

**SOBRE A FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO PARA A FLEXÃO DE PLACAS USANDO AS
HIPÓTESES DE REISSNER.**

AUTOR: ENG. GABRIEL DE OLIVEIRA RIBEIRO

ORIENTADOR: PROF.DR. WILSON S. VENTURINI

**DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

JULHO/92

SOBRE A FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO PARA A FLEXÃO DE PLACAS USANDO AS
HIPÓTESES DE REISSNER.

GABRIEL DE OLIVEIRA RIBEIRO

Tese apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São
Paulo como parte dos requisitos para
obtenção do título de "Doutor em
Engenharia Civil".

ORIENTADOR: Prof. Dr. WILSON S. VENTURINI

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

São Carlos

1992

A Roseane e aos meus filhos
Leandro, Leonardo e Gabriel Junior

AGRADECIMENTOS

Ao Prof.Dr. Wilson Sérgio Venturini pela orientação competente e pela amizade.

Aos professores da EESC-USP pelos conhecimentos transmitidos e pela amizade.

Aos colegas de pós-graduação da EESC-USP pela amizade e convívio.

Ao Sr. Antonio Valdair Carneiro pelo trabalho de digitação e a Sra. Sylvia Helena Morette Villani pela confecção dos desenhos.

A Universidade Federal de Minas Gerais e à CAPES através do programa PICD pelo apoio financeiro.

Enfim a todos amigos e familiares pelo apoio e incentivo.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	xi
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiv
1- INTRODUÇÃO	01
1.1- APRESENTAÇÃO	01
1.2- CONSIDERAÇÕES GERAIS	04
1.3- REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	08
1.3.1- Modelos Usuais de Placas	08
1.3.2- O Estudo de Placas Através do Método dos Elementos Finitos	12
1.3.3- O Estudo de Placas Através do Método dos Elementos de Contorno	14
2- FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS.....	21
2.1- INTRODUÇÃO	21
2.2- HIPÓTESES BÁSICAS DA TEORIA DE KIRCHHOFF	21
2.3- RELAÇÕES E EQUAÇÕES BÁSICAS DA TEORIA DE KIRCHHOFF..	22
2.4- SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE PLACAS DE KIRCHHOFF.....	34
2.5- HIPÓTESES BÁSICAS DA TEORIA DE REISSNER	36
2.6- RELAÇÕES E EQUAÇÕES BÁSICAS DE TEORIA DE REISSNER...	37
2.7- SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE PLACAS DE REISSNER	54
3- EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS.....	57
3.1- INTRODUÇÃO	57
3.2- EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS PELA TEORIA CLÁSSICA DE KIRCHHOFF.....	58
3.3- EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS PELA TEORIA DE REISSNER	65

3.3.1- Equações Integrais para Deslocamentos em Pontos do Domínio.....	65
3.3.2- Equações Integrais para Deslocamentos em Pontos do Contorno	71
3.3.3- Forças Fundamentais Generalizadas no Contorno	75
3.3.4- Equações Integrais para Esforços nos Pontos Internos	78
3.3.5- Cargas e Momentos Distribuídos no Domínio	86
3.3.6- Influência do Campo de Momentos Iniciais no Cálculo dos Esforços Internos	96
4- ELEMENTOS DE CONTORNO.....	104
4.1- INTRODUÇÃO	104
4.2- ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DE KIRCHHOFF	105
4.2.1- Discretização das Equações Integrais	106
4.2.2- Alternativas para Montagem do Sistema de Equações	118
4.2.3- Deslocamentos nos Pontos Internos	122
4.2.4- Esforços nos Pontos Internos	123
4.3- ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS ATRAVÉS DA TEORIA DE REISSNER	126
4.3.1- Discretização das Equações de Contorno	126
4.3.2- Carregamentos de Domínio	133
4.3.3- Deslocamentos nos Pontos Internos	136
4.3.4- Esforços nos Pontos Internos	138
4.3.5- Influência dos Momentos Iniciais	143
4.3.6- Técnica de Solução	151
4.3.7- Esforços nos Pontos de Contorno	154
4.4- Exemplos	165
4.4.1- Placa Retangular em Balanço	165
4.4.2- Placa Quadrada Apoiada nas Quatro Bordas com Carga Uniformemente Distribuída	167
4.4.3- Placa Quadrada com Duas Bordas Adjacentes Engastadas e Duas Bordas Livres	175
4.4.4- Placa Quadrada Apoiada nas Quatro Bordas	177

4.4.5- Placa Quadrada Apoiada nas Bordas com Carga Vertical Distribuída em Linha	178
4.4.6- Placa em Balanço sob Ação de Duas Linhas de Momentos Distribuídos	180
5- ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE PLACAS DE REISSNER ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	189
5.1- INTRODUÇÃO	189
5.2- PROBLEMAS ELASTOPLÁSTICOS UNIDIMENSIONAIS	190
5.3- TEORIA DA PLASTICIDADE NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL ...	194
5.4- CONSIDERAÇÕES DE PLASTICIDADE PARA PLACAS	209
5.5- ABORDAGEM NUMÉRICA PARA A SOLUÇÃO PLÁSTICA	213
5.6- EXEMPLOS	224
5.6.1- Placa Biapoiada com Momentos Aplicados nas Extremidades	224
5.6.2- Placa Biengastada com Carga Uniformemente Distribuída	225
5.6.3- Placa Quadrada Apoiada nas Quatro Bordas com Carga Uniformemente Distribuídas	229
6- CONCLUSÕES	232
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	237
BIBLIOGRAFIA	251
APÊNDICE A	A-1

LISTA DE FIGURAS

Fig. 2.1-	Elemento da Placa com as Componentes de Tensão	23
Fig. 2.2-	Elemento de Placa e Esforços	30
Fig. 2.3-	Sistemas de Coordenadas (x,y) e (n,s)	31
Fig. 2.4-	Pontos de carregamento \underline{g} e de deslocamento \underline{t} ..	35
Fig. 2.5-	Sistema de Referência na Placa	37
Fig. 2.6-	Convenção dos Sentidos das Rotações	38
Fig. 2.7-	Estado de Tensão no Elemento da Placa	38
Fig. 2.8-	Resultantes de Tensão na Placa e Convenção de Sinais	39
Fig. 2.9-	Deformação por cisalhamento transversal $\psi_3 \theta$...	53
Fig. 3.1-	Placa finita contida na placa infinita	59
Fig. 3.2-	Contorno com pontos angulosos	60
Fig. 3.3-	Alteração do contorno no canto da placa	61
Fig. 3.4-	Subdomínio Ω_q com carga distribuída	64
Fig. 3.5-	Alteração do Contorno no Canto da Placa	71
Fig. 3.6-	Cargas ou Momentos Distribuídos sobre Domínios Estreitos e Alongados.....	89
Fig. 3.7-	Contorno da Linha de Carga Alterado	90
Fig. 3.8-	Domínio Ω_e	97
Fig. 4.1-	Discretização do Contorno da Placa.	106
Fig. 4.2-	Descrição Geométrica do Elemento Linear.....	106
Fig. 4.3-	Elemento Linear Contínuo.	109
Fig. 4.4-	Nó Duplo em Canto de Placa	110
Fig. 4.5-	Elemento Linear Descontínuo	111
Fig. 4.6-	Colocação de Pontos Fonte fora do Domínio	117
Fig. 4.7-	Placa Quadrada com Pontos Singulares	120
Fig. 4.8-	Discretização do Contorno	126
Fig. 4.9-	Elemento de Contorno Γ_j e Aproximação das Variáveis no Contorno	127
Fig. 4.10-	Placa com Contorno Discretizado e Região Carregada Ω_q e Posição dos Nós Singulares....	134

Fig. 4.11-Divisão do Domínio em Células Triangulares ..	143
Fig. 4.12-Célula Genérica Ω_j com a variação de $M_{\alpha\beta}^0$	144
Fig. 4.13-Subdivisão da Célula com Ponto Singular	149
Fig. 4.14-Sistema de Coordenadas Locais no Contorno ...	155
Fig. 4.15-Sistema de Referência Local e Global.....	160
Fig. 4.16-Placa em Balanço com Carga Uniformemente Distribuída	166
Fig. 4.17-Placa simplesmente apoiada no contorno	168
Fig. 4.18-Deslocamento Transversal w ao Longo da Linha do Centro da Placa	169
Fig. 4.19-Força Cortante ao Longo da Borda para Condição de Contorno "Hard" e para Condição "Soft" ...	173
Fig. 4.20-Placa do Exemplo 4.4.3	175
Fig. 4.21-Placa Apoiada nas Quatro Bordas com Carga Uniforme Parcialmente Distribuída.....	177
Fig. 4.22-Placa com Linha de Carga \bar{q} - Exemplo. 4.4.5 .	179
Fig. 4.23-Deslocamento w na Linha de Centro da Placa ..	179
Fig. 4.24-Momento Fletor M_{11} sob a linha de centro	180
Fig. 4.25-Momento Fletor M_{22} na linha de centro	180
Fig. 4.26-Placa em Balanço com Linhas de Momentos Distribuídos	181
Fig. 4.27-Placa Esconsa com Carga Uniforme	183
Fig. 4.28-Resultados Comparativos do Exemplo 4.4.7	184
Fig. 4.29-Placa do exemplo 4.4.8	187
Fig. 5.1- Material Elastoplástico Perfeito	191
Fig. 5.2- Material Elastoplástico com Endurecimento Linear	193
Fig. 5.3- Representação Geométrica das superfícies de Escoamento de Tresca e Von Mises.....	197
Fig. 5.4- Representação Bidimensional dos Critérios de Tresca e Von Mises.	198
Fig. 5.5- Modelos de Representação de Comportamentos com Endurecimento.....	202
Fig. 5.6- Plastificação da Seção Transversal da Placa ..	210

Fig. 5.7-	Comportamento Momento-Curvatura para a Flexão Unidimensional de uma Faixa de Placa.....	212
Fig. 5.8-	Variação incremental de tensão em um ponto que escoou na iteração anterior.....	216
Fig. 5.9-	Variação Incremental de Tensão em um Ponto ...	217
Fig. 5.10-	Refinamento do Processo de Redução do Ponto à Superfície de Escoamento.....	219
Fig. 5.11-	Placa Biapoiada - Exemplo 5.6.1	225
Fig. 5.12-	Placa Biengastada - Exemplo 5.6.2	226
Fig. 5.13-	Curva Carga x Deslocamento no Centro da Placa Exemplo 5.6.2.....	228
Fig. 5.14-	Discretização da Placa do Exemplo 5.6.3.....	229
Fig. 5.15-	Curva Carga-Deslocamento no Centro da Placa Exemplo 5.6.3.....	231

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1-	Deslocamentos na Placa em Balanço	167
Tabela 4.2-	Esforços na Placa em Balanço	167
Tabela 4.3-	Deslocamentos Transversais sobre a Linha de Centro da Placa	170
Tabela 4.4-	Valores do Momento Fletor M_{xx}	171
Tabela 4.5-	Deslocamentos Transversais w e Momento Fletor M_{xx} no Meio da Placa	172
Tabela 4.6-	Valores de w , M_{xx} e M_{yy} para a Placa com Condições de Contorno "Soft" e "Hard"	174
Tabela 4.7-	Deslocamentos Transversais na Placa do Exemplo 4.4.3	176
Tabela 4.8-	Valores de M_{xx} e M_{xy} na Placa do Exemplo 4.4.3	176
Tabela 4.9-	Deslocamentos Transversais na Placa do Exemplo 4.4.4	178
Tabela 4.10-	Deslocamentos Transversais e Rotações da Placa em Balanço - Exemplo 4.4.6	181
Tabela 4.11-	Momentos da Placa do Exemplo 4.4.6	182
Tabela 4.12-	Deslocamentos na Linha de Centro da Placa Exemplo 4.4.8	187
Tabela 4.13-	Momentos Fletores na Linha de Centro da Placa do Exemplo 4.4.8	188
Tabela 5.1-	Incrementos de Carga - Exemplo 5.6.1.....	224
Tabela 5.2-	Esquema de Carregamento do Exemplo 5.6.2 ...	227
Tabela 5.3-	Incrementos de Carga e Deslocamentos da Placa do Exemplo 5.6.3	230

RESUMO

RIBEIRO, G.O. *Sobre a formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas usando as hipóteses de Reissner. São Carlos, 1992. 267p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos-USP.*

Este trabalho trata da formulação do Método dos Elementos de Contorno para o problema de flexão de placas através da Teoria Clássica de Kirchhoff da Teoria de Reissner. Ênfase especial é dada na solução admitindo-se as hipóteses de Reissner, que levam a uma formulação mais consistente permitindo o atendimento de três condições físicas em cada ponto do contorno. Considera-se a possibilidade de ocorrência de cargas concentradas, distribuídas em sub-áreas da placa e em linha. A implementação computacional realizada utiliza elementos de geometria linear com aproximação parabólica do segundo grau para as variáveis do contorno, e as equações são geradas para pontos de colocação fora do domínio. Os resultados obtidos para análise elástica linear são comparados com soluções analíticas disponíveis e resultados numéricos obtidos através do MEF e MEC, demonstrando um excelente nível de precisão. São analisadas ainda a influência da relação espessura/vão e da restrição ou liberação da rotação no plano vertical tangente ao contorno. A abordagem do problema pela Teoria de Reissner é estendida para permitir a consideração de campos de momentos iniciais no domínio da placa, o que viabiliza a análise de efeitos de gradiente de temperatura e retração, e a análise de problemas com não-linearidade física. Para a análise de comportamento elastoplástico da placa, implementa-se um algoritmo

incremental-iterativo baseado no método da rigidez inicial. A solução plástica é calculada pelo processo das tensões iniciais. Finalmente, são apresentados alguns exemplos simples que mostram a boa precisão da técnica utilizada.

Palavras chave: Placas - elementos de contorno - análise não-linear.

ABSTRACT

RIBEIRO, G.O. *On the deformation of the boundary element method for the plate bending using the Reissner hypothesis. São Carlos, 1992. 267p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos-USP.*

This work deals with the formulation of the Boundary Element Method applied to bending plate problem using the Kirchhoff's and Reissner's theories. Special emphasis is given in the solution with the Reissner's hypothesis, that leads to a more consistent formulation attending three physical conditions on each boundary point. It is regarded the possibility of occurrence of concentrated forces, distributed loads on subdomains of the plate and distributed loads on lines. The computational implementation is realized using elements with linear geometry, quadratic approximations for boundary variables and the equations are generated for collocation points out of domain. The results for linear elastic analysis are compared with available analytic solutions and with numeric results obtained by using FEM and BEM, showing excellent level of accuracy. It is also analysed the influence of the relation thickness/span and the release or restriction of the rotation in tangential vertical plane along the boundary. The approach using the Reissner's Theory is extended to allow the consideration of initial stress fields in the plate domain, which enables the analysis of temperature and shrinkage effects, and the regard of problems with physical nonlinearities. The analysis of elastoplastic behavior is implemented through an incremental-iterative algorithm based on the initial stiffness method. The plastic solution is evaluated by the

initial stress technique. Finally, it is shown some simple examples, that illustrate the good accuracy of the proposed technique.

Keywords: Plate - boundary elements - non-linear analysis.

1. INTRODUÇÃO

1.2. APRESENTAÇÃO

As placas são elementos largamente utilizados em projetos de estruturas no campo das engenharias civil, mecânica, aeronáutica e naval. Especificamente no caso da engenharia civil podem ser observadas nas estruturas de edifícios, pontes, reservatórios, silos e estruturas de contenção entre outras. A análise de tensões e deformações nas placas de diferentes materiais, com comportamentos diversos e submetidos aos mais variados carregamentos é portanto de fundamental interesse para os projetistas. A teoria de placas é um dos mais importantes tópicos da teoria da elasticidade sob o ponto de vista das aplicações em engenharia devendo ser ressaltado que, ela representa uma aproximação bidimensional para um problema de fato tridimensional.

As soluções analíticas disponíveis, em forma fechada são restritas a alguns casos particulares clássicos, pois em geral sua obtenção é extremamente difícil e complicada. Por isto, o estudo de placas através de métodos numéricos mereceu e continua merecendo a atenção de um grande número de pesquisadores durante as últimas três décadas,

principalmente através do Método dos Elementos Finitos (MEF) e, mais recentemente, através do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Ainda assim, um grande número de imprecisões ocorrem na modelagem das mesmas devido a inconsistências introduzidas com a adoção de hipóteses simplificadoras para o tratamento bidimensional do problema e também devido às aproximações inerentes ao método numérico utilizado.

Este trabalho trata da análise de placas pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC), apresentando a formulação integral com as hipóteses da Teoria Clássica de Kirchhoff e a formulação através da Teoria de Reissner. Ênfase especial é dada à segunda formulação por ser mais consistente e por permitir não apenas a análise de placas finas, mas também aquelas moderadamente espessas. A Teoria de Reissner possibilita o atendimento de três condições físicas em cada ponto do contorno, ao invés de apenas duas como na Teoria Clássica.

A formulação apresentada com as hipóteses de Reissner permite a análise da influência da variação de espessura nas respostas e da consideração de condições de contorno relativas à rotação no plano vertical tangente ao contorno. São evitadas também as complicações relacionadas à reação de canto presentes na formulação integral obtida a partir da Teoria Clássica. Considera-se a possibilidade da atuação de carregamentos distribuídos na superfície e carregamentos distribuídos em linha, bem como cargas concentradas.

Na formulação pela Teoria de Reissner é prevista a consideração de campos de momentos iniciais no domínio da placa, permitindo-se com isto a análise de efeitos de gradientes de temperatura e retração, e ainda a consideração de comportamento não linear do material. O programa computacional aqui desenvolvido, segundo um algoritmo incremental iterativo, possibilita a análise de problemas de comportamento elastoplástico.

Os resultados obtidos mostram um excelente nível de precisão quando comparados às respostas analíticas e numéricas disponíveis na literatura especializada.

O trabalho inicia-se com uma revisão bibliográfica sobre as teorias de placas e as aplicações dos métodos numéricos para sua solução. No Capítulo II são apresentados os equacionamentos básicos da Teoria de Kirchhoff e da Teoria de Reissner, bem como as hipóteses consideradas em cada um dos casos.

O Capítulo III trata da formulação integral de placas pela Teoria de Kirchhoff, de forma resumida, e pela Teoria de Reissner de forma mais detalhada. As equações integrais relativas aos deslocamentos são obtidas inicialmente para pontos do domínio, e em seguida são obtidas as correspondentes para pontos do contorno. São deduzidas também as equações integrais referentes aos esforços nos pontos internos. A determinação do momento fletor na direção tangencial ao contorno é feita utilizando-se um esquema em diferenças finitas a partir do conhecimento das rotações tangenciais. São ainda analisados os termos integrais de domínio relativos aos carregamentos propriamente ditos e o termo integral relativo aos momentos iniciais aplicados.

No Capítulo IV, as equações integrais anteriormente obtidas são discretizadas com a utilização de funções aproximadoras sobre o contorno representando deslocamentos e esforços. Com isto, as equações integrais são transformadas num sistema de equações algébricas lineares. No caso da presença de momentos iniciais, o domínio também é discretizado em células triangulares, sobre as quais admite-se uma função aproximadora para modelar os mesmos. Ao final deste capítulo são apresentados diversos exemplos de análise elástica, considerando-se placas com diferentes relações vão-espessura, condições de contorno e carregamentos, que atestam a boa precisão da técnica empregada.

Na formulação implementada em computador, as equações do problema são geradas considerando-se pontos de colocação fora do domínio, de forma a evitar o aparecimento de algumas singularidades.

O Capítulo V refere-se à extensão da formulação integral de placas com as hipóteses de Reissner, à análise elastoplástica. São abordados os conceitos e hipóteses gerais da Teoria de Plasticidade correlacionando-os com o estudo de placas. A relação tensão-deformação pós-escoamento é formulada utilizando-se o conceito de plasticidade associada, onde o potencial plástico e a superfície de escoamento são coincidentes. Para a solução do problema não-linear adota-se um algoritmo incremental e iterativo, com base no método da rigidez inicial, isto é, a matriz dos coeficientes é calculada apenas uma vez, mantendo-se constante durante a análise. O cálculo da solução plástica é feito com base no processo das tensões iniciais. Na implementação computacional foram considerados os critérios de plastificação de Von Mises e Tresca. Ao final deste capítulo são analisados alguns exemplos simples que mostram a utilização da técnica proposta.

1.2. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A solução das equações ou sistemas de equações diferenciais que regem diversos problemas no campo da engenharia constitui-se, já há muitos anos, num desafio aos pesquisadores da área. Devido à dificuldade ou mesmo à impossibilidade de se obterem soluções analíticas exatas, várias técnicas numéricas de solução aproximada surgiram, principalmente nas três últimas décadas. O grande impulso experimentado pela pesquisa neste campo do conhecimento coincide exatamente com os avanços no campo da eletrônica os quais incrementaram significativamente a velocidade e a potência dos equipamentos computacionais.

O desenvolvimento dessas técnicas aproximadas levou a dois grupos de métodos, sendo o primeiro denominado métodos de domínio e o segundo, métodos de contorno. Os métodos de domínio aproximam a solução da equação diferencial do problema utilizando-se valores das variáveis básicas associadas aos pontos do domínio e do contorno do espaço analisado, já nos métodos de contorno, a partir da equação diferencial do problema são deduzidas equações integrais que são aproximadas utilizando-se valores discretos das variáveis básicas do problema em pontos do contorno apenas.

Dentre os métodos que compõem o primeiro grupo devem ser destacados o Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos Finitos (MEF).

O Método das Diferenças Finitas consiste em transformar o sistema de equações diferenciais em um sistema algébrico, através de aplicação de operadores diferenciais que aproximam cada uma das derivadas parciais contínuas, usando expansões locais, geralmente séries de Taylor truncadas, para representar as variáveis em sub-regiões convenientemente definidas. O surgimento deste método se deu no início deste século, através Runge e ao trabalho de SOUTHWELL [1], e continua ainda hoje adequado à solução de vários problemas de engenharia.

O Método dos Elementos Finitos, desde o início dos anos sessenta, tornou-se o procedimento mais usado e difundido para a solução dos mais diversos problemas de engenharia. Apresenta como grande característica o significado físico intuitivo que consiste em dividir o meio contínuo em uma série de elementos, equacionando-os individualmente como sub-regiões contínuas e reunindo-os para a solução do problema como um todo. Para tal torna-se necessário associarem-se nós a cada elemento e escolherem-se funções aproximadoras para representar os valores das variáveis em quaisquer pontos do contínuo, a partir dos valores nodais

das mesmas. A formulação do método é frequentemente apresentada a partir de princípios variacionais, entretanto pode ser baseada na técnica dos resíduos ponderados obtendo-se assim uma maior generalização. A utilização destas técnicas leva a um sistema algébrico de equações, cuja matriz de coeficientes é simétrica e em forma de banda. Tendo em vista esta característica várias técnicas para otimização da solução do sistema foram desenvolvidas e aplicadas. Este método é, sem dúvida, mais eficiente que o Método das Diferenças Finitas, para a solução da maioria dos problemas práticos.

Atualmente, a maioria dos programas computacionais disponíveis está fundamentada no Método dos Elementos Finitos. Um dos grandes problemas da utilização deste método é a exigência de um alto grau de refinamento na discretização do domínio de forma a obterem-se níveis de precisão adequada, como ocorre no caso de problemas de concentração de tensões. Nestes casos tem-se conseqüentemente um grande volume de dados e um sistema com elevado número de equações.

Como alternativa aos métodos de domínio, atualmente, encontra-se em desenvolvimento o Método dos Elementos de Contorno (MEC), que surgiu como evolução natural dos esquemas de resolução de equações integrais. Neste método as variáveis básicas do problema são calculadas em pontos discretos, definidos apenas sobre o contorno. Os valores das variáveis nos pontos do interior do domínio são calculados diretamente a partir dos valores de contorno, somente nos pontos de real interesse. Como característica vantajosa do método deve-se notar que ocorre sempre uma redução de uma unidade na dimensão do problema analisado, reduzindo-se também o volume de dados de entrada, o tempo de processamento e a área de memória auxiliar para armazenamento das informações necessárias. Entre outros

aspectos interessantes do método devem ser citados, a modelagem apropriada para domínios infinitos, a ausência de erros de interpolação no interior do domínio e a representação adequada para problemas de concentração de tensões [2].

As formulações apresentadas para o Método dos Elementos de Contorno se enquadram basicamente dentro de dois tipos. O primeiro é constituído pelos chamados métodos indiretos, que apareceram inicialmente e onde a solução do problema é obtida em termos de variáveis fictícias associadas ao contorno, permitindo após a determinação de seus valores, o cálculo das variáveis físicas do problema. Estas variáveis fictícias não têm significado físico real e sua determinação é obtida atendendo-se as condições de contorno em um certo número de pontos.

O segundo tipo é constituído pelas formulações diretas, mais utilizadas atualmente que as indiretas. Nestas, as incógnitas dos integrandos são as variáveis físicas do problema real. Assim, por exemplo, em problemas de elasticidade, as forças e deslocamentos no contorno são obtidos diretamente da solução do sistema de equações. Os valores de tensão e deslocamento nos pontos internos são calculados diretamente a partir dos valores de contorno obtidos previamente. Apesar destas formulações terem se baseado inicialmente em princípios clássicos, como o teorema de Betti, uma visão mais atual destas técnicas classificam-nas como mais um método pertencente à família dos métodos aproximados. Com base no método dos resíduos ponderados é possível a obtenção das equações integrais necessárias à formulação do Método dos Elementos de Contorno. Assim, sua formulação tem a mesma origem das demais técnicas numéricas conforme BREBBIA "et alii" [3].

1.3- REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.3.1- Modelos Usuais de Placas

A introdução de simplificações, visando analisar a placa como um elemento bidimensional, deu origem à diferentes teorias. As teorias mais utilizadas nos trabalhos e pesquisas que tratam do assunto são a Teoria Clássica de Kirchhoff e a Teoria de Reissner.

A Teoria de Kirchhoff visa a análise de placas delgadas com pequenos deslocamentos, sob a ação de carregamento transversal, baseando-se nas seguintes hipóteses:

- a superfície média é admitida como superfície neutra;
- as tensões normais à superfície da placa são pequenas se comparadas às demais componentes de tensão, sendo portanto desprezadas;
- a normal à superfície média indeformada permanece normal após a deformação, isto é, não são consideradas as deformações por cisalhamento transversal;
- admite-se que a placa seja constituída de material homogêneo, isotrópico e cujo comportamento é elástico linear.

A formulação do problema, sob as hipóteses acima citadas, leva a uma equação diferencial de quarta ordem.

A Teoria de Reissner [4] para análise de placas leva em consideração as deformações por cisalhamento transversal e, com isto, é obtido um sistema de equações diferenciais de sexta ordem. Com este sistema é possível e necessário satisfazerem-se três condições de contorno ao longo das bordas, ao invés de apenas duas, conforme estabelece a Teoria Clássica de Kirchhoff. Segundo REISSNER [5], a base física dos resultados obtidos é o reconhecimento do fato de que a omissão da energia de deformação por cisalhamento

transversal é responsável pela redução das três condições físicas de contorno em duas condições apenas, e que o problema pode ser tratado sem esta omissão. Esta teoria fornece resultados significativamente mais precisos que os da Teoria Clássica, para o caso de pontos situados nas regiões próximas às bordas e para pontos em volta de furos, cujos diâmetros sejam da mesma ordem de grandeza da espessura.

Um modelo muito próximo do modelo de Reissner foi deduzido por MINDLIN [6], para o movimento transversal de placas fletidas elásticas e isotrópicas. A sua dedução baseou-se nas equações de equilíbrio da teoria da elasticidade tridimensional para um corpo em movimento considerando-se a inércia rotacional e o cisalhamento transversal. O sistema de equações diferenciais obtido é de sexta ordem.

REISSNER [7] apresentou estudos relativos ao problema da integração para o caso de ortotropia e à influência de uma faixa limite de condições de contorno reduzidas, em função da flecha e de uma função de tensão, na solução do interior de placas isotrópicas. Com isto conseguiu distinguir efeitos de deformação por cisalhamento, associados à faixa de contorno e ao domínio interior da placa.

SALERNO e GOLDBERG [8], reduziram o sistema de três equações diferenciais de Reissner a uma equação diferencial de quarta ordem semelhante à da teoria clássica e a uma equação diferencial de segunda ordem para determinação de uma função de tensão. Os resultados obtidos para placas simplesmente apoiada^s, mostraram que os desvios são pequenos quando comparados à Teoria Clássica.

Em 1969, PANC [9], apresentou um tratado proporcionando uma exaustiva cobertura sobre as diversas teorias disponíveis para análise estática de placas. LEVINSON [10]

deduziu uma nova teoria permitindo a análise estática e dinâmica de placas de espessura constante, com a consideração das deformações por cisalhamento, demonstrando que no caso dinâmico a sua teoria e a de Mindlin levam à mesma equação de onda para deslocamento transversal.

REISSNER [11], em 1986, apresentou uma nova formulação que pode ser imaginada como uma generalização das equações para a análise de placas com grandes deformações incluindo a deformabilidade da placa por cisalhamento transversal. O sistema de equações diferenciais obtido é de décima ordem, na forma de duas equações simultâneas de quarta ordem, suplementadas por uma equação de segunda ordem. Em 1987, REISSNER [12] demonstrou uma teoria abordando placas moderadamente espessas, cujo sistema de equações diferenciais é de décima segunda ordem, mostrando que seus resultados são consistentes com resultados clássicos. Uma análise sistemática do problema da influência de faixas de contorno para placas ortotrópicas foi realizada por este mesmo autor em 1991 [13]. Neste trabalho é estudado o conceito de apoio "soft", como uma condição para a transição suave da teoria de sexta ordem para a teoria de quarta ordem.

De acordo com NORDGREN [14], uma solução para um problema de valor de contorno na Teoria Clássica de placas é em geral aceito como uma solução aproximada de um problema correspondente na teoria da elasticidade tridimensional, desde que a placa seja suficientemente fina. No seu trabalho é deduzida uma expressão explícita para o erro quadrado médio nas componentes de tensão, a partir de uma solução pela teoria clássica de placas, em relação à teoria exata de um problema correspondente na teoria da elasticidade. Os resultados obtidos mostram que o erro quadrado médio relativo é proporcional à espessura da placa.

RYCHTER [15], bem como NORDGREN [16] concluíram que o erro quadrado médio relativo pela teoria de Reissner é proporcional ao quadrado da espessura. Entretanto, o primeiro mostra que a contribuição para o erro devida ao cisalhamento transversal é reduzida, sendo proporcional ao cubo da espessura, sendo esta contribuição decisiva no caso de placas compostas. Neste mesmo trabalho, RYCHTER deduz duas variantes consistentes da teoria de sexta ordem, a partir da teoria apresentada por LEVINSON [10].

Em 1988, RYCHTER [17] provou que a Teoria de Reissner combinada com a teoria do estado plano de tensão é capaz de prever o comportamento tridimensional de placas elásticas homogêneas, limitado por um erro quadrado médio relativo da ordem da espessura ao cubo. Em contraste com os resultados conhecidos na literatura, este estimador refinado de erro corresponde à Teoria de Reissner em sua forma geral incorporando o efeito da tensão normal transversal nas equações constitutivas.

LADEVÈZE e PECASTAINGS [18] propuseram em 1988, uma versão melhorada da Teoria de Reissner para o caso de placas homogêneas, isotrópicas com quaisquer condições de contorno. Esta difere da Teoria Clássica de Reissner pelo valor considerado do fator de deformabilidade por cisalhamento transversal e pelas condições de contorno.

BARRET e ELLIS [19] mostraram que o problema de placa submetida a um carregamento transversal se trata de uma perturbação singular. Além disto mostraram como se relacionam as teorias de Kirchhoff, Mindlin e Reissner, com a sua teoria.

1.3.2- O Estudo de Placas através do Método dos Elementos Finitos

Com o surgimento do Método dos Elementos Finitos, inúmeras pesquisas foram e continuam sendo desenvolvidas visando a solução do problema da flexão de placas. Inicialmente, o problema foi abordado com base nas hipóteses de Kirchhoff, buscando funções aproximadoras contínuas de classe C^1 , isto é, funções aproximadoras com derivadas primeiras contínuas, necessárias para a formulação de elementos conformes. A dificuldade de obtenção destas funções levou a esquemas de interpolação extremamente complicados e cujos resultados nem sempre eram confiáveis, como por exemplo, nos pontos próximos aos ângulos obtusos de placas esconsas simplesmente apoiadas. A imposição de condições de contorno nas bordas simplesmente apoiadas também é prejudicada e pode levar a resultados absurdos quando são discretizadas bordas curvas. Neste caso o refinamento da malha tende a simular a situação de engaste, [20] e [21].

As primeiras tentativas de desenvolvimento de elementos finitos triangulares de placa remontam ao início da década de sessenta. O estado da arte sobre o assunto até 1984 é apresentado de forma bastante ampla nos trabalhos de BATOZ "et alii" [22] e de HRABOK e HUDEY [23]. Grandes esforços foram realizados na busca de um elemento triangular conforme, tendo como base o modelo em deslocamentos e o princípio da energia potencial mínima. Os elementos conformes propostos em geral se mostraram muito rígidos, exigindo um número de pontos de integração excessivo, em contraposição aos elementos não-conformes.

Excelentes resultados foram obtidos por BAZELEY "et alii" [24] com a utilização de dois elementos triangulares BCIZ1 e BCIZ2, utilizando-se coordenadas homogêneas e as primeiras idéias do "patch test".

Formulações alternativas foram propostas, como por exemplo a utilização do princípio da energia complementar mínima, que deu origem ao método híbrido com distribuição de tensões assumida no domínio, de acordo com PIAN [25]. Os elementos híbridos, geralmente, dão melhores resultados em termos de momentos que os elementos conformes obtidos pelo modelo em deslocamentos.

Uma outra opção seguida por diversos pesquisadores consiste em adotar-se modelo em deslocamentos com a imposição das hipóteses de Kirchhoff de forma discreta, ao longo dos lados do elemento ou em determinados pontos. Esta formulação foi apresentada inicialmente em 1968 e utilizada de forma complexa e pouco atraente até que BATOZ "et alii" [22], [26], em 1980, conseguiram bom desempenho com um elemento da família denominada DKT ("Discrete Kirchhoff Triangle").

O passo mais drástico para o desenvolvimento de elementos de placas consistiu em trocar a teoria de Kirchhoff pela teoria de Reissner, para placas moderadamente espessas. O grande atrativo desta formulação está no fato de que as funções aproximadoras para deslocamentos exigem apenas continuidade do tipo C^0 , por serem as derivadas primeiras as de ordem mais alta que aparecem no funcional, porém o cisalhamento transversal torna-se uma parte integral da formulação. Um problema encontrado nos primeiros elementos de placa Reissner foi o fenômeno do travamento, decorrente da preponderância dos coeficientes associados ao cisalhamento na matriz de rigidez, no caso de placas com pequenas espessuras. Para evitar este defeito foram estudados esquemas de integração reduzida e seletiva. Deve ser salientado, contudo, que de acordo com HUGHES [21], estes esquemas de integração podem em certos casos levar a problemas de singularidade na matriz de rigidez. Estes problemas foram superados com sucesso, em elementos

triangulares propostos por TESSLER e HUGHES [27], PAPADOPOULOS e TAYLOR [28] e por ZIENKIEWICZ e LEFEBVRE [29]. HÄGGBLAD e BATHE [30] realizaram estudos relativos à especificação das condições de contorno de placas, considerando as hipóteses da Teoria de Reissner, e visando a obtenção de resultados confiáveis nos pontos próximos às bordas e aos cantos da placa.

Um caminho diferente foi seguido por Bergan e seus colaboradores que mantiveram as hipóteses de Kirchhoff juntamente com a utilização de funções de forma altamente não-conformes. Eles demonstraram que a continuidade entre elementos não é um obstáculo à convergência, desde que as funções de forma satisfaçam às condições de ortogonalidade de força e energia. A matriz de rigidez é construída usando-se a formulação livre proposta por BERGAN e HANSEN [31], ao invés da formulação padrão pela energia potencial. Uma característica importante desta formulação é a separação cuidadosa entre as funções de deslocamentos básicas assumidas e as funções ou modos de ordem superior. A garantia de convergência está associada à maneira como ocorre o acoplamento entre estas funções. Nesta linha devem ser destacados os trabalhos de BERGAN e NYGARD [32], [33] e [34], e ainda FELIPPA e BERGAN [35]. Esta formulação apesar de ter sido apresentada inicialmente como uma formulação bastante diferente das anteriores, está relacionada à formulação padrão em deslocamentos via energia potencial, e ao modelo híbrido, conforme mostrado em [32] e [36], respectivamente.

1.3.3- O Estudo de Placas através do Método dos Elementos de Contorno

O desenvolvimento de formulações para a análise de placas através do Método dos Elementos de Contorno, e sua

utilização prática na engenharia estrutural se deu posteriormente à introdução do método com vistas à análise de tensões em problemas de elasticidade bi e tridimensionais. Nesse campo de aplicação, a maioria dos trabalhos desenvolvidos se baseia nas hipóteses da Teoria Clássica de Kirchhoff. O trabalho considerado como referência inicial é devido a JASWON "et alii" [37], publicado em 1967, propondo a decomposição da equação bi-harmônica em duas equações harmônicas que resolvidas por equações integrais e devidamente combinadas, permitem a obtenção da solução final.

Posteriormente, em 1976, HANSEN [38], apresentou uma formulação direta para a análise de placas infinitas com furos de contorno não carregado, utilizando-se duas equações integrais, correspondentes à expressão do deslocamento transversal e à de sua derivada, em relação a uma direção qualquer.

BEZINE e GAMBY [39] propuseram, em 1978, uma formulação que se distingue das duas anteriores por se tratar de uma formulação direta. Partindo da identidade de Green e considerando como variáveis do contorno as variáveis físicas do problema real, isto é, o deslocamento transversal e a sua derivada na direção normal ao contorno, ou respectivamente, a força cortante equivalente e o momento fletor na direção normal, deduziram duas equações integrais relativas ao deslocamento transversal e à sua derivada na direção normal. Foram efetuadas aplicações práticas para diversas placas quadradas com várias combinações de condições de contorno.

Outros trabalhos, também versando sobre formulação direta e teoria de Kirchhoff, foram desenvolvidos por BEZINE [40] e STERN [41].

ALTIERO e SIKARSKIE [42] e WU e ALTIERO [43], trataram o problema de placas através da formulação indireta, resolvendo exemplos práticos apenas para contornos

engastados e relatando as dificuldades numéricas para a consideração de outros tipos de contorno. Nestes trabalhos é utilizado como contorno auxiliar, o contorno de uma placa circular engastada cuja solução é conhecida.

A discussão das formulações direta e indireta para placas delgadas, bem como a sua extensão ao caso de placas apoiadas sobre base elástica e cascas abatidas, foi apresentada por TOTTENHAN [44]. GUO-SHU [45] adotou um esquema de interpolação hermitiana e efetuou o cálculo das integrais singulares por meio de soluções particulares.

HARTMANN e ZOTEMANTEL [46] adotaram também um esquema de interpolação hermitiana para a flecha e discutiram o tratamento das integrais de domínio, a consideração de vínculos no domínio e as singularidades que ocorrem na formulação direta para placas de Kirchhoff, tendo apresentado vários exemplos práticos.

Ainda com base nas hipóteses de Kirchhoff, PAIVA [47] trabalhou com diversas alternativas para o equacionamento do problema de placas, tendo adotado, ora equações integrais para flecha e sua derivada primeira na direção normal ao contorno, ora duas equações integrais para flecha em dois pontos singulares, sendo um destes pontos situado sobre o contorno e o outro fora do domínio. Visando-se as aplicações práticas, a análise foi estendida para permitir a consideração de estruturas formadas pela associação de placas com vigas e pilares.

HARTLEY e seus colaboradores em [48], [49] e [50], enfocaram basicamente dificuldades relativas às singularidades que aparecem nos integrandos e a determinação de valores nos pontos internos ao domínio, tendo sugerido um esquema de integração analítica para evitar os problemas de instabilidade numérica que podem surgir.

As potencialidades e vantagens do Método dos Elementos de Contorno para a análise de placas, baseada na Teoria

Clássica, foram enfatizadas por HARTMANN [51], em 1988, tendo sugerido que o mesmo supera o Método dos Elementos Finitos para este tipo de problema.

Vários outros trabalhos tratando da análise de placas finas foram publicadas nos últimos anos. PILTNER e TAYLOR [52] apresentaram uma formulação adotando soluções fundamentais representadas com o auxílio de funções complexas e incluindo deformações por cisalhamento. KATSIKADELIS e ARMENAKAS [53] sugeriram, em 1989, um novo equacionamento para o método em termos de duas equações diferenciais e duas equações integrais de contorno acopladas, sendo as equações diferenciais resolvidas pelo Método das Diferenças Finitas e as equações integrais pelo Método dos Elementos de Contorno. Esses autores ressaltaram a vantagem de sua formulação não apresentar hipersingularidades e de apresentar núcleos simples nas equações integrais. SAPOUNTZAKIS e KATSIKADELIS [54] publicaram, em 1991, um trabalho onde é desenvolvido o equacionamento para a análise de placas de espessura variável, composto de duas equações diferenciais e três equações integrais acopladas, onde a solução das equações diferenciais é efetuada pelo Método das Diferenças Finitas e as equações integrais pelo Método dos Elementos de Contorno. VITTOORAPORN e MOSHAIOV [55] realizaram um estudo comparativo entre elementos de contorno com aproximação constante e elementos com aproximação cúbica.

Trabalhos subsequentes tratando da análise específica de diversos problemas de placas fletidas foram desenvolvidos, como é o caso de placas apoiadas sobre fundação elástica. TOTTENHAN [44] abordou o problema, inicialmente, em 1979, tendo como base as hipóteses de Winkler e Kirchhoff. Nesta mesma linha surgiram os trabalhos da KATSIKADELIS e ARMENAKAS [56, 57], COSTA e BREBBIA [58, 59, 60] e BEZINE [61]. Em 1988, SILVA [62]

abordou este mesmo problema considerando, inicialmente uma formulação onde o domínio foi discretizado em células, e uma segunda, onde as integrais de domínio foram transformadas em integrais sobre o contorno, através do processo da reciprocidade dual, tendo considerado ainda a possibilidade de comportamento não-linear do solo subjacente à placa.

KATSIKADELIS e KALLIVOKAS [63, 64] voltaram ao estudo das placas sobre base elástica adotando o modelo biparamétrico de Pasternak para simular a ligação entre a placa e o solo. Em 1991, KATSIKADELIS [65] apresentou uma formulação para o problema, admitindo a ocorrência de grandes deslocamentos, tendo como base as equações de Von Kármán e permitindo comportamento não-linear entre o deslocamento e a reação do solo.

Outro problema importante na prática da engenharia de estruturas é o de placas com não linearidade geométrica devido à ocorrência de grandes deslocamentos. Este assunto foi tratado por TANAKA [66]; KAMIYA e SAWAKI [67] e YE e LIN [68]. TANAKA [66] estudou a aplicação do Método dos Elementos de Contorno para placas finas elásticas com grandes deslocamentos e apresentou uma formulação integral e incremental equivalente às equações de Von Kármán, enquanto de KAMIYA e SAWAKI [67] se basearam na equação de Berger. Vários outros trabalhos foram divulgados nesta mesma área por SAWAKI "et alii" [69], KATSIKADELIS e NERANTZAKIS [70], KAMIYA "et alii" [71], e KAMIYA [72].

A análise de vibrações livres e forçadas em placas finas elásticas foi apresentada por PROVIDAKIS e BESKOS [73, 74]. AKKARI e HUTCHINSON [75] além de tratarem o problema de vibração em placas finas, estenderam seus estudos à vibração de placas espessas.

A consideração de não-linearidade física em placas, incluindo os efeitos de deformação lenta, plasticidade e fratura, foi objeto de várias investigações realizado por

MUKERJEE e MORJARIA [76, 77, 78, 79]. A análise do comportamento elastoplástico de placas finas, sob as hipóteses de Kirchhoff foi desenvolvida por MOSHAIOV e VORUS [80], usando um esquema de carregamento incremental e com a consideração de momentos fletores plásticos iniciais, calculados por um processo iterativo. Para efeito de avaliação das integrais de domínio, neste trabalho a placa é dividida em células internas, admitindo-se constantes as componentes do momento plástico sobre cada uma delas. Placas sujeitas à instabilidade devida a forças nos seus próprios planos foram analisadas por COSTA [81] e também por BEZINE [82], utilizando-se, também, células internas para o cálculo da integral de domínio.

A consideração do problema de placas através da teoria de Reissner foi efetuada inicialmente, por WEEËN [83, 84], em 1982, analisando comportamento elástico e enfatizando as vantagens das hipóteses adotadas, que levam a um sistema de equações diferenciais de sexta ordem. Para cada ponto do contorno, foi estabelecido um sistema de três equações integrais em termos dos deslocamentos generalizados (rotação normal ao contorno, rotação tangencial e flecha) e das forças correspondentes (momento normal, momento tangencial e esforço cortante) cuja solução é obtida numericamente, sendo o contorno aproximado por elementos isoparamétricos quadráticos. KARAM [85], em 1986, pesquisou na mesma linha dos trabalhos de WEEËN demonstrando a eficiência do método e das hipóteses de Reissner, através de vários exemplos práticos de placas isotrópicas, em regime elástico linear. RIBEIRO e VENTURINI [86], em 1989, considerando o equacionamento proposto por WEEËN [83, 84], escreveram o sistema de equações lineares tomando os pontos de carga fora do domínio, evitando-se assim a ocorrência de algumas singularidades. Os trabalhos BARCELLOS e SILVA [87], e WESTPHAL e BARCELLOS [89], também abordaram o problema da

flexão de placas, sob as hipóteses de REISSNER, identificando funções livres e funções essenciais como componentes da solução fundamental, e estudando a influência de uma função livre na resolução numérica da placa. A composição entre o modelo de Reissner e a não-linearidade geométrica devido à ocorrência de grandes deslocamentos foi formulada por XIAO-YAN "et alii" [89], em 1990. Neste trabalho utilizou-se um esquema iterativo para a linearização das equações.

A combinação do Método dos Elementos Finitos com o Método dos Elementos de Contorno para placas, que já fora formulada anteriormente para outros problemas da teoria de elasticidade, foi apresentada por NG "et alii" [90].

2 FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS

2.1. INTRODUÇÃO

A placa é um corpo limitado por duas superfícies planas ou de pequena curvatura, sendo a distância entre estas superfícies, denominada espessura, que é pequena em comparação às outras dimensões. A superfície equidistante das superfícies limites é denominada superfície média, ou plano médio, no caso de placa plana.

A placa pode ser classificada, em função das propriedades do material que a constitui, em: anisótropa – com propriedades diferentes em qualquer direção, ortótropa – com propriedades diferentes apenas em duas direções ortogonais; ou isótropa – com as mesmas propriedades em qualquer direção.

2.2. HIPÓTESES BÁSICAS DA TEORIA CLÁSSICA DE FLEXÃO DE KIRCHHOFF

As hipóteses básicas sobre as quais se fundamenta a Teoria Clássica de Kirchhoff, são as seguintes:

- a placa é constituída de material elástico linear, homogêneo, e isotrópico;

- os deslocamentos transversais são pequenos, se comparados à espessura;
- uma reta, inicialmente, normal ao plano médio permanece, após a flexão da placa, reta e normal ao plano médio na configuração deformada. Isto, significa que as deformações e as tensões normais correspondentes, paralelas ao plano médio variam linearmente e antisimetricamente ao longo da espessura. Além disso, esta hipótese considera nula a contribuição das deformações por cisalhamento transversal;
- as tensões aplicadas nas superfícies externas são muito pequenas em comparação às tensões normais da flexão, paralelas ao plano médio;
- não ocorrem deformações no plano médio da placa.

2.3. RELAÇÕES E EQUAÇÕES BÁSICAS DA TEORIA DE KIRCHHOFF

Partindo-se das simplificações envolvidas nas hipóteses básicas, determinam-se as relações e equações fundamentais da Teoria Clássica de Kirchhoff para placas delgadas isotrópicas.

De acordo com a quarta hipótese, as componentes de tensão σ_{zx} , σ_{zy} e σ_{zz} , nas faces externas, são nulas ou muito pequenas em relação às demais, sendo então desprezadas. As demais componentes, consideradas no estudo das placas estão indicadas na figura 2.1.

$$\text{Portanto: } \sigma_{zx} = 0 \quad \sigma_{zy} = 0 \quad (2.1)$$

nas faces externas da placa, e

$$\sigma_{zz} \cong 0$$

e ao longo da espessura.

Considerando-se a placa submetida apenas a pequenos deslocamentos u_i , o tensor de deformações pode ser expresso

por:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

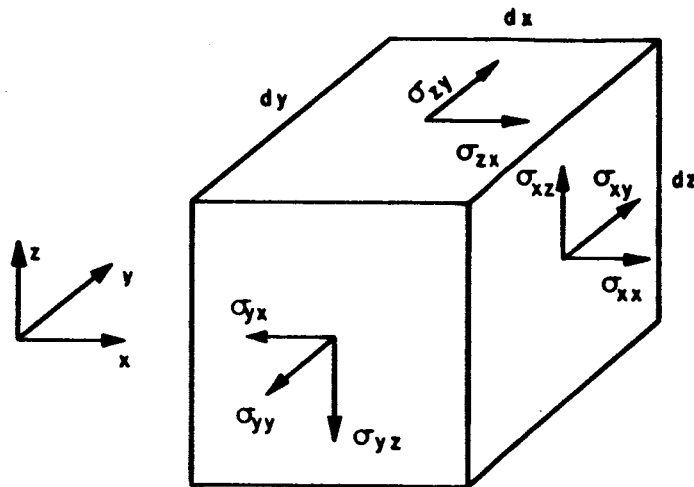


Fig. 2.1 - Elemento da Placa com as Componentes de Tensão

De acordo com a hipótese admitida de comportamento elástico linear, a relação tensão-deformação é:

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \epsilon_{ll} \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad (2.3)$$

ou explicitando-se a deformação:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{ll} \delta_{ij} \right) \quad (2.4)$$

sendo:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.5)$$

onde:

E : módulo de elasticidade longitudinal

G : módulo de elasticidade transversal

ν : coeficiente de Poisson

Desprezando-se as deformações devidas ao cisalhamento transversal e substituindo-se a relação (2.5) em (2.4) e

tendo em vista a expressão (2.2), obtém-se:

$$\epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.6.a)$$

$$\epsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.6.b)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.6.c)$$

A terceira hipótese básica do item (2.2) pode ser expressa como:

$$\sigma_{xx} = z b_1(x, y) \quad (2.7)$$

$$\sigma_{yy} = z b_2(x, y)$$

Substituindo-se (2.7) em (2.6.c) e integrando-se em z obtém-se:

$$u_z = w(x, y) - \frac{\nu}{E} [b_1(x, y) + b_2(x, y)] z^2 \quad (2.8)$$

A função $w(x, y)$ representa os deslocamentos verticais da superfície média da placa, isto é, deslocamentos na direção z . Em vista da espessura da placa ser pequena, relativamente às outras dimensões, os dois últimos termos de (2.8) podem ser desprezados em comparação com $w(x, y)$. Assim a equação (2.8) pode ser expressa como:

$$u_z = w(x, y) \quad (2.9)$$

De (2.6.a) e (2.6.b) obtêm-se respectivamente:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = - \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.10.a)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = - \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.10.b)$$

Substituindo-se (2.9) nas relações (2.10) e integrando-se em z, obtêm-se:

$$u_x = - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (2.11.a)$$

$$u_y = - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (2.11.b)$$

Por questão de simplicidade, as funções $u(x, y)$, $v(x, y)$ e $w(x, y)$ serão denotadas, a partir daqui, por u , v e w , respectivamente.

Com base no tensor de deformações (2.2) e nas expressões (2.11), para u_x , u_y , tem-se:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.12.a)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.12.b)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.12.c)$$

Considerando-se as simplificações expressas em (2.1), e a lei de Hooke (~~2.2~~), obtêm-se as relações entre as componentes de tensão e as componentes dos deslocamentos:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[- z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (2.13.a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[- z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \quad (2.13.b)$$

$$\sigma_{xy} = 2G \left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (2.13.c)$$

São definidos agora, os momentos fletores e o momento de torção, por unidade de comprimento, como as respectivas resultantes das integrais das componentes de tensão ao longo da espessura, expressos como:

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z \, dz \quad (2.14.a)$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z \, dz \quad (2.14.b)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z \, dz \quad (2.14.c)$$

Substituindo-se as componentes σ_{ij} nas expressões (2.14) pelos respectivos valores, de acordo com (2.13), e integrando-se em z , obtêm-se as relações momento-curvatura:

$$M_{xx} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.15.a)$$

$$M_{yy} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.15.b)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.15.c)$$

onde

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.16)$$

São definidos também os esforços cortantes, por unidade de comprimento, como as resultantes das integrais das

componentes de tensão tangencial ao longo da espessura, como:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \quad (\text{plano } yz) \quad (2.17.a)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz \quad (\text{plano } xz) \quad (2.17.b)$$

As equações diferenciais de equilíbrio para um sólido tridimensional, são expressas por:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (2.18.a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (2.18.b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0 \quad (2.18.c)$$

onde X, Y, e Z são as componentes das forças de volume. Multiplicando-se as equações (2.18.a) e (2.18.b) por zdz e integrando-se em z , tendo em vista as definições de M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} , Q_x e Q_y dadas respectivamente por (2.14) e (2.17), obtém-se:

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + m_x = 0 \quad (2.19.a)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y + m_y = 0 \quad (2.19.b)$$

sendo, m_x , m_y , os momentos externos aplicados por unidade de área, atuando no plano médio da placa, expressos por:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} Xz \, dz \quad (2.20.a)$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} Yz \, dz \quad (2.20.b)$$

Integrando-se, agora, a equação (2.18.c) em z, tem-se:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (2.21)$$

sendo q, definida como a carga resultante na direção z, dada por:

$$q = \sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right) + \int_{-h/2}^{h/2} z \, dz \quad (2.22)$$

Derivando-se os valores de Q_x e Q_y , dados pelas equações (2.19), em relação a x e y, respectivamente e substituindo-se na equação (2.21), resulta:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -q - \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_y}{\partial y} \quad (2.23)$$

A equação (2.23) é a equação diferencial geral de placas escrita em termos dos momentos fletores e de torção.

Derivando-se, convenientemente, as relações momento-curvatura (2.15) e substituindo-se na equação (2.23), tem-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left[q + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right] \quad (2.24)$$

A equação (2.24) mostra que o problema de flexão de placas finas tratado sob as hipóteses relacionadas no item

(2.2), fica reduzido à solução de equações biharmônicas, com condições de contorno apropriadas.

A equação (2.24) é comumente expressa na sua forma implícita:

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} \left[q + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right] \quad (2.25)$$

sendo ∇^4 , o operador biharmônico, dado por:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (2.26)$$

A partir das equações (2.19), podem ser explicitados Q_x e Q_y , e tendo em vista as relações (2.15) pode-se escrever:

$$Q_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (2.27.a)$$

$$Q_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \quad (2.27.a)$$

As expressões (2.15) podem ser escritas, indicialmente, como:

$$M_{ij} = -D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_\ell \partial x_\ell} + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (2.28)$$

Analogamente, a equação (2.27) fica:

$$Q_i = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_\ell \partial x_\ell} \quad (2.29)$$

A figura (2.2) mostra os esforços M_{ij} e Q_i , no elemento de placa, bem como a convenção adotada.

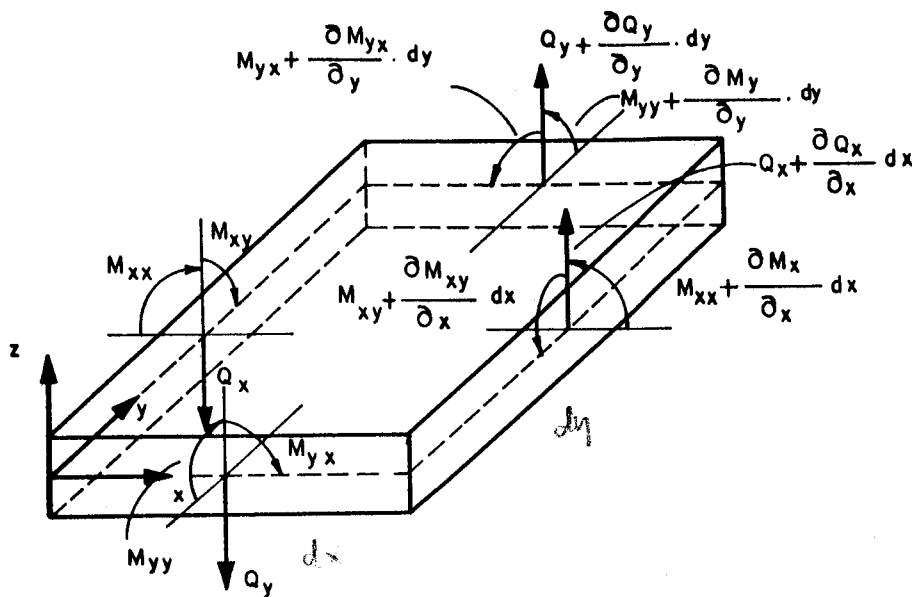


Fig. 2.2 - Elemento de Placa e Esforços

Os momentos e os esforços cortantes definidos por (2.14) e (2.17), respectivamente, estão referidos a um sistema de coordenadas (x,y) , porém será necessário no trabalho, determiná-los em um outro sistema de referência (n,s) . A transformação de coordenadas do sistema (x,y) para o sistema (n,s) , é definida por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{T} \begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix}, \quad \text{e}, \quad \begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{T}^T \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

sendo, a matriz de transformação T dada por:

$$\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\begin{bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{bmatrix}} \quad (2.31)$$

$n(n_1, n_2) \quad s(s_1, s_2)$

A figura (2.3) mostra os sistemas de referência (x,y) e (n,s) .

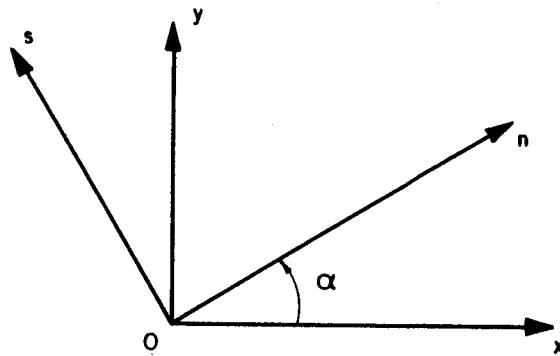


Fig. 2.3 - Sistemas de Coordenadas (x,y) e (n,s)

A transformação do tensor de momentos do sistema (x,y) para o sistema (n,s), é definida por:

$$\bar{M} = T^T M T \quad (2.32)$$

onde:

$$M = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} M_{nn} & M_{ns} \\ M_{sn} & M_{ss} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

sendo:

M : tensor momento no sistema (x,y)

\bar{M} : tensor momento no sistema (n,s)

T^T : matriz transposta de T

Para seqüência deste trabalho será de interesse representar vetorialmente o tensor momento \underline{M} , tendo em conta que:

$$M_{xy} = M_{yx}$$

Assim o vetor momento será representado por:

$$\underline{M} = \left\{ \begin{matrix} M_{xx} \\ M_{xy} \\ M_{yy} \end{matrix} \right\} \quad (2.34.a)$$

e

$$\bar{\underset{\sim}{M}} = \begin{Bmatrix} M_{nn} \\ M_{ns} \\ M_{ss} \end{Bmatrix} \quad (2.34.b)$$

Efetuada-se o produto indicado em (2.32), a transformação do vetor $\underset{\sim}{M}$ para o novo sistema fica agora definida por:

$$\bar{\underset{\sim}{M}} = \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{M} \quad (2.35)$$

sendo a matriz de transformação $\underset{\sim}{C}$ dada por:

$$\underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & 2\text{sen } \alpha \cos \alpha & \text{sen}^2 \alpha \\ -\cos \alpha \text{sen} \alpha & \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha & \text{sen } \alpha \cos \alpha \\ \text{sen}^2 \alpha & -2\text{sen } \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

A transformação dos esforços cortantes do sistema (x,y) para o sistema (n,s) fica definida por:

$$\bar{\underset{\sim}{Q}} = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{Q}$$

onde:

$$\underset{\sim}{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\underset{\sim}{Q}} = \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_s \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

Na resolução da equação diferencial (2.24), é necessário imporem-se condições de contorno com relação ao deslocamento transversal w e à sua derivada $\partial w / \partial n$, sendo n a direção normal ao contorno, ou aos esforços correspondentes Q_n e M_n . Deve ser ressaltado que o fato de não serem consideradas as deformações por cisalhamento transversal na

Teoria Clássica de Kirchhoff causa uma redução no grau da equação diferencial, e ao mesmo tempo uma contração no número de condições de contorno possíveis de serem impostas em cada ponto. Isto é, podem ser impostas apenas duas. Assim não podem ser impostas condições relativas à derivada na direção tangencial ao contorno, $\partial w / \partial s$, ou ao momento torçor M_{ns} . Para transpor esta dificuldade Kirchhoff agrupou as condições de contorno relativas ao esforço cortante Q_n e ao momento M_{ns} numa única condição criando o conceito de esforço cortante equivalente V_n , onde:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (2.38)$$

A introdução desta aproximação determina o aparecimento de reações concentradas nos cantos da placa de forma que sejam mantidas as condições de equilíbrio. Estas reações são expressas por:

$$R_c = M_{ns}^+ - M_{ns}^- \quad (2.39)$$

onde:

M_{ns}^- : momento torçor no ponto anterior ao canto

M_{ns}^+ : momento torçor no ponto após o canto.

Para uma borda simplesmente apoiada, as condições de contorno são:

$$w = 0 \quad \text{e} \quad M_n = 0 \quad (2.40)$$

neste caso tem-se conseqüentemente, $\frac{\partial w}{\partial s} = 0$, na direção tangencial.

Para o caso de borda engastada, tem-se:

$$w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (2.41)$$

Para o caso de borda livre

$$M_n = 0 \quad \text{e} \quad V_n = 0 \quad (2.42)$$

neste caso a condição de força cortante e momento torçor nulos foi combinada numa única condição de força cortante equivalente nula, conforme exposição anterior.

2.4. SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE PLACAS DE KIRCHHOFF

A utilização de equações integrais para a solução do problema de placas, implica na necessidade do estudo de soluções fundamentais. Entende-se por solução fundamental, a resposta em um ponto genérico t de um domínio, denominado domínio fundamental, causada pela aplicação de uma carga unitária em outro ponto s deste domínio. Em geral, é considerado como domínio fundamental o domínio infinito. A carga unitária é representada por $\delta(s,t)$, função delta de Dirac, cujas propriedades são:

$\delta(s,t) = 0$, quando os pontos s e t não são coincidentes

$\delta(s,t) = \infty$, quando os pontos s e t são coincidentes.

e

$$\int_{\Omega} \phi(t) \delta(s,t) d\Omega = \phi(s) \quad (2.43)$$

onde, $\phi(t)$, é uma função qualquer definida no domínio Ω .

A partir de (2.43) pode-se então escrever:

$$\int_{\Omega} \delta(s,t) d\Omega = 1 \quad (2.44)$$

isto é, a resultante da integral da função delta de Dirac no domínio é a carga unitária.

A solução fundamental para o problema de placas é denotada por w^* , e significa o deslocamento transversal no ponto \underline{t} , denominado ponto de deslocamento, quando uma carga unitária é aplicada num ponto \underline{s} , denominado ponto de carregamento ou ponto fonte. *source*

A solução fundamental é obtida a partir da equação:

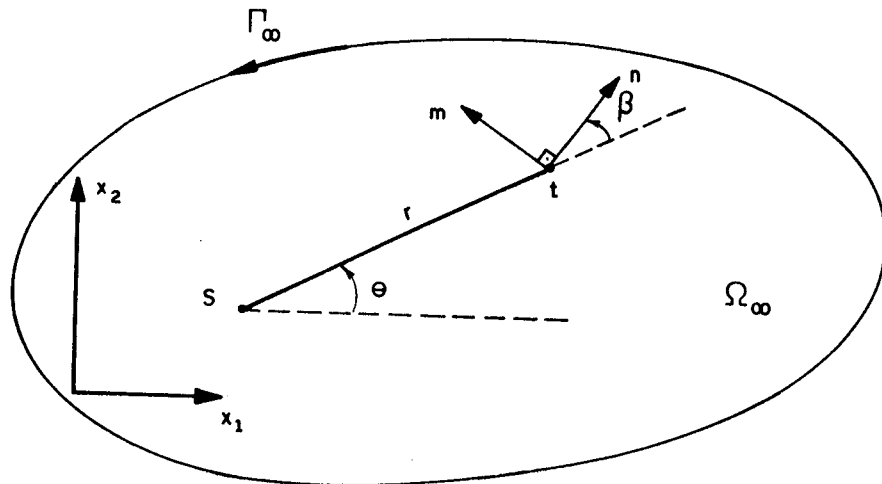
$$\nabla^4 w = \delta(s,t)/D \quad (2.45)$$

A resolução da equação (2.45) leva à solução fundamental para todos os pontos do domínio fundamental, exceto o ponto \underline{s} . Assim, a equação diferencial fica:

$$\nabla^4 w = 0 \quad (2.46)$$

A solução de (2.46) é obtida escrevendo-se a equação em coordenadas polares, conforme mostrado por PAIVA [47], e resulta em:

$$w^*(s,t) = \frac{1}{8\pi D} r^2 (\ln r - \frac{1}{2}) \quad (2.47)$$



$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

(simetria)

Fig.2.4 - Pontos de carregamento \underline{s} e de deslocamento \underline{t} .

A partir de (2.47) são obtidas as expressões dos deslocamentos e esforços em um ponto genérico t , do domínio fundamental, usando-se as relações esforço - deslocamento em coordenadas polares. Em particular, são importantes as componentes de momento, a derivada do deslocamento transversal e a força cortante equivalente, referidos a um sistema de coordenadas (n,m) qualquer com origem no ponto t (Figura 2.4), expressos por:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n}(s,t) = \frac{r}{4\pi D} \ln r \cos \beta \quad (2.48)$$

$$M_{nn}^*(s,t) = -\frac{1}{4\pi} [(1+\nu) \ln r + (1-\nu) \cos^2 \beta + \nu]$$

$$M_{nm}^*(s,t) = -\frac{1-\nu}{8\pi} \sin 2\beta$$

$$V_n^*(s,t) = \frac{\cos \beta}{4\pi r} [2(1-\nu) \sin^2 \beta - 3 + \nu] + \frac{1-\nu}{4\pi R} \cos 2\beta \quad (2.49)$$

sendo R o raio de curvatura do contorno no ponto t considerado. A dedução completa das expressões (2.48) a (2.49) é apresentada nos trabalhos de PAIVA [47] e SILVA [62].

2.5. HIPÓTESES BÁSICAS DA TEORIA DE REISSNER

A seguir, são descritas as hipóteses sobre as quais se baseia a teoria de Reissner:

- 1 - a espessura é pequena se comparada às outras dimensões da placa;
- 2 - a placa é constituída de material elástico linear homogêneo, e isotrópico;
- 3 - uma reta inicialmente normal ao plano médio, após a

deformação da placa permanece reta, porém não necessariamente normal à superfície média deformada, pois as deformações por cisalhamento transversal são consideradas;

4 - as componentes tangenciais são nulas nas faces da placa;

5 - $\sigma_{33} = \mp \frac{q}{2}$ para $x_3 = \mp \frac{h}{2}$ (Tensões normais às superfícies externas da placa)

2.6. RELAÇÕES E EQUAÇÕES BÁSICAS DA TEORIA DE REISSNER

Partindo-se das hipóteses relacionadas no item anterior, serão escritas relações e equações que formam a base da teoria de Reissner. Considera-se o sistema de referência $x_1x_2x_3$, mostrado na figura 2.5, sendo que o plano x_1x_2 coincide com o plano médio da placa na configuração indeformada. Nesta figura são também indicadas as componentes de deslocamentos u_i , nas três direções x_i .

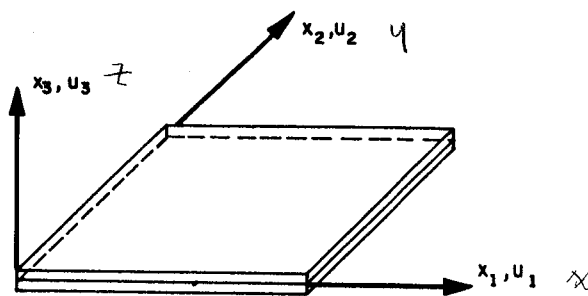
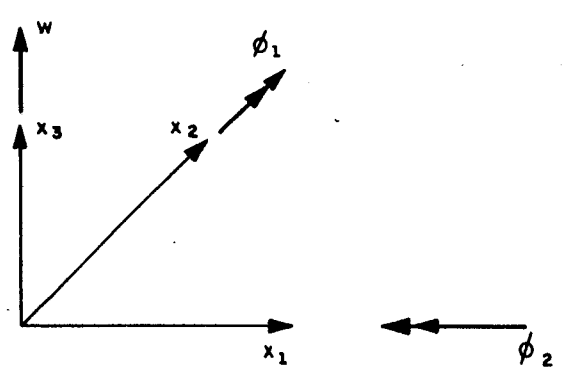


Fig. 2.5 - Sistema de Referência na Placa

A figura 2.6 mostra a convenção adotada para as rotações.

unidade (+)



ϕ_1 : rotação no plano x_1x_3
 ϕ_2 : rotação no plano x_2x_3

Fig. 2.6 - Convenção dos Sentidos das Rotações

Respeitadas as hipóteses consideradas, o estado de tensão no elemento de placa fica caracterizado pela figura 2.7.

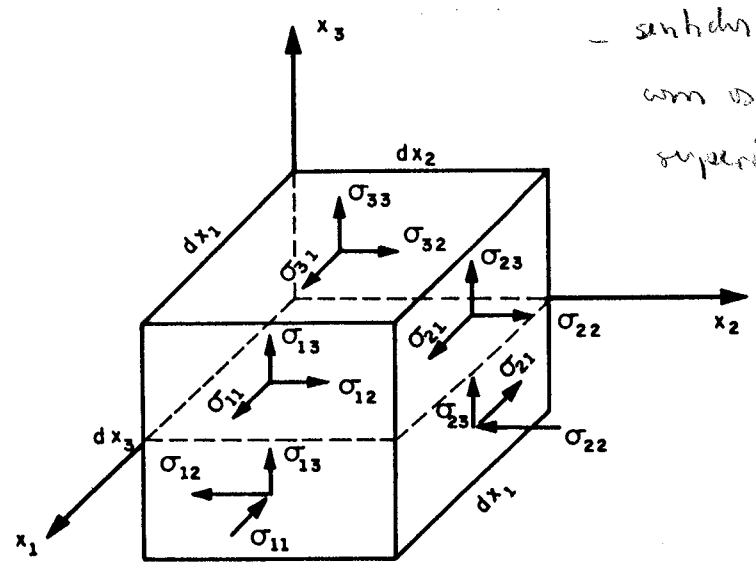


Fig. 2.7 - Estado de Tensão no Elemento da Placa

Integrando-se as componentes de tensão $\sigma_{\alpha\beta}$, ao longo da espessura, obtêm-se as resultantes de tensão, que são os momentos fletores e o momento torçor, por unidade de comprimento, de forma que:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \quad (2.50.a)$$

onde os índices denotados por letras gregas podem assumir os valores 1 ou 2. Analogamente, definem-se os esforços cortantes, por unidade de comprimento:

$$Q_{\alpha 3} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad (2.50.b)$$

podendo o esforço cortante pode ser denotado simplesmente como Q_{α} .

De acordo com a segunda e a quarta hipóteses as componentes, $\sigma_{\alpha\beta}$ variam linearmente ao longo da espessura, sendo expressas por:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12}{h^3} M_{\alpha\beta} x_3 \quad (2.51)$$

A figura 2.8 mostra o elemento de placa com as resultantes de tensão ou componentes de tensão no sentido generalizado, e a convenção de sinais adotada.

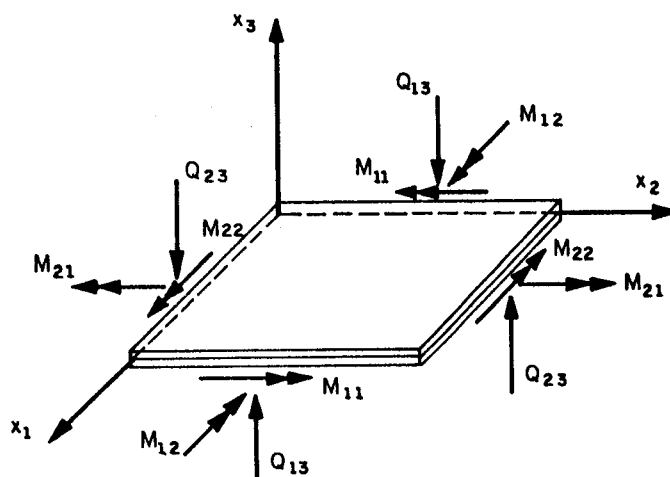


Fig. 2.8 - Resultantes de Tensão na Placa e Convenção de Sinais

Partindo-se das expressões (2.50) e utilizando-se as equações diferenciais de equilíbrio, obtém-se uma distribuição parabólica para $\sigma_{\alpha 3}$ na seguinte forma:

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{3}{2h} Q_{\alpha 3} \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (2.52)$$

A avaliação da componente σ_{33} é obtida analogamente, resultando em:

$$\sigma_{33} = \frac{q}{2} \left(\frac{x_3}{h} \right) \left[3 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (2.53)$$

Considerando-se que o material, além de elástico linear, seja isotrópico, pode-se expressar o funcional da energia de deformação como:

$$U = \int_V \left[\sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{22} \epsilon_{22} + \sigma_{33} \epsilon_{33} + 2(1+\nu) (\sigma_{12} \epsilon_{12} + \sigma_{13} \epsilon_{13} + \sigma_{23} \epsilon_{23}) \right] dV \quad (2.54)$$

Substituindo-se os valores de ϵ_{ij} dados por (2.4) na equação (2.54), tem-se:

$$U = \frac{1}{2E} \int_V \left[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu (\sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{11} \sigma_{33} + \sigma_{22} \sigma_{33}) + 2(1+\nu) (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right] dV \quad (2.55)$$

Substituindo-se agora os valores das componentes σ_{ij} em função das suas resultantes dadas por (2.51) e (2.52) tem-se:

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2E} \int_{\Omega} \left\{ \frac{12}{h^3} \left[(M_{11} + M_{22})^2 + 2(1+\nu) (M_{12}^2 - M_{11}M_{22}) + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{(1+\nu)}{5} h^2 (Q_1^2 + Q_2^2) - \frac{\nu h^2}{5} q (M_{11} + M_{22}) + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33}^2 dz \right] d\Omega \right. \\
\left. \right\} d\Omega
\end{aligned}
\tag{2.56}$$

Deve-se notar que, no caso, como foi admitido material elástico linear, a energia de deformação U e a energia de deformação complementar U^* se igualam.

Para a dedução das relações esforço-deslocamento, na sequência deste trabalho utiliza-se o princípio de Reissner, cujo funcional, na ausência de forças de volume, é expresso por:

$$\pi_R = - U^* - \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV + \int_{s_\sigma} (p_i - \bar{p}_i) u_i ds + \int_{s_u} p_i u_i ds
\tag{2.57}$$

onde:

u_i : são deslocamentos

p_i : são forças na superfície do contorno

\bar{p}_i : são forças prescritas no contorno

s_σ : é o trecho do contorno onde as tensões são prescritas,

s_u : é o trecho do contorno onde os deslocamentos são prescritos,

U^* : é a energia de deformação complementar.

$\sigma_{ij,j}$: é a derivada parcial da componente de tensão σ_j em relação à coordenada x_j .

As grandezas livres para variarem no funcional são as tensões σ_{ij} , os deslocamentos u_i , e as forças de superfície atuantes em s_u .

Considerando-se as expressões (2.51), (2.52), (2.53) e sabendo-se que os valores de p_i são dados por:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.58)$$

onde n_j são as componentes da normal ao contorno, dirigida para fora do domínio, pode-se reescrever a expressão (2.57) como:

$$\begin{aligned} \pi_R = & -U^* - \int_V \left[\left(M_{\alpha\beta, \beta} - Q_\alpha \right) \frac{12}{h^3} u_\alpha x_3 + (Q_{\alpha, \alpha} + q) \frac{3}{2h} u_3 \left(1 - \frac{4x_3^2}{h^2} \right) \right] dv + \\ & + \int_{s_\sigma} \left[\left(M_{\alpha\beta} n_\beta - \bar{M}_{\alpha\beta} n_\beta \right) \frac{12}{h^3} u_\alpha x_3 + (Q_\alpha n_\alpha - \bar{Q}_\alpha n_\alpha) \frac{3}{2h} u_3 \left(1 - \frac{4x_3^2}{h^2} \right) \right] ds + \\ & + \int_{s_u} \left[\left(M_{\alpha\beta} n_\alpha \right) \frac{12}{h^3} \bar{u}_\alpha x_3 + (Q_\alpha n_\alpha) \frac{3}{2h} \bar{u}_3 \left(1 - \frac{4x_3^2}{h^2} \right) \right] ds \quad (2.59) \end{aligned}$$

Definem-se agora os deslocamentos generalizados na superfície média da placa, ϕ_α e w , que representam a média ponderada dos deslocamentos u_i , equacionando-se o trabalho realizado pelas tensões com os deslocamentos e as respectivas resultantes destas tensões com os deslocamentos ponderados. Assim, tem-se:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} u_1 dx_3 = M_{11} \phi_1$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} u_2 dx_3 = M_{22} \phi_2$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} u_1 dx_3 = M_{21} \phi_1$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} u_3 dx_3 = Q_1 w$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} u_3 dx_3 = Q_2 w \quad (2.60)$$

Substituindo-se as expressões (2.51) e (2.52) nas equações (2.60), e exprimindo-se, genericamente, tem-se:

$$\phi_\alpha = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} u_\alpha x_3 dx_3 \quad (2.61)$$

$$w = \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} u_3 \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3$$

Substituindo-se os valores dos deslocamentos médios ponderados (2.61) na expressão do funcional π_R , (2.59), e ainda, tomando-se $dV = dx_3 d\Omega$ e $ds = dx_3 d\Gamma$, tem-se:

$$\begin{aligned} \pi_R = & - U^* - \int_{\Omega} \left[\left(M_{\alpha\beta, \beta} - Q_\alpha \right) \phi_\alpha + \left(Q_{\alpha, \alpha} + q \right) w \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_p} \left[\left(M_{\alpha\beta} n_\beta - \bar{M}_{\alpha\beta} n_\beta \right) \phi_\alpha + \left(Q_\alpha n_\alpha - \bar{Q}_\alpha n_\alpha \right) w \right] d\Gamma_p + \\ & + \int_{\Gamma_u} \left(M_{\alpha\beta} n_\alpha \bar{\phi}_\alpha + Q_\alpha n_\alpha \bar{w} \right) d\Gamma_u \end{aligned} \quad (2.62)$$

As grandezas sujeitas à variação em (2.62) são $M_{\alpha\beta}$, Q_α , ϕ_α , w e as forças de contorno no trecho Γ_u .

Tomando-se a primeira variação do funcional π_R , tem-se:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left\{ \frac{12}{Eh^3} [(M_{11} + M_{22}) \delta(M_{11} + M_{22}) + 2(1+\nu)M_{12} \delta M_{12} - (1+\nu) \delta(M_{11}M_{22}) + \right. \\
& + \frac{(1+\nu)h^2}{5} (Q_1 \delta Q_1 + Q_2 \delta Q_2) - \frac{\nu h^2}{10} q \delta(M_{11} + M_{22}) \left. \right] + \\
& + \phi_1 \delta(M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1) + \phi_2 \delta(M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2) + \\
& + w \delta(Q_{1,1} + Q_{2,2} + q) + (M_{11,1} + M_{12,1} - Q_1) \delta \phi_1 + (M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2) \delta \phi_2 + \\
& + (Q_{1,1} + Q_{2,2} + q) \delta w \left. \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_P} [(M_{11}n_1 + M_{12}n_2 - \bar{M}_{11}n_1 - \bar{M}_{12}n_2) \delta \phi_1 + \\
& + (M_{21}n_1 + M_{22}n_2 - \bar{M}_{21}n_1 - \bar{M}_{22}n_2) \delta \phi_2 + (Q_1n_1 + Q_2n_2 - \bar{Q}_1n_1 - \bar{Q}_2n_2) \delta w] d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_u} \left[(\delta M_{11}n_1 + \delta M_{12}n_2) \bar{\phi}_1 + (\delta M_{12}n_1 + \delta M_{22}n_2) \bar{\phi}_2 + \right. \\
& \left. (\delta Q_1n_1 + \delta Q_2n_2) \bar{w} \right] d\Gamma = 0 \tag{2.63}
\end{aligned}$$

Reagrupando-se os termos de (2.63), tem-se:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left\{ \frac{12}{Eh^3} [(M_{11} + M_{22}) - (1+\nu)M_{22} - \frac{\nu h^2}{10} q] \delta M_{11} + [(M_{22} + M_{11}) - (1+\nu)M_{11} + \right. \\
& - \frac{\nu h^2}{10} q] \delta M_{22} + [2(1+\nu)M_{12}] \delta M_{12} + \frac{(1+\nu)h^2}{5} (Q_1 \delta Q_1 + Q_2 \delta Q_2) \left. \right\} + \\
& + \left\{ \phi_1 \delta(M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1) + \phi_2 \delta(M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2) + w \delta(Q_{1,1} + Q_{2,2} + q) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1) \delta\phi_1 + (M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2) \delta\phi_2 + (Q_{1,1} + Q_{2,2} + \\
& + Q) \delta w \Big\} d\Omega + \int_{\Gamma_P} [(M_{11} n_1 + M_{12} n_2 - \bar{M}_{11} n_1 - \bar{M}_{12} n_2) \delta\phi_1 + (M_{21} n_1 + M_{22} n_2 + \\
& - \bar{M}_{21} n_1 - \bar{M}_{22} n_2) \delta\phi_2 + (Q_1 n_1 + Q_2 n_2 - \bar{Q}_1 n_1 - \bar{Q}_2 n_2) \delta w] d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_u} [(\delta M_{11} n_1 + \delta M_{12} n_2) \bar{\phi}_1 + (\delta M_{12} n_1 + \delta M_{22} n_2) \bar{\phi}_2 + (\delta Q_1 n_1 + \\
& + \delta Q_2 n_2) \bar{w}] d\Gamma = 0 \tag{2.64}
\end{aligned}$$

Integrando-se por partes os seguintes termos, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \phi_1 \delta M_{11,1} d\Omega &= \int_{\Gamma} \phi_1 n_1 \delta M_{11} d\Gamma - \int_{\Omega} \phi_{1,1} \delta M_{11} d\Omega \\
\int_{\Omega} \phi_1 \delta M_{12,2} d\Omega &= \int_{\Gamma} \phi_1 n_2 \delta M_{12} d\Gamma - \int_{\Omega} \phi_{1,2} \delta M_{12} d\Omega \\
\int_{\Omega} \phi_2 \delta M_{21,1} d\Omega &= \int_{\Gamma} \phi_2 n_1 \delta M_{21} d\Gamma - \int_{\Omega} \phi_{2,1} \delta M_{21} d\Omega \tag{2.65} \\
\int_{\Omega} \phi_2 \delta M_{22,2} d\Omega &= \int_{\Gamma} \phi_2 n_2 \delta M_{22} d\Gamma - \int_{\Omega} \phi_{2,2} \delta M_{22} d\Omega \\
\int_{\Omega} w \delta Q_{11,1} d\Omega &= \int_{\Gamma} w n_1 \delta Q_1 d\Gamma - \int_{\Omega} w_{,1} \delta Q_1 d\Omega \\
\int_{\Omega} w \delta Q_{2,2} d\Omega &= \int_{\Gamma} w n_2 \delta Q_2 d\Gamma - \int_{\Omega} w_{,2} \delta Q_2 d\Omega
\end{aligned}$$

Substituindo-se os valores das integrais (2.65) na equação (2.64) e reagrupando-se:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left\{ \left\{ \frac{12}{Eh^3} \left[(M_{11} + M_{22}) - (1+\nu) M_{22} - \frac{\nu h^2}{10} q \right] - \phi_{1,1} \right\} \delta M_{11} + \right. \\
& + \left\{ \frac{12}{Eh^3} \left[(M_{22} + M_{11}) - (1+\nu) M_{11} - \frac{\nu h^2}{10} q \right] - \phi_{2,2} \right\} \delta M_{22} + \\
& + \left\{ \frac{12}{Eh^3} \left[2(1+\nu) M_{12} \right] - \phi_{1,2} - \phi_{2,1} \right\} \delta M_{12} + \left\{ \frac{12}{Eh^3} \left[\frac{(1+\nu) h^2}{5} Q_1 \right] + \right. \\
& - \left. \phi_{1-w,1} \right\} \delta Q_1 + \left\{ \frac{12}{Eh^3} \left[\frac{(1+\nu) h^2}{5} Q_2 \right] - \phi_{2-w,2} \right\} \delta Q_2 + (M_{11,1} + \\
& + M_{12,2} - Q_1) \delta \phi_1 + (M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2) \delta \phi_2 + (Q_{1,1} + Q_{2,2} + q) \delta w \Big\} d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_p} \left[(M_{11} n_1 + M_{12} n_2 - \bar{M}_{11} n_1 - \bar{M}_{12} n_2) \delta \phi_1 + (M_{21} n_1 + M_{22} n_2 + \right. \\
& - \bar{M}_{21} n_1 - \bar{M}_{22} n_2) \delta \phi_2 + (Q_1 n_1 + Q_2 n_2 - \bar{Q}_1 n_1 - \bar{Q}_2 n_2) \delta w \Big] d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma_u} \left[(\bar{\phi}_1 n_1 - \phi_1 n_1) \delta M_{11} + (\bar{\phi}_1 n_2 + \bar{\phi}_2 n_1 - \phi_1 n_2 - \phi_2 n_1) \delta M_{12} + (\bar{\phi}_2 n_2 + \right. \\
& - \left. \phi_2 n_2) \delta M_{22} + (\bar{w} n_1 - w n_1) \delta Q_1 + (\bar{w} n_2 - w n_2) \delta Q_2 \Big] d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Da equação (2.66), de acordo com o cálculo variacional, obtêm-se:

a) condições de equilíbrio:

$$M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1 = 0$$

$$M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2 = 0$$

$$Q_{1,1} + Q_{2,2} - q = 0$$

(2.67)

b) relações entre esforço e deslocamento:

$$\frac{12}{Eh^3} \left[M_{11} + M_{22} - (1+\nu)M_{22} - \frac{\nu h^2}{10} q \right] - \phi_{1,1} = 0$$

$$\frac{12}{Eh^3} \left[M_{11} + M_{22} - (1+\nu)M_{11} - \frac{\nu h^2}{10} q \right] - \phi_{2,2} = 0$$

$$\frac{24(1+\nu)}{Eh^3} M_{12} - \phi_{1,2} - \phi_{2,1} = 0 \quad (2.68)$$

$$\frac{12}{Eh^3} (1+\nu) \frac{h^2}{5} Q_1 \phi_1 - w_{,1} = 0$$

$$\frac{12}{Eh^3} (1+\nu) \frac{h^2}{5} Q_2 \phi_2 - w_{,2} = 0$$

c) condições de contorno sobre Γ_u :

$$\phi_1 = \bar{\phi}_1$$

$$\phi_2 = \bar{\phi}_2$$

$$w = \bar{w}$$

(2.69)

d) condições de contorno sobre Γ_p :

$$M_{11} n_1 + M_{12} n_2 = \bar{M}_{11} n_1 + \bar{M}_{12} n_2$$

$$M_{22} n_1 + M_{22} n_2 = \bar{M}_{21} n_1 + \bar{M}_{22} n_2$$

$$Q_1 n_1 + Q_2 n_2 = \bar{Q}_1 n_1 + \bar{Q}_2 n_2$$

(2.70)

ou genericamente:

$$\bar{p}_\alpha = \bar{M}_{\alpha\beta} n_\beta$$

$$\bar{p}_3 = \bar{Q}_\alpha n_\alpha$$

(2.71)

A partir das equações (2.68) explicitam-se os valores dos momentos e dos esforços cortantes:

$$M_{11} = D (\phi_{1,1} + \nu \phi_{2,2}) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q$$

$$M_{22} = D (\phi_{2,2} + \nu \phi_{1,1}) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \quad (2.72.a)$$

$$M_{12} = \frac{D(1-\nu)}{2} (\phi_{1,2} + \phi_{2,1})$$

$$Q_1 = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\phi_1 + w_{,1}) \quad (2.72.b)$$

$$Q_2 = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\phi_2 + w_{,2})$$

As expressões (2.72) podem ser expressas, implicitamente, como:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} (\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}) + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.73.a)$$

$$Q_\alpha = D(1-\nu) \frac{\lambda^2}{2} (\phi_\alpha + w_{,\alpha}) \quad (2.73.b)$$

sendo:

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}$$

O sistema formado pelas equações de equilíbrio (2.67) e pelas equações (2.72) constitui a base da Teoria de Reissner, sendo na verdade um sistema de equações

diferenciais de sexta ordem, que permite o atendimento de três condições físicas em cada ponto de contorno. Assim, na borda simplesmente apoiada, tem-se:

$$w = 0, \quad \phi_s = 0 \quad (\text{"hard condition"})$$

ou

$$w = 0, \quad M_{ns} = 0 \quad (\text{"soft condition"})$$

A primeira condição impõe deslocamento transversal e rotação tangencial nulos na borda e coincide com a condição normalmente usada na Teoria Clássica de Kirchhoff. Já a condição alternativa ("soft"), prescreve w e M_{ns} nulos.

O sistema de equações obtido anteriormente pode ser condensado em outro com três equações diferenciais parciais, porém com ordem superior, de modo que continuem sendo satisfeitas três condições em cada ponto da borda. Substituindo-se os valores de ϕ_1 e ϕ_2 dados por (2.72.b) em (2.72.a) tem-se:

$$M_{11} = -D(w_{,11} + \nu w_{,22}) + \frac{2}{\lambda^2(1-\nu)} (Q_{31,1} + \nu Q_{32,2}) + \frac{\nu}{\lambda^2(1-\nu)} q$$

$$M_{22} = -D(w_{,22} + \nu w_{,11}) + \frac{2}{\lambda^2(1-\nu)} (Q_{32,2} + \nu Q_{31,1}) + \frac{\nu}{\lambda^2(1-\nu)} q$$

$$M_{12} = -D(1-\nu) w_{,12} + \frac{1}{\lambda^2} (Q_{31,2} + Q_{32,1}) \quad (2.74)$$

Utilizando-se a terceira equação de equilíbrio (2.67) tem-se:

$$M_{11} = -D(w_{,11} + \nu w_{,22}) + \frac{2}{\lambda^2} Q_{31,1} - \frac{\nu}{\lambda^2(1-\nu)} q$$

$$M_{22} = -D(w_{,22} + \nu w_{,11}) + \frac{2}{\lambda^2} Q_{32,2} - \frac{\nu}{\lambda^2 (1-\nu)} q$$

$$M_{12} = -D(1-\nu) w_{,12} + \frac{1}{\lambda^2} (Q_{31,2} + Q_{32,1}) \quad (2.75)$$

Substituindo-se as equações (2.75) nas duas primeiras equações de equilíbrio (2.67):

$$Q_{31} - \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 Q_{31} + \frac{1}{\lambda^2 (1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x_1} = -D \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w \quad (2.76)$$

$$Q_{32} - \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 Q_{32} + \frac{1}{\lambda^2 (1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x_2} = -D \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 w$$

Derivando-se as duas equações (2.76) em relação a x_1 e x_2 respectivamente e levando-se na terceira equação de equilíbrio obtém-se:

$$D \nabla^4 w = q - \frac{(2-\nu)}{(1-\nu)} \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 q \quad (2.77)$$

O novo sistema de equações diferenciais é formado pelas equações (2.76) e pela equação (2.77).

As equações de equilíbrio (2.67) podem ser expressas indicialmente, como:

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha 3} = 0 \quad (2.78)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} + q = 0$$

Admitindo-se a ocorrência de momentos distribuídos na superfície média de intensidade m_α , as equações de equilíbrio passam a ser:

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha 3} + m_\alpha = 0 \quad (2.79)$$

$$Q_{3\alpha,\alpha} + q = 0$$

Caso haja a possibilidade de ocorrência de ações devidas a campos de deformações iniciais, tais como temperatura, retração e inchamento, o tensor de deformações pode ser imaginado como sendo composto por:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^o \quad (2.80)$$

sendo ϵ_{ij}^e a componente elástica devida ao carregamento propriamente dito e às condições de contorno prescritas. A parcela ϵ_{ij}^o representa o campo de deformações iniciais. No caso das placas esta parcela corresponde a um campo de curvaturas iniciais. A formulação pode ser conduzida em termos de deformações ou curvaturas iniciais, conforme apresentado por VENTURINI [2], para o caso de estados planos de tensão e deformação, entretanto é preferível a formulação dos efeitos citados em termos de tensões ou, momentos iniciais. Para tanto, no caso de placas, o campo de curvaturas iniciais é transformado em um campo de momentos iniciais equivalente através de:

$$M_{\alpha\beta}^o = C_{\alpha\beta\gamma\theta} \chi_{\gamma\theta}^o \quad (2.81)$$

onde $C_{\alpha\beta\gamma\theta}$ são as componentes do tensor elástico de quarta

ordem e $\chi_{\gamma\theta}^0$ as componentes do campo de curvaturas iniciais.

Considerando-se o campo de momentos iniciais $M_{\alpha\beta}^0$, as expressões (2.73) passam a ser escritas como:

$$M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^e - M_{\alpha\beta}^0 \quad (2.82)$$

onde, $M_{\alpha\beta}^e$ é a parcela do momento calculado elasticamente, e $M_{\alpha\beta}$ é o momento verdadeiro, computando-se o carregamento propriamente dito e o campo de momentos iniciais.

Assim:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \phi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta}^0 \quad (2.83)$$

Fazendo-se:

$$\hat{M}_{\alpha\beta}^e = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \phi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.84)$$

e

$$\hat{M}_{\alpha\beta}^e = C_{\alpha\beta\gamma\theta} \chi_{\gamma\theta} \quad ; \quad \chi_{\gamma\theta} = \phi_{\gamma,\theta} \quad (2.85)$$

obtém-se;

$$M_{\alpha\beta} = \hat{M}_{\alpha\beta}^e + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta}^0 \quad (2.86)$$

O esforço cortante pode ser expresso por:

$$Q_{3\beta} = C_{3\beta 3\theta} \psi_{3\theta} \quad (2.87)$$

onde:

$$\psi_{3\theta} = w_{,\theta} + \phi_{\theta} \quad (2.88)$$

A formulação admitindo-se a ocorrência de momentos iniciais é útil e usual para modelar comportamento não-linear do material quando aplicada junto com uma técnica de soluções elásticas sucessivas.

A figura 2.9 ilustra as deformações por cisalhamento transversal, $\psi_{3\theta}$, ocorridas na placa. A reta perpendicular à superfície média na situação indeformada, após a deformação permanece reta,

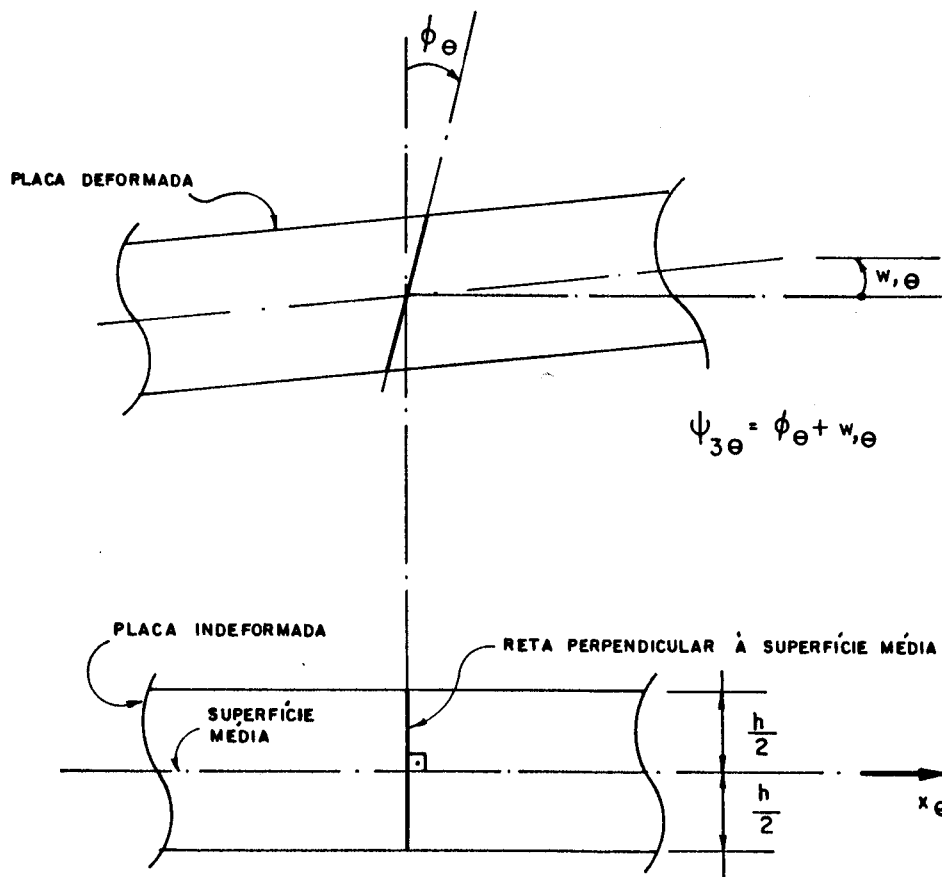


Fig. 2.9 - Deformação por cisalhamento transversal $\psi_{3\theta}$

de acordo com as hipóteses colocadas em 2.5, porém na situação deformada não é necessariamente perpendicular à superfície média. A distorção $\psi_{3\theta}$ ao nível da superfície média é dada pela soma da rotação ϕ_θ com a derivada $w_{,\theta}$.

2.7. SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE PLACAS DE REISSNER

Para a solução do problema de placas pela teoria de Reissner, através das equações integrais de contorno, é necessário formularem-se as soluções fundamentais pela referida teoria. Para a obtenção destas soluções considera-se o domínio infinito Ω^* e o contorno correspondente Γ^* . Expressando-se as equações de equilíbrio em função dos deslocamentos generalizados, obtém-se, neste caso:

$$\Delta_{ij}^* \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) u_j(s) = - b_i(s)$$

onde Δ_{ij}^* denota as componentes do operador de Navier dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}^* &= D \frac{(1-\nu)}{2} \left[(\nabla^2 - \lambda^2) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha(s) \partial x_\beta(s)} \right] \\ \Delta_{\alpha 3}^* &= - \Delta_{3\alpha}^* = -D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha(s)} \\ \Delta_{33}^* &= D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \nabla^2 \end{aligned} \quad (2.89)$$

onde, $\nabla^2 = \partial^2 / (\partial x_\alpha \partial x_\alpha)$, é operador de Laplace.

Admitindo-se um carregamento unitário, representado pela função Delta de Dirac $\delta(s,t)$, com singularidade

localizada no ponto fonte \underline{s} , tem-se:

$$\Delta_{ij}^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u_{kj}^*(s, t) = - \delta(s, t) \delta_{ik}$$

sendo δ_{ik} , o Delta de Kronecker, e $u_{kj}^*(s, t)$ a solução fundamental em deslocamentos.

De acordo com WEEËN [83][84], solução fundamental $u_{ij}^*(s, t)$ é obtida pelo método de Hörmander, sendo expressa por:

$$u_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \left\{ [8B - (1-\nu)(2\ln z - 1)] \delta_{\alpha\beta} - [8A + 2(1-\nu)] r_{,\alpha} r_{,\beta} \right\}$$

$$u_{\alpha 3}^* = -u_{3\alpha}^* = \frac{1}{8\pi D} (2\ln z - 1) r r_{,\alpha} \quad (2.90)$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} [(1-\nu)z^2(\ln z - 1) - 8\ln z]$$

onde r , é a distância entre o ponto fonte s e o ponto de deslocamento t , sabendo-se ainda que;

$$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_{\alpha}(t)} = \frac{r_{\alpha}}{r}$$

$$r_{\alpha} = x_{\alpha}(t) - x_{\alpha}(s) \quad (2.91)$$

$$z = \lambda r$$

Nas expressões acima aparecem ainda A e B que são funções de z dadas por:

$$A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z} [K_1(z) - \frac{1}{z}] \quad (2.92)$$

$$B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z} [K_1(z) - \frac{1}{z}]$$

sendo $K_0(z)$ e $K_1(z)$ funções de Bessel modificadas de ordem inteira, podendo ser calculadas através de expansões polinomiais dadas por ABRAMOWITZ e STEGUN [91], incluídas no Apêndice A. A expansão de $A(z)$ para pequenos argumentos mostra que esta função é contínua enquanto a expansão de $B(z)$ apresenta singularidade do tipo $\ln z$.

3 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS

3.1- INTRODUÇÃO

Neste capítulo são desenvolvidas as equações integrais de placas através da Teoria Clássica de Kirchhoff e da Teoria de Reissner, necessárias à formulação do problema pelo Método dos Elementos de Contorno. Inicialmente, são apresentadas de forma resumida as equações integrais básicas, de placas com espessura constante, submetidas a carregamentos distribuídos, utilizando-se as hipóteses de Kirchhoff.

Na sequência, considerando-se as hipóteses de Reissner e utilizando-se o método dos resíduos ponderados são deduzidas representações integrais para deslocamentos e esforços em pontos do domínio e do contorno da placa. É considerada a possibilidade de ocorrência de cargas distribuídas, concentradas, e momentos externos distribuídos no domínio da placa, estudando-se também o caso particular destes carregamentos distribuídos em linha. Além disto, é considerada a possibilidade de atuação de campos de tensões iniciais que permitem a modelagem de efeitos gradiente de temperatura, retração e ainda a montagem de algoritmos de solução para problemas não-lineares.

3.2. EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS PELA TEORIA CLÁSSICA DE KIRCHHOFF

Neste item são apresentadas as equações integrais de placas com base na Teoria Clássica de Kirchhoff, necessárias à formulação do problema através do Método dos Elementos de Contorno. A sua dedução pode ser feita utilizando-se o método dos resíduos ponderados ou o teorema da reciprocidade de Betti. Uma dedução detalhada destas equações é apresentada por PAIVA [47], usando o teorema de Betti. Aqui são apresentadas as equações principais para a teoria clássica, omitindo-se a sua dedução.

Considera-se uma placa isótropa de espessura constante h , contorno qualquer Γ e domínio Ω , em equilíbrio, contida numa placa infinita de contorno Γ^* e de domínio Ω^* , da qual ela é apenas um subdomínio, conforme mostrado na Figura 3.1.

As condições de contorno da placa são expressas por:

$u_k = \bar{u}_k$, isto é, deslocamentos generalizados prescritos no trecho do contorno, Γ_u ;

$p_k = \bar{p}_k$, isto é, forças generalizadas prescritas no trecho do contorno Γ_p ;

sendo:

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$$

Admite-se que o plano médio da placa indeformada coincida com o plano $x_1 x_2$.

A placa em questão é submetida a dois carregamentos não simultâneos q e q^* , sendo w e w^* as respectivas superfícies elásticas a eles associadas, e ainda σ_{ij} e σ_{ij}^* , ϵ_{ij} e ϵ_{ij}^* , os respectivos estados de tensão e de deformação. Assim com base no teorema da reciprocidade de Betti pode-se escrever:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dV \quad (3.1)$$

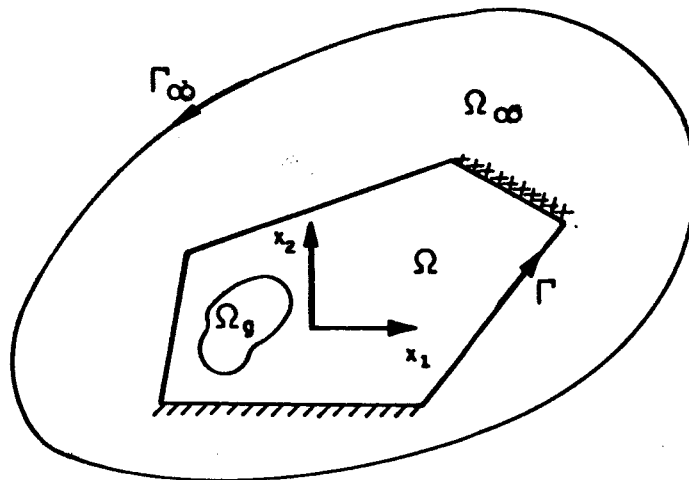


Fig. 3.1 - Placa finita contida na placa infinita

Aplicando-se à igualdade acima as relações básicas de deformação/deslocamento e tensão/deslocamento, apresentadas no capítulo II e utilizando-se a integração por partes, obtém-se a representação integral do deslocamento transversal w , para um ponto s no interior da placa, expressa por:

$$\begin{aligned}
 w(s) + \int_{\Gamma} [V_n^*(s, T)w(T) - M_{nn}^*(s, T)w_{,n}(T)] d\Gamma(T) + \\
 + \sum_{i=1}^{NC} R_{ci}^*(s, T)w_{ci}(T) = \int_{\Gamma} [V_n(T)w^*(s, T) - M_{nn}(T)w_{,n}^*(s, T)] d\Gamma(T) + \\
 + \sum_{i=1}^{NC} R_{ci}(T)w_{ci}^*(s, T) + \int_{\Omega_q} q(s)w^*(s, T) d\Omega_q(T) \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

onde as grandezas denotadas com asterisco (*) são as soluções fundamentais associadas ao carregamento q^* , admitido como uma carga unitária aplicada no ponto fonte \underline{g} e cuja representação matemática é a função Delta de Dirac. Estas soluções fundamentais são expressas por (2.47), (2.48)

e (2.49), NC é o número total de pontos angulosos no contorno da placa, conforme mostrado na Figura 3.2.

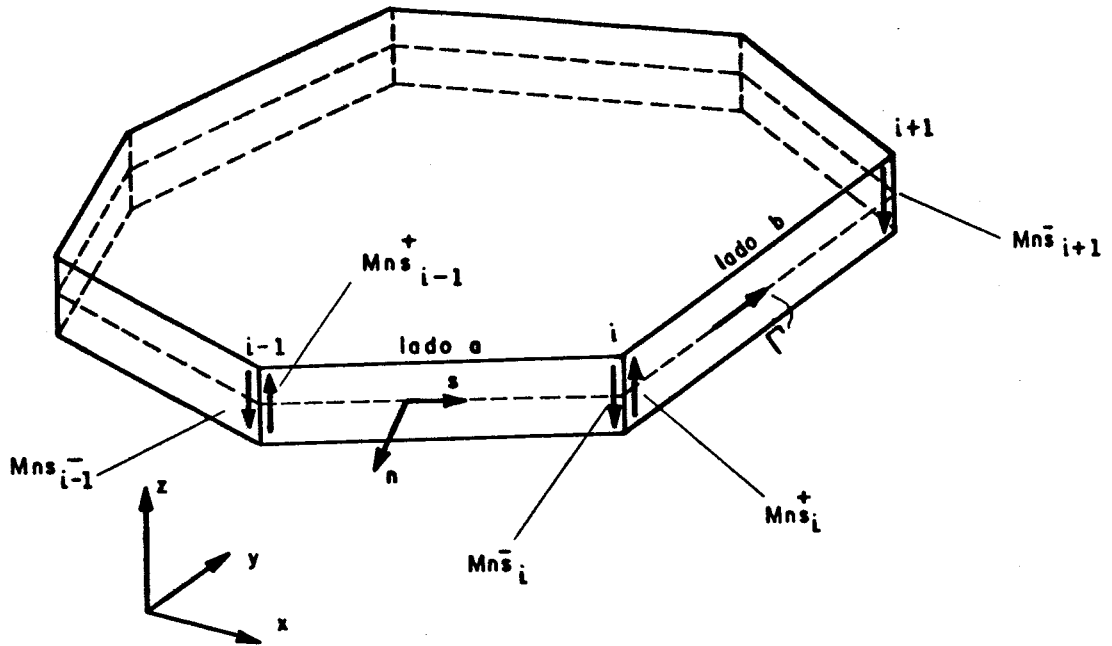


Fig.3.2 - Contorno com pontos angulosos

Derivando-se a equação (3.2) em relação à direção m, obtém-se a representação da derivada direcional, $\frac{\partial w}{\partial m}$, para o ponto s da placa:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w(s)}{\partial m} + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*(s, T)}{\partial m} w(T) - \frac{\partial M_{nn}^*(s, T)}{\partial m} \frac{\partial w(T)}{\partial n} \right] d\Gamma(T) + \\
 + \sum_{i=1}^{NC} \frac{\partial R_{ci}^*(s, T)}{\partial m} w_{ci}(T) = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(T) \frac{\partial w^*(s, T)}{\partial m} + \right. \\
 \left. - M_{nn}(T) \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{\partial w^*(s, T)}{\partial m} \right] \right\} d\Gamma(T) + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}(T) \frac{\partial w_{ci}^*(s, T)}{\partial m} + \\
 + \int_{\Omega_q} q(t) \frac{\partial w^*(s, t)}{\partial m} d\Omega_q(t) \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

As equações integrais (3.2) e (3.3) foram formuladas para um ponto \underline{s} no interior do domínio da placa, entretanto, para o Método dos Elementos de Contorno é necessário a obtenção destas equações para o ponto fonte situado sobre o contorno. Para tanto, é feita uma modificação no contorno Γ , de forma que o ponto fique situado sobre o contorno original, conforme figura 3.3, sendo acrescido um contorno circular Γ_ϵ em volta desse ponto.

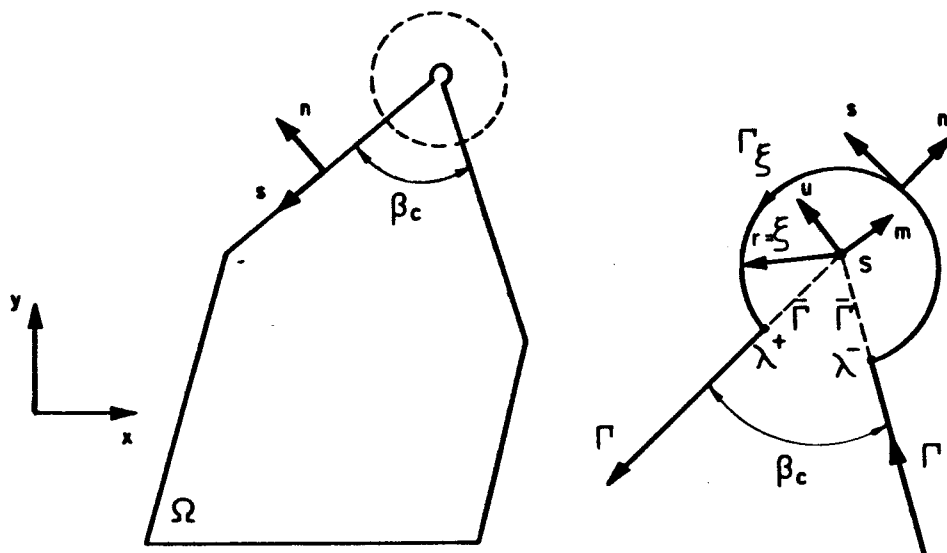


Fig. 3.3 - Alteração do contorno no canto da placa

As equações integrais são estudadas no limite quando o raio ϵ , do contorno acrescido em volta do ponto fonte, tende para zero, considerando-se sempre os valores principais das integrais envolvidas e a validade da condição de Hölder. Assim é obtida a representação integral para o ponto S situado sobre o contorno expressa por:

$$c(S)w(S) + \int_{\Gamma} [V_n^*(S,T)w(T) - M_{nn}^*(S,T)w_{,n}(T)] d\Gamma(T) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{NC} R_{ci}^*(S,T)w_{ci}(T) = \int_{\Gamma} [V_n(T)w^*(S,T) - M_{nn}(S)w_{,n}^*(S,T)] d\Gamma(T)$$

$$+ \sum_{i=1}^{NC} R_{ci}(T) w_{ci}^*(S, T) + \int_{\Omega_q} q(t) w^*(S, t) d\Omega_q(t) \quad (3.4)$$

sendo:

$$c(S) = \frac{\beta_c}{2\pi}$$

Para o caso particular de pontos do contorno com tangente única, isto é, contorno suave, tem-se:

$$c(S) = \frac{1}{2}$$

As variáveis da equação (3.4) são os deslocamentos $w(T)$ e $\frac{\partial w}{\partial n}(T)$, e os esforços $M_{nn}(T)$ e $V_n(T)$. Dependendo das condições de borda da placa, alguns valores são prescritos e os correspondentes incógnitos.

Uma alternativa para o cálculo dos valores incógnitos é escrever uma equação integral do deslocamento $w(S)$ e uma equação integral da derivada do deslocamento $w(S)$ em relação a uma coordenada n , normal ao contorno, no ponto fonte. Para isto, é necessário reescrever a equação (3.3) para o ponto fonte S situado sobre o contorno da placa e para a direção m coincidindo com a direção n , isto é, normal ao contorno.

Com o procedimento análogo àquele utilizado para a dedução da equação integral (3.4), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w_{,m}(S) + \int_{\Gamma} [V_{n,m}^*(S, T) w(T) - M_{nn,m}^*(S, T) w_{,n}(T)] d\Gamma(T) + \\ + \sum_{i=1}^{NC} R_{ci,m}^*(S, T) w_{ci}(T) = \int_{\Gamma} [V_n(T) w_{,m}^*(S, T) + \\ - M_{nn}^*(T) w_{,nm}^*(S, T)] d\Gamma(T) + \sum_{i=1}^{NC} R_{ci}(T) w_{ci,m}^*(S, T) + \\ + \int_{\Omega_q} q(t) w_{,m}^*(S, t) d\Omega_q(t) \quad (3.5) \end{aligned}$$

As integrais de domínio que aparecem nas equações (3.4) e (3.5), expressas por:

$$\int_{\Omega_q} q(t) w^*(s, t) d\Omega_q(t)$$

$$\int_{\Omega_q} q(t) w_{,m}^*(s, t) d\Omega_q(t)$$

podem ser transformadas para integrais sobre o contorno Γ_q da região carregada. Admitindo-se uma variação linear para a carga q , dada por:

$$q(t) = q(s) + A\bar{x}_1(t) + B\bar{x}_2(t) \quad (3.6)$$

onde $q(s)$ é o valor da carga q no ponto fonte s , e \bar{x}_1, \bar{x}_2 um par de eixos coordenados com origem em s , de acordo com [62] obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_q} q(t) w^*(s, t) d\Omega_q(t) &= \frac{1}{40\pi D} \int_{\Gamma_q} R^4 (\ln R - 0,70) \\ &\cdot (A \cos\theta + B \sin\theta) \cos\beta d\Gamma_q + q(s) \int_{\Gamma_q} R^3 (\ln R - 0,75) \cos\beta d\Gamma_q \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_q} q(t) w_{,m}^*(s, t) d\Omega_q(t) &= \frac{-1}{16\pi D} \int_{\Gamma_q} R^3 (\ln R - 0,25) (A \cos\theta + \\ &B \sin\theta) \cos\phi \cos\beta d\Gamma_q - \frac{q(s)}{12\pi D} \int_{\Gamma_q} R^2 (\ln R - \frac{1}{3}) \cos\phi \cos\beta d\Gamma_q \end{aligned} \quad (3.8)$$

Na figura 3.4 estão ilustradas as grandezas relacionadas à expressão (3.8) e ao subdomínio Ω_q , onde atua a carga distribuída q .

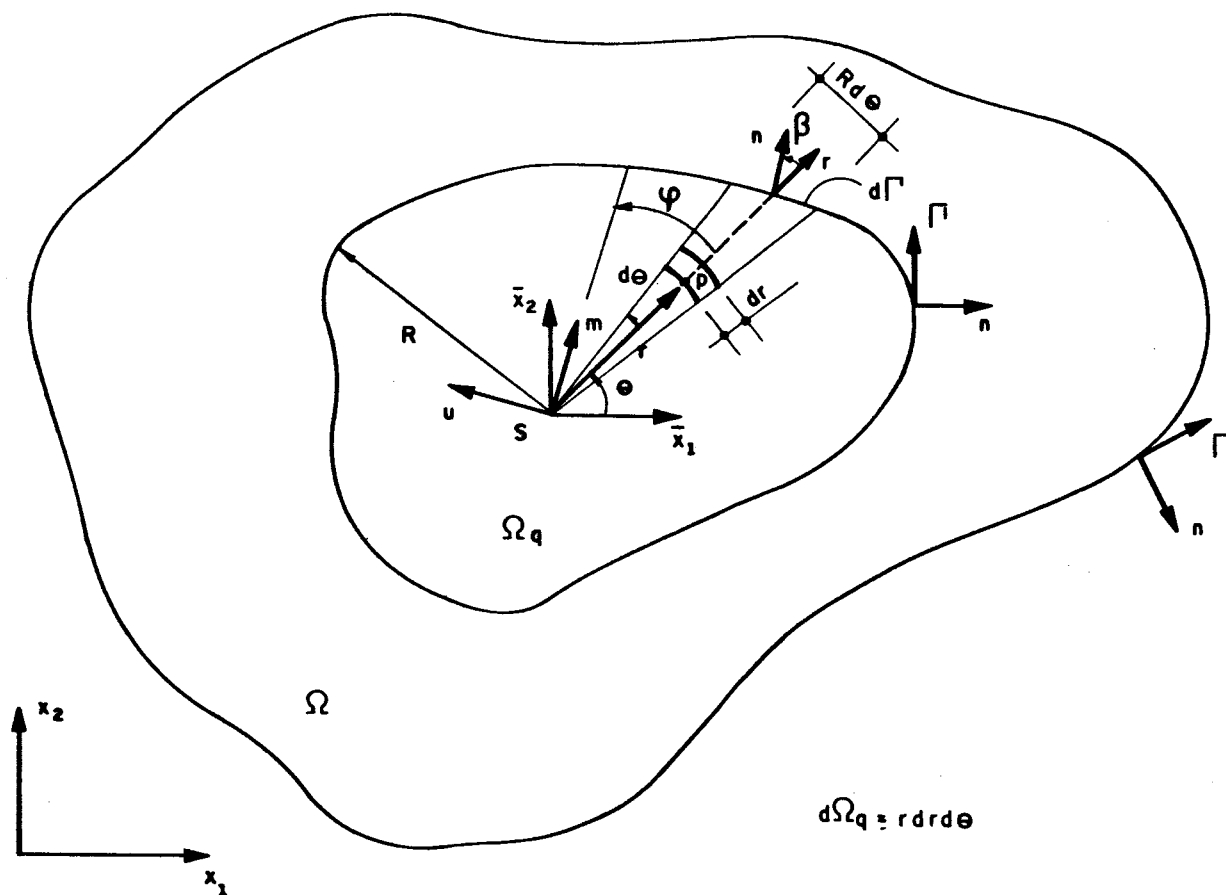


Fig. 3.4 - Subdomínio Ω_q com carga distribuída

3.3. EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS PELA TEORIA DE REISSNER

3.3.1- Equações Integrais para Deslocamentos em Pontos do Domínio

Utilizando-se o equacionamento básico para placas através da Teoria de Reissner, apresentado nos itens (2.5) a (2.6), são deduzidas aqui as representações integrais, para os deslocamentos e momentos em um ponto qualquer da placa.

Considera-se a placa de espessura constante apresentada na Figura 3.1, em equilíbrio, sob a ação de carga distribuída q , normal ao plano x_1x_2 , cargas concentradas, momentos externos distribuídas m_α , e a um campo de tensões iniciais generalizadas $M_{\alpha\beta}^0$, todos atuando no domínio da placa. Em cada ponto do domínio este campo de tensões iniciais é caracterizado por três componentes, a saber:

M_{11}^0 : momento fletor inicial resultante da integração da componente σ_{11}^0 , ao longo da espessura;

$M_{12}^0 = M_{21}^0$: momento torçor inicial resultante da integração da componente $\sigma_{12}^0 = \sigma_{21}^0$, ao longo da espessura;

M_{22}^0 : momento fletor inicial resultante da integração da componente σ_{22}^0 , ao longo da espessura.

Através do método dos resíduos ponderados, o erro cometido na aproximação da solução da equação diferencial de equilíbrio pode ser distribuído de acordo com:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma_p} (p_i - \bar{p}_i) u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i) p_i^* d\Gamma \quad (3.9)$$

Aplicando-se a equação (3.9) à situação da placa, sob as condições de equilíbrio dadas pela equação (2.79), tem-se:

$$\int_{\Omega} \left[(M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{3\alpha} + m_{\alpha}) u_{\alpha}^* + (Q_{3\alpha,\alpha} + q) u_3^* \right] d\Omega = \int_{\Gamma_p} (p_i - \bar{p}_i) u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i) p_i^* d\Gamma \quad (3.10)$$

onde u_i^* é a solução fundamental genérica em deslocamentos adotada como função ponderadora.

Deve-se notar que neste caso u_i^* já representa os deslocamentos ponderados genéricos na superfície média da placa conforme definido por (2.61).

Integrando-se por partes, o primeiro e o quarto termo do primeiro membro da (3.10), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} M_{\alpha\beta} n_{\beta} u_{\alpha}^* d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega + \int_{\Omega} (-Q_{3\alpha} + m_{\alpha}) u_{\alpha}^* d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} Q_{3\alpha} n_{\alpha} u_3^* d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{3\alpha} u_{3,\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega_q} q u_3^* d\Omega_q = \\ & \int_{\Gamma_p} (p_i - \bar{p}_i) u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i) p_i^* d\Gamma \quad (3.11.a) \end{aligned}$$

onde n_{α} representa o cosseno diretor da normal no contorno com o eixo x_{α} .

Observando-se que:

$$\int_{\Gamma} M_{\alpha\beta} n_{\beta} u_{\alpha}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma} Q_{3\alpha} n_{\alpha} u_3^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_3 u_3^* d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma} p_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_3 u_3^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma$$

a equação (3.11.a) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{3\alpha} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) d\Omega + \int_{\Omega} (m_{\alpha} u_{\alpha}^* + q u_3^*) d\Omega = \\ & - \int_{\Gamma_u} p_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i) p_i^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.11.b)$$

Considerando-se (2.85), (2.86) e (2.87), a equação (3.11.b) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[C_{\alpha\beta\gamma\theta} u_{\gamma,\theta} - M_{\alpha\beta}^0 + \frac{\nu q \delta_{\alpha\beta}}{(1-\nu)\lambda^2} \right] u_{\alpha,\beta}^* d\Omega + \\ & - \int_{\Omega} C_{3\alpha3\theta} \psi_{3\theta} \psi_{3\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} (m_{\alpha} u_{\alpha}^* + q u_3^*) d\Omega = \\ & - \int_{\Gamma_u} p_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i) p_i^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.12)$$

Fazendo-se, na equação 3.12,

$$M_{\gamma\theta}^* = C_{\alpha\beta\gamma\theta} u_{\alpha,\beta}^*$$

$$Q_{3\theta}^* = C_{3\alpha3\theta} \psi_{3\alpha}^*$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} M_{\gamma\theta}^* u_{\gamma,\theta} d\Omega + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^0 u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega + \\
 & - \int_{\Omega} Q_{3\theta}^* \psi_{3\theta} d\Omega + \int_{\Omega} (m_{\alpha} u_{\alpha}^* + q u_3^*) d\Omega = - \int_{\Gamma_u} p_i u_i^* d\Gamma + \\
 & - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i) p_i^* d\Gamma \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Considerando-se a expressão (2.88), e integrando-se, outra vez, por partes o primeiro e o quarto termos do primeiro membro de (3.13), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Gamma} M_{\gamma\theta}^* n_{\theta} u_{\gamma} d\Gamma + \int_{\Omega} M_{\gamma\theta,\theta}^* u_{\gamma} d\Omega + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^0 u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega + \\
 & - \int_{\Omega} Q_{3\theta}^* u_{\theta} d\Omega - \int_{\Gamma} Q_{3\theta}^* n_{\theta} u_3 d\Gamma + \int_{\Omega} Q_{3\theta,\theta}^* u_3 d\Omega + \int_{\Omega} (m_{\alpha} u_{\alpha}^* + q u_3^*) d\Omega = \\
 & - \int_{\Gamma_u} p_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i) p_i^* d\Gamma \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Observando-se que:

$$\int_{\Gamma} M_{\gamma\theta}^* n_{\theta} u_{\gamma} d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_{3\theta}^* n_{\theta} u_3 d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i p_i^* d\Gamma$$

e

$$\int_{\Gamma} u_i p_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} u_i p_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma_p} u_i p_i^* d\Gamma$$

e ainda, reagrupando-se os termos do primeiro membro de (3.14), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} u_{\gamma} (M_{\gamma\theta, \theta}^* - Q_{3\gamma}^*) d\Omega + \int_{\Omega} u_3 Q_{3\theta, \theta}^* d\Omega + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^0 u_{\alpha, \beta}^* d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} q \left[u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha, \alpha}^* \right] d\Omega + \int_{\Omega} m_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega = \\
 & - \int_{\Gamma_u} p_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_p} u_i p_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{u}_i p_i^* d\Gamma \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Considerando-se que:

$$\int_{\Gamma_p} u_i p_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{u}_i p_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i p_i^* d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_u} p_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_p} \bar{p}_i u_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma$$

e ainda que as soluções fundamentais envolvidas se referem a um estado de carregamento unitário, representado pela função Delta de Dirac aplicada no ponto fonte s da placa infinita, de forma que:

$$M_{\gamma\theta, \theta}^* - Q_{3\gamma}^* + \delta(s, t) C_{\gamma}(s) = 0 \quad (3.16)$$

$$Q_{3\gamma, \gamma}^* + \delta(s, t) C_3(s) = 0$$

onde $C_i(s)$ é um conjunto de vetores unitários nas direções x_i , e:

$$\begin{aligned}
 \delta(s, t) &= 0 & \text{se} & \quad s \text{ não coincide com } t \\
 \delta(s, t) &= \infty & \text{se} & \quad s \text{ coincide com } t
 \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega^*} u(t) \delta(s,t) d\Omega^*(t) = u(s) \quad (3.17)$$

e

$$u_i^* = u_{ij}^*(s,t) C_j \quad p_i^* = p_{ij}^*(s,t) C_j$$

a equação (3.15) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} u_{\gamma}(t) \delta(s,t) C_{\gamma}(s) d\Omega - \int_{\Omega} u_3(t) \delta(s,t) C_3(s) d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} q(t) [u_3^*(s,t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha,\alpha}^*(s,t)] d\Omega(t) + \\ & + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^0(t) u_{\alpha,\beta}^*(s,t) d\Omega(t) + \int_{\Omega} m_{\alpha}(t) u_{\alpha}^*(s,t) d\Omega(t) = \\ & - \int_{\Gamma} p_i(T) u_i^*(s,T) d\Gamma(T) + \int_{\Gamma} u_i(T) p_i^*(s,T) d\Gamma(T) \quad (3.18) \end{aligned}$$

De acordo com (3.17) pode-se escrever (3.18) como:

$$\begin{aligned} u_i(s) &= \int_{\Gamma} [u_{ik}^*(s,T) p_k(T) - p_{ik}^*(s,T) u_k(T)] d\Gamma(T) + \\ & + \int_{\Omega} q(t) [u_{i3}^*(s,t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(s,t)] d\Omega(t) + \\ & + \int_{\Omega} u_{i\alpha,\beta}^*(s,t) M_{\alpha\beta}^0(t) d\Omega(t) + \int_{\Omega} u_{i\alpha}^*(s,t) m_{\alpha}(t) d\Omega(t) \quad (3.19) \end{aligned}$$

onde os pontos "s" e "t" pertencem ao domínio Ω e "T" pertence ao contorno Γ , u_k e p_k são respectivamente os deslocamentos e as forças generalizadas sobre o contorno.

Assim, a equação (3.19) exprime os deslocamentos no ponto "s" do domínio, em função dos valores dos deslocamentos e das forças no contorno, dos carregamentos q e m_α aplicados ao domínio, e do campo de momentos iniciais $M_{\alpha\beta}^0$.

3.3.2- EQUAÇÃO INTEGRAL PARA DESLOCAMENTOS EM PONTOS DO CONTORNO

Visando a solução do problema no contorno através de equações integrais, a equação (3.19) deverá ser escrita para o ponto fonte, S, situado sobre o contorno Γ .

Para isto, o contorno será alterado, incluindo-se o trecho em arco de círculo, Γ_ϵ , com raio ϵ e centro no ponto S situado sobre o contorno inicial, conforme Figura 3.5, e removendo-se $\bar{\Gamma}$.

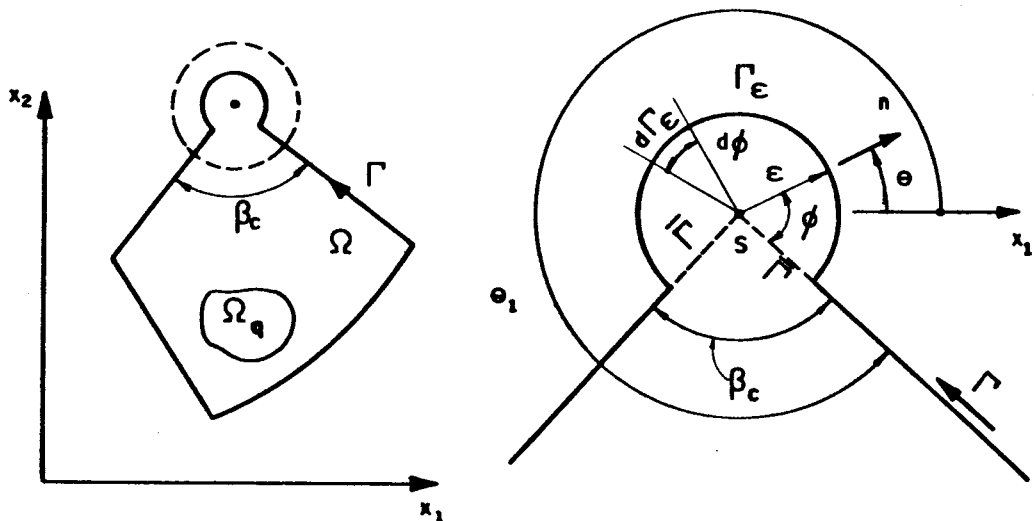


Fig.3.5 - Alteração do Contorno no Canto da Placa

O ângulo ϕ varia de 0 a $(2\pi - \beta_c)$, no trecho acrescido Γ_ϵ , enquanto o ângulo θ varia de θ_1 a $(\theta_1 - \beta_c)$.

Considerando-se a referida alteração a equação integral (3.19) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
u_i(S) = & \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [u_{ik}^*(S,T) p_k(T) - p_{ik}^*(S,T) u_k(T)] d\Gamma(T) + \\
& + \int_{\Gamma_\epsilon} [u_{ik}^*(S,T) p_k(T) - p_{ik}^*(S,T) u_k(T)] d\Gamma_\epsilon(T) + \\
& + \int_{\Omega_q} q(t) [u_{i3}^*(S,t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(S,t)] d\Omega(t) + \\
& + \int_{\Omega} u_{i\alpha,\beta}^*(S,t) M_{\alpha\beta}^0(t) d\Omega(t) + \int_{\Omega_m} u_{i\alpha}^*(S,t) m_\alpha(t) d\Omega(t) \quad (3.20)
\end{aligned}$$

sendo Ω_q e Ω_m , respectivamente, os subdomínios de atuação da carga distribuída e do momento externo distribuído.

À medida que se faz ϵ tender a zero, o ponto S se aproxima do contorno e, na condição limite, tem-se:

$$\begin{aligned}
u_i(S) = & \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [u_{ik}^*(S,T) p_k(T) - p_{ik}^*(S,T) u_k(T)] d\Gamma(T) + \\
& + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} [u_{ik}^*(S,T) p_k(T) - p_{ik}^*(S,T) u_k(T)] d\Gamma_\epsilon(T) + \\
& + \int_{\Omega_q} q(t) [u_{i3}^*(S,t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(S,t)] d\Omega(t) + \\
& + \int_{\Omega} u_{i\alpha,\beta}^*(S,t) M_{\alpha\beta}^0(t) d\Omega(t) + \int_{\Omega_m} u_{i\alpha}^*(S,t) m_\alpha(t) d\Omega(t) \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Os limites sobre $(\Gamma-\bar{\Gamma})$ indicados em (3.21) sugerem que as integrais sejam efetuadas no sentido de valor principal de Cauchy, cuja existência pode ser demonstrada se $u_k(T)$ satisfaz a condição de Hölder, ou seja:

$$|u_k(T) - u_k(S)| \leq B r^\alpha$$

onde B e α são constantes positivas.

Estuda-se agora a parcela:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ik}^*(S, T) u_k(T) d\Gamma_\epsilon(T)$$

Esta parcela pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ik}^*(S, T) u_k(T) d\Gamma_\epsilon(T) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ik}^*(S, T) [u_k(T) + \\ &- u_k(S)] d\Gamma_\epsilon(T) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_k(S) \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ik}^*(S, T) d\Gamma_\epsilon(T) \end{aligned} \quad (3.22)$$

A primeira integral do segundo membro de (3.22) se anula devido à continuidade de $u(T)$ e a segunda, juntamente com o primeiro membro de (3.21) podem ser expressos como:

$$C_{ik}(S) = \delta_{ik} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ik}^*(S, T) d\Gamma(T) \quad (3.23)$$

O estudo de cada um dos limites da equação (3.23) leva a:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{11}^*(S, T) d\Gamma(T) = \frac{\beta_c}{2\pi} - 1 + \frac{(1+\nu)}{4\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \theta_1 \right) \text{sen}^2 \beta_c$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{12}^*(S, T) d\Gamma(T) = \frac{-1}{2\pi} (1-\nu) [(1-\cos 2\beta_c) \cos 2\theta_1 - \text{sen} 2\theta_1 \text{sen} 2\beta_c] \quad (3.24)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{21}^*(S, T) d\Gamma(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{12}^*(S, T) d\Gamma(T)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{22}^*(S, T) d\Gamma(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{11}^*(S, T) d\Gamma(T)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{13}^*(S, T) d\Gamma(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{31}^*(S, T) d\Gamma(T) = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{23}^*(S, T) d\Gamma(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{32}^*(S, T) d\Gamma(T) = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{33}^*(S, T) d\Gamma(T) = \frac{\beta_c}{2\pi} - 1 \quad (3.24 \text{ cont.})$$

As demais integrais que aparecem na equação (3.21) possuem apenas singularidades fracas não produzindo termos independentes no limite.

Assim, a equação integral (3.21) para um ponto S situado sobre o contorno pode ser escrita como:

$$C_{ik}(S) u_k(S) = \int_{\Gamma} [u_{ik}^*(S, T) p_k(T) - p_{ik}^*(S, T) u_k(T)] d\Gamma(T) +$$

$$+ \int_{\Omega_q} q(t) [u_{i3}^*(S, t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(S, t)] d\Omega_q(t) +$$

$$\int_{\Omega} u_{i\alpha, \beta}^*(S, t) M_{\alpha\beta}^0(t) d\Omega(t) + \int_{\Omega_m} u_{i\alpha}^*(S, t) m_\alpha(t) d\Omega_m(t) \quad (3.25)$$

3.3.3- Forças Fundamentais Generalizadas no Contorno

A seguir são deduzidas as expressões das forças fundamentais generalizadas p_{ik}^* , que constam das equações integrais (3.19) e (3.25), a partir das soluções fundamentais em deslocamento expressas por (2.90). Estas forças se referem ao domínio fundamental Ω^* , e representam a resposta no ponto de deslocamento t , sendo causadas pela ação de uma distribuição de carga unitária no ponto fonte s . Esta distribuição de carga é modelada pela função Delta de Dirac. As forças fundamentais generalizadas podem ser expressas por:

$$\begin{aligned}
 p_{\gamma\alpha}^*(s, t) &= M_{\alpha\beta\gamma}^*(s, t) n_{\beta} \\
 p_{3\alpha}^*(s, t) &= M_{\alpha\beta 3}^*(s, t) n_{\beta} \\
 p_{\gamma 3}^*(s, t) &= Q_{3\beta\gamma}^*(s, t) n_{\beta} \\
 p_{33}^*(s, t) &= M_{3\beta 3}^*(s, t) n_{\beta}
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

sendo,

- $M_{\alpha\beta\gamma}^*$: momentos fundamentais no ponto t , causados por momentos unitários aplicados no ponto fonte \underline{s} , nas direções generalizadas γ ;
- $M_{\alpha\beta 3}^*$: momentos fundamentais no ponto t , causados por uma força unitária aplicada no ponto fonte \underline{s} , na direção x_3 ;
- $Q_{3\beta\gamma}^*$: forças cortantes fundamentais no ponto \underline{t} , causados por momentos unitários aplicados no ponto fonte \underline{s} , nas direções generalizadas γ ;
- $Q_{3\beta 3}^*$: forças cortantes fundamentais em \underline{t} , causadas por uma força unitária aplicada em \underline{s} , na

direção x_3 .

A partir das expressões (2.73) pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta\gamma}^* &= \frac{D(1-\nu)}{2} (u_{\gamma\beta,\alpha}^* + u_{\gamma\alpha,\beta}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma\theta,\theta}^* \delta_{\alpha\beta}) \\
 M_{\alpha\beta 3}^* &= \frac{D(1-\nu)}{2} (u_{3\alpha,\beta}^* + u_{3\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{3\theta,\theta}^* \delta_{\alpha\beta}) \\
 Q_{3\beta\gamma}^* &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\gamma\beta}^* + u_{\gamma 3,\beta}^*) \\
 Q_{3\beta 3}^* &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{3\beta}^* + u_{3 3,\beta}^*)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

As derivadas de u_{ij}^* que aparecem nas equações (3.27) são obtidas derivando-se as equações (2.90) em relação às coordenadas do ponto de deslocamento, t .

Considerando-se as expressões (2.91), bem como as derivadas de $A(z)$ e $B(z)$ e de $r_{,\beta}$, expressas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x_\alpha(t)} &= \lambda r_{,\alpha} \\
 \frac{\partial A}{\partial x_\alpha(t)} &= \frac{-r_{,\alpha}}{r} (zk_1 + 2A) \\
 \frac{\partial B}{\partial x_\alpha(t)} &= \frac{-r_{,\alpha}}{r} (zk_1 + A) \\
 \frac{\partial r_{,\beta}}{\partial x_\alpha(t)} &= \frac{\delta_{\alpha\beta} - r_{,\alpha} r_{,\beta}}{r}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

As derivadas de u_{ij}^* em relação às coordenadas do ponto de deslocamentos t são obtidas com a utilização de (2.91), (2.92) e (3.28), sendo expressas por:

$$\begin{aligned}
u_{\alpha\beta,\gamma}^* &= -\frac{1}{4\pi D(1-\nu)r} [(4A+4zk_1+1-\nu)r,\gamma\delta_{\alpha\beta} + \\
&- (16A+4zk_1+2-2\nu)r,\alpha r,\beta r,\gamma + (4A+1-\nu)(\delta_{\alpha\gamma}r,\beta + \delta_{\beta\gamma}r,\alpha)] \\
u_{\alpha 3,\beta}^* &= -u_{3\alpha,\beta}^* = \frac{1}{8\pi D} [\delta_{\alpha\beta} (2\ell n z - 1) + 2r,\alpha r,\beta] \\
u_{33,\alpha}^* &= -\frac{r,\alpha}{8\pi D(1-\nu)r^2} [(1-\nu)z^2 (2\ell n z - 1) - 8] \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Substituindo-se as expressões (3.29) em (3.27) e em seguida o resultado obtido em (3.26), obtém-se:

$$\begin{aligned}
p_{\gamma\alpha}^* &= -\frac{1}{4\pi r} [(4A+2zk_1+1-\nu)(\delta_{\alpha\gamma}r, n + r,\alpha n_\gamma) + \\
&+ (4A+1+\nu)r,\gamma n_\alpha - (16A+4zk_1+2-2\nu)r,\alpha r,\gamma r, n] \\
p_{\gamma 3}^* &= -\frac{\lambda^2}{2\pi} [Bn_\gamma - Ar,\gamma r, n] \quad (3.30) \\
p_{3\alpha}^* &= -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left\{ \left[2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ell n z - 1 \right] n_\alpha + 2r,\alpha r, n \right\} \\
p_{33}^* &= -\frac{1}{2\pi r} r, n
\end{aligned}$$

onde, r, n é a derivada de r na direção normal no ponto \underline{t} , dado por:

$$r, n = \frac{\partial r}{\partial n(\underline{t})} = r,\alpha n_\alpha \quad (3.31)$$

Examinando-se as expressões (3.29) e as expansões de $K_0(z)$, $K_1(z)$, $A(z)$ e $B(z)$ para pequenos argumentos conclui-se que p_{ij}^* possui singularidades do tipo $\ell n r$ e $1/r$.

3.3.4- Equações Integrais para Esforços nos Pontos Internos

O cálculo de tensões nos pontos internos é de fundamental importância não só na solução de problemas lineares, mas principalmente no caso de análise não-linear. Do ponto de vista de precisão e eficiência computacional, é conveniente usar uma equação integral apropriada para o cálculo das mesmas ao invés de calcular os deslocamentos nos pontos internos e derivá-los numericamente para a sua obtenção, como é feito no Método das Diferenças Finitas e usualmente no Método dos Elementos Finitos.

No caso das placas, a formulação para o cálculo das resultantes de tensão (momentos fletores, torção e força cortante) nos pontos internos é feita a partir da representação integral de deslocamentos (3.19) e das relações esforço/deslocamento (2.73) e (2.83).

Assim a expressão integral de deslocamentos (3.19) e suas derivadas apropriadas em relação às coordenadas no ponto fonte \underline{s} , são substituídas nas relações esforço/deslocamento, obtendo-se então as expressões desejadas.

Neste caso, deve-se notar que todas as derivadas obtidas em relação às coordenadas do ponto de deslocamento \underline{t} , expressas por (3.28), devem ser multiplicadas por (-1) para que sejam válidas em relação às coordenadas do ponto fonte \underline{s} . Isto é, de acordo com (2.91) deve-se observar que:

$$\frac{\partial r}{\partial x_{\alpha}(s)} = - \frac{\partial r}{\partial x_{\alpha}(t)} = - r,_{\alpha}$$

e, em consequência:

$$\frac{\partial z}{\partial x_{\alpha}(s)} = - \lambda r,_{\alpha}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_\alpha(s)} = \frac{r, \alpha}{r} (zk_1 + 2A)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_\alpha(s)} = \frac{r, \alpha}{r} (zk_1 + A)$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial x_\alpha(s)} = \frac{r, \alpha}{r} (zk_0 + k_1) \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial r, \beta}{\partial x_\alpha(s)} = \frac{r, \alpha r, \beta^{-\delta} \alpha \beta}{r}$$

$$\frac{\partial r, n}{\partial x_\alpha(s)} = \frac{r, \alpha r, n^{-n} \alpha}{r}$$

Assim, após a derivação e rearranjo, resultam expressões integrais para os momentos fletores, torção e forças cortantes, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}(s) = & \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta k}^*(s, T) p_k(T) d\Gamma(T) - \int_{\Gamma} p_{\alpha\beta k}^*(s, T) u_k(T) d\Gamma(T) + \\ & + \int_{\Omega_q} r_{\alpha\beta}^*(s, t) q(t) d\Omega_q(t) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{\alpha\beta} + \\ & + \int_{\Omega_m} t_{\alpha\beta\gamma}^*(s, t) m_\gamma(t) d\Omega_m(t) + \int_{\Omega} e_{\alpha\beta\gamma\theta}^*(s, t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) + \\ & + g_{\alpha\beta\gamma\theta}(s) M_{\gamma\theta}^0(s) - M_{\alpha\beta}^0(s) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}
Q_{3\beta}(s) &= \int_{\Gamma} u_{3\beta k}^*(s, T) p_k(T) d\Gamma(T) - \int_{\Gamma} p_{3\beta k}^*(s, T) u_k(T) d\Gamma(T) + \\
&+ \int_{\Omega_q} r_{3\beta}^*(s, t) q(t) d\Omega_q(t) + \int_{\Omega_m} t_{3\beta\gamma}^*(s, t) m_\gamma(t) d\Omega_m(t) + \\
&+ \int_{\Omega} e_{3\beta\gamma\theta}^*(s, t) M_{\gamma\theta}^o(t) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.34}$$

onde:

$$\begin{aligned}
u_{\alpha\beta\gamma}^* &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left[u_{\alpha\gamma, \beta}^* + u_{\beta\gamma, \alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} u_{\theta\gamma, \theta}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \\
u_{\alpha\beta 3}^* &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left[u_{\alpha 3, \beta}^* + u_{\beta 3, \alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} u_{\theta 3, \theta}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \\
u_{3\beta\gamma}^* &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\beta\gamma}^* + u_{3\gamma, \beta}^*) \\
u_{3\beta 3}^* &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\beta 3}^* + u_{33, \beta}^*)
\end{aligned} \tag{3.35.a}$$

$$p_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[p_{\alpha\gamma, \beta}^* + p_{\beta\gamma, \alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} p_{\theta\gamma, \theta}^* \delta_{\alpha\beta} \right]$$

$$p_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[p_{\alpha 3, \beta}^* + p_{\beta 3, \alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} p_{\theta 3, \theta}^* \delta_{\alpha\beta} \right]$$

$$p_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (p_{\beta\gamma}^* + p_{3\gamma, \beta}^*)$$

$$p_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (p_{\beta 3}^* + p_{33, \beta}^*) \tag{3.35.b}$$

$$\begin{aligned}
r_{\alpha\beta}^* &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left[u_{\alpha 3, \beta}^* + u_{\beta 3, \alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (u_{\alpha\gamma, \gamma\beta}^* + u_{\beta\gamma, \gamma\alpha}^*) + \right. \\
&+ \left. \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} (u_{\gamma 3, \gamma}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\gamma\theta, \theta\gamma}^*) \right] \\
r_{3\alpha}^* &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left[u_{\alpha 3}^* + u_{33, \alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (u_{\alpha\theta, \theta}^* + u_{3\theta, \theta\alpha}^*) \right]
\end{aligned} \tag{3.35.c}$$

$$t_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[u_{\alpha\gamma, \beta}^* + u_{\beta\gamma, \alpha}^* - \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} u_{\theta\gamma, \theta}^* \right]$$

$$t_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left[u_{\beta\gamma}^* + u_{3\gamma, \beta}^* \right] \tag{3.35.d}$$

Considerando-se as relações (3.32), derivam-se as soluções fundamentais u_{ij}^* em relação às coordenadas do ponto fonte \underline{s} , que em seguida são substituídas em (3.35.a), obtendo-se:

$$\begin{aligned}
u_{\alpha\beta\gamma}^* &= \frac{1}{4\pi r} \left[(4A+2zk_1+1-\nu) (\delta_{\beta\gamma} r_{, \alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{, \beta}) + \right. \\
&- (16A+4zk_1+2-2\nu) r_{, \alpha} r_{, \beta} r_{, \gamma} + (4A+1+\nu) \delta_{\alpha\beta} r_{, \gamma} \left. \right]
\end{aligned}$$

$$u_{\alpha\beta 3}^* = - \frac{(1-\nu)}{8\pi} \left\{ \left[\frac{2(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right] \delta_{\alpha\beta} + 2r_{, \alpha} r_{, \beta} \right\}$$

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[B\delta_{\gamma\beta} - Ar_{, \gamma} r_{, \beta} \right]$$

$$u_{3\beta 3}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi r} r_{, \beta} \tag{3.36}$$

Derivando-se as forças fundamentais de contorno (3.30) em relação às coordenadas do ponto fonte \underline{g} , e substituindo-se em (3.35.b), tem-se:

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha\beta\gamma}^* &= \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \left\{ (4A+2zk_1 + 1-\nu) (\delta_{\alpha\gamma} n_\beta + \delta_{\gamma\beta} n_\alpha) + \right. \\
 &+ (4A+1+3\nu) \delta_{\alpha\beta} n_\gamma - (16A+ 6zk_1 + z^2 k_0 + 2 - 2\nu) \cdot \\
 &\cdot [(n_{\alpha r, \beta} + n_{\beta r, \alpha}) r, \gamma + (\delta_{\gamma\alpha} r, \beta + \delta_{\gamma\beta} r, \alpha) r, n] + \\
 &- (16A + 4zk_1 + 2+2\nu) (\delta_{\alpha\beta} r, \gamma r, n + n_{\gamma r, \alpha} r, \beta) + \\
 &\left. + (96A + 32zk_1 + 4z^2 k_0 + 8-8\nu) r, \alpha r, \beta r, \gamma r, n \right\} \\
 P_{\alpha\beta 3}^* &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zk_1) (r, \beta n_\alpha + r, \alpha n_\beta) + \right. \\
 &- (8A+2zk_1) r, \alpha r, \beta r, n + 2A \delta_{\alpha\beta} r, n] \\
 P_{3\beta\gamma}^* &= - \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zk_1) (\delta_{\gamma\beta} r, n + r, \gamma n_\beta) + \right. \\
 &- 2A n_{\gamma r, \beta} - (8A + 2zk_1) r, \gamma r, \beta r, n] \\
 P_{3\beta 3}^* &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} \left[(z^2 B+1) n_\beta - (z^2 A + 2) r, \beta r, n \right] \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

A influência de carga distribuída nos momentos e forças cortantes, é dada por $r_{\alpha\beta}^*$ e $r_{3\alpha}^*$, definidos por (3.35.c), cujas expressões, após a substituição das derivadas de u_{ij}^* , ficam:

$$r_{\alpha\beta}^* = - \frac{(1-\nu)}{8\pi} \left\{ \delta_{\alpha\beta} \left[\frac{2(1-\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right] + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} + \right. \\ \left. - \frac{4\nu}{(1-\nu)\lambda^2 r^2} (2r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \right\} \\ r_{3\beta}^* = \frac{1}{2\pi r} \frac{r_{,\beta}}{r} \quad (3.38)$$

A influência do momento distribuído externo m_γ nos valores dos esforços nos pontos internos é dada por $t_{i\beta\gamma}^*$, (3.35.d). Após a derivação de u_{ij}^* e a substituição nestas expressões tem-se:

$$t_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{1}{8\pi r} \left\{ \left[8A + 4zk_1 + 2(1-\nu) \right] (\delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha}) + \right. \\ \left. + 2r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} (4A + 1+\nu) - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \left[16A + 4zk_1 + 2(1-\nu) \right] \right\} \\ t_{3\beta\gamma}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[B\delta_{\beta\gamma} - Ar_{,\beta} r_{,\gamma} \right] \quad (3.39)$$

A influência do campo de momentos iniciais nos valores dos momentos fletores e torçor, de acordo com (3.33), é dada por:

$$I_{\alpha\beta}(s) = \int_{\Omega} e_{\alpha\beta\gamma\theta}^*(s,t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) + g_{\alpha\beta\gamma\theta}(s) M_{\gamma\theta}^0(s)$$

Esta expressão se origina da derivação do termo, $\int_{\Omega} u_{i\alpha,\beta}^*(s,t) M_{\alpha\beta}^0(t) d\Omega(t)$, da equação (3.19), em relação às coordenadas do ponto fonte s , e de sua substituição em (2.83), quando da formulação da expressão (3.33) para $M_{\alpha\beta}$.

Isto é:

$$I_{\alpha\beta}(s) = \frac{D(1-\nu)}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{\beta}(s)} \int_{\Omega} u_{\alpha\gamma,\theta}^*(s,t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}(s)} \int_{\Omega} u_{\beta\gamma,\theta}^*(s,t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) + \right. \\ \left. + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial}{\partial x_{\eta}(s)} \int_{\Omega} u_{\eta\gamma,\theta}^*(s,t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) \right] \right\}$$

Cuidados especiais devem ser tomados na derivação das funções do tipo $u_{\alpha\gamma,\theta}^*$, sob sinal de integração devido à presença de singularidade do tipo $1/r$ nestas funções. A dedução detalhada de $e_{\alpha\beta\gamma\theta}^*$ e de $g_{\alpha\beta\gamma\theta}$ é apresentada no item (3.3.6).

A influência do campo de momentos iniciais no cálculo das forças cortantes, pela expressão (3.34), é dada por:

$$I_{3\beta} = \int e_{3\beta\gamma\theta}^*(s,t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega$$

Esta expressão aparece devido à derivação do termo,

$$\int_{\Omega} u_{i\alpha, \beta}^*(s, t) M_{\alpha\beta}^0(t) d\Omega(t)$$

da equação (3.19), em relação às coordenadas do ponto fonte \underline{s} , e de sua substituição em (2.73.b), quando da formulação de $Q_{3\beta}$.

Isto é:

$$I_{3\beta} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left[\int_{\Omega} u_{\beta\gamma, \theta}^*(s, t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}(s)} \int_{\Omega} u_{3\gamma, \theta}^*(s, t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) \right]$$

A dedução detalhada de $e_{3\beta\gamma\theta}^*$ também é apresentada no item 3.3.6.

3.3.5- Cargas e Momentos Distribuídos no Domínio

Conforme pode-se observar nas equações integrais (3.19) e (3.25), os efeitos do carregamento e do momento, distribuídos são calculados por meio de integrais sobre os subdomínios Ω_q e Ω_m .

A integral da carga distribuída pode ser transformada numa integral sobre o contorno da região carregada Γ_q , por meio de transformações apropriadas, conforme WEEËN [83] [84]. Assim, considerando-se carga uniformemente distribuída q , no subdomínio Ω_q , e utilizando-se o teorema de divergência, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_q} q(t) \left[u_{i3}^*(s,t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(s,t) \right] d\Omega_q(t) = \\ = q(t) \int_{\Gamma_q} \left[v_{i,\alpha}^*(s,t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(s,t) \right] n_\alpha d\Gamma_q(t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde a função $v_{i,\alpha}^*(s,t)$ deve satisfazer a:

$$v_{i,\alpha\alpha}^*(s,t) = u_{i3}^*(s,t) \quad (3.41)$$

As expressões fundamentais $v_{i,\alpha}^*(s,t)$ que atendem à condição (3.41) são dadas por:

$$v_{\alpha,\beta}^* = \frac{r^2}{128\pi D} \left[\delta_{\alpha\beta} (4\ln z - 5) + 2(4\ln z - 3) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (3.42)$$

$$v_{3,\beta}^* = - \frac{r r_{,\beta}}{128\pi D (1-\nu)\lambda^2} \left[32(2\ln z - 1) - z^2 (1-\nu) (4\ln z - 5) \right]$$

A influência da carga uniformemente distribuída q no cálculo dos esforços nos pontos internos, dada pela integral de domínio:

$$\int_{\Omega_q} r_{i\beta}^*(s,t) q(t) d\Omega_q(t)$$

pode ser substituída por uma formulação alternativa a partir das expressões integrais sobre o contorno da região carregada, (3.40) e (3.42). Considerando-se as definições dos momentos fletores e torçor expressas por (2.83) e das forças cortantes por (2.73.b), obtém-se:

$$\int_{\Gamma_q} w_{\alpha\beta}^*(s,t) q(t) d\Gamma_q(t) \quad (\text{para os momentos fletores e torçor}) \quad (3.43)$$

$$\int_{\Gamma_q} w_{3\beta}^*(s,t) q(t) d\Gamma_q(t) \quad (\text{para as forças cortantes})$$

As integrais acima referem-se ao contorno da região carregada $\Gamma_q(t)$ e as soluções fundamentais, $w_{i\beta}^*(s,t)$, ficam definidas por:

$$w_{\alpha\beta}^*(s,t) = \frac{D(1-\nu)}{2} \left\{ v_{\alpha,\gamma\beta}^* + v_{\beta\gamma,\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (u_{\alpha\gamma,\beta}^* + u_{\beta\gamma,\alpha}^*) + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \left[v_{\theta,\gamma\theta}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\theta\gamma,\theta}^* \right] \right\} n_\gamma \quad (3.44)$$

$$w_{3\beta}^*(s,t) = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left[v_{\beta,\gamma}^* + v_{3,\gamma\beta}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (u_{\beta\gamma}^* + u_{3\gamma,\beta}^*) \right] n_\gamma$$

Considerando-se as expressões de $u_{\alpha\beta\gamma}^*$ e $u_{3\beta\gamma}^*$ dadas em (3.35.a) tem-se:

$$w_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[v_{\alpha,\gamma\beta}^* + v_{\beta,\gamma\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} v_{\theta,\gamma\theta}^* \right] n_{\gamma} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_{\gamma}$$

$$w_{3\beta}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left[v_{\beta,\gamma}^* + v_{3,\gamma\beta}^* \right] n_{\gamma} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta\gamma}^* n_{\gamma} \quad (3.45)$$

Efetuada-se as derivadas das expressões (3.42) em relação às coordenadas do ponto fonte s e substituindo-se em (3.45) obtém-se:

$$w_{\alpha\beta}^* = - \frac{r}{64\pi} \left\{ (4\ell n z - 3) \left[(1-\nu) (r, \beta n_{\alpha+r}, \alpha n_{\beta}) + (1+3\nu) \delta_{\alpha\beta} r, n \right] + 4 \left[(1-\nu) r, \alpha r, \beta + \nu \delta_{\alpha\beta} \right] r, n \right\} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_{\gamma} \quad (3.46)$$

$$w_{3\beta}^* = \frac{1}{8\pi} \left[(2\ell n z - 1) n_{\beta} + 2r, \beta r, n \right] - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta\gamma}^* n_{\gamma}$$

Caso a carga distribuída atue sobre um subdomínio retangular estreito e alongado, com forte preponderância do comprimento sobre a largura b , para efeito de análise numérica é conveniente considerar-se uma distribuição de carga equivalente, sobre a linha média do subdomínio (Figura 3.6). Para tal, considera-se que a carga distribuída q seja constante ao longo da largura b , de forma que:

$$d\Omega_q = b d\Gamma_q \quad (3.47)$$

$$\bar{q} = bq$$

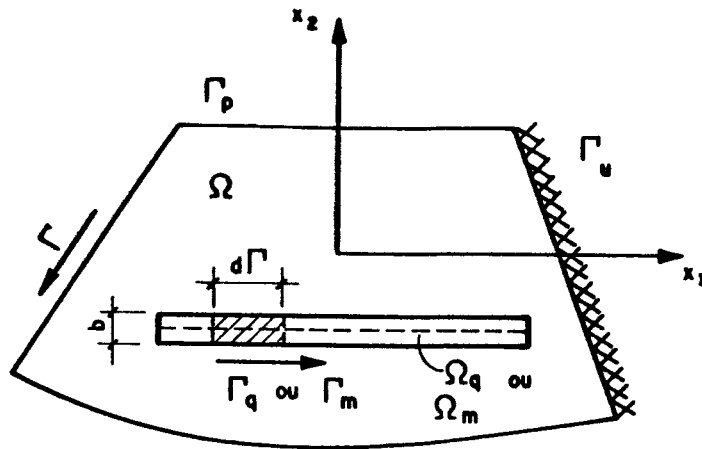


Fig. 3.6 - Cargas ou Momentos Distribuídos sobre Domínios Estreitos e Alongados.

Neste caso, a parcela das equações integrais (3.19) e (3.25) referentes à carga distribuída expressa por:

$$I_1 = \int_{\Omega_q} q(t) \left[u_{i3}^*(s, t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(s, t) \right] d\Omega_q(t) \quad (3.48)$$

pode ser escrita, levando-se em conta (3.47), como:

$$I_1 = \int_{\Gamma_q} \left[u_{i3}^*(s, t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(s, t) \right] \bar{q}(t) d\Gamma_q(t) \quad (3.49)$$

A influência da carga distribuída em linha \bar{q} , nas expressões dos esforços internos é considerada tomando-se a parcela correspondente nas equações (3.33) e (3.34), abaixo destacada,

$$\int_{\Omega_q} r_{i\alpha}^*(s, t) q(t) d\Omega_q(t)$$

e substituindo-se as relações (3.47) na mesma,

$$\int_{\Gamma_q} r_{i\alpha}^*(s,t) \bar{q}(t) d\Gamma_q(t) \quad (3.50)$$

Caso o ponto fonte esteja situado sobre a linha de carga é necessário, estudar-se a integral (3.50), uma vez que a função $r_{i\beta}^*(s,t)$ contida no integrando apresenta singularidades, quando o raio tende para zero. Para tanto, o contorno da linha de carga é alterado conforme Figura 3.7.

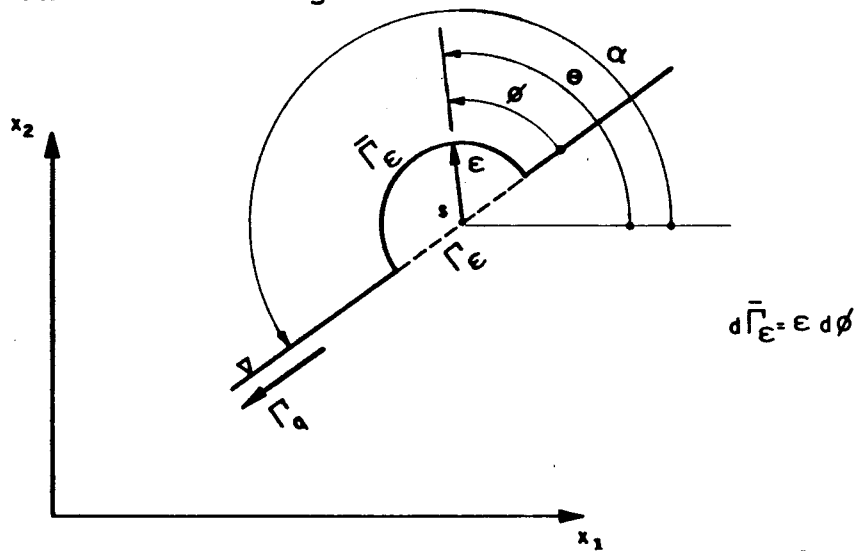


Fig. 3.7 - Contorno da Linha de Carga Alterado

Reescrevendo-se a integral (3.50) para o contorno alterado e tomando-se o limite quando ϵ tende a zero, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} r_{\alpha\beta}^*(s,t) \bar{q}(t) d\Gamma(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} r_{\alpha\beta}^*(s,t) \bar{q}(t) d\Gamma(t) + \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} r_{\alpha\beta}^*(s,t) \bar{q}(t) d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) \end{aligned} \quad (3.51)$$

A primeira parcela do segundo membro de (3.51) deve ser considerada no sentido de valor principal de Cauchy e sua

existência pode ser demonstrada se $\bar{q}(t)$ satisfaz a condição de Hölder. A segunda parcela por sua vez pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} r_{\alpha\beta}^*(s,t) \bar{q}(t) d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} r_{\alpha\beta}^*(s,t) [\bar{q}(t) - \bar{q}(s)] d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) + \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{q}(s) \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} r_{\alpha\beta}^*(s,t) d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Considerando-se a função $\bar{q}(t)$ contínua, a primeira parcela do segundo membro de (3.52) se anula. Levando-se em conta as expressões (3.38), pelo estudo da segunda parcela pode-se concluir que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{q}(s) \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} r_{\alpha\beta}^*(s,t) d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) = 0 \quad (3.53)$$

Em suma, no cálculo dos mo-entos fletores e torçor, a influência da carga distribuída em linha, quando o ponto fonte \underline{s} estiver situado sobre a mesma, no limite ϵ tendendo a zero, $(\Gamma - \Gamma_\epsilon)$ tende a Γ , e a primeira parcela do membro de (3.51) fica:

$$\int_{\bar{\Gamma}_q} r_{\alpha\beta}^*(s,t) \bar{q}(t) d\bar{\Gamma}_q(t) \quad (3.54)$$

Para o cálculo das forças cortantes, em pontos sobre a linha de carga, o estudo pode ser conduzido de maneira análoga àquela utilizada no equacionamento dos momentos. Considerando-se o contorno alterado (Figura 3.7), a integral (3.50) referente à contribuição de \bar{q} , no limite quando ϵ tende a zero, pode ser escrita como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} r_{3\beta}^*(s, t) \bar{q}(t) d\Gamma(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} r_{3\beta}^*(s, t) \bar{q}(t) d\Gamma(t) +$$

$$+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} r_{3\beta}^*(s, t) \bar{q}(t) d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) \quad (3.55)$$

A primeira parcela do segundo membro de (3.55) deve ser considerada no sentido de valor principal de Cauchy, podendo ser provada sua existência se $\bar{q}(t)$ satisfaz à condição de Hölder. A segunda parcela pode ser expressa como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} r_{3\alpha}^*(s, t) \bar{q}(t) d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} r_{3\alpha}^*(s, t) [\bar{q}(t) - \bar{q}(s)] d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) +$$

$$+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{q}(s) \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} r_{3\alpha}^*(s, t) d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) \quad (3.56)$$

Com a hipótese da validade da condição de Hölder, para a função $\bar{q}(t)$, a primeira integral do segundo membro de (3.56) se anula. Pelo estudo do limite da segunda integral, considerando-se as expressões (3.38), conclui-se que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{q}(s) \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} r_{3\alpha}^*(s, t) d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) = \bar{q}(s) \frac{n_\alpha}{\pi} \quad (3.57)$$

onde:

$$n_\alpha = \begin{Bmatrix} \text{sen } \alpha \\ -\text{cos } \alpha \end{Bmatrix}$$

Portanto, resumindo-se a contribuição da linha de carga distribuída, no cálculo das forças cortantes, quando o ponto fonte estiver localizado sobre a mesma, fica expressa por:

$$q(s) \frac{n_\alpha}{\pi} + \int_{\Gamma_q} r_{3\alpha}^* \bar{q}(t) d\Gamma_q(t) \quad (3.58)$$

De forma análoga, no caso do momento externo distribuído atuando sobre um subdomínio estreito e alongado, como indicado na Figura 3.6, é conveniente considerar-se a distribuição em linha. Assim:

$$d\Omega_m = b d\Gamma_m \quad (3.59)$$

$$\bar{m}_\alpha = b m_\alpha$$

A parcela das equações (3.19) e (3.25), referente ao momento distribuído externo, dada por:

$$I_2 = \int_{\Omega_m} u_{i\alpha}^*(s,t) m_\alpha(t) d\Omega_m(t)$$

pode ser reescrita, utilizando-se (3.59), como:

$$I_2 = \int_{\Gamma_m} u_{i\alpha}^*(s,t) \bar{m}_\alpha(t) d\Gamma_m(t) \quad (3.60)$$

No caso do momento distribuído em linha, desenvolve-se um estudo inteiramente análogo ao que foi feito para a linha de carga \bar{q} , visando-se o cálculo dos esforços. Assim, a contribuição da linha de momentos, \bar{m}_α , é considerada tomando-se a parcela correspondente nas equações (3.33) e (3.34) dada por:

$$\int_{\Omega_m} t_{i\beta\gamma}^*(s,t) m_\gamma(t) d\Omega_m(t)$$

e substituindo-se as relações (3.59) na mesma, obtendo-se:

$$\int_{\Gamma_m} t_{i\beta\gamma}^*(s,t) \bar{m}_\gamma(t) d\Gamma_m(t) \quad (3.61)$$

Caso o ponto fonte esteja situado sobre a linha de momentos, considera-se o contorno alterado conforme Figura 3.7. A integral (3.61) para cálculo dos momentos, no limite quando ϵ tende a zero, é agora escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} t_{\alpha\beta\gamma}^*(s,t) \bar{m}_\gamma(t) d\Gamma(t) &= \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} t_{\alpha\beta\gamma}^*(s,t) \bar{m}_\gamma(t) d\Gamma(t) + \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} t_{\alpha\beta\gamma}^*(s,t) \bar{m}_\gamma(t) d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Considerando-se a primeira integral do segundo membro de (3.62) no sentido de valor principal de Cauchy, pode-se provar sua existência, caso $\bar{m}_\gamma(t)$ satisfaça a condição de Hölder. A segunda parcela do segundo membro de (3.62) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} t_{\alpha\beta\gamma}^*(s,t) \bar{m}_\gamma(t) d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) &= \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} t_{\alpha\beta\gamma}^*(s,t) [\bar{m}_\gamma(t) - \bar{m}(s)] d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) + \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{m}_\gamma(s) \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} t_{\alpha\beta\gamma}^*(s,t) d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Admitindo-se a validade da condição de Hölder para a função $\bar{m}_\gamma(t)$, a primeira parcela do segundo membro de (3.63)

se anula. Estudando-se os limites da segunda parcela do segundo membro de (3.63), com a consideração das funções (3.39) para $t_{\alpha\beta\gamma}^*(s,t)$ conclui-se que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{m}(s) \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} t_{\alpha\beta\gamma}^*(s,t) d\bar{\Gamma}_\epsilon(t) = \bar{m}_\gamma(s) I_{\alpha\beta\gamma}(s,t) \quad (3.64)$$

sendo:

$$I_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{1}{2\pi} \left[(3-\nu) \delta_{\alpha\beta} n_\gamma + (5-\nu) (\delta_{\alpha\gamma} n_\beta + \delta_{\beta\gamma} n_\alpha) + \right. \\ \left. - \frac{2}{3} (7-\nu) (\delta_{\alpha\beta} n_\gamma + \delta_{\alpha\gamma} n_\beta + \delta_{\beta\gamma} n_\alpha - n_\alpha n_\beta n_\gamma) \right] \quad (3.65)$$

Assim, a contribuição de $\bar{m}_\gamma(t)$ no cálculo dos momentos quando o ponto fonte \underline{s} estiver situado sobre a linha da distribuição, fica expressa por:

$$\bar{m}_\gamma(s) I_{\alpha\beta\gamma}(s,t) + \int_{\Gamma_m} t_{\alpha\beta\gamma}^*(s,t) \bar{m}_\gamma(t) d\Gamma_m(t) \quad (3.66)$$

A contribuição da linha de momentos distribuídos \bar{m}_γ , no cálculo das forças cortantes, para pontos situados sobre a linha, é desenvolvida de modo análogo ao que foi feito para os momentos. Considerando-se o contorno alterado (Figura 3.7) e a integral (3.61) correspondente ao esforço cortante, tem-se, no limite, quando ϵ tende a zero, a seguinte expressão:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma} - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} t_{3\beta\gamma}^*(s,t) \bar{m}_\gamma(t) d\Gamma(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} t_{3\beta\gamma}^*(s,t) \bar{m}_\gamma(t) d\Gamma(t) + \\ + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} t_{3\beta\gamma}^*(s,t) \bar{m}_\gamma(t) d\Gamma(t) \quad (3.67)$$

Novamente, aqui, considerando-se a primeira integral do segundo membro de (3.67) no sentido de valor principal de Cauchy, pode-se demonstrar sua existência, caso $\bar{m}_\gamma(t)$ satisfaça à condição de Hölder. A segunda integral pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} t_{3\beta\gamma}^*(s,t) \bar{m}_\gamma(t) d\Gamma(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} t_{3\beta\gamma}^*(s,t) [\bar{m}_\gamma(t) - \bar{m}_\gamma(s)] d\bar{\Gamma}_\epsilon \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{m}(s) \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} t_{3\beta\gamma}^*(s,t) d\bar{\Gamma}_\epsilon \end{aligned} \quad (3.68)$$

Admitindo-se a validade da condição de Hölder para $\bar{m}_\gamma(t)$, a primeira parcela do segundo membro de (3.68) se anula. Pelo estudo da segunda parcela, no limite quando ϵ tende a zero, levando-se em conta as funções fundamentais $t_{3\beta\gamma}^*(s,t)$, vê-se que a mesma se anula. Sabendo-se ainda que no limite, $\Gamma - \Gamma_\epsilon$ tende a Γ , a contribuição da linha de momentos distribuídos no cálculo das forças cortantes, para pontos sobre a mesma, se resume na primeira parcela do segundo membro de (3.67) rescrita como:

$$\int_{\Gamma_m} t_{3\beta\gamma}^*(s,t) \bar{m}_\gamma(t) d\Gamma_m(t) \quad (3.69)$$

3.3.6- Influência do Campo de Momentos Iniciais no Cálculo dos Esforços nos Pontos Internos.

A consideração correta do campo de momentos iniciais atuando no domínio da placa é de fundamental importância não só para a modelagem dos efeitos de gradientes de temperatura, e retração, entre outros, mas também para a solução de problema não-lineares. Como o cálculo dos

momentos nos pontos internos requer a derivação de funções $u_{\alpha\gamma,\theta}^*$, sob o sinal de integração, e estas funções contêm singularidades, deve ser adotado um procedimento apropriado de acordo com o conceito geral apresentado por MIKHLIN [92]. Este mesmo procedimento foi adotado anteriormente nos trabalhos de TELLES e BREBBIA [93], e BUI [94], para análise de problemas de estado plano de tensão e de deformação. A influência do campo de momentos iniciais no cálculo dos momentos fletores, conforme mostrado na seção 3.3.4, é dada por:

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha\beta}(s) = & \frac{D(1-\nu)}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{\beta}(s)} \int_{\Omega} u_{\alpha\gamma,\theta}^*(s,t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) + \right. \\
 & \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}(s)} \int_{\Omega} u_{\beta\gamma,\theta}^*(s,t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) + \\
 & \left. + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\eta}(s)} \int_{\Omega} u_{\eta\gamma,\theta}^* M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) \right\} \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

sendo $u_{\beta\gamma,\theta}^*$ as derivadas de $u_{\beta\gamma}^*$ em relação às coordenadas x_{θ} de ponto de deslocamento t , expressos em (3.29).

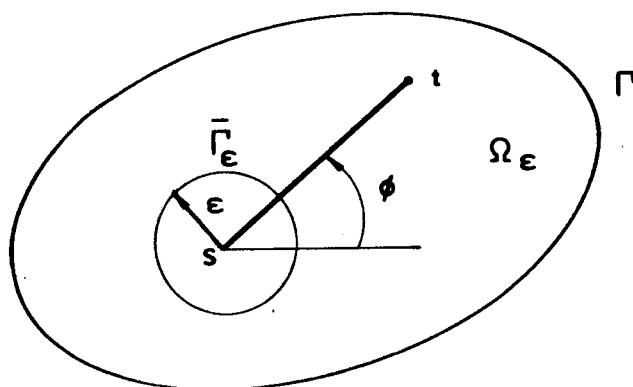


Fig. 3.8 - Domínio Ω_{ϵ}

Fazendo-se

$$V_\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} u_{\alpha\gamma, \theta}^*(s, t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t)$$

onde Ω_ϵ é o domínio remanescente quando é removido do domínio Ω um pequeno círculo de raio ϵ , e centro no ponto fonte \underline{s} (Figura 3.8). A derivada apropriada da V_α pode então ser escrita como:

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta(s)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\beta(s)} \int_{\Omega_\epsilon} u_{\alpha\gamma, \theta}^*(s, t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) \right\} \quad (3.71)$$

Com base no trabalho de MIKHLIN [92] e nas referências [93, 94], pode-se escrever:

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta(s)} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_\beta(s)} u_{\alpha\gamma, \theta}^*(s, t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) - M_{\gamma\theta}^0(s) \int_{\Gamma_1} \bar{u}_{\alpha\gamma, \theta}^* r_{, \beta} d\Gamma(t) \quad (3.72)$$

onde a primeira integral deve ser interpretada no sentido de valor principal de Cauchy, Γ_1 representa o contorno de um círculo de raio unitário centrado no ponto fonte s e, $r_{, \beta}$ é a derivada de r com relação à coordenada x_β do ponto de deslocamento \underline{t} . A função $\bar{u}_{\alpha\gamma, \theta}^*$ é o limite de $u_{\alpha\gamma, \theta}^*$ quando o raio ϵ do círculo tendo a zero, isto é:

$$\bar{u}_{\alpha\gamma, \theta}^* = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{\alpha\gamma, \theta}^*$$

Examinando-se as expansões polinomiais das parcelas de $u_{\alpha\gamma, \theta}^*$ (3.29), dadas no Apêndice A, tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\alpha\gamma, \theta}^* = & - \frac{1}{4\pi D(1-\nu)} \frac{1}{\epsilon} [(3-\nu)r_{, \theta} \delta_{\alpha\gamma} + 2(1+\nu)r_{, \alpha} r_{, \gamma} r_{, \theta} + \\ & - (1+\nu)(\delta_{\alpha\theta} r_{, \gamma} + \delta_{\gamma\theta} r_{, \alpha})] \end{aligned} \quad (3.73)$$

Tomando-se um elemento diferencial $d\Gamma$ sobre o contorno do círculo de raio ϵ da Figura 3.8:

$$d\Gamma = \epsilon d\phi$$

tem-se que:

$$\int_{\Gamma_1} \bar{u}_{\alpha\gamma, \theta}^* r, \beta d\Gamma = \int_0^{2\pi} \bar{u}_{\alpha\gamma, \theta}^* r, \beta \epsilon d\phi \quad (3.74)$$

Efetuada-se a integral acima obtém-se:

$$\int_0^{2\pi} \bar{u}_{\alpha\gamma, \theta}^* r, \beta \epsilon d\phi = - \frac{1}{8D(1-\nu)} [(7-\nu) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\theta\beta} - (1+\nu) (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} + \delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma})] \quad (3.75)$$

Analogamente:

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha(s)} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_\alpha(s)} u_{\beta\gamma, \theta}^*(s, t) M_{\gamma\theta}^O(t) d\Omega(t) - M_{\gamma\theta}^O(s) \int_{\Gamma_1} \bar{u}_{\beta\gamma, \theta}^* r, \alpha d\Gamma(t) \quad (3.76)$$

sendo:

$$\int_{\Gamma_1} \bar{u}_{\beta\gamma, \theta}^* r, \alpha d\Gamma = - \frac{1}{8D(1-\nu)} [(7-\nu) \delta_{\beta\gamma} \delta_{\theta\alpha} - (1+\nu) (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} + \delta_{\beta\theta} \delta_{\alpha\gamma})] \quad (3.77)$$

Analisando-se a terceira integral de (3.70) tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_\eta(s)} \int_{\Omega} \bar{u}_{\eta\gamma, \theta}^*(s, t) M_{\gamma\theta}^O(t) d\Omega(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_\eta(s)} u_{\eta\gamma, \theta}^* M_{\gamma\theta}^O d\Omega(t) + M_{\gamma\theta}^O(s) \int_{\Gamma_1} \bar{u}_{\eta\gamma, \theta}^* r, \eta d\Gamma \quad (3.78)$$

onde:

$$\int_{\Gamma_1} \bar{u}_{\eta\gamma, \theta}^* r, \eta d\Gamma = - \frac{\delta_{\gamma\theta}}{2D} \quad (3.79)$$

Somando-se as integrais (3.75), (3.77) e (3.79), obtém-se:

$$g_{\alpha\beta\gamma\theta}(s) = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[- \int_{\Gamma} [\bar{u}_{\alpha\gamma, \theta}^* r, \beta + \bar{u}_{\beta\gamma, \theta}^* r, \alpha + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \bar{u}_{\eta\gamma, \theta}^* r, \eta] d\Gamma \right] \quad (3.80)$$

$$g_{\alpha\beta\gamma\theta}(s) = \frac{1}{8} [(3-\nu)(\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\theta\beta} + \delta_{\beta\gamma} \delta_{\theta\alpha}) - (1-3\nu)\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta}] \quad (3.81)$$

Considerando-se as primeiras parcelas integrais de (3.72), (3.76) e (3.78), e efetuando-se a soma obtém-se:

$$I_{\alpha\beta}(s) = \frac{D(1-\nu)}{2} \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_{\beta}(s)} u_{\alpha\gamma, \theta}^*(s, t) + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}(s)} u_{\beta\gamma, \theta}^*(s, t) + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\eta}(s)} u_{\eta\gamma, \theta}^*(s, t) \right] M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) \right\} \quad (3.82)$$

ou,

$$I_{\alpha\beta}(s) = \int_{\Omega} e_{\alpha\beta\gamma\theta}^*(s, t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) \quad (3.83)$$

onde:

$$e_{\alpha\beta\gamma\theta}^*(s, t) = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_{\beta}(s)} u_{\alpha\gamma, \theta}^*(s, t) + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}(s)} u_{\beta\gamma, \theta}^*(s, t) + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\eta}(s)} u_{\eta\gamma, \theta}^*(s, t) \right] \quad (3.84)$$

Derivando-se as funções $u_{\alpha\gamma,\theta}^*$ em relação às coordenadas x_β do ponto fonte \underline{s} , e considerando-se as relações (3.32), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\alpha\gamma,\theta}^*}{\partial x_\beta(\underline{s})} = & \frac{-1}{4\pi D(1-\nu)r^2} \left\{ \left[16A + 12zk_1 + 2(1-\nu) + 4z^2k_0 \right] r_{,\beta} r_{,\theta} \delta_{\alpha\gamma} + \right. \\ & + [16A + 4zk_1 + 2(1-\nu)] (r_{,\beta} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\theta} + r_{,\alpha} r_{,\beta} \delta_{\gamma\theta} + \\ & + r_{,\gamma} r_{,\theta} \delta_{\alpha\beta} + r_{,\alpha} r_{,\theta} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\alpha} r_{,\gamma} \delta_{\beta\theta}) + \\ & - (4A + 1 - \nu) (\delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta}) - (4A + 4zk_1 + 1 - \nu) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\theta} + \\ & \left. - [96A + 32zk_1 + 4z^2k_0 + 8(1-\nu)] r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\theta} \right\} \quad (3.85) \end{aligned}$$

Particularizando-se a expressão (3.85) para o caso, $\alpha = \beta = \eta$, obtém-se:

$$\frac{\partial u_{\eta\gamma,\theta}^*}{\partial x_\eta(\underline{s})} = \frac{-1}{2\pi D r^2} (2r_{,\theta} r_{,\gamma} - \delta_{\gamma\theta}) \quad (3.86)$$

Substituindo-se as derivadas (3.85) e (3.86) na expressão (3.84), obtém-se:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta\gamma\theta}^* = & - \frac{1}{8\pi r^2} \left\{ \left[16A + 12zk_1 + 2(1-\nu) + 4z^2k_0 \right] \cdot \right. \\ & \cdot \left(r_{,\theta} r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\theta} r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} \right) + \left[16A + 4zk_1 + 2(1-\nu) \right] \cdot \\ & \cdot \left(2r_{,\beta} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\theta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \delta_{\gamma\theta} + 2r_{,\gamma} r_{,\theta} \delta_{\alpha\beta} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2r_{,\alpha} r_{,\gamma} \delta_{\beta\theta} + r_{,\alpha} r_{,\theta} \delta_{\beta\gamma} + r_{,\beta} r_{,\theta} \delta_{\alpha\gamma} \Big) - (4A + 1-\nu)x \\
& \times \left(2\delta_{\gamma\theta} \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\theta} \delta_{\gamma\beta} + \delta_{\beta\theta} \delta_{\gamma\alpha} \right) - (4A + 4zk_1 + 1-\nu)x \\
& \times \left(\delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\theta} \right) - \left[96A + 32zk_1 + 4z^2k_0 + 8(1-\nu) \right]x \\
& \times \left(2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\theta} \right) + 4\nu \delta_{\alpha\beta} \left(2r_{,\gamma} r_{,\theta} - \delta_{\gamma\theta} \right) \Big\} \quad (3.87)
\end{aligned}$$

O procedimento para a consideração da influência do campo de momentos iniciais nos valores dos esforços cortantes é análogo ao que foi utilizado para os momentos. Assim, conforme mostrado na seção 3.3.4, a parcela que exprime a influência do campo de momentos iniciais nas forças cortantes é representada como:

$$\begin{aligned}
I_{3\beta} = & \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left[\int_{\Omega} [u_{\beta\gamma,\theta}^*(s,t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}(s)} \int_{\Omega} u_{3\gamma,\theta}^* M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) \right] \quad (3.88)
\end{aligned}$$

sendo, $u_{\beta\gamma,\theta}^*(s,t)$ e $u_{3\gamma,\theta}^*(s,t)$ as derivadas da função $u_{i\gamma}^*$ em relação à coordenada x_{θ} do ponto de deslocamento \underline{x} , dadas por (3.29). Deve-se observar, neste caso, que a função $u_{3\gamma,\theta}^*$ não apresenta singularidade fortes, portanto:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}(s)} \int_{\Omega} u_{3\gamma,\theta}^*(s,t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) = \\
& = \int \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}(s)} u_{3\gamma,\theta}^*(s,t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) \quad (3.89)
\end{aligned}$$

Exprimindo-se $e_{3\beta\gamma\theta}^*$ como:

$$e_{3\beta\gamma\theta}^*(s, t) = D(1-\nu) \frac{\lambda^2}{2} \left[u_{\beta\gamma, \theta}^*(s, t) + \frac{\partial}{\partial x_\beta(s)} u_{3\gamma, \theta}^*(s, t) \right] \quad (3.90)$$

a integral (3.88) pode ser reescrita como:

$$I_{3\beta}(s) = \int_{\Omega} e_{3\beta\gamma\theta}^*(s, t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) \quad (3.91)$$

Derivando-se, então, $u_{3\gamma, \theta}^*$ em relação as coordenadas do ponto fonte \underline{s} , obtém-se:

$$\frac{\partial u_{3\gamma, \theta}^*(s, t)}{\partial x_\beta(s)} = - \frac{1}{4\pi D r} [2r_{, \beta} r_{, \gamma} r_{, \theta} - \delta_{\gamma\theta} r_{, \beta} - \delta_{\beta\theta} r_{, \gamma} - \delta_{\beta\gamma} r_{, \theta}] \quad (3.92)$$

Substituindo-se, $\frac{\partial u_{3\gamma, \theta}^*(s, t)}{\partial x_\beta(s)}$ e $u_{\beta\gamma, \theta}^*(s, t)$ na expressão (3.90) obtém-se:

$$e_{3\beta\gamma\theta}^* = - \frac{\lambda^2}{2\pi r} \left[(A + zk_1) r_{, \theta} \delta_{\beta\gamma} - (4A + zk_1) r_{, \beta} r_{, \gamma} r_{, \theta} + A(\delta_{\beta\theta} r_{, \gamma} + \delta_{\gamma\theta} r_{, \beta}) \right] \quad (3.93)$$

4 ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentado um procedimento geral para a abordagem numérica visando-se a solução das equações integrais de placas formuladas anteriormente.

Considerando-se as dificuldades inerentes à solução analítica de tais equações, para a quase totalidade das aplicações práticas de placas, efetua-se uma transformação algébrica que vai permitir a obtenção de um sistema de equações lineares. A transformação implica na discretização do contorno da placa em segmentos, denominados elementos de contorno, sobre os quais os deslocamentos e as forças de superfície são interpolados, de acordo com funções aproximadoras previamente escolhidas. De forma análoga, as integrais de domínio podem ser computadas, numericamente ou analiticamente, sobre pequenas áreas denominadas células, nas quais os valores de momentos iniciais ou de outras distribuições são interpolados por funções aproximadoras bidimensionais pré-estabelecidas.

As equações resultantes da transformação das equações integrais de contorno constituem um sistema linear algébrico de equações nas quais as incógnitas são representadas por

valores dos deslocamentos e forças de superfície.

Em cada ponto de colocação são geradas duas equações correspondentes a cada uma das coordenadas generalizadas (deslocamento transversal e rotação normal no contorno) quando o problema é formulado pela Teoria Clássica de Kirchhoff. Quando se utiliza a Teoria de Reissner, são geradas três equações em cada ponto de colocação relativas ao deslocamento transversal, rotação normal e rotação tangencial ao contorno.

Impondo-se as condições de contorno, o sistema é resolvido; em seguida são calculados de forma direta os valores de deslocamentos e esforços nos pontos internos. São apresentadas a seguir as abordagens para ambas as teorias, Kirchhoff e Reissner, sendo analisadas diversas alternativas para a formulação das equações.

4.2. ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DE KIRCHHOFF

Os trabalhos desenvolvidos por PAIVA [47], SILVA [62], e CALDERÓN [95], todos êles versando sobre a aplicação do Método dos Elementos do Contorno para placas com base nas hipóteses de Kirchhoff, tratam detalhadamente da discretização e de diversas alternativas para a formulação do sistema de equações. Aqui este assunto será abordado de forma resumida, ressaltando-se as conclusões principais apresentadas nos trabalhos citados.

As equações integrais (3.4) e (3.5) exprimem relações entre deslocamentos w , $\partial w / \partial n$ e esforços V_n , M_{nn} para pontos do contorno. A discretização do contorno em elementos, e a aproximação dos valores de contorno sobre os elementos permite a transformação das referidas equações integrais em um sistema de equações lineares, quando escritas para um número conveniente de nós singulares, cujas incógnitas são os valores nos pontos nodais do contorno.

4.2.1- Discretização das Equações Integrais

O contorno da placa é usualmente aproximado por um número finito de segmentos retos ou curvos denominados elementos. Neste trabalho consideram-se apenas elementos de contorno retos Γ_i , conforme ilustrado na Figura 4.1.

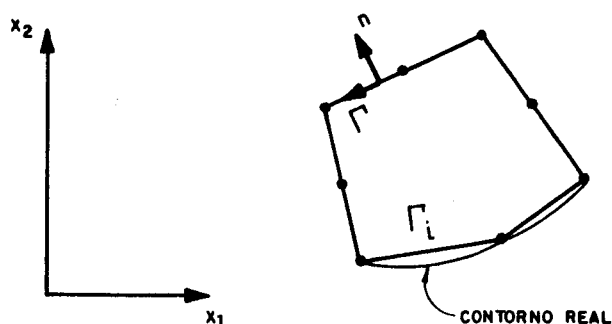


Fig. 4.1 - Discretização do Contorno da Placa.

As coordenadas de um ponto genérico m , do elemento de contorno Γ_i são parametrizadas em função das coordenadas dos nós de extremidade, através de coordenadas locais homogêneas ξ (Figura 4.2)

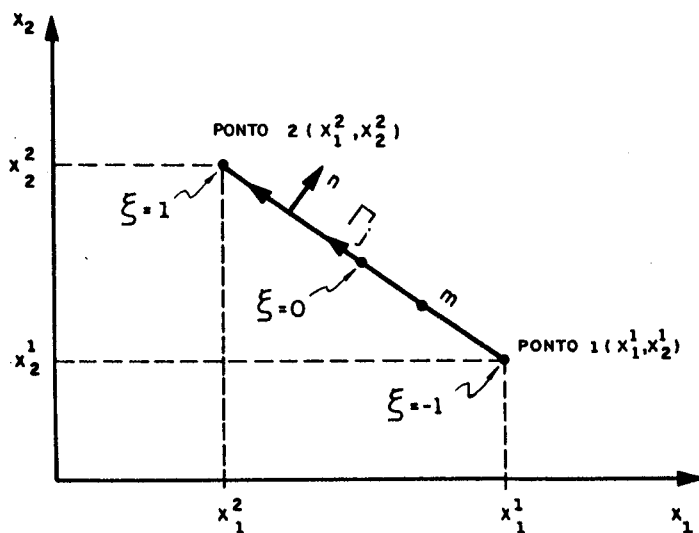


Fig. 4.2- Descrição Geométrica do Elemento Linear.

Assim, as coordenadas do ponto genérico m ficam expressas por:

$$\underset{\sim}{x}^m = \underset{\sim}{\psi}^T(\xi) \underset{\sim}{x}^{(N)} \quad (4.1)$$

onde

$$\underset{\sim}{x}^m = \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\}^m \quad (4.2)$$

$$\underset{\sim}{\psi}^T(\xi) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\phi}^T(\xi) & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{\phi}^T(\xi) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\underset{\sim}{x}^{(N)} = \left\{ \begin{array}{c} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

sendo, x_1 e x_2 as coordenadas cartesianas, $\underset{\sim}{x}^{(N)}$ o vetor de coordenadas nodais dos nós extremos, e $\underset{\sim}{\psi}^{(T)}$ a transposta da matriz de funções aproximadoras. O vetor de funções aproximadoras é dado por:

$$\underset{\sim}{\phi} = \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

onde:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ \phi_2 &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Pode-se então escrever:

$$\begin{Bmatrix} x_1^m \\ x_2^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\phi_1 & \phi_2\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\phi_1 & \phi_2\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

Neste trabalho e nos trabalhos [47], [62] e [95] é adotada a aproximação linear para representar as funções de deslocamentos e forças sobre cada elemento de contorno Γ_i . Procedendo-se de forma análoga àquela utilizada para exprimir as coordenadas do ponto genérico, os deslocamentos e forças no elemento são parametrizados em função dos valores nodais das respectivas grandezas e das funções aproximadoras escritos em coordenadas locais homogêneas ξ . Assim, os deslocamentos sobre o elemento ficam expressos por:

$$\underset{\sim}{u}^m = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^m = \underset{\sim}{\psi}^T(\xi) \underset{\sim}{U}^{(N)} = \begin{bmatrix} \{\phi_1 & \phi_2\} & 0 \\ 0 & \{\phi_1 & \phi_2\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Analogamente, as forças de superfície sobre o elemento ficam expressas por:

$$\underset{\sim}{p}^m = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^m = \underset{\sim}{\psi}^T(\xi) \underset{\sim}{p}^{(N)} = \begin{bmatrix} \{\phi_1 & \phi_2\} & 0 \\ 0 & \{\phi_1 & \phi_2\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Os deslocamentos e forças de superfície genericamente denotados por $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{p}$, respectivamente, são:

$$\tilde{u}^m = \left\{ \begin{array}{c} w \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{array} \right\} \quad \tilde{p}^m = \left\{ \begin{array}{c} V_n \\ M_{nn} \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

A figura 4.3 ilustra o esquema de interpolação utilizado para o elemento linear contínuo.

Observando-se que as integrais envolvidas nas equações (3.4) e (3.5) referem-se à integrações sobre o contorno Γ , e que, as aproximações na geometria e nos valores de contorno são expressos em função da coordenada adimensional ξ , é necessário uma mudança da variável Γ para ξ . A partir da Figura 4.a, escreve-se:

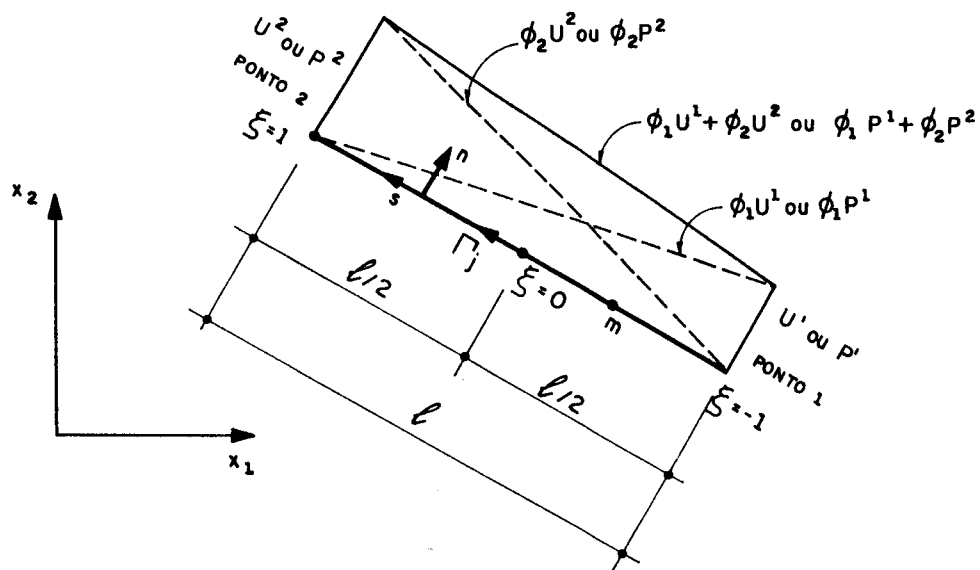


Fig. 4.3- Elemento Linear Contínuo.

$$\Gamma = \frac{l}{2}\xi \quad (4.11.a)$$

O determinante Jacobiano da transformação é dado por:

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{l}{2} \quad (4.11.b)$$

ou

$$d\Gamma = \frac{l}{2}d\xi. \quad (4.11.c)$$

A ocorrência de pontos angulosos e a variação da vinculação no contorno da placa implicam no aparecimento de descontinuidades dos valores de contorno, impedindo a sua avaliação através do uso do elemento linear contínuo. Dentre as alternativas possíveis para a representação destas descontinuidades, neste trabalho optou-se pela adoção de nós duplos nos pontos angulosos e em outros pontos de descontinuidades das forças de contorno. Estes nós duplos são assim denominados por possuírem as mesmas coordenadas cartesianas, tornando independentes os valores nodais, antes e depois do ponto considerado, conforme figura 4.4.

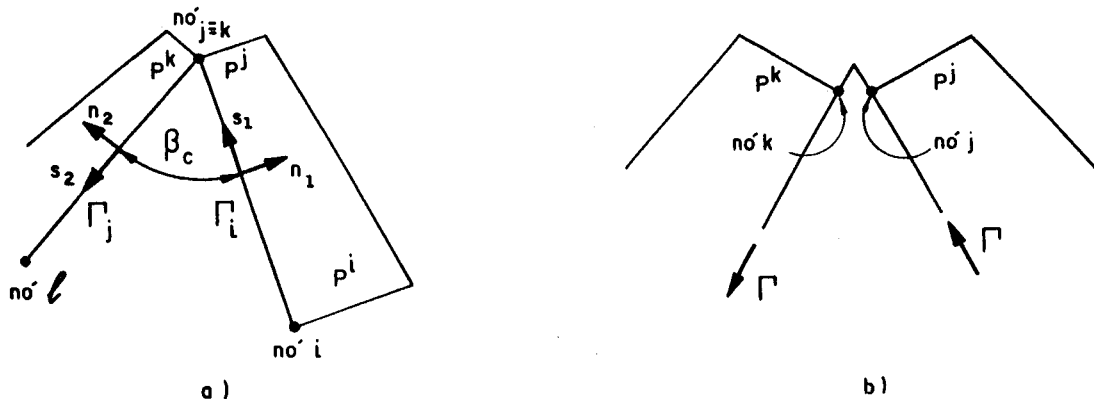


Fig.4.4- Nó Duplo em Canto de Placa

Uma outra alternativa eficiente para representar as descontinuidades, no contorno é a utilização do elemento linear descontínuo adotada por CALDERÓN [95]. Este elemento pode ser formulado através da colocação de nós no interior do elemento, conforme mostrado na Figura 4.5.

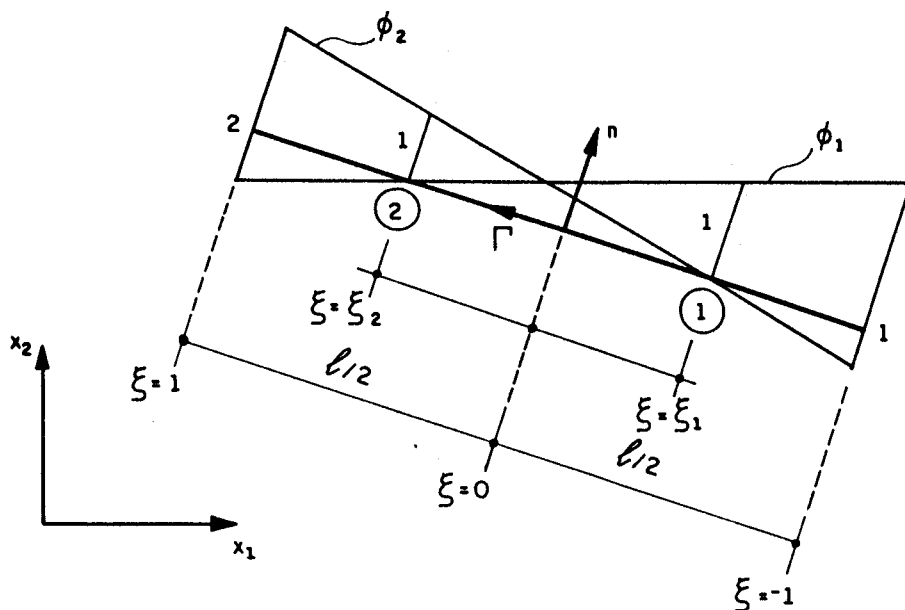


Fig. 4.5- Elemento Linear Descontínuo

A aproximação dos valores de contorno u e p é feita com base nas expressões (4.2) e (4.9), respectivamente, alterando-se as funções aproximadoras ϕ para:

$$\phi_1 = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} (\xi_2 - \xi) \quad (4.14)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{\xi_1 - \xi_2} (\xi_1 - \xi)$$

Quando houver interesse em simular descontinuidades em apenas uma das extremidades do elemento pode-se utilizar um elemento linear misto. Este elemento é uma combinação dos dois elementos citados anteriormente, definindo-se um nó na extremidade e o outro no interior do elemento. Sua utilização nas regiões do contorno adjacentes aos pontos de descontinuidades combinada com elementos contínuos é vantajosa no sentido de se evitar o aumento excessivo do

número de pontos nodais, que ocorreria utilizando-se apenas elementos descontínuos.

As equações integrais (3.4) e (3.5) podem ser agrupadas numa única equação da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}(S) \tilde{u}(S) + \int_{\Gamma} \tilde{p}^*(S, T) \tilde{u}(T) d\Gamma(T) + \sum_{i=1}^{NC} \tilde{R}_{ci}^*(S, T) \tilde{w}_{ci}(T) = \\
 = \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(S, T) \tilde{p}(T) d\Gamma(T) + \sum_{i=1}^{NC} \tilde{u}_{ci}^*(S, T) \tilde{R}_{ci}(T) + \\
 + \int_{\Omega_q} q(t) \tilde{u}_q(S, T) d\Omega_q(t) \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

onde:

$$\tilde{u}(S) = \begin{Bmatrix} u_1(S) \\ u_2(S) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(S) \\ \frac{\partial w}{\partial m}(S) \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\tilde{p}^*(S, T) = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_n^*(S, T) & -M_{nn}^*(S, T) \\ V_{n,m}^*(S, T) & -M_{nn,m}^*(S, T) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\tilde{u}(T) = \begin{Bmatrix} u_1(T) \\ u_2(T) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(T) \\ w_{,n}(T) \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\tilde{R}_{ci}^*(S, T) = \begin{Bmatrix} R_{ci}^*(S, T) \\ R_{ci,m}^*(S, T) \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\underset{\sim}{u}^*(S, T) = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^*(S, T) & -w_{,n}^*(S, T) \\ w_{,m}^*(S, T) & -w_{,nm}^*(S, T) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\underset{\sim}{p}(T) = \begin{Bmatrix} p_1(T) \\ p_2(T) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_n(T) \\ M_{nn}(T) \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\underset{\sim}{u}_{ci}^*(S, T) = \begin{Bmatrix} w_{ci}^*(S, T) \\ w_{ci,m}^*(S, T) \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\underset{\sim}{u}_q^*(S, t) = \begin{Bmatrix} w^*(S, t) \\ w_{,m}^*(S, t) \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

e NC é o número de pontos angulosos de contorno.

Após a discretização do contorno em elementos, a equação (4.15) pode ser transformada tomando-se cada parcela como o somatório das integrais sobre os elementos Γ_j .

Assim, a equação (4.15) pode ser reescrita como:

$$\underset{\sim}{c}(S)\underset{\sim}{u}(S) + \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{p}^*(S, T)\underset{\sim}{u}(T) d\Gamma_j(T) + \sum_{i=1}^{NC} R_{ci}^*(S, T) w_{ci}(T) =$$

$$\sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{u}^*(S, T)\underset{\sim}{p}(T) d\Gamma_j(T) + \sum_{i=1}^{NC} R_{ci}(T)\underset{\sim}{u}_{ci}^*(S, T) +$$

$$+ \int_{\Omega_q} q(t)\underset{\sim}{u}_q^*(S, t) d\Omega_q(T) \quad (4.24)$$

onde, NE é o número de elementos de contorno adotado.

Considerando-se a aproximação das funções $u(s)$ e $p(s)$ dadas por (4.8) e (4.9), respectivamente, e efetuando-se a mudança de variável Γ para ξ , a equação (4.24) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}(s) \tilde{u}(s) + \sum_{j=1}^{NE} \int_{-1}^1 |J| \tilde{p}^*(s, T) \tilde{\psi}^T(T) d\xi(T) \tilde{U}_j^{(N)} + \\
 + \sum_{i=1}^{NC} \tilde{R}_{ci}^*(s, T) \tilde{w}_{ci}(T) = \sum_{j=1}^{NE} \int_{-1}^1 |J| \tilde{u}^*(s, T) \tilde{\psi}^T(T) d\xi(T) \tilde{P}_j^{(N)} + \\
 + \sum_{i=1}^{NC} \tilde{R}_{ci}(T) \tilde{u}_{ci}^*(s, T) + \int_{\Omega_q} q(t) \tilde{u}_q^*(s, t) d\Omega_q(t) \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

A equação (4.25) representa na verdade um sistema de equações algébricas lineares onde as incógnitas são os valores nodais $\tilde{U}_j^{(N)}$ ou $\tilde{P}_j^{(N)}$, nos pontos definidos sobre o contorno. As integrais sobre os elementos exprimem agora a influência dos valores nodais de deslocamento ou força no ponto T, sobre os valores de deslocamento, w ou w_m , no ponto fonte S. Escrevendo-se estas equações para todos os NNC pontos nodais definidos sobre o contorno obtém-se um sistema de $2(NNC)$ equações relacionando deslocamentos e forças de contorno.

A integração sobre os elementos, explicitada na equação (4.25), depende apenas das soluções fundamentais e das funções aproximadoras $\tilde{\psi}$. Pode-se portanto escrever estes coeficientes independentemente das grandezas do contorno. Assim:

$$h_{ik}^n(S) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \tilde{p}^* \tilde{\psi}^T d\xi = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 p_{ik}^*(S,T) \phi_n(T) d\xi(T) \quad (4.26)$$

$$g_{ik}^n(S) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \tilde{u}^* \tilde{\psi}^T d\xi = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 u_{ik}^*(S,T) \phi_n(T) d\xi(T)$$

onde:

- n - nó local do elemento onde se mede a resposta ao carregamento unitário;
- S - nó singular, isto é, o ponto nodal onde é aplicada a carga unitária, ou ponto para o qual estão sendo geradas as equações (ponto de colocação);
- i - índice que identifica a equação que está sendo gerada; para i=1 tem-se a equação em w(S), para i=2 tem-se a equação em $\partial w(S)/\partial m$. Por outro lado, i=1, indica carga unitária aplicada em S, i=2, indica o momento unitário aplicado em S;
- k - índice que identifica a natureza da resposta medida em T. Se k=1 a resposta fundamental é V_n^* , para h_{ik}^n , ou w^* , para g_{ik}^n . Se k=2 a resposta fundamental é M_n^* , para h_{ik}^n , ou $\partial w^*/\partial n$ para g_{ik}^n .

Os coeficientes $h_{ik}^n(S)$ e $g_{ik}^n(S)$ medem respectivamente, a contribuição dos valores nodais de deslocamentos e forças de superfície, correspondentes ao elemento de contorno em consideração, para os deslocamentos do ponto fonte S.

Calculando-se a contribuição de cada elemento e somando-se as contribuições, convenientemente endereçadas, formam-se duas matrizes quadradas H e G quando são escritas as equações para cada ponto de colocação. Desta forma a equação (4.25) pode ser escrita matricialmente como:

$$\begin{matrix} H & U & = & G & P & + & B \\ \sim & \sim & & \sim & \sim & & \sim \end{matrix} \quad (4.27)$$

onde, \tilde{U} e \tilde{P} são, respectivamente, vetores de deslocamentos e forças nodais de contorno, e \tilde{B} o vetor que contém as contribuições do carregamento de domínio.

A integração dos coeficientes $h_{ik}^n(s)$ e $g_{ik}^n(s)$ é, em geral, efetuada numericamente através de um esquema de quadratura de Gauss. Quando o ponto fonte S estiver situado sobre o elemento de contorno que está sendo integrado ocorrem singularidades, devendo-se utilizar neste caso esquemas de integração analítica. Visando-se evitar tais singularidades, neste trabalho são criados pontos fonte correspondentes aos nós de contorno fora do domínio, conforme ilustrado na Figura 4.6. Os pontos fonte são localizados a uma distância d do contorno definida por:

$$d = a \cdot \tilde{l}_m \quad (4.28)$$

onde, \tilde{l}_m é o comprimento médio dos elementos concorrentes no nó e a é um fator positivo.

Quanto menor o valor de d mais precisos serão os resultados desde que sejam tomadas precauções para evitarem-se erros de integração. Neste trabalho foram testados diversos valores do fator a , variando de 1,0 até 0,1. Os resultados tendem a ser mais precisos quanto mais próximo estiver o ponto fonte do contorno, mas é necessário aumentar-se o número de pontos de integração da quadratura de Gauss quando o ponto aproxima-se do contorno para evitarem-se os erros de integração. Os resultados mais precisos foram obtidos adotando-se o fator $a = 0,25$ com o número de pontos de integração igual a 12.

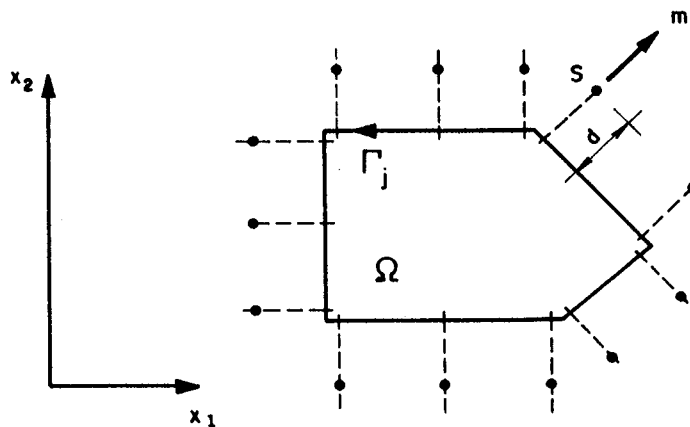


Fig. 4.6- Colocação de Pontos Fonte fora do Domínio

Com a colocação dos pontos fonte S fora do domínio e a consideração da propriedade da distribuição Delta de Dirac expressa por:

$$\int_{\Omega} \delta(S, T) w(T) d\Omega(T) = 0 \quad (4.29)$$

obtem-se o valor da constante $c(S)$ da equação (4.25), sendo:

$$c(S) = 0 \quad (4.30)$$

Assim, o primeiro termo da equação (4.25) se anula quando são utilizados pontos fonte fora do domínio.

A influência das reações de canto dada pelas parcelas:

$$\sum_{i=1}^{NC} R_{ci}^*(S, T) w_{ci}(T) \quad e \quad \sum_{i=1}^{NC} R_{ci}(T) u^*(S, T)$$

pode ser incorporada à matriz H, sendo que para a segunda parcela pode ser usado um esquema de diferenças finitas, conforme [47] e [62], substituindo-se R_{ci} em termos de rotações dos nós vizinhos.

Para a avaliação da influência do carregamento q,

atuante no sub-domínio Ω_q , expressa na equação (4.25) por:

$$\int_{\Omega_q} q(t) u_q^*(S, t) d\Omega_q(t)$$

consideram-se as expressões (3.7) e (3.8) que representam as integrais acima transformadas para o contorno Γ_q da região carregada. O contorno Γ_q é dividido em elementos e efetua-se a integração numérica de (3.7) e (3.8) de cada um destes elementos em relação a cada ponto fonte S, obtendo-se então a contribuição de q para as equações $w(S)$ e $\frac{\partial w}{\partial m}(S)$, respectivamente. Estas contribuições são convenientemente endereçadas e acumuladas no vetor B.

Reordenando-se o sistema de equações (4.27), através de troca de colunas entre as matrizes H e G, de forma que todas as incógnitas de contorno sejam acumuladas num vetor X, tem-se:

$$\begin{matrix} A & X & = & F \\ \sim & \sim & & \sim \end{matrix} \quad (4.31)$$

onde o vetor F contém os efeitos dos valores prescritos no contorno somados com o vetor B.

4.2.2- Alternativas para a Montagem do Sistema de Equações

Além da forma exposta no item anterior, onde as equações de w e w_m são geradas em pontos de colocação situados fora do domínio, várias outras alternativas são viáveis para a formulação do sistema de equações, conforme mostrado em [47] e [95].

Dentre estas alternativas podem ser citadas as

seguintes:

- a) Formulação de equações de w e w_m para pontos situados sobre o contorno, utilizando-se nós duplos nos pontos de descontinuidade. Neste caso deve ser utilizada integração analítica na geração dos coeficientes de H e G , quando o ponto fonte estiver situado sobre o elemento em consideração.
- b) Formulação de equações de w e w_m para pontos sobre o contorno, utilizando-se elementos descontínuos e mistos para simular as descontinuidades do contorno, podendo ser tomados pontos de colocação sobre o contorno ou fora do domínio.
- c) Formulação de equações somente para o deslocamento transversal w , sendo um dos pontos fora do domínio. Neste caso utiliza-se apenas a representação integral (3.4), discretizada, para cada ponto (Figura 4.7.a). A simulação das descontinuidades pode ser feita usando-se nós duplos ou elementos descontínuos e mistos.
- d) Formulação de equações para o deslocamento w , para os dois pontos situados fora do domínio. Neste caso, dois pontos de colocação situados sobre a normal de um ponto nodal de contorno, distantes d_1 e d_2 do contorno, são utilizados, (Figura 4.2.b). A simulação das descontinuidades pode ser feita com a utilização de nós duplos ou com o uso de elementos descontínuos e mistos.

Nas alternativas citadas anteriormente, a contribuição da reação de canto é incorporada à matriz H , quando se opta pela colocação de nós duplos nos cantos da placa. Esta contribuição é endereçada e acumulada nas linhas da matriz H , correspondentes a cada ponto fonte e colunas relacionadas ao nó do canto e aos nós próximos do mesmo,

pois considera-se R_{C_i} expressa através de um esquema de diferenças finitas em termos de rotações dos nós vizinhos. Entretanto quando utilizam-se elementos descontínuos ou mistos para simular as descontinuidades, R_C e w_C são considerados como variáveis do problema criando-se com isto equações adicionais para deslocamentos em todos os cantos da placa.

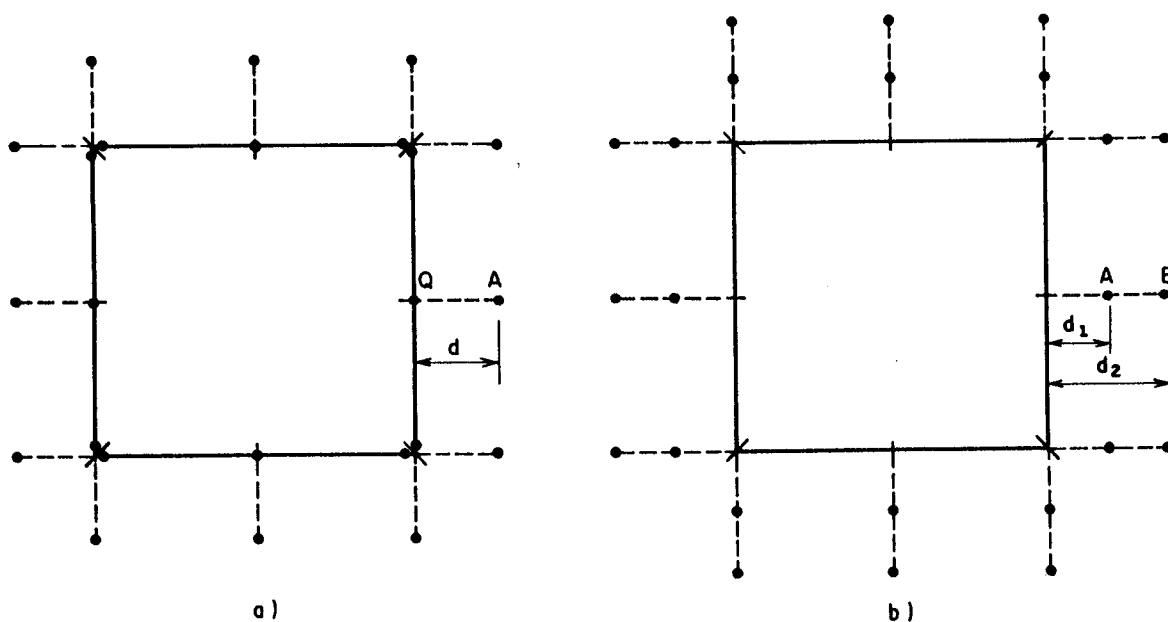


Fig. 4.7- Placa Quadrada com Pontos Singulares:
a) sobre o contorno e fora do domínio;
b) fora do domínio.

Com base nas conclusões dos trabalhos [47] e [95], a alternativa que utiliza apenas a formulação de equações em w , para pontos situados fora do domínio tende a ser mais eficiente e precisa, porém cuidados devem ser tomados para evitarem-se erros de integração quando os pontos singulares situam-se muito próximos ao contorno.

Com relação a integração dos elementos singulares, uma alternativa às técnicas de integração numérica ou analíticas especiais é a utilização de movimentos de corpo rígido aplicados à placa descarregada. Se a placa estiver

descarregada e os valores de forças prescritos no contorno forem nulos, o sistema (4.27) fica:

$$\begin{matrix} H & U & = & 0 \\ \sim & \sim & & \sim \end{matrix} \quad (4.32)$$

Este sistema admite soluções não triviais correspondentes aos deslocamentos de corpo rígido na direção vertical (x_3) e à rotação em torno de um eixo arbitrário. Impondo-se um deslocamento de corpo rígido na direção vertical, w_0 , tem-se:

$$\begin{aligned} U(2k-1) &= w_0 \\ U(2k) &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Pode-se então escrever:

$$\sum_{k=1}^{NNC} H_{i,2k-1} = 0$$

onde NNC é o número de nós de contorno.

Considerando-se agora uma pequena rotação de corpo rígido α , em relação a um eixo qualquer contido no plano da superfície média da placa, tem-se para um nó k , qualquer do contorno:

$$\begin{aligned} U(2k-1) &= \alpha r_k \\ U(2k) &= \alpha \cos\beta_k \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde α é dado em radianos, r_k é a distância do ponto k ao eixo arbitrário considerado e β_k é o ângulo formado entre a normal ao eixo passando pelo ponto k e a normal ao contorno no ponto k . Levando-se os deslocamentos nodais (4.34) na equação (4.32), obtem-se para uma linha genérica i da matriz H :

$$\sum_{k=1}^{NNC} (H_{i,2k-1} r_k + H_{i,2k} \cos\beta_k) = 0 \quad (4.35)$$

4.2.3- Deslocamentos nos Pontos Internos

Uma vez determinados os valores incógnitos no contorno, através da solução de sistema de equações (4.31), os valores de deslocamentos nos pontos internos podem ser calculados diretamente por meio de (3.2) e (3.3). Para tanto, discretizam-se as referidas expressões de maneira análoga àquela utilizada para se escrever o sistema de equações (4.31). Deve-se notar que a avaliação de deslocamentos é feita apenas em pontos onde o seu conhecimento seja de interesse para a análise. Aplicando-se as expressões (3.2) e (3.3) discretizadas obtém-se:

$$\underset{\sim}{w}(s) + \underset{\sim}{H}' \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G}' \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{B}' \quad (4.36)$$

onde

- $\underset{\sim}{w}(s)$: é o vetor de deslocamentos nos pontos internos;
- $\underset{\sim}{H}'$: matriz dos coeficientes de influência dos valores de deslocamentos no contorno;
- $\underset{\sim}{G}'$: matriz dos coeficientes de influência dos valores de forças de superfície;
- $\underset{\sim}{B}'$: vetor que contém a influência do carregamento de domínio sobre os deslocamentos no ponto s , obtido pela integração sobre a região carregada Ω_q .

O vetor $\underset{\sim}{w}(s)$ contém em geral três componentes para cada ponto interno, ou seja o deslocamento transversal w , e duas derivadas direcionais $w_{,x}$ e $w_{,y}$, aqui definidas nas direções dos eixos globais de referência x e y . O cálculo dos coeficientes das matrizes $\underset{\sim}{H}'$ e $\underset{\sim}{G}'$ é realizado de maneira análoga ao das matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$ podendo, neste caso, efetuarem-se sempre integrações numéricas.

4.2.4- Esforços nos Pontos Internos

As representações integrais dos momentos fletores e momentos de torção são obtidas a partir da relação esforço-deslocamento (2.28), e dos esforços cortantes a partir de (2.29). Para isto, a representação integral $w(s)$, (3.2), é convenientemente derivada em relação às coordenadas do ponto fonte s . As derivadas apropriadas são substituídas nas referidas relações, obtendo-se então:

$$\begin{aligned}
 M_{ij}(s) = & - \int_{\Gamma} \left[V_{nij}^*(s, T) w(T) - M_{nij}^*(s, T) w_{,n}(T) \right] d\Gamma(T) + \\
 & - \sum_{k=1}^{NC} R_{kij}^*(s, T) w_k(T) + \int_{\Gamma} \left[w_{ij}^*(s, T) V_n(T) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial w_{ij}^*(s, T)}{\partial n} M_n(T) \right] d\Gamma(T) + \sum_{k=1}^{NC} w_{kij}^*(s, T) R_k(T) + \\
 & + \int_{\Omega_q} w_{ij}^*(s, t) q(t) d\Omega(t) \tag{4.37}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{\alpha}(s) = & - \int_{\Gamma} \left[V_{n\alpha}^*(s, T) w(T) - M_{n\alpha}^*(s, T) w_{,n}(T) \right] d\Gamma(T) + \\
 & - \sum_{k=1}^{NC} R_{k\alpha}^*(s, T) w_k(T) + \int_{\Gamma} \left[w_{\alpha}^*(s, T) V_n(T) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial w_{\alpha}^*(s, T)}{\partial n} M_n(T) \right] d\Gamma(T) + \sum_{k=1}^{NC} w_{k\alpha}^*(s, T) R_k(T) + \\
 & + \int_{\Omega_q} w_{\alpha}^*(s, t) q(t) d\Omega(t) \tag{4.38}
 \end{aligned}$$

As soluções fundamentais envolvidas nas expressões (4.37) e (4.38) são apresentadas por SILVA [62].

Considerando-se a discretização adotada para o cálculo dos valores de contorno na seção (4.2.1), as representações integrais dos esforços nos pontos internos podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 M_{ij}(s) = & - \sum_{k=1}^{NE} \int_{\Gamma_k} |J| \left[V_{nij}^*(s, T) - M_{nij}^*(s, T) \right] \psi^T d\xi \underset{\sim}{U}_k + \\
 & - \sum_{k=1}^{NC} R_{kij}^*(s, T) w_k(T) + \sum_{k=1}^{NE} \int_{\Gamma_k} |J| \left[w_{ij}^*(s, T) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial w_{ij}^*(s, T)}{\partial n} \right] \psi^T d\xi \underset{\sim}{P}_k + \sum_{k=1}^{NC} w_{kij}^*(s, T) R_k(T) + \\
 & + \int_{\Omega_q} w_{ij}^*(s, t) q(t) d\Omega(t) \tag{4.39}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{\alpha}(s) = & - \sum_{k=1}^{NE} \int_{\Gamma} |J| \left[V_{n\alpha}^*(s, T) - M_{n\alpha}^*(s, T) \right] \psi^T d\xi \underset{\sim}{U}_k + \\
 & - \sum_{k=1}^{NC} R_{k\alpha}^*(s, T) w_k(T) + \sum_{k=1}^{NE} |J| \left[w_{\alpha}^*(s, T) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial w_{\alpha}^*(s, T)}{\partial n} \right] \psi^T d\xi \underset{\sim}{P}_k + \sum_{k=1}^{NC} w_{ki}^*(s, T) R_k(T) + \\
 & + \int_{\Omega_q} w_{\alpha}^*(s, t) q(t) d\Omega(t) \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

Escrevendo-se as expressões (4.39) e (4.40) para todos pontos internos, onde haja interesse na determinação dos esforços, obtém-se:

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{H} \underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{B} \quad (4.41)$$

onde:

$$\underset{\sim}{M}^T = \left\{ \underset{\sim}{M}_1 \quad \underset{\sim}{M}_2 \quad \dots \quad \underset{\sim}{M}_i \quad \dots \quad \underset{\sim}{M}_{NIP} \right\} \quad (4.42)$$

$$\underset{\sim}{M}_i^T = \left\{ \underset{\sim}{M}_{x_1 x_1}^i \quad \underset{\sim}{M}_{x_1 x_2}^i \quad \underset{\sim}{M}_{x_2 x_2}^i \quad \underset{\sim}{Q}_{x_1}^i \quad \underset{\sim}{Q}_{x_2}^i \right\} \quad (4.43)$$

sendo:

$\underset{\sim}{U}$ e $\underset{\sim}{P}$: vetores contendo, respectivamente, os valores nodais de deslocamentos e forças, de superfície.

$\underset{\sim}{H}$: matriz análoga à matriz $\underset{\sim}{H}$, contendo os coeficientes de influência dos valores de deslocamentos no contorno sobre os esforços nos pontos internos;

$\underset{\sim}{G}$: matriz análoga à matriz $\underset{\sim}{G}$, contendo os coeficientes de influência das forças de superfície, sobre os esforços nos pontos internos;

$\underset{\sim}{B}$: vetor resultante das integrais de domínio devidas ao carregamento distribuído q na região Ω_q .

As matrizes $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{G}$ são geradas de forma análoga às matrizes H e G , sendo que neste caso para cada ponto interno são geradas cinco linhas, três referentes aos momentos e duas referentes às forças cortantes.

4.3. ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS ATRAVÉS DA TEORIA DE REISSNER

4.3.1- Discretização das Equações de Contorno

Na formulação integral utilizando as hipóteses de Reissner, os deslocamentos num ponto S situado sobre o contorno estão relacionados a todos deslocamentos e forças no contorno Γ , através da equação (3.25). Estes deslocamentos são também afetados pelos carregamentos de domínio e pelo campo de momentos iniciais aplicados.

Para a discretização da equação (3.25) utiliza-se um procedimento análogo àquele utilizado na discretização das equações integrais da Teoria Clássica de Kirchhoff. O contorno real da placa, Γ , é aproximado por uma série de elementos de contorno retos. A geometria destes elementos é definida por dois pontos (nós) situados sobre o contorno real (Figura 4.8). Com o intuito de facilitar a integração numérica, as coordenadas de cada ponto do elemento são parametrizadas em função das coordenadas dos nós extremos, através de coordenadas locais homogêneas ξ (Fig.4.9).

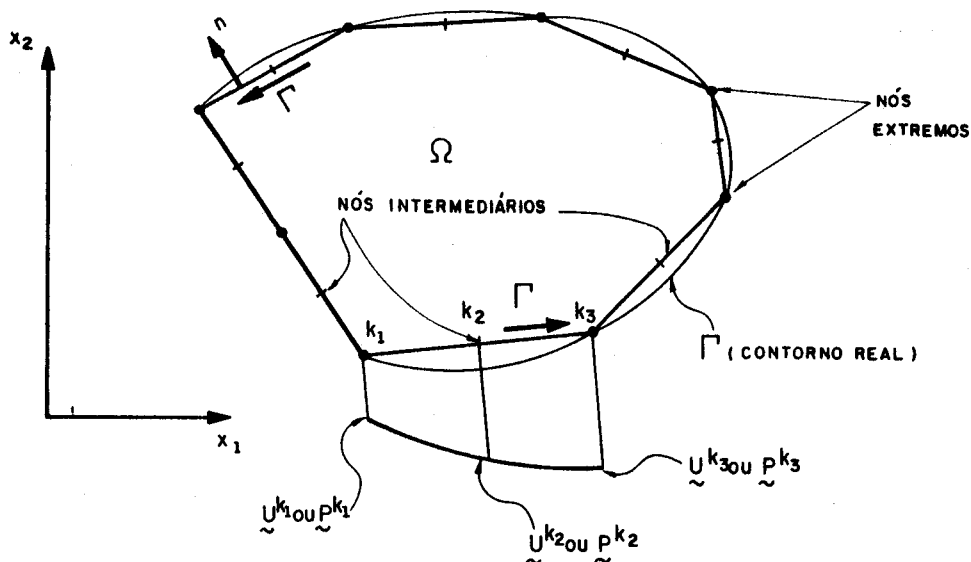


Fig.4.8- Discretização do Contorno.

Assim, para um ponto genérico \underline{m} sobre o elemento Γ_j tem-se:

$$\underline{\tilde{x}}^m = \underline{\tilde{\psi}}^T(\underline{\xi}) \underline{x}^{(N)} \quad (4.44)$$

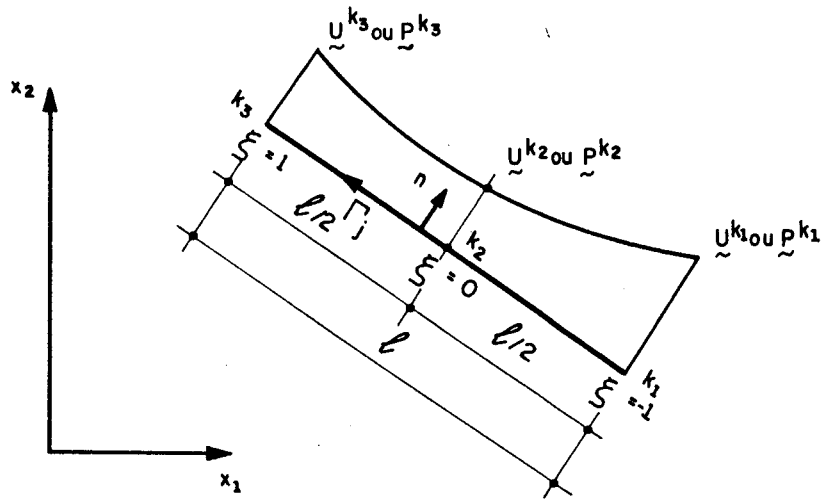


Fig. 4.9- Elemento de Contorno Γ_j e Aproximação das Variáveis no Contorno.

sendo:

$$\underline{\tilde{U}}^{k1} = \begin{Bmatrix} U_1^{k1} \\ U_2^{k1} \\ U_3^{k1} \end{Bmatrix} \quad \underline{\tilde{p}}^{k1} = \begin{Bmatrix} p_1^{k1} \\ p_2^{k1} \\ p_3^{k1} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{x}}^m = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \underline{\tilde{x}}^{(N)} = \begin{Bmatrix} x_1^{k1} \\ x_1^{k3} \\ x_2^{k1} \\ x_2^{k3} \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

e a matriz de funções aproximadoras $\underline{\tilde{\psi}}^T$ dada por (4.3), (4.5) e (4.6).

Os valores de deslocamentos e forças de superfície são aproximados sobre os elementos por funções de interpolação quadráticas, em função dos respectivos valores nodais nas extremidades (k_1 e k_3) e no nó intermediário (k_2) (Figura 4.9). Assim, para um ponto m , qualquer, sobre Γ_j , tem-se:

$$\underset{\sim}{u}^m = \underset{\sim}{\psi}_O^T(\xi) \underset{\sim}{U}^{(N)} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{k1} \\ U_2^{k1} \\ U_3^{k1} \\ U_1^{k2} \\ U_2^{k2} \\ U_3^{k2} \\ U_1^{k3} \\ U_2^{k3} \\ U_3^{k3} \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

$$\underset{\sim}{p}^m = \underset{\sim}{\psi}_O^T(\xi) \underset{\sim}{P}^{(N)} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^{k1} \\ P_2^{k1} \\ P_3^{k1} \\ P_1^{k2} \\ P_2^{k2} \\ P_3^{k2} \\ P_1^{k3} \\ P_2^{k3} \\ P_3^{k3} \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \\ \psi_2 &= (1 - \xi)(1 + \xi) \\ \psi_3 &= \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Os vetores de deslocamentos e forças nodais de superfície contêm, respectivamente, em cada ponto:

$$\underset{\sim}{U}^k = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_s \\ w \end{Bmatrix} \quad \underset{\sim}{P}^k = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_n \\ M_{ns} \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

onde:

ϕ_n e ϕ_s : são as rotações nos planos normal x_3n e tangencial x_3s , respectivamente, para pontos do contorno;

w : deslocamentos transversal na direção x_3 ;

M_n e M_{ns} : momentos nos planos x_3n e x_3s , respectivamente, para pontos do contorno;

Q_n : força transversal na direção x_3 .

A partir da discretização do contorno e da mudança de variável Γ para ξ , a equação (3.25) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} c_{ik}(s) u_k(s) &= \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^1 |J| u_{ik}^* \psi_{ok}^T d\xi \underset{\sim}{P}^{(N)} + \\ & - \sum_{k=1}^{NE} \int_{-1}^1 |J| p_{ik}^* \psi_{ok}^T d\xi \underset{\sim}{U}^{(N)} + \int_{\Omega_q} q(t) [u_{i3}^*(s,t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(S,t) \Big] d\Omega(t) + \int_{\Omega} u_{i\alpha,\beta}^*(S,t) M_{\alpha\beta}^0(t) d\Omega(t) + \\
& \int_{\Omega_m} u_{i\alpha}^*(S,t) m_{\alpha}(t) d\Omega(t) \tag{4.50}
\end{aligned}$$

sendo:

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{\ell_j}{2}$$

As características das integrais em ξ , indicadas na equação (4.50) permitem que as mesmas sejam efetuadas numericamente, já que este procedimento é simples e eficiente para o tratamento computacional do método. Assim, as integrais do tipo:

$$\int_{-1}^1 |J| u_{ik}^*(S,T) \psi_{ok}^T(T) d\xi(T) \tag{4.51}$$

e

$$\int_{-1}^1 |J| p_{ik}^*(S,T) \psi_{ok}^T(T) d\xi(T) \tag{4.52}$$

proporcionam a contribuição de cada elemento, para a formação das matrizes G e H, respectivamente, quando são escritas as equações integrais para todos os pontos nodais do contorno. A partir de (4.51) e (4.52) pode-se ainda escrever:

$$g_{ik}^n(S) = \int_{-1}^1 |J| u_{ik}^*(S,T) \psi_n(T) d\xi(T) \tag{4.53}$$

$$h_{ik}^n(S) = \int_{-1}^1 |J| p_{ik}^*(S, T) \psi_n(T) d\xi(T) \quad (4.54)$$

onde:

u_{ik}^* e p_{ik}^* - são, respectivamente, as soluções fundamentais generalizadas em deslocamento e forças de superfície dados por (2.90) e (3.30);

n - representa o nó local do elemento onde é medida a resposta ao carregamento unitário aplicado. Para $n=1$, o ponto T coincide com o nó local k_1 , para $n=2$ o ponto T coincide com o nó local k_2 e $n=3$ para T coincidente com o nó local k_3 (Figura 4.9). Deve-se notar que quando o ponto T for nó de extremidade (k_1 ou k_3), pertencendo a dois elementos distintos, o coeficiente que está sendo gerado recebe a contribuição das integrações sobre os dois elementos adjacentes a T ;

S - nó singular, isto é, o ponto onde é aplicada a carga unitária, ou ponto para o qual se escrevem as equações;

i - indica qual a equação que está sendo gerada para o ponto S . Se $i=1$ obtém-se a equação de ϕ_n , se $i=2$ a equação ϕ_s , se $i=3$ a equação de w . Por outro lado, i indica a direção generalizada da carga unitária em S , isto é, $i=1$ tem-se momento unitário na direção n , $i=2$ momento unitário na direção s , $i=3$ força unitária na direção x_3 .

k - indica a natureza da resposta medida em T . Se $k=1$, a resposta fundamental refere-se ao momento M_n^* ou ao giro correspondente na direção normal ϕ_n^* ; $i=2$, a resposta fundamental refere-se a momento tangencial M_{ns}^* ou ao giro tangencial correspondente ϕ_s^* ; $i=3$, a

resposta refere-se a força fundamental Q_n^* ou ao deslocamento transversal correspondente w^* .

Endereçando-se e acumulando-se convenientemente os coeficientes $g_{ik}^n(S)$ e $h_{ik}^n(S)$, formam-se as respectivas matrizes G e H do problema em questão.

Com a discretização do contorno e a aproximação das variáveis sobre os elementos, as equações integrais são transformadas em um sistema com $3(NNC)$ equações e $3(NNC)$ incógnitas expresso por:

$$\begin{matrix} C & U & + & \hat{H} & U & = & G & P & + & B & + & E & M^O \\ \sim & \sim & & \sim & \sim & & \sim & \sim & & \sim & & \sim & \sim \end{matrix} \quad (4.55)$$

sendo NNC o número de nós do contorno.

A matriz C depende apenas da geometria do contorno em cada ponto fonte considerado, conforme mostrado na seção (3.3.2) e pode ser incorporada à matriz \hat{H} resultando:

$$\begin{matrix} H & U & = & G & P & + & B & + & E & M^O \\ \sim & \sim & & \sim & \sim & & \sim & & \sim & \sim \end{matrix} \quad (4.56)$$

Neste trabalho adotam-se pontos fonte fora do domínio, conforme mostrado em (4.2.1), portanto:

$$\begin{matrix} C & = & 0 \\ \sim & & \sim \end{matrix} \quad (4.57)$$

O vetor B contém a influência de todo carregamento de domínio exceto os momentos iniciais M^O . Os detalhes referentes a avaliação de B são apresentados na seção (4.3.2). A matriz E considera a influência do campo de momentos iniciais M^O sobre os valores das incógnitas do contorno, e os detalhes de sua determinação são apresentados na seção (4.3.5).

As descontinuidades no contorno decorrentes da presença de pontos angulosos, variação de vinculação e de forças prescritas são simuladas neste trabalho através da colocação de nós duplos, analogamente ao que foi feito para as equações da Teoria Clássica de Kirchhoff na seção (4.2.1).

A geração dos coeficientes $g_{ik}^n(s)$ e $h_{ik}^n(s)$ é feita utilizando-se um esquema de integração numérica através de Quadratura de Gauss aplicada às expressões (4.53) e (4.54), respectivamente. A colocação de pontos fonte fora do domínio evita o aparecimento de singularidades que ocorreriam quando o ponto fonte estivesse situado sobre o elemento de contorno em consideração. Os pontos fonte são posicionados a uma distância d , definida por (4.28), sobre a normal ao nó do contorno, conforme mostrado na Figura 4.10.

Para o nó intermediário k_2 de um elemento de contorno genérico, o comprimento médio l_m adotado é o comprimento do próprio elemento que o contém. (Figura 4.10).

4.3.2- Carregamentos de Domínio

O cálculo da contribuição da carga distribuída uniforme, q , para os valores das incógnitas de contorno é efetuado integrando-se a expressão (3.40) no contorno Γ_q , da região carregada Ω_q , tendo em vista as soluções fundamentais (3.42). Para isto, o contorno da região carregada é discretizado em NEC elementos retos de contorno sobre os quais a carga q é admitida constante. (Figura 4.10)

A influência da carga q na representação integral dos deslocamentos é obtida integrando-se todos os elementos de contorno de carga em relação a cada ponto fonte, S . Como os pontos fonte estão localizados fora do domínio, evita-se a singularidade logarítmica que ocorreria nas expressões fundamentais (3.42), caso o contorno da região carregada coincidisse com o contorno da placa. A integração é efetuada numericamente através de Quadratura de Gauss.

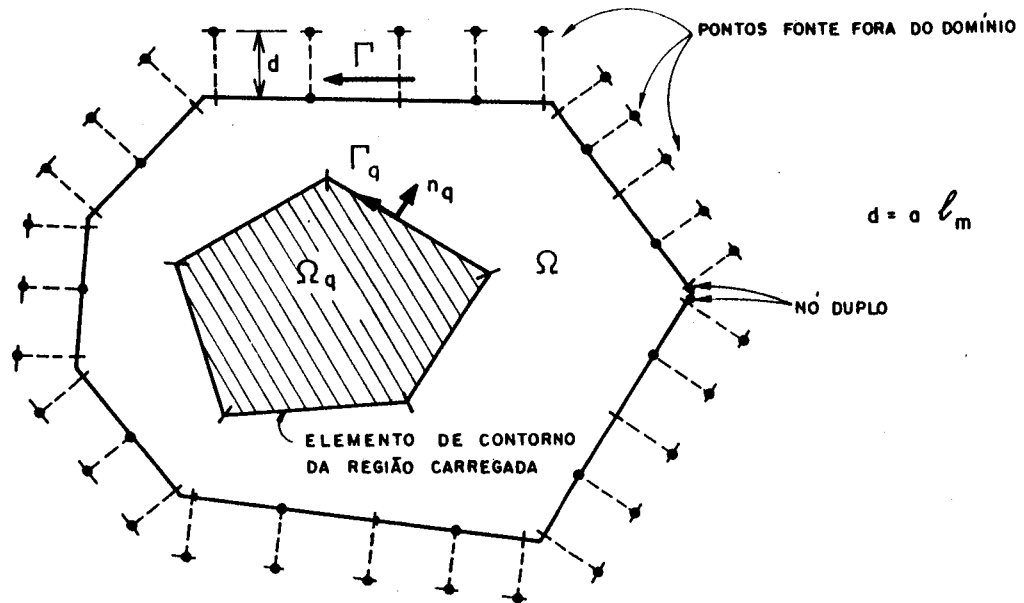


Fig. 4.10- Placa com Contorno Discretizado e Região Carregada Ω_q e Posição dos Nós Singulares.

No caso de carga distribuída em linha, a influência sobre os valores de contorno é dada pela integral (3.49), que é efetuada numericamente. Para isto, o contorno da linha de carga é dividido em elementos retos, admitindo-se que a carga \bar{q} varie na forma de parábola do segundo grau sobre cada elemento. Assim, o valor de $\bar{q}(t)$ em um ponto qualquer do elemento é dado por:

$$\bar{q}(t) = \psi_2^T \bar{q}^{(N)} = [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3] \begin{Bmatrix} \frac{-k_1}{q} \\ \frac{-k_2}{q} \\ \frac{-k_3}{q} \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

sendo, ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 dadas por (4.48), $\bar{q}^{(N)}$, o vetor que contém os valores nodais da carga distribuída em linha; k_1 , k_2 e k_3 os pontos nodais do elemento. A expressão (3.49)

pode, então, ser reescrita como:

$$I_i = \sum_{j=1}^{NEC} \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 \left[u_{i3}^*(s,t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(s,t) \right] \psi_2^T d\xi \bar{q}^{(N)} \quad (4.59)$$

Integrando-se numericamente a influência de todos os elementos da linha de carga para cada ponto do contorno e multiplicando-se pelo vetor correspondente $\bar{q}^{(N)}$ obtém-se a contribuição da linha de carga \bar{q} , para cada equação algébrica. Esta contribuição é convenientemente endereçada e armazenada no vetor B.

A contribuição dos momentos distribuídos em linha, no cálculo das incógnitas de contorno, é avaliada de forma análoga à da carga distribuída em linha. Esta contribuição é expressa por (3.60). Dividindo-se a linha de distribuição em elementos retos e admitindo-se variação parabólica de \bar{m}_α sobre cada elemento, tem-se:

$$\bar{m}_\alpha = \begin{Bmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \end{Bmatrix} = \psi_3^T \bar{m}^{(N)} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -k1 \\ \bar{m}_1 \\ -k1 \\ \bar{m}_2 \\ -k2 \\ \bar{m}_1 \\ -k2 \\ \bar{m}_2 \\ -k3 \\ \bar{m}_1 \\ -k3 \\ \bar{m}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

onde, ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 são funções aproximadoras dadas por (4.48), $\bar{m}^{(N)}$ é o vetor de valores nodais, k_1 , k_2 e k_3 os pontos nodais do elemento de linha. Com base na discretização da linha de momentos e na aproximação (4.60), pode-se escrever a expressão (3.60) como:

$$I_i = \sum_{j=1}^{NEC} \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 u_{i\alpha}^* \psi_3^T d\xi \bar{m}_\alpha^{(N)} \quad (4.61)$$

Integrando-se numericamente, a influência de cada elemento para cada ponto de contorno e multiplicando-se pelo vetor de momentos nodais correspondente $\bar{m}_\alpha^{(N)}$, obtém-se a contribuição da linha de momentos \bar{m}_α na respectiva equação. A contribuição de cada ponto do contorno é convenientemente endereçada e armazenada no vetor B da equação (4.56).

4.3.3- Deslocamentos nos Pontos Internos

O cálculo dos deslocamentos em pontos internos é feito, diretamente, a partir da determinação dos valores incógnitos no contorno, discretizando-se a equação (3.19), de maneira análoga àquela utilizada na discretização da equação (3.25). Procedendo-se desta forma, obtém-se para cada ponto \underline{s} , interno ao domínio Ω , onde haja interesse na determinação de deslocamentos, a equação:

$$\begin{aligned} u_i(s) = & \sum_{j=1}^{NE} \int_{-1}^1 |J| u_{ik}^*(s, T) \psi_{ok}^T(T) d\xi(T) \bar{p}^{(N)} + \\ & - \sum_{j=1}^{NE} \int_{-1}^1 |J| p_{ik}^*(s, T) \psi_{ok}(T) d\xi(T) \bar{U}^{(N)} + \\ & + \int_{\Omega_q} q(t) \left[u_{i3}^*(s, t) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(s, t) \right] d\Omega_q(t) + \\ & + \int_{\Omega} u_{i\alpha, \beta}^*(s, t) M_{\alpha\beta}^0(t) d\Omega(t) + \int_{\Omega_m} u_{i\alpha}^*(s, t) m_\alpha(t) d\Omega_m(t) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Escrevendo-se a equação (4.62) para todos os NPI pontos internos de interesse, obtém-se:

$$\bar{U} = \bar{G} P - \bar{H} U + \bar{B} + \bar{E} M^0 \quad (4.63)$$

onde, \bar{U} é o vetor de deslocamentos nos pontos internos. Os coeficientes das matrizes \bar{G} e \bar{H} são obtidos de maneira análoga àquela utilizada para cálculo dos coeficientes das matrizes G e H referentes aos pontos do contorno. O vetor \bar{B} contém as influências dos carregamentos de domínio, exceto M^0 , nos valores dos deslocamentos nos pontos internos, e sua avaliação é análoga àquela utilizada para o cálculo de B na seção (4.3.2). A matriz \bar{E} exprime a influência dos momentos iniciais nos deslocamentos dos pontos internos e seu cálculo é detalhado na seção (4.3.5).

As componentes de deslocamento nos pontos internos são calculadas em relação ao sistema de referência global $x_1 x_2 x_3$, ficando o vetor \bar{U}^T organizado da seguinte maneira:

$$\bar{U}^T = \left\{ \phi_{x1}^1 \quad \phi_{x2}^1 \quad w^1 \quad \dots \quad \phi_{x1}^k \quad \phi_{x2}^k \quad w^k \quad \dots \quad \phi_{x1}^{NPI} \quad \phi_{x2}^{NPI} \quad w^{NPI} \right\}$$

Assim o vetor U é composto de subvetores com três elementos, cujos dois primeiros valores são as rotações e o terceiro o deslocamento transversal, tendo a seguinte forma:

$$\left\{ \phi_{x1}^k \quad \phi_{x2}^k \quad w^k \right\}^T$$

4.3.4- Esforços nos Pontos Internos

O cálculo dos momentos e forças cortantes nos pontos internos é feito com base nas equações (3.33) e (3.34), discretizadas de acordo com as aproximações adotadas na seção (4.3.1). Assim, para um ponto interno \underline{s} , onde haja interesse na determinação dos esforços, tem-se:

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta}(\underline{s}) = & \sum_{j=1}^{NE} \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 u_{\alpha\beta k}^*(\underline{s}, T) \psi_{ok}^T(t) d\xi \underline{P}^{(N)} + \\
 & - \sum_{j=1}^{NE} \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 p_{\alpha\beta k}^*(\underline{s}, T) \psi_{ok}^T(T) d\xi \underline{U}^{(N)} + \int_{\Gamma_q} w_{\alpha\beta}^*(\underline{s}, t) q(t) d\Gamma_q(t) + \\
 & + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{\alpha\beta} + \int_{\bar{\Gamma}_q} r_{\alpha\beta}^*(\underline{s}, t) \bar{q}(t) d\bar{\Gamma}_q(t) + \\
 & + \int_{\Gamma_m} t_{\alpha\beta\gamma}^*(\underline{s}, t) \bar{m}_\gamma(t) d\Gamma_m(t) + \int_{\Omega} e_{\alpha\beta\gamma\theta}^*(\underline{s}, t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) + \\
 & + g_{\alpha\beta\gamma\theta}^*(\underline{s}) M_{\gamma\theta}^0(\underline{s}) - M_{\alpha\beta}^0(\underline{s}) \tag{4.64}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{3\beta}(\underline{s}) = & \sum_{j=1}^{NE} \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 u_{3\beta k}^*(\underline{s}, T) \psi_{ok}^T(T) d\xi \underline{P}^{(N)} + \\
 & - \sum_{j=1}^{NE} \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 p_{3\beta k}^*(\underline{s}, T) \psi_{ok}^T(T) d\xi \underline{U}^{(N)} + \int_{\Gamma_q} w_{3\beta}^*(\underline{s}, t) q(t) d\Gamma_q(t) + \\
 & + \int_{\bar{\Gamma}_q} r_{3\beta}^*(\underline{s}, t) \bar{q}(t) d\bar{\Gamma}_q(t) + \int_{\Gamma_m} t_{3\beta\gamma}^*(\underline{s}, t) \bar{m}_\gamma(t) d\Gamma_m(t) + \\
 & + \int_{\Omega} e_{3\beta\gamma\theta}^*(\underline{s}, t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t) \tag{4.65}
 \end{aligned}$$

As duas primeiras integrais dos segundos membros de (4.64) e (4.65) representam a influência dos valores de contorno sobre os momentos e os esforços cortantes no ponto fonte \underline{s} , respectivamente. Estas integrais são calculadas, numericamente, através de quadratura de Gauss. Analogamente ao que foi feito para o cálculo das incógnitas de contorno, podem ser definidos aqui coeficientes de influência como se segue:

$$g'_{\alpha\beta k}{}^n(s) = \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 u_{\alpha\beta k}^*(s, T) \psi_n(T) d\xi(T) \quad (4.66)$$

$$h'_{\alpha\beta k}{}^n(s) = \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 p_{\alpha\beta k}^*(s, T) \psi_n(T) d\xi(T) \quad (4.67)$$

para os momentos, e:

$$g''_{3\beta k}{}^n(s) = \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 u_{3\beta k}^*(s, T) \psi_n(T) d\xi(T) \quad (4.68)$$

$$h''_{3\beta k}{}^n(s) = \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 p_{3\beta k}^*(s, T) \psi_n(T) d\xi(T) \quad (4.69)$$

para os esforços cortantes.

Escrevendo-se as equações (4.64) e (4.65) para todos os NPI pontos internos de interesse, os coeficientes $g'_{\alpha\beta k}{}^n$ e $h'_{\alpha\beta k}{}^n$ são calculados e endereçados de maneira adequada para formar, respectivamente as matrizes G' e H' . Os coeficientes $g''_{\alpha\beta k}{}^n$ e $h''_{3\beta k}{}^n$ referentes aos esforços cortantes são calculados e endereçados para a formação das respectivas matrizes G'' e H'' .

Após a discretização, as equações (4.64) e (4.65) podem ser, então, escritas em forma matricial:

$$\tilde{M} = \tilde{G}'\tilde{P} - \tilde{H}'\tilde{U} + \tilde{B}' + (\tilde{E}' - \tilde{I})\tilde{M}^0 \quad (4.70)$$

$$\tilde{Q} = \tilde{G}''\tilde{P} - \tilde{H}''\tilde{U} + \tilde{B}'' + \tilde{E}''\tilde{M}^0 \quad (4.71)$$

onde:

\tilde{P} e \tilde{U} - são os vetores de valores nodais de forças de superfície e deslocamentos, respectivamente;

\tilde{B}' e \tilde{B}'' - são os vetores de influência do carregamento de domínio, exceto \tilde{M}^0 , sobre os momentos e esforços cortantes, respectivamente;

\tilde{I} - é a matriz identidade;

\tilde{E}' e \tilde{E}'' - são as matrizes que exprimem a influência dos momentos iniciais sobre os momentos e os esforços cortantes, respectivamente,

\tilde{M}^0 - o vetor de momentos iniciais.

As matrizes \tilde{H}' e \tilde{G}' têm $3(NPI)$ linhas e $3(NNC)$ colunas, os vetores \tilde{U} e \tilde{P} - $3(NNC)$ elementos, o vetor \tilde{B}' - $3(NPI)$ elementos, a matriz \tilde{E}' - $3(NPI)$ linhas e $3(NNT)$ colunas, onde NNT é o número total de nós, isto é,

$$NNT = NNC + NPI$$

O tensor momento $M_{\alpha\beta}$ é representado vetorialmente, como:

$$\tilde{M}^T = \left\{ \tilde{M}_{11}^1 \quad \tilde{M}_{12}^1 \quad \tilde{M}_{22}^1 \quad \dots \quad \tilde{M}_{11}^k \quad \tilde{M}_{12}^k \quad \tilde{M}_{22}^k \quad \dots \quad \tilde{M}_{11}^{NPI} \quad \tilde{M}_{12}^{NPI} \quad \tilde{M}_2^{NPI} \right\} \quad (4.72a)$$

analogamente, os momentos iniciais ficam:

$$\tilde{M}^O = \left\{ \begin{array}{ccccccc} M_{11}^O & M_{12}^O & M_{22}^O & \dots & M_{11}^O & M_{12}^O & M_{22}^O \dots \\ M_{11}^O & M_{12}^O & M_{22}^O & \dots & M_{11}^O & M_{12}^O & M_{22}^O \dots \\ M_{11}^O & M_{12}^O & M_{22}^O & \dots & M_{11}^O & M_{12}^O & M_{22}^O \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{11}^O & M_{12}^O & M_{22}^O & \dots & M_{11}^O & M_{12}^O & M_{22}^O \dots \\ M_{11}^O & M_{12}^O & M_{22}^O & \dots & M_{11}^O & M_{12}^O & M_{22}^O \dots \\ M_{11}^O & M_{12}^O & M_{22}^O & \dots & M_{11}^O & M_{12}^O & M_{22}^O \dots \end{array} \right\} \quad (4.72b)$$

O cálculo das matrizes E' e E'' é apresentado com maiores detalhes na seção (4.3.5).

O cálculo das contribuições B' e B'' referentes aos carregamentos de domínio, exceto M^O , é feito de forma análoga àquela utilizada no cálculo das incógnitas de contorno.

A influência da carga distribuída na área, Ω_q , é calculada discretizando-se o contorno da área carregada em elementos constantes e integrando-se numericamente, cada elemento em relação a cada ponto interno. Esta contribuição é endereçada e armazenada no vetor B' , no caso de momentos, e no vetor B'' , no caso de esforços cortantes. Os tensores fundamentais $w_{\alpha\beta}^*$ e $w_{3\beta}^*$ relativos à contribuição da carga q são dados por (3.46). Essa contribuição para o ponto fonte s , já na forma discretizada, é expressa por:

$$b'_i(s) = \sum_{j=1}^{NEC} \frac{\ell_j}{2} q \int_{-1}^1 w_{\alpha\beta}^*(s, T) d\xi, \quad (4.74)$$

para os momentos, e:

$$b''_{\beta} = \sum_{j=1}^{NEC} \frac{\ell_j}{2} q \int_{-1}^1 w_{3\beta}^*(s, T) d\xi, \quad (4.75)$$

para os esforços cortantes, sendo NEC o número de elementos de contorno da região carregada. Os vetores b'_i e b''_{β} de cada ponto interno, são endereçados e armazenados em

B' e B'', respectivamente.

~
 A contribuição da linha de carga distribuída \bar{q} é integrada ao longo de seu contorno $\bar{\Gamma}_q$, considerando-se a mesma discretização, adotada anteriormente na seção (4.3.2). Assim, a influência da linha de carga \bar{q} sobre os esforços em um ponto fonte s, pode ser expressa como:

$$b'_i(s) = \sum_{j=1}^{NEC} \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 r_{\alpha\beta}^*(s,t) \psi_2^T(t) d\xi \bar{q}^{(N)},$$

(para os momentos) (4.76)

$$b''_\beta = \sum_{j=1}^{NEC} \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 r_{3\beta}^*(s,t) \psi_2^T(t) d\xi(t) \bar{q}^{(N)},$$

(para os esforços cortantes) (4.77)

Os vetores b'_i e b''_β de cada ponto interno, são também endereçados e armazenados respectivamente em B' e B''. Os tensores fundamentais $r_{\alpha\beta}^*$ e $r_{3\beta}^*$ envolvidos são dados por (3.38).

Analogamente, considerando-se a discretização adotada na seção (4.3.2), a contribuição da linha de momentos \bar{m}_α para esforços no ponto fonte s, pode ser expressa por:

$$b'_i(s) = \sum_{j=1}^{NEC} \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 t_{\alpha\beta\gamma}^*(s,t) \psi_3^T d\xi \bar{m}_\gamma^{(N)}$$

(4.78)

no caso dos momentos, e:

$$b''_\beta(s) = \sum_{j=1}^{NEC} \frac{\ell_j}{2} \int_{-1}^1 t_{3\beta\gamma}^*(s,t) \psi_3^T d\xi \bar{m}_\gamma^{(N)}$$

(4.79)

no caso das forças cortantes. Os vetores b'_i e b''_β , de cada

ponto interno, também são endereçados e armazenados em B' e B'' , respectivamente. Os tensores fundamentais $t_{\alpha\beta\gamma}^*$ e $\tilde{t}_{3\beta\gamma}^*$ são expressos por (3.39).

4.3.5- Influência dos Momentos Iniciais

A formulação apresentada para as equações integrais da Teoria de Reissner considera a possibilidade de ocorrência de um campo de momentos iniciais $M_{\alpha\beta}^0$, atuando no domínio da placa, o que possibilita a modelagem de efeitos de gradiente de temperatura ao longo da espessura, efeito de retração, e também a análise de problemas não-lineares.

O campo de momentos iniciais $M_{\alpha\beta}^0$, em geral, é conhecido apenas em alguns pontos discretos, tornando-se então necessária a divisão do domínio em subdomínios menores, sobre os quais admite-se uma certa variação para $M_{\alpha\beta}^0$.

Neste trabalho, o domínio da placa é dividido em células triangulares, considerando-se variação linear de $M_{\alpha\beta}^0$ sobre as mesmas. Cada célula é definida pelos vértices k_1, k_2, k_3 , nos quais são conhecidos os valores das componentes de $M_{\alpha\beta}^0$, conforme Figura 4.11.

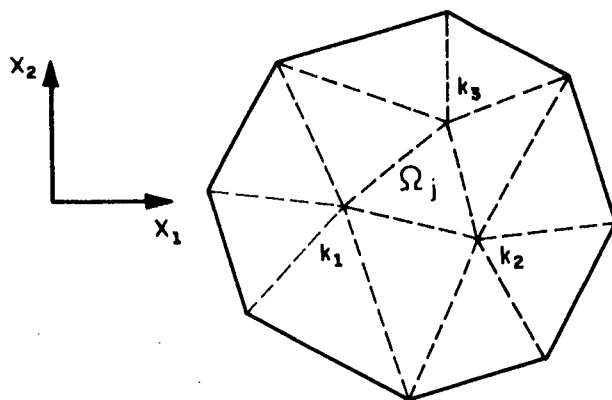


Fig. 4.11- Divisão do Domínio em Células Triangulares

Uma célula genérica, Ω_j , com variação linear de $M_{\alpha\beta}^0$ é apresentada na Figura 4.12.a.

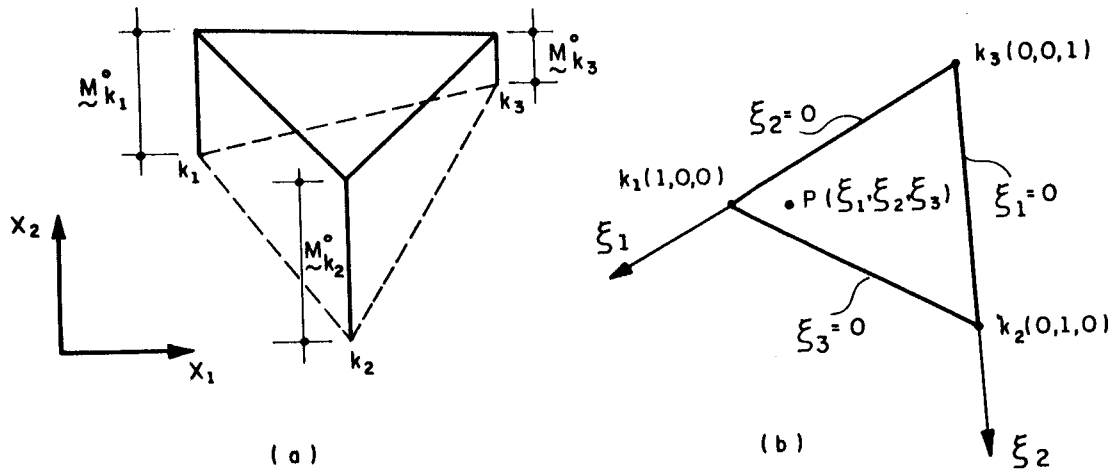


Fig. 4.12 -a) Célula Genérica Ω_j com a variação de $M_{\alpha\beta}^0$
 b) Célula Ω_j com o sistema de coordenadas homogêneas.

Devido à necessidade de integração numérica bidimensional para calcular as integrais de domínio sobre as células, as coordenadas de um ponto qualquer de Ω_j são parametrizadas em função das coordenadas dos vértices, estabelecendo-se sobre a célula um sistema de coordenadas homogêneas, conforme indicado na Figura 4.12.b. Assim, as coordenadas cartesianas de um ponto p do subdomínio Ω_j podem ser expressas por:

$$\underset{\sim}{x}^p = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^p = \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{x}^{(N)} \quad (4.80)$$

onde:

$$\underset{\sim}{\phi}^T = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

$$\underset{\sim}{x}^{(N)T} = \begin{Bmatrix} x_1^{k1} & x_2^{k1} & x_1^{k2} & x_2^{k2} & x_1^{k3} & x_2^{k3} \end{Bmatrix} \quad (4.82)$$

Explicitando-se a coordenada x_1 do ponto p, tem-se:

$$x_i^p = \xi_1^p x_i^{k1} + \xi_2^p x_i^{k2} + \xi_3^p x_i^{k3} \quad (4.83)$$

As coordenadas homogêneas do ponto genérico p podem ser expressas em função das coordenadas cartesianas (x_1, x_2) , como:

$$\xi_\alpha^p = \frac{1}{2A} (2A_\alpha^0 + b^\alpha x_1^p + a^\alpha x_2^p) \quad (4.84)$$

onde:

$$a^\alpha = x_1^k - x_1^j \quad (4.85)$$

$$b^\alpha = x_2^j - x_2^k \quad (4.86)$$

$$2A_\alpha^0 = x_1^j x_2^k - x_1^k x_2^j \quad (4.87)$$

$$A = \frac{1}{2} (b^1 a^2 - b^2 a^1) \quad (4.88)$$

sendo:

$$\alpha = 1, 2, 3 \quad j = 2, 3, 1 \quad e \quad k = 3, 1, 2$$

O campo de momentos iniciais $M_{\alpha\beta}^0$, sobre a célula, é aproximado em função dos valores nodais dos vértices. Assim o tensor de momentos iniciais vetorizado é expresso como:

$$\tilde{M}^{0p} = \begin{Bmatrix} M_1^0 \\ M_2^0 \\ M_3^0 \end{Bmatrix} = \tilde{\psi}^T \tilde{M}^0(N) \quad (4.89)$$

onde:

$$\tilde{\psi}^T = \begin{Bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (4.90)$$

$$\tilde{M}^{\circ(N)T} = \left\{ \begin{array}{cccccc} M_1^{\circ, k1} & M_2^{\circ, k1} & M_3^{\circ, k1} & M_1^{\circ, k2} & M_2^{\circ, k2} & M_3^{\circ, k2} \\ & M_1^{\circ, k3} & M_2^{\circ, k3} & M_3^{\circ, k3} & & \end{array} \right\} \quad (4.91)$$

sendo:

$$M_1^{\circ} = M_{x_1 x_1}^{\circ}; \quad M_2^{\circ} = M_{x_1 x_2}^{\circ}; \quad M_3^{\circ} = M_{x_2 x_2}^{\circ};$$

A contribuição do campo de momentos iniciais sobre os valores de contorno é dada pela integral:

$$I_i(s) = \int_{\Omega} u_{i\alpha, \beta}^*(s, t) M_{\alpha\beta}^{\circ}(t) d\Omega(t) \quad (4.92)$$

Com a discretização de domínio em células, e a aproximação de $M_{\alpha\beta}^{\circ}$ adotada, a expressão (4.92) pode ser reescrita como:

$$I_i(s) = \sum_{j=1}^{NCE} 2A_j \int_0^1 \left[\int_0^{1-\xi_2} u_{i\alpha, \beta}^*(s, t) \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^T d\xi_1 \right] d\xi_2 M^{\circ(N)} \quad (4.93)$$

onde A_j é a área da célula, e NCE o número de células adotado. O tensor fundamental $u_{i\alpha, \beta}^*$ é expresso por (3.29). A integral sobre cada célula:

$$e_{ik} = 2A_j \int_0^1 \left[\int_0^{1-\xi_2} u_{i\alpha, \beta}^*(s, t) \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^T d\xi_1 \right] d\xi_2 \quad (4.94)$$

é efetuada numericamente, usando-se quadratura de Gauss para domínio triangular. A influência de uma célula nos três deslocamentos generalizados de um ponto do contorno, eq.

(4.94), é dada pela sub-matriz \tilde{e} e de dimensões (3x9). Essa sub-matriz agora calculada é convenientemente armazenada na matriz global E. Assim para um ponto i do contorno e para a célula j com vértices, k_1, k_2, k_3 , é gerada a submatriz \tilde{e} com a seguinte forma:

$$\tilde{e} = \begin{bmatrix} e_{3i-2,3k1-2} & e_{3i-2,3k1-1} & e_{3i-2,3k1} & e_{3i-2,3k2-2} & \vdots \\ e_{3i-1,3k1-2} & e_{3i-1,3k1-1} & e_{3i-1,3k1} & e_{3i-1,3k2-2} & \vdots \\ e_{3i,3k1-2} & e_{3i,3k1-1} & e_{3i,3k1} & e_{3i,3k2-2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{3i-2,3k2-1} & e_{3i-2,3k2} & e_{3i-2,3k3-2} & e_{3i-2,3k3-1} & e_{3i-2,3k3} \\ e_{3i-1,3k2-1} & e_{3i-1,3k2} & e_{3i-1,3k3-2} & e_{3i-1,3k3-1} & e_{3i-1,3k3} \\ e_{3i,3k2-1} & e_{3i,3k2} & e_{3i,3k3-2} & e_{3i,3k3-1} & e_{3i,3k3} \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

Os índices dos coeficientes da submatriz \tilde{e} e acima, já são os endereços para a matriz global E. As três primeiras colunas de \tilde{e} representam a influência das três componentes de $M_{\alpha\beta}^0$ do ponto k_1 sobre os valores de contorno do ponto i; as três colunas intermediárias de \tilde{e} dão a influência das três componentes de $M_{\alpha\beta}^0$ do ponto k_2 sobre os valores de contorno do ponto i; e as três últimas colunas de \tilde{e} representam a influência das componentes de $M_{\alpha\beta}^0$ do ponto k_3 sobre os valores de contorno do ponto i. Calculando-se as submatrizes \tilde{e} para todas as células em relação a cada ponto do contorno, é gerada a matriz E, com (3NNC) linhas e (3NNT) colunas, sendo NNT a soma de NNC e NPI.

A influência do campo de momentos iniciais $M_{\alpha\beta}^0$ sobre os valores de deslocamento nos pontos internos é feita de modo inteiramente análogo ao que foi desenvolvido para o cálculo

da matriz E , gerando-se então a matriz \bar{E} , com $(3NPI)$ linhas e $(3NNT)$ colunas. O cálculo dos coeficientes das matrizes E e \bar{E} é feito usando-se integração numérica de Gauss para domínios triangulares e tabelas de COWPER [106], notando-se que não há ocorrência de singularidades.

A influência do campo de momentos iniciais sobre os valores dos esforços nos pontos internos é dada pelas integrais:

$$I_{\alpha\beta}(s) = \int_{\Omega} e_{\alpha\beta\gamma\theta}^*(s,t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t),$$

no caso dos momentos, e:

$$I_{3\beta}(s) = \int_{\Omega} e_{3\beta\gamma\theta}^*(s,t) M_{\gamma\theta}^0(t) d\Omega(t),$$

no caso das forças cortantes.

Considerando-se a divisão do domínio em células triangulares (Figura 4.11) e a aproximação adotada para $M_{\alpha\beta}^0$ sobre as células, de acordo com a expressão (4.89) e com a Figura 4.12.a., estas integrais podem ser expressas como:

$$I_{\alpha\beta}(s) = \sum_{j=1}^{NCE} \int_{\Omega_j} e_{\alpha\beta\gamma\theta}^*(s,t) \psi^T d\Omega_j(t) M^0(N) \quad (4.96)$$

e

$$I_{3\beta}(s) = \sum_{j=1}^{NCE} \int_{\Omega_j} e_{3\beta\gamma\theta}^*(s,t) \psi^T d\Omega_j(t) M^0(N) \quad (4.97)$$

O tensor fundamental $e_{\alpha\beta\gamma\theta}^*$ é dado pela expressão (3.87) e $e_{3\beta\gamma\theta}^*$ por (3.93). O cálculo destas integrais é efetuado numericamente, através de quadratura de Gauss para

domínios triangulares, usando a tabela publicada por COWPER [106], exceto no caso em que o ponto fonte s coincide com um dos vértices da célula, quando ocorrem singularidades fortes do tipo $1/r$ nas integrais (4.96). Neste caso é utilizada a integração analítica em r e integração numérica em θ . Efetua-se integração analítica sobre as expansões polinomiais de $k_0(z)$, $k_1(z)$, apresentadas no Apêndice A e $A(z)$, dadas por ABRAMOWITZ e STEGUN [91]. Como estas expansões têm expressões distintas para, $0 \leq z \leq 2$, e para $z \geq 2$, a célula que contém o ponto singular é dividida em três sub-células triangulares conforme ilustrado na Figura 4.13.

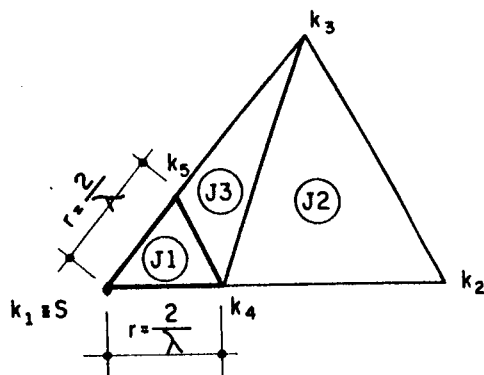


Fig. 4.13- Subdivisão da Célula com Ponto Singular

A sub-célula adjacente ao nó singular \underline{s} , tem os dois lados concorrentes neste ponto com comprimentos iguais a $2/\lambda$, para permitir o uso apropriado das expansões polinomiais das funções de Bessel, definindo-se assim dois pontos auxiliares k_4 e k_5 . Assim, ficam caracterizadas três sub-células, sendo a primeira J_1 formada pelos vértices k_1 , k_4 , k_5 , contendo o nó singular \underline{s} , e duas não-singulares J_2 e J_3 definidas pelos vértices (k_2, k_3, k_4) e (k_3, k_5, k_4) , respectivamente.

Apenas para a sub-célula J1, com o nó singular s, efetua-se inicialmente a integração analítica em r (s,t) e em seguida integração numérica em θ , considerando-se um sistema de coordenadas cilíndricas com origem em s. Nesta integração são considerados apenas os valores principais das integrais envolvidas. A integração sobre as sub-células J2 e J3 é efetuada, numericamente, de maneira análoga àquela utilizada para as células que não contêm o ponto singular.

Para cada ponto interno i e cada célula j, o cálculo da integral (4.96) gera uma submatriz e' , análoga àquela expressa por (4.95), com dimensão (3x9), que contém a influência dos momentos iniciais da célula j representada pelos valores nodais em k_1, k_2, k_3 , sobre os momentos fletores e torçor no ponto i. Os coeficientes desta submatriz e' são convenientemente endereçados e armazenados na matriz \tilde{E}' . A matriz \tilde{E}' é completada após a integração da influência de todas as células sobre todos os pontos internos, ficando com (3NPI) linhas e (3NNT) colunas.

A influência do termo livre $g_{\alpha\beta\gamma\theta}^*(s)M_{\gamma\theta}^O(s)$ (Eq. 4.64), nos valores dos momentos dos pontos internos é calculada diretamente e também endereçada para a matriz \tilde{E}' .

A influência dos momentos iniciais $M_{\alpha\beta}^O$ sobre os valores dos esforços cortantes em cada ponto interno, dada por (4.97), é calculada de modo análogo ao que foi desenvolvido para o cálculo da influência sobre os momentos. Para cada ponto interno i e cada célula j, o cálculo de (4.97) gera uma submatriz e'' , com dimensão (2x9), contendo a influência da célula sobre os valores dos esforços cortantes no ponto i, cujos coeficientes são endereçados e armazenados na matriz \tilde{E}'' . A matriz \tilde{E}'' é completada após a integração da influência de todas as células para cada ponto interno, ficando essa matriz com (2NPI) linhas e (3NNT) colunas.

4.3.6- Técnica de Solução

A discretização da equação integral de contorno para placas pela Teoria de Reissner, desenvolvida em (4.3.1), dá origem ao sistema de equações algébricas expresso matricialmente por:

$$\begin{matrix} H & U & = & G & P & + & B & + & E & M^0 \\ \sim & \sim & & \sim & \sim & & \sim & & \sim & \sim \end{matrix} \quad (4.98)$$

Visando a melhoria dos procedimentos numéricos para a solução do sistema, inclusive para análise não-linear, são realizadas algumas operações matriciais sobre a equação (4.98). Assim, para um problema bem condicionado com um número suficiente de forças e deslocamentos prescritos no contorno, obtém-se uma nova forma para a equação (4.98) trocando-se as colunas entre as matrizes H e G, de forma a acumularem-se todas as incógnitas do contorno no vetor X, da seguinte maneira:

$$\begin{matrix} A & X & = & F & + & E & M^0 \\ \sim & \sim & & \sim & & \sim & \sim \end{matrix} \quad (4.99)$$

O vetor F contém os efeitos dos deslocamentos e forças prescritas no contorno, e de todos carregamentos atuantes no domínio exceto o campo de momentos iniciais M^0 . A matriz A é a matriz dos coeficientes das incógnitas, obtida pela troca de colunas entre H e G, sendo em geral não-simétrica e cheia. Esta matriz é normalmente bem condicionada, com termos diagonais dominantes.

A solução de (4.99) pode ser obtida pre-multiplicando-se o primeiro e o segundo membro por A^{-1} , obtendo-se:

$$\begin{matrix} X & = & L & + & R & M^0 \\ \sim & & \sim & & \sim & \sim \end{matrix} \quad (4.100)$$

onde:

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{A}^{-1} \underset{\sim}{E} \quad (4.101)$$

e

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{A}^{-1} \underset{\sim}{F} \quad (4.102)$$

A discretização da representação para os esforços nos pontos internos desenvolvida em (4.3.4) leva às seguintes expressões:

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{G}'\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{H}'\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{B}' + (\underset{\sim}{E}' - \underset{\sim}{I})\underset{\sim}{M}^{\circ} \quad (4.103)$$

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{G}''\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{H}''\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{B}'' + \underset{\sim}{E}''\underset{\sim}{M}^{\circ} \quad (4.104)$$

Utilizando-se o mesmo procedimento adotado para obtenção de (4.100) nas expressões (4.103) e (4.104), obtém-se:

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{F}' - \underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{X} + (\underset{\sim}{E}' - \underset{\sim}{I})\underset{\sim}{M}^{\circ} \quad (4.105)$$

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{F}'' - \underset{\sim}{A}''\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{E}''\underset{\sim}{M}^{\circ} \quad (4.106)$$

A expressão (4.105) dá o momento total como uma função do campo de momentos iniciais $\underset{\sim}{M}^{\circ}$ e dos demais carregamentos de domínio e dos valores de contorno. Como será visto adiante, para aplicações a problemas não-lineares é conveniente escrever-se a componente elástica do tensor momento. Assim:

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{M}^e - \underset{\sim}{M}^{\circ} \quad (4.107)$$

onde, $\underset{\sim}{M}^e$ é a componente elástica do momento e $\underset{\sim}{M}$ é o momento total.

Substituindo-se a expressão (4.107) em (4.105), obtém-se:

$$\tilde{M}^e = \tilde{F}' - \tilde{A}'\tilde{X} + \tilde{E}'\tilde{M}^o \quad (4.108)$$

Substituindo-se o valor de \tilde{X} dado por (4.100) na expressão (4.108), chega-se a:

$$\tilde{M}^e = \tilde{F}' - \tilde{A}'(\tilde{L} + \tilde{R}\tilde{M}^o) + \tilde{E}'\tilde{M}^o \quad (4.109)$$

ou ainda,

$$\tilde{M}^e = (\tilde{F}' - \tilde{A}'\tilde{L}) + (\tilde{E}' - \tilde{A}'\tilde{R})\tilde{M}^o \quad (4.110)$$

Fazendo-se:

$$\tilde{N} = \tilde{F}' - \tilde{A}'\tilde{L} \quad (4.111)$$

$$\tilde{S} = \tilde{E}' - \tilde{A}'\tilde{R} \quad (4.112)$$

e levando-se em (4.110), tem-se:

$$\tilde{M}^e = \tilde{N} + \tilde{S}\tilde{M}^o \quad (4.113)$$

Deve ser observado que os vetores \tilde{L} e \tilde{N} representam as soluções para as incógnitas de contorno e momentos, respectivamente, na ausência de momentos iniciais.

Quando há a ocorrência de momentos iniciais, o efeito dos mesmo é modelado pelas matrizes \tilde{R} e \tilde{S} , sendo \tilde{R} a solução para as incógnitas de contorno e \tilde{S} a solução em termos de momentos nos pontos internos.

Um desenvolvimento análogo ao que foi feito para os momentos pode ser efetuado para os esforços cortantes, resultando em:

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{N'} + \underset{\sim}{S'} \underset{\sim}{M}^O \quad (4.114)$$

onde, $\underset{\sim}{N}'$ é a resposta em termos de esforços cortantes na ausência do campo de momentos iniciais $\underset{\sim}{M}_{\alpha\beta}^O$, e quando há ocorrência dos mesmos o seu efeito é modelado pela matriz $\underset{\sim}{S}'$, sendo:

$$\underset{\sim}{N}' = \underset{\sim}{F}'' - \underset{\sim}{A}'' \underset{\sim}{L} \quad (4.115)$$

$$\underset{\sim}{S}' = \underset{\sim}{E}'' - \underset{\sim}{A}'' \underset{\sim}{R} \quad (4.116)$$

4.3.7- Esforços nos Pontos de Contorno

Para a determinação das tensões generalizadas em um ponto do contorno, duas equações podem ser obtidas da relação entre tensões e forças de superfície. Considerando-se a Figura 4.14, onde é apresentado um elemento de contorno genérico tem-se:

$$\bar{p}_\alpha = \bar{M}_{\alpha\beta} \bar{n}_\beta \quad (4.117)$$

$$p_3 = Q_{3\alpha} n_\alpha \quad (4.118)$$

onde, \bar{p}_α são as forças da superfície em relação ao sistema de referência $\bar{x}_1 \bar{x}_2$, $\bar{M}_{\alpha\beta}$ são os momentos, e \bar{n}_β representa os cossenos diretores da normal ao contorno referida a $\bar{x}_1 \bar{x}_2$.

De acordo com a Figura 4.14, tem-se:

$$\bar{n}_1 = \cos 0 = 1 \quad (4.119)$$

$$\bar{n}_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

substituindo-se os valores (4.119) em (4.117) e (4.118) obtêm-se:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{11} &= \bar{p}_1 \\ \bar{M}_{21} &= \bar{p}_2 \\ Q_3 &= p_3 \end{aligned} \quad (4.120)$$

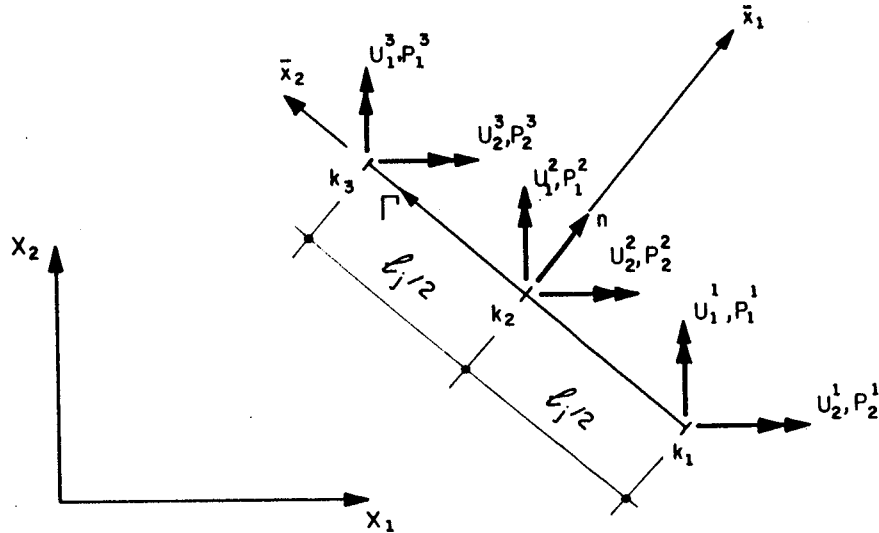


Fig. 4.14- Sistema de Coordenadas Locais no Contorno

Portanto, da solução da equação integral de contorno discretizada (4.100), são obtidas, se não prescritas, duas componentes de momento, fletor e torçor, e a força cortante. Para a determinação da terceira componente de momento, \bar{M}_{22} , será utilizado um esquema em diferenças finitas a partir da relação momento-curvatura dada por:

$$\bar{M}_{22} = D \left[\bar{u}_{2,2} + \nu \bar{u}_{1,1} \right] + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q - \bar{M}_{22}^0 \quad (4.121)$$

onde todas as grandezas envolvidas se referem ao sistema local de coordenadas \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Considerando-se a relação momento-curvatura para \bar{M}_{11} , análoga a (4.121) e explicitando-se $\bar{u}_{1,1}$, tem-se

$$\bar{u}_{1,1} = -\nu \bar{u}_{2,2} + \frac{1}{D} [\bar{M}_{11} + \bar{M}_{11}^0 - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q]$$

Substituindo-se a expressão acima na relação (4.121), obtém-se:

$$\bar{M}_{22} = D(1-\nu^2)\bar{u}_{2,2} + \nu(\bar{M}_{11} + \bar{M}_{11}^0) - \bar{M}_{22}^0 + \frac{\nu}{\lambda^2} q \quad (4.122)$$

O deslocamento \bar{u}_2 é aproximado sobre o elemento de contorno Γ_j pela função quadrática dada por:

$$\bar{u}_2^j = \psi_1 \bar{U}_2^1 + \psi_2 \bar{U}_2^2 + \psi_3 \bar{U}_2^3 \quad (4.123)$$

sendo ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 expressos por (4.48).

Exprimindo-se \bar{u}_2^j como função da coordenada \bar{x}_2 , tem-se:

$$\bar{u}_2^j = \frac{2(\bar{x}_2)^2}{\ell_j^2} (\bar{U}_2^{k1} - 2\bar{U}_2^{k2} + \bar{U}_2^{k3}) + \frac{\bar{x}_2}{\ell_j} (\bar{U}_2^{k3} - \bar{U}_2^{k1}) + \bar{U}_2^{k2} \quad (4.124)$$

Derivando-se \bar{u}_2^j em relação a \bar{x}_2 , obtém-se a curvatura $\bar{u}_{2,2}$ no plano \bar{x}_2 \bar{x}_3 , isto é:

$$\frac{\partial \bar{u}_2^j}{\partial \bar{x}_2} = \bar{u}_{2,2}^j = \frac{4\bar{x}_2}{\ell_j^2} (\bar{U}_2^{k1} - 2\bar{U}_2^{k2} + \bar{U}_2^{k3}) + \frac{1}{\ell_j} (\bar{U}_2^{k3} - \bar{U}_2^{k1}) \quad (4.125)$$

Substituindo-se (4.125) em (4.122), obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{22}^j &= D(1-\nu^2) \left[\frac{4\bar{x}_2}{\ell_j^2} (\bar{U}_2^{k1} - 2\bar{U}_2^{k2} + \bar{U}_2^{k3}) + \frac{1}{\ell_j} (\bar{U}_2^{k3} - \bar{U}_2^{k1}) \right] + \\ &+ \nu(\bar{M}_{11} + \bar{M}_{11}^0) - \bar{M}_{22}^{0,j} + \frac{\nu}{\lambda^2} q \end{aligned} \quad (4.126)$$

Escrevendo-se agora os valores da componente \bar{M}_{22} para os nós $k1$, $k2$ e $k3$ do elemento Γ_j , obtêm-se, respectivamente:

$$\bar{M}_{22}^{k1} = D(1-\nu^2) \left[\frac{1}{\ell_j} \left(-3\bar{U}_2^{k1} + 4\bar{U}_2^{k2} - \bar{U}_2^{k3} \right) \right] + \nu (\bar{M}_{11} + \bar{M}_{11}^0)^{(k1)} +$$

$$- \bar{M}_{22}^0(k1) + \frac{\nu}{\lambda^2} q$$

$$\bar{M}_{22}^{k2} = D(1-\nu^2) \left[\frac{1}{\ell_j} \left(\bar{U}_2^{k3} - \bar{U}_2^{k1} \right) \right] + \nu (\bar{M}_{11} + \bar{M}_{11}^0)^{(k2)} +$$

$$- \bar{M}_{22}^0(k2) + \frac{\nu}{\lambda^2} q$$

$$\bar{M}_{22}^{k3} = D(1-\nu^2) \left[\frac{1}{\ell_j} \left(3\bar{U}_2^{k3} - 4\bar{U}_2^{k2} + \bar{U}_2^{k1} \right) \right] + \nu (\bar{M}_{11} + \bar{M}_{11}^0)^{(k3)} +$$

$$- \bar{M}_{22}^0(k3) + \frac{\nu}{\lambda^2} q \quad (4.127)$$

Desta forma ficam determinadas as três componentes de momento em pontos do contorno. Analogamente ao que foi feito para pontos internos, é conveniente expressarem-se as componentes elásticas do momento para o ponto do contorno. Assim, obtêm-se:

$$\bar{M}_{11}^e = \bar{p}_1 + \bar{M}_{11}^0$$

$$\bar{M}_{12}^e = \bar{p}_2 + \bar{M}_{12}^0$$

$$\bar{M}_{22}^{e, k1} = D(1-\nu^2) \left[\frac{1}{\ell_j} \left(-3\bar{U}_2^{k1} + 4\bar{U}_2^{k2} - \bar{U}_2^{k3} \right) \right] + \nu (\bar{M}_{11} + \bar{M}_{11}^0)^{(k1)} + \frac{\nu}{\lambda^2} q$$

$$\bar{M}_{22}^{e, k2} = D(1-\nu^2) \left[\frac{1}{\ell_j} (\bar{U}_2^{k3} - \bar{U}_2^{k1}) \right] + \nu (\bar{M}_{11} + \bar{M}_{11}^0)^{(k2)} + \frac{\nu}{\lambda^2} q$$

$$\bar{M}_{22}^{e, k3} = D(1-\nu^2) \left[\frac{1}{\ell_j} (3\bar{U}_2^{k3} - 4\bar{U}_2^{k2} + \bar{U}_2^{k1}) \right] + \nu (\bar{M}_{11} + \bar{M}_{11}^0)^{(k3)} + \frac{\nu}{\lambda^2} q$$

(4.128)

Como pode ser notado nas expressões (4.128), todas as componentes de momento para um dado ponto de contorno são dadas como função dos deslocamentos e ou forças no contorno e das componentes de momentos iniciais.

Então, após transformá-las para o sistema de coordenadas globais $x_1 x_2$, a idéia é exprimi-las na mesma forma matricial já adotada para pontos internos, isto é:

$$\begin{matrix} \bar{M}^e & = & -\bar{H}'\bar{U} & + & \bar{G}'\bar{P} & + & \bar{B}' & + & \bar{E}'\bar{M}^0 \\ \sim & & \sim & & \sim & & \sim & & \sim \end{matrix} \quad (4.129)$$

Para isto, a parte da matriz \bar{H}' referente aos pontos k_1, k_2 e k_3 , do elemento Γ_j , expresso no sistema local $\bar{x}_1 \bar{x}_2$, é dada por:

	← K_1 →		← K_2 →		← K_3 →	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	↑ K_1 ↓
0	3	0	0	-4	0	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	↑ K_2 ↓
0	1	0	0	0	-1	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	↑ K_3 ↓
0	-1	0	0	4	0	
0	0	0	0	-3	0	

(4.130)

Os coeficientes nas demais colunas das linhas referentes, aos nós k_1 , k_2 e k_3 são nulos. Endereçando-se, convenientemente, os coeficientes não nulos mostrados em (4.130) completa-se a parte da matriz \bar{H} , referente aos pontos do contorno, expressa no sistema local $\bar{x}_1 \bar{x}_2$. Para os nós comuns às extremidades de dois elementos distintos, é feita uma média entre os coeficientes calculados com base nos deslocamentos nodais de cada um dos elementos de contorno aí concorrentes. Para se obterem as componentes de momento no sistema de referência global $x_1 x_2$ é feita uma transformação de coordenadas sobre \bar{H} . A transformação do tensor momento em um ponto de contorno, pertencente ao elemento Γ_j , do sistema de referência $\bar{x}_1 \bar{x}_2$ para o sistema $x_1 x_2$ pode ser feita por meio da expressão:

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{C}^{-1} \underset{\sim}{\bar{M}} \quad (4.131)$$

onde $\underset{\sim}{M}$ é o tensor momento no sistema $x_1 x_2$, $\underset{\sim}{\bar{M}}$ o tensor momento no sistema $\bar{x}_1 \bar{x}_2$, e a matriz $\underset{\sim}{C}^{-1}$, é a inversa da matriz de transformação $\underset{\sim}{C}$ dada por (2.36), sendo:

$$\underset{\sim}{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma & -2\text{sen}\gamma\text{cos}\gamma & \text{sen}^2 \gamma \\ \text{cos}\gamma\text{sen}\gamma & (\text{cos}^2 \gamma - \text{sen}^2 \gamma) & -\text{sen}\gamma\text{cos}\gamma \\ \text{sen}^2 \gamma & 2\text{sen}\gamma\text{cos}\gamma & \text{cos}^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

onde γ é o ângulo formado pelos eixos \bar{x}_1 e x_1 conforme mostrado na Figura 4.12.

Para efeito de programação é interessante exprimir-se a matriz $\underset{\sim}{C}$ e sua inversa em termos do ângulo α , formado pela direção da tangente ao contorno com o eixo x_1 . Assim, de acordo com a Figura 4.15, tem-se:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \text{sen}^2 \alpha & -2\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha & \text{cos}^2 \alpha \\ \text{sen}\alpha\text{cos}\alpha & \text{sen}^2 \alpha - \text{cos}^2 \alpha & -\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha \\ \text{cos}^2 \alpha & 2\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha & \text{sen}^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

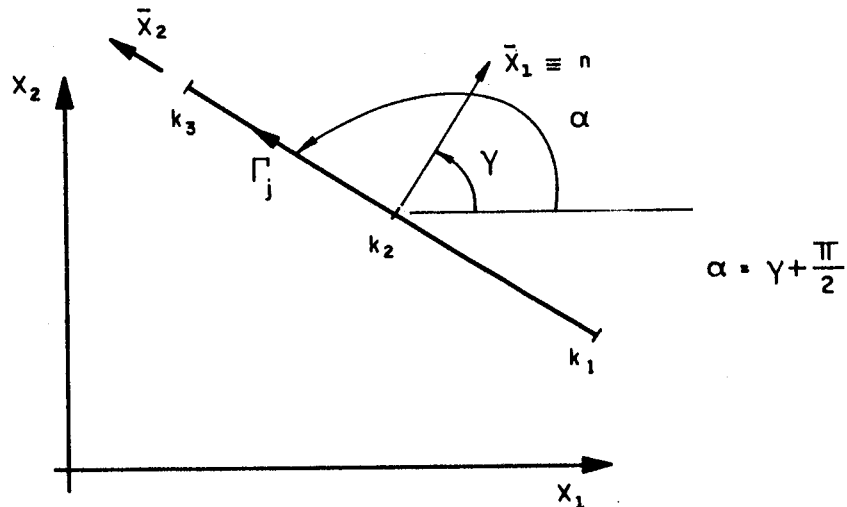


Fig. 4.15- Sistema de Referência Local e Global.

A inversa da matriz \tilde{C} fica expressa por:

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{sen}^2 \alpha & 2\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha & \text{cos}^2 \alpha \\ -\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha & \text{sen}^2 \alpha - \text{cos}^2 \alpha & \text{sen}\alpha\text{cos}\alpha \\ \text{cos}^2 \alpha & -2\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha & \text{sen}^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

Efetuando-se a transformação de coordenadas sobre a matriz \tilde{H}' para o sistema global, obtém-se a matriz H' , cujo trecho referente aos nós k_1, k_2 e k_3 , do elemento $\tilde{\Gamma}_j$, fica com a seguinte forma:

	K1			K2			K3/		
	0	$3\cos^2\alpha$	0	0	$-4\cos^2\alpha$	0	0	$\cos^2\alpha$	0
K1	0	$3\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha$	0	0	$-4\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha$	0	0	$\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha$	0
	0	$3\text{sen}^2\alpha$	0	0	$-4\text{sen}^2\alpha$	0	0	$\text{sen}^2\alpha$	0

	0	$\cos^2\alpha$	0	0	0	0	0	$-\cos^2\alpha$	0
K2	0	$\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha$	0	0	0	0	0	$-\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha$	0
	0	$\text{sen}^2\alpha$	0	0	0	0	0	$-\text{sen}^2\alpha$	0

	0	$-\cos^2\alpha$	0	0	$4\cos^2\alpha$	0	0	$-3\cos^2\alpha$	0
K3	0	$-\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha$	0	0	$4\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha$	0	0	$-3\text{cos}\alpha\text{sen}\alpha$	0
	0	$-\text{sen}^2\alpha$	0	0	$4\text{sen}^2\alpha$	0	0	$-3\text{sen}^2\alpha$	0

(4.135)

A parte da matriz \bar{G}' , referente aos pontos k1, k2 e k3 expressa no sistema de coordenadas $\bar{x}_1 \bar{x}_2$ tem a seguinte forma:

	k1			k2			k3		
	1	0	0	0	0	0	0	0	0
k1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	ν	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	0	0	1	0	0	0	0	0
k2	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	ν	0	0	0	0	0

	0	0	0	0	0	0	1	0	0
k3	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	ν	0	0

(4.136)

Efetuada-se a mudança do sistema de referência $\bar{x}_1 \bar{x}_2$ para o sistema global $x_1 x_2$, através da matriz C^{-1} , a parte

da matriz G' , referente aos nós k_1 , k_2 e k_3 fica com a seguinte forma:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & k_1 & k_2 & k_3 \\
 \hline
 k_1 & g & 0 & 0 \\
 \hline
 k_2 & 0 & g & 0 \\
 \hline
 k_3 & 0 & 0 & g \\
 \hline
 \end{array} \quad (4.137)$$

sendo:

$$g = \begin{bmatrix} (\text{sen}^2 \alpha + \nu \text{cos}^2 \alpha) & 2\text{sen} \alpha \text{cos} \alpha & 0 \\ (-1 + \nu) \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha & (\text{sen}^2 \alpha - \text{cos}^2 \alpha) & 0 \\ \text{cos}^2 \alpha + \nu \text{sen}^2 \alpha & -2\text{sen} \alpha \text{cos} \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

A influência do campo de momentos iniciais sobre os valores elásticos dos momentos nos pontos do contorno, referidos ao sistema de coordenadas locais $\bar{x}_1 \bar{x}_2$, é dada pela parcela $\bar{E}' \bar{M}^0$, sendo a parte de \bar{E}' para um dado ponto expressa por:

$$\bar{e}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \nu & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

os demais elementos das linhas correspondentes ao ponto em questão são nulos.

O trecho da matriz \bar{E}' referente aos nós k_1 , k_2 e k_3 do elemento Γ_j , fica com a seguinte forma:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
& k1 & k2 & k3 \\
\hline
k1 & \bar{e}' & 0 & 0 \\
& \sim & \sim & \sim \\
k2 & 0 & \bar{e}' & 0 \\
& \sim & \sim & \sim \\
k3 & 0 & 0 & \bar{e}' \\
& \sim & \sim & \sim
\end{array} \quad (4.140)$$

sendo os demais elementos das linhas correspondentes a k1, k2 e k3, nulos. Porém, nas aplicações práticas o campo de momentos iniciais é referido ao sistema global x_1x_2 , portanto é necessário efetuar-se uma transformação no tensor de momentos iniciais para o sistema local $\bar{x}_1 \bar{x}_2$.

Assim, a parcela elástica do tensor momento devida aos momentos iniciais, referida ao sistema local fica:

$$\begin{array}{c}
\bar{M}^e \\
\sim
\end{array} = \begin{array}{c}
\bar{E}' \\
\sim
\end{array} \begin{array}{c}
C \\
\sim
\end{array} \begin{array}{c}
M^0 \\
\sim
\end{array} \quad (4.141)$$

Para se ter finalmente a parcela elástica do tensor momento devida aos momentos iniciais no sistema global x_1x_2 , é necessário uma nova transformação de forma que:

$$\begin{array}{c}
M^e \\
\sim
\end{array} = \begin{array}{c}
C^{-1} \\
\sim
\end{array} \begin{array}{c}
\bar{E}' \\
\sim
\end{array} \begin{array}{c}
C \\
\sim
\end{array} \begin{array}{c}
M^0 \\
\sim
\end{array} \quad (4.142)$$

fazendo

$$\begin{array}{c}
E' \\
\sim
\end{array} = \begin{array}{c}
C^{-1} \\
\sim
\end{array} \begin{array}{c}
\bar{E}' \\
\sim
\end{array} \begin{array}{c}
C \\
\sim
\end{array} \quad (4.143)$$

tem-se:

$$\begin{array}{c}
M^e \\
\sim
\end{array} = \begin{array}{c}
E' \\
\sim
\end{array} \begin{array}{c}
M^0 \\
\sim
\end{array} \quad (4.144)$$

Para um dado ponto do contorno, a parte da matriz E' que contém elementos não-nulos é dada por e' cujos elementos são:

$$e'_{11} = \text{sen}^4 \alpha + \text{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha (2 + \nu)$$

$$e'_{12} = [-2(1+\nu) \text{sen} \alpha \cos^3 \alpha]$$

$$e'_{13} = -\text{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha + \nu \cos^4 \alpha$$

$$e'_{21} = (-\text{sen} \alpha \cos^3 \alpha + \nu \text{sen}^3 \alpha \cos \alpha)$$

$$e'_{22} = (\text{sen}^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 2 \nu \text{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha)$$

$$e'_{23} = (-\text{sen}^3 \alpha \cos \alpha + \nu \text{sen} \alpha \cos^3 \alpha)$$

$$e'_{31} = (-\text{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha + \nu \text{sen}^4 \alpha)$$

$$e'_{32} = [-2(1+\nu) \text{sen}^3 \alpha \cos \alpha]$$

$$e'_{33} = \cos^4 \alpha + \text{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha (2+\nu) \tag{4.145}$$

O trecho da matriz E' referente aos nós k_1, k_2 e k_3 do elemento Γ_j fica com a seguinte forma:

	k_1	k_2	k_3	
k_1	e'	0	0	
k_2	0	e'	0	
k_3	0	0	e'	

(4.146)

Tomando-se a contribuição de todos os pontos do contorno, calculando-se os coeficientes de e' correspondentes e endereçando-os para a matriz E' , esta é completada.

4.4- EXEMPLOS

A seguir são apresentados exemplos de aplicação do Método dos Elementos de Contorno na análise elástica de placas através da Teoria de Reissner, utilizando-se o programa desenvolvido neste trabalho. A precisão dos resultados, no caso de placas delgadas, é aferida tendo como base de comparação soluções analíticas obtidas por TIMOSHENKO [99] e soluções numéricas através de Método dos Elementos de Contorno obtidas por PAIVA [47] através da Teoria Clássica. São também utilizadas soluções numéricas via Método dos Elementos Finitos, encontradas na bibliografia.

Foi também pesquisada a influência da variação da espessura na determinação da resposta em deslocamentos e esforços, sendo os resultados comparados com as soluções analíticas obtidas por RIBEIRO [100], através de desenvolvimento em séries.

A importância da escolha das condições de contorno para bordas simplesmente apoiadas, quando se utiliza a Teoria de Reissner, é evidenciada prescrevendo-se ora a rotação tangencial nula ("hard condition"), ora o momento torçor nulo ("soft condition"), sendo os resultados deste trabalho comparados com os de BATHE et "alii" [101], obtidos através do Método dos Elementos Finitos.

Em todos os exemplos processados foi utilizado o parâmetro, $a = 0,25$, para posicionamento dos pontos fonte fora do domínio, por ter sido este valor o que levou aos mais altos níveis de precisão nas respostas.

Exemplo 4.4.1- Placa Retangular em Balanço

Uma placa retangular com relação entre lados igual a $1/4$, engastada em uma borda e com as demais livres, submetida a uma carregamento uniformemente distribuído foi

analisada, adotando-se a discretização indicada na Figura 4.16, com 44 nós de contorno e 20 elementos, para os quais adotou-se variação parabólica dos valores de contorno.

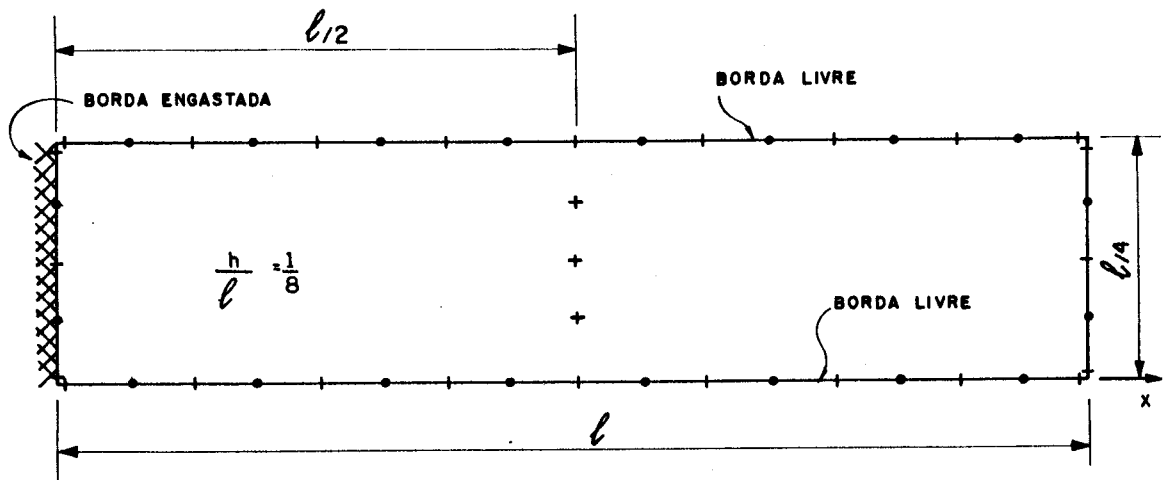


Fig. 4.16- Placa em Balanço com Carga Uniformemente Distribuída

Nas Tabelas 4.1 e 4.2 são apresentadas, respectivamente, as respostas em deslocamentos e esforços, nas seções extremas e média, obtidas através do programa desenvolvido neste trabalho, com as hipóteses de Reissner, ao lado das respostas correspondentes obtidas pela Teoria de Vigas sem considerar as deformações por cisalhamento, e das respostas obtidas por Paiva [47], com as hipóteses de Kirchhoff. A comparação das mesmas mostra uma nítida superioridade das respostas obtidas neste trabalho em relação às de Paiva [47], tanto para deslocamentos como para esforços. Sendo que em [47] foi adotada uma discretização com 40 elementos lineares e 44 nós.

TABELA 4.1 - DESLOCAMENTOS NA PLACA EM BALANÇO

seção x =	$w(D/ql^4)$			$\phi_x(D/ql^3)$		
	MEC	T. VIGAS	Paiva [47]	MEC	T.VIGAS	Paiva [47]
$\frac{\ell}{2}$	$4,5444 \times 10^{-2}$	$4,4271 \times 10^{-2}$	-	0,14570	0,14583	-
ℓ	0,12657	0,12500	0,1220	0,16666	0,16667	-

TABELA 4.2 - ESFORÇOS NA PLACA EM BALANÇO

seção x =	$M_{xx}(1/ql^2)$			$Q_x(1/Q\ell)$		
	MEC	T. VIGAS	Paiva [47]	MEC	T.VIGAS	Paiva [47]
0	0,49952	0,50000	0,489	1,0053	1,0000	1,0117
$\ell/2$	0,12506	0,12500	-	0,49986	0,5000	-

Para o cálculo dos valores representativos dos deslocamentos e esforços em cada seção, foi efetuada, neste trabalho, a média dos valores nos pontos situados sobre a seção de maneira análoga àquela utilizada por PAIVA [47].

Exemplo 4.4.2- Placa Quadrada Apoiada nas Quatro Bordas com Carga Uniformemente Distribuída

Uma placa quadrada de lado ℓ , com carga uniformemente distribuída, q , apoiada nas quatro bordas foi resolvida para diversas relações entre espessura e lado, considerando-se a condição de rotação no plano vertical tangente ao contorno restringida (condição "hard") e a condição de momento torçor nulo no plano vertical tangente ao contorno (condição "soft").

A discretização adotada consta de 44 pontos no contorno e 20 elementos parabólicos, com geometria linear, conforme mostrado na Figura 4.17.

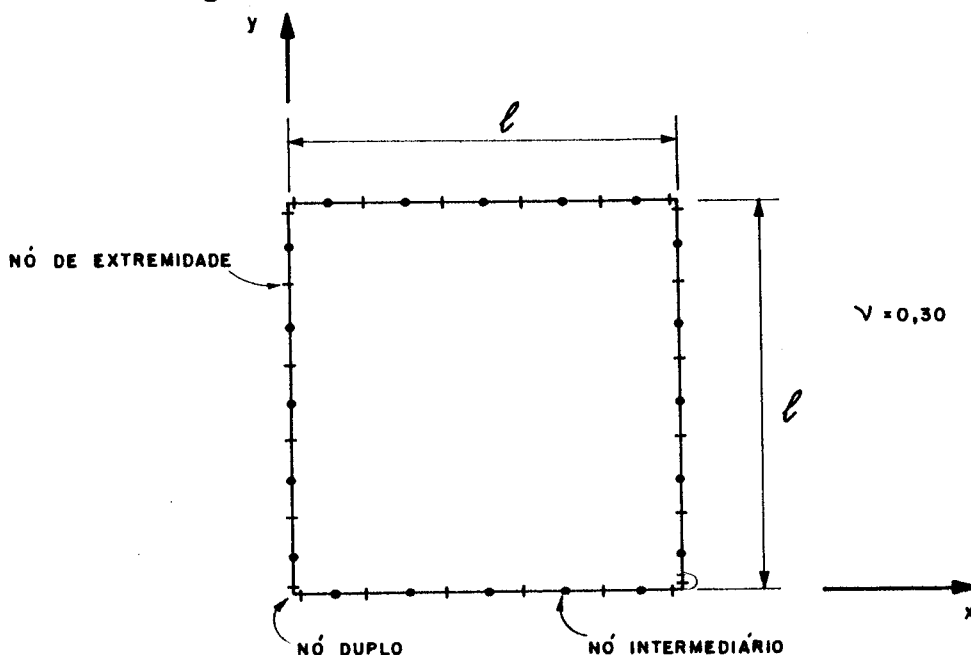


Fig. 4.17- Placa simplesmente apoiada no contorno

Os valores de deslocamento transversal w obtidos neste trabalho, com a rotação tangencial ao contorno nula ("hard"), para as relações $\frac{h}{\ell}$ iguais a $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{10}$, são apresentados na Figura 4.18, juntamente com os resultados da Teoria Clássica. Os resultados aqui obtidos para a relação, $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{100}$, são coincidentes com os da Teoria Clássica. À medida que a relação $\frac{h}{\ell}$ cresce, os resultados da Teoria de Reissner começam a apresentar diferenças significativas.

No caso da relação $\frac{h}{\ell} = 0,30$, o deslocamento w no meio do vão é 39,6% superior ao valor obtido pela Teoria Clássica. A influência da espessura fica também evidenciada na Tabela 4.3, onde os resultados deste trabalho em termos de deslocamento transversal w , sobre a linha de centro da placa, são comparados com os resultados obtidos analiticamente por RIBEIRO [100], para as hipóteses de

Reissner, com a condição "hard", e com os resultados da Teoria Clássica. Esta tabela comprova ainda o excelente nível de precisão dos resultados obtidos com a utilização do MEC, sendo os mesmos praticamente coincidentes com as respostas analíticas [100].

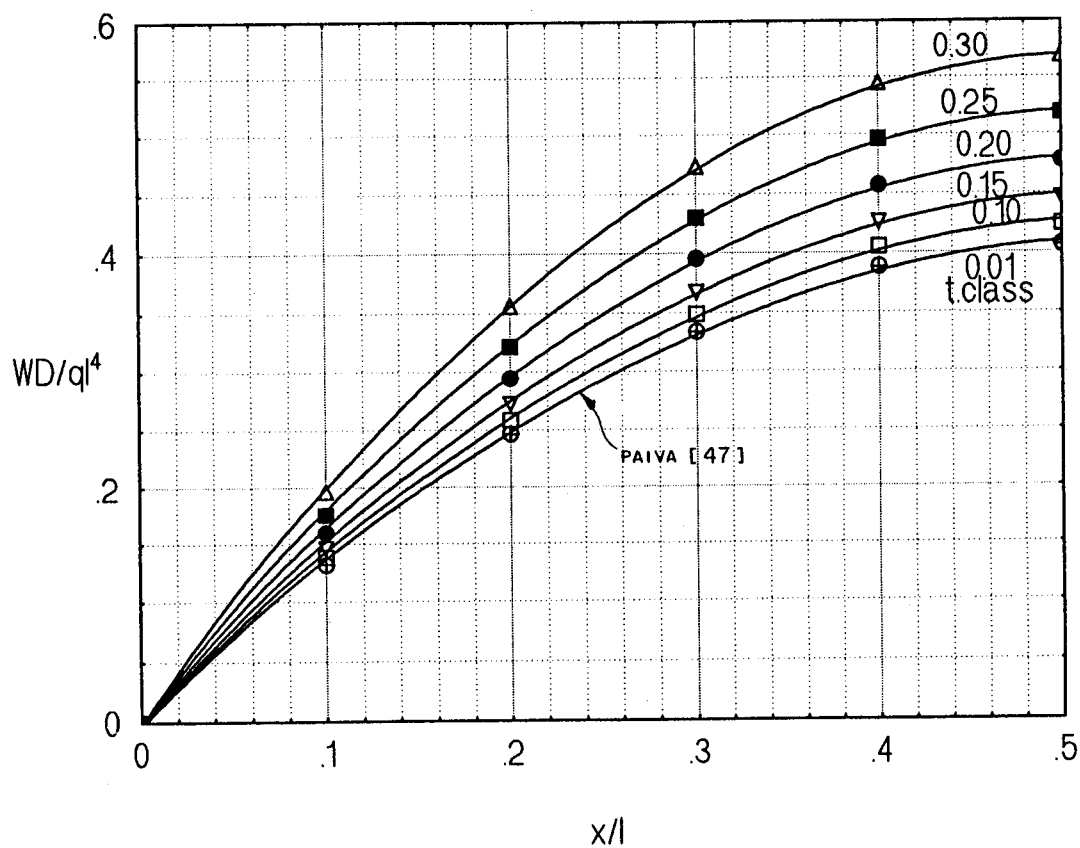


Fig. 4.18- Deslocamento Transversal w ao Longo da Linha do Centro da Placa

TABELA 4.3- Deslocamentos Transversais w sobre a Linha de Centro da Placa

$\frac{h}{\ell}$	$w \cdot \left(\frac{100D}{q\ell^4} \right)$					
	x	0,10 ℓ	0,20 ℓ	0,30 ℓ	0,40 ℓ	0,50 ℓ
0,01	MEC	0,1316	0,2464	0,3338	0,3881	0,4064
	Ribeiro [100]	0,132	0,246	0,334	0,388	0,406
0,10	MEC	0,1386	0,2583	0,3490	0,4052	0,4241
	Ribeiro [100]	0,139	0,258	0,349	0,405	0,424
0,20	MEC	0,1598	0,2946	0,3953	0,4571	0,4779
	Ribeiro [100]	0,160	0,295	0,395	0,457	0,478
0,25	MEC	0,1756	0,3218	0,4299	0,4960	0,5182
	Ribeiro [100]	0,176	0,322	0,430	0,496	0,518
0,30	MEC	0,1950	0,3550	0,4723	0,5436	0,5674
	Ribeiro [100]	0,195	0,355	0,472	0,543	0,567
T. Clássica		0,132	0,246	0,334	0,388	0,406

Os resultados obtidos para o momento fletor M_{xx} , sobre o eixo $y = \frac{\ell}{2}$, para a condição "hard", são confrontados na Tabela 4.4, com os resultados de RIBEIRO [100] e com os da Teoria Clássica. Aqui também pode ser percebida uma perfeita concordância dos resultados obtidos via MEC com a solução analítica [100]. Pode-se observar neste caso que a variação da relação h/ℓ não influencia os resultados de M_{xx} tão significativamente quanto os deslocamentos transversais w . Assim é que, o momento M_{xx} no meio da placa, para a relação $h/\ell = 0,30$, supera o valor obtido pela Teoria Clássica em apenas 2,82%.

TABELA 4.4- Valores do Momento Fletor M_{xx} sobre o Eixo $y = \frac{\ell}{2}$

$\frac{h}{\ell}$	x	$M_{xx} \left(\frac{10}{q\ell^2} \right)$				
		0,10 ℓ	0,20 ℓ	0,30 ℓ	0,40 ℓ	0,50 ℓ
0,01	MEC	0,209	0,3433	0,4247	0,4658	0,4789
	Ribeiro [100]	0,209	0,343	0,424	0,466	0,479
0,10	MEC	0,2099	0,3442	0,4249	0,4673	0,4804
	Ribeiro [100]	0,210	0,344	0,425	0,467	0,480
0,20	MEC	0,2123	0,3472	0,4287	0,4716	0,4849
	Ribeiro [100]	0,211	0,347	0,429	0,472	0,485
0,30	MEC	0,2162	0,3523	0,4352	0,4789	0,4925
	Ribeiro [100]	0,214	0,352	0,435	0,479	0,492
T. Clássica		0,209	0,343	0,424	0,466	0,479

Na Tabela 4.5, são apresentados resultados dos valores máximos de deslocamento transversal w , do momento fletor M_{xx} no meio da placa, e do momento torçor M_{xy} no canto, todos obtidos para a condição "hard", tendo ainda como comparação a resposta analítica [100] baseada na Teoria de Reissner, e a resposta da Teoria Clássica.

TABELA 4.5- Deslocamentos Transversais w e Momento Fletor M_{xx} no meio da Placa, Momento Torçor no Canto.

$\frac{h}{\ell}$	$w \cdot \left(\frac{100D}{ql^4} \right)$		$M_{xx} \left(\frac{10}{ql^2} \right)$		$M_{xy} \left(\frac{10}{ql^2} \right)$	
	MEC	RIBEIRO [100]	MEC	RIBEIRO [100]	MEC	RIBEIRO [100]
0,010	0,4064	0,406	0,4789	0,479	0,3893	0,325
0,025	0,4074	0,407	0,4790	0,479	0,3223	0,324
0,050	0,4107	0,411	0,4792	0,479	0,3228	0,321
0,075	0,4163	0,416	0,4797	0,480	0,3179	0,316
0,100	0,4241	0,424	0,4804	0,480	0,3125	0,311
0,125	0,4342	0,434	0,4812	0,481	0,3077	0,308
0,150	0,4465	0,446	0,4823	0,482	0,3029	0,305
0,175	0,4611	0,461	0,4835	0,483	0,2974	0,302
0,200	0,4779	0,478	0,4849	0,485	0,2910	0,297
0,250	0,5182	0,518	0,4884	0,488	0,2753	0,287
0,300	0,5674	0,567	0,4925	0,492	0,2558	0,274
T.Clássica	0,406		0,479		0,325	

Na Figura 4.19, apresentam-se as variações da força cortante Q_n na borda da placa para as condições de contorno "hard" e "soft", respectivamente, comparando-se os resultados obtidos através do MEC com aqueles obtidos por BATHE et alii [101]. Observa-se que na condição "soft" o modelo de Reissner simula uma concentração de carga, em um curto trecho próximo ao canto, análoga à reação de canto da análise através da Teoria Clássica. Esta concentração não ocorre na condição de contorno "hard", pois neste caso o momento torçor é absorvido pelo apoio.

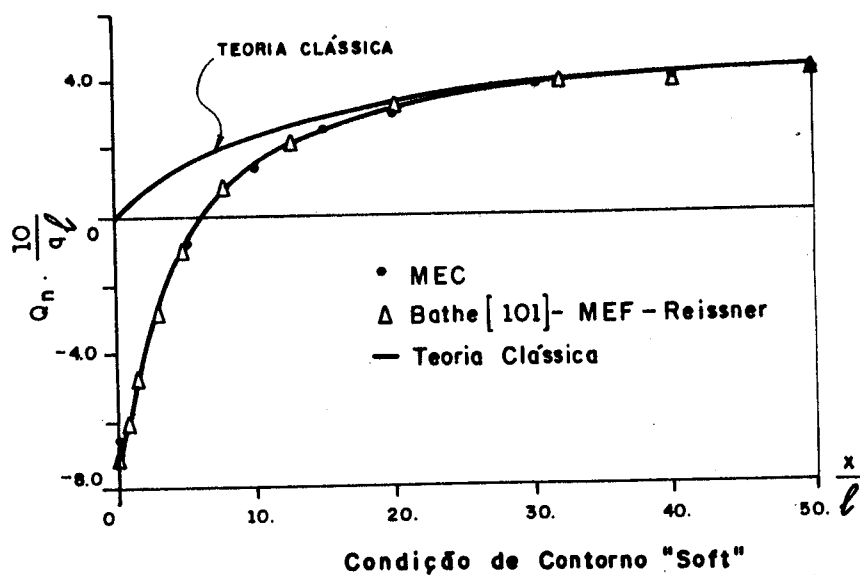
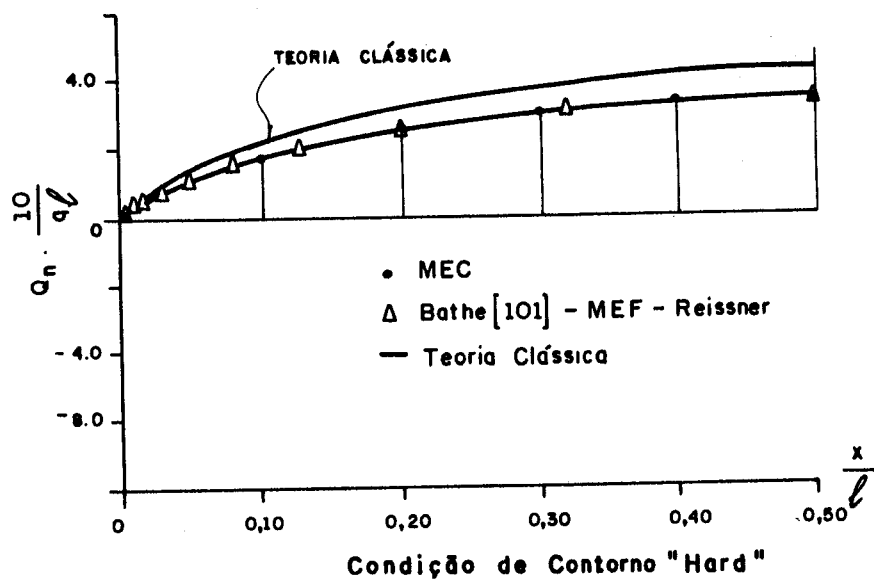


Fig. 4.19- Força Cortante ao Longo da Borda para Condição de Contorno "Hard" e para Condição "Soft"

A Tabela 4.6 apresenta os valores dos deslocamentos transversais w , momento fletor M_{xx} , M_{yy} , obtidos utilizando-se as condições de contorno "hard" e "soft", para

a relação $\frac{h}{\ell} = 0,10$, sobre a linha de centro $y = \frac{\ell}{2}$. Nesta tabela, observa-se que a diferença percentual entre os valores correspondentes às duas condições cresce à medida

TABELA 4.6- Valores de W , M_{xx} e M_{yy} para a placa com condições de contorno "soft" e "hard"

$\frac{x}{\ell}$	$w \frac{D}{ql^4} \times 100$		$M_{xx} \frac{10}{ql^2}$		$M_{yy} \frac{10}{ql}$	
	"soft"	"hard"	"soft"	"hard"	"soft"	"hard"
0,10	0,1521	0,1386	0,2509	0,2100	0,1944	0,1708
0,20	0,2812	0,2584	0,3807	0,3442	0,3305	0,3050
0,30	0,3781	0,3490	0,4574	0,4250	0,4302	0,4020
0,40	0,4378	0,4052	0,4979	0,4673	0,4904	0,4608
0,50	0,4579	0,4242	0,5105	0,4805	0,5105	0,4805

que o ponto se aproxima do contorno. Assim é que a flecha no centro da placa na condição "soft" é 7,9% maior que a da condição "hard" e para o ponto situado sobre a linha de centro, a $0,10\ell$ da borda esta diferença cresce para 9,7%. No caso do momento M_{xx} , a comparação análoga mostra uma diferença de 6,2% no centro e 19,5% para o ponto a $0,10\ell$ da borda. Estas diferenças são devidas à presença do momento torçor nas bordas, na condição "hard" que torna a placa mais rígida pois $\phi_s = 0$. É importante notar que para relações vão/espessura menores ou iguais a 0,01 as matrizes H e G se mostraram mal condicionadas acarretando com isto grandes imprecisões nos valores de contorno, entretanto as respostas observadas no domínio apresentaram níveis de precisão adequados.

Exemplo 4.4.3- Placa Quadrada com Duas Bordas Adjacentes Engastadas e Duas Bordas Livres e Carga Uniformemente Distribuída.

A placa representa na Figura 4.20, com relação $\frac{h}{l} = 0,10$ e suportando carga uniformemente distribuída foi calculada utilizando-se uma discretização com 44 pontos sobre o contorno, 20 elementos e 12 pontos internos.

Os resultados obtidos são comparados com aqueles calculados por PAIVA [47] utilizando o MEC e o MEF com o elemento T.18, considerando-se as hipóteses de Kirchhoff, discretização com 20 elementos de contorno (MEC) e 144 elementos finitos (MEF). Os resultados comparativos para deslocamentos transversais são apresentados na Tabela 4.7.

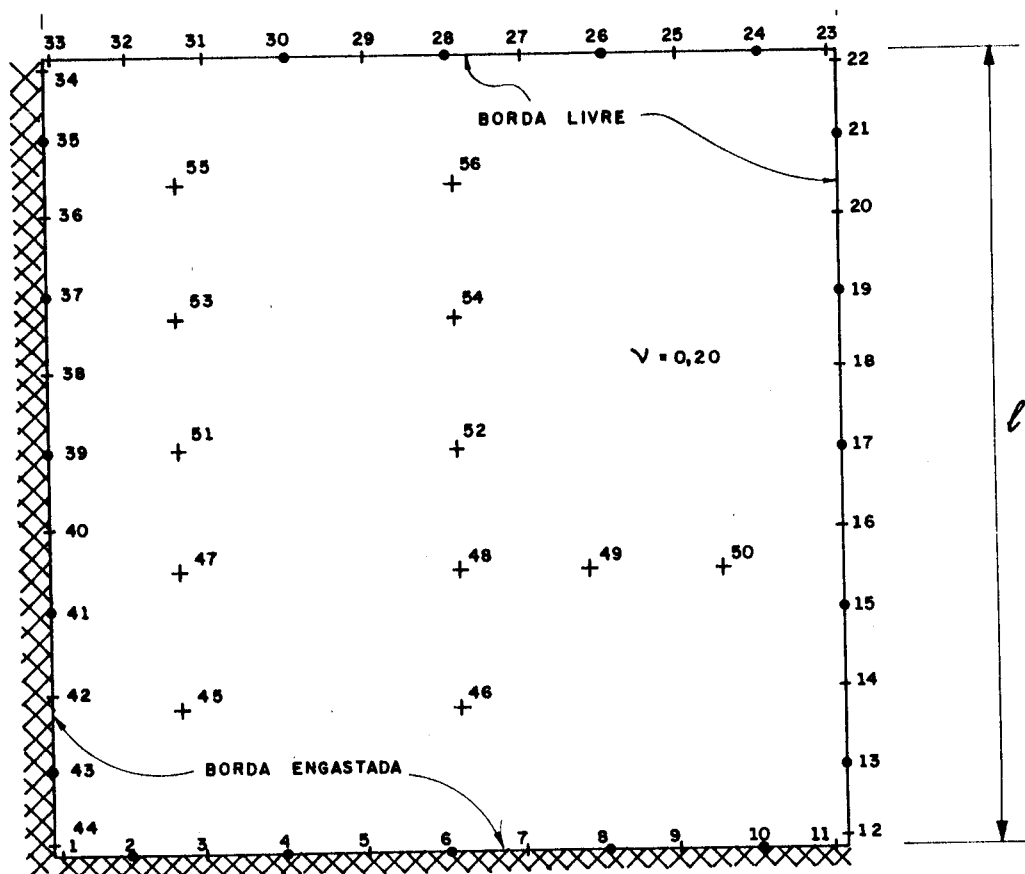


Fig. 4.20- Placa do Exemplo 4.4.3

TABELA 4.7- Deslocamentos Transversais na placa do Exemplo 4.4.3.

PONTO	$w\left(\frac{D}{ql^4}\right)$		
	MEC	PAIVA [47] MEC	PAIVA [47] MEF
22	0,0435	0,0458	0,0407
54	0,0129	0,0131	0,0121
56	0,0167	0,0171	0,0156

Na Tabela 4.8 apresentam-se os valores dos momentos em alguns pontos.

TABELA 4.8- Valores de M_{xx} e M_{yy} na placa do Exemplo 4.4.3.

PONTO	$M_{xx}\left(\frac{1}{ql^2}\right)$		
	MEC	PAIVA [47] MEC	PAIVA [47] MEF
51	0,0631	0,0652	0,0608
53	0,0906	0,0941	0,0883
55	0,1147	0,1185	0,1123
$M_{yy}\left(\frac{1}{ql^2}\right)$			
	MEC	PAIVA [47] MEC	PAIVA [47] MEC
45	0,0154	0,0141	0,0130
46	0,0631	0,0652	0,0608
48	0,0210	0,0229	0,0191
49	0,0291	0,0318	0,0269
50	0,0364	0,0418	0,0337

É interessante notar que os resultados obtidos neste exemplo situaram-se entre os valores obtidos por PAIVA [47] nas análises através do MEF e do MEC, muito próximos do valor médio.

Exemplo 4.4.4- Placa Quadrada Apoiada nas Bordas com Carga Uniformemente Distribuída Parcial.

Uma placa quadrada simplesmente apoiada com condições de contorno "hard", suportando carga uniforme sobre um subdomínio quadrado, conforme indicado na Figura 4.21, foi resolvida utilizando-se uma discretização com 36 pontos sobre o contorno, 16 elementos e 10 pontos internos.

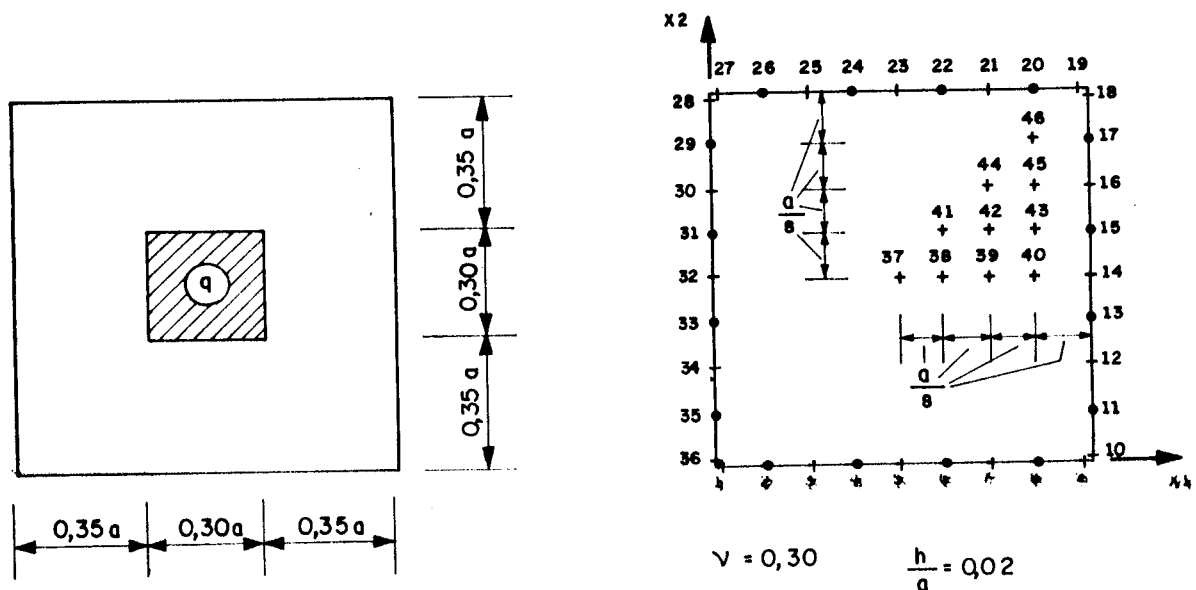


Fig. 4.21- Placa Apoiada nas Quatro Bordas com Carga Uniforme Parcialmente Distribuída.

Na Tabela 4.9 são apresentados os resultados dos deslocamentos transversais comparados com os resultados analíticos da Teoria de Kirchhoff. O valor do momento fletor M_{xx} , no centro da placa foi igual a $0,170P$, sendo $P=q(0,30a)^2$, enquanto o valor dado por TIMOSHENKO [99], é

0,168P. Esta mesma placa foi analisada considerando-se uma carga concentrada P no centro da mesma. Neste caso, o valor obtido para a flecha no centro foi igual a $0,0115 \frac{Pa^2}{D}$ e o valor dado por [99] é $0,0116 \frac{Pa^2}{D}$. O valor encontrado para o momento fletor M_{xx} no ponto situado a uma distância a/40 em relação ao centro, foi de $0,0176Pa^2$, sendo o valor dado por [99] igual a $0,0181Pa^2$.

TABELA 4.9- Deslocamentos Transversais na Placa do Exemplo 4.4.4.

PONTO	$w \frac{10^3 D}{ql^4}$	
	Teoria Clássica	MEC
37	0,917	0,919
38	0,828	0,830
39	0,601	0,602
41	0,750	0,751

Exemplo 4.4.5- Placa Quadrada Apoiada nas Bordas com Carga Vertical Distribuída em Linha.

A placa quadrada de lado a, simplesmente apoiada nas quatro bordas, com rotação tangencial nula no contorno (condição "hard"), relação $\frac{h}{a} = 0,05$, coeficiente de Poisson igual a 0,30, foi calculada suportando uma linha de carga distribuída constante paralela à direção x_1 . A discretização adotada constou de 20 pontos sobre o contorno e 8 elementos. A linha de carga \bar{q} foi dividida em 2 elementos de mesmo comprimento (Figura 4.22).

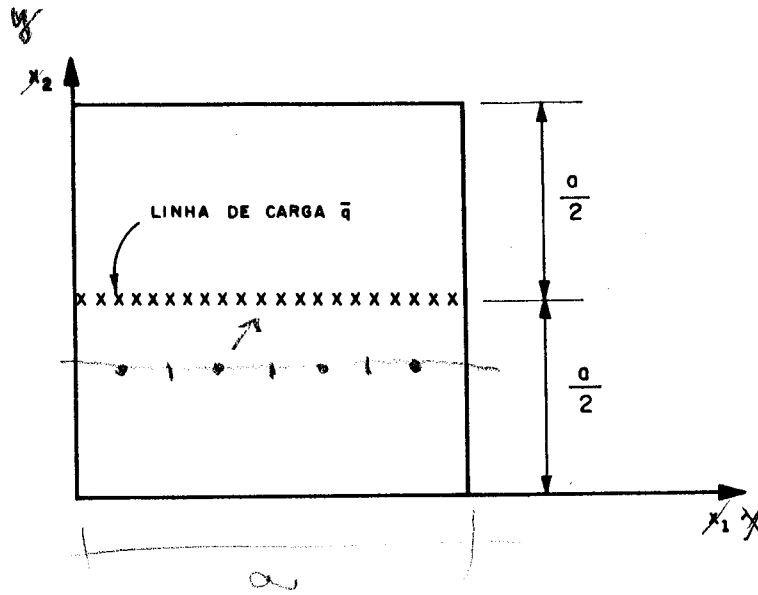


Fig. 4.22- Placa com Linha de Carga \bar{q} - Exemplo. 4.4.5

As soluções obtidas para deslocamento transversal w , momentos fletores M_{11} e M_{22} , juntamente com os resultados dados por TIMOSHENKO [99], são apresentados nas Figuras 4.23, 4.24 e 4.25, respectivamente, onde pode-se observar uma ótima concordância de resultados.

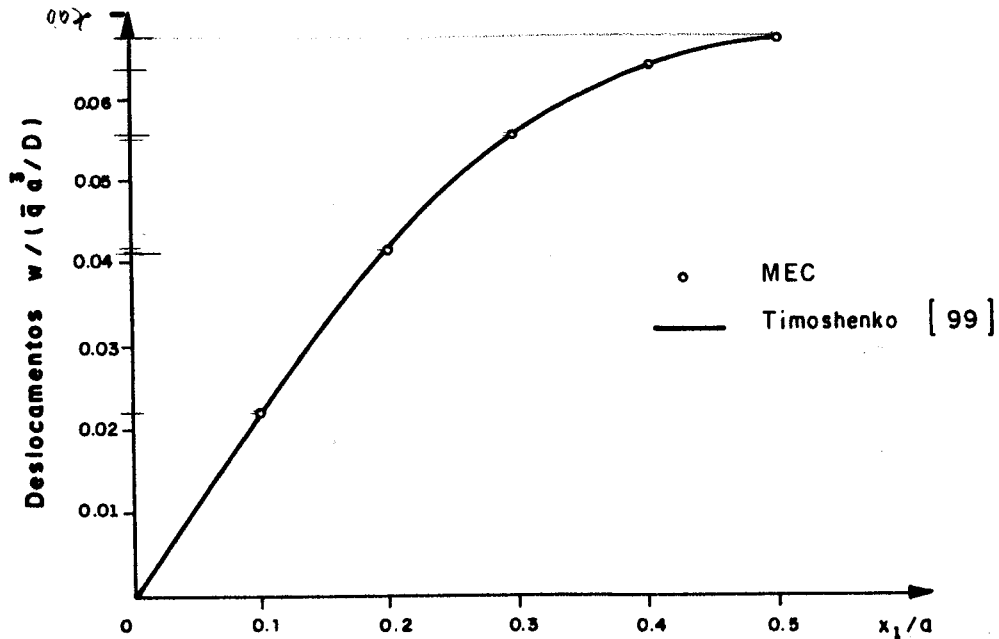


Fig. 4.23- Deslocamento w na Linha de Centro da Placa $x_2 = \frac{a}{2}$.

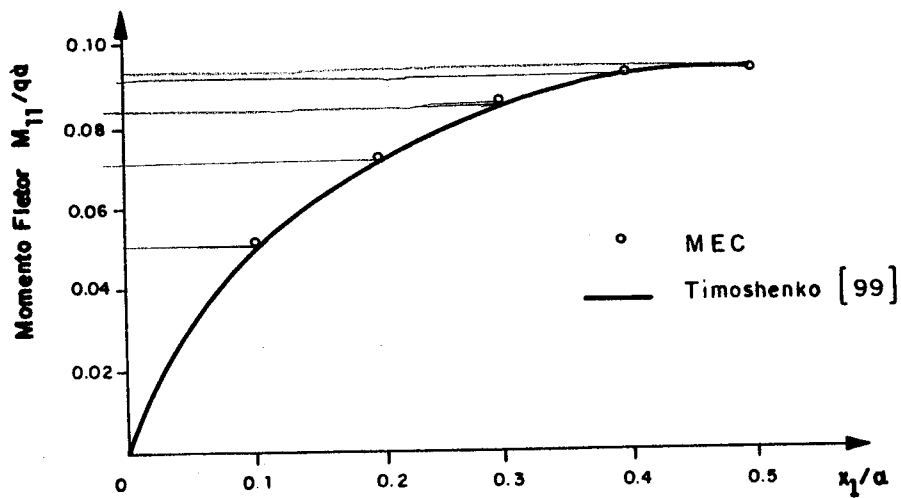


Fig. 4.24- Momento Fletor M_{11} sob a linha de centro $x_2 = \frac{a}{2}$

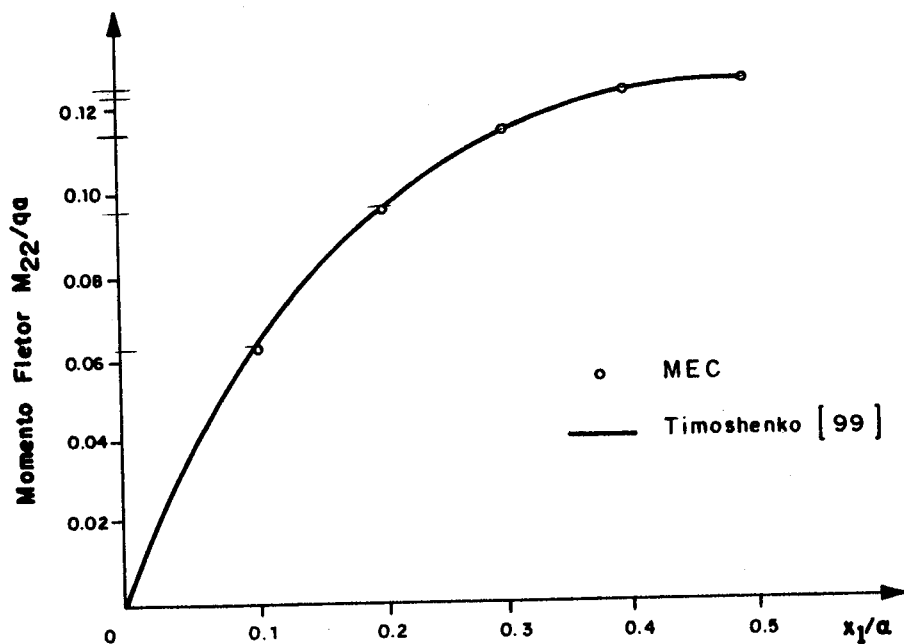


Fig. 4.25- Momento Fletor M_{22} na linha de centro $x_2 = \frac{a}{2}$

Exemplo 4.4.6- Placa em Balanço sob Ação de Duas linhas de Momentos Distribuídos

Uma placa em balanço com as mesmas características geométricas daquela calculada no Exemplo 4.4.1 e mesma

discretização de contorno representada na Figura 4.16, foi calculada sob ação de duas linhas de momentos distribuídos paralelas ao eixo x_1 , conforme indicado na Figura 4.26.

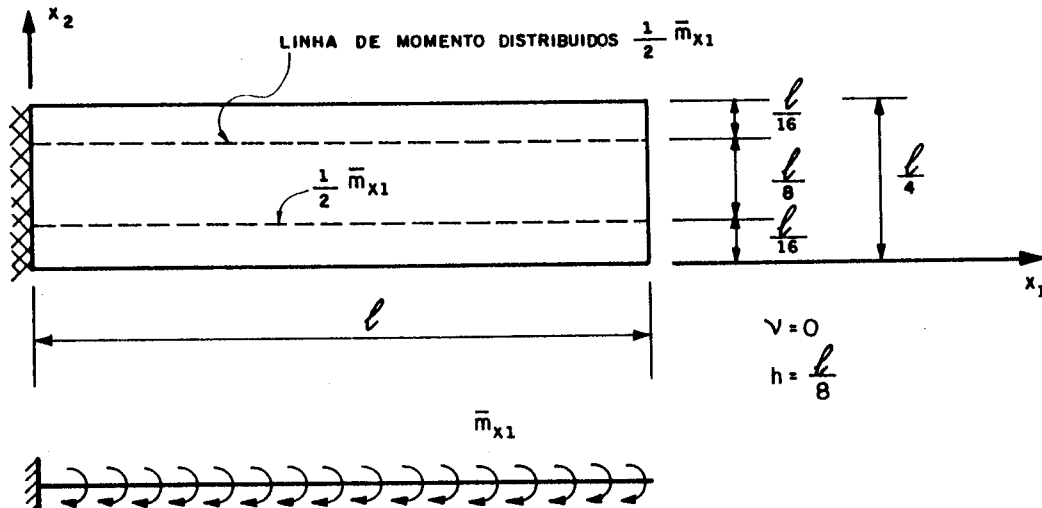


Fig. 4.26- Placa em Balanço com Linhas de Momentos Distribuídos

Os resultados obtidos para deslocamentos transversais e rotações são comparadas aos resultados correspondentes da Teoria de Vigas na Tabela 4.10, podendo-se observar uma ótima concordância entre os mesmos.

TABELA 4.10- Deslocamentos Transversais w e Rotações ϕ_{x1} sobre o Eixo $x_2 = \frac{l}{8}$ da Placa em Balanço - Exemplo 4.4.6.

x_1	$w \frac{D}{\bar{m}_{x1} l^3}$		$\phi_{x1} \frac{D}{\bar{m}_{x1} l^2}$	
	MEC	T. de Vigas	MEC	T. de Vigas
$l/4$	0,0143	0,0143	0,1094	0,1094
$l/2$	0,0521	0,0521	0,1875	0,1875
$3l/4$	0,1055	0,1055	0,2344	0,2344
l	0,1666	0,1667	0,2494	0,2500

Na Tabela 4.11 estão representados os resultados do momento M_{11} sobre o eixo $x_2 = \frac{\ell}{8}$.

TABELA 4.11- Momentos M_{11} sobre o Eixo $x_2 = \frac{\ell}{8}$ da Placa em Balanço - Exemplos 4.4.6.

x_1	$M_{11} \frac{1}{m_{x1}} \ell^3$	
	MEC	T. de Vigas
$\ell/4$	2,9997	3,0000
$\ell/2$	2,0002	2,0000
$3\ell/4$	1,0005	1,0000

Os resultados referentes ao MEC foram obtidos calculando-se a média dos valores dos pontos situados sobre cada seção, em ambas as Tabelas, (4.10) e (4.11).

Exemplo 4.4.7- Placa Esconsa Simplesmente Apoiada em Duas Bordas Opostas

Uma placa esconsa apoiada em duas bordas e com as outras duas livres, suportando carregamento uniformemente distribuído e com demais características mostradas na Figura 4.27 é aqui analisada com as hipóteses de Reissner sendo os resultados comparados com aqueles apresentados por HARTMANN e ZOTEMANTEL [46], que estudaram esta mesma placa usando as hipóteses de Kirchhoff através do MEC e do MEF. A discretização adotada consta de 52 pontos no contorno e 24 elementos.

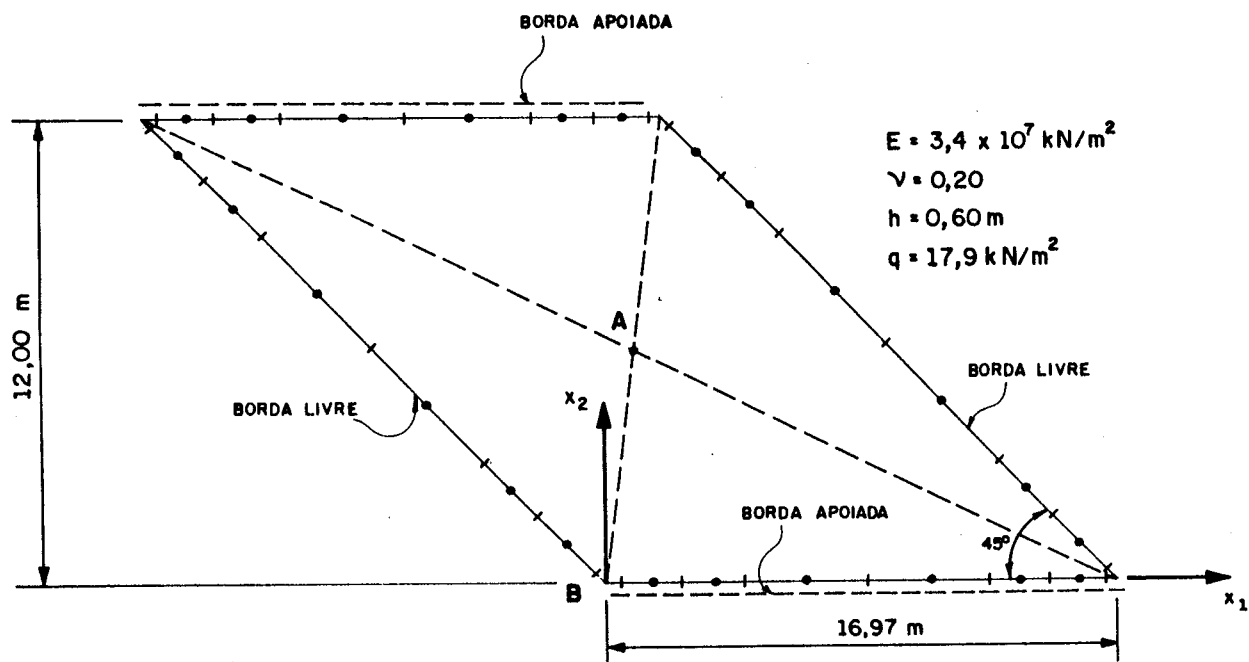


Fig. 4.27- Placa Esconsa com Carga Uniforme

Na figura 4.28 são apresentados os valores comparativos obtidos para os momentos fletores e torção sobre a diagonal AB (Fig. 4.27). Deve ser notado que de acordo com a referência [46], na vizinhança de canto obtuso B ocorrem singularidades com o valor do momento fletor M_{11} , tendendo erradamente para infinito e esta dificuldade aparece nos resultados numéricos através do MEF e do MEC.

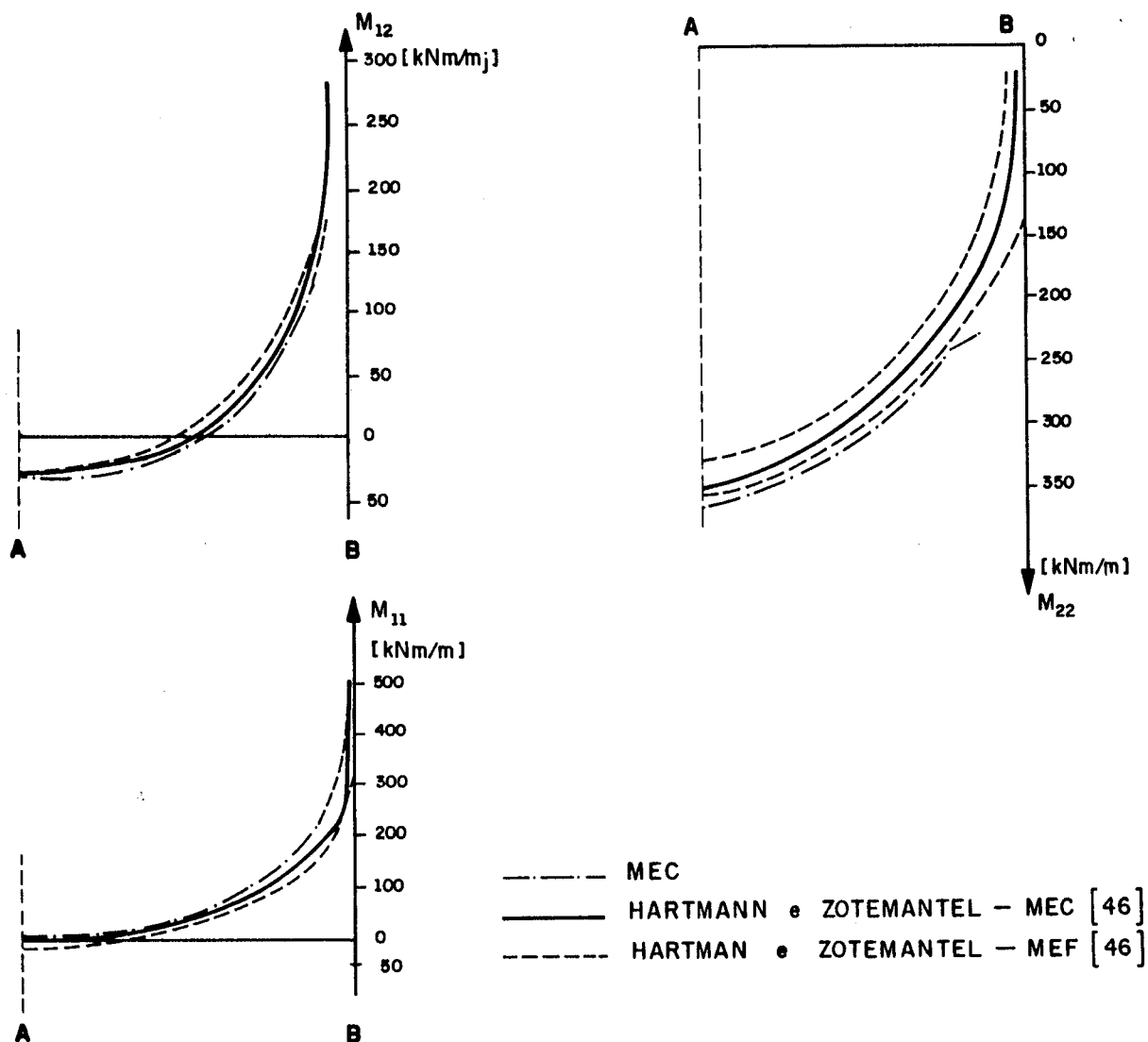


Fig. 4.28- Resultados Comparativos do Exemplo 4.4.7

Exemplo 4.4.8- Placa Quadrada Engastada Submetida a um Gradiente de Temperatura

Para avaliar a influência dos termos integrais de domínio das equações (3.24) e (3.32), que permitem a consideração de campos de momentos iniciais na resposta da placa, bem como as matrizes de influência correspondentes R

e S, neste exemplo considera-se uma placa quadrada de lado ℓ_1 engastada nas bordas, submetida a variação de temperatura linear t ao longo da espessura h , mas constante em relação a x_1 e x_2 em todo domínio. A variação t é simulada por um campo de momentos iniciais tal que:

$$M_{11}^0 = M_{22}^0 = D (1+\nu) \frac{\alpha t}{h}$$

onde α é o coeficiente de dilatação térmica do material.

De acordo com TIMOSHENKO [99], neste problema a placa permanece plana, sendo então nulos os deslocamentos, e os momentos fletores são uniformes em todo o domínio, podendo ser expressos por:

$$M_{11} = M_{22} = D (1+\nu) \frac{\alpha t}{h}$$

A discretização adotada para a solução através do MEC consiste de 36 pontos sobre o contorno, 16 elementos de comprimentos iguais, 49 pontos internos e 128 células internas.

Os resultados obtidos em termos de deslocamentos foram da ordem de 10^{-8} , e em termos de momentos fletores os desvios máximos observados em relação à solução analítica foram de 0,17%, comprovando a boa precisão da formulação proposta. Para efeito de ilustração, os resultados obtidos no centro da placa, com $h = 0,10\text{m}$, $\ell = 2,0\text{m}$, $\nu = 0,20$, $E = 2,5 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $M_{11}^0 = M_{22}^0 = 10 \text{ kN.m/m}$, foram:

$$w = 2,4694 \times 10^{-8} \text{ m}$$

$$M_{11} = - 9,987 \text{ kN.m/m}$$

$$M_{22} = -10,013 \text{ kN.m/m}$$

As rotações e momentos torçores também se anularam em todos os pontos. Este campo de momentos iniciais aplicado equivale à aplicação de uma variação de temperatura entre as faces superior e inferior igual a $38,4^{\circ}\text{C}$, admitindo-se $\alpha = 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$.

Exemplo 4.4.9- Placa Simplesmente Apoiada nas Bordas com um Gradiente Uniforme de Temperatura

Este exemplo tem como objetivos básicos os mesmos do exemplo anterior e trata de uma placa quadrada simplesmente apoiada nas 4 bordas, com rotações tangenciais ao contorno restringidas (condição "hard"), submetida a um diferença de temperatura linear ao longo da espessura igual a 8°C , em todo o domínio. As características geométricas e do material estão indicadas na Figura 4.29. A discretização utilizada consiste de 44 pontos no contorno, 20 elementos, 81 pontos internos e 200 células no domínio. Para efeito de comparação, este mesmo exemplo foi processado pelo MEF, utilizando-se o programa SUPERSAP [102], com malha de 441 pontos e 400 elementos quadrilaterais. Este programa utiliza elemento de placa baseado na Teoria Clássica.

Dados:

$$a = 2,0\text{m} \quad \nu = 0,30 \quad h = 0,20 \text{ m} \quad E = 2,5 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$M_{11}^0 = M_{12}^0 = D(1+\nu)\frac{\alpha t}{h} = 0,9524 \times 10^{-2} \text{ kN}\times\text{m/m}$$

$$\alpha = 10^{-5} \quad t = 8^{\circ}\text{C}$$

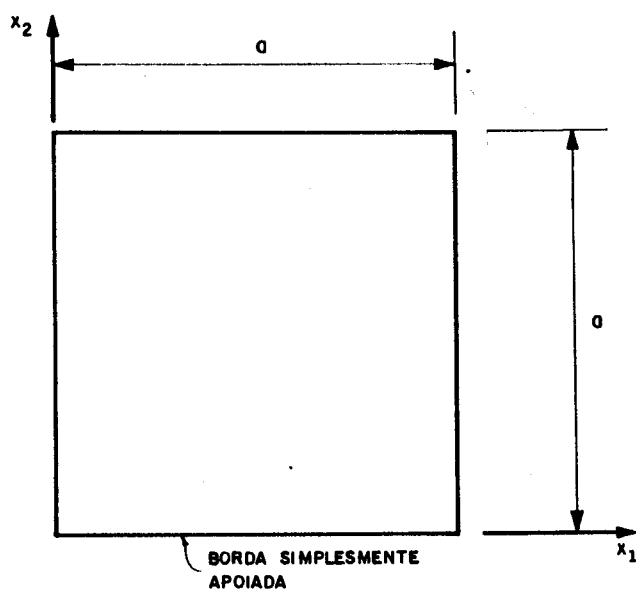


Fig. 4.29- Placa do exemplo 4.4.8

A variação de temperatura t é representada, neste problema, por um campo de momentos iniciais:

$$M_{11}^0 = M_{22}^0 = 0,9524 \times 10^{-2} \text{ kNm/m}$$

Os resultados comparativos em termos de deslocamentos ao longo da linha de centros $x_2 = a/2$ são apresentados na Tabela 4.12.

TABELA 4.12- Deslocamento na Linha de Centro: $x_2 = \frac{a}{2}$

x_1	$10^3 w$ (m)		$10^3 \phi_{x1}$	
	M.E.C	SUPERSAP	M.E.C.	SUPERSAP
0	0	0	-0.35196	-0.35081
a/10	0.06043	0.06031	-0.25584	-0.25368
a/5	0.10341	0.10320	-0.17465	-0.17616
3a/10	0.13188	0.13161	-0.11011	-0.10994
2a/5	0.14806	0.14775	-0.05278	-0.05271
a/2	0.15330	0.15298	0.	0.

Na Tabela 4.13 são apresentados os resultados comparativos dos momentos fletores na linha de centro.

TABELA 4.13- Momentos Fletores na Linha de Centro: $x_2 = \frac{a}{2}$

x_1	$M_{11} \times 10^2 \text{ kNm/m}$		$M_{22} \times 10^2 \text{ kNm/m}$	
	M.E.C	SUPERSAP	M.E.C.	SUPERSAP
a/10	-0.1088	-0.1099	-0.5582	-0.5584
a/5	-0.2033	-0.2055	-0.4630	-0.4640
3a/10	-0.2748	-0.2770	-0.3914	-0.3929
a/5	-0.3184	-0.3205	-0.3478	-0.3495
a/2	-0.3332	-0.3350	-0.3332	-0.3350

A observação das Tabelas 4.12 e 4.13 mostra uma ótima concordância entre os valores obtidos pelo MEC e pelo MEF. Com relação aos deslocamentos w , o maior desvio entre resultados é da ordem de 0,21%, no caso das rotações 0,85%, e para os momentos 1%.

ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE PLACAS DE REISSNER ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo a formulação de elementos de contorno para placas, sob as hipóteses de Reissner, é adaptada visando-se a análise de problemas de acordo com a teoria clássica da plasticidade. No início, é feita uma revisão da análise elasto-plástica unidimensional, seguida por uma generalização dos conceitos da plasticidade para problemas contínuos no espaço tridimensional e mais especificamente para placas. As leis básicas do comportamento elasto-plástico são apresentadas, antes que os aspectos numéricos sejam considerados. Com esta finalidade são introduzidos neste texto apenas os conceitos básicos como o potencial plástico e a condição de normalidade, e ainda as expressões essenciais da teoria da plasticidade. O tratamento completo deste assunto pode ser encontrado em textos clássicos relacionados na bibliografia. [104] [105].

São formuladas relações tensão-deformação para as condições pós-escoamento e o procedimento para o cálculo da solução plástica é baseado no processo das tensões iniciais, proposto por ZIENKIEWICS et alii [96], para o Método dos

Elementos Finitos. O algoritmo implementado neste trabalho permite considerar os critérios de Von Mises e Tresca.

Algumas aplicações simples para o cálculo de placas de acordo com os referidos critérios são apresentados ao final deste capítulo para mostrar a utilidade da técnica proposta.

5.2. PROBLEMAS ELASTOPLÁSTICOS UNIDIMENSIONAIS

O comportamento elastoplástico é caracterizado por uma resposta elástica inicial, sobre a qual uma deformação plástica é sobreposta, depois que um certo nível de tensão tenha sido alcançado. A deformação plástica é essencialmente irreversível no descarregamento e incompressível por natureza.

O início da deformação plástica é condicionado por um critério de escoamento e a deformação pós-escoamento geralmente ocorre com uma forte redução na rigidez do material. A configuração deformada é, portanto, dependente do nível de tensão e do histórico de carregamento. Uma hipótese importante da teoria da plasticidade é a total independência entre a deformação e o tempo. Portanto, de acordo com esta hipótese a deformação plástica ocorre instantaneamente após a aplicação do carregamento.

Para situações unidimensionais, o comportamento elastoplástico pode ser definido através de parâmetros obtidos a partir de um ensaio uniaxial. Algumas curvas tensão-deformação idealizadas são usualmente admitidas para representar o comportamento do material, visando-se com isto simplificações na análise elastoplástica.

A idealização mais simples é o comportamento elastoplástico perfeito, ilustrado pela figura 5.1.a, no qual admite-se a mesma resposta do material à tração e à compressão. Este comportamento pode também ser representado por um modelo mecânico consistindo de uma mola elástica

linear e um deslizador montado em série conforme Figura 5.1.b. O comportamento é puramente elástico até que o nível de tensões alcance a tensão de escoamento, quando admite-se que o deslizador escoe e a deformação cresça indefinidamente.

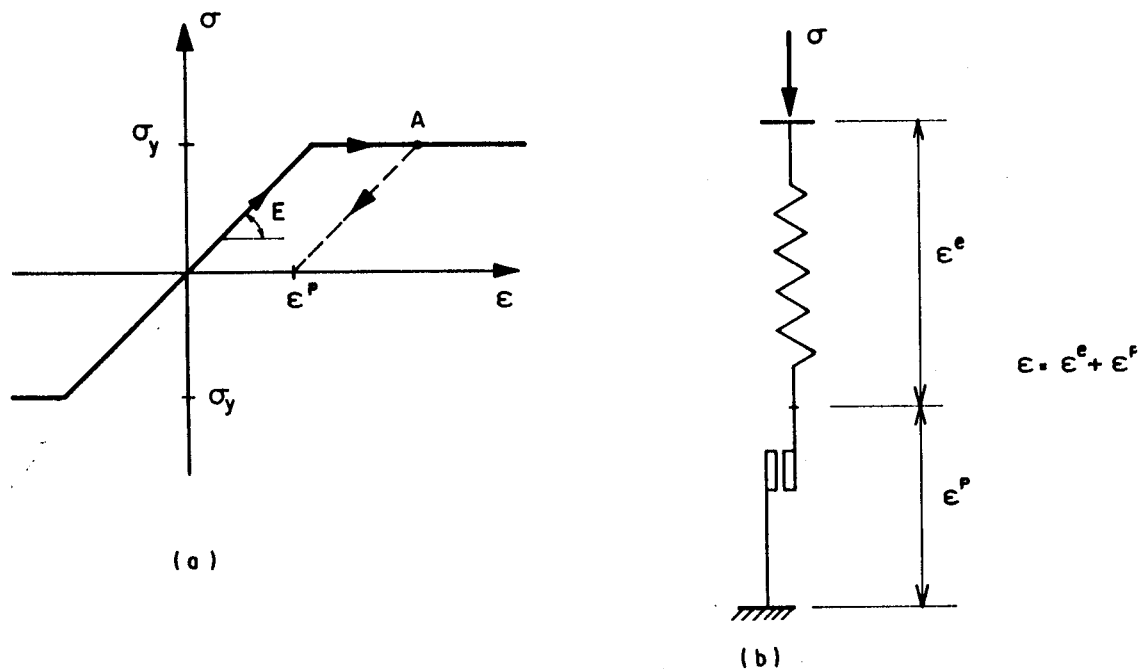


Fig. 5.1- Material Elastoplástico Perfeito

a) Curva Tensão-Deformação;

b) Modelo Mecânico.

Considerando-se o ponto A da figura 5.1.a como o estado de tensão em um ponto do corpo sollicitado uniaxialmente, a curva para o descarregamento a partir deste nível de tensão, é dada pela linha tracejada paralela ao trecho elástico. Então, uma parcela de deformação irreversível, ϵ^P , permanece no corpo após a remoção total do carregamento. Para qualquer outro recarregamento, o corpo se comporta elasticamente, até que se atinja a tensão de escoamento, σ_y , e a deformação total deve incluir a deformação plástica, ϵ^P , devida ao carregamento prévio.

A deformação total devida a qualquer carregamento pode

ser descomposta numa componente elástica, ϵ^e , e numa componente plástica, ϵ^p , isto é

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (5.1)$$

O nível de tensão para um material elastoplástico perfeito está limitado à seguinte condição:

$$\sigma - \sigma_y \leq 0 \quad (5.2)$$

onde apenas os valores positivos de σ são considerados, devido à simetria das relações tensão-deformação. O primeiro membro de (5.2) pode ser entendido como uma função de escoamento $F(\sigma)$ que não pode assumir valores positivos, ou seja:

$$F(\sigma) \leq 0 \quad (5.3)$$

Um outro comportamento idealizado consiste em assumir endurecimento (ou amolecimento) do material após o limite de escoamento. A Figura 5.2.a apresenta uma relação tensão-deformação com efeito de endurecimento linear, caracterizado pelo módulo constante E_T . Neste caso, o comportamento pode ser representado pelo modelo mostrado na figura 5.2.b.

Inicialmente, as respostas elásticas são dadas por duas molas elásticas montadas em paralelo. Quando a tensão de escoamento, σ_y , é atingida o deslizador escoo e apenas uma mola trabalha para modelar a resposta com endurecimento linear. Nestas condições, a tensão de escoamento não representa o nível de tensão máximo possível, mas significa apenas o início do fluxo plástico. Sendo o ponto A, na Figura 5.2.a o estado de tensão em um ponto de um corpo carregado, a curva de descarregamento, representada pela linha tracejada, também é paralela ao trecho elástico da curva de carregamento. Nos carregamentos subsequentes, correspondentes a valores positivos ou negativos de σ , o material escoará outra vez somente quando a tensão atingir

o valor Y , e a deformação prévia deve ser considerada para o cálculo da nova deformação plástica.

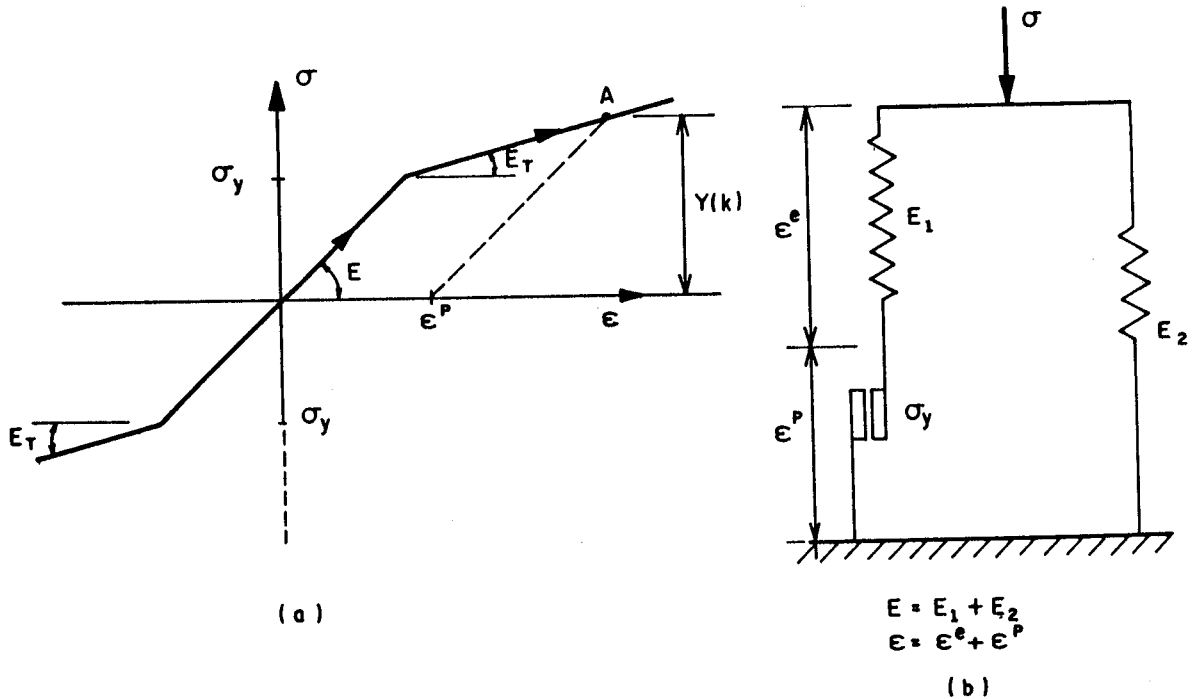


Fig. 5.2- Material Elastoplástico com Endurecimento Linear

A equação (5.1) permanece válida para o cálculo da deformação total, e o nível de tensão é limitado pela seguinte condição:

$$F(\sigma, k) \leq 0 \quad (5.4)$$

ou

$$\sigma - Y(k) \leq 0 \quad (5.5)$$

onde k é denominado parâmetro de endurecimento do material.

Na teoria da plasticidade os efeitos de endurecimento são frequentemente considerados através da aplicação do conceito de trabalho de endurecimento. Usando-se este conceito, a tensão de escoamento Y pode ser interpretada como uma função do parâmetro de endurecimento k , o qual é

associado ao trabalho plástico total realizado por unidade de volume, isto é:

$$k = \int \sigma \, d\epsilon^P \quad (5.6)$$

ou

$$Y = Y \left(\int \sigma \, d\epsilon^P \right) \quad (5.7)$$

Para o caso de endurecimento linear, conforme mostrado na Fig. 5.2, a tensão de escoamento é calculada por:

$$Y(k) = \sigma_Y + H' \epsilon^P \quad (5.8)$$

onde

$$H' = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \quad (5.9)$$

O comportamento plástico discutido até aqui trata somente de plasticidade de materiais nas quais é válida a simetria da curva tensão-deformação. Entretanto, após a primeira deformação plástica, muitos materiais podem perder a simetria e os níveis de tensão de escoamento à tração e à compressão podem apresentar valores $Y(k)$ diferentes. Este fenômeno é conhecido como efeito Bauschinger e usualmente aparece sempre que há reversão de tensão. Neste trabalho não é considerado este tipo de comportamento do material.

5.3. TEORIA DA PLASTICIDADE NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Na seção anterior, o comportamento plástico unidimensional foi apresentado. Sua generalização para problemas tridimensionais e a particularização para o caso de placas é aqui sumarizada, juntamente com as hipóteses básicas necessárias.

Na mecânica do contínuo, a deformação total, ϵ_{ij} , pode ser expressa também como a soma das componentes elástica, ϵ_{ij}^e , e plástica, ϵ_{ij}^p , isto é:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (5.10)$$

Analogamente um pequeno incremento de deformação, $d\epsilon_{ij}$, pode ser decomposto em componentes elástica e plástica:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (5.11)$$

A formulação de uma teoria que modele comportamento elastoplástico do material exige que sejam especificadas as seguintes relações entre tensões e deformações:

. Uma relação explícita entre tensões e deformações para descrever o comportamento elástico, isto é, antes do início das deformações plásticas.

. Um critério de escoamento indicando o nível de tensão no qual inicia-se o fluxo plástico e o fim do comportamento elástico.

. Uma relação entre tensão e deformação para o comportamento pós-escoamento que permita o cálculo da componente de deformação plástica.

A relação tensão-deformação na fase elástica é dada pela expressão (2.3), isto é:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e \quad (5.12)$$

onde C_{ijkl} é o tensor de constantes elásticas que no caso de material isotrópico é dado por:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} \quad (5.13)$$

sendo λ e μ as constantes de Lamé, e δ_{ij} o delta de Kronecker.

O critério de escoamento para definir o estado de tensão no qual se iniciam as deformações plásticas pode ser escrito como:

$$F(\sigma_{ij}, k) = 0 \quad (5.14)$$

ou

$$f(\sigma_{ij}) - Y(k) = 0 \quad (5.15)$$

onde $f(\sigma_{ij})$ é uma função somente das componentes de tensão e pode ser entendida como uma tensão efetiva ou tensão equivalente, $\bar{\sigma}$; e $Y(k)$ dada como função do parâmetro de endurecimento k , desempenha o papel de tensão de escoamento. Com isto, o estado de tensão no ponto representado pela tensão efetiva pode ser comparado com a tensão de escoamento obtida a partir de ensaios uniaxiais.

Qualquer critério de escoamento para um material isotrópico deve ser independente do sistema de coordenadas usado, podendo ser expresso geralmente em função de invariantes de tensão, dados por:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{kk} \\ J_2 &= \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij} \\ J_3 &= \frac{1}{3} s_{ij}s_{jk}s_{ki} \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde s_{ij} são as componentes do tensor anti-esférico, definidas por:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (5.17)$$

As observações experimentais indicam que a influência da pressão hidrostática, $\frac{I_1}{3}$, não é significativa no escoamento de metais. A maioria dos critérios sugeridos para materiais metálicos têm agora somente interesse histórico,

uma vez que contrariam as previsões experimentais. Os dois critérios mais simples e que ainda são utilizados para estes materiais são o critério de Tresca e o de Von Mises.

O critério de Tresca, estabelecido em 1864, afirma que o material escoá quando a tensão máxima de cisalhamento alcança um certo valor crítico. Se as tensões principais são $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sendo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, então o escoamento se inicia quando:

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = Y(k) \quad (5.18)$$

onde $Y(k)$ é a tensão de escoamento do material determinada experimentalmente através de ensaio uniaxial.

Este critério pode ser representado no espaço de tensões $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ por uma superfície prismática hexagonal de comprimento infinito, conforme figura 5.3, onde o eixo do prisma fica definido por $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, e coincide com a diagonal do espaço. A seção transversal da superfície é constante, em consequência da hipótese de que a pressão hidrostática não influencia no escoamento, e pode ser representada geometricamente, projetando-a no chamado plano π , onde: $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$, conforme mostrado na Figura 5.4.

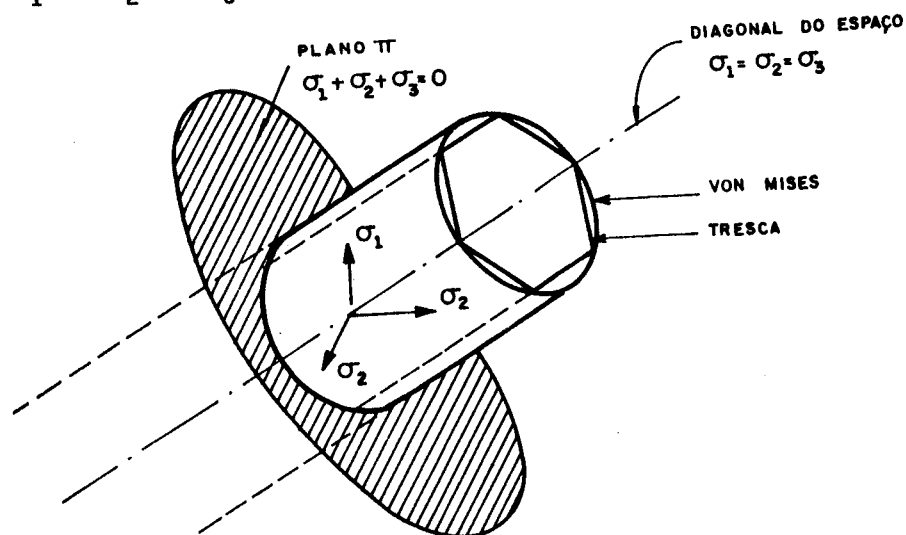


Fig. 5.3- Representação Geométrica das superfícies de Escoamento de Tresca e Von Mises.

Quando a função de escoamento depende somente de J_2 e J_3 , ela pode ser escrita na forma $f(\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 - \sigma_3)$ e sua representação bidimensional, $f(\sigma_{ij}) = Y(k)$, pode ser feita conforme ilustrado na figura 5.4.b.

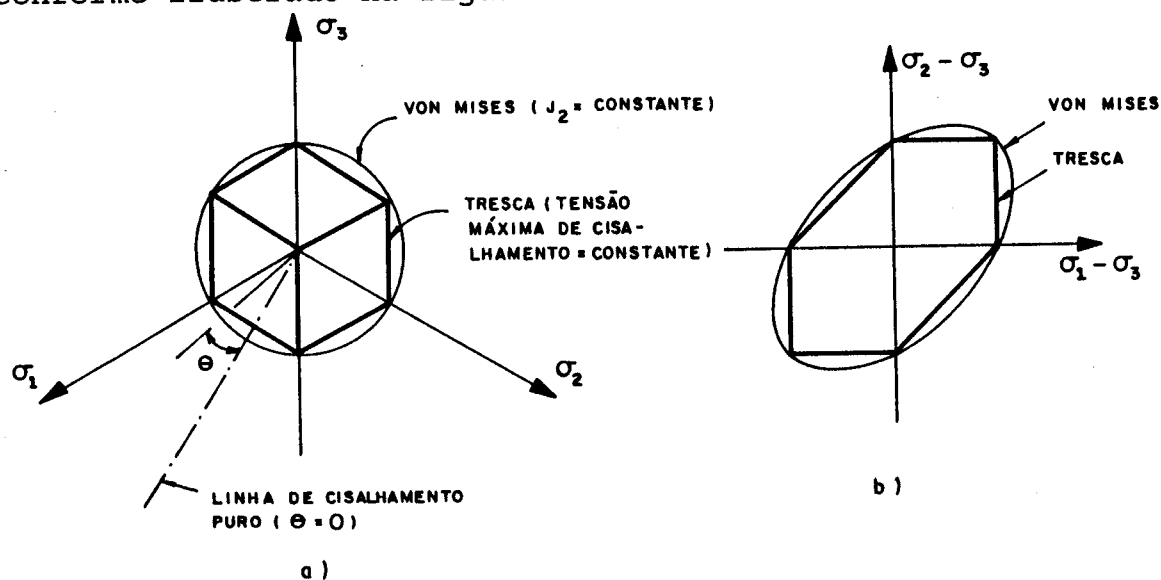


Figura 5.4- Representação Bidimensional dos Critérios de Tresca e Von Mises.
a) Projeção no plano π ;
b) Representação convencional no plano $\sigma_3 = 0$

O critério de Von Mises, estabelecido em 1913, afirma que o escoamento começa quando o invariante J_2 alcança um valor crítico, isto é:

$$(J_2)^{1/2} = K(k) \quad (5.19)$$

onde K é um parâmetro do material, a ser determinado. O invariante J_2 é expresso por (5.16) e pode ser escrito explicitamente como:

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

ou

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2 \right] + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2 \quad (5.20)$$

O critério (5.19) pode ser reescrito como:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{3} K \quad (5.21)$$

onde:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}(s_{ij}s_{ij})} \quad (5.22)$$

sendo $\bar{\sigma}$, a tensão equivalente ao caso uniaxial, para este critério. Existem duas interpretações físicas para o critério de Von Mises. A primeira é de que o escoamento se inicia quando a tensão de cisalhamento octaédrica atinge um valor crítico, isto é:

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} K \quad (5.23)$$

A tensão do cisalhamento octaédrica, τ_{oct} , é a tensão de cisalhamento atuante no plano octaédrico que é um plano igualmente inclinado em relação aos eixos das tensões principais. A segunda interpretação dada por Hencky, em 1924, afirma que o escoamento se inicia quando a energia de distorção elástica alcança um valor crítico.

O parâmetro K é a tensão de escoamento no estado de cisalhamento puro. O escoamento ocorre no ensaio de tração uniaxial, onde $\sigma_1 = \sigma_y$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Substituindo-se estes valores em (5.19), encontra-se:

$$K = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (5.24)$$

A figura 5.3 mostra a interpretação geométrica da superfície de escoamento de Von Mises que é um cilindro de seção transversal circular, no espaço das tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 . A projeção da superfície no plano π é um círculo de raio $\sqrt{2} K$, conforme mostrado na Figura 5.4.a. A representação bidimensional da superfície, no plano $\sigma_3 = 0$, é

uma elipse, mostrada na Figura 5.4.b.

Deve-se notar que, no critério de Von Mises, o parâmetro $K(k)$, e no critério de Tresca, o parâmetro $Y(k)$, são a tensão de escoamento no estado de cisalhamento puro. Entretanto, as relações entre a tensão de escoamento, σ_y , no estado de tensão uniaxial e o parâmetro $K(k)$ é diferente da relação entre σ_y e $Y(k)$. Se os dois critérios são forçados a coincidir para o estado de tensão uniaxial, a relação entre $K(k)$ e $Y(k)$ é $2/\sqrt{3} = 1,15$, e graficamente, o círculo de Von Mises circunscreve o hexágono de Tresca, conforme apresentado na Figura 5.4.

Após o escoamento inicial, nos estados múltiplos de tensão, o nível de tensões a partir do qual deformações plásticas adicionais voltam a ocorrer, pode ser dependente do grau de deformações plásticas atuais, devido ao fenômeno do endurecimento, discutido para o caso de modelos uniaxiais, na seção 5.2. Portanto a superfície de escoamento varia a cada estágio de deformação plástica, com as superfícies subsequentes sendo dependentes de alguma forma das deformações plásticas ocorridas. Alguns modelos que descrevem o endurecimento do material são ilustrados pela Figura 5.5. Na Figura 5.5.a é apresentado um material elastoplástico perfeito onde a superfície de escoamento não depende de forma nenhuma da plastificação ocorrida anteriormente. Na Figura 5.5.b é mostrado um material com endurecimento isotrópico para o qual as superfícies de escoamento subsequentes são expansões uniformes da superfície original, sem translação. Caso as superfícies de escoamento preservem a sua forma e orientação, mas apresentem translação no espaço das tensões, como corpo rígido, tem-se o modelo de endurecimento cinemático, conforme ilustrado na Figura 5.5.c. Este modelo ocorre nos casos de materiais que sofrem o fenômeno Bauschinger, quando ocorre carregamento cíclico.

O desenvolvimento progressivo da superfície de escoamento pode ser definido relacionando-se a tensão de escoamento Y à deformação plástica por meio do parâmetro de endurecimento k . Isto pode ser feito de duas maneiras. Pela primeira, o grau de trabalho de endurecimento pode ser postulado como sendo uma função do trabalho plástico total, w_p , somente. Então

$$k = w_p \quad (5.25)$$

onde

$$w_p = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (5.26)$$

sendo $d\epsilon_{ij}^p$ as componentes plásticas de deformação ocorridas durante um incremento de deformação. Alternativamente, k pode ser relacionado à uma medida da deformação plástica total, chamada deformação plástica efetiva ou equivalente, definida incrementalmente como:

$$d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij} d\epsilon_{ij}} \quad (5.27)$$

Então o parâmetro de endurecimento k é admitido como:

$$k = \bar{\epsilon}^p$$

sendo $\bar{\epsilon}^p$ o resultado da integração de $d\bar{\epsilon}^p$ sobre o histórico das deformações. Este comportamento é denominado endurecimento por deformação ("strain hardening").

Os estados de tensão para os quais $f=Y(k)$ representam estados plásticos, enquanto o comportamento elástico é caracterizado por $f < Y(k)$. Em um estado plástico, $f = Y(k)$, a variação incremental na função de escoamento devido a uma variação incremental de tensão é:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (5.28)$$

Então se:

- $df < 0$ - ocorre descarregamento, isto é comportamento elástico, e o estado de tensão retorna para dentro da superfície de escoamento;
- $df = 0$ - ocorre um carregamento neutro, comportamento plástico para um material perfeitamente plástico, e o estado de tensão permanece na superfície de escoamento;
- $df > 0$ - ocorre carregamento plástico, comportamento plástico para um material com endurecimento, e o estado de tensão permanece na superfície de escoamento em expansão.

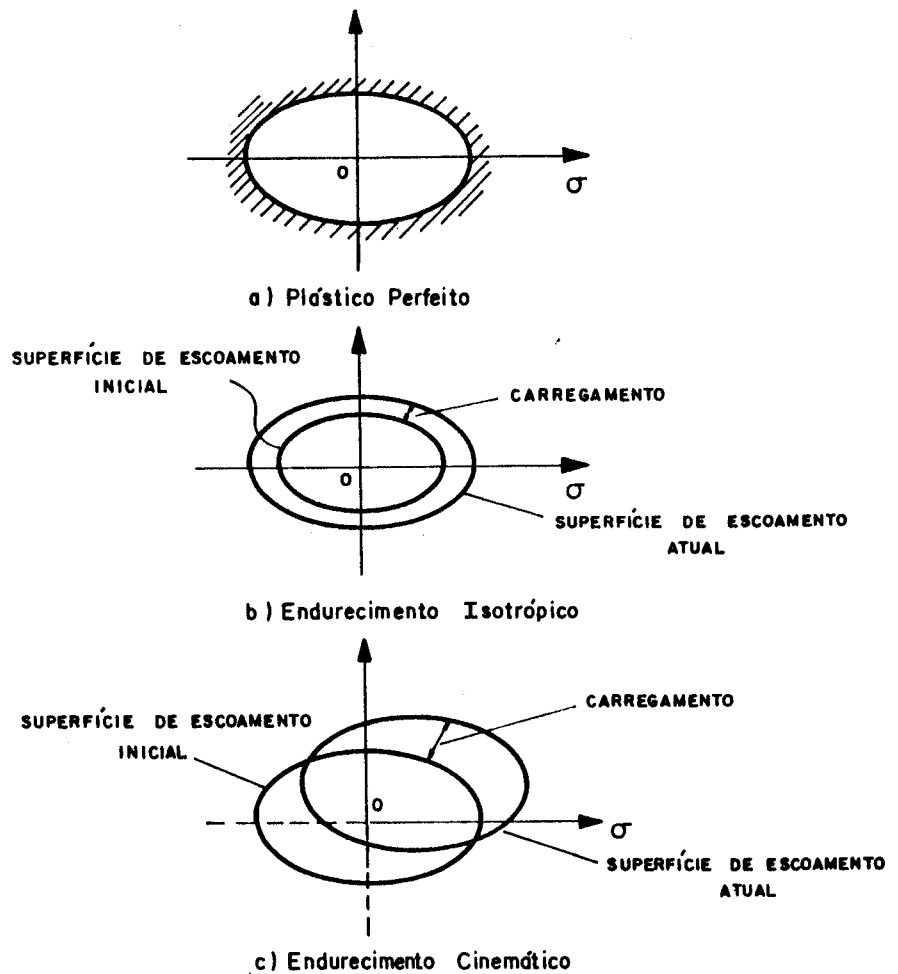


Fig. 5.5- Modelos de Representação de Comportamentos com Endurecimento.

Para a formulação de uma relação entre a componente de deformação plástica e o incremento de tensão, é necessário uma hipótese adicional sobre o comportamento do material na fase de pós-escoamento. Admite-se que o incremento de deformação plástica seja proporcional ao gradiente de tensão de uma grandeza chamada potencial plástico, Q , de forma que:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.29)$$

onde $d\lambda$ é uma constante denominada multiplicador plástico. A equação (5.29) é denominada lei de fluxo, uma vez que ela determina o fluxo plástico depois do escoamento. O potencial plástico Q deve ser uma função de J_2 e J_3 mas ainda não pode ser determinada na sua forma mais geral. Entretanto, quando se considera a função Q coincidente com a função de escoamento $F(\sigma_{ij}, k)$ tem-se uma lei de fluxo chamada associativa e neste caso podem ser formulados certos princípios variacionais e teoremas de unicidade. Esta identidade entre Q e F é válida desde que ambas sejam funções dos invariantes J_2 e J_3 . Assim a equação (5.29) pode ser expressa como:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij}, k) = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.30)$$

Esta expressão é denominada condição de normalidade, uma vez que o vetor $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ é normal à superfície de escoamento no ponto que representa o estado de tensão considerado.

A teoria da plasticidade associada mostra que a condição de irreversibilidade das deformações plásticas implica na realização de trabalho plástico positivo durante um ciclo de tensão. Este fato garante a convexidade da superfície de escoamento e a normalidade do fluxo plástico. Esta normalidade assegura a unicidade de solução para um

problema elastoplástico de valor de contorno.

A normalidade do fluxo plástico e a convexidade da superfície do escoamento são de natureza muito geral, não só para materiais elastoplásticos perfeitos como também para materiais elastoplásticos com endurecimento.

Para o caso particular de $f = J_2$, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} \quad (5.31)$$

Portanto (5.30), torna-se

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda s_{ij} \quad (5.32)$$

que são conhecidas como equações de Prandtl-Reuss.

O incremento elástico de deformação dado por 5.12, pode ser expresso como:

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{ds_{ij}}{2\mu} + \frac{1-2\nu}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} \quad (5.33)$$

A deformação total pode ser escrita como a soma de (5.30) e (5.33), isto é:

$$d\epsilon_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2\mu} + \frac{(1-2\nu)}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.34)$$

Para a formulação da relação tensão-deformação para o comportamento pós-escoamento, a parcela de deformação elástica dada por (5.11) é introduzida na equação (5.12), de forma que o incremento de tensão fica expresso por:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^p) \quad (5.35)$$

Substituindo-se o incremento de deformação plástica dado pela lei de fluxo (5.30):

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d\epsilon_{kl} - a_{kl} d\lambda) \quad (5.36a)$$

onde:

$$a_{kl} = \frac{\partial F(\sigma_{kl}, k)}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial f(\sigma_{k,l})}{\partial \sigma_{kl}} \quad (5.36b)$$

Considerando-se que o incremento da função $F(\sigma_{kl}, k)$ é nulo, tem-se:

$$a_{ij} d\sigma_{ij} - \frac{\partial Y(k)}{\partial k} dk = 0 \quad (5.37)$$

Introduzindo-se o conceito de endurecimento dado por (5.26) na equação (5.37), tem-se:

$$a_{ij} d\sigma_{ij} - \frac{\partial Y(k)}{\partial k} \sigma_{ij} a_{ij} d\lambda = 0 \quad (5.38)$$

O segundo termo de (5.38) pode ser escrito como:

$$\frac{\partial Y(k)}{\partial k} \sigma_{ij} a_{ij} d\lambda = \frac{\partial Y(k)}{\partial k} \sigma_{ij} \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (5.39)$$

Aplicando-se o teorema de Euler, tem-se:

$$\frac{\partial Y(k)}{\partial k} \sigma_{ij} a_{ij} d\lambda = \frac{\partial Y(k)}{\partial k} f(\sigma_{ij}) d\lambda \quad (5.40)$$

Considerando-se $f(\sigma_{ij})$ como um tensão equivalente unidimensional $\bar{\sigma}$ e utilizando-se a definição de endurecimento dada por (5.6) e (5.26), a equação (5.38) pode ser reescrita como:

$$a_{ij} d\sigma_{ij} - H' d\lambda = 0 \quad (5.41)$$

onde H' é função de inclinação do diagrama tensão-deformação para o caso uniaxial.

O multiplicador plástico $d\lambda$ pode ser calculado a partir de (5.36) e (5.41), resultando:

$$d\lambda = \frac{a_{ij} C_{ijkl} d\epsilon_{kl}}{[a_{ij} d_{ij} + H']} \quad (5.42)$$

onde

$$d_{ij} = C_{ijkl} a_{kl} \quad (5.43)$$

Substituindo-se o valor de $d\lambda$ na equação (5.36) tem-se:

$$d\sigma_{ij} = \left[C_{ijkl} - \frac{d_{ij} a_{mn} C_{mnkl}}{a_{mn} d_{mn} + H'} \right] d\epsilon_{kl} \quad (5.44)$$

Para efeito computacional é conveniente escrever-se o incremento de tensão nas componentes elástica e plástica, isto é:

$$d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}^e - d\sigma_{ij}^p \quad (5.45)$$

onde o incremento elástico é dado por:

$$d\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} d\epsilon_{kl} \quad (5.46)$$

enquanto o incremento plástico é calculado por:

$$d\sigma_{ij}^p = \frac{d_{ij} a_{mn}}{[a_{mn} d_{mn} + H']} d\sigma_{mn}^e \quad (5.47)$$

Para efeito de programação computacional também é conveniente reescreverem-se as funções de escoamento em termos de invariantes de tensão alternativos. Esta formulação permite expressarem-se as funções de escoamento e a lei de fluxo de uma forma geral. O terceiro invariante de tensão J_3 pode, alternativamente, ser denotado por θ e escrito como:

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsen \left[- \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_3^{3/2}} \right] \quad (5.48)$$

sendo θ similar ao parâmetro de Lode definido por:

$$\Gamma = - \sqrt{3} \operatorname{tg} \theta$$

O ângulo θ , em radianos, deve variar no intervalo:

$$- \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$$

Utilizando-se esta alternativa, o critério de Tresca pode ser escrito como:

$$2\sqrt{J_2} \cos \theta = Y(k) = \sqrt{3} K(k) = \sigma_Y(k) \quad (5.49)$$

O critério de Von Mises não se altera já que depende somente do invariante J_2 , isto é:

$$\sqrt{J_2} = K(k) \quad (5.50)$$

ou

$$\sqrt{3J_2} = \sigma_Y(k) \quad (5.51)$$

De acordo com NAYAK e ZIENKIEWICZ [97], o vetor de fluxo \tilde{a} pode ser expresso numa forma geral para todos os critérios de escoamento, dada por:

$$\tilde{a} = C_1 \tilde{a}_1 + C_2 \tilde{a}_2 + C_3 \tilde{a}_3 \quad (5.52)$$

sendo:

$$\tilde{a}_1^T = \frac{\partial J_1}{\partial \sigma} = \left\{ 1, 1, 1, 0, 0, 0 \right\}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2^T &= \frac{\partial (J_1)^{1/2}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2(J_2)^{1/2}} \{s_{11}, s_{22}, s_{33}, 2\sigma_{23}, 2\sigma_{31}, 2\sigma_{12}\} \\ \tilde{a}_3^T &= \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \left\{ \left(s_{22}s_{33} \cdot \sigma_{23}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left(s_{11}s_{33} \cdot \sigma_{13}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \right. \\ &\quad \left(s_{11}s_{22} \cdot \sigma_{12}^2 + \frac{J_2}{3} \right), 2 \left(\sigma_{13}\sigma_{12} \cdot s_{11} \sigma_{23} \right), \\ &\quad \left. 2 \left(\sigma_{12}\sigma_{23} \cdot s_{22} \sigma_{13} \right), 2 \left(\sigma_{23}\sigma_{13} \cdot s_{33} \sigma_{12} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.53)$$

onde:

$$\tilde{\sigma}^T = \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12} \}$$

C_1 , C_2 e C_3 são constantes que dependem de critério de escoamento considerado. No caso do critério de Tresca, estas constantes são expressas por:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 2(\cos\theta)(1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}3\theta) \quad (5.54)$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{3}}{J_2} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos 3\theta}$$

Para o critério de Von Mises as constantes são dadas por:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \sqrt{3} \quad (5.55)$$

$$C_3 = 0$$

5.4. CONSIDERAÇÕES DE PLASTICIDADE PARA PLACAS

Basicamente todas as considerações e hipóteses introduzidas na seção 5.3 são aplicáveis ao caso de placas, porém algumas adaptações devem ser efetuadas para que a análise possa ser feita considerando-se o estado de tensões generalizadas (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) , em um ponto qualquer da mesma.

Assim, admite-se que a superfície de escoamento F seja função de tensões associadas à flexão (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) , mas não das tensões de cisalhamento transversal (Q_x, Q_y) . As experiências mostram que a interação entre as tensões de cisalhamento transversal e as tensões devidas à flexão não têm importância significativa, especialmente no caso de placas não muito espessas. A função de escoamento também é função de um parâmetro de endurecimento H' .

Considerando-se a seção transversal de uma placa fletida e a distribuição linear de tensões normais na fase elástica, à medida que o carregamento vai sendo aumentado a tensão de escoamento σ_y é atingida nas fibras extremas das faces superior e inferior, conforme Figura 5.6.b no caso de material elastoplástico perfeito. Acréscimos adicionais de carregamento implicam no espalhamento do escoamento das fibras externas para as internas, até que a seção fique totalmente plastificada conforme Figura 5.6.c e 5.6.d. Para considerar-se o espalhamento deve-se pensar em camadas ao longo da espessura e tratá-las como estados planos de tensão. Neste trabalho não se considera este espalhamento gradual da plasticidade, admitindo-se que toda a seção se plastifique instantaneamente quando o momento fletor atinge o valor do momento de plastificação da placa dado por:

$$M_o = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz = \frac{\sigma_y h^2}{4} \quad (5.56)$$

isto é, admite-se a plastificação da seção com uma distribuição de tensões σ como a da figura 5.6.b, sendo necessário $\sigma > \sigma_y$. Assim, a superfície de plastificação da placa é expressa em função do estado de tensão no sentido generalizado (M_{xx} , M_{yy} , M_{xy}) e do momento de plastificação M_0 que é função do parâmetro de endurecimento H' .

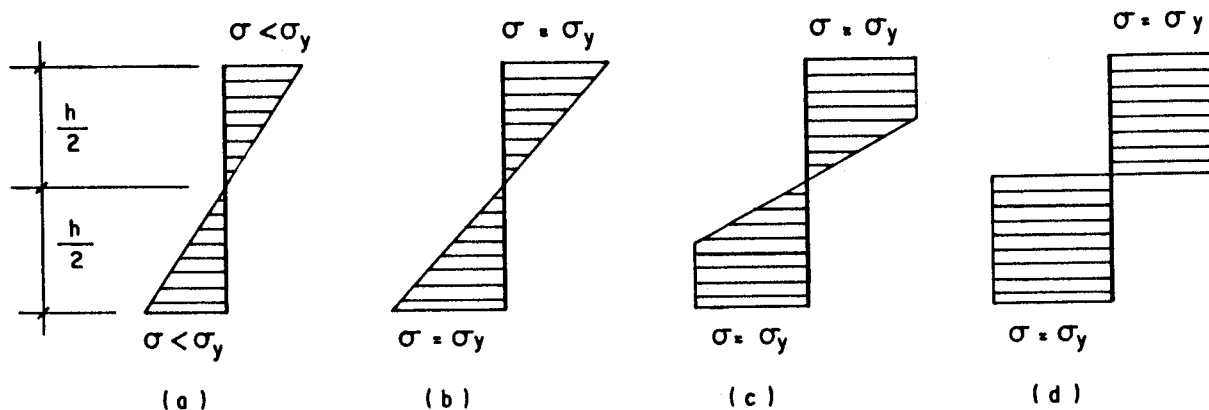


Fig.5.6- Plastificação da Seção Transversal da Placa

As deformações generalizadas correspondentes às tensões (M_{xx} , M_{yy} , M_{xy}) são as curvaturas (χ_{xx} , χ_{yy} , χ_{xy}).

Analogamente ao que foi feito para o caso de solicitação axial na seção (5.2), o comportamento elastoplástico para a flexão unidimensional de placas é caracterizado por uma resposta elástica inicial e por deformações plásticas quando o valor absoluto do momento fletor $|M|$ supera o momento de plastificação M_0 . Após o descarregamento, as deformações plásticas são irreversíveis.

O comportamento momento-curvatura admitido para uma faixa de placa de largura unitária e espessura h , constituída de material elastoplástico, é apresentado na

Figura 5.7. Inicialmente, a faixa deforma-se elasticamente com uma rigidez à flexão EI , até que o momento fletor alcance o valor do momento de plastificação inicial M_0 , quando toda a seção fica plastificada.

Acrescendo-se o valor do carregamento, o material passa a apresentar, por hipótese, um comportamento com endurecimento linear caracterizado por um módulo de rigidez à flexão tangencial, $(EI)_T$.

Após o escoamento inicial M_0 o material começa a sofrer deformações plásticas, e o incremento de curvatura pode ser composto numa componente elástica e outra plástica, de forma que:

$$d\chi = d\chi^e + d\chi^p \quad (5.57)$$

O parâmetro de endurecimento, de acordo com a Figura 5.7, pode ser definido como:

$$H' = \frac{dM}{d\chi^p} \quad (5.58)$$

Este pode ser entendido como a inclinação do diagrama momento-curvatura após a remoção da componente elástica de curvatura. Então:

$$H' = \frac{dM}{d\chi - d\chi^e} = \frac{(EI)_T}{1 - \frac{(EI)_T}{EI}} \quad (5.59)$$

No caso de comportamento elastoplástico perfeito o valor de H' é nulo.

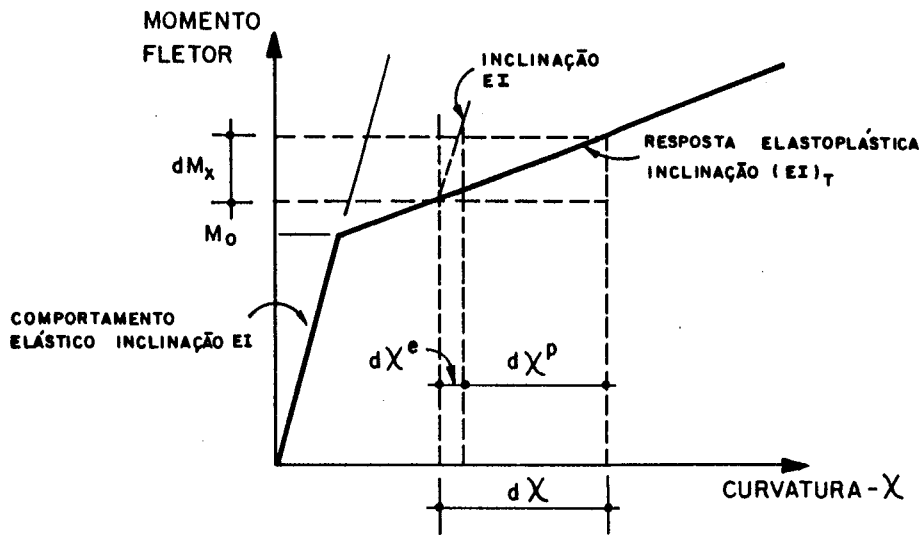


Fig. 5.7- Comportamento Momento-Curvatura para a Flexão Unidimensional de uma Faixa de Placa.

Portanto, após a definição de H' para o caso de flexão unidimensional de uma faixa de placa, todas as equações desenvolvidas na seção (5.3) são válidas para o caso das placas com as seguintes correspondências:

$$d\sigma_{ij} \rightarrow dM_{\alpha\beta} \quad d\sigma_{ij}^e \rightarrow dM_{\alpha\beta}^e \quad d\sigma_{ij}^p \rightarrow dM_{\alpha\beta}^p$$

$$d\epsilon_{ij} \rightarrow d\chi_{\alpha\beta} \quad d\epsilon_{ij}^e \rightarrow d\chi_{\alpha\beta}^e \quad d\epsilon_{ij}^p \rightarrow d\chi_{\alpha\beta}^p$$

$$d_{ij} \rightarrow d_{\alpha\beta} \quad a_{ij} \rightarrow a_{\alpha\beta} \quad C_{ijkl} \rightarrow C_{\alpha\beta\gamma\theta}$$

A representação matricial do tensor de 4a. ordem no caso das placas isotrópicas é dada por:

$$C = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

A relação momento-curvatura na fase elástica fica expressa como:

$$\tilde{M}^e = \begin{Bmatrix} M_{11}^e \\ M_{11}^e \\ M_{12}^e \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.61)$$

5.5. ABORDAGEM NUMÉRICA PARA A SOLUÇÃO PLÁSTICA

Nas seções anteriores foram apresentados os requisitos básicos necessários para a modelagem de soluções plásticas. Agora, usando-se estes requisitos juntamente com a formulação de elementos de contorno para placas de Reissner, apresentada na seção 4.3, é dada uma abordagem numérica para o cálculo de placas de comportamento elastoplástico baseada no processo das tensões iniciais, similar àquela proposta por ZIENKIEWICS et alii [96].

Em função da natureza incremental da relação tensão deformação, (5.44), para o comportamento pós-escoamento, é utilizado um algoritmo incremental-iterativo baseado no método da rigidez inicial, análogo aquele apresentado por OWEN e HINTON [98].

O problema é resolvido elasticamente uma vez para um valor genérico do carregamento, sendo os momentos calculados através da equação (4.113). Desta maneira obtém-se o vetor de momentos elásticos \tilde{M}^e para o carregamento genérico, não havendo necessidade de serem calculados nesta fase os valores das incógnitas de contorno, \tilde{X} . Se no carregamento real atuante sobre a placa não ocorrem efeitos de campos de momentos iniciais tais como, temperatura e retração, entre outros, a solução elástica para os momentos fica expressa

por:

$$\underset{\sim}{M}^e = \underset{\sim}{N} \quad (5.62)$$

Tendo em vista o processo incremental, o valor de incremento de carga é fatorado como uma fração do carregamento genérico para o qual foi determinada a solução elástica M^e . Este fator de carga para um incremento qualquer, $\underset{\sim}{i}$, é referido como $\beta_{\underset{\sim}{i}}$.

Para um incremento de carga genérico $\underset{\sim}{i}$, a resposta elástica em termos de momentos, $(\Delta M^e)_{\underset{\sim}{i}}$ é dada por:

$$(\Delta M^e)_{\underset{\sim}{i}} = \beta_{\underset{\sim}{i}} M^e \quad (5.63)$$

À medida que o carregamento vai sendo aplicado os fatores $\beta_{\underset{\sim}{i}}$ vão sendo acumulados. O incremento de momentos $(\Delta M^e)_{\underset{\sim}{i}}$ é somado ao estado de momentos atuais em cada ponto da placa. Se algum ponto atinge o estágio plástico, o incremento de momentos atuais deve ser calculado, e o excesso de momentos ou incremento plástico deve ser reaplicado ao sistema como um campo de momentos iniciais ΔM^0 . Neste trabalho é utilizado um algoritmo explícito para elevar o ponto de volta à superfície de plastificação, análogo àquele apresentado por OWEN e HINTON [98].

A sequência básica utilizada para cada incremento de carga pode ser resumida basicamente nos seguintes passos:

- (a) Calcula-se o incremento elástico de momentos $\Delta M_{\underset{\sim}{i}}^e$, para a iteração $\underset{\sim}{i}$. Para a primeira iteração, $\Delta M_{\underset{\sim}{i}}^e$ é calculada a partir da solução elástica para o carregamento genérico de acordo com (5.63). Para as demais iterações $\Delta M_{\underset{\sim}{i}}^e$ é calculado, de acordo com (4.113), como:

$$\Delta \tilde{M}_i^e = S \Delta \tilde{M}_{(i-1)}^p \quad (5.64)$$

onde $\Delta \tilde{M}_{(i-1)}^p$ é o excesso de momentos calculado na iteração anterior, aplicado como um campo de momentos iniciais M^0 .

(b) Em cada ponto da placa, o incremento elástico $\Delta \tilde{M}_i^e$ é somado ao estado de momentos atuais determinado na iteração anterior de forma que:

$$\tilde{M}_i^e = \tilde{M}_{(i-1)} + \Delta \tilde{M}_i^e \quad (5.65)$$

onde, $\tilde{M}_{(i-1)}$ representa o estado de momentos atuais na iteração anterior (i-1) e o índice i denota a iteração em curso.

(c) O próximo passo é dependente da ocorrência ou não de escoamento no ponto durante a (i-1)-ésima iteração, isto é, a anterior.

Verifica-se então se:

$$\bar{M}_{(i-1)} > M_y = M_y^0 + H' \bar{\chi}_{i-1}^p \quad (5.66)$$

onde $\bar{M}_{(i-1)}$ é o momento efetivo calculado com base no estado de momentos atuais, $\tilde{M}_{(i-1)}$, da iteração anterior, de acordo com o critério de escoamento adotado, M_y é o momento de plastificação para o caso de flexão unidimensional, M_y^0 é o primeiro momento de plastificação para o mesmo caso e H' é o parâmetro de endurecimento linear definido conforme (5.59), $\bar{\chi}_{i-1}^p$ é a curvatura plástica efetiva acumulada até a (i-1)-ésima iteração de acordo com (5.74). O cálculo do momento efetivo \bar{M} é efetuado considerando-se a superfície de plastificação adotada, que neste trabalho pode ser de Tresca ou Von Mises.

(c.1) Se $\bar{M}_{(i-1)}$ for maior que M_Y , então o ponto em consideração já escoou na iteração anterior. Verifica-se então se $\bar{M}_i^e > \bar{M}_{i-1}$, onde \bar{M}_i^e é o momento efetivo calculado com base em M_i^e .

. Se $\bar{M}_i^e < \bar{M}_{(i-1)}$, então o ponto está se descarregando elasticamente e passa-se diretamente ao passo f.

. Se $\bar{M}_i^e > \bar{M}_{(i-1)}$, então o ponto escoou anteriormente e os momentos ainda estão crescendo. Portanto todo o excesso de momentos $(\bar{M}_i^e - \bar{M}_{(i-1)})$ deve ser reduzido de forma que o ponto fique na superfície de escoamento conforme indicado na figura (5.8).

Neste caso o fator de redução R, que define a parcela de momento a ser removida para satisfazer ao critério de escoamento, é igual a um (R=1,0).

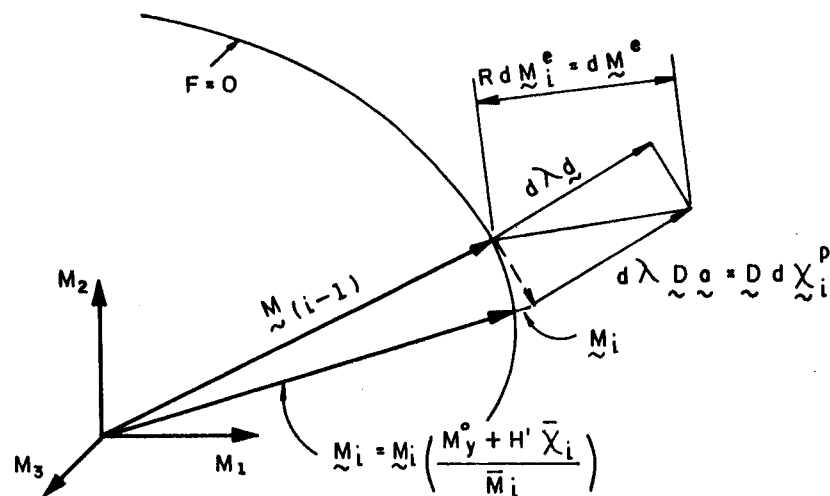


Fig.5.8- Variação incremental de tensão em um ponto que escoou na iteração anterior.

(c.2) Se $\bar{M}_{(i-1)}$ for menor que M_Y , então o ponto em consideração não escoou anteriormente. Portanto deve ser verificado se ocorre escoamento durante a iteração em curso, isto é, se $\bar{M}_i^e > M_Y^0$.

. Se \bar{M}_i^e for menor que M_Y^0 , o ponto ainda está no regime elástico e então passa-se diretamente ao passo f.

. Se \bar{M}_i^e for maior que M_Y^0 , o ponto escoou durante a iteração corrente, como mostrado na figura (5.9). A porção do momento maior que o valor de escoamento deve ser reduzida para que o ponto fique na superfície de escoamento. O fator de redução de momentos R, de acordo com a figura 5.9, é dado por:

$$R = \frac{AB}{AC} = \frac{\bar{M}_i^e - M_Y}{\bar{M}_i^e - \bar{M}_{(i-1)}} \quad (5.67)$$

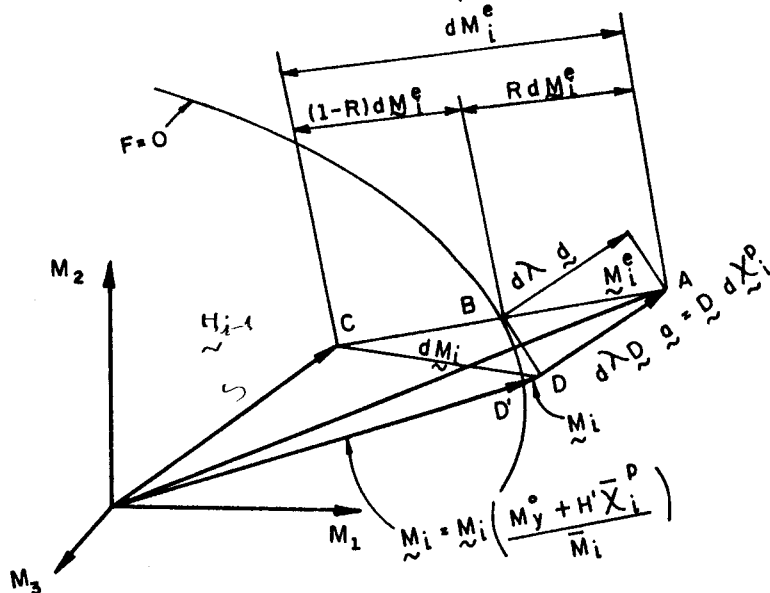


Fig. 5.9- Variação Incremental de Tensão em um Ponto que Inicia o Escoamento na Iteração Corrente.

(d) Este passo vale apenas para os pontos em regime de escoamento. Calcula-se então a porção dos momentos totais que satisfazem ao critério de escoamento, isto é:

$$\tilde{M}_{(i-1)} + (1-R)\tilde{\Delta M}_i^e$$

(e) A parcela remanescente $R\tilde{\Delta M}_i^e$ deve ser eliminada efetivamente de alguma forma. O ponto A deve ser trazido para a superfície de escoamento permitindo-se a ocorrência de deformações plásticas. Isto pode ser imaginado fisicamente como se segue. Carregando-se a partir do ponto C, conforme figuras 5.8 e 5.9, o ponto de tensão se move elasticamente até atingir a superfície de escoamento em B. Além deste ponto, se o comportamento fosse elástico, resultaria em um estado de tensão representado pelo ponto A. Entretanto, considerando-se o critério de escoamento, o ponto que representa o estado de tensão não pode se mover para fora da superfície, e conseqüentemente, o ponto pode somente atravessar a superfície até que as condições de equilíbrio e as relações constitutivas sejam satisfeitas. De acordo com as expressões (5.45), (5.46) e (5.47),

tem-se:

$$\tilde{\Delta M}_i = \tilde{\Delta M}_i^e - d\lambda d \quad (5.68)$$

ou

$$\tilde{M}_i = \tilde{M}_{i-1} + \tilde{\Delta M}_i^e + d\lambda d \quad (5.69)$$

onde \tilde{M}_i é o estado de momentos atuais na iteração i , satisfazendo-se às condições elastoplásticas, $d\lambda$ é definido por (5.42) e d por (5.43). A expressão (5.69) é ilustrada vetorialmente pelas Figuras 5.8 e 5.9. Vê-se que para um incremento finito de momentos, o ponto D correspondente ao

estado de momentos finais M_i , pode cair fora da superfície de escoamento. Esta discrepância pode ser quase totalmente eliminada, assegurando-se que os incrementos de carga considerados sejam suficientemente pequenos. Entretanto, o ponto D pode ser levado para a superfície de escoamento através de um ajuste no vetor M_i . Denotando-se o momento efetivo como \bar{M}_i e observando-se que este deve coincidir com $M_y = M_y^O + H' \bar{\chi}_i^P$, o fator de ajuste à superfície deve ser igual a:

$$\left[\frac{M_y^O + H' \bar{\chi}_i^P}{\bar{M}_i} \right] \quad (5.70)$$

Este fator de ajuste é aplicado a cada uma das componentes de M_i .

Se incrementos de carga relativamente grandes são aplicados, o processo anteriormente descrito pode levar a resultados imprecisos na posição final do ponto D, quando o mesmo estiver nas proximidades de uma região da superfície com grande curvatura. Este fato é ilustrado pela Figura 5.10, onde o processo de redução do estado de momentos elásticos para a superfície de escoamento leva ao ponto D, o qual é ajustado à superfície na posição D'.

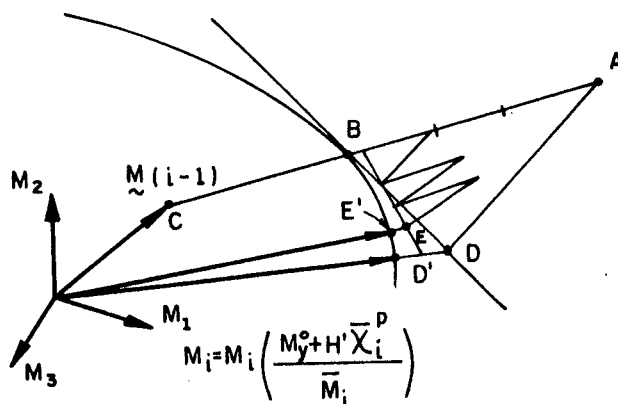


Fig.5.10- Refinamento do Processo de Redução do Ponto à Superfície de Escoamento.

Uma precisão maior pode ser obtida removendo-se o excesso de momentos em vários estágios. A figura 5.10 mostra o caso onde o excesso de momentos é dividido em três partes iguais e sendo as mesmas removidas uma de cada vez. Após os três ciclos de redução chega-se ao ponto E, representando o estado final de momentos que é ajustado à posição E' com a utilização do fator (5.70). Vê-se que a posição final dos pontos D' e E' pode ser significativamente diferente. Para cálculo do número de ciclos de redução adota-se um critério prático dado por OWEN e HINTON [87], onde o excesso de momentos é dividido em m partes iguais, sendo m o inteiro menor mais próximo de:

$$\left(\frac{\bar{M}_e^o - M_Y}{M_Y^o} \right)^{m+1} \quad (5.71)$$

Durante cada ciclo de redução de tensão são efetuadas basicamente as seguintes operações:

- . Cálculo do vetor de fluxo \tilde{d} definido por (5.36b) e do vetor \tilde{d} dado por (5.43);
- . Cálculo do multiplicador plástico de acordo com (5.42);
- . Cálculo de M_i sendo:

$$M_i = M_{(i-1)} + (1-R) \Delta M_i^e + \frac{R}{m} \Delta M_i^e - \frac{d\lambda \tilde{d}}{m} \quad (5.72)$$

Quando forem completados os m ciclos de redução tem-se:

$$M_i = M_{(i-1)} + \Delta M_i^e - d\lambda \tilde{d} \quad (5.73)$$

sendo a parcela $d\lambda d$ igual à componente plástica do incremento de momentos, dada por (5.47). Este incremento plástico ΔM_i^P é acumulado como M^P , e é aplicado na próxima iteração como um campo de momentos iniciais M^0 .

. Cálculo do incremento de deformação plástica efetiva conforme se segue. De acordo com a expressão (5.26):

$$\Delta w_p = \sigma_{ij} \Delta \epsilon_{ij}^P = \sigma_{ij} d\lambda a_{ij}$$

ou reescrevendo-se em termos de tensão efetiva e de deformação efetiva:

$$\sigma \Delta \bar{\epsilon}^P = d\lambda a_{ij} \sigma_{ij}$$

então a deformação plástica efetiva fica:

$$\bar{\epsilon}_i^P = \bar{\epsilon}_{(i-1)}^P + d\lambda \frac{a_{ij} \sigma_{ij}}{\bar{\sigma}} \quad (5.74)$$

sendo que no caso de placas a deformação plástica efetiva $\bar{\epsilon}^P$, corresponde a uma curvatura plástica efetiva $\bar{\chi}^P$, o estado de tensão σ_{ij} correspondente ao estado de momentos $M_{\alpha\beta}$, e a tensão efetiva $\bar{\sigma}$ ao momento efetivo \bar{M} .

Este processo é repetido até que sejam completados os m ciclos de redução.

- (f) Este passo se aplica apenas aos pontos cujo comportamento permanece elástico. Calculam-se para os mesmos as componentes de momentos atuais, na iteração i , como:

$$\tilde{M}_i = \tilde{M}_{(i-1)} + \Delta \tilde{M}_i^e \quad (5.75)$$

- (g) Calcula-se o momento efetivo \bar{M}_i , com o estado de momentos \tilde{M}_i devidamente ajustado à superfície de escoamento no caso dos pontos que sofreram plastificação. No caso dos pontos que permaneceram no regime elástico não há necessidade de se fazer o ajuste.

- (h) Verifica-se se ocorreu convergência. Caso não tenha ocorrido volta-se ao passo a para uma nova iteração. Quando ocorre a convergência passa-se ao incremento de carga seguinte, e repete-se o processo até que seja aplicado todo o carregamento. Neste trabalho considera-se que a convergência é atingida quando a relação entre o excesso de momento efetivo dado por:

$$R \left[\bar{M}_i^e - \bar{M}_{(i-1)} \right]$$

e o momento de plastificação da iteração em curso M_y^i fica abaixo de uma certa tolerância previamente especificada, isto é:

$$R \frac{[\bar{M}_i^e - \bar{M}_{(i-1)}]}{M_Y^i} < \text{Tolerância}$$

A tolerância pode também ser imposta em relação o incremento de deformação plástica efetiva conforme VENTURINI [2]. Ao final da iteração foram calculados e armazenados o incremento de momentos atuais $\Delta \bar{M}_i$, o estado de momentos atuais \bar{M}_i , o incremento de momentos plásticos $\Delta \bar{M}_i^P$, o estado de momentos plásticos acumulados \bar{M}_i^P , o incremento de curvatura plástica $\Delta \bar{\chi}_i^P$, e a deformação plástica efetiva acumulada $\bar{\chi}_i^P$.

No algoritmo anteriormente apresentado, somente os momentos são calculados, isto é, utiliza-se apenas a equação (4.113). O vetor de incógnitas de contorno, \bar{X} , dado pela equação (4.100) não é necessariamente calculado durante o processo iterativo, mas pode ser determinado a qualquer momento utilizando-se o incremento de momentos plásticos $\Delta \bar{M}_i^P$, ou o momento plástico acumulado \bar{M}_i^P , considerados como um campo de momentos iniciais \bar{M}^0 , mais o incremento de carga ou o carregamento acumulado. Para um problema onde são requeridos apenas os valores finais das forças e deslocamentos no contorno, estes podem ser calculados, apenas ao final do procedimento incremental iterativo, economizando-se consideravelmente o tempo de computação.

5.6. EXEMPLOS

A formulação integral para análise de não-linearidade física de placas de Reissner, proposta anteriormente é testada através de alguns exemplos simples, admitindo-se comportamento elastoplástico perfeito. O programa computacional implementado baseia-se num algoritmo incremental iterativo e no método de rigidez inicial. Em todos os exemplos, adota-se o parâmetro, $\alpha = 0,25$, para efeito de posicionamento dos pontos de colocação fora do domínio e o critério de plastificação de Von Mises.

Exemplo: 5.6.1 - Placa Biapoiada com Momentos Aplicados nas Extremidades

Considera-se uma placa retangular, com relação entre comprimento/largura igual a 4, apoiada nas duas bordas menores e submetida a momentos \bar{M} nestas, conforme Figura 5.11. A discretização adotada consiste de 20 elementos e 44 pontos no contorno, 45 pontos internos e 128 células triangulares no domínio.

O problema foi processado considerando-se tolerância de 0,01% e o carregamento aplicado em 5 encrementos de carga dados na Tabela 5.1, sendo M_p o momento de plastificação da placa.

TABELA 5.1 - INCREMENTOS DE CARGA

No. DO INCREMENTO	INCREMENTO DE CARGA	FATOR DE CARGA ACUMULADA
1	$0,900M_p$	$0,900 M_p$
2	$0,080M_p$	$0,980 M_p$
3	$0,018M_p$	$0,998 M_p$
4	$0,002M_p$	$1,000 M_p$
5	$0,002M_p$	$1,002 M_p$

No quarto incremento de carga a placa se plastificou totalmente como era de se esperar, pela analogia de comportamento da mesma com uma viga nas mesmas condições. No quinto incremento de carga o problema não convergiu após 1000 iterações.

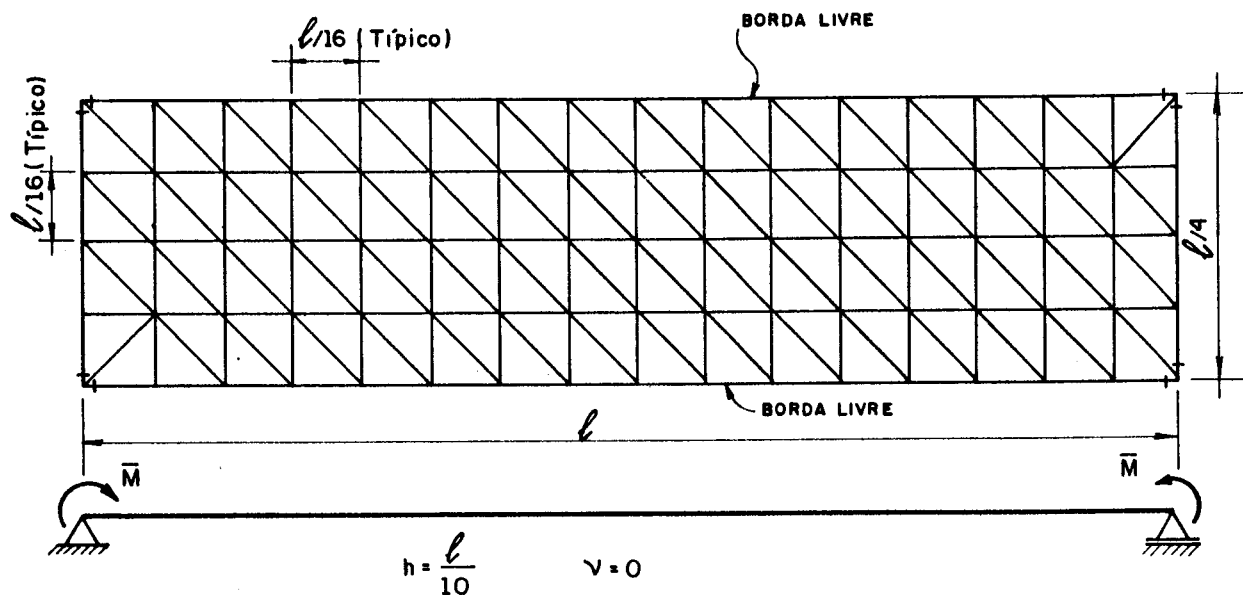


Figura 5.11- Placa Biapoiada - Exemplo 5.6.1

Exemplo 5.6.2- Placa Biengastada com Carga Uniformemente Distribuída

Uma placa retangular de comprimento l e largura $\frac{l}{4}$, engastada nas duas bordas mais estreitas e com as outras duas bordas livres, suportando um carregamento uniformemente distribuído q foi analisada, utilizando-se a mesma discretização adotada no exemplo anterior.

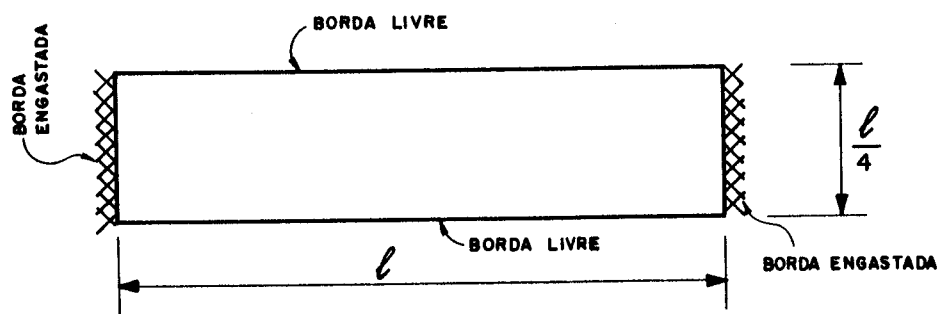


Figura 5.12 - Placa Biengastada - Exemplo 5.6.2

O exemplo foi processado considerando-se duas situações nas bordas engastadas. A primeira é a condição "hard" onde a rotação no plano tangencial ao contorno é restringida juntamente com a rotação normal e o deslocamento transversal, e a segunda condição "soft" onde a rotação tangencial é liberada ficando restringidas a rotação normal ao contorno e o deslocamento transversal.

Os seguintes dados foram considerados na análise:

$$l = 8,00\text{m} \quad h = 0,80\text{m} \quad \nu = 0 \quad E = 2,0 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$M_p = 100 \text{ kN.m/m} \quad \text{Tolerância} = 0,01\%$$

A carga foi aplicada através de 17 incrementos para a situação "soft" e 20 incrementos para a situação "hard". Na Tabela 5.2 é apresentado o esquema de carregamento adotado.

TABELA 5.2 - ESQUEMA DE CARREGAMENTO DO EXEMPLO 5.6.2

No.	CARGA (kN/m ²)	
	Incremento	Acumulada
1	15,0	15,0
2	2,0	17,0
3	1,0	18,0
4	1,0	19,0
5	1,0	20,0
6	1,0	21,0
7	0,5	21,5
8	0,5	22,0
9	0,5	22,5
10	0,5	23,0

No.	CARGA (kN/m ²)	
	Incremento	Acumulada
11	0,5	23,5
12	0,5	24,0
13	0,5	24,5
14	0,5	25,0
15	0,5	25,5
16	0,5	26,0
17	0,1	26,1
18	0,5	26,6
19	0,5	27,1
20	0,5	27,6

O comportamento carga-deslocamento transversal no centro da placa é apresentado na Figura 5.13 para as duas situações consideradas nos apoios. É interessante notar que após o comportamento linear inicial o diagrama apresenta um trecho com curvatura bastante pronunciada que vai do terceiro ao nono incremento de carga, quando são formadas as rótulas plásticas na região dos apoios. A partir daí a curva carga - deslocamento é praticamente reta até o décimo quinto incremento de carga no caso "soft" e décimo oitavo incremento no caso "hard". A partir destes pontos começa a ocorrer a formação de uma rótula plástica na região do meio do vão, com a ocorrência de grandes acréscimos de deslocamento para pequenos incrementos de carga. A carga limite correspondente à formação da rótula plástica no meio do vão corresponde ao décimo sétimo incremento para o caso "soft" e vigésimo para o caso "hard". O trecho retilíneo que ocorre após o nono incremento corresponde ao funcionamento linear da placa com dois apoios rotulados submetidos a momentos constantes iguais ao momento de

plastificação M_p .

É importante ressaltar ainda a diferença entre os comportamentos para as duas situações consideradas. A situação "hard" confere à placa um comportamento mais rígido e uma carga limite superior em relação à situação "soft".

A carga limite encontrada para a situação "soft" foi de $26,1 \text{ kN/m}^2$, e para a situação "hard" $27,6 \text{ kN/m}^2$. Para efeito de comparação, a carga limite obtida pelo cálculo rígido-plástico de uma viga equivalente é $25,0 \text{ kN/m}^2$.

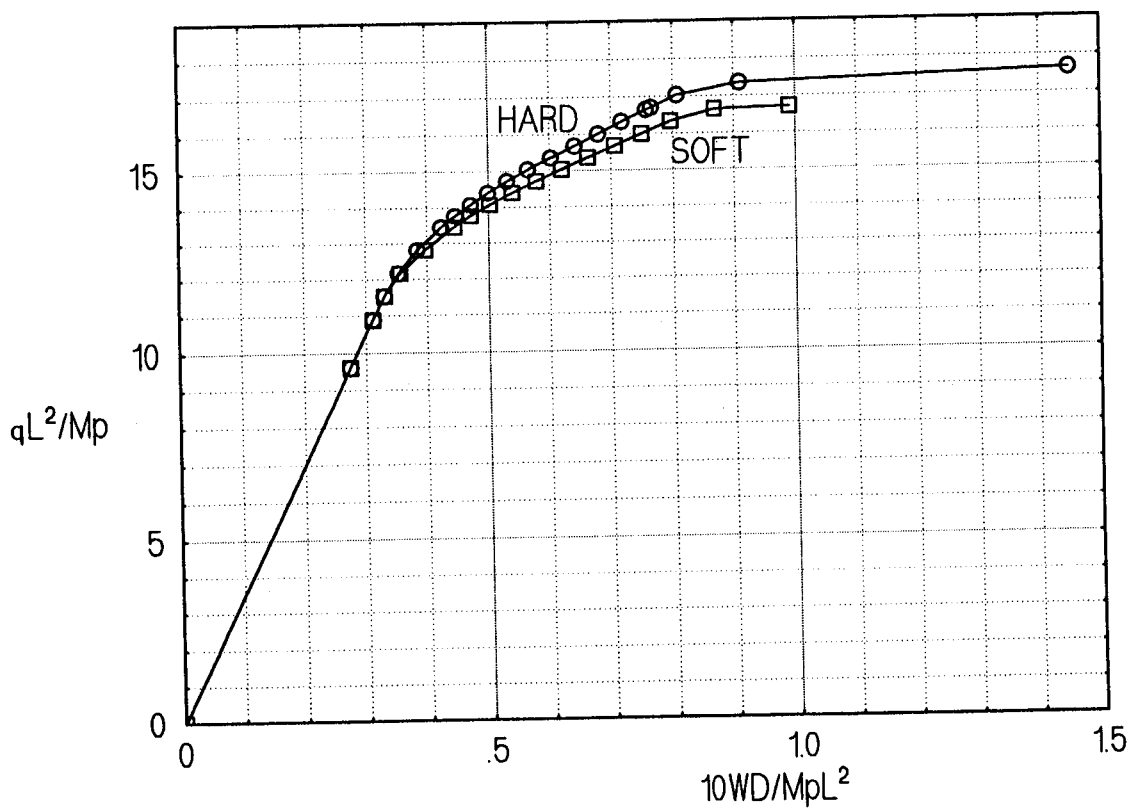


Fig. 5.13- Curva Carga x Deslocamento no Centro da Placa do Exemplo 5.6.2.

Exemplo 5.6.3- Placa Quadrada Apoiada nas Quatro Bordas com Carga Uniformemente Distribuída.

Neste exemplo, considera-se uma placa quadrada, apoiada nas quatro bordas submetida a um carregamento uniformemente distribuído em todo o domínio. A análise é efetuada admitindo-se condições de contorno "hard" e "soft". As características da placa e a discretização adotadas são ilustradas pela Figura 5.14.

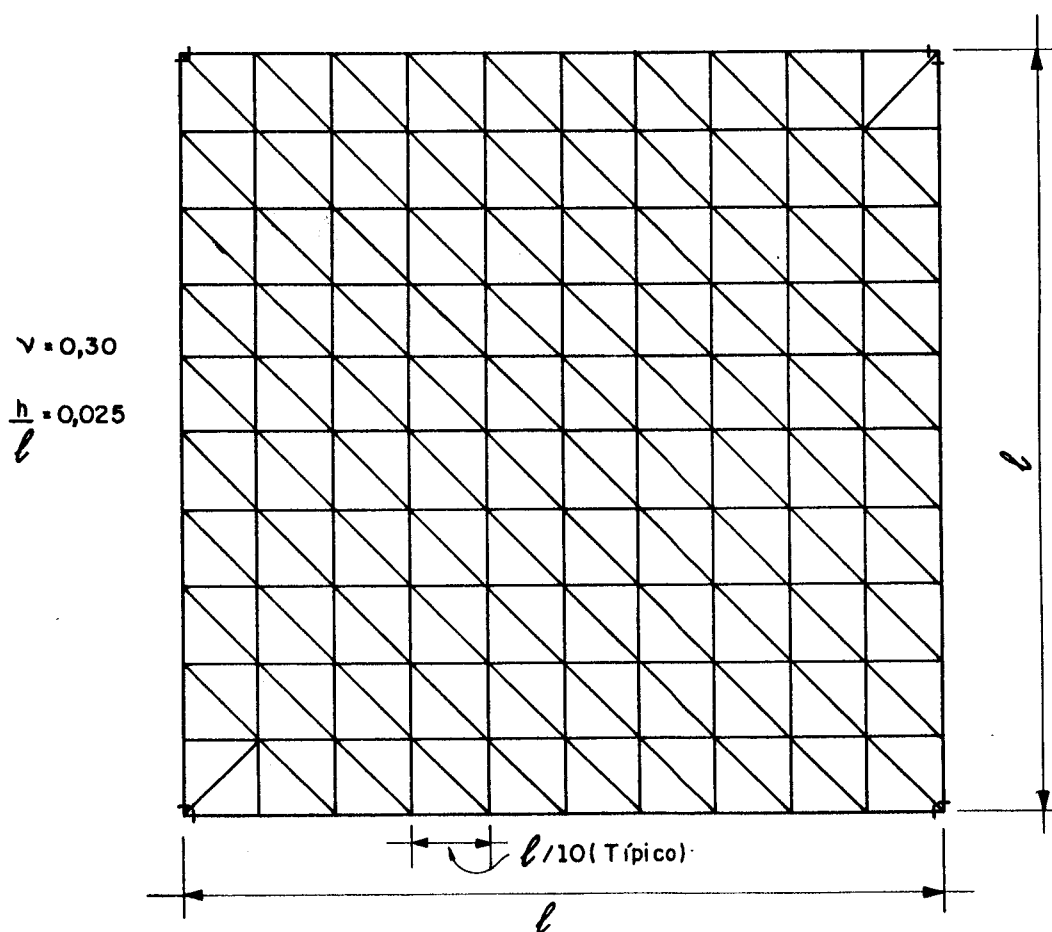


Figura 5.14- Discretização da Placa do Exemplo 5.6.3.

A discretização consiste de 44 pontos sobre o contorno, 20 elementos, 81 pontos internos e 200 células triangulares. O carregamento foi aplicado por meio de 6 incrementos e a tolerância admitida como 0,1%. Na Tabela 5.3 são apresentados o esquema de carregamento utilizado e o deslocamento transversal w no centro da placa, ao final de cada incremento, para as situações "hard" e "soft".

TABELA 5.3 - INCREMENTOS DE CARGA E DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA PLACA DO EXEMPLO 5.6.3.

No.	CARGA $\left(q \frac{l^2}{M_p} \right)$		DESLOCAMENTO $\left(\frac{wD}{M_p l^2} \right)$	
	Incremento	Acumulada	"Hard"	"Soft"
1	12,00	12,00	0,04888	0,0513
2	6,60	18,60	0,07587	0,0795
3	2,80	21,40	0,08837	0,09313
4	2,80	24,20	0,11282	0,12103
5	0,80	25,00	0,12575	0,13422
6	0,80	25,80	0,14028	0,14769

Para efeito de comparação, o valor do deslocamento no centro da placa ao final do terceiro incremento de carga foi de $0,08837 \left(\frac{D}{M_p l^2} \right)$ para a situação "hard". A resposta correspondente para uma placa semelhante analisada por OWEN e HINTON [98] através do MEF é de $0,08741 \left(\frac{D}{M_p l^2} \right)$, enquanto CORRÊA [103] obteve $0,08779 \left(\frac{D}{M_p l^2} \right)$ também através do MEF,

mas com um elemento diferente daquele utilizado na referência [98]. Em ambas as análises através do MEF a relação $\frac{h}{\ell}$ adotada foi de 0,01. O comportamento carga versus deslocamento transversal w é mostrado na Figura 5.15, juntamente com a curva correspondente apresentada em [98].

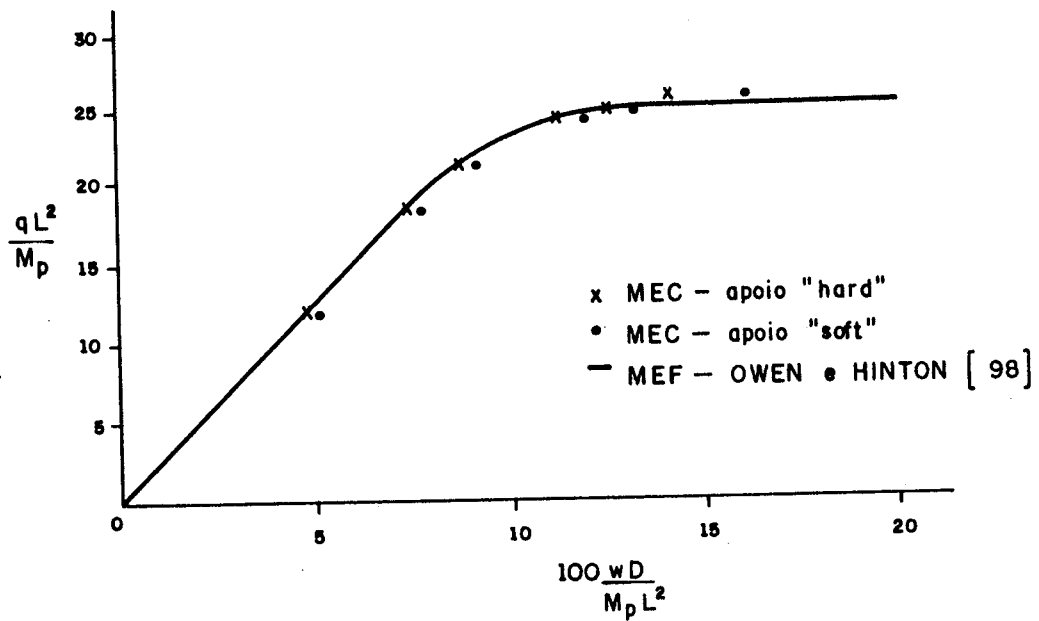


Figura 5.15- Curva Carga-Deslocamento no Centro da Placa - Exemplo 5.6.3.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados as formulações integrais para a análise de placas através de teoria clássica de Kirchhoff e da teoria de Reissner. Ênfase especial foi dada à segunda por ser uma formulação mais consistente e hierarquicamente superior à primeira. As hipóteses de Reissner conduzem a um sistema de equações diferenciais de sexta ordem que permitem o atendimento de três condições físicas em cada ponto do contorno da placa, enquanto a teoria de Kirchhoff leva a uma equação diferencial de quarta ordem permitindo o atendimento de apenas duas condições em cada ponto do contorno. Por isto, a condição de contorno relativa à rotação no plano vertical tangente ao contorno, na teoria de Kirchhoff, é atendida de forma aproximada.

A precisão dos resultados obtidos com a utilização das formulações integrais caracterizam-nas como uma alternativa viável e segura em relação à análise pelo Método dos Elementos Finitos. Algumas vantagens do Método dos Elementos de Contorno merecem ser ressaltadas, tais como:

- . não é necessária a discretização do domínio;
- . são evitados os saltos típicos entre elementos, no

caso do MEF;

- . os esforços internos são funções analíticas suaves;
- . a área carregada pode ter forma qualquer independente, da discretização adotada no contorno;
- . facilidade de modelagem das descontinuidades no contorno e de placas de geometria qualquer.

Como desvantagem deve ser citado o fato da matriz de coeficientes H ser cheia e não simétrica em geral, e mal condicionada no caso de relações espessura/vão menores que ou iguais a 0,01.

A comparação entre as formulações integrais através da Teoria de Kirchhoff e da Teoria de Reissner mostra claramente as vantagens da segunda sobre a primeira.

Deve ser ressaltado que a Teoria de Reissner permite a modelagem mais precisa das condições de contorno e não apresenta as complicações relativas à consideração das reações de canto que aparecem na formulação de Kirchhoff. A análise do exemplo de placa retangular estreita engastada numa borda e livre nas outras, análoga a uma viga em balanço, confirma esta vantagem apresentando boa convergência para os resultados corretos, mesmo para discretizações pouco refinadas. Este problema quando analisado através da formulação de Kirchhoff apresenta imprecisões nas respostas de esforços e deslocamentos. O modelo de Reissner é significativamente mais poderoso na previsão de respostas para a placa e isto pode ser comprovado por exemplo no caso da placa quadrada simplesmente apoiada nas quatro bordas com carga uniformemente distribuída, quando a análise é efetuada para diversas relações entre espessura e vão. Para esta relação igual a 0,10, a flecha no meio da placa obtida pelo modelo de Reissner é 4,5% superior ao valor obtido com o modelo de Kirchhoff, enquanto o momento fletor obtido pelo primeiro supera em apenas 0,30% o valor obtido pelo segundo. Com a

relação 0,30, os valores de flecha e momento fletor no centro da placa obtidos pela Teoria de Reissner superam as respostas obtidas pela teoria clássica em 39,7% e 2,8%, respectivamente. Estes resultados mostram a importância de consideração da parcela da energia de deformação devida ao cisalhamento transversal, principalmente para o cálculo dos deslocamentos da placa, mesmo para relações espessura/vão relativamente pequenas.

A técnica de colocação de pontos singulares fora do domínio da placa facilita a programação e evita possíveis erros na determinação de valores principais de integrais singulares. Foi verificado também que a posição de tais nós deve ser bastante próxima do contorno; sua limitação deve apenas levar em conta a precisão do tipo de integração numérica utilizada. Um ótimo nível de precisão foi notado com a utilização desta técnica juntamente com a formulação de Reissner, comparando-se os resultados aqui obtidos com respostas analíticas da literatura. Cuidados especiais devem ser tomados para placas muito finas com relação espessura/vão menor ou igual a um centésimo (0,01), pois neste caso as matrizes \tilde{H} e \tilde{G} se mostram mal condicionadas, gerando grandes imprecisões nos valores de contorno, entretanto a resposta observada no domínio tem bom nível de precisão.

Um outro fato relevante observado neste trabalho é a importância da escolha de condições de contorno apropriadas no caso de bordas simplesmente apoiadas, viabilizado pela utilização das hipóteses de Reissner. A Teoria Clássica admite nas bordas apoiadas, a condição de contorno "hard", isto é, consideram-se nulos o deslocamento transversal, o momento normal ao contorno e a rotação tangencial, sendo esta levada em conta de forma aproximada através do conceito de esforço cortante equivalente, já no modelo de Reissner tanto pode ser admitida a condição "hard" quanto a condição

"soft", onde consideram-se nulos o deslocamento transversal, momento normal e momento torçor no contorno. Os resultados obtidos mostram a importância da escolha das condições de contorno corretas face a situação física real a ser modelada. Parece que frequentemente é mais apropriado utilizar as condições de contorno "soft", onde o momento torçor é nulo invés da rotação tangencial. A consideração da condição "soft" torna a placa mais flexível, sendo que as respostas em termos de deslocamento transversal e momento fletor no centro da placa quadrada simplesmente apoiada com carregamento uniforme são 7,9% e 6,2%, respectivamente, superiores às respostas correspondentes à situação "hard". para a relação h/l igual a 0,10. Estas diferenças se acentuam para pontos mais próximos às bordas.

Na formulação proposta foram admitidos além da carga uniformemente distribuída em subdomínios de forma qualquer, carregamentos transversais e momentos externos, distribuídos em linha e cargas concentradas, sendo que os exemplos processados demonstram um excelente nível de precisão.

A consideração de campos de momentos iniciais efetuada na formulação integral com as hipóteses de Reissner possibilita a análise elástica da placa submetida a efeitos de gradientes de temperatura e retração, entre outros, bem como a extensão da formulação à modelagem de comportamentos não-lineares. A precisão da parcela integral referente ao campo de momentos iniciais aqui deduzida foi verificada comparando-se as respostas obtidas para placas submetidas a gradientes de temperatura, com respostas disponíveis na literatura e com análises numéricas via MEF.

Para mostrar a utilidade da formulação apresentada na análise de placas de comportamento não-linear foi implementado um algoritmo incremental-iterativo baseado no método da rigidez inicial, onde as matrizes de coeficientes relativos às incógnitas de contorno e esforços internos são

calculados apenas uma vez no início do processo de solução.

Alguns exemplos simples de placas com comportamento elastoplástico perfeito foram processados e os resultados obtidos mostram a utilização da técnica proposta e um bom nível de precisão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SOUTHWELL, R.V.; "Relaxation Methods in Theoretical Physics"; Oxford University Press, London; 1946.
- [2] VENTURINI, W. S.; "Boundary Element Method in Geomechanics"; Springer Verlag; Berlin; 1983.
- [3] BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C.; "Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering"; Springer-Verlag; 1984.
- [4] REISSNER, E.; "On the Theory of Bending of Elastic Plates"; J.Math. Physics; 23; 184-191; 1944.
- [5] REISSNER, E.; "On Bending of Elastic Plates"; Quart. Appl. Math.; 5(1); 55-68; 1947.
- [6] MINDLIN, R.D.; "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates"; J.Appl. Mech.; 13(1); 31-38; 1951.
- [7] REISSNER, E.; "On the Theory of Transverse Bending of Elastic Plates"; Int. J. Solids Struct.; 12(8-A); 545-554; 1976.
- [8] SALERNO, V. L.; GOLDBERG, M.A.; "Effect of Shear Deformations on the Bending of Rectangular Plates"; J.Appl. Mech.; 54-58; 1960.

- [9] PANC, V.; "Theories of Elastic Plates"; International Publishing; Noordhoff; 1975.
- [10] LEVINSON, M.; "An Accurate, Simple Theory of Statics and Dynamics of Elastic Plates"; Mech. Research Communications, 7(6); 343-350; 1980.
- [11] REISSNER, E.; "On Small Deflections of Shear deformable Elastic Plates"; Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.; 59; 227-233; 1986.
- [12] REISSNER, E.; "On a Generalization of Some Formulas of the Theory of Moderately Thick Elastic Plates"; Int. J. Solids Struct.; 23(6); 711-717; 1987.
- [13] REISSNER, E.; "On the Asymptotic Expansions for the Sixth-Order Linear Theory Problem of Transverse Bending of Orthotropic Elastic Plates"; Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.; 85(1); 75-88; 1991.
- [14] NORDGREN, R.P.; "A Bound on the Error in Plate Theory"; Quart. Appl. Math.; 28(4); 587-595, 1971.
- [15] RYCHTER, Z.; "A Sixth - Order Plate Theory Derivation and Error Estimates"; J. Appl. Mech.; 54(2); 275-279; 1987.
- [16] NORDGREN, R.P.; "A Bound on the Error in Reissner's Theory of Plates"; Quart. Appl. Math.; 29; 551-556; 1972.
- [17] RYCHTER, Z.; ; "An Improved Error Estimate for Reissner's Plate Theory"; Int. J. Solids Struct.; 24(5); 537-544; 1988.

- [18] LADEVÈZE, P.; PECASTAINGS, F.; "The Optimal Version of Reissner's Theory"; J. Appl. Mech.; 55(2); 413-418; 1988.
- [19] BARRET, K.E.; ELLIS, S.; "An Exact Theory of Elastic Plates"; Int. J. Solids Struct.; 24(9); 859-880, 1988.
- [20] COOK, R.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E.; "Concepts and Applications of Finite Element Analysis"; John Wiley & Sons,; 3a. ed.; 1989.
- [21] HUGHES, T.J.R.; "The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis"; Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey; 1987.
- [22] BATOZ, J.L.; BATHE, K.J.; HO, L.W.; "A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 15; 1771-1812; 1980.
- [23] HRABOK, M.M.; HUDEY, T.M.; "A Review and Catalogue of Plate Bending Finite Elements"; Comput & Struct.; 19; 479-498; 1984.
- [24] BAZELEY, G.P.; CHEUNG, Y.K.; IRONS, B.M.; ZIENKIEWICZ, O.C.; "Triangular Elements in Plate Bending - Conforming and Non-conforming Solutions"; Proc. Conf. On Matrix Methods in Structural Mechanics; 547-576; WPAFB; Ohio; 1965.
- [25] PIAN T.H.H.; "Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions"; AIAA J.; 2; 133-1333; 1964.

- [26] BATOZ, J.L.; "An Explicit Formulation for an Efficient Triangular Plate-bending Element"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 18; 1077-1089; 1982.
- [27] TESSLER, A.; HUGHES, T.J.R.; "A Three-node Mindlin Plate Element with Improved Transverse Shear"; Comp. Meth. Appl. Engrg.; 50; 71-101; 1985.
- [28] PAPADOPOULOS, P.; TAYLOR, R.L; "A Triangular Element Based on Reissner - Mindlin Plate Theory"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 30; 1029-1049; 1990.
- [29] ZIENKIEWICZ, O.C.; LEFEBVRE, D.; "A Robust Triangular Plate Bending Element of The Reissner - Mindlin Type"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 26; 1169-1184; 1988.
- [30] HAGGBLAD, B.; BATHE, K.J.; "Specifications of Boundary Conditions for Reissner - Mindlin Plate Bending Finite Elements"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 30(5); 981-1011; 1990.
- [31] BERGAN, P. G.; HANSSEN, L.; "A New Approach for Deriving Good Element Stiffness Matrices"; In: Whiteman, J.R., ed.; The Mathematics of Finite Elements and Applications II; Academic Press; London; 483-498; 1975.
- [32] BERGAN, P.G.; NYGARD, M.K.; "Finite Elements with Increased Freedom in Choosing Shape Functions"; Int. J. Num Meth. Engrg.; 20; 643-663; 1984.

- [33] BERGAN, P.G.; NYGARD, M.K.; "Nonlinear Shell Analysis Using Free Formulation Finite Elements"; In: Bergan, P.G.; Bathe, K.J.; Wunderlich, eds.; Finite Elements for Nonlinear Problems, Springer-Verlag; Berlin; 317-338; 1985.
- [34] NYGARD, M.K.; BERGAN, P.G.; "Nonconforming Finite Elements Based on the Free Formulation", In: Kuhn, G.; Mang, H.; eds; Discretization Methods in Structural Mechanics; Springer-Verlag; 71-82; 1989.
- [35] FELLIPA, C.A.; BERGAN, P.G.; "A Triangular Bending Element Based on Energy - Orthogonal Free Formulation"; Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg; 61; 129-160; 1987.
- [36] BERGAN, P.G.; FELIPPA, C.A.; "A Triangular Membrane Element with Rotational Degrees of Freedom"; Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.; 50; 25-69, 1985.
- [37] JASWON, M.A.; MAITI, M.; SYMM, G.J.; "Numerical Biharmonic Analysis and Some Applications"; Int. J. Solids Struct; 3; 309-332; 1967.
- [38] HANSEN, E.B.; "Numerical Solution of Integro-differential and Singular Integral Equations for Plate Bending Problems"; Journal of Elasticity; 6(1); 39-56; 1976.
- [39] BEZINE, G.P.; GAMBY, D.A.; "A New Integral Equation Formulation for Plate Bending Problems"; In: Brebbia, C.A; ed.; Recent Advances in BEM; 327-342; Pentech Press; 1978.

- [40] BEZINE, G.P.; "Boundary Integral Formulation for Plate Flexure with Arbitrary Boundary Conditions"; Mech. Res. Comm.; 5(4); 197-206; 1978.
- [41] STERN, M.A.; "A General Boundary Integral Formulation for The Numerical Solution of Plate Bending Problems"; Int. J. Solids Struct.; 15; 769-782; 1979.
- [42] ALTIERO, N.J.; SIKARSKIE, D.L.; "A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form"; Comp. & Struct.; 9; 163-168; 1978.
- [43] WU, B.C.; ALTIERO, N.J.; "A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form and Arbitrary Boundary Conditions"; Comp. & Struct.; 10; 703-707; 1979.
- [44] TOTTENHAN, H.; "The Boundary Element Method for Plates and Shells", In: Banerjee, P.K., Butterfield, R., eds.; Developments in Boundary Element Methods-1; Applied Science Publ.; London; 173-205; 1979.
- [45] GUO-SHU, S.; MUKERJEE, S.; "Boundary Element Method Analysis of Bending Plates of Arbitrary Shape with General Boundary Conditions"; Engrg. Analysis; 3(1); 36-44; 1986.
- [46] HARTMANN, F.; ZOTEMANTEL, R.; "The Direct Boundary Element Method in Plate Bending"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 23(11); 2049-2069; 1986.
- [47] PAIVA, J.B.; "Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Flexão de Placas e suas Aplicações em Engenharia de Estruturas"; Tese de Doutorado; EESC-USP; 1987.

- [48] ABDEL-AKHER, A.; HARTLEY, G.A.; "Analytic Integration Procedures for Plate Bending Analysis"; In: Brebbia C.A.; ed., Boundary Elements X; 3; 391-405; 1988.
- [49] AHMED, A.A., HARTLEY, G.A.; "Evaluation of Boundary Integrals for Plate Bending"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 28(2); 75-93; 1989.
- [50] ABDEL-AKHER, A.; HARTLEY, G.A.; "Boundary Integration and Interpolation Procedures for Plate Bending"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 28(6); 1389-1408; 1989.
- [51] HARTMANN, F.; "Kirchhoff Plates"; In: Brebbia, C.A.; ed., Boundary Elements X - v.3; C.M. Publ.; 409-423; 1988.
- [52] PILTNER, R.; TAYLOR, R.L.; "The Solution of Plate Bending Problems with the Aid of a Boundary Element Algorithm Based on Singular Complex Functions"; in: Tanaka, M.; Brebbia, C.A.; Honma, T.; eds.; Boundary Elements XII; 1989.
- [53] KATSIKADELIS, J.T.; ARMENAKAS, A.E.; "A New Boundary Equation Solution to the Plate Problem"; J. Appl. Mech.; 56(2); 364-374; 1989.
- [54] SAPOUNTZAKIS, E.J.; KATSIKADELIS, J.T.; "Boundary Element Solution of Plates of Variable Thickness"; J. Engrg. Mech.; 117(6); 1241-1256; 1991.
- [55] VITOORAPORN, C.; MOSHAIOV. A.; "Effectiveness Study of Higher Order Elements in the BIE Method for Thin Elastic Plate Bending"; in: Tanaka, M.; Brebbia, C.A.; Honma, T.; eds.; Boundary Elements XII; 1989.

- [56] KATSIKADELIS, J.T.; ARMENAKAS, A.E.; "Plates on Elastic Foundation by BIE Method", J. Engrg. Mech.; 110(7); 1086-1104; 1984.
- [57] KATSIKADELIS, J.T.; ARMENAKAS, A.E.; "Analysis of Clamped Plates on Elastic Foundations by BIE Method"; J. Appl. Mech.; 54; 544-580; 1984.
- [58] COSTA JR., J.A.; BREBBIA, C.A.; "The Boundary Element Method Applied to Plates on Elastic Foundations"; Engrg. Analysis; 2(4); 174-183; 1985.
- [59] COSTA JR., J.A.; BREBBIA, C.A.; "On the Reduction of Domain Integrals to the Boundary for the BEM Formulations of Plates on Elastic Foundations"; Engrg. Analysis, 3(2); 123-126; 1986.
- [60] COSTA JR, J.A.; BREBBIA, C.A.; "Bending of Plates on Elastic Foundations Using Boundary Element Method"; In: International Conference, 2nd; Southampton; Springer-Verlag; Berlin; 1985.
- [61] BEZINE, G.P.; "A New BEM for Bending of Plates on Elastic Foundations"; Int. J. Solids Struct.; 24(6); 557-565; 1988.
- [62] SILVA, N.A.; "Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Análise de Placas sobre Fundações Elásticas"; Dissertação de Mestrado; EESC-USP; 1988.
- [63] KATSIKADELIS, J.T.; KALLIVOKAS, L.F.; "Clamped Plates on Pasternak - Type Elastic Foundation by BEM"; J. Appl. Mech.; 53(4); 909-917; 1986.

- [64] KATSIKADELIS, J.T.; KALLIVOKAS, L.F.; "Plates on Biparametric Elastic Foundation by BIDE Method"; J. Engrg. Mech.; 114(5); 847-875; 1988.
- [65] KATSIKADELIS, J.T.; "Large Deflection Analysis of Plates on Elastic Foundation by the Boundary Element Method"; Int. J. Solids Struct.; 27(15); 1867-1878; 1991.
- [66] TANAKA, M.; "Integral Equation Approach to Small and Large Displacements of Thin Elastic Plates"; in Brebbia, C.A. ed.; Boundary Element Method in Engineering, Proc. 4th. Int. Seminar, Springer-Verlag; Heildeberg; 1982.
- [67] KAMIYA, N.; SAWAKI, Y.; "Finite Deflection of Plates"; in: Brebbia, C.A.; ed.; Topics in Boundary Element Research; Springer-Verlag; Heildeberg; 1984.
- [68] YE, T.Q.; LIN, Y.; "Finite Deflection Analysis Elastic Plate by the Boundary Element Method"; Appl. Math. Modelling.; 9; 183-188; 1985.
- [69] SAWAKI, Y.; TAKEUCHI, K.; KAMIYA, N.; "Finite Deflection Analysis of Plates by Dual Reciprocity Boundary Elements"; In: Brebbia, C.A.; Connor, J.; eds.; Advances in Boundary Elements- Vol.3 - Stress Analysis; Springer-Verlag; 1989.
- [70] KATSIKADELIS, J.T.; NERANTZAKI, M.S.; "Large Deflections of Thin Plates by BEM"; in Brebbia, C.A.; ed.; Boundary Elements X, v.3; 1988.

- [71] KAMIYA, N.; SAWAKI, Y.; NAKAMURA, Y.; "Boundary Element Nonlinear Bending Analysis of Clamped Sandwich Plates and Shells"; in: Brebbia, C.A.; ed., Proceed of 4th. Inter. Seminar.; 515-525; Southampton; England; 1982.
- [72] KAMIYA, N.; "Structural Nonlinear Analysis by Boundary Element Methods"; in: Brebbia, C.A.; ed., Boundary Elements X - vol.3 - Stress Analysis, 1988.
- [73] PROVIDAKIS, C.P.; BESKOS, D.E.; "Free and Forced Vibrations of Plates by Boundary Elements"; Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.; 74(3); 231-250; 1989.
- [74] PROVIDAKIS, C.P.; BESKOS, D.E.; "Free and Forced Vibrations of Plates by Boundary and Interior Elements"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 28(9); 1977-1994; 1989.
- [75] AKKARI, M. M.; HUTCHINSON, J.R.; "Boundary Point Collocation Method for the Vibration of a Mindlin Thick Plate"; in Brebbia, C.A., ed.; Boundary Elements; vol.3; 465-476; 1988.
- [76] MORJARIA, M.; MUKERJEE, S.; "Inelastic Analysis of Transverse Deflection of Plates by the Boundary Element Method"; J. Appl. Mech.; 47(2); 291-296; 1980.
- [77] MORJARIA, M.; MUKERJEE, S.; "Numerical Analysis of Planar Time Dependent Inelastic Deformation of Plates with Crack by the Boundary Element Method"; Int. J. Solids Struct.; 17; 127 - 1981.

- [78] MUKERJEE, S.; MORJARIA, M.; "A Boundary Element Analysis of Time Dependent Inelastic Deformation of Cracked Plates Loaded in Antiplane Shear"; Int. J. Solids Struct.; 17; 253- ; 1981.
- [79] MUKERJEE, S.; MORJARIA, M.; "A Boundary Element Formulation for Planar Time Dependent Inelastic Deformation of Plates with Cutouts"; Int. J. Solids Struct.; 17; 115- ; 1981.
- [80] MOSHAIOV, A.; VORUS, W.S.; "Elasto-plastic Bending Analysis by a Boundary Element Method with Initial Plastic Moments"; Int. J. Solids Struct.; 22(11); 1213-1229; 1986.
- [81] COSTA JR.; J.A.; BREBBIA, C.A.; "Elastic Buckling of Plates Using the Boundary Element Method" in: Brebbia, C.A.; Maier, G.; eds.; Boundary Elements VII; Proceedings of the 7th. International Conference; Springer-Verlag, Berlin; 1985.
- [82] BEZINE, G.P., CIMETIERE, A.; GELBERT, J.P.; "Unilateral Buckling of Thin Elastic Plates by the Boundary Integral Equation Method"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 21; 2189-2199; 1985.
- [83] WEEËN, F.V.; "Application of Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 18(1); 1-10; 1982.
- [84] WEEËN, F.V.; "Application of the Direct Boundary Element Method to Reissner's Plate Model"; Boundary Element Method in Engineering - Proceedings of the 4th. International Seminar; Southampton; 1982.

- [85] KARAM, V.J.; "Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas"; Dissertação de Mestrado; COPPE - UFRJ; 1986.
- [86] RIBEIRO, G.O.; VENTURINI, W.S.; "Aplicação do Método dos Elementos de Contorno no Cálculo de Placas através da Teoria de Reissner"; MECOM-89 - Anais do X Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia - II Encontro Nacional de Mecânica Computacional; Porto; Portugal; 1989.
- [87] BARCELLOS, C.S.; SILVA, L.H.M.; "A Boundary Element Formulation for the Mindlin's Plate Model"; In: Brebbia, C.A.; Venturini, W.S.; eds.; Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer; Southampton; C.M.; Publ.; 1987.
- [88] WESTPHAL Jr., T.; BARCELLOS, C.S.; "Applications of the Boundary Element Method to Reissner's and Mindlin's Plate Models"; In: Tanaka, M.; Brebbia, C.A.; Honma, T.; eds.; Boundary Elements XII; 1989.
- [89] XIAO-YAN, L.; KUANG-MAO, H.; XIUXI, W.; "Geometrically Nonlinear Analysis of a Reissner Type Plate by the Boundary Element Method"; Comp & Struct.; 37(6); 911-916, 1990.
- [90] NG, S.F.; CHEUNG, M.S.; XU, T.; "A Combined Boundary Element and Finite Element Solution of Slab and Slab-on-girder Bridges"; Comp. & Struct.; 37(6); 1069-1075; 1990.

- [91] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A.; "Handbook of Mathematical Functions"; Dover Publications, N.York; 1965.
- [92] MIKLIN, S.G.; "Singular Integral Equation"; American Math. Soc. Trans. Series 1; 10; 84-197; 1962.
- [93] TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A.; "On the Application of the Boundary Element Method to Plasticity"; Appl. Math. Modelling; 3; 466-470; 1980.
- [94] BUI, H.D.; "Some Remarks about the Formulation of Three-dimensional Thermoelastic Problems by Integral Equations"; Int. J. Solids; 14; 935-939; 1978.
- [95] CALDERON, E.T.; "Uma Formulação Alternativa para o Estudo de Placas sobre Fundação Elástica pelo Método dos Elementos de Contorno", Dissertação de Mestrado; EESC-USP; 1991.
- [96] ZIENKIEWICZ, O.C.; VALLIAPAN, S.; KING, I.P.; "Elasto-plastic Solutions of Engineering Problemas - Initial Stress Finite Element Approach"; 1; Int. J. Num. Meth. Eng.; 75-100; 1969.
- [97] NAYAK, G.C.; ZIENKIEWICZ, O.C.; "Convenient Form of Stress Invariants for Plasticity"; J. Struct. Div. Proc. ASCE; 949-953; 1972.
- [98] OWEN, D.R.J.; HINTON, E.; "Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice"; Pineridge Press; Swansea; U.K.; 1980.

- [99] TIMOSHENKO, S.P.; WOYNOWSKY - KRIEGER, S.; "Theory of Plates and Shells"; McGraw Hill Book Company, Inc.; New York, N.Y.; 1959.
- [100] RIBEIRO, J.R.M.; "Estudo da Validade da Hipótese de Kirchhoff - Love na Teoria de Placas"; Dissertação de Mestrado; COPPE - UFRJ; 1976.
- [101] BATHE, K.J.; LEE, N.S.; BUCALEM, M.L.; "On the Use of Hierarchical Models in Engineering Analysis"; Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.; 82; 5-26; 1990.
- [102] ALGOR FEA Reference Manual - Algor Finite Element System - Janeiro 1989 - PC Version - Algor Interactive Systems, INC.
- [103] CORRÊA, M.R.S.; "Aperfeiçoamento de Modelos Usualmente Empregados no Projeto de Sistemas Estruturais de Edifícios"; Tese de Doutorado; EESC-USP; 1991.
- [104] MENDELSON, A.; "Plasticity: Theory and Application" Robert Krieger Publ. Company, 1983.
- [105] CHEN, W.F.; HAN, D.J.; "Plasticity for Structural Engineers", Springer-Verlag; 1988.
- [106] COWPER, G.R.; "Gaussian Quadrature Formulas for Triangles", Int. J. Num. Meth. in Eng.; 7; 405-408.

BIBLIOGRAFIA

- ABDEL-AKHER, A.; HARTLEY, G.A.; "Boundary Integration and Interpolation Procedures for Plate Bending"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 28(6); 1389-1408; 1989.
- ABDEL-AKHER, A.; HARTLEY, G.A.; "Analytic Integration Procedures for Plate Bending Analysis"; in: Brebbia C.A.; ed., Boundary Elements X; v.3; 391-405; 1988.
- ABRAMOWITZ, M. STEGUN, I.A.; "Handbook of Mathematical Functions"; Dover Publications; New York; 1965.
- AHMED, A.A.; HARTLEY, G.A.; "Evaluation of Boundary Integrals for Plate Bending"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 28(2); 75-93; 1989.
- AKKARI, M.M.; HUTCHINSON, J.R.; "Boundary Point Collocation Method for the Vibration of a Mindlin Thick Plate"; in: Brebbia, C.A., ed.; Boundary Elements X; vol.3; 465-476; 1988.
- ALTIERO, N.J.; SIKARSKIE, D.L.; "A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form"; Comp. & Struct.; 9; 163-168; 1978.
- ALGOR FEA Reference Manual - Algor Finite Element System - Janeiro 1989 - PC Version - Algor Interactive Systems, INC.

- BANERJEE, P.K.; BUTTERFIELD, R.; "Boundary Element Methods in Engineering Science"; McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, 1981.
- BARCELLOS, C.S.; SILVA, L.H.M.; "A Boundary Element Formulation for the Mindlin's Plate Model"; in: Brebbia, C.A., Venturini, W.S., eds.; Boundary Element Techniques. Applications in Stress Analysis and Heat Transfer; Southampton; C.M. Publ.; 1987.
- BARRET, K.E.; ELLIS, S.; "An Exact Theory of Elastic Plates"; Int. J. Solids Struct.; 24(9); 859-880; 1988.
- BATHE, K.J.; "Finite Element Procedures in Engineering Analysis"; Prentice Hall, Inc.; Englewood Cliffs; New Jersey, 1982.
- BATHE, K.J.; LEE, N.S.; BUCALEM, M.L.; "On the Use of Hierarchical Models in Engineering Analysis"; Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.; 82; 5-26; 1990.
- BATOZ, J.L.; "An Explicit Formulation for an Efficient Triangular Plate-bending Element"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 18; 1077-1089; 1982.
- BATOZ, J.L.; BATHE, K.J.; HO, L.W.; "A Study of Three-node Triangular Plate Bending Elements"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 15; 1771-1812; 1980.
- BAZELEY, G.P.; CHEUNG, Y.K.; IRONS, B.M.; ZIENKIEWICZ, O.C.; "Triangular Elements in Plate Bending - Conforming and Non-conforming Solutions"; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics; 547-576; WPAFB; Ohio; 1965.

- BERGAN, P.G.; FELIPPA, C.A.; "A Triangular Membrane Element with Rotational Degrees of Freedom"; Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.; 50; 25-69; 1965.
- BERGAN, P.G.; HANSSEN, L.; "A New Approach for Deriving Good Element Stiffness Matrices"; in: Whiteman, J.R., ed.; The Mathematics of Finite Elements and Applications II; Academic Press; London; 483-498; 1975.
- BERGAN, P.G.; NYGARD, M.K.; "Nonlinear Shell Analysis Using Free Formulation Finite Elements"; in: Bergan, P.G.; Bathe, K.J.; Wunderlich, eds.; Finite Elements for Nonlinear Problems; Springer-Verlag; Berlin; 317-338; 1985.
- BERGAN, P.G.; NYGARD, M.K.; "Finite Elements with Increased Freedom in Choosing Shape Functions"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 20; 643-663; 1984.
- BEZINE, G.P.; "A New BEM for Bending of Plates on Elastic Foundations"; Int. J. Solids Struct.; 24 (6); 557-565; 1988.
- BEZINE, G.P.; "Boundary Integral Formulation for Plate Flexure with Arbitrary Boundary Conditions"; Mech. Res. Comm.; 5(4); 197-206; 1978.
- BEZINE, G.P.; CIMETIERE, A.; GELBERT, J.P.; "Unilateral Buckling of Thin Elastic Plates by the Boundary Integral Equation Method"; Int. J. Num. Meth. Engrg., 21, 2189-2199; 1985.

- BEZINE, G.P.; GAMBY, D.A.; "A New Integral Equation Formulation for Plate Bending Problems"; in: Brebbia, C.A.; ed., Recent Advances in BEM; 327-342; Pentech Press; 1978.
- BREBBIA, C.A.; "The Boundary Element Method for Engineers"; Pentech Press; London; 1980.
- BREBBIA, C.A.; Connor, J.J.; "Fundamentals of Finite Element Techniques for Engineers"; Butterworths and Co. Publishers Ltd.; England; 1973.
- BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C.; "Boundary Elements Techniques - Theory and Applications in Engineering"; Springer-Verlag; 1984.
- BREBBIA, C.A.; WALKER, S.; "Boundary Element Techniques in Engineering"; Newnes - Butterworths; London; 1980.
- BUI, H.D.; "Some Remarks about the Formulation of Three-dimensional Thermoelastic Problems by Integral Equations"; Int. J. Solids; 14; 935-939; 1978.
- CALDERON, E.T.; "Uma Formulação Alternativa para o Estudo de Placas sobre Fundação Elástica pelo Método dos Elementos de Contorno", Dissertação de Mestrado; EESC-USP; 1991.
- CHEN, W.F.; HAN, D.J.; "Plasticity for Structural Engineers"; Springer-Verlag; 1988.
- COOK, R.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E.; "Concepts and Applications of Finite Element Analysis"; John Wiley & Sons, 3a. ed.; 1989.

- CORRÊA, M.R.S.; "Aperfeiçoamento de Modelos Usualmente Empregados no Projeto de Sistemas Estruturais de Edifícios"; Tese de Doutorado, EESC-USP; 1991.
- COSTA JR., J.A.; BREBBIA, C.A.; "The Boundary Element Method Applied to Plates on Elastic Foundations"; *Engrg. Analysis*; 2(4); 174-183; 1985.
- COSTA JR., J.A.; BREBBIA, C.A.; "Elastic Buckling of Plates Using the Boundary Element Method"; in: Brebbia, C.A., Maier, G., eds.; *Boundary Elements VII: Proceedings of the 7th. International Conference*; Springer-verlag; Berlin; 1985.
- COSTA JR., J.A.; BREBBIA, C.A.; "Bending of Plates on Elastic Foundations Using Boundary Element Method"; in: *International Conference, 2nd. Springer-verlag; Berlin; 1985.*
- COSTA JR., J.A.; BREBBIA, C.A.; "On the Reduction of Domain Integrals to the Boundary for the BEM Formulations of Plates on Elastic Foundations", *Engrg. Analysis*, 3(2); 123-126; 1986.
- CREUS, G.; "Relações Constitutivas no Caso Multiaxial"; UFRGS; Porto Alegre, 1983.
- CRUSE, T.A.; "Mathematical Foundations of the Boundary-Integral Equation Method in Solid Mechanics"; Report No. AFOSR-IR-77-1002; Pratt and Whitney Aircraft Group; 1977.
- FELLIPA, C.A.; BERGAN, P.G.; "A Triangular Bending Element Based on Energy - Orthogonal Free Formulation"; *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*; 61; 129-160; 1987.

- FUNG, Y.C.; "Foundations of Solid Mechanics"; Prentice Hall; Englewood Cliffs; New Jersey; 1965.
- GUO-SHU, S.; MUKERJEE, S.; "Boundary Element Method Analysis of Bending Plates of Arbitrary Shape with General Boundary Conditions"; Engrg. Analysis; 3(1); 36-44; 1986.
- HAGGBLAD, B.; BATHE, K.J.; "Specifications of Boundary Conditions for Reissner-Mindlin Plate Bending Finite Elements"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 30(5) 981-1011; 1990.
- HANSEN, E.B.; "Numerical Solution of Integro-differential and Singular Integral Equations for Plate Bending Problems"; Journal of Elasticity; 6(1); 39-56; 1976.
- HARTMANN, F.; "Introduction to Boundary Elements"; Springer-Verlag; 1989.
- HARTMANN, F.; "Kirchhoff Plates" ind: Brebbia, C.A.; ed.; Boundary Elements X, v.3; C.M. Publ.; 409-423; 1988.
- HARTMANN, F.; ZOTEMANTEL, R.; "The Direct Boundary Element Method in Plate Bending"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 23(11); 2049-2069; 1986.
- HRABOK, M.M.; HUDEY, T.M.; "A Review and Catalogue of Plate Bending Finite Elements"; Comput. & Struct.; 19; 479-498; 1984.
- HUGHES, T.J.R.; "The Finite Element Method-Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis"; Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey; 1987.

- JASWON, M.A.; MAITI, M.; SYMM, G.J.; "Numerical Biharmonic Analysis and Some Applications"; Int. J.Solids Struct.; 3; 309-332; 1967.
- JOHNSON, W.; MELLOR, P.B.; "Engineering Plasticity"; Ellis Horwood Limited, Chichester, England, 1983.
- KAMIYA, N.; SAWAKI, Y.; "Finite Deflection of Plates"; in: Brebbia, C.A.; ed., Topics in Boundary Element Research; Springer-Verlag; Heildeberg; 1984.
- KAMIYA, N.; "Structural Nonlinear Analysis by Boundary Element Methods"; In: Brebbia, C.A.; ed.; Boundary Elements X - vol.3, Stress Analysis, 1988.
- KAMIYA, N.; SAWAKI, Y.; NAKAMURA, Y.; "Boundary Element Nonlinear Bending Analyses of Clamped Sandwich Plates and Shells"; In: Brebbia, C.A.; ed.; Proceed. of 4th. Inter. Seminar; 515-525; Southampton; England; 1982.
- KARAM, V.J.; "Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas"; Dissertação de Mestrado; COPPE-UFRJ; 1986.
- KATSIKADELIS, J.T.; ARMENAKAS, A.E.; "A New Boundary Equation Solution to the Plate Problem"; J. Appl. Mech.; 56(2); 364-374; 1989.
- KATSIKADELIS, J.T.; ARMENAKAS, A.E.; "Plates on Elastic Foundation by BIE Method", J.Engrg. Mech., 110(7); 1086-1104; 1984.

- KATSIKADELIS, J.T.; "Large Deflection Analysis of Plates on Elastic Foundation by the Boundary. Element Method"; Int. J. Solids Struct.; 27(15); 1867-1878; 1991.
- KATSIKADELIS, J.T.; ARMENAKAS, A.E.; "Analysis of Clamped Plates on Elastic Foundations by BIE Method"; J. Appl. Mech.; 54; 544-580; 1984.
- KATSIKADELIS, J.T.; KALLIVOKAS, L.F.; "Plates on Biparametric Elastic Foundation BIDE Method"; J. Engrg. Mech.; 114(5); 847-875; 1988.
- KATSIKADELIS, J.T.; KALLIVOKAS, L.F.; "Clamped Plates on Pasternak - type Elastic Foundation by BEM"; J. Appl. Mech.; 53(4); 909-917; 1986.
- KATSIKADELIS, J.T.; NERANTZAKI, M.S.; "Large Deflection of Thin Plates by BEM"; in: Brebbia, C.A.; ed.; Boundary Elements X - v.3; 1988.
- LADEVÈZE, P.; PECASTAINGS, F.; "The Optimal Version of Reissner's Theory"; J. Appl. Mech.; 55(2); 413-418; 1988.
- LAZARINI, C.; FRANCO, N.M.B.; "Tópicos de Cálculo Numérico"; Vol. II; ICMSC-USP, São Carlos, 1984.
- LEVINSON, M.; "An Accurate, Simple Theory of Statics and Dynamics of Elastic Plates"; Mech. Res. Comm.; 7(6); 343-350; 1980.
- MASSONET CH.; OLSZAK, W.; PHILLIPS, A.; "Plasticity in Structural Engineering Fundamentals and Applications"; Springer-Verlag; 1979.

- MIKLIN, S.G.; "Singular Integral Equation"; American Math. Soc. Trans. Series 1; 10; 84-197; 1962.
- MINDLIN, R.D.; "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates"; J. Appl. Mech.; 18(1); 31-38; 1951.
- MORJARIA, M.; MUKERJEE, S.; "Inelastic Analysis of Transverse Deflection of Plates by the Boundary Element Method"; J. Appl. Mech.; 47(2); 291-296; 1980.
- MORJARIA, M.; MUKERJEE, S.; "Numerical Analysis of Planar Time Dependent Inelastic Deformation of Plates with Crack by the Boundary Element Method"; Int. J. Solid Struct.; 17;127; 1981.
- MOSHAIIOV, A.; VORUS, W.S.; "Elasto-plastic Bending Analysis by a Boundary Element Method with Initial Plastic Moments"; Int. J. Solids Struct., 22(11); 1213-1229; 1986.
- MUKERJEE, S.; MORJARIA, M.; "A Boundary Element Analysis of Time Dependent Inelastic Deformation of Cracked Plates Loaded in Antiplane Shear"; Int. J. Solids Struct.; 17; 253- ; 1981.
- MUKERJEE, S.; "Boundary Element Method in Creep and Fracture"; Applied Science Publishers.
- MUKERJEE, S.; MORJARIA, M.; "A Boundary Element Formulation for Planar Time Dependent Inelastic Deformation of Plates with Cutouts"; Int. J. Solids Struct.; 17; 115- ; 1981.

- NAYAK, G.C.; ZIENKIEWICZ, O.C.; "Convenient Form of Stress Invariants for Plasticity"; J. Struct. Div. Proc. ASCE; 949-953; 1972.
- NORDGREN, R.P.; "A Bound on the Error in Plate Theory"; Quart. Appl. Math.; 28(4); 587-595, 1971.
- NORDGREN, R.P.; "A Bound on the Error in Reissner's Theory of Plates"; Quart. Appl. Math.; 29; 551-556; 1972.
- NYGARD, M.K.; BERGAN, P.G.; "Nonconforming Finite Elements Based on the Free Formulation"; In: Kuhn, G.; Mang, H.; eds.; Discretization Methods in Structural Mechanics; Springer-Verlag; 71-82; 1989.
- NG, S.F.; CHEUNG, M.S.; XU, T.; "A Combined Boundary Element and Finite Element Solution of Slab and Slab-on-girder Bridges"; Comp. & Struct.; 37(6); 1069-1075; 1990.
- OWEN, D.R.J.; HINTON, E.; "Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice"; Pineridge Press; Swansea; U.K.; 1980.
- PAIVA, J.B.; "Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Flexão de Placas e suas Aplicações em Engenharia de Estruturas"; Tese de Doutorado; EESC-USP; 1987.
- PANC, V.; "Theories of Elastic Plates"; International Publishing; Noordhoff; 1975.

- PAPADOPOULOS, P.; TAYLOR, R.L.; "A Triangular Element Based on Reissner - Mindlin Plate Theory"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 30; 1029-1049; 1990.
- PARTRIDGE, P.; SCHEER, S.; RUDOLF, E.; "O Desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno"; UFRGS - Porto Alegre, 1984.
- PIAN, T.H.H.; "Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions"; AIAA. J.; 2; 1333-1336; 1964.
- PILTNER, R.; TAYLOR, R.L.; "The Solution of Plate Bending Problems with the Aid of a Boundary Element Algorithm Based on Singular Complex Functions"; In: Tanaka, M.; Brebbia, C.A.; Honma, T.; eds.; Boundary Elements XII; 1989.
- PROENÇA, S.P.B.; "Sobre Modelos Matemáticos do Comportamento Não-Linear do Concreto: Análise Crítica e Contribuições"; Tese de Doutorado; EESC-USP, 1988.
- PROENÇA, S.P.B.; "Notas sobre Análise Não-Linear Física de Estruturas - Parte I: Teoria da Plasticidade e Técnicas Numéricas"; EESC-USP; São Carlos; 1989.
- PROVIDAKIS, C.P.; BESKOS, D.E.; "Free and Forced Vibrations of Plates by Boundary and Interior Elements"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 28(9); 1977-1994; 1989.
- PROVIDAKIS, C.P.; BESKOS, D.E.; "Free and Forced Vibrations of Plates by Boundary Elements"; Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.; 74(3); 231-250; 1989.

- REISSNER, E.; "On the Theory of Bending of Elastic Plates;
J. Math. Physics; 23; 184-191; 1944.
- REISSNER, E.; "On Bending of Elastic Plates"; Quart. Appl.
Math.; 5(1), 55-68; 1947.
- REISSNER, E.; "On the Theory of Transverse Bending of
Elastic Plates"; Int. J. Solids Struct.; 12 (8-A);
545-554; 1976.
- REISSNER, E.; "On Small Deflections of Shear deformable
Elastic Plates"; Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.; 59;
227-233; 1986.
- REISSNER, E.; "On a Generalization of Some Formulas of the
Theory of Moderately Thick Elastic Plates"; Int. J.
Solids Struct.; 23(6); 711-717; 1987.
- REISSNER, E.; "On the Asymptotic Expansions for the
Sixth-Order Linear Theory Problem of Transverse Bending
of Orthotropic Elastic Plates"; Comput. Meth. Appl.
Mech. Engrg.; 85(1); 75-88; 1991.
- RIBEIRO, G.O.; VENTURINI, W.S.; "Aplicação do Método dos
Elementos de Contorno ao Cálculo de Placas através da
Teoria de Reissner"; MECOM-89. Anais do X Congresso
Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em
Engenharia- II Encontro Nacional de Mecânica
Computacional; Porto; Portugal; 1989.
- RIBEIRO, J.R.M.; "Estudo da Validade da Hipótese de
Kirchhoff - Love na Teoria de Placas"; Dissertação de
Mestrado; COOPE-UFRJ; 1976.

- RYCHTER, Z.; "A Sixth-Order Plate Theory - Derivation and Error Estimates"; J. Appl. Mech.; 54(2); 275-279; 1987.
- RYCHTER, Z.; "An Improved Error Estimate for Reissner's Plate Theory"; Int. J. Solids Struct.; 24(5); 537-544; 1988.
- SALERNO, V.L.; GOLDBERG, M.A.; "Effect of Shear Deformations on the Bending of Rectangular Plates"; J. Appl. Mech.; 54-58; 1960.
- SAPOUNTZAKIS, E.J.; KATSIKADELIS, J.T.; "Boundary Element Solution of Plates of Variable Thickness"; J. Engrg. Mech.; 117(6); 1241-1256; 1991.
- SAWAKI, Y.; TAKEUCHI, K.; KAMIYA, N.; "Finite Deflection Analysis of Plates by the Dual Reciprocity Boundary Elements"; In: Brebbia, C.A.; Connor, J.; eds. Advances in Boundary Elements - vol.3 - Stress Analysis, Springer-Verlag; 1989.
- SHAMES, I.H.; DYM, C.L.; "Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics"; Hemisphere Publishing Corporation; 1985.
- SILVA, N.A.; "Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Análise de Placas sobre Fundações Elásticas"; ; Dissertação de Mestrado, ESC-USP; 1988.
- SOUTHWELL, R.V.; "Relaxation Methods in Theoretical Physics"; Oxford University Press; London; 1946.
- STERN, M.A.; "A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Plate Bending Problems"; Int. J. Solids Struct.; 15; 769-782; 1979.

- SZILARD, R.; "Theory and Analysis of Plates - Classical and Numerical Methods"; Prentice-Hall, Inc.; Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- TANAKA, M.; "Integral Equation Approach to Small and Large Displacements of Thin Elastic Plates"; in: Brebbia, C.A.; ed.; Boundary Element Method in Engineering, Proc. 4th. Int. Seminar; Springer-Verlag; Heildeberg; 1982.
- TELLES, J.C.F.; "The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems"; Springer-Verlag; 1983.
- TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A.; "On the Application of the Boundary Element Method to Plasticity"; Appl. Math. Modelling; 3; 466-470; 1980.
- TELSSELER, A.; HUGHES, T.J.R.; "A Three-node Mindlin Plate Element with Improved Transverse Shear"; Comp. Meth. Appl. Engrg.; 50; 71-101; 1985.
- TIMOSKENKO, S.P.; GOODIER, J.N.; "Teoria da Elasticidade"; Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1980.
- TIMOSHENKO, S.P.; WOYNOWSKY - KRIEGER, S.; "Theory of Plates and Shells"; McGraw Hill Book Company, Inc.; New York, N.Y.; 1959.
- TOTTENHAN, H.; "The Boundary Element Method for Plates and Shells", In: Banerjee, P.K.; Butterfield, R.; eds.; Developments in Boundary Element Methods -1; Applied Science Publ.; London; 173-205; 1979.
- VENTURINI, W.S.; "Boundary Element Method in Geomechanics"; Springer Verlag; Berlin, 1983.

- VITTOORAPORN, C.; MOSHAILOV, A.; "Effectiveness Study of Higher Order Elements in the BIE Method for Thin Elastic Plate Bending"; In: Tanaka, M, Brebbia, C.A., Honma, T.; Boundary Elements XII; 1989.
- WEEËN, F.V.; "Application of Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model"; Int.J.Num. Meth. Engrg.; 18(1); 1-10; 1982.
- WEEËN, F.V.; "Application of the Direct Boundary Element Method to Reissner's Plate Model"; Boundary Element Method in Engineering, Proceedings of the 4th. International Seminar; Southampton; 1982.
- WESTPHAL JR., T.; BARCELLOS, C.S.; "Applications of the Boundary Element Method to Reissner's and Mindlin's Plate Models"; In: Tanaka, M.; Brebbia, C.A.; Honma, T.; eds.; Boundary Elements XII; 1989.
- WU, B.C.; ALTIERO, N.J.; "A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form and Arbitrary Boundary Conditions"; Comp. & Struct.; 10; 703-707; 1979.
- XIAO-YAN, L.; KUANG-MAO, H.; XIUXI, W.; "Geometrically Nonlinear Analysis of a Reissner Type Plate by the Boundary Element Method"; Comp. & Struct.; 37(6); 911-916; 1990.
- YE, T.Q.; LIN, Y.; "Finite Deflection Analysis of Elastic Plate by the Boundary Element Method"; Appl. Math. Modelling; 9; 183-188; 1985.
- ZIENKIEWICZ; O.C.; LEFEBVRE, D.; "A Robust Triangular Plate Bending Element of the Reissner-Mindlin Type"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 26; 1169-1184; 1988.

ZIENKIEWICZ, O.C.; VALLIAPAN, S.; KING, I.P.;
"Elastoplastic Solutions of Engineering Problems -
Initial Stress Finite Element Approach"; Int. J. Num.
Meth. Eng.; 1; 75-100; 1969.

APÊNDICE A

FUNÇÕES DE BESSEL MODIFICADAS K_0 e K_1

As funções de Bessel modificadas de ordem inteira $K_0(z)$ e $K_1(z)$ podem ser calculadas por expansões polinomiais dadas por ABRAMOWITZ [91], sendo z um argumento real, conforme se segue:

a) para $0 < z \leq 2$:

$$\begin{aligned} K_0(z) = & - \ln \left(\frac{z}{2} \right) I_0(z) - 0,57721566 + \\ & + 0,42278420 \left(\frac{z}{2} \right)^2 + 0,23069756 \left(\frac{z}{2} \right)^4 + \\ & + 0,03488590 \left(\frac{z}{2} \right)^6 + 0,00262698 \left(\frac{z}{2} \right)^8 + \\ & + 0,00010750 \left(\frac{z}{2} \right)^{10} + 0,00000740 \left(\frac{z}{2} \right)^{12} + \epsilon \\ & |\epsilon| < 1 \times 10^{-8} \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} K_1(z) = & \frac{1}{z} \left[z \ln \left(\frac{z}{2} \right) I_1(z) + 1 + 0,15443144 \left(\frac{z}{2} \right)^2 + \right. \\ & \left. - 0,67278579 \left(\frac{z}{2} \right)^4 - 0,18156897 \left(\frac{z}{2} \right)^6 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 0,01919402 \left(\frac{z}{2} \right)^8 - 0,00110404 \left(\frac{z}{2} \right)^{10} + \\
& - 0,00004686 \left[\left(\frac{z}{2} \right)^{12} + \epsilon \right] \\
& |\epsilon| < 8 \times 10^{-8}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
I_0(z) &= 1 + 3,5156229 t^2 + 3,0899424 t^4 + \\
& + 1,2067492 t^6 + 0,2659732 t^8 + \\
& + 0,0360768 t^{10} + 0,0045813 t^{12} - \epsilon \\
& |\epsilon| < 1,6 \times 10^{-7}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
I_1(z) &= z \left[0,5 + 0,87890594 t^2 + 0,51498869 t^4 + \right. \\
& + 0,15084934 t^6 + 0,02658733 t^8 + \\
& \left. + 0,00301532 t^{10} + 0,00032411 t^{12} + \epsilon \right] \\
& |\epsilon| < 8 \times 10^{-9}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

sendo:

$$t = \frac{z}{3,75} \tag{A.5}$$

b) para $z > 2$:

$$\begin{aligned} K_0(z) &= \frac{1}{\sqrt{z} e^z} \left[1,25331414 - 0,07832358 \left(\frac{2}{z}\right) + \right. \\ &+ 0,02189568 \left(\frac{2}{z}\right)^2 - 0,01062446 \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \\ &+ 0,00587872 \left(\frac{2}{z}\right)^4 - 0,00251540 \left(\frac{2}{z}\right)^5 + \\ &\left. + 0,00053208 \left(\frac{2}{z}\right)^6 + \epsilon \right] \quad (\text{A.6}) \\ |\epsilon| &< 1,9 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{z} e^z} \left[1,25331414 + 0,23498619 \left(\frac{2}{z}\right) + \right. \\ &- 0,03655620 \left(\frac{2}{z}\right)^2 + 0,01504268 \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \\ &- 0,00780353 \left(\frac{2}{z}\right)^4 - 0,00325614 \left(\frac{2}{z}\right)^5 + \\ &\left. - 0,00068245 \left(\frac{2}{z}\right)^6 + \epsilon \right] \quad (\text{A.7}) \\ |\epsilon| &< 2,2 \times 10^{-7} \end{aligned}$$