

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS LATERAIS  
DE PAINÉIS PLANOS CONSIDERANDO AS DEFORMAÇÕES  
AXIAIS DOS PILARES E O EFEITO DE 2ª ORDEM

ENG<sup>a</sup> ROSANE APARECIDA GOMES BATTISTELLE

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

SÃO CARLOS, JANEIRO, DE 1991

A Deus-Pai, pelo estímulo e inspiração na hora de dúvida, pela força nos insucessos e principalmente por sua presença constante em minha vida.

À minha família, em especial a LENY, minha mãe.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Eddie Mancini pelo apoio e orientação em todas as fases deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES - pela concessão de bolsa de estudos.

À Universidade Estadual Paulista - UNESP - que possibilitou a conclusão desta pesquisa.

Aos funcionários do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, especialmente a Rui Roberto Casale pela eficiência no trabalho de datilografia, à Silvia Helena Morette Villani pelo capricho nos desenhos que ilustram esta dissertação e à Maria Nadir Minatel por sua colaboração na pesquisa bibliográfica.

A todos os amigos, em cuja convivência, encontrei apoio e estímulo necessários para a realização deste estudo.

## R E S U M O

Este trabalho tem como objetivo desenvolver procedimentos para o cálculo dos deslocamentos laterais em painéis planos quando sujeitos à ação de cargas laterais e verticais uniformemente distribuídas ao longo da altura da estrutura.

Estudam-se os painéis pórtico, parede e pórtico associados por barras biarticuladas, sendo analisados, gradativamente a influência dos deslocamentos axiais e o efeito de 2ª ordem.

Para o desenvolvimento teórico de cada modelo estrutural, utiliza-se a Técnica do Meio Contínuo, que consiste em considerar os elementos horizontais que conectam os painéis uniformemente distribuídos na altura.

Utilizando-se esta técnica, a análise dos modelos conduz a equações diferenciais de terceira, quarta ou quinta ordem, sendo a equação de quarta ordem solucionada analiticamente e as equações de terceira e quinta ordem resolvidas com a aplicação do Método das Diferenças Finitas.

Apresentam-se no final de cada capítulo, exemplos numéricos e os resultados obtidos são comparados com aqueles obtidos em outros trabalhos.

## A B S T R A C T

The aim of this work is to develop procedures for the calculation of lateral displacements in plane panels when subject to the action of lateral and vertical loads uniformly distributed along the height of the structures.

The studied panels are frames or wall and frame associated by hinged bars. The influence of axial displacements and the second order effect are gradually analysed.

For the theoretical development of each structural model the Continuous Medium Technique is used; this consists of considering the horizontal elements connecting the panels distributed along the height of the structure.

By using this technique, the analysis of the structural models leads to differential equations of third, fourth and fifth orders, the equation of fourth order is solved analytically and the equations of third and fifth order are solved by applying the Finite Differences Method.

At the end of each chapter numerical examples are presented and the results obtained are compared with those of other papers.

## Í N D I C E

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. TIPOS BÁSICOS DE PAINÉIS .....	6
2.1 - Painel parede .....	6
2.2 - Painel pórtico .....	8
2.3 - Painel geral .....	11
2.3.1 - Associação de parede e pórtico por barras biarticuladas .....	11
2.3.2 - Associação de paredes por lintéis ....	13
3. PAINEL PÓRTICO .....	19
3.1 - Painel pórtico considerando a influência dos deslocamentos axiais dos pilares .....	20
3.1.1 - Pórtico plano com igualdade de rigi- dez entre os pilares .....	20
3.1.2 - Pórtico plano com desigualdade de ri- gidez entre os pilares .....	31
3.1.3 - Exemplo numérico 1 .....	35
3.1.4 - Programa I .....	39
3.2 - Painel pórtico considerando a influência dos deslocamentos axiais dos pilares e o efeito de 2ª ordem das cargas verticais .....	42
3.2.1 - Exemplo numérico 1 .....	51
3.2.2 - Programa II .....	56
4. ASSOCIAÇÃO PLANA DE PÓRTICO E PAREDE .....	63
4.1 - Associação de parede e pórtico por barras bi- articuladas considerando a influência dos des- locamentos axiais dos pilares do pórtico e base rígida na parede .....	64
4.1.1 - Engastamento elástico na parede .....	72
4.1.2 - Exemplo numérico 2 .....	75
4.1.3 - Programa III .....	87

4.2 - Associação de parede e pórtico por barras biarticuladas considerando a influência dos deslocamentos axiais dos pilares e o efeito de 2ª ordem .....	96
4.2.1 - Exemplo numérico 2 .....	105
4.2.2 - Programa IV .....	109
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	118
APÊNDICE A - Coeficiente de rigidez - $s_f$ .....	119
APÊNDICE B - Método das Diferenças Finitas .....	123
6. BIBLIOGRAFIA .....	133

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 - Considerações Gerais

O crescente aumento da densidade populacional associado a uma necessidade contínua de uma maior urbanização, fez com que a civilização optasse por um processo de verticalização das estruturas urbanas. Desta forma, o homem passou a dedicar maior interesse aos estudos associados a este fenômeno, principalmente, relacionados com a economia, estabilidade e segurança de tais construções.

Vários estudos, realizados por pesquisadores, têm contribuído para o aprimoramento das técnicas de cálculo de estruturas de edifícios altos. STAMATO [13] e [14], MANCINI [7], [9] utilizaram a "Técnica do Meio Contínuo" no cálculo de estruturas de edifícios altos submetidos a carregamento lateral.

Tomando-se por base os citados trabalhos, diversas contribuições têm sido fornecidas, para melhor se compreender o comportamento das estruturas de edifícios altos. Dentre estes trabalhos podem-se citar:

BATHAUS [2] estudou os deslocamentos laterais dos pórticos considerando a influência dos deslocamentos a-



xiais dos pilares do pórtico, quando sujeitos a carga lateral.

CARVALHO [4] e CARVALHO [5] apresentaram um estudo da instabilidade de painéis planos constituídos por paredes unidas por lintéis (vigas), sujeitos a cargas verticais uniformemente distribuídas ao longo das paredes.

XAVIER [16] desenvolveu uma análise do efeito de segunda ordem em vários modelos estruturais submetidos a cargas laterais e verticais, uniformemente distribuídas ao longo da altura. O comportamento destes modelos é expresso por uma equação diferencial de terceira ordem, cuja resolução é feita através do Método das Diferenças Finitas e de Stodola-Vianello.

BARBOSA [1], em sua Dissertação de Mestrado, resolveu o sistema de equações diferenciais, geradas pelo tratamento contínuo, através da aplicação do Método das Diferenças Finitas, utilizando um polinômio de interpolação do sexto grau.

O objetivo deste trabalho consiste no desenvolvimento de procedimentos de cálculo que permitam a determinação dos deslocamentos laterais de estruturas de edifícios altos, quando sujeitos a ação de cargas laterais e verticais uniformemente distribuídas ao longo da altura dos mesmos; introduzindo assim, novos conceitos aos trabalhos mencionados anteriormente.

A técnica de cálculo a ser aplicada a cada modelo será a Técnica do Meio Contínuo, que consiste basicamente na substituição do sistema discreto formado por lajes e vigas que conectam os elementos verticais, ao nível dos andares, por um meio contínuo de rigidez equivalente, distribuído ao longo da altura do edifício, conforme figura 1.1.

O comportamento de cada modelo estrutural expressa-se através de uma equação diferencial de terceira, quarta ou quinta ordem, sendo a equação de quarta ordem resolvida analiticamente e as equações de terceira e quinta ordem solucionadas através do Método das Diferenças Finitas.

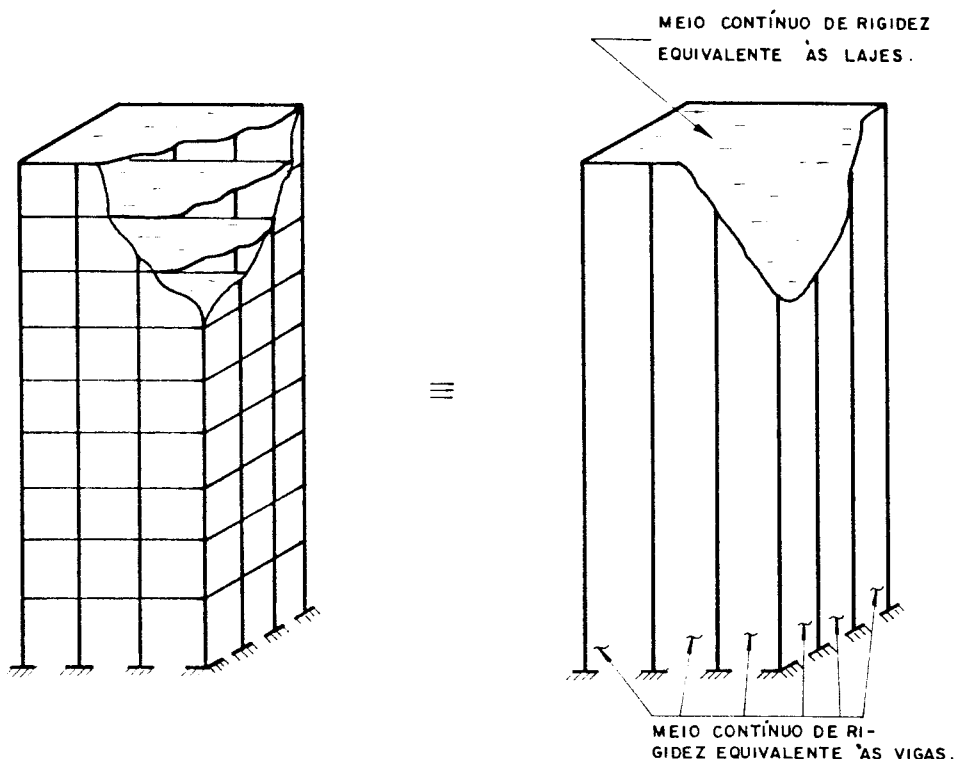


Fig. 1.1 - Técnica do meio contínuo

Os tipos básicos de painéis a serem estudados, bem como suas associações, denominadas de painéis gerais, são a apresentados no capítulo 2.

No capítulo 3 estuda-se o painel pórtico, conforme apresentado em BATHAUS [2], admitindo-se seções transversais diferentes nos pilares do pórtico e o efeito de segunda ordem, considerando a estrutura na sua configuração deformada.

Analisa-se, no capítulo 4, a associação plana de pórtico e parede considerando-se, primeiramente, a influência dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico e base rígida na parede. A influência do engastamento elástico na parede é estudada, posteriormente, com a utilização de equação deduzida em STAMATO [13]. Finalmente, acrescenta-se a este estudo o efeito de segunda ordem.

Ao final de cada capítulo, baseado na formulação dos modelos, apresenta-se programa de cálculo em linguagem FORTRAN IV e resolvem-se exemplos numéricos. Os resultados são apresentados em gráficos e tabelas, sendo a precisão da análise teórica avaliada através de comparações destes resultados.

Nos apêndices deste trabalho encontra-se a dedução de parâmetros de rigidez do pórtico e a formulação do Método das Diferenças Finitas para solução de equações diferenciais de terceira e quinta ordem.

No capítulo 5, finalmente, apresentam-se algumas considerações sobre o trabalho.

## 1.2 - Hipóteses de cálculo

Os conceitos utilizados neste trabalho são baseados nos estudos de STAMATO [15], onde define-se:

- a) PAINEL - Todo elemento resistente vertical, que recebe as cargas horizontais aplicadas as lajes e as transfere à fundação;
- b) LAJES - São elementos horizontais, assimilados a diafragmas, com rigidez infinita no seu plano e nula transversalmente, de modo a transmitir apenas esforços horizontais aos painéis;
- c) BARRAS BIARTICULADAS. São elementos horizontais de ligação da parede com o pórtico que só transmitem forças horizontais e serão consideradas distribuídas continuamente ao longo da altura da estrutura;
- d) LINTÉIS - São considerados como vigas engastadas, em ambas as extremidades, nas paredes, resistentes a momento fletor e força cortante.

A teoria desenvolvida neste trabalho será utilizada em estruturas de edifícios com características elasto-

-geométricas constantes ao longo da altura, e as cargas ver  
ticais serão consideradas uniformemente distribuídas ao long  
o dos eixos que passam pelos centros de gravidade das se-  
ções transversais dos elementos verticais que compõem as es  
truturas.

## 2. TIPOS BÁSICOS DE PAINÉIS

A finalidade deste item é apresentar alguns conceitos básicos e essenciais que, embora já abordados por diversos autores, tais como STAMATO [13], MANCINI [7] e FERREIRA [6], facilitarão a compreensão e a indução dos raciocínios a serem demonstrados nos próximos capítulos.

### 2.1 - PAINEL PAREDE

Dá-se o nome de "parede" aos painéis planos com rigidez transversal desprezível, supostos rígidos à força cortante e deformáveis apenas ao momento fletor. As paredes são consideradas de seção constante ao longo da sua altura.

Utiliza-se o índice "w" para identificar os esforços e deslocamentos relativos à parede.

O carregamento externo é constituído de uma carga horizontal  $p_w$  uniformemente distribuída ao longo da altura  $H$  do painel e de uma força  $F_w$  concentrada no topo (Fig. 2.1-a). Define-se  $u_w$  como o deslocamento horizontal da parede na direção  $Ox$  (fig. 2.1-b).

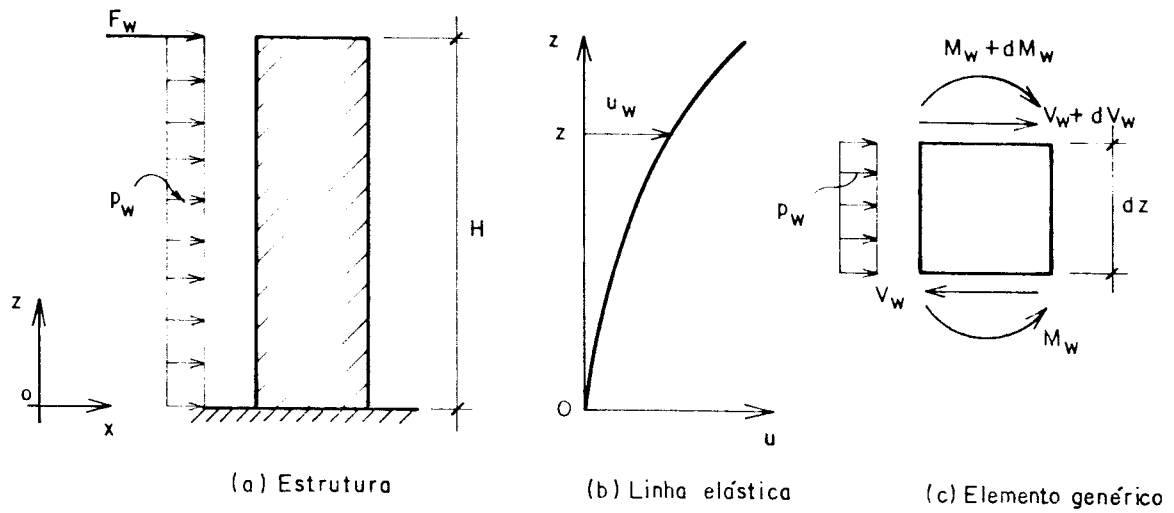


Fig. 2.1 - Painel Parede

O equilíbrio do elemento infinitesimal, de altura  $dz$ , considerando-se positivos os sentidos adotados na figura 2.1-c, fornece:

$$\frac{dM_w}{dz} = - V_w \quad (2.1)$$

$$\frac{dV_w}{dz} = - p_w \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2 M_w}{dz^2} = p_w \quad (2.3)$$

Desprezando-se a deformação da parede por força cortante, a equação da elástica é dada por:

$$u_w'' = \frac{M_w}{j_w} \quad (2.4)$$

onde:

$u_w$  - deslocamento da parede na direção do eixo  $Ox$ .

$j_w$  - produto de rigidez à flexão  $EI_w$  da parede.

$E$  - módulo de elasticidade longitudinal do material da parede.

$I_w$  - momento de inércia da seção transversal parede em relação a um eixo perpendicular ao plano da figura e que passa pelo centro de gravidade da seção transversal.

Derivando-se uma vez a equação (2.4) e combinando-se com a equação (2.1), obtém-se a expressão para a força cortante na parede a uma cota genérica  $z$ :

$$V_w = - j_w u_w''' \quad (2.5)$$

As condições de contorno que permitem determinar a função deslocamento  $u_w$ , incôgnita da equação (2.5) são:

- engastamento na base

$$u_w(0) = 0$$

$$u_w'(0) = 0$$

(2.6)

- momento nulo no topo

$$u_w''(H) = 0$$

As equações (2.1) e (2.2) combinadas com a equação da elástica e as condições de contorno fornecem os esforços atuantes na parede.

## 2.2 - PAINEL PÓRTICO

Denominam-se "pórticos" os painéis planos, sem rigidez transversal, supostos rígidos a momento fletor e deformáveis predominantemente por força cortante.

Usa-se o índice "f" para identificar os esforços e deslocamentos relativos ao pórtico que possui rigidez constante ao longo da altura  $H$ .

O carregamento externo é constituído por uma carga horizontal  $p_f$ , uniformemente distribuída ao longo da altura

ra  $H$  do painel e uma força  $F_f$  concentrada no topo (Fig. 2.2-a). Expressa-se por  $u_f$  o deslocamento horizontal do pórtico na direção de  $Ox$  (fig. 2.2-b).

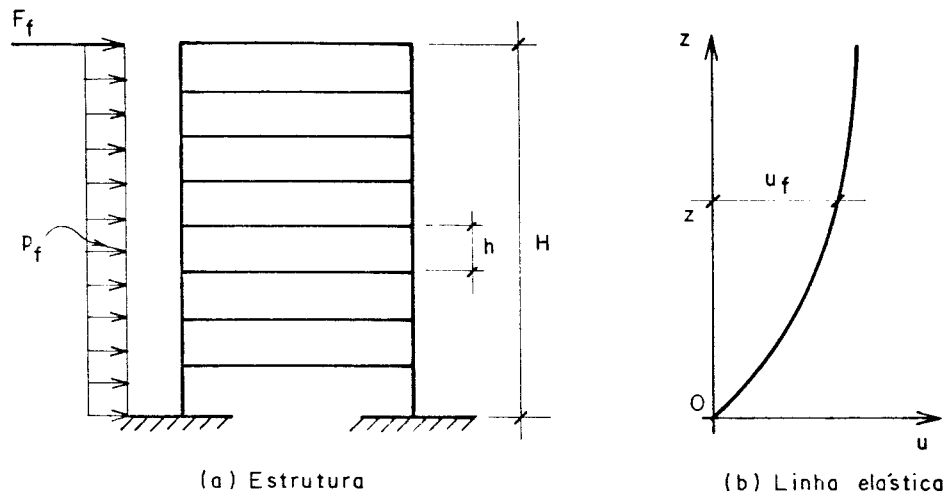


Fig. 2.2 - Painel Pórtico

Considerando-se a mesma convenção definida no item anterior para os esforços internos e deslocamentos (fig. 2.1-c), tem-se que as equações de equilíbrio do elemento infinitesimal do pórtico são:

$$\frac{dM_f}{dz} = - V_f \quad (2.7)$$

$$\frac{dV_f}{dz} = - p_f \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2 M_f}{dz^2} = p_f \quad (2.9)$$



Conforme STAMATO [13], a equação da linha elástica do pórtico expressa-se por:

$$V_f = s_f u'_f \quad (2.10)$$

onde

$s_f$  - rigidez do pórtico à força cortante, cuja dedução se encontra em diversos trabalhos, tais como STAMATO [14], MANCINI [7] e no APÊNDICE A, dada por:

$$s_f = \frac{12E}{h} \sum_{n.a} \left[ k_{p.n} \frac{\sum k}{\sum k} \right]$$

onde

$k$  - relação  $\frac{I}{\ell}$  do tramo de viga ou pilar considerado.

$\sum_{n.a}$  - somatório estendido a todos os nós do andar considerado.

$k_{p.n}$  - relação  $\frac{I}{\ell}$  do pilar acima do nó considerado.

$\sum_{v.n}$  - somatório estendido aos tramos de vigas que concorrem no nó.

$\sum_{t.n}$  - somatório estendido a todas as barras que concorrem no nó.

$E$  - módulo de elasticidade longitudinal do material.

$h$  - pé direito do andar.

A equação (2.10) em conjunto com as condições de contorno permite calcular todos os esforços e deslocamentos horizontais do pórtico.

## 2.3 - Painei Geral

Usa-se, freqüentemente, em edifícios, painéis mistos formados por paredes e pórticos que são denominados de Painéis Gerais. A sua utilização contribui de maneira vantajosa para o comportamento estrutural do conjunto, isto é, reduz a diferença de esforços na base e no topo do edifício.

São estudados neste item dois casos desta associação:

- Associação de parede e pórtico por barras biarticuladas;
- Associação de paredes por lintéis.

### 2.3.1 - Associação de parede e pórtico por barras biarticuladas.

Considere-se o painel da figura 2.3, constituído de uma associação de parede e pórtico ligados por barras biarticuladas. Estes elementos de ligação comportam-se de maneira análoga às lajes dos andares, que são supostas de rigidez transversal desprezível e infinitamente rígidas em seu plano. De acordo com a "Técnica do Meio Contínuo", estas barras são supostas uniformemente distribuídas ao longo da altura H do painel.

O carregamento externo é constituído de uma carga horizontal p linearmente distribuída ao longo da altura H do painel e de uma força F concentrada no topo (fig. 2.3-a).

A força cortante externa V do carregamento externo, em qualquer nível, é equilibrada pelas forças cortantes  $V_w$  da parede e  $V_f$  do pórtico. Desta forma, tem-se:

$$V = V_w + V_f \quad (2.11)$$

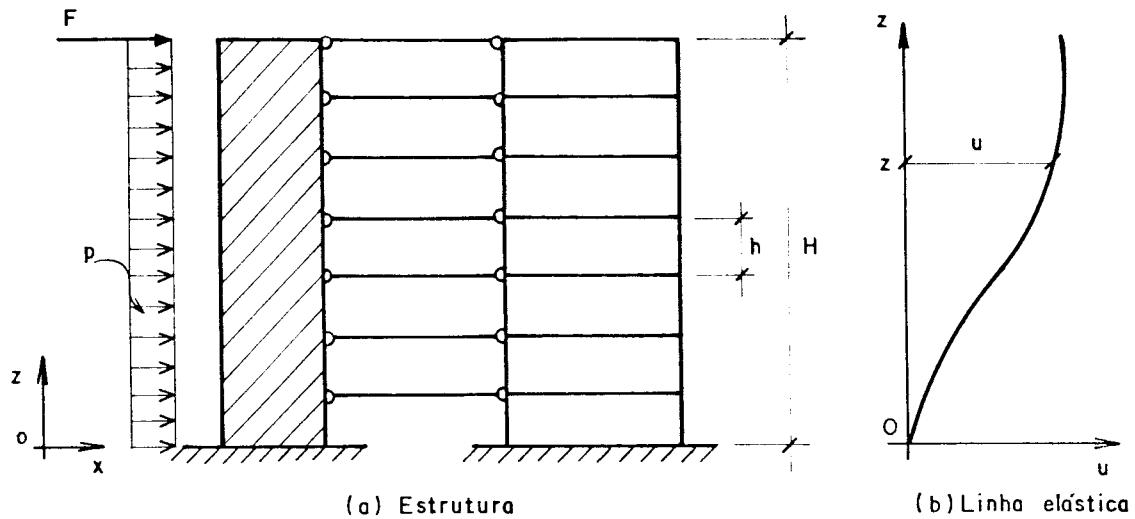


Fig. 2.3 - Associação de parede e pórtico por barras biarticuladas.

Substituindo-se as equações (2.5) e (2.10) em (2.11), resulta:

$$V = - j_w u_w'''' + s_f u_f' \quad (2.12)$$

Como as barras de ligação são consideradas de rigidez infinita no seu plano, os deslocamentos horizontais da parede ( $u_w$ ) e do pórtico ( $u_f$ ) podem ser considerados iguais, isto é,  $u_w = u_f = u$ . Portanto, a equação (2.12) fica:

$$V = - j_w u'''' + s_f u' \quad (2.13)$$

A equação (2.13) juntamente com as condições de contorno (equações (2.6)) permitem determinar todos os esforços e deslocamentos horizontais do painel.

Analisando-se a equação (2.13), conclui-se que o painel resultante da associação de parede e pórtico por barras biarticuladas, resulta em um painel que se deforma por momento fletor (conforme o termo  $- j_w u''''$ ) e por força cortante (conforme a expressão  $s_f u'$ ). Não existindo a pre-

dominância de um tipo sobre o outro, este painel comporta-se de maneira vantajosa, associando dois painéis que trabalham, quando isolados, de forma complementar.

### 2.3.2 - Associação de paredes por lintéis

Estuda-se, neste item o painel constituído de duas paredes ligadas por lintéis iguais, espaçados entre si de  $h$ . Estes lintéis, considerados como vigas, são engastados nas extremidades das paredes e rígidos axialmente, garantindo, portanto, uma única elástica para o painel.

O carregamento externo é constituído de uma carga horizontal  $p$ , uniformemente distribuída ao longo da altura  $H$  do painel, e de uma força  $F$  concentrada no topo.

Na figura 2.4 demonstra-se detalhadamente o painel, onde os lintéis têm rigidez muito pequena quando comparados à rigidez das paredes, podendo-se, portanto, supor pontos de momentos nulos no centro dos vãos dos lintéis. Nestes pontos médios (fig. 2.5) aparecem forças cortantes incógnitas denominadas de  $v_\ell$  que serão supostas uniformemente distribuídas ao longo do espaçamento  $h$  dos lintéis.

Definem-se  $j_{w_1}$ ,  $j_{w_2}$ ,  $j_\ell$  como produtos de rigidez da parede 1 ( $EI_{w_1}$ ), parede 2 ( $EI_{w_2}$ ) e dos lintéis ( $EI_\ell$ ) respectivamente.

O sistema de eixos  $(x,z)$  utilizado é o mesmo adotado nos itens anteriores.

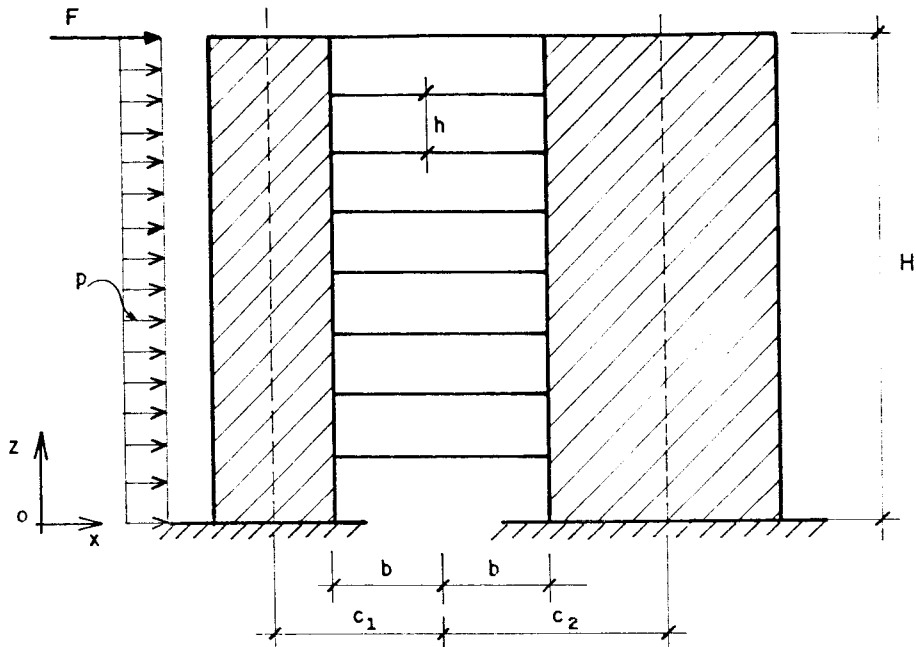


Fig. 2.4 - Associação de paredes com lintéis

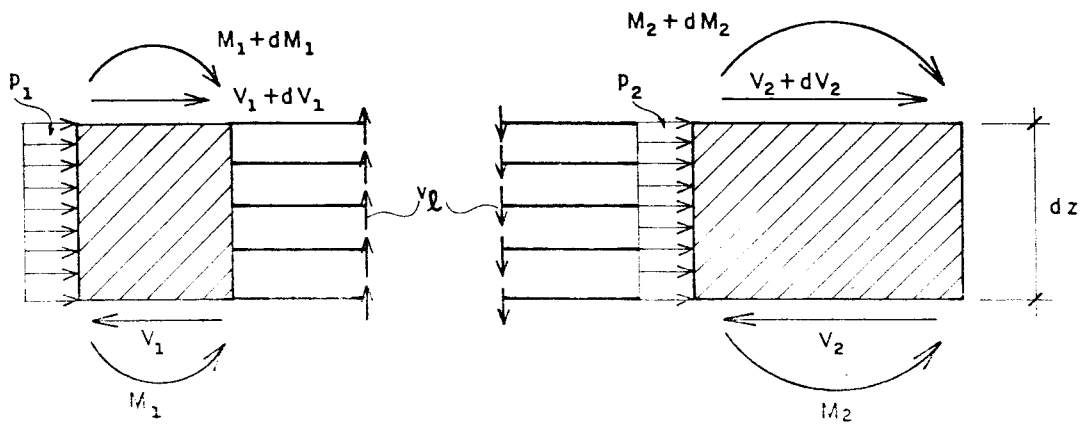


Fig. 2.5 - Convenção para esforços positivos

Considerando-se positivos os sentidos adotados na fig. 2.5, o equilíbrio do elemento infinitesimal de altura  $dz$  fornece:

- parede 1

$$\frac{dV_1}{dz} = - P_1 \quad (2.14)$$

$$\frac{dM_1}{dz} = - V_1 + v_\ell c_1 \quad (2.15)$$

- parede 2

$$\frac{dV_2}{dz} = - P_2 \quad (2.16)$$

$$\frac{dM_2}{dz} = - V_2 + v_\ell c_2 \quad (2.17)$$

Considerando-se as equações (2.15) e (2.17) com a equação da elástica (2.4), obtém-se a força cortante na parede (1) e parede (2), respectivamente:

$$V_1 = - j_{w_1} u''' + v_\ell c_1 \quad (2.18)$$

$$V_2 = - j_{w_2} u''' + v_\ell c_2 \quad (2.19)$$

Somando-se as equações (2.18) e (2.19), encontra-se a força cortante do painel em função da força cortante do lintel (incógnita  $v_\ell$ ) e dos deslocamentos horizontais  $u$ :

$$V = - (j_{w_1} + j_{w_2}) u''' + (c_1 + c_2) v_\ell \quad (2.20)$$

A incógnita  $v_\ell$  é aplicada no centro dos vãos dos lintéis, onde se supõem pontos de momentos nulos. Desprezando-se as deformações axiais das paredes, ocorrem nestes pontos deslocamentos devido à deformação à flexão da parede (fig. 2.6-a), e à deformação do lintel por flexão (fig. 2.6-b):

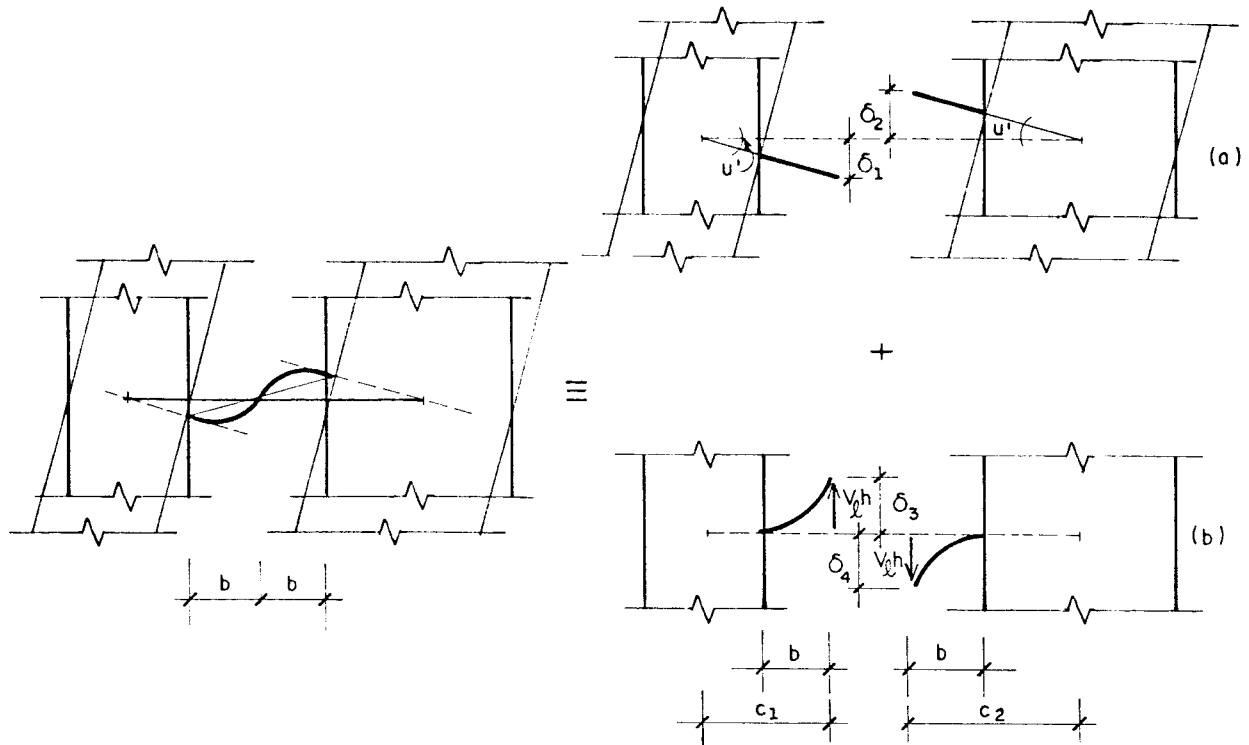


Fig. 2.6 - Deslocamentos do ponto médio dos lintéis

Utilizando-se a convenção de deslocamentos positivos, os da base para o topo, e fazendo-se a somatória ao longo da vertical, acha-se a equação de compatibilidade de deslocamentos, expressa por:

$$-\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 - \delta_4 \quad (2.21)$$

onde

$\hat{\epsilon}_1$  e  $\hat{\epsilon}_2$  são os deslocamentos devido às deformações das paredes por flexão, dados por:

$$\hat{\epsilon}_1 = c_1 u' \quad (2.22)$$

$$\hat{\epsilon}_2 = c_2 u'$$

e

$\delta_3$  e  $\delta_4$  são os deslocamentos devido à deformação do lintel por flexão, cuja dedução é encontrada em diversos livros de teoria clássica da Resistência dos Materiais como, por exemplo, SCHIEL [11]. Escreve-se, portanto:

$$\delta_3 = \delta_4 = \frac{v_\ell hb^3}{3EI_\ell} \quad (2.23)$$

Levando-se as equações (2.22) e (2.23) na equação (2.21) e rearranjando-a, obtém-se a força cortante do lintel, dada por:

$$v_\ell = \frac{3EI_\ell}{2hb^3} (c_1+c_2)u' \quad (2.24)$$

Substituindo-se o valor de  $v_\ell$  (equação (2.24)) na equação (2.20), acha-se a força cortante do painel, expressa por:

$$V = - (j_{w_1} + j_{w_2})u''' + \frac{3EI_\ell}{2hb^3} (c_1+c_2)^2 u' \quad (2.25)$$

definindo:

$$j_g = j_{w_1} + j_{w_2} \quad (2.26)$$

$$s_g = \frac{3EI_\ell}{2hb^3} (c_1+c_2)^2 \quad (2.27)$$

obtém-se

$$V = - j_g u''' + s_g u' \quad (2.28)$$

Encontra-se, finalmente, a equação que representa analiticamente o painel que em conjunto com as condi-



ções de contorno permitem calcular todos os esforços e deslocamentos.

Comparando-se a equação (2.28) (associação de duas paredes por lintéis) com a equação (2.13) (associação de parede e pórtico por barras biarticuladas), nota-se uma analogia formal das equações, podendo-se concluir que a introdução dos lintéis como elemento de ligações das paredes faz com que o conjunto passe a deformar-se por momento fletor e força cortante.

A análise anterior, embora bastante simples, por força das simplificações efetuadas, é muito restrita; não levando a resultados precisos à medida que a influência dos deslocamentos axiais dos pilares passe a ser mais importante, o que ocorre com o aumento da altura da estrutura e aumento da rigidez das vigas horizontais.

Para o caso de painéis constituídos de paredes ligadas por barras birticuladas, a análise é feita considerando-se apenas uma única parede, cuja rigidez é obtida pela soma da rigidez de cada parede, e cuja deformação é causada apenas pela ação do momento fletor.

Uma análise mais detalhada para associações de paredes pode ser encontrada nos trabalhos de MANCINI [7] e CARVALHO [4], que desenvolvem equações para painéis constituídos de  $n$  paredes ligadas por lintéis.

### 3. PAINEL PÓRTICO

A análise demonstrada neste capítulo, baseia-se no trabalho de BATHAUS [2] que estudou o comportamento de pórticos planos, formados de dois pilares com seções transversais iguais (portanto mesma rotação nos nós), considerando-se a influência das deformações axiais dos pilares por força normal.

Neste item desenvolvem-se as equações da linha elástica para pórticos considerando:

1. Influência dos deslocamentos axiais dos pilares com igualdade e desigualdade de rigidez entre os pilares do pórtico;

2. Influência dos deslocamentos axiais dos pilares com igualdade de rigidez entre os pilares do pórtico e o efeito de 2ª ordem.

Observa-se, oportunamente, que o termo "pórtico" aqui utilizado não possui mais o sentido rígido da definição do item 2.2 do presente trabalho.

O comportamento do segundo modelo, utilizando-se a Técnica do Meio Contínuo, expressa-se através de uma equação de 3ª ordem, cuja solução é obtida utilizando-se o método

do numérico denominado "Método das Diferenças Finitas" demonstrado no apêndice B.

Com a finalidade de comparar os resultados obtidos, apresenta-se um exemplo numérico referente a cada tipo de modelo estudado.

Desenvolvem-se, no final de cada item, um programa para microcomputador, em linguagem FORTRAN, tomando-se por base as expressões demonstradas na análise teórica.

### 3.1 - Análise do painel pórtico considerando a influência dos deslocamentos axiais dos pilares

#### 3.1.1 - Pórtico plano com igualdade de rigidez entre os pilares

Analisa-se primeiramente um pórtico cuja deformação total de um andar genérico é causada pela distorção do andar acrescida da deformação axial dos pilares A e B (fig. 3.1).

Convenciona-se chamar de  $v_A$  e  $v_B$  os deslocamentos axiais dos pilares A e B;  $k_i$  a rigidez a flexão do pilar dada pela divisão  $I_i/h$ ;  $k_v$  a rigidez da viga ( $k_v = I_v/\ell_v$ );  $a$  a rotação dos nós dos pilares e  $u'$  o giro de corda dos pilares.

- Rotação dos nós dos pilares -  $a$

Adotando-se igualdade de seção transversal para os pilares A e B ( $k_A = k_B = k_p$ ), e a convenção de Grinter (sentido horário positivo sobre o nó), os momentos aplicados pelas barras ao nó A são:

$$M_{AC} = 6Ek_p (u' - a) \quad (3.1)$$

$$M_{AE} = 6Ek_p (u' - a) \quad (3.2)$$

$$M_{AB} = - 6Ek_v \left[ a - \frac{(v_A - v_B)}{\ell_v} \right] \quad (3.3)$$

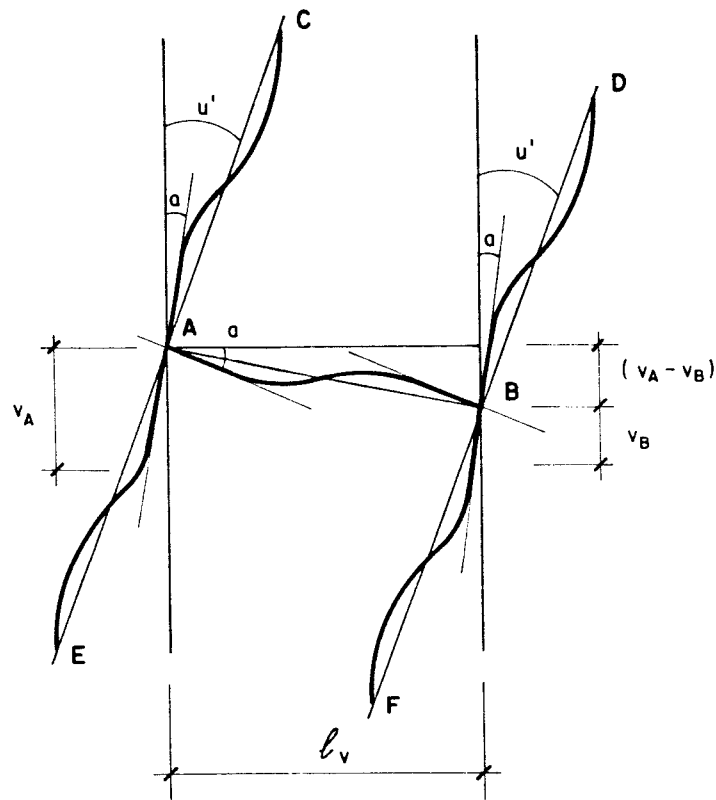


Fig. 3.1 - Deformação do andar genérico do pórtico

O equilíbrio do nó A fornece:

$$M_{AC} + M_{AE} + M_{AB} = 0 \quad (3.4)$$

Substituindo-se na equação (3.4) os respectivos valores de  $M_{AC}$ ,  $M_{AE}$  e  $M_{AB}$  e rearranjando-a, obtém-se:

$$a = \frac{2k_p u' + k_v (v_A - v_B) / l_v}{(2k_p + k_v)} \quad (3.5)$$

- Força cortante ao nível do andar -  $V_f$

Tem-se por hipótese que os pontos de momento nulo encontram-se no centro dos vãos dos pilares; desta forma, a força cortante  $V_f$  do pórtico pode ser escrita como:

$$V_f = \frac{2}{h} (M_{AC} + M_{BD}) \quad (3.6)$$

Levando-se a equação (3.1) (onde  $M_{AC}=M_{BD}$ ) na equação (3.6), resulta:

$$V_f = \frac{24Ek_p}{h} (u' - a) \quad (3.7)$$

Substituindo-se a equação (3.5) na equação (3.7), encontra-se:

$$V_f = s_1 u' - r_1 (v_A - v_B) \quad (3.8)$$

onde

$$s_1 = \frac{24Ek_p k_v}{h(2k_p + k_v)} \quad (3.9)$$

e

$$r_1 = \frac{s_1}{\ell_v}$$

- Força cortante nas vigas -  $q_v$

Mostra-se na figura 3.2 os esforços atuantes em uma viga genérica, onde  $q_v$  é a força cortante na viga, concentrada ao nível dos andares, e  $q$  é a força distribuída ao longo da altura dos pilares do pórtico.

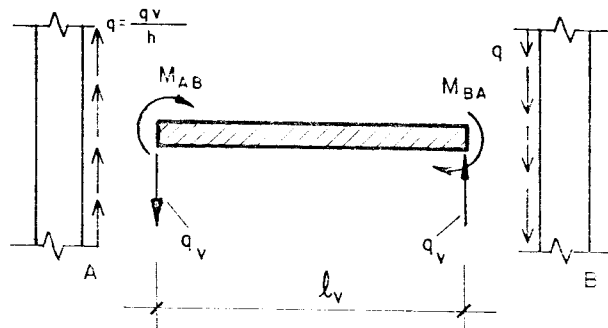


Fig. 3.2 - Esforços positivos na viga AB

Adotando-se a convenção apresentada na figura 3.2, tem-se:

$$q = \frac{1}{h\ell_v} (M_{AB} + M_{BA}) \quad (3.10)$$

Substituindo-se a expressão de  $M_{AB} = M_{BA}$  (equação (3.3)) na equação (3.10), obtém-se a força cortante distribuída ao longo da altura, dada por:

$$q = c_1 u' - d_1 (v_A - v_B) \quad (3.11)$$

onde

$$c_1 = \frac{24Ek_p k_v}{h(2k_p + k_v)\ell_v} \quad e \quad c_1 = \frac{s_1}{\ell_v}$$

e (3.12)

$$d_1 = \frac{c_1}{\ell_v} \quad e \quad d_1 = \frac{r_1}{\ell_v}$$

- Deslocamentos axiais dos pilares -  $v_A$  e  $v_B$

Na figura 3.3, apresenta-se um elemento genérico do pilar A, com o seu respectivo carregamento  $q$  e esforços internos.

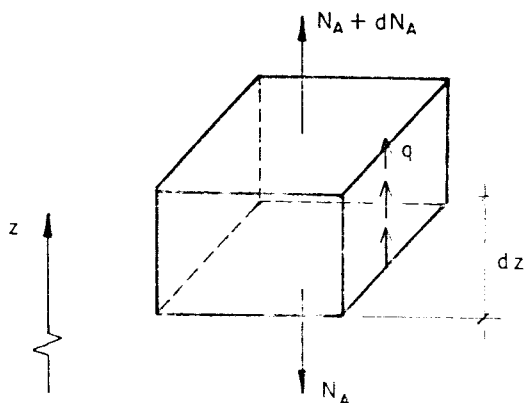


Fig. 3.3 - Elemento genérico do pilar A

Considerando-se positivos os sentidos adotados na figura 3.3, não considerando o peso próprio, o equilíbrio do elemento genérico do pilar A fornece:

$$\frac{dN_A}{dz} = -q \quad (3.13)$$

Sabe-se que a força normal do pilar A é dada por:

$$N_A = ES_p v'_A \quad (3.14)$$

onde  $S_p$  é a área do pilar.

Derivando-se a equação (3.14) e substituindo-se na equação (3.13), resulta:

$$ES_p v''_A = -q \quad (3.15)$$

De maneira análoga, o equilíbrio do elemento genérico do pilar B fornece:

$$ES_p v''_B = q \quad (3.16)$$

Compõe-se, assim, o seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_f = s_1 u' - r_1 (v_A - v_B) \quad (3.8) \\ q = c_1 u' - d_1 (v_A - v_B) \quad (3.11) \\ ES_p v''_A = -q \quad (3.15) \\ ES_p v''_B = q \quad (3.16) \end{array} \right.$$

- Solução do sistema de equações

Isolando-se a incógnita  $u'$  da equação (3.8) e substituindo-se o valor de  $q$  (equação (3.11)) nas equações (3.15) e (3.16), obtêm-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = \frac{V_f}{s_1} + \frac{(v_A - v_B)}{\ell_v} \quad (3.17) \\ -ES_p v_A'' = c_1 u' - d_1 (v_A - v_B) \quad (3.18) \\ ES_p v_B'' = c_1 u' - d_1 (v_A - v_B) \quad (3.19) \end{array} \right.$$

Levando-se a incógnita  $u'$  (equação (3.17)) nas equações (3.18) e (3.19), resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} -ES_p v_A'' = \frac{V_f}{\ell_v} \quad (3.20) \\ ES_p v_B'' = \frac{V_f}{\ell_v} \quad (3.21) \end{array} \right.$$

uma vez que:

$$\frac{c_1}{s_1} = \frac{1}{\ell_v}, \quad \frac{d_1}{r_1} = \frac{1}{\ell_v} \quad (3.22)$$

- Condições de contorno

Utilizam-se, para a solução do sistema de equações, as seguintes condições de contorno:

- na base - ( $z = 0$ )

$$u(0) = 0 \quad (3.23)$$

$$v_A(0) = 0 \quad \text{e} \quad v_B(0) = 0 \quad (3.24)$$



- no topo - ( $z=H$ )

$$N_A(H)=0 \ ; \ \text{como } N_A=ES_p v'_A, \ \text{tem-se } v'_A(H)=0 \quad (3.25)$$

$$N_B(H)=0 \ ; \ \text{como } N_B=ES_p v'_B, \ \text{tem-se } v'_B(H)=0 \quad (3.26)$$

O carregamento externo é constituído de uma carga  $p$  distribuída ao longo da altura do pórtico e de uma força  $F$  concentrada no topo. A força cortante em uma seção distante  $z$  da base do pórtico, é dada por:

$$V_f = p(H-z) + F \quad (3.27)$$

Substituindo-se a equação (3.27) nas equações (3.20) e (3.21), integrando-as e utilizando-se as condições de contorno, obtêm-se:

$$v_A = - \left[ \frac{pz}{6ES_p \ell_v} (-z^2+3Hz-3H^2) + \frac{F}{2ES_p \ell_v} (z^2-2Hz) \right] \quad (3.28)$$

$$v_B = \left[ \frac{pz}{6ES_p \ell_v} (-z^2+3Hz-3H^2) + \frac{F}{2ES_p \ell_v} (z^2-2Hz) \right] \quad (3.29)$$

Observa-se que:

$$v_A = - v_B \quad (3.30)$$

- Determinação da equação diferencial do pórtico -  $u_f$

Substituindo-se as expressões de  $v_A$  e  $v_B$  (equações (3.28) e (3.29)) e a equação (3.27) na equação (3.17), tem-se:

$$u' = \frac{1}{s_1} \left[ p(H-z)+F \right] + \left[ \frac{p}{3ES_p \ell_v^2} (z^3-3Hz^2+3H^2z) - \frac{F}{ES_p \ell_v^2} (z^2-2Hz) \right] \quad (3.31)$$

Integrando-se a equação (3.31) e utilizando-se a correspondente condição de contorno (equação (3.23)), obtem-se finalmente os deslocamentos horizontais do pórtico ( $u_f$ ), expressos pela equação:

$$u_f = pz \left[ \frac{1}{2s_1} (2H-z) + \frac{z}{12ES_p \ell^2 v} (z^2 - 4Hz + 6H^2) \right] + F \left[ \frac{z}{s_1} - \frac{z^2}{3ES_p \ell^2 v} (z-3H) \right] \quad (3.32)$$

- Análise da equação (3.32)

Com a finalidade de estudar a equação (3.32) que rege o comportamento dos deslocamentos horizontais do pórtico, divide-se esta em dois termos:

$$\text{- 1º termo - } u_{f_1} = pz \left[ \frac{1}{2s_1} (2H-z) \right] + \frac{F}{s_1} z \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \text{- 2º termo - } u_{f_2} &= pz \left[ \frac{z}{12ES_p \ell^2 v} (z^2 - 4Hz + 6H^2) \right] \\ &+ F \left[ \frac{z^2}{3ES_p \ell^2 v} (3H-z) \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Derivando-se uma vez a equação (3.33) e duas vezes a equação (3.34), acham-se:

$$u'_{f_1} = \frac{1}{s_1} \left[ p(H-z) + F \right] \quad (3.35)$$

$$u''_{f_2} = \frac{p}{ES_p \ell^2 v} (H-z)^2 + \frac{2F}{ES_p \ell^2 v} (H-z) \quad (3.36)$$

Os esforços  $V_f$  e  $M_f$  do pórtico, em uma cota distante  $z$  da base, devido ao carregamento externo, são dados por:

$$V_f = p(H-z) + F \quad (3.27)$$

$$M_f = \frac{p}{2}(H-z)^2 + F(H-z) \quad (3.37)$$

Conforme a equação (2.10), o deslocamento do pórtico pela deformabilidade à força cortante, é expresso por:

$$u'_{f_v} = \frac{V_f}{s_f} \quad (3.38)$$

Levando-se a expressão de  $V_f$  (equação (3.27)) na equação (3.38), tem-se:

$$u'_{f_v} = \frac{1}{s_f} [p(H-z) + F] \quad (3.39)$$

A equação da elástica devido à ação do momento fletor, é dada por:

$$u''_{f_m} = \frac{M_f}{j_f} \quad (3.40)$$

onde

$j_f$  é o produto da rigidez à flexão  $EI_f$ .

Para o cálculo de  $I_f$  utiliza-se a figura 3.4, sendo  $e_1$  e  $e_2$  as distâncias dos centros de gravidade das seções transversais dos pilares A e B ao centro de gravidade do conjunto das seções transversais dos dois pilares.

Como o momento estático de uma figura em relação ao centro de gravidade é nulo, escreve-se:

$$S_A e_1 = S_B e_2 \quad (3.41)$$

$$e_1 + e_2 = x_v \quad (3.42)$$

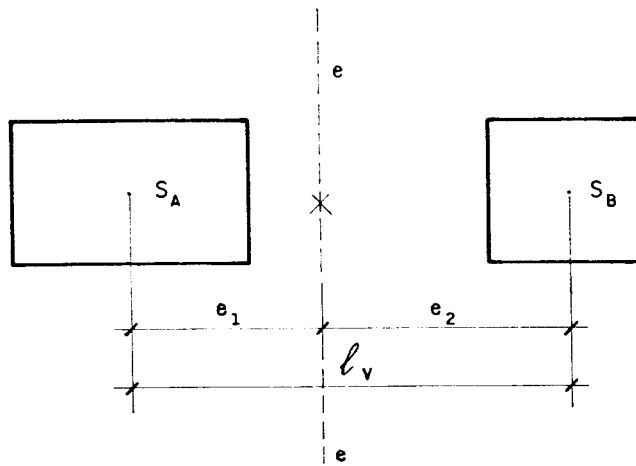


Fig. 3.4 - Seção horizontal do pórtico

Combinando-se as equações (3.41) e (3.42), obtém-se as distâncias  $e_1$  e  $e_2$  em função das áreas dos pilares, isto é:

$$e_1 = \frac{S_B}{S_A + S_B} l_v \quad (3.43)$$

e

$$e_2 = \frac{S_A}{S_A + S_B} l_v \quad (3.44)$$

Da teoria clássica da Resistência dos Materiais (SCHIEL [11]), define-se o momento de inércia de uma seção como:

$$I = \int_S x^2 dS \quad (3.45)$$

Baseando-se na equação (3.45) pode-se escrever o momento de inércia das seções transversais dos pilares A e B do pórtico em relação ao eixo e-e (figura 3.4) que passa pelo centro de gravidade do conjunto, como:

$$I_f = S_A e_1^2 + S_B e_2^2 \quad (3.46)$$

uma vez que não se considera o momento de inércia próprio de cada seção transversal em relação ao seu centro de gravidade.

Levando-se os valores de  $e_1$  e  $e_2$  (equações (3.43) e (3.44)) na equação (3.46) e reorganizando-a, encontra-se:

$$I_f = \frac{\ell_v^2}{\left(\frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B}\right)} \quad (3.47)$$

Substituindo-se as equações (3.37) e (3.47) na equação (3.40) e fazendo-se  $S_A = S_B = S_p$ , acha-se:

$$u_{f_m}'' = \frac{p}{ES_p \ell_v^2} (H-z)^2 + \frac{2F}{ES_p \ell_v^2} (H-z) \quad (3.48)$$

Comparando-se a equação (3.35) com a equação (3.39), e a equação (3.36) com a equação (3.48) têm-se:

$$u'_{f_1} = u'_{f_v} \quad (3.49)$$

e

$$u''_{f_2} = u''_{f_m}$$

uma vez que  $s_1 = s_f$

Conclui-se que a deformação total do pórtico, considerando-se a influência dos deslocamentos axiais dos pilares, é causada pelo esforço cortante (1º termo) e pela ação do momento fletor (2º termo), podendo-se finalmente escrever:

$$u_f = u_{f_v} + u_{f_m} \quad (3.50)$$

### 3.1.2 - Desigualdade de rigidez entre os pilares do pórtico

Com a finalidade de demonstrar a validade das equações (3.38), (3.40) e (3.50) para painéis pórtico formados com pilares de seções transversais diferentes, desenvolvem-se novamente as equações, incluindo-se na figura 3.1 uma rotação  $b$  no pilar B.

Utiliza-se a mesma notação apresentada para painéis pórtico com igualdade de rigidez entre os pilares.

Os momentos aplicados pelas barras aos nós A e B são:

NÓ A

$$M_{AC} = 6Ek_A (u' - a) \quad (3.51)$$

$$M_{AE} = 6Ek_A (u' - a) \quad (3.52)$$

$$M_{AB} = -Ek_V \left[ 4a + 2b - \frac{6(v_A - v_B)}{\ell_V} \right] \quad (3.53)$$

NÓ B

$$M_{BD} = 6Ek_B (u' - b) \quad (3.54)$$

$$M_{BF} = 6Ek_B (u' - b) \quad (3.55)$$

$$M_{BA} = -Ek_V \left[ 4b + 2a - \frac{6(v_A - v_B)}{\ell_V} \right] \quad (3.56)$$

Nas expressões acima, os termos  $k_i$  representam as rigidez  $I_i/\ell_i$  dos pilares e da viga.

Fazendo-se o equilíbrio dos nós A e B, têm-se:

$$12Ek_A (u' - a) - Ek_V \left[ 4a + 2b - \frac{6(v_A - v_B)}{\ell_V} \right] \quad (3.57)$$

$$12Ek_B (u' - b) - Ek_V \left[ 4b + 2a - \frac{6(v_A - v_B)}{\ell_V} \right] \quad (3.58)$$

- Rotação dos nós dos pilares A e B -

Rearranjando-se a equação (3.57) obtém-se a incôgnita a (rotação do nó do pilar A) em função de b (rotação do nó do pilar B) expressa por:

$$a = \frac{6k_A u' - k_V b + \frac{3k_V (v_A - v_B)}{\ell_V}}{(6k_A + 2k_V)} \quad (3.59)$$

Substituindo-se a equação (3.59) na equação (3.58) e isolando-se a incôgnita b obtém-se:

$$b = \left[ \frac{(12k_A k_B - 2k_A k_V + 4k_B k_V)}{(12k_A k_B + 4k_A k_V + 4k_B k_V + k_V^2)} \right] u' + \frac{(6k_A k_V + k_V^2)}{(12k_A k_V + 4k_A k_V + 4k_B k_V + k_V^2)} \cdot \frac{(v_A - v_B)}{\ell_V} \quad (3.60)$$

- Força cortante -  $V_f$

Substituindo-se na equação (3.6) as expressões de  $M_{AC}$  (equação (3.51)) e  $M_{BD}$  (equação (3.54)) encontra-se:

$$V_f = \frac{12E}{h} \left[ (k_A + k_B) u' - k_A a - k_B b \right] \quad (3.61)$$

Levando-se as equações (3.59) e (3.60) na equação (3.61) acha-se a força cortante ao nível dos andares, expressa por:

$$V_f = \frac{12E(72k_A^2 k_B k_V + 30k_A k_B k_V^2 + 6k_A^2 k_V^2 + 2k_A k_V^3 + 2k_B k_V^3)}{h(6k_A + 2k_V)(12k_A k_B + 4k_A k_V + 4k_B k_V + k_V^2)} \left[ u' - \frac{(v_A - v_B)}{\ell_V} \right] \quad (3.62)$$

definindo

$$s_1 = \frac{12E(72k_A^2 k_B k_V + 30k_A k_B k_V^2 + 6k_A^2 k_V^2 + 2k_A k_V^3 + 2k_B k_V^3)}{h(6k_A + 2k_V)(12k_A k_B + 4k_A k_V + 4k_B k_V + k_V^2)} \quad (3.63)$$

$$r_1 = \frac{s_1}{\ell_v} \quad (3.64)$$

obtem-se:

$$V_f = s_1 u' - r_1 (v_A - v_B) \quad (3.65)$$

- Força cortante, das vigas, distribuída ao longo da altura do pórtico - q

Substituindo-se na equação (3.10) as equações (3.53) e (3.56) resulta:

$$q = \frac{6Ek_v}{h\ell_v} \left[ a + b - \frac{2(v_A - v_B)}{\ell_v} \right] \quad (3.66)$$

Levando-se as expressões de a e b (equações (3.59) e (3.60)) na equação (3.66), acha-se:

$$q = \frac{12E(72k_A^2 k_B k_v + 30k_A k_B k_v^2 + 6k_A^2 k_v^2 + 2k_A k_v^3 + 2k_B k_v^3)}{h\ell_v(6k_A + 2k_v)(12k_A k_B + 4k_A k_v + 4k_B k_v + k_v^2)} \left[ u' - \frac{(v_A - v_B)}{\ell_v} \right] \quad (3.67)$$

chamando

$$c_1 = \frac{12E(72k_A^2 k_B k_v + 30k_A k_B k_v^2 + 6k_A^2 k_v^2 + 2k_A k_v^3 + 2k_B k_v^3)}{h\ell_v(6k_A + 2k_v)(12k_A k_B + 4k_A k_v + 4k_B k_v + k_v^2)} \quad (3.68)$$

e

$$d_1 = \frac{c_1}{\ell_v} \quad (3.69)$$

tem-se:

$$q = c_1 u' - d_1 (v_A - v_B) \quad (3.70)$$

Obtem-se um sistema de equações, similar ao apresentado anteriormente, formado pelas equações (3.65), (3.70),



(3.15) e (3.16). A solução deste sistema fornece os deslocamentos  $v_A$  e  $v_B$  demonstrados nas equações (3.28) e (3.29), lembrando-se que as seções dos pilares são consideradas diferentes.

- Determinação e análise da equação diferencial do pórtico -  $u_f$

Levando-se as equações (3.28) e (3.29), juntamente com a equação (3.27) na equação (3.17), acha-se:

$$u' = \frac{1}{s_1} \left[ p(H-z) + F \right] + \frac{1}{\ell_v^2} \left( \frac{1}{s_A} + \frac{1}{s_B} \right) \left[ \frac{p}{6E} (z^3 - 3Hz^2 + 3H^2z) - \frac{F}{2E} (z^2 - 2Hz) \right] \quad (3.71)$$

Integrando-se a equação (3.71), e considerando a condição de contorno (3.23), encontra-se a equação dos deslocamentos horizontais do pórtico considerando a desigualdade de rigidez entre os pilares, expressa por:

$$u_f = pz \left\{ \frac{1}{2s_1} (2H-z) + \frac{1}{\ell_v^2} \left( \frac{1}{s_A} + \frac{1}{s_B} \right) \left[ \frac{z}{24E} (z^2 - 4Hz + 6H^2) \right] \right\} + F \left[ \frac{z}{s_1} - \frac{1}{6E\ell_v^2} \left( \frac{1}{s_A} + \frac{1}{s_B} \right) (z^3 - 3Hz^2) \right] \quad (3.72)$$

Dividindo-se a equação (3.72) em dois termos, tem-se:

$$1^\circ \text{ termo: } u_{f_1} = pz \left[ \frac{1}{2s_1} (2H-z) \right] + \frac{F}{s_1} z \quad (3.73)$$

$$2^\circ \text{ termo: } u_{f_2} = \frac{1}{\ell_v^2} \left( \frac{1}{s_A} + \frac{1}{s_B} \right) \left[ \frac{pz^2}{24E} (z^2 - 4Hz + 6H^2) + \frac{Fz^2}{6E} (3H-z) \right] \quad (3.74)$$

onde o 1º termo (equação (3.73)) é análogo ao 1º termo (equação (3.33)) apresentado anteriormente, cuja análise demonstra a participação do esforço cortante na equação dos deslocamentos horizontais.

Derivando-se duas vezes a equação (3.74), encontra-se:

$$u_{f_2}'' = \frac{1}{El_v} \left( \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) \left[ \frac{p}{2} (H-z)^2 + F(H-z) \right] \quad (3.75)$$

Sabe-se que:

$$u_{f_m}'' = \frac{M_f}{J_f} \quad (3.40)$$

Substituindo-se as equações (3.37) e (3.47) na equação (3.40), obtém-se:

$$u_{f_m}'' = \frac{1}{El_v} \left( \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) \left[ \frac{p}{2} (H-z)^2 + F(H-z) \right] \quad (3.76)$$

Comparando-se a equação (3.76) com a equação (3.75) nota-se uma igualdade, portanto, observa-se a participação do momento fletor (2º termo) na deformação total do pórtico.

Desta forma, comprova-se a validade das equações (3.38), (3.40) e (3.50) considerando a desigualdade de rigidez entre os pilares do pórtico.

### 3.1.3 - Exemplo numérico 1

O painel pórtico apresentado na figura 3.5 é constituído de 15 andares com pé direito de 3,0m. Os pilares e as vigas possuem seção transversal constante ao longo da altura, medindo 0,3 x 0,8m e 0,3 x 0,7m respectivamente. O comprimento das vigas do pórtico é 7,10m.

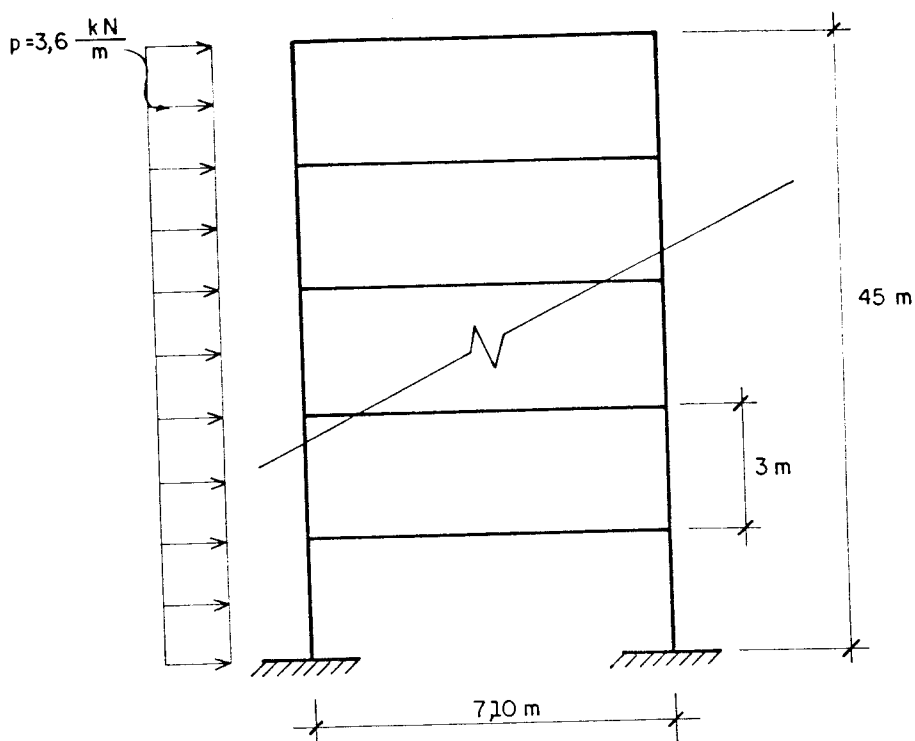


Fig. 3.5 - Exemplo de painel p3rtico

O carregamento externo atuante na estrutura consiste de uma carga lateral uniformemente distribu3da de valor  $p = 3,6 \text{ kN/m}$ .

Adota-se para o m3dulo de elasticidade transversal de todas as pe3as o valor  $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ .

Os resultados fornecidos pelas equa33es s3o mostrados na listagem de computador e representados na Fig. 3.6 onde:

Caso (1) - Deslocamentos horizontais do painel p3rtico, sem considerar a influ3ncia dos deslocamentos axiais dos pilares.

Caso (2) - Deslocamentos horizontais do painel p3rtico, considerando-se a influ3ncia dos deslocamentos axiais dos pilares.

Analisando-se os deslocamentos horizontais apresentados na figura 3.6, percebe-se um acréscimo de 35% no topo do painel quando se considera a influ3ncia dos deslocamentos axiais dos pilares.

```
*****
*
* PORTICO PLANO - 2 PILARES *
*
*****
```

```
*****
*
* DADOS DA ESTRUTURA *
*
*****
```

```
CARGA LATERAL          3.600
MOD. ELASTIC. 20000000.00
N= DE ANDARES          15
```

```
* VIGA *                * PILARES *

AREA          .2100      AREA          .2400
COMP.         7.1000     PE-DIREITO    3.0000
```

```
*****
*
* DESLOC. HORIZONTAL *
*
*****
```

Z (M)	CASO1	CASO2
.00	.0000	.0000
3.00	.0055	.0057
6.00	.0107	.0112
9.00	.0155	.0166
12.00	.0199	.0217
15.00	.0239	.0266
18.00	.0275	.0313
21.00	.0308	.0356
24.00	.0337	.0397
27.00	.0362	.0434
30.00	.0383	.0468
33.00	.0400	.0498
36.00	.0413	.0525
39.00	.0423	.0548
42.00	.0429	.0567
45.00	.0430	.0583

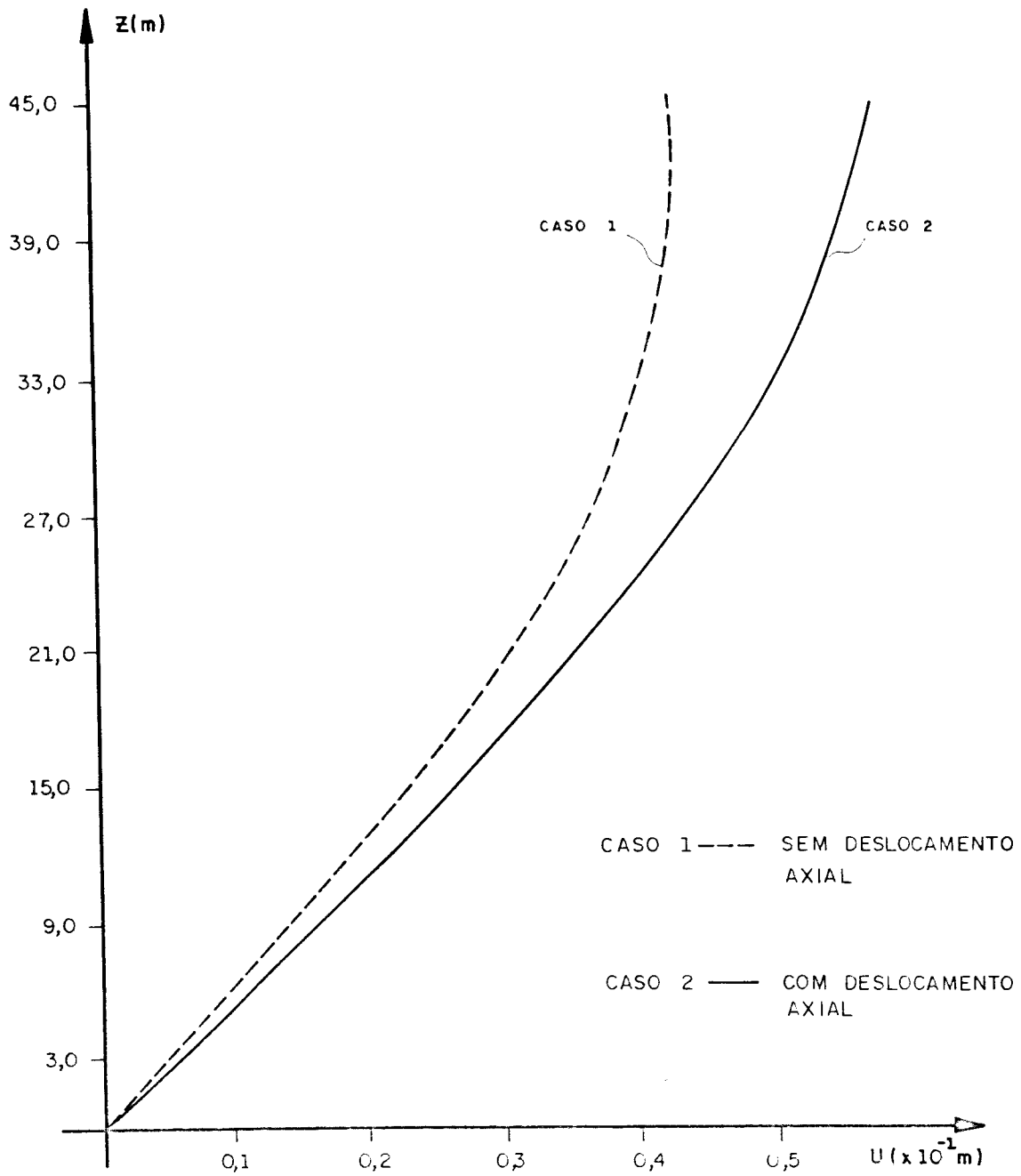


Fig. 3.6 - Deslocamentos horizontais - Exemplo 1

### 3.1.4 - Programa I

Baseado na equação da linha elástica (equação (3.32)) e na equação demonstrada em STAMATO [13] para pórticos não considerando a influência dos deslocamentos axiais dos pilares, elaborou-se um programa elementar em linguagem FORTRAN para microcomputador, cujos resultados serão comparados com programas posteriores a serem apresentados.

Os dados de entrada e saída para o programa de cálculo deste modelo estrutural estão descritos na tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Identificação das variáveis utilizadas no PROGRAMA I.

VARIÁVEIS	IDENTIFICAÇÃO	FORMATO
IM	Impressão dos resultados na tela ou na impressora	I2
P	Carga lateral uniformemente distribuída	F10.0
F	Força concentrada no topo	F10.0
SV	Área da viga	F10.0
LV	Comprimento da viga	F10.0
JV	Momento de inércia da viga	F10.0
SP	Área do pilar	F10.0
LP	Comprimento do pilar (pé-direito)	F10.0
JP	Momento de inércia do pilar	F10.0
E	Módulo de elasticidade longitudinal da estrutura	F10.0
NA	Número de andares do painel	I2
NO	Número de nós do andar considerado	I2
US(I)	Deslocamentos horizontais do painel sem considerar a influência dos deslocamentos axiais dos pilares	F8.4
UC(I)	Deslocamentos horizontais do painel considerando a influência dos deslocamentos axiais dos pilares	F8.4

Apresenta-se, a seguir, uma listagem do PROGRAMA I.

```
C *****
C *
C *          P R O G R A M A - I          *
C *          =====                    *
C *
C * P O R T I C O P L A N O - DESLOCAMENTOS AXIAIS *
C *          - 2 PILARES -SECOES CONSTANTES *
C *
C *****
C   DIMENSION Z(31),U1(31),U2(31),U3(31),U4(31),U5(31),U6(31),
C   *UC(31),US(31)
C   REAL LV,JV,LP,JP,KV,KP
C   OPEN(2,FILE='PRN')
C   WRITE(*,4)
C   4  FORMAT(10X,'IM=\,/')
C     READ(*,5)IM
C   5  FORMAT(15)
C
C =====
C
C ENTRADA DE DADOS
C
C =====
C
C   WRITE(IM,10)
C   10 FORMAT(///,10X,29('*'),/,10X,'*',27X,'*',/,10X,'* PORTICO PLANO -
C   *2 PILARES *',/,10X,'*',27X,'*',/,10X,29('*'),//)
C   WRITE(IM,15)
C   15 FORMAT(10X,22('*'),/,10X,'*',20X,'*',/,10X,'* DADOS DA ESTRUTURA *
C   *',/,10X,'*',20X,'*',/,10X,22('*'),///)
C   WRITE(*,16)
C   16 FORMAT(10X,'P=\,/')
C     READ(*,17)P
C   17 FORMAT(F10.0)
C     WRITE(*,18)
C   18 FORMAT(10X,'F=\,/')
C     READ(*,17)F
C     WRITE(*,22)
C   22 FORMAT(10X,'SV=\,/')
C     READ(*,17)SV
C     WRITE(*,23)
C   23 FORMAT(10X,'LV=\,/')
C     READ(*,17)LV
C     WRITE(*,24)
C   24 FORMAT(10X,'JV=\,/')
C     READ(*,17)JV
C     WRITE(*,25)
C   25 FORMAT(10X,'SP=\,/')
C     READ(*,17)SP
C     WRITE(*,26)
C   26 FORMAT(10X,'LP=\,/')
C     READ(*,17)LP
C     WRITE(*,27)
C   27 FORMAT(10X,'JP=\,/')

```

```
      READ(*,17)JP
      WRITE(*,19)
19  FORMAT(10X,'E= \,/')
      READ(*,17)E
      WRITE(*,28)
28  FORMAT(10X,'NA= \,/')
      READ(*,20)NA
20  FORMAT(12)
      WRITE(*,30)
30  FORMAT(10X,'NO= \,/')
      READ(*,20)NO
      WRITE(1M,40)P,E,NA
40  FORMAT(10X,'CARGA LATERAL',4X,F8.3,/,10X,'MOD. ELASTIC.',1X,F11.2,
      */,10X,'N= DE ANDARES',9X,13,/)
      WRITE(1M,50)
50  FORMAT(10X,'* VIGA *',15X,'* PILARES *',/)
      WRITE(1M,60)SV,SP,LV,LP
60  FORMAT(10X,'AREA',4X,F10.4,5X,'AREA',7X,F10.4,/,10X,'COMP.',3X,
      *F10.4,5X,'PE-DIREITO',1X,F10.4,/)
C =====
C
C INICIO DO CALCULO DO DESLOCAMENTO
C
C =====
      H=NA*LP
      KP=JP/LP
      KV=JV/LV
      RO=(KP*(KV/(2*KP+KV)))*NO
      SF=(12*E/LP)*RO
      WRITE(1M,70)
70  FORMAT(////,10X,22('*'),/,10X,'*',20X,'*',/,10X,'* DESLOC. HORIZON
      *TAL *',/,10X,'*',20X,'*',/,10X,22('*'),/)
      WRITE(1M,80)
80  FORMAT(11X,'Z(M)',8X,'CASO1',8X,'CASO2',/)
      DO 100 J=0,NA
      Z(K)=J*LP
      U1(K)=Z(K)/(12*E*SP*LV**2)
      U2(K)=U1(K)*(Z(K)**2-4*H*Z(K)+6*H**2)
      U3(K)=(1/(2*SF))*(2*H-Z(K))
      U4(K)=(Z(K)**2)/(3*E*SP*LV**2)
      U5(K)=U4(K)*(Z(K)-3*H)
      U6(K)=(Z(K)/SF)-U5(K)
      UC(K)=P*Z(K)*(U3(K)+U2(K))+F*U6(K)
      US(K)=(Z(K)/SF)*(P*(H-(Z(K)/2))+F)
C =====
C
C IMPRESSAO DOS DESLOC. HORIZONTAIS
C
C =====
      WRITE(1M,90)Z(K),US(K),UC(K)
90  FORMAT(10X,F5.2,5X,F8.4,5X,F8.4)
100 CONTINUE
      STOP
      END
```

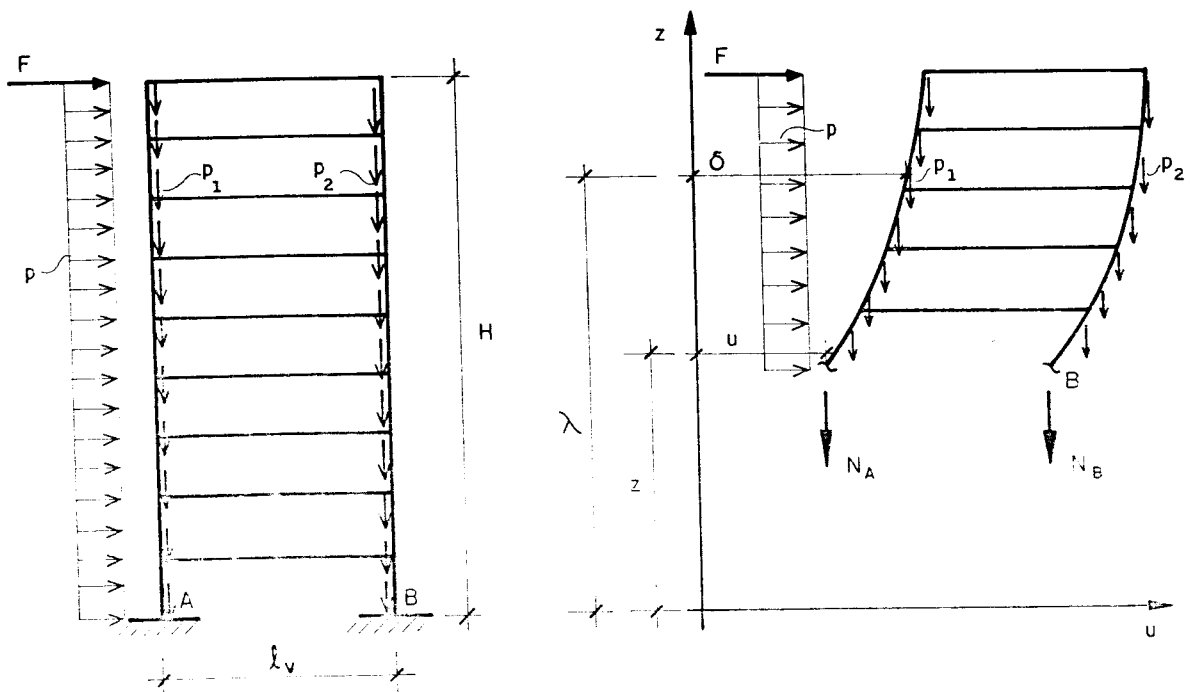


### 3.2 - Análise do painel pórtico considerando a influência dos deslocamentos axiais dos pilares e o efeito de 2ª ordem das cargas verticais

Para a obtenção do conjunto de equações que demonstram o comportamento do painel pórtico considerando o efeito de 2ª ordem, segue-se o mesmo raciocínio apresentado no item 3.1, analisando-se, agora, a estrutura na sua posição deformada.

Considera-se um carregamento externo constituído de uma carga horizontal  $p$ , uniformemente distribuída ao longo da altura  $H$  do painel, de cargas verticais  $p_i$  uniformemente distribuídas ao longo da altura  $z$  dos pilares do pórtico e de uma força lateral  $F$  concentrada no topo, representadas na figura 3.7-a.

A convenção adotada e os sentidos positivos para os deslocamentos são os mesmos definidos anteriormente.



(a) - Estrutura

(b) - Estrutura na posição de deformada

Fig. 3.7 - Painel pórtico

- Força cortante ao nível do andar

Demonstra-se na figura 3.7-b o pórtico na sua posição deformada. O momento fletor do carregamento externo à uma cota  $z$  da base do pórtico, em relação ao ponto B (na posição deformada da estrutura) igualado ao momento fletor das forças internas, fornece:

$$M_{\ell_f} - \int_z^H p_1 [\ell_v - (\delta - u)] d\lambda + \int_z^H p_2 (\delta - u) d\lambda = N_A \ell_v \quad (3.77)$$

onde  $M_{\ell_f}$  é o momento produzido pelas cargas laterais em relação ao ponto B.

Desenvolvendo-se a equação (3.77), encontra-se:

$$M_{\ell_f} = N_A \ell_v + p_1 (\ell_v + u) (H - z) - p_1 \int_z^H \delta d\lambda - p_2 \int_z^H \delta d\lambda + p_2 (H - z) u \quad (3.78)$$

Derivando-se uma vez a equação (3.78), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{dM_{\ell_f}}{dz} &= N'_A \ell_v - p_1 (\ell_v + u) + p_1 (H - z) u' + p_1 \delta(z) + p_2 \delta(z) \\ &- p_2 u + p_2 (H - z) u' \end{aligned} \quad (3.79)$$

Sabe-se que:

$$\frac{dM_{\lambda_f}}{dz} = -V_{\ell_f} \quad (2.7)$$

e que a uma cota  $z$  da base o deslocamento  $u = \delta(z)$ .

Desta forma, a equação (3.79) fica escrita:

$$V_{\lambda_f} = -N'_A \ell_v + p_1 \ell_v - (p_1 + p_2) (H - z) u' \quad (3.80)$$

- Força cortante nas vigas -  $q_v$

Utiliza-se a mesma dedução para a força cortante  $q$  nas vigas, distribuída ao longo da altura do pórtico, demonstrada anteriormente no item 3.1.1, ou seja:

$$q = c_1 u' - d_1 (v_A - v_B) \quad (3.11)$$

onde  $c_1$  e  $d_1$  são definidos nas equações (3.12).

- Deslocamentos axiais dos pilares

Considera-se na figura 3.8 um elemento genérico do pilar A com seu respectivo carregamento  $q$ ,  $p_1$  e esforços normais.

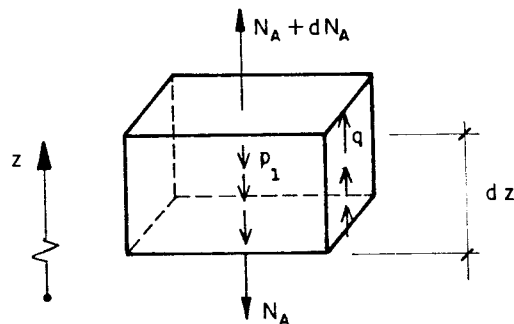


Fig. 3.8 - Elemento genérico do pilar A

Pelo equilíbrio do elemento tem-se:

$$\frac{dN_A}{dz} = p_1 - q \quad (3.81)$$

Combinando-se a equação (3.81) com a primeira derivada da equação (3.14) resulta:

$$ES_A v_A'' = p_1 - q \quad (3.82)$$

Analogamente para o pilar B, acha-se:

$$ES_B v_B'' = p_2 + q \quad (3.83)$$

Substituindo-se na equação (3.80) a equação (3.81) encontra-se:

$$V_{\ell_f} = q \ell_v - (p_1 + p_2) (H-z) u' \quad (3.84)$$

Completa-se, assim, o sistema de equações formado pelas seguintes expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} q = c_1 u' - d_1 (v_A - v_B) \quad (3.11) \\ ES_A v_A'' = p_1 - q \quad (3.82) \\ ES_B v_B'' = p_2 + q \quad (3.83) \\ V_{\ell_f} = q \ell_v - (p_1 + p_2) (H-z) u' \quad (3.84) \end{array} \right.$$

- Solução do sistema de equações

Subtraindo-se as equações (3.82) e (3.83), obtêm-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} q = c_1 u' - d_1 (v_A - v_B) \quad (3.11) \\ V_{\ell_f} = q \ell_v - (p_1 + p_2) (H-z) u' \quad (3.84) \\ v_A'' - v_B'' = \left( \frac{p_1}{ES_A} - \frac{p_2}{ES_B} \right) - q \left( \frac{1}{ES_A} + \frac{1}{ES_B} \right) \quad (3.85) \end{array} \right.$$

Explicitando-se o valor de q da equação (3.84) e substituindo-se nas equações (3.11) e (3.85), têm-se:

$$V_{\ell_f} = c_1 \ell_v u' - d_1 \ell_v (v_A - v_B) - (p_1 + p_2) (H-z) u' \quad (3.86)$$

$$v_A'' - v_B'' = \left( \frac{P_1}{ES_A} - \frac{P_2}{ES_B} \right) - \frac{1}{\ell_v} \left( \frac{1}{ES_A} + \frac{1}{ES_B} \right) \left[ v_{\ell_f} + (p_1 + p_2) (H-z) u' \right] \quad (3.87)$$

Substituindo-se a equação (3.87) na segunda derivada da equação (3.86), encontra-se:

$$v_{\ell_f}'' = \left[ c_1 \ell_v - (p_1 + p_2) (H-z) \right] u'''' + 2(p_1 + p_2) u''' - d_1 \ell_v \left\{ \left( \frac{P_1}{ES_A} - \frac{P_2}{ES_B} \right) - \frac{1}{\ell_v} \left( \frac{1}{ES_A} + \frac{1}{ES_B} \right) \left[ v_{\ell_f} + (p_1 + p_2) (H-z) u' \right] \right\} \quad (3.88)$$

Levando-se a equação (3.27), que expressa a força cortante do carregamento lateral e suas derivadas na equação (3.88), acha-se:

$$\left[ c_1 \ell_v - p_k (H-z) \right] u'''' + 2p_k u''' - d_1 \ell_v \left\{ \left( \frac{P_1}{ES_A} - \frac{P_2}{ES_B} \right) - \frac{1}{\ell_v} \left( \frac{1}{ES_A} + \frac{1}{ES_B} \right) \left[ p(H-z) + F + p_k (H-z) u' \right] \right\} = 0 \quad (3.89)$$

$$\text{onde} \quad p_k = p_1 + p_2 \quad (3.90)$$

Rearranjando-se a equação (3.89), escreve-se:

$$\left[ C_k - \frac{1}{2} (H-z) \right] u'''' + u''' + C_2 (H-z) u' = C_3 (H-z) + C_4 \quad (3.91)$$

onde:

$$C_k = \frac{c_1 \ell_v}{2p_k} \quad (3.92)$$

$$C_2 = \frac{d_1}{2E} \left( \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) \quad (3.93)$$

$$C_3 = \frac{-d_1 p}{2E p_k} \left( \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) \quad (3.94)$$

$$C_4 = \frac{-d_1}{2Ep_k} \left( \frac{F-p_1 \ell_v}{S_A} + \frac{F+p_2 \ell_v}{S_B} \right) \quad (3.95)$$

Define-se  $\eta$  como um parâmetro adimensional, dado por:

$$\eta = \frac{z}{H} \quad (3.96)$$

onde  $\eta$  expressa a ordenada de qualquer ponto da altura  $H$  do painel.

Desta forma, pode-se escrever a equação (3.91) como:

$$\left[ D_k - \frac{1}{2} (1-\eta) \right] u'''' + u'' + D_2 (1-\eta) u' = D_3 (1-\eta) + D_4 \quad (3.97)$$

onde:

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{C_k}{H} \\ D_2 &= C_2 H^2 \\ D_3 &= C_3 H^3 \\ D_4 &= C_4 H^2 \end{aligned} \quad (3.98)$$

e

$$u = u(\eta) \quad (3.99)$$

lembrando-se que:

$$\frac{d^i u(z)}{dz^i} = \frac{1}{H^i} \frac{d^i u(\eta)}{d\eta^i} \quad (3.100)$$

- Resolução da equação diferencial

Para a solução da equação diferencial (3.97) utiliza-se o Método das Diferenças Finitas, cujos operadores foram deduzidos no apêndice B.1.

A figura 3.9 apresenta uma rede de pontos, espaçada igualmente de  $h$  e numerados de 1 a  $n$ ; sendo  $n-3$  pontos pertencentes à estrutura e três pontos fictícios. Utiliza-se a denominação de "pontos fictícios", pois estes, apesar de serem necessários quando se aplicam os operadores nos pontos 3 e  $n-1$ , não pertencem ao sistema físico (não existem deslocamentos  $u$ ).

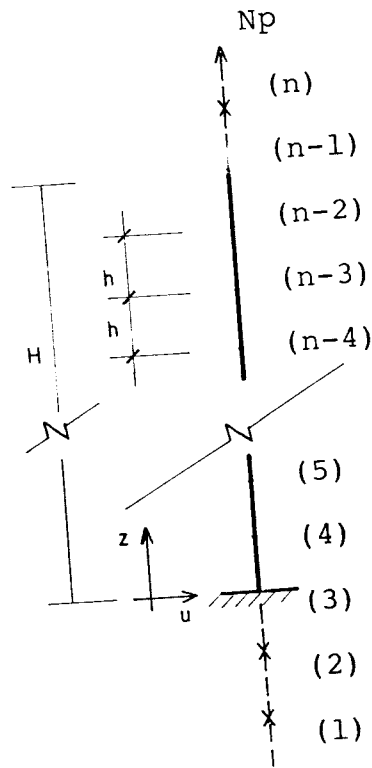


Fig. 3.9 - Rede de pontos

Para a montagem do sistema de equações que fornece os deslocamentos laterais do painel pórtico, substituiu-se primeiramente na equação (3.97) os operadores das diferenças finitas centrais (equações B.8) que envolvem dois pontos à direita e dois à esquerda do ponto de aplicação, obtendo-se assim:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ -\frac{1}{N_S} - 6 \left[ D_k - \frac{1}{2} (1-\eta_{(i)}) \right] + \frac{1}{N_S^2} D_2 (1-\eta_{(i)}) \right\} U(i-2) \\
 & + \left\{ \frac{16}{N_S} + 12 \left[ D_k - \frac{1}{2} (1-\eta_{(i)}) \right] - \frac{8}{N_S^2} D_2 (1-\eta_{(i)}) \right\} U(i-1) \\
 & - \frac{30}{N_S} U(i) + \left\{ \frac{16}{N_S} - 12 \left[ D_k - \frac{1}{2} (1-\eta_{(i)}) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{8}{N_S^2} D_2 (1-\eta_{(i)}) \right\} U(i+1) + \left\{ -\frac{1}{N_S} + 6 \left[ D_k - \frac{1}{2} (1-\eta_{(i)}) \right] \right. \\
 & \left. - \frac{1}{N_S^2} D_2 (1-\eta_{(i)}) \right\} U(i+2) = \frac{12}{N_S^3} \left[ D_3 (1-\eta_{(i)}) + D_4 \right] \quad (3.101)
 \end{aligned}$$

onde  $N_S$  é o número de subdivisões da malha, dado pela expressão:

$$N_S = \frac{1}{h(\eta)} \quad (3.102)$$

e  $h(\eta)$  é o espaçamento entre os pontos da malha em função de  $\eta$ .

No topo do edifício (ponto  $i = n-1$ ) observa-se a existência de apenas um ponto à direita, substituindo-se, portanto, na equação (3.97) os operadores das diferenças finitas assimétricas à direita (equações (B.9)) que envolvem três pontos à esquerda e um à direita de seu ponto de aplicação (i). Desta forma, obtêm-se a seguinte equação para o topo:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ -\frac{1}{N_S} + 6 \left[ D_k - \frac{1}{2} (1-\eta_{(n-1)}) \right] - \frac{1}{N_S^2} D_2 (1-\eta_{(n-1)}) \right\} U(n-4) \\
 & + \left\{ \frac{4}{N_S} - 36 \left[ D_k - \frac{1}{2} (1-\eta_{(n-1)}) \right] + \frac{6}{N_S^2} D_2 (1-\eta_{(n-1)}) \right\} U(n-3) \\
 & + \left\{ \frac{6}{N_S} + 72 \left[ D_k - \frac{1}{2} (1-\eta_{(n-1)}) \right] - \frac{18}{N_S^2} D_2 (1-\eta_{(n-1)}) \right\} U(n-2)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \frac{-20}{N_S} - 60 \left[ D_k - \frac{1}{2} (1 - \eta_{(n-1)}) \right] + \frac{10}{N_S} D_2 (1 - \eta_{(n-1)}) \right\} U(n-1) \\
 & + \left\{ \frac{11}{N_S} + 18 \left[ D_k - \frac{1}{2} (1 - \eta_{(n-1)}) \right] + \frac{3}{N_S} D_2 (1 - \eta_{(n-1)}) \right\} U(n) = \\
 & = \frac{12}{N_S} \left[ D_3 (1 - \eta_{(n-1)}) + D_4 \right] \quad (3.103)
 \end{aligned}$$

- Condições de contorno

Utilizam-se as seguintes condições de contorno para equação diferencial:

- na base ( $\eta=0$ )

$$u(0) = 0 \quad (3.23)$$

$$v_A(0) = v_B(0) = 0 \quad (3.24)$$

Tendo-se em vista as equações (3.86) e (B.8), escrevem-se as condições de contorno da base em diferenças finitas como:

$$U(3) = 0 \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned}
 & (c_{1v} \ell_v - p_k H) U(1) + (-8c_{1v} \ell_v + 8p_k H) U(2) + (8c_{1v} \ell_v - 8p_k H) U(4) \\
 & + (-c_{1v} \ell_v + p_k H) U(5) = \frac{12}{N_S} H(pH + F) \quad (3.105)
 \end{aligned}$$

- no topo ( $\eta=1$ )

$$v'_A(1) = 0 \quad \text{e} \quad v'_B(1) = 0 \quad (3.106)$$

Utilizando-se a primeira derivada da equação (3.86) e as expressões desenvolvidas para as diferenças finitas as simétricas à direita (equações (B.9)), escreve-se a terceira condição de contorno como:

$$\begin{aligned} & (-c_1 \ell_v - \frac{p_k^H}{N_S}) U(n-4) + (4c_1 \ell_v + 6 \frac{p_k^H}{N_S}) U(n-3) \\ & + (6c_1 \ell_v - 18 \frac{p_k^H}{N_S}) U(n-2) + (-20c_1 \ell_v + 10 \frac{p_k^H}{N_S}) U(n-1) \\ & + (11c_1 \ell_v + 3 \frac{p_k^H}{N_S}) U(n) = - \frac{12}{N_S^2} p_k^H \end{aligned} \quad (3.107)$$

Aplicando-se a equação (3.101) aos pontos 3,4 ... (n-2), juntamente com a equação (3.103) e as condições de contorno, forma-se um sistema de n equações a n incógnitas cuja solução fornece os deslocamentos horizontais do painel.

### 3.2.1 - Exemplo numérico 1

Para comprovar a teoria desenvolvida para pórticos planos (incluindo o efeito de 2ª ordem) e comparar os resultados àqueles obtidos no item 3.1.3, resolve-se o mesmo exemplo demonstrado na figura 3.5, acrescentando-se uma carga vertical uniformemente distribuída ao longo dos pilares A e B de valor  $p_1 = p_2 = 40 \text{ kN/m}$ .

Apresentam-se na tabela 3.2 e figura 3.10 os valores dos deslocamentos horizontais da estrutura, sendo:

- caso (1) - Painel pórtico sem considerar a influência dos deslocamentos axiais dos pilares e o efeito de 2ª ordem;
- caso (2) - Painel pórtico considerando-se a influência dos deslocamentos axiais dos pilares e sem considerar o efeito de 2ª ordem;
- caso (3) - Painel pórtico sem considerar a influência dos deslocamentos axiais dos pilares e considerando-se o efeito de 2ª ordem;

caso (4) - Painel pórtico considerando-se a influência dos deslocamentos axiais dos pilares e o efeito de 2ª ordem.

Na tabela 3.2, os deslocamentos horizontais do caso (1) foram obtidos com a introdução de uma carga vertical uniformemente distribuída ao longo dos pilares de valor aproximadamente zero (anulando o efeito de 2ª ordem) e uma área infinita para os pilares A e B (não considerando a influência dos deslocamentos axiais dos pilares). Para o caso (2) introduziu-se novamente o valor de  $p_1 = p_2 \cong 0$  e mantiveram-se as áreas reais dos pilares. Observa-se, desta forma, uma igualdade dos deslocamentos dos casos (1) e (2) (figura 3.10) quando comparados aos da figura 3.6 (casos (1) e (2)), comprovando-se os cálculos desenvolvidos neste capítulo.

Analisando-se, agora, os deslocamentos horizontais no topo do pórtico, nota-se um pequeno acréscimo de 3% no caso (3) quando comparado ao caso (1), ocasionado pela consideração do efeito de 2ª ordem. Esta percentagem aumenta para 39% quando se considera o deslocamento axial dos pilares (caso (4) comparado com caso (1)).

A tabela 3.3 fornece os valores dos deslocamentos horizontais no topo da estrutura, variando as cargas  $p_1$  e  $p_2$  até chegarem a valores próximos ao da carga crítica com a finalidade de observar o comportamento destes resultados, resolve-se a equação diferencial para uma rede de 15 pontos e de 30 pontos.

Representa-se na figura 3.11, através de gráfico, os deslocamentos horizontais no topo da estrutura, considerando-se a variação das cargas  $p_1$  e  $p_2$ .

O valor obtido para a carga crítica mostrou-se inferior àquele obtido por processo de análise discreta. Isto deve-se ao fato do pórtico possuir, na base, uma rigidez lateral maior, pelo engastamento dos pilares, fato este que não é levado em conta no cálculo aqui efetuado pela "Técnica do Meio Contínuo", uma vez que supõe o pórtico com rigidez constante da base ao topo.

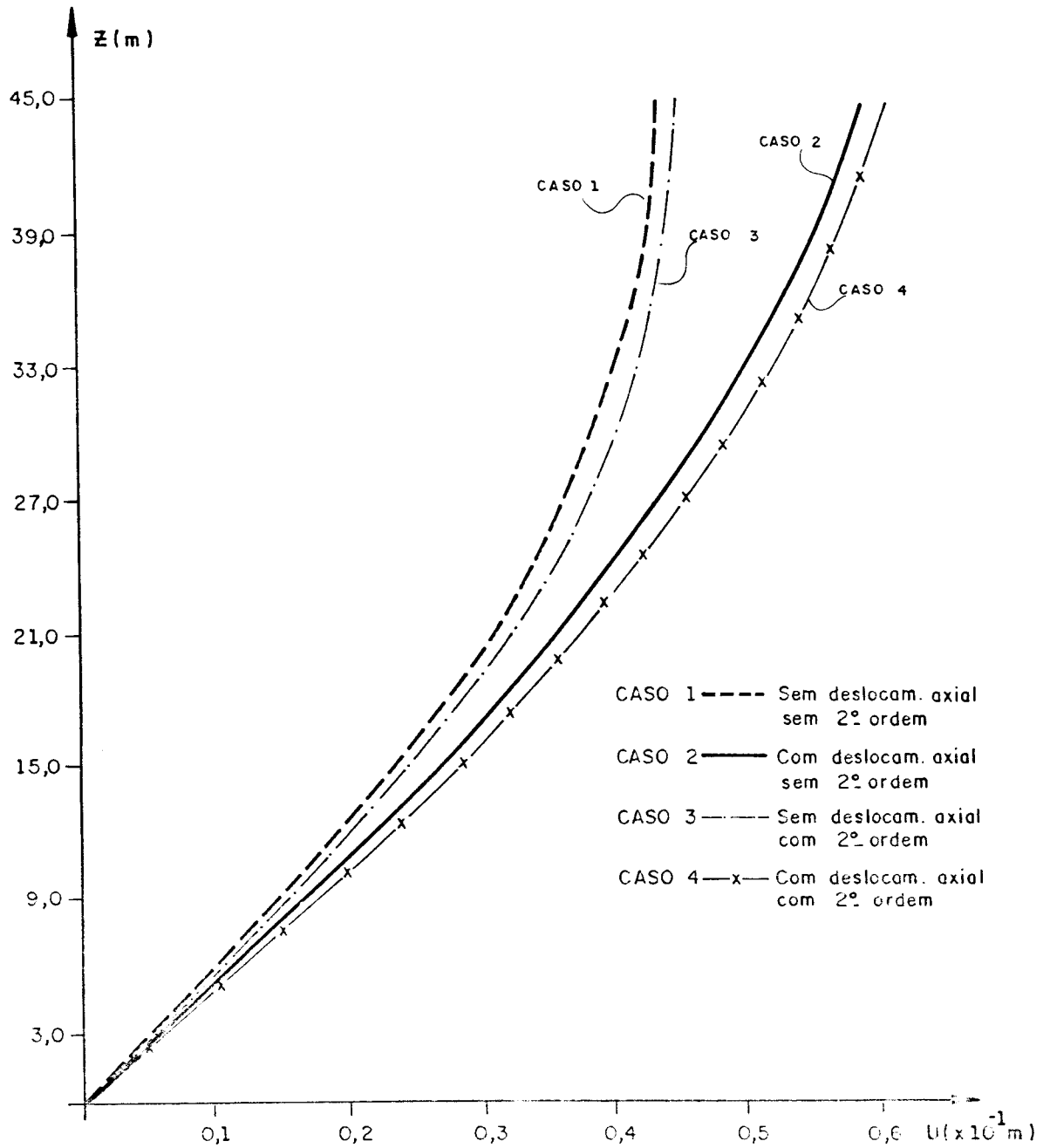


Fig. 3.10 - Deslocamentos horizontais - Exemplo 1

Tabela 3.2 - Deslocamentos horizontais no painel pórtico (m)

Z (m)	Caso (1)	Caso (2)	Caso (3)	Caso (4)
	sem axial sem 2ª ordem	com axial sem 2ª ordem	sem axial com 2ª ordem	com axial com 2ª ordem
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3,0	0,0055	0,0057	0,0058	0,0059
6,0	0,0107	0,0112	0,0112	0,0117
9,0	0,0155	0,0166	0,0162	0,0173
12,0	0,0199	0,0217	0,0207	0,0226
15,0	0,0239	0,0266	0,0249	0,0277
18,0	0,0276	0,0313	0,0286	0,0325
21,0	0,0309	0,0356	0,0320	0,0370
24,0	0,0338	0,0397	0,0349	0,0412
27,0	0,0363	0,0434	0,0375	0,0450
30,0	0,0384	0,0468	0,0397	0,0485
33,0	0,0402	0,0498	0,0415	0,0516
36,0	0,0416	0,0525	0,0428	0,0544
39,0	0,0425	0,0548	0,0438	0,0568
42,0	0,0432	0,0568	0,0445	0,0587
45,0	0,0434	0,0583	0,0447	0,0603

Tabela 3.3 - Deslocamentos horizontais no topo (m) - Caso (4).

$P_1 = P_2$ (kN/m)	NS = 15	NS = 30
≅ 0,0	0,0583	0,0583
100,0	0,0636	0,0636
200,0	0,0700	0,0700
300,0	0,0780	0,0781
400,0	0,0883	0,0884
500,0	0,0102	0,0102
600,0	0,1218	0,1218
700,0	0,1535	0,1525
800,0	0,2197	0,2107
900,0	0,6213	0,4628
950,0	1,6653	-0,0340
1000,0	-0,1172	-0,0665

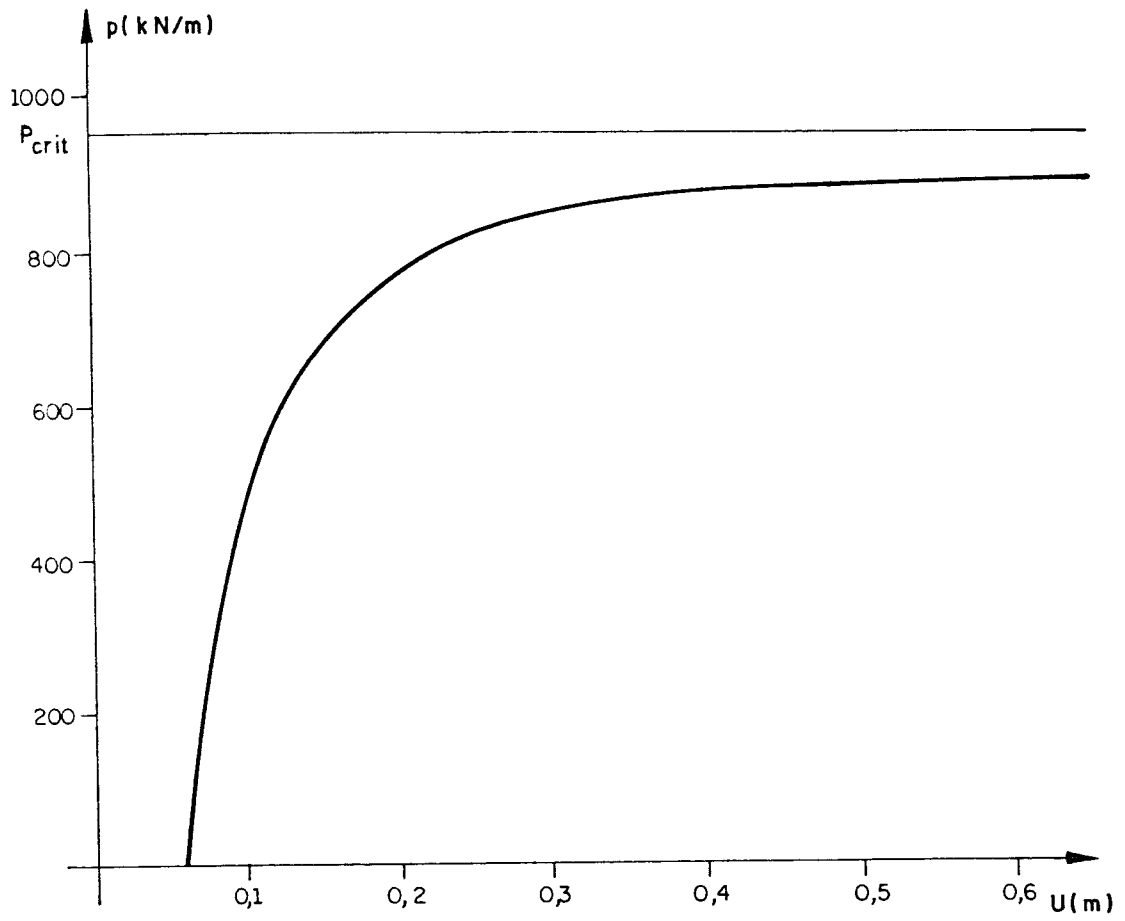


Fig. 3.11 - Deslocamentos horizontais no topo - Exemplo 1

### 3.2.2 - Programa II

Optou-se pela elaboração de um novo programa em linguagem FORTRAN, onde os dados de entrada e saída são praticamente os mesmos apresentados na tabela 3.1, excluindo a variável IM (criou-se, neste programa, um arquivo de saída de resultados), e acrescentando as seguintes variáveis descritas na tabela 3.4.

Tabela 3.4 - Identificação das variáveis utilizadas no PROGRAMA II.

VARIÁVEIS	IDENTIFICAÇÃO	FORMATO
P1	Carga vertical uniformemente distribuída no pilar 1	F10.0
P2	Carga vertical uniformemente distribuída no pilar 2	F10.0
NS	Número de subdivisões da rede	I3
U(I)	Deslocamentos horizontais do painel pórtico	F15.8

Para a resolução do sistema de equações utiliza-se o processo de Gauss e Jordan demonstrado em SORIANO [12]. Segue a listagem do PROGRAMA II.

```
C*****
C*                                                                 *
C*          P R O G R A M A I I                                 *
C*          =====                                           *
C*                                                                 *
C* S U B R O T I N A 1 - CALCULO DOS DESLOCAMENTOS *
C*          - PROCESSO DE GAUSS E JORDAN *
C*                                                                 *
C*****
      SUBROUTINE SOLUC(N,A,F)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION F(54),A(54,54)
      NI=N-1
      NS=N+1
C =====
C POSICIONAMENTO DO VETOR CSTE NA COLUNA NS DA MATRIZ A
C =====
      DO 10 I=1,N
      A(I,NS)=F(I)
      10 CONTINUE
C =====
C PESQUISA DO MAIOR ELEMENTO DA COLUNA E TROCA DE LINHAS
C =====
      DO 20 L=1,NI
      LS=L+1
      DO 35 I=LS,N
      IF(DABS(A(L,L))-DABS(A(I,L)))40,35,35
      40 DO 30 J=L,NS
      PROV=A(L,J)
      A(L,J)=A(I,J)
      A(I,J)=PROV
      30 CONTINUE
      35 CONTINUE
C =====
C DIVISAO DA LINHA PIVOT POR A(L,L)
C =====
      PIV=A(L,L)
      DO 50 J=L,NS
      50 A(L,J)=A(L,J)/PIV
C =====
C TRIANGULARIZANDO A MATRIZ
C =====
      DO 20 I=LS,N
      M=0
      ELEM=A(I,L)
      DO 20 J=L,NS
      A(I,J)=A(I,J)-ELEM*A(L,J)
C =====
C TESTE DO SISTEMA
C =====
      IF(J-NS)60,70,70
      60 IF(DABS(A(I,J))-0.1D-16)20,20,80
      80 M=1
      GO TO 20
```



```
70 IF(M)90,90,20
90 IF(DABS(A(I,J))-0.1D-16)100,100,110
100 WRITE(6,140)
140 FORMAT(5(/),20X,'SOLUCAO INDETERMINADA')
STOP
110 WRITE(6,150)
150 FORMAT(5(/),20X,'SOLUCAO IMPOSSIVEL')
STOP
20 CONTINUE
A(N,NS)=A(N,NS)/A(N,N)
A(N,N)=1.
C =====
C DIAGONALIZACAO DE JORDAN
C =====
DO 120 I=1,NI
IS=I+1
DO 120 K=IS,N
VAL=A(I,K)
DO 120 J=K,NS
120 A(I,J)=A(I,J)-VAL*A(K,J)
C =====
C DESLOCAMENTOS
C =====
DO 130 I=1,N
130 F(I)=A(I,NS)
RETURN
.STOP
END
C
C*****
C*
C*
C* PORTICULO PLANO *
C* ***** *
C*
C* -CONSIDERANDO A INFLUENCIA DAS DEFORMACOES AXIAIS *
C* DOS PILARES(SECCOES CONST.) E O EFEITO DE SEG.ORDEM *
C*
C* -APLICACAO DO METODO DAS DIFERENCAS FINITAS *
C*
C*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION ETA(54),AIND(54),G1(54),G2(54),U(54)
REAL*8 KV,KP,LV,LP,MP(54,54)
OPEN(5,FILE='C:ROS1.DAT',FORM='FORMATTED')
OPEN(6,FILE='ROS.RES',STATUS='NEW',FORM='FORMATTED')
C
C=====
C
C ENTRADA DE DADOS
C
C=====
E
READ(5,10)P,F,P1,P2
```

```
10 FORMAT(/,4F10.0)
   READ(5,20)KV,LV,KP,LP
20 FORMAT(/,4F10.0)
   READ(5,30)SA,SB,SV
30 FORMAT(/,3F10.0)
   READ(5,40)H,E
40 FORMAT(/,2F10.0)
   READ(5,50)NS
50 FORMAT(/,13)
   WRITE(6,60)
60 FORMAT(//,10X,28('*'),/,10X,'*',26X,'*',/,10X,'* P O R T I C O P
   *L A N O *',/,10X,'*',26X,'*',/,10X,'*',8X,'- DESLOC. AXIAIS *',/,
   *10X,'*',8X,'- 2= ORDEM',8X,'*',/,10X,'*',26X,'*',/,10X,28('*'),//)
   WRITE(6,70)
70 FORMAT(10X,22('*'),/,10X,'*',20X,'*',/,10X,'* DADOS DA ESTRUTURA *
   *',/,10X,'*',20X,'*',/,10X,22('*'),//)
   WRITE(6,80)P,F,E,NS
80 FORMAT(10X,'CARGA LATERAL',4X,F8.3,/,10X,'FORCA NO TOPO',2X,F10.3,
   */,10X,'MOD. ELASTIC.',1X,F11.2,/,10X,'N= DE SUBDIV.',9X,13,//)
   WRITE(6,90)P1,P2
90 FORMAT(10X,'* VIGA *',10X,'* PILARES *',//,28X,'* P1 =',F11.7,1X,'
   **',4X,'* P2 =',F11.7,1X,'*',/)
   WRITE(6,100)SV,SA,SB,LV,LP,LP
100 FORMAT(10X,'AREA',2X,F8.4,4X,'AREA',7X,F8.4,4X,'AREA',7X,F8.4,/,10
   *X,'COMP.',1X,F8.4,4X,'PE-DIREITO',1X,F8.4,4X,'PE-DIREITO',1X,F8.4,
   *//)
```

```
C
C=====
C
C CALCULANDO AS CONSTANTES DA EQUACAO DA ELASTICA
C
C=====
C
```

```
PK=P1+P2
C1=(24.*E*KP*KV)/(LP*LV*(2.*KP+KV))
BOL=0.0
IF(PK.EQ.BOL)THEN
CK=0.0
C3=0.0
C4=0.0
ELSE
CK=C1*LV/(2.*PK)
DK=CK/H
D1=C1/LV
C3=(-D1*P/(2.*E*PK))*((1./SA+1./SB)
D3=C3*(H**3)
C4=(-D1/(2.*E*PK))*(((F-P1*LV)/SA)+((F+P2*LV)/SB))
D4=C4*(H**2)
END IF
C2=(D1/(2.*E))*((1./SA+1./SB)
D2=C2*(H**2)
NP=NS+4
L1=NP-1
L2=NP-2
```





```
170 CONTINUE
C
C=====
C
C CALCULO DO DESLOCAMENTO
C
C=====
C
      WRITE(6,180)
180 FORMAT(//,10X,22('*'),/,10X,'*',20X,'*',/,10X,'* DESLOC. HORIZONTA
      *L *',/,10X,'*',20X,'*',/,10X,22('*'),//)
C=====
C
C SUBROTINA SOLUC.- CALCULO DOS DESLOCAMENTOS
C
C=====
C
C   - (AIND)=[MP]* (F=U)
C
      CALL SOLUC(NP,MP,AIND)
C
C=====
C
C IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS-U
C
C=====
C
      DO 200 I=3,L1
      J=3*(I-LP)
      WRITE(6,190)J,AIND(I)
190 FORMAT(10X,'U(',12,')= ',F15.8)
200 CONTINUE
      CLOSE(6)
      STOP
      END
```

#### 4. ASSOCIAÇÃO PLANA DE PÓRTICO E PAREDE

Neste capítulo, apresenta-se, primeiramente, um estudo da influência dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico, em painéis constituídos de parede e pórtico associados por barras biarticuladas, considerando-se a parede com base rígida. O comportamento deste modelo, utilizando a Técnica do Meio Contínuo, expressa-se através de uma equação diferencial de quarta ordem, nos deslocamentos laterais da estrutura, cuja solução é facilmente encontrada por via analítica.

Com a finalidade de analisar e comparar os esforços, introduz-se o engastamento elástico na parede e desenvolvem-se as equações de momento fletor, força cortante e quinhões de carga da parede e do pórtico.

Posteriormente, acrescenta-se a este, o estudo do efeito de 2ª ordem. O modelo estrutural passa a ser definido por uma equação diferencial de 5ª ordem, cuja solução é encontrada através da aplicação do "Método das Diferenças Finitas", apresentado no apêndice B.

Analogamente ao capítulo anterior e baseado nas expressões obtidas da análise teórica, desenvolve-se, no final de cada item, um programa de cálculo para microcomputador.

#### 4.1 - Associação de parede e pórtico por barras biarticuladas considerando a influência dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico e base rígida na parede

O modelo estrutural utilizado para a determinação dos esforços e deslocamentos laterais é o mesmo apresentado na figura 2.3, onde as lajes são representadas por barras biarticuladas ligando continuamente os painéis-parede e pórtico - ao longo da altura. Admite-se que a parede, os pilares e as vigas possuam característica geométricas constantes ao longo da altura.

De maneira a usar uma mesma notação, utilizam-se o índice  $w$ , na identificação dos esforços e deslocamentos relativos à parede, e o índice  $f$  para os esforços e deslocamentos do pórtico.

##### - Desenvolvimento da equação diferencial

A equação da linha elástica do pórtico, considerando-se os deslocamentos axiais dos pilares, de acordo com o capítulo 3, é expressa por:

$$u_f = u_{f_v} + u_{f_m} \quad (3.50)$$

onde

$$u'_{f_v} = \frac{V_f}{s_f} \quad (3.38)$$

e o deslocamento devido à ação do momento que ocorre pela consideração dos deslocamentos axiais dos pilares, satisfaz:

$$u''_{f_m} = \frac{M_f}{j_f} \quad (3.40)$$

Integrando-se uma vez a equação (3.38) e duas vezes a equação (3.40) e levando-se os valores de  $u_{f_v}$  e  $u_{f_m}$  na equação (3.50) resulta:

$$u_f = \int_0^z \frac{V_f}{s_f} dz + \int_0^z \int_0^z \frac{M_f}{j_f} dz^2 \quad (4.1)$$

Sabe-se que:

$$V = V_w + V_f \quad (2.11)$$

e

$$M = M_w + M_f \quad (4.2)$$

onde:

V - força cortante no painel, em uma cota distante z da base, devido ao carregamento externo;

M - momento fletor no painel, em uma cota z da base, devido ao carregamento externo.

Substituindo-se a equação (2.4) e a equação (2.5) nas equações (4.2) e (2.11) respectivamente, obtêm-se:

$$M_f = M - j_w u_w'' \quad (4.3)$$

$$V_f = V + j_w u_w'''$$

Como  $u_w = u_f = u$ , e substituindo-se as equações (4.3) na equação (4.1), encontra-se:

$$u = \int_0^z \frac{(V + j_w u''')}{s_f} dz + \int_0^z \int_0^z \frac{(M - j_w u'')}{j_f} dz^2 \quad (4.4)$$

Derivando-se duas vezes a equação (4.4), acha-se:

$$\frac{j_w}{s_f} u^{IV} - \left(1 + \frac{j_w}{j_f}\right) u'' = \frac{-V'}{s_f} - \frac{M}{j_f} \quad (4.5)$$



Os esforços V e M atuantes no painel parede e pórtico, devido ao carregamento externo, são expressos por:

$$V = p(H-z) + F \quad (4.6)$$

$$M = \frac{p}{2} (H-z)^2 + F(H-z) \quad (4.7)$$

Derivando-se a equação (4.6) e substituindo-se juntamente com a equação (4.7) na equação (4.5), obtém-se:

$$\frac{j_w}{s_f} u^{IV} - \left(1 + \frac{j_w}{j_f}\right) u'' = \frac{p}{s_f} - \frac{1}{j_f} \left[ \frac{p}{2} (H-z)^2 + F(H-z) \right] \quad (4.8)$$

Rearranjando-se a equação (4.8), escreve-se:

$$u^{IV} - K^2 u'' = az^2 + bz + c \quad (4.9)$$

onde:

$$K^2 = \left( \frac{s_f}{j_w} + \frac{s_f}{j_f} \right)$$

$$a = - \frac{s_f}{2j_f j_w} p \quad (4.10)$$

$$b = \frac{s_f}{j_f j_w} (pH+F)$$

$$c = - \frac{1}{j_w} \left( -p + \frac{s_f H^2}{2j_f} p + \frac{s_f}{j_f} FH \right)$$

- Resolução da equação diferencial

A equação (4.9) é uma equação diferencial de quarta ordem, cuja solução envolve a soma da solução geral da homogênea ( $u_h$ ) e uma solução particular da completa ( $u_p$ ), então:

$$u = u_h + u_p \quad (4.11)$$

Resolvendo-se a parcela homogênea da equação (4.9), tem-se que a solução é do tipo  $u = Ce^{\lambda x}$ , conforme BRONSON [3]. Substituindo-se as raízes  $\lambda_i$ , encontra-se:

$$u_h = C_1 + C_2 z + C_3 e^{Kz} + C_4 e^{-Kz} \quad (4.12)$$

Uma solução particular da equação completa é dada por:

$$u_p = Az^2 + Bz^3 + Cz^4 \quad (4.13)$$

onde:

$$A = -\frac{c}{2K^2} - \frac{a}{K^4}$$

$$B = -\frac{b}{6K^2} \quad (4.14)$$

$$C = -\frac{a}{12K^2}$$

A substituição dos valores de a, b e c (equações (4.10)) nas equações (4.14), fornece:

$$A = \frac{1}{2j_w K^2} \left[ p \left( \frac{s_f H^2}{2j_f} + \frac{s_f}{K^2 j_f} - 1 \right) + \frac{s_f}{j_f} FH \right]$$

$$B = -\frac{s_f}{6K^2 j_f j_w} (pH+F) \quad (4.15)$$

$$C = \frac{s_f p}{24 j_f j_w K^2}$$

Finalmente, levando-se as equações (4.12) e (4.13) na equação (4.11), obtém-se a equação geral que rege o problema, dada por:

$$u = C_1 + C_2 z + C_3 e^{Kz} + C_4 e^{-Kz} + Az^2 + Bz^3 + Cz^4 \quad (4.16)$$

onde os valores de A, B e C são determinados nas equações (4.15).

- Condições de contorno

As condições de contorno utilizadas na resolução da equação (4.16) são:

na base ( $z=0$ )

$$u(0) = 0$$

$$u'(0) = 0$$

no topo ( $z=H$ ) (4.17)

$$u''(H) = 0$$

$$V_w(H) + V_f(H) = F$$

Os valores de  $V_w$  e  $V_f$ , obtidos nas equações (2.5) e (3.8), substituídos na quarta condição de contorno, fornecem:

$$-j_w u'''(H) + s_1 u'(H) - r_1 (v_A - v_B) = F \quad (4.18)$$

Obtendo-se os deslocamentos axiais dos pilares  $v_A$  e  $v_B$ , através de (3.15) e (3.16), onde:

$$v_A - v_B = \frac{1}{E} \left( \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) \int_0^z N_f dz \quad (4.19)$$

A força normal do pórtico ( $N_f$ ) é expressa por:

$$N_f = \frac{M_f}{\ell_v} \quad (4.20)$$

Levando-se o valor de  $M_f$  da equação (4.3) na equação (4.20) e conseqüentemente na equação (4.19), encontram-se os deslocamentos  $v_A$  e  $v_B$ , definidos pela expressão:

$$v_A - v_B = \frac{1}{E} \left( \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) \int_0^z \frac{(M - j_w u'')}{\ell_v} dz \quad (4.21)$$

Desta forma, obtêm-se a quarta condição de contorno pela substituição da equação (4.21) na equação (4.18), na ordenada  $z = H$ , que resulta em:

$$- j_w u'''(H) + s_1 u'(H) + X \int_0^H (M - j_w u'') dz = F \quad (4.22)$$

onde:

$$X = - \frac{r_1}{E \ell_v} \left( \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) \quad (4.23)$$

Substituindo-se as condições de contorno (equações (4.17) e (4.22)) na equação geral (4.16) e em suas derivadas, obtêm-se o seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_3 + C_4 = 0 \end{array} \right. \quad (4.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 + KC_3 - KC_4 = 0 \end{array} \right. \quad (4.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_p C_3 + E_n C_4 = -G \end{array} \right. \quad (4.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 C_2 + TC_3 + NC_4 = R \end{array} \right. \quad (4.27)$$

onde:

$$E_p = K^2 e^{KH}$$

$$E_n = K^2 e^{-KH}$$

$$G = 2A + 6BH + 12CH^2$$

$$T = -j_w K^3 e^{KH} + s_1 K e^{KH} - X j_w K e^{KH} + X j_w K \quad (4.28)$$

$$N = j_w K^3 e^{-KH} - s_1 K e^{-KH} + X j_w K e^{-KH} - X j_w K$$

$$R = F + j_w (6B + 24CH + 2XAH + 3XBH^2 + 4XCH^3) - s_1 (2AH + 3BH^2 + 4CH^3) - \frac{XH^3}{6} p - \frac{XH^2}{2} F$$

Resolvendo-se este sistema analiticamente, encontram-se os seguintes valores para as constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ :

$$C_1 = - (C_3 + C_4) \quad (4.29)$$

$$C_2 = K(C_4 - C_3) \quad (4.30)$$

$$C_3 = \frac{R}{(-s_1 K + T)} - \frac{(s_1 K + N)}{(-s_1 K + T)} \left[ \frac{-G(-s_1 K + T)}{E_n(-s_1 K + T) - E_p(s_1 K + N)} - \frac{E_p R}{E_n(-s_1 K + T) - E_p(s_1 K + N)} \right] \quad (4.31)$$

$$C_4 = \frac{-G(-s_1 K + T)}{E_n(-s_1 K + T) - E_p(s_1 K + N)} - \frac{E_p R}{E_n(-s_1 K + T) - E_p(s_1 K + N)} \quad (4.32)$$

Com os valores de  $A$ ,  $B$  e  $C$  das equações (4.15), e das constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ , obtêm-se os deslocamentos horizontais do painel, expressos pela equação (4.16).

- Esforços na parede

Para a obtenção dos esforços na parede utiliza-se, primeiramente, a equação (2.4), substituindo-se nesta a segunda derivada da equação geral (4.16), determinando-se, assim, o valor do momento fletor na parede, dado por:

$$M_w = j_w (K^2 C_3 e^{Kz} + K^2 C_4 e^{-Kz} + 2A + 6Bz + 12Cz^2) \quad (4.33)$$

Como  $V_w = - M'_w$  (equação (2.1)), tem-se:

$$V_w = - j_w (K^3 C_3 e^{Kz} - K^3 C_4 e^{-Kz} + 6B + 24Cz) \quad (4.34)$$

e

$$q_w = - V'_w \quad (\text{equação (2.2)}),$$

obtém-se:

$$q_w = j_w (K^4 C_3 e^{Kz} + K^4 C_4 e^{-Kz} + 24C) \quad (4.35)$$

onde  $q_w$  é o quinhão de carga absorvido pela parede.

- Esforços no pórtico

Considerando-se a equação (3.8) em conjunto com a equação (4.21), pode-se escrever:

$$V_f = s_1 u' + X \int_0^z (M - j_w u'') dz \quad (4.36)$$

sendo o valor de X definido pela equação (4.23).

Substituindo-se as derivadas da equação geral (4.16), juntamente com equação (4.7), na equação (4.36), determina-se o valor do esforço cortante no pórtico, dado pela equação:

$$\begin{aligned}
 V_f = & s_1 (C_2 + KC_3 e^{Kz} - KC_4 e^{-Kz} + 2Az + 3Bz^2 + 4Cz^3) + X \left[ \frac{p}{2} H^2 z \right. \\
 & - \frac{p}{2} Hz^2 + \frac{p}{6} z^3 + FH z - \frac{F}{2} z^2 - j_w (KC_3 e^{Kz} - KC_4 e^{-Kz} \\
 & \left. + 2Az + 3Bz^2 + 4Cz^3 - KC_3 + KC_4) \right] \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Como  $q_f = -V_f'$  (equação 2.8), acha-se:

$$\begin{aligned}
 q_f = & -s_1 (K^2 C_3 e^{Kz} + K^2 C_4 e^{-Kz} + 2A + 6Bz + 12Cz^2) - X \left[ \frac{p}{2} H^2 - pHz \right. \\
 & \left. + \frac{p}{2} z^2 + FH - Fz - j_w (K^2 C_3 e^{Kz} + K^2 C_4 e^{-Kz} + 2A + 6Bz + 12Cz^2) \right] \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

onde  $q_f$  é o quinhão de carga absorvido pelo pórtico.

Integrando-se a equação (4.37), conforme a equação (2.7), encontra-se o momento fletor atuante no pórtico, definido por:

$$\begin{aligned}
 M_f = & s_1 (C_2 H + C_3 e^{KH} + C_4 e^{-KH} + AH^2 + BH^3 + CH^4 - C_2 z - C_3 e^{Kz} - C_4 e^{-Kz} - Az^2 \\
 & - Bz^3 - Cz^4) + X \left[ \frac{pH^4}{8} + \frac{FH^3}{3} - \left( \frac{p}{4} H^2 + \frac{FH}{2} \right) z^2 \right. \\
 & + \left( \frac{pH}{6} + \frac{F}{6} \right) z^3 - \frac{p}{24} z^4 - j_w (C_3 e^{KH} + C_4 e^{-KH} + AH^2 + BH^3 + CH^4 \\
 & \left. - KC_3 H + KC_4 H - C_3 e^{Kz} - C_4 e^{-Kz} - Az^2 - Bz^3 - Cz^4 + KC_3 z - KC_4 z) \right] \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

#### 4.1.1 - Engastamento elástico na parede

Com o objetivo de analisar a influência do engastamento elástico na parede, utiliza-se a equação desenvolvida por STAMATO [13] para painéis constituídos de parede e pórtico, associados por barras biarticuladas, sem consi-

derar os deslocamentos axiais nos pilares do pórtico. Desta forma, a equação da linha elástica é dada por:

$$u = \frac{1}{k^4 j_w} (C_1 + C_2 kz + C_3 e^{kz} + C_4 e^{-kz} - \frac{p}{2} k^2 z^2) \quad (4.40)$$

onde

$$k^2 = \frac{s_f}{j_w} \quad (4.41)$$

e  $s_f$  definido no apêndice A.

Introduzindo-se o engastamento elástico na parede, estabelecem-se as seguintes condições de contorno:

na base ( $z=0$ )

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u'(0) &= \frac{j_w}{g} u''(0), \text{ segundo MANCINI [9]} \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde  $g$  é a rigidez do engastamento elástico à rotação da parede na base.

no topo ( $z=H$ )

$$\begin{aligned} u''(H) &= 0 \\ V_w(H) + V_f(H) &= F \end{aligned}$$

onde  $V_w$  e  $V_f$  são fornecidos pelas equações (2.5) e (2.10) (não considerando a influência dos deslocamentos axiais pilares).

Com as condições de contorno descritas acima, substituídas na equação (4.40), define-se o seguinte sistema de equações:



$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_3 + C_4 = 0 \\ C_2 + B_e C_3 - C_e C_4 = D_e \\ e^{kH} C_3 + e^{-kH} C_4 = p \\ s_f C_2 + F_e C_3 + G_e C_4 = H_e \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.43) \\ (4.44) \\ (4.45) \\ (4.46) \end{array}$$

onde:

$$\begin{aligned} A_e &= \frac{1}{k^4 j_w} \\ B_e &= \left(1 - \frac{j_w}{g} k\right) \\ C_e &= \left(1 + \frac{j_w}{g} k\right) \\ D_e &= -\frac{j_w}{g} k p \\ F_e &= (s_f e^{kH} - j_w k^2 e^{kH}) \\ G_e &= (-s_f e^{-kH} + j_w k^2 e^{-kH}) \\ H_e &= \frac{F}{A_e k} + s_f k H p \end{aligned} \quad (4.47)$$

Resolvendo-se este sistema, determinam-se os novos valores das constantes:

$$C_4 = \frac{\frac{p}{e^{kH}} (s_f B_e - F_e) + H_e - s_f D_e}{\left[ \frac{e^{-kH}}{e^{kH}} (s_f B_e - F_e) + G_e + s_f C_e \right]} \quad (4.48)$$

$$C_3 = \frac{p}{e^{kH}} - \frac{e^{-kH}}{e^{kH}} C_4 \quad (4.49)$$

$$C_2 = D_e - \frac{B_e}{e^{kH}} p + \left( \frac{e^{-kH}}{e^{kH}} B_e + C_e \right) C_4 \quad (4.50)$$

$$C_1 = - C_3 - C_4 \quad (4.51)$$

Substituindo-se as constantes acima na eq. (4.40) encontram-se os valores dos deslocamentos horizontais do painel. O procedimento para a obtenção dos esforços da parede e do pórtico com engastamento elástico na base da parede é análogo ao desenvolvido anteriormente.

#### 4.1.2 - Exemplo numérico 2

A estrutura demonstrada na figura 4.1 é constituída de uma parede com seção transversal de 1,5m x 0,2m e os pilares e vigas do pórtico têm seções transversais de 0,4m x 0,4m e 0,2m x 0,4m, respectivamente. Todos os elementos citados possuem seção transversal constante ao longo da altura. O valor do módulo de elasticidade é  $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ .

Admite-se como carregamento externo uma carga uniformemente distribuída de valor  $p = 4 \text{ kN/m}$ .

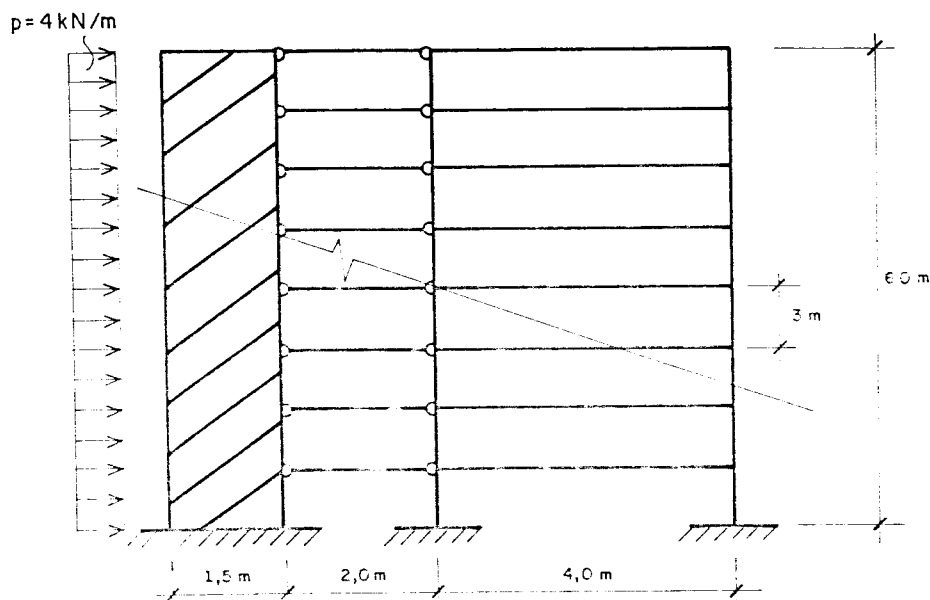


Fig. 4.1 - Exemplo de associação de parede e pórtico

Os resultados obtidos das equações dos esforços e deslocamentos são demonstrados através da listagem e de gráficos (Fig. 4.2 a 4.8). Definem-se os seguintes casos:

- Caso (1) - Parede e pórtico associados por barras biarticuladas, com base rígida, sem considerar a influência dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico.
- Caso (2) - Parede e pórtico associados por barras biarticuladas, com base rígida, considerando-se a influência dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico.
- Caso (3) - Parede e pórtico associados por barras biarticuladas, com engastamento elástico na base da parede, sem considerar a influência dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico.

A figura 4.2 mostra as linhas elásticas do painel parede e pórtico. Analisando-se estas linhas, observa-se um acréscimo de 71% no caso (2) quando comparado ao caso (1), no deslocamento horizontal do topo da estrutura. Esta diferença é ocasionada apenas pela consideração dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico. Acrescentando-se o apoio elástico na base da parede, ocorre um aumento de 11% para o caso (3) quando comparado com o caso (1).

Apresentam-se nas figuras 4.3 e 4.4 os resultados dos momentos fletores da parede e do pórtico, respectivamente. Nota-se que os resultados dos momentos fletores do pórtico (fig. 4.4) são maiores para os casos (1) e (3). Isto ocorre devido à maior deformabilidade do pórtico no caso (2). Espera-se, portanto, um comportamento contrário para os momentos fletores na parede (fig. 4.3), confirmando-se, assim, uma maior participação da parede na base onde esta é mais rígida que o pórtico.

Comparando-se as figuras 4.5 e 4.6, percebe-se que, na base, a parede está absorvendo totalmente o esforço

cortante devido ao seu engastamento rígido na base, casos (1) e (2). Isto não ocorre quando se analisa o caso (3), pois a rotação permitida na base da parede, devido ao engastamento elástico, faz com que o pórtico receba força cortante em sua base.

Na figura 4.7 estão representados os quinhões de carga  $q_w$ , absorvidos pela parede. A parede elasticamente engastada, caso (3), recebe na base uma carga menor devido a sua maior deformabilidade, quando comparada com os casos (1) e (2). Pelo equilíbrio global, o pórtico comporta-se de forma contrária recebendo uma carga maior no caso (3) (fig.4.8).

Encontra-se na tabela 4.1 os resultados dos deslocamentos horizontais do painel, obtidos pela Técnica do Meio Contínuo e pela Técnica Discreta, observando-se uma semelhança entre os resultados ao longo da altura e uma diferença de aproximadamente 1% no topo, comprovando-se, para este estudo, a eficácia da Técnica do Meio Contínuo.

```

*****
*
* PAREDE E PORTICO ASSOCIADOS POR BARRAS BI-ARTICULADAS *
*
*****
    
```

```

*****
*
* DADOS DA ESTRUTURA *
*
*****
    
```

```

CARGA LATERAL      4.000
FORÇA NO TOPO      .000
MOD. ELASTIC. 20000000.00
N= DE ANDARES      20
    
```

```

* VIGA *           * PILARES *

          * P1 *
AREA      .0800   AREA      .1500   * P2 *
COMP.     4.0000   PE-DIREITO  3.0000   AREA      .1600
                                PE-DIREITO  3.0000
    
```

```

*****
*
* DESLOC. HORIZONTAL *
*
*****
    
```

Z(M)	CASO1	CASO2	CASO3
.00	.00000	.00000	.00000
3.00	.00572	.00654	.01785
6.00	.01996	.02321	.04040
9.00	.03939	.04666	.06552
12.00	.06176	.07454	.09177
15.00	.08549	.10519	.11817
18.00	.10954	.13746	.14405
21.00	.13318	.17049	.16893
24.00	.15591	.20369	.19251
27.00	.17740	.23658	.21459
30.00	.19743	.26885	.23501
33.00	.21584	.30021	.25370
36.00	.23256	.33050	.27050
39.00	.24753	.35955	.28570
42.00	.26075	.38729	.29902
45.00	.27226	.41365	.31058
48.00	.28211	.43863	.32048
51.00	.29045	.46230	.32884
54.00	.29745	.48479	.33597
57.00	.30341	.50633	.34185
60.00	.30877	.52732	.34722

```

*****
* ESFORÇOS NA PAREDE E NO PORTICO *
* -SEM DESLOC. AXIAL NOS PILARES *
*
*
*****
* - BASE RIGIDA - CASO1 *
    
```

Z(M)	MWS	MFS	QWS	QFS	CWS	CFS
.00	1648.3967	5551.6033	240.0000	.0000	30.3450	-26.3450
3.00	1049.2087	5448.7913	164.2354	63.7646	20.7687	-16.7687
6.00	639.1902	5192.8098	112.3790	103.6210	14.2157	-10.2157
9.00	358.6538	4843.3462	76.8818	127.1182	9.7321	-5.7321
12.00	166.7611	4441.2389	52.5765	139.4235	6.6652	-2.6652
15.00	35.5778	4014.4222	35.9249	144.0751	4.5686	-1.5686
18.00	-53.9928	3581.9928	24.5029	143.4971	3.1371	.8629
21.00	-114.9897	3156.9897	16.6479	139.3521	2.1622	1.8378
24.00	-156.2923	2748.2923	11.2164	132.7836	1.5021	2.4979
27.00	-183.9131	2361.9131	7.4177	124.5823	1.0607	2.9393
30.00	-201.8731	2001.8731	4.6988	115.3012	.7736	3.2264
33.00	-212.7865	1670.7865	2.6639	105.3361	.5992	3.4008
36.00	-218.2423	1370.2423	1.0168	94.9832	.5120	3.4880
39.00	-219.0345	1101.0345	-.4823	84.4823	.4993	3.5007
42.00	-215.2786	863.2786	-2.0516	74.0516	.5594	3.4406
45.00	-206.4276	656.4276	-3.9196	63.9196	.7008	3.2992
48.00	-191.1933	479.1933	-6.3581	54.3581	.9443	3.0557
51.00	-167.3578	329.3578	-9.7222	45.7222	1.3252	2.6748
54.00	-131.4515	203.4515	-14.5016	38.5016	1.8991	2.1003
57.00	-78.2472	96.2472	-21.3920	33.3920	2.7494	1.2506
60.00	.0000	.0000	-31.3956	31.3956	4.0000	.0000

\*\*\*\*\*  
 \*  
 \* ESFORÇOS NA PAREDE E NO PORTICO \*  
 \*  
 \* -COM DEELOC. AXIAL NOS PILARES \*  
 \*  
 \*  
 \*\*\*\*\*

\* - BASE RIGIDA - CASO2 \*

Z(M)	MW	MF	MT	QW	QF	CW	CF
.00	1853.4615	5346.4135	7200.0000	240.0010	.0000	29.8673	-25.8664
3.00	1252.1512	5245.7242	6498.0000	165.6304	62.3685	20.3278	-16.3272
6.00	836.0725	4995.8085	5832.0000	114.9845	101.0130	13.8534	-9.8531
9.00	546.2238	4655.6660	5202.0000	80.4393	123.5574	9.4599	-6.4597
12.00	342.5660	4265.3344	4608.0000	56.8192	135.1771	6.4792	-2.4791
15.00	197.9349	3851.9768	4050.0000	40.6036	139.3866	4.4580	-.4580
18.00	93.9111	3434.0121	3528.0000	29.4224	138.5737	3.0890	.9110
21.00	18.0189	3023.9156	3042.0000	21.6337	134.3626	2.1641	1.8358
24.00	-38.1706	2590.1157	2592.0000	16.1359	127.8607	1.5427	2.4572
27.00	-80.3204	2258.2755	2178.0000	12.1698	119.8271	1.1302	2.8697
30.00	-112.1898	1912.1539	1800.0000	9.2092	110.7879	.8639	3.1359
33.00	-136.2049	1594.1770	1458.0000	6.8809	101.1166	.7035	3.2964
36.00	-153.8284	1305.8074	1152.0000	4.9075	91.0903	.6243	3.3755
39.00	-165.7811	1047.7661	882.0000	3.0659	80.9323	.6145	3.3853
42.00	-172.1524	820.1423	648.0000	1.1527	70.8458	.6726	3.3273
45.00	-172.4133	622.4070	450.0000	-1.0460	61.9449	.8070	3.1926
48.00	-165.3362	453.3327	286.0000	-3.7878	51.7870	1.0392	2.9607
51.00	-148.8080	310.8064	162.0000	-7.4127	43.4122	1.4034	2.5965
54.00	-119.5093	191.5088	72.0000	-12.3951	36.3949	1.9555	2.0445
57.00	-72.4090	90.4089	18.0000	-19.4159	31.4156	2.7792	1.2207
60.00	.0000	.0000	.0000	-29.4656	29.4656	4.0000	.0000

\*\*\*\*\*  
\*  
\* ESFORÇOS NA PAREDE E NO PORTICO \*  
\*  
\* -SEM DESLOC. AXIAL NOS PILARES \*  
\*  
\*  
\*\*\*\*\*

\* -COM ENGAST. ELASTICO NA PAREDE - CASO3 \*

Z(M)	MWE	MFE	OWE	OFE	CWE	CFE
.00	957.0324	6242.9676	152.5971	87.4029	19.2955	-15.2955
3.00	576.0627	5921.9373	104.4198	123.5802	13.2068	-9.2068
6.00	315.3853	5516.6147	71.4432	144.5568	9.0406	-5.0406
9.00	137.0530	5064.9470	48.8667	155.1333	6.1904	-2.1904
12.00	15.1055	4592.8945	33.4038	158.5962	4.2414	-.2414
15.00	-68.2095	4118.2095	22.8037	157.1963	2.9099	1.0901
18.00	-125.0204	3653.0204	15.5231	152.4769	2.0019	1.9981
21.00	-163.5972	3205.5972	10.5023	145.4977	1.3854	2.6146
24.00	-189.5556	2781.5556	7.0103	136.9897	.9705	3.0295
27.00	-206.6745	2384.6745	4.5388	127.4612	.6969	3.3031
30.00	-217.4460	2017.4460	2.7280	117.2720	.5247	3.4753
33.00	-223.4380	1681.4380	1.3144	106.6856	.4290	3.5710
36.00	-225.5228	1377.5228	.0921	95.9079	.3956	3.6044
39.00	-224.0039	1106.0039	-1.1168	85.1168	.4199	3.5801
42.00	-218.6603	866.6603	-2.4883	74.4883	.5053	3.4847
45.00	-208.7139	658.7139	-4.2219	64.2219	.6643	3.3357
48.00	-192.7170	480.7170	-6.5702	54.5702	.9200	3.0800
51.00	-168.3408	330.3408	-9.8749	45.8749	1.3095	2.6905
54.00	-132.0367	204.0367	-14.6172	38.6172	1.8898	2.1102
57.00	-78.5200	96.5200	-21.4873	33.4873	2.7451	1.2549
60.00	.0000	.0000	-31.4853	31.4853	4.0000	.0000



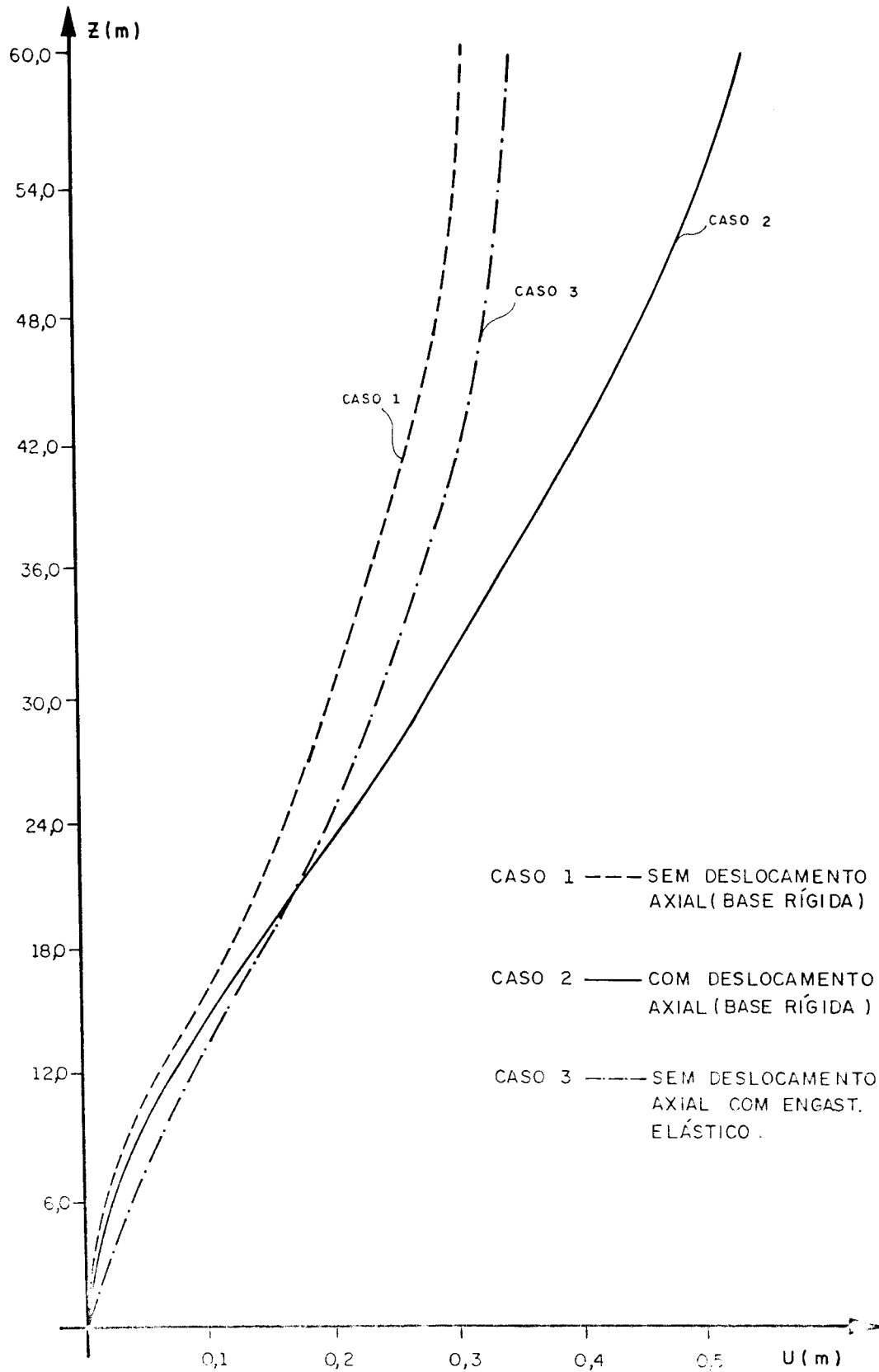


Fig. 4.2 - Deslocamentos horizontais - Exemplo 2

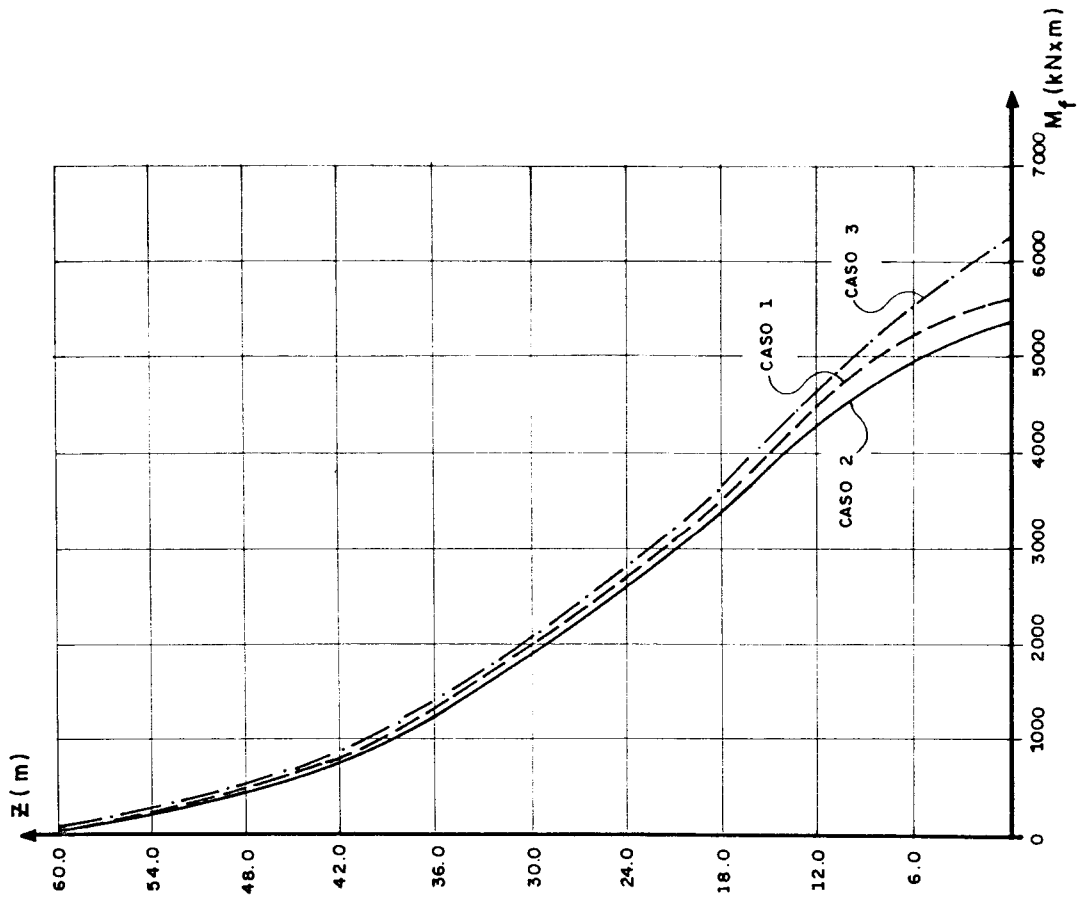


Fig. 4.4 — MOMENTOS FLETORES NO PÓRТИCO

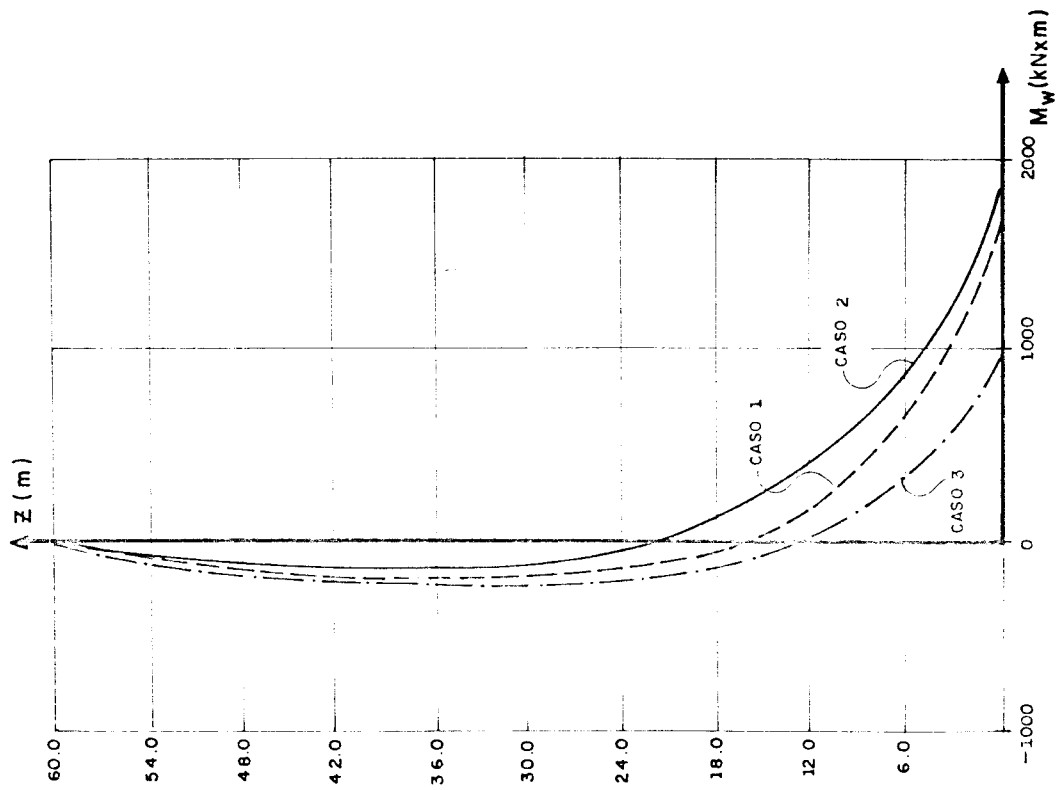


Fig. 4.3 — MOMENTOS FLETORES NA PAREDE

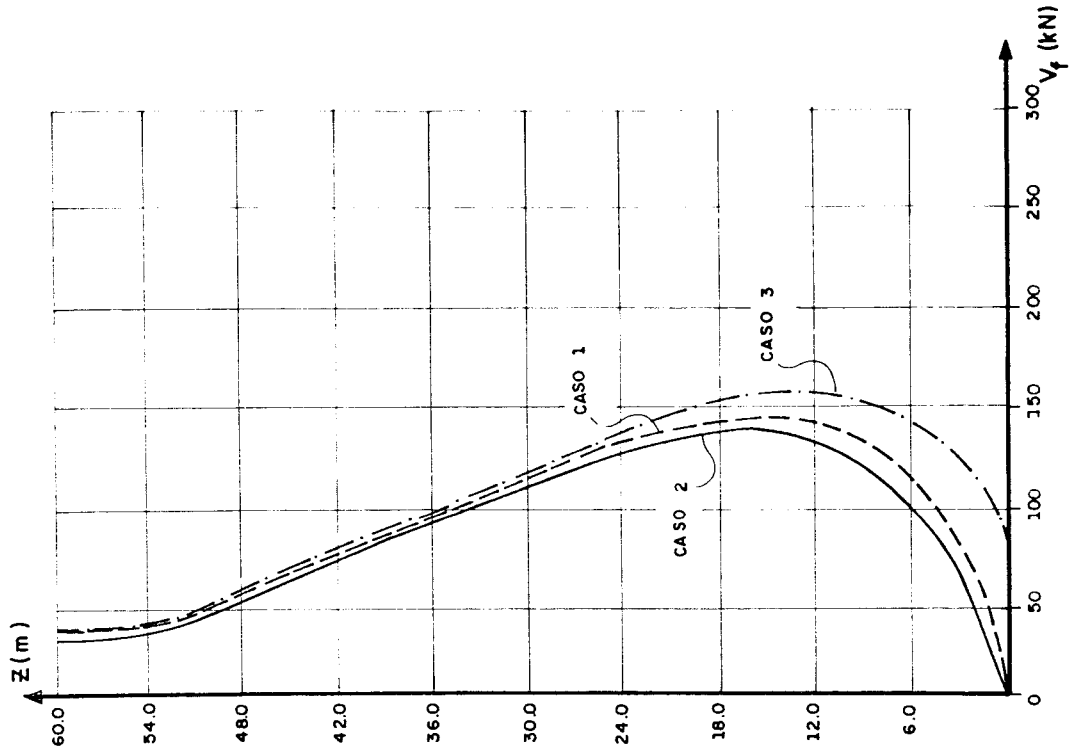


Fig. 4.6 — FORÇAS CORTANTES NO PÓRTICO

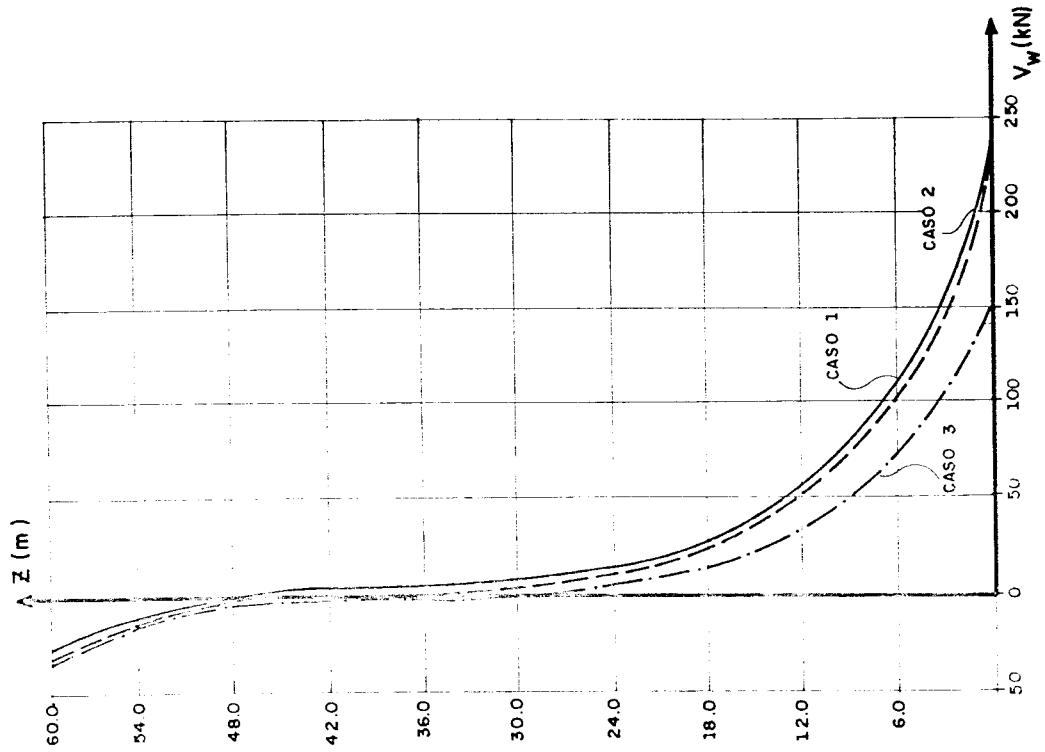


Fig. 4.5 — FORÇAS CORTANTES NA PAREDE

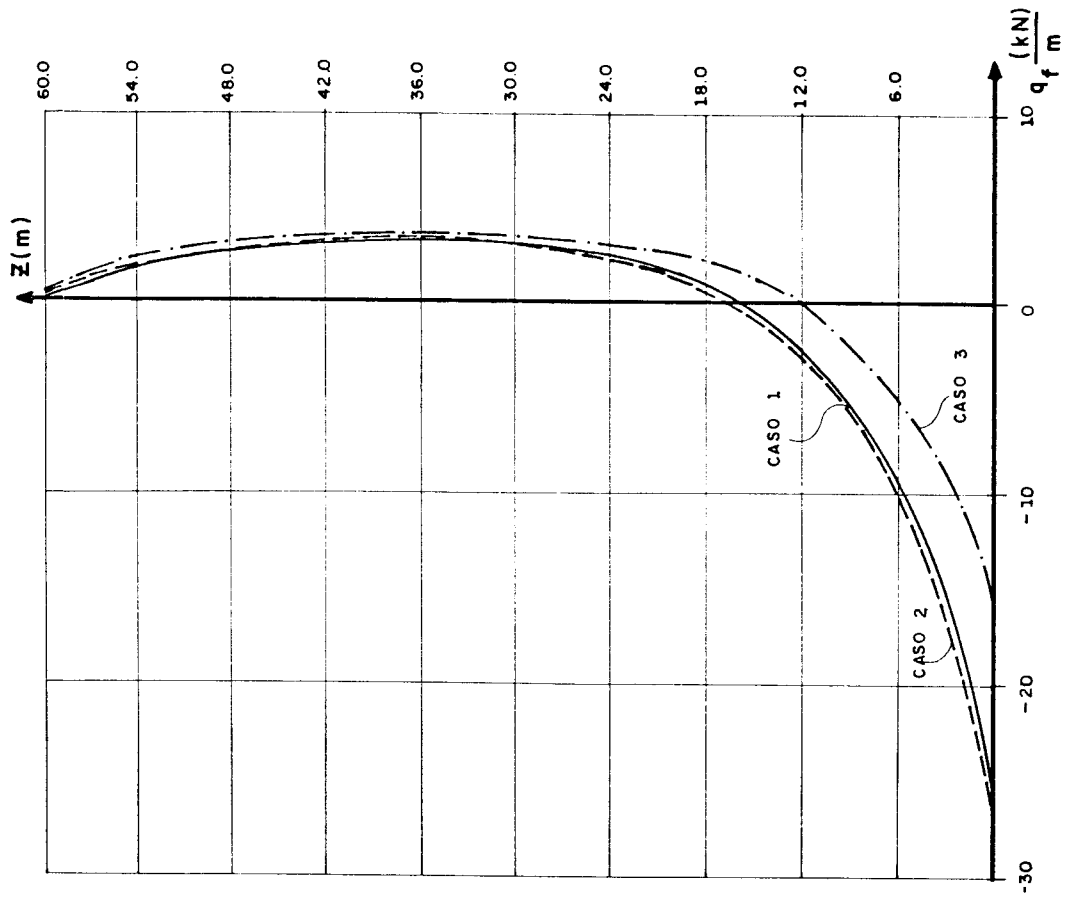


Fig. 4.8 — CARGA RECEBIDA PELO PÓRTICO

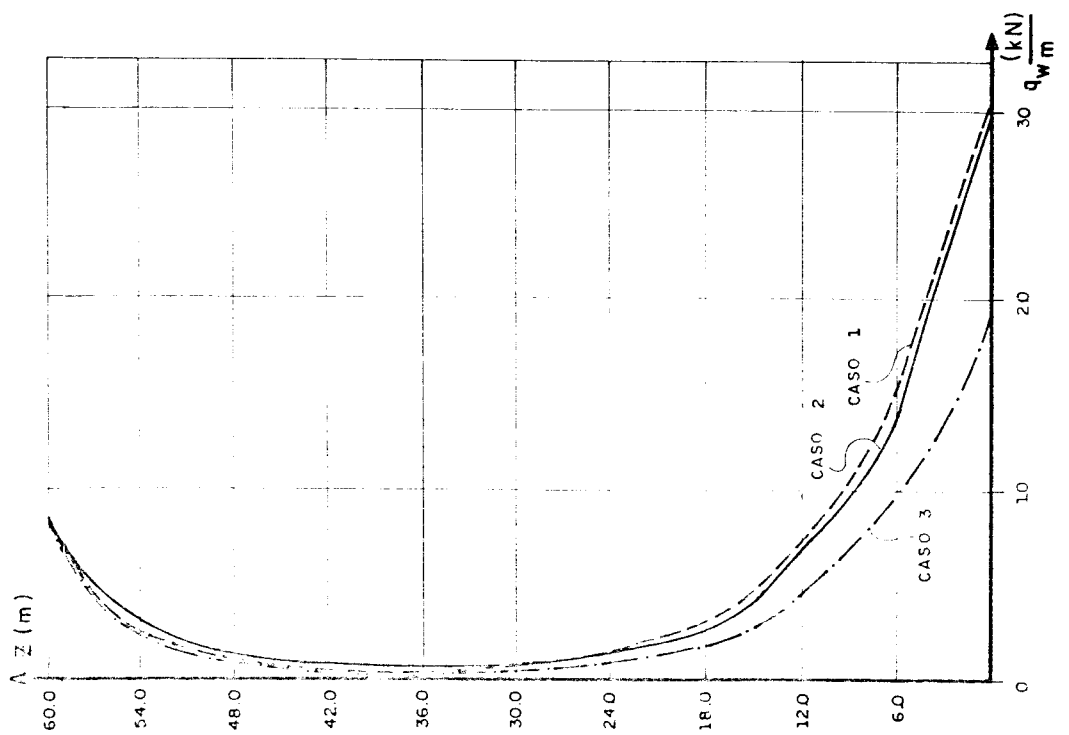


Fig. 4.7 — CARGA RECEBIDA PELA PAREDE

Tabela 4.1 - Deslocamentos horizontais - Caso (2)

Z (m)	T.M. CONTÍNUO (m)	T. DISCRETA (m)
0,0	0,0000	0,0000
3,0	0,0065	0,0064
6,0	0,0232	0,0229
9,0	0,0467	0,0462
12,0	0,0745	0,0740
15,0	0,1052	0,1047
18,0	0,1375	0,1371
21,0	0,1705	0,1704
24,0	0,2037	0,2039
27,0	0,2366	0,2372
30,0	0,2688	0,2699
33,0	0,3002	0,3018
36,0	0,3305	0,3326
39,0	0,3596	0,3622
42,0	0,3873	0,3905
45,0	0,4136	0,4174
48,0	0,4386	0,4429
51,0	0,4623	0,4671
54,0	0,4848	0,4899
57,0	0,5063	0,5119
60,0	0,5273	0,5330

#### 4.1.3 - Programa III

Para a aplicação das equações descritas neste capítulo, escreveu-se um programa de cálculo, em linguagem FORTRAN, para microcomputadores.

Tentou-se utilizar, durante o desenvolvimento do programa, a mesma notação introduzida na análise teórica.

As principais variáveis de entrada e saída que aparecem no decorrer do PROGRAMA III, são identificadas nas tabelas 4.2 e 4.3.

Tabela 4.2 - Identificação das variáveis de entrada utilizadas no PROGRAMA III.

VARIÁVEIS	IDENTIFICAÇÃO	FORMATO
IM	Opção para a impressão dos resultados na tela ou na impressora	I2
P	Carga lateral uniformemente distribuída	F10.0
F	Força concentrada no topo	F10.0
SV	Área da viga	F10.0
LV	Comprimento da viga	F10.0
SA	Área do pilar A	F10.0
SB	Área do pilar B	F10.0
LP	Comprimento do pilar	F10.0
SF	Rigidez do pórtico	F10.0
JF1	Momento de inércia do pórtico	F10.0
JW1	Momento de inércia da parede	F10.0
KV	Rigidez da viga	F10.0
KP	Rigidez do pilar	F10.0
E	Módulo de elasticidade longitudinal	F10.0
NA	Número de andares do painel	I2
GW	Rigidez do engastamento elástico na base da parede	

Tabela 4.3 - Identificação das variáveis de saída do PROGRAMA III.

VARIÁVEIS	IDENTIFICAÇÃO	FORMATO
UC(I)	Deslocamentos horizontais do painel <u>con</u> siderando a influência dos deslocamentos axiais dos pilares-base rígida na parede.	F10.0
US(I)	Deslocamentos horizontais do painel sem considerar a influência dos deslocamentos axiais dos pilares-base rígida na parede.	F10.0
UE(I)	Deslocamentos horizontais do painel sem considerar a influência dos deslocamentos axiais dos pilares-engastamento e-lástico na parede	F10.0
MW(I)	Momento fletor atuante na parede - Caso (2).	F10.0
MF(I)	Momento fletor atuante no pórtico - Ca-so (2).	F10.4
MT(I)	Momento total atuante no painel - Caso (2).	F10.4
QW(I)	Força cortante atuante na parede - Ca-so (2).	F8.4
QF(I)	Força cortante atuante no pórtico - Ca-so (2).	F8.4
CW(I)	Quinhão de carga recebida pela parede - Caso (2).	F8.4
CF(I)	Quinhão de carga recebido pelo pórtico - Caso (2).	F8.4
MWS(I)	Momento fletor atuante na parede - Caso (1).	F10.4

Tabela 4.3 - Continuação

VARIÁVEIS	IDENTIFICAÇÃO	FORMATO
MFS(I)	Momento fletor atuante no pórtico - Caso (1).	F10.4
QWS(I)	Força cortante atuante na parede - Caso (1).	F8.4
QFS(I)	Força cortante atuante no pórtico - Caso (1).	F10.4
CWS(I)	Quinhão de carga recebida pela parede - Caso (1).	F8.4
CFS(I)	Quinhão de carga recebido pelo pórtico - Caso (1).	F8.4
MWE(I)	Momento fletor atuante na parede - Caso (3).	F10.4
MFE(I)	Momento fletor atuante no pórtico - Caso (3).	F10.4
QWE(I)	Força cortante atuante na parede - Caso (3).	F8.4
QFE(I)	Força cortante atuante no pórtico - Caso (3).	F10.4
CWE(I)	Quinhão de carga recebida pela parede - Caso (3).	F8.4
CFE(I)	Quinhão de carga recebido pelo pórtico - Caso (3).	F8.4

A seguir apresenta-se uma listagem do PROGRAMA

III.



```
C *****
C *
C *          P R O G R A M A I I I
C *          =====
C *
C *          PAREDE E PORTICO ASSOCIADOS POR BARRAS BI-ARTICULADAS
C *          *****
C *
C *          -CONSIDERANDO A INFLUENCIA DOS DESLOCAMENTOS AXIAIS
C *          DOS PILARES DO PORTICO.
C *
C *
C *****
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION Z(60), U1(60), U2(60), QW1(60), QW2(60), QW(60), CW(60),
      *QF1(60), QF2(60), QF3(60), QF4(60), QF5(60), QF(60), CF1(60), CF2(60), CF3
      *(60), CF4(60), CF(60), UC(60), US(60), CSA(60), SSA(60), CFS(60), QWS(60),
      *CWS(60), QFS(60), UE(60), CSE(60), SSE(60), QWE(30), QFE(30), CWE(30), CFE
      *(30)
      REAL*8 LV, LP, JF1, JW1, JF, JW, K2, K, N, KV, KP, MW1(60), MW2(60), MW(60), KS,
      *MF1(60), MF2(60), MF3(60), MF4(60), MF(60), MT(60), MFC(60), MA, MB, MC, MD,
      *K2S, MWS(60), MFS(60), N1, N2, N3, MWE(30), MFE(30)
      OPEN(2, FILE='PRN')
      WRITE(*, 4)
4  FORMAT(10X, 'IM= \, /)
      READ(*, 5) IM
5  FORMAT(15)

C
C =====
C
C ENTRADA DE DADOS
C
C =====
C
      WRITE(IM, 10)
10  FORMAT(///, 10X, 58(' '), /, 10X, '*'.56X, '*', /, 10X, '* PAREDE E PORTIC
      *O ASSOCIADOS POR BARRAS BI-ARTICULADAS *', /, 10X, '*', 56X, '*', /, 10X,
      *58(' '), //)
      WRITE(IM, 15)
15  FORMAT(10X, 22(' '), /, 10X, '*', 20X, '*', /, 10X, '* DADOS DA ESTRUTURA *
      *', /, 10X, '*', 20X, '*', /, 10X, 22(' '), //)
      WRITE(*, 16)
16  FORMAT(10X, 'P= \, /)
      READ(*, 17) P
17  FORMAT(F10.0)
      WRITE(*, 18)
18  FORMAT(10X, 'F= \, /)
      READ(*, 17) F
      WRITE(*, 19)
19  FORMAT(10X, 'SV= \, /)
      READ(*, 17) SV
      WRITE(*, 20)
20  FORMAT(10X, 'LV= \, /)
      READ(*, 17) LV
```

```
WRITE(*,21)
21 FORMAT(10X,'SA='\,/)
  READ(*,17)SA
  WRITE(*,22)
22 FORMAT(10X,'SB='\,/)
  READ(*,17)SB
  WRITE(*,23)
23 FORMAT(10X,'LP='\,/)
  READ(*,17)LP
  WRITE(*,24)
24 FORMAT(10X,'SF='\,/)
  READ(*,17)SF
  WRITE(*,25)
25 FORMAT(10X,'JF1='\,/)
  READ(*,17)JF1
  WRITE(*,26)
26 FORMAT(10X,'JW1='\,/)
  READ(*,17)JW1
  WRITE(*,28)
28 FORMAT(10X,'KV='\,/)
  READ(*,17)KV
  WRITE(*,30)
30 FORMAT(10X,'KP='\,/)
  READ(*,17)KP
  WRITE(*,32)
32 FORMAT(10X,'E='\,/)
  READ(*,17)E
  WRITE(*,34)
34 FORMAT(10X,'NA='\,/)
  READ(*,36)NA
36 FORMAT(12)
  WRITE(*,38)
38 FORMAT(10X,'GW='\,/)
  READ(*,17)GW
  WRITE(IM,40)P,F,E,NA
40 FORMAT(10X,'CARGA LATERAL',4X,F8.3,/,10X,'FORCA NO TOPO',2X,F10.3,
*/,10X,'MOD. ELASTIC.',1X,F11.2,/,10X,'N= DE ANDARES',9X,13,/)
  WRITE(IM,50)
50 FORMAT(10X,'* VIGA *',10X,'* PILARES *',//,28X,'* P1 *',17X,'* P2
**')
  WRITE(IM,60)SV,SA,SB,LV,LP,LP
60 FORMAT(10X,'AREA',2X,F8.4,4X,'AREA',7X,F8.4,4X,'AREA',7X,F8.4,/,10
*X,'COMP.',1X,F8.4,4X,'PE-DIREITO',1X,F8.4,4X,'PE-DIREITO',1X,F8.4,
*///)
  WRITE(IM,65)
65 FORMAT(10X,22('*'),/,10X,'*',20X,'*',/,10X,'* DESLOC. HORIZONTAL *
*',/,10X,'*',20X,'*',/,10X,22('*'),/)
```

```
C
C =====
C
C INICIO DO CALCULO DO DESLOCAMENTO
C
C =====
C
```

C \*\*\*\*\*  
C 1- CONSIDERANDO O DESLOC. AXIAL  
C BASE RIGIDA - C A S O 2  
C \*\*\*\*\*  
C

H=NA\*LP  
JF=E\*JF1  
JW=E\*JW1  
S1=24\*E\*(KP/LP)\*(KV/(2\*KP+KV))  
R1=S1/LV  
X=-(R1/(E\*LV))\*((1/SA)+(1/SB))  
K2=(SF/JW)+(SF/JF)  
K=DSQRT(K2)  
A1=P\*((SF\*H\*\*2)/(2\*JF))+(SF/(K2\*JF))-1)  
A2=SF\*F\*H/JF  
A=(A1+A2)/(2\*JW\*K2)  
B=-(SF/(6\*K2\*JF\*JW))\*(P\*H+F)  
C=(SF\*P)/(24\*JF\*JW\*K2)  
EP=K2\*DEXP(K\*H)  
EN=K2\*DEXP(-K\*H)  
G=2\*A+6\*B\*H+12\*C\*H\*\*2  
T4=X\*JW\*K  
T1=JW\*K\*\*3\*DEXP(K\*H)  
T2=S1\*K\*DEXP(K\*H)  
T3=X\*JW\*K\*DEXP(K\*H)  
T=-T1+T2-T3+T4  
N1=JW\*K\*\*3\*DEXP(-K\*H)  
N2=S1\*K\*DEXP(-K\*H)  
N3=X\*JW\*K\*DEXP(-K\*H)  
N=N1-N2+N3-T4  
R1=F+JW\*((6\*B)+(24\*C\*H)+(2\*X\*A\*H)+(3\*X\*B\*H\*\*2)+(4\*X\*C\*H\*\*3))  
R2=S1\*((2\*A\*H)+(3\*B\*H\*\*2)+(4\*C\*H\*\*3))  
R3=(-P\*X\*H\*\*3/6)-(F\*X\*H\*\*2/2)  
R=R1-R2+R3  
C4A=(-S1\*K+T)  
C4B=(S1\*K+N)  
C4C=EN\*C4A-EP\*C4B  
C4=-G\*C4A/C4C-R\*EP/C4C  
C3=(R/C4A)-(C4\*C4B/C4A)  
C1=-C3-C4  
C2=K\*(C4-C3)

C  
C \*\*\*\*\*  
C 2- SEM CONSID. O DESLOC. AXIAL  
C BASE RIGIDA - C A S O 1  
C \*\*\*\*\*  
C

C\* FORMULAS DE STAMATO \*

C  
K2S=SF/JW  
KS=DSQRT(K2S)  
CS=DEXP(KS\*H)+DEXP(-KS\*H)  
SS=DEXP(KS\*H)-DEXP(-KS\*H)  
C2S=KS\*(F+P\*H)

C1S=-1/CS\*(2\*P+C2S\*SS)  
C3S=1/CS\*(P-C2S\*DEXP(-KS\*H))  
C4S=1/CS\*(P+C2S\*DEXP(KS\*H))

C  
C \*\*\*\*\*  
C 3- SEM CONSID. Q DESLOC. AXIAL  
C APOIO ELASTICO NA PAREDE - C A S O 3  
C \*\*\*\*\*

C  
C AE=1/(KS\*\*4\*JW)  
C BE=1-(JW/GW\*KS)  
C CE=1+(JW/GW\*KS)  
C DE=(-JW/GW)\*P\*KS  
C FE=(SF\*DEXP(KS\*H))-JW\*K2S\*DEXP(KS\*H)  
C GE=(-SF\*DEXP(-KS\*H))+JW\*K2S\*DEXP(-KS\*H)  
C HE=F/(AE\*KS)+(SF\*KS\*H\*P)  
C C4E1=(P/DEXP(KS\*H))\*(BE\*SF-FE)+(HE-SF\*DE)  
C C4E2=((DEXP(-KS\*H)/DEXP(KS\*H))\*(BE\*SF-FE))+SF\*CE+GE  
C C4E=C4E1/C4E2  
C C3E=(P/DEXP(KS\*H))-(DEXP(-KS\*H)/DEXP(KS\*H)\*C4E)  
C C2E=DE-(BE/DEXP(KS\*H)\*P)+(((DEXP(-KS\*H)/DEXP(KS\*H))\*BE)+CE)\*C4E  
C C1E=-C3E-C4E

C  
C =====  
C  
C DESLOCAMENTOS  
C  
C =====  
C

WRITE(IM,130)  
130 FORMAT(11X,'Z(M)',9X,'CASO1',8X,'CASO2',8X,'CASO3',/)  
DO 150 I=0,NA  
Z(I)=I\*LP  
U1(I)=C1+C2\*Z(I)+C3\*DEXP(K\*Z(I))+C4\*DEXP(-K\*Z(I))  
U2(I)=A\*(Z(I)\*\*2)+B\*(Z(I)\*\*3)+C\*(Z(I)\*\*4)  
UC(I)=U1(I)+U2(I)  
US(I)=1/(KS\*\*4\*JW)\*(C1S+C2S\*KS\*Z(I)+C3S\*DEXP(KS\*Z(I))+C4S\*DEXP(-KS\*Z(I))-P\*K2S/2\*(Z(I)\*\*2))  
UE(I)=AE\*(C1E+C2E\*KS\*Z(I)+C3E\*DEXP(KS\*Z(I))+C4E\*DEXP(-KS\*Z(I)))-((P\*\*K2S/2)\*Z(I)\*\*2))  
WRITE(IM,140)Z(I),US(I),UC(I),UE(I)  
140 FORMAT(10X,F5.2,4X,F10.5,3X,F10.5,3X,F10.5)  
150 CONTINUE

C  
C =====  
C  
C ESFORCOS  
C  
C =====  
C  
C \* C A S O 2 \*  
C

WRITE(IM,155)  
155 FORMAT(//////////,10X,35('\*'),/,10X,'\*',33X,'\*',/,10X,'\* ESFORCO

```
*S NA PAREDE E NO PORTICO *',/,10X,'*',33X,'*',/,10X,'* -COM DESLOC
*. AXIAL NOS PILARES *',/,10X,'*',33X,'*',/,10X,'*',33X,'*',/,10X,
*x35('*'))
WRITE(IM,157)
157 FORMAT(/,10X,'* - BASE RIGIDA - CASO2 *')
WRITE(IM,160)
160 FORMAT(//,3X,'Z(H)',5X,'MW',9X,'MF',10X,'MT',9X,'QW',9X,'QF',7X,'C
*W',8X,'CF',/)
DO 180 I=0,NA
Z(I)=I*LP
MW1(I)=K2*C3*DEXP(K*Z(I))+K2*C4*DEXP(-K*Z(I))
MW2(I)=2*A+6*B*Z(I)+12*C*(Z(I)**2)
MW(I)=JW*(MW1(I)+MW2(I))
QW1(I)=K**3*C3*DEXP(K*Z(I))-(K**3*C4*DEXP(-K*Z(I)))
QW2(I)=6*B+24*C*Z(I)
QW(I)=-JW*(QW1(I)+QW2(I))
CW(I)=JW*((K**4*C3*DEXP(K*Z(I)))+(K**4*C4*DEXP(-K*Z(I)))+24*C)
QF1(I)=C2+K*C3*DEXP(K*Z(I))-K*C4*DEXP(-K*Z(I))
QF2(I)=2*A*Z(I)+3*B*(Z(I)**2)+4*C*(Z(I)**3)
QF3(I)=P*H**2*Z(I)/2-P*H*(Z(I)**2)/2+P/6*(Z(I)**3)+F*H*Z(I)-(F/2*(
*Z(I)**2))
QF4(I)=K*C3*DEXP(K*Z(I))-(K*C4*DEXP(-K*Z(I)))
QF5(I)=2*A*Z(I)+3*B*(Z(I)**2)+4*C*(Z(I)**3)-K*C3+K*C4
QF(I)=S1*(QF1(I)+QF2(I))+X*(QF3(I)-JW*(QF4(I)+QF5(I)))
CF1(I)=K2*C3*DEXP(K*Z(I))+K2*C4*DEXP(-K*Z(I))
CF2(I)=2*A+6*B*Z(I)+12*C*(Z(I)**2)
CF3(I)=(P*H**2/2)-(P*H*Z(I))+(P/2*(Z(I)**2))+F*H-F*Z(I)
CF4(I)=K2*C3*DEXP(K*Z(I))+K2*C4*DEXP(-K*Z(I))+2*A+6*B*Z(I)+(12*C*
*(Z(I)**2))
CF(I)=-S1*(CF1(I)+CF2(I))-X*(CF3(I)-JW*CF4(I))
MA=C2*H+C3*DEXP(K*H)+C4*DEXP(-K*H)
MB=A*(H**2)+B*(H**3)+C*(H**4)
MC=P/8*(H**4)+F*(H**3)/3
MD=C3*DEXP(K*H)+C4*DEXP(-K*H)+A*H**2+B*H**3+C*H**4-K*C3*H+K*C4*H
MF1(I)=C2*Z(I)+C3*DEXP(K*Z(I))+C4*DEXP(-K*Z(I))
MF2(I)=A*(Z(I)**2)+B*(Z(I)**3)+C*(Z(I)**4)
MF3(I)=P/24*(Z(I)**4)-((P/6*H+F/6)*(Z(I)**3))+((P*H**2/4+F*H/2)*(Z
(I)**2))
MF4(I)=C3*DEXP(K*Z(I))+C4*DEXP(-K*Z(I))+A*(Z(I)**2)+(B*(Z(I)**3))+
*(C*(Z(I)**4))-(K*C3*Z(I))+K*C4*Z(I))
MF(I)=+S1*(MA+MB)+X*(MC-JW*(MD))-S1*(MF1(I)+MF2(I))-X*(MF3(I)-JW*(
*MF4(I)))
MT(I)=P/2*((H-Z(I))**2)+F*(H-Z(I))
WRITE(IM,170)Z(I),MW(I),MF(I),MT(I),QW(I),QF(I),CW(I),CF(I)
170 FORMAT(2X,F5.2,1X,F10.4,1X,F10.4,2X,F10.4,3X,F8.4,3X,F8.4,1X,F8.4,
*2X,F8.4,/)
180 CONTINUE
C
C * C A S O 1 *
C
WRITE(IM,190)
190 FORMAT(////////,10X,35('*'),/,10X,'*',33X,'*',/,10X,'* ESFORÇOS NA
*PAREDE E NO PORTICO *',/,10X,'*',33X,'*',/,10X,'* -SEM DESLOC. AXI
*AL NOS PILARES *',/,10X,'*',33X,'*',/,10X,'*',33X,'*',/,10X,35('*
```

```
*'))
WRITE(IM,195)
195 FORMAT(/,10X,'* - BASE RIGIDA - CASO1 *')
WRITE(IM,200)
200 FORMAT(//,3X,'Z(M)',6X,'MWS',8X,'MFS',8X,'QWS',8X,'QFS',9X,'CWS',1
*OX,'CFS',/)
DO 220 I=0,NA
Z(I)=I*LP
CSA(I)=C3S*DEXP(KS*Z(I))+C4S*DEXP(-KS*Z(I))
SSA(I)=C3S*DEXP(KS*Z(I))-C4S*DEXP(-KS*Z(I))
MWS(I)=(H**2/(KS*H)**2)*(CSA(I)-P)
QWS(I)=-H/(KS*H)*SSA(I)
CWS(I)=CSA(I)
QFS(I)=P*H*(1-Z(I)/H)+(H*SSA(I)/(KS*H))+F
CFS(I)=P-CSA(I)
MFS(I)=(H**2/(KS*H)**2)*(P-CSA(I))+(P*H**2/2)*((1-Z(I)/H)**2)+F*(H
**2*(1-Z(I)/H))
WRITE(IM,210)Z(I),MWS(I),MFS(I),QWS(I),QFS(I),CWS(I),CFS(I)
210 FORMAT(2X,F5.2,2X,F10.4,1X,F10.4,2X,F8.4,2X,F10.4,4X,F8.4,5X,F8.4,
*/)
220 CONTINUE
C
C * C A S O 3 *
C
WRITE(IM,230)
230 FORMAT(////////,10X,35('*'),/,10X,'*',33X,'*',/,10X,'* ESFORCOS NA
*PAREDE E NO PORTICO *',/,10X,'*',33X,'*',/,10X,'* -SEM DESLOC. AXI
*AL NOS PILARES *',/,10X,'*',33X,'*',/,10X,'*',33X,'*',/,10X,35('*
*'))
WRITE(IM,235)
235 FORMAT(/,10X,'* -COM ENGAST. ELASTICO NA PAREDE - CASO3 *')
WRITE(IM,240)
240 FORMAT(//,3X,'Z(M)',6X,'MWE',8X,'MFE',7X,'QWE',9X,'QFE',9X,'CWE',1
*OX,'CFE',/)
DO 260 I=0,NA
Z(I)=I*LP
CSE(I)=C3E*DEXP(KS*Z(I))+C4E*DEXP(-KS*Z(I))
SSE(I)=C3E*DEXP(KS*Z(I))-C4E*DEXP(-KS*Z(I))
MWE(I)=(H**2/(KS*H)**2)*(CSE(I)-P)
QWE(I)=-H/(KS*H)*SSE(I)
CWE(I)=CSE(I)
QFE(I)=P*H*(1-Z(I)/H)+(H*SSE(I)/(KS*H))+F
CFE(I)=P-CSE(I)
MFE(I)=(H**2/(KS*H)**2)*(P-CSE(I))+(P*H**2/2)*((1-Z(I)/H)**2)+F*(H
**2*(1-Z(I)/H))
WRITE(IM,250)Z(I),MWE(I),MFE(I),QWE(I),QFE(I),CWE(I),CFE(I)
250 FORMAT(2X,F5.2,2X,F10.4,1X,F10.4,2X,F8.4,2X,F10.4,4X,F8.4,5X,F8.4,
*/)
260 CONTINUE
STOP
END
```

4.2 - Associação de parede e pórtico por barras biarticuladas considerando a influência dos deslocamentos axiais dos pilares e o efeito de 2ª ordem

Prosseguindo a análise de painéis planos, pretende-se, neste item, estudar o efeito de 2ª ordem em associações de parede e pórtico.

Analisa-se, primeiramente, a parede isolada sendo submetida a uma força  $F$  concentrada no topo, a um carregamento  $p$  uniformemente distribuído ao longo da altura  $H$  e a um carregamento  $p_w$  uniformemente distribuído ao longo do eixo vertical passando pelo centro de gravidade da seção transversal da mesma, conforme fig. 4.9-a.

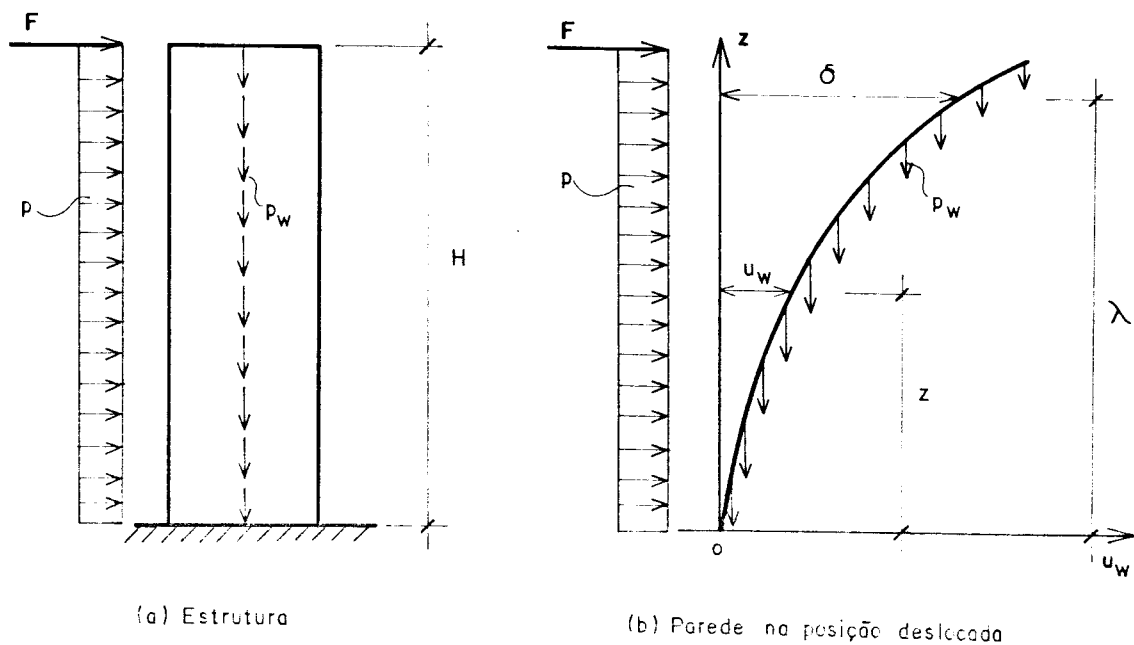


Fig. 4.9 - Paineis parede isolado

O momento fletor a uma cota  $z$  da base da parede (fig. 4.9-b) é dado por:

$$M_w = \int_z^H p_w (\delta - u_w) d\lambda + \frac{p(H-z)^2}{2} + F(H-z) \quad (4.52)$$

Resolvendo-se a integral da equação (4.52), encontra-se:

$$M_w = p_w \left( \frac{\delta^2(H)}{2} - \frac{\delta^2(z)}{2} \right) - p_w u_w (H-z) + \frac{p(H-z)^2}{2} + F(H-z) \quad (4.53)$$

Derivando-se uma vez a equação (4.53), obtém-se:

$$\frac{dM_w}{dz} = - p_w \delta(z) + p_w u_w - p_w (H-z) u_w' - p(H-z) - F \quad (4.54)$$

A uma cota  $z$  da base o deslocamento  $u_w = \delta(z)$ . Combinando-se a equação (2.1) com a equação (4.54), pode-se escrever:

$$V_w = p_w (H-z) u_w' + p(H-z) + F \quad (4.55)$$

Nota-se o acréscimo de uma parcela na equação da força cortante externa (equação (4.55)), parcela esta produzida pela ação das cargas verticais.

Substituindo-se a equação (2.5) na equação (4.55), e tendo em vista a equação (4.6), escreve-se a força cortante do carregamento lateral na parede como:

$$V_{\ell w} = - j_w u_w''' - p_w (H-z) u_w' \quad (4.56)$$

onde

$$V_{\ell w} = p(H-z) + F \quad (4.57)$$

- Desenvolvimento da equação diferencial para o painel parede e pórtico

A expressão do esforço cortante no pórtico, considerando-se o efeito de 2ª ordem, já foi desenvolvida no capítulo 3, e é dada conforme a equação (3.88):



$$\begin{aligned}
 v_{\ell_f}'' = & \left[ c_1 \ell_v - (p_1+p_2)(H-z) \right] u_f''' + 2(p_1+p_2) u_f'' \\
 & - d_1 \ell_v \left\{ \left( \frac{p_1}{ES_A} - \frac{p_2}{ES_B} \right) - \frac{1}{\ell_v} \left( \frac{1}{ES_A} + \frac{1}{ES_B} \right) \left[ v_{\ell_f} \right. \right. \\
 & \left. \left. + (p_1+p_2)(H-z) u_f' \right] \right\} \quad (3.88)
 \end{aligned}$$

Lembrando-se de que:

$v = v_{\ell_{total}} = v_{\ell_w} + v_{\ell_f}$ , conforme equação (2.11), e substituindo-se a equação (4.56) na equação (2.11), pode-se também escrever  $v_{\ell_f}$  como:

$$v_{\ell_f} = v + j_w u_w''' + p_w (H-z) u_w' \quad (4.58)$$

Combinando-se a equação (4.58) e a sua segunda derivada com a equação (3.88) e considerando-se  $u_w = u_f = u$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 v'' + j_w u^V + p_w (H-z) u''' - 2p_w u'' = & \left[ c_1 \ell_v - (p_1+p_2)(H-z) \right] u''' \\
 + 2(p_1+p_2) u'' - d_1 \ell_v \left( \frac{p_1}{ES_A} - \frac{p_2}{ES_B} \right) + d_1 \left( \frac{1}{ES_A} + \frac{1}{ES_B} \right) \left[ v \right. \\
 & \left. + j_w u''' + p_w (H-z) u' + (p_1+p_2)(H-z) u' \right] \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

Substituindo-se a equação (4.6) e a sua segunda derivada na equação (4.59) e rearranjando-a, encontra-se:

$$a_1 u^V + \left[ a_2 - \frac{1}{2} (H-z) \right] u''' + u'' + a_3 (H-z) u' = a_4 (H-z) + a_5 \quad (4.60)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-j_w}{2p_t} \\ a_2 &= \frac{c_1 \ell_v}{2p_t} + \frac{d_1 j_w}{2Ep_t} \left( \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) \\ a_3 &= \frac{d_1}{2E} \left( \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) \\ a_4 &= \frac{-d_1 p}{2Ep_t} \left( \frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) \\ a_5 &= \frac{-d_1}{2Ep_t} \left( \frac{F - p_1 \ell_v}{S_A} + \frac{F + p_2 \ell_v}{S_B} \right) \end{aligned} \quad (4.61)$$

e

$$p_t = p_w + p_1 + p_2$$

Analogamente ao caso do painel pórtico, transforma-se a equação (4.60) em forma adimensional. A equação obtida  do tipo:

$$A_1 u^V + \left[ A_2 - \frac{1}{2} (1-\eta) \right] u''' + u'' + A_3 (1-\eta) u' = A_4 (1-\eta) + A_5 \quad (4.62)$$

sendo:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a_1}{H^3} \\ A_2 &= \frac{a_2}{H} \\ A_3 &= a_3 H^2 \\ A_4 &= a_4 H^3 \\ A_5 &= a_5 H^2 \end{aligned} \quad (4.63)$$

lembrando-se de que, agora, o deslocamento  $u$  está em função de  $\eta$ .

- Resolução da equação diferencial

Considerando-se o efeito de 2ª ordem, o comportamento do modelo estrutural parede e pórtico passa a ser expresso através de uma equação diferencial de 5ª ordem, cuja solução é obtida através da substituição dos operadores gerados do Método das Diferenças Finitas, desenvolvidos no apêndice B.2.

A rede de pontos das diferenças finitas passa a ser constituída de  $n$  pontos, sendo 5 pontos fictícios e  $n-5$  pontos pertencentes à estrutura, todos espaçados de  $h$ , como mostra a figura 4.10.

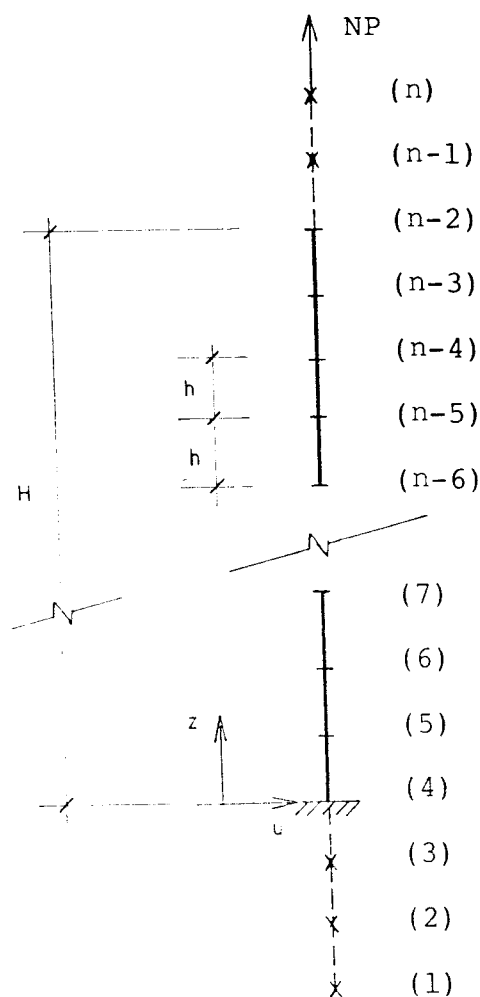


Fig. 4.10 - Rede de pontos

O sistema de equações é obtido pela aplicação dos operadores das diferenças finitas centrais (equações B.16), que envolvem três pontos à direita e três pontos à esquerda do ponto de aplicação (i), na equação (4.62), nos pontos 4 a n-3. Portanto, a equação (4.62) em diferenças finitas fica escrita como:

$$\begin{aligned}
 & \left[ -180A_1 + 45G_1(i) + \frac{4}{N_S^3} - 6G_2(i) \right] U(i-3) + \left[ 720A_1 - 360G_1(i) \right. \\
 & \left. - \frac{54}{N_S^3} + 54G_2(i) \right] U(i-2) + \left[ -900A_1 + 585G_1(i) + \frac{540}{N_S^3} \right. \\
 & \left. - 270G_2(i) \right] U(i-1) - \frac{980}{N_S^3} U(i) + \left[ 900A_1 - 585G_1(i) + \frac{540}{N_S^3} \right. \\
 & \left. + 270G_2(i) \right] U(i+1) + \left[ -720A_1 + 360G_1(i) - \frac{54}{N_S^3} - 54G_2(i) \right] U(i+2) \\
 & + \left[ 180A_1 - 45G_1(i) + \frac{4}{N_S^3} + 6G_2(i) \right] U(i+3) = \frac{360}{N_S^5} \left[ A_4(1-\eta(i)) + A_5 \right]
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 G_1(i) &= \frac{1}{N_S^2} \left[ A_2 - \frac{1}{2} (1-\eta(i)) \right] \\
 G_2(i) &= \frac{1}{N_S^4} \left[ A_3(1-\eta(i)) \right]
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

e  $N_S$  é definido pela expressão (3.102).

A equação (4.62) em diferenças finitas, para o topo (ponto n-2), é obtida pela substituição dos operadores assimétricos à direita (equações B.17), que envolvem quatro pontos à esquerda e dois à direita. Assim, encontra-se a seguinte expressão para o topo do painel:

$$\begin{aligned}
 & \left[ 180A_1 - 45G_1(n-2) + \frac{4}{N_S^3} + 6G_2(n-2) \right] U(n-6) + \left[ -1440A_1 \right. \\
 & + 360G_1(n-2) - \frac{24}{N_S^3} - 48G_2(n-2) \left. \right] U(n-5) + \left[ 4500A_1 \right. \\
 & - 1305G_1(n-2) + \frac{30}{N_S^3} + 180G_2(n-2) \left. \right] U(n-4) + \left[ -7200A_1 \right. \\
 & + 2160G_1(n-2) + \frac{400}{N_S^3} - 480G_2(n-2) \left. \right] U(n-3) + \left[ 6300A_1 \right. \\
 & - 1575G_1(n-2) - \frac{840}{N_S^3} + 210G_2(n-2) \left. \right] U(n-2) + \left[ -2880A_1 \right. \\
 & + 360G_1(n-2) + \frac{456}{N_S^3} + 144G_2(n-2) \left. \right] U(n-1) + \left[ 540A_1 \right. \\
 & + 45G_1(n-2) - \frac{26}{N_S^3} - 12G_2(n-2) \left. \right] U(n) = \frac{360}{N_S^5} \left[ A_4(1-\eta_{(n-2)}) + A_5 \right]
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 G_1(n-2) &= \frac{1}{N_S^2} \left[ A_2 - \frac{1}{2} (1-\eta_{(n-2)}) \right] \\
 G_2(n-2) &= \frac{1}{N_S^4} \left[ A_3(1-\eta_{(n-2)}) \right]
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

- Condições de contorno:

As condições de contorno na base, supondo-se engastamento rígido, são:

$$u(o) = 0 \tag{4.68}$$

$$u'(o) = 0 \tag{4.69}$$

$$v_A(o) = 0 \quad e \quad v_B(o) = 0 \tag{4.70}$$

Tendo em vista as equações (2.11), (3.27), (3.86) e (4.56), pode-se escrever:

$$p(H-z) + F = -j_w u''' + c_1 \ell_v u' - p_t (H-z) u' - d_1 \ell_v (v_A - v_B) \quad (4.71)$$

que, combinada com a terceira condição de contorno (4.70), fica definida em adimensional:

$$-j_w u'''(0) + B_1 u'(0) = H^3 (pH+F) \quad (4.72)$$

onde:

$$\begin{aligned} B_2 &= c_1 \ell_v H^2 \\ B_3 &= p_t H^3 \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$B_1 = B_2 - B_3$$

As condições de contorno do topo, supondo-se não existirem momentos e forças normais aplicados neste ponto ( $\eta=1$ ), são:

$$u''(1) = 0 \quad (4.74)$$

$$v'_A(1) = 0 \quad \text{e} \quad v'_B(1) = 0 \quad (4.75)$$

Substituindo-se a quinta condição de contorno (4.75) na primeira derivada da equação (4.71), encontra-se:

$$-j_w u^{IV}(1) + B_2 u''(1) + B_3 u'(1) = -pH^4 \quad (4.76)$$

Substituindo-se os operadores das diferenças finitas centrais (equações (B.16)) nas condições de contorno da base, obtêm-se:

$$U(4) = 0 \quad (4.77)$$

$$- 4U(1) + 36U(2) - 180U(3) + 180U(5) - 36U(6) + 4U(7) = 0 \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} & (-30j_w - \frac{4}{N_S^2} B_1)U(1) + (240j_w + \frac{36}{N_S^2} B_1)U(2) + (-390j_w - \frac{180}{N_S^2} B_1)U(3) \\ & + (390j_w + \frac{180}{N_S^2} B_1)U(5) + (-240j_w - \frac{36}{N_S^2} B_1)U(6) \\ & + (30j_w + \frac{4}{N_S^2} B_1)U(7) = \frac{240}{N_S^3} (pH^4 + FH^3) \end{aligned} \quad (4.79)$$

Para o topo, utilizam-se os operadores das diferenças finitas assimétricas à direita (equações (B.17)) que, substituídos na quarta e na quinta condição de contorno, resultam:

$$\begin{aligned} & 4U(n-6) - 24U(n-5) + 30U(n-4) + 400U(n-3) - 840U(n-2) \\ & + 456U(n-1) - 26U(n) = 0 \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} & \left[ 60j_w + \frac{4}{N_S^2} B_2 + \frac{6}{N_S^3} B_3 \right] U(n-6) + \left[ -360j_w - \frac{24}{N_S^2} B_2 \right. \\ & \left. - \frac{48}{N_S^3} B_3 \right] U(n-5) + \left[ 540j_w + \frac{30}{N_S^2} B_2 + \frac{180}{N_S^3} B_3 \right] U(n-4) + \left[ 240j_w \right. \\ & \left. + \frac{400}{N_S^2} B_2 - \frac{480}{N_S^3} B_3 \right] U(n-3) + \left[ -1260j_w - \frac{840}{N_S^2} B_2 + \frac{210}{N_S^3} B_3 \right] U(n-2) \\ & + \left[ 1080j_w + \frac{456}{N_S^2} B_2 + \frac{144}{N_S^3} B_3 \right] U(n-1) + \left[ -300j_w - \frac{26}{N_S^2} B_2 \right. \\ & \left. - \frac{12}{N_S^3} B_3 \right] U(n) = \frac{-360}{N_S^4} pH^4 \end{aligned} \quad (4.81)$$

O sistema de equações fica assim formado pela equação (4.64) (aplicada aos pontos 4, 5 ... n-3), pela equação (4.66) e pelas condições de contorno. A resolução deste sistema de  $n$  equações a  $n$  incógnitas fornece os valores dos deslocamentos horizontais do painel em estudo.

#### 4.2.1 - Exemplo numérico 2

Para efeito de comparação, utiliza-se o exemplo 2 da associação de parede e pórtico mostrado na fig. 4.1.

A tabela 4.4, apresentada a seguir, fornece os deslocamentos horizontais ao longo da altura, sendo utilizada para os casos 1 e 2 a mesma definição mencionada no item 4.1.2, mudando-se a definição do caso 3 e acrescentando-se o caso 4:

Caso (3) - Parede e pórtico associados por barras biarticuladas, sem considerar a influência dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico e considerando-se o efeito de 2ª ordem.

Caso (4) - Parede e pórtico associados por barras biarticuladas, considerando-se a influência dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico e o efeito de 2ª ordem.

Os deslocamentos horizontais dos casos 1, 2, 3, 4 da tabela 4.4 foram obtidos com a introdução de diferentes entradas de dados, sendo:

Caso (1) - Introduziu-se uma carga vertical uniformemente distribuída ao longo dos pilares e paredes ( $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_w$ ) de valor aproximadamente zero (anulando o efeito de 2ª ordem) e uma área ( $S_A$  e  $S_B$ ) "infinita" para os pilares (sem considerar a influência dos deslocamentos axiais dos pilares);



CASO (2) - Introduziu-se  $p_1 = p_2 \cong 0$ ,  $p_w = 0$  e  $S_A = S_B = 0,16m^2$  (considerando-se a influência dos deslocamentos axiais dos pilares);

CASO (3) - Introduziu-se  $p_1 = p_2 = 45kN/m$ ,  $p_w = 10kN/m$  considerando-se o efeito de 2ª ordem) e  $S_A = S_B \cong \infty$ ;

CASO (4) - Introduziu-se  $p_1 = p_2 = 45kN/m$ ,  $p_w = 10kN/m$  e  $S_A = S_B = 0,16m^2$  (considerando-se a influência dos deslocamentos axiais dos pilares e o efeito de 2ª ordem).

Comparando-se os resultados da tabela 4.4, para os casos (1) e (2), com os resultados fornecidos pela listagem apresentada no item 4.1.2, nota-se um acréscimo no deslocamento do topo do painel de 5,6% para o caso (1) e 3,2% para o caso (2). Esta diferença é justificada pelo comportamento de cada modelo estrutural, sendo que no item 4.1 o modelo se expressa através de uma equação diferencial de 4ª ordem e resolvida analiticamente, enquanto que no item 4.2 o modelo fica representado através de uma equação diferencial de 5ª ordem cuja resolução foi encontrada mediante a utilização de um método numérico.

Analisando-se apenas os deslocamentos horizontais no topo do painel, observa-se um acréscimo de 13% no caso (3) quando comparado com o caso (1), devido à consideração do efeito de 2ª ordem; esta diferença aumenta para aproximadamente 112% quando se leva também em consideração a influência dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico (caso (4)). O comportamento de cada caso pode ser melhor visualizado na figura 4.10 que representa as elásticas para os diversos casos.

Na tabela 4.5 apresentam-se os valores dos deslocamentos horizontais no topo do painel, variando-se as cargas verticais até o valor da carga crítica citada em XAVIER [16]. Nota-se um valor muito próximo ao da carga crítica a-

presentada em XAVIER [16] ( $P_{crít} = 581,90\text{kN/m}$ ) com o resultado obtido no caso (3) ( $P_{crít} = 600,00\text{kN/m}$ ). Esta carga de cresce para  $p_t = 450\text{kN/m}$  quando se considera a influência dos deslocamentos axiais dos pilares.

Tabela 4.4 - Deslocamentos horizontais do painel parede e pórtico (m).

Z (m)	CASO (1)	CASO (2)	CASO (3)	CASO (4)
	Sem Axial Sem 2ª Ordem	Com Axial Sem 2ª Ordem	Sem Axial Com 2ª Ordem	Com Axial Com 2ª Ordem
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3,0	0,0058	0,0066	0,0066	0,0081
6,0	0,0205	0,0238	0,0236	0,0291
9,0	0,0406	0,0478	0,0471	0,0593
12,0	0,0638	0,0765	0,0745	0,0957
15,0	0,0885	0,1081	0,1037	0,1364
18,0	0,1136	0,1414	0,1334	0,1794
21,0	0,1383	0,1755	0,1626	0,2237
24,0	0,1622	0,2097	0,1905	0,2682
27,0	0,1848	0,2437	0,2167	0,3123
30,0	0,2059	0,2771	0,2409	0,3554
33,0	0,2254	0,3094	0,2630	0,3972
36,0	0,2431	0,3407	0,2828	0,4373
39,0	0,2591	0,3707	0,3002	0,4755
42,0	0,2733	0,3994	0,3154	0,5118
45,0	0,2856	0,4265	0,3284	0,5461
48,0	0,2964	0,4524	0,3394	0,5785
51,0	0,3055	0,4768	0,3485	0,6090
54,0	0,3133	0,5000	0,3560	0,6379
57,0	0,3200	0,5223	0,3623	0,6656
60,0	0,3261	0,5440	0,3679	0,6925

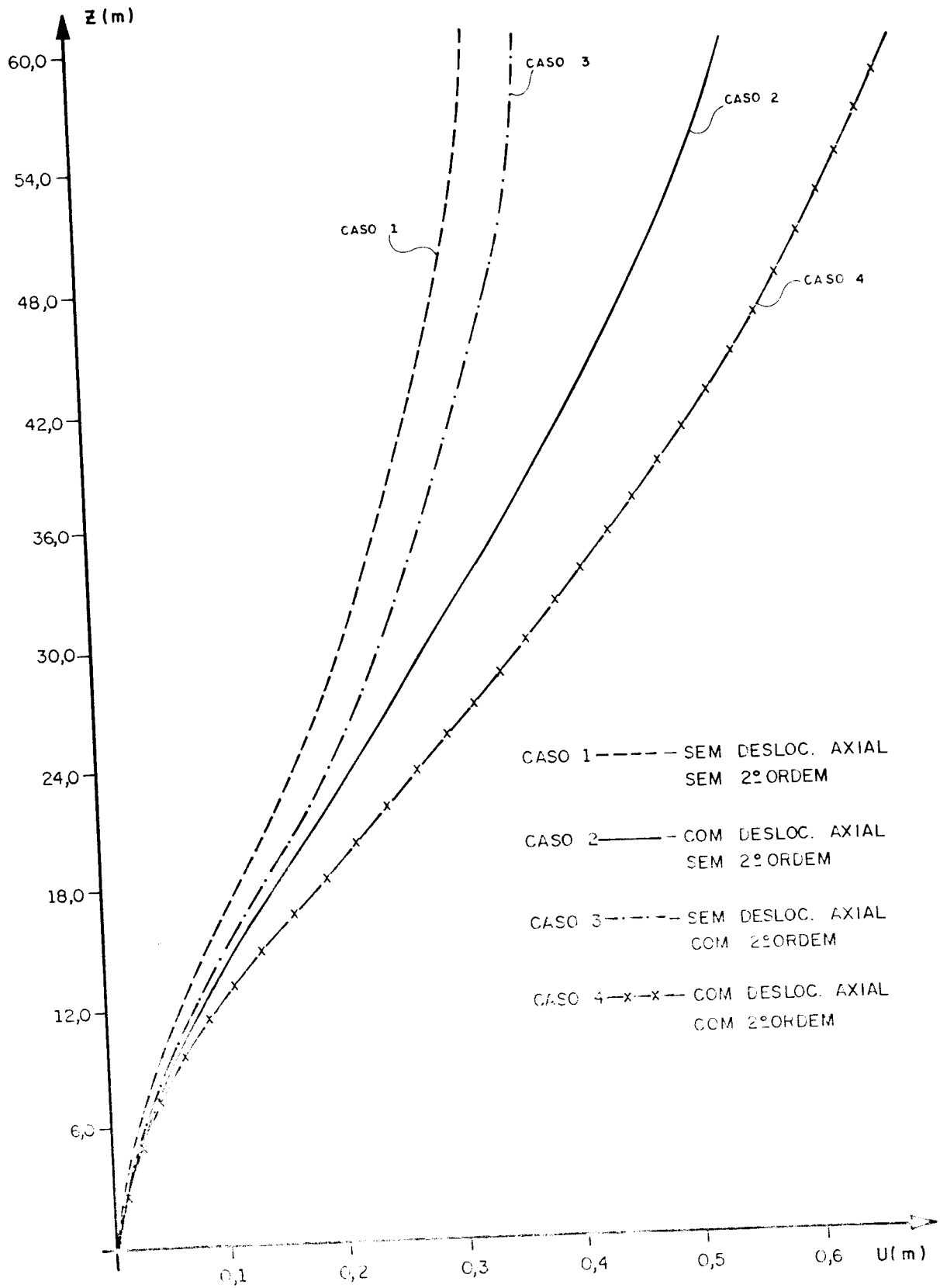


Fig. 4.10 - Deslocamentos horizontais - Exemplo 2

Tabela 4.5 - Deslocamentos horizontais no topo do painel pa rede e p $\acute{o}$ rtico (m).

$P_t$ (kN/m)	$P_1$	$P_2$	$P_w$	XAVIER[16]	CASO 3	CASO 4
0,00	0,00	0,00	0,00	0,307	0,326	0,544
50,00	20,00	20,00	10,00	0,333	0,345	0,608
100,00	45,00	45,00	10,00	0,365	0,368	0,692
150,00	70,00	70,00	10,00	0,404	0,396	0,808
200,00	95,00	95,00	10,00	0,452	0,432	0,975
250,00	120,00	120,00	10,00	0,515	0,478	1,207
300,00	145,00	145,00	10,00	0,600	0,540	1,723
350,00	170,00	170,00	10,00	0,721	0,629	2,875
400,00	190,00	190,00	20,00	0,909	0,764	9,209
450,00	220,00	220,00	10,00	1,239	0,992	-7,29
500,00	240,00	240,00	20,00	1,983	1,464	-
550,00	270,00	270,00	10,00	5,269	2,994	-
581,90	290,00	290,00	1,90	-54,051	10,238	-
600,00	290,00	290,00	20,00	-	-24,171	-

#### 4.2.2 - Programa IV

Desenvolveu-se um novo programa para a resolu $\c{o}$  da equa $\c{c}$ o $\~{a}$ o diferencial de 5 $^{\text{a}}$  ordem deduzida no item 4.2, que consiste de um programa principal e de uma subrotina. A subrotina denominada SOLUC, desenvolvida por GAUSS-JORDAN, resolve o sistema de equa $\c{c}$ o $\~{e}$ s gerado pelo M $\acute{e}$ todo das Diferen $\c{c}$ as Finitas.

A entrada de dados baseia-se praticamente nas mes mas vari $\acute{a}$ veis descritas na tabela 4.2, excluindo-se as vari $\acute{a}$ veis IM, SF, JF1, GW e acrescentando-se as vari $\acute{a}$ veis identificadas na tabela 4.6, tendo como  $\acute{u}$ nica vari $\acute{a}$ vel de sa $\acute{i}$ da o deslocamento horizontal do painel.

VARIÁVEIS	IDENTIFICAÇÃO	FORMATO
P1	carga vertical uniformemente dis- tribuída no pilar 1	F10.0
P2	carga vertical uniformemente dis- tribuída no pilar 2	F10.0
$p_w$	carga vertical uniformemente dis- tribuída na parede	F10.0
CP	comprimento da parede	F10.0
H	altura do painel	F10.0
NS	número de subdivisões da rede de pontos	I3
U(I)	deslocamentos horizontais do pai- nel da associação pórtico e parede	F15.8

Segue a listagem do PROGRAMA IV.



```
C*****
C*
C*          P R O G R A M A I V          *
C*          =====                    *
C*
C* SUB R O T I N A 1 - CALCULO DOS DESLOCAMENTOS *
C*                   - PROCESSO DE GAUSS E JORDAN *
C*
C*****
      SUBROUTINE SOLUC(N,A,F)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION F(54),A(54,54)
      NI=N-1
      NS=N+1
C =====
C POSICIONAMENTO DO VETOR CSTE NA COLUNA NS DA MATRIZ A
C =====
      DO 10 I=1,N
      A(I,NS)=F(I)
10  CONTINUE
C =====
C PESQUISA DO MAIOR ELEMENTO DA COLUNA E TROCA DE LINHAS
C =====
      DO 20 L=1,NI
      LS=L+1
      DO 35 I=LS,N
      IF(DABS(A(L,L))-DABS(A(I,L)))40,35,35
40  DO 30 J=L,NS
      PROV=A(L,J)
      A(L,J)=A(I,J)
      A(I,J)=PROV
30  CONTINUE
35  CONTINUE
C =====
C DIVISAO DA LINHA PIVOT POR A(L,L)
C =====
      PIV=A(L,L)
      DO 50 J=L,NS
      A(L,J)=A(L,J)/PIV
C =====
C TRIANGULARIZANDO A MATRIZ
C =====
      DO 20 I=LS,N
      M=0
      ELEM=A(I,L)
      DO 20 J=L,NS
      A(I,J)=A(I,J)-ELEM*A(L,J)
C =====
C TESTE DO SISTEMA
C =====
      IF(J-NS)60,70,70
60  IF(DABS(A(I,J))-0.1D-16)20,20,80
80  M=1
      GO TO 20
```

```
70 IF(M)90,90,20
90 IF(DABS(A(I,J))-0.1D-16)100,100,110
100 WRITE(6,140)
140 FORMAT(5(/),20X,'SOLUCAO INDETERMINADA')
STOP
110 WRITE(6,150)
150 FORMAT(5(/),20X,'SOLUCAO IMPOSSIVEL')
STOP
20 CONTINUE
A(N,NS)=A(N,NS)/A(N,N)
A(N,N)=1.
C =====
C DIAGONALIZACAO DE JORDAN
C =====
DO 120 I=1,NI
IS=I+1
DO 120 K=IS,N
VAL=A(I,K)
DO 120 J=K,NS
120 A(I,J)=A(I,J)-VAL*A(K,J)
C =====
C DESLOCAMENTOS
C =====
DO 130 I=1,N
130 F(I)=A(I,NS)
RETURN
STOP
END
C
C*****
C*
C*
C* PAREDE E PORTICO ASSOCIADOS POR BARRAS BI-ARTICULADAS *
C* ***** *
C*
C* -CONSIDERANDO A INFLUENCIA DOS DESLOCAMENTOS AXIAIS *
C* DOS PILARES E O EFEITO DE SEG.ORDEM. *
C*
C* -APLICACAO DO METODO DAS DIFERENCAS FINITAS-GRAU 6 *
C* *
C*****
C IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C DIMENSION ETA(54),AIND(54),G1(54),G2(54),G1A(54),G2A(54),U(54)
C REAL*8 KV,KP,LV,LP,JW,JW1,MP(54,54)
C OPEN(5,FILE='C:REG1.DAT',FORM='FORMATTED')
C OPEN(6,FILE='REG.RES',STATUS='NEW',FORM='FORMATTED')
C
C=====
C
C E N T R A D A D E D A D O S
C
C=====
C
READ(5,10)P,F,P1,P2,PW
```



```
10 FORMAT(/,5F10.0)
   READ(5,20)KV, LV, KP, LP, CP, JW1
20 FORMAT(/,6F10.0)
   READ(5,30)SA, SB, SV
30 FORMAT(/,3F10.0)
   READ(5,40)H, E
40 FORMAT(/,2F10.0)
   READ(5,50)NS
50 FORMAT(/, I3)
   WRITE(6,60)
60 FORMAT(//,10X,57('*'),/,10X, '*',55X, '*',/,10X, '* PAREDE E PORTICO
   *ASSOCIADOS POR BARRAS BI-ARTICULADAS *',/,10X, '*',55X, '*',/,10X, '*
   * -DESLOC. AXIAIS NOS PILARES DO PORTICO',16X, '*',/,10X, '* -2=ORDEN
   *',46X, '*',/,10X, '*',55X, '*',/,10X,57('*'),//)
   WRITE(6,70)
70 FORMAT(10X,22('*'),/,10X, '*',20X, '*',/,10X, '* DADOS DA ESTRUTURA *
   *',/,10X, '*',20X, '*',/,10X,22('*'),//)
   WRITE(6,80)P, F, E, NS
80 FORMAT(10X, 'CARGA LATERAL',4X,F8.3,/,10X, 'FORCA NO TOPO',2X,F10.3,
   */,10X, 'MOD. ELASTIC.',1X,F11.2,/,10X, 'N= DE SUBDIV.',9X,I3,//)
   WRITE(6,90)P1,P2
90 FORMAT(10X, '* VIGA *',10X, '* PILARES *',//,28X, '* P1 =',F11.7,1X,
   '**',4X, '* P2 =',F11.7,1X, '*',/)
   WRITE(6,100)SV, SA, SB, LV, LP, LP
100 FORMAT(10X, 'AREA',2X,F8.4,4X, 'AREA',7X,F8.4,4X, 'AREA',7X,F8.4,/,10
   *X, 'COMP.',1X,F8.4,4X, 'PE-DIREITO',1X,F8.4,4X, 'PE-DIREITO',1X,F8.4,
   */)
   JW=JW1*E
   WRITE(6,110)CP, JW
110 FORMAT(10X, '* PAREDE *',//,10X, 'COMP.',3X,F8.4,/,10X, 'JW-',1X,F12.
   *3,///)
```

```
C
C=====
C
C CALCULANDO AS CONSTANTES PARA A EQUACAO DA ELASTICA
C
C=====
C
```

```
PT=P1+P2+PW
C1=(24.*E*KP*KV)/(LP*LV*(2*KP+KV))
BOL=0.0
IF(PT.EQ.BOL)THEN
A1X=0.0
A2X=0.0
A4X=0.0
A5X=0.0
ELSE
D1=C1/LV
A1X=-JW/(2.*PT)
A2X=(C1*LV/(2.*PT))+ (D1*JW/(2.*E*PT))*(1./SA+1./SB)
A4X=(-D1*P/(2.*E*PT))*(1./SA+1./SB)
A5X=(-D1/(2.*E*PT))*(((F-P1*LV)/SA)+((F+P2*LV)/SB))
END IF
A3X=(D1/(2.*E))*(1./SA+1./SB)
```

```
A1=A1X/(H**3)
A2=A2X/H
A3=A3X*(H**2)
A4=A4X*(H**3)
A5=A5X*(H**2)
NP=NS+6
L1=NP-1
L2=NP-2
L3=NP-3
L4=NP-4
L5=NP-5
L6=NP-6
C
C=====
C
C ZERANDO OS VETORES
C
C=====
C
      DO 120 I=1, NP
      ETA(I)=0.0
      AIND(I)=0.0
      G1(I)=0.0
      G2(I)=0.0
120 CONTINUE
C
C=====
C
C CALCULANDO AS COTAS(ETA) E O VETOR INDEPENDENTE(AIND)
C
C=====
C
      AIND(1)=0.0
      AIND(2)=0.0
      AIND(3)=(240./(NS**3))*(P*(H**4)+F*(H**3))
      AIND(4)=0.0
      AIND(5)=-360./(NS**4)*(P*H**4)
      ETA(4)=0.0
      DO 130 J=5, L2
      AUX=0.0
      AUX=J-4.
      ETA(J)=AUX/NS
130 CONTINUE
      DO 140 K2=4, L2
      J=K2+2
      AIND(J)=(360./(NS**5))*(A4*(1-ETA(K2))+A5)
140 CONTINUE
C
C=====
C
C ZERANDO A MATRIZ DO PAINEL-MP
C
C=====
C
```



```
J1=M+2
J2=M-3
J3=M-2
J4=M-1
J5=M
J6=M+1
J7=M+2
J8=M+3
G1(M)=A2-(0.5*(1-ETA(M)))
G2(M)=A3*(1-ETA(M))
R2=1./(NS**2)
R4=1./(NS**4)
G1A(M)=G1(M)*R2
G2A(M)=G2(M)*R4
R3=1./(NS**3)
MP(J1,J2)=(-180.*A1)+(45.*G1A(M))+(4.*R3)-(6.*G2A(M))
MP(J1,J3)=(720.*A1)-(360.*G1A(M))-(54.*R3)+(54.*G2A(M))
MP(J1,J4)=(-900.*A1)+(585.*G1A(M))+(540.*R3)-(270.*G2A(M))
MP(J1,J5)=-980.*R3
MP(J1,J6)=(900.*A1)-(585.*G1A(M))+(540.*R3)+(270.*G2A(M))
MP(J1,J7)=(-720.*A1)+(360.*G1A(M))-(54.*R3)-(54.*G2A(M))
MP(J1,J8)=(180.*A1)-(45.*G1A(M))+(4.*R3)+(6.*G2A(M))
```

160 CONTINUE

```
C
C=====
C
C COEFICIENTES DO TOPO
C
C=====
```

```
C
G1(L2)=A2-(0.5*(1-ETA(L2)))
G2(L2)=A3*(1-ETA(L2))
G1A(L2)=G1(L2)*R2
G2A(L2)=G2(L2)*R4
MP(NP,L6)=(180.*A1)-(45.*G1A(L2))+(4.*R3)+(6.*G2A(L2))
MP(NP,L5)=(-1440.*A1)+(360.*G1A(L2))-(24.*R3)-(48.*G2A(L2))
MP(NP,L4)=(4500.*A1)-(1305.*G1A(L2))+(30.*R3)+(180.*G2A(L2))
MP(NP,L3)=(-7200.*A1)+(2160.*G1A(L2))+(400.*R3)-(480.*G2A(L2))
MP(NP,L2)=(6300.*A1)-(1575.*G1A(L2))-(840.*R3)+(210.*G2A(L2))
MP(NP,L1)=(-2880.*A1)+(360.*G1A(L2))+(456.*R3)+(144.*G2A(L2))
MP(NP,NP)=(540.*A1)+(45.*G1A(L2))-(26.*R3)-(12.*G2A(L2))
```

```
C
C=====
C
C IMPRESSAO DA MATRIZ DO PORTICO
C
C=====
```

```
C
WRITE(6,170)
170 FORMAT(//,10X,'MATRIZ DO PORTICO',/,10X,17(' '),/)
DO 190 J=1,NP
DO 190 K=1,NP
WRITE(6,180)J,K,MP(J,K)
180 FORMAT(10X,'MP(',12,',',12,')= ',F19.5)
```

```
190 CONTINUE
C
C=====
C
C CALCULO DO DESLOCAMENTO
C
C=====
C
      WRITE(6,200)
200 FORMAT(//,10X,22('*'),/,10X,'*',20X,'*',/,10X,'* DESLOC. HORIZONTAL
      *L *',/,10X,'*',20X,'*',/,10X,22('*'),//)
C=====
C
C SUBROTINA SOLUC.- CALCULO DOS DESLOCAMENTOS
C
C=====
C
C   - (AIND)=[MP]* (F=U)
C
      CALL SOLUC(NP,MP,AIND)
C
C=====
C
C IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS-U
C
C=====
C
      DO 220 I=4,L2
      WRITE(6,210)I,AIND(I)
210 FORMAT(10X,'U(',I2,')= ',F15.8,/)
220 CONTINUE
      CLOSE(6)
      STOP
      END
```

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através dos resultados obtidos neste trabalho evidencia-se a eficiência da Técnica do Meio Contínuo na análise das estruturas de edifícios altos. Esta técnica descreve com uma boa aproximação o comportamento da estrutura, em função de um número reduzido de parâmetros. Nota-se também que a Técnica do Meio Contínuo é uma técnica de fácil aplicação, exigindo do pesquisador conhecimento básico das equações de equilíbrio e de compatibilidade de deslocamentos, permitindo em alguns casos um cálculo rápido, analítico, e de maneira geral, o emprego de métodos numéricos.

A consideração dos deslocamentos axiais dos pilares nas estruturas analisadas neste trabalho, através da Técnica do Meio Contínuo, não trás dificuldades apreciáveis de cálculo e permite uma análise mais precisa das mesmas. Além disso, observou-se a considerável influência, em um grande número de casos, dos deslocamentos axiais nas deflexões laterais dos painéis estudados.

O estudo do efeito de segunda ordem através da técnica utilizada, leva a equações diferenciais de difícil integração direta sendo necessário a utilização de processos aproximados que permitem um tratamento não muito complexo do problema.

O método numérico utilizado foi o Método das Diferenças Finitas, que conduz a um sistema de equações em cuja resolução é essencial o uso de computadores. Analisando os casos apresentados utilizando-se o Método das Diferenças Finitas, pode-se considerar que os resultados são satisfatórios.

Deve-se ressaltar uma contribuição deste trabalho está em oferecer subsídios para futuras pesquisas nesta área, como por exemplo analisar a estrutura considerando variação de rigidez da estrutura ao longo da altura.

Finalizando, acredita-se que o efeito da flexibilidade das fundações nos problemas analisados pode ser introduzido sem grandes dificuldades adicionais.

## A P Ê N D I C E A

### COEFICIENTE DE RIGIDEZ - $s_f$

Este apêndice tem por objetivo demonstrar o coeficiente de rigidez ( $s_f$ ), utilizado pela "Técnica do Meio Contínuo" e deduzido por diversos autores, tais como STAMATO [14], CARVALHO [5] e XAVIER [16].

Na figura A.1, representa-se um andar genérico, com três nós consecutivas A, B, C de viga e D, B, E de pilar. Supondo-se que os pórticos regulares, solicitados por cargas laterais e verticais, possuam os pontos de momentos nulos localizados aproximadamente nos centros dos vãos das vigas e dos pilares, tem-se, portanto, uma igualdade de rotações em todos os nós da viga de um mesmo andar, e dos nós consecutivos de um pilar.

Com a introdução de uma rotação  $\alpha$  no nó B e, conseqüentemente nos demais nós, os momentos que as barras aplicam no nó B, de acordo com a convenção de GRINTER (sentido horário positivo), são:

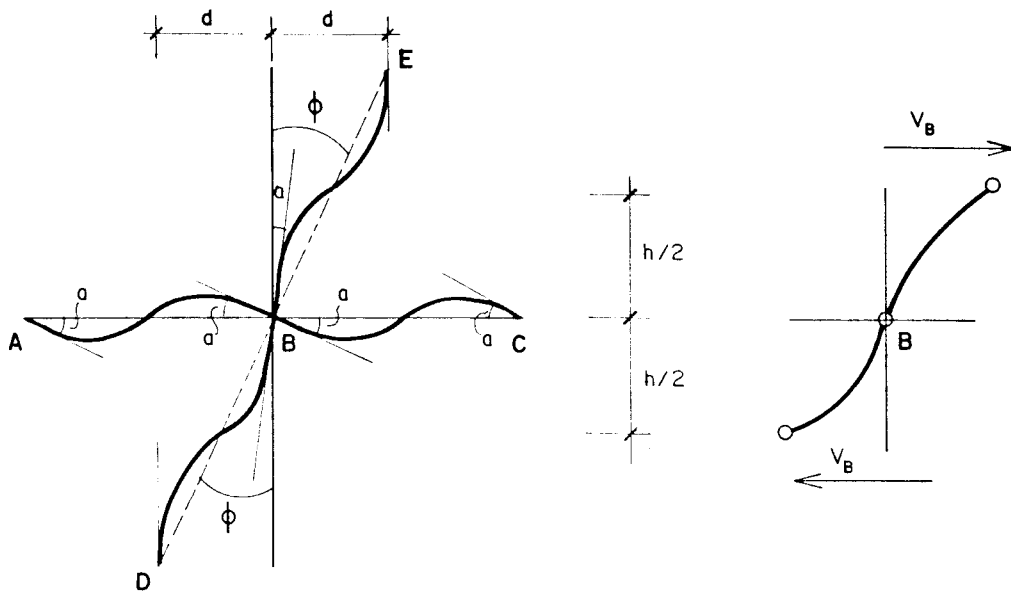


Fig. A.1 - Rigidez de pórticos

$$M_{BE} = 6Ek_{BE}(\phi - a)$$

$$M_{BD} = 6Ek_{BD}(\phi - a)$$

$$M_{BA} = -6Ek_{BA}(a)$$

$$M_{BC} = -6Ek_{BC}(a)$$

(A.1)

onde :

a - rotação do nó B

$\phi$  - giro de corda (distorção do andar -  $\phi = \frac{d}{h}$ )

k - rigidez  $I_i/\ell_i$  das barras (pilares ou vigas)

Fazendo-se o somatório dos momentos no nó B, que é nulo, tem-se:

$$a = \frac{k_{BE} + k_{BD}}{k_{BA} + k_{BC} + k_{BE} + k_{BD}} \phi \quad (A.2)$$



ou

$$a = \frac{\sum k}{\sum k} \cdot \frac{d}{h} \quad (\text{A.3})$$

onde:  $\sum$  - somatório nos pilares que concorrem ao nó B.  
 $p$   
 $\sum$  - somatório nas barras (pilares e vigas) que  
 $t$  concorrem ao nó B.

A força cortante no pilar B é dada por:

$$V_B = \frac{2M_{BE}}{h} \quad (\text{A.4})$$

Substituindo-se o valor de  $M_{BE}$  (equações A.1) na equação (A.4), obtém-se:

$$V_B = \frac{12E}{h} k_{BE} \frac{\sum k}{\sum k} \frac{v}{t} \phi \quad (\text{A.5})$$

onde

$\sum$  - somatório nas vigas que concorrem no nó B.  
 $v$

Comparando-se a equação (A.5) com a equação (2.10), STAMATO [13], conclui-se que:

$$s_B = \frac{12E}{h} k_{BE} \frac{\sum k}{\sum k} \frac{v}{t} \quad (\text{A.6})$$

onde  $s_B$  é a contribuição do pilar central B para a rigidez global.

Como a rigidez total do pórtico resulta da soma das contribuições dos pilares, ao nível do andar considerado, tem-se:

$$s_f = \frac{12E}{h} \sum_{n.a} \left[ \begin{array}{c} \Sigma k \\ k_{p.n} \frac{v.n}{\Sigma k} \\ t.n \end{array} \right] \quad (A.7)$$

onde:

$k$  - relação  $I/\ell$  do tramo de viga ou pilar considerado.

$\Sigma$  - somatório estendido a todos os nós do andar considerado.

$k_{p.n}$  - relação  $I/\ell$  do pilar acima do nó considerado.

$\Sigma$  - somatório estendido aos tramos de vigas que concorrem no nó.

$\Sigma$  - somatório estendido a todas as barras que concorrem no nó.

$E$  - módulo de elasticidade longitudinal do material.

A equação (A.7) é amplamente utilizada pela "Técnica do Meio Contínuo", pois fornece resultados bem próximos dos reais. Somente no topo e na base o coeficiente  $s_f$  apresenta uma maior diferença, devido à falta dos pilares acima dos nós do último andar (topo) e à presença do engastamento fixo na base.

## A P Ê N D I C E B

### MÉTODOS DAS DIFERENÇAS FINITAS

Nos últimos anos, métodos numéricos para solução de equações diferenciais têm-se tornado cada vez mais conhecidos, pois resolvem problemas técnicos dificilmente resolvidos analiticamente.

Para a solução das equações diferenciais obtidas na análise dos painéis, optou-se pelo emprego do método numérico denominado Método das Diferenças Finitas, que consiste basicamente em se obterem valores da função desconhecida  $(u(z))$  em alguns pontos, espaçados ao longo do eixo  $z$ . Estes valores são obtidos pela substituição da equação desconhecida  $(u(z))$  por um polinômio interpolador, onde as derivadas do polinômio são aproximadas às derivadas da função desconhecida.

As expressões das derivadas do polinômio para um ponto  $i$ , ponto médio da seqüência de pontos utilizados na interpolação (fig. B.1 e fig. B.2), são denominadas diferenças finitas centrais ou simétricas, enquanto que as expressões para os outros pontos recebem o nome de diferen-

ças finitas assimétricas à direita ou diferenças finitas assimétricas à esquerda, dependendo da posição do ponto de aplicação, à direita ou à esquerda do ponto central  $i$ .

De acordo com SALVADORI e BARON [10], o método apresenta erros de aproximação, que são menores quando se utilizam as diferenças finitas simétricas e quanto menor for o espaçamento entre os pontos. Desta maneira, utilizam-se para todos os pontos do painel as diferenças finitas centrais com exceção do topo onde são usadas as diferenças finitas assimétricas à direita.

Neste apêndice, desenvolvem-se expressões para soluções de equações diferenciais de terceira e quinta ordem.

#### B.1 - Aplicação das diferenças finitas à solução de equações diferenciais de 3ª ordem.

Para a aplicação do Método das Diferenças Finitas, utiliza-se polinômio interpolador de grau ( $r$ ) igual ou superior à ordem da equação diferencial. Com a finalidade de se obterem operadores com número simétrico de pontos (fig. B.1), optou-se pela utilização do polinômio interpolador de quarto grau.

Seja, portanto, o polinômio interpolador de quarto grau.

$$p(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E \quad (\text{B.1})$$

onde os valores da seqüência de pontos utilizados na interpolação ( $-2h, -h, 0, h, 2h$ ) devem coincidir com os valores da função desconhecida  $u(z)$ , isto é:

$$p(-2h) = u(-2h) = U_{ee}$$

$$p(-h) = u(-h) = U_e$$

(B.2)

$$p(0) = u(0) = U_i$$

$$p(h) = u(h) = U_d$$

$$p(2h) = u(2h) = U_{dd}$$

(B.2)

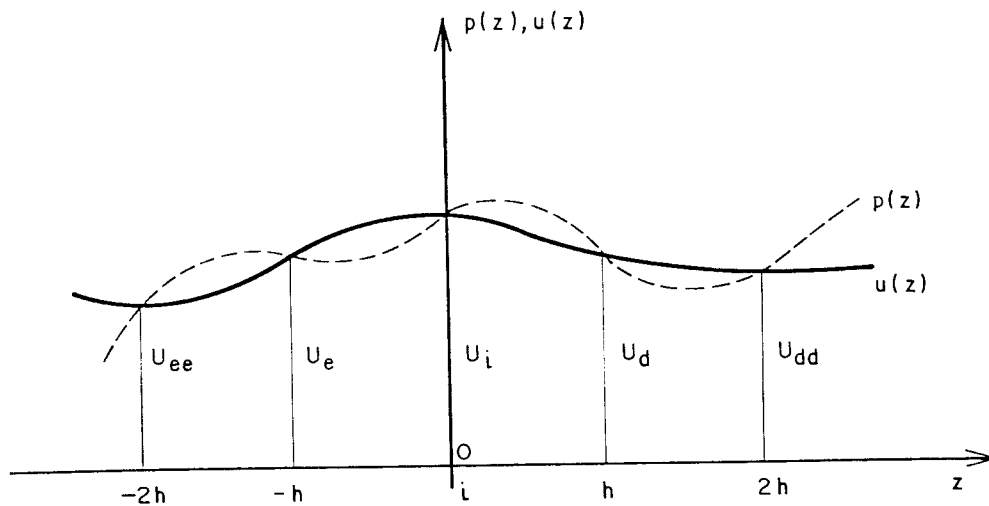


Fig. B.1 - Valores da função

Aplicando-se os cinco pontos de interpolação na equação do polinômio (equação (B.1)), obtêm-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} p(-2h) = (-2h)^4 A + (-2h)^3 B + (-2h)^2 C + (-2h) D + E = U_{ee} \\ p(-h) = (-h)^4 A + (-h)^3 B + (-h)^2 C + (-h) D + E = U_e \\ p(0) = (0)^4 A + (0)^3 B + (0)^2 C + (0) D + E = U_i \\ p(h) = (h)^4 A + (h)^3 B + (h)^2 C + (h) D + E = U_d \\ p(2h) = (2h)^4 A + (2h)^3 B + (2h)^2 C + (2h) D + E = U_{dd} \end{array} \right.$$

(B.3)

Colocando-se na forma matricial, têm-se:

$$\begin{bmatrix} (-2h)^4 & (-2h)^3 & (-2h)^2 & (-2h) & 1 \\ (-h)^4 & (-h)^3 & (-h)^2 & (-h) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ h^4 & h^3 & h^2 & h & 1 \\ (2h)^4 & (2h)^3 & (2h)^2 & 2h & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{ee} \\ U_e \\ U_i \\ U_d \\ U_{dd} \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-se o sistema acima (equações (B.3)), obtêm-se os coeficientes do polinômio em função de  $U_{ee}$ ,  $U_e$ ,  $U_i$ ,  $U_d$ ,  $U_{dd}$ , dados por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{24h^4} \left[ U_{ee} - 4U_e + 6U_i - 4U_d + U_{dd} \right] \\ B &= \frac{1}{12h^3} \left[ -U_{ee} + 2U_e - 2U_d + U_{dd} \right] \\ C &= \frac{1}{24h^2} \left[ -U_{ee} + 16U_e - 30U_i + 16U_d - U_{dd} \right] \\ D &= \frac{1}{12h} \left[ U_{ee} - 8U_e + 8U_d - U_{dd} \right] \\ E &= U_i \end{aligned} \tag{B.4}$$

As derivadas do polinômio interpolador são dadas por:

$$\begin{aligned} p'(z) = u'(z) &= 4Az^3 + 3Bz^2 + 2Cz + D \\ p''(z) = u''(z) &= 12Az^2 + 6Bz + 2C \\ p'''(z) = u'''(z) &= 24Az + 6B \end{aligned} \tag{B.5}$$

Para a obtenção das derivadas da função desconhecida no ponto central  $i$  e no ponto assimétrico à direita, substituem-se nas equações (B.5) os pontos  $z = 0$  e  $z = h$  respectivamente:

- Diferenças finitas centrais:

$$\begin{aligned} p'(0) &= u'(i) = D \\ p''(0) &= u''(i) = 2C \\ p'''(0) &= u'''(i) = 6B \end{aligned} \tag{B.6}$$

e

- Diferenças finitas assimétricas à direita:

$$\begin{aligned} p'(h) &= u'(d) = 4Ah^3 + 3Bh^2 + 2Ch + D \\ p''(h) &= u''(d) = 12Ah^2 + 6Bh + 2C \\ p'''(h) &= u'''(d) = 24Ah + 6B \end{aligned} \tag{B.7}$$

Substituindo-se, finalmente, os valores de  $A, B, C, D, E$  das equações (B.4), nas equações (B.6) e (B.7), obtêm-se:

- Diferenças finitas centrais (ponto  $i$ ):

$$\begin{aligned} u'(i) &= \frac{1}{12h} \left[ U_{ee} - 8U_e + 8U_d - U_{dd} \right] \\ u''(i) &= \frac{1}{12h^2} \left[ -U_{ee} + 16U_e - 30U_i + 16U_d - U_{dd} \right] \\ u'''(i) &= \frac{1}{2h^3} \left[ -U_{ee} + 2U_e - 2U_d + U_{dd} \right] \end{aligned} \tag{B.8}$$

e

- Diferenças finitas assimétricas à direita (ponto h):

$$\begin{aligned} u'(d) &= \frac{1}{12h} \left[ -U_{ee} + 6U_e - 18U_i + 10U_d + 3U_{dd} \right] \\ u''(d) &= \frac{1}{12h^2} \left[ -U_{ee} + 4U_e + 6U_i - 20U_d + 11U_{dd} \right] \\ u'''(d) &= \frac{1}{2h^3} \left[ U_{ee} - 6U_e + 12U_i - 10U_d + 3U_{dd} \right] \end{aligned} \quad (B.9)$$

As equações (B.8) e (B.9) foram aqui utilizadas na solução das equações diferenciais, obtidas da análise dos pórticos, considerando a influência dos deslocamentos axiais dos pilares e o efeito de 2ª ordem.

B.2 - Aplicação das diferenças finitas à solução de equações diferenciais de 5ª ordem.

Analogamente ao item anterior, utiliza-se um polinômio interpolador de 6º grau (onde  $r \geq$  à ordem da equação diferencial), dado por:

$$p(z) = Az^6 + Bz^5 + Cz^4 + Dz^3 + Ez^2 + Fz + G \quad (B.10)$$

cujas derivadas são aproximadas às derivadas da função desconhecidas  $u(z)$  (fig. B.2).

Sabendo-se que o polinômio  $p(z)$  deve passar pelos pontos de interpolação  $(-3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h)$ , que por sua vez coincidem com os valores da função desconhecida  $u(z)$ , têm-se:

$$\begin{aligned} p(-3h) &= u(-3h) = U_{eee} \\ p(-2h) &= u(-2h) = U_{ee} \\ p(-h) &= u(-h) = U_e \end{aligned} \quad (B.11)$$



$$p(0) = u(0) = U_i$$

$$p(h) = u(h) = U_d$$

$$p(2h) = u(2h) = U_{dd}$$

$$p(3h) = u(3h) = U_{ddd}$$

(B.11)

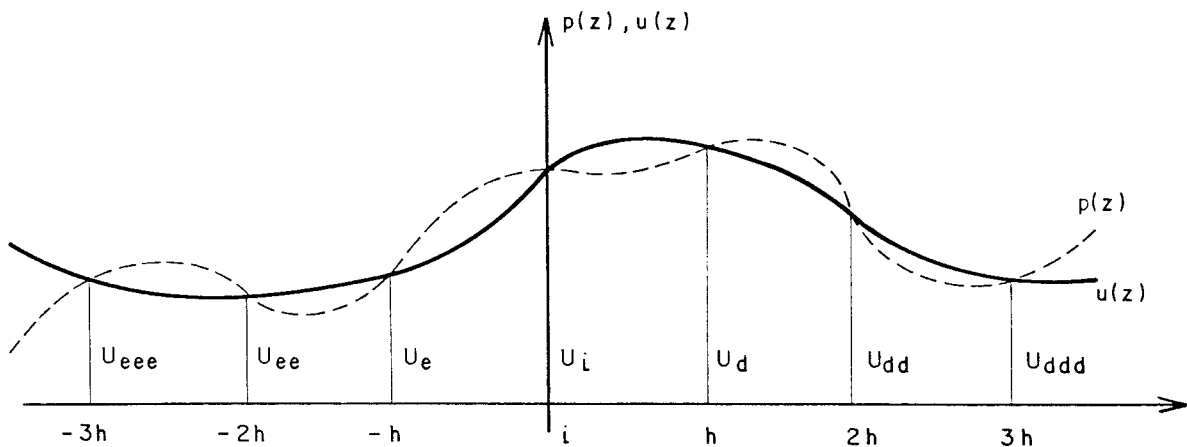


Fig. B.2 - Valores da função

Substituindo-se os pontos de interpolação no polinômio interpolador, equação (B.10), resulta:

$$\begin{bmatrix} (-3h)^6 & (-3h)^5 & (-3h)^4 & (-3h)^3 & (-3h)^2 & (-3h) & 1 \\ (-2h)^6 & (-2h)^5 & (-2h)^4 & (-2h)^3 & (-2h)^2 & (-2h) & 1 \\ (-h)^6 & (-h)^5 & (-h)^4 & (-h)^3 & (-h)^2 & (-h) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (h)^6 & (h)^5 & (h)^4 & (h)^3 & (h)^2 & (h) & 1 \\ (2h)^6 & (2h)^5 & (2h)^4 & (2h)^3 & (2h)^2 & (2h) & 1 \\ (3h)^6 & (3h)^5 & (3h)^4 & (3h)^3 & (3h)^2 & (3h) & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{eee} \\ U_{ee} \\ U_e \\ U_i \\ U_d \\ U_{dd} \\ U_{ddd} \end{Bmatrix}$$

(B.12)

Resolvendo-se este sistema, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{720h^6} \left[ U_{eee} - 6U_{ee} + 15U_e - 20U_i + 15U_d - 6U_{dd} + U_{ddd} \right] \\
 B &= \frac{1}{240h^5} \left[ -U_{eee} + 4U_{ee} - 5U_e + 5U_d - 4U_{dd} + U_{ddd} \right] \\
 C &= \frac{1}{720h^4} \left[ -5U_{eee} + 60U_{ee} - 195U_e + 280U_i - 195U_d + 60U_{dd} - 5U_{ddd} \right] \\
 D &= \frac{1}{240h^3} \left[ 5U_{eee} - 40U_{ee} + 65U_e - 65U_d + 40U_{dd} - 5U_{ddd} \right] \\
 E &= \frac{1}{720h^2} \left[ 4U_{eee} - 54U_{ee} + 540U_e - 980U_i + 540U_d - 54U_{dd} + 4U_{ddd} \right] \\
 F &= \frac{1}{240h} \left[ -4U_{eee} + 36U_{ee} - 180U_e + 180U_d - 36U_{dd} + 4U_{ddd} \right] \\
 G &= F_i
 \end{aligned}
 \tag{B.13}$$

Como a função  $u(z)$  é aproximada pelo polinômio interpolador  $p(z)$  no intervalo  $(-3h, 3h)$ , as expressões de primeira, segunda, terceira, quarta e quinta derivadas de  $u(z)$  nos pontos  $z = 0$  (ponto central) e  $z = h$  (ponto assimétrico à direita) são:

- Diferenças finitas centrais:

$$\begin{aligned}
 p'(0) &= u'(i) = F \\
 p''(0) &= u''(i) = 2E \\
 p'''(0) &= u'''(i) = 6D \\
 p^{IV}(0) &= u^{IV}(i) = 24C \\
 p^V(0) &= u^V(i) = 120B
 \end{aligned}
 \tag{B.14}$$

e

- Diferenças finitas assimétricas à direita:

$$\begin{aligned}p'(h) &= u'(d) = 6Ah^5 + 5Bh^4 + 4Ch^3 + 3Dh^2 + 2Eh + F \\p''(h) &= u''(d) = 30Ah^4 + 20Bh^3 + 12Ch^2 + 6Dh + 2E \\p'''(h) &= u'''(d) = 120Ah^3 + 60Bh^2 + 24Ch + 6D \quad (B.15) \\p^{IV}(h) &= u^{IV}(d) = 360Ah^2 + 120Bh + 24C \\p^V(h) &= u^V(d) = 720Ah + 120B\end{aligned}$$

Finalmente, levando-se os valores de A, B, C, D, E, F e G (equações (B.13)) nas equações (B.14) e (B.15), obtêm-se:

- Diferenças finitas centrais (ponto i):

$$\begin{aligned}u'(i) &= \frac{1}{240h} \left[ -4U_{eee} + 36U_{ee} - 180U_e + 180U_d - 36U_{dd} + 4U_{ddd} \right] \\u''(i) &= \frac{1}{360h^2} \left[ 4U_{eee} - 54U_{ee} + 540U_e - 980U_i + 540U_d - 54U_{dd} + 4U_{ddd} \right] \\u'''(i) &= \frac{1}{40h^3} \left[ 5U_{eee} - 40U_{ee} + 65U_e - 65U_d + 40U_{dd} - 5U_{ddd} \right] \\u^{IV}(i) &= \frac{1}{30h^4} \left[ -5U_{eee} + 60U_{ee} - 195U_e + 280U_i - 195U_d + 60U_{dd} - 5U_{ddd} \right] \\u^V(i) &= \frac{1}{2h^5} \left[ -U_{eee} + 4U_{ee} - 5U_e + 5U_d - 4U_{dd} + U_{ddd} \right] \quad (B.16)\end{aligned}$$

e

- Diferenças finitas assimétricas à direita (ponto h):

$$\begin{aligned}
 u'(d) &= \frac{1}{360h} \left[ 6U_{eee} - 48U_{ee} + 180U_e - 480U_i + 210U_d + 144U_{dd} - 12U_{ddd} \right] \\
 u''(d) &= \frac{1}{360h^2} \left[ 4U_{eee} - 24U_{ee} + 30U_e + 400U_i - 840U_d + 456U_{dd} - 26U_{ddd} \right] \\
 u'''(d) &= \frac{1}{360h^3} \left[ -45U_{eee} + 360U_{ee} - 1305U_e + 2160U_i - 1575U_d + 360U_{dd} + 45U_{ddd} \right] \\
 u^{IV}(d) &= \frac{1}{360h^4} \left[ -60U_{eee} + 360U_{ee} - 540U_e - 240U_i + 1260U_d - 1080U_{dd} + 300U_{ddd} \right] \\
 u^V(d) &= \frac{1}{360h^5} \left[ 180U_{eee} - 1440U_{ee} + 4500U_e - 7200U_i + 6300U_d - 2880U_{dd} + 540U_{ddd} \right]
 \end{aligned}
 \tag{B.17}$$

Utilizaram-se as equações (B.16) e (B.17), na resolução das equações diferenciais obtidas da análise do gainel garede e pórtico associados por barras biarticula-das considerando-se a influência dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico e o efeito de 2ª ordem.

6. BIBLIOGRAFIA

- 1 - BARBOSA, J.A. Edifício com paredes de secção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral. São Carlos, EESC-USP, 1977. 330 p. (Dissertação de mestrado).
- 2 - BATHAUS FILHO, M. Painéis de contraventamento. São Carlos, EESC-USP. (Trabalho de especialização).
- 3 - BRONSON, R. Moderna introdução às equações diferenciais. Tradução de Alfredo Alves de Farias. São Paulo, Mc Graw-Hill do Brasil 1977. (Coleção Schaum).
- 4 - CARVALHO, F. Anastácio C. Instabilidade de edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis. São Carlos, EESC-USP, 1980. 142 p. (Dissertação de mestrado).
- 5 - CARVALHO, Flávio A.C. Efeitos de cargas verticais em estruturas de edifícios altos. São Carlos, EESC-USP, 1982. 145 p. (Dissertação de mestrado).
- 6 - FERREIRA, L.F.O. Associação plana de pórtico com pilares paredes. São Carlos, EESC-USP, 1975. 203 p. (Dissertação de mestrado).

- 7 - MANCINI, E. Análise contínua de estruturas de edifícios elevados sujeitos à ação do vento. São Carlos, EESC-USP, 1973. 140 p. (Tese de doutoramento).
- 8 - MANCINI, E. Aplicações da técnica do meio contínuo ao cálculo de estruturas de edifícios altos. São Carlos, EESC-USP, 1986.
- 9 - MANCINI, E. Associação contínua tridimensional de pórticos e paredes com engastamento elásticos. São Carlos, EESC-USP, 1972. 105 p. (Dissertação de mestrado).
- 10 - SALVADORI, M.G. & BARON, M.L. Métodos numéricos aplicados à engenharia. Tradução de Harry Farrer. Belo Horizonte, Escola de Engenharia da Universidade de Minas Gerais, 1956.
- 11 - SCHIEL, F. Introdução a resistência dos materiais. São Paulo, Haper & Row do Brasil, 1984. 395 p.
- 12 - SORIANO, H.L. Sistema de equações algébricas lineares em problemas estruturais. Lisboa, LNEC, 1981. 400 p. (Seminário 280).
- 13 - STAMATO, M.C. Associação contínua de painéis de contraventamento. São Carlos, EESC-USP, 1971. 72 p.
- 14 - STAMATO, M.C. Distribuição das cargas do vento entre os painéis de contraventamento. São Carlos, EESC-USP, 1978. 29 p. (Publ. nº 045/88).
- 15 - STAMATO, M.C. Estado atual da análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos. São Carlos, EESC-USP, 1972. 26 p. (Publ. nº 163).
- 16 - XAVIER, Maria Angela P. Análise de efeitos de segunda ordem em estruturas de edifícios altos pela técnica do meio contínuo. São Carlos, EESC-USP, 1986. 317 p. (Dissertação de mestrado).