^{-\zeta z_0} \right) + \lambda_1 \left(A_3^0 e^{\lambda_1 z_0} - A_4^0 e^{-\lambda_1 z_0} \right) + \right. \\ & \left. + \lambda_2 \left(A_5^0 e^{\lambda_2 z_0} - A_6^0 e^{-\lambda_2 z_0} \right) + \lambda_3 \left(A_7^0 e^{\lambda_3 z_0} - A_8^0 e^{-\lambda_3 z_0} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_3^0 = & \frac{1}{z_0^3} \left(\frac{-S_4^0}{2} z_0^2 - S_5^0 z_0 + \frac{A_1^0 e^{\zeta z_0} - A_2^0 e^{-\zeta z_0}}{\zeta} + \frac{A_3^0 e^{\lambda_1 z_0} - A_4^0 e^{-\lambda_1 z_0}}{\lambda_1} + \right. \\ & + \frac{A_5^0 e^{\lambda_2 z_0} - A_6^0 e^{-\lambda_2 z_0}}{\lambda_2} + \frac{A_7^0 e^{\lambda_3 z_0} - A_8^0 e^{-\lambda_3 z_0}}{\lambda_3} - \frac{A_1^0 - A_2^0}{\zeta} - \frac{A_3^0 - A_4^0}{\lambda_1} + \\ & \left. - \frac{A_5^0 - A_6^0}{\lambda_2} - \frac{A_7^0 - A_8^0}{\lambda_3} \right) \end{aligned}$$

$$S_1^0 = (-15\xi_1^0 + 2,5\xi_2^0 + 30\xi_3^0) \frac{1}{z_0^2} \quad (E.18)$$

$$S_2^0 = (28\xi_1^0 - 4\xi_2^0 - 60\xi_3^0) \frac{1}{z_0}$$

$$S_3^0 = -12\xi_1^0 + 1,5\xi_2^0 + 30\xi_3^0$$

analogamente são calculadas as constantes S_i^u e ξ_i^u para os coeficientes A_i^u (eqs. E.18), finalmente, determinam-se as funções de esforço cortante complementar para o painel:

$$Q_{r_0}^c = D_1^0 z^4 + D_2^0 z^3 + D_3^0 z^2 + D_4^0 z + D_5^0$$

e

(E.19)

$$Q_{r_u}^c = D_1^u \bar{z}^4 + D_2^u \bar{z}^3 + D_3^u \bar{z}^2 + D_4^u \bar{z} + D_5^u$$

onde

$$D_1^0 = A_9^0 + S_1^0$$

$$D_2^0 = A_{10}^0 + S_2^0$$

$$D_3^0 = A_{11}^0 + S_3^0$$
(E.20)

$$D_4^0 = A_{12}^0 + S_4^0$$

$$D_5^0 = A_{13}^0 + S_5^0$$

e

$$D_1^u = A_9^u + S_1^u$$

$$D_2^u = A_{10}^u + S_2^u$$

$$D_3^u = A_{11}^u + S_3^u$$
(E.21)

$$D_4^u = A_{12}^u + S_4^u$$

$$D_5^u = A_{13}^u + S_5^u$$

Se a estrutura tiver várias unidades deste tipo, $k_3 \neq 0$ então devem ser somadas suas contribuições:

$$\{F_0^c\}^{**} = [R_s]^T [R_e]^T \sum \left(\{A\} Q_{f_0}^c \right)$$

(E.22)

$$\{F_u^c\}^{**} = [R_s]^T [R_e]^T \sum \left(\{A\} Q_{f_u}^c \right)$$

De maneira geral, as funções de esforço cortante complementar, escrevem-se:

$$(F_0^c)_i^{**} = f_{1i}^0 z^4 + f_{2i}^0 z^3 + f_{3i}^0 z^2 + f_{4i}^0 z + f_{5i}^0$$

(E.23)

$$(F_u^c)_i^{**} = f_{1i}^u \bar{z}^4 + f_{2i}^u \bar{z}^3 + f_{3i}^u \bar{z}^2 + f_{4i}^u \bar{z} + f_{5i}^u$$

equações com as quais seria possível voltar ao sistema de equações E.1 e continuar a fazer a solução iterativa, se fosse necessário. Observe-se que as matrizes R_s e R_e são as mesmas apresentadas no quarto capítulo.