

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

UTILIZAÇÃO DO ELEMENTO FINITO HSM (HYBRID STRESS
MODEL) NA ANÁLISE DE PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS

Eng^a. SILVETE MARI SOARES
Orientador: PROF.DR. JOÃO BATISTA DE PAIVA

COMISSÃO EXAMINADORA:
Prof.Tit. Wilson Sergio Venturini
(Orientador Designado) - EESC-USP
Prof.Tit. José Elias Laier - EESC-USP
Prof.Dr. Mario Pinotti Jr. - EESC-USP

São Carlos, Abril de 1991

Aos meus pais,
Antenor e Eunice

AGRADECIMENTOS

Ao Orientador Prof.Dr. João Batista de Paiva, pelo incentivo.

Ao Prof.Dr. Wilson Sérgio Venturini, pela colaboração.

Ao Prof. João Carlos Barreiro, pelo apoio.

Ao Marcos Antonio Chinelatto, pelo amor, dedicação e companheirismo.

Aos amigos, pela paciência, incentivo e ajuda.

À Marta Couto Faria e ao Francisco C. Guete de Brito, pelos trabalhos de digitação e desenho.

A Maria Nadir Minatel, pela colaboração na pesquisa bibliográfica.

A todos que direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho consiste no estudo da flexão de placas e na análise de pavimentos de edifícios pelo Método dos Elementos Finitos, utilizando-se o elemento triangular de 3 parâmetros por nó, denominado HSM (Hybrid Stress Model).

Apresentam-se a formulação do elemento finito HSM e os elementos finitos utilizados na discretização das lajes e vigas dos pavimentos.

São apresentados vários exemplos de placas e de pavimentos de edifícios, resolvidos com o elemento finito HSM, sendo os resultados comparados com os obtidos pelo emprego do elemento DKT (Discrete Kirchhoff Theory), pelo Método dos Elementos de Contorno e com valores analíticos.

O elemento adotado demonstra ser bastante adequado à análise de placas delgadas, bem como sua aplicação em pavimentos de edifícios.

ABSTRACT

This work consist of the study of the plate bending problems and of the analysis of building floors by the Finite Element Method, using the triangular element with three nodel parameters, denoted HSM (Hybrid Stress Model).

The formulation of the finite element HSM is presented, as well as the finite elements used in the discretization of plates and beams of building floors.

Some examples of bending plates and building floors are presented and solved by the finite element HSM, and the obtained numerical values are compared with the results given by the finite element DKT (Discrete Kirchhoff Theory), the Boundary Element Method and also by analitical values.

The used element demonstrated to be very appropriate to analyse thin plates, as well as building floors.

ÍNDICE

I.	INTRODUÇÃO	1
II.	FUNDAMENTOS DA TEORIA PARA FLEXÃO SIMPLES DE PLACAS DELGADAS	3
	2.1. Introdução	3
	2.2. Hipóteses Básicas	4
	2.3. Relações Básicas para Placas Delgadas	5
	2.4. Funcional de Hellinger-Reissner	15
	2.5. Trabalho das Cargas Transversais ao Plano Médio da Placa	18
	2.6. Expressão da Energia Total	19
III.	APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS AO ESTUDO DE FLEXÃO SIMPLES DE PLACAS DELGADAS	21
	3.1. Método dos Elementos Finitos	21
	3.2. Elemento Finito HSM	22
	3.3. Função Aproximadora	24
	3.4. Matriz de Rigidez do Elemento Finito HSM.....	27
	3.5. Determinação dos Termos da Matriz $[H]^{-1}$	38

3.6.	Determinação dos Termos da Matriz [G]	44
3.7.	Vetor de Cargas Nodais Equivalente	47
3.7.1.	Cargas Concentradas nos nós	47
3.7.2.	Carga Distribuída no Elemento	48
3.8.	Sistema Final de Equações	49
3.9.	Condições de Contorno	51
3.10.	Elemento Finito Quadrangular	52
3.11.	Esforços Internos no Elemento Finito Triangular e no Elemento Quadrangular Condensado	54
3.12.	Elemento Finito de Barra	56
3.13.	Análise de Pavimentos de Edifícios	57
IV.	RESULTADOS NUMÉRICOS	60
4.1.	Introdução	60
4.2.	Placa Quadrada Simplesmente Apoiada com Carregamento Uniformemente Distribuído	60
4.3.	Placa Quadrada Engastada no Contorno com Carregamento Uniformemente Distribuído	62
4.4.	Placa Esconsa	63
4.5.	Placa Quadrada Apoiada em Vigas Elásticas	65
4.6.	Análise de Pavimento de Edifício	67
V.	CONCLUSÕES	75
VI.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77
VII.	BIBLIOGRAFIA	79

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo o estudo da resolução dos problemas de flexão de placas no regime elástico, utilizando o método dos elementos finitos.

Segundo Batoz [1], a análise de placas delgadas é eficientemente realizada utilizando-se elementos finitos triangulares com nove graus de liberdade (deslocamento vertical e rotações nos pontos nodais localizados nos vértices do elemento). Dentre os elementos finitos estudados por Batoz [1] destacam-se os elementos DKT (Discrete Kirchhoff Theory) e HSM (Hybrid Stress Model) como sendo os mais eficientes na análise de placas delgadas.

Visando a utilização prática do elemento HSM, são feitas comparações entre os resultados obtidos com o elemento HSM e DKT além de resultados obtidos com outros métodos. Além disso, é feita a análise de pavimentos de edifícios pelo método dos elementos finitos, onde o HSM

aparece como elemento discretizador das lajes, comparando os resultados dessa análise com resultados obtidos com o elemento DKT.

No Capítulo II é feita uma descrição das equações básicas da teoria das placas e é preparada a expressão do funcional de Hellinger-Reissner. Além disso são preparadas as expressões do trabalho das cargas concentradas ou distribuídas sobre a placa, e a expressão da energia potencial total para um elemento finito.

No Capítulo III, a expressão do funcional de Hellinger-Reissner do capítulo anterior é aplicada ao elemento finito triangular HSM. Determina-se então a matriz de rigidez da estrutura. Com o vetor de cargas nodais devido ao carregamento externo, monta-se a expressão da energia total. A imposição de ser extrema a energia conduz a um sistema de equações lineares nos deslocamentos nodais. Este capítulo descreve ainda, a formação de um elemento quadrangular pela composição de quatro elementos HSM, com posterior condensação estática dos parâmetros internos. A matriz de rigidez de um elemento finito de barra, também é mostrada. A utilização conjunta desses três tipos de elementos é viabilizada na análise de pavimentos de edifícios.

No Capítulo IV são apresentados vários exemplos de placas delgadas e comparados os resultados com os obtidos com o elemento DKT desenvolvido por Rezende [2] e com resultados da teoria clássica, além dos resultados obtidos com o método dos elementos de contorno. O comportamento do elemento finito HSM na análise de pavimento de edifício também é verificado.

No Capítulo V são apresentadas as conclusões do estudo.

Finalmente, no Capítulo VI são apresentadas as referências bibliográficas e no Capítulo VII é apresentada a bibliografia consultada.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS DA TEORIA PARA FLEXÃO SIMPLES DE PLACAS DELGADAS

2.1. INTRODUÇÃO

Os elementos estruturais podem ser classificados em três categorias conforme tenham duas, uma ou nenhuma dimensão pequena quando comparada às outras: de superfície, lineares ou tridimensionais, respectivamente.

Dentre os elementos estruturais de superfície a placa é um dos mais empregados em estruturas usuais. A placa é definida como um elemento estrutural simétrico em relação a um plano, chamado superfície média ou plano médio da placa, sendo admissíveis pequenas curvaturas.

A distância entre as superfícies equidistantes ao plano médio, chamada espessura, é pequena se comparada com as demais dimensões da placa e pode ser variável.

As placas são solicitadas por esforços externos normais

ao plano médio, podendo ou não estar combinados com outro carregamento contido no plano médio.

Dependendo das propriedades do material de que é constituída, a placa pode ser classificada como: *anisótropa* - com propriedades diferentes em qualquer direção, *ortótropa* - com propriedades diferentes em duas direções ortogonais e *isótropa* - com propriedades iguais em qualquer direção.

Dependendo da relação espessura/menor dimensão (h/a) a placa pode ser classificada como muito delgada, delgada e espessa [3].

Neste capítulo é estudada a placa isótropa e delgada submetida a carregamento transversal e ortogonal ao plano médio. O estudo é baseado na teoria de Kirchhoff para placas, que em geral interpreta suficientemente bem o comportamento das placas com relação h/a entre $1/5$ e $1/100$ [4].

2.2. HIPÓTESES BÁSICAS

As seguintes hipóteses são necessárias para a determinação das relações básicas para placas delgadas isótropas:

- A placa é constituída de material elástico-linear homogêneo.

- Os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados com a espessura h da placa.

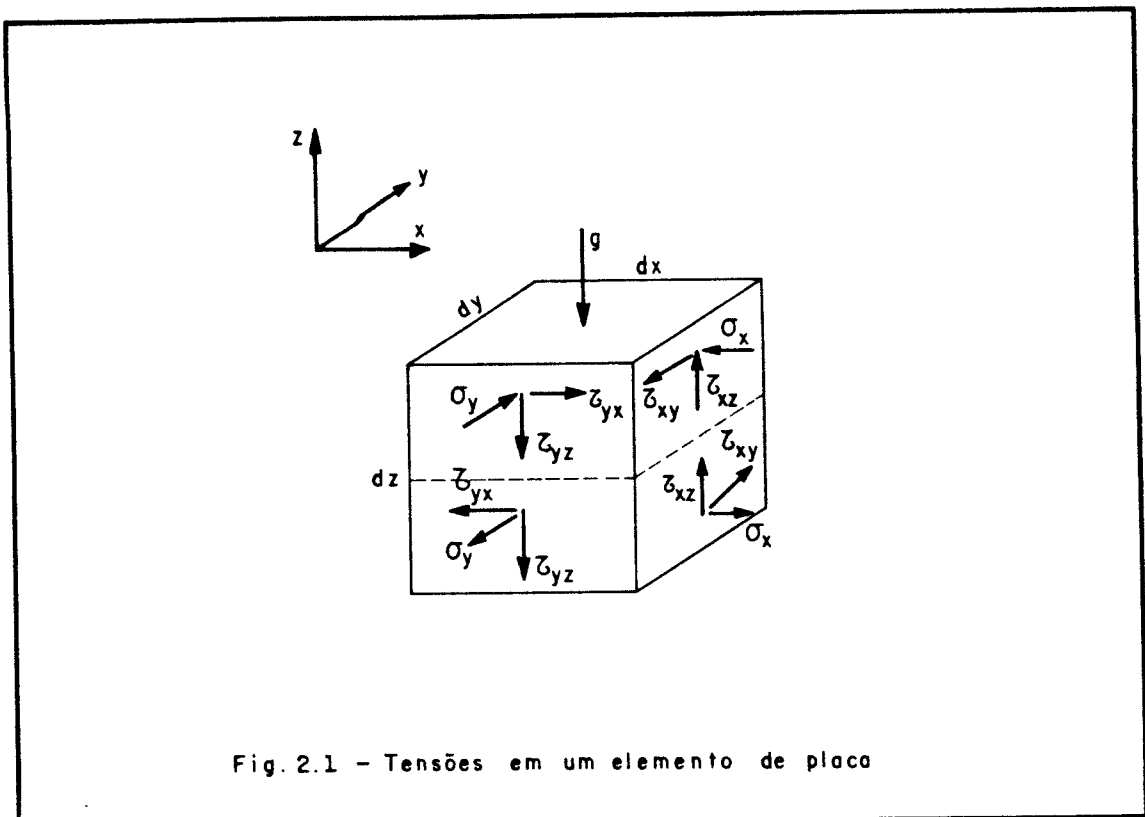
- Uma reta inicialmente normal ao plano médio permanece reta após a flexão da placa e perpendicular à sua superfície elástica, que é o plano médio deformado.

- As tensões normais na direção transversal à placa são pequenas em relação às tensões normais de flexão, paralelas ao plano médio.

2.3. RELAÇÕES BÁSICAS PARA PLACAS DELGADAS

A partir das simplificações envolvidas nas hipóteses básicas determina-se as relações básicas para placas delgadas isotrópicas.

Considere-se o elemento de placa da figura (2.1) onde estão indicadas as tensões atuantes juntamente com o carregamento transversal g distribuído em sua área.



As resultantes dessas componentes de tensão, que são momentos fletores e volventes e forças cortantes, são mostradas na figura (2.2).

m_x , m_y , m_{xy} , q_x e q_y , que são esforços por unidade de comprimento, são definidos pelas seguintes integrais sobre a espessura do elemento:

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad (2.1.A)$$

$$m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad (2.1.B)$$

$$m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (2.1.C)$$

$$m_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz \quad (2.1.D)$$

$$q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad (2.1.E)$$

$$q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (2.1.F)$$

Do equilíbrio de forças verticais e de momentos em torno dos eixos x e y, obtêm-se as seguintes equações:

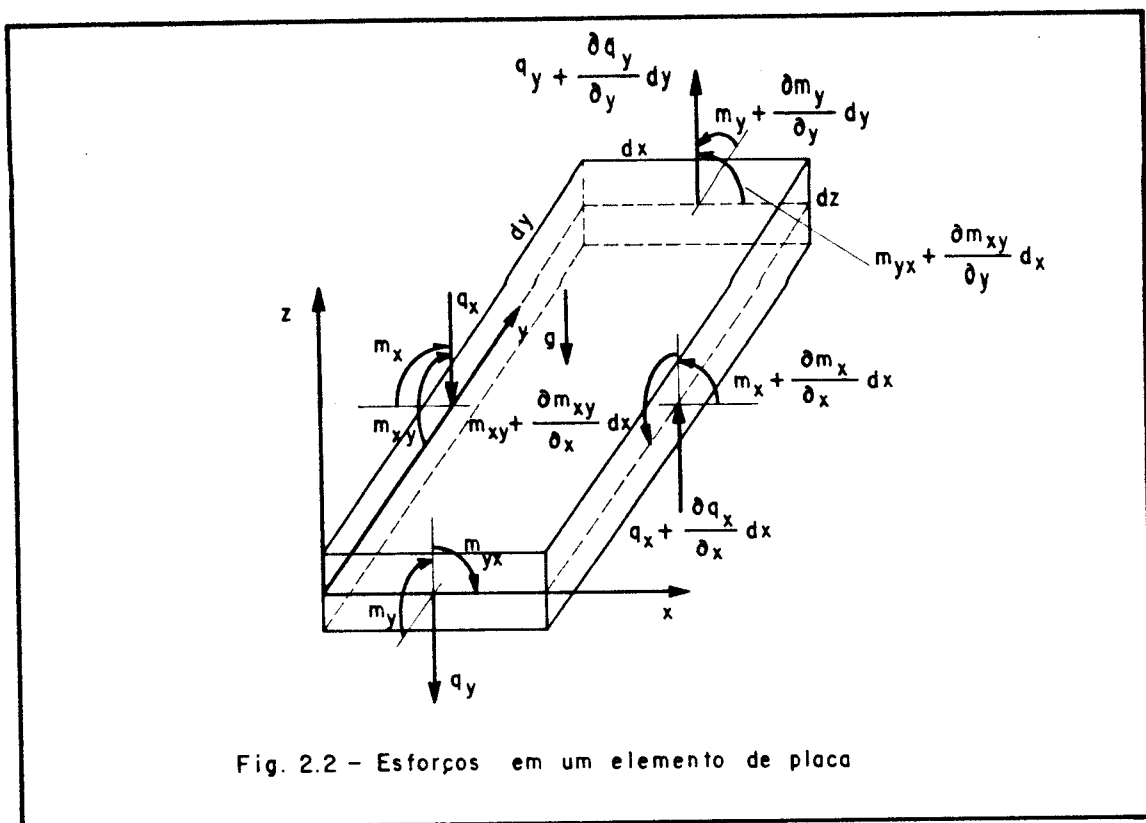
$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + g = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0 \quad (2.4)$$

Considerando-se a simetria do tensor dos momentos ($m_{xy} = m_{yx}$) e eliminando-se q_x e q_y nas equações (2.2), (2.3) e (2.4), obtém-se a equação:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -g \quad (2.5)$$



Considerem-se agora as posições inicial e final de um elemento de placa $abcd$, paralelo ao plano médio da placa e cujos lados ab e ad são paralelos aos eixos x e y , respectivamente e estão situados a uma distância z do plano médio (ver figura (2.3)).

Admitindo-se que durante a flexão da placa, os pontos a , b , c e d sofrem pequenos deslocamentos, passando para as

posições a' , b' , c' e d' , e chamando u_0 e v_0 de componentes de deslocamento do ponto a nas direções x e y , respectivamente, o deslocamento do ponto b na direção x , fica:

$$u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Logo, a variação de comprimento do lado dx , segundo x , é:

$$\Delta dx = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u_0$$

Portanto:

$$\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (2.6)$$

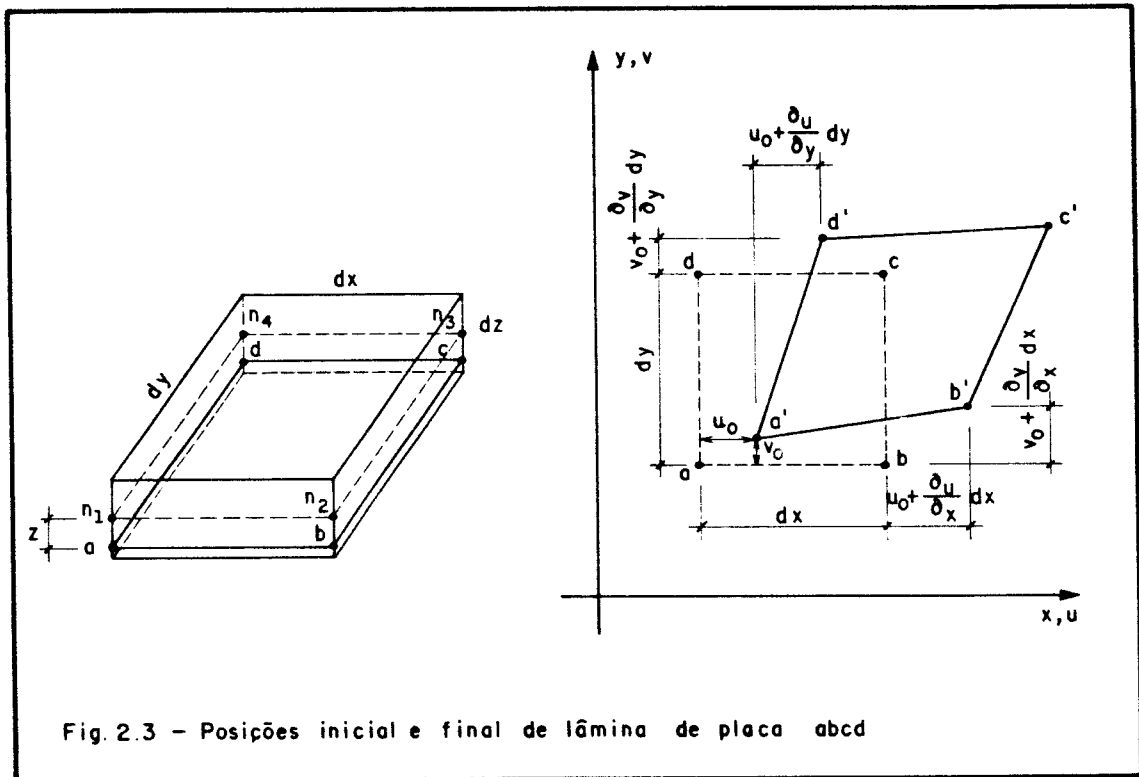


Fig. 2.3 - Posições inicial e final de lâmina de placa $abcd$

Assim, a deformação relativa na direção x é dada por:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.7)$$

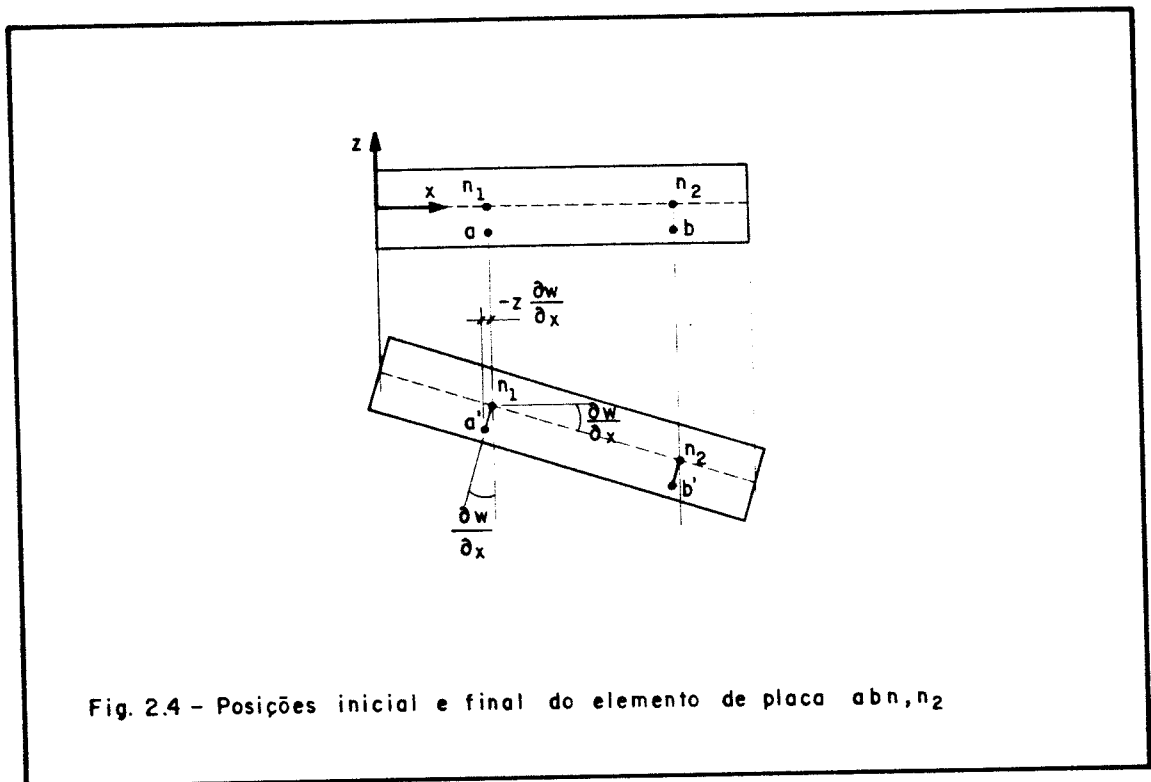
De forma análoga, a deformação relativa na direção y é:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.8)$$

E a variação do ângulo reto formado pelos segmentos ab e ad é:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.9)$$

Considere-se ainda, a seção de placa, paralela ao plano xz , passando pelos pontos a , b , n_1 e n_2 . Na figura (2.4) estão representadas as posições inicial e final desta seção de placa.



O elemento an_1 , inicialmente na vertical, sofre uma rotação de $\frac{\partial w}{\partial x}$. Deste modo, o deslocamento do ponto a situado a uma distância z do plano médio na direção x é:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.10)$$

Analogamente, o deslocamento do ponto a na direção y é:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.11)$$

As componentes de deformação escritas em função do deslocamento transversal w , são obtidas substituindo-se as expressões de u e v em (2.7), (2.8) e (2.9).

Deste modo, têm-se:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.13)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.14)$$

Conhecidas as deformações em um ponto da placa, a partir da lei de Hooke, as tensões correspondentes podem ser determinadas:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad (2.15)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad (2.16)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (2.17)$$

onde,

E é o módulo de elasticidade longitudinal;

G é o módulo de elasticidade transversal;

ν é o coeficiente de Poisson.

com,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.18)$$

As componentes de tensão escritas em função do deslocamento transversal w , são obtidas substituindo-se as expressões das componentes de deformação ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} , expressões (2.12), (2.13) e (2.14) nas expressões (2.15), (2.16) e (2.17).

Deste modo obtêm-se:

$$\sigma_x = \frac{-E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z \quad (2.19)$$

$$\sigma_y = \frac{-E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z \quad (2.20)$$

$$\tau_{xy} = -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \quad (2.21)$$

Substituindo-se as expressões das componentes de tensão σ_x , σ_y e τ_{xy} , (2.19), (2.20) e (2.21) nas expressões (2.1.A), (2.1.B) e (2.1.C), obtêm-se os valores dos momentos fletores e volventes, m_x , m_y , m_{xy} e m_{yx} escritos em função do deslocamento transversal w :

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.22)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.23)$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -D (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.24)$$

com,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.25)$$

Substituindo-se em (2.3) e (2.4), as expressões de m_x , m_y e m_{xy} , (2.22), (2.23) e (2.24), obtêm-se os valores dos esforços cortantes q_x e q_y em função do deslocamento transversal w :

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.26)$$

$$q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.27)$$

Pode-se ainda, modificar a expressão (2.5) introduzindo-se os valores de m_x , m_y e m_{xy} , expressões (2.22), (2.23) e (2.24), obtendo-se a equação diferencial de placas:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{g}{D} \quad (2.28)$$

A equação acima pode ser escrita em sua forma implícita, como:

$$\Delta \Delta w = \frac{g}{D} \quad (2.29)$$

onde,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.30)$$

Considere-se agora um sistema genérico de coordenadas n

e s . Pode-se escrever as componentes de momento, inicialmente referidas às direções x e y , em relação a esse sistema genérico.

Na figura (2.5) está representado o elemento de placa abc , paralelo ao plano médio e a uma distância z desse plano, com as respectivas componentes de tensão e os esforços resultantes.

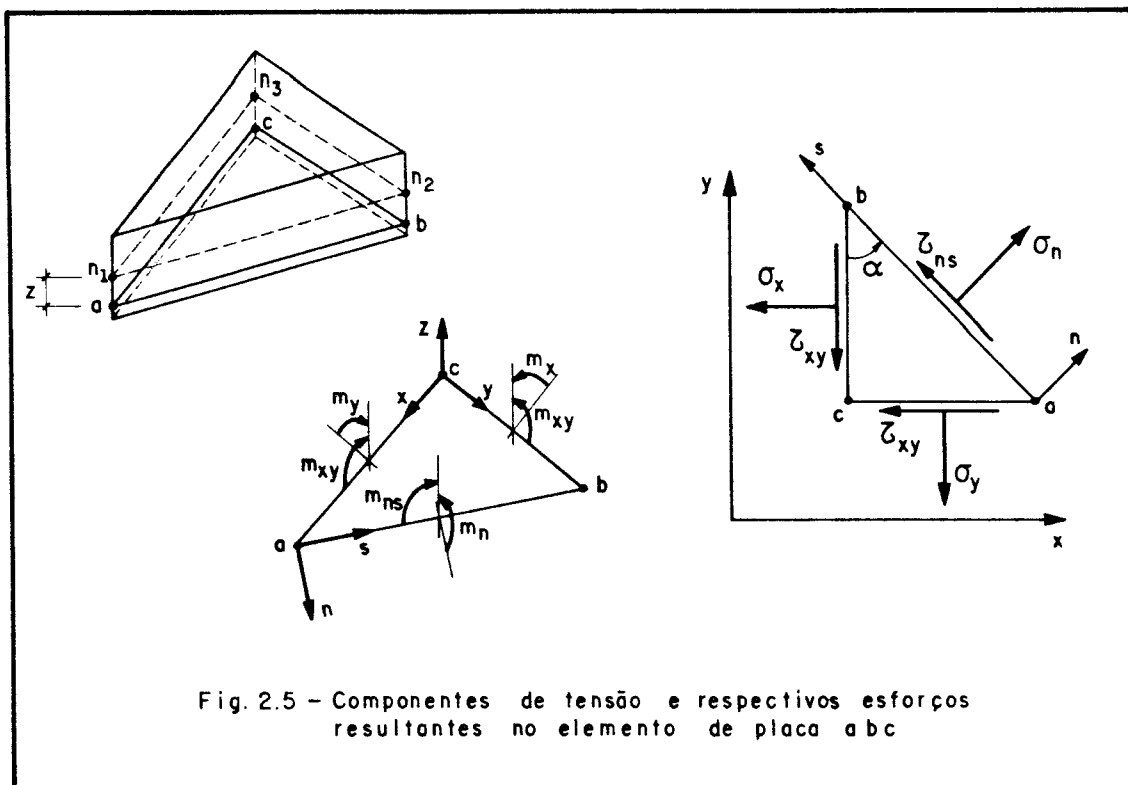


Fig. 2.5 - Componentes de tensão e respectivos esforços resultantes no elemento de placa abc

As tensões normal e tangencial ao lado ab , σ_n e τ_{ns} (ver figura (2.5.B)), estão relacionadas com as componentes de tensão σ_x , σ_y e τ_{xy} através das expressões:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.31)$$

$$\tau_{ns} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (2.32)$$

O momento m_n é dado por:

$$m_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_n z \, dz$$

que após a substituição de (2.31) resulta em:

$$m_n = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + 2m_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.33)$$

Analogamente, obtém-se:

$$m_{ns} = (m_y - m_x) \sin \alpha \cos \alpha + m_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (2.34)$$

Considerando-se:

$$\alpha^* = \frac{\pi}{2} + \alpha \quad (2.35)$$

Pode-se obter a componente de momento m_s , a partir da expressão (2.33):

$$m_s = m_x \sin^2 \alpha + m_y \cos^2 \alpha - 2m_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.36)$$

A cortante q_n , na direção normal ao lado ab pode também ser relacionada com as cortantes q_x e q_y .

A figura (2.6) mostra o equilíbrio de forças verticais no elemento de placa da figura (2.5.A).

Da condição de equilíbrio de forças verticais, tem-se:

$$q_n = q_x \cos \alpha + q_y \sin \alpha \quad (2.37)$$

Analogamente ao momento m_s , obtém-se:

$$q_s = -q_x \sin \alpha + q_y \cos \alpha \quad (2.38)$$

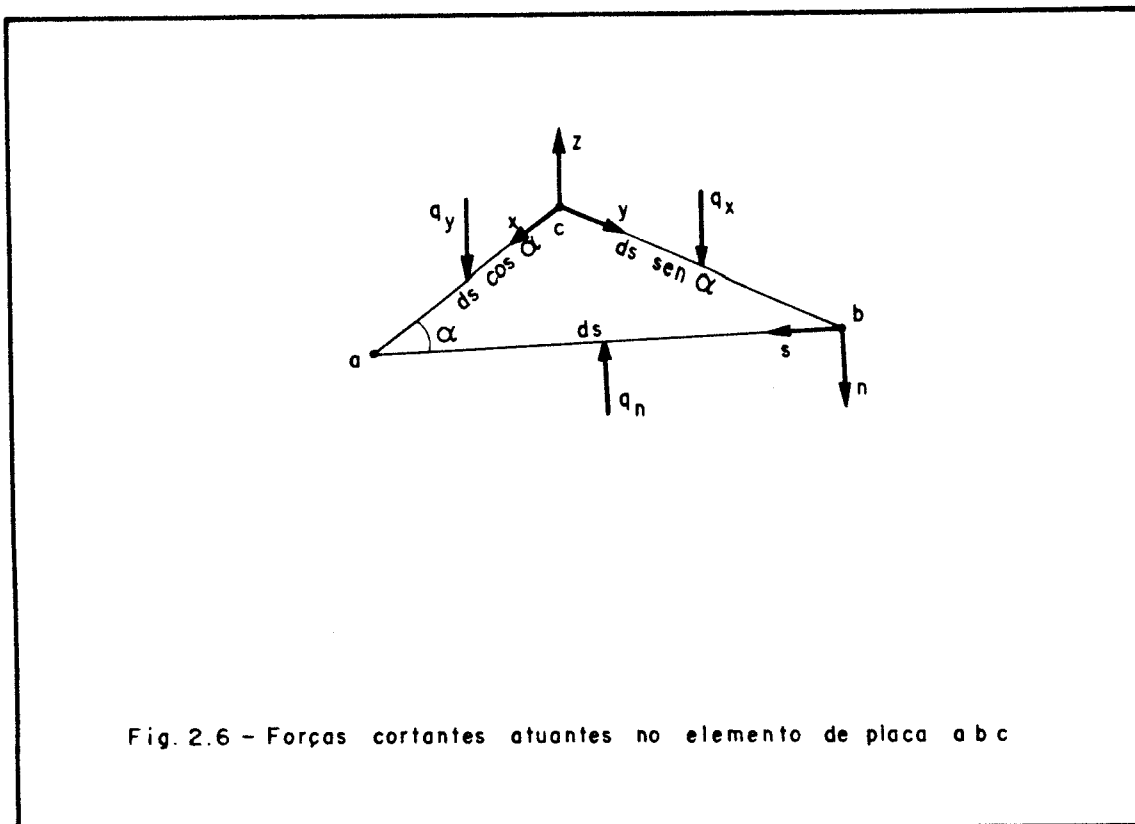


Fig. 2.6 - Forças cortantes atuantes no elemento de placa abc

2.4. FUNCIONAL DE HELLINGER-REISSNER

Seja um elemento de placa abc , com as respectivas componentes de tensão e os esforços resultantes, conforme figura (2.5). Seja ainda o equilíbrio de forças verticais no mesmo elemento de placa, conforme figura (2.6).

O funcional de Hellinger-Reissner neste elemento determina-se com o trabalho das cargas externas, menos a energia de deformação complementar, que é o trabalho produzido pelos esforços resultantes sobre o elemento durante a flexão de placas [5].

Pode-se escrever, então:

$$U_{HSM} = -U_e^* + T_{eu} \quad (2.39)$$

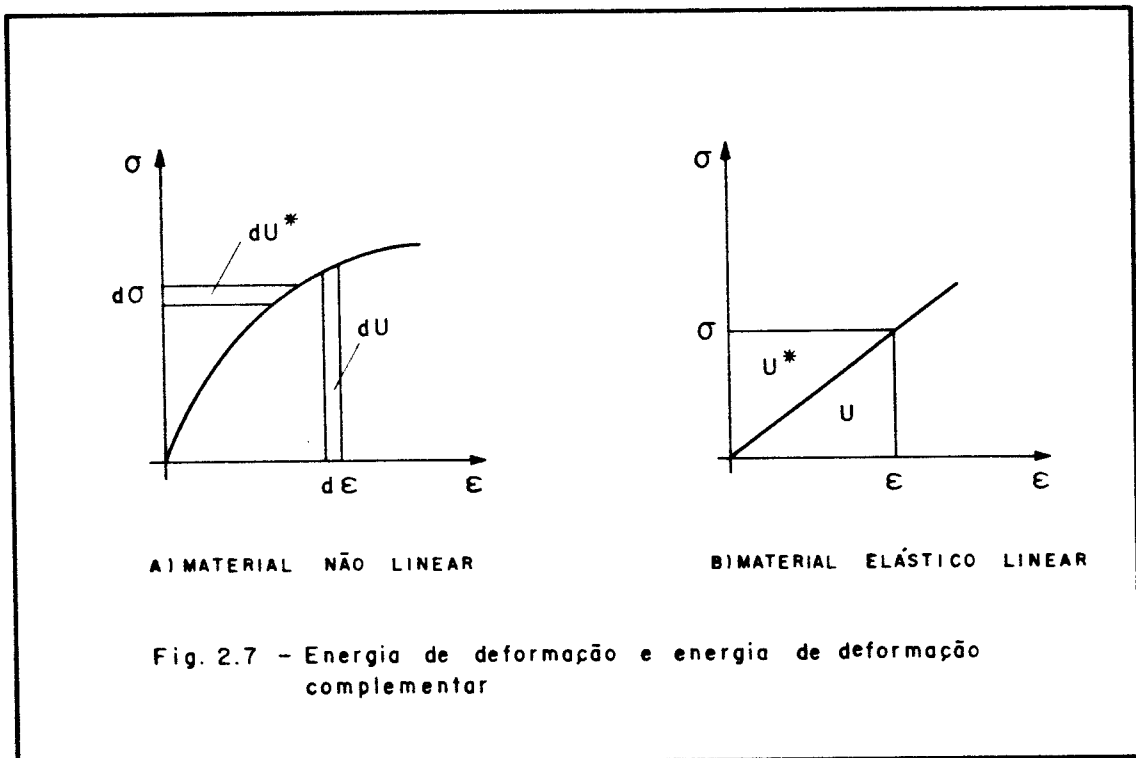
onde,

U_{HSM} é o funcional de Hellinger-Reissner;

U_e^* é a energia de deformação complementar para o elemento de placa;

T_{eu} é o trabalho das cargas externas no elemento de placa .

Para um material elástico linear a energia de deformação complementar é igual à energia de deformação, conforme figura (2.7).



Tem-se, portanto:

$$U^* = U \quad (2.40)$$

com,

U sendo a energia de deformação.

A expressão da energia de deformação de um corpo elástico linear, é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV \quad (2.41)$$

De acordo com as hipóteses básicas pode-se escrever a expressão (2.41) como:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (2.42)$$

Utilizando-se as expressões (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), (2.16), (2.17), e ainda (2.22), (2.23), (2.24) e (2.25) e integrando-se em z variando de $-h/2$ a $h/2$, obtém-se a expressão da energia de deformação complementar para o elemento de placa, em função dos esforços m_x, m_y e m_{xy} :

$$U_e^* = \int_A \frac{12}{Eh^3} \left[(m_x + m_y)^2 + 2(1+\nu)(m_{xy}^2 - m_x m_y) \right] dx dy \quad (2.43)$$

onde,

A é a área do elemento de placa.

O trabalho das cargas externas escreve-se como:

$$T_{eu} = \int_{\partial A} (w q_n - \frac{\partial w}{\partial n} m_n - \frac{\partial w}{\partial s} m_{ns}) ds \quad (2.44)$$

onde,

∂A é o contorno do elemento;

q_n , m_n e m_{ns} são os esforços que equilibram o elemento de placa.

A expressão do funcional de Hellinger-Reissner para um elemento de placa fica, então:

$$U_{HSM} = - \int_A B(m_x, m_y, m_{xy}) dA - \int_{\partial A} (wq_n - \frac{\partial w}{\partial n} m_n - \frac{\partial w}{\partial s} m_{ns}) ds \quad (2.45)$$

com,

$$B(m_x, m_y, m_{xy}) = \frac{12}{Eh^3} \left[(m_x + m_y)^2 + 2(1+\nu)(m_{xy}^2 - m_x m_y) \right] ds \quad (2.46)$$

2.5. TRABALHO DAS CARGAS TRANSVERSAIS AO PLANO MÉDIO DA PLACA

Considere-se a placa da figura (2.8), submetida a cargas transversais ao seu plano médio. Essas cargas podem ser distribuídas sobre a placa ou concentradas em um ponto i .

Para a carga distribuída sobre a placa o trabalho realizado é dado por:

$$T_q = \int_A - q(x,y) w(x,y) dA \quad (2.47)$$

onde,

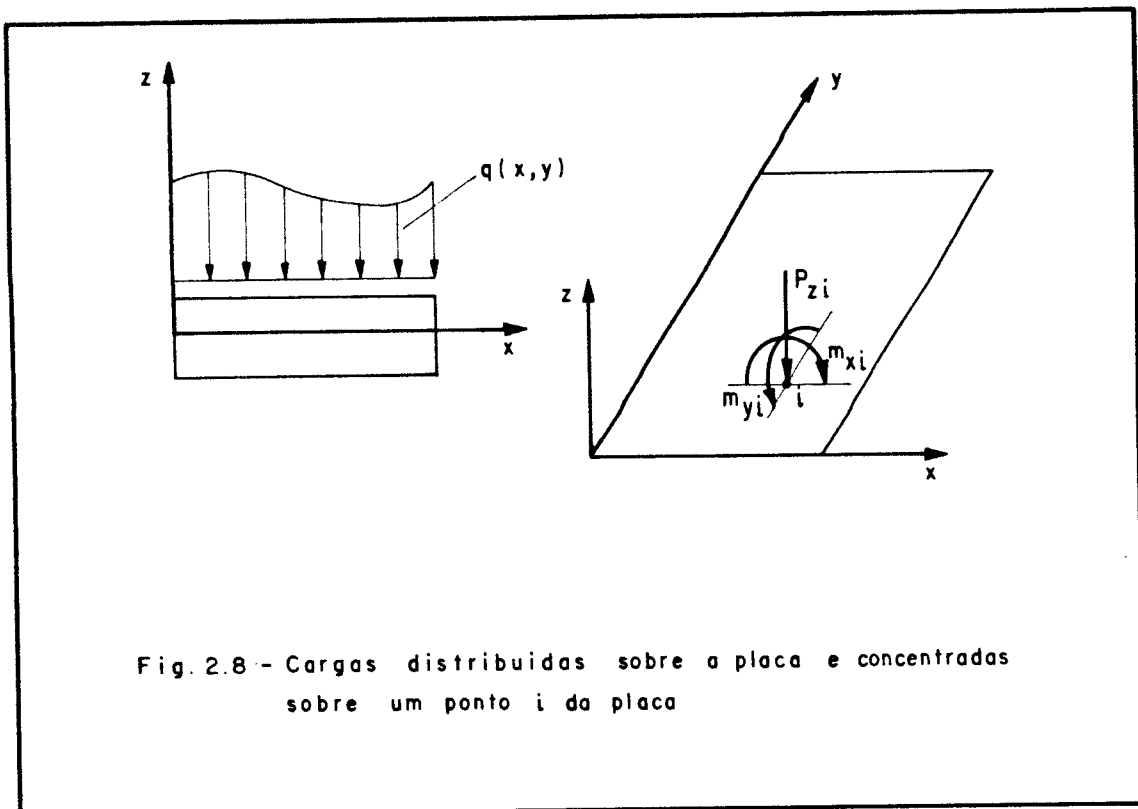
A é a área da superfície média da placa.

Para as cargas aplicadas no ponto i , o trabalho é dado por:

$$T_p = - \left(P_{zi} w_i + m_{xi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i + m_{yi} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right) \quad (2.48)$$

onde,

w_i , $(\frac{\partial w}{\partial x})_i$ e $(\frac{\partial w}{\partial y})_i$ são, respectivamente, o deslocamento na direção z , a rotação em torno do eixo y e a rotação em torno do eixo x , no ponto i da superfície elástica.



2.6. EXPRESSÃO DA ENERGIA TOTAL

Como será visto no Capítulo III, a expressão de U_{HSM} pode ser escrita como:

$$U_{HSM} = \frac{1}{2} [\delta]^t [K_{HSM}] [\delta]$$

que é a expressão da energia de deformação potencial.

A energia potencial total de uma placa é a soma da energia de deformação potencial estendida para toda a placa com o trabalho das cargas externas transversais ao plano médio da placa.

Deste modo, pode-se escrever:

$$\pi = U_{HSM} + T_q + T_p \quad (2.49)$$

Substituindo-se as expressões (2.45), (2.46), (2.47) e (2.48) em (2.49) tem-se a expressão da energia potencial total:

$$\begin{aligned} \pi = & -\sum \int_A \frac{12}{Eh^3} \left[(m_x + m_y)^2 + 2(1+\nu)(m_{xy}^2 - m_x m_y) \right] dx dy + \\ & + \sum \int_{\partial A} (w q_n - \frac{\partial w}{\partial n} m_n - \frac{\partial w}{\partial s} m_{ns}) ds - \int q(x,y) w dA + \\ & - \left(P_{zi} w_i + m_{xi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i + m_{yi} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

CAPÍTULO III

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS AO ESTUDO DA FLEXÃO SIMPLES DE PLACAS DEGRADADAS

3.1. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A solução analítica da equação diferencial das placas é muito trabalhosa e é conhecida apenas para alguns casos particulares. É possível, porém, obter soluções aproximadas, utilizando-se processos numéricos. Dentre estes destaca-se o método dos elementos finitos, onde a solução recai na resolução de um sistema de equações lineares.

A estrutura é discretizada em elementos de dimensões finitas, chamados elementos finitos. Os pontos de conexão entre os elementos finitos são os nós do elemento e geralmente estão no seu contorno.

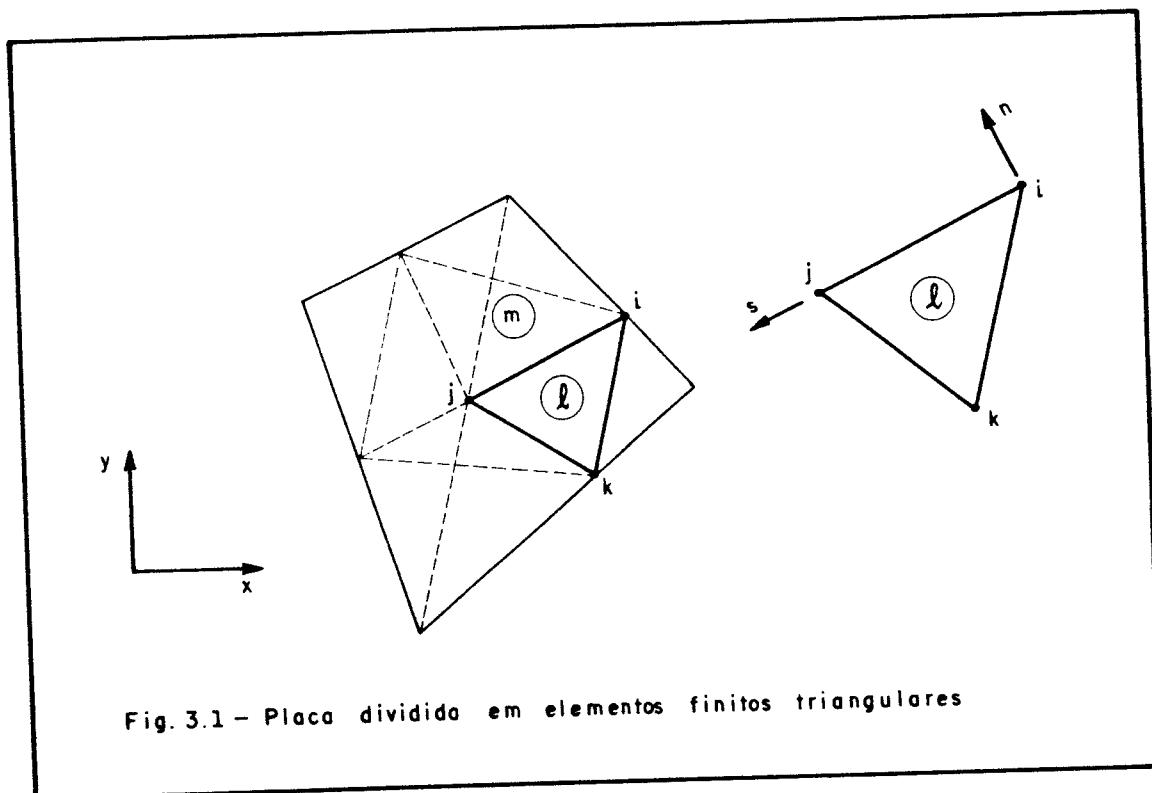
Aos elementos finitos é associada uma função aproximadora dos deslocamentos nos nós dos elementos. Os

deslocamentos internos ao elemento são determinados em função dos deslocamentos nodais.

Resultados mais próximos dos obtidos da integração exata são conseguidos com divisão maior da placa em elementos. Além disso, a compatibilidade de deslocamentos e inclinações (derivadas primeiras da função deslocamento) nos nós do elemento e em suas interfaces, garante a convergência do resultado em relação à solução exata do problema.

3.2. ELEMENTO FINITO HSM (HYBRID STRESS MODEL)

Seja uma placa de contorno qualquer dividida em elementos finitos, conforme figura (3.1).

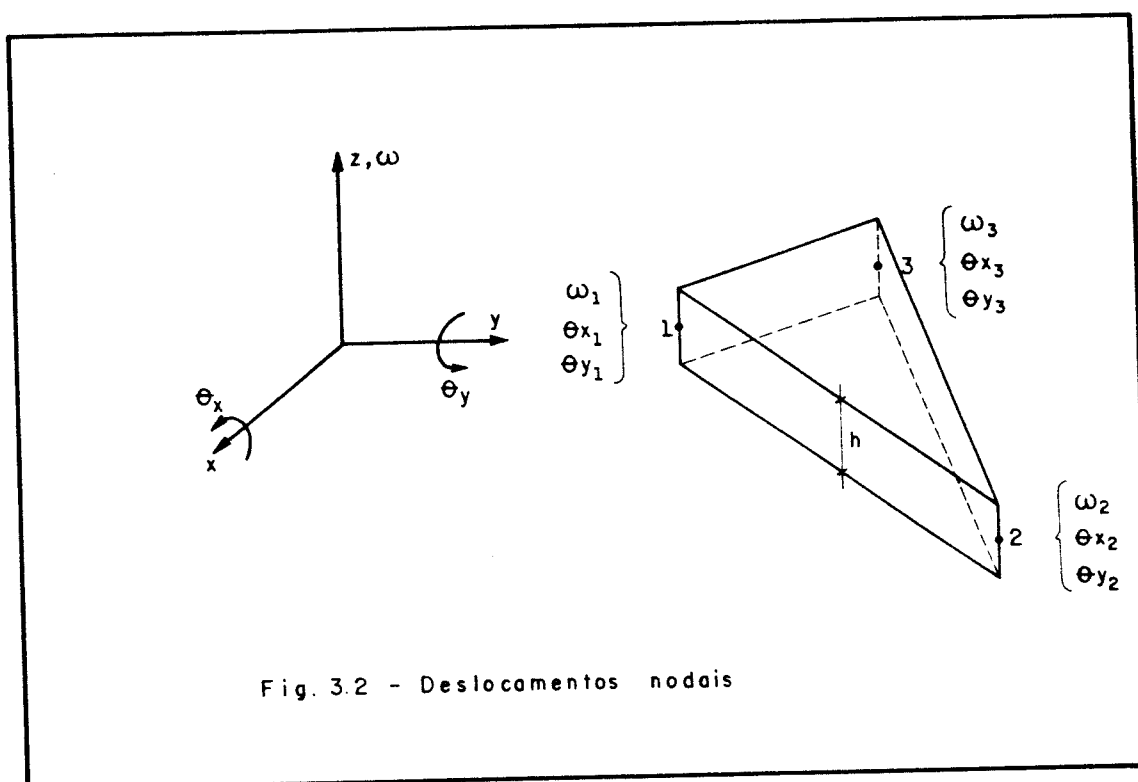


O HSM é um elemento finito triangular com três nós definidos em seus vértices.

Para garantir a continuidade da elástica na interface dos elementos, estes devem ter em todos os pontos do lado comum o mesmo deslocamento vertical (w) e a mesma derivada dos deslocamentos na direção normal a esse lado ($\partial w/\partial n$).

Por exemplo, os elementos 1 e m da figura (3.1) devem ter o mesmo deslocamento vertical em todos os pontos do lado ij , comum aos mesmos. Além disso, a normal à elástica ao longo desse lado, na direção do eixo n deve ser a mesma para os dois elementos.

Considerem-se agora o elemento finito e seus respectivos deslocamentos nodais conforme figura (3.2).



w é o deslocamento na direção z ;

$\theta_x = \partial w / \partial y$ é a declividade da elástica na direção y ;

$\theta_y = - \partial w / \partial x$ é a declividade da elástica na direção x .

Pode-se indicar o vetor dos deslocamentos nodais de um elemento genérico por $[\delta]_e$, com:

$$[\delta]_e^t = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3}] \quad (3.1)$$

3.3. FUNÇÃO APROXIMADORA

Para a aproximação da elástica no elemento finito é adotada função cúbica de deslocamentos (w) com variação linear da derivada normal dos deslocamentos ($\partial w / \partial n$) ao longo dos lados do elemento.

O deslocamento vertical w ao longo do lado ij do elemento é expresso por:

$$w = H'_{01}(\xi) w_i + H'_{02}(\xi) w_j + H'_{11}(\xi) \left(\frac{\partial w}{\partial S} \right)_i + H'_{12}(\xi) \left(\frac{\partial w}{\partial S} \right)_j \quad (3.2)$$

onde,

$$\begin{aligned} H'_{01} &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ H'_{02} &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ H'_{11} &= 1_{ij}(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ H'_{12} &= 1_{ij}(-\xi^2 + \xi^3) \end{aligned} \quad (3.3)$$

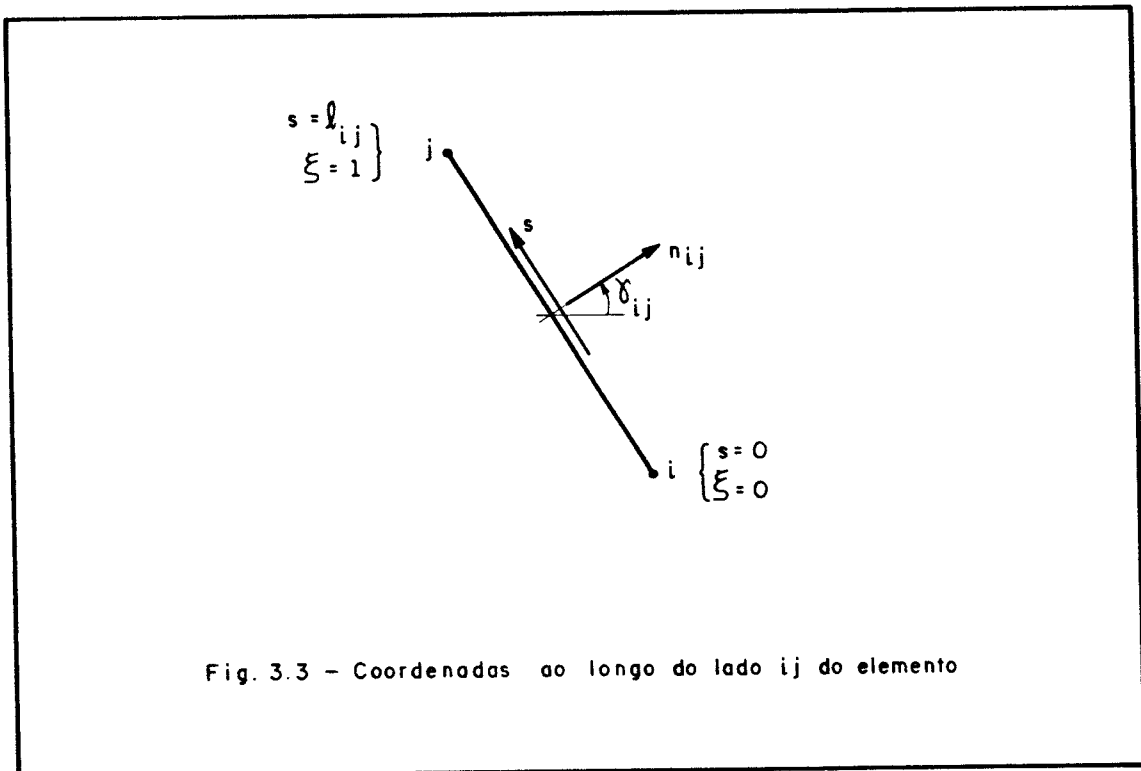
A derivada normal dos deslocamentos ($\partial w / \partial n$) é aproximada por:

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = (1 - \xi) \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right)_i + \xi \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right)_j \quad (3.4)$$

Nas duas aproximações, ξ é uma coordenada adimensional com origem em i e que varia de 0 a 1 ao longo do lado ij ; s é uma coordenada com origem em i e que varia de 0 a l_{ij} ao longo do lado ij e n é uma coordenada normal a esse lado ij (ver figura (3.3)); l_{ij} é o comprimento do lado ij do elemento.

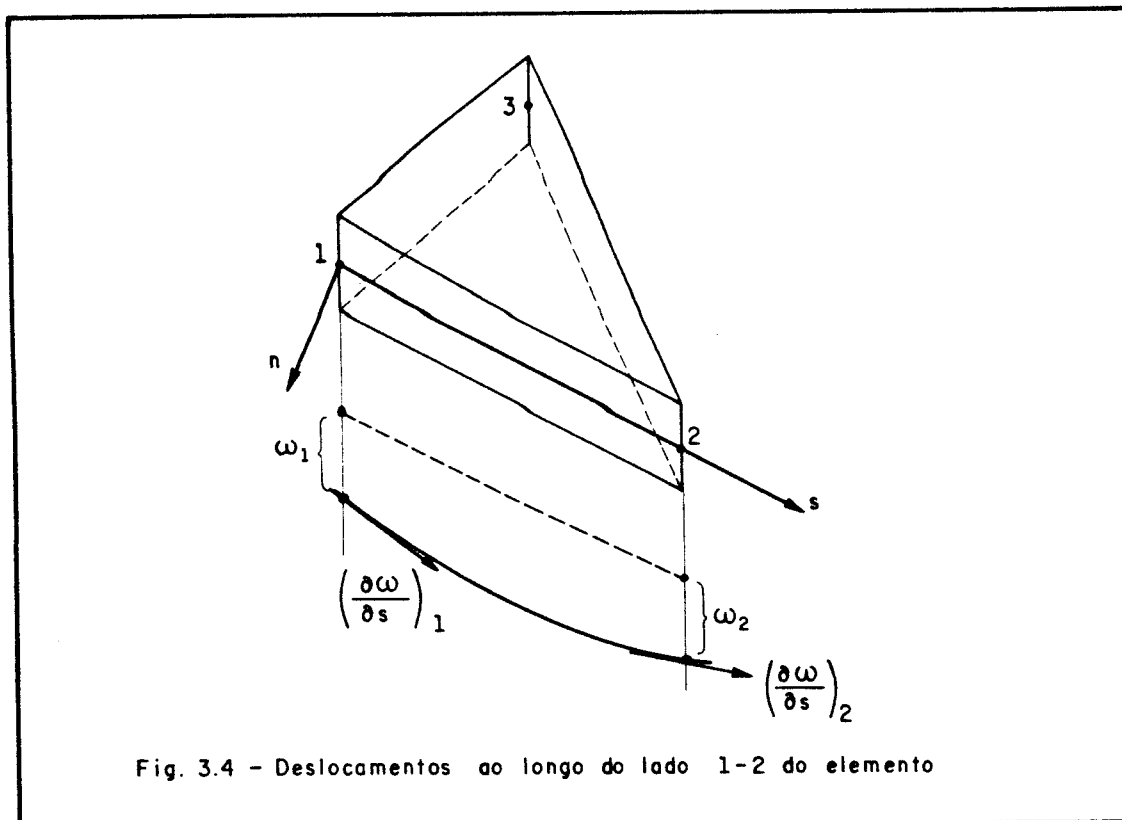
A expressão de ξ , é dada por:

$$\xi = \frac{s}{l_{ij}} \quad (3.5)$$



As funções w e $\partial w/\partial n$ garantem a continuidade do deslocamento e da rotação normal dos lados, ao longo do contorno do elemento.

Considere-se o elemento mostrado na figura (3.4).



Um polinômio do terceiro grau, em uma variável, precisa de quatro parâmetros para ser definido. Por exemplo, para o lado 1-2 do elemento (conforme fig (3.4)), têm-se:

Nó 1 : w_1 e $(\partial w/\partial s)_1$

Nó 2 : w_2 e $(\partial w/\partial s)_2$

Deste modo, para cada nó têm-se dois parâmetros, w e $\partial w/\partial s$. Portanto, ao longo do lado 1-2 têm-se os quatro parâmetros que garantem a continuidade do deslocamento.

A declividade normal varia linearmente ao longo do lado do elemento e portanto, são necessários dois parâmetros para defini-la. Em cada nó tem-se $\partial w / \partial n$; logo, têm-se os dois parâmetros que asseguram sua continuidade ao longo deste lado.

3.4. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO FINITO HSM

A matriz de rigidez do elemento HSM é escrita a partir das equações (2.45) e (2.46), reescritas a seguir:

$$U_{\text{HSM}} = - \int_A B(m_x, m_y, m_{xy}) dx dy + \int_{\partial A} (w \alpha_n - \frac{\partial w}{\partial n} m_n - \frac{\partial w}{\partial s} m_{ns}) ds$$

com,

$$B(m_x, m_y, m_{xy}) = \frac{12}{Eh^3} \left[(m_x + m_y)^2 + 2(1+\nu)(m_{xy}^2 - m_x m_y) \right]$$

onde,

A representa a superfície média do elemento;
 ∂A é o contorno do elemento.

A expressão de $B(m_x, m_y, m_{xy})$ pode ser escrita, em forma matricial, como:

$$B(m_x, m_y, m_{xy}) = \frac{1}{2} [M]^t [D_b]^{-1} [M] \quad (3.6)$$

onde,

$$[M] = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

e

$$[D_b] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Invertendo-se a expressão (3.8), tem-se:

$$[D_b]^{-1} = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\nu^2-1} & \frac{\nu}{\nu^2-1} & 0 \\ \frac{\nu}{\nu^2-1} & \frac{-1}{\nu^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1-\nu} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Pode-se, ainda, escrever a expressão de U_{HSM} , como:

$$U_{HSM} = U_1 + U_2 \quad (3.10)$$

com,

$$U_1 = \int_A -B (m_x, m_y, m_{xy}) dx dy \quad (3.11)$$

$$U_2 = \int_{\partial A} (w q_n - \frac{\partial w}{\partial n} m_n - \frac{\partial w}{\partial s} m_{ns}) ds \quad (3.12)$$

No elemento finito HSM adotam-se os momentos fletores e volvente variando linearmente no seu domínio.

Assim, pode-se escrever:

$$[M] = [P] [\beta] \quad (3.13)$$

com,

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

e

$$[\beta]^t = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_q\} \quad (3.15)$$

onde,

$[\beta]$ é um vetor de nove parâmetros generalizados.

De acordo com as considerações acima, usando-se as expressões (3.6) e (3.13), pode-se escrever a expressão de U_1 , equação (3.11), como:

$$U_1 = \int_A -\frac{1}{2} [P]^t [\beta]^t [D_b]^{-1} [P] [\beta] dx dy \quad (3.16)$$

ou ainda,

$$U_1 = -\frac{1}{2} [\beta]^t \int_A [P]^t [D_b]^{-1} [P] dx dy [\beta] \quad (3.17)$$

Fazendo

$$[H] = \int_A [P]^t [D_b]^{-1} [P] dx dy \quad (3.18)$$

tem-se:

$$U_1 = -\frac{1}{2} [\beta]^t [H] [\beta] \quad (3.19)$$

Considere-se agora, a expressão (3.12).

Chamando-se a integral sobre o lado ij do elemento (lado ij = lado 12 ou lado 23 ou lado 31) de U_3 , tem-se:

$$U_3 = \int_{ij} (w q_n - \frac{\partial w}{\partial n} m_n - \frac{\partial w}{\partial s} m_{ns}) ds \quad (3.20)$$

As expressões de q_n , m_n e m_{ns} , (2.37), (2.33) e (2.34), podem ser escritas como:

$$m_n = cc m_x + 2cs m_{xy} + ss m_y \quad (3.21.A)$$

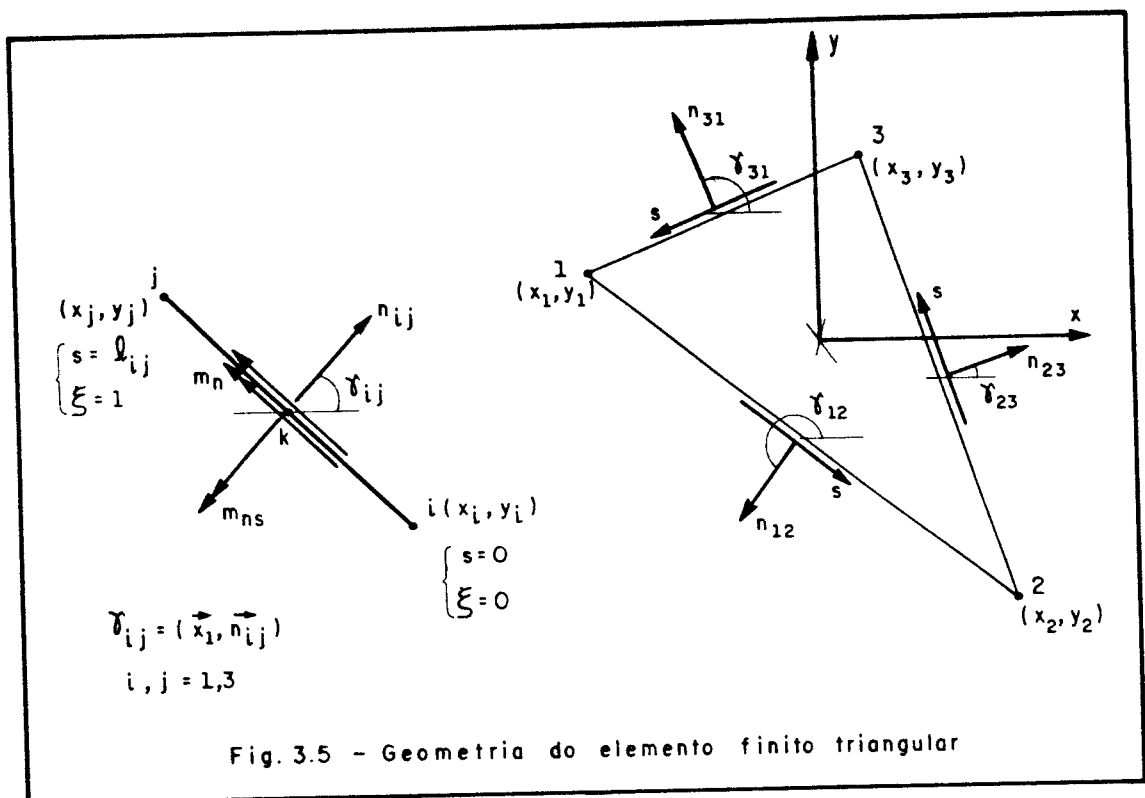
$$m_{ns} = -sc m_x + (cc - ss) m_{xy} + sc m_y \quad (3.21.B)$$

$$q_n = c q_x + s q_y \quad (3.21.C)$$

onde,

c e s representam $\cos \gamma$ e $\sin \gamma$, respectivamente;

γ é o ângulo entre a direção x e a normal ao longo do elemento (figura (3.5)).



Usando-se as expressões (2.26) e (2.27), pode-se escrever:

$$q_n = -c D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - s D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.22)$$

A partir das expressões (2.22), (2.23) e (2.24), têm-se:

$$\frac{\partial m}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.23.A)$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.23.B)$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial y} = -D (1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad (3.23.C)$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} \frac{\partial m}{\partial x} = -D (1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad (3.23.D)$$

Com base nas expressões (3.22) e (3.23), pode-se escrever:

$$q_n = c \left(\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} \right) + s \left(\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial x} \right) \quad (3.24)$$

Usando-se as expressões (3.13), (3.21.A), (3.21.B) e (3.24), pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} q_n \\ -m_n \\ -m_{ns} \end{Bmatrix} = [R]_{ij} [\beta] \quad (3.25)$$

com,

$$[R]_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 & 0 & 0 & s & 0 & s & c \\ -cc-cx-ccy-ss-ssx-ssy & -2cs & -2csx & -2csy \\ cs & csx & csy & -cs-csx-csy & -(cc-ss) & -(cc-ss)x & -(cc-ss)y \end{bmatrix}$$

(3.26)

De acordo com a figura (3.5), onde considera-se o sistema de coordenadas n e s , normal e tangencial aos lados do elemento, têm-se as seguintes relações:

$$x_{ij} = x_i - x_j$$

$$Y_{ij} = Y_i - Y_j$$

$$l_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + Y_{ij}^2}$$

$$\xi = \frac{s}{l_{ij}}$$

$$x = x_i - \xi x_{ij} \tag{3.27}$$

$$y = y_i - \xi Y_{ij}$$

$$c = \cos\gamma_{ij} = -Y_{ij}/l_{ij}$$

$$s = \text{sen}\gamma_{ij} = x_{ij}/l_{ij}$$

$$x_k = \frac{1}{2} (x_i + x_j)$$

$$Y_k = \frac{1}{2} (Y_i + Y_j)$$

com,

$$i, j = 1, 3$$

A matriz $[R]_{ij}$ é, portanto, composta de expressões lineares em ξ .

Podem-se escrever ainda, as relações entre os sistemas de coordenadas x,y e n,s , do seguinte modo:

$$\begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

ou,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Diferenciando-se x e y em relação a s e n , têm-se:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = c \quad \frac{\partial y}{\partial s} = s \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial x}{\partial n} = -s \quad \frac{\partial y}{\partial n} = c$$

de onde vem:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Usando-se a relação (3.31), pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial n} \\ \frac{\partial w}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Como $\frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_y$ e $\frac{\partial w}{\partial y} = \theta_x$, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial s} \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Para o lado ij (lado ij = lado 12 ou 23 ou 31), pode-se escrever a equação (3.33) como:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_i & \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_j \\ \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i & \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xi} & \theta_{xj} \\ \theta_{yi} & \theta_{yj} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Como w é função de ξ , tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} \quad (3.35)$$

sendo,

$$\xi = \frac{s}{l_{ij}} \quad \text{e} \quad \frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{l_{ij}}$$

Logo,

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{l_{ij}} \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad (3.36)$$

Com as relações (3.34), (3.36) e as expressões de w e $\frac{\partial w}{\partial n}$, (3.2) e (3.4), pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{Bmatrix} = [L]_{ij} [\delta]_{ij} \quad (3.37)$$

onde,

$$[\delta]_{ij}^t = \{w_i, \theta x_i, \theta y_i, w_j, \theta x_j, \theta y_j\} \quad (3.38)$$

e

$$[L]_{ij} = \begin{bmatrix} H'_{01} & cH'_{11} & sH'_{11} & H'_{02} & cH'_{12} & sH'_{12} \\ 0 & s(1-\xi) & -c(1-\xi) & 0 & s\xi & -c\xi \\ \frac{1}{l_{ij}} \frac{\partial H'_{01}}{\partial \xi} & \frac{c}{l_{ij}} \frac{\partial H'_{11}}{\partial \xi} & \frac{s}{l_{ij}} \frac{\partial H'_{11}}{\partial \xi} & \frac{1}{l_{ij}} \frac{\partial H'_{02}}{\partial \xi} & \frac{c}{l_{ij}} \frac{\partial H'_{12}}{\partial \xi} & \frac{s}{l_{ij}} \frac{\partial H'_{12}}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

onde,

$$\frac{\partial H'_{01}}{\partial \xi} = -6\xi + 6\xi^2$$

$$\frac{\partial H'_{02}}{\partial \xi} = 6\xi - 6\xi^2 \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial H'_{11}}{\partial \xi} = l_{ij} (1 - 4\xi - 3\xi^2)$$

$$\frac{\partial H'_{12}}{\partial \xi} = l_{ij} (-2\xi + 3\xi^2)$$

Demonstra-se segundo Batoz [1] que o produto das matrizes obtidas anteriormente pode ser escrito como:

$$[\beta]^t [R]_{ij}^t [L]_{ij} [\delta]_{ij} = w q_n - \frac{\partial w}{\partial n} m_n - \frac{\partial w}{\partial s} m_{ns} \quad (3.41)$$

Efetuada-se as mudanças nos limites de integração, tem-se:

$$U_3 = [\beta]^t l_{ij} \int_0^1 [R]_{ij}^t [L]_{ij} d\xi [\delta]_{ij} \quad (3.42)$$

Fazendo:

$$[G]_{ij} = \int_0^1 [R]_{ij}^t [L]_{ij} d\xi \quad (3.43)$$

A expressão de U_3 , fica:

$$U_3 = \int_{ij} (w q_n - \frac{\partial w}{\partial n} m_n - \frac{\partial w}{\partial s} m_{ns}) ds = [\beta]^t [G]_{ij} [\delta]_{ij} \quad (3.44)$$

Considere-se agora todo o contorno ∂A do elemento.

Fazendo:

$$[G][\delta] = [G]_{12}[\delta]_{12} + [G]_{23}[\delta]_{23} + [G]_{31}[\delta]_{31} \quad (3.45)$$

$[G]$ passa a ser uma matriz de dimensão 9×9 , e $[\delta]$ um vetor de nove parâmetros nodais.

Pode-se escrever, portanto:

$$U_2 = \int_{\partial A} (w q_n - \frac{\partial w}{\partial n} m_n - \frac{\partial w}{\partial s} m_{ns}) dA = [\beta]^t [G] [\delta] \quad (3.46)$$

Desta forma, a expressão de U_{HSM} (3.10), resulta:

$$U_{HSM} = -\frac{1}{2} [\beta]^t [H] [\beta] + [\beta]^t [G] [\delta] \quad (3.47)$$

Com a condição de extremo para o funcional, tem-se:

$$\frac{\partial U_{HSM}}{\partial \beta_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 9 \quad (3.48)$$

Utilizando-se a expressão (3.48), ou seja, derivando-se a expressão de U_{HSM} (3.47) em relação a β , chega-se a:

$$[H] [\beta] = [G] [\delta] \quad (3.49)$$

De onde se tira:

$$[\beta] = [H]^{-1} [G] [\delta] \quad (3.50)$$

Substituindo-se a expressão de $[\beta]$ na equação (3.47), pode-se escrever o funcional de Hellinger-Reissner em função da matriz de rigidez do elemento.

$$U_{HSM} = - \frac{1}{2} [\beta]^t [H] [\beta] + [\beta]^t [G] [\delta]$$

ou ainda,

$$U_{HSM} = - \frac{1}{2} [\delta]^t [G]^t [H]^{-1} [H] [H]^{-1} [G] [\delta] + [\delta]^t [G]^t [H]^{-1} [G] [\delta]$$

Como a matriz $[H]$ é simétrica, tem-se:

$$U_{HSM} = \frac{1}{2} [\delta]^t [G]^t [H]^{-1} [G] [\delta] = \frac{1}{2} [\delta]^t [K_{HSM}] [\delta] \quad (3.51)$$

A expressão acima é semelhante à obtida quando se usa a energia potencial total, com a matriz $[K_{HSM}]$ sendo a matriz de rigidez do elemento.

$$[K_{HSM}] = [G]^t [H]^{-1} [G] \quad (3.52)$$

Com as matrizes $[H]$ e $[G]$ conhecidas, os termos da matriz de rigidez são obtidos, efetuando-se o produto das matrizes indicado na expressão (3.52)

3.5. DETERMINAÇÃO DOS TERMOS DA MATRIZ $[H]^{-1}$

Desenvolvendo-se o produto de matrizes da expressão (3.18) pode-se escrever a matriz $[H]$ da seguinte forma:

$$[H] = \begin{bmatrix} C_{11}[\phi] & C_{12}[\phi] & C_{13}[\phi] \\ C_{12}[\phi] & C_{22}[\phi] & C_{23}[\phi] \\ C_{13}[\phi] & C_{23}[\phi] & C_{33}[\phi] \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

com,

$$C_{ij} \text{ sendo as componentes da matriz } [D_b]^{-1}; \\ i, j = 1, 3$$

e,

$$[\phi] = \int_A \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} dx dy \quad (3.54)$$

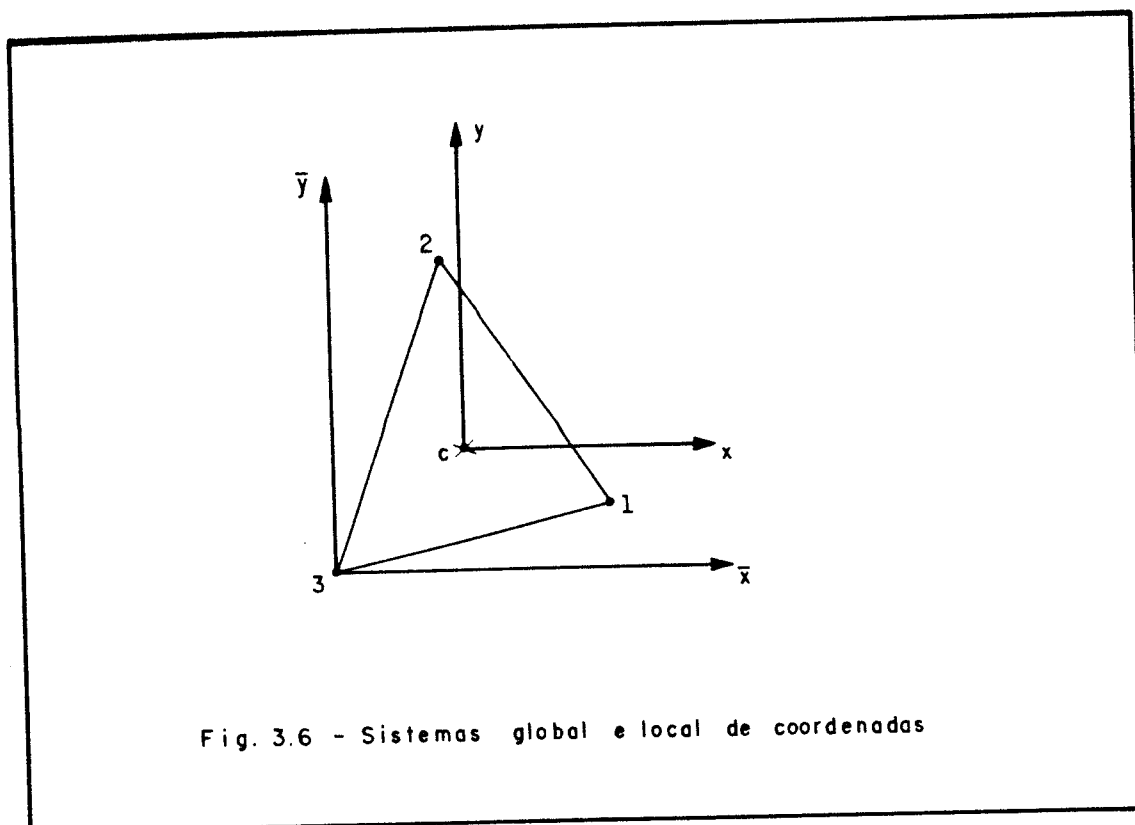
A integração sobre a superfície de um elemento finito, da matriz obtida anteriormente pode ser feita mais facilmente através da utilização de coordenadas homogêneas conforme explicado a seguir.

A posição de um elemento finito genérico da estrutura é definida por um sistema de coordenadas cartesianas global $(0 \bar{x}\bar{y})$. Define-se ainda um outro sistema de coordenadas, paralelo ao primeiro e com origem no centróide \underline{c} do elemento triangular, conforme figura (3.6).

Definida a posição do elemento finito pelas coordenadas de seus vértices 1, 2 e 3, a origem do sistema cartesiano local fica determinada. As coordenadas do centróide \underline{c} são dadas por:

$$x_c = \frac{1}{3} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \quad (3.55.A)$$

$$y_c = \frac{1}{3} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3) \quad (3.55.B)$$



As coordenadas locais dos vértices do elemento são, portanto, dadas por:

$$x_i = \bar{x}_i - x_c \quad (3.56)$$

$$y_i = \bar{y}_i - y_c$$

com,

$$i = 1, 2, 3$$

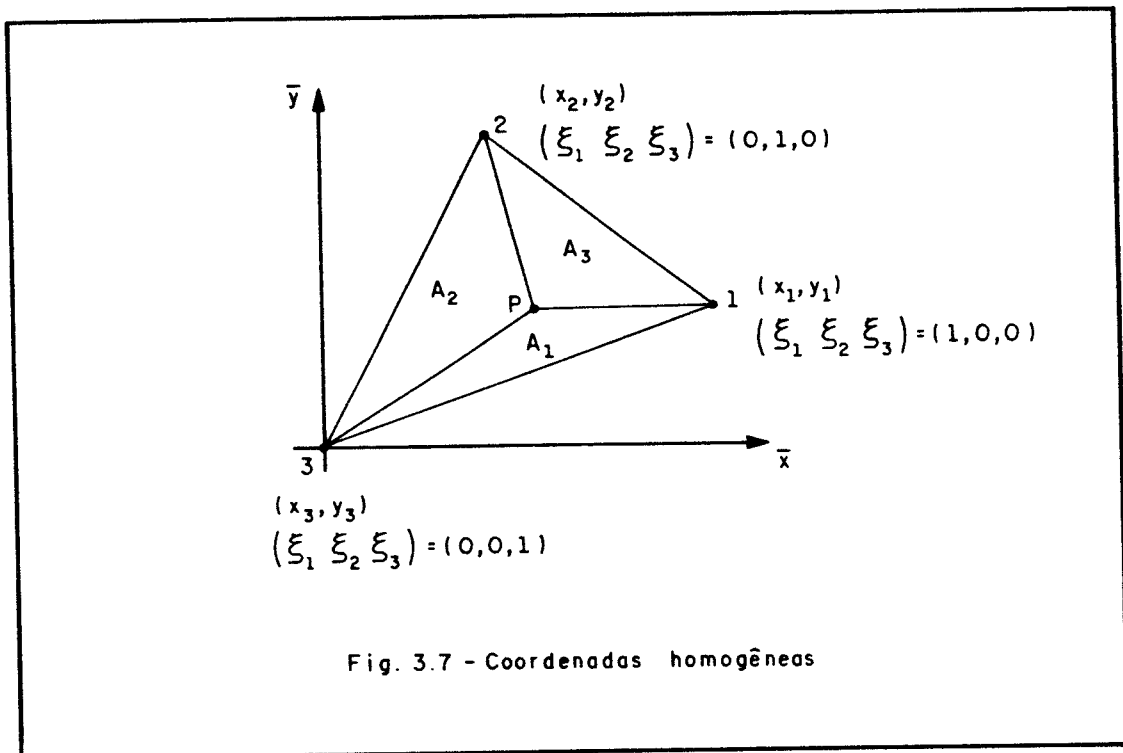
Estas coordenadas locais obedecem às seguintes

relações:

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 0 \quad (3.57)$$

$$\sum_{i=1}^3 y_i = 0$$

Determinam-se as coordenadas de pontos internos do elemento triangular, utilizando-se um sistema de coordenadas homogêneas ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , conforme figura (3.7).



Estas coordenadas adimensionais são definidas por:

$$\xi_i = \frac{A_i}{A} \quad (3.58)$$

com,

$$i = 1, 2, 3$$

onde,

A é a área do elemento finito;

A_1, A_2, A_3 são as áreas dos triângulos 13P, 2P3 e 1P2, respectivamente;

$P(x, y)$ é um ponto genérico do elemento finito, podendo pertencer às bordas.

A área do triângulo 123 é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & Y_1 \\ 1 & x_2 & Y_2 \\ 1 & x_3 & Y_3 \end{vmatrix} \quad (3.59)$$

As áreas genéricas dos triângulos internos são dadas por:

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & Y_1 \\ 1 & x & Y \\ 1 & x_3 & Y_3 \end{vmatrix} \quad (3.60.A)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & Y \\ 1 & x_2 & Y_2 \\ 1 & x_3 & Y_3 \end{vmatrix} \quad (3.60.B)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & Y_1 \\ 1 & x_2 & Y_2 \\ 1 & x & Y \end{vmatrix} \quad (3.60.C)$$

sendo,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (3.61)$$

Dividindo-se os 2 membros da igualdade acima por A e

utilizando-se a definição de ξ_1 , (3.58), tem-se:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \quad (3.62)$$

Com base nos sistemas cartesianos global e local, e no sistema de coordenadas homogêneas e ainda, utilizando-se a expressão (3.62), têm-se:

$$x_p = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 \quad (3.63.A)$$

$$y_p = y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3 \quad (3.63.B)$$

Com as expressões (3.62) e (3.63) pode-se escrever as relações entre as coordenadas homogêneas ξ_1 e as coordenadas do ponto P:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

Substituindo-se x e y na matriz $[\phi]$, pelas expressões correspondentes em função de ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 aparecerão integrais do tipo:

$$\int_A f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dA$$

que podem ser obtidas, segundo Brebbia [6], utilizando-se a seguinte expressão:

$$\int_A \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3} dA = 2A \frac{n_1! n_2! n_3!}{(n_1 + n_2 + n_3 + 2)!} \quad (3.65)$$

Seja, por exemplo, o elemento ϕ_{22} da matriz $[\phi]$:

$$\phi_{22} = \int_A X^2 dA = \int_A (x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3)^2 dA$$

Aplicando-se a expressão (3.65) a todas as parcelas, obtém-se o valor de ϕ_{22} :

$$\phi_{22} = \frac{A}{12} \left[(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \right]$$

De acordo com as relações (3.57), a expressão resulta:

$$\phi_{22} = \frac{A}{12} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (3.66)$$

A matriz $[\phi]$ é uma matriz simétrica 3x3 cujos termos de sua parte triangular superior são determinados de maneira análoga, e estão mostrados a seguir:

$$\phi_{11} = A = \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1)$$

$$\phi_{12} = 0$$

$$\phi_{13} = 0$$

$$\phi_{22} = \frac{A}{12} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$\phi_{23} = \frac{A}{12} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$$

$$\phi_{33} = \frac{A}{12} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

Para o desenvolvimento da matriz de rigidez utiliza-se a inversa da matriz $[H]$, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$[H]^{-1} = \begin{bmatrix} d_{11}[A] & d_{12}[A] & d_{13}[A] \\ d_{12}[A] & d_{22}[A] & d_{23}[A] \\ d_{13}[A] & d_{23}[A] & d_{33}[A] \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

com,

d_{ij} sendo as componentes da matriz $[D_b]$;
 $i, j = 1, 3$

A matriz $[A]$ é a inversa de $[\phi]$:

$$[A] = [\phi]^{-1} = \frac{1}{A(\alpha\gamma - \psi^2)} \begin{bmatrix} 2\gamma - \psi^2 & 0 & 0 \\ 0 & A\gamma & -A\psi \\ 0 & -A\psi & A\alpha \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

onde,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) \\ \alpha &= \frac{A}{12} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ \psi &= \frac{A}{12} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) \\ \gamma &= \frac{A}{12} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \end{aligned} \quad (3.69)$$

3.6. DETERMINAÇÃO DOS TERMOS DA MATRIZ $[G]$

A matriz $[G]_{ij}$, expressão (3.43), é uma matriz 9×6 , cujos termos são obtidos utilizando-se as relações (3.27), (ver figura (3.5)) e as expressões de $[R]_{ij}$ e $[L]_{ij}$, expressões (3.26) e (3.39), respectivamente.

Os termos da matriz $[G]_{ij}$ são os mostrados a seguir:

$$g_{11} = -c s$$

$$g_{13} = -\frac{1}{2} c^2 y_{ij}$$

$$g_{15} = g_{12}$$

$$g_{21} = -\frac{1}{2} y_{ij} - c s x_k$$

$$g_{23} = -\frac{1}{6} x_{ij} y_{ij} - \frac{1}{6} c^2 y_{ij} x_k$$

$$g_{25} = -\frac{1}{2} y_{ij}^2 - \frac{1}{6} c^2 y_{ij} x_k$$

$$g_{31} = -c s y_k$$

$$g_{33} = -\frac{1}{12} y_{ij}^2 - \frac{1}{2} c^2 y_{ij} y_k$$

$$g_{35} = g_{32}$$

$$g_{41} = g_{14}$$

$$g_{43} = -\frac{1}{12} s^2 y_{ij}$$

$$g_{45} = g_{42}$$

$$g_{51} = c s x_k$$

$$g_{53} = -\frac{1}{2} s^2 y_{ij} x_k$$

$$g_{55} = -\frac{1}{12} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} s^2 x_{ij} x_k$$

$$g_{61} = \frac{1}{2} x_{ij} + c s y_k$$

$$g_{12} = -\frac{1}{2} c^2 x_{ij}$$

$$g_{14} = -g_{11}$$

$$g_{16} = g_{13}$$

$$g_{22} = \frac{1}{2} y_{ij}^2 - \frac{1}{2} c^2 x_{ij} x_k$$

$$g_{24} = -\frac{1}{2} y_{ij} + c s x_k$$

$$g_{26} = -\frac{1}{6} x_{ij} y_{ij} - \frac{1}{2} c^2 y_{ij} x_k$$

$$g_{32} = -\frac{1}{2} c^2 x_{ij} y_k$$

$$g_{34} = -g_{31}$$

$$g_{36} = \frac{1}{12} y_{ij}^2 - \frac{1}{2} c^2 y_{ij} y_k$$

$$g_{42} = -\frac{1}{2} s^2 x_{ij}$$

$$g_{44} = -g_{41}$$

$$g_{46} = g_{43}$$

$$g_{52} = -\frac{1}{12} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} s^2 x_{ij} x_k$$

$$g_{54} = -g_{51}$$

$$g_{56} = g_{53}$$

$$g_{62} = -\frac{1}{6} x_{ij} y_{ij} - \frac{1}{2} s^2 x_{ij} y_k$$

$$\begin{aligned}
g_{63} &= \frac{1}{12} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} s^2 y_{jy_k} & g_{64} &= \frac{1}{6} x_{ij} - c s y_k \\
g_{65} &= \frac{1}{6} x_{ij} y_{ij} - \frac{1}{2} s^2 x_{ij} y_k & g_{66} &= \frac{1}{12} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} s^2 y_{ij} y_k \\
g_{71} &= (c^2 - s^2) & g_{72} &= -c s x_{ij} \\
g_{73} &= -c s y_{ij} & g_{74} &= -g_{71} \\
g_{75} &= g_{72} & g_{76} &= g_{73} \\
g_{81} &= \frac{1}{2} x_{ij} + (c^2 - s^2) x_k & g_{82} &= s^2 y_{ij} x_k \\
g_{83} &= \frac{1}{6} x_{ij}^2 + c^2 x_{ij} x_k & g_{84} &= \frac{1}{2} x_{ij} - (c^2 - s^2) x_k \\
g_{85} &= g_{82} & g_{86} &= \frac{1}{2} x_{ij}^2 + c^2 x_{ij} x_k \\
g_{91} &= -\frac{1}{2} y_{ij} + (c^2 - s^2) y & g_{92} &= \frac{1}{6} y_{ij}^2 + s^2 y_{ij} y_k \\
g_{93} &= c^2 x_{ij} y_k & g_{94} &= -\frac{1}{2} y_{ij} - (c^2 - s^2) y_k \\
g_{95} &= -\frac{1}{6} y_{ij}^2 + s^2 y_{ij} y_k & g_{96} &= g_{93}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

A matriz $[G]$, 9×9 , é desenvolvida através de uma expansão da matriz $[G]_{ij}$, 9×6 , a partir da soma dos elementos em colunas correspondentes, do seguinte modo:

$$[G] = [G]_{12} + [G]_{23} + [G]_{31} \tag{3.71}$$

onde,

12, 23 e 31 são os lados do elemento.

3.7. VETOR DE CARGAS NODAIS EQUIVALENTE

3.7.1. CARGAS CONCENTRADAS NOS NÓS

O trabalho realizado pelas cargas concentradas em um nó i genérico é dado pela expressão (2.48) que é repetida aqui:

$$T_p = - \left(P_{zi} w_i + m_{xi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i + m_{yi} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right)$$

Pode-se escrever a expressão do trabalho total em forma matricial como:

$$T_p = [\delta]_p^t [CN]_p \quad (3.72)$$

onde,

$[\delta]_p$ é o vetor formado pelos deslocamentos de todos os nós;

$[CN]_p$ é um vetor coluna de ordem N ;

N é o número total de deslocamentos da placa.

Como o elemento HSM é caracterizado por três variáveis por nó, os elementos não nulos de $[CN]_p$ são, para cada nó i carregado:

$$\begin{aligned} CN(3i - 2, 1) &= Pz_i \\ CN(3i - 1, 1) &= My_i \\ CN(3i, 1) &= Mx_i \end{aligned} \quad (3.73)$$

onde,

i é um dos vértices do elemento finito.

3.7.2. CARGA DISTRIBUÍDA NO ELEMENTO

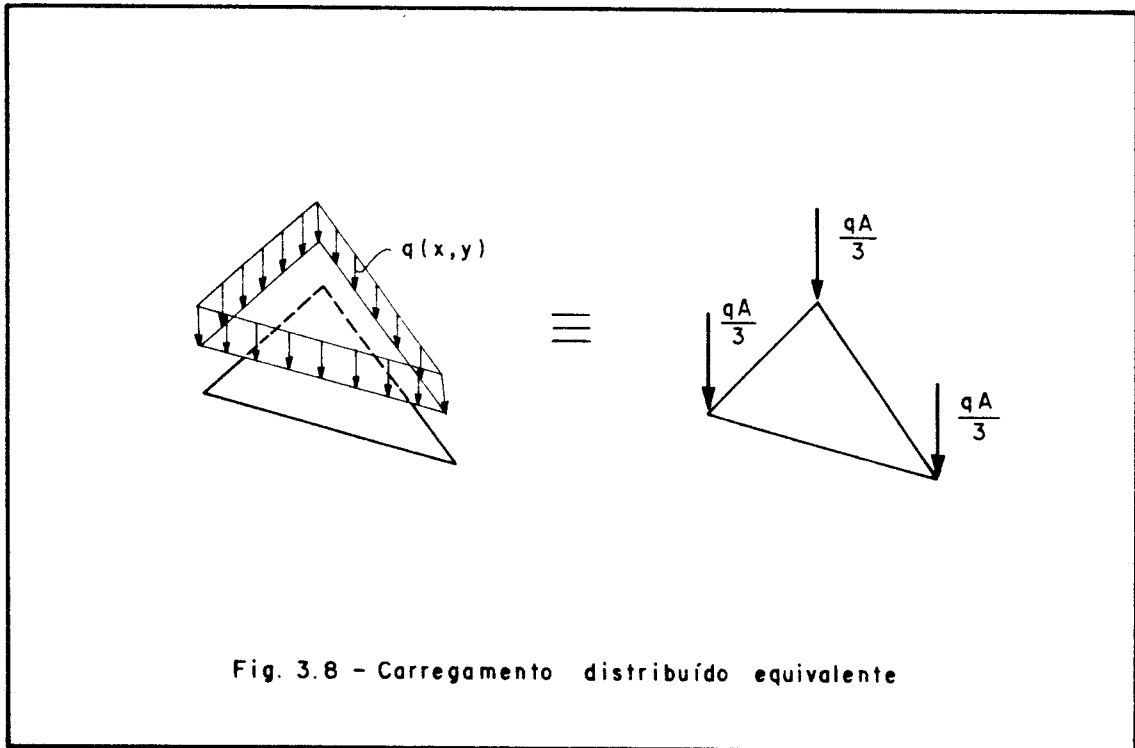
Para um elemento finito submetido a um carregamento distribuído $q(x,y)$, o trabalho realizado é dado por (2.47):

$$T_q = \int_A -q(x,y) w(x,y) dA$$

onde,

A é a área do elemento finito.

Neste estudo, o carregamento distribuído é aproximado por forças concentradas aplicadas nos nós do elemento finito. Para o elemento finito triangular tem-se que em cada vértice está aplicada uma força de $q.A/3$, conforme figura (3.8)



Pode-se escrever a expressão do trabalho total na forma matricial como:

$$T_q = [\delta]_p^t [CE]_p \quad (3,74)$$

onde,

$[\delta]_p$ é o vetor formado pelos deslocamentos de todos os nós;

$[CE]_p$ é um vetor coluna de ordem E;

E é o número total de deslocamentos da placa.

Os elementos não nulos de $[CE]_p$ serão para cada nó i do elemento:

$$CE(3i - 2, 1) = q \frac{A}{3} \quad (3.75)$$

onde,

i é um dos vértices do elemento finito.

3.8. SISTEMA FINAL DE EQUAÇÕES

Utilizando-se as expressões já deduzidas (3.51), (3.72) e (3.74) pode-se escrever a energia potencial total (2.49), como:

$$\pi = \frac{1}{2} [\delta]_p^t [K_{HSM}]_p [\delta]_p - [\delta]_p^t [CN]_p - [\delta]_p^t [CE]_p \quad (3.76)$$

onde,

p indica somatória das contribuições de todos os elementos finitos.

No equilíbrio, a variação da energia potencial total deve ser igual a zero.

Portanto, pode-se escrever:

$$d\pi = d[\delta]_p^t [K_{HSM}]_p [\delta]_p - d[\delta]_p^t \{ [CE]_p + [CN]_p \} = 0$$

ou seja,

$$d[\delta]_p^t \{ [K_{HSM}]_p [\delta]_p - [CE]_p - [CN]_p \} = 0$$

A expressão acima é verdadeira para qualquer $d[\delta]_p^t$, quando:

$$[K_{HSM}]_p [\delta]_p - [CE]_p - [CN]_p = 0 \quad (3.77)$$

Fazendo-se:

$$[CE]_p + [CN]_p = [F]_p \quad (3.78)$$

onde,

$[F]_p$ é o vetor de cargas nodais equivalente.

tem-se finalmente:

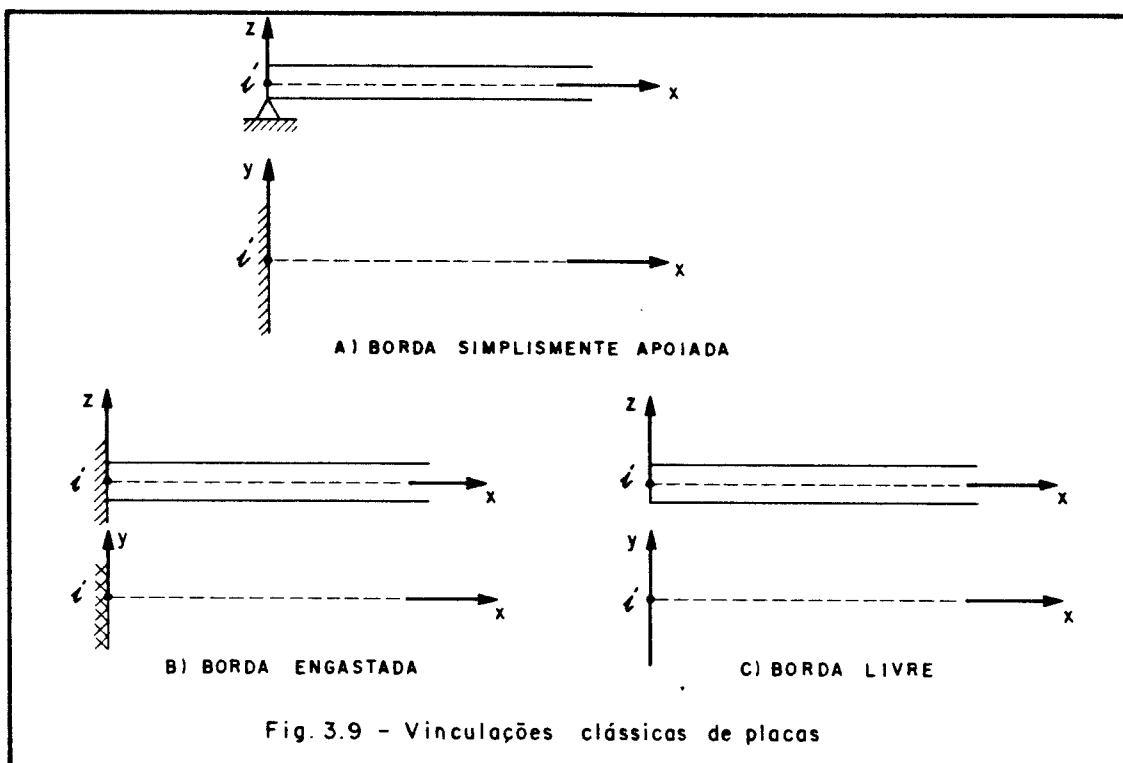
$$[K_{HSM}]_p [\delta]_p = [F]_p \quad (3.79)$$

que é um sistema de equações lineares nas incógnitas nodais.

Resolvendo-se o sistema de equações, determina-se o vetor de parâmetros nodais $[\delta]_p$.

3.9. CONDIÇÕES DE CONTORNO

Ao sistema de equações (3.79) devem ser impostas as condições de contorno da placa. Para cada nó existem três variáveis: w , $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$. No caso das vinculações clássicas de placas, admitindo-se que a borda em estudo seja dada por x igual a zero e y qualquer, conforme figura (3.9), têm-se:



-Borda simplesmente apoiada

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{ou um valor prescrito}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{desconhecido}$$

-Borda engastada

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{ou um valor prescrito}$$

-Borda livre

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{desconhecidos}$$

Portanto, para uma placa com bordas engastadas, simplesmente apoiadas ou livres não se encontra dificuldade em introduzir as condições de contorno, que são estabelecidas diretamente nos parâmetros nodais.

3.10. ELEMENTO FINITO QUADRANGULAR

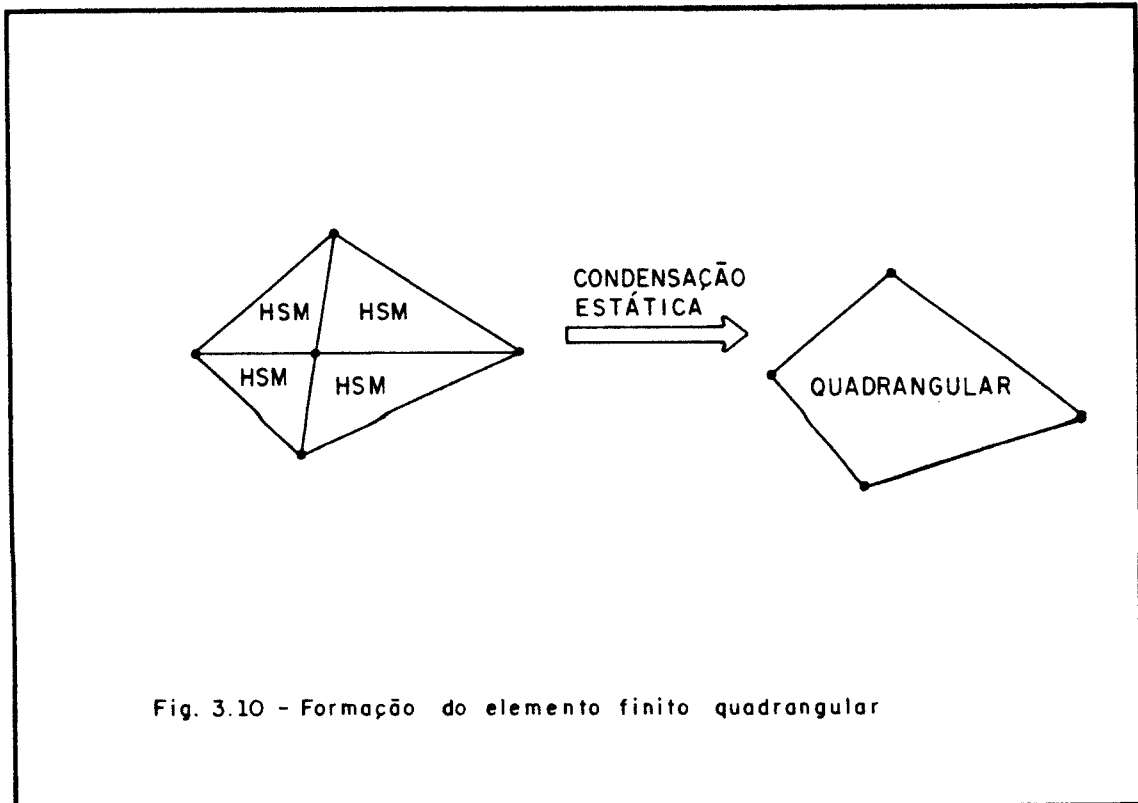
O elemento finito quadrangular permite o emprego de malhas bastante irregulares, o que constitui uma vantagem semelhante à do elemento finito triangular.

Por outro lado, o elemento quadrangular permite a criação de malhas facilmente automatizáveis, como a retangular.

Pode-se formar um elemento quadrangular pela composição de quatro elementos triangulares, com posterior condensação estática dos parâmetros internos, conforme figura (3.10).

A matriz de rigidez do quadrilátero $[k]$, relaciona-se com os parâmetros nodais $[\delta]$ e o vetor de cargas $[F]$, como segue:

$$[K] [\delta] = [F] \quad (3.80)$$



Separando-se os parâmetros localizados nos vértices do quadrilátero $[\delta_e]$ dos parâmetros internos $[\delta_i]$ e fazendo-se o mesmo para o vetor de cargas, a expressão (3.80) fica:

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ie} \\ k_{ei} & k_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_e \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Da expressão (3.81), têm-se:

$$[F_i] = [K_{ii}] [\delta_i] + [K_{ie}] [\delta_e] \quad (3.82.A)$$

$$[F_e] = [K_{ei}] [\delta_i] + [K_{ee}] [\delta_e] \quad (3.82.B)$$

Da expressão (3.82.A) obtêm-se:

$$[\delta_i] = [K_{ii}]^{-1} \left\{ [F_i] - [K_{ie}][\delta_e] \right\} \quad (3.83)$$

Substituindo-se (3.83) em (3.82.B) pode-se escrever:

$$[F_e] - [K_{ei}][K_{ii}]^{-1}[F_i] = \left\{ [K_{ee}] - [K_{ei}][K_{ii}]^{-1}[K_{ei}] \right\} [\delta_e] \quad (3.84)$$

A equação (3.84) pode ser escrita como:

$$[F_c] = [K_c][\delta_e] \quad (3.85)$$

onde,

$[K_c]$ é a matriz de rigidez do quadrilátero em sua forma condensada, ou seja, tendo-se eliminados os parâmetros internos;

$[F_c]$ é o vetor de cargas nodais do quadrilátero.

Este elemento quadrangular, formado a partir de quatro elementos finitos triangulares HSM, é o elemento básico para discretização de lajes no sistema computacional desenvolvido.

3.11. ESFORÇOS INTERNOS NO ELEMENTO FINITO TRIANGULAR HSM E NO ELEMENTO QUADRANGULAR CONDENSADO

A partir das equações (3.13) e (3.50) pode-se escrever a expressão dos momentos fletores e volvente para o elemento finito triangular HSM como:

$$[M] = [P(x,y)] [H]^{-1} [G] [\delta] \quad (3.86)$$

Para o elemento finito quadrangular formado a partir de quatro elementos HSM, a matriz [HG] relaciona-se com os parâmetros nodais e os parâmetros generalizados, como segue:

$$[\beta] = [HG] [\delta] \quad (3.87)$$

onde,

$$[HG] = [H]^{-1} [G] \quad (3.88)$$

Separando-se os parâmetros localizados nos vértices do quadrilátero $[\delta_e]$ dos parâmetros internos $[\delta_i]$ e fazendo-se o mesmo para o vetor de parâmetros generalizados, a expressão (3.87) resulta:

$$\begin{bmatrix} HG_{ii} & HG_{ie} \\ HG_{ei} & HG_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_e \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Da expressão (3.89), têm-se:

$$[\beta_i] = [HG_{ii}] [\delta_i] + [HG_{ie}] [\delta_e] \quad (3.90)$$

e

$$[\beta_e] = [HG_{ei}] [\delta_i] + [HG_{ee}] [\delta_e] \quad (3.91)$$

Conhecidos os valores de $[\delta_i]$, expressão (3.83), e $[\delta_e]$, determinam-se os vetores $[\beta]$ e, a partir da expressão

$$[M] = [P(x,y)] [\beta] \quad (3.92)$$

determinam-se os esforços internos para o elemento finito quadrangular.

Nota-se que diferentes valores de momentos são obtidos no contorno entre dois elementos vizinhos, pois o vetor $[\beta]$

no contorno entre dois elementos vizinhos, pois o vetor $[\beta]$ é diferente para cada elemento. O valor dos momentos em um ponto para o qual concorrem vários elementos é, portanto, calculado como a média aritmética dos valores de momentos fletores e volvente encontrados.

3.12. ELEMENTO FINITO DE BARRA

A matriz de rigidez do elemento finito de barra, utilizado na discretização das vigas do pavimento de edifício é apresentada a seguir:

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{-GI_x}{L} & 0 \\ \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} \\ \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{-GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 \\ \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix}$$

onde,

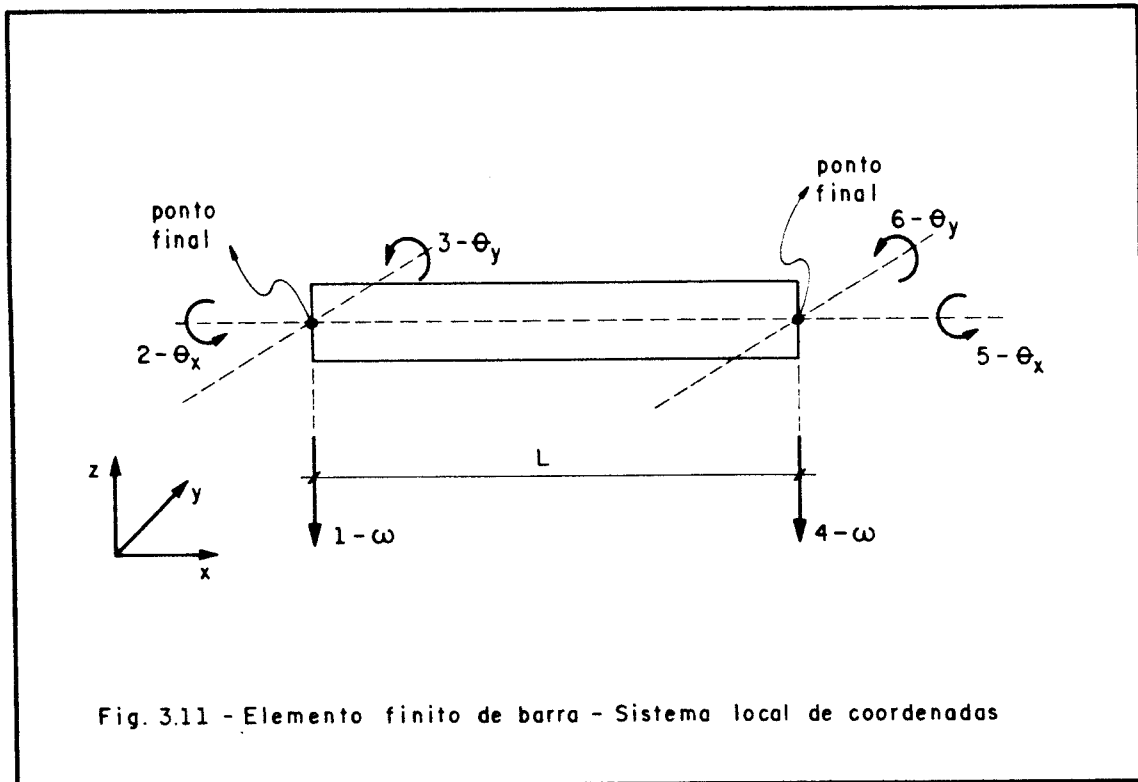
E e G , representam o módulo de elasticidade e o módulo de elasticidade transversal do material da barra, respectivamente;

I_y e I_x são o momento de inércia e momento de inércia

à torção da barra, respectivamente;

L é o comprimento do elemento finito.

Essa matriz de rigidez é relativa ao sistema local de coordenadas mostrado na figura (3.11).



3.13. ANÁLISE DE PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS

A análise de pavimentos de edifícios é feita pela utilização de elementos finitos de placa e de barra.

Com a discretização de um pavimento de edifício em elementos finitos de placas para as lajes e de barras para as vigas, pode-se escrever a energia de deformação

correspondente a todos os elementos de placa (U_p) e a todos os elementos de barra (U_b), da seguinte forma:

$$U_p = \frac{1}{2} [\delta \text{ pav}]^t [K_p] [\delta \text{ pav}] \quad (3.93)$$

$$U_b = \frac{1}{2} [\delta \text{ pav}]^t [K_b] [\delta \text{ pav}] \quad (3.94)$$

onde,

$[K_p]$ e $[K_b]$ são, respectivamente, a matriz de rigidez referente aos elementos de placa e barra;

$[\delta \text{ pav}]$ é o vetor de parâmetros nodais do pavimento.

Como U_p e U_b são escritos em função do vetor de parâmetros nodais do pavimento, pode-se escrever a energia de deformação total do pavimento (U_{pav}) como:

$$U_{\text{pav}} = \frac{1}{2} [\delta \text{ pav}]^t [K_b + K_p] [\delta \text{ pav}] \quad (3.95)$$

Fazendo:

$$[K_{\text{pav}}] = [K_b + K_p] \quad (3.96)$$

pode-se reescrever a expressão (3.95) como:

$$U_{\text{pav}} = \frac{1}{2} [\delta_{\text{pav}}]^t [K_{\text{pav}}] [\delta_{\text{pav}}]$$

onde,

$[K_{\text{pav}}]$ é a matriz de rigidez do pavimento.

Utilizando-se o procedimento usual do método dos elementos finitos, obtém-se o vetor de parâmetros nodais do pavimento, pela resolução do seguinte sistema de equações

lineares:

$$[K_{\text{pav}}] [\delta_{\text{pav}}] = [F_{\text{pav}}]$$

onde,

$[F_{\text{pav}}]$ é o vetor de cargas nodais do pavimento.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS NUMÉRICOS

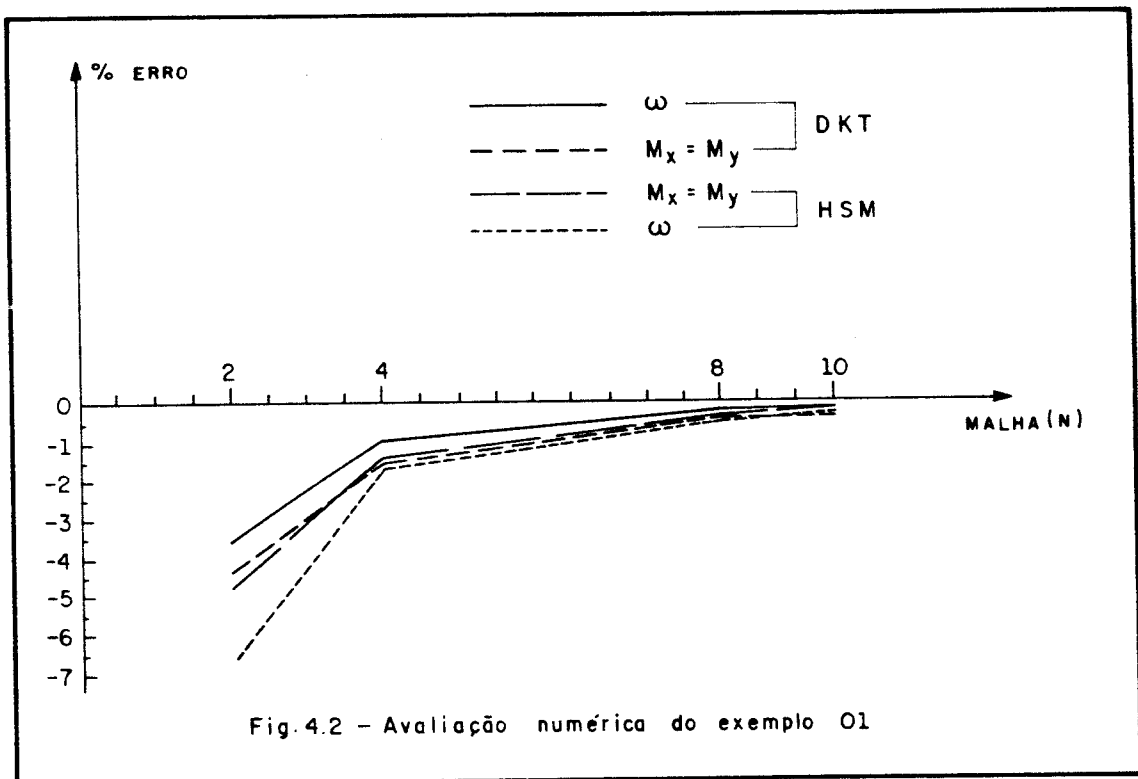
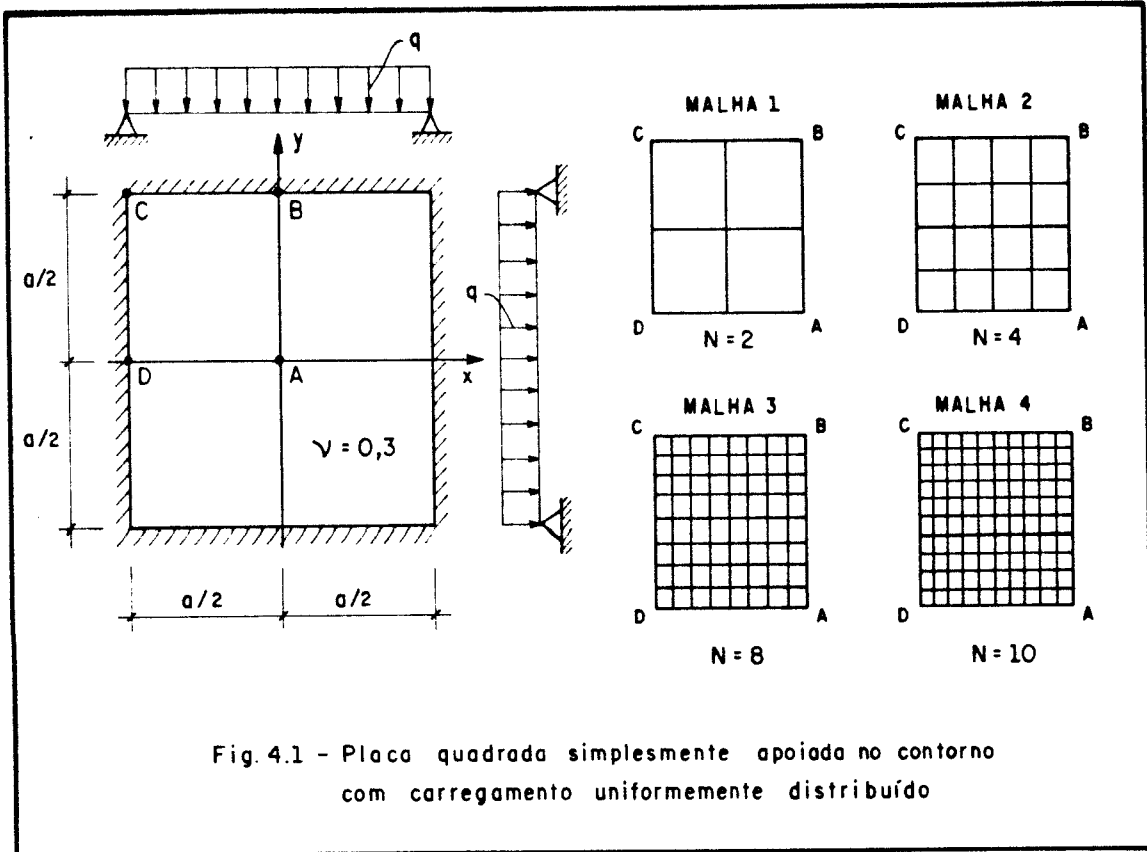
4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados exemplos numéricos referentes à análise de placas e da associação de placas e vigas, nos quais conhecem-se resultados teóricos provenientes da solução de equações diferenciais e também resultados advindos da aplicação de métodos numéricos.

Apresentam-se ainda, alguns resultados obtidos da análise do pavimento de um edifício.

4.2. PLACA QUADRADA SIMPLEMENTE APOIADA COM CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDO

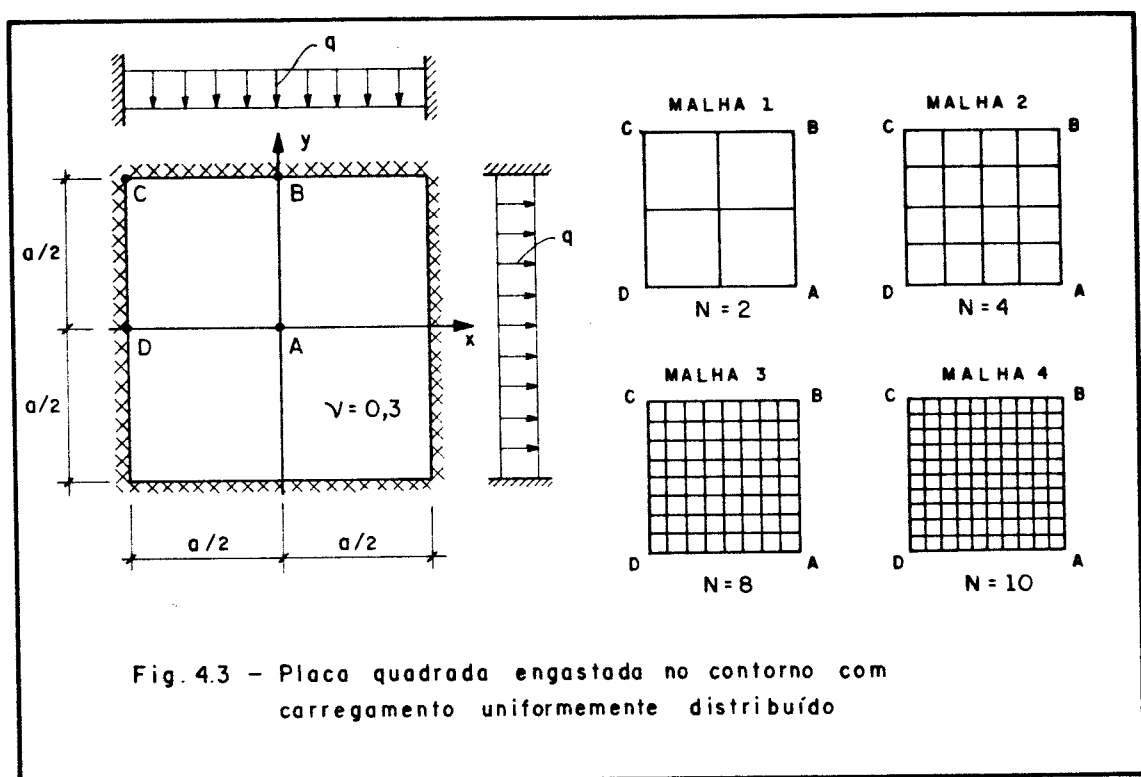
Devido à dupla simetria existente, apenas um quarto da área da placa é discretizado para a resolução desse problema. Utilizam-se quatro malhas distintas de elementos finitos quadrangulares, conforme figura (4.1).



vertical e momentos fletores no centro da placa, em relação a resultados teóricos extraídos de Timoshenko [4] e a resultados obtidos com o elemento finito triangular DKT extraídos de Rezende [2], é apresentada na figura (4.2).

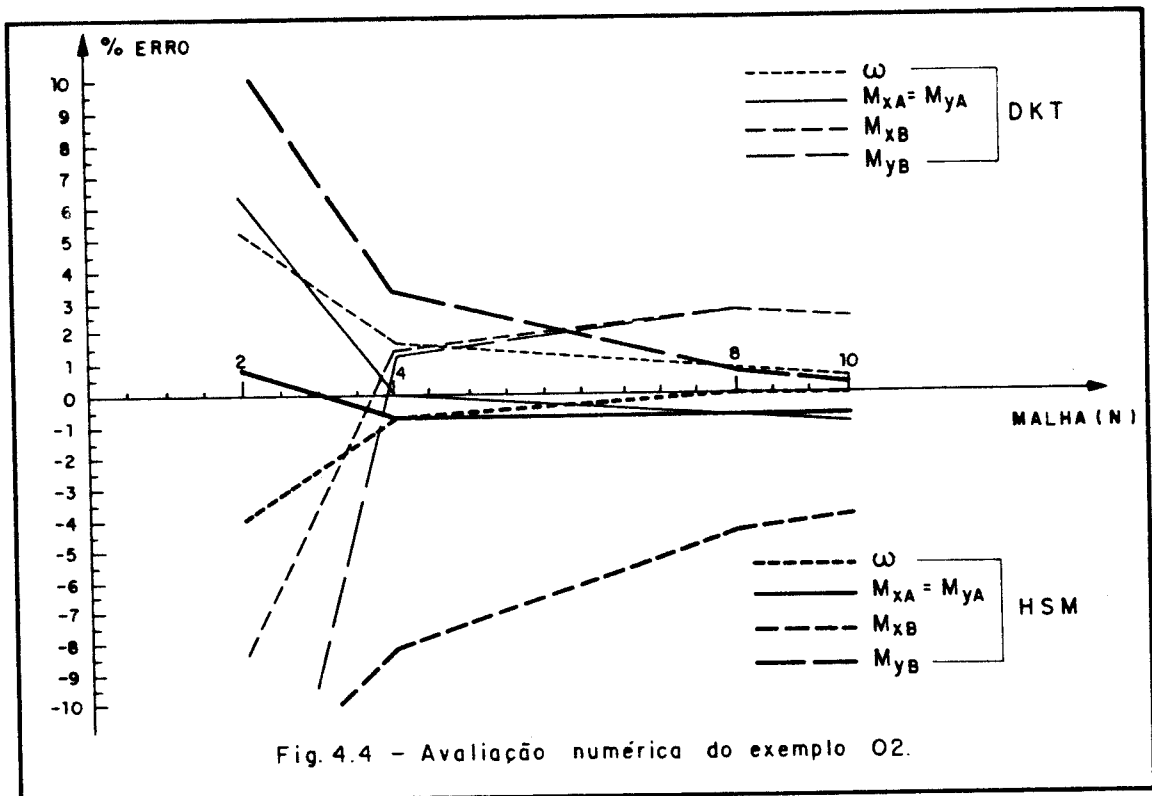
4.3. PLACA QUADRADA ENGASTADA NO CONTORNO COM CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDO

Do mesmo modo que no exemplo anterior, um quarto da área da placa é discretizado no tratamento desse exemplo, conforme figura (4.3).



A comparação entre os resultados obtidos, os teóricos

A comparação entre os resultados obtidos, os teóricos [4] e os obtidos com o elemento DKT [2], para deslocamento vertical, momentos fletores no centro da placa (ponto A) e momentos fletores no ponto médio de um dos lados (ponto B) é mostrada na figura (4.4).



4.4. PLACA ESCONSA

Neste exemplo analisa-se uma placa esconsa de rigidez à flexão "D", apoiada em dois lados opostos e livre nos outros dois, submetida a carregamento uniformemente distribuído conforme figura (4.5), onde está indicada a malha utilizada na discretização do problema.

A comparação entre os resultados obtidos e os mostrados em Paiva [7] para deslocamento vertical e momento fletor no ponto médio da placa está apresentada na tabela (4.1). Os resultados de Paiva [7] foram obtidos por elementos finitos com o elemento T18, método dos elementos de contorno e diferenças finitas. Os resultados obtidos são comparados ainda com os calculados com o elemento DKT.

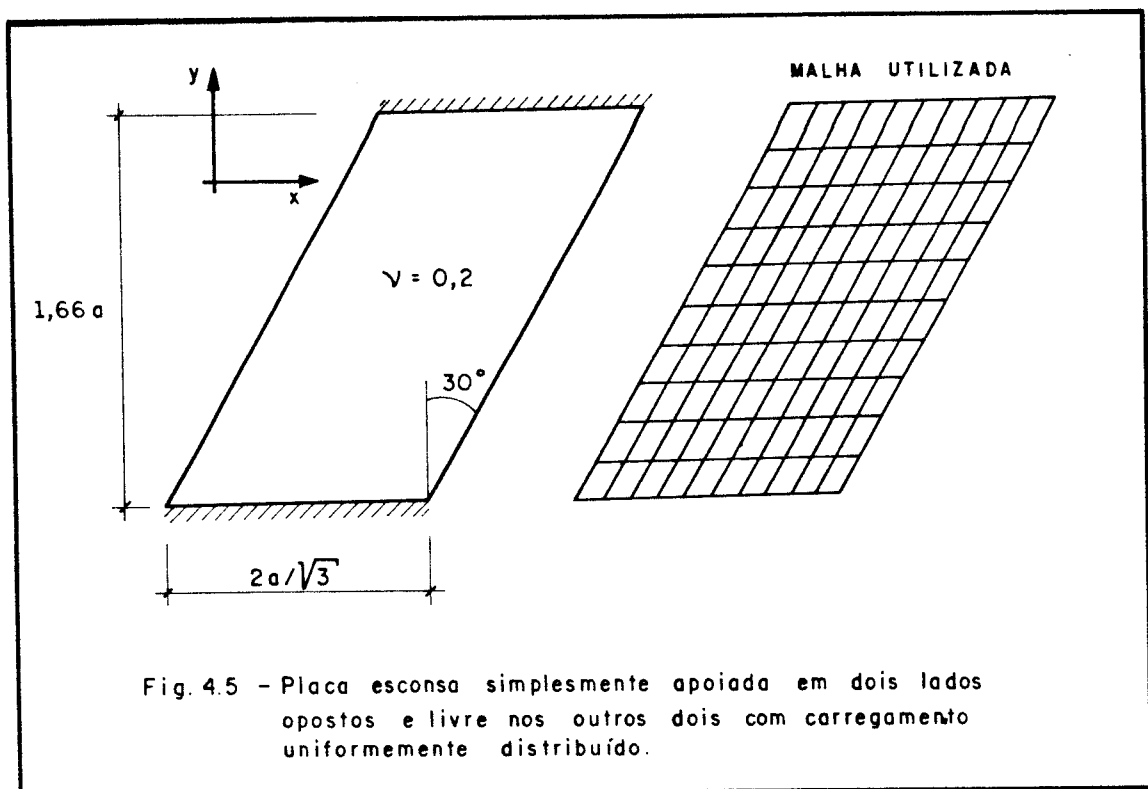


Fig. 4.5 - Placa esconsa simplesmente apoiada em dois lados opostos e livre nos outros dois com carregamento uniformemente distribuído.

TABELA 4.1 - *Análise de Placa Esconsa		
METODO	DESL.VERTICAL	m_y
M.Elem.Finitos - HSM	0.11212	0,3567
** M.Elem.Finitos - DKT	0,1141	0,3606
*** M.Elem.Contorno	0,1129	0,3420
**** M.Elem.Finitos - T18	0,1149	0,3593
Diferenças Finitas	0,1183	0,3680
Fator	qa^4 / D	qa^2
* Valores obtidos para o centro placa ** Mesma malha utilizada para o elemento HSM *** Contorno dividido em 44 elementos **** Domínio dividido em 184 elementos triangulares		

4.5. PLACA QUADRADA APOIADA EM VIGAS ELÁSTICAS

Neste exemplo considera-se uma placa com rigidez à flexão "D" apoiada em quatro vigas elásticas, conforme figura (4.6). Despreza-se a inércia à torção das vigas adotando-se para o momento de inércia à flexão das mesmas, "I", o valor:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \frac{5aD}{E}$$

Os resultados obtidos para deslocamento vertical e momentos fletores no centro da placa são comparados com valores teóricos extraídos de Timoshenko [4] e valores obtidos por Rezende [2], e estão mostrados na tabela 4.2.

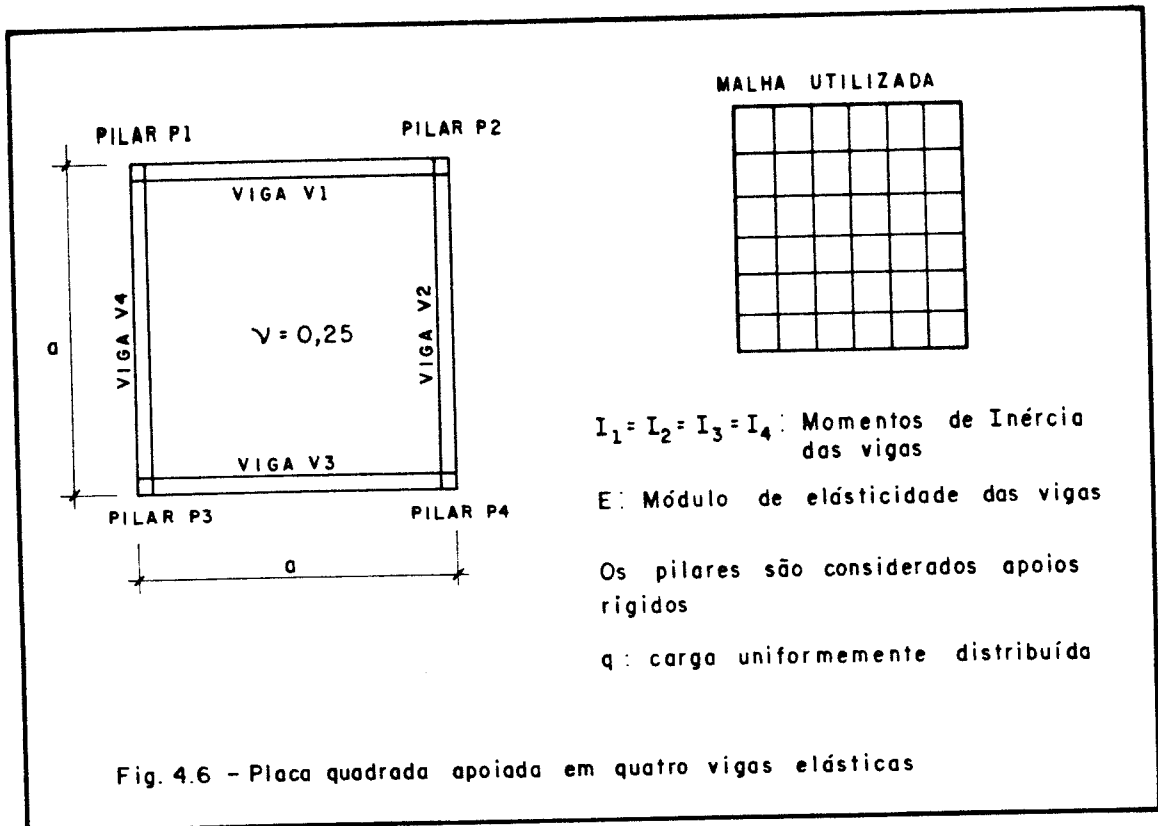


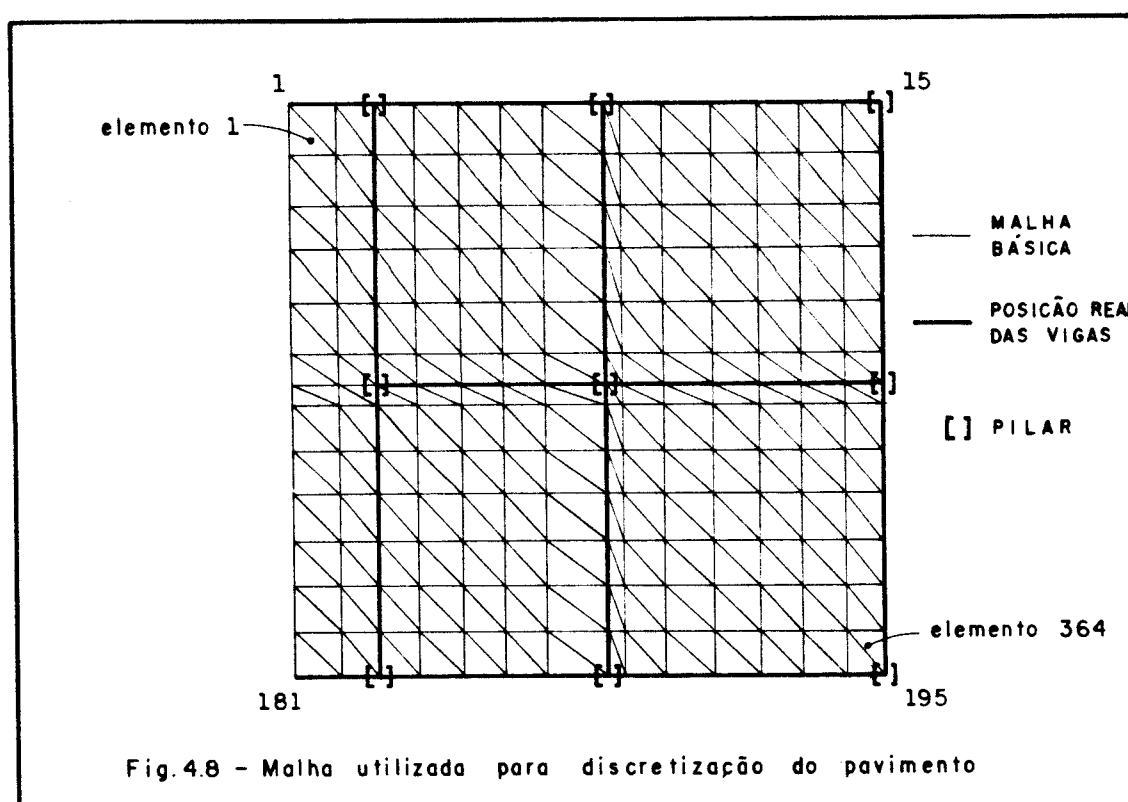
TABELA 4.2 - *Placa apoiada em Vigas Elásticas				
	EL. FIN. HSM	EL. FIN. DKT	VALOR TEORICO	FATOR
DESL. VERTICAL	$5.07 \cdot 10^{-3}$	$5.11 \cdot 10^{-3}$	$5.19 \cdot 10^{-3}$	aq^4/D
MOMENTO m_x	$4.86 \cdot 10^{-2}$	$5.07 \cdot 10^{-2}$	$4.94 \cdot 10^{-2}$	qa^2
MOMENTO m_y	$4.86 \cdot 10^{-2}$	$5.07 \cdot 10^{-2}$	$4.94 \cdot 10^{-2}$	qa^2
* Valores referentes ao centro da placa				

TABELA 4.3 - DADOS DAS LAJES		
LAJE	ESPESSURA (m)	* CARGA TOTAL (KN/m ²)
01	0,10	5,50
02	0,10	11,77
03	0,10	5,50
04	0,10	5,50
05	0,10	5,50
* Inclui o peso próprio		

TABELA 4.4 - DADOS DAS VIGAS			
VIGA	SEÇÃO TRANSV . (m x m)	MOM. DE INERCIA * (m ⁴ x 10 ⁻³)	CARGA ** (KN/m)
V01	0,11 x 0,50	1,146	8,70
V02	0,11 x 0,50	1,146	8,70
V03	0,11 x 0,50	1,146	8,70
V04	0,11 x 0,50	1,146	8,70
V05	0,11 x 0,50	1,146	8,70
V06	0,11 x 0,50	1,146	8,70
* Só considerou-se a inércia à flexão das vigas ** Inclui peso próprio			

Para a análise deste pavimento são utilizados os elementos finitos HSM e DKT. A malha adotada é triangular orientada, conforme figura (4.8). A escolha deste tipo de malha deve-se à procura de uma maior semelhança entre os dois sistemas computacionais utilizados. Isto porque, ao tratar-se do elemento quadrangular, o cálculo dos esforços internos é realizado de forma distinta para os dois sistemas. O sistema computacional para utilização do

elemento DKT divide o elemento quadrangular em triângulos hipotéticos, enquanto que o do HSM utiliza a condensação estática dos parâmetros internos.



São mostrados os diagramas de momentos fletores e esforços cortantes para uma das vigas, traçados em função dos valores nodais fornecidos pelos dois sistemas computacionais utilizados, conforme figuras (4.9) e (4.10).

As cargas verticais nos pilares aparecem na tabela (4.5). Os pilares são considerados apoios rígidos com relação aos deslocamentos verticais. Para uma análise mais próxima da realidade, os pilares podem ser substituídos por rigidezes ao deslocamento vertical e às rotações nas direções dos eixos x e y, atuando nos pontos nodais correspondentes aos pilares.

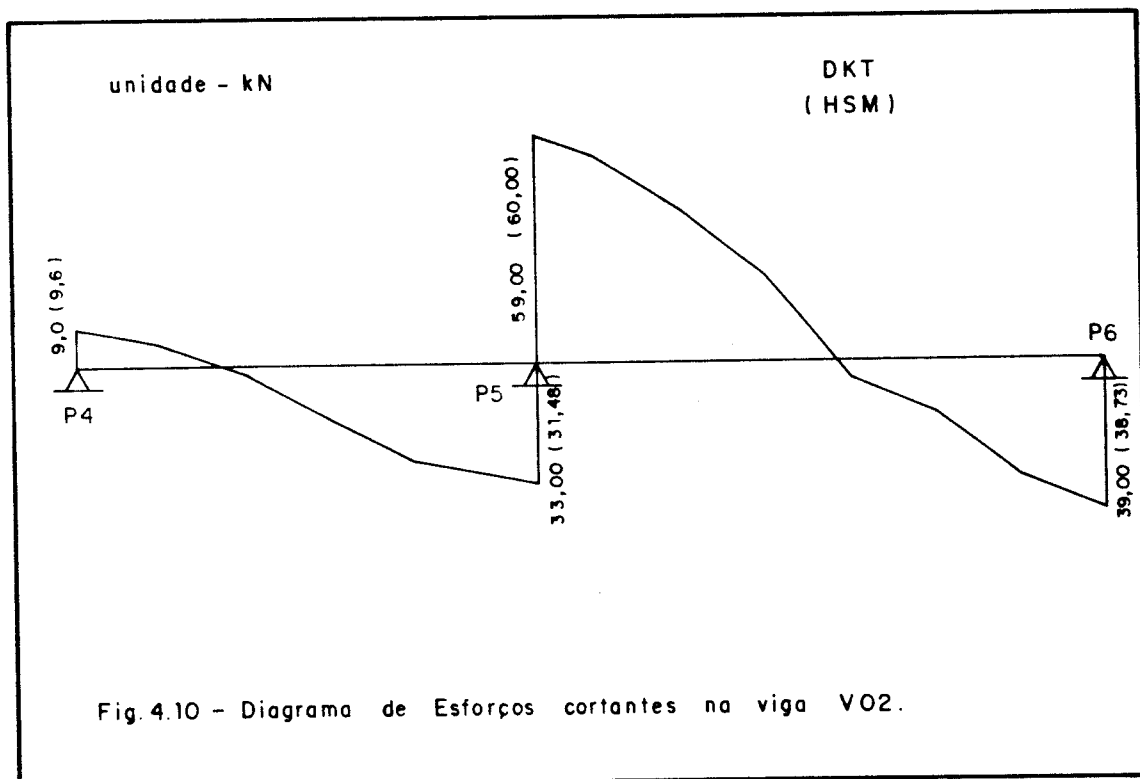
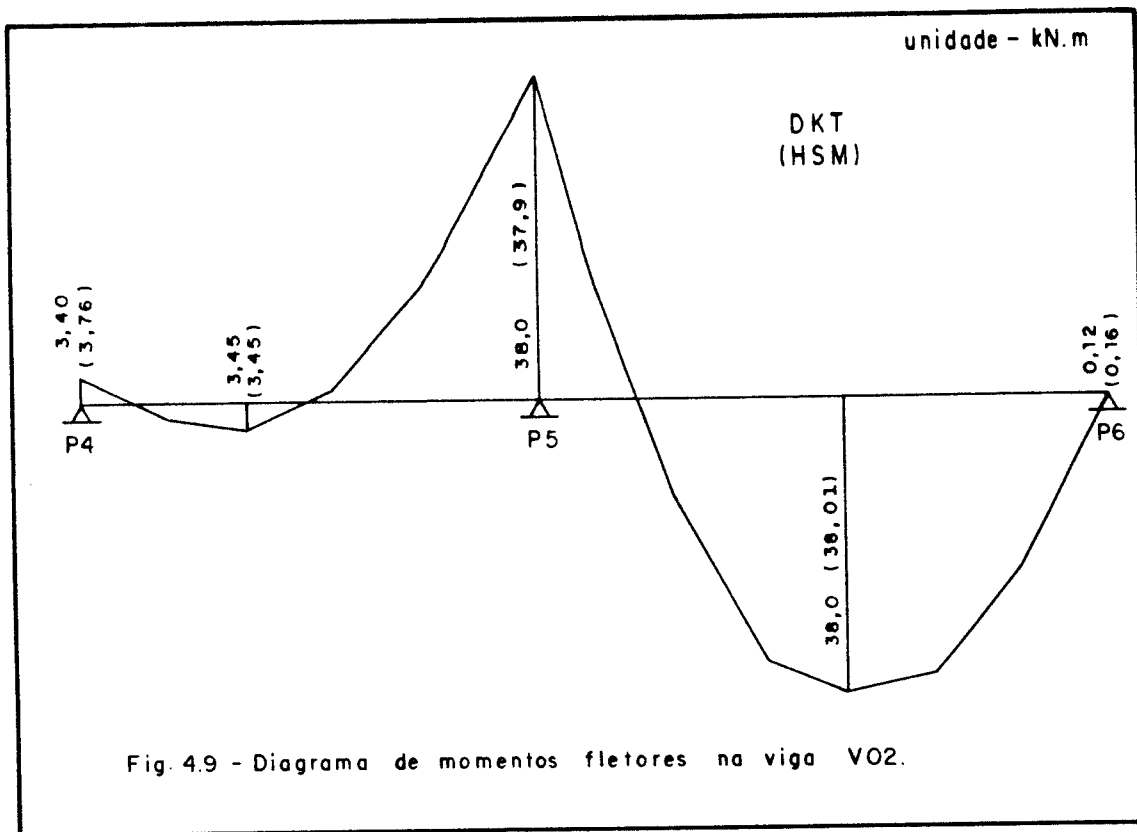
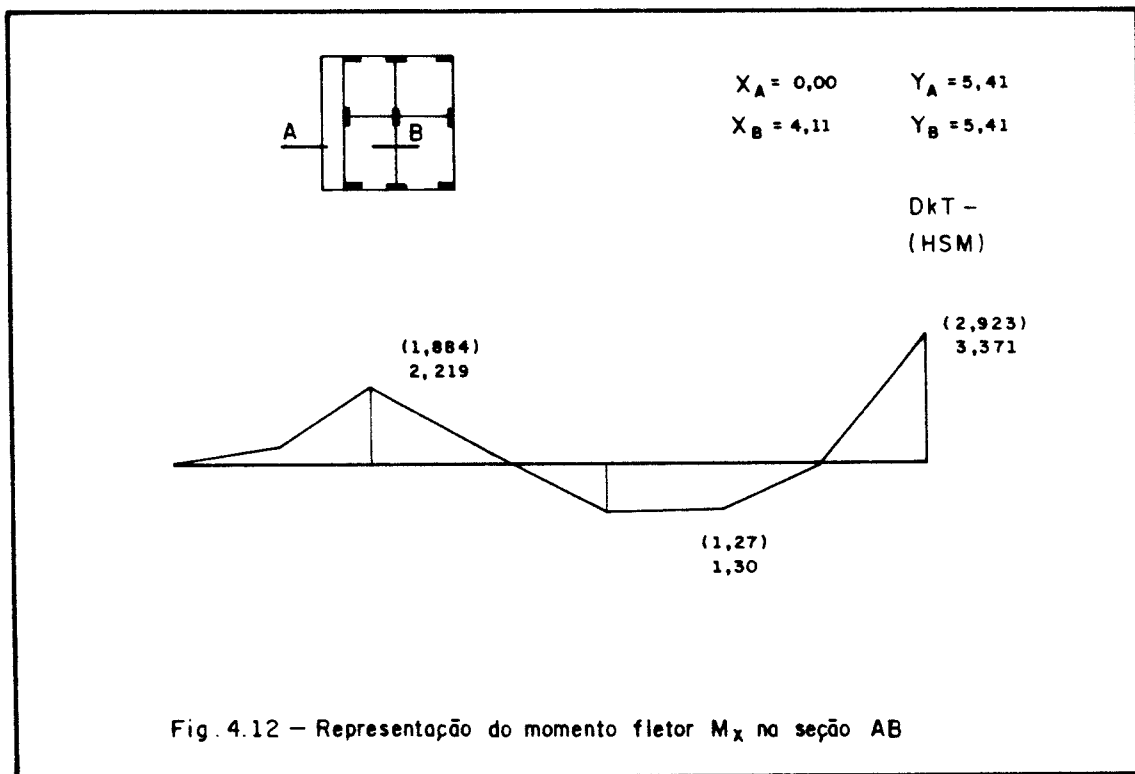
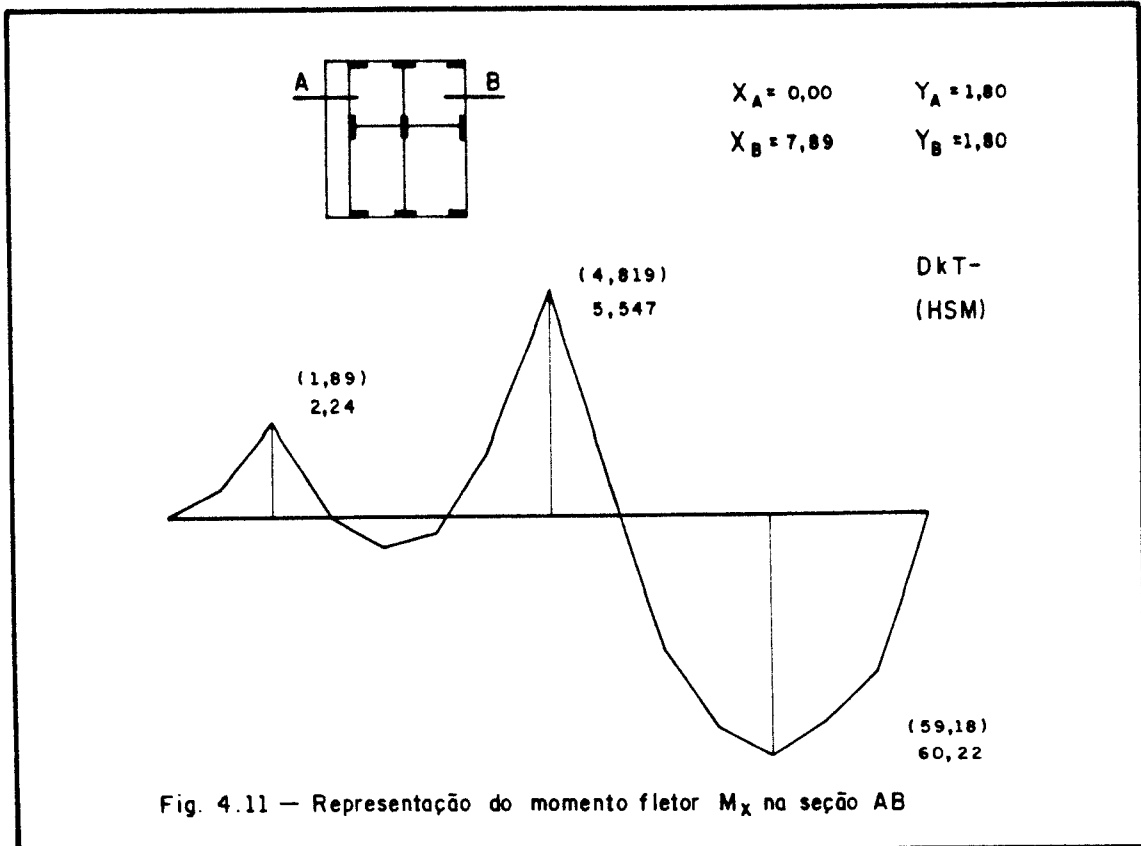
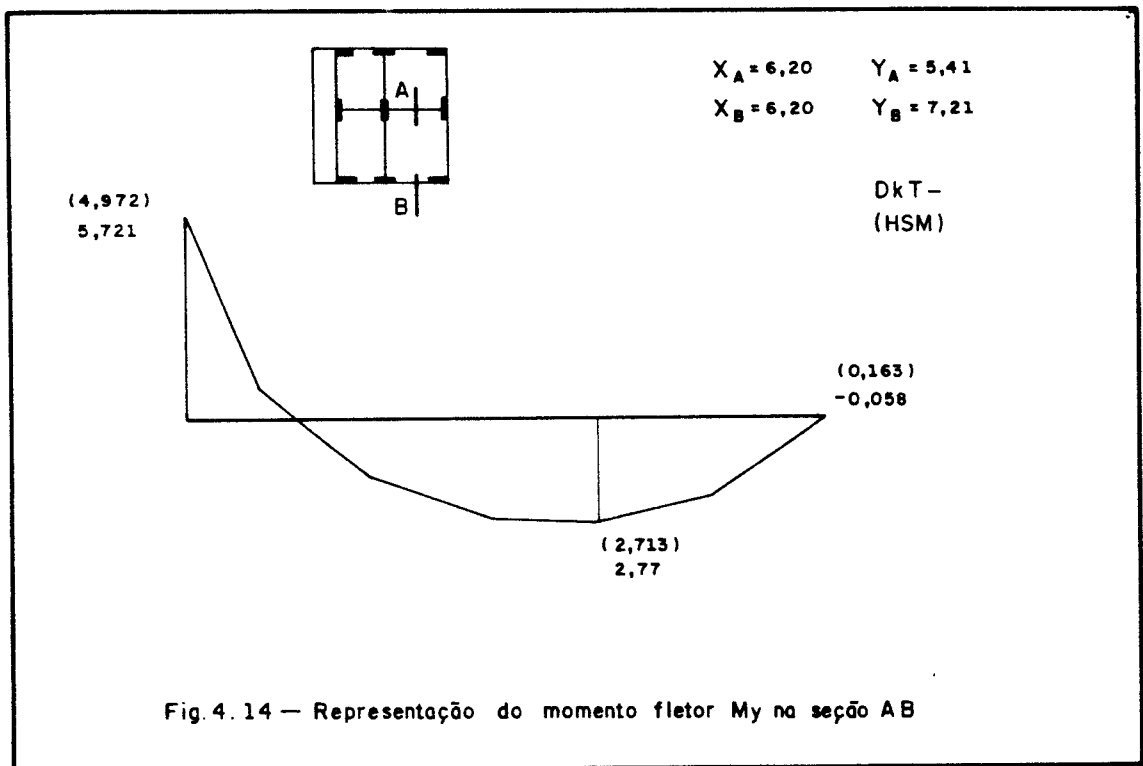
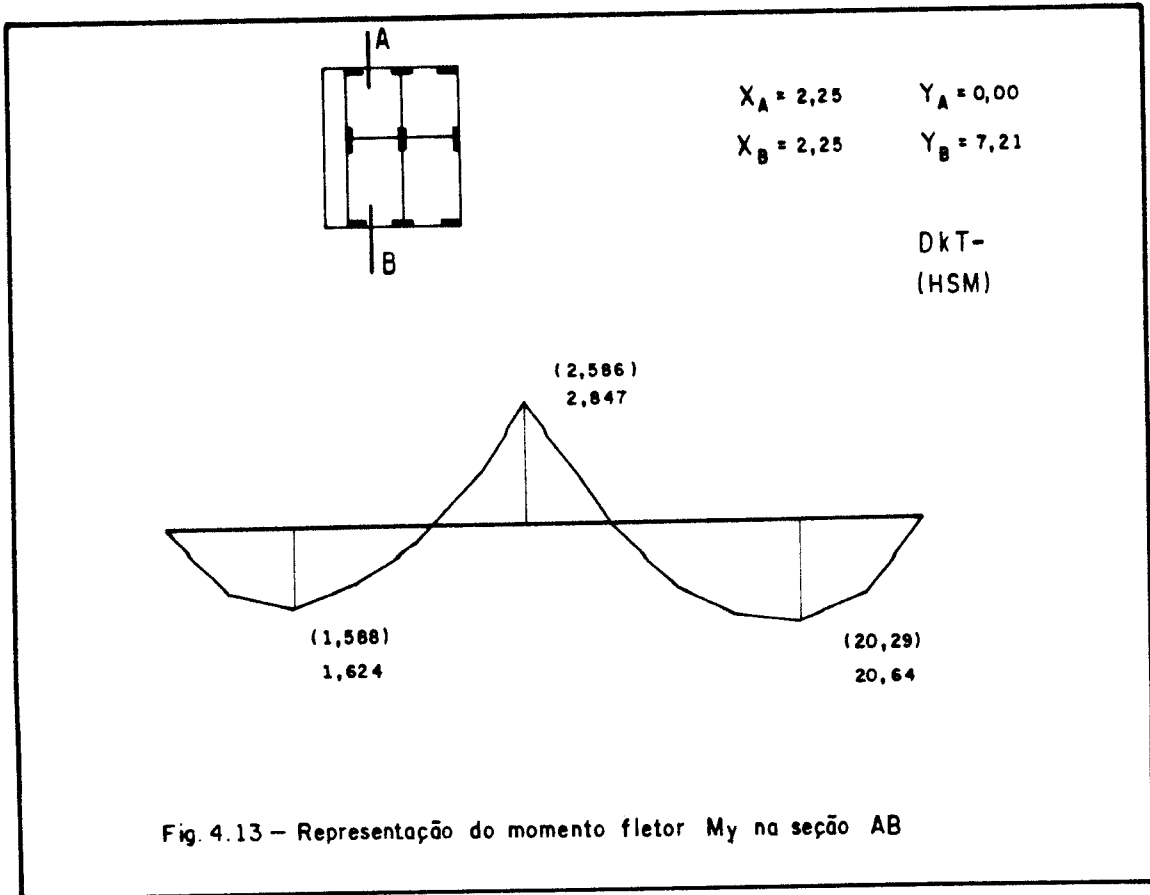
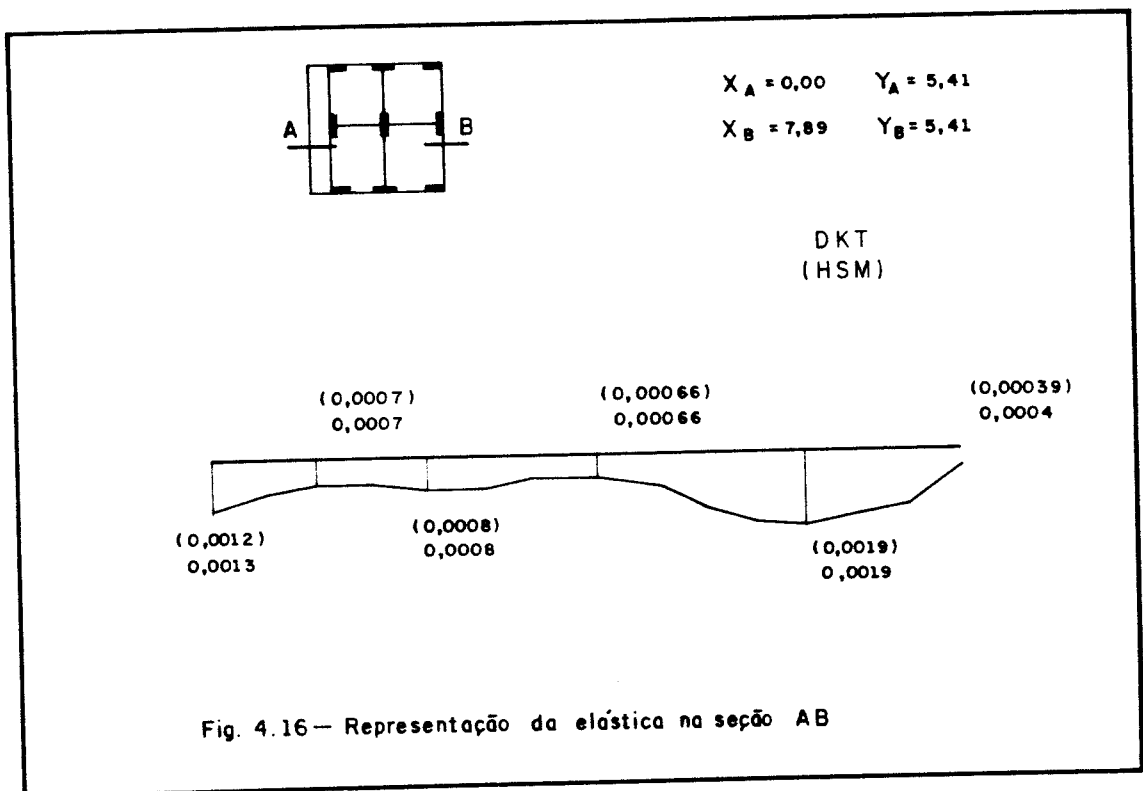
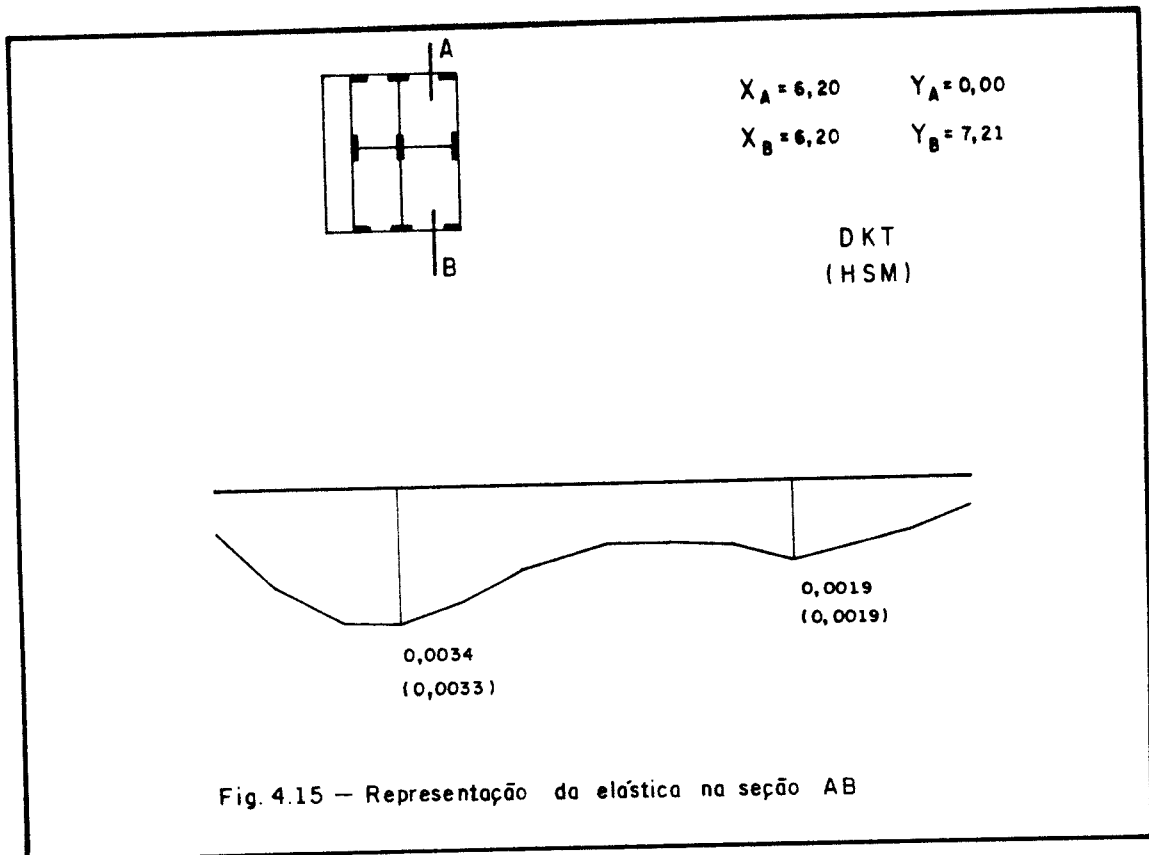


TABELA 4.5 - CARGAS VERTICAIS NOS PILARES		
PILAR	CARGA VERTICAL (KN)	
	HSM	DKT
P01	44.80	44.81
P02	96.70	96.72
P03	50.54	50.55
P04	102.54	102.56
P05	205.84	205.74
P06	111.50	111.52
P07	52.37	52.37
P08	77.34	77.37
P09	37.21	37.21

São apresentados ainda, os diagramas de momentos fletores em várias seções do pavimento de edifício, conforme figuras (4.11), (4.12), (4.13) e (4.14) além das curvas da elástica em duas seções conforme figuras (4.15) e (4.16) .







CAPITULO V

CONCLUSÕES

Neste trabalho abordam-se basicamente dois aspectos da análise de pavimentos de edifícios pelo método dos elementos finitos: a formulação dos elementos finitos utilizados (triangular e quadrangular para placas e linear para barras) e o seu comportamento na análise de pavimentos, bem como na análise de placas isoladas com qualquer geometria e quaisquer condições de contorno.

Analisando-se os resultados apresentados em relação a valores teóricos conhecidos [4] na análise de placas delgadas, conclui-se que o elemento finito HSM tem comportamento que permite sua recomendação para cálculo prático, com uma boa convergência dos resultados à medida que se refina a malha.

O elemento finito DKT, também apresenta bons resultados para os exemplos analisados.

Os problemas surgem em pontos mais próximos das bordas.

Estes tipos de problemas são devidos, em grande parte, à impossibilidade de se impor as condições apropriadas para as bordas.

No caso dos elementos finitos em questão, as condições de contorno são escritas em função dos deslocamentos verticais e rotações em torno dos eixos x e y . Com isto não se consegue anular os momentos fletores e volventes.

No caso do pavimento usual de edifício analisado, o comportamento dos dois elementos finitos, HSM e DKT, é semelhante, o que mostra a viabilidade da utilização de quaisquer um dos dois sistemas computacionais citados.

Vale ressaltar que a utilização do elemento finito quadrangular é bastante viável pela facilidade na geração das malhas, apresentando pequenas diferenças nos resultados quando comparados com os obtidos com a malha triangular.

Assim, a formulação desenvolvida neste trabalho mostra-se eficaz na análise de diversos tipos de problemas enfocados no presente texto.

CAPÍTULO VI

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BATOZ, J.L. ; BATHE, K.J. ; HO, L.W. A study of three-node triangular plate bending elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15:1771-1812, 1980.
2. REZENDE, M.N. Análise de pavimentos de edifícios pelo método dos elementos finitos em microcomputador, São Carlos, EESC-USP, 1990. 87p. (Dissertação de Mestrado).
3. MARTINELLI, D.A.O. ; MONTANARI, I. ; SAVASSI, W. Placas elásticas: Equações gerais e placas retangulares. Conceituação teórica, métodos das diferenças finitas e elementos finitos. São Carlos, EESC-USP, 1986 (Apostila).

4. TIMOSHENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells. (Teoria de placas y laminas). New York, MacGraw-Hill, 1959.
5. WASHIZU, K. Variational methods in elasticity and plasticity. 2nd.ed. Oxford, Pergamon Press, 1975. 412p.
6. BREBBIA, C.A. & CONNOR, J.J. Métodos de los elementos finitos en la ingeniería civil. Madrid, CPPE, 1975. 259p.
7. PAIVA, J.B. Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas. São Carlos, EESC-USP, 1987. 195p. (Tese de Doutorado).
8. ANDRADE, J.R.L. Estruturas correntes de concreto armado -Parte 1. São Carlos, EESC-USP, 1982 (Apostila).

CAPÍTULO VII

BIBLIOGRAFIA

- ALLWOOD, R.J. & CORNES, G.M.M. A Polygonal finite element for plate bending problems using the assumed stress approach. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1:135-149, 1969.
- BARREIRO, J.C. & LAIER, J.E. Complementos de resistência dos materiais. São Carlos, EESC-USP, 1983 (Apostila).
- BARRETO, S.F. Aplicação do método dos elementos finitos na análise de placas com deformação por cortante. São Carlos, EESC-USP, 1990, 76p. (Dissertação de Mestrado).
- BATOZ, J.L. ; BATHE, K.J. ; HO, L.W. A Study of three-node triangular plate bending elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15:1771-1812, 1980.

- BREBBIA, C.A. & CONNOR, J.J. Métodos de los elementos finitos en la ingeniería civil. Madrid, CPPE, 1975. 259p.
- BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. The Finite element technique - An Introduction for engineers. Porto Alegre, RS, Editora da URS, 1975. 410p.
- COUGH, R.W. & TOCHER, J.L. Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending. Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, WPAFB, Ohio, 515-545, 1965.
- COOK, R.D. Two hybrid element for analysis of thick, thin and sandwich plates. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 5:277-288, 1972.
- CURSO DE MECÂNICA TEÓRICA E APLICADA, 1: Teoria das cascas e suas aplicações na engenharia, Rio de Janeiro, RJ, 05-30 jul, 1982. Rio de Janeiro, LCC/CNPq, 1982. 289p.
- DEGASPARE, J.C. Aplicações do elemento finito T18 para flexão de placas delgadas elástico-isótropas. São Carlos, EESC-USP, 1978. 139p. (Dissertação de Mestrado).
- KIKUCHI, F. & ANDO, Y. Some finite element solutions for plate bending problems by simplified hybrid displacement method. Nuclear Engineering and Design. 23:155-178, 1972.
- MARTINELLI, D.A.O. ; MONTANARI, I. ; SAVASSI, W. Placas elásticas: Equações gerais e placas retangulares. Conceituação teórica, método das diferenças finitas e elementos finitos. São Carlos, EESC-USP, 1986 (Apostila).

- NEALE, B.K. ; HENSHELL, R.D. ; EDWARDS, G. Hybrid plate bending elements. Journal of Sound and Vibration. 23(1): 101-112, 1972.
- PAIVA, J.B. Instabilidade de folhas planas com vinculações elásticas. São Carlos, EESC-USP, 1980. 175p. (Dissertação de Mestrado).
- PAIVA, J.B. Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas. São Carlos, EESC-USP, 1987. 195p. (Tese de Doutorado).
- PIAN, T.H.H. Element stiffness-matrices for boundary compatibility and for prescribed boundary stresses. Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, WPAFB, Ohio, 457-477, 1965.
- PIAN, T.H.H. & TONG, P. Basis of finite element methods for solid continua. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1:3-28, 1969.
- REZENDE, M.N. Análise de pavimentos de edifícios pelo método dos elementos finitos em microcomputador, São Carlos, EESC-USP, 1990. 87p. (Dissertação de Mestrado).
- RIBEIRO, J.R.M. Estudo da validade da hipótese de Kirchhoff-Love na teoria das placas. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1976. 145p. (Dissertação de Mestrado).
- WASHIZU, K. Variational methods in elasticity and plasticity. 2nd.ed. Oxford, Pergamon Press, 1975. 412p.
- ZAGOTTIS, D. Introdução à Teoria das Estruturas. São Paulo, Escola Politécnica-USP, 1986 (Apostila).